N° d'ordre : 1035

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE 3ème CYCLE

Polo VACA

METHODES DE MINIMISATION A ENCOMBREMENT REDUIT

Thèse soutenue le 6 mai 1983 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :	Président	C.	BREZINSKI
	Rapporteur	J.C.	FIOROT
	Examinateurs	P.	JEANNIN
		P.J.	LAURENT
		C.	LEMARECHAL
		P.	POUZET

PROFESSEURS 1ère CLASSE

M.	BACCHUS Pierre	Mathématiques
M.	BEAUFILS Jean-Pierre (dét.)	Chimie
M.	BIAYS Pierre	G.A.S.
M.	BILLARD Jean	Physique
M.	BONNOT Ernest	Biologie
M.	BOUGHON Pierre	Mathématiques
M.	BOURIQUET Robert	Biologie
M.	CELET Paul	Sciences de la Terre
M.	COEURE Gérard	Mathématiques
M.	CONSTANT Eugène	I.E.E.A.
M.	CORDONNIER Vincent	I.E.E.A.
M.	DEBOURSE Jean-Pierre	S.E.S.
M.	DELATTRE Charles	Sciences de la Terre
M.	DURCHON Maurice	Biologie
M.	ESCAIG Bertrand	Physique
M.	FAURE Robert	Mathématiques
M.	FOURET René	Physique
M.	GABILLARD Robert	I.E.E.A.
M.	GRANELLE Jean-Jacques	S.E.S.
M.	GRUSON Laurent	Mathématiques
M.	GUILLAUME Jean	Biologie
M.	HECTOR Joseph	Mathématiques
M.	HEUBEL Joseph	Chimie
M.	LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M.	LACOSTE Louis	Biologie
M.	LANSRAUX Guy	Physique
M.	LAVEINE Jean-Pierre	Sciences de la Terre
M.	LEBRUN André	C.U.E.E.P.
M.	LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme	LENOBLE Jacqueline	Physique
M.	LHOMME Jean	Chimie
M.	LOMBARD Jacques	S.E.S.
M.	LOUCHEUX Claude	Chimie
M.	LUCQUIN Michel	Chimie

M. MAILLET Pierre	S.E.S.
M. MONTREUIL Jean	Biologie
M. PAQUET Jacques	Sciences de la Terre
M. PARREAU Michel	Mathématiques
M. PROUVOST Jean	Sciences de la Terre
M. SALMER Georges	I.E.E.A.
Mme SCHWARTZ Marie-Hélène	Mathématiques
M. SEGUIER Guy	I.E.E.A.
M. STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M. TILLIEU Jacques	Physique
M. TRIDOT Gabriel	Chimie
M. VIDAL Pierre	I.E.E.A.
M. VIVIER Emile	Biologie
M. WERTHEIMER Raymond	Physique
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mathématiques

PROFESSEURS 2ème CLASSE

M. AL FAKIR Sabah	Mathématiques
M. ANTOINE Philippe	Mathématiques
M. BART André	Biologie
Mme BATTIAU Yvonne	Géographie
M. BEGUIN Paul	Mathématiques
M. BELLET Jean	Physique
M. BKOUCHE Rudolphe	Mathématiques
M. BOBE Bernard	S.E.S.
M. BODART Marcel	Biologie
M. BOILLY Bénoni	Biologie
M. BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M. BOSQ Denis	Mathématiques
M. BREZINSKI Claude	I.E.E.A.
M. BRUYELLE Pierre (Chargé d'enseignement)	Géographie
M. CAPURON Alfred	Biologie
M. CARREZ Christian	I.E.E.A.
M. CHAMLEY Hervé	E.U.D.I.L.

M.	CHAPOTON Alain	C.U.E.E.P.
M.	COQUERY Jean-Marie	Biologie
Mme	CORSIN Paule	Sciences de la Terre
M.	CORTOIS Jean	Physique
M.	COUTURIER Daniel	Chimie
Mle	DACHARRY Monique	Géographie
M.	DEBRABANT Pierre	E.U.D.I.L.
M.	DEGAUQUE Pierre	I.E.E.A.
M.	DELORME Pierre	Biologie
M.	DEMUNTER Paul	C.U.E.E.P.
M.	DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques
M.	DEVRAINNE Pierre	Chimie
M.	DHAINAUT André	Biologie
M.	DORMARD Serge	S.E.S.
M.	DOUKHAN Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M.	DUBOIS Henri	Physique
M.	DUBRULLE Alain	Physique
M.	DUEE Gérard	Sciences de la Terre
M.	DYMENT Arthur	Mathématiques
M.	FLAMME Jean-Marie	E.U.D.I.L.
M.	FONTAINE Hubert	Physique
M.	GERVAIS Michel	S.E.S.
M.	GOBLOT Rémi	Mathématiques
M.	GOSSELIN Gabriel	S.E.S.
M.	GOUDMAND Pierre	Chimie
M.	GREVET Patrice	S.E.S.
M.	GUILBAULT Pierre	Biologie
M.	HANGAN Théodore	Mathématiques
M.	HERMAN Maurice	Physique
M.	JACOB Gérard	I.E.E.A.
M.	JACOB Pierre	Mathématiques
M.	JOURNEL Gérard	E.U.D.I.L.
M.	KREMBEL Jean	Biologie
M.	LAURENT François	I.E.E.A.
Mle	LEGRAND Denise	Mathématiques
Mle	LEGRAND Solange	Mathématiques (Calais)
Mme	LEHMANN Josiane	Mathématiques

M.	LEMAIRE Jean	Physique
M.	LENTACKER Firmin	G.A.S.
M.	LEVASSEUR Michel	I.P.A.
M.	LHENAFF René	G.A.S.
M.	LOCQUENEUX Robert	Physique
M.	LOSFELD Joseph	I.E.E.A.
M.	LOUAGE Francis	E.U.D.I.L.
M.	MACKE Bruno	Physique
M.	MAIZIERES Christian	I.E.E.A.
Mle	MARQUET Simone	Mathématiques
M.	MESSELYN Jean	Physique
M.	MIGEON Michel	E.U.D.I.L.
M.	MIGNOT Fulbert	Mathématiques
M.	MONTEL Marc	Physique
Mme	NGUYEN VAN CHI Régine	G.A.S.
M.	PARSY Fernand	Mathématiques
Mle	PAUPARDIN Colette	Biologie
M.	PERROT Pierre	Chimie
M.	PERTUZON Emile	Biologie
M.	PONSOLLE Louis	Chimie
M.	PORCHET Maurice	Biologie
M.	POVY Lucien	E.U.D.I.L.
M.	RACZY Ladislas	I.E.E.A.
M.	RICHARD Alain	Biologie
M.	RIETSCH François	E.U.D.I.L.
M.	ROGALSKI Marc	M.P.A.
M.	ROUSSEAU Jean-Paul	Biologie
M.	ROY Jean-Claude	Biologie
M.	SALAMA Pierre	S.E.S.
Mme	SCHWARZBACH Yvette (CCP)	M.P.A.
M.	SCHAMPS Joël	Physique
M.	SIMON Michel	S.E.S.
M.	SLIWA Henri	Chimie
M.	SOMME Jean	G.A.S.
Mle	SPIK Geneviève	Biologie
M.	STERBOUL François	E.U.D.I.L.
M.	TAILLIEZ Roger	Institut Agricole

M.	TOULOTTE Jean-Marc	I.E.E.A.
M.	VANDORPE Bernard	E.U.D.I.L.
M.	WALLART Francis	Chimie
M.	WATERLOT Michel	Sciences de la Terre
Mme	ZINN JUSTIN Nicole	M.P.A.

CHARGES DE COURS

M.	TOP Gérard	S.E.S.
M.	ADAM Michel	S.E.S.

CHARGES DE CONFERENCES

M.	DUVEAU Jacques	S.E.S.
M.	HOFLACK Jacques	I.P..A
M.	LATOUCHE Serge	S.E.S.
M.	MALAUSSENA DE PERNO Jean-Louis	S.E.S.
M.	OPIGEZ Philippe	S.E.S.

Monsieur le Professeur C. BREZINSKI, a bien voulu me faire l'honneur de présider le Jury. Je le prie de trouver ici l'expression de ma gratitude.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur le Professeur J.Ch. FIOROT qui a dirigé cette thèse ; son attention constante, ses nombreux conseils et encouragements m'ont été précieux dans l'accomplissement de ce travail.

Je remercie vivement Monsieur P.J. LAURENT, Professeur à l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble, qui a bien voulu porter son attention sur ce travail et me faire l'honneur de le juger.

Je remercie également Monsieur le Professeur P. POUZET et Monsieur C. LEMARECHAL, Ingénieur de Recherche à l'INRIA, d'avoir accepté de faire partie du Jury.

Je tiens à remercier Monsieur P. JEANNIN, Maitre Assistant, pour ses fructueuses remarques et pour l'intérêt qu'il a témoigné pour ce travail.

J'adresse enfin mes vifs remerciements à Madame CARON pour le soin apporté à la dactylographie de ce document, ainsi qu'à Madame DEBOCK pour sa réalisation matérielle.

A mes Parents,

A mes Frères,

A Lucia.

Table des Matières

CHAPITRE I

INTRODUCTION

Ce travail est une contribution au problème de la minimisation d'une fonction sans contrainte :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) ,$$

où f est une fonction réelle différentiable, dont le gradient g peut être calculé numériquement en tout point de $\mathbb{R}^n$.

Plusieurs méthodes itératives de résolution ont été proposées, par exemple, la méthode de la plus profonde descente de Cauchy, la méthode de Newton, les méthodes du gradient conjugué et les méthodes de métrique variable. D'un point de vue pratique les deux dernières s'avèrent les plus intéressantes et les plus performantes. Elles consistent à déterminer :

(1) une direction de descente d_k de la forme $d_k = -H_k g_k$ où g_k est le gradient au point courant x_k et où H_k est une matrice carrée d'ordre n.

(2) un pas λ_k pour définir le point successeur $x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$, cette opération étant appelée recherche linéaire.

Dans les méthodes de métrique variable il est demandé que la matrice H_k soit symétrique, définie positive, et, pour des commodités de calcul, qu'elle soit une mise à jour de H_{k-1} par une correction de rang un ou de rang deux. Cette suite de matrices tente "d'approcher", dans un certain sens, l'inverse de la matrice des dérivées secondes au point x_k. Dans la pratique cette mise à jour exige le stockage d'une matrice symétrique donc de $\frac{n(n+1)}{2}$ places en mémoire.

Parmi les formules de métrique variable, une des plus générales, est celle donnée par Oren et Luenberger [30] où :

$$H_{k+1} = \left(H_k - \frac{(H_k y_k)(H_k y_k)^t}{(H_k y_k,\ y_k)} + \theta_k v_k v_k^t\right) \gamma_k + \frac{s_k s_k^t}{(s_k,\ y_k)} , \qquad (\text{I.1})$$

avec

$$v_k = (H_k y_k,\ y_k)^{1/2} \left[\frac{s_k}{(s_k, y_k)} - \frac{H_k y_k}{(H_k y_k,\ y_k)}\right], \qquad (\text{I.2})$$

où :

θ_k, γ_k sont des paramètres réels,

$$y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) = g_{k+1} - g_k, \tag{I.3}$$

$$s_k = x_{k+1} - x_k, \tag{I.4}$$

le produit scalaire de deux vecteurs u et w est noté (u, w) et t est le symbole de la transposition.

Cette formule de mise à jour contient quelques familles de métrique variable connues. Pour $\gamma_k = 1$ nous avons la famille de Broyden [3], et comme cas particuliers la BFGS [4, 18, 22, 39] ($\theta_k = 1$) et la DFP [8, 20] ($\theta_k = 0$).

Dans cette catégorie on peut ajouter les formules de métrique variable paramétrée données par Fiorot et El Hallabi [11] et Fiorot et Jeannin [13, 14].

Dans les méthodes du gradient conjugué la direction de recherche d_k est calculée sous une forme plus simple :

$$d_k = - g_k + \beta_k d_{k-1},$$

où β_k est un scalaire, par exemple il est égal à $\frac{(y_{k-1}, g_k)}{(y_{k-1}, d_{k-1})}$ pour la méthode de Hestenes-Stiefel [23], à $\frac{||g_k||^2}{||g_{k-1}||^2}$ pour la méthode de Fletcher-Reeves [19] et à $\frac{(y_{k-1}, g_k)}{||g_{k-1}||^2}$ pour la méthode de Polak-Ribière [35].

Perry [34] a remarqué que dans les méthodes du gradient conjugué la direction d_k pouvait également s'écrire sous la forme $d_k = -H_k g_k$. La matrice H_k est par exemple égale à $I - \frac{d_{k-1}\, y_{k-1}^t}{(y_{k-1}, d_{k-1})}$ pour la méthode de Hestenes-Stiefel. Bien entendu, pratiquement, la direction de descente est calculée de manière classique avec trois vecteurs. Il donne également une autre formule pour une direction de descente :

$$d_k = - \left(I - \frac{d_{k-1}\, y_{k-1}^t}{(y_{k-1}, d_{k-1})} + \frac{d_{k-1}\, s_{k-1}^t}{(y_{k-1}, d_{k-1})}\right) g_k.$$

Complétant ce travail, Shanno [40] propose une méthode de métrique variable dite "sans stockage". Dans la formule de la BFGS, qui s'obtient à partir de (I.1) en posant $\theta_k = 1$ et $\gamma_k = 1$, il remplace la matrice H_k par la matrice identité I, pour obtenir après transformations :

$$H_{k+1} = I - (1-r_k)\frac{y_k y_k^t}{||y_k||^2} + \frac{(s_k - r_k y_k)(s_k - r_k y_k)^t}{(s_k - r_k y_k,\ y_k)} \qquad (I.5)$$

où :

$$r_k = \frac{(s_k,\ y_k)}{(s_k,\ y_k) + ||y_k||^2}, \qquad (I.6)$$

la direction de recherche est alors calculée sans manipulation de matrices mais en faisant un nombre très réduit de produits scalaires.

Rappelons que lorsque λ_k est choisi suivant une recherche linéaire exacte i.e. $(s_k,\ g_{k+1}) = 0$, la direction de descente de la méthode de Perry ou de Shanno est précisément celle de la méthode du gradient conjugué de Hestenes-Stiefel.

Dans un même ordre d'idées avec le souci de limiter la place en mémoire, Nazareth [27], Buckley [5, 6], Nocedal [29], Nazareth et Nocedal [28] ont proposé des algorithmes dits à stockage limité ou variable. Ces algorithmes sont aussi déduits des méthodes de gradient conjugué et de métrique variable. Ils déterminent en général des directions du gradient conjugué généralisé, par exemple sous la forme :

$$d_{k+1} = - H_k g_k + \frac{(H_k y_k,\ g_{k+1})}{(d_k,\ y_k)}\ d_k,$$

où H_k est remise à jour périodiquement en utilisant un nombre réduit de vecteurs.

Dans le travail présenté ici le but essentiel est de fournir des méthodes de métrique variable à encombrement réduit conduisant à la convergence pour la minimisation de fonctions de classe C^1 (chapitre II) et de fonctions de classe C^2 (chapitre III).

Plus précisément dans le chapitre II nous reprenons la construction des matrices de métrique variable paramétrée sous la forme donnée dans Fiorot et Jeannin [13], forme plus générale et plus simple que celle donnée originalement dans Fiorot et El Hallabi [11, 12]. Pour nos besoins,elles sont présentées sous la forme de H-matrices. Les directions de descente d_k sont en effet calculées sous la forme $d_k = -H_k g_k$. Il est donné brièvement en section II.1 six familles de telles matrices paramétrées ainsi que les majorations de leur conditionnement. Rappelons simplement que la matrice H_{k+1} est obtenue à partir de H_k par une correction de rang 1 ou surtout de rang 2 dépendant elle-même de H_k, y_k, s_k et de paramètres.

En vue de réduire fortement le nombre de calculs et la place mémoire, il est défini dans la section II.2 six familles de matrices déduites de celles données en section II.1. Dans la construction évoquée plus haut, H_k est alors prise égale à la matrice unité. Cette construction aura pour avantage sur certaines méthodes signalées plus haut de limiter d'une part la place mémoire à cinq vecteurs au plus et d'autre part de réduire le calcul de la direction d_k à celui de cinq produits scalaires. Cette direction est une combinaison linéaire de trois vecteurs et peut être considérée comme une extension d'une direction de gradient conjugué.

En section II.3 un algorithme est fourni pour la minimisation d'une fonction numérique à plusieurs variables. A chaque itération un choix de direction peut être fait arbitrairement parmi six possibilités. La convergence est assurée pour des conditions du premier ordre : la fonction à minimiser est continuement différentiable. Les procédés de réinitialisation classique sont admis sans ajouter d'hypothèses.

Dans le chapitre III nous nous plaçons dans le cadre de la formule (I.1) avec comme précédemment $H_k = I$. Cette fois la convergence est obtenue pour des fonctions deux fois continuement différentiables et strictement convexes. Les hypothèses sont légèrement plus faibles que celles données par Shanno [41] pour son étude de la formule (I.5) qui est un cas particulier de notre travail.

La détermination de la direction n'exige finalement qu'un encombrement mémoire réduit à quatre vecteurs et que le calcul de quatre produits scalaires.

Pour chacune des deux familles de méthodes,données respectivement dans le chapitre II et le chapitre III,des essais numériques sont donnés en comparaison avec la BFGS.

Cette comparaison porte sur le nombre d'itérations et d'appels de fonction et non sur la place en mémoire ou la quantité de calculs exigés, celles-çi étant assez importantes pour la BFGS.

Ce travail a fait l'objet de deux notes : Fiorot et Vaca [15, 16], à l'Université de Lille I.

CHAPITRE II

METHODES DE METRIQUE VARIABLE PARAMETREE A ENCOMBREMENT REDUIT. CONVERGENCE DANS C^1

INTRODUCTION

Dans la première partie de ce chapitre nous reprenons la construction des familles de métrique variable paramétré données par Fiorot et Jeannin [13], formules plus générales et plus simples que celles données par Fiorot - El Hallabi [11, 12] ou El Hallabi [10]. Elles seront présentées sous la forme de H-formules c'est à dire que les directions de déplacement sont calculées à chaque itération par $d_k = -H_k g_k$. A partir des H-formules de Fiorot et Jeannin [13] nous déduisons six formules de métrique variable à encombrement réduit. Comme dans le cas des H-formules paramétrées la convergence est montrée pour une fonction de classe C^1 avec une recherche linéaire qui peut être inexacte. Rappelons que pour les méthodes de gradient conjugué auxquelles nous pouvons comparer nos méthodes du fait de leur faible encombrement (quelques vecteurs) et de leur simplicité, la convergence est montrée pour des fonctions de classe C^2 avec une recherche linéaire exacte.

D'autre part l'algorithme fourni est tel que, à chaque itération, la direction de descente peut être choisie arbitrairement parmi six possibilités ou plutôt six familles.

Des essais numériques, menés sur des fonctions tests classiques, sont présentés à la fin de ce chapitre.

II.1 - CONSTRUCTION DES MATRICES DE MÉTRIQUE VARIABLE PARAMÉTRÉE - MAJORATION DU CONDITIONNEMENT

Nous allons utiliser le procédé de construction de matrices de correction proposé dans Fiorot et Jeannin [13]. Définissons d'abord les hypothèses et les notations suivantes :

H est une matrice symétrique, définie positive, quelconque,

s et y sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $(s, y) > 0$; par la suite ils seront, comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, respectivement la différence de deux points successifs et la différence des gradients de ces points successifs,

ω, ω' deux scalaires de $(-1, +\infty)$,

α, δ deux scalaires de $(0, +\infty)$.

Notons B l'inverse de H et $T = H^{1/2}$ la racine carrée symétrique définie positive de H.

Définissont également :

$$r = \frac{(s, y)}{(Hy, y)+(s,y)} \quad \text{et le vecteur}$$

$$\ell = s - r\, H\, y.$$

Remarquons que l'inégalité $(s, y) > 0$ et le fait que H est définie positive, impliquent l'inégalité $(\ell, y) > 0$, car $(\ell, y) = r.(s, y)$.

Notons $K(A) = ||A||\ ||A^{-1}||$ le nombre de conditionnement d'une matrice inversible A.

Rappellons que pour $u \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$||I + uu^t|| = 1 + ||u||^2 \tag{II.1}$$

$$||I - uu^t|| = 1 \qquad \text{si } ||u||^2 \le 2 \tag{II.2}$$

Formule de Sherman-Morrison [42] :

Si A est une matrice inversible, v et w deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ alors :

La matrice $A + vw^t$ est inversible si et seulement si $1 + (w, A^{-1}v)$ est non nul, et

$$[A + vw^t]^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}vw^t A}{1+(w,A^{-1}v)} . \tag{II.3}$$

En reprenant les notations de [13], considérons deux formules de correction de rang un pour la matrice H, à savoir :

$$\tilde{H} = \tilde{\phi}(H, y, \alpha, \omega) = \alpha[H + \omega \frac{(Hy)(Hy)^t}{(Hy, y)}], \tag{II.4}$$

$$\bar{H} = \bar{\phi}(H, y, s, \alpha, \omega) = \alpha[H + \omega \frac{(Hy)(Hy)^t}{(Hy, y)+(s, y)}]. \tag{II.5}$$

Nous savons que sous les hypothèses faites sur H, y, s, α et ω les matrices $\tilde{H}$ et $\bar{H}$ sont aussi symétriques et définies positives.

Nous avons le résultat suivant :

Proposition II.1.1 [11, 12, 13] : Sous les hypothèses faites sur H, y, s, α et ω, nous avons les majorations suivantes pour les normes de $\tilde{H}$ et $\bar{H}$.

Si $\omega \geq 0$,

$$||\tilde{\phi}(H, y, \alpha, \omega)|| \leq \alpha(1+\omega)\ ||H||,$$

$$||\bar{\phi}(H, y, s, \alpha, \omega)|| \leq \alpha(1+\omega)\ ||H||.$$

Si $-1 < \omega < 0$,

$$||\tilde{\phi}(H, y, \alpha, \omega)|| \leq \alpha\ ||H||,$$

$$||\bar{\phi}(H, y, s, \alpha, \omega)|| \leq \alpha\ ||H||.$$

Preuve :

Donnons la preuve pour $\tilde{H}$:

$$\tilde{\phi}(H, y, \alpha, \omega) = \alpha\ T[I + \omega \frac{(Ty)(Ty)^t}{||Ty||^2}]T,$$

d'où :

$$||\tilde{\phi}(H, y, \alpha, \omega)|| \leq \alpha\ ||H||\ ||Q||,$$

avec :

$$Q = I + \omega \frac{(Ty)(Ty)^t}{||Ty||^2}.$$

Si $\omega \geq 0$, nous pouvons écrire :

$$Q = I + uu^t \text{ avec } u = \frac{\omega^{1/2}}{||Ty||} Ty,$$

et d'après (II.1),

$$||Q|| = 1 + ||u||^2 = 1 + \omega, \text{ d'où le résultat.}$$

Si $-1 < \omega < 0$, nous pouvons écrire :

$$Q = I - vv^t \text{ avec } v = \frac{(-\omega)^{1/2}}{||Ty||} Ty\ ;$$

et de (II.2) nous déduisons le résultat recherché car $||v||^2 = -\omega < 1$. □

D'après la formule de Sherman-Morrison (II.3) nous obtenons en désignant par $\tilde{B}$ l'inverse de $\tilde{H}$ et par $\bar{B}$ l'inverse de $\bar{H}$:

$$\tilde{B} = \tilde{\phi}(H, y, \alpha, \omega)^{-1} = \frac{1}{\alpha} [B - \omega \frac{yy^t}{(1+\omega)(Hy, y)}] , \qquad \text{(II.6)}$$

$$\bar{B} = \bar{\phi}(H, y, s, \alpha, \omega)^{-1} = \frac{1}{\alpha} [B - \omega \frac{yy^t}{(1+\omega)(Hy, y)+(s, y)}], \qquad \text{(II.7)}$$

et le résultat suivant nous donne des majorations sur les normes de $\tilde{B}$ et de $\bar{B}$.

<u>Proposition II.1.2</u> [11, 12, 13] : Sous les hypothèses faites sur H, s, y, α et ω nous avons :

si $\omega \geq 0$,

$$||\tilde{\phi}(H, y, \alpha, \omega)^{-1}|| \leq \frac{1}{\alpha} ||B||,$$

$$||\bar{\phi}(H, y, s, \alpha, \omega)^{-1}|| \leq \frac{1}{\alpha} ||B||,$$

si $-1 < \omega < 0$,

$$||\tilde{\phi}(H, y, \alpha, \omega)^{-1}|| \leq \frac{1}{\alpha(1+\omega)} ||B||,$$

$$||\bar{\phi}(H, y, s, \alpha, \omega)^{-1}|| \leq \frac{1}{\alpha(1+\omega)} ||B||.$$

<u>Preuve</u> :

Donnons la preuve pour $\bar{B}$:

$$\bar{\phi}(H, y, s, \alpha, \omega)^{-1} = \frac{1}{\alpha} T^{-1}[I - \omega \frac{(Ty)(Ty)^t}{(1+\omega)\ ||Ty||^2 + (s, y)}] T^{-1},$$

d'où :

$$||\bar{\phi}(H, y, s, \alpha, \omega)^{-1}|| \leq \frac{1}{\alpha} ||B||\ ||Q||, \text{ avec :}$$

$$Q = I - \omega \frac{(Ty)(Ty)^t}{(1+\omega)\ ||Ty||^2 + (s, y)} .$$

Si $\omega \geq 0$, nous pouvons écrire :

$$Q = I - uu^t \text{ avec } u = [\frac{\omega}{(1+\omega)\ ||Ty||^2 + (s, y)}]^{1/2} Ty$$

et, du fait que $(s, y) > 0$,

$$||u||^2 = \frac{\omega\ ||Ty||^2}{(1+\omega)\ ||Ty||^2 + (s, y)} \leq \frac{\omega}{1+\omega} \leq 1,$$

d'où $||Q|| = 1$ d'après (II.2), ce qui donne le résultat.

Si $-1 < \omega < 0$ nous pouvons écrire :

$$Q = I + vv^t \text{ avec } v = \left[\frac{-\omega}{(1+\omega)\ ||Ty||^2 + (s, y)}\right]^{1/2} Ty, \text{ d'où :}$$

$$||Q|| = 1 + ||v||^2 = 1 - \frac{\omega ||Ty||^2}{(1+\omega)\ ||Ty||^2 + (s, y)} \leq 1 - \frac{\omega}{1+\omega} = \frac{1}{1+\omega},$$

d'où la conclusion. □

Nous allons continuer le procédé de construction en définissant des corrections du type $\tilde{\phi}$ et $\bar{\phi}$ mais cette fois appliquées aux matrices $\tilde{B}$ et $\bar{B}$. Nous obtenons trois transformées de $\tilde{B}$ et trois transformées de $\bar{B}$, à savoir :

$$\tilde{B}_1 = \tilde{\phi}(\tilde{B}, s, \delta, \omega'),$$

$$\tilde{B}_2 = \bar{\phi}(\tilde{B}, s, y, \delta, \omega'),$$

$$\tilde{B}_3 = \bar{\phi}(\tilde{B}, \ell, y, \delta, \omega'),$$

$$\bar{B}_4 = \tilde{\phi}(\bar{B}, s, \delta, \omega'),$$

$$\bar{B}_5 = \bar{\phi}(\bar{B}, s, y, \delta, \omega'),$$

$$\bar{B}_6 = \bar{\phi}(\bar{B}, \ell, y, \delta, \omega').$$

Notons H_i^*, $i = 1$ à 6, les matrices inverses de, respectivement, $\tilde{B}_1$, $\tilde{B}_2$, $\tilde{B}_3$, $\bar{B}_4$, $\bar{B}_5$, $\bar{B}_6$; elles sont obtenues par des formules identiques à (II.6) ou (II.7). Leur forme explicite est la suivante [13, section 4] :

$$H_1^* = \Psi_1(H, y, s, \alpha, \delta, \omega, \omega') = \frac{\alpha}{\delta}\left[H + \omega\frac{(Hy)(Hy)^t}{(Hy, y)}\right] - \frac{\omega'}{\delta} \cdot \frac{ss^t}{(1+\omega')(\tilde{B}s, s)},$$

$$H_2^* = \Psi_2(H, y, s, \alpha, \delta, \omega, \omega') = \frac{\alpha}{\delta}\left[H + \omega\frac{(Hy)(Hy)^t}{(Hy, y)}\right] - \frac{\omega'}{\delta} \cdot \frac{ss^t}{(1+\omega')(\tilde{B}s, s)+(s,y)},$$

$$H_3^* = \Psi_3(H, y, s, \alpha, \delta, \omega, \omega') = \Psi_2(H, y, \ell, \alpha, \delta, \omega, \omega'),$$

$$H_4^* = \Psi_4(H,\ y,\ s,\ \alpha,\ \delta,\ \omega,\ \omega') = \frac{\alpha}{\delta}\left[H + \omega\,\frac{(Hy)(Hy)^t}{(Hy,y)+(s,y)}\right] - \frac{\omega'}{\delta}\,\frac{ss^t}{(1+\omega')(\bar{B}s,s)},$$

$$H_5^* = \Psi_5(H,\ y,\ s,\ \alpha,\ \delta,\ \omega,\ \omega') = \frac{\alpha}{\delta}\left[H + \omega\,\frac{(Hy)(Hy)^t}{(Hy,y)+(s,y)}\right] - \frac{\omega'}{\delta}\,\frac{ss^t}{(1+\omega')(\bar{B}s,s)+(s,y)},$$

$$H_6^* = \Psi_6(H,\ y,\ s,\ \alpha,\ \delta,\ \omega,\ \omega') = \frac{\alpha}{\delta}\left[H + \omega\,\frac{(Hy)(Hy)^t}{(Hy,y)+(s,y)}\right] - \frac{\omega'}{\delta}\,\frac{\ell\ell^t}{(1+\omega')(\bar{B}\ell,\ell)+(y,\ell)}.$$

Dans chaque formule, la matrice $\tilde{B}$ ou $\bar{B}$ est l'inverse de la matrice entre crochets préalablement multipliée par α.

<u>Proposition II.1.3</u> [13] : Si $(s,\ y) > 0$, $\alpha > 0$, $\delta > 0$, $\omega > -1$, $\omega' > -1$ et si H est une matrice symétrique définie positive, alors les matrices H_i^*, $i = 1$ à 6, sont symétriques définies positives et nous avons les majorations suivantes de leur nombre de conditionnement :

si $\omega \geq 0$ et $\omega' \geq 0$, $K(H_i^*) \leq (1+\omega)(1+\omega')\ K(H)$ pour $i = 1$ à 6,

si $\omega \geq 0$ et $-1 < \omega' \leq 0$, $K(H_i^*) \leq \frac{1+\omega}{1+\omega'} \cdot K(H)$ pour $i = 1$ à 6,

si $-1 < \omega \leq 0$ et $\omega' \geq 0$, $K(H_i^*) \leq \frac{1+\omega'}{1+\omega}\ K(H)$ pour $i = 1$ à 6,

si $-1 < \omega \leq 0$ et $-1 < \omega' \leq 0$, $K(H_i^*) \leq \frac{1}{(1+\omega)(1+\omega')}\ K(H)$, pour $i = 1$ à 6.

<u>Preuve</u> :

Donnons le résultat pour $\omega \geq 0$ et $\omega' \geq 0$. D'après la proposition II.1.2, $||H_i^*|| \leq \frac{1}{\delta}\ ||E||$ où E est soit $\tilde{H}$ ou $\bar{H}$. En appliquant la proposition II.1.1. à E, nous avons :

$$||H_i^*|| \leq \frac{1}{\delta}\ \alpha(1+\omega)\ ||H||.$$

D'autre part en notant B_i^*, $i = 1$ à 6, respectivement les matrices $\tilde{B}_1$, $\tilde{B}_2$, $\tilde{B}_3$, $\bar{B}_4$, $\bar{B}_5$, $\bar{B}_6$, nous avons d'après la proposition II.1.1. :

$$||B_i^*|| \leq \delta(1+\omega')\ ||F|| \text{ où } F \text{ est soit } \tilde{B}, \text{ soit } \bar{B}.$$

En appliquant de nouveau la proposition II.1.2. à F nous avons,

$$||B_i^*|| \leq \delta(1+\omega')\ \frac{1}{\alpha}\ ||B||.$$

D'où finalement, le résultat :

$K(H_i^*) = ||H_i^*||\ ||B_i^*|| \leq (1+\omega)(1+\omega')\ K(H).$ □

II.2 - MATRICES DE MÉTRIQUE VARIABLE À ENCOMBREMENT RÉDUIT

Comme H est une matrice symétrique définie positive et que notre but est de définir un algorithme de métrique variable à encombrement réduit, nous prendrons dans ce qui suit H toujours égale à la matrice identité. Les matrices H_i^*, i = 1 à 6, définissent donc les matrices H_{k+1} recherchées avec le choix H = I. Explicitement les formules s'écrivent :

$$H_{k+1}^1 = \frac{\alpha_k}{\delta_k} [I + \omega_k \frac{y_k y_k^t}{||y_k||^2}] - \frac{\omega'_k}{\delta_k} \cdot \frac{s_k s_k^t}{(1+\omega'_k)(\tilde{B}_k s_k,\ s_k)}, \tag{II.8}$$

$$H_{k+1}^2 = \frac{\alpha_k}{\delta_k} [I + \omega_k \frac{y_k y_k^t}{||y_k||^2}] - \frac{\omega'_k}{\delta_k} \cdot \frac{s_k s_k^t}{(1+\omega'_k)(\tilde{B}_k s_k,\ s_k)+(s_k,y_k)}, \tag{II.9}$$

$$H_{k+1}^3 = \frac{\alpha_k}{\delta_k} [I + \omega_k \frac{y_k y_k^t}{||y_k||^2}] - \frac{\omega'_k}{\delta_k} \cdot \frac{\ell_k \ell_k^t}{(1+\omega'_k)(\tilde{B}\ell_k,\ell_k)+(\ell_k,y_k)}, \tag{II.10}$$

$$H_{k+1}^4 = \frac{\alpha_k}{\delta_k} [I + \omega_k \frac{y_k y_k^t}{||y_k||^2+(s_k,y_k)}] - \frac{\omega'_k}{\delta_k} \cdot \frac{s_k s_k^t}{(1+\omega'_k)(\bar{B}_k s_k,s_k)}, \tag{II.11}$$

$$H_{k+1}^5 = \frac{\alpha_k}{\delta_k} [I + \omega_k \frac{y_k y_k^t}{||y_k||^2+(s_k,y_k)}] - \frac{\omega'_k}{\delta_k} \cdot \frac{s_k s_k^t}{(1+\omega'_k)(\bar{B}_k s_k,s_k)+(s_k,y_k)}, \tag{II.12}$$

$$H_{k+1}^6 = \frac{\alpha_k}{\delta_k} [I + \omega_k \frac{y_k y_k^t}{||y_k||^2+(s_k,y_k)}] - \frac{\omega'_k}{\delta_k} \cdot \frac{\ell_k \ell_k^t}{(1+\omega'_k)(\bar{B}_k \ell_k,\ell_k)+(\ell_k,y_k)}, \tag{II.13}$$

où :

$$\tilde{B}_k = \frac{1}{\alpha_k} [I - \frac{\omega_k}{(1+\omega_k)||y_k||^2}\ y_k y_k^t],$$

$$\bar{B}_k = \frac{1}{\alpha_k} [I - \frac{\omega_k}{(1+\omega_k)||y_k||^2+(s_k,y_k)}\ y_k y_k^t],$$

$$\ell_k = s_k - \tilde{r}_k y_k \text{ avec } \tilde{r}_k = \frac{(s_k,y_k)}{||y_k||^2 + (s_k,\ y_k)}.$$

<u>Remarque II.2.1</u> : Formellement, avec le choix de y_k et s_k définis par (I.3) et (I.4) respectivement, $\omega_k = \omega'_k = -1$ et $\alpha_k = \delta_k = 1$, H^6_{k+1} donne la formule (I.5) décrite par Shanno [40].

<u>Remarque II.2.2</u> : De même avec $\omega_k = \omega'_k = -1$, $\alpha_k = \delta_k = 1$, la formule H^2_{k+1}, cette fois,permet de trouver formellement une matrice de métrique variable à stockage réduit, déduitede la DFP :

$$H_{k+1} = H_k - \frac{(H_k y_k)(H_k y_k)^t}{(H_k y_k,\ y_k)} + \frac{s_k s_k^t}{(s_k,\ y_k)}$$

quand on pose $H_k = I$.

Nous reviendrons sur ces deux cas particuliers ci-dessus dans le chapitre III.

<u>Corollaire II.2.1</u> : Si (s_k) et (y_k) sont deux suites de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telles que $(s_k,\ y_k) > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, (ω_k) et (ω'_k) deux suites de réels appartenant à l'intervalle $(-1,+\infty)$ et (α_k), (δ_k) deux suites de nombres strictement positifs, alors les matrices H^i_{k+1} définies par (II.8), (II.9), (II.10), (II.11), (II.12), (II.13) sont symétriques définies positives et leur nombre de conditionnement est majoré par les quantités suivantes :

si $\omega_k \geq 0$ et $\omega'_k \geq 0$, $K(H^i_{k+1}) \leq (1+\omega_k)(1+\omega'_k)$ pour $i = 1$ à 6,

si $\omega_k \geq 0$ et $-1 < \omega'_k \leq 0$, $K(H^i_{k+1}) \leq \dfrac{1+\omega_k}{1+\omega'_k}$ pour $i = 1$ à 6,

si $-1 < \omega_k \leq 0$ et $\omega'_k \geq 0$, $K(H^i_{k+1}) \leq \dfrac{1+\omega'_k}{1+\omega_k}$ pour $i = 1$ à 6,

si $-1 < \omega_k \leq 0$ et $-1 < \omega'_k \leq 0$, $K(H^i_{k+1}) \leq \dfrac{1}{(1+\omega_k)(1+\omega'_k)}$ pour $i = 1$ à 6.

<u>Preuve</u> :

La preuve se déduit directement de la proposition II.1.3 en posant $H = I$. $\square$

Donnons une manière de construire les suites (ω_k) et (ω'_k) telles que les nombres de conditionnement des matrices H_k^i soient bornés pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Proposition II.2.1 : Etant donnée une constante M supérieure ou égale à 1, on construit une suite (ω_k) telle que pour tout k : $\frac{1}{M} \leq 1+\omega_k \leq M$ et une suite (ω'_k) telle que pour tout k :

$$\text{Max}\left\{\frac{1+\omega_k}{M}, \frac{1}{(1+\omega_k)M}\right\} \leq 1+\omega'_k \leq \text{Min}\left\{\frac{M}{1+\omega_k}, (1+\omega_k)\, M\right\} ;$$

alors pour tout i = 1 à 6 et pour tout $k \in \mathbb{N}$ nous avons :

$$K(H_{k+1}^i) \leq M.$$

Preuve :

Il est clair que ω_k et ω'_k appartiennent à l'intervalle $(-1, +\infty)$.

Si $\omega_k \geq 0$,

$$\text{Max}\left\{\frac{1+\omega}{M}, \frac{1}{(1+\omega_k)M}\right\} = \frac{1+\omega_k}{M} \quad \text{et}$$

$$\text{Min}\left\{\frac{M}{1+\omega_k}, (1+\omega_k)M\right\} = \frac{M}{(1+\omega_k)} \quad \text{d'où :}$$

$$\frac{1+\omega_k}{M} \leq 1+\omega'_k \leq \frac{M}{1+\omega_k} .$$

Alors pour le choix $\omega'_k \geq 0$ nous avons bien :

$(1+\omega_k)(1+\omega'_k) \leq M$ et pour le choix : $-1 < \omega'_k \leq 0$, nous avons : $\frac{1+\omega_k}{1+\omega'_k} \leq M$.

De même si $-1 < \omega_k \leq 0$ nous voyons aisément que : $\frac{1+\omega'_k}{1+\omega_k} \leq M$ si nous prenons $\omega'_k \geq 0$ et $\frac{1}{(1+\omega_k)(1+\omega'_k)} \leq M$ si nous prenons $-1 \leq \omega'_k \leq 0$. En conclusion d'après le corollaire II.2.1 nous avons bien $K(H_{k+1}^i) \leq M$. □

II.3 - ALGORITHME ET CONVERGENCE

II.3.1 - Construction d'une suite de matrices H_k

A partir des six familles de matrices définies dans la section précédente nous allons construire une suite de matrices (H_k). Elles seront prises de manière arbitraire parmi les six formules (II.8) à (II.13).

Plus rigoureusement notons $\Psi_i(s_k, y_k, \ell_k, \alpha_k, \delta_k, \omega_k, \omega'_k)$, pour i = 1 à 6, respectivement les seconds membres des formules (II.8) à (II.13). Le vecteur ℓ_k n'intervient que pour i = 3 et 6, le vecteur s_k intervient implicitement pour i = 3. Rappelons que les suites (α_k), (δ_k), (ω_k), (ω'_k) vérifient les conditions données dans le corollaire II.2.1. Notons i une application de $\mathbb{N}$ dans {1, 2, 3, 4, 5, 6}, la suite H_k est définie en posant :

$$H_{k+1} = \Psi_{i(k)}(s_k, y_k, \ell_k, \alpha_k, \delta_k, \omega_k, \omega'_k). \tag{II.14}$$

II.3.2 - Algorithme A

0. Soit x_o un point initial de $\mathbb{R}^n$. Posons $H_o = I$ et $k = 0$.

1. Si $\nabla f(x_k) = 0$ stop,

   sinon définissons une direction de descente $d_k = -H_k g_k$.

2. Déterminons un pas $\lambda_k > 0$ satisfaisant les conditions de Wolfe [43] ou de Goldstein-Price [21] :

w1) $f(x_k+\lambda_k d_k) \leq f(x_k) + \lambda_k \ c_1(g_k, d_k)$,

w2) $(g(x_k+\lambda_k d_k), d_k) \geq c_2(g_k, d_k)$,

   où les constantes c_1 et c_2 satisfont : $0 < c_1 < c_2 < 1$.

3. De $s_k = x_{k+1} - x_k = \lambda_k d_k$ et $y_k = g_{k+1} - g_k$, définissons H_{k+1} comme en sous-section II.3.1 et retournons en 1 avec k = k+1. □

Cet algorithme de métrique variable paramétrée présente quelques avantages. Il est à encombrement réduit, la place mémoire se limite au plus à cinq vecteurs : à savoir v_1 pour d'abord g_k en ensuite pour y_k, v_2 pour g_{k+1}, v_3 pour d'abord x_k puis s_k, v_4 pour x_{k+1} et v_5 pour ℓ_k d'abord et d_{k+1} ensuite. La détermination de la direction d_{k+1} exige au plus le calcul de cinq produits scalaires à savoir (y_k, g_{k+1}), $||y_k||^2$, (s_k, y_k), (s_k, g_{k+1}), $||s_k||^2$.

Enfin cet algorithme est de type chaotique quant au choix arbitraire à chaque itération de la matrice H_{k+1}, i.e. de la direction d_{k+1}. De plus les conditions portant sur les paramètres pour assurer la convergence (théorème II.3.1) sont extrêment réduites.

Remarque II.3.1 : La condition w2) ci dessus entraîne que pour tout $k \in \mathbb{N}$, (s_k, y_k) est strictement positive et donc (ℓ_k, y_k) également.

II.3.3 - Convergence

Théorème II.3.1 : Sous les hypothèses suivantes :

h1) f continuement différentiable,

h2) pour $x_o \in \mathbb{R}^n$, $E_o = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \le f(x_o)\}$ est borné,

tout point d'accumulation x^* de la suite (x_k) donnée par l'algorithme II.3.2, où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, α_k et δ_k sont strictement positifs, ω_k et ω'_k sont dans un compact de $(-1, \infty)$, est tel que $\nabla f(x^*) = 0$.

Preuve :

Il suffit de montrer qu'il existe un μ de $(0, 1)$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(-g_k, d_k) \ge \mu \, ||g_k|| \, ||d_k||.$$

Soient $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$ les valeurs propres de H_k, classées dans l'ordre croissant. Comme $||H_k|| = \lambda_n^k$ et $||H_k^{-1}|| = \frac{1}{\lambda_1^k}$, il vient :

$$(-g_k, d_k) = (g_k, H_k g_k) \ge \lambda_1^k \, ||g_k||^2 = \lambda_1^k \, ||g_k|| \, ||H_k^{-1} d_k||.$$

Puisque $||H_k^{-1} d_k|| \ge \frac{1}{\lambda_n^k} ||d_k||$ nous déduisons :

$$(-g_k, d_k) \ge \frac{\lambda_1^k}{\lambda_n^k} ||g_k|| \, ||d_k|| = \frac{1}{K(H_k)} \cdot ||g_k|| \, ||d_k||.$$

Comme $(s_k, y_k) > 0$, le corollaire II.2.1 entraîne $K(H_k) \le M$ d'où :

$$(-g_k, d_k) \ge \frac{1}{M} ||g_k|| \, ||d_k||. \ \square$$

II.3.4 - Algorithme avec réinitialisation

Nous pouvons, pour des raisons pratiques, prendre de temps à autre une direction d_{k+1} qui ne soit pas donnée par $-H_{k+1}\, g_{k+1}$ et faire une réinitialisation de la direction de descente de la forme $d_{k+1} = -A_{k+1}\, g_{k+1}$ ou $d_{k+1} = -g_{k+1}$ pour k+1 appartenant à un sous-ensemble de $\mathbb{N}$, comme celui des multiples entiers de la dimension n de l'espace.

Pour plus de clarté, introduisons deux sous-ensembles disjoints Γ_1 et Γ_2 de $\mathbb{N}$. Alors pour déterminer la direction de descente d_{k+1} nous pouvons définir une suite de matrices $(\mathcal{H}_k)$ de la manière suivante :

$\mathcal{H}_{k+1} = H_{k+1}$ donnée par (II.3.1) pour $k+1 \in \mathbb{N} - \Gamma_1 \cup \Gamma_2$,

$\mathcal{H}_{k+1} = I$ pour $k+1 \in \Gamma_1$,

$\mathcal{H}_{k+1} = A_{k+1}$ pour $k+1 \in \Gamma_2$.

Nous demandons à la suite (A_{k+1}), $k+1 \in \Gamma_2$, d'être définie positive et à conditionnement borné par une constante C, la matrice unité satisfaisant évidemment ces conditions.

L'algorithme proposé est le même que II.3.2 avec cette fois $d_k = -\mathcal{H}_k g_k$. La convergence de cet algorithme avec réinitialisation est assurée sous les mêmes conditions que ci-dessus (théorème II.3.1) avec une suite de matrices A_{k+1}, $k+1 \in \Gamma_2$, définies positives, à conditionnement borné. En effet la suite de matrices $(\mathcal{H}_k)$ a alors un conditionnement borné par 1 pour $k+1 \in \Gamma_1$, par C pour $k+1 \in \Gamma_2$ et par $(1+\omega_k)(1+\omega'_k)$ ou $\frac{1+\omega_k}{1+\omega'_k}$ ou $\frac{1+\omega'_k}{1+\omega_k}$ ou $\frac{1}{(1+\omega_k)(1+\omega'_k)}$ selon le signe de ω_k ou ω'_k pour $k+1 \in \mathbb{N} - \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Un exemple de réinitialisation est donné par Powell [36]. La direction est prise égale à l'opposé du gradient lorsque l'inégalité $|(g_k,\, g_{k+1})| \geq 0.2\, ||g_{k+1}||^2$ a lieu, i.e. lorsque deux gradients consécutifs ne deviennent pas assez orthogonaux.

Remarque II.3.2 : Considérons les hypothèses suivantes :

h'1) f deux foix continuement différentiable,

h'2) il existe deux constantes positives m et m' telles que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ et $x_o \in E_o$:

$$m \, ||y||^2 \leq (\nabla^2 f(x) \, y, \, y) \leq m' \, ||y||^2.$$

Sous h'1) et h'2), Shanno [41] a démontré la convergence de l'algorithme II.3.2 avec la formule de mise à jour obtenue à partir de la BFGS quand on pose H = I (formule (I.5)).

Remarque II.3.3 : Dans le chapitre suivant nous étendons le résultat de Shanno [41] aux classes de Huang [25] et Oren-Luenberger sous les hypothèses h'1) et h"2) où h"2) n'est autre que h'2) ci-dessus privée de l'inégalité de droite.

Remarque II.3.4 : Sous les hypothèses h'1) et h'2) ci-dessus, nous montrons comme en [10, 11] en nous inspirant de Allwright [1] que la vitesse de convergence de la suite des itérés donnée par l'algorithme est au moins R-linéaire i.e. il existe une constante C et un nombre h appartenant à]0, 1[tels que : $||x_k - x^*|| \leq C \, h^k$ où x^* est le point limite de la suite.

II.4 - Essais numériques

Des essais numériques ont été faits avec les formules H^6_{k+1} (II.13) et H^2_{k+1} (II.9) en prenant $\alpha_k = \delta_k = 1$.

Avec ce choix la formule H^6_{k+1} devient :

$$H^6_{k+1} = I + \omega_k \frac{y_k y_k^t}{||y_k||^2 + (s_k, \, y_k)} - \omega'_k \frac{\ell_k \ell_k^t}{(1+\omega'_k)(\bar{B}_k \ell_k, \ell_k) + (\ell_k, y_k)}$$

i.e. que la direction de descente générée par cette matrice s'écrit :

$$d_{k+1} = -g_{k+1} - \omega_k \frac{(y_k, g_{k+1})}{||y_k||^2 + (s_k, y_k)} \, y_k + \omega'_k \frac{(\ell_k, g_{k+1})}{(1+\omega'_k)(\bar{B}_k \ell_k, \ell_k) + (\ell_k, y_k)} \, \ell_k,$$

avec $\ell_k = s_k - r_k y_k$, $r_k = \dfrac{(s_k, y_k)}{||y_k||^2 + (s_k, y_k)}$, $((\ell, y) = r(s, y))$,

$$(\bar{B}_k \ell_k, \ell_k) = ||\ell_k||^2 - \omega_k \frac{(\ell_k, y_k)^2}{(1+\omega_k)||y_k||^2 + (s_k, y_k)} .$$

D'autre part la formule H^2_{k+1} qui s'écrit (avec $\alpha_k = \delta_k = 1$) de la manière suivante :

$$H^2_{k+1} = I + \omega_k \frac{y_k y_k^t}{||y_k||^2} - \omega'_k \frac{s_k s_k^t}{(1+\omega'_k)(\tilde{B}_k s_k, s_k) + (s_k, y_k)} ,$$

fournit la direction de descente correspondante :

$$d_{k+1} = -g_{k+1} - \omega_k \frac{(y_k, g_{k+1})}{||y_k||^2} y_k + \omega'_k \frac{(s_k, g_{k+1})}{(1+\omega'_k)(\tilde{B}_k s_k, s_k) + (s_k, y_k)} s_k,$$

où :

$$(\tilde{B}_k s_k, s_k) = ||s_k||^2 - \omega_k \frac{(y_k, s_k)^2}{(1+\omega_k)||y_k||^2} .$$

Dans les tableaux suivants sont indiquées les valeurs de (ω_k) et (ω'_k) prises ici égales à des constantes. Les règles d'arrêt sont $||g_k||^2 \leq 10^{-25}$ ou $f(x_k + \lambda_k d_k) > f(x_k)$ pour $\lambda_k ||d_k||_\infty \leq 10^{-16}$. Les comparaisons ont été effectuées avec la méthode de Shanno (c.f. formule I.5) et la BFGS. Ces comparaisons portent uniquement sur le nombre d'itérations (noté Nit) et le nombre (noté NF) d'appels simultanés de la fonction et du gradient (ces deux nombres sont parfois séparés par un trait) car le temps du calcul et la place mémoire comme il a été déjà indiqué sont beaucoup plus importants pour la BFGS. L'astérisque signifie que le calcul a été arrêté au numéro de l'itération indiqué.

Les calculs ont été faits sur IRIS 80 à l'Université de Lille I ; en double précision avec 14 chiffres hexadécimaux, i.e. à peu près 16.8 chiffres décimaux. Pour la BFGS nous avons utilisé le code M1QN1 de la bibliothèque MODULOPT de C. Lemaréchal (INRIA) ; il est équivalent au code de M.J.D. Powell (Harwell).

Fonction de Dennis [9]

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} i\, x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^4,$$

point de départ : $x_o(i) = 10 \quad i = 1, \ldots, n$;

$n = 10 : f(x_o) = 0.10\ 10^9$; $n = 20 : f(x_o) = 0.16\ 10^{10}$;

$n = 30 : f(x_o) = 0.81\ 10^{10}$; $n = 40 : f(x_o) = 0.25\ 10^{11}$;

$n = 50 : f(x_o) = 0.62\ 10^{11}$; $n = 60 : f(x_o) = 0.12\ 10^{12}$;

$n = 100 : f(x_o) = 0.10\ 10^{13}$;

solution optimale : $\bar{x} = 0$, $f(\bar{x}) = 0$.

Formule H^6_{k+1}

$\omega=\omega'$ \ n	10	20	30	40	50	60	100
- 0.9	48/97	85/141	91/146	111/172	136/197	165/242	202/277
- 0.99	63/116	79/137	101/160	118/176	130/202	157/225	178/249
- 0.9999	59/115	95/156	128/202	134/193	156/231	161/234	217/292
Shanno	85/162	113/223	136/247	138/258	175/301	184/320	225/377
BFGS	59/94	89/186	109/253	164/352	195/418	177/432	219/613

Formule H^2_{k+1}

$\omega=\omega'$ \ n	10	30	50
- 0.99	72/117	180/256	341/401
- 0.9999	96/151	180/240	400*/446

Les valeurs finales de f n'ont pas été reproduites, elles sont toutes très voisines, de l'ordre de 10^{-27}.

Fonction Var [7, 24]

$$f(x) = \sum_{i=1}^{100} x_i^2 + (\sum_{i=1}^{100} \sqrt{i}\, x_i)^2 + (\sum_{i=1}^{100} \sqrt{i}\, x_i)^4,$$

point de départ : $x_o(i) = 6 \quad i = 1, \ldots, 100, \; f(x_o) = 0.25\ 10^{15}$;

solution optimale : $\bar{x} = 0,\ f(\bar{x}) = 0.$

Formule H^6_{k+1}

$\omega = \omega'$	Nit	NF	f	$\|\|g\|\|^2$
- 0.99	185	256	$0.1\ 10^{-26}$	$0.9\ 10^{-25}$
- 0.995	71	150	$0.8\ 10^{-26}$	$0.5\ 10^{-25}$
- 0.9999	25	84	$0.2\ 10^{-25}$	$0.1\ 10^{-24}$
- 0.999999	200*	408	$0.6\ 10^{-21}$	$0.1\ 10^{-19}$
Shanno	400*	712	$0.7\ 10^{-7}$	$0.2\ 10^{-6}$
BFGS	50	66	$0.7\ 10^{-26}$	$0.3\ 10^{-25}$

Formule H^2_{k+1}

$\omega = \omega'$	Nit	NF	f	$\|\|g\|\|^2$
- 0.99	256	352	$0.47\ 10^{-27}$	$0.85\ 10^{-25}$
- 0.999	106	217	$0.20\ 10^{-28}$	$0.67\ 10^{-25}$
- 0.9999	21	63	$0.10\ 10^{-28}$	$0.96\ 10^{-26}$

Dans ces essais numériques nous n'avons pas exploité le caractère chaotique de l'algorithme. A titre indicatif nous proposons de l'utiliser dans le cas cyclique, avec deux formules, à savoir : H^2_{k+1} et H^6_{k+1}, pour deux couples de paramètres ω_k et ω'_k.

Premier exemple : Pour H^2_{k+1} et H^6_{k+1} nous prenons les valeurs communes $\omega_k = \omega'_k = -0.9999$.

Nit	NF	f	$\|\|g\|\|^2$
20	62	$0.10\ 10^{-34}$	$0.41\ 10^{-34}$

Deuxième exemple : Pour H^2_{k+1} nous prenons $\omega_k = \omega'_k = -0.9999$ et pour H^6_{k+1} nous prenons ω_k et $\omega'_k = -0.99$.

Nit	NF	f	$\|\|g\|\|^2$
32	87	$0.26\ 10^{-27}$	$0.14\ 10^{-25}$

<u>Fonction de Powell singulière [26, 37] avec n = 64 variables</u>

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n/4} (x_{4i-3} + 10x_{4i-2})^2 + 5(x_{4i-1} - x_{4i})^2 + (x_{4i-2} - 2x_{4i-1})^4$$

$$+ 10(x_{4i-3} - x_{4i})^4],$$

point de départ : $x_o(4i-3) = 6$, $x_o(4i-2) = -2$, $x_o(4i-1) = 0$, $x_o(4i) = 2$,

$i = 1, 2, \ldots, n/4$, $f(x_o) = 0.45\ 10^5$,

solution optimale : $\bar{x} = 0$, $f(\bar{x}) = 0$.

Formule H^6_{k+1}

$\omega = \omega'$	Nit	NF	f	$\|\|g\|\|^2$
- 0.99	400*	722	$0.4\ 10^{-7}$	$0.5\ 10^{-8}$
- 0.9999	400*	763	$0.5\ 10^{-11}$	$0.1\ 10^{-11}$
Shanno	244	438	$0.3\ 10^{-17}$	$0.5\ 10^{-25}$
BFGS	61	64	$0.2\ 10^{-21}$	$0.3\ 10^{-26}$

Formule H^2_{k+1}

$\omega = \omega'$	Nit	NF	f	$\|\|g\|\|^2$
- 0.9	400*	440	$0.13\ 10^{-3}$	$0.47\ 10^{-4}$
- 0.9999	400*	746	$0.10\ 10^{-3}$	$0.31\ 10^{-4}$

CHAPITRE III

METHODES DE METRIQUE VARIABLE A ENCOMBREMENT REDUIT. CONVERGENCE DANS C^2.

III.1 - INTRODUCTION, DÉFINITIONS, HYPOTHÈSES

Nous considérons, dans ce chapitre, la famille suivante de formules de mise à jour à trois paramètres :

$$H_{k+1}(\theta_k, \gamma_k, \rho_k) = (H_k - \frac{(H_k y_k)(H_k y_k)^t}{(H_k y_k, y_k)} + \theta_k \, v_k v_k^t) \, \gamma_k + \rho_k \frac{s_k s_k^t}{(s_k, y_k)}, \qquad \text{(III.1)}$$

où : H_o est donnée, par exemple égale à la matrice identité ; $s_k = x_{k+1} - x_k$; $y_k = g_{k+1} - g_k$; θ_k, γ_k, ρ_k sont trois paramètres réels tels que $\theta_k \geq 0$, $\gamma_k > 0$, $\rho_k > 0$ et

$$v_k = (H_k y_k, y_k)^{1/2} \left(\frac{s_k}{(s_k, y_k)} - \frac{H_k y_k}{(H_k y_k, y_k)}\right). \qquad \text{(III.2)}$$

La formule (III.1) contient la plupart des formules de mise à jour connues. Pour $\rho_k = 1$, nous obtenons les formules données et étudiées par Oren-Luenberger [30], Oren [31] et Oren-Spedicato [32]. Pour $\gamma_k = 1$, nous avons la classe des matrices symétriques de Huang [25] sous la forme donnée par Osborne [33]. Pour $\rho_k = \gamma_k = 1$, nous avons la famille de Broyden [3] et, comme cas particuliers, la BFGS [4, 18, 22, 39] ($\theta_k = 1$) et la DFP [8, 20] ($\theta_k = 0$).

Remarquons que les conditions : $(s_k, y_k) > 0$, $\rho_k > 0$, $\gamma_k > 0$, $\theta_k \geq 0$ et H_k définie positive entraînent que H_{k+1} est définie positive.

De même que dans le chapitre précédent nous définissons, à partir de la formule (III.1), une formule plus simple en posant $H_k = I$ ce qui donne :

$$H_{k+1} = \gamma_k \, I - \gamma_k \frac{y_k y_k^t}{||y_k||^2} + \rho_k \frac{s_k s_k^t}{(s_k, y_k)} + u_k u_k^t, \qquad \text{(III.3)}$$

où : $$u_k = (\theta_k \, \gamma_k)^{1/2} \, ||y_k|| \left(\frac{s_k}{(s_k, y_k)} - \frac{y_k}{||y_k||^2}\right). \qquad \text{(III.4)}$$

Evidemment avec les conditions ci-dessus la matrice H_{k+1} est symétrique et définie positive. Elle permet donc de définir une direction de descente $d_{k+1} = -H_{k+1} \, g_{k+1}$, plus explicitement :

$$d_{k+1} = -\gamma_k g_{k+1} + \gamma_k \frac{(y_k,\ g_{k+1})}{||y_k||^2} y_k - \rho_k \frac{(s_k,\ g_{k+1})}{(s_k,\ y_k)} s_k - (u_k,\ g_{k+1})u_k. \qquad \text{(III.5)}$$

Dans ce chapitre nous étudions la convergence des méthodes basées sur la direction de descente (III.5), le pas étant calculé par une recherche linéaire exacte ou selon les règles de Goldstein et Price ou encore selon celles de Wolfe.

Nous prouvons la convergence avec des conditions de deuxième ordre, f de classe C^2 et convexe. Ces conditions étant légèrement moins fortes que celles utilisées par Shanno en [41] où il étudie trois algorithmes, dont deux sont des cas particuliers de notre étude. Ces deux cas correspondent respectivement au choix θ_k, γ_k et ρ_k égaux à 1,i.e.,le cas déduit de la BFGS et au choix θ_k et ρ_k égaux à 1 et $\gamma_k = \frac{(s_k, y_k)}{||y_k||^2}$, i.e.,le cas dérivée de la BFGS "self-scaling".

Nous remarquons que lorsque la recherche linéaire est exacte la direction (III.5) devient :

$$d_{k+1} = -\gamma_k g_{k+1} + \gamma_k (1-\theta_k) \frac{(y_k, g_{k+1})}{||y_k||^2} y_k + \theta_k \gamma_k \frac{(y_k, g_{k+1})}{(s_k, y_k)} s_k,$$

car $(s_k,\ g_{k+1}) = 0$. Si de plus nous posons $\theta_k = 1$, nous retrouvons la direction de gradient conjugué de Hestenes-Stiefel [23] à savoir :

$$d_{k+1} = \gamma_k (-g_{k+1} + \frac{(y_k, g_{k+1})}{(d_k,\ y_k)} d_k).$$

Donc avec $\theta_k = 1$, posant au départ $d_o = -g_o$ et en utilisant la formule (III.5), avec une recherche linéaire exacte, l'algorithme ainsi défini est identique à la méthode classique du gradient conjugué, lorsque la fonction à minimiser est quadratique définie positive. Il converge donc vers la solution en un nombre d'itérations inférieur ou égal à n. Nous pouvons considérer la direction (III.5) comme une direction de gradient conjugué généralisée.

Contrairement aux directions de métrique variable, qui exigent le stockage d'une matrice symétrique et d'un nombre non négligeable de produits scalaires, la détermination de la direction (III.5) demande un encombrement réduit, à savoir quatre vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et les calculs se réduisent à quatre produits scalaires.

Hypothèses :

h1) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction deux fois continuement différentiable, le Hessien de f en x est noté $G(x) = \nabla^2 f(x)$.

h2) il existe une constante $m > 0$ telle que pour tout y et x dans $\mathbb{R}^n$:
$m \, ||y||^2 \leq (y, G(x)\, y)$.

h3) les paramètres γ_k et ρ_k appartiennent à un compact de $(0, \infty)$, le paramètre θ_k appartient à un compact de $[0, \infty)$.

Les hypothèses h1) et h2) impliquent (Powell [38]).

C1) f est fortement convexe,

C2) pour tout x_o dans $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des vecteurs x qui satisfont la condition $f(x) \leq f(x_o)$, est borné,

C3) les quotients : $\dfrac{||y_k||^2}{(s_k, y_k)}$, $\dfrac{||s_k||^2}{(s_k, y_k)}$, $\dfrac{||s_k||}{||y_k||}$ sont respectivement bornés par : $M = \dfrac{K}{m}$, $\dfrac{1}{m}$ et $\dfrac{1}{m}$, où K est la borne supérieure de $||G(x)||$ pour les x tels que $f(x) \leq f(x_o)$. En plus, on a également : $\dfrac{1}{M} \leq \dfrac{(s_k, y_k)}{||y||^2} \leq \dfrac{1}{m}$.

Plus précisément le deuxième quotient est obtenu sous la forme $(s_k, y_k) \geq m \, ||s_k||^2$, i.e., que le produit scalaire (s_k, y_k) est strictement positif.

Alors comme nous l'avons mentionné plus haut avec $\theta_k \geq 0$, $\gamma_k > 0$, $\rho_k > 0$ et H_k définie positive, la matrice H_{k+1} donnée par (III.1) ou (III.3) est définie positive et ainsi la direction (III.5) est bien une direction de descente.

III.2 - ALGORITHME ET CONVERGENCE

En utilisant un procédé similaire au procédé utilisé par Fiorot et El Hallabi [11] ou Fiorot et Jeannin [13] nous donnons, dans la première partie de cette section, trois lemmes préliminaires pour obtenir une borne sur le nombre de conditionnement des matrices H_{k+1} définies par (III.3) et (III.4).

Pour $\rho_k > 0$ et $\gamma_k > 0$ nous définissons la matrice A_k suivante et son inverse B_k :

$$A_k = \gamma_k \, I + \rho_k \frac{s_k s_k^t}{(s_k,y_k)} , \tag{III.6}$$

$$B_k = \frac{1}{\gamma_k} [I - \frac{\rho_k}{\gamma_k(s_k,y_k)+\rho_k||s_k||^2} \; s_k s_k^t] . \tag{III.7}$$

Lemme III.2.1 : Sous les hypothèses h1),h2) et h3), les matrices A_k et B_k sont symétriques définies positives et leur norme euclidienne satisfait :

$$||A_k|| \leq \gamma_k + \frac{\rho_k}{m} , \tag{III.8}$$

$$||B_k|| = \frac{1}{\gamma_k} . \tag{III.9}$$

Preuve :

L'inégalité (III.8) est obtenue directement de l'égalité $||I+uu^t|| = 1 + ||u||^2$, de l'inégalité $(s_k, y_k) > 0$ et de la deuxième inégalité de C3). L'égalité $||I-uu^t|| = 1$ si $||u||^2 \leq 2$, où ici on prend $u = (\rho_k/[\gamma_k(s_k,y_k) + \rho_k \, ||s_k||^2])^{1/2} \, s_k$, implique bien l'égalité (III.9). □

Maintenant nous allons considérer, la matrice $\bar{B}_k$ construite à partir de la matrice B_k (III.7) :

$$\bar{B}_k = B_k + \frac{\gamma_k}{||y_k||^2 - \gamma_k(B_k y_k,y_k)} (B_k y_k)(B_k y_k)^t, \tag{III.10}$$

et son inverse $\bar{H}_k$:

$$\bar{H}_k = A_k - \gamma_k \frac{y_k y_k^t}{||y_k||^2} . \tag{III.11}$$

Comme précédemment nous allons donner des bornes sur le nombre de conditionnement des matrices (III.10) et (III.11).

<u>Lemme III.2.2</u> : Sous les hypothèses du lemme III.2.1, les matrices $\bar{B}_k$ et $\bar{H}_k$ sont symétriques définies positives et :

$$||\bar{B}_k|| \leq M(\frac{1}{\rho_k} + \frac{1}{m\gamma_k}), \tag{III.12}$$

$$||\bar{H}_k|| \leq \gamma_k + \frac{\rho_k}{m} . \tag{III.13}$$

<u>Preuve</u> :

La matrice $\bar{B}_k$ est bien définie, un calcul simple donne en effet :

$$||y_k||^2 - \gamma_k(B_k y_k,\ y_k) = \frac{\rho_k(s_k,y_k)^2}{\gamma_k(s_k,y_k)+\rho_k||s_k||^2} > 0,$$

et alors, il est évident que $\bar{B}_k$ est symétrique définie positive et par conséquent $\bar{H}_k$ également.

Posons $D^2 = \gamma_k(s_k,y_k) + \rho_k||s_k||^2$ et notons par $B_k^{1/2}$ la matrice racine carrée positive de B_k, nous obtenons :

$$\bar{B}_k = B_k^{1/2} [I + \frac{\gamma_k D^2}{\rho_k(s_k,y_k)^2} (B_k^{1/2} y_k)(B_k^{1/2} y_k)^t] B_k^{1/2}.$$

Il vient alors :

$$||\bar{B}_k|| \leq ||B_k|| (1 + \frac{\gamma_k D^2}{\rho_k(s_k,y_k)^2} ||B_k^{1/2} y_k||^2).$$

Des égalités :

$$\gamma_k ||B_k^{1/2} y_k||^2 = \gamma_k(B_k y_k,\ y_k) = \frac{D^2 ||y_k||^2 - \rho_k(s_k,\ y_k)^2}{D^2}$$ nous

déduisons :

$$||\bar{B}_k|| \leq ||B_k|| (1 + \frac{D^2||y_k||^2 - \rho_k(s_k,y_k)^2}{\rho_k(s_k,y_k)^2} = ||B_k|| \frac{D^2||y_k||^2}{\rho_k(s_k,y_k)^2} .$$

Or, en remplaçant D^2 par sa valeur et en utilisant C3) nous obtenons :

$||\bar{B}_k|| \leq \frac{1}{\gamma_k} M(\frac{\gamma_k}{\rho_k} + \frac{1}{m})$ i.e. l'inégalité (III.12).

En notant $A_k^{1/2}$ la matrice racine carrée positive de A_k et en écrivant :

$$\bar{H}_k = A_k^{1/2} [I - \gamma_k \frac{(B_k^{1/2} y_k)(B_k^{1/2} y_k)^t}{||y_k||^2}] A_k^{1/2},$$

c'est à dire $\bar{H}_k$ sous la forme : $A_k^{1/2}[I - vv^t] A_k^{1/2}$, avec $||v||^2 \leq \gamma_k ||B_k|| = 1$ nous obtenons $||\bar{H}_k|| \leq ||A_k||$, donc l'inégalité (III.13). □

Notons B_{k+1} la matrice inverse de H_{k+1} définie par (III.3).

<u>Lemme III.2.3</u> : Sous les hypothèses h1), h2) et h3), la matrice H_{k+1} définie par (III.3) et son inverse B_{k+1} sont symétriques définies positives et :

$$||H_{k+1}|| \leq (\gamma_k + \frac{\rho_k}{m}) + \theta_k\gamma_k (\frac{M}{m} - 1), \tag{III.14}$$

$$||B_{k+1}|| \leq M (\frac{1}{\rho_k} + \frac{1}{m\gamma_k}). \tag{III.15}$$

<u>Preuve</u> :

D'après les définitions de $\bar{H}_k$ (III.11) et A_k (III.6), la formule (III.3) peut être écrite de la façon suivante :

$$H_{k+1} = \bar{H}_k + u_k u_k^t, \tag{III.16}$$

alors $||H_{k+1}|| \leq ||\bar{H}_k|| + ||u_k||^2.$ (III.17)

En utilisant la définition de u_k (III.4) nous avons, après un calcul direct :

$$||u_k||^2 = \theta_k\gamma_k (\frac{||s_k||^2||y_k||^2}{(s_k,y_k)^2} - 1) \leq \theta_k\gamma_k (\frac{M}{m} - 1). \tag{III.18}$$

Les inégalités (III.13), (III.17) et (III.18) donnent le résultat (III.14).

D'après (III.16) et la formule de Sherman-Morrison (II.3) nous obtenons :

$$B_{k+1} = \bar{B}_k - \frac{\bar{B}_k u_k u_k^t \bar{B}_k}{1+(\bar{B}_k u_k, u_k)} .$$

En notant par $\bar{B}_k^{1/2}$ la racine carrée positive de $\bar{B}_k$ nous pouvons écrire :

$$B_{k+1} = \bar{B}_k^{1/2} \left[I - \frac{(\bar{B}_k^{1/2} u_k)(\bar{B}_k^{1/2} u_k)^t}{1+(\bar{B}_k u_k, u_k)} \right] \bar{B}_k^{1/2}$$ et puisque

$\dfrac{||\bar{B}_k^{1/2} u_k||^2}{1+(\bar{B}_k u_k, u_k)} \leq 1$ nous déduisons :

$||B_{k+1}|| \leq ||\bar{B}_k||$ et alors l'inégalité (III.12) donne le résultat. □

En utilisant complètement l'hypothèse h3), le lemme II.2.3 nous conduit au résultat suivant :

Théorème III.2.1 : Sous les hypothèses h1), h2) et h3) la matrice H_{k+1} définie par (III.3) et (III.4) a son nombre de conditionnement borné.

Nous allons maintenant définir un algorithme de métrique variable à encombrement réduit lequel peut être considéré comme un algorithme de gradient conjugué généralisé. Le théorème III.2.1 nous permet d'utiliser le théorème classique 2.4.1 dans Fletcher [17], pour obtenir la convergence pour différentes recherches linéaires usuelles.

Algorithme B

0. Nous définissons les valeurs de départ : $k = 0$, x_o un point arbitraire de $\mathbb{R}^n$, H_o une matrice symétrique définie positive.
1. Si $g_k = 0$ stop,
   sinon nous définissons une direction de descente $d_k = -H_k g_k$.
2. Nous cherchons un $\lambda_k > 0$ satisfaisant des conditions classiques (R) ci-dessous.
3. A partir de $s_k = x_{k+1} - x_k = \lambda_k d_k$ et $y_k = g_{k+1} - g_k$ nous définissons d_{k+1} par (III.5) avec ρ_k, θ_k, γ_k satisfaisant h3) et nous retournons à 1 en posant $k = k+1$. □

Les conditions (R) sont :

Soit une recherche linéaire exacte : nous déterminons λ_k tel que $f(x_k + \lambda_k d_k) = \text{Min } \{f(x_k + \lambda d_k) \mid \lambda > 0\}$;

Soit les règles de Goldstein et Price [21] : Etant donné $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ nous choisissons $\lambda_k > 0$ tel que :

$$\lambda_k(1-\alpha)(g_k, d_k) \leq f(x_k+\lambda_k d_k) - f(x_k) \leq \lambda_k\alpha \ (g_k, d_k).$$

Soit la règle de Armijo [2] : Etant donnés α et β dans $(0, 1)$, et $\rho > 0$, déterminer le plus petit entier positif ou nul tel que :

$$f(x_k + \beta^j \rho \, d_k) \leq f(x_k) + \beta^j \rho\alpha(g_k, d_k).$$

Soit les règles de Wolfe [43] : Etant données deux constantes c_1 et c_2 telles que $0 < c_1 < c_2 < 1$, nous déterminons $\lambda_k > 0$ tel que :

$$f(x_k + \lambda_k d_k) \leq f(x_k) + \lambda_k c_1(g_k, d_k) \text{ et}$$

$$(g(x_k + \lambda_k d_k), d_k) \geq c_2(g_k, d_k).$$

Cet algorithme a besoin de stocker seulement quatre vecteurs de longueur n à savoir : v_1 pour x_k et ensuite pour s_k, v_2 pour x_{k+1}, v_3 pour g_k et ensuite pour y_k, v_4 pour g_{k+1}. Et avec la recherche linéaire, seulement quatre produits scalaires : (y_k, g_{k+1}), (y_k, s_k), (s_k, g_{k+1}), (y_k, y_k) sont nécessaires à chaque étape.

Théorème III.2.2 : Sous les hypothèses h1), h2) et h3), l'algorithme B est tel que ou bien on obtient le minimum de f en un nombre fini de pas ou la suite (x_k) converge vers le minimum.

La preuve de ce théorème se déduit directement de la propriété C1),du théorème III.2.1 et du théorème 2.4.1 dans Fletcher [17] ou de ses extensions.

III.3 - QUELQUES CHOIX DE PARAMÈTRES

Nous allons donner quelques exemples de choix pour les paramètres θ_k et γ_k pour la formule (III.5) assurant à l'algorithme B la convergence sous les hypothèses h1) et h2). Dans ce qui suit nous prendrons $\rho_k = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Revenons à la formule (III.1) donnée en tête de ce chapitre avec $\rho_k = 1$, écrite sous la forme suivante :

$$H_{k+1} = \gamma_k H_k + \frac{\sigma_k+\gamma_k\theta_k\tau_k}{\sigma_k^2} s_k s_k^t + \frac{\gamma_k(\theta_k-1)}{\tau_k} H_k y_k y_k^t H_k$$

$$- \frac{\gamma_k\theta_k}{\sigma_k} (s_k y_k^t H_k + H_k y_k s_k^t), \tag{III.19}$$

où :

$$\sigma_k = (s_k,\ y_k),\ \tau_k = (H_k y_k, y_k) \text{ et } \varepsilon_k = (H_k^{-1} s_k, s_k).$$

Nous nous intéressons toujours au cas où H_k est prise égale à la matrice identité. Nous donnons ici cinq exemples de critères de choix des paramètres qui assurent la convergence de l'algorithme B.

Critère 1

Cette formule (III.19) a été étudiée par Oren et Spedicato [32] qui ont déterminé une borne supérieure du quotient $K(H_{k+1})/K(H_k)$. Cette borne est notée $\Phi(\gamma_k,\ \theta_k)$. Les auteurs proposent un choix des paramètres θ_k et γ_k de façon à minimiser cette borne $\Phi(\gamma_k,\ \theta_k)$. Ces paramètres ont pour valeurs :

$$\theta_k \in [0,\ 1] \text{ et}$$

$$\gamma_k = \frac{\sigma_k\varepsilon_k}{\theta_k(\varepsilon_k\tau_k-\sigma_k^2)+\sigma_k^2}.$$

La transcription, dans le cas de notre étude où $H_k = I$, de ces valeurs particulières de ces paramètres devient en posant, $a_k = ||y_k||^2$, $b_k = (s_k,\ y_k)$, $c_k = ||s_k||^2$:

$$\theta_k \in [0,\ 1] \quad \text{et} \tag{III.20}$$

$$\gamma_k = \frac{b_k c_k}{\theta_k(c_k a_k-b_k^2)+b_k^2}. \tag{III.21}$$

<u>Proposition III.3.1</u> : Sous les hypothèses h1) et h2), l'algorithme B avec le choix des paramètres (III.20), (III.21) est convergent.

<u>Preuve</u> :

Puisque θ_k appartient à $[0, 1]$, il suffit de montrer que γ_k appartient à un compact de $(0, +\infty)$.

D'après l'inégalité de Schwarz $a_k c_k - b_k^2 \geq 0$ et puisque $b_k > 0$ on a :

$$\frac{b_k}{a_k} \leq \gamma_k \leq \frac{c_k}{b_k} ,$$

mais comme $\frac{c_k}{b_k} \leq \frac{1}{m}$ et $\frac{b_k}{a_k} \geq \frac{1}{M}$ on conclut que $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{M} \leq \gamma_k \leq \frac{1}{m}$, $\theta_k \in [0, 1]$, $\rho_k = 1$ d'où la convergence de l'algorithme B. □

<u>Critère 2</u>

Dans ce même article, Oren et Spedicato proposent le choix suivant (appelé "Switch 1") :

i) Si $\frac{c_k}{b_k} \leq 1$ alors $\gamma_k = \frac{||s_k||^2}{(s_k, y_k)}$ et $\theta_k = 0$,

ii) Si $\frac{b_k}{a_k} \geq 1$ alors $\gamma_k = \frac{(s_k, y_k)}{||y_k||^2}$ et $\theta_k = 1$,

iii) Si $\frac{b_k}{a_k} < 1 < \frac{c_k}{b_k}$ alors $\gamma_k = 1$ et $\theta_k = \frac{b_k(c_k - b_k)}{a_k c_k - b_k^2}$.

<u>Proposition III.3.2</u> : Sous les hypothèses h1) et h2), l'algorithme B avec le choix de paramètres donnés ci-dessus est convergent.

<u>Preuve</u> :

On a bien, d'après la proposition III.3.1, pour i) et ii)

$$\frac{1}{M} \leq \gamma_k \leq \frac{1}{m} ,$$

donc pour tous les cas : $\mathrm{Min}\ \{1, \frac{1}{M}\} \leq \gamma_k \leq \mathrm{Max}\ \{1, \frac{1}{m}\}$.

Il suffit de montrer pour iii) que θ_k appartient à un compact de $[0, +\infty)$.

Or, supposons que $\frac{b_k}{a_k} < 1 < \frac{c_k}{b_k}$, alors

$$\theta_k = \frac{b_k(c_k-b_k)}{a_k c_k - b_k^2} = \frac{b_k(c_k-b_k)}{b_k(c_k-b_k)+c_k(a_k-b_k)}$$

et puisque : $c_k > b_k$ et $a_k > b_k$ on a bien $0 \leq \theta_k < 1$; d'où la convergence. □

Critère 3

Ce critère (appelé "Switch 2") consiste à prendre :

$$\gamma_k = \left(\frac{c_k}{a_k}\right)^{1/2} \quad \text{et } \theta_k \; \frac{1}{1+\left(\frac{a_k c_k}{b_k^2}\right)^{1/2}} \qquad \text{(III.22)}$$

Proposition III.3.3 : Sous les hypothèses h1) et h2), l'algorithme B est convergent pour le choix de paramètres (III.22).

Preuve :

On a bien $\theta_k \in [0, 1]$. D'après C3) on a :

$$\frac{1}{M} \leq \frac{||s_k||}{||y_k||} \leq \frac{1}{m} ,$$

i.e. $\frac{1}{M} \leq \gamma_k \leq \frac{1}{m}$ pour tout k.

Donc l'algorithme B est convergent. □

Critère 4

Ce critère (appelé "Switch 3") est pratiquement identique au deuxième critère :

i) Si $\frac{c_k}{b_k} \leq 1$ alors on prend $\gamma_k = \frac{||s_k||^2}{(s_k,y_k)}$ et $\theta_k = 0$,

ii) Si $\frac{b_k}{a_k} \geq 1$ alors on prend $\gamma_k = \frac{(s_k,y_k)}{||y||^2}$ et $\theta_k = 1$,

iii) Si $\frac{b_k}{a_k} < 1 < \frac{c_k}{b_k}$ on prend $\gamma_k = 1$ et $\theta_k = \frac{b_k(a_k-b_k)}{a_k c_k - b_k^2}$.

Proposition III.3.4 : Sous les hypothèses h1) et h2), et pour le choix de paramètres donnés par le critère 4, l'algorithme B est convergent.

Preuve : Similaire à la preuve de la proposition III.3.2.

Critère 5

Ce critère (appelé "Switch 4") consiste à prendre les paramètres de la façon suivante :

$$\gamma_k = \frac{c_k}{a_k} \text{ et } \theta_k = \frac{1}{2} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}. \tag{III.23}$$

Proposition II.3.5 : Sous les hypothèses h1) et h2) et pour le choix des paramètres θ_k et γ_k donnés par (III.23), l'algorithme B est convergent.

Preuve :

La preuve vient des inégalités suivantes :

$$\frac{1}{M^2} \leq \gamma_k \leq \frac{1}{m^2} . \square$$

III.4 - RÉSULTATS ADDITIONNELS ET COMMENTAIRES

III.4.1 - Dans [41], Shanno étudie la convergence de l'algorithme B pour deux cas particuliers avec l'hypothèse h'2) : il existe deux constantes m > 0 et m' > 0 telles que pour tout x et y $\in \mathbb{R}^n$:

$$m \, ||y||^2 \leq (y, G(x)\, y) \leq m' \, ||y||^2.$$

La recherche linéaire dans le pas 2 de l'algorithme satisfait les règles de Wolfe. Ces deux cas particuliers correspondent au choix de la direction d_{k+1} dans le pas 3 avec respectivement $\rho_k = \theta_k = \gamma_k = 1$ et $\rho_k = \theta_k = 1$, $\gamma_k = \frac{(s_k, y_k)}{||y||^2}$,i.e.,les cas déduits respectivement de la BFGS et de la BFGS "self-scaling". L'hypothèse h3) est évidemment satisfaite dans les deux cas (c.f. C3) pour le deuxième cas).

III.4.2 - Pour $\rho_k = \gamma_k = 1$ et $\theta_k = 0$ nous obtenons une méthode de métrique variable à encombrement réduit déduite de la DFP. La direction d_{k+1} est donnée par :

$$d_{k+1} = -g_{k+1} + \frac{(y_k, g_{k+1})}{||y_k||^2} y_k - \frac{(s_k, g_{k+1})}{(s_k, y_k)} s_k. \qquad \text{(III.24)}$$

III.4.3 - Si dans l'algorithme B nous utilisons dans le pas 2 une recherche linéaire exacte, la direction (III.24) se réduit à :

$$d_{k+1} = -g_{k+1} + \frac{(y_k, g_{k+1})}{||y_k||^2} y_k. \qquad \text{(III.25)}$$

La direction (III.25) n'est pas une direction de gradient conjugué classique. Si nous considérons une fonction quadratique définie positive $\frac{1}{2}(Qx, x) + (b, x) + c$, nous constatons que deux directions consécutives sont conjuguées car, $(d_{k+1}, Qd_k) = \frac{1}{\lambda_k}(d_{k+1}, Qs_k) = \frac{1}{\lambda_k}(d_{k+1}, y_k) = 0$. Mais comme le montre l'exemple suivant dans $\mathbb{R}^3$ les directions d_k ne sont pas en général mutuellement conjuguées. Soit la fonction quadratique définie positive : $x_1^2 + (\frac{1}{2}x_1 + x_2)^2 + (\frac{1}{2}x_1 - x_3)^2$, prenons $x_o = (1, 0, 1)^t$, $d_o = -g_o = -(2, 1, 1)^t$. Nous obtenons les points successifs : $x_1 = \frac{1}{8}(2, -3, 5)^t$, $x_2 = \frac{1}{38}(6, -9, 1)^t$, $x_3 = \frac{1}{3401}(138, 21, 61)^t$ et des directions successives : $d_1 = (-2, 3, -13)^t$, $d_2 = (-14, 29, -1)^t$ avec $(Qd_2, d_o) = -32$. Bien que nous n'obtenions pas la propriété de convergence finie, d'après le théorème III.2.2 nous avons la convergence, laquelle est donnée pour des fonctions non linéaires plus générales satisfaisant les hypothèses h1) et h2).

III.4.4 - Considérons dans la formule (III.5) le cas $\theta_k = 1$, $\rho_k > 0$, $\gamma_k > 0$. Si dans le pas 2 de l'algorithme B nous utilisons une recherche linéaire exacte, nous obtenons comme nous l'avons indiqué dans la section III.1, la formule de la direction de gradient conjugué de Hestenes-Stiefel. Ainsi le théorème III.2.2 est une autre preuve de la convergence de cette méthode bien connue, convergence qui en général était prouvée dans le cas non quadratique avec l'hypothèse h2') (voir III.4.1 ci-dessus).

III.5 - ESSAIS NUMÉRIQUES

Rappelons la matrice de métrique variable (III.3) dite à encombrement réduit, ainsi que la direction de descente (III.5) correspondante :

$$H_{k+1} = \gamma_k\, I - \gamma_k \frac{y_k y_k^t}{||y_k||^2} + \rho_k \frac{s_k s_k^t}{(s_k,y_k)} + u_k u_k^t,$$

où :

$$u_k = (\theta_k\gamma_k)^{1/2}\, ||y_k||\, \left(\frac{s_k}{(s_k,y_k)} - \frac{y_k}{||y_k||^2}\right),$$

$$d_{k+1} = -\gamma_k g_{k+1} + \gamma_k \frac{(y_k,g_{k+1})}{||y_k||^2}\, y_k - \rho_k \frac{(s_k,g_{k+1})}{(s_k,y_k)}\, s_k - (u_k,g_{k+1})\, u_k.$$

Les essais ont été faits dans les mêmes conditions que celles indiquées en II.4 et pour divers choix des paramètres mentionnés en III.3. Dans les tableaux ci-dessous lorsque, par manque de place, la valeur du paramètre γ_k n'est pas reproduite il faut lui attribuer la valeur fournie par la formule (III.21) à savoir : $\gamma_k = \dfrac{||s_k||^2(s_k,y_k)}{\theta_k(||s_k||^2||y_k||^2-(s_k,y_k)^2)+(s_k,y_k)^2}$, pour la valeur correspondante de θ_k. Le symbole (S) signifie le choix de Shanno [40].

<u>Fonction de Dennis avec n = 50 variables</u> (c.f. section II.4)

point de départ : $x_o(i) = 10 \quad i = 1, \ldots, 50$;

$f(x_o) = 0.62\ 10^{11}$;

solution optimale : $\bar{x} = 0$, $f(\bar{x}) = 0$.

$\rho_k = 1$

θ_k	γ_k	Nit/NF	f	$\|\|g\|\|^2$
0	$\|\|s_k\|\|^2/(s_k,y_k)$	266/321	$0.17\ 10^{-25}$	$0.86\ 10^{-25}$
0.25	-	184/208	$0.12\ 10^{-25}$	$0.68\ 10^{-25}$
0.50	-	152/161	$0.55\ 10^{-26}$	$0.48\ 10^{-25}$
0.80	-	136/143	$0.13\ 10^{-25}$	$0.63\ 10^{-25}$
0.85	-	137/149	$0.52\ 10^{-27}$	$0.17\ 10^{-25}$
0.90	-	144/152	$0.40\ 10^{-26}$	$0.61\ 10^{-25}$
0.95	-	152/162	$0.21\ 10^{-26}$	$0.55\ 10^{-25}$
(S) 1	$(s_k,y_k)/\|\|y_k\|\|^2$	136/144	$0.94\ 10^{-26}$	$0.73\ 10^{-25}$
0	1	400*/483	$0.16\ 10^{-14}$	$0.27\ 10^{-13}$
(S) 1	1	175/301	$0.89\ 10^{-27}$	$0.88\ 10^{-25}$
Switch 1		266/321	$0.17\ 10^{-25}$	$0.86\ 10^{-25}$
Switch 2		178/194	$0.77\ 10^{-26}$	$0.71\ 10^{-25}$
Switch 4		289/800*	$0.33\ 10^{-25}$	$0.54\ 10^{-24}$
BFGS		195/418	$0.84\ 10^{-27}$	$0.77\ 10^{-25}$

Pour la même fonction dans le tableau suivant nous avons donné à ρ_k différentes valeurs pour le choix $\theta_k = 0$ et $\gamma_k = ||s_k||^2/(s_k, y_k)$.

ρ_k	Nit/NF	f	$\|\|g\|\|^2$
1	266/321	$0.17\ 10^{-25}$	$0.86\ 10^{-25}$
0.50	225/291	$0.60\ 10^{-26}$	$0.34\ 10^{-25}$
0.25	264/358	$0.10\ 10^{-25}$	$0.93\ 10^{-25}$
0.125	234/322	$0.64\ 10^{-26}$	$0.92\ 10^{-25}$

Fonction Var (c.f. section II.4)

$\rho_k = 1$

θ_k	γ_k	Nit/NF	f	$\|\|g\|\|^2$
0.0	$\|\|s_k\|\|^2/(s_k,y_k)$	154/190	$0.19\ 10^{-35}$	$0.76\ 10^{-35}$
0.5	-	175/231	$0.29\ 10^{-26}$	$0.11\ 10^{-25}$
0.75	-	151/194	$0.68\ 10^{-26}$	$0.27\ 10^{-25}$
(S) 1.0	$(s_k,y_k)/\|\|y_k\|\|^2$	197/311	$0.92\ 10^{-26}$	$0.47\ 10^{-25}$
0.0	1.0	30/47	$0.84\ 10^{-29}$	$0.49\ 10^{-25}$
(S) 1.0	1.0	400^*/712	$0.70\ 10^{-7}$	$0.20\ 10^{-6}$
Switch 1		154/190	$0.19\ 10^{-35}$	$0.76\ 10^{-35}$
Switch 2		150/186	$0.46\ 10^{-26}$	$0.18\ 10^{-25}$
Switch 4		358/446	$0.21\ 10^{-27}$	$0.10\ 10^{-26}$
BFGS		52/64	$0.60\ 10^{-26}$	$0.20\ 10^{-25}$

Fonction de Brown et Dennis [26] : n = 4

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} [(x_1 + t_i x_2 - \exp(t_i))^2 + (x_3 + x_4 \sin(t_i) - \cos(t_i))^2]^2$$

où $t_i = i/5$;

point de départ : $x_o = (25, 5, -5, -1)$, $f(x_o) = 0.79\ 10^7$;

pour m = 20, solution optimal : $f(\bar{x}) = 0.858222\ 10^5$;

$\bar{x} = (-11.59, 13.20, -0.403, 0.236)$.

Dans les programmes utilisés il faut donner une estimation x_s du point solution. Dans le premier tableau nous donnons les résultats lorsque $x_s = (-11, 13, -0.40, 0.23)$ et dans le second lorsque $x_s = (0,0,0,0)$. Cette estimation est utilisée entre autres pour définir la matrice de départ dans la méthode de la BFGS. On prend dans les deux cas $\rho_k = 1$.

θ_k	γ_k	Nit/NF	f	$\|\|g\|\|^2$
0.0	$\|\|s_k\|\|^2/(s_k,y_k)$	32/77	$0.85\ 10^5$	$0.14\ 10^{-6}$
0.5	-	48/65	$0.85\ 10^5$	$0.75\ 10^{-6}$
$(S)^{1.0}$	$(s_k,y_k)/\|\|y_k\|\|^2$	60/86	$0.85\ 10^5$	$0.29\ 10^{-6}$
BFGS		30/93	$0.85\ 10^5$	$0.64\ 10^{-13}$

θ_k	γ_k	Nit/NF	f	$\|\|g\|\|^2$
0.0	$\|\|s_k\|\|^2/(s_k,y_k)$	40/51	$0.85\ 10^5$	$0.16\ 10^{-6}$
0.5	-	48/81	$0.85\ 10^5$	$0.36\ 10^{-7}$
$(S)^{1.0}$	$(s_k,y_k)/\|\|y_k\|\|^2$	53/84	$0.85\ 10^5$	$0.22\ 10^{-5}$
BFGS		64/556	$0.85\ 10^5$	$0.77\ 10^{-9}$

Fonction de Pénalité II. [26] avec n = 10 variables

$$f(x) = (x_1 - 0.2)^2 + \sum_{i=2}^{n} a(\exp(x_i/10) + \exp(x_{i-1}/10) - y_i)^2$$
$$+ \sum_{i=n+1}^{2n} a(\exp(x_{i-n+1}/10) - \exp(-1/10))^2 + ((\sum_{j=1}^{n} (n-j+1)x_j^2)-1)^2$$

où : $a = 10^{-5}$ et $y_i = \exp(i/10) + \exp(i-1/10)$;

point de départ : $x_o = (1/2, \dots, 1/2)$, $f(x_o) = 0.16\ 10^3$;

solution optimale : $f(\bar{x}) = 0.29366\ 10^{-2}$.

Pour ces essais le test d'arrêt est $||g||^2 \leq 10^{-10}$.

$\rho_k = 1$

θ_k	γ_k	Nit/NF	f	$\|\|g\|\|^2$
0.0	$\|\|s_k\|\|^2/(s_k,y_k)$	382/800*	0.29 10^{-2}	0.25 10^{-9}
0.50	-	124/229	0.29 10^{-2}	0.37 10^{-10}
0.75	-	118/212	0.29 10^{-2}	0.87 10^{-10}
(S) 1.0	$(s_k,y_k)/\|\|y_k\|\|^2$	125/225	0.29 10^{-2}	0.85 10^{-10}
0.0	1.0	400*/656	0.29 10^{-2}	0.13 10^{-7}
(S) 1.0	1.0	157/293	0.29 10^{-2}	0.55 10^{-10}
Switch 1		148/270	0.29 10^{-2}	0.51 10^{-10}
Switch 2		205/409	0.29 10^{-2}	0.37 10^{-10}
Switch 3		69/139	0.29 10^{-2}	0.78 10^{-10}
Switch 4		145/282	0.29 10^{-2}	0.78 10^{-10}
BFGS		215/279	0.29 10^{-2}	0.40 10^{-10}

Fonction de Powell singulière (c.f. section II.4)

$\rho_k = 1$

θ_k	γ_k	Nit/NF	f	$\|\|g\|\|^2$
0.0	$\|\|s_k\|\|^2/(s_k,y_k)$	392/800*	0.20 10^{-5}	0.84 10^{-6}
0.8	-	400*/648	0.87 10^{-13}	0.19 10^{-18}
0.9	-	400*/638	0.34 10^{-14}	0.11 10^{-14}
(S) 1.0	$(s_k,y_k)/\|\|y_k\|\|^2$	400*/607	0.40 10^{-10}	0.36 10^{-13}
BFGS		61/64	0.20 10^{-21}	0.30 10^{-26}

ANNEXE

Il est reporté pas à pas quelques expériences numériques précédentes où est mis en évidence le numéro des itérations, le nombre d'appels de la fonction (et du gradient) ainsi que la progression de la fonction économique, pour, dans l'ordre :

. fonction de Dennis, $n = 40$:

avec la formule H^6(II.13) ($\alpha_k = \delta_k = 1$, $\omega_k = \omega'_k = -0.99$) et la BFGS,

$n = 100$:

avec les deux formules précédentes et la formule de Shanno.

. fonction Var, $n = 100$:

avec la formule H^2(II.9) ($\alpha_k = \delta_k = 1$, $\omega_k = \omega'_k = -0.9999$) et la BFGS.

. fonction de Dennis, $n = 50$:

avec la formule (III.5) ($\rho_k=1$, $\theta_k=0.75$ et $\gamma_k = \dfrac{(s_k,y_k)\ ||s_k||^2}{0.75||s_k||^2||y_k||^2+0.25(s_k,y_k)^2}$),

la BFGS et la formule de Shanno.

. fonction Var, $n = 100$:

avec la formule (III.5) ($\rho_k = 1$, $\theta_k = 0$, $\gamma_k = 1$) et la BFGS.

. fonction de Brown et Dennis, $n = 4$:

avec la formule (III.5) ($\rho_k=1$, $\theta_k=0.5$ et $\gamma_k = \dfrac{2(s_k,y_k)\ ||s_k||^2}{||s_k||^2||y_k||^2+(s_k,y_k)^2}$)

et la BFGS.

. fonction de Pénalité II, $n = 10$:

avec la formule (III.5) ($\rho_k=1$, $\theta_k=0.5$ et $\gamma_k = \dfrac{2(s_k,y_k)\ ||s_k||^2}{||s_k||^2||y_k||^2+(s_k,y_k)^2}$),

la BFGS et les deux formules de Shanno (avec et sans "scaling").

Fonction de Dennis

n = 40

Formule H_{k+1}^{6} (II.13)

avec :

$d_k = \delta_k = 1$ et $\omega_k = \omega_k' = -0.99$

BFGS

VALEUR INITIALE DE F = .256000820000000D+11

Nit	NF	VALEUR DE F
1	3	.356119005200257D+10
2	5	.215717031677260D+09
3	8	.167174672212386D+08
4	11	.800173968698250D+05
5	17	.246010746023311D+01
6	20	.145831531453328D+01
7	21	.288638244000328D+00
8	24	.225640005954694D+00
9	25	.125002786217565D+00
10	27	.109000341084104D+00
11	29	.249447664403903D-01
12	31	.146484732003131D-01
13	32	.385722186268218D-02
14	34	.221753736783744D-02
15	35	.810647237364493D-03
16	37	.493524453665064D-03
17	38	.326972618662344D-03
18	39	.215508698659727D-03
19	40	.135078223491508D-03
20	41	.101872635573849D-03
21	42	.803385627532921D-04
22	43	.542524076588990D-04
23	45	.421313435779137D-04
24	46	.333510054660690D-04
25	47	.217067998049418D-04
26	48	.145971130104677D-04
27	49	.719807446031208D-05
28	51	.412952569482000D-05
29	53	.298121599930657D-05
30	54	.251588896128291D-05
31	55	.177294957975551D-05
32	56	.928653089767359D-06
33	58	.613975537634200D-06
34	59	.510207969328114D-06
35	60	.374413331482477D-06
36	61	.188693786009016D-06
37	63	.912406663231011D-07
38	65	.524405442329440D-07

Nit	NF	VALEUR DE F
1	3	.356119005200251D+10
2	4	.154802535855815D+10
3	5	.447401813458177D+09
4	6	.151839140612272D+09
5	7	.484702805678733D+08
6	8	.158431807057332D+08
7	9	.513181600056010D+07
8	10	.166814604745901D+07
9	11	.541550009172436D+06
10	12	.175919355394782D+06
11	13	.571454902230406D+05
12	14	.185704771883146D+05
13	15	.603801832534376D+04
14	16	.196513635594172D+04
15	17	.640644106464825D+03
16	18	.209451363275563D+03
17	19	.688062443345733D+02
18	20	.227793842062825D+02
19	21	.763155062119827D+01
20	22	.259877110941485D+01
21	23	.900739014058704D+00
22	24	.314384736051969D+00
23	25	.105946811967957D+00
24	26	.307863755900981D-01
25	27	.594286217395523D-02
26	28	.665744267669836D-03
27	29	.346047771540442D-03
28	30	.344617219324725D-03
29	32	.344516212079239D-03
30	34	.343694594652176D-03
31	38	.598931920097650D-04
32	39	.598837925334068D-04
33	41	.598744160964736D-04
34	43	.597551187795979D-04
35	45	.582315926244523D-04
36	47	.442372400605295D-04
37	48	.302745012629267D-04
38	49	.187209168551561D-04

Formule H^{6}_{k+1}

avec :

$\alpha_k = \sigma_k = 1 \qquad \omega_k = \omega'_k = -0.98$

Nit	NF	VALEUR DE F
39	66	.432730202665785D-07
40	67	.307481849854537D-07
41	68	.128922114889418D-07
42	70	.874933991310770D-08
43	71	.442347538271162D-08
44	73	.348448514625364D-08
45	74	.221182900614296D-08
46	75	.134132862620139D-08
47	76	.727761674656893D-09
48	77	.461743102482488D-09
49	78	.340839227407715D-09
50	79	.167455888974118D-09
51	81	.784965134075606D-10
52	83	.314234733513486D-10
53	85	.176185970275211D-10
54	86	.371407070182964D-11
55	88	.194225247873945D-11
56	90	.157237121194115D-11
57	91	.114681441852328D-11
58	92	.676501240210770D-12
59	93	.218203759757431D-12
60	95	.565910590851401D-13
61	97	.211964554386401D-13
62	99	.713325368265207D-14
63	101	.245116943087107D-14
64	103	.798590226293412D-15
65	105	.519312537259306D-15
66	107	.377064969566988D-15
67	108	.263964877178779D-15
68	109	.157299947186585D-15
69	110	.123915745505413D-15
70	111	.835355286925134D-16
71	112	.375795080051766D-16
72	114	.257634687216840D-16
73	115	.153544463732733D-16
74	116	.101462166422544D-16
75	117	.871633581364100D-17
76	118	.663372012597277D-17
77	119	.403908614396465D-17
78	121	.264156859934125D-17
79	122	.153378722560437D-17
80	123	.994188517371830D-18
81	125	.796251173653606D-18
82	126	.536496354079466D-18
83	127	.335201869465738D-18
84	128	.201426619603761D-18
85	129	.161867526908533D-18
86	130	.122091526411743D-18

BFGS

Nit	NF	VALEUR DE F
39	51	.187187002916631D-04
40	53	.187003831324769D-04
41	57	.768706081769737D-05
42	60	.768524675992856D-05
43	64	.493690328300630D-05
44	65	.369237562822771D-05
45	70	.339823509380325D-05
46	71	.289935835270243D-05
47	72	.218901453992130D-05
48	73	.196625901611291D-05
49	74	.195733679506306D-05
50	75	.195663187777188D-05
51	77	.195656578383914D-05
52	81	.191719745482636D-05
53	83	.135283831462262D-05
54	84	.110381928836532D-05
55	90	.942934079113637D-06
56	91	.771104646992206D-06
57	92	.646674759557945D-06
58	97	.602344985614777D-06
59	99	.441375896001807D-06
60	100	.397848169201783D-06
61	101	.385946050003970D-06
62	106	.374889830195183D-06
63	108	.242764564378212D-06
64	109	.230906169381857D-06
65	114	.220540440809811D-06
66	116	.145435209273564D-06
67	117	.136655599250325D-06
68	118	.136527044203595D-06
69	121	.136438490053031D-06
70	123	.135740902583999D-06
71	126	.791345129792626D-07
72	127	.787541847332932D-07
73	131	.783805956828732D-07
74	134	.590904971953597D-07
75	135	.468608497840610D-07
76	136	.438086299822569D-07
77	141	.413018820426622D-07
78	143	.278107181317606D-07
79	144	.236526846374541D-07
80	145	.232651439356330D-07
81	149	.230693241462255D-07
82	151	.215308099653866D-07
83	153	.117617730085507D-07
84	154	.116987791181950D-07
85	158	.116362991772894D-07
86	161	.553559660298954D-08

Formule H^{6}_{k+1}

avec :

$\alpha_k = \delta_k = 1$ et $\omega_k = \omega_k^{3} = -0.09$

Nit	NF	VALEUR DE F
87	131	.709522188447366D-19
88	133	.504845623453882D-19
89	134	.399938871141632D-19
90	135	.253896088980880D-19
91	137	.176500090066269D-19
92	138	.146804112952026D-19
93	139	.112523912195870D-19
94	140	.644487383502062D-20
95	142	.448736603486966D-20
96	143	.369324826816070D-20
97	144	.241208853004336D-20
98	145	.122910079102806D-20
99	147	.678344158961450D-21
100	149	.482671729317013D-21
101	150	.259399156836124D-21
102	152	.183070814337915D-21
103	153	.783282263674345D-22
104	155	.383361268242034D-22
105	156	.188041724924819D-22
106	158	.905800448572751D-23
107	159	.187785826077130D-23
108	161	.817109127624308D-24
109	163	.242342006694469D-24
110	165	.196658284686633D-24
111	166	.138865407613511D-24
112	167	.799210569666434D-25
113	169	.519638016494014D-25
114	170	.191242509381445D-25
115	172	.929372886459719D-26
116	173	.485750817959594D-26
117	175	.270282941576756D-26
118	176	F= .783140916407316D-27

BFGS

Nit	NF	VALEUR DE F
87	167	.245394523990364D-08
88	172	.225336864894896D-08
89	174	.138403989971192D-08
90	175	.106319642024051D-08
91	176	.101609680164963D-08
92	181	.972294806171115D-09
93	183	.443727331133382D-09
94	184	.392198372280564D-09
95	189	.354534343258706D-09
96	191	.206650349765173D-09
97	192	.150380425071119D-09
98	193	.140880115252762D-09
99	198	.132251263880735D-09
100	200	.475758275767811D-10
101	201	.470189657944188D-10
102	205	.465239710708385D-10
103	207	.409824113280459D-10
104	209	.165232924804654D-10
105	210	.145687805117458D-10
106	211	.145528949002999D-10
107	214	.145375991524713D-10
108	216	.143014494725355D-10
109	218	.127702820328725D-10
110	220	.416803432224541D-11
111	226	.110170648030925D-11
112	232	.267881418912548D-12
113	233	.267867027052529D-12
114	235	.267844482180181D-12
115	240	.623366258005826D-13
116	241	.596785362746167D-13
117	246	.571600839016209D-13
118	248	.220960998283228D-13
119	249	.121278467109639D-13
120	255	.716282828580269D-14
121	256	.345822094335002D-14
122	257	.223588817012599D-14
123	262	.182702253307333D-14
124	263	.115000208637256D-14
125	264	.412879234516878D-15
126	265	.375285828679630D-15
127	266	.371516395008050D-15
128	267	.371496632374816D-15
129	269	.371467303265199D-15
130	274	.106002806413839D-15
131	275	.556773901288544D-16
132	276	.551977849928091D-16
133	277	.551958972748258D-16
134	278	.551927115776404D-16

Formule H_{k+1}^{6}

avec :

$\alpha_k = \delta_k = 1$ et $\omega_k = \omega_k' = -0.99$

BFGS

Nit	NF	VALEUR DE F
135	280	.551768353762743D-16
136	285	.726306639543120D-17
137	287	.726257569488098D-17
138	292	.201705412429083D-17
139	293	.836232208912352D-18
140	299	.376333230351942D-18
141	300	.127458590592206D-18
142	301	.829537460803517D-19
143	306	.655232935666707D-19
144	307	.371591349962027D-19
145	308	.874992518510831D-20
146	309	.709218946961155D-20
147	310	.694764117997299D-20
148	311	.694689747294269D-20
149	313	.694624746754656D-20
150	318	.204256591493344D-20
151	319	.583706114443222D-21
152	320	.477680095494088D-21
153	325	.396403710090261D-21
154	327	.879059019811304D-22
155	326	.286124746878417D-22
156	329	.258968117470996D-22
157	334	.234480023274919D-22
158	336	.104314366578294D-23
159	337	.103804166197073D-23
160	341	.103293505630331D-23
161	344	.274984544337486D-24
162	345	.273518113964131D-25
163	351	.300919786207481D-26
164	352	.381062259517434D-27

NORME GRADIENT CARRE

.356050513730812D-25

.297908353917739D-25

Valeur du point final

Min $\vert x_i \vert$	Max $\vert x_i \vert$	Min $\vert x_i \vert$	Max $\vert x_i \vert$
10^{-19}	10^{-14}	10^{-23}	10^{-14}

Fonction de Dennis

$n = 100$

Formule H_{k+1}^{6} (II.13))

avec :

$d_k = \delta_k = 1$ et $\omega_k = \omega_k' = -0.99$

BFGS

VALEUR INITIALE DE F = .100000050500000D+13

Nit	NF	VALEUR DE F
1	3	.139108212424428D+12
2	5	.842622717256666D+10
3	8	.653010642303223D+09
4	11	.311912382747310D+07
5	17	.541925323951158D+02
6	22	.847322011734296D+01
7	24	.109280693628632D+00
8	29	.342034512168021D-01
9	31	.181551780028660D-01
10	32	.503411969235139D-02
11	34	.134077176162124D-02
12	36	.694839306241629D-03
13	38	.478885677690356D-03
14	39	.276714165268202D-03
15	41	.185329734858423D-03
16	42	.105552591629783D-03
17	44	.786617161507766D-04
18	45	.636057283256393D-04
19	46	.454886077990357D-04
20	47	.323309377038190D-04
21	49	.269605256985547D-04
22	50	.213456617016163D-04
23	52	.187516177961506D-04
24	53	.150954941574258D-04
25	54	.104435293936942D-04
26	55	.613071577975331D-05
27	57	.407879969860314D-05
28	58	.356660504713733D-05
29	59	.285947635752567D-05
30	60	.190064367701111D-05
31	62	.152163434275791D-05
32	63	.115342379645221D-05
33	64	.733690876775430D-06
34	65	.479915975405960D-06
35	67	.373748660555742D-06
36	68	.276842375349684D-06
37	70	.227777175002044D-06
38	71	.181516461043785D-06

Nit	NF	VALEUR DE F
1	3	.139108212424429D+12
2	4	.604693118087025D+11
3	5	.174764308201595D+11
4	6	.593110735515481D+10
5	7	.189331164424747D+10
6	8	.618841643044932D+09
7	9	.200443321382480D+09
8	10	.651516600816920D+08
9	11	.211484683726410D+08
10	12	.686854185046338D+07
11	13	.223036682396662D+07
12	14	.724341875236659D+06
13	15	.235254022717793D+06
14	16	.764194226547461D+05
15	17	.248306491153393D+05
16	18	.807201458490574D+04
17	19	.262626939517238D+04
18	20	.855711227410071D+03
19	21	.279510933502587D+03
20	22	.916805429060855D+02
21	23	.302859591091583D+02
22	24	.101146893610879D+02
23	25	.343229226638509D+01
24	26	.118758768381258D+01
25	27	.416928063428348D+00
26	28	.144201139373251D+00
27	29	.449895737206850D-01
28	30	.100905685614256D-01
29	31	.949144878364273D-03
30	32	.624863894444257D-04
31	33	.539300127153356D-04
32	34	.539286645622471D-04
33	36	.539269577557329D-04
34	41	.286799773331331D-04
35	42	.939006829030449D-05
36	45	.938943802613179D-05
37	50	.295282707011458D-05
38	51	.295230026755348D-05

Formule H_{k+1}^{6}

BFGS

avec :

$\alpha_k = \delta_k = 1$ et $\omega_k = \omega_k' = -0.99$

Nit	NF	VALEUR DE F
39	72	.119662433163012D-06
40	74	.975466964798302D-07
41	75	.727499746645412D-07
42	76	.488619761938507D-07
43	77	.420091638717882D-07
44	78	.331400871067990D-07
45	79	.224265940714417D-07
46	81	.175818617598934D-07
47	82	.126342305691999D-07
48	83	.843101697656823D-08
49	85	.677165535848125D-08
50	86	.544771970285347D-08
51	87	.487427706671827D-08
52	88	.407588330080258D-08
53	89	.323562360204719D-08
54	90	.255734365693793D-08
55	91	.217432750725189D-08
56	92	.170699185573842D-08
57	93	.127100772934760D-08
58	94	.919311947220972D-09
59	96	.800374838969281D-09
60	97	.662261145289545D-09
61	98	.516489576885595D-09
62	99	.398993755709301D-09
63	100	.282566245320096D-09
64	101	.161312518811427D-09
65	102	.118014102574591D-09
66	103	.946831783222094D-10
67	104	.603818605174015D-10
68	105	.437255364699342D-10
69	106	.289619917936462D-10
70	107	.210460043208398D-10
71	109	.184765871015247D-10
72	110	.151965436372857D-10
73	112	.135784072051762D-10
74	113	.112531835054369D-10
75	114	.795079138168660D-11
76	116	.634806623048104D-11
77	117	.451565039374044D-11
78	119	.371099561962144D-11
79	120	.251540116484221D-11
80	121	.125845739028036D-11
81	122	.970712853484897D-12
82	123	.666889817860430D-12
83	124	.287981231405808D-12
84	126	.225447651591816D-12
85	127	.199098115256910D-12

Nit	NF	VALEUR DE F
39	54	.295182792336987D-05
40	56	.294548324733244D-05
41	58	.288171120834613D-05
42	60	.197173109367857D-05
43	61	.122574771116943D-05
44	65	.122455784251745D-05
45	69	.600169597694129D-06
46	70	.600160405143756D-06
47	72	.600152390016842D-06
48	74	.600088598329211D-06
49	79	.327870965603456D-06
50	84	.326536051835288D-06
51	87	.193595085346450D-06
52	88	.193589909425723D-06
53	91	.193584482808058D-06
54	96	.126310376415434D-06
55	97	.121054717099860D-06
56	103	.116419177105538D-06
57	105	.790529589485641D-07
58	112	.613421809748725D-07
59	113	.541325305501626D-07
60	114	.533625346806239D-07
61	119	.529467112603735D-07
62	121	.500164379168381D-07
63	123	.369406320729746D-07
64	130	.296223080820475D-07
65	131	.264410942920081D-07
66	132	.260589439078849D-07
67	137	.258715910001752D-07
68	139	.244816409175492D-07
69	141	.186328205821787D-07
70	148	.139553132902171D-07
71	149	.134470304153514D-07
72	150	.134419992021558D-07
73	154	.134369649583365D-07
74	158	.974371424090359D-08
75	165	.720839444926818D-08
76	166	.707052360474525D-08
77	167	.707014808285261D-08
78	170	.706979006549863D-08
79	172	.706447872172917D-08
80	174	.702424241320025D-08
81	177	.511756384596886D-08
82	184	.369512617711310D-08
83	185	.368311405265307D-08
84	186	.368311013930677D-08
85	188	.368309249252610D-08

Formule H^{6}_{k+1}
avec :

$d_k = \sigma_k = 1$ et $\omega_k = \omega_k'$

Nit	NF	VALEUR DE F
86	128	.160824724648016D-12
87	129	.116609278392386D-12
88	130	.805203625876711D-13
89	131	.413260600744981D-13
90	133	.297916114618839D-13
91	135	.251866892114139D-13
92	136	.181963505624532D-13
93	137	.104717081327223D-13
94	139	.785244890859549D-14
95	141	.655753404582134D-14
96	142	.522086759967557D-14
97	143	.429655643958443D-14
98	144	.296099033423045D-14
99	145	.197426534000663D-14
100	146	.146830856842569D-14
101	147	.884020933922590D-15
102	148	.405153276325660D-15
103	150	.351619383044008D-15
104	151	.284080116406025D-15
105	152	.254848353079575D-15
106	153	.205487328543660D-15
107	154	.142869533052841D-15
108	156	.124973219439638D-15
109	157	.950665458349560D-16
110	158	.607039870954219D-16
111	159	.258201660909536D-16
112	161	.163532212139466D-16
113	163	.135807763488394D-16
114	164	.117472813515763D-16
115	165	.986947830082027D-17
116	166	.821167828183545D-17
117	167	.612251998883593D-17
118	168	.422520831820579D-17
119	169	.297984756275631D-17
120	170	.211823205854229D-17
121	171	.107688942647249D-17
122	173	.569651612708507D-18
123	175	.358293069059249D-18
124	177	.245756364677705D-18
125	179	.199174767270153D-18
126	180	.129458931261931D-18
127	182	.100457003113540D-18
128	183	.741518082539264D-19
129	185	.601853494923774D-19
130	186	.529496638203321D-19
131	187	.436481058783659D-19
132	188	.321428102129509D-19
133	190	.265983042236136D-19
134	191	.184766341288735D-19
135	192	.130737002894035D-19
136	193	.101829097986267D-19

BFGS

Nit	NF	VALEUR DE F
86	194	.262759121161063D-08
87	201	.192062904418526D-08
88	202	.185344849614613D-08
89	203	.185292973077768D-08
90	207	.185240981269234D-08
91	211	.129189518991410D-08
92	212	.128821251782816D-08
93	217	.128456168132198D-08
94	220	.885253856904433D-09
95	221	.880902727767791D-09
96	226	.876615844473304D-09
97	229	.594198217402785D-09
98	230	.591281164097551D-09
99	231	.591280247913431D-09
100	232	.591278820581746D-09
101	234	.591271469988191D-09
102	240	.388899343940248D-09
103	247	.252990419447185D-09
104	248	.250297419017925D-09
105	249	.250296117993246D-09
106	251	.250294463409642D-09
107	257	.157462630245010D-09
108	263	.141994559411057D-09
109	264	.117086945890264D-09
110	265	.973919209040725D-10
111	266	.967995868274707D-10
112	267	.967529042320295D-10
113	268	.967527247085165D-10
114	269	.967524283376099D-10
115	271	.967510624218928D-10
116	277	.580344975780204D-10
117	278	.580336157045917D-10
118	280	.580330843012279D-10
119	282	.580260158297715D-10
120	284	.579486963070612D-10
121	287	.523957871891045D-10
122	289	.339684762270537D-10
123	296	.193985577417656D-10
124	303	.111632097840868D-10
125	304	.108078240310083D-10
126	305	.108071965105172D-10
127	308	.108065530022068D-10
128	313	.587342233357361D-11
129	320	.311747814470786D-11
130	321	.311385589761377D-11
131	324	.311350858697551D-11
132	326	.311022592714674D-11
133	330	.161039540996614D-11
134	337	.812439354162491D-12
135	338	.812437672271306D-12
136	340	.812428887028398D-12

Formule H_{k+1}^{6}

avec :

$\alpha_k = \delta_k = 1$ et $\omega_k = \omega_k^2 = -0.99$

Nit	NF	VALEUR DE F
137	194	.66868015356805 7D-20
138	195	.58008321403303 3D-20
139	196	.45875816893869 9D-20
140	197	.31352265785467 6D-20
141	199	.25640433009651 9D-20
142	200	.18763557072251 2D-20
143	201	.15572404678883 8D-20
144	202	.13717202853254 4D-20
145	203	.11161679443864 2D-20
146	204	.10044114950048 7D-20
147	205	.86298970723821 6D-21
148	206	.71708081301037 1D-21
149	208	.64111176937020 5D-21
150	209	.51338805999005 2D-21
151	210	.40476367121848 1D-21
152	211	.27744851377554 1D-21
153	213	.21488140006919 7D-21
154	214	.18635286822561 7D-21
155	215	.13900209809302 6D-21
156	216	.83350444261973 2D-22
157	218	.57614502349565 4D-22
158	220	.49967619204613 9D-22
159	221	.38655858351301 3D-22
160	222	.23947610457448 1D-22
161	223	.14076333612749 9D-22
162	224	.56691995949166 2D-23
163	226	.28626609665346 3D-23
164	228	.19532993361604 9D-23
165	229	.68590748217845 0D-24
166	231	.30270967746246 9D-24
167	233	.11997315379522 2D-24
168	235	.58808026475055 9D-25
169	237	.42176284958421 4D-25
170	239	.33463555413217 8D-25
171	240	.29876628803589 7D-25
172	241	.23948387035580 4D-25
173	242	.16549592779315 4D-25
174	244	.14233074294057 9D-25
175	245	.10459006962489 9D-25
176	246	.63418785665720 3D-26
177	247	.24634504015123 8D-26
178	249	F= .19777678560839 1D-26

BFGS

Nit	NF	VALEUR DE F
137	346	.39981508773384 6D-12
138	353	.19276253035068 3D-12
139	354	.19191995254220 8D-12
140	356	.19191774917969 7D-12
141	358	.19188193902178 5D-12
142	360	.19159931382753 7D-12
143	364	.89854952510341 9D-13
144	371	.41028956579507 8D-13
145	372	.41028856516792 3D-13
146	374	.41028410417315 7D-13
147	380	.18268914187989 2D-13
148	387	.80118032592726 3D-14
149	388	.79314996508198 8D-14
150	389	.79314788244146 1D-14
151	391	.79313915355870 7D-14
152	397	.33569887036708 4D-14
153	404	.15221305879698 4D-14
154	405	.13655860056617 0D-14
155	406	.13849187035473 3D-14
156	410	.13842490145339 4D-14
157	414	.58764552791060 8D-15
158	415	.55679634393188 0D-15
159	421	.52852147979860 0D-15
160	423	.22657975765516 7D-15
161	424	.21811042574897 5D-15
162	429	.21401677276808 7D-15
163	431	.18406160594144 7D-15
164	433	.83227511123430 2D-16
165	440	.30928904245549 4D-16
166	447	.11787736074648 1D-16
167	448	.11191143561207 2D-16
168	449	.11190569769495 3D-16
169	452	.11189968232104 1D-16
170	457	.42011052801062 9D-17
171	458	.39410396117812 9D-17
172	464	.37046927891317 6D-17
173	466	.13686412124338 7D-17
174	467	.13505515069217 8D-17
175	472	.13328747492429 4D-17
176	475	.57640308672550 6D-18
177	476	.45289514347108 6D-18
178	477	.45020947707774 0D-18
179	482	.44754619099084 5D-18
180	485	.15064461623884 7D-18
181	486	.14594098385242 8D-18
182	491	.14296644724156 3D-18
183	493	.12324620972524 6D-18
184	495	.45987827399576 6D-19
185	502	.14081515554038 6D-19
186	508	.10930411195526 2D-19
187	509	.62152705594865 2D-20
188	510	.42245751313730 7D-20

Formule H_{k+1}^{6}

avec :

$d_k = \delta_k = 1$ et $\omega_k = \omega_k' = -0.99$

BFGS

Nit	NF	VALEUR DE F
189	511	.418982666119526D-20
190	512	.418808767413529D-20
191	514	.418804508454356D-20
192	518	.413531016583642D-20
193	520	.376271278565364D-20
194	522	.120948123415256D-20
195	523	.120937659011289D-20
196	526	.120926847943304D-20
197	531	.338918803594978D-21
198	538	.921317764242048D-22
199	539	.921313766117543D-22
200	540	.921307133976497D-22
201	542	.921273907550426D-22
202	548	.242815833818007D-22
203	555	.623515183982097D-23
204	556	.620118393347826D-23
205	559	.620061759792741D-23
206	564	.153374566587652D-23
207	571	.367159397084478D-24
208	572	.367157732352859D-24
209	573	.367154931652555D-24
210	575	.367140700487485D-24
211	581	.850148451260707D-25
212	588	.190595360911709D-25
213	589	.190278077257556D-25
214	593	.190136624466607D-25
215	597	.415640094039638D-26
216	598	.411357894509003D-26
217	603	.407129993094794D-26
218	606	.858338858146731D-27
219	613	.172723679795661D-27

NORME GRADIENT CARRE

.508897470670812D-25

.231462598083542D-25

Valeur du point final

Min $|x_i|$

10^{-21}

Max $|x_i|$

10^{-14}

Min $|x_i|$

10^{-22}

Max $|x_i|$

10^{-14}

Formule H^{6}_{k+1}

avec :

$d_k = \delta_k = 1$ et $\omega_k = \omega'_k = -1$

(méthode de Shanno)

Nit	NV	VALEUR DE F	Nit	NF	VALEUR DE F
1	3	.139108212424428D+12	48	157	.110062477853452D-02
2	4	.608761147423628D+11	49	158	.518323990731449D-03
3	7	.589974622210028D+11	50	160	.308669691378551D-03
4	9	.294636736819155D+11	51	162	.209521533294124D-03
5	13	.294529588294657D+11	52	163	.128645236914536D-03
6	17	.131754846779126D+11	53	165	.949182352025977D-04
7	23	.131751005426846D+11	54	166	.665267660192245D-04
8	28	.701117155467473D+10	55	167	.535375222100825D-04
9	33	.700826857347978D+10	56	168	.401147003015753D-04
10	37	.276716466691174D+10	57	169	.262344463512215D-04
11	41	.276403887835524D+10	58	171	.221655346618644D-04
12	45	.445563107482159D+09	59	172	.168220474534702D-04
13	49	.442462610585985D+09	60	173	.136112909970436D-04
14	52	.788580434239542D+08	61	174	.103013030232928D-04
15	56	.782206612930249D+08	62	175	.798112467036592D-05
16	59	.133956840779460D+08	63	176	.659455097874077D-05
17	63	.132907233126915D+08	64	177	.487001684845880D-05
18	66	.228708663331051D+07	65	178	.396255775139782D-05
19	70	.227138152047293D+07	66	180	.348632390800062D-05
20	73	.416415863819341D+06	67	181	.285018574784759D-05
21	77	.414185732784483D+06	68	182	.268091961701654D-05
22	80	.118064904821744D+06	69	183	.243206111424295D-05
23	84	.117864264456062D+06	70	184	.202408059527625D-05
24	88	.172048364483898D+05	71	185	.179794878409233D-05
25	93	.171529480335080D+05	72	186	.141470139563782D-05
26	96	.889951783579923D+04	73	187	.962353935168626D-06
27	100	.886777880834438D+04	74	189	.842637363213325D-06
28	103	.402673522916184D+04	75	190	.782119528766271D-06
29	107	.401880142294921D+04	76	192	.577664583008569D-06
30	111	.565384018920643D+03	77	193	.292129748452701D-06
31	115	.551313667153123D+03	78	195	.148297648974483D-06
32	117	.319335818968745D+03	79	197	.892124377063403D-07
33	120	.316381940247778D+03	80	198	.675950471718420D-07
34	123	.543478299815512D+02	81	199	.444211262554769D-07
35	126	.536980879228272D+02	82	200	.166490009654479D-07
36	129	.903978706015464D+01	83	202	.129437620590391D-07
37	132	.837668013197362D+01	84	203	.120271645722151D-07
38	134	.155483746570863D+01	85	204	.107454442645815D-07
39	137	.146593185449559D+01	86	205	.893333715793571D-08
40	139	.353770552214455D+00	87	206	.746849141749922D-08
41	142	.331623023830229D+00	88	207	.644694014798119D-08
42	144	.676756898749894D-01	89	208	.501516457382248D-08
43	147	.621231779211153D-01	90	209	.359194987632764D-08
44	149	.118604267729852D-01	91	210	.312557332167217D-08
45	151	.108200711743535D-01	92	211	.246984555280918D-08
46	153	.468870213860110D-02	93	212	.148992784149725D-08
47	155	.156179937723627D-02	94	213	.959829934790094D-09

Formule H^{6}_{k+1}

avec :

$d_k = \delta_k = 1$ et $\omega_k = \omega'_k = -1$

(méthode de Shanno)

Nit	NF	VALEUR DE F
95	214	.79397938405770 6D-09
96	215	.56071942638815 3D-09
97	216	.32568286660455 2D-09
98	218	.25247251785290 8D-09
99	220	.22309187216167 1D-09
100	221	.17789935476047 8D-09
101	222	.11022518461551 8D-09
102	223	.79328308851882 8D-10
103	224	.42991850918377 0D-10
104	226	.25509430216864 9D-10
105	228	.20610504349526 1D-10
106	229	.13227151359339 0D-10
107	231	.94446629010348 3D-11
108	232	.72048261835203 2D-11
109	233	.64250929510211 8D-11
110	234	.53704862682841 3D-11
111	235	.42794528191237 2D-11
112	237	.39375562269413 1D-11
113	238	.34488433680088 7D-11
114	239	.27144550567458 8D-11
115	240	.17772256948566 6D-11
116	241	.12564676995348 5D-11
117	242	.10268547060792 3D-11
118	243	.82057470714792 2D-12
119	244	.52528113581851 5D-12
120	246	.36469073755711 7D-12
121	247	.22251298065204 5D-12
122	248	.16587104443036 7D-12
123	250	.14638174771516 8D-12
124	251	.11833591507197 6D-12
125	252	.95445531734122 7D-13
126	253	.71635703935190 7D-13
127	254	.53425270652319 6D-13
128	255	.43832230656964 6D-13
129	256	.36950270005876 5D-13
130	257	.27824173776935 8D-13
131	259	.23327579932651 6D-13
132	261	.21405808547360 5D-13
133	262	.18657355725649 7D-13
134	263	.14664439673492 0D-13
135	264	.88409636143613 2D-14
136	266	.63979695743144 6D-14
137	267	.33624391344323 6D-14
138	269	.16931575701929 1D-14
139	271	.79350115145368 6D-15
140	273	.36946906333627 3D-15
141	275	.22052852288968 1D-15
142	276	.17953310711983 7D-15
143	277	.13069462600762 1D-15
144	278	.69844926524106 5D-16
145	280	.56951202973109 5D-16
146	281	.50884474831576 1D-16
147	282	.42230682210412 0D-16
148	283	.33821658398832 5D-16
149	284	.25791766550385 9D-16
150	286	.21395228877471 7D-16
151	287	.14609424394494 0D-16
152	288	.10081774069336 4D-16
153	289	.67888197146960 8D-17
154	290	.31415772695710 8D-17
155	292	.16526483158069 9D-17
156	294	.11650757714976 6D-17
157	296	.97072322090788 8D-18
158	297	.69042763268360 0D-18
159	298	.49020387596398 2D-18
160	299	.40381352660596 6D-18
161	300	.34479721373805 6D-18
162	301	.26959828556008 0D-18
163	303	.22838583115396 4D-18
164	304	.19598117642804 7D-18
165	305	.14831235669760 9D-18
166	307	.12237149875909 1D-18
167	308	.10424234933545 2D-18
168	309	.89130478198080 4D-19
169	310	.71020441609331 0D-19
170	311	.60649235938861 0D-19
171	312	.47672602825850 3D-19
172	313	.40641600942005 4D-19
173	314	.32047521413265 4D-19
174	315	.28469036710456 0D-19
175	316	.24599821249346 5D-19
176	317	.20337343101584 1D-19
177	319	.18048351238731 5D-19
178	320	.14860813630406 8D-19
179	321	.10000417853148 5D-19
180	322	.50824889795059 9D-20
181	323	.96294879257934 1D-21
182	325	.70794148534141 0D-21
183	326	.53601548622032 0D-21
184	327	.38391378132589 0D-21
185	328	.27839960061051 2D-21
186	329	.22879468615156 7D-21
187	330	.15951721239674 7D-21
188	331	.89395132824038 2D-22
189	333	.66842160123082 6D-22
190	334	.35198174716813 4D-22

Formule H^{6}_{k+1}

avec :

$d_k = \delta_k = 1$ et $\omega_k = \omega'_k = -1$

(méthode de Shanno)

Nit	NF	VALEUR DE F
191	335	.237183900333029D-22
192	336	.139649175766744D-22
193	337	.479284610107656D-23
194	339	.432045685805847D-23
195	340	.379428652582103D-23
196	341	.307841000244581D-23
197	342	.265738774817363D-23
198	343	.201778383566245D-23
199	344	.147754342590408D-23
200	346	.120906684760974D-23
201	347	.948068609360083D-24
202	348	.785657332840202D-24
203	349	.556788101127804D-24
204	350	.354880692007566D-24
205	352	.251509775649270D-24
206	353	.186916404969730D-24
207	354	.149638602523101D-24
208	355	.112923621848852D-24
209	356	.925919973423285D-25
210	358	.817559726363664D-25
211	359	.673147303488571D-25
212	360	.605465486457013D-25
213	361	.510910305463600D-25
214	362	.393243137274325D-25
215	364	.350763872522965D-25
216	365	.285312176393982D-25
217	366	.180247101930199D-25
218	368	.133371818547926D-25
219	369	.662354614735646D-26
220	371	.496821131081017D-26
221	372	.341385582823650D-26
222	373	.175081266496240D-26
223	374	.119697241708787D-26
224	376	.931047672883809D-27
225	377	F= .503778082075409D-27

NORME GRADIENT CARRE = .869134124362522D-25

Valeur du point final

Min $|x_i|$ 10^{-22}

Max $|x_i|$ 10^{-14}

Fonction Var

$n = 100$

Formule H^2_{k+1} (II.9)

avec :

$d_k = \delta_k = 1$ et $\omega_k = \omega_k' = -0.9999$

BFGS

VALEUR INITIALE DE F = .263446987870664D+15

Nit	NF	VALEUR DE F
1	3	.401122895256108D+14
2	5	.723837725676690D+12
3	10	.879061700224689D+08
4	19	.152933613576786D+07
5	24	.467554913739573D+03
6	28	.277262964474576D+03
7	29	.381262780059909D+02
8	33	.161780496541936D+02
9	34	.572578032606517D+01
10	35	.121962702003226D+01
11	37	.142834427414989D-01
12	42	.752297440374657D-05
13	44	.362180589669870D-07
14	47	.169827162906788D-11
15	49	.190849093974082D-13
16	52	.582604062397019D-17
17	54	.992822781143757D-19
18	56	.120778478845031D-20
19	58	.671691742066068D-22
20	60	.354903319892979D-24
21	63	F= .100465128326445D-28

Nit	NF	VALEUR DE F
1	3	.401122895256120D+14
2	4	.169568382524289D+14
3	5	.495747982611527D+13
4	6	.167523025053338D+13
5	7	.535657149759594D+12
6	8	.174970244341638D+12
7	9	.566866611792215D+11
8	10	.184233530644922D+11
9	11	.598039079192822D+10
10	12	.194220159464206D+10
11	13	.630641530699466D+09
12	14	.204787705231624D+09
13	15	.664996534809386D+08
14	16	.215948879910296D+08
15	17	.701303317942392D+07
16	18	.227782268091356D+07
17	19	.740083208191729D+06
18	20	.240677351465508D+06
19	21	.784689052005573D+05
20	22	.257727623058209D+05
21	23	.864761673095333D+04
22	24	.307893270195114D+04
23	25	.120621252003844D+04
24	26	.675043554872792D+03
25	27	.481629722626450D+03
26	28	.417098592283240D+03
27	29	.396864351748260D+03
28	30	.389738071213582D+03
29	31	.387274183348071D+03
30	32	.386393872213566D+03
31	33	.386070918736870D+03
32	34	.385958919040553D+03
33	35	.385932586521334D+03
34	36	.385930772246455D+03
35	37	.385930764704779D+03

Formule H^2_{k+1}

avec :

$\alpha_k = \delta_k = 1$ et $\omega_k = \omega'_k = -0.9999$

BFGS

Nit	NF	VALEUR DE F
36	40	.3859307635849560D+03
37	50	.5576809910809270D+02
38	53	.5855999054066830D+01
39	54	.1214464881356750D+01
40	56	.2082952684611740D+00
41	57	.6679608275225990D-01
42	58	.7593785833930600D-02
43	59	.1665220989545550D-03
44	60	.6052205804076910D-07
45	61	.1900269588584670D-09
46	62	.1649140438298420D-11
47	63	.1476839754188000D-15
48	64	.3340050505175030D-19
49	65	.8605370403343210D-25
50	66	.7146880214448180D-26

NORME GRADIENT CARRE

.9627650273108740D-26

.3183841350777160D-25

Min $|x_i|$ 10^{-17} Max $|x_i|$ 10^{-15}

Min $|x_i|$ 10^{-16} Max $|x_i|$ 10^{-13}

Fonction de Dennis

$n = 50$

Formule (III.5)	BFGS
avec : $\rho_k = 1$, $\theta_k = 0.75$ et $\gamma_k = \dfrac{(s_k, y_k)\,\|s_k\|^2}{0.75\,\|s_k\|^2\,\|y_k\|^2 + 0.25\,(s_k, y_k)^2}$	

VALEUR INITIALE DE F = .625001275000000D+11

Nit	NF	VALEUR DE F	Nit	NF	VALEUR DE F
1	3	.869429081829158D+10	1	3	.869429081829171D+10
2	4	.377934724017683D+10	2	4	.377934724000647D+10
3	5	.109228413001235D+10	3	5	.109228412960469D+10
4	6	.370698089509457D+09	4	6	.370698089027539D+09
5	7	.118334065577318D+09	5	7	.118334065098639D+09
6	8	.386787626949916D+08	6	8	.386787622673124D+08
7	9	.125283567666036D+08	7	9	.125283564104843D+08
8	10	.407234526904077D+07	8	10	.407234498825401D+07
9	11	.132198688410396D+07	9	11	.132198667396989D+07
10	12	.429401752615802D+06	10	12	.429401604411428D+06
11	13	.139464925946901D+06	11	13	.139464829853632D+06
12	14	.453094522199573D+05	12	14	.453093987414114D+05
13	15	.147250101872898D+05	13	15	.147249908461828D+05
14	16	.478848135578801D+04	14	16	.478848890360719D+04
15	17	.155884826328402D+04	15	17	.155887664361235D+04
16	18	.508394692574046D+03	16	18	.508438862917507D+03
17	19	.106304818161089D+03	17	19	.166360489310972D+03
18	20	.546600758699528D+02	18	20	.547233818821783D+02
19	21	.180888575194423D+02	19	21	.181559457509810D+02
20	22	.603577108281055D+01	20	22	.610230488981709D+01
21	23	.202627043344717D+01	21	23	.208692205837377D+01
22	24	.678025209587429D+00	22	24	.726340616383428D+00
23	25	.223812861145713D+00	23	25	.253536377528755D+00
24	26	.749338431912591D-01	24	26	.842577545358439D-01
25	27	.273060782913144D-01	25	27	.232407376477961D-01
26	28	.102772645243452D-01	26	28	.386584817152289D-02
27	29	.372011506317811D-02	27	29	.361154094564986D-03
28	30	.146124944055550D-02	28	30	.219290124840204D-03
29	31	.916910886025593D-03	29	31	.219005824349293D-03
30	32	.532696178647733D-03	30	34	.218868710260014D-03
31	33	.374094932878697D-03	31	38	.499062209885891D-04
32	34	.245779958768166D-03	32	39	.380913078110352D-04
33	35	.149063764459340D-03	33	42	.380518030522381D-04
34	36	.805060759169093D-04	34	44	.377389165142583D-04
35	37	.517763991697648D-04	35	47	.120738049142285D-04
36	38	.374309212557158D-04	36	48	.119370420208356D-04
37	39	.246072578130377D-04	37	52	.118456651876507D-04
38	40	.144329841019797D-04	38	54	.111725852355805D-04

Formule (III.5)

avec :

$\rho_k = 1$, $\theta_k = 0.75$ et

$$\gamma_k = \frac{(s_k, y_k)\,\|s_k\|^2}{0.75\,\|s_k\|^2\,\|y_k\|^2 + 0.25\,(s_k, y_k)^2}$$

Nit	NF	VALEUR DE F
39	41	.805374462391337D-05
40	42	.407155801672925D-05
41	43	.288057854961035D-05
42	44	.164011120582371D-05
43	45	.742640193561138D-06
44	46	.408503989947040D-06
45	47	.101435472812920D-06
46	48	.132184691575669D-06
47	49	.800747343796707D-07
48	50	.536900246119931D-07
49	51	.456897448866358D-07
50	52	.355933359058353D-07
51	53	.184312146914498D-07
52	54	.125633257702599D-07
53	55	.617880359938095D-08
54	56	.518837885866806D-08
55	57	.337836643953105D-08
56	58	.173861441576256D-08
57	59	.110709999290924D-08
58	60	.659060137917473D-09
59	61	.498398718774298D-09
60	62	.308128553029654D-09
61	63	.207291905430147D-09
62	64	.144604280580214D-09
63	65	.898278074341246D-10
64	66	.571993923801329D-10
65	67	.333589312490564D-10
66	68	.102732287957942D-10
67	69	.121289484508755D-10
68	70	.781060005301099D-11
69	71	.652523397078794D-11
70	72	.436633439705551D-11
71	73	.307684174442416D-11
72	74	.184559510540114D-11
73	75	.126327153026176D-11
74	76	.752574266618885D-12
75	77	.598957577706333D-12
76	78	.373405482734059D-12
77	79	.260357412418969D-12
78	81	.209581844397120D-12
79	82	.148958308839984D-12
80	83	.919294647215648D-13
81	84	.399275857287500D-13
82	85	.265252165890722D-13
83	86	.197882464966103D-13
84	87	.121738054012837D-13

BFGS

Nit	NF	VALEUR DE F
39	56	.531782060239969D-05
40	57	.492472711113149D-05
41	62	.465501175001841D-05
42	64	.336615000700187D-05
43	65	.263445446649767D-05
44	66	.238500386159343D-05
45	71	.225691814323879D-05
46	73	.170575614753318D-05
47	74	.142382443044569D-05
48	75	.128049443476236D-05
49	80	.121847297289898D-05
50	82	.937607741791793D-06
51	83	.804752082621472D-06
52	84	.736692862981055D-06
53	89	.704732271282155D-06
54	91	.558563629327640D-06
55	92	.484520134449691D-06
56	93	.443911569752843D-06
57	98	.425842415663598D-06
58	100	.340963664726095D-06
59	101	.298843656427541D-06
60	102	.275465295950505D-06
61	107	.264805877145001D-06
62	109	.214351082500163D-06
63	110	.188525943006078D-06
64	111	.173667493480049D-06
65	116	.167066447090579D-06
66	118	.135336551538464D-06
67	119	.119266870530749D-06
68	120	.109961085388905D-06
69	125	.105787976550186D-06
70	127	.856554676566538D-07
71	128	.753076035475118D-07
72	129	.692090195984806D-07
73	134	.665197516536434D-07
74	136	.534480176933990D-07
75	137	.468023028083887D-07
76	138	.428961453276062D-07
77	143	.411664705016464D-07
78	145	.327683476849734D-07
79	146	.284834641167416D-07
80	147	.259591686196073D-07
81	152	.248548285440340D-07
82	154	.194898499802446D-07
83	155	.167910460472984D-07
84	156	.152215977689100D-07

Formule (III.5)

avec :

$\rho_k = 1$, $\theta_k = 0.75$ et

$$\gamma_k = \frac{(s_k, y_k)\,\|s_k\|^2}{0.75\,\|s_k\|^2\|y_k\|^2 + 0.25\,(s_k, y_k)^2}$$

Nit	NF	VALEUR DE F
85	88	,835457987094082D-14
86	89	,576046258844580D-14
87	90	,215116957683622D-14
88	92	,867769525619188D-15
89	93	,403775575253864D-15
90	94	,235069858241208D-15
91	95	,149289875397112D-15
92	96	,805612038130082D-16
93	97	,533869888923920D-16
94	98	,328590649726111D-16
95	99	,239936047599441D-16
96	100	,150080130577236D-16
97	101	,116466128329280D-16
98	102	,723661131551296D-17
99	103	,463577505502248D-17
100	104	,300042525059219D-17
101	105	,216581635404197D-17
102	106	,126118552409058D-17
103	107	,570552383680486D-18
104	108	,240967000516546D-18
105	109	,102217024483933D-18
106	110	,600698143035648D-19
107	111	,559238626869553D-19
108	112	,211991604702758D-19
109	113	,110750001867890D-19
110	114	,375617363522871D-20
111	116	,173490891633004D-20
112	117	,751104844643800D-21
113	118	,270419627447182D-21
114	119	,13556036746426D-21
115	120	,809688119858183D-22
116	121	,431295012976423D-22
117	122	,370679102600317D-22
118	123	,258810251786512D-22
119	124	,213978123135064D-22
120	125	,136865260262614D-22
121	126	,136504277090383D-22
122	127	,724549821372298D-23
123	128	,570539210038602D-23
124	129	,318393120503920D-23
125	130	,105818039446144D-23
126	132	,473364121703809D-24
127	134	,248957205623403D-24
128	135	,185541493810336D-24
129	136	,137967985048316D-24
130	137	,908480109492296D-25
131	138	,649682907708455D-25
132	139	,412389684905511D-25

BFGS

Nit	NF	VALEUR DE F
85	161	.145336884437310D-07
86	163	.112113412718387D-07
87	164	.954848547527419D-08
88	165	.859165635550109D-08
89	170	.817606270790984D-08
90	172	.617885262728359D-08
91	173	.519657644567767D-08
92	174	.464332196548696D-08
93	179	.440285931643546D-08
94	181	.325795572218572D-08
95	182	.270091624498462D-08
96	183	.239311216533585D-08
97	188	.226032020960541D-08
98	190	.163321080442975D-08
99	191	.133397563745085D-08
100	192	.117284981005716D-08
101	197	.110337172095550D-08
102	199	.778732506984166D-09
103	200	.625962674121352D-09
104	201	.545563806626701D-09
105	206	.511137372230517D-09
106	208	.351743627280502D-09
107	209	.278230731816969D-09
108	210	.240568754436385D-09
109	215	.224472967288103D-09
110	217	.150724906407655D-09
111	218	.117232080847507D-09
112	219	.100473865978657D-09
113	224	.933651970527386D-10
114	226	.610828683075103D-10
115	227	.467180078587004D-10
116	228	.397172433205551D-10
117	233	.367579682059400D-10
118	235	.234487544239224D-10
119	236	.176229028347461D-10
120	237	.148491499821629D-10
121	242	.136865675179155D-10
122	244	.850089457546539D-11
123	245	.627792427887302D-11
124	246	.524632911915078D-11
125	251	.481615087819356D-11
126	253	.291434282033659D-11
127	254	.211318352585875D-11
128	255	.174986098628792D-11
129	260	.159983436215766D-11
130	262	.941591494557003D-12
131	263	.670287948734027D-12
132	264	.550331157022074D-12

Formule (III.5) avec :

$\rho_k = 1$, $\theta_k = 0.75$ et

$$\gamma_k = \frac{(\delta_k, y_k)\,\|\delta_k\|^2}{0.75\,\|\delta_k\|^2\,\|y_k\|^2 + 0.25\,(\delta_k, y_k)^2}$$

Nit	NF	VALEUR DE F
133	140	.287341338787513D-25
134	141	.177945645388430D-25
135	143	.104219837828167D-25
136	144	.707308097068512D-26
137	145	F= .512484493300844D-26

BFGS

Nit	NF	VALEUR DE F
133	269	.501128233980799D-12
134	271	.287015142999912D-12
135	272	.200396579127730D-12
136	273	.162968715490775D-12
137	278	.147791795302417D-12
138	280	.822067008020569D-13
139	281	.562848140922445D-13
140	282	.453662798647290D-13
141	287	.409755278150482D-13
142	289	.221455948454947D-13
143	290	.148512209087623D-13
144	291	.118493445250865D-13
145	296	.106583562354601D-13
146	298	.558312840678229D-14
147	299	.366617852113757D-14
148	300	.289770992434209D-14
149	305	.259585514868732D-14
150	307	.131865505483986D-14
151	308	.846624815668575D-15
152	309	.661838255259857D-15
153	314	.590411036060794D-15
154	316	.289904235173500D-15
155	317	.181917002791186D-15
156	318	.140790611723433D-15
157	323	.125079023467947D-15
158	325	.594153057823644D-16
159	326	.363701428029340D-16
160	327	.278058961020734D-16
161	332	.245971861482094D-16
162	334	.112524612983931D-16
163	335	.671640554791824D-17
164	336	.507990557569537D-17
165	341	.447494006632118D-17
166	343	.197460632420923D-17
167	344	.114623416552032D-17
168	345	.854874746568476D-18
169	351	.647198013656049D-18
170	353	.131877243831631D-18
171	359	.206232402622120D-19
172	360	.185423049605922D-19
173	365	.167975002580334D-19
174	367	.627440900318914D-20
175	368	.273173872027685D-20
176	369	.236012335145496D-20
177	374	.209846547047251D-20
178	376	.100071854718923D-20
179	377	.441752769985499D-21
180	378	.269760249095852D-21

Formule (III.5) avec :

$\rho_k = 1$, $\theta_k = 0.75$ et

$$\tau_k = \frac{(s_k, y_k)\,\|s_k\|^2}{0.75\,\|s_k\|^2\,\|y_k\|^2 + 0.25\,(s_k, y_k)^2}$$

BFGS

Nit	NF	VALEUR DE F
181	384	.169161198903035D-21
182	385	.759082503547455D-22
183	386	.274168939859934D-22
184	392	.109346339073176D-22
185	393	.342813908887113D-23
186	394	.244755558937740D-23
187	399	.209602943321434D-23
188	401	.722743300555150D-24
189	402	.315087424347667D-24
190	403	.188951112991336D-24
191	409	.115370427296886D-24
192	410	.474120139379224D-25
193	411	.123595157636768D-25
194	417	.359116936052519D-26
195	418	.849117074719933D-27

NORME GRADIENT CARRE

.822460583975890D-25

.777187303429820D-25

Valeur du point final

Min $\|x_i\|$	Max $\|x_i\|$	Min $\|x_i\|$	Max $\|x_i\|$
10^{-17}	10^{-13}	10^{-21}	10^{-14}

Formule (III.5)

avec : $P_k = 1$, $\theta_k = 1$ et $\tau_k = 1$ (méthode de Shanno)

Nit	NF	VALEUR DE F
1	3	.869429081829158D+10
2	4	.380456659912320D+10
3	7	.368682446361017D+10
4	9	.183712947820782D+10
5	13	.183639373383961D+10
6	17	.749722756630621D+09
7	22	.749647505621044D+09
8	27	.123863447659316D+09

Nit	NF	VALEUR DE F
9	31	.122659972079096D+09
10	34	.204018232950432D+08
11	38	.201970974420907D+08
12	41	.334252964845499D+07
13	45.	.331260634327640D+07
14	48	.558996352668836D+06
15	52	.554728541636255D+06
16	55	.958340955018027D+05

Formule . (III.5)

avec :

$\rho_k = 1$, $\theta_k = 1$ et $\tau_k = 1$ (méthode de Shanno)

Nit	NF	VALEUR DE F
17	59	.951947221773566D+05
18	62	.185310736306896D+05
19	66	.184314834934635D+05
20	69	.522774881770554D+04
21	73	.520496802058073D+04
22	76	.193690541129194D+04
23	80	.192725084249217D+04
24	83	.607585305280434D+03
25	87	.603579455574983D+03
26	90	.120606670558230D+03
27	94	.118431505396896D+03
28	97	.171993144750707D+02
29	100	.167862029117230D+02
30	102	.992509102895046D+01
31	105	.963342983442163D+01
32	107	.500140390829980D+01
33	109	.477529522003451D+01
34	111	.160622637534617D+01
35	114	.157109355350672D+01
36	116	.979171645453373D+00
37	118	.943787670177388D+00
38	120	.412357271246026D+00
39	123	.393764383461856D+00
40	125	.139914959612549D+00
41	128	.130278943339076D+00
42	130	.419258847743023D-01
43	132	.324749991995628D-01
44	133	.198953504852999D-01
45	135	.150515177730971D-01
46	136	.915248939040869D-02
47	137	.681893226085142D-02
48	138	.425968341351911D-02
49	139	.288721921169955D-02
50	141	.226501114994763D-02
51	142	.144152840960523D-02
52	144	.122660934796091D-02
53	145	.959134777827700D-03
54	146	.638947581401810D-03
55	147	.308193594861344D-03
56	149	.159758483844319D-03
57	151	.967447524259399D-04
58	152	.439205406360341D-04
59	154	.271080084363034D-04
60	156	.210840578377828D-04
61	157	.135046084390990D-04
62	158	.972335637035574D-05
63	159	.834179666209380D-05
64	160	.641506718961375D-05
65	161	.497107243610996D-05
66	162	.318905790498609D-05
67	163	.242028690028875D-05
68	164	.200097263239299D-05
69	165	.138541207443919D-05
70	167	.105066987463201D-05
71	168	.818538449214886D-06
72	169	.539943502882105D-06
73	170	.351412781616954D-06
74	171	.227739040128096D-06
75	172	.160204770424604D-06
76	173	.843078818749653D-07
77	174	.672557597844678D-07
78	175	.441538895049289D-07
79	176	.147578422630543D-07
80	178	.123688524423331D-07
81	179	.890274060450215D-08
82	180	.776415293818840D-08
83	181	.604514518267846D-08
84	182	.376563746940263D-08
85	184	.317461676766272D-08
86	185	.233641435416232D-08
87	186	.146039110461730D-08
88	187	.662498184629711D-09
89	189	.480273149771084D-09
90	190	.248851779199804D-09
91	191	.184296063656023D-09
92	192	.120389130395207D-09
93	193	.588937401075987D-10
94	195	.475699903988572D-10
95	196	.291129706233803D-10
96	198	.189321167037833D-10
97	199	.108275164048730D-10
98	200	.717911634301178D-11
99	201	.536948386960256D-11
100	202	.310895410221965D-11
101	204	.198335955599872D-11
102	206	.162103224353292D-11
103	207	.116595258234726D-11
104	208	.567594514048961D-12
105	210	.421450468278427D-12
106	211	.281994015743565D-12
107	212	.197604422518736D-12
108	213	.142820929902625D-12
109	214	.727196882823073D-13
110	216	.507383542823124D-13
111.	217	.326327195877683D-13
112	218	.118618070508326D-13

Formule (III.5)

avec :

$\rho_k = 1$, $\theta_k = 1$ et $\gamma_k = 1$ (méthode de Shanno)

Nit	NF	VALEUR DE F
113	220	.404342362417822D-14
114	222	.215887466866095D-14
115	224	.155231318527630D-14
116	225	.990968698487042D-15
117	226	.727462649491803D-15
118	228	.594593381017183D-15
119	229	.417476362947076D-15
120	231	.342742015889608D-15
121	232	.241902921832159D-15
122	233	.117549392588527D-15
123	235	.856383266792204D-16
124	236	.485363330377528D-16
125	238	.353925429335887D-16
126	239	.199398456938807D-16
127	240	.118972858322966D-16
128	241	.913642157827947D-17
129	242	.589059544651720D-17
130	243	.398159122896697D-17
131	244	.343830507354153D-17
132	245	.259567813554765D-17
133	246	.157282221368514D-17
134	248	.111966595472002D-17
135	250	.929459586637180D-18
136	251	.659360563909752D-18
137	252	.421289784108232D-18
138	253	.295044330517179D-18
139	254	.156961483655318D-18
140	255	.101484209544233D-18
141	256	.493551457058021D-19
142	257	.112473575553395D-19
143	259	.834847463317685D-20
144	260	.426796860816971D-20
145	262	.266454895717963D-20
146	263	.180306362337154D-20
147	264	.102801773465430D-20
148	265	.224519248224624D-21
149	267	.109224024646699D-21
150	269	.661278599743798D-22
151	270	.214181980277027D-22
152	272	.768149299817883D-23
153	274	.510409115220617D-23
154	275	.325172802975926D-23
155	277	.226137252363064D-23
156	278	.179964061465462D-23
157	279	.156542711330154D-23
158	280	.121889938885769D-23
159	281	.882194029145056D-24
160	282	.779429909474646D-24
161	283	.634841840679731D-24
162	284	.424901099052924D-24
163	285	.354835175017513D-24
164	286	.267837859843220D-24
165	287	.150868516727904D-24
166	289	.131021664282212D-24
167	290	.103457402446854D-24
168	291	.923435550397000D-25
169	292	.735212602261570D-25
170	293	.449193358041130D-25
171	295	.330398924956393D-25
172	296	.184436649479235D-25
173	298	.104669471179299D-25
174	299	.307004447016161D-26
175	301	F= .898191132475374D-27

NORME GRADIENT CARRE = .886029505951119D-25

Valeur du point final

Min $\|x_i\|$	Max $\|x_i\|$
10^{-18}	10^{-14}

Fonction Var

n = 100

Formule (III.5)

avec :

$\rho_k = 1$, $\theta_k = 0$ et $\gamma_k = 1$

BFGS

VALEUR INITIALE DE F = .263446987870664D+15

Nit	NF	VALEUR DE F
1	3	.401122895256108D+14
2	4	.169474158538014D+14
3	5	.495551286662411D+13
4	6	.167472880863449D+13
5	7	.535462795160397D+12
6	8	.174908647626243D+12
7	9	.566669074129027D+11
8	10	.184197638140444D+11
9	11	.599211123055383D+10
10	12	.200546546450737D+10
11	13	.105164100168143D+10
12	14	.466159252863579D+08
13	16	.276264988505598D+08
14	17	.495353157048651D+07
15	19	.314451788152334D+07
16	20	.580173256621224D+06
17	21	.488569453615549D+05
18	23	.332938425860501D+04
19	25	.144813369416181D+04
20	26	.180507351767549D+03
21	28	.994742414382366D+01
22	32	.106355649254704D+01
23	34	.175121687747090D+00
24	36	.768232450068157D-01
25	37	.409649367144813D-02
26	39	.909580076310892D-06
27	41	.159757110815762D-08
28	43	.549202497851931D-16
29	45	.550945104180884D-25
30	47	F= .845487001589734D-29

Nit	NF	VALEUR DE F
1	3	.401122895256120D+14
2	4	.169568382524289D+14
3	5	.495747982611527D+13
4	6	.167523025053338D+13
5	7	.535657149759594D+12
6	8	.174970244341638D+12
7	9	.560866611792215D+11
8	10	.184253530644922D+11
9	11	.598039079192822D+10
10	12	.194220159464206D+10
11	13	.630641530699468D+09
12	14	.204787705231624D+09
13	15	.664996534809386D+08
14	16	.215948879910298D+08
15	17	.701303317942392D+07
16	18	.227782268091356D+07
17	19	.740083208191729D+06
18	20	.240677351465508D+06
19	21	.784689052005573D+05
20	22	.257727623058209D+05
21	23	.864761073095333D+04
22	24	.307893270195114D+04
23	25	.120621252003044D+04
24	26	.675043554872792D+03
25	27	.481629722626450D+03
26	28	.417998592283240D+03
27	29	.396806435174820D+03
28	30	.389738071213582D+03
29	31	.387274183348071D+03
30	32	.386393872213568D+03
31	33	.386070910736870D+03
32	34	.385958919040553D+03
33	35	.385932586521334D+03
34	36	.385930772246455D+03
35	37	.385930764704779D+03

Formule (III.5)

avec :

$\rho_k = 1$, $\theta_k = 0$ et $\gamma_k = 1$

BFGS

Nit	NF	VALEUR DE F
36	40	.385930763584956D+03
37	50	.557680991089927D+02
38	53	.585599905406683D+01
39	54	.121446488135675D+01
40	56	.208295268461124D+00
41	57	.667960827522599D-01
42	58	.759378583393060D-02
43	59	.166522098954555D-03
44	60	.605220580407691D-07
45	61	.190026958858467D-09
46	62	.164914043829642D-11
47	63	.147683975418600D-15
48	64	.334065050517503D-19
49	65	.860537040334321D-25
50	66	.714688021444818D-26

NORME GRADIENT CARRE

.498988557684703D-25	.318384135077716D-25

Valeur du point final

Min $\lvert x_i \rvert$	Max $\lvert x_i \rvert$	Min $\lvert x_i \rvert$	Max $\lvert x_i \rvert$
10^{-18}	10^{-13}	10^{-16}	10^{-13}

Fonction de Brown et Dennis

$n = 4$

Formule (III.5)

avec :

$\rho_k = 1$, $\theta_k = 0.5$ et

$$\gamma_k = \frac{2(s_k, y_k)\,\|s_k\|^2}{\|s_k\|^2\|y_k\|^2 + (s_k, y_k)^2}$$

BFGS

VALEUR INITIALE DE F = .7926693336997430+07

Nit	NF	VALEUR DE F	Nit	NF	VALEUR DE F
1	3	.2966787868841680+07	1	3	.1565828177618230+07
2	4	.2612743172142530+07	2	4	.8692654675476980+06
3	5	.2163704750826560+07	3	5	.3890531474983210+06
4	6	.1428607238908630+07	4	6	.2147986717235210+06
5	7	.6655863702138580+06	5	7	.1205624447233260+06
6	9	.4115955610901130+06	6	8	.8773162469627220+05
7	11	.2309529316028690+06	7	9	.8737578511260440+05
8	12	.1241733504843170+06	8	11	.8700007938972330+05
9	13	.1033015391426190+06	9	13	.8684394850154310+05
10	15	.9391041255894680+05	10	14	.8672158753669660+05
11	17	.8850547043283490+05	11	15	.8665837234647650+05
12	18	.8640125143414740+05	12	18	.8663190419079300+05
13	20	.8588508958464890+05	13	20	.8621126968807760+05
14	22	.8584047227819820+05	14	21	.8582290607216640+05
15	24	.8583881636747340+05	15	22	.8582220245874980+05
16	26	.8582691788390470+05	16	23	.8582220162711080+05
17	27	.8582439635254790+05	17	24	.8582220162635810+05
18	28	.8582389036958010+05	18	25	.8582220162635630+05
19	29	.8582313736791510+05	19	37	.8582220162635630+05
20	30	.8582280235730220+05	20	48	.8582220162635630+05
21	31	.8582265741373230+05	21	65	.8582220162635630+05
22	33	.8582261833543060+05	22	76	.8582220162635630+05
23	35	.8582238628556380+05	23	97	.8582220162635630+05
24	36	.8582221518230730+05	24	108	.8582220162635630+05
25	39	.8582221372701050+05	25	119	.8582220162635630+05
26	42	.8582220374764920+05	26	130	.8582220162635630+05
27	43	.8582220212884100+05	27	141	.8582220162635630+05
28	45	.8582220192505520+05	28	152	.8582220162635630+05
29	47	.8582220170264920+05	29	163	.8582220162635630+05
30	49	.8582220168992510+05	30	174	.8582220162635630+05
31	51	.8582220164535880+05	31	185	.8582220162635630+05
32	53	.8582220163050610+05	32	196	.8582220162635630+05
33	55	.8582220162902740+05	33	207	.8582220162635630+05
34	57	.8582220162768230+05	34	218	.8582220162635630+05
35	59	.8582220162739930+05	35	229	.8532220162635630+05
36	61	.8582220162638320+05	36	240	.8582220162635630+05
37	63	.8582220162636110+05	37	251	.8582220162635630+05
38	65	.8582220162635980+05	38	262	.8582220162635630+05

Formule (III.5)

avec :

$\rho_k = 1, \quad \theta_k = 0.5$ et

$$\gamma_k = \frac{2\,(s_k, y_k)\,\|s_k\|^2}{\|s_k\|^2\|y_k\|^2 + (s_k, y_k)^2}$$

BFGS

Nit	NF	VALEUR DE F	Nit	NF	VALEUR DE F
39	67	.858222016263590D+05	39	273	.858222016263563D+05
40	68	.858222016263577D+05	40	284	.858222016263563D+05
41	70	.858222016263576D+05	41	295	.858222016263563D+05
42	72	.858222016263568D+05	42	306	.858222016263563D+05
43	73	.858222016263565D+05	43	317	.858222016263563D+05
44	75	.858222016263564D+05	44	328	.858222016263563D+05
45	76	.858222016263564D+05	45	339	.858222016263563D+05
46	79	.858222016263564D+05	46	350	.858222016263563D+05
47	80	.858222016263563D+05	47	361	.858222016263563D+05
48	81	.858222016263563D+05	48	372	.858222016263563D+05
			49	383	.858222016263563D+05
			50	394	.858222016263563D+05
			51	405	.858222016263563D+05
			52	416	.858222016263563D+05
			53	427	.858222016263563D+05
			54	438	.858222016263563D+05
			55	449	.858222016263563D+05
			56	460	.858222016263563D+05
			57	471	.858222016263563D+05
			58	482	.858222016263563D+05
			59	493	.858222016263563D+05
			60	504	.858222016263563D+05
			61	515	.858222016263563D+05
			62	526	.858222016263563D+05
			63	536	.858222016263563D+05
			64	546	.858222016263563D+05
			64	556	.858222016263563D+05

NORME GRADIENT CARRE

.367857516707048D-07	.779243359973892D-09

POINT OPTIMAL

X(1)= -.115944399546984D+02	X(1)= -.115944399060775D+02
X(2)= .132036300692544D+02	X(2)= .132036300519466D+02
X(3)= -.403439457598517D+00	X(3)= -.403439487526796D+00
X(4)= .236778764989648D+00	X(4)= .236778776842819D+00

Fonction de Pénalité II

$n = 10$

Formule (III.5)

avec :

$\rho_k = 1, \quad \theta_k = 0.5$ et

$$\gamma_k = \frac{2\,(s_k, y_k)\,\|y_k\|^2}{\|y_k\|^2\,\|s_k\|^2 + (s_k, y_k)^2}$$

BFGS

~~VALEUR INITIALE DE F = .162655265659671D+03~~

Nit	NF	VALEUR DE F
1	3	.260986022198117D+02
2	4	.109794712881311D+02
~~3~~	~~5~~	~~.289827720257801D+01~~
~~4~~	~~6~~	~~.792094225362952D+00~~
5	7	.170399049440167D+00
6	8	.387293869416671D-01
~~7~~	~~9~~	~~.194671356374784D-01~~
~~8~~	~~10~~	~~.165948720220978D-01~~
9	12	.498728025643051D-02
10	14	.315123431415272D-02
~~11~~	~~17~~	~~.295777426025688D-02~~
~~12~~	~~19~~	~~.294123130082179D-02~~
13	21	.294117460368035D-02
14	23	.294117182174590D-02
~~15~~	~~26~~	~~.294116575407825D-02~~
~~16~~	~~28~~	~~.294116347794974D-02~~
17	31	.294110732327144D-02
18	32	.294103961214094D-02
~~19~~	~~34~~	~~.294101887973996D-02~~
~~20~~	~~36~~	~~.294092350124010D-02~~
21	38	.294089161962186D-02
22	41	.294042320342557D-02
~~23~~	~~42~~	~~.293985360936964D-02~~
24	43	.293981351113972D-02
25	45	.293978826178901D-02
~~26~~	~~46~~	~~.293977240292549D-02~~
~~27~~	~~47~~	~~.293976758596082D-02~~
28	49	.293976235577976D-02
29	51	.293973335750021D-02
~~30~~	~~52~~	~~.293971655456474D-02~~
~~31~~	~~54~~	~~.293956790398816D-02~~
32	55	.293939876696744D-02
33	56	.293930192262863D-02
~~34~~	~~58~~	~~.293933015354640D-02~~
~~35~~	~~59~~	~~.293926786613012D-02~~
36	60	.293919303064496D-02
37	64	.293852229454100D-02
~~38~~	~~65~~	~~.293827169389339D-02~~

Nit	NF	VALEUR DE F
~~1~~	~~3~~	~~.260986022198116D+02~~
2	4	.115062358016689D+02
3	5	.139336505989540D+01
~~4~~	~~6~~	~~.371303142511982D+00~~
~~5~~	~~7~~	~~.653655386675849D-01~~
6	8	.136903389186742D-01
7	9	.692323656720383D-02
~~8~~	~~10~~	~~.653559189269836D-02~~
~~9~~	~~12~~	~~.614039298071299D-02~~
10	14	.355053161292814D-02
11	15	.339386673585051D-02
~~12~~	~~16~~	~~.315638506064479D-02~~
~~13~~	~~17~~	~~.304663287987157D-02~~
14	18	.300501527906004D-02
15	19	.297649505402181D-02
~~16~~	~~20~~	~~.297630608452700D-02~~
~~17~~	~~21~~	~~.297620210449922D-02~~
18	23	.297628882922006D-02
19	26	.297612629824085D-02
~~20~~	~~28~~	~~.297431960505517D-02~~
~~21~~	~~29~~	~~.297329520444965D-02~~
22	30	.297201925431690D-02
23	31	.297157352820149D-02
~~24~~	~~33~~	~~.296972076460082D-02~~
25	34	.296819900609491D-02
26	36	.296776284226874D-02
~~27~~	~~38~~	~~.296512477547749D-02~~
~~28~~	~~39~~	~~.296392348247395D-02~~
29	40	.296332584818814D-02
30	41	.296252553029060D-02
~~31~~	~~42~~	~~.296146621408535D-02~~
~~32~~	~~43~~	~~.296012189957220D-02~~
33	44	.295934140158740D-02
34	45	.295820753336784D-02
~~35~~	~~46~~	~~.295750375344770D-02~~
~~36~~	~~47~~	~~.295652791430197D-02~~
37	48	.295534648174153D-02
38	49	.295465025386149D-02

Formule (III.5)

avec :

$\rho_k = 1$, $\theta_k = 0.5$ et

$$\gamma_k = \frac{2(s_k, y_k)\,\|s_k\|^2}{\|s_k\|^2\,\|y_k\|^2 + (s_k, y_k)^2}$$

Nit	NF	VALEUR DE F
~~39~~	~~67~~	~~.293823291458975D-02~~
40	70	.293798019665252D-02
41	73	.293797911798572D-02
~~42~~	~~77~~	~~.293796635249733D-02~~
~~43~~	~~79~~	~~.293796597964279D-02~~
44	81	.293790394165204D-02
45	84	.293795188149940D-02
~~46~~	~~85~~	~~.293795085189531D-02~~
~~47~~	~~87~~	~~.293793471766641D-02~~
48	89	.293787479669680D-02
49	91	.293785221070060D-02
~~50~~	~~94~~	~~.293772106762817D-02~~
~~51~~	~~97~~	~~.293771820662980D-02~~
52	100	.293770917060435D-02
53	103	.293770887326853D-02
~~54~~	~~106~~	~~.293770101749250D-02~~
~~55~~	~~106~~	~~.293769975185407D-02~~
56	110	.293766697874838D-02
57	111	.293768126616941D-02
~~58~~	~~113~~	~~.293763374234346D-02~~
~~59~~	~~114~~	~~.293759472237738D-02~~
60	115	.293758296004152D-02
61	117	.293755168497860D-02
~~62~~	~~116~~	~~.293750655302022D-02~~
~~63~~	~~119~~	~~.293746654103949D-02~~
64	120	.293746642439878D-02
65	121	.293746623373043D-02
~~66~~	~~122~~	~~.293746598549851D-02~~
~~67~~	~~124~~	~~.293746569158161D-02~~
68	125	.293740363127081D-02
69	126	.293746253480665D-02
~~70~~	~~128~~	~~.293746209354894D-02~~
~~71~~	~~130~~	~~.293746189612530D-02~~
72	133	.293745641784425D-02
73	135	.293745532066682D-02
~~74~~	~~136~~	~~.293742635109467D-02~~
75	139	.293741287617192D-02
76	141	.293739507771390D-02
~~77~~	~~144~~	~~.293719409426980D-02~~
~~78~~	~~147~~	~~.293718605478657D-02~~
79	150	.293716940302339D-02
80	153	.293716936661234D-02
~~81~~	~~157~~	~~.293712593280425D-02~~
~~82~~	~~159~~	~~.293711597673050D-02~~
83	163	.293706634798146D-02
84	164	.293705774056021D-02
~~85~~	~~166~~	~~.293704073133825D-02~~
~~86~~	~~167~~	~~.293701932779160D-02~~

BFGS

Nit	NF	VALEUR DE F
~~39~~	~~50~~	~~.295302910051214D-02~~
~~40~~	~~51~~	~~.295316722090650D-02~~
41	52	.295248053856471D-02
42	53	.295150803246850D-02
~~43~~	~~54~~	~~.295126720642220D-02~~
~~44~~	~~55~~	~~.295088273452443D-02~~
45	56	.295029057446222D-02
46	57	.294965902717624D-02
~~47~~	~~59~~	~~.294922982991686D-02~~
~~48~~	~~60~~	~~.294883695208581D-02~~
49	61	.294832849824534D-02
50	63	.294792248051368D-02
~~51~~	~~64~~	~~.294764920212771D-02~~
~~52~~	~~65~~	~~.294723137587932D-02~~
53	66	.294697320034679D-02
54	67	.294660434211409D-02
~~55~~	~~68~~	~~.294616337555856D-02~~
~~56~~	~~69~~	~~.294569103930913D-02~~
57	70	.294552060569022D-02
58	72	.294538391022856D-02
~~59~~	~~73~~	~~.294517671502990D-02~~
~~60~~	~~74~~	~~.294495165455686D-02~~
61	76	.294479990943784D-02
62	77	.294471759480039D-02
~~63~~	~~78~~	~~.294458761734546D-02~~
~~64~~	~~79~~	~~.294444958676391D-02~~
65	80	.294432103099444D-02
66	82	.294425324719180D-02
~~67~~	~~83~~	~~.294419427705809D-02~~
~~68~~	~~84~~	~~.294412423612240D-02~~
69	86	.294407342151801D-02
70	87	.294404744163889D-02
~~71~~	~~88~~	~~.294400953745313D-02~~
~~72~~	~~89~~	~~.294398767375941D-02~~
73	90	.294396187038641D-02
74	91	.294394306583671D-02
~~75~~	~~92~~	~~.294393571218090D-02~~
76	93	.294392604336304D-02
77	94	.294392131038365D-02
~~78~~	~~95~~	~~.294391680701565D-02~~
~~79~~	~~96~~	~~.294391772660777D-02~~
80	97	.294391672613588D-02
81	98	.294391632922363D-02
~~82~~	~~99~~	~~.294391577104214D-02~~
~~83~~	~~100~~	~~.294391486170309D-02~~
84	102	.294391084799351D-02
85	103	.294390939005271D-02
~~86~~	[illegible]	~~.294390237994731D-02~~

Formule (III.5)

avec :

$\rho_k = 1,\quad \theta_k = 0.5$ et

$$\gamma_k = \frac{2(\delta_k,\gamma_k)\,\|\delta_k\|^2}{\|\delta_k\|^2\|\gamma_k\|^2 + (\delta_k,\gamma_k)^2}$$

Nit	NF	VALEUR DE F
87	168	.293701063036485D-02
88	170	.293689218181412D-02
~~89~~	~~171~~	~~.293678607973872D-02~~
~~90~~	~~172~~	~~.293677336663560D-02~~
91	173	.293675202372708D-02
92	174	.293672908335305D-02
~~93~~	~~175~~	~~.293669734811074D-02~~
~~94~~	~~176~~	~~.293668449136933D-02~~
95	177	.293667616500642D-02
96	178	.293666812909174D-02
~~97~~	~~180~~	~~.293666545155915D-02~~
~~98~~	~~181~~	~~.293666347458029D-02~~
99	182	.293666306072089D-02
100	183	.293666259133218D-02
~~101~~	~~185~~	~~.293666067283785D-02~~
~~102~~	~~186~~	~~.293665804792201D-02~~
103	187	.293665753079278D-02
104	188	.293665750013304D-02
~~105~~	~~190~~	~~.293665705989054D-02~~
~~106~~	~~191~~	~~.293665640663022D-02~~
107	193	.293665633790584D-02
108	196	.293665582048898D-02
~~109~~	~~198~~	~~.293665573762116D-02~~
~~110~~	~~202~~	~~.293664410727591D-02~~
111	203	.293662789182244D-02
112	204	.293662411299894D-02
~~113~~	~~205~~	~~.293662384690247D-02~~
~~114~~	~~206~~	~~.293662346345289D-02~~
115	207	.293662291267090D-02
116	209	.293662007960634D-02
~~117~~	~~211~~	~~.293661989932343D-02~~
~~118~~	~~212~~	~~F= .293661986981682D-02~~

BFGS

Nit	NF	VALEUR DE F
~~87~~	~~108~~	~~.294369062229792D-02~~
88	109	.294387174218232D-02
89	110	.294385290175211D-02
~~90~~	~~112~~	~~.294365097632227D-02~~
~~91~~	~~113~~	~~.294335672036002D-02~~
92	115	.294311067322291D-02
93	116	.294278614358912D-02
~~94~~	~~117~~	~~.294251135463211D-02~~
~~95~~	~~119~~	~~.294201866653506D-02~~
96	120	.294158426882840D-02
97	121	.294114812088406D-02
~~98~~	~~123~~	~~.294064919601063D-02~~
~~99~~	~~124~~	~~.294071615756372D-02~~
100	125	.294056262560443D-02
101	126	.294046584379414D-02
~~102~~	~~127~~	~~.294036026576717D-02~~
~~103~~	~~128~~	~~.294028029458773D-02~~
104	130	.294025089893119D-02
105	131	.294020519739079D-02
~~106~~	~~132~~	~~.294015497207584D-02~~
~~107~~	~~133~~	~~.294010579041166D-02~~
108	134	.294003869604883D-02
109	136	.293999941624110D-02
~~110~~	~~138~~	~~.293992703552416D-02~~
~~111~~	~~139~~	~~.293980659462358D-02~~
112	140	.293961720608284D-02
113	141	.293939658566716D-02
~~114~~	~~142~~	~~.293911043401326D-02~~
~~115~~	~~143~~	~~.293892449586494D-02~~
116	145	.293863921609107D-02
117	146	.293871046785979D-02
~~118~~	~~147~~	~~.293860491737067D-02~~
~~119~~	~~149~~	~~.293855297056785D-02~~
120	150	.293850709011231D-02
121	151	.293844143531061D-02
~~122~~	~~153~~	~~.293840905214484D-02~~
~~123~~	~~154~~	~~.293835680334555D-02~~
124	155	.293828420797305D-02
125	157	.293826052036890D-02
~~126~~	~~159~~	~~.293816044795806D-02~~
127	160	.293812161300498D-02
128	161	.293805379731373D-02
~~129~~	~~163~~	~~.293803435475049D-02~~
~~130~~	~~165~~	~~.293800835859683D-02~~
131	166	.293799420474339D-02
132	167	.293798195520276D-02
~~133~~	~~169~~	~~.293796624207341D-02~~
~~134~~	~~170~~	~~.293796375094317D-02~~

Formule (III.5)

avec :

$\rho_k = 1, \quad \theta_k = 0.5$ et

$$\gamma_k = \frac{2\,(s_k, y_k)\ \|s_k\|^2}{\|s_k\|^2 \|y_k\|^2 + (s_k, y_k)^2}$$

BFGS

Nit	NF	VALEUR DE F
135	172	.293795802780553D-02
136	173	.293795566499160D-02
~~137~~	~~174~~	~~.293795361009289D-02~~
~~138~~	~~175~~	~~.293795092092633D-02~~
139	176	.293794880614202D-02
140	177	.293794611846378D-02
~~141~~	~~178~~	~~.293794471242673D-02~~
~~142~~	~~179~~	~~.293794290578070D-02~~
143	180	.293794233114235D-02
144	181	.293794192580544D-02
~~145~~	~~182~~	~~.293794182340754D-02~~
~~146~~	~~183~~	~~.293794171009020D-02~~
147	184	.293794161430557D-02
148	185	.293794151200319D-02
~~149~~	~~186~~	~~.293794130109492D-02~~
~~150~~	~~188~~	~~.293794090290552D-02~~
151	190	.293793526241442D-02
152	193	.293790568797139D-02
~~153~~	~~196~~	~~.293771365077492D-02~~
~~154~~	~~197~~	~~.293750232083053D-02~~
155	198	.293748730032098D-02
156	201	.293739653116036D-02
~~157~~	~~203~~	~~.293734791903610D-02~~
~~158~~	~~204~~	~~.293728203654704D-02~~
159	205	.293722871466683D-02
160	206	.293718939146529D-02
~~161~~	~~207~~	~~.293714869909425D-02~~
~~162~~	~~208~~	~~.293711833442120D-02~~
163	209	.293709550942266D-02
164	210	.293706949337928D-02
~~165~~	~~211~~	~~.293705556509185D-02~~
~~166~~	~~212~~	~~.293704709264113D-02~~
167	213	.293704243984047D-02
168	214	.293703873018764D-02
~~169~~	~~215~~	~~.293703745954406D-02~~
~~170~~	~~216~~	~~.293703718134742D-02~~
171	217	.293703704724770D-02
172	218	.293703701649468D-02
~~173~~	~~219~~	~~.293703700026792D-02~~
~~174~~	~~221~~	~~.293703694345024D-02~~
175	223	.293703079659234D-02
176	225	.293703047425133D-02
~~177~~	~~226~~	~~.293703167105944D-02~~
178	230	.293700697529783D-02
179	233	.293690786819020D-02
~~180~~	~~234~~	~~.293608714043230D-02~~
~~181~~	~~235~~	~~.293606828879249D-02~~
182	236	.293603677718176D-02

Formule (III.5)

avec :

$\rho_k = 1$, $\theta_k = 0.5$ et

$$\gamma_k = \frac{2\,(\Delta_k, y_k)\,\|\Delta_k\|^2}{\|\Delta_k\|^2\,\|y_k\|^2 + (\Delta_k, y_k)^2}$$

BFGS

Nit	NF	VALEUR DE F
183	237	.293679835920292D-02
~~184~~	~~238~~	~~.293676942267427D-02~~
~~185~~	~~239~~	~~.293675109111900D-02~~
186	241	.293674715344562D-02
187	242	.293674133298821D-02
~~188~~	~~243~~	~~.293673497116170D-02~~
~~189~~	~~244~~	~~.293673363110540D-02~~
190	245	.293673173236031D-02
191	246	.293673076731705D-02
~~192~~	~~247~~	~~.293673059770471D-02~~
~~193~~	~~248~~	~~.293673053646770D-02~~
194	249	.293673050896447D-02
195	250	.293673047408356D-02
~~196~~	~~251~~	~~.293673045801983D-02~~
~~197~~	~~252~~	~~.293673045257211D-02~~
198	253	.293673044689560D-02
199	255	.293673042640694D-02
~~200~~	~~258~~	~~.293672845946063D-02~~
~~201~~	~~260~~	~~.293672533159452D-02~~
202	262	.293671047009531D-02
203	265	.293668643740105D-02
~~204~~	~~266~~	~~.293665985374770D-02~~
~~205~~	~~268~~	~~.293664470867246D-02~~
206	269	.293663611981981D-02
207	270	.293662918816116D-02
~~208~~	~~271~~	~~.293662416440447D-02~~
~~209~~	~~272~~	~~.293662308063926D-02~~
210	274	.293661683124346D-02
211	275	.293661430067311D-02
~~212~~	~~276~~	~~.293661178639292D-02~~
~~213~~	~~277~~	~~.293661075944894D-02~~
214	278	.293661042223336D-02
215	279	.293661037205983D-02

NORME GRADIENT CARRE

~~.878841835727516D-10~~

.409412327299401D-10

Formule (III.5)
avec :

$\rho_k = 1$, $\theta_k = 1$ et $\gamma_k = \dfrac{(s_k, y_k)}{\|y_k\|^2}$

(méthode de Shanno)

Nit	NF	VALEUR DE F
1	3	.260986022198117D+02
2	4	.109794712881311D+02
~~3~~	~~5~~	~~.289828443663197D+01~~
~~4~~	~~6~~	~~.792113061505249D+00~~
5	7	.170413718784654D+00
6	8	.387317538426924D-01
~~7~~	~~9~~	~~.194706653993317D-01~~
~~8~~	~~10~~	~~.166125110340093D-01~~
9	12	.473158401046928D-02
10	14	.314708704119467D-02
~~11~~	~~17~~	~~.296011110805960D-02~~
~~12~~	~~19~~	~~.294136136252453D-02~~
13	21	.294135761257385D-02
14	22	.294135636203790D-02
~~15~~	~~23~~	~~.294135590345687D-02~~
~~16~~	~~24~~	~~.294135525604040D-02~~
17	25	.294135430300780D-02
18	26	.294135309923474D-02
~~19~~	~~27~~	~~.294135226891485D-02~~
~~20~~	~~29~~	~~.294134961759949D-02~~
21	32	.294131552324469D-02
22	34	.294130152199681D-02
~~23~~	~~36~~	~~.294109365826766D-02~~
24	37	.294078156327100D-02
25	39	.294053387495464D-02
~~26~~	~~40~~	~~.294043868574886D-02~~
~~27~~	~~42~~	~~.293947508682297D-02~~
28	43	.293908971131830D-02
29	44	.293859340562843D-02
~~30~~	~~46~~	~~.293852643095492D-02~~
~~31~~	~~49~~	~~.293839368413877D-02~~
32	51	.293836262605308D-02
33	54	.293826289934953D-02
~~34~~	~~57~~	~~.293826045910403D-02~~
~~35~~	~~60~~	~~.293825657375640D-02~~
36	63	.293825640755866D-02
37	66	.293824829904798D-02
~~38~~	~~68~~	~~.293824587948345D-02~~
~~39~~	~~70~~	~~.293822692457748D-02~~
40	76	.293799299393046D-02
41	78	.293789712258187D-02
~~42~~	~~80~~	~~.2937560833136752D-02~~
~~43~~	~~81~~	~~.2937731362318897D-02~~
44	82	.293729145341296D-02
45	83	.293728834489371D-02
~~46~~	~~84~~	~~.2937720752126218D-02~~
~~47~~	~~86~~	~~.293728505102256D-02~~

Formule (III.5)

avec :

$\rho_k = 1$, $\theta_k = 1$ et $\gamma_k = 1$

(méthode de Shanno)

Nit	NF	VALEUR DE F
1	3	.260986022198117D+02
~~2~~	~~7~~	~~.234955073982115D+02~~
~~3~~	~~9~~	~~.318262255152450D+01~~
4	12	.287568335322064D+01
5	14	.285962102550200D+00
~~6~~	~~17~~	~~.248775540552309D+00~~
~~7~~	~~19~~	~~.110683665756581D-01~~
8	20	.841126086613605D-02
9	21	.482469839127090D-02
~~10~~	~~22~~	~~.368700190423816D-02~~
~~11~~	~~23~~	~~.324843190381879D-02~~
12	24	.299197298179775D-02
13	26	.297887487457421D-02
~~14~~	~~28~~	~~.297551463276769D-02~~
~~15~~	~~30~~	~~.297489050940831D-02~~
16	32	.297480420417801D-02
17	35	.297459197896713D-02
~~18~~	~~37~~	~~.297457057985420D-02~~
~~19~~	~~42~~	~~.297388212523528D-02~~
20	44	.297345558866667D-02
21	45	.297280104883648D-02
~~22~~	~~46~~	~~.297175891557349D-02~~
~~23~~	~~47~~	~~.297014852740262D-02~~
24	48	.296802556759519D-02
~~25~~	~~49~~	~~.296702852223891D-02~~
~~26~~	~~50~~	~~.296584907521990D-02~~
27	51	.296389992019394D-02
28	52	.296230998514285D-02
~~29~~	~~53~~	~~.296184723404218D-02~~
~~30~~	~~55~~	~~.296178045702204D-02~~
31	57	.296101783319110D-02
32	58	.296091806030090D-02
~~33~~	~~60~~	~~.295949430208112D-02~~
~~34~~	~~62~~	~~.295634253287518D-02~~
35	64	.295589037164309D-02
36	68	.295462307002789D-02
~~37~~	~~70~~	~~.295393450402439D-02~~
~~38~~	~~71~~	~~.295293205597603D-02~~
39	73	.295276301059358D-02
40	75	.295190356502146D-02
~~41~~	~~77~~	~~.295175597418918D-02~~
~~42~~	~~81~~	~~.295110351501796D-02~~
43	82	.295083867540561D-02
44	84	.295069195539564D-02
~~45~~	~~86~~	~~.295040029450941D-02~~
~~46~~	~~87~~	~~.294995404083738D-02~~
47	88	.2949560975433072D-02

Formule (III.5)

avec :

$$\rho_k = 1 \;,\; \theta_k = 1 \;\text{ et }\; \gamma_k = \frac{(s_k, y_k)}{\|y_k\|^2}$$

(méthode de Shanno)

Nit	NF	VALEUR DE F
48	88	.29372732318954 6D-02
49	90	.29377259401501D-02
~~50~~	~~91~~	~~.29377155134177D-02~~
~~51~~	~~93~~	~~.29372713268786 0D-02~~
52	97	.29372670643173 9D-02
53	99	.29372670008121 1D-02
~~54~~	~~104~~	~~.29371394458197 1D-02~~
~~55~~	~~106~~	~~.29370844590310 6D-02~~
56	107	.29369962530454 9D-02
57	108	.29369187565037 0D-02
~~58~~	~~112~~	~~.29368366208379 7D-02~~
~~59~~	~~113~~	~~.29368278936473 2D-02~~
60	114	.29368159706586 1D-02
61	115	.29368115510666 5D-02
~~62~~	~~116~~	~~.29368640907553 5D-02~~
~~63~~	~~118~~	~~.29368019743818 8D-02~~
64	121	.29367657534211 4D-02
65	123	.29367656520733 3D-02
~~66~~	~~127~~	~~.29367505608372 3D-02~~
~~67~~	~~128~~	~~.29367299861375 1D-02~~
68	129	.29367260050349 6D-02
69	131	.29367247121456 8D-02
~~70~~	~~133~~	~~.29367150657586 1D-02~~
~~71~~	~~134~~	~~.29367148891143 4D-02~~
72	135	.29367146038720 9D-02
73	136	.29367144212468 2D-02
~~74~~	~~138~~	~~.29367143567140 6D-02~~
75	140	.29367139595429 3D-02
76	145	.29366837448409 1D-02
~~77~~	~~146~~	~~.29366494334386 2D-02~~
~~78~~	~~147~~	~~.29366419896042 2D-02~~
79	148	.29366403029762 2D-02
80	149	.29366377418854 3D-02
~~81~~	~~150~~	~~.29366360718497 3D-02~~
~~82~~	~~152~~	~~.29366360711541 1D-02~~
83	154	.29366340608015 0D-02
84	155	.29366331806931 7D-02
~~85~~	~~156~~	~~.29366327778690 95D-02~~
~~86~~	~~158~~	~~.29366327425329 9D-02~~
87	159	.29366327251299 1D-02
88	160	.29366327117068 5D-02
~~89~~	~~161~~	~~.29366327041301 0D-02~~
~~90~~	~~163~~	~~.29366320581752 3D-02~~
91	164	.29366320200484 5D-02
92	166	.29366325628457 4D-02
~~93~~	~~168~~	~~.29366314984579 0D-02~~
~~94~~	~~169~~	~~.29366317006090 5D-02~~

Formule (III.5)

avec :

$$\rho_k = 1 \;,\; \theta_k = 1 \quad \text{et } \gamma_k = 1$$

(méthode de Shanno)

Nit	NF	VALEUR DE F
48	89	.29492910096547 5D-02
~~49~~	~~90~~	~~.29469546466492 3D-02~~
~~50~~	~~92~~	~~.29489051773525 6D-02~~
51	94	.29465206643746 4D-02
52	96	.29484712549311 6D-02
~~53~~	~~98~~	~~.29484523040006 1D-02~~
~~54~~	~~100~~	~~.29484502417745 4D-02~~
55	101	.29484467949138 6D-02
56	103	.29484457862300 0D-02
~~57~~	~~105~~	~~.29484396708615 0D-02~~
~~58~~	~~107~~	~~.29484375010705 0D-02~~
59	109	.29484234127848 4D-02
60	110	.29484102071044 3D-02
~~61~~	~~112~~	~~.29483105351683 6D-02~~
~~62~~	~~113~~	~~.29482513671846 0D-02~~
63	115	.29475751938702 0D-02
64	117	.29475597413873 4D-02
~~65~~	~~118~~	~~.29475339413086 4D-02~~
~~66~~	~~120~~	~~.29475228911350 5D-02~~
67	121	.29475059454089 3D-02
68	122	.29474889950776 4D-02
~~69~~	~~124~~	~~.29474876221956 3D-02~~
~~70~~	~~128~~	~~.29471690729168 8D-02~~
71	129	.29467643706036 6D-02
72	130	.29462148822840 7D-02
~~73~~	~~133~~	~~.29453444244286 5D-02~~
~~74~~	~~135~~	~~.29452150460207 31D-02~~
75	139	.29445521199704 3D-02
~~76~~	~~141~~	~~.29442786974395 6D-02~~
~~77~~	~~143~~	~~.29431355260670 2D-02~~
78	145	.29426675351230 9D-02
79	147	.29423905281389 1D-02
~~80~~	~~148~~	~~.29419879534495 9D-02~~
~~81~~	~~150~~	~~.29418619506707 6D-02~~
82	151	.29416534404580 3D-02
83	153	.29416048702090 4D-02
~~84~~	~~154~~	~~.29415246111498 76D-02~~
~~85~~	~~156~~	~~.29414932985784 9D-02~~
86	158	.29413055606109 9D-02
87	160	.29412140573169 3D-02
~~88~~	~~162~~	~~.29403470947034 8D-02~~
~~89~~	~~164~~	~~.29401371555694 5D-02~~
90	165	.29400518120405 71D-02
91	166	.29399390539476 5D-02
~~92~~	~~167~~	~~.29347047508116 9D-02~~
~~93~~	~~169~~	~~.29396572044071 4D-02~~
94	170	.29394645349831 9D-02

Formule (III.5)

avec :

$$\rho_k = 1, \quad \theta_k = 1 \quad \text{et} \quad \gamma_k = \frac{(s_k, y_k)}{\|y_k\|^2}$$

(méthode de Shanno)

Nit	NF	VALEUR DE F
95	171	.293663163138439D-02
96	174	.293663107170959D-02
~~97~~	~~176~~	~~.293663079590369D-02~~
~~98~~	~~178~~	~~.293663041159895D-02~~
99	179	.293663033845351D-02
100	181	.293663003511504D-02
~~101~~	~~183~~	~~.293662933916546D-02~~
~~102~~	~~185~~	~~.293662926428998D-02~~
103	187	.293662876046530D-02
104	188	.293662875878139D-02
~~105~~	~~190~~	~~.293662871232185D-02~~
~~106~~	~~193~~	~~.293662828280678D-02~~
107	196	.293662827229781D-02
108	199	.293662740794682D-02
~~109~~	~~201~~	~~.293662710291305D-02~~
~~110~~	~~203~~	~~.293662347681937D-02~~
111	204	.293662302290924D-02
112	205	.293662231425428D-02
~~113~~	~~206~~	~~.293662106021776D-02~~
~~114~~	~~207~~	~~.293662003047080D-02~~
115	208	.293661922175943D-02
116	209	.293661728409046D-02
~~117~~	~~211~~	~~.293659406085129D-02~~
~~118~~	~~213~~	~~.293659015532209D-02~~
119	215	.293658896919545D-02
120	216	.293658884113416D-02
~~121~~	~~218~~	~~.293658882354913D-02~~
~~122~~	~~219~~	~~.293658879539544D-02~~
123	220	.293658875918870D-02
124	222	.293658838305202D-02
~~125~~	~~225~~	~~F= .293658837954326D-02~~

Formule (III.5)

avec :

$$\rho_k = 1, \quad \theta_k = 1 \quad \text{et} \quad \gamma_k = 1$$

(méthode de Shanno)

Nit	NF	VALEUR DE F
95	171	.293928103998472D-02
~~96~~	~~172~~	~~.293894626473456D-02~~
~~97~~	~~173~~	~~.293867270268776D-02~~
98	175	.293863809391718D-02
99	176	.293858446064349D-02
~~100~~	~~177~~	~~.293855919012424D-02~~
~~101~~	~~180~~	~~.293855908662171D-02~~
102	184	.293849600314601D-02
103	186	.293849409398101D-02
~~104~~	~~189~~	~~.293817838704658D-02~~
~~105~~	~~191~~	~~.293806006517829D-02~~
106	192	.293786876707085D-02
107	193	.293782659598760D-02
~~108~~	~~194~~	~~.293776837111090D-02~~
~~109~~	~~195~~	~~.293771400403303D-02~~
110	197	.293770294937708D-02
111	201	.293766059882878D-02
~~112~~	~~202~~	~~.293762121222065D-02~~
~~113~~	~~204~~	~~.293736199813707D-02~~
114	206	.293730306687857D-02
115	208	.293705676932066D-02
~~116~~	~~211~~	~~.293705544870262D-02~~
~~117~~	~~212~~	~~.293705325025266D-02~~
118	214	.293705291659171D-02
119	216	.293705103997960D-02
~~120~~	~~218~~	~~.293704707323751D-02~~
~~121~~	~~220~~	~~.293702091491043D-02~~
122	222	.293701953297443D-02
123	225	.293694032911201D-02
~~124~~	~~228~~	~~.293693906423471D-02~~
~~125~~	~~231~~	~~.293691999851340D-02~~
126	234	.293691980260176D-02
~~127~~	~~237~~	~~.293691073776147D-02~~
~~128~~	~~240~~	~~.293691065924766D-02~~
129	243	.293690275830930D-02
130	246	.293690261008254D-02
~~131~~	~~249~~	~~.293686443039047D-02~~
~~132~~	~~251~~	~~.293680189778118D-02~~
133	253	.293685523244826D-02
134	255	.293685104763379D-02
~~135~~	~~257~~	~~.293680320558445D-02~~
~~136~~	~~259~~	~~.293680093012905D-02~~
137	260	.293679710904727D-02
138	261	.293679268845505D-02
~~139~~	~~263~~	~~.293677807844159D-02~~
~~140~~	~~265~~	~~.293677768050806D-02~~
141	266	.293676407779334D-02
142	269	.293674035554721D-02

Formule (III.5)

avec :

$$\rho_k = 1 , \quad \theta_k = 1 \quad \text{et} \quad \gamma_k = \frac{(\Delta_k, \gamma_k)}{\|\gamma_k\|^2}$$

(méthode de Shanno)

Formule (III.5)

avec :

$$\rho_k = 1 , \quad \theta_k = 1 \quad \text{et} \quad \gamma_k = 1$$

(méthode de Shanno)

Nit	NF	VALEUR DE F
~~143~~	~~270~~	~~.293671571958574D-02~~
~~144~~	~~271~~	~~.293667531788634D-02~~
145	274	.293667353060819D-02
146	276	.293664871187657D-02
~~147~~	~~278~~	~~.293664605412571D-02~~
~~148~~	~~280~~	~~.293662816385619D-02~~
149	282	.293662458514268D-02
150	284	.293662443150267D-02
~~151~~	~~286~~	~~.293662439307579D-02~~
~~152~~	~~287~~	~~.293662432904762D-02~~
153	288	.293662425754402D-02
154	289	.293662415164142D-02
~~155~~	~~290~~	~~.293662406812088D-02~~
~~156~~	~~291~~	~~.293662399140653D-02~~
157	293	F= .293662331884296D-02

NORME GRADIENT CARRE

.850084939453732D-10

.5538910050139[illegible]2D-10

RÉFÉRENCES

[1] J.C. ALLWRIGHT, "*Global convergence rates for descent algorithm : Improved results for strictly convex problems*", JOTA, 26 (1978), pp. 367-372.

[2] L. ARMIJO, "*Minimisation of functions having continuous partial derivatives*", Pacific J. Math. 16 (1966) pp. 1-3.

[3] C.G. BROYDEN, "*The convergence of a class of double-rank minimization algorithms 1. General considerations*", J. Inst. Maths. Applics. 6 (1970) pp. 76-90.

[4] C.G. BROYDEN, "*The convergence of a class of double-rank minization algorithms 2. The new algorithm*", J. Inst. Maths. Applics. 6 (1970), pp. 222-231.

[5] A.G. BUCKLEY, "*A combined conjugate-gradient quasi-Newton minimization algorithm*", Mathematical Programming, 15 (1978), pp. 200-210.

[6] A.G. BUCKLEY, "*Extending the relationship between the conjugate gradient and BFGS algorithms*", Mathematical Programming, 15 (1978), pp. 343-348.

[7] L.W. CORNWELL, M.G. KOCMAN and M.F. PROSSER, "*Computational experience with Davidon's least-square algorithm*", JOTA 31 (1980), pp. 27-39.

[8] W.C. DAVIDON, "*Variable metric method for minimization*", Rep. ANL - 5990 Rev, Argonne National Laboratories, Argonne, Ill.

[9] J.E. DENNIS, Jr., "*On some methods based on Broyden's secant approximation to the Hessian*", in : Numerical methods for nonlinear optimization, F.A. Lootsma (Ed.), Academic Press, London (1972), pp. 19-34.

[10] M. EL HALLABI, "*Sur la convergence de formules de métrique variable paramétrées*", Thèse de 3ème cycle, Université des Sciences et Techniques de Lille I, 1981.

[11] J.C. FIOROT et M. EL HALLABI, "*Sur la convergence de méthodes utilisant des formules paramétrées de métrique variable*", Comptes Rendus Académie des Sciences, Paris, t. 294 (11 janvier 1982) pp. 91-94.

[12] J.C. FIOROT et M. EL HALLABI, "*On the convergence of methods using parametric variable metric formulae*", Publication ANO 63, Université de Lille I UER IEEA Bât M3, Villeneuve d'Ascq, France.

[13] J.C. FIOROT et P. JEANNIN, "*Une classe plus large de formules de métrique variable paramétrée*", Publication ANO 76, Université de Lille I, UER IEEA Bât M3, Villeneuve d'Ascq, France.

[14] J.C. FIOROT et P. JEANNIN, en préparation.

[15] J.C. FIOROT et P. VACA, "*Sur la convergence de méthodes de métrique variable paramétrée à stockage réduit*", Publication ANO 78, Université de Lille I, UER IEEA, Bât M3, Villeneuve d'Ascq, France.

[16] J.C. FIOROT et P. VACA, "*A derived variable metric method with reduced storage*", Publication ANO 86, Université de Lille I, UER IEEA, Bât M3, Villeneuve d'Ascq, France.

[17] R. FLETCHER, "*Practical methods of optimization, Vol 1 : Unconstrained optimization*", J. Wiley and Sons, Chichester, New-York (1980).

[18] R. FLETCHER, "*A new approach to variable metric algorithm*", Comput. J. 13 (1970) pp. 317-322.

[19] R. FLETCHER and C.M. REEVES, "*Function minimization by conjugate gradients*", Comp. J. 7 (1964), pp. 149-154.

[20] R. FLETCHER and M.J.D. POWELL, "*A rapidly convergent descent method for minimization*", Comp. J. 6 (1963), pp. 163-168.

[21] A.A. GOLDSTEIN and J.F. PRICE, "*An effective algorithm for minimization*", Numer. Math. 10 (1967), pp. 184-189.

[22] D. GOLDFARB, "*A family of variable metric methods derived by variational means*", Maths. Comput. 24 (1970), pp. 23-26.

[23] M. HESTENES and E. STIEFEL, "*Methods of conjugate gradients for solving linear systems*", J. Res. N.B.S., vol. 49 (1952), pp. 409-436.

[24] K.E. HILLSTROM, MINIPACK I., *"A study in the modularization of a package of computer algorithms for unconstrained nonlinear optimization problem"*, Technical Memorandum TM-252, Argonne National Laboratory (1974).

[25] H.Y. HUANG, *"Unified approach to quadratically convergent algorithms for function minimization"*, JOTA 5 (1970), pp. 405-423.

[26] J.J. MORE, B.S. GARBOW and K.E. HILLSTROM, *"Testing unconstrained optimization"*, ACM Trans. Math. Soft. 7 (1981), pp. 17-41.

[27] L. NAZARETH, *"A relationship between the BFGS and conjugate gradient algorithms and its applications for new algorithms"*, SIAM J. Numer. Anal. 16 (1979), pp. 794-800.

[28] L. NAZARETH and J. NOCEDAL, *"Conjugate direction methods with variable storage"*, Math. Progr. 23 (1982), pp. 326-340.

[29] J. NOCEDAL, *"Updating quasi-Newton matrices with limited storage"*, Maths. Comput. 35 (1980), pp. 773-782.

[30] S.S. OREN and D. LUENBERGER, *"Self-scaling variable metric (SSVM) algorithms, Part I : criteria and sufficient conditions for scaling a class of algorithms"*, Management Science 20 (1974) pp. 845-262.

[31] S.S. OREN, *"Self-scaling variable metric (SSVM) algorithms, Part II : implementation and experiments"*, Management Science 20 (1974) pp. 863-874.

[32] S.S. OREN and E. SPEDICATO, *"Optimal conditioning of self-scaling variable metric algorithms"*, Math. Programming 10 (1976) pp. 70-90.

[33] M.R. OSBORNE, *"Topics in Optimization"*, Stan-CS. 72, Stanford University, April 1972.

[34] A. PERRY, *"A modified conjugate gradient algorithm"*, Operations Research 26 (1978) pp. 1073-1078.

[35] E. POLAK et G. RIBIERE, *"Note sur la convergence de méthodes de directions conjuguées"*, R.I.R.O. 16 (1969), pp. 35-43.

[36] M.J.D. POWELL, *"Restart procedures for the conjugate gradient method"*, Math. Progr. 12 (1977). pp. 241-254.

[37] M.J.D. POWELL, *"An iterative method for finding stationary values of a function of several variables"*, Comp. J. 5 (1962), pp. 147-151.

[38] M.J.D. POWELL, *"On the convergence of the variable metric algorithm"* J. Inst. Maths. Applics. 7 (1971) pp. 21-36.

[39] D.F. SHANNO, *"Conditioning of quasi-Newton methods for function minimization"*, Maths. Comput. 24 (1970) pp. 647-656.

[40] D.F. SHANNO, *"Conjugate gradient method with inexact searches"*, Maths of Op. Research 3 (1978) pp. 244-256.

[41] D.F. SHANNO, *"On the convergence of a new conjugate gradient algorithm"*, SIAM J. Num. Anal. 15 (1978) pp 1247-1257.

[42] J. SHERMAN and W.J. MORRISON, *"Adjustement of an inverse matrix corresponding to changes in the elements of a given column or a given row of the original matrix"*, Ann. Math. Statist. 20 (1949) p. 621.

[43] P. WOLFE, *"Convergence conditions for ascent methods"*, SIAM Review 11 (1969) pp. 226-235.

TITRE DE LA THESE :

MÉTHODES DE MINIMISATION À ENCOMBREMENT RÉDUIT

auteur : Polo VACA

RESUME

Pour le problème de minimisation d'une fonction de n variables sans contraintes, les méthodes de métrique variable sont les plus performantes. La direction de descente est à chaque itération la transformée de l'opposé du gradient par une matrice de remise à jour. Ces méthodes requièrent au moins $\frac{n(n+1)}{2}$ mémoires et le calcul de nombreux produits scalaires, de l'ordre de $O(n)$ entre 2n et 3n.

Dans le travail présenté ici la direction de descente peut être considérée comme une direction de gradient conjugué généralisé, elle contient la méthode d'Hestenes et Stiefel. Deux études indépendantes sont exposées. Lorsque les méthodes sont déduites de travaux récents sur les méthodes de métrique variable paramétrée, la convergence est assurée pour des fonctions de classe C^1 indépendamment de la convexité. L'algorithme présente de plus un caractère chaotique en ce sens que la direction peut être choisie parmi six familles de direction. Dans le cas où les méthodes sont déduites des méthodes de métrique variable habituelles, la convergence est obtenue pour des fonctions de classe C^2 et convexes. Cette partie englobe toutes les formules connues et surtout un travail récent de Shanno.

L'intérêt de ces nouvelles méthodes réside dans l'encombrement réduit à 4 ou 5 vecteurs et dans le volume des calculs réduit à celui de 4 ou 5 produits scalaires. L'étude est complétée par des résultats numériques encourageants portant sur des problèmes allant jusqu'à 100 variables. Le nombre d'itérations pour les nouvelles méthodes est comparable à celui de la BFGS avec les avantages évoqués plus haut.

MOTS CLEFS :

Minimisation - Métrique variable - Gradient conjugué généralisé - Encombrement réduit - Convergence - Algorithme chaotique.