

50376
1983
245

50376
1983
245

N° d'ordre: 327

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

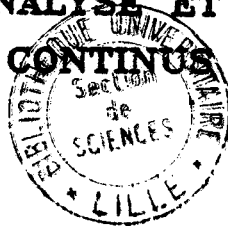
DOCTEUR INGENIEUR

par

Frédéric ROTELLA

Ingénieur IDN

**DETERMINATION DE NOUVELLES
REPRESENTATIONS D'ETAT
ADAPTEES A L'ANALYSE ET A LA SYNTHESE
DES SYSTEMES CONTINUS NON LINEAIRES**



Soutenue le 13 Juillet 1983 devant le Jury d'examen

MM.	G. SEGUIER	Président
	F. LAURENT	Rapporteur
	J. P. RICHARD	Rapporteur
	P. BORNE	Examineur
	J. C. GENTINA	Examineur
	G. JACOB	Examineur
	J. J. MARQUIS	Invité

A mes parents

AVANT PROPOS

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire de Systématique de l'UER d'IEEA de l'Université des Sciences et Techniques de Lille I.

Nous tenons tout d'abord à remercier très vivement Monsieur le Professeur SEGUIER, Directeur de l'UER d'IEEA de l'Université de Lille I, pour le grand honneur qu'il nous a fait en acceptant de présider notre jury de thèse. Qu'il trouve ici le témoignage de notre respectueuse gratitude et de notre profond dévouement.

Nous sommes particulièrement reconnaissant envers Monsieur le Professeur LAURENT, Directeur du Laboratoire de Systématique, pour l'enseignement qu'il nous a tout d'abord dispensé puis pour l'accueil qu'il nous a réservé au sein de son équipe. Il a su par ses conseils éclairés et sa grande expérience nous initier à la recherche tout en nous honorant de son amitié.

C'est avec empressement que nous remercions également Monsieur J.P. RICHARD, Docteur Ingénieur, qui, à tout moments, par la haute compétence et le sérieux qui le caractérisent, nous a guidé durant la réalisation de ce mémoire. Nous lui sommes reconnaissant de nous avoir toujours témoigné une confiance et une amitié sans faille.

Monsieur le Professeur BORNE nous a toujours apporté son soutien et en particulier en acceptant de participer à notre jury de thèse. Il nous est agréable de l'en remercier ainsi que du climat amical et détendu qu'il contribue à entretenir au sein du Laboratoire de Systématique.

Que Monsieur le Professeur GENTINA, Directeur de l'Institut Industriel du Nord, reçoive ici nos sincères remerciements pour avoir accepté de juger notre travail en participant à notre jury de thèse.

Nous sommes grandement honoré de l'intérêt que Monsieur le Professeur JACOB a bien voulu porter à nos travaux. Nous tenons à lui témoigner notre profonde gratitude et à le remercier pour sa participation à notre jury.

Nous sommes très flatté de la présence à notre jury de thèse de Monsieur J.J. MARQUIS, Directeur technique de la société CREADIQUE, nous l'en remercions vivement.

Qu'il nous soit permis de remercier ici notre collègue et amie Madame Irène ZAMBETTAKIS, chercheur au Laboratoire de Systématique, qui a su être en toutes circonstances une interlocutrice intéressée à l'esprit critique exercé. Les échanges que nous avons eu concernant nos travaux respectifs se sont avérés particulièrement profitables.

Nous tenons aussi à rendre hommage à tous les chercheurs du Laboratoire de Systématique pour l'aide précieuse qu'ils nous ont apporté tant sur le plan scientifique que sur le plan humain.

Nous ne saurions terminer cet avant-propos sans remercier Madame Françoise TAILLY, ainsi que Madame FERRAR et Monsieur SOYEZ, qui se sont chargés de la présentation matérielle de ce rapport de thèse.

INTRODUCTION GÉNÉRALE.

L'étude des systèmes continus non linéaires est souvent menée à partir d'une modélisation matricielle dans l'espace d'état. De nombreux critères relatifs à la stabilité ont été proposés, en association avec une représentation sur une base particulière. Le choix du vecteur état apparaît en effet comme fondamental quand à la qualité des résultats obtenus.

Les résultats usuels sont dans la plupart des cas d'autant moins restrictifs que la matrice comporte plus de zéros. Cette constatation justifie la forme dite en flèche mince [22, 24]. Toutefois, il n'est pas toujours possible de s'y ramener. C'est dans cet esprit qu'a été envisagée une généralisation de cette représentation en introduisant la notion de flèche épaisse [25], adaptée aux systèmes de grande dimension. Nous proposons, dans ce mémoire, de déterminer et d'utiliser des représentations de ce type pour certaines classes de systèmes.

Les travaux que nous présentons font appel à la notion de polynôme symbolique [1], invariant de représentation indépendant de la base choisie. Ses propriétés sont rappelées et généralisées dans la première partie de cette étude.

Le deuxième chapitre est alors consacré à la détermination analytique des formes proposées. L'application de ces résultats à l'étude de stabilité des systèmes monovariabiles de type Lure' Postnikov est menée dans un dernier volet.

CHAPITRE I

MÉTHODE DE MODÉLISATION DES SYSTÈMES

INTRODUCTION

Cette première partie définit la classe des systèmes étudiés et propose différentes représentations admissibles dans l'espace d'état.

Une première étude est menée en vue de la représentation d'une large classe de processus en régime autonome. Diverses formes matricielles canoniques sont alors rappelées.

Dans un deuxième temps, les mêmes processus sont étudiés en régime forcé. Une méthode simple de mise en équation est proposée, basée sur le fait que la forme de ces systèmes induit leurs représentation en régime forcé.

La notion de polynôme symbolique matriciel est alors introduite, elle permet d'envisager l'étude de systèmes complexes à l'aide de représentations utilisant un vecteur état redondant. Dans le cas particulier de systèmes à une seule non-linéarité ce polynôme correspond à un invariant de représentation, utilisé dans des travaux antérieurs [1].

I - CLASSE DES SYSTÈMES ÉTUDIÉS.

I.1 - Généralités.

L'étude proposée concerne la représentation dans l'espace d'état de processus dynamiques continus déterministes et non anticipatifs [2]. Leur évolution dans l'intervalle de temps T , $T = [t_0, +\infty[$, est décrite à partir de deux types de variables :

- un ensemble $e(t)$ de grandeurs d'entrée

$$e(t) : T \rightarrow E \subset \mathbb{R}^m$$

- un ensemble $s(t)$ de grandeurs de sortie

$$s(t) : T \rightarrow S \subset \mathbb{R}^n.$$

Cependant, à partir du modèle mathématique du système, la détermination d'une sortie $s(t)$ en réponse à une entrée $e(t)$, dont la variation est connue sur T , nécessite la connaissance d'un nombre minimum q de variables à l'instant t_0 .

Ces variables sont regroupées sous la forme d'un vecteur état x dont la dimension (q) détermine l'ordre de la représentation adoptée pour le processus.

On introduit alors une modélisation du système à l'aide d'une équation vectorielle d'état dont la forme générale [3] est :

$$(I - 1) \quad \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A(x, e(t), t) x(t) + B(x, e(t), t) e(t) \\ s(t) = C(x, e(t), t) x(t) + D(x, e(t), t) e(t) \end{cases}$$

où $\forall t \in T$

$x(t)$, vecteur état, $x(t) \in X \subset \mathbb{R}^q$

$e(t) \in E$, $s(t) \in S$

$A(x, e(t), t) \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $B(x, e(t), t) \in \mathbb{R}^{q \times m}$

$C(x, e(t), t) \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $D(x, e(t), t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$

Dans tout ce qui suit les matrices non constantes A , B , C et D seront appelées respectivement les matrices d'évolution, de commande, d'observation et de transmission directe et la dérivée $\frac{dx(t)}{dt}$ sera notée $\dot{x}(t)$.

Lorsque les matrices ne dépendent explicitement que du temps, le système est linéaire. Dans le cas où celles-ci ne dépendent explicitement que de l'état x et de l'entrée e , le système est alors stationnaire. Lorsque ces deux dernières conditions sont vérifiées les matrices A , B , C , D sont des matrices constantes : le système est linéaire stationnaire. Dans le cas le plus général le système est dit non linéaire [4].

Dans l'hypothèse où l'entrée $e(t)$ est identiquement nulle, le modèle est dit en régime libre et, dans le cas contraire en régime forcé ou dynamique.

L'ensemble des X_e des points d'équilibres des systèmes représentés par (I - 1), sont définis, en régime libre, par [5] :

$$X_e = \{x_e \in \mathbb{R}^q, A(x_e, 0, t) x_e = 0, \forall t \in T\}$$

La représentation (I-1) d'un système donné n'est pas unique : en effet, le choix d'un nouvel état $y(t)$ défini à partir de $x(t)$ peut conduire à une nouvelle représentation d'état. L'étude du système à l'aide de cette nouvelle modélisation peut être notablement simplifiée [6, 7].

Considérons, par exemple le changement de vecteur état (I-2) défini par une matrice P constante, régulière

$$(I-2) \quad y(t) = P \quad x(t)$$

Il vient de (I-2), la nouvelle représentation d'état :

$$(I-3) \quad \begin{cases} \dot{y} = P A(p^{-1}y, e(t), t) P^{-1}y(t) + P B(p^{-1}y, e(t), t) e(t) \\ s = C(P^{-1}y, e(t), t) P^{-1}y(t) + D(P^{-1}y, e(t), t) e(t) \end{cases}$$

Cette relation est encore du type (I-1), mais fait intervenir des matrices d'évolution, de commande et d'observation différentes. On a alors (I-4).

$$(I-4) \quad \begin{cases} \dot{y} = A'(y, e(t), t) y(t) + B'(y, e(t), t) e(t) \\ s = C'(y, e(t), t) y(t) + D'(y, e(t), t) e(t) \end{cases}$$

Toute combinaison linéaire non identiquement nulle des composantes de $x(t)$ est donc une variable d'état.

L'étude des propriétés des équilibres des systèmes étant menée à partir des représentations en régime libre, la forme de la matrice d'évolution conditionne les résultats [8, 9]. Le choix de la représentation en régime libre, A ou A' dans l'exemple précédent, est donc prépondérant suivant le type de problème à traiter.

C'est ce point de vue que nous développerons par la suite, sans nous préoccuper de l'équation déterminant la sortie du système.

Un exemple de processus permettant de telles modélisations est fourni par les systèmes de type Lure' Postnikov [10]. Ceux-ci sont décrits par la relation (I-5) à l'intérieur d'un domaine ne comportant qu'un seul point d'équilibre.

$$(I-5) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t) x(t) + B(t) \gamma(t, x, \sigma) \\ \sigma = e(t) + C(t, x) x(t) \end{cases}$$

avec $\forall t \in T$

$$x(t) \in X, e(t) \in \mathbb{R}^n, \sigma(t) \in \Sigma$$

$$A(t) \in \mathbb{R}^{q \times q}, B(t) \in \mathbb{R}^{q \times n}, C(t, x) \in \mathbb{R}^{n \times q}$$

où

$$\Sigma \subset \mathbb{R}^n, \text{ voisinage du point d'équilibre en } \sigma,$$

$$X \subset \mathbb{R}^n, \text{ voisinage du point d'équilibre en } x,$$

$$\gamma^T(t, x, \sigma) = \{ \dots, \gamma_i(t, x_i, \sigma_i), \dots \}.$$

On suppose dans ce cas l'existence d'une matrice diagonale bornée $\gamma^*(t, x, \sigma)$ définie par :

$$\gamma^*(t, x, \sigma) \in [\underline{L}, \bar{L}] \subset \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\gamma^*(t, x, \sigma) = \text{diag} \left\{ \frac{\gamma_i(t, x_i, \sigma_i)}{\sigma_i} \right\}$$

(I-5) conduit alors à (I-6).

$$(I-6) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= [A(t) + B(t) \gamma^*(t, x, \sigma) C(t, x)] x(t) \\ &+ B(t) \gamma^*(t, x, \sigma) e(t) \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, nous rencontrerons de tels systèmes, pour lesquels nous supposons de plus que les matrices A et C sont constantes : ce type de processus est non linéaire par rapport au vecteur σ qui est alors un ensemble de composantes

d'état. Nous dirons donc que σ représente l'ensemble des variables d'état traitées non linéairement.

I.2 - Structure des processus étudiés.

I.2.1 - Modélisation.

Nous considérerons dorénavant les processus dont la modélisation dans l'espace d'état peut se mettre sous la forme particulière (I-7)

$$(I-7) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + KV(x,t) \varepsilon(t) \\ \varepsilon(t) = e(t) + H^T x(t) \end{cases}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 \text{ matrice à coefficients constants de } \mathbb{R}^{q \times q} \\ \forall t \in T, x(t) \in \mathbb{R}^q, \varepsilon(t) \in \mathbb{R}^n, e(t) \in \mathbb{R}^n \\ \forall (x, t) \in \mathbb{R}^q \times T, V(x, t) \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ H \in \mathbb{R}^{q \times n}, \text{ matrice à coefficients constants} \\ K \in \mathbb{R}^{q \times m}, \text{ matrice à coefficients constants.} \end{array} \right.$$

Ces relations conduisent au schéma bloc représentatif de ce processus [11] (figure 1). Dans ce schéma, comme dans tout ce qui suit, nous adoptons comme convention de représenter les vecteurs par (\Rightarrow) et les scalaires par (\rightarrow).

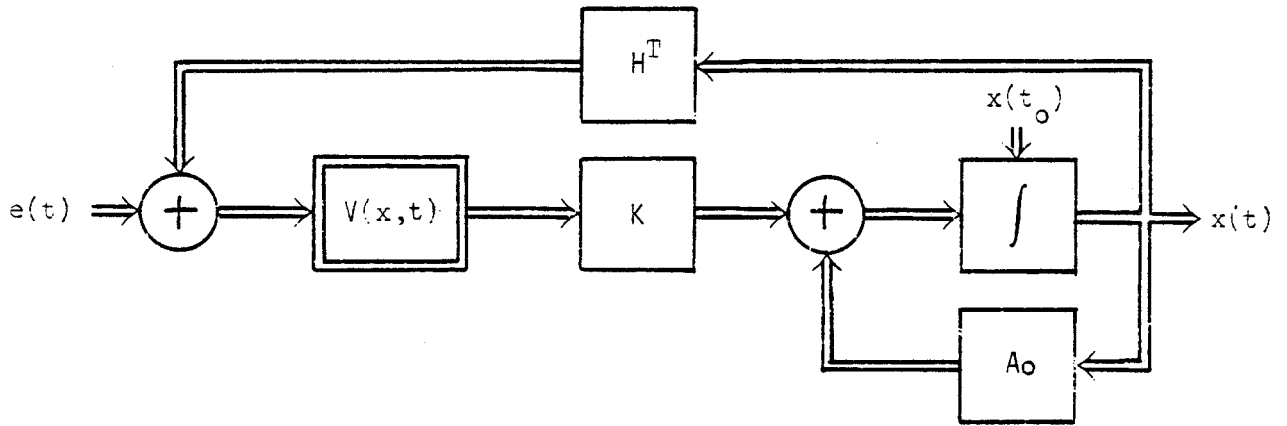


Figure 1.

En posant,

$$(I-8) \quad A(x,t) = A_0 + KV(x,t)H^T$$

il vient :

$$\dot{x}(t) = A(x,t) x(t) + KV(x,t) e(t)$$

$A(x,t)$ est donc une matrice d'évolution du système en régime libre.

Dans le cas particulier, où la matrice à termes non constants $V(x,t)$ est diagonale, les systèmes présentés appartiennent à la classe des systèmes Lure' Postnikov.

Avant de poursuivre notre étude, il convient de distinguer divers types dans les représentations proposées, généralisant ainsi des travaux antérieurs [1, 12].

I.2.2 - Définition de deux types de représentation.

Considérons le système (I-7) en régime libre, la matrice d'évolution $A(x,t)$ s'écrit sous la forme (I-8).

Cette matrice peut présenter des coefficients non constants sur toutes ses rangées.

Une terminologie, introduite dans [12], distingue comme cas particulier les matrices dont les termes non constants peuvent être regroupés sur une seule rangée. Les systèmes de ce type sont alors dits "à non-linéarités de rang 1", de type I si une seule ligne est non constante, de type II si une seule colonne est non constante.

Nous proposons d'élargir cette étude au cas de matrices présentant p lignes ou p colonnes non constantes.

A cette fin il est possible d'écrire la même expression (I-8) sous deux formes différentes qui généralisent les définitions données dans [12].

a) TYPE I.

Soit $K = [k_1, \dots, k_m]$, $HV^T(x, t) = [v_1^T(x, t), \dots, v_m^T(x, t)]$
avec $\forall i \in \{1, \dots, m\} v_i^T(x, t) \in \mathbb{R}^q$.

Il vient :

$$(I-9) \quad A(x, t) = A_0 + \sum_{i=1}^m k_i v_i^T(x, t)$$

Cette modélisation correspond au schéma-bloc figure 2 où les entrées des blocs non linéaires sont des vecteurs et les sorties des scalaires. Nous dirons alors que la représentation est de type I.

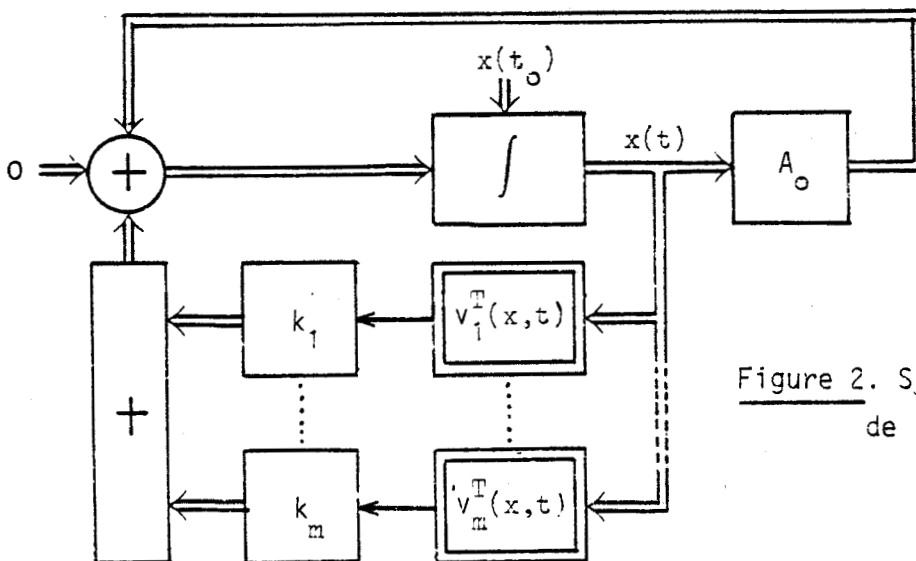


Figure 2. Systèmes de type I.

b) TYPE II.

Soit $H = [h_1, \dots, h_n]$, $KV(x,t) = [v_1'(x,t), \dots, v_n'(x,t)]$ avec $\forall i \in \{1, \dots, n\} v_i'(x,t) \in \mathbb{R}^d$.

Il vient :

$$(I-10) \quad A(x,t) = A_0 + \sum_{i=1}^n v_i'(x,t) h_i^T$$

Cette écriture conduit au schéma-bloc figure 3 où les sorties des blocs non linéaires sont des vecteurs et les entrées des scalaires. Nous dirons alors que la représentation est de type II.

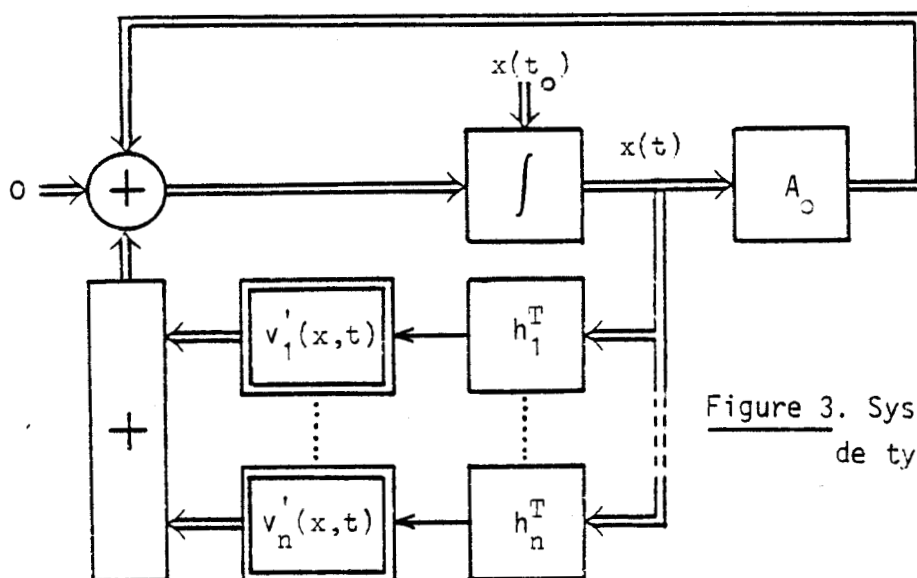


Figure 3. Systèmes de type II

Remarque.

Réciproquement, les considérations précédentes permettent de regrouper l'étude de deux classes de représentation: celles données sous les formes (I-9) et (I-10).

En effet, pour un système donné, il peut être plus pratique d'utiliser une des deux représentations plutôt que l'autre [13].

I.2.3 - Définition des systèmes à non-linéarités de rang p.

De plus, nous montrerons par la suite que l'introduction de la notion de rang de non-linéarités [1] permet d'obtenir une représentation avec un nombre minimum de lignes ou de colonnes non constantes pour la matrice d'évolution.

Définition : Un système de type I (resp. II) de matrice d'évolution (I-9) (resp. I-10) est à non-linéarités de rang p si

$$\text{rg}(k_1, \dots, k_m) = p \quad (\text{resp. } \text{rg}(h_1, \dots, h_n) = p)$$

De cette définition il découle qu'une représentation telle que (I-7) peut être considérée simultanément à non-linéarités de rang k de type I et à non-linéarités de rang h de type II, si l'on a :

$$\text{rg } K = k \quad \text{et} \quad \text{rg } H = h.$$

I.2.4 - Exemples de systèmes à non-linéarités de rang p .

Soit le système monovarié de type Lure' Postnikov décrit par l'équation d'état (I-12).

$$(I-12) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bf(\varepsilon) \\ \varepsilon(t) = e(t) - c^T x(t) \end{cases}$$

où

- $x \in X \subset \mathbb{R}^q$, vecteur état, X voisinage du point d'équilibre en x
- $A \in \mathbb{R}^{q \times q}$, matrice constante
- b et c , vecteurs constants de \mathbb{R}^q
- $e(t)$ entrée scalaire du système
- $\varepsilon(t) \in E \subset \mathbb{R}$, scalaire traité non linéairement, E voisinage du point d'équilibre en ε .

Supposons l'existence d'une fonction bornée f^* appelée gain équivalent, définie par :

$$f^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\forall \varepsilon \in E \quad f(\varepsilon) = f^*(\varepsilon) \cdot \varepsilon$$

de (I-12), on tire dans ces conditions

$$(I-13) \quad \overset{\circ}{x}(t) = [A - b f^*(\varepsilon) c^T] x(t) + b f^*(\varepsilon) e(t)$$

b et c étant des vecteurs, le système considéré est à non-linéarité de rang 1, à la fois de type I et II.

De tels systèmes se rencontrent si l'on considère un bloc linéaire de fonction de transfert de type fraction rationnelle $\frac{N(p)}{D(p)}$, degré de $N(p)$ inférieur à degré de $D(p)$, commandé par une non-linéarité scalaire et asservi par retour unitaire (figure 5).

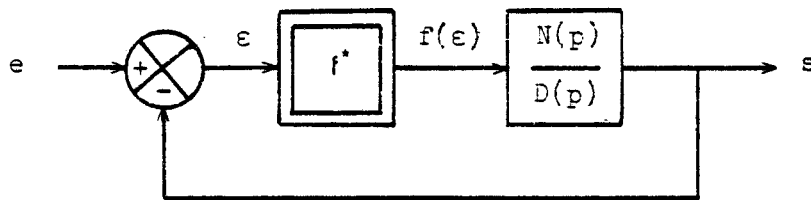


Figure 5.

Considérons maintenant k systèmes S_i du type (I-12) décrits par les équations (I-13), interconnectés d'après les relations (I-14) (figure 6).

$$(I-13) \quad \forall i \in \{1, \dots, k\} \quad \begin{cases} \overset{\circ}{x}_i(t) = A_i x_i(t) + b_i f_i(\varepsilon_i) \\ \varepsilon_i = e_i(t) - c_i^T x_i(t) \end{cases}$$

$$\text{où} \quad \begin{cases} x_i \in X \subset \mathbb{R}^{q_i}, \text{ vecteur état de } S_i \\ A_i \in \mathbb{R}^{q_i \times q_i}, (b_i, c_i) \in \mathbb{R}^{q_i} \times \mathbb{R}^{q_i} \\ \varepsilon_i(t) \in E_i' \subset \mathbb{R}, e_i(t) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$(I-14) \quad \forall i \in \{1, \dots, k\} \quad e_i(t) = u_i(t) + \sum_{j=1}^k d_{ij}^T x_j(t)$$

$$\text{où} \quad \begin{cases} u_i(t) \in \mathbb{R}, \text{ i\`eme entr\`ee scalaire du syst\`eme global} \\ \forall j \in \{1, \dots, k\} \quad d_{ij} \in \mathbb{R}^{q_j} \end{cases}$$

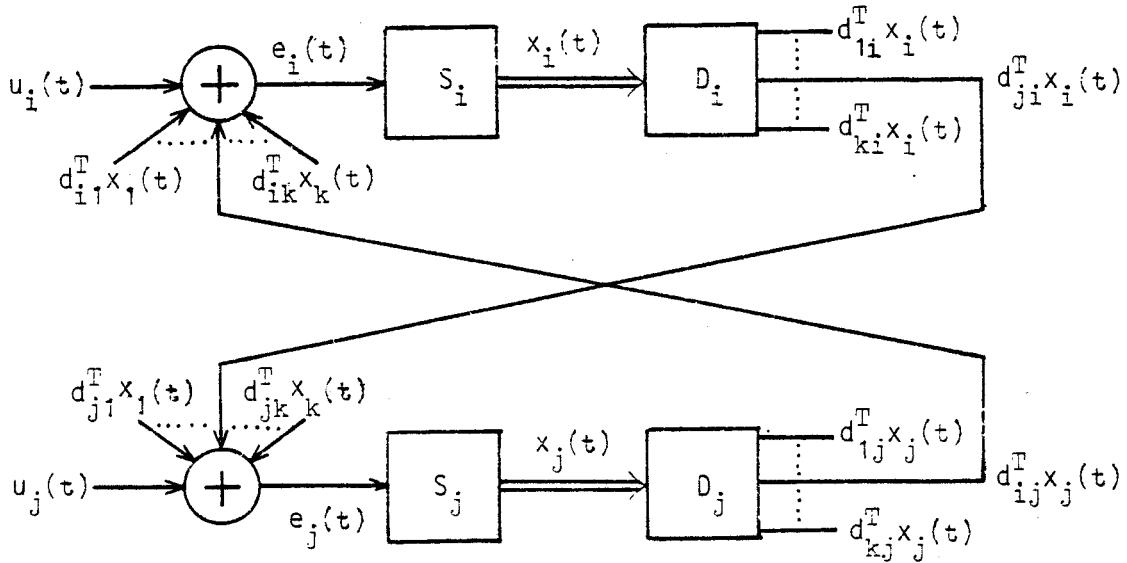


Figure 6

Supposons l'existence de k fonctions born\`ees f_i^* d\`efinies par

$$\forall i \in \{1, \dots, k\} \quad f_i^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall \varepsilon_i \in E_i \quad f_i(\varepsilon_i) = f_i^*(\varepsilon_i) \cdot \varepsilon_i$$

il vient alors

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}$$

$$(I-15) \quad \overset{\circ}{x}_i = [A_i - b_i f_i^*(\varepsilon_i) c_i^T] x_i(t) + b_i f_i^*(\varepsilon_i) \sum_{j=1}^k d_{ij}^T x_j(t) + b_i f_i^*(\varepsilon_i) u_i(t)$$

Nous allons, dans la suite, montrer que la notion de rang de non-linéarités permet de minimiser le nombre de ligne ou de colonnes non constantes dans la représentation en régime libre.

II - REPRÉSENTATION CANONIQUE DES SYSTÈMES À NON-LINÉARITÉS DE RANG P,

II.1 - Systèmes à non-linéarités de rang 1.

II.1.1 - Représentation en régime autonome.

Nous allons, dans cette partie rappeler des résultats fondamentaux concernant la modélisation de ces systèmes en régime libre.

Ces systèmes correspondent au cas particulier $p=1$ dans la définition générale proposée (§ I.2.3). Ils ont donc une matrice d'évolution de la forme :

$$(I-17) \left\{ \begin{array}{l} \text{type I : } A(x,t) = A_0 + h v^T(x,t) \\ \text{type II : } A(x,t) = A_0 + v(x,t) h^T \end{array} \right.$$

avec $A_0 \in \mathbb{R}^{q \times q}$ matrice constante

h vecteur constant de \mathbb{R}^q

$\forall (x,t) \in X \times T, X \subset \mathbb{R}^q, v(x,t) \in \mathbb{R}^q$

Les propriétés suivantes ont été démontrées dans [1].

1ère propriété.

Un système à non-linéarités de rang 1 peut être représenté par une matrice $A(x,t)$ d'évolution dont les termes non constants sont regroupés dans une seule ligne (type I) ou une seule colonne (type II).

Dans ce cas la dernière composante de l'état est alors $y = h^T x$

La matrice $F(x,t)$ est une matrice triangulaire supérieure par blocs dont les blocs diagonaux sont sous forme compagnon [14] et dont les termes non constants sont tous situés dans la dernière colonne.

Théorème I.1.

Pour tout système de type II à non-linéarités de rang 1, il est possible de définir un vecteur état y vérifiant à entrée nulle, une relation du type

$$\dot{y} = F(y, t) y$$

où $F(y,t)$ est la matrice définie en (I-18).

Théorème I.2.

L'ordre de la matrice $F_{nn}(y,t)$ intervenant dans (I-18) est égal à la dimension du sous-espace observable par h^T relativement à la matrice A_0 :

$$n_n = \underset{k \in \mathbb{N}}{\text{rg}} \{h, A_0^T h, \dots, (A_0^T)^k h, \dots\}$$

Pour les systèmes de type I, il existe les théorèmes duaux :

Théorème (I-1)'

Pour tout système de type I, à non-linéarités de rang 1, il est possible de définir un vecteur état Z vérifiant à entrée nulle une relation du type :

$$\dot{Z} = F^T(Z, t) Z$$

où $F(Z,t)$ est définie par (I-18).

Théorème (I-2)'

L'ordre de la matrice compagnon non constante $F_{nn}(Z,t)$ est égal à la dimension du sous-espace vectoriel commandable par h relativement à A_0

$$n_n = \underset{k \in \mathbb{N}}{\text{rg}} \{h, A_0 h, \dots, A_0^k h, \dots\}$$

II.1.2 - Application au régime non autonome.

Nous nous proposons, dans cette partie, de déterminer l'équation du système en régime forcé à partir de celle obtenue en régime libre.

1°) Type II.

Soit le système à non-linéarités de rang 1, de type II, défini en régime dynamique par

$$\dot{x} = (A_0 + v(x,t) h^T) x(t) + v(x,t) e(t) \quad (I-19)$$

où $\left\{ \begin{array}{l} e(t) \text{ est l'entrée scalaire du système} \\ v(x,t) \in \mathbb{R}^q \times T, v(x,t) \in \mathbb{R}^q, \text{ vecteur de commande, } h \in \mathbb{R}^q \\ A_0 \text{ matrice à coefficients constants de } \mathbb{R}^{q \times q} \end{array} \right.$

Les résultats rappelés aux paragraphes précédents montrent que si $h^T x$ est choisie comme dernière composante de l'état, toutes les non-linéarités de la matrice d'évolution sont regroupées dans la dernière colonne ; on a alors :

$$\dot{x} = A_0 x(t) + v(x,t) x_q(t) + v(x,t) e(t) \quad (I-20)$$

Soit P une matrice régulière, et y le vecteur état tel que :

$$y = Px \quad (I-21)$$

et supposons de plus que $y_q = x_q$.

L'équation différentielle obtenue après changement de base est donc :

$$\dot{y} = B_0 y(t) + V(y,t) y_q(t) + W(y,t) e(t) \quad (I-22)$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} B_0 = P A_0 P^{-1} \\ V(y,t) = P v(P^{-1} y, t) = W(y,t) \end{array} \right.$$

Ce résultat nous permet donc d'énoncer une méthode pour déterminer le vecteur de commande après changement de base en ne connaissant que la forme de la matrice d'évolution obtenue, sans pour autant connaître l'expression de ce changement de base.

1-a) Méthode :

- i) - le vecteur de commande de l'équation en régime dynamique initiale fournit les termes non constants à considérer dans la matrice d'évolution.

$$\begin{array}{c}
 \circ \\
 x(t) = \left[\begin{array}{c} \text{matrice constante} \\ q \times q \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{matrice nulle} \\ q \times q-1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \text{termes} \\ \text{non constants} \end{array} \right] x(t) + \left[\begin{array}{c} \text{termes} \\ \text{non constants} \end{array} \right] e(t)
 \end{array}$$

The diagram shows the decomposition of the state vector $x(t)$ into a constant matrix term and a null matrix term multiplied by a vector of non-constant terms. The constant matrix is a square with diagonal hatching, labeled "matrice constante" and " $q \times q$ ". The null matrix is a square with a circle in the center, labeled "matrice nulle" and " $q \times q-1$ ". The vector of non-constant terms is shown in two columns: one with circled elements $1, \dots, i, \dots, q$ and another with boxed elements $1, \dots, i, \dots, q$. An arrow points from the label "termes non constants" to both columns.

- ii) - On isole dans la matrice d'évolution obtenue après changement de base, connu ou inconnu, la dernière colonne, où sont rangés tous les termes non constants.

$$\left[\begin{array}{c} \text{matrice constante} \\ q \times q-1 \end{array} \right] \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} + \left[\begin{array}{c} \text{matrice nulle} \\ q \times q-1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \boxed{1} \\ \vdots \\ \boxed{j} \\ \vdots \\ \boxed{q} \end{array} \right]$$

The diagram shows the isolation of the last column of the matrix of non-constant terms. The constant matrix is a rectangle with diagonal hatching, labeled "matrice constante" and " $q \times q-1$ ". The null matrix is a square with a circle in the center, labeled "matrice nulle" and " $q \times q-1$ ". The vector of non-constant terms is a column of boxed elements $1, \dots, j, \dots, q$, labeled "q termes non constants".

- iii) - On écrit chaque nouveau terme non constant \boxed{j} comme combinaison linéaire des termes non constants \textcircled{i} précédemment déterminés et d'une constante α_j .

iv) - La j ème composante v_j du nouveau vecteur de commande est déterminée par la règle :

$$v_j = \boxed{j} - \alpha_j$$

v) - On obtient alors l'équation en régime dynamique dans la nouvelle base

$$\overset{\circ}{y}(t) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \text{matrice constante} \\ q \times q-1 \end{matrix} & \begin{matrix} \boxed{1} \\ \vdots \\ \boxed{j} \\ \vdots \\ \boxed{q} \end{matrix} \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} v_i \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_q \end{pmatrix} e(t)$$

1-b) *Exemple d'application.*

Considérons, par exemple, le système défini par l'équation différentielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \overset{\circ}{u} \\ \overset{\circ}{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 + f_1^*(v) \\ 1 & 2 + f_2^*(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 + f_1^*(v) \\ f_2^*(v) \end{pmatrix} e(t) \quad (\text{I-23})$$

où $\forall v \in \mathbb{R} \quad f_1^*(v)v = f_1(v), f_2^*(v)v = f_2(v).$

Supposons que l'on désire mettre la matrice d'évolution, après changement de base, sous la forme (I-24)

$$(\text{I-24}) \quad A(v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 + f_1^*(v) + f_2^*(v) \\ 1 & 1 + f_2^*(v) \end{pmatrix}$$

Or on a les relations

$$\begin{cases} (2 + f_1^*(v) + f_2^*(v)) = (1 + f_1^*(v)) + (f_2^*(v)) + 1 \\ (1 + f_2^*(v)) = (f_2^*(v)) + 1 \end{cases}$$

Il vient donc comme équation en régime dynamique écrite dans la nouvelle base :

$$\begin{pmatrix} \dot{w} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A(v) \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 + f_1^*(v) + f_2^*(v) \\ f_2^*(v) \end{pmatrix} e(t)$$

Ainsi la simple lecture des fonctions intervenant dans la dernière colonne de la matrice d'évolution obtenue permet la mise en équation immédiate dans la nouvelle base.

2°) Type I .

Considérons par contre le système à non-linéarités de rang 1 de type I décrit en régime dynamique par :

$$\dot{x} = (A_0 + k v^T(x,t)) x(t) + k w^T(x,t) e(t) \quad (\text{I-25})$$

où $\left\{ \begin{array}{l} e(t) \text{ est l'entrée du système } \forall t \in \tau \ e(t) \in \mathbb{R}^n \\ \forall(x,t) \in \mathbb{R}^q \times \tau \ v(x,t) \in \mathbb{R}^q, \ w(x,t) \in \mathbb{R}^n \\ k \in \mathbb{R}^q, \ A_0 \text{ matrice à coefficients constants de } \mathbb{R}^{q \times q} \end{array} \right.$

D'après ce qui précède (1ère propriété), le vecteur k peut être pris égal à $[0, \dots, 0, 1]^T$. Dans ces conditions :

$$k w^T(x,t) = [0, \dots, 0, w(x,t)]^T$$

Soit P un changement de base qui garde les non-linéarités de $(A_0 + k v^T(x,t))$ dans la dernière ligne.

$$y = Px$$

avec $P = \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \text{diagonale hachurée} \\ \text{diagonale hachurée} \\ \text{diagonale hachurée} \\ \text{diagonale hachurée} \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{array} \end{array} \right]$

Il vient :

$$\dot{y} = (B_0 + Pk v^T(x,t) P^{-1}) x(t) + k w^T(x,t) e(t) \quad (I-26)$$

Un tel changement de base laisse donc invariant la matrice de commande.

Ainsi, par simple identification des termes non constants, on peut déduire pour les deux types de représentation la nouvelle équation en régime dynamique, si celle-ci est obtenue par les changements de bases précisés en 1) ou 2).

Ce résultat est à rapprocher de la méthode utilisée dans le cas des systèmes discrets pour déterminer l'équation de récurrence régissant l'erreur en régime forcé [6].

II.2 - Systèmes à non-linéarités de rang p.

Nous proposons de généraliser les propriétés énoncées précédemment, au cas plus général des systèmes à non-linéarités de rang p.

II.2.1 - Régime libre.

La matrice d'évolution de ces systèmes se met sous la forme (I-9) pour ceux de type I ou (I-10) pour ceux de type II.

De même que pour les systèmes à non-linéarités de rang 1, nous pouvons énoncer les résultats qui suivent concernant la représentation des systèmes à non-linéarités de rang p.

Propriété 2.

Soit $\text{rg}(h_1, \dots, h_n) = p$ ($p \leq n$). Il existe un changement de base P tel que

$$P \left(\sum_{i=1}^n v_i(x,t) h_i^T \right) P^{-1} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{array} \right] \\ \text{q-p} \end{array} \quad \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \text{diagonally shaded} \\ \text{block} \end{array} \right] \\ \text{p} \end{array}$$

Cela signifie que pour un système à non-linéarités de rang p de type II on peut obtenir une matrice d'évolution n'ayant que p colonnes non constantes.

Démonstration.

Supposons $\text{rg}(h_1, \dots, h_p) = p$, donc

$$\forall i \in \{p+1, \dots, n\} \exists (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ip}) \quad h_i = \sum_{j=1}^p \alpha_{ij} h_j$$

Soit, de (I-10), on tire

$$(I-27) \quad A(x,t) = A_0 + \sum_{i=1}^p V_i(x,t) h_i^T$$

avec

$$(I-28) \quad \forall i \in \{1, \dots, p\} \quad V_i(x,t) = v_i(x,t) + \sum_{j=p+1}^n v_j(x,t) \alpha_{ji}$$

Supposons $A(x,t)$ écrite dans une base B_1 . Les vecteurs (h_1, \dots, h_p) étant linéairement indépendants on peut donc compléter l'ensemble (h_1, \dots, h_p) par $q-p$ vecteurs de B_1 (e_1, \dots, e_{q-p}) pour que $(e_1 \dots e_{q-p} \quad h_1 \dots h_p)$ forme une base de l'espace d'état. Soit B_2 cette base et P la matrice de passage de B_1 à B_2 .

Posons $y = Px$, avec

$$P = \begin{bmatrix} P \text{ sup} \\ \hline h_1^T \\ \hline \vdots \\ \hline h_p^T \end{bmatrix}$$

où $P \text{ sup}$ est une matrice à coefficients constants de $\mathbb{R}^{(q-p) \times q}$.

Il vient :

$$\dot{y}(t) = [B + C(y,t)] y(t) \quad (I-29)$$

avec

$$B = P A_0 P^{-1}$$

$$C(y,t) = P \left(\sum_{i=1}^p v_i(P^{-1}y,t) h_i^T \right) P^{-1} = \left[\begin{array}{c} \circ \text{---} \circ \\ \circ \text{---} \circ \end{array} \right] \begin{array}{c} \boxed{v'_1(y,t)} \\ \dots \\ \boxed{v'_p(y,t)} \end{array}$$

où $\forall i \in \{1, \dots, p\} v'_i(y,t) = P^{-1} v_i(P^{-1}y,t)$

De même pour le système de type I, on a :

Propriété 2'.

Soit $\text{rg}(k_1, \dots, k_m) = p$.

Il existe un changement de base R tel que

$$R \left(\sum_{i=1}^m k_i^T v_i(x,t) \right) R^{-1} = \left[\begin{array}{c} \circ \text{---} \circ \\ \circ \text{---} \circ \\ \hline \text{shaded box} \end{array} \right] \begin{array}{c} \left. \vphantom{\begin{array}{c} \circ \text{---} \circ \\ \circ \text{---} \circ \end{array}} \right\} q-p \\ \left. \vphantom{\text{shaded box}} \right\} p \end{array}$$

On peut donc regrouper, pour un système de type I à non-linéarités de rang p, tout les termes non constants de la matrice d'évolution dans les p dernières lignes.

Des propriétés 2 et 2' il suit que la classe de processus représentée est très large, en effet un système à non-linéarités de rang p est représentable en régime libre à l'aide d'une matrice d'évolution ayant p lignes (ou colonnes) non constantes.

Ainsi une matrice $A(x,t)$ a coefficients tous non constants est représentative d'un système à non linéarité de rang q . La seule restriction pour qu'un système quelconque en régime libre appartienne à la classe de processus considérée est qu'il se mette sous la forme d'une équation matricielle d'état de type (I-1).

II-2-2 Régime non autonome.

Nous étudions ici l'influence d'un changement de base sur la représentation en régime dynamique.

Soit le système de type I définit par :

$$\dot{x} = [A_0 + \sum_{i=1}^p k_i v_i^T(x,t)] x(t) + \left(\sum_{i=1}^p k_i \omega_i^T(x,t) \right) e(t) \quad (\text{I-30})$$

où les $\omega_i(x,t)$ sont définis par :

$$V^T(x,t) = (\omega_1(x,t), \dots, \omega_p(x,t))$$

Il est possible de prendre :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\} \quad k_i = [0 \text{ --- } 0, 1, 0 \text{ --- } 0]^T_{q-i}$$

Dans ces conditions

$$\sum_{i=1}^p k_i \omega_i^T(x,t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \omega_p^{oT}(x,t) \\ \vdots \\ \omega_1^T(x,t) \end{bmatrix}$$

Soit le changement de base défini par P :

$$P = \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \text{diagonal lines} \\ \text{width } q-p \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c} \circ \text{---} \circ \\ \circ \text{---} \circ \\ I_p \end{array} \right] \end{array} \right] \quad \left. \vphantom{\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \text{diagonal lines} \\ \text{width } q-p \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c} \circ \text{---} \circ \\ \circ \text{---} \circ \\ I_p \end{array} \right] } \right\} q-p$$

, où I_p est la matrice identité d'ordre p .

Ce changement de base laisse les non-linéarités dans les p dernières lignes de la matrice d'évolution, et laisse invariant le vecteur de commande.

$$P \left(\sum_{i=1}^p k_i \omega_i(x,t) \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_1^T(x,t) \\ \vdots \\ \omega_p^T(x,t) \end{bmatrix}$$

Considérons maintenant le système de type II à non-linéarités de rang p défini par :

$$\dot{\bar{x}} = (A_0 + \sum_{i=1}^p v_i^!(x,t) h_i^T) x(t) + \sum_{i=1}^p v_i^!(x,t) e_i(t) \quad (I-31)$$

$e(t) = (e_1(t), \dots, e_p(t))$ est le vecteur d'entrée du système.

Il est possible de prendre les scalaires $h_i^T x$, $i \in \{1, \dots, p\}$, comme dernières composantes de l'état :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\} \quad x_{q-i+1} = h_i^T x$$

Il vient :

$$\dot{x} = A_0 x + \sum_{i=1}^p v_i^!(x,t) x_{q-i+1} + \sum_{i=1}^p v_i^!(x,t) e_i(t)$$

Soit le changement de base

$$y = Px$$

avec

$$\forall i \in \{1, \dots, p\} y_{q-i+1} = x_{q-i+1}$$

Il vient

$$y^o = B_o x + \sum_{i=1}^p \omega_i^!(x,t) y_{q-i+1} + \sum_{i=1}^p \omega_i^!(x,t) e_i(t) \quad (I-32)$$

avec

$$\begin{cases} B_o = P A_o P^{-1} \\ \omega_i^!(x,t) = P v_i^!(x,t) \end{cases}$$

Ces considérations permettent de tirer les mêmes conclusions que pour les systèmes à non-linéarités de rang 1 : la matrice d'évolution, après changement de base conservant le nombre de lignes (ou de colonnes) non constantes, conditionne la forme de la matrice de commande. Les non-linéarités étant a priori fixées à l'aide de la forme de la matrice de commande dans la base initiale. La méthode dans le cas multivariable pour déterminer la $j^{\text{ème}}$ colonne du vecteur de commande consiste à appliquer la méthode proposée dans le cas des systèmes à non-linéarités de rang 1, comme si toutes les autres colonnes étaient constantes.

II.3 - Représentations redondantes particulières - Propriétés.

Dans cette partie sont proposées quelques représentations particulières redondantes [16] des systèmes à non-linéarités de rang p en régime libre. De ces diverses représentations seront déduites des propriétés remarquables.

II.3.1 - Notations.

Soit le système à non-linéarités de rang p de type II, défini par l'équation (I-10) en régime libre, avec toutes les non-linéarités rangées dans les p dernières colonnes. L'état $x(t)$ associé à cette représentation est défini par :

$$x^T(t) = (x_1^T(t), x_2^T(t))$$

où

$x_1(t) = (x_1^1, \dots, x_1^{q-p})$ sont les $q-p$ premières composantes de l'état

$x_2(t) = (x_2^1, \dots, x_2^p)$ sont les p dernières composantes de l'état

Les composantes de $x_2(t)$ seront dites "traitées non linéairement". (I-28) s'écrit donc sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = L_1 x_1(t) + N_1(x, t) x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = L_2 x_1(t) + N_2(x, t) x_2(t) \end{cases} \quad (\text{I-33})$$

où

$L_1 \in \mathbb{R}^{(q-p) \times (q-p)}$ matrice constante

$L_2 \in \mathbb{R}^{p \times (q-p)}$ matrice constante

$N_1(x, t) \in \mathbb{R}^{(q-p) \times p}$ matrice à coefficients non constants

$N_2(x, t) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ matrice à coefficients non constants

$$\begin{cases} L_1 = [\ell_{ij}] \quad (i, j) \in \{1, \dots, q-p\}^2 \\ L_2 = [\ell'_{ij}] \quad i \in \{1, \dots, p\} \\ \quad \quad \quad j \in \{1, \dots, q-p\} \\ N_1(x, t) = (n_1(x, t), \dots, n_{q-p}(x, t))^T \\ \text{avec } \forall i \in \{1, \dots, q-p\} \quad n_i(x, t) \in \mathbb{R}^p \\ N_2(x, t) = [n_{ij}(x, t)] \\ \quad \quad \quad (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2 \end{cases}$$

Soit $A_p^1(x, t)$ la matrice d'ordre $p(q-p+1)$ définie par :

$$A_p^1(x, t) = [A_{ij}^1(x, t)] \quad (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2 \quad (\text{I-34})$$

où $\forall i \in \{1, \dots, p\}$

$$A_{ii}(x,t) = \left[\begin{array}{c|c} L_1 & \text{ième colonne} \\ & \text{de } N_1(x,t) \\ \hline \text{ième ligne} & n_{ii}(x,t) \\ \text{de } L_2 & \end{array} \right]$$

$\forall j \in \{1, \dots, p\}, j \neq i$

$$A_{ij} = \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} \circ & \text{---} & \circ \\ | & & | \\ \circ & \text{---} & \circ \end{array} & \text{jème colonne} \\ & \text{de } N_1(x,t) \\ \hline & n_{ij}(x,t) \end{array} \right]$$

La disposition générale des termes non nuls de $A_p^1(x,t)$ est donnée figure 7.

$$A_p^1(x,t) = \left[\begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \\ \vdots \\ \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \\ \vdots \\ \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \end{array} \right]$$

Figure 7.

$A_p^1(x,t)$ sera appelée la première forme dilatée à l'ordre p de la matrice $A(x,t)$. Une autre forme dilatée remarquable est celle introduite dans le cas des systèmes discrets dans [17]. Cette dernière sera appelée deuxième forme dilatée à l'ordre p et sera notée $A_p^2(x,t)$. Elle est définie par :

La forme $F_p(x,t)$ introduite généralise la représentation (I-18) :
 $F_p(x,t)$ est une matrice triangulaire supérieure par blocs dont tous les termes non constants sont regroupés dans les p dernières colonnes.

Théorème 1.3.

Pour tout système à non-linéarités de rang p de type II, il est possible de définir un vecteur état redondant Y vérifiant à entrée nulle une relation du type

$$\dot{Y} = F_p(y,t) Y, Y = Ry$$

La démonstration de ce théorème est donnée en Annexe (I-A)

Soit, en employant les notations de l'annexe I-A pour un système de type II représenté par (I-33), le sous espace vectoriel S_i^0 engendré par $(A_{ii}^0)^{Tk} h_i^!$ lorsque k décrit \mathbb{N} . Par analogie, S_i^0 sera appelé le $i^{\text{ème}}$ sous espace vectoriel réduit observable de $A(x,t)$, le sous espace vectoriel observable par $h_i^!$ relativement à A_{ii}^0 .

Corollaire 1.3.

L'ordre s de la matrice $F_n(y,t)$ intervenant dans la forme canonique $F_p(y,t)$ (I-36) est donné par :

$$s = \sum_{i=1}^p \text{rg } S_i^0$$

La démonstration de ce théorème est incluse dans la démonstration du théorème précédent.

Considérant les systèmes de types I on peut énoncer :

Théorème (I-3)'

Pour tout système à non-linéarités de rang p de type I, il est possible de définir un vecteur état redondant vérifiant à entrée nulle une relation du type

$$\dot{Z} = F_p^T(z,t) Z$$

Soit $A(x,t)$ la matrice d'évolution d'un système de type I, $A^T(x,t)$ est donc représentative d'un système de type II. Soit $A_p^T(x,t)$ la matrice dilatée d'ordre p de $A^T(x,t)$, $A_p^T(x,t)$ a la forme (I-34). On définit S_i^c , le $i^{\text{ème}}$ sous espace vectoriel réduit commandable de $A(x,t)$, le sous espace observable par $h_i^!$ relativement à A_{ii}^o . S_i^c est engendré par $(A_{ii}^o)^{Tk} h_i^!$ lorsque k décrit \mathbb{N} .

Corollaire (I-3)'.
'.

L'ordre s de la matrice $F_n^T(z,t)$ intervenant dans la forme canonique $F_p^T(z,t)$ est donné par :

$$s = \sum_{i=1}^p \text{rg } S_i^c$$

En conséquence deux matrices dilatées de même type $A_p(x,t)$ et $B_p(z,t)$ ayant même forme canonique $F_p(y,t)$ sont semblables.

Dans ce qui suit, nous utilisons un outil généralisant la notion de polynôme symbolique [19] et qui permet de déterminer si deux matrices dilatées sont semblables.

III - POLYNÔME SYMBOLIQUE MATRICIEL.

III.1 - Définition du polynôme symbolique matriciel.

Soit $A(x,t)$ la matrice d'évolution d'un système à non-linéarités de rang p de type II, le polynôme symbolique généralisé sera défini à partir de la forme canonique dilatée à l'ordre p , $F_p(y,t)$, de $A(x,t)$.

$$F_p(y,t) = \begin{bmatrix} C_1 & & & & F_1(y,t) \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & 0 & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & C_{n-1} & F_{n-1}(y,t) \\ & 0 & & & & C_n(y,t) \end{bmatrix} \quad (\text{I-36})$$

avec

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\} \quad C_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i} \quad C_i = \begin{bmatrix} 0 & & & & -\alpha_0^i \\ & \ddots & & & \vdots \\ 1 & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & 0 & & 0 \\ & & & & 1 \\ & & & & -\alpha_{n_i-1}^i \end{bmatrix}$$

et, si I_p est la matrice identité d'ordre p ,

$$C_n(y, t) = \begin{bmatrix} \begin{array}{|c|} \hline \circ \\ \hline \circ \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \circ \\ \hline \circ \\ \hline \end{array} \\ \hline & I_{s-p} \\ \hline & \begin{array}{|c|} \hline \text{diagonal hatched} \\ \hline \end{array} \\ \hline & \underbrace{\hspace{2cm}}_{p \text{ colonnes non linéaires}} \end{bmatrix}$$

$$\forall (y, t) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{T} \quad C_n(y, t) \in \mathbb{R}^{s \times s}$$

Chaque bloc constant linéaire de $F_p(y, t)$ peut être défini à partir de son polynôme caractéristique :

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\} \quad p_i(\lambda) = \lambda^{n_i} + \sum_{j=0}^{n_i-1} \alpha_j^i \lambda^j \tag{I-37}$$

Avec la convention de calculer le déterminant d'une matrice non linéaire comme si chacun de ses termes non linéaire était constant, on définit le polynôme caractéristique instantané de $F_p(y, t)$ par :

$$p(\lambda, y) = \det (\lambda \times I_{p(q-p+1)} - F_p(y, t)) \tag{I-38}$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n-1} p_i(\lambda) \right) \det (\lambda I_s - C_n(y, t)) \quad ;$$

$p(\lambda, y)$ est invariant par tout changement de base constant, donc

$$p(\lambda, y) = p(\lambda, x) = \det (\lambda I_{p(q-p+1)} - A_p^2(x, t)) \quad (I-39)$$

Si $p(\lambda, x) = 0$ n'a pas de racines indépendantes de l'état ou du temps, $F_p(y, t)$ prend la forme d'une matrice décomposables en blocs matriciels :

$$F_p(x, t) = \begin{bmatrix} \begin{array}{cc|c} \circ & \text{---} & \circ \\ \circ & \text{---} & \circ \end{array} & \begin{array}{c} -B_0(y, t) \\ \vdots \\ -B_{q-p}(y, t) \end{array} \\ \begin{array}{cc} I_p & 0 \\ 0 & I_p \end{array} & \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \end{bmatrix} \quad (I-40)$$

où $\forall i \in \{0, \dots, q-p\}$ $B_i(y, t) \in \mathbb{R}^{p \times p}$

Cette forme est entièrement déterminée à l'aide des $(q-p+1)$ blocs non constants $B_i(y, t)$. Ces blocs permettent aussi de définir un polynôme matriciel [15].

Définition.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Lorsque } \forall i \in \{1, \dots, p\} \\ \text{rg } S_i^0 = q-p+1 \end{array} \right\} \textcircled{C}$$

Le polynôme symbolique matriciel est défini à partir de (I-40) par

$$P(F_p, \Lambda) = \Lambda_p^{q-p+1} + \sum_{i=0}^{q-p} B_i(y, t) \Lambda_p^i \quad (I-41)$$

où $\Lambda_p = \lambda I_p$; I_p matrice identité d'ordre p .

Dans le cas d'un système de type I, la même définition peut être donnée avec comme condition d'existence :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\} \text{ rg } S_i^C = q-p+1.$$

III-2 - Conventions de calcul et notations.

Soit une matrice A , $A \in \mathbb{R}^{pq \times pq}$, partitionnée en q^2 blocs A_{ij} d'ordre p :

$$A = [A_{ij}]_{(i,j) \in \{1, \dots, q\}^2} \quad (\text{I-42})$$

avec $\forall (i,j) \in \{1, \dots, q\}^2$ $A_{ij} \in \mathbb{R}^{p \times p}$.

Notons A'_i la matrice obtenue à partir de A en retirant les blocs matriciels de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $q^{\text{ième}}$ colonne et considérons la fonction de matrice définie de façon récursive par :

$$1^\circ) \quad \forall (i,j) \in \{1, \dots, q\}^2 \quad M_1(A_{ij}) = A_{ij} \quad (\text{I-43})$$

$$2^\circ) \quad M_q(A) = \sum_{i=1}^{q-1} (-1)^{i-1} M_{q-1}(A'_i) A_{iq}$$

Cette définition coïncide avec le calcul d'un déterminant matriciel généralisé en faisant le développement par rapport aux premières colonnes.

Dans le cas où tous les blocs A_{ij} appartiennent à un anneau des matrices commutatives d'ordre p , la notion introduite rejoint celle de déterminant matriciel introduite dans [17]. Par abus de langage, $M_q(A)$ sera appelé un déterminant matriciel à l'ordre p de la matrice A .

On notera dans toute la suite

$$M_q(A) = \text{DET } A$$

Lorsque $p=1$, $M_q(A)$ représente le déterminant de la matrice A . Il sera calculé dans le cas où A est une matrice non linéaire comme si chacun de ces termes était constant.

Dans ces conditions on peut définir le polynôme caractéristique instantané généralisé de la matrice A par (I-44), cette matrice polynomiale étant notée $P(A, \lambda)$,

$$P(A, \lambda) = \text{Det}(\lambda \underset{p}{I} \otimes \underset{pq}{I} - A) \quad (\text{I-44})$$

où \otimes représente la multiplication extérieure à gauche [20] et I_{pq} la matrice identité d'ordre pq .

Des définitions précédentes il vient :

$$P(F_p, \Lambda) = \text{Det}(\Lambda_p \otimes I_{p(q-p+1)} - F_p(y,t)) \quad (\text{I-45})$$

Dans toute la suite nous supposons vérifiée pour toutes les formes matricielles qui interviennent la condition \textcircled{C} d'existence du polynôme symbolique matriciel.

III.3 - Changement de base et polynôme symbolique matriciel.

Soit $A_p^2(x,t)$ la deuxième forme dilatée à l'ordre p de la matrice $A(x,t)$ (I-10). $A_p^2(x,t)$ est semblable à une forme canonique $F_p(y,t)$ (I-40).

Lemme 1.

Soit P la matrice régulière de $\mathbb{R}^{p(q-p+1) \times p(q-p+1)}$ telle que

$$A_p^2(x,t) = P F_p(y,t) P^{-1}$$

alors P est partitionnable en $(q-p+1)^2$ blocs P_{ij} qui vérifient la propriété suivante :

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, (q-p+1)\}^2, P_{ij} \in D_p$$

où D_p est l'ensemble des matrices diagonales d'ordre p . La matrice inverse P^{-1} vérifie aussi cette propriété.

Les matrices de changement de base sont donc constituées de blocs tous commutatifs.

La démonstration de ce lemme est proposée en Annexe (I-B)

Lemme 2.

$$P(A_p^2, \Lambda) = P(F_p, \Lambda)$$

La matrice A_p^2 a donc même polynôme symbolique matriciel que sa forme canonique F_p . La démonstration de ce lemme est donnée en Annexe (I-C).

Théorème I.4.

Soient $A(x,t)$ et $B(y,t)$, deux matrices d'ordre q à non-linéarités de rang p de type II, ayant tous leurs éléments non constants rangés dans les p dernières colonnes et qui vérifient chacune la condition \textcircled{C} .

Soient $A_p^2(x,t)$ et $B_p^2(x,t)$ leurs deuxièmes formes dilatées d'ordre p respectives.

Une CNS pour que $A_p^2(x,t)$ et $B_p^2(x,t)$, soient semblables est qu'elles aient même polynôme symbolique matriciel.

Démonstration.

a) Condition nécessaire.

L'ordre des composantes d'état traitées non linéairement est fixé. $A_p^2(x,t)$ et $B_p^2(y,t)$ étant semblables, elles admettent même forme canonique $F_p(z,t)$. D'après le lemme 2 il vient :

$$P(A_p^2, \Lambda) = P(F_p, \Lambda) = P(B_p^2, \Lambda)$$

b) Condition suffisante.

Soit $P(A_p^2, \Lambda) = P(B_p^2, \Lambda)$ d'après la conséquence du lemme 2, ces deux formes déterminent la même forme canonique, elles sont donc semblables.

Le résultat énoncé permet, pour la classe de systèmes considérées, de proposer a priori une forme matricielle redondante et d'identifier ses coefficients de façon à ce qu'elle soit semblable à une forme redondante caractérisant le système. Cette dernière forme est déduite directement de l'équation d'état non redondante en régime libre. L'identification se fait en égalant terme à terme deux matrices polynomiales.

Cette méthode de choix d'une représentation ne rend pas nécessaire la connaissance du changement de base entre les matrices dilatées, seule l'existence en est prouvée.

Ceci généralise aux systèmes à non-linéarités de rang p des travaux antérieurs [1] valables pour les systèmes à non-linéarités de rang 1.

Tous les théorèmes énoncés dans cette partie sont transposables aux systèmes de type I en convenant de construire leurs formes dilatées à partir de $A^T(x,t)$ si $A(x,t)$ est la matrice d'évolution en régime libre du système considéré.

Dans les paragraphes suivants, nous allons voir dans quels cas une similitude au niveau des représentations redondantes entraîne une similitude pour les représentations non redondantes dont elles sont déduites.

III.4 - Remarque sur l'équivalence possible entre représentations dilatées et représentations non redondantes.

Soient deux représentations non redondantes, en régime libre d'un système d'ordre q de type II à non-linéarités de rang p , tous les termes non constants étant rangés dans les p dernières colonnes.

$$\begin{cases} \overset{\circ}{x} = A(x,t)x & \text{avec } x = (x_1, \dots, x_{q-p}, x_{q-p+1}, \dots, x_q) \\ \overset{\circ}{y} = B(y,t)y & \text{avec } y = (y_1, \dots, y_{q-p}, x_{q-p+1}, \dots, x_q) \end{cases} \quad (\text{I-46})$$

On en déduit les deuxièmes formes dilatées à l'ordre p :

$$\begin{cases} \overset{\circ}{X} = A_p^2(x,t) X \\ \overset{\circ}{Y} = B_p^2(y,t) Y \end{cases} \quad (\text{I-47})$$

Propriété.

Si A_p^2 et B_p^2 sont semblables alors A et B sont semblables par un changement de base à blocs diagonaux qui laisse invariante les composantes d'état traitées non linéairement.

Démonstration.

$$\exists P \in \mathbb{R}^{p(q-p+1) \times p(q-p+1)}, \det P \neq 0$$

$$P = \left[\begin{array}{c|c} P_{ij} & 0 \\ \hline 0 & I_p \end{array} \right] \quad (I-52)$$

$(i,j) \in \{1, \dots, q-p\}^2$

On a alors

$$Y = PX \quad (I-53)$$

Or P est régulière et :

$$\text{Det } P = (\det P) I_p \quad (I-54)$$

donc $\det P \neq 0$, d'où

$$B(y,t) = PA(x,t) P^{-1}$$

Le polynôme symbolique matriciel constitue donc un invariant de représentation entre deux représentations de même type d'un système dans le cas où le changement de base entre les deux est du type (I-52).

III.5 - Application du polynôme symbolique matriciel.

Soit $A(x,t)$ la matrice représentative en régime libre d'un système à non-linéarité de rang p de type II (dans le cas d'un type I on prendrait $A^T(x,t)$).

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = A(x,t) x \\ x^T = (x_1 \dots x_{q-p} \underbrace{x_{q-p+1} \dots x_q}_{\text{composantes d'état traitées non linéairement}}) \end{array} \right. \quad (I-55)$$

composantes d'état traitées
non linéairement.

Soit le changement de base défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \left[\begin{array}{c|c} P_1 & 0 \\ \hline 0 & I_P \end{array} \right] \\ \text{avec } \det P_1 \neq 0 \end{array} \right. \quad (\text{I-56})$$

Le polynôme symbolique matriciel permet de se donner a priori la forme de $PA(x,t)P^{-1}$ et d'en déterminer les coefficients, sans toutefois nécessiter le calcul de P .

$A(x,t)$ étant partitionnée identiquement à P

$$A(x,t) = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12}(x,t) \\ \hline A_{21} & A_{22}(x,t) \end{array} \right] \quad (\text{I-57})$$

Il vient :

$$PA(x,t)P^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} P_1 A_{11} P_1^{-1} & P_1 A_{12}(x,t) \\ \hline A_{21} P_1^{-1} & A_{22}(x,t) \end{array} \right] \quad (\text{I-58})$$

On se donne a priori $B(y,t)$ de la forme

$$B(y,t) = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12}(x,t) \\ \hline B_{21} & A_{22}(x,t) \end{array} \right] \quad (\text{I-59})$$

De $A(x,t)$ et $B(y,t)$ on construit $A_p^2(x,t)$ et $B_p^2(y,t)$, puis l'égalité des polynômes symboliques de ces deux matrices garantit leur similitude. L'identification termes à termes de $P(A_p^2)$ et $P(B_p^2)$ permet de déterminer les coefficients de la matrice $B(y,t)$.

III.6 - Cas des systèmes à non-linéarités de rang 1.

Lorsque $p=1$, on a $A_p^2(x,t) = A(x,t)$. Le théorème (I-4) exprimée dans le cas où $p=1$ conduit au théorème sur le polynôme symbolique scalaire [1].

Théorème I-5.

Soient $A(x,t)$ et $B(y,t)$, deux matrices d'ordre q de systèmes à non-linéarités de rang 1 de même type.

Soient les polynômes symboliques scalaires définis par

$$P(A(x,t)) = \det(\lambda I_q - A(x,t)) \text{ et } P(B(y,t)) = \det(\lambda I_q - B(y,t))$$

Si $P(A(x,t))$ et $P(B(y,t))$

n'ont aucun zéro indépendant de l'état et/ou du temps alors $A(x,t)$ et $B(y,t)$ sont semblables ssi leur polynômes symboliques sont identiques.

Ce résultat permet d'identifier deux matrices semblables de même type, sans nécessiter la détermination du changement de base.

III.7 - Remarque sur l'application du polynôme symbolique aux représentation redondantes - Notion de matrice contractable.

L'utilisation du polynôme symbolique matriciel nécessite le passage d'une représentation non redondante de l'état (matrice d'évolution $A(x,t)$) à une représentation redondante de l'état (matrice d'évolution $A_p^2(x,t)$). L'emploi de ce polynôme pour l'identification de deux matrices semblables dans l'espace d'état non redondant conduit à ne considérer que les changements de base diagonaux par blocs. Cependant nous allons montrer que ce polynôme matriciel peut servir à la mise en équation dans l'espace d'état redondant considéré.

Soit $B(y,t)$ une matrice d'ordre $p(q-p+1)$ décomposable suivant la forme :

$$B(y,t) = \left[\begin{array}{c|c} D_{ij} & \\ \hline (i,j) \in \{1, \dots, q-p+1\} & B'_{i, q-p+1}(y,t) \\ x \{1, \dots, q-p\} & i \in \{1, \dots, q-p+1\} \end{array} \right] \quad (I-60)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (i,j) \in \{1, \dots, q-p+1\} \times \{1, \dots, q-p\} \quad D_{ij} \in D_p \\ \forall i \in \{1, \dots, q-p+1\} \quad \forall (y,t) \in Y \times T \quad B'_{i, q-p+1}(y,t) \in \mathbb{R}^{p \times p} \end{array} \right.$$

Nous dirons que $B(y,t)$ est contractable s'il existe une matrice $B(y,t)$ de $\mathbb{R}^{q \times q}$ dont la forme dilatée secondaire à l'ordre p est $B(y,t)$, et non contractable dans le cas contraire.

Théorème 1-6.

Soient $A_p^2(x,t)$ forme contractable et $B(y,t)$ forme non contractable, x et y sont supposés avoir les mêmes dernières composantes traitées non linéairement.

$A_p^2(x,t)$ et $B(y,t)$ sont semblables par un changement de base dont la matrice est à blocs tous diagonaux, si et seulement si $A_p^2(x,t)$ et $B(y,t)$ ont leurs polynômes symboliques matriciels identiques.

La démonstration de ce théorème est proposée en annexe I-D.

Le théorème (I-6) donne donc une condition de similitude dans un espace d'état redondant pour deux matrices de même type et à non-linéarités de même rang.

Pour un système de type II représenté en régime libre par (I-33), on en déduit la deuxième forme dilatée à l'ordre p : $A_p^2(x,t)$. Soit $B(y,t)$ admettant la forme (I-60) ; cette matrice a $(q-p+1)(q-p)$ p éléments constants indéterminés et $(q-p+1)p^2$ éléments non linéaires inconnus.

L'égalité des polynômes symboliques matriciels fournit $(q-p+1)p^2$ relations. La différence entre le nombre d'inconnues de $B(y,t)$ et le nombre de relations obtenues donne le nombre de composantes de $B(y,t)$ que l'on peut se fixer arbitrairement, soit n ce nombre.

$$n = (q-p+1)qp - (q-p+1)p^2 \quad (\text{I-61})$$

il vient :

$$n = (q-p+1) p(q-p) \quad (\text{I-62})$$

On peut donc fixer arbitrairement la forme de la partie linéaire de $B(y,t)$. L'égalité des polynômes symboliques matriciels donnant l'expression des composantes non linéaires de cette matrice.

Ce résultat permet donc d'utiliser les représentations redondantes telles que $B(y,t)$ en tant que telles. Un tableau récapitulatif (p.50) rappelle les principales propriétés du polynôme symbolique matriciel.

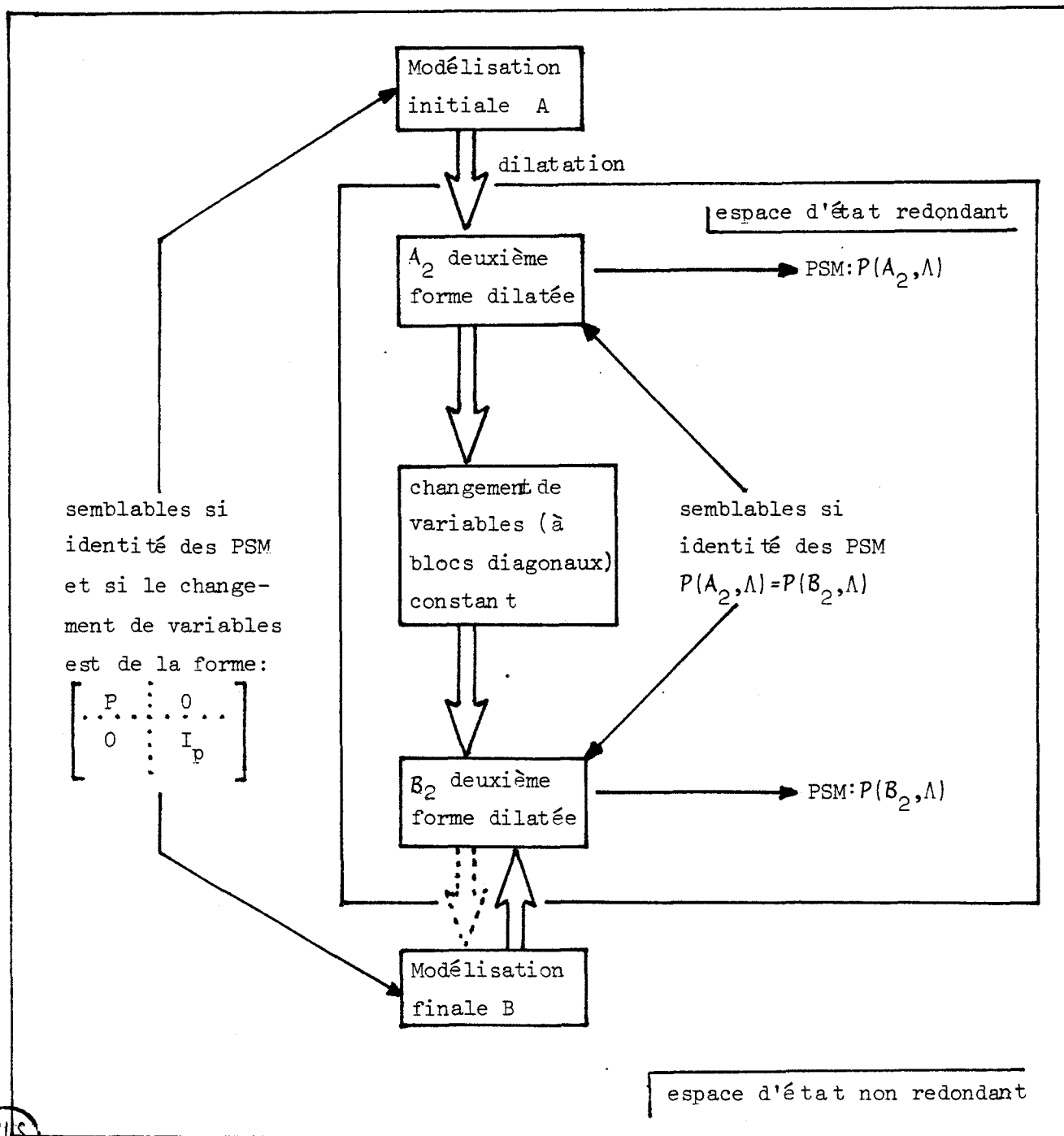
CONCLUSION.

Après avoir présenté les systèmes à non-linéarités de rang p , nous avons montré l'influence d'un changement de vecteur état sur la représentation choisie. Le vecteur de commande était alors entièrement déterminé par la matrice d'évolution obtenue.

Généralisant les propriétés du polynôme symbolique montrées pour les systèmes à non-linéarités de rang 1, nous avons ensuite introduit la notion de polynôme symbolique matriciel. Cet outil permet d'assurer que deux représentations redondantes particulières du système sont semblables, sans avoir à calculer le changement de base.

Dans les chapitres qui suivent nous allons exploiter ces résultats pour déterminer diverses représentations particulières des systèmes à non-linéarités de rang 1. Ces modélisations sont basées sur l'utilisation de la représentation dite "forme en flèche" [21].

APPLICATION DU POLYNOME SYMBOLIQUE MATRICIEL (PSM)



ANNEXE I-A :

Démonstration du Théorème I-3

Soit le système à non-linéarités de rang p de type II défini en régime libre par la matrice d'évolution $A(x,t)$ (A-1). Les termes non constants sont tous situés dans les p dernières colonnes.

$$(A-1) \quad A(x,t) = A_0 + \sum_{i=1}^p v_i^1(x,t) h_i^T$$

avec $A_0 \in \mathbb{R}^{q \times q}$, matrice constante

$$\forall i \in \{1, \dots, p\} : \begin{cases} h_i^T = [0, \dots, 0, \underbrace{1}_{q-p+i-1}, 0, \dots, 0] & h_i \in \mathbb{R}^q \\ v_i^1(x,t) \in \mathbb{R}^q \end{cases}$$

Soit $A_p^1(x,t)$ la première forme dilatée à l'ordre p de $A(x,t)$ (I-34).

D'après le Théorème (I-1)

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \exists P_i, \det P_i \neq 0$$

$$P_i(A_{ii}(x,t))P_i^{-1} = F_i(z,t)$$

ou $F_i(z,t)$ est la forme canonique (I-18)

Soit P_0 la matrice de changement de base définie par :

$$P_0 = \text{diag}_{i \in \{1, \dots, p\}} \{P_i\}$$

Si $B_p(z,t) = P_0 A_p^1(x,t) P_0^{-1}$, on a :

$$B_p(z,t) = \begin{bmatrix} B_{ij}(z,t) \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } \forall (i,j) \in \{1, \dots, p\}^2 \quad B_{ij}(z,t) = P_i A_{ij}(x,t) P_j^{-1}$$

La disposition générale des termes non nuls de $B_p(z,t)$ est donnée figure (A-1). Avec d'après (I-18), pour tout i :

$$B_{ii}(z,t) = \begin{bmatrix} C_1^i & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & C_{n_i-1}^i & & \\ & & & & \\ \hline & & & & 0 \\ & & & & & C_{n_i}^i \end{bmatrix}$$

Les matrices C_j^i sont des matrices compagnons constantes, $C_{n_i}^i$ est une matrice à dernière colonne non constante. Pour tout i de $\{1, \dots, p\}$, $A_{ii}(x,t)$ s'écrit sous la forme :

$$A_{ii}(x,t) = A_{ii}^0 + w_i^T(x,t) h_i^1$$

avec : A_{ii}^0 matrice constante de $\mathbb{R}^{(q-p+1) \times (q-p+1)}$

$$h_i^{T'} = [0, \dots, 0, 1] , h_i' \in \mathbb{R}^{q-p+1}$$

Le Théorème (I-2) permet d'affirmer :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\} \quad r_i = \text{ordre } C_{n_i}^i = \underset{k \in \mathbb{N}}{\text{rg}} (h_i', \dots, (A_{ii}^{0T})^k h_i', \dots)$$

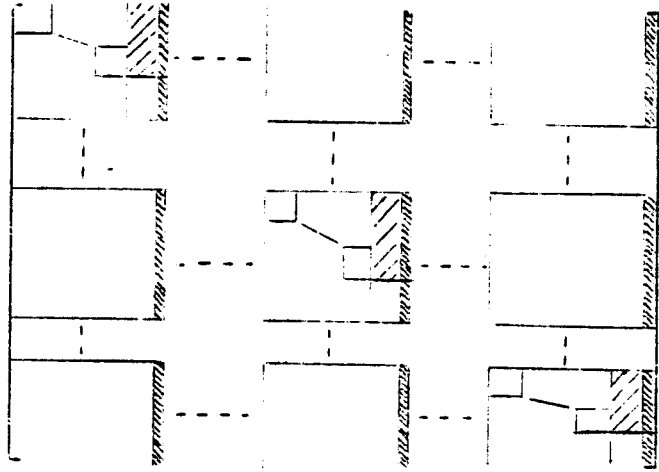


figure A-1

Il existe donc un changement de base (permutation des lignes et des colonnes) qui amène à la forme matricielle (A-2).

$$(A-2) \quad C_p(v,t) = \begin{bmatrix} \text{diag}_{i \in \{1, \dots, p\}} (\text{diag}_{j \in \{1, \dots, n_i-1\}} (C_j^i)) & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$C_p(v,t)$ est représentative d'un système à non-linéarités de rang p , il est possible de mettre tous ses éléments non constants dans les p dernières colonnes. $C_p(v,t)$ est donc semblable à $D_p(u,t)$:

$$D_p(u,t) = \begin{bmatrix} \text{diag}_{i \in \{1, \dots, p\}} (\text{diag}_{j \in \{1, \dots, n_i-1\}} (C_j^i)) & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

avec

$$U = \begin{bmatrix} U_1 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & U_p \end{bmatrix}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, p\} \quad U_i \in \mathbb{R}^{r_i \times (r_i-1)} , U_i = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & & \\ & \dots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

Soit P' la matrice de changement de base définie par :

$$P' = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}$$

avec $\left\{ \begin{array}{l} n=p(q-p+1)-s \quad , \quad s= r_i \\ P[U : e(u,t)] P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \text{---} \\ 0 & \dots & 0 & \text{---} \\ & & I_{s-p} & \text{---} \\ & & & e'(y,t) \end{bmatrix} \\ I_i \text{ est la matrice identité d'ordre } i \end{array} \right.$

Le changement de base P' ne modifie pas la matrice $\text{diag}(\text{diag}(C_j^i))$,
 $\mathcal{D}_P(u,t)$ est donc semblable à $F_p(y,t)$.

ANNEXE I-B :

Démonstration du Lemme 1

Soient les matrices de changement de base :

P_1 de la forme $A_p^2(x,t)$ (I-35) à la forme $A_p^1(x,t)$ (I-34)

P_2 de la forme $A_p^1(x,t)$ à la forme $C_p(y,t)$ (A-2)

P_3 de la forme $C_p(y,t)$ à la forme $F_p(y,t)$ (I-36)

on a :

$$P_3 = [P_{ij}], \forall (i,j) \in \{1, \dots, q-p+1\} \times \{1, \dots, p\} \quad P_{ij} \in \mathbb{R}^{p \times (q-p+1)}$$

$$P_{ij} = \left[\begin{array}{cccc} \circ & \text{---} & \circ \circ \circ & \text{---} & \circ \\ | & & | & & | \\ | & & | & & | \\ | & & | & & | \\ | & & | & & | \\ | & & | & & | \\ \circ & \text{---} & \circ \circ \circ & \text{---} & \circ \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}} \right\} j$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_i$

$$P_2 = P_0 \quad (P_0 \text{ est définie à l'annexe I-A})$$

$$P_1 = P_3^T$$

$$\text{Or} \quad P = P_3 P_2 P_1$$

En effectuant les produits matriciels par blocs, il vient :

$$P_3 P_2 = [M_{ij}] \quad (i,j) \in \{1, \dots, q-p+1\} \times \{1, \dots, p\}$$

$$\text{avec } M_{ij} \in \mathbb{R}^{p \times (q-p+1)}$$

$$M_{ij} = \left[\begin{array}{cccc} & & \circ & \\ & & | & \\ i^{\text{e}} \text{ ligne de } P_i & & & \\ & & \circ & \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}} \right\} j$$

$$\text{Posons } P_i = [P_{kl}^i] \quad (k,l) \in \{1, \dots, q-p+1\}^2$$

Cela conduit à l'expression de P , soit :

$$P = [N_{ij}] \quad (i,j) \in \{1, \dots, q-p+1\}^2$$

$$\text{avec } N_{ij} \in \mathbb{R}^{p \times p}$$

$$N_{ij} = \text{diag}_{k \in \{1, \dots, p\}} [P_{ij}^k]$$

P est donc formée de $(q-p+1)^2$ blocs tous diagonaux; ils appartiennent donc à l'anneau des matrices commutatives d'ordre p . Il est à remarquer que les matrices P_i intervenant dans P_2 sont telles que :

$$\forall i \in \{1, \dots, q-p+1\}, \forall l \in \{1, \dots, q-p\} \quad P_{q-p+1, l}^i = 0 \quad \text{et} \quad P_{q-p+1, q-p+1}^i = 1$$

Ainsi : $\forall j \in \{1, \dots, q-p\} \quad N_{q-p+1, j} = 0$ et $N_{q-p+1, q-p+1} = I_p$

D'après ce qui précède, P se met sous la forme :

$$\begin{bmatrix} P' & N \\ \hline 0 & I_p \end{bmatrix}$$

avec $P' = [N_{ij}] \quad (i, j) \in \{1, \dots, q-p\}^2$

$$N = \begin{bmatrix} N_{1, q-p+1} \\ \vdots \\ N_{q-p, q-p+1} \end{bmatrix}$$

Soit P^{-1} l'inverse de P , on a donc la relation : $PP^{-1} = I_{(q-p+1)p}$

Partitionnons P^{-1} de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ \hline C & D \end{bmatrix}$$

avec $(A, B, C, D) \in \mathbb{R}^{(q-p)p \times (q-p)p} \times \mathbb{R}^{(q-p)p \times p} \times \mathbb{R}^{p \times (q-p)p} \times \mathbb{R}^{p \times p}$

Ce partitionnement implique les relations :

$$\begin{cases} P'A + NC = I_p(q-p) \\ P'B + ND = 0 \\ C = 0, D = I_p \end{cases}$$

P' étant formée de blocs diagonaux, tous commutatifs, son inverse se calcule par la formule [17] :

$$\begin{cases} A = P'^{-1} = [\text{DET } P']^{-1} \otimes [\text{COM } P']^T \\ B = P'^{-1}N \end{cases}$$

L'ensemble des matrices commutatives diagonales étant un anneau, les matrices A et B sont formées de blocs matriciels diagonaux.

ANNEXE I-C :

Démonstration du Lemme 2

On a :

$$A_p^2 = P F_p P^{-1}$$

$$P(A_p^2, \Lambda) = \text{DET} (\Lambda_p \otimes I_{p(q-p+1)} - A_p^2)$$

$$\text{avec } P = [N_{ij}], P^{-1} = [N'_{ij}], (i, j) \in \{1, \dots, q-p+1\}^2$$

Posons $B_p = P(\Lambda_p \otimes I_{p(q-p+1)} - F_p) P^{-1}$, soit :

$$P(A_p^2, \Lambda) = \text{DET } B_p$$

Pour calculer $\text{DET } B_p$, écrivons la forme de B_p :

$$B_p = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ N_{ij} & N_{i, q-p+1} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & I_p & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_p & B_0(y, t) \\ -I_p & B_1(y, t) \\ & \vdots \\ & \vdots \\ & \Lambda_p \\ -I_p & B_{q-p}(y, t) + \Lambda_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ N'_{ij} & N'_{i, q-p+1} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & I_p & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

avec $(N_{ij}, N'_{ij}, N_{i, q-p+1}, N'_{i, q-p+1})$ matrices de D_p , ensemble des

matrices diagonales d'ordre p . Effectuons le produit matriciel, il vient :

$$B_p = \begin{bmatrix} M_{ij} & M_{i, q-p+1} + \sum_{k=1}^{q-p+1} N_{ik} B_{k-1}(x, t) \\ (i, j) \in \{1, \dots, q-p+1\} \times \{1, \dots, q-p\} & i \in \{1, \dots, q-p\} \\ \vdots & \vdots \\ -N'_{q-p, q-p+1} + \Lambda_p + B_{q-p}(x, t) \end{bmatrix}$$

Les M_{ij} apparaissant dans cette décomposition sont des matrices polynomiales en Λ de D_p . Les blocs non constants $B_i(y, t)$ ne sont multipliés qu'à gauche dans B_p , cela permet un calcul de $\text{DET } B_p$ par superposition. Soit :

$$\text{DET } B_p = \sum_{i=0}^{q-p} \Delta_i B_i(y, t) + \Delta_{q-p+1}$$

Les Δ_i sont déterminés en supposant dans B_p tous les $B_j(y, t)$, sauf celui d'indice i . Soient les matrices de $R^{(q-p+1) \times (q-p+1)}$ définies par :

$$\forall i \in \{0, \dots, q-p\} \quad L_p^i = \begin{bmatrix} \Lambda_p & & & 0 \\ -I_p & & & \\ & 0 & & \\ & & \Lambda_p & \\ & & -I_p & 0 \end{bmatrix}^{i+1}, L_p^{q-p+1} = \begin{bmatrix} \Lambda_p & & & \\ -I_p & & & \\ & 0 & & \\ & & & -I_p \Lambda_p \end{bmatrix}$$

Or $\forall i \in \{0, \dots, q-p+1\} \quad \Delta_i = \text{DET } P L_p^i P^{-1}$

P, L_p^i, P^{-1} étant partitionnées en blocs commutatifs d'ordre p , il vient d'après [17] :

$$\Delta_i = \text{DET } P \text{ DET } L_p^i \text{ DET } P^{-1}$$

Or, ces trois matrices sont diagonales, et on a les relations :

$$\text{DET } L_p^i = (\Lambda_p)^i$$

$$\text{DET } P \text{ DET } P^{-1} = I_p$$

Soit :

$$P(F_p, \Lambda) = \text{DET } B_p = \Lambda_p^{q-p+1} + \sum_{i=0}^{q-p} B_i(y, \tau) \Lambda_p^i = P(A_p^2, \Lambda)$$

Le polynôme caractéristique généralisé d'ordre p de la deuxième forme dilatée à l'ordre p de $A(x, t)$ détermine donc les blocs $B_i(y, t)$ de la forme canonique $F_p(y, t)$.

ANNEXE I-D :

Démonstration du Théorème I-6

a) Condition nécessaire

Soit P , matrice régulière telle que : $B = P A_p^2 P^{-1}$

Soit Q , matrice régulière telle que : $A_p^2 = Q F_p Q^{-1}$

Q est partitionnable en blocs tous diagonaux (lemme 1), P est supposée avoir la même propriété, (PQ) la vérifie aussi. Par une démonstration analogue à celle du lemme 2, on a :

$$P(B, \Lambda) = P(F_p, \Lambda)$$

$$\text{donc (A-3) } P(B, \Lambda) = P(A_p^2, \Lambda)$$

b) Condition suffisante

Soit le système défini par l'équation :

$$y = B(y, t) y, \quad y \in \mathbb{R}^{p(q-p+1)}$$

$$y^T = (u_1 v_1 \dots t_1 u_2 v_2 \dots t_2 \dots u_{q-p} v_{q-p} \dots t_{q-p} x_{q-p+1} \dots x_q)$$

Soit $F_p(z, t)$ la forme canonique associée à $B(y, t)$; la même démonstration que pour le lemme 1 montre que la matrice de passage P de B à F_p est une matrice partitionnable en $(q-p+1)^2$ blocs diagonaux d'ordre p .

On a donc :

$$P(B, \Lambda) = P(F_p, \Lambda)$$

Si l'identité (A-3) est vérifiée, $B(y, t)$ et $A_p^2(x, t)$ ont même forme canonique. Elles sont donc semblables.

Soit Q , formée de blocs tous diagonaux, telle que

$$F_p(z, t) = Q A_p^2(x, t) Q^{-1}$$

L'ensemble des matrices diagonales d'ordre p étant un anneau, la matrice de passage R de B à A_p^2 , $R = PQ$, est formée de blocs diagonaux d'ordre p .

CHAPITRE II

REPRÉSENTATION DES SYSTÈMES

A

NON-LINÉARITÉS DE RANG 1



INTRODUCTION.

Des travaux antérieurs [22, 23, 24] ont montré l'importance d'une modélisation faisant intervenir une forme en flèche.

Ce deuxième chapitre envisage la représentation des systèmes à non-linéarités de rang 1 par une forme en flèche épaisse. Dans cette forme apparaît notamment une diagonale principale constituée de blocs matriciels. L'utilisation du polynôme symbolique permet alors de déterminer les coefficients en fonction des termes choisis sur la diagonale.

L'application de ces résultats est alors faite sur les systèmes monovariables de type Lure' Postnikov. Deux modélisations sont alors proposées : les termes non constants étant regroupés soit dans la dernière colonne soit dans la première colonne de la forme en flèche choisie. Cette dernière forme convient particulièrement à la représentation de certains systèmes plus complexes que les systèmes Lure' Postnikov monovariables.

L'utilisation de ces formes matricielles en vue de l'analyse et la synthèse des systèmes Lure' Postnikov monovariables sera faite au chapitre 3.

I - REPRÉSENTATIONS DES SYSTÈMES À NON-LINÉARITÉS DE RANG 1.

Comme nous l'avons rappelé dans le chapitre I, les systèmes à non linéarités de rang 1 sont modélisables à l'aide de la forme canonique $F(x,t)$ (I-18). Cette forme est triangulaire supérieure par blocs, avec une diagonale principale formée de matrices compagnons [14], dont une seule est non constante.

Des travaux antérieurs [1] ont cependant montré qu'il était souvent possible de se ramener au cas usuel où $F(x,t)$ est réduite à une seule forme compagnon.

C'est donc ce cas que nous étudierons.

I.1 - Représentations usuelles.

I.1.1 - Forme compagnon.

Les processus étudiés dans le chapitre sont donc modélisables à l'aide

d'une équation d'état telle que (II-1).

$$\begin{aligned}
 & \overset{\circ}{x}(t) = A(.) x(t) + B(.) e(t) \\
 & \text{où } \forall t \in [t_0, +\infty[\\
 & x(t) \in \mathbb{R}^q, \text{ vecteur état} \\
 & e(t) \in \mathbb{R}, \text{ entrée scalaire du système}
 \end{aligned}$$

(II-1)

$$A(.) = \begin{bmatrix} 0 & & & -\hat{a}_0 - \hat{b}_0 f_0^*(.) \\ & \ddots & & \vdots \\ 1 & & 0 & \\ & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & 1 - \hat{a}_{q-1} - \hat{b}_{q-1} f_{q-1}^*(.) \end{bmatrix}$$

$$B^T(.) = [\hat{b}_0 f_0^*(.), \dots, \hat{b}_{q-1} f_{q-1}^*(.)]$$

$\forall i \in \{0, \dots, q-1\}$ $f_i^*(.)$ fonction réelle non constante dépendant de l'état, du temps et/ou de paramètres externes

$*(\hat{a}_i, \hat{b}_i) \in \mathbb{R}^2$

La représentation (II-1) proposée pour ce système est de type II. Ce sont des modélisations de ce type que nous envisagerons par la suite. Néanmoins toute une étude parallèle peut être menée sur des représentations de type I, les résultats obtenus dans un tel cas se déduisent immédiatement de ceux obtenus pour le type II envisagé.

Si on considère la matrice $A(.)$ à chaque instant, on peut lui associer un polynôme caractéristique calculé comme si $A(.)$ était constante. Ce polynôme appelé polynôme symbolique [1], noté $p(\lambda, .)$, est calculé comme suit :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad p(\lambda, .) = \lambda^q + \sum_{i=0}^{q-1} (\hat{a}_i + \hat{b}_i f_i^*(.)) \lambda^i \quad (\text{II-2})$$

Or une décomposition possible de $A(\cdot)$ est :

$$A(\cdot) = A_o + v(\cdot) h^T \quad (\text{II-3})$$

avec $A_o = \begin{bmatrix} 0 & & & -\hat{a}_o \\ 1 & & 0 & \\ & & & \vdots \\ & 0 & & \\ & & & \vdots \\ & & & -\hat{a}_{q-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}, A_o \in \mathbb{R}^{q \times q}$

$$v^T(\cdot) = [-\hat{b}_o f_o^*(\cdot), \dots, -\hat{b}_{q-1} f_{q-1}^*(\cdot)], v(\cdot) \in \mathbb{R}^q$$

$$h^T = [0, \dots, 0, 1], h \in \mathbb{R}^q$$

Le système est donc tel que l'on ait la relation :

$$\text{rg}(h, A_o^T h, \dots, (A_o^T)^{q-1} h) = q \quad (\text{II-4})$$

Ainsi, suivant les résultats rappelés au chapitre précédent (§ III-6) toute matrice du régime libre de ce système semblable à (II-1) sera déterminée par l'identité de son polynôme symbolique et de (II-2). Soit $B(\cdot)$ une représentation de ce système en régime libre. $B(\cdot)$ sera semblable à $A(\cdot)$ si et seulement si est vérifiée la condition (II-5).

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \det(\lambda I_q - B(\cdot)) = p(\lambda, \cdot) \quad (\text{II-5})$$

Nous proposons, dans ce qui suit, diverses représentations semblables à $A(\cdot)$ et de même type, basées sur la notion de forme en flèche [25]. La représentation en régime dynamique est alors déduite par la méthode précisée au chapitre I (§ II.1.2).

I.1.2 - Forme en flèche mince.

Il a été montré [1, 25] que ces processus peuvent être représentés en régime libre à l'aide d'une forme en flèche mince (II-6).

$$\overset{\circ}{x} = F(.) x \quad (\text{II-6})$$

avec x vecteur état de \mathbb{R}^q considéré et

$$F(.) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & g_1^*(.) \\ & \ddots & & & & & \vdots \\ & & 0 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_{q-1} & & g_{q-1}^*(.) \\ & & & & & & \vdots \\ 1 & \text{-----} & & & & 1 & g_q^*(.) \end{bmatrix}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} * \forall (i,j) \in \{1, \dots, q-1\}^2, i \neq j \Leftrightarrow \lambda_i \neq \lambda_j \\ * \forall i \in \{1, \dots, q-1\} g_i^*(.) = - \left[\frac{P(\lambda_i, .)}{\prod_{\substack{j=i \\ j \neq i}}^{q-1} (\lambda_i - \lambda_j)} \right] \\ * g_q^*(.) = - \hat{a}_{q-1} - \sum_{i=1}^{q-1} \lambda_i - \hat{b}_{q-1} f_{q-1}^*(.) \end{array} \right.$$

avec $p(\lambda, .)$ défini en (I-2).

La forme du vecteur de commande $B(.)$ détermine les termes non constants à considérer (chapitre I, § II.1.2).

Il vient la représentation en régime dynamique (II-7) de type II :

$$\overset{\circ}{x} = F(.) x(t) + U(.) e(t) \quad (\text{II-7})$$

avec

$$U^T(.) = [h_1^*(.), \dots, h_q^*(.)]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \{1, \dots, q-1\} \quad h_i^*(.) = \frac{\sum_{j=0}^{q-1} f_j^*(.) \lambda_i^j \hat{b}_j}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q-1} (\lambda_i - \lambda_j)} \\ h_q^*(.) = f_{q-1}^*(.) \hat{b}_{q-1} \end{array} \right.$$

Le choix de la diagonale principale permet de choisir la forme de la colonne non constante de la matrice d'évolution [22, 24].

Afin de généraliser ce point de vue nous proposons de représenter les systèmes à non-linéarités de rang 1 à l'aide d'une forme en flèche épaisse [25].

I.2 - Modélisation par des formes en flèche épaisse .

I.2.1 - Définition et propriétés des formes en flèche épaisse [25]

La matrice d'évolution $FE(.)$ d'un système régi par une équation d'état en régime libre,

$$\dot{x} = FE(.) x \quad , \quad x \in \mathbb{R}^q$$

est dite forme en flèche épaisse d'ordre r (notée FE) si elle possède la structure suivante :

$$(II-8) \quad FE(.) = \begin{bmatrix} A_{11}(.) & & & & & & A_{1r}(.) \\ & \ddots & & & & & \vdots \\ & & 0 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & A_{r-1,r-1}(.) & & A_{r-1,r}(.) \\ A_{r1}(.) & \text{-----} & & & A_{r,r-1}(.) & & A_{rr}(.) \end{bmatrix}$$

où

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,r\}^2 \quad A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}, \quad \sum_{i=1}^r n_i = \sum_{j=1}^r n_j = q$$

La forme en flèche de la matrice caractéristique $FE(\cdot)$ permet de décomposer le système en sous-systèmes, S_i , $i \in \{1,\dots,r\}$, dont les matrices caractéristiques sont les blocs matriciels situés sur la diagonale principale de $FE(\cdot)$ (cf. schéma figure 9). Cette modélisation privilégie le dernier sous-système S_r , qui a été appelé système de pointe ou système coordonateur.

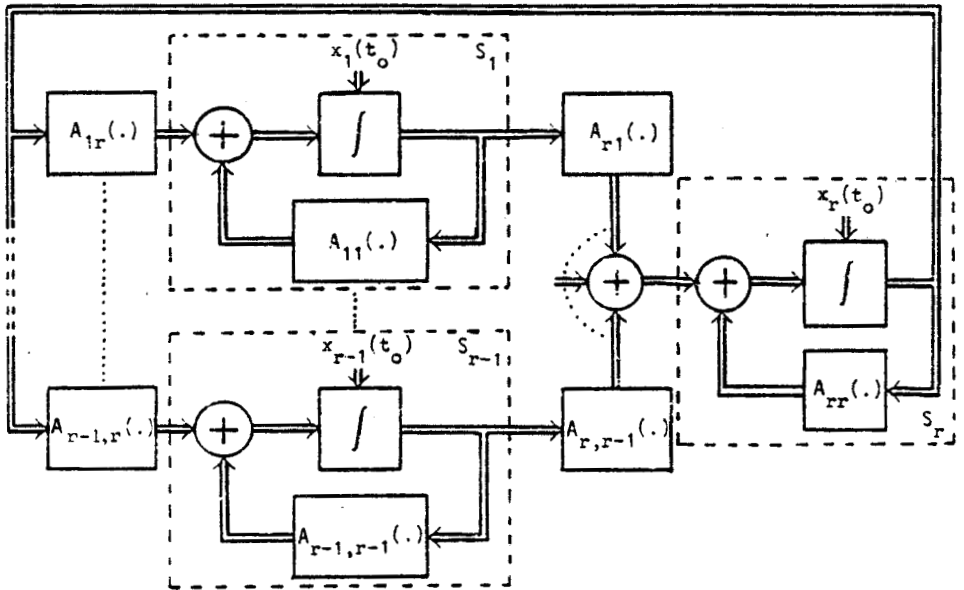


Figure 9.

Il est à noter que le rôle privilégié du système coordonateur ne vient que de la forme de la modélisation adoptée, et non du système réel. Comme nous le verrons par la suite, il est tout à fait possible pour un système donné de changer de système coordonateur.

Dans [25] a été démontré un théorème permettant de calculer le déterminant d'une forme en flèche épaisse :

Théorème.

Lorsque les matrices $A_{i i}(\cdot)$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, r-1\}$, sont régulières le déterminant de $FE(\cdot)$ définie par (II-8) est égal à la quantité

$$(II-9) \quad \det [A_{rr}(\cdot) - \prod_{i=1}^{r-1} A_{ri}(\cdot) A_{ii}^{-1}(\cdot) A_{i2}(\cdot)] \prod_{i=1}^{r-1} \det A_{ii}(\cdot)$$

Ce théorème sera utilisé systématiquement, pour démontrer les propositions énoncées au cours de ce chapitre.

I.2.2 - Modélisation des systèmes à non-linéarités de rang 1.

Pour les systèmes à non-linéarités de rang 1 de type II (II-1) nous nous proposons de mettre en évidence, à l'aide du polynôme symbolique, des matrices d'évolution du type (II-8) avec les particularités suivantes :

$$- \forall i \in \{1, \dots, r-1\} A_{ri} \in \mathbb{R}^{n_i}, A_{ri} = [1, 1, \dots, 1]$$

$$- \forall i \in \{1, \dots, r-1\} A_{ir}(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_i}$$

$$- A_{rr}(\cdot) \in \mathbb{R}$$

$$- \forall i \in \{1, \dots, r-1\}, A_{ii} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$$

(II-10)

$$A_{ii} \in \left\{ J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & & \parallel & \\ & 0 & & \lambda_i \\ & & & 1 \end{bmatrix}, J_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i} \right.$$

$$R_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i & 1 & 0 & & 0 \\ -b_i & a_i & 0 & 1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & a_i & b_i & & \\ & & -b_i & a_i & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & a_i & b_i \\ & & & & & -b_i & a_i \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$$

Tous les termes non constants de $FE(\cdot)$ sont regroupés dans la dernière colonne. Le système coordonateur est ici un système d'ordre 1.

Les représentations $FE(\cdot)$ et $A(\cdot)$ seront semblables si on a :

$$\det(\lambda I_q - FE(.)) = p(\lambda, .)$$

où $p(\lambda, .)$ est le polynôme symbolique défini en (II-2).

Or la matrice $(\lambda I_q - FE(.))$ est également une matrice de forme en flèche épaisse, le polynôme caractéristique instantané de $FE(.)$ peut donc se calculer à l'aide de (II-9). Il vient alors :

$$p(\lambda, .) = \left[\det \left((\lambda I_{nr} - A_{rr}(.)) - \sum_{i=1}^{r-1} A_{ri} (\lambda I_{ni} - A_{ii})^{-1} A_{ir}(.)) \right) \right]$$

$$\times \prod_{i=1}^{r-1} \det (\lambda I_{ni} - A_{ii}). \quad (\text{II-11})$$

Cette relation va permettre, comme nous le montrons dans ce qui suit, de déterminer les termes non constants de $FE(.)$, lorsque les valeurs des blocs situés sur la diagonale principale sont fixées arbitrairement.

II - DÉTERMINATION DES TERMES NON CONSTANTS.

Dans cette partie, nous énonçons des propositions qui permettent de déterminer explicitement les termes non constants $g_1^j(.)$ intervenant dans la dernière colonne de $FE(.)$ (II-10). Mais, par souci de simplifier l'utilisation des règles présentées, nous les proposons d'abord dans des cas particuliers avant d'aborder le cas général. Les propositions 1, 2, 3 qui vont suivre ne sont donc que des énoncés de la proposition générale 4, établis sur des cas plus simples. Les démonstrations de ces trois premières propositions sont établies en annexes.

II.0 - Notations.

Les blocs matriciels qui apparaissent dans la diagonale principale de la représentation proposée sont de deux formes : J_i et R_i (§. I.2.2).

J_i , de dimension n_i , sera appelé un bloc de Jordan [18] et de Jordan simple si J_i est un scalaire ($n_i = 1$) ;

R_i de dimension $2n_i$ sera appelé bloc de rotation, de rotation simple dans le cas où R_i appartient à $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ($n_i = 1$).

où

$$\left\{ \begin{array}{l} - \forall (i,j) \in \{1, \dots, r-1\}^2 \quad i \neq j \Leftrightarrow \lambda_i \neq \lambda_j \\ - \forall i \in \{1, \dots, r-1\} \quad \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_i & 1 \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i} \\ - \forall i \in \{1, \dots, r-1\} \quad \forall j \in \{1, \dots, n_i\} \quad g_j^i(.) \in \mathbb{R} \\ - g_r(.) \in \mathbb{R} \\ - \sum_{i=1}^{r-1} n_i = q-1 \end{array} \right.$$

Nous poserons de plus :

$$\forall i \in \{1, \dots, r-1\}, R_i(\lambda) = \prod_{\substack{e=1 \\ e \neq i}}^{r-1} (\lambda - \lambda_e)^{n_e}$$

Le polynôme symbolique de $F_1(.)$ sera noté $p(\lambda, .)$.

Nous démontrons (annexe II-A) la proposition suivante qui donne l'expression des termes non constants $g_j^i(.)$ fonction des λ_i et des termes non constants initiaux $f_i^*(.)$.

Proposition 1.

Le système (II-1) peut être représenté en régime libre, après changement de base par

$$\dot{y} = F_1(.) y,$$

où $F_1(.)$ est définie en (II-12) et y le vecteur état de \mathbb{R}^q considéré. Les termes non constants $g_j^i(.)$ sont définis de proche en proche par les relations :

$$g_r(.) = -\hat{a}_{q-1} - \hat{b}_{q-1} f_{q-1}^*(.) - \sum_{i=1}^{r-1} n_i \lambda_i$$

$$g_1^i(.) = - \frac{p(\lambda_i, .)}{R_i(\lambda_i)}$$

$$\forall j \in \{2, \dots, n_i\}$$

$$\sum_{k=1}^j g_k^i(.) = - \frac{1}{(j-1)!} \left[\frac{p^{(j-1)}(\lambda, .) + \sum_{p=0}^{j-2} \binom{p}{j-1} R_i^{(j-p-1)}(\lambda) p! \sum_{e=1}^{p+1} g_e^i(.)}{R_i(\lambda)} \right]_{\lambda = \lambda_i}$$

$$\text{ou bien} \quad \sum_{k=1}^j g_k^i(.) = - \frac{1}{(j-1)!} \left[\frac{p(\lambda, .)}{R_i(\lambda)} \right]_{\lambda = \lambda_i}^{(j-1)}$$

Suivant la nature du système (ordre du système élevé, ordre des blocs de Jordan élevé, moyens informatiques, ...) il sera préférable d'employer une formulation plutôt que l'autre pour déterminer les sommes cherchées.

Le cas particulier où tous les blocs diagonaux sont de Jordan simple ($\forall i \in \{1, \dots, r-1\}, n_i = 1$), permet de retrouver la forme en flèche mince rappelée précédemment (II-6).

Il faut remarquer que $p(\lambda, .)$ est un polynôme dont les coefficients sont des fonctions affines des termes non-constants f_i^* . Il en est de même pour les polynômes dérivés de $p(\lambda, .)$. De plus, la détermination des termes non constants de $F_1(.)$ ne fait intervenir que des combinaisons linéaires de tels polynômes en des points particuliers. Par conséquent les termes non constants de $F_1(.)$ seront des fonctions affines des termes non constants $f_i^*(.)$ de $A(.)$. Cette remarque se trouvera vérifiée pour toutes les formes que nous aborderons par la suite.

II.2 - Blocs de rotation simple.

Nous envisageons dans ce paragraphe le cas où tous blocs A_{ii} de $FE(.)$ sont de la forme :

$$\forall i \in \{1, \dots, r-1\} \quad A_{ii} = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{bmatrix}$$

On modélise alors le système par la forme en flèche épaisse $F_2(.)$ (II-13).

$$(II-13) \quad F_2(\cdot) = \begin{bmatrix} \begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & \\ \hline -b_1 & a_1 & \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{c} g_2^1(\cdot) \\ g_1^1(\cdot) \end{array} \\ & & \vdots \\ & & \begin{array}{c} g_2^{r-1}(\cdot) \\ g_1^{r-1}(\cdot) \end{array} \\ & & \vdots \\ & & g_r(\cdot) \end{bmatrix}$$

où :

- $\forall (i,j) \in \{1, \dots, r-1\}^2_{i \neq j} \iff a_i \neq a_j \text{ ou } |b_i| \neq |b_j|$
- $\forall i \in \{1, \dots, r-1\} \quad b_i \neq 0, b_i \in \mathbb{R}, a_i \in \mathbb{R}$
- $\forall i \in \{1, \dots, r-1\} \quad \forall j \in \{1, 2\} \quad g_j^i(\cdot) \in \mathbb{R}$
- $g_r(\cdot) \in \mathbb{R}$
- $2(r-1) = q-1.$

On pose les notations suivantes :

$$\forall i \in \{1, \dots, r-1\}$$

$$- \mu_i = a_i + i b_i, \text{ avec } i^2 = -1$$

$$- R_i(\lambda) = \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^{r-1} ((\lambda - a_\ell)^2 + b_\ell^2)$$

$$- \alpha_i = \text{Réel} \left[\frac{p(\lambda, \cdot)}{R_i(\lambda)} \right]_{\lambda=\mu_i} ; \beta_i = \text{Im} \left[\frac{p(\lambda, \cdot)}{R_i(\lambda)} \right]_{\lambda=\mu_i}$$

L'expression des termes non constants de $F_2(\cdot)$ est donnée par la proposition suivante dont la démonstration est proposée Annexe II-B.

Proposition 2.

Le système (II-1) peut être représenté en régime libre, après changement de base par

$$\dot{\bar{y}} = F_2(\cdot) \bar{y}$$

où $F_2(\cdot)$ est définie en (II-13) et \bar{y} le vecteur état de \mathbb{R}^q considéré. Les termes non constants sont définis par les relations :

$$g_r(\cdot) = -\hat{a}_{q-1} - \hat{b}_{q-1} f_{q-1}^* - 2 \sum_{i=1}^{r-1} a_i$$

$$\forall i \in \{1, \dots, r-1\}$$

$$g_i^1(\cdot) = -\frac{1}{2b_i} [\alpha_i + \beta_i] ; g_i^2(\cdot) = +\frac{1}{2b_i} [\alpha_i - \beta_i]$$

Tous les termes de $F_2(\cdot)$ sont donc réels et les termes non constants sont des combinaisons linéaires des termes non constants $f_i^*(\cdot)$ de $A(\cdot)$ (cf. remarque précédente).

II.3 - Blocs de rotation.

Nous avons étudié précédemment le cas de blocs diagonaux à valeurs propres réelles simples ou multiples puis à valeurs propres complexes simples

Afin de compléter cette étude nous envisageons maintenant une représentation sous forme en flèche épaisse dont les blocs de la diagonale principale sont des blocs de rotation, correspondant à des valeurs propres complexes multiples. La matrice d'évolution est alors du type (II-14) :

b) Nous définissons des fonctions S_i^j et D_i^j des coefficients de la dernière colonne de $F_3(\cdot)$ comme suit :

$$\forall j \in \{1, \dots, n_i\} \left\{ \begin{array}{l} S_i^j = \sum_{k=1}^j (g_{i2}^k(\cdot) + g_{i1}^k(\cdot)) \\ D_i^j = \sum_{k=1}^j (g_{i2}^k(\cdot) - g_{i1}^k(\cdot)) \end{array} \right.$$

c) Pour tout n de \mathbb{N} , $r_i^n(\lambda)$ et $c_i^n(\lambda)$ sont des polynômes réels définis par les parties réelles et imaginaires des puissances $n^{\text{ième}}$ de $(\lambda - \mu_i)$.

$$[\lambda - a_i - ib_i]^n = r_i^n(\lambda) + i c_i^n(\lambda)$$

$$d) R_i^p(\lambda) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r-1} ((\lambda - a_j)^2 + b_j^2)^{n_j}$$

$$e) \forall p \in \{0, \dots, n_i - 1\}$$

$$\gamma_i^p = 2^p p! (ib_i)^p$$

$$A_i^p = [r_i^{n_i - p}(\mu_i)]$$

$$B_i^p = [c_i^{n_i - p}(\mu_i)]$$

$$f) \forall p \in \{0, \dots, n_i - 1\} \quad \forall j \in \{0, \dots, p - 1\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_j^i = \sum_{s=j}^{\min(p, 2j)} s! \binom{s-j}{j} \binom{s}{p} 2^{2j-s} (ib_i)^{2j-s} [(R_i(\lambda) r_i^{n_i-j}(\lambda))^{(p-s)}]_{\lambda=\mu_i} \\ \beta_j^i = \sum_{s=j}^{\min(p, 2j)} s! \binom{s-j}{j} \binom{s}{p} 2^{2j-s} (ib_i)^{2j-s} [(R_i(\lambda) c_i^{n_i-j}(\lambda))^{(p-s)}]_{\lambda=\mu_i} \end{array} \right.$$

A l'aide de ces notations on peut énoncer la proposition 3 dont une démonstration est donnée annexe II.C.

Proposition 3.

Le système (II-1) peut être représenté, en régime libre, après changement de base par

$$\overset{\circ}{y} = F_3(.) y$$

où $F_3(.)$ est la forme définie en (II-14) et y le vecteur état de \mathbb{R}^q considéré. Les termes non constants S_i^j et D_i^j sont définis de proche en proche à l'aide des relations :

$$\forall i \in \{1, \dots, r-1\}$$

$$- \left[\frac{P(\lambda, .)}{R_i(\lambda)} \right]_{\lambda=\mu_i} = A_i^{\circ} S_i^1 + B_i^{\circ} D_i^1$$

$$* \forall j \in \{2, \dots, n_{i-1}\}$$

$$- \left[\frac{P^{(j-1)}(\lambda, .) + \sum_{p=0}^{j-2} (\alpha_i^p S_i^{p+1} + \beta_i^p D_i^{p+1})}{\gamma_i^{j-1} R_i(\lambda)} \right] = A_i^{j-1} S_i^j + B_i^{j-1} D_i^j$$

Le terme de pointe est donné par :

$$g_r(.) = - \hat{a}_{q-1} - \sum_{i=1}^{r-1} 2n_i a_i - \hat{b}_{q-1} f_{q-1}^*(.)$$

Le fait d'obtenir de proche en proche les termes S_i^j et D_i^j à l'aide de la proposition précédente permet d'avoir immédiatement les termes non constants de $F_2(.)$.

En effet de la notation b) vient la relation (II-15) :

$$(II-15) \quad \forall i \in \{1, \dots, r-1\}, \forall j \in \{2, \dots, n_{i-1}\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{i2}^j(.) = \frac{(S_i^j - S_i^{j-1}) + (D_i^j - D_i^{j-1})}{2} \\ g_{i1}^j(.) = \frac{(S_i^j - S_i^{j-1}) - (D_i^j - D_i^{j-1})}{2} \end{array} \right.$$

$$B_j^T(\cdot) = [g_{n_j}^j(\cdot), \dots, g_1^j(\cdot)]$$

$$B_j(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_j}$$

$\forall k \in \{1, \dots, t\}$ si $k \neq j$ alors $\lambda_j \neq \lambda_k$

- $\forall j \in \{t+1, \dots, r-1\}$

$$A_{jj} = \begin{bmatrix} a_j & b_j & 1 & 0 \\ -b_j & a_j & 0 & 1 \\ \hline & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ & & a_j & b_j \\ & & -b_j & a_j \end{bmatrix}, (a_j, b_j) \in \mathbb{R}^2, b_j \neq 0$$

$A_{jj} \in \mathbb{R}^{2n_j \times 2n_j}$

$$B_j^T(\cdot) = [g_{j2}^{n_j}(\cdot), \dots, g_{j1}^1(\cdot)]$$

$$B_j \in \mathbb{R}^{2n_j}$$

$\forall k \in \{t+1, \dots, r-1\}$ si $j \neq k$ alors $a_j \neq a_k$ ou $|b_j| \neq |b_k|$

$$- \sum_{i=1}^t n_i + 2 \sum_{i=t+1}^{r-1} n_i = q-1$$

La détermination des termes non constants fonction des paramètres arbitraires λ_i et (a_i, b_i) est donnée par la proposition 4. Cette proposition, comme nous l'avons déjà dit, regroupe les trois propositions précédentes. C'est pourquoi son énoncé sera établi à l'aide de celles-ci.

Proposition 4.

Le système (II-1) peut être représenté en régime libre, après changement de base par

$$\overset{o}{y} = F_4(.) y$$

où $F_4(.)$ est la forme définie en (II-16) et y le vecteur état de \mathbb{R}^q considéré. Le terme de pointe, non constant est donné par :

$$g_r(.) = -\hat{a}_{q-1} - \hat{b}_{q-1} f_{q-1}^*(.) - \sum_{i=1}^t n_i \lambda_i - 2 \sum_{i=t+1}^{r-1} a_i n_i$$

Les vecteurs non constants intervenant dans la dernière colonne sont déterminés par :

* $\forall i \in \{1, \dots, t\}$ les composantes de $B_i(.)$ sont données par la proposition 1 en convenant de remplacer $R_i(\lambda)$ par :

$$R_i(\lambda) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^t (\lambda - \lambda_j)^{n_j} \prod_{\substack{j=t+1 \\ j \neq i}}^{r-1} ((\lambda - a_j)^2 + b_j^2)^{n_j}$$

* $\forall i \in \{t+1, \dots, r-1\}$ les composantes de $B_i(.)$ sont données par la proposition 3 en convenant de remplacer $R_i(\lambda)$ par :

$$R_i(\lambda) = \prod_{j=1}^t (\lambda - \lambda_j)^{n_j} \prod_{\substack{j=t+1 \\ j \neq i}}^{r-1} ((\lambda - a_j)^2 + b_j^2)^{n_j}$$

La démonstration de cette proposition, comme celles des propositions précédentes, est basée sur le calcul du polynôme symbolique de $F_4(.)$. Par multilinéarité du déterminant, ce polynôme symbolique se décompose en une somme de trois termes ; l'un de ces termes fournit à l'aide de la démonstration de la proposition 1 les termes non constants correspondants aux blocs de Jordan, un autre fournit à l'aide de la démonstration de la proposition 3 les termes non constants correspondants aux blocs de rotation. D'où l'énoncé de la proposition 4.

Une fois déterminé la matrice d'évolution en régime libre, il suffit d'appliquer la méthode précisée au chapitre I (§ II.1, 2) pour déterminer l'équation d'état en régime dynamique. Le choix des paramètres intervenant dans la diagonale principale de la forme en flèche épaisse proposée permet alors de préciser la forme de la dernière colonne de la matrice d'évolution et du vecteur de commande. Ce point de vue généralise de précédents travaux [22, 25].

III - APPLICATION À LA REPRÉSENTATION DES SYSTÈMES LURE' POSTNIKOV MONOVARIABLES.

Les systèmes Lure' Postnikov monovariabiles (chapitre I, I.2.4) constituent une classe particulière de systèmes à non-linéarités de rang 1.

III.1 - Equation d'état en régime dynamique.

Les systèmes étudiés dans cette partie sont ceux présentés figure 5 du chapitre I, dont nous rappelons la structure figure 10 .

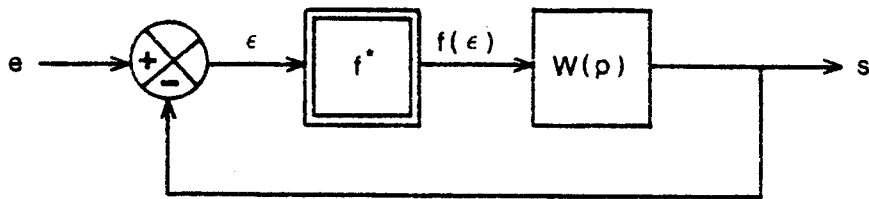


Figure 10.

avec

$$W(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

où

$$\begin{cases} D(p) = p^q + \sum_{i=0}^{q-1} \tilde{a}_i p^i \\ N(p) = \sum_{i=0}^m \tilde{b}_i p^i \quad (m < q) \end{cases}$$

$f^*(\varepsilon)$ est le gain équivalent non constant défini par :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} \quad f(\varepsilon) = f^*(\varepsilon) \cdot \varepsilon.$$

Nous noterons par la suite $f^*(\varepsilon) = f^*$.

Dans tout ce qui suit, la partie linéaire de fonction de transfert $w(p)$ est supposée être non dégénérée [27], c'est à dire que $N(p)$ et $D(p)$ n'ont aucun zéro commun.

Proposition 5.

Le système présenté figure 10 peut, être représenté par l'équation d'état en régime autonome :

$$\dot{x} = FE(\epsilon) x$$

où x est le vecteur état considéré de \mathbb{R}^q et $FE(\epsilon)$ définie en (II-20) avec $\forall \epsilon \in \mathbb{R}$:

$$\forall j \in \{1, \dots, t\} \quad m_j = 1 \quad b_j \neq 0$$

$$\forall k \in \{1, \dots, t\} \quad j \neq k \Leftrightarrow a_j \neq a_k \text{ ou } |b_j| \neq |b_k|$$

$$\begin{cases} \beta_{j1}^1(\epsilon) = -\frac{1}{2b_j} [\text{Réel}(A)^* + \text{Im}(A)^*] \\ \beta_{j2}^1(\epsilon) = +\frac{1}{2b_j} [\text{Réel}(A)^* - \text{Im}(A)^*] \end{cases}$$

avec

$$R_j(\lambda) = \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^t [(\lambda - a_\ell)^2 + b_\ell^2] \prod_{i=1}^s (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$$

$$\begin{aligned} &\forall i \in \{1, \dots, s\} \quad \forall k \in \{1, \dots, s\} \\ &k \neq i \Leftrightarrow \lambda_i \neq \lambda_k \end{aligned}$$

$$\forall j \in \{1, \dots, n_i\}$$

les $\alpha_i^k(\epsilon)$ sont définis de proche en proche par :

$$\sum_{k=1}^j \alpha_i^k(\epsilon) = -\frac{1}{(j-1)!} \left[\frac{(B)^*}{R_i(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_i}$$

avec :

$$R_i(\lambda) = \prod_{j=1}^t [(\lambda - a_j)^2 + b_j^2] \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^s (\lambda - \lambda_\ell)^{n_\ell}$$

$$\gamma(\epsilon) = -\hat{a}_{q-1} - \hat{f}^* \hat{b}_{q-1} - \sum_{i=1}^s n_i \lambda_i - 2 \sum_{j=1}^t a_j$$

$$\left. \begin{aligned}
 (A)^* &= \begin{bmatrix} p(\lambda, \varepsilon) \\ R_j(\varepsilon) \end{bmatrix} \lambda = a_j + i b_j \\
 (B)^* &= p^{(j-1)}(\lambda, \varepsilon) + \sum_{p=0}^{j-2} C_{j-1}^p R_i^{(j-p-1)}(\lambda) p! \sum_{\ell=1}^{p+1} \alpha_i^\ell(\varepsilon)
 \end{aligned} \right\} \text{où}$$

Dans ces relations :

C_{j-1}^p représente les coefficients du binôme, $i^2 = -1$.

$p(\lambda, \varepsilon)$ représente le polynôme symbolique défini en (II-18) et $q^{(i)}(\lambda, \varepsilon)$ la dérivation d'un polynôme $q(\lambda, \varepsilon)$ par rapport à λ :

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad p^{(i)}(\lambda, \varepsilon) = \frac{d^i D(\lambda)}{d\lambda^i} + f^* \frac{d^i N(\lambda)}{d\lambda^i}$$

Cette représentation en régime libre induit une représentation en régime forcé (II-21).

$$(II-21) \quad \overset{\circ}{y}(t) = FE(\varepsilon) y(t) + B_{FE}(\varepsilon) e(t)$$

D'après la méthode précisée au chapitre précédent (§ II.1.2), le vecteur de commande $B_{FE}(\varepsilon)$ est déterminé par la règle suivante :

$$\left| \begin{aligned}
 &\text{Soient } (a, b) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q, \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \\
 &[\alpha_1^T(\varepsilon), \dots, \alpha_s^T(\varepsilon), \beta_1^T(\varepsilon), \dots, \beta_t^T(\varepsilon), \gamma(\varepsilon)] = a^T + f^* b^T \\
 &\text{alors } B_{FE}(\varepsilon) = -b f^*
 \end{aligned} \right.$$

La forme de la dernière colonne de la matrice d'évolution induit donc celle du vecteur de commande.

Les propriétés et propositions énoncées plus haut sont relatives à des systèmes de type II, elles sont transposables aux systèmes de type I. Cependant dans cette étude les non-linéarités étaient toujours regroupées dans la dernière ligne ou la dernière colonne : le système coordonateur (cf. figure 9) est alors non linéaire. A l'aide du polynôme symbolique nous allons mettre en

Proposition 6.

Soit le système figure 10 défini par

$$D(p) = p^q + \sum_{i=0}^{q-1} a_i p^i$$

$$N(p) = p^{q-1} + \sum_{i=0}^{q-2} b_i p^i$$

où $D(p)$ et $N(p)$ n'ont aucun zéro commun.

S'il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tel que le polynôme $P(\lambda)$ défini par

$$P(\lambda) = D(\lambda) - (\lambda + \lambda_1) N(\lambda)$$

vérifie :

$$\bullet d^{\circ}P(\lambda) = q-1 \text{ ou } q-2$$

$$\bullet \text{ les zéros de } P(p) \text{ sont tous distincts notés } \\ -\mu_i, i \in \{2, \dots, q-1\}, -\mu_1 \text{ s'il existe}$$

alors le système peut être représenté par l'équation d'état (II-22) avec

$$* a = 1$$

$$* \lambda_i = \mu_i \quad \forall i \in \{2, \dots, q-1\}$$

$$* \gamma = a_{q-1} - \sum_{i=1}^{q-1} \lambda_i$$

$$* b = a_{q-1} - b_{q-2} - \lambda_1$$

$$* \forall k \in \{2, \dots, q-1\} \quad d_k = - \left[\frac{(p + \lambda_k) N(p)}{\prod_{j=2}^{q-1} (p + \lambda_j)} \right]_{p = -\lambda_k}$$

$$* d_1 = b_{q-3} + \lambda_1 b_{q-2} - a_{q-2} \quad \text{s'il } d^{\circ}P = q-2$$

$$d_1 = b(\lambda_1 - \mu_1) \quad \text{s'il } d^{\circ}P = q-1$$

Proposition 7.

Soit le système figure 10 défini par :

$$D(p) = p^q + \sum_{i=0}^{q-1} a_i p^i$$

$$N(p) = p^{q-2} + \sum_{i=0}^{q-3} b_i p^i$$

où $D(p)$ et $N(p)$ n'ont aucun zéro commun .

Si les $q-2$ zéros de $N(p)$ sont distincts, alors le système peut être représenté, pour un λ_1 donné, par l'équation d'état (II-22), sans terme non constant dans la diagonale, avec :

$$\cdot a = 0$$

$$\cdot \lambda_i = \mu_i \quad \forall i \in \{2, \dots, q-1\} \quad , \quad N(-\mu_i) = 0$$

$$\cdot \gamma = a_{q-1} - \sum_{i=1}^{a-1} \lambda_i$$

$$\cdot b = -1$$

$$\cdot \alpha_i = - \left[\frac{(\lambda + \lambda_i) D(\lambda)}{(\lambda + \lambda_1) N(\lambda)} \right]_{\lambda = -\lambda_i} \quad \mu_i \in \{1, \dots, q\}$$

Dans le cas où le coefficient du terme de plus haut degré de $N(p)$ est $\alpha (\alpha \neq 1)$ on peut se ramener aux hypothèses des deux propositions précédentes en prenant comme non-linéarité $F^* = \alpha f^*$.

IV.2 - Forme en flèche épaisse.

Dans les propriétés précédentes (§ IV.3), l'hypothèse selon laquelle les μ_i doivent être distincts ne permet qu'une représentation par une forme en flèche mince. Selon les méthodes présentées dans la deuxième partie de ce chapitre on peut modéliser ces systèmes à l'aide de formes en flèche épaisse, et ceci avec un coordonateur linéaire. Les blocs situés sur la diagonale sont alors de Jordan ou de rotation, sauf le premier qui est scalaire et non constant. Soit l'équation d'état (II-23) :

$$d_i = (d_{i_2}^{n_i}, d_{i_1}^{n_i}, d_{i_2}^{n_i-1}, \dots, d_{i_2}^1, d_{i_1}^1), d_i \in \mathbb{R}^{2n_i}$$

et

$$C^T(\varepsilon) = [a, 0, \dots, 0, -b]f^*$$

Le calcul du polynôme symbolique de $BE(\varepsilon)$ et l'utilisation de la démonstration de la proposition 4 permet de montrer les deux propositions suivantes. Celles-ci permettent d'envisager les propositions 6 et 7 lorsque les zéros du polynôme $P(\lambda)$ sont multiples ou complexes. La proposition 8 considère, pour un dénominateur de degré q , un numérateur de degré $q-1$, et la proposition 9 un numérateur de degré $q-2$.

Proposition 8.

Soit le système figure 10 défini par :

$$D(p) = p^q + \sum_{i=0}^{q-1} a_i p^i$$

$$N(p) = p^{q-1} + \sum_{i=0}^{q-2} b_i p^i$$

où $D(p)$ et $N(p)$ n'ont aucun zéro commun.

Soient $\lambda_1, \lambda_1 \in \mathbb{R}$, et un polynôme $Q(\lambda)$ de degré 0 ou 1, tels que le polynôme $P(\lambda)$ défini par :

$$P(\lambda) = D(\lambda) - (\lambda + \lambda_1) N(\lambda)$$

s'écrit :

$$P(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \mu_i)^{n_i} \prod_{i=n+1}^m (\lambda - \gamma_i)^2 + \delta_i^2)^{n_i} Q(\lambda)$$

$$\text{avec } \sum_{i=1}^n n_i + 2 \sum_{i=n+1}^m n_i = q-1-d^{\circ}Q$$

$$\forall i \neq j \quad \mu_i \neq \mu_j$$

$$\gamma_i \neq \gamma_j \text{ ou } |\delta_i| \neq |\delta_j|$$

alors le système peut être représenté par l'équation d'état (II-23) avec

$$* a = 1$$

$$* s = n, r = m$$

$$* \forall i \in \{2, \dots, n\} \quad \lambda_i = \mu_i$$

$$* \forall i \in \{n+1, \dots, m\} \quad \alpha_i = \gamma_i$$

$$\beta_i = \delta_i$$

$$* \gamma = a_{q-1} - \lambda_1 + \sum_{i=2}^m n_i \mu_i + 2 \sum_{i=n+1}^m n_i \alpha_i$$

$$* b = a_{q-1} - b_{q-2} - \lambda_1$$

$$* d_1 = b_{q-3} + \lambda_1 b_{q-2} - a_{q-2} \text{ si } Q = 1$$

$$* d_1 = b(\lambda_1 - \mu_1) \quad \text{si } Q = (\lambda + \mu_1)$$

* $\forall i \in \{2, \dots, m\}$ les composantes du vecteur d_i sont des constantes et sont données dans la proposition 4 par la correspondance :

$$P(\lambda, \cdot) \rightarrow N(\lambda)$$

$$\forall i \in \{2, \dots, n\} \quad R_i(\lambda) \rightarrow \prod_{j=2}^n (\lambda - \mu_j)^{n_i} \prod_{j=n+1}^m ((\lambda - \gamma_j)^2 + \delta_j^2)^{n_i}$$

$$\forall j \in \{1, \dots, n_i\} \quad g_j^i(\cdot) \rightarrow d_j^i$$

$$\forall i \in \{n+1, \dots, m\} \quad R_i(\lambda) \rightarrow \prod_{j=2}^n (\lambda - \gamma_i)^{n_i} \prod_{j=m+1}^m ((\lambda - \gamma_i)^2 + \delta_i^2)^{n_i}$$

$$\forall k \in \{1, 2\}$$

$$\forall j \in \{1, \dots, n_i\} \quad g_{i_k}^j(\cdot) \rightarrow d_{i_k}^j$$

Proposition 9.

Soit le système figure 10 défini par

$$D(p) = p^q + \sum_{i=0}^{q-1} a_i p^i$$

$$N(p) = p^{q-2} + \sum_{i=0}^{q-3} b_i p^i$$

où $N(p)$ et $D(p)$ n'ont aucun zéro commun.

Si $N(\lambda)$ s'écrit :

$$N(\lambda) = \prod_{i=2}^n (\lambda - \mu_i)^{n_i} \prod_{i=n+1}^m ((\lambda - \gamma_i)^2 + \delta_i^2)^{n_i}$$

alors le système peut être représenté, pour un λ_1 donné, par l'équation d'état (II-23) avec :

$$\cdot a = 0 \quad s = n, \quad r = m$$

$$\cdot \lambda_i = \mu_i \quad \forall i \in \{2, \dots, n\}$$

$$\cdot \left. \begin{array}{l} \alpha_i = \gamma_i \\ p_i = \delta_i \end{array} \right\} \forall i \in \{n+1, \dots, m\}$$

$$\cdot \gamma = a_{q-1} - \lambda_1 + \sum_{i=2}^n n_i \mu_i + 2 \sum_{i=n-1}^m n_i \alpha_i$$

$$. b = -1$$

$$. d_1 = - \left| \frac{D(\lambda)}{N(\lambda)} \right|_{\lambda = -\lambda_1}$$

. $\forall i \in \{2, \dots, m\}$ les composantes de d_i sont données dans la proposition 4 par la correspondance :

$$p(\lambda, \cdot) \rightarrow D(\lambda)$$

$$\forall i \in \{2, \dots, n\} R_i(\lambda) \rightarrow \frac{(\lambda + \lambda_1) N(\lambda)}{(\lambda - \mu_i)_i^{n_i}}$$

$$\forall j \in \{1, \dots, n_i\} g_j^i(\cdot) \rightarrow d_j^k$$

$$\forall i \in \{n+1, \dots, m\} R_i(\lambda) \rightarrow \frac{(\lambda + \lambda_1) N(\lambda)}{((\lambda - \gamma_i)^2 + \delta_i^2)^{m_i}}$$

$$\forall k \in \{1, 2\} \forall j \in \{1, \dots, n_i\}$$

$$g_{ik}^j(\cdot) \rightarrow d_{ik}^j$$

La proposition 8 (resp. 9) permet donc de faire un changement de coordonnateurs lorsque les racines du polynôme $P(\lambda)$ (resp. $N(\lambda)$) sont quelconques. Dans ce qui suit nous allons étudier une classe de systèmes à non-linéarités de rang 1 pour laquelle les formes à coordonnateurs linéaires sont particulièrement adaptées, il s'agit de systèmes à deux non-linéarités

IV.3 - Systèmes à deux non-linéarités parallèles.

Soit le système monovarié non linéaire représenté figure 11.

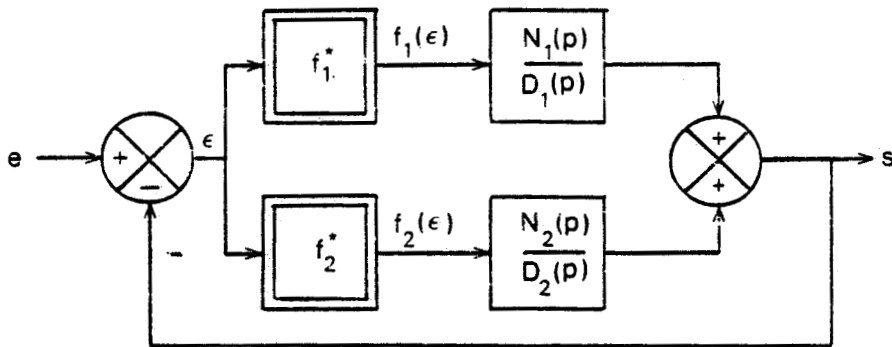


Figure 11.

avec

$$\left\{ \begin{array}{l}
 D_1(p) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^1 p^i \\
 D_2(p) = p^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i^2 p^i \quad (m+n = q) \\
 N_1(p) = p^t + \sum_{i=0}^{t-1} b_i^1 p^i \quad (t < n) \\
 N_2(p) = p^v + \sum_{i=0}^{v-1} b_i^2 p^i \quad (v < m)
 \end{array} \right.$$

Nous allons montrer dans cette partie qu'un tel système peut être simplement représenté à l'aide d'une forme à coordonateur linéaire. Il est cependant nécessaire d'établir quelques propriétés préliminaires sur des systèmes plus complexes.

IV.3.1 - Polynôme symbolique des systèmes à non-linéarités parallèles.

Soit le système défini figure 12.

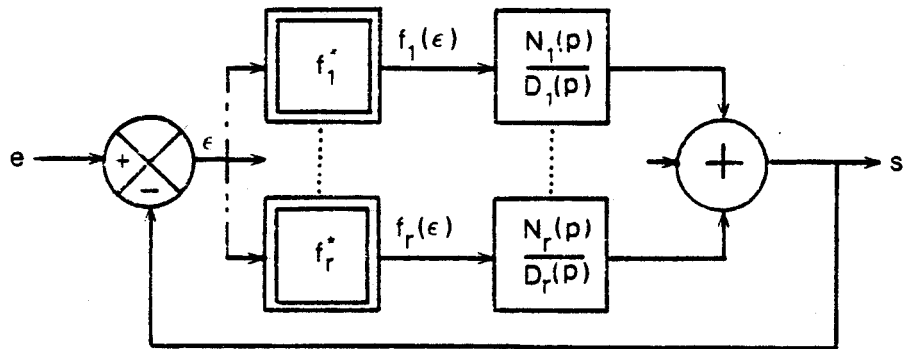


Figure 12.

avec

$$\cdot \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad D_i(p) = p^{n_i} + \sum_{j=0}^{n_i-1} a_j^i p^j$$

$$N_i(p) = \sum_{j=0}^{n_i-1} b_j^i p^j$$

$$\cdot \sum_{i=1}^r n_i = q.$$

Il vient la propriété concernant le calcul du polynôme symbolique d'un tel système.

Propriété.

Le système figure 12 peut être décrit par une représentation d'état dont le polynôme symbolique est :

$$(II-30) \quad p(\lambda, \varepsilon) = \prod_{i=1}^r D_i(\lambda) + \sum_{i=1}^r f_i^* N_i(\lambda) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r D_j(\lambda)$$

Démonstration.

Ce système est un système à non-linéarité de rang 1 (chapitre I).
Soit $A(\varepsilon)$ une forme matricielle le décrivant à l'aide de l'équation d'état :

$$(II-31) \quad \begin{matrix} \circ \\ \mathbf{x} \end{matrix} = A(\varepsilon) \mathbf{x}$$

Le polynôme symbolique de $A(\varepsilon)$ est donc le polynôme caractéristique instantané de $A(\varepsilon)$, calculé comme si tous les termes f_i^* étaient constants [1]. Nous sommes donc dans le cas linéaire ; dans ces conditions en posant, pour tout i , $f_i^* = K_i$, K_i constant, les r chaînes en parallèle de la figure 12 sont équivalentes à un système de fonction de transfert donnée par [30] :

$$(II-32) \quad \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\sum_{i=1}^r K_i N_i(p) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r D_j(p)}{\prod_{j=1}^r D_j(p)}$$

Le polynôme caractéristique du système figure 12 linéarisé est

$$(II-33) \quad P(\lambda) = D(\lambda) + N(\lambda)$$

Le polynôme symbolique du système figure 12 est donc (II-30).

Le polynôme symbolique (II-30) a des racines indépendantes de l'état si et seulement si :

$$(II-34) \quad \forall \lambda_0 \in \mathbb{C}, \forall i \in \{1, \dots, r\} D_i(\lambda_0) = N_i(\lambda_0)$$

Ainsi lorsque les r chaînes du système représenté figure 12 ne présentent aucune simplification d'un pôle par un zéro (toutes les chaînes sont alors non dégénérées), le polynôme symbolique ainsi défini peut être utilisé comme invariant de représentation.

IV.3.2 - Modélisation des systèmes à deux non-linéarités

Considérons maintenant le système à deux chaînes d'action à gains non constants représenté figure 11.

On se propose de le modéliser à l'aide d'une équation d'état faisant intervenir la matrice d'évolution (II-35).

$$(II-35) \quad CE(\epsilon) = \begin{bmatrix} -\lambda_1 - af_1^* & & & 1 \\ & A_{22} & & \\ & & & 1 \\ d_1 + b_1 f_2^* & d_2 \text{-----} & d_r & -\gamma \end{bmatrix}$$

où toutes les notations employées sont précisées en (II-23).

Le polynôme symbolique, invariant de représentation de ce système est, d'après les considérations précédentes :

$$(II-36) \quad p(\lambda, \epsilon) = D_1(\lambda) D_2(\lambda) + f_1^* N_1(\lambda) D_2(\lambda) + f_2^* N_2(\lambda) D_1(\lambda)$$

On doit donc avoir nécessairement la relation suivante :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad p(\lambda, \epsilon) = \det(\lambda I_q - CE(\epsilon))$$

De cette relation vient la proposition suivante :

Proposition 10.

Soit le système Lure'Postnikov à deux non-linéarités défini figure 11 et qui vérifie :

- $N_1(\lambda)$ et $D_1(\lambda)$ n'ont aucun zéro commun
- $N_2(\lambda)$ et $D_2(\lambda)$ n'ont aucun zéro commun
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$D_1(\lambda) N_2(\lambda) = \prod_{i=2}^t (\lambda - \mu_i)^{m_i} \prod_{i=r+1}^v ((\lambda - \alpha_i)^2 + \beta_i^2)^{n_i}$$

avec

$$\sum_{i=1}^t m_i + 2 \sum_{i=r+1}^v n_i = q-2,$$

s'il existe (λ_1, d_1) , $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, λ_1 distinct de tous les $-\mu_i$, $i \in \{2, \dots, t\}$, $d_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad D_1(\lambda) D_2(\lambda) - (\lambda + \lambda_1) D_2(\lambda) N_1(\lambda) = d_1 D_1(\lambda) N_2(\lambda)$$



alors ce système peut être représenté par l'équation d'état :

$$\dot{x}(t) = CE(\varepsilon) x(t) + D(\varepsilon) e(t)$$

où x est le vecteur état considéré, $CE(\varepsilon)$ est défini en (II-35) avec

- 1°) $s = t$, $r = v$, $a = 1$, $b = -1$.
- 2°) $\gamma = a_{q-1} - \lambda_1 + \sum_{i=r}^s m_i \mu_i + 2 \sum_{i=s+1}^r n_i \alpha_i$,
- 3°) $\forall i \in \{2, \dots, 1\} \lambda_i = \mu_i$, $\forall i \in \{s+1, \dots, 2\} \alpha_i + i\beta_i = a_i + ib_i$
- 4°) $d_1 = - \left[\frac{D_2(\lambda)}{N_2(\lambda)} \right]_{\lambda = -\lambda_1}$
- 5°) les d_i sont donnés par la correspondance établie dans les propriétés précédentes avec cependant

$$p(\lambda, \cdot) \rightarrow D_2(\lambda) N_1(\lambda)$$

et

$$D^T(\varepsilon) = [f_1^*, 0 \dots 0, f_2^*]$$

Démonstration.

Soient les polynômes :

$$(II-37) \quad \begin{cases} S(\lambda) = \prod_{i=2}^s (\lambda - \lambda_i)^{m_i} \prod_{i=s+1}^r (\lambda - 2a_i \lambda + a_i^2 + b_i^2)^{n_i} \\ R(\lambda) = S(\lambda) [(\lambda + \gamma) - \sum_{i=2}^r d_i (\lambda I_{n_i} - A_{ii}) U_i] \end{cases}$$

où

$$U_i^T = [1 \dots 1], U_i \in \mathbb{R}^{n_i}$$

Il vient :

$$(II-38) \quad \det (\lambda I_q - CE(\varepsilon)) = (\lambda + \lambda_1) R(\lambda) + d_1 S(\lambda) + f_1^* R(\lambda) + f_2^* S(\lambda)$$

l'égalité des polynômes symboliques fournit :

$$(II-39) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} D_1(\lambda) D_2(\lambda) = (\lambda + \lambda_1) R(\lambda) + d_1 S(\lambda) \\ D_2(\lambda) N_1(\lambda) = R(\lambda) \\ D_1(\lambda) N_2(\lambda) = S(\lambda) \end{cases}$$

On en déduit les relations 1) à 5).

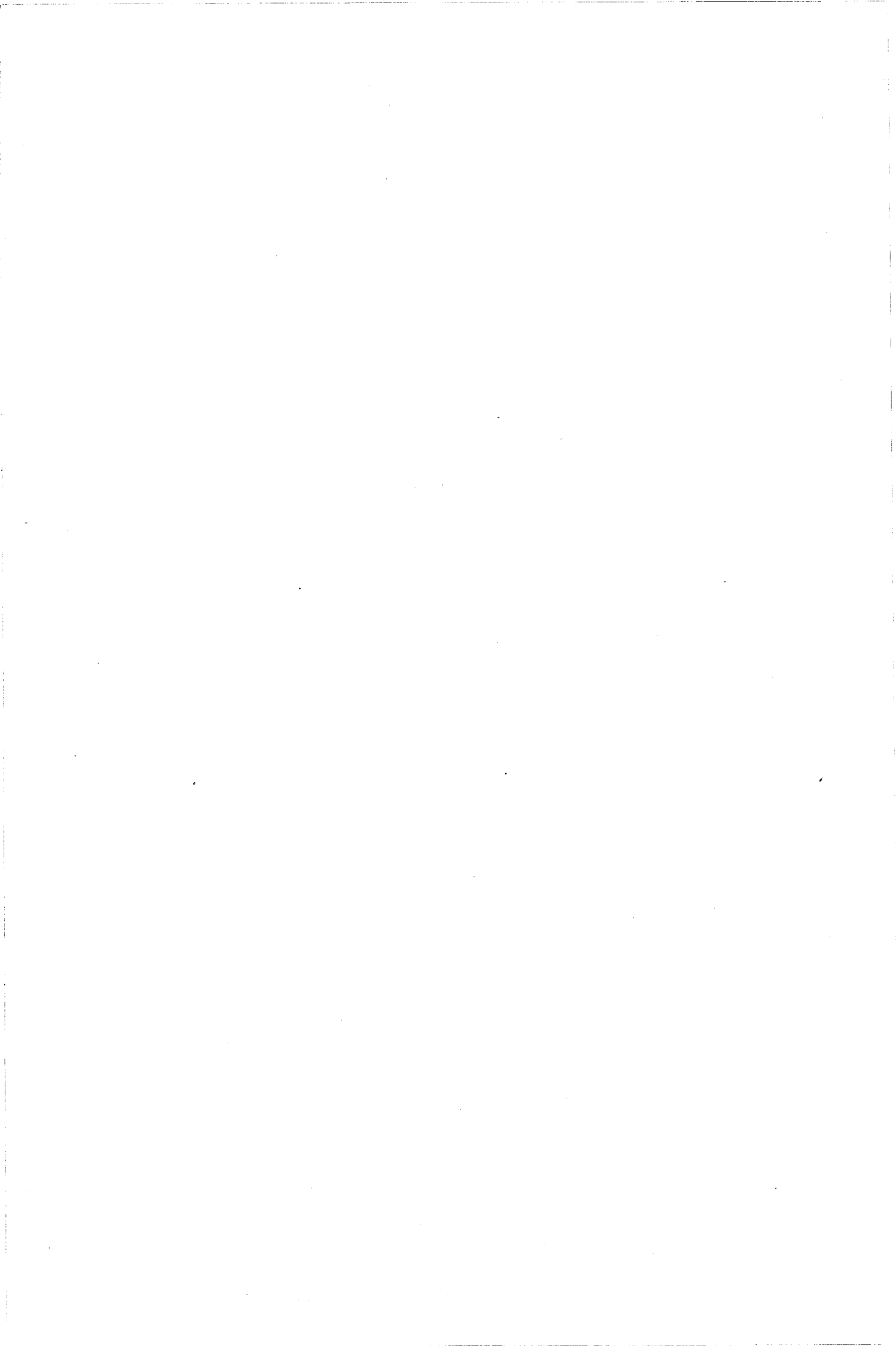
Ces résultats permettent la mise en équation, donc l'analyse et la synthèse des systèmes en parallèle lorsque les gains non constants ont leur entrée commune

CONCLUSION

Les résultats présentés dans ce chapitre permettent de déterminer les coefficients d'une forme en flèche épaisse pour modéliser les systèmes à non-linéarités de rang 1. La mise en équation d'état en régime dynamique est alors immédiate.

Dans le cas particulier des systèmes Lure'Postnikov monovariabiles deux formes en flèche épaisse sont proposées. Dans la première toutes les non-linéarités sont regroupées dans la dernière colonne : la dernière composante d'état est traitée non-linéairement. Dans la deuxième, il y a changement de coordonateur : la matrice d'évolution ne comporte plus que deux termes non-constants. Le choix arbitraire des termes intervenant dans les blocs diagonaux détermine les termes non-constants fonction du gain non-linéaire f^* .

Nous nous proposons dans la suite d'exploiter ces résultats.



$$\text{Or } \forall p \in \{0, \dots, m\}, \left[\frac{d^p}{d\lambda^p} Q_i(\lambda) \right]_{\lambda=\lambda_i} = p! \sum_{k=1}^{p+1} g_k^i(\cdot)$$

Posons la notation :

$$\sum_{k=1}^{m+1} g_k^i(\cdot) = S_i^m$$

Les sommes ainsi introduites sont alors déterminées de proche en proche à l'aide des égalités précédentes. On a donc les relations suivantes :

$$\forall i \in \{1, \dots, r-1\} \quad + \quad S_i^0 = g_1^i(\cdot) = - \left[\frac{P(\lambda, \cdot)}{R_i(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_i}$$

$$\forall m \in \{1, \dots, n_i-1\} \quad + \quad S_i^m = - \frac{1}{m!} \left[\frac{P^{(m)}(\lambda, \cdot) + \sum_{p=0}^{m-1} \binom{p}{m} R_i^{(m-p)}(\lambda) p! S_i^p}{R_i(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_i}$$

Compte tenu de la relation :

$$\forall j \in \{2, \dots, n_i\} \quad g_j^i(\cdot) = S_i^{j-1} - S_i^{j-2} \quad ,$$

les S_i^j permettent de calculer l'un après l'autre les coefficients non constants de la forme matricielle proposée $F_1(\cdot)$.

La deuxième formulation obtenue se démontre alors immédiatement par récurrence .

ANNEXE II-B :

Démonstration de la proposition 2

Pour tout i de $\{1, \dots, r-1\}$, on a les relations suivantes :

soit $A_{ii} = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{bmatrix}$, $A_{ii} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

alors
$$\begin{cases} \det(\lambda I_2 - A_{ii}) = (\lambda - a_i)^2 + b_i^2 \\ (\lambda I_2 - A_{ii})^{-1} = \frac{1}{(\lambda - a_i)^2 + b_i^2} \begin{bmatrix} (\lambda - a_i) & b_i \\ -b_i & (\lambda - a_i) \end{bmatrix} \end{cases}$$

posons : $A_{ri} = [1, 1]$ et $A_{ir} = [g_2^i(\cdot), g_1^i(\cdot)]^T$

il vient la relation :

$$A_{ri} (\lambda I_2 - A_{ii})^{-1} A_{ir} = \frac{1}{(\lambda - a_i)^2 + b_i^2} [(\lambda - a_i)(g_1^i(\cdot) + g_2^i(\cdot)) + b_i(g_1^i(\cdot) - g_2^i(\cdot))]$$

Le polynôme symbolique de la forme $F_2(\cdot)$ a donc pour expression :

$$\det(\lambda I_q - F_2(\cdot)) = (\lambda - g_r(\cdot)) \prod_{i=1}^{r-1} (\lambda - a_i)^2 + b_i^2 - \sum_{i=1}^{r-1} R_i(\lambda) Q_i(\lambda)$$

$$\text{avec } \begin{cases} R_i(\lambda) = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{r-1} (\lambda - a_l)^2 + b_l^2 \\ Q_i(\lambda) = (\lambda - a_i)(g_1^i(\cdot) + g_2^i(\cdot)) + b_i(g_1^i(\cdot) - g_2^i(\cdot)) \end{cases}$$

Introduisons un complexe μ_i , associé à A_{ii} , et défini par : $\mu_i = a_i + \iota b_i$;

l'identité des polynômes symboliques fournit les relations :

$$+ g_r(\cdot) = -a_{q-1} - b_{q-1} f_{q-1}^*(\cdot) - 2 \sum_{i=1}^{r-1} a_i$$

+ $\forall i \in \{1, \dots, r-1\}$, $b_i \neq 0$ soit :

$$\begin{cases} g_1^i(\cdot) - g_2^i(\cdot) + \iota(g_1^i(\cdot) + g_2^i(\cdot)) = -\frac{1}{b_i} \left[\frac{p(\lambda, \cdot)}{R_i(\lambda)} \right]_{\lambda = \mu_i} \\ g_1^i(\cdot) - g_2^i(\cdot) - \iota(g_1^i(\cdot) + g_2^i(\cdot)) = -\frac{1}{b_i} \left[\frac{p(\lambda, \cdot)}{R_i(\lambda)} \right]_{\lambda = \bar{\mu}_i} \end{cases}$$

Tous les coefficients de $p(\lambda, \cdot)$ sont réels, on a de plus :

$$\forall i \in \{1, \dots, r-1\} \quad \left[\frac{p(\lambda, \cdot)}{R_i(\lambda)} \right]_{\bar{\mu}_i} = \overline{\left[\frac{p(\lambda, \cdot)}{R_i(\lambda)} \right]_{\mu_i}}$$

où $\bar{}$ indique la conjugaison dans le plan complexe. De cette

remarque, il vient :

$\forall i \in \{1, \dots, r-1\} :$

$$\begin{cases} g_1^i(\cdot) - g_2^i(\cdot) = -\frac{1}{b_i} \operatorname{R\acute{e}el} \left[\frac{p(\lambda, \cdot)}{R_i(\lambda)} \right]_{\lambda=\mu_i} \\ g_1^i(\cdot) + g_2^i(\cdot) = -\frac{1}{b_i} \operatorname{Imag} \left[\frac{p(\lambda, \cdot)}{R_i(\lambda)} \right]_{\lambda=\mu_i} \end{cases}$$

Soient les relations de la proposition 2 .

ANNEXE II-C :Démonstration de la proposition 3I - Lemme préliminaire

Afin de démontrer la proposition 3, il est nécessaire d'énoncer le lemme suivant :

Lemme : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\mu = a+ib$, $i^2 = -1$
 $+ ((\lambda-a)^2+b^2)^n \Big|_{\lambda=\mu}^{(p)} = 0 \iff p \notin \{n, \dots, 2n\}$
 $+ \forall p \in \{n, \dots, 2n\} ((\lambda-a)^2+b^2)^n \Big|_{\lambda=\mu}^{(p)} = p! \binom{p-n}{n} (2ib)^{2n-p}$
 où (p) désigne une dérivation d'ordre p par rapport à λ et C_i^j sont les coefficients du binôme .

Démonstration : Soient $u = (\lambda-a)^2+b^2$ et $\mu = a+ib$

a) pour tout entier n , u^n est un polynôme de degré $2n$; ainsi pour tout entier p ($p > 2n$), $(u^n)^{(p)}$ est le polynôme nul .

b) soient $v = \lambda - \mu$ et $w = \lambda + \mu$, alors pour tout couple d'entiers (n,p) ($p \leq 2n$), on a :

$$\begin{aligned} (u^n)^{(p)} &= (v^n w^n)^{(p)} \\ &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (v^n)^{(k)} (w^n)^{(p-k)} \\ \text{or } (v^n)^{(k)} &= n(n-1)\dots(n-k+1) v^{n-k} \\ \text{et } (w^n)^{(p-k)} &= n(n-1)\dots(n-p+k+1) w^{n-p+k} \end{aligned}$$

Ainsi au point $\lambda=\mu$ seul le terme, dans la somme précédente, correspondant à l'indice $k=n$ est non nul. Il vient alors :

$$\begin{cases} (u^n)_{\lambda=\mu}^{(p)} = \binom{n}{p} n! n(n-1)\dots(2n-p+1) (w^{2n-p})_{\lambda=\mu} & \text{si } p \geq n \\ (u^n)_{\lambda=\mu}^{(p)} = 0 & \text{si } p < n \end{cases}$$

Or on a les relations : $+ w_{\lambda=\mu} = 2ib$

$$+ \binom{n}{p} n! n(n-1)\dots(2n-p+1) = \binom{p-n}{n} p!$$

ce qui termine la démonstration .

Soit :

$$A_{r_i}(\lambda I_{2n_i} - A_{i_i})^{-1} B_i(.) = \frac{1}{((\lambda - a_i)^2 + b_i^2)^{n_i}} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n_i} ((\lambda - a_i)^2 + b_i^2)^{j-1} (r_i^{n_i-j+1}(\lambda) S_{i_i}^{j+c_i} + c_i^{n_i-j+1}(\lambda) D_i^j) \right)}_{Q_i(\lambda)}$$

En posant $Q_i(\lambda)$, le terme en facteur dans cette expression, il vient :

$$\det(\lambda I_q - F_3(.)) = (\lambda - g_r(.)) \prod_{i=1}^{r-1} ((\lambda - a_i)^2 + b_i^2)^{n_i} - \sum_{i=1}^{r-1} R_i(\lambda) Q_i(\lambda)$$

$A(.)$ et $F_3(.)$ sont semblables si on a identité des polynômes symboliques, de cette identité on tire les relations suivantes :

a) $g_r(.) = -a_{q-1} - \sum_{i=1}^{r-1} 2n_i a_i - b_{q-1} f_{q-1}^*(.)$

b) $\forall i \in \{1, \dots, r-1\}, \forall q \in \{0, \dots, n_i-1\}$

$$[p^{(q)}(\lambda, .)]_{\mu_i} = -[R_i(\lambda) Q_i(\lambda)]_{\mu_i}^{(q)} \quad \text{où } \mu_i = a_i + i b_i$$

Pour simplifier la démonstration, nous omettrons dorénavant le terme comportant D_i^j ; le facteur correspondant à ce terme sera obtenu à partir des résultats donnant celui de S_i^j en remplaçant $r_i^j(\lambda)$ par $c_i^j(\lambda)$.

Posons $u_i = (\lambda - a_i)^2 + b_i^2$, pour tout i de $\{1, \dots, r-1\}$. La relation b) s'écrit alors, pour tout q de $\{0, \dots, n_i-1\}$:

$$-[p^{(q)}(\lambda, .)]_{\mu_i} = \sum_{k=0}^q C_q^k [R_i^{(q-k)}(\lambda)]_{\mu_i} \sum_{l=0}^{n_i-1} \sum_{j=0}^k C_k^j [r_i^{n_i-1}(\lambda)]_{\mu_i}^{(k-j)} [(u_i)^l]_{\mu_i}^{(j)} S_i^{l+1}$$

Soit α_i^l le facteur, dans cette expression, de S_i^{l+1} ; compte tenu du lemme

préliminaire il s'écrit :

$$\alpha_i^l = \sum_{k=1}^q C_q^k [R_i^{(q-k)}(\lambda)]_{\mu_i} \sum_{j=1}^{\min(k, 2l)} C_k^j [r_i^{n_i-1}(\lambda)]_{\mu_i}^{(k-j)} [(u_i)^l]_{\mu_i}^{(j)}$$

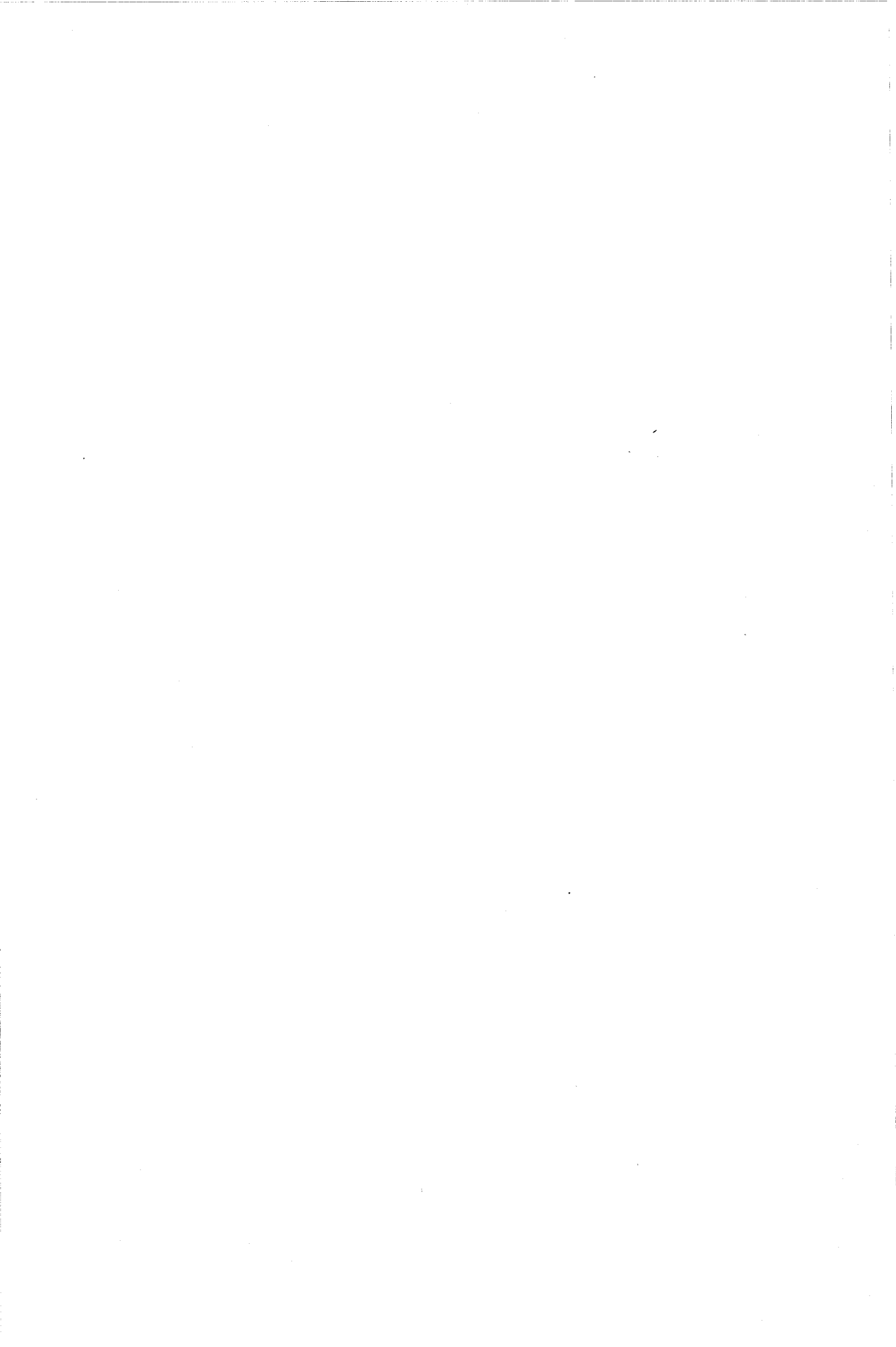
Ainsi lorsque l est strictement supérieur à q le coefficient α_i^l est nul. Au contraire lorsque l est inférieur à q , deux cas sont à considérer, pour déterminer α_i^l .

1) $q \in \{1, \dots, 2l\}$

$$\alpha_i^l = \sum_{j=1}^q C_q^j [(u_i)^l]_{\mu_i}^{(j)} \underbrace{\sum_{k=j}^q C_{q-j}^{k-j} [R_i^{(q-k)}(\lambda) r_i^{n_i-1}(\lambda)^{(k-j)}]_{\mu_i}}_{[R_i(\lambda) r_i^{n_i-1}(\lambda)]_{\mu_i}^{(q-j)}}$$

CHAPITRE III

APPLICATION À L'ANALYSE
DES SYSTÈMES MONOVARIABLES
DE TYPE LURE'POSTNIKOV



INTRODUCTION

L'analyse des systèmes non linéaires dépend de la représentation adoptée nous proposons, dans cette partie, d'étudier la stabilité des systèmes Lure' Postnikov monovariabiles à l'aide des modélisations présentées au cours du chapitre précédent.

Après avoir rappelé quelques définitions de base concernant la stabilité, nous rappelons certains critères qui permettent son étude. Nous montrons ensuite comment les représentations d'état proposées au chapitre II sont particulièrement adaptées à la mise en oeuvre de ces mêmes critères.

Des travaux antérieurs peuvent alors être étendus à de plus larges classes de systèmes.

Dans un dernier temps nous montrons que la méthode de synthèse d'Evans relative aux systèmes linéaires, peut être utilisée dans l'analyse des systèmes non linéaires [40].

I - MÉTHODES D'ÉTUDE DE LA STABILITÉ

I.1 - Définitions.

Les systèmes monovariabiles de type Lure' Postnikov ont été décrits au cours du chapitre II (figure 10). Ces processus, dont nous rappelons la structure figure 1, sont constitués d'une partie linéaire de fonction de transfert $W(p)$ bouclée par un gain non constant $f^*(\epsilon)$ dépendant du signal d'erreur ϵ . Dans toute la suite $f^*(\epsilon)$ sera noté f^* .

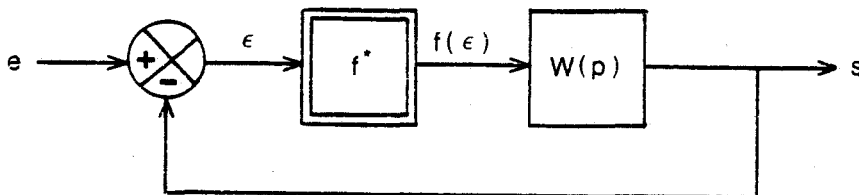


Figure 1

avec $\forall \varepsilon \in \mathbb{R} - \{0\} \quad f(\varepsilon) = f^* \cdot \varepsilon,$

$$W(p) = \frac{N(p)}{D(p)}, \text{ non dégénérée [27]}$$

$$\left. \begin{aligned} N(p) &= \sum_{i=0}^{q-1} b_i p^i \\ D(p) &= p^q + \sum_{i=0}^{q-1} a_i p^i \end{aligned} \right\} \forall i \in \{0, \dots, q-1\}, (a_i, b_i) \in \mathbb{R}^2$$

Soit $x(t)$ un vecteur état choisi pour modéliser le processus. L'étude qui va être menée analyse la stabilité de l'origine $x_e = 0$, position d'équilibre de ce système. La stabilité étant caractérisée par l'une des définitions suivantes

Définition 1. Stabilité [32]

L'équilibre $x_e = 0$ est stable si

$$\forall \varepsilon > 0, \forall t_0 \geq 0, \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0 \quad \|x_0\| < \delta(t_0, \varepsilon) \Rightarrow \forall t \geq t_0 \quad \|x(t, x_0, t_0)\|$$

Si l'origine est stable, partant d'un voisinage suffisamment petit de 0, la trajectoire restera dans un voisinage arbitraire de 0.

Définition 2. Stabilité asymptotique [32]

L'origine est asymptotiquement stable si elle est stable et si

$$\forall t_0 \geq 0 \quad \exists \delta(t_0) > 0 \quad \|x_0\| < \delta(t_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0, t_0) = 0$$

Définition 3. Stabilité asymptotique globale [33]

L'origine est globalement asymptotiquement stable si elle est stable et si toutes les solutions tendent vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

Quelque soit l'état initial d'où l'on part, on converge au bout d'un temps infini vers 0.

I.2 - Rappel de quelques méthodes particulières d'étude de la stabilité.

Pour analyser les systèmes présentés, on utilisera essentiellement deux méthodes :

- le critère pratique de Borne et Gentina [34] qui permet d'appliquer à certains systèmes non linéaires la conjecture du linéaire
- la méthode directe de Lyapunov [35] en utilisant une fonction candidate de type quadratique plus intégral [36, 37].

Ces deux approches utilisent une représentations des systèmes sous la forme équation matricielle d'état et ont mis en évidence l'importance d'une modélisation de type forme en flèche [25].

Comme nous l'avons rappelé, les systèmes figure 1 sont des systèmes à non-linéarités de rang 1 donc modélisables par une matrice d'évolution à une seule ligne ou colonne non constante. Soit la représentation du système figure 1 par (III-1) :

$$(III-1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A(\varepsilon) x(t) \\ x(t) \in \mathbb{R}^q \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, A(\varepsilon) = [a_{ij}], A(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{q \times q} \end{array} \right.$$

Dans (III-1), $A(\varepsilon)$ ou $A^T(\varepsilon)$ est semblable à la forme en flèche mince $F(\varepsilon)$
 (III-2) :

Dans le cas particulier où la matrice $A(\varepsilon)$ est à termes hors diagonaux tous positifs les conditions imposées par le critère interviennent directement sur la matrice.

Il y a alors validité de la conjecture du linéaire, c'est à dire que l'application du critère de Koteliansky (relatif aux systèmes linéaires) peut être menée sur ce type de systèmes non linéaires.

Dans ce sens, Benrejeb a démontré le théorème suivant qui précise une première classe C de systèmes vérifiant la conjecture du linéaire.

Théorème III.1 [25]

Si le système figure 1 a les pôles et les zéros de $W(p)$ alternés et strictement négatifs, une condition de stabilité asymptotique globale de 0 est :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} - \{0\} \quad f^* > - \frac{1}{W(0)}$$

Dans le cas où les pôles et les zéros de $W(p)$ ont la configuration indiquée par le théorème III-1, les k_1^* intervenant dans la forme (III-2) sont tous constants et positifs.

I.2.2 - Méthode directe de Lyapunov.

La méthode directe (ou seconde méthode) de Lyapunov est basée sur le choix d'une fonction particulière, candidate à Lyapunov .

Théorème [35]

S'il existe une fonction scalaire $v(x)$, définie dans un voisinage de l'origine, telle que :

a) $v(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

b) $\dot{v}(0) = 0$

c) $\exists h \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}^q - \{0\} \quad \|x\| < h \Rightarrow \begin{cases} v(x) > 0 \\ \dot{v}(x) \leq 0 \text{ (resp } < 0) \end{cases}$

alors l'équilibre $x=0$ est stable (resp. asymptotiquement stable).

Lorsque le théorème précédent, concluant à la stabilité asymptotique est vérifié sans restriction sur tout l'espace d'état et si la fonction $v(x)$ satisfait à la propriété :

$$c) \quad \lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} v(x) = +\infty$$

(elle est alors dite "non bornée en rayon")

la stabilité est asymptotique globale [44].

Pour étudier les systèmes figure 1 des fonctions candidates à Lyapunov de type quadratique plus intégral ont été proposées par Lure' [36]. Notamment, l'emploi d'une forme en flèche mince a permis à Richard de montrer le théorème suivant :

Théorème III-2 [22]

L'équilibre $x=0$ du système figure 1 est stable si :

- a) $N(\lambda)$ et $D(\lambda)$ n'ont pas de zéro commun
- b) $N(0)$ non nul et $b_{q-1} \geq 0$
- c) Les zéros λ_i de $D'(\lambda) = D(\lambda) - \frac{D(0)}{N(0)} N(\lambda)$ sont tous réels distincts et négatifs (ou nul).
- d) $N(\lambda)$ et $D'(\lambda)$ vérifient les $q-1$ inégalités

$$N(\lambda_i) \left[\frac{\lambda_i(\lambda - \lambda_i)}{D'(\lambda_i)} \right]_{\lambda=\lambda_i} > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, q-1\}$$

$$e) \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \int_0^\varepsilon f(\xi) d\xi > - \frac{D(0)}{N(0)} \frac{\varepsilon^2}{2}$$

La démonstration de ce théorème est basée sur le fait que les propriétés imposées au système impliquent une matrice d'évolution de type pseudo-antisymétrique [38]. Cependant dans le cas où cette propriété n'est pas vérifiée, on peut encore utiliser la même fonction candidate à Lyapunov. Une majoration de la dérivée permet

alors de conclure [38].

Les théorèmes que nous venons de rappeler ont mis en évidence l'importance du choix des termes de la diagonale principale dans une forme en flèche. C'est ce point de vue que nous développerons dans la suite, appliqué aux formes en flèche épaisse.

II - STABILITÉ DES SYSTÈMES MONOVARIABLES DE TYPE LURE' POSTNIKOV

Cette partie est consacrée à l'utilisation des critères précédents de stabilité, pour lesquels les formes en flèche épaisse proposées au chapitre II sont particulièrement adaptées. Ces formes étant des modélisations possibles des systèmes figure 1.

II.1 - Choix des blocs de la diagonale principale.

Divers auteurs, en utilisant la forme en flèche mince (III-2) ont proposés de prendre des valeurs particulières pour les λ_i de façon à ce que les $q-1$ premiers termes de la dernière colonne de la matrice d'évolution soient constants [25, 39] ou tous proportionnels à un même terme non constant [22, 40]. Dans de tels cas les λ_i , $i \in \{1, \dots, q-1\}$ sont alors les $q-1$ racines réelles, toutes distinctes, d'un polynôme de degré q ou $q-1$.

Les propositions énoncées au chapitre II concernent une forme en flèche dont la diagonale est constituée de blocs diagonaux de Jordan (terme λ_i) et de rotation (termes a_j et b_j). Elles permettent d'affirmer que pour tout choix des λ_i distincts et des couples (a_j, b_j) distincts, la dernière colonne de la forme (II-20) est formée de termes $\gamma_i + \delta_i f_i^*$, avec γ_i et δ_i réels.

Nous pouvons alors généraliser le point de vue précédent sur le choix des λ_i dans une forme en flèche mince en énonçant la propriété suivante :

Propriété.

Soit la représentation (II-20) proposée pour le système fig.1, on a :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, s\} \quad \forall k \in \{0, \dots, n_i - 1\}$$

$$* [N^{(k)}(\lambda)]_{\lambda=\lambda_i} = 0 \Rightarrow \alpha_i(\varepsilon) = \alpha_i \text{ vecteur constant}$$

$$* [D^{(k)}(\lambda)]_{\lambda=\lambda_i} = 0 \Rightarrow \alpha_i(\varepsilon) = f^* \alpha_i \text{ où } \alpha_i \text{ est un vecteur constant}$$

$$\forall j \in \{1, \dots, t\} \quad \forall k \in \{0, \dots, m_j - 1\}$$

$$* [N^{(k)}(\lambda)]_{\lambda=a_j+ib_j} = 0 \Rightarrow \beta_j(\varepsilon) = \beta_j \text{ vecteur constant}$$

$$* [D^{(k)}(\lambda)]_{\lambda=a_j+ib_j} = 0 \Rightarrow \beta_j(\varepsilon) = f^* \beta_j \text{ où } \beta_j \text{ est un vecteur constant}$$

Il apparait ainsi que le choix des termes intervenant dans les blocs diagonaux de $FE(\varepsilon)$ (II-20) comme tous racines du numérateur ou tous racines du dénominateur de $W(p)$ permet d'obtenir une dernière colonne dont les $q-1$ premiers termes sont tous proportionnels entre eux. Un tableau récapitulatif de ces résultats est proposé en fin de chapitre.

II.2 - Etude de la stabilité.

Nous allons maintenant exploiter ces propriétés de représentation en étudiant la stabilité de l'équilibre $x=0$. Cette analyse s'appuiera soit sur le critère pratique de Borne et Gentina soit sur le choix d'une fonction candidate à Lyapunov de type quadratique plus intégral.

Dans le cas le plus général, l'une ou l'autre de ces méthodes permet de conclure ; cependant il apparait certains cas particuliers où chacune de ces deux méthodes est plus particulièrement adaptée à la forme de la matrice d'évolution obtenue.

II.2.1 - Numérateur à zéros multiples réels.

Lorsque le numérateur ne présente que des zéros réels, la propriété précédente permet d'obtenir une matrice d'évolution sous forme en flèche épaisse à termes hors diagonaux tous constants et dans les $q-1$ premières colonnes tous positifs.

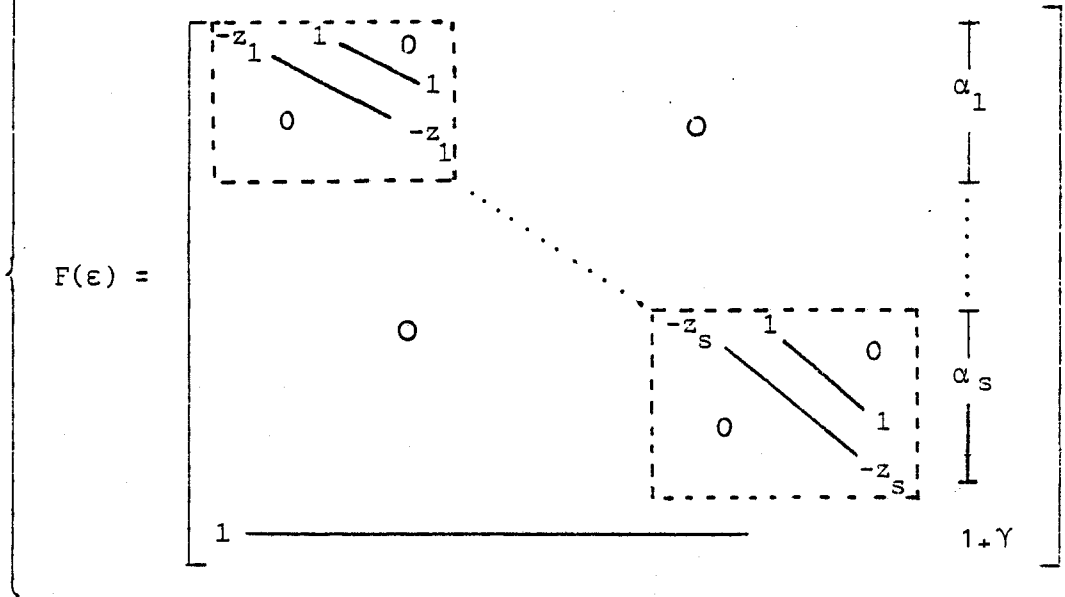
Considérons $N(p)$ écrit sous la forme :

$$N(p) = K \prod_{i=1}^s (p + z_i)^{n_i} \text{ avec } \sum_{i=1}^s n_i = q-1, K \in \mathbb{R} \text{ et } z_i \neq z_j \iff i \neq j.$$

Il vient d'après la proposition 1 (chapitre II), une représentation en régime libre d'un tel système par :

$$(III-3) \quad \overset{\circ}{x} = F(\varepsilon) x$$

avec $x^T = (x_1^T, \dots, x_{q-1}^T, \varepsilon) \in \mathbb{R}^q, x_i^T = (x_i^1, \dots, x_i^{n_i}) \in \mathbb{R}^{n_i}$



où $\gamma = -a_{q-1} - Kf + \frac{1}{K} b_{q-2}$ et

où $\forall i \in \{1, \dots, s\} \alpha_i^T = [\alpha_i^1, \dots, \alpha_i^{n_i}] \in \mathbb{R}^{n_i}$, vecteur constant dont les composantes sont données de proche en proche par la relation :

$$\forall i \in \{1, \dots, s\}, \forall j \in \{1, \dots, n_i\}$$

$$\sum_{k=1}^j \alpha_i^k = - \frac{1}{(j-1)!} \left[\frac{D(\lambda)}{R_i(\lambda)} \right]_{\lambda=-z_i}^{(j-1)}$$

avec $R_i(\lambda) = \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^s (\lambda + z_\ell)^{n_\ell}$

Les blocs de Jordan, situés sur la diagonale principale sont leur propre pseudo-majorants. Une pseudo-majorante, $|F(\epsilon)|$, [8] de $F(\epsilon)$, sera obtenue en prenant la valeur absolue de chacune des composantes des vecteurs α_i , $i \in \{1, \dots\}$. L'application du critère pratique de Borne et Gentina conduit alors, si les zéros du numérateur sont négatifs, à une condition de stabilité exprimée en termes de secteurs limitant les évolutions de la non-linéarité $f^*(\epsilon)$.
Soit,

$$(III-4) \quad (-1)^q \det |F(\epsilon)| > 0$$

ce qui s'exprime plus précisément par :

(III-5)

$$\left[a_{q-1} - \frac{b_{q-2}}{K} + Kf^*(\epsilon) \right] \prod_{i=1}^s z_i^{n_i} > \sum_{i=1}^s \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^s z_l^{n_l} z_i^{k-1} \prod_{l=1}^k |\alpha_i^l|$$

Remarques.

i) Dans les cas où toutes les composantes de tous les vecteurs α_i , $i \in \{1, \dots\}$ déterminées par la proposition 1 du chapitre II, sont positives il y a validité de la conjecture du linéaire (III-5) devient alors :

$$a_0 + b_0 f^* > 0$$

ii) Dans le cas où toutes les composantes de tous les vecteurs α_i , $i \in \{1, \dots\}$ sont strictement négatives, on peut utiliser une fonction candidate à Lyapunov de type quadratique. Une condition suffisante de stabilité est alors donnée par le théorème III-3.

Théorème III-3.

Si le système figure 1 tel que :

$$N(p) = K \prod_{i=1}^s (p + z_i)^{n_i}$$

$$\left(\sum_{i=1}^s n_i = q-1, (z_i \neq z_j \Leftrightarrow i \neq j) \right)$$

vérifie les propriétés

$$\forall i \in \{1, \dots, s\} \left\{ \begin{array}{l} \forall j \in \{1, \dots, n_i\} \alpha_i^j < 0 \\ z_i > \frac{1}{2} \max_{j \in \{2, \dots, n_{i-1}\}} \left(\frac{\alpha_i^1}{\alpha_i}, 1 + \frac{\alpha_i^j}{\alpha_i^{j+1}} \right) \end{array} \right.$$

où les α_i^j sont définis en (III-3).

Une condition de stabilité asymptotique globale de $x=0$ est alors :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} - \{0\} a_{q-1} - \frac{b_{q-2}}{K} + Kf^* > 0$$

La démonstration de ce théorème est basée sur le choix de la fonction candidate de Lyapunov suivante [38] :

$$(III-6) \quad v(x) = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{n_i} - \frac{(x_i^j)^2}{\alpha_i^j} + \varepsilon^2 \right]$$

La majoration des termes rectangles apparaissant dans $\overset{\circ}{v}(x)$ permet de conclure. En effet, il vient de (III-3) :

$$\overset{\circ}{v}(x) \leq \sum_{i=1}^s \left[\left(\frac{z_i}{\alpha_i} - \frac{1}{2\alpha_i} \right) (x_i^1)^2 + \sum_{j=2}^{n_i-1} \left(\frac{1}{\alpha_i^j} \left(z_i - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2\alpha_i^{j+1}} \right) (x_i^j)^2 \right]$$

(III-7)

$$+ \frac{1}{\alpha_i^{n_i}} \left(z_i - \frac{1}{2} \right) (x_i^{n_i})^2 \Big] - \left(a_{q-1} + Kf^* - \frac{b_{q-2}}{K} \right) \varepsilon^2$$

La forme quadratique majorante de $\overset{\circ}{v}(x)$ doit être définie négative, ce qui conduit aux conditions du théorème.

II.2.2 - Exemples.

Afin d'illustrer notre étude nous proposons quelques exemples d'application.

1°) Exemple 1.

Soit le système défini par

$$\begin{cases} N(p) = (p+1)^2 \\ D(p) = p(p+2)^2 \end{cases}$$

La fonction de transfert a un zéro réel double, nous proposons donc de représenter le système à l'aide de l'équation d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \alpha_1^2 \\ 0 & -1 & \alpha_1^1 \\ 1 & 1 & -2 - f^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

Si l'on pose dans (III-3) $z_1 = 1$, d'ordre 2, $R_1(\lambda) = 1$, il vient les relations

$$\begin{cases} \alpha_1^1 = - [p (p+2)^2]_{-1} = 1 \\ \alpha_1^1 + \alpha_1^2 = - [(p+2)(3p+2)]_{-1} = 1, \text{ soit } \alpha_1^2 = 0 \end{cases}$$

Les termes hors diagonaux sont tous positifs ou nuls, il y a donc validité des résultats de la conjecture du linéaire.

La stabilité asymptotique globale de $(x_1, x_2, \varepsilon) = 0$ est assurée si l'on a

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} - \{0\} \quad f^* > 0$$

Nous avons montré à l'aide de cet exemple que l'on peut avoir des systèmes qui vérifient la validité de la conjecture linéaire sans que ceux-ci appartiennent à la classe C précédemment définie. Nous généraliserons ce point de vue dans la suite.

2°) Exemple 2.

Soit le système défini par

$$\begin{cases} N(p) = (p+1)^2 \\ D(p) = p^3 + 2p^2 + 3p + 3 \end{cases}$$

Le numérateur est ici identique à celui de l'exemple précédent, on peut donc suggérer une représentation d'état analogue sous la forme

$$\begin{bmatrix} \circ \\ x_1 \\ \circ \\ x_2 \\ \circ \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \alpha_1^2 \\ 0 & -1 & \alpha_1^1 \\ 1 & 1 & -f^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

De même que précédemment, $R_1(\lambda) = 1$, il vient donc :

$$\begin{cases} \alpha_1^1 = - [D(p)]_{-1} = -1 \\ \alpha_1^1 + \alpha_1^2 = - [3p^2 + 4p + 3]_{-1} = -2, \text{ soit } \alpha_1^2 = -1. \end{cases}$$

Or $\frac{1}{2} \frac{\alpha_1^1}{\alpha_1^2} = \frac{1}{2}$, ce système vérifie donc les conditions d'application du théorème III-3.

Une condition suffisante de stabilité asymptotique de $x=0$ est alors :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} - \{0\} \quad f^* > 0.$$

où $\forall \varepsilon \in \mathbb{R} \forall i \in \{1, \dots, t\} \beta_i^T(\varepsilon) = f^* [\beta_{i2}, \beta_{i1}]$

β_{i2} et β_{i1} étant des réels définis par :

$$\begin{cases} \beta_{i1} = -\frac{1}{2r_i} [\text{Réel}[S_i(\lambda)]_{\lambda=-p_i+ir_i} + \text{Im}[S_i(\lambda)]_{\lambda=-p_i+ir_i}] \\ \beta_{i2} = +\frac{1}{2r_i} [\text{Réel}[S_i(\lambda)]_{\lambda=-p_i+ir_i} - \text{Im}[S_i(\lambda)]_{\lambda=-p_i+ir_i}] \end{cases}$$

avec

$$S_i(\lambda) = \frac{N(\lambda)(\lambda + q_0)((\lambda + p_i)^2 + r_i^2)}{D(\lambda)}$$

. $\forall j \in \{1, \dots, n\} \alpha_j(\varepsilon) = f^* \alpha_j, \alpha_j \in \mathbb{R}$

$$\alpha_j = - \left[\frac{N(\lambda)(\lambda + q_0)(\lambda + q_j)}{D(\lambda)} \right]_{\lambda=-q_j}$$

$$\gamma(\varepsilon) = -q_0 - f^* b_{q-1}$$

Les $q-1$ premiers termes de la dernière colonne sont proportionnels et les termes hors diagonaux des blocs formant la diagonale principale sont opposés. Une fonction candidate à Lyapunov de type quadratique plus intégral particulièrement adaptée à ce type de représentation [41] peut être proposée. Elle nécessite, toutefois, dans le cas le plus général l'emploi d'une majoration des termes de sa dérivée.

Cependant si pour tout i dans $\{1, \dots, t\}$ on a égalité des termes β_{i1} et β_{i2} , la majoration n'est plus nécessaire, ce qui permet de montrer le théorème suivant :

Théorème III-4.

Si le système figure 1 tel que $b_{q-1} > 0$ et

$$D(p) = \prod_{i=1}^t ((p+p_i)^2 + r_i^2) \prod_{j=0}^n (p+q_j)$$

avec

avec $2t+n = q-1$ et

$$\begin{cases} (p_i \neq p_k \text{ ou } |r_i| \neq |r_k|) \Leftrightarrow i \neq k \\ q_j \neq q_k \Leftrightarrow i \neq k \end{cases}$$

vérifie les conditions suivantes :

a) $\forall i \in \{1, \dots, t\}, p_i \geq 0$ et

$$\text{Réel} \left[\frac{N(\lambda)(\lambda+q_0)((\lambda+p_i)^2 + r_i^2)}{D(\lambda)} \right]_{\lambda=-p_i+ir_i} = 0$$

$$r_i \text{ Im} \left[\frac{N(\lambda)(\lambda+q_0)((\lambda+p_i)^2 + r_i^2)}{D(\lambda)} \right]_{\lambda=-p_i+ir_i} > 0$$

b) $\forall j \in \{1, \dots, n\}, q_j \geq 0$ et

$$\left[\frac{N(\lambda)(\lambda+q_0)(\lambda+q_j)}{D(\lambda)} \right]_{\lambda=-q_j} > 0$$

Une condition de stabilité de $x=0$ est alors :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R} - \{0\} \quad f^* > \text{Max} \left(0, -\frac{q_0}{b_{q-1}} \right)$$

La démonstration de ce théorème utilise, à partir de la représentation (III-8), la fonction candidate suivante :

$$W(x) = -\frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^t \left(\frac{x_{i2}^2}{\beta_{i2}} + \frac{x_{i1}^2}{\beta_{i1}} \right) + \sum_{j=1}^n \frac{y_j^2}{\alpha_j} \right] + \int_0^\epsilon f(\xi) d\xi$$

Si les hypothèses a) et b) sont vérifiées, on a les relations :

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, t\} \quad \beta_{i1} = \beta_{i2} = \beta_i, \beta_i < 0 \\ \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad \alpha_j < 0 \end{cases}$$

Il vient alors d'après (III-8) :

$$W(x) = + \sum_{i=1}^t \frac{p_i}{\beta_i} (x_{i2}^2 + x_{i1}^2) + \sum_{j=1}^n \frac{q_j y_i^2}{\alpha_j} - f^*(q_0 + f^* b_{q-1}) \varepsilon^2$$

$W(x)$ est donc une fonction de Lyapunov si le gain non constant f^* vérifie la condition de stabilité énoncée dans le théorème.

Il est à noter que le choix d'une représentation telle que (III-8) interdit l'application des résultats de la conjecture linéaire : en effet la matrice d'évolution possédant des blocs de rotation simple sur sa diagonale principale, elle ne peut être identique à sa pseudomajorante.

Remarque.

Dans le cas où $q_0 = 0$, une condition suffisante de stabilité de $x=0$, lorsque le théorème III-4 s'applique, est :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} - \{0\} \int_0^\varepsilon f(\xi) d\xi > 0$$

II.2.4 - Exemple 3.

Considérons le système défini par :

$$\begin{cases} N(p) = p^2 + 6p + 6 \\ D(p) = p(p^2 + 2p + 2) \end{cases}$$

Le dénominateur $D(p)$ présente comme racines 0 et les complexes $-1+i$ et $-1-i$. Posons $q_0 = 0$, $p_1 = 1$ et $r_1 = 1$, il vient :

$$\frac{N(\lambda) (\lambda + q_0) ((\lambda + p_1)^2 + r_1^2)}{D(\lambda)} = N(\lambda)$$

Or on a les relations :

$$\begin{cases} \text{Réel } [N(\lambda)]_{-1+i} = 0 \\ \text{Im}[N(\lambda)]_{-1+i} = 4 \end{cases}$$

Les conditions du théorème III-4 sont donc vérifiées, une condition suffisante de stabilité de $x=0$ est :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} - \{0\} \int_0^{\varepsilon} f(\xi) d\xi > 0$$

De façon plus générale, il est possible de montrer que tout système défini par :

$$\begin{cases} D(p) = p(p^2 + 2p + 2) \\ N(p) = p^2 + \alpha p + \alpha, \text{ avec } \alpha > 2 \end{cases}$$

admet la même condition de stabilité.

II.3 - Modélisation avec changement de coordonateur.

Nous avons montré dans une partie du chapitre précédent (§ IV) que les systèmes figure 1 pouvaient également être modélisés par des formes en flèche épaisse avec changement de coordonateur (II-23). Les blocs diagonaux sont toujours de Jordan ou de rotation, et les précédentes méthodes d'étude adaptées aux formes en flèche épaisse à coordonateur traité non linéairement sont encore valables. Les formes mises ainsi en évidence sont rappelées dans le tableau récapitulatif.

Nous ne développerons pas ici l'étude de stabilité à l'aide de ce type de modélisation, déjà menée dans [29], mais nous en montrerons l'intérêt sur des exemples.

II.3.1 - Application du critère pratique de Borne et Gentina.

Considérons le système figure 1 défini par :

$$\begin{cases} N(p) = p^3 + 6p^2 + 7p + 1 \\ D(p) = p(p^3 + 7p^2 + 9p + 2) \end{cases}$$

Utilisons la proposition 8, partie IV du chapitre II, avec $\lambda_1 = 0$ il vient $p(p) = \lambda(\lambda+1)^2$.

L'application de cette proposition permet de modéliser le système par l'équation d'état en régime libre :

$$\begin{bmatrix} \circ \\ \varepsilon \\ \circ \\ x_1 \\ \circ \\ x_2 \\ \circ \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f^* & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ f^* & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

L'emploi du critère pratique de Borne et Gentina conduit à la condition de stabilité asymptotique globale de $x = 0$:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} - \{0\} \quad f^* > 0$$

Remarquons que lorsque cette condition est vérifiée, la matrice d'évolution est égale à sa pseudo-majorante ; il y a alors validité de la conjecture linéaire. Cependant les pôles et les zéros de $W(p)$ n'étant pas alternés (figure 2), le système ne fait pas partie de la classe C.

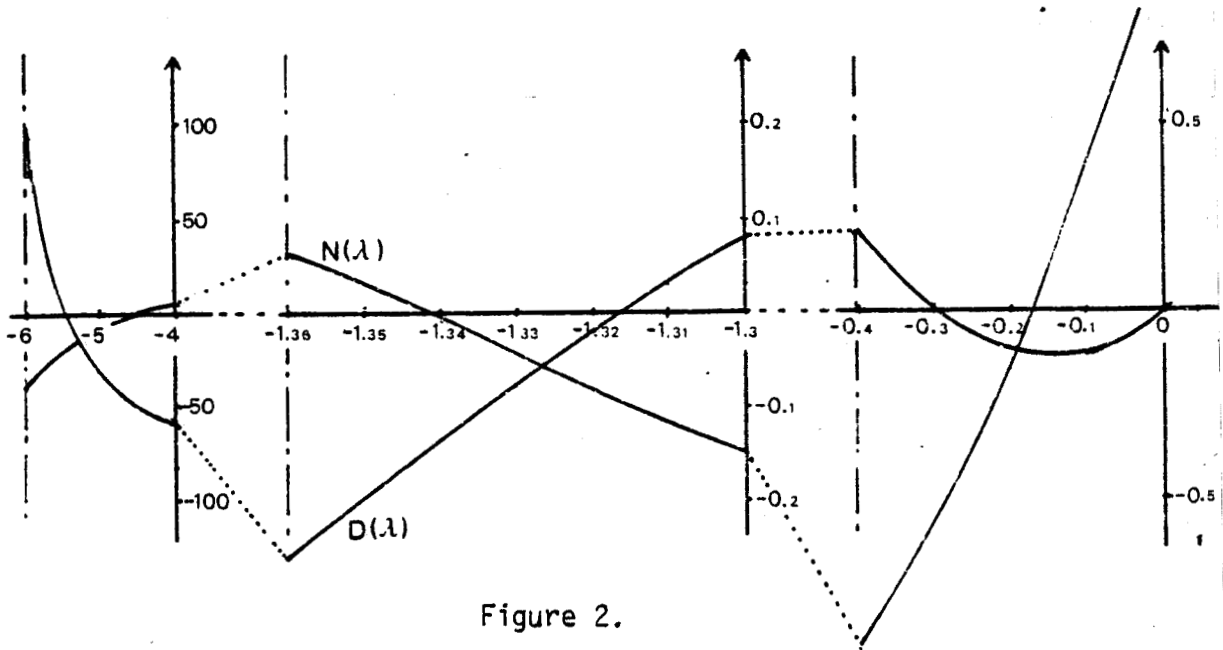


Figure 2.

II.3.2 - Application de la méthode directe de Lyapunov.

Soit maintenant le système défini par :

$$\begin{cases} N(p) = p + 2 \\ D(p) = p^3 + 4p^2 + 8p + 6 \end{cases}$$

il vient d'après la proposition 7 (§ IV, chapitre II) $\lambda_2 = 2$ et $b = 1$.

La trace de la matrice d'évolution est donnée par le coefficient en p^2 du polynôme symbolique. Elle est donc constante. Il en est de même pour chaque terme de la diagonale de la matrice.

Pour $\lambda_1 = 1$, on obtient la représentation :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1-f^* & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Soit la fonction candidate à Lyapunov :

$$v(x) = \int_0^\varepsilon (1 + f^*) \xi d\xi + x_1^2 + \frac{x_2^2}{2}$$

Il vient

$$\overset{\circ}{v}(x) = - (1 + f^*) \varepsilon^2 - 4x_1^2 - x_2^2$$

Une condition de stabilité asymptotique globale de $x=0$ est donc :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} - \{0\} \quad f^* > -1 .$$

Il est à remarquer que sur une telle représentation le critère pratique de Borne et Gentina ne permet pas de conclure ; en effet une condition de stabilité serait :

$$\det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ |1+f^*| & 2 & -1 \end{bmatrix} < 0$$

Soit

$$|1 + f^*| < 0$$

ce qui est impossible.

III - APPLICATION DE LA MÉTHODE DU LIEU DES RACINES À LA SYNTHÈSE DE SYSTÈMES NON LINÉAIRES.

Nous nous proposons de montrer, dans cette partie, que l'association du lieu des racines [43] et d'une modélisation en forme en flèche mince (III-2) peut être intéressante dans l'analyse des systèmes Lure' Postnikov monovariabiles.

III.1 - Représentation utilisée.

Considérons le système figure 1, il vient la proposition suivante :

Proposition.

Soit a , $a \in \mathbb{R}$, tel que le polynôme

$$Q(\lambda) = D(\lambda) + a N(\lambda)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, q-1\} N(\mu_i) \neq 0$$

Posons dans $F(\varepsilon)$ (III-2)

$$\forall i \in \{1, \dots, q-1\} \lambda_i = \mu_i$$

le dernier terme de la diagonale est alors égal à :

$$-a_{q-1} - b_{q-1} (a+g^*) - \sum_{i=1}^{q-1} \mu_i$$

avec

$$a+g^* = f^*$$

$$\text{or, } a_{q-1} + ab_{q-1} = - \sum_{i=1}^{q-1} \mu_i - \mu_q$$

où μ_q est la $q^{\text{ième}}$ racine de $Q(\lambda) = D(\lambda) + a N(\lambda)$.

Il vient alors $A(\varepsilon)$.

Remarques.

i) Dans le cas où la $q^{\text{ième}}$ racine de $Q(\lambda)$ est nulle ($\mu_q = 0$), les termes intervenant dans la dernière colonne sont alors tous proportionnels au gain non constant g^* .

C'est alors le cas où :

$$a = - \frac{D(0)}{N(0)} \quad [22]$$

ii) Le choix du polynôme $Q(\lambda)$ interdit de modéliser le système à l'aide de termes tous constants dans les $(q-1)$ premières lignes de la dernière colonne. cela correspondrait au cas limite a infini. Cet inconvénient peut être levé en introduisant de la même manière à partir de la représentation (III-2) le polynôme :

$$Q'(\lambda) = b D(\lambda) + N(\lambda) \quad \text{où } b \in \mathbb{R}$$

et en faisant un raisonnement analogue.

iii) La technique de modélisation adoptée ici, revient à faire un placement de pôles de la partie linéaire. Il est en effet équivalent, en régime libre, de considérer le système sous sa forme initiale (1) ou sous la forme finale (4) (Figure 3).

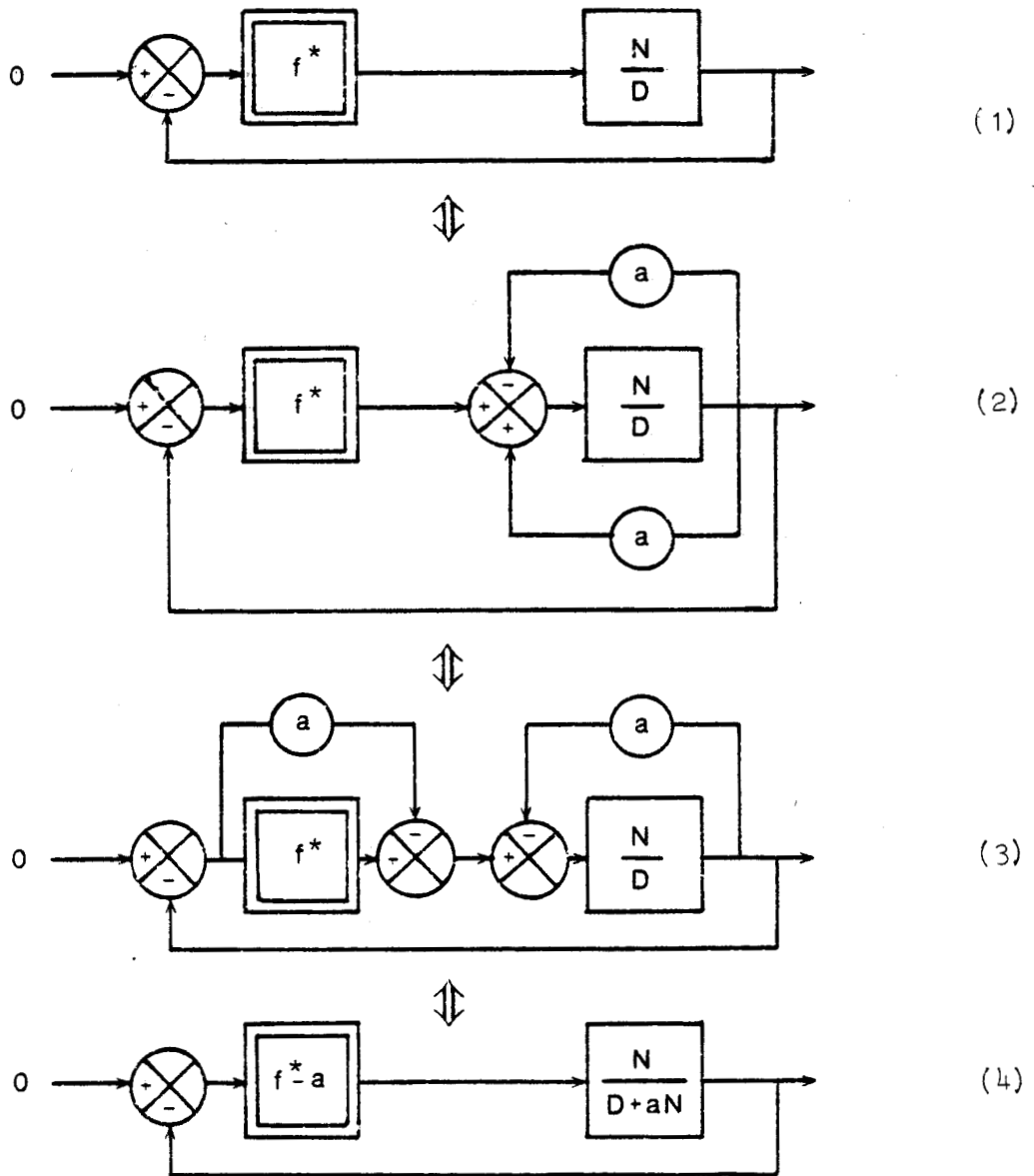


Figure 3

III.2 - Etude de stabilité.

L'analyse du système figure 1, dans le cas général, à partir de la représentation (III-10) peut être menée, comme nous l'avons rappelé au début de ce chapitre, à partir du critère pratique de Borne et Gentina ou à l'aide de la méthode directe de Lyapunov.

Cependant dans le cas où tous les coefficients k_i , $i \in \{1, \dots, q-1\}$, sont de même signe, il apparaît que (III-10) conduit à des conditions optimales d'application de ces critères.

Théorème III.5.

k_i positifs, g^* positif. L'équilibre $x=0$ du système figure 1 est stable au sens de Lyapunov si :

a) $N(\lambda)$ et $D(\lambda)$ n'ont pas de zéro commun

b) Il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $D(\lambda) + a.N(\lambda)$ possède au moins $q-1$ zéros réels distincts et négatifs (ou nuls), μ_i , $i \in \{1, \dots, q-1\}$

$$c) \forall i \in \{1, \dots, q-1\} \quad k_i = \frac{N(\mu_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q-1} (\mu_i - \mu_j)} > 0$$

d) Soit μ_q , la $q^{\text{ième}}$ racine de $D(\lambda) + a.N(\lambda)$:

$$- \text{si } b_{q-1} > 0, \forall \epsilon \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$f^* > - \frac{D(\mu_q)}{N(\mu_q)} + \text{Max} \left(0, \frac{\mu_q}{b_{q-1}} \right)$$

$$- \text{si } b_{q-1} < 0, \forall \epsilon \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$- \frac{D(\mu_q)}{N(\mu_q)} < f^* < - \frac{D(\mu_q)}{N(\mu_q)} + \frac{\mu_q}{b_{q-1}}, \quad \mu_q < 0$$

$$- \text{si } b_{q-1} = 0, \forall \varepsilon \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$f^* > - \frac{D(\mu_q)}{N(\mu_q)} ; \mu_q < 0 .$$

Démonstration.

- de (a) et (b), il vient la représentation (III-10).

- Soit la fonction candidate à Lyapunov

$$v(y) = \sum_{i=1}^{q-1} \frac{y_i^2}{2k_i} + \int_0^\xi g^* \xi d\xi$$

il vient

$$\dot{v}(y) = \sum_{i=1}^{q-1} \frac{\mu_i y_i^2}{k_i} + g^* (\mu_q - b_{q-1} g^*) \varepsilon^2$$

avec

$$g^* = f^* + \frac{D(\mu_q)}{N(\mu_q)}$$

- Les conditions (b), (c), (d) permettent d'affirmer que $v(y)$ est une fonction de Lyapunov pour le système décrit figure 1.

Dans le cas particulier où μ_q est nul, il vient le corollaire :

Corollaire.

L'équilibre $x=0$ du système décrit figure 1 est stable au sens de Lyapunov si :

a) $N(\lambda)$ et $D(\lambda)$ n'ont pas de zéro commun

b) $D(\lambda) - \frac{D(0)}{N(0)} N(\lambda)$ possède une racine nulle et $q-1$ zéros réels distincts et négatifs (ou nuls), $\mu_i, i \in \{1, \dots, q-1\}$.

$$c) b_{q-1} > 0$$

$$d) \forall i \in \{1, \dots, q-1\} k_i > 0$$

$$e) \forall \varepsilon \in \int_0^\varepsilon \mathbb{R} - \{0\} f(\xi) \cdot d\xi > - \frac{D(0)}{N(0)} \cdot \frac{\varepsilon^2}{2}$$

Lorsque tous les termes hors diagonaux de (III-10) sont positifs l'application du critère de Borne et Gentina permet de montrer le théorème suivant :

Théorème (III-6).

$k_i g^*$ négatifs. L'équilibre $x=0$ du système figure 1 est stable si on a les propriétés suivantes :

$$a) N(\lambda) \text{ et } D(\lambda) \text{ n'ont pas de zéro commun, } b_0 > 0$$

$$b) \exists a \in \mathbb{R}, D(\lambda) + a.N(\lambda) \text{ possède } q-1 \text{ zéros réels distincts et négatifs, } \mu_i, i \in \{1, \dots, q-1\}; \mu_q \text{ est la } q^{\text{ième}} \text{ racine de } D(\lambda) + a.N(\lambda).$$

Et si l'une des conditions suivantes est réalisée :

$$C1 - \forall i \in \{1, \dots, q-1\} k_i < 0$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} - \{0\} f^* > \text{Max} \left(- \frac{D(\mu_q)}{N(\mu_q)}, - \frac{1}{W(0)} \right)$$

$$C2 - \forall i \in \{1, \dots, q-1\} k_i < 0$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} - \{0\} - \frac{D(\mu_q)}{N(\mu_q)} > f^* > - \frac{1}{W(0)}$$

De même, le cas où $\mu_q = 0$ conduit au corollaire suivant :

Corollaire.

L'équilibre $x=0$ du système figure 1 est stable si on a les propriétés suivantes :

$$a) N(\lambda) \text{ et } D(\lambda) \text{ n'ont pas de zéro commun, } b_0 > 0$$

b) $D(\lambda) - \frac{D(0)}{N(0)} N(\lambda)$ possède q zéros distincts réels négatifs ou nuls, μ_i , $i \in \{1, \dots, q-1\}$, $\mu_q = 0$

c) $\forall i \in \{1, \dots, q-1\} \frac{N(\lambda_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q-1} (\mu_i - \mu_j)} < 0$

d) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R} - \{0\} \quad f^* > -\frac{1}{W(0)}$

Nous allons montrer que ce corollaire étend à une plus vaste classe de systèmes la condition de Benrejeb [25] concernant les systèmes dont le numérateur et le dénominateur forment une paire positive [18].

III.3 - Interprétation structurelle des conditions.

III.3.1 - Coefficients multiplicateurs de même signe .

Avant de poursuivre notre étude il est nécessaire de rappeler la définition d'une paire positive de polynômes.

Définition 10 [18].

Un couple ordonné $(P(\lambda), Q(\lambda))$ de polynômes, tels que $d^{\circ}P = m$, $d^{\circ}Q = m$ ou $m-1$, forme une paire positive si les racines p_1, \dots, p_m de $P(\lambda)$ et q_1, \dots, q_m (ou q_1, \dots, q_{m-1}) de $Q(\lambda)$ sont toutes distinctes, réelles, négatives et alternent comme il suit :

$$q_1 < p_1 < q_2 < p_2 < \dots < q_m < p_m < 0$$

$$(\text{ou } p_1 < q_1 < p_2 < q_2 < \dots < q_{m-1} < p_m < 0)$$

et si leurs coefficients les plus élevés sont de même signe.

L'utilisation de cette définition permet d'interpréter les conditions (c) des théorèmes et corollaires en tant que positivité d'un couple de polynômes.

Supposons vérifiées, pour les polynômes $N(\lambda)$ et $D(\lambda)$, les conditions suivantes :

a) $N(\lambda)$ et $D(\lambda)$ n'ont pas de zéro commun

$$b) D(\lambda) = \lambda^q + \sum_{i=0}^{q-1} a_i \lambda^i$$

$$N(\lambda) = \sum_{i=0}^{q-1} b_i \lambda^i \text{ avec } b_{q-1} > 0 \text{ ou } b_{q-2} > 0 \text{ si } b_{q-1} = 0$$

c) soit $a \in \mathbb{R}$, $Q(\lambda) = D(\lambda) + a N(\lambda)$ possède $q-1$ zéros réels distincts négatifs, μ_i , $i \in \{1, \dots, q-1\}$ tels que :

$$\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_{q-1} < 0$$

Soit $R(\lambda)$ le polynôme défini par :

$$R(\lambda) = \frac{Q(\lambda)}{(\lambda - \mu_q)}$$

où μ_q est la $q^{\text{ième}}$ racine de $Q(\lambda)$.

En conservant la notation

$$k_i = \frac{N(\mu_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q-1} (\mu_i - \mu_j)},$$

il vient les propriétés suivantes :

Propriété 1.

$(R(\lambda), N(\lambda))$ forme une paire positive si et seulement si :

$$\forall i \in \{1, \dots, q-1\} \quad k_i > 0$$

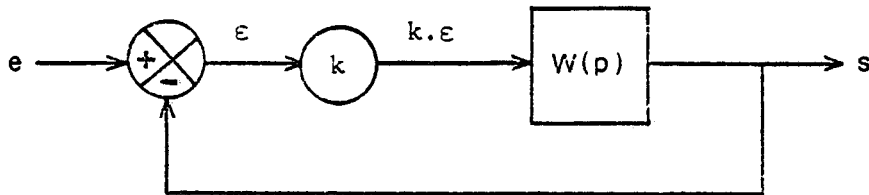
Propriété 2.

$(N(\lambda), R(\lambda))$ forme une paire positive si et seulement si :

$$\forall i \in \{1, \dots, q-1\} \quad k_i < 0.$$

III.3.2 - Utilisation du lieu d'Evans.

L'interprétation de la condition b) des théorèmes proposés peut directement être faite sur le tracé du lieu d'Evans [43] du système linéarisé, figure 4, en remplaçant le gain non constant f^* par un gain constant k .



$$W(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Figure 4

Le lieu d'Evans est l'évolution dans le plan complexe des racines du polynôme $D(\lambda) + k N(\lambda)$ lorsque k décrit \mathbb{R} .

L'observation de ce lieu permet de dire, pour $N(p)$ et $D(p)$ donnés, si l'on peut avoir simultanément q ou $q-1$ racines réelles distinctes et négatives.

III.4 - Théorèmes.

Des paragraphes précédents on déduit les théorèmes suivants dont les conditions interviennent simplement sur la partie linéaire du système figure 1.

Théorème III-7.

Si le système décrit figure 1 possède les propriétés suivantes :

- a) $N(\lambda)$ et $D(\lambda)$ n'ont pas de zéro commun
- b) $b_{q-1} > 0$ ou $b_{q-2} > 0$ si $b_{q-1} = 0$.
- c) $\exists k \in \mathbb{R}$, le lieu d'Evans du système linéarisé (figure 4) possède $q-1$ zéros réels distincts et négatifs, μ_i , $i \in \{1, \dots, q-1\}$

d) $\left(\frac{D(\lambda) + k.N(\lambda)}{(\lambda - \mu_q)}, N(\lambda) \right)$ forme une paire positive où μ_q est la

$q^{\text{ième}}$ racine de $D(\lambda) + k.N(\lambda)$

alors l'équilibre $x=0$ est globalement asymptotiquement stable si l'on a :

. si $b_{q-1} \neq 0 \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$f^* > - \frac{D(\mu_q)}{N(\mu_q)} + \text{Max} \left(0, \frac{\mu_q}{b_{q-1}} \right)$$

. si $b_{q-1} = 0 \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R} - \{0\} \left\{ \begin{array}{l} \mu_q < 0 \\ f^* > - \frac{D(\mu_q)}{N(\mu_q)} \end{array} \right.$

Théorème III-8.

Si le système décrit figure 1 possède les propriétés a), b) et c) du théorème précédent et si de plus :

$b_0 > 0$ et $(N(\lambda); \frac{D(\lambda) + k.N(\lambda)}{(\lambda - \mu_q)})$ forme une paire positive, avec μ_q , $q^{\text{ième}}$ racine de $D(\lambda) + k.N(\lambda)$, alors l'équilibre $x=0$ est globalement asymptotiquement stable si l'on a :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R} - \{0\} \quad f^* > \text{Max} \left(- \frac{D(\mu_q)}{N(\mu_q)}, - \frac{1}{W(0)} \right)$$

Dans le cas où $\mu_q = 0$, on peut regrouper ces deux théorèmes. Le résultat obtenu permet alors de généraliser à une très large classe de processus la condition de Benrejeb [25], sous la forme du théorème suivant :

Théorème III-9.

Si le système décrit figure 1 possède les propriétés suivantes :

a) $N(\lambda)$ et $D(\lambda)$ n'ont pas de zéro commun, $b_0 > 0$

b) $b_{q-1} > 0$ ou $b_{q-2} > 0$ si $b_{q-1} = 0$

c) le lieu d'Evans du système linéarisé présente simultanément $q-1$ racines réelles distinctes et négatives et une racine nulle

$$d) \left(\frac{D(\lambda) - \frac{D(0)}{N(0)} N(\lambda)}{\lambda}, N(\lambda) \right) \text{ ou } (N(\lambda), \frac{D(\lambda) - \frac{D(0)}{N(0)} N(\lambda)}{\lambda}) \text{ forme}$$

une paire positive

alors l'équilibre $x=0$ est globalement asymptotiquement stable si l'on a :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} - \{0\} \quad f^* > -\frac{1}{W(0)}$$

Remarques.

i) La même étude menée à l'aide du polynôme $Q'(\lambda) = b D(\lambda) + N(\lambda)$ permet de généraliser des résultats précédents [25] par le cas $b = 0$.

Il suffit alors de remplacer dans le théorème la condition d) par :

d') $(D(\lambda), N(\lambda))$ forme une paire positive

ii) La condition " $(D(\lambda) - \frac{D(0)}{N(0)} N(\lambda), N(\lambda))$ forme une paire positive" permet de conclure à la stabilité locale de l'équilibre $x=0$ si est vérifié :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \int_0^\varepsilon f(\varepsilon) . d\varepsilon > -\frac{\varepsilon^2}{W(0)} \quad [39]$$

III.5 - Exemple d'application.

Soit le système défini par :

$$\begin{cases} N(p) = p+1 \\ D(p) = (p+2)(p^2 + 2p + 2) \end{cases}$$

D'après le tracé du lieu d'Evans du système linéarisé, figure 5, il existe une valeur négative de k telle que l'on ait deux racines négatives et distinctes et une racine nulle. Cette valeur est :

$$k = -\frac{D(0)}{N(0)} = -4.$$

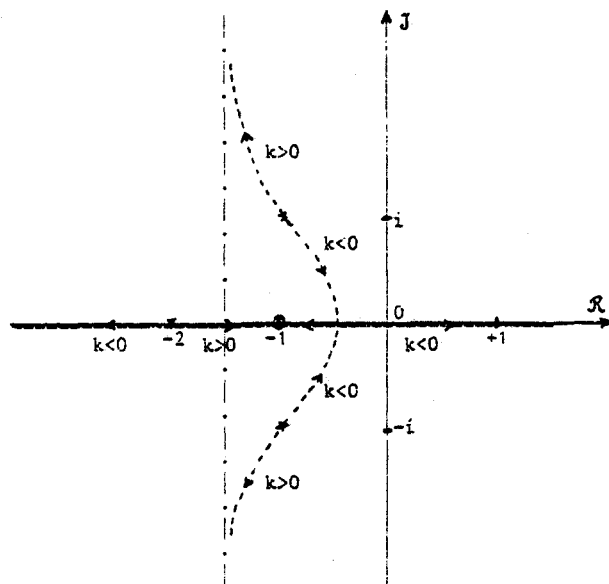


Figure 5.

Il est à noter que cette valeur est la valeur limite qui assure, pour le système linéaire, la stabilité. Pour $k < -4$ le système est instable.

Soit $R(\lambda) = \frac{D(\lambda) - 4N(\lambda)}{\lambda} = \lambda^2 + 4\lambda + 2$, les racines de $R(\lambda)$ sont $-2 - \sqrt{2}$ et $-2 + \sqrt{2}$, le couple $(R(\lambda), N(\lambda))$ forme bien une paire positive.

La condition de stabilité globale de $x = 0$ de ce système est donc :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} - \{0\} \quad f^* > -4,$$

cette condition est identique à celle obtenue en linéaire.

IV - EXTENSION DE LA CLASSE DE SYSTÈMES VÉRIFIANT LES RÉSULTATS DE LA CONJECTURE LINÉAIRE.

Une première classe de systèmes vérifiant les résultats de la conjecture linéaire est celle des systèmes C dont le numérateur et le dénominateur forment une paire positive [25]. Or nous venons de montrer dans divers exemples présentés au cours de ce chapitre, que la méthode de représentation adoptée permettait de mettre en évidence des systèmes vérifiant les résultats de la conjecture linéaire sans que ceux-ci soient de la classe précitée. Il apparaît donc que les modélisations présentées permettent d'élargir notablement cette classe.

Après avoir rappelé les contraintes relatives à la vérification de la conjecture linéaire, nous examinerons quelques cas particuliers qui conduisent à sa validité.

IV.1 - Remarques préliminaires.

Nous utiliserons, pour étudier, la validité de la conjecture linéaire les résultats des travaux de Borne et Gentina [34]. Nous considérerons donc des matrices d'évolutions dont les termes hors diagonaux seront positifs ou nuls. Ce problème sera ici abordé à l'aide des représentations (II-20) où tous les blocs de la diagonale principale sont de Jordan.

Soit pour le système figure 1 la représentation (II-20) où $t=0$, posons :

$$\forall i \in \{1, \dots, s\} \quad \forall j \in \{1, \dots, n_i\} \quad \alpha_i^j(\varepsilon) = \delta_i^j + \gamma_i^j f^*$$

le système vérifie les résultats de la conjecture linéaire si l'on a les contraintes (CL) :

$$(CL) \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \{1, \dots, s\} \quad \forall j \in \{1, \dots, n_i\} \quad \gamma_i^j f^* > -\delta_i^j$$

les conditions de stabilité de $x=0$ sont donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \{1, \dots, s\} \quad \lambda_i < 0 \\ (CS) \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R} - \{0\} \quad b_0 f^* > -a_0 \end{array} \right.$$

Dans les modélisations proposées γ_i^j et δ_i^j ne sont pas intrinsèques au système mais dépendent des s paramètres de modélisation que constituent les λ_i . Or, pour optimiser les résultats donnés par la validité de la conjecture linéaire il apparaît intéressant de pouvoir obtenir les mêmes contraintes (CL) et (CS) sur le gain non constant f^* .

Dans le cas le plus général ceci peut être réalisé par deux méthodes :

- en rendant les γ_i^j nuls, les λ_i sont alors racines n_i ième du numérateur, il est alors nécessaire d'avoir les δ_i^j tous de même signe,
- en rendant les δ_i^j nuls, il est alors nécessaire d'avoir les γ_i^j tous de même signe.

IV.2 - Numérateur à zéro multiple réel.

Nous allons dans cette section étudier un cas particulier constitué par les systèmes dont le numérateur $N(p)$ possède une seule racine multiple réelle d'ordre $q-1$. Il vient :

Théorème III-10.

Le système figure 1 tel que $N(p) = (p+a)^{q-1}$ où $a \in \mathbb{R}$, vérifie la conjecture linéaire si est satisfaire la condition (c) :

$$(c) \left[\begin{array}{l} \text{le polynôme } R(p) = D(p-a) = \sum_{i=0}^q c_i p^i \text{ est tel que} \\ c_0 < 0 \text{ et } \forall i \in \{0, \dots, q-3\} \quad c_{i+1} - c_i \leq 0. \end{array} \right.$$

une condition de stabilité asymptotique globale de 0 est alors :

$$a > 0 \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R} - \{0\} \quad f^* > -\frac{1}{W(0)}$$

Démonstration.

D'après (II-20) le système admet la matrice d'évolution :

$$FE(\varepsilon) = \left[\begin{array}{cccc} -a & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \\ & 0 & & -a \\ 1 & \text{-----} & 1 & -a_{q-1} + (q-1)a - f^* \end{array} \right. \left. \begin{array}{c} \alpha_{q-1} \\ \vdots \\ \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{array} \right]$$

Or

$$\det(\lambda I - FE(\varepsilon)) = D(\lambda) + f^* N(\lambda)$$

Soit

$$D(\lambda) = (\lambda + a)^{q-1} (\lambda + a_{q-1} - (q-1)a) - \sum_{k=1}^{q-1} (\lambda + a)^{k-1} \sum_{i=1}^k \alpha_i$$

posons $p = \lambda + a$, il vient :

$$\begin{aligned}
 D(p-a) &= -\alpha_1 - (\alpha_1 + \alpha_2) p \dots - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_j) p^{j-1} \\
 &\quad - (\alpha_1 + \dots + \alpha_{j+1}) p^j \dots - (\alpha_1 + \dots + \alpha_{q-1}) p^{q-2} \\
 &\quad + (a_{q-1} - qa) p^{q-1} + p^q
 \end{aligned}$$

Soit

$$\forall i \in \{0, \dots, q-2\} \quad c_i = - \sum_{\ell=1}^{i+1} \alpha_\ell$$

alors

$$\forall i \in \{0, \dots, q-3\} \quad c_{i+1} - c_i = -\alpha_{i+2}$$

FE(ε) est identique à sa pseudomajorante si ses termes hors diagonaux sont positifs ou nuls, d'où la condition (c). Il est nécessaire d'imposer $\alpha_1 \neq 0$ pour ne pas avoir de forme dégénérée.

L'application du critère pratique de Borne et Gentina fournit alors les conditions de stabilité.

Remarque.

La démonstration du théorème précédent donne une méthode plus rapide de détermination des coefficients α_i^j , dans un cas particulier où $s = 1$ et $t = 0$ dans (II-20), que l'application de la proposition 1 du chapitre II.

IV.3 - Dénominateur à zéro réel multiple et zéro nul simple.

Autre cas particulier étudié : les systèmes ne possédant qu'un pôle nul et un pôle multiple réel d'ordre $q-1$. On pourrait de même étudier le cas où $D(p) + a N(p)$ possède la même propriété, f^* deviendrait alors $f^* - a$.

Théorème III-11.

Le système décrit figure 1 et défini tel que $D(p) = p(p+a)^{q-1}$ où $a \in \mathbb{R}$, et $N(0) > 0$, vérifie la conjecture linéaire si est satisfaite la condition

le polynôme $Q(p) = N(p-a) = \sum_{i=0}^{q-1} d_i p^i$ est tel que
 $d_0 < 0$ et $\forall i \in \{0, \dots, q-3\} d_{i+1} - d_i \leq 0$.

Une condition de stabilité asymptotique de 0 est alors :

$$a > 0 \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R} - \{0\} \quad f^* > 0$$

Démonstration.

Le système admet si $D(p) = p(p+a)^{q-1}$ une modélisation de matrice d'évolution

$$FE(\varepsilon) = \begin{bmatrix} -a & 1 & & & & & \alpha_{q-1} f^* \\ & & 0 & & & & \vdots \\ & & & 1 & & & \alpha_2 f^* \\ & 0 & & & -a & & \alpha_1 f^* \\ & & & & & & \\ 1 & & & & & 1 & -b_{q-1} f^* \end{bmatrix}$$

l'égalité des polynômes symboliques fournit la relation :

$$N(\lambda) = b_{q-1} (\lambda + a)^{q-1} - \left(\sum_{i=1}^{q-1} \alpha_i \right) (\lambda + a)^{q-2} \dots - (\alpha_1 + \alpha_2) (\lambda + a) - \alpha_1$$

de même que précédemment en posant $\lambda = p-a$, il vient

$$N(p-a) = b_{q-1} p^{q-1} + \sum_{i=0}^{q-2} d_i p^i$$

avec

$$\forall i \in \{0, \dots, q-2\} \quad d_i = - \sum_{j=1}^{i+1} \alpha_j$$

or

$$\forall i \in \{0, \dots, q-3\} \quad d_{i+1} - d_i = -\alpha_{i+2}$$

donc $\alpha_{i+2} \geq 0$ si et seulement si $d_{i+1} - d_i \leq 0$.

Dans ce cas $FE(\varepsilon)$ est égale à sa pseudo-majorante pour $f^* \geq 0$. L'application du critère pratique conduit à la condition de stabilité si $a > 0$:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R} - \{0\} \quad N(0) f^* > 0$$

(CL) et (CS) sont ici confondues si $N(0) > 0$.

IV.4 - Application.

Considérons maintenant le système à déphasage minimal défini par :

$$(III-11) \quad \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{(p+a)^n}{p(p+b)^n}$$

avec $0 < a < b$, $(a,b) \in \mathbb{R}^{+*2}$, $n \in \mathbb{N}$, l'application d'un des théorèmes précédents conduit à :

Théorème III-12.

Le système figure 1 défini par (III.11) vérifie les conditions de la conjecture linéaire s'il satisfait les conditions :

$$\cdot (1+a)(b-a) \leq n$$

$$\cdot \forall i \in \{1, \dots, n-2\}$$

$$\frac{(a+1)(b-a)}{i(n-i)} - \frac{a}{i(i+1)} - \frac{(b-a)^2}{(n-i)(n-i+1)} \leq 0$$

La condition de stabilité asymptotique globale de $x=0$ est alors :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R} - \{0\} \quad f^* > 0$$

La démonstration de ce théorème utilise le résultat du théorème III-10 ; en effet, exprimons $D(p-a)$, il vient :

$$D(p-a) = p^{n+1} + \sum_{i=1}^n (b-a)^{n-i} \left[C_n^{i-1} (b-a) - a C_n^i \right] p^i - a(b-a)^n$$

où C_i^j représente un coefficient du binôme.

Les conditions d'application du théorème III-10, conduisent aux relations :

$$* a(b-a)^n > 0 \quad (c_0 < 0)$$

$$* (b-a)^{n-1} [(1+a)(b-a)-n] \leq 0 \quad (c_1 - c_0) \leq 0$$

$$* \forall i \in \{1, \dots, n-2\}$$

$$(b-a)^{n-i-1} [C_n^i (b-a)(a+1) - a C_n^{i+1} - (b-a)^2 C_n^{i-1}] \leq 0$$

Ce qui, compte tenu de $0 < a < b$, s'exprime sous la forme des conditions du théorème III-12.

L'étude menée ici est illustrée par l'exemple 1 (§ II.2.2), et peut être élargie dans le cas où :

$$N(p) = (p+a)^n \text{ et } \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad D(p) = p(p+b)^n + \alpha(p+a)^n$$

On se ramène alors au cas précédent en faisant la transformation f^* donne $f^* - \alpha$.

CONCLUSION.

Les résultats exposés dans ce chapitre montrent comment les représentations proposées au chapitre II permettent d'analyser de nombreuses classes de systèmes monovariables de type Lure' Postnikov.

En effet l'application de critères classiques de stabilité relatifs à ces systèmes sur des formes en flèches épaisses peut être systématisée. On généralise ainsi le fait de choisir comme termes formant les blocs diagonaux les zéros ou pôles de la fonction de transfert.

Notamment, des travaux antérieurs ont proposés des conditions de validité de la conjecture linéaire dans le cas de systèmes à pôles et zéros réels simples. Les résultats présentés permettent, graphiquement ou analytiquement d'élargir cette classe de processus. Des conditions, de validité de cette conjecture ont ainsi été énoncées dans des cas particuliers.

	diagonale à "racines réelles simples"	diagonale à "racines réelles multiples"	diagonale à "racines complexes simples"
<p>choix quelconque des racines</p>	<p>p. 64 , 82</p>	<p>p. 70 , 85</p>	<p>p. 73 , 85</p>
<p>racines = zéros de N(p)</p>	<p>p. 117</p>	<p>p. 121 , 147</p>	
<p>racines = zéros de D(p) + a N(p) (g* = f* - a)</p>	<p>p. 118 , 133</p>	<p>p. 149</p>	<p>p. 126</p>
<p>d°N = d°D - 1 racines = zéros de D(p) - (p+lambda_1)N(p)</p>	<p>p. 88</p>	<p>p. 91 , 131</p>	<p>p. 91</p>
<p>d°N = d°D - 2 racines = zéros de N(p)</p>	<p>p. 89 , 132</p>	<p>p. 93</p>	<p>p. 93</p>

TABLEAU RECAPITULATIF DES DIFFERENTES FORMES EN FLECHE PROPOSEES



CONCLUSION GÉNÉRALE.

Nous avons proposé, dans ce mémoire, de modéliser des processus continus non linéaires à l'aide de matrices d'évolution en forme en flèche épaisse. L'utilisation d'un invariant de représentation, le polynôme symbolique, nous a permis de déterminer toutes les composantes intervenant dans les formes proposées. Ces formes ont la particularité d'être creuses : les termes non nuls ne sont situés que dans la dernière ligne, la dernière colonne, et dans des blocs matriciels canoniques centrés sur la diagonale principale.

Les résultats énoncés au chapitre II donnent l'expression analytique de chacun des coefficients en fonction d'un certain nombre de paramètres arbitraires.

A partir de cette matrice, deux utilisations sont alors possibles : d'une part, une mise en équation du système en régime dynamique, conformément à la méthode précisée au chapitre I ; d'autre part, une analyse de stabilité basée sur des critères classiques et conduisant aux théorèmes présentés au chapitre III.

Il est à noter que cette étude permet une mise en oeuvre directe par des moyens informatiques : en effet, les coefficients correspondant à chaque forme en flèche épaisse ont été explicités en fonction de paramètres de modélisation arbitrairement choisis. La saisie de ces derniers conduit immédiatement à la matrice d'évolution cherchée.

De plus, les formes présentées nous ont permis, sur des exemples et dans des cas plus généraux d'élargir la classe des systèmes vérifiant la conjecture du linéaire. C'est dans cette voie que nous pensons poursuivre nos recherches.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] RICHARD J.P. *"Sur la mise en équation d'état des systèmes continus non linéaires par une méthode de calcul symbolique : définition d'un invariant de représentation"*.
Thèse de Doctorat d'Ingénieur, Lille, n° 259, 1981.
- [2] FAURRE P., CLERGET M., GERMAIN F. *"Opérateurs rationnels positifs"*
Méthodes Mathématiques pour l'Informatique, T.8,
DUNOD, 1978
- [3] DE RUSSO P.M., ROY R.J. CLOSE C.M. *"State variables for engineers"*.
WILEY, 1965.
- [4] SPATARU A. *"Théorie de la transmission de l'information"*.
T.1, MASSON, 1970.
- [5] MINORSKY N. *"Nonlinear oscillations"*,
VAN NOSTRAND, 1962.
- [6] LAURENT F. *"Contribution à l'étude des systèmes échantillonnés non linéaires en régime dynamique"*.
Thèse de Doctorat es Sciences Physiques, Lille, n° 170, 1968.
- [7] GRUJIC Lj.T., GENTINA J.C., BORNE P. *"General aggregation of large scale systems by vector Lyapunov functions and vector norms"*.
Int. J. Control, vol. 24, n°4, p. 529-550, 1976.
- [8] GENTINA J.C. *"Contribution à l'analyse et à la synthèse des systèmes continus non linéaires de grande dimension"*
Thèse de Doctorat es Sciences Physiques, Lille, n°347, 1976
- [9] BORNE P. *"Contribution à l'étude des systèmes discrets non linéaires de grande dimension. Application aux systèmes interconnectés"*.
Thèse de Doctorat es Sciences Physiques, Lille, n° 346, 1976.

- [10] GRUJIĆ Lj.T. "Solutions for the Lur'e Postnikov and Aizerman problems".
Int. J. Systems Science, vol. 9, n° 12, p.1359-1372, 1978.
- [11] BOUDAREL R., DELMAS J., GUICHET P. "Commande optimale des processus", Tome 1.
Techniques de l'automatisme. DUNOD 1967.
- [12] RICHARD J.P., LAURENT F. "On a systematic determination of choosen state space descriptions of given non linear continuous processes. Application to education"
MECO Congress, Cairo, 1981.
- [13] GENTINA J.C. "Sur la notion de modèle dans la description d'un processus".
Colloque "Reflexions sur de nouvelles approches dans l'étude des systèmes". Paris, Juin 1975.
- [14] ROSENBROCK H.H. "State-space and multivariable theory".
Studies in dynamical systems, NELSON, 1970.
- [15] EL MOUDNI A., RICHARD J.P., DAUPHIN-TANGUY G. "On the use of matrix polynomials in the description of non-linear discrete systems".
Second World Conference on Mathematics at the service of of Man, Las Palmas, Canaries, p. 266-274, 1982.
- [16] LAURENT F., ROMÉLOT M. "Sur le régime dynamique d'un système échantillonné non linéaire décrit par un modèle redondant".
CRAS, Paris, t. 280, Série A, pp. 1033-1035, 1975.
- [17] EL MOUDNI A. "Introduction de nouveaux outils mathématiques pour la description des systèmes discrets non linéaires de grande dimension".
Thèse de Doctorat 3e cycle, Lille, n° 888, 1981.
- [18] GANTMACHER F.R. "Théorie des matrices",
Collection Universitaire de Mathématiques, DUNOD 1966.

- [19] LAURENT F., RICHARD J.P. *"Sur une méthode simple de conditionnement des représentations d'état de systèmes non linéaires continus ou discrets"*.
First International Conference, Applied Modelling and simulation, p. 16-19, Vol I, Lyon, 1981.
- [20] BARNETT S., STOREY C. *"Matrix methods in stability theory"*.
NELSON, 1970.
- [21] BENREJEB M., BORNE P., LAURENT F. *"Sur une application de la représentation en flèche à l'analyse des processus"*.
R.A.I.R.O. Automatique, vol. 16, n° 2, 1982, p. 133 à 146.
- [22] RICHARD J.P. *"Sur les limitations de la conjecture linéaire dans l'étude de la stabilité"*.
First International Conférence, Applied Modelling and Simulation, Vol I, p. 91-94, Lyon, 1981.
- [23] BENREJEB M., BORNE P., DAUPHIN-TANGUY G., LAURENT F., *"Global asymptotic stability of non linear time-varying perturbed systems"*.
3th IMA Congress, Sheffield, 1980
- [24] BENREJEB M. *"Sur la synchronisation des systèmes continus non linéaires en régime forcé"*.
Thèse Docteur Ingénieur, Lille, n° 186, Juin 1976.
- [25] BENREJEB M. *"Sur l'analyse et la synthèse de processus complexes hiérarchisés. Application aux systèmes singulièrement perturbés"*.
Thèse de Doctorat es Sciences Physiques, Lille, n° 479, 1980.
- [26] CESARI L. *"Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations"*.
SPRINGER VERLAG, 1963
- [27] POPOV V.M. *"L'hyperstabilité des systèmes automatiques"*.
DUNOD, 1973.

- [28] ROTELLA F., RICHARD J.P. "*Modélisation et synthèse des systèmes monovariabiles de type Lure' Postnikov*".
First IASTED Symposium, Applied Informatics, Vol. III,
p. 173-178, 1983, Lille.
- [29] ROTELLA F., ZAMBETTAKIS I., RICHARD J.P. "*Application of a new modelling method to the stability analysis*".
IASTED Congress, Paris, Juillet 1982.
- [30] ROBICHAUD L.P.A., BOISVERT M., ROBERT J. "*Graphes de fluence*".
EYROLLES, 1961.
- [31] PISOT C., ZAMANSKY M. "*Mathématiques générales*".
DUNOD, 1966.
- [32] YOSHIKAWA T. "*Stability theory by Lyapunov's second method*".
THE MATHEMATICAL SOCIETY OF JAPAN, 1966.
- [33] HAHN W. "*Theory and application of Lyapunov's direct method*".
PRENTICE HALL, Englewood Cliffs, 1963.
- [34] GENTINA J.C., BORNE P., "*Sur une condition d'application du critère de stabilité linéaire à certaines classes de systèmes continus non linéaires*".
C.R.A.S. Paris, t. 275, 16 août 1972.
- [35] LYAPUNOV A.M. "*Problème général de la stabilité du mouvement*".
UNIVERSITY PRESS, Princeton, 1949.
- [36] LUR'E A. "*Some nonlinear problems in the theory of automatic control*".
Her Majesty's Stationnery Office, Londres, 1957.
- [37] LASALLE J.P., LEFSHETZ S. "*Stability by Lyapunov's direct method with applications*", ACADEMIC PRESS, 1961.
- [38] ZAMBETTAKIS I. "*Contribution à l'étude de systèmes à non-linéarités multiples - Application aux systèmes électromécaniques*".
Thèse de Docteur Ingénieur, Lille, n°326, 1983,

- [39] BORNE P., BENREJEB M., LAURENT F. *"Matrix approaches to absolute dynamical stability of Lure's Postnikov systems"*.
4e Congreso Informatica y Automatica, Madrid, 1979.
- [40] ROTELLA F., ZAMBETTAKIS I., RICHARD J.P. *"Application de la méthode du lieu des racines de la synthèse de systèmes non linéaires"*.
Congrès MECO'82, V, I, p, 27.1-27,5, TUNIS, 1982.
- [41] ZAMBETTAKIS I., RICHARD J.P., LAURENT F. *"Etude des systèmes électromécaniques non linéaires par la méthode directe de Lyapunov"*.
First IASTED Symposium, Applied Informatics, vol, I, p, 169-172, Lille, 1983.
- [42] DEIF A.S. *"Advanced Matrix theory for Scientists and Engineers"*.
ABACUS PRESS, 1982.
- [43] DE CARFORT F., FOULARD C., CALVET J. *"Asservissements linéaires continus"*.
DUNOD, 1976.
- [44] BARBASIN E.A., KRASSOVSKI N.N. *"On the existence of Ljapunov's functions in the case of asymptotic stability in the large"*.
P.M.M. 18, p. 345-350, Moscou, 1954.
- [45] ZAMBETTAKIS I., ROTELLA F., RICHARD J.P., LAURENT F. *"Sur la détermination de l'erreur quadratique d'un système continu linéaire"*.
Congrès AMS 81, Lyon, Septembre 1981, Vol 1, p. 167 à 170.
- [46] ROTELLA F., ZAMBETTAKIS I., RICHARD J.P. *"Estudio teorica de la disipacion de energia en los circuitos ferrosesonantes"*.
5ème Congrès Informatica y Automatica, Mai 1982, Madrid, Tome 1, p. 149 à 152.
- [47] RICHARD J.P., ROTELLA F. *"Mise en évidence de classes d'équivalence de modèles vis à vis de la notion de conjecture du linéaire"*.
Congrès AMSE 1982, Paris, Juillet 1982.
- [48] ZAMBETTAKIS I., RICHARD J.P., ROTELLA F. *"Reduction of order in the stability analysis of large scale systems"*.
MECO'83 Symposium, august 29-31 1983, Athens, accepté.

- [49] ROTELLA F., RICHARD J.P., ZAMBETTAKIS I. "*Stability of non linear continuous systems*".

Second IASTED International Robotics and Automation, Lugano,
22-24 Juin 1983.

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS	1
INTRODUCTION GÉNÉRALE	3
<hr/>	
CHAPITRE I : MÉTHODE DE MODÉLISATION DES SYSTÈMES	
<hr/>	
INTRODUCTION	7
I - Classe des systèmes étudiés	7
I.1 - Généralités	7
I.2 - Structure des processus étudiés	11
I.2.1 - Modélisation	11
I.2.2 - Définition de deux types de représentation	12
I.2.3 - Définition des systèmes à non-linéarités de rang p	14
I.2.4 - Exemples de systèmes à non-linéarités de rang p	15
II - REPRESENTATION CANONIQUE DES SYSTEMES A NON-LINEARITES DE RANG P	19
II.1 - Systèmes à non-linéarités de rang 1	19
II.1.1 - Représentation en régime autonome	19
II.2.2 - Application au régime non autonome	22
1°) - Type I	22
2°) - Type II	25
II.2 - Systèmes à non-linéarités de rang p	26
II.2.1 - Régime libre	26
II.2.2 - Régime non autonome	29
II.3 - Représentations redondantes particulières	31
II.3.1 - Notations	31
II.3.2 - Forme canonique	35
III - POLYNOMES SYMBOLIQUE MATRICIEL	37
III.1 - Définition du polynôme symbolique matriciel	37
III.2 - Conventions de calcul et notations	40
III.3 - Changement de base et polynôme symbolique matriciel	41
III.4 - Remarque sur l'équivalence possible entre représentations dilatées et représentations non redondantes	43

III.5 - Application du polynôme symbolique matriciel	45
III.6 - Cas des systèmes à non-linéarités de rang 1	47
III.7 - Remarque sur l'application du polynôme symbolique aux représentations redondantes - Notion de matrice contractable	47
 CONCLUSION	 49
ANNEXE I-A : Démonstration du théorème I-3	51
ANNEXE I-B : Démonstration du lemme 1	54
ANNEXE I-C : Démonstration du lemme 2	56
ANNEXE I-D : Démonstration du théorème I-6	58

CHAPITRE II : REPRÉSENTATION DES SYSTÈMES A NON-LINÉARITÉS DE RANG 1.

INTRODUCTION	61
 I - REPRESENTATIONS DE SYSTEMES A NON-LINEARITES DE RANG 1	 61
I.1 - Représentations usuelles	61
I.1.1 - Forme compagnon	61
I.1.2 - Forme en flèche mince	64
I.2 - Modélisation par des formes en flèche épaisse	65
I.2.1 - Définition et propriétés des formes en flèche épaisse	65
I.2.2 - Modélisation des systèmes à non-linéarités de rang 1	67
 II - DETERMINATION DES TERMES NON CONSTANTS	 68
II.0 - Notations	68
II.1 - Blocs de Jordan	69
II.2 - Blocs de rotation simple	71
II.3 - Blocs de rotation	73
II.4 - Cas général	77
 III - APPLICATION A LA REPRESENTATION DES SYSTEMES LURE' POSTNIKOV MONOVARIABLES	 80
III.1 - Equations d'état en régime dynamique	80
III.2 - Modélisation par une forme en flèche épaisse	82

IV - FORME EN FLECHE A COORDONATEUR LINEAIRE	87
IV.1 - Forme en flèche mince	87
IV.2 - Forme en flèche épaisse	89
IV.3 - Systèmes à deux non-linéarités parallèles	94
IV.3.1 - Polynôme symbolique des systèmes à non-linéarités parallèles	96
IV.3.2 - Modélisation des systèmes à deux non-linéarités	98
CONCLUSION	101
ANNEXE II-A : Démonstration de la proposition 1	103
ANNEXE II-B : Démonstration de la proposition 2	105
ANNEXE II-C : Démonstration de la proposition 3	107

CHAPITRE III : APPLICATION A L'ANALYSE DES SYSTEMES MONO- VARIABLES DE TYPE LURE' POSTNIKOV

INTRODUCTION	113
I - METHODES D'ETUDE DE LA STABILITE	113
I.1 - Définitions	113
I.2 - Rappel de quelques méthodes particulières d'étude de la stabilité	115
I.2.1 - Critère pratique de Borne et Gentina	116
I.2.2 - Méthode directe de Lyapunov	117
II - STABILITE DES SYSTEMES MONOVARIABLES DE TYPE LURE' POSTNIKOV	119
II.1 - Choix des blocs de la diagonale principale	119
II.2 - Etude de la stabilité	120
II.2.1 - Numérateur à zéros multiples réels	120
II.2.2 - Exemples 1 et 2	124
II.2.3 - Dénominateur à zéros complexes simples	126
II.2.4 - Exemple 3	129
II.3 - Modélisation avec changement de coordonateur	130
II.3.1 - Application du critère pratique de Borne et Gentina	130
II.3.2 - Application de la méthode directe de Lyapunov	132

III - APPLICATION DE LA METHODE DU LIEU DES RACINES A L'ANALYSE DE SYSTEMES NON LINEAIRES	133
III.1 - Représentation utilisée	133
III.2 - Etude de stabilité	137
III.3 - Interprétation structurelle des conditions	140
III.3.1 - Coefficients multiplicateurs de même signe	140
III.3.2 - Utilisation du lieu d'Evans	142
III.4 - Théorèmes	142
III.5 - Exemple d'application	144
IV - EXTENSION DE LA CLASSE DE SYSTEMES VERIFIANT LES RESULTATS DE LA CONJECTURE LINEAIRE	145
IV.1 - Remarques préliminaires	146
IV.2 - Numérateur à zéro multiple réel	147
IV.3 - Dénominateur à zéro réel multiple et zéro nul simple	148
IV.4 - Application	150
CONCLUSION	151
TABLEAU RECAPITULATIF	153
CONCLUSION GÉNÉRALE	155
BIBLIOGRAPHIE	157
TABLE DES MATIÈRES	163



RESUME

L'étude des systèmes continus non linéaires est liée au conditionnement de la représentation d'état choisie.

La modélisation de ces processus par des matrices d'évolution de type "flèche épaisse" convient particulièrement à l'emploi de méthodes classiques. Ces matrices présentent, en effet, de nombreux termes nuls. La détermination de ces formes fait appel à la notion de polynôme symbolique, invariant de représentation; tous leurs coefficients sont alors exprimés analytiquement.

L'application de ces résultats aux systèmes de type LURE'POSTNIKOV mono-variables constitue un exemple d'étude intéressant. D'une part, la mise en équation en régime dynamique à partir de la matrice d'évolution met en évidence une méthode valable pour des systèmes plus généraux, d'autre part, l'étude de stabilité permet d'étendre le champ d'application de travaux antérieurs.

L'utilisateur dispose ainsi d'un catalogue de modélisations permettant, directement ou par l'intermédiaire de moyens informatiques, l'analyse et la synthèse de larges classes de systèmes.

MOTS-CLES

Systèmes non-linéaires asservis, Postnikov, Modèle, Equation d'état, Stabilité