THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE 3ème CYCLE

par

Isabelle HACCART

ACCELERATION DE LA CONVERGENCE DE SUITES, SERIES ET INTEGRALES DOUBLES.

Soutenue le 24 Novembre 1983 devant la Commission d'Examen

MEMBRES DU JURY :

Président	C. BREZINSKI
Rapporteur	C. BREZINSKI
Examinateurs	B. GERMAIN BONNE
	S. PASZKOWSKI

P R O F E S S E U R S CLASSE EXCEPTIONNELLE

M. CONSTANT Eugène	I.E.E.A.
M. FOURET René	Physique
M. GABILLARD Robert	I.E.E.A.
M. MONTREUIL Jean	Biologie
M. PARREAU Michel	Mathématiques
M. TRIDOT Gabriel	Chimie
M. VIVIER Emile	Biologie
M. WERTHEIMER Raymond	Physique

P R O F E S S E U R S 1ère classe

M. BACCHUS Pierre	Mathématiques
M. BEAUFILS Jean-Pierre (dét.)	Chimie
M. BIAYS Pierre	G.A.S.
M. BILLARD Jean (dét.)	Physique
M. BOILLY Bénoni	Biologie
M. BOIS Pierre	Mathématiques
M. BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M. BOUGHON Pierre	Mathématiques
M. BOURIQUET Robert	Biologie
M. BREZINSKI Claude	I.E.E.A.
M. CELET Paul	Sciences de la Terre
M. CHAMLEY Hervé	Biologie
M. COEURE Gérard	Mathématiques
M. CORDONNIER Vincent	I.E.E.A.
M. DEBOURSE Jean-Pierre	S.E.S.
M. DYMENT Arthur	Mathématiques

PROFESSEURS 1ère classe (suite)

M. ESCAIG Bertrand	Physique
M. FAURE Robert	Mathématiques
M. FOCT Jacques	Chimie
M. GRANELLE Jean-Jacques	S.E.S.
M. GRUSON Laurent	Mathématiques
M. GUILLAUME Jean	Biologie
M. HECTOR Joseph	Mathématiques
M. LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M. LACOSTE Louis	Biologie
M. LAVEINE Jean Pierre	Sciences de la Terre
M. LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique
M. LHOMME Jean	Chimie
M. LOMBARD Jacques	S.E.S.
M. LOUCHEUX Claude	Chimie
M. LUCQUIN Michel	Chimie
M. MIGEON Michel Recteur à Grenoble	E.U.D.I.L.
M. MIGNOT Fulbert (dét.)	Mathématiques
M. PAQUET Jacques	Sciences de la Terre
M. PROUVOST Jean	Sciences de la Terre
M. ROUSSEAU Jean-Paul	Biologie
M. SALMER Georges	I.E.E.A.
M. SEGUIER Guy	I.E.E.A.
M. SIMON Michel	S.E.S.
M. STANKIEWICZ François	S.E.S.
M. TILLIEU Jacques	Physique
M. VIDAL Pierre	I.E.E.A.
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mathématiques

P R O F E S S E U R S 2ème classe

M.	ANTOINE Philippe	Mathématiques (Calais)
M.	BART André	Biologie
Mme	BATTIAU Yvonne	Géographie
M.	BEGUIN Paul	Mathématiques
M.	BELLET Jean	Physique
M.	BERZIN Robert	Mathématiques
M.	BKOUCHE Rudolphe	Mathématiques
M.	BODARD Marcel	Biologie
M.	BOSQ Denis	Mathématiques
M.	BRASSELET Jean-Paul	Mathématiques
M.	BRUYELLE Pierre	Géographie
M.	CAPURON Alfred	Biologie
M.	CARREZ Christian	I.E.E.A.
M.	CAYATTE Jean-Louis	S.E.S.
M.	CHAPOTON Alain	C.U.E.E.P.
M.	COQUERY Jean-Marie	Biologie
Mme	CORSIN Paule	Sciences de la Terre
M.	CORTOIS Jean	Physique
M.	COUTURIER Daniel	Chimie
M.	CROSNIER Yves	I.E.E.A.
M.	CURGY Jean-Jacques	Biologie
Mle	DACHARRY Monique	Géographie
M.	DAUCHET Max	I.E.E.A.
M.	DEBRABANT Pierre	E.U.D.I.L.
M.	DEGAUQUE Pierre	I.E.E.A.
M.	DELORME Pierre	Biologie
M.	DELORME Robert	S.E.S.
M.	DE MASSON D'AUTUME Antoine	S.E.S.
M.	DEMUNTER Paul	C.U.E.E.P.

PROFESSEURS 2ème classe (Suite 1)

M. DENEL Jacques	I.E.E.A.
M. DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques (Calais)
Mle DESSAUX Odile	Chimie
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie
M. DHAINAUT André	Biologie
Mme DHAINAUT Nicole	Biologie
M. DORMARD Serge	S.E.S.
M. DOUKHAN Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M. DUBOIS Henri	Physique
M. DUBRULLE Alain	Physique (Calais)
M. DUBUS Jean-Paul	I.E.E.A.
M. FAKIR Sabah	Mathématiques
M. FONTAINE Hubert	Physique
M. FOUQUART Yves	Physique
M. FRONTIER Serge	Biologie
M. GAMBLIN André	G.A.S.
M. GLORIEUX Pierre	Physique
M. GOBLOT Rémi	Mathématiques
M. GOSSELIN Gabriel (dét.)	S.E.S.
M. GOUDMAND Pierre	Chimie
M. GREGORY Pierre	I.P.A.
M. GREMY Jean-Paul	S.E.S.
M. GREVET Patrice	S.E.S.
M. GUILBAULT Pierre	Biologie
M. HENRY Jean-Pierre	E.U.D.I.L.
M. HERMAN Maurice	Physique
M. JACOB Gérard	I.E.E.A.
M. JACOB Pierre	Mathématiques
M. JEAN Raymond	Biologie
M. JOFFRE Patrick	I.P.A.

PROFESSEURS 2ème classe (suite 2)

M. JOURNEL Gérard	E.U.D.I.L.
M. KREMBEL Jean	Biologie
M. LANGRAND Claude	Mathématiques
M. LATTEUX Michel	I.E.E.A.
Mme LECLERCQ Ginette	Chimie
M. LEFEVRE Christian	Sciences de la Terre
Mle LEGRAND Denise	Mathématiques
Mle LEGRAND Solange	Mathématiques (Calais)
Mme LEHMANN Josiane	Mathématiques
M. LEMAIRE Jean	Physique
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique
M. LOSFELD Joseph	C.U.E.E.P.
M. LOUAGE Francis(dét.)	E.U.D.I.L.
M. MACKE Bruno	Physique
M. MAIZIERES Christian	I.E.E.A.
M. MESSELYN Jean	Physique
M. MESSERLIN Patrick	S.E.S.
M. MONTEL Marc	Physique
Mme MOUNIER Yvonne	Biologie
M. PARSY Fernand	Mathématiques
Mle PAUPARDIN Colette	Biologie
M. PERROT Pierre	Chimie
M. PERTUZON Emile	Biologie
M. PONSOLLE Louis	Chimie
M. PORCHET Maurice	Biologie
M. POVY Lucien	E.U.D.I.L.
M. RACZY Ladislas	I.E.E.A.
M. RAOULT Jean François	Sciences de la Terre
M. RICHARD Alain	Biologie

PROFESSEURS 2ème Classe (suite 3)

M. RIETSCH François	E.U.D.I.L.
M. ROBINET Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M. ROGALSKI Marc	Mathématiques
M. ROY Jean-Claude	Biologie
M. SCHAMPS Joël	Physique
Mme SCHWARZBACH Yvette	Mathématiques
M. SLIWA Henri	Chimie
M. SOMME Jean	G.A.S.
Mle SPIK Geneviève	Biologie
M. STAROSWIECKI Marcel	E.U.D.I.L.
M. STERBOUL François	E.U.D.I.L.
M. TAILLIEZ Roger	Institut Agricole
Mme TJOTTA Jacqueline (dét.)	Mathématiques
M. TOULOTTE Jean-Marc	I.E.E.A.
M. TURRELL Georges	Chimie
M. VANDORPE Bernard	E.U.D.I.L.
M. VAST Pierre	Chimie
M. VERBERT André	Biologie
M. VERNET Philippe	Biologie
M. WALLART Francis	Chimie
M. WARTEL Michel	Chimie
M. WATERLOT Michel	Sciences de la Terre
Mme ZINN JUSTIN Nicole	Mathématiques

CHARGES DE COURS

M.	ADAM Michel	S.E.S.

CHARGES DE CONFERENCES

M.	BAFCOP Joël	I.P.A.
M.	DUVEAU Jacques	S.E.S.
M.	HOFLACK Jean	I.P.A.
M.	LATOUCHE Serge	S.E.S.
M.	MALAUSSENA DE PERNO Jean-Louis	S.E.S.
M.	NAVARRE Christian	I.P.A.
M.	OPIGEZ Philippe	S.E.S.

Si j'ai pu voir si loin, c'est que j'étais installé sur des épaules de géants.

W.A. MOZART

A J.C. BENAUDET et *à Monsieur* C. BREZINSKI

Ce travail a été réalisé dans le cadre de la subvention de recherche NATO 027 - 81 sur les méthodes d'extrapolation.

La Science est l'oeuvre de l'esprit humain, qui est destiné plutôt à étudier qu'à connaître, à chercher qu'a trouver la vérité.

GALOIS -1831-

TABLE DES MATIERES

ACCELERATION DE LA CONVERGENCE
DES SUITES SERIES INTEGRALES DOUBLES.

-.-.-.-.-.-.-.-.-

Le but de cette thèse est de présenter du point de vue du numéricien, une étude sur les suites, séries et intégrales doubles.

Nous disposions pour cela de procédés connus traitant les suites et séries simples. Une partie sera donc consacrée à des généralisations d'algorithmes de suites simples. Pour se faire, on examine ceux-là, on met en évidence une propriété et la généralisation sera définie à partir de la conservation de cette propriété écrite dans le cas des suites ou séries doubles. Ainsi la transformation de SHANKS possédera une première généralisation présentée par LEVIN [13], puis une autre construite à l'aide d'une généralisation de l'opérateur Δ en $\delta_{k\ell}$.

Une autre façon de procéder est de trouver un moyen de ramener une suite double ou multiple à une suite simple. Ce moyen est abordé dans le paragraphe sur le E-algorithme. Nous y introduisons la définition d'une sous-suite telle que, si la suite d'origine converge, la suite extraite a alors même limite.

Nous présenterons également deux transformations qui ne découlent pas de résultats connus sur les suites simples. La première est dûe à STREIT [15], la seconde sera appelée la nouvelle transformation. Elles ont toutes deux l'avantage de pouvoir donner, dans certains cas, une approximation de somme de séries à l'aide de calculs simples.

Enfin, les intégrales doubles feront l'objet du dernier chapitre qui se divise en deux parties : la première est l'exposé des résultats de LEVIN [13], la seconde appelée nouvelle approche.

CHAPITRE I

GENERALITES

- suites réelles doubles
- séries réelles doubles
- opérateur $\delta_{k\ell}$.

Le premier chapitre est une présentation des suites et séries réelles doubles. Les définitions, quelques propriétés et théorèmes serviront de rappel.

On définira les suites doubles, les convergences horizontale et verticale, la monotonie.

Pour les séries doubles, on définira également différentes sommes partielles. Celles dites "en rectangle", "en triangle" et "de LEVIN". On énoncera quelques théorèmes se rapportant aux séries de termes positifs et des résultats concernant le calcul d'erreur d'une série approximée par une somme finie de ses termes.

Enfin, l'opérateur $\delta_{k\ell}$ sera introduit. Cet opérateur est une généralisation de l'opérateur Δ des suites simples. Des applications à différentes suites de sommes partielles en illustreront la définition et les propriétés.

A aucun moment il ne sera fait mention des suites doubles complexes puisqu'elles peuvent être considérées comme deux suites réelles doubles si l'on traite séparément partie réelle et partie imaginaire.

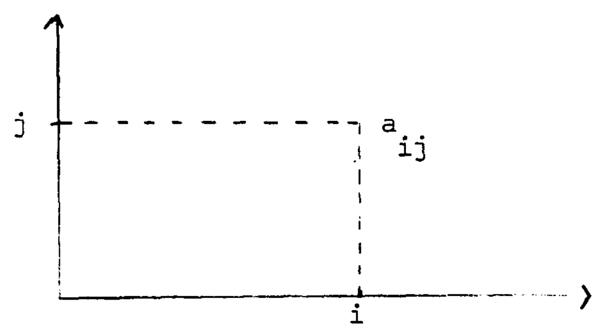
SUITES REELES DOUBLES

Définition :

On appelle suite réelle double une application de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ à valeur dans $\mathbb{R}$

$$(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow a_{mn} \in \mathbb{R}$$

Chaque terme a_{ij} peut alors être représenté dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par le point d'abscisse i et d'ordonnée j.



A l'aide d'une translation sur les indices, étudier la suite (a_{mn}) où $m,n \in \mathbb{N}$ revient à étudier la suite (a_{ij}) où $i,j \in \mathbb{N}^*$. Pour des raisons de commodité pratique, sauf mention spéciale, nous ne considérerons dans ce qui suit que des termes a_{ij} dont les indices sont des entiers strictement positifs. Nous confondrons les suites, cad les applications de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$, avec leurs images dans $\mathbb{R}$. Les suites seront alors notées (a_{mn}).

Convergence simple :

La suite (a_{mn}) sera dite convergente vers a, si et seulement si, par définition :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}^* \quad \forall m \geq N \ \forall n \geq N \quad |a_{mn} - a| < \varepsilon$$

autrement dit $\lim\limits_{m,n} a_{mn} = a$ si et seulement si l'on peut trouver un rang au delà duquel la différence $|a_{mn}-a|$ peut-être rendue aussi petite que l'on veut. Les termes a_{mn} n'étant pas à priori ordonnés, dire que l'on peut trouver un rang a partir duquel $|a_{mn}-a| < \varepsilon$ signifiera que chacun des indices sera supérieur ou égal au rang considéré.

Critère de Cauchy

Une suite double vérifie le critère de Cauchy, si et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}^* \quad \forall m,n,p,q \geq N \quad |a_{mn} - a_{pq}| < \varepsilon$$

$\mathbb{R}$ étant un espace complet, le critère de Cauchy est, dans $\mathbb{R}$, une condition nécessaire et suffisante de convergence simple.

Convergence horizontale

On dira qu'une suite (a_{ij}) converge horizontalement, si et seulement si, la suite simple $(a_{ij})_i$ converge pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ cad

$$\forall j \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{i \to \infty} a_{ij} = h_j$$

Convergence verticale

On définit de façon analogue la convergence verticale par :

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{j \to \infty} a_{ij} = v_i$$

Géométriquement, si chacun des termes (a_{ij}) est représenté dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ la convergence horizontale signifie que chaque suite conposée des éléments d'une ligne j converge vers un élément h_j. De même la convergence verticale impliquera que chacune des suites composée par les termes d'une colonne i converge vers une limite notée v_i.

Convergence absolue

Une suite (a_{ij}) sera dite absolument convergente, si et seulement si, la suite $(|a_{ij}|)$ composée des valeurs absolues de chacun des termes de la suite initiale converge.

Proposition 1

Soit (a_{ij}) une suite réelle double qui converge vers a, alors la suite $(|a_{ij}|)$ converge vers $|a|$.

En effet, la définition de la convergence de la suite (a_{ij}) permet d'écrire

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}^* \quad \forall i,j \geq N \quad |a_{ij} - a| < \varepsilon$$

or $\quad \big|\, |a_{ij}| - |a| \,\big| \leq |a_{ij} - a|$ d'où le résultat.

Remarques

. Les convergences horizontale et verticale n'impliquent pas la convergence simple

en effet soit $a_{mn} = \frac{mn}{(m+n)^2}$

on a : $\lim\limits_{m\to\infty} a_{mn} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{mn} = 0$

or la suite (a_{mn}) ne converge pas puisque

pour m=n $a_{mn} = \frac{1}{4}$ et pour m=2n $a_{mn} = \frac{2}{9}$

. La convergence simple n'implique pas que l'on ait les convergences horizontale et verticale

en effet soit $a_{mn} = \frac{(-1)^{m+n}m}{2^m}$ le terme général d'une suite double qui tend vers 0 puisque l'on sait que l'on peut trouver un rang à partir duquel $|a_{mn}| = \frac{m}{2^m}$ peut être rendu aussi petit que l'on veut.

Mais pour m fixé, la limite de a_{mn}, quand n tend vers l'infini, n'existe pas. Donc cette suite qui converge, ne converge pas verticalement.

Proposition 2

Soit (a_{mn}) une suite convergente, de convergence simple, horizontale et verticale alors $\lim\limits_{m} (\lim\limits_{n} a_{mn}) = \lim\limits_{n} (\lim\limits_{m} a_{mn}) = \lim\limits_{m,n} a_{mn}$

Démonstration

(a_{mn}) converge simplement, donc pour ε donné, il existe N un entier à partir duquel on aura $|a_{mn} - a| < \varepsilon$ d'où par passage à la limite $|\lim\limits_{m} a_{mn} - a| < \varepsilon$ puisque $\lim\limits_{m} a_{mn}$ existe. De même $|\lim\limits_{n} a_{mn} - a| < \varepsilon$

d'où $\lim\limits_{n} h_n = \lim\limits_{m} V_m = \lim\limits_{m,n} a_{mn} = a$

Suite monotone

(a_{mn}) sera dite une suite monotone croissante si elle vérifie

(1) $a_{m+\ell,n} \geq a_{mn}$

(11) $a_{m,n+k} \geq a_{mn}$

$\forall k,\ell \in \mathbb{N}$ $\forall m,n \in \mathbb{N}^*$

On définira de façon analogue une suite monotone décroissante en changeant le sens des inégalités dans (1) et (11).

Remarques

. La relation (1) est équivalente à (1)' : $a_{m+1,n} \geq a_{mn}$ $\forall m,n \in \mathbb{N}^*$

en effet si $a_{m+k,n} \geq a_{mn}$ pour tout entier ℓ, ceci reste vrai en particulier pour $\ell=1$.

Réciproquement
$$\begin{aligned} a_{m+k,n} - a_{mn} = {} & a_{m+k,n} - a_{m+k-1,n} \\ & + a_{m+k-1,n} - a_{m+k-2,n} \\ & + \ldots\ldots \\ & + a_{m+1,n} - a_{mn} \end{aligned}$$

donc si la relation (1)' est vraie, chaque différence du second membre est positive d'où la somme des termes positifs est elle-même positive d'où $a_{m+k,n} \geq a_{mn}$

. on montrerait de façon analogue, que la relation (11) équivaut à (11)' $a_{m,n+1} \geq a_{mn}$ $\forall m,n \in \mathbb{N}^*$

Proposition 3

(a_{mn}) est une suite croissante si et seulement si

$$a_{m+k,n+\ell} - a_{mn} \geq 0 \quad \forall m,n \in \mathbb{N}^* \quad \forall k,\ell \in \mathbb{N}$$

Démonstration

Si la suite (a_{mn}) vérifie la définition de la croissance,

$$a_{m+k,\ell} - a_{m+k,n} \geq 0 \text{ et } \quad a_{m+k,n} - a_{mn} \geq 0$$

d'où en sommant ces deux inéquations : $a_{m+k,n+\ell} - a_{mn} \geq 0$

réciproquement :

$$\text{Si } a_{m+k,n+\ell} - a_{mn} \geq 0 \quad \forall m,n \in \mathbb{N}^* \qquad \forall k,\ell \in \mathbb{N}$$

il suffit d'écrire cette relation pour k=0 puis pour ℓ=0 pour retrouver la définition.

SERIES REELES DOUBLES

L'étude des suites et des séries doubles est très liée. Nous rappelons ici le lien qu'il existe entre l'étude d'une série et celle de la suite de sommes partielles. A ce sujet, nous énoncerons quelques résultats généraux ainsi que quelques façons d'étudier des séries doubles à l'aide de suites simples. Ce qui a retenu notre attention dans ce qui va suivre, sont essentiellement les propriétés spécifiques des séries doubles.

Définition d'une série

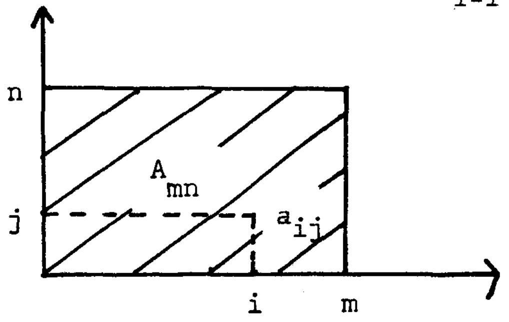
Soit (a_{ij}) une suite de réels. Etudier la convergence de la série de terme général a_{ij} où $i,j \in \mathbb{N}^*$ revient à étudier, si elle existe, la somme de tous les termes a_{ij}. Nous noterons $[a_{ij}]$ la série de terme général a_{ij} et S sa somme ou $S = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$.

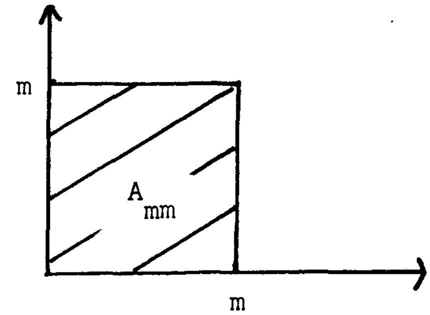
Bien souvent une telle étude nécessite l'étude de suites des sommes partielles cad la construction de sommes ne comprenant qu'une partie de tous les a_{ij}. Nous ne présentons ici que les sommes partielles les plus courantes, telles qu'elles sont définies par la plupart des auteurs [6] [11] [16].

Sommes partielles en rectangle

Si l'on représente sur un graphe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ chaque élément a_{ij} par le point de coordonnées (i,j), la somme des termes compris dans le rectangle de base m, de hauteur n et dont un sommet se trouve à l'origine, est égale à

$$A_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

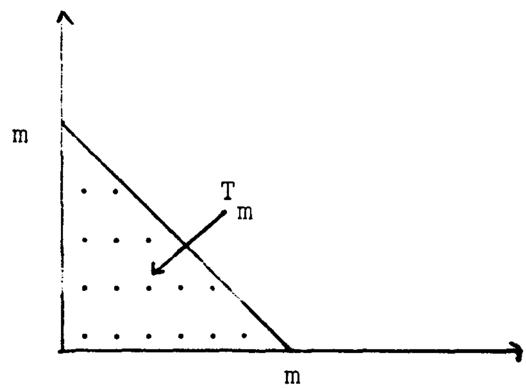




Dans le cas particulier où m=n, la suite (A_{mn}) devient une suite de sommes partielles ne comportant qu'un seul indice. C'est la première façon de transformer l'étude d'une série double en celle d'une série simple.

Sommes partielles en triangle

On appelle suite de sommes partielles en triangle, la suite de terme général $T_m = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m-i} a_{ij}$. Dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'ensemble de ces termes se situe dans un triangle rectangle isocèle de côté m, d'hypothénuse de pente - 1



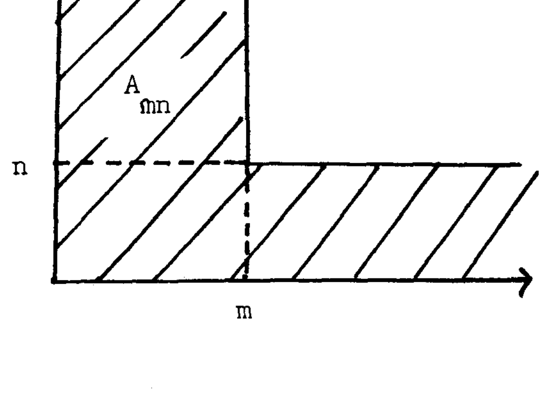
La construction de la suite (T_m) ne nécessitant qu'un seul indice, ceci est la seconde façon de se ramener, à partir d'une série double, à une série simple.

Sommes partielles de "Levin"

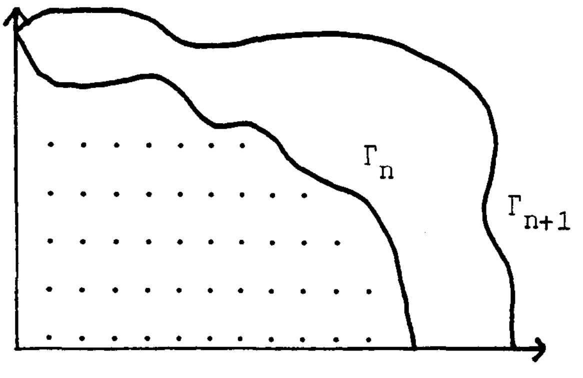
Dans une de ces publications, LEVIN [13] propose des suites doubles partielles de la forme

$A_{mn} = \sum_{(ij)\in Imn} a_{ij}$ avec $Imn = \{(i,j)\in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1\le i\le m \text{ ou } 1\le j\le n\}$

Géométriquement, cet ensemble se représente de la façon suivante :



Etudier la convergence d'une série revient donc à étudier la limite d'une suite de sommes partielles pourvu que celle-ci recouvre tout $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si chaque indice tend indépendemment vers l'infini. En fait géométriquement, cela revient à se construire une suite de courbes (Γn) pouvant dépendre d'un ou de deux indices telle que chacune des courbes définisse une somme partielle à l'aide des éléments représentés dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ compris entre Γ_n et les deux axes du repère. De plus, on supposera que $\Gamma_{n+1} \supset \Gamma_n$ cad que chacun des éléments de Γ_n



est aussi element recouvert par le surface de Γ_{n+1}. Enfin nous demanderons à Γ_n de recouvrir le quart de plan de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tout entier lorsque n tend vers l'infini. Et donc à la limite, la somme des elements de Γ_n est égale à la somme de la serie etudiée.

Pour fixer les idées, on pourra supposer dans les prochains énoncés que l'on a choisi des sommes partielles en rectangle, mais ils restent cependant valides avec le choix de l'une ou l'autre des suites partielles présentées plus haut.

Du point de vue des notations, on supposera que l'on étudie la série $[a_{ij}]$ de terme général a_{ij}, $(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ à l'aide des sommes partielles A_{mn}, $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Définition

On dira que la série $[a_{ij}]$ tend vers A, si et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}^* \quad \forall m,n \quad m \geq M \quad n \geq M \quad |A_{mn} - A| < \varepsilon$$

Propriété 1

Le terme général d'une série convergente tend vers 0, cad :

si $\lim\limits_{m,n} A_m = A$ alors

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}^* \quad \forall m,n \quad m \geq M \quad n \geq M \quad |a_{mn}| < \varepsilon$$

Théorème 1

Une condition nécessaire et suffisante pour que la série de terme général a_{ij} converge est que la suite des sommes partielles (A_{mn}) vérifie le critère de Cauchy.

Propriété 2

Une condition nécessaire et suffisante pour que la série $[a_{ij}]$ converge si pour tout (i,j) $a_{ij} \geq 0$, est que ses sommes partielles en rectangle soient bornées.

Propriété 3

Une condition nécessaire de convergence d'une série de termes positifs est :

$$\lim_{i \to \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{j \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} = 0$$

on peut alors en déduire que :

$$\lim_{i \to \infty} \sum_{j=1}^{i} a_{ij} = 0 \quad ; \quad \lim_{j \to \infty} \sum_{i=1}^{j} a_{ij} = 0$$

et aussi : $\displaystyle \lim_{i,j \to \infty} a_{ij} = 0$, $\displaystyle \lim_{i \to \infty} a_{ij} = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{j \to \infty} a_{ij} = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}^*$$

Avec les notations données plus haut, on appelera :

La ligne n : la somme $L_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$

La colonne m : la somme $C_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$

avec $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} L_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$

$\displaystyle \sum_{m=1}^{\infty} C_m = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ si ces sommes existent .

On peut ainsi définir la somme de la série $[a_{ij}]$ soit à l'aide d'une somme par lignes cad par $\sum_{n=1}^{\infty} L_n$, soit à l'aide d'une somme par colonnes cad par $\sum_{m=1}^{\infty} C_m$. Chacune de ces sommes peut être définie par une double limite, en effet chercher la somme de la série $[a_{ij}]$ revient à trouver les doubles limites, si elles existent :

$$\lim_{m} (\lim_{n} A_{mn}) \quad \text{et} \quad \lim_{n} (\lim_{m} A_{mn}).$$

Puisque $A_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$

$$\lim_{n} A_{mn} = \lim_{n} \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} [\lim_{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} [\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}] \text{ si cette limite existe.}$$

ensuite $\lim_{m} [\lim_{n} A_{mn}] = \lim_{m} \sum_{i=1}^{m} [\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}] = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$.

De même $\lim_{m} A_{mn} = \lim \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} [\lim_{m} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}]$

$$= \sum_{j=1}^{n} [\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}] \text{ si elle existe.}$$

et $\lim_{n} (\lim_{m} A_{mn}) = \lim_{n} \sum_{j=1}^{n} [\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}] = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$.

Ces deux doubles limites ne seront égales que sous certaines conditions. Remarquons d'abord que (A_{mn}) peut converger sans que ces deux limites existent.

Par exemple pour $A_{mn} = \frac{(-1)^{m+n} m}{2^m}$ qui converge absolument, la limite, lorsque n tend vers l'infini n'existe pas.

D'autre part il se peut que l'on ait $\lim\limits_{m\to\infty} (\lim\limits_{n\to\infty} A_{mn}) = \lim\limits_{n\to\infty} (\lim\limits_{m\to\infty} A_{mn})$ sans que la suite (A_{mn}) converge.

En effet, la suite définie par $A_{mn} = \frac{mn}{(m+n)^2}$ ne converge pas puisque pour m=n ou pour m=2n, A_{mn} prend deux valeurs différentes mais vérifie

$$\lim_{m\to\infty} (\lim_{n\to\infty} A_{mn}) = \lim_{n\to\infty} (\lim_{m\to\infty} A_{mn}) = 0$$

Enfin, pour une somme finie de termes, la commutativité de l'addition dans $\mathbb{R}$ permet d'écrire :

$$A_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

Nous allons alors énoncer quelques propriétés ou théorèmes qui permettront d'établir l'égalité des doubles limites. Avant cela nous aurons besoin de la définition suivante :

<u>Convergence absolue</u>

Par définition, la série $[a_{ij}]$ converge absolument si et seulement si la série de terme général $|a_{ij}|$ converge.

Une série peut converger, sans vérifier l'absolue convergence. Par exemple, posons $a_{ij} = \frac{(-1)^{j+1}}{j \cdot 2^{i-1}}$

$$A_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = (\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^{i-1}}) (\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j+1}}{j}) \leq 2 \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j+1}}{j}$$ qui converge

$$B_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = (\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^{i-1}}) (\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}) \geq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$$ qui diverge

Ainsi la série $[a_{ij}]$ converge, tandis que la série conposée des valeurs absolues $|a_{ij}|$ diverge.

Cette définition va nous permettre d'étudier des séries de termes tous positifs. De telles séries possèdent des propriétés intéressantes.

Théorème 2

Si pour tout (m,n) $a_{mn} \geq 0$, si les lignes et les colonnes convergent, si de plus la série double converge, alors

$$A = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}.$$

Autrement dit si pour tout m, pour tout n, $L_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ et $C_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$ existent et si $\sum_{i,j}^{\infty} a_{ij}$ converge vers A, alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n = \sum_{m=1}^{\infty} L_m = A.$$

Théorème 3

La convergence d'une série double composée de termes positifs implique la convergence de toutes les lignes et de toutes les colonnes et l'on a alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n = \sum_{m=1}^{\infty} L_m = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = A.$$

Théorème 4

Si l'une des sommes formée des lignes ou des colonnes d'une série de termes positifs converge, alors l'autre aussi et la série converge et l'on a alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n = \sum_{m=1}^{\infty} L_m = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = A.$$

Ceci peut encore s'exprimer de la façon suivante :

Soit $[a_{ij}]$ une série de termes tous positifs. Supposons que $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ existe alors $\sum_{m=1}^{\infty} L_m$ existe aussi et la série double converge et on peut écrire

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n = \sum_{m=1}^{\infty} L_m = A.$$

La propriété reste valide si l'on inverse les rôles joués par les lignes et les colonnes.

Puisque nous étudierons ensuite des procédés d'accélération de la convergence de séries doubles, il nous a semblé utile d'énoncer ici quelques résultats d'approximation et plus particulièrement une méthode d'évaluation de l'erreur commise lors du calcul de la somme d'une série [14].

Supposons que l'on veuille calculer une approximation de la somme de la série $[a_{ij}]$ où chacun des termes a_{ij} est supposé strictement positif.

Considerons la série double, supposée connue, $B = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} b_{ij}$.

Posons $i+j = k$

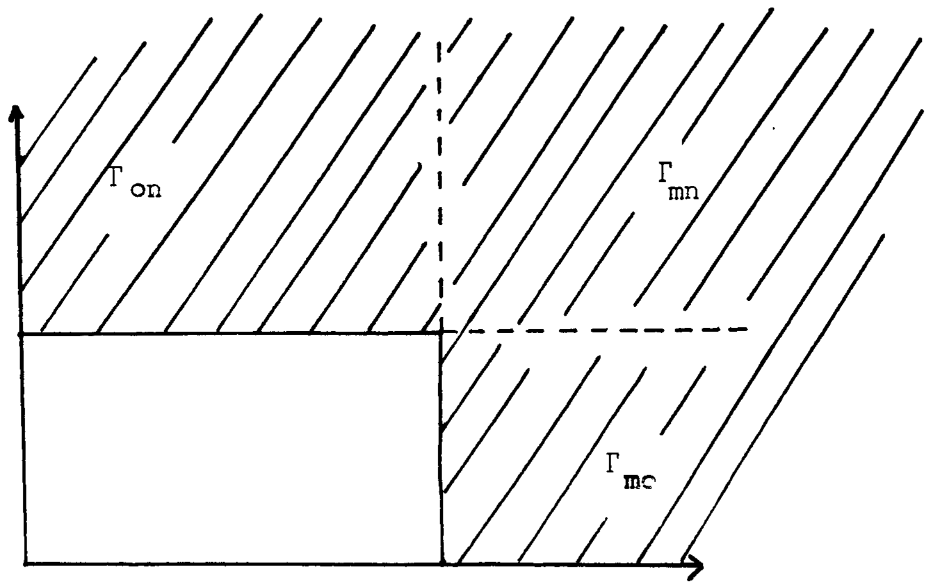
puis $\underline{\mathrm{Lim}}_{k\to\infty} \frac{b_{ij}}{a_{ij}} = \underline{A}$ et $\overline{\mathrm{Lim}}_{k\to\infty} \frac{b_{ij}}{a_{ij}} = \overline{A}$.

Dans le cas où $\underline{A} = \overline{A}$, nous avons $\mathrm{Lim}_{k\to\infty} \frac{b_{ij}}{a_{ij}} = A^*$.

Soit R_{mn} le reste défini par :

$$R_{mn} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = A - A_{mn} = \Gamma_{m1} + \Gamma_{1n} + \Gamma_{mn}$$

où $\Gamma_{mo} = \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$; $\Gamma_{on} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=n+1}^{\infty} a_{ij}$; $\Gamma_{mn} = \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} a_{ij}$



La partie hachurée représente R_{mn}.

Posons $C_{mn} = B - B_{mn}$ où $B_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}$.

Alors nous avons les résultats suivants [14]

1. Si $0 \leq C_{mn} \leq +\infty$ $\forall m > N$ et $\underline{A} > 0$ la serie $\Sigma\Sigma a_{ij}$ converge.

2. Si $-\infty < C_{mn} \leq 0$ $\forall m > N$ et $\overline{A} < 0$ la serie $\Sigma\Sigma a_{ij}$ converge.

3. Si $\underline{A}$ et $\overline{A}$ sont des valeurs finies et de même signe, et si $C_{mn} = \pm\infty$ alors la serie $\Sigma\Sigma a_{ij}$ diverge.

4. Si $0 < C_{mn} < +\infty$ $\forall m > N$ et $-\infty < \underline{A} < +\infty$ et $\overline{A} = +\infty$, alors la série $\Sigma\Sigma a_{ij}$ converge.

5. Si $-\infty < C_{mn} < 0$ $\forall m > N$ et $-\infty < \overline{A} < 0$ et $\underline{A} = -\infty$, alors la série $\Sigma\Sigma a_{ij}$ converge.

Lorsque la série $\Sigma\,\Sigma\, a_{ij}$ converge, on peut encadrer le reste R_{mm} de la façon suivante :

$$\frac{C_{mm}}{\inf\limits_{i+j\geq m} \dfrac{b_{ij}}{a_{ij}}} \;\substack{\leq \\ \geq}\; R_{mm} \;\substack{\leq \\ \geq}\; \frac{C_{mm}}{\operatorname{Sup}\limits_{i+j\geq m} \dfrac{b_{ij}}{a_{ij}}}$$

lorsque $\overline{A} = +\infty$ ou $\underline{A} = -\infty$ (ou encore $A^{*} = \pm\infty$)

$$R_{mm} \leq \frac{|C_{mm}|}{\inf\limits_{i+j\geq m} \left|\dfrac{b_{ij}}{a_{ij}}\right|}$$

Dans la pratique, on peut choisir b_{ij} par différentes méthodes. Par exemple, si $b_{ij} = a_{i+j,j+1} - a_{i+1,j} - a_{i,j+1} + a_{ij}$, on peut déduire des propriétés précédentes que :

la série $\Sigma\,\Sigma\, a_{ij}$ converge si $\lim\limits_{p\to\infty} a_{pp} = 0$ et $\underline{A} = \underline{\lim}\limits_{i+j\to\infty} \dfrac{b_{ij}}{a_{ij}} > 0$

et la série diverge si $\overline{A} = \overline{\lim}\limits_{i+j\to\infty} \dfrac{b_{ij}}{a_{ij}} < 0$

Le reste peut alors être encadré par

$$\frac{a_{m1} + a_{1m} - a_{mm} - a_{11}}{\operatorname{Sup}\limits_{i+j\geq m} \dfrac{b_{ij}}{a_{ij}}} \leq R_{mm} \leq \frac{a_{m1} + a_{1m} - a_{mm} - a_{11}}{\inf\limits_{i+j\geq m} \dfrac{b_{ij}}{a_{ij}}}$$

OPERATEUR $\delta_{k\ell}$

Lorsqu'on étudie l'accélération de la convergence de suites, il est souvent utile d'introduire l'opérateur Δ défini sur une suite simple (S_n) par : $\Delta S_n = S_{n+1} - S_n$. On montre par récurrence que cet opérateur vérifie la propriété

$$\Delta^r S_n = \sum_{i=o}^{r} (-1)^i \, C_r^i \, S_{n+r-i} \quad \text{où} \quad r \in \mathbb{N}^*$$

avec $\quad \Delta^r S_n = \Delta \, (\Delta^{r-1} S_n) = \Delta^{r-1} (\Delta S_n)$.

L'idée de ce paragraphe est de généraliser cet opérateur qui serait applicable à des suites doubles. Après l'avoir défini, nous en présenterons quelques propriétés, puis l'appliquerons à des sommes partielles particulières. Enfin, à l'aide des exemples traités, nous illustrerons géométriquement $\delta_{k\ell} (A_{mn})$ par le "bord" de A_{mn}.

<u>Définition</u>

Si (a_{mn}) est une suite réelle double, l'opérateur $\delta_{k\ell}$ sera défini par :

$$\delta_{k\ell} (a_{mn}) = a_{m+k,n+\ell} - a_{mn} \quad \text{où } (k,\ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

<u>Propriété 1</u>

Pour tout $k,\ell,r,s, \in \mathbb{N}$ $\qquad \delta_{k\ell} . \delta_{rs} = \delta_{rs} . \delta_{k\ell}$

<u>Démonstration</u>

$$\begin{aligned}
\delta_{k\ell} . \delta_{rs} (a_{mn}) &= \delta_{k\ell} (a_{m+r,n+s} - a_{mn}) \\
&= \delta_{k\ell} (a_{m+r,n+s}) - \delta_{k\ell} (a_{mn}) \\
&= a_{m+r+k,n+s+\ell} - a_{m+r,n+s} - a_{m+k,n+\ell} + a_{mn} \\
&= (a_{m+r+k,n+s+\ell} - a_{m+k,n+\ell}) - (a_{m+r,n+s} - a_{mn})
\end{aligned}$$

$$= \delta_{rs} (a_{m+k,n+\ell}) - \delta_{rs} (a_{mn})$$

$$= \delta_{rs} (a_{m+k,n+\ell} - a_{mn})$$

$$= \delta_{rs} \cdot \delta_{k\ell} (a_{mn})$$

Propriété 2

$$\forall k, \ell \in \mathbb{N} \qquad \delta_{k\ell} = \delta_{ko} + \delta_{o\ell} + \delta_{ko} \cdot \delta_{o\ell}$$

Démonstration

$$\delta_{ko} (a_{mn}) = a_{m+k,n} - a_{m,n}$$

$$\delta_{o\ell} (a_{mn}) = a_{m,n+\ell} - a_{mn}$$

$$\delta_{ko} \cdot \delta_{o\ell} (a_{mn}) = \delta_{ko} (a_{m,n+\ell} - a_{mn})$$

$$= a_{m+k,n+\ell} - a_{m,n+\ell} - a_{m+k,n} + a_{mn}$$

d'où en sommant membre à membre, on obtient :

$$\delta_{ko} (a_{mn}) + \delta_{o\ell} (a_{mn}) + \delta_{ko} \cdot \delta_{o\ell} (a_{mn}) = a_{m+k,n+\ell} - a_{mn} = \delta_{k\ell} (a_{mn})$$

Propriété 3

$$\delta_{k\ell}^{r} (a_{mn}) = \sum_{i=o}^{r} (-1)^{i} C_{r}^{i} a_{m+(r-i)k,n+(r-i)\ell} \quad \forall r \in \mathbb{N}^{*}$$

Démonstration

Raisonnons par récurrence. Pour r=1 le membre de droite est égal à $a_{m+k,n+\ell} - a_{mn}$. La relation est donc vraie.

Supposons la vérifiée à l'ordre r, cad que l'on ait

$$\delta_{k\ell}^{r} (a_{mn}) = \sum_{i=o}^{r} (-1)^{i} C_{r}^{i} a_{m+(r-i)k,n+(r-i)\ell}$$

Calculons $\delta_{k\ell}^{r+1} (a_{mn}) = \delta_{k\ell} (\delta_{k\ell}^{r} a_{mn})$

$$= \sum_{i=o}^{r} (-1)^i C_r^i \; a_{m+(r+1-i)k,n+(r+1-i)\ell} - \sum_{i=o}^{r} (-1)^i C_r^i \; a_{m+(r-i)k,n+(r-i)\ell}$$

$$= \sum_{i=o}^{r} (-1)^i C_r^i \; a_{m+(r+1-i)k,n+(r+1-i)\ell} - \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} C_r^{i-1} \; a_{m+(r+1-i)k,n+(r+1-i)\ell}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} (-1)^i [C_r^i + C_r^{i-1}] \; a_{m+(r+1-i)k,n+(r+1-i)\ell} + (-1)^o C_r^o \; a_{m+(r+1)k,n+(r+1)\ell}$$

$$+ (-1)^{r+1} C_r^r \; a_{m,n}$$

$$= \sum_{i=o}^{r+1} (-1)^i C_{r+1}^i \; a_{m+(r+1-i)k,n+(r+1-i)\ell}$$

La relation de récurrence est ainsi établie.

<u>Propriété 4</u>

$$\delta_{k\ell}^{r} = (\delta_{ko} + \delta_{o\ell} + \delta_{ko}.\delta_{o\ell})^r$$

Ceci résultede la commutativité de l'opérateur δ.

<u>Applications à quelques sommes partielles</u> :

<u>Exemple 1</u>

Sommes partielles en rectangle.

Soit (A_{mn}) la suite des sommes partielles de la série $[a_{ij}]$ définie par

$$A_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

Calculons $\delta_{ko}(A_{mn}) = A_{m+k,n} - A_{mn}$

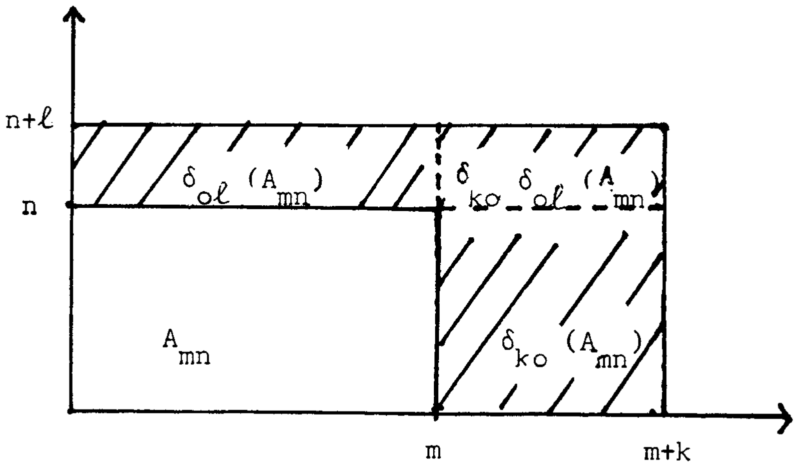
$$= \sum_{i=1}^{m+k} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

$$= \sum_{i=m+1}^{m+k} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

$$\delta_{o\ell}(A_{mn}) = A_{m,n+\ell} - A_{mn}$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=n+1}^{n+\ell} a_{ij}$$

$$\delta_{ko}.\delta_{o\ell}(A_{mn}) = \sum_{i=1}^{m+k} \sum_{j=n+1}^{n+\ell} a_{ij} - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=n+1}^{n+\ell} a_{ij}$$
$$= \sum_{i=m+1}^{m+k} \sum_{j=n+1}^{n+\ell} a_{ij}$$

De façon géométrique, ces quantités peuvent se représenter de la façon suivante :



La partie hachurée représente $\delta_{k\ell}(A_{mn})$ puisque

$$\delta_{k\ell} = \delta_{ko} + \delta_{o\ell} + \delta_{ko}.\delta_{o\ell}$$

Exemple 2

Sommes partielles de Levin.

La suite des sommes partielles de Levin est définie par

$$A_{mn} = \sum_{(i,j)\in I_{mn}} a_{ij} \qquad \text{où} \qquad I_{mn} = \{(i,j)\in \mathbb{N}^{*2} \mid i < m \text{ ou } j < n\}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$A_{mn} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=n}^{\infty} a_{ij}$$

d'où $\delta_{ko}\ A_{mn} = A_{m+k,n} - A_{mn}$

$$= \sum_{i=1}^{m-1+k} \sum_{j=n}^{\infty} a_{ij} - \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=n}^{\infty} a_{ij}$$

$$= \sum_{i=m}^{m+k-1} \sum_{j=n}^{\infty} a_{ij}$$

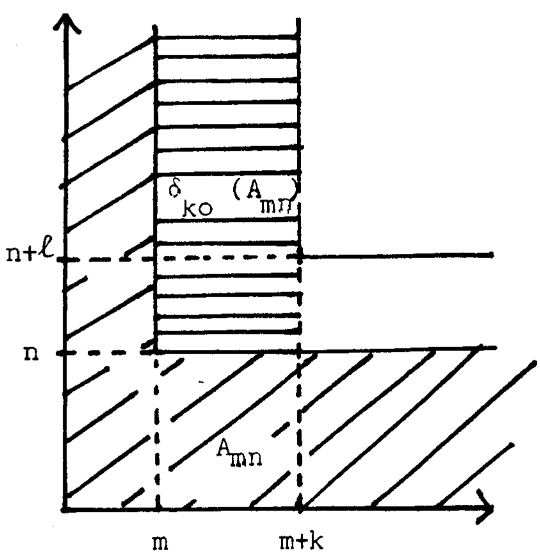
$$\delta_{o\ell}\ A_{mn} = \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=n}^{n+\ell-1} a_{ij}$$

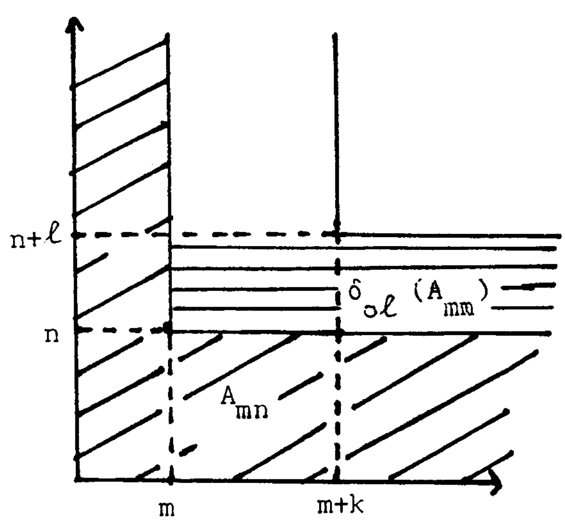
$$\delta_{ko}.\delta_{o\ell}\ (A_{mn}) = \sum_{i=m+k}^{\infty} \sum_{j=n}^{n+\ell-1} a_{ij} - \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=n}^{n+\ell-1} a_{ij}$$

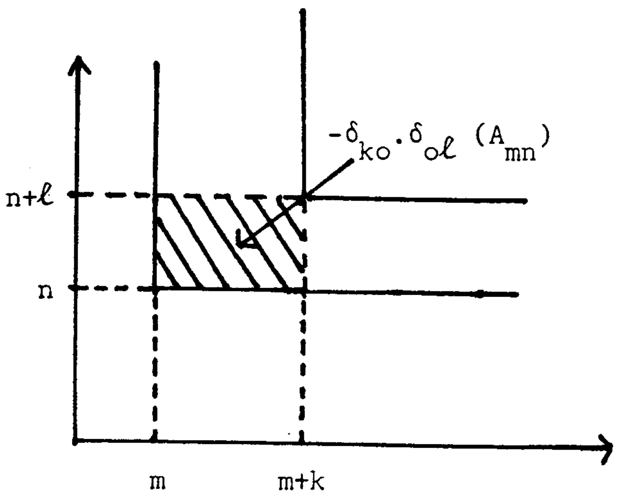
$$= - \sum_{i=m}^{m+k-1} \sum_{j=n}^{n+\ell-1} a_{ij}$$

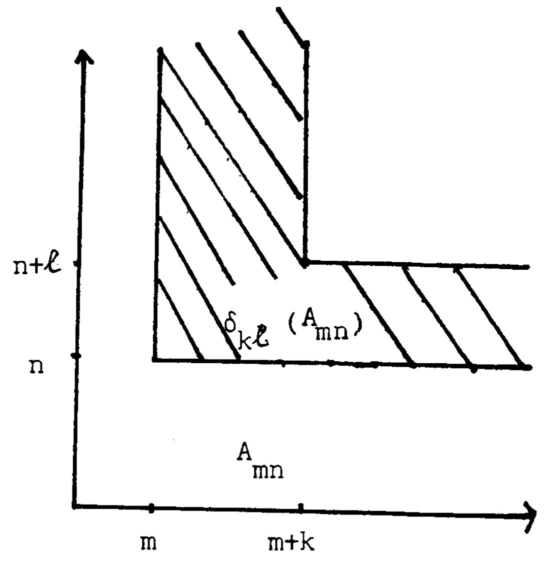
avec $\delta_{k\ell} = \delta_{o\ell} + \delta_{k\ell} + \delta_{ko}\ .\ \delta_{o\ell}$

Géométriquement, nous aurons les ensembles suivants :









Remarque sur les sommes partielles en triangle

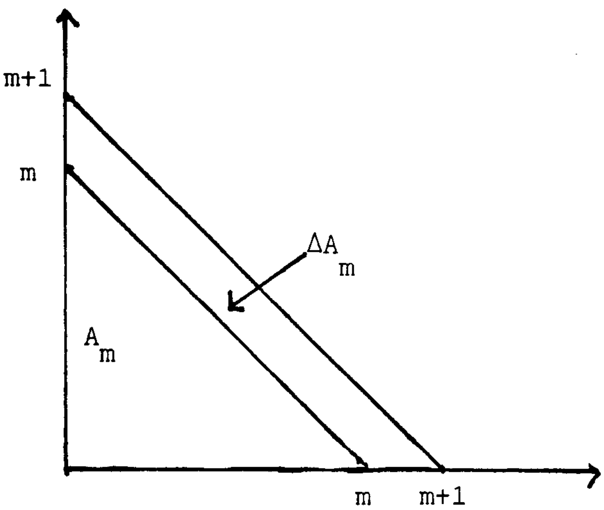
Les sommes partielles en triangle sont définies par $A_m = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m-i+1} a_{ij}$

Elles permettent de calculer la série double $\sum_{i=}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$ à l'aide d'une suite de sommes partielles simple, cad ne dépendant que d'un seul indice.

Si l'on applique l'opérateur Δ à une telle suite, on obtient :

$$\begin{aligned}
\Delta A_m &= A_{m+1} - A_m \\
&= \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{m-i+2} a_{ij} - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m-i+1} a_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{m-i+2} a_{ij} - \sum_{j=1}^{m-i+1} a_{ij} \right] + \sum_{j=1}^{m+2-(m+1)} a_{m+1,j} \\
&= \sum_{i=1}^{m} a_{i,m+2-i} + a_{m+1,1} \\
&= \sum_{i=1}^{m+1} a_{i,m+2-i}
\end{aligned}$$

Ainsi, on remarque que ΔA_m est la somme des termes dont les coordonnées (i,j) vérifient $i+j=m+2$ où $1 \leq i \leq m+1$.



Géométriquement ΔA_m représente le "bord" de A_m, tout comme si l'on représentait les points d'une suite (S_m) sur un droite, $\Delta S_m = S_{m+1} - S_n$ serait le bord si l'on pose

$$S_m = \sum_{i=1}^{m} u_i$$

$$\Delta S_m = \sum_{i=1}^{m+1} u_i - \sum_{i=1}^{m} u_i = u_{m+1}.$$

De même si l'on revient sur les exemples précédents, géométriquement $\delta_{k\ell}(A_{mn})$ est aussi le bord, aussi bien pour les sommes partielles en rectangle, que celles de Levin.

Si l'on ne considère que les termes qui "touchent" A_{mn}, il suffit de calculer $\delta_{11}(A_{mn}) = A_{m+1,n+1} - A_{mn}$.

CHAPITRE II

MEILLEURES CONVERGENCES

- meilleures convergences et accélérations
- vitesse de convergence.

Le second chapitre définit les meilleures convergences, la vitesse de convergence.

La comparaison de la convergence de deux suites doubles nécessite que l'on se définisse des critères de meilleure convergence et d'accélération. On parlera parfois de $\delta_{k\ell}$-accélération. Les propriétés étudiées sont une généralisation de celles déjà connues sur les suites simples. On définira également l'ordre de chacun des indices et l'ordre de la diagonale.

Puis la définition de la vitesse de convergence sera donnée de façon plus explicite, cad de manière à pouvoir en calculer la valeur propre à chaque suite. Après quelques propriétés de cette vitesse, on parlera de convergence superlinéaire, puis de convergence uniforme.

MEILLEURES CONVERGENCES ET ACCELERATIONS

Nous avons voulu ici généraliser, à l'aide de l'opérateur $\delta_{k\ell}$, les propriétés connues sur les suites simples utilisant les symboles de Landau.

Dans toute cette partie, on se donne deux suites réelles (a_{mn}) et (b_{mn}) qui seront supposées converger vers 0. Nous demanderons de plus à chacun de leurs termes de ne pas s'annuler.

Rappels

. On écrit que l'on a $b_{mn} = O(a_{mn})$ si et seulement si

$$\exists K \in \mathbb{R}^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m,n \geq N \quad |b_{mn}| < K\,|a_{mn}|$$

. On note $b_{mn} = o\,(a_{mn})$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall m,n \geq N(\varepsilon) \quad |b_{mn}| < \varepsilon\,|a_{mn}|$$

Meilleures convergences

. Par définition, on dira que (b_{mn}) converge mieux que (a_{mn}) si et seulement si

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m,n \geq N \quad \left|\frac{b_{mn}}{a_{mn}}\right| < 1$$

. On dira que (b_{mn}) $\delta_{k\ell}$- converge mieux que (a_{mn}) si et seulement si

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m,n \geq N \quad \left|\frac{\delta_{k\ell}\, b_{mn}}{\delta_{k\ell}\, a_{mn}}\right| < 1$$

Accélération de la convergence

. On dira que (b_{mn}) converge plus vite que (a_{mn}) si et seulement si $b_{mn} = o\ (a_{mn})$

. La $\delta_{k\ell}$-accélération sera définie par $\delta_{k\ell}\, b_{mn} = o\ (\delta_{k\ell}\, a_{mn})$

Propriété 1

Si (a_{mn}) est monotone, si l'on a la δ_{ko}-accélération et la $\delta_{o\ell}$ accélération alors $\delta_{k\ell}\ (b_{mn}) = o\ (\delta_{k\ell}\ a_{mn})$, autrement dit on a la $\delta_{k\ell}$-accélération

Démonstration

Celle-ci ne sera rédigée que dans le cas où (a_{mn}) est croissante. Si l'on suppose que la suite (a_{mn}) est décroissante, les calculs sont analogues.

On suppose donc que pour tout (m,n)

$$a_{m+k,n} - a_{mn} \geq 0$$

et

$$a_{m,n+\ell} - a_{mn} \geq 0$$

La δ_{ko}-accélération permet d'écrire

$$\forall \varepsilon_o > \quad \exists N(\varepsilon_o) \in \mathbb{N} \quad \forall m,n \geq N(\varepsilon_o) \quad |b_{m+k,n+\ell} - b_{m,n+\ell}| < \varepsilon_o\ |a_{m+k,n+\ell} - a_{m,n+\ell}|$$

et pour le même ε_o,

$$\exists N'(\varepsilon o) \in \mathbb{N} \quad \forall m,n \geq N'(\varepsilon o) \quad |b_{m,n+\ell} - b_{mn}| < \varepsilon_o |\ a_{m,n+\ell} - a_{mn}|$$

puisque (b_{mn}) converge $\delta_{o\ell}$-mieux que (a_{mn})

d'où en sommant : $\forall\ \varepsilon_o > 0\ \ \exists N_1\ \ N_1 = \text{Max}\ (N(\varepsilon_o),\ N'\ (\varepsilon_o))\ \ \forall_{m,n} \geq N_1$

$$|b_{m+k,n+\ell} - b_{m,n+\ell}| + |b_{m,n+\ell} - b_{mn}| < \varepsilon_o\ [|a_{m+k,n+\ell} - a_{m,n+\ell}| + |a_{m,n+\ell} - a_{mn}|]$$

or $|a_{m+k,n+\ell} - a_{m,n+\ell}| + |a_{m,n+\ell} - a_{mn}| = a_{m+k,n+\ell} - a_{m,n+\ell} - a_{m,n+\ell} - a_{mn}$

$$= a_{m+k,n+\ell} - a_{mn} = |a_{m+k,n+\ell} - a_{mn}|$$

puisque que (a_{mn}) est monotone croissante

de plus $|b_{m+k,n+\ell} - b_{mn}| \leq |b_{m+k,n+\ell} - b_{m,n+\ell}| + |b_{m,n+\ell} - b_{mn}|$

par suite $|b_{m+k,n+\ell} - b_{mn}| < \varepsilon_o\ |a_{m+k,n+\ell} - a_{mn}|$

autrement dit $\delta_{k\ell}\ \ b_{mn} = o\ (\delta_{k\ell}\ \ a_{mn})$

<u>Propriété 2</u>

$$\forall k,\ell \in \mathbb{N}\ \ b_{mn} = 0\ (a_{mn}) \Longrightarrow b_{m+k,n} = 0\ (a_{m+k,n}) \Longrightarrow b_{m+k,n+\ell} = 0\ (a_{m+k,n+\ell})$$

$$b_{mn} = 0\ (a_{mn}) \Longrightarrow b_{m,n+\ell} = 0\ (a_{m,n+\ell}) \Longrightarrow b_{m+k,n+\ell} = 0\ (a_{m+k,n+\ell})$$

et si k et ℓ sont finis

$$b_{m+k,n+\ell} = 0\ (a_{m+k,n+\ell}) \Longrightarrow b_{mn} = 0\ (a_{mn})$$

ce qui signifie, si k et ℓ sont finis, que les 4 égalités sont équivalentes.

En particulier pour $k=\ell=1$

$$b_{m,n} = 0\ (a_{mn}) \Longleftrightarrow b_{m+1,n} = 0\ (a_{m+1,n}) \Longleftrightarrow b_{m,n+1} = 0\ (a_{m,n+1}) \Longleftrightarrow b_{m+1,n+1} = 0\ (a_{m+1,n+1})$$

Démonstration

Supposons que l'on ait $b_{mn} = 0\ (a_{mn})$ cad qu'il existe un réel k_0 strictement positif tel qu'à partir d'un certain rang N, l'on ait $|b_{mn}| < k_0\ |a_{mn}|$.

Si $m \geq N$, à fortiori, pour tout entier k, $m + k \geq N$ d'où l'inégalite reste vraie si l'on remplace m par m + k cad $|b_{m+k,n}| < K_0\ |a_{m+k,n}|$

donc $b_{mn} = 0\ (a_{mn}) \implies b_{m+k,n} = 0\ (a_{m+k,n})$

De façon analogue, sur le deuxième indice, on montre que

$$b_{m+k,n} = 0\ (a_{m+k,n}) \implies b_{m+k,n+\ell} = 0\ (a_{m+k,n+\ell})$$

et

$$b_{mn} = 0\ (a_{mn}) \implies b_{m,n+\ell} = 0\ (a_{m,n+\ell})$$

et le début de la démonstration valide l'implication

$$b_{m,n+\ell} = 0\ (a_{m,n+\ell}) \implies b_{m+k,n+\ell} = 0\ (a_{m+k,n+\ell})$$

Considérons maintenant deux entiers k et ℓ finis tels que

$$b_{m+k,n+\ell} = 0\ (a_{m+k,n+\ell})$$

ce qui signifie que

$$\exists K \in \mathbb{R}^*_+ \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall m,n \geq N \qquad |b_{m+k,n+\ell}| < K\ |a_{m+k,n+\ell}|$$

puis si on pose $N_1 = N + \text{Max}\ (k,\ell)$

$$\forall m,n \geq N_1 \qquad |b_{mn}| < K\ |a_{mn}|$$

d'où $b_{m+k,n+\ell} = O\,(a_{m+k,n+\ell}) \implies b_{mn} = O\,(a_{mn})$ si k et ℓ sont finis.

De façon analogue, on montrerait :

Propriété 3

$$b_{mn} = o\,(a_{mn}) \implies b_{m+k,n} = o\,(a_{m+k,n}) \implies b_{m+k,n+\ell} = o\,(a_{m+k,n+\ell})$$

$$b_{mn} = o\,(a_{mn}) \implies b_{m,n+\ell} = o\,(a_{m,n+\ell}) \implies b_{m+k,n+\ell} = o\,(a_{m+k,n+\ell})$$

et si k et ℓ sont finis

$$b_{m+k,n+\ell} = o(a_{m+k,n+\ell}) \implies b_{mn} = o(a_{mn})$$

Propriété 4

$$\left.\begin{array}{l} b_{mn} = O(a_{mn}) \\ a_{m+k,n} = o(a_{mn}) \end{array}\right\} \implies b_{m+k,n} = o(a_{mn})$$

$$\left.\begin{array}{l} b_{mn} = O(a_{mn}) \\ a_{m,n+\ell} = o(a_{mn}) \end{array}\right\} \implies b_{m,n+\ell} = o(a_{mn})$$

Démonstration

Les rôles joués par chacun des indices étant similaires, nous ne ferons la démonstration que de la 1ère partie de la propriété, puisque la seconde reste analogue et sans difficulté supplémentaire. Ceci sera valide pour les démonstrations des propriétés suivantes.

Supposons que l'on ait $b_{mn} = O(a_{mn})$ donc, d'après la propriété 2, $b_{m+k,n} = O(a_{m+k,n})$ pour tout k, cad

$$\exists K \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m,n \geq N \quad |b_{m+k,n}| < K\,|a_{m+k,n}|$$

or, par hypothèse, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall m,n \geq N_1(\varepsilon) \quad |a_{m+k,n}| < \varepsilon\,|a_{mn}|$

d'où $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \quad N_0 = \text{Max}\,(N, N_1(\varepsilon)) \quad \forall m,n \geq N_0 \quad |b_{m+k,n}| < K\varepsilon\,|a_{mn}|$

autrement dit $b_{m+k,n} = o\,(a_{mn})$

Propriété 5

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ a_{m+k,n} = O(a_{mn}) \\ \ \ b_{mn} = o(a_{mn}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad b_{m+k,n} = o\,(a_{mn})$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ a_{m,n+\ell} = O(a_{mn}) \\ \ \ b_{mn} = o\,(a_{mn}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad b_{m,n+\ell} = o\,(a_{mn})$$

Démonstration

$b_{mn} = o\,(a_{mn}) \Longrightarrow b_{m+k,n} = o\,(a_{m+k,n})$ d'après la propriété 3
ce qui peut encore s'écrire

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m,n \geq N \quad |b_{m+k,n}| < \varepsilon\,|a_{m+k,n}|$$

or $\quad |a_{m+k,n}| < K\,|a_{mn}|$ d'après l'hypothèse d'où

$$|b_{m+k,n}| < \varepsilon K\,|a_{mn}|$$

Propriété 6

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ a_{m+k,n} = O(a_{mn}) \\ b_{mn} = O(a_{mn}) \end{array}\right\} \Longrightarrow b_{m+k,n} = O(a_{mn})$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ a_{m,n+\ell} = O(a_{mn}) \\ b_{mn} = O(a_{mn}) \end{array}\right\} \Longrightarrow b_{m,n+\ell} = O(a_{mn})$$

Démonstration

Puisque $|a_{m+k,n}| < K_o\ |a_{mn}|$ et $|b_{m+k,n}| < K_1\ |a_{m+k,n}|$ on en déduit

$$|b_{m+k,n}| < K_1\ K_o\ |a_{mn}|$$

Ordre du 1er indice

On dit que l'ordre du 1er indice de la suite (a_{mn}) est r_1 si et seulement si par définition, $a_{m+1,n} = O(a_{mn}{}^{r_1})$ et $a_{mn}{}^{r_1} = O(a_{m+1,n})$

ou encore, si $a_{mn} \neq 0\ \forall m,n$

$$\exists A_1,\ B_1 \qquad 0 < A_1 \leq B_1 < +\infty \qquad\qquad A_1 \leq \frac{|a_{m+1,n}|}{|a_{mn}|^{r_1}} \leq B_1$$

Ordre du 2ème indice

On dit que l'ordre du 2ème indice de la suite (a_{mn}) est r_2 si et seulement si : $a_{m,n+1} = O(a_{mn}{}^{r_2})$ et $a_{mn}{}^{r_2} = O(a_{m,n+1})$

ou encore, si $a_{mn} \neq 0\ \forall m,n$

$$\exists\ A_2,\ B_2 \qquad 0 < A_2 \leq B_2 < +\infty \qquad\qquad A_2 \leq \frac{|a_{m,n+1}|}{|a_{mn}|^{r_2}} \leq B_2$$

Ordre de la diagonale

On dit que l'ordre de la diagonale est r si et seulement si

$$a_{m+1,n+1} = O(a_{mn}{}^{r}) \quad \text{et} \quad a_{mn}{}^{r} = O(a_{m+1,n+1})$$

Propriété 7

L'ordre du premier indice, s'il existe, est unique,
l'ordre du second indice, s'il existe, est unique.

Démonstration

Par hypothèse, posons $a_{m+1,n} = O(a_{mn}{}^{r_1})$ et $a_{mn}{}^{r_1} = O\ (a_{m+1,n})$

Supposons qu'il existe p_1 tel que $p_1 \neq r_1$ et

$$a_{m+1,n} = O(a_{mn}{}^{p_1}) \quad \text{et} \quad a_{mn}{}^{p_1} = O(a_{m+1,n})$$

montrons alors qu'on arrive à une contradiction.

Si $r_1 > p_1$

$$(1) \qquad |a_{m+1,n}| < K_1\ |a_{mn}|^{r_1} \qquad \text{et} \qquad |a_{mn}|^{r_1} < K_2\ |a_{m+1,n}| \qquad (2)$$

$$(3) \qquad |a_{m+1,n}| < C_1\ |a_{mn}|^{p_1} \qquad\qquad |a_{mn}|^{p_1} < C_2\ |a_{m+1,n}| \qquad (4)$$

$|a_{m+1,n}| < K_1\ |a_{mn}|^{r_1}$ d'après (1), d'où $|a_{m+1,n}| < K_1\ |a_{mn}|^{r_1 - p_1}\ |a_{mn}|^{p_1} |a_{m+1,n}|$

or d'après (4) $|a_{mn}|^{p_1} < C_2\ |a_{m+1,n}|$ d'où $|a_{m+1,n}| < K_1\ \ C_2\ |a_{mn}|^{r_1 - p_1}$

d'où en divisant chaque membre par $|a_{m+1,n}| \neq 0$

$$1 < K_1 \; C_2 \; |a_{mn}|^{r_1 - p_1}$$

or la suite (a_{mn}) est une suite que l'on a supposée convergente donc

$\lim\limits_{m,n} a_{mn} = 0$, d'où la contradiction.

Si $p_1 > r_1$

$$|a_{m+1,n}| < C_1 \; |a_{mn}|^{p_1 - r_1} \; |a_{mn}|^{r_1} < C_1 \; K_2 \; |a_{mn}|^{p_1 - r_1} \; |a_{m+1,n}|$$

d'où

$$1 < C_1 \; K_2 \; |a_{mn}|^{p_1 - r_1} \quad \text{ce qui est impossible}$$

donc $p_1 = r_1$

l'unicité de l'ordre du 2^d indice se démontre de façon similaire.

Propriété 8

Si l'ordre du premier indice est r_1, l'ordre du second indice est r_2 alors l'ordre de la diagonale est $r_1 \, r_2$.

Démonstration

$$\forall m,n \geq N_1 \quad |a_{m+1,n}| < K_1 \; |a_{mn}|^{r_1} \quad \text{et} \quad |a_{mn}|^{r_1} < K'_1 \; |a_{m+1,n}| \qquad (1)$$

$$\forall m,n \geq N_2 \quad |a_{m,n+1}| < K_2 \; |a_{mn}|^{r_2} \quad \text{et} \quad |a_{mn}|^{r_2} < K'_2 \; |a_{m,n+1}| \qquad (2)$$

(1) permet d'écrire $|a_{m+1,n+1}| < K_1 \; |a_{m,n+1}|^{r_1}$ d'après la propriété 2

d'où d'après (2) $\quad |a_{m+1,n+1}| < K_1 K_2^{\,r_1} |a_{mn}|^{r_1 r_2}$

ou encore $a_{m+1,n+1} = 0(a_{mn}^{\,r_1 r_2})$

De plus, d'après (1), $|a_{mn}|^{r_1 r_2} < K_2'^{\,r_2} |a_{m+1,n}|^{r_2}$

et d'après (2) $\quad |a_{m+1,n}|^{r_2} < K_2' \, |a_{m+1,n+1}|$

on peut alors en déduire $|a_{mn}|^{r_1 r_2} < K_1'^{\,r_2} \; K_2' \, |a_{m+1,n+1}|$

ce qui peut encore s'ecrire $a_{mn}^{\,r_1 r_2} = 0(a_{m+1,n+1})$

par consequent, l'ordre de la diagonale est $r_1 r_2$.

<u>Propriete 9</u>

Si $\exists k,\ell$ tels que

$$\text{Si} \quad \lim_{m,n} \frac{b_{m+k,n+\ell}}{b_{mn}} = \lim_{m,n} \frac{a_{m+k,n+\ell}}{a_{mn}} = a \neq 1$$

alors $\displaystyle \lim_{m,n} \frac{b_{mn}}{a_{mn}} = \lim_{m,n} \frac{\delta_{k\ell}\, b_{mn}}{\delta_{k\ell}\, a_{mn}}$ si ces deux dernières limites existent. (Si l'une des deux existe alors l'autre existe également).

Démonstration

$$\frac{\delta_{k\ell}\, b_{mn}}{\delta_{k\ell}\, a_{mn}} = \frac{b_{m+k,n+\ell} - b_{mn}}{a_{m+k,n+\ell} - a_{mn}} = \frac{b_{mn}}{a_{mn}} \times \frac{\dfrac{b_{m+k,n+\ell}}{b_{mn}} - 1}{\dfrac{a_{m+k,n+\ell}}{a_{mn}} - 1}$$

or $\displaystyle\lim_{m,n} \frac{\dfrac{b_{m+k,n+\ell}}{b_n} - 1}{\dfrac{a_{m+k,n+\ell}}{a_{mn}} - 1} = 1$ d'après l'hypothèse d'où $\displaystyle\lim_{m,n} \frac{\delta_{k\ell}\, b_{mn}}{\delta_{k\ell}\, a_{mn}} = \lim_{m,n} \frac{b_{mn}}{a_{mn}}$

Propriété 10

$$\left.\begin{array}{l} b_{mn} = 0(\delta_{k\ell}\, b_{mn}) \\ a_{mn} = 0(b_{mn}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \delta_{k\ell}\, a_{mn} = 0(\delta_{k\ell}\, b_{mn})$$

Démonstration

de $a_{mn} = 0\ (b_{mn})$, on peut déduire d'après la propriété 2,

que

$$a_{m+k,n+\ell} = 0\ (b_{m+k,n+\ell})$$

d'où

$$a_{m+k,n+\ell} = 0\ (\delta_{k\ell}\, b_{mn} + b_{mn}) \text{ car } b_{m+k,n+\ell} = \delta_{k\ell}\, b_{mn} + b_{mn}$$

$$= 0\ (\delta_{k\ell}\, b_{mn}) + 0\ (b_{mn})$$

or $b_{mn} = 0\ (\delta_{k\ell}\, b_{mn})$ donc $0\ (b_{mn}) = 0\ (\delta_{k\ell}\ b_{mn})$

par conséquent $a_{m+k,n+\ell} = 0\ (\delta_{k\ell}\ b_{mn})$

enfin $\delta_{k\ell}\ a_{mn} = a_{m+k,n+\ell} - a_{mn}$

$$= 0\ (\delta_{k\ell}\ b_{mn}) - 0\ (b_{mn})$$

$$= 0\ (\delta_{k\ell}\ b_{mn})$$

Propriété 11

$$\left.\begin{array}{l} b_{mn} = O(\delta_{k\ell}\, b_{mn}) \\ a_{mn} = \bar{o}(b_{mn}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \qquad \delta_{k\ell}\, a_{mn} = o\,(\delta_{k\ell}\, b_{mn})$$

Démonstration

$$\delta_{k\ell}\, a_{mn} = a_{m+k,n+\ell} - a_{mn}$$

avec $a_{m+k\,,n+\ell} = o\,(b_{m+k,n+\ell})$ puisque $a_{mn} = o\,(b_{mn})$ et la propriété 2

$$= o\,(\delta_{k\ell}\, b_{mn} + b_{mn})$$

$$= o\,(\delta_{k\ell}\, b_{mn}) + o\,(b_{mn})$$

$$= o\,(\delta_{k\ell}\, b_{mn}) \quad \text{puisque } b_{mn} = O\,(\delta_{k\ell}\, b_{mn})$$

d'où $\delta_{k\ell}\, a_{mn} = o\,(\delta_{k\ell}\, b_{mn}) - a_{mn}$

$$= o\,(\delta_{k\ell}\, b_{mn}) - o\,(b_{mn})$$

$$= o\,(\delta_{k\ell}\, b_{mn})$$

Propriété 12

Si $\lim\limits_{m,n\to\infty} a_{mn} = \lim\limits_{m,n\to\infty} b_{mn} = 0$

Si (a_{mn}) est strictement croissante (et négative)

ou (a_{mn}) est strictement décroissante (et positive)

alors $\lim\limits_{m,n\to\infty} \dfrac{\delta_{k\ell}\, b_{mn}}{\delta_{k\ell}\, a_{mn}} = c$ entraine $\lim\limits_{m,n\to\infty} \dfrac{b_{mn}}{a_{mn}} = c$

que c soit fini ou non.

Démonstration

Elle ne sera faite que dans le cas où la suite (a_{mn}) est strictement croissante.

On a alors $a_{m+k,n+\ell}-a_{mn}>0$ et à partir d'un certain rang N_1

$$c-\varepsilon < \frac{b_{m+k,n+\ell}-b_{mn}}{a_{m+k,n+\ell}-a_{mn}} < c+\varepsilon$$

alors $(a_{m+k,n+\ell} - a_{mn})\ (c - \varepsilon) < b_{m+k,n+\ell} - b_{mn} < (c + \varepsilon)\ (a_{m+k,n+\ell} - a_{mn})$

(1)

Ces inégalités restent vraies si l'on remplace m par m + k, puis par m + 2k, etc...... et simultanément n par n + ℓ, puis par n + 2ℓ, etc....

cad $(a_{m+2k,n+2\ell} - a_{m+k,n+\ell})\ (c - \varepsilon) < b_{m+2k,n+2\ell} - b_{m+k,n+\ell} <$

(2) $(c + \ell)\ (a_{m+2k,n+2\ell} - a_{m+k,n+\ell})$

⋮ ⋮

(p) $(a_{m+pk,n+p\ell} - a_{m+(p-1)k,n+(p-1)\ell})\ (c - \varepsilon) < b_{m+pk,n+p\ell} - b_{m+(p-1)k,n+(p-1)\ell}$

$< (c - \varepsilon)\ (a_{m+pk,n+p\ell} - a_{m+(p-1)k,n+(p-1)\ell})$

puis en sommant membre à membre ces p lignes, on obtient :

$(a_{m+pk,n+p\ell} - a_{mn})\ (c - \varepsilon) < b_{m+pk,n+p\ell} - b_{mn} < (c + \varepsilon)\ (a_{m+pk,n+p\ell} - a_{mn})$

faisons tendre p vers l'infini, la convergence des suites (a_{mn}) et(b_{mn}) vers 0 permet alors d'en déduire

$$- a_{mn} (c-\varepsilon) < -b_{mn} < -a_{mn} (c+\varepsilon)$$

d'où en divisant par $-a_{mn}$ qui est positive

$$c - \varepsilon < \frac{b_{mn}}{a_{mn}} < c + \varepsilon \qquad \text{ou encore} \qquad \left| \frac{b_{mn}}{a_{mn}} - c \right| < \varepsilon$$

Si c est infini, alors $\forall A > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall m,n \geq N \quad \dfrac{\delta_{k\ell}\, b_{mn}}{\delta_{k\ell}\, a_{mn}} > A$

donc cette inégalité reste à fortiori vraie si l'on change (m,n) en $(m+k,n+\ell)$ en $(m+2k,n+2\ell)$ jusqu'à $(m+pk,n+p\ell)$.

En additionnant on obtient $b_{m+pk,n+p\ell} - b_{mn} > A\,(a_{m+pk,n+p\ell} - a_{mn})$

Lorsqu'on fait tendre p vers l'infini, il reste $- b_{mn} > A\,(- a_{mn})$

ou encore $\dfrac{b_{mn}}{a_{mn}} > A \ \forall m,n \geq N$.

VITESSE DE CONVERGENCE

Nous ne pouvions terminer ce chapitre, sans parler de vitesse de convergence. Cette notion intuitive lorsque l'on compare deux suites n'a cependant été définie que fort tard. C'est en nous inspirant d'une publication de BREZINSKI [5] que nous avons repris ici les définitions et certaines propriétés généralisées aux suites doubles à l'aide de l'opérateur $\delta_{k\ell}$ défini précédemment.

Définitions

Si (a_{mn}) est une suite réelle double qui converge vers a, une façon de mesurer l'erreur commise si l'on considère a_{mn} comme approximation de a est de calculer la quantité : $e_{mn} = -\log_{10}|a_{mn}-a|$.

En effet, prenons, par exemple $a_{mn} - a_{mn} = 3{,}45\ 10^{-5}$

$$\log_{10}(a_{mn}-a) = -5 + \log_{10} 3{,}45$$

Nous voyons donc que si $|a_{mn} - a|$ est exprimé sous la forme $x.10^{-p}$ où x est un entier compris entre 0 et 10, la partie décimale de e_{mn} est la valeur $\log_{10} x$ et la partie entière de e_{mn} nous donne une indication sur la position du premier chiffre non significatif dans a_{mn} par rapport à a.

A partir de la définition de e_{mn}, on définira la vitesse de (a_{mn}) associée au couple (k,ℓ) où k,ℓ sont des entiers fixés par :

$$V_{k\ell}(a_{mn}) = \delta_{k\ell}(e_{mn})$$

$$= -\log_{10}\left|\frac{a_{m+k,n+\ell} - a}{a_{mn} - a}\right|$$

de même, on posera

$$\gamma_{k\ell}\,(a_{mn}) = V_{k\ell}\,(a_{m+k,n+\ell}) - V_{k\ell}\,(a_{mn})$$

pour accélération de (a_{mn})

<u>Propriété 1</u>

$$V_{k\ell}\,(a_{mn}) = V_{ko}\,(a_{m,n+\ell}) + v_{o\ell}\,(a_{mn})$$

$$= V_{o\ell}(a_{m+k,n}) + V_{ko}\,(a_{mn})$$

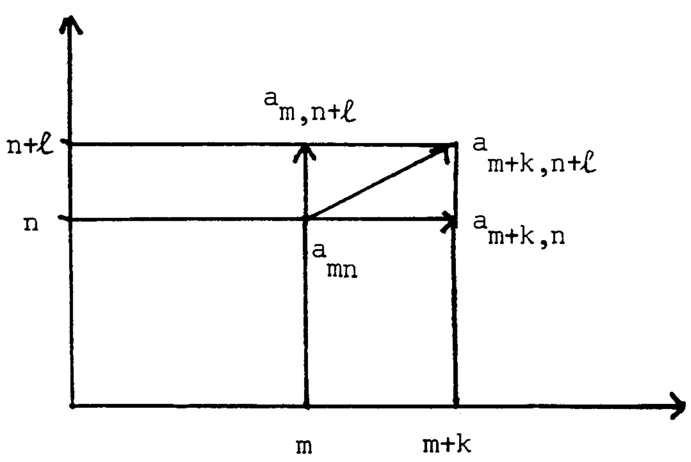
<u>Démonstration</u>

En écrivant l'expression de $V_{k\ell}\,(a_{mn})$ à l'aide de la définition de la vitesse de convergence, nous obtenons

$$V_{k\ell}\,(a_{mn}) = -\log_{10}\left|\frac{a_{m+k,n+\ell} - a}{a_{m,n+\ell} - a}\right| - \log_{10}\left|\frac{a_{m,n+\ell} - a}{a_{mn} - a}\right|$$

$$= -\log_{10}\left|\frac{a_{m+k,n+\ell} - a}{a_{m+k,n} - a}\right| - \log_{10}\left|\frac{a_{m+k,n} - a}{a_{mn} - a}\right|$$

<u>Interprétation géométrique</u>



La vitesse $V_{k\ell}\,(a_{mn})$ que l'on peut représenter par le vecteur qui va de a_{mn} à $a_{m+k,n+\ell}$ sera donc égal à la somme vectorielle de la vitesse qui va de a_{mn} à $a_{m,n+\ell}$ et de celle qui va de $a_{m,n+\ell}$ à $a_{m+k,n+\ell}$.

Pourtant, cette interprétation ne signifie pas que deux vecteurs parallèles et de même longueur soient égaux.

En effet, de façon générale, on a

$$V_{o\ell}\,(a_{mn}) \neq V_{o\ell}\,(a_{m+k,n})$$

Propriété 2

$$V_{k\ell}\,(a_{mn}) < V_{k'\ell'}\,(a_{mn}) \iff |a_{m+k,n+\ell} - a| > |a_{m+k',n+\ell'} - a|$$

Propriété 3

Soient (t_{mn}) et (a_{mn}) deux suites réelles doubles que l'on suppose converger toutes deux vers a;

On pose $R_{mn} = \left|\dfrac{t_{mn} - a}{a_{mn} - a}\right|$

Une condition suffisante pour que $\forall m,n\ V_{k\ell}\,(t_{mn}) > V_{k\ell}\,(a_{mn})$ est que la suite(R_{mn}) soit une suite décroissante

Démonstration

$$V_{k\ell}\,(t_{mn}) > V_{k\ell}(a_{mn}) \iff \left|\frac{t_{m+k,n+\ell} - a}{t_{mn} - a}\right| < \left|\frac{a_{m+k,n+\ell} - a}{a_{mn} - a}\right|$$

$$\iff \left|\frac{t_{m+k,n+\ell} - a}{a_{m+k,n+\ell} - a}\right| < \left|\frac{t_{mn} - a}{a_{mn} - a}\right|$$

$$\iff R_{m+k,n+\ell}{}^{-a} < R_{mn}$$

Autrement dit pour (k,ℓ) fixé, $\forall m,n\ V_{k\ell}(t_{mn}) > V_k\,(a_{mn})$ est équivalent à $\forall m,n\ \ R_{m+k,n+\ell} < R_{mn}$. Ce qui est vérifié lorsque (R_{mn}) est décroissante.

Remarque :

Pour (k,ℓ) fixé $\forall m,n\ R_{m+k,n+\ell} < R_{mn}$ n'est pas équivalent à $\forall(k,\ell)\ \ \forall m,n\ \ R_{m+k,n+\ell} < R_{mn}$ qui est la définition de la décroissance de (R_{mn})

Lemme 1

Soit (a_{ij}) une suite réelle double telle que pour tout i, pour tout j, $a_{ij} \neq 0$; elle vérifie $a_{i+1,j+1} \times a_{ij} = a_{i+1,j} \times a_{i,j+1} \quad \forall i,j \in \mathbb{N}^* \quad (R_1)$ si et seulement si il existe deux suites (U_i) et (V_j) telles que $a_{ij} = U_i \times V_j$

Démonstration

Supposons que $a_{ij} = U_i \times V_j$ alors

$$a_{i+1,j+1} \times a_{ij} = U_{i+1} \times V_{j+1} \times U_i \times V_j$$

$$= (U_{i+1} \times V_j)(U_i \times V_{j+1}) = a_{i+1,j} \times a_{i,j+1}$$

réciproquement : supposons que (a_{ij}) vérifie la relation (R_1)

écrivons alors $a_{i+1,j+1} = \dfrac{a_{i+1,j} \times a_{i,j+1}}{a_{ij}}$ puisque $a_{ij} \neq 0$

$$a_{i,j+1} = \frac{a_{i,j} \times a_{i-1,j+1}}{a_{i-1,j}}$$

$$a_{i-1,j+1} = \frac{a_{i-1,j} \times a_{i-2,j+1}}{a_{i-2,j}}$$

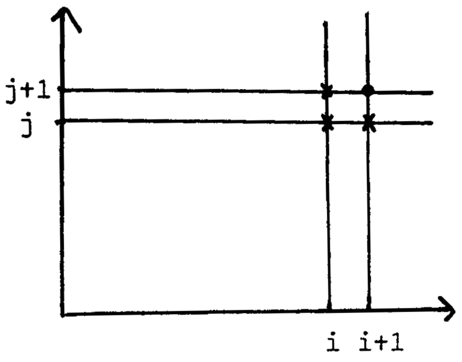
$$\vdots$$

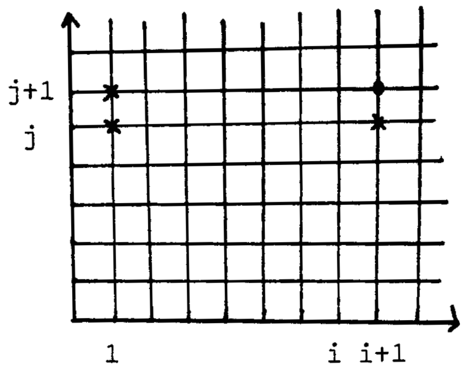
$$a_{2,j+1} = \frac{a_{2,j} \times a_{1,j+1}}{a_{1,j}}$$

puis en multipliant membre à membre ces inéquations, on obtient après simplifications

$$a_{i+1,j+1} = \frac{a_{i+1,j} \times a_{1,j+1}}{a_{1,j}} \qquad (R_2)$$

Géométriquement, les relations (R_1) et (R_2) peuvent se représenter par





$$(R_1) : \quad a_{i+1,j+1} = \frac{a_{i+1,j} \times a_{i,j+1}}{a_{ij}} \qquad\qquad (R_2) : \quad a_{i+1,j+1} = \frac{a_{i+1,j} \times a_{1,j+1}}{a_{1,j}}$$

en remplaçant $a_{i+1,j}$ avec une expression tirée de (R_2) dans (R_2), on a :

$$a_{i+1,j+1} = \frac{a_{1,j+1}}{a_{1,j}} \times \frac{a_{1,j} \times a_{i+1,j-1}}{a_{1,j-1}} = \frac{a_{1,j+1} \times a_{i+1,j-1}}{a_{1,j-1}}$$

en continuant l'opération, cad en remplaçant dans le membre de droite le terme qui dépend de i, on montre que

$$a_{i+1,j+1} = \frac{a_{1,j+1} \times a_{i+1,1}}{a_{11}} = U_{i+1} \times V_{j+1}$$

Ceci revient à consider la 1ère colonne $(a_{i,1})$ comme une suite simple (u_i) et la 1ere ligne $(a_{i,j})$ comme une suite (v_j)

alors $a_{ij} = \dfrac{u_i \times v_j}{a_{11}} = U_i \times V_j$ où l'on intègre le coefficient a_{11} dans U_i ou V_j.

<u>Lemme 2</u>

$$\forall i,j \quad a_{i+1,j+1} = \frac{a_{i+1,j} \times a_{i,j+1}}{a_{ij}} \text{ alors } \forall k\ell \quad a_{i+k,j+\ell} = \frac{a_{i+k,j} \times a_{i,j+\ell}}{a_{ij}}$$

Démonstration

Ecrivons $a_{i+1,j+1} \times a_{ij} = a_{i+1,j} \times a_{i,j+1}$

puis si l'on change i en (i+1), et ainsi de suite, on obtient les équations suivantes :

$$a_{i+2,j+1} \times a_{i+1,j} = a_{i+2,j} \times a_{i+1,j+1}$$

$$a_{i+3,j+1} \times a_{i+2,j} = a_{i+1,j} \times a_{i+2,j+1}$$

$$\vdots$$

$$a_{i+k,j+1} \times a_{i+k-1,j} = a_{i+k,j} \times a_{i+k-1,j+1}$$

on obtient alors, en multipliant membre à membre ces équations

$$a_{i+k,j+1} \times a_{ij} = a_{i+k,j} \times a_{i,j+1}$$

puis il suffit de ré-écrire cette équation en remplaçant j par j+1 et ainsi de suite jusqu'à $j + \ell$

$$a_{i+k,j+2} \times a_{i,j+1} = a_{i+k,j+1} \times a_{i,j+2}$$

$$a_{i+k,j+3} \times a_{i,j+2} = a_{i+k,j+2} \times a_{i,j+3}$$

$$\vdots$$

$$a_{i+k,j+\ell} \times a_{i,j+\ell-1} = a_{i+k,j+\ell-1} \times a_{i,j+\ell}$$

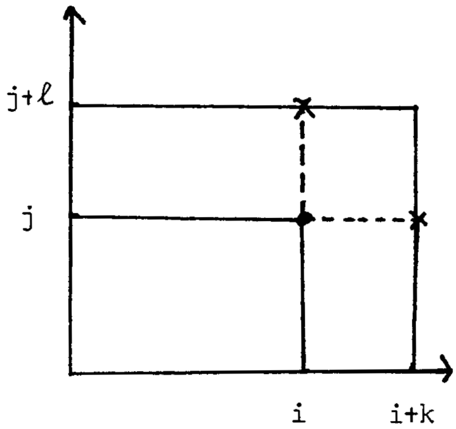
d'où en multipliant, après simplification, on obtient :

$$a_{i+k,j+\ell} \times a_{ij} = a_{i+k,j} \times a_{i,j+\ell}$$

Il est bien évident que la réciproque est vraie puisque si (a_{ij}) vérifie la relation précédente, alors $k=\ell=1$, on retrouve

$$a_{i+1,j+1} \times a_{ij} = a_{i+1,j} \times a_{i,j+1}$$

Géométriquement on peut écrire :



Propriété 4

$\forall k,\ell \quad a_{i+k,j+\ell} \times a_{ij} = a_{i,j+\ell} \times a_{i+k,j}$ est équivalent à

$a_{ij} = U_i \times V_j$

Ceci découle directement des lemmes précédents.

Propriété 5

$$V_{o\ell}(a_{m+k,n}) = V_{o\ell}(a_{mn}) \iff V_{ko}(a_{m,n+\ell}) = V_{ko}(a_{mn}) \iff |a_{mn}-a| = U_m \times V_n$$

Démonstration

$$V_{o\ell}(a_{m+k,n}) = -\log \left| \frac{a_{m+k,n+\ell} - a}{a_{m+k,n} - a} \right|$$

et $$V_{o\ell}(a_{mn}) = -\log_{10} \left| \frac{a_{m,n+\ell} - a}{a_{mn} - a} \right|$$

donc $V_{o\ell}(a_{mn}) = V_{o\ell}(a_{m+k,n}) \iff \left| \dfrac{a_{m+k,n+\ell} - a}{a_{m+k,n} - a} \right| = \left| \dfrac{a_{m,n+\ell} - a}{a_{mn} - a} \right| \iff$

$$\left|\frac{a_{m+k,n+\ell} - a}{a_{m,n+\ell} - a}\right| = \left|\frac{a_{m+k,n} - a}{a_{mn} - a}\right| \iff V_{ko}(a_{m,n+\ell}) = V_{ko}(a_{mn})$$

$$\iff |a_{m+k,n+\ell} - a| \times |a_{mn} - a| = |a_{m,n+\ell} - a| \times |a_{m+k,n} - a|$$

or si on pose $|a_{m+k,n+\ell} - a| = r_{m+k,n+\ell}$

Cela équivaut à $r_{m+k,n+\ell} \times r_{mn} = r_{m,n+\ell} \times r_{m+k,n}$

ou encore, d'après la proposition 4 $\;\; r_{mn} = U_m \times V_n$

Proposition 6

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha \neq 0 \qquad V_{k\ell}(\alpha a_{mn} + \beta) = V_{k\ell}(a_{mn})$$

en effet si (a_{mn}) converge vers a, $(\alpha\, a_{mn} + \beta)$ converge vers $\alpha a + \beta$, d'où :

$$V_{k\ell}(a_{mn} + \beta) = -\log_{10} \frac{|\alpha\, a_{m+k,n+\ell} + \beta - \alpha\, a - \beta|}{|\alpha\, a_{mn} + \beta - \alpha\, a - \beta|} = -\log_{10}\left|\frac{\alpha(a_{m+k,n+\ell} - a)}{\alpha(a_{mn} - a)}\right|$$

Définition

On dira que (a_{mn}) est à convergence super-linéaire si et seulement si

$$\forall (k,\ell) \neq (0,0) \quad (a_{m+k,n+\ell} - a) = o\,(a_{mn} - a)$$

Propriété 7

On suppose que (a_{mn}) converge simplement, horizontalement et verticalement alors (a_{mn}) est à convergence super-linéaire si et seulement si

$$\lim_{m,n\to\infty} \left|\frac{a_{m+1,n} - a}{a_{mn} - a}\right| = \lim_{m,n\to\infty} \left|\frac{a_{m,n+1} - a}{a_{mn} - a}\right| = 0$$

Démonstration

Supposons que (a_{mn}) soit à convergence super-linéaire, cad

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M(\varepsilon) \quad \forall m,n \geq M(\varepsilon) \qquad \left| \frac{a_{m+k,n+\ell} - a}{a_{mn} - a} \right| < \varepsilon$$

ceci étant vrai $\forall k,\ell$ $(k,\ell) \neq (0,0)$, choisissons k=1 et ℓ=0 pour obtenir

$\lim\limits_{m,n} \left| \dfrac{a_{m+1,n} - a}{a_{mn} - a} \right| = 0$, puis k=0 et ℓ=1 pour avoir $\lim\limits_{m,n} \left| \dfrac{a_{m,n+1} - a}{a_{mn} - a} \right| = 0$

Réciproquement

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M_1(\varepsilon) \quad \forall m,n \geq M_1(\varepsilon) \qquad \left| \frac{a_{m+1,n} - a}{a_{mn} - a} \right| < \varepsilon$$

donc pour ε fixé

$$\exists M_1 \ (\varepsilon^{1/2k}) \quad \forall m,n \geq M \qquad \left| \frac{a_{m+1,n} - a}{a_{mn} - a} \right| < \varepsilon^{1/2k}$$

$$\left| \frac{a_{m+2,n} - a}{a_{m+1,n} - a} \right| < \varepsilon^{1/2k}$$

$$\vdots$$

$$\left| \frac{a_{m+k,n} - a}{a_{m+k-1,n} - a} \right| < \varepsilon^{1/2k}$$

donc si $m,n \geq M_1(\varepsilon^{1/2k})$, en faisant le produit , on obtient

$$\left| \frac{a_{m+k,n} - a}{a_{mn} - a} \right| < \varepsilon^{1/2}$$

de même, on a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \ M_2(\varepsilon) \quad \forall m,n \geq M_2(\varepsilon) \qquad \left| \frac{a_{m,n+1} - a}{a_{mn} - a} \right| < \varepsilon$$

d'où pour ε fixé

$$\exists M_2\ (\varepsilon^{1/2\ell}) \qquad \forall m,n \geq M_2(\varepsilon^{1/2\ell}) \qquad \left|\frac{a_{m,n+1} - a}{a_{mn} - a}\right| < \varepsilon^{1/2\ell}$$

$$\left|\frac{a_{m,n+2} - a}{a_{m,n+1} - a}\right| < \varepsilon^{1/2\ell}$$

$$\vdots$$

$$\left|\frac{a_{m,n+\ell} - a}{a_{m,n+\ell-1} - a}\right| < \varepsilon^{1/2\ell}$$

d'où $\left|\dfrac{a_{m,n+\ell} - a}{a_{mn} - a}\right| < \varepsilon^{1/2}$

donc puisque $m+k \geq m$

$$\left|\frac{a_{m+k,n+\ell} - a}{a_{m+k,n} - a}\right| < \varepsilon^{1/2}$$

d'où pour ε choisi, si on pose $M_o = \text{Max}(M_1\ , M_2)$, $\forall m,n \geq M_o$

$$\left|\frac{a_{m+k,n+\ell} - a}{a_{m+k,n} - a}\right| \times \left|\frac{a_{m+k,n} - a}{a_{mn} - a}\right| < \varepsilon$$

cad $$\left|\frac{a_{m+k,n+\ell} - a}{a_{mn} - a}\right| < \varepsilon$$ C.Q.F.D

<u>Remarque</u>

$\lim\limits_{m,n} \left|\dfrac{a_{m+1,n} - a}{a_{mn} - a}\right| = 0$ n'équivaut pas à dire qu'à partir d'un certain rang N, cad pour $m \geq N$ chaque ligne est à convergence super-linéaire.

En effet, on aurait

$\exists N \ \forall n \geq N \ \forall \varepsilon > o \quad \exists M(\varepsilon) \qquad \forall m \geq M(\varepsilon) \qquad \left| \dfrac{a_{m+1,n} - a}{a_{mn} - a} \right| < \varepsilon$

or $\lim\limits_{m,n} \left| \dfrac{a_{m+1,n} - a}{a_{mn} - a} \right| = 0$ s'écrit

$\forall \varepsilon > o \quad \exists N(\varepsilon) \qquad \exists M(\varepsilon) \quad \forall m \geq M(\varepsilon) \ \forall n \geq N(\varepsilon) \qquad \left| \dfrac{a_{m+1,n} - a}{a_{mn} - a} \right| < \varepsilon$

où ici $N(\varepsilon)$ est un nombre entier qui dépend de ε.

<u>Proposition 8</u>

(a_{mn}) est à convergence super-linéaire si et seulement si $\forall k\ell \ (k,\ell) \neq (o,o) \ \lim\limits_{m,n} \ V_{k\ell}\,(a_{mn}) = +\infty$

en effet, $\lim\limits_{m,n} \left| \dfrac{a_{m+k,n+\ell} - a}{a_{mn} - a} \right| = 0$ équivaut à $-\log_{10} \left| \dfrac{a_{m+k,n+\ell} - a}{a_{mn} - a} \right| \to + \infty$

<u>Définition</u>

On dit que la suite (a_{mn}) a une vitesse de convergence uniforme pour le couple $(k,\ell) \neq (0,0)$ à partir d'un certain rang, si et seulement si,

$\exists M \quad \forall m,n \geq M \quad V_{k\ell}(a_{mn}) = V_{k\ell} \neq 0$ où $V_{k\ell}$ est indépendant de m et n.

<u>Propriété 9</u>

Si la suite (a_{mn}) est à convergence uniforme pour les couples (1,0) et (0,1), alors

$$V_{k\ell} = k\ V_{10} + \ell\ V_{01}$$

<u>Démonstration</u>

$\exists M_o \qquad \forall m,n \geq M_o \qquad -\log_{10} \left| \dfrac{a_{m+1,n} - a}{a_{mn} - a} \right| = V_{10}$

$\exists M_1 \qquad \forall m,n \geq M_1 \qquad -\log_{10} \left| \dfrac{a_{m,n+1} - a}{a_{mn} - a} \right| = V_{01}$

avec

$$\left|\frac{a_{m+k,n+\ell}-a}{a_{mn}-a}\right| = \left|\frac{a_{m+k,n+\ell}-a}{a_{m+k-1,n+\ell}-a}\right| \times \left|\frac{a_{m+k-1,n+\ell}-a}{a_{m+k-2,n+\ell}-a}\right| \times \ldots\ldots \times$$

$$\left|\frac{a_{m,n+\ell}-a}{a_{m,n+\ell-1}-a}\right| \times \left|\frac{a_{m,n+\ell-1}-a}{a_{m,n+\ell-2}-a}\right| \times \ldots\ldots \times \left|\frac{a_{m,n+1}-a}{a_{mn}-a}\right|$$

d'où $- \log_{10} \left|\frac{a_{m+k,n+\ell}-a}{a_{mn}-a}\right| = k\ V_{10} + \ell\ \ V_{10} \qquad \forall m,n \geq \mathrm{Max}\ (M_o, M_1)$

<u>Propriété 10</u>

La suite (a_{mn}) est d'ordre 1 pour le premier indice et d'ordre 1 pour le deuxième indice si et seulement si :

$$\exists M,\ M_1, M_2\ \forall m,n \geq M \qquad \forall k,\ell\ (k,\ell) \neq (0,0) \qquad 0 < M_1 \leq V_{k\ell}\ (a_{mn}) \leq M_2 < +\infty$$

où M_1, M_2 sont dépendants de k et ℓ.

<u>Démonstration</u>

La suite (a_{mn}) est d'ordre 1 pour le premier indice, si et seulement si par définition

$$\exists A_1, A_2 \quad \exists N_1 \qquad \forall m,n \geq N_1 \qquad A_1 \leq \left|\frac{a_{m+1,n}-a}{a_{mn}-a}\right| \leq A_2$$

de même, pour le second indice

$$\exists B_1, B_2 \quad \exists N_2 \qquad \forall m,n \geq N_2 \qquad B_1 \leq \left|\frac{a_{m,n+1}-a}{a_{mn}-a}\right| \leq B_2$$

d'où, pour tout couple (m,n) tel que $m,n \geq \mathrm{Max}\ (N_1\ ,\ N_2)$

$$A_1 \leq \left| \frac{a_{m+k,n+\ell} - a}{a_{m+k-1,n+\ell} - a} \right| \leq A_2$$

$$A_1 \leq \left| \frac{a_{m+k-1,n+\ell} - a}{a_{m+k-2,n+\ell} - a} \right| \leq A_2$$

$$\vdots$$

$$A_1 \leq \left| \frac{a_{m+1,n+\ell} - a}{a_{m,n+\ell} - a} \right| \leq A_2$$

en multipliant ces k équations, on a : $A_1^k \leq \left| \frac{a_{m+k,n+\ell} - a}{a_{m,n+\ell} - a} \right| \leq A_2^k$.

De même, en faisant varier j dans l'équation

$$B_1 \leq \left| \frac{a_{m,n+\ell-j} - a}{a_{m,n+\ell-j-1} - a} \right| \leq B_2 \qquad j=0,\ 1,\ldots\ldots\ell-1$$

puis en multipliant les ℓ équations obtenues, on obtient

$$B_1^{\ell} \leq \left| \frac{a_{m,n+\ell} - a}{a_{mn} - a} \right| \leq B_2^{\ell}$$

par suite

$$A_1^k \times B_1^{\ell} \leq \left| \frac{a_{m+k,n+\ell} - a}{a_{mn} - a} \right| \leq A_2^k \times B_2^{\ell}$$

ou encore

$$M_1 \leq -\log_{10} \left| \frac{a_{m+k,n+\ell} - a}{a_{mn} - a} \right| \leq M_2$$

où M_1 et M_2 dépendent de k et ℓ.

Réciproquement :

Si il existe M_1 et M_2 tels que $0 < M_1 \leq V_{k\ell}\,(a_{mn}) \leq M_2 < +\infty$ alors pour $k = 1$ et $\ell = 0$, on obtient que (a_{mn}) est d'ordre 1 pour le premier indice. M_1 et M_2 sont alors fixés. De même, pour $k = 0$ et $\ell = 1$, on prouve alors que (a_{mn}) est d'ordre 1 du second indice.

CHAPITRE III

TRANSFORMATIONS RECTANGULAIRES REGULIERES

Le but de ce chapitre est de présenter et d'étudier des transformations rectangulaires introduites par HIGGINS [9].

Après le rappel des résultats obtenus par HIGGINS, nous étudierons des cas particuliers puis les appliquerons à des sommes partielles de séries doubles.

Au niveau des notations, nous considérerons une suite double (a_{ij}). Si elles existent, les limites seront notées :

$$\lim_{i,j} a_{ij} = a \qquad \lim_{i\to\infty} = h_j \qquad \lim_{j\to\infty} a_{ij} = V_i$$

Définition

Une transformation rectangulaire est définie par : $a_{mn} \xrightarrow{T} T(a_{mn}) = b_{mn}$ où $T(a_{mn}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu_{i,j}^{m,n} a_{ij}$ $m,n \geq 1$ avec $\mu_{j,j}^{m,n} \in \mathbb{R}$ $1 \leq i \leq m;\ 1 \leq j \leq n.$

Dans ce qui suit, on posera $\mu_{i,j}^{m,n} = 0$ si $i > m$ ou $j > n$

Régularité

- Une telle transformation sera dite horizontalement régulière ou H-régulière si et seulement si :

la convergence de la suite simple $(a_{ij})_i$ implique celle de la suite $(b_{ij})_i$ et $\lim_{i\to\infty} b_{ij} = \lim_{i\to\infty} a_{ij}$ $\forall j \geq 1$

- Elle sera verticalement régulière ou V-régulière, si et seulement si :

la convergence de la suite simple $(a_{ij})_j$ implique celle de la suite $(b_{ij})_j$ et $\lim_{j\to\infty} b_{ij} = \lim_{j\to\infty} a_{ij}$ $\forall i \geq 1$

- T est simplement régulière ou régulière, si et seulement si :

la convergence de la suite double (a_{ij}) entraîne celle de la suite double (b_{ij}) et $\lim_{i,j} b_{ij} = \lim_{i,j} a_{ij}$

HIGGINS a démontré les théorème suivants

Théorème 1. [9]

T est V-régulière si et seulement si

(1) pour tout $m\geq 1$ $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |\mu_{i,j}^{m,n}| \leq R_m$ R_m étant indépendant de n

(11) pour tout $m\geq 1$ $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu_{i,j}^{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=m \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$

(111) pour tout $m \geq 1$, $j \geq 1$, $1 \leq i \leq m$ $\lim_{n\to\infty} \mu_{i,j}^{m,n} = 0$

Théorème 2. [9]

Supposons que $\lim_{j\to\infty} a_{ij} = V$ $\forall i\geq 1$ et que les coefficients $\mu_{i,j}^{m,n}$ satisfont aux conditions (1) et (111) du théorème 1. Alors :

$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu_{i,j}^{m,n} = 1$ $\forall m\geq 1$ implique que $\lim_{n\to\infty} b_{mn} = \lim_{n\to\infty} a_{mn} = V$

on peut aussi en déduire.

Théoréme 3. [9]

T est H-réguliére, si et seulement si

(1) pour tout $n\geq 1$ $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |\mu_{i,j}^{m,n}| \leq K_n$ où K_n est indépendant de m

(11) pour tout $n\geq 1$ $\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \mu_{i,j}^{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } j=n \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$

(111) pour tout $n \geq 1$, $i \geq 1$, $1 \leq j \leq n$ $\lim_{m\to\infty} \mu_{i,j}^{m,n} = 0$

Exemple

$$\mu_{i,j}^{m,n} = \frac{j}{m \sum_{j=1}^{n} j} = \frac{2j}{mn(n+1)}$$

Condition (1) : $\mu_{i,j}^{m,n} > 0$ d'où $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |\mu_{i,j}^{m,n}| = \frac{m}{m \sum_{j=1}^{n} j} \sum_{j=1}^{n} j = 1$

Condition (11) : $\lim_{m \to \infty} \frac{2j}{mn(n+1)} = 0$

on a vérifié dans la condition (1) la condition supplémentaire du théorème 2 donc pour toute suite (a_{ij}) telle que $\lim_{j \to \infty} a_{ij} = v$ alors

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{2j}{mn(n+1)} a_{ij} = v$$

Avant de donner quelques propriétés des transformations régulières, il semble intéressant de rapprocher le théorème 1 du théorème de TOEPLITZ.

Pour cela décomposons $T(a_{mn}) = b_{mn}$ de la façon suivante :

$$b_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu_{i,j}^{m,n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m} C_{in} \quad \text{où} \quad C_{in} = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij}^{mn} a_{ij}$$

ou encore, pour i fixé, on a :

$$\begin{bmatrix} \mu_{i1}^{m1} & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & \\ \mu_{i1}^{m2} & \mu_{i2}^{m2} & 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & \\ \mu_{i1}^{m3} & \mu_{i2}^{m3} & \mu_{i3}^{m3} & 0 & \cdots\cdots\cdots & \\ \vdots & & & & & \\ \mu_{i1}^{mn} & \mu_{i2}^{mn} & \mu_{i3}^{mn} & \cdots\cdots & \mu_{in}^{mn} & 0 \cdots\cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ \vdots \\ a_{in} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{i1} \\ C_{i2} \\ C_{i3} \\ \vdots \\ C_{in} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

D'après le théorème de TOEPLITZ, une condition nécessaire et suffisante pour que $\lim\limits_{n\to\infty} a_{in} = \lim\limits_{n\to\infty} b_{in}$ serait que les coefficients $\mu_{i,j}^{m,n}$ vérifient les conditions

1° $\sum\limits_{j=1}^{n} |\mu_{i,j}^{m,n}| < M_m$ (indépendant de n)

2° $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_{i,j}^{m,n} = 1$

3° $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_{i,j}^{m,n} = 0$

Les conditions 1 et 3 sont analogues à celles du théorème 1. Par contre, ce qui est plus significatif, c'est que la condition 2 du théorème de TOEPLITZ ne sera exigée que pour m=i dans le théorème de HIGGINS, dans les autres cas cette limite devra être nulle.

Ainsi, si l'on écrit $b_{mn} = C_{1n} + C_{2n} + \ldots + C_{mn}$, alors

$$\lim_{n\to\infty} a_{mn} = \lim_{n\to\infty} C_{mn} = \lim_{n\to\infty} b_{mn}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m-1} C_{in} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n} \mu_{i,j}^{m,n} \; a_{ij} = 0$$

Il semblerait donc tout aussi interessant d'étudier les transformations rectangulaires où seuls les coefficients $\mu_{m,j}^{m,n}$ ne sont pas nuls, cas des transformations de la forme :

$$a_{mn} \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \nu_j^{mn} \; a_{mj}$$

En plus des simplifications qu'elles proposent par rapport aux transformations initiales, elles présentent l'avantage de se ramener à des transformations de suite d'un seul indice.

Les théorèmes de convergence ou d'accélération de ces dernières transformations ne seront donc pas étudiés ici puisqu'ils ne seront pas différents des théorèmes concernant les procédés de sommation réguliers de suites simples.

Théorème 4

Soit la transformation $a_{mn} \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{m,n} \; \delta_{o1} \; a_{m,j-1} = b_{mn}$

avec $a_{mo} = 0$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que cette transformation soit V-régulière est que les coefficients $\xi_j^{m,n}$ vérifient

- $\sum_{j=1}^{n} |\xi_j^{m,n} - \xi_{j+1}^{m,n}| \leq K_m$ où $\xi_j^{m,n} = 0$ si $j > n$

- $\lim_{n\to\infty} \xi_1^{m,n} = 1$

- $\lim_{n\to\infty} \xi_n^{m,n} = 0$

- $\lim_{n\to\infty} (\xi_j^{m,n} - \xi_{j+1}^{m,n}) = 0$

Démonstration

$b_{mn} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{m,n} \delta_{o1}\, a_{m,j-1} = \sum_{j=1}^{n} (\xi_j^{m,n} - \xi_{j+1}^{m,n})\, a_{mj}$ si l'on pose

$\xi_j^{m,n} = 0$ $j > n$; posons $\nu_j^{m,n} = \xi_j^{m,n} - \xi_{j+1}^{m,n}$ puis appliquons le théorème de TOEPLITZ aux coefficients $\nu_j^{m,n}$.

1° $\sum_{j=1}^{m} |\nu_j^{m,n}| = \sum_{j=1}^{n} |\xi_j^{m,n} - \xi_{j+1}^{m,n}| \leq K_m$ où K_m est indépendant de n.

2° $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \nu_j^{m,n} = \lim_{n\to\infty} (\xi_j^{m,n} - \xi_{j+1}^{m,n}) = \lim_{n\to\infty} \xi_1^{m,n} = 1$

3° $\lim_{n\to\infty} \nu_j^{m,n} = \lim_{n\to\infty} (\xi_j^{m,n} - \xi_{j+1}^{m,n}) = 0$

Remarque

Les conditions $\lim_{n\to\infty} \xi_n^{m,n} = 0$ et $\lim_{n\to\infty} (\xi_j^{m,n} - \xi_{j+1}^{m,n}) = 0$ n'impliquent pas que l'on a alors $\forall j$ $\lim_{n\to\infty} \xi_j^{m,n} = 1$.

En effet conssidérons $\xi_j^{mn} = \frac{n-j}{n}$

pour $j=1$ $\xi_1^{mn} = \frac{n-1}{n}$ qui tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

pour j=n $\xi_n^{mn} = 0$

de plus $\xi_j^{mn} - \xi_{j+1}^{m,n} = \frac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.\ \forall j \quad 1 \leq j \leq n$

Mais, j varie de 1 à n, donc j dépend de n, ainsi par exemple pour j=n-1

$$\xi_{n-1}^{m,n} = \frac{1}{n} \text{ qui tend vers 0 et non vers 1.}$$

Avant d'appliquer les transformations régulières rectangulaires

$\mu_{i,j}^{m,n} = \dfrac{1}{m \sum\limits_{j=1}^{n} j}$ ne pourra accélérer une suite double (a_{mn}) monotone et qui est supposée converger verticalement. Ceci est une conséquence de la proposition suivante :

__Proposition 1__

Si $\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{m} \mu_{i,j}^{m,n} = 1$; $\mu_{i,j}^{m,n} \geq 0$; si (a_{ij}) monotone et converge verticalement alors $\forall m \geq 1 \quad \forall n \geq 1 \qquad \left|\dfrac{b_{mn} - V_m}{a_{mn} - V_m}\right| \geq 1$

__Démonstration__

$$b_{mn} - V_m = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu_{i,j}^{m,n} (a_{ij} - V_m) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij}^{mn} (a_{ij} - a_{mn} + a_{mn} - V_m)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij}^{mn} (a_{ij} - a_{mn}) + (a_{mn} - V_m) \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij}^{mn}$$

d'où $$\frac{b_{mn} - V_m}{a_{mn} - V_m} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij}^{mn} \frac{a_{ij} - a_{mn}}{a_{mn} - V_m} + 1$$

puisque $\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_{ij}^{mn} = 1$

De plus puisque (a_{ij}) est monotone, $\dfrac{a_{ij}-a_{mn}}{a_{mn}-V_m} \geq 0$ car si

(a_{ij}) croit $a_{ij} \leq a_{mn} < V_m$ sinon $V_m < a_{mn} \leq a_{ij}$ pour $i \leq m$ et $j \leq n$

$$\left|\frac{b_{mn}-V_m}{a_{mn}-V_m}\right| = |1+\alpha| \quad \text{avec}\, \alpha \geq 0.$$

APPLICATION AUX SUITES DE SOMMES PARTIELLES EN RECTANGLE.

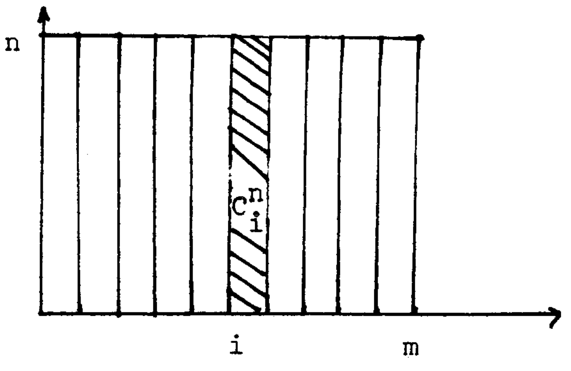
Conditions (A_{mn}) la suite des sommes partielles d'une série $[a_{ij}]$, définies par $A_{mn} = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$, et une transformation telle que $T(A_{mn}) = B_{mn}$ où B_{mn} ne dépendra, à des coefficients près, que des termes a_{ij} avec $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.

Nous noterons $B_{mn} = \sum\limits_{j=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}$.

Proposition 2

T est V-régulière, si et seulement si, chaque colonne de A_{mn} a même limite, quand n tend l'infini, que sa transformée par T.

Autrement dit, si l'on pose $C_i^n = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \xrightarrow{T} K_i^n = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}^{mn}$



alors T est V-régulière si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} C_m^n = \lim_{n\to\infty} K_m^n \qquad m \geq 1$$

Démonstration

T est V-régulière, signifie, par définition, que $\lim\limits_{n\to\infty} A_{mn} = \lim\limits_{n\to\infty} B_{mn}$ $\forall m \geq 1$

Donc si p est fixé $p \geq 1$

$$\lim_{n\to\infty} A_{pn} = \lim_{n\to\infty} B_{pn} \qquad (1)$$

de même, pour p+1 : $\lim\limits_{n\to\infty} A_{p+1,n} = \lim\limits_{n\to\infty} B_{p+1,n}$ (2)

la différence, membre à membre des équations (1) et (2) donne

$$\lim_{n\to\infty} (A_{p+1,n} - A_{p,n}) = \lim_{n\to\infty} (B_{p+1,n} - B_{pn})$$

ou encore $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{p+1,n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} b_{p+1,n}$ $\quad \forall p \geq 1$

ce qui montre que $\lim\limits_{n\to\infty} C_{p+1}^{n} = \lim\limits_{n\to\infty} K_{p+1}^{n}$

pour p=0, C_1^n représente le terme $A_{1,n}$ de la suite (A_{mn}) donc T est V-régulière assure que $\lim\limits_{n\to\infty} A_{1n} = \lim\limits_{n\to\infty} B_{1n}$.

La réciproque se démontre à l'aide d'un raisennement par récurrence, à l'aide des mêmes égalités.

Notons que cette proposition n'a été démontrée que si b_{mn} peut s'écrire sous la forme $\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}$. Il s'agit donc ici d'un cas bien particulier de transformation rectangulaire puisque dans le cas général on a

$$A_{mn} \longrightarrow \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu_{i,j}^{m,n} A_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}^{m,n} a_{ij} = B_{mn}$$

Autrement dit, écrire $B_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}$, cela revient à supposer que les coefficients $\mu_{i\ j}^{m\ n}$ ou $\alpha_{i,j}^{m,n}$ sont indépendants de m et n.

La question qui se pose maintenant est d'étudier la transformation qui à A_{mn} assicie $B_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu_{i,j}^{m,n} A_{ij}$. Mais au lieu d'exprimer B_{mn} en fonction des A_{ij}, nous l'écrirons à l'aide des a_{ij}. On notera alors

$$B_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}^{m,n} a_{ij}$$

et l'on s'attardera sur les $\alpha_{i,j}^{m,n}$ pour qu'ils définissent une tranformation V-régulière.

Le théorème 1 peut, appliqué à la suite (A_{mn}) s'exprimer:

<u>Théorème 5</u>

$$A_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xrightarrow{T} B_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^{mn} a_{ij}$$

les α_{ij}^{mn} définissent une transformation V-régulière si et seulement si, il vérifient :

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left| \alpha_{i+1,j+1}^{m\ n} - \alpha_{i+1,j}^{m\ n} - \alpha_{i,j+1}^{m\ n} + \alpha_{i,j}^{m,n} \right| \leq R_m$$

$$(11) \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_{i1}^{mn} = 1 \qquad 1 \leq i \leq m \qquad \text{pour tout m.}$$

(111) pour tout m, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$

- $\lim_{n\to\infty} \alpha^{m\,n}_{i\,n} = 0$

- $\lim_{n\to\infty} (\alpha^{m\quad n}_{i+1,j+1} - \alpha^{m\quad n}_{i+1,j} - \alpha^{m\quad n}_{i,j+1} + \alpha^{m\,n}_{i\,j}) = 0$

- $\lim_{n\to\infty} (\alpha^{m\,n}_{m\,j} - \alpha^{m\quad n}_{m,j+1}) = 0$

Démonstration

Dans un premier temps, nous allons donner une relation entre les $\alpha^{m\,n}_{i\,j}$ et les $\mu^{m\,n}_{i\,j}$ du thérorème 1. Puis nous étudierons tour à tour chacune des conditions du théorème pour que la transformation soit V-régulière.

Par construction, $B_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha^{mn}_{ij} a_{in} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu^{m\,n}_{i\,j} A_{ij}.$

avec $a_{ij} = A_{ij} - A_{i-1,j} - A_{i,j-1} + A_{i-1,j-1}$ et la convention que $A_{ij} = 0$ pour $i = 0$ ou $j = 0$ d'où

$$B_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha^{m\,n}_{i\,j} (A_{ij} - A_{i-1,j} - A_{i,j-1} + A_{i-1,j-1})$$ ou encore

$$(1) \quad B_{mn} = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha^{m\quad n}_{i+1,j+1} - \alpha^{m\quad n}_{i+1,j} - \alpha^{m\quad n}_{i,j+1} + \alpha^{m\,n}_{i,j}) A_{ij}$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha^{m\,n}_{m,j} - \alpha^{m\quad n}_{m,j+1}) A_{mj} + \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha^{m\,n}_{i,n} - \alpha^{m\quad n}_{i+1,n}) A_{in} + \alpha^{m\,n}_{m,n} A_{mn}$$

d'autre part $B_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu^{m\,n}_{i\,j} A_{ij}$ cad

$$(2)\quad B_{mn} = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \mu^{m\,n}_{i\,j} A_{ij} + \sum_{j=1}^{n-1} \mu^{m\,n}_{m\,j} A_{mj} + \sum_{i=1}^{m-1} \mu^{m\,n}_{i\,n} A_{in}$$

$$+ \mu^{m\,n}_{m\,n} A_{mn}$$

En identifiant les coefficients de B_{mn} dans les équations (1) et (2), on en déduit que :

$1 \le i \le m-1$, $1 \le j \le n-1$:

$$\mu^{m\,n}_{i\,j} = \alpha^{m\,n}_{i+1,j+1} - \alpha^{m\,n}_{i+1,j} - \alpha^{m\,n}_{i,j+1} + \alpha^{m\,n}_{i,j}$$

$i = m$, $1 \le j \le n-1$:

$$\mu^{m\,n}_{m,j} = \alpha^{m\,n}_{m,j} - \alpha^{m\,n}_{m,j+1}$$

$1 \le i \le m-1$, $j = n$:

$$\mu^{m\,n}_{i,n} = \alpha^{m\,n}_{i,n} - \alpha^{m\,n}_{i+1,n}$$

$i = m$, $j = n$:

$$\mu^{m\,n}_{m,n} = \alpha^{m\,n}_{m,n}$$

Soit en résumé :

$$\mu_{i,j}^{m\,n} = \alpha_{i+1,j+1}^{m\,n} - \alpha_{i+1,j}^{m\,n} - \alpha_{i,j+1}^{m\,n} + \alpha_{i,j}^{m\,n}$$

avec $\alpha_{i,j}^{m\,n} = 0$ si $i > m$ ou $j > n$

Explicitons les conditions du théorème 1.

Condition (1) : $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} | \mu_{i,j}^{m\,n} | \leq R_m$

cad $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} | \alpha_{i+1,j+1}^{m\,n} - \alpha_{i+1,j}^{m\,n} - \alpha_{i,j+1}^{m\,n} + \alpha_{i,j}^{m\,n} | \leq R_m$

Condition (11) : $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu_{i,j}^{m\,n} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = m \\ 0 \text{ si non.} \end{cases}$

Calculons $\sum_{j=1}^{n} \mu_{i,j}^{m\,n}$ si $i \neq m$

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_{i,j}^{m\,n} = \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_{i+1,j+1}^{m\,n} - \alpha_{i+1,j}^{m\,n} - \alpha_{i,j+1}^{m\,n} + \alpha_{i,j}^{m\,n}) + \alpha_{i,n}^{m\,n} - \alpha_{i+1,n}^{m\,n}$$

$$= - \alpha_{i+1,n}^{m\,n} - \alpha_{i,1}^{m\,n} - \alpha_{i,n+1}^{m\,n} + \alpha_{i,1}^{m\,n} + \alpha_{i,n}^{m\,n} - \alpha_{i+1,n}^{m\,n}$$

$$= \alpha_{i,1}^{m\,n} - \alpha_{i+1,n}^{m\,n}$$

Si $i = m$ $\sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_{m,j}^{m\,n} - \alpha_{m,j+1}^{m\,n}) + \alpha_{m\,n}^{m\,n} = \alpha_{m\,1}^{m\,n}$

La condition (11) peut alors s'exprimer par

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha^{m\,n}_{i,1} - \alpha^{m\,n}_{i+1,1}) = 0 \quad \text{pour } 0 < i \leq m-1$$

et $$\lim_{n\to\infty} \alpha^{m\,n}_{m,1} = 1$$

ce qui est équivalent à $\lim_{n\to\infty} \alpha^{m\,n}_{i\,1} = 1 \quad 1 \leq i \leq m$

<u>Condition (111)</u> : $\lim_{n\to\infty} \mu^{m\,n}_{i,j} = 0$

donc on doit avoir $\lim_{n\to\infty} \alpha^{m\,n}_{m\,n} = 0$

$$1 \leq j \leq n-1 \qquad \lim_{n\to\infty} (\alpha^{m\,n}_{m,j} - \alpha^{m\,n}_{m,j+1}) = 0$$

$$1 \leq i \leq m-1 \qquad \lim_{n\to\infty} (\alpha^{m\,n}_{i,n} - \alpha^{m\,n}_{i+1,n}) = 0$$

$$\begin{matrix} i \neq m \\ j \neq n \end{matrix} \qquad \lim_{n\to\infty} (\alpha^{m\,n}_{i+1,j+1} - \alpha^{m\,n}_{i+1,j} - \alpha^{m\,n}_{i,j+1} + \alpha^{m\,n}_{i,j}) = 0$$

Ce qui équivaut à

. $\lim_{n\to\infty} \alpha^{m\,n}_{i\,n} = 0 \qquad 1 \leq i \leq m$

. $\lim_{n\to\infty} (\alpha^{m\,n}_{i+1,j+1} - \alpha^{m\,n}_{i+1,j} - \alpha^{m\,n}_{i,j+1} + \alpha^{m\,n}_{i,j}) = 0$

$$\cdot \ \lim_{n\to\infty} (\alpha^{m\,n}_{m,j} - \alpha^{m\,n}_{m,j+1}) = 0$$

De même on peut généraliser le théorème 2, de la façon suivante

Théorème 6

Soit la transformation définie par les coefficients $\alpha^{m\,n}_{i,j}$ que l'on suppose vérifier les conditions (1) et (111) du théorème 5.

Si de plus $\lim_{n\to\infty} \alpha^{m\,n}_{1\,1} = 1$, on peut alors énoncer

$$\text{Si } \lim_{n\to\infty} A_{mn} = V \text{ alors } \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha^{m\,n}_{i\,j} \, a_{ij} = V$$

La démonstration consiste à vérifier la condition supplémentaire cad que

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\alpha^{m\,n}_{i+1,j+1} - \alpha^{m\,n}_{i+1,j} - \alpha^{m\,n}_{i,j+1} + \alpha^{m\,n}_{i,j}) = \alpha^{m\,n}_{1\,1}$$

Remarque

ici encore $\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} \alpha^{m\,n}_{m\,n} = 0 \\ \\ \lim_{n\to\infty} (\alpha^{m\,n}_{m,j} - \alpha^{m\,n}_{m,j+1}) = 0 \end{array}\right\}$ n'est pas équivalent à $\lim_{n\to\infty} \alpha^{m\,n}_{m,j} = 0 \quad 1 \le j \le n$

en effet si $\alpha^{m\,n}_{i,j} = \dfrac{(m - i + 1)(n - j + 1)}{mn}$

$$\alpha^{m\,n}_{m,j} = \frac{n - j + 1}{mn} \qquad \lim_{n\to\infty} \alpha^{m\,n}_{m,j} = \frac{1}{m} \neq 0 \quad \lim_{n\to\infty} \alpha^{m\,n}_{m\,n} = 0$$

$$\alpha^{m\,n}_{m,j} - \alpha^{m\,n}_{m,j+1} = \frac{1}{mn} \qquad \lim_{n\to\infty} (\alpha^{m\,n}_{m,j} - \alpha^{m\,n}_{m,j+1}) = 0$$

Exemple

$$\alpha^{m\,n}_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{(m - i + 1)(n - j + 1)}{mn} & \text{si } 1 \leq i \leq m \qquad 1 \leq j \leq n \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

on vérifie que $\mu^{m\,n}_{i,j} = \dfrac{1}{mn}$ pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$

de plus $\Sigma\, \Sigma\, \mu^{m\,n}_{i,j} = 1$ et $\lim_{n\to\infty} \mu^{m\,n}_{i,j} = 0$

les conditions du théorème 6, sont ainsi assurées.

CHAPITRE IV

GENERALISATIONS DE PROCEDES D'ACCELELARATION

DE LA CONVERGENCE

- $\delta_{k\ell}^{2}$ de AITKEN
- transformation de SHANKS
- E-algorithme

Nous aborderons dans ce quatrième chapitre, des procédés d'accélération de convergence.

Le premier étudié ici est le $\delta_{k\ell}^{2}$ de AITKEN qui n'est autre qu'une généralisation aux suites doubles du Δ^2 de AITKEN où l'opèrateur Δ est remplacé par $\delta_{k\ell}$.

Dans un second temps, nous étudierons différentes généralisations de la transformation de SHANKS. Particulièrement la généralisation obtenue à partir de l'opèrateur $\delta_{k\ell}$ qui n'est autre qu'une façon de ramener une suite double à une suite simple extraite et donc de permettre une étude en terrain connu.

Enfin, ce sera le E-algorithme qui sera généralisé au cas des suites multiples. Pour cela nous introduirons la définition d'une sous-suite qui nous permettra d'extraire de toute suite convergente une sous-suite convergente considérée comme suite simple cad ne dépendant que d'un seul indice.

$\delta_{k\ell}^{2}$ de AITKEN

L'idée développée dans ce paragraphe, est une généralisation du Δ^2 de AITKEN construite à l'aide de l'opèrateur $\delta_{k\ell}$. Pour les suites simples, nous avons les résultats suivants :

Si (U_n) est une suite telle qu'il existe deux réels non nuls α_o et α_1 tels que $\alpha_o + \alpha_1 \neq 0$ et

$$\alpha_o (U_n - U) + \alpha_1 (U_{n+1} - U) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

alors la valeur U de la limite de la suite (U_n) est donnée par le rapport de déterminants

$$U = \frac{\begin{vmatrix} U_n & U_{n+1} \\ \Delta U_n & \Delta U_{n+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \Delta U_n & \Delta U_{n+1} \end{vmatrix}}$$

Le $\delta_{k\ell}^{2}$ proposé pour les suites doubles consiste essentiellement à remplacer l'operateur Δ applicable aux suites simples par l'operateur $\delta_{k\ell}$ précédemment défini.

Soit (a_{mn}) une suite double convergente, de limite A. On suppose que cette suite vérifie, pour un couple (k,ℓ) donné, $(k,\ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} - \{(0,0)\}$

$$(E) \quad \begin{cases} \exists\, \alpha_o, \alpha_1 \in \mathbb{R}^* \text{ tels que } \quad \alpha_o + \alpha_1 \neq 0 \text{ et} \\ \alpha_o (a_{mn} - A) + \alpha_1 (a_{m+k,n+\ell} - A) = 0 \qquad \forall m,n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

En écrivant l'équation (E) pour des indices différents, on obtient un système linéaire de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} \alpha_o\,(a_{mn} - A) + \alpha_1\,(a_{m+k,n+\ell} - A) = 0 \\ \alpha_o\,(a_{m+k,n+\ell} - A) + \alpha_1\,(a_{m+2k,n+2\ell} - A) = 0 \end{cases}$$

d'où le calcul de A :

$$A = \frac{\begin{vmatrix} a_{mn} & a_{m+k,n+\ell} \\ a_{m+k,n+\ell} - a_{mn} & a_{m+2k,n+2\ell} - a_{m+k,n+\ell} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_{m+k,n+\ell} - a_{mn} & a_{m+2k,n+2\ell} - a_{m+k,n+\ell} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{mn} & a_{m+k,n+\ell} \\ \delta_{k\ell}(a_{mn}) & \delta_{k\ell}(a_{m+k,n+\ell}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \delta_{k\ell}(a_{mn}) & \delta_{k\ell}(a_{m+k,n+\ell}) \end{vmatrix}}$$

On posera alors, pour une suite qui ne vérifierait pas (E) :

$$e_{k\ell}\,(a_{mn}) = \frac{\begin{vmatrix} a_{mn} & a_{m+k,n+\ell} \\ \delta_{k\ell}(a_{mn}) & \delta_{k\ell}(a_{m+k,n+\ell}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \delta_{k\ell}(a_{mn}) & \delta_{k\ell}(a_{m+k,n+\ell}) \end{vmatrix}}$$

ce qui n'est autre que l'expression de la transformation de AITKEN où l'on a remplacé Δ par $\delta_{k\ell}$, U_n par a_{mn}, U_{n+1} par $a_{m+k,n+\ell}$.

Les théorèmes de convergence sont alors analogues au cas des suites simples.

On supposera dans ce qui suit que $\delta_{k\ell}(a_{mn}) \neq 0 \quad \forall m,n \in \mathbb{N}$

Théorème 1

$$e_{k\ell}(a_{mn}) = a_{mn} - \frac{\delta_{k\ell}(a_{mn})}{\dfrac{\delta_{k\ell}(a_{m+k,n+\ell})}{\delta_{k\ell}(a_{mn})} - 1}$$

Démonstration

$$e_{k\ell}(a_{mn}) = \frac{a_{mn}\,\delta_{k\ell}(a_{m+k,n+\ell}) - a_{m+k,n+\ell}\,\delta_{k\ell}(a_{mn})}{\delta_{k\ell}(a_{m+k,n+\ell}) - \delta_{k\ell}(a_{mn})}$$

$$= \frac{a_{mn}\,\delta_{k\ell}(a_{m+k,n+\ell}) - a_{mn}\,\delta_{k\ell}(a_{mn}) + a_{mn}\,\delta_{k\ell}(a_{mn}) - a_{m+k,n+\ell}\,\delta_{k\ell}(a_{mn})}{\delta_{k\ell}(a_{m+k,n+\ell}) - \delta_{k\ell}(a_{mn})}$$

$$= a_{mn} - \frac{\delta_{k\ell}(a_{mn})\quad\delta_{k\ell}(a_{mn})}{\delta_{k\ell}(a_{m+k,n+\ell}) - \delta_{k\ell}(a_{mn})}$$

$$= a_{mn} - \frac{\delta_{k\ell}(a_{mn})}{\dfrac{\delta_{k\ell}(a_{m+k,n+\ell})}{\delta_{k\ell}(a_{mn})} - 1}$$

La division par $\delta_{k\ell}(a_{mn})$ étant possible puisque l'on a supposé cette quantité jamais nulle.

Théorème 2

Une condition suffisante pour que $e_{k\ell}(a_{mn})$ converge vers la même limite que (a_{mn}) est que :

$$\exists\, \alpha < 1 < \beta \qquad \forall m,n \geq N \qquad \frac{\delta_{k\ell}(a_{m+k,n+\ell})}{\delta_{k\ell}(a_{mn})} \notin [\alpha,\beta]$$

ou que

$$\exists\, \alpha' < 2 < \beta' \qquad \forall m,n \geq N \qquad \frac{\delta_{2k,2\ell}(a_{mn})}{\delta_{k\ell}(a_{mn})} \notin [\alpha',\beta']$$

Démonstration

Si (a_{mn}) est une suite convergente dans $\mathbb{R}$ alors elle vérifie le critère de Cauchy d'où, en particulier, pour k et ℓ fixés.

$$\delta_{k\ell}(a_{mn}) = a_{m+k,n+\ell} - a_{mn} \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$$

Ainsi, si $\dfrac{\delta_{k\ell}(a_{m+k,n+\ell})}{\delta_{k\ell}(a_{mn})} \notin [\alpha,\beta]$, $e_{k\ell}(a_{mn})$ a même limite que (a_{mn}) lorsque m et n tendent vers l'infini.

De plus
$$\begin{aligned}\delta_{k\ell}(a_{m+k,n+\ell}) &= a_{m+2k,n+2\ell} - a_{m+k,n+\ell} \\ &= a_{m+2K,n+2\ell} - a_{mn} + a_{mn} - a_{m+k,n+\ell} \\ &= \delta_{2k,2\ell}(a_{mn}) - \delta_{k\ell}(a_{mn})\end{aligned}$$

d'où $$\frac{\delta_{k\ell}(a_{m+k,n+\ell})}{\delta_{k\ell}(a_{mn})} = \frac{\delta_{2k,2\ell}(a_{mn})}{\delta_{k\ell}(a_{mn})} - 1$$

et $$\frac{\delta_{k\ell}(a_{m+k,n+\ell})}{\delta_{k\ell}(a_{mn})} \notin [\alpha,\beta] \text{ équivaut à } \frac{\delta_{2k,2\ell}(a_{mn})}{\delta_{k\ell}(a_{mn})} \notin [1+\alpha,\ 1+\beta]$$

Théorème 3

Une condition nécessaire et suffisante pour que $e_{k\ell}(a_{mn})$ tende vers la limite que a_{mn}, quand m,n tendent vers l'infini, est que :

$$\frac{\delta_{k\ell}(a_{mn})}{\dfrac{\delta_{k\ell}(a_{m+k,n+\ell})}{\delta_{k\ell}(a_{mn})} - 1} \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0 \quad ; \text{ ou } \quad \frac{\delta_{k\ell}(a_{mn})}{\dfrac{\delta_{2k,2\ell}(a_{mn})}{\delta_{k\ell}(a_{mn})} - 2} \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$$

Ceci découle directement du théorème 1.

Proposition 1

Si la suite (a_{mn}) est telle que $\lim\limits_{m,n} \delta_{k\ell}\left(\dfrac{1}{\delta_{k\ell}\, a_{mn}}\right) = c \neq 0$,

c fini, alors la suite (a_{mn}) ne converge pas dans $\mathbb{C}$.

Démonstration

$$\lim_{m,n} \delta_{k\ell} \left(\frac{1}{\delta_{k\ell}\, a_{mn}} \right) = c \neq 0 \text{ peut encore s'écrire}$$

A partir d'un certain rang n_o

$$\frac{1}{\delta_{k\ell}\, a_{m+k,n+\ell}} = \frac{1}{\delta_{k\ell}\, a_{mn}} + c + \varepsilon_{mn}$$

où (ε_{mn}) est une suite double qui tend vers 0, lorsque m et n tendent vers l'infini.

On peut alors choisir un rang n_1 à partir duquel on ait $|\varepsilon_{mn}| < \frac{|c|}{4}$.

Donc, pour $m \geq n_1$, $n \geq n_1$

$$\frac{1}{\delta_{k\ell}\, a_{m+k,n+\ell}} = \frac{1}{\delta_{k\ell}\, a_{mn}} + c + \varepsilon_{mn}$$

$$\frac{1}{\delta_{k\ell}\, a_{m+2k,n+2\ell}} = \frac{1}{\delta_{k\ell}\, a_{m+k,n+\ell}} + c + \varepsilon_{m+k,n+\ell}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{\delta_{k\ell}\, a_{m+pk,n+p\ell}} = \frac{1}{\delta_{k\ell}\, a_{m+(p-1)k,n+(p-1)\ell}} + c + \varepsilon_{m+(p-1)k,n+(p-1)\ell} \qquad p > 0$$

En sommant ces p équations membre à membre, après simplification

$$\frac{1}{\delta_{k\ell}\, a_{m+pk,n+p\ell}} = \frac{1}{\delta_{k\ell}\, a_{mn}} + pc + \sum_{i=o}^{p-1} \varepsilon_{m+ik,n+i\ell}.$$

Si l'on choisit p tel que $p > \dfrac{4}{|c\ \delta_{k\ell}\, a_{mn}|}$, ce qui est toujours possible, on a alors $\dfrac{1}{|\delta_{k\ell}\, a_{mn}|} < \dfrac{p}{4}\ |c|$

d'où $\left| \dfrac{1}{\delta_{k\ell}\, a_{mn}} + \displaystyle\sum_{i=o}^{p-1} \varepsilon_{m+ik,n+i\ell} \right| < \dfrac{p}{4}\ |c| + p\,\dfrac{|c|}{4}$

ou encore

$$\frac{\left| \dfrac{1}{\delta_{k\ell}\, a_{mn}} + \displaystyle\sum_{i=o}^{p-1} \varepsilon_{m+ik,n+i\ell} \right|}{p\ |c|} < \frac{1}{2}$$

on pose alors

$$Z = \frac{\dfrac{1}{\delta_{k\ell}\, a_{mn}} + pc + \sum_{i=o}^{p-1} \varepsilon_{m+ik,n+i\ell}}{pc} = \frac{\dfrac{1}{\delta_{k\ell}\, a_{mn}} + \sum_{i=o}^{p-1} \varepsilon_{m+ik,n+i\ell}}{pc} + 1$$

D'après ce qui précéde, $|Z - 1| < \frac{1}{2}$ $Z \in \mathcal{D}isque\ (1,\frac{1}{2})$ ou encore $\frac{1}{Z} \in \mathcal{D}isque\ (\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ donc $\mathcal{R}_e\ (\frac{1}{Z}) \geq \frac{2}{3}$

$$\frac{\mathcal{R}_e\ (\frac{1}{Z})}{p} \geq \frac{2}{3p} \quad \text{or} \quad \frac{\mathcal{R}_e\ (\frac{1}{Z})}{p} = \frac{\mathcal{R}_e\ (\delta_{k\ell}\, a_{m+pk,n+p\ell} \times pc)}{p}$$

d'où $\mathcal{R}_e\ (\delta_{k\ell}\, a_{m+pk,n+p\ell}) \geq \dfrac{2}{3\ pc}$.

Par suite $|a_{m+(p+1)k,n+(p+1)\ell} - a_{m+pk,n+p\ell}| \geq \dfrac{2}{3\ pc}$

donc la suite (a_{mn}) ne vérifie pas le critère de Cauchy et donc ne converge pas.

Proposition 2

Si (a_{mn}) et $(e_{k\ell}\ (a_{mn}))$ convergent dans $\mathbb{C}$, alors ces deux suites ont même limite.

Démonstration

Supposons que (a_{mn}) converge vers A et que $(e_{k\ell}(a_{mn}))$ converge vers une limite différente de A.

$$e_{k\ell}(a_{mn}) = a_{m+k,n+\ell} + \frac{1}{\delta_{k\ell}\left(\dfrac{1}{\delta_{k\ell}\, a_{mn}}\right)}$$

Si l'on fait tendre m et n vers l'infini, il reste

$$\lim_{m,n} \frac{1}{\delta_{k\ell}\left(\dfrac{1}{\delta_{k\ell}\, a_{mn}}\right)} = M \neq 0$$

ou encore $\lim\limits_{m,n} \delta_{k\ell}\left(\dfrac{1}{\delta_{k\ell}\, a_{mn}}\right) = \dfrac{1}{M} = c \neq 0$

or d'après la proposition 1, ceci implique que (a_{mn}) ne converge pas, d'où la contradiction.

Autrement dit : si le procédé $\delta_{k\ell}^2$ transforme une suite convergente dans $\mathbb{C}$ en une suite qui converge dans $\mathbb{C}$, alors ces deux suites ont même limite.

TRANSFORMATION DE SHANKS

Le procédé Δ^2 de AITKEN a été généralisé par SHANKS. La transformation obtenue a le grand avantage d'être calculable à l'aide d'un algorithme : le ε-algorithme.

L'étude de ce paragraphe concerne des généralisations de cette transformation aux suites doubles. Après des rappels sur les travaux, effectués à ce sujet, par LEVIN [13] puis ALBERTSEN, JACOBSEN et SØRENSEN [1], nous proposerons une généralisation construite à partir de l'opérateur $\delta_{k\ell}$.

La première partie du travail de LEVIN [13] a pour but de trouver une approximation de $\Omega = \sum_{i,j=o}^{\infty} a_{ij}$. Dans un premier temps, il rappelle les résultats sur les suites simples :

Soit $S = \sum_{j=o}^{\infty} a_j$ dont les suites partielles seront $A_i = \sum_{j=o}^{i} a_j$.

On suppose que ces sommes peuvent s'écrire sous la forme

$$A_i = S + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \, a_{i+k} \quad \forall i \in \mathbb{N} \qquad (1).$$

Alors, en écrivant la relation (1) pour i variant de m à m + n, on obtient un système linéaire de n + 1 équations à n + 1 inconnues : $S, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$. La résolution de ce système linéaire donne alors la valeur de S. On montre si pour tout i, A_i vérifie (1), que l'on a $S = e_m(A_{mn})$ où $e_n(A_m)$ est la valeur obtenue par le ε-algorithme.

La généralisation aux suites doubles se fait alors de la façon suivante [13] :

Soit $\Omega = \sum_{i,j=o}^{\infty} a_{ij}$, on note $A_{mn} = \Omega - \sum_{(i,j)\in I - I_{mn}} a_{ij}$

avec $I = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et I_{mn} l'ensemble d'indices de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ qui dépend de m et n

et tel que $A_{mn} = \sum_{(i,j)\in I_{mn}} a_{ij}$.

On suppose que les A_{mn} vérifient :

$$(S.L)\quad \left\{\begin{array}{ll} A_{mn} = \Omega + \sum_{(i,j)\in R} \beta_{ij}\, a_{m+i,n+j} & (1') \\ \forall m,n \in \mathbb{N} \quad ; \quad (m,n) \in S \quad ; \quad \text{Cardinal } (S) = r + 1 & \\ \text{et } R \text{ tel que pour } (i,j) \in R \quad (m+i,n+j) \in I - I_{mn} & \\ \text{et Cardinal } (R) = r \quad (r \text{ fini}) & \end{array}\right.$$

Si l'on écrit (1') pour $(m,n) \in S$ où $S \subset I$ et tel que Cardinal $(S) = r+1$, on obtient un système linéaire de $r + 1$ équations à $r + 1$ inconnues : Ω, β_{ij} $(i,j) \in R$. Si elle existe, la solution du système linéaire donnera la valeur de Ω.

A partir de cette généralisation, LEVIN aborde le problème du choix des ensemble I_{mn}, R et S.

Les suites partielles A_{mn} ont déjà été décrites au paragraphe $\delta_{k\ell}$ et sont définies par

$$A_{mn} = \sum_{(i,j)\in I_{mn}} a_{ij} \qquad \text{avec } I_{mn} = \{(i,j)\in \mathbb{N}^2 \mid i < m \text{ ou } j < n\}$$

Levin démontre que, si S et un ensemble d'indices "sans trou" cad tel que $(k,\ell) \in S \Longrightarrow \{(i,j) \mid i \leq k \text{ ou } j \leq \ell\} \subset S$

Si R est un ensemble d'indices tel que R ait s - 1 éléments avec s le nombre d'éléments de S, alors la solution du système linéaire (S•L), si elle existe, donne la valeur exacte de Ω pour toute suite convergente dont les termes satisfont la relation

$$a_{ij} = \sum_{(k,\ell)\in T} \alpha_{k\ell} \quad \delta_{10}^{\;k} \quad \delta_{01}^{\;\ell} \quad a_{ij} \qquad \forall i,j$$

Cette généralisation conporte cependant quelques inconvénients. Le premier est le choix des A_{mn} qui nécessite pour chacun d'eux le calcul d'une infinité de termes. Enfin LEVIN ne propose pas d'algorithme pour évaluer la solution de (S.L).

Une seconde généralisation aux suites multiples de la transformation de SHANKS est proposée par les danois ALBERTSEN, JACOBSEN, SØRENSEN [1]. Nous la présentons brièvement.

Soit (A_{mn}) une suite double telle que

$$a_{mn} = A + \sum_{t=1}^{k} C_t \quad q_t^{\;m} \quad p_t^{\;n} \qquad\qquad q_t, p_t \neq o \text{ et } (p_t, q_t) \neq (1,1)$$

on pose $r_{mn} = a_{mn} - A = \sum_{t=1}^{k} C_t \; q_t^{\;m} \; p_t^{\;n}$.

Pour tout couple d'indices (m,n) il existe des coefficients non tous nuls tels que

$$\sum_{(i,j)\in D} \gamma_{ij} \quad r_{m+i,n+j} = 0 \qquad \text{avec Card (D)} = k + 1$$

En effet, si l'on remplace $r_{m+i,n+j}$ par sa valeur, on obtient :

$$\sum_{(i,j)\in D} \gamma_{ij} \sum_{t=1}^{k} C_t \, q_t^{m+i} \, p_t^{n+j} = \sum_{t=1}^{k} C_t \, q_t^{m} \, p_t^{n} \sum_{(i,j)\in D} \gamma_{ij} \, q_t^{i} \, p_t^{j} = 0.$$

Il suffit donc de choisir les γ_{ij} comme solutions non triviales du système linéaire

$$\sum_{(i,j)\in D} \gamma_{ij} \, q_t^{i} \, p_t^{j} = 0 \qquad t = 1,\ldots\ldots, k$$

Ce qui est possible puisque ce système linéaire posséde k équations et $k + 1$ inconnues. Puis, on peut ordonner l'ensemble d'indices D par deux fonctions ω_1 et ω_2 en posant $D = \{(\omega_1(i), \omega_2(i)) \quad i = 1,\ldots, k + 1\}$

$$\sum_{(i,j)\in D} \gamma_{ij} \, r_{m+i,n+j} = 0 \text{ s'écrit alors } \sum_{j=1}^{k+1} \gamma_{\omega_1(j),\omega_2(j)} \, r_{m+\omega_1(j),n+\omega_2(j)} = 0$$

ou encore $$\sum_{j=1}^{k+1} \gamma_{\omega_1(j),\omega_2(j)} \, (a_{m+\omega_1(j),\, n+\omega_2(j)} - A) = 0 \qquad (E).$$

Si l'on écrit la relation (E) pour tout couple d'indices $(m,n) \in I$ où

$$I = \{(\phi_1(i), \phi_2(i)) \quad i = 1,\ldots, k + 1\}$$

on peut alors écrire

$$(S.L)' \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \gamma\, \omega_1(j), \omega_2(j) \quad (a_{\phi_1(i)+\omega_1(j),\phi_2(i)+\omega_2(j)} - A) = 0 \\[2ex] i = 1,\ldots, k + 1 \end{array} \right.$$

qui est un système linéaire à k+1 équations.

Enfin, si l'on note $\begin{cases} V_{ij} = a_{\phi_1(i)+\omega_1(j),\phi_2(i)+\omega_2(j)} \\ \delta_{10}\ V_{ij} = V_{i+1,j} - V_{ij} \end{cases}$

A est donné par le rapport de déterminants

$$A = \frac{\begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1,k+1} \\ \delta_{10}\ V_{11} & \delta_{10}\ V_{12} & \cdots & \delta_{10}\ V_{1,k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{10}\ V_{k1} & \delta_{10}\ V_{k2} & & \delta_{10}\ V_{k,k+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \delta_{10}\ V_{11} & \delta_{10}\ V_{12} & \cdots & \delta_{10}\ V_{1,k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{10}\ V_{k1} & \delta_{10}\ V_{k2} & & \delta_{10}\ V_{k,k+1} \end{vmatrix}}$$

Ici encore le ε-algorithme n'est pas applicable puisqu'il faudrait que l'on ait $V_{12} - V_{11} = \delta_{10}\ V_{11} = V_{21} - V_{11}$ ce qui, de façon générale, n'est pas vérifié.

Cependant, le E-algorithme permet une mise en oeuvre du calcul de A. En effet, pour reprendre les notation de BREZINSKI [3], si l'on écrit

$$E_k(S_1) = \frac{\begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{k+1} \\ g_1(1) & g_1(2) & \dots & g_1(k+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_k(1) & g_k(2) & \dots & g_k(k+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ g_1(1) & g_1(2) & \dots & g_1(k+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_k(1) & g_k(2) & & g_k(k+1) \end{vmatrix}}$$

on constate, par analogie, qu'il suffit de poser
$S_1 = V_{1,i} = a_{\varphi_1(1)+\omega_1(i),\varphi_2(1)+\omega_2(i)}$ et $g_i(j) = \delta_{10}\, V_{ij} = V_{i+1,j} - V_{ij}$.

Nous proposons, dans ce qui suit, une généralisation de la transformation de SHANKS construite à l'aide de l'opérateur $\delta_{k\ell}$. Cette transformation permettra de ramener les suites doubles à des suites simples et donc le ε-algorithme deviendra applicable.

Soit (a_{mn}) une suite double convergente de limite A. Si il existe des nombres réels $\alpha_o, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$ tels que $\sum_{i=o}^{r} \alpha_i \neq 0$ et si $\exists$ k,ℓ tels que

$$\forall m,n \qquad \sum_{i=o}^{r} \alpha_i \,(a_{m+ik,n+i\ell} - A) = 0 \qquad (E_i)$$

alors, en écrivant la relation (E_i) en remplaçant m et n par m+k et n+ℓ, puis par m+2k, n+2ℓ, ..., jusqu'à ce que l'on ait r+1 équations

$$\alpha_o\,(a_{mn} - A) + \alpha_1\,(a_{m+k,n+\ell} - A) + \ldots + \alpha_r\,(a_{m+rk,n+r\ell} - A) = 0$$

$$\alpha_o\,(a_{m+k,n+\ell} - A) + \alpha_1\,(a_{m+2k,n+2\ell} - A) + \ldots + \alpha_r\,(a_{m+(r+1)k,n+(r+1)\ell} - A) = 0$$

$$\vdots$$

$$\alpha_o\,(a_{m+rk,n+r\ell} - A) + \alpha_1\,(a_{m+(r+1)k,n+(r+1)\ell} - A) + \ldots + \alpha_r\,(a_{m+2rk,n+2r\ell} - A) = 0$$

On laisse inchangée la première équation, puis à chaque autre équation, on retranche la précédente. On obtient :

$$\alpha_o\,(a_{mn} - A) + \alpha_1\,(a_{m+k,n+\ell} - A) + \ldots + \alpha_r\,(a_{m+rk,n+r\ell} - A) = 0$$

$$\alpha_o\,(a_{m+k,n+\ell} - a_{mn}) + \alpha_1\,(a_{m+2k,n+2\ell} - a_{m+k,n+\ell}) + \ldots + \alpha_r\,(a_{m+(r+1)k,n+(r+1)\ell} - a_{m+rk,n+r\ell}) = 0$$

$$\vdots$$

$$\alpha_o\,(a_{m+rk,n+r\ell} - a_{m+(r-1)k,n+(r-1)\ell}) + \ldots + \alpha_r\,(a_{m+2rk,n+2r\ell} - a_{m+(2r-1)k,n+(2r-1)\ell}) = 0$$

La résolution de ce système linéaire à r + 1 équations et r + 1 inconnues donne alors pour la valeur de A le rapport de déterminants

$$A = \frac{\begin{vmatrix} a_{mn} & a_{m+k,n+\ell} & \cdots & a_{m+rk,n+r\ell} \\ \delta_{k\ell}\, a_{mn} & \delta_{k\ell}\, a_{m+k,n+\ell} & \cdots & \delta_{k\ell}\, a_{m+rk,n+r\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{k\ell}\, a_{m+(r-1)k,n+(r-1)\ell} & & \cdots & \delta_{k\ell}\, a_{m+(2r-1)k,n+(2r-1)\ell} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ \delta_{k\ell}\, a_{mn} & \delta_{k\ell}\, a_{m+k,n+\ell} & \cdots & \delta_{k\ell}\, a_{m+rk,n+r\ell} \\ \vdots & \vdots & & \\ \delta_{k\ell}\, a_{m+(r-1)k,n+(r-1)\ell} & & \cdots & \delta_{k\ell}\, a_{m+(2r-1)k,n+(2r-1)\ell} \end{vmatrix}}$$

En fait, tout se passe comme si, au lieu d'étudier la limite de la suite double (a_{mn}) lorsque m et n tendent vers l'infini, on étudiait la suite simple $(a_{m+ik,n+i\ell})_i$ qui, si (a_{mn}) converge vers A, a pour limite A.

En effet, posons $u_i = a_{m+ik,n+i\ell}$

alors
$$\begin{aligned} \delta_{k\ell}\, a_{m+ik,n+i\ell} &= a_{m+(i+1)k,n+(i+1)\ell} - a_{m+ik,n+i\ell} \\ &= u_{i+1} - u_i \\ &= \Delta\, u_i \end{aligned}$$

Avec cette nouvelle écriture, A devient :

$$A = \frac{\begin{vmatrix} u_o & u_1 & \cdots & u_r \\ \Delta u_o & \Delta u_1 & \cdots & \Delta u_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta u_{r-1} & \Delta u_r & \cdots & \Delta u_{2r-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \Delta u_o & \Delta u_1 & \cdots & \Delta u_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta u_{r-1} & \Delta u_r & & \Delta u_{2r-1} \end{vmatrix}}$$

Pour une suite qui ne vérifierait pas la relation (E_i), une approximation de A sera donnée par le calcul du rapport du déterminant précédent. Le ε-algorithme devient applicable puisqu 'on est ramené à une expression de suite simple.

E-ALGORITHME

Cette partie a pour but de généraliser le E-algorithme de BREZINSKI [3]et HAVIE [8]. Pour cela nous introduisons une définition formelle d'une suite extraite $(A_{\omega(i)})_{i\in \mathbb{N}}$ d'une suite multiple $(A_{\underline{m}})_{\underline{m}\in \mathbb{N}^n}$. C'est à cette sous-suite $(A_{\omega(i)})$ que nous appliquerons le E-algorithme, elle aura en effet l'avantage de pouvoir être considérée comme suite dépendant du seul indice i donc comme suite simple. Sous de telles hypothèses, les résultats sur le E-algorithme seront conservés. Nous les rappelerons puis examinerons des cas particuliers. afin de retrouver les transformations déjà exposées. Enfin des exemples numériques illustreront les résultats théoriques.

Soit (A_{mn}) une suite réelle double supposée convergente vers A ; $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Si il existe k nombres réels $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tels que

$$(E) \quad A_{mn} = A + a_1 g_1 (m,n) + a_2 g_2 (m,n) + \ldots + a_k g_k (m,n)$$

pour tout couple $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, avec g_i des fonctions données de deux variables, alors A peut être calculé par la résolution du système.

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} A_{m+i,n+j} = A + a_1 g_1 (m+i,n+j) + \ldots + a_k g_k (m+i,n+j) \\ \text{où} \quad (m+i,n+j) \in I \text{ avec } I \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ et } \mathrm{Card}(I) = k + 1 \end{cases}$$

les éléments de I étant en nombre fini égal à k + 1, il existe une bijection de I vers $\{1, 2, 3, \ldots, k + 1\}$. Soit ω cette bijection. On notera par la suite le couple $\omega(i)$, élément de I, pour i variant de 1 à k + 1, par $(\omega_1(i), \omega_2(i))$. Ainsi I pourra se noter $I = \{(\omega_1(i), \omega_2(i)) | \ i = 1, 2, \ldots, k + 1\}$ le système (Σ) peut alors s'écrire

$$\begin{cases} A_{\omega_1(i), \omega_2(i)} = A + a_1 g_1 (\omega_1(i), \omega_2(i)) + \ldots + a_k g_k (\omega_1(i),\omega_2(i)) \\ i = 1, \ldots, k + 1 \end{cases}$$

Par un souci d'allégement d'écriture, nous introduisons ici des notations valables pour des suites multiples. Les résultats concerneront le cas le plus général.

Soit $(A_{\underline{m}})$ une suite multiple où l'indice $\underline{m}$ sera le n-uple $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ et un ensemble de fonctions g_i de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, telles qu'il existe k nombres réels $a_1, a_2, \ldots, a_k$ qui vérifient

$$(\underline{E}) \quad A_{\underline{m}} = A + a_1 g_1 (\underline{m}) + a_2 g_2 (\underline{m}) + \ldots + a_k g_k (\underline{m})$$

pour tout $\underline{m}$ de $\mathbb{N}^n$.

Si $\underline{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ et si l'addition de deux $\underline{m}$ et $\underline{i}$ et définie par

$$\underline{m} + \underline{i} = (m_1 + i_1, m_2 + i_2, \ldots, m_n + i_n)$$

alors la valeur de A , limite de $(A_{\underline{m}})$ peut être obtenue par le résolution du système linéaire

$$(\Sigma) \begin{cases} A_{\underline{m}+\underline{i}} = A + a_1 g_1 (\underline{m} + \underline{i}) + a_2 g_2 (\underline{m} + \underline{i}) + \ldots + a_k g_k (\underline{m} + \underline{i}) \\ \underline{m} + \underline{i} \in J \ , \ J \subset \mathbb{N}^n \text{ et } \mathcal{C}ard\ (J) = k + 1 \end{cases}$$

le cardinal de J étant égal à k + 1, il existe une bijection, que l'on notera $\underline{\omega}$, entre J et $\{1, 2, \ldots, k + 1\}$. J pourra alors se noter

$$J = \{ \underline{\omega}\ (i) \mid i = 1, \ldots k + 1\}$$

Sous cette condition, $(\underline{\Sigma})$ s'écrit alors

$$\begin{cases} A_{\underline{\omega}(i)} = A + a_1 g_1 (\underline{\omega}\ (i)) + a_2 g_2 (\underline{\omega}\ (i)) + \ldots + a_k g_k (\underline{\omega}\ (i)) \\ i = 1, \ldots, k + 1 \end{cases}$$

Et pour toute suite double qui vérifie $(\underline{E})$, A est donné par le calcul d'un rapport de déterminants, et pour toute suite qui ne vérifierait pas $(\underline{E})$, on posera

$$E_k(A\,\underline{\omega}(1)) = \frac{\begin{vmatrix} A_{\underline{\omega}(1)} & A_{\underline{\omega}(2)} & \cdots\cdots & A_{\underline{\omega}(k+1)} \\ g_1(\underline{\omega}\,(1)) & g_1(\underline{\omega}\,(2)) & \cdots\cdots & g_1(\underline{\omega}\,(k+1)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_k(\underline{\omega}\,(1)) & g_k(\underline{\omega}\,(2)) & \cdots\cdots & g_k(\underline{\omega}\,(k+1)) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ g_1(\underline{\omega}\,(1)) & g_1(\underline{\omega}\,(2)) & \cdots\cdots & g_1(\underline{\omega}\,(k+1)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_k(\underline{\omega}\,(1)) & g_k(\underline{\omega}\,(2)) & \cdots\cdots & g_k(\underline{\omega}\,(k+1)) \end{vmatrix}}$$

Avant de poursuivre la généralisation du E-algorithme, il faut remarquer que jusqu'à présent $\underline{\omega}$ a été choisi comme bijection d'un ensemble d'indices $J \subset \mathbb{N}^n$ tel que Card $J = k+1$ vers l'ensemble $\{1,\ldots, k+1\}$.
Ce que nous voudrions présenter ici est une généralisation qui ne se bornerait pas à un tel ensemble J, mais resterait valable pour un ensemble infini d'indices de $\mathbb{N}^n$. Ainsi il nous faut étendre l'ensemble de définition de $\underline{\omega}$. Par suite, tout se passera comme si une suite $(A_{\underline{n}})$ était ramenée à une suite $(A'_{\underline{\omega}(i)})$ $i = 1, 2, \ldots$ qui pourra être considérée comme suite du seul indice i.

Auparavant, regardons ce qu'il se passe sur des suites simples. Supposons une suite (u_n) qui converge vers u. Transformer cette suite (u_n) en une suite $(v_{f(n)})$ revient à considérer une suite extraite. Autrement dit, on se donne une injection f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que si n a pour image p, alors $u_n = v_{f(n)} = v_p$. Dans cette construction, on exige de f qu'elle conserve l'ordre des termes c-à-d si deux éléments v_p et $v_{p'}$ sont tels que $p > p'$ alors $n > n'$. f étant injective, l'existence de n et n' est assurée et on a $p = f(n)$ et $p' = f(n')$. Cette conservation de l'ordre garantira que si n tend vers l'infini et si n possède une image p par f, alors p tend aussi vers l'infini.

A partir de cette définition, rappelons les résultats suivants [11] :

(1) Si (u_n) converge vers u, alors toute suite extraite de (u_n) converge aussi vers u.

(2) Si (u_n) converge vers u et si (u'_n) est un réarrangement de (u_n) alors (u'_n) tend aussi vers u.
Un réarrangement étant une re-numérotation de (u_n)

(3) Si (u_n) converge vers u et si (k_n) est une suite d'entiers positifs, notons la suite (v_n) la suite $(u_0, u_0, \ldots, u_0, u_1, u_1, \ldots, u_1, u_2, u_2, \ldots$ où u_0 est pris k_0 fois, u_1 est pris k_1 fois,..., u_n est pris k_n fois. Alors (v_n) tend vers u.

Considérons maintenant la suite réelle $(A_{\underline{m}})$ où $\underline{m} \in \mathbb{N}^n$. La donnée d'une telle suite équivaut à la donnée d'une application de $\mathbb{N}^n$ dans $\mathbb{R}$. Extraire une sous-suite de $(A_{\underline{m}})$ revient à se donner $\underline{\omega}$ une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^n$.

On pourra noter : $\mathbb{N} \xrightarrow{\underline{\omega}} \mathbb{N}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}$

$$i \longrightarrow \underline{\omega}(i) = \underline{m} \longrightarrow A_{\underline{\omega}(i)} = A_{\underline{m}}$$

$\underline{\omega}$ est une application injective puisque d'une part tout élément de l'ensemble de départ a une image et une seule dans $\mathbb{N}^n$ et d'autre part tout élément de $\mathbb{N}^n$ a au plus un antécédent dans $\mathbb{N}$.

Rappels et notations

- On notera, dans $\mathbb{N}$, un voisinage de l'infini, tout intervalle pouvant s'écrire sous la forme $\mathcal{K} = \{i \in \mathbb{N} \mid i \geq K \quad K \in \mathbb{N}\} = [K, +\infty[\cap \mathbb{N}$.

- On notera, dans $\mathbb{N}^n$, un voisinage de l'infini, tout intervalle pouvant s'écrire sous la forme $\mathcal{J} = \{\underline{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n \mid m_p > J \quad J \in \mathbb{N} \quad p = 1, \ldots, n\}$

ou $\mathcal{J} = ([J, +\infty[\cap \mathbb{N})^n$

- L'ensemble des voisinages de l'infini dans $\mathbb{N}$ sera noté V_∞

- L'ensemble des voisinages de l'infini dans $\mathbb{N}^n$ sera noté $\underline{V_\infty}$

- $\underline{\omega}$ est continue en ∞ ssi

$$\forall J \in \underline{V_\infty} \ \exists K \in V_\infty \quad \forall i \in K \Rightarrow \underline{\omega}(i) \in J$$

Définition :

On appelera sous-suite d'une suite $(A_{\underline{m}})_{\underline{m} \in \mathbb{N}^n}$, la suite $(A_{\underline{\omega}(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ où $\underline{\omega}$ est une application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^n$ telle que $\underline{\omega}$ soit continue en l'∞.

Théorème :

Soit $(A_{\underline{\omega}(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ une sous-suite d'une suite réelle $(A_{\underline{m}})_{\underline{m} \in \mathbb{N}^n}$.

La convergence de $(A_{\underline{m}})$ entraîne la convergence de $(A_{\underline{\omega}(i)})$.

Démonstration :

Supposons que $(A_{\underline{m}})$ converge vers A.

On voudrait montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists K \in \mathbb{N} \qquad \forall i \geq K \qquad |A_{\underline{\omega}(i)} - A| < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists J_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m_p \geq J_0 \quad p = 1,\ldots, n \quad \underline{m} = (m_1,\ldots, m_p)$

$$|A_{\underline{m}} - A| < \varepsilon \qquad \text{puis } (A_{\underline{m}}) \text{ tend vers A.}$$

Autrement dit, pour cet ε, $\exists J_0 \in \underline{V_\infty} \quad \forall \underline{m} \in J_0 \quad |A_{\underline{m}} - A| < \varepsilon$

Or $\underline{\omega}$ est continue en ∞ par hypothèse donc

$$\exists K_0 \in V_\infty \quad \forall i \in K_0 \Rightarrow \underline{\omega}(i) \in J_0$$

d'où pour tout i de K_0 $|A_{\underline{\omega}(i)} - A| < \varepsilon$

Si $K_0 \in V_\infty$, $K_0 = [K_0, +\infty[$, il suffit donc de choisir $K = K_0$.

Remarques :

L'intérêt de la définition donnée plus haut d'une suite extraite d'une suite double est d'assurer la convergence de la sous-suite si la suite d'origine converge. Alors les deux suites ont même limite.

La seconde remarque est que si $(A_{\underline{\omega}(i)})$ est une sous-suite de $(A_{\underline{m}})$ alors on peut considérer comme suite simple $(A_{\underline{\omega}(i)})$ puisqu'elle ne dépend que du seul indice $i \in \mathbb{N}$.

Généralisation du E-algorithme

Soit $(A_{\underline{m}})_{\underline{m} \in \mathbb{N}^n}$ une suite multiple réelle qui converge vers A.

Soit $(A_{\underline{\omega}(i)})_{i \in \mathbb{N}^*}$ une sous-suite de $(A_{\underline{m}})$

Le E-algorithme généralisé est défini de la manière suivante :

$$E_0^{(i)} = A_{\underline{\omega}(i)} \qquad i = 1, 2, \ldots$$

$$g_{0,\ell}^{(i)} = g_\ell(\underline{\omega}(i)) \qquad i = 1, 2, \ldots \quad \ell = 1, 2, \ldots$$

et pour k = 1, 2,...
i = 1, 2,...
ℓ = 1, 2,...

$$E_k^{(i)} = \frac{E_{k-1}^{(i)} \times g_{k-1,k}^{(i+1)} - E_{k-1}^{(i+1)} \times g_{k-1,k}^{(i)}}{g_{k-1,k}^{(i+1)} - g_{k-1,k}^{(i)}}$$

et

$$g_{k,j}^{(i)} = \frac{g_{k-1,j}^{(i)} \times g_{k-1,k}^{(i+1)} - g_{k-1,j}^{(i+1)} \times g_{k-1,k}^{(i)}}{g_{k-1,k}^{(i+1)} - g_{k-1,k}^{(i)}}$$

Théorème 1 :

$$E_k^{(i)} = E_k(A_{\underline{\omega}(i)})$$

où $$E_k(A\ \underline{\omega}(i)) = \frac{\begin{vmatrix} A_{\underline{\omega}(i)} & A_{\underline{\omega}(i+1)} & \cdots\cdots & A_{\underline{\omega}(i+k)} \\ g_1(\underline{\omega}(i)) & g_1(\underline{\omega}(i+1)) & \cdots\cdots & g_1(\underline{\omega}(i+k)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_k(\underline{\omega}(i)) & g_k(\underline{\omega}(i+1)) & \cdots\cdots & g_k(\underline{\omega}(i+k)) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ g_1(\underline{\omega}(i)) & g_1(\underline{\omega}(i+1)) & \cdots\cdots & g_1(\underline{\omega}(i+k)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_k(\underline{\omega}(i)) & g_k(\underline{\omega}(i+1)) & \cdots\cdots & g_k(\underline{\omega}(i+k)) \end{vmatrix}}$$

Puisque $(A_{\underline{\omega}(i)})$ est une suite qui dépend d'un indice, les démonstrations seront identiques à celles du E-algorithme défini pour des suites simples [3]. Nous ne les présenterons donc pas ici.
Nous nous contenterons de rappeler les propriétés et les théorèmes de convergence [3].

Théorème 2 :

Si $A_{\underline{\omega}(i)} = A + a_1\ g_1(\underline{\omega}(i)) + a_2\ g_2(\underline{\omega}(i)) + \ldots \quad \forall i$

alors $E_k(A_{\underline{\omega}(i)}) = A + a_{k+1}\ g_{k,k+1}^{(i)} + a_{k+2}\ g_{k,k+2}^{(i)} + \ldots \quad \forall k,\ \forall i$

Résultats de convergence [3]

Théorème 3 :

Si $\lim\limits_{i\to\infty} E_{k-1}(A_{\underline{\omega}(i)}) = A$ et si il existe deux réels α et β tels que

$0 < \alpha < 1 < \beta$ et $g_{k-1,k}^{(i+1)}/g_{k-1,k}^{(i)} \in [\alpha, \beta] \quad \forall i \in \mathbb{N}$

alors $\lim\limits_{i\to\infty} E_k(A_{\underline{\omega}(i)}) = A$

Théorème 4 :

Si $\lim\limits_{i\to\infty} A_{\underline{\omega}(i)} = A$ et si $\lim\limits_{i\to\infty} g_\ell(\underline{\omega}(i+1))/g_\ell(\underline{\omega}(i)) = b_\ell \neq 1 \quad \forall \ell$

si $b_\ell \neq b_k \quad \forall \ell \neq k$

alors $\lim\limits_{i\to\infty} E_k(A_{\underline{\omega}(i)} = A \quad \forall k$

Théorème 5 :

Sous les hypothèses du théorème 4, si $\lim\limits_{i\to\infty} E_{k-1}(A_{\underline{\omega}(i+1)} - A)/E_{k-1}(A_{\underline{\omega}(i)} - A)$

$= b_k$

alors $E_k(A_{\underline{\omega}(i)}) - A = o(E_{k-1}(A_{\underline{\omega}(i)}) - A)$.

Théorème 6 :

Sous les hypothèses du théorème 4, si $g_{\ell+1}(\underline{\omega}(i)) = o(g_\ell(\underline{\omega}(i))) \; \forall \ell$

et si $A_{\underline{\omega}(i)} = A + a_1\, g_1(\underline{\omega}(i)) + a_2\, g_2(\underline{\omega}(i)) + \ldots$ alors

$E_k(A_{\underline{\omega}(i)}) - A = o(E_{k-1}(A_{\underline{\omega}(i)} - A)) \; \forall k$

Applications

1. L'algorithme de SHANKS qui donne la valeur exacte de la limite A de toute suite $(A_{\underline{m}})$ vérifiant

$$(1)\quad \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i (A_{\underline{\omega}(j)} - A) = 0 \quad \forall i$$

est obtenu en posant $g_i(\underline{\omega}(j)) = \Delta A_{\underline{\omega}(i+j-1)} = A_{\underline{\omega}(i+j)} - A_{\underline{\omega}(i+j-1)}$.

En effet, pour toute suite vérifiant (1), A est donné par le rapport

$$A = \frac{\begin{vmatrix} A_{\underline{\omega}(1)} & A_{\underline{\omega}(2)} & \cdots\cdots & A_{\underline{\omega}(k+1)} \\ \Delta A_{\underline{\omega}(1)} & \Delta A_{\underline{\omega}(2)} & \cdots\cdots & \Delta A_{\underline{\omega}(k+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta A_{\underline{\omega}(k)} & \Delta A_{\underline{\omega}(k+1)} & \cdots\cdots & \Delta A_{\underline{\omega}(2k+1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ \Delta A_{\underline{\omega}(1)} & \Delta A_{\underline{\omega}(2)} & & \Delta A_{\underline{\omega}(k+1)} \\ & & & \\ \Delta A_{\underline{\omega}(k)} & \Delta A_{\underline{\omega}(k+1)} & & \Delta A_{\underline{\omega}(2k+1)} \end{vmatrix}}$$

2. Soit $\underline{\phi}$ une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^n$.
On pose $K = \{\underline{\phi}(i) \mid i = 1,\ldots, k\}$ et $g_\ell(\underline{\omega}(i)) = a_{\underline{\omega}(i)+\underline{\phi}(\ell)}$

Alors le E-algorithme généralisé donne la valeur exacte de la limite, si elle existe, de toute série qui vérifie

$$A_{\underline{\omega}(i)} = A + \sum_{\ell=1}^{k} \alpha_\ell \, a_{\underline{\omega}(i)+\underline{\phi}(\ell)}$$

où $(A_{\underline{\omega}(i)})$, est la suite des sommes partielles et $a_{\underline{\omega}(i)+\underline{\phi}(\ell)}$ le terme général de la série. On retrouve ainsi la généralisation de la transformation de SHANKS proposée par LEVIN [13].

3. La transformation de ALBERTSEN, JACOBSEN, SØRENSEN [1] qui est exacte pour toute suite vérifiant

$$\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j (A_{\underline{\phi}(i)+\underline{\omega}(j)} - A) = 0 \qquad \forall i$$

est donnée par le calcul de $E_k(A_{\underline{\phi}(1)+\underline{\omega}(1)})$ en posant

$$g_\ell(\underline{\omega}(i)) = A_{\underline{\phi}(\ell+1)+\underline{\omega}(i)} - A_{\underline{\phi}(\ell)+\underline{\omega}(i)}$$

Exemples numériques

Posons $g_\ell(\underline{\omega}(i)) = a_{m+i,n+\ell}$

d'après le théorème 4, il suffit que $\lim\limits_{i\to\infty} g_\ell(\underline{\omega}(i+1))/g_\ell(\underline{\omega}(i)) = b_\ell$ pour que le E-algorithme ait même limite que A_{mn}

c-à-d : $\lim\limits_{i\to\infty} \dfrac{a_{m+i+1,n+\ell}}{a_{m+i,n+\ell}} = b_\ell \neq 1 \quad b_\ell \neq b_k \quad \ell \neq k$

1. Soit la série de terme général $a_{mn} = \dfrac{1}{(p+n+1)^{m+1}}$.

Cette série a pour limite $\dfrac{1}{p+1}$ [10]

d'autre part $\dfrac{a_{m+i+1,n+\ell}}{a_{m+i,n+\ell}} = \dfrac{1}{p+n+\ell+1} = b_\ell \neq 1$ et $b_\ell \neq b_k$ si $\ell \neq k$

donc le E-algorithme généralisé donnera une approximation de $A = \dfrac{1}{p+1}$.

2. Soit la série de terme général $a_{ij} = \dfrac{1}{(4j-2)^{2i}}$.

Cette série a pour somme $\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{2}$ Log 2 [10].

et $\dfrac{a_{m+i+1,n+\ell}}{a_{m+i,n+\ell}} = \dfrac{1}{4(2n+2\ell-1)^2} = b_\ell \neq 1$ et $b_\ell \neq b_k$ si $\ell \neq k$.

CHAPITRE V

NOUVELLE TRANSFORMATION

La nouvelle transformation présentée dans ce qui suit est une transformation non-linéaire qui a pour but, sous certaines hypothèses, de donner une meilleure évaluation de la série double A que $A_{m+k,n+\ell}$.

Dans un premier temps, nous présenterons cette nouvelle transformation appliquée à des suites doubles, ainsi que quelques-unes de ses propriétés. Puis nous l'appliquerons à des suites de sommes partielles en rectangle pour évaluer des sommes de séries.

Enfin des exemples numériques seront traités et illustreront le procédé de STREIT [15] et cette nouvelle transformation.

NOUVELLE TRANSFORMATION

L'évaluation de séries doubles posent de nombreux problèmes de calcul. Une fois la convergence assurée au niveau théorique, une série double exige le calcul d'un grand nombre de termes. En dehors des généralisations de la transformation de SHANKS, il existe une transformation, non linéaire, proposée par STREIT permettant une meilleure convergence [15].

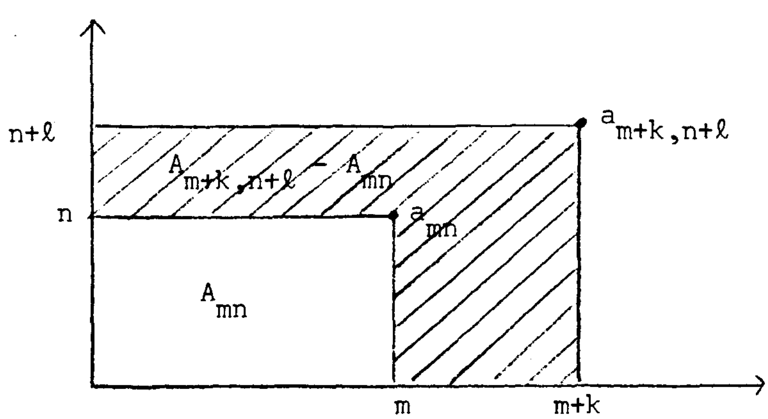
Nous la présentons ici :

si $A = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$ et $A_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$

STREIT pose $T_{mn}(k, \ell) = A_{mn} + \dfrac{A_{m+k,n+\ell} - A_{mn}}{1 - R_{mn}(k, \ell)}$

où $R_{mn}(k, \ell) = \dfrac{a_{m+k,n+\ell}}{a_{mn}}$

Géométriquement, si chaque terme a_{mn} de la série est représenté par le point de coordonnées (m, n), les termes utilisés dans le calcul de $T_{mn}(k, \ell)$ peuvent être représentée de la façon suivante :



On peut remarquer que l'évaluation de $T_{mn}(k, \ell)$ nécessite autant de termes que le calcul de $A_{m+k,n+\ell}$.

Sous certaines hypothèses, STREIT montre que $(T_{mn}(k, \ell))_{mn}$ converge mieux que $A_{m+k,n+\ell}$.

Avant d'appliquer la nouvelle transformation à des sommes partielles, nous la définirons pour des suites doubles.

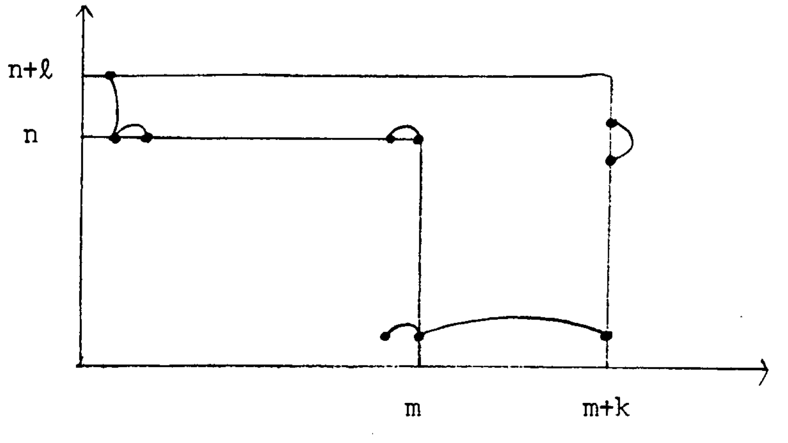
Nous noterons (u_{mn}) une suite réelle double que l'on supposera convergente et de limite u ; k et ℓ sont deux entiers fixés.

<u>Définition</u> :

La transformation $T_{k\ell}$ est définie par : $u_{mn} \xrightarrow{T_{k\ell}} T_{k\ell}(u_{mn})$ avec

$$T_{k\ell}(u_{mn}) = u_{mn} + \frac{u_{m+k,n} - u_{m+k,n-1}}{u_{1n} - u_{1,n-1}} (u_{1,n+\ell} - u_{1n}) + \frac{u_{mn} - u_{m-1,n}}{u_{m1} - u_{m-1,n}} (u_{m+k,1} - u_{m1})$$

Si l'on repère chaque terme de la suite (u_{mn}) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par le point de coordonnées (m, n), chaque terme de la transformation se représente de la façon suivante :



- Chaque groupe de deux termes représente une différence intervenant dans l'expression de $T_k (u_{mn})$.
- Nous pouvons remarquer que cette transformation ne nécessite que la connaissance de 4 termes au delà de u_{mn} qui sont : $u_{1,n+\ell}$; $u_{m+k,1}$; $u_{m+k,n-1}$; $u_{m+k,n}$.

- Enfin, si $k = \ell = 0$ $T_{00}(u_{mn}) = u_{mn}$. C'est pourquoi nous supposerons, pour ce qui suit, que $(k, \ell) \neq (0, 0)$.

Théorème 1 :

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\forall k,\ell \in \mathbb{N}$ $T_{k\ell}(u_{mn}) \to u$ quand $m,n \to +\infty$ est que

$$\frac{u_{m+k,n} - u_{m+k,n-1}}{u_{1n} - u_{1,n-1}} (u_{1,n+\ell} - u_{1n}) + \frac{u_{mn} - u_{m-1,n}}{u_{m1} - u_{m-1,1}} (u_{m+k,1} - u_{m1}) \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$$

Théorème 2 :

Une condition nécessaire et suffisante pour que, pour tout couple (k, ℓ), la suite $(T_{k\ell}(u_{mn}))_{mn}$ converge mieux que (u_{mn}) est que

$$-2 < \frac{1}{u_{mn} - u} \left[\frac{u_{m+k,n} - u_{m+k,n-1}}{u_{1n} - u_{1,n-1}} (u_{1,n+\ell} - u_{1n}) + \frac{u_{mn} - u_{m-1,n}}{u_{m1} - u_{m-1,n}} (u_{m+k,1} - u_{m1}\right] < 0$$

Ces deux théorèmes, qui découlent directement de la définition de la transformation $T_{k\ell}$ ne sont pas aisés à vérifier dans la pratique. Nous allons alors donner des théorèmes qui sont des conditions suffisantes pour que l'on ait $\lim\limits_{m,n} T_{k\ell}(u_{mn}) = u$ et une meilleure convergence.

Théorème 3 :

Si $u_{mn} = s_m \times v_n$ alors $T_{k\ell}(u_{mn}) = u_{m+k,n+\ell}$

En effet, on a alors

$$\begin{aligned} T_{k\ell}(u_{mn}) &= s_m \times v_n + \frac{s_{m+k}(v_n - v_{n-1})}{s_1(v_n - v_{n-1})} s_1(v_{n+\ell} - v_n) + \frac{v_n(s_m - s_{m-1})}{v_1(s_m - s_{m-1})} v_1(s_{m+k} - S_m) \\ &= s_m v_n + s_{m+k}(v_{n+\ell} - v_n) + v_n(s_{m+k} - s_m) \\ &= s_{m+k} \cdot v_{n+\ell} \\ &= u_{m+k,n+\ell} \end{aligned}$$

Ce théorème a pour seul intérêt de pointer l'inefficacité de la transformation $T_{k\ell}$ pour des suites de la forme $u_{mn} = s_m \times v_n$. Pour de telles suites il est d'ailleurs plus intéressant de considérer chacune des suites (s_n) et (v_n) et d'en calculer la limite à l'aide de procédés construits pour des suites simples.

Théorème 4 :

S'il existe deux réels K_2 et K_2 tels que $\forall m,n,i,j$

$$\left|\frac{u_{1,n+j+1} - u_{1,n+j}}{u_{1,n+1} - u_{1n}}\right| < K_1 \text{ et } \left|\frac{u_{m+i+1,1} - u_{m+i,1}}{u_{m+1,1} - u_{m1}}\right| < K_2$$

alors $(T_{k\ell}(u_{mn}))_{mn}$ converge vers la même limite que (u_{mn}).

Démonstration :

Nous avons : $u_{1,n+\ell} - u_{1n} = (u_{1,n+\ell} - u_{1,n+\ell-1}) + (u_{1,n+\ell-1} - u_{1,n+\ell-2}) + \ldots$

$$(u_{1,n+1} - u_{1,n})$$

$$= \sum_{j=0}^{\ell-1} (u_{1,n+\ell-j} - u_{1,n+\ell-j-1})$$

d'où

$$\left|\frac{u_{1,n+\ell} - u_{1n}}{u_{1n} - u_{1,n-1}}\right| = \left|\sum_{j=0}^{\ell-1} \frac{u_{1,n+\ell-j} - u_{1,n+\ell-j-1}}{u_{1n} - u_{1,n-1}}\right| < \ell\, K_1$$

de même $\left|\dfrac{u_{m+k,1} - u_{m1}}{u_{m1} - u_{m-1,1}}\right| < k\, K_2$

d'où

$$\left|T_{k\ell}(u_{mn}) - u_{mn}\right| \le \left|u_{m+k,n} - u_{m+k,n-1}\right| \ell\, K_1 + \left|u_{mn} - u_{m-1,n}\right| k\, K_2.$$

(u_{mn}) converge, donc elle vérifie le critère de Cauchy, autrement dit

$$\lim_{m,n} \left|u_{m+k,n} - u_{m+k,n-1}\right| = \lim_{m,n} \left|u_{mn} - u_{m-1,n}\right| = 0.$$

D'où par passage à la limite

$$\lim_{m,n} T_{k\ell}(u_{mn}) = \lim_{m,n} u_{mn} = u.$$

Propriété 1 :

Si (u_{mn}) est croissante, alors $T_{k\ell}(u_{mn}) \geq u_{mn} \quad \forall k,\ell$

Démonstration :

Si (u_{mn}) est croissante, chaque différence apparaissant dans l'expression de $T_{k\ell}(u_{mn})$ est positive, par conséquent $T_{k\ell}(u_{mn}) - u_{mn} \geq 0$.

Propriété 2 :

Si (u_{mn}) est croissante

Si $u_{m+1,n+1} - u_{m+1,n} - u_{m,n+1} + u_{mn} \quad 0 \geq \forall m,n$

Si $\forall k,\ell,m,n$

$$\frac{u_{m+1,n} - u_{mn}}{u_{m+1,1} - u_{m1}} (u_{m+k+1,1} - u_{m+1,1}) > \frac{u_{mn} - u_{m-1,n}}{u_{m1} - u_{m-1,1}} (u_{m+k,1} - u_{m1})$$

et

$$\frac{u_{m+k,n+1} - u_{m+k,n}}{u_{1,n+1} - u_{1n}} (u_{1,n+\ell+1} - u_{1,n+1}) > \frac{u_{m+k,n} - u_{m+k,n-1}}{u_{1n} - u_{1n-1}} (u_{1,n+\ell} - u_{1n})$$

alors $(T_{k\ell}(u_{mn}))_{mn}$ est croissante c-à-d : $T_{k\ell}(u_{m+1,n}) \geq T_{k\ell}(u_{mn})$

$\forall m,n,k,\ell$

$T_{k\ell}(u_{m,n+1}) \geq T_{k\ell}(u_{mn})$

Démonstration :

$$T_{k\ell}(u_{m+1,n}) - T_{k\ell}(u_{mn}) = (u_{m+1,n} - u_{mn}) + \frac{u_{1,n+\ell} - u_{1n}}{u_{1n} - u_{1,n-1}} (u_{m+k+1,n} - u_{m+k+1,n-1} - u_{m+k,n} + u_{m+k,n-1})$$

$$+ \frac{u_{m+1,n} - u_{mn}}{u_{m+1,1} - u_{m1}} (u_{m+k+1,1} - u_{m+1,1}) - \frac{u_{mn} - u_{m-1,n}}{u_{m1} - u_{m-1,1}} (u_{m+k,1} - u_{m,1})$$

$$T_{k\ell}(u_{m,n+1}) - T_{k\ell}(u_{mn}) = (u_{m,n+1} - u_{mn}) + \frac{u_{m+k,1} - u_{m1}}{u_{m1} - u_{m-1,1}} (u_{m,n+1} - u_{m-1,n+1} - u_{mn} + u_{m-1,n})$$

$$+ \frac{u_{m+k,n+1} - u_{m+k,n}}{u_{1,n+1} - u_{1n}} (u_{1,n+\ell+1} - u_{1,n+1}) - \frac{u_{m+k,n} - u_{m+k,n-1}}{u_{1n} - u_{1,n-1}} (u_{1,n+\ell} - u_{1n})$$

les hypothèses assurent que $[T_{k\ell}(u_{m+1,n}) - T_{k\ell}(u_{mn})]$ et $[T_{k\ell}(u_{m,m+1} - T_{k\ell}(u_{mn})]$ peuvent s'écrire comme sommes de termes positifs, d'où le résultat.

Propriété 3 :

Si (u_{mn}) est croissante.

Si $u_{m+1,n+1} - u_{m+1,n} - u_{m,n+1} + u_{mn} \geq 0 \quad \forall m,n$

alors $T_{k+1,\ell}(u_{mn}) \geq T_{k\ell}(u_{mn})$ et $T_{k,\ell+1}(u_{mn}) \geq T_{k\ell}(u_{mn}) \quad \forall m,n,k,\ell$

Démonstration :

$$T_{k+1,\ell}(u_{mn}) - u_{mn} = \frac{u_{m+k+1,n} - u_{m+k+1,n-1}}{u_{1n} - u_{1,n-1}} (u_{1,n+\ell} - u_{1n}) + \frac{u_{mn} - u_{m-1,n}}{u_{m1} - u_{m-1,1}} (u_{m+k+1,1} - u$$

$$T_{k\ell}(u_{mn}) - u_{mn} = \frac{u_{m+k,n} - u_{m+k,n-1}}{u_{1n} - u_{1,n-1}} (u_{1,n+\ell} - u_{1n}) + \frac{u_{mn} - u_{m-1,n}}{u_{m1} - u_{m-1,1}} (u_{m+k,1} - u_{m1})$$

retranchons membre à membre ces deux équations :

$$T_{k+1,\ell}(u_{mn}) - T_{k\ell}(u_{mn}) = \frac{u_{1,n+\ell} - u_{1n}}{u_{1n} - u_{1,n-1}} (u_{m+k+1,n} - u_{m+k+1,n-1} - u_{m+k,n} + u_{m+k,n-1})$$

$$+ \frac{u_{mn} - u_{m-1,n}}{u_{m1} - u_{m-1,1}} (u_{m+k+1,1} - u_{m+k,1})$$

La croissante de (u_{mn}) assure que les termes $(u_{1,n+\ell} - u_{1n})$; $(u_{1n} - u_{1,n-1})$; $(u_{mn} - u_{m-1,n})$; $(u_{m1} - u_{m-1,1})$; $(u_{m+k+1,1} - u_{m+k,1})$ sont positifs.

La seconde hypothèse implique que

$$u_{m+k+1,n} - u_{m+k,n} - u_{m+k+1,n-1} - u_{m+k,n-1} \geq 0$$

ainsi $T_{k+1,\ell}(u_{mn}) - T_{k\ell}(u_{mn})$ est somme de termes positifs.

D'autre part

$$T_{k,\ell+1}(u_{mn}) - u_{mn} = \frac{u_{m+k,n} - u_{m+k,n-1}}{u_{1n} - u_{1,n-1}} (u_{1,n+\ell+1} - u_{1n}) + \frac{u_{mn} - u_{m-1,n}}{u_{m1} - u_{m-1,1}} (u_{m+k,1} - u_{m1})$$

$$T_{k,\ell+1}(u_{mn}) - T_{k\ell}(u_{mn}) = \frac{u_{m+k,n} - u_{m+k,n-1}}{u_{1n} - u_{1,n-1}} (u_{1,n+\ell+1} - u_{1,n+\ell})$$

le second membre n'étant composé que de termes positifs.

$$T_{k,\ell+1}(u_{mn}) \geq T_{k\ell}(u_{mn})$$

Remarque :

La croissance de (u_{mn}) suffit à assurer que l'on ait $T_{k,\ell+1}(u_{mn}) \geq T_k\ (u_{mn})$.

Par contre, pour que l'on ait $T_{k+1,}\ (u_{mn}) - T_k\ (u_{mn}) \geq 0$, il faut ajouter une hypothèse supplémentaire.

Propriété 4 :

Si les termes de la suite (u_{mn}) vérifient, pour tous m, n, k, ℓ

$$\text{(I)} \qquad u_{m+k,n+\ell-j} - u_{m+k,n+\ell-j-1} \leq \frac{u_{m+k,n} - u_{m+k,n-1}}{u_{1n} - u_{1,n-1}} (u_{1,n+\ell-j} - u_{1,n+\ell-j-1})$$

$$\text{(II)} \qquad u_{m+k-i,n} - u_{m+k-i-1,n} \leq \frac{u_{mn} - u_{m-1,n}}{u_{m1} - u_{m-1,1}} (u_{m+k-i,1} - u_{m+k-i-1,1})$$

$$0 \leq i \leq k-1 \text{ et } 0 \leq j \leq \ell-1$$

alors $T_{k\ell}(u_{mn}) \geq u_{m+k,n+\ell}$

Démonstration :

La relation (I) étant vérifiée pour tout j tel que $0 \leq j \leq \ell-1$, on a :

$$\sum_{j=0}^{\ell-1} (u_{m+k,n+\ell-j} - u_{m+k,n+\ell-j-1}) \leq \frac{u_{m+k,n} - u_{m+k,n-1}}{u_{1n} - u_{1,n-1}} \sum_{j=0}^{\ell-1} (u_{1,n+\ell-j} - u_{1,n+\ell-j-1})$$

ou encore

$$\text{(III)} \quad u_{m+k,n+\ell} - u_{m+k,n} \leq \frac{u_{m+k,n} - u_{m+k,n-1}}{u_{1n} - u_{1,n-1}} (u_{1,n+\ell} - u_{1n}).$$

De même, sommons l'inégalité (II) pour i variant de 0 à k-1, nous obtenons

$$\text{(IV)} \quad u_{m+k,n} - u_{mn} \leq \frac{u_{mn} - u_{m-1,n}}{u_{m1} - u_{m-1,1}} (u_{m+k,1} - u_{m1})$$

En sommant membre à membre les inégalités (III) et (IV) :

$$u_{m+k,n+\ell} - u_{mn} \leq T_{k\ell}(u_{mn}) - u_{mn}$$

c-à-d $u_{m+k,n+\ell} \leq T_{k\ell}(u_{mn})$.

Théorème 5 :

Si (u_{mn}) est croissante.

Si $u_{m+1,n+1} - u_{m+1,n} - u_{m,n+1} + u_{mn} \geq 0 \quad \forall m,n$

Si $\forall m,n,k,\ell$

$$\frac{u_{m+1,n} - u_{mn}}{u_{m+1,1} - u_{m1}} (u_{m+k+1,1} - u_{m+1,1}) > \frac{u_{mn} - u_{m-1,n}}{u_{m1} - u_{m-1,1}} (u_{m+k,1} - u_{m1})$$

et

$$\frac{u_{m+k,n+1} - u_{m+k,n}}{u_{1,n+1} - u_{1n}} (u_{1,n+\ell+1} - u_{1,n+1}) > \frac{u_{m+k,n} - u_{m+k,n-1}}{u_{1n} - u_{1,n-1}} (u_{1,n+\ell} - u_{1n})$$

alors la suite $(T_{k\ell}(u_{mn}))_{mn}$ converge mieux vers u que la suite (u_{mn}).

Démonstration :

La suite (u_{mn}) est croissante donc (u_{mn}) tend vers son plus petit majorant : u.

De plus les hypothèses suivantes, d'après la propriété 2, assure la croissance de la suite $(T_{k\ell}(u_{mn}))_{mn}$, par suite :

$$u - T_{k\ell}(u_{mn}) \geq 0$$

$$u - u_{mn} \geq 0.$$

De plus, d'après la propriété 1, (u_{mn}) croissante implique que $T_{k\ell}(u_{mn}) \geq u_{mn}$ d'où $0 < u - T_{k\ell}(u_{mn}) \leq u - u_{mn}$

ou encore $0 \leq \dfrac{u - T_{k\ell}(u_{mn})}{u - u_{mn}} \leq 1.$

Théorème 6 :

Si la suite $(T_{k\ell}(u_{mn}))_{mn}$ converge vers la même limite que (u_{mn}) et sous les hypothèses du théorème 5, alors une condition suffisante pour que $(T_{k\ell}(u_{mn}))$ converge mieux que $u_{m+k,n+\ell}$ est que l'on ait :

$$\text{(I)} \quad u_{m+k,n+\ell-j} - u_{m+k,n+\ell-j-1} \leq \frac{u_{m+k,n} - u_{m+k,n-1}}{u_{1n} - u_{1,n-1}} (u_{1,n+\ell-j} - u_{1,n+\ell-j-1})$$

$$\text{(II)} \quad u_{m+k-i,n} - u_{m+k-i-1,n} \leq \frac{u_{mn} - u_{m-1,n}}{u_{m1} - u_{m-1,1}} (u_{m+k-i,1} - u_{m+k-i-1,1})$$

$$0 \leq i \leq k-1 \text{ et } 0 \leq j \leq \ell-1$$

Démonstration :

D'après la propriété 4 : $u_{mn} \leq u_{m+k,n+\ell} \leq T_{k\ell}(u_{mn})$.

D'après la propriété 2 : $(T_{k\ell}(u_{mn}))_{mn}$ est croissante, donc $T_{k\ell}(u_{mn}) \leq u$

d'où $0 \leq \dfrac{T_k\ (u_{mn}) - u}{u_{m+k,n+\ell} - u} \leq 1$.

APPLICATION AUX SOMMES PARTIELLES EN RECTANGLE

Notations :

Soit a_{ij} le terme général d'une série $A = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$

On notera :

- les sommes partielles $A_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \qquad m,n \geq 1.$

- $\delta_{01} A_{m,n-1} = A_{mn} - A_{m,n-1}$; c'est la n^e ligne dont on ne somme que les m premiers éléments.

- $\delta_{10} A_{m-1,n} = A_{mn} - A_{m-1,n}$; c'est la m^e colonne composée des n premiers éléments.

La transformation, précédemment définie, appliquée à la suite (A_{mn}), s'écrira :

$$T_{k\ell}(A_{mn}) = A_{mn} + \frac{\delta_{01} A_{m+k,n-1}}{a_{1n}} \times \delta_{0\ell} A_{1n} + \frac{\delta_{10} A_{m-1,n}}{a_{m1}} \times \delta_{k0} A_{m1}$$

puisque : $A_{m+k,n} - A_{m+k,n-1} = \delta_{01} A_{m+k,n-1}$

$A_{1n} - A_{1,n-1} = a_{1n}$

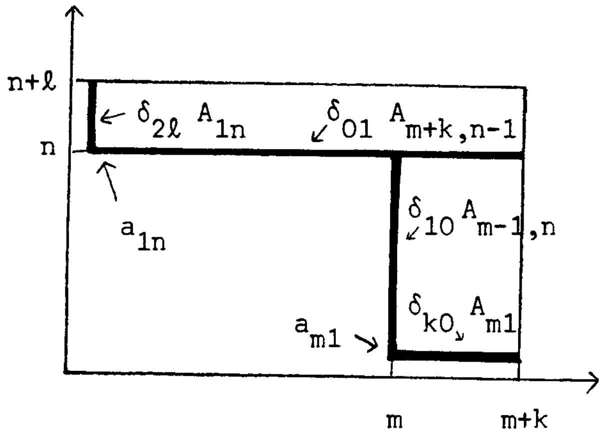
$A_{1,n+\ell} - A_{1n} = \delta_{0\ell} A_{1n}$

$A_{mn} - A_{m-1,n} = \delta_{10} A_{m-1,n}$

$A_{m1} - A_{m-1,1} = a_{m1}$

$A_{m+k,1} - A_{m1} = \delta_{k0} A_{m1}$

Géométriquement, pour les sommes partielles A_{mn}, ce sont les termes a_{ij} qui sont représentés dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.



En supposant que l'on connaisse A_{mn} c-à-d tous les termes a_{ij} pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.
Cette transformation ne nécessite que la connaissance que de $(2k+\ell)$ termes supplémentaires. Alors que le calcul de $A_{m+k,n+\ell}$ en nécessiterait

$$(n\times k) + (m\times \ell) + (k\times \ell)$$

Remarque :

Si $a_{ij} = u_i \times v_j$ alors $A_{mn} = U_m \times V_n$

en effet $A_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} u_i \cdot v_j = \sum_{i=1}^{m} u_i \cdot \sum_{j=1}^{n} v_j = (\sum_{i=1}^{m} u_i)(\sum_{j=1}^{n} v_j)$

il suffira de poser $U_m = \sum_{i=1}^{m} a_i$ et $V_n = \sum_{j=1}^{n} v_j$

Théorème 7 :

Si $a_{ij} > 0 \quad \forall i,j \in \mathbb{N}^*$

Si il existe deux nombres réels positifs R_1 et R_2 tels que

$$\frac{a_{1,n+j}}{a_{1n}} < R_1 \text{ et } \frac{a_{m+i,1}}{a_{m1}} < R_2 \qquad \forall m,n,i,j$$

alors $(T_{k\ell}(A_{mn}))$ converge vers la même limite que (A_{mn}).

Démonstration :

$$T_{k\ell}(A_{mn}) - A_{mn} = \delta_{01}\ A_{m+k,n-1} \left[\frac{a_{1,n+1}}{a_{1n}} + \frac{a_{1,n+2}}{a_{1n}} + \ldots + \frac{a_{1,n+\ell}}{a_{1n}}\right]$$

$$+ \delta_{10}\ A_{m-1,n} \left[\frac{a_{m+1,1}}{a_{m1}} + \frac{a_{m+2,1}}{a_{m1}} + \ldots + \frac{a_{m+k,1}}{a_{m1}}\right]$$

d'où d'après l'hypothèse,

$$T_{k\ell}(A_{mn}) - A_{mn} \leq \ell R_1 \, \delta_{01} \, A_{m+k,n-1} + kR_2 \, \delta_{10} \, A_{m-1,n}$$

(A_{mn}) est une suite supposée convergente donc à partir d'un certain rang, δ_{01} $A_{m+k,n-1}$ et δ_{10} $A_{m-1,n}$ tendent vers 0 quand m et n tendent ver l'∞.

D'où, $$\lim_{m,n}(T_{k\ell}(A_{mn}) - A_{mn}) \leq 0$$

De plus $a_{ij} > 0$ implique que $T_{k\ell}(A_{mn}) - A_{mn} \geq 0 \; \forall m,n,k,\ell$ d'où le résultat.

Théorème 8 :

Si $a_{ij} > 0$ pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

alors $T_{k+1,\ell}(A_{mn}) \geq T_{k\ell}(A_{mn})$ et $T_{k,\ell+1}(A_{mn}) \geq T_{k\ell}(A_{mn}) \qquad \forall m,n,k,\ell$

Démonstration :

$$T_{k+1,\ell}(A_{mn}) - T_{k\ell}(A_{mn}) = \frac{\delta_{0\ell} \, A_{1n}}{a_{1n}} (\delta_{01} \, A_{m+k+1,n-1} - \delta_{01} \, A_{m+k,n-1}) + \frac{\delta_{10} \, A_{m-1,n}}{a_{m1}} (\delta_{k+1,0} \, A_{m1} - \delta_{k0} \, A_{m1})$$

$$\delta_{01} \, A_{m+k+1,n-1} - \delta_{01} \, A_{m+k,n-1} = (A_{m+k+1,n} - A_{m+k+1,n-1}) - (A_{m+k,n} - A_{m+k,n-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{m+k+1} a_{in} - \sum_{i=1}^{m+k} a_{in} = a_{m+k+1,n}$$

$$\delta_{k+1,0} \, A_{m1} - \delta_{k0} \, A_{m1} = (A_{m+k+1,1} - A_{m1}) - (A_{m+k,1} - A_{m1})$$

$$= \sum_{i=m+1}^{m+k+1} a_{i1} - \sum_{i=m+1}^{m+k} a_{i1} = a_{m+k+1,1}$$

d'où $$T_{k+1,\ell}(A_{mn}) - T_{k\ell}(A_{mn}) = \frac{a_{m+k+1,n}}{a_{1n}} \, \delta_{0\ell} \, A_{1n} + \frac{a_{m+k+1,1}}{a_{m1}} \, \delta_{10} \, A_{m-1,n}$$

Chaque terme du second membre est positif d'où $T_{k\ell}(A_{mn}) \leq T_{k+1,\ell}(A_{mn})$

De même $T_{k,\ell+1}(A_{mn}) - T_{k\ell}(A_{mn}) = \dfrac{\delta_{01}\ A_{m+k,n-1}}{a_{1n}} (\delta_{0,\ell+1}\ A_{1n} - \delta_{0\ell}\ A_{1n})$

$$= \frac{\delta_{01}\ A_{m+k,n-1}}{a_{1n}} (A_{1,n+\ell+1} - A_{1,n} - A_{1,n+\ell} + A_{1n})$$

$$= \frac{a_{1,n+\ell+1}}{a_{1n}} \delta_{01}\ A_{m+k,n-1} \geq 0.$$

Théorème 9 :

Si (i) $\delta_{01}\ A_{m+k,n+j-1} \leq \dfrac{a_{1,n+j}}{a_{1n}} \delta_{01}\ A_{m+k,n-1} \qquad j \in \mathbb{N} \qquad 1 \leq j \leq \ell$

Si (ii) $\delta_{10}\ A_{m+i-1,n} \leq \dfrac{a_{m+i,1}}{a_{m1}} \delta_{10}\ A_{m-1,n} \qquad i \in \mathbb{N} \qquad 1 \leq i \leq k$

alors $A_{m+k,n+\ell} \leq T_{m+k,n+\ell}$

Démonstration :

Elle découle de l'application de la propriété 4 à la suite (A_{m_n})

• $A_{m+k,n+\ell-j} - A_{m+k,n+\ell-j-1} \leq \dfrac{A_{m+k,n} - A_{m+k,n-1}}{A_{1n} - A_{1,n-1}} (A_{1,n+\ell-j} - A_{1,n+\ell-j-1})$

peut s'écrire

$$\delta_{01}\ A_{m+k,n+\ell-j-1} \leq \frac{\delta_{01}\ A_{m+k,n-1}}{a_{1n}} \times a_{1,n+\ell-j} \qquad 0 \leq j \leq \ell-1$$

• $(A_{m+k-i,n} - A_{m+k-i-1,n}) \leq \dfrac{A_{mn} - A_{m-1,n}}{A_{m1} - A_{m-1,1}} (A_{m+k-i,1} - A_{m+k-i-1,1})$

devient

$$\delta_{10}\ A_{m+k-i-1,n} \leq \frac{\delta_{10}\ A_{m-1,n}}{a_{m1}} \times a_{m+k-i,1} \qquad 0 \leq i \leq k-1$$

Théorème 10 :

Si $(T_{k\ell}(A_{mn}))$ tend vers la même limite que (A_{mn}) lorsque m et n tendent vers l'infini.

Si $(T_{k\ell}(A_{mn}))_{mn}$ est croissante et si $a_{ij} > 0$ pour tout (i,j)

alors la suite $(T_{k\ell}(A_{mn}))_{mn}$ converge mieux que (A_{mn}).

Démonstration :

La croissance et la convergence de $(T_{k\ell}(A_{mn}))$ impliquent que $T_{k\ell}(A_{mn}) \leq A$

avec $A = \lim\limits_{m,n\to\infty} T_{k\ell}(A_{mn})$ et $A = \lim\limits_{m,n\to\infty} A_{mn}$.

De plus $T_{k\ell}(A_{mn}) - A_{mn} > 0$ car cette différence n'est composée que de termes positifs d'où $0 < A_{mn} < T_{k\ell}(A_{mn}) \leq A$

ou encore

$$0 \leq \frac{T_{k\ell}(A_{mn}) - A}{A_{mn} - A} < 1$$

Théorème 11 :

Sous les conditions du théorème 10, si les relations (i) et (ii) du théorème 9 sont vérifiées c-à-d

$$\text{(i)} \quad \delta_{01}\, A_{m+k,n+j-1} \leq \frac{a_{1,n+j}}{a_{1n}}\, \delta_{01}\, A_{m+k,n-1} \qquad j \in \mathbb{N} \quad 1 \leq j \leq \ell$$

$$\text{(ii)} \quad \delta_{10}\, A_{m+i-1,n} \leq \frac{a_{m+i,1}}{a_{m1}}\, \delta_{10}\, A_{m-1,n} \qquad i \in \mathbb{N} \quad 1 \leq i \leq k$$

et si $(T_{k\ell}(A_{mn}))_{mn}$ est croissante, alors $(T_{k\ell}(A_{mn}))$ converge mieux vers A que $(A_{m+k,n-\ell})$

Démonstration :

Le théorème 9 assure que l'on ait $A_{m+k,n+\ell} < T_{k\ell}(A_{mn})$

d'où $0 \leq A - T_{k\ell}(A_{mn}) \leq A - A_{m+k,n+\ell}$

Exemple 1 :

Soit la série $A = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(4j-2)^{2i}} = \frac{\pi}{8}$

1° $\frac{a_{1,n+j}}{a_{1n}} = \frac{(4n-2)^2}{(4n+4j-2)^2} \leq 1 \qquad \forall n,j$

$$\frac{a_{m+i,1}}{a_{m1}} = \frac{2^{2m}}{2^{2(m+i)}} = \frac{1}{2^{2i}} \leq 1 \qquad \forall m,i$$

les termes de la série vérifient les conditions du théorème 7 donc $(T_{k\ell}(A_{mn}))$ converge vers A.

2° Comparons $\delta_{01}\, A_{m+k,n+j-1}$ et $\frac{a_{1,n+j}}{a_{1n}} \times \delta_{01}\, A_{m+k,n-1}$.

$$\delta_{01}\, A_{m+k,n+j-1} = \sum_{i=1}^{m+k} a_{i,n+j} = \sum_{i=1}^{m+k} \frac{1}{(4n+4j-2)^{2i}}$$

$$\delta_{01}\, A_{m+k,n-1} = \sum_{i=1}^{m+K} a_{in} = \sum_{i=1}^{m+k} \frac{1}{(4n-2)^{2i}}$$

$$\frac{a_{1,n+j}}{a_{1n}} = \frac{(4n-2)^2}{(4n+4j-2)^2}$$

il suffit de comparer les deux expressions terme à terme c-à-d

$$I = \frac{1}{(4n+4j-2)^{2i}} \text{ et } II = \frac{(4n-2)^2}{(4n+4j-2)^2} \times \frac{1}{(4n-2)^{2i}}$$

or $\frac{4n-2}{4(n+j)-2} < 1$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$

d'où $\left(\frac{4n-2}{4(n+j)-2}\right)^2 > \left(\frac{4n-2}{4(n+j)-2}\right)^{2i}$ pour tout $i \geq 2$

Par suite II > I.

D'autre part $\delta_{10} A_{m+i-1,n} = \sum_{j=1}^{n} a_{m+i,j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(4j-2)^{2(m+i)}}$

$$\delta_{10} A_{m-1,n} = \sum_{j=1}^{n} a_{mj} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(4j-2)^{2m}}$$

$$\frac{a_{m+i,1}}{a_{m1}} = \frac{2^{2m}}{2^{2(m+i)}} = \frac{1}{2^{2i}}$$

comparer $\delta_{10} A_{m+i-1,n}$ et $\frac{a_{m+i,1}}{a_{m1}} \times \delta_{10} A_{m-1,n}$ revient à comparer $\frac{1}{(4j-2)^{2m+2i}}$

avec $\frac{1}{2^{2i}(4j-2)^{2m}}$; or $\frac{1}{(4j-2)^{2i}} < \frac{1}{2^{2i}}$ $\forall i \in \mathbb{N}^*$ $j > 1$

donc $\delta_{10} A_{m+i-1,n} < \frac{a_{m+i,1}}{a_{m1}} \delta_{10} A_{m-1,n}$

Les conditions du théorème 9 sont vérifiées donc

$$A_{mn} \leq A_{m+k,n+\ell} \leq T_{k+m,n+\ell}$$

<u>Exemple 2</u> :

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{i^2 j^2 (i+j)^2} = 0,33911435 \qquad [15]$$

$$\frac{a_{1,n+j}}{a_{1,n}} = \left[\frac{n(n+1)}{(n+j)(n+j+1)}\right]^2 < 1 \qquad \forall j \geq 1$$

$$\frac{a_{m+i,1}}{a_{m1}} = \left[\frac{m(n+1)}{(m+i)(m+i+1)}\right]^2 < 1 \qquad \forall i \geq 1$$

donc puisque de plus $a_{ij} > 0$

$$A_{mn} \leq T_{m+k,n+\ell}$$

EXEMPLES NUMERIQUES

Des exemples numériques ont été traités. Les résultats numériques figurent sur les pages suivantes. Six exemples sont présentés. Pour chacun d'eux, on a calculé successivement :

$$A(M, N) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} a_{ij}$$

$$A(M+K, N+L) = \sum_{i=1}^{M+K} \sum_{j=1}^{N+L} a_{ij}$$

$$\text{NOUV. TRANS.} = T_{KL}(A(M, N))$$

$$\text{STREIT} = A(M, N) + \frac{A(M+K, L+N) - A(M, N)}{1 - R_{MN}(K, L)}$$

$$\text{avec } R_{MN}(K, L) = \frac{a_{M+K,\ N+L}}{a_{M,N}}.$$

Les quatre premières colonnes donnent les valeurs choisies pour M, N, K, L.

La colonne entre NOUV.TRANS. et STREIT est le nombre 2K+L représentant le nombre de termes a_{ij} qu'il faut calculer en plus de ceux contenus dans A(M, N) pour calculer NOUV. TRANS. Le nombre correspondant pour le calcul de A(M+K, N+L) à partir des termes de A(M, N) sera (NK+ML+KL). C'est le même pour le calcul de STREIT à partir de A(M, N). Ce nombre figure sur la dernière colonne.

Les mêmes valeurs de M, N, K, L ayant été conservées au cours des six traitements ces colonnes seront identiques. On peut donc constater dès à présent quelque soit la méthode donnant pour chacun des exemples la meilleure approximation que le calcul de la limite à l'aide de la nouvelle transformation nécessite un nombre de calculs de termes bien moindre que celui qu'exigent les calculs de A(M+K, N+L) ou STREIT.

M	N	K	L	A(M,N)	A(M+K,N+L)	NOUV.TRANS		STREIT	
10	10	1	1	.256408393383026	.261902928352356	.261935591697693	3	.262082278728485	21
20	20	1	1	.289851963520050	.291663527488708	.291666984558105	3	.291694939136505	41
39	39	1	1	.309518694877625	.310072362422943	.310072660446167	3	.310077428817749	79
10	10	5	5	.256408393383026	.277775943279266	.278074324131012	15	.277775943279266	125
20	20	5	5	.289851963520050	.297615885734558	.297653794288635	15	.297615885734558	225
10	10	10	10	.256408393383026	.289853155612946	.290526270866394	30	.289853155612946	300
39	39	9	9	.309518694877625	.313720285892487	.313730418682098	27	.313720285892487	783
10	10	20	20	.256408393383026	.303028345108032	.304282665252686	60	.303028345108032	800
20	20	20	20	.289851963520050	.310074210166931	.310300230979919	60	.310074210166931	1200
10	10	30	30	.256408393383026	.310075461864471	.311715424060822	90	.310075461864471	1500
39	39	19	19	.309518694877625	.316934645175934	.316964447498322	57	.316934645175934	1843
10	10	40	40	.256408393383026	.314463257789612	.316369891166687	120	.314463257789612	2400
39	39	29	29	.309518694877625	.319243490695953	.319293916225433	87	.319243490695953	3103
39	39	39	39	.309518694877625	.320982277393341	.321051716804504	117	.320982277393341	4563
39	39	49	49	.309518694877625	.322338879108429	.322425365447998	147	.322338879108429	6223
39	39	59	59	.309518694877625	.323426842689514	.323528289794922	177	.323426842689514	8083

STOP 0

$$a_{ij} = \frac{1}{(3+j)^{i+1}}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(p+1+j)^{iH}} = \frac{1}{p+1} \quad [10]$$

ici $p = 2$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \frac{1}{3} = 0,3333333$$

M	N	K	L	A(M,N)	A(M+K,N+L)	NOUV.TRANS		STREIT	
10	10	1	1	.178569614887238	.183331489562988	.183355927467346	3	.183484911918640	21
20	20	1	1	.208330214023590	.209996879100800	.209999740123749	3	.210025608539581	41
39	39	1	1	.226739048957825	.227267563343048	.227267861366272	3	.227272391319275	79
10	10	5	5	.178569614887238	.197366535663605	.197595953941345	15	.197366535663605	125
20	20	5	5	.208330214023590	.215514063835144	.215546488761902	15	.215514063835144	225
10	10	10	10	.178569614887238	.208331406116486	.208860754966736	30	.208331406116486	300
39	39	9	9	.226739048957825	.230764031410217	.230773270130157	27	.230764031410217	783
10	10	20	20	.178569614887238	.220586240291595	.221597671508789	60	.220586240291595	800
20	20	20	20	.208330214023590	.227269411087036	.227467238903046	60	.227269411087036	1200
10	10	30	30	.178569614887238	.227270662784576	.228611111640930	90	.227270662784576	1500
39	39	19	19	.226739048957825	.233865678310394	.233893215656281	57	.233865678310394	1843
10	10	40	40	.178569614887238	.231479287147522	.233051061630249	120	.231479287147522	2400
39	39	29	29	.226739048957825	.236105799674988	.236152529716492	87	.236105799674988	3103
39	39	39	39	.226739048957825	.237799465656281	.237864077091217	117	.237799465656281	4563
39	39	49	49	.226739048957825	.239124953746796	.239205658435822	147	.239124953746796	6223
39	39	59	59	.226739048957825	.240190565586090	.240285396575928	177	.240190565586090	8083

STOP 0

$$a_{ij} = \frac{1}{(4+j)^{i+1}}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(p+1+j)^{iH}} = \frac{1}{p+1} \quad [10]$$

ici p = 3

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \frac{1}{4} = 0,25$$

M	N	K	L	A(M,N)	A(M+K,N+L)	NOUV.TRANS		STREIT	
10	10	1	1	.386451900005341	.387019336223602	.387019395828247	3	.387019395828247	21
20	20	1	1	.389573037624359	.389721751213074	.389721751213074	3	.390019893646240	41
39	39	1	1	.391094326972961	.391134381294250	.391134381294250	3	.391094326972961	79
10	10	5	5	.386451900005341	.388532757759094	.388533294200897	15	.388532757759094	125
20	20	5	5	.389573037624359	.390197753906250	.390197813510895	15	.391450047492981	225
10	10	10	10	.386451900005341	.389573752880096	.389574766159058	30	.389573752880096	300
39	39	9	9	.391094326972961	.391394734382629	.391394734382629	27	.391094326972961	783
10	10	20	20	.386451900005341	.390615046024323	.390616714954376	60	.390615046024323	800
20	20	20	20	.389573037624359	.391135096549988	.391135215759277	60	.394266068935394	1200
10	10	30	30	.386451900005341	.391135752201080	.391137778759003	90	.391135752201080	1500
39	39	19	19	.391094326972961	.391619205474854	.391619205474854	57	.391094326972961	1843
10	10	40	40	.386451900005341	.391448199748993	.391450405120850	120	.391448199748993	2400
39	39	29	29	.391094326972961	.391777694225311	.391777694225311	87	.391094326972961	3103
39	39	39	39	.391094326972961	.391895532608032	.391895532608032	117	.391094326972961	4563
39	39	49	49	.391094326972961	.391986548900604	.391986608505249	147	.391094326972961	6223
39	39	59	59	.391094326972961	.392059028148651	.392059087753296	177	.391094326972961	8083

STOP 0

$$a_{ij} = \frac{1}{(4j-2)^{2i}}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \frac{\pi}{8} \qquad [10]$$

$$= 0{,}39269908$$

M	N	K	L	A(M,N)	A(M+K,N+L)	NOUV.TRANS		STREIT	
10	10	1	1	.046051215380430	.046063799411058	.046063799411056	3	.046063799411058	21
20	20	1	1	.046106353402138	.046108100563288	.046108100563288	3	.046106353402138	41
39	39	1	1	.046120293438435	.046120539307594	.046120539307594	3	.046120293438435	79
10	10	5	5	.046051215380430	.046091858297586	.046091865748167	15	.046091858297586	125
20	20	5	5	.046106353402138	.046113144606352	.046113144606352	15	.046106353402138	225
10	10	10	10	.046051215380430	.046106379479170	.046106394380331	30	.046106379479170	300
39	39	9	9	.046120293438435	.046122007071972	.046122007071972	27	.046120293438435	783
10	10	20	20	.046051215380430	.046116884797812	.046116907149553	60	.046116864797812	800
20	20	20	20	.046106353402138	.046120572835207	.046120572835207	60	.046106353402138	1200
10	10	30	30	.046051215330430	.046120598912239	.046120621263981	90	.046120598912239	1500
39	39	19	19	.046120293438435	.046123061329126	.046123061329126	57	.046120293438435	1843
10	10	40	40	.046051215380430	.046122327446938	.046122349798679	120	.046122327446938	2400
39	39	29	29	.046120293438435	.046123683452606	.046123683452606	87	.046120293438435	3103
39	39	39	39	.046120293438435	.046124085783958	.046124085783958	117	.046120293438435	4563
39	39	49	49	.046120293438435	.046124357730150	.046124357730150	147	.046120293438435	6223
39	39	59	59	.046120293438435	.046124551445246	.046124551445246	177	.046120293438435	8083

STOP 0

$$a_{ij} = \frac{1}{(4j-1)^{2i+1}}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \operatorname{Log} 2 \qquad [10]$$

$$= 0{,}046125491$$

M	N	K	L	A(M,N)	A(M+K,N+L)	NOUV.TRANS		STREIT	
10	10	1	1	.668281972408295	.670690655708313	.670701086521149	3	.670729637145996	21
20	20	1	1	.680800735950470	.681381642818451	.681382358074188	3	.681386649608612	41
39	39	1	1	.686773896217346	.686932086944580	.686932146549225	3	.687249243259430	79
10	10	5	5	.668281972408295	.676741719245911	.676826834678650	15	.676741719245911	125
20	20	5	5	.680800735950470	.683244943618774	.683252453804016	15	.683244943618774	225
10	10	10	10	.668281972408295	.680801749229431	.680979311466217	30	.680801749229431	300
39	39	9	9	.686773896217346	.687961816787720	.687963426113129	27	.690342962741852	783
10	10	20	20	.668281972408295	.684882044792175	.685186862945557	60	.684882044792175	800
20	20	20	20	.680800735950470	.686933934688568	.686975657939911	60	.686933934688568	1200
10	10	30	30	.668281972408295	.686934947967529	.687316775321960	90	.686934947967529	1500
39	39	19	19	.686773896217346	.688851237297058	.688855946063995	57	.693015158176422	1843
10	10	40	40	.668281972408295	.688170790672302	.688603281974792	120	.688170790672302	2400
39	39	29	29	.686773896217346	.689480066299438	.689487874507904	87	.694904327392578	3103
39	39	39	39	.686773896217346	.689948141574860	.689958810806274	117	.696310639381409	4563
39	39	49	49	.686773896217346	.690310180187225	.690323293209076	147	.697398304939270	6223
39	39	59	59	.686773896217346	.690598487854004	.690613806247711	177	.698264479637146	8083

STOP 0

$$a_{ij} = \frac{1}{(2j)^{iH}}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \text{Log}2 \qquad [10]$$

$$= 0,69314718$$

M	N	K	L	A(M,N)	A(M+K,N+L)	NOUV.TRANS		STREIT	
10	10	1	1	.338396668434143	.338556766510010	.338555634021759	3	.338764369487762	21
20	20	1	1	.338995754718781	.339009463787079	.339009463787079	3	.339049994945526	41
39	39	1	1	.339077293872833	.339078426361084	.339078366756439	3	.339085340499878	79
10	10	5	5	.338396668434143	.338872253894806	.338864982128143	15	.338917970657349	125
20	20	5	5	.338995754718781	.339046001434326	.339045584201813	15	.339063823223114	225
10	10	10	10	.338396668434143	.339003682136536	.338991343975067	30	.339013338088989	300
39	39	9	9	.339077293872833	.339084565639496	.339084446430206	27	.339087486267090	783
10	10	20	20	.338396668434143	.339077174663544	.339060664176941	60	.339078068733215	800
20	20	20	20	.338995754718781	.339088439941406	.339087069034576	60	.339089930057526	1200
10	10	30	30	.338396668434143	.339096307754517	.339078366756439	90	.339096486568451	1500
39	39	19	19	.339077293872833	.339088261127472	.339088141918182	57	.339089393615723	1843
10	10	40	40	.338396668434143	.339103341102600	.339084863662720	120	.339103400707245	2400
39	39	29	29	.339077293872833	.339090168476105	.339090049266815	87	.339090645313263	3103
39	39	39	39	.339077293872833	.339091241359711	.339091062545776	117	.339091479778290	4563
39	39	49	49	.339077293872833	.339091897010803	.339091718196869	147	.339091956615448	6223
39	39	59	59	.339077293872833	.339092254638672	.339092075824738	177	.339092314243317	8083

STOP 0

$$a_{ij} = \frac{1}{i^2 j^2 (i+j)^2}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = 0{,}33911435 \quad [15]$$

CHAPITRE VI

INTEGRALES DOUBLES

- Résultats dus à LEVIN
- Nouvelle approche

Dans un premier temps, nous reppelons les résultats obtenus par LEVIN [13] où celui-ci généralise des résultats connus sur les integrales simples.

Dans un second temps, nous présentons une nouvelle approche qui n'est pas une généralisation d'un procédé des intégrales simples.
Elle reste cependant théorique.

RESULTATS DUS A LEVIN

Le problème du calcul des intégrales doubles infinies est abordé par LEVIN [13]. Son étude consiste à généraliser la forme confluente du ε-algorithme de WYNN (1962) et la transformation G de GRAY, ATCHISON et Mc WILLIAMS (1971).

Dans le cas des intégrales simples, c-à-d d'une seule variable, ces deux transformations donnent la valeur exacte de $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ pour toute fonction vérifiant

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} p_k \, f^{(k)}(t) \qquad\qquad t \in [0, +\infty[$$

où p_k sont des coefficients constants.

Le ε-algorithme peut alors s'écrire

$$\varepsilon_m(t) = \int_0^{\infty} f(u)\, du - \sum_{k=1}^{m} p_k \, f^{(k-1)}(t)$$

où les coefficients p_k satisfont la relation

$$f^{(j)}(t)' = \sum_{k=1}^{m} p_k \, f^{(j+k)}(t) \qquad\qquad j = 0, 1, \ldots, m-1$$

La généralisation de LEVIN est construite à partir de l'équation linéaire à coefficients constants :

$$\text{(H)} \qquad f(x, y) = \sum_{(k, \ell) \in T} \alpha_{k\ell} \, \partial_x^k \, \partial_y^\ell \, f(x, y) \qquad\qquad T \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} \;;\; (0, 0) \notin T$$

<u>Théorème 1 : [13]</u>

Soit f une fonction vérifiant (H) et telle que l'on ait :

$$\lim_{y \to \infty} \partial_x^k \, \partial_y^{\ell-1} f(x, y) = 0 \qquad (k, \ell) \in T \;;\; \ell \neq 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \partial_x^{k-1} \partial_y^{\ell} f(x, y) = 0 \qquad (k, \ell) \in T \ ; \ k \neq 0$$

alors $\displaystyle\int_b^\infty \int_a^\infty f(x, y)\, dx\, dy = \sum_{\substack{(k, \ell)\in T \\ k.\ \ell \neq 0}} \alpha_{k\ell}\, \partial_x^{k-1} \partial_y^{\ell-1} f(a, b)$

$$- \sum_{(k, 0)\in T} \alpha_{k0} \int_b^\infty \partial_x^{k-1} f(a, y)\, dy - \sum_{(0, \ell)\in T} \alpha_{0\ell} \int_a^\infty \partial_y^{\ell-1} f(x, b)\, dx.$$

LEVIN en déduit la définition suivante :

$$\varepsilon_T^{(2)} = \iint_A f(x, y)\, dx\, dy + \sum_{\substack{(k, \ell)\in T \\ k.\ \ell \neq 0}} \alpha_{k\ell}\, \partial_x^{k-1} \partial_y^{\ell-1} f(a, b)$$

$$- \sum_{(k, 0)\in T} \alpha_{k0} \int_b^\infty \partial_x^{k-1} f(a, y)\, dy - \sum_{(0, \ell)\in T} \alpha_{0\ell} \int_a^\infty \partial_y^{\ell-1} f(x, b)\, dx$$

où les coefficients de $\alpha_{k\ell}$ sont définis par le système linéaire donné par

(H) et $\displaystyle\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = - \int_b^\infty \int_a^\infty f(x, y)\, dx\, dy + \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y)\, dx\, dy$

Cette définition est construite pour assurer la démonstration du théorème suivant :

Théorème 2 : [13]

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\varepsilon_T^{(2)} = \displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y)\, dx\, dy$ $\forall a, b \geq 0$ est que f satisfasse les hypothèses du théorème 1 et que le système linéaire défini par (H) ait une solution unique.

Mais, tout comme dans le cas des intégrales simples, $\varepsilon_T^{(2)}$ a le désavantage d'utiliser des dérivées de f. Pour les intégrales simples, cet inconvénient est évité si l'on utilise la transformation G qui peut s'écrire

$$G_m(a\ ;\ \Delta t) = \int_0^a f(t)\,dt - \sum_{k=1}^{m} q_k\, \Delta^{k-1} f(a)$$

où les coefficients q_k vérifient

$$\int_{a+j\Delta t}^{a+(j+1)\Delta t} f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{m} q_k\, \Delta^k f(a+j\Delta t) \qquad j = 0, 1, \ldots, m-1$$

Cette dernière relation peut encore s'écrire

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} q_k\, \Delta^{k-1} f'(t) \qquad t \geq 0 \qquad (H')$$

La classe des fonctions vérifiant (H') est la même de celle qui vérifie (H). Par suite, même si la transformation G ne nécessite que des valeurs de f et non l'évaluation de ses dérivées, les deux transformations donnent la valeur exacte de l'intégrale des mêmes fonctions.

La généralisation au cas des intégrales doubles est construite par LEVIN de la façon suivante :

Définition :

Soit T un sous-ensemble de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ayant r éléments, $(0, 0) \notin T$; et soit $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ayant également r éléments.

$$A = \{(x, y) \mid x \leq a \text{ ou } y \leq b\ ;\ x, y \geq 0\}$$

On pose

$$G_T^{(2)}(a, b\ ;\ \Delta x, \Delta y) = \iint_A f(x, y)\,dx\,dy + \sum_{\substack{(k,\ \ell)\in T \\ k,\ \ell \neq 0}} \beta_{k\ell}\, \Delta_x^{k-1} \Delta_y^{\ell-1} f(a, b)$$

$$- \sum_{(k,\ 0)\in T} \beta_{k0} \int_b^{\infty} \Delta_x^{k-1} f(a, y)\,dy - \sum_{(0,\ \ell)\in T} \beta_{0\ell} \int_a^{\infty} \Delta_y^{\ell-1} f(x, b)\,dx$$

où les coefficients $\beta_{k\ell}$ sont déterminés par le système linéaire de r équations

$$(S) \int_{b+j\Delta y}^{b+(j+1)\Delta y} \int_{a+i\Delta x}^{a+(i+1)\Delta x} f(x, y)\, dx\, dy = \sum_{\substack{(k,\ \ell)\ T \\ k.\ \ell \neq 0}} \beta_{k\ell}\, \Delta_x^k\, \Delta_y^\ell\, f(a+i\Delta x,\ b+j\Delta y)$$

$$- \sum_{(k,\ 0)\in T} \beta_{k0} \int_{b+j\Delta y}^{b+(j+1)\Delta y} \Delta_x^k\, f(a+i\Delta x,\ y)\, dy\ -$$

$$\sum_{(0,\ \ell)\in T} \beta_{0\ell} \int_{a+i\Delta x}^{a+(i+1)\Delta x} \Delta_y^\ell\, f(x,\ b+j\Delta y)\, dx$$

$(i, j) \in R$ et avec $\Delta_x\ f(x, y) = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$

$$\Delta_y\ f(x, y) = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

Théorème 3 : [13]

Une condition nécessaire et suffisante pour que $G_T^{(2)}\ (a, b\ ;\ \Delta x, \Delta y) =$

$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y)\, dx\, dy\quad \forall a, b \geq 0$ est que f vérifie :

$$f(x, y) = \sum_{\substack{(k,\ \ell)\in T \\ k.\ \ell \neq 0}} \beta_{k\ell}\, \Delta_x^{k-1}\, \Delta_y^{\ell-1}\, f(x, y) + \sum_{(k,\ 0)\in T} \beta_{k0}\, \Delta_x^{k-1}\, f(x, y)$$

$$+ \sum_{(0,\ \ell)\in T} \beta_{0\ell}\, \Delta_y^{\ell-1}\, f(x, y) \qquad \forall x, y \geq 0 \qquad (H'')$$

et $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} f(x, y) = 0$ et le choix de R est tel que le système (S) ait une solution unique.

Contrairement au cas des intégrales simples, $\Delta_T^{(2)}$ et $G_T^{(2)}$ ne donnent pas la valeur exacte d'une intégrale de la même classe de fonction puisque les fonctions vérifiant (H) ne sont pas les mêmes que celles qui vérifient (H").

INTEGRALES DOUBLES
NOUVELLE APPROCHE

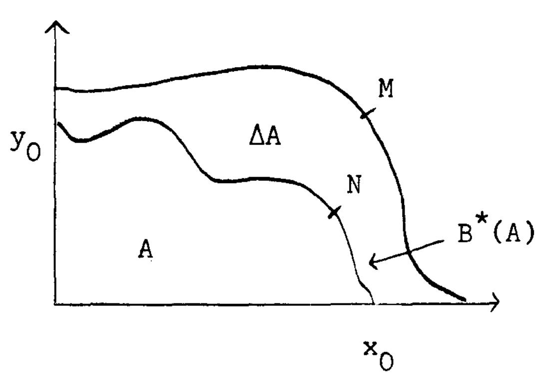
L'étude abordée dans cette partie est l'évaluation d'intégrales doubles ou multiples. Supposons que l'on ait à calculer

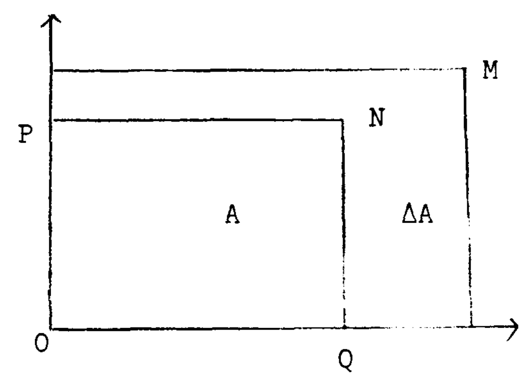
$$I = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy$$

que l'on sait convergente. L'intégration demandée est à effectuer sur le domaine $\Omega = [0, +\infty[\times [0, +\infty[$. Soit A une partie de Ω telle qu'il existe deux nombres x et y tels que $A \subset [0, x[\times [0, y[$ et deux réels x_0 et y_0 tels que $A \cap (Ox \cup Oy) = [0, x_0] \cup [0, y_0]$.

On notera $B^*(A) = \partial(A) - \{[0, x_0] \cup [0, y_0]\}$ où $\partial(A)$ est le bord de A c-à-d sa frontière. Soit ΔA une partie de Ω telle que $\Delta A \cap A = B^*(A) \cup \{x_0, y_0\}$ On supposera également que ni A, ni ΔA ne sont à trous, c-à-d que ces ensembles sont connexes.

Par exemple :





Dans le schéma de droite $\delta(A)$ est le carré OPNQ et B (A) est le chemin PNQ.

Nous supposerons dans ce qui suit que $\iint_A f(x, y)\, dx\, dy$ et $\iint_{\Delta A} f(x, y)\, dx\, dy$ sont deux valeurs connues ou que l'on peut les calculer.

A partir de ces deux nombres, nous allons proposer une méthode de calcul de $\iint_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy$.

Pour cela, nous introduisons la définition suivante :

$$I_C = \iint_A f(x, y)\,dx\,dy + \frac{\iint_{\Delta A} f(x, y)\,dx\,dy}{1 - \frac{f(M)}{f(N)}}$$

où $M \in B^{*}(\Delta A)$ et $N \in B^{*}(A)$

et donc I_C dépend du choix de A, ΔA, M et N.

Nous supposerons en outre que si x_0 et y_0 tendent vers l'infini, alors A tend vers Ω c-à-d couvre tout le quart du plan, et réciproquement.

Nous étudierons les propriétés de I_C et les conditions pour lesquelles I_C pourra être considéré comme une approximation de I.

<u>Théorème 1</u> :

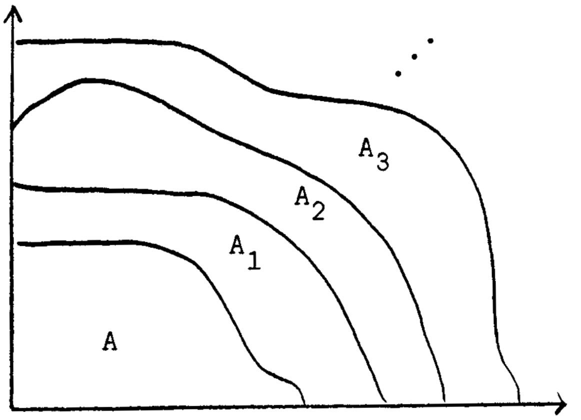
Si $\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(x, y)\,dx\,dy = I$ et si il existe deux nombres réels α et β tels que :

$\frac{f(M)}{f(N)} \notin [\alpha, \beta]$ et $\alpha < 1 < \beta$ alors I_C converge vers A quand x_0 et y_0 tendent vers l'infini.

Ce théorème a pour but de déterminer, lorsque cela est possible, des choix de A, ΔA, M et N pour que I_C donne une approximation de I.

<u>Démonstration</u> :

$\iint_{\Delta A} f(x, y)\,dx\,dy$ peut être considéré comme terme d'une série qui converge vers I. Il suffit en effet de décomposer le demi-plan Ω de la manière suivante :



$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{A} f(x, y)\, dx\, dy + \sum_{i=1}^{\infty} \iint_{A_i} f(x, y)\, dx\, dy$$

avec $A_1 = \Delta A$.

Puisque $\iint f(x, y)\, dx\, dy$ converge, chaque terme $\iint_{A_i} f(x, y)\, dx\, dy$ tend vers 0 lorsque i tend vers l'infini.

Par suite, si $\frac{f(M)}{f(N)} \notin [\alpha, \beta]$ avec $\alpha < 1 < \beta$ alors

$$\lim I_C = \lim_{x_0, y_0 \to \infty} \iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy$$

Théorème 2 :

Si $I = \iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy$ et s'il existe une constante $C > 0$ telle que $\left|1 - \frac{f(M)}{f(N)}\right| \geq C$ pour x_0 et y_0 suffisamment grands, alors I_C tend vers I.

Démonstration :

D'après l'hypothèse, $\left|I_C - \iint_A f(x, y)\, dx\, dy\right| \leq \left|C \iint_{\Delta A} f(x, y)\, dx\, dy\right|$

d'où par passage à la limite, c-à-dire quand $x_0, y_0 \to \infty$

$$\lim \left[I_C - \iint_A f(x, y)\, dx\, dy\right] = 0.$$

Théorème 3 :

Une condition nécessaire et suffisante pour que $I_C = I$ est que

$$f(N) \iint_{\Omega-(A+\Delta A)} f(x, y)\, dx\, dy = f(M) \iint_{\Omega-A} f(x, y)\, dx\, dy$$

Démonstration :

$I_C = I$ équivaut, par définition, à

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy + f(N) \frac{\iint_{\Delta A} f(x, y)\, dx\, dy}{f(N) - f(M)} = \iint_\Omega f(x, y)\, dx\, dy$$

ou encore à

$$f(N) \iint_\Delta \ f(x, y)\, dx\, dy = (f(N)\ f(M)\ [\iint_\Omega f(x, y)\, dx\, dy - \iint_A f(x, y)\, dx\, dy$$

ce qui peut encore s'écrire

$$f(M) \iint_{\Omega-A} f(x, y)\, dy\, dy = f(N) \iint_{\Omega-(A+\Delta A)} f(x, y)\, dx\, dy$$

<u>Exemple</u> :

Soit la fonction $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$. Le calcul de I se fera à l'aide des coordonnées polaires : $x = r \cos\theta$; $y = r \sin\theta$.

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta \qquad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = r \sin\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos\theta$$

$$I = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^{+\infty} r\, e^{-r^2}\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \times \int_0^{+\infty} r\, e^{-r^2}\, dr$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[- \frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$$

On choisit pour ensembles A et ΔA les ensembles suivants :

$$A = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le r \le R\ ;\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}$$

$$\Delta A = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid R \le r \le R+\Delta R\ ; \le 0 \quad \le \theta \quad \frac{\pi}{2}\}$$

d'où

$$\iint_{\Omega-A} f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2} \int_R^{+\infty} r\, e^{-r^2}\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{4}\, e^{-R^2}$$

$$\iint_{\Omega-(A+\Delta A)} f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2} \int_{R+\Delta R}^{+\infty} r\, e^{-rt}\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{4}\, e^{-(R+\Delta R)^2}$$

$$f(M) = e^{-(R+\Delta R)^2} \qquad ; \qquad f(N) = e^{-R^2}$$

On vérifie ainsi que

$$f(M) \iint_{\Omega-A} f(x, y)\, dx\, dy = f(N) \iint_{\Omega-(A+\Delta A)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Théorème 4 :

$$I_C = \frac{\begin{vmatrix} \iint_A f(x, y)\, dx\, dy & \iint_{A+\Delta A} f(x, y)\, dx\, dy \\ f(N) & f(M) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ f(N) & f(M) \end{vmatrix}}$$

Démonstration :

Soit D le rapport des deux déterminants

$$D = \frac{f(M) \iint_A f(x, y)\, dx\, dy - f(N) \iint_{A+\Delta A} f(x, y)\, dx\, dy}{f(M) - f(N)}$$

$$= \frac{f(M) \iint_A f(x, y)\, dx\, dy - f(N) \iint_A f(x, y)\, dx\, dy - f(N) \iint_{\Delta A} f(x, y)\, dx\, dy}{f(M) - f(N)}$$

$$= \iint_A f(x, y)\, dx\, dy + \frac{\iint_{\Delta A} f(x, y)\, dx\, dy}{1 - \frac{f(M)}{f(N)}} = I_C$$

Théorème 5 :

$$I_C = \iint_{A+\Delta A} f(x, y)\, dx\, dy + \frac{\iint_{\Delta A} f(x, y)\, dx\, dy}{\frac{f(N)}{f(M)} - 1}$$

Démonstration :

$$I_C = \frac{f(M) \iint_{A+\Delta A} f(x, y)\, dx\, dy - f(M) \iint_{\Delta A} f(x, y)\, dx\, dy - f(N) \iint_{A+\Delta A} f(x, y)\, dx\, dy}{f(M) - f(N)}$$

$$= \iint_{A+\Delta A} f(x, y)\, dx\, dy - \frac{f(M) \iint_{\Delta A} f(x, y)\, dx\, dy}{f(M) - f(N)}$$

$$= \iint_{A+\Delta A} f(x, y)\, dx\, dy + \frac{\iint_{\Delta A} f(x, y)\, dx\, dy}{\frac{f(N)}{f(M)} - 1}$$

Théorème 6 :

Si $\iint_A f(x, y)\, dx\, dy$ converge vers I lorsque A tend vers Ω et si

$$\lim_{A\to\Omega} \frac{\iint_A f(x, y)\, dx\, dy - I}{\iint_{A+\Delta A} f(x, y)\, dx\, dy - I} = \lim_{A\to\infty} \frac{f(N)}{f(M)} = \rho \neq 1$$

alors I_C converge vers I plus vite que $\iint_{A+\Delta A} f(x, y)\, dx\, dy$

Démonstration :

Il suffit de montrer que, dans les conditions du théorème,

$$\lim \frac{I_C - I}{\iint_{A+\Delta A} f(x, y)\, dx\, dy - I} = 0$$

ceci lorsque A tend vers Ω.

D'après le théorème 5

$$I_C = \iint_{A+\Delta A} f(x, y)\, dx\, dy + \frac{\iint_{\Delta A} f(x, y)\, dx\, dy}{\frac{f(N)}{f(M)} - 1}$$

d'où

$$\frac{I_C - I}{\iint_{A+\Delta A} f(x, y)\, dx\, dy - I} = 1 + \frac{\iint_{\Delta A} f(x, y)\, dx\, dy}{\frac{f(N)}{f(M)} - 1} \times \frac{1}{\iint_{A+\Delta A} f(x, y)\, dx\, dy - I}$$

d'où $\dfrac{I_C - I}{\iint_{A+\Delta A} f(x, y)\, dx\, dy - I} \to 0$ est équivalent à

$$E = \frac{\iint_{\Delta A} f(x, y)\, dx\, dy}{1 - \frac{f(N)}{f(M)}} \times \frac{1}{\iint_{A+\Delta A} f(x, y)\, dx\, dy - I} \to 1$$

or E peut encore s'exprimer sous la forme :

$$E = \frac{\iint_{A+\Delta A} f(x, y)\, dx\, dy - \iint_{A} f(x, y)\, dx\, dy}{1 - \frac{f(N)}{f(M)}} \times \frac{1}{\iint_{A+\Delta A} f(x, y)\, dx\, dy - I}$$

$$= \frac{\left[\iint_{A+\Delta A} f(x, y)\, dx - I\right] - \left[\iint_{A} f(x, y)\, dx\, dy - I\right]}{\left[1 - \frac{f(N)}{f(M)}\right]\left[\iint_{A+\Delta A} f(x, y)\, dx\, dy - I\right]}$$

$$\frac{1 - \dfrac{\iint_{A} f(x, y)\, dx\, dy - I}{\iint_{A+\Delta A} f(x, y)\, dx\, dy - I}}{1 - \frac{f(N)}{f(M)}}$$

Si $\lim \dfrac{\iint_{A} f(x, y)\, dx\, dy - I}{\iint_{A+\Delta A} f(x, y)\, dx\, dy - I} = \lim \dfrac{f(N)}{f(M)} = \rho \neq 1$

alors $E \to 1$ ou encore $\dfrac{I_C - I}{\iint_{A+\Delta A} f(x, y)\, dx\, dy - I} \to 0$

REFERENCES

[1] ALBERTSEN-JACOBSEN-SORENSEN
"Non-linear transformations for accelerating the convergence of N-Dimensional".
Technical University of Denmark - 1980.

[2] BREZINSKI
"Accélération de la convergence en analyse numérique".
Lectures Notes in Mathematics n° 584, Springer-Verlag - 1977.

[3] BREZINSKI
"A General Extrapolation Algorithm".
Numer. Math. 35 (1980) pp. 175-187.

[4] BREZINSKI
"Recursive Interpolation Extrapolation and Projection".
A paraître dans J. Comp. Appl. Math.

[5] BREZINSKI
"Vitesse de convergence d'une suite".
A paraître dans Rev. Roumaine Math. Pures et Appliquées.

[6] BROMWICH. *"An introduction to the theory of infinite series".*
Mac Millan, Londres 1949.

[7] GENZ
"The Approximate calculation of Multidimensional Integrab using Extrapolation Methods".
University of Kent at Canterbury, Ph D. 1975.

[8] HAVIE
"Generalized Neville type extrapolation schemas".
BIT, 19 (1979) pp. 204-214.

[9] HIGGINS
"Topics in the Applications of Summation Methods".
Drexel University, Ph. D. 1976.

[10] JOLLEY
"Summation of Series".
Dover Publication, Inc.

[11] KNOPP
"Infinite sequences and series".
Dover Publication, Inc.

[12] KNOPP. *"Theory and application of infinite series".*
Blackie and Son, 1957.

[13] LEVIN
"On Accelerating the convergence of Infinite Double Series and Integrals". Math. Comp. 35 (1980), pp. 1331-1346.

[14] LYUSTERNIK and YANPOL' (Editors)
"Mathematical Analysis".
Functions, limite, Series, Continued Fractions
Pergamon Press, First Edition, 1965.

[15] STREIT
"The evaluation of Double-Series".
BIT 12 (1972) pp. 400-408.

[16] VALIRON
Cours d'analyse mathématique. Paris, Masson et Cie, 1948-1950.

[17] VALIRON
"Théorie des fonctions".
MASSON et Cie, Paris 1955.

[18] WIMP
"Sequences Transformations and their Applications".
Academic Press, 1981.

Résumé.

Le but de cette thèse est de présenter, du point de vue du numéricien, une étude sur les suites, séries et intégrales doubles.

Nous disposons pour cela de procédés connus traitant les suites et séries simples. Une partie sera donc consacrée à des généralisations d'algorithmes pour suites simples. Pour se faire on examine ceux-là, on met en évidence une propriété et la généralisation sera définie à partir de la conservation de cette propriété écrite dans le cas des suites et séries simples.

Une autre façon de procéder est de trouver un moyen de ramener une suite double ou multiple à une suite simple.

Nous présenterons également une transformation qui ne découle pas de résultats connus sur les suites simples.

Enfin les intégrales doubles feront l'objet du dernier chapitre.

Mots clés.

- Accélération de la convergence.
- Suites doubles et multiples.
- Séries doubles et multiples.
- Intégrales doubles.
- Transformation de suites.
- Transformation de séries.
- Transformation d'intégrales.
- Vitesse de convergence.
- ε-algorithme.
- E-algorithme.
- Opérateur $\Delta_{k\ell}$.