N° d'ordre : 1039

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE 3ème CYCLE

«Mathématiques Appliquées»

par

Rachid SADAKA

LE TRAVAIL DE PADE ET DE SES CONTEMPORAINS. ANALYSE, RAMIFICATION ET PROLONGEMENT

Thèse soutenue le 9 Juin 1983 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

Président	P. POUZET
Rapporteur	C. BREZINSKI
Examinateur	S. PASZKOWSKI

PROFESSEURS 1ère CLASSE

M.	BACCHUS Pierre	Mathématiques
M.	BEAUFILS Jean-Pierre (dét.)	Chimie
M.	BIAYS Pierre	G.A.S.
M.	BILLARD Jean	Physique
M.	BONNOT Ernest	Biologie
M.	BOUGHON Pierre	Mathématiques
M.	BOURIQUET Robert	Biologie
M.	CELET Paul	Sciences de la Terre
M.	COEURE Gérard	Mathématiques
M.	CONSTANT Eugène	I.E.E.A.
M.	CORDONNIER Vincent	I.E.E.A.
M.	DEBOURSE Jean-Pierre	S.E.S.
M.	DELATTRE Charles	Sciences de la Terre
M.	DURCHON Maurice	Biologie
M.	ESCAIG Bertrand	Physique
M.	FAURE Robert	Mathématiques
M.	FOURET René	Physique
M.	GABILLARD Robert	I.E.E.A.
M.	GRANELLE Jean-Jacques	S.E.S.
M.	GRUSON Laurent	Mathématiques
M.	GUILLAUME Jean	Biologie
M.	HECTOR Joseph	Mathématiques
M.	HEUBEL Joseph	Chimie
M.	LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M.	LACOSTE Louis	Biologie
M.	LANSRAUX Guy	Physique
M.	LAVEINE Jean-Pierre	Sciences de la Terre
M.	LEBRUN André	C.U.E.E.P.
M.	LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme	LENOBLE Jacqueline	Physique
M.	LHOMME Jean	Chimie
M.	LOMBARD Jacques	S.E.S.
M.	LOUCHEUX Claude	Chimie
M.	LUCQUIN Michel	Chimie

M.	MAILLET Pierre	S.E.S.
M.	MONTREUIL Jean	Biologie
M.	PAQUET Jacques	Sciences de la Terre
M.	PARREAU Michel	Mathématiques
M.	PROUVOST Jean	Sciences de la Terre
M.	SALMER Georges	I.E.E.A.
Mme	SCHWARTZ Marie-Hélène	Mathématiques
M.	SEGUIER Guy	I.E.E.A.
M.	STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M.	TILLIEU Jacques	Physique
M.	TRIDOT Gabriel	Chimie
M.	VIDAL Pierre	I.E.E.A.
M.	VIVIER Emile	Biologie
M.	WERTHEIMER Raymond	Physique
M.	ZEYTOUNIAN Radyadour	Mathématiques

PROFESSEURS 2ème CLASSE

M.	AL FAKIR Sabah	Mathématiques
M.	ANTOINE Philippe	Mathématiques
M.	BART André	Biologie
Mme	BATTIAU Yvonne	Géographie
M.	BEGUIN Paul	Mathématiques
M.	BELLET Jean	Physique
M.	BKOUCHE Rudolphe	Mathématiques
M.	BOBE Bernard	S.E.S.
M.	BODART Marcel	Biologie
M.	BOILLY Bénoni	Biologie
M.	BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M.	BOSQ Denis	Mathématiques
M.	BREZINSKI Claude	I.E.E.A.
M.	BRUYELLE Pierre (Chargé d'enseignement)	Géographie
M.	CAPURON Alfred	Biologie
M.	CARREZ Christian	I.E.E.A.
M.	CHAMLEY Hervé	E.U.D.I.L.

M. CHAPOTON Alain	C.U.E.E.P.
M. COQUERY Jean-Marie	Biologie
Mme CORSIN Paule	Sciences de la Terre
M. CORTOIS Jean	Physique
M. COUTURIER Daniel	Chimie
Mle DACHARRY Monique	Géographie
M. DEBRABANT Pierre	E.U.D.I.L.
M. DEGAUQUE Pierre	I.E.E.A.
M. DELORME Pierre	Biologie
M. DEMUNTER Paul	C.U.E.E.P.
M. DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie
M. DHAINAUT André	Biologie
M. DORMARD Serge	S.E.S.
M. DOUKHAN Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M. DUBOIS Henri	Physique
M. DUBRULLE Alain	Physique
M. DUEE Gérard	Sciences de la Terre
M. DYMENT Arthur	Mathématiques
M. FLAMME Jean-Marie	E.U.D.I.L.
M. FONTAINE Hubert	Physique
M. GERVAIS Michel	S.E.S.
M. GOBLOT Rémi	Mathématiques
M. GOSSELIN Gabriel	S.E.S.
M. GOUDMAND Pierre	Chimie
M. GREVET Patrice	S.E.S.
M. GUILBAULT Pierre	Biologie
M. HANGAN Théodore	Mathématiques
M. HERMAN Maurice	Physique
M. JACOB Gérard	I.E.E.A.
M. JACOB Pierre	Mathématiques
M. JOURNEL Gérard	E.U.D.I.L.
M. KREMBEL Jean	Biologie
M. LAURENT François	I.E.E.A.
Mle LEGRAND Denise	Mathématiques
Mle LEGRAND Solange	Mathématiques (Calais)
Mme LEHMANN Josiane	Mathématiques

M.	LEMAIRE Jean	Physique
M.	LENTACKER Firmin	G.A.S.
M.	LEVASSEUR Michel	I.P.A.
M.	LHENAFF René	G.A.S.
M.	LOCQUENEUX Robert	Physique
M.	LOSFELD Joseph	I.E.E.A.
M.	LOUAGE Francis	E.U.D.I.L.
M.	MACKE Bruno	Physique
M.	MAIZIERES Christian	I.E.E.A.
Mle	MARQUET Simone	Mathématiques
M.	MESSELYN Jean	Physique
M.	MIGEON Michel	E.U.D.I.L.
M.	MIGNOT Fulbert	Mathématiques
M.	MONTEL Marc	Physique
Mme	NGUYEN VAN CHI Régine	G.A.S.
M.	PARSY Fernand	Mathématiques
Mle	PAUPARDIN Colette	Biologie
M.	PERROT Pierre	Chimie
M.	PERTUZON Emile	Biologie
M.	PONSOLLE Louis	Chimie
M.	PORCHET Maurice	Biologie
M.	POVY Lucien	E.U.D.I.L.
M.	RACZY Ladislas	I.E.E.A.
M.	RICHARD Alain	Biologie
M.	RIETSCH François	E.U.D.I.L.
M.	ROGALSKI Marc	M.P.A.
M.	ROUSSEAU Jean-Paul	Biologie
M.	ROY Jean-Claude	Biologie
M.	SALAMA Pierre	S.E.S.
Mme	SCHWARZBACH Yvette (CCP)	M.P.A.
M.	SCHAMPS Joël	Physique
M.	SIMON Michel	S.E.S.
M.	SLIWA Henri	Chimie
M.	SOMME Jean	G.A.S.
Mle	SPIK Geneviève	Biologie
M.	STERBOUL François	E.U.D.I.L.
M.	TAILLIEZ Roger	Institut Agricole

M.	TOULOTTE Jean-Marc	I.E.E.A.
M.	VANDORPE Bernard	E.U.D.I.L.
M.	WALLART Francis	Chimie
M.	WATERLOT Michel	Sciences de la Terre
Mme	ZINN JUSTIN Nicole	M.P.A.

CHARGES DE COURS

M.	TOP Gérard	S.E.S.
M.	ADAM Michel	S.E.S.

CHARGES DE CONFERENCES

M.	DUVEAU Jacques	S.E.S.
M.	HOFLACK Jacques	I.P..A
M.	LATOUCHE Serge	S.E.S.
M.	MALAUSSENA DE PERNO Jean-Louis	S.E.S.
M.	OPIGEZ Philippe	S.E.S.

Monsieur le Professeur P. POUZET m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse : je lui en suis très reconnaissant.

Je remercie vivement Monsieur C. BREZINSKI, Professeur à l'Université de LILLE 1, pour l'attention qu'il a porté à ce travail, ses encouragements m'étaient très utiles ainsi que sa grande connaissance à la bibliographie.

Monsieur S. PASZKOWSKI, Professeur à l'Université de WROCLAW, a accepté de s'intéresser à ce travail et de le juger : je le remercie infiniment.

Je remerchie Madame F. TAILLY pour le soin qu'elle a porté à la frappe de ce travail et l'effort qu'elle a fourni pour le mener à terme.

Je remercie également Madame H. DEBOCK qui a imprimé et relié cette thèse.

TABLE DES MATIÈRES

Pages

CHAPITRE III

SUR LA CONVERGENCE DES FRACTIONS CONTINUES

Table des matières (suite).

CHAPITRE IV

Les fractions continues d'interpolation.

CHAPITRE V

Application des fractions continues algébriques

INTRODUCTION

L'objet de ce travail est de faire une analyse des recherches de Padé qui se rapportent aux fractions continues, dans le but de dégager des sujets d'études qui peuvent être importantes et de contribuer à la connaissance de résultats déjà acquis dans ce domaine et qui sont ignorés. L'analyse des mémoires de Padé nous a conduit à faire une étude des recherches de quelques contemporains de Padé qui ont travaillé sur les fractions continues.
Quelques extensions ont été faites ainsi que des liens entre les différents mémoires de quelques auteurs. Les points qui nous ont semblé être intéressants sont mentionnés sous forme de remarques soit à la fin des paragraphes, soit au cours.
A la fin de ce travail, on donne une bibliographie des auteurs dont quelques mémoires ont été analysés.

Euler est le premier qui ait développé une fonction à une variable en fraction continue [59] ; avant lui, les fractions continues étaient restées dans le domaine de la théorie des nombres. Le problème posé par Euler était de développer une fonction ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable en une fraction continue telle que ses réduites successives donnent les sommes partielles de la série.

Si on pose

$$f(x) = \sum_{i=o}^{\infty} c_i \, x^i$$

la fraction obtenue par Euler est qui résoud son problème est :

$$\frac{c_o|}{|1} - \frac{\frac{c_1}{c_o} x \,|}{|1 + \frac{c_1}{c_o} x} - \frac{\frac{c_2}{c_1} x \,|}{|1 + \frac{c_2}{c_1} x} - \frac{\frac{c_3}{c_2} x \,|}{|1 + \frac{c_3}{c_2} x} \cdots\cdots$$

Euler a également obtenu des développements en fractions continues en utilisant un algorithme analogue à celui d'Euclide.

Après Euler, Lambert a donné des développements en fractions continues de certaines fonctions. Mais, ni Euler, ni Lambert n'ont remarqué la propriété fondamentale des réduites, et c'est Lagrange qui, après avoir donné quelques développements en fractions continues de certaines fonctions dans [61], a remarqué que le développement en série entière de chacune des réduites coïncide avec celui de la fonction jusqu'au terme de degré égal à la somme des degrés du numérateur et du dénominateur inclus.
Les développements obtenus par Lagrange sont de l'une ou l'autre des deux formes suivantes :

1°) - $$a_o + \frac{\alpha_o|}{|1} + \frac{\alpha_1|}{|1} + \frac{\alpha_2|}{|} + \ldots\ldots$$

où les α_i *pour* $i \geq 1$*, sont des monômes du premier degré.*

α_o *est soit un monôme, soit une constante égale à 1.*

a_o *est égal à zéro ou à 1.*

2°) - $$a_o + \frac{\alpha_1|}{|a_1} + \frac{\alpha_2|}{|a_2} + \frac{\alpha_3|}{|a_3} + \ldots\ldots$$

où les α_i *pour* $i \geq 2$ *sont des monômes du second degré et les* a_i *des binômes du premier degré pour* $i \geq 1$.
a_o *et* a_1 *sont des polynômes et* α_1 *un monôme*

Un autre développement en fraction continue a été considéré, il permet de développer une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de la variable en une fraction continue telle que tous les numérateurs partiels, soient égaux à l'unité et les dénominateurs partiels des polynômes de degré supérieur ou égal à 1. La propriété fondamentale des réduites, dans ce cas, est que le développement en puissances décroissantes de la série coïncide avec celui de la réduite jusqu'au terme de degré égal à deux foix le degré du dénominateur de la réduite inclu. Ce développement a fait l'objet de plusieurs recherches sur les fractions continues, notamment celles de Laguerre, Halphen, Jacobi, Tchebycheff, etc...

Tous les développements qui étaient donnés faisaient partie de l'un des développement qu'on a cité ci-dessus. Dans [60], on peut trouver des résultats de quelques auteurs se rapportant à la question.

Pour une série, ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable, qu'on développait en fraction continue, on se trouvait devant l'une des deux formes de Lagrange ou devant la forme d'Euler et, pour certaines fonctions, on est arrivé a obtenir plusieurs développements, par exemple, pour la fonction exponentielle, on connait cinq développements en fractions continues ; c'est d'ailleurs la fonction pour laquelle on en connaît le plus grand nombre.

Les recherches de Padé de 1892 [15] ont montré l'origine de cette multiplicité de développements en fractions continues pour une même fonction, et la notion de fractions continues holoïdes associées à une fonction a permit de montrer que les développements données antérieurement ne sont que des cas particuliers du nombre infini de fractions continues holoïdes que peut admettre une fonction. Des exemples de ce fait, sont données dans [13], [22], [23], [27].

Dans le premier chapitre de ce travail, on va étudier les recherches de Padé dont on vient de parler en commençant par la notion d'approximation d'une fonction par des fractions rationnelles. Le lien entre cette théorie et celle des fractions continues est fait en se basant sur la notion de la table des fractions rationnelles approchées d'une fonction, connue aujourd'hui sous le nom de "La table de Padé". En utilisant quelques résultats de Padé qui figurent dans ce même chapitre, on a pu obtenir des algorithmes pour calculer les approximants de Padé d'une fonction, dans le cas normal, et donner ses développements en fractions continues régulières.

Lambert avait constaté par le calcul d'un certain nombre de réduites qu'une fraction continue était convergente, alors que la série dont il l'avait déduite était divergente et c'est Laguerre qui a effectivement montré qu'une série entière divergente peut admettre un développement en fraction continue convergent. Halphen a montré qu'inversement une série entière convergente peut admettre un développement en fraction continue divergent. La notion de la table des fractions rationnelles approchées a permis d'expliquer les deux faits de Laguerre et de Halphen qu'on vient de mentionner. C'est ce qu'on se propose de discuter dans le deuxième chapitre, avec la notion de la définition d'une fraction *à partir d'une série divergente, dont un cas particulier nous est donné par les recherches de Stieltjes de 1895. On a commencé ce chapitre par l'analogie que Padé avait fait entre la théorie des séries et celle des fractions continues ; quelques remarques sur cette analogie nous ont permis de se poser un problème qui nous semble avoir des liens avec les points du chapitre qu'on a mentionné. Des remarques sur ce point et des résultats sont donnés. On termine le chapitre par un résumé des résultats de Stieltjes dont on vient de parler.*

La convergence des fractions continues holoïdes d'une fonction est un point qu'on discute dans le troisième chapitre. Il faut remarquer que, sur ce point, on ne dispose pas de résultats suffisants. Le problème de la convergence des fractions continues n'a pas été abordé ni par Euler, ni par Lagrange, ni par Gauss, ni par Cauchy. Les premières recherches les plus intéressantes concernant ce point sont celles de Riemann et de Thomé [62], [63] qui se sont prolongés par les recherches de Laguerre, Halphen, etc... . Dans ce troisième chapitre, on a exposé quelques résultats de convergence des fractions continues holoïdes de certaines fonctions, dont l'étude a été faite par Padé. On a également signalé au début du chapitre la notion de disque de convergence d'une fraction continue. Le chapitre se termine par l'analyse des recherches de Laguerre, de Montessus de Ballore, et de Padé sur le développement et la convergence des fractions continues d'une fonction qui satisfait à une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Dans le quatrième chapitre, on s'est intéressé aux fractions continues d'interpolation. A ce sujet, on a fait une étude des recherches de Norlünd et celles de Padé. On a insisté sur des expressions des différences réciproques sous formes de rapports de déterminants qui nous paraissent très intéressantes et peuvent être appliquées dans d'autres cas analogues.

Les résultats de Padé sur l'extension des propriétés des réduites aux fractions d'interprétation de Cauchy nous ont permis de déduire des algorithmes pour le calcul des fractions rationnelles d'interpolation dans le cas normal et de donner des développements en fractions continues d'interpolation.

Le dernier chapitre est consacré à quelques applications des fractions continues algébriques. Ces applications, dues à Tchebycheff et à Markoff, utilisent le développement en fraction continue d'une fonction qu'on suppose

ordonnée suivant les puissances décroissantes.
Dans le deuxième chapitre, on a exposé les liens que Padé avait fait entre ce développement et les développements en fractions continues holoïdes d'une fonction. L'étude de ces applications, quand on se place au point de vue de la théorie des fractions continues holoïdes, peut ouvrir d'autres champs d'applications pour les fractions continues. Les applications qu'on a étudié traitent de l'interpolation polynômiale, du développement en série d'une fonction et des quadratures numériques.

CHAPITRE I

APPROXIMATION D'UNE FONCTION PAR DES FRACTIONS RATIONNELLES.

LIEN AVEC LES FRACTIONS CONTINUES.

0 - INTRODUCTION

Dans ce chapitre, on fait une étude des mémoires de Padé [15], [21] et [29], dans lesquels il discute, en se plaçant dans le cas le plus général, la notion d'approximation d'une fonction par des fractions rationnelles. Un résumé des résultats les plus essentiels figure dans les mémoires [12], [13], [24].

Dans un premier paragraphe on a essayé de présenter ces résultats sous une forme qui laisse bien voir et la profondeur et la simplicité de la méthode utilisée par Padé pour arriver à la définition du tableau de fractions rationnelles approchées d'une fonction donnée. Cette méthode diffère de celle que Padé a utilisé dans son mémoire de Thèse [15] et présente l'avantage de se prêter à une généralisation qui a donné lieu aux approximants de Padé-Hermite dont l'étude a été faite par Padé dans [18] et [19]. On a insisté sur les techniques de démonstrations qui nous ont semblé intéressantes et peuvent être utilisées dans des études analogues, comme on va voir dans le chapitre IV.

Dans le deuxième paragraphe, on s'intéresse aux rapports entre les fractions continues et les fractions rationnelles approchées telles qu'elles sont définies au premier paragraphe. Ceci expliquera le fait qu'une fonction donnée admet une infinité de développements en fractions continues dont les réduites sont des fractions rationnelles approchées de cette fonction. Ces fractions ont été appelé par Padé : les fractions continues holoïdes associées à la fonction donnée. Parmi ces fractions continues Padé avait disitngué un ensemble particulier qu'il avait appelé : les fractions continues régulières.

Dans le troisième paragraphe, on a utilisé des résultats de Padé qu'on a exposé au deuxième paragraphe pour la construction d'algorithmes pour le calcul des approximants de Padé dans le cas normal. Ces algorithmes nous donnent aussi les développements en fractions continues régulières.
Le chapitre se termine par des essais numériques.

Tous les chapitres suivants utilisent les résultats et les considérations de ce chapitre et sont donc essentiels pour la suite de ce travail.

I - Fractions rationnelles approchées d'une fonction, existence et distribution.

I.1 - FORMALISME DU PROBLEME.

Soit $u(x) = \sum_{i=o}^{\infty} c_i x^i$ une série entière telle que $c_o \neq 0$, le problème de la recherche d'une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ telle que le numérateur soit au plus de degré μ et le dénominateur au plus de degré ν et qui vérifie la relation suivante :

$$u(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} + 0\ (x^{\mu+\nu+1}) \qquad \text{où } \mu \text{ et } \nu \in \mathbb{N}$$

peut être formuler de la façon suivante :

soient $S_1(x) = \sum_{i=o}^{\infty} a_i x^i$ et $S_2(x) = \sum_{i=o}^{\infty} b_i x^i$ deux séries entières telles que $a_o \neq o$ et $b_o \neq o$.

Le problème est de trouver deux polynômes X_1 et X_2 de degrés au plus égaux respectivement à μ_1 et μ_2, tels que :

$$(1) \qquad S_1X_1 + S_2X_2 = u^{\mu_1+\mu_2+1}.S \qquad \text{où } \mu_1 \text{ et } \mu_2 \in \mathbb{N}$$

où S est une série entière quelconque.

En égalant à zéro tous les coefficients des différents monômes de degrés inférieurs ou égals à $\mu_1 + \mu_2$ dans le premier membre de (1), on obtient un système de $\mu_1 + \mu_2 + 1$ équations linéaires et homogènes par rapport aux $\mu_1 + \mu_2 + 2$ coefficients de X_1 et X_2. Un tel système n'admet pas toujours une solution non nulle, et ceci se présente dans le cas où les coefficients des séries S_1 et S_2 vérifient certaines relations de récurrences. Dans la suite, on admettra que ce cas ne se présente pas et donc le système admet toujours une solution non nulle.

De la relation (1), on déduit que X_1 et X_2 sont tous les deux non identiquement nuls.

En effet, supposons que $X_2 \equiv 0$, on aura donc :

$$S_1 X_1 = x^{\mu_1+\mu_2+1} . S$$

donc X_1 est divisible par $x^{\mu_1+\mu_2+1}$, ce qui est impossible du fait que X_1 est de degré inférieur ou égal à μ_1.
De même si l'on suppose que $X_1 \equiv 0$, on arrive à la même contradiction.

Remarque.

Si on divise la relation (1) par S_2, on obtient :

$$\frac{S_1}{S_2} X_1 + X_2 = x^{\mu_1+\mu_2+1} . \frac{S}{S_2}$$

ou encore

$$\frac{S_1}{S_2} = - \frac{X_2}{X_1} + x^{\mu_1+\mu_2+1} . \frac{S}{X_1 S_2}$$

Dans le formalisme proposé par Gilewiz [6], repris par Cordellier [5], la fraction rationnelle $- \frac{X_2}{X_1}$ est appelée forme de Padé de degré (μ_2, μ_1) de la série $\frac{S_1}{S_2}$.

Si le P.G.C.D $(X_1, X_2) = 1$, alors $- \frac{X_2}{X_1}$ est appelée forme réduite de degré (μ_2, μ_1), si de plus, le coefficient du terme de plus haut degré de X_1 est égal à l'unité, alors $- \frac{X_2}{X_1}$ est appelée forme réduite normalisée de degré (μ_2, μ_1) ou un approximant de Padé de la série $\frac{S_1}{S_2}$.

I.2 - DEFINITION DES FRACTIONS RATIONNELLES APPROCHEES D'UNE FONCTION. CORRESPONDANCE AVEC LES POINTS DU PLAN DE COORDONNEES ENTIERES POSITIVES.

I.2.1 - Proposition.

Si X_1' *et* X_2' *sont deux polynômes de degrés au plus égaux respectivement à* μ_1 *et* μ_2 *et tels que :*

$$S_1X_1' + S_2X_2' = x^{\mu_1+\mu_2+1}.S'$$

où S' *est une série entière quelconque, alors on a :*

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{X_2'}{X_1'}$$

Démonstration.

$$S_1X_1 + S_2X_2 = x^{\mu_1+\mu_2+1}.S$$

$$S_1X_1' + S_2X_2' = x^{\mu_1+\mu_2+1}.S'$$

multiplions la première équation par X_2', la deuxième par X_2 et retranchons membre à membre :

$$S_1(X_1X_2' - X_2X_1') = x^{\mu_1+\mu_2+1} \quad (SX_2' - S'X_2)$$

Or, l'ordre (degré du premier terme non nul) de l'expression du premier membre est au plus égal à $\mu_1 + \mu_2$, celui du second membre est au moins égal à $\mu_1+\mu_2+1$, donc :

$$X_1X_2' - X_2X_1' = 0 \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Si l'on réduit toutes les fractions rationnelles $-\frac{X_2}{X_1}$ satisfaisant à (1), ou bien toutes des formes de Padé de degré (μ_2, μ_1) à une seule fraction rationnelle $-\frac{Y_2}{Y_1}$ telle que Y_1 et Y_2 soient premiers entre eux et $\frac{Y_2}{Y_1} = \frac{X_2}{X_1}$, on obtient le résultat suivant :

Proposition.

A chaque couple de points du plan de coordonnées entières positives, correspond une fraction rationnelle unique dont le numérateur et le dénominateur sont déterminés à une constante multiplicative près.

Remarque.

En ajoutant une condition de normalisation qui peut porter soit sur le numérateur Y_2 soit sur le dénominateur Y_1, la fraction $-\frac{Y_2}{Y_1}$ sera déterminée de façon unique. En termes de formes de padé, toutes les formes de Padé de degré (μ_2, μ_1) de la série $\frac{S_2}{S_1}$ se réduisent à une seule fraction rationnelle réduite et normalisée. En général, cette fraction rationnelle n'est pas une forme de Padé de degré (μ_2, μ_1) et par suite elle ne vérifie pas nécessairement la relation (1), mais une relation analogue.
C'est ce qu'on va voir dans la suite.

I.2.2 - L'ordre de l'approximation au point (μ_1, μ_2).

Considérons la relation :

(1) $$S_1X_1 + S_2X_2 = x^{\mu_1+\mu_2+1}.S$$

Soit Δ = P.G.C.D. (X_1, X_2).

Posons $Y_1 = \frac{X_1}{\Delta}$ et $Y_2 = \frac{X_2}{\Delta}$.

Si l'on suppose que le degré de Δ est Ω et que son ordre est ω, alors on aura :

$$\nu_1 \leq \mu_1 - \Omega \text{ et } \nu_2 \leq \mu_2 - \Omega$$

où ν_1 est le degré de Y_1 et ν_2 celui de Y_2.

Divisons les deux membres de la relation (1) par Δ, dans le deuxième membre de cette relation, l'exposant $\mu_1+\mu_2+1$ de x est diminué de ω et S se trouve remplacé par une nouvelle série Σ, on obtient :

$$S_1Y_1 + S_2Y_2 = x^{\mu_1+\mu_2+1-\omega}\,\Sigma$$

Soit η l'ordre de Σ, on aura donc :

$$\Sigma = x^{\eta}.R$$

où R est une série entière telle que $R(o) \neq 0$.

Posons $\lambda = (\mu_1+\mu_2+1-\omega) - (\nu_1+\nu_2+1) + \eta$, $\lambda \in \mathbb{N}$ et on aura :

(2) $$S_1Y_1 + S_2Y_2 = x^{\nu_1+\nu_2+\lambda+1}.R$$

Cette relation montre que $\nu_1+\nu_2+\lambda+1$ est l'ordre de l'expression du premier membre, c'est ce que nous appellerons l'ordre de l'approximation au point (μ_1, μ_2) ou l'ordre de l'approximation correspondante à la fraction $-\frac{Y_2}{Y_1}$.

I.2.3 - Propriétés de la fraction $-\frac{Y_2}{Y_1}$.

Propriétés.

Soient Z_1, Z_2 *deux polynômes premiers entre eux, de degrés au plus égaux respectivement à* μ_1 *et* μ_2. *Si l'ordre de l'approximation correspondant à la fraction* $-\frac{Z_2}{Z_1}$ *est supérieur ou égal à* $\nu_1+\nu_2+\lambda+1$, *alors :*

$$Z_1 = K\,Y_1 \quad et \quad Z_2 = K\,Y_2$$

où K *est une constante.*

Démonstration.

$$S_1Z_1 + S_2Z_2 = x^{\nu_1+\nu_2+\lambda+1}.R'$$

$$S_1Y_1 + S_2Y_2 = x^{\nu_1+\nu_2+\lambda+1}.R$$

Si on multiplie la première équation par Y_2, la deuxième par Z_2 et on fait la différence, on obtient :

$$S_1(Y_1Z_2 - Y_2Z_1) = x^{\nu_1+\nu_2+\lambda+1} (RZ_2 - R'Y_2)$$

le degré de $Y_1Z_2 - Y_2Z_1$ est au plus égal au plus grand des deux nombres $\nu_1 + \mu_2$, $\nu_2 + \mu_1$.

Or

$$\nu_1+\mu_2 < \nu_1+\nu_2+\lambda+1 \quad \text{et} \quad \nu_2+\mu_1 < \nu_1+\nu_2+\lambda+1$$

donc

$$Y_1Z_2 - Y_2Z_1 = 0 \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Remarque.

De la relation

$$S_1Y_1 + S_2Y_2 = x^{\nu_1+\nu_2+\lambda+1}.R$$

on peut montrer que Y_1 et Y_2 ont chacun un terme constant différent de zéro en utilisant le fait que Y_1 et Y_2 sont premiers entre eux.
En divisant les deux membres de la relation précédente par S_2Y_1 on obtient :

$$\frac{S_1}{S_2} = - \frac{Y_2}{Y_1} + x^{\nu_1+\nu_2+\lambda+1}.\Sigma'$$

où Σ' est une série telle que $\Sigma'(o) \neq o$ du fait que Y_1 et S_2 ont chacun un terme constant différent de zéro.

De la propriété précédente, il résulte qu'il n'existe aucune autre fraction rationnelle irréductible, dont le numérateur soit au plus de degré μ_2 et le dénominateur au plus de degré μ_1, qui donne une approximation aussi grande de la fraction $\frac{S_1}{S_2}$ au voisinage de zéro.

Définition.

$-\frac{Y_2}{Y_1}$ *est appelé la fraction rationnelle approchée au point* (μ_1, μ_2).

Propriété.

La fraction $-\frac{Y_2}{Y_1}$ *correspond à tous les points du carré formé par les parallèles aux axes menées par les deux points* (ν_1, ν_2) *et* $(\nu_1+\lambda, \nu_2+\lambda)$ *et ne peut correspondre à aucun autre point du plan.*

Démonstration.

On a :

$$S_1Y_1 + S_2Y_2 = x^{\nu_1+\nu_2+\lambda+1}.R$$

si $R \equiv 0$, alors la fraction $-\frac{Y_2}{Y_1}$ correspond à tous les points du plan dont les coordonnées sont supérieures ou égales respectivement aux nombres ν_1, ν_2, et on aura :

$$S_1Y_1 + S_2Y_2 = 0 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = -\frac{Y_2}{Y_1}$$

donc la fonction $\frac{S_1}{S_2}$ se réduit à une fraction rationnelle.

Si $R \not\equiv 0$: soient h et k deux entiers tels que :

$$0 \leq h \leq k \leq \lambda.$$

En multipliant la relation (2) par x^h on aura :

$$S_1x^hY_1 + S_2x^hY_2 = x^{(\nu_1+h)+(\nu_2+k)+(\lambda-k)+1}.R$$

Posons

$$X_1 = x^hY_1 \quad \text{et} \quad X_2 = x^hY_2$$

$$\mu_1 = \nu_1+h \qquad \mu_2 = \nu_2+k$$

On aura donc :

$$S_1X_1 + S_2X_2 = x^{\nu_1+\nu_2+1}.R'$$

où

$$R' = x^{\lambda-k}.R$$

Donc la fraction $-\frac{Y_2}{Y_1}$ correspond au couple $(\mu_1, \mu_2) = (\nu_1+h, \nu_2+k)$, or les points (ν_1+h, ν_2+k) pour $0 \leq h \leq k \leq \lambda$ correspondent au carré dont les côtés ont pour équations :

$$x = \nu_1 \qquad Y = \nu_2$$

$$x = \nu_1+\lambda \qquad Y = \nu_2+\lambda \qquad \text{c.q.f.d}$$

Pour montrer que la fraction $-\frac{Y_2}{Y_1}$ ne peut correspondre à aucun autre point on peut raisonner par l'absurde, voir [29].

<u>Remarque</u>.

La fraction $-\frac{Y_2}{Y_1}$ correspond à un seul point du plan si et seulement si $\lambda = 0$, dans ce cas, l'ordre de l'approximation correspondante à la fraction $-\frac{Y_2}{Y_1}$ est égal à $\nu_1+\nu_2+1$, et cette fraction est dite normale, dans le cas contraire elle est dite anormale.

Padé avait placé les différentes fractions rationnelles approchées d'une fonction dans un tableau (T), à double entrée illimité à droite et vers le bas. C'est ce qu'il avait appelé la table des fractions rationnelles approchées.

Les fractions d'une même file horizontale correspondent à des fractions ayant des dénominateurs de même degré, celles d'une même ligne verticale, correspondent à des fractions ayant des numérateurs de même degré. C'est ce tableau que l'on appelle table de Padé suivant une dénomination qui semble due à Van Vleck [58].

Dans la suite de ce travail, les raisonnements vont porter sur ce tableau de fractions rationnelles approchées ou sur les points du plan de coordonnées entières positives, ce sont deux manières équivalentes pour bien voir les choses.

Définition.

Deux fractions rationnelles approchées seront dites contigües si les cases qu'elles remplissent dans le tableau (T) *ont un côté ou un sommet en commun.*

Définition.

Une fraction de (T) *est dite plus avancée qu'une autre si l'approximation qu'elle donne est supérieure à celle de cette dernière.*

Deux fractions de (T) *sont dites également avancées si les approximations qu'elles donnent sont égales.*

I.2.4 - Rapports entre les différentes fractions rationnelles approchées d'une même fonction.

Soit $-\frac{Y_2}{Y_1}$ la fraction rationnelle approchée au point (μ_1, μ_2). Dans ce cas on dit que (μ_1, μ_2) est un point représentatif de $-\frac{Y_2}{Y_1}$. Si cette fraction est normale alors elle admet un seul point représentatif, sinon elle en admet plusieurs.

Considérons les droites d'équations $y+x = k$, $k \in \mathbb{N}$. Si on les numérote avec k, alors en tout point (μ_1, μ_2) situé sur la droite k, auquel correspond une fraction rationnelle approchée normale, on a :

$$\mu_1 + \mu_2 = k$$

car $(\mu_1, \mu_2) \in$ à la droite (k).

Or l'ordre de l'approximation est $\mu_1+\mu_2+1$, donc il est égal à k+1.
Considérons un point (μ_1, μ_2) de la même droite k auquel correspond une fraction anormale, l'ordre de l'approximation correspondante est égal à $\nu_1+\nu_2+\lambda+1$.

Dans ce cas on aura $\nu_1+\nu_2+\lambda+1 = k+1$ si la droite (k) est la diagonale du carré où se trouvent tous les points représentatifs de la fraction anormale considérée. C'est le cas des points A, B, C, D de la figure précédente.

Définition.

On appelle points représentatifs principaux d'une fraction rationnelle approchée, ceux des points représentatifs qui sont sur la diagonale, parallèle à la droite $x+y=o$*, du carré où se trouvent tous les points représentatifs de la fraction considérée.*
C'est le cas des points A, B, C, D, E, F, I, J, K, L, M, N *de la figure précédente.*

Propriété.

Tous les points représentatifs principaux des différentes fractions rationnelles approchées qui se trouvent sur la droite $x+y=k$*, correspondent à une même approximation égale à* k+1

Démonstration.

Elle résulte de ce qui précède.

Remarque.

Cette notion de points représentatifs et de points représentatifs principaux facilite la compréhension de la structure des blocs de la table de Padé et peut donc être utilisée dans des études de ce genre.

Dans le paragraphe suivant, on va étudier les liens que Padé avait fait entre cette théorie de l'approximation par des fractions rationnelles qu'on vient d'exposer et la théorie des fractions continues.

II - LES RELATIONS ENTRE LES FRACTIONS RATIONNELLES APPROCHÉES ET LES FRACTIONS CONTINUES.

II.1 - RELATIONS DE RECURRENCES ENTRE LES NUMERATEURS ET LES DENOMINATEURS DE TROIS FRACTIONS RATIONNELLES APPROCHEES D'UNE MEME FONCTION.

Soient $-\frac{Y_2}{Y_1}$ et $-\frac{Y'_2}{Y'_1}$ deux fractions rationnelles approchées d'un tableau (T) telles que Y_2 est de degré ν_2, Y_1 de degré ν_1, Y'_2 de degré ν'_2 et Y'_1 de degré ν'_1.

Désignons par $\nu_1+\nu_2+\lambda+1$ l'ordre de l'approximation correspondant à la première fraction, $\nu'_1+\nu'_2+\lambda'+1$ celui correspondant à la deuxième.

Proposition.

Supposons que la fraction $-\frac{Y'_2}{Y'_1}$ *soit plus avancée dans* (T) *que* $-\frac{Y_2}{Y_1}$ *alors le degré du polynôme* $Y_1Y'_2 - Y_2Y'_1$ *est au plus égal à* $\max(\nu_1+\nu'_2, \nu'_1+\nu_2)$
Si de plus ces deux fractions sont contigües alors :

$$Y_1Y'_2 - Y_2Y'_1 = h\, x^{\nu_1+\nu_2+\lambda+1}$$

où h *est une constante* $\neq 0$.

Démonstration.

$$S_1(Y_1Y'_2 - Y_2Y'_2) = Y'_2(S_1Y_1 + S_2Y_2) - Y_2(S_1Y'_1 + S_2Y'_2)$$

Or

$$S_1Y_1 + S_2Y_2 = x^{\nu_1+\nu_2+\lambda+1}.S$$

et

$$S_1Y'_1 + S_2Y'_2 = x^{\nu'_1+\nu'_2+\lambda'+1}.S'$$

donc

$$S_1(Y_1Y_2' - Y_2Y_1') = x^{\nu_1+\nu_2+\lambda+1}.S.Y_2' - x^{\nu_1'+\nu_2'+\lambda'+1}.S'.Y_2$$

et puisque $-\frac{Y_2'}{Y_1'}$ est plus avancée que $\frac{Y_2}{Y_1}$ on aura donc :

$$\nu_1'+\nu_2'+\lambda'+1 > \nu_1+\nu_2+\lambda+1,$$

donc :

$$S_1(Y_1Y_2' - Y_2Y_1') = x^{\nu_1+\nu_2+\lambda+1}\,[SY_2' - x^{(\nu_1'+\nu_2'+\lambda'+1)-(\nu_1+\nu_2+\lambda+1)}.S'Y_2]$$

Or S_1, Y_2, Y_2' et S ont chacun un terme constant différent de zéro, donc l'ordre de $Y_1Y_2' - Y_2Y_1'$ est égal à $\nu_1+\nu_2+\lambda+1$.

Il est clair que le degré de $Y_1Y_2' - Y_2Y_1'$ est au plus égal à $\max(\nu_1+\nu_2', \nu_2+\nu_1')$.

Si l'on suppose les deux fractions contigües, alors on aura :

$$\text{soit } \nu_1' = \nu_1+\lambda+1 \quad \text{et} \quad \nu_2' \leq \nu_2+\lambda+1$$

$$\text{soit } \nu_1' \leq \nu_1+\lambda+1 \quad \text{et} \quad \nu_2' = \nu_2+\lambda+1.$$

Dans le premier cas on a :

$$\nu_1+\nu_2' \leq \nu_1+\nu_2+\lambda+1 \quad \text{et} \quad \nu_2+\nu_1' = \nu_1+\nu_2+\lambda+1$$

dans le second :

$$\nu_1+\nu_2' = \nu_1+\nu_2+\lambda+1 \quad \text{et} \quad \nu_2+\nu_1' \leq \nu_1+\nu_2+\lambda+1$$

et on conclut que dans tous les cas :

$$Y_1Y_2' - Y_2Y_1' = h\,x^{\nu_1+\nu_2+\lambda+1} \qquad \text{où } h \in \mathbb{R}^*.$$

Proposition.

Soient $-\frac{Y_2}{Y_1}$, $-\frac{Y'_2}{Y'_1}$ *et* $-\frac{Y''_2}{Y''_1}$ *trois fractions rationnelles approchées du tableau* (T). *Si l'on suppose que chaque fraction est contigüe à la précédente et plus avancée qu'elle, alors les numérateurs et les dénominateurs de ces fractions sont liés par les relations suivantes :*

$$\begin{cases} Y''_1 = \alpha\ Y_1 + a\ Y'_1 \\ Y''_2 = \alpha\ Y_2 + a\ Y'_2 \end{cases}$$

où

$$\alpha = h \quad x^{(\nu'_1+\nu'_2+\lambda'+1)\ -\ (\nu_1+\nu_2+\lambda+1)} \qquad h \in \mathbb{R}^*$$

et où a *est un polynôme à terme constant différent de zéro.*

Démonstration.

Le système

$$\begin{cases} Y''_1 = \alpha\ Y_1 + a\ Y'_1 \\ Y''_2 = \alpha\ Y_2 + a\ Y'_2 \end{cases}$$

nous donne :

$$\alpha = \frac{Y''_1Y'_2 - Y''_2Y'_1}{Y_1Y'_2 - Y_2Y'_1} \quad . \qquad a = \frac{Y_1Y''_2 - Y_2Y''_1}{Y_1Y'_2 - Y_2Y'_1}$$

et en utilisant les résultats de la proposition précédente, on déduit que :

$$\alpha = \frac{h'\ x^{\nu'_1+\nu'_2+\lambda'+1}}{k'\ x^{\nu_1+\nu_2+\lambda+1}} = h\ .\ x^{(\nu'_1+\nu'_2+\lambda'+1)-(\nu_1+\nu_2+\lambda+1)}$$

Le numérateur de a est de degré au plus égal à $\max(\nu_1+\nu_2'', \nu_2+\nu_1'')$ et d'ordre égal à $\nu_1+\nu_2+\lambda+1$, son dénominateur est un monôme de degré $\nu_1+\nu_2+\lambda+1$, donc a est un polynôme dont le terme constant est différent de zéro.

c.q.f.d.

II.2 - LE LIEN AVEC LES FRACTIONS CONTINUES.

Padé avait utilisé deux formes de fractions continues :

(I) $$a_o + \frac{\alpha_1|}{|a_1} + \frac{\alpha_2|}{|a_2} + \frac{\alpha_3|}{|a_3} + \dots$$

(II) $$\frac{\alpha_1|}{|a_1} + \frac{\alpha_2|}{|a_2} + \frac{\alpha_3|}{|a_3} + \dots$$

on verra dans la suite l'origine de cette distinction.

Définition.

Soit (C) une fraction continue de la forme (I) ou (II). (C) est dite fraction continue holoïde si toutes les réduites de (C) sont des fractions rationnelles approchées d'une même fonction et si tous les numérateurs partiels de (C) sont des monômes à coefficient et exposant différent de zéro (c'est à dire de la forme $\alpha_i = h_i\, x^{n_i}$ où $h_i \neq o$ et $n_i \neq o$) et les dénominateurs partiels des polynômes à terme constant différent de zéro, exception faite pour a_o si (C) est de la forme (I) et pour α_1 si (C) est de la forme (II).

Théorème.

Considérons une suite infinie de fractions rationnelles approchées du tableau (T) telle que chaque fraction soit contigüe à la précédente et plus avancée qu'elle et telle que la première fraction de cette suite appartient à un bord du tableau (T), alors ces fractions rationnelles sont les réduites d'une fraction continue holoïde, de la forme (I) si la première fraction de la suite appartient au bord latéral de (T), de la deuxième forme si elle appartient au bord supérieur.

Démonstration.

D'après la proposition précédente, trois fractions consécutives de la suite vérifient les relations :

$$Y_1'' = \alpha Y_1 + a\, Y_1'$$

$$Y_2'' = \alpha Y_2 + a\, Y_2'$$

qui ne sont autres que les relations de récurrences qui lient les réduites d'une fraction continue où les numérateurs partiels sont les quantités α et les dénominateurs partiels les quantités a, et en utilisant les résultats de la proposition précédente et la définition d'une fraction continue holoïde on aura le résultat.

Soit $-\dfrac{Y_2}{Y_1}$ la première fraction de la suite considérée.

*) Si $-\dfrac{Y_2}{Y_1}$ appartient au bord latéral de (T), on aura :

$d^o(Y_2) = 0$ et cette première réduite se réduit à un polynôme, donc le développement en fraction continue holoïde est de la forme (I) :

$$a_o + \frac{\alpha_1|}{|a_1} + \frac{\alpha_2|}{|a_2} + \ldots \qquad \text{avec } -Y_2 = a_o$$

$$-Y_1 = 1.$$

*) Si $-\dfrac{Y_2}{Y_1}$ appartient au bord supérieur du tableau (T), on aura :

$d^o(Y_2) = 0$ et le développement correspondant est de la forme (II) :

$$\frac{\alpha_1|}{|a_1} + \frac{\alpha_2|}{|a_2} + \ldots \qquad \text{avec } -Y_2 = \alpha_1 = \text{constante}$$

$$Y_1 = a_1$$

Ce qui termine la démonstration.

Remarque.

Rien ne prouve que les suites de fractions rationnelles approchées qu'on a considéré soient les seules qui vérifient des relations de récurrence où α est un monôme et a un polynôme dont le terme constant est différent de zéro. Ceci est dû au fait que le polynôme $Y_1Y'_2 - Y_2Y'_1$ peut se réduire à un monôme en dehors du cas où les fractions $-\frac{Y_2}{Y_1}$ et $-\frac{Y'_2}{Y'_1}$ sont contigües et l'une plus avancée que l'autre. Cette réduction du polynôme $Y_1Y'_2 - Y_2Y'_1$ à un monôme peut arriver même dans le cas où toutes les fractions considérées sont normales, c'est le cas pour la table de la fonction exponentielle.
Pour plus de détails sur ce point, voir [15].

II.3 - LES DEGRES DES COEFFICIENTS DES RELATIONS DE RECURRENCES LIANT TROIS REDUITES D'UNE FRACTION CONTINUE HOLOIDE. DISPOSITIONS DANS LE PLAN DES POINTS REPRESENTATIFS AUXQUELLES CORRESPONDENT CES REDUITES.

On suppose dans ce sous paragraphe que le tableau de fractions rationnelles approchées est normal.

Considérons trois fractions rationnelles approchées $-\frac{Y_2}{Y_1}$, $-\frac{Y'_2}{Y'_1}$ et $-\frac{Y''_2}{Y''_1}$ telles que chacune est contigue à la précédente et plus avancée qu'elle. Soient (μ_1, μ_2), (μ'_1, μ'_2) et (μ''_1, μ''_2) les points représentatifs auxquels elles correspondent. Du fait que le tableau est normal, les points représentatifs (μ_1, μ_2), (μ'_1, μ'_2) et (μ''_1, μ''_2) sont principaux et l'ordre de l'approximation en ces points est égal respectivement à $\mu_1+\mu_2+1$, $\mu'_1+\mu'_2+1$ et $\mu''_1+\mu''_2+1$.

Théorème.

Les coefficients α et a des relations :

$$\begin{cases} Y''_1 = \alpha\, Y_1 + a\, Y'_1 \\ Y''_2 = \alpha\, Y_2 = a\, Y'_2 \end{cases}$$

dans le cas où le tableau des fractions rationnelles approchées est normal, sont tels que :

α *est un monôme de degré égal à un ou à deux.*

a *est un binôme du premier degré ou une constante non nulle.*

Démonstration.

Les fractions $-\frac{Y_2}{Y_1}$, $-\frac{Y'_2}{Y'_1}$ et $-\frac{Y''_2}{Y''_1}$ sont telles que chacune est contigüe à la précédente et plus avancée qu'elle, donc (μ'_1, μ'_2) est l'un des couples :

$$(*) \qquad (\mu_1+1,\ \mu_2)\quad ,\quad (\mu_1,\ \mu_2+1)\quad ,\quad (\mu_1+1,\ \mu_2+1)$$

de même (μ''_1, μ''_2) est l'un des couples :

$$(\mu'_1+1,\ \mu'_2)\quad ,\quad (\mu'_1,\ \mu'_2+1)\quad ,\quad (\mu'_1+1,\ \mu'_2+1)$$

Or

$$\alpha = h.x^{(\mu'_1+\mu'_2+1) - (\mu_1+\mu_2+1)}$$

et $(\mu'_1+\mu'_2+1) - (\mu_1+\mu_2+1)$ est égal soit à 1 soit à 2 suivant que (μ'_1, μ'_2) est l'un des deux premiers couples de (*) ou en est le troisième. a est un polynôme de degré égal soit à $\mu''_2-\mu_2-1$ soit à $\mu''_1-\mu_1-1$ suivant que le $\max(\mu_1+\mu''_2,\ \mu''_1+\mu_2)$ est égal à $\mu_1+\mu''_2$ ou à $\mu''_1+\mu_2$.
Or dans tous les cas $\mu''_2-\mu_2-1$ ou $\mu''_1-\mu_1-1$ se réduit à 0 ou à 1, d'où le résultat.

Comme corollaire du théorème précédent, on va préciser les degrés de α et de a qui correspondent à toutes les dispositions possibles des points représentatifs de trois fractions telles que chacune soit contigüe à la précédente et plus avancée qu'elle.

Corollaire.

1er cas :

degré de $\alpha = 1$

degré de $a = 0.$

$$\begin{tikzcd} & (\mu_1+1, \mu_2+1) \\ (\mu_1, \mu_2) \arrow[r] & (\mu_1+1, \mu_2) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (\mu_1, \mu_2+1) \arrow[r] & (\mu_1+1, \mu_2+1) \\ (\mu_1, \mu_2) \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

2e cas :

degré de $\alpha = 2$

degré de $a = 1.$

$$\begin{tikzcd} & (\mu_1+1, \mu_2+2) \\ & (\mu_1+1, \mu_2+1) \arrow[u] \\ (\mu_1, \mu_2) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

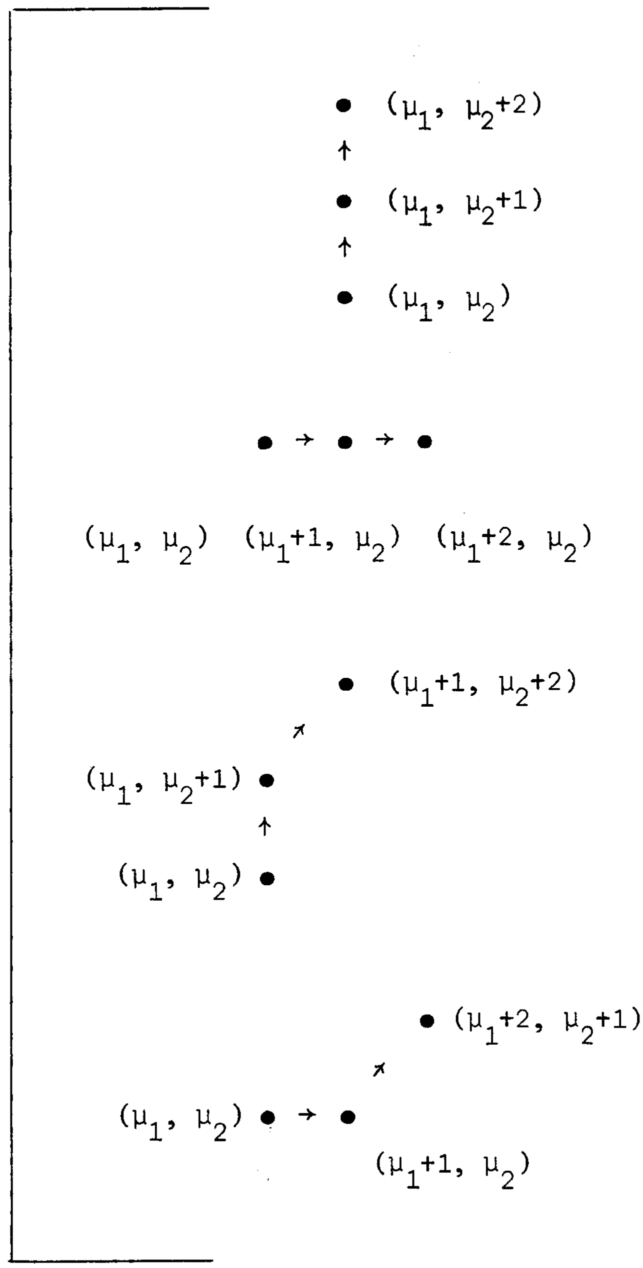
$$\begin{tikzcd} (\mu_1+1, \mu_2+1) \arrow[r] & (\mu_1+2, \mu_2+1) \\ (\mu_1, \mu_2) \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & & (\mu_1+2, \mu_2+2) \\ & (\mu_1+1, \mu_2+1) \arrow[ur] & \\ (\mu_1, \mu_2) \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

3e cas :

degré de $\alpha = 1$

degré de $a = 1$.



Remarque.

Si l'on considère une suite de fractions rationnelles approchées telle que, chacune de ces fractions soit contigüe à la précédente et plus avancée qu'elle, alors, trois points représentatifs successifs occupent toujours dans le plan l'une des dispositions figurées dans les tableaux précédents, et donc, l'une quelconque des fractions de cette suite peut être calculée en fonction des deux précédentes en uitlisant les relations qui lient les nuémrateurs et les dénominateurs de trois fractions consécutives et les résultats du corollaire précédent.

Ceci nous permettra d'obtenir tous les algorithmes possibles pour calculer les approximants de Padé. Ces algorithmes ont été appelé par Padé, les algorithmes généraux.

Parmis ces algorithmes généraux, il existe des algorithmes que Padé avait appelé les algorithmes réguliers, et qui correspondent au calcul d'une suite de fractions rationnelles approchées où tous les coefficients α et a ont toujours le même degré.

Définition.

On appelle fraction continue régulière, une fraction continue holoïde telle que tous ses numérateurs partiels ont le même degré ainsi que tous ses dénominateurs partiels, exception faite pour les deux premiers numérateurs et les deux premiers dénominateurs.

Dans le cas général, il existe trois algorithmes réguliers correspondants à des degrés des coefficients α et a égaux respectivements à 1 pour α et zéro pour a, 1 pour α et pour a, 2 pour α et 1 pour a.

Dans le paragraphe suivant, on va exposer un algorithme pour le calcul des approximants de Padé, cet algorithme est dû a Hermite [9], c'est ce qu'on appelle la méthode des polynômes associés.
On va donner ensuite, quatre algorithmes qui permettent le calcul des approximants de Padé et donnent en même temps les coefficients des numérateurs et des dénominateurs des développements en fractions continues régulières. Le premier utilise un chemin en escalier, le deuxième un chemin suivant une parallèle à la diagonale de la table de Padé, le troisième suivant une ligne horizontale et le dernier suivant une ligne verticale.

III - ALGORITHMES POUR LE CALCUL DES APPROXIMANTS DE PADÉ DANS LE CAS NORMAL ET DES FRACTIONS CONTINUES RÉGULIÈRES.

III.1 - METHODE DES POLYNOMES ASSOCIES.

1 - PRINCIPE DE LA METHODE.

Telle qu'elle a été exposer par Padé dans [18], la méthode des polynômes associés d'Hermite [9], consiste à calculer de proche en proche des couples de polynômes par un algorithme analogue à celui par lequel le numérateur et de dénominateur d'une réduite d'une fraction continue se déduisent des numérateurs et dénominateurs des réduites précédentes.

La méthode consiste à calculer les fractions rationnelles approchées qui sont placées dans des cases, comme il est indiqué dans le schéma suivant et ceci dans le but d'arriver à la fraction rationnelle placée dans la case C.

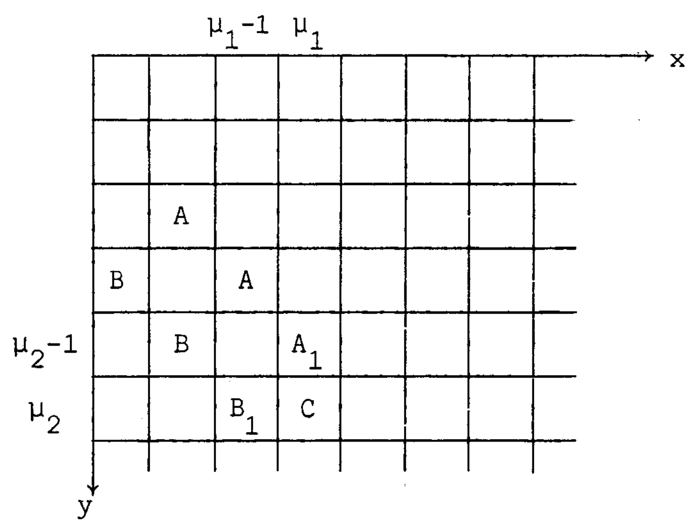


Fig. 1.

Soient $-\frac{X_2}{X_1}$, $-\frac{X'_2}{X'_1}$ et $-\frac{X''_2}{X''_1}$ les fractions rationnelles placées respectivement dans les cases C, A_1 et B_1.

Entre les numérateurs et les dénominateurs de ces fonctions on a les relations suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha\, X'_1 + \beta\, X''_1 = X_1 \\ \alpha\, X'_2 + \beta\, X''_2 = X_2 \end{cases}$$

où α et β désignent deux constantes.

Si les fractions $-\frac{X_2}{X_1}$, $-\frac{X'_2}{X'_1}$ et $-\frac{X''_2}{X''_1}$ sont placées respectivement dans les cases A_1, A, B ou B_1, A, B, des relations de même forme que (1) ont lieu, mais dansle premier cas, α est un binôme du premier degré à terme constant non nul et β une constante, tandis que, dans le second cas, α est une constante et β un binôme du premier degré à terme constant non nul. Ainsi, si on connaît les fractions des cases A_1 et B_1, la détermination des constantes α et β des relations (1), nous donnera celle de la case C. De même, si on connaît les fractions des cases A et B, les relations (1) nous donnent celles des cases A_1 et B_1, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'une des cases sont contigüe au bord du tableau. Le problème de la détermination des deux premières fractions de départ sera réglé après.

2 - INDICATIONS POUR LE CALCUL DES COEFFICIENTS α ET β.

Soit à passer des cases (μ_1, μ_2-1), (μ_1-1, μ_2) à la case (μ_1, μ_2). Les fractions rationnelles qui correspondent à ces cases sont respectivement $-\frac{X'_2}{X'_1}$, $-\frac{X''_2}{X''_1}$ et $-\frac{X_2}{X_1}$. On a donc les relations suivantes :

$$(2) \quad \begin{cases} S_1X'_1 + S_2X'_2 = S'\, x^{\mu_1+\mu_2} \\ S_1X''_1 + S_2X''_2 = S''\, x^{\mu_1+\mu_2} \\ S_1X_1 + S_2X_2 = S\, x^{\mu_1+\mu_2+1} \end{cases}$$

S', S'' et S désignent des séries à termes constants différents de zéro du fait qu'on suppose que toutes les fractions sont normales.

Dans ce cas, α et β sont des constantes. En multipliant la première équation de (1) par S_1, la seconde par S_2 et en ajouttant membre à membre on obtient :

$$\alpha(S_1X_1' + S_2X_2') + \beta(S_1X_1'' + S_2X_2'') = S_1X_1 + S_2X_2$$

et en utilisant (2) on obtient :

$$\alpha\ S' + \beta\ S'' = xS \qquad (3)$$

et le rapport des constantes α et β se trouve déterminé par la condition que le terme en x fasse défaut dans le premier membre.

La même technique est applicable aux autres cas où α est un binôme et β une constante, ou l'inverse.

3 - DETERMINATION DES FRACTIONS INITIALES QUI SERVENT A DEMARRER LA METHODE DES POLYNOMES ASSOCIES.

Dans la figure 1, supposons que $\mu_2 > \mu_1$, la case B est contigüe au côté y du tableau. Posons $\mu_2 - \mu_1 = \nu_1$, en sorte que les fractions à calculer, que nous désignerons par $-\frac{P_1'}{P_1}$ et $-\frac{Q_1'}{Q_1}$, soient telles que $d°(P_1) = 1$, $d°(P_1') = \nu_1$ et $d°(Q_1) = 0$, $d°(Q_1') = \nu_1+1$.

Diminuons ces degrés d'une unité, on obtient les nombres :

$$0,\ \nu_1-1,\ -1 \text{ et } \nu_1.$$

Ceci montre que, si l'on savait déterminer, d'une part, une constante P et un polynôme P' de degré ν_1-1 satisfaisant à la condition :

$$S_1P + S_2P' = S_1'\ x^{\nu_1}.$$

D'autre part, un polynôme Q' de degré ν_1 tel que :

$$S_2 Q' = S_2' x^{\nu_1}$$

Alors, les deux couples de polynômes (P_1, P_1') et (Q_1, Q_1') pourraient se déduire des deux couples (P, P') et (Q, Q') par la méthode des polynômes associés. Or la détermination de P, P' et Q' est immédiate, on aura P et P' en prenant arbitrairement la constante P, puis pour - P' les ν_1 premiers termes du développement en série de $\frac{S_1 P}{S_2}$. Quant à Q', ce sera un monôme quelconque de degré ν_2.

Remarque.

En suivant les indications ci-dessus, je vais expliciter les expressions des coefficients α et β qui figurent dans la méthode des polynômes associés dans les différents cas. Ce travail nous permettra de faire un programme de cette méthode et de la comparer aux autres algorithmes que je vais proposer dans la suite.

4 - CALCUL EXPLICITE DES COEFFICIENTS α ET β.

Remarquons que ce qui nous intéresse est d'arriver au calcul de l'approximant de Padé $-\frac{X_2}{X_1}$ de la série entière $\frac{S_1}{S_2}$, et donc on peut supposer, sans restreindre la généralité que $S_2 = 1$.

a) Cas où α et β sont des constantes.

On a la disposition suivante :

$\mu_2 - 1$			A
μ_2		B	C

Soient $-\frac{X_2}{X_1}$, $-\frac{X'_2}{X'_1}$ et $-\frac{X''_2}{X''_1}$ les fractions placées respectivement dans les cases C, A et B.

La relation (3) nous donne :

$$\alpha S' + \beta S'' = xS$$

Posons $S'(x) = \sum_{i=o}^{\infty} c'_i x^i$ et $S''(x) = \sum_{i=o}^{\infty} c''_i x^i$ pour avoir le rapport de α et β, il faut donc déterminer c'_o et c''_o.
Or on a :

$$S_1X'_1 + S_2X'_2 = x^{\mu_1+\mu_2} S'$$

donc c'_o est le coefficient du terme de degré $\mu_1 + \mu_2$ dans l'expression $S_1X'_1 + S_2X'_2$. Or on a supposé que $S_2 = 1$, de plus X'_2 est de degré $\mu_2 - 1$.
On a donc :

$$c'_o = \sum_{i=o}^{\mu_1} c_{\mu_2+i} \cdot a'_{\mu_1-i}$$

De même, c''_o est le coefficient du terme de degré $\mu_1 + \mu_2$ dans l'expression $S_1X''_1 + S_2X''_2$. On trouve :

$$c''_o = \sum_{i=o}^{\mu_1-1} c_{\mu_2+i+1} \cdot a''_{\mu_1-i-1}$$

où on a posé :

$$X'_1 = a'_o + a'_1x + \dots + a'_{\mu_1} x^{\mu_1}$$

$$X''_1 = a''_o + a''_1x + \dots + a''_{\mu_1-1} x^{\mu_1-1}$$

$$S_1(x) = \sum_{i=o}^{\infty} c_i x^i$$

et on aura donc en utilisant (3) :

$$c'_o\alpha + c''_o\beta = 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{c''_o}{c'_o}$$

Pour déterminer α et β, on ajoute la condition de normalisation qui s'exprime par :

$$X'_1(o) = 1$$

$$X''_1(o) = 1$$

$$X_1(o) = 1.$$

La première relation de (1) qui est :

$$\alpha\, X'_1 + \beta\, X''_1 = X_1$$

nous donne :

$$\alpha + \beta = 1$$

d'où le système

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \dfrac{\alpha}{\beta} = -\dfrac{c''_o}{c'_o} \end{cases}$$

on aura finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha &= -\frac{c''_o}{c'_o - c''_o} \\ \beta &= \frac{c'_o}{c'_o - c''_o} \end{aligned}}$$

Remarquons que $c'_o - c''_o \neq 0$, en effet ; on a :

$$\begin{cases} S_1X'_1 + S_2X'_2 = S'x^{\mu_1+\mu_2} \\ S_1X''_1 + S_2X''_2 = S''x^{\mu_1+\mu_2} \end{cases}$$

Si on suppose que $c'_o = c''_o$ alors on aura :

$$S_1(X'_1-X''_1) + S_2(X'_2 - X''_2) = O(x^{\mu_1+\mu_2+1})$$

Or $d^o(X'_1 - X''_1) = \mu_1$ et $d^o(X'_2 - X''_2) = \mu_2$.

De plus dans les polynômes $X'_1 - X''_1$ et $X'_2 - X''_2$ les termes constants sont nuls, donc en les divisants par x la relation ci-dessus prend la forme :

$$S_1Y_1 + S_2Y_2 = O(x^{\mu_1+\mu_2})$$

avec $d^o(Y_1) = \mu_1-1$ et $d^oY_2 = \mu_2-1$.

Il y a donc surapproximation ce qui contredit l'hypothèse que la table de Padé est normale.

b) Cas où α est un binôme et β une constante.

Dans ce cas on a la disposition suivante :

		μ_1-1	μ_1
μ_2-1		A	
μ_2	B		C

Désignons par $-\frac{X_2}{X_1}$, $-\frac{X'_2}{X'_1}$ et $-\frac{X''_2}{X''_1}$ les fractions rationnelles placées respectivement dans les cases C, A et B.

Posons $\alpha = \alpha_1 x + \alpha_2$ où α_1 et α_2 sont des constantes.
On a les relations suivantes :

$$S_1X_1 + S_2X_2 = x^{\mu_1+\mu_2+1}.S$$

$$S_1X'_1 + S_2X'_2 = x^{\mu_1+\mu_2-1}.S'$$

$$S_1X''_1 + S_2X''_2 = x^{\mu_1+\mu_2-1}.S''$$

et

$$\begin{cases} X_1 = \alpha X'_1 + \beta X''_1 \\ X_2 = \alpha X'_2 + \beta X''_2 \end{cases}$$

Multiplions la première équation par S_1, la seconde par S_2 et ajoutons membre à membre, on obtient :

$$S_1X_1 + S_2X_2 = \alpha x^{\mu_1+\mu_2-1}.S' + \beta x^{\mu_1+\mu_2-1}.S''$$

Or

$$S_1X_1 + S_2X_2 = x^{\mu_1+\mu_2+1}.S$$

donc :

$$\alpha S' + \beta S'' = x^2 S$$

α et β se déterminent par le fait que le coefficient de x et le terme constant dans le premier membre sont nuls.

Si on pose comme précédemment

$$S'(x) = \sum_{i=o}^{\infty} c_i' \, x^i$$

$$S''(x) = \sum_{i=o}^{\infty} c_i'' \, x^i$$

alors on aura les deux équations :

$$\begin{cases} c_o'\alpha_2 + \beta c_o'' = 0 \\ c_o'\alpha_1 + c_1'\alpha_2 + \beta c_1'' = 0 \end{cases}$$

Il faut donc déterminer c_o', c_1', c_o'' et c_1''.

Si on revient à l'expression : $S_1X_1' + S_2X_2' = x^{\mu_1+\mu_2-1}.S'$, alors :

c_o' est le coefficient de $x^{\mu_1+\mu_2-1}$ dans le premier membre

c_1' est le coefficient de $x^{\mu_1+\mu_2}$ dans le premier membre.

Si on pose :

$$X_1' = \sum_{i=o}^{\mu_1-1} a_i' \, x^i, \quad X_1'' = \sum_{i=o}^{\mu_1-2} a_i'' \, x^i$$

on aura :

$$c_o' = \sum_{i=o}^{\mu_1-1} c_{\mu_2+i} \, a'_{\mu_1-i-1}$$

$$c_1' = \sum_{i=o}^{\mu_1-1} c_{\mu_2+i+1} \, a'_{\mu_1-i-1}.$$

De même, de la relation $S_1X''_1 + S_2X''_2 = x^{\mu_1+\mu_2-1}.S''$, on déduit que :

c''_o est le coefficient du terme de degré $\mu_1+\mu_2-1$ dans le premier membre

c''_1 est le coefficient du terme de degré $\mu_1+\mu_2$ dans le premier membre.

Et on aura :

$$c''_o = \sum_{i=o}^{\mu_1-2} c_{\mu_2+i+1}\, a''_{\mu_1-i-2}$$

$$c''_1 = \sum_{i=o}^{\mu_1-2} c_{\mu_2+i+2}\, a''_{\mu_1-i-2}$$

La détermination des coefficients α et β se fait par le système :

$$\begin{cases} c'_o\,\alpha_2 + \beta c''_o = o \\ c'_o\,\alpha_1 + c'_1\,\alpha_2 + \beta c''_1 = o \\ \alpha_2 + \beta = 1 \end{cases}$$

et on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} \beta &= \frac{c'_o}{c'_o - c''_o} \\ \alpha_2 &= -\frac{c''_o}{c'_o - c''_o} \\ \alpha_1 &= \frac{1}{c'_o} \cdot \frac{c'_1c''_o - c'_oc''_1}{c'_o - c''_o} \end{aligned}}$$

c) <u>Cas où α est une constante et β un binôme du premier degré.</u>

Dans ce cas on a la disposition suivante :

		μ_2-1	μ_1
			A
μ_2-1		B	
μ_2			C

Si on désigne par $-\frac{X_2}{X_1}$, $-\frac{X'_2}{X'_1}$ et $-\frac{X''_2}{X''_1}$ les fractions placées respectivement dans les cases C, A et B, on aura les relations :

$$\begin{cases} S_1X_1 + S_2X_2 = x^{\mu_1+\mu_2+1}.S \\ S_1X'_1 + S_2X'_2 = x^{\mu_1+\mu_2-1}.S' \\ S_1X''_1 + S_2X''_2 = x^{\mu_1+\mu_2-1}.S'' \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} X_1 = \alpha X'_1 + \beta X''_1 \\ X_2 = \alpha X'_2 + \beta X''_2 \end{cases}$$

où $\beta = \beta_1 x + \beta_2$
α une constante

On obtient comme précédemment :

$$\alpha S' + \beta S'' = x^2 S.$$

α et β se déterminent par le système :

$$\begin{cases} c'_o\alpha + \beta_2 c''_o = o \\ c'_1\alpha + \beta_1 c''_o + \beta_2 c''_1 = o \\ \alpha + \beta_2 = 1 \end{cases}$$

Dans ce cas on a :

$$X_1' = \sum_{i=o}^{\mu_1} a_i' \, x^i$$

$$X_1'' = \sum_{i=o}^{\mu_1-1} a_i'' x^i$$

et la détermination de c_o', c_o'', c_1' et c_1'' se fait comme précédemment, on trouve :

$$c_o' = \sum_{i=o}^{\mu_1} c_{\mu_2+i-1} \, a'_{\mu_1-i}$$

$$c_1' = \sum_{i=o}^{\mu_1} c_{\mu_2+i} \, a'_{\mu_1-i}$$

$$c_o'' = \sum_{i=o}^{\mu_1-1} c_{\mu_2+i} \, a''_{\mu_1-i-1}$$

$$c_1'' = \sum_{i=o}^{\mu_1-1} c_{\mu_2+i-1} \, a''_{\mu_1-i-1}.$$

Pour α, β_1 et β_2 on trouve :

$$\boxed{\begin{gathered} \alpha = - \frac{c_o''}{c_o' - c_o''} \\[2ex] \beta_2 = \frac{c_o'}{c_o'' - c_o''} \\[2ex] \beta_1 = \frac{1}{c_o''} \left(\frac{c_1' c_o'' - c_1'' c_o'}{c_o' - c_o''} \right) \end{gathered}}$$

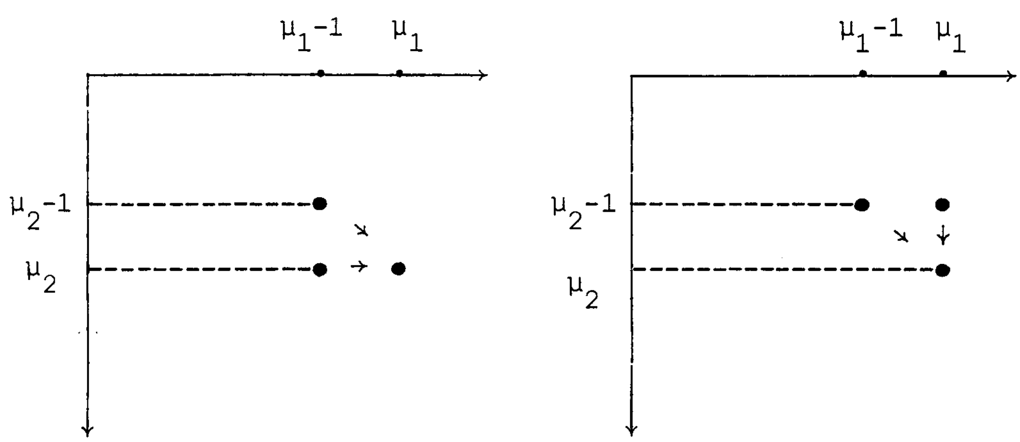
ce qui termine le calcul des coefficients.

Dans les sous-paragraphes suivants, je propose quatre algorithmes pour le calcul des approximants de Padé dans le cas normal.

Le premier algorithme sert à calculer ces approximants suivant un chemin en escalier de direction descendante, le deuxième suivant une parallèle à la diagonale de la table de Padé, le troisième suivant une ligne et le quatrième suivant une colonne.

III.2 - ALGORITHME POUR LE CALCUL DES APPROXIMANTS DE PADE SUIVANT UN CHEMIN EN ESCALIER DE DIRECTION DESCENDANTE.

Entre trois approximants successifs, on a deux dispositions possibles :



Forme 1. Forme 2.

a) <u>Cas de la forme 1</u>.

Désignons par $-\frac{X_2}{X_1}$ la fraction qui correspond à la case (μ_1, μ_2), $-\frac{X'_2}{X'_1}$ celle qui correspond à la case (μ_1-1, μ_2) et $-\frac{X''_2}{X''_1}$ celle qui correspond à la case (μ_1-1, μ_2-1).

Or, les numérateurs et les dénominateurs de ces fractions, sont liés par les relations suivantes :

$$\begin{cases} X_1 = \alpha X_1' + \beta' X_1'' \\ X_2 = \alpha X_2' + \beta' X_2''. \end{cases}$$

où α est une constante et β' un binôme du premier degré.

On se propose de calculer les coefficients α et β', la méthode utilisée est semblable à celle qu'on a utilisé pour calculer les coefficients de la méthode des polynômes associés.

Posons $\beta' = \beta x$ dans le système précédent, on obtient :

$$(1) \quad \begin{cases} X_1 = \alpha X_1' + \beta x \; X_1'' \\ X_2 = \alpha X_2' + \beta x \; X_2'' \end{cases}$$

De plus, on a les relations suivantes :

$$(2) \quad \begin{cases} S_1 X_1 + S_2 X_2 = x^{\mu_1+\mu_2+1} . S \\ S_1 X_1' + S_2 X_2' = x^{\mu_1+\mu_2} . S \\ S_1 X_1'' + S_2 X_2'' = x^{\mu_1+\mu_2-1} . S \end{cases}$$

Multiplions la première équation de (1) par S_1, la deuxième par S_2 et ajoutons membre à membre, on obtient en utilisant (2) :

$$x^{\mu_1+\mu_2+1} . S = \alpha x^{\mu_1+\mu_2} . S' + \beta x^{\mu_1+\mu_2} . S''$$

d'où

$$\alpha S' + \beta S'' = xS.$$

si on pose :

$$S'(x) = \sum_{i=o}^{\infty} c'_i x^i \qquad S''(x) = \sum_{i=o}^{\infty} c''_i x^i$$

on obtient la relation qui détermine le rapport de α et β :

$$\alpha c'_o + \beta c''_o = o.$$

Il nous faut donc déterminer c'_o et c''_o.

Or

$$S_1 X'_1 + S_2 X'_2 = x^{\mu_1+\mu_2} . S'$$

donc c'_o est le coefficient du terme de degré $\mu_1+\mu_2$ dans le premier membre de cette relation.

Si on pose :

$$X'_1 = \sum_{i=o}^{\mu_1-1} a'_i x^i \qquad S_1(x) = \sum_{i=o}^{\infty} c_i x^i$$

on aura :

$$c'_o = \sum_{i=o}^{\mu_1-1} c_{\mu_2+i+1}\, a'_{\mu_1-i-1}$$

De même, de la relation :

$$S_1 X''_1 + S_2 X''_2 = x^{\mu_1+\mu_2-1} S''$$

on déduit, en posant :

$$X''_1 = \sum_{i=o}^{\mu_1-1} a''_i x^i$$

que

$$c''_o = \sum_{i=o}^{\mu_1-1} c_{\mu_2+i}\, a''_{\mu_1-i-1}$$

calcul de α et β :

la condition de normalisation nous nous donne :

$$\boxed{\alpha = 1}$$

Or $\alpha c'_o + \beta c''_o = o$

donc :

$$\boxed{\beta = -\frac{c'_o}{c''_o}}$$

b) Cas de la forme 2.

On a les mêmes relations que dans le cas précédent, ce qui change c'est le calcul du coefficient c'_o.

Si on pose :

$$X'_1 = \sum_{i=o}^{\mu_1} a'_i x^i \qquad X''_1 = \sum_{i=o}^{\mu_1-1} a''_i x^i$$

on obtient :

$$c'_o = \sum_{i=o}^{\mu_1} c_{\mu_2+i}\, a''_{\mu_1-i}$$

$$c''_o = \sum_{i=o}^{\mu_1-1} c_{\mu_2+i}\, a''_{\mu_1-i-1}.$$

et comme précédemment :

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha = 1 \\[2ex] \beta = -\dfrac{c'_o}{c''_o} \end{array}}$$

Remarque 1.

L'algorithme précédent présente l'avantage de donner, en plus des approximants de Padé, le développement en fraction continue de la forme C, c'est à dire la forme où tous les numérateurs partiels sont des monômes du premier degré et les dénominateurs partiels des constantes. Or il existe une infinité de développement en fractions continues de la forme C d'une série entière donnée, et suivant le choix des deux permiers approximants, on peut trouver par l'algorithme précédent tous ces développements.

Le travail qu'on vient de faire est schématisé par la figure suivante :

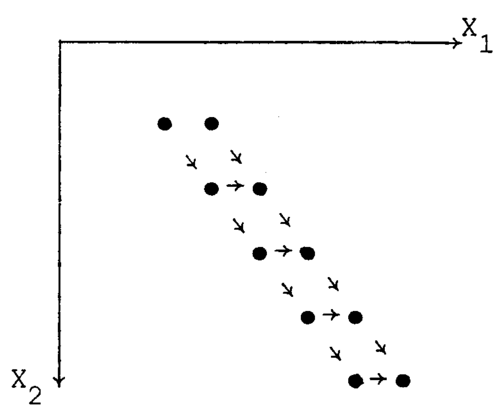


Fig. 2.

Remarque 2.

Dans l'algorithme précédent, il y avait deux "types" de calcul, suivant que c'est la première disposition qui se présente, ou la deuxième. Si on ne veut utiliser qu'un seul type de calcul, on est obligé de calculer des approximants autres que ceux qui figurent sur deux droites parallèles à la diagonale

principale.
Dans le cas de la forme 1, les approximants qui doivent être calculés sont indiqués sur la figure 3 :

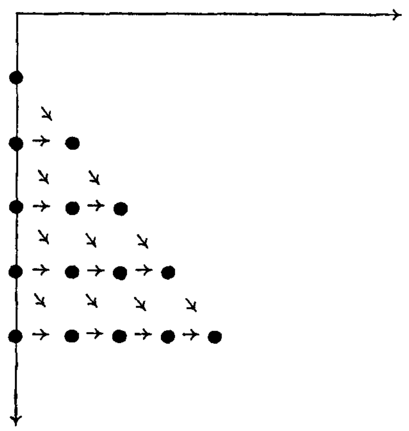


Fig. 3.

On obtient ainsi, un algorithme qui n'utilise que les calculs du cas de la forme 1.
Dans le cas de la forme 2, les approximants qui doivent être calculés sont indiqués sur la figure 4 :

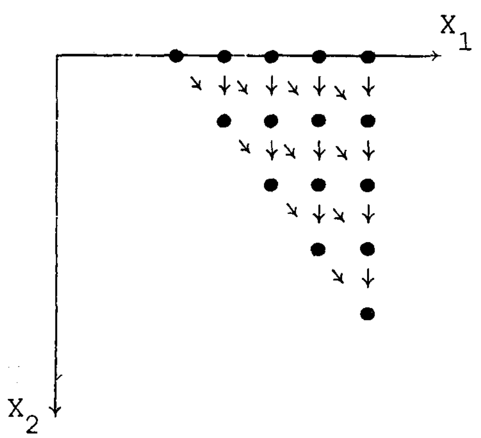
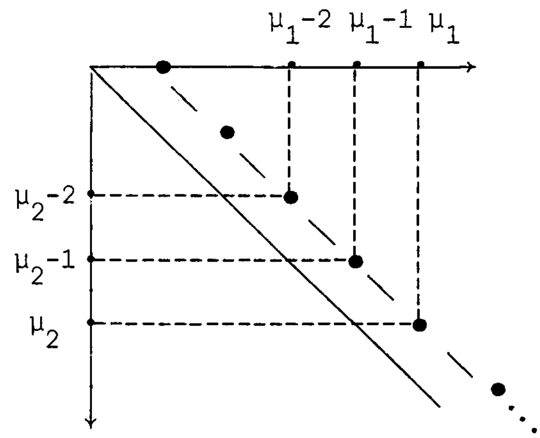


Fig. 4.

et on obtient un autre algorithme n'utilisant que les calculs de la forme 2.

III.3 - ALGORITHME POUR LE CALCUL DES FRACTIONS QUI SE TROUVENT SUR UNE PARALLELE A LA DIAGONALE DE LA TABLE DE PADÉ.



Comme précédemment, on cherche à avoir la fraction $-\dfrac{X_2}{X_1}$ de la case (μ_1, μ_2) en fonctions des fractions $-\dfrac{X'_2}{X'_1}$ et $\dfrac{X''_2}{X''_1}$ des cases (μ_1-1, μ_2-1) et (μ_1-2, μ_2-2).

Entre les numérateurs et les dénominateurs de ces fractions on a :

$$\begin{cases} X_1 = \alpha X'_1 + \beta' X''_1 \\ X_2 = \alpha X'_2 + \beta' X''_2 \end{cases} \qquad \text{où } \beta' = \beta x^2 \text{ et } \alpha = \alpha_1 x + \alpha_2.$$

En utilisant les relations :

$$S_1X_1 + S_2X_2 = x^{\mu_1+\mu_2+1}.S$$

$$S_1X'_1 + S_2X'_2 = x^{\mu_1+\mu_2-1}.S'$$

$$S_1X''_1 + S_2X''_2 = x^{\mu_1+\mu_2-3}.S''$$

on obtient :

$$\begin{aligned} S_1X_1 + S_2X_2 &= \alpha(S_1X'_1 + S_2X'_2) + \beta'(S_1X''_1 + S_2X''_2) \\ &= \alpha\, x^{\mu_1+\mu_2-1}.S' + \beta'\, x^{\mu_1+\mu_2-3}.S' \\ &= x^{\mu_1+\mu_2+1}.S \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\alpha S' + \beta S'' = x^2 S.$$

Cette relation ajoutée à la condition de normalisation nous donne le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha_2 c'_o + \beta c''_o = o \\ \alpha_1 c'_1 + \beta_2 c'_1 + \beta c''_1 = 0 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

avec $S'(x) = \sum_{i=o}^{\infty} c'_i x^i$ et $S''(x) = \sum_{i=o}^{\infty} c''_i x^i$.

Et on obtient :

$$\boxed{\begin{array}{c} \beta = - \dfrac{c'_o}{c''_o} \\[2ex] \alpha_1 = \dfrac{1}{c'_o} \left(c'_1 + \dfrac{c'_o c''_1}{c''_o}\right) \\[2ex] \alpha_2 = 1 \end{array}}$$

Si on pose

$$X_1 = \sum_{i=o}^{\mu_1 - 1} a'_i x^i \qquad X''_1 = \sum_{i=o}^{\mu_1 - 2} a''_i x^i$$

alors, en considérant la relation :

$$S_1X_1' + S_2X_2' = x^{\mu_1+\mu_2-1}.S'$$

c_o' est le coefficient du terme de degré $\mu_1+\mu_2-1$ dans le premier membre de cette relation, donc :

$$c_o' = \sum_{i=o}^{\mu_1-1} c_{\mu_2+i}\ a'_{\mu_1-i-1}$$

de même si on considère la relation :

$$S_1X_1'' + S_2X_2'' = x^{\mu_1+\mu_2-3}.S''$$

on obtient :

$$c_o'' = \sum_{i=o}^{\mu_1-2} c_{\mu_2+i-1}\ a''_{\mu_1-i-2}$$

en utilisant la même technique, on obtient :

$$c_1' = \sum_{i+o}^{\mu_1-1} c_{\mu_2+i+1} a'_{\mu_1-i-1}$$

$$c_1'' = \sum_{i=o}^{\mu_1-2} c_{\mu_2+i}\ a''_{\mu_1-i-2}.$$

III.4 - ALGORITHME POUR LE CALCUL DES FRACTIONS QUI SE TROUVENT SUR UNE PARALLELE A L'UN DES AXES DE LA TABLE DE PADÉ.

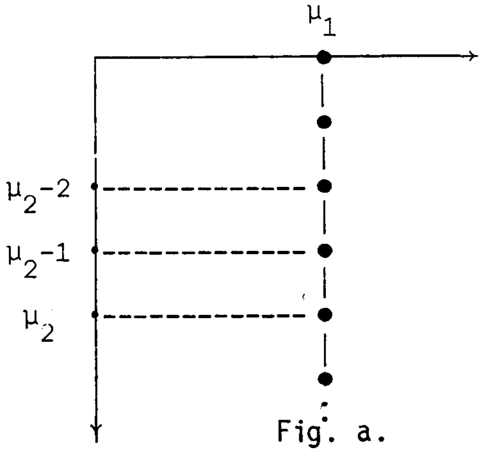


Fig. a.

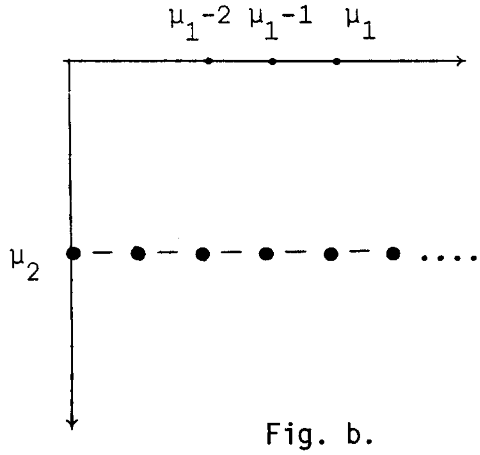


Fig. b.

Les fractions $-\frac{X_2}{X_1}$, $-\frac{X'_2}{X'_1}$ et $-\frac{X''_2}{X''_1}$ correspondent respectivement aux cases : (μ_1, μ_2), (μ_1, μ_2-1), (μ_1, μ_2-2) ou (μ_1, μ_2), (μ_1-1, μ_2), (μ_1-2, μ_2). Entre les dénominateurs et les numérateurs de ces fractions on a :

$$\begin{cases} X_1 = \alpha X'_1 + \beta' X''_1 \\ X_2 = \alpha X'_2 + \beta' X''_2 \end{cases} \qquad \text{où } \alpha = \alpha_1 x + \alpha_2 \text{ et } \beta' = \beta x.$$

et

$$\begin{cases} S_1 X_1 + S_2 X_2 = x^{\mu_1+\mu_2+1} . S \\ S_1 X'_1 + S_2 X'_2 = x^{\mu_1+\mu_2} . S' \\ S_1 X''_1 + S_2 X''_2 = x^{\mu_1+\mu_2-1} . S'' \end{cases}$$

On aura donc :

$$S_1X_1 + S_2X_2 = \alpha(S_1X'_1 + S_2X'_2) + \beta'(S_1X''_1 + S_2X''_2)$$

$$= \alpha x^{\mu_1+\mu_2} . S' + \beta x^{\mu_1+\mu_2} . S'' = x^{\mu_1+\mu_2+1} . S$$

ce qui donne :

$$S' + S'' = xS.$$

Posons :

$$\alpha_2 S' = \sum_{i=o}^{\infty} c'_i x^i \qquad \beta S'' = \sum_{i=o}^{\infty} c''_i x^i$$

on obtient ainsi la relation :

$$\alpha_2 c'_o + \beta c''_o = o.$$

La condition de normalisation nous donne :

$$\alpha_2 = 1.$$

D'où :

$$\boxed{\begin{array}{c}\alpha_2 = 1 \\ \\ \beta = -\dfrac{c'_o}{c''_o}\end{array}}$$

Ce calcul est valable pour les deux figures précédentes.

Remarquons que les équations précédentes ne nous ont pas permis d'avoir le coefficient α_1, pour cela on va procéder comme il suit pour la détermination de ce coefficient.

a) Cas de la figure a).

Dans ce cas on a :

$$d^o(X_1) = d^o(X'_1) = d^o(X''_1) = \mu_1$$

Si on pose $X'_1 = \sum_{i=o}^{\mu_1} a'_i x^i$ $\quad X''_1 = \sum_{i=o}^{\mu_1} a''_i x^i$ alors en exprimant que le coefficient de x^{μ_1+1} est nul dans la relation :

$$X_1 = \alpha X'_1 + \beta X''_1$$

on obtient l'égalité :

$$\alpha_1\, a'_{\mu_1} + \beta\, a''_{\mu_1} = o \Longrightarrow \boxed{\alpha_1 = - \quad . \frac{a''_{\mu_1}}{a'_{\mu_1}}}$$

b) Cas de la forme b).

Dans ce cas on a :

$$d^o(X_2) = d^o(X_2') = d^o(X_2'') = \mu_2$$

Si on pose $X_2' = \sum_{i=o}^{\mu_2} b_i' x^i$ $\quad X_2'' = \sum_{i=o}^{\mu_2} b_i'' x^i$ en exprimant que le coefficient de x^{μ_2+1} est nul dans la relation suivante :

$$X_2 = \alpha X_2' + \beta' X_2''$$

on obtient :

$$\alpha_1 \, b'_{\mu_2} + \beta \, b''_{\mu_2} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = - \beta \cdot \frac{b''_{\mu_2}}{b'_{\mu_2}}}$$

La détermination des coefficients c_o' et c_o'' se fait comme précédemment, on obtient dans le cas de la figure a) :

$$c_o' = \sum_{i=o}^{\mu_1} c_{\mu_2+i} \, a'_{\mu_1-i}$$

$$c_o'' = \sum_{i=o}^{\mu_1} c_{\mu_2+i-1} \, a''_{\mu_1-i}$$

et dans le cas de la figure b) :

$$c_o' = \sum_{i=o}^{\mu_1-1} c_{\mu_2+i+1} \, a'_{\mu_1-i-1}$$

$$c_o'' = \sum_{i=o}^{\mu_1-2} c_{\mu_2+i+1} \, a'_{\mu_1-i-2}$$

IV - ESSAIS NUMÉRIQUES.

1°) - NOMBRE D'OPERATIONS DANS LES ALGORITHMES PRECEDENTS.

a) Cas de l'algorithme utilisant un chemin en escalier.

Pour avoir le dénominateur de l'approximant [n/m] et les coefficients du développement en fraction continue, il faut :

multiplication : $2m^2 + m + 1$

addition : $2m^2$

division : $2m$.

Pour avoir le numérateur en posant $n = m+\ell$, il faut :

multiplication : $m^2 + 2m\ell - 2m$

addition : $m^2 + 2m\ell - m$

b) Cas de la méthode des polynômes associés.

Pour avoir le dénominateur de l'approximant [n/m] il faut :

multiplication : $4m^2 + 3m - 3$

addition : $3m^2 + m - 1$

division : $3m$

2°) EXEMPLES NUMERIQUES.

Premier exemple.

$$f(x) = e^x.$$

Le développement en fraction continue régulière de e^x, dont les numérateurs partiels sont des monômes du premier degré et les dénominateurs partiels des constantes, est de la forme :

$$R(x) + \frac{x^{n+1}/(n+1)!\,|}{|\,1} - \frac{\frac{n+1}{(n+1)(n+2)}\,x\,|}{|\,1} + \frac{\frac{1}{(n+2)(n+3)}\,x\,|}{|\,1} - \frac{\frac{(n+2)}{(n+3)(n+4)}\,x\,|}{|\,1}$$

$$+ \frac{\frac{2x}{(n+4)(n+5)}\,|}{|\,1} - \frac{\frac{(n+3)\,x}{(n+5)(n+6)}\,|}{|\,1} + \dots$$

où

$$R(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Dans le tableau suivant, les chiffres de la première colonne sont les coefficients de ce développement donnés par l'algorithme en escalier ; les chiffres de la deuxième colonne sont les coefficients obtenus en se servant de l'expression précédente :

-.250000000000000D+00	
.500000000000000D-01	
-.133333333333333D+00	- 0.25
.476190476190475D-01	0.05
-.892857142857151D-01	- 0.1333333
.416666666666686D-01	0.047619
-.666666666666628D-01	- 0.0892857
.363636363636315D-01	0.0416667
-.530303030303338D-01	- 0.0666667
.320512820513891D-01	0.0363636
-.439560439556433D-01	- 0.0530303
.285714285707699D-01	0.0320513
-.374999999982157D-01	- 0.043956
.257352940960558D-01	0.0285714
-.326797386749159D-01	- 0.0375
.233918132083630D-01	0.0257353
-.289473674044911D-01	- 0.0326797
.214285697631876D-01	0.0233918
-.259740265201597D-01	- 0.0289474
.197628331701742D-01	0.0214286
	- 0.025974
	0.0197628

Les résultats du calcul de l'approximant de Padé [13 | 10] sont les suivants :

1°) PAR L'ALGORITHME EN ESCALIER.

Numérateur	Dénominateur
-.100000000000000D+01Y** 1	
-.565217377641857D+00Y** 2	
-.154150189777854D+00Y** 3	
-.269151116997239D-01Y** 4	.100000000000000D+01X** 1
-.336438885043890D-02Y** 5	-.434782622358143D+00X** 2
-.318731563362239D-03Y** 6	.889328121359972D-01X** 3
-.236097444324876D-04Y** 7	-.112930559236684D-01X** 4
-.138880642885906D-05Y** 8	.988142432665882D-03X** 5
-.651003914902602D-07Y** 9	-.624089984463564D-04X** 6
-.241112545637233D-08Y**10	.288930561971932D-05X** 7
-.686892936509294D-10Y**11	-.971195216231334D-07X** 8
-.144522981365795D-11Y**12	.227623891612682D-08X** 9
-.200726344031831D-13Y**13	-.337220600983839D-10X**10
-.140368060132070D-15Y**14	.240871874199484D-12X**11

2°) PAR LA METHODE DES POLYNOMES ASSOCIES.

Numérateur	Dénominateur
-.100000000000000D+01X** 1	
-.565217386427793D+00X** 2	
-.154150194844535D+00X** 3	
-.269151131071407D-01X** 4	.100000000000000D+01X** 1
-.336438910010643D-02X** 5	-.434782013572200D+00Y** 2
-.318731594955630D-03X** 6	.889328084107431D-01X** 3
-.236097474460733D-04X** 7	-.112930551901051D-01Y** 4
-.138880865198398D-05X** 8	.988142343934037D-03Y** 5
-.651004044551039D-07X** 9	-.624089911783054D-04Y** 6
-.241112604588597D-08X**10	.280930520039310D-05Y** 7
-.668693142060764D-10X**11	-.971195045297007D-07Y** 8
-.144523033783911D-11X**12	.227623843972969D-08Y** 9
-.200726432065850D-13X**13	-.337720518268083D-10Y**10
-.140368133430316D-15X**14	.240871805773765D-12Y**11

Remarque.

Ces résultats donnent les coefficients de - [13/10].

3°) En utilisant les relations qui donnent les numérateurs et les dénominateurs des approximants de Padé de e^x et qui sont :

$$U_\mu(x) = 1 + \frac{\nu}{\mu+\nu}\,\frac{x}{1} + \frac{\nu(\nu-1)}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)}\,\frac{x^2}{1.2} + \dots + \frac{\nu(\nu-1)\dots 2.1}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)\ \dots\ (\mu+1)}\,\frac{x^\nu}{\nu!}$$

$$V_\nu(x) = 1 - \frac{\mu}{\mu+\nu}\,\frac{x}{1} + \frac{\mu(\mu-1)}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)}\,\frac{x^2}{1.2} - \dots + (-1)\ \frac{\mu(\mu-1)\ \dots\ 2.1}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)\dots(\nu+1)}\,\frac{x^\mu}{\mu!}$$

On obtient :

Numérateur	Dénominateur
1	1
0.5652174	- 0.4347826
0.1541502	0.0889328
0.0269151	- 0.0112931
0.0033644	0.988142 10^{-3}
0.318731 10^{-3}	- 0.62409 10^{-4}
0.236097 10^{-4}	0.288931 10^{-5}
0.138881 10^{-5}	- 0.971195 10^{-7}
0.651004 10^{-7}	0.227624 10^{-8}
0.241112 10^{-8}	- 0.33722 10^{-10}
0.68889 10^{-10}	0.24087 10^{-12}
0.14452 10^{-11}	
0.20073 10^{-13}	
0.14037 10^{-15}	

Deuxième exemple.

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ Log } \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$$

1°) L'ALGORITHME EN ESCALIER

Numérateur

```
-.100000000000000D+01X**  1
 .540883794549526D+01X**  2
-.126344193878899D+02X**  3
 .166777464391024D+02X**  4
-.130657184953932D+02X**  5
 .718537349027222D+01X**  6
-.241897707561629D+01X**  7
 .503648931203256D+00X**  8
-.598326944807610D-01X**  9
 .338977947108353D-02X** 10
-.509470850170167D-04X** 11
-.510151676510622D-06X** 12
-.101770942361574D-07X** 13
-.170756210266145D-09X** 14
```

Dénominateur

```
 .100000000000000D+01X**  1
-.574217127892861D+01X**  2
 .143484764608327D+02X**  3
-.204549949198048D+02X**  4
 .183235538674069D+02X**  5
-.107048982297797D+02X**  6
 .409552515651900D+01X**  7
-.100208562485598D+01X**  8
 .147880930091441D+00X**  9
-.116465247538062D-01X** 10
 .360911979572250D-03X** 11
```

2°) METHODE DES POLYNOMES ASSOCIES.

Numérateur

```
-.100000000000000D+01X** 1
 .542596126044039D+01X** 2
-.127188119650882D+02X** 3
 .167243279000548D+02X** 4
-.132309516340825D+02X** 5
 .598777360069728D+01X** 6
-.915953088055310D+00X** 7
-.592534955570871D+00X** 8
 .432666885127928D+00X** 9
-.132654394830776D+00X**10
 .219715648679595D-01X**11
-.185991959719305D-02X**12
 .605759392500466D-04X**13
-.169516300528715D-09X**14
```

Dénominateur

```
 .100000000000000D+01Y** 1
-.575929459377372D+01Y** 2
 .144385768296794D+02Y** 3
-.206584262547677D+02Y** 4
 .185809163972521D+02Y** 5
-.109046784406406D+02Y** 6
 .419341467514168D+01Y** 7
-.103204703078210D+01Y** 8
 .153327964546658D+00Y** 9
-.121700266063753D-01X**10
 .380610785027534D-03Y**11
```

3°) Si on clacul les coefficients du dénominateur de l'approximant [13/10] de f en utilisant l'expression :

$$V(x) = 1 - \frac{q}{1}\,\frac{2p+1}{2p+2q+1}\,x + \frac{q(q-2)}{1.2}\,\frac{(2p+1)(2p+1)}{(2p+2q+1)(2p+2q-1)}\,x^2 +$$

$$\ldots + (-1)^q\,\frac{q(q-1)\ldots 2\;1}{1.2.3\ldots q}\,\frac{(2p+1)(2p-1)\ldots(2p+3-2q)}{(2p+2q+1)(2p+2q-1)\ldots(2p+3)}\,x^q.$$

On obtient :

```
   1
-  5.7446809
  14.361702
- 20.484908
  18.361473
- 10.734399
   4.1100178
-  1.006535
   0.1486927
-  0.0003639
```

Coefficients du développement en fraction continue de f.

-.777777777777778D+00

-.404040404040405D-01

-.566433566433566D+00

-.820512820512860D-01

-.474509803921435D+00

-.111455108359510D+00

-.423558897239250D+00

-.132505175997104D+00

-.391304347664844D+00

-.146148198715771D+00

-.369093226667739D+00

-.160177987124436D+00

-.352803631565966D+00

-.169696965128113D+00

-.340541301393512D+00

-.177404638775416D+00

-.330854621232776D+00

-.183695325987987D+00

-.323639938743347D+00

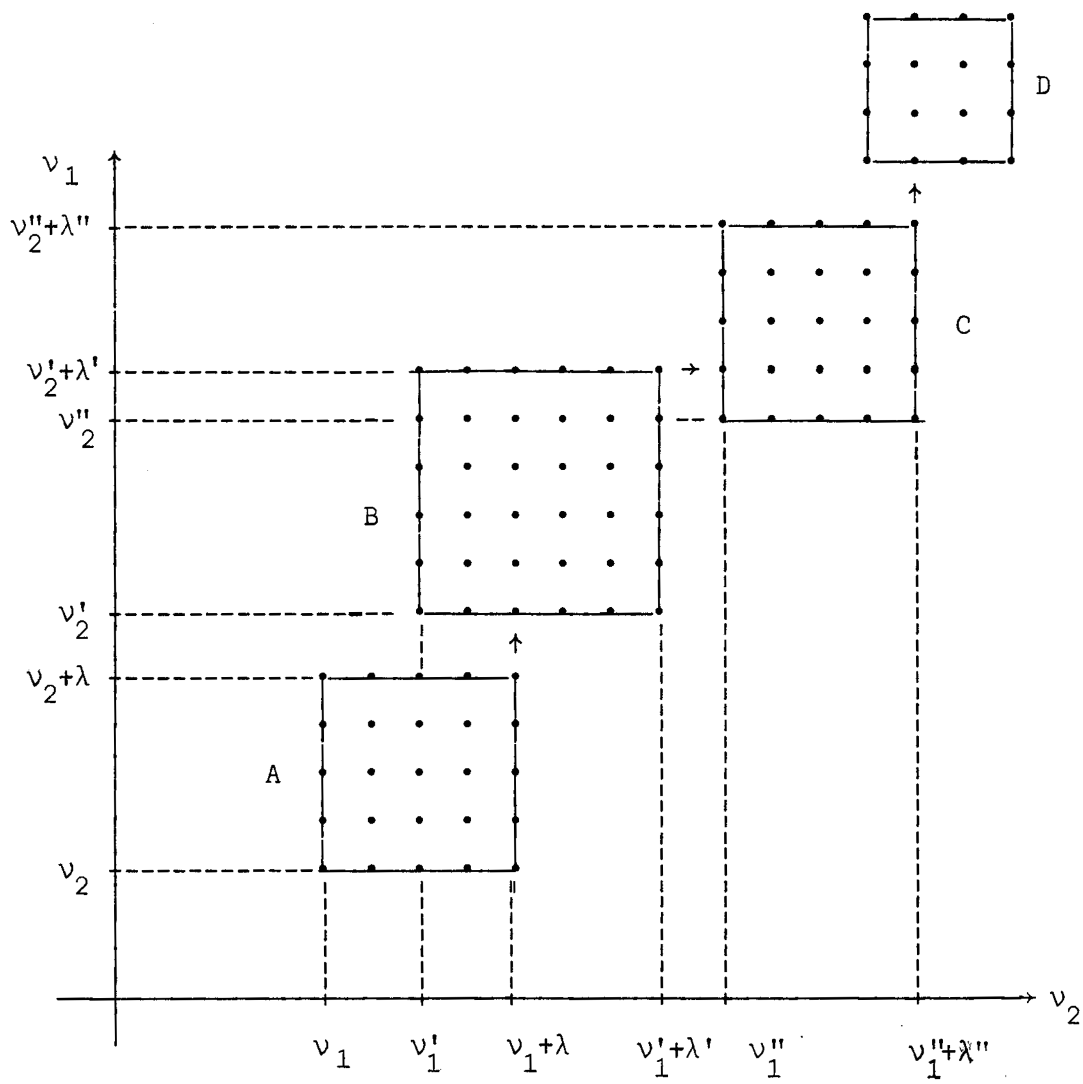
-.186035293644732D+00

<u>Remarque.</u>

Dans ce cas, l'algorithme en escalier donne des résultats plus intéressants que ceux de la méthode des polynômes associés.

V - ALGORITHME POUR LE CALCUL DES APPROXIMANTS DE PADÉ D'UNE TABLE NON NORMALE.

Dans ce qui suit, on se propose de faire une extension au cas non normal d'un algorithme qu'on a proposé pour le calcul des approximants de Padé suivant un chemin en escalier dans le cas normal.



Soient $-\frac{X_2}{X_1}$, $-\frac{X_2'}{X_1'}$ et $-\frac{X_2''}{X_1''}$ les fractions rationnelles approchées de la série $\frac{S_1}{S_2}$ correspondants respectivement aux points des carrés A, B et C de la figure ci-dessus.

On cherche à calculer les polynômes X_1'' et X_2'' en fonction des polynômes X_1', X_2', X_1 et X_2.

Désignons par ν_1 le degré de X_1, ν_2 celui de X_2, ν_1', ν_2', ν_1' et ν_2'' les degrés de X_1', X_2', X_1'' et X_2''. Soient $\nu_1 + \nu_2 + \lambda + 1$, $\nu_1' + \nu_2' + \lambda' + 1$ et $\nu_1'' + \nu_2'' + \lambda'' + 1$ les ordres d'approximation donnés respectivement par les fractions $-\frac{X_2}{X_1}$, $-\frac{X_2'}{X_1'}$ et $-\frac{X_2''}{X_1''}$. On a donc :

$$(1) \quad \begin{cases} S_1X_1 + S_2X_2 = x^{\nu_1+\nu_2+\lambda+1}.S \\ S_1X_1' + S_2X_2' = x^{\nu_1'+\nu_2'+\lambda'+1}.S' \\ S_1X_1'' + S_2X_2'' = x^{\nu_1''+\nu_2''+\lambda''+1}.S'' \end{cases}$$

où S, S' et S" désignent des séries entières dont les termes constants sont différents de zéro.

Le point $(x_1'+\lambda'+1,\ \nu_2'+\lambda')$ appartient à la moitié inférieure du carré C, on a donc :

$$\nu_1'+\nu_2'+2\lambda'+2 \le \nu_1''+\nu_2''+\lambda''+1.$$

d'où :

$$(2) \quad S_1X_1'' + S_2X_2'' = x^{\nu_1'+\nu_2'+2\lambda'+2}.R$$

où R est une série entière telle que :

$$R(x) = x^r.S''(x).$$

Or, on sait que :

$$\begin{cases} X_1'' = \alpha X_1 + aX_1' \\ X_2'' = \alpha X_2 + aX_2' \end{cases}$$

où

$$\alpha = h.x^{n}$$

avec

$$\eta = (\nu_1'+\nu_2'+\lambda'+1) - (\nu_1+\nu_2+\lambda+1)$$

et a, un polynôme dont le terme constant est différent de zéro.

On aura donc :

$$S_1X_1'' + S_2X_2'' = S_1(\alpha X_1 + aX_1') + S_2(\alpha X_2 + aX_2')$$

ce qui donne :

$$S_1X_1'' + S_2X_2'' = \alpha(S_1X_1 + S_2X_2) + a(S_1X_1' + S_2X_2')$$

En utilisant les deux premières relations de (1) et la relation (2) on déduit :

$$x^{\nu_1'+\nu_2'+2\lambda'+2}.R = \alpha.x^{\nu_1+\nu_2+\lambda+1}.S + ax^{\nu_1'+\nu_2'+\lambda'+1}.S'$$

En remplaçant α par sa valeur et en divisant les deux membres de cette relation par $x^{\nu_1'+\nu_2'+\lambda'+1}$, on obtient :

$$\boxed{x^{\lambda'+1}.R = h.S + a.S'} \qquad (3)$$

Remarquons que le polynôme X_1'' est exactement de degré $\nu_1'+\lambda'+1$, alors que X_2'' est de degré inférieur ou égal à $\nu_2'+\lambda'$.
Or, le polynôme a de la relation (3) est donné par :

$$a = \frac{X_1X_2'' - X_2X_1''}{X_1X_2' - X_1'X_2}$$

$$d^o(X_1X_2' - X_1'X_2) = \nu_1+\nu_2+\lambda+1$$

$$d^o(X_1X_2'') = \nu_1+\nu_2'' \leq \nu_1+\nu_2'+\lambda' = \nu_1+\nu_2+\lambda+\lambda'+1$$

$$d^o(X_2X_1'') = \nu_2+\nu_1'' = \nu_2+\nu_1'+\lambda'+1 \leq \nu_1+\nu_2+\lambda+\lambda'+1$$

On déduit que le degré du polynôme a est inférieur ou égal à λ'. Pour déterminer les coefficients de a, il nous faut $\lambda'+1$ équations. La relation (3) nous donne ces $\lambda'+1$ équations du fait que S et S' admettent chacun un terme constant différent de zéro. La constante h peut être prise égale à l'unité.

Posons $S(x) = \sum_{i=o}^{\infty} c_i x^i$ et $S'(x) = \sum_{i=o}^{\infty} c_i' x^i$

$$a = a_o + a_1 x + \ldots + a_{\lambda'} x^{\lambda'}$$

En exprimant que les coefficients des termes en x^o, x, $x^2, \ldots, x^{\lambda'}$ sont égale à zéro, on obtient le système suivant :

$$(4)\quad \begin{cases} a_o c_o' + c_o = o \\ a_o c_1' + a_1 c_o' + c_1 = o \\ a_o c_2' + a_1 c_1' + a_2 c_o' + c_2 = o \\ \text{-------------------------} \\ \text{-------------------------} \\ a_o c_{\lambda'}' + a_1 c_{\lambda'-1}' + \text{———} + a_{\lambda'} c_o + c_{\lambda'} = o \end{cases}$$

(4) est un système triangulaire qui donne facilement les a_i. Les polynômes X_1'' et X_2'' sont alors calculés par les relations :

$$\begin{cases} X_1'' = \alpha X_1 + aX_1' \\ X_2'' = \alpha X_2 + aX_2' \end{cases}$$

ce qui reste à déterminer c'est l'ordre de l'approximation donnée par la fraction $-\frac{X_2''}{X_1''}$:

$$\nu_1'' + \nu_2'' + \lambda'' + 1.$$

Pour déterminer λ'' on peut procéder de la manière suivante :
on calcule les coefficients de la série R à l'aide de l'une des relations (2) ou (3). Soit c_r'' le premier coefficient non nul, on aura donc :

$$R(x) = x^r \sum_{i=o}^{\infty} c''_{r+i}\, x^i = x^r\, S''(x)$$

et

$$S_1X_1 + S_2X_2 = x^{\nu_1''+\nu_2''+\lambda''+1}.S'' = x^{\nu_1'+\nu_2'+2\lambda'+2+r}.S''$$

on obtient finalement en utilisant le fait que $\nu_1'' = \nu_1'+\lambda'+1$:

$$\lambda'' = (\nu_2' + \lambda' + r) - \nu_2''.$$

<u>Remarque.</u>

Pour calculer les polynômes de la case D en fonction de ceux de B et de C on peut utiliser la même méthode, la seule différence et que dans ce cas on a :

$$\nu_1'' \leq \nu_1' + \lambda'$$

$$\nu_2'' = \nu_2' + \lambda' + 1$$

CHAPITRE II

SUR L'ANALOGIE
ENTRE
LES FRACTIONS CONTINUES SIMPLES ET LES SERIES ENTIERES.

0 - INTRODUCTION

Dans ce chapitre on discute quelques problèmes qui ont été étudiés par plusieurs auteurs et qui nous paraissent avoir des rapports entre eux.
La définition d'une fonction à partir d'un tableau de fractions rationnelles approchées d'une série entière convergente ou divergente, dont les idées de bases sont données par Padé dans [16] et [17] ; la définition d'une fonction analytique à partir d'une série entière divergente en prenant pour point de départ une fraction continue qui, par un changement de variable, se ramène à une fraction continue simple, qui a fait l'objet des recherches de Stieltjes [47] ; l'analogie faite par Padé entre les fractions continues simples et les séries entières, sont des problèmes qui traitent le même sujet et donnent des indications indispensables pour constituer une théorie qui généralise celle de Stieltjes.

Dans un premier paragraphe on a discuté l'analogie que Padé avait faite entre la théorie des séries et celles des fractions continues algébriques. De là, je me suis posé le problème suivant :

> *"Chercher des conditions pour qu'une fraction continue simple définisse un tableau de fractions rationnelles approchées".*

Les conditions que j'ai trouvé sont des conditions suffisantes et non nécessaire, et portent sur les degrés des numérateurs partiels et les dénominateurs partiels de la fraction continue simple de départ. Le paragraphe se termine par une série de remarques dans lesquelles on propose des sujets d'études avec des indications préliminaires.

Le deuxième paragraphe est consacré aux rapports que Padé avait établis entre le développement en fraction continue canonique et les développements en fractions continues holoïdes d'une fonction donnée. J'ai fait les liens avec ce que De Montessus de Ballore avait appelé les fractions continues complémentaires dans [38]. Plusieurs recherches ont été effectuées à l'aide de ce développement canonique, parmi celles-ci, on cite les applications de Tchebycheff qu'on analysera au chapitre V.

La fraction continue de Stieltjes :

$$F = \frac{1|}{|a_1 z} + \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{|a_3 z} + \dots$$

où les a_i sont des réels positifs, constitue un autre exemple de ce développement.

Dans le troisième paragraphe, on a résumé les résultats essentiels du mémoire de Stieltjes [47], après avoir discuté le problème de la définition d'une fraction à l'aide d'une série entière convergente ou divergente due à Padé [17].

I - POSSIBILITÉS DE DÉFINIR UN TABLEAU DE FRACTIONS RATIONNELLES APPROCHÉES À PARTIR D'UNE FRACTION CONTINUE SIMPLE.

I.1 - ANALOGIE ENTRE LA THEORIE DES SERIES ET CELLE DES FRACTIONS CONTINUES ALGEBRIQUES.

Dans son mémoire de thèse [15], Padé a essayé de faire une analogie entre la théorie des séries, qui renferment les séries entières, les séries trigonométriques, les séries de fractions simples etc..., et, la théorie des fractions continues algébriques. Il a remarqué que les fractions continues, comme les séries, se divisent en deux groupes, le premier est celui où tous les numérateurs et les dénominateurs partiels de la fraction continue sont des coefficients numériques et ne dépendent pas de variables, le deuxième groupe est celui où les numérateurs et les dénominateurs partiels sont des fonctions de une ou de plusieurs variables et ce sont les fractions de ce dernier groupe qu'on appelle les fractions continues algébriques. Donc, si l'on veut se baser sur la théorie des séries pour étudier les fractions continues algébriques, il faut diviser ces dernières en classes, et chaque classe aura son analogue parmi les classes de séries que l'on connaît. Il faudra ensuite, pour chauqe classe de fractions continues algébriques, donner des résultats analytiques ou autres, comme c'est le cas pour les séries.

Dans cette voie, Padé se propose d'introduire la forme de fractions continues algébriques qui lui semble devoir jouer un rôle analogue à celui que jouent les séries entières dans la théorie des séries, autrement dit l'analogue de la classe des séries entières dans l'ensemble des fractions continues algébriques. A cet effet, Padé a définit les fractions continues simples.

<u>*Définition.*</u>

Une fraction continue est dite simple si tous ses numérateurs partiels sont des monômes dont le coefficient et le degré sont différents de zéro (c'est à dire de la forme $\alpha_i = h_i x^{n_i}$ *où* $h_i \neq o$ *et* $n_i \neq o$*), exception faite pour le premier qui peut être un polynôme quelconque, et les dénominateurs partiels des polynômes dont le terme constant est différent de zéro.*

Remarque.

Une fraction continue holoïde est une fraction continue simple telle que toutes ses réduites appartiennent à un même tableau de fractions rationnelles approchées.

Dans [17], Padé a fait les remarques suivantes concernant l'analogie entre la théorie des séries entières et les fractions continues simples.

Remarque 1.

Posons $S = \sum_{i=o}^{\infty} c_i x^i$, désignons par S_n les sommes partielles de la série S, on a donc $S_n = \sum_{i=o}^{n} c_i x^i$.

Le caractère fondamental d'une série entière consiste en ce que chaque nouveau terme ajouté est un monôme de degré supérieur à tous les précédents en sorte que l'on obtient des polynômes qui représentent avec une approximation de plus en plus grande l'un quelconque de ceux qui viennent après. c'est à dire : si l'on considère S_n, $S_{n'}$ et $S_{n''}$ des sommes partielles de S tel que n" > n' > n alors :

> on peut approcher $S_{n''}$ par $S_{n'}$ et S_n, de plus l'ordre de l'approximation donnée par $S_{n'}$ est supérieur à celui donnée par S_n.

Remarque 2.

Soit $C = a_o + \frac{\alpha_1|}{|a_1} + \frac{\alpha_2|}{|a_2} + \frac{\alpha_3|}{|a_3} + \ldots$ une fraction continue simple. $\left(\frac{U_i}{V_i}\right)_{i\geq o}$ la suite des réduites de C. Si l'on considère trois réduites de C, $\frac{U_p}{V_p}$, $\frac{U_q}{V_q}$ et $\frac{U_r}{V_r}$ telles que r > q > p. Alors on peut approcher $\frac{U_r}{V_r}$ par les deux autres, de plus l'ordre de l'approximation donnée par $\frac{U_q}{V_q}$ est supérieur à celui donnée par $\frac{U_p}{V_p}$.

Donc le caractère d'approximation qu'on a vu dans la remarque 1 pour les séries se retrouve dans les fractions continues simples. De plus, si l'on modifie la définition des fractions continues simples, ce carctère disparaît, par exemple si l'on permet aux α_i d'avoir un exposant nul, ou aux a_i d'avoir un terme constant nul, (voir [15]).

Remarque 3.

Les sommes partielles S_n sont les réduites de la fraction continue holoïde, qui occupent la première ligne horizontale dans le tableau des fractions rationnelles approchées de la série S, qui n'est autre que la fraction continue d'Euler. De plus, si l'on considère le tableau des fraction rationnelles approchées de la fonction $S_{n'} = \sum_{i=o}^{n'} c_i x^i$, alors $\forall n \leq n'$, S_n figure dans ce tableau.

Remarque 4.

Pour une fraction continue simple ce caractère ne se retrouve pas forcément, c'est à dire :

soit $\frac{U_q}{V_q}$ une réduite de C, alors $\frac{U_p}{V_p}$ pour $p < q$ ne figure pas nécessairement dans le tableau des fractions rationnelles approchées de $\frac{U_q}{V_q}$.

Des remarques précédentes, Padé avait déduit que la définition des fractions continues simples n'est pas assez restrictive, et que si l'on veut trouver dans les fractions continues, l'analogue de la série entière, c'est parmi les fractions continues simples qu'il faut le chercher.

I.2 - POSSIBILITES DE DEFINIR UN TABLEAU DE FRACTIONS RATIONNELLES APPROCHEES A PARTIR D'UNE FRACTION CONTINUE SIMPLE.

Des remarques précédentes on déduit qu'une série entière peut toujours définir un tableau de fractions rationnelles approchées alors que si l'on se donne une fraction continue simple ses réduites ne sont pas nécessairement des fractions rationnelles approchées d'un même tableau ; elle ne définit pas en général un tel tableau, d'où le problème suivant :

"Chercher les conditions pour qu'une fraction continue simple définisse un tableau de fractions rationnelles approchées".

Autrement dit, je me propose de chercher les conditions pour qu'une fraction continue simple soit holoïde.

Soit $C = a_o + \frac{\alpha_1|}{|a_1} + \frac{\alpha_2|}{|a_2} + \frac{\alpha_3|}{|a_3} + \ldots$ une fraction continue simple, $\left(\frac{U_i}{V_i}\right)_{i\geq o}$ la suite des réduites de C, alors on a le résultat suivant :

Proposition.

Si $\forall k \geq 1$ le développement en série entière de $\frac{U_k}{V_k}$ coïncide avec celui de $\frac{U_{k-1}}{V_{k-1}}$ jusqu'au terme de degré égal au degré de $U_{k-1}.V_{k-1}$ inclus, alors C définit un tableau de fractions rationnelles approchées, ou encore, toutes les réduites de C appartiennent à un même tableau de fractions rationnelles approchées.

Démonstration.

Si la condition de la proposition est vérifiée alors on définit une série entière $\sum_{i=o}^{\infty} c_i x^i$ de la façon suivante :

Soit $\frac{U_k}{V_k}$ la réduite d'ordre k de C, p le degré de U_k, q celui de V_k, telle que $p+q \geq i$, i fixé.

Si l'on développe $\frac{U_k}{V_k}$ suivant les puissances croissantes on aura :

$$\frac{U_k}{V_k} = a_o + a_1 x + \ldots + a_{p+q}\, x^{p+q} + \ldots$$

Si l'on choisit le coefficient c_i tel que $c_i = a_i$, alors le tableau des fractions rationnelles approchées de la série $\sum_{i=o}^{\infty} c_i x^i$ renferme toutes les réduites de la fraction continue C. En effet, si l'on considère une réduite de C, son développement suivant les puissances croissantes coïncide avec celui de la série $\sum_{i=o}^{\infty} c_i x^i$ jusqu'au terme de degré égal à la somme des degrés du numérateur et du dénominateur de la réduite qu'on a considéré, ce qui prouve que cette réduite appartient au tableau de fractions rationnelles approchées de la série $\sum_{i=o}^{\infty} c_i x^i$.

Remarque.

Il est clair que la condition que j'ai imposé aux réduites de la fraction continue C dans la proposition précédente est aussi nécessaire. Si je considère la relation suivante :

$$\frac{U_k}{V_k} = \frac{U_{k-1}}{V_{k-1}} + (-1)^k \cdot \frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}{V_k \cdot V_{k-1}}$$

on peut voir que la condition de la proposition est vérifiée si :

$$d^o(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k) \geq d^o(U_{k-1} V_{k-1}) + 1 \qquad (*)$$

C'est ce qu'on appellera dans la suite l'inégalité (*) où je désigne par $d^o(P)$ le degré du polynôme P. On est donc amené à chercher des conditions sur les éléments de C pour que (*) soit vérifiée. Les conditions que j'ai trouvé sont énoncées dans la proposition suivante :

Proposition.

Si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

i) $$d^o(a_i) + d^o(\alpha_i) \leq d^o(\alpha_{i+1}) - d^o(a_{i-1}) \qquad i \geq 1$$

$$d^o(a_o) \leq d^o(\alpha_1) - 1$$

ii) $$2d^o(a_i) \leq d^o(\alpha_{i+1})$$

alors l'inégalité (*) *est vérifiée pour tout* $k \geq 1$.

Démonstration.

On a :

$$\begin{cases} U_i = \alpha_i\, U_{i-2} + a_i\, U_{i-1} \\ V_i = \alpha_i\, V_{i-2} + a_i\, V_{i-1} \end{cases} \qquad \text{Pour tout } i \geq 2.$$

$$\begin{cases} U_o = a_o & U_1 = a_o a_1 + \alpha_1 \\ V_o = 1 & V_1 = a_1 \end{cases}$$

$$U_i Vi = \alpha_i^2\, U_{i-2}\, V_{i-2} + a_i^2\, U_{i-1}\, V_{i-1} + a_i \alpha_i\, [U_{i-2}\, V_{i-1} + U_{i-1}\, V_{i-2}].$$

Si donc les quatres inégalités suivantes sont vérifiées alors (*) l'est aussi :

1°) $d°(\alpha_i^2\, U_{i-2}\, V_{i-2}) \leq d°(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{i+1}) - 1$

2°) $d°(a_i^2\, U_{i-1}\, V_{i-1}) \leq d°(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{i+1}) - 1$

3°) $d°(a_i \alpha_i\, U_{i-2}\, V_{i-1}) \leq d°(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{i+1}) - 1$

4°) $d°(a_i \alpha_i\, U_{i-1}\, V_{i-2}) \leq d°(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{i+1}) - 1.$

On va montrer que si les conditions i) et ii) de la proposition sont vérifiées alors les quatres inégalités précédentes sont vérifiées, et ceci par récurrence sur l'indice i :

Pour i = 0 on a :

$$U_o V_o = a_o.$$

Or $d^o(a_o) \leq d^o(\alpha_1) - 1$ d'après i) donc :

$$d^o(U_oV_o) \leq d^o(\alpha_1) - 1$$

donc (*) est vérifiée pour i = 0.

Pour i = 1 :

$$U_1V_1 = a_oa_1^2 + a_1\alpha_1$$

$$d^o(U_1V_1) \leq \max(d^o(a_oa_1^2),\ d^o(a_1\alpha_1))$$

Si le max correspond à $a_oa_1^2$, on aura :

$$d^o(U_1V_1) \leq d^o(a_o) + 2d^o(a_1) \leq d^o(\alpha_1) - 1 + 2d^o(a_1)$$

ceci d'après i), et en utilisant ii) on aura :

$$d^o(U_1V_1) \leq d^o(\alpha_1\alpha_2) - 1$$

Si le max correspond à $a_1\alpha_1$, on aura :

$$d^o(U_1V_1) \leq d^o(a_1) + d^o(\alpha_1) \leq d^o(\alpha_1\alpha_2) - 1$$

donc (*) est vérifiée pour i = 1.

Supposons que (*) soit vérifiée jusqu'à l'ordre i-1, à l'ordre i on a :

$$U_iV_i = \alpha_i^2\ U_{i-2}\ V_{i-2} + a_i^2\ U_{i-1}\ V_{i-1} + a_i\alpha_i\ [U_{i-2}\ V_{i-1} + U_{i-1}\ V_{i-2}]$$

Montrons que $d^o(\alpha_i^2\ U_{i-2}\ V_{i-2}) \leq d^o(\alpha_1\alpha_2\ \ldots\ \alpha_{i+1}) - 1$.

L'hypothèse de récurrence nous donne :

$$d^\circ(U_{i-2}\ V_{i-2}) \leq d^\circ(\alpha_1\alpha_2\ \dots\ \alpha_{i-1}) - 1$$

$$d^\circ(U_{i-1}\ V_{i-1}) \leq d^\circ(\alpha_1\alpha_2\ \dots\ \alpha_i\ ) - 1.$$

On a donc

$$d^\circ(\alpha_i^2\ U_{i-2}\ V_{i-2}) = 2d^\circ\alpha_i + d^\circ(U_{i-2}\ V_{i-2})$$

$$\leq 2d^\circ(\alpha_i) + d^\circ(\alpha_1\alpha_2\ \dots\ \alpha_{i-1}) - 1$$

$$\leq d^\circ(\alpha_i) + d^\circ(\alpha_1\ \dots\ \alpha_i) - 1$$

$$\leq d^\circ(\alpha_1\alpha_2\ \dots\ \alpha_{i+1}) - 1.$$

car i) entraîne que $d^\circ(\alpha_i) \leq d^\circ(\alpha_{i+1})$.

Montrons ensuite que :

$$d^\circ(a_i^2\ U_{i-1}\ V_{i-1}) \leq d^\circ(\alpha_1\alpha_2\ \dots\ \alpha_{i+1}) - 1$$

On a

$$d^\circ(a_i^2\ U_{i-1}\ V_{i-1}) = 2d^\circ(a_i) + d^\circ(U_{i-1}\ V_{i-1})$$

donc

$$d^\circ(a_i^2\ U_{i-1}\ V_{i-1}) \leq 2d^\circ(a_i) + d^\circ(\alpha_1\alpha_2\ \dots\ \alpha_i) -1$$

$$\leq d^\circ(\alpha_1\alpha_2\ \dots\ \alpha_{i+1}) - 1$$

Il reste à montrer que :

$$d^\circ(a_i\,\alpha_i\ U_{i-2}\ V_{i-1}) \leq d^\circ(\alpha_1\alpha_2\ \dots\ \alpha_{i+1}) - 1$$

et

$$d^o(a_i\alpha_i\ U_{i-1}\ V_{i-2}) \leq d^o(\alpha_1\alpha_2\ \dots\ \alpha_{i+1}) - 1.$$

Pour i = 2 on a :

$$a_2\alpha_2U_oV_1 = a_oa_1a_2{}_2$$

$$a_2\alpha_2U_1V_o = a_oa_1a_2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2.$$

Or :

$$d^o(a_oa_1a_2\alpha_2) = d^o(a_o) + d^o(a_1) + d^o(a_2) + d^o(\alpha_2)$$

$$\leq d^o(\alpha_1) - 1 + d^o(\alpha_3) \leq d^o(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) - 1$$

et

$$d^o(\alpha_1\alpha_2) \leq d^o(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) - 1.$$

Supposons que :

$$d^o(\alpha_{i-1}\ a_{i-1}\ U_{i-3}\ V_{i-2}) \leq d^o(\alpha_1\alpha_2\ \dots\ \alpha_i) - 1$$

et

$$d^o(\alpha_{i-1}\ a_{i-1}\ U_{i-2}\ V_{i-3}) \leq d^o(\alpha_1\alpha_2\ \dots\ \alpha_i) - 1$$

et montrons que

$$d^o(\alpha_ia_i\ U_{i-2}\ V_{i-1}) \leq d^o(\alpha_1\alpha_2\ \dots\ \alpha_{i+1}) - 1.$$

On a :

$$\alpha_ia_i\ U_{i-2}\ V_{i-1} = a_i\alpha_i\ U_{i-2}(\alpha_{i-1}\ V_{i-3} + a_{i-1}\ V_{i-2})\ .$$

$$= a_i\alpha_i\alpha_{i-1}\ U_{i-2}\ V_{i-3} + a_i\alpha_ia_{i-1}\ U_{i-2}\ V_{i-2}$$

ceci en utilisant l'hypothèse de récurrence et la condition i) de même on a :

$$d^o(B) = d^o(a_{i-1}) + d^o(a_i) + d^o(\alpha_i) + d^o(U_{i-2}\, V_{i-2})$$

$$d^o(B) \leq d^o(\alpha_{i+1}) + d^o(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_i) - 1$$

$$d^o(B) \leq d^o(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{i+1}) - 1$$

donc

$$d^o(\alpha_i a_i\, U_{i-2}\, V_{i-1}) \leq d^o(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{i+1}) - 1.$$

de même on montre que :

$$d^o(\alpha_i a_i\, U_{i-1}\, V_{i-2}) \leq d^o(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{i+1}) - 1$$

en partant de :

$$a_i\alpha_i\, U_{i-1}\, V_{i-2} = a_i\alpha_i(\alpha_{i-1}\, U_{i-3} + a_{i-1}\, U_{i-2})V_{i-2}$$

$$= a_i\alpha_i\alpha_{i-1}\, U_{i-3}\, V_{i-2} + a_i\alpha_i\alpha_{i-1}\, U_{i-2}\, V_{i-2}$$

en utilisant la même technique que précédemment, on arrive au résultat, ce qui achève la démonstration.

Théorème.

Etant donnée une fraction continue simple

$$c = a_o + \frac{\alpha_1 |}{| a_1} + \frac{\alpha_2 |}{| a_2} + \ldots\ldots$$

alors, une cndition suffisante pour que celle-ci définisse un tableau de fractions rationnelles approchées est que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

i) $$d^o(a_i) + d^o(\alpha_i) \leq d^o(\alpha_{i+1}) - d^o(a_{i-1}) \qquad i \geq 1$$

$$d^o(a_o) \leq d^o(\alpha_1) - 1$$

ii) $$2d^o(a_i) \leq d^o(\alpha_{i+1}) \qquad i \geq 1$$

Démonstration.

Elle est évidente en utilisant les deux propositions précédentes.

Remarques.

1°) Si l'on considère une fraction continue de la première forme de Lagrange, c'est à dire dont les numérateurs partiels sont des monômes du premier degré et les dénominateurs partiels sont des constantes, alors les conditions i) et ii) du théorème précédent sont vérifiées. De même pour une fraction continue de la deuxième forme de Lagrange, c'est à dire dont les numérateurs partiels sont des monômes du second degré et les dénominateurs partiels sont des binômes du premier degré.

2°) La fraction continue d'Euler, ne vérifie pas les conditions du théorème et pourtant elle définit toujours un tableau de fractions rationnelles approchées puisque la donnée d'une telle fraction est équivalente à la donnée d'une série entière. De là on déduit que les conditions du théorème ne sont pas nécessaires et il serait intéressant de réduire ces conditions afin d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes. Ceci nous permettrait de fixer exactement la classe de fractions continues analogue à la classe des séries entières, et c'est à cette classe qu'on peut espérer étendre les résultats de Stieltjes [47] sur la définition d'une fonction à partir d'une série divergente et que l'on va discuter dans ce chapitre.

3°) L'analogie que Padé a essayé de faire entre la théorie des séries et celle des fractions continues, peut faire l'objet de sujets d'études intéressants. Plus ou moins guidé par cette analogie, on peut chercher l'analogie des autres classes de séries (trigonométriques, fractions simples, etc...) dans les fractions continues, ceci donnera des résultats concernant l'approximation par des suites de fonctions autres que les fractions rationnelles.

4°) Extension aux séries doubles : il serait intéressant d'étendre la théorie de Padé aux séries doubles en se basant sur cette analogie et en s'inspirant des recherches de Padé dans le cas des séries entières.

Avant de passer au sujet qu'on a évoqué dans la remarque 2 précédente, on va exposer le travail de Padé sur ce qu'il a appelé le développement en fraction continue canonique et les rapports de celui-ci avec les développements en fractions continues holoïdes.

II - RAPPORTS ENTRE LE DÉVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE CANONIQUE ET LES DÉVELOPPEMENTS EN FRACTIONS CONTINUES HOLOÏDES.

II.1 - LE DEVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE CANONIQUE.

II.1.1 - Développement d'un réel en fraction continue.

Soit x un nombre réel, on désigne par a_o la partie entière de x, puis successivement par a_1, a_2,... les parties entières de x_1, x_2, ... (supposés non entiers) définis par :

$$x_1 = \frac{1}{x - a_o} \, , \quad x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1} \, , \; \ldots\ldots \, , \quad x_n = \frac{1}{x_{n-1} - a_{n-1}} \, , \; \ldots\ldots$$

si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est infinie ainsi que la suite $(a_n)_{n\geq o}$ et on peut écrire x sous la forme :

$$x = a_o + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}$$

C'est ce qu'on appelle le développement en fraction continue du réel x.

Remarque.

si $x \in \mathbb{Q}$, la suite $(x_n)_n$ est finie et il existe un indice N tel que :

$$x = a_o + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_N}}}}\ .$$

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus Q$, on peut montrer par récurrence sur n que x peut s'écrire sous la forme :

$$x = \frac{A_n x_n - A_{n-1}}{B_n x_n - B_{n-1}} \qquad \forall n \geq 1.$$

où A_n et B_n sont des nombres entiers donnés par les relations :

$$\begin{cases} A_{n+1} = a_n A_n + A_{n-1} \\ B_{n+1} = a_n B_n + B_{n-1} \end{cases} \qquad \forall n \geq 1.$$

avec

$$A_o = 1 \qquad A_1 = a_o$$

$$B_o = 0 \qquad B_1 = 1.$$

$\forall n \geq 0$, on a entre A_n et B_n la relation :

$$A_n B_{n+1} - A_{n+1} B_n = (-1)^n$$

et il résulte de l'identité de Bezout que pour tout n, A_n et B_n sont premiers entre eux, ainsi que A_n et A_{n+1}, B_n et B_{n+1}.

La suite $\left(\frac{A_n}{B_n}\right)_{n \geq o}$ est appelée suite des réduites du développement du réel x en fraction continue et on a :

$$\lim_{n \to \infty} \left|x - \frac{A_n}{B_n}\right| = o$$

II.1.2 - Le développement en fraction continue canonique d'une série ordonnée suivant les puissances décroissantes.

Le procédé qui nous a permis de développer un nombre réel en fraction continue peut se généraliser pour une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de la variable, le développement qu'on obtient est unique et parfaitement déterminé. C'est ce qu'on appelle le développement en fraction continue canonique. On l'obtient ainsi :

soit Z une série ordonnée suivant les puissances décroissantes, on appellera ordre d'une telle série, le degré de son premier terme. Soit f_n un polynôme de degré n, ϕ_n la partie polynômiale de Zf_n. On peut choisir les n+1 coefficients de f_n de tel sorte que l'expression $Z - \frac{\phi_n}{f_n}$ admette un développement en puissances décroissantes d'ordre inférieur ou égal à $-(2n+1)$, on aura donc :

$$Z - \frac{\phi_n}{f_n} = O\left(\frac{1}{x^{2n+\rho+1}}\right) \qquad \text{où } \rho \in \mathbb{N}$$

$\frac{\phi_n}{f_n}$ se nomme la réduite d'ordre n de la série Z.

Si $\rho = o$, alors $\frac{\phi_n}{f_n}$ est dite normale, sinon elle est dite anormale.

Posons $Z = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + a_o + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots$.

Dans ce cas on a :

$$\begin{cases} \phi_o(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + a_o \\ f_o(x) = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_1(x) = \phi_o(x).x + a_1 \\ f_1(x) = x. \end{cases}$$

et les autres réduites peuvent être calculées par les relations de récurrences :

$$\begin{cases} \phi_{n+1} = p_{n+1}\phi_n + \phi_{n-1} \\ f_{n+1} = p_{n+1}f_n + f_{n-1} \end{cases} \qquad \text{Pour tout } n \geq 1.$$

où les p_i sont des polynômes de degrés supérieurs ou égaux à un pour tout $i \geq 2$. On obtient ainsi ce qu'on appelle le développement en fraction continue canonique de la série Z :

$$Z = p_o + \frac{1|}{|p_1} + \frac{1|}{|p_2} + \frac{1|}{|p_3} + \ldots\ldots \qquad (1)$$

où $p_o = \phi_o(x)$ et où $p_1 = \begin{cases} \dfrac{x}{a_1} \text{ si } a_1 \neq o \\ \text{un polynôme de degré} >1 \text{ si } a_1 = o. \end{cases}$

Dans le cas où toutes les réduites $\frac{\phi_n}{f_n}$ sont normales les polynômes p_i pour $i \geq 1$ sont de degrés égaux à 1.

Dans la suite, on appellera fraction continue canonique toute fraction continue de la forme (1).

II.1.3 - Quelques propriétés du développement en fraction continue canonique.

Propriété.

Soit Z *une série ordonnée suivant les puissances décroissantes :*

$$Z = c_o + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots$$

$\frac{U}{V}$ *une fraction rationnelle irréductible dont le degré du dénominateur est égal à* μ. *Si* $\frac{U}{V}$ *vérifie la relation :*

$$Z(z) - \frac{U(z)}{V(z)} = 0 \left(\frac{1}{z^{2\mu+1}}\right)$$

alors $\frac{U}{V}$ *est la réduite d'ordre* μ *du développement en fraction continue canonique de la série* Z.

Propriété.

Soit $\frac{U}{V}$ *une réduite du développement en fraction continue canonique de la série* Z *où* V *est de degré* μ. *Si l'ordre de l'approximation donnée par cette réduite est égal à* $2\mu+\rho+1$ *où* $\rho \in \mathbb{N}$, *c'est à dire si* $\frac{U}{V}$ *vérifie la relation :*

$$Z(z) - \frac{U(z)}{V(z)} = \frac{A'}{z^{2\mu+\rho+1}} + \frac{A''}{z^{2\mu+\rho+2}} + \cdots\cdots \qquad \text{où } A' \neq 0$$

alors le degré du dénominateur de la réduite qui suit $\frac{U}{V}$ *est égal à* $\mu+\rho+1$, *et le quotient incomplet correspondant à cette réduite sera de degré égal à* $\rho+1$. *C'est à dire :*

si l'on désigne par : $p_0 + \frac{1|}{|p_1} + \frac{1|}{|p_2} + \cdots + \frac{1|}{|p_i} \quad \frac{1|}{|p_{i+1}} + \cdots$
le développement en fraction continue de la série Z *et l'on pose :*

$$\frac{U}{V} = p_0 + \frac{1|}{|p_1} + \frac{1|}{|p_2} + \cdots + \frac{1|}{|p_i}$$

$$\frac{U'}{V'} = p_0 + \frac{1|}{|p_1} + \frac{1|}{|p_2} + \cdots + \frac{1|}{|p_i} \quad \frac{1|}{|p_{i+1}}$$

qui est la réduite qui suit $\frac{U}{V}$ *;*

alors le degré de V' *est égal à* $\mu+\rho+1$ *et le degré de* p_{i+1} *est égal à* $\rho+1$.

Pour plus de détails sur la question voir [56] et [57].

Ces résultats nous serons utiles dans le sous paragraphe suivant où on expose les résultats que Padé avait établi concernant les relations entre le développement en fraction continue canonique et les développements en fractions continues holoïdes. Le cas normal et le cas anormal sont traités séparément.

II.2 - RAPPORTS ENTRE LE DEVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE CANONIQUE ET LES DEVELOPPEMENTS EN FRACTIONS CONTINUES HOLOIDES.

II.2.1 - Cas où toutes les fractions rationnelles approchées sont normales.

Soit $Z(z) = c_o + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$ avec $c_o \neq o$.
Une série ordonnée suivant les puissances croissantes. Posons $y = \frac{1}{z}$, on aura :

$$Z(\frac{1}{y}) = c_o + \frac{c_1}{y} + \frac{c_2}{y^2} + \frac{c_3}{y^3} + \dots$$

Considérons le tableau de fractions rationnelles approchées de la série Z, on suppose que ce tableau est normal. D'après les résultats du chapitre I, il existe deux fractions continues holoïdes dont les réduites sont les fractions rationnelles approchées placées sur la bissectrice de ce tableau.
L'une est de la forme :

$$(1) \qquad r_1 + \frac{r_2 z|}{|1+s_2 z} + \frac{r_3 z|}{|1+s_3 z} + \frac{r_4 z|}{|1+s_4 z} + \dots$$

l'autre est de la forme :

$$(2) \qquad \frac{r_1|}{|1} + \frac{r_2 z|}{|1+s_2 z} + \frac{r_3 z|}{|1+s_3 z} + \dots$$

où les r_i sont des constantes différentes de zéro et les s_i des constantes qui peuvent être nulles.

Considérons la première de ces fractions continues et faisons le changement de variable $z = \frac{1}{y}$, on obtient la fraction continue canonique :

$$r_1 + \frac{r_2|}{|y+s_2} + \frac{r_3|}{|y+s_3} + \frac{r_4|}{|y+s_4} + \dots$$

Proposition.

Le développement en fraction continue canonique précédent est celui de la série $Z(\frac{1}{y})$.

Démonstration.

Soit $\frac{U}{V}$ la fraction qui se trouve dans la case (μ,μ) de la table de Padé de la série Z.

$\frac{U}{V}$ est une réduite de la fraction continue (1), on a donc :

$$Z(z) = \frac{U(z)}{V(z)} + A' \, z^{2\mu+1} + A'' \, z^{2\mu+2} + \ldots \qquad \text{où } A' \neq o$$

d'où

$$Z(\frac{1}{y}) = \frac{y^{\mu}.U(\frac{1}{y})}{y^{\mu}.V(\frac{1}{y})} + \frac{A'}{y^{2\mu+1}} + \frac{A''}{y^{2\mu+2}} + \ldots$$

Cette égalité exprime que la fraction $\dfrac{y^{\mu}.U(\frac{1}{y})}{y^{\mu}.V(\frac{1}{y})}$ est la réduite d'ordre μ du développement en fraction continue canonique de $Z(\frac{1}{y})$.

cqfd.

Considérons maintenant, l'une des fractions continues holoïdes dont les réduites sont sur la droite $y-x = \alpha$ où $\alpha > o$. La fraction dont il s'agit est de la forme :

$$(3) \qquad R_1(z) + \frac{r_2 z^{\alpha+1}|}{|\,1+s_2 z} + \frac{r_3 z^2|}{|1+s_3 z} + \frac{r_4 z^2|}{|1+s_4 z} + \ldots$$

où R_1 est un polynôme de degré α. Si on fait le changement de variable $y = \frac{1}{z}$ dans (3), on obtient :

$$y^{-\alpha} \, [y^{\alpha} \, R(\frac{1}{y}) + \frac{r_2|}{|y+s_2} + \frac{r_3|}{|y+s_3} + \ldots]$$

Proposition.

La fraction continue canonique

$$y^{\alpha} R(\frac{1}{y}) + \frac{r_2 \rfloor}{\lfloor y+s_2} + \frac{r_3 \rfloor}{\lfloor y+s_3} + \dots$$

est le développement en fraction continue canonique de la série $y^{\alpha} Z(\frac{1}{y})$. *Ses réduites se déduisent de celles de la fraction continue holoïde par le changmenet de variable* $y = \frac{1}{z}$ *suivi de la multiplication par* y^{α}.

Démonstration.

Soit $\frac{U}{V}$ la fraction qui se trouve dans la case (μ,ν) de la table de Padé de la série Z. Cette fraction est une réduite de la fraction continue holoïde (3) et on a $\nu - \mu = \alpha$, μ étant le degré de V et ν celui de U :

$$Z(z) = \frac{U(z)}{V(z)} + A' z^{2\mu+\alpha+1} + A'' z^{2\mu+\alpha+2} + \dots \qquad \text{où } A' \neq o.$$

En faisant le changement de variable $z = \frac{1}{y}$ et en multipliant par y^{α}, on obtient :

$$y^{\alpha} Z(\frac{1}{y}) = \frac{y^{\mu+\alpha} U(\frac{1}{y})}{y^{\mu} V(\frac{1}{y})} + \frac{A'}{y^{2\mu+1}} + \frac{A''}{y^{2\mu+2}} + \dots$$

donc $\dfrac{y^{\mu+\alpha} U(\frac{1}{y})}{y^{\alpha} V(\frac{1}{y})}$ est la réduite d'ordre μ du développement en fraction continue canonique de la série $y^{\alpha} Z(\frac{1}{y})$.

cqfd.

Remarques.

1°) En supposant $\alpha < o$, on a le même résultat et la démonstration est la même, il faut seulement observer que la fraction continue holoïde qui se présente est de la forme :

$$\frac{1|}{|R_1(z)} + \frac{r_2 z^{-\alpha+1}|}{|s_2 z+1} + \frac{r_3 z^2|}{|s_3 z+1} + \dots$$

où R_1 est un polynôme de degré $-\alpha$.

2°) Les quotients incomplets des fractions continues canoniques qu'on a obtenu sont tous du premier degré. Nous allons voir que cette circonstance ne se présente plus dans le cas où le tableau de fractions rationnelles approchées n'est plus normal. Avant de passer à l'étude de ce cas, on va faire le lien avec les résultats de De MOntessus de Ballore et avec les fractions qu'il avait appelé : fractions continues complémentaires.

II.2.2 - Lien avec les résultats de De Montessus.

Soit $Z(z) = c_o + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ où $c_o \neq o$.

On désigne par $\frac{U_\nu}{V_\mu}$ la réduite (μ, ν) de la fraction continue holoïde placée sur la droite $y-x = \alpha$; on a donc :

$$\nu - \mu = \alpha \text{ et } \frac{U_\nu(z)}{V_\mu(z)} = c_o + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_{\mu+\nu} z^{\mu+\nu} + \lambda z^{\mu+\nu+1} + \dots$$

en faisant le changement de variable $y = \frac{1}{z}$ on obtient :

$$\frac{U_\nu(\frac{1}{z})}{V_\mu(\frac{1}{z})} = c_o + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots + \frac{c_{\mu+\nu}}{z^{\mu+\nu}} + \frac{\lambda}{z^{\mu+\nu+1}} + \dots$$

$\dfrac{z^\nu U_\nu(\frac{1}{z})}{z^\mu V_\nu(\frac{1}{z})}$ est une fraction rationnelle dont le degré du numérateur est égal à ν et celui du dénominateur égal à μ.

Posons :

$$\frac{z^\nu U_\nu(\frac{1}{z})}{z^\mu V_\mu(\frac{1}{z})} = \frac{U_{\nu,1}(z)}{V_{\mu,1}(z)} \Rightarrow \frac{U_\nu(\frac{1}{z})}{V_\mu(\frac{1}{z})} = \frac{z^\mu U_{\nu,1}(z)}{z^\nu V_{\mu,1}(z)}$$

et on aura :

$$\frac{z^{\mu}\, U_{\nu,1}(z)}{z^{\nu}\, V_{\mu,1}(z)} = c_o + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots + \frac{c_{\mu+\nu}}{z^{\mu+\nu}} + \frac{\lambda}{z^{\mu+\nu+1}} + \dots$$

Or $Z(\frac{1}{z}) = c_o + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots$.

Donc les fractions $\frac{z^{\mu}\, U_{\nu,1}(z)}{z^{\nu}\, V_{\mu,1}(z)}$ sont des fractions rationnelles approchées de la fonction $Z(\frac{1}{z})$.

Ces fractions ont été appelées par De Montessus : fractions complémentaires. De Montessus a remarqué que l'on peut donc construire un tableau analogue à celui de Padé et que ce tableau renfermera toutes les fractions complémentaires ; il l'avait appelé le tableau complémentaire [38].

Remarque.

La fraction $\frac{U_{\nu,1}(z)}{V_{\mu,1}(z)}$ est une réduite de la fraction continue canonique de la série $z^{\alpha}\, Z(\frac{1}{z})$ si l'on suppose que $\frac{U_{\nu}}{V_{\mu}}$ se trouve sur la droite $y-x=\alpha$.
On voit donc d'après ce qui précède le lien entre le travail de Padé qu'on a exposé dans le sous paragraphe précédent et celui de De Montessus. La différence est que Padé a lié les fractions $\frac{U_{\nu,1}}{V_{\mu,1}}$ transformées des fractions $\frac{U_{\nu}}{V_{\mu}}$ qui se trouvent sur la droite $y-x=\alpha$, à la série $z^{\alpha}\, Z(\frac{1}{z})$ alors que De Montessus à lié toutes les fractions $\frac{z^{\mu}\, U_{\nu,1}}{z^{\nu}\, V_{\mu,1}}$ à la même série $Z(\frac{1}{z})$.

Dans [38], De Montessus a établi des résultats concernant les fractions complémentaires ; c'est ce qu'on va voir dans les points a), b) et c) suivants :

a) Relations de récurrence entre les fractions complémentaires.

Soient $\frac{U_{p+n+1}}{V_{n+1}}$, $\frac{U_{p+n}}{V_{n}}$, $\frac{U_{p+n-1}}{V_{n-1}}$ trois réduites consécutives placées sur une même parallèle à la diagonale de la table de Padé. On sait qu'entre ces réduites on a les relations :

$$(\alpha)\begin{cases} A_n\, U_{p+n+1} + B_n\, U_{p+n} + (n)\, z^2\, A_n\, U_{p+n-1} = o \\ A_n\, V_{n+1} + B_n\, V_n + (n)\, z^2\, A_n\, V_{n-1} = o \end{cases}$$

où A_n et B_n sont des polynômes en z fonctions de n, et par raison d'homogénéité, si A_n est de degré h, B_n sera de degré h+1. Dans le cas qui nous intéresse A_n est de degré zéro et B_n de degré 1.

Des relations (α) on déduit :

$$(\alpha')\begin{cases} A_{n,1}(z)\, U_{p+n+1,1} + B_{n,1}\, U_{p+n,1} + \pi(n)\, A_{n,1}\, U_{p+n-1,1} = o \\ A_{n,1}(z)\, V_{p+n+1,1} + B_{n,1}\, V_{n,1} + \pi(n)\, A_{n,1}\, V_{n-1,1} = o \end{cases}$$

où

$$A_{n,1}(z) = z^h\, A_n(\tfrac{1}{z})$$

$$B_{n,1}(z) = z^{h+1}\, B_n(\tfrac{1}{z})$$

$$U_{k,1}(z) = z^k\, U_k(\tfrac{1}{z})$$

Réciproquement, si l'on a obtenu les relations (α'), alors les relations (α) définiront les fractions approchées de Z(z).

b) Forme des fractions continues complémentaires.

Dans le cas qui nous occupe, $A_{n,1}$ et $B_{n,1}$ sont de degré 0 et 1 en z et la fraction continue qui correspond aux relations (α') sera de la forme :

$$\frac{\gamma_1|}{|\beta_1} + \frac{\gamma_2|}{|\alpha_2 + \beta_2} + \frac{\gamma_3|}{|\alpha_3 z + \beta_3} + \dots$$

Remarque.

On devait s'attendre à ce résultat, car, comme on l'a remarqué précédemment, les fractions $\left(\frac{U_{p+\ ,1}}{U_{n,1}}\right)_{n\geq o}$ ne sont autres que les réduites du développement en fraction continue canonique de la série $z^p\, Z(\frac{1}{z})$ et la forme de cette fraction continue nous est connue.

c) Relation entre les domaines de convergence des fractions approchées et des fractions complémentaires.

Considérons la suite $(\frac{U_n}{V_n})_{n\geq o}$ des fractions de la table de Padé qui se trouvent sur la diagonale principale. Soit $(\frac{U_{n,1}}{V_{n,1}})_{n\geq o}$ la suite des fractions complémentaires qui se trouvent sur la diagonale du tableau complémentaire.

Si on pose :

$$R_2(z) = (\frac{U_{n+1,1}}{V_{n+1,1}} - \frac{U_{n,1}}{V_{n,1}}) : (\frac{U_{n,1}}{V_{n,1}} - \frac{U_{n-1,1}}{V_{n-1,1}})$$

$$R_1(z) = (\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} - \frac{U_n}{V_n}) : (\frac{U_n}{V_n} - \frac{U_{n-1}}{V_{n-1}})$$

De Montessus a montré dans [38] que :

$$R_1(z) = R_2(\frac{1}{z}).$$

Il s'ensuit que si la suite $(\frac{U_n}{V_n})_{n\geq o}$ converge dans un domaine $A(x,y)$, c'est à dire en tous les points $z = x+iy$ de ce domaine, la suite $(\frac{U_{n,1}}{V_{n,1}})_{n\geq o}$ converge dans le domaine $A(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$, c'est à dire en tous les points $\frac{1}{x+iy}$.

De plus si la suite de fraction $(\frac{U_n}{V_n})_{n\geq o}$ représentant la fonction $Z(z)$ converge en z_o alors la suite $(\frac{U_{n,1}}{V_{n,1}})_{n\geq o}$ représentant la fonction $Z(\frac{1}{z})$ converge en $1/z_o$ et réciproquement.

II.2.3 - Cas où la table de Padé est anormale.

Théorème.

Si l'on considère la fraction continue holoïde relative à la série $Z(z)$, *dont les points représentatifs des réduites sont placés sur la droite* $y-x=\alpha$, *où* $\alpha \in Z$, *alors ces réduites seront reproduites par la suite des réduites du développement en fraction continue canonique de la série* $y^{\alpha}Z(\frac{1}{y})$, *quand après avoir multiplié celle-ci par* $y^{-\alpha}$, *on remplace* y *par* $\frac{1}{z}$.

Démonstration.

Soit $\frac{U}{V}$ une fraction rationnelle approchée normale ou non de la série Z(z), μ le degré du dénominateur, ν celui du numérateur, $u+\nu+\lambda+1$ l'ordre de l'approximation qui lui correspond, on a donc :

$$Z(z) = \frac{U(z)}{V(z)} + A' \, z^{\mu+\nu+\lambda+1} + A'' \, z^{\mu+\nu+\lambda+2} + \ldots \qquad \text{où } A' \neq o.$$

On sait que $\frac{U}{V}$ correspond à tous les points du carré dont les côtés parallèles aux axes, passent par les points (μ,ν), $(\mu+\lambda, \nu+\lambda)$. Soit $h \in \mathbb{N}$ tq $o \leq h \leq \lambda$, en sorte que $(\mu+h, \nu)$ soit l'un des points placés sur le côté $y=\nu$ du carré.

En remplaçant z par $\frac{1}{y}$ et en multipliant par $y^{\nu-(\mu+h)}$:

$$y^{\nu-(\mu+h)} \, Z(\frac{1}{y}) = \frac{y^{\nu} \, U(\frac{1}{y})}{y^{\mu+h} \, V(\frac{1}{y})} + \frac{A'}{y^{2(\mu+h)+\lambda-h+1}} + \ldots$$

le polynôme $y^{\mu+h} \, V(\frac{1}{y})$ est de degré $\mu+h$, de plus $\lambda-h \geq 0$, donc $\dfrac{y^{\nu} \, U(\frac{1}{y})}{y^{\mu+h} \, V(\frac{1}{y})}$ est l'une des réduites du développement en fraction continue canonique de la fonction $y^{\nu-(\mu+h)} \, Z(\frac{1}{y})$.

L'entier h est chosi tq $(\mu+h, \nu)$ appartient à la droite $y-x=\alpha$, on a donc $\nu-(\mu+h) = \alpha$.

cqfd.

Théorème.

Si un quotient incomplet du développement en fraction continue canonique de la série $y^{\alpha} Z(\frac{1}{y})$ *n'est plus du premier degré, c'est que la réduite de la fraction continue holoïde, qui précède celle à laquelle correspond ce quotient, dont les points représentatifs sont sur la droite* $y-x = \alpha$ *est anormale. De plus, le degré du quotient incomplet est égal au nombre de points du carré où figure cette fraction anormale qui se trouvent sur la droite* $y-x = \alpha$.

On avait, d'après ce qui précède :

$$y^{\nu-(\mu+h)} \; Z(\frac{1}{y}) = \frac{y^{\nu} \; U(\frac{1}{y})}{y^{\mu+h} \; V(\frac{1}{y})} + \frac{A'}{y^{2(\mu+h)+\lambda-h+1}} + \cdots$$

avec $\alpha = \nu - (\mu+h)$

donc la réduite $\dfrac{y^{\nu} \; U(\frac{1}{y})}{y^{\mu+h} \; V(\frac{1}{y})}$ admet un ordre d'approximation égal à $2(\mu+h)+\lambda-h+1$

et, d'après les propriétés du développement canonique, le degré du dénominateur de la réduite suivante sera égal à $(\mu+h)+\lambda-h+1$ et le degré du quotient incomplet correspondant à cette réduite sera égal à $-h+1$. Or ce nombre $\lambda-h+1$ est égal au nombre de points du carré où figure $\frac{U}{V}$ qui se trouve sur la droite $y-x=\alpha$.

$\frac{U}{V}$ étant la réduite de la fraction continue holoïde correspondant au point (μ, ν)

cqfd.

Remarques.

1°) Le résultat précédent nous donne des indications sur la table de Padé dans le cas non normal et peut être utile pour la construction d'algorithme dans le cas non normal.

2°) Le rapprochement que Padé avait fait entre la théorie des fractions continues canoniques et celles des fractions continues holoïdes a un double but :

a) Donner des indications pour aborder l'étude de la généralisation des fractions continues algébriques dans le cas de séries ordonnées suivant les puissances décroissantes.

b) Etendre les applications qui sont basées sur le développement canonique et les résultats obtenus sur ce même développement aux fractions continues holoïdes. Dans le chapitre V on va étudier quelques applications de ce développement. Un exemple des résultats établis en utilisant ce développement est la fraction continue de Stieltjes que l'on va étudier dans le paragraphe suivant.

III - LA THÉORIE DE STIELTJES ET LA TABLE DE PADÉ.

III.1 - DEFINITION D'UNE FONCTION A L'AIDE D'UNE SERIE ENTIERE CONVERGENTE OU DIVERGENTE.

Dans son mémoire "*Sur les séries entières convergentes ou divergentes et les fractions continues*" [17], Padé discute la possibilité de définir une fonction à partir d'une série entière convergente ou divergente. En se basant sur les résultats de Laguerre [10] et ceux de Halphen [8], Padé énnonce le résultat suivant :

<u>*Proposition.*</u>

Parmi les fractions continues simples, en nombre illimité, qui peuvent être déduites d'un tableau de fractions rationnelles approchées, les unes peuvent être convergentes, les autres divergentes.

En effet, Laguerre considère la série ordonnée suivant les puissances décroissantes :

$$J = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{2!}{z^3} - \frac{3!}{z^4} + \frac{4!}{z^5} - \dots$$

qui est une série divergente quelque soit z.
Le développement enfraction continue canonique de la série J est le suivant :

$$F = \frac{1|}{|z+1} - \frac{1|}{|z+3} - \frac{4|}{|z+5} - \frac{9|}{|z+7} - \dots$$

Or cette fraction continue converge. Donc, à partir de la série divergente J, on arrive à la définition d'une fraction continue convergente.

Réciproquement, Halphen a montré qu'une fraction continue simple pouvait être divergente alors que la série correspondante était divergente. Ces deux résultats remarquables, avec la multiplicité des fractions continues simples, permettent à Padé d'énoncer le résultat précédent. En considérant la table de fractions rationnelles approchées d'une série entière donnée, il se peut qu'une suite infinie de ce tableau converge dans un domaine et définisse une fonction, et cela indépendemment de la convergence ou de la divergente de la série.

Remarque.

Cette correspondance entre série entière divergente et définition d'une fonction ne peut constituer une théorie satisfaisante que si l'on arrive à répondre à quelques questions importantes.

Borel dans [4] remarque que les deux questions essentielles qui doivent être résolues sont les suivantes :

1°) Si du tableau de fractions rationnelles approchées d'une série on arrive a extraire deux suites convergentes, peut-on affirmer que ces deux limites sont égales, ou tout au moins préciser dans quels cas elles le sont ?

2°) La question précédente étant résolue, au moins pour une calsse de série divergentes, peut-on affirmer que la série somme (ou produit) de deux séries de cette classe donne naissance à un tableau dans lequel une infinité de fractions converge lorsqu'il en est ainsi pour les deux séries considérées ? De plus, la fonction qu'on est amené à faire correspondre à la série somme (ou produit) est-elle la somme (ou le produit) des fractions qui correspondent aux séries données ?

Ces questions fondamentales une fois résolues, on pourra s'en poser d'analogues relatives au quotient de deux séries, à la dérivée ou à l'intégrale d'une série.

La deuxième question trouve sa réponse dans le résultat suivant dû à Padé [17].

Proposition.

Si deus séries entières, convergentes ou divergentes, définissent chacune une fonction, la série convergente ou divergente obtenue en les ajoutant terme à terme (ou en les multipliant) définit elle-même une fonction qui est la somme (ou le produit) des deux premières.

Démonstration.

Soit T_1 un tableau qui définit une fonction y_1.

T_2 un tableau qui définit une fonction y_2.

$\frac{U_1}{U_2}$ la fraction de T_1 correspondant au couple (p,q)

$\frac{U_2}{V_2}$ la fraction de T_2 correspondant au couple (p,q)

On a donc :

$$y_1 = \frac{U_1}{V_1} + h_1 \, x^{p+q+1} + \dots$$

$$y_2 = \frac{U_2}{V_2} + h_2 \, x^{p+q+1} + \dots$$

on construit un tableau (T) de la manière suivante :

la fraction $\frac{U}{V}$ correspondant au couple (p,q) est celle qui correspond au couple (p,q) dans le tableau de fractions rationnelles approchées de la fonction $\frac{U_1}{V_1} + \frac{U_2}{V_2}$.

On a donc :

$$y_1 + y_2 = \frac{U_1}{V_1} + \frac{U_2}{V_2} + k \, x^{p+q+1} + \dots$$

Or

$$\frac{U_1}{V_1} + \frac{U_2}{V_2} = \frac{U}{V} + k' \, x^{p+q+1} + \dots$$

donc :

$$y_1 + y_2 = \frac{U}{V} + k'' \, x^{p+q+1} + \dots$$

Si l'on considère la première ligne horizontale de (T), elle renferme les polynômes qu'on obtient en ajoutant les polynômes correspondants dans T_1 et T_2 ; donc le tableau (T) est celui de la série somme des deux premières, et d'après la relation :

$$y_1 + y_2 = \frac{U}{V} + k'' x^{p+q+1} + \dots$$

la fonction que cette série somme définit est la somme des fonctions que définit chacune des deux premières séries.

La même démonstration peut être appliquée à la série produit.

cqfd.

Un cas particulier important de cette théorie nous est donné par les recherches de Stieltjes [47] que l'on va exposer dans ce qui suit.

III.2 - LA FRACTION CONTINUE DE STIELTJES.

a) Le développement en série de la fraction continue de Stieltjes.

Stieltjes considère la fraction continue suivante :

$$\frac{1|}{|a_1 z} + \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{|a_3 z} + \frac{1|}{|a_4} + \dots$$

où les a_i sont des réels positifs et $z \in C$.

En désignant par $(\frac{P_n}{Q_n})_{n\geq 1}$ la suite des réduites de cette fraction continue, on a la relation :

$$\frac{P_{n+1}(z)}{Q_{n+1}(z)} - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{(-1)^n}{Q_n(z).Q_{n+1}(z)}$$

où $Q_n.Q_{n+1}$ est un polynôme de degré n+1. Cette relation montre qu'en développant $\frac{P_n}{Q_n}$ et $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ suivant les puissances décroissantes de z, les n premiers termes de ces développements sont les mêmes, et l'on aura :

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{c_o}{z} - \frac{c_o}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{c_{n-1}}{z^n} + (-1)^n \frac{\alpha_n^n}{z^{n+1}} + \dots$$

On définit ainsi une suite de réels $c_o, c_1, c_2, \dots$, les c_i sont des fonctions des a_i. Stieltjes a donné dans [64], un algorithme pour le calcul des c_i en fonction des a_i qui est le suivant :

En posant $b_o = \frac{1}{a_1}$, $b_n = \frac{1}{a_n . a_{n+1}}$ pour $n \geq 1$ on calcule des quantités $\alpha_{i,k}$ et $\beta_{i,k}$ par :

$$\alpha_{o,o} = 1 \qquad \alpha_{i,o} = o \qquad i > o$$

$$\beta_{o,k} = \alpha_{o,k} + b_2\, \alpha_{1,k}$$

$$\beta_{1,k} = \alpha_{1,k} + b_4\, \alpha_{2,k}$$

$$\begin{cases} \beta_{2,k} = \alpha_{2,k} + b_6\, \alpha_{3,k} \\ \text{------------------} \\ \beta_{i,k} = \alpha_{i,k} + b_{2i+2} .\, \alpha_{i+1,k} \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_{o,k+1} = b_1\, \beta_{o,k} \\ \alpha_{1,k+1} = b_3\, \beta_{1,k} + \beta_{o,k} \\ \alpha_{2,k+1} = b_5\, \beta_{2,k} + \beta_{1,k} \\ \text{------------------} \\ \alpha_{i,k+1} = b_{2i+1}\, \beta_{i,k} + \beta_{i-1,k} \end{cases}$$

Il résulte qu'on a $\alpha_{i,k} = \beta_{i,k} = o$ pour $i > k$.

Et on calcule les c_n par l'une des formules :

$$c_{i+k} = b_o \alpha_{o,i} \alpha_{o,k} + b_o b_1 b_2 \alpha_{1,i} \alpha_{1,k} + b_o b_1 b_2 b_3 b_4 \alpha_{2,i} \alpha_{2,k} + \dots$$

$$c_{i+k+1} = b_o b_1 \alpha_{o,i} \alpha_{o,k} + b_o b_1 b_2 b_3 \beta_{1,i} \beta_{1,k} + \dots$$

Les seconds membres des deux égalités sont finies du fait que $\alpha_{i,k} = \beta_{i,k} = o$ pour $i > k$. Les coefficients c_n étant ainsi définis, nous dirons que la série :

$$\frac{c_o}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \dots$$

est le développement suivant les puissances décroissantes de la fraction continue.
Réciproquement, les coefficients de la fraction continue se calculent en fonctions des c_n de manière simple.

Stieltjes pose :

$$A_n = \begin{vmatrix} c_o & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_{2n-2} \end{vmatrix} \qquad A_o = 1$$

$$B_n = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_2 & \cdots & \cdots & c_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n-1} \end{vmatrix} \qquad B_o = 1$$

et il obtient les relations :

$$a_{2n} = \frac{A_n^2}{B_n . B_{n-1}} \qquad\qquad a_{2n+1} = \frac{B_n^2}{A_n . A_{n+1}}$$

D'où il résulte que les a_n sont positifs si tous les A_n sont de même signe ainsi que tous les B_n, or on a $A_o = B_o = 1$, donc, les a_n sont positifs si tous les A_n et les B_n sont positifs.
La condition $A_n > o$ et $B_n > o$ entraîne que $\forall p,n$, le déterminant :

$$\begin{vmatrix} c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{n+p} \\ c_{n+1} & c_{n+2} & \cdots & c_{n+p+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n+p} & \cdots & \cdots & c_{n+2p} \end{vmatrix}$$

est positif, donc :

$$\begin{vmatrix} c_n & c_{n+1} \\ c_{n+1} & c_{n+2} \end{vmatrix} > o \Longrightarrow \frac{c_{n+2}}{c_{n+1}} > \frac{c_{n+1}}{c_n}$$

deux cas peuvent se présenter :

ou bien $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ tend vers l'infini et alors la série $\frac{c_o}{z} - \frac{c_1}{c^2} + \ldots$ est toujours divergente, ou bien $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ tend vers une limite finie λ, et alors la série converge pour $|z| > \lambda$.

b) Cas où la partie réelle de z est positive.

Stieltjes commence par étudier le cas où $z = 1$.
Il pose $P_n = P_n(1)$ et $Q_n = Q_n(1)$, on aura donc :

$$\begin{cases} P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2} \\ Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \end{cases}$$

Ces relations montrent que :

$$P_1 < P_3 < P_5 < \dots$$

$$P_2 < P_4 < Q_6 < \dots$$

$$Q_1 < Q_3 < Q_5 < \dots$$

$$Q_2 < Q_4 < Q_6 < \dots$$

et si l'on considère la relation :

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{1}{Q_o Q_1} - \frac{1}{Q_1 Q_2} + \frac{1}{Q_2 Q_3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1} \cdot Q_n}$$

Les termes du second membre vont en décroissants, et on aura donc :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = L_1$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = L \qquad\qquad \text{avec } L_1 \geq L$$

Deux cas peuvent se présenter :

ou bien $\lim_{n \to \infty} Q_{n-1} \cdot Q_n = \infty$ et on aura $L_1 = L$

ou bien $\lim_{n \to \infty} Q_{n-1} \cdot Q_n = \lambda$ et on aura $L_1 = L + \frac{1}{\lambda}$

Supposons que la série $\sum\limits_1^{\infty} a_n$ soit divergente :

en remarquant que $Q_{2n+1} > a_1 + a_3 + \dots + a_{2n+1}$

et $Q_{2n} > a_1 \, (a_2 + a_4 + \dots + a_{2n})$.

On a donc l'une au moins des quantités Q_{2n}, Q_{2n+1} tend vers l'infini et on aura, d'après ce qui précède, $L_1 = L$.

Supposons que la série $\sum_1^\infty a_n$ soit convergente :

le produit $\prod_{i=1}^{\infty} (1+a_i)$ est aussi convergent, et en remarquant que :

$$Q_n + Q_{n-1} < (1+a_1)(1+a_2) \ldots (1+a_n)$$

on déduit que Q_{2n} et Q_{2n+1} tendront vers une limite finie et on aura $L_1 > L$.

L'étude du cas où $z = x \in \mathbb{R}^+$ se fait comme précédemment et on aura :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{2n+1}(x)}{Q_{2n+1}(x)} = F_1(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} = F(x)$$

avec $F_1 = F$ si la série Σa_n est divergente.

$F_1 \neq F$ si la série Σa_n est convergente.

Pour étendre ces résultats au cas des valeurs imaginaires de z, Stieltjes considère les relations :

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{a_2}{Q_o(z)\,Q_2(z)} + \frac{a_4}{Q_2(z)\,Q_4(z)} + \ldots + \frac{a_{2n}}{Q_{2n-2}(z)\,Q_{2n}(z)}$$

$$\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{1}{a_1 z} - \frac{a_3 z}{Q_1(z)\,Q_3(z)} - \frac{a_5 z}{Q_3(z)\,Q_5(z)} - \ldots - \frac{a_{2n+1} z}{Q_{2n-1}(z)\,Q_{2n+1}(z)}$$

Il s'agit donc de l'étude de la convergence des séries :

$$(1) \qquad \sum_{1}^{\infty} \frac{a_{2k}}{Q_{2k-2}(z)\, Q_{2k}(z)}$$

$$(2) \qquad \frac{1}{a_1 z} - \sum_{1}^{\infty} \frac{a_{2k+1} z}{Q_{2k-1}(z)\, Q_{2k+1}(z)}$$

Posons z = x+iy, x étant positif et considérons un domaine (S) dans lequel x admet une limite inférieure positive. Stieltjes montre que la série (1) est uniformément convergente dans (S), et comme les termes de cette série sont holomorphesdans (S), il s'ensuit que :

$$F(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)}$$

est aussi holomorphe dans (S).
De même pour la série (2), on a :

$$F_1(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)}$$

Ainsi, dans toute la partie du plan où Re(z) > o, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = F(z) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = F_1(z)$$

F et F_1 sont holomorphes, et comme précédemment :

$$F(z) = F_1(z) \quad \text{si} \quad \Sigma a_n \text{ est divergente}$$

$$F(z) \neq F_1(z) \quad \text{si} \quad \Sigma a_n \text{ est convergente.}$$

Pour étendre ces résultats au cas où la partie réelle de z est négative, Stieltjes a montré le résultat suivant :

Théorème.

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite de fonctions holomorphes dans un domaine quelconque* S *dont nous désignerons le contour par* s.
Nous supposerons que la série $\sum_1^\infty f_k(z)$ *est uniformément convergente à l'intérieur et sur le contour du disque* $D_1(z_o, R_1)$ *qu'on suppose inclu dans* S *et n'ayant pas de points commun avec* s. *Nous supposerons que :*

$$\exists L \text{ tel que } \forall n \quad |f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z)| < L \quad \forall z \in S' \subset S$$

$$S' \cap s = \emptyset$$

alors la série $F(z) = \sum_1^\infty f_k(z)$ *est uniformément convergente dans* S' *et représente une fonction holomorphe dans* S.

De plus, si $f_k(z) = \sum_{i=o}^\infty A_i^k z^i$

$$\text{alors } F(z) = \sum_{i=o}^\infty c_i z^i \quad \text{avec} \quad c_i = \sum_{k=1}^\infty A_i^k$$

En considérant la relation :

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_1^n \frac{a_{2k}}{Q_{2k-2}(z)\, Q_{2k}(z)}$$

Stieltjes pose

$$f_k(z) = \frac{a_{2k}}{Q_{2k-2}(z)\, Q_{2k}(z)}$$

d'où

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_1^n f_k(z).$$

De même pour les réduites d'ordre impair.

En appliquant le théorème précédent à la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ ainsi définit, Stieltjes arrive au résultat suivant :

Théorème.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = F(z) \qquad \forall z \notin \mathbb{R}^-$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = F_1(z) \qquad \forall z \notin \mathbb{R}^-$$

où F *et* F_1 *sont des fonctions holomorphes, et comme précédemment,* $F = F_1$ *si la série* $\sum_1^\infty a_n$ *est divergente,* $F \neq F_1$ *sinon.*

Le résultat fondamental de Stieltjes consiste à exprimer les fonctions F et F_1 sous forme d'intégrale définie et se résume dans le théorème suivant :

Théorème.

$$\forall z \notin \mathbb{R}^-$$

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u}$$

$$F_1(z) = \int_0^\infty \frac{d\Phi_1(u)}{z+u}$$

où Φ *et* Φ_1 *sont des fonctions réelles, positives et croissantes.*
Dans le cas où la série $\sum_1^\infty a_n$ *est divergente on a :*

$$F(z) = F_1(z) = \int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u}$$

avec $\Phi(0) = 0$ *et* $\Phi(\infty) = \frac{1}{a_1}$.

Remarque.

Une extension des résultats de Stieltjes a été faite par Van Vleck [58].

CHAPITRE III

SUR LA CONVERGENCE DES FRACTIONS CONTINUES

0 - INTRODUCTION.

L'étude de la convergence des fractions continues holoīdes est l'un des problèmes les plus difficiles, et l'on ne dispose pas de résultats assez suffisantes sur ce domaine.

Le fait que deux fractions continues holoīdes issues d'un même tableau de fractions rationnelles approchées peuvent avoir des domaines de convergence distincts et le fait qu'une fraction continue holoīde converge alors que la série associée diverge, montrent que le problème de la convergence des fractions continues holoīdes est l'un des plus délicat.

Padé a définit, par une analogie avec les séries entières dans [14] et [15] le disque de convergence d'une fraction continue, mais ceci n'avance pas beaucoup les choses, du fait qu'il rencontre de sérieux problèmes.
C'est ce qu'on a exposé au premier paragraphe de ce chapitre.
Dans le deuxième paragraphe, on étudie la convergence des fractions continues holoīdes de la fonction exponentielle ; c'est d'ailleurs la seule fonction pour laquelle l'étude de la convergence de la table ait été faite.

Le cas d'une fraction rationnelle est exposé au troisième paragraphe, l'étude de la convergence est établie pour une fraction n'ayant que des zéros et des pôles simples et tel q'uil n'existe pas de pôles ni de zéros ayant le même module [31] et [37]. Pour terminer ce paragraphe on a fait des remarques qui nous ont conduit a un algorithme pour le calcul des dénominateurs de la table de Padé d'une série entière. On a également signalé quelques résultats de convergence dû à De Montessus de Ballore et qu'on peut trouver dans [38] et [40].

Le quatrième paragraphe est consacré à l'étude faite par Padé dans [30], [32], [33], [34] et [36] sur le développement et la convergence des fractions continues de la fonction génératrice d'une quantité qui satisfait à une équation aux différences finies, linéaire et du premier ordre, à coefficients linéaires relativement à l'indice. On s'est intéressé au début de ce paragraphe aux résultats relatifs au développement en fraction continue canonique d'une fonction qui satisfait à une équation différentielle linéaire du premier ordre et à la convergence de celle-ci. Ces résultats ont fait l'objet des mémoires [11], [38], [39], [41] et [42] de Laguerre et de De Montessus de Ballore.

On verra le lien avec le travail de Padé. On a essayé de faire des remarques sur la méthode utilisée par Padé pour arriver aux résultats sur le développement et la convergence de la classe de fonctions qu'il a considéré dans le but d'élargir le champs d'application de cette méthode.

I - LA NOTION DU DISQUE DE CONVERGENCE.

Soit $C = a_1 + \frac{\alpha_2 |}{|a_2} + \frac{\alpha_3 |}{|a_3} + \ldots$ une fraction continue simple.

Définition.

On appelle disque de convergence de la fraction continue C, *noté* (D), *le disque de convergence de la série entière :*

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \alpha_2\alpha_3\alpha_4 \ldots \alpha_{i+1}$$

Soient n, N et M trois nombres positifs fixes, posons :

$$H = \{x \ / \ \forall \ell > M \text{ on a } n < |V_\ell| < N\}$$

où V désigne le dénominateur de la réduite de rang ℓ de la fraction continue C.

Théorème.

La fraction continue C *converge dans* H ∩ (D).

Démonstration.

Soient $\frac{U_p}{V_p}$ et $\frac{U_q}{V_q}$ deux réduites de C, on suppose que q > p

$$\frac{U_q}{V_q} = \frac{U_p}{V_p} + (-1)^{p+1} \frac{\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_{p+1}}{V_p . V_{p+1}} + \ldots + (-1)^q . \frac{\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_q}{V_{q-1} . V_q}$$

Pour $x \in H$, on a $n < |V_\ell| < M$, et donc les séries S et S' convergent et divergent en même temps. Si $x \in (D)$ c'est que S converge, donc pour $x \in (D) \cap H$, la fraction continue (C) converge.

cqfd.

Remarque.

De ce qui précède il résulte qu'une fraction continue (C) ne converge pas nécessairement en un point de son disque de convergence. Ceci ne peut se présenter que dans le seul cas suivant :

Proposition.

Soit $x \in (D)$. *Si l'on peut extraire de la suite* $(|V_{i(x)}|)_{i\geq 1}$ *une suite illimitée, ayant zéro pour limite, alors la fraction continue* (C) *peut être divergente au point* x.

De même, une fraction continue (C) ne diverge pas nécessairement à l'extérieur de son disuqe de convergence. Ceci ne peut se présenter que dans le seul cas suivant :

Proposition.

Soit $x \notin (D)$. *Si l'on peut extraire de la suite* $(|V_i(x)|)_{i\geq 1}$ *une suite illimitée, ayant l'infini pour limite, alors la fraction continue* (C) *peut être convergente en* x.

Remarque.

Le théorème précédent ne peut être intéressant que si l'on peut déterminer l'ensemble (H). Si par exemple la suite $(V_n)_{n\geq 1}$ tend uniformément vers une fonction connue dans une partie P du plan, alors, dans ce cas l'ensemble (H) est la partie P privée des zéros de la fonction limite.

Exemple.

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{Log} \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

Si on considère la fraction continue régulière de f dont les réduites sont placées sur la ligne horizontale de rang q+1. Pour $p \geq q-1$, la suite $(V_i)_{i\geq 1}$ est donnée par :

$$V_p = 1 - \frac{q}{1} \cdot \frac{2p+1}{2p+2q+1} x + \frac{q(q-1)}{1.2} \cdot \frac{(2p+1)(2p-1)}{(2p+2q+1)(2p+2q-1)} x^2 + \dots$$

$$+ \dots + (-1)^q \cdot \frac{q(q-1)\dots 1}{1.2\dots q} \cdot \frac{(2p+1)(2p-1)(2p-3)\dots(2p+3-2q)}{(2p+2q+1)(2p+2q-1)\dots(2p+3)} x^q$$

et $\forall x \in \mathbb{C}$ on a :

$$\lim_{p \to \infty} V_p(x) = (1-x)^q$$

La seule racine de $(1-x)^q$ est le point 1, donc (H) est tout le plan privé du point 1.

II - Convergence des fractions continues holoïdes de la fonction exponentielle.

Théorème.

Soit $V_{\mu\nu}$ le dénominateur de la réduite (μ,ν) de la fonction exponentielle.
Supposons que $\lim\limits_{\substack{\mu\to\infty \\ \nu\to\infty}} \frac{\nu}{\mu} = \omega$. Alors, $\forall x$, $V_{\mu\nu}(x)$ tend vers $e^{-\frac{x}{\omega+1}}$ quand on fait tendre μ et ν vers l'infini.
Si on fait tendre μ vers l'infini, ν restant constant, le résultat subsiste avec $\omega = o$.
Si on fait tendre ν vers l'infini, μ restant constant, le résultat subsiste toujours avec $\omega = \infty$.

Démonstration.

$$V_{\mu\nu} = \sum_{h=o}^{\mu} (-1)^h \cdot \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-h+1)}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)\dots(\mu+\nu-h+1)} \cdot \frac{x^h}{h!}$$

Or si $\lim\limits_{\substack{\mu\to\infty \\ \nu\to\infty}} \frac{\mu}{\nu} = \omega$, alors en utilisant l'identité :

$$\frac{\mu-i}{\mu+\nu-i} = \frac{\mu}{\mu+\nu} - \frac{i\nu}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-i)}$$

On déduit que $\lim\limits_{\substack{\mu\to\infty \\ \nu\to\infty}} \frac{\mu-i}{\mu+\nu-i} = \frac{1}{\omega+1}$ et donc le $(h+1)^{\text{ième}}$ terme de $V_{\mu\nu}$ tend vers :

$$(-1)^h \cdot \frac{x^h}{h!(\omega+1)^h}$$

et par un raisonnement classique on montre que :

$V_{\mu\nu}$ tend vers :

$$\sum_{h=o}^{\infty} (-1)^h \cdot \frac{x^h}{(\omega+1)^h} = e^{-\frac{x}{\omega+1}}$$

Remarque.

Si on désigne par $U_{\mu\nu}$ le numérateur de la réduite (μ,ν) de la fonction exponentielle, alors, avec les mêmes conditions que celles du théorème précédent, on peut montrer que $U_{\mu\nu}(x)$ tend vers $e^{\frac{\omega x}{\omega+1}}$ et ceci quelque soit x, d'où le résultat :

Théorème.

Toutes les fractions continues holoïdes de la fonction e^x *convergent vers cette fonction. La convergence à lieu dans tout le plan.*

III - CAS D'UNE FRACTION RATIONNELLE.

III.1 - EXPRESSION DU DENOMINATEUR DE LA REDUITE (μ,ν) D'UNE FRACTION RATIONNELLE.

Soit $f(x) = c_o + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$

Pour une réduite normale $\frac{U_{\mu\nu}}{V_{\mu\nu}}$ de f, $U_{\mu\nu}$ de degré ν et $V_{\mu\nu}$ de degré ν, on a la relation suivante :

$$V_{\mu\nu} f(x) - U_{\mu\nu} = x^{\mu+\nu+1} \cdot R_{\mu\nu}(x) \tag{1}$$

où $R_{\mu\nu}$ est une série entière telle que $R_{\mu\nu}(o) \neq o$.

Considérons deux suites $(T_p)_{p\geq o}$ et $(Z_p)_{p\geq o}$ définies par :

$$T_p = c_p + x\, T_{p+1} \qquad \text{avec } T_o = f(x) \tag{2}$$

$$Z_p = c_p - x\, c_{p+1} \tag{3}$$

on a donc :

$$T_p = c_p + c_{p+1}\, x + c_{p+2}\, x^2 + \dots$$

si l'on pose $V_{\mu\nu}(x) = 1 + \ell_1 x + \ell_2 x^2 + \dots + \ell_\mu x^\mu$, on aura :

$$R_{\mu\nu}(x) = T_{\mu+\nu+1}(x) + \ell_1 T_{\mu+\nu}(x) + \dots + \ell_\mu T_{\nu+1}(x).$$

Or les coefficients $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_\mu$ sont déterminés par les équations :

$$\begin{cases} c_{i+1} + c_i \ell_1 + \dots + c_{i-\mu+1}\ell_\mu = 0 \\ \quad i = \nu, \dots, \nu+\mu-1 \end{cases}$$

avec $c_j = o$ pour $j < o$.

En posant :

$$\Delta_{\mu,\nu}(c) = \begin{vmatrix} c_{\nu} & c_{\nu-1} & \cdots & c_{\nu-\mu+1} \\ c_{\nu+1} & c_{\nu} & \cdots & c_{\nu-\mu+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{\nu+\mu-1} & & & c_{\nu} \end{vmatrix}$$

on aura la relation :

$$\Delta_{\mu,\nu}(c).R_{\mu\nu} = (-1)^{\mu} \begin{vmatrix} c_{\nu+1} & c_{\nu} & \cdots & c_{\nu-\mu+1} \\ c_{\nu+2} & c_{\nu+1} & \cdots & c_{\nu-\mu+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{\nu+\mu} & c_{\nu+\mu+1} & \cdots & c_{\nu} \\ T_{\mu+\nu+1} & T_{\mu+\nu} & \cdots & T_{\nu+1} \end{vmatrix}$$

Or on a : $T_p = c_p + x\,T_{p+1}$, donc :

$$\Delta_{\mu,\nu}(c).R_{\mu\nu} = (-1)^{\mu} \begin{vmatrix} T_{\nu+1} & T_{\nu} & \cdots & T_{\nu-\mu+1} \\ T_{\nu+2} & T_{\nu+1} & \cdots & T_{\nu-\mu+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T_{\nu+\mu+1} & T_{\nu+\mu} & \cdots & T_{\nu+1} \end{vmatrix}$$

qu'on peut encore écrire sous la forme :

$$\boxed{\Delta_{\mu,\nu}(c)\ R_{\mu\nu}(x) = (-1)^{\mu}.\Delta_{\mu+1,\nu+1}(T(x))} \qquad (4)$$

de même on obtient :

$$\boxed{\Delta_{\mu,\nu}(c).V_{\mu\nu} = \Delta_{\mu\nu}(Z)} \tag{5}$$

en remarquant que :

$$\Delta_{\mu,\nu}(c).V_{\mu\nu} = (-1)^{\mu} \begin{vmatrix} c_{\nu+1} & c_{\nu} & ------ & c_{\nu-\mu+1} \\ c_{\nu+2} & c_{\nu+1} & ------ & c_{\nu-\mu+2} \\ -- & -- & -- & -- \\ -- & -- & -- & -- \\ c_{\nu+\mu} & c_{\nu+\mu-1} & ------- & c_{\nu} \\ 1 & x & ------- & x^{\mu} \end{vmatrix}$$

et en se servant de :

$$Z_p = c_p - x\, c_{p+1}.$$

Remarquons que les relations (4) et (5) sont valables pour une fonction quelconque, la seule hypothèse est que la réduite (μ,ν) soit normale.
Si maintenant on suppose que f est une fraction rationnelle dont les degrés du numérateur et du dénominateur sont respectivement n et m, alors, en supposant que le dénominateur de f n'admet que des racines simples que l'on désigne par $1/\alpha_1$, $1/\alpha_2,\ldots,1/\alpha_m$; on aura :

$$f(x) = a_o + a_1 x + \ldots + a_{n-m}\, x^{n-m} + \frac{M_1}{1-\alpha_1 x} + \frac{M_2}{1-\alpha_2 x} + \frac{M_m}{1-\alpha_m x}$$

qui n'est autre que la décomposition de f en éléments simples.

Théorème. *Si on désigne par* $V_{\mu\nu}$ *le dénominateur de la réduite* (μ,ν) *de la fraction rationnelle* f, $R_{\mu\nu}$ *étant le reste défini par la relation* (1), *alors* :

$$V_{\mu\nu}(x) = \frac{\sum M_1M_2\ldots M_\mu(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\mu)^{\nu-\mu+1}.\Delta^2(\alpha_1,\ldots,\alpha_\mu)(1-\alpha_1x)\ldots(1-\alpha_\mu x)}{\sum M_1M_2\ldots M_\mu(\alpha_1\ldots\alpha_\mu)^{\nu-\mu+1}\ \Delta^2(\alpha_1,\ldots,\alpha_\mu)} \qquad (6)$$

où la somme $\sum$ *porte sur les indices* 1, 2,...,μ, *en prenant toutes les combinaisons* μ *à* μ *des indices* 1, 2,...,m.

$\Delta(\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_\mu)$ *désigne le produit :*

$$(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)\ldots(\alpha_\mu-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)\ldots(\alpha_\mu-\alpha_{\mu-1})$$

et le reste $R_{\mu\nu}$ *est donné par l'expression :*

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{\phi(x)}\ .\ \frac{\sum M_1\ldots M_{\mu+1}(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\mu+1})^{\nu-\mu+1}\Delta^2(\alpha_1,\ldots,\alpha_{\mu+1})(1-\alpha_{\mu+2}x)\ldots(1-\alpha_m x)}{\sum M_1M_2\ldots M_\mu(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\mu)^{\nu-\mu+1}\Delta^2(\alpha_1,\ldots,\alpha_\mu)} \qquad (7)$$

où ϕ *désigne le dénominateur de* f.

La somme $\sum$ *du numérateur porte sur les indices* 1, 2,...,μ+1, *en prenant toutes les combinaisons* μ+1 *à* μ+1 *des indices* 1, 2,...,m. *La somme* $\sum$ *du dénominateur est définie comme précédemment.*

Démonstration.

$$f(x) = c_o + c_1x + c_2x^2 + \ldots$$

$$f(x) = a_o + a_1x + \ldots + a_{n-m}\, x^{n-m} + \frac{M_1}{1-\alpha_1x} + \ldots + \frac{M_m}{1-\alpha_m x}$$

L'identité :

$$\frac{M_i}{1-\alpha_ix} = M_i(1 + \alpha_ix + \ldots + \alpha_i^{h-1}x^{h-1}) + \frac{M_i\alpha_i^h}{1-\alpha_ix}\, x^h$$

donne :

$$c_p = a_p + M_1\,\alpha_1^p + \ldots + M_m\,\alpha_m^p$$

$$T_p = \frac{M_1}{1-\alpha_1 x}\alpha_1^p + \dots + \frac{M_m}{1-\alpha_m x}\alpha_m^p$$

$$Z_p = c_p - x\,c_{p+1} = M_1(1-\alpha_1 x)\alpha_1^p + \dots + M_m(1-\alpha_m x)\alpha_m^p$$

ceci en supposant que $p \geq n-m$.
Les trois égalités précédentes permettent de calculer les déterminants $\Delta_{\mu,\nu}(c)$, $\Delta_{\mu,\nu}(T)$ et $\Delta_{\mu,\nu}(Z)$ en supposant que $\nu-\mu \geq n-m$.
En remplaçant dans $\Delta_{\mu,\nu}(c)$ les coefficients c_i par les expressions qu'on vient de trouver, on peut voir que :

$$\Delta_{\mu,\nu}(c) = \begin{vmatrix} M_1\alpha_1^{\nu-\mu+1} & \cdots & M_m\alpha_m^{\nu-\mu+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ M_1\alpha_1^{\nu} & \cdots & M_m\alpha_m^{\nu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1^{\nu-1} & \cdots & \alpha_1^{o} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_m^{\mu-1} & \cdots & \alpha_m^{o} \end{vmatrix}$$

on arrive ainsi à exprimer $\Delta_{\mu,\nu}(c)$ sous la forme d'un produit de deux déterminants faciles à calculer, et en désignant par $\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_\mu)$ le produit :

$$(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)\dots(\alpha_\mu-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)\dots(\alpha_\mu-\alpha_{\mu-1})$$

on aura :

$$\Delta_{\mu,\nu}(c) = (-1)^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}} \sum M_1 M_2 \dots M_\mu\,(\alpha_1\alpha_2,\dots,\alpha_\mu)^{\nu-\mu+1}\,\Delta^2(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_\mu)$$

où la somme $\sum$ porte sur les indices $\{1, 2,\dots,\mu\}$ comme il est indiqué dans l'énoncé du théorème.
Les déterminants $\Delta_{\mu,\nu}(T)$ et $\Delta_{\mu,\nu}(Z)$ se déduisent de $\Delta_{\mu,\nu}(c)$ en remplaçant M_i respectivement par $M_i(1-\alpha_i x)$ et $\frac{M_i}{1-\alpha_i x}$, on obtient :

$$\Delta_{\mu,\nu}(Z) = (-1)^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}} \sum M_1 M_2 \ldots M_\mu \, (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\mu)^{\nu-\mu+1} \, \Delta^2(\alpha_1,\ldots,\alpha_\mu)(1-\alpha_1 x)\ldots(1-\alpha_\mu x)$$

$$\Delta_{\mu,\nu}(T) = (-1)^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}} \sum M_1 M_2 \ldots M_\mu (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\mu)^{\nu-\mu+1} \, \Delta^2(\alpha_1,\ldots,\alpha_\mu) \, \frac{1}{(1-\alpha_1 x)\ldots(1-\alpha_\mu x)}$$

En remplaçant ces expressions dans les relations (4) et (5) on aura le résultat.

Remarque.

Dans le chapitre V, on va utiliser les relations (6) et (7) pour donner une application, due à Padé, aux polynômes de la suite de Sturm.

II.2 - CONVERGENCE DE LA TABLE DES REDUITES D'UNE FRACTION RATIONNELLE.

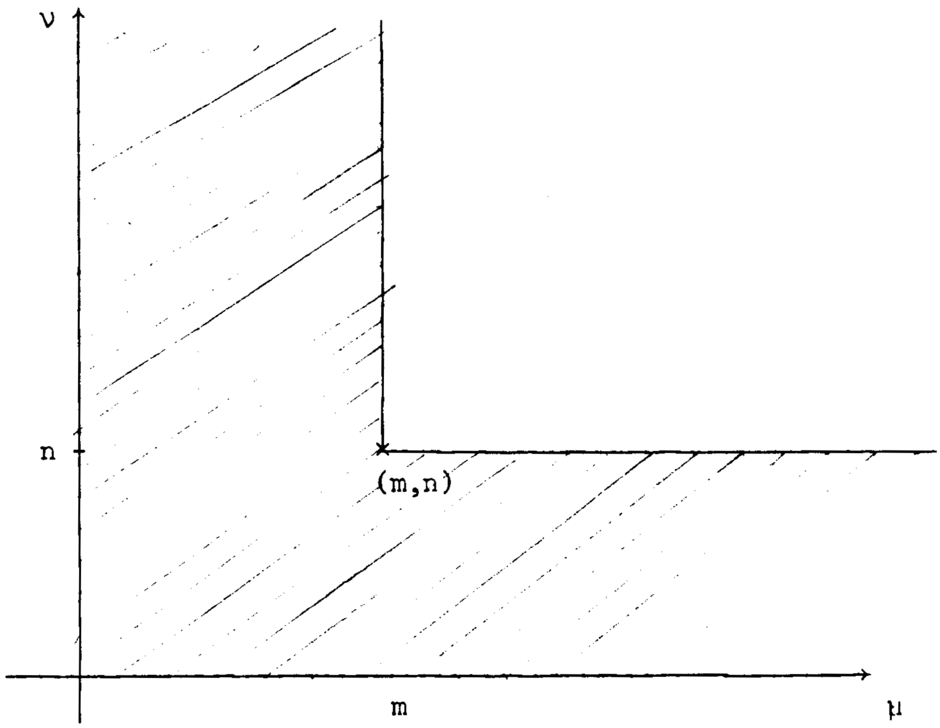
Pour tout point (μ,ν) tel que $\mu \geq m$ et $\nu \geq n$, la réduite correspondant au point (μ,ν) est égal à f. Donc toutes les fractions continues régulières de f donnent, à partir d'un certain rang la même réduite qui est f, à l'exception de $m+n$ d'entre elles qui correspondent à des points représentatifs placés sur les droites :

$$\mu = 0,\ 1,\ 2,\ldots,m-1$$

$$\nu = 0,\ 1,\ 2,\ldots,n-1.$$

(voir schéma).

Ces fractions continues ont leurs réduites correspondant à des points représentatifs placés sur la partie hachurée du schéma suivant :



Les fractions continues régulières qui donnent à partir d'un certain rang la même réduite sont donc finies et convergent vers f.
Il reste à étudier les m+n fractions régulières qui sont illimitées.

On suppose que f admet m pôles $1/\alpha_1$, $1/\alpha_2,\dots,1/\alpha_m$ et n zéro $1/\beta_1$, $1/\beta_2,\dots,1/\beta_n$ tels que :

$$|\alpha_i| \neq |\alpha_j| \qquad i \neq j$$

$$|\beta_i| \neq |\beta_j| \qquad i \neq j$$

Désignons par :

$$D_i = \{x \ / \ |x| < 1/|\alpha_{i+1}|\} \qquad i = o,\dots,m-1$$

$$D'_i = \{x/ \ |x| < 1/|\beta_{i+1}|\} \qquad i = o,\dots,n-1.$$

On suppose de plus que toutes les réduites de f sont normales à l'exception de celles qui sont égales à f.
Dans ces conditions on a le théorème suivant :

Théorème.

Désignons par (c_i) *(respectivement* (c'_i)*) la fraction continue holoïde régulière dont les points représentatifs sont sur la droite* $\mu = i$ *(resp.* $\nu = i$*).*

Pour tout $i = 0, 1, \ldots, n-1$ *; la fraction continue* (c_i) *converge vers* f *dans le disque* D_i *privé de tous les pôles de* f *qui y sont contenus, et diverge en dehors de ce disque.*

Pour tout $i = 0, 1, \ldots, n-1$ *; la fraction continue* (c'_i) *converge vers* f *dans le disque* D'_i *privé de tous les zéros de* f *qui y sont contenus, et diverge en dehors de ce disque.*

Démonstration.

Considérons la fraction continue régulière (c_i), on a donc $\mu = i$ et dès que ν dépasse une certaine valuer, la condition $\nu - \mu \geq n-m$ est vérifiée et les formules (6) et (7) sont applicables.

Supposons qu'on ait :

$$|\alpha_1| > |\alpha_2| > \ldots > |\alpha_\mu| > |\alpha_{\mu}\ \ | > \ldots > |\alpha_m|.$$

Si l'on divise les deux membres de (6) par le produit $(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_\mu)^{\nu-\mu+1}$ et si l'on fait tendre ν vers l'infini, le numérateur de (6) tend vers :

$$M_1 M_2 \ldots M_\mu \, \Delta^2(\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu)\,(1 - \alpha_1 x) \ldots (1 - \alpha_\mu x)$$

et le dénominateur vers :

$$M_1 M_2 \ldots M_\mu \, \Delta^2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu).$$

On aura donc :

$$\lim_{\nu \to \infty} V_{\mu\nu}(x) = (1 - \alpha_1 x)(1 - \alpha_2 x) \ldots (1 - \alpha_\mu x).$$

Si l'on considère le produit $x^{\mu+\nu+1}.R_{\mu\nu}$, en utilisant la même technique, on en conclut que ce produit ne diffère que par un facteur de l'expression :

$$\frac{x^{\mu+\nu+1}}{\phi(x)} \cdot \frac{(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{\mu+1})^{\nu-\mu+1}}{(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_\mu)^{\nu-\mu+1}} = \frac{x^2}{\phi(x)} (\alpha_{\mu+1}x)^{\nu-\mu+1}$$

on aura donc pour les valeurs de x telles que $\phi(x) \neq o$ et $|\alpha_{\mu+1}x| < 1$:

$$\lim_{\nu\to\infty} x^{\mu+\nu+1} R_{\mu\nu} = o$$

or l'ensemble $\{x \ / \ \phi(x) \neq o \text{ et } |\alpha_{\mu+1}x| < 1\}$ est égal à D_μ privé de tous les pôles $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2},\ldots,\frac{1}{\alpha_\mu}$.

Pour ces mêmes points on a :

$$f(x) - \frac{U_{\mu\nu}(x)}{V_{\mu\nu}(x)} = \frac{x^{\mu+\nu+1} R_{\mu\nu}}{V_{\mu\nu}}$$

donc

$$\lim_{\nu\to\infty} f(x) - \frac{U_{\mu\nu}(x)}{V_{\mu\nu}(x)} = o$$

ce qui montre que la fraction continue (c_μ) converge vers f dans D_μ, privé des pôles $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2},\ldots,\frac{1}{\alpha_\mu}$ et diverge en dehors de ce disque.

L'étude de la fraction $(c_i^!)$ se rattache à l'étude précédente, en effet, en remarquant que si $\frac{U_{\mu\nu}}{V_{\mu\nu}}$ est la réduite qui, pour une fonction y quelconque correspond au point (μ, ν), $\frac{V_{\mu\nu}}{U_{\mu\nu}}$ sera la réduite qui correspond au couple (ν,μ) pour la fonction $\frac{1}{y}$. Et les résultats précédents subsistent, il suffit donc de remplacer les pôles par les zéros.

cqfd.

Remarques.

Les autres fractions continues holoïdes auxquelles donne naissance la table des réduites de f étant, ou bien finies et égales à f, ou bien illimitées mais donnant alors, à partir d'un certain rang, les mêmes réduites que les fractions régulières illimitées, la convergence de ces fractions continues est donc prouvée par le théorème précédent.

III.3 - RESULTATS DE DE MONTESSUS SUR LA CONVERGENCE.

Les résultats qu'on vient d'énoncer, relatifs à la convergence des fractions continues holoïdes d'une fraction rationnelle dont les réduites sont placées sous une ligne ou sur une colonne de la table de Padé, sont des cas particuliers des résultats de De Montessus de Ballore [38] et [40].

En effet, si on désigne par : $\left(\frac{U_{\mu\nu}}{V_{\mu\nu}}\right)_{\nu\geq o}$ la suite des fractions qui sont placées sur la ligne de rang μ de la table de Padé, on a le résultat suivant dû à De Montessus :

Théorème.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu, \alpha_{\mu+1}, \ldots$ *les pôles de la fonction* Z *représentée par la série* $\sum_{n=o}^{\infty} S_n z^n$.

Supposons que l'on ait :

$$|\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \ldots \leq |\alpha_p| < |\alpha_{p+1}| \leq |\alpha_{p+2}| \quad \ldots$$

alors le disque de convergence de la série :

$$\frac{U_{\mu o}}{V_{\mu o}} + \left(\frac{U_{\mu 1}}{V_{\mu 1}} - \frac{U_{\mu o}}{V_{\mu o}}\right) + \left(\frac{U_{\mu 2}}{V_{\mu 2}} - \frac{U_{\mu 1}}{V_{\mu 1}}\right) + \ldots$$

a pour rayon $|\alpha_{\mu+1}|$.

Pour la démonstration de ce théorème et de ceux qui vont suivre, De Montessus a utilisé les résultats d'Hadamard [7] sur les séries entières. Hadamard avait montré que si les pôles de la fonction représentée par la série $\sum_{o}^{\infty} c_n z^n$ vérifient les inégalités du théorème précédent, alors :

$$V_\mu = \lim_{\nu\to\infty} V_{\mu\nu} = (1 - \frac{z}{\alpha_1})(1 - \frac{z}{\alpha_2}) \ldots (1 - \frac{z}{\alpha_\mu}).$$

Théorème.

Si pour une valeur déterminée z_o de la variable, les suites $(\frac{U_{\mu\nu}}{V_{\mu\nu}})_{\nu\geq o}$ μ étant fixé et $(\frac{U_{\mu'\nu}}{V_{\mu'\nu}})_{\nu\geq o}$ μ' étant fixé, tendent l'une et l'autre vers des limites déterminées, alors ces limites sont identiques.

Dans le cas où les réduites sont constituées par la suite des fractions rationnelles $(\frac{U_{\mu\nu}}{V_{\mu\nu}})_{\mu\geq o}$ ν étant fixé, de la colonne verticale de la table de Padé de rang ν, on a le théorème suivant :

Théorème.

La suite des réduites constituant la colonne de rang ν de la table de Padé d'une série entière, se comporte comme la suite des réduites formant la ligne horizontale de rang ν, à cette différence près qu'ici les cercles de convergences sont les cercles passants par les zéros de la fonction représentée par la série et qu'en dehors de ces cercles, la suite des réduites tend vers zéro, au lieu de tendre vers l'infini.

Remarques.

Les relations (4) et (5) sont intéressantes et peuvent donner lieu à d'autres relations remarquables. Un exemple simple nous est fourni par la relation (10) du sous-paragraphe suivant où en se servant d'une relation entre les déterminants de Hankel, on pu obtenir un algorithme pour le calcul des dénominateurs des approximants de Padé. Ce calcul peut être intéressant pour obtenir des quantités qui s'expriment par des déterminants de ce genre.

III.4 - ALGORITHME POUR LE CALCUL DES DENOMINATEURS DES REDUITES DE LA TABLE DE PADE.

Remarquons que :

$$\Delta_{\mu\nu}(S) = \begin{vmatrix} S_\nu & S_{\nu-1} & --- & S_{\nu-\mu+1} \\ \hline S_{\nu+\mu+1} & & -------- & S_\nu \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}} \begin{vmatrix} S_{\nu-\mu+1} & S_{\nu-\mu+2} & --- & S_\nu \\ \hline S_\nu & S_{\nu+1} & ----- & S_{\nu+\mu+1} \end{vmatrix}$$

donc $\Delta_{\mu\nu}(S) = (-1)^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}} H_\nu^{(\mu-\mu+1)}(S)$ en utilisant la relation suivante entre les déterminants de Hankel :

$$H_k^{(n+2)} H_k^{(n)} - (H_k^{(n+1)})^2 = H_{k+1}^{(n)} H_{k-1}^{(n+2)}$$

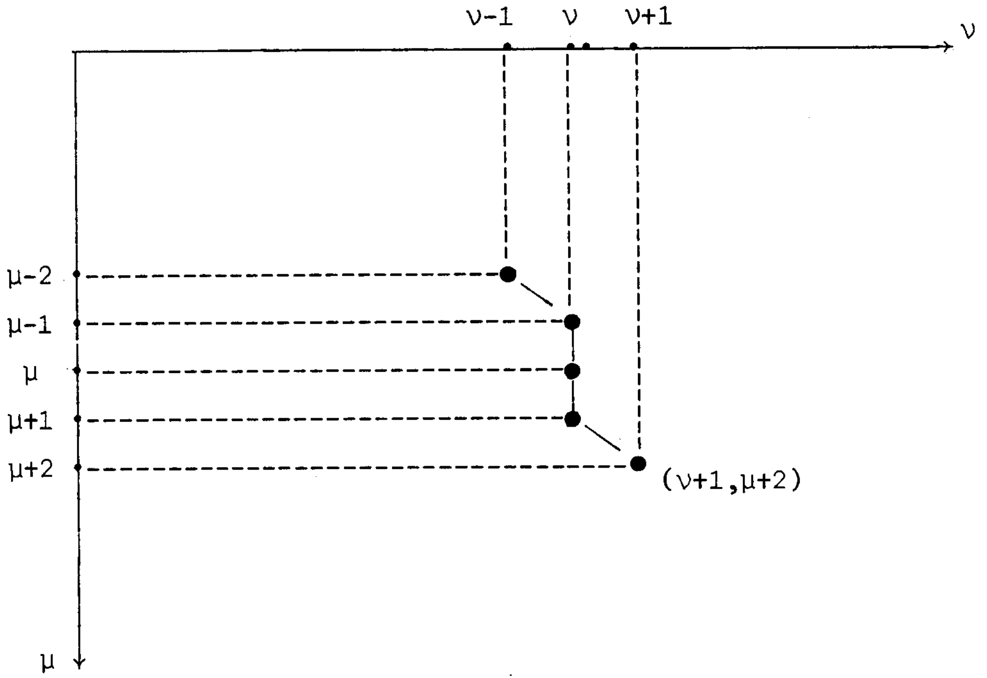
on trouve une relation analogue entre les $\Delta_{\mu,\nu}$.
On aura :

(8) $$\Delta_{\mu+1,\nu}(Z)\, \Delta_{\mu-1,\nu}(Z) - (\Delta_{\mu,\nu}(Z))^2 = \Delta_{\mu+2,\nu+1}(Z)\, \Delta_{\mu-2,\nu-1}(Z)$$

et

(9) $$\Delta_{\mu+1,\nu}(S)\, \Delta_{\mu-1,\nu}(S) - (\Delta_{\mu,\nu}(S))^2 = \Delta_{\mu+2,\nu+1}(S)\, \Delta_{\mu-2,\nu-1}(S).$$

Si on place les $\Delta_{\mu,\nu}$ dans un tableau à double entrée :



On remarque que $\Delta_{(\mu+2,\nu+2)}$ se calcule en fonction de quatre éléments de la table placés dans la figure précédente.

La relation (10) donne :

$$\Delta_{\mu+2,\nu+1}(Z) = \frac{\Delta_{\mu+1,\nu}(Z)\ \Delta_{\mu-1,\nu}(Z) - [\Delta_{\mu,\nu}(Z)]^2}{\Delta_{\mu-2,\nu-1}(Z)}$$

Remarquons que $\Delta_{\mu,\nu}(S)$ est une suite de réels et ses éléments peuvent être calculés par la relation (9).

Posons :

$$K_{\mu,\nu} = 1/\Delta_{\mu,\nu}(S)$$

on obtient alors :

$$C_{\mu,\nu}\ V_{\mu+2,\nu+1} = \frac{(K_{\mu\nu})^2\ K_{\mu+1,\nu}\ K_{\mu-1,\nu}\ [\Delta_{\mu+1,\nu}(Z)\ \Delta_{\mu-1,\nu}(Z) - [\Delta_{\mu,\nu}(Z)]^2]}{K_{\mu-2,\nu-1}\ \Delta_{\mu+2,\nu+1}}$$

où

$$C_{\mu\nu} = \frac{(K_{\mu\nu})^2 \; K_{\mu+1,\nu} \; K_{\mu-1,\nu}}{K_{\mu-2,\nu-1} \; K_{\mu+2,\nu+1}}$$

on aura donc :

$$(10) \qquad \boxed{C_{\mu\nu} \; V_{\mu+2,\nu+1} = \frac{(K_{\mu,\nu})^2 \; V_{\mu+1,\nu} \; V_{\mu-1,\nu} - K_{\mu+1,\nu} \; K_{\mu-1,\nu} \; (V_{\mu\nu})^2}{V_{\mu-2,\nu-1}}}$$

Remarquons que si on place les $V_{\mu,\nu}$ dans une table à double entrée, on aura la même disposition que pour les $\Delta_{\mu,\nu}$ si on s'intéresse aux éléments qui figurent dans (11).
Par ce procédé on arrivé à remplir la moitié supérieure de la table ; il reste à calculer les quatres premières lignes de la table.
Pour la première ligne on a :

$$V_{o,\nu} = 1 \qquad\qquad \text{pour } \nu \geq o$$

CALCUL DES ELEMENTS DE LA DEUXIEME LIGNE.

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_{1,\nu}(S) = S_\nu \\ \\ \Delta_{1,\nu}(Z) = Z_\nu = S_\nu - xS_{\nu+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{V_{1,\nu} = 1 - x\,\frac{S_{\nu+1}}{S_\nu}}$$

Pour $\nu \geq 1$

CALCUL DES ELEMENTS DE LA TROISIEME LIGNE.

$$\Delta_{2,\nu}(S) = \begin{vmatrix} S & S_{\nu-1} \\ S_{\nu+1} & S \end{vmatrix} = S_\nu^2 - S_{\nu-1}\, S_{\nu+1}$$

$$\Delta_{2,\nu}(Z) = \begin{vmatrix} Z_\nu & Z_{\nu-1} \\ Z_{\nu+1} & Z_\nu \end{vmatrix} = (S_{\nu+1} - S_\nu S_{\nu+2})x^2 + (S_{\nu-1}S_{\nu+2} - S_\nu S_{\nu+1})x + S_\nu^2 \; - S_{\nu-1}S_{\nu+}$$

d'où

$$\boxed{V_{2,\nu}(x) = \frac{S_{\nu+1} - S_\nu S_{\nu+2}}{S_\nu^2 - S_{\nu-1}S_{+1}}\, x^2 + \frac{S_{\nu-1}S_{\nu+2} - S_\nu S_{\nu+1}}{S_\nu^2 - S_{\nu-1}S_{\nu+1}}\, x + 1}$$

Pour $\nu \geq 2$.

CALCUL DES ELEMENTS DE LA QUATRIEME LIGNE.

$$\Delta_{3,\nu}(S) = \begin{vmatrix} S_\nu & S_{\nu-1} & S_{\nu-2} \\ S_{\nu+1} & S_\nu & S_{\nu-1} \\ S_{\nu+2} & S_{\nu+1} & S_\nu \end{vmatrix} = S_\nu(S_\nu^2 - S_{\nu-1}S_{\nu+1}) - S_{\nu-1}(S_\nu S_{\nu+1} - S_{\nu-1}S_{\nu+2} + S_{\nu-2}(S_{\nu+1}^2 - S_\nu S_{\nu+2})$$

$$\Delta_{3,\nu}(Z) = \begin{vmatrix} Z_\nu & Z_{\nu-1} & Z_{\nu-2} \\ Z_{\nu+1} & Z_\nu & Z_{\nu-1} \\ Z_{\nu+2} & Z_{\nu+1} & Z_\nu \end{vmatrix} = Z_\nu(Z_\nu^2 - Z_{\nu-1}Z_{\nu+1}) - Z_{\nu-1}(Z_\nu Z_{\nu+1} - Z_{\nu-1}S_{\nu+2} + Z_{\nu-2}(Z^2{}_{\nu+1} - Z_\nu Z_{\nu+2})$$

et $$V_{3,\nu}(x) = \Delta_{3,\nu}(Z) / \Delta_{3,\nu}(S)$$

IV - CONVERGENCE DES DÉVELOPPEMENTS EN FRACTIONS CONTINUES D'UNE CERTAINE CATÉGORIE DE FONCTIONS.

IV.1 - RESULTATS DE LAGUERRE SUR LE DEVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE CANONIQUE D'UNE FONCTION QUI SATISFAIT A UNE EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE DU PREMIER ORDRE.

Laguerre, dans son mémoire "*Sur la réduction en fraction continue d'une fonction qui satisfait à une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les coefficients sont rationnels*" [11], s'est intéressé au développement en fraction continue d'une série Z, ordonnée suivant les puissances décroissantes de la variable, et qui vérifie l'équation :

$$WZ' = 2VZ + U \qquad (1)$$

où U, V et W sont des polynômes.

La méthode indiquée par Laguerre pour arriver au développement en fraction continue de la série Z reste incomplète car elle fait intervenir des polynômes θ_n et K_n dont la détermination n'a pas été complètement faite. Cependant, Laguerre donne des relations de récurrences entre ces polynômes et indique comment on peut déterminer complètement l'équation différentielle à laquelle satisfait le dénominateur de la réduite d'ordre n. Les applications qu'il a donné vérifient toutes l'équation particulière :

$$(az+b)(cz+d)\, Z'(z) = (pz+q)\, Z(z) + \pi(z) \qquad (2)$$

où a, b, c, d, p et q sont des constantes, et $\pi(z)$ un polynôme quelconque.

De Montessus de Ballore, dans [38] et [42], a étudié les problèmes de développement et de convergence d'une fonction qui satisfait à l'équation (2) et, ceci, en suivant les indications données par Laguerre dans [11].

Dans ce sous-paragraphe, on va exposer les résultats auxquels Laguerre est arrivé à propos du développement en fraction continue d'une fonction satisfaisant à une équation de la forme (1).

Dans ce qui suit, on appellera degré d'un polynôme ou d'une série ordonnée suivant les puissances décroissantes, le degré de son premier terme. Si une telle série commence par un terme de degré -n, elle sera notée $(\frac{1}{x^n})$, abstraction faite de ses coefficients.

Soit $\frac{\phi_n}{f_n}$ la réduite d'ordre n du développement canonique de la série Z, on aura donc :

$$Z - \frac{\phi_n}{f_n} = (\frac{1}{x^{2n+\rho+1}}) \qquad \text{où } \rho \in \mathbb{N}$$

d'où

$$Z' = \frac{\phi'_n f_n - f'_n \phi_n}{f_n^2} + (\frac{1}{x^{2n+\rho+2}})$$

En remplaçant Z et Z' par les expressions ci-dessus dans (1), on obtient :

$$Uf_n^2 + 2V\phi_n f_n - W(\phi'_n f_n - f'_n \phi_n) = f_n^2 \left[V(\frac{1}{x^{2n+\rho+1}}) + W\,(\frac{1}{x^{2n+\rho+2}}) \right]$$

Le premier membre de cette égalité est un polynôme, il en est de même du second. Si donc, on désigne par μ le degré de $V.(\frac{1}{x}) + W.(\frac{1}{x^2})$, le second membre sera de degré μ-ρ et l'on peut écrire l'équation précédente sous la forme :

$$Uf_n^2 + 2V\phi_n f_n - W(\phi'_n f_n - f'_n \phi_n) = A_n \theta_n \tag{3}$$

où A_n est une constante qui dépend de n et θ_n un polynôme de degré μ-ρ.

Récirpoquement, si l'on peut déterminer deux polynômes ϕ_n et f_n tels que le premier membre de (3) se réduise à un polynôme de degré μ où d'un degré inférieur, alors $\frac{\phi_n}{f_n}$ est une réduite de Z.

Ainsi, le problème du développement en fraction continue de Z satisfaisant à l'équation (1), se réduit à la solution par des polynômes de l'équation (3).

Laguerre se propose de former l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait le polynôme f_n et qui admet pour solution :

$$\begin{cases} y_1 = f_n \\ \\ y_2 = e^{-2\int \frac{V}{W}dx} (\phi_n - Z\, f_n) \end{cases}$$

Soit $My'' - Ny' + Py = 0$ cette équation.

Il pose $\omega = y_1' y_2 - y_2' y_1$ et en utilisant la relation :

$$\frac{N}{M} = \frac{d}{dx} \text{Log}\ \omega$$

il obtient, d'après (3) :

$$\frac{N}{M} = \frac{\theta_n'}{\theta_n} - \frac{W'}{W} - \frac{2V}{W}$$

Il en résulte que l'équation cherchée est de la forme :

$$W\theta_n\, y'' + [(2V + W')\theta_n - W\theta'_n]y' + K_n y = 0 \qquad (4)$$

où K_n est un polynôme dont le degré est indépendant de n.

Pour déterminer complètement l'équation différentielle (4), il est nécessaire de connaître les polynômes θ_n et K_n qui y figurent. A cet effet, Laguerre a obtenu des relations de récurrences faisant intervenir des polynômes inconnus et n'arrive donc pas à déterminer θ_n et K_n.

IV.2 - LES RESULTATS DE DE MONTESSUS DE BALLORE.

En suivant les indications données par Laguerre, De Montessus a montré le résultat suivant :

Théorème.

Les numérateurs et les dénominateurs des réduites $\frac{U_n}{V_n}$ *de la fraction continue canonique provenant du développement de la série* Z *ordonnée suivant les puissances décroissantes et vérifiant l'équation différentielle :*

$$(az+b)(cz+d)\, Z'(z) = (pz+q)\, Z(z) + \pi(z)$$

vérifient les relations de récurrence :

$$\begin{cases} U_{n+1} = Q_{n-1}U_n - P_{n-1}U_{n-1} \\ V_{n+1} = Q_{n-1}V_n - P_{n-1}V_{n-1} \end{cases}$$

où P_n *et* Q_n *sont donnés par les relations suivantes :*

$$P_n = \frac{n(nac+p)[n(ad-bc)a - bp+aq]\,[n(ad-bc)c - cq+pd]}{(2nac + p)^2}$$

$$Q_n = \{(2nac+p)\,[2ac(n+1)+p]z + (ad+bc)\,[2n^2ac + 2(ac+p)n+p] + pq\}$$

$$\times \frac{(2n+1)ac + p}{(2nac+p)[2(n+1)ac + p]}$$

Le développement est valable dans tout le plan de la variable z, sauf pour les points situés sur la coupure joignant les points d'affixe $-\frac{b}{a}$ *et* $-\frac{d}{c}$ *qui sont points singuliers pour la fonction* Z.

Démonstration.

L'équation différentielle (4) à laquelle satisfait le dénominateur V de la réduite d'ordre n prend la forme :

$$(az+b)(cz+d)y'' + [(p+2ac)z + ad + bc + q]y' + \lambda y = 0 \tag{5}$$

où λ est indépendant de z.

Posons $V = \alpha_o + \alpha_1 z + \dots + \alpha_n z^n$.

En exprimant que le terme de plus haut degré est nul dans (5), on obtient :

$$n(n-1)ac + n(p+2ac) + \lambda = 0$$

ce qui donne :

$$\lambda = -n[(n+1)ac + p]$$

et ceci détermine complètement l'équation différentielle (5).

Pour établir les relations de récurrence qui lient les numérateurs et les dénominateurs des réduites, on peut remarquer que la relation :

$$U_{n-1}V_n - U_n V_{n-1} = -A_{n-1}$$

où A_{n-1} est indépendant de z

donne lieu à la relation :

$$(U_{n+1}V_n - U_n V_{n+1})A_{n-1} = (U_n V_{n-1} - U_{n-1}V_n)A_n.$$

En posant $\dfrac{A_n}{A_{n-1}} = P_{n-1}$ on aura :

$$(V_{n+1}+V_{n-1}P_{n-1})U_n = (U_{n+1}+U_{n-1}P_{n-1})V_n \qquad \text{avec } \frac{A_n}{A_{n-1}} = P_{n-1}$$

Si l'on détermine le polynôme Q_{n-1} par la condition :

$$V_{n+1} - Q_{n-1}V_n + P_{n-1}V_{n-1} = 0$$

il s'en suivra que :

$$U_{n+1} - Q_{n-1}U_n + P_{n-1}U_{n-1} = 0.$$

Les polynômes U et V vérifient donc les relations :

$$\left\{\begin{array}{l} U_{n+1} - Q_{n-1}U_n + P_{n-1}U_{n-1} = 0 \\ \\ V_{n+1} - Q_{n-1}V_n + P_{n-1}V_{n-1} = 0 \end{array}\right. \qquad (6)$$

le problème se ramène donc à la détermination de P_n qui est indépendant de z et de Q_n qui est du premier degré en z.

La relation (2) nous donne dans ce cas :

$$(7) \qquad (az+b)(cz+d)(V_nU'_n - U_nV'_n) - (pz+q)U_nV_n - \pi(z).V_n^2 = \text{constante}$$

Et en utilisant la remarque de Laguerre que la constante de l'équation (7) est égale à $-A_n$.

L'équation (7) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$[(az+b)(cz+d)V'_n - \Omega_nV_n + V_{n+1}]\, U_n =$$

$$[(az+b)(cz+d)U'_n - \Omega_nU_n - (pz+q)U_n - \pi Vn + U_{n+1}]V_n$$

et se décompose en deux équations :

$$(8) \qquad (az+b)(cz+d)V'_n = \Omega_nV_n - V_{n+1}$$

$$(9) \qquad (az+b)(cz+d)U'_n = \pi_nV_n - (pz+q+\Omega_n)V_n - U_{n+1}$$

où Ω_n est un polynôme inconnu du premier degré en z.

En dérivant l'équation (8) et en remplaçant V'_n et V''_n par leurs expressions obtenues dans (5), on obtient une équation qui donne par comparaison avec (6) :

(10) $$Q_n = pz + q + \Omega_n + \Omega_{n+1}$$

(11) $$P_n = (pz+q+\Omega_n)\Omega_n + (az+b)(cz+d)\,\{\Omega'_n - [ac(1+n)+p]n\}$$

si l'on pose $\Omega_n = \gamma z + \delta$ et $u = e^{\int \frac{\Omega_n}{(az+b)(cz+d)}dz}$ on obtient :

$$\Omega_n = (az+b)(cz+d).\frac{u'}{u}$$

Posons $\dfrac{\Omega_n}{(az+b)(cz+d)} = \dfrac{a\alpha}{az+b} + \dfrac{b\beta}{cz+d}$ on aura donc :

$$u = (az+b)^{\alpha}\,(cz+d)^{\beta}$$

En utilisant l'équation (11), on peut montrer que u vérifie une équation différentielle du second ordre. Cette équation détermine α et β, et par suite Ω_n. On obtient finalement :

$$\gamma = \frac{-(ac+p) + (ac+p+2dcn)}{2}$$

$$\delta = \frac{(ad+bc)(acn+p) - qac}{2acn + p}$$

et ceci détermine P_n et Q_n.

cqfd.

Dans ce qui suit nous allons voir que le problème du développement en fraction continue canonique et le problème de la convergence abordés par Laguerre et De Montessus se transforment et se généralisent quand on passe à la théorie des fractions continues holoïdes.

En effet, supposons que le développement de Z suivant les puissances décroissantes de la variable commence par un terme en x^m, si l'on fait dans l'équation (2) les changements de variable et de fonction définies par :

$$cx + d = \frac{1}{x'} \qquad x'^m Z = Z'$$

elle prend la forme :

$$(A+Bx')x' \frac{dZ'}{dx'} + (M+Nx')Z' = \pi'(x')$$

où A, B, M, N sont des constantes et où π' est un polynôme de degré m+1, comme celui de π.
Considérons le développement canonique Z qui est de la forme :

$$a_o + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{|a_3} + \dots$$

Si dans ce développement on fait le changement de varaible précédent et que l'on multiplie par x'^m, il prend la forme :

$$a'_o + \frac{\alpha'_1|}{|a'_1} \quad \frac{\alpha'_2|}{|a'_2} \quad \frac{\alpha'_3|}{|a'_3} + \dots$$

où a'_o est un polynôme de degré m en x', α'_1 un monôme de degré m+1 ; a'_1, a'_2,... des binômes du premier degré et α'_2, α'_3,... des monômes du second degré.
On obtient donc la fraction continue régulière de Z' dont les points représentatifs des réduites sont sur la droite y-x = m.

Padé, dans [36], se propose d'étudier non seulement cette fraction continue régulière, mais toutes celles qui appartiennent à la même catégorie et également celles des deux autres catégories régulières, c'est à dire celles où les numérateurs partiels sont des monômes du premier degré et les dénominateurs partiels des binômes du premier degré, et celles où les numérateurs partiels sont des monômes du premier degré et les déninateurs partiels des constantes, et enfin toutes les fractions continues holoïdes attachées à la fonction.
La méthode utilisée par Padé pour résoudre le problème repose sur le théorème de Laplace. Dans le sous-paragraphe suivant, on donne la démonstration de ce théorème qui est à la base de cette méthode.

IV.3 - THEOREME DE LAPLACE.

Enoncé du théorème.

Etant donné une quantité qui satisfait à une équation aux différences finies linéaire et homogène, ayant pour coefficients des polynômes de l'indice, on peut former une équation différentielle linéaire ayant pour intégrale la fonction génératrice de la quantité donnée, l'ordre de cette équation différentielle est égal au degré le plus élevé des coefficients de l'équation aux différences relativement à l'indice, et ses coefficients sont des polynômes de la variable.

Réciproquement, si l'on substitue à la fonction dans une telle équation différentielle une série ordonnée suivant les puissances croissantes, on trouvera en égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de la variable, que le coefficient du terme général de la série satisfait à une équation aux différences finies ordinaires, linéaire et homogène et dont les coefficients sont des polynômes de l'indice de degré égal à l'ordre de l'équation différentielle.

Démonstration.

Soit $Pa_n + Qa_{n+1} + Ra_{n+2} + \dots + Ta_{n+p} = o$ l'équation aux différences données, P, Q,...,T désignent des polynômes en n de degré ω.
On peut les écrire sous la forme :

$$P = P_\omega n(n-1)\dots(n-\omega+1) + P_{\omega-1}n(n-1)\dots(n-\omega+2) + \dots$$

$$\dots + P_2 n(n-1) + P_1 n + P_o.$$

$$Q = Q_\omega(n+1)n(n-1)\dots(n-\omega+2) + Q_{\omega-1}(n+1)n\dots(n-\omega+3) + \dots$$

$$\dots + Q_2(n+1)n + Q_1(n+1) + Q_o.$$

$$T = T_\omega(n+p)(n+p-1)\ \dots\ (n+p-\omega+1) + \dots$$

$$\dots + T_2(n+p)(n+p-1) + T_1(n+p) + T_o.$$

Si l'on remplace dans l'équation aux différences, on obtient :

$$P_\omega n(n-1)\ \dots\ (n-\omega+1)a_n + Q\ (n+1)n\ \dots\ (n-\omega+2)a_{n+1} + \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots + T_\omega(n+p)(n+p-1)\ \dots\ (n+p-\omega+1)a_{n+p} + \dots\dots$$

$$P_\omega n(n-1)\ \dots\ (n-\omega+2)a_n + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ P_1 n\ a_n + Q_1(n+1)a_{n+1} + \dots\dots\dots\dots + T_1(n+p)a_{n+p} +$$

$$P_o a_n + Q_o a_{n+1} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + T_o\ a_{n+p} = 0$$

Si l'on pose $f(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ on voit que dans l'expression :

$$(P\omega x^p + Q\omega x^{p-1} + \dots + T_\omega)\ x^\omega f^{(\omega)}(x)$$

$$+ (P_{\omega-1}x^p + Q_{\omega-1}x^{p-1} + \dots + T_{\omega-1})x^{\omega-1}f^{(\omega-1)}(x)$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ (P_1 x^p + Q_1 x^{p-1} + \dots + T_1)x\ f'(x)$$

$$+ (P_o x^p + Q_o x^{p-1} + \dots + T_o)\ \ f(x)$$

le coefficient de x^{n+p} est le premier membre de l'équation aux différences, il est donc nul. On obtient ainsi l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction f, équation différentielle linéaire d'ordre ω, dont le second membre est un polynôme de degré p-1.

IV.4 - APPLICATION DU THEOREME DE LAPLACE A L'ETUDE DES REDUITES.

1ère Application.

Soit $a_1 + \frac{\alpha_2|}{|a_2} + \frac{\alpha_3|}{|a_3} + \ldots$ une fraction continue quelconque, $(\frac{U_i}{V_i})_{i\geq 1}$ la suite de ses réduites, on a donc :

$$\begin{cases} \alpha_n U_{n-2} + a_n U_{n-1} = U_n \\ \alpha_n V_{n-2} + a_n V_{n-1} = V_n \end{cases}$$

Supposons que α_n et a_n s'expriment par des polynômes en n ; alors on pourra former, en appliquant le théorème de Laplace, une équation différentielle linéaire d'ordre égal au plus haut degré de ces polynômes, qui aura pour solution la fonction génératrice de U_n ou de V_n. L'étude de cette équation différentielle, pourra faire connaître le comportement pour n infini, des polynômes U_n et V_n.

Exemple.

Laguerre a montré que les réduites de la fraction continue canonique de la fonction $(\frac{x+1}{x-1})^{\omega}$, où ω est une constante satisfont à la relation :

$$V_{n+1} - (2n+1)x\, V_n + (n^2-\omega^2)V_{n-1} = 0$$

de même pour les numérateurs.

On se trouve donc dans le cas de la première application du théorème de Laplace, les coefficients α_n et a_n sont des polynômes de l'indice n. Padé a montré dans [36], en suivant les indications de cette première application que la fraction continue converge en tous les points du plan sauf ceux situés sur le segment [-1, +1] et représente la fonction $(\frac{x+1}{x-1})^{\omega}$.
Il a remarqué que la démonstration reste valable pour une fonction Z satisfaisant à l'équation (2), que le résultat précédent subsiste et que le segment [-1, +1] est remplacé par le segment $[-\frac{b}{a}, -\frac{d}{c}]$. On retrouve ainsi les résultats de Laguerre et de De Montessus.

2ème application.

Soit $f(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + \dots$ la fonction génératrice des a_n.

$V_{\mu\nu}(x) = \ell_o + \ell_1 x + \dots + \ell_\mu x^\mu$ un polynôme de degré μ.

$V_{\mu\nu}f(x) = k_o + k_1x + k_2x^2 + \dots$ avec $k_m = \ell_o a_m + \ell_1 a_{m-1} + \dots + \ell_\mu a_{m-\mu}$ avec $a_j = o$ si $j < o$.

Supposons que la fonction a_n de l'indice n satisfasse à l'équation aux différences suivante :

(12) $$(\alpha_o+\beta_o n)a_n + (\alpha_1+\beta_1 n)a_{n+1} + \dots + (\alpha_p+\beta_p n)a_{n+p} = 0$$

Si on choisit arbitrairement p éléments parmi les a_j alors, quelque soit i, on peut exprimer a_i en fonction de ces éléments au moyen de la relation (1). Supposons que l'on fixe $a_m, a_{m+1},\dots,a_{m+p-1}$, alors on pourra exprimer k_m, $k_{m+1},\dots,k_{m+p}$ en fonction de ces éléments sous la forme de fonctions linéaires dont les coefficients sont des fractions rationnelles en m. L'élimination de $a_m, a_{m+1},\dots,a_{m+p-1}$ donnera une relation de la forme :

(13) $$Ak_m + Bk_{m+1} + \dots + Lk_{m+p} = o$$

où A, B,...,L sont des polynômes en m.

Des simplifications de l'équation (13) pourront résulter du choix des coefficients $\ell_o, \ell_1,\dots,\ell_\mu$ qui entrent dans ces polynômes. Suppsoons les déterminés de telle sorte que :

$$k_m = o \qquad m = \nu+1,\dots,\nu+\mu$$

et soit

$$U_{\mu\nu} = k_o + k_1x + \dots + k_\nu x^\nu.$$

on aura donc :

$$V_{\mu\nu}f(x) - U_{\mu\nu} = k_{\mu+\nu+1}x^{\mu+\nu+1} + k_{\mu+\nu+2}x^{\mu+\nu+2} + \dots$$

$\frac{U_{\mu\nu}}{V_{\mu\nu}}$ est donc la réduite (μ, ν) de f.

La fonction $V_{\mu\nu}f - U_{\mu\nu}$ satisfera donc à l'équation différentielle linéaire de la fonction génératrice de k_m. Or d'après (12), f est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre car les coefficients de (12) sont du premier degré en n ; donc les dérivées de f s'exprimeront linéairement en fonction de cette fonction elle-même. $V_{\mu\nu}f - U_{\mu\nu}$ et ses dérivées seront par conséquent des fonctions linéaires de f à coefficients rationnels en x. En les substituant dans l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $V_{\mu\nu}f - U_{\mu\nu}$, on obtiendra une équation de la forme :

$$Pf(x) + Q = 0$$

où P est une fonction linéaire de V et de ses dérivées, et Q une fonction linéaire de U et de V et de leurs dérivées. Ce qui donne :

$$\begin{cases} P = 0 \\ Q = 0 \end{cases}$$

on obtient ainsi deux équations différentiebles auxquelles satisferont les termes de la réduite (μ,ν). L'étude de cette réduite se trouve ainsi ramenée à l'étude de ces équations.

Telles sont les deux applications du théorème de Laplace que Padé avait donné pour l'étude des réduites des fractions continues.

IV.5 - ETUDE DU CAS OU L'EQUATION AUX DIFFERENCES EST DU PREMIER ORDRE.

Revenons à l'étude du cas général que Padé s'est proposé de faire et à la série Z' satisfaisant à une équation linéaire du premier ordre.
Z' est donc la fonction génératrice d'une quantité qui satisfait à une équation aux différences finies, linéaires et dont les coefficients ne sont que du premier degré par rapport à l'indice, cette équation est d'ailleurs aussi du premier ordre.
Considérons l'équation :

$$(\alpha_o+\beta_o n)a_n + (\alpha_1+\beta_1 n)a_{n+1} = 0 \tag{14}$$

On va suivre les indications données dans la deuxième application du théorème de Laplace pour faire l'étude du développement en fractions continues et de la convergence de la série Z'.
L'équation (14) peut s'écrire sous la forme :

$$\beta_o\, n\, a_n + \beta_1 (n+1) a_{n+1} + \alpha_o a_n + (\alpha_1 - \beta_1)\, a_{n+1} = 0 \tag{15}$$

Le premier membre de cette équation est le coefficient de x^{n+1} dans l'expression :

$$(\beta_1+\beta_o x)x\, f'(x) + (\alpha_1-\beta_1+\alpha_o x)\, f(x)$$

et ceci d'après la démonstration du théorème de Laplace ; donc l'équation différentielle à laquelle satisfait f est :

$$(\beta_1+\beta_o x)x\, f'(x) + (\alpha_o x+\alpha_1-\beta_1) f(x) = (\alpha_1-\beta_1)\, a_o \tag{16}$$

En déterminant les coefficients $\ell_o, \ell_1, \ldots, \ell_\mu$ tels que :

$$k_{\nu+1} = o,\ k_{\nu+2} = o, \ldots, k_{\nu+\mu} = o$$

et en remplaçant ces coefficients dans k_m, on obtient :

$$c\, k_m = \begin{vmatrix} a_{\nu+1} & a_\nu & \text{------} & a_{\nu-\mu+1} \\ a_{\nu+2} & a_{\nu+1} & \text{----} & a_{\nu-\mu+2} \\ \text{------} & \text{------} & \text{------} & \text{------} \\ \text{------} & \text{------} & \text{------} & \text{------} \\ a_{\nu+\mu} & a_{\nu+\mu-1} & \text{--} & a_\nu \\ a_m & a_{m-1} & \text{----} & a_{m-\mu} \end{vmatrix}$$

où c est une constante.

Le déterminant précédent peut être transformé en faisant des combinaisons de colonnes et on obtient :

$$(17)\qquad \begin{aligned} &c[\alpha_o+\beta_o(m-1)] \ldots [\alpha_o+\beta_o(m-\mu)]\, k_m = \\ &(-1)^{\mu}(m-\nu-1)(m-\nu-2) \ldots (m-\nu-\mu) A\times a_m . \end{aligned}$$

où

$$A = \begin{vmatrix} \beta_o a_\nu+\beta_1 a_{\nu+1} & \text{-----} & \beta_o a_{\nu-\mu+1}+\beta_1 a_{\nu-\mu+2} \\ \beta_o a_{\nu+1}+\beta_1 a_{\nu+2} & \text{-----} & \text{-----} \\ \text{-----} & \text{-----} & \text{-----} \\ \text{-----} & \text{-----} & \text{-----} \\ \beta_o a_{\nu+\mu-1}+\beta_1 a_{\nu+\mu} & \text{---} & \beta_o a_\nu+\beta_1 a_{\nu+1} \end{vmatrix}$$

A ne dépend pas de m.

Dans le déterminant k_m nous supposons que $\mu \leq \nu$ et $m \geq \mu$. On obtient l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction génératrice de k_m par la méthode indiquée dans la deuxième application du théorème de Laplace et qui consiste dans ce cas à éliminer a_m entre l'équation (15) et (17).

On trouve :

$$(18)\qquad [\alpha_o+(m-\mu)\beta_o](m-\nu)k_m + (\alpha_1+m\beta_1)(m-\nu-\mu)k_{m+1} = 0$$

Les coefficients étant du second degré relativement à l'indice, la fonction génératrice de k_m satisfera à une équation différentielle linéaire du second ordre.

<u>Remarque</u>.

Supposons que l'équation aux différences soit :

$$a_n - (n+1)\, a_{n+1} = o$$

alors on se trouve dans le cas de la fonction exponentielle ; l'équation aux différences pour k_m est :

$$(m-\nu)k_m - (m+1)(m-\nu-\mu)k_{m+1} = o$$

et les deux équations différentielles relatives aux termes de la réduite sont :

$$\begin{cases} xV'' - (\mu+\nu-x)V' - \mu V = o \\ xU'' - (\mu+\nu+x)U' + \nu U = o \end{cases}$$

Ces deux équations ont permis à Padé de faire l'étude de la convergence des fractions continues holoïdes de la fonction exponentielle, voir [36].
La relation (18) peut s'écrire :

$$\{\beta_o m(m-1) + [\alpha_o - (\mu+\nu-1)\beta_o]m - (\alpha_o-\mu\beta_o)\nu\}k_m +$$

$$\beta_1(m+1)m + [\alpha_1 - (\mu+\nu+1)\beta_1](m+1) + (\mu+\nu+1)(\beta_1-\alpha_1)\}k_{m+1}=0.$$

Soit ϕ la fonction génératrice de k_m ; l'équation précédente exprime que le coefficient de x^{m+1} est nul dans l'expression suivante :

$$\beta_o x^3 '' + [\alpha_o-(\mu+\nu-1)\beta_o]x^2\phi' - (\alpha_o-\mu\beta_o)\nu x\phi +$$

$$\beta_1 x^2\phi'' + [\alpha_1-(\mu+\nu+1)\beta_1]x\ \phi' + (\mu+\nu+1)\ (\beta_1-\alpha_1)\phi$$

et on en conclut que :

$$Ax^2\phi'' + Bx\phi' + c\phi = 0$$

avec

$$A = \beta_1 + \beta_o x$$

$$B = \alpha_1 - (\mu+\nu+1)\beta_1 + [\alpha_o - (\mu+\nu-1)\beta_o]x$$

$$C = (\mu+\nu+1)(\beta_1-\alpha_1) - (\alpha_o-\mu\beta_o)\nu x$$

En remplaçant ϕ par $V_{\mu\nu}f - U_{\mu\nu}$, on obtient, en exprimant f' et f" en fonction de f à l'aide de l'équation (16), une équation de la forme

$$Pf + Q = o$$

l'équation P = o nous donne l'équation différentielle à laquelle satisfait le dénominateur de la réduite (μ,ν) :

$$(\beta_1+\beta_o x)x\, y'' - \{\alpha_1 + (\mu+\nu-1)\beta_1 + [\alpha_o + (\mu+\nu-1)\beta_o]x\}y' + \mu(\alpha_o + \beta_o\nu y) = 0 \tag{19}$$

Supposons β_o et β_1 non nuls et faisons le changement de variable :

$$x = -\frac{\beta_1}{\beta_o}u$$

l'équation (19) prend la forme :

$$u(1-u)\frac{d^2y}{du^2} + [-\frac{\alpha_1}{\beta_1} -\mu-\nu+1-(-\frac{\alpha_o}{\beta_o} -\mu-\nu+1)u]\frac{dy}{du} - \mu(\frac{\alpha_o}{\beta_o} + \nu)y = 0$$

Par le changement de variable précédent, les réduites de f(x) deviennent celles de $f(-\frac{\beta_1}{\beta_o}u)$ et en supposant que $a_o = 1$, on a :

$$f(-\frac{\beta_1}{\beta_o}u) = F(\frac{\alpha_o}{\beta_o}, 1, \frac{\alpha_1}{\beta_1}, u)$$

où F est la série hypergéométrique de Gauss.

Définition.

On appelle série hypergéométrique de Gauss, la série définie par :

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\gamma}z + \frac{\alpha(\alpha+1)\ \beta(\beta+1)}{1.2.\ .(\gamma+1)}z^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma.(\gamma+1).(\gamma+2)}z^3 + \dots$$

Ainsi, l'étude des fractions continues holoïdes de f(x) *se ramène à l'étude de celles de* F(h, 1, h', u).

IV.6 - LES FRACTIONS CONTINUES HOLOIDES DE F(h, 1, h',u).

Posons $h = \frac{\alpha_o}{\beta_o}$ et $h' = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$; l'équation (19) prend la forme :

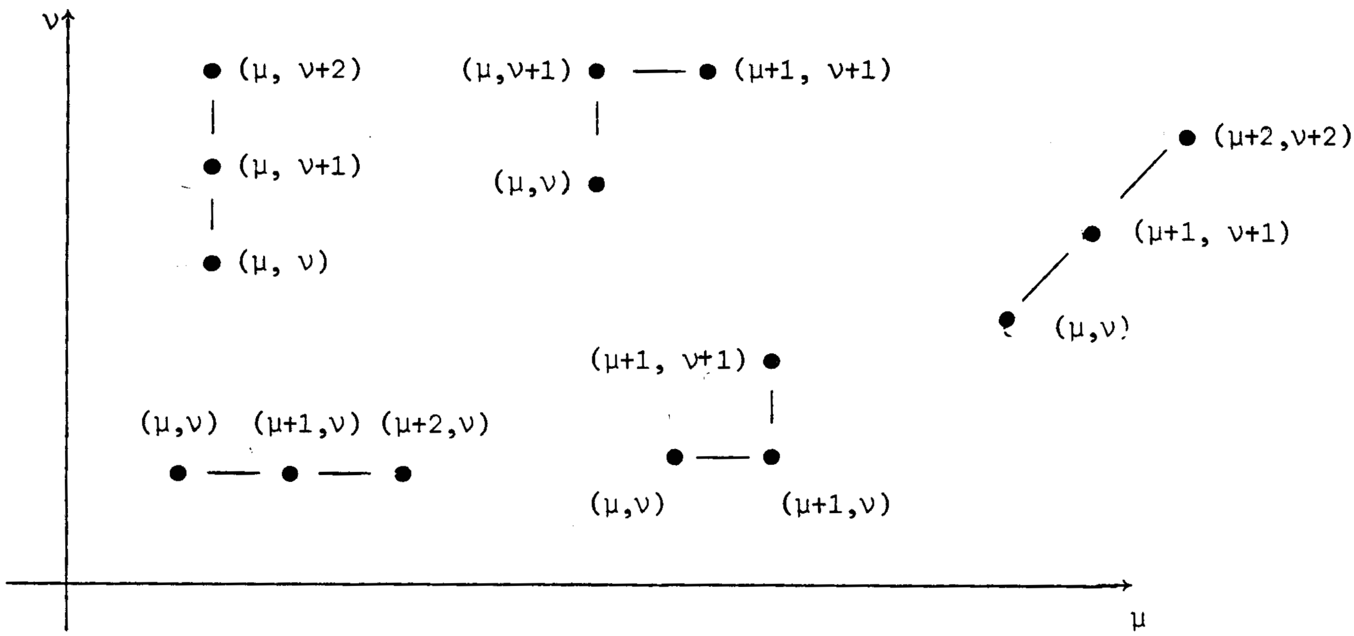
$$(20) \qquad u(1-u)\frac{d^2y}{du^2} + [-h'-\mu-\nu+1-(-h-\mu-\nu+1-u]\frac{dy}{du} - \mu(h+\nu)y = 0$$

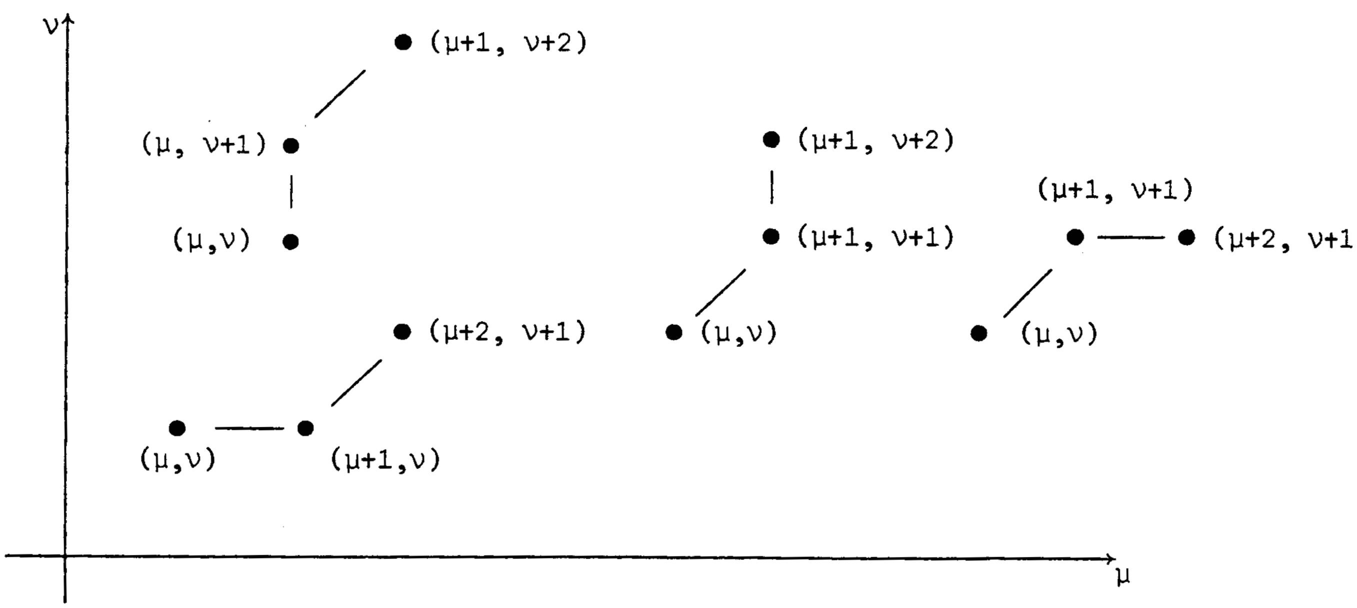
qui admet les deux solutions :

$$F(\alpha, \beta, \gamma, u) = F(-\mu, -h-\nu, -h'-\mu-\nu+1, u)$$

$$u^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, u) = u^{h'+\mu+\nu} F(h'+\nu, h'-h+\mu, h'+\mu+\nu+1, u)$$

La première de ces solutions, polynôme de degré μ, est le dénominateur de la réduite (μ,ν) de F(h, 1, h', u). La manière dont μ et ν entrent dans cette solution montre que la recherche des relations de récurrences qui existent entre les termes de trois réduites consécutives et progressantes revient au calcul de relations entre trois fonctions $F(\xi, \eta, \theta, u)$, où les trois premières variables ne diffèrent que par des nombres entiers. Ces relations sont au nombre de neuf, correspondant aux neufs dispositions des points représentatifs de trois réduites consécutives d'une fraction continue holoïde, données par la figure suivante ; les cinq première d'entre elles sont celles qui donnent naissance aux fractions continues régulières.





De la définition même de la série hypergéométrique, on déduit les neufs formules correspondants aux neufs dispositions de la figure précédente (voir [36]). Ces neufs relations donnent le moyen d'écrire une fraction continue holoïde quelconque de la fonction F(h,1,h',u) connaissant la disposition de ses réduites et les deux premières d'entre elles, et ne sortant pas de la région où $\mu \leq \nu+1$.

Quant à la seconde solution de l'équation (20), on peut montrer qu'elle est dans un rapport étroit avec les termes de la réduite (μ,ν) et on trouve la formule :

$$V_{\mu\nu} F - U_{\mu\nu} = P\, u^{\mu+\nu+1}(1-u)^{h'-h-1}\, F(h'+\nu,\ h'-h+\mu,\ h'+\mu+\nu+1,\ u)$$

où

$$P = \mu!\ \frac{\Gamma(h')}{\Gamma(h)\ \Gamma(h'-h)}\ \frac{\Gamma(h+\nu+1)\ \Gamma(h'+\nu)\ \Gamma(h'-h+\mu)}{\Gamma(h'+\mu+\nu)\ \Gamma(h'+\mu+\nu+1)}\ .$$

Ce résultat permet l'étude de la convergence des fractions continues régulières de $F(h,\ 1,\ h',\ u)$.

Dans [36], on trouve deux autres relations qui donnent une expression de la différence $V_{\mu\nu} F - U_{\mu\nu}$ et qui se prêtent aussi à l'étude de la convergence ; on arrive au résultat suivant :

Théorème.

Les fractions continues dont les réduites correspondent à des points situés sur une même parallèle à l'axe des ν *sont convergentes dans le disque unité vers* $F(h,\ 1,\ h',\ u)$ *et divergentes en dehors de ce disque.* (Fig. 1).

Théorème.

Les fractions continues dont les réduites correspondent à des points situés sur l'une quelconque des parallèles à la bissectrice des axes μ,ν *dont les équations sont* $y-x = p$ $(p\geq -1)$, *et celles dont les points représentatifs forment un chemin en escalier, ne sortant pas de la région où* $\mu \leq \nu+1$, *sont convergentes dans le plan coupé suivant la demi droite* $]+1,\ +\infty[$, *et ont pour limite* $F(h,\ 1,\ h',\ u)$. (Fig. 2).

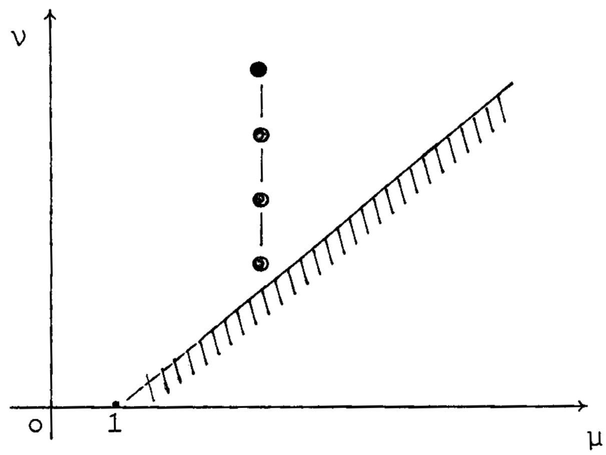


Figure 1.

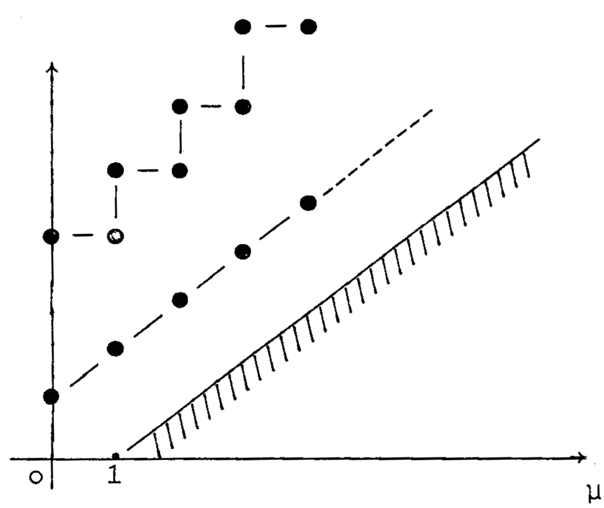


Figure 2.

Remarque.

Les fractions continues dont les réduites ont des points représentatifs placés sur une droite parallèle à l'axe des μ ne nous sont connues qu'en nombre fini puisque les calculs précédents supposaient que $\mu \leq \nu+1$, et on ne peut rien dire sur la convergence.

IV.7 - REMARQUES.

1°) Remarquons que Padé s'est intéressé au cas particulier le plus simple correspond à l'équation

$$(\alpha_o+\beta_o n)a_n + (\alpha_1+\beta_1 n)a_{n+1} + \dots + (\alpha_p+\beta_p n)a_{n+p} = o$$

C'est le cas où cette équation est du premier ordre. Si elle est du second ordre la fonction génératrice f des a_n vérifie toujours une équation différentielle du premier ordre puisque les coefficients sont des polynômes du premier degré de l'indices et que ses dérivées s'expriment en fonction de f. La méthode exposée dans le cas où l'équation aux différences est du premier ordre peut donc être appliquée. Le seul problème est que l'équation différentielle de la fonction génératrice de k_m n'est plus du second ordre ; cependant elle peut, dans certains cas, ne pas présenter de difficultés, et par suite, donner des résultats concernant le développement en fractions continues et leur convergence pour une classe de fonction.

2°) La deuxième remarque est que la méthode utilisée par Padé s'applique à des fonctions qui vérifient l'équation aux différences ci-dessus.

On peut donc penser à l'appliquer à d'autres fonctions :
posons $S(n) = (\alpha_o+\beta_o n)a_n + (\alpha_1+\beta_1 n)a_n + (\alpha_1+\beta_1 n)\ a_{n+1} + \dots + (\alpha_p+\beta_p n)a_{n+p}$

$$f(x) = \sum_{i=o}^{\infty} a_i x^i.$$

a) Supposons qu'il existe une constante S telle que :

$$S(n) = S \qquad \text{pour tout } n.$$

Dans ce cas la méthode précédente subsiste. En effet, on a :

$$S(n+1) - S(n) = 0 \qquad \forall n$$

donc les a_i vérifient une équation aux différences mais d'ordre p+1.

b) S'il existe S tel que $S(n) = S_n \quad \forall n$, alors la méthode précédente peut être appliquée.
En effet on aura :

$$S(n+1) - S(n) = S \qquad \forall n$$

et en utilisant les résultats de a), on déduit que les a_i vérifient une équation aux différences d'ordre p+2.

c) S'il existe S et S' tel que :

$$S(n) = S_n + S' \qquad \forall n$$

alors,

$$S(n+1) - S(n) = S \qquad \forall n$$

et on déduit comme en b) que les a_i vérifient une équation aux différences d'ordre p+2.

Pour ce dernier cas, on a pu trouver les deux exemples suivants, correspondants au cas où p=1.

Exemple 1.

$$f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} n^2 x^n$$

On a :

$$S(n) = (\alpha_o + \beta_o n)n^2 + (\alpha_1 + \beta_1 n)(n+1)^2$$

$$S(n) = (\beta_o + \beta_1)n^3 + (\alpha_o + \alpha_1 + 2\beta_1)n^2 + (2\alpha_1 + \beta_1)n + \alpha_1$$

Si les deux équations suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} \beta_o + \beta_1 = 0 \\ \alpha_o + \alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \end{cases}$$

alors on a :

$$S(n) = S_n + S'$$

Le système d'équations précédent admet une infinité de solutions, le choix de α_o, α_1, β_o et β_1 doit être fait de sorte que l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction génératrice de k_m soit d'ordre le moins élevé possible.
Remarquons que la fonction f ne vérifie pas une relation du premier ordre telle que

$$S(n) = 0.$$

Exemple 2.

$$f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} n^3 x^n$$

Dans ce cas, $S(n) = S_n + S'$ si α_o, α_1, β_o et β_1 vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} \beta_o + \beta_1 = o \\ \alpha_o + \alpha_1 + 3\beta_1 = o \\ \alpha_1 + \beta_1 = 0 \end{cases}$$

Ce système admet une infinité de solutions, et on peut faire les mêmes remarques que pour l'exemple précédent.

Remarque 3.

Etant donnée la série $\sum a_n x^n$ qui vérifie une équation aux différences telle que (12), est-il possible de définir une série $\sum t_n x^n$ qui vérifie l'équation aux différences (12) mais d'ordre inférieur et tel qu'il y ait des rapports entre les réduites de $\sum a_n x^n$ et $\sum t_n x^n$?

Par exemple, supposons que l'équation (12) est d'ordre deux :

$$(\alpha_o+\beta_o n)a_n + (\alpha_1+\beta_1 n)a_{n+1} + (\alpha_2+\beta_2 n)a_{n+2} = 0$$

Posons $t_n = \alpha a_n + \beta a_{n+1}$ (*).

Si l'on veut que (t_n) vérifie une équation de la forme :

$$(\alpha'_o+\beta'_o n)t_n + (\alpha'_1+\beta'_1 n)t_{n+1} = 0$$

alors, il faut et il suffit que les deux équations :

$$\alpha_2 u^2 - \alpha_1 u + \alpha_o = 0$$

$$\alpha_2 u^2 - \beta_1 u + \beta_o = 0$$

où u est l'inconnue, admettent une solution commune.

On a :

$$\sum t_n x^n = \alpha \sum a_n x^n + \beta \sum a_{n+1} x^n$$

Si l'on arrive à avoir des rapports entre les réduites de $\sum a_n x^n$ et $\sum t_n x^n$, l'étude du développement en fraction continue de $\sum a_n x^n$ serait résolue.

Il est possible qu'une transformation autre que $t_n = \alpha a_n + \beta a_{n+1}$ donne des meilleurs résultats.

Remarque 4.

En général, étant donnée une série $\sum a_n x^n$, est-il possible de la transformer en une série $\sum t_n x^n$ telle que les coefficients de cette dernière vérifient l'équation aux différences (12) ? Si oui, dans quels cas les développements en fraction continue relatifs à la série $\sum t_n x^n$ donnent-ils des résultats concernant les développements en fraction continue de $\sum a_n x^n$?

Pour terminer cette série de remarques on se pose le problème suivant :

si les coefficients de l'équation aux différences ne sont plus des polynômes de l'indice n, mais des fonctions quelconques de cet indice, existe-t-il un théorème analogue à celui de Laplace qui ramène le problème du développement et celui de la convergence à l'étude d'une équation différentielle ou autre.

Un cas particulier de cette dernière remarque nous est fourni par les recherches d'Auric [1], qui s'est servi d'un résultat de Pincherle pour fixer les conditions de convergence des fractions continues asymptotiquement périodiques.

CHAPITRE IV

LES FRACTIONS CONTINUES D'INTERPOLATION

I - INTRODUCTION.

Pour Padé, le lien essentiel qui caractérise un développement en fraction continue d'une fonction est constitué par la propriété, commune à toutes les réduites des différentes fractions, que chacune de ces réduites, développée en série de McLaurin, reproduit la série qui définit la fonction jusqu'à un terme de degré au moins égal à la somme des degrés des termes de la réduite. Mais il existe un autre développement en fraction continue qui n'a pas ce même lien avec la fonction qui lui donne naissance, c'est le développement en fraction continue de Thiele. Ceci a été introduit dans le but d'avoir une fraction continue qui interpôle la fonction donnée en certains points, et conduit à une formule analogue à la formule d'interpolation de Newton dans le cas de l'interpolation polynômiale.

Dans le deuxième paragraphe on va étudier le travail de Norlünd et de Thiele sur les fractions continues d'interpolation et les différences réciproques [46] et [48] et on verra le lien avec les résultats de quelques auteurs.

Dans le troisième paragraphe, on essayera d'établir des liens entre les résultats de Norlünd et les réflexions faites par Padé dans [25] sur les fractions continues d'interpolation.
Un calcul simple nous conduit à des algorithmes qui permettent la construction de la table des fractions rationnelles d'interpolation dans le cas normal et à des développements en fractions continues d'interpolation d'une fonction donnée.

II - FRACTIONS CONTINUES D'INTERPOLATION ET DIFFÉRENCES RÉCIPROQUES.

II.1 - INTERPOLATION PAR DES FRACTIONS CONTINUES.

Pour la démonstration de l'existence des fractions continues d'interpolation, Thiele a introduit les différences réciproques :

soient x_o, x_1,... des abscices données distinctes et ϕ_o, ϕ_1,... les valeurs en ces points par une certaine fonction .

On pose :

$$\rho^{(o)}(x_o) = \phi_o$$

$$\rho^{(1)}(x_o,x_1) = \frac{x_1 - x_o}{\phi_1 - \phi_o}$$

et on définit la différence réciproque d'ordre n+1 par la relation :

$$(1) \left\{ \rho^{(n+1)}(x_o, x_1,\dots,x_{n+1}) = \frac{x_{n+1} - x_n}{\rho^{(n)}(x_o,\dots,x_{n-1},x_{n+1}) - \rho^{(n)}(x_o,\dots,x_n)} + \right.$$

$$+ \rho^{(n-1)}(x_o, x_1,\dots,x_{n-1})$$

Si l'on considère le développement suivant en fraction continue de ϕ :

$$(2)\ \phi(x) = \rho^{(o)}(x_o) + \frac{x-x_o}{\rho^{(1)}(x_o, x_1)} + \frac{x - x_1}{\rho^{(2)}(x_o, x_1, x_2) - \rho^{(o)}(x_o)} +$$

$$+ \frac{x - x_2}{\rho^{(3)}(x_o,\dots,x_3) - \rho^{(1)}(x_o, x_1)} + \dots$$

et si l'on désigne par $\frac{T_n}{N_n}$ la réduite d'ordre n de la fraction continue (2), alors ces réduites vérifient les conditions d'interpolation :

$$\begin{cases} \dfrac{T_{2n}(x_i)}{N_{2n}(x_i)} = \phi_i & i = o,\ldots,2n-1 \\ \\ \dfrac{T_{2n+1}(x_i)}{N_{2n+1}(x_i)} = \phi_i & i = o,\ldots,2n \end{cases}$$

où T_{2n}, T_{2n+1} et N_{2n+1} sont des polynômes de degré n et N_{2n} un polynôme de degré n-1.
La fraction continue (2) est la fraction continue d'interpolation de Thiele.

Si l'on place ces réduites dans un tableau à double entrée, comme on a l'habitude de le faire pour les approximants de Padé, elles vont remplir deux diagonales de ce tableau :

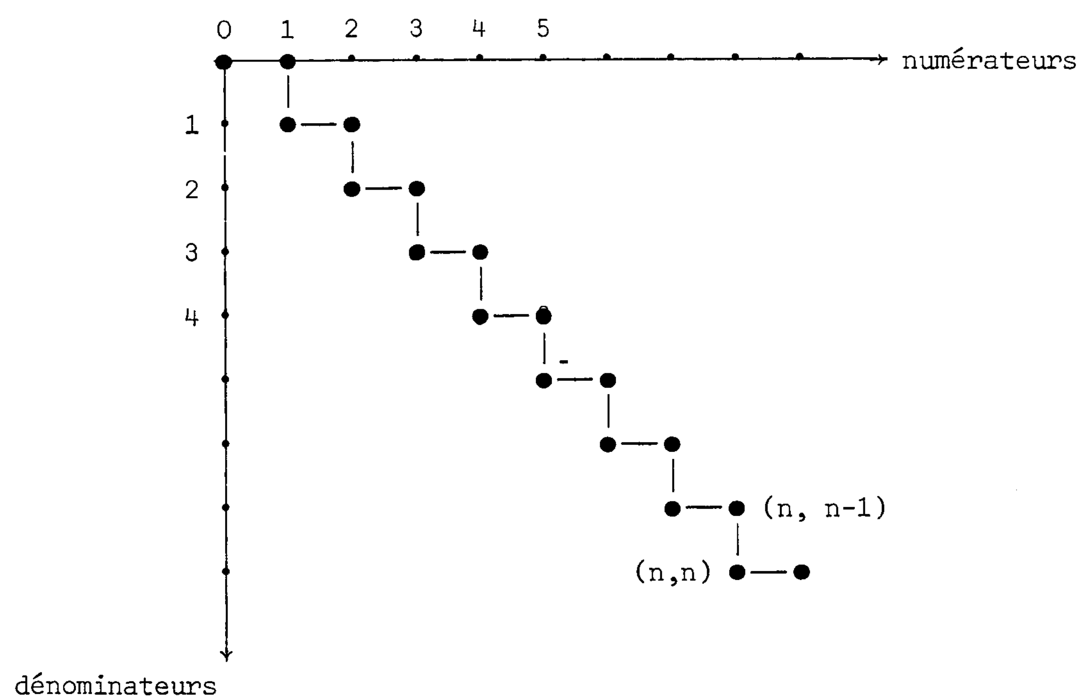


Figure 1.

De l'expression (2), on déduit que les numérateurs et les dénominateurs des réduites de la fraction continue (2) sont liés par les relations :

$$\begin{cases} N_i = \alpha_i N_{i-2} + \beta_i N_{i-1} \\ T_i = \alpha_i T_{i-2} + \beta_i T_{i-1} \end{cases} \qquad \text{pour } i \geq 2.$$

où

$$\alpha_i = x - x_{i-1}$$

$$\beta_i = \rho^{(i)}(x_o, x_1, \ldots, x_i) - \rho^{(i-2)}(x_o, \ldots, x_{i-2}) \qquad \forall i \geq 2$$

avec :

$$T_o(x) = \rho^{(o)}(x_o) \qquad T_1(x) = \rho^{(o)}(x_o)\, \rho^{(1)}(x_o, x_1) + (x - x_o)$$

$$N_o(x) = 1 \qquad N_1(x) = \rho^{(1)}(x_o, x_1)$$

Donc les différences réciproques permettent de calculer les réduites de la fraction continue d'interpolation de Thiele.

En explicitant les relations (3), on arrive à un système d'équations qui permet de représenter les réduites par des déterminants. Les expressions données par Norlünd dans [46] sont les suivantes :

$$N_{2n}(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & x & 0 & x^2 & \cdots & x^{n-1} & 0 \\ 1 & \phi_o & x_o & x_o\phi_o & x_o^2 & x_o^2\phi_o & \cdots & x_o^{n-1}\phi_o & x_o^n \\ 1 & \phi_1 & x_1 & \cdots & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & \\ 1 & \phi_{2n-1} & x_{2n-1} & \cdots & & & & x_{2n-1}^{n-1}\phi_{2n-1} & x_{2n-1}^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \phi_o & x_o & x_o\phi_o & \cdots & x_o^{n-1}\phi_o \\ 1 & \phi_1 & x_1 & x_1\phi_1 & \cdots & x_1^{n-1}\phi_1 \\ \cdots & & & & & \\ \cdots & & & & & \\ 1 & \phi_{2n-1} & x_{2n-1} & \cdots & & x_{2n-1}^{n-1}\phi_{2n-1} \end{vmatrix}}$$

$$T_{2n}(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & x & 0 & x^2 & 0 & x^n \\ 1 & \phi_o & x_o & x_o\phi_o & x_o^2 & & x_o^n \\ 1 & \phi_1 & x_1 & x_1\phi_1 & \cdots & x_1^{n-1}\phi_1 & x_1^n \\ \vdots & & & & & & \\ 1 & \phi_{2n-1} & x_{2n-1} & x_{2n-1}\phi_{2n-1} & \cdots & x_{2n-1}^{n-1}\phi_{2n-1} & x_{2n-1}^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \phi_o & x_o & x_o\phi_o & \cdots & x_o^{n-1}\phi_o \\ 1 & \phi_1 & x_1 & \cdots & & \\ \vdots & & & & & \\ 1 & \phi_{2n-1} & x_{2n-1} & \cdots & & x_{2n-1}^{n-1}\phi_{2n-1} \end{vmatrix}}$$

$$
N_{2n+1}(x) = - \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & x & \cdots & 0 & x^n \\ 1 & \phi_o & x_o & x_o\phi_o & \cdots & x_o^n & x_o^n\phi_o \\ 1 & \phi_1 & x_1 & \cdots & & & \\ & & & & & & \\ 1 & \phi_{2n} & x_{2n} & \cdots & & x_{2n}^n & x_{2n}^n\phi_{2n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \phi_o & x_o & x_o\phi_o & \cdots & x_o^n \\ 1 & \phi_1 & x_1 & x_1\phi_1 & \cdots & x_1^n \\ & & & & & \\ 1 & \phi_{2n} & x_{2n} & x_{2n}\phi_{2n} & \cdots & x_{2n}^n \end{vmatrix}}
$$

(5)

$$
T_{2n+1}(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & x & 0 & \cdots & x^n & 0 \\ 1 & \phi_o & x_o & x_o\phi_o & \cdots & x_o^n & x_o^n\phi_o \\ 1 & \phi_1 & x_1 & & & & \\ & & & & & & \\ 1 & \phi_{2n} & x_{2n} & x_{2n}\phi_{2n} & \cdots & x_{2n}^n & x_{2n}^n\phi_{2n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \phi_o & x_o & x_o\phi_o & \cdots & x_o^n \\ 1 & \phi_1 & x_1 & x_1\phi_1 & \cdots & x_1^n \\ & & & & & \\ 1 & \phi_{2n} & x_{2n} & x_{2n}\phi_{2n} & \cdots & x_{2n}^n \end{vmatrix}}
$$

II.2 - EXPRESSIONS DES DIFFERENCES RECIPROQUES PAR DES DETERMINANTES.

Si l'on pose :

$$N_{2n}(x) = n_o + n_1 x + \dots + n_{n-1}x^{n-1}$$

(6)
$$N_{2n+1}(x) = \nu_o + \nu_1 + \dots + \nu_n x^n$$

$$T_{2n}(x) = t_o + t_1 x + \dots + t_n x^n$$

$$T_{2n+1}(x) = \tau_o + \tau_1 + \dots + \tau_n x^n$$

alors de la relation (2) on déduit que :

$$n_{n-1} = \rho^{(2n-1)}(x_o,\dots,x_{2n-1}) \qquad \nu_n = 1$$

$$t_n = 1 \qquad \tau_n = \rho^{(2n)}(x_o, x_1,\dots,x_{2n})$$

En utilisant les relations (4) et (5), on déduit l'expression suivante des différences réciproques :

(7)
$$\rho^{(2n)}(\phi(x)) = \frac{|1 \quad \phi_i \quad x_i \quad x_i\phi_i \;---\; x_i^{n-1}\phi_i \quad x_i^n\phi_i|}{|1 \quad \phi_i \quad x_i \quad x_i\phi_i \;---\; x_i^{n-1}\phi_i \quad x_i^n\ |}$$

$$\rho^{(2n+1)}(\phi(x)) = \frac{|\ 1 \quad \phi_i \quad x_i \quad x_i\phi_i \;---\; x_i^n \quad x_i^{n+1}|}{|1 \quad \phi_i \quad x_i \quad x_i\phi_i \;---\; x_i^n \quad x_i^n\phi_i|}$$

où on a posé :

$$\rho^{(n)}(\phi(x)) = \rho^{(n)}(x_o, x_1,\dots,x_n)$$

et

$$|1.\phi_i\ x_i\ x_i\phi_i\ \text{---}\ x_i^n| = \begin{vmatrix} 1 & \phi_o & x_o & x_o\phi_o & \text{------} & x_o^n \\ 1 & \phi_1 & x_1 & & \text{----------} & \\ & & & & & \\ 1 & \phi_{2n} & x_{2n} & & \text{----------} & x_{2n}^n \end{vmatrix}$$

On va voir comment on peut exprimer les différences réciproques comme rapport de déterminants de Hankel, et arriver ainsi à abaisser la dimension des déterminants de (7) respectivement de n et de n+1 unités.

Posons $\psi_n(x) = (x-x_o)(x-x_1)\ \dots\ (x-x_n)$.

Considérons la première expression de (7), et ajoutons dans les déterminants numérateurs et dénominateurs la $1^{ère}$, la $2^{ième}$ jusqu'à la $2n^{ième}$ ligne à la dernière après les avoir divisées par $\psi_{2n}'(x_o)$, $\psi_{2n}'(x_1),\dots,\psi_{2n}'(x_{2n})$ respectivement. Ajoutons ensuite la $2n^{ième}$ ligne à la $1^{ère}$, la $2^{ième}$ jusqu'à la $(2n-1)^{ième}$ ligne après les avoir divisées par $\psi_{2n-1}'(x_o)$, $\psi_{2n-1}'(x_1),\dots,\psi_{2n-1}'(x_{2n-1})$ respectivement, et ainsi de suite jusqu'à la $1^{ère}$ ligne qui reste inchangée. En désigant par $\delta^n(\phi)$ la différence divisée du $n^{ième}$ ordre et en utilisant les relations :

$$\sum_{i=o}^{n} \frac{x_i^p}{\psi_n'(x_i)} = o$$

$$\sum_{i=o}^{n} \frac{x_i^n}{\psi_n'(x_i)} = 1$$

$$\delta^n(\phi(x)) = \frac{\phi_o}{\psi_n'(x_o)} + \frac{\phi_1}{\psi_n'(x_1)} + \dots + \frac{\phi_n}{\psi_n'(x_n)}$$

on arrive à l'expression suivante :

$$\rho^{(2n)}(\phi(x))=(-1)^n \frac{\begin{vmatrix} \delta^n(\phi) & \delta^n(x\phi) & \text{------} & \delta^n(x^n\phi) \\ \delta^{n+1}(\phi) & \delta^{n+1}(x\phi) & \text{------} & \delta^{n+1}(x^n\phi) \\ \text{------} & \text{------} & \text{------} & \text{------} \\ \text{------} & \text{------} & \text{------} & \text{------} \\ \delta^{2n}(\phi) & \delta^{2n}(x\phi) & \text{------} & \delta^{2n}(x^n\phi) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta^{n+1}(\phi) & \delta^{n+1}(x\phi) & \text{------} & \delta^{n+1}(x^{n-1}\phi) \\ \delta^{n+2}(\phi) & \text{------} & \text{------} & \delta^{n+2}(x^{n-1}\phi) \\ \text{------} & \text{------} & \text{------} & \text{------} \\ \delta^{2n}(\phi) & \text{------} & \text{------} & \delta^{2n}(x^{n-1}\phi) \end{vmatrix}} \qquad (8)$$

Rappelons la définition des différences divisées :

soit $(\phi_i)_{i\geq o}$ la suite des images par une fonction ϕ de la suite $(x_i)_{i\geq o}$:

$$\phi_i = \phi(x_i) \qquad \text{pour } i \geq o$$

On définit la différence divisée du premier ordre par :

$$\delta^1(x_i, x_j) = \frac{\phi_j - \phi_i}{x_j - x_i} \qquad \text{pour } i \neq j.$$

la différence divisée d'ordre n est définie par :

$$\delta^n(x_i, x_{i+1},\dots,x_{i+n}) = \frac{\delta^{n-1}(x_i, x_{i+1},\dots,x_{i+n-1}) - \delta^{n-1}(x_i,\dots,x_{i+n-2}, x_{i+n})}{x_{i+n-1} - x_{i+n}}$$

Dans les déterminants précédents de la relation (8), $\delta^n(\phi)$ désigne la différence divisée d'ordre n :

$$\delta^n(x_o, x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Considérons la deuxième expression de (7), et utilisons les mêmes transformations qu'on a appliqué pour avoir (8), on trouve l'expression suivante des différences réciproques d'ordre impair :

$$\rho^{(2n+1)}(\phi(x)) = (-1)^n \frac{\begin{vmatrix} \delta^{n+2}(\phi) & \delta^{n+2}(x\phi) & ---- & \delta^{n+2}(x^{n-1}\phi) \\ \delta^{n+3}(\phi) & \delta^{n+3}(x\phi) & ---- & \delta^{n+3}(x^{n-1}\phi) \\ ------ & ------ & ------ & ------ \\ ------ & ------ & ------ & ------ \\ \delta^{2n+1}(\phi) & \delta^{2n+1}(x\phi) & ---- & \delta^{2n+1}(x^{n-1}\phi) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta^{n+1}(\phi) & \delta^{n+1}(x\phi) & ---- & \delta^{n+1}(x^{n}\phi) \\ \delta^{n+2}(\phi) & \delta^{n+2}(x\phi) & ---- & \delta^{n+2}(x^{n}\phi) \\ ------ & ------ & ------ & ------ \\ ------ & ------ & ------ & ------ \\ \delta^{2n+1}(\phi) & \delta^{2n+1}(x\phi) & ---- & \delta^{2n+1}(x^{n}\phi) \end{vmatrix}} \qquad (9)$$

Considérons le déterminant numérateur de (8) ; on multiplie la $(n+1)^{\text{ième}}$ ligne par x_{2n} en y ajoutant la $n^{\text{ième}}$; on multiplie ensuite la $n^{\text{ième}}$ par x_{2n-1} en y ajoutant la $(n-1)^{\text{ième}}$, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à la $1^{\text{ère}}$ ligne qui reste inchangée. On répète la même opération en recommençant par la $(n+1)^{\text{ième}}$ ligne, on s'arrête à la $2^{\text{ième}}$, et on continue ainsi jusqu'à la $n^{\text{ième}}$ ligne. En opérant de la même manière sur le déterminant dénominateur et en se servant de l'identité :

$$\delta^n(x\phi) = x_n\delta^n(\phi) + \delta^{n-1}(\phi)$$

on trouve :

$$\rho^{(2n)}(\phi(x)) = K_n \frac{\begin{vmatrix} \delta^n(\phi) & \delta^n(x\phi) & \cdots & \delta^n(x^n\phi) \\ \delta^{n+1}(x\phi) & \delta^{n+1}(x^2\phi) & \cdots & \delta^{n+1}(x^{n+1}\phi) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta^{2n}(x^n\phi) & \delta^{2n}(x^{n+1}\phi) & \cdots & \delta^{2n}(x^{2n}\phi) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta^{n+1}(\phi) & \cdots & \delta^{n+1}(x^{n-1}\phi) \\ \delta^{n+2}(x\phi) & \cdots & \delta^{n+2}(x^n\phi) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta^{2n}(x^{n-1}\phi) & \cdots & \delta^{2n}(x^{2n-2}\phi) \end{vmatrix}} \tag{10}$$

où $K_n = \dfrac{(-1)^n}{x_{n+1}\, x_{n+2} \ldots x_{2n}}$.

Pour les différences divisées d'ordre impair, on trouve :

$$\rho^{(2n+1)}(\phi(x)) = K'_n \frac{\begin{vmatrix} \delta^{n+2}(\phi) & \delta^{n+2}(x\phi) & ---- & \delta^{n+2}(x^{n-1}\phi) \\ \delta^{n+3}(x\phi) & \delta^{n+3}(x^2\phi) & ---- & \delta^{n+3}(x^n\phi) \\ ---- & ---- & ---- & ---- \\ ---- & ---- & ---- & ---- \\ \delta^{2n+1}(x^{n-1}\phi) & ---- & ---- & \delta^{2n+1}(x^{2n-2}\phi) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta^{n+1}(\phi) & \delta^{n+1}(x\phi) & ---- & \delta^{n+1}(x^n\phi) \\ \delta^{n+2}(x\phi) & \delta^{n+2}(x^2\phi) & ---- & \delta^{n+2}(x^{n+1}\phi) \\ ---- & ---- & ---- & ---- \\ ---- & ---- & ---- & ---- \\ \delta^{2n+1}(x^n\phi) & ---- & ---- & \delta^{2n+1}(x^{2n}\phi) \end{vmatrix}} \quad (11)$$

où $K'_n = (-1)^n \, x_{n+2} \, x_{n+3} \ldots x_{2n+1}$.

Considérons le numérateur de (10), retranchons de chaque ligne celle qui suit, en commençant par la première et appliquons l'identité :

$$\delta^n(x\phi) = x_n \delta^n(\phi) + \delta^{n-1}(\phi)$$

Nous aurons un déterminant où la $i^{\text{ème}}$ ligne contient le facteur x_{n+i}. Divisons chaque ligne par ce facteur et appliquons la même opération au déterminant obtenu, en nous arrêtant cette fois à l'avant dernière ligne.
En continuant ainsi on trouve :

$$\rho^{(2n)}(\;(x)) = \begin{vmatrix} \delta^{2n}(\phi) & \delta^{2n}(x\phi) & \cdots & \delta^{2n}(x^{n}\phi) \\ \delta^{2n}(x\phi) & \delta^{2n}(x^{2}\phi) & \cdots & \delta^{2n}(x^{n+1}\phi) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta^{2n}(x^{n}\phi) & \delta^{2n}(x^{n+1}\phi) & \cdots & \delta^{2n}(x^{2n}\phi) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \delta^{2n}(\phi) & \delta^{2n}(x\phi) & \cdots & \delta^{2n}(x^{n-1}\phi) \\ \delta^{2n}(x\phi) & \cdots & \cdots & \delta^{2n}(x^{n}\phi) \\ \vdots & & & \vdots \\ \delta^{2n}(x^{n-1}\phi) & \cdots & \cdots & \delta^{2n}(x^{2n-2}\phi) \end{vmatrix}$$

Pour les différences réciproques d'ordre impair :

$$\rho^{(2n+1)}(\phi(x)) = \frac{\begin{vmatrix} \delta^{2n+1}(\phi) & \delta^{2n+1}(x\phi) & \cdots & \delta^{2n+1}(x^{n-1}\phi) \\ \delta^{2n+1}(x\phi) & \cdots & \cdots & \delta^{2n+1}(x^{n}\phi) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta^{2n+1}(x^{n-1}\phi) & \cdots & \cdots & \delta^{2n+1}(x^{2n-2}\phi) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta^{2n+1}(\phi) & \cdots & \delta^{2n+1}(x^{n}\phi) \\ \delta^{2n+1}(x\phi) & \cdots & \delta^{2n+1}(x^{n+1}\phi) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta^{2n+1}(x^{n}\phi) & \cdots & \delta^{2n+1}(x^{2n}\phi) \end{vmatrix}} \qquad (13)$$

II.3 - COEFFICIENT DIFFERENTIEL RECIPROQUE.

Si l'on fait tendre tous les arguments qui figurent dans la différence réciproque d'ordre n vers la même limite x, alors $\rho^{(n)}(x_o, x_1,\dots,x_n)$ tendra vers ce que Thiele avait appelé le coefficient différentiel réciproque noté $r^n(\phi(x))$ ou simplement r^n.

La relation de récurrence (1) prend la forme :

$$(14) \qquad r^{n+1}(\phi(x)) = (n+1)\, r[r^n(\phi(x))] + r^{n-1}\,[\phi(x)]$$

et la fraction continue (3) nous donne le développement suivant :

$$\phi(x+z) = \phi(x) + \frac{z\,|}{|r(\phi(x))} + \frac{z\,|}{|2r(r(\phi(x)))} + \frac{z\,|}{|3r(r(\phi(x)))} + \cdots \qquad (15)$$

Pour calculer les coefficients différentiels qui figurent dans cette fraction continue on peut utiliser la relation (14), mais si la fonction $\phi(x)$ n'est pas extrêmement simple, le calcul de ses coefficients se complique. On va exposer deux méthodes pour le calcul de ces coefficients, la première est due à Thiele [48], la deuxième à Norlünd [46].

Si l'on revient aux deux relations (8) et (9) on peut en dériver une forme nouvelle de déterminant pour les différences réciproques qui se distingue surtout parce qu'il ne contient que des différences divisées de la fonction ϕ elle même. Ces expressions sont les suivantes :

$$\rho^{(2n)}[\phi(x)] = \frac{\begin{vmatrix} \delta^{o}(x_n) & \delta(x_{n-1},x_n) & & \delta^{n}(x_o,\ldots,x_n) \\ \delta(x_n,x_{n+1}) & \delta^{2}(x_{n-1},\ldots,x_{n+1}) & \cdots & \delta^{n+1}(x_o,\ldots,x_{n+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta^{n}(x_n,\ldots,x_{2n}) & \cdots & \cdots & \delta^{2n}(x_o,\ldots,x_{2n}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta^{2}(x_{n-1},\ldots,x_{n+1}) & \delta^{3}(x_{n-2},\ldots,x_{n+1}) & \cdots & \delta^{n+1}(x_o,\ldots,x_{n+1}) \\ \delta^{3}(x_{n-1},\ldots,x_{n+2}) & \cdots & \cdots & \delta^{n+2}(x_o,\ldots,x_{n+2}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta^{n+1}(x_{n-1},\ldots,x_{2n}) & \cdots & \cdots & \delta^{2n}(x_o,\ldots,x_{2n}) \end{vmatrix}} \qquad (16)$$

Cette expression est obtenue en retranchant dans les déterminants de (8) chaque colonne de la précédente multipliée par x_o en commençant par la dernière.
Dans le déterminant ainsi obtenu, on retranche de chaque colonne la précédente multipliée par x_1 en nous arrêtant à la 3^{e} colonne et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les éléments des déterminants soient des différences divisées de ϕ.

Pour les différences divisées d'ordre impair, on obtient :

(17)

$$\rho^{(2n+1)}[\phi(x)] = \frac{\begin{vmatrix} \delta^3(x_{n-1},\dots,x_{n+2}) & \delta^4(x_{n-2},\dots,x_{n+2}) & \cdots & \delta^{n+2}(x_o,\dots,x_{n+2}) \\ \delta^4(x_{n-1},\dots,x_{n+3}) & \delta^5(x_{n-2},\dots,x_{n+3}) & \cdots & \delta^{n+3}(x_o,\dots,x_{n+3}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta^{n+2}(x_{n-1},\dots,x_{2n+1}) & \delta^{n+3}(x_{n-2},\dots,x_{2n+1}) & \cdots & \delta^{2n+1}(x_o,\dots,x_{2n+1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta(x_n, x_{n+1}) & \delta^2(x_{n-1},\dots,x_{n+1}) & \cdots & \delta^{n+1}(x_o,\dots,x_{n+1}) \\ \delta^2(x_n,\dots,x_{n+2}) & \cdots & \cdots & \delta^{n+2}(x_o,\dots,x_{n+2}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta^{n+1}(x_n,\dots,x_{2n+1}) & \cdots & \cdots & \delta^{2n+1}(x_o,\dots,x_{2n+1}) \end{vmatrix}}$$

En utilisant la relation :

$$\lim_{\substack{x_i \to x \\ i=o,\dots,n}} \delta^n(x_o,\dots,x_n) = \frac{1}{n!} \frac{d^n\phi(x)}{dx^n}$$

les relations (16) et (17) nous donnent :

$$r^{2n}[\phi(x)] = \frac{\begin{vmatrix} a_o & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & \cdots & a_{n+1} \\ a_3 & a_4 & \cdots & a_{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix}} \qquad (18)$$

où on a posé

$$a_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i\phi(x)}{dx^i}$$

$$r^{2n+1}(\phi(x)) = \frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_4 & \cdots & a_{n+2} \\ a_4 & a_5 & \cdots & a_{n+3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+2} & a_{n+3} & \cdots & a_{2n+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n+1} \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{2n+1} \end{vmatrix}} \qquad (19)$$

Dans [46], Norlünd a montré le résultat suivant :

Théorème.

En posant :

$$H_n^{(k+1)} = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+k} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+k} & & & a_{n+2k} \end{vmatrix}$$

où $a_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i \phi(x)}{dx^i}$*, alors :*

$$(H_n^{(k+1)})' = (n+2k+1) \begin{vmatrix} a_n & \cdots & a_{n+k} \\ a_{n+1} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+k-1} & \cdots & a_{n+2k-1} \\ a_{n+k+1} & \cdots & a_{n+2k+1} \end{vmatrix}$$

où $(H_n^{(k)})'$ *désigne la dérivée de* $H_n^{(k)}$ *par rapport à* x.

On rappelle le théorème de Sylvester :

Théorème.

Si on pose :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & --- & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & --- & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & --- & a_{nn} \end{vmatrix}$$

alors on a :

$$\Delta \, . \, \frac{\delta^2 \Delta}{\delta a_{ij} \delta a_{k\ell}} = \frac{\delta \Delta}{\delta a_{ij}} \, . \, \frac{\delta \Delta}{\delta a_{k\ell}} - \frac{\delta \Delta}{\delta a_{i\ell}} \, . \, \frac{\delta \Delta}{\delta a_{kj}}$$

Des deux théorèmes précédents, Norlünd déduit les relations :

$$H_{n+1}^{(k)} H_{n-1}^{(k)} - (H_n^{(k)})^2 = H_{n+1}^{(k-1)} H_{n-1}^{(k+1)} \tag{20}$$

$$H_{n+1}^{(k-1)} H_n^{(k+1)} = \frac{1}{n+2k} H_n^{(k)} (H_{n+1}^{(k)})' - \frac{1}{n+2k-1} H_{n+1}^{(k)} (H_n^{(k)})' \tag{21}$$

$$\frac{n+2k-1}{n+2k} H_{n+1}^{(k)} (H_{n+1}^{(k)})' = H_{n+2}^{(k)} (H_n^{(k)})' - H_n^{(k+1)} (H_{n+2}^{(k-1)})' \tag{22}$$

$$\frac{n+2k+1}{n+2k} H_{n+1}^{(k)} (H_{n+1}^{(k)})' = (H_{n+2}^{(k)})' H_n^{(k)} - (H_n^{(k+1)})' H_{n+2}^{(k-1)} \tag{23}$$

La relation (20) n'est autre que la relation connue entre les déterminants de Hankel, alors que les autres sont des relations où intervient $(H_n^k)'$ qui désigne la dérivée de H_n^k par rapport à x.

Dans [48], Thiele a utilisé la relation (20) pour le calcul des coefficients de la fraction continue (16), qui présente l'avantage de ne pas contenir des dérivées des déterminants de Hankel.

Cependant Norlünd [46] utilise les autres relations. Il dérive de celles-ci la relation suivante :

$$H_n^{(k)} H_{n+1}^{(k+1)} = \frac{1}{2k+n+1} H_{n+1}^{(k)} (H_n^{(k+1)})' - \frac{1}{2k+n} H_n^{(k+1)} (H_{n+1}^{(k)})' \tag{24}$$

De (18) et (19) on déduit :

$$r^{2k}(\phi(x)) = H_o^{(k+1)}/H_2^{(k)}$$

$$r^{2k+1}(\phi(x)) = H_3^{(k)}/H_1^{(k+1)}$$

et en utilisant (20), on déduit :

$$(2k+1)\ r(r^{2k}(\phi(x))) = \frac{(H_2^{(k)})^2}{H_1^{(k)}\ H_1^{(k+1)}} \tag{25}$$

$$(2k+2)\ r(r^{2k+1}(\phi(x))) = -\frac{(H_1^{(k+1)})^2}{H_2^{(k)}\ H_2^{(k+1)}} \tag{26}$$

Si on pose :

$$\begin{cases} h_o = 1,\ h_1 = a_1,\ h_2 = a_2 \\ \text{et} \qquad h_{2k} = H_2^{(k)} \\ \qquad h_{2k+1} = H_1^{(k+1)} \end{cases}$$

La fraction continue (15) prend la forme :

$$\phi(x+z) = \phi(x) + \frac{z|}{|\frac{h_o^2}{h_1}} - \frac{z|}{|\frac{h_1^2}{h_o h_2}} - \frac{z|}{|\frac{h_2^2}{h_1 h_3}} - \ldots$$

La méthode utilisée par Norlünd consiste à poser dans (21) et (24) n=1 , celles-ci s'écrivent :

$$h_{2k-2}\, h_{2k+1} = \frac{1}{2k+1}\, h_{2k-1}\, h'_{2k} - \frac{1}{2k}\, h_{2k}\, h'_{2k-1}$$

$$h_{2k-1}\, h_{2k+2} = \frac{1}{2k+2}\, h_{2k}\, h'_{2k+1} - \frac{1}{2k+1}\, h_{2k+1}\, h'_{2k}$$

On en déduit les coefficients h_i, avec $h_o = 1$, $h_1 = a_1$ et $h_2 = a_2$. Ceci achève le calcul des coefficients de la fraction continue (15).

<u>Remarques.</u>

1°) La première forme confluente du ρ-algorithme n'est autre que le coefficient différentielle réciproque.
En effet :

si je multiplie la relation (20) par $\frac{1}{n+2k-1}\,(H_n^{(k)})'$ et la relation (21) par $H_{n+1}^{(k)}$, j'obtient après avoir retranché l'une de l'autre :

$$H_n^{(k+1)}\, H_{n+2}^{(k-1)}\, (H_n^{(k)})' \frac{1}{n+2k-1} - H_{n+1}^{(k-1)}\, H_n^{(k+1)}\, H_{n+1}^{(k)} =$$

$$\frac{1}{n+2k-1}\, H_{n+2}^{(k)}\, H_n^{(k)}\, (H_n^{(k)})' - \frac{1}{n+2k}\, H_n^{(k)}\, (H_{n+1}^{(k)})'\, H_{n+1}^{(k)}$$

et en utilisant la relation (24), on déduit :

$$\frac{1}{n+2k-1}\, H_{n+2}^{(k-1)}\, (H_n^{(k)})' - H_{n+1}^{(k-1)}\, H_{n+1}^{(k)} = \frac{1}{n+2k-1}\, (H_{n+2}^{(k-1)})'\, H_n^{(k)}$$

et j'obtient la relation :

$$H_{n+1}^{(k-1)} H_{n+1}^{(k)} = \frac{1}{n+2k-1} [H_{n+2}^{(k-1)} (H_n^{(k)})' - (H_{n+2}^{(k-1)})' H_n^{(k)}] \qquad (27)$$

En remplaçant dans cette relation k par k+1 et n par zéro, on obtient :

$$H_1^{(k)} H_1^{(k+1)} = \frac{1}{2k+1} [H_2^{(k)} (H_o^{(k+1)})' - (H_2^{k})' H_o^{(k+1)}]$$

Or

$$r^{2k}(\phi) = \frac{H_o^{(k+1)}}{H_2^{(k)}}$$

donc

$$(r^{2k}(\phi))' = \frac{(H_o^{(k+1)})' H_2^{(k)} - (H_2^{(k)})' H_o^{(k+1)}}{(H_2^{(k)})^2}$$

$$= (2k+1) \frac{H_1^{(k)} H_1^{(k+1)}}{(H_2^{(k)})^2}$$

or

$$r(r^{2k}(\phi)) = \frac{(H_2^{(k)})^2}{(2k+1) H_1^{(k)} H_1^{(k+1)}}$$

donc

$$r(r^{2k}(\phi)) = \frac{1}{(r^{2k}(\phi))'}$$

où $(r^{2k}(\phi))'$ désigne la dérivée de $r^{2k}(\phi)$.

De même, en utilisant la même technique on obtient :

$$r(r^{2k+1}(\phi)) = \frac{1}{(r^{2k+1}(\phi))'}$$

On a donc en général :

$$r(r^{n}(\phi)) = \frac{1}{(r^{n}(\phi))'}$$

et la relation :

$$r^{k+1}(\phi) = r^{k-1}(\phi) + (k+1)\, r(r^{k}(\phi))$$

prend la forme :

$$\boxed{r^{k+1}(\phi) = r^{k-1}(\phi) + \frac{k+1}{(r^{k}(\phi))'}}$$

qui n'est autre que la relation de la première forme confluente du ρ-algorithme Ce résultat peut aussi être affirmer de la définition même du coefficient différentiel réciproque et celle de la première forme confluente du ρ-algorithme.

2°) C. Brezinski dans [2] propose deux algorithmes pour le calcul des polynômes orthogonaux. Le deuxième algorithme consiste à calculer les coefficients de la fraction continue correspondante à la série $f(t) = \sum_{i=o}^{\infty} c_i t^i$:

$$c(t) = c_o + \frac{t|}{|\beta_1} + \frac{t|}{|\beta_2} + \frac{t|}{|\beta_3} + \dots$$

où

$$\beta_k = \rho_k(o) - \rho_{k-2}(o) \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Le calcul des quantités $\rho_k(o)$ est fait en utilisant la relation (20). C'est donc la même méthode que celle de Thiele.

3°) Il serait intéressant de trouver des formules analogues à (21), (22), (23), (24) et (27) dans le cas où les éléments des déterminants $H_n^{(k)}$ ont une forme plus générale.

III - GÉNÉRALISATION DE LA FRACTION CONTINUE DE THIELE.

La fraction continue de Thiele nous permet d'obtenir des fractions rationnelles d'interpolation de degré n pour le numérateur et n pour le dénominateur et des fractions de degré n pour le numérateur et n-1 pour le dénominateur de telle sorte que si l'on place ces fractions dans un tableau, comme on l'a fait dans la figure 1, on remplit les cases de deux diagonales de ce tableau. On se propose maintenant de voir comment on peut complèter la table de la figure (1). Le problème semble des plus difficiles car on ne peut même pas affirmer l'existence des fractions d'interpolation dans le cas général. Pour cela on va se limiter à étudier le cas normal, lorsque ces fractions existent, c'est à dire :

Etant donnée x_o, $x_1,\dots,x_n$, ... une suite d'abscices ϕ_o, $\phi_1,\dots$, $\phi_n,\dots$ leurs images par une fonction ϕ. Pour $(\mu,\nu) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, il existe une fraction $\frac{U_{\mu\nu}}{V_{\mu\nu}}$ telle que le degré de $U_{\nu\mu}$ soit ν et celui de $V_{\mu\nu}$ soit μ et

$$\frac{U_{\mu\nu}(x_i)}{V_{\mu\nu}(x_i)} = \phi_i \qquad i = o, \mu + \nu$$

et telle que $\frac{U_{\mu\nu}}{V_{\mu\nu}}$ ne correspond à aucun point autre que (μ,ν).

Pour cela on va s'appuyer sur l'analogie développer par Padé dans [25] entre les réduites d'une fonction et les fractions d'interpolation de Cauchy. Dans le sous-paragraphe suivant on va s'intéresser à l'étude de Padé sur les fractions rationnelles d'interpolation.

III.1 - EXTENTION DES PROPRIETES DES REDUITES D'UNE FONCTION AUX FRACTIONS D'INTERPOLATION DE CAUCHY.

Sous l'hypothèse ci-dessus, étant donné $(\mu,\nu) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, la formule d'interpolation de Cauchy permet d'obtenir une fraction rationnelle qu'on note $\frac{U_{\mu\nu}}{V_{\mu\nu}}$ telle que le degré de $U_{\mu\nu}$ soit ν et celui de $V_{\nu\mu}$ soit μ et que pour x_o, $x_1,\dots,x_{\mu+\nu}$; ϕ_o, $\phi_1,\dots,\phi_{\mu+\nu}$ donnés on ait :

$$\frac{U_{\mu\nu}(x_i)}{V_{\mu\nu}(x_i)} = \phi_i \qquad i = o, \ +$$

Si le nombre de valeurs ϕ_i données est égal à k, alors il existe k fractions dont la somme des degrés des termes est égale à k-1 et qui interpolent ϕ aux k abscisses x_i. Si l'on fait varier k de zéro à l'infini, on obtient une suite infinie de fractions rationnelles d'interpolation qui vont remplir toutes les cases du tableau de la figure (1).

Dans [25], Padé essaye de montrer que ces fractions d'interpolation possèdent des propirétés analogues à celles des réduites d'une fonction. Il considère deux suites de quantités correspondantes :

$$\begin{cases} x_o, x_1, x_2, \ldots \\ \phi_o, \phi_1, \phi_2, \ldots \end{cases}$$

Soient $\frac{U_{\mu\nu}}{V_{\mu\nu}}$, $\frac{U_{\mu'\nu'}}{V_{\mu'\nu'}}$ et $\frac{U_{\mu''\nu''}}{V_{\mu''\nu''}}$ trois fractions correspondants respectivement aux points (μ,ν), (μ',ν') et (μ'',ν'').

Posons

$$\Delta = V_{\mu\nu}U_{\mu'\nu'} - U_{\mu\nu}V_{\mu'\nu'}$$

Padé a montré le résultat suivant :

Théorème.

Δ est divisible par le produit $(x-x_o)(x-x_1) \ldots (x-x_m)$, où m est le plus petit des deux nombres $(\mu+\nu,\ \mu'+\nu')$.

De ce théorème, il résulte que dans le cas où $(\mu',\ \nu')$ est l'un des points

$$(\mu+1,\nu)\ ;\ (\mu,\ \nu+1)\ ;\ (\mu+1,\ \nu+1)$$

alors

$$\Delta = h(x-x_o)(x-x_1) \ldots (x-x_{\mu+\nu})$$

où h est une constante et de ce résultat, Padé énonce le théorème suivant :

Théorème.

Si (μ'', ν'') *est l'un des points* $(\mu'+1, \nu')$, $(\mu', \nu'+1)$; $(\mu'+1, \nu'+1)$, *alors les numérateurs et les dénominateurs des fractions* $\frac{U_{\mu\nu}}{V_{\mu\nu}}$, $\frac{U_{\mu'\nu'}}{V_{\mu'\nu'}}$ *et* $\frac{U_{\mu''\nu''}}{V_{\mu''\nu''}}$ *satisfont aux relations :*

$$\left\{\begin{array}{l} V_{\mu''\nu''} = \alpha\, V_{\mu\nu} + a\, V_{\mu'\nu'} \\ \\ U_{\mu''\nu''} = \alpha\, U_{\mu\nu} + a\, U_{\mu'\nu'} \end{array}\right. \qquad (*)$$

où α *est, à un facteur constant près, égal à* $x-x_{\mu+\nu+1}$ *si* (μ', ν') *est l'un des points* $(\mu+1,\nu)$, $(\mu, \nu+1)$, *ou à* $(x-x_{\mu+\nu+1})(x - x_{\mu+\nu+2})$ *si* (μ', ν') *est le point* $(\mu+1, \nu+1)$ *; tandis que* a *est, soit une constante, soit un binôme du premier degré.*

Padé a remarqué que les relations de récurrence (*), sont analogues à celles des réduites des fractions continues holoïdes associées à une fonction (voir chapitre I). Elles conduisent donc à des fractions continues analogues à celles-ci, ayant les quantités α pour numérateurs partiels et les quantités a pour dénominateurs partiels. Chacune de ces fractions continues, qui sont en nombre illimité, donnera par ses réduites, une succession déterminée de fractions d'interpolation appartenant au tableau de la figure (1).
Padé a remarqué également que le calcul des coefficients α et a qui entrent dans les relations de récurrence est difficile du fait de la complication de la fraction de Cauchy ; il s'est contenté de donner l'expression de la fraction continue dont les réduites remplissent la première ligne horizontale de la table de la figure (1) et qui ne sont autre que les polynômes d'interpolation de Newton.
Mais si on essaye de faire le lien avec ce qu'on a exposé dans le deuxième paragrphe de ce chapitre, on peut voir facilement que les α et les a, dans le cas de deux diagonales sont donnés par :

$$\begin{cases} \alpha_i = x - x_{i-1} & \\ & i \geq 2 \\ \beta_i = \rho_i^{(o)} - \rho_{i-2}^{(o)} & \\ \text{avec} \quad \alpha_o = \phi_o \qquad \alpha_1 = x - x_o & \\ \qquad\quad a_o = 1 \qquad a_1 = \rho_1^{(o)} & \end{cases}$$

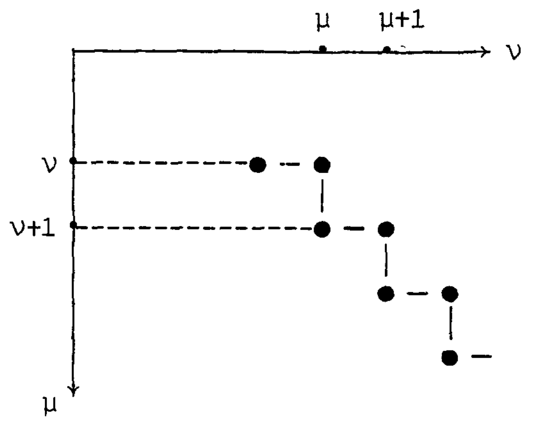
On voit que le ρ-algorithme entre dans le calcul de ces coefficients. Dans le cas où l'on considère des réduites suivant un chemin en escalier autre qu celui de la figure (1), on doit s'attendre à ce que ces coefficients soient calculés par un algorithme qui généralise le ρ-algorithme.

Dans le sous-paragraphe suivant je vais donner des algorithmes pour le calcul des coefficients α et a ne faisant intervenir que les valeurs des fractions d'interpolation aux points d'interpolation.

III.2 - ALGORITHME DE CALCUL DES FRACTIONS RATIONNELLES D'INTERPOLATION.

1°) Cas où les fractions d'interpolation forment un chemin en escalier.

Considérons trois fractions consécutives correspondants aux points (μ,ν) $(\mu, \nu+1)$ et $(\mu+1, \nu+1)$. Désignons ces fractions par $\frac{P_i}{Q_i}$, $\frac{P_j}{Q_j}$ et $\frac{P_k}{Q_k}$.



$\frac{P_i}{Q_i}$ interpôle ϕ aux points $x_o, x_1,\ldots,x_{\mu+\nu}$

$\frac{P_j}{Q_j}$ interpôle ϕ aux points $x_o, x_1,\ldots,x_{\mu+\nu}, x_{\mu+\nu+1}$

$\frac{P_k}{Q_k}$ interpôle ϕ aux points $x_o, x_1,\ldots,x_{\mu+\nu+2}$

D'après le théorème précédent, on a :

$$(1)\quad \begin{cases} P_k = \alpha P_i + aP_j \\ Q_k = \alpha Q_i + aQ_j \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{aligned} \alpha &= h(x - x_{\mu+\nu+1}) \\ a &= \text{constante} \end{aligned}$$

Posons :

$$\lambda = P_k(x_{\mu+\nu+2})$$

$$\mu = Q_k(x_{\mu+\nu+2})$$

λ et μ sont inconnues mais leurs rapports $\frac{\lambda}{\mu} = \phi_{\mu+\nu+2}$ est connu.

Posons dans le système (1), $x = x_{\mu+\nu+2}$, il prend la forme :

$$\begin{cases} \mu\phi_{\mu+\nu+2} = h(x_{\mu+\nu+2} - x_{\mu+\nu+1})\, P_i(x_{\mu+\nu+2}) + P_j(x_{\mu+\nu+2}) \\ \mu = h(x_{\mu+\nu+2} - x_{\mu+\nu+1})\, Q_i(x_{\mu+\nu+2}) + Q_j(x_{\mu+\nu+2}) \end{cases}$$

En multipliant la deuxième équation par $\phi_{\mu+\nu+2}$ et en la retranchant de la première, on obtient :

$$h(x_{\mu+\nu+2} - x_{\mu+\nu+1})(P_i(x_{\mu+\nu+2}) - Q_i(x_{\mu+\nu+2})) = (P_j(x_{\mu+\nu+2}) - Q_j(x_{\mu+\nu+2}))$$

d'où :

$$\boxed{h = \frac{1}{x_{\mu+\nu+1} - x_{\mu+\nu+2}} \; \frac{P_j(x_{\mu+\nu+2}) - Q_j(x_{\mu+\nu+2})\, \phi_{\mu+\nu+2}}{P_i(x_{\mu+\nu+2}) - Q_i(x_{\mu+\nu+2})\, \phi_{\mu+\nu+2}}}$$

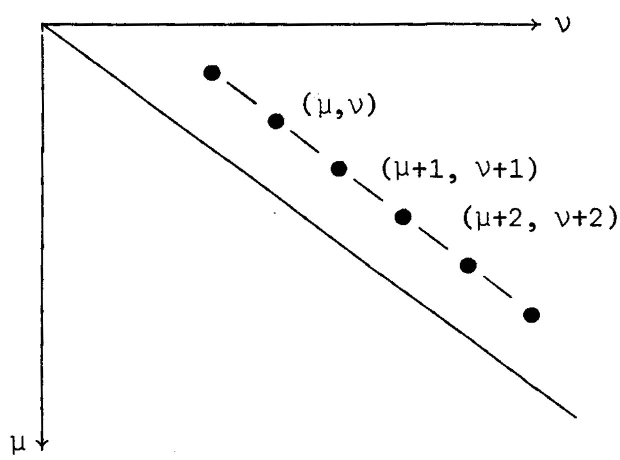
Dans les calculs, on a supposé la constante a égale à 1, ce qui ne restreint pas la généralité.

Les coefficients α et a étant calculés, on déduit, à l'aide de (1), les polynômes P_k et Q_k.

Remarque.

On a considéré des fractions consécutives correspondants aux points (μ,ν), $(\mu, \nu+1)$ et $(\mu+1, \nu+1)$. Le calcul précédent reste valable dans le cas de trois fractions correspondants aux points (μ,ν), $(\mu+1, \nu)$ et $(\mu+1, \nu+1)$.

2°) Cas où les fractions d'interpolation sont placées dans des cases parallèles à la diagonale du tableau.



Considérons les fractions $\frac{P_i}{Q_i}$, $\frac{P_j}{Q_j}$ et $\frac{P_k}{Q_k}$ correspondants aux points (μ,ν), $(\mu+1, \nu+1)$ et $(\mu+2, \nu+2)$.

$\frac{P_i}{Q_i}$ interpôle ϕ aux points $x_o, x_1,\dots,x_{\mu+\nu}$

$\frac{P_j}{Q_j}$ interpôle ϕ aux points $x_o, x_1,\dots,x_{\mu+\nu+2}$

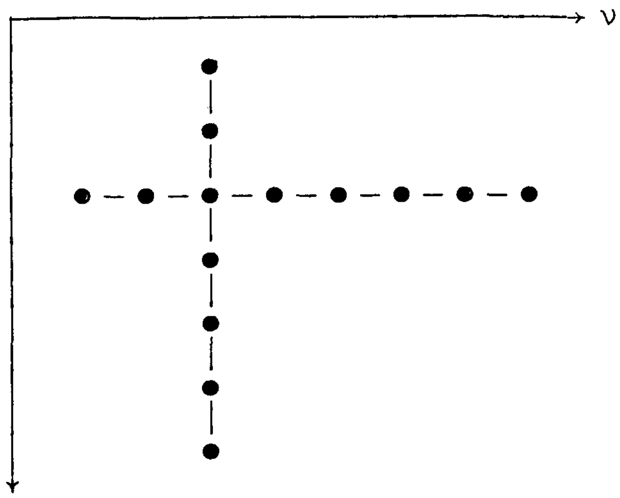
$\frac{P_k}{Q_k}$ interpôle ϕ aux points $x_o, x_1,\dots,x_{\mu+\nu+4}$

Entre ces fractions on a les relations :

$$\begin{cases} P_k = \alpha P_i + aP_j & \alpha = (x - x_{\mu+\nu+1})(x-x_{\mu+\nu+2}) \\ & \text{où} \\ Q_k = \alpha Q_i + aQ_j & a = \text{binôme} \end{cases}$$

Les coefficients α et a peuvent être calculés en utilisant la même technique que précédemment.

3°) Cas où les fractions d'interpolation sont placées dans les cases parallèles à l'axe des μ ou à l'axe des ν :



Si l'on considère trois fractions consécutives correspondants aux points (μ,ν), $(\mu+1, \nu)$ et $(\mu+2, \nu)$ ou aux points (μ,ν), $(\mu, \nu+1)$ et $(\mu, \nu+2)$, désignons ces fractions par $\frac{P_i}{Q_i}$, $\frac{P_j}{Q_j}$ et $\frac{P_k}{Q_k}$.

$\frac{P_i}{Q_i}$ interpôle ϕ aux points x_o, $x_1,\ldots,x_{\mu+\nu}$.

$\frac{P_j}{Q_j}$ interpôle ϕ aux points x_o, $x_1,\ldots,x_{\mu+\nu+1}$.

$\frac{P_k}{Q_k}$ interpôle ϕ aux points $x_o, x_1, \ldots, x_{\mu+\nu+2}$

d'après le théorème précédent, on a :

$$\begin{cases} P_k = \alpha P_i + a P_j & \alpha = h(x - x_{\mu+\nu+1}) \\ & \text{où} \\ Q_k = \alpha Q_i + a Q_j & a = mx + n \end{cases}$$

les quantités α et a peuvent se déterminer en utilisant une même technique que précédemment.

Remarque.

On vient en quelque sorte de généraliser la fraction continue de Thiele. Cette généralisation a un double intérêt :

i) Avoir une infinité de développements en fraction continue d'interpolation.

Avoir une méthode pour le calcul des différentes fractions rationnelles d'interpolations grâce aux relations de récurrences entre les réduites d'une fraction continue.

Il serait intéressant de faire une étude du problème de l'existence des fractions d'interpolation et d'étudier le cas anormal. Pour cela remarquons que Padé a utilisé la même méthode pour l'étude des fractions rationnelles approchées et les fractions rationnelles d'interpolation. Dans les deux cas il s'est intéressé aux polynômes $\Delta = U_{\mu\nu}V_{\mu'\nu'} - U_{\mu'\nu'}V$, dont la forme lui permet d'arriver à des résultats concernant le cas anormal pour les fractions rationnelles approchées. Donc pour étudier le cas anormal pour les fractions rationnnelles d'interpolation, il serait intéressant de s'appuyer sur les résultats de Padé exposés au chapitre I.

CHAPITRE V

APPLICATIONS DES FRACTIONS CONTINUES ALGEBRIQUES

0 - INTRODUCTION

L'objet de ce chapitre est de donner quelques applications des fractions continues algébriques, ce qui va nous permettre de voir comment on trouve la solution de certains problèmes en utilisant les fractions continues. Ces applications utilisent l'unique développement en fraction continue canonique d'une certaine fonction admettant un développement suivant les puissances décroissantes de la variable.

Il serait intéressant de voir ce que ceci peut donner quand on se place au point de vue de la théorie des fractions continues holoïdes associées à une fonction ; dans ce cas on aura une infinité de fractions continues qui représentent la fonction et l'on peut donc espérer améliorer ces applications et augmenter leur nombre.

Dans le premier paragraphe, on va étudier une méthode d'interpolation polynômiale due à Tchebycheff [51]. L'analyse de quelques résultats des mémoires [52] et [53] nous ont permis de construire un procédé régulier de sommation.

Le deuxième paragraphe est consacré à l'étude des mémoires [54] et [55] de Tchebycheff. On y expose une méthode de développement d'une fonction donnée en série de fonctions ; les résultats obtenus ont permis à Tchebycheff de répondre à la question suivante :

> "*Trouver deux polynômes* X *et* Y *telle que l'expression* UX-Y *où* u *est une fraction continue canonique donnée, représente le mieux possible une fonction* v *donnée, quand le degré de* X *est fixé*".

Dans le troisième paragraphe on étudie quelques propriétés des réduites de la fraction continue canonique provenant du développement de la fonction F définie par :

$$F(z) = \int_a^b \frac{f(y)dy}{z-y}$$

Ces propriétés nous servirons dans le quatrième paragraphe pour le calcul numérique des intégrales et, dans le cinquième paragraphe, pour exposer les recherches de Markoff à propos du problème suivant posé par Tchebycheff :

x étant un nombre donné appartenant à [a,b],

f une fonction positive dans [a,b] qui reste inconnue,

Ω une fonction quelconque donnée dérivable jusqu'à l'ordre $\mu+1$, et telle que Ω et ses dérivées jusqu'à cet ordre soient positives dans [a,b].
Alors, d'après les valeurs données des intégrales :

$$\alpha_o = \int_a^b f(y)dy, \quad \alpha_1 = \int_a^b y\, f(y)dy, \; \ldots, \; \alpha_\mu = \int_a^b y^\mu\, f(y)dy$$

il s'agit de trouver un majorant et un minorant de l'intégrale :

$$\int_a^b \Omega(y)\, f(y)dy.$$

Le chapitre se termine par un résultat de Padé sur la généralisation des formules données par Sylvester pour le représentation des polynômes qui se présentent dans le théorème de Sturm.

I - INTERPOLATION POLYNÔMIALE.

I.1 - L'ENONCE DU PROBLEME ET LA SOLUTION : (TCHEBYCHEFF [51]).

Soit F une fonction dont on connait la valeur en n+1 points x_o, $x_1,\dots,x_n$. On suppose que F puisse être représentée par un polynôme de degré n :

$$a + bx + cx^2 + \dots + hx^m.$$

On suppose que $m \leq n$. Le problème est de déterminer les coefficients a, b, c,...,h tels que les erreurs des valeurs $F(x_o)$, $F(x_1),\dots,F(x_n)$ aient la plus petite influence sur une valeur quelconque F(x).

On a donc le système d'équations :

$$\begin{cases} F(x_i) = a + bx_i + cx_i^2 + \dots + hx_i^m \\ \\ i = o,\dots,n \end{cases}$$

Si l'on multiplie chaque équation par un facteur indéterminé λ_i et si l'on fait la somme, on obtient :

$$\lambda_o\ F(x_o) + \lambda_1\ F(x_1) + \dots + \lambda_n F(x_n) =$$

$$a(\lambda_o + \lambda_1 + \dots + \lambda_n) +$$

$$b(\lambda_o x_o + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) +$$

$$c(\lambda_o x_o^2 + \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2) +$$

$$h(\lambda_o x_o^m + \lambda_1 x_1^m + \dots + \lambda_n x_n^m).$$

Si on compare cette expression à :

$$F(X) = a+bX+cX^2+ \dots + hX^m$$

on aura :

$$F(X) = \lambda_o F(x_o) + \lambda_1 F(x_1) + \dots + \lambda_n F(x_n)$$

et on obtient donc le système d'équations :

$$(1) \qquad \begin{cases} \lambda_o x_o^i + \lambda_1 x_1^i + \dots + \lambda_n x_n^i = X^i \\ i = o,\dots,m \end{cases}$$

Dans le cas où m = n, le système (1) admet une solution unique. Dans ce qui suit on va écarter cette hypothèse et on va supposer que m < n. Dans ce cas le système (1) admet une infinité de solutions et, parmi ces solutions, il faut déterminer celle qui remplit la condition du problème.

Posons $k_i^2 = \alpha_i \dfrac{e_o^2 + e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2}{(n+1)}$ où e_i désigne l'erreur correspondant à $F(x_i)$ et α_i une constante.

Tchebycheff, déduit de la théorie des probabilités, que les coefficients λ_o, $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ qui répondent à la question sont ceux qui minimise la somme :

$$k_o^2\lambda_o^2 + k_1^2\lambda_1^2 + k_2^2\lambda_2^2 + \dots + k_n^2\lambda_n^2$$

Soit $\theta(x)$ un polynôme de degré n tel que :

$$\theta(x_i) = \frac{1}{k_i} \qquad\qquad i = o, n.$$

La somme précédente s'écrira :

$$\frac{\lambda_o^2}{\theta^2(x_o)} + \frac{\lambda_1^2}{\theta^2(x_1)} + \dots + \frac{\lambda_n^2}{\theta^2(x_n)}$$

En égalant la différentielle de cette somme à la somme des différentielles des équations (1) multipliées chacune par des constantes arbitraires μ_o, $\mu_1,\dots,\mu_m$, on obtient le système :

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{2\lambda_i}{\theta^2(x_i)} = \mu_o + \mu_1 x_i + \mu_2 x_i^2 + \dots + \mu_m x_i^m \\ \\ i = o, n. \end{cases}$$

Le système (1) réuni au système (2), détermine les n+m+2 inconnues

$$\lambda_o,\ \lambda_1,\dots,\lambda_n,\ \mu_o,\ \mu_1,\dots,\mu_m$$

Le problème se ramène donc à la résolution d'un système d'équation.

Solution du problème.

Nous allons voir que la solution est donnée par le développement en fraction continue d'une certaine fonction.

Posons $\phi(x) = \frac{1}{2}(\mu_o + \mu_1 x + \dots + \mu_m x^m)$ le système (2) est donc équivalent à :

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\lambda_i}{\theta^2(x_i)} = \phi(x_i) \\ \\ i = o,\dots,n \end{cases}$$

et pour déterminer λ_i, il faut déterminer ϕ.

Si l'on remplace les expressions des λ_i tirées de (3) dans (1), on obtient le système d'équations :

$$(4)\quad \begin{cases} \theta^2(x_o)\phi(x_o)x_o^i + \theta^2(x_1)\phi(x_1)x_1^i + \ldots + \theta^2(x_n)\phi(x_n)x_n^i = X^i \\ i = 0, 1,\ldots,m \end{cases}$$

Les premiers membres de (4) sont les coefficients de $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2},\ldots,\frac{1}{x^{m+1}}$ dans le développement suivant les puissances décroissantes de la fonction :

$$\frac{\theta^2(x_o)\phi(x_o)}{x-x_o} + \frac{\theta^2(x_1)\phi(x_1)}{x-x_1} + \ldots + \frac{\theta^2(x_n)\phi(x_n)}{x-x_n}$$

Les seconds membres sont de même les coefficients du développement suivant les puissances décroissantes de la fonction :

$$\frac{1}{x-X}$$

Si l'on pose :

$$\frac{\theta^2(x_o)\phi(x_o)}{x-x_o} + \frac{\theta^2(x_1)\phi(x_1)}{x-x_1} + \ldots + \frac{\theta^2(x_n)\phi(x_n)}{x-x_n} - \frac{1}{x-X} = \frac{M}{N}$$

alors, le système (4) peut être remplacé par la condition suivante :

le développement suivant les puissances décroissantes de la fonction $\frac{M}{N}$ ne renferme pas de termes en $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2},\ldots,\frac{1}{x^{m+1}}$, c'est à dire :

$$\frac{M}{N} = \left(\frac{1}{x^{m+2}}\right)$$

et on a donc $d^o(N) \geq d^o(M) + m + 2$.

Si l'on pose $f(x) = (x-x_o)(x-x_1)\ \ldots\ (x-x_n)$, alors, en désignant par U la partie polynômiale de $\frac{\theta^2(x)\phi(x)f'(x)}{f(x)}$, on aura :

$$\frac{\theta^2(x\ )\phi(x)f'(x)}{f(x)} = U + \frac{\theta^2(x_o)\phi(x_o)}{x-x_o} + \frac{\theta^2(x_1)\phi(x_1)}{x-x_1} + \dots + \frac{\theta^2(x_n)\phi(x_n)}{x-x_n}$$

d'où

$$\frac{\theta^2(x)\phi(x)f'(x)}{f(x)} - U - \frac{1}{x-X} = \frac{M}{N}$$

ou encore

$$\frac{(x-X)f'(x)\theta^2(x)}{f(x)} - \frac{U(x-X)+1}{\phi(x)} = \frac{(x-X)M}{\phi(x)\ N} \qquad (5)$$

Or $d^o(N) \geq d^o(M) + m + 2$ donc :

$$\frac{(x-X)\ M}{\phi(x)\ N} = (\frac{1}{x^{2m+1}})$$

et la relation (5) nous donne :

$$\frac{(x-X)f'(x)\theta^2(x)}{f(x)} - \frac{U(x-X)+1}{\phi(x)} = (\frac{1}{x^{2m+1}})$$

ce qui montre que $\frac{U(x-X)+1}{\phi(x)}$ est une réduite du développement en fraction continue canonique de la fonction :

$$\frac{(x-X)f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$$

De plus, la réduite qui suit $\frac{U(x-X)+1}{\phi(x)}$ aura un dénominateur de degré supérieur à m, donc :

$\frac{U(x-X)+1}{\phi(x)}$ est la dernière réduite dont le degré du dénominateur n'excède pas m.

Posons $\frac{U(x-X)+1}{\phi(x)} = \frac{\phi^o(x)}{\phi_o(x)}$ on aura donc :

$$U(x-X) + 1 = \frac{\phi^o(x)\phi(x)}{\phi_o(x)}$$

Or $\phi^o(x)$ et $\phi_o(x)$ sont premiers entre eux, donc $\phi_o(x)$ divise $\phi(x)$:

$$\phi(x) = q\ \phi_o(x)$$

ce qui entraîne :

$$U(x-X) + 1 = q\ \phi^o(x)$$

Si $\phi_o(x)$ est de degré m, en faisant x = X dans la relation précédente on obtient :

$$q = \frac{1}{\phi^o(X)}$$

d'où

$$\phi(x) = \frac{\phi_o(x)}{\phi^o(X)}$$

Si $\phi_o(x)$ est de degré inférieur à m, q peut être un polynôme quelconque pourvu que le degré de q $\phi_o(x)$ ne surpasse pas m.
Si l'on convient de prendre parmi ces valeurs celle dont le degré est le moins élevé, q est une constante dont la valeur est déterminée comme précédemment, et l'on obtient :

$$\phi(x) = \frac{\phi_o(x)}{\phi^o(X)}$$

ce qui détermine la fonction ϕ.

Revenons à la formule :

$$F(X) = \lambda_o\, F(x_o) + \lambda_1\, F(x_1) + \ldots + \lambda_n\, F(x_n).$$

On a :

$$\lambda_i = \theta^2(x_i)\, \phi(x_i) = \frac{\theta^2(x_i)\phi_o(x_i)}{\phi^o(X)}$$

d'où le résultat :

(6)

$$\boxed{F(X) = \frac{\theta^2(x_o)\phi_o(x_o)}{\phi^o(X)}\, F(x_o) + \frac{\theta^2(x_1)\phi_o(x_1)}{\phi^o(X)}\, F(x_1) + \ldots + \frac{\theta^2(x_n)\phi_o(x_n)}{\phi^o(X)}\, F(x_n)}$$

I.2 - REMARQUES A PROPOS DE LA FORMULE PRECEDENTE.

Remarque 1.

La formule précédente représente un polynôme en X, et la présence de $\phi^o(x)$ au dénominateur montre bien qu'il y aura des simplifications. Pour arriver à une forme qui en laisse voir la composition Tchebycheff a utilisé le résultat suivant que l'on verra dans ce chapitre dans un cas plus général.

Si l'on désigne par $\frac{\pi_o(x)}{\psi_o(x)}, \frac{\pi_1(x)}{\psi_1(x)}, \ldots$ les réduites du développement canonique de la fonction $\frac{f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$, alors on obtient celles de $\frac{(x-X)f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$ par la formule :

$$\frac{\psi_m(X)\ \pi_{m+1}(x) - \psi_{m+1}(X)\pi_m(x)}{\frac{1}{x-X}\ [\psi_m(X)\ \psi_{m+1}(x)-\psi_m(x)\psi_{m+1}(X)]}$$

Si l'on remplace dans la formule (6), les expressions $\dfrac{\phi^o(x)}{\phi_o(x)}$ par l'expression ci-dessus, celle-ci prendra la forme :

$$F(X) = (-1)^m \sum_{i=o}^{n} \frac{\psi_m(X)\ \psi_{m+1}(x_i) - \psi_{m+1}(X)\ \psi_m(x_i)}{x_i - X}\ \theta^2(x_i)\ F(x_i)$$

Si l'on désigne par Y_m cette fonction, et par Y_{m-1} la fonction F(X) dans l'hypothèse où elle est donnée par un polynôme de degré m-1, alors on aura :

$$Y_{m-1} = (-1)^{m-1} \sum_{i=o}^{n} \frac{\psi_{m-1}(X)\psi_m(x_i) - \psi_m(X)\psi_{m-1}(x_i)}{x_i - X}\ \theta^2(x_i)\ F(x_i)$$

En prenant la différence de Y_m et Y_{m-1}, on obtient :

$$Y_m - Y_{m-1} = (-1)^m \sum_{i=o}^{n} \frac{\psi_m(X)\ [\psi_{m+1}(x_i) - \psi_{m-1}(x_i)]\ \psi_m(x_i)\ [\psi_{m+1}(X) - \psi_{m-1}(X)]}{x_i - X}\ \theta^2(x_i) F$$

Cette expression peut se simplifier du fait des propriétés des fonctions ψ_{m+1}, ψ_m et ψ_{m-1}. En effet :

supposons que le développement de $\dfrac{f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$ en fraction continue canonique est :

$$q_o + \frac{1|}{|q_1} + \frac{1|}{|q_2} + \dots$$

où

$$q_i = A_i x + B_i \qquad\qquad i \geq 1$$

on aura donc :

$$\psi_{m+1}(x) - \psi_{m-1}(x) = (A_{m+1}x + B_{m+1})\ \psi_m(x)$$

et en remplaçant dans l'expression de $Y_m - Y_{m-1}$, on obtient :

$$Y_m - Y_{m-1} = (-1)^m A_{m+1} \psi_m(X) \sum_{i=o}^{n} \psi_m(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i)$$

et de là, on déduit une autre expression de Y_m :

$$Y_m = A_1 \psi_o(X) \sum_{i=o}^{n} \psi_o(x_i)\theta^2(x_i) F(x_i) - A_2\psi_1(X) \sum_{i=o}^{n} \psi_1(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i) + \ldots$$
$$+ \ldots\ldots\ldots + (-1)^m A_{m+1} \psi_m(X) \sum_{i=o}^{n} \psi_m(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i). \qquad (7)$$

Remarque 2.

Si dans la formule (7) on fait $Y_m = \psi_m(x)$, alors on est conduit au système suivant :

$$(8) \quad \begin{cases} (-1)^m A_{m+1} \sum_{i=o}^{n} \psi_m^2(x_i) \theta^2(x_i) - 1 = 0 \\ \\ A_j \sum_{i=o}^{n} \psi_{j-1}(x_i)\psi_m(x_i)\theta^2(x_i) = 0 \qquad j = 1, m. \end{cases}$$

Or $A_j \neq 0$ pour $j = 1, 2, \ldots, m$.
On aura donc :

$$\sum_{i=o}^{n} \psi_j(x_i) \psi_m(x_i) \theta^2(x_i) = 0 \qquad j = 0, m-1$$

et donc pour $m' \neq m$:

$$\sum_{i=o}^{n} \psi_{m'}(x_i) \psi_m(x_i) \theta^2(x_i) = 0$$

Le système (8) nous donne les valeurs des A_i :

$$A_i = \frac{(-1)^{i-1}}{\sum_{i=o}^{n} \psi_m^2(x_i)\ \theta^2(x_i)} \qquad\qquad i = 1,\dots,m$$

et l'expression de F(X) donnée par (7) prend la forme :

$$F(X) = \frac{\sum_{i=o}^{n} \psi_o(x_i)\ \theta^2(x_i)\ F(x_i)}{\sum_{i=o}^{n} \psi_o^2(x_i)\ \theta^2(x_i)}\ \psi_o(X) + \frac{\sum_{i=o}^{n} \psi_1(x_i)\ \theta^2(x_1)\ F(x_i)}{\sum_{i=o}^{n} \psi_1^2(x_1)\ \theta^2(x_i)}\ \psi_1(X) + \dots$$

$$+ \dots\dots\dots + \frac{\sum_{i=o}^{n} \psi_m(x_i)\ \theta^2(x_i)\ F(x_i)}{\sum_{i=o}^{n} \psi_m^2(x_i)\ \theta^2(x_i)}\ \psi_m(X) \tag{9}$$

<u>Remarque 3.</u>

Si l'on compare l'expression (9) pour m = n avec la formule d'interpolation de Lagrange, on obtient les relations suivantes :

$$(10)\ \begin{cases} \dfrac{\psi_o(x_i)\ \theta(x_i)\ \psi_o(x_\eta)\ \theta(x_\eta)}{\sum_{i=o}^{n} \psi_o^2(x_i)\ \theta^2(x_i)} + \dots + \dfrac{\psi_m(x_i)\ \theta(x_i)\ \psi_m(x_\eta)\ \theta(x_\eta)}{\sum_{i=o}^{n} \psi_n^2(x_i)\ \theta^2(x_i)} \\[2ex] \qquad = 0 \qquad \text{si } \eta \neq i \\[2ex] \qquad\ \ 1 \qquad\quad \eta \neq i \end{cases}$$

Tchebycheff a montré dans [51] que ces expressions, réunies aux relations du système (8), expriment une relation remarquable des fonctions $\Phi_m(x)$ définies par :

$$\Phi_m(x) = \frac{\psi_m(x)\ \theta(x)}{\sum_{i=o}^{n} \psi_m^2(x_i)\ \theta^2(x_i)}$$

En effet, les équations (10) nous donnent :

$$\sum_{m=o}^{n} \Phi_m(x_i)\ \Phi_m(x_n) = 0 \qquad \text{si } \eta \neq i$$

$$= 1 \qquad \text{si } \eta = i$$

et en utilisant les relations (8), on peut facilement montrer que :

$$\sum_{i=o}^{n} \Phi_m(x_i)\ \Phi_{m'}(x_i) = 0 \qquad \text{si } m' \neq m$$

$$= 1 \qquad \text{si } m' = m$$

A partir de ces relations, Tchebycheff a montré le résultat suivant qui va nous servir dans la suite pour faire le lien avec les procédés de sommation.

Théorème.

Si de toutes les valeurs de la fonction $\Phi_m(x)$*, obtenues en faisant* $m = 0, 1, \ldots, n$ *et* $x = x_o, x_1, \ldots, x_n$ *, on compose le carré de la figure 1, alors :*

i) la somme des carrés des termes d'une rangée quelconque, horizontale ou verticale, sera égale à l'unité,

ii) la somme des produits des termes correspondants de deux rangées horizontales ou verticales sera égale à zéro.

$$\begin{array}{ccc} \Phi_o(x_o) & \Phi_o(x_1) \; --- & \Phi_o(x_n) \\ \Phi_1(x_o) & \Phi_1(x_1) \; --- & \Phi_1(x_n) \\ & & \\ \Phi_n(x_o) & \Phi_n(x_1) \; --- & \Phi_n(x_n) \end{array}$$

Fig. 1.

Remarque 4 : Relation avec la méthode classique des moindres carrés.

Si on utilise la relation (9) pour représenter une fonction quelconque F(X), on obtiendra un polynôme de degré m, tel que, la somme des carrés des différences entre les valeurs de ce polynôme et les valeurs correspondantes de F(X) pour $X = x_o, x_1,\dots,x_n$, multipliés chacun par $\theta^2(x_o)$, $\theta^2(x_1),\dots,\theta^2(x_n)$ respectivement, soit minimum.

Démonstration.

Soit P le polynôme cherché.

Posons $P(X) = A_o\psi_o(X) + A_1\psi_1(X) + \dots + A_m\psi_m(X)$. A_o, $A_1,\dots,A_m$ doivent être déterminés de sorte que la somme :

$$\sum_{i=o}^{n} (F(x_i) - P(x_i))^2 \; \theta^2(x_i)$$

soit minimum. Nous aurons donc le système d'équations :

$$\begin{cases} 2 \sum\limits_{i=o}^{n} [F(x_i) - A_o\psi_o(x_i) - A_1\psi_1(x_i) \dots A_m\psi_m(x_i)] \; \psi_j(x_i) \; \theta^2(x_i) = 0 \\ \\ j = 0, 1,\dots,m. \end{cases}$$

d'où

$$A_j = \frac{\sum_{i=o}^{n} \psi_j(x_i)\ \theta^2(x_i)\ F(x_i)}{\sum_{i=o}^{n} \psi_j^2(x_i)\ \theta^2(x_i)} \qquad j = 0, 1, \dots, m.$$

En reportant ces valeurs dans l'expression de P(X) cherchée, on trouvera la formule (9).

I.3 - LIEN AVEC LES PROCEDES DE SOMMATION.

Au lieu de considérer le tableau de la figure 1, on considère un tableau infini à droite et en bas, dont les éléments sont les $\Phi_i^2(x_j)$ pour $i \leq j$ et des zéros si $i > j$. (Fig. 2).

$$\begin{array}{cccccccc}
\Phi_o^2(x_o) & 0 & 0 & 0 & 0 & ---- & & \\
\Phi_1^2(x_o) & \Phi_1^2(x_1) & 0 & 0 & 0 & ---- & & \\
\Phi_2^2(x_o) & \Phi_2^2(x_1) & \Phi_2^2(x_2) & & 0 & \ddots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \ddots & \\
\Phi_n^2(x_o) & \Phi_n^2(x_1) & \Phi_n^2(x_2) & ------ & & \Phi_n^2(x_n) & & 0 \quad \ddots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \ \ddots & &
\end{array}$$

Figure 2.

Pour ce tableau, les conditions du théorème de Toeplitz sont vérifiées. En effet :

Posons $\qquad a_{n,k} = \Phi_n^2(x_k) \qquad$ si $k \leq n$.

$\qquad\qquad a_{n,k} = 0 \qquad$ sinon.

1°) $$\sum_{k=o}^{\infty} |a_{n,k}| < M \qquad \text{quelque soit } n.$$

En effet

$$\sum_{k=o}^{\infty} |a_{n,k}| \leq \sum_{k=o}^{\infty} \Phi_n^2(x_k) \qquad \text{ceci } \forall n.$$

Or on a

$$\sum_{k=o}^{\infty} \Phi_n^2(x_k) = 1 \quad \forall n \qquad \text{d'après le théorème précéden}$$

donc 1°) est vérifiée.

2°) $$\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = o \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

On a $\forall k$:

$$\sum_{n=o}^{\infty} a_{n,k} \leq \sum_{n=o}^{\infty} \Phi_n^2(x_k) = 1$$

donc la série $\sum_{n=o}^{\infty} a_{n,k}$ converge quelque soit k, d'où $\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 0$.

3°) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=o}^{\infty} a_{n,k} = 1.$$

Pour tout n on a :

$$\sum_{k=o}^{\infty} \Phi_n^2(x_k) = 1$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=o}^{\infty} a_{n,k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=o}^{\infty} \Phi_n^2(x_k) = 1.$$

Les conditions du théorème de Toeplitz sont vérifiées, le tableau construit définit donc un procédé régulier de sommation.

Remarque.

Le problème d'interpolation qu'on a étudié a été ramené à la résolution d'un système d'équations linéaires de Vandermonde. Cette résolution a été faite à l'aide des fractions continues.
Il serait intéressant de voir si l'on peut appliquer la méthode à la résolution d'un système d'équations linéaires plus général.

II - DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION EN SÉRIES DE FONCTIONS.

II.1 - LE THEOREME FONDAMENTAL.

Enoncé du théorème : (*Tchebycheff* [55])

Soit v *une fonction développable en série suivant les puissances décroissantes* :

$$u = q_o + \frac{1|}{|q_1} + \frac{1|}{|q_2} + \ldots$$

une fraction continue canonique.

Posons :

$$R_i = uQ_i - P_i \qquad \textit{pour } i \geq 1$$

où $(\frac{P_i}{Q_i})_{i\geq 1}$ *désigne la suite des réduites de la fraction continue* u. *Alors, la fonction* v *peut être représentée par* :

$$v = E(v) + \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 + \omega_3 R_3 + \ldots$$

où

$$\omega_n = (-1)^{n-1} \left[E(q_n Q_n v) - q_n E(Q_n v)\right]$$

et où E(f) *désigne la partie polynômiale de* f.

Démonstration.

$$R_n = UQ_n - P_n \qquad n \geq 1$$

Or

$$UQ_n - P_n = \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n+1} + \varepsilon_n Q_n}$$

où

$$\varepsilon_n = \frac{1|}{|q_{n+1}} + \frac{1|}{|q_{n+2}} + \frac{1|}{|q_{n+3}} + \dots$$

ε_n représente une fonction de degré négatif, c'est à dire que dans le développement suivant les puissances décroissantes de ε_n, il n'existe pas de terme de degré positif ou nul.

Les polynômes $(Q_i)_{i\geq 1}$ qui sont les dénominateurs des réduites de la fraction continue u représentent une suite de fonctions de degrés croissants, donc, dans la suite $(R_i)_{i\geq 1}$, toutes les fonctions seront de degrés négatifs, et ces degrés vont en décroissant.
Donc la fonction v qui est développable en série suivant les puissances décroissantes, pourra être représentée par une série dont les termes seront des produits de polynômes par les facteurs R_i.

En effet, on a :

$$v - E(v) = \omega_1 R_1 + r_1$$

où ω_1 est le quotient de la division de $v - E(v)$ par R_1, et r_1 le reste.
De même on a :

$$r_1 = \omega_2 R_2 + r_2$$

$$r_2 = \omega_3 R_3 + r_3$$

-------------- où $d^o(r_i) < d^o(R_i)$

$$r_{n-1} = \omega_n R_n + r_n$$

En faisant la somme de ces équations, on obtient :

$$v = E(v) + \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 + \dots + \omega_n R_n + r_n \qquad (1)$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient la représentation de v cherchée :

$$v = E(v) + \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 + \dots \qquad (2)$$

Il reste à trouver les expressions des ω_i.

Si on multiplie les deux membres de (1) par Q_n et si on identifie les parties polynômiales, on obtient :

$$E(Q_n v) = Q_n E(v) + E(\omega_1 RQ_n) + E(\omega_2 R_2 Q_n) + \ldots + E(\omega_n R_n Q_n)$$

car $E(r_n Q_n) = 0$, donc en faisant la différence entre cette équation et l'équation (1) multipliée par Q_n, on obtient :

$$Q_n v - E(Q_n v) = \omega_1 R_1 Q_n - E(\omega_1 R_1 Q_n) + \omega_2 R_2 Q_n - E(\omega_2 R_2 Q_n) + \ldots$$

$$\ldots + \omega_n R_n Q_n - E(\omega_n R_n Q_n) + r_n Q_n$$

d'où, il résulte :

$$E[q_n(Q_n v\ )\ E(Q_n v))] = E[q_n(\omega_1 R_1 Q_n - E(\omega_1 R_1 Q_n))] + \ldots$$

$$\ldots + E[q_n(\omega_n R_n Q_n - E(\omega_n R_n Q_n))]$$

Cette dernière expression se réduit à :

$$E[q_n(Q_n v - E(Q_n v))] = E[q_n(\omega_n R_n Q_n - E(\omega_n R_n Q_n)]$$

car

$$E[q_n(\omega_m R_m Q_n - E(\omega_m R_m Q_n)] = 0 \qquad \text{pour } m = 0, 1, \ldots, n-1.$$

de plus :

$$E[q_n(\omega_n R_n Q_n - E(\omega_n R_n Q_n)] = (-1)^{n-1}\ \omega_n$$

d'où

$$\omega_n = (-1)^{n-1}\ E[q_n(Q_n v - E(Q_n v))]$$

ou encore :

$$\omega_n = (-1)^{n-1} [E(q_n Q_n v) - q_n E(Q_n v)]$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque.

Tchebycheff a montré dans [55] que l'expression précédente des ω_n se simplifie dans le cas où les réduites de la fraction continue u sont toutes normales. Les dénominateurs partiels q_1, q_2, q_3,... sont tous du premier degré et les facteurs ω_i se réduisent à des constantes dont les valeurs se déterminent ainsi :

Posons $$q_i = A_i x + B_i \qquad i \geq 1$$

donc :

$$\omega_n = (-1)^{n-1} E[(A_n x + b_n)(Q_n v - E(Q_n v)]$$

En remarquant que l'expression du développement en puissances décroissantes de $Q_n v - EQ_n v$ ne contient pas de termes de degré positif ou nul, on aura :

$$Q_n v - E(Q_n v) = \frac{L_n}{x} + \frac{M_n}{x^2} + \ldots$$

et

$$(A_n x + B_n)(Q_n v - E(Q_n v)) = A_n L_n + \frac{A_n M_n + L_n B_n}{x} + \ldots$$

d'où

$$E[(A_n x + B_n)(Q_n v - E(Q_n v)] = A_n L_n$$

et

$$\omega_n = (-1)^{n-1} A_n L_n \qquad \text{pour } n \geq 1.$$

Le développement de v en série de fonctions prend la forme :

$$v = E(v) + A_1L_1R_1 - A_2L_2R_2 + A_3L_3R_3 - \dots$$

Remarque.

Les fonctions R_i sont calculées par :

$$R_i = UQ_i - P_i \qquad i \geq 1.$$

et donc les R_i ne sont pas en général des polynômes.
Il faut remarquer aussi que le choix de la fraction continue u est arbitraire, et donc nous avons une infinité de développements de v en séries de fonctions.
Donnons un exemple simple :

Posons $$v(x) = \frac{1}{x-1}$$

u la fraction continue canonique définie par :

$$u = \frac{1|}{|z} - \frac{1|}{|2z} - \frac{1|}{|2z} - \frac{1|}{|2z} - \dots$$

Les dénominateurs des réduites de u qui ne sont autres que les polynômes de Tchebycheff sont définis par :

$$Q_1(z) = z$$

$$Q_2(z) = 2z^2 - 1$$

$$Q_i(z) = 2z\, Q_{i-1}(z) - Q_{i-2}(z) \qquad i > 2$$

Les numérateurs P_i sont définis par :

$$P_1(z) = 1$$

$$P_2(z) = 2z$$

$$P_i(z) = 2zP_{i-1}(z) - P_{i-2}(z) \qquad i > 2.$$

Les fonctions R_i sont liées par la même relation de récurrence que les (Q_i). En effet, on a :

$$R_{i+1} = u\, Q_{i+1} - P_{i+1}$$

$$R_i = u\, Q_i - P_i$$

$$R_{i-1} = u\, Q_{i-1} - P_{i-1}.$$

Si on multiplie la deuxième de ces équations par -2z et si on fait la somme, on obtient :

$$R_{i+1} - 2zR_i + R_{i-1} = u(Q_{i+1} - 2zQ_i + Q_{i-1}) - (P_{i+1} - 2zP_i + P_{i-1}) = 0$$

donc

$$R_{i+1} = 2zR_i + R_{i-1}$$

avec

$$R_1(z) = zu + 1$$

$$R_2(z) = (2z^2 - 1)u - 2z$$

Considérons la relation :

$$v = E(v) + A_1L_1R_1 - A_2L_2R_2 + A_3L_3R_3 - \dots$$

on a

$$A_1 = 1 \quad \text{et} \quad A_i = 2 \qquad \text{pour } i \geq 2$$

et

$$L_i = Q_i(1) = 1 \qquad \text{pour tout } i \geq 1.$$

$$v = \frac{1}{x-1} \Rightarrow E(v) = 0$$

d'où l'expression de v cherchée :

$$\boxed{v = R_1 + 2 \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^{i-1} R_i}$$

où les R_i sont définis ci-dessus.

II.2 - APPLICATION DU THEOREME PRECEDENT.

Dans [55], Tchebycheff, après avoir remarqué que les fractions continues donnent la solution du problème :

"Déterminer deux polynômes X *et* Y *tels que l'expression* UX - Y *tende vers zéro",*

se pose le problème suivant :

Déterminer les polynômes X et Y pour lesquels la différence UX - Y représente une fonction donnée v avec le plus grand degré d'exactitude qu'on puisse atteindre, lorsque le degré du polynôme X ne surpasse pas une limite donnée, c'est à dire tel que :

$$(UX - Y) - v = 0\left(\frac{1}{t^p}\right) \qquad p \text{ le plus élevé possible.}$$

Dans [55], Tchebycheff a montré le résultat suivant :

Théorème.

Les polynômes X *et* Y *qui répondent à la condition du problème précédent sont donnés par :*

$$X = F_1Q_1 + F_2Q_2 + \dots + F_nQ_n$$

$$Y = -E(v) + F_1P_1 + F_2P_2 + \dots + F_nP_n$$

avec

$$F_i = \omega_i \qquad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$F_n = \begin{cases} \omega_n & \text{si } d^\circ(\omega_n Q_n) \leq m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où le polynôme X *doit être tel que son degré soit* ≤ *à* m*,* m *fixé. Les* P_i *et les* Q_i *sont les numérateurs et les dénominateurs des réduites de la fraction continue* u*. Les* ω_i *sont les facteurs qui figurent dans la relation* (2) *du sous paragraphe précédent.*

Démonstration.

$$d^\circ(X) \leq m.$$

Soit Q_n le dernier dénominateur de la suite $(Q_i)_{i\geq 1}$ dont le degré ne dépasse pas m. On a donc :

$$d^\circ(X) < d^\circ(Q_{n+1}).$$

Si on divise X par Q_n, on aura :

$$X = F_n Q_n + \rho_n$$

où F_n est le quotient, ρ_n le reste. Divisons ρ_n par Q_{n-1} et ainsi de suite, on obtient :

$$\rho_n = F_{n-1}Q_{n-1} + \rho_{n-1}$$

$$\rho_{n-1} = F_{n-2}Q_{n-2} + \rho_{n-2}$$

---------------------- où $d^\circ(P_i) < d^\circ(Q_i)$ et $d^\circ(Q_1) = 1$.

$$\rho_3 = F_2Q_2 + \rho_2$$

$$\rho_2 = F_1Q_1$$

En faisant la somme de ces équations, on obtient :

$$X = F_1Q_1 + F_2Q_2 + \dots + F_nQ_n \tag{3}$$

où les F_i sont des polynômes inconnus dont les degrés sont respectivement inférieurs à ceux des dénominateurs partiels de la fraction continue canonique u. C'est à dire qu'on a :

$$d^\circ(F_i) < d^\circ(q_i) \qquad i = 1, 3.$$

En effet les degrés de F_1, $F_2, \dots, F_n$ sont égaux respectivement aux degrés de :

$$\frac{\rho_2}{Q_1}, \frac{\rho_3}{Q_2}, \dots, \frac{\rho_n}{Q_{n-1}}, \frac{X}{Q_n}$$

Or

$$d^\circ(\rho_i) < d^\circ(Q_i) \qquad i = 2, n$$

et

$$d^\circ(X) < d^\circ(Q_{n+1})$$

donc

$$d^\circ(F_i) < d^\circ\left(\frac{Q_{i+1}}{Q_i}\right)$$

Or

$$\frac{Q_{i+1}}{Q_i} = q_i + \frac{Q_{i-1}}{Q_i}$$

donc

$$d^\circ\left(\frac{Q_{i+1}}{Q_i}\right) \leq d^\circ(q_i)$$

donc

$$d^\circ(F_i) < d^\circ(q_i).$$

Le problème est donc de déterminer F_i pour $i = 1, 2, \ldots, n$.
D'après la condition du problème l'expression UX - Y - v doit s'approcher le plus de zéro, donc le polynôme Y doit représenter le plus près possible la fonction UX - v, d'où :

$$Y = E(UX - v)$$

ce qui donne :

$$UX - Y - v = UX - v - E(UX - v)$$

et cette expression montre que le degré d'approximation avec laquelle l'expression UX - Y représente la fonction v est égal au degré de la partie non polynômiale de UX - v et donc, pour satisfaire aux conditions du problème, ce dernier degré doit être rendu le plus petit possible.

Revenons à la relation (2) :

$$v = E(v) = \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 + \omega_3 R_3 + \ldots$$

et retranchons la de l'équation (3) multipliée par u, on obtient :

$$UX - v = F_1 Q_1 u + F_2 Q_2 u + \ldots + F_n Q_n u - E(v) - \omega_1 R_1$$

$$- \omega_2 R_2 - \ldots - \omega_n R_n - \omega_{n+1} R_{n+1} - \ldots$$

Or

$$R_i = uQ_i - P_i$$

donc

$$uQ_i = R_i + P_i$$

En remplaçant u Q_i par $R_i + P_i$ dans l'expression ci-dessus, on obtient :

$$UX - v = - E(v) + F_1 P_1 + F_2 P_2 + \ldots + F_n P_n +$$

$$(F_1 - \omega_1)R_1 + (F_2 - \omega_2)R_2 + \ldots + (F_n - \omega_n)R_n - \omega_{n+1} R_{n+1} - \ldots$$

Dans l'expression ci-dessus, la somme :

$$-E(v) + F_1P_1 + F_2P_2 + \dots + F_nP_n$$

est un polynôme et les autres termes sont des fonctions de degrés négatifs et ces degrés vont en décroissant quand on passe d'un terme au suivant.
Par conséquent le degré de la partie non polynômiale de UX - v sera d'autant plus petit que sera plus grand le nombre des termes qui s'annulent à partir du premier dans l'expression :

$$(4)\quad (F_1 - \omega_1)R_1 + (F_2 - \omega_2)R_2 + \dots + (F_n - \omega_n)R_n - \omega_{n+1}\, R_{n+1} - \dots$$

Or on a :

$$X = F_1Q_1 + F_2Q_2 + \dots + F_nQ_n \qquad \text{avec } d^o(X) \leq m.$$

Si l'on pose $F_i = \omega_i$ pour $i = 1, 2,\dots,n-1$, alors les (n-1) premiers termes de (4) s'annulent, et ce choix de F_i est possible car :

$$d^o(\omega_iQ_i) \leq m \qquad \text{pour } i = 1, 2,\dots,n-1.$$

Si $d^o(\omega_nQ_n) \leq n$ alors on peut choisir F_n tel que :

$$F_n = \omega_n.$$

Si $d^o(\omega_nQ_n) > m$, alors F_n doit être choisi tel que $d^o(F_n) < d^o(\omega_o)$.
Parmi toutes les valeurs de F_n satisfaisant à cette condition on peut choisir la valeur zéro pour simplifier les expressions de X et Y.
On a donc :

$$X = F_1Q_1 + F_2Q_2 + \dots + F_nQ_n$$

$$Y = - E(v) + F_1Q_1 + F_2Q_2 + \dots + F_nQ_n$$

avec

$$F_i = \omega_i \qquad i = 1, 2,\dots,n-1$$

$$F_n = \begin{cases} \omega_n & \text{si } d^o(\omega_n Q_n) \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et où les P_i et les Q_i sont les numérateurs et les dénominateurs des réduites de la fraction continue canonique u.

Remarque.

Le problème posé par Tchebycheff nous semble être intéressant et peut donner lieu à des généralisations importantes du fait que l'on peut choisir la fraction continue u.

La méthode utilisée par Tchebycheff semble être compliquée et le choix des quantités F_n n'est pas très justifié. Le problème appelle de nouvelles recherches.

III - Quelques propriétés des réduites de la fraction continue canonique provenant du développement de l'intégrale $\int_a^b \frac{f(y)dy}{z-y}$,

Posons $F(z) = \int_a^b \frac{f(y)dy}{x-y}$.

En développant F(z) suivant les puissances décroissantes de z, on a :

$$F(z) = \frac{\alpha_o}{z} + \frac{\alpha_1}{z^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{z^{n+1}} + \dots$$

où

$$\alpha_i = \int_a^b f(y)\, y^i\, dy$$

F(z) peut être développée en fraction continue de la forme :

$$c = \frac{c_1|}{|q_1} - \frac{c_2|}{|q_2} - \frac{c_3|}{|q_3} - \dots$$

qui n'est autre que le développement canonique de F, où les c_i sont des constantes et les q_i des polynômes.

Si l'on suppose que f reste positive dans [a,b], alors on a le théorème :

Théorème 1. [44]

Tous les q_i sont des polynômes du premier degré, ce qui est équivalent à dire que toutes les réduites de la fraction continue c sont normales.

Démonstration.

En désignant par z_{n+1} le quotient complet d'ordre n+1, on aura :

$$F(z) - \frac{\psi_n}{\phi_n} = \frac{c_1 c_2 \dots c_{n+1}}{(\phi_n z_{n+1} - \phi_{n-1} c_{n+1})\phi_n} \qquad (1)$$

où $\frac{\psi_n}{\phi_n}$ désigne la $n^{\text{ième}}$ réduite de c. En multipliant les deux membres de (1) par $\phi_n^2(z)$, on aura :

$$\phi_n^2(z) \int_a^b \frac{f(y)\,dy}{z-y} = \psi_n(z)\,\phi_n(z) + \cfrac{c_1c_2 \cdots c_{n+1}}{q_{n+1} - F_{n+1} - \cfrac{c_{n+1}\phi_{n-1}}{\phi_n}}$$

où on a remplacé z_{n+1} par $q_{n+1} - F_{n+1}$.

F_{n+1} désigne une fonction qui s'annule pour $z = \infty$. Ou encore :

(2)

$$\int_a^b \frac{\phi_n^2(z) - \phi_n^2(y)}{z-y}\, f(y)dy + \int_a^b \frac{f(y)\phi_n^2(y)}{z-y}\, dy = \psi_n(z)\phi_n(z) + \cfrac{c_1c_2 \cdots c_{n+1}}{q_{n+1} - F_{n-1} - \cfrac{c_{n+1}\phi_{n-1}}{\phi_n}}$$

Si l'on suppose que le degré de q_{n+1} est strictement supérieur à 1, alors le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le deuxième membre de cette égalité est nul, alors que dans le premier membre il est égal à $\int_a^b \phi_n^2(y)\, f(y)dy$ qui est différent de zéro du fait que f est positive dans [a,b].

cqfd.

Du théorème précédent, on déduit que ϕ_n est un polynôme de degré n et si l'on pose $q_{n+1} = a_{n+1}z + b_{n+1}$ alors on a :

$$\int_a^b \phi_n^2(y)f(y)dy = \frac{c_1c_2 \cdots c_{n+1}}{a_{n+1}} \qquad (3)$$

De (3), on déduit que si $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ sont positifs, alors $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ le sont aussi.

En posant $R_n = \phi_n(z)\, F(z) - \psi_n(z)$ la relation (1) nous donne après multiplication par ϕ_n :

$$\phi_n(z)\, F(z) - \psi_n(z) = \frac{c_1 c_2 \ldots c_{n+1}}{\phi_n z_{n+1} - c_{n+1}\phi_{n-1}}$$

ou encore :

$$\int_a^b \frac{\phi_n(z) - \phi_n(y)}{z-y}\, f(y)dy + \int_a^b \frac{\phi_n(y)}{z-y}\, f(y)dy = \psi_n(z) + R_n(z)$$

En comparant entre elles les parties polynômiales et non polynômiales des deux membres, on obtient :

$$\psi_n(z) = \int_a^b \frac{\phi_n(z) - \phi_n(y)}{z-y}\, f(y)dy \qquad (4)$$

$$R_n(z) = \int_a^b \frac{\phi_n(y)}{z-y}\, f(y)dy \qquad (5)$$

Si on développe le deuxième membre de (5) suivant les puissances décroissantes de z, en remarquant que R_n est de degré - (n+1), alors on obtient le système suivant :

$$\int_a^b f(y)\, \phi_n(y)\, y^i\, dy = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

qui peut être remplacé par l'égalité :

$$\int_a^b f(y)\, \phi_n(y)\, \theta_{n-1}(y)\, dy = 0 \qquad (6)$$

où θ_{n-1} est un polynôme quelconque de degré inférieur ou égal à n-1 et l'équation (6) entraîne :

$$\int_a^b f(y)\, \phi_m(y)\, \phi_n(y)\, dy = 0 \qquad \forall m,n \quad m \neq n \quad (7)$$

Proposition.

L'équation $\int_a^b f(y)\, \phi_n(y)\, \theta_{n-1}(y)\, dy = 0$ *définit la fonction* ϕ_n.

Démonstration.

Soit Φ un polynôme de degré n qui vérifie (6), on a :

$$\int_a^b f(y)\, \Phi(y)\, \theta_{n-1}(y)\, dy = 0$$

On peut écrire Φ sous la forme :

$$\Phi(y) = A_1\phi_1(y) + A_2\phi_2(y) + \dots + A_n\phi_n(y)$$

où les A_i sont des constantes

$$\int_a^b \Phi(y)\, f(y)\, \theta_{n-1}(y)\, dy = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b A_i\, \phi_i(y)\, f(y)\, \theta_{n-1}(y)\, dy = 0$$

En prenant successivement pour θ_{n-1} les polynômes $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-1}$, on aura :

$$A_i = 0 \qquad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Donc :

$$\Phi(y) = A_n\, \phi_n(y).$$

Si on suppose que le coefficient de plus haut degré de ϕ_n est égal à 1, alors ϕ_n est déterminé de façon unique.

Remarque.

1°) On voit que de là découle la théorie classique des polynômes orthogonaux En effet, la relation (7) est celle qui définit la famille des polynômes orthogonaux $(\phi_n)_n$ par rapport à la fonction poids f.

La famille de polynômes $(\phi_n)_n$ a été obtenue à partir des coefficients α_i définis par :

$$\alpha_i = \int_a^b y^i\, f(y)\, dy \qquad\qquad i \geq 0.$$

Si l'on suppose, pour simplifier, que f(y) = 1, alors $\alpha_i = \int_a^b y^i\, dy$, ou $\alpha_i = c(y^i)$, en supposant que c est la fonctionnelle linéaire définie sur l'ensemble des polynômes par :

$$c(y^i) = \int_a^b y^i\, dy \qquad\qquad i \geq 0.$$

Une généralisation tout à fait naturelle qui consiste à considérer une fonctionnelle linéaire c définie sur l'ensemble des polynômes, non nécessairement définie par une intégrale, nous conduit à la théorie des polynômes orthogonaux formels exposée par Brezinski dans [3], où il suppose que la fonctionnelle c est définie, c'est à dire que les déterminants de Hankel $H_k^{(o)}$ définis par :

$$H_k^{(o)} = \begin{vmatrix} \alpha_o & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{k-1} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_k \\ & & & & \\ \alpha_{k-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{2k-2} \end{vmatrix}$$

sont différents de zéro $\forall k$. Le cas où c n'est pas définie a été étudié par Draux dans [43].

2°) La deuxième remarque est relative aux familles de polynômes orthogonaux adjacents. Le développement de $\frac{f(y)}{z-y}$ suivant les puissances décroissantes de z est :

$$\frac{f(y)}{z-y} = \frac{f(y)}{z} + \frac{yf(y)}{z^2} + \frac{y^2 f(y)}{z^3} + \dots$$

$$\frac{(y-a)\ f(y)}{z\ -\ y} = \frac{(y-a)\ f(y)}{z} + \frac{(y-a)\ y\ f(y)}{z^2} + \frac{(y-a)\ y^2\ f(y)}{z^2} + \dots$$

et

$$\int_a^b (y-a)\ f(y)\ dy = \int_a^b y\ f(y)\ dy - a \int_a^b f(y)\ dy$$

$$= \alpha_1 - a\ \alpha_o \qquad \text{où } \alpha_i = \int_a^b y^i\ f(y)\ dy.$$

Posons $\beta_i = \int_a^b (y-a)\ y^i\ f(y)\ dy.$

On a :

$$\beta_i = \alpha_{i+1} - a\ \alpha_i \qquad \text{pour } i \geq 0$$

Pour a = 0 on a :

$$\beta_i = \alpha_{i+1} \qquad i \geq 0.$$

On définit ainsi une autre famille de polynôms orthogonaux qui n'est autre que la première famille adjacente à la famille $(\phi_n)_n$.
De là, on voit découler la notion de familles de polynômes orthogonaux adjacents (voir [3]).

Théorème 2.

Toutes les racines de l'équation $\phi_n(z) = o$ *sont réelles, distinctes et comprises entre* a *et* b.

Démonstration.

*) Soit z_1 une racine complexe de $\phi_n(z) = o$, z_2 la racine conjuguée.

Posons $z_1 = \alpha + i\beta$, $z_2 = \alpha - i\beta$. On aura donc :

$$\phi_n(z) = ((z - \alpha)^2 + \beta^2)\ \Phi(z)$$

où $\Phi(z)$ est un polynôme de degré n-2.

Posons $\Phi(y) = \theta_{n-1}$, alors (6) entraîne :

$$\int_a^b f(y)\ [(y - \alpha)^2 + \beta^2]\ \Phi^2(y)\ dy = 0$$

ce qui est impossible.

*) Soit α une racine double, on a donc :

$$\phi_n(z) = (z - \alpha)^2\ \Phi(z)$$

où $\Phi(z)$ est un polynôme de degré n-2.

Posons $\Phi(y) = \theta_{n-1}(y)$ dans (6), alors on aura :

$$\int_a^b f(y)\ (y - \alpha)^2\ \Phi^2(y)\ dy = 0$$

ce qui est impossible.

*) Supposons enfin que γ soit une racine > b ou < a, alors :

$$\phi_n(z) = (z - \gamma)\ \Phi(z)$$

où $\Phi(z)$ est de degré n-1.

Posons $\Phi(y) = \theta_{n-1}(y)$, on aura donc :

$$\int_a^b f(y)\,(y-\gamma)\,\Phi^2(y)\,dy = 0$$

ce qui est absurde.

Remarquons que pour la démonstration de l'impossibilité d'une racine complexe ou d'une racine double, il suffit que ϕ_n satisfasse à :

$$\int_a^b f(y)\,\phi_n(y)\,\theta_{n-2}(y)\,dy = 0$$

où θ_{n-2} est de degré $\leq$ n-2.

La même condition suffirait si l'on voulait démontrer l'impossiblité de deux ou d'un plus grand nombres de racines réelles en dehors de [a,b]. Ces remarques nous conduisent au théorème suivant :

<u>*Théorème 2 bis.*</u>

Si ϕ *est un polynôme de degré* n *satisfaisant à la condition* $\int_a^b f(y)\,\phi(y)\,\theta_{n-2}(y)\,dy = 0$ *pour tout polynôme* θ_{n-2} *de degré inférieur ou égal à* n-2, *alors l'équation* $\phi(z) = 0$ *aura toutes ses racines réelles, distinctes et ne pourra avoir qu'une seule racine en dehors de* [a,b]. *L'expression de* ϕ *est :*

$$\phi(z) = A\phi_n(z) + B\phi_{n-1}(z)$$

où A *et* B *sont des constantes.*

De même, pour les racines de ψ_n, on a le théorème suivant :

<u>*Théorème 3.*</u>

Toutes les racines de ψ_n *sont réelles, distinctes et séparées par celles de* ϕ_n.

Pour la démonstration, on montre d'abord que les nombres $\frac{\psi_n(z_i)}{\phi'_n(z_i)}$, où les z_i sont les racines de ϕ_n sont tous positifs, et en appliquant le théorème de Rolle, on aura le résultat.

Ce théorème peut être généralisé comme le précédent :

Théorème 3 bis.

Soit ϕ un polynôme de degré n, satisfaisant à la condition :

$$\int_a^b f(y)\ \phi(y)\ \theta_{n-2}(y)\ dy = 0$$

et

$$\psi(z) = \int_a^b f(y)\ \frac{\phi(y) - \phi(z)}{z-y}\ dy$$

alors, tous les nombres $\frac{\psi(z_i)}{\phi'(z_i)}$ sont positifs, et les racines de ψ sont réelles, distinctes et séparées par celles de ϕ. Les z_i sont les racines de ϕ.

Théorème 4.

Soit Φ un polynôme de degré $\leq$ 2n-1, $z_1, z_2, \ldots, z_n$, les racines de ϕ_n, alors on a :

$$\int_a^b f(y)\ \Phi(y)\ dy = \sum_{i=1}^{n} \frac{\psi_n(z_i)}{\phi'_n(z_i)}\ \Phi(z_i) \qquad (8)$$

Démonstration.

Soit θ_{n-1} le quotient de la division de Φ par ϕ_n et r le reste, on a donc :

$$\Phi(y) = \phi_n(y)\ \theta_{n-1}(y) + r(y)$$

r est de degré n-1, de plus, $\Phi(z_i) = r(z_i) \quad i = 1,\dots,n$, donc :

$$r(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_n(y)}{(y-z)\phi_n'(z_i)} \Phi(z_i)$$

En remplaçant r(y) par la valeur ci-dessus dans l'expression de $\Phi(y)$, on aura en multipliant par f(y) dy et en intégrant entre a et b :

$$\int_a^b \Phi(y)f(y)\,dy = \sum_{i=1}^{n} A_i\,\Phi(z_i) \qquad \text{où } A_i = \frac{\psi_n(z_i)}{\phi_n'(z_i)}$$

c.q.f.d.

Dans ce qui suit on va donner quelques propriétés des réduites des fractions continues provenant des développements des intégrales :

$$\int_a^b \frac{(y-a)\,f(y)}{z-y} \qquad \int_a^b \frac{(b-y)\,f(y)}{z-y}\,dy \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \frac{(y-a)(b-y)\,f(y)}{z-y}\,dy$$

Désignons respectivement par U_n, V_n, W_n les dénominateurs des réduites de ces fractions continues. Comme les fonctions (y-a) f(y), (b-y) f(y) et (y-a)(b-y)f(y) ne changent pas de signe entre les limites d'intégration, on peut appliquer les théorèmes 1 et 2 et donc les racines de U_n, V_n et W_n sont réelles, distinctes et comprises entre a et b.

Les équations qui peuvent servir à la définition de ces fonctions sont :

$$\int_a^b (y-a)\,f(y)\,U_n(y)\,\theta_{n-1}(y)\,dy = 0$$

$$\int_a^b (b-y)\,f(y)\,V_n(y)\,\theta_{n-1}(y)\,dy = 0$$

$$\int_a^b (b-y)(y-a)\,f(y)\,W_n(y)\,\theta_{n-1}(y)\,dy = 0$$

Les résultats suivants concernent les fonctions U_n, V_n et W_n, les démonstrations uitlisent les mêmes techniques que celles qu'on a vu dans les théorèmes précédents (voir [44]).

Théorème 5.

Les intégrales

$$\int_a^b f(y)\, \frac{U_n(y)}{U_n(a)}\, dy \quad , \quad \int_a^b f(y)\, \frac{V_n(y)}{V_n(a)}\, dy \quad , \quad \int_a^b f(y)\,(b-y)\, \frac{W_n(y)}{W_n(a)}\, dy$$

et $\int_a^b f(y)\,(y-a)\,\frac{W_n(y)}{W_n(a)}\, dy$ *ont toutes des valeurs positives.*

Théorème 6.

1°) *Les racines de* U_n *sont séparées par celles de* $\Phi(z) = (z-b)\, V_n(z)$ *et réciproquement, les racines de* V_n *sont séparées par celles de* $\phi(z) = (z-a)U_n(z$

2°) *Les racines de* ϕ_n *sont séparées par celles de la fonction* $\Phi_1(z) = (z-a)(z-b)\, W_{n-1}(z)$, *et réciproquement, les racines de* W_{n-1} *sont séparées par celles de* ϕ_n.

Le théorème suivant donne les expressions de U_n, V_n, W_{n-1} en fonction de ϕ_n et de ϕ_{n-1}.

Théorème 7.

$$(z-a)\, U_n(z) = A\, \{\phi_n(z)\, (a_{n+1}(z-a) + \frac{\phi_{n-1}(a)}{\phi_n(a)}) - \phi_{n-1}(z)\}$$

$$(z-b)\, V_n(z) = A_1\{\phi_n(z)\, (a_{n+1}(z-b) + \frac{\phi_{n+1}(b)}{\phi_n(b)}) - \phi_{n-1}(z)\}$$

$$W_{n-1}(z) = C \frac{\phi_n(z)\left\{(z-a)\left\{\frac{\phi_{n-1}(b)}{\phi_n(b)} - (z-b)\frac{\phi_{n-1}(a)}{\phi_n(a)}\right\}\right\} - (b-a)\,\phi_{n-1}(z)}{(z-a)(z-b)\left\{\frac{\phi_{n-1}(b)}{\phi_n(b)} - \frac{\phi_{n-1}(a)}{\phi_n(a)}\right\}}$$

où A, A_1 *et* C *sont des constantes.*

IV - CALCUL APPROXIMATIF DES INTÉGRALES.

On va donner quelques résultats sur les quadratures numériques dus à Markoff [45]. Ces résultats vont nous fournir des inégalités qui nous serviront dans le paragraphe suivant.

Théorème 8.

Soit Ω *une fonction développable en série entière dans un intervalle* $[a,b]$, f *une fonction positive dans* $[a,b]$.
Alors, il existe $\xi \in [a,b]$ *tel que :*

$$\int_a^b \Omega(z)\, f(z)\, dz = \sum_{i=1}^{n} \frac{\psi_n(z_i)}{\phi_n'(z_i)}\, \Omega(z_i) + \frac{\Omega^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b \phi_n^2(z)\, f(z)\, dz.$$

où $\frac{\psi_n}{\phi_n}$ *est la* $n^{\text{ième}}$ *réduite du développement en fraction continue de la fonction* $F(z) = \int_a^b \frac{f(y)}{z-y}\, dy$, *et les* z_i *sont les racines de* ϕ_n.

Démonstration.

$$\Omega(x) = a_o + a_1 x + \dots + a_{2n}\, x^{2n} + a_{2n+1}\, x^{2n+1} + \dots$$

dans $[a,b]$.
On a :

$$\int_a^b f(x)\, \Omega(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, \Phi(x)\, dx + a_{2n} \int_a^b x^{2n}\, f(x)\, dx + \dots$$

En appliquant le théorème 4 on obtient :

$$\int_a^b f(x)\, \Omega(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{\psi_n(z_i)}{\phi_n'(z_i)}\, \Phi(z_i) + a_{2n} \int_a^b x^{2n}\, f(x)\, dx + \dots$$

$$\Phi(z_i) = \Omega(z_i) - a_{2n}\, z_i^{2n} - a_{2n+1}\, z_i^{2n+1} - \dots$$

Donc :

$$\int_a^b f(x)\,\Omega(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{\psi_n(z_i)}{\phi_n'(z_i)}\,\Omega(z_i) + a_{2n}\varepsilon + a_{2n+1}\,\varepsilon_1 + \ldots$$

où ε, ε_1, ε_2,... sont des quantités indépendantes de la forme de Ω et qui peuvent être calculées à priori.

Posons $\Phi(z) = \Phi_o(z) + \phi_n(z)\,\theta_{n-1}(z)$ où :

$$\Phi_o(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_n(z)}{(z-z_i)\,\phi_n'(z_i)}\,\Omega(z_i)$$

et θ_{n-1} un polynôme de degré n-1.

Φ est telle que :

$$\Phi(z_i) = \Omega(z_i) \qquad i = 1, 2,\ldots,n$$

On peut déterminer θ_{n-1} de telle sorte que les quantités z_1, z_2,...,z_n deviennent racines doubles de l'équation :

$$\Phi(z) = \Omega(z)$$

c'est à dire qu'on ait :

$$\Phi'(z_i) = \Omega'(z_i) \qquad i = 1, 2,\ldots,n$$

Remarquons dans ce but que :

$$\Phi'(z_i) = \Phi_o'(z_i) + \theta_{n-1}(z_i)\,\phi_n'(z_i) \qquad i = 1, 2,\ldots,n$$

On aura donc pour déterminer θ_{n-1}, les n équations :

$$\theta_{n-1}(z_i) = \frac{\Omega'(z_i) - \Phi_o'(z_i)}{\phi_n'(z_i)} \qquad i = 1,\ldots,n$$

et la formule d'interpolation de Lagrange donnera :

$$\theta_{n-1}(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_n(z)}{(z-z_i)\ \phi_n'(z_i)}\ \theta_{n-1}(z_i)$$

Appliquons la formule d'interpolation d'Hermite à la fonction Ω, on aura :

$$\Omega(z) - \Phi(z) = \frac{\phi_n^2(z)\ \Omega^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \qquad \text{où } \xi \in [a,b]$$

Or d'après la définition de ϕ_n on a :

$$\int_a^b \Phi(z)\ f(z)\ dz = \int_a^b \Phi_o(z)\ f(z)\ dz = \sum_{i=1}^{n} \frac{\psi_n(z_i)}{\phi_n'(z_i)}$$

et on obtient finalement :

$$\text{(I)} \quad \int_a^b \Omega(z)\ f(z)\ dz = \sum_{i=1}^{n} \frac{\psi_n(z_i)}{\phi_n'(z_i)}\ \Omega(z_i) + \frac{\Omega^{(2n)}(\xi)}{(2n)\ !} \int_a^b \phi_n^2(z)\ f(z)\ dz$$

ce qui achève la démonstration.

Si on pose $M = \sup\limits_{z\in[a,b]} \Omega^{(2n)}(z) \qquad m = \inf\limits_{z\in[a,b]} \Omega^{(2n)}(z).$

Alors la relation (I) montre que l'erreur qu'on commet en remplaçant $\int_a^b \Omega(z)\ f(z)\ dz$ par $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\psi_n(z_i)}{\phi_n'(z_i)}\ \Omega(z_i)$ est comprise entre :

$$\frac{M}{(2n)!} \int_a^b \phi_n^2(z)\ f(z)\ dz \qquad \text{et} \qquad \frac{m}{(2n)!} \int_a^b \phi_n^2(z)\ f(z)\ dz$$

Remarque.

Les considérations précédentes montrent qu'on arrive à la formule de quadrature (I) en remplaçant la courbe donnée $y = \Omega(x)$ par $y = \Phi(x)$ ayant un contact du premier ordre en n points dont les abscisses $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont racines de ϕ_n.

Markoff, dans [45], a obtenu trois autres formules de quadrature de la manière suivante :

1°) En remplaçant Ω par un polynôme Φ_1 de degré 2n-1 tel que :

$$\Omega(a) = \Phi_1(a) \qquad \Omega(b) = \Phi_1(b)$$

$$\Omega(z_i) = \Phi_1(z_i) \qquad i = 1,2,\ldots,n-1$$

$$\Omega'(z_i) = \Phi_1'(z_i) \qquad i = 1,2,\ldots,n-1$$

et on obtient la formule :

(II)

$$\int_a^b f(z)\, \Omega(z)\, dz = \sum_{i=o}^{n} \frac{\psi(z_i)}{\phi'(z_i)}\, \Omega(z_i) + \frac{\Omega^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b f(z)\, (z-a)(z-b)\, W_{n-1}^2(z)\, dz$$

où $\phi(z) = (z-a)(z-b)\, W_{n-1}(z)$, $z_o = a$ et $z_n = b$.

2°) En remplaçant Ω par un polynôme Φ_2 de degré 2n tel que :

$$\Omega(a) = \Phi_2(a)$$

$$\Omega(z_i) = \Phi_2(z_i) \qquad i = 1, 2,\ldots,n$$

$$\Omega'(z_i) = \Phi_2'(z_i) \qquad i = 1, 2,\ldots,n$$

et on obtient :

$$\int_a^b f(z)\, \Omega(z)\, dz = \sum_{i=o}^{n} \frac{\psi(z_i)}{'(z_i)}\ (z_i) + \frac{\Omega^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} \int_a^b f(z)\ (z-a)\ U_n^2(z)\, dz$$

où $\phi(z) = (z-a)\ U_n(z)$ et $z_o = a$.

3°) En remplaçant Ω par un polynôme Φ_3 de degré 2n tel que :

$$\Omega(b) = \Phi_3(b)$$

$$\Omega(z_i) = \Phi_3(z_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\Omega'(z_i) = \Phi_3'(z_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

et on obtient :

$$\int_a^b f(z)\, \Omega(z)\, dz = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\psi(z_i)}{\phi'(z_i)}\ \Omega(z_i) + \frac{\Omega^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} \int_a^b f(z)(z-b)\ V_n^2(z)\, dz$$

où $\phi(z) = (z-b)\ V_n(z)$ et $z_{n+1} = b$.

Les formules I, II, III et IV permettent à Markoff de donner les quatres inégalités suivantes :

$$\text{(I)} \quad \int_a^b f(z)\, \Omega(z)\, dz > \sum_{i=1}^{n} \frac{\psi(z_i)}{\phi'(z_i)}\, \Omega(z_i) \qquad \text{si } \Omega^{(2n)}(z) > 0 \text{ dans } [a,b]$$

$$\text{(II)} \quad \int_a^b f(z)\, \Omega(z)\, dz < \sum_{i=o}^{n} \frac{\psi(z_i)}{\phi'(z_i)}\, \Omega(z_i) \qquad \text{si } \Omega^{(2n)}(z) > 0 \text{ dans } [a,b]$$

$$\text{(III)} \quad \int_a^b f(z)\, \Omega(z)\, dz > \sum_{i=o}^{n} \frac{\psi(z_i)}{\phi'(z_i)}\, \Omega(z_i) \qquad \text{si } \Omega^{(2n+1)}(z) > 0 \text{ dans } [a,b]$$

$$\text{(IV)} \quad \int_a^b f(z)\, \Omega(z)\, dz < \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\psi(z_i)}{\phi'(z_i)}\, \Omega(z_i) \qquad \text{si } \Omega^{(2n+1)}(z) > 0 \text{ dans } [a,b]$$

V - SUR LES VALEURS LIMITES DES INTÉGRALES.

V.1 - PROBLEME POSE PAR TCHEBYCHEFF.

Dans [49], Tchebycheff a posé le problème suivant :

Etant données les $\mu+1$ valeurs :

$$\alpha_o = \int_a^b f(y)\, dy, \quad \alpha_1 = \int_o^b y\, f(y)\, dy, \ \ldots, \ \alpha_\mu = \int_a^b f(y)\, y^\mu\, dy$$

où f est une fonction positive dans [a,b] et inconnue, il s'agit de trouver pour $x \in [a,b]$ donné, un minorant et un majoratn de l'intégrale :

$$\int_a^x f(y)\, dy$$

En généralisant encore la question :

trouver un minorant et un majorant de $\int_a^x \Omega(y)\, f(y)\, dy$, où Ω est une fonction quelconque, continue dans [a,b] et telle que ses dérivées jusqu'à l'ordre $\mu+1$ satisfassent à quelques conditions concernant le signe.

Le problème a été résolu pour la première fois par Markoff dans [45]. Dans ce qui suit on va énoncer le résultat, dans le deuxième sous-paragraphe on va donner la marche à suivre dans la démonstration, et dans le troisième sous-paragraphe on donne la démonstration.

<u>*Théorème 9.*</u>

On se donne les $\mu+1$ *valeurs :*

$$\alpha_o = \int_a^b f(y)\, dy, \ \alpha_1 = \int_a^b y\, f(y)\, dy, \ \ldots\ , \ \alpha_\mu = \int_a^b y^\mu\, f(y)\, dy$$

où f *est une fonction inconnue, positive dans* [a,b], *on se donne* x *appartenant*

à [a,b], *Ω une fonction continue et positive dans* [a,b] *et telle que ses dérivées jusqu'à l'ordre* $\mu+1$ *soient positives ou nulles dans* [a,b].
On a les inégalités suivantes :

$$\int_b^x \Omega(z)\, f(z)\, dz \le \sum_{i=1}^{k} \frac{\psi(x_i)}{\phi'(x_i)}\, \Omega(x_i) + \frac{\psi(x)}{\phi(x)}\, \Omega(x)$$

$$\int_a^x \Omega(z)\, f(z)\, dz \ge \sum_{i=1}^{k} \frac{\psi(x_i)}{\phi'(x_i)}\, \Omega(x_i)$$

où

$$\psi(z) = \int_a^b f(y)\, \frac{\phi(y) - \phi(z)}{y-z}\, dz$$

et où $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *désignent celles des racines de qui ne surpassent pas* x.

La fonction ϕ se détermine de différentes manières suivant le cas où l'on se trouve :

<u>1er cas</u>.

Le nombre des données étant impair ($\mu+1 = 2n+1$) *la fonction* ϕ *est donnée par la formule :*

$$\phi(z) = \begin{vmatrix} (z-a)\, U_n(z) & (z-b)\, V_n(z) \\ (x-a)\, U_n(x) & (x-b)\, V_n(x) \end{vmatrix}$$

qui représente un polynôme de degré $n+1$, *vérifiant les équations :*

$$\phi(x) = o \quad , \quad \int_a^b f(z)\, \phi(z)\, \theta_{n-1}(z)\, dz = 0$$

ou par la formule :

$$\phi(z) = (z-a)(z-b) \begin{vmatrix} U_n(z) & V_n(z) \\ U_n(x) & V_n(x) \end{vmatrix}$$

qui représente un polynôme de degré n+2, *vérifiant les équations :*

$$\phi(a) = o,\ \phi(b) = o,\ \phi(x) = o \quad \text{et} \quad \int_a^b f(z)\ \phi(z)\ \theta_{n-2}(z)\ dz = 0$$

Selon que les nombres $U_n(x)$ *et* $V_n(x)$ *sont de même signe ou de signes différents.*

2eme cas.

Le nombre de données étant pair ($\mu+1 = 2n$) *la fonction* ϕ *est donnée par la formule :*

$$\phi(z) = (z-a) \begin{vmatrix} \phi_n(z) & (z-b)\ W_{n-1}(z) \\ \phi_n(x) & (x-b)\ W_{n-1}(x) \end{vmatrix}$$

qui représente un polynôme de degré n+1, *vérifiant les équantions :*

$$\phi(a) = o, \quad (x) = o, \quad \int_a^b f(z)\ \phi(z)\ \theta_{n-2}(z)\ dz = 0$$

ou par la formule :

$$\phi(z) = (z-b) \begin{vmatrix} \phi_n(z) & (z-a)\ W_{n-1}(z) \\ \phi_n(x) & (x-a)\ W_{n-1}(x) \end{vmatrix}$$

qui représente un polynôme de degré n+1, *vérifiant les équations :*

$$\phi(b) = o,\ \phi(x) = o,\ \int_a^b f(z)\ \phi(z)\ \theta_{n-2}(z)\ dz = 0$$

Suivant que les nombres $\phi_n(x)$ et $W_{n-1}(x)$ *sont de même signe ou de signe différents.*

V.2 - MARCHE A SUIVRE POUR LA DEMONSTRATION.

Soit A, B et X les points d'abscisses respectives a, b et x qu'on suppose placés dans une même droite. Nous supposerons que $\int_a^b f(y)\ dy$ est la masse d'une certaine quantité située sur le segment [A, B]. Nous appellerons donc α_o la masse de cette quantité. Les autres α_i sont les différents moments d'ordre i de cette masse.

On peut supposer que la masse du segment [A, B] est concentrée dans un certain nombre de points isolés $X_1, X_2, \ldots, X_k$ parmi lesquels se trouve aussi le point X.
Cette concentration dépend du choix des points $X_1, X_2, \ldots, X_k$ appartenant à [A, B], et donc il existe une infinité de concentration.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_k$ les distances des points $X_1, X_2, \ldots, X_k$ à un certain point O ; $m_1, m_2, \ldots, m_k$ les masses concentrées dans ces points.
On va déterminer les inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_k$ et $m_1, m_2, \ldots m_k$ de façon que les données du problème conservent leurs valeurs, c'est à dire :

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^{k} m_i\ x^j \qquad\qquad j = 0, 1, \ldots, \mu.$$

Parmi le nombre infini des concentrations de la masse α_o, nous ne considérons que celles, où le nombre des quantités m_i, x_i est égal au nombre des équations de condition. Nous étudierons ensuite les conditions de possibilités de ces concentrations et nous donnerons les valeurs de l'intégrale

$\int_a^x \Omega(y)\ f(y)\ dy$ qui leur correspondent. Nous montrerons enfin que ces valeurs sont précisément les minorants et majorants que l'on cherche.

Nous allons distinguer deux cas, suivant que le nombre de données est pair ou impair.

V.3 - DEMONSTRATION DU THEOREME.

1er Cas. $\mu = 2n$

donc les données sont en nombre impair $\alpha_o, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$.

Dans ce cas, deux concentrations sont possibles :

1°) La concentration dans le point x et dans n autres points, où les inconnues sont la masse m_x du point x et les 2n quantités m_i, x_i qui déterminent les distances et les masses des n autres points. On aura donc en tout, 2n+1 inconnues que l'on trouve en résolvant le système de 2n+1 équations :

$$(1) \qquad \begin{cases} m_x \, x^k + \sum_{i=1}^{n} m_i \, x_i^k = \alpha_k \\ k = 0, \ldots, 2n \end{cases}$$

2°) La concentration dans les trois points A, X, B et dans n-1 autres points, où les inconnues sont les masses m_a, m_x, m_b et les 2n-2 quantités m_i, x_i.
On aura donc le système :

$$(2) \qquad \begin{cases} b^k \, m_k + a^k \, m_a + x^k \, m_x + \sum_{i=1}^{n-1} m_i \, x_i^k = \alpha_k \\ k = 0, \ldots, 2n \end{cases}$$

2eme Cas. $\mu = 2n-1$

les données sont en nombre pair.

Les seules concentrations possibles sont :

1°) La concentration dans les points A, X et dans n-1 autres points.
On aura, comme précédemment, le système de 2n équations suivants pour avoir les inconnues :

$$(3) \qquad \begin{cases} a^k\, m_a + x^k\, m_x + \sum\limits_{1}^{n-1} x_i^k\, m_i = \alpha_k \\ k = 0,\ 2n-1 \end{cases}$$

2°) La concentration dans les points X, B et dans n-1 autres points, et on a le système de 2n équations :

$$(4) \qquad \begin{cases} x^k\, m_x + b^k\, m_k + \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i^k\, m_i = \alpha_k \\ k = 0,\ 2n-1 \end{cases}$$

Pour que ces concentrations soient possibles, il faut et il suffit que toutes les quantités x_i, vérifiant les systèmes d'équations, soient comprises entre a et b et que tous les nombres m_a, m_b, m_x, m_i soient positifs.

RESOLUTION DU SYSTEME (1).

Conditions de possibilité de la première concentration du 1er cas :

soit ϕ un polynôme de degré n+1 tel que :

$$\phi(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_a^b f(y)\ \phi(y)\ \theta_{n-1}(y)\ dy = 0 \qquad (\alpha)$$

Les conditions (α) déterminent ϕ à un facteur constant près au moyen de α_o, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$.

D'après le théorème 2 bis du paragraphe III, toutes les racines de ϕ sont réelles, distinctes et dans toutes ces racines, il n'y a qu'une seule qui puisse être en dehors de [a,b].

Soient x, x_1, $x_2, \ldots, x_n$ les racines de ϕ, soit Ω un polynôme de degré inférieur ou égal à 2n. On a d'après la formule d'interpolation de Lagrange :

$$\Omega(y) = \frac{\phi(y)}{(y-x)\,\phi'(x)}\,\Omega(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi(y)}{(y-x)\,\phi'(x_i)}\,\Omega(x_i) + \phi(y)\,\theta(y)$$

où θ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n-1.

En multipliant l'expression précédente par f(y) et en intégrant entre a et b, on obtient en utilisant (α) :

$$\int_a^b \Omega(y)\,f(y)\,dy = \Omega(x)\,\frac{\psi(x)}{\phi'(x)} + \sum_{i=1}^{n} \Omega(x_i)\,\frac{\psi(x_i)}{\phi'(x_i)}$$

où

$$\psi(z) = \int_a^b f(y)\,\frac{\phi(y) - \phi(z)}{y-z}\,dy$$

Remplaçons successivement $\Omega(y)$ par $1, y, y^2, \ldots, y^{2n}$, on aura le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_a^b f(y)\,y^k\,dy = x^k\,\frac{\psi(x)}{\psi'(x)} + \sum_{i=1}^{n} x_i^k\,\frac{\psi(x_i)}{\phi'(x_i)} \\ \\ k = 0,\ldots,2n \end{array} \right.$$

Ce système, comparé avec (1) nous donne :

$$m_x = \frac{\psi(x)}{\phi'(x)} \qquad \text{et} \qquad m_i = \frac{\psi(x_i)}{\phi'(x_i)} \qquad\qquad i = 1,\ldots,n$$

où les x_i sont les racines $\frac{\phi(z)}{z-x}$.

D'après le théorème 2 bis, on a :

$$\phi(z) = A(z-a)\,U_n(z) + B(z-b)\,V_n(z)$$

où A et B sont des constantes. La condition $\Phi(x) = 0$ nous donne le rapport de ces constantes, on aura donc :

$$\frac{A}{(x-b)\, V_n(x)} = \frac{B}{(x-a)\, U_n(x)}$$

On pose :

$$\phi(z) = \begin{vmatrix} (z-a)\, U_n(z) & (z-b)\, V_n(z) \\ & \\ (x-a)\, U_n(x) & (x-b)\, V_n(x) \end{vmatrix}$$

Passons à la recherche des conditions de possiblités de la première concentration :

i) tous les nombres x_i sont compris entre a et b

ii) toutes les masses sont positives.

On suppose dans la suite que le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1 dans les dénominateurs des réduites que l'on considère.

Toutes les racines de ϕ_n, U_n, V_n et W_n appartiennent à [a,b] et les valeurs de ces fonctions au point b sont positives et sont du signe de $(-1)^n$ au point a.

La condition i) est satisfaite si et seulement si $(-1)^{n+1}\,\phi(a)$ et $\phi(b)$ sont de même signe. Or on a :

$$(-1)^{n+1}\,\phi(a) = (-1)^{n+1}\,(x-a)(b-a)\, V_n(a)\, U_n(x)$$

$$\phi(b) = (x-b)\,(b-a)\, U_n(b)\, V_n(x)$$

donc, i) est satisfaite si et seulement si $U_n(x)$ et $V_n(x)$ sont de même signe, quant à la condition ii), elle est satisfaite d'après le théorème.

Supposons $x_1 < x_2 < \ldots < x_k < x < x_{k+1} < \ldots < x_n$, on aura donc :

$$\int_a^x f(y)\ \Omega(y)\ dy = \sum_{i=1}^{k} \frac{\psi(x_i)}{\phi'(x_i)}\ \Omega(x_i) + \frac{\psi(x)}{\phi'(x)}\ \Omega(x) \qquad (A)$$

ou

$$\int_a^x f(y)\ \Omega(y)\ dy = \sum_{i=1}^{k} \frac{\psi(x_i)}{\phi'(x_i)}\ \Omega(x_i) \qquad (B)$$

selon qu'on rapporte le point x au segment [A, X] ou au segment [X, B].

Ceci termine la résolution du système (1). Les autres cas se traitent de la même manière et on obtient des formules analogues aux formules (A) et (B). (Voir [44]).

Il nous reste à montrer que (A) et (B) sont le majorant et le minorant qu'on cherche. Pour cela on va utiliser un résultat donné par Markoff qui est le suivant.

Proposition.

Soit Ω *une fonction continue dans* $[a,b]$ *telle que :*

$$\Omega^{(i)}(z) \geq 0 \qquad i = 1, m+1 \quad \forall z \in [a,b]$$

Soit Φ *un polynôme de degré* m*,* c *un réel appartenant à* $]a,b[$.

Soit N_1 *le nombre de racines de l'équation* $\Phi(z)=\Omega(z)$ *appartenant à* $]a,b[$.

Soit N_2 *le nombre de racines de l'équation* $\Phi(z) = 0$ *appartenant à* $]c,b[$.

Alors on a :

$$N_1 + N_2 \leq m+1.$$

Pour la démonstration de ce théorème voir [44].

Le deuxième membre de (A) peut être mis sous la forme :

$$\int_a^b f(z)\ \phi_o(z)\ dz$$

où

$$\Phi_o(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\phi(z)}{(z-x_i)\ \phi'(x_i)}\ \Omega(x_i) + \frac{\phi(z)}{(z-x_i)\ \phi'(x)}\ \Omega(x)$$

ou encore, en vertu de (α) :

$$\int_a^b f(z)\ \Phi_1(z)\ dz$$

où

$$\Phi_1(z) = \Phi_o(z) + \phi(z)\ \theta_{n-1}(z).$$

Φ_1 est un polynôme de degré 2n. On voit que $x_1, x_2,\dots,x_k$, x sont racines de l'équation $\Phi_1(z) = \Omega(z)$ et $x_{k+1}, x_{k+2},\dots,x_n$ sont racines de Φ_1.

On peut choisir les coefficients de θ_{n-1} tels que :

$$\Phi_1'(x_i) = \Omega'(x_i) \qquad i = 1, k$$

et

$$\Phi_1'(x_i) = 0 \qquad i = k+1,n.$$

En appliquant la proposition précédente, on peut montrer que :

$$\Phi_1(z) \geq \Omega(z) \qquad a < z < x$$

$$\Phi_1(z) \geq 0 \qquad x < z < b$$

Donc

$$\int_a^x \Omega(z)\ f(z)\ dz < \int_a^x \Phi_1(z)\ f(z)\ dz < \int_a^b \Phi_1(z)\ f(z)\ dz$$

et ceci entraîne :

$$\int_a^x \Omega(z)\, f(z)\, dz < \sum_{i=1}^{k} \frac{\psi(x_i)}{\phi'(x_i)}\, \Omega(x_i) + \frac{\psi(x)}{\phi'(x)}\, \Omega(x)$$

Donc l'expression du second membre de (A) est un majorant de notre intégrale. On montre de même, que l'expression du second membre de (B) est un minorant, en considérant l'intégrale :

$$\int_a^b f(z)\, \Phi_2(z)\, dz$$

où

$$\Phi_2(z) = \Phi_o(z) + \phi(z)\, \theta_{n-1}(z)$$

et où

$$\Phi_o(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\phi(z)}{(z-x_i)\, \phi'(x_i)}\, \Omega(x_i)$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque.

Dans le cas où x annule l'une des fonctions ϕ_n, U_n, V_n ou W_n, les formules précédentes se simplifient et la différence entre les deux concentrations dans les deux cas du problème cesse d'exister.

Cas où $\phi_n(x) = 0$:

Dans le cas où $\mu = 2n$ on obtient :

$\phi(z) = (z-a)\, \phi_n(z)$ pour la 1ère concentration

$\phi(z) = (z-b)\, \phi_n(z)$ pour la 2eme concentration.

Les racines de ϕ seront :

$$a < z_1 < z_2 < \ldots < z_n \qquad \text{pour la 1ère concentration}$$

$$z_1 < z_2 < \ldots < z_n < b \qquad \text{pour la 2eme concentration.}$$

Pour la première concentration, on aura si $x = z_k$:

$$\int_a^{z_k} f(z)\,\Omega(z)\,dz \leq \frac{\psi(a)}{\phi'(a)}\,\Omega(a) + \sum_1^k \frac{\psi(z_i)}{\phi'(z_i)}\,\Omega(z_i)$$

avec

$$\frac{\psi(a)}{\phi'(a)} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\psi(z_i)}{\phi'(z_i)} = \frac{\psi_n(z_i)}{\phi_n'(z_i)}$$

et on obtient :

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\psi_n(z_i)}{\phi_n'(z_i)}\,\Omega(z_i) \leq \int_a^{z_k} f(z)\,\Omega(z)\,dz \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{\psi_n(z_i)}{\phi_n'(z_i)}\,\Omega(z_i)$$

De même pour la deuxième concentration.

La méthode qu'on a exposé est due à Markoff ; dans [50] on trouve les résultats de Tchebycheff sur la même question.

EXPRESSION DES POLYNOMES DE LA SUITE DE STURM.

Soit f une fraction rationnelle, $\frac{U_{\mu\nu}}{V_{\mu\nu}}$ la réduite correspondant au point (μ,ν). Reprenons la relation (7) du chapitre III, où $R_{\mu,\nu}$ est définie par :

$$V_{\mu\nu}\,f(x) - U_{\mu\nu} = x^{\nu+\mu+1}\,R_{\mu\nu}(x)$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{\phi(x)} \cdot \frac{\sum M_1 \ldots M_{\mu+1}(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{\mu+1})^{\nu-\mu+1} \Delta^2(\alpha_1,\ldots,\alpha_{\mu+1})(1-\alpha_{\mu+1}x)\ldots(1-\alpha_m x)}{\sum M_1M_2 \ldots M_\mu (\alpha_1\alpha_2 \ldots\alpha_\mu)^{\nu-\mu+1} \Delta^2(\alpha_1,\ldots,\alpha_\mu)}$$

On va voir que cette formule donne la suite des polynômes de Sturm quand on prend pour f une fraction rationnelle particulière.

Théorème de Sturm.

Posons $V(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_m)$.

Par définition la suite de Sturm $(V_i)_{i=1,\ldots,m}$ *est donnée par :*

$$V_1(x) = V'(x)$$

$$V = V_1Q_1 - V_2$$

$$V_1 = V_2Q_2 - V_3$$

$$V_{m-2} = V_{m-1}\, Q_{m-1} - V_m$$

où les polynômes Q_p *sont tous du premier degré et où les degrés des polynômes* V_i *diminue d'une unité quand on passe d'un polynôme au suivant.*

Les polynômes V_i *sont donnés par l'expression :*

$$V_i(x) = \frac{1}{\lambda_i} \sum \Delta^2(\alpha_1,\ldots,\alpha_i)(x - \alpha_{i+1})(x - \alpha_{i+2}) \ldots (x - \alpha_m)$$

où la sommation porte sur les indices $\{i+1, i+2,\ldots,m\}$ *en prenant toutes les combinaisons* m-i *à* m-i *l'ensemble* $\{1, 2,\ldots,m\}$ *et où*

$$\lambda_i = \omega_i \sum \Delta^2(\alpha_1,\ldots,\alpha_i)$$

et

$$\omega_i = \frac{1}{\omega_{i-1}} \frac{\sum \Delta^2(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1})}{\sum \Delta^2(\alpha_1,\ldots,\alpha_i)}$$

avec $\omega_1 = \frac{1}{m}$.

La sommation étant définie comme précédemment.

Démonstration.

Posons

$$x^m V(\tfrac{1}{x}) = \phi(x) = (1 - \alpha_1 x) \ldots (1 - \alpha_m x)$$

$$x^{m-p} V_p(\tfrac{1}{x}) = \phi_p(x)$$

$$x\, Q_p(\tfrac{1}{x}) = \phi_p(x)$$

on obtient les égalités :

$$\phi(x) = \phi_1(x) q_1 - x^2 \phi_2(x)$$

$$\phi_1(x) = \phi_2(x) q_2 - x^2 \phi_3(x)$$

$$\phi_{m-2}(x) = \phi_{m-1}(x)\, q_{m-1} - x^2 \phi_m$$

On en conclut en posant $\phi_{m-1} = \phi_m q_m$:

$$\frac{\phi_1}{\phi} = \frac{1|}{|q_1} - \frac{x^2|}{|q_2} - \dots - \frac{x^2|}{|q_m},$$

si l'on désigne par $\frac{P_1}{\pi_1}$, $\frac{P_2}{\pi_2}$, ... les réduites successives de cette fraction continue on aura, d'après les formules de la théorie des fractions continues :

$$\pi_{i-1}\,\phi_1 - P_{i-1}\phi = x^{2i-2}\,\phi_i$$

$\frac{P_{i-1}}{\pi_{i-1}}$ étant la réduite (i-1, i-2) de la fraction rationnelle $\frac{\phi_1}{\phi}$, on a :

$$\frac{\phi_i}{\omega_{i-1}\phi} = R_{i-1,\, i-2}$$

où

$$\omega_{i-1} = \pi_{i-1}(0).$$

En appliquant la formule (7) à $R_{i-1,i-2}$, on a ici $\gamma-\mu+1 = 0$ et

$$\frac{\phi_1(x)}{\phi(x)} = \frac{1}{1-\alpha_1 x} + \dots + \frac{1}{1-\alpha_m x}$$

d'où

$$M_1 = M_2 = \dots = M_m = 1.$$

On a donc :

$$\phi_i = \omega_{i-1}\,\frac{\sum \Delta^2(\alpha_1,\dots,\alpha_i)(1-\alpha_{i+1}x)\dots(1-\alpha_m x)}{\sum \Delta^2(\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1})}$$

Il ne reste plus qu'à déterminer la valeur de ω_{i-1}.
Or on a :

$$\pi_{i-1}\frac{\phi_1}{\phi} - P_{i-1} = \frac{x^{2i-2}}{\pi_i} + x^{2i}(\dots)$$

En divisant les deux membres par ω_{i-1}, le coefficient de x^{2i-2} dans le second membre sera $\frac{1}{\omega_{i-1}\omega_i}$ qui est égal à $R_{i-1,i-2}(0)$. D'où :

$$\frac{1}{\omega_i\,\omega_{i-1}} = \frac{\sum \Delta^2(\alpha_1,\dots,\alpha_i)}{\sum \Delta^2(\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1})}$$

et

$$\phi_i(x) = \frac{1}{\lambda_i}\sum \Delta^2(\alpha_1,\dots,\alpha_i)(1-\alpha_{i+1}x)\ \dots\ (1-\alpha_m x)$$

avec

$$\lambda_i = \omega_i \sum \Delta^2(\alpha_1,\dots,\alpha_i)$$

Les quantités ω_i sont calculées par la relation précédente avec :

$$\omega_1 = \pi_1(o) = q_1(o) = \frac{\phi(o)}{\phi_1(o)} = \frac{1}{m}$$

On obtient donc l'expression de V_i :

$$V_i(x) = x^{m-i}\,\phi(\tfrac{1}{x}) = \frac{1}{\lambda_i}\sum \Delta^2(\alpha_1,\dots,\alpha_i)(x-\alpha_{i+1})\ \dots\ (x-\alpha_m)$$

ce qui achève la démonstration.

*

*   *

*

RÉFÉRENCES

[1] M. AURIC
Recherches sur les fractions continues algébriques.
Bull. Soc. Math. France, 35 (1907), 105-206.

[2] C. BREZINSKI
Sur le calcul de certains rapports de déterminants.

[3] C. BREZINSKI
Padé type approximation and general orthogonal polynomials.
Birkhaüser Verlag, Basel, ISNM, vol. 50, 1980.

[4] E. BOREL
Leçons sur les séries entières divergentes.
Collection de monographie sur la théorie des fonctions. Gauthiers-Villars, Paris, 1928.

[5] F. CORDELLIER
Sur une généralisation de l'interpolation rationnelle.

[6] J. GILEWICZ
Approximants de Padé.
Lectures Note in Math. 667, Springer Verlag, Heidelberg, 1978.

[7] J. HADAMARD
Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor.
Thèse, Gauthier-Villars, Paris, 1892.

[8] G. HALPHEN
Sur la convergence d'une fraction continue algébrique.
C.R. Acad. Sci. Paris, 100 (1885), 1451-1454.

[9] C. HERMITE
Sur la généralisation des fractions continues algébriques.
Annali di Math, Seri 2, 21 (1893), 289-308.

[10] E. LAGUERRE

Bull. Soc. Math. France, 7, (1879).

[11] E. LAGUERRE
Sur la réduction en fraction continue d'une fonction qui satisfait à une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les coefficients sont rationnelles.
J. Math. Pures et Appli., 4e Série, 1, (1885).

[12] H. PADÉ
Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles.
C.R. Acad. Sci. Paris, 111 (1980), 674-676.

[13] H. PADÉ
Sur les fractions continues régulières relatives à e^x.
C.R. Acad. Sci. Paris, 112 (1891), 712-714.

[14] H. PADÉ
Sur la convergence des fractions continues simples.
C.R. Acad. Sci. Paris, 112 (1891), 988-990.

[16] H. PADÉ
Sur la possibilité de définir une fonction par une série entière divergente.
C.R. Acad. Sci. Paris, 116 (1893), 686-687.

[17] H. PADÉ
Sur les séries entières convergentes ou divergentes et les fractions continues rationnelles.
Acta Mathematica, Tome 18, (1894), 97-112.

[18] H. PADÉ
Sur la généralisation des fractions continues algébriques.
J. Math. pures et appliquées, 4e série, tome 10, (1894), 291-329.

[19] H. PADÉ
Sur la généralisation des fractions continues algébriques.
C.R. Acad. Sciences Paris, 118 (1894) 848-850.

[20] H. PADÉ
Sur la convergence des réduites de la fonction exponentielle.
C.R. Acad. Sci. Paris, Tome 127 (1898) 444-446.

[21] H. PADÉ
Mémoire sur le développement en fractions continues de la fonction exponentielle pouvant servir d'introduction à la théorie des fractions continues algébriques.
Ann. Ec. Norm. Sup. Série 3, Tome 16 (1899) 395-426.

[22] H. PADÉ
Sur la généralisation des développements en fraction continue, donnés par Gauss et par Euler, de la fonction $(1+x)^m$.
C.R. Acad. Sci. Paris, 129 (1899) 753-756.

[23] H. PADÉ
Sur la généralisation des développements en fraction continue, donnés par Lagrange, de la fonction $(1+x)^m$.
C.R. Acad. Sci. Paris, 129 (1899) 875-879.

[24] H. PADÉ
Sur la distribution des réduites anormales d'une fonction.
C.R. Acad. Sci. Paris, 130 (1900) 102-104.

[25] H. PADÉ
Sur l'extension des propriétés des réduites d'une fonction aux fractions d'interpolation de Cauchy.
C.R. Acad. Sci.Paris, 130 (1900) 697-701.

[26] H. PADÉ
Aperçu sur les développements récents de la théorie des fractions continues.
Compte rendu du 2e Congrès International des Mathématiciens, Paris, c-12, août 1900, E. Duporcq, Gauthiers-Villars, Paris, 1902, pp. 257-264.

[27] H. PADÉ
Sur l'expression générale de la fraction rationnelle approchée de $(1+x)^m$.
C.R. Acad. Sci. Paris, 132 (1901) 754-756.

[28] H. PADÉ
Sur la fraction continue de Stieltjes.
C.R. Acad. Sci. Paris, 132 (1901) 911-912.

[29] H. PADÉ
Recherches nouvelles sur la distribution des fractions rationnelles approchées d'une fonction.
Ann. Ec. Norm. Sup., 19 (1902) 153-190.

[30] H. PADÉ
Remarques sur une méthode pour l'étude de la convergence de certaines fractions continues.
C.R. Acad. Sci. Paris, 139 (1904) 1023-1025.

[31] H. PADÉ
Sur la convergence de la table des réduites d'une fraction rationnelle.
C.R. Acad. Sci. Paris, 141 (1905) 241-243.

[32] H. PADÉ
Sur les réduites d'une certaine catégorie de fonctions.
C.R. Acad. Sci. Paris, 141 (1905) 708-710.

[33] H. PADÉ
Sur le développement en fraction continue de la fonction $F(h, \ell, \ell', u)$ *et la généralisation de la théorie des fonctions sphériques.*
C.R. Acad. Sci. Paris, 141 (1905) 819-821.

[34] H. PADÉ
Sur la convergence des fractions continues régulières de la fonction $F(h, \;, h', u)$ *et de ses dégénérescences.*
C.R. Acad. Sci. Paris, 141 (1905) 997-999.

[35] H. PADÉ
Sur les formules de Sylvester.
Procès verbaux de la Société des Sciences Phys. et Nat. de Bordeaux, (1904-1905) 31-33.

[36] H. PADÉ
Recherches sur la convergence des développements en fractions continues d'une certaine catégorie de fonction.
Ann. Ec. Norm. Sup., 24 (1907) 341-400.

[37] H. PADÉ
Sur la généralisation des formules de Sylvester relatives aux fonctions qui se présentent dans l'application du théorème de Sturm et sur la convergence de la table des réduites d'une fraction rationnelle.
Ann. Ec. Norm. Sup., 24 (1907) 519-534.

[38] R. DE MONTESSUS DE BALLORE
Thèse, Paris, 8 mars 1905.

[39] R. DE MONTESSUS DE BALLORE
Sur les fractions continues algébriques.
C.R. Acad. Sci. Paris, 134 (1902) 1489-1491.

[40] R. DE MONTESSUS DE BALLORE
Sur les fractions continues algébriques.
Bull. Soc. Math. de France, 30 (1902) 28-36.

[41] R. DE MONTESSUS DE BALLORE
Sur la convergence de certaines fractions continues algébriques.
Ann. de la Société Mathématique de Bruxelles, 27 (1903) 60-64.

[42] R. DE MONTESSUS DE BALLORE
Sur les fractions continues algébriques de Laguerre.
C.R. Acad. Sci. Paris, 140 (1905) 1438-1440.

[43] A. DRAUX
Polynômes orthogonaux formels - Applications.
Thèse, Université de Lille 1, 1981.

[44] C. POSSÉ
Sur quelques applications des fractions continues algébriques.
Paris, 1886.

[45] A. MARKOFF
Sur quelques applications des fractions continues.
Mémoires de l'Académie de St Petersbourg, 1884.

[46] N.E. NORLUND
Fractions continues et différences réciproques.
Acta Informatica, 34 (1911) 1-108.

[47] T.J. STIELTJES
Recherches sur les fractions continues.
Ann. Fac. Sci. Toulouse, tome 8 (1894) 1-122.

[48] T.N. THIELE
Différences réciproques.
Bulletin de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark (1906) pp. 153-171.

[49] P.L. TCHEBYCHEFF
Sur les valeurs limites des intégrales.
J. de Math. Pures et Appliquées de Lionville, 1874.

[50] P.L. TCHEBYCHEFF
Sur les valeurs limites des intégrales.
Mémoirés de l'Académie de St Petersbourg, 1885.

[51] P.L. TCHEBYCHEFF
Sur les fractions continues.
Oeuvres complètes de Tchebycheff, pp. 203-230.

[52] P.L. TCHEBYCHEFF
Sur les fractions continues.
Oeuvres complètes de Tchebycheff, 703-704.

[53] P.L. TCHEBYCHEFF
Sur une formule d'analyse.
Oeuvres complètes de Tchebycheff, 707-7 .

[54] P.L. TCHEBYCHEFF
Sur les fractions continues algébriques.
Oeuvres complètes de Tchebycheff, 611-614 .

[55] P.L. TCHEBYCHEFF
Sur le développement des fonctions en séries à l'aide des fractions continues.
Oeuvres complètes de Tchebycheff, 616-636.

[56] G. FROBENIUS
J. Reine Angew. Math., 89 (1880), 262-264.

[57] G. FROBENIUS
J. Reine Angew. Math., 90 (1881), 1-17.

[58] E.B. VAN VLECK
Transactions of the American Mathematical Society, juillet 1903.

[59] L. EULER
Introductio in analysin infinitorium.
Tome I, pp. 368-373.

[60] C. BREZINSKI
The birth and early developpements of Padé approximants.
Publication ANO 79 de l'Université des Sciences et Techniques de Lille, septembre 1982.

[61] J.L. LANGRANGE
Sur l'usage des fractions continues dans le calcul intégral.
Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, Année 1776 - Oeuvres de Lagrange, Tome IV, pp. 301-332.

[62] THOME
Journal de Crelle, Tome 66, Année 1866.

[63] THOME
Journal de Crelle, Tome 67, Année 1867.

[64] T.J. STIELTJES
Recherches sur les fractions continues.
Ann. Fac. Sci. Toulouse, 3 (1889), 1-17.