# THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

## LE TITRE DE DOCTEUR DE 3ème CYCLE

INFORMATIQUE

par

ALBDELKAFAR TOUJGANI

## SCHEMAS DE MANNA : MODELISATION ET EQUIVALENCE PAR COMMUTATION



Thèse soutenue le 17 Septembre 1983 devant la Commission d'Examen

| | Membres du Jury : |
|---|---|
| Président | M. DAUCHET |
| Rapporteur | G. JACOB |
| Examinateurs | I. GUESSARIAN |
| | V. CORDONNIER |
| Membre invité | P. LECOUFFE |

## PROFESSEURS 1ère CLASSE

| | | |
|---|---|---|
| M. | BACCHUS Pierre | Mathématiques |
| M. | BEAUFILS Jean-Pierre (dét.) | Chimie |
| M. | BIAYS Pierre | G.A.S. |
| M. | BILLARD Jean | Physique |
| M. | BONNOT Ernest | Biologie |
| M. | BOUGHON Pierre | Mathématiques |
| M. | BOURIQUET Robert | Biologie |
| M. | CELET Paul | Sciences de la Terre |
| M. | COEURE Gérard | Mathématiques |
| M. | CONSTANT Eugène | I.E.E.A. |
| M. | CORDONNIER Vincent | I.E.E.A. |
| M. | DEBOURSE Jean-Pierre | S.E.S. |
| M. | DELATTRE Charles | Sciences de la Terre |
| M. | DURCHON Maurice | Biologie |
| M. | ESCAIG Bertrand | Physique |
| M. | FAURE Robert | Mathématiques |
| M. | FOURET René | Physique |
| M. | GABILLARD Robert | I.E.E.A. |
| M. | GRANELLE Jean-Jacques | S.E.S. |
| M. | GRUSON Laurent | Mathématiques |
| M. | GUILLAUME Jean | Biologie |
| M. | HECTOR Joseph | Mathématiques |
| M. | HEUBEL Joseph | Chimie |
| M. | LABLACHE COMBIER Alain | Chimie |
| M. | LACOSTE Louis | Biologie |
| M. | LANSRAUX Guy | Physique |
| M. | LAVEINE Jean-Pierre | Sciences de la Terre |
| M. | LEBRUN André | C.U.E.E.P. |
| M. | LEHMANN Daniel | Mathématiques |
| Mme | LENOBLE Jacqueline | Physique |
| M. | LHOMME Jean | Chimie |
| M. | LOMBARD Jacques | S.E.S. |
| M. | LOUCHEUX Claude | Chimie |
| M. | LUCQUIN Michel | Chimie |

| | | |
|---|---|---|
| M. | MAILLET Pierre | S.E.S. |
| M. | MONTREUIL Jean | Biologie |
| M. | PAQUET Jacques | Sciences de la Terre |
| M. | PARREAU Michel | Mathématiques |
| M. | PROUVOST Jean | Sciences de la Terre |
| M. | SALMER Georges | I.E.E.A. |
| Mme | SCHWARTZ Marie-Hélène | Mathématiques |
| M. | SEGUIER Guy | I.E.E.A. |
| M. | STANKIEWICZ François | Sciences Economiques |
| M. | TILLIEU Jacques | Physique |
| M. | TRIDOT Gabriel | Chimie |
| M. | VIDAL Pierre | I.E.E.A. |
| M. | VIVIER Emile | Biologie |
| M. | WERTHEIMER Raymond | Physique |
| M. | ZEYTOUNIAN Radyadour | Mathématiques |

## PROFESSEURS 2ème CLASSE

| | | |
|---|---|---|
| M. | AL FAKIR Sabah | Mathématiques |
| M. | ANTOINE Philippe | Mathématiques |
| M. | BART André | Biologie |
| Mme | BATTIAU Yvonne | Géographie |
| M. | BEGUIN Paul | Mathématiques |
| M. | BELLET Jean | Physique |
| M. | BKOUCHE Rudolphe | Mathématiques |
| M. | BOBE Bernard | S.E.S. |
| M. | BODART Marcel | Biologie |
| M. | BOILLY Bénoni | Biologie |
| M. | BONNELLE Jean-Pierre | Chimie |
| M. | BOSQ Denis | Mathématiques |
| M. | BREZINSKI Claude | I.E.E.A. |
| M. | BRUYELLE Pierre (Chargé d'enseignement) | Géographie |
| M. | CAPURON Alfred | Biologie |
| M. | CARREZ Christian | I.E.E.A. |
| M. | CHAMLEY Hervé | E.U.D.I.L. |

| | |
|---|---|
| M. CHAPOTON Alain | C.U.E.E.P. |
| M. COQUERY Jean-Marie | Biologie |
| Mme CORSIN Paule | Sciences de la Terre |
| M. CORTOIS Jean | Physique |
| M. COUTURIER Daniel | Chimie |
| Mle DACHARRY Monique | Géographie |
| M. DEBRABANT Pierre | E.U.D.I.L. |
| M. DEGAUQUE Pierre | I.E.E.A. |
| M. DELORME Pierre | Biologie |
| M. DEMUNTER Paul | C.U.E.E.P. |
| M. DE PARIS Jean-Claude | Mathématiques |
| M. DEVRAINNE Pierre | Chimie |
| M. DHAINAUT André | Biologie |
| M. DORMARD Serge | S.E.S. |
| M. DOUKHAN Jean-Claude | E.U.D.I.L. |
| M. DUBOIS Henri | Physique |
| M. DUBRULLE Alain | Physique |
| M. DUEE Gérard | Sciences de la Terre |
| M. DYMENT Arthur | Mathématiques |
| M. FLAMME Jean-Marie | E.U.D.I.L. |
| M. FONTAINE Hubert | Physique |
| M. GERVAIS Michel | S.E.S. |
| M. GOBLOT Rémi | Mathématiques |
| M. GOSSELIN Gabriel | S.E.S. |
| M. GOUDMAND Pierre | Chimie |
| M. GREVET Patrice | S.E.S. |
| M. GUILBAULT Pierre | Biologie |
| M. HANGAN Théodore | Mathématiques |
| M. HERMAN Maurice | Physique |
| M. JACOB Gérard | I.E.E.A. |
| M. JACOB Pierre | Mathématiques |
| M. JOURNEL Gérard | E.U.D.I.L. |
| M. KREMBEL Jean | Biologie |
| M. LAURENT François | I.E.E.A. |
| Mle LEGRAND Denise | Mathématiques |
| Mle LEGRAND Solange | Mathématiques (Calais) |
| Mme LEHMANN Josiane | Mathématiques |

| | | |
|---|---|---|
| M. | LEMAIRE Jean | Physique |
| M. | LENTACKER Firmin | G.A.S. |
| M. | LEVASSEUR Michel | I.P.A. |
| M. | LHENAFF René | G.A.S. |
| M. | LOCQUENEUX Robert | Physique |
| M. | LOSFELD Joseph | I.E.E.A. |
| M. | LOUAGE Francis | E.U.D.I.L. |
| M. | MACKE Bruno | Physique |
| M. | MAIZIERES Christian | I.E.E.A. |
| Mle | MARQUET Simone | Mathématiques |
| M. | MESSELYN Jean | Physique |
| M. | MIGEON Michel | E.U.D.I.L. |
| M. | MIGNOT Fulbert | Mathématiques |
| M. | MONTEL Marc | Physique |
| Mme | NGUYEN VAN CHI Régine | G.A.S. |
| M. | PARSY Fernand | Mathématiques |
| Mle | PAUPARDIN Colette | Biologie |
| M. | PERROT Pierre | Chimie |
| M. | PERTUZON Emile | Biologie |
| M. | PONSOLLE Louis | Chimie |
| M. | PORCHET Maurice | Biologie |
| M. | POVY Lucien | E.U.D.I.L. |
| M. | RACZY Ladislas | I.E.E.A. |
| M. | RICHARD Alain | Biologie |
| M. | RIETSCH François | E.U.D.I.L. |
| M. | ROGALSKI Marc | M.P.A. |
| M. | ROUSSEAU Jean-Paul | Biologie |
| M. | ROY Jean-Claude | Biologie |
| M. | SALAMA Pierre | S.E.S. |
| Mme | SCHWARZBACH Yvette (CCP) | M.P.A. |
| M. | SCHAMPS Joël | Physique |
| M. | SIMON Michel | S.E.S. |
| M. | SLIWA Henri | Chimie |
| M. | SOMME Jean | G.A.S. |
| Mle | SPIK Geneviève | Biologie |
| M. | STERBOUL François | E.U.D.I.L. |
| M. | TAILLIEZ Roger | Institut Agricole |

| | | |
|---|---|---|
| M. | TOULOTTE Jean-Marc | I.E.E.A. |
| M. | VANDORPE Bernard | E.U.D.I.L. |
| M. | WALLART Francis | Chimie |
| M. | WATERLOT Michel | Sciences de la Terre |
| Mme | ZINN JUSTIN Nicole | M.P.A. |

## CHARGES DE COURS

| | | |
|---|---|---|
| M. | TOP Gérard | S.E.S. |
| M. | ADAM Michel | S.E.S. |

## CHARGES DE CONFERENCES

| | | |
|---|---|---|
| M. | DUVEAU Jacques | S.E.S. |
| M. | HOFLACK Jacques | I.P..A |
| M. | LATOUCHE Serge | S.E.S. |
| M. | MALAUSSENA DE PERNO Jean-Louis | S.E.S. |
| M. | OPIGEZ Philippe | S.E.S. |

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur M. DAUCHET pour la confiance qu'il me manifeste en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Que Monsieur V. CORDONNIER trouve ici l'expression de ma gratitude pour sa participation au jury et de mon admiration pour son enseignement que je suis fier d'avoir suivi.

La présence de Mademoiselle I. GUESSARIAN dans cette thèse à travers ses travaux n'est pas à démontrer. Je suis très honoré qu'elle ait accepté de participer à ce jury.

Je remercie très vivement Monsieur P. LECOUFFE pour sa présence dans ce jury.

Il ne m'est pas facile d'exprimer tout ce que je dois à Monsieur G. JACOB. Tant par sa compétence, que par sa sympathie, j'ai toujours trouvé en lui le directeur de recherche idéal. Qu'il trouve ici l'expression de a profonde reconnaissance.

Que tous ceux, qui directement ou indirectement, m'ont aidé tout au long de ce travail soient chaleureusement remerciés.

Je tiens à adresser tous mes remerciements à Madame CARON pour le soin avec lequel la dactylographie a été réalisée.

Je remercie Madame DEBOCK pour les efforts déployés pour le tirage.

# TABLE DES MATIÈRES

* * *

# INTRODUCTION

L'introduction de la notion de schéma de programme [IA] a permis de dissocier les deux éléments sous-jacents à la notion de programme :

- au niveau de la structure, le *schéma de programme*, représente intuitivement la structure de contrôle du programme qui demeure lorsqu'on considère les fonctions de base, les prédicats et les variables comme des symboles purement formels.

- au niveau de la sémantique, l'*interprétation*, restitue l'information nécessaire sur la nature des symboles formels pour que le schéma devienne un programme susceptible de faire un calcul.

Ainsi un programme est un couple (S, I) formé d'un schéma de programme et d'une interprétation.

La recherche d'une forme plus "simple" des programmes (optimation, lisibilité, prouvabilité, élimination de la récursivité ... ) conduit à l'étude des transformations de programmes. Ces transformations doivent au moins préserver la fonction calculée par le programme. D'où l'intérêt de l'étude de l'équivalence des schémas de programme (i.e. deux schémas de programme sont équivalents si et seulement si pour toute interprétation les programmes associés calculent la même fonction).

Suivant le niveau d'abstraction auquel on se place, à un programme on peut associer plusieurs schémas de programme

- Les *schémas de Ianov* se composent :

. d'une mémoire considérée comme un bloc où les diverses variables ne sont pas différenciées

. d'une structure de contrôle fonctionnant comme un automate fini.

A tout schéma de Ianov on peut associer une forme canonique et l'équivalence de tels schémas est décidable. [IA, MA, RUT].

- Les schémas de Ianov étant très élémentaires, un modèle permettant d'incorporer des propriétés plus générales des programmes (exemple : dépendance ou indépendance des instructions) est proposé dans [LPP] : *schémas de Paterson*.

L'introduction des "variables libres" permet d'exprimer les instructions comme fonctions de variables. Le schéma représente intuitivement en plus de la structure de contrôle, le "flux" de l'information dans le programme.

En considérant la famille des interprétations libres, on montre (théorème de Herbraud [LPP, MA]) que la résolution de nombre de problèmes (équivalence, arrêt, ... ) sur les schémas se réduit à leur résolution relativement à cette famille d'interprétations. Mais ces problèmes, en particulier celui de l'équivalence, sont en général indécidables pour les schémas de Paterson [LPP, MA]. La notion de "liberté" d'un schéma de programme (i.e. : un schéma S est libre si toute "séquence" à travers S peut être considérée comme une séquence d'exécution) permet de définir une sous-famille de schémas de Paterson, où le problème d'arrêt est décidable, celui de l'équivalence restant ouvert [MA].

Notons une autre extension des schémas de Ianov : les schémas monadiques récursifs, introduits pour exprimer les problèmes de récursivité [AMP, BS, CR]

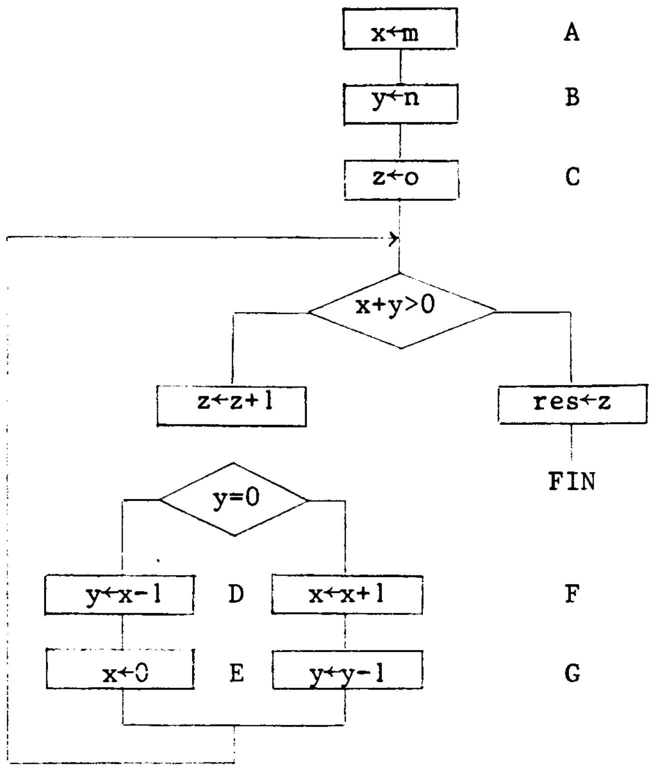
La suite des opérations à effectuer par un programme n'est en général pas bornée. Elles doivent donc être définies de manière récursive (s'appelant les unes les autres). Dans un "petit" programme on peut avoir une vision assez claire de la structure de ces appels. Il n'en est plus de même dès que le programme est assez important. D'où les possibilités d'erreurs, la difficulté de la correction et par conséquent le coût élevé du logiciel.

La programmation structurée, en insistant sur la nécessité de contraindre la structure des programmes [DJ] est avancée comme un remède à ces inconvénients.
L'idée de base est de remplacer la définition récursive des actions du programme par une définition itérative où les boucles apparaissent explicitement et possèdent une structure parenthésée.
La structure de boucle "TANT QUE" considérée dans [AM, KPT, KF] s'est avérée trop restrictive. D'où l'introduction de la structure de boucle "REPEAT" à plusieurs niveaux de sortie par [AR, RUG]. (cf. [NE] pour une bibliographie annotée à ce propos).

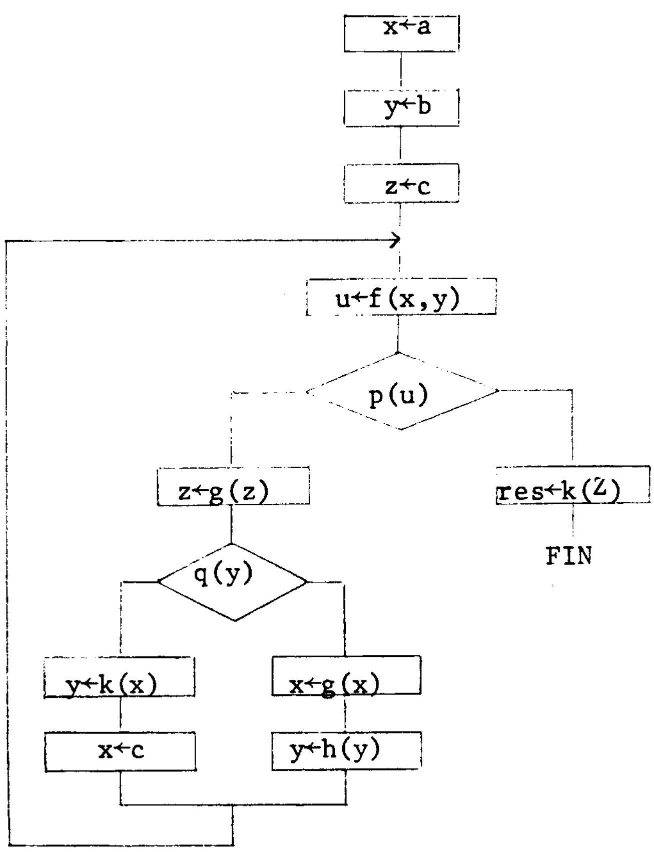
L'ensemble de ces études s'est développé sans introduire de formalisme adéquat.
La définition d'un schéma de programme comme un *système de réécriture schématique* calculant dans une algèbre (magma) libre [NI] a fourni un cadre algébrique pour l'étude des schémas de programme et de leur transformation [GU1, GU2, COU1, COU2, KO2].

Un schéma de programme est considéré comme une grammaire d'arbres. La fonction calculée par ce schéma est alors caractérisée par des objets syntaxiques qui sont le langage d'arbres engendré par cette grammaire. Ce qui justifie l'intérêt accordé à l'étude des arbres et des familles d'arbres dont la théorie s'est, d'abord, développée comme une extension de la théorie des langages de mots [NI, CO, GU1, GU2, EL, AD, JA].

Considérons le programme P suivant, qui, à deux entiers associe l'entier correspondant dans la numérotation de Cantse de $\mathbb{N}^2$ :




Au programme P on peut associer le schéma de Paterson $S_1$ suivant :

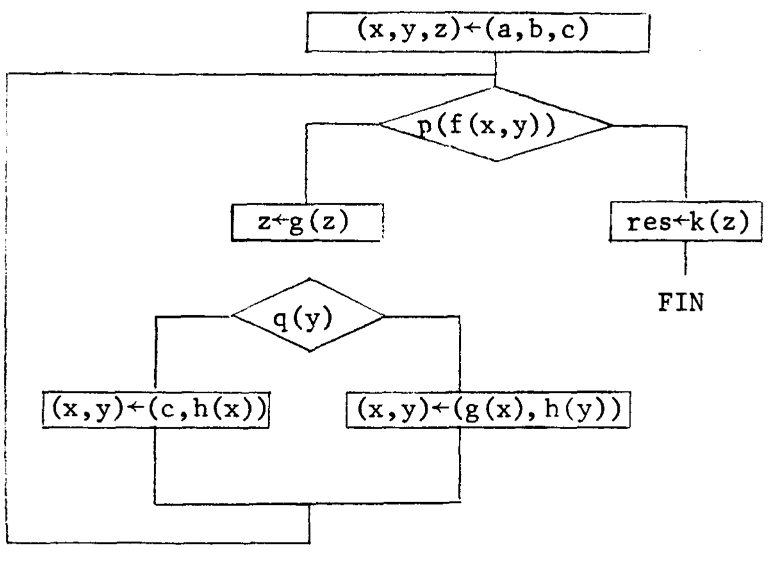


Nous remarquons que le passage du programme P au schéma de Paterson $S_1$ :
- nécessite une "transaction préalable" du programme avec l'introduction d'une variable supplémentaire. En effet, on a décomposé la condition $(x+y) > 0$ en une affectation $u \leftarrow x+y$ et une condition $u > 0$.
- ne rend pas compte de la possibilité de "l'élaboration simultanée" des affectations (A, B, C).

De même les affectations D et E peuvent être groupées en un bloc "synchrone" où D et E peuvent être élaborées simultanément en ne considérant, pour une variable figurant en partie droite d'une affectation que la "valeur" qu'elle avait à l'entrée du bloc englobant cette affectation. L'ordre dans lequel se présentent les affectations à l'intérieur du bloc devient alors indifférent.

Les *schémas de Manna* [MA] en introduisant les "affectations multiples" et les prédicats qui peuvent avoir des "termes" pour arguments, permettent de rendre compte de ces aspects.

Ainsi au programme P, on peut associer le schéma de Manna $S_2$ suivant :



Le schéma $S_2$ décrit une structure d'arbre infinie $TS_2$ obtenue en "déroulant" la boucle, et telle que la sémantique de $S_2$ soit complétement définie par celle de $TS_2$. (i.e. soient $cal_I(S_2)$ et $cal_I(TS_2)$ les fonctions calculées par $S_2$ et $TS_2$ sous une interprétation I, alors $cal_I(S_2) = cal_I(TS_2)$).

De plus la sémantique opérationnelle attachée aux schémas [LPP, MA] rend très difficilement manipulable la définition de la fonction calculée et interdit toute preuve raisonnable de la préservation de l'équivalence par une certaine transformation, tandis que la fonction sémantique définie sur les arbres possède de "bonnes" propriétés (croissance, continuité). D'où l'utilité de définir la sémantique des schémas de programme par l'intermédiaire des arbres qu'ils décrivent [NI, KO, GUE1, CO].

Notre propos est une modélisation des arbres de programme associés aux schémas de Manna. Nous nous interessons en particulier à ceux qui sont reconnaissables (i.e. : ayant un nombre fini de sous-arbres distincts).

Etant donnés un alphabet gradué F (ensemble de symboles de fonction de base) et un ensemble V de symboles de variables.

L'"*ensemble des collatérales*" (i.e. : affectations multiples) sur F, est

$$Col(F) = \{A = (J_A, i_A) \mid J_A \in P_\omega(V),\ i_A : J_A \to M(F)\}$$

où : $P_\omega(V)$ est l'ensemble des parties finies de V

et M(F) est un F-magma.

Etant donné un alphabet gradué P (ensemble de symboles de "tests").

L'*"ensemble des prédicats"* (i.e. : formules atomiques) sur F est :

$P_F = \{p(t_1, \ldots, t_n) \mid p \in P,\ t_i\ (i = 1, \ldots, n) \in M(F)\}$

où n est l'arité de p.

Les actions dans un programme sont enchaînés par la "concaténation" et la "sélection".

La concaténation induit sur les collatérales une opération de composition qui munit Col(F) d'une structure de monoïde. La sélection nous amène à définir les "alternatives" (i.e : expressions conditionnelles) englobant les collatérales et qui modèlisent les schémas sans boucle.

L'*"ensemble des alternatives"* sur FUP est :

$Al(FUP) = Col(F) \cup \{[\Gamma_1, \Gamma_2]\alpha \mid \Gamma_1, \Gamma_2 \in Al(FUP),\ \alpha \in P_F\}$

où : les symboles [,] sont spécifiés par :

étant donné un domaine de calcul D,

$x, y \in D \quad [x, y]\,(\text{vrai}) = x$

$[x, y]\,(\text{faux}) = y$

$[x, y]\,(\text{indéfini}) = \text{indéfini}.$

La composition, étendue aux alternatives,

. vue comme une opération, munit Al(FUP) d'une structure de monoïde

. vue comme une transformation (réduction), possède la propriété de Church-Rosser (confluente), et permet d'associer à une alternative une forme canonique telle que l'équivalence de deux alternatives soit caractérisée par l'égalité de leurs formes canoniques.

Le passage, par complétion par idéaux, aux alternatives infinies qui modèlisent les arbres de Manna, pose le problème d'une description finie (autre que graphique) de ces alternatives.

Une première description est donnée sous forme de systèmes d'équations (réguliers dans le cas reconnaissable) qui s'apparente à la programmation par actions récursives.
Une deuxième description est donnée sous forme "d'expressions rationnelles", dans le cas reconnaissable, et qui s'apparente à une programmation structurée.

L'égalité des ensembles des alternatives rationnelles et reconnaissables permet de transformer un schéma non structurée en un schéma structuré équivalent.

L'équivalence syntaxique des schémas de Manna (i.e. : identité des alternatives (infinies) associées) est plus fine que l'équivalence sémantique (i.e. : égalité des fonctions calculées sous toute interprétation). Mais certaines alternatives ne diffèrent que par l'ordre dans lequel y apparaissent des collatérales ou des prédicats.

La détermination des conditions de la préservation de l'équivalence sémantique par une commutation des prédicats ou des collatérales dans une alternative, nous amène à définir des relations de commutation sur $\mathrm{Col}(F) \cup \mathcal{P}_F$, et par conséquent une congruence sur $\mathrm{Al}(F \cup P)$ (finiment engendrée dans le cas reconnaissable) qui caractérise "*l'équivalence par commutation*" des schémas de Manna.

# PRÉLIMINAIRES

## 1 - ENSEMBLES ORDONNES

On rappelle quelques notions relatives aux ensembles ordonnés devenues d'usage courant en sémantique depuis les travaux de D. Scott. (cf. [BO, COM]).

*Définition 1.1*

Soit $(D, \sqsubseteq)$ un ensemble (partiellement) ordonné

. l'ordre sur D s'étend à $D^n$ (pour $n \in \mathbb{N}$) par :

$(d_1, \ldots, d_n) \sqsubseteq (d'_1, \ldots, d'_n) \iff \forall\, i = 1, \ldots, n\ d_i \sqsubseteq d'_i$.

. un ensemble ordonné $(D, \sqsubseteq)$ ayant un plus petit élément $\perp$ (i.e. : $\forall\, d \in D, \perp \sqsubseteq d$) est dit *ensemble ordonné pointé*, et est noté $(D, \sqsubseteq, \perp)$.

. une partie X de D est dite *"dirigée"* si

$\forall\, d' \in X, \forall\, d'' \in X, \exists\, d \in X$ tel que $d' \sqsubseteq d$ et $d'' \sqsubseteq d$.

*Définition 1.2*

Soient $(D, \sqsubseteq)$ et $(D', \sqsubseteq')$ deux ensembles partiellement ordonnés

. une application $f : D \to D'$ est dite *croissante*

<u>ssi</u> $d, d' \in D\quad d \sqsubseteq d' \Rightarrow f(d) \sqsubseteq' f(d')$

. une application $f : D \to D'$ est dite *continue*

<u>ssi</u> pour toute partie dirigée X de D admettant une borne supérieure : sup (X), la partie $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ de D' admet une borne supérieure qui est $f(\sup(X))$.

*Définition 1.3*

. Un *ordre partiel complet* (c.p.o) est une structure $P = \langle D_P, \sqsubseteq_P, \perp_P\rangle$ qui est un ensemble ordonné pointé tel que toute partie dirigée de $D_P$

admet une borne supérieure.

. un *morphisme de cpo* $\phi$ de P dans P' est une application continue de $D_P$ dans $D_{P'}$, telle que : $\phi(\perp_P) = \perp_{P'}$.

## 2 - ARBRES ET MAGMAS

On rappelle l'essentiel du cadre algébrique proposé par M. Nivat pour la sémantique (cf. [Ni, GU2, CO]).

*Définition 2.1*

Un *alphabet gradué* est un couple (F, a) où :

. F est un ensemble (non nécessairement fini)

. a : $F \to \mathbb{N}$ est une application qui, à chaque symbole f de F associe son rang a(f).

On note $F_i = \{f \in F \mid a(f) = i\}$.

Lorsque F est un ensemble de symboles de fonction le rang est dit *"arité"*, et les symboles d'arité nulle sont dits symboles de constantes.

*Définition 2.2*

Soit F un ensemble de symboles de fonction.

Un F-*magma*, resp. F-*magma ordonné*, F-*magma ordonné complet* est :

. une structure $M = \langle D_M, \{f_M \mid f \in F\}\rangle$ où :

$D_M$ est un ensemble

et pour chaque $f \in F_k$, $f_M$ est une application de $D_M^k$ dans $D_M$

resp.

. une structure $M = \langle D_M, \subseteq_M, \perp_M, \{f_M \mid f \in F\}\rangle$ où

$\langle D_M, \subseteq_M, \perp_M\rangle$ est un ensemble ordonné pointé,

$\langle D_M, \{f_n, f \in F\}\rangle$ est un F-magma

et pour $f \in F$, $f_M$ est croissante

. une structure $M = \langle D_M, \subseteq_M, \perp_M, \{f_M \mid f \in F\}\rangle$

qui est un F-magma ordonné tel que $\langle D_M, \subseteq_M, \perp_M\rangle$ soit un cpo et pour $f \in F$, $f_M$ est continue.

*Définition 2.3*

On note $\mathbb{N}_+^*$ l'ensemble des mots finis sur l'alphabet $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} - \{0\}$.

. On appelle *"domaine d'arbre"* un sous-ensemble D de $\mathbb{N}_+^*$ qui satisfait les conditions

i) $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_+^*, \alpha\beta \in D \Rightarrow \alpha \in D$

ii) $\alpha \in \mathbb{N}_+^*, i, j \in \mathbb{N}_+, 1 \leq i \leq j$ et $\alpha j \in D \Rightarrow \alpha i \in D$

. soit (F, a) un alphabet gradué

On appelle *arbre sur* F une application partielle $t : \mathbb{N}_+^* \to F$ dont le domaine, noté dom(t), est un domaine d'arbre et tel que :

<u>si</u> $\alpha \in \mathrm{dom}(t)$ <u>et</u> $t(\alpha) = f$

<u>alors</u> $\forall\, i \in \mathbb{N}_+,\ \alpha i \in \mathrm{dom}(t) \Leftrightarrow 1 \leq i \leq a(f)$.

. les éléments de dom(t) sont dits : *noeuds* de t.

Les éléments maximaux, pour l'ordre préfixiel sur $\mathbb{N}_+^*$, de dom(t) sont dits : *feuilles* de t.

Si $m \in \mathrm{dom}(t)$ <u>et</u> $t(m) = f$ alors f est dit *étiquette du noeud* m.

Le noeud $\varepsilon$ est dit *racine* de t.

. L'ensemble des arbres (resp. arbres finis) sur F est noté $M^\infty(F)$ (resp. $M(F)$).

. Pour $t \in M^\infty(F)$, on note :

$occ(f, t) = \{\alpha \in \mathrm{dom}(t) \mid t(\alpha) = f\} = t^{-1}(f)$, l'ensemble des occurrences d'un symbole $f \in F$ dans t.

. Pour $t \in M^\infty(F)$ <u>et</u> $\alpha \in \mathrm{dom}(t)$,

le *sous-arbre de* t *de racine* $\alpha$, noté $t \mid \alpha$ est défini par :

. $\mathrm{dom}\,(t|\alpha) = \{\varepsilon\} \cup \{\beta \in \mathbb{N}_+^* \mid \alpha\beta \in \mathrm{dom}(t)\}$

. $(t|\alpha)\,(m) = t(\alpha m)$ (pour $\alpha m \in \mathrm{dom}\,(t)$).

*Définition 2.4*

Soit $\Omega$ un symbole distingué de F d'arité nulle.

On définit sur $M^{\infty}(F)$ un ordre $\leq$, dit *ordre préfixiel*, par :

$t, t' \in M^{\infty}(F)$, $t \leq t' \Leftrightarrow$ . $\mathrm{dom}(t) \subseteq \mathrm{dom}(t')$

. $\alpha \in \mathrm{dom}(t)$, $t(\alpha) \neq \Omega \Rightarrow t'(\alpha) = t(\alpha)$.

*Définition 2.5*

A un symbole $f \in F_k$, on associe une opération standard donnée par l'application $\bar{f} : M^{\infty}(F)^k \to M^{\infty}(F)$ tel que :

si $\bar{f}(t_1, \ldots, t_k) = t'$ alors :

. $\mathrm{dom}(t') = \{\varepsilon\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} i\, \mathrm{dom}(t_i)\right)$

. $t'(\varepsilon) = f$

$t(i\alpha) = t_i(\alpha)$ pour : $1 \leq i \leq k$

*Proposition 2.1*

Les structures :

$\langle M(F), \leq, \Omega, \{\bar{f}, f \in F\}\rangle$

et $\langle M^{\infty}(F), \leq, \Omega, \{\bar{f}, f \in F\}\rangle$

sont respectivement F-magma ordonné

et F-magma ordonné complet.

<u>Remarque</u> :

Une partie dirigée A de $M^{\infty}(F)$ admet une borne supérieure $a = \sup(A)$ dans $M^{\infty}(F)$ donnée par :

. $\mathrm{dom}(a) = \cup \{\mathrm{dom}(t) \mid t \in A\}$.

. $\alpha \in \mathrm{dom}(a) \Rightarrow a(\alpha) = \begin{cases} . f \in F \text{ \underline{si} il existe } t \in A \text{ tel que } t(\alpha) = f \\ . \Omega \text{ \underline{si} pour tout } t \in A \text{ tel que} \\ \quad \alpha \in \mathrm{dom}(t),\ t(\alpha) = \Omega \end{cases}$

Notation

Soit V un ensemble de symboles de variable ($V \cap F = \phi$).

. On note : $M(F, V)$ (resp. $M^{\infty}(F, V)$) pour $M(F \cup V)$ (resp. $M^{\infty}(F \cup V)$).

. Pour $t \in M^{\infty}(F, V)$ on note :

$$var(t) = \{v \in V \mid occ(v, t) \neq \phi\}.$$

*Proposition 2.2*

$M(F, V)$ est le F-magma libre engendré par V.

$M^{\infty}(F, V)$ est le F-magma libre complet engendré par V.

(complété par idéaux de $M(F, V)$).

## 3 - SUBSTITUTIONS

La substitution est définie sur $M(F, V)$ (et peut être étendue à $M^{\infty}(F, V)$ par continuité). [COU1].

*Définition 3.1*

Soient $t, t' \in M(F, V)$ et $m \in dom(t)$

On désigne par $t[m \leftarrow t'] = t''$ le résultat de la substitution de $t'$ au sous-arbre de racine m dans t.

i.e. : . $dom(t'') = (dom(t) - m\,\mathbb{N}_+^*) \cup (m\, dom(t'))$

$$. \; t''(m') = \begin{cases} . \; t(m') \text{ si } m' \in dom(t) - m\,\mathbb{N}_+^* \\ . \; t'(m'') \text{ si } m' = m\,m'' \text{ avec } m'' \in dom(t') \end{cases}$$

*Définition 3.2*

Soient $t, t_1, \ldots, t_n \in M(F, V)$ et $M = M_1 \cup \ldots \cup M_n$ une partie préfixe de $dom(t)$ telle que $\forall\, i \neq j\; M_i \cap M_j = \emptyset$.

$t[M_1 \leftarrow t_1, \ldots, M_n \leftarrow t_n] = t'$ est défini par :

. $dom(t') = (dom(t) - M\,\mathbb{N}_+^*) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} M_i\; dom\,(t_i))$

$$. \ t'(m') = \begin{cases} .t(m') \ \underline{\text{si}} \ m' \in \text{dom}(t) - M\,\mathbb{N}_+^* \\ .t_i(m'') \ \text{si} \ m' = m_i \ m'' \ \underline{\text{avec}} \ m_i \in M_i \ \underline{\text{et}} \ m'' \in \text{dom}(t_i) \end{cases}$$

*Défintion 3.3*

Soient $t$ , $t'$, $t'' \in M(F, V)$

$t[t'|t'']$ est le résultat de la substitution de $t''$ aux occurrences de $t'$ dans $t$.

i.e. : $t[t'|t''] = t[M \leftarrow t'']$ où :

$$M = \{m \in \text{dom}(t) \mid (t|m) = t'\}.$$

et $M$ est préfixe puisque les différentes occurrences de $t'$ dans $t$ sont disjointes deux à deux.

## 4 - REDUCTIONS SUR UN ENSEMBLE

*Définition 4.1*

Soit $E$ un ensemble

On appelle *"réduction"* une relation binaire $\rightarrow$ sur $E$.

Notations :

. "id" est la relation identité sur $E$ i.e. : $\text{id} = \{(x,x) \mid x \in E\}$.

. "." désigne la composition des relations :

$$\text{i.e. } \rightarrow_a . \rightarrow_b = \{(x, y) \mid \exists \ z \ x \rightarrow_a z \text{ et } z \rightarrow_b y\}$$

. $\rightarrow^{-1}$ est la relation inverse de $\rightarrow$ :

$$\text{i.e. : } \{(x, y) \mid y \rightarrow x\}.$$

*Définition 4.2*

i) . $\overset{0}{\rightarrow} = \text{id}$

. $\overset{1}{\rightarrow} = \rightarrow \cup \text{id}$ est la fermeture réflexive de $\rightarrow$

. $\overset{i}{\rightarrow} = \rightarrow . \overset{i-1}{\rightarrow} \ \forall \ i > 0$

. $\overset{+}{\rightarrow} = \bigcup_{i>0} \overset{i}{\rightarrow}$ est la fermeture transitive de $\rightarrow$

. $\overset{*}{\rightarrow} = \overset{+}{\rightarrow} \cup id$ est la fermeture réflexive et transitive de $\rightarrow$.

ii) si il n'existe pas y tel que $x \rightarrow y$, on dit que x est en "*$\rightarrow$-forme normale*".

*Définition 4.3*

Une réduction $\rightarrow$ sur E est dite

i) *noethérienne* si il n'existe pas de chaîne infinie $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \rightarrow \dots$

ii) *localement confluente* si

$\forall\, x, y, z \in E \quad x \rightarrow y$ et $x \rightarrow z$

$\Rightarrow \exists\, u \in E$ tel que $y \overset{*}{\rightarrow} u$ et $z \overset{*}{\rightarrow} u$.

iii) *confluente* si

$\forall\, x, y, z \in E \quad x \overset{*}{\rightarrow} y$ et $x \overset{*}{\rightarrow} z$

$\Rightarrow \exists\, u \in E$ tel que $y \overset{*}{\rightarrow} u$ et $z \overset{*}{\rightarrow} u$.

*Proposition 4.1* [HU]

. si la réduction $\rightarrow$ est confluente alors la $\rightarrow$-forme normale d'un élément, si elle existe, elle est unique

. une réduction noethérienne est confluente ssi elle est localement confluente.

## 5 - INTERPRETATIONS

Soient F et V comme en (2).

*Définition 5.1*

i) On appelle *interprétation de* F, une structure

$I = \langle D_I, \leq_I, \perp_I, \{f_I, f \in F\}\rangle$

qui est un F-magma ordonné complet.

ii) On appelle *interprétation valuée,* une interprétation de FUV.

i.e. : c'est un couple $(I, \nu)$ où :

. I est une interprétation de F

. $\nu$ une application de V dans $D_I$, dite *valuation* (ou : environnement)

*Proposition 5.2* [GUE2]

Pour chaque interprétation valuée $(I, \nu)$, il existe un unique morphisme de F-magmas ordonnés complets.

$\nu^\infty : M^\infty(F, V) \to D_I$ telle que :

$\nu^\infty(v) = \nu(v) \quad \forall v \in V.$

*Proposition 5.3*

$M^\infty(F, V)$ avec la valuation identité id définie par $id(v) = v$, $\forall v$, est l'interprétation valuée libre (i.e. : universelle, de Herbraud). Elle est notée H.

On a : pour $T \in M^\infty(F, V) \quad id^\infty(T) = T$.

*Définition 5.2*

Soit I une interprétation de F

$\nu$ une valuation à valeurs dans $D_I$

et soit $t \in M(F, V)$

$\nu^\infty(t)$, sera notée $t * \nu$, est dite l'*action de* t *sur la valuation* $\nu$, et est donc inductivement définie par :

$$t * \nu = \begin{cases} \perp_I \ \underline{\text{si}} \ t = \Omega \\ \nu(v) \ \underline{\text{si}} \ t = v \in V \\ t_I \ \underline{\text{si}} \ t \in F_o \\ f_I(t_1 * \nu, \ldots, t_n * \nu) \ \underline{\text{si}} \ t = f(t_1, \ldots, t_n) \\ \qquad\qquad \text{avec } f \in F_n \text{ et } t_i (i = 1, \ldots, n) \in M(F, V) \end{cases}$$

# 1ère Partie :

# ELEMENTS DE BASE

# CHAPITRE I : COLLATÉRALES

Soit F un alphabet gradué (ensemble de symboles de fonction)

V un ensemble de symboles de variables (dénombrables).

Une affectation dans [LPP] est un objet de la forme :

$$v_i := F_j(v_{k_1}, \ldots, v_{k_n})$$

où les $v_i$ sont des symboles de "location" (variables).

$F_j$ un symbole de fonction d'arité n

et ":=" est le symbole de l'affectation

telle que l'exécution sous une interprétation valuée consiste à assigner à $v_i$, la valeur, sous cette interprétation, de $F_j(v_{k_1}, \ldots, v_{k_n})$.

Une extension est considérée dans [MA] où l'affectation est de la forme $v_i$ := I où I est un "terme" sur FUV (i.e. : un élément de M(FUV)).

Ainsi la syntaxe d'une affectation exprimée, dans les notations de Bacchus [ALG] peut être donnée par les règles :

<aff> :: <pg> := <pd>

<pg> :: symbole de variable (élément de V)

<pd> :: terme sur FUV (élément de M(F,V))

Notons qu'une affectation peut être exprimée par l'intermédiaire d'un symbole de fonction inconnue auquel est associée une équation dan un système de réécriture schématique [KO1].

Considérons le programme P de l'introduction :

Les affectations A, B, C sont indépendantes entre elles (i.e. : l'élaboration de l'une ne nécessite pas l'élaboration préalable d'une autre, elles peuvent être élaborées simultanément).

Il n'en est pas de même des affectations D et E. Mais on peut définir un "bloc" (D, E) en convenant qu'à une variable ayant une occurrence dans la partie droite d'une affectation du bloc (D, E) est assignée, lors de l'exécution, la valeur qu'elle avait à l'entrée du bloc.
Les affectations D et E ainsi "groupées" peuvent être élaborées simultanément. Des blocs d'affectations tels que (A, B, C) et (D, E) seront appelés : *collatérales* (i.e. : affectations multiples).
On se restreint au cas déterministe et une variable ne peut être partie gauche de deux affectations distinctes d'une même collatérale.

En reportant au niveau de la sémantique la signification du symbole d'affectation, une affectation est au niveau syntaxique un élément de $V \times M(F, V)$.
Une collatérale est définie par une application d'une partie finie de V dans $M(F, V)$.

## 1 - SYNTAXE ET SEMANTIQUE

On note $P\omega(V)$ l'ensemble des parties finies de V.

*Définition 1.1*

Une *collatérale* A sur F est la donnée :

. d'une partie finie $J_A$ de $P\omega(V)$
dite *support* de A.

. d'une application $i_A$ de $J_A$ dans $M(F, V)$.

$A = (J_A, i_A)$ est dite collatérale de support $J_A$.

Notations 1.1

Soit $J \in P\omega(V)$

On note $Col(F)^J$ l'ensemble des collatérales sur F de support J.

On pose : $Col(F) = \bigcup_{J \in P\omega(V)} Col(F)^J$ ($\cup$ : union disjointe),

qui est l'ensemble des collatérales sur F.

Exemple 1.1

Soit $F = \{f, g\}$ avec $a(f) = 2$ et $a(g) = 1$

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

Le couple $(J_A, i_A)$ où :

. $J_A = \{v_1, v_2, v_5\}$

. $i_A : J_A \to M(F, V)$ donnée par :

$i_A(v_1) = f(v_1, v_3)$, $i_A(v_2) = g(v_3)$, $i_A(v_5) = v_4$

est une collatérale sur F.

A sera notée "en extension" par :

$A = \langle v_1 \leftarrow f(v_1, v_3), v_2 \leftarrow g(v_3), v_5 \leftarrow v_4 \rangle$.

Remarque 1.1

L'ensemble des arbres sur F peut être muni d'une structure de magmoïde [AD, JA].

Une collatérale A telle que :

$$\text{card } (J_A) = p, \ \underline{\text{et}} \text{ card } \left( \bigcup_{\alpha \in J_A} \text{var } (i_A(\alpha)) \right) = q$$

peut être considérée comme un élément du magmoïde $(IC \times T(F))^p_q$ où :

IC est le magmoïde des torsions injectives croissantes

et T(F) est le magmoïde (projetable) des arbres sur F, indexé par V.

Sauf dans le cas où V est borné, et en procédant à des transformations syntaxiques sur les collatérales de manière à les plonger dans une fibre carrée, la manipulation de cette définition s'avère lourde.

*Définition 1.2*

Soit (I, $\nu$) une interprétation valuée (de FUV).

L'action d'une collatérale A($\in$ Col(F)) sur la valuation $\nu$ est la valuation ($A*\nu$) à valeurs dans $D_I$ donnée par :

$$(A\ \nu)(\alpha) = \underline{\text{si}}\ \alpha \in J_A\ \underline{\text{alors}}\ i_A(\alpha)*\nu\ \text{sinon}\ \nu(\alpha)$$

Remarque 1.2

L'action d'une collatérale sur une valuation $\nu$ ne "modifie" la valeur de $\nu$ que pour les variables apparaissant dans le support de la collatérale.

Exemple 1.2

Soit A la collatérale de l'exemple 1.1.

. I une interprétation de F de domaine $\mathbb{N} \cup \{\perp\}$ ordonné par l'ordre discret, telle que :

$$f_I(m, n) = m+n\ \underline{\text{si}}\ m, n \neq \perp, \perp\ \underline{\text{sinon}}$$
$$g_I(m) = m^2\ \underline{\text{si}}\ m \neq \perp, \perp\ \underline{\text{sinon}}.$$

. $\nu : V \to D_I$ une valuation telle que :

$$\nu(v_i) = i$$

alors

$A*\nu : V \to D_I$ est la valuation donnée par :

$$(A*\nu)(v_1) = f_I(\nu(v_1), \nu(v_3)) = 4$$
$$(A*\nu)(v_2) = g_I(\nu(v_3)) = 9$$
$$(A*\nu)(v_3) = \nu(v_3) = 3$$
$$(A*\nu)(v_4) = \nu(v_4) = 4$$
$$(A*\nu)(v_5) = \nu(v_4) = 4.$$

## 2 - COMPOSITION DES COLLATERALES

Une collatérale correspond à un ensemble d'affectations pouvant être exécutées simultanément. Dans un programme il n'est pas possible de réduire l'ensemble des affectations y apparaissant en une seule collatérale. Il faut donc définir sur les collatérales une opération qui permet de rendre compte d'une élaboration "sérielle" des affectations dans un programme.

Cette opération doit au moins vérifier une condition de comptabilité avec l'action des collatérales sur les valuations.

Exemple 2.1

Soient A et B les collatérales suivantes :

$$A = \langle v_1 \leftarrow f(v_1,\ v_3),\ v_2 \leftarrow g(v_3),\ v_5 \leftarrow v_4 \rangle$$

$$B = \langle v_1 \leftarrow h(v_4,\ v_2),\ v_3 \leftarrow k(v_2,\ v_3),\ v_4 \leftarrow v_5 \rangle.$$

Soit $(I,_V)$ une interprétation valuée (de FUV).

La composition de A et B (notée : A ; B) doit vérifier la condition

$$(A\ ;\ B) * \nu = A * (B * \nu).$$

$B*\nu$ est la valuation donnée par :

$(B*\nu)(v_1) = h_I(\nu(v_4),\nu(v_2))$ ; $(B*\nu)(v_2) = \nu(v_2)$

$(B*\nu)(v_3) = k_I(\nu(v_2),\nu(v_3))$ ; $(B*\nu)(v_4) = \nu(v_5)$ ; $(B*\nu)(v_5) = \nu(v_5)$

D'où : $A*(B*\nu)$ est la valuation donnée par :

$$\begin{aligned}(A*(B*\nu))(v_1) &= f_I((B*\nu)(v_1),\ (B*\nu)(v_3)) \\ &= f_I(h_I(\nu(v_4),\ \nu(v_2)),\ k_I(\nu(v_2),\ \nu(v_3)))\end{aligned}$$

$$(A*(B*\nu))(v_2) = g_I(\kappa_I(\nu(v_2),\ \nu(v_3))$$

$$(A*(B*\nu))(v_3) = k_I(\nu(v_2),\ \nu(v_3))$$

$$(A*(B*\nu))(v_4) = \nu(v_5)$$

$$(A*(B*\nu))(v_5) = \nu(v_5)$$

Afin de pouvoir donner une définition lisible de la composition des collatérales, on définit d'abord la "greffe sélective" qui à un arbre t et à une collatérale A associe le résultat de la substitution dans t aux variables ayant une occurrence dans t, leurs images par $i_A$.

Cette opération doit vérifier une condition de compatibilité avec l'action des arbres et des collatérales sur les valuations.

*Définition 2.1*

Pour $B \in Col(F)$, on définit

$\sigma_B : V \to M(F, V)$ par :

$$\sigma_B(v) = \begin{cases} i_B(v) & \underline{\text{si}}\ v \in J_B \\ v & \underline{\text{sinon}} \end{cases}$$

l'extension de $\sigma_B$ à $M(F, V)$ est appelée *"greffe sélective"*.

Pour $t \in M(F, V)$ $\sigma_B(t)$ est noté $t \Theta B$.

i.e. : $t \Theta B$ est inductivement définie par :

$\underline{\text{si}}\ t = \Omega\ \underline{\text{alors}}\ \Omega$

$\underline{\text{si}}\ t \in F_o\ \underline{\text{alors}}\ t$

$\underline{\text{si}}\ t \in V\ \underline{\text{alors}}\ \underline{\text{si}}\ t \in J_B\ \underline{\text{alors}}\ i_B(t)$

$\underline{\text{si}}\ t \notin J_B\ \underline{\text{alors}}\ t$

$\underline{\text{si}}\ t = f(t_1, \ldots, t_{a(f)})\ \underline{\text{alors}}\ f(t_1 \Theta B, \ldots, t_{a(f)} \Theta B)$

ainsi :

$$t \Theta B = t[v | i_B(v)\ ;\ v \in var(t) \cap J_B].$$

Exemple 2.2

Soit B la collatérale de l'exemple 2.1

et $t = f(g(v_1), h(v_4, v_5)) \in M(F, V)$

alors :

$$t \Theta B = f(g(h(v_4, v_2)), h(v_5, v_5))$$

*Proposition 2.1*

Soit $(I, \nu)$ une interprétation de FUV

$t \in M(F, V)$ et $B \in Col(F)$

on a :

$$(t \ominus B) * \nu = t * (B * \nu).$$

<u>Preuve</u> : Recurrence sur la complexité de t.

. $t = \Omega$ $(t \ominus B) = \Omega \Rightarrow (t \ominus B) * \nu = \perp$

et $t * (B * \nu) = \perp$

. $t \in F_o$ $(t \ominus B) = t \Rightarrow (t \ominus B) * \nu = t_I$

<u>et</u> $t * (B * \nu) = t_I$

. $t = v \in V$, $-t \in J_B \Rightarrow t \ominus B = i_B(v) \Rightarrow (t \ominus B) * \nu = i_B(v) * \nu$

<u>et</u> $t * (B * \nu) = (B * \nu)\ (v) = i_B(v) * \nu.$

$- t \notin J_B \Rightarrow t \ominus B = v$ et $(t \ominus B) * \nu = \nu(v)$

<u>et</u> $t * (B * \nu) = (B * \nu)(v) = \nu(v).$

. $t = f(t_1, \ldots, t_{a(f)})$

$$(t \ominus B) * \nu = f(t_1 \ominus B, \ldots, t_{a(f)} \ominus B) * \nu$$
$$= f_I((t_1 \ominus B) * \nu, \ldots, (t_{a(f)} \ominus B) * \nu)$$

d'où d'après l'hypothèse de récurrence :

$$= f_I(t_1 * (B * \nu), \ldots, t_{a(f)} * (B * \nu))$$
$$= (f(t_1, \ldots, t_a(f)) * (B * \nu)$$
$$= t * (B * \nu).$$

□

*<u>Définition 2.2</u>*

Soient A et B $\in$ Col(F).

*La composée des collatérales* A et B, notée A ; B, est une collatérale sur F de support $J_A \cup J_B$ telle que :

$$\forall v \in J_A \cup J_B \quad i_{A;B}(v) = \begin{cases} i_A(v) \ominus B & \underline{\text{si}}\ v \in J_A \\ i_B(v) & \underline{\text{sinon}} \end{cases}$$

*Proposition 2.2*

Soit $(I, \nu)$ une interprétation de FUV.

$A, B \in Col(F)$

on a :

$$(A ; B) * \nu = A * (B * \nu).$$

Preuve

. Soit $v \in V$

- si $v \notin J_A \cup J_B$

$(A * (B * \nu))(v) = (B * \nu)(v) = \nu(v)$

et $((A ; B) * \nu)(v) = \nu(v)$.

- si $v \in J_A \cup J_B$

$(A * (B * \nu))(v) = \underline{\text{si}}\ v \in J_A\ \underline{\text{alors}}\ i_A(v) * (B * \nu)\ \underline{\text{sinon}}\ (B * \nu)(v)$

$= \underline{\text{si}}\ v \in J_A\ \underline{\text{alors}}\ (i_A(v)\ \Theta\ B) * \nu$

$\underline{\text{sinon}}\ \underline{\text{co}}\ v \in J_B\ \underline{\text{co}}\ i_B(v) * \nu.$

$= (\underline{\text{si}}\ v \in J_A\ \underline{\text{alors}}\ i_A(v)\ \Theta\ B\ \underline{\text{sinon}}\ i_B(v)) * \nu.$

$= (A ; B) * \nu.$

□

Remarque 2.1

Il existe une seule collatérale de support vide

on la note $E_o$.

On a, pour toute interprétation $(I, \nu)$ de FUV.

$$E_o * \nu = \nu.$$

L'associativité de la composition des collatérales se déduit de l'associativité de la substitution du premier ordre [CO] par une "forme" d'associativité de la greffe sélective que l'on démontre d'abord.

*Lemme 2.1*

Soit $t \in M(F, V)$ ; $B, C \in Col(F)$

On a : $t \ominus (B ; C) = (t \ominus B) \ominus C$.

Preuve : Par induction sur t.

. $t = \Omega \cup F_o$ $\quad t \ominus (B ; C) = (t \ominus B) \ominus C = t$

. $t \in V$, $t = v$.

$$
\begin{aligned}
v \ominus (B ; C) &= \underline{\text{si}}\ v \in J_{B;C}\ \underline{\text{alors}}\ i_{B;C}(v)\ \underline{\text{sinon}}\ v \\
&= \underline{\text{si}}\ v \in J_B \cup J_C\ \underline{\text{alors}}\ \underline{\text{si}}\ v \in J_B\ \underline{\text{alors}}\ i_B(v) \ominus C \\
&\qquad \underline{\text{sinon}}\ i_C(v)\ \underline{\text{sinon}}\ v \\
&= \underline{\text{si}}\ v \in J_B\ \underline{\text{alors}}\ i_B(v) \ominus C \\
&\quad \underline{\text{sinon}}\ \underline{\text{si}}\ v \in J_C\ \underline{\text{alors}}\ i_C(v)\ \underline{\text{sinon}}\ v \\
&= \underline{\text{si}}\ v \in J_B\ \underline{\text{alors}}\ i_B(v) \ominus C \\
&\quad \underline{\text{sinon}}\ v \ominus C \\
&= (\underline{\text{si}}\ v \in J_B\ \underline{\text{alors}}\ i_B(v)\ \underline{\text{sinon}}\ v) \ominus C \\
&= (v \ominus B) \ominus C.
\end{aligned}
$$

. $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ $\quad n = a(f)$.

$$t \ominus (B ; C) = f(t_1 \ominus (B ; C), \ldots, t_n \ominus (B ; C))$$

d'où d'après l'hypothèse de récurrence :

$$
\begin{aligned}
&= f((t_1 \ominus B) \ominus C, \ldots, (t_n \ominus B) \ominus C) \\
&= f(t_1 \ominus B, \ldots, t_n \ominus B) \ominus C \\
&= (f(t_1, \ldots, t_n) \ominus B) \ominus C \\
&= (t \ominus B) \ominus C
\end{aligned}
$$

□

*Proposition 2.3*

$(Col(F), ;, E_o)$ est un monoïde.

<u>Preuve</u> :

. $E_o$ est l'élément neutre

. Soit $A \in Col(F)$.

. $J_{A;E_o} = J_{E_o;A} = J_A \cup \emptyset = J_A$.

. soit $v \in (J_{A;E_o} = J_A)$

$i_{A;E_o}(v) = i_A(v) \odot E_o = i_A(v)$

$i_{E_o;A}(v) = i_A(v)$.

. $E_o$ est l'unique élément neutre

En effet : supposons

$\exists\ C \in Col(F)\ \forall\ A \in Col(F)\ C\ ;\ A = A\ ;\ C = C$

On aura en particulier $J_A \cup J_C = J_A$, pour tout A.

d'où $J_C = \emptyset$

donc $C = E_o$ qui est l'unique collatérale de support vide

. La composition est une opération associative :

Soit $A, B, C \in Col(F)$

. $J_{A;(B;C)} = J_{(A;B);C} = J_A \cup J_B \cup J_C$.

. soit $v \in J_A \cup J_B \cup J_C$.

$i_{(A;B);C}(v) =$ <u>si</u> $v \in J_{A;B}$ <u>alors</u> $i_{A;B}(v) \odot C$ <u>sinon</u> $i_C(v)$

$=$ <u>si</u> $v \in J_A \cup J_B$ <u>alors</u>

(<u>si</u> $v \in J_A$ <u>alors</u> $i_A(v) \odot B$ <u>sinon</u> $i_B(v)) \odot C$

<u>sinon</u> $i_C(v)$

$=$ <u>si</u> $v \in J_A$ <u>alors</u> $(i_A(v) \odot B) \odot C$

<u>sinon</u> <u>si</u> $v \in J_B$ <u>alors</u> $i_B(v) \odot C$

<u>sinon</u> $i_C(v)$

d'où d'après le lemme 2.1 :

$=$ <u>si</u> $v \in J_A$ <u>alors</u> $i_A(v) \odot (B\ ;\ C)$

<u>sinon</u> $i_{B;C}(v)$

$= i_{A;(B;C)}(v)$.

□

Remarque 2.2

Pour $J \in P_\omega(V)$, l'ensemble des collatérales de support J.
$Col(F)^J$, est fermé par la composition, mais ne constitue pas un sous-monoïde de Col(F) puisque $E_o \notin Col(F)^J$ si $J \neq \emptyset$.

Exemple 2.3

Considérons les collatérales de l'exemple 2.1

on a :

$$
\begin{aligned}
A \; ; \; B = < & v_1 \leftarrow f(h(v_4, v_2), k(v_2, v_3)), \\
& v_2 \leftarrow g(k(v_2, v_3)), \\
& v_3 \leftarrow k(v_2, v_3), \\
& v_4 \leftarrow v_5 >. \\
& v_5 \leftarrow v_5
\end{aligned}
$$

Remarque 2.3

On remarque l'obtention d'une affectation $v_5 \leftarrow v_5$.
Une telle affectation est dite *"singulière"*.
Une collatérale A telle que $\forall\, v \in J_A \quad i_A(v) = v$ est aussi dite "singulière".
Une collatérale où toutes les affectations sont non singulières est dite *"propre"*.
(i.e. : $A \in Col\ (F)$ est propre ssi $\forall\, v \in J_A \quad i_A(v) \neq v$).
Une collatérale singulière A est sans "effet sémantique", en effet pour toute interprétation $(I, \nu)$, $A * \nu = \nu$, l'existence de collatérales ou affectations singulières paraît superflue.
Mais l'ensemble des collatérales propres n'est pas fermé par composition comme le montre l'exemple 2.3. Donc à moins d'"anticiper" sur le calcul de la composition en testant à chaque étape si on obtient une affectation sigulière - ce qui n'est pas de nature à simplifier la manipulation des collatérales - on "tolère" l'existence de collatérales non propres.

Toutefois on peut toujours se ramener à une collatérale propre si nécessaire.

*Définition 2.3*

. soit $\phi : P_\omega(\nu) \times \mathrm{Col}(F) \to \mathrm{Col}(F)$ une application telle que pour

$J \in P\omega(V)$ et $A \in \mathrm{Col}(F)$.

$\phi(J, A)$ est une collatérale de support J avec

$$\forall v \in J \quad i_{\phi(J,A)}(v) = \begin{cases} i_A(v) & \underline{\text{si}} \quad v \in J_A \\ v & \underline{\text{sinon}} \end{cases}$$

. soit $A \in \mathrm{Col}(F)$

on pose $J = \{v \in J_A \mid i_A(v) \neq v\}$.

Alors on appelle *noyau de* A, et on note N(A), la collatérale de support J, $N(A) = \phi(J, A)$.

Exemple 2.4

Considérons la collatérale (A ; B) = C de l'exemple 2.3.

$J = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

et $N(C) = \phi(J, C) = \langle v_1 \leftarrow f(h(v_4, v_2), k(v_2, v_3)),$

$v_2 \leftarrow g(k(v_2, v_3)),\ v_3 \leftarrow k(v_2, v_3),\ v_4 \leftarrow v_5\}$.

*Proposition 2.4*

Une collatérale A est propre ssi $N(A) = A$.

Preuve : immédiat d'après la définition de N(A).

*Proposition 2.5*

Soit $A, B \in \mathrm{Col}(F)$

on a : $N(A ; B) = N(N(B) ; N(B))$.

Preuve :

Remarquons d'abord les faits suivants :

i) $t \in M(F_o, N) \quad A \in Col(F)$

$$t \ominus N(A) = t \ominus A$$

ii) $A \in Col(F)$

$$v \in J_{N(A)} \Rightarrow i_{N(A)}(v) = i_A(v).$$

iii) $v \in J_{N(A);N(B)}$

$$i_{N(A);N(B)}(v) = \underline{\text{si}}\ v \in J_{N(A)}\ \underline{\text{alors}}\ i_{N(A)}(v) \ominus N(B)\ \underline{\text{sinon}}\ i_{N(B)}(v)$$

d'après (i) et (ii) :

$$i_{N(A);N(B)}(v) = \underline{\text{si}}\ v \in J_{N(A)}\ \underline{\text{alors}}\ i_A(v) \ominus B\ \underline{\text{sinon}}\ i_B(v)$$

donc : pour $v \in J_{N(A);N(B)}$, $i_{N(A);N(B)}$, $i_{N(A);N(B)}(v) = i_{A;B}(v)$.

iv) $v \in J_{N(N(A);N(B))}$

$$i_{N(N(A);N(B))}(v) \underset{(ii)}{=} i_{N(A);N(B)}(v) \underset{(iii)}{=} i_{A;B}(v).$$

Il suffit donc de montrer que :

$$J_{N(N(A;N(B))} = J_{N(A;B)}.$$

. soit $v \in J_{N(N(A);N(B))}$

<u>alors</u> $i_{N(A);N(B))}(v) = i_{A;B}(v) \neq v$ donc $v \in J_{N(A;B)}$.

. soit $v \in J_{N(A;B)}$

<u>alors</u> $i_{A;B}(v) \neq v$

<u>si</u> $v \notin J_{N(N(A);N(B))}$ <u>alors</u> $i_{N(A);N(B)}(v) = v = i_{A;B}(v)$

(contradiction)

□

Remarque 2.4

D'après la remarque 2.2, $Col(F)^J$ pour $J \in P\omega(V)$ n'est pas un sous-monoïde de $Col(F)$.

Mais si pour $J \in P_\omega(V)$, on note $I^J$ la collatérale singulière de support J,

$$(Col(F)^J, ;, I^J) \text{ est un monoïde.}$$

## 3 - EQUIVALENCE DES COLLATERALES

*Définition 3.1*

Soient A, B $\in$ Col(F)

A et B sont dites *"sémantiquement équivalentes"*

et on note $A \underset{\text{Sem}}{\equiv} B$ - ssi

pour toute interprétation valuée (I,v) on a :

$$A * \nu = B * \nu \,.$$

*Lemme 3.1*

Soit A $\in$ Col(F), J $\in P_\omega(V)$

$J_A \subseteq J \Rightarrow \phi(J, A) \underset{\text{Sem}}{\equiv} A.$

(la réciproque est fausse).

Preuve

Soit (I, v) une interprétation valuée

$(\phi(J, A) * \nu)(v)$ = si v $\in$ J alors $i_{\phi(J,A)}(v) * \nu$ sinon $\nu(v)$.

= si v $\in$ J alors si v $\in J_A$ alors $i_A(v) * \nu$ sinon $\nu(v)$ sinon $\nu(v)$

puisque $J_A \subseteq J$ :

= si v $\in J_A$ alors $i_A(v) * \nu$ sinon $\nu(v)$

= $(A * \nu)$ (v).

□

La réciproque est fausse, en effet :

*Lemme 3.2*

Soit A $\in$ Col(F)

$$N(A) \underset{\text{Sem}}{\equiv} A.$$

Preuve

$A = \phi(J_A, N(A)) \underset{Sem}{\equiv} N(A)$.

puisque $J_{N(A)} \subseteq J_A$ (Lemme 3.1).

□

D'où :

*Proposition 3.1*

A toute collatérale A on peut associer une collatérale propre qui lui est sémantiquement équivalente. Cette collatérale propre est donnée par N(A).

*Proposition 3.2*

Soient $A, B \in Col(F)$

$A \underset{Sem}{\equiv} B \iff N(A) = N(B)$.

Preuve

i) $N(A) = N(B) \Rightarrow N(A) \underset{Sem}{\equiv} N(B)$

et $N(A) \underset{Sem}{\equiv} A$ et $N(B) \underset{Sem}{\equiv} B$

d'où $A \underset{Sem}{\equiv} B$

ii) Supposons que $A \underset{Sem}{\equiv} B$ et $N(A) \neq N(B)$

$$N(A) \neq N(B) \iff \begin{cases} \text{ou bien a) } \exists\, v \in J_{N(A)} - J_{N(B)} \\ \text{ou bien b) } \exists\, v \in J_{N(B)} - J_{N(A)} \\ \text{ou bien c) } \exists\, v \in J_{N(A)} \cap J_{N(B)} \text{ tel que } i_A(v) \neq i_B(v). \end{cases}$$

or pour toute (I, v), interprétation valuée

a) $(A*\nu)(v) = i_A(v)*\nu$

$(B*\nu)(v) = v(v) = v*\nu$

d'où $i_A(v) = v$ puisque $A \underset{Sem}{\equiv} B$

ce qui est contradictoire avec $v \in J_{N(A)}$.

b) cas symétrique au cas (a)

c) $(A*\nu)(v) = A(v)*\nu$

$(B*\nu)(v) = B(v)*\nu$

d'où $i_A(v) = i_B(v)$ (contradiction).

□

*Corollaire 3.1*

Deux collatérales propres sont équivalentes ssi elles sont égales.

On cherche à définir sur Col(F) une congruence associative la plus fine qui soit compatible avec l'équivalence sémantique (i.e. sémantique initiale).

*Définition 3.2*

. On appelle congruence sur Col(F) une relation d'équivalence sur Col(F) compatible avec la structure du monoïde.

. Soient R et P deux relations sur Col(F)

R est dite plus fine que P (i.e. : $R \subseteq P$) si

$(A, B) \in R \Rightarrow (A, B) \in P$.

. Une relation R sur Col(F) est dite compatible avec l'équivalence sémantique si $(A,B) \in R \Rightarrow A \underset{\text{Sem}}{\equiv} B$.

*Lemme 3.3*

Soit P la relation sur Col(F) définie par :

$A, B \in \text{Col}(F) \quad P(A, B) \iff N(A) = N(B)$.

P est une congruence sur Col(F).

Preuve

.P est évidemment une relation d'équivalence

. A, B, C, $\in$ Col(F)

P(A, B) <=> N(A) = N(B)

P(C, D) <=> N(C) = N(D)

d'où N(A) ; N(C) = N(B) ; N(D)

et  N(N(A);N(C) = N(N(B);N(D))

d'où d'après la proposition 2.5 :

N(A;C) = N(B;D) <=> P(A;C,B;D).

□

*Lemme 3.4*

P contient strictement l'égalité (i.e. : (=) $\subsetneq$ P).

Preuve

Soient A, B $\in$ Col(F).

on a : A = B => N(A) = N(B) <=> P(A, B)

. $\exists$ A, B $\in$ Col(F) tel que A $\neq$ B et P(A, B)

en effet pour :

$A = \langle x_1 \leftarrow x_2,\ x_2 \leftarrow x_2 \rangle$

$B = \langle x_1 \leftarrow x_2,\ x_3 \leftarrow x_3 \rangle$

on a  $N(A) = N(B) = \langle x_1 \leftarrow x_2 \rangle$ donc P(A,B)

<u>et</u> A $\neq$ B.

□

*Proposition 3.3*

P est la congruence associative (non triviale) la plus fine qui est compatible avec l'équivalence sémantique.

Preuve

Supposons qu'il existe une congruence R strictement plus fine que P, et contenant strictement l'égalité et compatible avec l'équivalence sémantique.

Deux collatérales vérifiant R sont à noyaux égaux, de plus R doit "contenir" une condition supplémentaire, pour pouvoir réaliser une "séparation" plus fine que P des collatérales. $(A,B) \in R \Rightarrow N(A) = N(B)$, cette condition doit nécessairement porter sur $J_A | J_{N(A)}$ et $J_B | J_{N(B)}$.
La seule condition qui ne fait pas de R une relation triviale (égalité) et $J_A | J_{N(A)} \neq J_B | J_{N(B)}$ donc :

$$R(A,B) \Leftrightarrow P(A,B) \ \underline{\text{et}} \ J_A | J_{N(A)} \neq J_B | J_{N(B)}.$$

or R ainsi définie n'est pas une congruence (relation non réflexive).

□

*Définition 3.3*

On appelle *sémantique initiale* la congruence non triviale la plus fine compatible avec l'équivalence sémantique. La fonction sémantique est donnée par le représentant de la classe d'équivalence.
P est une sémantique initiale sur Col(F).
La fonction sémantique, notée $\sigma_{in}$, est donnée par :

$$A \in Col(F) \qquad \sigma_{in}(A) = N(A).$$

# CHAPITRE II : PRÉDICATS

Les tests (choix entre différents calculs d'après une condition) sont privilégiés dans pratiquement tous les langages de programmation sous forme de conditionnelles :

<u>si</u> $\tau$ <u>alors</u> $\pi_1$ <u>sinon</u> $\pi_2$ <u>fsi</u> ;

où $\tau$ est une condition permettant le choix entre l'éléboration des deux calculs (suites d'instructions) possibles $\pi_1$ et $\pi_2$.

Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'expression de cette condition.

Elle est simple (i.e. : formule atomique) ou composée (i.e. : combinaison logique de formules atomiques) [PA].

Soit P un alphabet gradué (ensemble de symboles de prédicat)

F et V comme précédemment

un prédicat est dans [LPP] un objet de la forme :

p(v) où p symbole de "transfert" (de prédicat)

et v une variable

ayant sous une interprétation valuée une valeur logique (vrai ou faux) permettant le choix.

Une extension est considérée dans [MA] où un prédicat est un objet :

$p(t_1, \ldots, t_n)$ où $p \in P_n$ <u>et</u> $t_i \in M(F, V)$ pour $(i = 1, \ldots, n)$

On peut transformer un prédicat de Manna en un couple formé d'une collatérale et d'un prédicat de Paterson (cf. l'exemple dans l'introduction).

Mais ceci - puisque un prédicat ne doit pas changer la valeur des variables - nécessite l'introduction de nouvelles variables (n'apparaissant pas dans le programme). D'autre part les connecteurs logiques peuvent être exprimés à partir de seul connecteur conditionnel [MA], qui peut s'exprimer à partir de formules atomiques simples.

La condition sera donc exprimée par une formule atomique simple à l'instar de [MA]. Ce qui a pour avantage la possibilité de considérer les interprétations de symboles de fonction et de prédicat dans un même domaine.

## 1 - SYNTAXE ET INTERPRETATION

Soit P un alphabet gradué, ensemble de symboles de prédicat.

On note $P_i = \{p \in P \mid a(p) = i\}$ pour $i \geq 0$.

F un ensemble de symboles de fonction ($F \cap P = \emptyset$)

V un ensemble de symboles de variables.

*Définition 1.1*

L'*ensemble des prédicats* sur FUP, noté $P_F$ est le plus petit sous ensemble du magma M(FUP, V) contenant :

i) $P_o$

ii) pour $p \in P_n$ et $t_1, \ldots, t_n \in M(F, V)$, $p(t_1, \ldots, t_n)$.

*Définition 1.2*

Soit $\mathbb{B} = \{\text{vrai, faux}, \perp\}$ le domaine booléen.

On le suppose ordonné par l'ordre discret (c'est un cpo).

On appelle interprétation de P une structure

$$I = \langle D_I, \leq_I, \perp_I, \{p_I, p \in P\}\rangle$$

où : . $\langle D_I, \leq_I, \perp_I\rangle$ est un cpo

et . pour $p \in P_n$, $p_I : D^n_I \to B$ est une application continue.

*Définition 1.3*

On appelle interprétation valuée (de FUP), une interprétation de FUPUV.

i.e. : c'est un triplet : $(I, I', \nu)$ où :

I est une interprétation de F

I' est une interprétation de P

tel que $D_I = D_{I'}$

et $\nu$ une valuation à valeurs dans $D_I$. ($\nu : V \to D_I$).

*Définition 1.4*

Soit (I, I', $\nu$) une interprétation de FUPUV,

et $\alpha \in P_F$.

L'*action du prédicat* $\alpha$ *sur la valuation* $\nu$ est inductivement définie par :

$$\alpha * \nu = \begin{cases} \cdot p_{I'} \ \underline{\text{si}}\ \alpha = p \in P_o \\ \cdot p_{I'}\ (t_1 * \nu, \ldots, t_{a(p)} * \nu)\ \underline{\text{si}}\ \alpha = p\ (t_1, \ldots, t_{a(p)}) \\ \text{avec } p \in P \text{ et } t_{i(i=1,\ldots,a(p))} \in M(F, V) \end{cases}$$

(et où $t_i * \nu = \nu^{\infty}(t)$ où $\nu^{\infty}$ est le morphisme associé à l'interprétation valuée (I, $\nu$)

## 2 - EQUIVALENCE DES PREDICATS

*Définition 2.1*

Soient $\alpha, \beta \in P_F$

$\alpha$ et $\beta$ sont *sémantiquement équivalents* et on note $\alpha \underset{\text{Sem}}{\equiv} \beta$,

<u>ssi</u> pour toute interprétation valuée (I, I', $\nu$)

$$\alpha * \nu = \beta * \nu$$

et on a :

*Proposition 2.1*

Deux prédicats $\alpha$ et $\beta$ sont sémantiquement équivalents ssi ils sont égaux (i.e. : $\alpha \underset{\text{Sem}}{\equiv} \beta \iff \alpha = \beta$).

La greffe sélective peut être étendue aux prédicats de la manière suivante :

*Définition 2.2*

Soit $\alpha \in P_F$, $A \in Col(F)$

$\alpha \Theta A$ est inductivement définie par :

i) <u>si</u> $\alpha = p \in P_o$ <u>alors</u> p

ii) <u>si</u> $\alpha = p(t_1, \ldots, t_n)$ où $p \in P_n$, $t_{i(i=1,\ldots,n)} \in M(F, V)$

<u>alors</u> $p\ (t_1 \Theta A, \ldots, t_n \Theta A)$

- où $t_i \Theta A$ est la greffe selective dans $M(F, V)$

et on a :

*Proposition 2.2*

Pout toute interprétation valuée $(I, I', \nu)$

$\alpha \in P_F$ <u>et</u> $A \in Col(F)$

on a : $(\alpha \Theta A) * \nu = \alpha * (A * \nu)$.

<u>Preuve</u>

. $\alpha = p \in P_o = \quad (\alpha \Theta A) * \nu = p * \nu = p_{I'} = p * (A * \nu) = \alpha * (A * \nu)$.

. $\alpha = p(t_1, \ldots, t_{a(p)}) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}(\alpha \Theta A) * \nu &= (p(t_1 \Theta A, \ldots, t_{a(p)} \Theta A)) * \nu \\ &= p_{I'}((t_1 \Theta A) * \nu, \ldots, (t_{a(p)} \Theta A) * \nu) \\ &= p_{I'}(t_1 * (A * \nu), \ldots, t_{a(p)} * (A * \nu)) \\ &= (p(t_1, \ldots, t_{a(p)}) * (A * \nu) = \alpha * (A * \nu).\end{aligned}$$

□

*Proposition 2.3*

Pour $\alpha \in P_F$ <u>et</u> $A, B \in Col(F)$

on a : $\alpha \Theta (A ; B) = (\alpha \Theta A) \Theta B$.

<u>Preuve</u>

. $\alpha \in P_o$ $\alpha \ominus (A ; B) = \alpha = (\alpha \ominus A) \ominus B$.

. $\alpha = p(t_1, \ldots, n)$ avec $p \in P_n$ et $t_i$ $(i = 1, \ldots, n) \in M(F, V)$

$$p(t_1, \ldots, t_n) \ominus (A ; B) \underset{\text{def}}{=} p(t_1 \ominus (A ; B), \ldots, t_n \ominus (A ; B))$$

$$= p((t_1 \ominus A) \ominus B, \ldots, (t_n \ominus A) \ominus B)$$

Lemme 2.1

$$\underset{\text{def}}{=} p(t_1 \ominus A, \ldots, t_n \ominus A) \ominus B = (p(t_1, \ldots, t_n) \ominus A) \ominus B = (\alpha \ominus A) \ominus B.$$

$\square$

# 2ème Partie :

# ALTERNATIVES

# CHAPITRE I : ALTERNATIVES FINIES

L'instruction conditionnelle : <u>si</u> $\tau$ <u>alors</u> $\pi_1$ <u>sinon</u> $\pi_2$ <u>fsi</u> où $\tau$ est la condition (i.e. : prédicat) permettant le choix entre l'élaboration des calculs $\pi_1$ et $\pi_2$, qui peuvent être des instructions calculatoires (i.e. : collatérales) ou des instructions conditionnelles, peut être exprimée : - à partir des instructions de branchement de [LPP]

- ou considérant un ensemble "uniforme" de symboles de fonction (englobant symboles de fonction de base et de prédicats), par l'intermédiaire d'un symbole de fonction ternaire c, par $c(\tau, \pi_1, \pi_2)$, où pour une interprétation de domaine $D \cup \{\perp\}$, il existe une partition $D = V \cup F \cup N$ telle que :

$$c(x, y, z) = \begin{cases} y \text{ si } x \in V \\ z \text{ si } x \in F \\ \perp \underline{\text{ si }} x \in N \end{cases}$$

c'est la démarche de la sémantique algébrique [NI, GU3, GU1].

Cherchant un modèle pour les schémas de Manna, dans une "option" de structuration de ces schémas, nous définissons un objet syntaxique : *alternative*, comme une extension des collatérales. La composition des collatérales s'étend aux alternatives et permet de les munir d'une structure de monoïde. La composition vue comme une transformation des alternatives est une réduction confluente et permet, en définissant d'autres transformations (mise sous forme libre et ordonnée) d'associer à chaque alternative une forme canonique caractérisant l'équivalence sémantique des alternatives.

Nous considérons dans un premier temps des alternatives où les prédicats sont avec effet de bord. A la fin du chapitre les alternatives avec prédicats sans effet de bord sont étudiées.

## 1 - SYNTAXE ET SEMANTIQUE

Soient F, P et V comme précédemment.

*Définition 1.1*

L'ensemble des alternatives sur FUP, noté Al(FUP), est le plus petit ensemble contenant :

i) Col(F)

ii) pour $\alpha \in P_F$, A, B $\in$ Al(FUP), [A, B]$\alpha$.

Exemple 1.1

Soit F = {b, c, d, e, s} avec a(e) = a(b) = 0, a(c) = 1, a(d) = a(s) = 2.

P = {p} avec a(p) = 2

V = {v}

$\Gamma$ = [<v $\leftarrow$ d(v, b)>, <v $\leftarrow$ s(v, b)>] (p(s(s(v, b), c(v)), e))

est une alternative sur FUP.

*Définition 1.2* représentation graphique

soit W = Col(F) $\cup$ $P_F$.

et g : W $\rightarrow \mathbb{N}$ la graduation donnée par :

$$g(w) = \begin{cases} 2 \text{ \underline{si} } w \in P_F \\ \\ 0 \text{ \underline{si} } w \in \mathrm{Col}(F) \end{cases}$$

Soit l'application rep : Al(FUP) $\rightarrow$ M(W) définie par

soit $\Gamma \in$ Al(FUP) rep($\Gamma$) = t $\in$ M(W) est tel que :

i) si $\Gamma \in$ Col(F) alors dom(t) = {$\varepsilon$} et t($\varepsilon$) = $\Gamma$.

ii) si $\Gamma$ = [A, B]$\alpha$ avec $\alpha \in P_F$ et A, B $\in$ Al(FUP)

alors dom(t) = {$\varepsilon$} $\cup$ 1 dom (rep (A)) $\cup$ 2 dom (rep (B)).

et t($\varepsilon$) = $\alpha$

t(1m) = rep (A)(m), (où 1m $\in$ dom(t))

t(2m) = rep (B)(m), (où 2m $\in$ dom(t)).

Donc une alternative peut être représentée par un w-arbre respectant la graduation g, donné par l'application "rep".

Exemple 1.2

. l'alternative Γ de l'exemple 1.1 peut être représentée par l'abre rep(Γ) :

```
          | p(s(s(v, b), c(v)), c) |
               /              \
  | v ← d(v, b) |      | v ← s(v, b) |
```

. les éléments de $P_F$ et Col(F) peuvent aussi être représentés à partir des (FUP)-arbres.

On adopte alors la représentation suivante :

```
            |               v  |
            |           s /    |
            |         /   \    |
            |     s /       b  |
            | p /   \  c-v     |
            |   \              |
            |     e            |
               /          \
  |        v  |      |        v  |
  | v ← d /   |      | v ← s /   |
  |       \   |      |       \   |
  |         b |      |         b |
```

*Définition 1.3*

Soit (I, I', ν) une interprétation de (FUPUV)

i) Les symboles [, ] sont spécifiés par :

pour x, y $\in D_I$

[x, y] vrai = x, [x, y] faux = y, [x, y] $\perp = \perp_I$.

ii) *l'action d'une alternative* Γ *sur la valuation* ν est la valuation, notée Γ ⋆ ν, donnée par :

pour v ∈ V, (Γ ⋆ ν)(v) = . si Γ ∈ Col(F) alors (Γ ⋆ ν)(v)

ce qui est l'action de la collatérale Γ sur la valuation ν(cf. 1ère partie-Ch I-déf 1.2)

. <u>si</u> $\Gamma = [A, B]\alpha$ <u>avec</u> $\alpha \in P_F$ . $A, B \in Al(FUP)$

<u>alors</u> $[(A * \nu)(v), (B * \nu)(v)] (\alpha * \nu)$.

iii) deux alternatives $\Gamma$ et $\Gamma'$ sont *"sémantiquement équivalentes"*, et on note $\Gamma \underset{Sem}{\equiv} \Gamma'$, <u>ssi</u> pour toute interprétation $(I, I', \nu)$ on a : $\Gamma * \nu = \Gamma' * \nu$.

<u>Exemple 1.3</u>

Considérons F, P, V de l'exemple 1.1.

et l'interprétation $(I, I', \nu)$ donnée par :

. $D_I = \mathbb{N} \cup \{\perp\}$.

. $e_I = 100$, $b_I = 1$, $c_I(n) = n^2$ <u>si</u> $n \neq \perp$.

$d_I(m, n) = m-n$ <u>si</u> $m \geq n$ <u>et</u> $m, n \neq \perp$.

$s_I(m, n) = m+n$ <u>si</u> $m, n \neq \perp$.

$$p_I(m, n) = \begin{cases} \text{vrai} & \underline{\text{si}}\ x > y\ \underline{\text{et}}\ x, y \neq \perp \\ \text{faux} & \underline{\text{si}}\ x \leq y\ \underline{\text{et}}\ x, y \neq \perp \\ \perp & \underline{\text{sinon}} \end{cases}$$

. $\nu(v) = 5$.

<u>alors</u> pour $\Gamma$ de l'exemple 1.1, on a :

$$\begin{aligned}(\Gamma * \nu)(v) &= [(<v \leftarrow d(v, b)> * \nu)(v), (<v \leftarrow s(v, b)> * \nu)(v)] \\ &\quad (p(s(x(v, b), c(v)), e)) * \nu \\ &= [4, 6]\ p_I, (31, 100) = 6.\end{aligned}$$

□

## 2 - <u>COMPOSITION DES ALTERNATIVES</u>

La composition sur les collatérales s'étend aux alternatives, $(Col(F) \subseteq Al(FUP))$.

On étend d'abord la greffe sélective aux alternatives.

*Définition 2.1*

Soit $\rho$ : Al(FUP) $\to \mathbb{N}$ l'application donnée par :

$$\rho(\Gamma) = \begin{cases} 0 \ \underline{\text{si}} \ \Gamma \in \text{Col}(F) \\ 1 + \max\{\rho(\Gamma_1), \rho(\Gamma_2)\} \ \underline{\text{si}} \ \Gamma = [\Gamma_1, \Gamma_2]\alpha \text{ avec} \\ \qquad\qquad \alpha \in P_F \ \underline{\text{et}} \ \Gamma_1, \Gamma_2 \in \text{Al(FUP)} \end{cases}$$

$\rho$ définit la hauteur en "prédicats" d'une alternative.

Convention

On confond par la suite une alternative et sa représentation graphique.

La "sous-alternative" de $\Gamma(\in$ Al(FUP)) de racine $m(\in \text{dom}(\Gamma))$, $\Gamma/m$, sera notée $\Gamma_m$.

Ainsi si $\rho(\Gamma) > 0 \quad \Gamma = [\Gamma_1, \Gamma_2]\ \Gamma(\varepsilon)$

avec $\Gamma(\varepsilon) \in P_F$ et $\Gamma_1, \Gamma_2 \in$ Al(FUP)

où $\max\{\rho(\Gamma_1), \rho(\Gamma_2)\} < \rho(\Gamma)$.

*Définition 2.2*

Soit $\Gamma \in$ Al(FUP), $A \in$ Col(F)

La greffe sélective étendue aux alternatives, notée $\odot$, est donnée par :

$$\Gamma \odot A = \begin{cases} \underline{\text{si}} \quad \Gamma \in \text{Col}(F) \ \underline{\text{alors}} \ \Gamma \ ; \ A \\ \underline{\text{sinon}} \ [\Gamma_1 \odot A, \Gamma_2 \odot A] \ (\Gamma(\varepsilon) \odot A) \end{cases}$$

*Proposition 2.1*

Soit $\Gamma \in$ Al(FUP), $A \in$ Col(F), $B \in$ Col(F)

i) pour toute interprétation $(I, I', \nu)$ de FUPUV on a :

$$(\Gamma \odot A) * \nu = \Gamma * (A * \nu)$$

ii) $\Gamma \odot (A \ ; \ B) = (\Gamma \odot A) \odot B$.

□

<u>Preuve</u>

i) récurrence sure $\rho(\Gamma)$.

. $\rho(\Gamma) = 0 \Rightarrow \Gamma \in Col(F) \Rightarrow (\Gamma \circledcirc A) * \nu = (\Gamma \; ; \; A) * \nu = \Gamma * (A * \nu)$

. $\rho(\Gamma) > 0$ , soit $v \in V$.

$$((\Gamma \circledcirc A) * \nu)(v) = ([\Gamma_1 \circledcirc A, \Gamma_2 \circledcirc A] \; (\Gamma(\varepsilon) \circledcirc A) * \nu) \; (v)$$

$$= [(\Gamma_1 \circledcirc A) * \nu \; (v), (\Gamma_2 \circledcirc A) * \nu(v)] \; ((\Gamma(\varepsilon) \circledcirc A) * \nu)$$

d'où d'après l'hypothèse de récurrence $(\rho(\Gamma_1), \rho(\Gamma_2) < \rho(\Gamma))$

et (Partie 1, Ch II, prop. 2.2)

$$= [(\Gamma_1 * (A * \nu))(v), (\Gamma_2 * (A * \nu))(v)](\Gamma(\varepsilon)*(A*\nu))$$

$$= (([\Gamma_1, \Gamma_2] \; \Gamma(\varepsilon)) * (A * \nu))(v)$$

$$= (\Gamma * (A * \nu))(v).$$

□

ii) récurrence sur $\rho(\Gamma)$.

. $\rho(\Gamma) = 0 \Rightarrow \Gamma \in Col(F) \Rightarrow \Gamma \circledcirc (A \; ; \; B) = \Gamma \; ; \; (A \; ; \; B) = (\Gamma \; ; \; A) \; ; \; B = (\Gamma \circledcirc A) \circledcirc B$.

. $\rho(\Gamma) > 0$

$$\Gamma \circledcirc (A \; ; \; B) = [\Gamma_1 \circledcirc (A \; ; \; B), \Gamma_2 \circledcirc (A \; ; \; B)] \; (\Gamma(\varepsilon) \circledcirc (A \; ; \; B))$$

d'où d'après l'hypothèse de récurrence $(\rho(\Gamma_1), \rho(\Gamma_2) < \rho(\Gamma))$

et (Partie II, ch II, Prop 2.3)

$$= [(\Gamma_1 \circledcirc A) \circledcirc B, (\Gamma_2 \circledcirc A) \circledcirc B] \; ((\Gamma(\varepsilon) \circledcirc A) \circledcirc B)$$

$$= ([\Gamma_1 \circledcirc A, \Gamma_2 \circledcirc A] \; (\Gamma(\varepsilon) \circledcirc A)) \circledcirc B$$

$$= (([\Gamma_1, \Gamma_2] \; \Gamma(\varepsilon)) \circledcirc A) \circledcirc B = (\Gamma \circledcirc A) \circledcirc B.$$

□

*<u>Définition 2.3</u>*

Soit $\Gamma, \Gamma' \in Al(FUP)$

La *composée des alternatives* $\Gamma$ et $\Gamma'$, noté $(\Gamma \; ; \; \Gamma')$, est donné par :

$\Gamma \; ; \; \Gamma'$ = <u>si</u> $\Gamma' \in Col(F)$ <u>alors</u> $\Gamma \circledcirc \Gamma'$

<u>sinon</u> $[\Gamma \; ; \; \Gamma'_1, \Gamma \; ; \; \Gamma'_2] \; \Gamma'(\varepsilon)$.

*Proposition 2.2*

Soit $\Gamma$, $\Gamma' \in Al(FUP)$

pour toute interprétation $(I, I', \nu)$ de FUPUV on a :

$$(\Gamma \; ; \; \Gamma') * \nu = \Gamma * (\Gamma' * \nu).$$

Preuve

Recurrence sur $\rho(\Gamma')$.

i) $\rho(\Gamma') = 0 \Rightarrow \Gamma' \in Col(E) \Rightarrow (\Gamma \; ; \; \Gamma) * \nu = (\Gamma \odot \Gamma') * \nu = \Gamma * (\Gamma' * \nu)$.

ii) $\rho(\Gamma') > 0$, soit $v \in V$.

$$((\Gamma \; ; \; \Gamma') * \nu) \; (v) = (([\Gamma \; ; \; \Gamma'_1, \; \Gamma \; ; \; \Gamma'2] \; \Gamma'(\varepsilon)) * \nu) \; (v)$$

$$= [(\Gamma \; ; \; \Gamma'_1) * \nu(v), \; (\Gamma \; ; \; \Gamma'_2) * \nu(v)] \; (\Gamma'(\varepsilon) * \nu).$$

et d'après l'hypothèse de récurrence $(\rho(\Gamma'_1), \rho(\Gamma'_2) < (\rho(\Gamma'))$

$$= [\Gamma * (\Gamma'_1 * \nu)(v), \; \Gamma * (\Gamma'_2 * \nu)(v)] \; (\Gamma'(\varepsilon) * \nu)$$

$$= \Gamma * ([\Gamma'_1 * \nu(v), \; \Gamma'_2 * \nu(v)] \; (\Gamma'(\varepsilon) * \nu))$$

$$= \Gamma * (\Gamma' * \nu).$$

□

*Lemme 2.1*

Pour $\Gamma$, $\Gamma' \in Al(FUP)$, on a :

$$\rho(\Gamma \; ; \; \Gamma') = \rho(\Gamma) + \rho(\Gamma').$$

Preuve

récurrence sur $\rho(\Gamma')$.

i) $\rho(\Gamma') = 0 \Rightarrow \Gamma' \in Col(F) \Rightarrow \rho(\Gamma \; ; \; \Gamma') = \rho(\Gamma \odot \Gamma') = \rho(\Gamma)$

ii) $\rho(\Gamma') > 0$

$$\rho(\Gamma \; ; \; \Gamma') = \rho([\Gamma \; ; \; \Gamma'_1, \; \Gamma \; ; \; \Gamma'_2] \; \Gamma'(\varepsilon))$$

$$= 1 + \max \{\rho(\Gamma \; ; \; \Gamma'_1), \; \rho(\Gamma \; ; \; \Gamma'_2)\}$$

d'après l'hypothèse de récurrence $(\rho(\Gamma'_1), \rho(\Gamma'_2) < \rho(\Gamma'))$

$$= 1 + \max \ \{(\Gamma) + \rho(\Gamma'_2),\ \rho(\Gamma) + \rho(\Gamma'_2)\}$$
$$= (1 + \max \{\rho(\Gamma'_1),\ \rho(\Gamma'_2)\}) + \rho(\Gamma).$$
$$= \rho(\Gamma') + \rho(\Gamma).$$

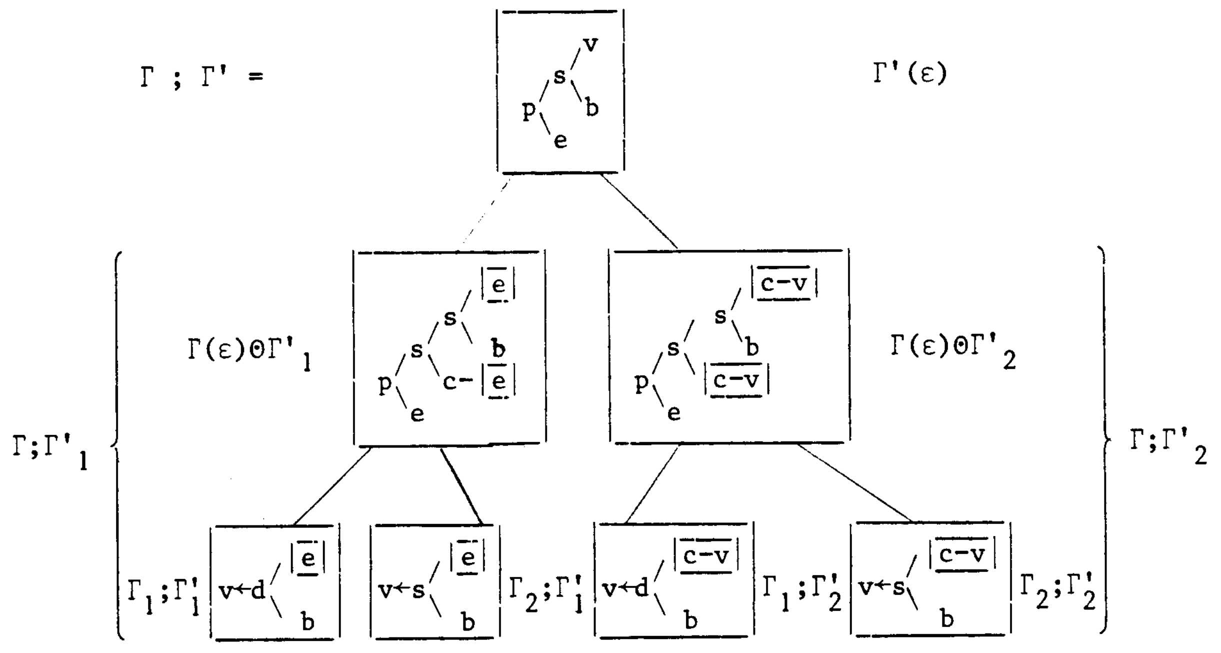
□

<u>Exemple 2.1</u>

Soit $\Gamma$ la collatérale de l'exemple 1.1

et $\Gamma' = [<v \leftarrow e,\ v \leftarrow c(v)]\ (p(s(v,\ b),\ e))$

alors :




<u>*Proposition 2.3*</u>

$(Al(FUP),\ ;\ ,\ E_o)$ est un monoide.

<u>Preuve</u>

i) $E_o$ est élément neutre.

Soit $\Gamma \in Al(FUP)$

recurrence sur $\rho(\Gamma)$

- $\rho(\Gamma) = 0 \Rightarrow \Gamma\ ;\ E_o = E_o\ ;\ \Gamma = \Gamma.$

. $\rho(v) > 0$ $\Gamma ; E_o = \Gamma \ominus E_o = [\Gamma_1 \ominus E_o, \Gamma_2 \ominus E_o] (\Gamma(\varepsilon) \ominus E_o)$

$\overset{HR}{=} [\Gamma_1, \Gamma_2] \Gamma'(\varepsilon) = \Gamma.$

$E_o ; \Gamma = [E_o ; \Gamma_1, E_o ; \Gamma_2] \Gamma(\varepsilon)$

$\overset{HR}{=} [\Gamma_1, \Gamma_2] \Gamma(\varepsilon) = \Gamma.$

□

ii) $E_o$ est l'unique élément neutre

<u>si</u> $\Gamma$ est élément neutre on a : $\Gamma ; E_o = \Gamma = E_o$.

iii) Associativité :

soit $\Gamma, \Gamma', \Gamma''$ (Al(FUP)

montrons que $(\Gamma ; \Gamma') ; \Gamma'' = \Gamma; (\Gamma' ; \Gamma'')$.

récurrence sur $\rho(\Gamma'')$.

. $\rho(\Gamma'') = 0$

récurrence sur $\rho(\Gamma')$.

. $\rho(\Gamma') = 0$

$(\Gamma ; \Gamma') ; \Gamma'' = (\Gamma \ominus \Gamma') \ominus \Gamma'' = \Gamma \ominus (\Gamma' ; \Gamma'') = \Gamma ; (\Gamma' ; \Gamma'')$.

. $\rho(\Gamma') > 0$.

$(\Gamma ; \Gamma') ; \Gamma'' = ([\Gamma ; \Gamma'_1, \Gamma ; \Gamma'_2] \Gamma'(\varepsilon)) \ominus \Gamma''$.

$= [(\Gamma ; \Gamma'_1) \ominus \Gamma'', (\Gamma ; \Gamma'_2) \ominus \Gamma''] (\Gamma'(\varepsilon) \ominus \Gamma'')$

$\overset{HR}{=} [\Gamma ; (\Gamma'_1 ; \Gamma''), \Gamma ; (\Gamma'_2 ; \Gamma'')] (\Gamma'(\varepsilon) \ominus \Gamma'')$

$= \Gamma ; ([\Gamma'_1 ; \Gamma'', \Gamma'_2 ; \Gamma''] (\Gamma'(\varepsilon) \ominus \Gamma'',)$

$= \Gamma ; (\Gamma' ; \Gamma'')$

. $\rho(\Gamma'') > 0$.

$\Gamma ; (\Gamma' ; \Gamma'') = \Gamma ; ([\Gamma' ; \Gamma''_1, \Gamma' ; \Gamma''_2] \Gamma''(\varepsilon))$

$= [\Gamma ; (\Gamma' ; \Gamma''_1), \Gamma ; (\Gamma' ; \Gamma''_2)] \Gamma''(\varepsilon)$

$\overset{HR}{=} [(\Gamma ; \Gamma') ; \Gamma''_1, (\Gamma ; \Gamma') ; \Gamma''_2] \Gamma''(\varepsilon)$

$= (\Gamma ; \Gamma') ; \Gamma''$.

□

## 3 - ALTERNATIVES AVEC COMPOSITION : $Al_c(FUP)$

La composition considérée comme un opérateur sur les alternatives conduit à la définition :

$$\Gamma \;;\; \Gamma' = \underline{\text{si}}\ \Gamma' \in \mathrm{COl}(F)\ \underline{\text{alors}}\ \Gamma \odot \Gamma'$$
$$\underline{\text{sinon}}\ [\Gamma \;;\; \Gamma'_1,\ \Gamma \;;\; \Gamma'_2]\ \Gamma'(\varepsilon)$$

où le signe '=' ne traduit pas une égalité au niveau syntaxique, mais l'égalité des valeurs calculées pour toute interprétation (i.e. : équivalence sémantique).

De plus l'associativité ne permet pas de rendre compte des différents ordres possibles dans l'élaboration des alternatives.

En effet, dans l'alternative $([A \underset{1}{;} B),\ C]\ \alpha) \underset{2}{;} D$ , l'équivalence d'une élaboration de l'intérieur vers l'extérieur (1 puis 2) et d'une élaboration d' l'extérieur vers l'intérieur (2 Puis 1) n'est pas exprimée par l'associativité.

Il serait donc plus naturel d'"intégrer" la composition dans l'expression syntaxique des alternatives, et de considérer l'élaboration de la composition comme une transformation (réduction) des alternatives.

*Définition 3.1*

a) l'*ensemble des alternatives avec composition* sur FUP, noté $Al_c$ (FUP), est le plus petit ensemble contenant :

i) Col(F)

ii) Pour $\alpha \in P_F$, A, B $\in Al_c$ (FUP), $[A, B]\ \alpha$

iii) Pour A, B $\in Al_c$(FUP), A.B.

b) En posant $W = P_F \cup \mathrm{Col}(F) \cup \{.\}$

avec la graduation $g : W \to \mathbb{N}$ donnée par :

$$g(w) = \begin{cases} 2\ \underline{\text{si}}\ w = \text{'.'},\ \text{ou}\ w \in P_F \\ 0\ \underline{\text{si}}\ w \in \mathrm{Col}(F) \end{cases}$$

On peut, comme dans le cas de Al(FUP), associer à une alternative avec composition, un $W$-arbre respectant la graduation g, par :

rep. : $Al_c(FUP) \to M(W)$, tel que

<u>si</u> rep($\Gamma$) = t <u>alors</u> :

<u>si</u> $\Gamma \in Col(F)$, $dom(t) = \{\varepsilon\}$ <u>et</u> $t(\varepsilon) = \Gamma$.

<u>si</u> $\Gamma = [\Gamma_1, \Gamma_2]\ \alpha$ <u>avec</u> $\alpha \in P_F$, $\Gamma_1, \Gamma_2 \in Al_c(FUP)$,

$dom(t) = \{\varepsilon\} \cup 1\ dom\ (rep(\Gamma_1)) \cup 2\ dom\ (rep\ (\Gamma_2))$.

$t(\varepsilon) = \alpha$, $t(1m) = rep(\Gamma_1)(m)$, $t(2m) = rep(\Gamma_2)(m)$.

<u>si</u> $\Gamma = \Gamma_1.\Gamma_2$ <u>avec</u> $\Gamma_1, \Gamma_2 \in Al_c(FUP)$

$dom(t) = \{\varepsilon\} \cup 1\ dom(rep(\Gamma_1)) \cup 2.dom(rep(\Gamma_2))$

$t(\varepsilon) = '.'$, $t(1m) = rep(\Gamma_1)(m)$, $t(2m) = rep(\Gamma_2)(m)$.

<u>Exemple 3.1</u>

Soit A, B, C, D $\in$ Col(F) $\alpha \in P_F$.

$\Gamma = [A.B, C]\ \alpha.D \in Al_c\ (FUP)$

<u>et</u> rep $\Gamma$ =

```
        /.\
      α/   \D
      / \
     /   \C
  A/.\B
```

*<u>Définition</u>*

i) Etant donnée une interprétation (I, I', $\nu$) (de FUPUV) l'action d'une alternative avec composition $\Gamma$ sur la valuation $\nu$ est donnée par :

- <u>si</u> $\Gamma \in Col(F)$ <u>alors</u> $\Gamma * \nu$ (action d'une collatérale sur une valuation)
- <u>si</u> $\Gamma = [\Gamma_1, \Gamma_2]\alpha$ <u>avec</u> $\alpha \in P_F$, $\Gamma_1, \Gamma_2 \in Al_c(FUP)$
  <u>alors</u> pour $v \in V$.

  $$(\Gamma * \nu)(v) = [\Gamma_1 * \nu(v), \Gamma_2 * \nu(v)]\ (\alpha * \nu).$$
- <u>si</u> $\Gamma = \Gamma_1.\Gamma_2$ avec $\Gamma_1, \Gamma_2 \in Al_c(FUP)$
  <u>alors</u> $\Gamma * \nu = \Gamma_1 * (\Gamma_2 * \nu)$.

ii) Deux alternatives avec composition $\Gamma$ et $\Gamma'$ sont "sémantiquement équivalentes", et on note $\Gamma \underset{\text{Sem}}{\equiv} \Gamma'$, <u>ssi</u> pour toute interprétation $(I, I', \nu)$ on a :

$$\Gamma * \nu = \Gamma' * \nu.$$

*Lemme 3.1*

La relation $\underset{\text{Sem}}{\equiv}$ est une congruence sur $Al_c(FUP)$.

<u>Preuve</u>

i) $\underset{\text{Sem}}{\equiv}$ est évidemment une relation d'équivalence

ii) . $\Gamma_1 \underset{\text{Sem}}{\equiv} \Gamma_2$, $\Gamma_3 \underset{\text{Sem}}{\equiv} \Gamma_4 \Rightarrow [\Gamma_1, \Gamma_3]\alpha \underset{\text{Sem}}{\equiv} [\Gamma_2, \Gamma_4]\alpha$

. <u>et</u> $\Gamma_1 . \Gamma_3 \underset{\text{Sem}}{\equiv} \Gamma_2 . \Gamma_4$.

$\square$

*Définition 3.3*

Soit l'application $h : Al_c(FUP) \to \mathbb{N}$ donnée par :

$$h(\Gamma) = \begin{cases} .\ 0 \ \underline{\text{si}}\ \Gamma \in Col(F) \\ .\ \max\{h(\Gamma_1), h(\Gamma_2)\} \ \underline{\text{si}}\ \Gamma = [\Gamma_1, \Gamma_2]\alpha \ \underline{\text{avec}} \\ \qquad\qquad \alpha \in P_F \text{ et } \Gamma_1, \Gamma_2 \in Al_c(FUP) \\ .\ 1+h(\Gamma_1)+h(\Gamma_2) \ \underline{\text{si}}\ \Gamma = \Gamma_1 . \Gamma_2 \ \underline{\text{avec}}\ \Gamma_1, \Gamma_2 \in Al_c(FUP) \end{cases}$$

$h(\Gamma)$ est dite la "hauteur de l'alternative" $\Gamma$.

<u>Convention</u>

On confond par la suite une alternative avec composition et sa représentation graphique.

Pour $\Gamma \in Al_c(FUP)$ <u>et</u> $m \in dom(\Gamma)$, la sous-alternative de $\Gamma$ de racine $m$, $\Gamma/m$, sera notée $\Gamma_m$.

*Définition 3.4*

Soit $G : Al_c(FUP) \to Al(FUP)$ l'application donnée pour :

i) si $\Gamma \in Col(F)$ alors $G(\Gamma) = \Gamma$

ii) si $\Gamma = [A, B]\alpha$ avec $\alpha \in \mathcal{P}_F$ et $A, B \in Al_c(FUP)$

alors $G(\Gamma) = [G(A), G(B)]\alpha$

iii) si $\Gamma = A.B$ avec $A \in Al_c(FUP)$, $B \in Al_c(FUP)$

alors $G(\Gamma) = G(A) ; G(B)$.

*Proposition 3.1*

Pour $\Gamma \in Al_c(FUP)$

on a : $\Gamma \underset{Sem}{\equiv} G(\Gamma)$.

Preuve

Remarquons que :

i) $h(G(\Gamma)) < h(\Gamma)$ si $h(\Gamma) > 0$

ii) pour $m \in dom(\Gamma)$

$G(\Gamma[m \leftarrow G(\Gamma_m)]) = G(\Gamma)$

iii) $h(\Gamma) = 0 \Rightarrow G(\Gamma) = \Gamma$.

récurrence sur $h(\Gamma)$.

. $h(\Gamma) = 0 \Rightarrow G(\Gamma) = \Gamma \Rightarrow G(\Gamma) \underset{Sem}{\equiv} \Gamma$.

. $h(\Gamma) > 0 \Rightarrow \exists\, m \in dom(\Gamma)$ tel que $\Gamma(m) = '.'$.

donc

$G(\Gamma) = G(\Gamma[m \leftarrow G(\Gamma\ m)])$

or $\Gamma(m) = '.'$ donc $h(\Gamma_m) > 0$,

d'où : $h(G(\Gamma_m)) < h(\Gamma_m)$.

donc par hypothèse de récurrence

$G(\Gamma_m) \underset{Sem}{\equiv} \Gamma_m$.

or $\underset{Sem}{\equiv}$ est une congruence sur $Al_c(FUP)$

donc : $\Gamma[m \leftarrow G(\Gamma_m)] \underset{Sem}{\equiv} \Gamma[m \leftarrow \Gamma_m] = \Gamma$.

<u>or</u> $h(\Gamma[m \leftarrow G(\Gamma_m)]) < h(\Gamma)$

donc : $G(\Gamma[m \leftarrow G(\Gamma_m)]) \underset{Sem}{\equiv} \Gamma[m \leftarrow G(\Gamma_m)]$

(d'après l'hypothèse de récurrence).

d'où : $G(\Gamma) = G(\Gamma[m \leftarrow G(\Gamma_m)]) \underset{Sem}{\equiv} \Gamma$.

□

*Définition 3.5*

Soit $\rightarrow$ la réduction (cf. préliminaires) sur $Al_c(FUP)$ définie par :

$\Gamma, \Gamma' \in Al_c(FUP)$

$\Gamma \rightarrow \Gamma' \iff \exists\, m \in dom(\Gamma) \mid \Gamma(m) = '.'$

et $\Gamma' = \Gamma[m \leftarrow G(\Gamma_m)]$.

on note : $\overset{*}{\rightarrow}$ la fermeture réflexive et transitive de $\rightarrow$ .

$\overset{m}{\rightarrow}$ pour indiquer que la réduction "concerne" la sous-alternative de racine m.

<u>Exemple 3.2</u>

Soit $\Gamma$ l'alternative de l'exemple 3.1 :

$\Gamma \overset{11}{\rightarrow} [(A\ ;\ B),\ C]\alpha\ .\ D \overset{\varepsilon}{\rightarrow} ([(A\ ;\ B),\ C]\alpha)\ ;\ D = G(\Gamma) \in Al(FUP)$.

d'autre part :

$\Gamma \overset{\varepsilon}{\rightarrow} G([A.B,\ C]\alpha\ .\ D) = G([A.B,\ C]\alpha)\ ;\ G(D)$

$= [A\ ;\ B,\ C]\alpha\ ;\ D$.

*Lemme 3.2*

La réduction $\rightarrow$ est noetherienne.

<u>Preuve</u>

$\Gamma \rightarrow \Gamma' \Rightarrow h(\Gamma') < h(\Gamma)$.

$h(\Gamma)$ étant finie il ne peut exister de chaîne infinie

$\Gamma \to \Gamma_1 \to \ldots \to \Gamma_n \to \ldots$ .

*Lemme 3.3*

$\Gamma \to \Gamma' \Rightarrow \Gamma' \overset{*}{\to} G(\Gamma)$.

Preuve

$h(\Gamma) > 0 \Rightarrow \Gamma' = \Gamma[m \leftarrow G(\Gamma_m)]$. $\quad (m \in dom(\Gamma))$

récurrence sur $h(\Gamma')$.

i) $h(\Gamma') = 0 \Rightarrow G(\Gamma') = \Gamma'$ . donc $\Gamma' \overset{*}{\to} G(\Gamma')$

or : $G(\Gamma') = G(\Gamma[m \leftarrow G(\Gamma_m)]) = G(\Gamma)$.

ii) $h(\Gamma') > 0 \Rightarrow \exists\, n \in dom(\Gamma')$. tel que :

$\Gamma' \overset{n}{\to} \Gamma'[n \leftarrow G(\Gamma'_n)] = \Gamma''$.

or $h(\Gamma'') < h(\Gamma')$

donc d'après l'hypothèse de récurrence

$\Gamma'' \overset{*}{\to} G(\Gamma')$

or $G(\Gamma') = G(\Gamma)$

donc : $\Gamma' \to \Gamma'' \overset{*}{\to} G(\Gamma)$.

$\square$

*Lemme 3.4*

$\Gamma \in Al_c(FUP)$, $\Gamma$ est en "$\to$ -forme normale" ssi $h(\Gamma) = 0$.

*Lemme 3.5*

Soit $\Gamma \in Al_c(FUP)$

si $h(\Gamma) = n \in \mathbb{N}$,

alors il existe $m \leq n$ tel que :

$\Gamma \to \Gamma^1 \to \Gamma^2 \to \ldots \to \Gamma^m$ avec $\Gamma^m = G(\Gamma)$.

Preuve

i) Si $n = 0$ $\Gamma = G(\Gamma)$ et $m = n = 0$.

ii) Si $n > 0$.

$$\Gamma^1 = \Gamma[\alpha \leftarrow G(\Gamma_\alpha)] \text{ où } \alpha \in \mathrm{Dom}(\Gamma).$$

$$h(\Gamma^1) = p \leq n-1.$$

donc d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\exists\, p' \leq p \text{ tel que } \Gamma^{1p'} = G(\Gamma^1).$$

or $\qquad G(\Gamma^1) = G(\Gamma)$.

donc

$$\exists\, p' \leq p < n \text{ tel que :}$$

$$\Gamma \nrightarrow \Gamma^1 \rightarrow \Gamma^1 \nrightarrow \ldots \nrightarrow \Gamma^{1p'} = G(\Gamma).$$

□

D'où :

*Proposition 3.2*

i) La réduction $\nrightarrow$ sur $Al_c(FUP)$, est confluente (modulo l'équivalence sémantique $\underset{Sem}{\equiv}$)

ii) A toute alternative $\Gamma$ de $Al_c(FUP)$ on peut associer une $\nrightarrow$ forme normale (unique) (effectivement atteinte) donnée par $G(\Gamma)$.

Preuve

$\nrightarrow$ est noethérienne (lemme 3.2) et localement confluente (lemme 3.3) donc confluente.

De plus $\Gamma \underset{Sem}{\equiv} \Gamma'$ $\Gamma \overset{*}{\nrightarrow} \Gamma''$, $\Gamma' \overset{*}{\nrightarrow} \Gamma'''$

alors $\Gamma'' \overset{*}{\nrightarrow} G(\Gamma)$ et $\Gamma''' \overset{*}{\nrightarrow} G(\Gamma')$

et $\quad G(\Gamma') \underset{Sem}{\equiv} G(\Gamma)$ (proposition 3.1)

donc $\nrightarrow$ est confluente modulo $\underset{Sem}{\equiv}$ .

D'autre part : pour $\Gamma \in Al_c(FUP)$ $\Gamma \overset{*}{\to} G(\Gamma)$

$G(\Gamma)$ est en $\to$ forme normale et est atteint après un nombre fini de réduction (dérivation) (Lemme 3.5, 3.3).

□

<u>Exemple 3.3</u>

Soit A, B, C, D, E, H $\in$ Col(F) ; $\alpha, \beta \in P_F$.

soit $\Gamma = [D, H . E]\beta \; . \; ([B, C]\alpha \; . \; A) \in Al_c(FUP)$.

<u>alors</u>

i) $h(\Gamma) = 3$.

ii) $G(\Gamma) = G([D, H.E]\beta) \; ; \; G([B, C]\alpha.A)$

$= [G(D), G(H.E)]\beta \; ; \; (G([B, C]\alpha) \; ; \; G(A))$

$= [D, G(H) \; ; \; G(E)]\beta \; ; \; ([G(B), G(C)]\alpha \; ; \; A)$

$= ([D, (H \; ; \; E)]\beta \; ; \; ([B, C]\alpha \; ; \; A))$

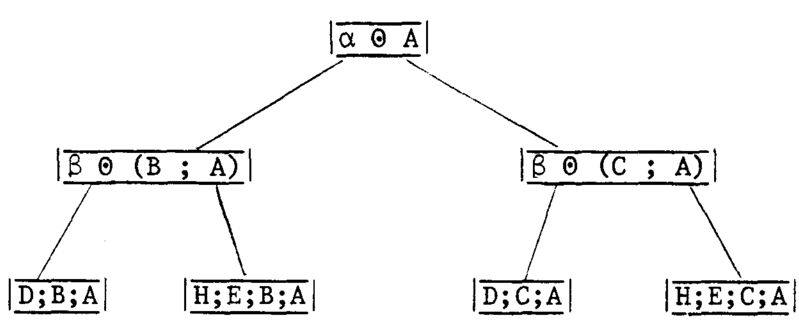
$= [D, (H \; ; \; E)]\beta \; ; \; [(B \; ; \; A), (C \; ; \; A)] \; (\alpha \ominus A)$

$= [[D, (H \; ; \; E)]\beta \; ; \; (B \; ; \; A), [D, (H \; ; \; E)]\beta \; ; \; (C \; ; \; A)] \; (\alpha \ominus A)$

$= [[(D \; ; \; (B \; ; \; A)), ((H \; ; \; E) \; ; \; (B \; ; \; A))] \; (\beta \ominus (B \; ; \; A)),$

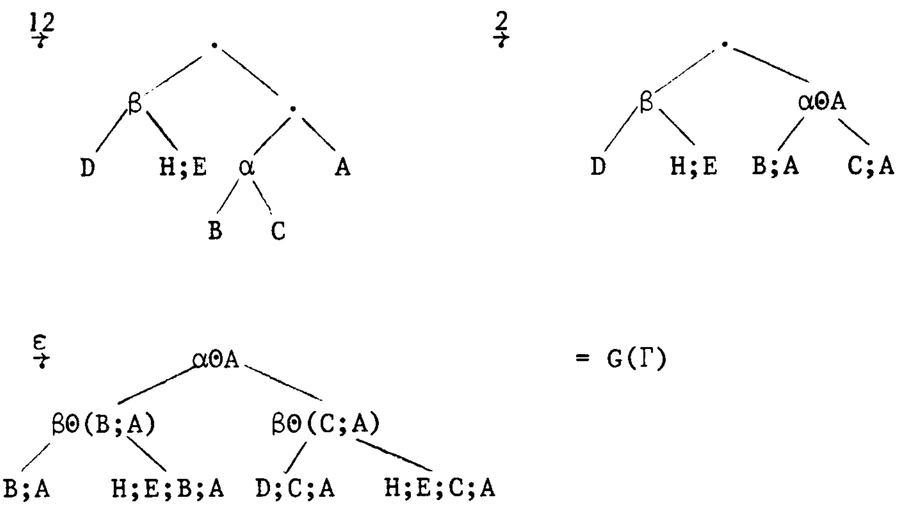
$[(D \; ; \; (C \; ; \; A)), ((H \; ; \; E) \; ; \; (C \; ; \; A))] \; \beta \ominus (C \; ; \; A)] \; \alpha \ominus A$

qu'on peut représenter graphiquement par :




$\in$ Al(FUP)

iii) $\Gamma$




Toute alternative sera considérée, par la suite, en $\rightarrow$ forme normale (élément de Al(FUP)).

On cherche à définir, à l'instar des collatérales, une sémantique initiale des alternatives.

On assimile une alternative et sa représentation graphique.

$\Gamma \in \mathrm{Al(FUP)} \quad \mathrm{dom}(\Gamma) \subseteq \{1, 2\}^* \,.\, \subseteq \mathbb{N}_+^*$

$\mathbb{N}_+^*$ est ordonné par l'ordre préfixiel.

(i.e. : $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_+^* \quad \alpha \leq_p \beta \iff \exists\, \gamma \in \mathbb{N}_+ \mid \beta = \alpha\gamma$.)

## 4 - FORME LIBRE D'UNE ALTERNATIVE

Pour $\Gamma \in \mathrm{Al(FUP)}$, on note

$$O(\Gamma) = \{u \in \mathrm{dom}(\Gamma) \;/\; \Gamma(u) \in P_F\}.$$

*Définition 4.1*

Une alternative $\Gamma$ est dite *"libre"* ssi

$$\left.\begin{array}{l} u, v \in O(\Gamma) \\ \\ u \underset{+p}{<} v \end{array}\right\} \Rightarrow \Gamma(u) \neq \Gamma(v)$$

les deux noeuds de $\Gamma$ dont l'un est descendant de l'autre ne peuvent être étiquetés par le même prédicat.

La mise sous forme libre d'une alternative $\Gamma$ consiste en la suppression des branches de $\Gamma$ contenant des prédicats contradictoires (i.e. : $u \underset{+p}{<} v$ et $\Gamma(u) = \Gamma(v)$ pour $u, v \in O(\Gamma)$), qui ne peuvent donc pas représenter des calculs effectifs.

*Définition 4.2*

i) Soit $\Gamma \in Al(FUP)$

On définit sur $O(\Gamma)$ une relation $\ell$ par :

$$\ell(u, v) \iff \begin{cases} v = uiv' \text{ où } i \in \{1, 2\} \text{ et } v' \in \{1, 2\}^* \\ \text{et} \\ \Gamma(u) = \Gamma(v). \end{cases}$$

i.e. $\ell(u, v) \iff u \underset{+p}{<} v$ et $\Gamma(u) = \Gamma(v)$.

ii) Soit $\underset{L}{\rightarrow}$ la réduction sur $Al(FUP)$ définie par :

$\Gamma, \Gamma' \in Al(FUP)$

$$\Gamma \underset{L}{\rightarrow} \Gamma' \iff \begin{cases} \exists\, u, v \in O(\Gamma) \text{ tel que :} \\ \ell(u, v) \text{ et } \Gamma' = \Gamma[v \leftarrow \Gamma vi]. \end{cases}$$

Exemple 4.1

Soit $\alpha \in P_F$ ; $a, b, c \in Col(F)$

et soit $\Gamma = [[a, b]\alpha, c]\alpha$

alors on a $\ell(\varepsilon, 0)$ avec $i = 0$

donc $\Gamma \underset{L}{\rightarrow} \Gamma' = \Gamma[0 \leftarrow \Gamma_{oo}] = [a, c]\alpha$.

*Lemme 4.1*

Soit $\Gamma, \Gamma' \in Al(FUP)$

$$\Gamma \overset{*}{\underset{L}{\rightarrow}} \Gamma' \Rightarrow \Gamma \underset{Sem}{\equiv} \Gamma'.$$

Preuve

Récurrence sur la longueur, d, de la réduction

i) $d = 0 \Rightarrow \Gamma = \Gamma' \Rightarrow \Gamma \underset{Sem}{\equiv} \Gamma'$.

ii) $d > 0$

$$\Gamma \underset{L}{\rightarrow} \Gamma'' \overset{d-1}{\underset{L}{\rightarrow}} \Gamma'$$

$\Gamma \underset{L}{\rightarrow} \Gamma'' \Leftrightarrow \exists\, u, v \in O(\Gamma)$ tel que $v = uiv'$ avec $i \in \{1,2\}$, $v' \in \{1,2\}^*$,

$\Gamma(u) = \Gamma(v)$ et $\Gamma'' = \Gamma[v \leftarrow \Gamma_{vi}]$.

La réduction ne modifie que la sous-alternative de racine v : $(\Gamma_{vi})$.

L'équivalence sémantique $\underset{Sem}{\equiv}$ étant une congruence sur Al(FUP), il suffit de montrer que $\Gamma_v \underset{Sem}{\equiv} (\Gamma''_v = \Gamma_{vi})$.

Soit $(I, I', \nu)$ une interprétation (de FUPUV).

- $i = 0$, si $\Gamma(u) * \nu =$ vrai alors $\Gamma(v) * \nu =$ vrai

  d'où : $\Gamma_v * \nu = [\Gamma v0, \Gamma v1]\ \Gamma(v) * \nu = \Gamma v0 * \nu$

  donc $\Gamma_v \underset{Sem}{\equiv} \Gamma v0$.

  si $\Gamma(v) * \nu =$ faux alors :

  $\Gamma u * \nu = [\Gamma u0, \Gamma u1]\ \Gamma(u) * \nu = \Gamma u1 * \nu$.

  et $\Gamma_v$ ne peut être atteinte dans ce cas.

  si $\Gamma(u) * \nu = \perp$ alors $\Gamma_u * \nu = \perp$

  et $\Gamma_v$ n'est pas atteinte.

- $i = 1$ cas similaire à $(i = 0)$ :

  avec $\Gamma(u) * \nu =$ faux $\Rightarrow \Gamma_v \underset{Sem}{\equiv} \Gamma v1$.

  dans les autres cas $\Gamma_v$ n'est pas atteinte.

  donc $\Gamma_v \underset{Sem}{\equiv} \Gamma''vi \Rightarrow \Gamma \equiv \Gamma''$

et d'après l'hypothèse de récurrence $\Gamma'' \underset{Sem}{\equiv} \Gamma'$

d'où : $\Gamma \underset{Sem}{\equiv} \Gamma'$.

□

*Lemme 4.2*

$\underset{L}{\rightarrow}$ est nothérienne.

Preuve

Remarquons que :

$$\Gamma \underset{L}{\rightarrow} \Gamma' \Rightarrow card(O(\Gamma')) \leq card(O(\Gamma))-1.$$

(i.e. : une L-réduction supprime au moins une occurrence d'un élément de $P_F$ dans $\Gamma$).

Donc il ne peut exister de chaîne infinie

$$\Gamma^1 \underset{L}{\rightarrow} \Gamma^2 \underset{L}{\rightarrow} \cdots \underset{L}{\rightarrow} \Gamma^n \underset{L}{\rightarrow} \cdots,$$ puisque card(O(Γ)) est fini.

*Lemme 4.3*

$\underset{L}{\rightarrow}$ est localement confluente.

Notation :

$\Gamma$, $\Gamma' \cup Al(FUP)$

$\Gamma \xrightarrow[L]{(u,v)} \Gamma'$ indique que le couple $(u, v) \in O(\Gamma)^2$ détermine la réduction de $\Gamma$ en $\Gamma'$ par $\underset{L}{\rightarrow}$.

Preuve

$$\begin{tikzcd} & \Gamma \arrow[dl, dotted, "(u{,}v)"', "L"] \arrow[dr, "(u'{,}v')", "L"'] & \\ \Gamma' \arrow[dr, dashed, "?\ *"', "L"] & & \Gamma'' \arrow[dl, dashed, "*", "L"'] \\ & \Gamma''' & \end{tikzcd}$$

avec $v = ui\ v_1$

$v' = u'j\ v'_1$

<u>Cas 1</u> : u et v' incomparables par $\leq_p$.

<u>Exemple</u> : $\alpha$, $\beta \in \mathcal{P}_F$, a, b, c, d, e, f $\in$ Col(F)

```
            β                                      β
          /   \           (u,v)                  /   \
       uα       αu'         →                  α       αu'
      / \       / \v'       L                 / \      / \v'
    vα   c     d   α                         a   c    d   α
    / \            / \                                   / \
   a   b          e   f                                 e   f

 (u',v') ↓ L                                      L ↓ (u',v')

            β                                      β
          /   \                                  /   \
         α     α          (u,v)                 α     α
        / \   / \           →                  / \   / \
       α   c d   f          L                 a   c d   f
      / \
     a   b
```

Les réductions $\underset{L}{\overset{(u,v)}{\to}}$ et $\underset{L}{\overset{(u',v')}{\to}}$ sont indépendantes

et donc :

$$\Gamma' \underset{L}{\overset{(u',v')}{\to}} \Gamma''' \qquad \underline{\text{et}} \qquad \Gamma''' = \Gamma^{(4)}$$

$$\Gamma'' \underset{L}{\overset{(u,v)}{\to}} \Gamma^{(4)}$$

□

<u>Cas 2</u> : u et u' comparables par $\leq_p$

On suppose u $\leq_p$ u',(l'autre cas étant symétrique)

<u>Cas 2.1</u> : u = u'

$\Gamma' = \Gamma[v \leftarrow \Gamma v_i]$

$\Gamma'' = \Gamma[v' \leftarrow \Gamma v'_,]$ .

<u>Cas 2.1.1</u> : i $\neq$ j (v et v' incomparables)

<u>Exemple</u> $\alpha \in \mathcal{P}_F$, a, b, c, d $\in$ Col(F)

```
       u                                       u
        α                                     α
      /   \              (u,v)              /   \
  v         v'             →               a      v'
   α       α               L                     α
  / \      / \                                   / \
 a   b    c   d                                 c   d

(u,v') ↓ L                                  L ↓ (u,v')

       u
        α                                      α
      /   \              (u,v)               /   \
  v         d              →                a     d
   α                       L
  / \
 a   b
```

Les réductions $\xrightarrow[L]{(u,v)}$ et $\xrightarrow[L]{(u,v')}$ étant indépendantes

et donc

$$\begin{array}{lll} \Gamma' \xrightarrow[L]{(u,v')} \Gamma''' & & \\ & & \text{et } \Gamma''' = \Gamma^{(4)} \\ \Gamma'' \xrightarrow[L]{(u,v)} \Gamma^{(4)} & & \end{array}$$

□

<u>Cas 2.1.2</u> $i = j$

. <u>si</u> $v = v'$ <u>alors</u> $\Gamma' = \Gamma'' = \Gamma'''$.

<u>sinon</u> supposons $v \underset{+}{<}^{P} v'$ <u>avec</u> $v' = vk\, v''$

(l'autre cas étant symétrique).

<u>Cas 2.1.2.1</u> : $i \neq k$

<u>Exemple</u> : $\alpha \in \mathcal{P}_F$, $a, b, c, d \in \mathrm{Col}(F)$

```
     u
      α                                     α
    /   \              (u,v)              /   \
  v       d              →               a     a
   α                     L
  / \
 a   α v'
    / \
   b   c
(u,v') ↓ L                  (u,v)
     u                        ↗
      α                      L
    /   \
  v       d
   α
  / \
 a   b
```

Montrons que $\Gamma'' \underset{L}{\overset{(u,v)}{\rightarrow}} \Gamma'$ (= $\Gamma'''$)

En effet :

puisque $i = j \neq k$ et $v \lneq_{+p} v'$

$\Gamma vi$ n'est pas modifiée par la réduction $\underset{L}{\overset{(u,v')}{\rightarrow}}$

$\Gamma vk$ est "supprimée" par la réduction $\underset{L}{\overset{(u,v)}{\rightarrow}}$

donc :

$(\Gamma[v' \leftarrow \Gamma v'i])\ [v \leftarrow \Gamma vi] = \Gamma[v \leftarrow \Gamma vi] = \Gamma'$.

$\square$

Cas 2.1.2.2 : $i = k$

Exemple : $\alpha \in P_F$, a, b, c, d $\in$ COl(F)

```
            uα                                        uα
           /  \              (u,v)                  /    \
        vα      d              →            vv"α          a
       /  \                    L               /  \
    v'α    c                                  a    b
     /  \
    a    b

 (u,v') ↓ L                                     L ↓ (u, vv")

        uα                                            α
       /  \                                          /  \
     vα    d                 (u,v)                  a    d
    /  \                       →
   a    c                      L
```

soit $\Gamma'' \underset{L}{\overset{(u,v)}{\rightarrow}} \Gamma'''$

$\Gamma' \underset{L}{\overset{(u,vv'')}{\rightarrow}} \Gamma^{(4)}$

Montrons que $\Gamma''' = \Gamma^{(4)}$.

En effet :

la sous-alternative de $\Gamma$ "concernée" par les réductions est $\Gamma v$.

Il suffit donc de montrer que $\Gamma''' v = \Gamma^{(4)} v$.

Considérons les transformations de $\Gamma_v$ à travers les différents réductions :

. $(\Gamma_v) \underset{L}{\overset{(u,v)}{\to}} (\Gamma vi) \underset{L}{\overset{(u,vv'')}{\to}} ((\Gamma vi)\ [v'' \leftarrow \Gamma' vv''i])$

or $\Gamma' vv''i = \Gamma v'i$

. $(\Gamma_v) \underset{L}{\overset{(u,v')}{\to}} ((\Gamma_v)\ [iv'' \leftarrow \Gamma v'i]) \underset{L}{\overset{(u,v)}{\to}} ((\Gamma vi)\ [v'' \leftarrow \Gamma v'i])$.

$\square$

<u>Cas 2.2</u> $u \underset{+p}{<} u'$ avec $u' = uku''$

(l'autre cas étant symétrique)

<u>Cas 2.2.1</u> : $i \neq k$

<u>Exemple</u> $\alpha, \beta \in P_F$, a, b, c, d, e $\in$ Col(F)

```
           u                                          α
  (k)    α   (i)                                    /   \
u'   /     \     v            (u,v)            u'  β       e
   β  (j)       α               →                 / \  v'
  / \          / \              L                a   β
 a   β v'     d   e                                 / \
    / \                                            b   c
   b   c

      (u',v') ↓ L                              L ↓ (u',v')

           u                                          α
         α                                          /   \
       /   \     v            (u,v)                β     e
      β         α               →                 / \
     / \       / \              L                a   c
    a   c     d   e
```

Les réduction $\underset{L}{\overset{(u,v)}{\to}}$ et $\underset{L}{\overset{(u',v')}{\to}}$ étant indépendantes (v et v' incomparables)

$\Gamma' \underset{L}{\overset{u',v'}{\to}} \Gamma'''$, $\Gamma'' \underset{L}{\overset{(u,v)}{\to}} \Gamma^{(4)}$ <u>et</u> $\Gamma''' = \Gamma^{(4)}$.

$\square$

<u>Cas 2.2.2</u> $i = k$

<u>Cas 2.2.2.1</u> v et v' incomparables par $\leq_p$

<u>Exemple</u> : $\alpha, \beta \in P_F$, a, b, c, d, e $\in$ Col(F)

```
         u                                          u
          α                                          α
   v'   /   \              (u,v)            u'    /   \
     β          e            →                β           e
 v' / \                      L            v' / \
   β   αu                                   β   c
  / \ / \                                  / \
  a b c d                                 a   b
```

$(u',v') ⤈ L$ $\qquad\qquad$ $L ⤈ (u',v')$

```
      u                                      α
       α                                   /   \
  u' /   \              (u,v)             β       e
    β       e             →              / \
   / \                    L             a   c
  a   α v
     / \
    c   d
```

Les réductions $\underset{L}{\overset{(u,v)}{\rightarrow}}$ et $\underset{L}{\overset{(u',v')}{\rightarrow}}$ étant indépendantes d'où

$$\begin{array}{ll} \Gamma' \underset{L}{\overset{(u',v')}{\rightarrow}} \Gamma''' & \\ & \underline{\text{et}}\ \Gamma''' = \Gamma^{(4)} \\ \Gamma'' \underset{L}{\overset{(u,v)}{\rightarrow}} \Gamma^{(4)} & \end{array}$$

$\square$

<u>Cas 2.2.2.2</u> v et v' comparables.

<u>Si</u> $v = v'$ <u>alors</u> <u>si</u> $i = j$ <u>alors</u> $\Gamma' = \Gamma''$

<u>sinon</u> $\Gamma' \underset{L}{\overset{(u,u')}{\rightarrow}} \Gamma'''$

$\Gamma'' \underset{L}{\overset{(v,v')}{\rightarrow}} \Gamma^{(4)}$ <u>et</u> $\Gamma''' = \Gamma^{(4)}$.

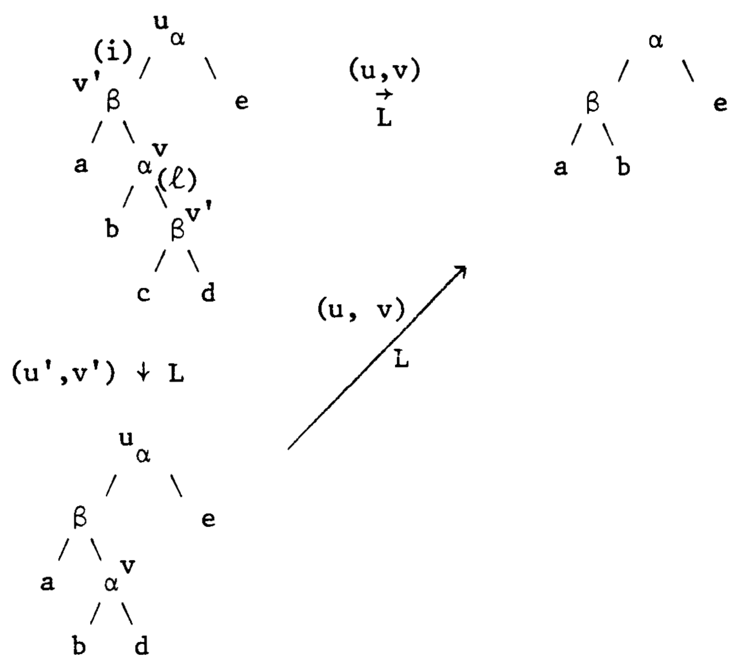
<u>Sinon</u> supposons $v \leq_p v'$ (l'autre cas étant symétrique) avec $v' = v\ell v''$ $\ell \in \{1,2\}$.

<u>Cas 2.2.2.2.1</u> $i \neq \ell$

La réduction $\underset{L}{\overset{(u,v)}{\rightarrow}}$ supprime l'inconsistance au niveau de v'.

Et on a : $\Gamma'' \underset{L}{\overset{(u,v)}{\rightarrow}} \Gamma' = (\Gamma''')$

<u>Exemple</u> = $\alpha$, $\beta \in \mathcal{P}_F$, a, b, c, d, e $\in$ Col(F).




<u>Cas 2.2.2.2.2.</u> : i = $\ell$

Soit $\Gamma'' \overset{(u,v)}{\underset{L}{\rightarrow}} \Gamma'''$

<u>et</u> : <u>si</u> $u' = v\,m\,u'_1$ . $(v \leq_{+p} u')$

<u>alors</u> $\Gamma' \xrightarrow[L]{vu'_1,\ vv''} \Gamma^{(4)}$

<u>sinon</u> $(u' \leq_{+} v)$

$\Gamma' \overset{u',vv''}{\underset{L}{\rightarrow}} \Gamma^{(4)}$

on a : $\Gamma''' = \Gamma^{(4)}$

<u>Exemple</u> : $\alpha$, $\beta \in \mathcal{P}_F$, a, b, c, d, e $\in$ Col(F)

i)

```
            uα                                    uα
           /  \           (u,v)                  /  \
        vα      e           →          vu'1β       e
        / \                 L           / \
    u'β    d                       vv"β    c
     / \                            / \
  v'β   c                          a   b
   / \
  a   b

  (u',v') ↓ L                         L ↓ (vu'1, vv")

          uα                                  α
         /  \                                / \
      vα      e           (u,v)            β     e
      / \                   →             / \
    β    d                  L            a   c
   / \
  a   c
```

ii)

```
            uα                                  α
           /  \           (u,v)                / \
       u'β      e           →                β     e
        / \                 L               / \
     vα    d                               β   d
     / \                                  / \
  v'β   c                                a   b
   / \
  a   b

  (u',v') ↓ L                         L ↓ (u',vv")

           α                                  α
          / \             (u,v)              / \
        β     e             →              β     e
       / \                  L             / \
      α   d                              a   d
     / \
    a   c
```

□

*Lemme 4.4*

A toute alternative on peut associer un $\underset{L}{\rightarrow}$ -forme normale.



Preuve

Récurrence sur Card $(O(\Gamma))$ $\Gamma \in Al(FUP)$.

. $Card(O(\Gamma)) = 0 \Rightarrow \Gamma$ est en $\underset{L}{\rightarrow}$ -forme normale.

. $Card(O(\Gamma)) > 0$.

<u>si</u> $\Gamma$ n'est pas en $\underset{L}{\rightarrow}$ -forme normale

<u>alors</u> il existe $(u, v) \in O(\Gamma)^2$ tel que $\ell(u, v)$

et soit $\Gamma \overset{(u,v)}{\underset{L}{\rightarrow}} \Gamma'$

<u>or</u> Card $(O(\Gamma')) \leq Card(O(\Gamma)) - 1$

d'après l'hypothèse de récurrence, à $\Gamma'$ on peut associer une $\underset{L}{\rightarrow}$ -forme normale $\Gamma''$. $(\Gamma' \overset{*}{\underset{L}{\rightarrow}} \Gamma'')$.

donc $\Gamma''$ est une L-forme normale de $\Gamma$.

Remarquons que puisque card$(O(\Gamma))$ est fini, une $\underset{L}{\rightarrow}$ -forme normale de $\Gamma$ est obtenue en un nombre fini de réductions.

□

<u>*Proposition 4.1*</u>

i) La réduction $\underset{L}{\rightarrow}$ sur Al(FUP) est confluente (module l'équivalence sémantique : $\underset{Sem}{\equiv}$ ).

ii) A toute alternative on peut associer une alternative libre (unique) (effectivement atteinte) et qui lui est équivalente.

<u>Preuve</u>

La réduction $\underset{L}{\rightarrow}$ est nothérienne (lemme 4.2) et localement confluente (lemme 4.3), donc elle est confluente. Elle est valide dans l'équivalence sémantique (lemme 4.1). Chaque alternative admet une $\underset{L}{\rightarrow}$ -forme normale (lemme 4.4), elle est unique puisque la réduction est confluente, et est équivalente à l'alternative (lemme 4.1).

□

## 5 - FORME ORDONNEE D'UNE ALTERNATIVE

Nous allons définir une forme canonique des alternatives. Etant donné un ordre total < sur les prédicats, il s'agit de donner une forme de l'alternative respectant cet ordre.

Considérons l'alternative non ordonnée :

```
Γ =       α2             (α1 < α2)
         /  \
      α1     c
     /  \
    a    b
```

Si pour toute interprétation $(I, I', \nu)$, $\alpha_1 * \nu \neq \perp$

```
Γ  ≡        α1           = Γ' qui est ordonnée
  Sem     /    \
      α2         α2
     /  \       /  \
    a    c     b    c
```

Mais cette équivalence n'est pas vérifiée si on considère des prédicats avec effet de bord.

En effet si pour une interprétation $(I, I', \nu)$

on a : $\alpha_1 * \nu = \perp_I$ <u>et</u> $\alpha_2 * \nu =$ faux

alors $\Gamma * \nu = c$ <u>et</u> $\Gamma' * \nu = \perp_I$.

Se plaçant dans ce cas, il nous faut associer à une altertive une forme ordonnée qui lui soit équivalente : il faut limiter la possibilité d'interversion de prédicats de manière à conserver l'équivalence sémantique.

### *Définition 5.1*

Supposons que les ensembles F, P et V soient munis d'ordres totaux qu'on notera indistinctement <.

i) Soit $\delta : M(F, V) \to (FUV)^*$ l'application donnée par :

- <u>si</u> $t \in F_o UV$ <u>alors</u> $\delta(F) = t$
- <u>si</u> $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ avec $f \in F_n$ <u>et</u> $t_i (i = 1,\ldots,n) \in M(F,V)$ <u>alors</u> $\delta(t) = f\delta(t_1) \ldots \delta(t_n)$.

ii) Soit $\bar{\delta} : P_F \to P(FUV)^*$ l'application donnée par :

. __si__ $\alpha \in P_o$ __alors__ $\bar{\delta}(\alpha) = \alpha$

. __si__ $\alpha = p(t_1, \ldots, t_n)$ __avec__ $p \in P_1$, $t_i (i = 1, \ldots, n) \in M(F, V)$

__alors__ $\bar{\delta}(\alpha) = p\delta(t_1) \ldots \delta(t_n)$.

Les ordres totaux sur P, F, V génèrent sur $P(FUV)^*$ un ordre lexicographique qu'on note <<.

Ce qui permet de définir sur $P_F$ un ordre total, noté $<_{\ell ex}$,

par : $\alpha, \beta \in P_F \quad \alpha <_{\ell_{ex}} \beta \Leftrightarrow \bar{\delta}(\alpha) << \bar{\delta}(\beta)$.

*Définition 5.2*

Soit $\Gamma \in Al(FUP)$, on note $\bar{M}(\Gamma)$ l'ensemble des feuilles de $\Gamma$.

Soit $\alpha \in P_F$.

On dit que $\alpha$ "*couvre*" $\Gamma$ si,

$\forall m \in \bar{M}(F), \exists m' \in dom(\Gamma) \mid m' \leq_{+p} m$ __et__ $\Gamma(M') = \alpha$.

l'ensemble des prédicats couvrant $\Gamma$ est noté $Pc(\Gamma)$.

*Définition 5.3*

Une alternative libre $\Gamma$ est dite ordonnée ssi

$\forall u, v \in O(\Gamma)$ $[u \leq_{+p} v$ __et__ $\Gamma(v) \in Pc(\Gamma)] \Rightarrow \Gamma(u) <_{\ell ex} \Gamma(v)$.

__Notations__

Pour $\Gamma \in Al(FUP)$, on note $\alpha_\Gamma$, l'élément minimum pour l'ordre lexicographique $<_{lex}$, de $Pc(\Gamma)$.

L'ensemble des occurrences de $\alpha_\Gamma$ dans $\Gamma$ est noté

$$occ(\alpha_\Gamma, \Gamma) = \{0^1_\Gamma, \ldots, 0^n_\Gamma, \ldots\} \text{ tel que :}$$

$$i < j \Rightarrow 0^i_\Gamma <<_{lex} 0^j_\Gamma$$ où $<<_{lex}$ est l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^*$ généré par l'odre naturel sur $\mathbb{N}$.

Exemple 5.1

Soit $\alpha$, $\beta$, $\gamma \in P_F$ tel que $\alpha <_{lex} \beta <_{lex} \gamma$.

et a, b, c, d, e $\in$ Col(F)

i) l'alternative :

```
Γ =      β            est ordonnée
        / \
       α   c
      / \
     a   b
```

ii) l'alternative :

```
Γ' =     β            n'est pas ordonnée
       /   \
      α     α
     / \   / \
    a   γ d   c
       / \
      b   c
```

car : $Pc(\Gamma') = \{\beta, \alpha\}$ $\quad \alpha_{\Gamma'} = \alpha$

$0^1_{\Gamma'} = 1$, $0^2_{\Gamma'} = 2$

et $\varepsilon <_p 1$ et $\Gamma(\varepsilon) = \beta \not<_{lex} \Gamma(1) = \alpha$.

*Proposition 5.1*

Une alternative libre $\Gamma$ est ordonnée ssi

$\forall\, m \in O(\Gamma) \qquad \Gamma(m) = \alpha_{\Gamma m}$.

Preuve

i) Supposons $\Gamma$ ordonnée

Soit $u \in O(\Gamma)$ $\;\forall\, v \in Pc(\Gamma_u)$ $\; u \leq_p v$

donc $\Gamma(u) <_{lex} \Gamma(v)$

ii) Supposons que $\Gamma$ vérifie la propriété

Soit $u, v \in O(\Gamma)$ tel que $u \leq_p v$ et $\Gamma(v) \in Pc(\Gamma u)$.

or $\Gamma(u) = \alpha_{\Gamma u} = \inf_{lex} \{\alpha \in P_F,\ \alpha \text{ couvre } \Gamma_u\}$.

donc : $\Gamma(u) <_{lex} \Gamma(v)$.

□

*Définition 5.4*

i) Soit $\Gamma \in Al(FUP)$, $\Gamma$ libre, $m \in O(\Gamma)$

$\Gamma$ est dite *"ordonnée en m"* si $\Gamma(m) = \alpha_{\Gamma m}$.

ii) Soit $\underset{o}{\rightarrow}$ la réduction définie sur les alternatives libres par :

$\Gamma, \Gamma' \in Al(FUP)$, $\Gamma$ libre,

$\Gamma \underset{o}{\rightarrow} \Gamma' \iff \exists\, m \in O(\Gamma)$, $\Gamma$ non ordonnée en m.

et $\Gamma' = \Gamma[m \longleftarrow \alpha_{\Gamma m}$ $]$

$\Gamma m[O^i_{\Gamma m} \leftarrow \Gamma_m O^i_{\Gamma m} 1 \; ; \; i = 1,\dots,N] \quad \Gamma m[O^i_{\Gamma m} \leftarrow \Gamma_m O^i_{\Gamma m} 2 \; ; \; i = 1,\dots,N]$

où $N = card(occ(\alpha_{\Gamma m}, \Gamma_m))$.

Remarque

Le fait que $\Gamma$ soit libre assure que les substitutions

$$\Gamma_m[O^i_{\Gamma m} \leftarrow \Gamma_m O^i_{\Gamma m} j \; ; \; i = 1, \dots, N], \text{ où } j = 1, 2,$$

soient définies. En effet : $\Gamma$ libre $\Rightarrow$ les $O^i_{\Gamma m}$ sont incomparables par $\leq_p$.

Exemple 5.2

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in P_F$ avec $\alpha <_{lex} \beta <_{lex} \gamma$.

et $a, b, c, d, e \in Col(F)$

```
i) Γ =          β                              α          = Γ'
               / \           (ξ)              / \
              α   α           →              β   β
             / \ / \          o             / \ / \
            a  b c  d                      a  c b  d
```

où $\alpha_\Gamma = \alpha$ $\quad O^1_\Gamma = 1$, $O^2_\Gamma = 2$

ii)

```
          γ
         / \
Γ =     β   e          Γ est ordonnée en (ε)
       / \
      α   α            Γ n'est pas ordonnée en (1)
     / \ / \
    a  b c  d
```

```
Γ (1)
  →
  o          γ    = Γ'
            / \
           α   e          Γ' est ordonné
          / \
         β   β
        / \ / \
        a c b d
```

Remarque

La réduction $\underset{o}{\rightarrow}$ conserve la liberté :

(i.e. : $\Gamma$ libre, $\Gamma \overset{(m)}{\underset{o}{\rightarrow}} \Gamma'$, $\Gamma'$ est libre)

en effet : la non liberté ne peut provenir que du placement de $\alpha_{\Gamma m}$ à la racine de la sous-alternative $\Gamma'_m$.

or : $occ(\alpha_{\Gamma m}, \Gamma'_m) = \{\varepsilon\}$ ..

*Lemme 5.1*

Soit $\Gamma \in Al(FUP)$, libre.

$\Gamma \overset{*}{\underset{o}{\rightarrow}} \Gamma' \Rightarrow \Gamma \underset{Sem}{\equiv} \Gamma'$.

Preuve

Par récurrence sur la longueur, $\ell$, de la réduction.

. $\ell = 0 \Rightarrow \Gamma = \Gamma' \Rightarrow \Gamma \underset{Sem}{\equiv} \Gamma'$.

. $\ell > 0$

$$\Gamma \underset{o}{\rightarrow} \Gamma'' \overset{\ell-1}{\underset{o}{\rightarrow}} \Gamma'$$

si $\Gamma \underset{Sem}{\equiv} \Gamma''$ alors d'après l'hypothèse de récurrence $\Gamma'' \underset{Sem}{\equiv} \Gamma'$

d'où $\Gamma \underset{Sem}{\equiv} \Gamma'$.

Démontrons donc que $\Gamma \underset{\text{Sem}}{\equiv} \Gamma''$

Supposons que : $\Gamma \overset{(m)}{\underset{o}{\rightarrow}} \Gamma''$

L'équivalence $\underset{\text{Sem}}{\equiv}$ étant une congruence, il suffit de montrer que $\Gamma_m \underset{\text{Sem}}{\equiv} \Gamma''_m$.

Soit $X_1, \ldots, X_p, \ldots$ des symboles d'alternatives.

<u>et</u> card $(occ(\alpha_{\Gamma m}, \Gamma_m)) = N$

Posons $u = \Gamma_m[O^i_{\Gamma m} \leftarrow X_i \quad i = 1, \ldots, N]$.

<u>alors</u> :

$$\Gamma_m \;=\; u[X_i \mid \quad \alpha_{\Gamma m} \quad ; \quad i = 1, \ldots, N]$$

$$\Gamma m O^i_{\Gamma_m} 1 \qquad\qquad \Gamma m O^i_{\Gamma_m} 2$$

<u>et</u>

$$\Gamma''_m = \qquad \alpha_{\Gamma m}$$

$$u[X_i \mid \Gamma m O^i_{\Gamma_m} 1;\ i=1,\ldots,N] \qquad u[X_i \mid \Gamma m O^i_{\Gamma_m} 2;\ i=1,\ldots,N]$$

Soit $(I, I', \nu)$ une interprétation

- <u>Si</u> $u * \nu = \perp_I$ <u>alors</u> $\Gamma_m * \nu = \Gamma''_m * \nu = \perp_I$
- <u>si</u> $u * \nu \neq \perp_I$, supposons $u * \nu = X_i * \nu$.

  <u>alors</u> <u>si</u> $\alpha_{\Gamma m} * \nu = \perp$ <u>alors</u>

  $\Gamma_m * \nu = \Gamma''_m * \nu = \perp_I$

  <u>sinon</u> <u>si</u> $\alpha_{\Gamma m} * \nu =$ vrai

  <u>alors</u> $\Gamma_m * \nu = X_i * \nu = (\Gamma m\ O^i_{\Gamma_m} 1) * \nu$

  <u>et</u> $\Gamma''_m * \nu = u * \nu = X_i * \nu = (\Gamma m\ O^i_{\Gamma_m} 1) * \nu$

le raisonnement est similaire pour $\alpha_{\Gamma m} * \nu =$ faux.

□

*Lemme 5.2*

La réduction $\underset{o}{\rightarrow}$ est nothérienne.

Preuve

Posons : pour $\Gamma \in Al(FUP)$, libre

$N_\Gamma = card(\{\Gamma(m) \mid m \in O(\Gamma)\})$

et $\bar{N}_\Gamma = 1.2^o + 2.2^1 + \ldots + (N_\Gamma-1).2^{(N-2)}$

le nombre de réductions possibles, à partir de $\Gamma$, est majoré par $\bar{N}_\Gamma$.

et $\Gamma \underset{o}{\rightarrow} \Gamma' \Rightarrow \bar{N}_{\Gamma'} < \bar{N}_\Gamma$.

$\bar{N}_\Gamma$ étant fini, il ne peut exister de chaîne infinie telle que

$\Gamma^o \underset{o}{\rightarrow} \Gamma^1 \underset{o}{\rightarrow} \Gamma^2 \underset{o}{\rightarrow} \ldots \underset{o}{\rightarrow} \Gamma^2 \underset{o}{\rightarrow} \ldots$ .

□

*Lemme 5.3*

La réduction $\underset{o}{\rightarrow}$ est localement confluente.

Preuve

Supposons

$$\Gamma \overset{(m)}{\underset{o}{\rightarrow}} \Gamma' \text{ et } \Gamma \overset{(n)}{\underset{o}{\rightarrow}} \Gamma''.$$

Cas 1 : m et n incomparables par $\leq_p$

alors : $\Gamma' \overset{(n)}{\rightarrow} \Gamma'''$ et $\Gamma'' \overset{(m)}{\rightarrow} \Gamma'''$.

Cas 2 : m et n comparables par $\leq_p$

Cas 2.1 : m = n,

alors : $\Gamma' = \Gamma''$

Cas 2.2 : $m \underset{+p}{<} n$

On ne peut avoir $\alpha_{\Gamma m} = \Gamma(m)$ sinon $\Gamma$ serait ordonnée en n.

donc : $\alpha_{\Gamma m} \neq \Gamma(n)$

Soit $N = card(occ(\alpha_{\Gamma m}, \Gamma_m))$

<u>Cas 2.2.1</u>

$\exists$ j tel que $m <_{+p} m\, 0^j_{\Gamma m} <_{+p} n$.

j est nécessairement unique.

Soit $n = m\, 0^j_{\Gamma m}\, k\, u$ où $k \in \{1, 2\}$.

Posons $\bar{n} = m\, k\, 0^j_{\Gamma m}\, u$

<u>alors</u> :

<u>Si</u> $\Gamma' \overset{(\bar{n})}{\underset{o}{\rightarrow}} \Gamma'''$

$\Gamma'' \overset{(m)}{\underset{o}{\rightarrow}} \Gamma^{(4)}$ , $\Gamma''' = \Gamma^{(4)}$.

En effet la réduction $\Gamma \overset{(m)}{\underset{o}{\rightarrow}} \Gamma'$ ne "modifie" pas $\Gamma_n$

et $\Gamma'_n = \Gamma_n$.

De même la réduction $\Gamma \overset{(n)}{\underset{o}{\rightarrow}} \Gamma''$ n'"influe" pas sur la réduction $\overset{(m)}{\underset{o}{\rightarrow}}$ puisque

$\alpha_{\Gamma m} \neq \Gamma(n)$

<u>et</u> $m\, 0^j_{\Gamma m} <_{+p} n$.

<u>Exemple</u> :

Soit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in P_F$ avec $\alpha <_{lex} \beta <_{lex} \gamma <_{lex} \delta$.

<u>et</u> a, b, c, d, e, f, g $\in$ Col(F)

Soit : $\Gamma$ =

```
              β
            /   \
          α       α
         / \     / \
        δ   e   f   g
       / \
      γ   α
     / \ / \
    a  b c  d
```

avec : $m = \varepsilon$ <u>et</u> $n = 11$

d'où = $Pc(\Gamma_m) = \{\alpha, \beta\}$ $\alpha_{\Gamma m} = \alpha$

$0^1_{\Gamma m} = 1$, $0^2_{\Gamma m} = 2$.

$Pc(\Gamma_n) = \{\delta, \gamma\}$ $\alpha_{\Gamma n} = \gamma$

$0^1_{\Gamma n} = 1$ $0^2_{\Gamma n} = 2$

$\bar{n} = 11$

```
Γ (ε)          α                                11                  α                 = Γ'''
  →o          / \                               →                  / \
             β     β                                              β     β
            / \   / \                                            / \   / \
           δ   f e   g                                          γ   f e   g
          /  \                                                 /  \
         γ    γ                                               δ    δ
        / \  / \                                             / \  / \
       a   b c  d                                           a   c b  d
```

<u>et</u>

```
Γ(11)          β                      (ε) Γ'''
  →o          / \                      →
             α     α
            / \   / \
           γ   e f   g
          /  \
         δ    δ
        / \  / \
       a   c b  d
```

<u>Cas 2.2.2</u> $\exists\ i_1, \ldots, i_j \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_j \leq N$

avec : $m \underset{+p}{<} n \underset{+p}{<} m\ O^{i_k}_{\Gamma m} \quad k = 1, \ldots, j$

<u>alors</u> $\alpha_{\Gamma m} = \alpha_{\Gamma n}$

<u>et</u> $\Gamma'' \overset{(m)}{\rightarrow} \Gamma'$.

avec : $O^{i}_{\Gamma'' m} = \begin{cases} O^{i}_{\Gamma m} & \underline{\text{si}}\ \ i < i_1 \\ n & \underline{\text{si}}\ \ i_1 \leq i \leq i_n \\ O^{i_j + k}_{\Gamma m} & \underline{\text{si}}\ \ i = (N-j) + k \end{cases}$

<u>Exemple</u>

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{P}_F$ avec $\alpha <_{lex} \beta <_{lex} \gamma$

<u>et</u> $a, b, c, d, e, f \in Col(F)$

Soit

```
Γ =          β
            / \
          α     γ
         / \   / \
        a   b α   α
             / \ / \
             c d e f
```

<u>et</u> $m = \varepsilon$ <u>et</u> $n = 2$

d'où : . $Pc(\Gamma m) = \{\alpha, \beta\}$, $\alpha_{\Gamma m} = \alpha$

$0^1_{\Gamma m} = 1$, $0^2_{\Gamma m} = 21$, $0^3_{\Gamma m} = 22$

. $Pc(\Gamma n) = \{\gamma, \alpha\}$, $\alpha_{\Gamma n} = \alpha$

$0^1_{\Gamma n} = 1$, $0^2_{\Gamma n} = 2$.

```
Γ (ε)→o        α           = Γ'
              / \
            β     β
           / \   / \
          a   γ b   γ
             / \   / \
            c   e d   f
```

et :

```
Γ (2)→o        β              (ε)→o          α         = Γ'
              / \                           / \
            α     α                       β     β
           / \   / \                     / \   / \
          a   b γ   γ                   a   γ b   γ
               / \ / \                     / \   / \
               c e d f                    c   d d   f
```

□

*Définition 5.5*

i) La réduction $\underset{o}{\rightarrow}$ est dite "standard" <u>si</u>

$\Gamma \overset{(m)}{\underset{o}{\rightarrow}} \Gamma' \Rightarrow m = \inf_{lex} \{n \in O(\Gamma) \mid \Gamma \text{ non ordonnée en } n\}$.

Elle est notée : $\underset{os}{\rightarrow}$

ii) Soit $\{m_1, \ldots, m_N\}$ l'ensemble des éléments minimaux pour l'ordre préfixiel ($<_p$) des éléments de $O(\Gamma)$ tel que $\Gamma$ soit non ordonnée en ces éléments, on le note $md(\Gamma)$.

Posons : $bo(\Gamma) = \Gamma[m_1 \leftarrow Eo, \ldots, m_N \leftarrow Eo]$.

<u>Remarque</u>

Si $\Gamma$ est ordonnée on a $= md(\Gamma) = \emptyset$ <u>et</u> $bo(\Gamma) = \Gamma$.

*Lemme 5.4*

Soit $\Gamma \in Al(FUP)$, libre et $\Gamma$ non ordonnée

alors il existe N(fini) tel que $\Gamma \overset{N}{\underset{OS}{\rightarrow}} \Gamma'$ et $\Gamma'$ en $\underset{o}{\rightarrow}$ -forme normale.

Preuve

$\left.\begin{array}{l}\Gamma \text{ non ordonnée} \\ \Gamma \underset{OS}{\rightarrow} \Gamma^1\end{array}\right\} \Rightarrow card(O(bo(\Gamma^1))) \geq card(O(bo(\Gamma)))+1$

or : $\Gamma \overset{*}{\underset{o}{\rightarrow}} \Gamma' \Rightarrow card(O(\Gamma')) = card(O(\Gamma))$

et $card\ O(bo(\Gamma')) \leq card(O(\Gamma'))$

donc puisque $card(O(\Gamma))$ fini,

il existe N(fini) tel que $\Gamma \overset{N}{\underset{OS}{\rightarrow}} \Gamma'$

et $bo(\Gamma') = \Gamma'$.

□

*Proposition 5.2*

i) la réduction $\underset{o}{\rightarrow}$ sur les alternatives libres est confluente (modulo l'équivalence sémantique $\underset{Sem}{\equiv}$ ).

ii) A toute alternative libre on peut associer une alternative libre en $\underset{o}{\rightarrow}$ forme normale (i.e. : ordonnée) unique effectivement atteinte et qui lui est équivalente.

Preuve

Conséquence immédiate des lemmes (5.1), (5.2), (5.3) et (5.4).

□

## 6 - FORME CANONIQUE D'UNE ALTERNATIVE

Considérant des prédicats avec effet de bord, on cherche à définir une sémantique initiale des alternatives.

*Définition 6.1*

i) Soit $\bar{N}$ : Al(FUP) $\rightarrow$ Al(FUP) l'application définie par :

. si $\Gamma \in$ Col(F), $\bar{N}(\Gamma) = N(\Gamma)$ (cf. 1ère partie Ch I Déf 2.3)

. si $\Gamma = [\Gamma_1, \Gamma_2]\alpha$ où $\alpha \in P_F$, $\Gamma_1$, $\Gamma_2 \in$ Al(FUP)

$\bar{N}(\Gamma) = [\bar{N}(\Gamma_1), \bar{N}(\Gamma_2)]\alpha$

ii) Soit $\Gamma \in Al_c$(FUP),

$\Gamma$ est dite en forme canonique si elle est en

$\underset{\cdot}{\rightarrow} \cdot \underset{L}{\rightarrow} \cdot \underset{o}{\rightarrow}$ forme normale et $\bar{N}(\Gamma) = \Gamma$.

*Proposition 6.1*

A toute alternative $\Gamma$ de $Al_c$(FUP), on peut associer une forme canonique (unique), notée $c(\Gamma)$, qui lui est sémantiquement équivalente.

Preuve

Conséquence immédiate des propositions : 3.2, 4.1 et 5.2. et du fait que $\forall\ \Gamma \in$ Al(FUP) $\bar{N}(\Gamma) \underset{Sem}{\equiv} \Gamma$.

$\square$

*Proposition 6.2*

Soit $\Gamma$, $\Gamma' \in Al_c$(FUP)

$\Gamma \underset{Sem}{\equiv} \Gamma' \iff c(\Gamma) = c(\Gamma')$

Preuve

i) $c(\Gamma) = c(\Gamma') \Rightarrow c(\Gamma) \underset{Sem}{\equiv} c(\Gamma') \Rightarrow \Gamma \underset{Sem}{\equiv} \Gamma'$

ii) Il suffit de considérer des alternatives en forme canonique et de montrer que $\Gamma \equiv \Gamma' \Rightarrow \Gamma = \Gamma'$.

Supposons $\Gamma \equiv \Gamma'$ <u>et</u> $\Gamma \neq \Gamma'$.

<u>Cas 1</u> : $\mathrm{dom}(\Gamma) \neq \mathrm{dom}(\Gamma')$

supposons $\exists !\ u \in \mathrm{dom}(\Gamma)$ <u>et</u> $u \notin \mathrm{dom}(\Gamma')$

Soit $w = \sup_{\leq p} \{v \in \mathrm{dom}(\Gamma') \mid \exists\, u \in \{1, 2\}^*,\ u = vu'\}$.

<u>alors</u> $w \in \bar{M}(\Gamma')$ donc $\Gamma'(w) \in \mathrm{Col}(F)$

<u>et</u> $\Gamma(w) \in P_F$

et on ne peut donc avoir pour toute interprétation

$(I, I', \nu)$ $\Gamma_w * \nu = \Gamma'_w * \nu$.

donc $\Gamma \underset{\mathrm{Sem}}{\not\equiv} \Gamma'$.

<u>Cas 2</u> : $\mathrm{dom}(\Gamma) = \mathrm{dom}(\Gamma')$ <u>et</u> $\exists\, u \in \mathrm{dom}(\Gamma)$ tel que $\Gamma(u) \neq \Gamma'(u)$.

<u>si</u> $u \in O(\Gamma)$ <u>alors</u> $\Gamma(u) \neq \Gamma'(u) \Rightarrow \Gamma \underset{\mathrm{Sem}}{\not\equiv} \Gamma'$.

<u>si</u> $u \in \bar{M}(\Gamma)$ <u>alors</u> $\Gamma(u), \Gamma'(u) \in \mathrm{Col}(F)$

Toutes les collatérales apparaissant dans $\Gamma$ ou $\Gamma'$ étant propres donc $\Gamma(u) \neq \Gamma'(u) \Rightarrow \Gamma \underset{\mathrm{Sem}}{\not\equiv} \Gamma'$.

<u>*Définition 6.2*</u>

Soit R une relation sur $Al_c(FUP)$ définie par :

$\Gamma, \Gamma' \in Al_c(FUP)$, $R(\Gamma, \Gamma') \Leftrightarrow c(\Gamma) = c(\Gamma')$.

R est évidemment une congruence sur $Al_c(FUP)$ et on pose $\sigma_{in}(\Gamma) = c(\Gamma)$.

## 7 - <u>CAS DES PREDICATS SANS EFFET DE BORD</u>

Le fait que les prédicats soient sans effet de bord n'influt pas sur les $\underset{\cdot}{\rightarrow}$ et $\underset{L}{\rightarrow}$ réductions.

Par contre pour l'ordonnancement $(\underset{o}{\rightarrow})$, l'interversion de deux prédicats est toujours possible : la condition de couverture d'une même alternative devient sans objet.

Ainsi :

. une alternative libre $\Gamma$ est dite ordonnée si

$u, v \in O(\Gamma),\ u \underset{+p}{<} v \Rightarrow \Gamma(u) <_{lex} \Gamma(v)$.

. En notant $\alpha_\Gamma = \inf_{lex} \{\Gamma(w) \mid w \in O(\Gamma)\}$,

La réduction $\underset{o}{\rightarrow}$ se définit de la même façon que dans le cas des prédicats avec effet de bord et a les mêmes propriétés.

De plus $\sigma_{in}$ de la définition 6.2 n'est plus une caractérisation de l'équivalence sémantique.

En effet :

Soit $\alpha \in \mathcal{P}_F$, $a \in Col(F)$, $\alpha$ sans effet de bord

$$\left(\Gamma = \begin{array}{c}\alpha\\ / \ \backslash \\ a \quad a\end{array}\right) \underset{Sem}{\equiv} (a = \Gamma') \text{ et } \Gamma \neq \Gamma'.$$

nous introduisons une nouvelle réduction $\underset{R}{\rightarrow}$, (les prédicats étant sans effet de bord).

*Définition 7.1*

La réduction $\underset{R}{\rightarrow}$ sur les alternatives de Al(FUP) (libres et ordonnées) est donnée par :

$\Gamma, \Gamma' \in Al(FUP)$, ($\Gamma$ libre ordonnée)

$\Gamma \underset{R}{\rightarrow} \Gamma' \Leftrightarrow \exists\, m \in O(\Gamma) \mid \Gamma_{m1} = \Gamma_{m2}$

$\quad\quad$ $\underline{\text{et}}$ $\Gamma' = \Gamma[m \leftarrow \Gamma_{m1}]$.

*Lemme 7.1*

Soit $\Gamma, \Gamma' \in Al(FUP)$.

$$\Gamma \overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}} \Gamma' \Rightarrow \Gamma \underset{Sem}{\equiv} \Gamma'.$$

Preuve

Se fait par récurrence sur la longueur de la réduction.

Il suffit de démontrer que :

$$\Gamma \overset{(m)}{\underset{R}{\rightarrow}} \Gamma' \Rightarrow \Gamma_m \underset{Sem}{\equiv} \Gamma'_m .$$

on a :

$$\Gamma_m = \begin{array}{ccc} & \Gamma(m) & \\ / & & \backslash \\ \Gamma_{m1} & & \Gamma_{m2} \end{array} \qquad \text{avec } \Gamma_{m1} = \Gamma_{m2}$$

et $\Gamma'_m = \Gamma_{m1}$

soit (I, I', v) une interprétation.

si $\Gamma(m) \times \nu =$ vrai alors $\Gamma_m * \nu = \Gamma_{m1} * \nu$

sinon $\Gamma_m * \nu = \Gamma_{m2} * \nu = \Gamma_{m1} * \nu$

et $\Gamma'm * \nu = \Gamma_{m1} \times \nu$.

□

*Lemme 7.2*

La réduction $\underset{R}{\rightarrow}$ est noethérienne.

Preuve

On a : $\Gamma \underset{R}{\rightarrow} \Gamma' \Rightarrow card(O(\Gamma')) < card(O(\Gamma))$

donc il ne peut exister de chaînes infinie $\Gamma^o \underset{R}{\rightarrow} \Gamma^1 \underset{R}{\rightarrow} \dots \underset{R}{\rightarrow} \Gamma^n \underset{R}{\rightarrow} \dots$

□

*Lemme 7.3*

La réduction $\underset{R}{\rightarrow}$ est localement confluente.

Preuve

$$\begin{tikzcd} & \Gamma \arrow[dl, "(m)"', "R"] \arrow[dr, "(n)", "R"'] & \\ \Gamma' \arrow[dr, "*", "R"'] & & \Gamma'' \arrow[dl, "*"', "R"] \\ & \Gamma''' & \end{tikzcd}$$

. <u>si</u> m et n incomparables par $<_p$

<u>alors</u> : $\Gamma' \underset{R}{\overset{(n)}{\rightarrow}} \Gamma'''$ <u>et</u> $\Gamma'' \underset{R}{\overset{(m)}{\rightarrow}} \Gamma'''$.

. <u>si</u> m et n comparables

<u>alors</u> <u>si</u> m = n <u>alors</u> $\Gamma' = \Gamma'' = \Gamma'''$

<u>si</u> $m \lneq_p n$ (l'autre cas était symétrique)

<u>alors</u>

soit : $n = mi\bar{n}$ <u>et</u> $n = n'j$ $\quad i, j \in \{1, 2\}$.

et on a :

$$\Gamma' \underset{R}{\overset{(m\bar{n})}{\rightarrow}} \Gamma''' \text{ et } \Gamma'' \underset{R}{\overset{n'\bar{j}}{\rightarrow}} \cdot \underset{R}{\overset{m}{\rightarrow}} \Gamma'''$$

où $\bar{j} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = 2 \\ 2 \text{ si } j = 1. \end{cases}$

□

<u>Exemple</u>

Soit $\alpha, \beta \in P_F$, $a \in \mathrm{Col}(F)$.

```
          α            (ε)          β           (ε)          a
        /   \           →         /   \          →
       β     β          R        a     a
      / \   / \
     a   a a   a                                           R↗(ε)

              (1)↘R
                                 (ε)
                      α           →                α
                    /   \         R              /   \
                   a     β                      a     a
                        / \
                       a   a
```

*Proposition 7.1*

A toute alternative de Al(FUP) (libre et ordonnée) on peut associer une $\underset{R}{\rightarrow}$ forme normale unique qui lui est équivalente.

Preuve

La réduction $\underset{R}{\rightarrow}$ est confluente (lemme 7.2 et 7.3) modulo l'équivalence sémantique $\underset{Sem}{\equiv}$ (lemme 7.1). L'existence de la forme normale (unique puisque $\underset{R}{\rightarrow}$ est confluente) est assurée par le fait que card(O(Γ)) est fini pour toute alternative Γ.

□

*Définition 7.2*

Une alternative de $Al_c$(FUP) est dite canonique si elle est en $\underset{\cdot}{\rightarrow} \cdot \underset{L}{\rightarrow} \cdot \underset{o}{\rightarrow} \cdot \underset{R}{\rightarrow}$ - forme normale et $\tilde{N}(\Gamma) = \Gamma$.

*Proposition 7.2*

A toute alternative Γ de $Al_c$(FUP) on peut associer une forme canonique unique qui lui est équivalente, notée c(Γ)

et on a : $\Gamma, \Gamma' \in Al_c(FUP)\ \Gamma \underset{Sem}{\equiv} \Gamma' \Leftrightarrow c(\Gamma) = c(\Gamma')$.

et on pose $\sigma_{in}(\Gamma) = c(\Gamma)$.

Preuve :

D'après les propositions 3.2, 4.1 et 5.2 adaptées aux prédicats sans effet de bord et 7.1, on peut affirmer l'existence pour $\Gamma \in Al_c$(FUP) de c(Γ) et $\Gamma \underset{Sem}{\equiv} c(\Gamma)$. La démonstration de la proposition 6.2 reste valable dans ce cas puisque Γ étant en $\underset{R}{\rightarrow}$ - forme normale on ne peut avoir $\Gamma_w \underset{Sem}{\equiv} \Gamma'_w$.

□

Remarque

Si parmi les variables V on isole un sous-ensemble $V_S$ dit de variables de sortie, Soit $\phi_{VS}$ : Al(FUP) $\rightarrow$ Al(FUP) l'application définie par :

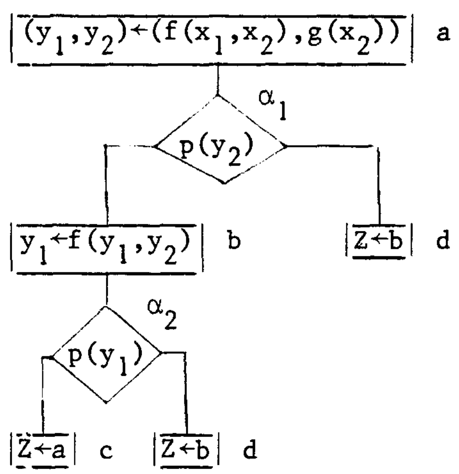
$$\phi_{VS}(\Gamma) = \begin{cases} \phi(V_S, \Gamma) \ \underline{\text{si}}\ \Gamma \in \text{Col(F)} \\ \text{(cf. 1ère partie Ch. I Déf 2.3)} \\ [\phi_{VS}(\Gamma_1), \phi_{VS}(\Gamma_2)]\alpha \ \underline{\text{si}}\ \Gamma = [\Gamma_1, \Gamma_2]\alpha \\ \qquad\qquad \text{avec } \alpha \in P_F,\ \Gamma_1, \Gamma_2 \in \text{Al(FUP)} \end{cases}$$

alors deux alternatives $\Gamma$ et $\Gamma'$ de $Al_c$(FUP) sont sémantiquement équivalentes relativement à $V_S$, ssi pour $\Gamma^1$ et $\Gamma'^1$ les $\dot{\rightarrow}$ formes normales de $\Gamma$ et $\Gamma'$, $c(\phi_{VS}(\Gamma^1)) = c(\phi_{VS}(\Gamma'^1))$.

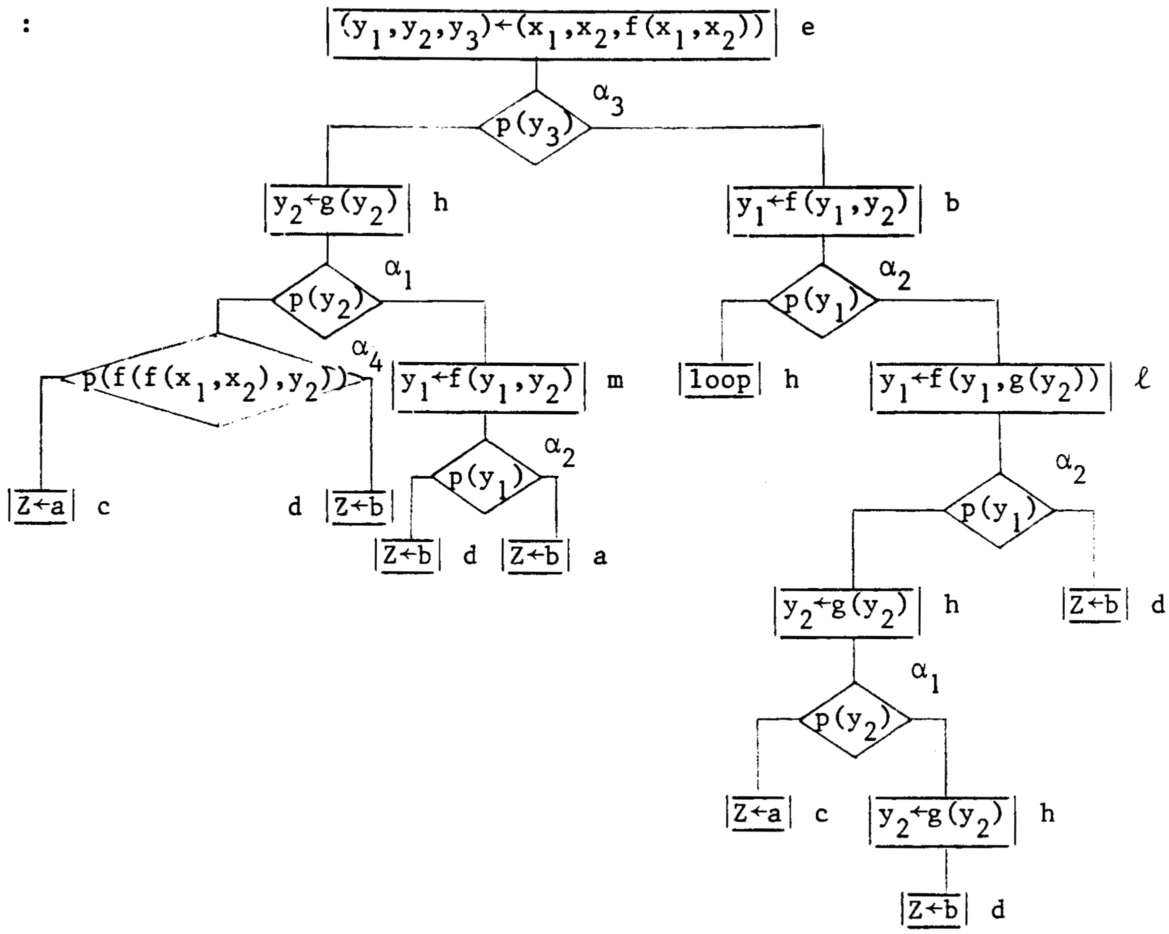
Exemple général :

Considérons les deux schémas de programmes suivants $P_1$ et $P_2$ empruntés à [MA] et dont il montre l'équivalence.

$P_1$



$P_2$ :




i) à $P_1$ on peut associer l'alternative

```
Γ¹ =          .                 *                  α₁ Θ a          = Γ¹¹
             / \                →                 /       \
           α₁    a              .        α₂ O (b ; a)       d; a
          / \                                 /       \
         .    d                          c;b;a       d;b;a
        / \
      α₂    b
     / \
    c    d
```

```
et on a   φ{Z}  (Γ¹¹) =           p(g(x₂)) = Γ¹²
                                  /          \
                 p(f(f(x₁,x₂),g(x₂)))        Z ← b
                 /                  \
               Z ← a              Z ← b
```

on se place dans le cas des prédicats sans effet de bord et supposant $f < g$, $\Gamma^{12}$ étant libre, on a :

```
(Γ¹²) →ₒ        p(f(x₁,x₂),g(x₂)))      =   Γ¹³
                  /              \
           p(g(x₂))          p(g(x₂))
            /    \            /    \
        Z ← a   Z ← b     Z ← b   Z ← b
```

```
et    Γ¹³ →_R     p(f(x₁,x₂),g(x₂)))      =   σ_in(Γ¹)
                    /               \
             p(g(x₂))              Z ← b
              /    \
          Z ← a   Z ← b
```

ii) à $P_2$ on peut associer l'alternative

```
Γ²
                          .
                        /   \
                     α₃       e
                   /    \
                 .         .
              /    \      / \
           α₁       h   α₂   b
          /  \         /  \
        α₄     .      k    .
       /  \   /  \        / \
      c    d α₂    m    α₂   ℓ
            /  \        /  \
           d    d      .    d
                      / \
                    α₁   h
                   /  \
                  c    d;h
```

et

```
Γ² →* .          .  p(f(x₁,x₂))            =     Γ²¹
               /                  \
       p(g(x₂))                          p(f(x₁,x₂))
        /      \                          /        \
p(f(f(x₁,x₂),g(x₂))   p(f((x₁,x₂),g(x₂)))   k;b;e   p(f(f(x₁,x₂),g(x₂)))
  /          \          /          \                  /                \
c;h;e      d;h;e     d;m;h;e    d;m;h;e          p(g(x₂))            d;ℓ;b;e
                                                  /      \
                                           c;h;ℓ;b;e   d;h;h;ℓ;b;e
```

d'où :

```
φ{z} (Γ^21)              p(f(x1,x2))                    =  Γ^22
                     /                  \
              p(g(x2)))                      p(f(x1,x2))
              /       \                       /       \
p(f(f(x1,x2),g(x2)))  p(f(f(x1,x2),g(x2)))  k;b;e   p(f(f(x1,x2),g(x2)))
  /          \          /          \                   /              \
 c            d        d            d               p(g(x2))           d
                                                     /   \
                                                    c     d
```

```
Γ^22 (2→L)               p(f(x1,x2)                     =  Γ^23
                     /                  \
              p(g(x2))                       p(f(f(x1,x2),g(x2)))
              /       \                        /                \
p(f(x1,x2),g(x2)))  p(f(f(x1,x2)g(x2)))    p(g(x2))              d
  /          \        /          \          /   \
 c            d      d            d        c     d
```

```
Γ^23 (1→o)                p(f(x1,x2))                       =  Γ^24
                        /             \
      p(f(f(x1,x2),g(x2)))          p(f(f(x1,x2),g(x2)))
       /                \             /                \
  p(g(x2)))        p(g(x2))     p(g(x2))                d
   /     \          /    \       /    \
  c       d        d      d     c      d
```

```
Γ^24 (12→R) . ξ→R      p(f(f(x1,x2))g(x2)))        =  σin(Γ^2)
                        /                \
                    p(g(x2))              d
                     /    \
                    c      d
```

on a donc

$$\sigma_{in}(\Gamma^1) = \sigma_{in}(\Gamma^2)$$

les deux alternatives $\Gamma^1$ et $\Gamma^2$ étant sémantiquement équivalentes relativement à $V_S = \{z\}$, dans le cas où les prédicats sont sans effet de bord. $\Gamma^1$ et $\Gamma^2$ n'étant pas sémantiquement équivalentes si les prédicats sont avec effet de bord.

# CHAPITRE II : SYSTÈMES D'ÉQUATIONS. ALTERNATIVES RECONNAISSABLES

L'équivalence des schémas de Paterson et donc de Manna est indécidable [LPP, MA]. La recherche d'une forme canonique pour les arbres associés serait donc sans objet. Néanmoins la mise "locale" sous forme canonique d'alternatives finies, en utilisant le chapitre précédent, faciliterait la comparaison de deux schémas.

Dans ce chapitre, nous proposons un modèle pour les arbres de Manna (infinis) : alternatives indicées, définies et étudiées en adoptant un point de vue algébrique.

L'ensemble des alternatives est plongé dans une structure de magma ordonné complet. Une description finie y est donnée sous forme de système d'équations. Nous nous intéressons en particulier à celles qui sont reconnaissalbes et montrons qu'elles peuvent être considérées comme solutions des systèmes d'équations réguliers.

## 1 - LE MAGMA $Al_S^\infty$

Soit F, P, V comme précédemment.
et S un ensemble de symboles d'alternatives particulières contenant un symbole distingué $\Omega$.
Les éléments de S seront notés $\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots$

*Définition 1.1*

L'ensemble des alternatives indicées par S, noté $Al_S(FUP)$ ou $Al_S$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur F et P, est le plus petit ensemble contenant :

i) S

ii) pour $A \in Col(F)$ et $B \in Al_S$, $B.A$

iii) pour $\alpha \in P_F$ et $A, B \in Al_S$, $[A, B]\alpha$.

*Définition 1.2* : Représentation graphique

. On pose $W = P_F \cup Col(F) \cup S$

et $g : W \to \mathbb{N}$ l'application définie par :

$$g(w) = \begin{cases} 0 \ \underline{\text{si}} \ w \in S \\ 1 \ \underline{\text{si}} \ w \in Col(F) \\ 2 \ \underline{\text{si}} \ w \in P_F \end{cases}$$

. soit rep : $Al_S \to M(W)$ l'application définie par :

pour $\Gamma \in Al_S$, $rep(\Gamma) = t \in M(W)$ est tel que :

i) <u>si</u> $\Gamma \in S$ <u>alors</u> $dom(t) = \{\varepsilon\}$ et $t(\varepsilon) = \Gamma$

ii) <u>si</u> $\Gamma = B.A$ avec $A \in Col(F)$, $B \in Al_S$

<u>alors</u> $dom(t) = \{\varepsilon\} \cup 1.\ dom(rep(B))$

<u>et</u> $t(\varepsilon) = A$

$t(1m) = rep(B)(m)$ pour $1m \in dom(t)$

iii) <u>si</u> $\Gamma = [A, B]\alpha$ avec $\alpha \in P_F$, $A, B \in Al_S$

<u>alors</u> $dom(t) = \{\varepsilon\} \cup 1\ dom(rep(A)) \cup 2\ dom(rep(B))$

<u>et</u> $t(\varepsilon) = \alpha$

$t(1m) = rep(A)(m)$ pour $1m \in dom(t)$

$t(2m) = rep(B)(m)$ pour $2m \in dom(t)$

Ainsi :

à une alternative de $Al_S$, on peut associer un w-arbre respectant la graduation g.

Par la suite on confond une alternative $\Gamma$ et sa représentation graphique $rep(\Gamma)$.

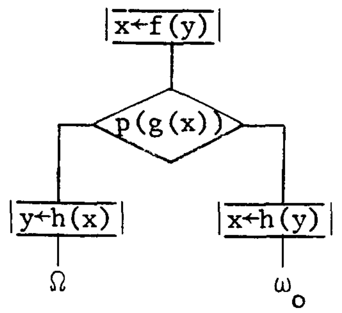
<u>Exemple 1.1</u>

Soit $Al_{\{\Omega,\omega_o\}}$ donnée par :

$$\Gamma = ([\Omega.(y \leftarrow h(x)),\ \omega_o.(x \leftarrow h(y))]\ p(g(x))).(x \leftarrow f(y))$$

et on a :

rep(Γ) =




*Définition 1.3*

On définit sur $Al_S$ une relation d'ordre (ordre préfixiel) $\leq$ par :

$$A, B \in Al_S : A \leq B \Leftrightarrow \begin{cases} dom(A) \subseteq dom(B) \\ \text{et} \\ \forall\, m \in dom(A),\ A(m) \neq \Omega \Rightarrow B(m) = A(m) \end{cases}$$

*Lemme 1.1*

$(Al_S, \leq, \Omega)$ est un ensemble ordonné pointé.

<u>Preuve</u> : Immédiate.

<u>Remarque</u> :

. $(Al_S, \leq, \Omega)$ étant un ensemble ordonné pointé, on peut [COM, BO] le plonger dans un ensemble ordonné complet (cpo) : sa complétion par parties dirigées (ou idéaux), qu'on note $Al_S^{\infty}$.

avec : pour $\mathbb{B}$ partie dirigée de $AL_S^{\infty}$

sup($\mathbb{B}$) = Γ est tel que :

. $dom(\Gamma) = \cup\, \{dom(B) \mid B \in \mathbb{B}\}$

. $m \in dom(\Gamma) \quad \Gamma(m) = \begin{cases} a \ \underline{\text{si}} \text{ il existe } B \in \mathbb{B} \text{ tel que } B(m) = a \\ \Omega \ \underline{\text{si}} \text{ pour tout } B \in \mathbb{B},\ B(m) = \Omega. \end{cases}$

. si on suppose W muni d'un ordre discret $\underline{\tau}$ donné par :

$w\ \underline{\tau}\ w' \Leftrightarrow w = \Omega$ ou $w' = w$

alors, pour $\mathbb{B}$ partie dirigée de $Al_S^{\infty}$, $m \in dom(sup(\mathbb{B}))$

on a : $(\sup_{\leq}(\mathbb{B}))(m) = \sup_{\underline{\tau}} \{B(m) \mid B \in \mathbb{B}\}$.

en effet : $w' = \{B(m) \mid B \in \mathbb{B}\}$ est une partie dirigée de W.

donc $\sup_{\underline{\tau}}(w')$ est défini et on a l'égalité ci-dessus.

*Définition 1.4*

i) pour $A \in Col(F)$, on définit l'application

$$\cdot A : Al_S^{\infty} \to Al_S^{\infty}$$
$$B \to B.A$$

ii) pour $\alpha \in P_F$, on définit l'application :

$$\bar{\alpha} : Al_S^{\infty 2} \to Al_S^{\infty}$$
$$(A,B) \to [A,B]\alpha.$$

*Lemme 1.2*

Pour $A \in Col(F)$, $\cdot A$ est une application croissante et continue.

Preuve

i) Soit $B, C \in Al_S^{\infty}$ tel que $B \leq C$.

. $dom(B.A) = \{\varepsilon\} \cup 1.dom(B) \subseteq \{\varepsilon\} \cup 1\, dom(C) = dom(C.A)$

. soit $m \in dom(B.A)$ tel que $(B.A)(m) \neq \Omega$

- si $m = \varepsilon$ alors $(B.A)(m) = A = (C.A)(m)$

- si $m = 1u$ alors $u \in dom(B)$ $(\subseteq dom(C))$, $C(u) = B(u)$.

  et $(C.A)(m) = C(u) = B(u) = (B.A)(m)$.

ii) Soit $\mathbb{B}$ une partie dirigée de $Al_S^{\infty}$

$\cdot_A(\mathbb{B}) = \{\cdot_A(B) \mid B \in \mathbb{B}\} : \{B.A \mid B \in \mathbb{B}\}$ $(= \mathbb{B}.A)$

. d'après (i) $\mathbb{B}$ étant dirigée, $\mathbb{B}.A$ l'est aussi.

. soit $m \in dom(sup(\mathbb{B}.A))$

$(\sup(\mathbb{B}.A))(m) = (\sup \{B.A \mid B \in \mathbb{B}\})(m)$

$= \underset{\underline{\tau}}{\sup} \{(B.A)(m) \mid B \in \mathbb{B}\}.$

d'où : . <u>si</u> $m = \varepsilon$ <u>alors</u>

$(\sup(\mathbb{B}.A))(m) = A = (\sup(\mathbb{B}).A)(m)$

. <u>si</u> $m = 1u$ <u>alors</u>

$(\sup(\mathbb{B}.A))(m) = \sup(\mathbb{B})(u) = (\sup(\mathbb{B}).A)(m).$

□

<u>*Lemme 1.3*</u> :

Pour $\alpha \in P_F$ $\bar{\alpha}$ est une application croissante et continue en chacun de ses arguments.

<u>Preuve</u>

i) Soit $B, C \in Al_S^\infty$ tel que $B \le C$ <u>et</u> $A \in Al_S^\infty$

. $\mathrm{dom}([B,A]\alpha) = \{\varepsilon\} \cup 1.\mathrm{dom}(B) \cup 2\ \mathrm{dom}(A)$

$\subseteq \{\varepsilon\} \cup 1.\mathrm{dom}(C) \cup 2\ \mathrm{dom}(A) = \mathrm{dom}([C,A]\alpha)$

. soit $m \in \mathrm{dom}([B,A]\alpha)$ <u>et</u> $([B,A]\alpha)(m) \neq \Omega$

. <u>si</u> $m = \varepsilon$ <u>alors</u> $([C,A]\alpha)(m) = \alpha = [B,A]\alpha\ (m)$

. <u>si</u> $m = 1u$ <u>alors</u> $u \in \mathrm{dom}(B)$ <u>et</u> $B(u) \neq \Omega$

donc $[C,A]\alpha(m) = C(u) = B(u) = [B,A]\alpha(n).$

<u>si</u> $m = 2u$ <u>alors</u> $u \in \mathrm{dom}(A)$

<u>et</u> $[C,A]\alpha(m) = A(u) = [B,A]\alpha(n)$

la démonstration est analogue pour le second argument.

ii) Soit $\mathbb{B}$ Une partie dirigée de $Al_S^\infty$, $A \in Al_S^\infty$.

$[\mathbb{B}, A]\alpha = \{[B, A]\alpha \mid B \in \mathbb{B}\}.$

. d'après (i) $[\mathbb{B},A]\alpha$ est une partie dirigée <u>si</u> $\mathbb{B}$ l'est

. soit $m \in \mathrm{dom}(\sup([\mathbb{B},A]\alpha))$

$(\sup[\mathbb{B},A]\alpha)(m) : \underset{\underline{\tau}}{\sup}\{[B,A]\alpha(m) \mid B \in \mathbb{B}\}.$

d'où: .**si** $m = \varepsilon$ **alors** $(\sup[\mathbb{B},A]\alpha)(m) = \alpha = [\sup \mathbb{B},A]\alpha(m)$

.**si** $m = 2u$ **alors**

$(\sup [\mathbb{B},A]\alpha)(m) = A(u) = [\sup(\mathbb{B}),A]\alpha\ (m)$

.**si** $m = 1u$ **alors**

$(\sup [\mathbb{B},A]\alpha)(m) = \underset{\underline{\tau}}{\sup}\ \{B(u) \mid B \in \mathbb{B}\}.$

$= \sup(\mathbb{B})(u) = [\sup(\mathbb{B}),A]\alpha\ (m)$

La démonstration est analogue pour le second argument.

□

En considérant les éléments de S comme des applications constantes on a d'après les lemmes 1.2 et 1.3 :

*Proposition 1.1*

$(Al_S^{\infty}, \leq, \Omega)$ a une structure de w-magma ordonné complet et $Al_S^{\infty} = M^{\infty}(W)$.

*Proposition 1.2*

Soient $A, A_1, \ldots, A_n \in Al_S^{\infty}$

$M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n \subseteq \mathrm{dom}(A)$ tel que :

$M$ préfixe **et** $\forall\, i \neq j\ M_i \cap M_j = \emptyset$

**alors** la substitution qui, à $A, A_1, \ldots, A_n$ fait correspondre

$A[M_i \leftarrow A_i]$ est croissante et continue.

(cf. chapitre préliminaires pour les notations).

**Preuve**

i) Soient $A', A, A_1, \ldots, A_n, A'_1, \ldots, A'_n \in Al_S^{\infty}$ tel que :

$A \leq A'$ **et** $\forall\, i = 1, \ldots, n\ \ A_i \leq A'_i$

. $\mathrm{dom}\,(A[M_i \leftarrow A_i]) \subseteq \mathrm{dom}(A'[M_i \leftarrow A'_i])$

puisque $\mathrm{dom}(A) \subseteq \mathrm{dom}(A')$

. soit $m \in \mathrm{dom}(A[M_i \leftarrow A_i])$ tel que $(A[M_i \leftarrow A_i])(m) \neq \Omega$

. si $m \in \mathrm{dom}(A) \setminus M\{1,2\}^*$

alors $(A'[M_i \leftarrow A'_i])(m) = A'(m) = A(m) = A[M_i \leftarrow A_i](m)$.

. si $m = m_i m''$ avec $m_i \in M_i$ et $m'' \in \mathrm{dom}(A_i)$

alors $(A'[M_i \leftarrow A_i])(m) = A'_i(m'') = A_i(m'')$

$= A[M_i \leftarrow A_i](m)$.

ii) Soient $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ parties dirigées de $Al_S^{\infty}$

. $\mathcal{A}[M_i \leftarrow \mathcal{A}_i] = \{A[M_i \leftarrow A_i] \mid A \in \mathcal{A},\ A_i \in \mathcal{A}_i\}$

est aussi une partie dirigée de $Al_S^{\infty}$ d'après (i))

. soit $m \in \mathrm{dom}\,(\sup \mathcal{A}[M_i \leftarrow \mathcal{A}_i])$

$(\sup \mathcal{A}[M_i \leftarrow \mathcal{A}_i])(m) = \sup\{A[M_i \leftarrow A_i] \mid A \in \mathcal{A},\ A_i \in \mathcal{A}_i\}(m)$

$= \sup_{\underline{\tau}} \{A[M_i \leftarrow A_i]\,(m) \mid A \in \mathcal{A},\ A_i \in \mathcal{A}_i\}$.

d'où . si $m \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathrm{dom}(A) \setminus M\{1,2\}^*$

alors $(\sup \mathcal{A}[M_i \leftarrow \mathcal{A}_i])(m) = \sup_{\tau} \{A(m) \mid A \in \mathcal{A}\}$

$= (\sup \mathcal{A})(m) = (\sup \mathcal{A})\,[M_i \leftarrow \sup(\mathcal{A}_i)]\,(m)$

. si $m = m_i m''$ avec $m_i \in M_i$ et $m'' \in \bigcup_{A_i \in \mathcal{A}_i} \mathrm{dom}(A_i)$

alors $(\sup \mathcal{A}[M_i \leftarrow \mathcal{A}_i])(m) = \sup_{\tau} \{A_i(m'') \mid A_i \in \mathcal{A}_i\}$

$= (\sup \mathcal{A}_i)(m'') = (\sup \mathcal{A})\,[M_i \leftarrow \sup(\mathcal{A}_i)](m)$

□

*Proposition 1.3*

Soient $A, A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n \in Al_S^{\infty}$

La substitution qui fait correspondre $A[B_i | A_i]$ à $A, A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ est croissante et continue en les variables $A_i$.

Preuve

Conséquence immédiate de la proposition 1.2.

□

*Proposition 1.4*

i) Soit $A \in Col(F)$, $B \in Al_S^{\infty}$,

on a :

$$(B.A)\,[B_i|A_i] = \begin{cases} A_i \ \underline{\text{si}}\ B_i = B.A \\ \\ (B[B_i|A_i]).A \text{ sinon} \end{cases}$$

ii) soit $\alpha \in P_F$, $A, B \in Al_S^{\infty}$.

$$([A,B]\alpha)\,[B_i|A_i] = \begin{cases} A_i \ \underline{\text{si}}\ B_i = [A,B]\alpha \\ \\ [A[B_i|A_i],\ B[B_i|A_i]]\alpha \text{ sinon} \end{cases}$$

Preuve

Immédiate d'après les définitions de la substitution (cf. préliminaires).

□

## 2 - SYSTEMES D'EQUATIONS SUR $Al_S^{\infty}$

Soit $X = \{X_1, \ldots, X_n, \ldots\}$ une partie de S, formée de symboles d'alternatives "inconnues".

On note $\bar{S} = S|X$.

*Définition 2.1*

Un système d'équaitons aux inconnues $X_1, \ldots, X_n$ sur $Al_S^{\infty}$ consiste en la donnée de n équations de la forme $X_i = \tau_i$ où $\tau_i \in Al_S^{\infty} \mid X$.

Une solution d'un tel système est un n-uplet d'éléments de $Al_{\bar{S}}^{\infty}$ vérifiant :

$$\forall\, i = 1, \ldots, n \quad A_i = \tau_i[X_1|A_1, \ldots, X_n|A_n]$$

Un tel système est dit régulier si les $\tau_i$ sont finis (i.e. : $\tau_i \in Al_S$)

*Lemme 2.1* [LI]

Toute fonction unaire continue f sur un ensemble ordonné complet muni d'un

plus petit élément $\perp$ admet un plus petit point fixe, qui est :
$\sup \{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

*Proposition 2.1*

Tout système d'équations sur $Al_S^{\infty}$ a une solution unique.

Preuve

. A chaque membre droit $\tau_i$ de l'équation $X_i = \tau_i$, on peut faire correspondre l'application :

$$\bar{\tau}_i : Al_S^{\infty n} \to Al_S^{\infty}$$
$$(A_1, \ldots, A_n) \to \tau_i[X_i|A_i , \ldots, X_n|A_n]$$

la substitution étant croissante et continue (cf. proposition 1.3), il en est de même de $\bar{\tau}_i$

. A un système d'équations E : $X_i = \tau_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ on associe l'application :

$$\bar{E} : Al_S^{\infty^n} \to Al_S^{\infty^n}$$
$$(A_1, \ldots, A_n) \to (\bar{\tau}_1(A_1, \ldots, A_n), \bar{\tau}_n(A_1, \ldots, A_n))$$

$\forall\, i = 1, \ldots, n$ $\bar{\tau}_i$ est continue

il en est de même de $\bar{E}$

D'après le lemme 2.1, $\bar{E}$ admet un plus petit point fixe :

$$\sup \{\bar{E}^p(\Omega^n) \mid p \in \mathbb{N}\} \ (\text{où } \Omega^n = (\Omega, \ldots, \Omega))$$

et puisque $\tau_i \notin X$, ce point fixe est unique.

□

Remarque

On peut définir la solution unique $\bar{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ du système E de la façon suivante (plus manipulable pour les preuves par induction) par :

Pour chaque alternative $\tau_i$ soit $M_i$ son domaine.

On pose $M_i = M'_i \cup M''_i$ avec

$$M'_i = \{m \in M_i \mid \tau_i(m) \in X\}.$$

$$M''_i = M_i \mid M'_i.$$

$$\text{et } M'_i = \bigcup_{j=1}^{n} M_{ij} \text{ avec } \quad M'_{ij} = \{m \in M'_i \mid \tau_i(m) = X_j\}.$$

le n-uplet $(D_1, \ldots, D_n)$ des domaines des composantes de la solution est engendré par la grammaire linéaire à droite :

$$D_i \to M''_i + \sum_{j=1}^{n} M'_{ij}.D_j$$

et on pose :

$$D_i^1 = M''_i$$

$$D_i^{m+1} = \sum_{j=1}^{n} M'_{ij}\ D_j^m + D_i^m.$$

et on a :

. $\forall m\ D_i^m \subseteq D_i^{m+1},\ D_i = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} D_i^m$

. $\forall m \in D_i \quad A_i(m) = \begin{cases} \tau_i(m) \text{ si } m \in D_i^1 \\ \\ \tau_i(m'') \ \underline{\text{si}}\ m = m'm'' \text{ avec } m' \in M_{ij} \end{cases}$

Nous énonçons deux propositions classiques sur les systèmes d'équations, les preuves données dans [COU 1] s'adaptent ici sans changement.

<u>*Proposition 2.2*</u>

Soit E le système d'équations $X_i = \tau_i$ $(i = 1, \ldots, n)$,

E' le système obtenu à partir de E en substituant dans un membre droit $\tau_{ij}$ à une occurrence de la variable $X_{ij}$.

alors E et E' ont la même solution.

<u>*Proposition 2.3*</u> (Théorème de substitution)

Soit E un système d'équations aux inconnues $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+m}$

E' le sous système de E aux inconnues $X_{n+1}, \ldots, X_{n+m}$

($X_1$, ..., $X_n$ étant considérées comme des constantes).

soit $(A'_{n+1}, \ldots, A'_{n+m})$ et $(A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}, \ldots, A_{n+m})$

les solutions respectives de E' et E.

Alors le système

$$\begin{cases} X_1 = \tau_1[X_{n+1} \mid A'_{n+1}, \ldots, X_{n+m} \mid A'_{n+m}] \\ \vdots \\ X_n = \tau_n[X_{n+1} \mid A'_{n+1}, \ldots, X_{n+m} \mid A'_{n+m}] \end{cases}$$

a pour solution

$(A_1, \ldots, A_n)$.

$\square$

*Définition 2.2*

Une alternative de $Al_S^\infty$ est dite reconnaissable si le nombre de ses sous-alternatives distinctes est fini.

*Proposition 2.4*

Les alternatives reconnaissables sont celles qui sont solutions des systèmes d'équations réguliers.

i.e. en notant Rec : l'ensemble des alternatives reconnaissables

Reg : l'ensemble des alternatives solutions des systèmes d'équations réguliers.

on a : Rec = Reg.

Preuve

i) Rec $\subseteq$ Reg.

Soit A une alternative reconnaissable.

On définit sur dom(A) la relation d'équivalence :

$$m \equiv m' \iff A/m = A/m'$$

Cette équivalence a un nombre fin i de classes.

On choisit comme représentant $\sigma$ dans chaque classe l'élément minimum pour l'ordre lexicographique.

Soit $\{m_1, \ldots, m_p\}$ l'ensemble des éléments minimaux.

On leur associe un système d'équations de la façon suivante :

. si $A(m_i) \in \bar{S}$ on lui associe l'équaiton $X_{m_i} = A(m_i)$

. si $A(m_i) \in Col(F)$ on lui associe l'équation :

$$X_{m_i} = X_{\sigma(m_i 1)} . A(m_i)$$

. si $A(m_i) \in P_F$ on lui associe l'équation :

$$X_{m_i} = [X_{\sigma(m_i 1)}, X_{\sigma(m_i 2)}] \; A(m_i)$$

ce système est régulier et a pour solution

$$(A|m_1, \ldots, A|m_p).$$

or $\varepsilon \in \{m_1, \ldots, m_p\}$, donc A est un élément de la solution d'un système régulier.

ii) Reg $\subseteq$ Rec.

Soit E le système $X_i = \tau_i (i = 1, \ldots, n)$ régulier.

Montrons que tout élément de la solution de E a au plus $\sum_{j=1}^{n} card(M''_j)$ sous-alternatives distinctes.

Notons Sb(A) l'ensemble des sous-alternatives d'une alternative A.

Montrons que : Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ la solution en E

$$Sb(A_i) \subseteq \{A_j|m \text{ tel que } m \in M''_j,\ j = 1, \ldots, n\} = H.$$

par récurrence sur $dom(A_i)$, on a :

. $m \in D_i^1 \Rightarrow A_i|m$ est un élément de H par définition

. $m \in D_i^{k+1}$ avec $m = m'\, m''$ où $m' \in M'_{ij}$, $m'' \in D_j^k$

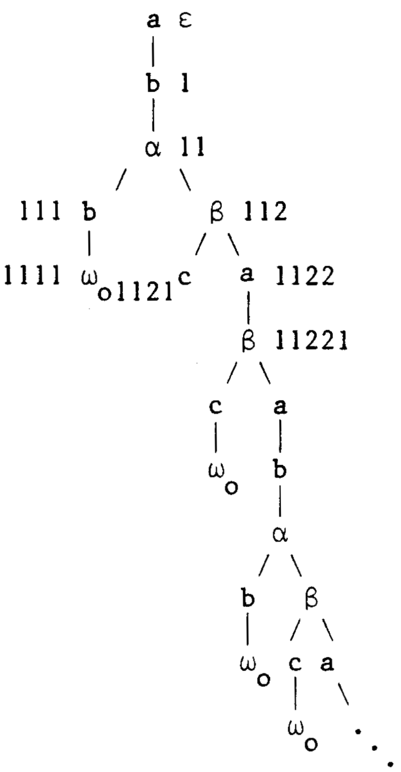
$\Rightarrow A_i|m = A_j|m \in H$ par hypothèse de récurrence.

Exemple :

Soit l'alternative reconnaissable de $Al^{\infty}_{\{\omega_o\}}$

(où : a, b, c $\in$ Col(F), $\alpha$, $\beta \in \mathcal{P}_F$)

$\Gamma$ =



on peut lui associer le système d'équations régulier :

$$
\begin{aligned}
X_\varepsilon &= X_1.a \\
X_1 &= X_{11}.b \\
X_{11} &= [X_{111}, X_{112}]\alpha \\
X_{111} &= X_{1111}.b \\
X_{1111} &= \omega_o \\
X_{112} &= [X_{1121}, X_{1122}]\beta \\
X_{1121} &= X_{1111}.c \\
X_{1122} &= X_{11221}.a \\
X_{11221} &= [X_{1121}, X_\varepsilon]\beta
\end{aligned}
$$

# CHAPITRE III : ALTERNATIVES RATIONNELLES

Dans ce chapitre à l'instar de [COU1, CO] nous associons à la notion de reconnaissabilité une notion de rationnalité, en définissant une opération "étoile" sur les alternatives. Ce qui permet de donner des alternatives reconnaissables une description finie sous forme d'expressions rationnelles, qui, intuitivement, correspond à une démarche de programmation structurée. En effet à une expression rationnelle on peut associer un schéma structuré en traduisant l'opération étoile par la boucle REPEAT à plusieurs niveaux de sorties d'EXEL.[AR].

## 1 - L'OPERATION ETOILE

On considère que l'ensemble des indices S contient un ensemble dénombrable que l'on identifie à $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

*Définition 1.1*

Soit s : $Al_S^{\infty} \to Al_S^{\infty}$ l'application définie récursivement par :

. $s(0) = \Omega$

. pour $A \in Al_S^{\infty} - \{0\}$, $s(A) = A[0 \,|\, s(A),\ i : i>0 \,|\, i-1]$

l'application s est dite "étoile"

Exemple :

Soit l'alternative A =

```
   α
  / \
 a   b
 |   |
 0   1
```

alors s(A)

```
            α
           / \
          a   b
          |   |
          α   o
         / \
        a   b
        |   |
        α   o
       / \
      a   b
     /    |
    .     o
   .
```

Afin de pouvoir donner de l'étoile une définition plus explicite on définit sur Alg un ensemble d'opérations qui s'étendent par continuité à $Al_S^\infty$.

*Définition 1.2*

Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $\uparrow_k : Al_S \to Al_S$ l'application définie par :

$\Gamma \in Al_S \quad \uparrow_k(\Gamma) = \begin{cases} \text{i) } \Gamma \ \underline{\text{si}} \ \Gamma \in S\text{-}\mathbb{N} \text{ ou } \Gamma = n \in \mathbb{N} \text{ et } n < k \\ \text{ii) } n+1 \ \underline{\text{si}} \ \Gamma = n \in \mathbb{N} \ \underline{\text{et}} \ n \geq k. \\ \text{iii) } \uparrow_k(B).A \ \underline{\text{si}} \ \Gamma = B.A \ \underline{\text{avec}} \ A \in Col(F) \\ \qquad \text{et } B \in Al_S \\ \text{iv) } [\uparrow_k(A), \uparrow_k(B)]\alpha \ \underline{\text{si}} \ \Gamma = [A,B]\alpha \text{ avec} \\ \qquad \alpha \in P_F,\ A,\ B \in Al_S \end{cases}$

i.e. :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, \Gamma \in Al_S \quad \uparrow_k(\Gamma) = \Gamma[i : i \geq k \mid i+1].$$

$\uparrow_o$ est noté $\uparrow$.

*Lemme 1.1*

$\uparrow_k$ est croissante et continue.

Preuve

i) $\uparrow_k$ est évidemment croissante

ii) Soit $A$ une partie dirigée de $Al_S$.

$\sup(\uparrow_k(A)) = \sup\{\uparrow_k(A) \mid A \in A\}$

$= \sup\{A[i : i \geq k \mid i+1], A \in A\}$

la substitution étant continue

$= \sup(A)\,[i : i \geq k \mid i+1]$

$= \uparrow_k(\sup(A))$.

□

*Définition 1.3*

Soit $\downarrow : Al_S \to Al_S$ l'application définie par :

$\Gamma \in Al_S \quad \downarrow(\Gamma) =$ i) $\Gamma$ si $\Gamma \in S - \mathbb{N}$

$\Omega$ si $\Gamma = 0$

$n-1$ si $\Gamma = n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 1$

ii) $\downarrow(B).A$ si $\Gamma = B.A$ avec $A \in COl(F)$, $B \in Al_S$

iii) $[\downarrow(A), \downarrow(B)]\alpha$ si $\Gamma = [A,B]\alpha$ avec $\alpha \in P_F$, $A, B \in Al_S$

i.e. : $\downarrow(\Gamma) = \Gamma[0 \mid \Omega, i : i > 0 \mid i-1]$.

Lemme 1.2

$\downarrow$ est une application croissante et continue.

Preuve

$\downarrow$ est évidemment croissante, la continuité découle de la continuité de la substitution.

*Définition 1.4*

Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $C_k : Al_S^2 \to Al_S$ l'application définie par

i) $C_k(\Omega, A) = \Omega$, $C_k(k, A) = A$, $C_k(n, A) = n$ si $n \neq k$

ii) $C_k(B.A, D) = C_k(B, D).A$ où $A \in Col(F)$

iii) $C_k([A, B]\alpha, D) = [C_k(A, D), C_k(B, D)]\alpha$ où $\alpha \in P_F$

i.e. : $C_k(A, B) = A[k|B]$.

$C = C_o$ est dite "concaténation" et $C(A, B)$ est noté $A \dot{-} B$.

*Lemme 1.3*

$C_k$ est une application croissante et continue.

Preuve

Conséquence de la croissance et de la continuité de la substitution.

*Lemme 1.4*

C est une opération associative.

Preuve

$(A[0|B])\,[0|D] = A[0|B[0|D]]$

□

Notation

Le lemme 1.4 nous permet d'adopter une notation exponantielle en posant pour $A \in Al_S^\infty$ : $A^o = 0$, $A^1 = A$, $A^{n+1} = A^n \dot{-} A = C(A^n, A)$

Nous démontrons ci-dessous quelques propriétés techniques de ces opérateurs.

*Lemme 1.5*

i) $\forall A \in Al_S^\infty$: $\downarrow(\uparrow(A)) = A$

ii) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall A \in Al_S^\infty$ : $\uparrow_k(\downarrow(A)) = \downarrow(\uparrow_{k+1}(A))$

iii) $\forall\, A, B \in Al_S^\infty : \downarrow(A) \leq \downarrow(A \dot{-})$

iv) $\forall\, k, k' \in \mathbb{N},\ k \neq k'$

$\forall\, A_1, B_1, A_2 \in Al_S^\infty$, $A_2$ ne contenant pas d'occurrence de k'

$C_k(C_{k'}(A_1, B_1), A_2) = C_{k'}(C_k(A_1, A_2), C_k(B_1, A_2))$

iv') $k \neq 0 \quad k' = 0$, $A_2$ ne contenant pas d'occurrence de 0 :

$C_k(A_1 \dot{-} B_1, A_2) = C_k(A_1, A_2) \dot{-} C_k(B_1, A_2)$

v) $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\ (k \neq 0)$, $\forall\, A_1, A_2 \in Al_S^\infty$, $A_2$ ne contenant pas d'occurrence de 0 :

$C_k(A_1^n, A_2) = (C_k(A_1, A_2))^n$.

vi) $\forall\, A_1, A_2 \in Al_S^\infty\ \forall\, k \in \mathbb{N}\ (k \neq 0)$, $\forall\, p, n \in \mathbb{N}$ : $(p > 0)$

$C_k(A_1^n, \uparrow^p(A_2)) = C_k(A_1, \uparrow^p(A_2))^n$

Preuve :

i) $\downarrow(\uparrow(A)) = (A[i|i+1])\ [0|\Omega,\ i>0|i-1]$

$\uparrow(A)$ ne contient pas d'occurrence de 0

$= (A[i|i+1])[i|i-1] = A$

ii) $\uparrow_k(\downarrow(A)) = (A[0|\Omega,\ i>0|i-1])\ [i\geq k|i+1]\ (=\Gamma)$

. si k = 0 alors $\Gamma = A[0|\Omega] = \downarrow(\uparrow_1(A))$

. si k > 0 alors $\Gamma = A[0|\Omega,\ 0<i\leq k|i-1] = \uparrow(\uparrow_{k+1}(A))$.

Remarquons que les opérations $\uparrow$ et $\downarrow$ ne commutent pas, puisque $\uparrow(\downarrow(A)) = \downarrow(\uparrow_1(A))$.

pour $A = 0$ : $\uparrow(\downarrow(A)) = \Omega$ et $\downarrow(\uparrow(0)) = 0$

iii) . dom $(\downarrow(A)) = \text{dom}(A)$

donc : dom $(\downarrow(A)) \subseteq \text{dom}(\downarrow(A \dot{-} B))$ puisque

dom $(A \dot{-} B) = (\text{dom}(A) - M_o) \cup M_o.\text{dom}(B)$

où $M_o = \{m \in \text{dom}(A) \mid A(m) = 0\}$.

. soit $m \in \text{dom}(A)$ tel que $(A)(m) \neq \Omega$ donc $A(m) \notin \{0, \Omega\}$.

d'où $(\downarrow(A \dot{-} B))(m) = \downarrow((A \dot{-} B)(m)) = \downarrow(A)(m)$.

iv) $C_k(C_{k'}(A_1, B_1), A_2) = (A_1[k'|B_1])[k|A_2]$

$k \neq k'$ et $occ(k', A_2) = \emptyset$

$= (A_1[k\ A_2])[k'|B_1[k\ A_2]] = C_{k'}(C_k(A_1, A_2), C_k(B_1, A_2))$

iv') immédiat d'après (iv)

v) par induction sur n

. $n = 0$ $C_k(0, A_2) = 0$ puisque $k \neq 0$

$C_k(A_1, A_2)^o = 0$ par définition

. $C_k(A_1^{n+1}, A_2) = C_k(A_1^n \doteq A_1, A_2)$

$\stackrel{(iv)}{=} C_k(A_1^n, A_2) \doteq C_k(A_1, A_2)$

$\stackrel{HR}{=} C_k(A_1, A_2)^n \doteq C_k(A_1, A_2) = C_k(A_1, A_2)^{n+1}$

vi) se déduit de (v) sachant que $\uparrow^p(A_2)$ ne contient pas d'occurrence de 0 puisque $(p > 0)$.

□

*Proposition 1.1*

Pour $A \in Al_S^\infty$

on a : $s(A) = \sup\ \{\downarrow(A^n) \mid n \in \mathbb{N}\}$

Preuve

i) si $A = 0$ alors $s(A) = \Omega$

et $\sup\ \{\downarrow(A^n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \sup\ \{\downarrow(0)\} = \Omega$.

ii) Supposons $A \neq 0$

et soit U l'équation

$X = A[0|X, i > 0 \mid i - 1]$

et posons $\tau(X) = A[0|X, i > 0 \mid i - 1]$.

alors : U a une solution unique et

$sol(U) = \sup_n\ (\tau^n(\Omega))$

<u>Or</u> $\forall\, n \quad \tau^{n}(\Omega) = \downarrow(A^{n})$.

en effet : par induction sur n.

$$
\begin{aligned}
. \; n = 0 \quad & \tau^{o}(\Omega) = \Omega \\
\text{et} \quad & \downarrow(A^{o}) = \downarrow(0) = \Omega \\
. \; n > 0 \quad & \tau^{n}(\Omega) = \tau(\tau^{1-1}(\Omega)) \\
& = A[0 \mid \tau^{n-1}(\Omega),\ i>0 \mid i-1] \\
& \overset{HR}{=} A[0 \mid \downarrow(A^{n-1}),\ i>0 \mid i-1] \\
& = \downarrow(A[0 \mid A^{n-1}]) \\
& = \downarrow(A^{n}).
\end{aligned}
$$

Par définition de s, s(A) est solution de l'équation U, d'où l'égalité.

Remarquons que sup $\{\downarrow(A^{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est bien défini puisque $(\downarrow(A^{n}))_{n}$ est une chaîne croissante en vertu du lemme (1.5, iii).

□

*Proposition 1.2*

Soit $A \in Al_{S}^{\infty}$

On pose $dom(A) = D_o \cup D_1 \cup D_2$ avec :

$m \in D_o$ <u>si</u> $A(m) = 0$

$m \in D_1$ <u>si</u> $A(m) \in \mathbb{N}^{+}$

$m \in D_2$ <u>sinon</u>

et soit $A^{*}$ l'alternative donnée par :

$dom(A^{*}) = D_o^{*}\ (D_1 \cup D_2)$

$$
A^{*}(m) = \begin{cases} A(m'') \ \underline{\text{si}}\ m = m'\,m'' \ \underline{\text{avec}}\ m' \in D_o^{*},\ m'' \in D_2 \\[2ex] A(m'') - 1 \ \underline{\text{si}}\ m = m'\,m'' \ \underline{\text{avec}}\ m' \in D_o,\ m'' \in D_1 \end{cases}
$$

alors :

$s(A) = A^{*}$.

Preuve

On utilise la forme de s(A) de la proposition 1.1.

. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ dom $(\downarrow A^n) = \mathrm{dom}(A^n)$.

montrons par récurrence que :

$$\mathrm{dom}\ (A^n) = (\varepsilon \cup D_o \cup \ldots \quad D_o^{n-1})\ (D_o \cup D_1 \cup D_2)$$

En effet :

. $\mathrm{dom}(A) = D_o \cup D_1 \cup D_2$

. $\mathrm{dom}(A^{n+1}) = D_1 \cup D_2 \cup D_o\ \mathrm{dom}\ (A^n)$

$\overset{HR}{=}\ D_1 \cup D_2 \cup D_o\ (\varepsilon \cup D_o \cup \ldots \cup D_o^{n-1})\ (D_o \cup D_1 \cup D_2)$

puisque $\varepsilon \in D_o \cup D_1 \cup D_2$ on a :

$$= \quad (D_o \cup D_1 \cup D_2) \cup (D_o \cup D_o^2 \cup \ldots \cup D_o^n)(D_o \cup D_1 \cup D_2)$$

$$= \quad (\varepsilon \cup D_o \cup \ldots \cup D_o^n)(D_o \cup D_1 \cup D_2)$$

donc

$$\mathrm{dom}\ \sup_n\ (\downarrow(A^n)) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{dom}\ (\downarrow(A^n))$$

$$= D_o^*\ (D_o \cup D_1 \cup D_2) = D_o^*\ (D_1 \cup D_2)$$

puisque $\varepsilon \in D_1 \in D_2$

d'autre part :

$\downarrow(A^n)(m) = A(m'')$ si $m = m'm''$ avec : $m' \in \varepsilon \cup D_o \cup \ldots \quad D_o^{n-1}$

$m'' \in D_2$

$A(m'')-1$ si $m = m'm''$ avec $m' \in \varepsilon \cup D_o \cup \ldots \cup D_o^{n-1}$

$m'' \in D_1$

si $m = m'm''$ avec $m' \in \varepsilon \cup D_o \cup \ldots \cup D_o^{n-1}$

$m'' \in D_o$

d'où :

$$\sup_n\ (\downarrow(A^n))(m) = \sup_n\ (\downarrow(A^n)(m))$$

$$= \begin{cases} A(m'') \ \underline{\text{si}} \text{ il existe } n,\ m = m'm'', \\ \qquad m' \in D_o^n,\ m'' \in D_2 \\ A(m'')-1 \ \underline{\text{si}} \text{ il existe, } m = m'm'' \\ \qquad m' \in D_o^n,\ m'' \in D_1. \end{cases}$$

□

Nous démontrons ci-dessus quelques propriétés techniques sur l'opération étoile. Par la suite on utilisera l'une ou l'autre des trois définitions équivalentes de "s".

*Proposition 1.3*

i) $\forall A \in Al_S^{\infty} : \uparrow_k(A^*) = (\uparrow_{k+1}(A))^*$.

ii) $\forall A_1.A_2 \in Al_S^{\infty}: C_k(A_1^*, A_2) = (C_{k+1}(A_1, \uparrow(A_2)))^*$.

Preuve

i) $\uparrow_k(A^*) = \uparrow_k(\sup_n (\downarrow(A^n))$

$\uparrow_k$ étant continue :

$= \sup_n (\uparrow_k(\downarrow(A^n)))$

par le lemme (1.5, II)

$= \sup_n (\downarrow(\uparrow_{k+1}(A^n))) = \sup_n (\downarrow(\uparrow_{k+1}(A))^n))$

$= (\downarrow_{k+1}(A))^*$.

ii) $C_k(A_1^*, A_2) = C_k(\sup_n (\downarrow A_1^n), A_2)$

$C_k$ étant continue

$= \sup_n C_k(\downarrow A_1^n, A_2)$

$= \sup_n (\downarrow C_{k+1}(A_1^n, \uparrow A_2))$

d'après le lemme (1.5, vi) :

$= \sup_n (\downarrow(C_{k+1} (A_1, \uparrow A_2))^n)$

$= (C_{k+1}(A_1, \uparrow(A_2)))^*$.

□

## 2 - ALTERNATIVES RATIONNELLES

*Définition 2.1*

L'ensemble des alternatives rationnelles, noté Rat, est le plus petit sous-ensemble de $Al_S^{\infty}$ clos par les opérations du magma $M^{\infty}(W)$ et par l'étoile.

i.e. : Rat est tel que :

i) $S \subseteq Rat$

ii) $A \in Col(F)$, $B \in Rat \Rightarrow B.A \in Rat$

iii) $\alpha \in P_F$, $A, B \in Rat \Rightarrow [A, B]\alpha \in Rat$

iv) $A \in Rat \Rightarrow A^* \in Rat$.

i.e. : une alternative A est dite *rationnelle* si il existe une suite finie $A_1, \ldots, A_n$ d'alternatives telles que $A_n = A$ <u>et</u> $\forall\ i = 1, \ldots, n$, $A_i \in S$ ou $A_i$ est obtenu à partir des $A_j$ $(j < i)$ par l'une des opérations ii, iii, iv ci-dessus. $A_1, \ldots, A_n$ est dite la "suite rationnelle définissant" A.

<u>*Proposition 2.1*</u>

Rat est fermé par les $\uparrow_k$-opérations.

<u>Preuve</u>

Soit $A \in Rat$,

et $\mu(A)$ la plus petite longueur d'une suite rationnelle définissant A.

récurrence sur $\mu(A)$ :

. $\mu(A) = 1 \Rightarrow A \in S \Rightarrow \uparrow_k(A) \in S \subseteq Rat$.

. $A = B.A'$ avec $A' \in Col(F)$, $B \in Rat$

$\mu(B) < \mu(A)$, donc, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\uparrow_k(B) \in Rat$$

donc $\uparrow_k(A) = \uparrow_k(B.A') = \uparrow_k(B).A' \in Rat$.

. $A = [A_1, A_2]\alpha$ avec $\alpha \in P_F$, $A_1, A_2 \in Rat$.

$\mu(A_1) < \mu(A)$ <u>et</u> $\mu(A_2) < \mu(A)$

donc d'après l'hypothèse de récurrence

$\uparrow_k(A_1), \uparrow_k(A_2) \in Rat$.

d'où : $\uparrow_k(A) = [\uparrow_k(A_n), \uparrow_k(A_2)]\alpha \in Rat$.

. $A = A'^*$ avec $A' \in$ Rat

$\mu(A') < \mu(A)$ : donc d'après l'hypothèse de récurrence :

$\uparrow_k(A') \in$ Rat

d'où $\uparrow_{k+1}(A') \in$ Rat

or : $\uparrow_k(A) = \uparrow_k(A'^*) =$

d'où d'après la proposition (1.3 - i) :

$= (\uparrow_{k+1}(A'))^* \in$ Rat.

*Proposition 2.2*

Rat est fermée par les opérations $C_k$.

Preuve

Soient $A_1$ et $A_2 \in$ Rat.

récurrence sur $\mu(A_1)$,

. $\mu(A_1) = 1 \Rightarrow C_k(A_1, A_2) = A_1$ ou $A_2 \in$ Rat

. $A_1 = B.A'_2$ avec $A'_2 \in Col(F)$, $B \in$ Rat.

$C_k(B.A'_1, A_2) = C_k(B, A_2).A'_1$

$\mu(B) < \mu(A_1)$, d'où d'après l'hypothèse de récurrence :

$C_k(B, A_2) \in$ Rat

donc $C_k(B, A_2).A'_1 = C_k(A_1, A_2) \in$ Rat.

. $A_1 = [A'_1, A''_1]\alpha$ avec $\alpha \in P_F$, $A'_1$, $A''_1 \in$ Rat.

$C_k(A_1, A_2) = [C_k(A'_1, A_2), C_k(A''_1, A_2)]\alpha$

or $\mu(A'_1), \mu(A''_1) < \mu(A_1)$

d'où d'après l'hypothèse de récurrence :

$C_k(A'_1, A_2)$ <u>et</u> $C_k(A''_1, A_2) \in$ Rat.

d'où : $C_k(A_1, A_2) \in$ Rat

. $A_1 = A'^*_1$ avec $A'_1 \in$ Rat.

$C_k(A'^*_1, A_2) = (C_{k+1}(A'_1, \uparrow(A_2)))^*$ d'après la proposition (1.3 - ii)

<u>or</u> : $A_2 \in$ Rat $\Rightarrow \uparrow(A_2) \in$ Rat.

$\mu(A'_1) < \mu(A_1)$ d'où d'après l'hypothèse de récurrence :

$C_{k+1}(A'_2, \uparrow(A_2)) \in \text{Rat}$

donc : $C_k(A_1, A_2) \in \text{Rat}$.

*Proposition 2.3*

Toute alternative rationnelle est reconnaissable.

i.e. $\text{Rat} \subseteq (\text{Reg} = \text{Rec})$.

Preuve

. $S \subseteq \text{Rec}$

. Rec est évidemment fermé par les opérations du magma $M^{\infty}(W)$.

Montrons que Rec est fermé par l'opération étoile.

En effet : le nombre des sous-alternatives distinctes de $A^*$ est au plus égal à celui de A, pour $A \in \text{Rec}$.

i.e. : $\text{card}\ (\text{Sb}(A^*)) \leq \text{card}\ (\text{Sb}(A))$ :

Soit : $m, \bar{m} \in \text{dom}(A^*)$ avec $m = m'm''$ avec $m' \in D_o^*$, $m'' \in D_1 \cup D_2$

$\bar{m} = \bar{m}'\bar{m}''$ avec $\bar{m}' \in D_o$, $\bar{m}'' \in D_1 \cup D_2$

montrons que : $A|m'' = A|\bar{m}'' \Rightarrow A^*|m = A^*|\bar{m}$ :

$(A^*(m)(u) =$ . <u>si</u> $m''u, \bar{m}''u \in D_2$

alors $A(m''u) = A(\bar{m}''u) = (A^*|\bar{m})(u)$

. <u>si</u> $m''u, \bar{m}''u \in D_1$

alors $A(m''u) - 1 = A(\bar{m}''u) - 1 = (A^*|\bar{m})(u)$

. <u>si</u> $u = vw$ avec $v \in D_o^*$, $w \in D_1 \cup D_2$

<u>alors</u> . <u>si</u> $w \in D_2$

<u>alors</u> $A^*(mvw) = A(w) = A^*(\bar{m}u) = (A^*|\bar{m})(u)$.

. <u>si</u> $w \in D_1$

<u>alors</u> $A^*(mvw) = A(w) - 1 = A^*(mu) = (A^*|\bar{m})(u)$.

□

## 3 - EXPRESSIONS RATIONNELLES

On pose $\bar{S} = S|X$ où $X$ est un ensemble de symboles d'alternatives "inconnues" et $\bar{W} = \mathrm{Col}(F) \cup P_F \cup \bar{S}$.

On considère un symbole distingué de graduation 1, $\underline{\star}$.

*Définition 3.1*

On appelle "expression rationnelle" un élément de $M(\bar{W} \cup \{\underline{\star}\})$.

L'ensemble des expressions rationnelles est noté $E_{\bar{S}}$ (FUP), ou $E_{\bar{S}}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur FUP.

i.e. : $E_{\bar{S}}$ est le plus petit ensemble vérifiant :

i) $\bar{S} \subseteq E_{\bar{S}}$

ii) $A \in \mathrm{Col}(F)$, $B \in E_{\bar{S}} \Rightarrow B.A \in E_{\bar{S}}$

iii) $\alpha \in P_F$, $A, B \in E_{\bar{S}} \Rightarrow [A, B]\alpha \in E_{\bar{S}}$

iv) $A \in E_{\bar{S}} \Rightarrow \underline{\star}\,(A) \in E_{\bar{S}}$

$\underline{\star}(A)$ sera noté aussi $A^{\underline{\star}}$

Exemple

Soit $a, b \in \mathrm{Col}(F)$, $\alpha \in P_F$

alors

```
      α
     / \
    o   *
        |
        a
        |                ∈      E{0,1}
        α
       / \
      *   a
      |   |
      b   1
      |
      o
```

*Définition 3.2*

i) Soit $e \in E_{\bar{S}}$, $m \in \mathrm{dom}(e)$

On appelle *"profondeur de m dans e"* l'entier

$$\delta(m, e) = \text{card } \{m' \lneq_{+p} m \mid e(m') = \underline{\star}\}$$

ii) soit $e \in E_{\bar{S}}$, $m \in \text{dom}(e)$ tel que $e(m) \in \mathbb{N}$ $(\cap \bar{S})$

m est dit *"signe terminal de e"* <u>si</u>

$\tau(m, e) = e(m) - \delta(m, e) \geq 0$

e(m) est alors dite *"valeur locale de m dans e"*

et $\tau(m, e)$ est dite *"valeur terminale de m dans e"*.

On note ST(e) l'ensemble des signes terminaux de e.

<u>Exemple</u>

Soit e l'expression rationnelle de l'exemple précédent.

on a : $\delta(\varepsilon, e) = \delta(1, e) = 0$, $\delta(21, e) = 1$

$\tau(1, e) = 0$, $\tau(211111, e) = -2$, $\tau(21121, e) = 0$.

$S(e) = \{1, 21121\}$.

On a $Al_{\bar{S}} \subseteq E_{\bar{S}}$, les opérations $\uparrow_k$ et $C_k$ $(k \in \mathbb{N})$ peuvent être étendus à $E_{\bar{S}}$ de la manière suivante :

<u>*Définition 3.3*</u>

Pour $k \in \mathbb{N}$

i) Soit $\underline{\uparrow}_k : E_{\bar{S}} \to E_{\bar{S}}$ l'application définie par :

$$\underline{\uparrow}_k(e) = \begin{cases} .\underline{\uparrow}_k(e) \ \underline{\text{si}} \ e \in \bar{S} \\ .\underline{\uparrow}_k(B).A \ \underline{\text{si}} \ e = B.A \text{ avec } A \in \text{Col}(F),\ B \in E_{\bar{S}} \\ .[\underline{\uparrow}_k(A), \underline{\uparrow}_k(B)]\alpha \ \underline{\text{si}} \ e = [A,B]\alpha \text{ avec } \alpha \in \mathcal{P}_F,\ A,B \in E_{\bar{S}} \\ .\ (\underline{\uparrow}_{k+1}(e'))^{\underline{\star}} \ \underline{\text{si}} \ e = e'^{\underline{\star}} \text{ avec } e' \in E_{\bar{S}} \end{cases}$$

ii) soit $\underline{C}_k : E^2_{\bar{S}} \to E_{\bar{S}}$ l'application définie par :

$$\underline{C}_k(e_1, e_2) = \begin{cases} \cdot\ e_1[k|e_2]\ \underline{\text{si}}\ e_1 \in \bar{S} \\ \cdot\ \underline{C}_k(B, e_2).A\ \underline{\text{si}}\ e_1 = B.A \text{ avec } A \in Col(F), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad B \in E_{\bar{S}} \\ \cdot\ [\underline{C}_k(A, e_2), \underline{C}_k(B, e_2)]\alpha\ \underline{\text{si}}\ e = [A,B]\alpha \\ \qquad\qquad \text{avec } \alpha \in P_F,\ A,\ B \in E_{\bar{S}} \\ \cdot\ (\underline{C}_{k+1}(e'_1, \underline{\uparrow}(e_2)))^{\underline{*}}\ \underline{\text{si}}\ e_1 = (e'_1)^{\underline{*}} \text{ avec } e'_1 \in E_{\bar{S}} \end{cases}$$

*Définition 3.4*

Soit val : $E_{\bar{S}} \to Al_{\bar{S}}^{\infty}$ l'application définie par :

$$val(e) = \begin{cases} \cdot\ e\ \underline{\text{si}}\ e \in \bar{S} \\ \cdot\ val(B).A\ \underline{\text{si}}\ e = B.A \text{ avec } A \in Col(F),\ B \in E_{\bar{S}} \\ \cdot\ [val(A), val(B)]\alpha\ \underline{\text{si}}\ e = [A,B]\alpha \text{avec} \\ \qquad\qquad \alpha \in P_F,\ A,\ B \in E_{\bar{S}} \\ \cdot\ (val(e'))^{*} = s(val(e'))\ \underline{\text{si}}\ e = e'^{\underline{*}} \text{ avec } e' \in E_{\bar{S}} \end{cases}$$

*Lemme 3.1*

- Pour $e \in E_{\bar{S}}$, $val(e) \in Rat$.
- pour $A \in Rat$, il existe $e \in E_{\bar{S}}$ tel que $A = val(e)$.

Preuve

Immédiate.

*Lemme 3.2*

i) $\uparrow_k \circ val = val \circ \underline{\uparrow}_k$ $\quad (\forall\, k \in \mathbb{N})$

ii) $val\ (\underline{C}_k(e_1, e_2)) = C_k(val(e_1), val(e_2))$

$\qquad \forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, e_1, e_2 \in E_{\bar{S}}$

Preuve

i) Par induction sur la complexité de $e. \in E_{\bar{S}}$

- $\underline{\text{si}}$ $e \in \bar{S}$ $\underline{\text{alors}}$ $(\uparrow_k \circ val)(e) = \uparrow_k(e) = \underline{\uparrow}_k(e) = (val \circ \underline{\uparrow}_k)(e)$

. $\underline{si}$ $e = B.A$ avec $B \in E_{\bar{S}}$, $A \in Col(F)$

$\underline{alors}$ $(\uparrow_k \circ val)(B.A) = \uparrow_k(val(B).A) = \uparrow_k(val(B)).A$

d'où d'après l'hypothèse de récurrence :

$= (val \circ \underline{\uparrow}_k)(B).A = (val \circ \underline{\uparrow}_k)(e)$

. $\underline{si}$ $e = [A, B]\alpha$ avec $\alpha \in P_F$, $A, B \in E_{\bar{S}}$

$\underline{alors}$ : $(\uparrow_k \circ val)([A, B]\alpha) = \uparrow_k([vol(A), val(B)\alpha]$

$= [(\uparrow_k \circ val)(A), (\uparrow_k \circ val)(B)]\alpha$

d'où d'après l'hypothèse de récurrence :

$= [val \circ \underline{\uparrow}_k(A), val \circ \underline{\uparrow}_k(B)]\alpha = (val \circ \underline{\uparrow}_k)(e).$

. $\underline{si}$ $e = e'^{\underline{*}}$ avec $e' \in E_{\bar{S}}$

$\underline{alors}$ $(\uparrow_k \circ val)(e'^{\underline{*}}) = \uparrow_k((vol(e'))^*) = (\uparrow_{k+1}(val(e')))^*$

d'où d'après l'hypothèse de récurrence

$= (val \circ \underline{\uparrow}_{k+1}(e'))^* = val((\underline{\uparrow}_{k+1}(e'))^{\underline{*}}) = (val \circ \underline{\uparrow}_k)(e)$

ii) par induction sur la complexité de $e_1$

. $\underline{si}$ $e_1 \in S$ $\underline{alors}$ $val\ (\underline{C}_k\ (e_1, e_2)) = val(e_1[k|e_2])$

$= \underline{si}$ $e_1 = k$ $\underline{alors}$ $val(e_2) = C_k(val(e_1), val(e_2))$

$\underline{sinon}$ $val(e_1) = C_k(val(e_1), val(e_2)).$

. $\underline{si}$ $e_1 = B.A$ avec $A \in Col(F)$, $B \in E_{\bar{S}}$

$\underline{alors}$ $val(\underline{C}_k(B.A, e_2))) = val\ (\underline{C}_k(B, e_2).A)$

$= val\ \underline{C}_k(B, e_2)).A$

d'où d'après l'hypothèse de récurrence

$= C_k(val(B), val(e_2)).A$

$= C_k(val(B).A, val(e_2)) = C_k(val(e_1), val(e_2)).$

. $\underline{si}$ $e_1 = [A, B]\alpha$ avec $\alpha \in P_F$, $A, B \in E_{\bar{S}}$

alors : $val(\underline{C}_k([A,B]\alpha, e_2)) = val([\underline{C}_k(A, e_2), \underline{C}_k(B, e_2)]\alpha)$

$= [val(\underline{C}_k(A, e_2)), val(\underline{C}_k(B, e_2))]\alpha$

d'où d'après l'hypothèse de récurrence :

$= [C_k(\mathrm{val}(A),\ \mathrm{val}(e_2)),\ C_k(\mathrm{val}(B),\ \mathrm{val}(e_2))]\alpha$

$= C_k(\mathrm{val}(e_1),\ \mathrm{val}(e_2))$

. <u>si</u> $e_1 = e'^{*}_1$ avec $e'_1 \in E_{\bar{S}}$

<u>alors</u> $\mathrm{val}(\underline{C}_k(e'^{*}_1,\ e_2)) = \mathrm{val}((\underline{C}_{k+1}(e'_1,\ \underline{\uparrow}(e_2)))\underline{*})$.

$= (\mathrm{val}(\underline{C}_{k+1}(e'_1,\ \underline{\uparrow}(e_2)))^{*}$

d'où d'après l'hypothèse de récurrence :

$= (C_{k+1}(\mathrm{val}(e'_1),\ \mathrm{val}(\underline{\uparrow}(e_2)))^{*}$

d'où d'après (i)

$= (C_{k+1}(\mathrm{val}(e'_1),\ \uparrow(\mathrm{val}(e_2))))^{*}$

$= C_k((\mathrm{val}(e'_1))^{*},\ \mathrm{val}(e_2))$

$= C_k(\mathrm{val}(e'^{\underline{*}}_1),\ \mathrm{val}(e_2)) = C_k(\mathrm{val}(e_1),\ \mathrm{val}(e_2))$.

□

*<u>Lemme 3.3</u>*

i) $\forall\ e \in E_{\bar{S}},\ \forall\ k \in \mathbb{N}$

$\underline{\uparrow}_k(e) = e[n \in ST(e),\ \tau(n,\ e) \geq k : n \leftarrow e(n) + 1]$

ii) $\forall\ e_1,\ e_2 \in E_{\bar{S}},\ \forall\ k \in \mathbb{N}$.

$\underline{C}_k(e_1,\ e_2) = e_1[m \in ST(e_1),\ \tau(m,\ e_1) = k : m \leftarrow \underline{\uparrow}_k^{\delta(m,e_1)}(e_2)]$

$\underline{C}_k(e_1,\ e_2)$ sera noté $e_1[k||e_2]$.

<u>Preuve</u>

On définit une application $h : E_{\bar{S}} \to \mathbb{N}$

dite "hauteur d'étoile" par :

$$h(e) = \begin{cases} 0 \ \underline{\text{si}}\ e \in \bar{S} \\ h(B)\ \underline{\text{si}}\ e = B.A \text{ avec } B \in E_{\bar{S}}\ \underline{\text{et}}\ A \in \mathrm{Col}(F) \\ \max\{h(A),\ h(B)\}\ \underline{\text{si}}\ e = [A,\ B]\alpha \text{ avec } \alpha \in P_F,\ A,\ B \in E_{\bar{S}} \\ 1 + h(e')\ \underline{\text{si}}\ e = e'^{\underline{*}} \text{ avec } e' \in E_{\bar{S}} \end{cases}$$

i) par induction sur $h(e)$

. $h(e) = 0 \Rightarrow e \in Al_S^-$

d'où $\underline{\uparrow}_k(e) = \uparrow_k(e) = e[i \geq k \; ; \; i \mid i+1]$

$\underline{or}$ $e \in Al_S^- \Rightarrow \forall\, m \in e^{-1}(i),\ m \in ST(e)$

$\delta(m, e) = 0$ $\underline{et}$ $\tau(m, e) = i$

d'où : $\underline{\uparrow}_k(e) = e[m \in ST(e),\ \tau(m, e) \geq k,\ m \leftarrow e(m)+1]$

. $h(e) > 0$

soit $\{m_1, \ldots, m_n\}$ l'ensemble des éléments minimaux, pour l'ordre prefixiel $<_p$, de dom(e) tel que : $e(m_i) = \underline{\star}$.

soient : $e', e_1, \ldots, e_n$ les expressions rationnelles

données par : $\begin{cases} e' = e[m_i \leftarrow \Omega,\ i = 1, \ldots, n] \\ e \ \ = e'[m_1 \leftarrow e_1, \ldots, m_n \leftarrow e_n]. \end{cases}$

et pour $i = 1, \ldots, n$ $\ e_i = e'^{\underline{\star}}_i$

alors :

$\underline{\uparrow}_k(e) = \uparrow_k(e')\ [m_1 \leftarrow \underline{\uparrow}_k(e_1), \ldots, m_n \leftarrow \underline{\uparrow}_k(e_n)]$

$\underline{or}$

$\underline{\uparrow}_k(e_i) = (\underline{\uparrow}_{k+1}(e'_i))^{\star}.$

d'où d'après l'hypothèse d'induction ($h(e'_i) < h(e)$ pour $i=1,..,n$) :

$\underline{\uparrow}_{k+1}(e'_i) = e'_i[m \in ST(e'_i),\ \tau(n, e'_i) \geq k+1 \; ; \; n \leftarrow e'_i(m) + 1]$

d'où

$\underline{\uparrow}_k(e_i) = e_i[m \in ST(e_i),\ \tau(m, e_i) \geq k : m \leftarrow e_i(m) + 1]$

donc :

$$\underline{\uparrow}_k(e) = \uparrow_k(e')\ [m_i \leftarrow e_i\ [m \in ST(e_i),\ \tau(m, e_i) \geq k : n \leftarrow e_i(m) + 1],\ i = 1, \ldots, n]$$

$\underline{or}$ : $m \in ST(e) \Rightarrow \exists\ i = 1, \ldots, n$ tel que $\begin{cases} m = uv, \\ v \in ST(e_i) \end{cases}$

et $\tau(m, e) = \tau(v, e_i)$,

sinon $\tau(m, e) = e(m)$

donc :

$\underline{\uparrow}_k(e) = e[m \in ST(e),\ \tau(m, e) \geq k : m \leftarrow e(m) + 1]$.

ii) par induction sur $h(e_1)$

. $h(e_1) = 0 \Rightarrow e_1 \in Al_{\bar{S}}$

$\underline{C}_k(e_1, e_2) = e_1[k|e_2]$

$= e_1[m \in ST(e_1),\ \tau(m, e_1) = k\ ;\ m \leftarrow E_2]$

. $h(e_1) > 0$

le raisonnement est similaire au cas précédent.

Considérons toutefois le cas, central, $e_1 = e'_1{}^{\underline{\star}}$

$\underline{C}_k(e'^{\underline{\star}}_1, e_2) = (\underline{C}_{k+1}(e'_1, \uparrow(e_2)))^{\underline{\star}}$

d'où par hypothèse d'induction $(h(e_1) < h(e_1))$ :

$= (e'_1[m \in ST(e'_1),\ \tau(m, e'_1) = k+1 : m \leftarrow \underline{\uparrow}^{\delta(m,e'_1)}(\underline{\uparrow}(e_2))])^{\underline{\star}}$

$= e'^{\underline{\star}}_1\ [m \in ST(e'^{\underline{\star}}_1),\ \tau(m, e'^{\underline{\star}}_1) = k : m \leftarrow \underline{\uparrow}^{\delta(m,e^{\underline{\star}}_1)}(e_2)]$

d'où le résultat.

□

*Lemme 3.4*

$\forall\ e_1, e_2 \in E_{\bar{S}}$

On a : $val(e_1[k||e_2]) = val(e_1)[k|val(e_2)]$.

Preuve

$Val(e_1[k||e_2]) = val(\underline{C}_k(e_1, e_2))$

$= C_k(val(e_1), val(e_2)) = val(e_1)\ [k|val(e_2)]$.

□

Exemple

Soit $e_1$ =

```
               ε
               α
            1 / \ 2
             0   *
                 |21
                 a
                 |211
                 α
         2111  /  \
              *    a
        21111 |    |
              b    0
       211111 |
              2
```

et $e_2$ =

```
      a
      |
      α
     / \
    *   0
    |
    b
    |
    1
```

alors $e_1[0 \| e_2]$.

$= e_1[1 \leftarrow e_2,\ 211111 \leftarrow \underline{\uparrow}^2(e_2)]$.

=

```
          α
        /   \
       a     *
       |     |
       α     a
      / \    |
     *   0   α
     |      / \
     b     *   a
     |     |   |
     1     b   0
           |
           a
           |
           α
          / \
         *   2
         |
         b
         |
         3
```

Pour pouvoir donner de la solution d'un système régulier une expression rationnelle, on étend l'ensemble des expressions rationnelle à $S = \hat{S} \cup X$ en introduisant un nouveau symbole de graduation 1 : $\uparrow$. Cet ensemble sera noté $E_S$, et sera dit ensemble des T-expressions rationnelles, (T pour terme)

*Définition 3.5*

i) On appelle "T-expression rationnelle" un élément de $M(W \cup \{*, \uparrow\})$ de la forme :

$e[k_1||X_1, \ldots, k_n||X_n]$ où

. $e \in E_{\bar{S}}$

. $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ $(\cap S)$ tel que $\forall\, i \neq j \quad k_i \neq k_j$

et $e[k||X] = e[m \in ST(e),\ \tau(m,e) = k : n \leftarrow \uparrow^{\delta(n,e)}(X)]$

ii) A une T-expression rationnelle $e = e'[k_1||X_1, \ldots, k_n||X_n]$

on associe une application $\hat{e} : Al_{\bar{S}}^{\infty n} \to Al_{\bar{S}}^{\infty}$ donnée par :

$$\hat{e}(A_1, \ldots, A_n) = val(e'[k_1||A_1, \ldots, k_n||A_n)$$
$$= val(e')[k_1|A_1, \ldots, k_n|A_n]$$

et on pose : $val(e) = val(e')\ [k_1|X_1, \ldots, k_n|X_n]$.

d'où :

*Lemme 3.5*

Soit $e \in E_S$, $\hat{e} \in E_{\bar{S}}$

alors : $val(e[k||\bar{e}]) = val(e)\ [k|val(\bar{e})]$.

Notation

Pour $e \in E_{\bar{S}}$, $e' \in E_{\bar{S}}$ et $\bar{e} = e[k_1||X_1, \ldots, k_n||X_n]$

on pose $e[X_i||e'] = e[k_1||X_1, \ldots, k_i||e', \ldots, k_n||X_n]$

*Lemme 3.6*

Pour $e \in E_S$

$A = (e[X_1|\uparrow(X_1), \ldots, X_n|\uparrow(X_n)])^{\underline{*}} \in E_S$

Preuve

Soit $e = e'[k_1||X_1, \ldots, k_n||X_n]$ avec $e' \in E_{\bar{S}}$

alors $A = (\underline{\uparrow}(e'))^{\underline{*}}\ [k_1(|X_1, \ldots, k_n||X_n)$.

□

## 4 - RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS REGULIERS

Nous montrons dans ce paragraphe qu'à tout système d'équations régulier on peut associer une expression rationnelle qui représente sa solution.

i.e. : Rec $\subseteq$ Rat.

*Définition 4.1*

On appelle système d'équations rationnel un ensemble d'équations de la forme :

$$X_i = \tau_i \ (i = 1, \ldots, n) \text{ avec } \tau_i \in E_{\bar{S} \cup \{X_1, \ldots, X_n\}}.$$

Remarque

Un système régulier est rationnel.

*Proposition 4.1*

Soit $A \in Al_S^{\infty} - \{0\}$

L'unique solution de l'équation :

$U : X = A[0|X, i > 0 \mid i-1]$ est $A^*$.

Preuve :

Voir la preuve de la proposition (1.1)

*Proposition 4.2*

Soit $\tau \in Al^{\infty}_{\bar{S} \cup \{X\}}$.

l'unique solution de l'équation

$U : X = \tau$ est : $(\tau[X|0, i|i+1])^*$

Preuve

Conséquence immédiate de la proposition précédente.

*Proposition 4.3*

Soit $e \in E_{\bar{S} \cup \{X_1, \ldots, X_n\}}$.

la solution de l'équation $X_n = \hat{e}$ sur

$Al^{\infty}_{\bar{S} \cup \{X_1, \ldots, X_n\}}$ est val(E) où

$E = (e[X_1 | \uparrow(X_1), \ldots, X_{n-1} | \uparrow(X_{n-1}), X_n || 0, i || i+1])^{\underline{*}}$.

Preuve

Soit $A_1, \ldots, A_n \in Al^{\infty}_{\bar{S}}$

$\hat{E}(A_1, \ldots, A_n) = \mathrm{val}(e[X_1 | \uparrow(A_1), \ldots, X_{n-1} | \uparrow(A_{n-1}), X_n || 0, i | i+1]^{\underline{*}})$.

$= (\mathrm{val}(e[X_1 | \uparrow(A_1), \ldots, X_{n-1} | \uparrow(A_{n-1}), X_n || 0, i || i+1])^{*}$

$= \mathrm{val}(e[X_1 | (A_1), \ldots, X_{n-1} | A_{n-1}][X_n | 0, i | i+1])^{*}$

qui, d'après la proposition 4.2, est solution de l'équaiton

$$X_n = \mathrm{val}(e[X_1 | A_1, \ldots, X_{n-1} | A_{n-1}])$$

d'où le résultat.

□

*Proposition 4.4*

Rec $\subseteq$ Rat.

Preuve

Montrons qu'une composante de la solution d'un système rationnel (donc en particulier régulier)

$X_i = \tau_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ est de la forme val(e) où $e \in E_{\bar{S}}$.

La preuve se fait par récurrence sur n.

. <u>si</u> n = 1

$X = \mathrm{val}(\tau)$ où $\tau \in E_{\bar{S} \cup \{X\}}$

a pour solution : $\mathrm{val}(\tau)\ [X|0,\ i|i+1]^{*} = A$

d'après la proposition 4.2 puisque $\mathrm{val}(\tau) \in Al^{\infty}_{\bar{S} \cup \{X\}}$.

et $A \in Rat$, d'où le résultat.

. si n > 1

On résoud la $n^{\text{ème}}$ équation suivant la proposition 4.3. On substitue le résultat dans les (n-1) équations restantes.

On obtient un système rationnel à (n-1) équations, d'où le résultat par l'hypothèse de récurrence.

$\square$

<u>Exemple</u>

Soit le système d'équations réguliers :

$$S \left\{ \begin{array}{lll} X = f - X & & (1) \\ Y = g\begin{array}{l} \diagup k \begin{array}{l} \diagup X \\ \diagdown Y \end{array} \\ \diagdown Z \end{array} & & (2) \\ Z = k\begin{array}{l} \diagup Y \\ \diagdown Z \end{array} & & (3) \end{array} \right.$$

on résoud la première équation, ce qui donne :

$$X = * - f - 0$$

(pour simplifier on identifie une expression rationnelle e et val(e)).

Par substitution on obtient le système :

$$\left\{ \begin{array}{lll} Y = g\begin{array}{l} \diagup k \begin{array}{l} - * - f - 0 \\ \diagdown y \end{array} \\ \diagdown Z \end{array} & & (1') \\ Z = h\begin{array}{l} \diagup Y \\ \diagdown Z \end{array} & & (2') \end{array} \right.$$

On résoud l'équation (1'), on obtient :

```
             /k\— * — f — 0
Y = * — g/    \0
         \
          \↑ — Z
```

En substituant dans (2') on obtient :

```
                /k\— * — f — 0
        /* — g/  \
Z = h/        \
    \          \↑ 0 Z
     \Z
```

d'où :

```
                     /k\— * — f — 0
          /* — g/    \0
Z = * — h/         \
        \           \1
         \0
```

et

```
             /k\— * — f — 0
Y = * — g/    \0  /* — g\— k\— * — f — 0
         \\* — h/       \1   \0
                \
                 \0
```

# 3ème Partie :

# EQUIVALENCE PAR COMMUTATION

# CHAPITRE I : SÉMANTIQUE DES ALTERNATIVES

Nous abordons dans ce chapitre les alternatives d'un point de vue sémantique et définissons une fonction sémantique sur $Al_S^\infty$. Cette fonction étant continue, nous pouvons donc définir l'équivalence sémantique des alternatives par l'intermédiaire de leurs approximants finis. Nous montrons aussi que l'équivalence syntaxique (identité des alternatives) est plus fine que l'équivalence sémantique.

*Définition et notation 1*

. une interprétation (I, I') de FUP sera notée I lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité.

. On note $\nu_I$ l'ensemble des valuations à valeurs dans $D_I$ (domaine de I).

. On définit sur $\nu_I$ un ordre $\subseteq$ par :

$$\nu, \nu' \in \nu_I \text{ , } \nu \subseteq \nu' \iff \forall\, v \in V\ \nu(v) \leq_I \nu'(v).$$

et soit $\perp_\nu$ la valuation donnée par :

$$\forall\, v \in V\ \perp_\nu (v) = \perp_I$$

Alors : $\perp_\nu$ est le plus petit élément de $\nu_I$ pour l'ordre $\subseteq$.

et $(\nu_I, \subseteq, \perp_\nu)$ est un cpo avec :

$\underline{\nu}$ partie dirigée de $\nu_I$, $v \in V$

$$\sup_{\subseteq} (\underline{\nu})\ (v) = \sup_{\leq}\ \{\nu(v) \mid \nu \in \underline{\nu}\}.$$

*Définition 2*

On appelle "alternative propre" un élément de $Al_S^\infty$ avec $S = \{\Omega, 0\}$.

*Définition 3*

Soit I une interprétation de FUP <u>et</u> $\nu \in \nu_I$.

. *l'action d'une alternative propre A sur la valuation* $\nu$ est donnée par :

$$A * \nu = \text{i) } \perp_\nu \ \underline{\text{si}}\ A = \Omega$$
$$\nu \ \underline{\text{si}}\ A = 0$$

ii) $B * (A' * \nu)$ si $A = B.A'$ avec $B \in Al_S^{\infty}$ et $A' \in Col(F)$

iii) $[A_1 * \nu, A_2 * \nu](\alpha * \nu)$ si $A = [A_1, A_2]\alpha$ avec $\alpha \in P_F, A_1, A_2 \in Al_S^{\infty}$

. l'application $cal_I : Al_S^{\infty} \times \nu_I \to \nu_I$ donnée par :

$cal_I(A, \nu) = A * \nu$ est dite la"fonction calculée par A sous l'interprétation I pour la valuation $\nu$".

Remarque :

Une forme équivalente de $cal_I$ peut être donnée [COU1] de la manière suivante :

. a $A \in Al_S^{\infty}$ et $\nu \in \nu_I$, on associe une suite

$C = \{C_i = (u_i, \nu_i)\}$ d'éléments de $dom(A) \times \nu_I$ telle que :

i) $v_o = \varepsilon_1 \quad \nu_o = \nu$

ii) soit $C_i = (u_i, \nu_i)$

. si $A(u_i) = 0$ alors $C_{i+1} = C_i$

. si $A(u_i) = \Omega$ alors $C_{i+1}$ est non défini

. si $A(u_i) \in COl(F)$ alors

si $A(u_i) * \nu_i \neq \perp_\nu$ alors $u_{i+1} = u_{i1}, \nu_{i+1} = A(u_i) * \nu_i$

sinon $C_{i+1}$ est non défini

. si $A(u_i) \in P_F$ alors

si $A(u_i) * \nu_i =$ vrai alors $u_{i+1} = u_{i1}, v_{i+1} = \nu_i$

si $A(u_i) * \nu_i =$ faux alors $u_{i+1} = u_{i2}, v_{i+1} = \nu_i$

si $A(u_i) * \nu_i = \perp$ alors $C_{i+1}$ est non défini.

. si il existe un entier n tel que $C_n$ défini

et $C_{n+1}$ non défini avec $A(u_n) = 0$

alors $cal_I(A, \nu) = \nu_n$

sinon $cal_I(A, \nu) = \perp_\nu$.

*Proposition 1*

$Cal_I$ est une application croissante.

<u>Preuve</u>

i) $Cal_I$ est croissante par rapport à son premier argument.

Soient A, B $\in Al_S^\infty$ tel que $A \leq B$

et $\nu \in \nu_I$.

la preuve se fait par récurrence sur la complexité de A.

. <u>si</u> $A = \Omega$ <u>alors</u> $A * \nu = \perp_\nu \subseteq B * \nu$.

<u>si</u> $A = 0$ <u>alors</u> $B = 0$ <u>et</u> $A * \nu = B * \nu$.

. <u>si</u> $A = C.A'$ avec $C \in Al_S^\infty$ <u>et</u> $A' \in Col(F)$

<u>alors</u> $B = D.A'$ avec $C \leq D$ (cf. 2ème partie, ch II, lemme 1.2)

or par hypothèse de récurrence, on a :

$$C * (A' * \nu) \subseteq D * (A' * \nu)$$

d'où : $A * \nu \subseteq B * \nu$.

. <u>si</u> $A = [A_1, A_2]\alpha$ avec $\alpha \in P_F$, $A_1, A_2 \in Al_S^\infty$

<u>alors</u> $B = [B_1, B_2]\alpha$ <u>avec</u> $A_1 \leq B_1$ <u>et</u> $A_2 \leq B_2$

(cf. 2ème partie, Ch II, lemme 1.3)

or par hypothèse de récurrence :

$$A_i * \nu \subseteq B_i * \nu \text{ pour } i = 1, 2$$

d'où $A * \nu \subseteq B * \nu$.

ii) $Cal_I$ est croissante par rapport à son second argument.

Soient $A \in Al_S^\infty$

et $\nu, \nu' \in \nu_I$ avec $\nu \subseteq \nu'$.

la preuve se fait par récurrence sur la complexité de A.

. <u>si</u> $A = \Omega$ <u>alors</u> $A * \nu = \perp_\nu = A * \nu'$.

<u>si</u> $A = 0$ <u>alors</u> $A * \nu = \nu \subseteq A * \nu' = \nu'$.

. <u>si</u> $A = C.A'$ avec $C \in Al_S^\infty$ <u>et</u> $A' \in Cal(F)$

En montrant que $A' * \nu \subseteq A' * \nu'$, on aura, par hypothèse de récurrence

$A * \nu \subseteq A * \nu'$.

soit $v \in V$

$(A' * \nu)(v) = \underline{\text{si}}\ v \in J_{A'}\ \underline{\text{alors}}\ i_{A'}(v) * \nu\ \underline{\text{sinon}}\ v.$

$\underline{\text{or}}\ i_{A'}(v) = t \in M(F, V)$

montrons par induction sur t que : $t * \nu \leq_I t * \nu'$.

. $\underline{\text{si}}\ t = \Omega\ \underline{\text{alors}}\ t * \nu = \perp_I \leq_I t * \nu'$

$\underline{\text{si}}\ t = v \in V\ \underline{\text{alors}}\ t * \nu = \nu(v) \leq_I \nu'(v)$ puisque $\nu \subseteq \nu'$.

. $\underline{\text{si}}\ t = f(t_1, \ldots, t_n)$

$\underline{\text{alors}}\ t * \nu = f_I(t_1 * \nu, \ldots, t_n * \nu)$

par induction on a :

$t_i * \nu \leq_I t_i * \nu'$ pour $i = 1, \ldots, n$

or $f_I$ vroissante,

donc $t * \nu \leq_I t * \nu'$.

d'où :

$(A' * \nu)(v) \subseteq \underline{\text{si}}\ v \in J_{A'}\ \underline{\text{alors}}\ i_{A'}(v) * \nu'\ \underline{\text{sinon}}\ \nu = (A' * \nu')(v).$

. $\underline{\text{si}}\ A = [A_1, A_2]\alpha\ \underline{\text{avec}}\ \alpha \in \mathcal{P}_F,\ A_1, A_2 \in Al_S^{\infty}$

par une démarche similaire au cas précédent ($P_I$ croissante)

on montre : $\alpha * \nu \subseteq_P \alpha * \nu'$ (où $\subseteq_p$ : l'ordre discret sur {vrai, faut, $\perp$}).

d'où :

$\underline{\text{si}}\ \alpha * \nu = \perp\ \underline{\text{alors}}\ A * \nu = \perp_V \subseteq A * \nu'$

$\underline{\text{si}}\ \alpha * \nu = \underline{\text{vrai}}\ \underline{\text{alors}}\ \alpha * \nu' = \text{vrai}\ \underline{\text{et}}$

$A * \nu = A_1 * \nu \subseteq A_1 * \nu' = A * \nu'$ (par hypothèse de récurrence)

$\underline{\text{si}}\ \alpha * \nu = \text{faux}\ \underline{\text{alors}}\ \alpha * \nu' = \text{faux et}$

$A * \nu = A_2 * \nu \subseteq A_2 * \nu' = A * \nu'$ (par hypothèse de récurrence).

□

*Proposition 2*

$Cal_I$ est continue.

Preuve

i) $Cal_I$ est continue par rapport à son second argument :

soit $\underline{\nu}$ une partie dirigée de $\nu_I$

pour $v \in V$ posons :

$$\bar{\nu}(v) = \sup_{\leq_I} \{\nu(v) \mid \nu \in \underline{\nu}\} = \sup(\underline{\nu})(v).$$

Montrons par induction sur $t \in M(F, V)$ que :

$$t * \bar{\nu} = \sup_{\leq_I} (t * \underline{\nu})$$

. si $t = \Omega$ alors $t * \bar{\nu} = \perp_I = \sup (t * \underline{\nu})$.

. si $t = v \in V$ alors

$$\sup_{\leq_I} (t * \underline{\nu}) = \sup_{\leq} \{\nu(v) \mid \nu \in \underline{\nu}) = \bar{\nu}(v) = t * \bar{\nu}.$$

. si $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ avec $t_i (i = 1, \ldots, n) \in M(F, N)$ et $f \in F_n$.

alors $\sup (t * \underline{\nu}) = \sup(f(t_1, \ldots, t_n) * \underline{\nu})$

$= \sup \{f(t_1, \ldots, t_n) * \nu, \nu \in \underline{\nu}\}$

$= \sup \{f_I(t_1 * \nu, t_n * \nu), \nu \in \underline{\nu}\}$

$f_I$ étant continue

$= f_I(\sup(t_1 * \nu), \ldots, \sup(t_n * \nu))$

d'où par induction :

$= f_I(t_1 * \bar{\nu}, \ldots, t_n * \bar{\nu})$

$= t * \bar{\nu}$.

d'où on en déduit :

. pour $A \in Col(F)$ $\quad \sup_{\subseteq}(A * \nu) = A * \bar{\nu}$

. pour $\alpha \in P_F$ $\sup_{\subseteq} (\alpha \mathbin{\bar{*}} \underline{\nu}) = \alpha * \bar{\nu}$

Montrons par récurrence sur la complexité de $A \in Al_S^\infty$ que $Cal_I$ est continue en son second argument.

. si $A = \Omega$ alors $A * \Omega = \perp_V = \sup(A * \underline{\nu})$

. si $A = 0$ alors $A * \bar{\nu} = \bar{\nu} = \sup(\underline{\nu}) = \sup(A * \underline{\nu})$.

. si $A = B.A'$ avec $B \in Al_S$ et $A' \in Col(F)$

alors $\sup ((B.A') * \underline{\nu}) = \sup(B * (A' * \underline{\nu}))$

d'après l'hypothèse de récurrence et ($\underline{\nu}$ dirigée => $A' * \underline{\nu}$ dirigée)

$= B * \sup(A' * \underline{\nu})$

d'après la première partie de cette preuve :

$= B * (A' * \bar{\nu}) = (B.A') * \bar{\nu} = A * \bar{\nu}$.

. si $A = [A_1, A_2]\alpha$ avec $\alpha \in \mathcal{P}_F$, $A_1, A_2 \in Al_S^\infty$

alors $\mathrm{Sup}([A_1, A_2]\alpha * \nu) = \sup([A_1 * \underline{\nu}, A_2 * \underline{\nu}] (\alpha * \underline{\nu}))$

$= [\sup(A_1 * \underline{\nu}), \sup(A_2 * \underline{\nu})] (\sup(\alpha * \underline{\nu}))$

d'après l'hypothèse de récurrence et la première partie de la preuve :

$= [A_1 * \bar{\nu} , A_2 * \bar{\nu}] (\alpha * \bar{\nu}) = A * \bar{\nu}$.

ii) $Cal_I$ est continue par rapport à son premier argument.

Soit $\mathcal{A}$ une partie dirigée de $Al_S^\infty$

et $\nu \in \nu_I$.

Remarquons que :

$$\left.\begin{array}{r} \text{pour } A_1, A_2 \in \mathcal{A},\ m \in \mathrm{dom}(A_1) \cap \mathrm{dom}(A_2) \\ A_1(m) \neq \Omega \ \underline{\text{et}}\ A_2(m) \neq \Omega \end{array}\right\} \Rightarrow A_1(m) = A_2(m).$$

- Montrons que :

$\sup(\mathcal{A} * \nu) = \bar{\nu} \neq \perp_\nu \iff \exists\, A_o \in \mathcal{A} \,/\, A_o * \nu = \bar{\nu} \neq \perp_\nu$

soient $C^1 = \{(u_i^1, \nu_i^1)\}_{o \le i \le p}$

$C^2 = \{(u_i^2, \nu_i^2)\}_{o \le i \le q}$ les suites associées

à $(A, \nu)$ et $(B, \nu)$ tel que :

$A, B \in \mathcal{A}$ et $A * \nu \neq \perp_\nu$ et $B * \nu \neq \perp_\nu$.

alors $A * \nu = B * \nu$ (ie : $C^1 = C^2$).

En effet :

$A * \nu \neq \perp_\nu$, $B * \nu \neq \perp_\nu$

$\Rightarrow \forall\, i \quad A(u_i^1) \neq \Omega$ et $B(u_i^2) \neq \Omega$

montrons par récurrence sur i que $C_i^1 = C_i^2$.

. $u_o^1 = \varepsilon = u_o^2$ et $\nu_o^1 = \nu_o^2 = \nu$.

Supposons que $C_i^1 = C_i^2$ | ie : $u_i^1 = u_i^2$ et $\nu_i^1 = \nu_i^2$)

or d'après la remarque ci-dessus :

$A(u_i^1) \neq \Omega$ et $B(u_i^2) \neq \Omega \Rightarrow A(u_i^1) = B(u_i^2)$ (car : $u_i^1 = u_i^2$)

d'où :

<u>si</u> $A(u_i^1) = 0$ <u>alors</u> $A \star \nu = \nu_i^1 = \nu_i^2 = B \star \nu$

<u>si</u> $A(u_i^1) \neq 0$ <u>alors</u> $u_{i+1}^1 = u_{i+1}^2$

et $\nu_{i+1}^1 = \nu_i^1 = \nu_i^2 = \nu_{i+1}^2$ <u>si</u> $A(u_i) \in P_F$

$A(u_i^1) \star \nu_i^1 = B(u_i^1) \star \nu_i^2 = \nu_{i+1}^2$ <u>si</u> $A(u_i) \in Col(F)$

donc :

$Sup(\mathcal{A} \star \nu) = \sup\{A \star \nu, A \in \mathcal{A}\}$

$= \sup\{\perp_V, A_o \star \nu)\}$ où

$A_o \in \mathcal{A}$, $A_o \star \nu \neq \perp_V$ <u>et</u> $\forall A \in \mathcal{A} \quad A \star \nu \neq \perp_\nu \Rightarrow A \star \nu = A_o \star \nu$

- Montrons que :

$\sup(\mathcal{A}) \quad \star \nu = \bar{\nu} \neq \perp_\nu \Leftrightarrow \exists A_o \in \mathcal{A} \mid A_o \star \nu = \bar{\nu} \neq \perp_\nu$.

En effet :

. $\sup(\mathcal{A}) \star \nu \neq \perp_\nu \Rightarrow \exists m \in dom (\sup((\mathcal{A})) \mid \sup(\mathcal{A}) (m) = 0$

<u>et</u> $\sup(\mathcal{A}) \star \nu = \bar{\nu} = \nu_n$ tel que $u_n = m$

$\Rightarrow \exists A_o \in \mathcal{A} \mid A_o(m) = 0$

<u>et</u> $\forall m' \leq_{+p} m \quad \sup(\mathcal{A}) (m') = A_o(m')$

d'où : $A_o \star \nu = \nu_n = \bar{\nu} \neq \perp_\nu$

. $\exists A_o \in \mathcal{A} \mid A_o \star \nu \neq \perp_\nu \Rightarrow \exists m \in dom(A_o) \mid A_o(m) = 0$

<u>et</u> $A_o \star \nu = \bar{\nu} = \nu_n$ tel que $u_n = m$

$\Rightarrow \sup(\mathcal{A})(m) = 0$

<u>et</u> $\forall m' \leq_p m \quad \sup(\mathcal{A})(m) = A_o(m')$

donc $\sup(\mathcal{A}) \star \nu = \nu_n = \bar{\nu} \neq \perp_\nu$.

□

*<u>Définition 4</u>*

Soient A et B deux alternatives propres.

. A est dite sémantiquement inférieure" à B, et on note

$A <_{sem} B$, <u>si</u>

pour toute interprétation $(I,\nu)$ de FUPUV

on a : $val_I\ (A,\ \nu) \subseteq val_I\ (B,\ \nu)$

. A et B sont dites "sémantiquement équivalentes", et on note

$A \underset{Sem}{\equiv} B$ <u>si</u> $A <_{Sem} B$ <u>et</u> $B <_{Sem} A$.

*Proposition 3*

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux parties dirigées d'alternatives propres tel que :

$$\forall A \in \mathcal{A},\ \exists B \in \mathcal{B} \mid A \leq B$$

<u>alors</u> $\sup(\mathcal{A}) <_{Sem} \sup(\mathcal{B})$.

<u>Preuve</u>

$\sup\ (\mathcal{A}) * \nu = \bar{\nu} \neq \perp_\nu$

$\Leftrightarrow \exists A_o \in \mathcal{A} \mid A_o * \nu = \bar{\nu} \neq \perp_\nu$

<u>or</u> $A_o \in \mathcal{A}$ donc $\exists B_o \in \mathcal{B}$ tel que $A_o \leq B_o$

donc $A_o * \nu = \bar{\nu} \neq \perp_\nu \subseteq B_o * \nu = \bar{\nu}' \neq \perp_\nu$

(par la proposition 1)

donc $\exists B_o \in \mathcal{B} \mid B_o * \nu = \bar{\nu}' \neq \perp$ <u>et</u> $\bar{\nu} \subseteq \bar{\nu}'$

$\Leftrightarrow \sup(\mathcal{B}) * \nu = \bar{\nu}' * \perp_\nu$ <u>et</u> $\bar{\nu} \subseteq \bar{\nu}'$.

□

*Proposition 4*

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux parties dirigées d'alternatives propres tel que :

$$\forall A \in \mathcal{A},\ \exists B \in \mathcal{B} \mid A <_{Sem} B$$

<u>alors</u> $\sup(\mathcal{A}) <_{Sem} \sup(\mathcal{B})$.

<u>Preuve</u>

$\sup(\mathcal{A}) * \nu = \bar{\nu} \neq \perp_\nu$

$<=> \exists\ A_o \in \mathcal{A}\ |\ A_o * \nu = \bar{\nu} \neq \perp_\nu$

$=> \exists\ B_o \in \mathcal{B}\ |\ A_o * \nu = \bar{\nu} \neq \perp_\nu \subseteq B_o * \nu = \bar{\nu}' \neq \perp_\nu$

$<=> \sup\ (\mathcal{B}) * \nu = \bar{\nu}' \neq \underline{\nu}$ <u>et</u> $\bar{\nu} \subseteq \bar{\nu}'$.

□

<u>Remarque</u> :

Soit A, B $\in Al_S^\infty$

$A = \sup \{a \mid a \leq A\}$

$B = \sup \{b \mid b \leq B\}$

on a : $A \leq B <=> \forall\ a \leq A, \exists\ b \leq B$ tel que $a \leq b$

d'où d'après la proposition 3 :

$$A \leq B => A <_{Sem} B$$

d'où on en déduit que l'équivalence syntaxique (ie : identité) est plus fine que l'équivalence sémantique.

# CHAPITRE II : EQUIVALENCE PAR COMMUTATION DES ALTERNATIVES

L'équivalence syntaxique est plus fine que l'équivalence sémantique. Mais certaines alternatives ne diffèrent que par l'ordre dans lequel s'y présentent des collatérales ou des prédicats.
Dans ce chapitre nous déterminons les conditions sous lesquelles une interversion des prédicats ou de collatérales préserve l'équivalence sémantique. Pour cela nous définissons l'équivalence par commutation qui est moins fine que l'équivalence syntaxique et plus fine que l'équivalence sémantique.

## 1 - CONGRUENCES SUR LES ALTERNATIVES

Notation

Pour $A \in Al_S^\infty$, on note $\bar{A} = A[s \in (S-\{\Omega\}) \mid 0]$
et pour $(I, \nu)$ une interprétation, on pose

$$A * \nu = \bar{A} * \nu$$

et donc, étant données $A, B \in Al_S^\infty$,

$$A \underset{Sem}{\equiv} B \iff \bar{A} \underset{Sem}{\equiv} \bar{B}$$

*Définition 1.1*

On appelle *congruence* sur $Al_S$, une relation d'équivalence sur $Al_S$ compatible avec la structure de magma associée à $Al_S$.

i.e. si R est une relation d'équivalence sur $Al_S$ vérifiant :

pour $A, A', B, B' \in Al_S$, $C \in Col(F)$, $\alpha \in \mathcal{P}_F$

. $ARB \Rightarrow A.C \; R \; B.C$

. $(ARA'$ et $BRB') \Rightarrow [A, B]\alpha \; R [A', B']\alpha$

alors R est une congruence sur $Al_S$.

*Définition 1.2*

La congruence $C_G$ sur $Al_S$ engendrée par le système d'axiomes G, où $G \subseteq Al_S^2$, est la plus petite congruence sur $Al_S$, telle que :

. $G \subseteq C_G$

. $((A, B) \in C_G,\ C \in Al_S,\ k \in S \cap \mathbb{N})$

$\Rightarrow (A[k|C], B[k|C]) \in C_G$

*Propriété et définition 1.3*

Soit $C_G$ la congruence sur $Al_S$ engendré par un système d'axiomes G, et soit I une interprétation de FUP,

alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\forall (A, B) \in G,\ \forall \nu \in \nu_I,\ A * \nu = B * \nu$

ii) $\forall (A, B) \in C_G,\ \forall \nu \in \nu_I,\ A * \nu = B * \nu$

On dit alors que I est compatible avec G (resp. $C_G$)

Preuve

Remarquons que si $(A, B) \in C_G$

alors $A = A'[k_i | A_i[k_{ij} \mid C_{ij},\ j = 1, \ldots, n],\ i = 1, \ldots, m]$

et $B = A'[k_i | B_i[k_{ij} \mid C_{ij},\ j = 1, \ldots, n],\ i = 1, \ldots, m]$

avec $A' \in Al_S$, $(A_i, B_i) \in G$, $C_{ij}, C'_{ij} \in Al_S$

où $C_{ij} = C'_{ij}$ <u>ou</u> $(C_{ij}, C'_{ij}) \in C_G$

. on en déduit alors (i) => (ii)

. $(A, B) \in C_G \Rightarrow (A, B) \in G$ donc (ii) =>(i).

□

*Définition 1.4*

Une congruence R sur $Al_S$ est dite "finiment engendrée" si il existe un système d'axiomes G *fini* tel que $R = C_G$.

## 2 - EQUIVALENCE PAR COMMUTATION

*Définition 2.1*

i) Une relation $R \subseteq Col(F)^2 \cup (P_F \times Col(F))$ est dite *"relation de commutation"* sur $Al_S$ si :

. $(A, B) \in R \cap Col(F)^2$, $m \in S \Rightarrow$ $\begin{array}{c} A \\ | \\ B \\ | \\ m \end{array} \underset{Sem}{\equiv} \begin{array}{c} B \\ | \\ A \\ | \\ m \end{array}$

. $(\alpha, A) \in R \cap (P_F \times Col(F))$, $m, n \in S \Rightarrow$ $\begin{array}{c} A \\ | \\ \alpha \\ / \ \backslash \\ m \quad n \end{array} \underset{Sem}{\equiv} \begin{array}{c} \alpha \\ / \ \backslash \\ A \quad A \\ | \quad\ | \\ m \quad n \end{array}$

ii) R définit sur $Al_S$ un système d'axiomes, qui engendre une congruence sur $Al_S$, qu'on note $C_R$

et on a :

$(A, B) \in C_R \Rightarrow A \underset{Sem}{\equiv} B$

iii) Soit $\bar{C}_R$ le préordre sur $Al_S$ engendré par la clôture transitive de $(\leq \cup C_R)$.

$\bar{C}_R = \underset{n \in \mathbb{N}}{\cup} (\leq C_R)^n = \underset{n \in \mathbb{N}}{\cup} (C_R \leq)^n$.

ie :

$A \bar{C}_R A' \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists A_o, \ldots, A_n \in Al_S$ tel que $A_o = A$, $A_n = A'$

$\underline{\text{et}}$ $\forall i = 1, \ldots, n$ $A_i \leq A_{i+1}$ $\underline{\text{et}}$ $A_{i+1}\ C_R\ A_{i+2}$

où $A_i\ C_R\ A_{i+1}$ $\underline{\text{et}}$ $A_{i+1} \leq A_{i+2}$

on a : $A \bar{C}_R B \Rightarrow A <_{Sem} B$

*Définition 2.2*

Soient $A, B \in Al_S^{\infty}$.

. A est dite *"commutativement inférieure"* à B, si il existe une relation de commutation R telle que :

$\forall\, a \leq A,\ \exists\, b \leq B$ tel que : $a\ \bar{C}_R\ b$.

et on note $A\ \bar{C}_R\ B$.

. A et B sont dites *"commutativement équivalentes"* si il existe une relation de commutation R telle que : $A\ \bar{C}_R\ B$ <u>et</u> $B\ \bar{C}_R\ A$.

Lorsque la relation R est donnée, A et B sont dites "R-*commutativement équivalentes"* et on note $A \underset{R}{\equiv} B$.

*<u>Proposition 2.1</u>*

L'équivalence par commutation est plus fine que l'équivalence sémantique.

<u>Preuve</u>

Soit $A, B \in Al_S^{\infty}$

$A\ \bar{C}_R\ B \iff \forall\, a \leq A,\ \exists\, b \leq B \mid a\ \bar{C}_R\ b$

$\Rightarrow \forall\, a \leq A,\ \exists\, b \leq B \mid a <_{Sem} b$

$\Rightarrow A <_{Sem} B$ (Cf. Chapitre I, prop. 4)

□

<u>Exemple 2.1</u>

Soit $a, b \in Col(F)$, $\alpha \in P_F$

et soit R une relation de commutation contenant (a, b) <u>et</u> $(\alpha, a)$.

Alors les deux alternatives représentées par les expressions rationnelles

```
E1  =     a             et     E2  =      *
          |                               |
          *                               α
          |                              / \
          α                             b   a
         / \                            |   |
        b   A                           0   1
        |
        0
```

sont sémantiquement équivalentes.

En effet :

. Remarquons que $\forall\, a \in Col(F)$ $\begin{array}{c} a \\ | \\ \Omega \end{array} \equiv_{Sem} \Omega$.

. Notons, pour $A \in Al_S$ et $\alpha \in P_F$, le cardinal de l'ensemble des occurrences de $\alpha$ dans A, $n_\alpha(A)$.

Montrons que

pour $A \leq val(E_1)$, il existe $B \leq val(E_2)$

telle que : $A <_{Sem} B$,

par récurrence sur $n_\alpha(A)$.

. $n_\alpha(A) = 0 \Rightarrow A = \Omega$

en prenant $A' = \Omega \leq val(E_2)$ on a $A <_{Sem} A'$.

. $n_\alpha(A) = n \Rightarrow A = \begin{array}{c} a \\ | \\ \alpha \\ / \quad \backslash \\ \begin{array}{cc} b & 0 \\ | & \\ m & \end{array} \end{array} [m|A_1]$ où $A_1 \in Al_S$ et $n_\alpha(A_1) = n-1$

<u>or</u> : $(\alpha, a) \in R$ et $(a, b) \in R$

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{c} a \\ | \\ \alpha \\ / \quad \backslash \\ \begin{array}{cc} b & 0 \\ | & \\ m & \end{array} \end{array} ,\quad \begin{array}{c} \alpha \\ / \quad \backslash \\ \begin{array}{cc} b & a \\ | & | \\ a & 0 \\ | & \\ m & \end{array} \end{array} \right) \in C_R$$

donc :

. <u>si</u> $A_1 = \Omega$ <u>alors</u> $A \equiv_{Sem} \begin{array}{c} \alpha \\ / \quad \backslash \\ \begin{array}{cc} b & a \\ | & | \\ \Omega & 0 \end{array} \end{array} \leq val(E_2)$

<u>sinon</u> : $\left(A, \begin{array}{c} \alpha \\ / \quad \backslash \\ \begin{array}{cc} b & a \\ | & | \\ a & 0 \\ | & \\ m & \end{array} \end{array} [m|A_1]\right) \in C_R$

<u>or</u> $\begin{array}{c} a \\ | \\ A_2 \end{array} \leq \mathrm{val}(E_1)$ avec $n_\alpha \left(\begin{array}{c} a \\ | \\ A_1 \end{array}\right) = n-1$

donc par hypothèse de récurrence :

il existe $A'_1 \leq \mathrm{val}(E_2)$ telle que : $\begin{array}{c} a \\ | \\ A_1 \end{array} <_{Sem} A'_1$.

d'où $A <_{Sem} \begin{array}{ccc} & \alpha & \\ / & & \backslash \\ b & & a \\ | & & | \\ A'_1 & & 0 \end{array} \leq \mathrm{val}(E_2)$

Par un raisonnement analogue on montre que :

$\mathrm{val}(E_2) <_{Sem} \mathrm{val}(E_1)$, d'où la propriété.

Nous donnons ci-dessous des exemples de relations de commutation et caractérisons l'équivalence par commutation des alternatives.

Pour celà on se donne quelques notations :

<u>Notations</u> :

. Soit $a \in \mathrm{Col}(F)$, on note

$$\mathrm{var}(a) = \bigcup_{j \in J_a} \mathrm{var}(i_a(j))$$

$$\mathrm{VAR}(a) = \mathrm{var}(a) \cup J_a$$

. soit $\alpha \in P_F$

$$\mathrm{VAR}(\alpha) = \begin{cases} \emptyset \text{ si } \alpha \in P_o \\ \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{var}\,(t_i) \ \underline{\text{si}}\ \alpha = p(t_1, \ldots, t_n) \text{ avec } \alpha \in P_n \text{ et } t_i \in M(F, V) \end{cases}$$

<u>Exemple 2.2</u>

La relation $R_1 \subseteq \mathrm{Col}(F)^2 \cup (P_F \times \mathrm{Col}(F))$ définie par :

$$R_1(A, B) \iff \mathrm{VAR}(A) \cap \mathrm{VAR}(B) = \emptyset$$

est une relation de commutation sur $Al_S$.

En effet :

Soit $(I, \nu)$ une interprétation

. soit $(A, B) \in R_1 \cap Col(F)^2$

$$\begin{array}{c} A \\ | \\ B \\ | \\ m \end{array} * \nu = B * (A * \nu) = (B ; A) * \nu$$

<u>or</u> pour $v \in J_A \cup J_B$

$i_{B;A}(v) = \underline{\text{si}}\ v \in J_B$ alors $i_B(v) \Theta A\ \underline{\text{sinon}}\ i_A(v)$

puisque $VAR(A) \cap VAR(B) = \emptyset$, donc $i_A(v) \Theta B = i_A(v)$

et $i_B(v) \Theta A = i_B(v)$

$$\begin{aligned} i_{B;A}(v) &= \underline{\text{si}}\ v \in J_B\ \underline{\text{alors}}\ i_B(v)\ \underline{\text{sinon}}\ i_A(v) \\ &= \underline{\text{si}}\ v \in J_A\ \underline{\text{alors}}\ i_A(v)\ \underline{\text{sinon}}\ i_B(v) \\ &= \underline{\text{si}}\ v \in J_A\ \underline{\text{alors}}\ i_A(v) \Theta B\ \underline{\text{sinon}}\ i_B(v) \\ &= i_{A;B}(v). \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{array}{c} A \\ | \\ B \\ | \\ m \end{array} * \nu = (B;A) * \nu = (A;B) * \nu = \begin{array}{c} B \\ | \\ A \\ | \\ m \end{array} * \nu.$$

. soit $(\alpha, A) \in R_1 \cap (\mathcal{P}_F \times Col(F))$

$$\begin{array}{c} A \\ | \\ \alpha \\ / \ \backslash \\ m \quad n \end{array} * \nu = [(m.A) * \nu, (n.A) * \nu]\ (\alpha \Theta A) * \nu$$

$$= ([m.A, n.A]\ \alpha \Theta A) * \nu$$

or $(\alpha, A) \in R_1 \Rightarrow \alpha \Theta A = \alpha$

d'où
$$\begin{array}{c} A \\ | \\ \alpha \\ / \ \backslash \\ m \quad n \end{array} * \nu = \begin{array}{c} \alpha \\ / \ \backslash \\ A \quad A \\ | \quad\ | \\ m \quad n \end{array} * \nu$$

<u>Exemple 2.3</u>

La relation $R_2 \subseteq Col(F)^2 \cup (P_F \times Col(F))$ définie par :

- $R_{2|Col(F)^2} = R_1$
- $(\alpha, A) \in R_2 \cap P_F \times Col(F) \Longleftrightarrow VAR(\alpha) \cap J_A = \emptyset$

est une relation de commutation.

En effet : $(\alpha, A) \in R_2 \Longrightarrow \alpha \ \Theta \ A = \alpha.$

<u>*Lemme 2.2*</u>

Toute relation de commutation R sur $Al_S$ est telle que :

$(\alpha, A) \in R \cap P_F \times Col(F) \Longrightarrow (\alpha, A) \in R_2$

<u>Preuve</u>

```
(α, A) ∈ R =>    A         ≡          α
                 |        Sem        / \
                 α                  A   A
                / \                 |   |
               m   n                m   n


or               A         ≡         αΘA
                 |        Sem        / \
                 α                  A   A
                / \                 |   |
               m   n                m   n
```

d'où : $\alpha \ \Theta \ A = \alpha$

- <u>si</u> $\alpha \in P_o$ $VAR(\alpha) = \emptyset$ et donc $(\alpha, A) \in R_2$
- <u>si</u> $\alpha = p(t_1, \ldots, t_n)$ avec $p \in P_n$, $t_i \in M(F, V)$

  $\alpha \ \Theta \ A = \alpha \Longrightarrow \forall \ i = 1, \ldots, n \quad t_i \ \Theta \ A = t_i$

  donc $VAR(t_i) \cap J_A = \emptyset$

  d'où $(\alpha, A) \in R_2$.

□

<u>Exemple 2.4</u>

Les relations $R_3, R_4 \subseteq Col(F)^2 \cup P_F \times Col(F)$ données par :

. $R_3|_{P_F \times Col(F)} = R_4|_{P_F \times Col(F)} = R_2$

. $(A, B) \in R_3 \cap Col(F)^2 \iff J_A \cap VAR(B) = \emptyset$ et $J_B \cap VAR(A) = \emptyset$

. $(A, B) \in R_4 \cap Col(F)^2 \iff \begin{cases} J_A \cap var(B) = \emptyset \text{ et } J_B \cap var(A) = \emptyset \\ \text{et } \forall v \in J_A \cap J_B,\ i_A(v) = i_B(v) \end{cases}$

sont des relations de commutation sur $Al_S$

et on a : $R_1 \subsetneq R_2 \subsetneq R_3 \subsetneq R_4$

Remarque

Si la condition relative aux collatérales donnée par $R_4$ est suffisante pour permettre la permutation de deux collatérales, elle n'est pas nécessaire.

En effet

soient les collatérales

A : $\langle v_1 \leftarrow f(v_4)\rangle$

B : $\langle v_1 \leftarrow f(g(v_3)),\ v_3 \leftarrow h(v_3),\ v_4 \leftarrow g(v_3)\rangle$

on a :

$$\begin{array}{ccc} A & & B \\ | & \equiv & | \\ B & \text{Sem} & A \\ | & & | \\ m & & m \end{array} \quad \underline{\text{et}} \quad (A, B) \notin R_4.$$

Afin de pouvoir donner une caractérisation de l'équivalence par commutation, précisons quelques notations.

Notations

i) Soit ar : $M(F, V) \to \mathbb{N}$ l'application donnée par :

$$ar(t) = \begin{cases} 1 \ \underline{\text{si}}\ t \in V \cup \{\Omega\} \\ \sum_{i=1}^{n} ar(t_i) \ \underline{\text{si}}\ t = f(t_1, \ldots, t_n) \text{ où } f \in F_n,\ t_i \in M(F,V) \end{cases}$$

ar(t) est l'étendue de l'arbre t.

ii) Soit $t \in M(F, V)$, on note $\bar{M}(t)$ l'ensemble des feuilles de $t$, qui est donc de cardinal $ar(t)$. On le suppose ordonné par l'ordre lexicographique et on a : $\bar{m}(t) = \{m_1, \ldots, m_{ar(t)}\}$.

iii) Soit $PR : M(F, V)^2 \to M(F, V)$ l'application donnée par :

$$PR(t, t') = \begin{cases} \cdot\ \Omega \ \underline{\text{si}}\ t(\varepsilon) \neq t'(\varepsilon) \ \underline{\text{ou}}\ t = t' \in V \cup \{\Omega\} \\[2ex] \cdot \quad \begin{array}{c} t(\varepsilon) \\ / \quad \vdots \quad \backslash \\ PR(t|_1, t'|_1) \ldots PR(t|_{ar(t_{(\varepsilon)})}, t'|_{ar(t_{(\varepsilon)})}) \end{array} \quad \underline{\text{sinon}}. \end{cases}$$

iv) Soit $PR(t, t') = \bar{t} \in M(F, \{\Omega\})$

on pose $\overline{PR}(t, t') = \bar{t}[m_i \in \bar{M}(\bar{t}),\ 1 \leq i \leq ar(\bar{t}) : m_i \leftarrow v_i]$.

$\overline{PR}(t, t')$ est l'arbre initial de profondeur maximale commun à $t$ et $t'$ et on a : $t = \overline{PR}(t, t') \Theta A$ où $A \in Col(F)$ avec :

$$\begin{cases} J_A = \{v_1, \ldots, v_{ar(\bar{t})}\} \\ \underline{\text{et}} \\ i_A(v_j) = t|m_j \end{cases}$$

Si $ar(PR(t, t')) = n$ est donnée, on convient de représenter la collatérale $A$ par le n-uplet $(t|m_1, \ldots, t|m_n)$.

Pour $A \in Col(F)$ on note $A_j = \begin{cases} i_A(v_j) \ \underline{\text{si}}\ v_j \in J_A \\[2ex] v_j \ \text{sinon} \end{cases}$

<u>Exemple 2.5</u>

Soit $t = \begin{array}{c} f \\ / \quad \backslash \\ \begin{array}{c} g \\ / \ \backslash \\ v_m \quad v_n \end{array} \quad \begin{array}{c} k \\ | \\ v_p \end{array} \end{array}$ $\qquad t' = \begin{array}{c} f \\ / \quad \backslash \\ \begin{array}{c} g \\ / \ \backslash \\ v_m \quad v_n \end{array} \quad \begin{array}{c} \ell \\ | \\ v_p \end{array} \end{array}$

alors . $\overline{PR}(t, t') = \begin{array}{c} f \\ / \ \backslash \\ \begin{array}{c} g \\ / \ \backslash \\ v_1 \quad v_2 \end{array} \quad v_3 \end{array}$

$$. \; t = \overline{PR}(t, t') \;\Theta\; (v_m, v_n, \begin{array}{c} k) \\ | \\ v_p \end{array}$$

$$. \; t' = \overline{PR}(t, t') \;\Theta\; (v_m, v_n, \begin{array}{c} \ell) \\ | \\ v_p \end{array}$$

*Définition 2.3*

La relation $R_5 \subseteq Col(F)^2 \cup (P_F \times Col(F))$ est définie par :

. $R_{5|P_F \times Col(F)} = R_2$

. $(A, B) \in R_5 \cap Col(F)^2$

$\iff$ Pour $v_j \in J_A \cup J_B$ tel que :

$A_j = \overline{PR}\,(A_j, B_j) \;\Theta\; (u_1, \ldots, u_{nj})$

$B_j = \overline{PR}\,(A_j, B_j) \;\Theta\; (u'_1, \ldots, u'_{nj})$

où $n_j = ar(PR(A_j, B_j))$

on a : . $u_i \in V$ et $i_B(u_i) = v'_i \;\Theta\; A$

ou $v_i \in V$ et $i_A(u'_i) = u_i \;\Theta\; B$.

Lemme 2.3

$R_5$ est une relation de commutation sur $Al_S$

et $R_4 \subsetneq R_5$.

Preuve

Soit $(A, B) \cap Col(F)^2 \cap R_5$, et soit $(I, \nu)$ une interprétation.

$$\begin{array}{c} A \\ | \\ B \\ | \\ m \end{array} * \nu = \begin{array}{c} B \\ | \\ A \\ | \\ m \end{array} * \nu \iff (B;A) * \nu = (A;B) * \nu$$

$$\iff \begin{cases} v_j \in J_A \cap J_B \Rightarrow i_A(v_j) \;\Theta\; B = i_B(v_j) \;\Theta\; A & (1) \\ v_j \in J_A \setminus J_B \Rightarrow i_A(v_j) \;\Theta\; B = i_A(v_j) & (2) \\ v_j \in J_B \setminus J_A \Rightarrow i_B(v_j) \;\Theta\; A = i_B(v_j) & (3) \end{cases}$$

<u>or</u>

(1) $\Leftrightarrow \overline{PR}(A_j, B_j) \,\Theta\, (u_1, \dots, u_{nj}) \,\Theta\, B = \overline{PR}(A_j, B_j) \,\Theta\, (u'_1, \dots, u'_{nj}) \,\Theta\, A$

$\Leftrightarrow \forall\, i = 1, \dots, n_j \qquad u_i \,\Theta\, B = u'_i \,\Theta\, A$

or $(A, B) \in R_5 \Rightarrow u_i$ <u>ou</u> $u'_i \in V$

et <u>si</u> $u_i \in V$ <u>alors</u> $i_B(u_i) = u'_i \,\Theta\, A$

<u>si</u> $u'_i \in V$ alors $i_A(u'_i) = u_i \,\Theta\, B$

d'où l'égalité.

(2) $v_j \in J_A | J_B \Rightarrow A_j = i_A(v_j)$ <u>et</u> $V_j = v_j$

d'où puisque $(A, B) \in R_5$ on a : $i_A(v_j) \,\Theta\, B = i_A(v_j)$.

(3) $v_j \in J_B | J_A \Rightarrow B_j = i_B(v_j)$ <u>et</u> $A_j = v_j$

d'où puisque $(A, B) \in R_5$ on a : $i_B(v_j) = i_B(v_j) \,\Theta\, A$.

*<u>Lemme 2.4</u>*

Toute relation de commutation R sur $Al_S$ est telle que :

$$(A, B) \in R \cap Col(F)^2 \Rightarrow (A, B) \in R_5.$$

<u>Preuve</u>

Soit $(I, \nu)$ une interprétation

$$(A, B) \in R \cap Col(F)^2 \Rightarrow \begin{array}{c} A \\ | \\ B \\ | \\ M \end{array} * \nu = \begin{array}{c} B \\ | \\ A \\ | \\ m \end{array} * \nu \Leftrightarrow (B;A) * \nu = (A;B) * \nu$$

D'où en utilisant les mêmes notations que celles de la preuve du (lemme 2.3)

$(A, B) \in R \Rightarrow \forall\, i = 1, \dots, n_j \quad u_i \,\Theta\, B = u'_i \,\Theta\, A$

<u>or</u> . <u>si</u> $u_i$ <u>et</u> $u'_i \notin V$,

d'après la définition de $\overline{PR}$ on a :

$u_i(\varepsilon) \neq u'_i(\varepsilon)$

donc on ne peut avoir l'égalité.

donc : $\forall\, i = 1, \ldots, n_j \quad u_i$ ou $u'_i \in V$

<u>et</u> <u>si</u> $u_i \in V$ <u>alors</u> $i_B(u_i) = u'_i \ominus A$

<u>si</u> $u'_i \in V$ <u>alors</u> $i_A(u'_i) = u_i \ominus B$

on en déduit que $(A, B) \in R_5$.

□

*Proposition 2.2*

Soit $A, A' \in Al_S^{\infty}$

A et A' sont "commutativement équivalentes" <u>si</u> elles sont $R_5$-commutativement équivalentes.

<u>Preuve</u> :

Immédiate d'après les lemmes 2.2 et 2.4.

□

<u>Remarque</u> :

L'extension des relations de commutation à $P_F^2$ ne peut se faire sans référence à une alternative particulière, puisque la condition de la commutation des prédicats n'est pas fonction de leur syntaxe mais de leurs occurrences dans cette alternative.

*Définition 2.4*

Soit $A \in Al_S^{\infty}$

i) On appelle "bloc sélectif" de A un couple $(m_o, M)$ où $m_o \in \mathrm{dom}(A)$, $M \subseteq \{1, 2\}^*$, tel que :

. $\forall\, m \in M \quad \forall\, m' \in \{1, 2\}^* \quad m' \leq_p m \Rightarrow m' \in M$

. $\forall\, m \in M,\ A(m_o\, m) \in P_F$

. $\forall\, m \in M,\ \forall\, u \in \{1, 2\}\ m\, u \notin M \Rightarrow A(m_o\, m\, u) \notin P_F$.

ii) Soient $\{X_o, X_1, \dots, X_n, \dots\}$ des symboles de collatérales.

A un bloc sélectif, on peut associer une alternative (finie) (cf. 2ème partie. Chapitre I) $\Gamma_{(m_o,M)}$ donnée par :

. $\mathrm{dom}(\Gamma_{(m_o,M)}) = M \cup \bar{M}.\{1,2\}$ où $\bar{M}$ est l'ensemble des éléments maximaux de M pour l'ordre préfixiel sur $\{1,2\}^*$. On suppose $\bar{M}$ ordonné par l'ordre lexicographique sur $\{1, 2\}^*$ et on pose :

$$\bar{M} = \{m_1, \dots, m_p, \dots\}$$

. $\Gamma_{(m_o,M)}(m) = A(m_o\, m)$ pour $m \in M$

$$\Gamma_{(m_o,M)}(m_j\, i) = \begin{cases} X_j \ \underline{\text{si}}\ m_j \in \bar{M} \ \underline{\text{et}}\ A(m_o\, m_j\, i) \neq \Omega \\ \\ X_o \ \underline{\text{si}}\ m_j \in \bar{M} \ \underline{\text{et}}\ A(m_o\, m_j\, i) = \Omega \end{cases}$$
$$(i = 1, 2)$$

iii) On dit qu'un prédicat $\alpha$ "couvre" le bloc sélectif $(m_o, M)$

<u>si</u> $\forall$ m feuille de $\Gamma_{(m_o, M)}$, $\Gamma_{(m_o, M)}(m) \neq X_o$

$m' \in \mathrm{dom}(\Gamma_{(m_o, M)})$ tel que :

$m' \leq_{+p} m$ <u>et</u> $\Gamma_{(m_o, M)}(m') = \alpha$.

D'après la proposition (6.1, 2ème partie, Chapitre I)

ou la proposition (7.2, 2ème partie, Chapitre I)

suivant que l'on considère des prédicats avec ou sans effet de bord, on peut associer à $\Gamma_{(m_o, M)}$ une forme canonique unique.

Le bloc sélectif associé à cette forme canonique est alors dit "canonique".

Une alternative $A \in Al_S^\infty$ est dite canonique si tous les blocs sélectifs y apparaissant sont canoniques.

Et on a évidemment :

$$A \underset{C}{\equiv} A' \iff C(A) \equiv C(A')$$

où C(A) est la forme canonique de l'alternative A, puisque les réductions transformant les alternatives finies en leur forme canonique conservent l'équivalence sémantique, qui est une congruence sur $Al_S^\infty$.

□

## CONCLUSION ET EXEMPLE D'APPLICATION

On appelle schéma de Manna un système d'équations sur $Al_S^{\infty}$. La continuité de la fonction sémantique définie sur $Al_S^{\infty}$ permet de caractériser de façon algébrique l'équivalence sémantique des schémas de Manna.

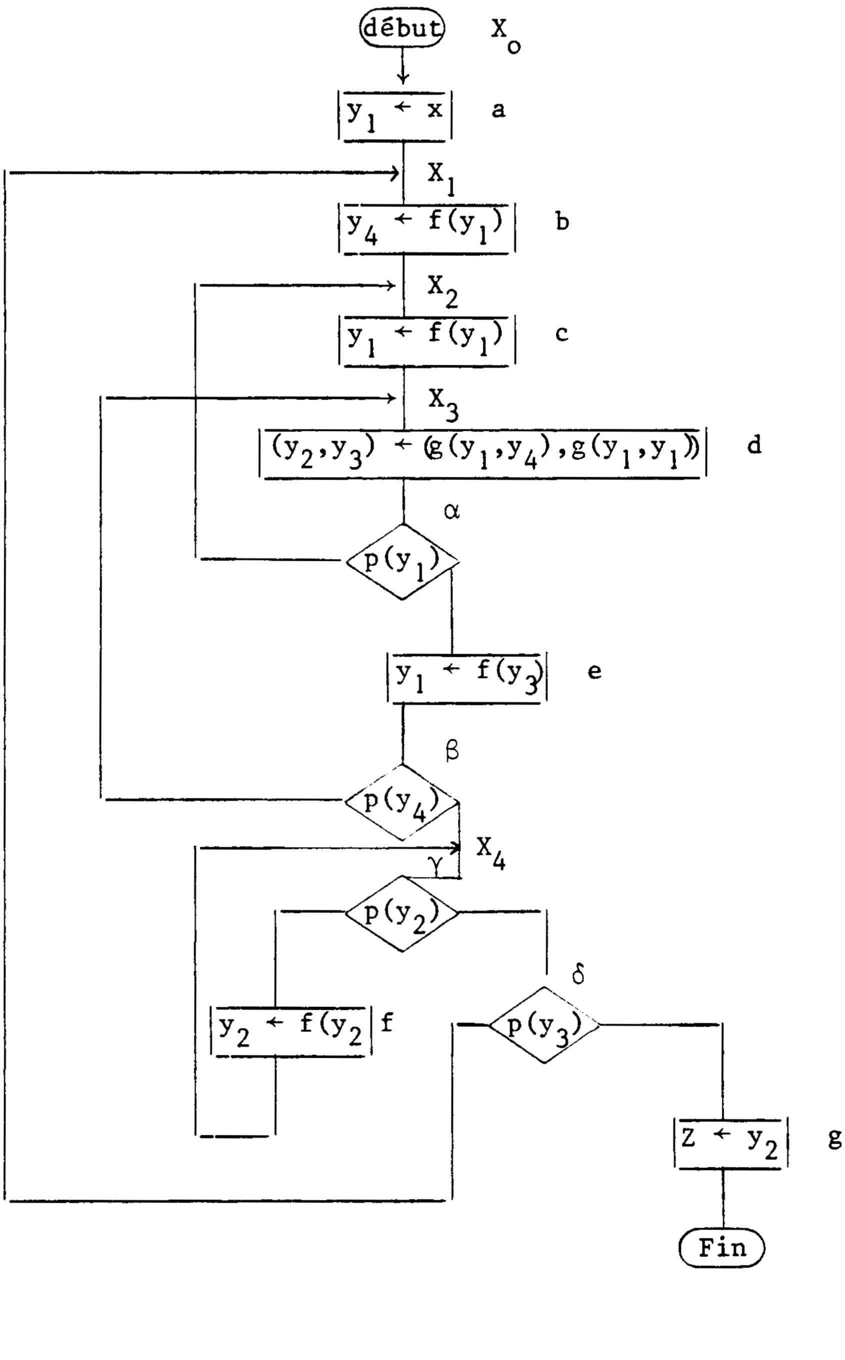
Lorsque le schéma (systèmes d'équations) est régulier (ou plus généralement rationnel) l'alternative (infinie) associée peut être représentée par une expression rationnelle, qui, en traduisant l'opération étoile par la boucle REPEAT, à plusieurs niveaux de sorties, permet d'associer à un schéma de Manna, un schéma structuré équivalent.

Les réductions sur les alternatives finies permettent de mettre sous forme canonique les schémas sans boucle (donc en particulier les corps de boucle qui ne contiennent pas d'autres boucles).

L'équivalence par commutation, plus fine que l'équivalence sémantique et moins fine que l'identité, caractérisée par une congruence sur $Al_S$-finiment engendrée dans le cas d'alternatives reconnaissables - permet d'exprimer l'équivalence de certains schémas et d'aboutir à des formes plus simples de ces schémas.

Exemple :

Considérons le schéma S suivant [MA] ;(représenté par un graphe fini orienté) :



i) A S on peut associer le système d'équations $S_1$ :

(où les alternatives sont représentées sous forme arborescente de gauche à droite)

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{l} X_o = a - X_1 \\ X_1 = b - X_2 \\ X_2 = c - X_3 \\ X_3 = d - \alpha \left\langle \begin{array}{l} X_2 \\ e - \beta \left\langle \begin{array}{l} X_3 \\ X_4 \end{array} \right. \end{array} \right. \\ X_4 = \gamma \left\langle \begin{array}{l} f - X_4 \\ \delta \left\langle \begin{array}{l} X_1 \\ g - 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

ii) On résoud le système $S_1$ par la méthode de substitution (cf. 2ème partie Chapitre II, proposition 2.3)

Par la proposition 4.3 - 2ème partie - Chapitre III, on a :

$$X_4 = \star - \gamma \left\langle \begin{array}{l} f - 0 \\ \delta \left\langle \begin{array}{l} \uparrow - X_1 \\ g - 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

D'où en substituant dans $X_3$ :

$$X_3 = d - \alpha \left\langle \begin{array}{l} X_2 \\ e - \beta \left\langle \begin{array}{l} X_3 \\ \star - \gamma \left\langle \begin{array}{l} f - 0 \\ \delta \left\langle \begin{array}{l} \uparrow - X_1 \\ g - 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Et en substituant $X_1$ et $X_2$ dans $X_3$ on a :

$$X_3 = d - \alpha \left\langle \begin{array}{l} c - X_3 \\ e - \beta \left\langle \begin{array}{l} X_3 \\ \star - \gamma \left\langle \begin{array}{l} f - 0 \\ \delta \left\langle \begin{array}{l} b - c - \uparrow - X_3 \\ g - 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

D'où par la proposition 4.3 - 2ème partie, Chapitre III.

```
             /c — 0
X3 = * — d — α      /0
             \e — β       /f — 0
                   \* — γ       /b — c — 1
                          \δ/
                            \g — 2
```

D'où :

```
                          /c — 0
X1 = b — c — *    d — α        /0
                          \e — β       /f — 0
                                \* — γ       /b — c — 1
                                       \δ/
                                         \g — 2
```

iii) Puisque : $(\alpha,\ d) \in R_5$ <u>et</u> $(\beta,\ e\ ;\ d) \in R_5$

On a :

```
                       /d — c — 0
X1  ≡   b — c — * — α     /d — e — 0
   Sem                 \β/              /f — 0
                         \d — e — * — γ      /b — c — 1
                                       \δ/
                                         \g — 2
```

iv) En posant :

```
                                         /B — 0
A = c ; b, B = c ; d, C = e ; d et t = α      /C — 0
                                          \β/
                                            \1
```

```
                                  /Ω
Montrons que : A — * — t  ≡  α'              où α' = α Θ A.
                         Sem   \A — 0
```

En effet :

```
                   /B — ↓(t^i)
. ↓(t^{i+1}) = α       /C — ↓(t^i)
                   \β/
                     \0
```

D'où, puisque $\beta\ \Theta\ A = \alpha'$

$$A - \downarrow(t^{i+1}) \underset{\text{Sem}}{\equiv} \alpha' \left\langle \begin{array}{l} A - B - \downarrow(t^i) \\ \alpha' \left\langle \begin{array}{l} A - C - \downarrow(t^i) \\ A - 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\underset{\text{Sem}}{\equiv} \alpha' \left\langle \begin{array}{l} A - B - \downarrow(t^i) \\ A - 0 \end{array} \right.$$

. En supposant que $\beta \,\Theta\, A \left\langle \begin{array}{l} t_1 \\ t_2 \end{array} \right. \underset{\text{Sem}}{\equiv} t_1$ où $t_1, t_2 \in Al_S$.

montrons par récurrence sur i que :

$A - D - \downarrow(t^i) \underset{\text{Sem}}{\equiv} \Omega$, où D est de la forme

$\prod_{k,\ell} B^k C^\ell$, $B^k = B \,;\, B \,;\, \ldots \,;\, B$ (k fois)

Remarque que $\beta \,\Theta\, D = \beta$ pour tout D de la forme donnée.

- pour i = 0 la propriété est évidente

$$- A - D - \downarrow(t^i) = A - D - \alpha \left\langle \begin{array}{l} B - \downarrow(t^{i-1}) \\ \beta \left\langle \begin{array}{l} C - \downarrow(t^{i-1}) \\ 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\underset{\text{Sem}}{\equiv} \alpha \,\Theta\, (D \,;\, A) \left\langle \begin{array}{l} A - D - B - \downarrow(t^{i-1}) \\ \beta \,\Theta\, A \left\langle \begin{array}{l} A - D - \downarrow(t^{i-1}) \\ A - D - 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\underset{\text{Sem}}{\equiv} \alpha \,\Theta\, (D \,;\, A) \left\langle \begin{array}{l} A - D - B - \downarrow(t^{i-1}) \\ A - D - C - \downarrow(t^{i-1}) \end{array} \right.$$

<u>or</u> D - B et D - C sont de la forme $\prod_{k,\ell} B^k C^\ell$

donc : par hypothèse de récurrence :

$$A - D - B - \downarrow(t^{i-1}) \underset{\text{Sem}}{\equiv} A - D - C - \downarrow(t^{i-1}) \underset{\text{Sem}}{\equiv} \Omega$$

D'où :

$$A - D - \downarrow(t^i) \underset{\text{Sem}}{\equiv} \alpha \,\Theta\, (D \,;\, A) \left\langle \begin{array}{l} \Omega \\ \Omega \end{array} \right. \underset{\text{Sem}}{\equiv} \Omega$$

et par conséquent :

$$A - \downarrow(t^{i+1}) \underset{Sem}{\equiv} \alpha' \begin{array}{l} \diagup \Omega \\ \diagdown A - 0 \end{array}$$

D'où d'après la définition de l'opération étoile :

$$A - \star - \alpha \begin{array}{l} \diagup B - 0 \\ \diagdown \beta \begin{array}{l} \diagup C - 0 \\ \diagdown 1 \end{array} \end{array} \underset{Sem}{\equiv} \alpha' \begin{array}{l} \diagup \Omega \\ \diagdown A - 0 \end{array} \underset{Sem}{\equiv} \star - \alpha' \begin{array}{l} \diagup \Omega \\ \diagdown A - 1 \end{array}$$

Donc :

$$X_1 \underset{Sem}{\equiv} \star - \alpha' \begin{array}{l} \diagup \Omega \\ \diagdown b - c - d - e - \star - \gamma \begin{array}{l} \diagup f - 0 \\ \diagdown \delta \begin{array}{l} \diagup b - c - 1 \\ \diagdown g - 2 \end{array} \end{array} \end{array}$$

v) En posant

$$A = e ; d ; c ; b \ \underline{\text{et}} \ t = \gamma \begin{array}{l} \diagup f - 0 \\ \diagdown \delta \begin{array}{l} \diagup b - c - 1 \\ \diagdown g - 2 \end{array} \end{array}$$

on a : puisque $\gamma \ \Theta \ A = \delta \ \Theta \ A = \gamma'$ :

$$A - \downarrow(t^{i+1}) = A - \gamma \begin{array}{l} \diagup f - \downarrow(t^{i}) \\ \diagdown \delta \begin{array}{l} \diagup b - c - 0 \\ \diagdown g - 1 \end{array} \end{array}$$

$$\underset{Sem}{\equiv} \gamma' \begin{array}{l} \diagup A - f - \downarrow(t^{i}) \\ \diagdown \gamma' \begin{array}{l} \diagup A - b - c - 0 \\ \diagdown A - g - 1 \end{array} \end{array}$$

$$\underset{Sem}{\equiv} \gamma' \begin{array}{l} \diagup A - f - \downarrow(t^{i}) \\ \diagdown A - g - 1 \end{array}$$

or, en supposant que $\delta \ \Theta \ A \begin{array}{l} \diagup t_1 \\ \diagdown t_2 \end{array} \underset{Sem}{\equiv} t_1$ où $t_1$, $t_2 \in Al_S$

$$\text{on a : } A - f - \downarrow(t^{i}) \underset{Sem}{\equiv} \gamma \, \Theta \, (f \; ; A) \left\langle \begin{array}{l} A - f - f - \downarrow(t^{i-1}) \\ A - f - b - c - 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{Sem}{\equiv} A - f - \downarrow(t'^{i})$$

$$\text{où } t'^{o} = 0 \ \underline{\text{et}} \text{ pour } i \geq 1 \ t'^{i} = \gamma \left\langle \begin{array}{l} f - t^{i-1} \\ b - c - 1 \end{array} \right.$$

Donc :

$$X_1 \underset{Sem}{\equiv} * - \alpha' \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ b - c - d - e - \gamma \left\langle \begin{array}{l} f - * - \gamma \left\langle \begin{array}{l} f - 0 \\ b - c - 1 \end{array} \right. \\ g - 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

or :

$$f - * \ \gamma \left\langle \begin{array}{l} f - 0 \\ b - c - 1 \end{array} \right. \underset{Sem}{\equiv} * - f - \gamma \left\langle \begin{array}{l} 0 \\ b - c - 1 \end{array} \right.$$

Donc :

$$X_1 \underset{Sem}{\equiv} * - \alpha' \left\langle \begin{array}{l} \Omega \\ b - c - d - e - \gamma \left\langle \begin{array}{l} * - f - \gamma \left\langle \begin{array}{l} 0 \\ b - c - 1 \end{array} \right. \\ g - 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

vi) En remarquant que :

. pour tout $i$ et $f^{i} = (f_{i} \; \ldots \; ; f)$ (i fois)

on a : $A \; ; f^{i} = A$ où $A = e \; ; d \; ; c \; ; b$.

et

. si $\forall \; i \; \gamma \, \Theta \, f^{i} \left\langle \begin{array}{l} \Omega \\ t_1 \end{array} \right. \equiv \Omega$ $\underline{\text{alors}}$ $\alpha' \left\langle \begin{array}{l} \Omega \\ t'_1 \end{array} \right. \equiv \Omega$

On montre par une démarche analogue à celle des paragraphes précédents que :

$$X_1 \underset{Sem}{\equiv} * - \alpha' \left\langle \begin{array}{l} \Omega \\ b - c - d - e - \gamma \left\langle \begin{array}{l} 0 \\ g - 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

vii) Z étant considérée comme variable de sortie, les variables $y_3$ et $y_4$ deviennent inutiles, on peut donc supprimer les affectations les concernant.

En posant :

$a' = \langle y_1 \leftarrow f(y_1)\rangle, \; b' = \langle y_2 \leftarrow g(y_1, y_1)\rangle,$

$c' = \langle y_1 \leftarrow f(y_2)\rangle$

et en remarquant que :

$(c', \gamma) \in R_5, \; c' \; ; \; g$ et $\alpha' = \alpha \, \Theta \, a'$

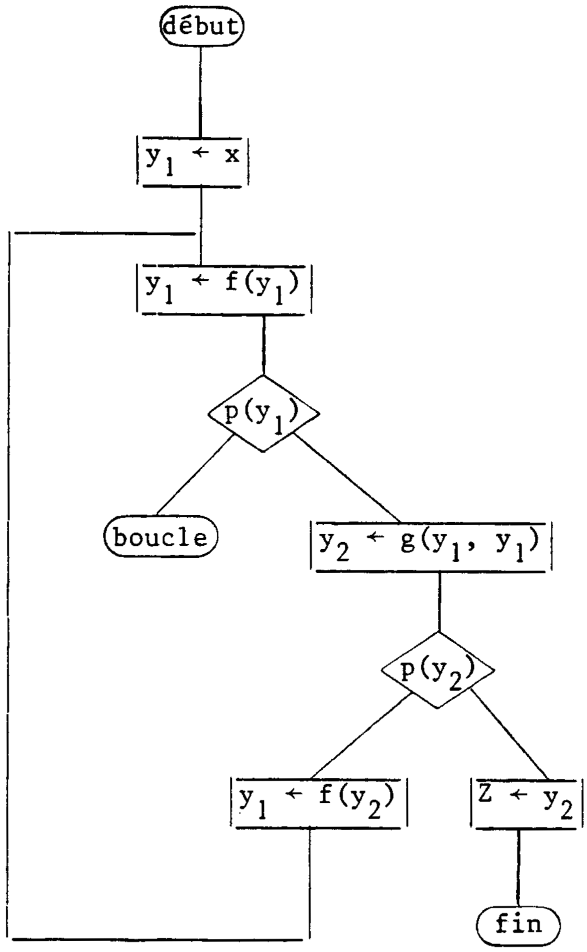
on a :

$$X_1 \underset{\text{Sem}}{\equiv} * - a' - \alpha \begin{array}{l} / \Omega \\ \backslash b' - \gamma \begin{array}{l} / c' - 0 \\ \backslash g - 1 \end{array} \end{array}$$

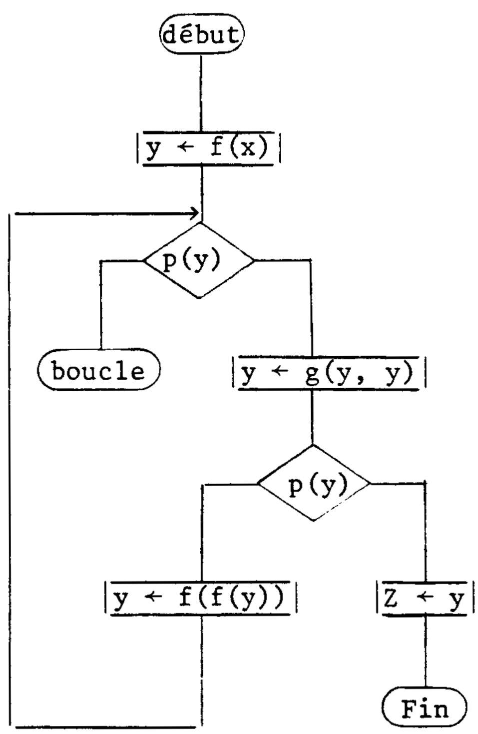
D'où :

$$X_o \underset{\text{Sem}}{\equiv} a - * - a' - \alpha \begin{array}{l} / \Omega \\ \backslash b' - \gamma \begin{array}{l} / c' - 0 \\ \backslash g - 1 \end{array} \end{array}$$

viii) En l'écrivant sous forme graphique, le schéma S est donc sémantiquement équivalent au schéma S', structuré et manifestement plus simple :




$y_2$ peut être remplacée par $y_1$, et on a finalement le schéma suivant :




□

# BIBLIOGRAPHIE

AD : A. ARNOLD - M. DAUCHET
Théorie des magmoïdes
RAIRO IT 12-3 (78)
13-2 (79)

ALG : GROUPE ALGOL de l'AFCET
Manuel du langage algorithmique Algol 68
Hermann (75)

AM : E. ASNCROFT - Z. MANNA
The translation of GOTO Programs into WHILE programs
Proceding of the IFIP Langres (71)

AMP : E. ASHCROFT - Z. MANNA - A. PENUELI
Decidable properties of monadic functional schemes
JACM 20-3 (73)

AR : J. ARSAC
La construction de programmes structurés
Dunod (77)

BO : G. BOUDOL
Sémantique opérationnelle et algébrique des programmes récursifs non déterministes
Thèse d'Etat - Paris VII (80)

CO : B. COURCELLE
Fondamental properties of infinite trees
Th. Comp. Sc. 25 (83)

COM : G. COMYN
Objets infinis calculables
Thèse d'Etat Lille I (82)

COU1 : F.G. COUSINEAU
Les arbres à feuilles indicées
Thèse d'Etat Paris VII (77)

COU2 : F.G. COUSINEAU
An algebraic definition of control structures
Th. Comp. Sc. 12 (80)

CR : F.G. COUSINEAU - J.M. RIFFLET
Interpretation languages of recursive schemes
Publication LITP 73 - 04

DJ : E. DIJKSTRA
GOTO Statements considered harmful
Com. ACM. 11, 3, (68)

GU1 : I. GUESSARIAN
Schémas de programmes récursifs polyadiques
Thèse d'Etat - Paris VII (75)

GU2 : I. GUESSARIAN
Algebraic semantics
Lecture Note in Computer Science 99 (81)

GU3 : I. GUESSARIAN
Les tests et leur caractérisation syntaxique
RAIRO IT 11-2 (77)

HU : G. HUET
Confluent reductions
JACM 27-4 (80)

IA : I.V. IANOV
The logical schemes of algorithms
Problems of Cybernitics (60)

JA : G. JACOB
Substitution dans les arbres et non déterminisme
Publication IT Lille I n° 2.78

KO1 : L. KOTT
Sémantique algébrique d'un langage de programmation de type Algol
RAIRO IT Vol 11-3 (77)

KO2 : L. KOTT
Des substitutions dans les systèmes d'équations algébriques
sur le magma
Thèse d'Etat Paris VII (79)

KPT : I. KASAMI - W. PETERSON - N. TOKURA
On the capabilities of WHILE, REPEAT and EXIT statements
Com. ACM. 16(8) (73)

LI : C. LIVERCY
Theorie des programmes
Dunod (77)

LPP : D.C. LUCKHAM - D.M.R. PARK - M.S. PATERSON
On formalized computer programs - J.C.S.S. 4 (70)

MA : Z. MANNA
Mathematical theory of computation
Mc Graw Hill (74)

MI : MILNER
Equivalence on program schemes - J.C.S.S. 4 (3) (70)

NE : G. NEWTON
A partially annoted bibliography of TOP-DOWN and GOTO-Less Programming
in Colloque IRIA "Construction, amélioration et vérification des
programmes" (75)

NI : M. NIVAT
On the interpretation of recursive polyadic schemes
Sym. Math. 15 (74)

PA : J.F. PABION
Logique mathématique
Hermann (76)

RU : G. RUGGIU
De l'organigramme à la formule
Thèse d'Etat - Paris (73)

RUT : On Ianov Program Schemata
JACM 11(1) (64)