THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE 3ème CYCLE

INFORMATIQUE

par

Sophie TISON

MOTS INFINIS ET PROCESSUS.
OBJETS INFINITAIRES ET TOPOLOGIE.

Thèse soutenue le 30 Septembre 1983 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

Président	V. CORDONNIER
Rapporteur	M. DAUCHET
Examinateurs	G. COMYN
	M. NIVAT

PROFESSEURS 1ère CLASSE

M.	BACCHUS Pierre	Mathématiques
M.	BEAUFILS Jean-Pierre (dét.)	Chimie
M.	BIAYS Pierre	G.A.S.
M.	BILLARD Jean	Physique
M.	BONNOT Ernest	Biologie
M.	BOUGHON Pierre	Mathématiques
M.	BOURIQUET Robert	Biologie
M.	CELET Paul	Sciences de la Terre
M.	COEURE Gérard	Mathématiques
M.	CONSTANT Eugène	I.E.E.A.
M.	CORDONNIER Vincent	I.E.E.A.
M.	DEBOURSE Jean-Pierre	S.E.S.
M.	DELATTRE Charles	Sciences de la Terre
M.	DURCHON Maurice	Biologie
M.	ESCAIG Bertrand	Physique
M.	FAURE Robert	Mathématiques
M.	FOURET René	Physique
M.	GABILLARD Robert	I.E.E.A.
M.	GRANELLE Jean-Jacques	S.E.S.
M.	GRUSON Laurent	Mathématiques
M.	GUILLAUME Jean	Biologie
M.	HECTOR Joseph	Mathématiques
M.	HEUBEL Joseph	Chimie
M.	LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M.	LACOSTE Louis	Biologie
M.	LANSRAUX Guy	Physique
M.	LAVEINE Jean-Pierre	Sciences de la Terre
M.	LEBRUN André	C.U.E.E.P.
M.	LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme	LENOBLE Jacqueline	Physique
M.	LHOMME Jean	Chimie
M.	LOMBARD Jacques	S.E.S.
M.	LOUCHEUX Claude	Chimie
M.	LUCQUIN Michel	Chimie

M.	MAILLET Pierre	S.E.S.
M.	MONTREUIL Jean	Biologie
M.	PAQUET Jacques	Sciences de la Terre
M.	PARREAU Michel	Mathématiques
M.	PROUVOST Jean	Sciences de la Terre
M.	SALMER Georges	I.E.E.A.
Mme	SCHWARTZ Marie-Hélène	Mathématiques
M.	SEGUIER Guy	I.E.E.A.
M.	STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M.	TILLIEU Jacques	Physique
M.	TRIDOT Gabriel	Chimie
M.	VIDAL Pierre	I.E.E.A.
M.	VIVIER Emile	Biologie
M.	WERTHEIMER Raymond	Physique
M.	ZEYTOUNIAN Radyadour	Mathématiques

PROFESSEURS 2ème CLASSE

M.	AL FAKIR Sabah	Mathématiques
M.	ANTOINE Philippe	Mathématiques
M.	BART André	Biologie
Mme	BATTIAU Yvonne	Géographie
M.	BEGUIN Paul	Mathématiques
M.	BELLET Jean	Physique
M.	BKOUCHE Rudolphe	Mathématiques
M.	BOBE Bernard	S.E.S.
M.	BODART Marcel	Biologie
M.	BOILLY Bénoni	Biologie
M.	BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M.	BOSQ Denis	Mathématiques
M.	BREZINSKI Claude	I.E.E.A.
M.	BRUYELLE Pierre (Chargé d'enseignement)	Géographie
M.	CAPURON Alfred	Biologie
M.	CARREZ Christian	I.E.E.A.
M.	CHAMLEY Hervé	E.U.D.I.L.

M.	CHAPOTON Alain	C.U.E.E.P.
M.	COQUERY Jean-Marie	Biologie
Mme	CORSIN Paule	Sciences de la Terre
M.	CORTOIS Jean	Physique
M.	COUTURIER Daniel	Chimie
Mle	DACHARRY Monique	Géographie
M.	DEBRABANT Pierre	E.U.D.I.L.
M.	DEGAUQUE Pierre	I.E.E.A.
M.	DELORME Pierre	Biologie
M.	DEMUNTER Paul	C.U.E.E.P.
M.	DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques
M.	DEVRAINNE Pierre	Chimie
M.	DHAINAUT André	Biologie
M.	DORMARD Serge	S.E.S.
M.	DOUKHAN Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M.	DUBOIS Henri	Physique
M.	DUBRULLE Alain	Physique
M.	DUEE Gérard	Sciences de la Terre
M.	DYMENT Arthur	Mathématiques
M.	FLAMME Jean-Marie	E.U.D.I.L.
M.	FONTAINE Hubert	Physique
M.	GERVAIS Michel	S.E.S.
M.	GOBLOT Rémi	Mathématiques
M.	GOSSELIN Gabriel	S.E.S.
M.	GOUDMAND Pierre	Chimie
M.	GREVET Patrice	S.E.S.
M.	GUILBAULT Pierre	Biologie
M.	HANGAN Théodore	Mathématiques
M.	HERMAN Maurice	Physique
M.	JACOB Gérard	I.E.E.A.
M.	JACOB Pierre	Mathématiques
M.	JOURNEL Gérard	E.U.D.I.L.
M.	KREMBEL Jean	Biologie
M.	LAURENT François	I.E.E.A.
Mle	LEGRAND Denise	Mathématiques
Mle	LEGRAND Solange	Mathématiques (Calais)
Mme	LEHMANN Josiane	Mathématiques

M.	LEMAIRE Jean	Physique
M.	LENTACKER Firmin	G.A.S.
M.	LEVASSEUR Michel	I.P.A.
M.	LHENAFF René	G.A.S.
M.	LOCQUENEUX Robert	Physique
M.	LOSFELD Joseph	I.E.E.A.
M.	LOUAGE Francis	E.U.D.I.L.
M.	MACKE Bruno	Physique
M.	MAIZIERES Christian	I.E.E.A.
Mle	MARQUET Simone	Mathématiques
M.	MESSELYN Jean	Physique
M.	MIGEON Michel	E.U.D.I.L.
M.	MIGNOT Fulbert	Mathématiques
M.	MONTEL Marc	Physique
Mme	NGUYEN VAN CHI Régine	G.A.S.
M.	PARSY Fernand	Mathématiques
Mle	PAUPARDIN Colette	Biologie
M.	PERROT Pierre	Chimie
M.	PERTUZON Emile	Biologie
M.	PONSOLLE Louis	Chimie
M.	PORCHET Maurice	Biologie
M.	POVY Lucien	E.U.D.I.L.
M.	RACZY Ladislas	I.E.E.A.
M.	RICHARD Alain	Biologie
M.	RIETSCH François	E.U.D.I.L.
M.	ROGALSKI Marc	M.P.A.
M.	ROUSSEAU Jean-Paul	Biologie
M.	ROY Jean-Claude	Biologie
M.	SALAMA Pierre	S.E.S.
Mme	SCHWARZBACH Yvette (CCP)	M.P.A.
M.	SCHAMPS Joël	Physique
M.	SIMON Michel	S.E.S.
M.	SLIWA Henri	Chimie
M.	SOMME Jean	G.A.S.
Mle	SPIK Geneviève	Biologie
M.	STERBOUL François	E.U.D.I.L.
M.	TAILLIEZ Roger	Institut Agricole

M.	TOULOTTE Jean-Marc	I.E.E.A.
M.	VANDORPE Bernard	E.U.D.I.L.
M.	WALLART Francis	Chimie
M.	WATERLOT Michel	Sciences de la Terre
Mme	ZINN JUSTIN Nicole	M.P.A.

CHARGES DE COURS

M.	TOP Gérard	S.E.S.
M.	ADAM Michel	S.E.S.

CHARGES DE CONFERENCES

M.	DUVEAU Jacques	S.E.S.
M.	HOFLACK Jacques	I.P..A
M.	LATOUCHE Serge	S.E.S.
M.	MALAUSSENA DE PERNO Jean-Louis	S.E.S.
M.	OPIGEZ Philippe	S.E.S.

La confiance que Maurice Nicot m'a témoignée tout au long de ce travail et le soutien qu'il m'a accordé ont été pour moi primordiaux et je lui suis très reconnaissante.

Max Daudet n'a ménagé ni son temps, ni son énergie, ni son imagination pour l'élaboration de cette thèse. Ses conseils et son aide m'ont été très précieux et je tiens à lui exprimer toute ma gratitude.

Je remercie Gérard Comyn pour son aide, ses conseils et les nombreuses heures qu'il a consacrées à mon travail.

Mais je dois beaucoup à tous les membres de l'équipe qui m'ont accueillie au labo avec chaleur, et en particulier à ceux, nombreux, qui ont partagé avec patience leur bureau avec moi.

Enfin je remercie Bénédicte et Madame Dobock qui ont réalisé avec patience et compétence la dactylographie et le tirage de cette thèse.

Bref, que tous ceux qui m'ont aidée sachent que je les remercie.

INTRODUCTION

Dans une première partie, nous étudions les langages infinitaires, le but étant l'étude du comportement des processus : en effet, un comportement possible du processus étant représenté par un mot fini ou non, l'ensemble des comportements possibles du processus sera représenté par un langage infinitaire.

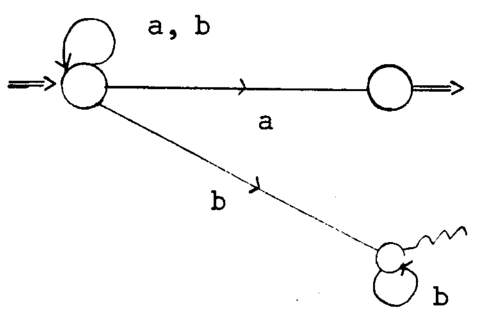
Plus particulièrement, nous nous intéressons aux processus formalisés par des systèmes de transition finis (notion définie par M. Nivat, reprenant celle des automates finis à états "infinitaires" de Büchi, Mac Naughton) et donc aux langages rationnels infinitaires.

Dans ce cadre, nous étudions les propriétés des langages introduites par M. Nivat, qui formalisent les notions usuelles liées aux processus (problème d'approximation des comportements infinis, de blocage...), l'ensemble des mots étant d'abord muni d'une structure d'espace ordonné et métrique.

Ce sont ces structures que nous généralisons dans la deuxième partie, dans une étude englobant le cas des arbres et de la sémantique du non-determinisme ; Après avoir rappelé les structures d'espace ordonné (C.P.O's, S.F.P's (Scott, Plotkin)...) et d'espace métrique (Lawson, Comyn, Dauchet) qui servent de cadre à l'étude sémantique, nous nous sommes particulièrement attachés au cas du non-déterminisme ; plus précisément, un processus non-déterministe étant considéré comme l'ensemble de ses sorties possibles - pour une entrée donnée - nous essayons de donner un statut canonique d'espace ordonné et métrique à l'ensemble des parties d'un domaine D ; nous montrons la permutation - sous certaines conditions - de la "métrisation" et du "passage aux parties", réunissant l'approche métrique et l'approche sémantique (Smyth, Plotkin). Nous appliquons ensuite les résultats obtenus à l'étude des transformations rationnelles des langages et des forêts infinitaires.

Historiquement, Mac Naughton s'appuyant sur les travaux de Büchi et de Müller fut un des premiers à aborder l'étude des langages infinitaires et à étendre la notion de reconnaissance par un automate fini aux langages infinitaires[13];il définit et compare différents modes de reconnaissance mais nous citerons essentiellement ici la définition du système de transition fini qui sera utilisée par la suite : Un mot infini est reconnu par le système de transition fini S s'il existe un calcul infini le lisant, commençant dans une configuration initiale de S et passant une infinité de fois dans une des configurations "infinitaires". Par exemple, en notant $\Rightarrow$ 0 les états d'entrée, 0 $\Rightarrow$ les sorties et $\bigcirc$ les états "infinitaires", soit l'automate A :

A :



Le langage infinitaire L reconnu par A, réunion de L^{fin} sa partie finitaire et de L^{inf} sa partie purement infinitaire sera $L = (a \cup b)^* a \cup (a \cup b)^* b^{\omega}$, où b^{ω} désigne le mot infini bb...b...b.

(Une autre version oblige à passer une infinité de fois dans certaines configurations et uniquement dans celles-ci).

Il s'intéressa également au lien existant entre la partie finitaire et la partie purement infinitaire (i.e. reconnu par un système de transition fini), définissant la limite - en un certain sens - de comportements finis. (Ces travaux ont été réunis et repris par S. Eilenberg dans un de ses livres [8]).

L'étude des mots infinis, ensuite un peu délaissée, fut bientôt réabordée, les problèmes de synchronisation et du parallélisme des processus se formalisant à l'aide des mots infinis ; on essaya donc d'étendre les différentes notions de la théorie des langages finis aux mots infinis (on peut noter ici que la notion de déterminisation d'automate ne s'étend pas sans problème aux systèmes de transition finis ; en effet, il existe des rationnels infinitaires qui ne peuvent être reconnus par un système de transition fini déterministe : par exemple, $L = (a \cup b)^* b^\omega$). Et surtout on a poursuivi l'étude abordée par Mac Naughton sur les liens entre la partie finitaire et la partie purement infinitaire d'un langage infinitaire, cherchant naturellement à relier les comportements finis - donc observables - aux comportements infinis d'un processus. Ceci motiva la définition de certaines propriétés des langages infinitaires qui traduisent justement des notions essentielles pour les processus (M. Nivat, [16]) :

• La propriété d'être "fermé", i.e. toute "limite" de comportements finis est un comportement (fini ou infini)

• La propriété d'être "normal", i.e. tout comportement infini est "sup" de comportements finis.

• La propriété d'être "central", i.e. tout comportement fini peut être prolongé en un comportement infini : il n'y a pas de deadlock.

• Enfin celle d'être "parfait", i.e. d'être normal et central.

En particulier il est important de pouvoir calculer - tout du moins dans le cas rationnel - la partie centrale (resp. normale, parfaite) d'un langage, pour pouvoir s'assurer qu'il n'y a pas de blocage (resp. que tout comportement initial peut être prolongé en un comportement fini). Après avoir étudié la stabilité des propriétés ci-dessus sous l'action des opérateurs classiques, nous rappelons donc ici les constructions de la partie centrale et de la partie normale d'un rationnel infinitaire et nous donnons notre version de la construction plus délicate de la partie parfaite d'un rationnel (Arnold, Nivat, D. Beauquier). Nous construirons également le système de transition qui reconnait l'image homomorphique d'un rationnel, et celui qui reconnaît le produit uniforme de deux langages rationnels.

Or toute cette étude repose essentiellement sur deux structures de l'ensemble des mots : La structure d'ensemble ordonné - (comportement initial, notion de sup, langage normal, central...) - et celle d'espace métrique - (notion d'approximation, de limite, langage fermé,...).

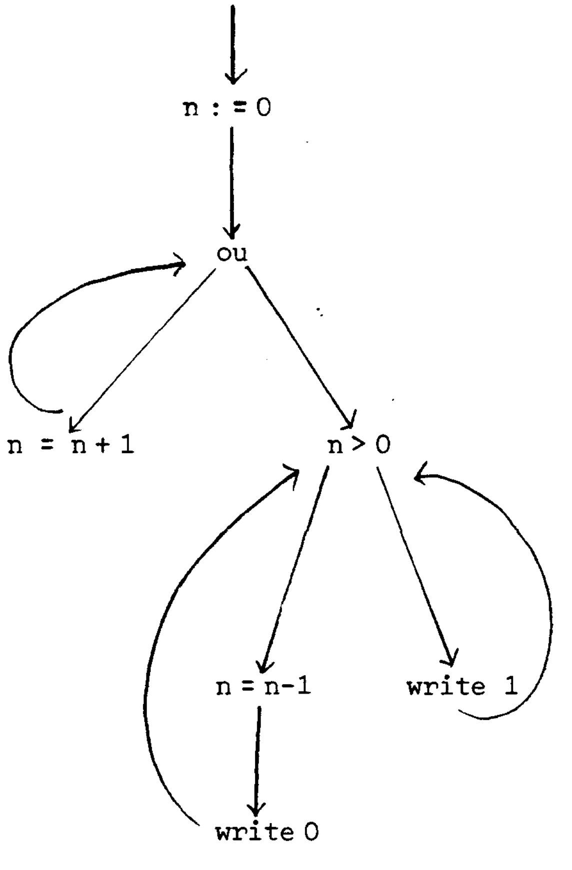
Cette problématique - quelle structure d'ordre, quelle structure topologique et métrique ? - a été généralisée par l'approche sémantique (Scott, Plotkin), les notions de "moins défini", "information (positive, négative)", "approximation", "possibilité"... étant formalisées en termes d'ordre, de topologie et de métrique.

Pour ce qui est de l'ordre, la structure de base, introduite par Scott et Strachey, , est celle de C.P.O. l'ordre correspondant à la notion intuitive de "moins défini que". En fait, les informaticiens travaillent essentiellement dans le cadre des C.P.O's ω-algébriques (en particulier des S.F.P.'s et des C.P.O's infinitaires), ce qui suppose qu'on ne considère qu'un ensemble dénombrable "d'informations" finies - La base - , tout objet pouvant être obtenu comme le sup d'une chaîne croissante d'objets finitaires. En particulier le C.P.O. des arbres, muni de l'ordre syntaxique, est le domaine de base de la sémantique algébrique. L'aspect topologique et métrique, permet de distinguer à quel niveau l'information finie "sépare" deux éléments - si elle les sépare - ; on peut prendre en compte l'information uniquement de façon positive [Scott 23] ; ainsi on peut considérer la base des informations finies comme un ensemble de propriétés que peuvent vérifier les éléments du domaine désiré - par exemple un type - ; un élément sera donc défini uniquement en fonction des propriétés qu'il vérifie (schématiquement, on ne peut séparer x tel que $x > b$ et y tel que $y > b$ et $y \not> b'$).

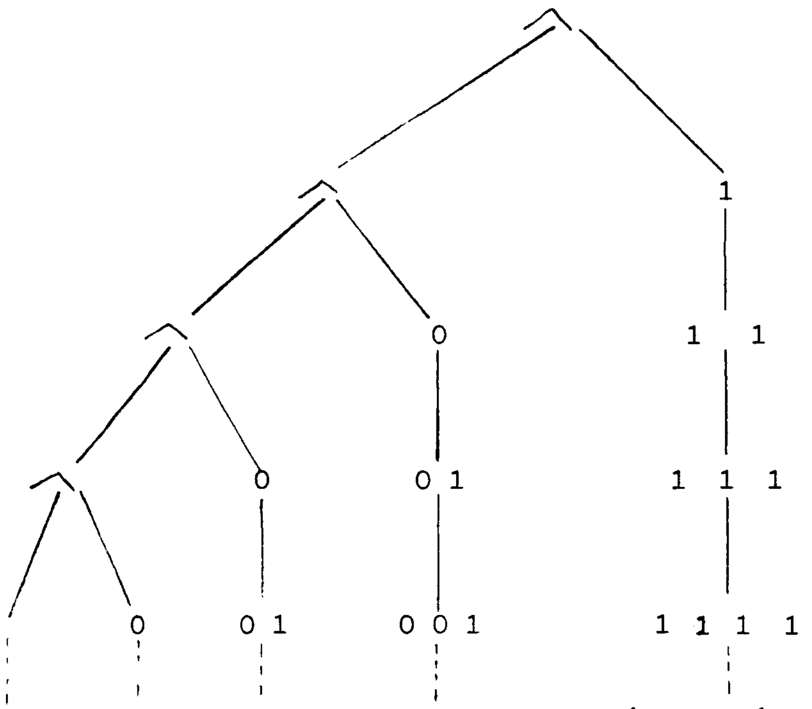
Scott munit ainsi canoniquement tout C.P.O. ω-algébrique d'une topologie, non séparée et non métrisable. Le passage à un espace métrique revient précisément à prendre aussi en considération l'information négative.
(i.e. $x \not> b$) ; la topologie obtenue - dite de Cantor ou de Lawson - , pour tout C.P.O. ω-algébrique est métrisable et G. Comyn et M. Dauchet ont explicité une métrique canonique associée à cette topologie. De plus,, dans une catégorie plus fine de C.P.O's - les 2/3 de S.F.P's - cette topologie est compacte (Plotkin) et les objets infinitaires construits comme limites des suites de Cauchy, sont les mêmes que ceux obtenus par sup des chaînes croissantes
De plus on peut remarquer qu'en appliquant ces constructions canoniques à l'ensemble des mots et des arbres sur un alphabet fini, on obtient bien l'ordre et la métrique utilisés dans la première partie et plus généralement en théorie des langages et des arbres (Arnold, Nivat, Boasson).

Mais si l'on suit l'approche sémantique de Scott-Strachey, le problème de différentes constructions sur les domaines se pose naturellement. En particulier si on s'intéresse au cas du non-déterminisme, un processus non-déterministe donnant pour une entrée donnée un ensemble de sorties possibles sur Δ. on doit pouvoir considérer les sous-ensembles de Δ - ou tout du moins certains sous-ensembles de Δ - comme éléments d'un domaine - le "powerdomain" de Δ.

Le premier problème posé par cette construction est sans doute quels sous-ensembles considérer ? Si on se limite au cas du non-déterminisme fini, il ne semble pas nécessaire de considérer tous les sous-ensembles de Δ et, dans leur construction,, Plotkin et Smyth se limitent au cas des finiments engendrables ; en effet soit par exemple le programme suivant (où le non-déterminisme se réduit à un seul choix).



On peut alors représenter l'ensemble des sorties possibles par l'arbre.



Soit donc T un arbre finitaire étiquetté de façon croissante (c'est-à-dire un fils a une étiquette supérieure à celle du père). On définit l'ensemble engendré par T comme étant l'ensemble des sup's des étiquettes lues en suivant une branche infinie quelconque de T. Un ensemble sera finiment engendrable s'il existe un arbre finitaire (et <u>non</u> fini) l'engendrant. Par exemple, si $\{0^n\ 1 / n \in \mathbb{N}\} \cup \{0^\omega\}$ est finiment engendrable, $\{0^n\ 1 / n \in \mathbb{N}\}$ ne l'est pas, en effet, intuitivement, si on veut engendrer $\{0^n\ 1 / n \in \mathbb{N}\}$ comme ensemble des sorties possibles d'un processus à non-déterminisme <u>fini</u>, il faut que l'ensemble <u>fini</u> puisse se prolonger en $\{0^n\ 1 / n \in \mathbb{N}\}$, donc contienne soit $\perp$, soit $0^n\ \Omega$ (n quelconque) ; d'où l'ensemble des sorties possibles contient soit $\perp$, soit $0^n \Omega$ (n quelconque), soit 0^ω.

Maintenant quel ordre choisir sur ces sous-ensembles ? On peut dire approximativement qu'on voudrait $X < Y$ si l'information connue sur Y est plus définie que celle connue sur X.

Il faut donc préciser d'abord quelles informations considérer, et quelles significations leur donner. Il semble raisonnable de ne prendre en compte que les informations finies finitaires. Quant à la signification donnée à l'information, deux points de vue peuvent être adoptés : l'information est une assertion que peut vérifier le processus, ou l'information est une assertion que doit vérifier le processus (cf. Winskel pour les notion d'inévitabilité et de possibilité). Ces deux points de vue conduisent aux trois préordres correspondant aux notions intuitives suivantes :

• $X < Y$ ssi Y peut vérifier toute assertion ("finitaire") que peut vérifier Y.

• $X < Y$ ssi Y doit vérifier toute assertion que X doit vérifier.

• $X < Y$ ssi les deux conditions précédentes sont réunies.

Ces trois préordres conduisent respectivement aux domaines de Hoare, de Smyth et de Plotkin (obtenus en quotientant l'ensemble des finiments engendrables muni des préordres respectifs par la relation d'équivalence canoniquement associée au préordre). Plotkin et Smyth ont montré en particulier que ces trois domaines sont des S.F.P's si le domaine de départ l'est.

Dans la deuxième partie, nous construisons formellement ces trois "powerdomains" dans le cadre des S.F.P's, sans nous restreindre aux fininents engendrables au départ - donc sans se limiter au cas du non-déterminisme fini - On peut s'étonner de retrouver les trois mêmes "powerdomains", mais il faut remarquer que pour distinguer les éléments, on se limite toujours aux informations finies. (D'ailleurs s'il semble raisonnable de ne s'intéresser qu'aux informationsobtenues dans un temps fini, certaines confusions peuvent sembler malencontreuses : en effet, dans les trois domaines, on identifie par exemple $\{0^n\ 1 \,/\, n > 0\} \cup \{\perp\}$ et $\{0^n\ 1 \,/\, n > 0\} \cup \{0^\omega\}$; or dans le premier cas, on est sûr d'obtenir un 1 dans la mesure où on a obtenu un 0 en sortie. Une approche différente a été envisagée par Egli et Lehmann (non publiée à notre connaissance) ; quant au cas du non-déterminisme fini, Plotkin l'a abordé dans [20]).

On a donc réalisé le passage aux parties d'un domaine du point de vue de l'ordre. Peut-on construire canoniquement ces "powerdomains" en tant qu'espaces métriques. Deux approches peuvent être principalement suivies :

D'un point de vue "C.P.O.", la métrisation des powerdomains en tant que S.F.P's s'impose naturellement et on obtient canoniquement les trois "powerdomains" en tant qu'espaces métriques.

Mais le domaine est au départ lui-aussi un espace métrique. Or la construction de l'espace métrique des parties d'un espace métrique se fait classiquement à l'aide de la construction de Hausdorff (la distance entre deux ensembles est définie comme étant la plus grande distance d'un point quelconque de l'un des deux ensembles à l'autre ensemble). Arnold et Nivat ont d'ailleurs utilisé les limites de Painlevé sur les ensembles d'arbres. Limites qui correspondent à la topologie obtenue par la construction de Hausdorff - dans leur étude de la sémantique des programmes non-déterministes. C'est au problème de l'équivalence de ces deux approches que nous nous sommes attaqués à la fin de la deuxième partie, problème que l'on peut résumer par le diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\text{Espace ordonné} \arrow[r, "\text{métrisation}", "\substack{\text{(Lawson, Comyn, Dauchet,}\\ \text{Arnold, Nivat)}}"'] \arrow[d, "\substack{\text{(Smyth,}\\ \text{Plotkin)}}", "\substack{\text{Passage}\\ \text{aux}\\ \text{parties}}"'] & \text{Espace métrique} \arrow[d, "\substack{\text{(Hausdorf,}\\ \text{Arnold, Nivat)}}"', "\substack{\text{Passage}\\ \text{aux}\\ \text{Parties}}"] \\
\text{"Powerdomains"} \arrow[r, "\text{métrisation}", "\text{(Lawson, Comyn, Dauchet)}"'] & \substack{\text{Espace métrique}\\ \text{des parties}}
\end{tikzcd}
$$

La commutation de ce diagramme - qu'on peut interpréter comme la permutation de la métrisation d'un ensemble ordonné et du passage aux parties - réunirait donc le point de vue sémantique et le point de vue métrique, donnant un statut canonique métrique aux "powerdomains". De plus, la métrique obtenue par la construction de Hausdorf étant définie point par point s'avère plus agréable à manier que celle déduite de façon naturelle par la structure de S.F.P. des "powerdomains". Nous avons donc cherché sous quelles conditions ce diagramme commutait. Les conditions que nous obtenons ne sont pas entièrement satisfaisantes, dans la mesure où elles semblent peu naturelles et assez compliquées. Elles sont toutefois raisonnables, étant vérifiées par la plupart des domaines classiques (arbres, ensembles d'arbres, morphismes d'arbres...)

Enfin, ayant donné un statut canonique d'espace métrique à l'ensemble des parties du domaine des mots et du domaine des arbres sur un alphabet fini, on utilise les résultats obtenus pour l'étude de la continuité des transductions rationnelles de mots et d'arbres.

Finalement, plusieurs développements de notre travail nous semblent possibles. Dans l'étude des mots infinis et des processus : étude qui a suscité beaucoup de travaux depuis peu (Arnold, Nivat, Théorème de Darandeau-Kott, problème de l'équivalence des systèmes de transition, définition des systèmes "minimaux").

- Dans l'étude des langages et forêts infinitaires et de leurs transformations (F. Gire, E. Lilin, M.F. Claerbout,...).

- Dans l'étude sémantique, en particulier en programmation logique.

PLAN

A Mots infinis et processus

1 Le cas général

I. Rappels et notations

II. Langages fermés

III. Langages normaux

IV. Langages centraux

V. Langages idéaux

VI. Langages fermés normaux

VII. Langages fermés centraux

VIII. Langages normaux centraux

IX. Langages fermés idéaux

X. Langages idéaux centraux

XI. Langages fermés normaux centraux

XII. Langages fermés idéaux centraux

2 Les rationnels

A) Rappels

B) Parties normale, centrale et parfaite d'un rationnel

C) Stabilité des rationnels

A MOTS INFINIS ET PROCESSUS

1 Le cas général

I. Rappels et notations

a) Soit A un alphabet non vide.

Un mot infini sur A est une application u de $\mathbb{N}^*$ dans A.

La n-ième lettre de u est u(n). On note u[n] le mot u(1) ... u(n).

A^* désigne l'ensemble des mots finis sur A.
A^ω désigne l'ensemble des mots infinis sur A.
A^∞ désigne l'ensemble des mots finis ou non sur A, i.e. $A^\omega = A^* \cup A^\infty$.

On étend la relation d'ordre préfixe "≤" de A^* à A^ω comme suit :

- $\forall u \in A^\omega, \forall v \in A^\infty \quad u \leq v \iff u = v$
- $\forall f \quad A^*, \forall u \in A^\omega \quad f \leq u \iff \forall n \in \mathbb{N}^*, n \leq |f| \Rightarrow f(n) = u(n)$

($|f|$ désigne la longueur du mot f).

Soit α dans A^∞, $FG(\alpha) = \{g / g \leq \alpha\}$ si α est fini
$FG(\alpha) = \{\alpha[n] \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ sinon.

D'autre part on définit la concaténation sur A^∞ par :

$$\forall f \in A^*, \forall u \in A^\omega, \forall n \in \mathbb{N}^+ \quad \begin{array}{l} n \leq |f| \Rightarrow fu(n) = f(n) \\ n > |f| \Rightarrow fu(n) = u(n-|f|) \end{array}$$

$\forall u \in A^\omega, \forall \alpha \in A^\infty \ u\alpha = u.$

Soit L un langage de A^∞. Alors on pose :

$L^{fin} = L \cap A^*$

$L^{inf} = L \cap A^\omega$

$FG(L) = \{f \in A^* \ / \ \exists\alpha \in L \text{ tq } f \leq \alpha\}$

b) Limites, adhérence et fermeture

• Une suite $(u_n)_n$ de mots de A^* sera dite croissante ssi pour tout $n \in \mathbb{N}^+$ $u_n \leq u_{n+1}$. Alors :

Lemme : *Toute suite croissante $(\alpha_n)_n$ a une borne supérieure notée* $\text{Sup } \alpha_n$.

• On définit sur A^∞ une distance d sur $\mathbb{R}$ par :

$$d(\alpha, \beta) = \begin{cases} 2^{-\min[n/\alpha[n] \neq \beta[n]]} & \text{si } \alpha \neq \beta \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette distance est ultramétrique et (A^∞, d) est complet.

Une suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ de Cauchy est caractérisée par :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \exists N_p \in \mathbb{N}_+ \text{ tq } n, n' \geq N_p \Rightarrow \alpha_n [p] = \alpha_n [p]$$

Alors $\ell im\ \alpha_n = \sup \alpha_{N_p} [p]$.

Soit L un langage de A^∞. On définit l'adhérence de L par :

$$Adh(L) = \{u \in A^\omega \ / \ FG(u) \subset FG(L)\} \qquad [5]$$

En fait Adh(L) est l'intersection de la fermeture topologique $\overline{L}$ de L et de A^ω.

Cela justifie :

Définition :

L *sera dit fermé ssi* $Adh\ L \subset L$

Alors on a : L *fermé* $\Longleftrightarrow L = \overline{L}$

c) Normalité, centralité et idéalisme

Définissons maintenant les propriétés énoncées dans l'introduction :

- L est normal ssi $FG(L^{inf}) \subset FG(L^{fin})$

- L est central ssi $FG(L^{fin}) \subset FG(L^{inf})$

- L est idéal ssi $FG(L) = L$

- L est parfait ssi L est normal et central (i.e. $FG(L^{fin}) = FG(L^{inf})$).

d) Morphismes étendus

Soient A et B deux alphabets finis. On étend la notion de morphisme comme suit : Soit ϕ une application de A^∞ dans B^∞. ϕ sera dit morphisme étendu de A^∞ dans B^∞ ssi :

(1) La restriction ϕ_1 de ϕ à A^* est un morphisme de A^* dans B^*

(2) $$\forall u \in A^\infty, \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} |\phi_1(u[n])| = \infty \Rightarrow \phi(u) = \sup\limits_n \{\phi_1(u[n])\}. \\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ tq } \forall n \geq n_0,\ \phi_1(u[n]) = \phi_1(u[n_0]) \Rightarrow \phi(u) = \phi_1(u[n_0]) \end{cases}$$

z:un morphisme étendu n'est pas nécessairement un morphisme de monoïdes (i.e. $\phi(\alpha\beta)$ peut être distinct de $\phi(\alpha)\circ\phi(\beta)$ et un morphisme de monoïdes n'est pas nécessairement un morphisme étendu [3]).

On définira l'image inverse par morphisme par :

$$\phi^{-1}(L) = \{\beta \in A^\infty \ / \ \phi(\beta) \in L\}$$

e) Autres opérateurs

On définit. L'opéfateur ω par :

$$L^\omega = (L^{fin})^\omega = \{f_1 f_2 \ldots f_n \ldots \ / \ f_n \in L^{fin} \setminus \{\varepsilon\},\ \forall n \in \mathbb{N}^*\}$$

• L'opérateur ∞ par :

$$L^{\infty} = L^{*} \cup L^{\omega}$$

• L'opérateur / par :

$$L_1 / L_2 = \{\alpha / \alpha \in L_1,\ \alpha \notin L_2\}$$

• Le shuffle équitable $\odot_e$ par :

$$\begin{aligned} L_1 \odot_e L_2 = & \left\{ f_1\, g_1 \ldots f_n\, g_n \,/\, n \in \mathbb{N}\ \begin{array}{l} f_1 \ldots f_n \in L_1^{fin} \\ g_1 \ldots g_n \in L_2^{fin} \end{array} \right\} \\ & \cup \left\{ f_1\, g_1 \ldots f_n\, u \,/\, n \in \mathbb{N}\ \begin{array}{l} f_1 \ldots f_n \in L_1^{fin} \\ g_1 \ldots g_{n-1} \in A^{*} \\ g_1 \ldots g_{n-1}\, u \in L_2^{inf} \end{array} \right\} \\ & \cup \left\{ u_1\, v_1\, u_2\, v_2 \ldots u_n\, v_n \ldots \,/\, u_1\, v_1 \neq \varepsilon \quad \begin{array}{l} u_i,\ v_i \in A^{+},\ \forall i \in \mathbb{N}^{*},\ n > 1 \\ u_1\, u_2 \ldots u_n \ldots \in L_1^{inf} \\ v_1\, v_2 \ldots \ldots \in L_2^{inf} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

• Le shuffle $\odot$ par :

$$L_1 \odot L_2 = \left\{ u_1\, v_1\, u_2 \ldots u_n\, v_n \ldots \,/\, u_i',\ v_i \in A^{\infty}\ \begin{array}{l} u_1 \ldots u_n \ldots \in L_1 \\ v_1 \ldots v_n \ldots \in L_2 \end{array} \right\}$$

II. Langages fermés

Soient L_1 et L_2 deux langages infinitaires fermés sur un alphabet A i.e. :

$$L_1 \subseteq A^\infty, \ \overline{L}_1 = L_1$$

$$L_2 \subseteq A^\infty, \ \overline{L}_2 = L_2$$

(A^∞ est muni de la distance définie en I.b.).

La plupart des résultats ci-dessous sont des résultats élémentaires de topologie.

<u>a) Action de l'Union</u>

Toute union finie de langages fermés est fermée (résultat classique de topologie). Ceci devient faux pour une union infinie ; comme le prouve l'exemple suivant :

$$A = \{a\} \qquad L_n = \{a^n\}, \ \forall n \in \mathbb{N} \qquad \overline{L}_n = L_n$$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n = a^* \qquad \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n} = a^\omega$$

<u>b) Action de l'Intersection</u>

Toute intersection (finie ou non) *de langages fermés est fermée* (topologie élémentaire).

<u>c) Action de la Concaténation</u>

Montrons d'abord

<u>*Lemme*</u> :

$$\overline{L_1 L_2} = \overline{L}_1 \overline{L}_2, \ \forall L_1 \in P(A), \ \forall L_2 \in P(A)$$

En effet :

$$u \in \overline{L_1 L_2} \iff FG(u) \leq FG(L_1 L_2) \iff \exists(\alpha_n, \beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tq } \left| \begin{array}{l} \alpha_n \in L_1 \\ \beta_n \in L_2 \ \forall n \in \mathbb{N} \\ u[n] \leq \alpha_n \beta_n \end{array} \right.$$

alors :

α) Soit $|\alpha_n|$ est non borné et alors $\ell im\ u[n] = \ell im\ \alpha_n$

donc $u \in \text{Adh } L_1$

β) Soit $|\alpha_n|$ est borné

Alors : $\exists(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tq $\alpha_{n_i} = \alpha_{n_j} = \alpha \ \forall(i, j) \in \mathbb{N}^2$

D'où : $u[n_i] \leq \alpha \beta_{n_i} \ \forall i$

$u = \alpha\ \ell im\ \beta_{n_i}$

$u \in L_1 \overline{L}_2$

Donc $\overline{L_1 L_2} = \text{Adh } L_1 \cup L_1 \overline{L}_2$

$= \text{Adh } L_1 \overline{L}_2 \cup \overline{L_1 L_2}$ (car $\text{Adh } L_1 \subset A^\omega$)

Il est alors évident que :

Tout produit fini de langages fermés est fermé.

d) Action de *

L fermé n'implique pas L fermé.

Exemple : $L = \{a\} = \overline{L}$
$L^* = a^* \Rightarrow \overline{L}^* = a^\infty \neq L^*$.

e) Action de /

Rappel : $L_1 / L_2 = \{\alpha \in \Sigma^\infty,\ \alpha \in L_1 \text{ et } \alpha \notin L_2\}$

Alors :

L_1 et L_2 fermés n'implique pas L_1 / L_2 fermé.

Exemple : $L_1 = A^\omega = \overline{L}_1$

$L_1 / L_2 = A^*$ n'est pas fermé

$L_2 = A^\infty = \overline{L}_2$

f) Action des morphismes étendus

Soit ϕ un morphisme étendu de A^∞ dans B^∞.

α) *Si* ϕ *est effaçant,* L *peut être fermé sans que* $\phi(L)$ *le soit.*

Exemple : $L = \{x_1^n\ x_2^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup x_1^\omega = \overline{L}$

$\phi : x_1 \to \varepsilon$ $\quad (A = \{x_1, x_2\}\ B = \{a\})$

$x_2 \to a$

$\phi(L) = \{a^n / n \in \mathbb{N}\} = a^*$ est non fermé.

β) *Si* ϕ *est non effaçant et* L *fermé,* $\phi(L)$ *est fermé.*

En effet :

$$\begin{aligned} u \in \mathrm{Adh}[\phi(L)] &\Rightarrow \forall n,\ u[n] \in \mathrm{FG}[\phi(L)] \\ &\Rightarrow \forall n,\ \exists \alpha_n \in \phi(L) \text{ tq } u[n] \leq \alpha_n \\ &\Rightarrow \forall n,\ \exists \beta_n \in L \quad \text{tq } u[n] \leq \phi(\beta_n) \end{aligned}$$

Mais l'alphabet A est fini ; donc on peut extraire de (β_n) une suite $(\beta_{n_{1,k}})_k$ telle que $\beta_{n_{1,k}}(1)$ soit constant. On peut itérer ainsi le procédé et pour tout p on peut extraire de $(\beta_{n_{p-1,k}})_k$ une suite $(\beta_{n_{p,k}})_k$ telle que $\beta_{n_p,k}[p]$ soit constant.

Soit alors la suite $(\gamma_n)_n$ définie par :

$$\gamma_1 = \beta_{n_1,1}, \quad \gamma_2 = \beta_{n_2,1} \ldots \gamma_q = \beta_{n_q,1} \ldots$$

Alors : $\forall q \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, p \geq q \Rightarrow \gamma_q[q] = \gamma_p[q]$

Donc la suite $(\gamma_n)_n$ converge ; comme $(\gamma_n)_n$ est une suite d'éléments de L et que L est fermé, elle converge dans L.

Soit ℓ sa limite.

Mais $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}$ tq $m > n$ et $\beta_m = \gamma_p$

$\exists p \in \mathbb{N}$

Donc $u[n] \leq u[m] \leq \phi(\beta_m) \leq \phi(\gamma_p)$

Mais :

$$\begin{aligned}\forall p \in \mathbb{N}, \ \phi(\gamma_p) &\geq \phi(\gamma_p[p]) \\ &\geq \phi(\ell[p]) \\ &\geq (\phi(\ell)) \quad [p] \text{ car } \phi \text{ non effaçant}\end{aligned}$$

Donc $\ell im\ \phi(\ell_p) = \phi(\ell)$

Comme d'après ce qui précède on a aussi

$$u = \ell im_{n}\ u[n] = \ell im_{p \in \mathbb{N}}\ \phi(\gamma_p)$$

On a finalement : $u = \phi(\ell)$ donc $u \in \phi(L)$.

□

Remarque : Il suffit en fait que ϕ soit k-effaçant. D'ailleurs, puisque (Σ^∞, d) est compact, il suffit de montrer que ϕ k-erasing est continu pour d ce qui se montre facilement : ϕ k-erasing $\Rightarrow \exists K_0 \ / \ |u| \geq k_0 \Rightarrow |\phi(u)| \geq 1$

Alors $A(\phi(u), \phi(v)) < \dfrac{d(u, v)}{2^{k_0}}$.

Et donc ϕ est lipschitzienne.

(Mais ϕ est k-erasing sur Σ^∞ ssi ϕ est strict).

Z : Si A est infini, le résultat est faux :

$A = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} \qquad \phi : a_i \to c^i b$

$B = \{b, c\}$

$L = A = \overline{L}$: L est fermé

$\phi(L) = \{c^i b \ / \ i \in \mathbb{N}\} = c^* b$ est non fermé.

g) Action des morphismes inverses (étendus)

Soit ϕ un morphisme étendu quelconque, L un langage fermé de $B^\infty(\phi(A) \leq B^*)$

$$u \in \mathrm{Adh}\ (\phi^{-1}(L)) \Rightarrow \forall n, \exists \alpha_n \in A^\infty \text{ tq } \left| \begin{array}{l} u[n] \leq \alpha_n \\ \\ \phi(\alpha_n) \in L \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \phi(u\ n\ ) \leq \phi(\alpha_n), \ \forall n \in \mathbb{N}$$

α) ϕ *est non effaçant* : $|\phi(u[n])| \xrightarrow[n]{} +\infty$

$$\text{et } \phi(u[n]) \xrightarrow[n]{} \phi(u)$$

Donc $\lim\limits_n \phi(\alpha_n) = \phi(u)$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Or } \forall n, \ \phi(\alpha_n) \in L \\ \\ \quad \text{f fermé} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_n \phi(\alpha_n) \in L$$

D'où $\phi(u) \in L$

$u \in \phi^{-1}(L)$.

Si ϕ est non effaçant et L fermé, $\phi^{-1}(L)$ est fermé.

(Rem : il suffit encore que ϕ soit k-erasing).

β) ϕ *est effaçant*

Exemple : ϕ $A \to B$ $\quad L = \{c\}$ fermé

$a \to \varepsilon \quad \phi^{-1}(L) = a^* \, b \, a^\infty$ est non fermé

$b \to c$

Si ϕ *est effaçant* et L fermé, $\phi^{-1}(L)$ *ne l'est pas nécessairement.*

h) Action de ∞

Soit L fermé ; $L \subseteq A^\infty$

$$u \in \overline{L^\infty} \Rightarrow \forall n, \exists (\ell_{k,n})_k \text{ tq } \left| \begin{array}{l} \ell_{k,n} \in L, \forall k \in \mathbb{N} \\ \\ u[n] \leq \ell_{1,n} \dots \ell_{k,n} \dots \end{array} \right.$$

Donc : $\forall n, \exists K_n$ tq $u[n] \leq \ell_{1,n} \dots \ell_{k_n,n}$.

D'où $\forall n, u[n] \in FG(L^*)$

Soit : $u \in \overline{L^*}$

Or $\overline{L^*} = (L^{fin})^* \, \overline{L} \cup L^\omega$ (facile à démontrer)

et donc L fermé $\Rightarrow \overline{L^*} \subset L^\infty$

Donc *si* L *est fermé*, L^∞ *aussi.*

i) Action de ω

L fermé n'implique pas nécessairement L^ω fermé :

Exemple : $L = a^* b \cup a^* = \overline{L}$ $L^\omega = \{u \in A^\omega / |u|_b = \infty\}$

$A = \{a, b\}$

Donc : $a^n b(ab)^\omega \in L^\omega$, $\forall n$

Mais $\lim\limits_n a^n b (ab)^\omega = a^\omega \notin L^\omega$.

(en fait $\mathrm{Adh}\ L^\omega = \mathrm{Adh}\ L^\infty = (L^{fin})^* \mathrm{Adh}\ L \cup (L^{fin})^\omega$

Donc si $\mathrm{Adh}\ L \not\subseteq L^\omega$, L^∞ n'est pas fermé).

j) Action du shuffle équitable

Soient L_1 et L_2 deux langages infinitaires sur A ; Montrons d'abord :

Proposition :

$$\mathrm{Adh}(L_1 \odot_e L_2) = (FG(L_1) \odot_e \mathrm{Adh}\ L_2) \cup (\mathrm{Adh}\ L_1 \odot_e FG(L_2)) \cup (\mathrm{Adh}\ L_1 \odot_e \mathrm{Adh}\ L_2)$$

1) $FG(L_1) \odot_e \mathrm{Adh}\ L_2 \subset \mathrm{Adh}\ (L_1 \odot_e L_2)$

$$\omega \in FG(L_1) \odot_e \mathrm{Adh}\ L_2 \Rightarrow \begin{cases} \exists f \in FG(L_1) \\ \exists u \in \mathrm{Adh}(L_2) \end{cases} \text{tq } \omega \in f \odot_e u$$

$$f \in FG(L_1) \Rightarrow \begin{cases} \exists \alpha \in L_1 \\ \exists \delta \in A^* \end{cases} \text{tq } \alpha = f\,\delta$$

$$\omega \in f \odot_e u \Rightarrow \omega = f_1 u_1 f_2 u_2 \dots f_p u_p \text{ avec } \begin{array}{l} u_1 \dots u_p = u \\ f_1 \dots f_p = f \\ i < p \Rightarrow u_i \in A^*. \end{array}$$

Donc $\exists N$ tq $n > N \Rightarrow \omega[n] \geq f_1 u_1 f_2 \dots u_{p-1} f_p$.

Mais : $u \in \mathrm{Adh}(L_2) \Rightarrow \exists(\beta_n)_n \in L_2$ tq $u[n] \leq \beta_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Donc $\exists N_1$ tq $n \quad N_1 \Rightarrow \beta_n = u_1 \ldots u_{p-1} \gamma_n$
avec $\lim\limits_n \gamma_n = u_p$ (et $u_p \in A^{\omega}$)

Mais $u_1 f_1 \ldots u_{p-1} f_n \gamma_n \delta \in L_1 \odot_e \beta_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc $u_1 f_1 \ldots u_{p-1} f_n \gamma_n \delta \in L_1 \odot_e L_2$, $\forall n \in \mathbb{N}$

avec $\lim u_1 f_1 \ldots u_{p-1} f_n \gamma_n \delta = u_1 f_1 \ldots u_{p-1} f_n u_p = \omega$

D'où $\omega \in \mathrm{Adh}\,(L_1 \odot_e L_2)$.

2) $\mathrm{Adh}\, L_1 \odot_e FG(L_2) \subset \mathrm{Adh}\,(L_1 \odot L_2)$ (idem)

3) $\mathrm{Adh}\, L_1 \odot_e \mathrm{Adh}\, L_2 \subset \mathrm{Adh}\,(L_1 \odot L_2)$

Soit $\omega \in \mathrm{Adh}\, L_1 \odot_e \mathrm{Adh}\, L_2$

Donc : $\left.\begin{array}{l} \exists u \in \mathrm{Adh}\, L_1 \\ \exists v \in \mathrm{Adh}\, L_2 \end{array}\right\}$ tq $\omega \in u \odot_e v$

$u \in \mathrm{Adh}\, L_1 \Rightarrow \exists(\alpha_n)_n \,/\, \alpha_n \in L_1$, $u[n] \leq \alpha_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$v \in \mathrm{Adh}\, L_2 \Rightarrow \exists(\beta_n)_n \,/\, \beta_n \in L_2$, $v[n] \leq \beta_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\omega \in u \odot_e v \Rightarrow \omega = u_1 v_1 u_2 \ldots u_p v_p \ldots$
avec $u = u_1 \ldots u_p \ldots$
$v = v_1 \ldots v_p \ldots$

Mais : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\exists n_p \in \mathbb{N}$ tq $\alpha_{n_p} = u_1 \ldots u_p \alpha'_{n_p}$

$\beta_{n_p} = v_1 \ldots v_p \beta'_{n_p}$

Choisissons $\gamma_{n_p} \in \alpha'_{n_p} \odot_e \beta'_{n_p}$

Alors $u_1 \; v_1 \; \ldots \; u_p \; v_p \; \gamma_{n_p} \in L_1 \odot_e L_2$, $\forall p \in \mathbb{N}$

Or $\omega = \lim\limits_{p} u_1 \; v_1 \; \ldots \; u_p \; v_p \; \gamma_{n_p}$

Donc $\omega \in \mathrm{Adh}\,(L_1 \odot_e L_2)$

4) $\mathrm{Adh}\,(L_1 \odot_e L_2) \subseteq (FG(L_1) \odot_e \mathrm{Adh}\, L_2) \cup (\mathrm{Adh}\,(L_1) \odot_e FG(L_2)) \cup (\mathrm{Adh}\,(L_1) \odot_e \mathrm{Adh}\,(L_2$

Soit $A_n = \left\{(\alpha, \beta) \;/\; \begin{array}{l} u[n] \in \alpha \odot_e \beta \\ \alpha \in FG(L_1) \\ \beta \in FG(L_2) \end{array}\right\}$

Alors, pour tout n, A_n est non vide puisque :

- $\forall n \; u[n] \in FG(L_1 \odot_e L_2)$

- $FG(L_1 \odot_e L_2) \subset FG(L_1) \odot_e FG(L_2)$

De même A_n est fini, puisque : $(\alpha, \beta) \in A_n \Rightarrow |\alpha| \leq n$ et $|\beta| \leq n$

Soit maintenant la relation d'ordre $<$ définie par

$$(\alpha, \beta) < (\alpha', \beta') \iff \begin{cases} \exists (i, j),\ (\alpha, \beta) \in A_i \text{ et } (\alpha', \beta') \in A \\ \exists t_1 \;/\; \alpha' = \alpha \, t_1 \\ \exists t_2 \;/\; \beta' = \beta \, t_2 \\ u[j] \in u[i] \,/ (t_1 \odot_e t_2) \end{cases}$$

$<$ vérifie :

(P)|| $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (\alpha, \beta) \in A_n, \exists (\gamma, \delta) \in A_{n-1}$ tq $((\alpha, \beta) < (\gamma, \delta)$

En effet :

$u[n] \in \alpha \odot_e \beta \Rightarrow u[n] = \alpha_1 \; \beta_1 \; \alpha_2 \; \beta_2 \; \ldots \; \alpha_n \; \beta_n$ avec :

$$\begin{array}{c} \alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_n \\ \beta = \beta_1 \ldots \beta_n \\ \alpha_n \, \beta_n \neq \varepsilon \end{array}$$

Mais

$$\alpha_n \beta_n \neq \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} \beta_n \neq \varepsilon \\ \quad \text{ou} \\ \beta_n = \varepsilon \text{ et } \alpha_n \neq \varepsilon \end{cases}$$

Si β_n est non vide ; on a : $u(n) = \beta_n(|\beta_n|)$

Donc $u[n-1] = \alpha_1 \ldots \alpha_n \beta'_n$ avec :

$$\left| \begin{array}{l} \alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_n \\ \\ \beta[|\beta|-1] = \beta_1 \ldots \beta_{n-1} \beta'_n = \beta' \end{array} \right.$$

et $u[n-1] \in \alpha \odot_e \beta'$ avec : $(\alpha, \beta') < (\alpha, \beta)$

Le raisonnement étant le même si $\beta_n = \varepsilon$ et $\alpha_n \neq \varepsilon$, (P) est bien vérifiée et le lemme de Koenig peut s'appliquer :

$\exists((\alpha_n, \beta_n))_n / [\forall n(\alpha_n, \beta_n) \in A_n$ <u>et</u> $(\alpha_n, \beta_n) < (\alpha_{n+1}, \beta_{n+1})]$

Différents cas se présentent donc :

$$\bullet |\alpha_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{N}$$

Donc : $\exists \alpha \in \Sigma^*, \exists n_0 / n > n_0 \Rightarrow \alpha_n = \alpha \in FG(L_1)$

alors $\forall n, n > n_0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} u[n] \in u[n_0] \beta'_n \text{ avec} \\ \\ \beta_n = \beta_{n_0} \beta'_n \end{array} \right.$

Or $(\beta_n)_n$ étant une suite croissante de $FG(L_2)$, elle converge vers β élément de $Adh(L_2) \cdot (\beta'_n)$, étant croissante, converge aussi. Soit β' sa limite : $\beta = \beta_{n_0} \beta'$.

Et donc $u = u[n_0] \beta' \in \alpha \odot_e \beta$

D'où $\quad u \in FG(L_1) \odot_e Adh(L_2)$

$$\bullet \; |\beta_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{N}$$

Alors un raisonnement semblable au précédent mène à

$$u \in Adh(L_1) \odot_e FG(L_2)$$

• $|\alpha_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $|\beta_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Alors $\exists(\alpha_{i_n})_n$, $\exists(\beta_{i_n})_n$ tq

$$\begin{cases} \forall n,\ u[n] = \alpha_{i_1}\ \beta i_1 \ldots \alpha i_n\ \beta i_n \\ \alpha_n = \alpha i_n \ldots \alpha i_n,\ \beta_n = \beta i_1 \ldots \beta i_n \end{cases}$$

Soit donc α (resp. β) la limite de la suite croissante (α_n) (resp. β_n)). Alors α (resp. β) est élément de $Adh(L_1)$ (resp. $Adh(L_2)$) et :

$$\alpha = \alpha_{i_1} \ldots \alpha i_n \ldots$$

$$\beta = \beta_{i_1} \ldots \beta i_n \ldots$$

On a donc $u \in \alpha \odot_e \beta$

d'où $u \in Adh(L_1) \odot_e Adh(L_2)$.

C.Q.F.D.

On peut d'ailleurs remarquer que :

$$Adh(L_1) \odot_e FG(L_2) \cup FG(L_1) \odot_e Adh\ L_2 \cup Adh(L_1) \odot_e Adh\ L_2$$

$$= Adh(L_1) \odot Adh(L_2)$$

D'où

$$\underline{Adh(L_1 \odot_e L_2) = Adh(L_1) \odot Adh(L_2)}$$

On peut donc avoir L_1 et L_2 fermés et $L_1 \odot_e L_2$ non fermé.

<u>Exemple</u> : $L_1 = a^\omega = \overline{L_1}$

$A = \{a, b\}$

$L_2 = b^\omega = \overline{L_2}$

alors $L_1 \odot_e L_2 = \{u \in A^\omega \ / \ |u|_a = |u|_b = \infty\}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a^n\, b(ab)^\omega \in L_1 \odot_e L_2$

Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} (a^n\, b(ab)^\omega) = a^\omega \notin L_1 \odot_e L_2$

Par contre il apparaît que, si L_1 et L_2 sont idéaux, la notion d'équitabilité du shuffle "passe à la limite", nous y reviendrons plus tard.

<u>k) Action du shuffle</u>

Remarquons d'abord que : $FG(L_1 \odot L_2) = FG(L_1 \odot_e L_2)$

D'où :

$$Adh(L_1 \odot L_2) = Adh(L_1 \odot_e L_2) = Adh\, L_1 \odot Adh\, L_2 \qquad \text{(cf. j))}$$

$$\text{Donc } \left.\begin{array}{l} L_1 \supset Adh\, L_1 \\ L_2 \supset Adh\, L_2 \end{array}\right| \Rightarrow L_1 \odot L_2 \supset Adh(L_1 \odot L_2)$$

Donc si L_1 et L_2 sont fermés, $L_1 \odot L_2$ l'est aussi.

III. Langages normaux

Soient L_1, L_2, L des langages normaux de A^∞.

<u>a) Action de l'Union</u>

L'union de toute famille (finie ou non) de langages normaux est normale (cf. [5]).

b) Action de l'Intersection

L'intersection de deux langages normaux n'est pas nécessairement normale.

Exemple : $L_1 = \{a^{2n} / n \in \mathbb{N}\} \cup a^{\omega}$

$L_2 = \{a^{2n+1} / n \in \mathbb{N}\} \cup a^{\omega}$

L_1 et L_2 sont normaux

$L_1 \cap L_2 = a^{\omega}$ n'est pas normal

c) Action de la concaténation

Le produit de deux langages normaux est normal.

En effet :

$$FG(L_1 L_2) = FG(L_1) \cup L_1^{fin} FG(L_2)$$

$$L_1 \text{ normal} \Rightarrow FG(L_1) = FG(L_1^{fin})$$

$$L_2 \text{ normal} \Rightarrow FG(L_2) = FG(L_2^{fin})$$

alors $FG(L_1 L_2) = FG(L_1^{fin}) \cup L_1^{fin} FG(L_2^{fin})$

$= FG((L_1^{fin}) L_2^{fin}))$

$= FG((L_1 L_2)^{fin})$

d) Action de *

Si L *est normal,* L^* *aussi*

En effet :

$FG(L^*) = (L^{fin})^* FG(L)$

L normal $\Rightarrow FG(L) = FG(L^{fin})$

Donc $FG(L^*) = (L^{fin})^* FG(L^{fin})$

$= FG((L^{fin})^*)$

$= FG((L^*)^{fin})$

e) Action de /

L_1 et L_2 normaux n'impliquent pas L_1/L_2 normal.

Exemple : $A^\infty / A^* = A^\omega$

f) Action des morphismes étendus

Soit $\phi : A \to B^*$

$L \subseteq A^*$, L normal.

Problème : $FG(\phi(L)) \subseteq FG(\phi(L)^{fin})$?

$f \in FG(\phi(L)) \Rightarrow \exists \ell \in L$ tq $f \leq \phi(\ell)$.

f fini $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ tq $f \leq \phi(\ell[n])$

(car $\phi(\ell) = \phi(\ell(1)) \ldots \phi(\ell(n)) \ldots$)

L normal $\Rightarrow \exists \ell_1 \in L^{fin}$ tq $\ell[n] \leq \ell_1$

Alors $f \leq \phi(\ell_1)$ donc $f \in FG(\phi(L^{fin}))$. □

L'image par morphisme étendu d'un langage normal est normale.

g) Action des morphismes inverses

Soit $L = a^* b \cup a^\omega$

$$\phi : \begin{array}{l} a \to a \\ b \to c \\ c \to c \end{array} \qquad A = \{a, b, c\}$$

$\phi^{-1}(L) = a^{\omega}$ n'est pas normal.

Donc l'image par morphisme inverse d'un langage normal n'est pas nécessairement normale.

h) Action de ∞

Si L *est normal,* L^{∞} *aussi*

En effet :

$$FG(L^{\infty}) = (L^{fin})^{*}\ FG(L) = FG(L^{*})$$

$$\begin{aligned} L \text{ normal} \Rightarrow L^{*} \text{ normal} \Rightarrow FG(L^{*}) &= FG((L^{*})^{fin}) \\ &= FG((L^{\infty})^{fin}) \end{aligned}$$

i) Action de ω

Sauf si $L = \{\varepsilon\}$ où $L = \emptyset$, L^{ω} est purement infinitaire non vide, donc non normal.

j) Action du shuffle équitable

Si L_1 et L_2 sont normaux, $L_1 \odot_e L_2$ est normal ... (évident)

k) Action du shuffle

Si L_1 et L_2 sont normaux, $L_1 \odot L_2$ l'est aussi (évident)

IV. Langages centraux

Soient L, L_1, L_2 des langages centraux de A^∞.

a) Action de l'union

L'union d'une famille (finie ou non) de langages centraux est un langage central (évident).

b) Action de l'intersection

L'intersection de deux langages centraux n'est pas nécessairement centrale.

Exemple :
$$L_1 = a^* \cup a^* b^\omega$$
$$L_2 = a^* \cup a^* c^\omega$$

c) Action de la concaténation

Si L_1 est un langage quelconque de A^∞ et L_2 un langage central de A^∞, $L_1 L_2$ est central.

En effet :
$$\begin{aligned}(L_1 L_2)^{fin} &= L_1^{fin} L_2^{fin} \\ &\subseteq L_1^{fin} FG(L_2^{inf}) \ (L_2 \text{ central}) \\ &\subseteq FG(L_1 L_2^{inf}) \\ &\subseteq FG((L_1 L_2)^{inf}) \quad \square\end{aligned}$$

d) Action de

Si L est central, L^* l'est aussi.

En effet :

$$(L^*)^{fin} = (L^{fin})^* \subseteq (L^{fin})^* FG(L^{inf})$$
$$\subseteq FG((L^*)^{inf})$$

e) Action des morphismes étendus

Ici, le fait que le morphisme soit strict ou non, intervient :

1) Morphisme effaçant

L'image par morphisme effaçant d'un langage central n'est pas nécessairement centrale.

Exemple : $\phi : A = \{a, b\} \to \{a\}$

$$a \to a$$

$$b \to \varepsilon$$

$L = a^* \cup a^* b^\omega$ est central.

$\phi(L) = a^*$ n'est pas central.

2) Morphisme non effaçant

Soit $\phi : A \to B^+$ et L central dans A^∞

$$(\phi(L))^{fin} = \phi(L^{fin}) \text{ car } \phi \text{ est non effaçant}$$

$$\subseteq \phi(FG(L^{inf})) \text{ car L est central}$$

$$\subseteq FG(\phi(L)^{inf}) \text{ car } \phi \text{ morphisme}$$

Donc l'image par un morphisme non effaçant (étendu) d'un langage central est centrale.

f) Action des morphismes inverses

Il est évident que si ϕ est un morphisme effaçant, $\phi^{-1}(L)$ est central, même si L n'est pas central.

Si ϕ n'est pas effaçant et L central, $\phi^{-1}(L)$ n'est plus nécessairement central comme le montre l'exemple :

$\phi : \{a, b\} \to \{a, b\} \qquad A = \{a, b\}$

$a \to a$

$b \to a$

$L = a^* \cup a^* b^\omega$

$\phi^{-1}(L) = A^*$ est non central

Remarque : Ici c'est plutôt la notion de surjectivité qui interviendrait.

g) Action de ∞

$$(L^\infty)^{fin} = (L^{fin})^* \subseteq (L^{fin})^* \, FG(L^{inf}) \text{ car } L \text{ central}$$

$$\subseteq FG(L^\infty)^{inf})$$

Donc *si* L *est central*, L^∞ *l'est aussi.*

h) Action de /

Si L_1 et L_2 sont centraux, L_1/L_2 ne l'est pas nécessairement.

Exemple : $A^\infty \,/\, A^\omega = A^*$

i) Action de ω

$(L^\omega)^{fin}$ étant vide pour tout langage L, L^ω est central.

j) Action du shuffle équitable

Si L_1 et L_2 sont centraux, $L_1 \odot_e L_2$ l'est aussi (évident)

k) Action du shuffle

Si L_1 et L_2 sont centraux, $L_1 \odot L_2$ l'est aussi (évident)

V. Langages idéaux

Soient L, L_1, L_2 des langages idéaux de A^ω.

a) Action de l'union

Toute union (finie ou non) de langages idéaux est idéale (évident).

b) Action de l'intersection

Toute intersection (finie ou non) de langages idéaux est idéale (évident).

c) Action de la concaténation

$$FG(L_1\, L_2) = FG(L_1) \cup L_1^{fin}\, FG(L_2)$$

$$= L_1^{fin} \cup L_1^{fin}\, L_2^{fin} \quad \text{(car } L_1, L_2 \text{ idéaux)}$$

$$= (L_1\, L_2)^{fin}. \quad \text{(car } L_2 \text{ idéal} \Rightarrow \varepsilon \in L_2\text{)}.$$

Si L_1 *et* L_2 *sont idéaux,* $L_1\, L_2$ *est idéal.*

d) Action de *

Si L *est idéal,* L^* *est idéal* (évident)

e) Action de /

On peut avoir L_1, L_2 idéaux sans avoir L_1/L_2 idéal :

Exemple : $A^\infty \,/\, A^* = A^\omega$

Mais si L est idéal, ${}^cL$ est central.

En effet :

$({}^cL)^{inf} \cup L^{inf} = A^\omega$.

Donc :

$$\begin{aligned} f \notin FG({}^{c}L)^{inf}) &\Rightarrow f \in FG(L^{inf}) \\ &\Rightarrow f \in L^{fin} \text{ (car L idéal)} \\ &\Rightarrow f \notin ({}^{c}L)^{fin} \end{aligned}$$

Donc :

$$f \in ({}^{c}L)^{fin} \quad \Rightarrow f \in FG({}^{c}L)^{inf}). \qquad \square$$

f) Action des morphismes étendus

Ici il est évident que c'est le caractère alphabétique qui est important.

1) Morphismes non alphabétiques

L'image par un morphisme non alphabétique d'un langage idéal n'est pas nécessairement idéal :

Exemple : $\phi\{a\} \to \{a, b\}$

$a \to ab$

$\phi(a\ ) = (ab)$

2) Morphismes alphabétiques

Soit ϕ un morphisme alphabétique.

$$\phi : A \to B \cup \{\varepsilon\}$$

$$\begin{aligned} FG(\phi(L)) &= \phi(FG(L)) && (\phi \text{ alphabétique}) \\ &= \phi(L^{fin}) && (L \text{ idéal}) \\ &\subseteq (\phi(L))^{fin} \end{aligned}$$

Donc si ϕ est un morphisme alphabétique, et L un langage idéal, $\phi(L)$ est idéal.

g) Action des morphismes inverses

L'image réciproque par morphisme (étendu) d'un langage idéal est idéale.

En effet :

Soit ϕ un morphisme tel que $\phi(A) \subseteq B$, L un langage idéal de B^{∞}.

$$
\begin{aligned}
f \in FG(\phi^{-1}(L)) &\Rightarrow \exists \alpha \text{ tq } (f \leq \alpha \text{ et } \phi(\alpha) \in L) \\
&\Rightarrow \exists \alpha \text{ tq } (\phi(f) \leq \phi(\alpha) \text{ et } \phi(\alpha) \in L) \\
&\Rightarrow \phi(f) \in FG(L) \\
&\Rightarrow \phi(f) \in L^{fin} \quad \text{(car L idéal)} \\
&\Rightarrow f \in \phi^{-1}(L) \qquad \square
\end{aligned}
$$

h) Action de ∞

Si L est idéal, L l'est aussi (évident)

i) Action de ω

Si L est non vide, L est purement infinitaire donc non idéal.

f) Action du shuffle équitable

Si L_1 et L_2 sont idéaux, $L_1 \odot_e L_2$ est idéal (évident)

k) Action du shuffle

Si L_1 et L_2 sont idéaux, $L_1 \odot L_2$ est idéal (évident).

On peut maintenant s'intéresser aux combinaisons des propriétés étudiées ci-dessus. A quelques exceptions près, les résultats ne font que se superposer, comme le montrent les résultats suivants.

VI. Langages fermés normaux

Soient L_1, L_2 deux langages fermés normaux de A^∞.

a) Action de l'union

L'union *finie* de langages fermés normaux est fermée normale.

b) Action de l'intersection

Si L_1, L_2 sont fermés normaux, $L_1 \cap L_2$ est fermé mais pas nécessairement normal :

Exemple :

$$L_1 = \{a^{2n} / n \in \mathbb{N}\} \cup a^\omega$$

$$L_2 = \{a^{2n+1} / n \in \mathbb{N}\} \cup a^\omega$$

c) Action de la concaténation

Tout produit fini de langages fermés normaux est fermé normal.

d) Action de $*$

Si L est fermé normal, L^* est normal mais non nécessairement fermé.

(Exemple : $L = \{a\}$).

e) Action de /

Si L_1 et L_2 sont fermés normaux, L_1 / L_2 n'est pas nécessairement fermé, mais normal.

En effet : $u \in (L_1 / L_2)^{inf} \Rightarrow u \in L_1^{inf}$ et $u \notin L_2^{inf}$

$$\left.\begin{array}{l} u \in L_1^{inf} \\ \\ L_1 \text{ normal} \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n,\ \exists \alpha_n \in L_1^{fin} \text{ tq } u[n] \leq \alpha_n$$

Alors on peut dire qu'au plus un nombre fini d'α_n appartiennent à L_2^{fin}, sinon :

$$\exists \mathbb{N}',\ \mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N} \text{ tq } (\text{card}|\mathbb{N}'| = \infty, \text{ et } (n \in \mathbb{N}' \Rightarrow \alpha_n \in L_2))$$

Alors $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} u[n] = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}'} u[n] = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}'} \alpha_n \in L_2$ (car L_2 fermé)

Donc :

$$\exists n_0 \text{ tq } (n > n_0 \Rightarrow \begin{bmatrix} u[n] \leq \alpha_n \\ \alpha_n \in L_1^{fin} \\ \alpha_n \notin L_2^{fin} \end{bmatrix}$$

D'où : n_0 tq $[n > n_0 \Rightarrow u[n] \in FG((L_1/L_2)^{fin})]$

Soit $FG(u) \subset FG(L_1/L_2)^{fin})$

Donc (L_1/L_2) *est normal.*

Remarque : On se sert en fait uniquement du fait que L_1 est normal et L_2 est fermé.

f) Action des morphismes étendus

1) Morphismes stricts

L'image par morphisme strict d'un langage fermé normal est fermée normale (évident).

2) Morphismes effaçants

L'image par morphisme effaçant d'un langage fermé normal est normale, non nécessairement fermée.

<u>Exemple</u> : $L = \{x_1^n\, x_2^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup x_1^\omega$

$\phi : x_1 \to \varepsilon$

$x_1 \to a$

<u>g) Action des morphismes inverses</u>

1) Si ϕ est strict, $\phi^{-1}(L)$ est fermé, non nécessairement normal

[<u>Exemple</u> : $L = a^* b \cup a$ $\qquad\qquad \phi^{-1}(L) = a^\omega$

$\phi : a \to a$

$b \to c$

2) Si ϕ est effaçant, $\phi^{-1}(L)$ peut n'être ni fermé, ni normal.

<u>Exemple</u> : $A = \{a, b, c\}$ $\qquad A' = \{a', b', c'\}$

$\phi : A \to A'$ $\qquad L = b' \cup a'^* c' \cup a'^\omega$

$a \to a'$

$b \to b'$

$c \to \varepsilon$

$\phi^{-1}(L) = c^* b\, c^\omega \cup (a \cup c)^* a^\omega$ $\qquad$ (ϕ morphisme *étendu*).

<u>h) Action de ∞</u>

Si L est fermé normal, L^∞ l'est aussi (évident).

<u>i) Action de ω</u>

Si L est fermé normal, L^ω n'est pas normal (sauf si $L^\omega = \emptyset$) et non nécessairement fermé (cf. $L = a^* b \cup a^*$).

<u>j) Action du shuffle équitable</u>

Si L_1 et L_2 sont fermés normaux, $L_1 \odot_e L_2$ est normal non nécessairement fermé.

Exemple : $A = a^{n_0} a^{\infty}$ $B = b^{\infty}$.

$A \odot_e B = \{u \in \{a, b\}^{\infty} / |u|_0 \geq n_0\}$.

$\forall n,\ b^n a_{n_0} \in A \odot_e B$

Donc $b^{\omega} \in \mathrm{Adh}\ (A \odot_e B)$

k) Action du shuffle non équitable

Si L_1 et L_2 sont fermés normaux, $L_1 \odot L_2$ aussi (évident).

VII. Langages fermés centraux

a) Action de l'union

L'union de deux langages fermés centraux est fermée centrale (cf. II et IV).

b) Action de l'intersection

Soit $L_1 = a \cup ab^{\omega}$

Soit $L_2 = a \cup ac^{\omega}$

L_1 et L_2 sont fermés centraux.

$L_1 \cap L_2 = \{a\}$ est non central

Donc si L_1, L_2 sont fermés centraux, $L_1 \cap L_2$ est fermé, non nécessairement central.

c) Action de la concaténation

Si L_1 et L_2 sont fermés centraux, $L_1 L_2$ est fermée centrale.

d) Action de *

Si L est fermé central, L^* est central non nécessairement fermé (cf. $L = a \cup ab^{\omega}$).

e) Action de /

L_1 et L_2 peuvent être fermés centraux, avec L_1 / L_2 ni fermé, ni central (évident). (cf. $L_1 = A^\infty$, $L_2 = A^\omega$)

f) Action des morphismes étendus

1) Si ϕ est non effaçant et L fermé central, $\phi(L)$ est fermé central (évident).

2) Si ϕ est effaçant, $\phi(L)$ n'est ni nécessairement fermé, ni nécessairement central.

Exemple : $\phi\{a, b\} \to \{a\}$ $\quad$ $L = \{b^n\, a^n\, b^\omega \,/\, n \geq 0\}$

$a \to a$ $\quad$ L est fermé central

$b \to \varepsilon$ $\quad$ $\phi(L) = a^*$

g) Action des morphismes inverses

1) Si ϕ est effaçant, $\phi^{-1}(L)$ est central non nécessairement fermé.

(Exemple : $A = \{a, b\}$ $\quad B = \{c\}$; $\quad \phi \begin{smallmatrix} a \to \varepsilon \\ b \to c \end{smallmatrix}$; $L = c^\omega$

$\phi^{-}1(L) = \{u \in (a \cup b)^\omega \,/\, |u|_b = \infty\}$ est non fermé).

2) Si ϕ est non effaçant, $\phi^{-1}(L)$ est fermé, non nécessairement central.

(Exemple : $\{a, b\} \to \{a, b\}$ $\phi^{-1}(\{a \cup ab\}^\omega) = \{a\}$

$a \to a$

$b \to a$ $\quad$]

h) Action de ∞

Si L_1 est fermé central, L_1^∞ l'est aussi (cf. II et IV).

i) Action de ω

Si L est fermé central, L^{ω} est central non nécessairement fermé.

Exemple : $L = a^{*}\, b\, b^{\infty} \cup a^{\omega}$

$L^{\omega} = \{u \,/\, |u|_b = \infty\}$ est non fermé.

j) Action du shuffle équitable

Si L_1 et L_2 sont fermés centraux, $L_1 \odot_e L_2$ est central non nécessairement fermé [cf. $a^{\omega} \odot_e b^{\omega}$].

k) Action du shuffle

Si L_1 et L_2 sont fermés centraux, $L_1 \odot L_2$ l'est aussi (II et IV).

VIII. Langages normaux centraux

Soit L_1, L_2 deux langages normaux centraux.

a) Action de l'union

Si L_1 et L_2 sont normaux centraux, $L_1 \cup L_2$ l'est aussi (cf. III, IV).

b) Action de l'intersection

L'intersection de deux langages normaux et centraux n'est ni nécessairement normale, ni nécessairement centrale.

<u>Exemple</u> : $L_1 = \{a^{2n} / n \in \mathbb{N}\} \cup a^{\omega} \cup a' b^{\infty}\}$ est normal central

$L_2 = \{a^{2n+1} / n \in \mathbb{N}\} \cup a^{\omega} \cup a' c^{\omega}\}$

$L_1 \cap L_2 = a^{\omega} \cup a'$ n'est ni normal, ni central.

<u>c) Action de la concaténation</u>

Si L_1 et L_2 sont normaux centraux, $L_1 \cdot L_2$ l'est aussi (cf. III, IV).

<u>d) Action de *</u>

Si L_1 est normal central, L_1^* l'est aussi (cf. III, IV).

<u>e) Action de /</u>

L_1 / L_2 n'est ni nécessairement normal, ni nécessairement central.

<u>Exemple</u> : $L_1 = A^{\infty}$ $L_2 = A^{\infty} - \{\{b\} \cup a^{\infty}\}$ avec $A = \{a, b\}$.

$L_1 / L_2 = b \cup a^{\omega}$ n'est ni normal, ni central.

<u>f) Action des morphismes</u>

1) <u>Morphismes non effaçants</u>

Soit L_1 normal central, et ϕ morphisme non effaçant. Alors $\phi(L_1)$ est normal central (cf. III, IV).

2) <u>Morphismes effaçants</u>

L'image par un morphisme effaçant d'un langage normal central est normale, mais non nécessairement centrale.

$$[\phi \quad L = ab^{\infty} \qquad \phi : \left.\begin{array}{l} a \to a \\ b \to \varepsilon \end{array}\right]$$

g) Action des morphismes inverses

L'image inverse par un morphisme, même strictement alphabétique, d'un langage normal central n'est ni nécessairement normal, ni nécessairement central.

cf. $L_1 = a^* b^\omega \cup a^* b^+ \cup a^\omega$

$L_2 = A'^* \cup A'^* b'^\omega$ avec $A' = \{a', b'\}$

L_1 et L_2 sont normaux centraux, donc $L_1 \cup L_2$ aussi.

Soit ϕ : $a \to a$

$b \to c \quad \phi^{-1}(L_1) = a^\omega$

$a' \to a' \quad \phi^{-1}(L_2) = a'^*$

$b' \to c'$

$\phi^{-1}(L_1 \cup L_2) = a^\omega \cup a'^*$ n'est ni central, ni normal.

h) Action de *

Si L_1 est normal central, L_1^* l'est aussi (cf. III, IV).

i) Action de ω

Si L_1 est normal central, L_1^ω est central non normal (cf. III, IV).

j) Action du shuffle équitable

Si L_1 et L_2 sont normaux centraux, $L_1 \circledcirc_e L_2$ l'est aussi (cf. III, IV).

k) Action du shuffle

Si L_1 et L_2 sont normaux centraux, $L_1 \odot L_2$ l'est aussi (cf. III, IV).

IX. Langages fermés idéaux

a) Action de l'union

L'union d'une famille finie de langages fermés idéaux est fermée idéale (trivial d'après II et V).

b) Action de l'intersection

L'intersection de deux langages fermés idéaux est fermée idéale (évident d'après II, V).

c° Action de la concaténation

La concaténation de deux langages fermés idéaux et fermée idéale (évident d'après II, V).

d) Action de *

Si L est fermé normal, L^* est normal, non nécessairement fermé ($L = \{a\}$).

e) Action de /

Si L_1 et L_2 sont fermés idéaux, L_1 / L_2 est normal mais ni nécessairement fermé, ni nécessairement idéal ;

Exemple : $L_1 = A^\infty$ $A = \{a, b\}$ L_1 et L_2 sont fermés idéaux

$L_2 = a^* \cup a^\omega$

$L_1 / L_2 = A^* b A^\infty$ n'est ni fermé, ni idéal.

f) Action des morphismes (étendus)

1) Morphisme strictement alphabétiques

Soit L fermé idéal, ϕ morphisme strictement alphabétique. Alors $\Phi(L)$ est fermé idéal (cf. II, V).

2) Morphismes stricts non alphabétique

Soit L fermé idéal, ϕ morphisme strict. Alors $\Phi(L)$ est fermé, non nécessairement idéal (cf. II, V).

3) Morphismes effaçants alphabétiques

L'image d'un langage fermé idéal par un morphisme effaçant alphabétique est idéale non nécessairement fermée.

Exemple : $L = \{a^n b^p / p \leq n\} \cup a^\infty$

$\phi : a \to \varepsilon$

$b \to b$

$\phi(L) = b^*$ n'est pas fermé.

4) Morphismes effaçants non alphabétiques

L'image d'un langage fermé idéal par un morphisme effaçant non alphabétique peut n'être ni fermée, ni idéale

Exemple : $L = \{a^n b^p / p \leq n\} \cup a^\infty c^\infty$

$$\phi : \left.\begin{array}{l} a \to \varepsilon \\ b \to b \\ c \to ad \end{array}\right] \qquad \phi(L) = b^* \cup (ad)^\infty$$

g) Action des morphismes inverses

1) Morphismes non effaçants

Si ϕ est non effaçant et L est fermé idéal, $\phi^{-1}(L)$ est fermée idéale.

2) Morphismes effaçants

L'image inverse par un morphisme étendu effaçant d'un langage fermé idéal est idéale fermée.

En effet :

Soit ϕ $A \to B$

Soit $A_1 = \{a \in A / \phi(a) = \varepsilon\}$

$A_2 = A / A_1$

Soit $\phi' : A_2 \to B$ défini par : $\phi'(a) = \phi(a)$, $\forall a \in A_2$

$u \in B^\omega \Rightarrow \phi^{-1}(u) \circledcirc_e A_1^\infty$

Donc $\phi^{-1}(L) = \phi'^{-1}(L) \odot_e A_1^{\infty}$

Mais L idéal $\Rightarrow$ $\phi'^{-1}(L)$ idéal

Donc $\phi^{-1}(L) = \phi'^{-1}(L) \odot A_1^{\infty}$

Mais ϕ' est stirct, donc si L est fermé, $\phi'^{-1}(L)$ aussi

Et A_1^{∞} est fermé.

Donc $\phi^{-1}(L)$ est fermé et donc fermé idéal.

<u>h) Action de ω</u>

Soit $L \neq \emptyset$ et $L \neq \{\varepsilon\}$, L fermé idéal de A^{∞}

Alors L^{ω} est non idéal, puisque purement infinitaire, et non nécssairement fermé comme le montre l'exemple suivant :

Soit $L_1 = \{b\ a\ b\ a^2\ b \ldots a^i\ b \,/\, i \in \mathbb{N}\}$

Soit $L = \overline{L_1 \cup FG(L_1)}$ L est fermé idéal :

Supposons L^{ω} fermé.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $b\ a\ b \ldots a^n\ b\ b \ldots b \ldots \in L$.

Donc $u = b\ a\ b \ldots a^n\ b\ a^{n+1}\ b \ldots \in L^{\omega}$ (si L^{ω} fermé).

D'où $\exists(\ell_1, \ell_2, \ell_3) \in (L^{fin} - \varepsilon)^3$ $\quad u = \ell_1\ \ell_2\ \ell_3\ u'$

$\exists u' \in L^{\omega}$

$\ell_1 \neq \varepsilon$
$\ell_2 \quad FG(L_1) \Rightarrow \ell_2 = b\ \ell_2' \quad \Rightarrow \ell_1 = b\ a\ \ell_1'$
$\ell_2 \neq \varepsilon$

Donc $\ell_2 = b\ a^2\ \ell_2''$: impossible car $\ell_2 \in FG(L_1)$
ou $\ell_2 = b$
ou $\ell_2 = b\ a$: impossible car ℓ_3 doit commencer par b

i) Action de ∞

Si L est fermé idéal, L^{∞} l'est aussi.

j) Action du shuffle équitable

D'après l'étude faite au III, si L_1 et L_2 sont fermés idéaux on a :

$$\mathrm{Adh}(L_1 \circledcirc_e L_2) = (L_1^{fin} \circledcirc_e \mathrm{Adh}\, L_2) \cup (\mathrm{Adh}\, L_1 \circledcirc_e L_2^{fin}) \cup (\mathrm{Adh}\, L_1 \circledcirc_e \mathrm{Adh}\, L_2)$$

$$= (L_1 \circledcirc \mathrm{Adh}\, L_2) \cup (\mathrm{Adh}\, L_1 \circledcirc L_2)$$

Donc

$$(\overline{L_1 \circledcirc_e L_2}) = (L_1 \circledcirc_e L_2) \cup (L_1 \circledcirc_e \mathrm{Adh}\, L_1) \cup (\mathrm{Adh}\, L_1 \circledcirc_e L_2)$$

$$= L_1 \circledcirc_e L_2$$

Donc si L_1 et L_2 sont fermés idéaux, $L_1 \circledcirc_e L_2$ est fermé idéal.

k) Action du shuffle

Si L_1 et L_2 sont fermés idéaux, $L_1 \circledcirc L_2$ est fermé idéal (cf. II, V).

X. Langages idéaux centraux

a) Action de l'union

L'union de deux langages idéaux centraux est idéale centrale (cf. V, IV).

b) Action de l'intersection

L'intersection d'une famille (finie ou non) de langages idéaux centraux est idéale, mais elle n'est pas nécessairement centrale :

$$L_1 = a^* b^* \cup a^* b^{\omega}$$
$$L_1 \cap L_2 = a^*$$
$$L_2 = a^* c^* \cup a^* c^{\omega}$$

c) Action de la concaténation

La concaténation de deux langages idéaux centraux est idéale centrale (cf. V, IV).

d) Action de *

Si L_1 est idéal central, L_1^* l'est aussi.

e) Action de /

Si L est idéal central, ${}^cL$ est central mais non nécessairement idéal

Exemple : $L = A^* \cup A^* b^\omega$ avec $A = \{a, b\}$

$\emptyset \subsetneq {}^cL \subseteq A^\omega$: donc ${}^cL$ est non idéal.

f) Action des morphismes

1) Morphismes strictement alphabétiques

Si L_1 est idéal central et ϕ strictement alphabétique, $\phi(L_1)$ est idéal central.

2) Morphismes alphabétiques non stricts

Si L idéal central et ϕ morphisme alphabétique effaçant, $\phi(L)$ est idéal mais non nécessairement central.

Exemple : $\phi : a \to a$, $b \to \varepsilon$ $\quad L = A^* \cup A^* b^\omega$

3) Morphisme strict non alphabétique

Si L idéal central et ϕ morphisme strict non alphabétique, $\phi(L)$ n'est pas nécessairement idéal mais est central.

Exemple : $\phi : a \to ab$ $\quad L = a^\infty$

4) Morphisme non alphabétique, effaçant

Si L idéal central et ϕ morphisme non alphabétique effaçant, $\phi(L)$ n'est ni nécessairement idéal, ni nécessairement central.

Exemple : ϕ : $a \to a$

$$\phi^{-1}(A^* \cup A^* b^\omega) = A^*$$

$b \to a$

h) Action de ∞

Si L_1 est idéal central, L_1^∞ l'est aussi (cf. IV, V).

i) Action de ω

Si L_1 est idéal central, L_1^ω l'est aussi (cf. IV, V).

j) Action du shuffle équitable

Si L_1 et L_2 sont idéaux centraux, $L_1 \circledcirc_e L_2$ est idéal central (cf. IV, V).

k) Action du shuffle

Si L_1 et L_2 sont idéaux centraux, $L_1 \circledcirc L_2$ est idéal central.

XI. Langages fermés normaux centraux

a) Action de l'union

Si L_1 et L_2 sont fermés normaux centraux, $L_1 \cup L_2$ est fermé normal central (cf. IV, V).

b) Action de l'intersection

L'intersection de deux langages normaux fermés centraux est fermée, non nécessairement normale ni centrale.

cf. $L_1 = \{a^{2n} / n \geq 0\} \cup a^\omega \cup b\, c^\infty$ $L_2 = \{a^{2n+1} / n \geq 0\} \cup a^\omega \cup b\, d^\infty$

c) Action de la concaténation

La concaténation de deux langages fermés normaux centraux est fermée normale centrale (cf. IV, V).

d) Action de *

Si L est fermé normal central, L^* est central normal mais non nécessairement fermé.

(Exemple : $L = ab^* \cup ab^\omega$)

e) Action de /

Si L_1 et L_2 sont fermés normaux centraux, L_1/L_2 est normal, pas nécessairement central, ni fermé.

Exemple : $L_1 = a^\infty$

$$L_2 = \bigcup_n \{a^{2n} / n \in \mathbb{N}\} \cup a^\omega$$

f) Action des morphismes

1) Morphisme strict

Si ϕ est morphisme strict et L fermé normal central, $\phi(L)$ est fermé normal central (cf. IV, VI).

2) Morphisme effaçant

Si ϕ est non strict, $\phi(L)$ est normal mais ni nécessairement fermé ni central.

Exemple : $L = \{a^n\, b^n / n \in \mathbb{N}\} \cdot a^\infty \cup a^\omega$

$$\phi : \begin{array}{l} a \to \varepsilon \\ b \to b \end{array} \qquad \phi(L) = b^*$$

g) Action des morphismes inverses

1) Si ϕ est effaçant, $\phi^{-1}(L)$ est central, non nécessairement fermé, ni normal.

Exemple : $\phi : A = \{a, b\} \to A' = \{a', b'\}$

$a \to a'\, b$

$b \to \varepsilon$

$L = a'\, b'^{\infty} \cup (a'\, b')^{\omega} \cup (a'\, b')^{*}\, a'$

$\phi^{-1}(L) = b^{*}\, a\, b^{\infty} \cup (b^{*}\, a)^{\omega}$ est ni fermé, ni normal.

2) Si ϕ est strict, $\phi^{-1}(L)$ est fermé, mais peut être ni normal, ni central.

Exemple : $L = a \cup ab^{\infty} \cup c^{\omega} \cup c^{\infty}\, b\, b^{\infty}$

: $a \to a$

$b \to d$ $\qquad \phi^{-1}(L) = a \cup c^{\omega}$

$c \to c$

h) Action de ∞

Si L est fermé normal central, L^{∞} l'est aussi (cf. IV, VI).

i) Action de ω

Si L est fermé central normal, L^{ω} est central, pas normal (sauf si $L = \emptyset$ ou $L = \{\varepsilon\}$) et pas nécessairement fermé.

Exemple : $L = a^{*}\, b\, b^{\infty} \cup a^{\omega}$

$L^{\omega} = \{u \,/\, |u|_b = \infty\}$ est non fermé.

j) Action du shuffle équitable

Le shuffle équitable de deux langages fermés normaux centraux est normal central, non nécessairement fermé.

(cf. $L_1 = a^{n_0}\, a^{\infty}$; $L_2 = b^{\infty}$)

k) Action du shuffle

Si L_1 et L_2 sont fermés normaux centraux, $L_1 \odot L_2$ est fermé normal central (cf. IV, VI).

XII. Langages fermés idéaux centraux

a) Action de l'union

L'union de deux langages fermés idéaux centraux est fermée idéale centrale (cf. IV, IX).

b) Action de l'intersection

Si L_1 et L_2 sont fermés idéaux centraux, $L_1 \cap L_2$ est fermé idéal, non nécessairement central.

Exemple : $(ab^{\infty}) \cap ac^{\infty} = \{a\}$

c) Action de la concaténation

La concaténation de deux langages fermés idéaux centraux est fermée idéale centrale (cf. IV, IX).

d) Action de *

Si L est fermé idéal central, L^* est idéal central mais pas nécessairement fermé.

Exemple : $(ab^{\infty})^* \supseteq a^*$ et $a^{\omega} \notin (ab^{\infty})$

e) Action de /

Si L_1 et L_2 sont fermés idéaux centraux, L_1 / L_2 est central normal, non nécessairement fermé, ni nécessairement idéal.

Exemple :

$$A = \{a, b\}\ L_1 = A^\infty\ ;\ L_2 = a^\infty \cup a^* b^\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \forall n,\ b^n a \in L_1 / L_2 \\ \\ b^\omega \notin L_1 / L_2 \end{array}\right\} \Rightarrow L_1 / L_2 \text{ non fermé}$$

$$\left.\begin{array}{l} a\ b\ a \in L_1 / L_2 \\ \\ a \notin L_1 / L_2 \end{array}\right\} \Rightarrow L_1 / L_2 \text{ non idéal}$$

f) Action des morphismes étendus

1) Morphismes strictement alphabétiques

Si ϕ est strictement alphabétique, et L fermé idéal central, $\phi(L)$ est fermé idéal central (cf. IV, IX).

2) Morphismes stricts non alphabétiques

Soit ϕ strict non alphabétique. Si L est fermé idéal central, $\phi'(L)$ est fermé central, non nécessairement idéal (cf. IV, IX).

3) Morphismes alphabétiques effaçants

Si L est fermé idéal central, $\phi(L)$ est idéal, non nécessairement central ni fermé.

Exemple : $L_1 = \{a^n b^p / p \leq n\}$; $L_2 = a^\infty$; $L = L_1 L_2$

$$\phi : \begin{cases} a \to \varepsilon \\ \\ b \to b \end{cases} \qquad \phi(L) = b^*$$

4) Morphismes effaçants non alphabétiques

Alors $\phi(L)$ est ni nécessairement fermé, ni idéal, ni central.

Exemple : $L = \{a^n\, b^n \,/\, p \leq n\}\ a^{\infty} \cup c^{\infty}$

$\phi : a \to \varepsilon \qquad \phi(L) = b^{*} \cup (cd)^{\infty}$

$b \to b$

$c \to cd$

g) Action des morphismes inverses

1) Morphismes stricts

Si L est fermé central idéal et ϕ un morphisme strict, $\phi^{-1}(L)$ est fermé idéal non nécessairement central (même si ϕ alphabétique).

Exemple : $L = a \cup ab^{\omega}$

$\phi : a \to a \qquad \phi^{-1}(L) = a$

$b \to c$

2) Morphismes effaçants

Si ϕ effaçant, $\phi^{-1}(L)$ est central, idéal non nécessairement fermé.

Exemple : $L = cd^{\infty}$

$\phi : \{a, b\} \to \{c, d\} \qquad \phi^{-1}(L) = a^{*}\ b\ a^{\infty}$

$a \to \varepsilon$

$b \to c$

h) Action de ∞

Si L est fermé idéal central, L^{∞} l'est aussi.

i) Action de ω

Soit $L \neq \emptyset$ et $L \neq \{\varepsilon\}$, L fermé idéal central. L^{ω} est central non normal, et est non nécessairement fermé comme le prouve l'exemple :

$$L = a^{*}\ b\ \ b^{\infty} \cup a^{\omega}$$

j) Action du shuffle équitable

Si L_1 et L_2 sont fermés idéaux centraux, $L_1 \odot_e L_2$ fermé idéal central.

k) Action du shuffle

Si L_1 et L_2 sont fermés idéaux centraux, $L_1 \odot L_2$ l'est aussi (cf. II, IV, V).

2 Langages rationnels

I. Rappels

Un système de transition - noté ts - S est composé de :

- un ensemble de configurations C
- un alphabet A
- un ensemble de transitions $T \subseteq C \times A \times C$
- un ensemble $D \subseteq C$ de configurations initiales
- un ensemble $D_{fin} \subseteq C$ de configurations finales
- un ensemble $C_{inf} \subseteq C$ de configurations infinies

On définit λ par : $\lambda : C \times A \rightarrow C$

$$\lambda(c, a) = \{c' / c \times a \times c' \in T\}$$

Alors $$L^*(S) = \left\{ f / \exists (c_i)_{i=o}^{|f|} \text{ tq } \begin{array}{l} \cdot\ c_0 \in D \\ \cdot\ c_{|f|} \in C_{fin} \\ \cdot\ (c_{i-1}, f(i), c_i) \in T, \forall i \in [1, |f|] \end{array} \right\}$$

$$L^\omega(S) = \left\{ u / \exists (c_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ tq } \begin{array}{l} \cdot\ c_0 \in D \\ \cdot\ (c_{i-1}, u(i), c_i) \in T, \forall i \in \mathbb{N}^* \\ \cdot\ \{i / c_i \in C\ inf\} \text{ est infini} \end{array} \right\}$$

$$L^\infty(S) = L^\omega(S) \cup L^*(S).$$

Un langage $L \subset A^\infty$ sera dit rationnel ssi il existe un t.s. fini (i.e. C fini) tel que $L = L^\infty(S)$. [5].

Par la suite, tous les t.s. considérés seront finis.

On peut modifier la définition comme suit :

Soit $\mathcal{S}$ un t.s., et $\mathcal{C}$ une partie de $\mathcal{P}(C)$.

Alors $L^{\omega}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S}) = \{u \,/\, \exists (c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tq $\;.\; c_0 \in D$

$\qquad .\; (c_{i-1}, u(i), c_i) \in T,\ \forall i \in \mathbb{N}^*$

$\qquad .\; \exists C' \in \mathcal{C}$ tq $\{i / i \in \mathbb{N},\ c_i \notin C'\}$ est fini

Comme pour les automates on dira que $\mathcal{S}$ est déterministe ssi

- card $(D) \leq 1$
- card $(\lambda(c, a)) \leq 1,\ \forall c \in C,\ \forall a \in A.$

Alors on a ([2])

<u>Th</u> (1) il existe un t.s. $\mathcal{S}$ tq $L = L^{\infty}(\mathcal{S})$

(2) il existe $(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ tq $L = L^{\omega}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S}) \cup L^*(\mathcal{S})$

(3) il existe $(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ tq . $\mathcal{S}$ déterministe

$\qquad .\; L = L_{\mathcal{C}}(\mathcal{S}) \cup L^*(\mathcal{S})$

<u>Notations</u>

Nous noterons :

- $c \xrightarrow[\mathcal{S}]{f} c'$ si : $\exists (c_i)_{i=o}^{|f|}$ tq $\;.\; (c_{i-1}, f(i), c_i) \in T,\ \forall i \in [1, |f|]$

  $\qquad .\; c_0 = c$

  $\qquad .\; c_{|f|} = c'$

- $A \xrightarrow[\mathcal{S}]{f} B$ si : $\exists a \in A,\ b \in B,\ a \xrightarrow[\mathcal{S}]{f} B$

- $A \xrightarrow[\mathcal{S}]{f} B$ si : $\exists (c_i)_{i=o}^{\infty}$ tq $\;.\; c_0 \in A$

  $\qquad .\; c_i \in B,\ \forall i$

  $\qquad .\; (c_{i-1}, f(i), c_i) \in T\ \ \forall i$

- Acc $(c) = \{c' \,/\, c' \in c,\ \exists f,\ c \xrightarrow{f} c'\}$

- Coacc $(c) = \{c' \,/\, c' \in c,\ \exists f,\ c' \xrightarrow{f} c\}$

- $\text{Acc}(D) = \bigcup_{c \in D} \text{Acc}(c)$
- $\text{coacc}(D) = \bigcup_{c \in D} \text{coacc}(c)$

De plus on a la caractérisation suivante :

Th [8] : Le langage $L \subseteq A^{\infty}$ est reconnu par un t.s. ssi sa partie finitaire L^{fin} est rationnelle et L^{inf} vérifie :

$$L^{inf} = \bigcup_{1 \leq i \leq p} K_i (K_i')^{\omega} \text{ avec } K_i \ K_i'$$

rationnels finitaires.

II. Réduction d'un système de transition

Soit $S = \langle c, D, T, c^{fin}, c^{inf} \rangle$

On dira que S est réduit ssi :

. $c = \text{Acc } D$

. $c \subset \text{Coacc}(c_{fin} \cup c_{inf})$

. $c_{inf} = B(c_{inf})$ avec

$$B(c_{inf}) = \{c \in c_{inf} \,/\, \exists f \neq \phi \text{ tq } c \xrightarrow{f} c\}$$

Alors :

Proposition : Pour tout système S, il existe un système de transition réduit S_r qui reconnaît le même langage infinitaire.

On prend
$$\begin{cases} c_R = \text{Acc } D \cap \text{Coacc } (c_{fin} \cup B(c_{inf})) \\ D_R = c_R \cap D \\ c_{R_{fin}} = c_R \cap c_{fin} \\ c_{R_{inf}} = c_R \cap B(c_{inf}) \\ T_R = (c_R \times A \times c_R) \cap T \end{cases}$$

On a alors $\mathcal{L}^\infty(\mathcal{S}) = \mathcal{L}^\infty(\mathcal{S}_R)$ ([15]).

3. Déterminisation d'un système

Contrairement au cas des rationnels finitaires, les rationnels infinitaires ne sont pas tous reconnaissables par des t.s. déterministes (i.e. $L = \mathcal{L}^\infty(\mathcal{S})$), comme par exemple $(a \cup b)^* b^\omega$.

Si on note DRat (A^ω) l'ensemble des langages infinitaires reconnus par un t.s. déterministe, on a :

Th [8] : (1) $L \in$ DRat (A^ω)

(2) $L = \bigcup_{i=1}^{p} K_i(K_i')^\omega$ où K_i, K_i' sont rationnels finitaires préfixes □

On peut tout de même utiliser la construction classique de déterminisation d'un automate fini ; certes le système obtenu ne peut toujours servir à reconnaître le langage de départ, mais il peut servir à reconnaître de façon déterministe l'ensemble des facteurs gauches, ce qui nous sera souvent utile.

Soit donc $\mathcal{S} = \langle c, T, D, c_{fin}, c_{inf} \rangle$

Supposons que $\mathcal{S}$ soit *réduit* (au sens ci-dessus).

Alors on définira $\mathcal{S}_d = \langle c_d, T_d, D_d, c_{d_{fin}}, \emptyset \rangle$

avec $c_d = 2^c$

$T_d = \{(\hat{c}, a, \hat{c}') / c' = \lambda_S(c, a)\}$

$D_d = \{D\}$

$c_{d_{fin}} = \{\hat{c} \in 2^c / \hat{c} \cap c_{fin} \neq \emptyset\}$

On aura : . $L^*(S_d) = L^*(S)$

. $D_d \xrightarrow{f} c_d \Longleftrightarrow f \in FG(L^\infty(S))$.

De plus S_d est réduit au sens ci-dessus.

Si en général on ne peut pas définir $c_{d_{inf}}$ tel que $L(S_d) = L^\infty(S)$, le cas des langages fermés est particulièrement simple puisque si $L^\infty(S)$ est fermé on a :

$$L^\infty(S'_d) = L^\infty(S) \text{ avec } S'_d = \langle c_d, T_d, D_d,, c_{afin}, c_d \rangle$$

(donc L rationnel fermé est déterministe).

4. Construction des parties normale, centrale et parfaite d'un langage infinitaire rationnel

Notations

* Soit S un t.s. ; $S = \langle c, D, T, c_{inf}, c_{fin} \rangle$.

Si c' est une partie de c, on appelera *restriction de S à* c' le système - noté S/c' - défini par :

$\underline{S/c'} = \langle c', D', T', c'_{inf}, c'_{fin} \rangle$ avec

$D' = D \cap c'$, $c'_{inf} = c_{inf} \cap c'$, $c'_{fin} = c_{fin} \cap c'$,

$T' = (c' \times A \times c') \cap T$.

* Si S et S' sont deux systèmes, on notera $S \hat{\times} S'$ le système :

$\underline{S \hat{\times} S'}$ = {c × c', D × D', T", ,> avec

$$T'' = \{<(c_i, c'_j), a, (c_k, c'_e)> \ / \ (c_i, a, c_k) \in T, \ (c'_j, a, c'_e) \in T'\}$$

En fait $S \hat{\times} S'$ n'est pas "encore" un système. Il faudrait préciser les configurations finales et infinies.

Mais cet abus de notations nous permettra d'alléger sérieusement les notations, les configurations finales et infinies étant bien sûr précisées dans chaque cas.

Partie normale d'un langage rationnel infinitaire

La *partie normale* notée $N(L)$ d'un langage L est le plus grand langage normal contenu dans celui-ci (il existe bien, puisque l'union de deux langages normaux est normale, et $\emptyset$ est normal). Le problème qui se pose donc est de trouver cette partie normale. Dans le cas où le langage est rationnel, elle est aussi rationnelle [Nivat] ; nous allons donc construire un système la reconnaissant à partir du système reconnaissant L.

Soit $L = L^{\infty}(S)$ avec $S = <c, T, D, c_{fin}, c_{inf}>$

On peut supposer que S est réduit.

Soit alors $S_n = \{c_n, T_n, D_n, c_{n_{fin}}, c_{n_{inf}}\}$ défini par :

$S_n = S_{d_n} \hat{\times} S$ avec $S_{d_n} = S_d/c_{d_n}$ où

$$c_{d_n} = \{\hat{c} \in c_d \ / \ \hat{c} \cap \text{Coacc } c_{fin} \neq \emptyset\}$$

$c_{n_{fin}} = c_{d_{n_{fin}}} \times c = c_{d_{fin}} \times c$

$c_{n_{inf}} = c_{d_n} \times c_{inf}$

Alors : $D_n \xrightarrow[n]{f} c_n \Rightarrow D \xrightarrow{f} \text{Coacc}\,(c_{fin})$

$$\Rightarrow f \in FG(L^{fin})$$

Donc $D_n \xrightarrow[S_n]{u} c_n \Rightarrow \forall p,\ u[p] \in FG(L^{fin})$

et

$$D_n \xrightarrow[S_n]{u} c_n \Rightarrow D \xrightarrow[S]{u} c_{inf} \Rightarrow u \in L^{inf}$$

De même $D_n \xrightarrow[S_n]{f} c_n \Rightarrow D \xrightarrow[S]{f} c \Rightarrow f \in L^{fin}$.

Donc $\underline{L^{\infty}(S_n) \subset N(L)}$

Réciproquement :

$$u \in N(L) \Rightarrow \forall p,\ u[p] \in FG(L^{fin})$$
$$\Rightarrow \forall p\ D_{d_n} \xrightarrow[S_{d_n}]{u[p]} c_{d_n}$$

de plus $u \in N(L) \Rightarrow u \in L^{inf} \Rightarrow D \xrightarrow{u} c_{inf}$ donc comme S_{d_n} est déterministe :

$D_n \xrightarrow{u} c_n$

On a bien $\underline{N(L) \subset L^{\infty}(S_n)}$

D'où finalement $\underline{N(L) = L^{\infty}(S_n)}$

<u>Remarque</u> : Un t.s. est dit normal ssi $c \in$ Coacc (c_{fin}). Le système construit ci-dessus n'est pas normal. Il suffit cependant de le modifier légèrement pour avoir un système normal. En effet, il suffit d'adjoindre à S une configuration puits notée $\emptyset$, les mots finis étant reconnus par S_{d_n}. On obtient ainsi S'_n :

$$S'_n = S_{d_n} \hat{\times} S' \text{ avec } S' = \langle c', T', D, c_{fin}, c_{inf}\rangle$$

où $c' = c \cup \{\emptyset\}$

$T' = T \cup \{(c, a, \emptyset) / \lambda_S(c, a) = \emptyset\} \cup \{(\emptyset, a, \emptyset) / a \in A\}$

et $\quad c'_{n_{fin}} = c_{d_{n_{fin}}} \times c' = c_{d_{fin}} \times c'$

$c'_{n_{inf}} = c_n \times c_{inf}$

Partie centrale d'un langage rationnel infinitaire

On appèlle partie centrale $C(L)$ ou centre d'un langage L le plus grand langage central contenu dans celui-ci (il est défini puisque l'union de deux langages centraux est centrale et $\emptyset$ est central). Le centre d'un langage rationnel étant rationnel, on va construire un système reconnaissant le centre de L, à partir du système reconnaissant L.

Soit $L = L^\infty(S)$ avec $S = \langle c, T, D, c_{fin}, c_{inf}\rangle$

Construisons $S_c = \langle c_c, T_c, D_c, c_{c_{fin}}, c_{c_{inf}}\rangle$ avec :

- $S_c = S_{d_c} \hat{\times} S$ avec $S_{d_c} = S_{d/c_{d_c}}$ où $c_{d_c} = \{\hat{c} \in 2^c / \hat{c} \cap \text{Coacc } c_{inf} \neq \emptyset\}$
- $c_{c_{fin}} = c_{d_{c_{fin}}} \times c$
- $c_{c_{inf}} = c_{d_c} \times c_{inf}$

Alors $D_c \xrightarrow{f} c_c \Rightarrow D_{d_c} \xrightarrow{f} c_{d_c} \Rightarrow f \in FG(L^{inf})$.

Et donc $L\ (S_c) \subseteq C(L)$ si $C(L)$ est le centre de L

et $L^\omega(S_c) = L^\omega(S)$.

Réciproquement : $f \in C(L) \Rightarrow f \in FG(L_{inf})$

$\Rightarrow D_c \xrightarrow{f} c_c \Rightarrow f \in L^\infty(S_c)$

Donc $\underline{C(L) = L^\infty(S_c)}$

Remarque : Un t.s. est dit permanent ssi $c \in \mathrm{Coacc}\,(c_{inf})$. Le système construit ici ne l'est pas mais il suffit de le modifier de la manière suivante :

$$S'_c = S_{d_c} \hat{\times} S/\mathrm{Coacc}(c_{inf})$$

$$c'_{c_{fin}} = c_{d_{c_{fin}}} \times \mathrm{Coacc}\ c_{inf}$$

$$c'_{c_{inf}} = c_{d_c} \times c_{inf}$$

Les systèmes que nous avons appelés S_c et S_n s'ils ne sont pas en général permanents (resp. normal) ont l'intérêt d'être la restriction d'un même système, ce qui va nous permettre de construire la partie centrale et normale d'un rationnel infinitaire.

Partie parfaite d'un langage infinitaire rationnel

Déf. : Un langage central et normal sera dit *parfait*. La partie parfaite d'un langage L est le plus grand langage parfait contenu dans L.

L'idée la plus naturelle semble être de calculer par exemple la partie normale de L et ensuite de prendre la partie centrale de celle-ci, ce qui évidemment n'aboutit pas nécessairement à la partie parfaite, puisque le dernier langage obtenu n'est plus nécessairement normal :

Exemple : $L = b\,a^*\,b \cup b\,a^*\,b\,a^*\,b \cup b\,a^*\,b\,a^\omega \cup b\,a^*\,b\,a^*\,b\,a^\omega$

$$\mathcal{N}(L) = b\,a^*\,b \cup b\,a^*\,b\,a^*\,b \cup b\,a^*\,b\,a^\omega$$

$\mathcal{C}(\mathcal{N}(L)) = b\,a^*\,b \cup b\,a^*\,b\,a^\omega$ n'est plus normal.

Mais si $\mathcal{P}(L)$ désigne la partie parfaite de L, on a :

$$\mathcal{P}(L) \subset \mathcal{C}(L) \cap \mathcal{N}(L)$$

et $\mathcal{C}(\mathcal{P}(L)) = \mathcal{P}(L) = \mathcal{N}(\mathcal{P}(L))$

Donc si la suite L, $\mathcal{N}(L)$, $\mathcal{C}(\mathcal{N}(L))$, $\mathcal{N}(\mathcal{C}(\mathcal{N}(L)))$... est stationnaire, elle aura pour valeur à partir d'un certain rang $\mathcal{P}(L)$. En effet soit donc $(L_i)_{i\in\mathbb{N}}$ défini par :

• $L_0 = L \; L_1 = N(L) \qquad L_2 = C(L_1)$

• $L_{2p+1} = N(L_{2p}) \qquad\qquad \forall p \geq 1$

• $L_{2p+2} = C(L_{2p+1}) = C(N(L_{2p}))$

Alors : 1) $\forall i \in \mathbb{N}$, $P(L) \subset L_i$ puisque :

$$P(L) \subset L_0$$

$$\left.\begin{array}{l} P(L) \subset L_{2p} \\ P(L) \text{ normal} \end{array}\right\} \Rightarrow P(L) \subset N(P(L)) \subset N(L_{2p})$$

$$\Rightarrow P(L) \subset L_{2p+1}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(L) \text{ central} \\ P(L) \subset L_{2p+1} \end{array}\right\} \Rightarrow P(L) \subset C(P(L)) \subset C(L_{2p+1})$$

$$\Rightarrow P(L) \subset L_{2p+2}$$

2) Si la suite (L_i) est stationnaire à partir du rang $2n_0$ on a :

$$L_{2n_0} \subset L$$

$$N(L_{2n_0}) = L_{2n_0+1} = L_{2n_0} \Rightarrow L_{2n_0} \text{ normal}$$

$$C(L_{2n_0}) = C(L_{2n_0+1}) = L_{2n_0+2} = L_{2n_0} \Rightarrow L_{2n_0} \text{ central}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Donc } L_{2n_0} \text{ est parfait} \\ L_{2n_0} \subset L \end{array}\right| \Rightarrow L_{2n_0} \subset P(L)$$

Soit donc L rationnel et S réduit reconnaissant L.

$(S = \langle C, D, \lambda, C_{fin}, C_{inf} \rangle)$.

Posons $C_d = 2^C$ $\quad C_{dinf} = \{\hat{C} \in C_d \,/\, \hat{C} \cap C_{inf} \neq \emptyset\}$

Soit la suite $(C_i)_{i \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$C_0 = 2^C$$

$$C_1 = \text{Coacc } C_{dfin}$$

$$C_2 = C_1 \cap \text{Coacc } (C_{dinf} \cap C_1)$$

$$C_3 = C_2 \cap \text{Coacc } (C_{dfin} \cap C_2)$$

$$\vdots$$

$$C_{2p} = C_{2p-1} \cap \text{Coacc } (C_{dinf} \cap C_{2p-1} \cap C_{2p-1})$$

$$C_{2p+1} = C_{2p} \cap \text{Coacc } (C_{dfin} \cap C_{2p})$$

Définissons alors $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ par :

$$S_0 = S_d \mathbin{\hat{\times}} S$$

$$S_1 = S_{d/C_1} \mathbin{\hat{\times}} S = S_d \mathbin{\hat{\times}} S/C_1 \times C$$

$$\vdots$$

$$S_i = S_{d/C_i} \mathbin{\hat{\times}} S = S_d \mathbin{\hat{\times}} S/C_i \times C$$

Alors :

$$\underline{L^{\infty}(S_i) = L_i}$$

<u>Dm</u> :

. $i = 0 \quad \mathcal{L}^{\infty}(S) = \mathcal{L}^{\infty}(S \mathbin{\hat{\times}} S_d) = S^{\infty}(S)$

$= L = L_0$

. $\mathcal{L}^{\infty}(S_{2p+1}) = \mathcal{L}^{\infty}(S_{2p}/\mathrm{Coacc}((C_{dinf} \cap C_{np}) \times C) \cap C_{2p})$

$= C(\mathcal{L}^{\infty}/S_{2p})$

$= C(L_{2p}) = L_{2p+1} \quad \text{si } L_{2p} = \mathcal{L}^{\infty}(S_{2p})$

(cf. construction de la partie centrale).

$\mathcal{L}^{\infty}(S_{2p+1}) = \mathcal{L}^{\infty}(S_{2p+1}/(\mathrm{Coacc}\ (C_{dfin} \cap C_{2p+1}) \times C) \cap C_{2p+1})$

$= N(\mathcal{L}^{\infty}(S_{2p+1}))$

$= N(L_{2p+1}) \text{ si } L_{2p+1} = \mathcal{L}^{\infty}(S_{2p+1})$

$= L_{2p+2}$.

(cf. construction de la partie centrale).

Mais $(\mathrm{Card}(C_i \times C))_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'entiers positifs, puisque $C_i \subset C_{i+1}$ pour tout i. Elle est donc stationnaire :

$\exists p \ / \ \mathrm{Card}\ (C_p \times C) = \mathrm{Card}\ (C_n \times C),\ \forall n,\ n \geq p,$

donc comme $C_n \subset C_p$, on a $C_n = C_p\ \forall n,\ n \geq p$

d'où $S_n = S_p$

et $L_n = L_p \quad \forall n,\ n \geq p.$

On a donc un moyen effectif de construire l'automate reconnaissant la partie parfaite de L.

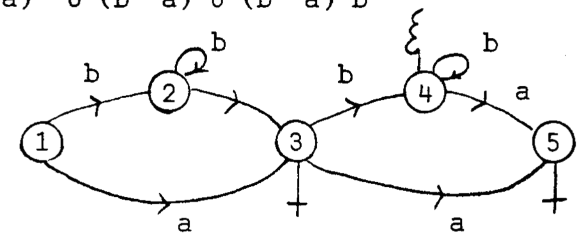
Remarques :

1) On a vu qu'un langage normal (resp. central) peut être reconnu par un t.s. normal (resp. permanent). Mais il existe des langages parfaits qu'aucun système permanent et normal ne reconnaît. [cf. $L = (a \cup b)^* (a \cup b^\omega)$: contre-exemple dû à A. Arnold].

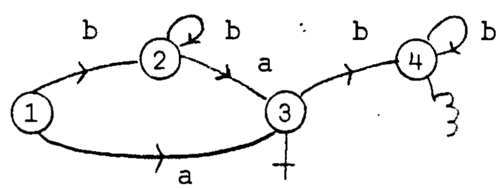
2) Dans le cas où L est déterministe, les choses sont simplifiées. Si S est un système déterministe reconnaissant L, on peut appliquer le principe de la construction par "restriction" directement à S :

Exemple : $L = (b^* a)^2 \cup (b^* a) \cup (b^* a) b^\omega$

$S = S'_0$

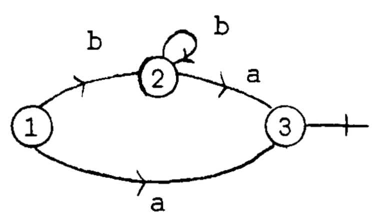


S'_1



$S'_2 = S'_1$

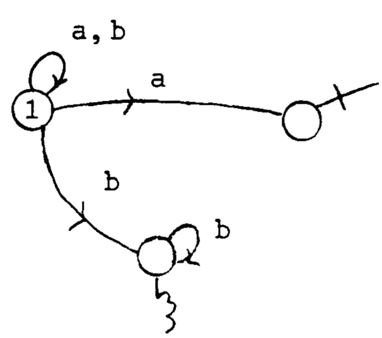
S'_3



S'_5 : $\emptyset$ reconnaît la partie parfaite de L.

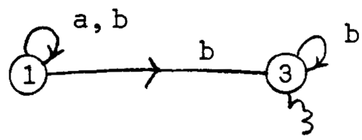
Par contre si on prend $L = (a \cup b)^* (a \cup b^\omega)$

et S :



$S'_0 = S$

S'_1 :



S'_2 : $\emptyset$ ne reconnait pas $P(L)$ ($P(L) = L$ ici).

3) Si L n'est pas rationnel, la suite $(L_i)_{i\in\mathbb{N}}$ définie précédemment n'est pas nécessairement stationnaire :

$$\text{Soit } L = L^{fin} \cup L^{inf} \text{ avec } L^{fin} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*}\{\bigcup_{1\leq k\leq i} (b^+ c^i b)^k b\}$$

$$L^{inf} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*}\{\bigcup_{1\leq k\leq i-1} (b^+ c^i b)^k b^\omega\}$$

Alors $L_0 = L$

$$L_1 = \bigcup_{i>1}\{\bigcup_{1\leq k\leq i-1} (b^+ c^i b)^k b\} \cup L^{inf}$$

$$L_2 = L_1^{fin} \cup \{\bigcup_{i>2}\{\bigcup_{1\leq k\leq i-2} (b^+ c^i b)^k b^\omega\}$$

$$L_{2p}^{fin} = \bigcup_{i\geq p+1}\{\bigcup_{1\leq k\leq i-p}\{(b^+ c^i b)^k b\}\}$$

$$L_{2p}^{inf} = \bigcup_{i\geq p+1}\{\bigcup_{1\leq k\leq i-p-1}\{(b^+ c^i b)^k b^\omega\}\}$$

$$L_{2p+1} = L_{2p}^{inf} \cup \{\bigcup_{i\geq p+2}\{\bigcup_{1\leq k\leq i-p-1}\{b^+ c^i b\}^k b\}\}$$

Et $\forall p$, $L_{2p+2} \subsetneq L_{2p+1} \subsetneq L_{2p}$

III. Stabilité des rationnels

Les propriétés de clôture des langages rationnels infinitaires ont déjà été étudiées (Büchi, Mac Naughton et Eilenberg ([5, 8, 13]). M. Nivat et F. Gire ([10, 15]), Park ([11]). Nous en rassemblons ici quelques unes tout en précisant la construction de l'automate reconnaissant l'image par morphisme d'un rationnel.

a) Action de l'union

L'union de deux rationnels infinitaires est rationnelle (immédiat).

b) Action de l'intersection

L'intersection de deux rationnels infinitaires est rationnelle (Buchi [5])

c) Action de la concaténation

Si L_1 et L_2 sont rationnels, $L_1 L_2$ aussi.

En effet :

$$L_1L_2 = L_1^{inf} \cup L_1^{fin} L_2$$

$$L_2 \in \mathrm{Rat}\, A^{\infty} \Rightarrow L_2 = L_2^{fin} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i L_i^{\omega} \right) \text{ avec } \begin{array}{l} L_2^{fin} \in \mathrm{Rat}\, A^* \\ K_i \in \mathrm{Rat}\, A^* \\ L_i \in \mathrm{Rat}\, A^* \end{array}$$

Donc

$$L_1L_2 = L_1^{inf} \cup L_1^{fin} L_2^{fin} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} (L_1^{fin} K_i) L_i^{\omega} \right)$$

L_1L_2 est rationnel.

d) action de *

Si L est rationnel, L^* l'est aussi.

En effet

$$L^* = (L^{fin})^* \cup (L^{fin})^* L^{inf}$$

$$\left.\begin{array}{l} (L^{fin})^* \in \text{Rat } A^* \\ L^{inf} \in \text{Rat } A^{\omega} \end{array}\right\} \Rightarrow (L^{fin})^* L^{inf} \in \text{Rat } A^{\infty}$$

L^*, union de deux rationnels, est donc rationnel.

e) Action des morphismes étendus

La famille des rationnels de A^{∞} est stable par morphisme étendu [10].
Il est donc légitime de construire, à partir d'un système fini de transition S reconnaissant un langage rationnel infinitaire L, un système fini reconnaissant l'image de L par un morphisme donné. La construction suivante est semblable à celle utilisée dans le cas finitaire, quelques raffinements s'imposant quand le morphisme est effaçant.
Soit donc ϕ un morphisme de A dans B^*, A et B étant deux alphabets quelconques.
Soient L un langage rationnel de A^{∞}, S un s.t. tel que $L = L^{\infty}(S)$, avec $S = \langle C, A, T, D, c_{fin}, c_{inf} \rangle$, $C = \{c_i \ / \ i \in [1, p]\}$

α) cas où ϕ est non effaçant

Ce cas ne présente aucune difficulté.
Pour tout a de A, l'image $\phi(a)$ est de la forme $b_1 \ldots b_n$, avec $n \geq 1$, et $b_i \in B$.
Donc si $(c_i, a, c_j) \in T$, on définira des configurations intermédiaires $c'_{i,a,1} \ldots c'_{i,a,n-1}$ et les transitions :

$$(c'_i, b_1, c'_{i,a,1}), (c'_{i,a,1}, b_2, c'_{i,a,2}) \ldots (c'_{i,a,n-1}, b_n, c'_j)$$

On définira donc S' par :

+ $C' = \{c'_i / i \in [p]\} \cup \{ \bigcup_{a \in A} \{c'_{i,a,j} / i \in [p] \text{ et } |\phi(a)| \geq j+1 \geq 2\}$

+ $D' = \{c'_i / c_i \in D\}$

+ $T' = \{(c'_i, b, c'_j) / b \in B \text{ et } (\exists\, a \in A \text{ tq } / \ \phi(a) = b \ (c_i, a, c_j) \in T)\}$
$\quad \cup \{(c'_i, b, c'_{i,a,1}) \ / \ b \in B,\ a \in A \text{ tq } \phi(a) = bf,\ |f| \geq 1\}$
$\quad \cup \left\{(c'_{i,a,j}, b, c'_{i,a,j+1}) / b \in B,\ a \in A \text{ avec } \left.\begin{array}{l} \phi(a) = f\,bg \\ |f| = i \\ |g| \geq 1 \end{array}\right\}\right.$

$\cup \{(c'_{i,a,j}, b, c'_j) / b \in B,\ a \in A,\ \phi(a) = fb,\ |f| = i \text{ et } (c_i, a, c_j) \in T\}$

+ $C'_{fin} = \{c'_i \ / \ c_i \in C_{fin}\}$

+ $C'_{inf} = \{c'_i \ / \ c_i \in C_{inf}\}$

Il est alors immédiat que S' reconnait $\phi(L)$

β) Cas général

Pour tout morphisme ϕ de A dans B^*, il existe ϕ_1 et ϕ_2 tq :

$$\begin{cases} \cdot\ \phi_1 \text{ morphisme de } A' \text{ sur } B^+ \ (\phi_1 \text{ non effaçant) avec } A' \subset A. \\ \cdot\ \phi_2 \text{ morphisme de } A \text{ sur } A \cup \{\varepsilon\} \ (\phi_2 \text{ alphabétique non nécessairement strict)} \\ \cdot\ \phi = \phi_1 \circ \phi_2 \end{cases}$$

Il suffit pour cela de poser

$$\phi_2(a) = a \quad \text{si } \phi(a) \neq \varepsilon$$
$$= \varepsilon \quad \text{sinon}$$

$$\phi_1(a) = \phi(a) \text{ sur } A' = \{a \in A \ / \ \phi(a) \neq \varepsilon\}$$

Le cas non effaçant ayant été traité, on peut donc se ramener au cas où ϕ est alphabétique, décomposant ainsi la construction dans le cas général en deux constructions (les deux constructions pouvant bien sûr se faire simultanément).

Supposons donc ϕ alphabétique (en fait ϕ projection)

On définit alors S' par

. $c' = \{c'_i \ / \ i \in [p]\}$

. Si λ est la fonction de transition de S,

$$\lambda'(c'_i, b) = \{c'_j \ / \ \exists\ \alpha \in A^\infty \text{ tq } \mid c_j \in \lambda(c_i, \alpha)\ \phi(\alpha) = b\}$$

λ' est bien calculable. En effet :

Soit $d \in \lambda(c, u)$ avec $\phi(u) = b$, $|u| = \infty$

Alors $c \overset{u}{\twoheadrightarrow} d$

Donc $(u_i)_{i=1}^{n}$ tq $\begin{cases} c \xrightarrow{u_o} d \\ d \xrightarrow{u_i} d, \ \forall\, i \in \mathbb{N}^* \\ u = u_o\, u_1 \ldots u_n \\ u_i \in A^+, \ \forall\, i \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

$\phi(u) = b \Rightarrow \exists\,!\ i_o$ tq $\phi(u_{i_o}) = b$

Donc Si $i_o = 0$: $c \xrightarrow{u_o} c'$

sinon : $c \xrightarrow{u_o} c' \xrightarrow{u_{i_o}} c' \Rightarrow c \xrightarrow{u_o\, u_{i_o}} c'$

Donc : $d \in \lambda(c, A^*)$

Montrons maintenant qu'on peut imposer à α d'être de longueur au plus M, avec M judicieusement choisi.

Supposons :

$c \overset{f}{\rightarrow} d \quad f = f_1 \ldots f_n \quad |f_i| = 1$

$\phi(f) = b \Rightarrow \exists\ i_o$ tq $\phi(f_{i_o}) = b$

$\Rightarrow \forall\, i,\ i \neq i_o \Rightarrow \phi(f_i) = \varepsilon$

Donc (k, ℓ) tq : $c \xrightarrow{g_1} c_k \xrightarrow{f_{i_o}} c \xrightarrow{g_2} d$ avec $\phi(g_1) = \phi(g_2) = \varepsilon$

Mais il suffit alors d'appliquer le lemme d'étoile pour avoir

$\left.\begin{array}{l} c \xrightarrow{g_1} c_k \\ \\ \phi(g_1) = \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\ h_1$ tq $\begin{cases} c \xrightarrow{h_1} c_k \\ \phi(h_1) = \varepsilon \\ (h_1) \leq p-1 \end{cases}$

De même $\exists\ h_2$ tq $\begin{cases} c_\ell \xrightarrow{h_2} d \\ \phi(h_2) = \varepsilon \\ |h_2| \leq p-1 \end{cases}$

Donc $c \xrightarrow{h_1 f_{i_o} h_2} d$ avec $\begin{cases} |h_1\, f_{i_o}\, h_2| \leq 2p-1 \\ \\ \phi(h_1\, f_{i_o}\, h_2) = b \end{cases}$

Donc

$$\{c_j \;/\; \exists\, \alpha \in A^\infty \text{ tq } \begin{cases} c_j \in \lambda(c_i, \alpha) \\ \phi(\alpha) = b \end{cases}\} = \{c_j \;/\; \exists\, f \text{ tq } \underset{A^*}{} \begin{cases} |f| < 2p \\ c_j \in \lambda(c_i, f) \\ \phi(f) = b \end{cases}\}$$

et λ' est bien calculable.

On pose alors

. $c'_{inf} = \{c'_i \;/\; c_i \in c_{inf}\}$

. $c'_{fin} = \{c'_i \;/\; (c_i \in c_{fin}) \text{ ou } (c_i \in c_{inf} \text{ et } \exists\, f \in A^* \text{ tq } \begin{cases} c_i \xrightarrow{f} c_i \\ \phi(f) = \varepsilon \\ f \neq \varepsilon \end{cases})\}$

. $D' = \{c'_i \;/\; c_i \in D\}$

C'_{fin} est bien calculable puisque

$$\exists\, f \in A^\infty \text{ tq } \begin{cases} \phi(f) = \varepsilon \\ f \neq \varepsilon \\ c \xrightarrow{f} c \end{cases} \Rightarrow \exists\, g \text{ tq } \begin{cases} 1 \leq |g| < \text{card } c \\ \phi(g) = \varepsilon \\ c \xrightarrow{g} c \end{cases}$$

(cf lemme de l'étoile)

Montrons donc que $\phi(L^\infty(S)) = L^\infty(S')$

$\rightarrow$ $\underline{L^\infty(S') \subseteq \phi(L^\infty(S))}$

1) $\underline{L^*(S') \subseteq \phi(L^\infty(S))}$

$$f \in L^*(S') \Rightarrow \exists\, c'_o, \ldots, c'_n \text{ tq } \begin{cases} n = |f| \\ c'_o \xrightarrow{f(1)} c'_1 \ldots \xrightarrow{f(n)} c'_n \text{ dans } S' \\ \text{avec } c'_o \in D' \\ \qquad c'_n \in C'_{fin} \end{cases}$$

par définition de λ', on a donc :

$$\exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \text{ tq } \begin{cases} |\alpha_i| \leq 2p,\ \forall\ i \in [1, n] \\ \phi(\alpha_1) = f(1) \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \\ \phi(\alpha_n) = f(n) \end{cases}$$

$\exists\ c_1, \ldots, c_n$ tq $(c_i \in \lambda(c_{i-1}, \alpha_i),\ \forall\ i \in [1, n])$

De plus : $c'_o \in D' \Rightarrow c_o \in D$

Donc : $c_o \xrightarrow{\alpha_1} c_1 \ldots \xrightarrow{\alpha_n} c_n$ avec $\begin{cases} \phi(\alpha_1 \ldots \alpha_n) = f \\ \\ c_o \in D \end{cases}$

Deux cas, non nécessairement disjoints, se présent donc, puisque

$c'_{fin} = \{c'_i/(c_i \in C_{fin})$ ou $(c_i \in C_{inf}$ et $\exists\ f \in A^+$ tq $(c_i \overset{f}{\rightarrow} c_i,\ \phi(f) = \varepsilon))\}$

1er cas $c_n \in C_{fin}$

alors $c_o \xrightarrow{\alpha_1 - \alpha_n} c_n$ avec $c_n \in C_{fin}$, $c_o \in D$, $\phi(\alpha_1 \ldots \alpha_n) = f$

Donc $\underline{f \in \phi(L^*(S))}$

2ème cas $c_n \in C_{inf}$ et $\exists\ g \in A^*$ tq $\begin{cases} c_n \overset{g}{\rightarrow} c_n \\ \phi(g) = \varepsilon \\ \quad g \neq \varepsilon \end{cases}$

alors $c_o \xrightarrow{\alpha_1 \ldots \alpha_n} c_n \overset{g}{\rightarrow} c_n$ avec $c_o \in D$

$c_n \in C_{inf}$

Donc $\alpha_1 \ldots \alpha_n\ g^\omega \in L^\omega(S)$

et $\phi(\alpha_1 \ldots \alpha_n\ g^\omega) = f \in \phi(L^\omega(S))$

D'où $\underline{f \in \phi(L^\omega(S))}$

2) $\underline{L^\omega(S') \subseteq \phi(L^\omega(S))}$

$$u \in L^{\omega}(S') \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \exists\, (u_i)_{i=o}^{\infty} \\ \exists\, c'_o \in D' \\ \exists\, c'_i \in C'_{inf} \end{array}\right\} \text{tq} \begin{cases} u_i \in B^* \\ u = u_o \ldots u_n \\ c'_o \xrightarrow{u_o} c'_i \circlearrowleft (u_n) \end{cases}$$

Donc $\exists\, (f_i) \in A^*$ tq $\begin{cases} c_o \xrightarrow{f_o} c_i \circlearrowleft (f_n) \\ \phi(f_i) = u_i,\ \forall\, i \in \mathbb{N} \end{cases}$

$c'_o \in D' \Rightarrow c_o \in D$

$c'_i \in C'_{inf} \Rightarrow c_i \in C_{inf}$

Donc $f_o \ldots f_n \ldots \in L^{\omega}(S)$

et $\phi(f_o \ldots f_n \ldots) = u \in \phi(L^{\omega}(S))$

$\underline{u \in \phi(L^{\omega}(S))}$

$+\ \underline{\phi(L^{\infty}(S)) \subseteq L^{\infty}(S')}$

Montrons d'abord

<u>Lemme</u>

$$\left.\begin{array}{l} c_i \xrightarrow{f} c_j \\ \phi(f) \neq \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow c'_i \xrightarrow{\phi(f)} c'_j$$

En effet

Soit $f = f_1 \ldots f_p$ avec $f_i \in A^*$ et $\phi(f_i) \in B$.

Posons $\phi(f_i) = \alpha_i \quad i \in [1, p]$

$\phi(f) = \alpha_1 \ldots \alpha_p$

Donc : $\exists\, (c_{i_j})_{j \in [1,p-1]}$ tq $c_i \xrightarrow{f_1} c_{i_1} \rightarrow c_{i_2} \ldots \xrightarrow{f_{p-1}} c_{i_{p-1}} \xrightarrow{f_p} c_j$

Par définition de λ', on a

$$c_i \xrightarrow{\alpha_1} c'_{i_1} \xrightarrow{\alpha_2} c'_{i_2} \rightarrow \ldots \xrightarrow{\alpha_{p-1}} c'_{i_{p-1}} \xrightarrow{\alpha_p} c_j$$

Donc $c_i \xrightarrow{\phi(f)} c_j$. C.Q.F.D.

1) $\underline{\phi(L^{\omega}(S)) \subseteq L^{\infty}(S')}$

$\alpha \in \phi(L^{\omega}(S)) \Rightarrow \exists\ u \in L^{\omega}(S)$ tq $\alpha = \phi(u)$

Alors $\exists\ (c_o, c_i)$ tq
$\exists\ (u_i)_{i\in\mathbb{N}}$
$$\begin{cases} c_o \in D \\ c_i \in C_{inf} \\ c_o \xrightarrow{u_o} c_i \circlearrowleft (u_n)_{n\geq 1} \\ u = u_o \dots u_n \dots \\ |u_i| \geq 1,\ \forall\ i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Deux cas se présentent :

a) $|\phi(u)| = \infty$

Alors $\exists\ (i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $\begin{cases} \phi(u_{i_n}) \neq \varepsilon,\ \forall\ n \in \mathbb{N} \\ \phi(u_o\ u_{i_o}\ \dots\ u_{i_n}\ \dots) = \alpha \end{cases}$

Alors $c_o \xrightarrow{u_o u_{i_o}} c_i \circlearrowleft (u_{i_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$

Et d'après ce qui précéde :

$$c'_o \xrightarrow{\phi(u_o u_{i_o})} c'_i \circlearrowleft (\phi(u_{i_n}))_{n\geq 1}$$

avec $\begin{cases} \phi(u_{i_n}) \neq \varepsilon,\ \forall\ n \in \mathbb{N} \\ c'_o \in D \\ c'_i \in C'_{inf} \end{cases}$

Donc $\underline{\alpha} = \phi(u_o\ u_{i_o}\ \dots\ u_{i_n}\ \dots)\ \underline{\in L^{\omega}(S')}$

b) $|\phi(u)|$ est fini

. Etudions tout de suite le cas où $\phi(u) = \varepsilon$.

. Si $\varepsilon \in L$, $D \cap C_{fin}$ est non vide, donc $D' \cap C'_{fin}$ non plus et $\varepsilon \in L^*(S')$

. Si $\varepsilon \notin L$, il faut ajouter une configuration c'_{ε} qui servira à

$$\text{reconnaitre } \varepsilon \text{ dans } S' \ \left(\begin{array}{l} c'_\varepsilon \in D' \cap C'_{fin} \\ c'_\varepsilon \neq c'_i,\ \forall\, i \in [p] \end{array} \right\}$$

. Sinon

$$\exists\, p_o \in \mathbb{N} \text{ tq } \begin{cases} p \geq p_o \Rightarrow \phi(u_p) = \varepsilon \\ \phi(u_{p_o}) \neq \varepsilon \end{cases}$$

Donc $\alpha = \phi(u_o \ldots u_{p_o})$

$$\text{Mais} \quad \left. \begin{array}{l} c_i \xrightarrow{u_{p_o+1}} c_i \\ u_{p_o+1} \neq \varepsilon \\ \phi(u_{p_o+1}) = \varepsilon \\ c_i \in C_{inf} \end{array} \right\} \Rightarrow c'_i \in C_{fin}$$

$$\text{Comme} \quad \left. \begin{array}{l} c_o \xrightarrow{u_o \ldots u_p} c_i \\ \phi(u_o \ldots u_p) \neq \varepsilon \end{array} \right\} \Rightarrow c'_o \xrightarrow{\phi(u_o \ldots u_p)} c'_i$$

$\underline{\alpha \in L^*(S')}$

2) $\underline{\phi(L^*(S)) \subseteq L^\infty(S')}$

$\alpha \in \phi(L^*(S)) \Rightarrow \exists\, f \in L^*(S)$ tq $\phi(f) = \alpha$

$$f \in L\ (S) \Rightarrow \begin{cases} \exists\, c_o \in D \\ \exists\, c_i \in C_{fin} \end{cases} \text{tq} \quad c_o \xrightarrow{f} c_i$$

Donc si $\phi(f) \neq \varepsilon \quad c'_o \xrightarrow{\phi(f)} c'_i$ avec $c'_o \in D'$

$c'_i \in C'_{fin}$

Et $\phi(f) \in L^*(S')$

(Si $\phi(f) = \varepsilon$, et si $\varepsilon \notin L^*(S)$, il faut - si ce n'est déjà fait - rajouter comme ci-dessus une configuration c_ε).

Donc S' reconnait exactement $\phi(L)$

Ceci permet de retrouver un résultat dû à M. Nivat [10].

La famille des rationnels fermés de λ^∞ est stable par morphisme étendu.

En effet, remarquons d'abord que si ϕ est décomposé en $\phi_1 \circ \phi_2$ comme précédemment $\phi_2(L)$ fermé => $\phi(L)$ fermé [car ϕ_1 strict]

Or si L est fermé, on peut choisir S le reconnaissant tel que $C_{inf} = C$; alors il est évident que S' reconnaissant $\phi_2(L)$ et construit comme ci-dessus vérifie lui-aussi $C' = C'_{inf}$, et donc que $\phi_2(L)$ est fermé.

f) <u>Action des morphismes inverses</u>

Rat (A^∞) est stable par morphisme étendu inverse. Mais ni la famille des rationnels fermés, ni la famille des rationnels normaux n'est stable par morphisme étendu inverse (F. Gire [10].

g) <u>Action de /</u>

Remarquons d'abord que, pour montrer que Rat X^∞ est fermé par /, il suffit de montrer que Rat X^ω est fermé par complémentation dans X^ω.

Mais les conditions suivantes sont équivalentes [2]

(1) $L \in$ RAT X^ω

(2) il existe un t.s. S tel que $L = L^\omega(S)$

(3) il existe un t.s. déterministe S, une partie C de $P(C)$ tel que $L = L^\omega_C(S)$.

Alors on peut rendre le système S complétement spécifié, et si on pose $C' = \{p \,/\, p \in P(C),\ p \notin C\}$ il est immédiat que ${}^cL \cap A^\omega = L^\omega_{C'}(S)$.

h) <u>Action de ω</u>

$L^\omega = (L^{fin})^\omega$

Donc il est immédiat que, si L est rationnel, L^ω aussi.

i) Action de ∞

Si L est rationnel, L^∞ union des deux rationnels L^* et L^ω est rationnel.

j) Action du shuffle équitable [17]

Soient L et M deux rationnels de A^∞

$$L \odot_e M = (L^{fin} \cup L^{inf}) \odot_e (M^{fin} \cup M^{inf})$$
$$= (L^{fin} \odot_e M^{fin}) \cup (L^{inf} \odot_e M^{fin}) \cup (L^{fin} \odot_e M^{inf}) \cup (L^{inf} \odot M^{inf})$$

. $L^{fin} \odot_e M^{fin}$ est rationnel finitaire

. L^{inf} et M^{inf} sont rationnels purement infinitaires. Donc :

$$\begin{array}{lcll} \exists\, n,\ \exists\, (K_i, N_i)_{i=1}^n & & .\ K_i, N_i, P_j, Q_j \in \text{Rat } A^\infty & i \in [1, n] \\ & \text{tq} & & \\ \exists\, p,\ \exists\, (P_i, Q_i)_{i=1}^p & & .\ L^{inf} = \cup K_i N_i^\omega & j \in [1, p] \\ & & .\ M^{inf} = \cup P_i Q_i^\omega & \end{array}$$

Donc $L^{inf} \odot_e M^{fin} = \bigcup_{i=1}^{n} (K_i N_i^* \odot_e M^{fin}) N_i^\omega$

$L^{fin} \odot_e M^{inf} = \bigcup_{i=1}^{p} (P_i Q_i^* \odot_e L^{fin}) Q_i^\omega$.

Et $L^{inf} \odot_e M^{fin}$ comme $L^{fin} \odot_e M^{inf}$ sont rationnels infinitaires.

. $L^{inf} \odot_e M^{inf}$ est rationnel infinitaire (Park [11]

Donc $L \odot_e M$ est rationnel

k) Action du shuffle

$L \odot M = (L \odot_e M) \cup (FG(L) \odot_e M) \cup (L \odot_e FG(M))$.

Or si L et M sont rationnels, FG(L) et FG(M) le sont aussi (immédiat).

Donc $L \odot M$ est rationnel

1) Produit uniforme

Soient L_1 et L_2 deux langages infinitaires. On notera $L_1 \otimes L_2$ leur produit uniforme :

$$(L_1 \otimes L_2)^{fin} = \{(f_1, f_2)/f_1 \in L_1^{fin},\ f_2 \in L_2^{fin},\ |f_1| = |f_2|\}$$

$$(L_1 \otimes L_2)^{inf} = \{(u, v)/u \in L_1^{inf},\ v \in L_2^{inf}\}$$

$$L_1 \otimes L_2 = (L_1 \otimes L_2)^{fin} \cup (L_1 \otimes L_2)^{inf}$$

Supposons que L_1 et L_2 soient rationnels. Soient S_1 et S_2 les systèmes les reconnaissant :

$$L_1 = L^{\infty}(S_1) \qquad S_1 = \langle C_1, I_1, \lambda_1, T_1, C_{1inf}\rangle$$

avec

$$L_2 = L^{\infty}(S_2) \qquad S_2 = \langle C_2, I_2, \lambda_2, T_2, C_{2inf}\rangle$$

Si L_1 (resp. L_2) est fermé, on peut supposer que $C_{1inf} = C_1$ (resp. $C_{2inf} = C_2$) et alors le système $S_1 \times S_2$ donné par $\langle C_1 \times C_2, I_1 \times I_2, \lambda, T_1 \times T_2, C_1 \times C_{2inf}$ (resp. $C_{1inf} \times C_2)\rangle$ (avec $\lambda((C_1, C_2), (\alpha_1, \alpha_2)) = \lambda_1(C_1, \alpha_1) \times \lambda_2(C_2, \alpha$ reconnaît $L_1 \otimes L_2$.

Si ni L_1, ni L_2 n'est fermé, il y a une difficulté évidente pour construire les configurations infinies, difficulté analogue à celle qu'on peut avoir pour construire un système reconnaissant l'intersection de deux langages (Büchi [5]).

L'idée est alors de "dédoubler" les configurations de $C_1 \times C_2$ pour distinguer le cas où on attend une configuration infinie du deuxième processus et celui où on attend une configuration infinie du premier processus.

Définissons alors S par $S = \langle C, \Lambda, I, T\ C_{inf}\rangle$ avec :

$$C = C_1 \times C_2 \cup \overline{C_1} \times \overline{C_2} \qquad (\overline{C_i} = \{\overline{c_j}\ /\ c_j \in C_i\}$$

$$I = I_1 \times I_2$$

$T = \{C \in C/\pi_1(C) \in T_1 \cup \overline{T_1}$ et $\pi_2(C) \in T_2 \cup \overline{T_2}\}$

$= T_1 \times T_2 \cup \overline{T_1} \times \overline{T_2}$

$(\pi_1(C_1, C_2) = C_1, \pi_2(C_1, C_2) = C_2)$

Λ, la fonction de transition sera définie par :

$\forall\alpha \in A_1 \times A_2$,

$\Lambda(C, \alpha) = \lambda(C, \alpha)$ si $\pi_1(C) \notin C_{1inf}$

$= \{\overline{C'} / C' \in \lambda(C, \alpha)\}$ si $\pi_1(C) \in C_{1inf}$

$\Lambda(\overline{C}, \alpha) = \{\overline{C'} / C' \in \lambda(C, \alpha), \pi_2(C') \notin C_{2inf}\}$

$\cup \{C' / C' \in \lambda(C, \alpha), \pi_2(C') \in C_{2inf}\}$

$C_{inf} = C_{1inf} \times C_2$.

Alors :

$$\underline{L^{\infty}(S) = L_1 \otimes L_2}$$

Dm : Montrons d'abord que $L^{\infty}(S) \subset L_1 \otimes L_2$
$+ L^{*}(S) \subset L_1 \otimes L_2$.

Soit donc $f \in L^{*}(S)$: $f = (f_1, f_2)$ avec $|f_1| = |f_2|$

$f \in L^{*}(S) \Rightarrow \exists(i_1, i_2) \in I \quad / \ (i_1, i_2) \xrightarrow[S]{(f_1, f_2)} \gamma$
$\exists\gamma \in T$

Mais $T = T_1 \times T_2 \cup \overline{T_1} \times \overline{T_2}$

donc si $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\gamma_1 = C_1$ (où $\overline{C_1}$) avec $C_1 \in T_1$

$\gamma_2 = C_2$ (où $\overline{C_2}$) avec $C_2 \in T_2$

Et, vu la définition des transitions dans S :

$i_1 \xrightarrow{f_1} C_1$ donc $f_1 \in L_1^{fin}$

$i_2 \xrightarrow{f_2} C_2$ donc $f_2 \in L_2^{fin}$

Et finalement $(f_1, f_2) \in L_1 \otimes L_2$

+ $L^\omega(S) \subset L_1 \otimes L_2$

$u \in L^\omega(S)$: $u = (u_1, u_2)$ avec $(i_1, i_2) \overset{u_1 \times u_2}{\twoheadrightarrow} C_{inf}$

Mais $C_{inf} = C_{1inf} \times C_2$ et :

$$\left.\begin{array}{l} (C_1, C_2) \xrightarrow{f} (C_1, C_2) \\ \quad\quad \text{avec} \\ |f| \neq 0 \\ C_1 \in C_{1inf} \\ C_2 \in C_2 \\ \\ \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists(f_1, x, f_2),\ \exists\gamma,\ \exists(C_i, C_j) \text{ tq} \\ \\ f = f_1 \underline{x} f_2 \\ \\ C_1 \times C_2 \xrightarrow{f_1} \gamma \xrightarrow{x} C_i \times C_j \xrightarrow{f_2} C_1 \times C_2 \\ \text{avec } C_j \in C_{2inf} \end{array}\right.$$

Donc $(\exists(C_1, C_2) \in C_{inf}$ tq $(i_1, i_2) \overset{u_1 \times u_2}{\twoheadrightarrow} (C_1, C_2) \Rightarrow \begin{array}{l} (u_1 \in L_1^{inf}) \\ (u_2 \in L_2^{inf}) \end{array}$

et $L^\omega(S) \subset L_1 \otimes L_2$.

Montrons maintenant que : $L_1 \otimes L_2 \subset L^\infty(S)$

+ $f \in (L_1 \otimes L_2)^{fin}$

donc $f = (f_1, f_2)$ avec $f_1 \in L_1^{fin}$, $f_2 \in L_2^{fin}$, $|f_1| = |f_2|$

d'où $\exists (i_1, i_2) \in I$ $\quad i_1 \xrightarrow{f_1} C_1$ (dans S_1)

$\exists c_1 \in T_1$ $\quad i_2 \xrightarrow{f_2} C_2$ (dans S_2)

$\exists C_2 \in T_2$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Mais } C_i \xrightarrow[S_1]{m_1} C'_j \\ \\ C_\ell \xrightarrow[S_2]{m_2} C'_k \end{array}\right\} \Rightarrow (C_i, C_\ell) \underset{S}{\to} (C'_\gamma, C'_k) \cup (\overline{C'_j}, \overline{C'_k})$$

(immédiat d'après la définition de 1).

$$\text{Et donc : } (i_1, i_2) \xrightarrow{(f_1, f_2)} (C_1, C_2) \cup (\overline{C_1}, \overline{C_2})$$

$$\text{Soit } I \xrightarrow[S]{(f_1, f_2)} T$$

i.e. : $(f_1, f_2) \in L^*(S)$

$$+ \; u \in (L_1 \otimes L_2)^{inf} : u = (u_1, u_2) \text{ avec } \begin{cases} u_1 \in L_1^{inf} \\ u_2 \in L_2^{inf} \end{cases}$$

$$u_1 \in L_1^{inf} \Rightarrow \exists (C_1, \ldots, C_n, \ldots) \in C_1 \text{ tq } \begin{cases} C_1 \in I_1 \\ C_i \xrightarrow[S_1]{u_1[i]} C_{i+1} \\ \text{card}\{n / C_n \in C_{1inf}\} = \infty \end{cases}$$

de même :

$$u_2 \in L_2^{inf} \Rightarrow \exists (d_1, \ldots, d_n, \ldots) \in C_2 \text{ tq :}$$

$$\begin{cases} \bullet\ d_1 \in I_2 \\ \bullet\ d_i \xrightarrow{u_2[i]} d_{i+1} \\ \bullet\ \text{card}\{n / d_n \in C_{2inf}\} = \infty \end{cases}$$

Donc on peut trouver deux suites strictement croissante n_k et n_k tq :

- $n_k < n_k \leq n_{k+1}$
- $c_{n_k} \in C_{1inf}$, $d_{n_k} \in C_{2inf}$
- $n_k < n < n_k \Rightarrow d_n \notin C_{2inf}$
- $m_k < n < n_{k+1} \Rightarrow c_n \in C_{1inf}$

(il suffit de construire (n_k) et (m_k) comme suit :

$$n_0 = \inf\{n > 0 \,/\, c_n \in C_{1inf}\}$$

$$m_0 = \inf\{n > n_0 \,/\, d_n \in C_{2inf}\}$$

$$\vdots$$

$$n_{k+1} = \inf\{n \geq n_k \,/\, c_n \in C_1 inf\}$$

$$m_{k+1} = \inf\{n > n_{k+1} \,/\, d_n \in C_{2inf}\})$$

Alors on a :

$$c_1 \times d_1 \xrightarrow{u[n_k]} c_{n_k} \times d_{n_k}, \; \forall k \in \mathbb{N}^*$$

<u>Dm</u>

- Pour k = 1

$$\left.\begin{array}{l} c_1 \xrightarrow[S_1]{u_1[n_1]} c_{n_1} \\ \\ n < n_1 \Rightarrow c_n \notin C_{inf} \\ \\ d_1 \xrightarrow[S_2]{u_2[n_1]} d_{n_1} \end{array}\right\} \Rightarrow (c_1, d_1) \xrightarrow[S]{u[n_1]} (c_{n_1}, d_{n_1})$$

Supposons la propriété vraie jusqu'à l'ordre k.

On a :

$$\left.\begin{array}{l} c_{n_k} \xrightarrow[S_1]{\frac{u[n_{k+1}]}{u[n_k]}} c_{n_{k+1}} \\ \\ d_{m_k} \in C_{2inf} \text{ avec } n_k < m_k \leq n_{k+1} \\ \\ m_k < n < n_{k+1} \Rightarrow c_n \notin C_{1inf} \end{array}\right\} \Rightarrow (c_{nk}, d_{nk}) \xrightarrow[S]{\frac{u[n_{k+1}]}{u[n_k]}} (c_{n_{k+1}}, d_{n_{k+1}})$$

$$\text{donc } (c_1, d_1) \xrightarrow[S]{u[n_{k+1}]} (c_{n_{k+1}}, d_{n_{k+1}})$$

La propriété est donc vraie pour tout k.

Donc :

$$c_1 \times d_1 \xrightarrow[S]{u}\!\!> C_{1inf} \times C_2$$

$$\text{Soit } c_1 \times d_1 \xrightarrow[S]{u}\!\!> C_{inf} : u \in L^{\omega}(S)$$

On a donc bien $L^{\infty}(S) = L_1 \otimes L_2$

(On a donc construit un système de type "1" reconnaissant $L_1 \otimes L_2$ tq card $C \leq 2$ (card $C_1 \times$ card C_2).

<u>Remarques</u> : 1) Si L_1 et L_2 sont donnés par deux automates de type "2", ($S_1 = \langle C_1, I_1, \lambda_1, T_1, P_1\rangle$, $S_2 = \langle C_2, I_2, \lambda_2, T_2, P_2\rangle$), la construction de de type "2" reconnaissant $L_1 \otimes L_2$ est facile :

$\mathcal{S} = \langle C, I, \wedge, T, \mathcal{P} \rangle$ avec

$C = C_1 \times C_2$; $I = I_1 \times I_2$; $T = T_1 \times T_2$;

$\wedge((c_1, c_2), (a, b)) = (\lambda_1(c_1, a), \lambda_2(c_2, b))$

$\mathcal{P} = \{P \in \mathcal{P}(C) \ / \ \pi_1(P) \in \mathcal{P}_1, \pi_2(P) \in \mathcal{P}_2\}$

2) On s'est limité au cas de deux langages ; mais les deux constructions précédentes s'étendent sans difficultés au cas de n langages (pour la première construction, on utilise n copies de $C_1 \times \ldots \times C_n$ pour assurer le passage dans les configurations infinies des n systèmes).

La famille des rationnels finitaires est donc close pour tout les opérateurs classiques.

Le tableau suivant rassemble une partie des résultats exposés ci-dessus.

	$\cup$	$\cap$	.	*	∞	ω	/	morphismes				morphismes inverses				Θ	Θ_e
								strict $\alpha\beta$	$\alpha\beta$	strict	$\forall$	strict $\alpha\beta$	$\alpha\beta$ non strict	strict	non $\alpha\beta$ non strict		
fermé	0	0	0	N	0	N	N	0	N	0	N	0	N	0	N	0	N
normal	0	N	0	0	0	N	N	0	0	0	0	N	N	N	N	0	0
central	0	N	0	0	0	0	N	0	N	0	N	N	0	N	0	0	0
idéal	0	0	0	0	0	0	N	0	0	N	N	0	0	0	0	0	0
rationnel	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

0 : oui, la propriété est conservée

N : non, la propriété n'est pas nécessairement conservée.

$\boxed{B}$ OBJETS INFINITAIRES ET TOPOLOGIE

$\boxed{1}$ METRISATION DES S.F.P.'s

A) Rappels, Définitions : les c.p.o.'s.

B) Les c.p.o.'s comme espaces topologiques et métriques.

C) c.p.o.'s et algèbres continues : le cas des mots et des arbres.

A) Définitions : les c.p.o.'s

Soit D un ensemble muni d'une relation d'ordre partièl, notée <.

Définitions : • Un sous-ensemble A de D est dit *dirigé* ssi :
$\forall a_1, a_2 \in A, \exists a_3 \in A / a_1 < a_3$ *et* $a_2 < a_3$.

• Un ensemble (D, <) partiellement ordonné et muni d'un plus petit álélent - noté $\perp$- est appelé C.P.O. ssi tout sous-ensemble dirigé de D admet un Sup.

• Soit (D, <, $\perp$) un C.P.O. ; un sous-ensemble B C D est appelé *base* de D ssi : $\forall x \in D, \exists A \subset B$, A dirigée tq x = sup Δ.

On peut rappeler qu'on peut compléter tout ensemble partiellement ordonné (B, <, $\perp$) en un C.P.O. tel que B soit isomorphe à un sous-ensemble de ce C.P.O. et tel que tout élément du complété soit le Sup d'une partie dirigée de B. (complétion par idéaux, ou par classes d'équivalence). On notera B^∞ le complété de B.

Les éléments d'information "finie" sont définis par :

Définition : Un *élément* $b \in D$ est dit *finitaire* ssi, pour toute partie dirigée A C D, b < sup A => $\exists C \in A$, b < C.

Alors si un C.P.O. D a une *base finitaire dénombrable,* elle est *unique.* On dit qu'il est ω-algébrique. Le lemme suivant sera souvent utile.

Lemme 1 [21] : Soit D un ensemble muni d'un ordre partiel avec un plus petit élément - noté $\perp$ -. Supposons que B soit un ensemble dénombrable de D tel que :

1. tout élément de D soit le sup d'une suite croissante de B.

2. toute suite croissante de B admette un Sup dans D.

3. Si b < sup b_i, avec $b_0 < b_1 < b_2 <\dots$ et b et les b_i éléments de B, alors $\exists n$ tq $b < b_n$.

Alors D est ω-algébrique de base finitaire B.

<u>Dm</u> : Montrons d'abord que D est un c.p.o. :

Soit A une partie dirigée de D.

Posons $X = \{b \in B \ / \ \exists a \in A, b < a\}$

On a
- $\perp \in X$
- X est dirigée :

$\forall b \in X, \exists a_1 \in A, b < a_1$
$\forall b' \in X, \exists a_2 \in A, b' < a_2$

A dirigé : $\exists a_3$, $a_1 < a_3$ et $a_2 < a_3$

Or 1 $\Rightarrow$ $a_3 = \sup\limits_{i \in \mathbb{N}} b_i$

$$\left.\begin{array}{l} \text{donc } b < \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} b_i \\ 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists i_1 \text{ tq } b < b_{i_1}$$

De même $\exists i_2$ tq $b' < b_{i_2}$

Donc si $i_0 = \sup(i_1, i_2)$ $\quad b' < b_{i_0}$ avec $b_{i_0} \in X$
$\quad b < b_{i_0}$

Or X est dénombrable ; on peut donc extraire de X une suite croissante $(b_i)_{i \in i}$ tq ; • $\forall i$, $b_i \in X$
• $\forall b \in X$, $\exists i_0$ tq $b < b_{i_0}$

(Si $X = \{C_i \ / \ i \in \mathbb{N}\}$, il suffit de construire b_i par :

$b_0 = C_0$

$b_1 > C_0$ et $b_1 > C_1$ (X dirigée)

$b_2 > C_2$ et $b_2 > b_1$.....)

Donc d'après 2, $(b_i)_i$ a un sup, soit x ce sup : x sera aussi sup de X.

Alors : $\forall a \in A, \forall b \in B, b < a \Rightarrow b < x$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Donc d'après 1., } \forall a \in A,\ a < x \\ \text{Soit } g \text{ tel que : } \forall a \in A,\ a < g \\ \text{Alors : } \forall b \in X,\ b < g : x < g\end{array}\right\} : x \text{ est le sup de } A.$$

• Montrons maintenant que B est finitaire :

Soit $b \in B$, A une partie dirigée de D tels que $b < \sup A$.

Définissons X comme précédemment ;

On a $b < \sup X$.

Soit si $(C_i)_i$ est construite comme précédemment ;

$b < \sup\limits_i C_i$

donc d'après 3, $\exists i_0$ tq $b < C_{i_0}$.

Or $c_{i_0} \in X : \exists a \in A, b < c_{i_0} < a$

c.q.f.d.

Les c.p.o.'s que nous utiliserons auront généralement de bonnes propriétés quant à l'existence des bornes supérieures.

Définition : Un c.p.o. $(D, <, \bot)$ est dit *conditionnellement complet* ssi tout sous-ensemble $X \subset D$ majoré dans D possède un Sup. Un c.p.o. sera dit *infinitaire* ssi il est ω-algébrique et conditionnellement complet.

Pour prouver qu'un c.p.o. est infinitaire, on utilisera :

__*Lemme 2* [21]__ : Un C.P.O. B^{∞} est infinitaire ssi :

(I) Sa base finitaire B est dénombrable

(II) B est close par sup conditionnel : $\forall a, b \in B$,
$\exists C \in B$, $a < C$ et $b < C \Rightarrow \mathrm{Sup}(a, b)$ existe et appartient à B.

__*Définition*__ : Soit $X \subset D$. On notera u(X) l'ensemble défini par :

$$u(X) = \left\{ z \,/\, \begin{array}{l} \bullet\ \forall x \in X,\ x < z \\ \bullet\ \forall t \in D,\ \left.\begin{array}{r}(x < t,\ \forall x \in X) \\ t < z\end{array}\right\} \Rightarrow t = z \end{array} \right\}$$

donc u(X) est l'ensemble des bornes supérieures minimales de X.

On dira que u(X) est *complet* ssi :

$\forall z \in D$, $(x < z, \forall x \in X) \Rightarrow \exists g \in u(X)$ tq $g < z$.

On notera $u^*(X)$ le *plus petit ensemble* contenant X et fermé par u,

i.e. tq :

- $X \subset u^*(X)$
- $Y \subset u^*(X) \Rightarrow u(Y) \subset u^*(X)$.

D ω-algébrique sera dit <u>S.F.P.</u> ssi pour tout $X \subset D$, X fini finitaire, u(X) est complet et $u^*(X)$ fini.

Bien sûr tout S.F.P. est infinitaire.

Une notion intéressante à définir dans les S.F.P. est celle de troncature :

Soit en effet un S.F.P. D de base B ; Soit v une énumération de B :
$B = \{b_0 = \perp, b_1, \ldots, b_n, \ldots\}$.

Posons alors $D_n = u^*(\{b_0, \ldots, b_n\})$

On a : $\forall n, \forall x, \exists z \in D_n, z < x$ et $\left.\begin{array}{r} y < x \\ y \in D_n \end{array}\right\} \Rightarrow y < z$

En effet soit $X_n = \{b \in D_n \mid b < x\}$

On a $X_n \subset D_n \Rightarrow u(X_n) \subset u^*(D_n) \subset D_n$

Or $\left.\begin{array}{r} \forall b \in X_n, b < x \\ u(X_n) \text{ complet} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists z \in u(X_n),\ z < x$

Donc $\left.\begin{array}{r} z \in u(X_n) \Rightarrow z \in D_n \\ z < x \end{array}\right\} \Rightarrow z = \sup X_n$

[sinon $\exists b \in X_n$, $b \not< z$: $z \notin u(X_n)$]

On notera $x[n]$ pour $\sup X_n$; $x[n]$ désignera donc le plus grand élément de D_n inférieur à x. On l'appelera aussi "tronqué" de x à profondeur n (on verra plus tard l'analogie avec la troncature des mots ou des arbres).

On peut en fait définir cette "troncature" de façon plus générale, en utilisant la définition en termes de catégories des S.F.P.'s. En effet, en termes de catégories, un S.F.P. D est limite - dans un sens que nous ne préciserons pas ici - d'une suite de c.p.o.'s finis D_n [19] ; la troncature à profondeur n sera alors la projection sur D_n.

Sans parler de catégories, on peut généraliser la notion de troncature comme suit :

Soit une suite $(D_n)_n$ telle que :

- $D_n \subset D_{n+1}$, $\forall n$
- $B = \bigcup_n D_n$, $\forall n$
- $u^*(D_n) = D_n$, $\forall n$

On pourra alors définir la *tronquée de* x *à profondeur* n - sous-entendu par rapport à $(D_n)_n$ - (le tronqué d'un élément dépend donc de la suite $(D_n)_n$ choisie, mais si $(D_n)_n$ et $(D'_n)_n$ sont deux suites vérifiant les propriétés ci-dessus on a :

$$\left.\begin{array}{l} \forall n,\ \exists p\ \dfrac{x[n]}{(D_s)_s} < \dfrac{x[p]}{(D'_t)_t} \\ \forall n,\ \exists q\ \dfrac{x[n]}{(D'_t)_t} < \dfrac{x[q]}{(D_s)_s} \end{array}\right]$$

Enfin, on peut noter les propriétés suivantes, qui sont évidentes mais utiles :

<u>*Lemme*</u> : a) $x = \sup_n x[n]$, $x[n]\,[p] = x[p]$, $\forall n$, $n > p$

b) $x > y \Rightarrow x[n] > y[n]$, $\forall n$

c) $x = \operatorname{Sup}_n x_n \Rightarrow \exists p$ tq $x[n] = x_q[n]$ $\forall q \geq p$

d) $\sup_n x_n[n] = \sup_n x_n$

<u>Dm</u> : a) $\forall n$, $x[n] < x$

$x = \sup x_n$, $x_n \in B$

$\forall n$, $\exists p$ tq $x_n \in D_p$

Donc $\forall n$, $\exists p$ tq $x_n < x[p]$

$\forall n$, $x_n < \sup_n x[n]$

c.q.f.d.

b) $\left.\begin{array}{l} b < y \\ b \in D_n \\ y < x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} b < x \\ b \in D_n \end{cases}$

Donc $\forall n,\ y[n] < x[n]$

c) $\left.\begin{array}{l} x[n] < x \\ x[n] \in B \\ x = \sup x_n \end{array}\right\} \Rightarrow \exists p,\ x[n] < x_p[n]$

Mais $x_p < x \Rightarrow x_p[n] < x[n]$

Donc $x[n] = x_p[n]$

Et $q > p \Rightarrow x[n] < x_p[n] < x_q[n] < x[n]$

d) $x_n[n] < x_n\ \forall n$

$b < \sup\limits_n x_n \Rightarrow \exists n_0 / b < x_n,\ \forall n > n_0$

$b \in B \Rightarrow \exists p,\ b \in D_p$

$\left.\begin{array}{r} \text{Donc } b < x_n \\ \\ b \in D_p \end{array}\right\} \Rightarrow b < x_n[p],\ \forall n > n_0$

$\Rightarrow b < x_n[n]\ [p],\ \forall n > \sup(n_0, p)$

$\Rightarrow b < x_n[n]$

c.q.f.d.

B) Les c.p.o.'s comme espaces topologiques et métriques

1. Topologie de Lawson [21] (ou de Cantor [19])

Définition : La topologie de Lawson sur D, a comme sous-base les ensembles $P_b = \{x \in D / x > b\}$ et $N_b = \{x \in D / x \not> b\}$.

Alors la suite (x_n) converge vers x pour cette topologie ssi :

$\forall b \in B; \ b < x \Longleftrightarrow b < x_n, \ \forall_\infty n$ *et* $b \not< x \Longleftrightarrow \forall_\infty n, \ v \not< x_n$

ssi

$\forall b \in B, \ b < x \Longleftrightarrow b < x_n, \ \forall_\infty n$ *et* $b \not< x \Rightarrow \forall_\infty n, \ b \not< x_n$

ssi

$\forall b \in B, \ b < x \Rightarrow b < x_n, \ \forall_\infty n$ *et* $\exists_\infty n \ b < x_n \Rightarrow b < x$

avec $\forall_\infty n$ signifiant pour tout n sauf un nombre fini
$\exists_\infty n$ signifiant pour une infinité de n.

Le lien entre convergence topologique et ordre est donné par :

Propriétés:

$$\bullet \left.\begin{array}{l} x_n \xrightarrow[\text{Lawson}]{} x \\ \\ y_n \xrightarrow[\text{Lawson}]{} x \\ \\ \forall n, \ x_n < y_n \end{array}\right\} \Rightarrow x < y$$

$$\bullet \ x_{n+1} > x_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \xrightarrow[\text{Lawson}]{} \sup x_n$$

$$x_{n+1} < x_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \xrightarrow[\text{Lawson}]{} \inf x_n$$

Une des propriétés les plus importantes - et qu'on utilisera fréquemment - de cette topologie est :

Proposition : Si $\mathbb{D}$ est S.F.P., la topologie de Lawson est compacte.

Dm : La base d'ouverts étant dénombrable, il suffit de démontrer que toute suite de D a un point d'accumulation.

Soit donc $(x_n)_n$ une suite de D.

Posons $X_n = \{b \in D_n \,/\, \exists_\infty p$ tq $b = x_p[n]\}$.

Alors • $X_n \neq \emptyset$ (puisque D_n fini)
• X_n fini
• $\forall y \in X_{n+1}, \exists z \in X_n \,/\, y > z$

D'où d'après le lemme de Koenig :

$$\exists (z_n) \,/\, z_n \in X_n,\ z_{n+1} > z_n \ \forall n.$$

Soit donc n_1 tq $x_{n_1}[1] = z_1$

$n_2 > n_1$ tq $x_{n_2}[2] = z_2$ (puisque $\{n \,/\, x_n[2] = z_2\}$ est infini)

⋮

$n_{p+1} > n_p$ tq $x_{n_p}[p+1] = z_p$

⋮

Soit $z = \sup z_i$; Montrons que $x_{n_i} \xrightarrow[\text{Lawson}]{} z$

Soit $b \in B$:

$$\begin{aligned} b < z &\Rightarrow (\exists n \text{ tq } \forall i > n,\ b < z_i) \\ &\Rightarrow (\exists n \text{ tq } \forall i > n,\ b < x_{n_i}[i] < x_{n_i}) \\ &\Rightarrow \forall_\infty p,\ b < x_{n_p}. \end{aligned}$$

Supposons :

$\exists_\infty p,\ b < x_{n_p}$

$b \in B \Rightarrow \exists i$ tq $b = b[i]$

Alors

$\exists_\infty p,\ b < x_{n_p}[i]$

Soit donc $p > i$: $x_{n_p}[i] = (x_{n_p}[p])[i] = z_p[i]$

$\exists_\infty p,\ b < z_p[i] < z_p.$

Donc $b < z$.

c.p.f.d.

En fait Plotkin a montré un résultat beaucoup plus fort puisque :

Théorème [21] : La topologie de Lawson est compact *ssi* : tout u(a, b) avec a et b finis est complet et fini.

[La compacité de la topologie joue un peu le rôle d'un "super" lemme de Koenig].

On va maintenant étudier des métriques qui définissent sur D la topologie de Lawson :

2. Métrisation d'un S.F.P.

a) Métrique Comyn-Dauchet

Soit D un S.F.P., B sa base finitaire.

Soit v une énumération de B ; on peut définir l'application

$d_v : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{R}^+$ par

$$d_v(x, x') = \frac{1}{1 + \inf n\{v(n) \in x \Delta x'\}}$$

avec $x \Delta x' = \{b \in B, (b < x$ *et* $b \nleq x')$ *ou* $(b < x'$ *et* $b \nleq x)\}$

Alors :

<u>*Proposition*</u> : d_v est une ultramétrique sur D.

De plus d_v définit la même topologie que celle de Lawson :

• Soit $B_{d_v}(x, \frac{1}{1+n})$ une boule de centre x et de rayon $\frac{1}{1+n}$ pour d_v ;

alors $y \in B_{d_v}(x, \frac{1}{1+n}) \Longleftrightarrow (\forall p, p < n, \; v(n) < x \Longrightarrow v(n) < y$
$\qquad v(n) < y \Longrightarrow v(n) < x)$

$$\Longleftrightarrow y \in \big(\bigcap_{\substack{<n \\ v(i)<x}} P_{v(i)}\big) \cap \big(\bigcap_{\substack{i<n \\ v(i)\nless x}} N_{v(i)}\big)$$

Donc $B_{d_v}(x, \frac{1}{1+n})$ est un ouvert pour la topologie de Lawson.

• Soit $b \in B$

$P_b = \{x \in D / x > b\}$, $N_b = \{x \in D / x \ngtr b\}$

$\exists n$ tq $b = v(n)$

Soit $A = \{(a_1, \ldots, a_n) / a_i \in \{0, 1\}, \exists x \in D, (x > V(i) \Longleftrightarrow a_i = 1)\}$
$\qquad a_n = 1$

A est fini.

$\forall a = (a_n), \ldots, a_n) \in A, \exists z_a$ tq $(z > v(i) \Longleftrightarrow a_i = 1)$

alors $x \in \bigcup_{a \in A} B(z_a, \frac{1}{1+n}) \Longleftrightarrow x > v(n)$
$\qquad \Longleftrightarrow x \in P_b$

Et si $A' = \{(a_1, \ldots, a_n) / a_i \in \{0, 1\}, a_n = 0, \exists x \in D / x > v(i) \Longleftrightarrow a_i = 1\}$

$x \in N_b \Longleftrightarrow x \in \bigcup_{a \in A'} B(z_a, \frac{1}{1+n})$

c.q.f.d.

Donc la topologie induite ne dépend pas de l'énumération de la base ; on a même :

Proposition : Soient v_1 et v_2 deux énumérations de la base finitaire B, d_{v_1} et d_{v_2} les métriques associées sur D : elles sont alors *uniformément équivalentes*.

Dm : $\forall n, \exists p$ tq $\{v_1(q) / q \leq n\} \subset \{v_2(r) / r \leq p\}$;

Donc $\forall n, \exists p / \forall x, \forall y \; d_{v_2}(x, y) < \frac{1}{1+p} \Rightarrow d_{v_1}(x, y) < \frac{1}{1+n}$ Symétriquement :

$$\forall n, \exists p / \forall x, \forall y \; d_{v_1}(x, y) < \frac{1}{1+p} \Rightarrow d_{v_2}(x, y) < \frac{1}{1+n}$$

c.q.f.d.

On peut remarquer, d'après ce qui précède, que d_v définit une *ultramétrique* associée à la *topologie* de *Lawson* pour *tout c.p.o.* *ω-algébrique*.

Si de plus D est 2/3 S.F.P. (i.e. u(X) fini complet, pour tout X de $\mathcal{S}(D)$), il y a isomorphisme entre B^∞ le complété au sens de l'ordre de B et $\overline{B}$ le complété au sens métrique puisque :

a) $B \subset B^\infty \subset \overline{B}$ $(\sup_n b_n = \lim_n b_n)$

b) (B^∞, d) est compact, donc complet.

On a plus précisément :

Théorème [7] : Soit $i : (B, <, \perp) \to (B, d)$, avec B finifaire et B^∞ S.F.P., l'identité sur B ; alors :

1) i s'étend de façon unique en $\bar{i} : B^\infty \to \overline{B}$ telle que :

$$\bar{i}[\sup_j b_j] = \lim_j \bar{i}(b_j) \text{ avec } b_j \in B, \; b_{j+1} > b_j.$$

2) $\bar{i}$ est bijective.

b) Métrique de "troncature"

On peut définir une variante de la métrique étudiée ci-dessus :

Définition : Soit D un S.F.P. Supposons que l'opération de "troncature" ait été définie comme au paragraphe A.

Alors si $d(x, y) = \frac{1}{1+\inf\{n / x[n] \neq y[n]\}}$, d est une ultramétrique sur D.

Dm : • $d(x, y) \geq 0 \ \forall x, y$; $d(x, y) = d(y, x)$

• $d(x, y) = 0 \iff \forall n, x[n] = y[n] \iff x = y$

• $d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z))$ puisque :

$$\left.\begin{array}{l} x[n] = y[n] \\ y[n] = z[n] \end{array}\right\} \Rightarrow x[n] = z[n]$$

c.q.f.d.

De plus

Lemme : Soit d_v liée à une énumération v de la base de D.

Alors d et d_v sont uniformament équivalentes.

Dm : Soient $(D_n)_n$ définissant la troncature sur D.

Alors : $\forall n, \exists p$ tq $D_n \subset \{v(q), q \leq p\}$

D'où $d_v(x, y) < \frac{1}{1+p} \Rightarrow x[n] = y[n] \Rightarrow d(x, y) < \frac{1}{1+n}$

Et : $\forall n, \exists p$ tq $\{v(q), q \leq p\} \subset D_n$

d'où $d(x, y) < \frac{1}{1+n} \Rightarrow d_v(x, y) < \frac{1}{1+p}$.

c.q.f.d.

Donc si $(D_n)_n$ et $(D'_n)_n$ sont deux suites de projection de D différentes de D, les distances associées sont uniformément équivalentes.

C) c.p.o.'s et algèbres continues : Le cas des mots et des arbres

1. Définitions

a) Les arbres

Soit Σ un alphabet gradué fini ; nous noterons $\ell(a)$ le degré d'un symbole a. Soit V un ensemble disjoint de Σ ; nous définissons $T(\Sigma, V)$ l'ensemble des *arbres finitaires* indexés par Σ comme étant le plus petit ensemble tel que :

- $\Sigma \cup V \in T(\Sigma, V)$
- $\forall a \in \Sigma$ tq $\ell(a) = n$,
  $\forall t_1, \ldots, t_n \in (T(\Sigma, V))^n$, $a(t_1, \ldots, t_n) \in T(\Sigma, V)$

La *profondeur* $d_p(t)$ d'un élément t de $T(\Sigma, V)$ est définie par

- si $t \in V \cup \Sigma_0$, $d_p(t) = 1$
- si $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, $d_p(t) = 1 + \max\{d_p(t_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$

Soit Ω un symbole d'arité 0, $\Omega \notin \Sigma \cup V$. On munit

$T(\Sigma \cup \Omega, V)$ de *l'ordre syntaxique* $<$ défini par :

- $\forall t \in T(\Sigma \cup \Omega, V)$, $\Omega < t$ et $t < t$
- $\forall t, t'_1, \ldots, t'_n \in T(\Sigma \cup \Omega, V)$, $\forall f \in \Sigma_n$

$$t < f(t'_1, \ldots, t'_n) \iff t = \Omega \text{ ou } t = f(t_1, \ldots, t_n) \text{ avec } t_i < t'_i \ \forall i \ 1 \leq i \leq n.$$

$T(\Sigma \cup \Omega, V)$ peut alors être considéré comme la base d'un c.p.o. infinitaire. Soit $T^\infty(\Sigma, V)$ ce c.p.o., les éléments de $T^\infty(\Sigma, V)$ peuvent être considérés comme les *arbres finitaires* et *infinitaires* indexés par Σ et V.

$t[n]$, le *tronqué* à profondeur n de t sera défini inductivement par :

- $t[n] = \Omega,\ \forall t \in T(\Sigma \cup \{\Omega\}, V) \quad$ si $n = 0$
- $t[n] = t,\ \forall t \in \Sigma \cup V \cup \{\Omega\},\ \forall n > 0$
- $t[n] = f(t_1[n-1], \ldots, t_p[n-1]),\ \forall n > 0$
  si $t = f(t_1, \ldots, t_p)$
- $t[n] = \sup\limits_p t_p[n]$, si $t = \sup\limits_p t_p,\ t_p \in T(\Sigma \cup \{\Omega\}, V)$

(On montre facilement que $t[n]$ est indépendant du choix de $(t_p)_p$, tels que $t = \sup\limits_p t_p$).

On peut remarquer que cette troncature est un cas particulier de celle définie plus généralement dans les S.F.P. ; ici la suite $(D_n)_n$ est définie par $D_n = \{t \in T(\Sigma, V),\ d_p(t) \leq n\}$.

On a bien :
- $D_n \subset D_{n+1}$
- $T(\Sigma, V) = \bigcup\limits_n D_n$
- $u^*(D_n) = D_n$

On définit sur $T(\Sigma, V)$ une ultramétrique par :

$$d(t_1, t_2) = \begin{cases} 0 \text{ si } t_1 = t_2 \\ \dfrac{1}{1+\inf\{n / t_1[n] \neq t_2[n]\}} \end{cases}$$

Cette métrique définie par Arnold et Nivat est uniformément équivalente aux métriques généralements définies dans les S.F.P.'s (c'est en fait une métrique "liée à la troncature").

b) Les mots

Soit Σ un alphabet fini. On peut considérer les mots sur Σ comme un cas particulier des arbres, on considèrera que chaque lettre de Σ est d'arité 1, et on adjoint deux symboles à Σ. Ω et un symbole de terminaison $\square$ (qu'on omettra souvent), tous deux d'arité 0. L'ensemble des mots sur Σ sera donc pour nous : $M^\infty(\Sigma) = \Sigma^\infty \cup \Sigma^* \square \cup \Sigma^* \Omega$.

L'ordre syntaxique sera défini comme sur $T^{\infty}(\Sigma)$. (Donc un mot terminé ne sera inférieur qu'à lui-même). La définition des tronqués sera donc aussi un cas particulier de celle des arbres (et correspondra avec la notion habituelle de troncature dans les mots), de même que la notion de longueur correspondra à celle de profondeur. On peut remarquer que l'ultramétrique obtenue (cf. a)) n'est autre que celle utilisée classiquement en théorie des langages.

2. Structure algébrique des mots et des arbres

Soit $X = \{x_i \,/\, i \in \mathbb{N}^*\}$ un ensemble dénombrable de variables. Soit

$$T(\Sigma)^p_q = \left\{ <q, t> \,/\, t = <t_1, \ldots, t_p>,\ t_i \in T(\Sigma, X_q) \atop 1 \le i \le p \right\}$$

où $X_q = \{x_i \,/\, 1 \le i \le q\}$

($T(\Sigma)^p_q$ est donc l'ensemble des p-uples d'arbres finitaires où les occurrences (explicites ou non) de variables appartiennent à X_q).

Soit $IT(\Sigma) = \bigcup\limits_{\substack{p \in \mathbb{N}^* \\ P \in \mathbb{N}}} T(\Sigma)^p_q$; Nous définissons *l'ordre* $<$ $IT(\Sigma)$ par :

$$\begin{cases} \bullet\ <m, t_1, \ldots, t_p> \,<\, <n, r_1, \ldots, r_q> \iff \begin{cases} \bullet\, m = n \\ \bullet\, p = q \\ \bullet\, t_i < r_i \quad 1 \le i \le q \end{cases} \\ \qquad\qquad (< \text{ au sens de l'ordre sur } T(\Sigma, X_i)) \\ \bullet\ <0, r> \ <T, \forall T \in IT(\Sigma)>. \end{cases}$$

Le *produit de composition* est défini comme habituellement, i.e. $<q, t_1, \ldots, t_n> \bullet <r, u_1, \ldots, u_q>$ est obtenu en substituant u_i à chaque occurrence de x_i $(1 \le i \le q)$ dans $t_j (1 \le j \le n)$.

On a alors :

Lemme 1 : Pour toute partie dirigée D de $(IT(\Sigma), <)$, il existe (p, q) tels que D soit incluse dans $T^q_p(\Sigma)$.

(La démonstration est immédiate en vue de la définition de l'ordre sur IT(Σ)).

A partir de ce lemme, il est facile de voir que (IT(Σ), <) peut être considéré comme la base finitaire d'un c.p.o. infinitaire. De plus, si nous notons ($IT^{\infty}(\Sigma)$, <) ce c.p.o., $IT^{\infty}(\Sigma)$ peut être considéré comme l'ensemble des p-uples d'arbres finitaires ou infinitaires sur $\Sigma(p \in \mathbb{N})$, où les occurrences des variables appartiennent à un sous-ensemble *fini* de X.

Cette description est obtenue aussi en étudiant l'aspect métrique de $IT^{\infty}(\Sigma)$:

Lemme 2 : Soit d_v une métrique liée à v, énumération de IT(Σ), alors $d_v / T_p^q(\Sigma)$ est uniformément équivalente à d_q^p, où d_q^p est définie sur le produit cartésien $(T(\Sigma, X_q)$ (distance liée à la troncature par exemple) par :

$$d_p^q(<q, t_1,\dots, t_p>, <q, u_1,\dots, u_p>) = \sup_{1 \le i \le p} d_q(t_i, u_i).$$

Dm : Soit $T^q(\Sigma) = (b_n)_n$, $T_q^p(\Sigma) = \{(b_{i_1},\dots, b_{i_p}) / b_{i_j} \in T^q(\Sigma)\}$

$$\text{Mais : } \forall n, \exists r / \left. \begin{matrix} i_j \le n \\ 1 \le j \le p \end{matrix} \right| \Rightarrow (b_{i_1},\dots, b_{i_p}) \in r(1,\dots, r)$$

d'où si $D_S = \{b_1,\dots, b_n\}$,

$$d_v(\alpha, \beta) < \frac{1}{1+r} \Rightarrow d_p^q(\alpha, \beta) < \frac{1}{1+n}$$

d'autre part on a de façon évidente

$$d_p^q(\alpha, \beta) < \frac{1}{1+n} \Rightarrow d_v(\alpha, \beta) < \frac{1}{1+n}$$

Lemme 3 : Soit (a_n) une suite de Cauchy de (IT(Σ), d_v). Alors :

• Soit $\left. \begin{matrix} \exists q \in \mathbb{N} \\ \exists p \in \mathbb{N} \end{matrix} \right.$, $\exists \mathbb{N}$ tq $n > N \Rightarrow a_n \in T_p^q(\Sigma)$ (a)

$$\text{et } \lim_{d_v,\, n \to +\infty} u_n = \lim_{\substack{d_p^u,\, n \to +\infty \\ n > N}} u_n$$

• Soit $\forall p, q, N, \exists n, n > N$ tq $u_n \notin T_q^p(\Sigma)$ (b)

et $\lim_{d_r,\, n \to +\infty} u_n = \Omega$

<u>Dm</u> : On a non (a) $\Rightarrow$ (b)

Or d'après le lemme 1, si (a) est vérifiée, on a bien

$$\lim_{d_v} u_n = \lim_{d_p^q} u_n.$$

Supposons donc que (b) est vérifiée.

$\forall p, q, \exists n_0$ tq $v(n_0) = (q, \langle r, \ldots, r\rangle)$

Or $\forall N, \exists n > N$ tq $u_n \notin T_p^q(\Sigma)$

donc $\forall N, \exists n > N$ tq $u_n \not\succ (q, \langle 1, \ldots, r\rangle)$

Mais $(u_n)_n$ est de Cauchy.

donc si on choisit $N > \frac{1}{1+n_0}$, on a :

$$\exists n \text{ tq } r > n \Rightarrow u_r \notin T_p^q(\Sigma)$$

donc

$\forall p, q, \exists n$ tq $r > n \Rightarrow a_r \notin T_p^q(\Sigma)$

Or : $\forall N, \exists p, q$ tq $n < N \Rightarrow v(n) \in T_{p'}^{q'}(\Sigma)$, $\begin{matrix} p' < p \\ q' < p \end{matrix}$

Donc

$$\forall N, \exists s \text{ tq } r > s \Rightarrow u_r \not\succ v(n) \ \forall n \in \{1, \ldots, N\} \quad (n \neq 0)$$

$$\Rightarrow d_v(u_r, r) < \frac{1}{1+N}$$

c.q.f.d.

Ce lemme justifie donc aussi qu'on n'obtienne pas d'arbres de "largeur infinie" (i.e. $p = +\infty$), ou d'arbres ayant un ensemble infini de variables (i.e. $q = +\infty$).

$$\text{Donc } IT^{\infty}(\Sigma) \simeq \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{N} \\ p \in \mathbb{N}^*}} (q, (\mathcal{R}^{\infty}(\Sigma, X_q))^p)$$

(Par la suite, quand nous parlerons d'arbres sur un alphabet Σ, il s'agira de $\underline{1}$-uple d'arbres avec un nombre borné de variables), sauf mention du contraire, et on parlera donc de $T^{\infty}(\Sigma)$ et non de $IT^{\infty}(\Sigma)$).

b. Continuité de la composition

Nous avons défini la composition sur les arbres finitaires. Il nous reste donc à l'étendre aux éléments infinitaires de $IT^{\infty}(\Sigma)$. Cette extension peut se faire au sens de l'ordre puisque :

Lemme 1 : La composition sur $IT(\Sigma)$ est croissante, i.e. :

$$\left.\begin{array}{l} u \in T_q^q(\Sigma),\ u' > a \\ \\ v \in T_q^r(\Sigma),\ v' > v \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u' \in T_p^q(\Sigma) \\ \\ v' \in T_q^r(\Sigma) \end{array}\right. \quad \text{et } a' \cdot v' > u \cdot v$$

On peut donc définir la composition sur $IT^{\infty}(\Sigma)$ en posant :

$$(\sup_n u_n) \cdot (\sup_n v_n) = \sup_n (u_n \cdot v_n)$$

Mais l'extension peut se faire aussi en utilisant la structure métrique et en particulier la densité de $IT(\Sigma)$ dans $IT^{\infty}(\Sigma)$ puisque :

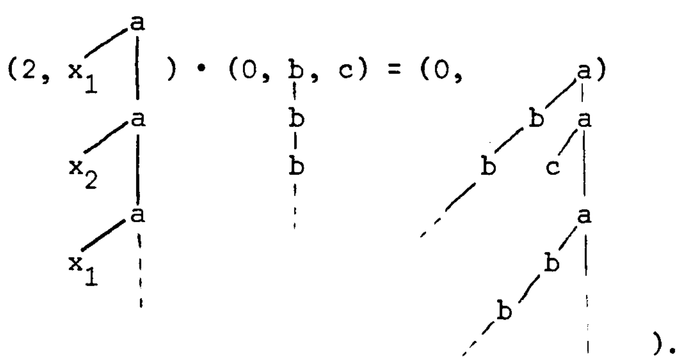
Proposition <3> : La composition est uniformément continue de $(IT(\Sigma) \times IT(\Sigma), D)$ (avec $D = \sup(d_v, d_v)$) sur $(IT(\Sigma), d_v)$; on a même :

$$d_v(f \cdot g, f \cdot g') \leq d(g, g')$$

$$d_v'(f \cdot g, f' \cdot g) \leq d(f, f')$$

$IT^{\infty}(\Sigma)$ pouvant être indifféremment considéré comme le complété au sens de l'ordre et le complété au sens métrique de $T(\Sigma)$, ces deux extensions coïncident.

De plus cette composition d'arbres infinitaires correspond à la composition habituelle, i.e. consiste à substituer aux occurences des variables (les variables restant en nombre fini, les occurences pouvant être en nombre infini), l'arbre finitaire ou infinitaire correspondant (Exemple :



Donc $IT^{\infty}(\Sigma)$, munie de la composition, est une Σ-algèbre continue.

Nous n'avons pas parlé du cas des mots. En fait, d'après ce qui précède, la concaténation des mots n'est autre que la composition des arbres, la seule variable étant $\square$. Donc les résultats sont identiques (simplifiés puisqu'il n'y a qu'une seule variable), et $M^{\infty}(\Sigma)$, muni de la concaténation, est aussi une algèbre continue.

$\boxed{2}$ PASSAGE AUX PARTIES POUR UN S.F.P.

A) $\mathcal{P}(D)$ comme espace ordonné

B) $\mathcal{P}(D)$ comme espace métrique

C) Ensembles finiment engendrables et sémantique

A) P(D) comme ensemble partiellement ordonné

Comment ordonner les ensembles ?

Une ensemble peut être considéré comme l'ensemble des "états" possibles d'un programme non-déterministe (on éliminera donc l'ensemble vide, considérant que l'ensemble des états possibles d'un calcul ne peut être vide, même si le calcul ne s'arrête pas) ; Si X et Y sont deux sous-ensembles de D, X < Y peut donc signifier "toute information valable pour X est valable pour Y".

Il faut donc savoir quelles informations choisir et quelles significations leur donner.

Tout d'abord, il semble raisonnable de se limiter aux informations finiment observables, donc aux ensembles finis et finitaires, quant à sa signification, une information peut être considérée :

- Soit comme ce que "peut" le processus.

- Soit comme ce que "doit" le processus.

Ce qui nous amènera à définir trois préordres dont on peut schématiser les significations :

- X < Y ssi tout ce qui est (finiment) possible pour X, l'est pour Y.

- X < Y ssi tout ce qui est "certain" pour X, est certain pour Y.

- X < Y ssi tout ce qui est possible pour X, est possible pour Y <u>et</u> tout ce qui est sûr pour X est sûr pour Y (Y est un "prolongement" de X, est "plus défini" que X).

Ces trois ordres sont respectivement l'ordre de Hoare [26], l'ordre de Smyth et l'ordre d'Egli-Miner.

(Ces significations de ces ordres et des domaines associées en terme de "possibilité" et d'inévitabilité" ont été étudiées en particulier par Glynn Winskel, Samson Abramsky [26],...).

1. L'ORDRE DE HOARE

Les considérations ci-dessus nous conduisent donc à poser ($P_*(D) = P(D) / \phi$).

Définition 1 : $\forall X, \forall Y \in P_*(D)$

$$X <_1 Y \text{ ssi } \forall x \in X, \exists y \in Y \quad x \leq y$$

Soit si on note $y(X)$ l'idéal de X i.e.

$y(X) =_{def} \{y / \exists x \in X, y \leq x\}$:

$X <_1 Y$ ssi $y(X) \subset y(Y)$.

Mais ce préordre s'avère en fait trop fin d'un point de vue sémantique, et ne permet pas d'avoir de bonnes propriétés (continuité de certaines fonctions,...). Plotkin [21] donne des justifications et une construction présises du préordre souhaité. Nous nous contenterons ici de remarquer :

• La signification du préordre devait être : X < Y ssi "Y peut faire tout ce que X peut faire".

Mais il semble raisonnable de ne s'intéresser qu'à ce qui est finiment observable, i.e. X < Y si toute "propriété" finiment détectable pour X est valable pour Y, ou encore si tout comportement initial fini de X est comportement initial de Y.

• Il semble raisonnable d'exiger que la fonction singleton :

$$\begin{Bmatrix} x \to \{x\} \\ D, < P_*(D), <_y \end{Bmatrix}$$

soit continue.

Or $\sup_D(a^n) = a^\omega$ et $\{a^p \,/\, p \in \mathbb{N}\} >_1 \{a^n\} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{avec } \{a^\omega\} \not>_1 \{a^p \,/\, p \in \mathbb{N}\}$$

Donc la fonction singleton n'est pas continue si on munit $P_*(D)$ du préordre $<_1$.

D'où

<u>*Définition 2*</u> : $\forall X,\ \forall Y \in P_*(D)$,

$$X \underset{n\mathcal{Y}}{<} Y \text{ ssi : } \left| \begin{array}{l} \forall b \in B \\ \\ \forall x \in X \end{array} \right. ,\ b < x \Rightarrow \exists y \in Y \text{ tq } b < y$$

Soit d'après la définition de $\mathcal{Y}(X)$:

$$X \underset{n\mathcal{Y}}{<} Y \text{ ssi } \mathcal{Y}(X) \cap B \subset \mathcal{Y}(Y) \cap B.$$

(On a bien sûr $\underline{X <_1 Y \Rightarrow X \underset{n\mathcal{Y}}{<} Y}$).

$\underset{n\mathcal{Y}}{<}$ étant un préordre, soit $\underset{n\mathcal{Y}}{\sim}$ la relation d'équivalence associée.

Donc :

$$X \underset{n\mathcal{Y}}{\sim} Y \text{ ssi } \mathcal{Y}(X) \cap B = \mathcal{Y}(Y) \cap B$$

On peut remarquer que si X *est finitaire* on a :

$$X \underset{n\mathcal{Y}}{<} Y \Rightarrow X <_1 Y.$$

On peut donner une autre caractérisation de $\underset{n\mathcal{Y}}{<}$:

$$X \underset{n\mathcal{Y}}{<} Y \text{ ssi } \forall A \in S(D),\ A <_1 X \Rightarrow A <_1 Y$$

($\mathcal{S}$(D) désigne l'ensemble des parties finies finitaires de D).

Dm : • $X \underset{n\mathcal{Y}}{<} Y$

Alors $A \in \mathcal{S}(D) \Rightarrow A = \{b_{i_1},\dots, b_{i_n}\}, b_{i_j} \in D$

$A <_1 X \Rightarrow \forall j \in \{1,\dots, n\}, \exists x_j \in X \quad b_{i_j} < x_j$

Mais $X \underset{n\mathcal{Y}}{<} Y \Rightarrow \forall j \in \{1,\dots, n\}, \exists y_j \in Y \quad b_{i_j} < y_i$

Donc $A <_1 Y$.

• $X \underset{n\mathcal{Y}}{\not<} Y \Rightarrow \exists b_0 \in B, \exists x \in X \,/\, b_0 < x$ et $\forall y \in Y, b_0 \not< y$

Alors $\{\bot, b_0\} <_1 X$

$: \exists A \in \mathcal{S}(D), A <_1 X$ et $A \not<_1 Y$

et $\{\bot, b_0\} \not<_1 Y$

c.q.f.d.

Alors si $Cl_y(X) = \{y \,/\, \forall b \in B, b < y \Rightarrow \exists x \in X, b < x\}$

On a :

Proposition :

(1) $X \underset{n\mathcal{Y}}{<} Y \Leftrightarrow Cl_{\mathcal{Y}}(X) \subset Cl_{\mathcal{Y}}(Y)$

(2) $X \bar{\sim}_{\mathcal{Y}} Y \Leftrightarrow Cl_{\mathcal{Y}}(X) = Cl_{\mathcal{Y}}(Y)$

(3) $X \bar{\sim}_{\mathcal{Y}} Cl_{\mathcal{Y}}(X)$

(4) $X \bar{\sim}_{\mathcal{Y}} Y \Rightarrow Y \subset Cl_{\mathcal{Y}}(X)$

(5) $Cl_{\mathcal{Y}}(X \cup Y) = Cl_{\mathcal{Y}}(X) \cup Cl_{\mathcal{Y}}(Y)$

Dm :

(1) • Supposons que $X \underset{n\mathcal{Y}}{<} Y$.

Soit $z \in Cl_{\mathcal{Y}}(X)$. Donc :

$\forall b \in B,\ b < z \Rightarrow \exists x \in X,\ b < x$

or $X \underset{n\mathcal{Y}}{<} Y$; donc : $\exists y \in Y,\ b < y$.

Donc $\forall b \in B,\ b < z \Rightarrow \exists y \in Y,\ b < y$

Soit $z \in Cl_{\mathcal{Y}}(Y)$: $Cl_{\mathcal{Y}}(X) \subset Cl_{\mathcal{Y}}(Y)$

• Supposons que $Cl_{\mathcal{Y}}(X) \subset Cl_{\mathcal{Y}}(Y)$

alors $\forall b \in B,\ \forall x \in X,\ b < x \Rightarrow b \in Cl_{\mathcal{Y}}(X)$.

Donc $\forall b \in B,\ \forall x \in X,\ b < x \Rightarrow b \in Cl_{\mathcal{Y}}(Y)$

Soit $b < x \Rightarrow \exists y \in Y,\ b < y$

d'où $X \underset{n\mathcal{Y}}{<} Y$.

(2) évident d'après (1).

(3) Il suffit de remarquer :

$\forall X,\ Cl_{\mathcal{Y}}(Cl_{\mathcal{Y}}(X)) = Cl_{\mathcal{Y}}(X)$.

En effet $z \in Cl_{\mathcal{Y}}(Cl_{\mathcal{Y}}(X))$: $\forall b \in B,\ b < z \Rightarrow \exists y \in Cl_{\mathcal{Y}}(X),\ b < y$:

$$\left.\begin{matrix} y \in Cl_{\mathcal{Y}}(X) \\ \\ b < y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists x \in X,\ b < x$$

donc $z \in Cl_{\mathcal{Y}}(X)$.

réciproquement $z \in Cl_{\mathcal{Y}}(X) \Rightarrow z \in Cl_{\mathcal{Y}}(Cl_{\mathcal{Y}}(X))$

(puisque $A \subset Cl_{\mathcal{Y}}(A)$).

Donc d'après (2) $X \bar{\sim}_{y} Cl_{y}(X)$.

(4) $X \bar{\sim}_{y} Y \Rightarrow Cl_{y}(X) \bar{\sim}_{y} Cl_{y}(Y)$

or $Y \subset Cl_{y}(Y)$.

Donc $X \bar{\sim}_{y} Y \Rightarrow Y \subset Cl_{y}(X)$

(5) On a bien sûr $Cl_{y}(X) \subset Cl_{y}(X \cup Y)$
$Cl_{y}(Y) \subset Cl_{y}(X \cup Y)$

maintenant soit $z \in Cl_{y}(X \cup Y)$

B base de D $\Rightarrow z = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} b_n \qquad b_n \in B$

$z \in Cl_{y}(X \cup Y) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists t \in X \cup Y, b_n < t$

$\Rightarrow \exists \mathbb{N}_1 \subseteq N \quad \mathbb{N}_1$ *infini* tq :

(a) $\forall n \in \mathbb{N}_1, \exists t \in X \quad b_n < t$

ou

(b) $\forall n \in \mathbb{N}_1, \exists t \in Y \quad b_n < t$

Or $\mathbb{N}_1$ infini $\Rightarrow z = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}_1} b_n$

$\Rightarrow \forall b \in B, b < z \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_1, b < b_n$

Donc (a) $\Rightarrow z \in Cl_{y}(X)$
(b) $\Rightarrow z \in Cl_{y}(Y)$

Soit $z \in Cl_{y}(X) \cup Cl_{y}(Y)$.

c.q.f.d.

Donc l'élément maximal de la classe d'équivalence de X modulo $\bar{\sim}_{y}$ est $Cl_{y}(X)$ - qu'on choisira comme représentant canonique.

Soit donc $(\mathcal{P}_{<_y}(D), <_y)$ le quotient de $(\mathcal{P}_*(D), \underset{\sim}{<}_y)$ par $\tilde{\sim}_y$. On peut donc décrire $\mathcal{P}_{<_y}(D)$ comme l'ensemble des sous-ensembles de D fermés par Cl_y ; de plus $<_y$ sur *les représentants canoniques* est exactement $\subset$, *l'inclusion ensembliste.* On a même pour X et Y dans $\mathcal{P}_{<_y}(D)$ (on confondra - sauf prévision - la classe et le représentant canonique), $\sup_y \{X, Y\} = X \cup Y$. Donc :

<u>*Théorème*</u> : Si D est ω-algébrique, $\mathcal{P}_{<_y}(D)$ est ω-algébrique et complet (donc infinitaire) de base finitaire B' : $\{Cl_y(X) / X \text{ fini}, X \subset B\}$.

<u>Dm</u> : • $\left.\begin{array}{l} X \text{ fini} \\ X \subset B \end{array}\right\} \Rightarrow Cl_y(X)$ élément finitaire de $\mathcal{P}_{<_y}(D)$

En effet $\left.\begin{array}{l} X \underset{ny}{<} \text{Sup } Z_n \\ X \subset B \end{array}\right\} \Rightarrow \forall x \in X, \exists n, \exists z \in Z_n \quad x < z$

Or X fini : $\exists n_0$ tq $\forall x \in X, \exists z \in Z_{n_0}, x < z$

Soit $X < Z_{n_0}$.

• B' est dénombrable puisque B l'est.

• Soit $Z \in \mathcal{P}_{<_y}(D)$. Supposons que la base B est numérotée et soit $B_n = \{b \in B / v(b) \leq n\}$ (v : énumération de B).

Alors soit $Z_n = \{b \in B_n / \exists z \in Z, b < z\}$

On a $Z = \sup Z_n$ puisque :

• $Z_n <_y Z, \forall n \in \mathbb{N}$

• $\forall z \in Z, \forall b \in B, b < z \Rightarrow \exists_n \quad b \in Z_n$ donc :

$$Z <_y \sup Z_n$$

c.q.f.d.

Remarque : Si D est un S.F.P. et si on le munit de la topologie classique de Lawson, on a de plus :

Lemme : $Cl_{\mathcal{Y}}(X) = \mathcal{Y}(\overline{X}) = \overline{\mathcal{Y}(\overline{X})}$.

Dm : • $x \in \overline{X} \Rightarrow x = \lim_n x_n,\ x_n \in X$

$\Rightarrow (\forall b \in B,\ b < x \Rightarrow \exists n,\ b < x_n)$

$\Rightarrow x \in Cl_{\mathcal{Y}}(X)$

Or $\mathcal{Y}(Cl_{\mathcal{Y}}(X)) = Cl_{\mathcal{Y}}(X)$ donc $Cl_{\mathcal{Y}}(X) \supset \mathcal{Y}(\overline{X})$

• $y \in Cl_{\mathcal{Y}}(X)$; $y \in D \Rightarrow \exists (b_n)_n,\ (b_n \in B,\ y = \sup b_n)$

$y \in Cl_{\mathcal{Y}}(X) \Rightarrow \forall n,\ \exists x_n \in X,\ b_n < x_n$

Or D compact : $\exists (x_{n_k})_k$, $(x_{n_k})_k$ converge.

Soit x la limite de cette sous-suite : $x \in \overline{X}$

Alors $y < x$: $y \in \mathcal{Y}(\overline{X})$

Donc $Cl_{\mathcal{Y}}(X) = \mathcal{Y}(\overline{X})$

• Il reste à montrer que $\mathcal{Y}(\overline{X})$ est fermé ;

Soit $a \in \overline{\mathcal{Y}(\overline{X})}$: $a = \lim_n a_n$, $a_n \in \mathcal{Y}(\overline{X})$.

Donc $\forall n,\ \exists x_n \in \overline{X}\ \ a_n < x_n$.

De même que ci-sessus, D étant compact, on a :

$\exists x' \in \overline{\overline{X}}$ tq $x_{n_k} \xrightarrow[k]{} x'$

d'où $\exists x' \in \overline{X}$ tq $a < x'$: $a \in \mathcal{Y}(\overline{X})$.

c.q.f.d.

$Cl_{\mathcal{Y}}(\overline{X})$ est donc la plus petite partie fermée par $\mathcal{Y}$ et pour la topologie de Lawson contenant X :

On peut donc décrire $\mathcal{P}_{<_{\mathcal{Y}}}(D)$ comme l'ensemble des *idéaux fermés* (topologiquement) de D (on appelle idéal toute partie fermée pour $\mathcal{Y}$) muni de *l'inclusion ensembliste.*

Remarque : 1. Une façon plus simple d'obtenir $\mathcal{P}_{<_{\mathcal{Y}}}(D)$ est donc de compléter ($\{\mathcal{Y}(X)$, X fini finitaire$\}$) muni de $<_1$, c-à-d de l'ordre plus simple : $X < Y$ ssi $\forall x \in X, \exists y \in Y, x < y$.

2. On identifie toujours dans $\mathcal{P}_{<_{\mathcal{Y}}}(D)$ (et dans les domaines qui suivent) une partie et sa fermeture topologique. Même si cela correspond à l'idée qu'on ne sépare des ensembles qu'avec une information *finitaire*, le fait d'identifier par exemple $X_0 = \{0^n 1\}$ et $X_1 = \{0^n 1\} \cup 0^\omega$ peut être gênant : dans X_0, on est sûr d'avoir un 1, pas dans X_1. (cf. travaux de D. Lehmann, Egli,...).

2. L'ORDRE DE SMYTH

Définissons d'abord une relation sur $\mathcal{S}(D) \times \mathcal{P}_*(D)$ par :

$$\begin{array}{l} \forall X \in \mathcal{S}(D) \\ \qquad X \underset{\mathcal{W}}{<} Y \text{ ssi } \forall y \in Y, \exists x \in X \text{ tq } x < y. \\ \forall Y \in \mathcal{P}_*(D) \end{array}$$

Soit si on appelle filtre de X l'ensemble $\mathcal{V}(X)$ défini par $\mathcal{V}(X) = \{y \in D \,/\, \exists x \in X \;\; x < y\}$:

$$\begin{array}{l} \forall X \in \mathcal{S}(D) \\ \qquad X \underset{\mathcal{W}}{<} Y \text{ ssi } \mathcal{V}(X) \supset \mathcal{V}(Y) \\ \forall Y \in \mathcal{P}_*(D) \end{array}$$

On peut maintenant définir le préordre $\underset{\mathcal{W}}{<}$ sur $\mathcal{P}_*(D)$:

Définition : $X \underset{\sim V}{<} Y$ ssi $\forall A \in S(D)$, $A \underset{\sim V}{<} X \Rightarrow A \underset{\sim V}{<} Y$.

(i.e. on peut garantir plus de choses sur Y que sur X).

(On a noté $\underset{\sim V}{<}$ la relation sur $S(D) \times P_*(D)$ et le préordre sur $P_*(D)$ puisqu'ils coïncident sur $S(D) \times P_*(D)$).

On appelera $\tilde{\sim}_V$ la relation d'équivalence associée à $\underset{nV}{<}$ et $(P_V(D), <_V)$ le quotient $(P_*(D), \underset{nV}{<})/\tilde{\sim}_V$.

Dans le cas où D est S.F.P., on a encore une description agréable de $P_F(D)$.

Lemme 1 : $X \simeq_V V(\overline{X})$

• Remarquons d'abord que si $X \subset Y$, $X >_{\sim V} Y$.

(puisque $\forall x \in X$, $\exists y \in Y$ $x > y$).

donc $X >_{\sim V} V(\overline{X})$.

• Montrons maintenant $X \underset{\sim V}{<} V(\overline{X})$.

Soit $A \underset{\sim V}{<} X$, $A \in S(D)$.

Alors : $\forall z \in V(\overline{X})$, $\exists x \in \overline{X}$ tq $z > x$

$x \in \overline{X}$: $\exists (x_n)_n \in X$ tq $x = \lim\limits_n x_n$

$X \underset{\sim V}{>} A$: $\forall n$, $\exists a_n \in A$ tq $x_n > a_n$

Or A est fini $\exists a \in A$, $\exists_\infty n$ tq $a_n = a$.

Donc $\exists_\infty n$ tq $x_n > a$

d'où $x > a$ et $z > a$.

Finalement $V(\overline{X}) > A$ donc $X \underset{\sim V}{<} V(\overline{X})$.

c.q.f.d.

Lemme 2 : Si D est S.F.P. :

$$X \underset{\sim V}{<} Y \Longleftrightarrow V(\overline{X}) \supset V(\overline{Y})$$

Dm : a) $X \underset{\sim V}{<} Y \overset{?}{\Longrightarrow} V(\overline{X}) \supset V(\overline{Y})$.

• Montrons d'abord que $Y \subset V(\overline{X})$

$$\left.\begin{array}{l} X \underset{\sim V}{<} Y \\ \\ \forall n,\ X[n] \underset{\sim V}{<} X \end{array}\right\} \Rightarrow X[n] \underset{\sim V}{<} Y$$

Donc : $\forall n, \forall y \in Y, \exists x_n \in X / y > x_n[n]$.

D compact : $\exists x \in D, \exists (n_k)_k \nearrow$ tq $x = \lim\limits_{k} x_{n_k}$

$x_{n_k} \in X, \forall k \Rightarrow x \in \overline{X}$.

Donc $\forall p \in \mathbb{N}, \exists k_0$ tq $k > k_0 \Rightarrow x_{n_k}[p] = x[p]$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Donc } n_k > n_{k_0} \\ \\ \qquad n_k > p \end{array}\right\} \Rightarrow x[p] = x_{n_k}[p] = x_{n_k}[n_k]\,[p] < y[p]$$

d'où $y[p] > x[p] \quad \forall p \in \mathbb{N}$

Soit $y > x$ avec $x \in \overline{X}$

On a bien $y \in V(\overline{X})$.

• Montrons maintenant que $\overline{V(\overline{X})} = V(\overline{X})$

Soit $z = \lim\limits_{n} z_n$, $z_n \in V(\overline{X})$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n$ tq $z_n > x_n$, $x_n \in \overline{X}$

On peut supposer $(x_n)_n$ convergente, puisque D compact.

Soit : $\exists x \in \overline{X}, \lim\limits_{N} x_n = x$

Alors $z > \bar{x}$: $z \in V(\overline{X})$

• On a donc

$Y \subset V(\overline{X})$
$\overline{Y} \subset V(\overline{X})$ puisque $V(\overline{X})$ fermé.
$V(\overline{Y}) \subset V(\overline{Y})$ puisque $V(\overline{X})$ fermé par V.

b) $V(\overline{X}) \supset V(\overline{Y}) \Rightarrow X \underset{\sim V}{<} Y$.

Soit donc $A \underset{\sim V}{<} X$, $A \in S(D)$.

$\forall y \in Y$, $y \in V(\overline{X})$

Donc $\forall y \in Y, \exists x \in \overline{X}$ tq $y > x$

$x = \lim x_n$, $x_n \in X$;

$X \underset{\sim V}{>} A \Rightarrow \forall x_n, \exists a_n \in A$ tq $x_n > a_n$

A fini : $\exists_\infty n, \exists a \in A, a_n = a$

Donc $\exists_\infty n, x_n > a$:

D'où $x > a$ et donc $y > a$

Donc $\forall y \in Y, \exists a \in A, y > a$.

Soit $Y \underset{\sim V}{>} A$.

On a bien : $X \underset{\sim V}{<} Y$

c.q.f.d.

Donc

Lemme 3 : Si D est S.F.P., l'élément maximal (au sens de l'inclusion) de la classe de X est $\mathcal{V}(\overline{X})$.

Dm : d'après le lemme 2, on a :

$$X \simeq_{\mathcal{V}} Y \iff \mathcal{V}(\overline{X}) = \mathcal{V}(\overline{Y})$$

de plus d'après le lemme 1 :

$$X \simeq_{\mathcal{V}} \mathcal{V}(\overline{X})$$

Soit donc $Y \simeq X$

donc $\mathcal{V}(\overline{X}) = \mathcal{V}(\overline{Y})$, et comme $Y \subset \mathcal{V}(\overline{Y})$, $Y \subset \mathcal{V}(\overline{X})$

c.q.f.d.

De plus, d'après les lemmes 1 et 3 on voit que si on choisit comme représentant canonique d'une classe, son élément maximal (au sens de l'inclusion), $<_{\mathcal{V}}$ se ramène à l'ordre dual de l'inclusion ensembliste, $\supseteq$.

De plus on va montrer que, toujours si D est S.F.P., $P<_{\mathcal{V}}(D)$ est ω-algébrique de base finitaire $\mathcal{V}\mathcal{J}(D)$: $\{\mathcal{V}(\overline{X}),$ X finitaire et fini$\}$ = $\{\mathcal{V}(X),$ X finitaire fini$\}$. A partir de maintenant, D - sauf mention contraire - sera S.F.P.

Lemme 4 : $\forall X, X \subset D, [X] = \sup\limits_{n} [X[n]]$

Dm : $\forall x \in X, \forall n, x > x[n]$

Donc trivialement : $X \underset{\sim\mathcal{V}}{>} X[n]\ \forall n.$

Soit donc Y tel que : $Y \underset{\sim\mathcal{V}}{>} X[n]\ \ \forall n$

Donc : $\forall y \in Y, \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in X$ tq $y > x_n[n]$

On peut supposer que $(x_n)_n$ converge, puisque D est compact : $\exists x \in \overline{X},\ \lim\limits_n x_n = x$.

comme $(y > x_n[n],\ \forall n \in \mathbb{N})$ on a : $y > x$

donc $Y \subset V(\overline{X})$: $Y \underset{\sim V}{>} \overline{X}$

c.q.f.d.

Lemme 5 : Soit $X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ tq $\left.\begin{array}{l} X_i < X_{i+1} \\ X_i \subset B \\ X_i \text{ fini} \end{array}\right\} \forall i \in \mathbb{N}$

Alors $\sup\limits_i (X_i) = [\{\sup x_n \,/\, \forall n(x_n \quad X_n,\ x_n < x_{n+1})\}]$

Dm : Soit $A = \{\sup x_n \,/\, \forall n(x_n \in X_n,\ x_n < x_{n+1})\}$.

On a bien sûr $A \underset{\sim V}{>} X_i,\ \forall i \in \mathbb{N}$.

Soit donc $Y \underset{\sim V}{>} X_i,$, $\forall i \in \mathbb{N}$:

$\forall y \in Y,\ \forall i,\ \exists x_i \in X_i$ tq $y > x_i$

Soit donc $E_i = \{x_i \in X_i \,/\, y > x_i\}$ (y fixé)
(y $\in$ Y)

On a donc • E_i non vide, pour tout i

• $\forall a \in E_{i+1},\ \exists b \in E_i,\ a > b$

en effet soit $a \in E_{i+1}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{donc } a \in X_{i+1} \\ X_{i+1} \underset{\sim V}{>} X_i \\ X_i \text{ fini finitaire} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists b \in X_i,\ a > b$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{On a donc } y > a > b \\ b \in X_i \end{array}\right\} \Rightarrow b \in E_i$$

- E_i fini (puisque $E_i \subset X_i$)

Donc on peut appliquer le lemme de Koenig :

$$\exists (x_i)_i \text{ tq } \begin{cases} x_i \in E_i \\ x_{i+1} > x_i \\ y > x_i \end{cases} \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Donc $y > \sup\limits_i x_i$

D'où $\forall y \in Y, \exists z \in A \quad y > z$

On a bien $Y \underset{\sim V}{>} X_i, \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow Y \underset{\sim V}{>} A$

c.q.f.d.

<u>*Lemme 6*</u> : Soit $X, X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ tq $\begin{cases} X \subset B, X \text{ fini} \\ \left.\begin{array}{l} X_i \subset B \\ X_i \text{ fini} \\ X_i \underset{\sim V}{<} X_{i+1} \end{array}\right\} \forall i \in \mathbb{N} \end{cases}$

Alors $[X] < \sup\limits_i [X_i] \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, X \underset{\sim V}{<} X_n$.

<u>Dm</u> : Supposons donc que : $\forall n \in \mathbb{N}, X \underset{\sim V}{\not<} X_n$

i.e. : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in X_n, \forall x \in X \; x_n \not> x$ (puisque X fini finitaire)

Soit donc $E_i = \{y \in X_i \,/\, \forall x \in X \; y \not> x\}$

On a donc • $E_i \neq \emptyset$

- $X_{i+1} \underset{\sim V}{>} X_i$: donc $\forall y \in E_{i+1}, \exists y' \in X_i$ tq $y > y'$

$$\left.\begin{array}{l} y' < y \\ \forall x \in X,\ y \not> x \end{array}\right\} \Rightarrow \forall x \in X,\ y' \not> x$$

Donc $y' \in E_i$: $\forall y \in E_{i+1}, \exists y' \in E_i, y > y'$

• E_i fini

On peut donc appliquer le lemme de Koenig :

$$\exists (x_n)_n \ / \ (\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in X_n,\ x_{n+1} > x_n,\ \forall x \in X\ x_n \not> x)$$

Alors $\sup_n x_n \not> x$, $\forall x \in X$ (puisque $X \subset B$).

$$\left.\begin{array}{l} \text{Or } \sup_n x_n \in \sup_i X_i \\ [\sup_i X_i] \underset{\sim V}{>} [X] \end{array}\right\} \Rightarrow \exists x \in X,\ \sup_n x_n > x$$

D'où : $\exists n \in \mathbb{N},\ X \underset{\sim V}{<} X_n$

c.q.f.d.

On a donc :

• Tout élément de $P_{<_V}(D)$ est limite supérieure d'une suite croissante d'éléments de $VS(D)$.

• Toute suite croissante d'éléments de $VS(D)$ a une limite dans $P_{<_V}(D)$.

• Si $X \le \sup_i X_i$, avec $X_0 <_V X_1 <_V X_2, \ldots$ et X et les X_i éléments de $VS(D)$, il existe n tq $X \le X_n$.

D'où

<u>*Proposition*</u> : $P_{<_V}(D)$ est -algébrique de base finitaire $VS(D)$.

De plus :

<u>*Proposition*</u> [21] : Si D est S.F.P., $\mathcal{P}_{<_V}(D)$ est conditionnellement complet avec $\sup(A, B) \simeq_V V(_{a,b \in A \times B}\ u(a, b))$

<u>Dm</u> : Soit donc $X \subset D$

$Y \subset D$

$$C = \bigcup_{a,\ b \in X \times Y} u(a, b)$$

alors $C \neq \emptyset \iff \exists c \in D, \exists a \in X, \exists b \in Y$ tq $\left| \begin{array}{l} c > a \\ c > b \end{array} \right.$ et

$\iff \exists c \in D, \{c\} \underset{\sim V}{>} X$ et $\{c\} \underset{\sim V}{>} Y$

$\iff \exists\, \Gamma, \Gamma \subset D$ tq $\Gamma \underset{\sim V}{>} X, \Gamma \underset{\sim V}{>} Y$

$\iff \exists \gamma, \gamma \in \mathcal{P}_{<_V}(D)$ tq $\gamma >_V [X], \gamma >_V [Y]$

Il reste donc à montrer que si c est non vide, c'est bien le sup de X et Y.

- $\forall c \in C, \exists a \in X, \exists b \in Y$ tq $c \in u(a, b)$

Donc $\forall c \in c, \exists a \in X$ tq $c > a$: $C \underset{\sim V}{>} X$
$\forall c \in C, \exists b \in Y$ tq $c > b$: $c \underset{\sim V}{>} Y$

- Soit $\Gamma, \Gamma \subset D, \Gamma \underset{\sim V}{>} X$ et $\Gamma \underset{\sim V}{>} Y$

$\forall \gamma \in \Gamma, \exists x \in X \quad \gamma > x$
$\exists y \in Y \quad \gamma > y$

donc $\forall \gamma \in \Gamma, \exists z \in u(x, y)$ tq $\gamma > z$

d'où $\Gamma \underset{\sim V}{>} C$.

c.q.f.d.

On peut remarquer qu'on utilise seulement le fait que D soit 2/3 S.F.P.

D'où finalement :

Théorème : Si D est S.F.P., $P_{<_V}(D)$ est infinitaire.

De plus $P_{<_V}(D)$ peut être considéré comme le c.p.o. des filtres fermés (pour la topologie de Lawson) non vides, muni de $\supset$, la base finitaire étant constituée des filtres des ensembles finis finitaires.

Remarque : Une façon simple de construire $P_{<_V}(D)$ consiste donc à compléter $(\{X, X \text{ fini finitaire}\}, <_V)$.

3. L'ORDRE D'EGLI-MITNER

Soit :

$$\left.\begin{array}{l} X \subset D \\ \\ Y \subset D \end{array}\right\} X \underset{\sim EM}{\leq} Y \iff X \underset{\sim V}{<} Y \text{ et } X \underset{\sim V}{<} Y$$

On appelera $\simeq_{EM}$ la relation d'équivalence associée à $\underset{\sim EM}{\leq}$ et $(P_{EM}(D), <_{EM})$, le quotient $(P_*(D), <_{EM})/\simeq_{EM}$.

Si on appelle partie convexe toute partie de D close par J et par V, et si on appelle clôture convexe de X - notée Con(X) - la plus petite partie convexe contenant X :

Lemme 1 : $X \simeq_{EM} Y$ ssi $\mathrm{Con}(\overline{X}) = \mathrm{Con}(\overline{Y})$.

Dm : $X \simeq_{EM} Y \iff X \simeq_V Y$ et $X \simeq_V Y$

$$\iff V(\overline{X}) = Y(\overline{Y}) \text{ et } V(\overline{X}) = Y(\overline{Y})$$

Or :

$$\left.\begin{array}{l} V(\overline{X}) = V(\overline{Y}) \\ \\ Y(\overline{X}) = Y(\overline{Y}) \end{array}\right| \implies \begin{array}{l} V(\overline{X}) \cap Y(\overline{X}) = V(\overline{Y}) \cap Y(\overline{Y}) \\ \mathrm{Con}(\overline{X}) = \mathrm{Con}(\overline{Y}). \end{array}$$

Et :

$$\mathcal{Y}(X) = \mathcal{Y}(\mathrm{Con}(X))$$
$$\mathcal{V}(X) = \mathcal{V}(\mathrm{Con}(X))$$

Donc $\mathrm{Con}(\overline{X}) = \mathrm{Con}(\overline{Y}) \Rightarrow \mathcal{Y}(\overline{X} = \mathcal{Y}(\overline{Y})$ et $\mathcal{V}(\overline{X}) = \mathcal{V}(\overline{Y})$.

c.q.f.d.

On peut remarquer que Con $(\overline{X})$, étant l'intersection de deux fermés, est fermé. On a donc :

Lemme 2 : $\mathrm{Con}(\overline{X})$ est l'élément maximal (au sens de l'inclusion) de la classe de X. De plus ; $\mathrm{Con}(\overline{X}) \underset{\sim EM}{\leq} \mathrm{Con}(\overline{Y})$ ssi :

(1) $\forall z \in \mathrm{Con}(\overline{X}), \exists t \in \mathrm{Con}(\overline{Y})$ tq $z > t$

et

(2) $\forall t \in \mathrm{Con}(\overline{Y}), \exists z \in \mathrm{Con}(\overline{Y})$ tq $z > t$

Dm : $\mathrm{Con}(\mathrm{Con}(\overline{Y})) = \mathrm{Con}(\mathrm{Con}(\overline{X}))$ ($\mathrm{Con}(\overline{X})$ est fermé)
$= \mathrm{Con}(\overline{X})$.

D'où d'après le lemme 1 : $X \simeq_{EM} \mathrm{Con}(\overline{X})$.

De plus :

$X \simeq Y \Rightarrow \mathrm{Con}(\overline{Y}) = \mathrm{Con}(\overline{X}) \Rightarrow Y \subset \mathrm{Con}(\overline{X})$.

Ceci nous montre bien que $\mathrm{Con}(\overline{X})$ est maximal (pour $\subset$) dans la classe de X.

Soit maintenant : $\mathrm{Con}(\overline{X}) \underset{\sim EM}{\leq} \mathrm{Con}(\overline{Y})$

$$\begin{aligned} \mathrm{Con}(\overline{X}) \underset{n}{<} \mathrm{Con}(\overline{Y}) &\iff \mathcal{V}(\overline{X}) \supset \mathcal{V}(\overline{Y}) \\ &\iff \mathcal{V}(\overline{X}) \supset \mathrm{Con}(\overline{Y}) \\ &\iff \mathcal{V}(\mathrm{Con}(\overline{X}) \supset \mathrm{Con}(\overline{Y}) \\ &\iff \forall t \in \mathrm{Con}(\overline{Y}), \exists z \in \mathrm{Con}\ \overline{Y} \text{ tq } z > t \end{aligned}$$

$$\mathrm{Con}(\overline{X}) \underset{\sim \mathcal{V}}{<} \mathrm{Con}(\overline{Y}) \iff \mathcal{V}(\overline{X}) \subset \mathcal{V}(\overline{Y})$$
$$\iff \mathcal{V}(\overline{X}) \subset \mathcal{V}(\mathrm{Con}(\overline{Y}))$$
$$\iff \mathrm{Con}(\overline{X}) \subset \mathcal{V}(\mathrm{Con}(\overline{Y}))$$
$$\iff \forall z \in \mathrm{Con}(\overline{X}),\ \exists t \in \mathrm{Con}(\overline{Y})$$

c.q.f.d.

Donc $(\mathcal{P}_{EM}(D), <_{EM})$ peut être considéré comme l'ensemble des parties convexes fermées muni de l'ordre défini par (1) et (2).

On choisira donc comme représentant canonique de la classe de X, $\mathrm{Con}(\overline{X})$. Un élément de $\mathcal{P}_{EM}(D)$ ou le représentera indifféremment une classe modulo $\underset{\sim EM}{\leq}$ ou le représentant canonique de celle-ci. D sera toujours un <u>S.F.P.</u> - sauf mention contraire - .
Etudions d'abord le sup d'une chaîne croissante de $\mathcal{S}(D)$:

<u>*Lemme 3*</u> : Soit $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ une suite croissante de $(\mathcal{S}(D), \underset{\sim EM}{<})$. Alors

$$\sup[X_n] = [\{\sup x_n / x_n \in X_n,\ x_n < x_{n+1}\ \forall n\}]$$

<u>Dm</u> : Soit $A = \{\sup x_n \ / \ x_n \in X_n\}$

• On a $A \underset{\sim \mathcal{V}}{>} X_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

De plus $\forall n, \forall x_n \in X_n, \exists (x_{n+p})_p$ tq $\begin{cases} x_{n+p} \in X_{n+p} \\ x_{n+p+1} > x_{n+p} \end{cases}$

(puisque $(X_i)_i$; croissante)

Donc $\forall n, \forall x_n \in X_n,\ x_n < \sup_p (x_{n+p})$

$\forall n, \forall x_n \in X_n, \exists z \in A\ x_n < z$

On a bien $A \underset{\sim \mathcal{V}}{>} X_n$, d'où finalement :

$$A \underset{\sim EM}{>} X_n$$

• Soit C, $C \underset{\sim EM}{>} X_n$, $\forall n$

On a donc $C \underset{\sim V}{>} X_n$, $\forall n$

Soit d'après le lemme ; $C \underset{\sim V}{>} A$

Il reste donc à montrer que $C \underset{\sim V}{>} A$

Soit $a \in A$; $\exists (x_n)_n$ tq $\begin{cases} a = \sup\limits_n x_n \\ x_n \in X_n, \forall n \end{cases}$

$C \underset{\sim V}{>} X_n \Rightarrow \forall n, \exists c_n \in C_n, x_n < c_n$

On peut supposer que $(c_n)_n$ converge, puisque D est compact :

$\exists c \in \overline{c}$, tq $c = \lim\limits_n c_n$

Donc $\sup x_n < c$

Soit : $a < c$

D'où $\forall a \in A, \exists c \in \overline{c}, a < c : A \underset{\sim y}{<} \overline{c}$

comme $\overline{c} \simeq_y c : A \underset{\sim y}{<} C$

D'où $c \underset{\sim EM}{>} A$

c.q.f.d.

<u>*Lemme 4*</u> : $\forall X, X \subset D : [X] = \sup[X[n]]$

<u>Dm</u> : On sait déjà cf.2 que $X \underset{\sim V}{>} X[n]$

et que $Z \underset{\sim V}{>} X[n], \forall n \Rightarrow Z \underset{\sim V}{>} X$

Il reste donc à montrer que : $X \underset{\sim V}{>} X[n]$, $\forall n$ (a)

$$\text{et que } Z \underset{\sim EM}{>} X[n],\ \forall n \Rightarrow Z \underset{\sim V}{>} X \qquad \text{(b)}$$

(a) $\forall n$, $\forall y \in X[n]$, $\exists x$ tq $y = x[n]$

Donc $\forall n$, $\forall y \in X[n]$, $\exists x$ tq $y < x$.

Soit $\forall n$, $X \underset{\sim V}{>} X[n]$.

(b) Soit Z tq $Z \underset{\sim EM}{>} X[n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc $\forall x \in X$, $\forall n$, $\exists z_n \in Z$ tq $x[n] < z_n$

On peut encore une fois supposer que $(z_n)_n$ converge, soit z sa limite :

$$z \in \overline{Z}$$

$$x[n] < z_n \quad \forall n \Rightarrow x < z$$

Donc $\forall x \in X$, $\exists z \in \overline{Z}$ tq $x < z$: $X \underset{\sim V}{<} \overline{Z}$

comme $Z \underset{Y}{\simeq} \overline{Z}$: $X \underset{\sim Y}{<} Z$

d'où $X \underset{\sim Y}{<} Z$

c.q.f.d.

__*Lemme 5*__ : Soient $X, X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ tq

$X \in \mathcal{S}(D)$, $X_i \in \mathcal{S}(D)$ $\forall i$

$X_i \underset{\sim EM}{<} X_{i+1}$ $\forall i$

$[X] \underset{EM}{<} \sup[X_i]$

Alors $\exists n \in \mathbb{N}$ tq $X \underset{\sim EM}{<} X_n$

<u>Dm</u> : Soit $A = \{\sup_n x_n \,/\, x_n \in X_n,\ x_n < x_{n+1}\}$

Alors $X \underset{\sim EM}{<} A$; donc $X \underset{\sim V}{<} A$, et d'après le lemme : $\exists n_1$ tq $X \underset{\sim V}{<} X_{n_1}$.

Il reste donc à montrer que $\exists n_2$ tq $X \underset{\sim V}{<} X_{n_2}$

$$\left.\begin{array}{l} X \underset{\sim EM}{<} A \\ \\ X \in \mathcal{S}(D) \end{array}\right\} \Rightarrow \forall x \in X,\ \exists a \in A \text{ tq } x < a$$

Donc, d'après la forme de A :

$$\forall x \in X,\ \exists (x_n)_n \text{ tq } \begin{cases} x < \sup\limits_n x_n \\ \\ x_n \in X_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$x \in B \Rightarrow \forall x \in X,\ \exists n_x$ tq $x < x_{n_x}$

Donc si $n_2 = \sup\limits_{x \in B} n_x$ (n_2 est fini puisque X est fini),

On a $\forall x \in X,\ \exists n,\ \exists x_n$ tq $\begin{array}{l} x < x_n \\ n < n_2 \end{array}$

Soit comme ($n < n_2 \Rightarrow X_n \underset{\sim EM}{<} X_{n_2} \Rightarrow X_n \underset{\sim V}{<} X_{n_2}$) et $X_n \in \mathcal{S}(D)$:

$\forall x \in X,\ \exists x' \in X_{n_2}$ tq $x < x'$

D'où $X \underset{\sim V}{<} X_{n_2}$

donc si $n = \sup(n_1, n_2)$:

$$X \underset{\sim EM}{<} X_n$$

c.q.f.d.

Donc, d'après les lemmes 3, 4, 5 on a, si on appelle $\mathcal{CS}(D)$ l'ensemble des clôtures convexes de $\mathcal{S}(D)$ - i.e. : $\mathcal{CS}(D) = \{Con(X)\ (= Con(\overline{X}))\ /\ X \in \mathcal{S}(D)\}$:

- $\mathcal{CS}(D)$ est dénombrable
- toute suite croissante de $\mathcal{CS}(D)$ a un sup dans $\mathcal{P}_{EM}(D)$
- tout élément de $\mathcal{P}_{EM}(D)$ est sup d'une suite croissante d'éléments de $\mathcal{CS}(D)$.
- Si $(X_i)_i$ est une suite croissante de $\mathcal{CS}(D)$, et si X, élément de $\mathcal{CS}(D)$ vérifie : $X <_{EM} \sup X_i$, alors il existe n tq $X <_{EM} X_n$.

D'où

<u>*Théorème*</u> : Si D est S.F.P., $\mathcal{P}_{EM}(D)$ est ω-algébrique de base finitaire $\mathcal{CS}(D)$.

On va montrer qu'en fait, $\mathcal{P}_{EM}(D)$ est S.F.P., i.e. que la catégorie des S.F.P. est stable par $\mathcal{P}_{EM}$.

<u>*Théorème*</u> : Si D est S.F.P., $\mathcal{P}_{EM}(D)$ est S.F.P.

<u>Dm</u> : Il faut donc montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{X} \subset \mathcal{CS}(D) \\ \\ \mathcal{X} \text{ fini} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u(\mathcal{X}) \text{ est un ensemble complet de} \\ \text{bornes supérieures de } \mathcal{X}. \\ u^*(\mathcal{X}) \text{ est fini} \end{array}\right.$$

Rappelons la définition de $u(\mathcal{X})$ et $u^*(\mathcal{X})$:

- $u(\mathcal{X}) = \{Z\ /\ \forall X \in \mathcal{X},\ Z >_{EM} X \ \mathit{et}\ \forall Y \text{ tq } \left[\begin{array}{l} Y > X,\ \forall X \in \mathcal{X} \\ Z > Y \end{array}\right],\ Y = Z\}$
- $u^*(\mathcal{X})$ est le plus petit ensemble contenant $\mathcal{X}$ tel que :

  $\forall \mathcal{Z} \subset u^*(\mathcal{X}),\ u(\mathcal{Z}) \subset u^*(\mathcal{X})$.

Cherchons d'abord à construire $u(\mathcal{X})$:

<u>*Lemme 6*</u> : Soit $X = \{[X_1], \ldots, [X_n]\}$, $X_i \in S(D)$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$

Alors :

$$u(X) \subset \{[Z] \,/\, \begin{array}{ll} (a) & \forall z \in Z,\ \exists (x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n \text{ tq } z \in u(x_1, \ldots, x_n) \\ (b) & \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \forall x \in X_i,\ \exists z \in Z \text{ tq } z > x\} \end{array}$$

De plus $u(X)$ est un ensemble complet de bornes supérieures pour X.

<u>Dm</u> : Soit A le deuxième membre de l'égalité ci-dessus.

• Soit $z \in A$: • $\forall z \in Z$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\exists x \in X_i$ tq $z > x$.

Donc $Z \underset{\sim V}{\geq} X_i$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$

• $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\forall x \in X_i$, $\exists z \in Z$ tq $z > x$.

Donc $Z \underset{\sim y}{>} X_i$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

Donc $Z \underset{\sim EM}{>} X_i$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$: Z est borne supérieure de X.

• Soit Y, $Y \underset{\sim EM}{>} X$, $\forall X \in X$.

Alors $\forall y \in Y$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\exists x_i \in X_i$ tq $y > x_i$

Donc $\exists z \in u(x_1, \ldots, x_n \,/\, y > z$ ($u(x_1, \ldots, x_n)$ complet)

$$\text{Soit donc } Z = \left\{ z \,/\, \begin{array}{l} \exists (x_1, \ldots, x_n) \text{ tq } z \in u(x_1, \ldots, x_n) \\ \exists y \text{ tq } y > z \end{array} \right\}$$

Alors on a bien, d'arpès ce qui précède, $Y \underset{V}{>} Z$.

De plus $\forall z \in Z$, $\exists y$ tq $y > z$: $Y \underset{y}{\geq} Z$.

A-t-on $Z \in A$? Vu la définition de A, il suffit de vérifier que :

$\forall i \in \{1,\dots, n\}$, $\forall x \in X_i$, $\exists z \in Z$ tq $z > x$

Or $\forall i \in \{1,\dots, n\}$, $X_i \underset{\sim EM}{<} Y$

Donc $\forall i_0 \in \{1,\dots, n\}$, $\forall x \in X_i$, $\exists y \in Y$ tq $x < y$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Mais } y \in Y \\ \quad Y \underset{\sim V}{>} X_i,\ \forall i \in \{1,\dots, n\} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \forall i \in \{1,\dots, n\},\ \exists x_i \in X_i,\ y > x_i \\ \quad i \neq i_0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \exists z \in u(x_1,\dots, x_{i_{0-1}}, x, x_{i_{0+1}},\dots, x_n),\ y > z$$

$$\Rightarrow \exists z \in Z,\ z > x.$$

On peut donc déjà dire que $\underline{u(X) \subset A}$: En effet soit Y une borne supérieure minimale de X.

D'après ce qui précède : $\exists Z \in A$, $Y > Z$.

Mais tout élément de A est borne supérieure de X, et Z est borne minimale : $Y = Z$ et donc $Y \in A$

$$\text{Mais } A \subset P\Big(\bigcup_{\substack{x_i \in X_i \\ i \in \{1,\dots, n\}}} u(x_1,\dots, x_n)\Big) \subset P\Big(u^*\big(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\big)\Big)$$

Or pour chaque n-uple $(x_1,\dots, x_n)$, $u(x_1,\dots, x_n)$ est fini ($x_i \in B$, et D S.F.P.), et $X_1 \times\dots\times X_n$ est fini.

Donc A est fini. $u(X)$ *sera donc un ensemble complet de bornes supérieures de X* ; en effet :

$\forall Y$, Y borne supérieure de X, $\exists Z_1 \in A$, $Y > Z_1$

Soit $Z_1 \in u(X)$. c'est fini :

Soit non ; Z_1 n'est donc pas minimale : $\exists Z_2 \in A$, $Y > Z_1 > Z_2$.

Soit $Z_2 \in u(X)$: c'est fini.

Soit on réitère le processus ; or A est fini ; le processus s'arrête donc, et :

$\forall Y$, Y borne supérieure de X, $\exists Z \in u(X)$, $Y > Z$.

c.q.f.d.

Il reste donc à montrer que $u^*(X)$ est fini.

Mais

<u>*Lemme 7*</u> : $z \subset P(u^*(\bigcup_{i=1}^{n} X_i) \Longrightarrow u(z) \subset P(u^*(\bigcup_{i=1}^{n} X_i))$

<u>Dm</u> : En effet, soit $z = \{Z_1, \ldots, Z_p\}$, $Z_i \in P(u^*(\bigcup_{i=1}^{n} X_i))$

D'après le lemme 6 :

$$u(z) \subset P(\bigcup_{\substack{z_i \in Z_i \\ i \in \{1, \ldots, p\}}} u(z_1, \ldots, z_p)) \subset P(u^*(\bigcup_{i=1}^{n} Z_i)$$

Mais $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$, $Z_i \subset u^*(\bigcup_{i=1}^{n} X_i)$

Donc $$\bigcup_{i=1} Z_i \subset u^*(\bigcup_{i=1}^{n} X_i$$

$$u^*(\bigcup_{i=1}^{p} Z_i) \subset u^*(\bigcup_{i=1}^{n} X_i)$$

c.q.f.d.

Donc $u^*(X) \subset P(u\ (\bigcup_{i=1}^{n} X_i))/\simeq_{EM}$.

Or chaque X_i est fini finitaire, donc $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$ est fini finitaire, $u^*(\bigcup_{i=1}^{n} X_i)$ est fini - puisque D est S.F.P. - , et $P(u^*(\bigcup_{i=1}^{n} X_i))$ l'est aussi. Donc son quotient modulo $\simeq_{EM}$ reste fini et <u>$u^*(X)$ est fini</u>, ce qui achève la démonstration du théorème annoncé.

Donc la catégorie des S.F.P. est fermée pour l'opérateur P_{EM}. On pouvait se demander s'il en est de même pour les c.p.o.'s infinitaires. Il suffit de considérer le c.p.o. des arbres pour se convaincre du contraire :

Soit $\Sigma = \{a, b, \begin{array}{c} c \\ \diagup\diagdown \end{array}\}$

$A_1 = \{ \begin{array}{ccc} & c & \\ \diagup & & \diagdown \\ a & & \Omega \end{array} , \begin{array}{ccc} & c & \\ \diagup & & \diagdown \\ \Omega & & a \end{array} \} = con(\overline{A}_1)$

$A_2 = \{ \begin{array}{ccc} & c & \\ \diagup & & \diagdown \\ b & & \Omega \end{array} , \begin{array}{ccc} & c & \\ \diagup & & \diagdown \\ \Omega & & b \end{array} \} = con(\overline{A}_2)$

alors si $B_1 = \{ \begin{array}{ccc} & c & \\ \diagup & & \diagdown \\ a & & a \end{array} , \begin{array}{ccc} & c & \\ \diagup & & \diagdown \\ b & & b \end{array} \} = con(\overline{B}_1)$

et $B_2 = \{ \begin{array}{ccc} & c & \\ \diagup & & \diagdown \\ a & & b \end{array} , \begin{array}{ccc} & c & \\ \diagup & & \diagdown \\ b & & a \end{array} \} = con(\overline{B}_2)$

On a $B_1 >_{EM} A_1$ et $B_1 >_{EM} A_2$

$B_2 >_{EM} A_1$ et $B_2 >_{EM} A_2$

et $\nexists$ c tq $\left\{ \begin{array}{l} B_1 > c > A_1 \text{ et } B_1 > c > A_2 \\ \\ B_2 > c > A_1 \text{ et } B_2 > c > A_2 \end{array} \right\}$

i.e. (A_1, A_2) admet des bornes supérieures, mais pas de sup :

$P_S(T_\Omega(\Sigma))$ *n'est pas infinitaire.*

On a vu que sur les représentants canoniques, $<_{\sim EM}$ se réduisait au préordre simple d'Egli-Milner, i.e. :

$$Z < Y \text{ ssi } \left\{ \begin{array}{l} \forall z \in Z, \exists y \in Y \text{ tq } z < y \\ \text{et } \forall y \in Y, \exists z \in Z \text{ tq } z < y \end{array} \right.$$

Mais on peut remarquer que $\mathcal{P}(D)$ muni de ce préordre (i.e. : l'ensemble des classes d'équivalences muni de l'ordre quotient) n'est *pas* nécessairement un <u>c.p.o.</u> :

Soit $\Sigma = \{b, a\}$

Alors si $A_n = \{\underset{\substack{| \\ \Omega}}{b^n}\} \cup \{\underset{\substack{| \\ a}}{b^p}, p \leq n\}$

On a • $A_{n+1} > A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

• $C_1 = \{b^\omega\} \cup \{\underset{\substack{| \\ a}}{b^p}, p \in \mathbb{N}\} > A_n, \forall n$

• $C_2 = \{\underset{\substack{| \\ a}}{b^p}, p \in \mathbb{N}\} > A_n, \forall n$

• $\forall n, C > A_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists c \in C$ tq $c > \underset{\substack{| \\ a}}{b^n}$

Or $\underset{\substack{| \\ a}}{b^n}$ est maximal dans $T_\Omega(\Sigma)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \underset{\substack{| \\ a}}{b^n} \in C$

i.e. $C_2 \subset c$

• $C_1 \not> C_2$ et $C_2 \not> C_1$

Supposons donc que $(A_n)_n$ admette un sup ; Soit S ce sup ; on devrait avoir :

• $S > A_n, \forall n$: donc $C_2 \subset S$

Soit $s \in S, s \notin C_2$:

$\forall n, \exists a_n \in A_n$ tq $s > a_n$

Or $A_n = \{\begin{array}{c} b^n \\ | \\ \Omega \end{array}\} \cup \{\begin{array}{c} b^p \\ | \\ a \end{array}, p \leq n\}$

et $s > \begin{array}{c} b^p \\ | \\ a \end{array} \Rightarrow s = \begin{array}{c} b^p \\ | \\ a \end{array} \Rightarrow s \in C_2$

Donc $\forall n,\ s > \begin{array}{c} b^n \\ | \\ \Omega \end{array}$

D'où $s > \sup\limits_n \begin{array}{c} b^n \\ | \\ \Omega \end{array} : s = b^{\omega}$

Finalement les seules bornes supérieures de $(A_n)_n$ sont C_1 et C_2 et alles sont incomparables : $(A_n)_n$ n'a pas de sup : $\mathcal{P}(T_\Omega(\Sigma))$ n'est pas un c.p.o.

B) $\mathcal{P}(D)$ comme espace métrique

On a donc deux "voies" pour métriser "$\mathcal{P}(D)$" (ou un sous-ensemble de $\mathcal{P}(D)$) : • Le métriser directement en utilisant la métrique sur D, et les méthodes classiques qui permettent de métriser l'ensemble des parties d'un espace métrique.

• Le métriser en le considérant comme un S.F.P., c'est-à-dire en l'ayant d'abord muni d'un des trois ordres précédents.

Après avoir précisé ce que donne chacune de ces deux voies, nous verrons qu'elles aboutissent au même résultat. i.e. à des topologies uniformément équivalentes sous certaines conditions.

1) METRISATION DE $\mathcal{P}(D)$

a) Métrique de Hausdorff

Rappelons d'abord quelques définitions :

Définition : Soit (E, d) un espace métrique.

$AX \in \mathcal{P}(E)$, $\forall Y \in \mathcal{P}(E)$; $\forall X$ $\forall B \in \mathcal{P}(E)$:

$d(a, B) \underset{\text{déf}}{=} \inf\{d(a, b) \,/\, b \in B\}$

$h(A, B) \underset{\text{déf}}{=} \sup\{d(a, B) \,/\, a \in A\}$

$d_1(X, Y) \underset{\text{déf}}{=} \sup(h(X, Y), h(Y, X))$

(d désignera à la fois la métrique sur D et la métrique de Hausdorff). d ne permet de métriser qu'une partie de $\mathcal{P}(E)$:

Proposition : d est une métrique sur l'ensemble des parties fermées, bornées non vides.

Dans notre cas, "bornée" n'est pas une contrainte, puisque si D est S.F.P., il est compact donc borné - pour la topologie de Lawson - De même "fermée" correspond aux contraintes que nous avions évoquées dans l'étude de l'ordre sur $\mathcal{P}(D)$.

$\mathcal{P}_d(E)$ désigne l'espace correspondant.

On peut donc appliquer ici cette construction.

Soit D un S.F.P., d'une métrique "de troncature" liée à une énumération v de B, la base de D

La construction de Hausdorff permet donc de métriser l'ensemble des parties fermées, bornées non vides de D ; Etudions plus précisément cette distance - qu'on notera d - :

Lemme : $\forall A \in \mathcal{P}_d(E)$, $\forall B \in \mathcal{P}_d(E)$:

$$d(A, B) < \frac{1}{1+n} \iff A[n] = B[n]$$

Dm : $\forall A \in \mathcal{P}_d(E)$, $\forall B \in \mathcal{P}_d(E)$, $\forall a \in A$:

$$d(a, B) < \frac{1}{1+n} \iff \exists b \in B \,/\, d(a, b) < \frac{1}{1+n}$$

$$\iff \exists b \in B \,/\, a[n] = b[n]$$

d'où $h(A, B) < \frac{1}{1+n} \iff \forall a \in A, \exists b \in B \,/\, a[n] = b[n]$

$$\iff A[n] \subset B[n]$$

et $d(A, B) < \frac{1}{1+n} \iff A[n] \subset B[n]$ et $B[n] \subset A[n]$

$$\iff A[n] = B[n].$$

c.q.f.d.

Cette distance est donc assez facile à étudier surtout elle permet de calculer la distance entre deux parties en ne "considérant" que les éléments.

D'après le lemme, d est encore une *ultramétrique* puisque :

$$\left.\begin{array}{l} d(A, B) < \frac{1}{1+n} \\ \\ d(B, C) < \frac{1}{1+n} \end{array}\right\} \Rightarrow A[n] = B[n] = C[n] \Rightarrow d(A, C) < \frac{1}{1+n}$$

On retrouve d'ailleurs facilement la proposition 1 - qui est générale - En effet :

$$d(A, B) = 0 \iff \forall n, A[n] = B[n] \iff \overline{A} = \overline{B}$$

$$\iff A = B \text{ (A et B fermés)}$$

Les représentants canoniques choisis dans chaque classe et pour chaque ordre, $<_{\mathcal{Y}}$, $<_{\mathcal{V}}$, $<_{EM}$ étant fermés et non vides, on peut donc métriser $\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(D)$, $\mathcal{P}\,(D)$, $\mathcal{P}_{EM}(D)$ en utilisant la métrique obtenue ci-dessus : si Can(X) désigne le représentant canonique de [X], on posera donc :

$$\underline{d_1([X], [Y]) \underset{\text{déf}}{=} d(Can(X), Can(Y))}$$

d_1 <u>est bien une métrique et même une ultramétrique</u>

- $d_1([X], [Y]) = d_1([Y], [X])$

- $d_1([X],[Y]) = 0 \iff Can(X) = Can(Y) \iff [X] = [Y]$

- $d_1([X], [Z]) = d(Can(X), Can(Z)) \leq \max(d(Can(X), Can(Y)),$

$$d(Can(Y), d(Can(2))$$

$$\leq \max(d_1[X], [Y]), d_1([Y], [Z]))$$

On aura d'après l'étude de d :

$$d_1([X], [Y]) < \frac{1}{1+n} \iff d(Can(X), Can(Y)) < \frac{1}{1+n}$$

$$\iff (Can(X))\,[n] = (Can(Y))\,[n]$$

donc pour $\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(D)$ =

$$d_1([X], [Y]) < \frac{1}{1+n} \iff (\mathcal{Y}(\overline{X}))\,[n] = (\mathcal{Y}(\overline{Y}))\,[n]$$

$$\iff (\mathcal{Y}(X))\,[n] = (\mathcal{Y}(Y))\,[n]$$

(puisque $\mathcal{Y}(\overline{X}) \cap B = \mathcal{Y}(X) \cap B$ et $\mathcal{Y}(\overline{X})\,[n] = \mathcal{Y}(\overline{X}) \cap D_n$)

- pour $\mathcal{P}(D)$:

$$d_1([X], [Y]) < \frac{1}{1+n} \iff (\mathcal{V}(\overline{X}))\,[n] = (\mathcal{V}(\overline{Y}))\,[n]$$

- pour $\mathcal{P}_{EM}(D)$:

$d_1([X], [Y]) < \frac{1}{1+n} \Longleftrightarrow (\mathrm{Con}(\overline{X}))\,[n] = \mathrm{Con}(\overline{Y})\,[n].$

b) Limites de Painlevé

A. Arnold et M. Nivat utilisent dans [1] une notion de convergence de suites d'ensembles issue des travaux de Painlevé.

Soit donc D un espace topologique séparé - ici un espace métrique - Soit $(A_i)_i$ une suite de $\mathcal{P}(D)$. On définit alors :

$L_iS(A_i) = \{x \in D \,/\, \forall V \in \mathcal{V}(x),\ \forall n,\ \exists n' > n, \text{tq } V \cap A_{n'} \neq \emptyset\}$

$L_iI(A_i) = \{x \in D \,/\, \forall V \in \mathcal{V}(x),\ \exists n \text{ tq } \forall n' > n\ V \cap A_{n'} \neq \emptyset\}.$

On dit que $(A_i)_i$ est $\mathcal{P}$-convergente si $L_iI(A_i) = {}_iLI(A)$ et sa limite, sera désignée par $L_i I(A_i)$.

Dans le cas où D est S.F.P., cette notion de convergence "coïncide" avec celle de Hausdorff puisque :

Proposition : $A_n \underset{\mathcal{P}}{\to} A \Longleftrightarrow \overline{A}_n \xrightarrow[\text{Hausdorff}]{} A$ (on montre facilement que $\mathrm{Lim}(A_i)$ est *fermé*)

<u>Dm</u> : • Supposons : $A_n \underset{\mathcal{P}}{\to} A$.

Pour montrer que $\overline{A}_n \to A$ au sens de Hausdorf, il suffit de montrer :

$\forall p,\ \exists n_0 \text{ tq } n > n_0 \Rightarrow \overline{A}_n[p] = A[p]$

Soit : $\forall p,\ \exists n_0 \text{ tq } n > n_0 \Rightarrow A_n[p] = A[p].$

Or $A_n \underset{\mathcal{P}}{\to} A \Rightarrow \forall a \in A,\ a \in \underset{n}{LI}(A_n)$

$\Rightarrow \forall a \in A,\ \forall p,\ \exists n_a \text{ tq } n > n_a\ \mathcal{B}(a, \frac{1}{1+p}) \cap A_n \neq \emptyset$

$\Rightarrow \forall a \in A,\ \forall p,\ \exists n_a \text{ tq } n > n_a \Rightarrow a[p] \in A_n[p].$

donc $\forall z \in A[p],\ \exists n_z \text{ tq } n > n_z \Rightarrow z \in A_n[p]$

Soit si $n_0 = \sup_{z \in A[p]} n_z$ (puisque A[p] est fini)

$\forall z \in A[p],\ n > n_0 \Rightarrow z \in A_n[p]$

i.e. : $n > n_0 \Rightarrow A[p] \subset A_n[p]$.

Il faut maintenant prouver : $\exists n_1,\ n > n_1 \Rightarrow A_n[p] \subset A[p]$

Supposons donc : $\forall n_1,\ \exists n > n_1,\ A_n[p] \not\subset A[p]$.

On peut donc construire une suite $(n_i)_i$ croissante et une suite $(z_i)_i$ tq :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ z_i \in A_{n_i} \\ \bullet\ z_i[p] \notin A[p] \end{array}\right\} \forall i$$

Or D est compact : on peut extraire de $(n_i)_i$ une suite $(n_{i_q})_q$ croissante telle que : $\exists z \in D,\ z_{i_q} \xrightarrow[q]{} z$

alors $\forall V \in \mathcal{V}(z),\ \exists q_0$ tq $q > q_0 \Rightarrow z_{i_q} \in \mathcal{V}(z)$

i.e. : $\forall V \in \mathcal{V}(z),\ \forall n_0\ \exists n' > n$ tq $V \cap A'_n \neq \emptyset$

On a bien $z \in \underset{i}{LS}(A_i)$: $z \in A$

Mais $\exists q$ tq $z[p] = z_{i_q}[p]$:

$$\left.\begin{array}{l} \text{donc } z \in A \\ z[p] \notin A[p] \end{array}\right\} \text{contradiction}$$

On a bien $\exists n_1$ tq $n > n_1 \Rightarrow A_n[p] \subset A[p]$

Soit $n > \sup(n_1, n_0) \Rightarrow A_n[p] = A[p]$.

• Supposons maintenant que : $\overline{A}_n \to A$ au sens de Hausdorff.

Donc, $\left[\begin{array}{l} \forall p,\ \exists n_0 \text{ tq } n > n_0 \Rightarrow A_n[p] = A[p] \\ A \text{ fermé.} \end{array}\right.$

Il faut montrer que $L_i I(A_i) = A = L_i S(A_i)$

Soit $x \in LS_i(A_i)$: $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $\forall n$, $\exists n' > n$ tq $V \cap A_{n'} \neq \emptyset$.

Donc $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall n$, $\exists n' > n$ tq $x[p] \in A_{n'}[p]$

mais $\forall p \in \mathbb{N}$, $\exists n$ tq $n' > n \Rightarrow A[p] = A_{n'}[p]$

d'où finalement : $\forall p \in \mathbb{N}$, $x[p] \in A[p]$: $x \in \overline{A}$

or $A = \overline{A}$: $\underline{x \in A}$

On a donc $LS_i(A_i) \subset A$.

Soit $a \in A$: $\forall p$, $\exists n_0$ tq $\forall n > n_0$, $a[p] \in A_{n_0}[p]$

Donc $\forall V \in \mathcal{V}(a)$, $\exists n_0$ tq $n > n_0 \Rightarrow V \cap A_n \neq \emptyset$.

D'où $a \in \underset{i}{LI}(A_i)$: $A \subset \underset{i}{LI}(A_i)$

Comme $\underset{i}{LI}(A_i) \subset \underset{i}{LS}(A_i)$ on a :

$$A = \underset{i}{LI}(A_i) = \underset{i}{LS}(A_i)$$

c.q.f.d.

c) Métrisation de $P_{\mathcal{Y}}(D)$ (resp. $P_{\mathcal{V}}(D)$, $P_{EM}(D)$) comme S.F.P.

La deuxième "voie" pour métriser $P_{\mathcal{Y}}(D)$ (resp. $P_{\mathcal{V}}(D)$, $P_{EM}(D)$) est de la considérer comme S.F.P. et d'appliquer la métrisation étudiée au I b).

Soit donc une énumération v de B ; On supposera que l'énumération $\mathcal{Y}$ de la base de $P_{\mathcal{Y}}(D)$ (resp. $P_{\mathcal{V}}(D)$, $P_{EM}(D)$) énumère d'abord les classes des parties de $u^*(D_1)$, puis celles de $u^*(D_2)$,... puis celles de $u^*(D_n)$, celles de $u^*(D_{n+1})$,...

Donc si $r(n)$ est le nombre de classes dont un élément au moins appartient à $P(u^*(D_n))$, on peut choisir μ telle que :

$$(\mu([c]) \leq r(n) \Longleftrightarrow \exists A \in [c] \ / \ A \subset u^*(D_n)), \ \forall c \in P(D).$$

De plus on a : $n \leq r(n)$ (puisque $\{x\}$ est équivalent à $\{y\}$ modulo $\simeq_{\mathcal{Y}}$ (resp. $\simeq_{\mathcal{V}}$, $\simeq_{EM}$) ssi $x = y$) ($r[n]$ dépend enfait de chaque ordre $\lesssim_{\mathcal{Y}}$, $\lesssim_{\mathcal{V}}$, $\lesssim_{EM}$).

Etudions pour chaque domaine construit au I), les métriques obtenues ainsi :

α) $\mathcal{P}_{<y}(D)$

On a donc, si δ est la métrique "liée à l'énumération" construite à partir de μ :

$$\delta([A], [E]) < \frac{1}{1+r(n)} \iff \forall C \in \mathcal{P}(u^*(D_n))\ C \underset{\sim y}{<} A \iff C \underset{\sim y}{<} E$$

Donc $A[n] \underset{\sim y}{<} A \Rightarrow A[n] \underset{\sim y}{<} E$

et $E[n] \underset{\sim y}{<} E \Rightarrow E[n] \underset{\sim y}{<} A$

mais $A[n] \underset{\sim y}{<} B \Rightarrow \forall a \in A, \exists e \in E$ tq $a[n] < e$

Or $a[n] < e \Rightarrow a[n] < e[n]$

Donc $\forall a \in A, \exists e$ tq $a[n] < e[n]$: $A[n] \underset{\sim y}{<} B[n]$

De même $E[n] \underset{\sim y}{<} A[n]$;

Finalement on a $A[n] \underset{\sim y}{=} E[n]$

Soit $Y(A[n]) = Y(E[n])$ (puisque $A[n]$ et $E[n]$ sont finis finitaires).

On sait maintenant que :

$$\delta([A], [E]) < \frac{1}{1+n} \Rightarrow A[n] \underset{\sim y}{=} E[n]$$

Montrons la réciproque :

$$A[n] \underset{\sim y}{=} E[n] \overset{?}{\Rightarrow} \delta([A],[E]) < \frac{1}{1+n}$$

Soit donc C, $C \underset{\sim y}{<} A$, $C \in \mathcal{P}(u^*(D_n))$

$C \underset{\sim y}{<} A \Rightarrow \forall c \in C, \exists a \in A, c < a$

$$\left.\begin{array}{l} c \in u^*(D_n) \\ c < a \end{array}\right\} \Rightarrow c < a[n]$$

Donc : $\forall c \in C, \exists a \in A \,/\, c < a\ n$

i.e. : $\left.\begin{array}{l} C \underset{\sim y}{<} A[n] \\ A[n] \simeq E[n] \end{array}\right\} \Rightarrow C \underset{\sim y}{<} E[n] \Rightarrow C \underset{\sim y}{<} E$

Donc $\left.\begin{array}{l} C \in \mathcal{P}(u^*(D_n)) \\ C \underset{\sim y}{<} A \end{array}\right\} \Rightarrow C \underset{\sim y}{<} E$

On montrerait bien sûr de même

$$\left.\begin{array}{l} C \in \mathcal{P}(u^*(D_n)) \\ C \underset{\sim y}{<} E \end{array}\right\} \Rightarrow C \underset{\sim y}{<} E$$

donc $\delta([A], [D]) < \frac{1}{1+n}$

c.q.f.d.

D'où finalement :

$\underline{\delta([A], [E]) < \frac{1}{1+r(n)} \iff A[n] \underset{\sim y}{\bar{\sim}} E[n]}$

β) $\underline{\mathcal{P}_{<V}(D)}$

De même pour $\mathcal{P}_{<V}(D)$, si δ est la métrique "liée à l'énumération" construite à partir de μ :

$$\delta([X], [Y]) < \frac{1}{1+r(n)} \iff \forall C \in \mathcal{P}(u^*(D_n)),\ C \underset{\sim V}{<} X \iff C \underset{\sim V}{<} Y$$

on a toujours :

$X[n] \underset{\sim V}{<} X$ (puisque $X \subset V(X[n])$).

Donc

$X[n] \underset{\sim V}{\leq} Y : \forall y \in Y, \exists x \in X \quad y > x[n]$

Donc $y[n] > x[n] : \forall y \in Y, \exists x \in X / y[n] > x[n]$

Soit $Y[n] \underset{\sim V}{\geq} X[n]$.

De même on pourrait montrer que $X[n] \underset{\sim V}{\geq} Y[n]$.

Donc $X[n] \underset{\sim V}{\bar{=}} Y[n]$.

Réciproquement, supposons $X[n] \underset{\sim V}{\bar{=}} Y[n]$

$\forall C \in P(u^*(D_n)) \; (C \underset{\sim V}{<} X \Rightarrow \forall x \in X, \exists c \in C, x > c)$

$$\left.\begin{array}{l} x > c \\ \\ c \in D_n \end{array}\right\} \Rightarrow x[n] > c$$

Donc $\forall x \in X, \exists c \in C, x[n] >$

Soit $X[n] \underset{\sim V}{>} C$

Comme $Y[n] \simeq_V X[n]$, $Y[n] \underset{\sim V}{>} C$

Et donc $Y \underset{\sim V}{>} C$

De même on montrerait que

$$\left.\begin{array}{l} C \in P(u^*(D_n)) \\ \\ C \underset{\sim}{<} Y \end{array}\right\} \Rightarrow C \underset{\sim}{<} X$$

D'où finalement :

$$\underline{\delta([X], [Y]) < \frac{1}{1+r(n)} \Longleftrightarrow X[n] \underset{\sim V}{\bar{=}} Y[n]}$$

γ) $P_{<EM}(D)$

Toujours, si δ est la métrique "liée à l'énumération" construite à partir de μ :

$$\delta([X], [Y]) < \frac{1}{1+r(n)} \iff \forall c \in P(u^*(D_n)),\ C \underset{\sim EM}{<} X \iff C \underset{\sim EM}{<} Y$$

D'après α et β) :

$$X[n] \bar{\sim}_{EM} Y[n] \Rightarrow X[n] \bar{\sim}_{\mathcal{Y}} Y[n] \Rightarrow \forall C \in P(u^*(D_n)),\ c \underset{\sim \mathcal{Y}}{<} X \iff c \underset{\sim}{<} Y$$

$$X[n] \bar{\sim}_{EM} Y[n] \Rightarrow X[n] \sim_{\mathcal{V}} Y[n] \Rightarrow \forall C \in P(u^*(D_n)),\ C \underset{\sim \mathcal{V}}{<} X \iff C \underset{\sim \mathcal{V}}{<} Y$$

Donc

$$X[n] \bar{\sim}_{EM} Y[n] \Rightarrow \forall C \in P(u^*(D_n)),\ C \underset{\sim EM}{<} X \iff C \underset{\sim EM}{<} Y$$

Réciproquement, supposons que :

$$\forall C \in P(u^*(D_n)),\ C \underset{\sim EM}{<} X \iff C \underset{\sim EM}{<} Y$$

Donc $\left.\begin{array}{l} X[n] \underset{\sim EM}{<} X \\ X[n] \in P(u^*(D_n)) \end{array}\right\} \Rightarrow X[n] \underset{\sim EM}{<} Y$

Or $X[n] \underset{\sim EM}{<} Y \Rightarrow X[n] \underset{\sim EM}{<} Y[n]$

De même on a : $Y[n] \underset{\sim EM}{<} X[n]$

D'où $Y[n] \bar{\sim}_{EM} X[n]$

Finalement :

$$\underline{\delta([X], [Y]) < \frac{1}{1+r(n)} \iff X[n] \bar{\sim}_{EM} Y[n]}$$

Conclusion

Soit δ' la distance définie sur $\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(D)$ (resp. $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(D)$, resp. $\mathcal{P}_{EM}(D)$) par :

$\delta'([X], [Y]) < \frac{1}{1+n} \iff X[n] \,\bar{\sim}_{\mathcal{Y}}\, Y[n]$ (resp. $\bar{\sim}_{\mathcal{V}}$, resp. $\bar{\sim}_{EM}$).

Alors d'après ce qui précède, δ et δ' vérifient :

$\delta([X], [Y]) < \frac{1}{1+r(n)} \iff \delta'([X], [Y]) < \frac{1}{1+n}$

c.à.d que δ et δ' sont *uniformément* équivalentes.

Comme tous les résultats obtenus ci-après concernent essentiellement l'équivalence uniforme des distances considérées, quand on parlera de métrique obtenue par la métrisation du S.F.P. $\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(D)$ (resp. $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(D)$, resp. $\mathcal{P}_{EM}(D)$), on considèrera l'une ou l'autre des deux distances étudiées ci-dessus δ ou δ'.

2) COMMUTATION DE $\mathcal{M}$ ET $\mathcal{P}$

On appelera $\mathcal{M}$ la métrisation canonique d'un S.F.P. (en fait l'une quelconque des métrisations uniformément équivalentes définies précédemment), $\mathcal{P}_d$ la métrisation correspondant à la métrisation de Hausdorff de l'ensemble des représentants canoniques du domaine considéré. Pour chacun des trois domaines, on pourra donc schématiser les deux approches de la métrisation par "$\mathcal{P}_d \circ \mathcal{M}$" pour la première, "$\mathcal{M} \circ \mathcal{P}$" pour la seconde. On va voir ici que sous certaines conditions - conditions réalisées par les mots et les arbres - , ces deux approches aboutissent à des métriques uniformément équivalentes.

a) L'ordre de Hoare

Soit donc d_1 la métrique obtenue par la première approche, δ_1 celle obtenue par la seconde, i.e. :

$$(D, <) \xrightarrow{\mathcal{M}} (D, d) \xrightarrow{\mathcal{P}_d} (\mathcal{P}_{<\mathcal{Y}}(D), d_1)$$

$$(D, <) \xrightarrow{\mathcal{P}_{>\mathcal{Y}}} (\mathcal{P}_{<\mathcal{Y}}(D), <) \xrightarrow{\mathcal{M}} (\mathcal{P}_{<\mathcal{Y}}(D), \delta_1)$$

On a donc d'après l'étude faite en 1) :

$$d_1([X], [Y]) < \frac{1}{1+n} \Longleftrightarrow (\mathcal{Y}(X)) [n] = (\mathcal{Y}(Y)) [n]$$

$$\delta_1([X],[Y]) < \frac{1}{1+n} \Longleftrightarrow \mathcal{Y}(X[n]) = \mathcal{Y}(Y[n])$$

Or :

<u>*Lemme 1*</u> : pour tout S.F.P. D :

$$(\mathcal{Y}(X)) [n] = (\mathcal{Y}(Y)) [n] \Longleftrightarrow \mathcal{Y}(X[n]) = \mathcal{Y}(Y[n])$$

<u>Dm</u> : • $(\mathcal{Y}(X) [n] = (\mathcal{Y}(Y)) [n] \Longrightarrow \mathcal{Y}(X[n]) = \mathcal{Y}(Y[n])$

$z \in \mathcal{Y}(X[n]) \Longrightarrow \exists x \in X$ tq $z < x[n]$

$x[n] \in (\mathcal{Y}(X)) [n] \Longrightarrow \exists y \in Y, \exists t$ tq $t < y$ et $x[n] = t[n]$

$t < y \Longrightarrow t[n] < y[n]$

d'où $z < x[n] < y[n]$: $z \subset \mathcal{Y}(Y[n])$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Donc } \mathcal{Y}(X[n]) \subset \mathcal{Y}(Y[n]) \\ \text{Symétriquement : } \mathcal{Y}(Y[n]) \subset \mathcal{Y}(X[n]) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathcal{Y}(X[n]) = \mathcal{Y}(Y[n])$$

• $\mathcal{Y}(X[n]) = \mathcal{Y}(Y[n]) \Longrightarrow (\mathcal{Y}(X)) [n] = (\mathcal{Y}(Y)) [n]$

$z \in (\mathcal{Y}(X)) [n] \Longrightarrow \exists x \in X, \exists t \quad \mathcal{Y}(X) / z = t[n]$ et $t < x$

$$\Longrightarrow (\exists x \in X / z < x) \text{ et } z = z[n]$$

$$\left.\begin{array}{l} z < x \Longrightarrow z(n) < x(n) \\ a = z(n) \end{array}\right\} \Longrightarrow z < x(n) \Longrightarrow z \in \mathcal{S}(X[n]) \Longrightarrow z \in \mathcal{S}(Y[n])$$

Donc $\exists y \in Y / z < y[n]$

$$\text{D'où } z < y : \left.\begin{array}{r} z \in \mathcal{V}(Y) \\ z = z[n] \end{array}\right\} \Rightarrow z \in (\mathcal{V}(Y))\,[n]$$

Donc $(\mathcal{V}(X))\,[n] \subset (\mathcal{V}(Y))\,[n]$

Symétriquement on obtiendrait : $(\mathcal{V}(Y))\,[n] \subset (\mathcal{V}(X))\,[n]$

c.q.f.d.

Donc :

$$d_1([X], [Y]) < \frac{1}{1+n} \iff \delta_1([X], [Y]) < \frac{1}{1+n}$$

i.e. : d_1 et δ_1 *définissent exactement les même métriqies* sur $P_{<y}(D)$, soit : les *métriques définies par* $P_d \circ M$ *d'une part, par* $M \circ P_{<y}$ *sont uniformément équivalentes.*

b) L'ordre de Smyth

De la même façon on a :

$$(D, <) \overset{M}{\rightarrow} (D, d) \xrightarrow{P_d} (P_{<V}(D), d_2)$$

$$(D, <) \xrightarrow{P_{<V}} (P_{<V}(D), <_V) \overset{M}{\rightarrow} (P_{<V}(D), \delta_2)$$

Mais ici d_2 et δ_2 ne sont pas uniformément équivalentes pour tout S.F.P. comme le montre l'exemple suivant :

Soit le domaine plat : $D = (\perp, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ avec

$$\begin{cases} \bullet\ \perp < x_i\ \forall i \in \mathbb{N}^* \\ \bullet\ y < x \Rightarrow (y = x \text{ ou } y = \perp) \end{cases}$$

Soit alors : $A_n = \{x_1, x_n\} = V(\overline{A})$

$B_n = \{x_n\} = V(\overline{B}_n)$

Alors : $\forall n,\ d_2(A_n, B_n) = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$ car $B_n[2] = \{\perp\}$ et $A_n[2] = \{\perp, x_1\}$

$$\text{Mais } \delta_2(A_n, A) < \frac{1}{n} \text{ puisque } \begin{array}{r l} \mathcal{V}(A_n[n]) = & \mathcal{V}(\{x_1, \perp\}) \\ & \mathcal{V}(\{\perp\}) \\ (B_n[n-1]) = & \mathcal{V}(\{\perp\}) \end{array}$$

donc d_2 et δ_2 ne sont pas uniformément équivalentes.

Si on revient à l'étude faite en 1) on a :

$$d_2([X], [Y]) < \frac{1}{1+n} \iff (\mathcal{V}(\overline{Y}))\ [n] = (\perp(\overline{Y}))\ [n]$$

$$\delta_2([X], [Y]) < \frac{1}{1+n} \iff \mathcal{V}(X[n]) = \mathcal{V}(Y[n])$$

Donc d_2 et δ_2 sont uniformément équivalentes ssi :

$$\forall n,\ \exists p \text{ tq } (\mathcal{V}(\overline{X}))\ [p] = (\mathcal{V}(\overline{Y}))\ [p] \Rightarrow \mathcal{V}(X[n]) = \mathcal{V}(Y[n])$$

et

$$\forall n,\ \exists p \text{ tq } \mathcal{V}(X[p]) = \mathcal{V}(Y[p]) \Rightarrow (\mathcal{V}(\overline{X}))\ [n] = (\mathcal{V}(\overline{Y}))\ [n]$$

Mais pour tout S.F.P. D, on a :

<u>*Lemme 2*</u> : $(\mathcal{V}(\overline{X}))\ [n] = (\mathcal{V}(\overline{Y}))\ [n] \Rightarrow \mathcal{V}(X[n]) = \mathcal{V}(Y[n])$.

<u>Dm</u> : Soit $z \in \mathcal{V}(X[n])$: $\exists x \in X$ tq $z > x[n]$

$x \in X \Rightarrow x \in \mathcal{V}(\overline{X}) \Rightarrow x[n] \in (\mathcal{V}(\overline{X}))\ [n]$

donc par hypothèse $x[n] \in (\mathcal{V}(\overline{Y}))\ [n]$

D'où : $\exists t \in \overline{Y}$, $\exists r$ tq $r > t$ et $x[n] = r[n]$

$$r > t \Rightarrow r[n] > t[n]$$

$$\begin{aligned} t \in \overline{Y} \Rightarrow t[n] \in \overline{Y}\, n \ &\Rightarrow t[n] \in Y[n] \\ &\Rightarrow \exists y \in Y \text{ tq } t[n] = y[n] \end{aligned}$$

D'où : $\exists y \in Y$ tq $x[n] > y[n]$

$\exists y \in Y$ tq $z > y[n]$: $z \in \ (Y[n])$

Donc $(X[n]) \subset V(Y[n])$ (et $V(Y[n]) \subset V(X[n])$, par symétrie).

c.q.f.d.

Donc une condition nécessaire et suffisante pour que d_2 et δ_2 soient uniformément équivalentes est (P) :

• $\forall n, \exists p$ tq $V(X[p]) = V(Y[p]) \Rightarrow (V(\overline{X}))[n] = (V(\overline{Y}))[n]$

Or cette condition est respectée dans le cas des mots et des arbres. i.e. : si $D = \Omega_r^{\infty}(\Sigma)$ ou $\tilde{T}_{\Omega}(\Sigma)$. On considèrera donc ici que le tronqué à profondeur n est le tronqué habituel.

(cf. 1.c ; on a alors) :

Lemme 3 : Si $D = \Omega_{\Omega}^{\infty}(\Sigma)$ ou $T_{\Omega}^{\infty}(\Sigma)$:

$V(X[n]) = V(Y[n]) \Rightarrow (V(\overline{X}))[n] = (V(\overline{Y}))[n]$

Dm : Soit $z \in (V(\overline{X}))[n]$: $z = t[n]$, $t \in V(\overline{X})$

$t \in V(\overline{X})$: $\exists x' \in \overline{X}$ tq $t > x'$

Donc $t[n] > x'[n]$

mais $x'[n] \in \overline{X}[n] \Rightarrow x'[n] \in X[n] \Rightarrow \exists x \in X$ tq $x'[n] = x[n]$

donc $\exists x \in X$ tq $z = t[n] > x[n]$

Soit $z \in V(X[n])$: $z \in V(Y[n])$ par hypothèse.

Donc $\exists y \in Y$ tq $z > y[n]$

Mais $z \in D_n$; or on a la propriété suivante :

$$\left.\begin{array}{l} z > y[n] \\ \\ z \in D_n \end{array}\right\} \Rightarrow \exists u \text{ tq } u > y \text{ et } z = u[n]$$

En effet $z > y[n]$ implique que z a été obtenu en prolongeant le tronqué à profondeur n de y. Mais si z appartient à D_n, et donc est de profondeur n, cela implique qu'on n'a prolongé que des branches de profondeur inférieure strictement à n de $y[n]$, donc des branches laissées intactes par la troncature. Donc le prolongement, qui transforme $y[n]$ en z, peut être appliqué à x; soit u l'arbre obtenu ; alors $u[n] = z$ et $u > y$.

Donc $z = u[n]$ avec $u \in \mathcal{V}(Y)$: $z \in \mathcal{V}(Y)\ [n]$

c.q.f.d.

Donc pour $D = T_\Omega^\infty(\Sigma)$ ou $D = M_\Omega^\infty(\Sigma)$ d_2 et δ_2 sont uniformément équivalentes, ainsi que pour tout S.F.P. vérifiant (P).

Remarque : Pour tout S.F.P., l'injection canonique de $(\mathcal{P}_{<\mathcal{V}}(D), d_2)$ dans $(\mathcal{P}_{<\mathcal{V}}(D), \delta_2)$ est continue.

c) L'ordre d'Egli-Milner

Malheureusement, dans ce cas les deux métrisations de $\mathcal{P}_{<EM}(D)$ définies précédemment ne sont pas uniformément équivalentes, même si D est $T_\Omega^\infty(\Sigma)$, comme le montre l'exemple suivant :

$$A_n = \{c(a^n(b), \Omega),\ c(a^n(d), a(b))\} = Con(\overline{A}_n)$$

$$B_n = \{c(a^n(b), a(\Omega))\} \cup A_n = Con(\overline{B}_n)$$

Alors si d_3 est la distance obtenue par la première métrisation (i.e. $\mathcal{P}_d \circ M$), δ_3 celle obtenue par la seconde (i.e. $\mathcal{P}_{<EM} \circ M$) on a :

$$d_3(A_n, B_n) = \frac{1}{3} \text{ puisque } A_n[3] = \{c(a^2(\Omega), \Omega),\ c(a^2(\Omega), a(b))\}$$

$$B_n[3] = \{\begin{array}{ccc} & c & \\ a^2 \diagup & & \diagdown\ \Omega \\ | & & \\ \Omega & & \end{array}, \begin{array}{ccc} & c & \\ a^2 \diagup & & \diagdown\ a \\ | & & | \\ \Omega & & b \end{array}\}$$

Mais

$$\delta_3(A_n, B_n) < \frac{1}{n} \text{ puisque } A_n[n+1] = \{\begin{array}{ccc} & c & \\ a^n \diagup & & \diagdown\ \Omega \\ | & & \\ \Omega & & \end{array}, \begin{array}{ccc} & c & \\ a^n \diagup & & \diagdown\ a \\ | & & | \\ \Omega & & b \end{array}\}$$

$$B_n[n+1] = A_n[n+1] \cup \{\begin{array}{ccc} & c & \\ a^n \diagup & & \diagdown\ a \\ | & & | \\ \Omega & & \Omega \end{array}\}$$

donc : $Con(A_n[n+1]) = Con(B_n[n+1])$

Mais le préordre d'Egli-Milner peut être considéré comme le "produit" des préordres naïfs et de Smyth, i.e. :

$$\forall X, Y, Z, T \in \mathcal{P}(D), (X, Y) < (Z, T) \iff \begin{cases} X \underset{\sim y}{<} Z \\ \\ Y \underset{\sim V}{<} T \end{cases}$$

Donc pour chaque S.F.P. D, on peut construire un nouveau S.F.P. - que nous appelerons $\mathcal{C}(D)$ - en faisant le produit cartésien des S.F.P.$\mathcal{P}_{<y}(D)$ et $\mathcal{P}_{<V}(D)$ (ce produit est bien un S.F.P., cf. [19].

Pour métriser ce S.F.P. on a encore deux approches : métriser $\mathcal{C}(D)$ en tant que S.F.P., ou métriser $\mathcal{C}(D)$ en tant que produit cartésien d'espaces métriques (pour cela, on peut prendre l'une quelconque des métriques uniformément équivalentes sur le produit cartésien d'espaces métriques : le sup, la somme,...) ; Soit donc δ_4 la distance correspondant à la première approche, d_4 celle correspondant à la seconde. δ_4 dépend du choix de l'énumération de la base finitaire de $\mathcal{C}(D)$; mais on paut supposer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists s_n \in \mathbb{N} \text{ tq } \left.\begin{array}{r} \exists X', X' \subset D_n \text{ et } X' \simeq X \\ \\ \exists Y', Y' \subset D_n \text{ et } Y' \simeq Y \end{array}\right\} \iff V([X], [Y]) \leq S_n$$

On aura alors :

<u>*Lemme 4*</u> : $\delta_4(([X], [Y]), ([Z], [T])) < \frac{1}{1+S_n} \iff \begin{cases} X[n] \underset{\sim y}{<} Z[n] \\ \quad\text{et} \\ Y[n] \underset{\sim V}{<} T[n] \end{cases}$

Dm : Supposons que $\delta_4(([X], [Y]), ([Z], [T])) < \frac{1}{1+S_n}$

$$\left.\begin{array}{l} (X[n], \{\bot\}) < ([X], [Y]) \\ X[n] \subset D_n \\ \{\bot\} \subset D_n \end{array}\right\} \Rightarrow \{X[n], \bot\} < ([Z], [T])$$

Donc $X[n] \underset{\sim V}{<} Z[n]$

De même on aura $Z[n] \underset{\sim V}{<} X[n]$.

De la même façon démontrera que $Y[n] \underset{\sim V}{=} T[n]$

• supposons que $X[n] \underset{\sim y}{=} Z[n]$

et $Y[n] \underset{\sim V}{=} T[n]$

Soit $\begin{cases} ([C], [E]) < ([X], [Y]) \\ V(C, E) \leq s_n \end{cases}$

donc $C \underset{\sim}{<} X$ et $C \subset D_n$: $C \underset{\sim y}{<} X[n]$

$E \underset{\sim V}{<} Y$ et $E \subset D_n$: $E \underset{\sim V}{<} Y[n]$

d'où par hypothèse $C \underset{\sim y}{<} Z[n] \underset{\sim y}{<} Z$

$E \underset{\sim V}{<} T[n] \underset{\sim V}{<} T$

Et (par symétrie), $\delta(([X], [Y]), ([Z], [T])) < \frac{1}{1+S_n}$

c.q.f.d.

Etudions maintenant d_4 ; On peut dire :

$d_4(([X], [Y]), ([Z], [T])) = \max(d_1([X], [Z]), d_2([Y], [T])$

d'où :

$$d_4(([X], [Y])), ([2], [T])) < \frac{1}{1+n} \iff \begin{cases} (\mathcal{Y}(X))\,[n] = (\mathcal{Y}(Y))\,[n] \\ \text{et} \\ (\mathcal{V}(\overline{Z}))\,[n] = (\mathcal{V}(\overline{T}))\,[n] \end{cases}$$

Où d'après ce qui précède :

$$X[n] \underset{\sim\mathcal{Y}}{=} Z[n] \iff (\mathcal{Y}(X))\,[n] = (\mathcal{S}(Y))\,[n]$$

$$(\mathcal{V}(\overline{Y}))\,[n] = (\mathcal{V}(\overline{T}))\,[n] \Rightarrow Y[n] \underset{\sim\mathcal{V}}{=} T[n]$$

et pour *tout S.F.P. vérifiant* (P) :

$$\forall n,\ \exists p \text{ tq } Y[p] \simeq_{\mathcal{V}} T[p] \Rightarrow (\mathcal{V}(\overline{Y}))\,[n] = (\mathcal{V}(\overline{T}))\,[n]$$

Donc :

$$\forall n,\ d_4(([X], [Y]), ([Z], [T])) < \frac{1}{1+n} \Rightarrow \delta_4(([X], [Y]), ([Z], [T])) < \frac{1}{1+S_n}$$

Et

$$\forall n,\ \exists p \text{ tq } \delta_4(([X], [Y]), ([Z], [T])) < \frac{1}{1+S_p} \Rightarrow d_4(([X], [Y]), ([Z], [T])) < \frac{1}{1+n}$$

d'où pour tout S.F.P. vérifiant (P), d_4 *et* δ_4 *sont uniformément équivalentes,* c-à-d que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{P}_{<\mathcal{Y}}(D) & \xrightarrow{M} & (\mathcal{P}_{<\mathcal{Y}}(D),\ d_1) \\
\mathcal{P}_{<\mathcal{V}}(D) & \xrightarrow{M} & (\mathcal{P}_{<\mathcal{V}}(D),\ d_2) \\
\text{produit cartésien de S.F.P.}\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow\ \text{produit cartésien d'espaces métriques} \\
C(D) & \xrightarrow{M} & (C(D),\ d_4(\delta_4))
\end{array}$$

Or $(\mathcal{P}_{<EM}(D), <_{EM})$ peut être considéré comme un sous-ensemble de $(C(D), <)$. Soit donc i l'injection canonique $i([X]_{EM}) = ([X]_{\mathcal{Y}}, [X]_{\mathcal{V}})$

(Soit pour les réprésentants canoniques :

$$i(\mathrm{Con}(\overline{X})) = (\mathcal{Y}(\overline{X}), \mathcal{V}(\overline{X})))$$

On a donc :

$$\begin{array}{ccc}(\mathcal{P}_{<EM}(D),\ <_{EM}) & \xrightarrow{\ i\ } & (\mathcal{C}(D),\ <) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle M} & & \Big\downarrow{\scriptstyle M} \\ (\mathcal{P}_{<EM}(D),\ \delta_3) & \xrightarrow{\ j\ } & (\mathcal{C}(D),\ \delta_4)\end{array}$$

(j représente l'injection canonique de l'espace métrique $(\mathcal{P}_{<EM}(D),\ \delta_3)$ dans l'espace métrique $(\mathcal{C}(D),\ d_4)$). Alors

<u>*Proposition*</u> : δ_3 est uniformément équivalente à la restriction de δ_4 à j $j(\mathcal{P}_{<EM}(D))$:

<u>Dm</u> : d'après le lemme 4,

$$\delta_4[j([X]),\ j([Y])] < \frac{1}{1+S_n} \iff \begin{cases} X[n] \ \bar{\sim}_{\mathcal{Y}}\ Y[n] \\ \text{et} \\ X[n] \bar{\sim}_{\mathcal{V}}\ Y[n] \end{cases}$$

$$\iff X[n] \bar{\sim}_{EM}\ Y[n]$$

$$\iff \delta_3([X],\ [Y]) < \frac{1}{1+n}$$

c.q.f.d.

D'où finalement δ_3 est uniformément équivalente à la restriction de d_4 à $j(\mathcal{P}_{<EM}(D))$, i.e. d_p :

$$d_p([X],\ [Y]) = \sup(d(\mathcal{Y}(\overline{X}),\ \mathcal{Y}(\overline{Y})),\ d(\mathcal{V}(\overline{X}),\ \mathcal{V}(\overline{Y})).$$

(d désigne toujours la métrique de Hausdorff obtenue à partir d'une métrique canonique sur D).

Conclusion :

Pour résumer :

- Pour tout S.F.P., le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
(D, <) \arrow[r, "M"] \arrow[d, "\mathcal{P}_{<\mathcal{Y}}"'] & (D, d) \arrow[d, "\mathcal{P}_d"] \\
(\mathcal{P}_{<\mathcal{Y}}(D), <_{\mathcal{Y}}) \arrow[r, "M"] & (\mathcal{P}_{<\mathcal{Y}}(D), d_{\mathcal{Y}})
\end{tikzcd}$$

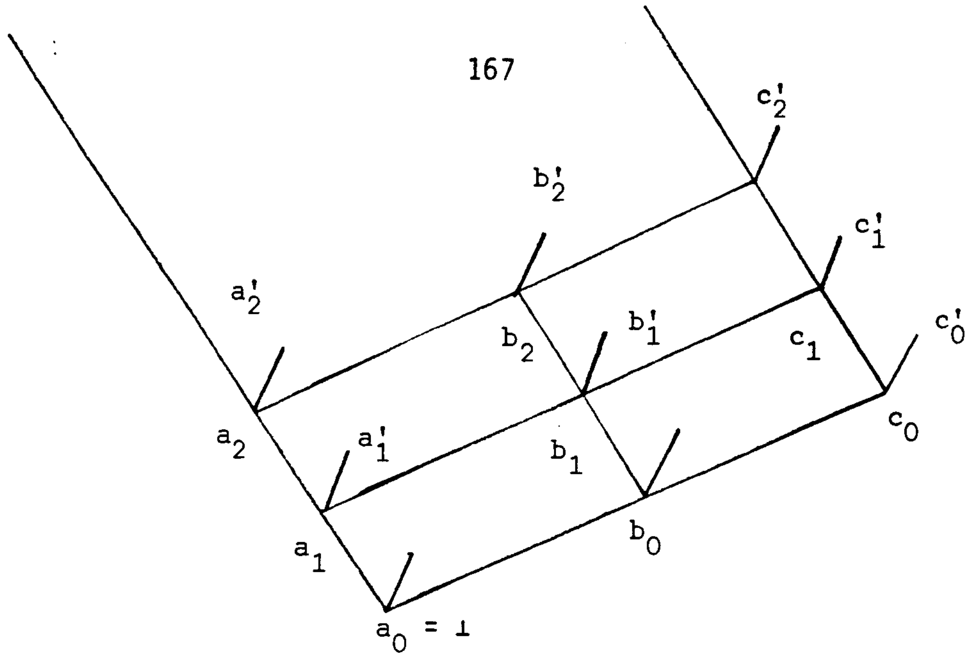
- Pour tout S.F.P. vérifiant (P) :

$$\begin{tikzcd}
(D, <) \arrow[r, "M"] \arrow[d, "\mathcal{P}_{<\mathcal{V}}"'] & (D, d) \arrow[d, "\mathcal{P}_d"] \\
(\mathcal{P}_{<\mathcal{V}}(D), <_{\mathcal{V}}) \arrow[r, "M"] & (\mathcal{P}_{<\mathcal{V}}(D), d_{\mathcal{V}})
\end{tikzcd}$$

- Pour tout S.F.P. vérifiant (P) :

$$\begin{tikzcd}
(D, <) \arrow[r, "M"] \arrow[d, shift right=2, "\mathcal{P}_{<\mathcal{V}}"'] \arrow[d, shift left=2, "\mathcal{P}_{<\mathcal{V}}"] & (D, d) \arrow[d, shift right=2, "\mathcal{P}_d"'] \arrow[d, shift left=2, "\mathcal{P}_d"] \\
(\mathcal{P}_{<EM}(D), <_{EM}) \arrow[r, "M"] & (\mathcal{P}_{<EM}(D), d_{EM})
\end{tikzcd}$$

On peut donner ici un autre exemple de S.F.P. ne vérifiant pas la commutativité du troisième diagramme et donc pas la propriété (P) :



Soit $A_n = \{a'_n, c'_n\}$, $B_n = \{a'_n, b'_n, c'_n\}$

alors $A_n = \mathrm{Con}(\overline{A}_n)$, $B_n = \mathrm{Con}(\overline{B}_n)$

On peut facilement choisir les énumérations de la base de D et de celle de $\mathcal{P}_{<EM}(D)$ telles que :

$(\mathcal{V}(A_n))\ [z] = \{a_0, c_0\}$ et $(\mathcal{V}(B_n))\ [z] = \{a_0, b_0, c_0\}$

tandis que $\mathrm{Con}((A_n)\ [6_n]) = \mathrm{Con}(a_{n-1}, c_{n-1})$

$= \mathrm{Con}(a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1})$

$= \mathrm{Con}((B_n)\ [6_n])$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Donc } \delta_4(A_n, A_0) < \dfrac{1}{1+6_n} \\ \\ \text{et } \delta_4(A_n, A_0) \geq \dfrac{1}{4} \end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{l} \delta_4 \text{ et } d_4 \text{ ne sont} \\ \text{pas uniformément} \\ \text{équivalentes} \end{array}\right.$$

c) Sémantique et ensembles finiment engendrables

Pour des raisons sémantiques, Plotkin et Smyth introduisent la classe des finiments engendrables - qui correspondent aux ensembles représentant les sorties possibles d'un programme à non-déterminisme fini, ils construisent ensuite leurs "power-domains" en se restreignant à priori à cette classe.

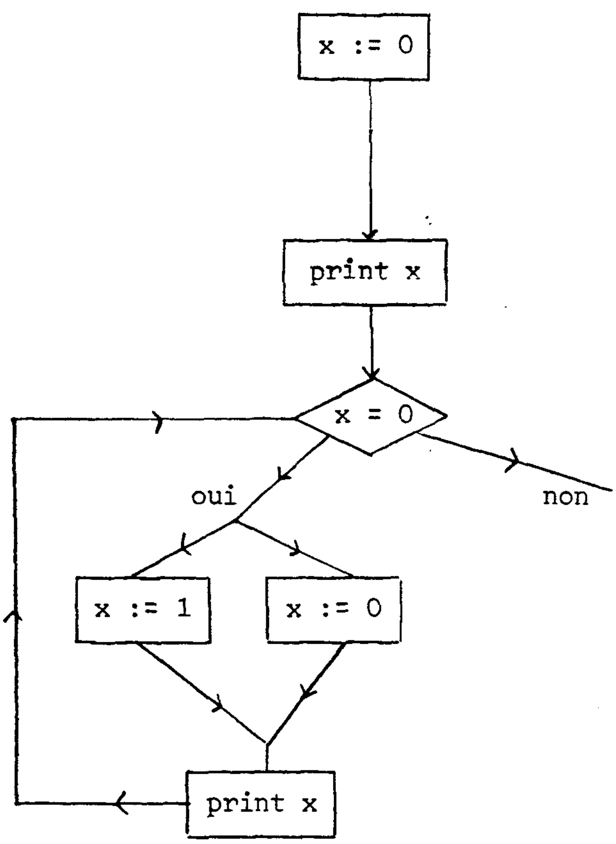
Nous allons ici rappeler précisément les justifications sémantiques des finiments engendrables, puis montrer que les deux constructions aboutissent aux mêmes domaines.

1. Les ensembles finiments engendrables

Soit un processus à non-déterminisme fini. On peut alors construire l'arbre représentant les séquences possibles d'exécution ; si les noeuds de l'arbre sont étiquetés par les résultats intermédiaires correspondants, les étiquettes le long d'une branche forment une suite croissante d'éléments finitaires de D, si D est le domaine de sortie.

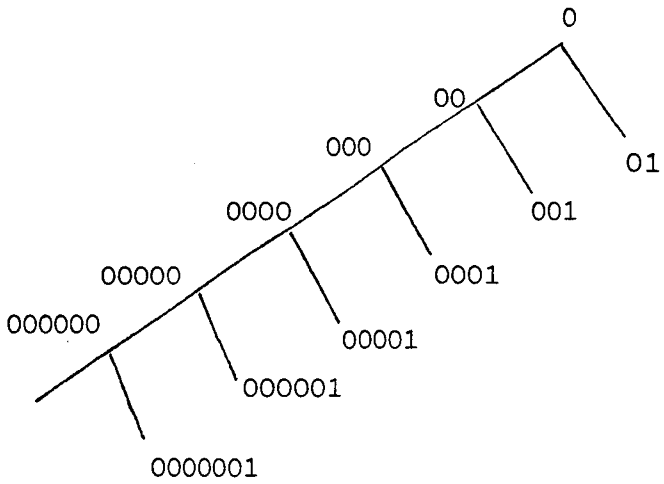
Exemple :

1. Soit la charte :

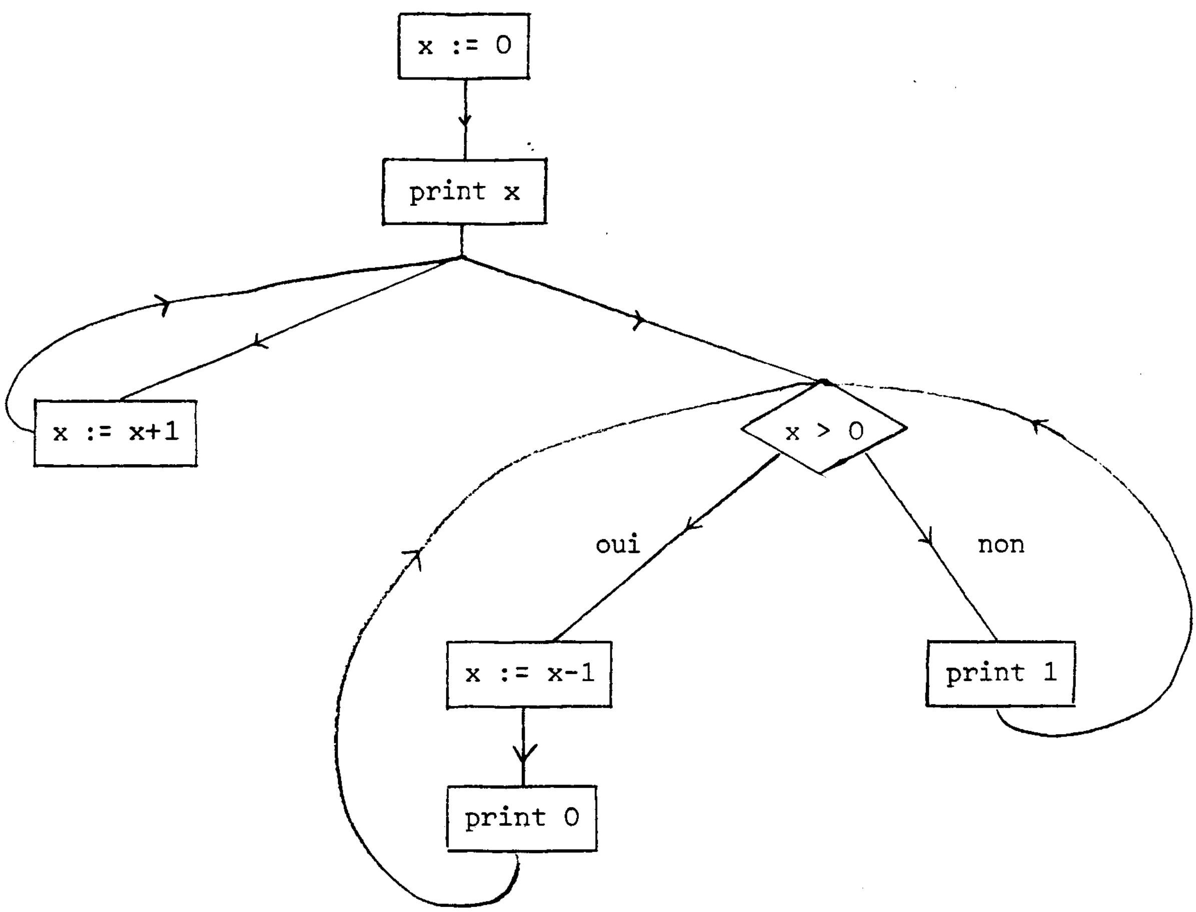


On peut alors représenter les sorties possibles de p_1 par :

$D = \{0, 1\}^{\infty}$. Soit S_1 l'ensemble des sorties possibles : $S_1 = 0^{+}1 \cup \{0^{\omega}\}$

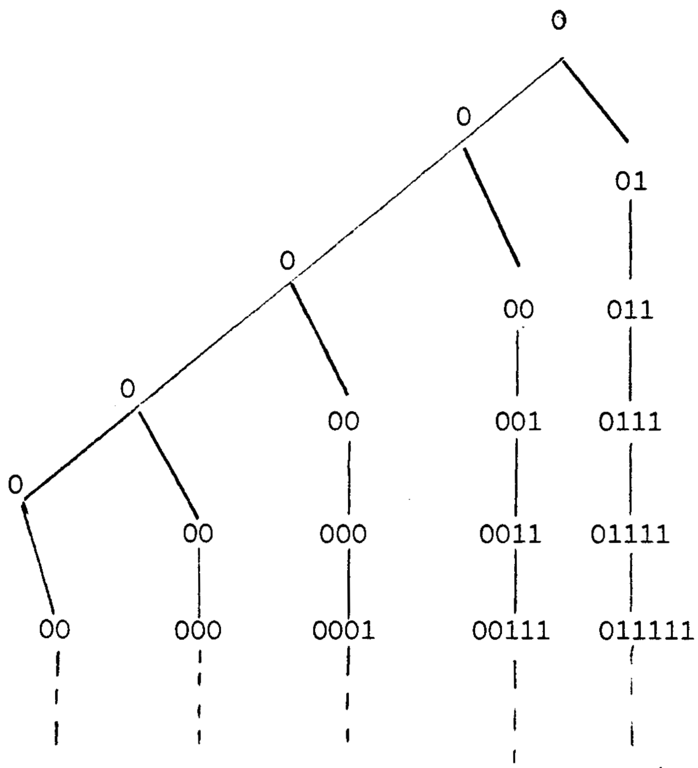


2. Soit la charte :



On peut alors représenter les sorties possibles par :

$S_2 = \{0\} \cup 0^+ \, 1^\omega$



On posera donc, choisissant à priori de ne s'intéresser qu'au non-déterminisme fini :

<u>*Définition* [24]</u> : Soit D un domaine, T un arbre finitaire (ici finitaire = chaque noeud a un nombre fini de fils), tel que :

(1) pour tout noeud t de T, l'étiquette $\ell(t)$ soit dans D.

(2) toutes les branches de T sont infinies.

(3) Si t' est descendant de t, $\ell(t') > \ell(t)$.

Soit L la fonction qui a un chemin infini π dans T associe le sup des étiquettes traversées par π; Alors T *engendre* l'ensemble $S = \{L(\pi) / \pi$ chemin infini de $T\}$; Un sous-ensemble de D est dit *finiment engendrable* ssi il est engendré par un arbre finitaire T. On note $\mathcal{V}_g(D)$ la classe des ensembles finiment engendrés.

Remarques : 1. La condition (2) donnée par Smyth peut être supprimée. Il suffit alors de considérer les chemins maximaux de T au lieu des chemins infinis.

2. On se ramène facilement aux arbres *binaires* (en remplaçant un choix multiple par une succession d'alternatives simples).

3. De plus on peut se ramener aux arbres dont les *étiquettes* sont *finitaires* grâce au lemme suivant :

Lemme : Soit S un sous-ensemble de D finiment engendrable. Alors il existe un arbre, dont les étiquettes sont des éléments finitaires de D, qui l'engendre.

Dm : Soit T' l'arbre obtenu à partir de T en remplaçant l'étiquettage ℓ de T par ℓ' défini par :

$$\ell'(t) = \ell(t)\,[n],\ \forall t \in T,\ t \text{ de profondeur } n$$

Donc les étiquettes de T' sont finitaires.

Soit S' engendré par T' :

$$s' \in S' \Rightarrow \exists (t_n)_n,\ s' = \sup \ell'(t_n),\ t_n \text{ fils de } t_{n-1},\ \forall n$$
$$t_0 \text{ racine de } T'$$

$$\Rightarrow \qquad s' = \sup \ell(t_n)\,[n]$$

$$\Rightarrow \qquad s' = \sup \ell(t_n) : s' \in S$$

$$s \in S \Rightarrow s = \sup \ell(t_n)$$

$$= \sup \ell(t_n)\,[n]$$

$$= \sup \ell'(t_n)$$

$$\Rightarrow s \in S'$$

c.q.f.d.

D'après ce lemme, le fait que les résultats intermédiaires d'un calcul soient finitaires, ne modifie pas la classe d'ensembles engendrée.

On peut noter aussi que $V_g(D)$ est fermée pour l'union et l'image par une fonction continue (au sens de l'ordre)

2. Préordres sur $V_g(D)$

On définit d'abord le prordre à l'aide de $S(D)$, l'ensemble des parties finies finitaires non vides de D, représentant ce qu'on peut appeler "les informations finies". Les deux préordres naïf (ou de Hoare) et de Smyth seront ensuite définis toujours selon l'interprétation qu'on choisit d'une information : pour le premier préordre, il s'agit de ce qui est possible, pour le second de ce qui est inévitable

Définitions :

- $\forall A \in S(D)$, $\forall B \in V_g(D)$, $A \lesssim_1 B \iff \forall a \in A, \exists b \in B, a < b$

- $\forall A \in S(D)$, $\forall B \in V_g(D)$, $A \lesssim_2 B \iff \forall b \in B, \exists a \in A, a < b$

- $\forall A \in S(D)$, $\forall B \in V_g(D)$, $A \lesssim_3 B \iff A \lesssim_1 B$ et $A \lesssim_2 B$

D'où les définitions des trois préordres sur $V(D)$.

$\forall X \in V_g(D)$, $\forall Y \in V_g(D)$, $X \lesssim_1 Y \iff \forall A \in S(D), (A \lesssim_1 X \Rightarrow A \lesssim_1 Y)$

$$X \lesssim_2 Y \iff \forall A \in S(D), (A \lesssim_2 X \Rightarrow A \lesssim_2 Y)$$

$$X \lesssim_3 Y \iff \forall A \in S(D), (A \lesssim_3 X \Rightarrow A \lesssim_3 Y)$$

(Historiquement, la première construction donnée par Plotkin était basée sur un préordre défini différemment à l'aide du domaine plat [19]).

Les trois domaines correspondants, qu'on notera $P_1(D)$, $P_2(D)$, $P_3(D)$ sont les quotients de $V_g(D)$ par la relation d'équivalence associée à $\lesssim_1$, $\lesssim_2$, $\lesssim_3$, munis des ordres obtenus.

D'après les définitions et les caractérisations des préordres $\lesssim_{\mathcal{Y}}$, $\lesssim_{V}$ et $\lesssim_{EM}$, $\lesssim_1$ (resp. $\lesssim_2$, $\lesssim_3$) est la restriction de $\lesssim_{\mathcal{Y}}$ (resp. $\lesssim_{V}$, $\lesssim_{EM}$) à $V_g(D)$.

Mais le lemme suivant montre que sur $V(D)$, $\lesssim_2$ peut se traduire d'une façon plus agréable :

<u>*Lemme 1*</u> :

$$\bullet \begin{array}{l} \forall X \in V_g(D) \\ \forall Y \in V_g(D) \end{array} , \; X <_2 Y \Longleftrightarrow \forall y \in Y, (\exists x \in X, y > x).$$

<u>Dm</u> : • => X est finiment engendrable, soit T un arbre finitaire l'engendrant ; pour tout n, soit $X_n = \{\ell(t) \,/\, t$ noeud de T à profondeur $n\}$.

On a alors $X_n <_2 X$, $\forall n$

Et $X_n \in S(D)$ (puisqu'on peut choisir T étiquetté avec des éléments finitaires de D).

Donc $\forall n$, $X_n <_2 Y$: $\forall y \in Y$, $\forall n$, $\exists x_n \in X_n$ $x_n < y$.

D'où en appliquant le lemme de Koenig, il existe une branche de T étiquettée avec des éléments inférieures à y : $\exists x \in X$, $x < y$.

$$\bullet \Longleftarrow \left.\begin{array}{r} A <_2 X \Rightarrow \forall x \in X, (\exists a \in A, x > a) \\ \forall y \in Y, (\exists x \in X, y > x) \end{array}\right\} \Rightarrow \forall y \in Y, \exists a \in A, y > a$$

$$\text{Donc } \left.\begin{array}{l} A <_2 X \\ \forall y \in Y, (\exists x \in X, y > x) \end{array}\right\} \Rightarrow A <_2 Y$$

D'où $\forall y \in Y, (\exists x \in X, y > x) \Rightarrow X <_2 Y$

c.q.f.d.

D'où :

$$\begin{matrix} \forall Y \in \mathcal{V}_g(D) \\ \\ \forall Y \in \mathcal{V}_g(D) \end{matrix} , X <_3 Y \Longleftrightarrow \begin{matrix} X <_1 Y \\ \text{et} \\ X <_2 Y \end{matrix} \Longleftrightarrow \begin{matrix} X <_{\mathcal{Y}} Y \\ \text{et} \\ X <\mathcal{V}\ Y \end{matrix} \Longleftrightarrow X <_{EM} Y$$

En montrant maintenant que dans chaque classe d'équivalence de $\mathcal{P}(D)$ modulo $\simeq_{\mathcal{Y}}$ (resp. $\simeq_{\mathcal{V}}$, $\simeq_{EM}$), il y a un ensemble finiment engendrable ; on aura montré que les trois domaines sont identiques à ceux définis plutôt. Soit i_1 :

$$\mathcal{P}_1(D) \to \mathcal{P}_<(D)$$

$$[A]_1 \xrightarrow{i_1} [A]$$

i_1 est bien défini puisque : $A \simeq_1 B \Rightarrow A \simeq_{\mathcal{Y}} B$.

De plus i_1 est injective :

$$\begin{matrix} \forall A \in \mathcal{V}_g(D) \\ \\ \forall B \in \mathcal{V}_g(D) \end{matrix} , A \simeq\ B \Rightarrow A \simeq_1 B$$

Et si dans chaque classe de $\mathcal{P}(D)$ modulo $\simeq_{\mathcal{Y}}$, il existe un finiment engendrable, i_1 est surjective.

De plus :

$$\begin{matrix} \forall A \in \mathcal{V}_g(D) \\ \\ \forall B \in \mathcal{V}_g(D) \end{matrix} , [A]_1 >_1 [B]_1 \Rightarrow i_1([A])_1 >_{\mathcal{Y}} i_1([B]_1)$$

D'où les domaines $\underline{\mathcal{P}_{<\mathcal{Y}}(D) \text{ et } \mathcal{P}_1(D) \text{ sont isomorphes}}$

De même $\underline{\mathcal{P}_{<\mathcal{V}}(D)}$ et $\underline{\mathcal{P}_2(D)}$ sont isomorphes

" " " $\mathcal{P}_{<EM}(D)$ et $\mathcal{P}_3(D)$ sont isomorphes

Il reste donc à montrer que toute classe d'équivalence modulo $\simeq_{\mathcal{Y}}$ (resp. $\simeq_{\mathcal{V}}$, $\simeq_{EM}$) contient un finiment engendrable. Puisqu'on sait que chaque classe contient un fermé (pour la topologie de Lawson) au moins, l'élément maximal, il suffit donc de montrer.

Lemme 2 : Tout fermé de D (pour la topologie de Lawson) est finiment engendrable.

Dm : Soit F un fermé de D, construisons T de la façon suivante :

- la racine t_0 est étiquettée par $\perp$.

- Soit $F_1 = F[1]$; les fils de t_0 seront au nombre de Card F_1 et étiquettés par les éléments de $F[1]$.

- Soit t un élément de profondeur i de T, et d'étiquette b_t. Soit
$$F_t = \{b \in D_{n+1} / \exists x \in F,\ x[n+1] = b \text{ et } b[n] = b_t\}$$

Les fils de t seront au nombre de Card F_t et étiquettés par les éléments de F_t.

On construit ainsi récursivement T

- Soit X l'ensemble engendré par T.

$$x \in X \Rightarrow \exists (f_n)_n,\ f_n \in F,\ x = \sup_n f_n\, n$$

Or D est compact ; on peut donc supposer que $(f_n)_n$ converge dans F, puisque F est fermé. Soit f cette limite

$$\forall n,\ \exists n_0 \text{ tq } f[n] = f_p[n]\ \forall p > n_0$$
$$= f_p[p]\,[n]\ \forall p > \sup(n_0, n)$$

De même $x = \sup_n f_n[n] \Rightarrow \forall n, \exists n_1$ tq $x[n] = f_p[p][n], \forall p > n_1$

Donc $\forall p > \sup(n_0, n), f[n] = f_p[p][n] = x[n]$

d'où $\forall n, f[n] = x[n]$ $x \in F$

- Soit $f \in F$, $f = \sup f[n]$, or d'après la construction de T, il existe une branche infinie de T telle que le noeud à la profondeur n soit $f[n]$, donc $f \in X$.

c.q.f.d.

Donc finalement chaque classe d'équivalence modulo $\simeq_{\mathcal{Y}}$, $\simeq_{\mathcal{V}}$ et $\simeq_{EM}$ contient bien un ensemble finiment engendrable et les domaines $\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(D)$ et $\mathcal{P}_1(D)$ (resp. $\mathcal{P}_{<\mathcal{V}}(D)$ et $\mathcal{P}_2(D)$, $\mathcal{P}_{<EM}(D)$ et $\mathcal{P}_3(D)$) sont isomorphes.

On peut s'étonner de ce résultat, puisque dans notre première construction on ne se restreignait pas aux ensembles obtenus comme les sorties possibles d'un programme à non-déterminisme *fini*. Mais les préordres sont basées sur la notion d'information finie.

On peut finalement résumer les moyens de construire les trois "powerdomains" par le diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
B, < \arrow[r, "\text{préordres \"simples\"}", "\text{sur finis finitaires}"'] \arrow[d, "\text{complétion}"'] & \mathcal{S}(B), \begin{array}{l} \lesssim_{\mathcal{Y}} \\ \lesssim_{\mathcal{V}} \\ \lesssim_{EM} \end{array} \arrow[r, "\text{quotient}"] & \begin{array}{l} \{\mathcal{Y}(X),\ X \in \mathcal{S}(B)\},\ <_{\mathcal{Y}} \\ \{\mathcal{V}(X),\ X \in \mathcal{S}(B)\},\ <_{\mathcal{V}} \\ \{Con(X),\ X \in \mathcal{S}(B)\},\ <_{EM} \end{array} \arrow[d, "\text{complétion}"] \\
B^{\infty}, < \arrow[r, "\text{préordres}"] \arrow[dr, "\text{préordres sur}", "\text{finiment engendrables}"'] & \mathcal{P}(B^{\infty}), \begin{array}{l} \lesssim_{\mathcal{Y}} \\ \lesssim_{\mathcal{V}} \\ \lesssim_{EM} \end{array} \arrow[r, "\text{quotient}"] & \begin{array}{l} \mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(B^{\infty}),\ <_{\mathcal{Y}} \\ \mathcal{P}_{\mathcal{V}}(B^{\infty}),\ <_{\mathcal{V}} \\ \mathcal{P}_{EM}(B^{\infty}),\ <_{EM} \end{array} \\
 & \mathcal{V}(B^{\infty}), \begin{array}{l} \lesssim_{\mathcal{Y}} \\ \lesssim_{\mathcal{V}} \\ \lesssim_{EM} \end{array} \arrow[ur, "\text{quotient}"] &
\end{tikzcd}
$$

3. Continuité des transductions

D (resp. D_1, D_2) désignera toujours ici $\Omega^{\infty}(\Sigma)$ ou $T^{\sim}(\Sigma)$.

Nous avons jusqu'ici considéré uniquement les parties non vides de D ; nous adjoignons ici à $\mathcal{P}_{<EM}(D)$ l'ensemble vide et un nouveau plus petit élément $\perp$ en définissant l'ordre par :

$\perp < A, \forall A$; $\emptyset > A \Longleftrightarrow A = \emptyset$ ou $A = \perp$; $A > \emptyset \Longleftrightarrow A = \emptyset$.

(Il semble en effet nécessaire d'éviter que $\emptyset > \{\Omega\}$, donc d'adjoindre un nouveau).

$\mathcal{P}(D)$ désignera ici ce nouveau domaine, qui a les même propriétés topologiques de $\mathcal{P}_{<EM}(D)$.

Les transducteurs ne transformant en général que des ensembles d'éléments maximaux, la contrainte d'identifier un ensemble et sa clôture convexe n'est pas gênante ici.

Donc $\mathcal{P}(D)$ va nous permettre d'étudier la continuité - au sens métrique et au sens de l'ordre - d'applications de D dans $\mathcal{P}(D')$ et donc en particulier des transductions.

1) *Continuité au sens métrique*

Notation : Quand il n'y aura pas d'ambiguité sur l'espace considéré (D, D', $\mathcal{P}(D)$, $\mathcal{P}(D')$), d désignera l'une quelconque des métriques uniformément équivalentes définies auparavant sur les S.F.P.'s.

α) Préliminaires topologiques

Nous étudions d'abord quelques propriétés topologiques qui s'avèrent utiles par la suite.

- <u>Ensembles fermés ouverts</u>

Les fermés ouverts jouent un rôle important ici, par leur stabilité par application continue inverse et par leur forme particulière dûe essentiellement à l'ultramétricité de d et à la compacité de (D, d) :

Proposition : Les fermés ouverts de (D, d) sont exactement les ensembles de la forme $\{x \in D \,/\, x[n] \in T\}$ où T est inclus dans D_n $(n \in \mathbb{N})$.

<u>Dm</u> : Soit A fermé ouvert de D.

$$A \text{ ouvert} \Rightarrow \forall x,\ \exists r_x > 0 \text{ tq } B(x, r_x) \subset A$$

($B(x, r_x)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon r_x pour la distance d).

$$\text{Donc } A = \bigcup_{x \in A} B(x, r_x)$$

Mais A, fermé dans D compact, est compact ; du recouvrement ouvert $(B(x, r_x))_{x \in A}$ de A, on peut donc extraire un recouvrement fini :

$$A = \bigcup_{x \in F} B(x, r_x) \qquad F \text{ fini, } F \subset A.$$

$$\text{Or } \forall r \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists n \text{ tq } \frac{1}{1+n+1} < r \leq \frac{1}{1+n}$$

$$\text{Donc } y \in B(x, r) \Longleftrightarrow y[n] = x[n]$$

$$\text{Donc } \forall x \in F,\ \exists n_x \text{ tq } [y \in B(x, r_x) \Longleftrightarrow y[n_x] = x[n_x]$$

$$\text{Soit } \left| \begin{array}{l} n_0 = \sup\limits_{x \in F} n_x \\ \\ A_x = \{y \,/\, y \in D_n,\ y[n_x] = x[n_x]\} \text{ (A est fini).} \end{array} \right.$$

Alors

$$y \in B(x, r_x) \Longleftrightarrow y[n_0] \in A_x \text{ (car } (y[n_0])\,[n_x] = y[n_x])$$

$$\text{Donc } y \in A \Longleftrightarrow y[n] \in \bigcup_{x \in F} A_x$$

Et si $T = \bigcup_{x \in F} A^x$, on a bien :

$$\left|\begin{array}{l} \bullet\ T \subset D_n \\ \\ \bullet\ y \in A \iff y[n] \in T \end{array}\right.$$

c.q.f.d.

Corollaire : Si $D = \Omega_\infty(\Sigma)$, les fermés ouverts de D sont exactement les ensembles de la forme :

$\{x \in D \,/\, \exists y \in F,\ x > y\}$ où F est une partie finie finitaire quelconque de D.

Dm : La démonstration est évidente, puisque dans $M_\infty(\Sigma)$:

$y[n] = x[n] \iff y > x[n]$

Donc $y \in B(x, r_x) \iff y > x[n_x]$

$y \in A \iff \exists z \in T,\ y > z$ avec $T = \{x[n_x] \,/\, x \in F\}$.

Il est intéressant aussi de remarquer que tous les éléments finitaires sont isolés ; donc pour montrer la continuité sur D, il suffit de démontrer la continuité sur les éléments infinitaires ; Mais D étant compact, la continuité sur D implique l'uniforme continuité sur D. Et l'ensemble des éléments finitaires étant dans D, l'uniforme continuité sur celui-ci entrîne l'uniforme continuité sur D.

β) Continuité de l'opération "intersection"

Soit E une partie de D ; On peut donc définir une application de D sur $P(D)$: $\cap E : x \to \{x\}$ si $x \in E$

$\to \emptyset$ sinon.

Alors

Proposition : $\cap E : D \to P(D)$ est continue ssi E est fermé ouvert.

• Remarquons d'abord que $E = \cap E^{-1}(\mathcal{P}(D) - \{\emptyset\})$ or $\mathcal{P}(D) - \{\emptyset\}$ est fermé puisque $\emptyset$ est isolé dans $\mathcal{P}(D)$, et ouvert puisque $\{\emptyset\}$ est fermé. Donc NE continue $\Rightarrow$ E fermé ouvert.

• Supposons maintenant E fermé ouvert.

Soit $x \in D \Rightarrow x \in E$ ou $x \notin E$!

$$\left.\begin{array}{l} x \in E \\ \\ E \text{ ouvert} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \mathcal{B}(x, r) \subset E$$

Et donc :

$$\exists \mathcal{B}(x, r) \,/\, \cap E/\mathcal{B}(x, r) = \phi/\mathcal{B}(x, r)$$

avec $\phi : D \rightarrow \mathcal{B}(D)$
$\quad\quad x \rightarrow \{x\}$

Or ϕ est continue puisque $\{x\}\,[n] = \{x[n]\}$

Donc $\cap E$ est continue en x, si $x \in E$.

$$\left.\begin{array}{l} x \notin E \\ \\ E \text{ fermé} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \mathcal{B}(x, r) \subset {}^{c}E$$

$$\Rightarrow \exists \mathcal{B}(x, r) \,/\, \cap E/\mathcal{B}(x, r) = \phi'/\mathcal{B}(x, r)$$

avec $\phi' : D \rightarrow \mathcal{P}(D)$
$\quad\quad x \rightarrow \emptyset$.

Donc, ϕ' étant constante et donc continue, $\cap E$ est continue en x, si $x \notin E$.

c.q.f.d.

Les choses se compliquent si on veut considérer $\cap E$ comme un opérateur de $\mathcal{P}(D)$ sur lui-même. Pour supposer que $\cap E$ envoie bien $\mathcal{P}(D)$ sur $\mathcal{P}(D)$, il faut en effet supposer que E est convexe fermé ; sinon on peut construire A convexe fermé tel que A NE x le soit plus : $A = \mathrm{Con} \circ \phi(D)$).

On a alors :

Proposition : Soit $(\cap E)' : \mathcal{P}(D) \to \mathcal{P}(D)$

$$A \to A \cap E$$

$(\cap E)'$ est continue $\Rightarrow$ E est fermé ouvert.

Dm : La preuve est évidente :

$\phi : x \to \{x\}$ est continue

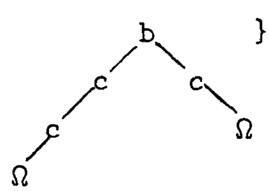
Or $\cap E = (\cap E)' \circ \phi$

Donc $(\cap E)'$ continue $\Rightarrow$ $\cap E$ continue $\Rightarrow$ E fermé ouvert.

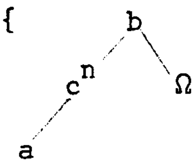
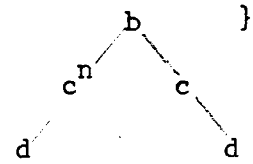
c.q.f.d.

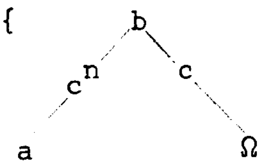
Par contre la réciproque est maintenant fausse, tout du moins dans le cas des arbres :

Exemple : $\Sigma = \{b, c, a, d\}$

Soit $E = \{x \,/\, x[3] =$  $\}$

E est bien convexe fermé

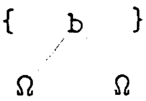
Soit $A_n = \{$  ,  $\}$

$B_n = \{$  $\} \cup A_n$

A_n et B_n sont convexes fermés, pour tout n.

Alors $A_n[n] = B_n[n]$

et $A_n \cap E[1] = \emptyset$

$B_n \cap E[1] = \{$  $\}$

Donc $A_n \cap E[1] \neq B_n \; E[1]$, $\forall n$

Et $(\cap E)$? n'est pas uniformément continue, donc pas continue (D compact).

Par contre, pour les mots, on a :

<u>*Proposition*</u> : Soit $D = \Omega_\infty(\Sigma)$, Σ alphabet fini ; Soit E convexe fermé de D ; Alors :

$(\cap E)'$ est continue ssi E est fermé ouvert.

<u>Dm</u> : La partie directe ayant été faite ci-dessus, supposons E fermé ouvert.

$$\left.\begin{array}{l} A \subset M_\infty\{\Sigma\}\ ) \\ \\ A \text{ convexe fermé} \end{array}\right\} \Rightarrow A[n] \text{ convexe fermé pour tout } n.$$

En effet ; A[n] est fini et donc fermé, et deux mots de même longueur distincts sont incomparables.

Donc :

$A[n] \simeq_{EM} B[n] \Rightarrow A[n] = B[n]$

Or E fermé ouvert $\Rightarrow \exists n_0 / \forall n > n_0 (x[n] = y[n] \Rightarrow$ $x \in E$ et $y \in E$ ou $x \notin E$ et $y \notin E$

Donc $\forall n > n_0$ $A[n] = B[n] \Rightarrow A \cap E[n] = B \cap E[n]$

$$\Rightarrow A \cap E[n] \ \tilde{\simeq}_{EM} \ B \cap E[n]$$

d'où finalement :

$\forall n > n_0$, $A[n] \simeq_{EM} B[n] \Rightarrow A \cap E[n] \simeq_{EM} B \cap E[n]$

Donc $(\cap E)'$ est continue.

c.q.f.d.

γ) Continuité des morphismes

Soit ϕ un morphisme : $D_1 \to D_2$.

Alors :

Proposition : ϕ est continu ssi ϕ est strict (ou ϕ est l'application constante : $x \to \Lambda$).

Dm : • Supposons ϕ strict.

Alors $u \in D_1 \Rightarrow \phi(u) \in D_n$

(si on a choisi pour D_n, les mots de longueur $\leq n$ pour $M_\infty(\Sigma)$, les arbres de hauteur $\leq n$ pour $T_\infty(\Sigma)$).

Donc $a[n] = b[n] \Rightarrow \phi(a[n]) = \phi(b[n])$

$$\Rightarrow (\phi(a))[n] = (\phi(b))[n]$$

ϕ est donc 1-lipschitzienne, et donc continue.

• Supposons ϕ non strict et non complètement effaçant.

• Plaçons-nous d'abord dans $\mathcal{U}_\infty(\Sigma)$:

$\exists a \ / \ \phi(a) = 1$

$\exists b \ / \ \phi(b) \neq 1$

alors $a^n\, b[n] = a^n[n]$

et $\phi(a^n\, b)\,[1] = \phi(b)\,[1] \neq \phi(a^n)\,[1]$.

Donc ϕ est non continue.

• La démonstration se fait de même dans $T^\infty(\Sigma)$:

ϕ non strict $\Rightarrow \exists a \in \Sigma \ / \ \phi\left(\begin{array}{c} a \\ \diagup \quad \diagdown \\ \Omega \cdots\cdots \Omega \end{array}\right) = \Omega.$

ϕ non complètement effaçant $\Rightarrow \exists b \in \Sigma \ / \ \phi\left(\begin{array}{c} b \\ \diagup \quad \diagdown \\ \Omega \cdots\cdots \Omega \end{array}\right) \neq r$

Soit $(t_n)_n$ défini par :

$t_1 = \begin{array}{c} a \\ \diagup \ \diagdown \\ \Omega \cdots \Omega \end{array}$

$t_2 = t_1 \bullet \left\langle \begin{array}{c} a \\ \diagup \ \diagdown \\ \Omega \cdots \Omega \end{array} \right\rangle$

$t_n = t_{n-1} \bullet \left\langle \begin{array}{c} a \\ \diagup \ \diagdown \\ \Omega \cdots \Omega \end{array} \right\rangle$

et $u_n = t_n \bullet \left\langle \begin{array}{c} b \\ \diagup \ \diagdown \\ \Omega \cdots \Omega \end{array} \right\rangle$

alors $u_n[n] = t_n[n]$ et $\phi(t_n)\,[1] \neq \phi(u_n)\,[1]$.

c.q.f.d.

δ) Continuité des morphismes inverses

Soit ϕ un morphisme de D_1 vers D_2 ; peut-on considérer ϕ^{-1} comme une application de D_2 vers $\mathcal{P}(D_1)$?

On peut d'abord se demander si, pour tout x de D_2, $\phi^{-1}(x)$ est convexe fermé dans D_1 ;

• On a bien $\phi^{-1}(x)$ convexe ; en effet :

Soit $z_1 \in \phi^{-1}(x)$, $z_2 \in \phi^{-1}(x)$, avec $z_1 < z_2$.

Soit z_3, $z_1 < z_3 < z_2$

Alors : $\phi(z_1) = x < \phi(z_3) < \phi(z_2) = x$

Donc $\phi(z_3) = x$: $z_3 \in \phi^{-1}(x)$

• Mais $\phi^{-1}(x)$ n'est pas nécessairement fermé ; en effet si ϕ est strict, d'après ce qui précède, $\phi^{-1}(x)$, image réciproque d'un fermé par une application "nulle" qui à tout x associe ϕ, ϕ^{-1} est continu. Mais si ϕ est ni strict, ni complètement effaçant, soient a tel que $\phi(a) = \Omega$ et b tel que $\phi(b) \neq r$, alors si $z = \phi(b)$ on a : $a^n\, b \in \phi^{-1}(z)$, $\forall n$

et : $a^\omega \notin \phi^{-1}(z)$

(On a raisonné ici dans $\Omega_\infty(\Sigma)$ mais la démonstration s'étend sans difficulté a $T_\infty(\Sigma)$).

Mais on peut montrer :

Lemme : $\phi^{-1}(x) \simeq_{EM} \phi^{-1}(y) \iff x = y$.

Dm : $\phi^{-1}(x) \simeq_{EM} \phi^{-1}(y) \Rightarrow \text{Con} \circ \phi(\phi^{-1}(x)) = \text{Con} \circ \phi(\phi'(y))$

Soit $z \in \phi^{-1}(x)$: $\exists z_1 \in \phi(\phi^{-1}(y))$

tq $z_1 < z < z_2$

$\exists z_2 \in \phi(\phi^{-1}(y))$

$z_2 \in \phi(\phi^{-1}(y)) \Rightarrow z_2 = \ell im\ u_n$ avec $\phi(u_n) = y$

$\Rightarrow \forall p, \exists n / z_2[p] = u_n[p]$

$\Rightarrow \forall p, \exists n / \phi(z_2[p]) < \phi(u_n)$

Donc $\forall p, \phi(z_2[p]) < y$

Or $\phi(z_2) = \sup\limits_p \phi(z_2[p])$ (par définition des morphismes étendus).

d'où : $\phi(z_2) < y$

On a alors : $x = \phi(z) < \phi(z_2) < y$

De même on aurait $y < x$.

D'où finalement $y = x$.

c.q.f.d.

Donc si on munit l'ensemble des parties de D_1 de la semi-distance d définie par :

$$d(A, B) = \frac{1}{1 + \inf\{n / A[n] \not\simeq_{EM} B[n]\}}$$

d restreint à $\{\phi^{-1}(x) / x \in \mathbb{N}\}$ est une distance.

(puisque $\phi^{-1}(x)[n] \simeq_{EM} \phi^{-1}(y)[n], \forall n \Rightarrow \forall A \in S(D_1), A <_{EM} \phi^{-1}(x) \Longleftrightarrow A <_{EM} \phi^{-1}(y)$

$\Rightarrow \phi^{-1}(x) \simeq_{EM} \phi^{-1}(y)$

$\Rightarrow x = y$

$\Rightarrow \phi^{-1}(x) = \phi^{-1}(y))$

Etudier la continuité de ϕ^{-1} de (D_2, d) dans l'ensemble des parties munies de la distance ci-dessus, revient à étudier la continuité de $\hat{\phi}^{-1} : x \to [\phi^{-1}(x)]_M$.

On notera abusivement cette continuité, continuité de ϕ^{-1} de (D_2, d) dans $(P(D_1), d)$. On a alors :

Proposition : ϕ^{-1} est continue de (D_2, d) dans $(P(D_1)), d)$ seulement si I m ϕ est ouvert fermé.

Dm : évident : $Im\ \phi = \{x / \phi^{-1}(x) \neq \emptyset\}$

$$= (\phi^{-1})^{-1}\ (P(D), \emptyset)$$

or $P(D) / \emptyset$ est fermé ouvert ; donc si ϕ^{-1} est continue, Im ϕ est fermé ouvert.

c.q.f.d.

Dans le cas des mots i.e. il existe deux alphabets Σ_1 et Σ_2 tels que $D_1 = M_\infty(\Sigma_1)$, $D_2 = M_\infty(\Sigma_2)$ - on a même :

Proposition : ϕ^{-1} est continue de $(\Omega_\infty(\Sigma_2), d)$ dans $((\Omega_\infty(\Sigma_1)), d)$ ssi Im ϕ est ouvert fermé.

Dm : D'après α), si Im ϕ est fermé ouvert, il existe F tel que

$$I_n\ \phi = \{u\ /\ \exists f \in F,\ u > f\}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Donc } \exists n_0\ /\ x \in I_m\ \phi \\ \qquad\qquad y[n_0] = x[n_0] \end{array}\right\} \Rightarrow y \in I_n\ \phi$$

Or pour montrer que ϕ^{-1} est continue, il suffit de montrer que :

$$\forall p,\ \exists n\ /\ d(x, y) < \frac{1}{1+n} \Rightarrow \phi^{-1}(x)\ [P] \simeq_{EM} \phi^{-1}(y)\ [P]$$

Or, soit n, x, y tels que $d(x, y) < \frac{1}{1+n}$, $n > n_0$.

$$\begin{aligned} z \in \phi^{-1}(x) &\Rightarrow \phi(z) = x \\ &\Rightarrow x \in I_n\ \phi \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} d(x, y) < \frac{1}{1+n} \\ \\ x \in I_n\ \phi \end{array}\right\} \Rightarrow y \in I_m\,\phi$$

$n > n_0$

Soit donc $p_0 = \inf\{|\phi(\alpha)|, \alpha \in A$

Alors

$\exists n'$ tq $n - n_0 - p_0 \leq n' \leq n - n_0$ et $\begin{cases} x[n' + n_0] = y[n' + n_0] \\ x[n'] = \phi(z_1) \\ \text{avec } z = z_1\ z_2 \end{cases}$

Donc $|z_1| > \frac{n'}{p_0}$

On a alors :

$$x[n' + n_0]_{/x[n']} = y[n_0 + n']_{/y[n']}$$

avec $x_{/x[n']} = \phi(z_2) \in I_m\ \phi$

$$\left.\begin{array}{l} \text{donc } y_{/y[n']}\ [n_0] = x_{/x[n']}\ [n_0] \\ \\ \qquad x_{/x[n']} \in \phi(z_2) \end{array}\right\} \Rightarrow y_{/y[n']} \in I_m\,\phi$$

D'où $\exists\alpha$ tq $y_{/y[n']} = \phi(\alpha)$: $y = \phi(z_1\ \alpha)$

avec $d(z_1, \alpha, z_1\ z_2) < \dfrac{1}{1 + \frac{n'}{p_0}} < \dfrac{1}{1 + \frac{n}{p_0} - \frac{n_0}{p_0} - 1}$

donc on peut choisir n tq :

$d(x, y) < \frac{1}{1+n} \Rightarrow \forall z \in \phi^{-1}(x),\ \exists z' \in \phi'(y)/d(z, z') < \frac{1}{1+p}$

$$\Rightarrow \phi^{-1}(x)\ [p] \subset \phi^{-1}(y)\ [p]$$

et symétriquement $\Rightarrow \phi^{-1}(y)\ [p] \subset \phi^{-1}(x)\ [p]$

D'où

$$d(x, y) < \frac{1}{1+n} \Rightarrow \phi^{-1}(y)\,[p] = \phi^{-1}(x)\,[p]$$

$$\Rightarrow d(\phi^{-1}(x), \phi^{-1}(y)) < \frac{1}{1+p}$$

c.q.f.d.

Si ϕ est alphabétique (et surjectif), $\mathrm{Im}\,\phi = \Omega_\infty(\Sigma_2)$ est fermé ouvert, donc :

Si ϕ est alphabétique, ϕ^{-1} est continue

On peut avoir ϕ^{-1} continu et ϕ non alphabétique comme le prouve l'exemple suivant :

$$\phi : \begin{array}{l} a \to a \\ b \to aa \end{array} \qquad \phi_1 = \{a, b\}, \qquad \Sigma_2 = \{a\}$$

$\mathrm{Im}\,\phi = a^\infty$ est fermé ouvert. Donc ϕ^{-1} est continu.

Par contre dans le cas des arbres, la condition "Im ϕ fermé ouvert" n'est pas suffisante pour que ϕ^{-1} soit continue :

Soit $\Sigma_1 = \{a, b, c, d\}$

$\Sigma_2 = \{b, c, d\}$

$$\phi : \begin{array}{l} a \longrightarrow b \\ \\ b \longrightarrow b \\ \\ c \longrightarrow c \\ \\ d \longrightarrow d \end{array}$$

alors $\mathrm{Im}\,\phi = T\,(\Sigma_2)$ est donc fermé ouvert.

Mais $\phi^{-1}\left(b\left(c^{n}(d),\ c^{n+1}(d)\right) \right) = \left\{ b\left(c^{n}(d),\ c^{n+1}(d)\right) \right\}$

donc $b\left(c^{n}(d),\ c^{n}(d)\right)\ [n] = b\left(c^{n}(d),\ c^{n+1}(d)\right)\ [n],\ \forall n$

avec $\phi^{-1}\left(b\left(c^{n}(d),\ c^{n}(d)\right) \right) [1] \neq_{EM} \phi^{-1}\left(b\left(c^{n}(d),\ c^{n+1}(d)\right) \right) [1],\ \forall$

Donc ϕ^{-1} n'est pas continue.

On a par contre :

Proposition [12] : ϕ^{-1} est continue de $T^{\infty}(\Sigma_2)$ dans $P(T^{\infty}(\Sigma_1))$ ssi ϕ est linéaire et Im ϕ fermé ouvert.

ε) Continuité des transductions

Soit $\tau = (\phi, \kappa, \psi)$ une transduction considérée comme une application de D_1 dans $P(D_2)$. On peut bien sûr avoir une condition suffisante de sa continuité en réunissant des conditions suffisantes pour la continuité respective de ϕ, κ et ψ. Donc si ϕ linéaire et $I_n\ \phi$ fermé ouvert, ϕ fermé ouvert et ψ strict, τ est continue. Bien sûr, la réunion des conditions nécessaires n'est plus une condition nécessaire ; il suffit de choisir $\tau = (\phi, \kappa, \psi)$ avec :

$$\phi : \begin{array}{l} a \to a \\ b \to \varepsilon \end{array} \qquad \Sigma_1 = a$$

$$\kappa = a^{\infty} \qquad \Sigma_2 = \{a, b\}$$

$$\psi : \begin{array}{l} a \to a \\ b \to \varepsilon \end{array} \qquad \Sigma_3 = \Sigma_1$$

Alors κ n'est pas fermé ouvert et ψ n'est pas strict, mais τ est continue (puisque $\tau = \mathrm{Id}_{\Sigma_1^\infty}$). En effet les "irrégularités" de ϕ, κ, ψ peuvent se compenser.

On a quand même le résultat suivant, si τ se réduit à κ, ψ :

Proposition : $\tau = (\kappa, \psi)$ continue ssi (κ est fermé ouvert et ψ strict ou fini).

Dm : • La condition est suffisante d'après β) et γ).

• Supposons τ continue ; alors $\kappa = \phi^{-1}(\mathcal{P}(D_2)/\emptyset)$ est l'image réciproque continue d'un fermé ouvert, et donc est fermé ouvert. Si κ n'est pas fini, alors :

$$\exists x \text{ tq } x \cdot \Omega_\infty(\Sigma) \text{ (ou } x \cdot T_\infty(\Sigma)) \subset \kappa$$

Alors si ψ n'est pas strict, on peut appliquer la construction du γ) et montrer la non-continuité de τ.

c.q.f.d.

Malheureusement dans le cas général, nous n'avons pas obtenu de "bonnes" conditions pour la continuité de τ qui soient moins restrictives que celles obtenues ci-dessus.

Dans le cas des arbres, E. Lilin et M.F. Claerrbout ont obtenu des résultats pour les transducteurs déterministes [12]. Rappelons en particulier :

Proposition [12] : Soit T un transducteur d'arbres descendant déterministe : T est continu ssi il est équivalent à un transducteur descendant d'arbres T' déterministe, quasi ultime et quasi complètement spécifié.

2) *Continuité au sens de l'ordre*

α) Continuité de l'opérateur $\cap$

Soit $E \subset D$; $\cap E : x \to \{x\}$ si $x \in E$ $\qquad x \to \emptyset$ sinon

Si $\cap E$ est continue, elle est croissante et donc :

• $\bot \notin E \Rightarrow \forall x, \cap E(x) > \emptyset \Rightarrow \forall x, x \notin E$.

Et $\bot \in E \Rightarrow \forall x, \cap E(x) \to \{\bot\}$

$\forall x \in D, x \in E$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Donc } E \neq \emptyset \\ \\ \quad \cap E \text{ continue}\end{array}\right\} \Leftrightarrow E = D$$

β) Continuité des morphismes étendus

Par définition, ils sont continus.

γ) Continuité des morphismes inverses

Soit $\phi : D_1 \to D_2$; alors ϕ^{-1} est continue de D_2 vers $P(D_1)$ ssi ϕ est alphabétique et surjective, i.e. $\phi(\Sigma_1) = \Sigma_2$.

Dm : On va faire ici la démonstration dans le cas des mots, mais celle-ci s'étend sans difficulté au cas des arbres.

• Supposons ϕ^{-1} continue

Si ϕ est non alphabétique, il existe $a \in \Sigma_1$ et u tq :

$\phi(a) = u$ avec $|u| > 1$

Donc $a \in \phi^{-1}(u)$

et $a \notin \phi^{-1}(u[1])$

or $\forall x \in \phi^{-1}(u[1]), |x| \geq 1$

donc $\forall x \in \phi^{-1}(u[1])$, $|x| \geq 1$ et $x \neq u$

d'où $\forall x \in \phi^{-1}(u[1])$, $x \not< a$

Et $\phi^{-1}(u) \not>_n \phi^{-1}(u[1])$: ϕ^{-1} n'est pas croissante.

Si ϕ est non surjective, il existe $b \in \Sigma_2$ tq $\phi^{-1}(b) = \emptyset$

(puisque ϕ alphabétique).

donc $\phi^{-1}(b) \not>_n \phi^{-1}(\varepsilon)$. ϕ^{-1} n'est pas continue.

• Supposons ϕ alphabétique et surjective.

Montrons d'abord ϕ croissante :

ϕ alphabétique $\Rightarrow \phi^{-1}(xy) = \phi^{-1}(x) \cdot \phi^{-1}(y)$

ϕ surjective $\Rightarrow \forall y \ \phi^{-1}(y) \neq \emptyset$

donc $\phi^{-1}(xy) = \phi^{-1}(x) \cdot \phi^{-1}(y) > \phi^{-1}(x)$.

Montrons maintenant que ϕ^{-1} préserve les sup soit :

$$\phi^{-1}(\sup_n x_n) = \sup_n \phi^{-1}(x_n)$$

• $\forall a \in \phi^{-1}(\sup_n x_n)$, $\phi(u) = \sup x_n$:

Donc comme ϕ est alphabétique :

$\forall n, \exists a_n, a'_n$ tq $a = a_n a'_n$ avec $\phi(a_n) = x_n$.

$\forall n, \exists a_n$ tq $a > a_n$ et $a_n \in \phi^{-1}(x_n)$.

donc $\phi^{-1}(\sup x_n) >_S \phi^{-1}(x_n)$, $\forall n$.

Mais $\forall a \in \phi^{-1}(x_n)$, $\phi(a) = x_n < \sup_n x_n$.

Comme ϕ est surjective : $\forall a \in \phi^{-1}(x_n)$, $\exists b$ tq $\phi(a).\ \phi(b) = \sup_n x_n$

Donc $\forall a \in \phi^{-1}(x_n)$, $\exists b$ tq $ab \in \phi^{-1}(\sup_n x_n)$

$\forall a \in \phi^{-1}(x_n)$, $\exists c \in \phi^{-1}(\sup_n x_n)$, $a < c$

d'où $\phi^{-1}(\sup_n x_n) >_{EM} \phi^{-1}(x_n)$, $\forall n$

Soit $\phi^{-1}(\sup_n x_n) >_{EM} \sup_n \phi^{-1}(x_n)$

(sup au sens de $>_{EM}$).

• Soit $A >_{EM} \phi^{-1}(x_n)$, $\forall n$, $A = \mathrm{Con} \circ \phi(A)$.

Donc $\forall a \in A$, $\forall n$, $\exists z_n (\phi^{-1}(x_n) / a > z_n$

Donc $\forall$, $\phi(a) > \phi(z_n)$

$\forall n$, $\phi(a) > x_n$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Donc } \phi(a) > \sup_n x_n \\ \phi \text{ surjective} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists a_1, a_2 \text{ tq } a = a_1\, a_2 \text{ et } \phi(a_1) = \sup_n x_n$$

D'où $\exists y \in \phi^{-1}(\sup_n x_n)$ tq $a > y$.

$A >_y \phi^{-1}(\sup_n x_n)$

Soit $z \in \phi^{-1}(\sup_n x_n)$: $\phi(z) = \sup_n x_n$

donc $\exists (z_n)_n$ tq $z = \sup_n z_n$ et $\phi|z_n| = x_n$ (ϕ alphabétique)

Soit $z = \sup_n z_n$ avec $z_n \in \phi^{-1}(x_n)$

donc $\forall n$, $\exists a_n \in A \quad z_n < a_n$.

A étant compact : $\exists a \in A$, $\sup z_n < a$.

Donc $\exists a \in A$ tq $z < a$

$A >_{EM} \phi^{-1}(\sup_n x_n)$

c.q.f.d.

δ) Continnuité des transducteurs

Comme pour la continuité au sens métrique, nous n'abons pas ici obtenu de résultats satisfaisant. On a bien sûr tout de même : si ϕ est surjectif et alphabétique, la transduction (ϕ, D, ψ), (ψ quelconque) est continue.

REFERENCES

[1] A. ARNOLD, M. NIVAT
"The metric space of infinite trees ; algebraical and topological properties".
Annales societatis mathematicae polonae Series IV : Fundamenta Informaticae III-4, 1980, pp. 445-476.

[2] A. ARNOLD, M. NIVAT
Comportements de processus dans Colloque AFCET
"Les mathématiques de l'Informatique".
Paris (1982), pp. 35-68.

[3] S.L. BLOOM, R. TINDELL
"Compatible orderings on the metric theory of trees".
SIAM J. of Computing ; Nov. 1980, Vol. 9, n° 4, pp. 683-691.

[4] L. BOASSON, M. NIVAT
"Adherencs of Languages".
JCSS 20, 1980, pp. 285-309.

[5] J. BUCHI
"On a decision method or restricted second order arithmetic".
Int. Congress Logic Method Phil Sci, Stanford Univ. Press, 1962.

[6] G. COMYN, M. DAUCHET
"Approximations of infinitary objects".
9th Colloquium ICALP, Lectures Notes in Computer Science, Springer-Verlag, n° 140, pp. 116-127.

[7] G. COMYN
"Objects infinis calculables".
Thèse d'Etat, LILLE, Mars 1982.

[8] S. EILENBERG
"Automata, Languages and Machines".
Vol. A, Academic-Press, 1974.

[9] G. GERZ, K.H. HOFMANN, K. KEINEL, J.D. LAWSON, M. MISLOVE, D. SCOTT
"A compendium of continuous lattices".
Springer-Verlag, 1980.

[10] F. GIRE
"Une extension aux mots infinis de la notion de transduction rationnelle".
Colloquium G.I. 1982, pp. 123-129.

[11] J.A. GOQUEN, J. THATCHER, E. WAGNER, J. WRIGHT
"Initial Algebra Semantics and continuous algebras".
J.A.C.Q. Vol. 24, 1977, pp. 68-95.

[12] E. LILIN, M.F. CLAEREBOUT
"Continuité des transducteurs d'états finis d'arbres".
8th Colloquium on trees in algebra and programming CAAP 83.

[13] R. MAC NAUGHTON
"Testing and generating infinite sequences by a finite automaton".
Inf. and Control Vol. 9, 1966, pp. 521-530.

[14] M. NIVAT
"Infinite words, Infinite trees, Infinite computations Foundations of computer Science III, Part 2 : Languages, Logic and Semantics".
Ed. J.W. BAKKER, J. VAN LAUVEN. Mathematical Centre Tract 109, 1979, pp. 1-52.

[15] M. NIVAT
"Systèmes de transition permeanents et équitables".
Rapport interne L.I.T.P. n° 80-85, Décembre 1980.

[16] M. NIVAT
"Betavious of synchronized systems of processus".
CiI.T.P. 81.

[17] D. PARK
Concurrency and automata on infinite sequences".
In Lecture-Notes Comp. Sci. n° 104, 1981, pp. 176-183.

[18] G. PLOTKIN
"I^{ω} *as a universal domain*".
JCSS 17, 1978, pp. 209-236.

[19] G. PLOTKIN
"*A powerdomain construction*".
SIAM J. Comput 5, Sept. 1976, pp. 452-487.

[20] G. PLOTKIN
"*A powerdomain for countable non-determinism*".
Springer-Verlag Lecture-Notes in Comp. Sc. 140, (1982).

[21] G. PLOTKIN
Cours de D.E.A. Edinburgh.

[22] D. SCOTT, C. STRACKEY
"*Towards a mathematical semantics for computer languages*".
Proc. of the Symposium in Computers and Automata, Microware Research Institute Symposium Series, Vol. 21, 1971.

[23] D. SCOTT
"*Domains for denotational semantics*".
ICALP 82.

[24] M. SMYTH
"*The largest cartesian closed category of domains*".
Comp. Sci. Report, Univ. of Edinburgt, Mars 1982.

[25] M. SMYTH
"*Powerdomains*".
JCSS 16, 1978, pp. 23-26.

[26] G. WINSKEL
"*A note on powerdomains and modality*".
Springer-Verlag Lecture-Notes in Computer Science Proc. of 1983 International FCT-Conference.