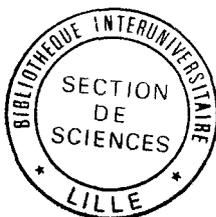


50376

1983

299

N° d'ordre 587



50376

1983

299

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

le grade de Docteur ès Sciences

en

Mathématiques (Spécialité Mécanique)

par

Dany VANDROMME

sur

CONTRIBUTION A LA MODELISATION ET LA PREDICTION D'ECOULEMENTS

TURBULENTS A MASSE VOLUMIQUE VARIABLE.

Membres du Jury :

Président : A. DYMENT, Professeur, Université de Lille I.

Examineurs : H. HAMINH, Professeur, I.N.P. Toulouse.

W. KOLLMANN, Professeur, Université de Californie Davis.

T. ALZIARY de ROQUEFORT, Professeur, C.E.A.T., Poitiers.

J. CHAUVIN, Professeur, Université de Marseille.

H. VIVIAND, Chef de Division, O.N.E.R.A., Paris.

M. RUBESIN, Conseiller Scientifique, NASA Ames.

P. MICHEAU, Professeur, Université de Lille I.

Soutenue le 16 Septembre 1983

A Clotilde, Rosalie et
Victor.

Pour toutes les nuits qu'ils ont
passées sans moi

	Pages
CHAPITRE I	
LE PROBLEME DES ECOULEMENTS TURBULENTS A MASSE VOLUMIQUE VARIABLE	1
CHAPITRE II	
LES EQUATIONS OUVERTES OU LE PROBLEME DE LA FERMETURE..	20
CHAPITRE III	
LA FERMETURE DES EQUATIONS	59
CHAPITRE IV	
UNE METHODE NUMERIQUE POUR LE CALCUL D'ECOULEMENTS DE TYPE COUCHE LIMITE	121
CHAPITRE V	
UNE METHODE NUMERIQUE POUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES	151
CHAPITRE VI	
QUELQUES RESULTATS	213
CHAPITRE VII	
CONCLUSIONS	343

Ce mémoire est le fruit d'un travail qui s'est déroulé sur plusieurs années. De nombreuses personnes y ont été impliquées de façon plus ou moins directe. C'est l'ensemble de toutes ces interactions qui a permis la réalisation de ce travail.

A titre individuel, je tiens toutefois à exprimer ma reconnaissance au Professeur DYMENT qui m'a accueilli au service de Mécanique de l'U.E.R. de Mathématiques et m'a fourni des encouragements et un support permanents durant ces trois dernières années.

Le Professeur KOLLMANN avec qui j'ai compris la signification du mot turbulence et qui a guidé ce travail du début à la fin, a été plus qu'un superviseur et un conseiller. Il m'a appris qu'en plus de relations de travail, pouvaient aussi exister des liens d'amitié. Ces liens là se sont étendus à nos familles respectives et n'ont pas de prix.

Le Professeur HAMINH m'a permis de participer à ses recherches depuis 1981. Avec lui j'ai pu mesurer le courage et même la ténacité qu'il met dans son travail. C'est avec lui également que j'ai réalisé que deux individus de cultures analogues travaillant ensemble fournissent plus que le double de travail d'un individu isolé. Sa modestie naturelle et sa constance d'humeur, en font un collaborateur idéal.

Le Docteur RUBESIN m'a accueilli au centre de recherche de NASA-Ames. Malgré son renom et sa position à Ames, il s'est montré d'une simplicité et d'une disponibilité constante durant mes divers séjours en Californie. Il est à l'origine de la seconde partie du travail, concernant l'implantation de la fermeture du second ordre dans un programme Navier-Stokes. L'étendue de ses connaissances m'a souvent amené à l'esprit la notion d'encyclopédie de la turbulence. Il a également lu intégralement le mémoire, dictionnaire à la main, pour ne rien laisser passer dans une langue qui ne lui est pas familière. Qu'il y voit ici un témoignage de reconnaissance très sincère.

Je remercie également le Professeur CHAUVIN de l'Université de Marseille, le Professeur ALZIARY DE ROQUEFORT du C.E.A.T. de Poitiers, le Professeur MICHEAU de l'Université de Lille et le Docteur VIVIAND de l'O.N.E.R.A. d'avoir bien voulu examiner ce travail et participer au jury.

Le Professeur MAC CORMACK a également joué un rôle déterminant lors de mon premier séjour à Ames. J'ai toujours trouvé la porte de son bureau ouverte quand j'ai commencé à travailler sur son schéma implicite. Son aide a été précieuse lors de cette nouvelle orientation de mon travail et la gentillesse et la simplicité qui le caractérisent n'ont fait que faciliter les échanges d'idées et de conseils (presque toujours dans le même sens).

D'une façon plus générale, je remercie les équipes de recherche qui m'ont accueilli, telles les branches S.T.E. et S.T.T. de Ames, et tout particulièrement J. MARVIN, J. VIEGAS, T. COAKLEY et M. HORSTMAN qui ont collaboré de façon très efficace et permanente avec "The Ames french connexion".

En plus des personnes, je me dois de remercier les Institutions qui ont supporté ce travail. Tout d'abord l'Institut Von Karman qui a permis l'achèvement de la partie écoulements isovolumes, le National Research Council des Etats Unis m'a fourni une bourse d'un an et m'a permis de travailler à Ames dans la branche "Computational Fluid Dynamics" de H. LOMAX. Grâce à un poste de Maître-Assistant à l'Université de Valenciennes, le Ministère de l'Education Nationale m'a permis de poursuivre mes recherches dans le service de Mécanique de l'U.E.R. de Mathématiques de l'Université des Sciences et Techniques de Lille. En même temps, grâce à deux bourses successives NASA-Ames - Université de Californie-Davis, les vacances universitaires ont pu être utilisées avec grand profit pour travailler sur les ordinateurs de NASA-Ames. Le support informatique français a été fourni par le Groupement pour un Centre de Calcul Vectoriel pour la Recherche ($G C_2 VR$) et par deux A.T.P. du C.N.R.S. Grâce à cela je n'ai pas eu de réels problèmes de temps de calcul et j'ai pu achever dans des délais raisonnables les travaux qui sont rapportés ici.

Je tiens à remercier également Madame Françoise PÉTIAUX pour sa compétence et sa rapidité pour la frappe du mémoire ainsi que tout le personnel de l'U.E.R. de Mathématiques pour l'environnement administratif et technique qu'il représente.

CHAPITRE I

LE PROBLEME DES ECOULEMENTS TURBULENTS

A MASSE VOLUMIQUE VARIABLE

CHAPITRE I

INTRODUCTION

I-1.- QU'EST-CE QUE LA TURBULENCE ?

Définition du problème physique.

I-2.- REVUE DES DIVERSES APPROCHES D'ETUDE THEORIQUE DE LA TURBULENCE.

I-2-1.- Les approches déterministes à l'étude des écoulements turbulents.

- Simulation directe.
- Approche spectrale.
- Méthode interaction directe "test field model" Kraichnan.
- Méthode distorsion rapide.
- Théories analytiques (Orszag).
- L.E.S. "subgrid scale modeling".
- Méthodes de cascades (Tchen).
- Fermetures 2 points.
- Fermetures 1 point.

I-2-2.- Point de vue statistique - Cas particulier de la turbulence compressible.

I-3.- DEFINITION DU CADRE DE LA PRESENTE RECHERCHE

I-3-1.- Turbulence : fermeture en 1 point

Effets de variations de masse volumique.

I-3-2.- Numérique : - Parabolique ou non.

- Avantages et inconvénients.
- Instationnaire.
- Implicite.

I-3-3.- Applications : Mélange isotherme.

Couche de mélange.

Couche limite compressible.

Interaction onde de choc-couche limite.

I-4.- ORGANISATION DU MEMOIRE.

CHAPITRE II : EQUATIONS OUVERTES.

CHAPITRE III : FERMETURE.

CHAPITRE IV : METHODE NUMERIQUE COUCHE LIMITE.

CHAPITRE V : METHODE NUMERIQUE NAVIER-STOKES.

CHAPITRE VI : RESULTATS.

CHAPITRE VII : CONCLUSION.

I-1.- PRESENTATION DU PROBLEME PHYSIQUE

Déjà dans la première moitié du XIX^e siècle, l'existence de deux types d'écoulements différents, maintenant qualifiés de laminaire et de turbulent, fut mise en évidence par St VENANT [1]. Cependant c'est Osborne REYNOLDS [2] qui fonda la première théorie de la turbulence en considérant les conditions sous lesquelles l'écoulement laminaire dans un tuyau se transforme en écoulement turbulent. Cela amena REYNOLDS à formuler un critère général de similitude dynamique pour les écoulements des fluides visqueux incompressibles. Ce critère est fondé sur les valeurs du nombre de Reynolds, du nom de son créateur

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (I-1)$$

où U et L sont les échelles caractéristiques de vitesse et de longueur de l'écoulement et ν la viscosité cinématique du fluide. Ce nombre de Reynolds peut être interprété comme le rapport des valeurs caractéristiques des forces d'inertie aux forces visqueuses agissant dans le fluide. Les forces d'inertie qui produisent le mélange de différents volumes de fluide se déplaçant avec des vitesses différentes, produisent aussi un transfert d'énergie entre les composantes à grandes échelles du mouvement et celles à échelles plus petites. Elles assistent ainsi à la formation d'hétérogénéités de petites tailles dans l'écoulement qui sont caractéristiques du problème de la turbulence. Ainsi des valeurs suffisamment petites du nombre de Reynolds correspondent à un écoulement laminaire, et des valeurs élevées à un écoulement turbulent. Ceci est un premier résultat fondamental établi par O. REYNOLDS. On peut aussi caractériser qualitativement un mouvement d'échelle λ par son nombre de Reynolds.

$$Re_\lambda = \frac{U_\lambda \cdot \lambda}{\nu} \quad (I-2)$$

U_λ étant l'ordre de grandeur des vitesses de ce mouvement. Pour les mouvements à grande échelle, Re_λ est grand et la viscosité ne joue pratiquement aucun rôle. Son existence ne se fera sentir qu'en dessous d'une échelle λ_0 , correspondant à Re_{λ_0} de l'ordre de l'unité, pour dissiper l'énergie qui est fournie par les mouvements à grande échelle. Cette échelle de dissipation est la plus petite de l'écoulement turbulent. Les mouvements correspondant aux grosses structures qui sont porteuses de la plus grande partie de l'énergie turbulente k ont des échelles caractéristiques semblables à la dimension l de l'écoulement dans son

ensemble. Leur nombre de Reynolds est

$$R_{e\ell} = \frac{\sqrt{k}^2}{\nu} \quad (I-3)$$

Comme l'énergie moyenne ε dissipée par unité de temps dans le mouvement provient intégralement de ces mouvements à grande échelle, son ordre de grandeur peut être déterminé à partir des seules grandeurs caractéristiques de ces mouvements, soient \sqrt{k} et ℓ , à l'aide de l'analyse dimensionnelle. Ainsi

$$\varepsilon \sim \frac{q^3}{\ell} \quad (I-4)$$

KOLMOGOROV [3], a postulé l'indépendance statistique des mouvements à échelles proches de λ_0 par rapport aux mouvements des grandes structures. Ils ne peuvent dépendre alors que de l'énergie qu'ils reçoivent de ces mouvements à grande échelle et de la viscosité cinématique, c'est-à-dire ε et ν . Les seules échelles de longueur et de vitesse que l'on peut former à partir de ces quantités sont

$$\lambda_0 \sim \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}; \quad u_{\lambda_0} \sim (\nu \varepsilon)^{1/4} \quad (I-5)$$

On vérifie bien que l'on a alors

$$R_{e\lambda_0} = \frac{u_{\lambda_0} \lambda_0}{\nu} \sim 1 \quad (I-6)$$

On peut ainsi évaluer le nombre de points de calcul qui sont nécessaires à la résolution simultanée de toutes les échelles (grandes et petites) pour un tel mouvement. Ce nombre correspond au nombre de degrés de liberté de l'écoulement

$$N \sim \left(\frac{\ell}{\lambda_0}\right)^3 \quad (I-7)$$

En terme de nombre de Reynolds on obtient ainsi [25]

$$N \sim R_{e\ell}^{9/4} \quad (I-8)$$

Prenons par exemple le cas classique de l'écoulement turbulent confiné entre parois parallèles étudié expérimentalement par COMTE-BELLOT [4]. On a par exemple $R_{e\ell} \sim 10000$. Ce qui correspond à un nombre de points de calcul de

l'ordre de

$$N \sim 10^9$$

ce qui est, encore largement inaccessible aux ordinateurs actuels. Une approche totalement déterministe de la turbulence n'est donc envisageable que pour des nombres de Reynolds faibles, alors que toutes les situations d'intérêt pratique seront caractérisées par un nombre de Reynolds au moins égal à celui étudié par COMTE-BELLOT.

I-2.- LES DIVERSES APPROCHES DES PROBLEMES TURBULENTS

I-2-1.- Les approches déterministes à l'étude des écoulements turbulents.

La seconde contribution majeure de REYNOLDS est de représenter les valeurs de toutes les quantités hydrodynamiques d'un écoulement turbulent par la somme d'une composante moyenne et d'une composante fluctuante. Cela permet de n'étudier que les valeurs moyennes qui varient lentement dans le temps et dans l'espace. Depuis Reynolds, le concept de "moyenne" est mieux compris principalement grâce à la théorie des probabilités. Quoique REYNOLDS n'ait utilisé que quelques unes des propriétés algébriques de l'opérateur "moyenne", ces propriétés produisent une formulation modifiée des équations de la mécanique des fluides qui fut à l'origine des travaux de BOUSSINESQ, Von KARMAN et beaucoup d'autres.

L'utilisation d'une telle décomposition permet de mettre en évidence le problème de la fermeture des équations du mouvement. En effet la non-linéarité des termes convectifs fait apparaître un terme nouveau d'ordre supérieur aussi bien dans les équations du mouvement moyen que dans les équations d'évolution pour ces termes eux-mêmes. L'une des approches les plus théoriques à ce problème fut proposée par KRAICHNAN [5], [6] avec l'approximation d'interaction directe. Cette approximation consiste à fermer l'équation de l'énergie de turbulence exprimée dans l'espace spectral, grâce à la résolution simultanée d'une équation pour une quantité qui caractérise la réponse du champ turbulent à une perturbation élémentaire faite à un mode donné. Cette approximation a servi de base aux développements des travaux de EDWARDS [7], KRAICHNAN [8], [9], et FRISCH [10], [11] pour ne citer que les principaux. Dans la référence [12],

LESLIE fait une synthèse des travaux de KRAICHNAN. En particulier il montre pourquoi l'approximation de l'interaction directe est meilleure que l'approximation de quasi-normalité (MILLIONSHTCHIKOV [13], PROUDMAN et REID [14], O'BRIEN et FRANCIS [15] et OGURA [16]) qui est elle-même supérieure à la méthode des séries de DEISSLER [17]. Malgré une base théorique très élaborée, ces méthodes d'approche des problèmes turbulents n'ont pas eu le développement théorique auquel on aurait pu s'attendre au moment de leur publication. En effet les méthodes citées ci-dessus n'ont jusqu'à présent pas encore pu être utilisées pour des applications réelles autres que pour des cas très précis de turbulence "de laboratoire". Si il est prématuré de vouloir utiliser de telles méthodes pour le calcul d'écoulements réels, il ne faut pourtant pas négliger le rôle qu'elles peuvent avoir pour la génération des modèles de turbulence plus simples. Un exemple bien connu d'une telle interaction entre méthodes est l'approximation de la quasi normalité proposée initialement par MILLIONSHTCHIKOV [13] et qui a été mise en défaut par ORSZAG [18]. Le champ d'application de ces méthodes est toutefois restreint à la turbulence homogène (la plupart du temps isotrope) à faible nombre de Reynolds.

Le développement très rapide des calculateurs électroniques durant les vingt dernières années a permis d'aborder le problème d'une façon plus pratique grâce aux simulations numériques de champs turbulents. Les premiers résultats de simulation ont été obtenus par ORSZAG et PATTERSON [19], puis par SCHUMANN et PATTERSON [20] qui examinèrent également les fluctuations de pression. ROGALLO [21], [22] a fait de nombreuses "expériences" telles que l'étude d'une déformation plane ou axisymétrique ou un cisaillement constant. La réalisation de telles expériences à des nombres de Reynolds peu élevés a été possible grâce à l'utilisation de conditions aux limites périodiques et aussi de méthodes pseudo spectrales: le calcul des dérivées se fait dans l'espace spectral tandis que les produits des composantes de vitesse se font dans l'espace physique, le passage d'un espace à un autre se fait alors à l'aide d'une transformation rapide de FOURIER (FFT) [21]. Deux extensions intéressantes de ces approches sont les travaux de SHIRANI [23] et FEIEREISEN [24]. Le premier a introduit un scalaire passif dans le champ d'une turbulence cisailée homogène tandis que le second a étudié l'effet de la compressibilité sur une turbulence à cisaillement constant. Les deux expériences sont toutefois limitées à des faibles valeurs du nombre de Reynolds (de l'ordre de 100) pour la raison qui a été développée précédemment, concernant le nombre de points de calcul nécessaires à la résolution de toutes les échelles turbulentes.

Dans le but de supprimer, ou au moins déplacer de telles limitations, DEARDORFF [26] suggéra un traitement différent pour les phénomènes à petite échelle. Il est clair en effet que les grosses structures qui sont porteuses de la plus grande partie de l'énergie turbulente et sont donc déterminantes pour le comportement du fluide sont loin de l'homogénéité et de l'isotropie. En revanche, les petites structures, qui selon l'analyse de KOLMOGOROV, dissipent l'énergie reçue des grosses structures à travers la zone inertielle du spectre sont proche de l'isotropie et ont un caractère plus universel. C'est pourquoi, on peut restreindre le calcul déterministe aux phénomènes à grandes échelles tandis que les petites structures sont modélisées. C'est la technique de la modélisation de sous-maille "*sub-grid scale modeling*" couplée à la simulation des grandes structures "*large eddy simulation*". La première application de cette technique fut faite par DEARDORFF [26], qui simula l'écoulement turbulent dans un canal à grand nombre de Reynolds. En utilisant seulement 6720 points de maillage, il réussit à prédire plusieurs caractéristiques de l'écoulement turbulent. En fait le résultat moyen de cette étude a été de montrer la potentialité de cette méthode pour l'étude d'écoulements turbulents. SCHUMANN [27], [28] calcula également un écoulement turbulent de canal et étendit cette méthode à des configurations cylindriques. Il utilisa dix fois plus de points de maillage que DEARDORFF (65536) avec une forme améliorée de modélisation de sous maille comprenant une équation différentielle pour l'énergie de turbulence présente dans cette région du spectre. GROTZBACH et SCHUMANN [29] introduisirent la température en tant que scalaire passif. Dans toutes ces simulations les mécanismes turbulents inhérents à la présence de la paroi sont ignorés et une condition limite dans la partie logarithmique de la couche limite est utilisée pour simuler la sous-couche interne. Or l'expérience a montré que c'est dans cette région que prend place pratiquement toute la production de l'énergie turbulente. La première simulation complète de cet écoulement entre plaques planes fut faite par MOIN ET KIM [30]. Dans ce dernier travail, un demi million de points de maillages furent utilisés pour simuler un écoulement dont le nombre de REYNOLDS est de l'ordre de 13000. Les résultats de tels calculs sont remarquables et justifient à postériori l'appellation parfois usitée d'"expérience numérique". Malgré le succès de ces méthodes pour des écoulements géométriquement très simples, leur utilisation pour résoudre des problèmes très concrets semble encore lointaine à l'heure actuelle.

Alors que les méthodes qui ont été citées jusqu'à maintenant se veulent déterministes par nature, seule une approche statistique est susceptible de donner une évaluation pratique d'écoulements turbulents complexes. Pour obtenir les caractéristiques moyennes d'un écoulement turbulent, il faudrait, dans le cadre d'une approche déterministe, effectuer une moyenne d'ensemble sur un certain nombre de réalisations (à supposer que l'on soit capable d'obtenir de telles réalisations, ce qui n'est pas encore vrai à l'heure actuelle) obtenues par la résolution d'équations exactes. Pour une approche statistique, au contraire, une moyenne temporelle sera faite sur les équations elles-mêmes plutôt que sur leur solution. Si les critères d'ergodicité sont satisfaits, moyennes d'ensemble et moyennes statistiques sont alors identiques. Le problème de la fermeture peut alors être posé plus clairement dans l'espace physique. Quand on introduit dans les équations du mouvement une décomposition du même type ou identique à celle proposée par Reynolds, la non-linéarité du terme convectif fait apparaître un terme nouveau qui correspond au terme de frottement turbulent pour le champ dynamique ou au flux turbulent de chaleur ou de masse dans le cas de la dispersion d'un scalaire tel que la température ou la fraction massique. Quelques manipulations élémentaires des équations de Navier-Stokes ou de diffusion permettent d'obtenir des équations d'évolution pour ces nouvelles corrélations, équations dans lesquelles apparaissent des corrélations triples. De même si on établit les équations d'évolution de ces corrélations triples, apparaissent des moments d'ordre quatre, et ainsi de suite. Pour rompre cette chaîne d'équations il est alors nécessaire d'exprimer d'une façon ou d'une autre les moments d'ordre n par rapport aux moments d'ordre $n - 1$. Le niveau de fermeture de ces équations est alors déterminé par la valeur de n .

I-2-2.- Point de vue statistique - Cas particulier de la turbulence compressible.

Depuis les premiers travaux de REYNOLDS, beaucoup de progrès ont été faits par de nombreux chercheurs et il serait fastidieux et sans grand intérêt d'en faire la revue ici. Force est toutefois de constater que peu de travaux ont été consacrés précisément au traitement des écoulements turbulents compressibles qui font l'objet de cette thèse.

Sur le plan expérimental, les premiers travaux portèrent sur des couches limites en équilibre sur paroi adiabatique [31], [32], [33] ou des sillages isobares [34]. Ils conduisirent MORKOVIN [33] à émettre l'idée que le champ dynamique devait suivre le comportement incompressible. LAUFER [35] utilisa les moyennes pondérées par la masse volumique proposées par FAVRE [36] pour parvenir à une conclusion identique. Durant un certain nombre d'années, les problèmes compressibles ont donc été abordés avec des modèles incompressibles. Toutefois les limites de telles extensions commencent à être mieux connues. BRADSHAW [37] inventoria les divers cas de validité de l'hypothèse de MORKOVIN, en remarquant qu'elle s'applique plutôt à des écoulements où les fluctuations relatives de masse volumique sont faibles. Cela exclut ainsi les couches limites hypersoniques ($Me > 5$) et celles soumises à d'importants gradients de pression (Interaction onde de choc-couche limite turbulente). BRADSHAW conclut également à l'inaptitude de cette approximation à la prédiction de couches de cisaillement supersoniques. L'une des principales conclusions de la conférence sur les couches libres de cisaillement de 1972 [38] fut que tous les modèles de turbulence existants (incompressibles) étaient inadaptés à la prédiction de ces écoulements. La plus belle illustration de cette déficience est le problème bien connu de la décroissance du taux d'ouverture des couches de mélange supersoniques pour des nombres de Mach croissants.

Sur le plan de la modélisation, assez peu de résultats marquants ont été obtenus à ce jour. L'essentiel des travaux a consisté à une extension des modèles incompressibles, en supposant que la présence d'une masse volumique variable dans les équations était suffisante pour représenter correctement les effets de compressibilité. En présence de sévères gradients de pression, de tels modèles s'avèrent mal adaptés (WILCOX et ALBER [39], BRADSHAW [40]). Pour déterminer les importances respectives des effets de compressibilité et de variation de masse volumique, BROWN et ROSHKO ont étudié expérimentalement le comportement d'une couche de mélange de faible vitesse à masse volumique variable [41]. Ils n'ont trouvé aucune évidence des variations du taux d'ouverture avec le rapport des masses volumiques et conclurent que ces variations devaient être dues uniquement à un effet de compressibilité. Deux travaux ont été reportés jusqu'à présent pour résoudre ce problème. OH [42] propose un modèle à une équation qui tient compte des effets de corrélation pression-dilatation et BONNET et LAUNDER [43] qui ont modifié une fermeture du second ordre. Hormis ces deux cas, toutes les tentatives de traitement d'écoulements compressibles ont été faites par de strictes extensions de modèles incompressibles.

I-3.- DEFINITION DU CADRE DE LA PRESENTE RECHERCHE

I-3-1.- Traitement de la turbulence.

Un point commun à tous les modèles présentés dans la suite de cette thèse est l'étude de phénomènes turbulents à l'aide uniquement des corrélations en un point. Le but étant une application des fermetures du second ordre des équations du mouvement, c'est-à-dire la résolution d'équations aux dérivées partielles pour les moments d'ordre deux, l'influence des termes dus aux variations de masse volumique sera tout particulièrement examinée. Dans chaque cas, une certaine progression dans la complexité des modèles sera observée et des comparaisons entre modèles pour un même écoulement seront faites dans la mesure du possible. Les deux principales causes de variation de masse volumique pour des gaz non réactifs seront étudiés :

- le mélange isovolume de gaz de masses moléculaires différentes,
- l'écoulement à grande vitesse d'un gaz avec ou sans gradient de pression.

I-3-2.- Traitement numérique.

Le traitement numérique des équations pourra se faire de deux façons différentes. Chaque fois que cela sera possible, les équations seront simplifiées avec une approximation de type couche limite. Le caractère parabolique, qu'elles auront acquis sera mis à profit pour une résolution avec une version modifiée de la méthode de PATANKAR et SPALDING [45]. Toutefois ce type d'approximation impose de très sévères limitations à la généralité des écoulements étudiés (stationnarité, absence de recirculation, gradients de pression longitudinaux modérés...). Une autre alternative sera donc envisagée, qui n'aura aucune de toutes ces restrictions. Les équations de Navier-Stokes, couplées aux équations de turbulence seront résolues simultanément avec une méthode parabolique par rapport au temps et elliptique/hyperbolique pour les variables d'espace. Le schéma utilisé est la version implicite du modèle prédicteur-correcteur de MAC CORMACK [46] qui permet un progrès très significatif, quant aux coûts de calcul par rapport aux schémas explicites existants.

I-3-3.- Applications

On peut distinguer deux types d'applications distinctes. La partie "mélange isovolume" sera étudiée à partir des travaux expérimentaux de BROWN et ROSHKO [41] et REBOLLO [44]. Le mélange étudié sera fait d'hélium et d'azote, autorisant ainsi un rapport maximum de masses volumiques égal à 7. Deux cas de gradients de pression négatif ou nul seront étudiés.

Le champ d'expérimentation de la partie compressible sera plus vaste. A titre préliminaire des calculs de couches limites supersonique sur plaque plane athermane ou refroidie seront faits en l'absence de gradient de pression longitudinal. Puis le problème d'une interaction forte onde de choc-couche limite turbulente avec décollement étendu sera étudié [45]. En plus de cela, quelques résultats seront présentés pour la couche de mélange (isovolume ou compressible) avec un seul modèle de turbulence.

I-4.- ORGANISATION DU MEMOIRE

Le second chapitre pose le problème de la fermeture. Après une introduction sur le type de moyenne qui est utilisée pour ce travail, les équations du mouvement sont rappelées, tout d'abord sous forme instantanée puis sous forme moyennée. L'apparition des termes nouveaux entraîne la proposition d'équations de transport qui seront ou non utilisées, selon le niveau de fermeture choisi. Ces équations sont destinées à décrire le comportement des contraintes de Reynolds, de l'énergie cinétique de la turbulence, des corrélations triples de vitesse, du taux de dissipation de l'énergie turbulente, des corrélations vitesse-masse volumique et enfin des flux turbulents.

Dans le chapitre III, des solutions sont proposées pour ce problème de fermeture. Une première catégorie de solutions est basée sur l'hypothèse de transport par gradient (approximation de BOUSSINESQ). Dans le cadre de cette approximation, sont regroupées diverses méthodes de fermeture à l'ordre zéro telles que la longueur de mélange, les modèles à une ou deux équations. Dans cette partie, un accent particulier est mis sur le modèle à deux équations $k - \epsilon$, dans le but d'une résolution homogène des équations de la turbulence.

Une seconde catégorie de modèles passe outre à l'approximation de Boussinesq en déterminant directement les grandeurs inconnues avec des équations aux dérivées partielles. Une présentation des diverses hypothèses de modélisation est alors faite, qui permettent l'obtention de formes fermées pour les équations qui ont été introduites au chapitre précédent. Pour les deux catégories de modèles, les hypothèses spécifiques au traitement de la présence d'une paroi solide sont distinguées des approximations valables pour les écoulements libres. Pour conclure ce chapitre les conditions théoriques d'application de ces modèles sont discutées et justifiées (réalisabilité et invariance).

Les deux chapitres suivants sont consacrés à la description des deux méthodes numériques qui sont utilisées dans cette thèse. Après une mise en forme commune des équations d'évolution, et une description globale de la procédure numérique, le changement de variables et ses implications sont présentées, suivies de la formulation en différences finies. Puis les caractéristiques de la méthode sont résumées et une brève discussion de ces avantages et ses limitations prend place. La seconde méthode numérique se veut plus générale que la précédente. Après quelques considérations sur la potentialité des équations à être mises sous forme conservative ou non, la description globale de la méthode est faite. Puis les différences entre les équations instantanées et moyennes sont soulignées et le traitement particulier des termes sourcés est expliqué. Puis après quelques considérations sur des transformations simples de coordonnées une description détaillée de l'opérateur implicite prend place avant de faire la synthèse des caractéristiques générales de cette méthode et de donner quelques chiffres concernant les coûts de calcul correspondant à cette méthode.

Le sixième chapitre expose les principaux résultats qui ont été obtenus. Une première partie résume les résultats correspondant au mélange isovolume de gaz de masses moléculaires différentes avec des modèles de niveaux différents puis les conclusions majeures spécifiques à ce problème seront tirées. Puis, quelques résultats seront présentés pour la couche de mélange (à basse vitesse ou haute vitesse) avec un même modèle de turbulence. Enfin les problèmes plus spécifiquement compressibles sont abordés dans la seconde partie. Tout d'abord différents modèles sont utilisés pour traiter le cas d'une couche limite supersonique adiabatique ou refroidie. Puis le problème de l'interaction onde de choc-couche limite est abordé après une rapide description des conditions expérimentales.

Dans un dernier chapitre, après un résumé des méthodes employées, et des résultats acquis les conclusions sont esquissées et discutées. Les leçons à tirer et les perspectives d'avenir sont alors détaillées.

- [1] J.G. ST VENANT (1843)
C.R.A.S. 17.
- [2] O. REYNOLDS (1883)
"An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous and the law of resistance in parallel channels".
Phil. Trans. Roy. Soc. London, 174, pp. 935-982.
- (1884)
"On the dynamical theory of incompressible viscous fluid and the determination of the criterion
Phy. Trans. Roy. Soc. London, 186, pp. 123-161.
- [3] A.N. KOLMOGOROV (1942)
"Equations of turbulent motion of incompressible fluid".
Izv. Akad. Nauk SSSR Seria fizichiska VI, 56.
- [4] G. COMTE-BELLOT (1965)
"Ecoulement turbulent entre deux parois parallèles".
P.S.T. Ministère de l'Air.
- [5] R.H. KRAICHNAN (1958)
"Irreversible statistical mechanics of incompressible magnetic turbulence".
Phys. Rev. vol. 109, p. 1047.
- [6] R.H. KRAICHNAN (1959)
"The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers".
J.F.M., vol. 5, pp. 497.
- [7] S.F. EDWARDS (1964)
"The theoretical dynamics of homogeneous turbulence".
J.F.M., vol. 18, p. 239.
- [8] R.H. KRAICHNAN (1961)
"The closure problem of turbulence theory".
New York University - Institut of Mathematical Sciences, Report HSN-3.

- [9] R.H. KRAICHNAN (1964)
"Decay of isotropic turbulence in the direct interaction approximation".
Phys. Fluids vol. 7, p. 1030.

"Direct interaction approximation for shear and thermally driven turbulence".
Phys. Fluids vol. 7, p. 1048.
- [10] U. FRISCH (1968)
"Probabilistic methods in applied mathematics".
ed. A.T. Barucha-Reid Academic Press.
- [11] U. FRISCH et R. BOURRET (1970)
"Parastochastics".
J. Math. Phys. Vol. II, p. 364.
- [12] D.C. LESLIE (1973)
"Developments in the theory of turbulence".
Clarendon Press - Oxford.
- [13] M. MILLIONSHTCHIKOV (1941)
"On the theory of homogeneous isotropic turbulence".
C.R.A.S., U.R.S.S., vol. 32, p. 615.
- [14] I. PROUDMAN et W.H. REID (1954)
"On the decay of normally distributed and homogeneous turbulent field".
Phil. Trans. R. Soc. A 247, p. 163.
- [15] E.E. O'BRIEN et G.C. FRANCIS (1962)
"A consequence of the zero fourth cumulant approximation".
J.F.M., vol. 13, p. 369.
- [16] Y. OGURA (1962)
"Energy transfer in a normally distributed and isotropic turbulent velocity field in two dimensions".
Phys. Fluids vol. 5, p. 395.

- [17] R.G. DEISSLER (1960)
"A theory of decaying homogeneous turbulence".
Physics Fluids, vol. 3, p. 176.
- [18] S.A. ORSZAG (1970)
"Analytical theories of turbulence".
J.F.M., 41, p. 363.
- [19] S.A. ORSZAG et G.S. PATTERSON (1972)
"Numerical simulation of three dimensional homogeneous isotropic turbulence".
Phys. Rev. Lett., vol. 28, p. 76.
- [20] U. SCHUMANN et G.S. PATTERSON (1975)
"Numerical study of pressure and velocity fluctuations in nearly isotropic turbulence".
J.F.M.
- [21] R.S. ROGALLO (1977)
"An ILLIAC Program for the numerical simulation of homogeneous incompressible turbulence".
NASA, T.M. 73203.
- [22] R.S. ROGALLO (1981)
"Numerical experiments in homogeneous turbulence".
NASA T.M. 21315.
- [23] E. SHIRANI, J.H. FERZIGER et W.C. REYNOLDS (1981)
"Mixing of a passive scalar in isotropic and sheared homogeneous turbulence".
Mech. Eng - Thermo-Sciences div. report TF-15.
- [24] W.J. FEIEREISEN, W.C. REYNOLDS et J.H. FERZIGER (1981)
"Numerical simulation of a compressible homogeneous turbulent shear flow".
Mech. Eng - Thermo Sciences div. Report TF-13.

- [25] C.W. HIRT (1969)
"Computer studies of time dependent turbulent flow".
Phys. Fluids, Supplement II, pp. 219-227.
- [26] J.W. DEARDORFF (1970)
"A numerical study of three dimensional turbulent channel flow at large Reynolds number".
J.F.M. 41, pp. 453-480.
- [27] U. SCHUMANN (1973)
"Ein Verfahren zur direkten numerischen turbulenter strömungen in Platten und Reingspalkanälen und über seine Anwendung zur Untersuchung von Turbulenz Modellen".
Univeristät Karlsruhe. (NASA tech. transl. NASA TTF 15,391).
- [28] U. SCHUMANN (1975)
"Subgrid scale model for finite difference simulations of turbulent flows in plane channels and annuli".
J. Comp. Phys., vol. 18, pp. 376-404.
- [29] P. MOIN, W.C. REYNOLDS et J.H. FERZIGER (1978)
"Large eddy simulation of incompressible turbulent channel flow".
Dept. of Mech. Eng. Thermo. Sciences div. Report n° TF 12, Stanford University.
- [30] P. MOIN et J. KIM (1981)
"Numerical investigation of Turbulent Channel Flow" NASA TM 81309.
- [31] E.R. VAN DRIEST (1951)
"Turbulent boundary layer in compressible fluids"
J. Aero Sciences, vol. 18, n° 3.
- [32] L.S.G. KOVASZNAY (1953)
"Turbulence in supersonic flow".
J. Aero Sciences, vol. 20.

- [33] M.V. MORKOVIN (1962)
 "Effets of compressible on turbulent flows".
 Mécanique de la turbulence - C.N.R.S. - A Favre - Editeur.
- [34] A. DEMITRIADES (1970)
 "Turbulence measurements in supersonic two dimensional wake".
 Phys. of Fluids, vol. 13, n° 7.
- [35] J. LAUFER (1969)
 "Thoughts on compressible turbulent boundary layers".
 Memorandum R.M. 5946-PR- Rand Corp.
 Egalement NASA SP 216.
- [36] A. FAVRE (1965)
 "Equations des gaz turbulents compressibles".
 J. de Mécanique, vol. 4, n° 3, pp. 361-390.
- [37] P. BRADSHAW (1977)
 "Compressible turbulent shear layers".
 Annual review of fluid Mechanics, pp. 33-54.
- [38] M.V. MORKOVIN et al (1972)
 "Report of conference evaluation committee"
 Free turbulent shear flows Conference Proceedings Hampton - Virginia -
 NASA SP 321.
- [39] D.C. WILCOX et I.E. ALBER (1972)
 "A turbulence model for high speed flows".
 Heat transfer and Fluid Mechanics Institute, Stanford University.
- [40] P. BRADSHAW (1974)
 "The effect of mean compression or dilatation on the turbulence structure
 of supersonic boundary layers".
 J.F.M., vol. 63-3.

- [41] G.L. BROWN et A. ROSHKO (1974)
"On density effects and large structure in turbulent mixing layers".
J.M. vol. 64, part 4, pp. 775-816.
- [42] Y.H. OH (1974)
"Analysis of two dimensional free turbulent mixing".
AIAA 7th- Fluid and Plasma Dynamics Conference.
AIAA paper 74-594.
- [43] J.P. BONNET et B.E. LAUNDER (1981)
"Case 8501".
1980-81-AFOSR - HTTM - Stanford Conference on complexe turbulent flows.
ed. Kline, Cantwell, Lilley - Stanford University.
- [44] M. REBOLLO (1973)
"Analytical and experimental investigation of a turbulent mixing layer
of different gases on a pressure gradient".
Ph. D. thesis California Institute of Technology.
- [45] S.V. PATANKAR et D.B. SPALDING (1970)
"Heat and mass transfer in boundary layer".
Intertext- 1970 - London.
- [46] R.W. MAC CORMACK (1981)
"A numerical method for solving the equations of compressible viscous
flow".
AIAA pap. n° 81 - 0110.

CHAPITRE II

LES EQUATIONS OUVERTES OU LE PROBLEME DE LA FERMETURE

CHAPITRE II

II-1.- LA METHODOLOGIE DE LA MOYENNE.

II-2.- LES EQUATIONS OUVERTES.

II-2-1.- *Formes laminaires ou instantanées.*

A. Conservation de quantité de mouvement.

B. Conservation de l'énergie.

C. Conservation des espèces.

II-2-2.- *Formes turbulentes.*

1. Continuité.

2. Quantité de mouvement.

3. Energie.

4. Fraction massique.

II-3.- LE PROBLEME DE LA FERMETURE : DES OUTILS POUR LE RESOUDRE.

II-3-1.- *Equation des contraintes de Reynolds.*

II-3-2.- *Equation de l'énergie cinétique de la turbulence.*

II-3-3.- *Equation des corrélations triples de vitesse.*

II-3-4.- *Equation du taux de dissipation de l'énergie turbulente.*

II-3-5.- *Equation des corrélations vitesse-masse volumique.*

II-3-6.- *Equation pour les flux turbulents.*

II-4.- RESUME.

II.- LA METHODOLOGIE DE LA MOYENNE

Au point de départ de toute simulation numérique d'écoulement de fluide, nous trouvons toujours les équations de Navier Stokes. Si il était possible de résoudre analytiquement le système d'équations, et en admettant que les conditions aux limites soient telles que l'existence et l'unicité de la solution soient garanties, la solution pourrait être obtenue, indépendamment de la méthode utilisée pour l'obtenir. La nécessité d'une discrétisation des équations pour l'obtention de la solution modifie singulièrement les données du problème. Le passage d'une solution théorique continue à une situation numérique discrète se paie de deux façons différentes :

* On ne possède des informations physiques que, pour les points du maillage. La méthode de calcul est aveugle pour tout ce qui peut se passer entre les points. Les diverses méthodes se singulariseront donc par une façon plus ou moins juste d'approximer les phénomènes inter-nodaux. Mais de toute façon, l'existence des phénomènes caractérisés par des dimensions inférieures à celles des mailles de calcul ne pourra pas, ou seulement très mal, être prise en compte par la méthode numérique.

* L'hypothèse qui est faite sur le comportement des variables entre les points nodaux introduit les erreurs de troncature. Quand elles sont contrôlées, ces erreurs permettent au mieux de caractériser la précision de la méthode (second ordre en espace et en temps par exemple). Dans le cas contraire, elles s'amplifient et s'opposent à l'obtention de toute solution (schéma instable).

Pour illustrer l'importance de cette propriété de filtrage, nous pouvons citer trois des approches qui ont été commentées dans le premier chapitre.

a. Simulation numérique directe. Les équations de Navier-Stokes sont résolues telles qu'elles se présentent sous forme instantanée. La capacité des ordinateurs utilisés jusqu'à ce jour limite pourtant le nombre de Reynolds à quelques centaines (ref. [1]).

b. Pour repousser ces limites, sont alors apparues les méthodes de macrosimulation (ou "*large eddy simulation*") dans lesquelles une hypothèse de comportement est utilisée pour les processus à petite échelle qui sont usuellement reconnus isotropes. La solution des équations d'évolution ne correspond alors qu'aux phénomènes à grande échelle. Malgré cette amélioration, les possibilités des ordinateurs maintiennent des limites très sévères à cette approche [2], [3], [4], [5]. Une solution calculée par FEIEREISEN [3] prend approximativement 20 H CPU sur ILLIAC IV, tandis que la solution d'un écoulement entre plaques [5] nécessite de l'ordre de 50-80 H CPU sur le même calculateur. De tels coûts de calcul sont bien évidemment hors de portée de la majorité des laboratoires.

c. Une troisième approche consiste à faire subir un même traitement statistique à toutes les équations d'évolution. A la différence de la première approche, dans laquelle la prédiction d'une situation physique est obtenue en faisant la moyenne d'un certain nombre de réalisations particulières d'écoulement, la moyenne est faite sur les équations de Navier-Stokes avant leur résolution. La solution qui est alors obtenue, tout en dépendant du temps, ne transporte plus aucune information sur sa composante fluctuante. Les informations sur la turbulence sont portées maintenant par des variables propres telles que les contraintes du tenseur de Reynolds.

Par l'intermédiaire des trois approches citées nous sommes ainsi passées d'un point de vue déterministe à une attitude statistique. Mais examinons plus en détails les implications du point de vue statistique. Considérons la fonction densité de probabilité pour ϕ d'être à l'intérieur de l'intervalle $[a, b]$

$$\text{Prob} (a \leq \phi \leq b) = \int_a^b P(\phi) d\phi \quad (\text{II-1})$$

Cette définition entraîne que la probabilité devient égale à 1 si les limites a et b sont rejetées à plus ou moins l'infini respectivement.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(\phi) d\phi = 1 \quad (\text{II-2})$$

et ainsi le premier moment de cette fonction probabilité de densité donne la valeur moyenne de ϕ :

$$\langle \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi \cdot P(\phi) d\phi \quad (\text{II-3})$$

Les variations possibles de $\langle \phi \rangle$ dans l'espace et le temps dépendront de celles de $P(\phi)$. Une moyenne temporelle peut être utilisée à la place de (II-3), pourvu qu'elle soit basée sur une définition rigoureuse. Il est clair que les écoulements turbulents que l'on peut rencontrer dans la pratique ne sont ni complètement stationnaires ni même réellement homogènes. Les moyennes ne pourront donc être prises que sur des intervalles bornés de l'espace et du temps. Ces intervalles doivent être suffisamment grands, comparés aux échelles caractéristiques de la turbulence, tout en étant petits devant les changements de l'écoulement d'ensemble. Soit une valeur finie T , nous pouvons maintenant définir la moyenne temporelle par

$$\bar{\phi} = \frac{1}{T} \int_0^T \phi(t + \tau) d\tau \quad (\text{II-4})$$

Il faut donc que la durée T soit grande par rapport à la plus grande échelle de temps de la turbulence, de telle façon que $\bar{\phi}$ soit indépendant de t , l'origine de l'intervalle d'intégration. La définition (II-3) entraîne que pour deux variables aléatoires f et g les relations suivantes sont vérifiées

$$\begin{aligned} \langle f + g \rangle &= \langle f \rangle + \langle g \rangle \\ \langle f \cdot g \rangle &= \langle f \rangle \cdot \langle g \rangle \neq \langle f \cdot g \rangle \\ \langle \frac{\partial f}{\partial \eta} \rangle &= \frac{\partial}{\partial \eta} \langle f \rangle \quad \text{si } \eta \in [x_1, x_2, x_3, t] \end{aligned} \quad (\text{II-5})$$

BOUSSINESQ [6] et REYNOLDS [7] établirent les équations pour les écoulements incompressibles en moyennant de la façon décrite ci-dessus les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Des quantités telles que la vitesse, la pression ou la masse volumique sont décomposées en une partie moyenne et une partie fluctuante. Cette méthode fut étendue aux écoulements compressibles par SCHUBAUER et TCHEN [8], HINZE [9] et plusieurs autres auteurs. Si nous les comparons aux équations instantanées, nous voyons apparaître des nouveaux termes qui n'ont pas d'équivalents dans les équations d'origine. Ces termes nouveaux ont la forme de corrélations vitesse-vitesse ou vitesse-masse volumique. Les corrélations vitesse-vitesse sont dénommées contraintes de Reynolds

et représentent le frottement résultant de l'agitation turbulente. Un premier aperçu peut être obtenu en examinant l'équation de conservation de la masse pour un écoulement à masse volumique variable.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (\text{II-6})$$

ρ est la masse volumique et u , v et w sont les trois composantes de la vitesse dans un repère cartésien.

Décomposons ces quantités en composantes moyenne ($\bar{\quad}$) et fluctuante (\prime)

$$\begin{aligned} \rho &= \bar{\rho} + \rho' \\ u &= \bar{u} + u' \\ v &= \bar{v} + v' \\ w &= \bar{w} + w' \end{aligned} \quad (\text{II-7})$$

$$\text{et } \bar{\rho}' = \bar{u}' = \bar{v}' = \bar{w}' = 0 \quad (\text{II-8})$$

Si nous réécrivons l'équation de continuité nous obtenons

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho} \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho' u') + \frac{\partial}{\partial x}(\rho' \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho} u') + \frac{\partial}{\partial y} \dots + \frac{\partial}{\partial z} \dots = 0 \quad (\text{II-9})$$

Après passage à la moyenne il reste

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho} \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\rho} \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{\rho} \bar{w}) + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{\rho' u'}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{\rho' v'}) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{\rho' w'}) = 0 \quad (\text{II-10})$$

Cette procédure introduit dans l'équation de continuité (sous sa forme moyenne) trois nouvelles variables qui sont les corrélations $\overline{\rho' u'}$, $\overline{\rho' v'}$ et $\overline{\rho' w'}$. La fermeture du plus simple système d'équations moyennes sera donc conditionnée au moins par la connaissance de ces corrélations. D'autres auteurs, tels HESSELBERG [10], DEDEBANT et WEHRLE [11], VAN MIEGHEN et DUFOUR [12], BLACKADAR [13] et FAVRE [14] établiront des équations pour des écoulements turbulents compressibles en moyennant le produit de la vitesse et de la masse volumique et en divisant le résultat par la valeur moyenne de la masse volumique. Plus tard, FAVRE [15] étendit ce principe à toutes les variables dépendantes, exceptées la masse volumique et la pression.

Ce type de moyenne peut être introduit statistiquement comme une moyenne ordinaire en utilisant la fonction densité de probabilité jointe pour les deux variables ρ et ϕ : $P_{\rho\phi}(\rho, \phi)$ (ref [16]). Au sens de FAVRE, la fonction probabilité de densité $\tilde{P}(\phi)$ d'une variable ϕ peut être définie de la façon suivante :

$$\tilde{P}(\phi) = \frac{1}{P} \int_0^{\infty} \rho P_{\rho\phi}(\rho, \phi) d\rho \quad (\text{II-11})$$

Ainsi, moyennes pondérées par la masse, variances et corrélations d'ordres supérieurs suivront en tant que moments de cette fonction densité de probabilité.

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} &= \frac{P\phi}{P} = \int \phi \tilde{P}(\phi) d\phi \\ \tilde{\phi}''^2 &= \frac{P\phi''^2}{P} = \int (\phi - \tilde{\phi})^2 \tilde{P}(\phi) d\phi \\ \tilde{\phi}'''^3 &= \frac{P\phi'''^3}{P} = \int (\phi - \tilde{\phi})^3 \tilde{P}(\phi) d\phi \end{aligned} \quad (\text{II-12})$$

et $\tilde{f}(\phi) = \int f(\phi) \tilde{P}(\phi) d\phi$

Nous pouvons donc envisager deux types de moyennes possibles.

- 1) La moyenne temporelle conventionnelle

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad (\text{II-13})$$

$$\bar{\phi} = \frac{1}{T} \int \phi(t) dt \quad ; \quad \bar{\phi}' = 0$$

- 2) La moyenne pondérée au sens de FAVRE

$$\begin{aligned} \phi &= \tilde{\phi} + \phi'' \\ \tilde{\phi} &= \frac{P\phi}{P} \quad ; \quad \phi'' \text{ pas nécessairement nul.} \end{aligned} \quad (\text{II-14})$$

Dans la suite de cette thèse, le qualificatif moyenne pondérée réfèrera désormais à la définition (II-14) et moyenne conventionnelle à la définition (II-13).

* Relations entre moyennes conventionnelles et pondérées.

Les relations entre les différentes moyennes s'obtiennent directement à partir des définitions (II-13) et (II-14). Multiplions (II-13) par la valeur instantanée de la masse volumique.

$$\rho\phi = \rho\bar{\phi} + \rho\phi'$$

Après passage à la moyenne et division par $\bar{\rho}$ on obtient

$$\frac{\overline{\rho\phi}}{\bar{\rho}} = \tilde{\phi} \quad (\text{II-15})$$

ce qui peut également s'écrire

$$\tilde{\phi} = \bar{\phi} + \frac{\overline{\rho'\phi'}}{\bar{\rho}} \quad (\text{II-16})$$

De même on peut déduire de la relation (II-14) que

$$\overline{\rho\phi} = \overline{\rho\tilde{\phi}} + \overline{\rho\phi''} = \bar{\rho}\tilde{\phi} + \overline{\rho\phi''} \quad (\text{II-17})$$

Il s'ensuit alors immédiatement que

$$\overline{\rho\phi''} = 0 \quad (\text{II-18})$$

Reprenons maintenant l'équation (II-17). En utilisant la définition (II-13) il vient

$$\bar{\rho}\tilde{\phi} + \overline{\rho'\phi'} = \bar{\rho}\tilde{\phi} + \bar{\rho}\phi'' + \overline{\rho'\phi''}$$

et en tenant compte de l'équation (II-16)

$$\phi'' = -\frac{1}{\bar{\rho}} \overline{\rho'\phi''} \quad (\text{II-19})$$

Si maintenant l'équation (II-14) est moyennée

$$\bar{\phi} = \tilde{\phi} + \phi''$$

il s'ensuit alors, grâce à (II-16)

$$\phi'' = -\frac{\overline{\rho'\phi'}}{\bar{\rho}} \quad (\text{II-20})$$



Reprenons maintenant l'équation de conservation de la masse. En utilisant la moyenne pondérée pour la vitesse, il ne reste plus pour l'équation moyennée, que

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \tilde{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} \tilde{v}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} \tilde{w}) = 0 \quad (\text{II-21})$$

forme strictement semblable à celle de l'équation instantanée. Si nous considérons maintenant le produit de deux variables turbulentes, qui peuvent être moyennées selon (II-13) ou (II-14), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \bar{\phi}_1 + \phi_1' = \bar{\phi}_1 + \phi_1'' \\ \phi_2 &= \bar{\phi}_2 + \phi_2' = \bar{\phi}_2 + \phi_2'' \end{aligned}$$

Comme de plus

$$\phi_1 \phi_2 = (\widetilde{\phi_1 \phi_2}) + (\phi_1 \phi_2)''$$

il s'ensuit, par l'application des règles de la moyenne pondérée

$$\widetilde{\phi_1'' \phi_2''} = \widetilde{\phi_1 \phi_2} - \bar{\phi}_1 \bar{\phi}_2$$

ou encore

$$\widetilde{\phi_1'' \phi_2''} = \overline{\phi_1' \phi_2'} + \frac{1}{\bar{\rho}} \overline{\rho' (\phi_1 \phi_2)'} - \frac{1}{\bar{\rho}^2} \overline{\rho' \phi_1'} \overline{\rho' \phi_2'} - \frac{\bar{\phi}_1}{\bar{\rho}} \overline{\rho' \phi_2'} - \frac{\bar{\phi}_2}{\bar{\rho}} \overline{\rho' \phi_1'}$$

Il est alors facile de montrer que

$$\overline{\rho' (\phi_1 \phi_2)'} = \bar{\phi}_1 \overline{\rho' \phi_2'} + \bar{\phi}_2 \overline{\rho' \phi_1'} + \overline{\rho' \phi_1' \phi_2'}$$

Il reste une relation entre les corrélations doubles exprimées suivant les deux types de moyenne.

$$\widetilde{\phi_1'' \phi_2''} = \overline{\phi_1' \phi_2'} - \frac{1}{\bar{\rho}^2} \overline{\rho' \phi_1'} \overline{\rho' \phi_2'} + \frac{1}{\bar{\rho}} \overline{\rho' \phi_1' \phi_2'} \quad (\text{II-22})$$

De même que pour l'équation de continuité, l'usage des moyennes pondérées permet de conserver une forme simple aux termes convectifs des équations de transport. D'une façon générale, l'utilisation de la moyenne pondérée est profitable pour toutes les équations de transport dans le sens où on obtient des formes analogues aux formes instantanées des équations. Il faut relever toutefois une exception

qui est l'équation d'évolution de ε , le taux de dissipation de l'énergie turbulente. Nous verrons par la suite que, mis à part les termes convectifs, l'équation de ε est beaucoup plus compliquée en moyenne pondérée. De plus, les fermetures du second ordre existant à ce jour ayant été développées pour des écoulements à masse volumique constante, donc en termes de moyennes conventionnelles, il peut être erroné de transposer sans précautions ces modèles aux écoulements à masse volumique variable (ref. [17], [18]). Dans une publication plus récente HA MINH [19] propose une approche intermédiaire qui moyenne la quantité de mouvement différemment de la vitesse de convection. Quoique attrayante par sa conception, cette méthode a le défaut d'augmenter sensiblement le nombre d'équations, dont la résolution est nécessaire et laisse encore non résolu le problème de la modélisation des termes pression-déformation.

Une dernière question se pose au sujet de l'utilisation de la moyenne pondérée : Peut-on comparer les valeurs mesurées expérimentalement avec les grandeurs obtenues du calcul ? Selon que la mesure est faite avec une sonde de pitot, un anémomètre à fil chaud ou un anémomètre laser, la grandeur mesurée sera de nature différente. Il est montré dans la référence [20] que les différences sont négligeables pour les écoulements de mélange à basse vitesse. En fait, lorsque le taux de turbulence est faible ou modéré et le nombre de Mach inférieur à 5, FAVRE [21] a montré que les écarts entre moyennes conventionnelles et moyennes pondérées sont du second ordre et donc que la comparaison avec les résultats expérimentaux est tout-à-fait possible.

II-2.- LES EQUATIONS OUVERTES

II-2-1.- Formes laminaires ou instantannées

Afin de donner une description réaliste de l'écoulement d'un fluide à masse volumique variable, il est nécessaire d'étendre le concept conventionnel de fluide homogène pour considérer en un même point (\underline{x} , t) toutes les composantes qui caractérisent le fluide dans le cadre de la thermodynamique des milieux continus. Pour avoir une définition claire des variables nécessaires, nous les définirons d'abord dans le cas de l'écoulement isotherme d'un fluide homogène, puis ces définitions seront étendues au cas non isotherme et finalement une éventuelle non homogénéité du fluide sera envisagée.

Un milieu continu doit satisfaire les deux conditions suivantes :

1 - Le milieu est monophasique; il peut être liquide ou gazeux, des molécules d'espèces chimiques différentes peuvent être présentes mais dans une même phase.

2 - Les effets de raréfaction sont exclus. En d'autres termes, le libre parcours moyen (m-f-p) des molécules doit être plusieurs ordres de grandeur plus petit que les échelles caractéristiques de l'écoulement. Si L représente la plus petite échelle de longueur, cette condition peut être formulée avec le nombre de Knudsen K_n par

$$K_n = \frac{m.f.p}{L} \ll 1$$

Si cette condition n'est pas remplie, l'écoulement d'un gaz ne peut pas être décrit par les équations aux dérivées partielles qui seront établies dans la suite de ce manuscrit. Il a été observé néanmoins que ces équations donnaient encore des résultats satisfaisants dans le régime dit de transition ($10^{-1} < K_n < 10$) moyennant certaines précautions pour le traitement des conditions aux limites [22].

Dans le cadre de la mécanique des milieux continus nous supposons qu'il est possible de définir un petit domaine δV dont les dimensions sont plus grandes que celles des molécules et sur lequel une moyenne spatiale de toute propriété moléculaire définit la valeur locale d'une quantité macroscopique ϕ . Soit ψ une propriété moléculaire de l'écoulement. La valeur locale correspondante ϕ sera

$$\phi = \frac{\sum_{\delta V} \psi}{\delta V}$$

Dans cette relation $\sum_{\delta V} \psi$ signifie que la sommation est faite sur toutes les molécules qui sont à l'intérieur du domaine élémentaire δV . Deux sortes de variables sont nécessaires pour caractériser le premier type d'écoulement.

1 masse volumique

Supposons que N molécules de masse M_A se trouvent dans le volume élémentaire δV entourant un point P . La valeur locale de la masse volumique en ce point est définie par :

$$\rho = \frac{N \cdot M_A}{\delta V}$$

2 quantité de mouvement

Chaque molécule a sa propre quantité de mouvement \vec{Z}_α . De même, il est possible de définir la valeur locale de la quantité de mouvement au point P par

$$\rho \vec{U} = \frac{\sum_\alpha \vec{Z}_\alpha}{\delta V}$$

La sommation sur α est équivalente à celle sur δV , mais chaque molécule peut avoir une quantité de mouvement différente de ses voisines.

A) Transport de la quantité de mouvement.

Ces quatre variables (masse volumique et composantes de la vitesse) constituent les paramètres nécessaires à la caractérisation du fluide au point P dans le cadre de l'écoulement isotherme d'un fluide homogène. Pour exprimer la conservation de ces variables, il est tout d'abord nécessaire de faire un choix entre deux systèmes de références possibles : les représentations eulérienne et lagrangienne. Dans la formulation eulérienne le mouvement du fluide est décrit par rapport à un système de référence donné $(0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$, tandis que dans la formulation lagrangienne, la particule fluide est suivie dans son mouvement. Pour ce travail, la représentation eulérienne est adoptée, ce qui implique que les quatre variables définies précédemment doivent satisfaire une équation de bilan dont la forme générale est

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k \phi) = \frac{\partial}{\partial x_k} (T_k^\phi) + S^\phi \quad (\text{II-23})$$

ρ est la masse volumique, v_k est la composante de vitesse suivant la direction \vec{x}_k . Pour chacune des quatre variables internes de l'écoulement, les contributions ϕ , T_k^ϕ et S^ϕ sont données dans le tableau (II-1). La première équation, ou équation de conservation de la masse fait état du bilan massique nul à travers un volume élémentaire. Les trois équations de quantité de mouvement correspondent à un bilan nul des flux de quantités de mouvement avec les éventuelles créations ou destructions de ces quantités.

	ϕ	T_k^ϕ	S^ϕ
équation de conservation de la masse	1	0	0
équation de quantité de mouvement ($\alpha=1,2,3$)	v_α	$\tau_{\alpha k} - \delta_{\alpha k} p$	$S^{v\alpha}$

Tableau II-1

$\tau_{\alpha k}$ est le flux de la composante α de quantité de mouvement suivant la direction \vec{x}_k . $S^{v\alpha}$ représente les forces extérieures qui s'exercent sur l'élément fluide. Une équation d'état relie la pression p et la masse volumique ρ

$$p = \rho R T \quad (\text{II-24})$$

R est la constante universelle des gaz divisée par la masse moléculaire du fluide et T est la température absolue.

En écrivant les trois équations de quantités de mouvement, neuf inconnues $\tau_{\alpha k}$ ont été introduites. Ces quantités sont les composantes du tenseur des contraintes. La loi de Newton de viscosité permet à ces composantes d'être exprimées en fonction du tenseur des vitesses de déformation et d'un coefficient dépendant du fluide : la viscosité. A cause des propriétés du tenseur des contraintes (trace nulle et symétrie) les valeurs des six composantes indépendantes sont, pour les fluides newtoniens (ref. [23]) :

$$\begin{aligned}
 \tau_{xx} &= \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{u} - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\
 \tau_{yy} &= \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{u} - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\
 \tau_{zz} &= \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{u} - 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\
 \tau_{xy} = \tau_{yx} &= -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 \tau_{xz} = \tau_{zx} &= -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
 \tau_{yz} = \tau_{zy} &= -\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \quad (\text{II-25})$$

Les expressions pour les contraintes visqueuses sont des approximations valides si la loi de Stokes est vérifiée et si les gradients de vitesse ne sont

pas trop importants (réf. [24]). Il est alors possible de montrer, à l'aide de la théorie cinétique des gaz, qu'une condition nécessaire est :

$$\frac{|m.f.p|}{c} \cdot \left| \frac{\partial v_x}{\partial x_\beta} \right| \ll 1 \quad (\text{II-26})$$

où c est une vitesse moléculaire caractéristique (par exemple la vitesse du son $c = \sqrt{\gamma RT}$). Aux conditions normales on a pour l'air $|m.f.p| \approx 0,6 \cdot 10^{-7}$ m et $c \approx 340$ m/s. Cette condition est donc clairement satisfaite dans la plupart des applications. La structure d'une onde de choc est une exception bien connue.

L'équation de continuité (ou de conservation de la masse) et les équations de quantité de mouvement, en compagnie de l'équation d'état, les lois de comportement et la définition de la viscosité forment un système fermé d'équations qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} + \rho u \frac{du}{dx} + \rho v \frac{du}{dy} + \rho w \frac{du}{dz} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{du}{dx} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{u} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right) \right] + \rho g_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv}{dt} + \rho u \frac{dv}{dx} + \rho v \frac{dv}{dy} + \rho w \frac{dv}{dz} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \frac{dv}{dy} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{u} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) \right] + \rho g_y \end{aligned} \quad (\text{II-27})$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{dw}{dt} + \rho u \frac{dw}{dx} + \rho v \frac{dw}{dy} + \rho w \frac{dw}{dz} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(2\mu \frac{dw}{dz} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{u} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz} \right) \right] + \rho g_z \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) &= 0 \end{aligned}$$

Ces équations sont rarement utilisées sous leur forme complète. On se limite le plus souvent soit au cas d'un fluide idéal ($\mu = 0$) soit au cas d'un fluide incompressible ($\rho = \text{cte}$). Après avoir établi ce premier système formé d'équations pour les écoulements isothermes homogènes, nous allons étendre maintenant ce formalisme aux écoulements compressibles.

B) Transport de chaleur

Quand, en addition au mouvement du fluide, un transfert de chaleur est présent, il devient nécessaire d'utiliser également la notion de bilan d'énergie, similairement aux concepts de bilan de quantité de mouvement et de conservation de la masse.

Considérons un élément de volume dans le cadre d'une description eulérienne. L'équation de conservation de l'énergie totale de la particule fluide procède de la première loi de la thermodynamique et peut être écrite

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(v_k \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) \right) = -\nabla \cdot \vec{q} + \rho (\vec{u} \cdot \vec{g}) - \nabla \cdot p \vec{u} - \nabla \cdot (\tau \cdot \vec{u}) \quad (\text{II-28})$$

Dans cette équation e est l'énergie interne du fluide par unité de masse et $\frac{1}{2} \rho u^2$ est l'énergie cinétique du fluide par unité de volume. L'énergie interne comprend l'énergie propre des molécules (mouvements de translation et de rotation et énergie interne des molécules) et l'énergie d'interaction entre les molécules. La somme de l'énergie interne et de l'énergie cinétique est l'énergie totale de la particule fluide. Les différentes contributions sont

- (I) $-\nabla \cdot \vec{q} \rightarrow$ conduction
- (II) $\rho (\vec{u} \cdot \vec{g}) \rightarrow$ puissance des forces de gravitation par unité de volume
- (III) $-\nabla \cdot p \vec{u} \rightarrow$ puissance de la pression par unité de volume
- (IV) $-\nabla \cdot (\tau \cdot \vec{u}) \rightarrow$ puissance des forces visqueuses par unité de volume.

\vec{q} est le vecteur flux de chaleur et \vec{g} est le vecteur force de gravitation par unité de masse.

Par analogie à la loi de Newton de viscosité, nous introduisons maintenant la loi de Fourier de conduction de chaleur qui relie le vecteur flux de chaleur au gradient de température.

$$\vec{q} = -K \cdot \vec{\nabla} T \quad (\text{II-29})$$

De nouveau, la théorie cinétique des gaz indique que (II-29) est une expression valable tant que les gradients de température ne sont pas trop grands. Le critère de validité est similaire à (II-26).

$$\frac{|m \cdot f \cdot p|}{T} \left| \frac{\partial T}{\partial x_k} \right| \ll 1 \quad (\text{II-30})$$

En utilisant les mêmes arguments que pour (II-26) il est possible de montrer que ce critère est satisfait dans la plupart des cas pratiques. L'équation (II-28) exprime la conservation de l'énergie totale par unité de volume. Pour certains problèmes de transfert de chaleur, il est plus commode de travailler avec l'équation de l'enthalpie. Pour obtenir cette équation, il suffit de soustraire de (II-28) l'équation de l'énergie cinétique qui est obtenue en formant le produit scalaire de \vec{u} avec les équations de quantités de mouvement (ref. [25]). L'équation de bilan de l'enthalpie est alors

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} h = -(\vec{\nabla} \cdot \vec{q}) - T \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \mathbb{H} \quad (\text{II-31})$$

avec

$$\mathbb{H} = -\tau : \nabla \vec{u} \quad (\text{II-32})$$

h est l'enthalpie massique. Le symbole $:$ signifie ici produit du tenseur par le vecteur $\nabla \vec{u}$.

\mathbb{H} est la fonction de dissipation donnée par

$$\begin{aligned} \mathbb{H} = & 2\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \\ & + \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{II-33})$$

Le passage de l'énergie interne à l'enthalpie est obtenu en exprimant e en fonction de V et T .

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial e}{\partial V} \right)_T dV$$

En résumé l'équation (II-31) montre que la température peut être modifiée :

- par conduction de chaleur,
- par effets de détente,
- par échauffement visqueux.

Il faut noter que cette dernière contribution est toujours positive, ce qui met en évidence son caractère irréversible.

C) Transport d'espèces

Une extension supplémentaire de ces hypothèses est de considérer des fluides non homogènes. Dans l'introduction nous avons supposé qu'il est possible de définir un petit domaine δV dont les dimensions sont supérieures aux dimensions moléculaires, et sur lequel une moyenne spatiale de toute propriété moléculaire définit la valeur locale d'une quantité macroscopique Φ . Cette hypothèse est encore valable si, à l'intérieur du volume δV des molécules de différentes espèces chimiques sont présentes. Ainsi la moyenne, définie précédemment, permet la définition de la valeur locale d'une grandeur macroscopique $\Phi_{\delta V}^I$ correspondant à l'espèce I dans δV . La valeur locale de Φ pour le volume δV est, en considérant toutes les espèces

$$\Phi_{\delta V} = \sum_I \Phi_{\delta V}^I \quad (\text{II-34})$$

Il est alors aisé de redéfinir les variables internes du mélange.

1 Masse volumique

Supposons que N_I molécules de l'espèce I, ayant chacune une masse M_I sont présentes dans δV . La masse volumique partielle pour cette espèce est donc

$$\rho_I = \frac{N_I M_I}{\delta V} \quad (\text{II-35})$$

Pour un mélange à n composantes, I varie de 1 à n . La valeur locale de la masse volumique du mélange sera donc

$$\rho = \sum_I \rho_I \quad (\text{II-36})$$

2 Quantité de mouvement

Les mêmes considérations s'appliquent à la quantité de mouvement

$$\rho \vec{v} = \sum_I \rho_I \vec{v}_I \quad (\text{II-37})$$

$\rho_I \vec{v}_I$ est la valeur locale de la quantité de mouvement de l'espèce I.

3 Energie interne

$$\rho e = \sum_I \rho_I e_I \quad (\text{II-38})$$

e_I est ici l'énergie interne de l'espèce I par unité de masse dans le volume δV . Les équations (II-35) à (II-38) définissent les valeurs locales des variables internes d'un mélange en fonction des valeurs des variables correspondantes pour chaque espèce. Ainsi le comportement thermodynamique est décrit par les équations (II-27) et (II-28) ou toutes les variables se réfèrent aux variables de mélange définies par les équations (II-35) à (II-38), auxquelles s'ajoutent des informations au sujet de la composition du mélange. La fraction massique est définie par

$$c_I = \frac{\rho_I}{\rho} \quad (\text{II-39})$$

qui est le rapport de la masse volumique partielle ρ_I à la masse volumique du mélange. De nouveau, comme il a été fait pour le bilan d'énergie, nous pouvons écrire une équation de bilan pour la masse de l'espèce I dans un volume élémentaire. Il vient alors

$$\frac{d\rho_I}{dt} + \nabla \cdot (\rho_I \vec{v}_I) = S_I \quad (\text{II-40})$$

Cette équation traduit que la modification de masse de l'espèce I en fonction du temps dans un volume élémentaire fixe dans l'espace résulte du mouvement de l'espèce I par convection et éventuellement de réactions chimiques produisant la composante I à un taux S_I par unité de volume. A priori nous ne connaissons pas la valeur du vecteur flux massique. Pour exprimer ce dernier en fonction des variables de mélange, une troisième loi de comportement est introduite : c'est la première loi de FICK. La loi de Newton de viscosité exprime le flux de quantité de mouvement comme étant linéairement relié au gradient de vitesse, la loi de Fourier de conduction de chaleur donne une relation linéaire entre le flux de chaleur et le gradient de température. Similairement la première loi de FICK de diffusion exprime le flux massique comme étant relié linéairement au gradient de concentration (réf. [25]).

En termes de fraction massique, cette loi peut être écrite pour un mélange binaire :

$$\rho_I \vec{v}_I = \rho_I \vec{v} - \rho D_{IJ} \nabla \left(\frac{\rho_I}{\rho} \right) \quad (\text{II-41})$$

où D_{IJ} est le coefficient de diffusion binaire pour les composantes I et J .

Nous pouvons donc reformuler l'équation (II-40) sachant que

$$c_I = 1 - c_J = \frac{\rho_I}{\rho} \quad (\text{II-42})$$

$$\frac{d}{dt}(\rho c_I) + \nabla \cdot (\rho c_I \vec{v}) = \nabla \cdot (\rho \mathcal{D}_{IJ} \nabla c_I) + S_I \quad (\text{II-43})$$

L'équation (II-43) décrit le comportement de la concentration dans un système de diffusion binaire, en absence de diffusion thermique ou due à la pression. De même que pour les lois précédentes, la théorie cinétique des gaz restreint l'utilisation de la loi de FICK aux cas où les gradients de fraction massique ne sont pas trop importants. Un critère de validité ad hoc est donc

$$\left| \frac{m \cdot f \cdot p}{c_I} \right| \left| \frac{\partial c_I}{\partial x_i} \right| \ll 1 \quad (\text{II-44})$$

Cette condition est satisfaite dans la plupart des cas pratiques.

Avec la définition de la fraction massique, l'équation d'état peut-être réécrite :

$$p = \rho R T \sum_I \frac{c_I}{M_I} \quad (\text{II-45})$$

Les équations (II-27), (II-43) et (II-45) permettent donc la détermination des variables \vec{v} , p , ρ et c_I si le champ de température est constant et connu.

Si le champ de température doit également être décrit une équation d'énergie (II-31) doit être ajoutée à ce système ainsi qu'une équation thermique d'état :

$$h = \sum_I (c_{PI} T + H_I) \frac{c_I}{M_I} \quad (\text{II-46})$$

c_{PI} est le coefficient de chaleur spécifique à pression constante pour l'espèce I.

H_I est la chaleur de formation de l'espèce I.

M_I est la masse moléculaire de l'espèce I.

Deux derniers détails doivent encore être remarqués : ni l'influence des gradients de température sur la diffusion massique, ni l'influence des gradients de concentration ou des contraintes mécaniques sur le flux de chaleur ne sont considérées dans cette thèse (effets SORÉT et DUFOUR, ref. [25]).

II-2-2.- Formes turbulentes

Nous allons voir maintenant comment sont prises en compte dans les équations certaines des caractéristiques fluctuantes du mouvement. Nous nous efforcerons d'expliquer succinctement comment les nouvelles équations sont obtenues à partir des équations instantanées. Ce qui nous mettra très vite en présence du problème de la fermeture. Pour des raisons pratiques de clarté, toutes les considérations seront faites pour un écoulement plan bidimensionnel. De plus les effets de gravité seront négligés. La moyenne utilisée ici est la moyenne pondérée par la masse volumique.

1 Equation de continuité (conservation de la masse)

La forme instantanée de cette équation est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho v_\alpha) = 0 \quad (\text{II-47})$$

Le choix des moyennes utilisées entraîne

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' \quad (\text{II-48})$$

$$v_\alpha = \tilde{v}_\alpha + v_\alpha'' \quad (\text{II-49})$$

En combinant les relations (II-47), (II-48), (II-49) et (II-19) et après prises de moyenne, l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \tilde{v}_\alpha) = 0 \quad (\text{II-50})$$

Les équations (II-47) et (II-50) sont identiques, aux signes de moyenne près.

2 Equation de quantité de mouvement

L'équation instantanée pour la composante v_β est

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_\beta) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho v_\alpha v_\beta) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\sigma_{\alpha\beta}) \quad (\text{II-51})$$

avec

$$\sigma_{\alpha\beta} = -P \delta_{\alpha\beta} + \mu S_{\alpha\beta} \quad (\text{II-52})$$

P étant la pression, $\delta_{\alpha\beta}$ le symbole de Kronecker, μ la viscosité : $S_{\alpha\beta}$ est l'illustration de la loi de viscosité de Newton.

$$S_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \right) - \frac{2}{3} S_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\beta} \quad (\text{II-53})$$

En utilisant une technique similaire à celle de l'équation de continuité, l'équation (II-51) devient

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{v}_\beta) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \tilde{v}_\alpha \tilde{v}_\beta) = - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\overline{\rho v_\alpha'' v_\beta''}) - \frac{\partial}{\partial x_\beta} \bar{P} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\overline{\mu S_{\alpha\beta}}) \quad (\text{II-54})$$

En plus des termes conventionnels qui existent déjà dans l'équation instantanée, nous avons fait apparaître un terme nouveau qui caractérise le frottement turbulent et dont l'existence est à la base du problème de la fermeture.

3 Equation de l'énergie

La pression est reliée à l'énergie interne spécifique et à la masse volumique par une équation d'état qui peut se mettre sous la forme

$$P = (\gamma - 1) \rho e \quad (\text{II-55})$$

On peut former l'expression de l'énergie totale par unité de masse E :

$$E = e + \frac{1}{2} v_\alpha v_\alpha \quad (\text{II-56})$$

qui admet pour équation de bilan la forme instantanée suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho v_\alpha E) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\sigma_{\alpha\beta} v_\beta) - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (Q_\alpha) \quad (\text{II-57})$$

Le tenseur de contraintes $\sigma_{\alpha\beta}$ est défini comme précédemment. La connaissance de Q_α découle de la loi de Fourier

$$Q_\alpha = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} \quad (\text{II-58})$$

Le passage à la moyenne laisse alors apparaître l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \tilde{E}) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\bar{\rho} \tilde{v}_\alpha \tilde{E}) = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\overline{\rho v_\alpha'' E''}) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\overline{\sigma_{\alpha\beta} v_\beta}) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\overline{Q_\alpha}) \quad (\text{II-59})$$

De même que pour l'équation de quantité de mouvement, un terme nouveau est apparu, qui caractérise la diffusion par la turbulence de l'énergie totale.

4 Equation de conservation d'espèce

Une équation d'évolution pour toute quantité scalaire transportable peut être obtenue de façon analogue aux équations précédentes. Dans le cas de la fraction massique C_I , nous aurons la forme instantanée

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho C_I) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho v_\alpha C_I) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(J_{\alpha I}) + S_I \quad (\text{II-60})$$

En l'absence de réaction chimique, la fraction massique est considérée comme un scalaire passif et $S_I = 0$. Après le passage à la moyenne, il reste donc

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \tilde{C}_I) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\bar{\rho} \tilde{v}_\alpha \tilde{C}_I) = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\overline{\rho v_\alpha'' C_I''}) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\overline{J_{\alpha I}}) \quad (\text{II-61})$$

Les trois exemples précédents montrent donc que le passage à la moyenne provoque systématiquement l'apparition de termes nouveaux. Comme il a été montré dans la référence [26], l'intérêt de la moyenne pondérée au sens de Favre est principalement de minimiser le nombre de ces termes nouveaux.

II-3.- LE PROBLEME DE LA FERMETURE ET LES OUTILS POUR LE RESOUDRE

Par l'apparition de ces termes nouveaux se pose le problème de la fermeture. A ce niveau il existe de nombreuses possibilités différentes pour résoudre ce problème. Dans les 2 chapitres suivants, nous ferons une synthèse des différentes voies possibles en soulignant les avantages de chaque solution sans oublier que le "coût" est toujours lié au niveau de complexité du moyen mis en oeuvre et à la qualité du résultat obtenu. Avant d'aborder le détail des différentes fermetures du système d'équations, il est nécessaire de développer "à priori" un certain nombre d'équations d'évolution de grandeurs caractéristiques de la turbulence dont telle ou telle combinaison permettra l'obtention d'un système fermé.

II-3-1.- Equation des contraintes de Reynolds

Cette équation joue un rôle très important car elle se retrouve dans toutes les fermetures avec équations de transport sous sa forme complète ou sous forme contractée (énergie cinétique de turbulence). Pour cette première équation, nous exposerons le développement complet, tandis que les équations suivantes ne seront données que sous forme de résultat, la méthodologie étant la même pour obtenir l'équation d'évolution de corrélations d'ordre supérieur ou égal à trois. Intéressons-nous à l'équation de la composante $\overline{u_\gamma u_\beta}$ du tenseur des contraintes de Reynolds exprimée en moyenne pondérée.

Considérons le produit de l'équation instantanée de quantité de mouvement suivant x_β par la fluctuation v_γ'' :

$$u_\gamma'' \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_\beta) + u_\gamma'' \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho u_\alpha u_\beta) = u_\gamma'' \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\mu S_{\alpha\beta}) - u_\gamma'' \frac{\partial}{\partial x_\beta} (P) \quad (\text{II-62})$$

En permutant les indices γ et β nous obtenons :

$$u_\beta'' \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_\gamma) + u_\beta'' \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho u_\alpha u_\gamma) = u_\beta'' \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\mu S_{\alpha\gamma}) - u_\beta'' \frac{\partial}{\partial x_\gamma} (P) \quad (\text{II-63})$$

la moyenne temporelle de la somme (II-62) + (II-63) est

$$\begin{aligned} & \overline{u_\gamma'' \frac{\partial}{\partial t} (\rho' \tilde{u}_\beta)} + \overline{u_\beta'' \frac{\partial}{\partial t} (\rho' \tilde{u}_\gamma)} + \overline{u_\gamma'' \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{u}_\beta)} + \overline{u_\beta'' \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{u}_\gamma)} \\ & + \overline{u_\gamma'' \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} u_\beta'')} + \overline{u_\beta'' \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} u_\gamma'')} + \overline{u_\gamma'' \frac{\partial}{\partial t} (\rho' u_\beta'')} + \overline{u_\beta'' \frac{\partial}{\partial t} (\rho' u_\gamma'')} \\ & + \overline{u_\gamma'' \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \tilde{u}_\alpha \tilde{u}_\beta)} + \overline{u_\gamma'' \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} u_\alpha'' u_\beta'')} + \overline{u_\gamma'' \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} u_\alpha'' \tilde{u}_\beta)} + \overline{u_\gamma'' \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} u_\beta'' \tilde{u}_\alpha)} \\ & + \overline{u_\gamma'' \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho' \tilde{u}_\alpha \tilde{u}_\beta)} + \overline{u_\gamma'' \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho' u_\alpha'' u_\beta'')} + \overline{u_\gamma'' \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho' u_\alpha'' \tilde{u}_\beta)} + \overline{u_\gamma'' \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho' u_\beta'' \tilde{u}_\alpha)} \\ & + \overline{u_\beta'' \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \tilde{u}_\alpha \tilde{u}_\gamma)} + \overline{u_\beta'' \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} u_\alpha'' u_\gamma'')} + \overline{u_\beta'' \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} u_\alpha'' \tilde{u}_\gamma)} + \overline{u_\beta'' \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} u_\gamma'' \tilde{u}_\alpha)} \\ & + \overline{u_\beta'' \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho' \tilde{u}_\alpha \tilde{u}_\gamma)} + \overline{u_\beta'' \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho' u_\alpha'' u_\gamma'')} + \overline{u_\beta'' \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho' u_\alpha'' \tilde{u}_\gamma)} + \overline{u_\beta'' \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho' u_\gamma'' \tilde{u}_\alpha)} \\ & = - \overline{u_\gamma'' \frac{\partial P}{\partial x_\beta}} - \overline{u_\beta'' \frac{\partial P}{\partial x_\gamma}} + \overline{u_\gamma'' \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\mu S_{\alpha\beta})} + \overline{u_\beta'' \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\mu S_{\alpha\gamma})} \end{aligned} \quad (\text{II-64})$$

La première ligne de l'équation (II-64) peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \overline{v_Y'' \frac{\partial}{\partial t} (\rho \tilde{v}_\beta)} + \overline{v_\beta'' \frac{\partial}{\partial t} (\rho \tilde{v}_Y)} &= \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho v_Y'' \tilde{v}_\beta}) - \overline{\rho \tilde{v}_\beta \frac{\partial}{\partial t} (v_Y'')} \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho v_\beta'' \tilde{v}_Y}) - \overline{\rho \tilde{v}_Y \frac{\partial}{\partial t} (v_\beta'')} \end{aligned}$$

La définition de la moyenne pondérée entraînant que

$$\overline{\rho \phi''} = 0 \quad \forall \phi \neq \rho, p$$

il ne reste donc que

$$\overline{v_Y'' \frac{\partial}{\partial t} (\rho \tilde{v}_\beta)} + \overline{v_\beta'' \frac{\partial}{\partial t} (\rho \tilde{v}_Y)} = \tilde{v}_\beta \overline{v_Y'' \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \tilde{v}_Y \overline{v_\beta'' \frac{\partial \rho}{\partial t}} \quad (\text{II-65})$$

La seconde ligne de l'équation (II-64) donne :

$$\overline{v_Y'' \frac{\partial}{\partial t} \rho v_\beta''} + \overline{v_\beta'' \frac{\partial}{\partial t} \rho v_Y''} = \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho v_\beta'' v_Y''}) + \overline{v_\beta'' v_Y'' \frac{\partial \rho}{\partial t}} \quad (\text{II-66})$$

Les quatre lignes suivantes de l'équation (II-64) se transformant en

$$\begin{aligned} \overline{\tilde{v}_Y v_\beta'' \frac{\partial}{\partial x_\lambda} (\rho v_\lambda)} + \overline{\rho v_\beta'' v_\lambda'' \frac{\partial}{\partial x_\lambda} (\tilde{v}_Y)} + \overline{\tilde{v}_\beta v_Y'' \frac{\partial}{\partial x_\lambda} (\rho v_\lambda)} + \overline{\rho v_Y'' v_\lambda'' \frac{\partial}{\partial x_\lambda} (\tilde{v}_\beta)} \\ + \overline{v_Y'' v_\beta'' \frac{\partial}{\partial x_\lambda} (\rho v_\lambda)} + \frac{\partial}{\partial x_\lambda} (\overline{\rho v_\lambda'' v_\beta'' v_Y''}) + \frac{\partial}{\partial x_\lambda} (\overline{\rho v_\beta'' v_Y'' \tilde{v}_\lambda}) \end{aligned} \quad (\text{II-67})$$

En tenant compte de l'équation de continuité, (II-50) l'équation (II-64) se met donc sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho v_\beta'' v_Y''}) + \frac{\partial}{\partial x_\lambda} (\overline{\rho \tilde{v}_\lambda'' v_\beta'' v_Y''}) &= - \overline{\rho v_\beta'' v_\lambda'' \frac{\partial}{\partial x_\lambda} (\tilde{v}_Y)} - \overline{\rho v_Y'' v_\lambda'' \frac{\partial}{\partial x_\lambda} (\tilde{v}_\beta)} \\ &- \frac{\partial}{\partial x_\lambda} (\overline{\rho v_\lambda'' v_\beta'' v_Y''}) \\ &- \overline{v_Y'' \frac{\partial \rho}{\partial x_\beta}} - \overline{v_\beta'' \frac{\partial \rho}{\partial x_Y}} \\ &+ \overline{v_Y'' \frac{\partial}{\partial x_\lambda} (\mu S_{\lambda\beta})} + \overline{v_\beta'' \frac{\partial}{\partial x_\lambda} (\mu S_{\lambda Y})} \end{aligned}$$

La pression peut être décomposée en partie moyenne et fluctuation selon la définition de la moyenne centrée

$$-\overline{u''_y \frac{\partial P}{\partial x_\beta}} = -\overline{u''_y} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\overline{u''_y P'}) + \overline{P' \frac{\partial u''_y}{\partial x_\beta}}$$

$$-\overline{u''_\beta \frac{\partial P}{\partial x_\gamma}} = -\overline{u''_\beta} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial}{\partial x_\gamma} (\overline{u''_\beta P'}) + \overline{P' \frac{\partial u''_\beta}{\partial x_\gamma}}$$

En conclusion, l'équation de transport des contraintes de Reynolds en termes de moyennes pondérées par la masse volumique s'écrira donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho} \widetilde{u''_\beta u''_\gamma}) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\overline{\rho} \widetilde{u''_\alpha u''_\beta u''_\gamma}) = \boxed{\text{I} \left[-\overline{\rho} \widetilde{u''_\beta u''_\alpha} \frac{\partial (\widetilde{u''_\gamma})}{\partial x_\alpha} - \overline{\rho} \widetilde{u''_\gamma u''_\alpha} \frac{\partial (\widetilde{u''_\beta})}{\partial x_\alpha} \right]}$$

$$\boxed{\text{II} \left[-\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\overline{\rho} \widetilde{u''_\alpha u''_\beta u''_\gamma} + S_{\alpha\beta} \overline{u''_\gamma P'} + S_{\alpha\gamma} \overline{u''_\beta P'} - \mu S_{\alpha\beta} \overline{u''_\gamma} - \mu S_{\alpha\gamma} \overline{u''_\beta} \right] \right]}$$

$$\boxed{\text{III} \left[-\overline{u''_\gamma} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_\beta} - \overline{u''_\beta} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_\gamma} \right] + \boxed{\text{IV} \left[\overline{P' \left(\frac{\partial u''_\gamma}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u''_\beta}{\partial x_\gamma} \right)} \right]} - \boxed{\text{V} \left[-\mu S_{\alpha\beta} \frac{\partial \overline{u''_\gamma}}{\partial x_\alpha} - \mu S_{\alpha\gamma} \frac{\partial \overline{u''_\beta}}{\partial x_\alpha} \right]} \quad (\text{II-68})$$

Dans cette équation il est aisé de reconnaître les diverses contributions au transport des contraintes de Reynolds. Les termes situés à gauche du signe égal représentent la convection par le champ de vitesse moyenne et le taux de variation temporelle. L'encadré I est le taux de production par le mouvement moyen. On peut remarquer que ce terme apparaît avec un signe opposé dans l'équation de l'énergie cinétique du mouvement moyen où il a rôle de destruction (ref. [15]). Le groupe de termes II correspond à la diffusion des contraintes de Reynolds par les fluctuations de vitesse, les fluctuations de pression et par le mouvement moléculaire. Les termes de l'encadré III représentent l'interaction du champ de pression moyenne avec les fluctuations de masse volumique. Les termes IV redistribue l'énergie de turbulence sur les trois composantes normales par l'intermédiaire des fluctuations de pression. Quand au dernier groupe (V) il correspond à la destruction de l'énergie de turbulence par l'effet de la viscosité. Ce dernier processus est irréversible, en accord avec le second principe de la thermodynamique.

II-3-2.- Equation de l'énergie cinétique de la turbulence.

De l'équation (II-68) nous pouvons obtenir une équation pour la trace du tenseur de Reynolds en contractant les indices β et γ et en sommant sur les indices répétés. Définissant l'énergie cinétique du mouvement turbulent par

$$k = \frac{1}{2} \frac{\overline{\rho v_\beta'' v_\beta''}}{\bar{\rho}} = \frac{1}{2} \overline{v_\beta'' v_\beta''} \quad (\text{II-69})$$

L'équation de transport de k est

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} k) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \tilde{v}_\alpha k) &= -\bar{\rho} \overline{v_\beta'' v_\alpha''} \frac{\partial \tilde{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} - \overline{v_\beta''} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_\beta} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\frac{1}{2} \bar{\rho} \overline{v_\alpha'' v_\alpha''^2} + S_{\alpha\beta} \overline{v_\beta'' p'} - \mu S_{\alpha\beta} \overline{v_\beta''} \right] \\ &\quad + \overline{p' \frac{\partial v_\beta''}{\partial x_\beta}} - \mu S_{\alpha\beta} \frac{\partial \overline{v_\beta''}}{\partial x_\alpha} \end{aligned} \quad (\text{II-70})$$

Cette équation de transport de l'énergie turbulente à une forme similaire à celle de (II-68) avec les mêmes types de contribution : production par le mouvement moyen, diffusion, travail des fluctuations de pression et dissipation mécanique.

II-3-3.- Equation d'évolution des corrélations triples de vitesse.

Le produit de l'équation de quantité de mouvement suivant x_β par $v_\gamma'' v_\delta''$ moyenné et augmenté des équations similaires obtenues par permutation des indices donne l'équation suivante pour les moments d'ordre 3 :

.../...

Comme l'énergie cinétique de turbulence est reliée à la trace du tenseur de Reynolds, on a donc

$$\varepsilon_{\gamma\beta} = \frac{2}{3} S_{\gamma\beta} \varepsilon \quad (\text{II-74})$$

en supposant évidemment que les processus dissipatifs, ne s'effectuent qu'aux petites échelles, ils peuvent être considérés isotropes. Développons l'équation (II-73).

$$\bar{P} \varepsilon = \overline{\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x_s} + \frac{\partial v_s}{\partial x_x} \right) \frac{\partial v_s''}{\partial x_x}} - \frac{2}{3} S_{\alpha\beta} \overline{\mu \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\beta} \frac{\partial v_s''}{\partial x_x}} \quad (\text{II-75})$$

De même que dans la référence [27], la dissipation peut se mettre sous la forme

$$\bar{P} \varepsilon = \frac{1}{2} \bar{\mu} \overline{\left(\frac{\partial v_x''}{\partial x_s} + \frac{\partial v_s''}{\partial x_x} \right)^2} - \frac{2}{3} \bar{\mu} \overline{\left(\frac{\partial v_s''}{\partial x_s} \right)^2} \quad (\text{II-76})$$

Le développement de l'équation de ε se fait d'une manière analogue à celle des autres équations à partir des dérivées spatiales des équations de quantité de mouvement. Définissons :

$$\tilde{D} = \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x_x} \quad ; \quad d = \frac{\partial v_x''}{\partial x_x} \quad ; \quad D_{\alpha s} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x_s} + \frac{\partial v_s}{\partial x_x} \right) \text{ (BU LILLE)}$$

$$\tilde{D}_{\alpha s} = \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x_s} + \frac{\partial \tilde{v}_s}{\partial x_x} \quad ; \quad d_{\alpha s} = \frac{\partial v_x''}{\partial x_s} + \frac{\partial v_s''}{\partial x_x} \quad ; \quad D = \frac{\partial v_x}{\partial x_x}$$

Nous obtenons alors l'équation exacte pour ε :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{P} \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_x} (\bar{P} \tilde{v}_x \varepsilon) = - \nu \left[\rho v_x'' \left(\frac{\partial v_\beta''}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial v_\gamma''}{\partial x_\beta} \right) \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}_\beta}{\partial x_x \partial x_\gamma} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_\gamma}{\partial x_x \partial x_\beta} \right) - \frac{4}{3} \rho v_x'' \frac{\partial v_\beta''}{\partial x_\beta} \frac{\partial^2 \tilde{v}_\beta}{\partial x_\beta^2} \right] + \dots$$

.../...

$$\text{IV} \quad -2\nu \left[\overline{\rho \frac{\partial v''_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \left(\frac{\partial v''_{\beta}}{\partial x_{\gamma}} + \frac{\partial v''_{\gamma}}{\partial x_{\beta}} \right) \frac{\partial \tilde{u}_{\alpha}}{\partial x_{\gamma}}} + \overline{\rho \frac{\partial v''_{\alpha}}{\partial x_{\gamma}} \left(\frac{\partial v''_{\beta}}{\partial x_{\gamma}} + \frac{\partial v''_{\gamma}}{\partial x_{\beta}} \right) \frac{\partial \tilde{u}_{\beta}}{\partial x_{\alpha}}} - \frac{4}{3} \overline{\rho \frac{\partial v''_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial v''_{\gamma}}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial \tilde{u}_{\alpha}}{\partial x_{\beta}}} \right]$$

$$\text{III} \quad -\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\overline{\rho v''_{\alpha} \varepsilon}) - 2\nu \left[\overline{\left(\frac{\partial v''_{\beta}}{\partial x_{\gamma}} + \frac{\partial v''_{\gamma}}{\partial x_{\beta}} \right) \frac{\partial^2 p'}{\partial x_{\beta} \partial x_{\gamma}}} - \frac{2}{3} \overline{\frac{\partial v''_{\gamma}}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\gamma}}} \right]$$

$$\text{I} \quad -2\nu \left[\overline{\rho \frac{\partial v''_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial v''_{\beta}}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial v''_{\gamma}}{\partial x_{\alpha}}} - \frac{2}{3} \overline{\rho \frac{\partial v''_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial v''_{\beta}}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial v''_{\gamma}}{\partial x_{\beta}}} + \overline{\rho \frac{\partial v''_{\alpha}}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial v''_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial v''_{\beta}}{\partial x_{\gamma}}} \right]$$

$$\text{II} \quad +2\nu \left[\overline{\left(\frac{\partial v''_{\beta}}{\partial x_{\gamma}} + \frac{\partial v''_{\gamma}}{\partial x_{\beta}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_{\beta} \partial x_{\alpha}} \left(\mu \left(\frac{\partial v''_{\alpha}}{\partial x_{\gamma}} + \frac{\partial v''_{\gamma}}{\partial x_{\alpha}} \right) \right)} \right] - \frac{4}{3} \nu \overline{\frac{\partial v''_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial^2}{\partial x_{\beta} \partial x_{\gamma}} \left(\mu \left(\frac{\partial v''_{\beta}}{\partial x_{\gamma}} + \frac{\partial v''_{\gamma}}{\partial x_{\beta}} \right) \right)}$$

$$\text{a} \quad +2\nu \left[\overline{\left(\frac{\partial v''_{\beta}}{\partial x_{\gamma}} + \frac{\partial v''_{\gamma}}{\partial x_{\beta}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\gamma}} \left(\mu \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial \tilde{u}_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} \right) \right)} \right] - \frac{2}{3} \overline{\frac{\partial v''_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial^2}{\partial x_{\beta} \partial x_{\gamma}} \left(\mu \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\beta}}{\partial x_{\gamma}} + \frac{\partial \tilde{u}_{\gamma}}{\partial x_{\beta}} \right) \right)}$$

$$\text{b} \quad -2\nu \left[\overline{\rho \left(\frac{\partial v''_{\beta}}{\partial x_{\gamma}} + \frac{\partial v''_{\gamma}}{\partial x_{\beta}} \right) \frac{\partial \tilde{u}_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \tilde{u}_{\alpha}}{\partial x_{\gamma}}} - \frac{2}{3} \overline{\rho \frac{\partial v''_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \tilde{u}_{\beta}}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial \tilde{u}_{\gamma}}{\partial x_{\beta}}} \right]$$

$$\text{c} \quad -\nu \left[\overline{\rho d_{\beta\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial t} \tilde{D}_{\beta\gamma} + \tilde{u}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \tilde{D}_{\beta\gamma} \right)} - \frac{4}{3} \overline{\rho d \left(\frac{\partial}{\partial t} \tilde{D} + \tilde{u}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \tilde{D} \right)} \right]$$

$$\text{d} \quad -\frac{4}{3} \nu \left[\overline{d_{\beta\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x_{\beta} \partial x_{\gamma}} (\mu D)} - \frac{2}{3} \overline{d \frac{\partial^2 (\mu D)}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\alpha}}} \right]$$

$$\text{e} \quad -2\nu \left[\overline{d_{\beta\gamma} \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial x_{\beta} \partial x_{\gamma}}} - \frac{2}{3} \overline{d \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\alpha}}} \right]$$

... / ...

$$\begin{aligned}
 & \overline{\rho} + 2\nu \left[\overline{\frac{d\rho}{dt} \frac{\partial \rho}{\partial x_\gamma} \left(\frac{\partial P}{\partial x_\beta} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\mu D_{\beta\alpha}) + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\mu D) \right)} \right. \\
 & \left. - \frac{2}{3} \overline{\frac{d}{dt} \frac{\partial \rho}{\partial x_\beta} \left(\frac{\partial P}{\partial x_\beta} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\mu D_{\alpha\beta}) + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\mu D) \right)} \right] \quad (\text{II-79})
 \end{aligned}$$

La complexité de cette équation appelle quelques commentaires; TENNEKES et LUMLEY ont mis en évidence la relation qui existe entre le taux de dissipation et les fluctuations de vorticité (réf. [28]). A la suite de DAVIDOV [29] et de HARLOW et NAKAYAMA [30], HANJALIC et LAUNDER [35] font état d'une équation d'évolution pour ϵ pour des écoulements incompressibles en moyenne non pondérée. Leur définition de la dissipation est alors réduite à

$$\overline{\rho} \epsilon = \overline{\mu \left[\left(\frac{\partial v_\alpha''}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta''}{\partial x_\alpha} \right) \frac{\partial v_\beta''}{\partial x_\alpha} \right]} \quad (\text{II-80})$$

Dans un cours sur la modélisation de la turbulence pour écoulements de combustion, JONES [31] utilise une équation semblable à la forme incompressible. Dans des applications plus récentes, MUNJEE pour des écoulements dans des cavités laser [32] et SIRIGNANO pour des écoulements réactifs [33] utilisent également une forme incompressible de l'équation de dissipation. Suivant une démarche similaire à celle de KOLLMANN [34] nous avons choisi dans cette thèse de reprendre la définition de la dissipation en termes de masse volumique variable ϵ et d'exploiter l'équation complète. Nous verrons dans les deux chapitres suivants, qu'une comparaison des ordres de grandeur des divers termes permettra une simplification notable, mais qu'une partie des termes de variations de masse volumique devra être conservée. Le principal argument pour l'utilisation de la variable pour caractériser une échelle de longueur de la turbulence est naturellement son existence dans l'équation exacte de l'énergie cinétique de la turbulence. Néanmoins d'autres approches ont p  être utilisées, qui font intervenir comme variable des combinaisons de la forme :

$$z = R^m L^n \quad (\text{II-81})$$

ou m et n sont des constantes. La première de ces propositions a été faite par KOLMOGOROV [36] avec $m = 1/2$ et $n = -1$. La quantité ainsi obtenue est proportionnelle à la fréquence caractéristique des mouvements porteurs d'énergie

(grosses structures). ROTTA [37] et SPALDING [42] ont travaillé avec $m = 0$ et $n = 1$, mais seul ROTTA a développé une équation d'évolution pour L , tandis que SPALDING utilise une équation différentielle ordinaire. Malgré une signification physique très réelle, la longueur caractéristique n'a jamais supplanté la dissipation pour des utilisations numériques. Une raison majeure est que la diffusion de L ne se fait pas à un taux proportionnel à $\frac{dL}{dx_\alpha}$. C'est sans doute pour pallier cette faiblesse que ROTTA [37] suggéra l'utilisation de la combinaison ($m = 1, n = 1$). Cette combinaison a été également exploitée par RODI et SPALDING [40] pour des écoulements libres et par NG et SPALDING [41] pour des écoulements au voisinage de parois solides. Plus tard, ROTTA [38], [39] proposa une équation simplifiée pour la même combinaison ($m = 1, n = 1$) mais mieux adaptée aux écoulements de type couche limite. La différence avec la proposition originelle porte sur la définition de la longueur caractéristique L qui n'est plus faite qu'avec la composante latérale des corrélations en deux points [38]. SPALDING [43] travaille également avec la combinaison $m = 1; n = 2$. Cette variable correspond au carré de la variable choisie par KOLMOGOROV. Elle doit donc être interprétée comme le carré de la fréquence des mouvements énergétiques. Cette variable a également été introduite par SAFFMAN [44] et développée par WILCOX et SAFFMAN [45] à partir de l'équation d'évolution des fluctuations du tourbillon (pseudo-vorticity). Il faut également mentionner les travaux de LIN et WOLFSHTEIN [46] qui utilisent la combinaison ($m = 1, n = 3$) correspondant au produit de la vitesse par le cube de l'échelle de longueur. Une comparaison argumentée des produits $k L$ et $k L^3$ est faite par BONNET [47] qui donne leurs équations d'évolution pour des écoulements libres à masse volumique variable.

II-3-5.- Equation pour les corrélations vitesse-masse volumique

Les corrélations vitesse-masse volumique qui sont identiquement nulles dans les écoulements isovolumes apparaissent de façons diverses dans les écoulements à masse volumique fluctuante. Tout d'abord elles sont présentes dans l'équation de continuité et dans les termes convectifs de toutes les équations de transport, si les moyennes centrées sont utilisées. Elles apparaissent également dans les termes de gradient de pression moyenne. Enfin nous verrons dans le chapitre suivant qu'elles sont utilisées pour évaluer les corrélations triples en moyennes décentrées. Considérons le produit de l'équation de la composante β de quantité de mouvement par la fluctuation de masse volumique ρ' , et divisons-le par la masse volumique. La moyenne temporelle en est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho' v_{\beta}''}) + \tilde{v}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\overline{\rho' v_{\beta}''}) &= - \overline{\rho' v_{\alpha}''} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\tilde{v}_{\beta}) - \overline{v_{\alpha}''} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\overline{\rho' v_{\beta}''}) \\ + \overline{v_{\alpha}'' v_{\beta}''} \frac{\partial \rho'}{\partial x_{\alpha}} + \tilde{v}_{\alpha} \overline{v_{\beta}''} \frac{\partial \rho'}{\partial x_{\alpha}} + \overline{v_{\beta}''} \frac{\partial \rho'}{\partial t} - \frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_{\beta}} + \frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\tau_{\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (\text{II-82})$$

Soustrayant de l'équation instantanée de conservation de la masse sa contre partie moyennée dans le temps, nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho') + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\rho' \tilde{v}_{\alpha} + \bar{\rho} v_{\alpha}'' + \rho' v_{\alpha}'') = 0 \quad (\text{II-83})$$

qui s'écrit, après multiplication par v_{β}'' et passage à la moyenne

$$\overline{v_{\beta}''} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \overline{v_{\beta}''} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\rho' \tilde{v}_{\alpha}) + \overline{v_{\beta}''} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\bar{\rho} v_{\alpha}'') + \overline{v_{\beta}''} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\rho' v_{\alpha}'') = 0 \quad (\text{II-84})$$

En combinant (II-82) et (II-84) il vient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho' v_{\beta}''}) + \tilde{v}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\overline{\rho' v_{\beta}''}) &= - \overline{\rho' v_{\alpha}''} \frac{\partial \tilde{v}_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} - \overline{\rho' v_{\beta}''} \frac{\partial \tilde{v}_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} \\ + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\overline{\rho' v_{\alpha}'' v_{\beta}''}) + \bar{\rho} \overline{v_{\beta}''} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (v_{\alpha}'') + \frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_{\beta}} - \frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\tau_{\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (\text{II-85})$$



Une forme comparable aux équations de transport des autres quantités est

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} v_{\beta}'') + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\bar{\rho} \tilde{v}_{\alpha} v_{\beta}'') &= - \bar{\rho} v_{\alpha}'' \frac{\partial \tilde{v}_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} + \overline{v_{\alpha}'' v_{\beta}''} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\overline{\rho' v_{\alpha}'' v_{\beta}''}) \\ + \bar{\rho} \overline{v_{\beta}''} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (v_{\alpha}'') + \frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_{\beta}} - \frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\tau_{\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (\text{II-86})$$

II-3-6.- Equation pour les flux turbulents

Un des arguments à l'utilisation des équations d'évolution des composantes du tenseur de Reynolds est une meilleure détermination des termes de diffusion turbulente qui existent dans les équations de quantité de mouvement. Pour des raisons similaires il est utile de connaître aussi les termes équivalents existant

dans l'équation de transport d'un scalaire (qui peut être par exemple la fraction massique ou la température). Prenons l'exemple de la fraction massique (la démarche est similaire pour la température et n'est pas reproduite ici).

Considérons tout d'abord le produit de l'équation instantanée de la composante β de quantité de mouvement par la fluctuation c_I'' et moyennons le dans le temps.

$$\overline{c_I'' \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_\beta)} + \overline{c_I'' \frac{\partial}{\partial x_\lambda} (\rho v_\lambda v_\beta)} = - \overline{c_I'' \frac{\partial P}{\partial x_\beta}} + \overline{c_I'' \frac{\partial}{\partial x_\lambda} (\tau_{\lambda\beta})} \quad (\text{II-87})$$

De même, en permutant les rôles de v_β et c_I on arrive à :

$$\overline{v_\beta'' \frac{\partial}{\partial t} (\rho c_I)} + \overline{v_\beta'' \frac{\partial}{\partial x_\lambda} (\rho v_\lambda c_I)} = \overline{v_\beta'' \frac{\partial}{\partial x_\lambda} (J_{\lambda I})} \quad (\text{II-88})$$

En ajoutant (II-87) à (II-88), réarrangeant et compte tenu du fait que :

$$\overline{\rho v_\beta'' c_I''} = \bar{\rho} \widetilde{v_\beta'' c_I''} \quad (\text{II-89})$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \widetilde{v_\beta'' c_I''}) + \frac{\partial}{\partial x_\lambda} (\bar{\rho} \widetilde{v_\lambda'' v_\beta'' c_I''}) &= - \bar{\rho} \widetilde{v_\lambda'' c_I''} \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\lambda} - \bar{\rho} \widetilde{v_\lambda'' v_\beta''} \frac{\partial \bar{c}_I}{\partial x_\lambda} \\ - \frac{\partial}{\partial x_\lambda} (\overline{\rho v_\lambda'' v_\beta'' c_I''}) - \overline{c_I'' \frac{\partial P}{\partial x_\beta}} &+ \overline{c_I'' \frac{\partial}{\partial x_\lambda} (\tau_{\lambda\beta})} + \overline{v_\beta'' \frac{\partial}{\partial x_\lambda} (J_{\lambda I})} \end{aligned} \quad (\text{II-90})$$

II-4.- RESUME

Dans ce chapitre, nous avons établi à partir de considérations thermodynamiques la définition de quantités diverses telles que quantité de mouvement, fraction massique, énergie etc..., qui sont utiles à la description des écoulements turbulents. Puis deux moyennes différentes ont été introduites parmi lesquelles les moyennes pondérées ont été retenues pour écrire les équations du mouvement moyen. Des équations de transport furent ainsi développées pour la quantité de mouvement, la concentration, l'énergie totale, mais également pour des corrélations telles que contraintes de Reynolds, énergie cinétique de la turbulence, flux

turbulents, corrélations triples etc... Dans le chapitre suivant, nous verrons comment obtenir des systèmes fermés à partir de diverses combinaisons de ces équations pour décrire avec plus ou moins de précision des écoulements turbulents.

CHAPITRE IIREFERENCES

- [1] R.S. ROGALLO (1981)
"Numerical experiments in homogeneous turbulence"
NASA TM-81315.
- [2] J.W. DEARDORFF (1970)
"A numerical study of three dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers".
J.F.M. vol. 41, part 2.
- [3] W.J. FEIEREISEN, W.C. REYNOLDS et J.H. FERZIGER (1981)
"Numerical simulation of a compressible homogeneous turbulent shear flow".
Technical Rep n° TF-13. Thermosciences division, Stanford University.
- [4] E. SHIRANI, J.H. FERZIGER et W.C. REYNOLDS (1981)
"Mixing of a passive scalar in isotropic and sheared homogeneous turbulence".
Technical Rep n° TF-15. Thermosciences division, Stanford University.
- [5] P. MOIN et J. KIM (1981)
"Numerical investigation of turbulent channel flow".
NASA TM-81309.
- [6] J. BOUSSINESQ (1897)
"Theorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande section".
I-II - Gauthier-Villars, Paris.
- [7] O. REYNOLDS (1894)
"On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion".
Phil. Trans. Roy. Soc. London, A vol. 186, pp. 123-164.
- [8] G.B. SCHUBAUER et C.M. TCHEN (1959)
"Turbulent flows and heat transfer".
C.C.-Lin ed. Princeton University Press.

- [9] J.O. HINZE (1959)
"Turbulence".
Mc Grauw Hill Co. New York.
- [10] HESSELBERG (1925)
"Die Gesetze der ausgeglichenen atmosphärischen Bewegungen".
Beitz-Physik forcien Atmosphäre, vol. 12, pp. 141-160.
- [11] G. DEDEBANT et Ph. WEHRLE (1938)
"Sur les équations aux valeurs probables d'un fluide turbulent".
C.R.A.S. T. 206, pp. 1790-1791.
- [12] VAN MIEGHEN et L. DUFOUR (1948)
"Thermodynamique de l'atmosphère".
Mem. Inst. Roy. Meteor. de Belgique, 30.
- [13] A.K. BLACKADAR (1950)
"The transformation of energy by the large scale eddy stress in the
atmosphere".
Meteor. papers vol. 1, n° 4, New York University.
- [14] A. FAVRE (1958)
"Equations statistiques des gaz turbulents".
C.R.A.S. 246, pp. 2576-2579, 2723-2725, pp. 2839-2842, 3216-3219.
- [15] A. FAVRE (1965)
"Equations des gaz turbulents compressibles".
Journal de Mécanique, vol. 4, n° 3.
- [16] R.W. BILGER (1975)
"A note on Favre Averaging in variable density flows".
Combustion science and technology, vol. 11, pp. 215-217.
- [17] P. BRADSHAW (1974)
"The effect of mean compression or dilatation on the turbulent structure
of supersonic boundary layers".
J.F.M., vol. 63, part. 3.

- [18] P.A. LIBBY (1977)
"Studies in variable density and reacting turbulent shear flows".
Studies in convection, B.E. Launder ed. Academic Press.
- [19] H. HAMINH, B.E. LAUNDER et J. MAC INNES (1982)
"The turbulent modelling of variable density flows. a mixed-weighted decomposition".
III^e Turbulent Shear Flow. Springer Verlag.
- [20] D. VANDROMME (1980)
"Modèle de turbulence à deux équations pour écoulement plan cisailé à masse volumique variable".
Thèse de Docteur-Ingénieur - Lille.
- [21] A. FAVRE, L.S.G. KOVASZNY, R. DUMAS, J. GAVIGLIO et M. COANTIC (1976)
"La turbulence en mécanique des fluides".
Gauthier-Villars.
- [22] S.I. CHENG et J.H. CHEN (1974)
"Slip, friction and heat transfer laws in a merged regime".
Phys. of fluids, vol. 17, n° 9, pp. 1677-1687.
- [23] H. LAMB (1932)
"Hydrodynamics" 6^{ème} édition.
Cambridge University Press.
- [24] J. SMOLDEREN (1972)
"Fundamental equations of fluid dynamics".
Von Karman Institute C.N. 88.
- [25] R.B. BIRD, W.E. STEWART et E.N. LIGHTFOOT (1960)
"Transport phenomena".
Wiley International Edition.
- [26] D. VANDROMME (1980)
"Turbulence modelling in variable density flow".
Thèse de Doctorat en Sciences Appliquées - Université de Bruxelles.

- [27] H. HAMINH, W. KOLLMANN et D. VANDROMME (1982)
"Reynolds stress model for compressible flows".
Contract Report NASA-NCC2-186 Ames
- [28] H. TENNEKES et J.L. LUMLEY (1973)
"A first course in turbulence".
MIT Press Cambridge-Massachussets.
- [29] B. I. DAVIDOV (1961)
"On the statistical dynamics of an incompressible turbulent fluid".
Dokl. Akad. Nauk, SSSR 136, pp. 47-50.
- [30] F.H. HARLOW et P.I. NAKAYAMA (1968)
"Transport of turbulence energy decay rate".
Los Alamos Sci. Lab. University of California, Rep LA-4086.
- [31] W.P. JONES (1979)
"Models for turbulent flows with variable density and combustion".
VKI LS 1979-2.
- [32] S.A. MUNJEE, N.A. FOMIN, N.A. SOLOUKHIN et V.I. GOLOVICHEV (1979)
"Modelling of gasdynamics and relaxation phenomena in mixed flow laser".
7th Int. Coll. on gasdynamics of explosions and reactive systems".
August (1979) - Gottingen - Germany.
- [33] W.A. SIRIGNANO et S.F. PARKER
"Comparison amongst various theories for turbulent reacting planar mixing
layers".
Project Squid NR-098-038.
- [34] W. KOLLMANN (1979)
"Berechnung von Turbulenten Verbrennungs - vorgängen in Flammen und
Brennkammern". Hab. Thesis RWTH Aachen.
- [35] K. HANJALIC et B.E. LAUNDER (1972)
"A Reynolds stress model of Turbulence and its application to thin shear
flows".
J.F.M. 52-4.

- [36] A.N. KOLMOGOROV (1942)
"Equations of turbulent motion of incompressible fluid".
Izv. Akad. Nauk. SSSR Seria fizichiska VI, 56.
- [37] J.C. ROTTA (1951)
"Statistische Theorie nicht homogener Turbulenz".
Zeitschrift. Physik vol. 129, pp. 547-572 et vol. 131, p. 51
- [38] J.C. ROTTA (1971)
"Recent attempts to develop a generally applicable calculation method
for turbulent shear flow layers".
AGARD CP-93.
- [39] J.C. ROTTA (1975)
"Prediction of turbulent shear flow using the transport equations for
turbulence energy and turbulence length scale".
VKI LS 76, Rhode St Genese - Belgique.
- [40] W. RODI et D.B. SPALDING (1970)
"A two parameter model of turbulence and its application to free jets".
Wärme und Stoffübertragung, vol. 3, p. 85.
- [41] K.H. NG et D.B. SPALDING (1972)
"Some applications of a turbulence model of turbulence to boundary layers
near walls".
Physics of fluids, vol. 15.
- [42] D.B. SPALDING (1967)
"The calculation of the length scale of turbulence in some turbulent boundary
layers remote from walls".
Imperial college, Heat transfer section Rep. TWF/TN/31.
- [43] D.B. SPALDING (1969)
"The prediction of two dimensional steady turbulent flows".
Imperial college, Heat transfer section Rep EF/TN/A/16.
- [44] P.G. SAFFMAN (1970)
"A model for inhomogeneous turbulent flow".
Proc. Roy. Soc. London, vol. A 317, pp. 417-433.

- [45] P.G. SAFFMAN et D.C. WILCOX (1974)
"Turbulence model predictions for turbulent boundary layers".
AIAA Journal vol. 12, n° 4, pp. 541-546.
- [46] A. LIN et M. WOLFSHTEIN (1980)
"Tensorial volume of turbulence".
Phys. of Fluids, vol. 23, part 3.
- [47] J.P. BONNET (1982)
"Etude théorique et expérimentale de la turbulence dans un sillage
supersonique".
Thèse de Doctorat d'Etat - C.E.A.T. - Poitiers.

CHAPITRE III

LA FERMETURE DES EQUATIONS

CHAPITRE III

LA FERMETURE DES EQUATIONS.

III-1.- HYPOTHESE DE TRANSPORT PAR GRADIENT :

Le problème de la fermeture.

III-1-1.- *La longueur de mélange.*

III-1-2.- *Fermeture à l'ordre zéro avec une équation de transport*

a.- Equation de k , l'énergie de turbulence.

b.- Equation pour l'énergie totale.

III-1-3.- *Fermeture à l'ordre zéro avec deux équations de transport.*

a.- Modélisation à grand nombre de Reynolds.

b.- Modélisation à faible nombre de Reynolds.

III-2.- FERMETURE AU SECOND ORDRE

III-2-1.- *Equation d'évolution pour les contraintes de Reynolds.*

III-2-2.- *Equation d'évolution pour le taux de dissipation de l'énergie turbulente.*

III-2-3.- *Equation d'évolution pour l'énergie totale.*

III-2-4.- *Equation d'évolution pour les corrélations vitesse-masse volumique.*

III-2-5.- *Equation d'évolution pour les flux turbulents de masse.*

III-3.- CONDITIONS D'APPLICABILITE

III-3-1.- *Réalisabilité*

III-3-2.- *Invariance*

III-1.- HYPOTHESE DE TRANSPORT PAR GRADIENTS - LE PROBLEME DE LA FERMETURE.

Pour le développement des méthodes de prédiction pour les écoulements turbulents de fluide homogène, la grande inconnue est le flux de quantité de mouvement équivalent à une contrainte, qui est produit par le mouvement irrégulier du fluide turbulent. De façon analogue, pour un fluide hétérogène ou non-isotherme, le flux de masse ou de chaleur est équivalent à une corrélation entre vitesse et concentration ou vitesse et température. Pour pouvoir résoudre les équations moyennes du mouvement, il apparaît alors nécessaire de relier ces quantités aux variables moyennes telles que vitesse, concentration ou température. Une première solution à ce problème fut avancée par BOUSSINESQ [1], [2] qui suggéra de relier le terme de flux de l'équation de quantité de mouvement au gradient de vitesse moyenne multiplié par une viscosité "tourbillonnaire". Cela signifie que pour un écoulement de type couche limite :

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (\text{III-1})$$

l'équation (III-1) est l'analogue de la loi de Newton de viscosité, dans laquelle les composantes du tenseur des contraintes laminaires sont reliées au gradient de vitesse et à la viscosité moléculaire. TENNEKES et LUMLEY [3] ont discuté de façon approfondie les limites de validité d'une telle approximation. Pour synthétiser l'ensemble de l'argumentation, LUMLEY [4] écrit : "le mouvement moléculaire a des échelles de temps et de longueur qui sont petites, comparées aux échelles de temps et de longueur du mouvement moyen. Ainsi le flux local de quantité de mouvement n'est pas déterminé par des conditions locales, ce qui est une condition nécessaire pour l'équation (III-1). Toutefois cette équation est adéquate pour des écoulements presque parallèles se développant lentement, qui sont caractérisés par des échelles de longueur et de vitesse uniques dans chaque section. Nous pouvons donc nous attendre à ce que la relation (III-1) soit mise en défaut dans des situations évoluant rapidement le long des lignes de courant, situations dans lesquelles la turbulence produite par un certain mécanisme est sujette à des distorsions d'une nature différente. De telles situations sont évidemment plus la règle que l'exception dans la réalité". Néanmoins cette approche est encore utilisée par de nombreux chercheurs à cause de sa simplicité. L'usage de l'approximation de Boussinesq requiert la détermination de ν_t la viscosité tourbillonnaire, en fonction des échelles caractéristiques de la turbulence. La première formulation de cette viscosité tourbillonnaire fut donnée par PRANDTL [5]. Par analogie avec le mouvement moléculaire dans un gaz, PRANDTL développa une expression

pour le transfert de quantité de mouvement incluant une longueur de mélange. Cette longueur est l'analogie du libre parcours moyen (m.f.p.) de la théorie cinétique des gaz. Ainsi le flux de quantité de mouvement est selon PRANDTL :

$$\overline{u'v'} = -\rho^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

La valeur de cette longueur de mélange ℓ est aussi fonction de la position dans l'écoulement. PRANDTL obtint certains succès en rendant ℓ proportionnelle à la distance y de la surface solide pour des calculs de couches limites turbulentes. Cinq ans plus tard, Von KARMAN [6], à partir de considérations dimensionnelles, donna une formulation différente du transfert de quantité de mouvement incluant une constante universelle à la place d'une longueur de mélange variable avec la géométrie de l'écoulement :

$$\overline{u'v'} = -K^2 \frac{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^3}{\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right)^2} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (\text{III-3})$$

Dans l'équation (III-3), K tient lieu de constante universelle dont la valeur est 0,4 (cette valeur fut déterminée à partir de données de profils de vitesse des écoulements dans un tuyau). PRANDTL et Von KARMAN furent les précurseurs en utilisant l'hypothèse de BOUSSINESQ pour la prédiction d'écoulements turbulents. Depuis ces travaux, de nombreux chercheurs ont continué dans cette voie en développant des méthodes de plus en plus élaborées pour déterminer la viscosité tourbillonnaire. Pour avoir une vue d'ensemble sur toutes ces techniques, le lecteur consultera les références [7] et [8]. Notre but ici est de fournir une description plus élaborée du mouvement turbulent que celle qui est obtenue avec les modèles de longueur de mélange de PRANDTL [5] ou de TAYLOR [9]. Dans cette optique, la viscosité tourbillonnaire peut être déterminée par deux propriétés scalaires de la turbulence, similairement à NEE et KOVASZNY [10], NG et SPALDING [11], RODI et SPALDING [12], SPALDING [13], ou JONES et LAUNDER [14]. Dans une optique similaire à celle de JONES et LAUNDER, des équations de transport sont résolues pour l'énergie cinétique de turbulence k et son taux de dissipation ϵ . Suivant la définition de ϵ qui a été donnée au chapitre précédent, on définit alors la viscosité tourbillonnaire par

$$\nu_t = \int \epsilon k^2 / \epsilon \quad (\text{III-4})$$

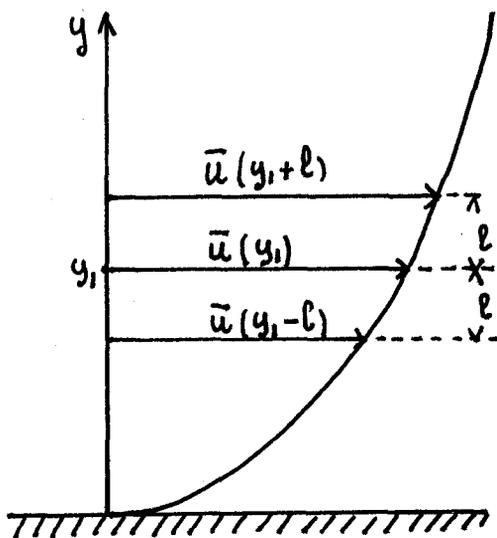
A l'aide de considérations dimensionnelles on peut définir la viscosité turbulente ν_t à partir de n'importe quelle variable z de la forme :

$$Z = R^m \ell^m$$

On obtient ainsi différentes versions de modèles de turbulence à deux équations. Nous verrons dans la suite de ce chapitre qu'une comparaison détaillée des équations pour trois d'entre eux ($k - \epsilon$, $k - k\ell$, $k - \omega^2$) peut mettre en évidence certaines différences fonctionnelles quoique globalement, la qualité des résultats est équivalente, quel que soit le modèle utilisé.

III-1-1.- La longueur de mélange.

PRANDTL [5] propose le premier une utilisation pratique de l'approximation de BOUSSINESQ sur l'argumentation suivante [16].



Considérons une particule fluide qui circule à la cote y_1 avec la vitesse $\bar{u}(y_1)$. De même une particule circulant à la cote $y_1 \pm \ell$ aura une vitesse $\bar{u}(y_1 \pm \ell) \gg \bar{u}(y_1)$.
 Suivant les irrégularités du mouvement turbulent, les particules se heurtent transversalement ou longitudinalement à l'intérieur d'une bande de largeur 2ℓ , tout en conservant leur quantité de mouvement longitudinale. Supposons qu'une particule fluide circulant à la cote $(y_1 - \ell)$ est déplacée transversalement sur la distance ℓ dans la direction normale. Comme

la particule est supposée conserver sa quantité de mouvement originelle, sa vitesse à la cote y_1 est plus faible que la vitesse qui y prévaut normalement. La différence de vitesse y est alors :

$$\Delta u_1 = \bar{u}(y_1) - \bar{u}(y_1 - \ell) \approx \ell \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_1$$

Cette expression s'obtient aisément à partir d'un développement en série de TAYLOR, où les termes d'ordre supérieur ou égal à deux sont négligés. De manière analogue on peut envisager le mouvement transverse d'une particule provenant de la cote $(y_1 + \ell)$ se trouvant alors à la cote y_1 avec une quantité de mouvement $\bar{u}(y_1 + \ell)$. La différence des vitesses avec les particules se trouvant normalement à la cote y_1 est donc :

$$\Delta u_2 = \bar{u}(y_1 + l) - \bar{u}(y_1) \approx l \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_1$$

Quand aux variations de vitesse normale, elles sont

$$v'_1 > 0 \rightarrow \text{mouvement "ascendant"}$$

$$v'_1 < 0 \rightarrow \text{mouvement "descendant" .}$$

En prenant la moyenne des différences de vitesse, nous obtenons la valeur absolue de la fluctuation de vitesse (moyennée dans le temps).

$$|u'| = \frac{1}{2} (|\Delta u_1| + |\Delta u_2|) = l \left| \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_1 \right|$$

Une argumentation du même type permet d'écrire que la composante transversale de la fluctuation de vitesse est du même ordre de grandeur que la composante longitudinale. On aura donc

$$|v'| = c_e |u'| = c_e l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

La corrélation entre ces deux composantes sera

$$\overline{u'v'} = -c |u'| |v'|$$

Le signe négatif se justifie par le fait que les deux composantes u' et v' sont la plupart du temps de signes différents. On obtient ainsi la corrélation

$$\overline{u'v'} = -l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \quad (\text{III-5})$$

et pour le frottement turbulent :

$$\tau_t = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (\text{III-6})$$

expression qui est formellement plus correcte pour permettre au frottement turbulent les changements de signe avec le gradient de vitesse. Un inconvénient majeur de cette expression est que la viscosité cinématique s'annule si le gradient de vitesse est égal à zéro, ce qui est contredit par le fait que les mécanismes de mélange turbulent ne s'annulent pas aux endroits où la vitesse est maximum [17], [18]. Dans son désir de pallier ces difficultés, PRANDTL [19] présenta une équation beaucoup plus simple pour la viscosité turbulente, qui n'est valable toutefois que pour des écoulements turbulents libres. La longueur

de mélange des particules fluides dans la direction transversale est supposée maintenant du même ordre de grandeur que la largeur de la couche de cisaillement :

$$v_t = \chi_1 \cdot l \cdot (\bar{u}_{max} - \bar{u}_{min}) \quad (\text{III-7})$$

où χ_1 est une constante déterminée expérimentalement. La viscosité turbulente est donc maintenant constante dans toute section transversale. Le frottement turbulent est alors

$$\tau_t = \rho \chi_1 l (\bar{u}_{max} - \bar{u}_{min}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (\text{III-8})$$

La combinaison des deux formulations (III-6) et (III-8) est à la base du modèle proposé par CEBECI et SMITH [20] qui est reconnu comme l'un des plus robustes modèles algébriques. La partie interne de la couche limite est décrite avec la formule (III-6) en utilisant l'expression de VAN DRIEST [21] pour exprimer la longueur du mélange.

$$l = \chi_y \left[1 - \exp\left(-\frac{y \sqrt{\tau_o / \rho}}{\nu_A}\right) \right] \quad (\text{III-9})$$

Si y_L est la cote de la limite entre partie interne et externe de la couche limite, on a pour la viscosité cinématique, l'expression :

$$0 < y < y_L ; \quad v_{ti} = \left\{ \chi_y \left[1 - \exp\left(-\frac{y \sqrt{\tau_o / \rho}}{\nu_A}\right) \right] \right\}^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (\text{III-10})$$

Pour la zone externe, on utilise une approximation basée sur (III-8) :

$$y_L < y < \delta ; \quad v_{te} = \chi_2 U \delta_1 \gamma \quad (\text{III-11})$$

ou δ_1 est l'épaisseur de déplacement et γ représente le facteur d'intermittence que l'on peut évaluer par

$$\gamma = \left[1 + 5.5 \left(\frac{y}{\delta} \right)^6 \right]^{-1} \quad (\text{III-12})$$

La valeur de y_L est obtenue simplement en satisfaisant les relations

$$y = y_L ; \quad v_{ti} = v_{te} \quad (\text{III-13})$$

Le modèle de turbulence qui vient d'être succinctement décrit à partir des travaux de PRANDTL est représentatif de toute une classe de fermetures dites

algébriques où la turbulence est caractérisée principalement à partir de considérations géométriques [9], [6]. Toutefois, dans le but d'accéder à des prédictions de plus en plus fines, les travaux de PRANDTL servirent de base à l'élaboration de modèles plus évolués dans lesquels la viscosité turbulente peut être déterminée à partir de deux échelles caractéristiques des grosses structures porteuses d'énergie :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ échelle de vitesse} \\ 1 \text{ échelle de longueur} \end{array} \right.$$

III-1-2.- Fermeture à l'ordre zéro avec une équation de transport

a) Equation pour k .

Une première approche qui a été initiée dès 1942 par KOLMOGOROV [22] a été la prise en compte de l'équation de bilan pour l'énergie cinétique de la turbulence (II-70). Il a été montré au chapitre précédent comment une telle équation peut être obtenue à partir des équations de Navier-Stokes et d'un opérateur de moyenne. Suivant le formalisme de FAVRE, l'équation (II-70) est rappelée ici :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{P} k) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{P} \tilde{u}_\alpha k) &= -\bar{P} \widetilde{u_\beta'' u_\alpha''} \frac{\partial \tilde{u}_\beta}{\partial x_\alpha} - \overline{u_\beta''} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_\beta} \\ &- \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\frac{1}{2} \bar{P} \widetilde{u_\alpha'' u_\beta''} + \delta_{\alpha\beta} \overline{u_\beta'' P'} - \overline{M S_{\alpha\beta} u_\beta''} \right] \\ &+ \overline{P' \frac{\partial u_\beta''}{\partial x_\beta}} - \overline{M S_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta''}{\partial x_\alpha}} \end{aligned} \quad (\text{III-14})$$

utilisant toujours l'approximation de Boussinesq, les contraintes de Reynolds sont exprimées en fonction des gradients de vitesse moyenne et d'une viscosité turbulente telle que

$$\nu_t = k^{1/2} \cdot \ell \quad (\text{III-15})$$

ℓ est ici une longueur caractéristique de la taille des grosses structures qui reste à déterminer de façon plus ou moins empirique. Indépendamment du problème de la détermination de la longueur caractéristique, certaines hypothèses de fermeture sont nécessaires pour résoudre l'équation (III-14).

* Termes de production

Comme pour l'équation de quantité de mouvement, les contraintes de Reynolds sont déterminées par une relation du type gradient moyen telle que

$$-\bar{\rho} \widetilde{u''_x u''_y} = \mu_t \left(\frac{\partial \widetilde{u''_y}}{\partial x_x} + \frac{\partial \widetilde{u''_x}}{\partial x_y} \right) - \frac{2}{3} \mu_t \frac{\partial \widetilde{u''_y}}{\partial x_y} S_{xy} - \frac{2}{3} \bar{\rho} k S_{xy} \quad (\text{III-16})$$

* Termes de diffusion

Les mécanismes de diffusion turbulente sont supposés analogues à ceux de la diffusion moléculaire. Il est toutefois bien entendu que le taux de ce mécanisme de diffusion peut être différent de celui de la quantité de mouvement. D'où l'apparition d'une constante σ_k qui peut être assimilée à un nombre de Prandtl/Schmidt turbulent. On peut également considérer que cette diffusion est rendue possible à la fois par le mouvement fluctuant et par les fluctuations dans le champ de pression. On aura donc :

$$-\left[\frac{1}{2} \bar{\rho} \widetilde{u''_x u''_y} + S_{xy} \overline{u''_y p'} \right] = \frac{\mu_t}{\nu_k} \frac{\partial k}{\partial x_x} \quad (\text{III-17})$$

Dans l'hypothèse des grands nombres de Reynolds où nous nous trouvons, les mécanismes de diffusion moléculaire sont négligeables à côté des processus turbulents équivalents : le troisième terme diffusif de l'équation (III-14) pourra donc être négligé.

* Gradients de pression moyenne

Devant le terme de gradient de pression moyenne qui est exact, apparaît $\overline{v''_y}$ qui est une corrélation entre les fluctuations de masse volumique et de vitesse (voir Chapitre II).

$$\overline{v''_y} = - \frac{\overline{p' u''_y}}{\bar{\rho}} \quad (\text{III-18})$$

Ce terme, qui est identiquement nul dans le cas des écoulements isovolumes nécessite certaines hypothèses de modélisation dans les autres cas. Deux voies différentes peuvent être envisagées sans connaître la valeur de ce terme.

La première qui est quelque peu détaillée dans la suite de ce paragraphe consiste à exprimer cette corrélation en termes de grandeurs moyennes connues. Une autre possibilité est de manipuler les équations de Navier Stokes pour obtenir une équation de transport pour ce terme; cette deuxième approche sera explicitée dans la deuxième partie de ce chapitre.

Supposons l'écoulement quasi-unidimensionnel à grande vitesse d'un fluide dont la température totale est constante en première approximation. Si de plus, le fluide est un gaz parfait avec une chaleur spécifique constante, et que les fluctuations de pression et de température totale peuvent être négligées [23], alors les fluctuations de vitesse et de masse volumique satisfont la relation :

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = (\gamma - 1) \frac{\tilde{u}}{\tilde{c}^2} u' \quad (\text{III-19})$$

où γ est le rapport des coefficients de chaleur spécifique. Le terme de pression pourra donc prendre la forme suivante :

$$\overline{u''_p} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_p} \sim \frac{\overline{u''_p u'}}{\tilde{c}^2} \tilde{u} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_p} \quad (\text{III-20})$$

\tilde{c} est la vitesse de propagation du son et \tilde{u} est la composante moyenne de la vitesse suivant la direction principale de l'écoulement. On peut souligner la différence fonctionnelle de (III-20) avec une approximation du type gradient (Boussinesq) telle que :

$$\overline{\rho' u'_x} \sim \mu_t \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_x} \quad (\text{III-21})$$

En effet, avec l'équation (III-20) les changements de signe du gradient de pression sont respectés. Le terme entier a alors un caractère dissipatif dans une détente et change de signe pour une compression. Suivant (III-21) ce terme aurait un rôle dissipatif indépendamment du signe du gradient de pression.

* Corrélation pression-divergence

La modélisation de ce terme, qui n'apparaît, ainsi que le terme de gradient de pression que pour les écoulements à masse volumique variable peut se faire à l'aide de quatre hypothèses successives.

Partons tout d'abord de la décomposition (au sens de FAVRE) de l'équation de continuité

$$\frac{d}{dt}(\bar{p} + p') + \frac{d}{dx_1}[(\bar{p} + p')(\tilde{u}_1 + u_1'')] = 0 \quad (\text{III-22})$$

On en déduit l'expression de la divergence des fluctuations de vitesse :

$$\bar{p} \frac{d u_1''}{d x_1} = - \frac{d p'}{d t} - u_1'' \frac{d \bar{p}}{d x_1} - p' \frac{d \tilde{u}_1}{d x_1} - \tilde{u}_1 \frac{d p'}{d x_1} - \frac{d}{d x_1}(p' u_1'') \quad (\text{III-23})$$

Comme l'ont souligné SHAMROTH et Mac DONALD [24], et BRADSHAW et FERRIS [23], le respect de l'hypothèse de TAYLOR mène à la conclusion (hypothèse n° 1)

$$\frac{d p'}{d t} + \bar{u}_1 \frac{d p'}{d x_1} = 0 \quad (\text{III-24})$$

ce qui peut s'écrire en termes de variables de FAVRE.

$$\frac{d p'}{d t} + \tilde{u}_1 \frac{d p'}{d x_1} - \frac{\overline{p' u_1''}}{\bar{p}} \frac{d p'}{d x_1} = 0 \quad (\text{III-25})$$

L'équation (III-23) peut se mettre sous la forme

$$\frac{d u_1''}{d x_1} = - \frac{\overline{p' u_1''}}{\bar{p}^2} \frac{d p'}{d x_1} - \frac{1}{\bar{p}} u_1'' \frac{d \bar{p}}{d x_1} - \frac{p'}{\bar{p}} \frac{d \tilde{u}_1}{d x_1} - \frac{1}{\bar{p}} \frac{d}{d x_1}(p' u_1'') \quad (\text{III-26})$$

Après multiplication de (III-26) par p' et passage à la moyenne il ne reste plus que

$$\overline{p' \frac{d u_1''}{d x_1}} = - \frac{\gamma}{\bar{p}} \overline{p' u_1''} \frac{d \bar{p}}{d x_1} - \frac{1}{\bar{p}} \overline{p' p'} \frac{d \tilde{u}_1}{d x_1} \quad (\text{III-27})$$

en négligeant les corrélations d'ordre supérieur à 2 (hypothèse n° 2). La tâche est maintenant d'obtenir une bonne approximation pour chacune des corrélations de pression $\overline{p' u_1''}$ et $\overline{p' p'}$. La troisième hypothèse suppose que le gaz étudié se comporte de façon polytropique (RUBESIN [26]). Donc

$$\frac{p'}{\bar{p}} = \eta \frac{p'}{\bar{p}} = \frac{\eta}{\eta - 1} \frac{T''}{\bar{T}}$$

Certaines valeurs particulières du coefficient polytropique η correspondent à des écoulements connus tels que

$$\begin{aligned}
 n = 0 & \rightarrow \text{isobare} \\
 n = 1 & \rightarrow \text{isotherme} \\
 n = \frac{C_p}{C_v} & \rightarrow \text{isentropique} \\
 n \rightarrow \infty & \rightarrow \text{isovolume}
 \end{aligned}$$

Comme cela a déjà été fait précédemment, la température totale du fluide est supposée constante et on peut considérer l'écoulement quasi unidimensionnel (hypothèse n° 4).

$$\Rightarrow T'' = - \frac{\tilde{u}_\alpha''}{c_p} u_\alpha'' \quad (\text{III-29})$$

En combinant (III-28) et (III-29) on obtient une forme similaire à (III-19)*

$$p' = - \frac{\bar{p}}{(n-1) c_p \bar{T}} \tilde{u}_\alpha u_\alpha'' \quad (\text{III-30})$$

et la corrélation pression divergence peut s'écrire

$$\overline{p' \frac{\partial u_\alpha''}{\partial x_\alpha}} = - \frac{\bar{p} \tilde{u}_\alpha''}{\bar{p}} \left[\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_\alpha} - \frac{\bar{p} \tilde{u}_\alpha''}{(n-1) c_p \bar{T}} \frac{\partial \tilde{u}_\alpha''}{\partial x_\alpha} \right] \quad (\text{III-31})$$

L'hypothèse d'écoulement polytropique (hypothèse n° 3) permet également d'exprimer la corrélation vitesse-pression grâce à

$$p' = n p' R \bar{T}$$

d'où la forme finale :

$$\overline{p' \frac{\partial u_\alpha''}{\partial x_\alpha}} = \frac{(\gamma-1)}{(n-1)\gamma} \tilde{u}_\alpha'' \widetilde{u_\alpha'' u_\beta''} \left[\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_\alpha} - \frac{\bar{p} \tilde{u}_\beta''}{(n-1) c_p \bar{T}} \frac{\partial \tilde{u}_\alpha''}{\partial x_\alpha} \right] \quad (\text{III-32})$$

*) L'équation (III-30) peut se transformer en :

$$\begin{aligned}
 \text{ou} \quad \overline{u_\alpha''} &= - \frac{1}{(n-1) c_p \bar{T}} \tilde{u}_\beta'' \left[\gamma \left(\frac{\partial \tilde{u}_\alpha''}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \tilde{u}_\beta''}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial \tilde{u}_\gamma''}{\partial x_\gamma} \right) - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} R \right] \\
 \overline{u_\alpha''} &= + \frac{1}{(n-1) c_p \bar{T}} \tilde{u}_\beta'' \widetilde{u_\alpha'' u_\beta''}
 \end{aligned} \quad (\text{III-30)bis}$$

Dans le cadre d'une approximation de couche limite, la seule valeur appropriée de l'indice α est 1. Il vient alors :

$$\overline{u''} = \frac{\tilde{u} u''}{(n-1) c_p \bar{T}} = cte \cdot \frac{\tilde{u} R}{(n-1) c_p \bar{T}} = cte \frac{\gamma-1}{n-1} \frac{\tilde{u} R}{\bar{a}^2} \quad (\text{III-20)bis}$$

Cette dernière forme est semblable à l'équation (III-20) qui a été développée au paragraphe précédent.

dans laquelle les moments d'ordre trois entre la vitesse et la masse volumique ont été négligés, ce qui a pour conséquence d'identifier les contraintes de Reynolds en moyenne pondérée à celles plus conventionnelles en moyennes centrées.

* Termes de dissipation

Les termes de dissipations se modélisent d'une façon analogue au cas incompressible. Le transfert d'énergie du mouvement moyen aux structures dissipatives, via les grosses structures porteuses se fait grâce aux mécanismes de déformation et d'étirement des tourbillons. TENNEKES et LUMLEY [27] ont montré que pour des valeurs assez grandes du nombre de Reynolds

$$\overline{S'_{\alpha\beta} S'_{\alpha\beta}} \gg \overline{S_{\alpha\beta}} \cdot \overline{S_{\alpha\beta}}$$

La fluctuation du taux de déformation est donc beaucoup plus importante que sa valeur moyenne. Les échelles de temps caractéristiques des petites structures sont donc beaucoup plus petites que celles des grandes (ou du mouvement moyen). Il ne peut donc y avoir qu'une très faible interaction entre ces phénomènes à petite échelle et le mouvement moyen. Il s'ensuit tout naturellement que les structures à petite échelle de la turbulence ont tendance à être indépendantes de tout effet anisotrope introduit par le cisaillement moyen, de telle façon que toutes les moyennes relatives à ces petits tourbillons ne changent pas sous l'effet d'une rotation du référentiel utilisé pour leur représentation. Dans ce sens, les structures à petite échelle peuvent être qualifiées d'isotropes. Les différences d'échelle entre ces petites structures et les mouvements irréguliers porteurs d'énergie sont d'autant plus grandes que le nombre de Reynolds est grand. Le taux de dissipation est donc contrôlé non pas par ces petites structures mais par les mécanismes qui transfèrent l'énergie des structures les plus grandes aux plus petites. Ainsi ce phénomène de cascade peut être supposé ne dépendre que de la masse volumique, $\bar{\rho}$, de l'échelle caractéristique de vitesse des mouvements à grande échelle (\sqrt{k}) et de leur taille (ℓ). Une simple analyse dimensionnelle entraîne la forme

$$\text{Dissipation} \approx C_D \frac{\bar{\rho} k^{3/2}}{\ell} \quad (\text{III-33})$$

C_D est une constante qui doit être optimisée (par le calcul par exemple) et la longueur caractéristique ℓ est déterminée par une relation algébrique. La connaissance de ℓ est basée principalement sur l'observation de résultats expérimentaux. Les mesures expérimentales indiquent que les gradients de vitesse moyenne au voisinage d'une paroi (dans la zone dite "logarithmique") varient avec la distance y à cette paroi suivant la loi :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = \sqrt{\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\rho}}} / \chi y \quad (\text{III-34})$$

D'autre part, si on examine le comportement de l'équation pour k au voisinage de la paroi, les termes de convection et de diffusion étant alors négligés, il s'ensuit une relation entre la contrainte turbulente et l'énergie k :

$$\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\rho} k} = C_D^{1/2} \quad (\text{III-35})$$

la définition de la viscosité turbulente permet d'éliminer k de l'équation (III-35) et d'obtenir une formulation presque identique à celle de longueur de mélange :

$$\bar{\sigma} = C_D^{1/2} \bar{\rho} l^2 \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right)^2 \quad (\text{III-36})$$

L'expérience suggère pour C_D la valeur 0.08. Ce résultat intermédiaire a permis de qualifier l'hypothèse de longueur de mélange de modèle de turbulence en équilibre local; la turbulence est alors supposée produite et dissipée en même temps et au même instant.

Revenons maintenant à la détermination de la longueur caractéristique des grosses structures. Si nous combinons les équations (III-34) et (III-36), il s'ensuit que, de même que la longueur de mélange, la longueur caractéristique croît linéairement avec la distance à la paroi. Avec les constantes :

$$\begin{aligned} \chi &= 0.4 \\ C_D &= 0.08 \end{aligned}$$

la pente de cette fonction est égale à 0.213. En s'écartant un peu plus de la paroi le comportement de la longueur caractéristique est identique à celui de la longueur de mélange, éventuellement à la constante $C_D^{1/4}$ multiplicative près.

Ces modèles à une équation ont été très peu utilisés pour des écoulements libres. On peut toutefois citer EMMONS [29] qui utilisa la formule

$$l = 0.04 y_c$$

pour le calcul d'un jet plan (y_c représente ici une largeur caractéristique du jet).

D'une façon sensiblement différente, RUBESIN [26] a donné une approximation globale pour ce terme de dissipation et le terme de diffusion laminaire, dérivée du modèle de GLUSHKO [28]. Après quelques manipulations formelles, propres à l'utilisation des moyennes décentrées, et en supposant que les fluctuations de viscosité sont négligeables, ainsi que les termes comportant des corrélations entre la vitesse et sa dérivée seconde, RUBESIN obtient :

$$\overline{(v_x'' \bar{\sigma}_{xy})}_{,y} - \bar{\sigma}_{xy} v_x'' = \overline{v_x'' (\tilde{\mu} \tilde{S}_{xy})}_{,y} + (\tilde{\mu} k_{,y})_{,y} - \tilde{\mu} \overline{v_{xy}'' v_{xy}''}$$

A la droite du signe égal on peut identifier un terme analogue au terme de gradient de pression moyenne, un terme de diffusion moléculaire ainsi que le terme de dissipation qui est exprimé, suivant le modèle de GLUSHKO par

$$\tilde{\mu} \overline{v_{\lambda/\beta}'' v_{\lambda/\beta}''} = \tilde{\mu} C \frac{\rho}{L^2} [1 + \varepsilon (\lambda R_{et})]$$

L est ici une longueur caractéristique qui peut être assimilée à la demi longueur sur laquelle s'annule la corrélation latérale $\overline{u'(x,y) u'(x,y + 2L)}$. La constante λ a ici pour rôle de différencier les taux de diffusion de la quantité de mouvement et de l'énergie de turbulence (rôle analogue à celui de σ_k) et R_{et} est le nombre de Reynolds défini par :

$$R_{et} = \frac{\sqrt{\rho} \cdot L}{\nu}$$

Il reste alors deux inconnues à représenter de façon algébrique : ε et L .

$$\varepsilon(r) = H(r) \cdot d \cdot r$$

$$H(r) \begin{cases} r/r_0 & 0 \leq r/r_0 < 0.75 \\ r/r_0 - (r/r_0 - 0.75)^2 & 0.75 \leq r/r_0 < 1.25 \\ 1 & 1.25 \leq r/r_0 < \infty \end{cases}$$

$$L/\delta \begin{cases} y/\delta & 0 \leq y/\delta < 0.23 \\ (y/\delta + 0.37)/2.61 & 0.23 \leq y/\delta < 0.57 \\ (1.48 - y/\delta)/2.52 & 0.57 \leq y/\delta < 1.48 \end{cases}$$

avec les constantes suivantes :

$$\begin{cases} \alpha = 0.2 \\ r_0 = 110. \\ C = 3.93 \\ \lambda = 0.4 \end{cases}$$

Une version différente de modèle à une équation a été proposée par BRADSHAW pour les couches limites incompressibles [30] puis compressibles [31]. Le fondement de ce modèle repose sur l'hypothèse que les termes de frottement turbulent ne sont pas nécessairement liés aux grandeurs moyennes de l'écoulement (ex. gradients de vitesse) mais plutôt à une autre grandeur turbulente telle que l'énergie cinétique de turbulence. Cela signifie en d'autres termes que la structure de la turbulence à une position longitudinale donnée est spécifiée uniquement par le profil de frottement turbulent, de telle façon que, par exemple, pour un profil de frottement donné, il ne puisse y avoir qu'un seul profil d'intensité de turbulence. Ce type de relation, qui caractérise la "structure" de la turbulence s'accorde très bien avec les résultats expérimentaux [30]. Incidemment, il est possible d'utiliser une telle relation pour transformer l'équation exacte de l'énergie turbulente en une équation approximée pour le frottement turbulent. Les résultats obtenus avec des relations empiriques simples sont très acceptables tant que l'approximation de couche limite est respectée [32]. Il faut toutefois noter que, si on utilise ces mêmes relations pour transformer l'équation exacte pour le frottement turbulent en une forme approximée fermée, on obtient une équation dans laquelle les corrélations vitesse-pression ne sont pas, à ce stade-ci, approximables de façon aisée. Pour revenir au modèle de BRADSHAW, puisque seulement la structure de la turbulence est évoquée, il est aisé de l'étendre aux écoulements compressibles en s'appuyant sur l'hypothèse de MORKOVIN [33]. MORKOVIN souligna que la structure de la turbulence ne devait pas être affectée par la compressibilité tant que les fluctuations du nombre de Mach sont très petites devant l'unité (ou que les fluctuations de masse volumique sont petites devant sa valeur moyenne). Cette condition est satisfaite pour toute couche limite supersonique pourvu que le nombre de Mach extérieur soit inférieur à cinq. L'hypothèse de MORKOVIN est étayée par son analyse des mesures de KISTLER [34] et de DEMITRIADES [35], et selon BRADSHAW [31] a posteriori par le succès de sa méthode de calcul. Toutefois, l'utilisation de l'hypothèse de MORKOVIN exclut la prise en compte de phénomènes classiques en aérodynamique supersonique tels que ondes de choc ou faisceaux de détente. De plus la restriction du nombre de Mach à la valeur limite de 5 ne peut s'appliquer que dans le cas d'un gradient de pression longitudinal nul. En présence de gradient de pression non nul, cette valeur limite est voisine de 3. De plus le problème du transfert de chaleur à la paroi n'est pas pris en compte. Les équations modélisées obtenues par BRADSHAW ne comportent pas de termes diffusifs et sont résolues en tenant compte de leur caractère hyperbolique. Les zones où la viscosité laminaire n'est pas négligeable ne sont traitées globalement que par la prescription d'une loi de vitesse universelle, transformée pour tenir compte de la compressibilité. Au voisinage de la paroi, (mais à l'extérieur de la

sous-couche laminaire) l'équation de l'énergie turbulente se réduit donc à une formulation du type longueur de mélange. La prise en compte de cette sous-couche laminaire se fait donc via la valeur de la constante d'intégration de cette formulation [31]. BRADSHAW a adapté ce modèle pour inclure, si nécessaire, les effets des grands et petits nombres de Reynolds, de courbure et de gradients de pression.

b) Equation pour l'énergie totale

La forme ouverte de l'équation de l'énergie en moyenne de FAVRE est :
(eq. II-59)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{P} \tilde{E}) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{P} \tilde{v}_\alpha \tilde{E}) = - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\overline{P v_\alpha'' E''} - \overline{\sigma_{\alpha\beta} v_\beta} - \overline{Q_\alpha})$$

Les lois de Newton et de Fourier entraînent que 65 :

$$\sigma_{\alpha\beta} = -P S_{\alpha\beta} + \mu S_{\alpha\beta} \quad ; \quad S_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3} S_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma} \right)$$

$$Q_\alpha = -K \frac{\partial T}{\partial x_\alpha}$$

En négligeant les fluctuations de viscosité et de conductivité thermique moléculaires, l'équation de l'énergie pourra donc s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{P} \tilde{E}) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\bar{P} \tilde{v}_\alpha \tilde{E} + \bar{P} \widetilde{v_\alpha'' E''} - K \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_\alpha} + \bar{P} \tilde{v}_\alpha + \bar{P} \overline{v_\alpha''} \right. \\ \left. + \overline{P' v_\alpha''} - \mu \left(\widetilde{S_{\alpha\beta} v_\beta} + \overline{S_{\alpha\beta}'' v_\beta} + \widetilde{S_{\alpha\beta} v_\beta''} + \overline{S_{\alpha\beta}'' v_\beta''} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

L'équation d'état permet de relier la pression à la température.

Ainsi on aura

$$\begin{aligned} \bar{P} \overline{v_\alpha''} + \overline{P' v_\alpha''} &= \overline{P v_\alpha''} = (\gamma-1) c_v \overline{P (\tilde{T} v_\alpha'' + T'' v_\alpha'')} \\ &= (\gamma-1) c_v \bar{P} \widetilde{T'' v_\alpha''} \end{aligned}$$

La définition de l'énergie totale se fait à partir de la température (énergie interne), de l'énergie cinétique du mouvement moyen et de l'énergie

cinétique de la turbulence; donc

$$\bar{P} \widetilde{E'' u_\alpha''} = \bar{P} c_v \widetilde{T'' u_\alpha''} + \bar{P} \widetilde{u_\alpha'' u_\beta''} \widetilde{u_\beta''} + \bar{P} \frac{\widetilde{u_\alpha'' u_\beta'' u_\beta''}}{2}$$

Le moment d'ordre trois s'exprime aisément en fonction de la valeur instantanée de l'énergie de turbulence

$$(PR)'' = \frac{1}{2} \rho u_\beta'' u_\beta''$$

donc
$$\bar{P} \frac{\widetilde{u_\alpha'' u_\beta'' u_\beta''}}{2} = \bar{P} (\widetilde{R u_\alpha''})$$

De plus on a vu précédemment que la corrélation vitesse masse volumique pouvait s'exprimer en fonction des contraintes de Reynolds (éq. III-30 bis).

Les contraintes de Reynolds s'expriment en fonction du champ de vitesse moyenne (equation III-16). Pour les flux turbulents une hypothèse de transport par gradient permet d'écrire :

$$-\widetilde{T'' u_\alpha''} = \frac{\mu_t}{\rho_t} \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_\alpha} ; \quad -\widetilde{R u_\alpha''} = \frac{\mu_t}{\rho_t} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha}$$

Une forme généralisée de transport par gradient est suggérée par LAUNDER [64],

$$-\widetilde{T'' u_\alpha''} = c_e \frac{\rho}{\varepsilon} \widetilde{u_\alpha'' u_\beta''} \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_\beta} ; \quad -\widetilde{R u_\alpha''} = c_R \frac{\rho}{\varepsilon} \widetilde{u_\alpha'' u_\beta''} \frac{\partial \rho}{\partial x_\beta}$$

qui permet ainsi la viscosité turbulente d'être une grandeur tensorielle plutôt que scalaire. Il faut remarquer cependant qu'une telle généralisation n'est pas nécessairement profitable pour ce niveau de fermeture dans la mesure où l'appel aux contraintes de Reynolds réintroduit l'approximation de BOUSSINESQ.

Le terme correspondant au travail des fluctuations du frottement laminaire étant négligé parce que petit, on peut combiner les équations écrites plus haut pour obtenir une forme modélisée de l'équation de l'énergie totale :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{P} \widetilde{E}) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[(\bar{P} \widetilde{E} + \bar{P} + \frac{2}{3} \bar{P} R) \widetilde{u_\alpha''} - \widetilde{u_\beta''} (\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \widetilde{u_\alpha''}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \widetilde{u_\beta''}}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial \widetilde{u_\gamma''}}{\partial x_\gamma} \right) \right. \\ \left. - (c_R \bar{P} \frac{\rho}{\varepsilon} \widetilde{u_\alpha'' u_\beta''} + \mu S_{\alpha\beta}) \frac{\partial \rho}{\partial x_\beta} \right] \end{aligned}$$

.../...

$$\begin{aligned}
 & - \left(C_e \gamma C_v \bar{P} \frac{\rho}{\varepsilon} \widetilde{u''_\alpha u''_\beta} + S_{\alpha\beta} K \right) \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_\beta} \\
 & + \mu \frac{\mu_t}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial \widetilde{u''_\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \widetilde{u''_\beta}}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3} S_{\alpha\beta} \frac{\partial \widetilde{u''_\gamma}}{\partial x_\gamma} \right)^2 \frac{\widetilde{u''_\beta}}{(n-1) c_p \widetilde{T}} \\
 & - \frac{2}{3} \mu S_{\alpha\beta} \frac{\rho \widetilde{u''_\beta}}{(n-1) c_p \widetilde{T}} \Big] = 0
 \end{aligned}$$

III-1-3.- Fermeture à l'ordre zéro avec deux équations de transport

a) Modélisation à grand nombre de Reynolds

Le premier inconvénient des modèles à une équation est que le taux de dissipation de l'énergie de turbulence (et donc le niveau général d'énergie turbulente) est lié à la connaissance plus ou moins exacte d'une longueur caractéristique des mouvements à grande échelle. LAUNDER et SPALDING vont même jusqu'à conclure que la supériorité de ces modèles sur ceux du type longueur de mélange n'était qu'accidentelle et ponctuelle [36]. Pour pallier cette difficulté il a été proposé de déterminer cette longueur caractéristique par une équation aux dérivées partielles du même type que celle de k . Le chapitre précédent a cité les diverses combinaisons des indices n et m qui ont débouché sur des utilisations réelles de la variable z telle que :

$$z \sim k^m l^n$$

Dans la suite de ce paragraphe nous nous attacherons à ne détailler qu'une seule de ces combinaisons qui a été utilisée pour des écoulements compressibles par l'auteur. Toutefois cette approche n'est pas exclusive et il sera fait mention d'autres approches possibles.

La combinaison qui a été retenue pour ce travail correspond aux valeurs :

$$\begin{cases} m = 3/2 \\ n = -1. \end{cases}$$

Une raison première pour ce choix est la signification physique de la variable z ainsi définie qui est le terme exact de dissipation dans l'équation de k . L'équation de ε ($\varepsilon \sim k^{3/2}/l$) (II-79) qui a été développée

dans le chapitre précédent ne sera pas, à cause de sa complexité, reproduite ici.

a) Modélisation à grand nombre de Reynolds

TENNEKES et LUMLEY [3] ont déduit d'une analyse des ordres de grandeur des différents termes de l'équation pour ϵ que, pour les écoulements isovolumes à grand nombre de Reynolds turbulent Re_t , les termes I et II supplantent tous les autres termes. Ces termes, qui dépendent fortement de Re_t , tendent vers l'infini avec ce dernier, toutefois leur différence reste bornée [37], [38] et du même ordre de grandeur que le terme de transport diffusif III. Les termes IV et V sont inférieurs par un facteur proportionnel à $Re_t^{1/2}$ et Re_t , respectivement. Dans l'hypothèse de grand nombre de Reynolds Re_t , ils sont négligés à juste titre, ainsi que la contribution visqueuse dans le terme III. L'équation modélisée de ϵ , telle qu'elle a été proposée par LAUNDER, REECE et RODI [39], et complétée par la valeur moyenne de la masse volumique est :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{P}\epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{P}\tilde{u}_\alpha \epsilon) = c_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{R} P - c_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{R} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\frac{M_t}{\rho} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_\alpha} \right] \quad (\text{III-37})$$

avec
$$P = -\bar{P} \overline{u_\alpha'' u_\beta''} \frac{\partial \tilde{u}_\alpha}{\partial x_\beta}$$

Il est bon de souligner toutefois qu'une simplification aussi drastique de l'équation de ϵ ne s'est faite qu'en supposant une certaine analogie de structure entre l'équation de k et celle de ϵ (après modélisation), les échelles de temps respectives étant différentes. Cette analogie amène à supposer que la contribution du champ de pression moyenne pourra se représenter d'une façon semblable, en respectant toutefois ces échelles de temps. De même, les variations de masse volumique entraînent une divergence non nulle du champ de vitesse.

L'analogie avec l'équation de l'énergie doit donc s'étendre également à ces termes. L'ensemble des termes (a) à (f) correspondant aux effets de variation de masse volumique sera modélisé par :

$$-c_{\epsilon 3} \frac{\epsilon}{R} \overline{u_\alpha''} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_\alpha} + c_{\epsilon 4} \frac{\epsilon}{R} \overline{P' \frac{\partial u_\alpha''}{\partial x_\alpha}} \quad (\text{III-38})$$

avec
$$\overline{u_\alpha^2} = \frac{1}{(n-1)C_p} \overline{u_\beta} \overline{u_\alpha^2 u_\beta^2}$$

et
$$\overline{P \frac{d u_\alpha^2}{d x_\alpha}} = \frac{\gamma-1}{\gamma(n-1)} \overline{u_\alpha} \overline{u_\alpha^2 u_\beta^2} \left[\frac{d \overline{P}}{d x_\beta} - \frac{\overline{P} \overline{u_\beta}}{(n-1)C_p} \overline{u_\beta} \frac{d \overline{u_\beta}}{d x_\beta} \right]$$

Les deux dernières relations ayant été introduites précédemment dans le cadre de la fermeture de l'équation pour k (voir équations (III-30) bis et (III-32)). D'autres hypothèses ont été faites dans la référence [40] mais l'expérience a montré que leur domaine de validité se restreignait à des écoulements de type couche limite avec seulement de faibles valeurs de gradient de pression.

b) Modélisation à faible nombre de Reynolds

Il semble plus plausible que le faible déséquilibre existant entre I et II soit affecté par l'asymétrie de distribution des fluctuations de vitesses des grosses structures plutôt que par le mouvement moyen lui-même. En effet, considérons par exemple l'étirement d'un tourbillon à l'équilibre. Si cet étirement est brusquement accru, le terme de production va prédominer momentanément par rapport au terme visqueux, accroissant le taux de tourbillon jusqu'à ce qu'un nouvel équilibre soit atteint. En termes statistiques, si le flux spectral d'énergie augmente, le premier terme domine le second jusqu'à ce que la dissipation compense ce flux d'énergie. Il est clair que les temps de réponse dépendent du rapport des échelles de temps. C'est dans cette optique que LUMLEY et KHAJEH-NOURI ont suggéré de remplacer P par la quantité $\overline{P} \varepsilon \left(\frac{\overline{u_\alpha^2 u_\beta^2}}{R} - \frac{2}{3} S_{\alpha\beta} \right)^2$

. Toutefois, comme c'est la présence de déformation moyenne qui est responsable de l'anisotropie, on peut admettre que $\left(\frac{\overline{u_\alpha^2 u_\beta^2}}{R} - \frac{2}{3} S_{\alpha\beta} \right)^2$ et $\frac{P}{\varepsilon}$ évoluent de façon similaire. L'équation (III-37) ayant été abondamment utilisée pour des calculs numériques (voir réf. [38]), elle peut être conservée comme valeur asymptotique pour les grands nombres de Reynolds. Pour une turbulence homogène isovolume et décroissante, l'équation (III-37) se ramène alors à

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{R} \quad (\text{III-39})$$

L'équation (III-39) cause la décroissance de l'énergie turbulente à un taux proportionnel à x^{-n} où

$$\eta = (C_{\epsilon 2} - 1)^{-1} \quad (\text{III-40})$$

Pour des grands nombres de Reynolds, les données expérimentales de COMTE-BELLOT et CORRISIN [42] indiquent une valeur de l'exposant n égale à 1.2 suggérant ainsi

$$C_{\epsilon 2} \approx 1.8 \quad (\text{III-41})$$

Au loin (aval) le modèle de décroissance change brusquement et l'exposant n tend vers une valeur asymptotique égale à 2.5. Comme le long de cette décroissance, le nombre de Reynolds turbulent est le seul paramètre caractéristique qui évolue, le changement de comportement de l'exposant n peut être attribué à la diminution de Re_t . L'équation de décroissance peut donc s'écrire :

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = -C_{\epsilon 2} \frac{\rho}{f_{\epsilon}} \frac{\epsilon^2}{\rho} \quad (\text{III-42})$$

où f_{ϵ} est une fonction de Re_t , égale à l'unité si Re_t est grand. Les données de BATCHELOR et TOWNSEND [43] ont permis de justifier la forme de dépendance suivante [38].

$$f_{\epsilon} = 1.0 - \frac{0.4}{1.8} \exp\left[-\left(\frac{Re_t}{6}\right)^2\right] \quad (\text{III-43})$$

Il est nécessaire de souligner ici que ce type de dépendance a été déduit de l'observation de la décroissance d'une turbulence de grille. Aucun argument ne permet donc d'affirmer que ce comportement sera vérifié dans le voisinage proche d'une paroi solide. En effet, la dissipation ϵ prend une valeur non nulle à la paroi tandis que l'énergie turbulente k tend vers zéro. De cette façon, le rapport $\frac{\epsilon^2}{k}$ tend vers l'infini, ce qui est numériquement inacceptable. Cette difficulté peut être supprimée en remplaçant ϵ^2 par $\epsilon\epsilon^*$ avec

$$\epsilon^* = \epsilon - 2\nu \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial x_n}\right)^2 \quad (\text{III-44})$$

le produit $\varepsilon \varepsilon^*$ tend alors vers une constante car ε^* et k se comportent comme y^2 au voisinage de la paroi (voir Appendix dans la référence [38]).

Au voisinage des parois, le terme de diffusion moléculaire $\nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_\alpha^2}$ est le seul terme qui ne tend pas vers zéro, (exceptions faites des termes I et II), et par conséquent ne peut pas être négligé. Le terme de diffusion turbulente doit donc dépendre également du nombre de Reynolds via la viscosité turbulente. Le dernier terme V de l'équation (II-79) est approximé par :

$$-2\nu \overline{u_\alpha'' \frac{\partial u_\beta''}{\partial x_\gamma}} \frac{\partial^2 \tilde{u}_\beta}{\partial x_\alpha \partial x_\gamma} = C_{\varepsilon 4} \nu \frac{\rho}{\varepsilon} \overline{u_\alpha'' u_\beta''} \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}_\gamma}{\partial x_\alpha \partial x_\delta} \right] \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}_\gamma}{\partial x_\beta \partial x_\delta} \right] \quad (\text{III-45})$$

Cette hypothèse est suggérée par HANJALIC et LAUNDER [38] qui se basent sur la théorie de transport de tourbillon de TAYLOR [44].

La synthèse des hypothèses de modélisation qui ont été faites pour ε se traduit finalement par l'équation.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{P} \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{P} \tilde{u}_\alpha \varepsilon) &= - C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{R} \bar{P} \overline{u_\alpha'' u_\beta''} \frac{\partial \tilde{u}_\alpha}{\partial x_\beta} - C_{\varepsilon 2} \frac{\rho}{\varepsilon} \bar{P} \varepsilon \varepsilon^* \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_\alpha} \right] - C_{\varepsilon 5} \frac{\rho}{\varepsilon} \mu \overline{u_\alpha'' u_\beta''} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_\gamma}{\partial x_\alpha \partial x_\delta} \right) \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_\gamma}{\partial x_\beta \partial x_\delta} \right) \\ &- C_{\varepsilon 3} \frac{\varepsilon}{R} \frac{1}{(\eta-1) c_p \bar{T}} \tilde{u}_\beta \overline{u_\alpha'' u_\beta''} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_\alpha} \\ &+ C_{\varepsilon 4} \frac{\varepsilon}{R} \frac{\delta-1}{\gamma(\eta-1)} \tilde{u}_\alpha \overline{u_\alpha'' u_\beta''} \left[\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_\beta} - \frac{\bar{P} \tilde{u}_\beta}{(\eta-1) c_p \bar{T}} \frac{\partial \tilde{u}_\gamma}{\partial x_\gamma} \right] \end{aligned} \quad (\text{III-46})$$

$$\text{avec } \varepsilon^* = \varepsilon - 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2 \quad ; \quad f_\varepsilon = 1 - 0.22 \exp \left[- \left(\frac{Re_\delta}{6} \right)^2 \right]$$

$$\mu_t = c_D f_M \bar{P} \frac{k^2}{\varepsilon} \quad ; \quad f_M = \exp \left(- \frac{2.5}{1 + \frac{Re_t}{50}} \right)$$

$$- \bar{P} \widetilde{u_\alpha'' u_\beta''} = \mu_t \left[\frac{\partial \widetilde{u_\alpha''}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \widetilde{u_\beta''}}{\partial x_\alpha} \right] - \frac{2}{3} S_{\alpha\beta} \left[\mu_t \frac{\partial \widetilde{u_\gamma''}}{\partial x_\gamma} + \bar{P} k \right]$$

L'équation pour l'énergie turbulente a une forme modifiée des modèles à une équation.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{P} k) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{P} \widetilde{u_\alpha''} k) &= - \bar{P} \widetilde{u_\alpha'' u_\beta''} \frac{\partial \widetilde{u_\alpha''}}{\partial x_\beta} - \bar{P} \varepsilon \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sqrt{k}} \right) \frac{\partial k}{\partial x_\alpha} \right] \\ &- \frac{\widetilde{u_\beta''}}{(n-1) c_p \bar{T}} \widetilde{u_\alpha'' u_\beta''} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_\alpha} \\ &+ \frac{(\gamma-1)}{\gamma(n-1)} \widetilde{u_\alpha''} \widetilde{u_\alpha'' u_\beta''} \left[\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_\beta} - \frac{\bar{P} \widetilde{u_\beta''}}{(n-1) c_p \bar{T}} \frac{\partial \widetilde{u_\gamma''}}{\partial x_\gamma} \right] \end{aligned}$$

BU
LILLE

(III-47)

Les constantes utilisées dans ces équations sont

$$\begin{aligned} c_{\varepsilon 1} &= 1.45 & \sigma_k &= 1.0 \\ c_{\varepsilon 2} &= 1.92 & \sigma_\varepsilon &= 1.3 \\ c_{\varepsilon 3} &= 2.0 & c_D &= 0.09 \\ c_{\varepsilon 4} &= 1.0 & n &= 1.2 \\ c_{\varepsilon 5} &= 2.0 & & \end{aligned}$$

(III-48)

Le problème des modèles à deux équations pour les écoulements compressibles a déjà été abordé par WILCOX dans un premier article [23] ou un modèle a été développé pour le terme de gradient de pression dans l'équation pour l'énergie turbulente et dans lequel le terme pression-divergence a été inclu, puis dans la réf. [46], une équation pour la variable de "pseudo-tourbillon" est introduite, mais l'effet de compressibilité n'étant abordé que par le moyen de la notation de FAVRE avec une masse volumique variable (mais non fluctuante),

tous les termes supplémentaires attachés aux fluctuations de masse volumique étant alors considérés comme négligeables ! Dans le cadre des fermetures à l'ordre zéro, il faut également mentionner le travail de OH [47] qui s'est attaché à résoudre le problème du taux d'ouverture des couches de cisaillement supersoniques. Toutefois les hypothèses faites dans cet article conduisent à l'utilisation d'un modèle de production dans lequel apparaît une constante inconnue, due à l'utilisation de l'hypothèse de BRADSHAW. De plus, quoique certaines hypothèses de base sont communes avec le travail qui est présenté ici, le résultat comporte un certain nombre de constantes qui doivent être optimisées numériquement et sur lesquelles n'existent que très peu d'informations (au total 6 constantes uniquement pour l'équation de k , la dissipation étant déterminée à partir d'une définition algébrique d'une longueur caractéristique). En commun à toutes ces approches, l'approximation de couche limite est finalement utilisée pour permettre une résolution des équations avec une méthode numérique du type parabolique.

III-2.- FERMETURE AU SECOND ORDRE

L'utilisation de l'approximation de Boussinesq a permis de déterminer les termes du tenseur de Reynolds à partir du champ de vitesse moyenne et d'une viscosité turbulente. La tâche des fermetures à l'ordre zéro a été alors de caractériser cette viscosité d'une façon aussi fine que possible à partir d'informations données par le champ moyen, que ce soit à l'aide d'une formulation algébrique où par la résolution d'équations aux dérivées partielles. Une autre approche possible du problème est de s'attacher à avoir une connaissance directe des contraintes turbulentes à l'aide ou bien de relations algébriques, ou bien d'équations différentielles, supprimant ainsi les restrictions introduites par l'approximation de transport par gradient. Plusieurs travaux expérimentaux (voir par exemple les références [18] ou [48]) ont montré que les corrélations ne suivent pas toujours les changements de signe des gradients moyens auxquels elles sont reliées par l'approximation de BOUSSINESQ. Ce point peut être illustré très simplement par l'examen d'une des contraintes normales. Soit u'^2 , la composante longitudinale de l'énergie turbulente. Avec une formulation basée sur une viscosité turbulente, u'^2 pourrait être simulée par $-\mu_t \frac{\partial u}{\partial x}$. De par sa nature, u'^2 est une quantité non négative tandis que cette formulation suppose que cette corrélation puisse être positive, négative ou nulle en différentes régions de l'écoulement. Que ce soit pour aboutir à une formulation algébrique ou à une

équation différentielle, il est nécessaire de faire certaines hypothèses pour fermer le système formé par les équations de Navier-Stokes auxquelles sont adjointes les équations de bilan des moments d'ordre deux. Après un examen des hypothèses de fermeture nécessaires au traitement des écoulements à masse volumique variable, nous présenterons les simplifications qui peuvent déboucher sur une formulation algébrique, puis nous présenterons une fermeture complète pour le traitement des problèmes de mélange de gaz de masses moléculaires différentes.

III-2-1.- Equation d'évolution pour les contraintes de Reynolds

Cette équation, telle qu'elle a été développée dans le chapitre précédent (équation II-68) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho u''_{\beta} u''_{\gamma}}) + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\overline{\rho \tilde{u}_{\alpha} u''_{\beta} u''_{\gamma}}) &= - \overline{\rho u''_{\beta} u''_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\tilde{u}_{\gamma}) - \overline{\rho u''_{\gamma} u''_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\tilde{u}_{\beta}) \\ - \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} [&\overline{\rho u''_{\alpha} u''_{\beta} u''_{\gamma}} + S_{\alpha\beta} \overline{u''_{\gamma} P'} + S_{\alpha\gamma} \overline{u''_{\beta} P'} - \mu S_{\alpha\beta} \overline{u''_{\gamma}} - \mu S_{\alpha\gamma} \overline{u''_{\beta}}] \\ - \overline{u''_{\gamma}} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_{\beta}} - \overline{u''_{\beta}} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_{\gamma}} &+ \overline{P' \left(\frac{\partial u''_{\gamma}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial u''_{\beta}}{\partial x_{\gamma}} \right)} - \mu S_{\alpha\beta} \frac{\partial \overline{u''_{\gamma}}}{\partial x_{\alpha}} - \mu S_{\alpha\gamma} \frac{\partial \overline{u''_{\beta}}}{\partial x_{\alpha}} \end{aligned} \quad (\text{III-49})$$

A) Termes exacts.

Ainsi que dans le cas des fermetures à l'ordre zéro, le terme correspondant au transport par convection est exact et ne nécessite donc aucune hypothèse; le terme de production, qui n'était pas "exact" pour l'équation de l'énergie turbulente, devient exact maintenant pour l'équation de $\overline{u''_{\gamma} u''_{\beta}}$

B) Gradient de pression moyenne.

La description du terme

$$- \overline{u''_{\gamma}} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_{\beta}} - \overline{u''_{\beta}} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_{\gamma}}$$

se fait à partir des mêmes hypothèses que pour l'équation de l'énergie. L'équation (III-30 bis) peut être utilisée et on obtient :

$$- \overline{u''_{\gamma}} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_{\beta}} - \overline{u''_{\beta}} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_{\gamma}} = - \frac{\tilde{u}_{\alpha}}{(n-1)c_p \overline{T}} \left[\overline{u''_{\alpha} u''_{\beta}} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_{\gamma}} + \overline{u''_{\alpha} u''_{\gamma}} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_{\beta}} \right] \quad (\text{III-50})$$

C) Diffusion

Trois contributions différentes apparaissent dans le terme de transport diffusif; à savoir :

- diffusion par mouvements turbulents : $\overline{u''_x v''_y w''_z}$
- diffusion par fluctuations de pression : $\overline{v''_y p'}$, $\overline{v''_z p'}$
- diffusion par mouvements moléculaires : $\overline{\mu S_{xy} u''_x}$, $\overline{\mu S_{xz} u''_x}$

Pour ce qui est de l'action diffusivité de la viscosité laminaire, on peut, ou bien la négliger dans l'hypothèse d'un grand nombre de Reynolds, ou bien la traiter d'une façon analogue à la loi de Newton, si cette hypothèse ne peut pas être faite, comme c'est le cas au voisinage d'une paroi solide par exemple. On peut alors utiliser l'approximation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\overline{\mu S_{xy} u''_x} + \overline{\mu S_{xz} u''_x} \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\tilde{\mu} \frac{\partial}{\partial x_2} (\overline{v''_y u''_x}) \right] \quad (\text{III-51})$$

On ne dispose que de relativement peu d'informations au sujet des termes de diffusion par les fluctuations de pression. En se basant sur des résultats expérimentaux obtenus pour un écoulement plan dans un canal asymétrique, HANJALIC et LAUNDER [18] ont estimé la divergence de cette corrélation petite par rapport aux autres quantités mesurées pour l'équation de l'énergie et l'ont négligée. HARLOW et NAKAYAMA [49] ont proposé de modéliser ce terme avec une approximation de transport par gradient telle que

$$\overline{v''_y p'} = -K \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_p} \quad (\text{III-52})$$

tandis que DONALDSON [50] utilisa pour ce terme une contribution qui est essentiellement non productive, c'est-à-dire que le modèle est une fonction du gradient de la variable transportée;

$$\overline{v''_y p'} = -\rho_0 \sqrt{k} \Lambda \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{v''_y u''_x} \quad (\text{III-53})$$

(Λ est ici une échelle de longueur). Par ailleurs, LUMLEY [4] suggéra :

$$\overline{v'_\beta p'} = -\bar{p} \overline{v'_\alpha v'_\beta} / 5. \quad (\text{III-54})$$

à partir d'une analyse d'une équation de Poisson pour les fluctuations de pression, et en supposant la turbulence presque homogène et l'absence de paroi solide. Toutes ces suggestions n'ont pas réellement eu de support physique (exception faite peut-être des expériences de WILMARTH et WOODRIDGE [51]). Une bonne raison pour finalement négliger ce terme est que, dans un certain nombre d'expériences, le bilan d'énergie turbulente est équilibré sans devoir inclure les termes de diffusion par les fluctuations de pression, pour lesquels on ne peut pas avoir de mesure directe. Un bel exemple de ce type d'expérience est fourni par IRWIN [52]. Le bilan d'énergie est montré sur la figure III-I. La courbe de corrélation triple est très voisine de la courbe de diffusion globale correspondant à un équilibre des diverses contributions de l'énergie turbulente. Il est clair que les mécanismes de diffusion par les fluctuations de pression sont négligeables devant ceux correspondant aux fluctuations de vitesse.

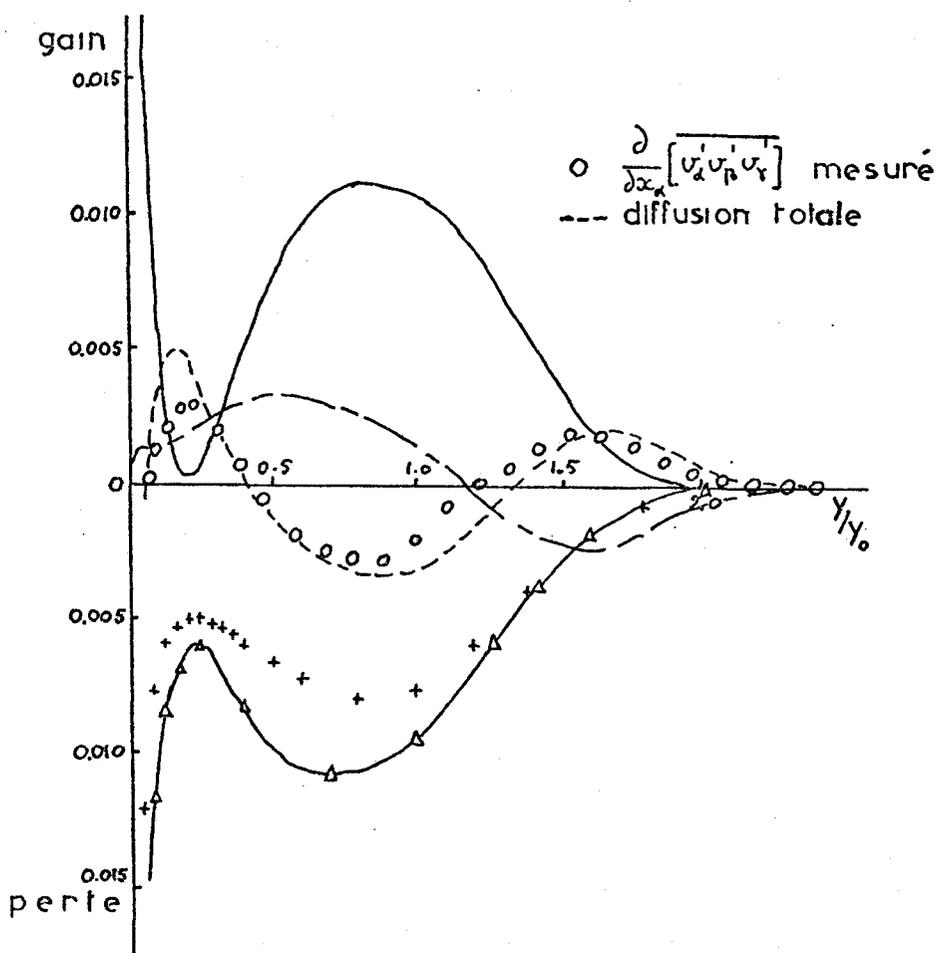


Fig. III-1.- Bilan d'énergie dans un jet pariétal (d'après IRWIN[53]).

Le troisième processus de diffusion est représenté par le moment d'ordre trois. Considérons l'équation d'évolution de cette quantité qui a été développée selon les conventions de Favre (moyennes pondérées par la masse volumique, éq. II-71). Un examen de l'ordre de grandeur des différents termes qui la composent [53] montre que les seules contributions d'importance peuvent être groupées sous la forme :

$$\begin{aligned}
 0 = & \frac{\partial}{\partial x_s} (\bar{\rho} \widetilde{u''_x u''_y u''_s}) + \widetilde{u''_x u''_y} \frac{\partial}{\partial x_s} (\bar{\rho} \widetilde{u''_s u''_y}) \\
 & + \widetilde{u''_x u''_s} \frac{\partial}{\partial x_s} (\bar{\rho} \widetilde{u''_s u''_y}) + \widetilde{u''_y u''_s} \frac{\partial}{\partial x_s} (\bar{\rho} \widetilde{u''_s u''_x}) \\
 & - \overline{u''_y u''_s \frac{\partial p'}{\partial x_x}} - \overline{u''_x u''_s \frac{\partial p'}{\partial x_y}} - \overline{u''_x u''_y \frac{\partial p'}{\partial x_s}} \quad (\text{III-55})
 \end{aligned}$$

L'idée de base pour simplifier cette expression est de supposer que la distribution de vitesse suit une loi quasi-normale. Ce point qui est discuté dans la référence [53], est une source de controverse qui a été soulevée par ORSZAG [54] qui a montré que cette hypothèse pouvait faire apparaître une énergie négative. Moyennant certaines précautions qui seront expliquées à la fin de ce chapitre dans la partie concernant la "réalisabilité" des modèles, nous supposons que cette hypothèse est valable, au moins pour les fluctuations correspondant aux moyennes centrées [53]. En suivant l'idée de MILLIONSHTCHIKOV [55], le moment d'ordre quatre peut être approximé en termes de moments d'ordre deux suivant la relation.

$$\overline{u''_x u''_y u''_s} = \overline{u''_x u''_y} \cdot \overline{u''_y u''_s} + \overline{u''_x u''_s} \cdot \overline{u''_y u''_s} + \overline{u''_x u''_s} \cdot \overline{u''_y u''_x} \quad (\text{III-56})$$

D'autre part, la définition des deux formalismes de moyenne permet d'obtenir une relation entre les fluctuations :

$$u''_x = \widetilde{u''_x} + \frac{\overline{u''_x u''_x}}{\overline{\rho}} \quad (\text{III-57})$$

A l'aide de l'équation (III-57), les diverses contributions de l'équation (III-56) peuvent être exprimées en termes de corrélations au sens de Favre. Ainsi on aura d'une part pour le moment d'ordre quatre :

$$\begin{aligned}
\overline{u'_\alpha u'_\beta u'_\gamma u'_\delta} &= \overline{u''_\alpha u''_\beta u''_\gamma u''_\delta} + k_\gamma \overline{u''_\alpha u''_\beta u''_\delta} + k_\delta \overline{u''_\alpha u''_\beta u''_\gamma} \\
&+ k_\alpha \overline{u''_\beta u''_\gamma u''_\delta} + k_\beta \overline{u''_\alpha u''_\gamma u''_\delta} + k_\gamma k_\delta \overline{u''_\beta u''_\alpha} \\
&+ k_\alpha k_\beta \overline{u''_\gamma u''_\delta} + k_\alpha k_\gamma \overline{u''_\beta u''_\delta} + k_\alpha k_\delta \overline{u''_\beta u''_\gamma} \\
&+ k_\beta k_\gamma \overline{u''_\alpha u''_\delta} + k_\beta k_\delta \overline{u''_\alpha u''_\gamma} + k_\alpha k_\beta k_\gamma k_\delta - \frac{1}{\rho} \overline{\rho' u'_\alpha u'_\beta u'_\gamma u'_\delta}
\end{aligned} \tag{III-58}$$

Les moments d'ordre deux peuvent être transformés d'une manière similaire, et l'approximation de quasi-normalité peut alors s'écrire, en termes de quantités pondérées :

$$\begin{aligned}
&\overline{u''_\alpha u''_\beta u''_\gamma u''_\delta} + k_\alpha \overline{u''_\beta u''_\gamma u''_\delta} + k_\beta \overline{u''_\alpha u''_\gamma u''_\delta} \\
&+ k_\gamma \overline{u''_\alpha u''_\beta u''_\delta} + k_\delta \overline{u''_\alpha u''_\beta u''_\gamma} - \frac{1}{\rho} \overline{\rho' u'_\alpha u'_\beta u'_\gamma u'_\delta} \\
&= \overline{u''_\alpha u''_\beta \cdot u''_\gamma u''_\delta} + \overline{u''_\alpha u''_\gamma \cdot u''_\beta u''_\delta} + \overline{u''_\alpha u''_\delta \cdot u''_\beta u''_\gamma} \\
&+ 2 k_\alpha k_\beta k_\gamma k_\delta - \frac{1}{\rho} \overline{\rho' u''_\gamma u''_\delta \cdot u'_\alpha u'_\beta} \\
&\quad - \frac{1}{\rho} \overline{\rho' u''_\beta u''_\delta \cdot u'_\alpha u'_\gamma} \\
&\quad - \frac{1}{\rho} \overline{\rho' u''_\beta u''_\gamma \cdot u'_\alpha u'_\delta} \\
&- \frac{1}{\rho} \overline{\rho' u''_\alpha u''_\beta} \left[\overline{u''_\gamma u''_\delta} + k_\gamma k_\delta \right] \\
&- \frac{1}{\rho} \overline{\rho' u''_\alpha u''_\gamma} \left[\overline{u''_\beta u''_\delta} + k_\beta k_\delta \right] \\
&- \frac{1}{\rho} \overline{\rho' u''_\alpha u''_\delta} \left[\overline{u''_\beta u''_\gamma} + k_\beta k_\gamma \right]
\end{aligned}$$

$$\text{avec } k_\alpha = \frac{\rho' u'_\alpha}{\rho}$$

(III-59)

Une rapide évaluation des différents termes de cette équation mène à quelques simplifications. Appliquée à un écoulement typique avec fluctuations de masse volumique, nous obtenons les valeurs suivantes :

Contribution	II	III	IV	V	VI
Valeur	$1.041 \cdot 10^{-2}$	$1.204 \cdot 10^{-1}$	$8.27 \cdot 10^{-4}$	$1,551 \cdot 10^{-4}$	$1,3 \cdot 10^{-5}$

Une conclusion immédiate que l'on peut tirer d'après ces résultats est que les corrélations triples ne peuvent pas être négligées par rapport aux moments d'ordre quatre. Comme approximation de quasi normalité, l'équation suivante est suggérée pour des écoulements à masse volumique variable :

$$\begin{aligned} & \overline{u''_\alpha u''_\beta u''_\gamma u''_\delta} + R_\alpha \overline{u''_\beta u''_\gamma u''_\delta} + R_\beta \overline{u''_\alpha u''_\gamma u''_\delta} + R_\gamma \overline{u''_\alpha u''_\beta u''_\delta} \\ & + R_\delta \overline{u''_\alpha u''_\beta u''_\gamma} = \overline{u''_\alpha u''_\beta} \cdot \overline{u''_\gamma u''_\delta} + \overline{u''_\alpha u''_\gamma} \cdot \overline{u''_\beta u''_\delta} + \overline{u''_\alpha u''_\delta} \cdot \overline{u''_\beta u''_\gamma} \end{aligned} \quad (\text{III-60})$$

On peut remarquer que les propriétés de symétrie du moment d'ordre quatre sont respectées et que, en l'absence de fluctuation de masse volumique, les R_α s'annulent et l'équation (III-60) se ramène à la forme (III-56). Revenons maintenant à l'équation (III-56). Elle peut maintenant se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} -\bar{p} \overline{u''_\alpha u''_\beta u''_\gamma} &= c_s \bar{p} \frac{\rho}{\varepsilon} \left[\overline{u''_\gamma u''_\delta} \frac{\partial}{\partial x_\delta} (\overline{u''_\alpha u''_\beta}) + \overline{u''_\beta u''_\delta} \frac{\partial}{\partial x_\delta} (\overline{u''_\alpha u''_\gamma}) \right. \\ & + \overline{u''_\alpha u''_\delta} \frac{\partial}{\partial x_\delta} (\overline{u''_\beta u''_\gamma}) \left. \right] + c_s \frac{\rho}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_\delta} \left[\bar{p} R_\alpha \overline{u''_\beta u''_\gamma u''_\delta} \right. \\ & \left. + \bar{p} R_\beta \overline{u''_\alpha u''_\gamma u''_\delta} + \bar{p} R_\gamma \overline{u''_\alpha u''_\beta u''_\delta} \right] \end{aligned} \quad (\text{III-61})$$

en supposant que [53]

$$-\left[\overline{u''_\alpha u''_\beta} \frac{\partial P'}{\partial x_\gamma} + \overline{u''_\alpha u''_\gamma} \frac{\partial P'}{\partial x_\beta} + \overline{u''_\beta u''_\gamma} \frac{\partial P'}{\partial x_\alpha} \right] \propto -c \frac{\varepsilon}{\bar{p} R} \overline{u''_\alpha u''_\beta u''_\gamma} \quad (\text{III-62})$$

par analogie avec le modèle pour la corrélation pression déformation qui sera présenté dans la suite de ce chapitre. Les corrélations triples sont donc obtenues par la résolution d'un système d'équations différentielles du premier ordre. Pour des écoulements du type couche limite bidimensionnelle, par exemple,

une forme commune pour ces équations est :

$$A_1 T_c + A_2 \frac{\partial}{\partial y} (T_c) = A_3 \quad (\text{III-63})$$

Quatre équations de transport sont résolues pour les contraintes de Reynolds. Les corrélations triples correspondantes sont régies par les équations :

$$\begin{aligned} \longrightarrow \widetilde{u''^2 v''} & \left[1 - C_3 \frac{\rho}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} (2 \overline{\rho' u'}) \right] - 2 C_3 \frac{\rho}{\varepsilon} \overline{\rho' u'} \frac{\partial}{\partial y} (\widetilde{u''^2 v''}) \\ & = - C_3 \frac{\rho}{\varepsilon} \overline{\rho} \left[\overline{v''^2} \frac{\partial}{\partial y} (\widetilde{u''^2}) + 2 \widetilde{u'' v''} \frac{\partial}{\partial y} (\widetilde{u'' v''}) \right] \\ & \quad + C_3 \frac{\rho}{\varepsilon} \left[2 \overline{\rho' u'} \frac{\partial}{\partial y} (\widetilde{u'' v''^2}) + 2 \widetilde{u'' v''^2} \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho' u'}) \right] \\ \longrightarrow \widetilde{v''^3} & \left[1 - 4 C_3 \frac{\rho}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho' u'}) \right] - 4 C_3 \frac{\rho}{\varepsilon} \overline{\rho' u'} \frac{\partial}{\partial y} (\widetilde{v''^3}) \\ & = - C_3 \frac{\rho}{\varepsilon} \overline{\rho} \left[3 \overline{v''^2} \frac{\partial}{\partial y} (\widetilde{v''^2}) \right] \\ \longrightarrow \widetilde{\omega''^2 v''} & \left[1 - 2 C_3 \frac{\rho}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho' u'}) \right] - 2 C_3 \frac{\rho}{\varepsilon} \overline{\rho' u'} \frac{\partial}{\partial y} (\widetilde{\omega''^2 v''}) \\ & = - C_3 \frac{\rho}{\varepsilon} \overline{\rho} \left[\overline{v''^2} \frac{\partial}{\partial y} (\widetilde{\omega''^2}) \right] \\ \longrightarrow \widetilde{u'' v''^2} & \left[1 - 3 C_3 \frac{\rho}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho' u'}) \right] - 3 C_3 \frac{\rho}{\varepsilon} \overline{\rho' u'} \frac{\partial}{\partial y} (\widetilde{u'' v''^2}) \\ & = - C_3 \frac{\rho}{\varepsilon} \overline{\rho} \left[2 \overline{v''^2} \frac{\partial}{\partial y} (\widetilde{u'' v''}) + \widetilde{u'' v''} \frac{\partial}{\partial y} (\widetilde{v''^2}) \right] \\ & \quad + C_3 \frac{\rho}{\varepsilon} \left[\overline{\rho' u'} \frac{\partial}{\partial y} (\widetilde{v''^3}) + \widetilde{v''^3} \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho' u'}) \right] \end{aligned}$$

(III-64)

La faiblesse de cette approximation de quasi-normalité a été à la source de tous les travaux basés sur la théorie d'ORSZAG [54] connue sous le sigle EDQNM (*Markovian eddy damped quasi normal*), qui ne s'applique qu'au cas d'une turbulence homogène isotrope. ANDRE et al [56] ont proposé pour une turbulence non homogène l'utilisation généralisée de l'inégalité de SCHWARZ. Ce type de contrôle est mieux adapté par ailleurs aux modèles de turbulence basés sur des corrélations en un point et son utilisation a été retenue après certaines modifications (voir paragraphe III-3-1) dans cette thèse.

Par ailleurs on peut mentionner également, que dans un précédent travail [40], une tentative d'amélioration de cette approximation, en bornant la distribution avec des fonctions de DIRAC et en introduisant le facteur d'intermittence n'a donné lieu qu'à des différences marginales ce qui tend à montrer que la génération d'énergie négative pouvait n'être que marginale également.

D) Pression - déformation

Ce terme est sans doute la plus grande source de complication des méthodes de fermeture d'ordre supérieur ou égal à deux. Les hypothèses faites pour le représenter sont classiques pour les écoulements isovolumes (voir par exemple [39]). Nous nous efforcerons donc dans le développement qui va suivre de mettre en évidence les différences qui sont introduites par les effets de variation de masse volumique.

Prenons la divergence de l'équation de quantité de mouvement instantanée :

$$-\frac{\partial^2 P}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{d}{dt} \rho v_\alpha \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} (\rho v_\alpha v_\beta) - \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} (\sigma_{\alpha\beta}) \quad (\text{III-65})$$

dans laquelle $\sigma_{\alpha\beta}$ représente le tenseur des contraintes visqueuses. Soustrayant de III-65 sa forme moyenne, il reste

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 P'}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\frac{d}{dt} (\rho' \tilde{v}_\alpha + \rho v_\alpha'') \right] + \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left[\rho' \tilde{v}_\alpha \tilde{v}_\beta + \rho v_\alpha'' \tilde{v}_\beta + \rho v_\beta'' \tilde{v}_\alpha \right] \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left[\rho v_\alpha'' v_\beta'' - \overline{\rho v_\alpha'' v_\beta''} \right] - \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left[\sigma'_{\alpha\beta} \right] \end{aligned} \quad (\text{III-66})$$

Pour un écoulement isovolume, il ne resterait plus que

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 P'}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} &= \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left[\rho v_\alpha' \overline{v_\beta} + \rho v_\beta' \overline{v_\alpha} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left[\rho v_\alpha' v_\beta' - \overline{\rho v_\alpha' v_\beta'} \right] \\ &- \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left[\sigma'_{\alpha\beta} \right] \end{aligned} \quad (\text{III-67})$$

Les termes nouveaux dus aux fluctuations de masse volumique sont donc :

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\frac{d}{dt} (\rho' \tilde{v}_\alpha + \rho v_\alpha'') \right] + \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left[\rho' \tilde{v}_\alpha \tilde{v}_\beta \right] \quad (\text{III-68})$$

L'intégration de l'équation de Poisson (III-66) donne :

$$\left. \begin{aligned}
 P' &= -\frac{1}{4\pi} \int_{vol} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} (p v_\alpha'' \tilde{v}_\beta + p v_\beta'' \tilde{v}_\alpha) \right]_{II} \frac{d vol}{r} \\
 &- \frac{1}{4\pi} \int_{vol} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} (p v_\alpha'' v_\beta'' - \overline{p v_\alpha'' v_\beta''}) \right]_{II} \frac{d vol}{r} + \frac{1}{4\pi} \int_{vol} \left[\frac{\partial^2 \sigma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right]_{II} \frac{d vol}{r}
 \end{aligned} \right\} A1$$

$$\left. \begin{aligned}
 &- \frac{1}{4\pi} \int_{vol} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial t} (p' \tilde{v}_\alpha + p v_\alpha'') \right]_{II} \frac{d vol}{r} \\
 &- \frac{1}{4\pi} \int_{vol} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} (p' \tilde{v}_\alpha \tilde{v}_\beta) \right]_{II} \frac{d vol}{r}
 \end{aligned} \right\} B1$$

(III-69)

Dans un tel arrangement, les termes regroupés dans A1 correspondent à ceux qui caractérisent une modélisation classique pour écoulement isovolume, tandis que ceux du groupe B1 sont caractéristiques de fluctuations non nulles de masse volumique. Revenons maintenant en arrière pour reformuler cette équation sous une forme sensiblement différente, et tout d'abord examinons l'équation de continuité sous sa forme instantanée.

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (p v_\alpha) = 0 \tag{III-70}$$

Si on lui retranche sa partie moyenne, il reste

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (p v_\alpha'' + p' \tilde{v}_\alpha) = 0 \tag{III-71}$$

Avec l'utilisation de l'équation (III-71) l'équation pour la fluctuation de pression peut être réécrite sous la forme

$$\left. \begin{aligned}
 -\frac{\partial^2 p'}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} &= -\frac{\partial^2}{\partial t^2} (p') + \tilde{v}_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} (p v_\beta'') + \tilde{v}_\beta \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} (p v_\alpha'') \\
 &+ 2 \frac{\partial \tilde{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (p v_\beta'') + 2 p v_\alpha'' \frac{\partial^2 \tilde{v}_\beta}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \\
 &+ 2 \frac{\partial \tilde{v}_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (p v_\beta'') + \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} (p v_\alpha'' v_\beta'' - \overline{p v_\alpha'' v_\beta''}) \\
 &- \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} (\sigma'_{\alpha\beta})
 \end{aligned} \right\} (B2)$$

$$\left. \begin{aligned}
 &+ 2 \frac{\partial \tilde{v}_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (p v_\beta'') + \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} (p v_\alpha'' v_\beta'' - \overline{p v_\alpha'' v_\beta''}) \\
 &- \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} (\sigma'_{\alpha\beta})
 \end{aligned} \right\} (A2)$$

$$\left. \begin{aligned}
 &- \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} (\sigma'_{\alpha\beta})
 \end{aligned} \right\} (C2)$$

(III-72)

(A2) regroupe les termes existant en écoulement isovolume,

(B2) est une collection de termes qui s'annulent si la masse volumique est constante, c'est-à-dire :

$$p' = 0$$

$$\text{ou } \frac{\partial v''_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = 0$$

$$\text{ou } \frac{\partial \tilde{v}_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = 0$$

(C2) correspond à une contribution visqueuses qui n'aura d'importance qu'au voisinage des parois.

Après intégration de cette équation de Poisson on identifie les groupements correspondants à A2, B2 et C2.

$$p' = - \frac{1}{4\pi} \int_{vol} \left(\frac{\partial \tilde{v}_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} \cdot \frac{\partial (p v''_{\beta})}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial \tilde{v}_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial (p v''_{\alpha})}{\partial x_{\beta}} \right)_{II} \frac{d vol}{r} \left. \vphantom{\int_{vol}} \right\} (A3)$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int_{vol} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} (p v''_{\alpha} v''_{\beta} - \overline{p v''_{\alpha} v''_{\beta}}) \right]_{II} \frac{d vol}{r}$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{vol} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} p' \right]_{II} \frac{d vol}{r} - \frac{1}{2\pi} \int_{vol} \left[\tilde{v}_{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} (p v''_{\beta}) \right]_{II} \frac{d vol}{r} \left. \vphantom{\int_{vol}} \right\} (B3)$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{vol} \left[\frac{\partial \tilde{v}_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial (p v''_{\beta})}{\partial x_{\beta}} \right]_{II} \frac{d vol}{r} - \frac{1}{2\pi} \int_{vol} \left[p v''_{\alpha} \frac{\partial^2 \tilde{v}_{\beta}}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \right]_{II} \frac{d vol}{r}$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{vol} \left[\frac{\partial^2 \sigma'_{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \right]_{II} \frac{d vol}{r} \left. \vphantom{\int_{vol}} \right\} (C3)$$

(III-73)

l'indice II montrant que les valeurs sont prises en un point distant de r du point courant, tandis que l'indice I correspondra au point courant lui-même. Nous pouvons maintenant revenir au terme pression-déformation, après avoir séparé les trois contributions.

$$P' = P'_A + P'_B + P'_C$$

Donc

$$\overline{P' \left(\frac{\partial v''_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v''_\beta}{\partial x_\alpha} \right)} = \overline{P'_A \left(\frac{\partial v''_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v''_\beta}{\partial x_\alpha} \right)} + \overline{P'_B \left(\frac{\partial v''_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v''_\beta}{\partial x_\alpha} \right)} + \overline{P'_C \left(\frac{\partial v''_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v''_\beta}{\partial x_\alpha} \right)} \quad (\text{III-74})$$

Il est bon de remarquer ici que l'influence de la divergence de champ moyen, qui n'apparaît d'ailleurs pas explicitement dans le groupement (A3), est nulle, ainsi que l'a montré DUSSAUGE [57], ce qui montre que le caractère purement redistributif de cette corrélation n'est vérifié que si la divergence des fluctuations de vitesse est nulle, ce qui n'est vrai que dans le cas d'écoulement à nombre de Mach modéré [58]. Examinons séparément les trois contributions du terme pression déformation.

$$\begin{aligned} P'_A \left(\frac{\partial v''_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v''_\beta}{\partial x_\alpha} \right) &= - \frac{1}{2\pi} \int_{vol} \left(\frac{\partial \tilde{v}_\gamma}{\partial x_\delta} \right)_{II} \overline{\left(\frac{\partial v''_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v''_\beta}{\partial x_\alpha} \right)}_{I} \frac{dvol}{r} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{vol} \left(\frac{\partial^2 \rho v''_\gamma v''_\delta}{\partial x_\gamma \partial x_\delta} \right)_{II} \left(\frac{\partial v''_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v''_\beta}{\partial x_\alpha} \right)_{I} \frac{dvol}{r} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{vol} \left(\frac{\partial^2 \rho v''_\gamma v''_\delta}{\partial x_\gamma \partial x_\delta} \right)_{II} \overline{\left(\frac{\partial v''_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v''_\beta}{\partial x_\alpha} \right)}_{I} \frac{dvol}{r} \end{aligned} \quad (\text{III-75})$$

Pour modéliser ce terme nous nous appuyons sur les résultats qui ont été obtenus par FEIEREISEN [59] avec une simulation numérique de turbulence compressible. Une partie de ce terme comporte les interactions du mouvement turbulent avec lui-même, et doit donc exister dans tout écoulement même avec vitesse moyenne nulle. Dans ce cas particulier d'écoulement où la production de turbulence est nulle, le retour à l'isotropie de la turbulence, qui est observée expérimentalement, ne peut être attribué qu'à ce terme. C'est ROTTA [60] qui proposa le premier une fonction linéaire du tenseur d'anisotropie $b_{\alpha\beta}$ telle que

$$\phi_{\alpha\beta,1} = -c_1 \bar{P} \varepsilon b_{\alpha\beta} \quad (\text{III-76})$$

avec

$$b_{\alpha\beta} = \frac{\overline{v''_\alpha v''_\beta}}{\overline{v''_\gamma v''_\gamma}} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta}$$

ϵ représente ici la partie isotrope de la dissipation, qui en est d'ailleurs l'unique composante dans l'hypothèse de grand nombre de Reynolds. Nous verrons plus loin que la partie anisotrope de la dissipation (quand elle existe) est introduite via les corrections de paroi.

La composante "rapide" du tenseur pression déformation fut initialement identifiée par ROTTA [60] mais son appellation est due à LUMLEY [4]. Elle est due à l'interaction entre le champ turbulent et le champ moyen. Si on admet que le champ moyen est localement homogène, on aura :

$$\phi_{\beta, \gamma} = \frac{\partial \tilde{u}_\gamma}{\partial x_\beta} a_{\gamma\beta}^{\delta\alpha} \quad (\text{III-77})$$

$a_{\gamma\beta}^{\delta\alpha}$ est un tenseur d'ordre quatre, à cause de la structure de l'intégrale de volume correspondante.

$$a_{\gamma\beta}^{\delta\alpha} = -\frac{2}{\pi} \int_{\text{vol}} \left[\frac{\partial^2 \overline{(p v_s'')_{II} v_{sI}''}}{\partial x_\gamma \partial x_\beta} + \frac{\partial^2 \overline{(p v_s'')_{II} v_{\beta I}''}}{\partial x_\gamma \partial x_\alpha} \right] \frac{d\text{vol}}{r} \quad (\text{III-78})$$

A la différence du cas incompressible, les critères de symétrie et d'incompressibilité ne sont plus satisfaits. En effet

$$a_{\gamma\beta}^{\delta\alpha} \neq a_{\gamma\beta}^{\delta\delta} \quad ; \quad a_{\gamma\beta}^{\delta\beta} \neq 0 \quad \rho c \gamma \left(\frac{\partial v_\beta''}{\partial x_\beta} \right) \neq 0 \quad (\text{III-79})$$

On peut tout de même observer deux propriétés communes avec le cas incompressible

$$a_{\gamma\beta}^{\delta\alpha} = a_{\beta\gamma}^{\delta\alpha} \quad ; \quad a_{\beta\beta}^{\delta\alpha} = 2 \overline{p v_s'' v_\alpha''} \quad (\text{III-80})$$

A cause des inégalités (III-79) il n'est donc pas formellement exact d'exprimer ce tenseur par un ensemble de combinaisons linéaires des moments d'ordre deux comme cela est fait pour les écoulements isovolumes [39], [61]. A cause du manque de justification physique de ce résultat, LUMLEY [4] a adopté une position différente. A partir d'une approximation bonne pour le cas isotrope, il a supposé que l'anisotropie était faible et a effectué une linéarisation au voisinage du cas isotrope. Il a alors tout naturellement utilisé la variable $b_{\alpha\beta}$ et, en appliquant les conditions de symétrie et d'incompressibilité, il obtient finalement une forme qui n'est pas différente de la précédente.

Malgré les restrictions, quand à la forme du tenseur, qui ont été énoncées précédemment, nous étendrons l'approximation isovolume au problème à masse volumique variable en supposant, comme FEIEREISEN, que les variations de masse volumique seront prises en compte principalement par le terme (B3), tandis que la partie incompressible du modèle reste valable, en introduisant la masse volumique moyenne. L'analogie du modèle isovolume sera donc

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha\beta,2} = & -\frac{c_2 + \vartheta}{11} \left[P_{\alpha\beta} - \frac{2}{3} P \delta_{\alpha\beta} \right] \\ & - \frac{30c_2 - 2}{55} \left(\frac{\partial \tilde{u}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \tilde{u}_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial \tilde{u}_\gamma}{\partial x_\gamma} \right) \bar{P} \bar{P}_k \\ & - \frac{\vartheta c_2 - 2}{11} \left(D_{\alpha\beta} - \frac{2}{3} P \delta_{\alpha\beta} \right) \end{aligned} \quad (\text{III. 81})$$

avec

$$P_{\alpha\beta} = -\bar{P} \widetilde{u_\alpha'' u_\beta''} \frac{\partial \tilde{u}_\beta}{\partial x_\alpha} - \bar{P} \widetilde{u_\beta'' u_\alpha''} \frac{\partial \tilde{u}_\alpha}{\partial x_\beta}$$

$$D_{\alpha\beta} = -\bar{P} \widetilde{u_\alpha'' u_\gamma''} \frac{\partial \tilde{u}_\gamma}{\partial x_\beta} - \bar{P} \widetilde{u_\beta'' u_\gamma''} \frac{\partial \tilde{u}_\gamma}{\partial x_\alpha}$$

$$P = -\bar{P} \widetilde{u_\alpha'' u_\beta''} \frac{\partial \tilde{u}_\alpha}{\partial x_\beta}$$

En résumé on aura pour le premier terme de pression :

$$\overline{P_A \left(\frac{\partial u_\alpha'}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta'}{\partial x_\alpha} \right)} = \phi_{\alpha\beta,1} + \phi_{\alpha\beta,2} \quad (\text{III-82})$$

Le terme de dilatation moyenne apparaît dans le tenseur des taux de déformation (JONES [62], BONNET [58]), toutefois l'influence globale de ce terme sur les mécanismes de redistribution par le champ de pression est nulle (DUSSAUGE [57]).

$$\begin{aligned}
\overline{P'_\beta \left(\frac{\partial v''_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v''_\beta}{\partial x_\alpha} \right)} &= \frac{1}{4\pi} \int_{vol} \overline{\left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \right)_{II} \left(\frac{\partial v''_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v''_\beta}{\partial x_\alpha} \right)_{I}} \frac{d vol}{r} \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{vol} \overline{\tilde{u}''_{\alpha II} \left(\frac{\partial^2 p v''_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} \right)_{II} \left(\frac{\partial v''_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v''_\beta}{\partial x_\alpha} \right)_{I}} \frac{d vol}{r} \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{vol} \overline{\left(\frac{\partial \tilde{u}''_\gamma}{\partial x_\gamma} \right)_{II} \left\{ \frac{\partial (p v''_s)}{\partial x_s} \right\}_{II} \left(\frac{\partial v''_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v''_\beta}{\partial x_\alpha} \right)_{I}} \frac{d vol}{r} \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{vol} \overline{\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}''_\gamma}{\partial x_\gamma \partial x_s} \right)_{II} \left(p v''_s \right)_{II} \left(\frac{\partial v''_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v''_\beta}{\partial x_\alpha} \right)_{I}} \frac{d vol}{r} \quad (III-83)
\end{aligned}$$

Un examen des ordres de grandeur des différents termes de (III-83) [63] montre que les deux derniers termes sont plus petits que les deux premiers. D'autre part, si on essaie de comparer la structure des termes restant, on observe qu'ils comportent à la fois des mécanismes d'interaction turbulence-turbulence et turbulence-champ moyen, tout en devant s'annuler quand la masse volumique est constante. FEIEREISEN [59] a également observé une analogie de comportement entre le premier terme situé à droite de l'égalité et le terme de réponse rapide $\phi_{\alpha\beta,2}$. Ces remarques nous ont amenés à approximer cette partie de la pression par :

$$\overline{P'_\beta \left(\frac{\partial v''_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v''_\beta}{\partial x_\alpha} \right)} = C_6 \left(\bar{p} \widetilde{u''_\alpha v''_\beta} - \frac{2}{3} S_{\alpha\beta} \bar{p} R \right) \frac{\partial \tilde{u}''_\gamma}{\partial x_\gamma} \quad (III-84)$$

expression qui est sensible à la fois au champ moyen et au tenseur d'anisotropie.

Dans la dernière contribution du terme de pression correspondant à

$$\overline{P'_c \left(\frac{\partial v''_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v''_\beta}{\partial x_\alpha} \right)} \quad \text{apparaissent des termes dépendant de la viscosité}$$

moléculaire. Les effets de tels termes ne pourront avoir de l'importance que si le nombre de Reynolds turbulent n'est pas grand. Nous modéliserons donc globalement ces termes visqueux avec les termes de proximité de paroi qui sont issus de l'intégration de l'équation de Poisson, (intégrales de surfaces) et qui ont été négligés jusqu'à présent. Il a été observé expérimentalement [39] que, au voisinage d'une paroi, ces termes causent le transfert d'approximativement 30 %

de l'énergie de turbulence, de la composante normale à la paroi à la composante longitudinale. Toutefois, l'impact direct sur la contrainte croisée est faible. Comme seule cette contrainte croisée apparaît dans l'équation de quantité de mouvement d'un schéma parabolique, HANJALIC et LAUNDER [38] ont délibérément négligé ce terme. Comme le champ d'application de ce modèle de turbulence prétend ne pas être restreint aux seuls écoulements de couche limite, la formulation plus générale, qui suggérée par LAUNDER, REECE et RODI [39], est basée sur les deux observations suivantes :

- * la présence de la paroi augmente l'anisotropie des contraintes normales mais tend à diminuer faiblement les contraintes de frottement.
- * l'influence de la paroi doit être sentie, même dans des régions où les taux de déformation moyen sont négligeables.

La forme finale de ce terme de paroi est

$$\Phi_{\alpha\beta, w} = \left[C_3 \bar{\rho} \frac{\epsilon}{R} (\overline{v''_{\alpha} v''_{\beta}} - \frac{2}{3} S_{\alpha\beta} R) + C_4 (P_{\alpha\beta} - D_{\alpha\beta}) \right] \frac{\rho^{3/2} \bar{\rho}}{\epsilon x_2} \quad (\text{III-85})$$

x_2 représente la distance normale à la paroi.

Dans leur article, LAUNDER, REECE et RODI [39] introduisent un terme supplémentaire pour cette correction de paroi qui est fonction du cisaillement.

$$C_5 \bar{\rho} R \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial \tilde{u}_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right)$$

toutefois, la constante C_5 est égale à zéro dans toutes leurs applications.

E) Dissipation

Pour des grandes valeurs du nombre de Reynolds, les mouvements à petite échelle sont essentiellement isotropes et ainsi, on a :

$$\overline{\mu S_{\alpha\beta} \frac{\partial v''_{\gamma}}{\partial x_{\alpha}}} + \overline{\mu S_{\alpha\gamma} \frac{\partial v''_{\beta}}{\partial x_{\alpha}}} = \frac{2}{3} \bar{\rho} \epsilon S_{\alpha\beta} \quad (\text{III-86})$$

cette équation fait état de ϵ , le taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence. Quand le nombre de Reynolds décroît, les structures porteuses d'énergie et les mouvements dissipatifs tendent à se chevaucher et, suivant ROTTA [60], on peut utiliser l'approximation :

$$\overline{M S_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha''}{\partial x_\alpha}} + \overline{M S_{\alpha\gamma} \frac{\partial u_\beta''}{\partial x_\alpha}} = \overline{\rho} \frac{\overline{u_\alpha'' u_\beta''}}{\frac{2}{3} k} \varepsilon \quad (\text{III-86})$$

Une forme générale peut être une combinaison de ces deux cas :

$$D_{\alpha\beta} = \frac{2}{3} \overline{\rho} \varepsilon \left[(1 - f_s) S_{\beta\gamma} + \frac{\overline{u_\alpha'' u_\beta''}}{\frac{2}{3} k} f_s \right] \quad (\text{III-88})$$

La variable f_s doit satisfaire les conditions suivantes :

$$f_s = f \left(R_{\text{et}} = \frac{\overline{\rho} k^2}{\mu \varepsilon} \right) \begin{cases} \rightarrow 1 & \text{si } R_{\text{et}} \rightarrow 0 \\ \rightarrow 0 & \text{si } R_{\text{et}} \rightarrow \infty \end{cases}$$

La forme la mieux adaptée proposée par HANJALIC et LAUNDER est [38]

$$f_s = (1.0 + 0.1 R_{\text{et}})^{-1} \quad (\text{III-89})$$

III-2-2.- Equation d'évolution pour le taux de dissipation de l'énergie turbulente

L'essentiel des hypothèses de modélisation qui ont été faites pour les modèles à deux équations restent valables ici. Toutefois il faut remarquer que maintenant les contraintes de Reynolds sont des termes considérés comme exacts. Une partie des hypothèses faites pour les termes de pression est donc redondante.

D'autre part les mécanismes de transport diffusif sont améliorés en supposant que la viscosité turbulente précédemment définie n'est plus une quantité scalaire mais un terme tensoriel. On aura donc la forme suivante qui est une adaptation de l'hypothèse de gradient généralisée de LAUNDER [64].

$$-\overline{\rho} \widetilde{u_\alpha''} \varepsilon = c_\varepsilon \overline{\rho} \frac{k}{\varepsilon} \widetilde{u_\alpha'' u_\beta''} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_\beta} \quad (\text{III-90})$$

La diffusion par le mouvement turbulent tient donc maintenant compte de l'anisotropie des fluctuations.

III-2-3.- Equation d'évolution pour l'énergie totale

Cette équation (II-59), qui n'est pas nécessaire pour la description des processus de mélange à basse vitesse, nécessite quelques aménagements pour être incluse dans une fermeture au second ordre pour les écoulements compressibles. Il faut mentionner, au préalable que le niveau de fermeture n'a pas été étendu à la description des flux thermiques pour la raison suivante : l'application qui est visée dans cette thèse a une signification principalement aérodynamique. Les principales caractéristiques, tout comme les résultats expérimentaux, sont essentiellement dynamiques, par exemple champ de vitesse moyenne, de fluctuations de vitesse, de pressions moyennes. L'inclusion des équations pour les flux thermiques nécessiterait également l'utilisation des équations d'évolution pour la variance des fluctuations de température et pour son taux de dissipation, ce qui amènerait des hypothèses supplémentaires pour déterminer des grandeurs qui finalement ne pourraient même pas être confrontées avec l'expérience.

De même que pour l'équation de la dissipation, une partie des hypothèses qui ont été faites dans le cadre d'une fermeture basée sur l'approximation de Boussinesq restent valables, la principale différence étant que les contraintes de Reynolds n'ont plus besoin d'être approximées. Les moments d'ordre trois sont déterminés d'après l'équation (III-61) et la formulation généralisée de transport par gradient est indiquée pour la diffusion turbulente d'énergie interne. L'équation de l'énergie totale s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{P} \tilde{E}) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[(\bar{P} \tilde{E} + \bar{P} + \frac{2}{3} \mu \frac{\partial \tilde{U}_\gamma}{\partial x_\gamma}) \tilde{U}_\alpha + (\bar{P} \tilde{U}_\alpha \tilde{U}_\beta - \mu (\frac{\partial \tilde{U}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \tilde{U}_\beta}{\partial x_\alpha})) \tilde{U}_\beta \right. \\ \left. - c_s \bar{P} \frac{R}{\varepsilon} (\tilde{U}_\alpha \tilde{U}_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \tilde{U}_\alpha \tilde{U}_\beta + 2 \tilde{U}_\beta \tilde{U}_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \tilde{U}_\alpha \tilde{U}_\beta) - c_e \gamma c_v \bar{P} \tilde{U}_\alpha \tilde{U}_\gamma \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_\gamma} \right. \\ \left. - \mu (\frac{\partial \tilde{U}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \tilde{U}_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial \tilde{U}_\gamma}{\partial x_\gamma}) \frac{\tilde{U}_\alpha \tilde{U}_\beta \tilde{U}_\gamma}{(\gamma-1) c_p \tilde{T}} - \mu \frac{\partial R}{\partial x_\alpha} - K \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_\alpha} \right] \quad (III-91) \end{aligned}$$

BU
LILLE

III-2-4.- Equation d'évolution pour les corrélations vitesse-masse volumique.

Jusqu'à présent, dans ce chapitre a été développé un système d'équations orienté principalement vers la prédiction d'écoulements compressibles,

dans le sens écoulements à vitesse élevée. Toutefois, il existe une source différente de variations de masse volumique, qui est l'hétérogénéité de composition du fluide. Un aspect bien particulier des hypothèses de modélisation avec masse volumique variable a été approfondi pour la prédiction du mélange à basse vitesse de deux gaz inertes de masses atomiques différentes. Pour ce problème particulier, il n'est pas nécessaire de résoudre une équation pour l'énergie; la température étant approximativement constante dans tout l'écoulement. Par contre, l'ensemble des hypothèses qui ont été faites pour approximer les corrélations pression-masse volumique ne sont plus adaptées pour ce type d'écoulement à basse vitesse. Il a donc été nécessaire d'aborder le problème d'une façon différente. Rappelons l'équation d'évolution pour ces corrélations, telle qu'elle a été développée au chapitre II (éq. II-86).

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \overline{v''_p}) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \overline{\tilde{v}''_\alpha v''_p}) = & - \bar{\rho} \overline{v''_\alpha} \frac{\partial \tilde{v}''_p}{\partial x_\alpha} + \overline{v''_\alpha v''_p} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_\alpha} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\overline{\rho' v''_\alpha v''_p}) + \bar{\rho} \overline{v''_\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} v''_\alpha + \frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_\beta} - \frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\tau_{\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (\text{III-92})$$

Avant de pouvoir résoudre cette équation, un certain nombre d'hypothèses sont nécessaires :

a) $\overline{v''_\alpha v''_\beta} \approx \overline{v''_\alpha v''_\beta}$ ce qui revient à considérer que $\overline{\rho' v''_\alpha v''_\beta} = 0$ (III-93)

b) La diffusion turbulente est modélisée d'une façon analogue aux moments d'ordre trois (forme isovolume), ainsi :

$$\overline{\rho' v''_\alpha v''_\beta} = - C_{PS} \frac{\rho}{\varepsilon} \left[\overline{v''_\alpha v''_\gamma} \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \overline{\rho' v''_\beta} + \overline{v''_\beta v''_\gamma} \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \overline{\rho' v''_\alpha} \right] \quad (\text{III-94})$$

Cette approximation permet la permutation des indices de vitesse entre eux, mais pas de la masse volumique avec une fluctuation de vitesse.

c) $\overline{\rho' v''_\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} v''_\alpha$ faute de justification physique évidente le modèle suivant est utilisé, qui relie le coefficient de corrélation entre la vitesse et une dérivée à l'intensité des fluctuations de masse volumique.

$$\overline{u''_{\beta} \frac{\partial u''_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}}} \approx C_{UDP} \frac{\sqrt{\overline{P'^2}}}{\overline{\rho}} \overline{u''_{\beta}} \frac{\partial (\overline{u''_{\alpha}})}{\partial x_{\alpha}} \quad (\text{III-95})$$

Toutefois, la difficulté est qu'il n'y a pas de moyens pour déterminer la valeur de C_{UDP} , mise à part l'optimisation numérique face aux résultats expérimentaux. On peut cependant présumer que C_{UDP} sera du même ordre de grandeur que l'unité. Pour ce terme, JONES [62] a proposé un modèle quelque peu différent :

$$\overline{u''_{\beta} \frac{\partial u''_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}}} \sim \frac{\overline{\rho' u''_{\beta}}}{\overline{\rho'^2}} \frac{\partial (\overline{\rho' u''_{\alpha}})}{\partial x_{\alpha}} \quad (\text{III-96})$$

mais l'expérience nous a montré que, ce terme était une source d'instabilité dans un calcul numérique (en particulier à cause de la division par ρ'^2).

$$d) \quad \overline{\frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_{\beta}}}$$

Un développement en série de la masse volumique donne

$$\rho = \overline{\rho} \left(1 + \frac{\rho'}{\overline{\rho}} + \dots \right)$$

et ainsi

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{\overline{\rho}} \left(\rho' - \frac{\rho'^2}{\overline{\rho}} + \dots \right) \quad (\text{III-97})$$

Le gradient de pression peut alors être réécrit de la façon suivante :

$$\overline{\frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_{\beta}}} = - \frac{\overline{\rho'^2}}{\overline{\rho}^2} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_{\beta}} + \frac{1}{\overline{\rho}} \overline{\rho' \frac{\partial P'}{\partial x_{\beta}}} \quad (\text{III-98})$$

Le dernier terme du membre de droite de l'équation (III-98) peut être décomposé en

$$\frac{1}{\overline{\rho}} \overline{\rho' \frac{\partial P'}{\partial x_{\beta}}} = \left[\frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (\overline{\rho' P'}) - \overline{\rho' \frac{\partial P'}{\partial x_{\beta}}} \right] \frac{1}{\overline{\rho}} \quad (\text{III-99})$$

La première partie qui a un caractère diffusif est supposée petite comparée au terme de diffusion (III-94) [64]. La seconde partie est modélisée à partir d'hypothèses analogues à celles qui ont été utilisées pour les termes de redistribution des équations du tenseur de Reynolds.

Une première contribution aura donc un rôle identique au retour à

l'isotropie de ROTTA. Une proposition pour un terme linéaire fut faite par MONIN [66] pour le transport de masse :

$$\phi_{\rho c, 1} = - c_{1c} \frac{\varepsilon}{R} \overline{u'_\beta c'} \quad (\text{III-100})$$

Puis différents auteurs ont suggéré une représentation non linéaire de ce retour à l'isotropie. Parmi eux, LUMLEY [4] en a donné la version la plus réaliste en supposant que le coefficient c_{1c} puisse être une fonction linéaire du taux de déformation et de l'anisotropie des flux turbulents. Une adaptation de ce modèle [62] est utilisée pour ce travail :

$$\phi_{\rho c, 1} = - c_{\phi 1} \frac{\varepsilon}{R} \overline{\rho' u'_\beta} - c_{\phi 2} \frac{\varepsilon}{R} \left[\frac{\overline{u''_\alpha u''_\beta}}{R} - \frac{2}{3} S_{\alpha\beta} \right] \overline{\rho' u''_\alpha} \quad (\text{III-101})$$

La seconde contribution est analogue à la partie rapide du terme pression déformation. Néanmoins une forme simplifiée suggérée par LAUNDER [64] est utilisée ici :

$$\phi_{\rho p, 2} = c_{p2} \overline{\rho' u''_\alpha} \frac{\partial \tilde{u}_\beta}{\partial x_\alpha} \quad (\text{III-102})$$

négligeant ainsi un terme de gradient de masse volumique moyenne.

e) Le dernier terme de l'équation vitesse-masse volumique $\frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha}$ ne nécessite aucune hypothèse si, ainsi que le fait LUMLEY [4] les mouvements à petite échelle sont considérés comme isotropes.

En résumé l'équation des corrélations vitesse-masse volumique est

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho} \overline{u''_\beta}) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\overline{\rho} \tilde{u}_\alpha \overline{u''_\beta}) &= - \overline{\rho} \overline{u''_\alpha} \frac{\partial \tilde{u}_\beta}{\partial x_\alpha} + \overline{u''_\beta u''_\alpha} \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_\alpha} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[c_{\rho s} \frac{R}{\varepsilon} (\overline{u''_\alpha u''_\gamma} \frac{\partial (\overline{\rho} \overline{u''_\beta})}{\partial x_\gamma} + \overline{u''_\beta u''_\gamma} \frac{\partial (\overline{\rho} \overline{u''_\alpha})}{\partial x_\gamma}) \right] \\ &+ c_{\rho D P} \sqrt{\overline{\rho''^2}} \overline{u''_\beta} \frac{\partial (\overline{u''_\alpha})}{\partial x_\alpha} - \frac{\overline{\rho''^2}}{\overline{\rho^2}} \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_\beta} \\ &- c_{\phi 1} \frac{\varepsilon}{R} \overline{\rho' u''_\beta} - c_{\phi 2} \frac{\varepsilon}{R} \left[\frac{\overline{u''_\alpha u''_\beta}}{R} - \frac{2}{3} S_{\alpha\beta} \right] \overline{\rho' u''_\alpha} + c_{p2} \overline{\rho} \overline{u''_\alpha} \frac{\partial \tilde{u}_\beta}{\partial x_\alpha} \end{aligned} \quad (\text{III-102bis})$$

III-2-5.- Equation d'évolution pour les flux turbulents de masse

L'équation pour les flux turbulents est rappelée ici :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\bar{\rho} \widetilde{v''_{\beta} c''_{\mathbf{I}}}) + \frac{d}{dx_{\lambda}} (\bar{\rho} \widetilde{v''_{\lambda} v''_{\beta} c''_{\mathbf{I}}}) &= - \bar{\rho} \widetilde{v''_{\gamma} c''_{\mathbf{I}}} \frac{d\bar{v}_{\beta}}{dx_{\gamma}} - \bar{\rho} \widetilde{v''_{\gamma} v''_{\beta}} \frac{d\bar{c}_{\mathbf{I}}}{dx_{\gamma}} \\ &- \frac{d}{dx_{\gamma}} \left[\bar{\rho} \widetilde{v''_{\beta} v''_{\gamma} c''_{\mathbf{I}}} + s_{\gamma\beta} \overline{v' c''_{\mathbf{I}}} - s_{\gamma\beta} \overline{v_{\gamma\beta} c''_{\mathbf{I}}} \right] \\ &+ \overline{v' \frac{dc''_{\mathbf{I}}}{dx_{\beta}}} - \overline{v_{\gamma\beta} \frac{dc''_{\mathbf{I}}}{dx_{\gamma}}} - \overline{c''_{\mathbf{I}}} \frac{d\bar{P}}{dx_{\beta}} \end{aligned} \quad (\text{III-103})$$

De même que pour l'équation des contraintes de Reynolds, les différentes contributions sont aisément identifiables.

1 Production

Les deux premiers termes situés à droite du signe égal sont des termes exacts de production. Ils expriment le taux de génération de $\widetilde{v''_{\beta} c''_{\mathbf{I}}}$ due aux actions combinées des gradients de vitesse et de concentration moyennes.

2 Diffusion



L'ensemble des processus de transport diffusif est représenté par

$$\frac{d}{dx_{\gamma}} \left[\bar{\rho} \widetilde{v''_{\gamma} v''_{\beta} c''_{\mathbf{I}}} + s_{\beta\gamma} \overline{v' c''_{\mathbf{I}}} - s_{\gamma\beta} \overline{v_{\gamma\beta} c''_{\mathbf{I}}} \right]$$

L'approximation de quasi normalité des distributions est supposée valide et est reprise en notation de Favre. Les termes prépondérants de l'approximation résultante se groupent de la façon suivante [40] :

$$\begin{aligned} &- \bar{\rho} \widetilde{v''_{\gamma} v''_{\delta}} \frac{d}{dx_{\delta}} (\widetilde{v''_{\beta} c''_{\mathbf{I}}}) - \bar{\rho} \widetilde{v''_{\beta} v''_{\delta}} \frac{d}{dx_{\delta}} (\widetilde{v''_{\gamma} c''_{\mathbf{I}}}) - \bar{\rho} \widetilde{v''_{\delta} c''_{\mathbf{I}}} \frac{d}{dx_{\delta}} (\widetilde{v''_{\beta} v''_{\gamma}}) \\ &+ \frac{d}{dx_{\delta}} (\bar{\rho} k_{\beta} \widetilde{v''_{\gamma} v''_{\delta} c''_{\mathbf{I}}}) + \frac{d}{dx_{\delta}} (\bar{\rho} k_{\gamma} \widetilde{v''_{\beta} v''_{\delta} c''_{\mathbf{I}}}) + \frac{d}{dx_{\delta}} (\bar{\rho} k_{\delta} \widetilde{v''_{\gamma} v''_{\delta} v''_{\beta}}) \\ &+ \frac{d}{dx_{\delta}} (\bar{\rho} k_{\delta} \widetilde{v''_{\beta} v''_{\gamma} c''_{\mathbf{I}}}) = - c'_{\delta} \frac{\varepsilon}{k} \bar{\rho} \widetilde{v''_{\beta} v''_{\gamma} c''_{\mathbf{I}}} \end{aligned} \quad (\text{III-104})$$

Deux remarques concernant cette équation doivent prendre place ici :

- Il n'existe aucune raison pour c'_S d'être identique à c_S (équ. III-61) puisque les échelles de turbulence pour le transport de quantité de mouvement sont différentes de celles de transport de masse [67].

- Il n'y a pas de terme de pression dans l'équation de transport pour la fraction massique. Ainsi existent seulement deux termes $\overline{u''_p c''_I \frac{\partial p'}{\partial x_Y}}$. Dans l'équation (III-104) le terme situé à la droite du signe égal a donc des propriétés de symétrie qui n'existent pas dans le terme de pression.

LUMLEY [4], KOLOVANDIN et al [68], ANDRE et al [56] et DONALDSON [69] ont fait des propositions pour retenir tous (ou presque tous) les termes des équations pour les corrélations triples. A la différence de ces modèles, suivant une démarche analogue à celle de LAUNDER [64], l'équation exacte pour $\overline{u''_p u''_Y c''_I}$ a été utilisée comme guide pour établir l'équation (III-104). LAUNDER utilise une forme sensiblement différente, omettant les termes vitesse-masse volumique et masse volumique-fraction massique.

$$-\overline{u''_Y u''_p c''_I} \sim \frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{u''_Y u''_S} \frac{d}{dx_S} (\overline{u''_p c''_I}) + \overline{u''_p u''_S} \frac{d}{dx_S} (\overline{u''_Y c''_I}) \right) \quad (\text{III-105})$$

Dans l'équation (III-105), il n'y a pas de dérivées des contraintes de Reynolds, quoiqu'un tel terme devrait réellement y être ajouté selon le point de vue de LAUNDER [64]. Dans la référence [70], LAMLEY suggère d'ajouter au terme de droite de l'équation (III-105) un terme proportionnel à

$\overline{u''_p c''_I} \frac{d}{dx_Y} \left(\frac{R^2}{\varepsilon} \right)$ pour tenir compte des variations spatiales dans le coefficient de transport. Ceci est similaire à la suggestion de LAUNDER et à notre modèle. On peut mentionner également les travaux de DONALDSON [50] qui, par analogie avec ses hypothèses pour la modélisation des corrélations triples de vitesse, suggéra :

$$\overline{u''_p u''_Y c''_I} = -\Lambda_2 \rho \left[\frac{d}{dx_p} (\overline{u''_Y c''_I}) + \frac{d}{dx_Y} (\overline{u''_p c''_I}) \right] \quad (\text{III-106})$$

Λ_2 est une longueur caractéristique.

WYNGAARD et COTE [71] utilisent seulement la seconde partie de la proposition de LAUNDER avec des coefficients de proportionnalité quelque peu différents.

Les autres termes, sources du transport diffusif, correspondent à la diffusion de la fraction massique par les fluctuations de pression et l'agitation moléculaire.

Le terme de diffusion par la pression est suggéré par DONALDSON [50].

$$\overline{p' c_I'} = - \rho_0 q \Lambda_3 \frac{\partial}{\partial x_\lambda} (\overline{v_\lambda' c_I'}) \quad (\text{III-107})$$

Λ_3 est une autre échelle de longueur et q une vitesse caractéristique de la turbulence. Hormis cette suggestion, aucune proposition spécifique n'a jamais été faite pour la modélisation de ce terme. Le fait que dans les écoulements de type couche limite, la contribution de ce terme est tout à fait modeste, nous amène à le négliger, ainsi que le font la majorité des auteurs. Pour ce qui est de la diffusion moléculaire de la concentration, elle est négligée dans le cadre de l'hypothèse de grand nombre de Reynolds.

3 Redistribution par les fluctuations de pression

A nouveau la procédure est similaire à celle qui a déjà été employée pour les équations des contraintes de Reynolds puis des corrélations vitesse-masse volumique on a maintenant :

$$\begin{aligned} \overline{p' \frac{\partial c_I''}{\partial x_\beta}} &= - \frac{1}{4\pi} \int_{\text{vol}} \left(\frac{\partial^2 (\rho v_\alpha'' v_\beta'')}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right) \left(\frac{\partial c_I''}{\partial x_\beta} \right) \frac{d \text{vol}}{r} \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{\text{vol}} \left(\frac{\partial \tilde{v}_\alpha}{\partial x_\beta} \right) \left(\frac{\partial v_\alpha''}{\partial x_\alpha} \right) \left(\frac{\partial c_I''}{\partial x_\beta} \right) \frac{d \text{vol}}{r} \end{aligned} \quad (\text{III-108})$$

La contribution turbulente peut être reliée à l'approximation de ROTTA [60] pour le retour à l'isotropie :

$$\phi_{\beta c, 1} = - c_c \frac{\varepsilon}{R} \overline{p' v_\beta' c_I''} \quad (\text{III-109})$$

mais on doit s'attendre à ce que l'échelle de temps $\left(\frac{\varepsilon}{k}\right)$ utilisée ici contienne également des informations de l'échelle de temps du champ de concentration $\left(\frac{\varepsilon_c}{c_I''^2}\right)$, $\widetilde{c_I''^2}$ est la variance de la fraction massique et ε_c son taux de dissipation. LAUNDER [64] et JANICKA [67] ont souligné que ces échelles

temporelles étaient différentes l'une de l'autre. La meilleure hypothèse que l'on peut faire est que, si la turbulence est localement en équilibre, elles sont proportionnelles; en vertu de quoi la constante c_c pourra avoir une valeur différente de c_1 . Une approximation sensiblement plus élaborée à toute fois été adaptée dans ce modèle, pour tenir compte de l'anisotropie de la turbulence.

$$\phi_{\beta c, 1} = -c_{c1} \bar{\rho} \frac{\varepsilon}{R} \widetilde{u_{\beta}'' c_I''} - c_{c2} \bar{\rho} \frac{\varepsilon}{R} \left(\frac{\widetilde{u_{\alpha}'' u_{\beta}''}}{R} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \right) \widetilde{u_{\alpha}'' c_I''} \quad (\text{III-110})$$

La redistribution est ainsi à la fois fonction de l'anisotropie du tenseur de Reynolds et de celle des flux turbulents. En ce qui concerne le terme de redistribution par interaction avec le mouvement moyen, deux suggestions différentes peuvent être utilisées pour le représenter.

D'une part, LUMLEY [4] conclut des propriétés de symétrie des corrélations en deux points (en écoulement isovolume) que

$$\phi_{\beta c, 2} = 0.8 \bar{\rho} \widetilde{u_{\alpha}'' c_I''} \frac{\partial \widetilde{u_{\beta}}}{\partial x_{\alpha}} - 0.2 \bar{\rho} \widetilde{u_{\alpha}'' c_I''} \frac{\partial \widetilde{u_{\alpha}}}{\partial x_{\beta}} \quad (\text{III-111})$$

L'avantage de cette proposition est qu'elle supprime toute ambiguïté quant à la valeur des constantes. LAUNDER [71] obtient un résultat identique à partir de considérations différentes et le qualifie de "modèle quasi isotropique".

D'autre part, une autre proposition a été faite par LAUNDER et al [39], qui consiste à ne conserver que le terme qui rend le tenseur de Reynolds plus isotrope, à savoir :

$$\phi_{\beta c, 2} = \frac{-(c_2 + 9)}{11} \left(P_{\beta\gamma} - \frac{2}{3} \delta_{\beta\gamma} P \right) \quad (\text{III-112})$$

Ce modèle a d'ailleurs été utilisé de façon extensive dans la référence [72]. L'analogie avec l'équation (III-112) suggère dans ce cas :

$$\phi_{\beta c, 2} = c_c \bar{\rho} \widetilde{u_{\alpha}'' c_I''} \frac{\partial \widetilde{u_{\beta}}}{\partial x_{\alpha}} \quad (\text{III-113})$$

Le lecteur pourrait objecter que cette équation n'inclut pas tous les termes de production de l'équation des flux mais il est alors nécessaire de souligner que les gradients de concentration moyenne n'existent pas dans l'équation (III-108).

En résumé, le modèle utilisé pour le terme $\overline{p' \frac{dc_I''}{dx_\beta}}$ est

$$\begin{aligned} \overline{p' \frac{dc_I''}{dx_\beta}} &= -c_{c1} \bar{p} \frac{\epsilon}{R} \widetilde{u_\beta'' c_I''} - c_{c2} \bar{p} \frac{\epsilon}{R} \left(\frac{u_\alpha'' u_\beta''}{R} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \right) \widetilde{u_\alpha'' c_I''} \\ &+ c_c \bar{p} \widetilde{u_\alpha'' c_I''} \frac{d\widetilde{u_\beta}}{dx_\alpha} \end{aligned} \quad (\text{III-114})$$

4 Dissipation

Dans le cadre de l'hypothèse d'un grand nombre de Reynolds, les mouvements à petite échelle sont approximativement isotropes et la corrélation à caractère dissipatif $\overline{u_\beta \frac{d}{dx_\gamma} c_I''}$, qui est strictement nulle en turbulence isotrope, est négligeable.

5 Gradient de pression moyenne

L'hypothèse d'écoulement adiabatique isotherme entraîne que

$$p c_I = \frac{1}{A_1} (p - A_2) \quad (\text{III-115})$$

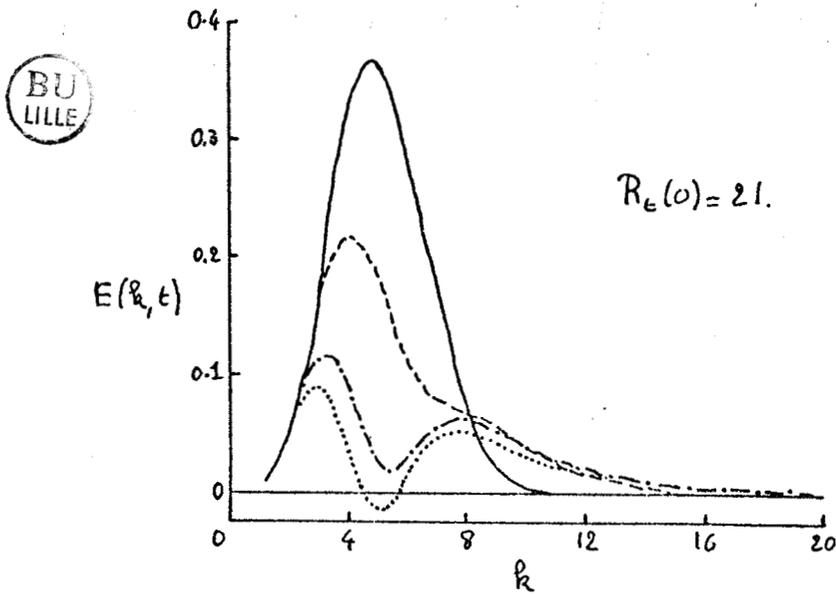
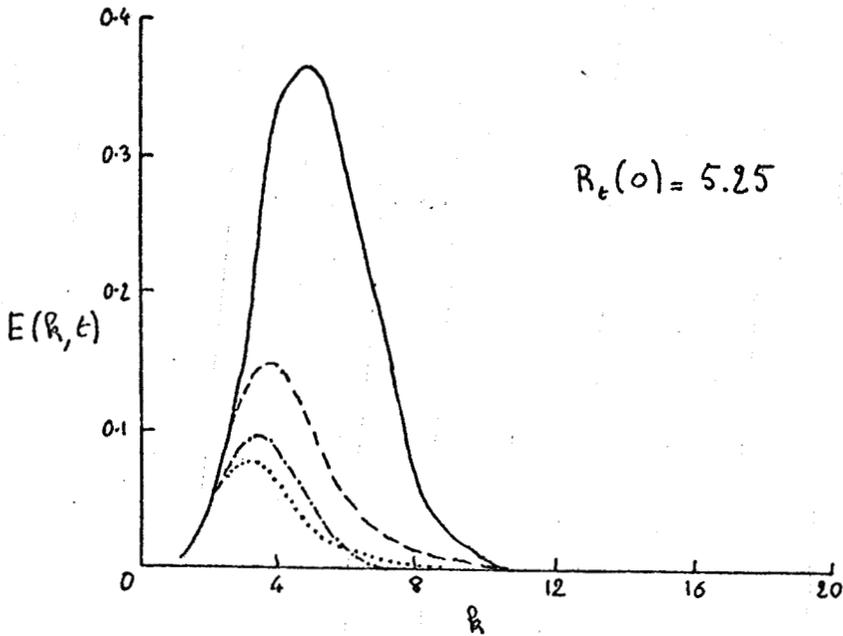
avec $A_1 = \frac{\rho_I - \rho_J}{\rho_I}$ et $A_2 = \rho_j$ pour un mélange de deux gaz de masses volumique ρ_I et ρ_J [73].

Après soustraction de la moyenne de (III-115) et passage à la moyenne on obtient

$$\begin{aligned} \overline{c_I''} &= \frac{A_2}{p A_1} \left(\frac{p'}{p} \right) \\ \text{on a vu précédemment que } \left(\frac{p'}{p} \right) &= - \frac{p''}{p'} \\ \text{Il s'ensuit donc que } \overline{c_I''} &= - \frac{A_2}{A_1} \overline{p''} \end{aligned} \quad (\text{III-116})$$

On remarque immédiatement que le signe de $\overline{c_I''}$ est déterminé de façon unique par la différence entre les masses volumiques des constituants du mélange.

On remarquera que les modèles obtenus pour les équations d'évolution de $\widetilde{u_\beta'' c_I''}$ et $\overline{p' u_\beta''}$ font appel à la quantité ρ'^2 . Cette grandeur est déterminée par la solution de trois équations d'évolution pour les corrélations de



Figures III-2,3. Calcul d'une décroissance de turbulence à l'aide de l'approximation de quasi normalité (D'après ORSZAG (1970) [54]).

masses volumiques partielles. Le développement de ces équations a déjà fait l'objet d'une publication antérieure [74] et n'est pas reproduit ici.

En résumé l'équation des flux turbulents aura donc la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \overline{u''_i c''_i}) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \overline{u''_\alpha u''_i c''_i}) &= - \bar{\rho} \overline{u''_i c''_i} \frac{\partial \overline{u''_\beta}}{\partial x_\gamma} - \bar{\rho} \overline{u''_i u''_\beta} \frac{\partial \overline{c''_i}}{\partial x_\gamma} \\ &- \frac{\partial}{\partial x_\gamma} (\bar{\rho} \overline{u''_\beta u''_i c''_i}) - C_{c1} \bar{\rho} \frac{\varepsilon}{R} \overline{u''_i c''_i} - C_{c2} \bar{\rho} \frac{\varepsilon}{R} \left(\frac{u''_\alpha u''_\beta}{R} - \frac{2}{3} S_{ij} \right) \overline{u''_i c''_i} \\ &+ C_c \bar{\rho} \overline{u''_\alpha c''_i} \frac{\partial \overline{u''_\beta}}{\partial x_\alpha} - \overline{c''_i} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_\beta} \end{aligned} \quad (\text{III-116bis})$$

III-3.- CONDITIONS D'APPLICABILITE

III-3-1.- Réalisabilité

En 1962-1963, O'BRIEN et FRANCIS [75] et OGURA [76] ont mis en évidence une conséquence inattendue de l'approximation de quasi-normalité : la création d'énergie négative. Plus tard, ORSZAG [54] étudia les propriétés dynamiques de cette approximation, appliquée au problème de la décroissance d'une turbulence isotrope. Les figures III-2 et III-3 (qui sont reproduites de l'article d'ORSZAG) montrent le comportement typique de l'énergie calculée en utilisant l'approximation de quasi-normalité pour deux nombres de Reynolds différents.

Sur ces figures, les différentes courbes correspondent à la décroissance de la turbulence due aux effets visqueux à divers instants $t = f(T)$; T étant le rapport de l'échelle intégrale longitudinale avec une vitesse turbulente le nombre de Reynolds initial était égal à 5,25. Les symboles de la figure (III-3) ont la même signification mais le nombre de Reynolds est égal à quatre fois le précédent. ORSZAG fut probablement le premier à introduire le concept de réalisabilité, en identifiant des conditions que doit satisfaire l'énergie, exprimées en termes de quantités spectrales. Plus tard, DU VACHAT [77] et SCHUMANN [78] appliquèrent ce concept à des variables de l'espace physique. Dans les deux cas, l'approche fut d'utiliser l'inégalité de SCHWARTZ comme relation de base :

$$\overline{x' y'}^2 \leq \overline{x'^2} \cdot \overline{y'^2} \quad (\text{III-117})$$

Il est également possible d'ajouter aux inégalités de SCHWARTZ, différentes contraintes physiques (comme par exemple l'invariance par rapport à une rotation du référentiel). DU VACHAT établit des inégalités pour les moments d'ordre n , pour des variables mono-dimensionnelles non bornées, ou positives, ou positives bornées et les étendit à des variables tri-dimensionnelles. Ces résultats furent utilisés dans des problèmes de turbulence par ANDRE et al [56]. Dans le cas de cette *clipping approximation*", cela consiste à, au cours d'un calcul numérique, borner les valeurs des moments d'ordre trois par les valeurs données par un critère de réalisabilité du type :

$$\left(\overline{x^3}\right)^2 \leq 2 \left(\overline{x^2}\right)^3 \quad (\text{III-118})$$

ANDRE observa alors qu'un tel écrétage des moments du troisième ordre empêchait les moments d'ordre deux de violer des conditions de réalisabilité plus physiques telles que l'inégalité de SCHWARTZ ou la positivité des variances. De son côté SCHUMANN [78] utilisa aussi des conditions de réalisabilité pour les contraintes de Reynolds.

$$\begin{aligned} \overline{v'_\alpha v'_\alpha} &\geq 0 && (\text{pas de sommation}) \\ \left(\overline{v'_\alpha v'_\beta}\right)^2 &\leq \overline{v'^2_\alpha} \cdot \overline{v'^2_\beta} && (\text{III-119}) \\ \det \left(\overline{v'_\alpha v'_\beta}\right) &\geq 0 \end{aligned}$$

Il observa alors que la plupart des modèles pour le terme de pression-déformation violait l'une ou l'autre de ces inégalités. SCHUMANN suggéra deux façons de circonvenir ce problème :

- La première est l'écrétage, analogue à la méthode d'André [56].
- La seconde est une décomposition du modèle en deux parties. Une première partie contient tous les termes pour lesquels la réalisabilité peut être prouvée [78]. La seconde partie contient tous les termes qui ne garantissent pas la réalisabilité. Cette partie est alors multipliée (par une grandeur) qui dépend de combien le modèle est éloigné de la condition de réalisabilité.

Suivant l'idée de SCHUMANN, LUMLEY [79] étendit les conditions de réalisabilité aux dérivées des contraintes de Reynolds. Des relations pour des corrélations de variables différentes furent également établies.

Par souci de simplicité, la première solution de SCHUMANN a été retenue dans cette thèse pour assurer la réalisabilité des modèles du second ordre.

III-3-2.- Invariance

La question de l'invariance en modélisation de la turbulence est un domaine ouvert à la discussion. Récemment un papier de SPEZIALE [80] a apporté la démonstration formelle que les équations de transport des contraintes de Reynolds ne sont pas invariantes avec un changement quelconque de référentiel. SPEZIALE [80] obtient le même résultat pour les équations de l'énergie cinétique de la turbulence et de la longueur caractéristique. Une partie importante des progrès récents qui ont été faits dans le domaine des fermetures au second ordre sont présentés comme étant "invariants" (DONALDSON [50], [69], [81], LUMLEY [4], [82], [79], [83]). Mais ce concept est utilisé pour donner à un terme de l'équation des contraintes une modélisation indépendante du référentiel. Cette indépendance est d'ailleurs obtenue avec des degrés variés de réussite. A titre d'exemple il est bon de consulter successivement les références [4] et [84]. Ces précautions n'apportent toutefois aucune garanties quant à l'invariance des équations elles-mêmes. Cela mène à certaines restrictions dans l'utilisation des fermetures du second ordre. Par exemple le traitement de couches limites atmosphériques à grande échelle ne pourra se faire qu'avec certaines précautions, qui ne seront pas nécessaires toutefois pour la majorité des problèmes aérodynamiques ou dit "de laboratoire".

CHAPITRE IIIREFERENCES

- [1] J. BOUSSINESQ (1877)
 "Essais sur la théorie des eaux courantes".
 Mémoire présenté par divers savants à l'Académie des Sciences Paris -
 tome 23, n° 1, pp. 1-680.
- [2] J. BOUSSINESQ (1897)
 "Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans
 les lits rectilignes à grande section".
 I-II- Gauthier-Villars, Paris.
- [3] H. TENNEKES et J.L. LUMLEY (1972)
 "A first course in turbulence".
 M.I.T. Press. Cambridge, Massachussetts.
- [4] J.L. LUMLEY (1975)
 "Prediction methods for turbulent flows - introduction".
 VKI L.S. 76 - Rhode St Genese - Belgique.
- [5] L. PRANDTL (1925)
 "Über die ausgebildete Turbulenz".
 Z. Angew. Math. Mech., vol. 5, pp. 136-139.
- [6] Th. VON KARMAN (1930)
 "Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz".
 Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, Math. Phys. Klasse 58, également NACA TM 611.
- [7] A.S. MONIN et A.M. YAGLOM (1971)
 "Statistical fluid Mechanics".
 Vol. 1, J.L. Lumley Ed.
 MIT Press - Cambridge - Massachussets.
- [8] B.E. LAUNDER et D.B. SPALDING (1972)
 "Mathematical models of turbulence".
 Academic Press-London 1972.

- [9] G.I. TAYLOR (1932)
"The transport of vorticity and heat through fluids in turbulent motion".
Proc. Roy. Soc. A-135 n° 828, pp. 685-706.
- [10] V.W.NEE et L.S.G. KOVASZNAY (1969)
"The calculation of the incompressible turbulent boundary layer by a simple theory".
Phys. of Fluids, vol. 12, p. 473.
également (1968) Proc. of AFOSR/IFP conf. on computation of turbulent boundary Layers- Vol. 1 Stanford University.
- [11] K.H. NG et D.B. SPALDING (1969)
"Some applications of a model of turbulence for boundary layers near walls".
Imp. Coll. Mech. Eng. Rep BL/TN/A/14.
- [12] W. RODI et D.B. SPALDING (1970)
"A two parameter model of turbulence and its applications to free jets".
Wärme und Stoffübertragung, vol. 3, pp. 85-95.
- [13] D.B. SPALDING (1971)
"Concentration fluctuations in a round jet".
J. Chem. Eng. Sci., vol. 26, p. 95.
- [14] W.P. JONES et B.E. LANDER (1972)
"The prediction of Laminarization with a two equation model of turbulence".
Int. J. Heat Mass transfer, vol. 15, pp. 301-314.
- [15] S. CORRSIN (1973)
"Limitations of gradient transport models in random walks and in turbulence".
Advances in Geophysics - ed. F.N. Frenkiel - Academic Press.
- [16] H. SCHLICHTING (1979)
"Boundary layer theory"
7ème édition - Mac Graw hill, Series in Mechanical Engineering.
- [17] H. REICHARDT (1938)
"Messungen turbulenter Schwankungen"
Naturwissenschaften - 404.

- [18] K. HANJALIC et B.E. LAUNDER (1972)
"Fully developed asymmetric flow in a plane channel".
J.F.M. vol. 51, p. 301.
- [20] T. CEBECI et AM.O. SMITH (1974)
"Analysis of turbulent boundary layers".
Academic Press.
- [21] E.R. VAN DRIEST (1956)
"On turbulent flow near a wall"
J.A.S., vol. 23, pp. 1007-1011.
- [22] A.N. KOLMOGOROV (1942)
"Equations of turbulent motion of incompressible fluid".
Izv. Akad. Nauk SSSR Seria fizichiska VI, 56.
- [23] D.C. WILCOX et I.E. ALBER (1972)
"A turbulence model for high speed flows".
Proceedings of the 1972 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute
Ed R.B. Landis et G.J. Hordemann Stanford University Press.
- [24] S.J. SHAMROTH et H. MACDONALD (1972)
"Assesment of a transitional boundary layer theory at low hypersonic Mach numbers".
NASA CR 2131.
- [25] P. BRADSHAW et D.H. FERRISS (1971)
"Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation : compressible flows on adiabatic walls".
J.F.M. 46, pp. 83-110.
- [26] M.W. RUBESIN (1973)
"a 1 eq. model of turbulence for use with the compressible Navier-Stokes equations".
NASA - T.M. - X - 73 - 128.
- [28] G.S. GLUSHKO (1965)
"Turbulent boundary layer on a flat plate in on incompressible fluid".
Bull. Acad. Sciences URSS, Mech. Ser. 4, pp. 13-23.

- [29] H.W. EMMONS (1954)
"Shear flow turbulence"
Proc. 2nd U.S. Congress of applied Mechanics, ASME.
- [30] P. BRADSHAW, D.H. FERRISS et N.P. ATWELL (1967)
"Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation".
J.F.M. 28, p. 593.
- [32] S.J. KLINE, M.V. MORKOVIN, G. SOVRAN et D.J. COCKRELL
"Computation of turbulent boundary layers : 1968 - AFOSR-TFP Stanford Conference".
Stanford University Press.
- [33] M.V. MORKOVIN (1964)
"Effects of compressibility on turbulent flows".
Dans "The mechanics of Turbulence" ed GORDON et BREACH publications du C.N.R.S.
- [34] A.L. KISTLER (1959)
Physics of fluids, vol. 2, pp. 290-296.
- [35] A. DEMITRIADES (1968)
Physics of fluids, vol. 11, p. 1841.
- [36] B.E. LAUNDER et D.B. SPALDING (1972)
"Mathematical models of turbulence".
Academic Press, Londres.
- [37] K. HANJALIC (1970)
"Two dimensional asymmetrical turbulent flow in ducts".
Ph. D. Thesis - University of London (1970).
- [38] K. HANJALIC et B.E. LAUNDER (1976)
"Contribution towards a Reynolds stress closure for low Reynolds number turbulence".
J.F.M. 74, p. 593.
- [39] B.E. LAUNDER, G.J. REECE et W. RODI (1975)
"Progress in the development of a Reynolds stress turbulence closure".
J.F.M. 68-3, pp. 537-566.

- [40] D. VANDROMME (1980)
"Turbulence modelling in variable density flows".
These de Doctorat en Sciences Appliquées.
Université Libre de Bruxelles.
- [41] J.L. LUMLEY et B. KHAJEH-NOURI (1973)
"Computational modelling of turbulent transport".
IUGG-IUTAM Symposium on atmospheric diffusion and environmental pollution,
Charlottesville-Virginia.
également : IAHR-AIRH International Symposium on stratified flows,
Novosibirsk (1972).
- [42] G. COMTE-BELLOT et S. CORRSIN (1966)
"The use of a contraction to improve the isotropy of grid generated
turbulence".
J.F.M. 25, p. 657.
- [43] G.K. BATCHELOR et A.A. TOWNSEND (1948)
"Decay of isotropic turbulence in the final period".
Proc. Roy. Soc. A-194, p. 538.
- [44] G.I. TAYLOR (1915)
Phil. Trans. A-215, p. 1.
- [45] W.P. JONES et B.E. LAUNDER (1973)
"The calculation of low Reynolds number phenomena with a two equation
model of turbulence".
Int. J. Heat Mass transfer, vol. 16, pp. 1119-1130.
- [46] D.C. WILCOX et M.W. RUBESIN (1980)
"Progress in turbulence modelling for complex flow fields including
effects of compressibility".
NASA Technical paper 1517.
- [47] Y.H. OH (1974)
"Analysis of two dimensional free turbulent mixing".
AIAA paper 74-594.
- [48] J.B. MOSS (1980)
"Simultaneous measurements of concentration and velocity in a open
premixed turbulent flame".
Combustion, Science and Technology, vol. 22, pp. 119-129.

- [49] F.H. HARLOW et P.I. NAKAYAMA (1967)
"Turbulence transport equations".
Phys. of Fluids, vol. 10, n° 11, pp. 2323-2332.
- [50] C. Du P. DONALDSON (1973)
"Atmospheric turbulence and the dispersal of atmospheric pollutants".
EPA-R4-73-016 a. Office of Research and
U.S. Environmental Protection agency, Washington.
- [51] W.W. WILLMARTH et C.E. WOOLDRIDGE (1962)
"Measurements of the fluctuating pressure at the wall beneath a thick
turbulent boundary layer".
J.F.M. 14, p: 187.
- [52] H.P. IRWIN (1974)
"Measurements in blown boundary layers and their prediction by Reynolds
stress modelling".
Ph. D. Thesis, Mc Gill University.
- [53] K. HANJALIC et B.E. LAUNDER (1972)
"A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear
flows".
J.F.M. 52-4, pp. 609-638.
- [54] S.A. ORSZAG (1970)
"Analytical theories of turbulence".
J.F.M. 41-2, pp. 363-386.
- [55] M.D. MILLIONSHTCHIKOV (1941)
"On the theory of homogeneous isotropic turbulence".
C.R. Acad. Sciences, U.R.S.S. 32, pp. 615-619.
- [56] J.C. ANDRE, G. DE MOOR, P. LACARRERE et R. DU VACHAT (1976)
"Turbulence approximation for inhomogeneous flows :
Part I : the clipping approximation"
J. of Atmospheric Sciences, vol. 33, n° 3, pp. 476-481.
"Part II : The numerical simulation of a penetration convection experiment".
J. of Atmospheric Sciences, vol. 33, n° 3, pp. 482-491.

- [57] J.P. DUSSAUGE (1981)
 "Evolution de transferts turbulents dans une détente rapide en écoulement supersonique".
 Thèse d'Etat - Université d'Aix-Marseille.
- [58] J.P. BONNET (1982)
 "Etude théorique et expérimentale de la turbulence dans un sillage supersonique".
 Thèse d'Etat - Université de Poitiers.
- [59] W.J. FEIEREISEN, W.C. REYNOLDS et J.H. FERZIGER (1981)
 "Numerical simulation of a compressible homogeneous turbulent shear flow".
 Rapport n° TF-13 - Thermo Sciences Division.
 Depart. of Mech. Eny. Stanford University.
- [60] J.C. ROTTA (1951)
 "Statistische theorie nicht homogener Turbulenz".
 Zeitschrift Physik, vol. 129, pp. 547-572.
- [61] D. NAOT, A. SHAVIT et M. WOLFSHTEIN (1973)
 "Two point correlation model and the redistribution of Reynolds stress".
 Phys. of Fluids, vol. 16, pp. 738-743.
- [62] W.P. JONES (1979)
 "Models for turbulent flows with variable density and combustion".
 VKI Lecture Series 1979-2 - Belgique.
- [63] H. HA MINH (1982)
 Travaux non publiés.
- [64] B.E. LAUNDER (1978)
 "Heat and mass transport".
 Topics in Applied Physics : "Turbulence".
 Ed P. Bradshaw - Springer-Verlag.
- [65] R. B. BIRD, W.E. STEWART et E.N. LIGHTFOOT (1960)
 "Transport phenomena".
 Wiley International Edition.
- [66] A. S. MONIN (1965)
 "On the symmetry properties of turbulence in the surface layer of air".
 Isv. Atmos. Ocean Phys., vol. 1, pp. 45-54.

- [67] J. JANICKA (1979)
"Berechnung turbulenter Wasserstoff-Luft-Diffusions Flammen".
Ph. D. Thesis. RWTH Aachen.
- [68] B.A. KOLOVANDIN et I.A. VATUTIN (1972)
"Statistical transfer theory in non homogeneous turbulence".
Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 15, n° 12, pp. 2371-2383.
- [69] C. Du P. DONALDSON (1973)
"Construction of a dynamical model of the production of atmospheric turbulence and the dispersal fo atmospheric pollutants".
Workshop on Micrometeorology, pp. 313-392.
Americ, Meteor. Soc. (Boston).
- [70] J.L. LUMLEY (1975)
Phys. Fluid vol. 18, p. 619.
- [71] B.E. LAUNDER (1975)
"Progress in the modelling of turbulent transport".
VKI - LS 76, Rhode St Genese.
- [72] B.E. LAUNDER (1980)
"Turbulent transport models for numerical computation of complex turbulent flow".
Rhode St. Genese.
- [73] P. CHASSAING (1979)
"Mélange turbulent de gaz inertes dans un jet de tube libre".
These d'Etat - Toulouse.
- [74] W. KOLLMANN et D. VANDROMME (1979)
"The calculation of free turbulent shear flows with strong density fluctuations".
Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 22, pp. 1557-1565.
- [75] E.E. O'BRIEN et G.C. FRANCIS (1962)
"A consequence of the zero fourth order cumulant approximation".
J.F.M. 13, pp. 369-382.
- [76] Y. OGURA (1963)
"A consequence of the zero fourth cumulant approximation in the decay of isotropic turbulence".

- [77] R. DU VACHAT (1977)
"Realizability inequalities in turbulent flows".
Phys. Fluids vol. 20, n° 4, pp. 551-556.
- [78] V. SCHUMANN (1977)
"Realizability of Reynolds stress turbulence models".
Phys. Fluids. vol. 20 n° 5, pp. 721-725.
- [79] J.L. LUMLEY (1978)
"Computational modelling of turbulent flows".
dans "Advances in applied Mechanics".
ed. Chia-Shum Yeh, vol. 18 - Academic Press.
- [80] G.G. SPEZIALE (1979)
"Invariance of turbulent closure models".
Phys. Fluids, vol. 22, n° 6.
- [81] C. du P. DONALDSON, R.D. SULLIVAN et H. ROSENBAUM (1972)
"A theoretical study of the generation of atmospheric clear air turbulence".
AIAA J. vol. 10, n° 2.
- [82] J.L. LUMLEY (1970)
"Towards a turbulent constitutive relation".
J.F.M. vol. 41, part 2.
- [83] J.L. LUMLEY et G.R. NEWMAN (1977)
"The return to isotropy of homogeneous turbulence".
J.F.M. 82-1, pp. 161-178.
- [84] L. CHABERT, E. ITSWEIRE et J.N. GENGE (1979)
"On the influence of a pure rotation on a non isotropic homogeneous
turbulence".
C.R.A.S., 289-B, p. 197, Paris.

CHAPITRE IV

UNE METHODE NUMERIQUE POUR LE CALCUL
D'ECOULEMENTS DE TYPE COUCHE LIMITE

CHAPITRE IV

METHODE NUMERIQUE POUR LE CALCUL D'ÉCOULEMENTS DE TYPE COUCHE LIMITE.

IV-1.- FORME GENERALE DES EQUATIONS D'ÉVOLUTION DE TYPE COUCHE LIMITE.

- Description globale de la procédure numérique.

IV-2.- CHANGEMENT DE COORDONNEES.

- Aspects théoriques.
- Transformation du système de coordonnées.
- Problème différentiel transformé.
- Implications des nouvelles coordonnées.

IV-3.- SCHEMA DE DIFFERENCES FINIES.

IV-4.- FORMULATION EN DIFFERENCES FINIES.

IV-5.- ALGORITHME DE THOMAS.

IV-6.- CARACTERISTIQUES.

- Différences avec la méthode de Patankar-Spalding.
- Procédure numérique.
- Taille et performances.

IV-7.- CONCLUSIONS.

- Avantages du changement de coordonnées.
- Restrictions des problèmes paraboliques.

IV-1.- LA PROCEDURE DE RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS AUX DERIVEES
PARTIELLES DE TYPE COUCHE LIMITE.

Une version modifiée de la méthode de PATANKAR et SPALDING est décrite dans ce chapitre. La base en est évidemment le livre [2], mais plusieurs caractéristiques ont été notablement modifiées, comme le traitement des termes sources, des points de glissement et des conditions aux limites. Partant de la forme générale des équations paraboliques de transport et après un changement approprié de coordonnées (§ 2) nous obtiendrons une forme commune pour toutes les équations :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + (A+B\omega) \frac{\partial \phi}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(C \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right) + S_{\phi} \quad (\text{IV-1})$$

Puis cette équation sera mise sous forme de différences finies.

Grâce à son caractère parabolique, cette équation peut être résolue par une procédure d'intégration pas à pas. C'est-à-dire que, à une position x la variable ϕ étant connue pour des valeurs discrètes de ω , il est possible d'obtenir ϕ aux mêmes valeurs de ω à une position légèrement différente $x + \Delta x$. Ainsi, tout le domaine de l'écoulement peut être couvert par répétition pas-à-pas de cette opération de base.

Le moyen le plus commun d'obtenir une équation aux différences finies à partir d'une équation différentielle est le suivant : chaque terme est exprimé en fonction de son développement en série de Taylor et, après réarrangement nous obtenons une relation entre une collection de valeurs de ϕ à des noeuds adjacents du maillage et des expressions différentielles. Toutefois, pour la présente méthode, une procédure différente sera utilisée : chaque cellule élémentaire du maillage sera considérée comme un domaine d'intégration. Sur chaque cellule, une intégration sera effectuée. Ceci serait évidemment impossible sans une hypothèse sur la nature des variations de ϕ entre deux noeuds adjacents dans le sens des ω et dans le sens des x . En d'autres termes, l'équation aux différences finies est obtenue en remplaçant chaque terme de l'équation aux dérivées partielles par le résultat d'une intégration sur un petit volume de contrôle. Ainsi, contrairement à la méthode de développement en série de Taylor, cette procédure assure que l'équation de continuité est satisfaite partout dans le domaine de l'écoulement.

En développant cette méthode avec plus de détails, nous verrons dans les paragraphes suivants comment mettre une équation standard de transport sous la forme (IV-1) à l'aide d'un changement de coordonnées approprié et quel est l'intérêt d'un tel changement. Puis une courte description du maillage sera suivie par la transformation de l'équation aux dérivées partielles (IV-1) en un système d'équations portant sur trois points consécutifs (système tridiagonal) de maillage. Après un bref rappel de l'algorithme de Thomas, des considérations générales sur les conséquences d'une telle méthode seront données avec quelques remarques au sujet de la précision et des temps de calcul nécessaires à une exécution.

IV-2.- CHANGEMENT DE COORDONNEES

IV-2-1.- Aspects théoriques

Considérons le système suivant d'équation différentielles formulées en deux dimensions d'espace.

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial P}{\partial x} + S_u \quad (\text{IV-2})$$

$$\rho u \frac{\partial \phi^{\lambda}}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \phi^{\lambda}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathcal{D} \frac{\partial \phi^{\lambda}}{\partial y} \right) + S_{\phi^{\lambda}} \quad (\text{IV-3})$$

avec les conditions à l'entrée du domaine, pour $x = x_0$, que nous appellerons conditions initiales

$$u = u_0(y)$$

$$\phi^{\lambda} = \phi_0^{\lambda}(y) \quad \lambda \in [1, N]$$

et les conditions aux limites

$$y = y_E(x) \Rightarrow u = u_E(x, y_E(x)); \quad \phi^{\lambda} = \phi_E^{\lambda}(x, y_E(x))$$

$$y = y_I(x) \Rightarrow u = u_I(x, y_I(x)); \quad \phi^{\lambda} = \phi_I^{\lambda}(x, y_I(x))$$

$y_E(x)$ et $y_I(x)$ sont les frontières du domaine de calcul. Ces frontières sont en général des lignes de courant, mais le transport moyen de masse à travers les limites inférieure et supérieure est possible pourvu que le caractère parabolique de l'écoulement ne soit pas détruit. Le système (IV-2, IV-3) doit

être complété par l'équation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (\text{IV-4})$$

Un système équivalent peut être écrit pour une configuration axisymétrique

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r M \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\partial P}{\partial x} + S_u \quad (\text{IV-5})$$

$$\rho u \frac{\partial \phi^k}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \phi^k}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mathcal{D} \frac{\partial \phi^k}{\partial r} \right) + S_{\phi^k} \quad (\text{IV-6})$$

avec l'équation de continuité :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho v) = 0 \quad (\text{IV-7})$$

et les conditions

$$x = x_0 \Rightarrow u = u_0(r); \phi^k = \phi_0^k(r), \quad k \in [1, N] \quad (\text{IV-8})$$

$$\left. \begin{aligned} r = r_E(x) &\Rightarrow u = u_E(x, r_E(x)); \phi^k = \phi_E^k(x, r_E(x)) \\ r = r_I(x) &\Rightarrow u = u_I(x, r_I(x)); \phi^k = \phi_I^k(x, r_I(x)) \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV-9})$$

Le passage du cas axisymétrique au cas bidimensionnel plan est immédiat en remplaçant $\partial/\partial r$ par $\partial/\partial y$ en posant $r = 1$. Dans la suite, seul le cas axisymétrique sera considéré.

Ce système est écrit pour des valeurs instantanées des différentes variables. En fait, pour les problèmes d'écoulements turbulents, les équations qui sont résolues concernent les valeurs moyennes de ces variables. Comme il a été montré au Chapitre II, deux statistiques différentes peuvent être considérées.

- par $\bar{\phi}$. - moyenne non pondérée (moyenne temporelle conventionnelle) dénotée
- par ϕ^{\sim} . - moyenne pondérée par la masse volumique (moyenne de Favre) dénotée

Comme ce système d'équations est valable également pour les deux statistiques, elles seront représentées par le symbole commun $\langle \phi \rangle$. Le système d'équations moyennes peut donc être écrit :

$$\langle \rho u \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + \langle \rho v \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial r} \right) - \frac{\partial \langle \Phi \rangle}{\partial x} + S_u \quad (\text{IV-10})$$

$$\langle \rho u \rangle \frac{\partial \langle \phi^{\sim} \rangle}{\partial x} + \langle \rho v \rangle \frac{\partial \langle \phi^{\sim} \rangle}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mathcal{D} \frac{\partial \langle \phi^{\sim} \rangle}{\partial r} \right) + S_{\phi^{\sim}} \quad (\text{IV-11})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle \rho u \rangle + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \langle \rho v \rangle) = 0 \quad (\text{IV-12})$$

avec un ensemble de conditions aux limites équivalentes à (IV-8, IV-9).



IV-2-2.- Transformation du système de coordonnées.

La fonction de courant Ψ peut être définie par

$$d\Psi = \langle \rho u \rangle r dr - \langle \rho v \rangle r dx \quad (\text{IV-13})$$

ce qui mène à :

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_r = - \langle \rho v \rangle r \quad (\text{IV-14})$$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)_x = \langle \rho u \rangle r \quad (\text{IV-15})$$

Pour un écoulement turbulent, c'est une procédure purement formelle

puisque'il peut y avoir un écoulement transverse instantané sur les lignes moyennes de courant. Après dérivation de (IV-14) par rapport à r et de (IV-15) par rapport à x , il apparaît que l'utilisation d'une telle fonction de courant assure que l'équation de continuité (IV-12) sera satisfaite automatiquement. Cette équation n'aura donc plus besoin d'être considérée dans la suite de la présentation de cette méthode numérique. Le système de coordonnées (x, r) est transformé en deux étapes :

$$\begin{aligned} y \quad x &= x(\xi, \Psi) \\ r &= r(\xi, \Psi) \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \xi = x \\ d\Psi = \langle \rho u \rangle r dr \end{cases}$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_r &= 1 & \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right)_x &= 0 \\ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_r &= -\langle \rho \cdot u \rangle r & \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)_x &= \langle \rho \cdot u \rangle r \end{aligned}$$

Considérons maintenant une fonction $\Psi(x, r)$. Ses dérivées partielles se transformeront en :

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_r = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right)_\Psi - \langle \rho \cdot u \rangle r \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \Psi} \right)_\xi \quad (\text{IV-16})$$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)_x = \langle \rho \cdot u \rangle r \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \Psi} \right)_\xi \quad (\text{IV-17})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \left[\kappa \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)_x \right] \right)_x = \langle \rho \cdot u \rangle r \left(\frac{\partial}{\partial \Psi} \left[\kappa \langle \rho u \rangle r \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \Psi} \right)_\xi \right] \right)_\xi \quad (\text{IV-18})$$

2) La seconde étape est :

$$\xi = \xi(x^*, \omega)$$

$$\Psi = \Psi(x^*, \omega)$$

$$\text{avec } \begin{cases} x^* = \xi \\ \omega = \frac{\Psi - \Psi_I}{\Psi_E - \Psi_I} \end{cases}$$

Ψ_I est la valeur de Ψ à la frontière intérieure.

Ψ_E est la valeur de Ψ à la frontière extérieure.

Ψ_I et Ψ_E peuvent évidemment dépendre de x^* . La définition de ces nouvelles coordonnées entraîne

$$\left(\frac{\partial x^*}{\partial \xi} \right)_{\Psi} = 1 \quad ; \quad \left(\frac{\partial x^*}{\partial \Psi} \right)_{\xi} = 0$$

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial \Psi} \right)_{\xi} = \frac{1}{\Psi_E - \Psi_I}$$

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right)_{\Psi} = - \frac{\Psi - \Psi_I}{(\Psi_E - \Psi_I)^2} \left[\frac{\partial \Psi_E}{\partial \xi} - \frac{\partial \Psi_I}{\partial \xi} \right] - \frac{1}{\Psi_E - \Psi_I} \frac{\partial \Psi_I}{\partial \xi}$$

Considérons maintenant une fonction $\varphi(\xi, \Psi)$. Ses dérivées partielles se transformeront donc en :

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)_{\Psi} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^*} \right)_{\omega} - \frac{1}{\Psi_E - \Psi_I} \left[\frac{\partial \Psi_I}{\partial \xi} + \omega \left(\frac{\partial \Psi_E}{\partial \xi} - \frac{\partial \Psi_I}{\partial \xi} \right) \right] \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \right)_{x^*} \quad (\text{IV-19})$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \Psi} \right)_{\xi} = \frac{1}{\Psi_E - \Psi_I} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \right)_{x^*} \quad (\text{IV-20})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \Psi} \left(\kappa \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \Psi} \right)_{\xi} \right) \right)_{\xi} = \frac{1}{(\Psi_E - \Psi_I)^2} \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \left(\kappa \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \right)_{x^*} \right) \right]_{x^*} \quad (\text{IV-21})$$

3) La combinaison de ces deux étapes de transformation donne les relations suivantes :

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_r = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x^*}\right)_\omega + \frac{1}{\Psi_E - \Psi_I} \left(r_I m_I'' - \omega (r_E m_E'' - r_I m_I'') - \langle p.u \rangle r \right) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \omega}\right)_{x^*} \quad (\text{IV-22})$$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)_x = \frac{\langle p.u \rangle r}{\Psi_E - \Psi_I} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \omega}\right)_{x^*} \quad (\text{IV-23})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \left(K \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)_x \right)\right)_x = \frac{\langle p.u \rangle r}{(\Psi_E - \Psi_I)^2} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \left(K \langle p.u \rangle r \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \omega}\right)_{x^*} \right)\right)_{x^*} \quad (\text{IV-24})$$

dans lesquelles les dérivées $\frac{\partial \Psi_I}{\partial \xi}$ et $\frac{\partial \Psi_E}{\partial \xi}$ sont considérées comme des débits massiques à travers les limites intérieures et extérieures correspondant respectivement à

$$\omega = 0$$

$$\omega = 1$$

Cette hypothèse permet donc d'écrire (par convention)

$$\frac{\partial \Psi_I}{\partial \xi} = -r_I m_I'' \quad (\text{IV-25})$$

$$\frac{\partial \Psi_E}{\partial \xi} = -r_E m_E'' \quad (\text{IV-26})$$

IV-2-3.- Problème différentiel transformé.

Le système d'équations paraboliques différentielles (IV-10) à (IV-12) doit être transformé avec les équations (IV-22) à (IV-24). Le résultat de cette reformulation est donc :

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x^*} + \frac{1}{\Psi_E - \Psi_I} \left[r_I m_I'' + \omega (r_E m_E'' - r_I m_I'') \right] \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial \omega} = \quad (\text{IV-27})$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\langle p.u \rangle r^2 \mu}{(\Psi_E - \Psi_I)^2} \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial \omega} \right) - \frac{1}{\langle p.u \rangle} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x^*} + \frac{1}{\langle p.u \rangle} S_u$$

$$\frac{\partial \langle \phi^A \rangle}{\partial x^0} + \frac{1}{\Psi_E - \Psi_I} \left[r_I m_I'' + \omega (r_E m_E'' - r_I m_I'') \right] \frac{\partial \langle \phi^A \rangle}{\partial \omega} =$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\langle r.u \rangle r^2 \mathcal{D}}{(\Psi_E - \Psi_I)^2} \cdot \frac{\partial \langle \phi^A \rangle}{\partial \omega} \right) + \frac{1}{\langle r.u \rangle} S_{\phi^A}$$
(IV-28)

Toutes les équations d'un tel système peuvent donc être écrites sous une forme commune

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + (A + B \omega) \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(C \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \right) + S$$
(IV-29)

avec les coefficients suivants

$$A = \frac{r_I m_I''}{\Psi_E - \Psi_I}$$
(IV-30)

$$B = \frac{r_E m_E'' - r_I m_I''}{\Psi_E - \Psi_I}$$
(IV-31)

$$C = \frac{r^2 \langle r.u \rangle}{(\Psi_E - \Psi_I)^2} \mu \quad \text{ou} \quad C = \frac{r^2 \langle r.u \rangle}{(\Psi_E - \Psi_I)^2} \mathcal{D}$$
(IV-32)

$$S = \frac{S_u}{\langle r.u \rangle} \quad \text{ou} \quad S = \frac{S_{\phi^A}}{\langle r.u \rangle}$$
(IV-33)

μ est une viscosité effective dans l'équation de quantité de mouvement. Pour l'équation de ϕ^A , la variable \mathcal{D} caractérise le transport diffusif associé à ϕ^A . Dans le cas où ϕ^A est une fraction massique par exemple, \mathcal{D} sera la diffusivité effective.

Le terme S contient tous les termes sources. Dans l'équation de quantité de mouvement, ces termes pourront être le gradient de pression ou les effets du champ de pesanteur. Pour toutes les autres équations de transport, S collectera tous les termes non linéaires tels que les termes de production/destruction de la variable ϕ^A . Pour tempérer les effets de la non linéarité de ces derniers termes, ils sont décomposés de la manière suivante :

$$S = S_N + \phi^A \cdot S_L$$

S_N est la composante strictement non linéaire de S et S_L est la grandeur $\frac{\partial S}{\partial x}$. Nous verrons dans la quatrième partie de ce chapitre, comment cette décomposition est prise en compte dans la procédure numérique.

IV-2-4.- Conséquences du changement de coordonnées

Ce type de transformation qui fut proposé initialement par VON MISES puis utilisé extensivement dans la méthode de Patankar et Spalding mène aux conclusions suivantes :

- 1) L'utilisation de la fonction de courant pour déterminer la nouvelle coordonnée transverse satisfera toujours l'équation de continuité. Le nombre total d'équations sera réduit donc de un.
- 2) Comme les calculs se feront sur des points à ω constant, le plan physique sera représenté par un maillage évolutif sur la coordonnée y . La propriété d'une telle transformation est particulièrement intéressante pour traiter les problèmes à frontières libres.
- 3) Toutefois il faut mettre en évidence un inconvénient certain de cette méthode. Quand les frontières de l'écoulement ne sont pas des lignes de courant, les valeurs de Ψ_I et Ψ_E ne sont pas constantes le long de l'axe des x . Ces valeurs doivent donc être déterminées à partir des valeurs initiales et des caractéristiques de l'écoulement à chaque nouvelle position suivant x . Un soin tout particulier doit donc être apporté à la détermination de ces quantités.

V.3.- SCHEMA DE DIFFERENCES FINIES

Les équations paraboliques différentielles ont une forme commune (voir paragraphe précédent).

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + (A + B \omega) \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(C \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \right) + S$$

Avant leur résolution numérique, ces équations doivent être discrétisées sur un maillage puis chaque terme doit être intégré sur une cellule élémentaire définie sur le maillage. Un exemple de cellule de maillage est montré dans la figure 1.

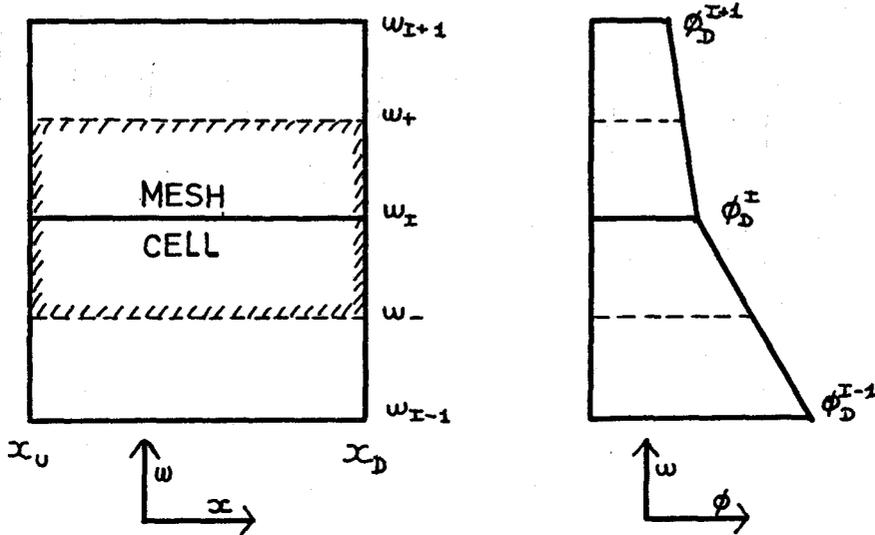


Fig. IV-1.- Cellule élémentaire du maillage.

Cette cellule élémentaire est limitée par les lignes pointillées dans le sens des w et par les valeurs amont et aval de x . L'hypothèse de base pour l'intégration sur une telle cellule est que Φ varie linéairement entre deux lignes de courant adjacentes correspondant à w_i et w_{i+1} ou w_i et w_{i-1} . La variation dans la direction des x est en escalier. Les valeurs de Φ pour l'intervalle compris entre x_u (amont) et x_D (aval) sont uniformes et égales à la valeur en x_D excepté pour $x = x_u$. La procédure de CRANK-NICHOLSON [1] prend pour différences en w la moyenne arithmétique des valeurs des termes en x_u et x_D et, est donc libre de toute limitation quant à la distance entre x_u et x_D , à cause des conditions de stabilité; mais selon PATANKAR et SPALDING[2]: "il peut être montré au moins dans des cas simples, que l'utilisation de la valeur correspondant à la position aval peut être beaucoup plus précise pour des grandes valeurs du pas d'avancée et est toujours stable; cela est aussi plus commode". Cette méthode est donc utilisée pour la discrétisation des équations. Dans le paragraphe suivant, tous les termes qui apparaissent dans l'équation (IV-1) seront donc intégrés sur

une cellule de maillage, telle qu'elle vient d'être définie, avec les hypothèses de comportement en ω et x décrites ci-dessus.

IV-4.- EQUATIONS AUX DIFFERENCES FINIES

Chaque terme de la forme générale (IV-1) doit donc être remplacé par la valeur de son intégration sur une cellule élémentaire.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + (A + B\omega) \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(C \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \right) + S$$

1 | Terme $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$

L'intégration sur une cellule entraîne la définition d'une première quantité :

BU
LILLE

$$I_1 = \frac{1}{x_D - x_u} \cdot \frac{1}{\omega_+ - \omega_-} \int_{x_u}^{x_D} \int_{\omega_-}^{\omega_+} \frac{\partial \Phi}{\partial x} d\omega \cdot dx \quad (IV-34)$$

or l'une des hypothèses de comportement est que Φ est constante et égale à $\bar{\Phi}_D$ le long des lignes $\omega = \text{cte}$ si $x_u < x \leq x_D$. Donc :

$$I_1 = \frac{1}{x_D - x_u} \cdot \frac{1}{\omega_+ - \omega_-} \int_{\omega_-}^{\omega_+} (\bar{\Phi}_D - \bar{\Phi}_u) d\omega \quad (IV-35)$$

et, en suivant la règle d'intégration du trapèze :

$$I_1 = \frac{1}{x_D - x_u} \cdot \frac{1}{\omega_+ - \omega_-} \left[\frac{\bar{\Phi}_D^{I+1} - \bar{\Phi}_u^{I+1}}{4} \left(\frac{\omega_{I+1} - \omega_I}{2} \right) + \frac{\bar{\Phi}_D^{I-1} - \bar{\Phi}_u^{I-1}}{4} \left(\frac{\omega_I - \omega_{I-1}}{2} \right) + \frac{3\Delta\bar{\Phi}}{4} \left(\frac{\omega_{I+1} - \omega_{I-1}}{2} \right) \right] \quad (IV-36)$$

Si maintenant nous supposons que ω varie linéairement entre deux noeuds adjacents :

$$\omega_+ - \omega_- = \frac{1}{2}(\omega_{I+1} - \omega_{I-1}) \quad (\text{IV-37})$$

Ainsi, après quelques manipulations, la première partie du terme de convection peut être écrite :

$$\begin{aligned} I_1 = & \Phi_D^I \left[\frac{3}{4(x_D - x_u)} \right] - \frac{1}{4(x_D - x_u)} \left[3\Phi_u^I + \Phi_u^{I+1} \frac{\omega_{I+1} - \omega_I}{\omega_{I+1} - \omega_{I-1}} \right. \\ & \left. + \Phi_u^{I-1} \frac{\omega_I - \omega_{I-1}}{\omega_{I+1} - \omega_{I-1}} \right] + \Phi_D^{I+1} \left[\frac{\omega_{I+1} - \omega_I}{4(\omega_{I+1} - \omega_{I-1})(x_D - x_u)} \right] \\ & + \Phi_D^{I-1} \left[\frac{\omega_I - \omega_{I-1}}{4(\omega_{I+1} - \omega_{I-1})(x_D - x_u)} \right] \end{aligned} \quad (\text{IV-38})$$

2] Terme $A \frac{\partial \Phi}{\partial \omega}$

L'intégration de ce terme mène à la définition de I_2 :



$$I_2 = \frac{1}{\omega_+ - \omega_-} \int_{\omega_-}^{\omega_+} A \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} d\omega \quad (\text{IV-39})$$

ou, en utilisant l'équation(IV-37)

$$I_2 = A \frac{\Phi_D^{I+1} - \Phi_D^{I-1}}{\omega_{I+1} - \omega_{I-1}} \quad (\text{IV-40})$$

3] Terme $B\omega \frac{\partial \Phi}{\partial \omega}$

De même que pour I_2 nous obtenons :

$$I_3 = \frac{1}{\omega_+ - \omega_-} \int_{\omega_-}^{\omega_+} B\omega \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} d\omega \quad (\text{IV-41})$$

ou encore

$$I_3 = \frac{B}{\omega_+ - \omega_-} \left[\frac{\Phi_D^{I+1} - \Phi_D^I}{\omega_{I+1} - \omega_I} \int_{\omega_I}^{\omega_+} \omega d\omega + \frac{\Phi_D^I - \Phi_D^{I-1}}{\omega_I - \omega_{I-1}} \int_{\omega_-}^{\omega_I} \omega d\omega \right] \quad (\text{IV-42})$$

et après intégration :

$$I_3 = \frac{B}{\omega_+ - \omega_-} \left[\frac{\Phi_D^{I+1} - \Phi_D^I}{\omega_{I+1} - \omega_I} \frac{\omega_+^2 - \omega_I^2}{2} + \frac{\Phi_D^I - \Phi_D^{I-1}}{\omega_I - \omega_{I-1}} \frac{\omega_I^2 - \omega_-^2}{2} \right] \quad (\text{IV-43})$$

ce qui, après réarrangement s'écrit :

$$I_3 = \Phi_D^{I+1} \frac{B}{4} \frac{\omega_{I+1} + 3\omega_I}{\omega_{I+1} - \omega_{I-1}} - \Phi_D^I \frac{B}{4} - \Phi_D^{I-1} \frac{B}{4} \frac{3\omega_I + \omega_{I-1}}{\omega_{I+1} - \omega_{I-1}} \quad (\text{IV-44})$$

4] Terme $\frac{\partial}{\partial \omega} \left(c \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \right)$

La grandeur I_4 est définie par :

$$I_4 = \frac{1}{\omega_+ - \omega_-} \int_{\omega_-}^{\omega_+} \frac{\partial}{\partial \omega} \left(c \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \right) d\omega \quad (\text{IV-45})$$

ou

$$I_4 = \frac{1}{\omega_+ - \omega_-} \left[\left(c \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \right)_{\omega_+} - \left(c \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \right)_{\omega_-} \right] \quad (\text{IV-46})$$

Soient c_{u+} et c_{u-} les valeurs de c à la position amont respectivement pour $\omega = \omega_+$ et $\omega = \omega_-$.

$$I_4 = \frac{1}{\omega_+ - \omega_-} \left[c_{u+} \frac{\Phi_D^{I+1} - \Phi_D^I}{\omega_{I+1} - \omega_I} - c_{u-} \frac{\Phi_D^I - \Phi_D^{I-1}}{\omega_I - \omega_{I-1}} \right] \quad (\text{IV-47})$$

Ainsi, après quelques manipulations, la forme finale de ce terme de diffusion est

$$I_4 = \Phi_D^{I+1} \frac{2 c_{u+}}{(\omega_{I+1} - \omega_{I-1})(\omega_{I+1} - \omega_I)}$$

.../...

$$\begin{aligned}
& - \Phi_D^I \frac{2}{\omega_{I+1} - \omega_{I-1}} \left[\frac{C_{u-}}{\omega_I - \omega_{I-1}} + \frac{C_{u+}}{\omega_{I+1} - \omega_I} \right] \\
& + \Phi_D^{I-1} \frac{2 C_{u-}}{(\omega_{I+1} - \omega_{I-1})(\omega_I - \omega_{I-1})}
\end{aligned} \tag{IV-48}$$

5 | Terme source

Pour pallier la non linéarité des termes sources, seule la valeur amont est considérée pour le coefficient de la partie linéarisée.

$$I_5 = (S_N)_u^I + \Phi_D^I (S_L)_u^I \tag{IV-49}$$

6 | Equation résultante

En reconstituant l'équation (IV-1) avec les différents termes I_1 , I_2 , I_3 , I_4 et I_5 et après réarrangement, nous obtenons la forme suivante :

$$\lambda_I \Phi_D^I = A_I \Phi_D^{I+1} + B_I \Phi_D^{I-1} + C_I \tag{IV-50}$$

dans laquelle Φ_D^I , Φ_D^{I+1} et Φ_D^{I-1} sont les valeurs inconnues de la variable sur trois noeuds successifs à la position aval et λ_I , A_I , B_I et C_I sont des coefficients calculés avec les valeurs correspondantes connues de la position amont. Les coefficients sont

$$\lambda_I = \frac{3}{4(x_D - x_u)} - \frac{B}{4} + \frac{2}{\omega_{I+1} - \omega_{I-1}} \left[\frac{C_{u-}}{\omega_I - \omega_{I-1}} + \frac{C_{u+}}{\omega_{I+1} - \omega_I} \right] + (S_L)_u^I \tag{IV-51}$$

$$A_I = \frac{1}{\omega_{I+1} - \omega_{I-1}} \left[\frac{-(\omega_{I+1} - \omega_I)}{4(x_D - x_u)} - A + \frac{B}{4} (\omega_{I+1} + 3\omega_I) + \frac{2C_{u+}}{\omega_{I+1} - \omega_I} \right] \tag{IV-52}$$



RICHTMEYER et MORTON [3] considèrent la méthode de résolution d'un problème de matrice tridiagonale comme une adaptation de la procédure d'élimination de GAUSS, mais cette méthode est plus communément connue comme l'algorithme de Thomas. La description donnée ici suit plus ou moins celle de ROACHE [4] avec un traitement détaillé des conditions aux limites.

Pour garder l'erreur d'arrondi raisonnablement petite, RICHTMEYER et MORTON [3] ont montré que des conditions suffisantes étaient :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_I > 0 \\ A_I > 0 \\ B_I > 0 \\ \lambda_I > A_I + B_I \end{array} \right. \quad (\text{IV-56})$$

V-5-1.- RESOLUTION

Nous allons voir maintenant comment il est possible de transformer cette relation en trois points en une relation sur deux points adjacents.

Postulons l'existence de deux vecteurs E et F tels que :

$$\Phi^I = E_I \Phi^{I+1} + F_I \quad (\text{IV-57})$$

qui s'écrira, si I est transformé en $I-1$

$$\Phi^{I-1} = E_{I-1} \Phi^I + F_{I-1} \quad (\text{IV-58})$$

La combinaison de (IV-55) avec (IV-58) permet donc d'écrire :

$$\Phi^I = \frac{A_I}{\lambda_I + B_I E_{I-1}} \Phi^{I+1} + \frac{C_I + B_I F_{I-1}}{\lambda_I - B_I E_{I-1}} \quad (\text{IV-59})$$

en combinant (IV-59) et (IV-57) on obtient pour E_I et F_I :

$$E_I = \frac{A_I}{\lambda_I - B_I E_{I-1}} \quad (\text{IV-60})$$

$$F_I = \frac{C_I}{\lambda_I - B_I E_{I-1}} \quad (\text{IV-61})$$

Basée sur ces relations, la procédure suivante sera donc utilisée :

La condition à la limite inférieure permet la détermination des deux coefficients E et F de $I=2$ à $I=N-1$ par les relations (IV-60) et (IV-61), E_1 et F_1 proviennent de la condition à la limite. Puis $\bar{\Phi}_N$, qui est donnée par la condition à la limite supérieure est la valeur de départ de l'équation récurrente (IV-57) revenant de $I=N-1$ à $I=1$.

IV-5-2.- Conditions aux limites

A) Examinons tout d'abord la condition à la limite inférieure qui est nécessaire dans la première étape de l'algorithme pour déterminer les coefficients E , et F , . Deux types de condition à la limite seront considérés.

- condition de DIRICHLET $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_0$.

- condition de NEUMANN $\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} = \bar{\Phi}_0'$.

A-1. Condition à la limite inférieure de type Dirichlet.

Cette condition fixe la valeur $\bar{\Phi}_1 = \alpha_1$, de la variable $\bar{\Phi}$ au noeud $I=1$. Pour cette valeur de I l'équation (IV-57) s'écrit :

$$\bar{\Phi}_1 = E_1 \bar{\Phi}_2 + F_1 \quad (\text{IV-62})$$

Pour que $\bar{\Phi}_1$ ne dépende pas de $\bar{\Phi}_2$ il suffit que

$$\left. \begin{array}{l} E_1 = 0 \\ F_1 = \alpha_1 \end{array} \right\} \quad (\text{IV-63})$$

A-2. Condition à la limite inférieure de type Neumann.

Supposons maintenant que $\bar{\Phi}_0'$ soit la valeur prescrite de $\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y}$ à la limite $I=1$. Ainsi avec un schéma de différence finie décentrée, il vient :

$$\bar{\Phi}_2 - \bar{\Phi}_1 = \bar{\Phi}_0' \Delta y \quad (\text{IV-64})$$

Après comparaison avec l'équation (IV-57) il vient immédiatement

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= 1 \\ F_1 &= -\Phi_0 \cdot \Delta y \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV-65})$$

B) Une fois que E_I et F_I sont calculées, les vecteurs E_I et F_I peuvent être déterminés avec A_I , B_I et C_I .

La condition à la limite supérieure donne maintenant la valeur de départ Φ_N pour la substitution arrière de Φ_I pour $I = N-1$ jusque $I = 1$.

B-1. Condition à la limite supérieure de type Dirichlet.

Cette condition est évidente $\Phi_N = a_N$

B-2. Condition à la limite supérieure de type Neumann. Cette condition

$(\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \Phi_N^0)$ peut s'écrire sous forme de différence finie.

$$\Phi_N - \Phi_{N-1} = \Phi_N^0 \cdot \Delta y \quad (\text{IV-66})$$

donc

$$\Phi_{N-1} = E_{N-1} \Phi_N + F_{N-1} \quad (\text{IV-67})$$

ce qui donne par comparaison :

$$\Phi_N = \frac{F_{N-1} + \Phi_N^0 \Delta y}{1 - E_{N-1}} \quad (\text{IV-68})$$

C) Suivant ROACHE [4], il est possible d'envisager un troisième type de condition à la limite. Cette condition est encore appelée condition mixte ou de Robin.

$$\Phi + K \frac{\partial \Phi}{\partial y} = L \quad (\text{IV-69})$$

qui combine les deux types de conditions décrits précédemment.

IV-6.- PROPRIETES DE LA PROCEDURE NUMERIQUE

IV-6-1.- Principales caractéristiques différant de la méthode de Patankar et Spalding.

1 Traitement des termes sources

Dans la référence [2], le terme source est considéré comme étant uniforme sur le volume de contrôle défini précédemment et égal à sa valeur à la position aval. Comme ce terme, peut ne pas être linéaire en Φ la valeur aval est représenté par

$$S_D = S_u + \left(\frac{\partial S}{\partial \Phi} \right)_u (\Phi_D - \Phi_u)$$

ce qui signifie que le terme $\frac{\partial S}{\partial \Phi}$ doit être déterminé avec la valeur amont. Ce terme, étant une dérivée par rapport à la variable dépendante Φ est susceptible d'être la source d'instabilités dues au caractère globalement non linéaire du terme source. Nous utiliserons donc une méthode modifiée qui donne de très bons résultats. La décomposition suivante est utilisée :

$$S_D = S_{NL} + S_L \cdot \Phi_D$$

Dans ce cas Φ_D est la valeur de Φ à la position aval. Le terme source est décomposé en deux composantes linéaire S_L et non linéaire S_{NL} . Dans la partie linéaire la variable Φ apparaît explicitement. Donc S_L et S_{NL} sont déterminées à la position amont mais aucune dérivation par rapport à Φ n'est nécessaire ici.

2 Traitement des valeurs limites

A la différence de la méthode de Patankar et Spalding, aucun point de glissement n'est utilisé pour les raisons suivantes :

a] Dans tous les problèmes d'écoulements libres cisailés, seules des petites variations des valeurs limites sont attendues dans la procédure de description pas à pas de l'écoulement.

b Pour la même raison, la viscosité tourbillonnaire aux frontières est inférieure ou égale à la viscosité laminaire, ce qui implique ainsi que tout gradient transverse sera proche de zéro dans ces régions.

Ainsi, hormis les cas où un maillage trop grossier est utilisé, les points de glissement sont inutiles pour les écoulements libres cisailés.

Dans le cas de calcul de couche limite compressible, l'absence de points de glissement est compensée par un maillage très serré (jusqu'à 200 points dans l'épaisseur de la couche limite, $y^+(2) \approx 1.5 \cdot 10^2$).

Les conditions aux limites peuvent donc être introduites telles qu'elles ont été présentées.

3 Calcul de l'entraînement

Le calcul de l'entraînement qui gouverne le développement du maillage est une façon d'assurer que tout le domaine d'intérêt de l'écoulement est couvert par le maillage pour tout $x > x_0$. (x_0 est la valeur initiale de x). Pour cela nous utilisons une méthode purement artificielle pour contrôler les débits massiques au travers des lignes limites de courant. Dans un écoulement turbulent, le taux d'expansion est régi par le transfert de quantité de mouvement turbulente. Dans le cadre d'une modélisation à deux paramètres, la quantité appropriée pour ce contrôle est la viscosité tourbillonnaire μ_t . Le débit transverse moyen est déterminé par :

$$\dot{m}_u^0 = -\frac{1}{2} (r_u^N + r_u^{N-1}) \frac{\mu_{tu}^N + \mu_{tu}^{N-1}}{r_u^N - r_u^{N-1}} \quad (\text{IV-70})$$

Par analogie, nous aurons pour l'autre limite :

$$\dot{m}_u^1 = -\frac{1}{2} (r_u^1 + r_u^2) \frac{\mu_{tu}^1 + \mu_{tu}^2}{r_u^1 - r_u^2} \quad (\text{IV-71})$$

Il faut néanmoins souligner le fait que ceci est une méthode purement artificielle de calculer l'apport de quantité de mouvement qui est ajouté à l'écoulement. En particulier pour les écoulements avec transfert thermique, il peut être opportun d'utiliser, par exemple, une diffusivité thermique

effective au lieu de la viscosité turbulente pour prendre en compte le fait que la couche limite thermique est beaucoup plus épaisse que la couche limite dynamique [5].

IV-6-2.- Quelques conséquences de l'utilisation de cette procédure numérique.

1 Calcul de la distance radiale

L'exécution de cette procédure aux différences finies fournit les profils de Φ en fonction de la variable ω . Mais puisqu'il a été vu précédemment que les débits massiques transverses peuvent être différents de zéro, la distance dans le plan physique correspondant à chaque $\Delta\omega$ du plan transformé évolue durant l'intégration pas-à-pas d'amont en aval. Nous rappelons ici la relation par laquelle nous avons introduit la fonction de courant.

$$d\psi = \langle \rho \cdot u \rangle r dr - \langle \rho \cdot v \rangle r dx \quad (\text{IV-72})$$

Après intégration par rapport à r pour une position x donnée nous obtenons

$$r^2 = r_I^2 + 2 \int_{\psi_I}^{\psi_E} \frac{d\psi}{\langle \rho \cdot u \rangle} \quad (\text{IV-73})$$

ou r_I est la limite inférieure de la distance radiale.

Précédemment ω fut défini par

$$\omega = \frac{\psi - \psi_I}{\psi_E - \psi_I} \quad (\text{IV-74})$$

ce qui entraîne

$$d\omega = (\psi_E - \psi_I) d\psi \quad (\text{IV-75})$$

L'équation (IV-73) s'écrit alors :

$$r^2 = r_I^2 + 2 (\psi_E - \psi_I) \int_0^{\omega} \frac{d\omega'}{\langle \rho \cdot u \rangle_{\omega'}} \quad (\text{IV-76})$$

Sous forme de différences finies, le résultat est donné après l'application d'une simple règle d'intégration par trapèzes :

$$r_k = \left[r_I^2 + 2(\Psi_E - \Psi_I) \sum_{II=2}^K \frac{2(\omega_{II} - \omega_{II-1})}{\langle \rho u \rangle_{II} + \langle \rho u \rangle_{II-1}} \right]^{1/2} \quad (\text{IV-77})$$

Pour un écoulement bidimensionnel plan, la définition de la fonction de courant est

$$d\Psi = \langle \rho u \rangle dy - \langle \rho v \rangle dx \quad (\text{IV-78})$$

Ce qui implique

$$y_k = y_I + 2(\Psi_E - \Psi_I) \sum_{II=2}^K \frac{2(\omega_{II} - \omega_{II-1})}{\langle \rho u \rangle_{II} + \langle \rho u \rangle_{II-1}} \quad (\text{IV-79})$$

2 Calcul de la divergence

Du changement de coordonnées nous pouvons déduire une méthode rapide pour calculer la divergence de la vitesse. La transformation rappelée ici :

$$\begin{aligned} x^* &= x \\ \omega &= \Psi - \Psi_I \\ & \quad \Psi_E - \Psi_I \end{aligned}$$



$$d\Psi = \langle \rho u \rangle r dr - \langle \rho v \rangle r dx \quad (\text{IV-80})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^*} + \frac{1}{\Psi_E - \Psi_I} \left[r_I m_I'' - \omega (r_E m_E' - r_I m_I'') - \rho v r \right] \frac{\partial \Phi}{\partial \omega}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\rho u r}{\Psi_E - \Psi_I} \frac{\partial \Phi}{\partial \omega}$$

permet de passer du plan physique (x, r) au plan transformé (x^*, ω) . L'équation de conservation de la masse pour un écoulement bidimensionnel axisymétrique est

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v) = 0 \quad (\text{IV-81})$$

ce qui entraîne pour la divergence D :

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v) = -\frac{1}{\rho} \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) \quad (\text{IV-82})$$

et dans le plan transformé (x^*, ω)

$$D = -\frac{u}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x^*} - \frac{u}{\rho(\Psi_E - \Psi_I)} (r_I m_I'' - \omega (r_E m_E'' - r_I m_I'')) \frac{\partial \rho}{\partial \omega} \quad (\text{IV-83})$$

Cela signifie qu'il n'est pas nécessaire de connaître la vitesse transversale pour calculer la divergence. Les équations (IV-80, IV-81) sont écrites sous leur forme instantanée. Le passage aux formes moyennes est immédiat :

$$\frac{\partial \langle \Phi \rangle}{\partial x} = \frac{\partial \langle \Phi \rangle}{\partial x^*} + \frac{1}{\Psi_E - \Psi_I} [r_I m_I'' - \omega (r_E m_E'' - r_I m_I'') - r \langle \rho \cdot v \rangle] \frac{\partial \langle \Phi \rangle}{\partial \omega}$$

$$\frac{\partial \langle \Phi \rangle}{\partial r} = \frac{\langle \rho \cdot u \rangle}{\Psi_E - \Psi_I} \frac{\partial \langle \Phi \rangle}{\partial \omega} \quad (\text{IV-84})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle \rho \cdot u \rangle + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \langle \rho \cdot v \rangle) = 0$$

Il a été montré dans le chapitre II que la statistique la mieux appropriée est obtenue en combinant des moyennes conventionnelles pour les variables d'état (pression, masse volumique) avec des moyennes pondérées pour toutes les autres variables dépendantes (vitesse, fraction massique...) ce qui a pour conséquence :

$$\langle \rho \cdot u \rangle = \bar{\rho} \cdot \tilde{u} \quad (\text{IV-85})$$

Dans l'équation (IV-83) u et ρ peuvent être remplacées respectivement par $\bar{\rho}$ et \tilde{u} et la forme moyenne de la divergence est déduite de la masse volumique moyenne et de la vitesse longitudinale moyenne.

3 Calcul de la vitesse transversale

Il est possible d'utiliser la fonction de courant pour calculer la vitesse normale à l'écoulement principal. La fonction de courant est définie par :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\rho v r \quad (\text{IV-86})$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \rho u r \quad (\text{IV-87})$$

ce qui entraîne

$$v = \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial x} \int_{r_0}^r \rho u r' dr' \quad (\text{IV-88})$$

Cette équation peut être réécrite en termes de grandeurs moyennes à l'aide de la relation (IV-85).

$$\tilde{v} = \frac{1}{\bar{\rho} r} \frac{\partial}{\partial x} \int_{r_0}^r \bar{\rho} \tilde{u} r' dr' \quad (\text{IV-89})$$

Voyons maintenant comment un tel calcul peut être effectué dans un maillage évolutif tel que celui qui est utilisé dans ce programme (fig. IV-2). De même que pour le calcul de la divergence, le développement qui suit est valable pour des grandeurs instantanées ou moyennes.

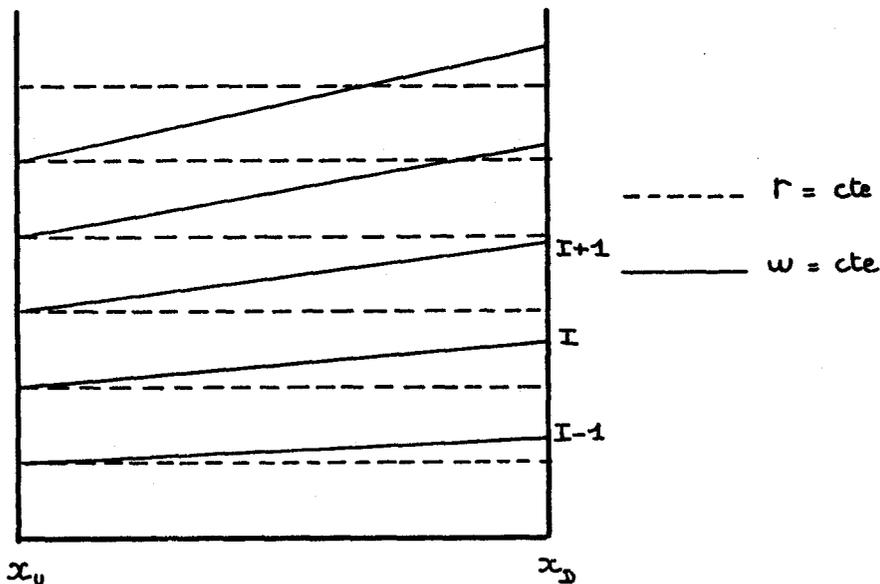


Fig. IV-2.- Maillage évolutif entre x_u et x_D .

La quantité de mouvement à la position x_D pour $r_0 \leq r' < r$ est :

$$\Psi_D = \left(\int_{r_0}^r \rho u r' dr' \right)_D \cdot \omega_I = \left(\int_{r_0}^r \rho u r' dr' \right)_D \quad (\text{IV-90})$$

Dans la section amont, la quantité de mouvement pour la même valeur de r est

$$\Psi_u = \left(\int_{r_0}^{r_u^{I-1}} \rho u r' dr' \right)_u + \left(\int_{r_u^{I-1}}^{r_u^I} \rho u r' dr' \right) \frac{r_D^I - r_u^{I-1}}{r_u^I - r_u^{I-1}} \quad (\text{IV-91})$$

avec
$$\left(\int_{r_0}^{r_u^{I-1}} \rho u r' dr' \right)_u = \left(\int_{r_0}^{r_u^N} \rho u r' dr' \right)_u \cdot \omega_{I-1} \quad (\text{IV-92})$$

et
$$\left(\int_{r_u^{I-1}}^{r_u^I} \rho u r' dr' \right)_u = \left(\int_{r_0}^{r_u^N} \rho u r' dr' \right)_u (\omega_I - \omega_{I-1}) \quad (\text{IV-93})$$

La vitesse transversale est alors obtenue de la définition (IV-86) par

$$v = - \frac{1}{\rho r} \frac{\Psi_D - \Psi_u}{x_D - x_u} \quad (\text{IV-94})$$

4 Taille du programme et temps d'exécution

Une version standard du programme nécessite la mise en mémoire de $(40 \times N)$ variables environ, N étant le nombre de noeuds dans le sens des y . Cette dimension peut être optimisée et probablement réduite de 10 % environ. Le temps d'occupation d'unité centrale (CPU) est approximativement 6 mn sur DEC-VAX 11/780 pour résoudre 7 équations sur 1000 pas de calcul pour 60 noeuds dans la direction transversale.

IV-6-3.- Conclusions

Les différences majeures avec le programme développé par Patankar et Spalding sont les suivantes :

- L'utilisation des points de glissement n'est pas nécessaire si le maillage est suffisamment serré.

- Les termes sources sont linéarisés de façon à éviter d'éventuelles instabilités introduites par la dérivée par rapport à la variable transportée. Une partie de ces termes est évaluée à la position amont de la cellule de maillage. L'expérience a montré que cette procédure est stable.

- L'entraînement aux frontières n'est pas nul. Une quantité appropriée pour sa détermination est la viscosité turbulente qui transporte simultanément des informations venant des différents paramètres du modèle de turbulence.

- La définition du changement de coordonnées et la fonction de courant permettent avec le type de moyenne choisi, de déterminer dans le cadre de cette procédure numérique, la divergence de la vitesse, la vitesse normale et toutes les dérivées longitudinales.

IV-7.- CONCLUSIONS SUR LA TECHNIQUE NUMERIQUE

La technique numérique, utilisée pour ce travail a été décrite en détail. Mais l'accent est mis sur le fait que cette partie ne constitue pas réellement un développement original. La méthode de Patankar et Spalding a été modifiée pour faciliter le traitement de toute équation aux dérivées partielles de la forme.

$$\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S \quad (\text{IV-95})$$

Les principales modifications concernent le traitement des termes sources des points de glissement et des conditions aux limites.

Quoique la transformation semble compliquée, une fois établie, il est immédiat d'inclure toute équation de la forme (IV-95) dans la procédure numérique. Pour chaque nouvelle équation, il suffit de distinguer le terme de diffusion et de décomposer les termes sources en composantes linéarisées et non linéarisées, puis de fixer convenablement les conditions initiales et les conditions aux limites. Cela fait, une procédure commune peut s'appliquer à toutes les équations de transport.

Quelques inconvénients de cette méthode doivent toutefois être mentionnés :

1 Les équations sont résolues successivement par une procédure commune. Cela signifie que les sources peuvent être déterminées à la fois par des valeurs aval et amont, dépendant de l'ordre de résolution des équations. Ceci pourrait être évité en gardant en mémoire les nouvelles valeurs et en opérant la substitution qu'après toutes les équations aient été résolues. L'utilisation d'un logiciel de résolution par bloc pourrait également éviter cela.

2 La principale propriété de l'écoulement à décrire doit être son caractère parabolique. Ce qui implique que :

- La vitesse longitudinale doit toujours être au minimum positive. Aucune zone de recirculation ne peut être considérée.

- Les débits massiques à travers les lignes de courant limites doivent être modérés.

Néanmoins cette procédure de résolution a aussi de nombreuses caractéristiques intéressantes.

- Une capacité de stockage raisonnable comparée à celle de tout problème elliptique ou hyperbolique.

- Cette procédure pas à pas est aussi très compétitive en temps de calcul. Comme certaines parties de la procédure de résolution sont communes à toutes les équations, seule une fraction de temps d'exécution est proportionnelle au nombre d'équations.

- Les limites évolutives sont particulièrement bien adaptées au traitement des problèmes à frontière libre.

CHAPITRE IVREFERENCES

- [1] J. CRANK et P. NICHOLSON, 1947.
"A practical method for numerical solution of partial differential equations of the heat conduction type".
Proc. Cambridge Phil. Soc. 43, 50.
- [2] S. V. PATANKAR et D.B. SPALDING
"Heat and mass transfer in boundary layer".
Intertext, 1970, London.
- [3] RICHTMYER et MORTON
"Difference methods for initial value problems".
Second edition - Interscience Publishers.
J. Wiley and sons - New York.
- [4] P.J. ROACHE
"Computational fluid dynamics".
Hermosa Publishers, 1972, Albriquerque - New Mexico.
- [5] H. CONSIGNY(1980)
"Etude expérimentale et théorique des échanges thermiques convectifs à la surface des aubes de turbines".
Thèse de Doctorat en Sciences Appliquées.
Université de Bruxelles.

CHAPITRE V

UNE METHODE NUMERIQUE POUR LA RESOLUTION
DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

CHAPITRE V

METHODE NUMERIQUE POUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

V-1.- EQUATIONS CONSERVATIVES.

EQUATIONS NON-CONSERVATIVES.

V-2.- DESCRIPTION GLOBALE DE LA PROCEDURE NUMERIQUE.

V-3.- TRAITEMENTS DES EQUATIONS MOYENNEES.

V-4.- INTRODUCTION DES TERMES SOURCES.

V-5.- CHANGEMENT DE COORDONNEES.

- partie implicite,
- partie explicite.

V-6.- CARACTERISTIQUES.

- Conditions aux limites.
- Avantages et inconvenients.
 - * diffusion numerique.
 - * nombre de courant.
 - * critere de precision.
- Taille du programme et performances.

V-7.- CONCLUSIONS.

- Intérêt de la méthode par rapport aux autres schémas existants.
- Restrictions à court et moyen terme.

V-1.- EQUATIONS CONSERVATIVES-EQUATIONS NON CONSERVATIVES

Dans le chapitre précédent, une méthode numérique a été décrite pour la résolution des équations de type couche limite. Il a été alors montré que l'utilisation d'une procédure commune permettait l'implantation aisée de toute équation parabolique ayant la forme :

$$\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S_{\phi} \quad (V-1)$$

ρ étant la masse volumique, u et v les vitesses convectives, μ une viscosité et S_{ϕ} regroupant tous les termes linéaires ou non qui ne peuvent entrer ni dans les termes convectifs ni dans le terme diffusif. Toutefois, une telle méthode, si elle est bien adaptée à la prédiction d'écoulements cisailés simples, souffre de très sévères limitations pour le calcul d'écoulements complexes :

* L'écoulement est supposé permanent. Les dérivées temporelles ne peuvent être prises en compte. Toute caractéristique instationnaire est donc exclue, quelle que soit l'échelle de temps,

* le champ de vitesse est du type couche limite : le gradient de pression normal est supposé égal à zéro, la composante normale de vitesse est petite devant la composante longitudinale, qui elle-même est obligatoirement strictement positive. Tout écoulement comportant une zone de recirculation ou plus simplement des gradients de pression normaux non négligeables est donc inaccessible par une telle méthode.

Nous allons présenter dans ce chapitre une méthode numérique qui n'a pas de telles limitations. La forme compressible des équations de Navier-Stokes décrit correctement tout écoulement aérodynamique à des conditions standards de température et de pression.

D'importants progrès ont été faits ces dernières années dans les méthodes numériques. Parmi eux, le développement des méthodes implicites non itératives pour la résolution des équations de Navier-Stokes compressibles a été une étape très importante. Ces méthodes qui ne sont pas tributaires des conventionnelles conditions explicites de stabilité, ont amélioré de façon très significative les performances des méthodes numériques par rapport aux schémas

explicites. Toutefois, leurs pas de temps sont fréquemment limités par de sévères critères de précision et stabilité, et le nombre d'opérations par pas de temps et par points, aussi bien que la complexité de programmation sont beaucoup plus importants que dans le cas des méthodes explicites. Les principales propriétés de la méthode implicite qui est présentée dans ce chapitre sont :

- * précision du second ordre en temps et en espace,
- * stabilité inconditionnelle,
- * préservation de la forme conservative des équations quand elle existe,
- * absence d'inversion de matrice tridiagonale.

L'historique de cette méthode peut être retracé en suivant l'évolution du schéma de MAC CORMACK par le biais des références [1] à [3]. Dans la référence [1] une modification du schéma en deux étapes de LAX-WENDROFF ([4], [5], [6]) permet pour la première fois la résolution des équations de Navier-Stokes pour une interaction onde de choc - couche limite laminaire. Cette méthode utilise alternativement des différences avant et arrière pour les dérivées spatiales dans les deux étapes. Dans la référence [2] un traitement implicite est apporté aux termes visqueux uniquement, le traitement des termes convectifs se faisant encore explicitement. Cette méthode est également connue comme la méthode hybride ou méthode caractéristique explicite-implicite. Une dernière version de ce schéma est présentée dans la référence [3], où le traitement implicite est appliqué à tous les termes des équations de Navier-Stokes. Deux parties différentes peuvent être distinguées dans cette dernière version. La première partie utilise le schéma explicite de différences finies du type prédicteur correcteur (réf. [1]). Les équations aux différences finies ainsi générées approximent les équations d'évolution de l'écoulement avec une précision du second ordre en espace et en temps mais souffrent de restrictives conditions explicites de stabilité.

La seconde partie ôte ces restrictions de stabilité en transformant numériquement les équations de la première partie en une forme implicite. Les équations matricielles résultantes, qu'il faut alors résoudre sont bidiagonales supérieures ou inférieures, et peuvent être résolues beaucoup plus facilement que les équations matricielles tridiagonales qui apparaissent dans les méthodes implicites existantes [7], [18].

Pour un écoulement bidimensionnel, en négligeant les forces volumiques d'action à distance et les sources de chaleur, la forme compressible instationnaire des équations de Navier-Stokes est (voir par exemple les références [8], [9], [10], [11]) :

Conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_R} (\rho u_R) = 0 \quad (V-2)$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_R \frac{\partial u_i}{\partial x_R} = \frac{\partial}{\partial x_R} (\tau_{iR}) \quad (V-3)$$

Conservation de l'énergie :

$$\rho \frac{\partial (E)}{\partial t} + \rho u_R \frac{\partial (E)}{\partial x_R} = \frac{\partial}{\partial x_R} (u_i \tau_{iR}) - \frac{\partial}{\partial x_R} (Q_R) \quad (V-4)$$

dans lesquelles ρ est la masse volumique, u_R la composante selon x_R de la vitesse, E est l'énergie totale du fluide par unité de masse et la somme des forces de contact est définie par :

$$\tau_{iR} = -p \delta_{iR} + \mu S_{iR} \quad (V-5)$$

$$S_{iR} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_R} + \frac{\partial u_R}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} S_{iR} \frac{\partial u_e}{\partial x_e} \quad (V-6)$$

ce qui suppose que la relation de Stokes est vérifiée pour les coefficients de viscosité :

$$3\lambda + 2\mu = 0 \quad (V-7)$$

Le terme Q_R représente le flux de chaleur :

$$Q_R = -k \frac{\partial T}{\partial x_R} \quad (V-8)$$

k est le coefficient de conductivité calorifique.

Une caractéristique unique des écoulements supersoniques est l'existence des ondes de choc. Quand le nombre de Reynolds de l'écoulement tend vers l'infini, ces ondes de choc sont des discontinuités dans les solutions des équations d'évolution de l'écoulement.

Deux approches différentes existent pour le traitement numérique de telles discontinuités. Les deux approches ont au départ un point commun : l'absence d'appellation simple dans la langue française. Nous nous référerons donc à elle par la terminologie anglo-saxonne [12].

1 La technique du "*Shock-fitting*" ou "*shock patching*" (ou ajustement à l'onde de choc) consiste à maintenir le choc comme une discontinuité, en travers de laquelle les relations de Rankine-Hugoniot sont satisfaites. Cette méthode fut utilisée avec succès sur un maillage fixe (eulérien) pour un écoulement monodimensionnel par RICHTMYER [13] tandis que la tâche semble impossible dans le cas d'un écoulement bidimensionnel calculé sur un maillage fixe [14]. Cette approche a toutefois permis de meilleurs résultats dans le cas d'un maillage flottant [15] ou après transformation du maillage pour écoulement non visqueux [16] et visqueux [17]. La technique du "*shock fitting*", tout en pouvant être très utile pour améliorer la précision de chocs détachés relativement simples, ne permet pas la prédiction des réseaux complexes de chocs imbriqués (interaction onde de choc-couche limite) ou celle de la position d'un choc mobile (tuyère en cours de désamorçage par contre pression par exemple).

2 La technique dite "*Shock capturing*" est plus attrayante car elle ne requiert aucun traitement spécial pour une onde de choc. Au lieu de maintenir l'onde de choc comme une vraie discontinuité, cette technique tend plutôt à étaler cette discontinuité sur plusieurs points de maillage (de l'ordre de 2 à 3). Si les équations (V-2) à (V-4) sont réarrangées de telle façon que les variables conservatives ρ , ρu , ρv et ρE soient les variables indépendantes, alors l'utilisation de méthodes conservatives de différences finies assurent une stricte conservation de la masse, la quantité de mouvement et l'énergie. Les relations de Rankine-Hugoniot pour une onde de choc normale sont basées seulement sur ce principe global de conservation et ne tiennent pas compte des détails internes à la structure de l'onde de choc (réf. [19]). Le résultat est que, toute méthode de différences finies stable consistante et conservative appliquée aux équations de conservation satisfait les relations de Rankine-Hugoniot et donc produit les conditions correctes de saut à travers

une onde de choc. Il faut remarquer toutefois que l'utilisation de la forme conservative des équations différentielles ne garantit pas strictement une telle conservation; la méthode de différences finies doit également être conservative. Cela peut être aisément justifié en considérant une onde de choc normale stationnaire. L'erreur de troncature d'une équation aux différences finies dépend de la taille des termes d'ordre le plus haut dans les développements en série de Taylor pour l'approximation des dérivées. Pour les variables ρ , u , v et T , le choc provoque des discontinuités dans la solution, tandis que la solution est continue en termes de variables conservatives. Toutefois, pour un choc mobile ou oblique, les variables conservatives peuvent être également légèrement discontinues. Une autre motivation pour l'usage des formes conservatives est que, les expressions en différences finies peuvent alors être interprétées comme des lois intégrales sur chaque cellule du maillage considérée alors comme un volume de contrôle élémentaire. Dans cette interprétation, aucune hypothèse sur la continuité des variables n'est nécessaire. Cela s'accorde avec une opinion très générale que toute loi physique doit pouvoir être exprimée sous forme intégrale [12].

Avec l'équation (V-2) il est aisé de mettre les termes convectifs et instationnaires des équations (V-3) et (V-4) sous forme conservative. La forme instationnaire compressible en deux dimensions peut donc s'écrire sous forme conservative :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (V-9)$$

ou

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \sigma_x \\ \rho uv + \sigma_{xy} \\ (\rho E + \sigma_x)u + \sigma_{yx}v - k \frac{\partial T}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv + \tau_{yx} \\ \rho v^2 + \sigma_y \\ (\rho E + \sigma_y)v + \tau_{xy}u - \kappa \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_x = P - \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_y = P - \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

avec ρ la masse volumique, u et v les composantes de la vitesse suivant x et y , λ et μ les coefficients de viscosité, E l'énergie totale par unité de masse, κ le coefficient de conductivité calorifique et T la température. La pression P est alors liée à l'énergie interne spécifique e et à la masse volumique ρ par une équation d'état.

$$P = (\gamma - 1) \rho e$$

avec

$$e = E - \frac{u^2 + v^2}{2}$$

γ est le rapport des chaleurs spécifiques.

L'équation (V-9) est la forme stricte des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles qui est utilisée pour le calcul des écoulements laminaires ou turbulents. Dans ce dernier cas, la décomposition des variables se fait suivant une moyenne pondérée par la masse volumique et une partie fluctuante (voir Chapitres II et III). Après passage à la moyenne des quatre équations scalaires, on retrouve une forme identique à la forme laminaire à condition de pouvoir remplacer les termes du tenseur des contraintes de Reynolds suivant une forme algébrique. Il suffit alors généralement de substituer à la viscosité

laminaire une viscosité effective

$$\mu_{\text{eff}} = \mu_L + \mu_t$$

μ_L est la viscosité laminaire et μ_t la viscosité turbulente qui est définie par le modèle algébrique de turbulence. Si, à la différence des modèles algébriques, un modèle comporte des équations d'évolution, le système complet ne peut plus se mettre sous une forme strictement conservative à cause de la présence des termes sources dans les équations du modèle de turbulence. On aura alors :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = H \quad (\text{V-10})$$

Si nous considérons l'exemple d'un modèle à deux équations de transport ($k-\epsilon$; voir chapitre III) les vecteurs U , F , G et H seront de dimension égale au nombre total d'équations.

$$U = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho} \tilde{u} \\ \bar{\rho} \tilde{v} \\ \bar{\rho} \tilde{w} \\ \bar{\rho} \tilde{E} \\ \bar{\rho} \tilde{R} \\ \bar{\rho} \tilde{\epsilon} \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \tilde{u} \\ \bar{\rho} \tilde{u}^2 + \sigma_x \\ \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{v} + \sigma_{xy} \\ (\bar{\rho} \tilde{E} + \sigma_x) \tilde{u} + \sigma_{yx} \tilde{v} - \left(\frac{\mu_L}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) c_v \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \\ \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{R} + \sigma_{Rx} \\ \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{\epsilon} + \sigma_{\epsilon x} \end{bmatrix}$$

$$G = \left[\begin{array}{l} \bar{P} \tilde{u} \\ \bar{P} \tilde{u} \tilde{u} + \tau_{yx} \\ \bar{P} \tilde{u}^2 + \sigma_y \\ (\bar{P} \tilde{E} + \sigma_y) \tilde{u} + \tau_{xy} \tilde{u} - \left(\frac{M_L}{P_r} + \frac{M_t}{P_{rc}} \right) C_v \frac{d\tilde{T}}{dy} \\ \bar{P} \tilde{u} R + \sigma_{Ry} \\ \bar{P} \tilde{u} \varepsilon + \sigma_{\varepsilon y} \end{array} \right]$$

$$H = \left[\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ S_R \\ S_\varepsilon \end{array} \right]$$



De même que pour les modèles algébriques, la viscosité effective a être substituée à la viscosité moléculaire dans les expressions de σ_x , σ_y , τ_{xy} et τ_{yx} . Les termes S_R et S_ε regroupent tous les termes non linéaires qui ont été développés dans les chapitre III et IV et nous avons également les termes diffusifs suivants :

$$\sigma_{Rx} = - \left(M_L + \frac{M_t}{P_r} \right) \frac{dR}{dx}$$

$$\sigma_{Ry} = - \left(M_L + \frac{M_t}{P_r} \right) \frac{dR}{dy}$$

$$\sigma_{\varepsilon x} = - \left(M_L + \frac{M_t}{P_\varepsilon} \right) \frac{d\varepsilon}{dx}$$

$$\sigma_{\varepsilon y} = - \left(M_L + \frac{M_t}{P_\varepsilon} \right) \frac{d\varepsilon}{dy}$$

Pour l'exemple qui est donné ci-dessus on se trouve donc en présence d'un système de 6 équations. Pour une fermeture au second ordre, la taille minimum du système serait alors de 9 équations avec une distribution analogue des différents termes dans les vecteurs U , F , G et H .

V-2.- DESCRIPTION GLOBALE DE LA PROCEDURE NUMERIQUE

La méthode numérique a été originellement proposée par R.W. MAC CORMACK [3] pour la résolution du système d'équations strictement conservatives (VI-9) en régime laminaire ou en régime turbulent avec un modèle de turbulence algébrique. La contribution originale qui a été apportée dans cette thèse est relative au traitement du changement de coordonnées et des termes sources appartenant aux diverses équations des modèles de turbulence qui sont utilisés. Nous nous contenterons donc ici d'une description globale de la transformation du schéma explicite [1] en schéma implicite sur un exemple d'équation du second ordre à une dimension d'espace. Pour une discussion plus détaillée de ce schéma, la référence [3] expose avec beaucoup de détails la procédure qui est mise en oeuvre pour la résolution des équations bi-dimensionnelles conservatives sur un maillage rectangulaire.

Considérons l'équation à une dimension d'espace

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (V-11)$$

La variable u , dont le comportement est régi par cette équation est convectée avec la vitesse c et est diffusée avec la viscosité cinématique ν .

Avant d'entrer plus en détail dans la formulation du schéma de MAC CORMACK, il est bon de rappeler le principe général de résolution des équations instationnaires. La solution démarre avec l'établissement des valeurs initiales des variables indépendantes dans tout le domaine du calcul, au temps $t=0$. Ces valeurs initiales peuvent correspondre à une situation réelle ou à une évaluation grossière ou plausible de ce que doit être l'écoulement. Plus éloignée de la réalité sera l'évaluation initiale, plus fortes devront être les qualités prédictrices de la méthode pour obtenir une solution physique (ce point sera discuté plus en détail à la fin du chapitre). Puis commence le cycle de calcul en déterminant à l'instant $t = \Delta t$ les valeurs des variables indépendantes à partir des dérivées spatiales. Pour un cycle de calcul à un temps t quelconque on aura :

$$u^{t+\Delta t} = u^t + \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t_i} = u^t + \Delta t \left(-c \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{t_i}$$

De façon très schématique, pour une méthode explicite le temps t_i est égal à t tandis que pour une méthode complètement implicite le temps est égal à $t + \Delta t$. Le jeu des techniques de calcul numérique se situe alors au niveau du choix des méthodes de discrétisation des dérivées spatiales ou du fractionnement du pas de temps. Pour illustrer cela, revenons au schéma explicite qui est à l'origine des méthodes MAC CORMACK [1]. Les équations aux différences finies du schéma explicite prédicteur-correcteur, qui approximent l'équation (V-11) sont :

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{P.} \left[\begin{array}{l}
 \Delta u_I^n = -\frac{\Delta t \cdot c}{\Delta x} (u_{I+1}^n - u_I^n) \\
 \quad + \frac{\Delta t \cdot \nu}{\Delta x^2} (u_{I+1}^n - 2u_I^n + u_{I-1}^n) \\
 \overline{u}_I^{n+1} = u_I^n + \Delta u_I^n
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{C.} \left[\begin{array}{l}
 \Delta \overline{u}_I^{n+1} = -\frac{\Delta t \cdot c}{\Delta x} (\overline{u}_I^{n+1} - \overline{u}_{I-1}^{n+1}) \\
 \quad + \frac{\Delta t \cdot \nu}{\Delta x^2} (\overline{u}_{I+1}^{n+1} - 2 \cdot \overline{u}_I^{n+1} + \overline{u}_{I-1}^{n+1}) \\
 \overline{u}_I^{n+1} = \frac{1}{2} (u_I^n + \overline{u}_I^{n+1} + \Delta \overline{u}_I^{n+1})
 \end{array} \right.
 \end{array} \right\} \quad (\text{V-12})$$

La première étape (prédicteur) prédit une nouvelle solution au temps $t = (n+1)\Delta t$ à chaque noeud du maillage I et utilise une différence décentrée avant pour approximer la dérivée première et une différence centrée pour la dérivée seconde. La deuxième étape (correcteur) corrige les valeurs prédites avec une différence décentrée arrière pour la dérivée première.

La méthode est précise au second ordre et stable si le pas de temps satisfait la condition suivante :

$$\Delta t \leq \frac{1}{\frac{c}{\Delta x} + \frac{2v}{\Delta x^2}}$$

L'analogie implicite de ce schéma est décrit par les équations suivantes :

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{P.} \\
 \Delta u_I^m = -\frac{\Delta t \cdot c}{\Delta x} (u_{I+1}^m - u_I^m) \\
 \quad + \frac{\Delta t \cdot v}{\Delta x^2} (u_{I+1}^m - 2u_I^m + u_{I-1}^m) \\
 \left(1 + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x}\right) \mathcal{S} u_I^{\overline{n+1}} = \Delta u_I^m + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} \mathcal{S} u_{I+1}^{\overline{n+1}} \\
 u_I^{\overline{n+1}} = u_I^m + \mathcal{S} u_I^{\overline{n+1}} \\
 \\
 \text{C.} \\
 \Delta u_I^{\overline{n+1}} = -\frac{\Delta t \cdot c}{\Delta x} (u_I^{\overline{n+1}} - u_{I-1}^{\overline{n+1}}) \\
 \quad + \frac{\Delta t \cdot v}{\Delta x^2} (u_{I+1}^{\overline{n+1}} - 2u_I^{\overline{n+1}} + u_{I-1}^{\overline{n+1}}) \\
 \left(1 + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x}\right) \mathcal{S} u_I^{\overline{n+1}} = \Delta u_I^{\overline{n+1}} + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} \mathcal{S} u_{I-1}^{\overline{n+1}} \\
 u_I^{\overline{n+1}} = \frac{1}{2} (u_I^m + u_I^{\overline{n+1}} + \mathcal{S} u_I^{\overline{n+1}})
 \end{array} \right\} \text{(V-13)}$$

λ est choisi de telle façon que

$$\lambda \geq \max \left\{ |c| + \frac{2v}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{\Delta t}, 0 \right\}$$

Cette méthode est inconditionnellement stable (quelle que soit la valeur du pas de temps) et est précise au second ordre sous réserve que la quantité $\frac{v\Delta t}{\Delta x^2}$ soit bornée quand Δt et Δx tendent vers zéro. Dans les équations (V-13), chacune des deux étapes prédictrice ou correctrice est formée de deux parties. La première partie détermine l'incrément de la solution Δu_I^n ou Δu_I^{n+1} en approximant explicitement les équations d'évolution. La seconde partie utilise cet incrément dans une procédure implicite, bidiagonale supérieure ou inférieure, pour déterminer le vrai incrément $S u_I^{n+1}$ ou $S u_I^{n+1}$ qui est utilisé pour calculer la nouvelle valeur de la solution au temps $t = (n+1) \Delta t$.

Revenons maintenant aux équations de Navier-Stokes (V-9) que nous pouvons dériver par rapport au temps.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial U}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(B \frac{\partial U}{\partial t} \right) \quad (V-14)$$

Dans cette équation $A = \frac{\partial F}{\partial U}$ et $B = \frac{\partial G}{\partial U}$ sont les jacobiens de F et G . L'équation (V-14) régit donc l'évolution de l'incrément de la solution à travers le domaine d'étude. L'approximation du type implicite en temps de l'équation (V-14) s'écrit :

$$\left(I + \Delta t \frac{\partial A \circ}{\partial x} + \Delta t \frac{\partial B \circ}{\partial y} \right) \frac{\partial U^{n+1}}{\partial t} = \frac{\partial U^n}{\partial t} \quad (V-15)$$

Les points indiquant que l'opérateur dérivée s'applique également au terme qui est en facteur à la droite de la parenthèse. Définissons maintenant

$$\Delta U^n = \Delta t \frac{\partial U^n}{\partial t}$$

$$S U^{n+1} = \Delta t \frac{\partial U^{n+1}}{\partial t}$$

il vient alors :

$$\left(\mathbf{I} + \Delta t \frac{\partial A \bullet}{\partial x} + \Delta t \frac{\partial B \bullet}{\partial y} \right) \mathcal{S}U^{n+1} = \Delta U^n$$

les termes intérieurs à la paranthèse pouvant eux mêmes être approximés de la façon suivante (réf [7]) :

$$\left(\mathbf{I} + \Delta t \frac{\partial A \bullet}{\partial x} \right) \left(\mathbf{I} + \Delta t \frac{\partial B \bullet}{\partial y} \right) \mathcal{S}U^{n+1} = \Delta U^n \quad (\text{V-16})$$

la forme de différences finies du schéma implicite prédicteur-correcteur est donc :

$$\begin{aligned} & \Delta U_{i,j}^n = - \Delta t \left(\frac{\Delta_+ F_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{\Delta_+ G_{i,j}^n}{\Delta y} \right) \\ \text{P.} \quad & \left(\mathbf{I} + \Delta t \frac{\Delta_+ |A| \bullet}{\Delta x} \right) \left(\mathbf{I} + \Delta t \frac{\Delta_+ |B| \bullet}{\Delta y} \right) \mathcal{S}U_{i,j}^{\overline{n+1}} = \Delta U_{i,j}^n \\ & U_{i,j}^{\overline{n+1}} = U_{i,j}^n + \mathcal{S}U_{i,j}^{\overline{n+1}} \end{aligned} \quad (\text{V-17})$$

$$\begin{aligned} & \Delta U_{i,j}^{\overline{n+1}} = - \Delta t \left(\frac{\Delta_- F_{i,j}^{\overline{n+1}}}{\Delta x} + \frac{\Delta_- G_{i,j}^{\overline{n+1}}}{\Delta y} \right) \\ \text{C.} \quad & \left(\mathbf{I} + \Delta t \frac{\Delta_- |A| \bullet}{\Delta x} \right) \left(\mathbf{I} + \Delta t \frac{\Delta_- |B| \bullet}{\Delta y} \right) \mathcal{S}U_{i,j}^{n+1} = \Delta U_{i,j}^{\overline{n+1}} \\ & U_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left(U_{i,j}^n + U_{i,j}^{\overline{n+1}} + \mathcal{S}U_{i,j}^{n+1} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta_+ Z_{I,J}}{\Delta x} = \frac{Z_{I+1,J} - Z_{I,J}}{x_{I+1} - x_I}$$

$$\frac{\Delta_- Z_{I,J}}{\Delta x} = \frac{Z_{I,J} - Z_{I-1,J}}{x_I - x_{I-1}}$$

$$\frac{\Delta_+ Z_{I,J}}{\Delta y} = \frac{Z_{I,J+1} - Z_{I,J}}{y_{J+1} - y_J}$$

$$\frac{\Delta_- Z_{I,J}}{\Delta y} = \frac{Z_{I,J} - Z_{I,J-1}}{y_J - y_{J-1}}$$

Les matrices $|A|$ et $|B|$ sont obtenues à partir des matrices jacobiniennes A et B de la façon suivante : Soient S_x , S_y et leurs inverses, les matrices qui diagonalisent A et B en négligeant les termes visqueux

$\mu = \lambda = \kappa = 0$; on a donc :

$$A = S_x^{-1} \cdot \Lambda_A \cdot S_x \quad ; \quad B = S_y^{-1} \cdot \Lambda_B \cdot S_y \quad (V-18)$$

avec

$$S_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} \\ 0 & \rho c & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\rho c & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{c} & \frac{1}{c} & 0 & 0 \\ \frac{1}{c} & 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ \lambda \beta & -u \beta & -v \beta & \beta \end{bmatrix}$$

$$S_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho c & 1 \\ 0 & 0 & -\rho c & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{c} & \frac{1}{c} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{c} & 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ \lambda \beta & -u \beta & -v \beta & \beta \end{bmatrix} \quad (V-19)$$

les matrices diagonales étant évidemment :

$$\Lambda_A = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u+c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u-c \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_B = \begin{bmatrix} v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v+c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v-c \end{bmatrix}$$

(V-20)

avec $c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$ la vitesse du son, $\alpha = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ et $\beta = (\gamma - 1)$.
 Les matrices S_x et S_y sont données sous forme de produits de deux matrices.
 La première d'entre elles représente une transformation des variables conservatives en variables non conservatives, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} \delta P \\ \delta(pu) \\ \delta(pv) \\ \delta(pE) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \delta P \\ \delta u \\ \delta v \\ \delta p \end{pmatrix}$$

Puis la matrice de gauche transforme ces variables non conservatives en variables caractéristiques [22].

$$\begin{array}{l}
 (\delta p, \delta u, \delta v, \delta p)^T \xrightarrow{(x)} \left(\delta p - \frac{\delta p}{c^2}, \delta p + \rho c \delta u, \delta v, \delta p - \rho c \delta u \right)^T \\
 \xrightarrow{(y)} \left(\delta p - \frac{\delta p}{c^2}, \delta u, \delta p + \rho c \delta v, \delta p - \rho c \delta v \right)^T
 \end{array}$$

Les matrices $|A|$ et $|B|$ sont définies d'une façon analogue en modifiant les matrices diagonales Λ_A et Λ_B par la réintroduction des termes de viscosité [3].

$$|A| = S_x^{-1} \cdot D_A \cdot S_x \quad ; \quad |B| = S_y^{-1} \cdot D_B \cdot S_y \quad (V-21)$$

avec :

$$D_A = \begin{bmatrix} \lambda_{A1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{A2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{A3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{A4} \end{bmatrix}$$

$$D_B = \begin{bmatrix} \lambda_{B1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{B2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{B3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{B4} \end{bmatrix}$$



$$\lambda_{A1} = \max \left\{ |u| + \frac{2\nu}{\rho \Delta x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t}, 0 \right\}$$

$$\lambda_{A2} = \max \left\{ |u+c| + \frac{2\nu}{\rho \Delta x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t}, 0 \right\}$$

$$\lambda_{A3} = \max \left\{ |u| + \frac{2\nu}{\rho \Delta x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t}, 0 \right\}$$

$$\lambda_{A4} = \max \left\{ |u-c| + \frac{2\nu}{\rho \Delta x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t}, 0 \right\}$$

$$\lambda_{B1} = \max \left\{ |v| + \frac{2\nu}{\rho \Delta y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta y}{\Delta t}, 0 \right\}$$

$$\lambda_{B2} = \max \left\{ |v| + \frac{2\nu}{\rho \Delta y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta y}{\Delta t}, 0 \right\}$$

$$\lambda_{B3} = \max \left\{ |v+c| + \frac{2\nu}{\rho \Delta y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta y}{\Delta t}, 0 \right\}$$

$$\lambda_{B4} = \max \left\{ |v-c| + \frac{2\nu}{\rho \Delta y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta y}{\Delta t}, 0 \right\}$$

$$\nu = \max(\mu, \lambda + 2\mu, \kappa)$$

(V-21-bis)

Les effets visqueux sont donc pris en compte par l'utilisation du coefficient ν .

Le choix des coefficients λ_A et λ_B à la conséquence suivante : pour les régions de l'écoulement où Δt satisfait les conditions explicites de stabilité :

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{|u+c|}{\Delta x} + \frac{2\nu}{\rho \Delta x^2}}$$

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{|u+c|}{\Delta y} + \frac{2\nu}{\rho \Delta y^2}}$$

les termes λ_a et λ_b s'annulent et la méthode se ramène alors à la procédure explicite de départ [1]. Ailleurs les équations aux différences finies sont bi-diagonales supérieures ou inférieures, ce qui est très facile et rapide à résoudre.

Pour conclure ce paragraphe nous nous contenterons de rapporter les caractéristiques principales telles qu'elles sont données par MAC CORMACK [3].

"La méthode ci-dessus est stable pour des pas de temps Δt non bornés, est écrite sous forme conservative et est précise au second ordre pourvu que $\frac{\nu \Delta t}{\rho \Delta x^2}$ et $\frac{\nu \Delta t}{\rho \Delta y^2}$ restent bornés quand Δt , Δx et Δy tendent vers zéro. Cette méthode est plus efficace que les méthodes existantes pour résoudre les équations des écoulements visqueux compressibles par ce que :

- 1 Pour les régions où l'écoulement satisfait le critère stabilité explicite, la méthode ne requiert pas plus de temps d'ordinateur qu'une méthode explicite.
- 2 Pour les autres régions, des équations bidiagonales doivent être seulement résolues plutôt que les coûteuses équations tridiagonales des autres méthodes implicites.

De plus, la méthode propage et diffuse des incréments déterminés localement en utilisant des vitesses de propagation et des viscosités cinématiques du même ordre de grandeur que celles des équations d'évolution".

V-3.- TRAITEMENT DES EQUATIONS MOYENNEES

Nous avons vu dans le Chapitre II que l'utilisation des moyennes pondérées par la masse volumique permettait aux équations moyennées de conserver une forme aussi proche que possible de leur forme instantanée, la masse volumique et la pression étant remplacées par leur moyenne temporelle tandis que les autres variables dépendantes sont remplacées par leur valeur moyenne pondérée. Il apparaît toutefois quelques différences avec les formes instantanées.

En particulier apparaissent dans les équations de quantités de mouvement et de l'énergie les termes du tenseur des contraintes de Reynolds qui sont à la source du problème de la fermeture. Il y a également deux autres modifications, qui sans détruire le caractère parabolique du système d'équations changent la forme des termes non visqueux.

a) Tenseur des pressions

La pression est maintenant composée de la pression statique moyenne, \bar{P} et d'une contribution turbulente qui sera isotrope avec une fermeture utilisant l'hypothèse de BOUSSINESQ (transport par gradient) et non isotrope avec les fermetures du second ordre. Cette pression effective, pour une fermeture à deux équations du type $R-\epsilon$ sera alors :

$$P^* = \bar{P} + \frac{2}{3} \bar{P} R \quad (V-22)$$

ou R est l'énergie cinétique de turbulence.

Avec une fermeture du second ordre, les termes de pression dans F et G seront :

$$\begin{aligned} P_F^* &= \bar{P} + \bar{P} \tilde{u}^2 \\ P_G^* &= \bar{P} + \bar{P} \tilde{v}^2 \end{aligned} \quad (V-23)$$

et le terme de cisaillement turbulent $\bar{P} \tilde{u} \tilde{v}$ est alors présent dans les deux vecteurs F et G .

b) Equation d'état

La forme moyenne de l'équation d'état devrait être :

$$\bar{P} = (\gamma-1) \bar{P} \left[\tilde{E} - \frac{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}{2} - R \right]$$

si nous nous contentions d'un strict passage à la moyenne pour l'équation instantanée. Ce qui fait ainsi apparaître que l'énergie turbulente est prise en compte dans le bilan d'énergie totale. Pour éviter toute contradiction de la définition des variables caractéristiques avec la vitesse du son, il est nécessaire d'inclure dans la définition du champ de pression, la contribution du champ turbulent. Avec le modèle $k-\varepsilon$, la vitesse du son sera définie ainsi par

$$c^*{}^2 = \frac{\delta P^*}{\bar{P}} = \frac{\gamma(\bar{P} + \frac{2}{3}\bar{P}k)}{\bar{P}} = (\gamma-1)\gamma\left[\bar{E} - \frac{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}{2} - k\right] \quad (V-24)$$

Cette reformulation nécessite une modification de l'opérateur implicite que nous allons détailler tout d'abord pour un modèle de turbulence à deux équations puis pour une fermeture au second ordre.

V-3-1.- Traitement implicite avec modèle à deux équations

Supposons que les termes visqueux sont nuls ainsi que les termes sources. Le système d'équations se ramène alors à :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (V-25)$$

avec

$$U = \begin{bmatrix} \bar{P} \\ \bar{P}\tilde{u} \\ \bar{P}\tilde{v} \\ \bar{P}\tilde{w} \\ \bar{P}k \\ \bar{P}\varepsilon \end{bmatrix} ; \quad F = \begin{bmatrix} \bar{P}\tilde{u} \\ \bar{P}\tilde{u}^2 + \bar{P} + \frac{2}{3}\bar{P}k \\ \bar{P}\tilde{u}\tilde{v} \\ \bar{P}\tilde{u}\tilde{w} + (\bar{P} + \frac{2}{3}\bar{P}k)\tilde{u} \\ \bar{P}\tilde{u}k \\ \bar{P}\tilde{u}\varepsilon \end{bmatrix} \quad \text{BU LILLE}$$

$$G = \begin{bmatrix} \bar{P} \tilde{U} \\ \bar{P} \tilde{E} \tilde{U} \\ \bar{P} \tilde{U}^2 + \bar{P} + \frac{2}{3} \bar{P} R \\ \bar{P} \tilde{U} E + (\bar{P} + \frac{2}{3} \bar{P} R) \tilde{U} \\ \bar{P} \tilde{U} R \\ \bar{P} \tilde{U} E \end{bmatrix} \quad (V-26)$$

auquel est associée l'équation d'état suivante :

$$P^* = (\gamma - 1) \bar{P} \left(\tilde{E} - \frac{\tilde{U}^2 + \tilde{U}^2}{2} - R \right) \quad (V-27)$$

Comme pour la formulation laminaire, les matrices de diagonalisation des matrices jacobiniennes A et B définies par :

$$\begin{cases} SF = A \cdot SU \\ SG = B \cdot SU \end{cases} \quad (V-28)$$

seront faites d'une transformation de variables conservatives en variables non conservatives puis une transformation de ces dernières en variables caractéristiques. Soient S_x , S_x^{-1} , S_y et S_y^{-1} les matrices de transformation et Λ_A et Λ_B les matrices diagonalisées, on aura :

$$A = S_x^{-1} \cdot \Lambda_A \cdot S_x \quad (V-29)$$

$$B = S_y^{-1} \cdot \Lambda_B \cdot S_y$$

Examinons les deux transformations nécessaire à la diagonalisation

de la matrice jacobienne A .

a) Transformation de SU_c en SU_{nc} .

$$\begin{bmatrix} S(\bar{P}) \\ S(\bar{P}\tilde{u}) \\ S(\bar{P}\tilde{v}) \\ S(\bar{P}\tilde{E}) \\ S(\bar{P}k) \\ S(\bar{P}\varepsilon) \end{bmatrix} \xrightarrow{SX1} \begin{bmatrix} S(\bar{P}) \\ S(\tilde{u}) \\ S(\tilde{v}) \\ S(P^*) \\ S(k) \\ S(\varepsilon) \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad SU_{nc} = SX1 \cdot SU_c$$

La matrice $SX1$ est maintenant :

$$SX1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\beta} & -\frac{1}{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\beta} & 0 & \frac{1}{\beta} & 0 & 0 & 0 \\ \gamma\beta & -\beta\tilde{u} & -\beta\tilde{v} & \beta & -\beta & 0 \\ -\frac{\beta}{\beta} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\beta} & 0 \\ \frac{1}{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\beta} \end{bmatrix} \quad \text{(V-30)}$$

$\lambda = \frac{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}{2}$
 $\beta = \gamma - 1$

b) Transformation de SU_{wc} en SU_{con} .

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{c}
 \delta(\bar{P}) \\
 \delta(\tilde{u}) \\
 \delta(\tilde{v}) \\
 \delta(P^*) \\
 \delta(R) \\
 \delta(\varepsilon)
 \end{array} \right]
 \xrightarrow{SX_2}
 \left[\begin{array}{c}
 \delta(\bar{P}) - \frac{1}{c^{*2}} \delta(P^*) \\
 \delta(P^*) + \bar{P} c^* \delta(\tilde{u}) \\
 \delta(\tilde{v}) \\
 \delta(P^*) - \bar{P} c^* \delta(\tilde{u}) \\
 \delta(R) \\
 \delta(\varepsilon)
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \quad
 SU_{con} = SX_2 \cdot SU_{wc}$$

avec la matrice SX_2 définie par

$$\left[\begin{array}{cccccc}
 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{c^{*2}} & 0 & 0 \\
 0 & \bar{P} c^* & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\bar{P} c^* & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right]$$

(V-31)

c) La transformation de variables conservatrices en variables caractéristiques se fera donc par la matrice

$$SX = SX2 \cdot SX1$$

ou

$$SX = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\alpha\beta}{c^{*2}} & \frac{\beta\tilde{u}}{c^{*2}} & \frac{\beta\tilde{u}}{c^{*2}} & -\frac{\beta}{c^{*2}} & \frac{\beta}{c^{*2}} & 0 \\ -\tilde{u}c^* + \alpha\beta & c^* - \beta\tilde{u} & -\beta\tilde{u} & \beta & -\beta & 0 \\ -\frac{\beta}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{u}c^* + \alpha\beta & -c^* - \beta\tilde{u} & -\beta\tilde{u} & \beta & -\beta & 0 \\ -\frac{\beta}{\rho} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ -\frac{\beta}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \end{bmatrix} \quad (V-32)$$

Les transformations inverses se feront par les matrices suivantes :

$$SX1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{u} & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{u} & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ \alpha + \beta & \rho\tilde{u} & \rho\tilde{u} & \frac{1}{\rho} & \rho & 0 \\ \rho & 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho \end{bmatrix} \quad (V-33)$$

BU
LILLE

$$SX_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2c^{*2}} & 0 & \frac{1}{2c^{*2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\beta c^{*2}} & 0 & -\frac{1}{2\beta c^{*2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (V-34)$$

$$SX^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2c^{*2}} & 0 & \frac{1}{2c^{*2}} & 0 & 0 \\ \tilde{u} & \frac{\tilde{u}}{2c^{*2}} + \frac{1}{2c^{*2}} & 0 & \frac{\tilde{u}}{2c^{*2}} - \frac{1}{2c^{*2}} & 0 & 0 \\ \tilde{v} & \frac{\tilde{v}}{2c^{*2}} & \rho & \frac{\tilde{v}}{2c^{*2}} & 0 & 0 \\ \lambda + k & \frac{\lambda + k}{2c^{*2}} + \frac{\tilde{u}}{2c^{*2}} + \frac{1}{2\beta} & \tilde{\rho} & \frac{\lambda + k}{2c^{*2}} - \frac{\tilde{u}}{2c^{*2}} + \frac{1}{2\beta} & \rho & 0 \\ \rho & \frac{\rho}{2c^{*2}} & 0 & \frac{\rho}{2c^{*2}} & \rho & 0 \\ \varepsilon & \frac{\varepsilon}{2c^{*2}} & 0 & \frac{\varepsilon}{2c^{*2}} & 0 & \rho \end{bmatrix} \quad (V-35)$$

$$SX^{-1} = SX_1^{-1} \cdot SX_2^{-1}$$

Examinons maintenant la matrice jacobienne A qui peut être définie par (V-27). En respectant les définitions de F et U données dans (V-25) on obtient donc pour A la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}\tilde{u}^2 + \frac{\beta}{2}\tilde{v}^2 & (3-\gamma)\tilde{u} & -\beta\tilde{v} & \beta & -\beta & 0 \\ -\tilde{u}\tilde{v} & \tilde{v} & \tilde{u} & 0 & 0 & 0 \\ 2\beta\tilde{u}\lambda - \gamma E\tilde{u} + \beta\tilde{u}k & \gamma E - \beta\frac{3\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}{2} - \beta k & -\beta\tilde{u}\tilde{v} & \gamma\tilde{u} & -\beta\tilde{v} & 0 \\ -\tilde{u}k & k & 0 & 0 & \tilde{u} & 0 \\ -\tilde{u}E & E & 0 & 0 & 0 & \tilde{v} \end{bmatrix} \quad (V-36)$$

Il est alors aisé de vérifier que la matrice diagonale recherchée est :

$$\Lambda_A = \begin{bmatrix} \tilde{u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{u} + c^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{u} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{u} - c^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{v} \end{bmatrix} \quad (V-37)$$

en comparant A avec le produit $SX^{-1} \cdot \Lambda_A \cdot SX$.

Nous pouvons suivre une démarche analogue pour diagonaliser la matrice jacobienne B , qui fera apparaître les matrices suivantes :

$$SYZ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{c^{*2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{p}c^* & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{p}c^* & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(V-38)

$$SY = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\lambda\beta}{c^{*2}} & \frac{\beta\tilde{u}}{c^{*2}} & \frac{\beta\tilde{v}}{c^{*2}} & -\frac{\beta}{c^{*2}} & \frac{\beta}{c^{*2}} & 0 \\ -\frac{\beta\tilde{u}}{c^{*2}} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{u}c^* + \lambda\beta & -\beta\tilde{u} & c^* - \beta\tilde{v} & \beta & -\beta & 0 \\ +\tilde{u}c^* + \lambda\beta & -\beta\tilde{u} & -c^* - \beta\tilde{v} & \beta & -\beta & 0 \\ -\frac{\beta\tilde{v}}{c^{*2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ -\frac{\beta\tilde{v}}{c^{*2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} \end{bmatrix}$$

(V-39)

$$SY_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2c^{*2}} & \frac{1}{2c^{*2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\bar{p}c^{*}} & -\frac{1}{2\bar{p}c^{*}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (V-40)$$

$$SY^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2c^{*2}} & \frac{1}{2c^{*2}} & 0 & 0 \\ \tilde{u} & \bar{p} & \frac{\tilde{u}}{2c^{*2}} & \frac{\tilde{u}}{2c^{*2}} & 0 & 0 \\ \tilde{u} & 0 & \frac{\tilde{u}}{2c^{*2}} + \frac{1}{2c^{*}} & \frac{\tilde{u}}{2c^{*2}} - \frac{1}{2c^{*}} & 0 & 0 \\ \alpha+k & \bar{p}\tilde{u} & \frac{\alpha+k}{2c^{*2}} + \frac{\tilde{u}}{2c^{*}} + \frac{1}{2\beta} & \frac{\alpha+k}{2c^{*2}} - \frac{\tilde{u}}{2c^{*}} + \frac{1}{2\beta} & \bar{p} & 0 \\ R & 0 & \frac{R}{2c^{*2}} & \frac{R}{2c^{*2}} & \bar{p} & 0 \\ \varepsilon & 0 & \frac{\varepsilon}{2c^{*2}} & \frac{\varepsilon}{2c^{*2}} & 0 & \bar{p} \end{bmatrix} \quad (V-41)$$

BU
LILLE

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{u}\tilde{v} & \tilde{v} & \tilde{u} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{2}\tilde{u}^2 + \frac{\gamma-3}{2}\tilde{v}^2 & -\beta\tilde{u} & (3-\gamma)\tilde{v} & \beta & -\beta & 0 \\ 2\beta\tilde{u}\tilde{v} - \gamma E\tilde{v} + \beta\tilde{v}k & -\beta\tilde{u}\tilde{v} & \gamma E - \beta\frac{\tilde{u}^2 + 3\tilde{v}^2}{2} - \beta k & \gamma\tilde{v} & -\beta\tilde{v} & 0 \\ -\tilde{v}k & 0 & k & 0 & \tilde{v} & 0 \\ -\tilde{v}E & 0 & E & 0 & 0 & \tilde{v} \end{bmatrix} \quad (V-42)$$

Il est alors aisé de vérifier que

$$B = SY^{-1} \cdot \Lambda_B \cdot SY \quad \text{avec :}$$

$$\Lambda_B = \begin{bmatrix} \tilde{v} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{v} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{v} + c^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{v} - c^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{v} \end{bmatrix} \quad (V-43)$$

A ce stade les effets visqueux ont été négligés. Dans la pratique, les matrices Λ_A et Λ_B sont remplacées par D_A et D_B respectivement, telles que :

$$D_A = \begin{bmatrix} \lambda_{A1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{A2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{A3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{A4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{A5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{A6} \end{bmatrix} \quad (V-44)$$

$$D_B = \begin{bmatrix} \lambda_{B1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{B2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{B3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{B4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{B5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{B6} \end{bmatrix} \quad (V-45)$$

BU
LILLE

$$\lambda_{A1} = \max \left\{ |\tilde{u}| + \frac{2\nu}{\bar{\rho} \Delta x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t}, 0. \right\}$$

$$\lambda_{A2} = \max \left\{ |\tilde{u} + c^*| + \frac{2\nu}{\bar{\rho} \Delta x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t}, 0. \right\}$$

$$\lambda_{A3} = \max \left\{ |\tilde{u}| + \frac{2\nu}{\bar{\rho} \Delta x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t}, 0. \right\}$$

$$\lambda_{A4} = \max \left\{ |\tilde{u} - c^*| + \frac{2\nu}{\bar{\rho} \Delta x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t}, 0. \right\}$$

$$\lambda_{A5} = \max \left\{ |\tilde{u}| + \frac{2\nu}{\bar{\rho} \Delta x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t}, 0. \right\}$$

$$\lambda_{A6} = \max \left\{ |\tilde{u}| + \frac{2\nu}{\bar{\rho} \Delta x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t}, 0. \right\}$$

$$\lambda_{B1} = \max \left\{ |\tilde{v}| + \frac{2\nu}{\bar{\rho} \Delta y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta y}{\Delta t}, 0. \right\}$$

$$\lambda_{B2} = \max \left\{ |\tilde{v}| + \frac{2\nu}{\bar{\rho} \Delta y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta y}{\Delta t}, 0. \right\}$$

$$\lambda_{B3} = \max \left\{ |\tilde{v} + c^*| + \frac{2\nu}{\bar{\rho} \Delta y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta y}{\Delta t}, 0. \right\}$$

$$\lambda_{B4} = \max \left\{ |\tilde{v} - c^*| + \frac{2\nu}{\bar{\rho} \Delta y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta y}{\Delta t}, 0. \right\}$$

$$\lambda_{B5} = \max \left\{ |\tilde{v}| + \frac{2\nu}{\bar{\rho} \Delta y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta y}{\Delta t}, 0. \right\}$$

$$\lambda_{B6} = \max \left\{ |\tilde{v}| + \frac{2\nu}{\bar{\rho} \Delta y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta y}{\Delta t}, 0. \right\}$$

(v-46)

Les effets visqueux sont ainsi pris en compte par l'utilisation du coefficient ν défini par (ref. [3]) :

$$\nu = \max [\mu_{eff}, \kappa_{eff}] \quad (V-47)$$

V-3-2.- Traitement implicite avec fermeture au second ordre

De même que dans le paragraphe précédent nous allons commencer par négliger les termes de frottement et les termes sources. On a donc de nouveau le système d'équations :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (V-48)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho} \tilde{u} \\ \bar{\rho} \tilde{v} \\ \bar{\rho} \tilde{w} \\ \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{u} \\ \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{v} \\ \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{w} \\ \bar{\rho} \tilde{v} \tilde{u} \\ \bar{\rho} \tilde{v} \tilde{v} \\ \bar{\rho} \tilde{v} \tilde{w} \\ \bar{\rho} \tilde{w} \tilde{u} \\ \bar{\rho} \tilde{w} \tilde{v} \\ \bar{\rho} \tilde{w} \tilde{w} \end{bmatrix} \\
 F &= \begin{bmatrix} \bar{\rho} \tilde{u} \\ \bar{\rho} \tilde{u}^2 + \bar{p} + \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{u} \\ \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{v} \\ (\bar{\rho} \tilde{u} \tilde{w} + \bar{p} + \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{u} \tilde{w}) \tilde{u} \\ \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{u} \tilde{u} \\ \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{u} \tilde{v} \\ \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{u} \tilde{w} \\ \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{v} \tilde{u} \\ \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{v} \tilde{v} \\ \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{v} \tilde{w} \end{bmatrix} \\
 G &= \begin{bmatrix} \bar{\rho} \tilde{v} \\ \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{v} \\ \bar{\rho} \tilde{v}^2 + \bar{p} + \bar{\rho} \tilde{v} \tilde{v} \\ (\bar{\rho} \tilde{u} \tilde{v} + \bar{p} + \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{u} \tilde{v}) \tilde{v} \\ \bar{\rho} \tilde{v} \tilde{u} \tilde{u} \\ \bar{\rho} \tilde{v} \tilde{u} \tilde{v} \\ \bar{\rho} \tilde{v} \tilde{u} \tilde{w} \\ \bar{\rho} \tilde{v} \tilde{v} \tilde{u} \\ \bar{\rho} \tilde{v} \tilde{v} \tilde{v} \\ \bar{\rho} \tilde{v} \tilde{v} \tilde{w} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \bar{\rho} \tilde{w} \\ \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{w} \\ \bar{\rho} \tilde{v} \tilde{w} \\ \bar{\rho} \tilde{w} \tilde{u} \\ \bar{\rho} \tilde{w} \tilde{v} \\ \bar{\rho} \tilde{w} \tilde{w} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (V-49)$$

BU
LILLE

L'extension de la définition de la pression effective donne naissance à l'existence d'un champ de pression qui n'est plus isotrope. La poursuite de ce raisonnement amène donc à la définition d'une vitesse de propagation du son qui ne serait pas isotrope e.g.

$$c_x^{*L} = \frac{\gamma}{\bar{p}} (\bar{p} + \bar{p} \tilde{u}^2) \quad ; \quad c_y^{*L} = \frac{\gamma}{\bar{p}} (\bar{p} + \bar{p} \tilde{v}^2) \quad (V-50)$$

En fait ces quantités dépendent identiquement de l'énergie interne qui est isotrope par nature. Pour remédier à cette incohérence, la pression effective est approximée par

$$P^* = \bar{p} + \frac{2}{3} \bar{p} R$$

ce qui correspond à une moyenne des pressions turbulentes sur les trois directions du référentiel.

Les matrices jacobiennes A et B s'écriront maintenant :

$$A = S_x^{-1} \Lambda_A S_x \quad ; \quad B = S_y^{-1} \Lambda_B S_y \quad (V-51)$$

avec

$$S_x = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\gamma \beta}{c^{*L}} & \frac{\beta \tilde{u}}{c^{*L}} & \frac{\beta \tilde{v}}{c^{*L}} & -\frac{\beta}{c^{*L}} & 0 & 0 & \frac{\beta}{2c^{*L}} & \frac{\beta}{2c^{*L}} & \frac{\beta}{2c^{*L}} \\ -\tilde{u}c^* + \alpha\beta & c^* - \beta\tilde{u} & -\beta\tilde{v} & \beta & 0 & 0 & -\frac{\beta}{2} & -\frac{\beta}{2} & -\frac{\beta}{2} \\ -\frac{\tilde{u}}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{u}c^* + \alpha\beta & -c^* - \beta\tilde{u} & -\beta\tilde{v} & \beta & 0 & 0 & -\frac{\beta}{2} & -\frac{\beta}{2} & -\frac{\beta}{2} \\ -\frac{\tilde{u}}{\rho} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\tilde{v}}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\tilde{u}}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ -\frac{\tilde{v}}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ -\frac{\tilde{u}}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \end{bmatrix} \quad (V-51bis)$$

$$SY = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\beta}{c^*} & \frac{\beta}{c^*} & \frac{\beta}{c^*} & -\frac{\beta}{c^*} & 0 & 0 & \frac{\beta}{2c^*} & \frac{\beta}{2c^*} & \frac{\beta}{2c^*} \\ -\frac{\beta}{c^*} & -\frac{\beta}{c^*} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{2c^*} + \frac{\beta}{2} & -\frac{\beta}{2} & c^* - \beta & \beta & 0 & 0 & -\frac{\beta}{2} & -\frac{\beta}{2} & -\frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2c^*} + \frac{\beta}{2} & -\frac{\beta}{2} & -c^* - \beta & \beta & 0 & 0 & -\frac{\beta}{2} & -\frac{\beta}{2} & -\frac{\beta}{2} \\ -\frac{\beta}{c^*} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{c^*} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{c^*} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{c^*} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{c^*} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{c^*} & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{c^*} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{c^*} & 0 \\ -\frac{\beta}{c^*} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{c^*} \end{bmatrix} \quad (V-54)$$

$$SY^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2c^*} & -\frac{1}{2c^*} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{c^*} & \frac{\beta}{c^*} & \frac{\beta}{2c^*} & \frac{\beta}{2c^*} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{2c^*} + \frac{1}{2} & \frac{\beta}{2c^*} - \frac{1}{2} & \frac{\beta}{2c^*} + \frac{1}{2} & \frac{\beta}{2c^*} - \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{2c^*} + \frac{1}{2} & \frac{\beta}{2c^*} + \frac{1}{2} & \frac{\beta}{2c^*} + \frac{1}{2} & \frac{\beta}{2c^*} + \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\beta}{2} & \frac{\beta}{2} & \frac{\beta}{2} \\ -\frac{\beta}{c^*} & -\frac{\beta}{c^*} & -\frac{\beta}{c^*} & -\frac{\beta}{c^*} & -\frac{\beta}{c^*} & -\frac{\beta}{c^*} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{c^*} & -\frac{\beta}{c^*} & -\frac{\beta}{c^*} & -\frac{\beta}{c^*} & -\frac{\beta}{c^*} & -\frac{\beta}{c^*} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{c^*} & -\frac{\beta}{c^*} & -\frac{\beta}{c^*} & -\frac{\beta}{c^*} & -\frac{\beta}{c^*} & -\frac{\beta}{c^*} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{c^*} & -\frac{\beta}{c^*} & -\frac{\beta}{c^*} & -\frac{\beta}{c^*} & -\frac{\beta}{c^*} & -\frac{\beta}{c^*} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{c^*} & -\frac{\beta}{c^*} & -\frac{\beta}{c^*} & -\frac{\beta}{c^*} & -\frac{\beta}{c^*} & -\frac{\beta}{c^*} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (V-55)$$

$$\Lambda_B = \begin{bmatrix}
 \zeta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \zeta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \zeta_2 + c^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \zeta_2 - c^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_2
 \end{bmatrix} \quad (V-56)$$



Les matrices jacobiniennes **A** et **B** sont déterminées par les relations (V -28) :

$$\Lambda_A = \begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{\delta-3\zeta_2}{2}\tilde{u} + \frac{\gamma-1}{2}\tilde{v} & (3-\gamma)\tilde{u} & -\beta\tilde{v} & \beta & 0 & 0 & -\frac{\beta}{2} & -\frac{\beta}{2} & -\frac{\beta}{2} \\
 -\tilde{u}\tilde{v} & \tilde{v} & \tilde{u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 2\tilde{u}\beta\alpha - \gamma\tilde{E}\tilde{u} + \beta\tilde{u}k & \gamma\tilde{E} - \beta\frac{3\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}{2} - \beta k & -\beta\tilde{u}\tilde{v} & \gamma\tilde{u} & 0 & 0 & -\beta\frac{\tilde{u}^2}{2} & -\beta\frac{\tilde{u}^2}{2} & -\beta\frac{\tilde{u}^2}{2} \\
 -\tilde{u}\tilde{v}^2 & \tilde{u}\tilde{v}^2 & 0 & 0 & \tilde{u}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\varepsilon\tilde{u}^2 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\
 -\tilde{u}^2\tilde{v} & \tilde{u}^2\tilde{v} & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\
 -\tilde{u}^2\tilde{v}^2 & \tilde{u}^2\tilde{v}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\
 -\tilde{u}^2\tilde{v}^3 & \tilde{u}^2\tilde{v}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon
 \end{bmatrix} \quad (V-57)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\tilde{u}\tilde{v} & \tilde{v} & \tilde{u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{\gamma-1}{2}\tilde{u}^2 + \frac{\gamma-3}{2}\tilde{v}^2 & -\beta\tilde{u} & (\beta-\gamma)\tilde{v} & \beta & 0 & 0 & -\frac{\beta}{2} & -\frac{\beta}{2} & -\frac{\beta}{2} \\
 2\tilde{v}\beta_1 - \gamma\tilde{E}\tilde{v} + \beta\tilde{v}k & -\beta\tilde{u}\tilde{v} & \gamma\tilde{E} - \beta\frac{\tilde{u}^2 + 3\tilde{v}^2}{2} - \beta k & \gamma\tilde{v} & 0 & 0 & -\frac{\beta\tilde{v}}{2} & -\frac{\beta\tilde{v}}{2} & -\frac{\beta\tilde{v}}{2} \\
 -\tilde{u}\tilde{v}^2 & 0 & \tilde{u}\tilde{v}^2 & 0 & \tilde{v} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\varepsilon\tilde{v} & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & \tilde{v} & 0 & 0 & 0 \\
 -\tilde{u}\tilde{v}^2 & 0 & \tilde{u}\tilde{v}^2 & 0 & 0 & 0 & \tilde{v} & 0 & 0 \\
 -\tilde{v}\tilde{v}^2 & 0 & \tilde{v}\tilde{v}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{v} & 0 \\
 -\varepsilon\tilde{v}^2 & 0 & \tilde{u}\tilde{v}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{v}
 \end{bmatrix} \quad (\text{V-58})$$

qui vérifient les équations (V-51).

La prise en compte des termes visqueux se fait comme pour la fermeture d'ordre zéro par substitution des matrices \mathbf{D}_a et \mathbf{D}_b aux matrices \mathbf{A}_a et \mathbf{A}_b . Le coefficient ν qui apparaît dans les équations (V-46) est encore défini par la relation (V-21 bis).

V-4.- INTRODUCTION DES TERMES SOURCES

V-4-1.- Partie explicite

La prise en compte des termes sources dans la partie explicite est évidente. Rappelons la forme vectorielle des équations de Navier-Stokes complétées d'un modèle de turbulence avec équations de transport :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \mathbf{H} \quad (\text{V-59})$$

qui se discrétise de la façon suivante (voir équation V-17)

$$\Delta U_{I,J}^n = - \Delta t \left[\frac{\Delta_{\pm} F_{I,J}^n}{\Delta x} + \frac{\Delta_{\pm} G_{I,J}^n}{\Delta y} - H_{I,J}^n \right]$$

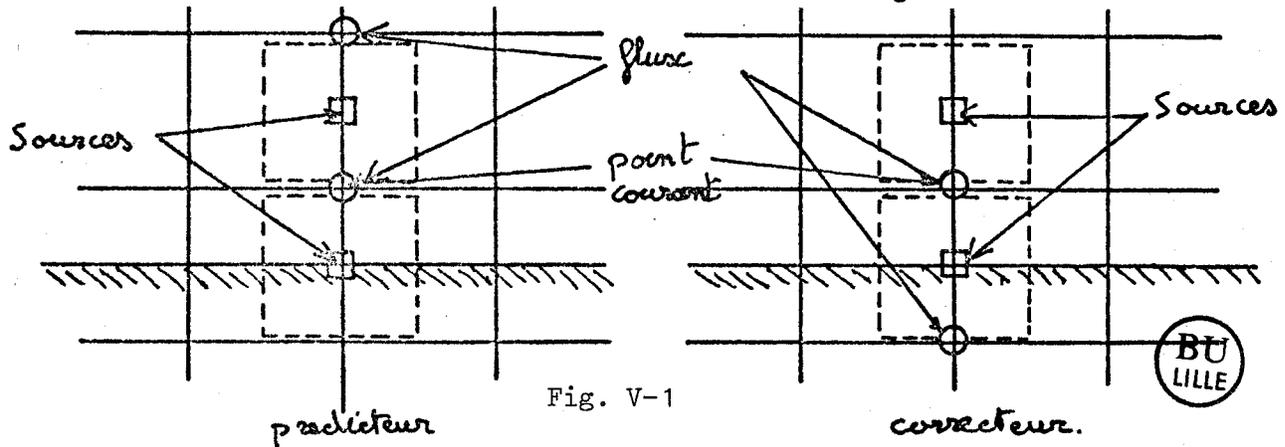


Fig. V-1

Les termes H sont évalués en même temps que les termes de flux transversaux G . Ces sources sont calculées en milieu de cellule et moyennées sur deux cellules adjacentes pour obtenir la valeur au point courant. La figure V-1 illustre les différences de position entre les points de calcul des flux et des sources pour les deux étapes prédictives et correctrices.

V-4-2.- Partie implicite

En présence de termes sources différents de zéro, l'équation (V-15) se mettra sous la forme :

$$\left(I + \Delta t \frac{\partial}{\partial x} A \bullet + \Delta t \frac{\partial}{\partial y} B \bullet - \Delta t C \right) \delta U_{I,J}^{n+1} = \Delta U_{I,J}^n \quad (V-60)$$

Après factorisation on obtient donc :

$$\left(I + \Delta t \frac{\Delta_{\pm} |A| \bullet}{\Delta x} \right) \left(I + \Delta t \frac{\Delta_{\pm} |B| \bullet}{\Delta y} \right) \left(I + \Delta t |C| \right) \delta U = \Delta U^m \quad (V-61)$$

La matrice C étant définie d'une manière analogue aux matrices jacobienes A et B .

$$\delta H = C \cdot \delta U \quad (V-61)$$

Le contenu de la matrice H est d'une nature beaucoup plus complexe que celui de F et G ; en particulier la linéarité de H en fonction de U n'est plus assurée. On ne peut donc pas déduire C de (V-61) d'une façon

analogue à celle qui fut utilisée pour déterminer A et B (réf. [7]). On définira donc C d'une manière plus générale sans considération du contenu des termes de H . Si S_R et S_E représentent les groupes de termes sources des équations de R et E on aura :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{S_R}{P_R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{S_E}{P_E} \end{bmatrix} \quad (V-62)$$

Dans le cas d'une fermeture du second ordre, la matrice sera de dimension supérieure mais définie de façon analogue.

Revenons maintenant au schéma d'inversion dans l'opérateur implicite dans la direction normale. Supposons que $SU_{I,J}^*$ dénote la quantité $(I + \Delta t \frac{\Delta \pm |A| \circ}{\Delta x}) SU_{I,J}^{n+1}$. Il reste alors :

$$(I + \Delta t \frac{\Delta \pm |B| \circ}{\Delta y}) (I + \Delta t |C|) SU_{I,J}^* = \Delta U_{I,J}^n \quad (V-63)$$

La matrice $(I + \Delta t |C|)$ étant diagonale définie positive, son inversion est immédiate. On aura donc

$$(I + \frac{\Delta t}{\Delta y} |B|) SU_{I,J}^* = (I + \Delta t |C|)^{-1} \Delta U_{I,J}^n + \frac{\Delta t}{\Delta y} |B| SU_{I,J \pm 1}^* \quad (V-64)$$

A ce stade, on peut alors poursuivre le processus d'inversion de la matrice $(I + \frac{\Delta t}{\Delta y} |B|)$ comme dans la référence [3] en utilisant les matrices SY et SY^{-1} . Cette procédure a l'avantage de traiter implicitement les termes sources sans être tributaire de leur contenu.

V-5.- CHANGEMENT DE COORDONNEES

La méthode numérique, telle qu'elle a été exposée jusqu'ici est destinée à la résolution des équations de Navier-Stokes compressibles sur un maillage rectangulaire. Ceci est applicable pour des calculs de couche limite sur plaque plane ou des calculs d'interaction onde de choc-couche limite dans des tuyères à section droite constante. Toutefois, une partie des calculs qui sont présentés dans ce travail concernent des configurations géométriques plus complexes. Deux transformations de coordonnées différentes sont présentées. La première provoque une rotation globale du maillage à partir d'une abscisse x donnée, les lignes de maillage normales à l'écoulement n'étant pas déviées (figure V-2).

Dans la seconde transformation, le maillage est déformé pour suivre le contour des parois de la tuyère (fig. V-3). La première transformation est bien adaptée à une étude locale de la zone d'interaction tandis que la seconde se prêtera plus facilement à une prédiction globale de l'écoulement dans toute la tuyère.

V-5-1.- Maillage sur une rampe de compression ou de détente

(ref. [19] - [20]).

Considérons la transformation de coordonnées définie par :

$$\xi = x \quad \eta = y - y_B$$

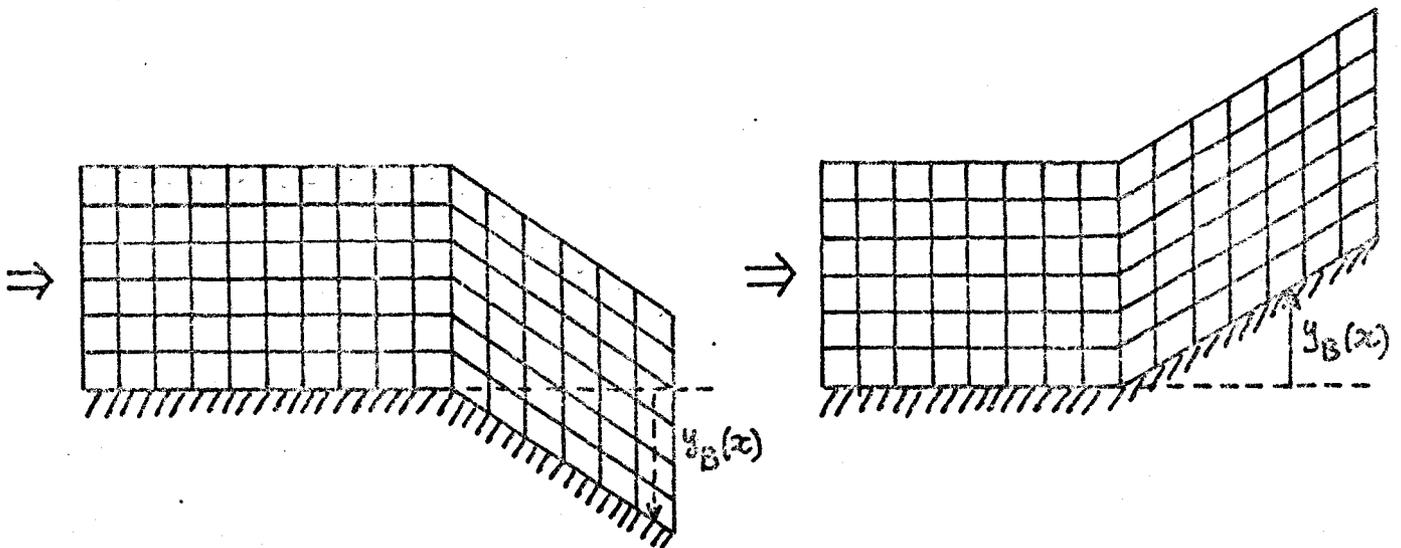


fig. V-1.- Maillage sur une rampe.

Les dérivées spatiales peuvent alors s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} - y_{B,x} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta}$$

Définissons maintenant les fonctions suivantes :

$$F' = F \quad ; \quad G' = G - y_{B,x} F$$

Il vient alors, à partir de l'équation (V -9)

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial y} = -\left\{ \frac{\partial F}{\partial \xi} - y_{B,x} \frac{\partial F}{\partial \eta} \right\} - \frac{\partial G}{\partial \eta}$$

(V-65)

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial F'}{\partial \xi} - \frac{\partial G'}{\partial \eta}$$

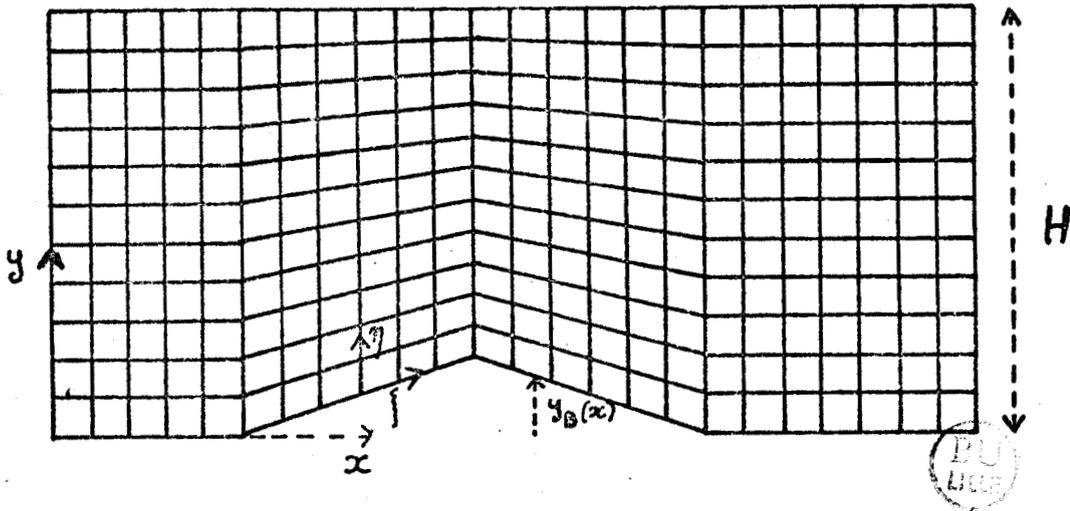
On retrouve donc une forme tout-à-fait similaire à l'équation d'origine. La variable U sera donc exprimée en fonction des dérivées spatiales de F' et G' calculées dans le nouveau système de coordonnées. Cette transformation simple de coordonnées, qui pivote toutes les lignes de maillages horizontales d'un angle identique à partir d'une abscisse donnée est bien adaptée au calcul des compressions ou détentes simples à condition de pouvoir fixer correctement la condition à la limite sur la ligne de maillage supérieure. L'angle de déviation est le même dans un plan perpendiculaire à l'écoulement mais peut être dépendant de l'abscisse x .

V-5-2.- Maillage sur une tuyère à paroi déformée (réf. [21]).

Considérons maintenant la transformation de coordonnées :

$$\begin{cases} \xi = x \\ \eta = \frac{y - y_B}{H - y_B} \cdot H \end{cases}$$

qui permet de décroître la déviation des lignes de maillage à mesure que l'on s'éloigne de la paroi déformée. Si H est l'ordonnée constante d'une ligne de maillage on aura le maillage représenté sur la figure VI-3.



V-3.- Maillage dans une tuyère asymétrique.

Les dérivées s'écriront maintenant :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \tau_g \theta \frac{1}{1 - \frac{y_B}{H}} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{1 - \frac{y_B}{H}} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

avec la tangente locale des lignes de maillage définie par

$$\tan \theta = \frac{1 - \frac{y}{H}}{1 - \frac{y_B}{H}} y_{B,x} = \left(1 - \frac{\eta}{H}\right) y_{B,x}$$

Ré-écrivons maintenant l'équation (V -9) :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{r_g \theta}{1 - \frac{y_B}{H}} \frac{\partial F}{\partial \eta} - \frac{1}{1 - \frac{y_B}{H}} \frac{\partial G}{\partial \eta}$$

Définissons :

$$F' = \left(1 - \frac{y_B}{H}\right) F$$

$$G' = G - r_g \theta \cdot F$$

$$\frac{\partial F'}{\partial \xi} = \left(1 - \frac{y_B}{H}\right) \frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{y_{B,x}}{H} F$$

$$\frac{\partial G'}{\partial \eta} = \frac{\partial G}{\partial \eta} - \left(\frac{1 - \frac{y}{H}}{1 - \frac{y_B}{H}}\right) y_{B,x} \frac{\partial F}{\partial \eta} + \frac{y_{B,x}}{H} F$$

on a alors la forme complète en additionnant ces deux dernières équations :

$$\frac{\partial F'}{\partial \xi} + \frac{\partial G'}{\partial \eta} = \left(1 - \frac{y_B}{H}\right) \left[\frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{1 - \frac{y}{H}}{\left(1 - \frac{y_B}{H}\right)^2} y_{B,x} \frac{\partial F}{\partial \eta} - \frac{1}{1 - \frac{y_B}{H}} \frac{\partial G}{\partial \eta} \right]$$

ce qui entraîne alors finalement :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{1 - \frac{y_B}{H}} \frac{\partial F'}{\partial \xi} - \frac{1}{1 - \frac{y_B}{H}} \frac{\partial G'}{\partial \eta} \quad (V-66)$$

Cette transformation de coordonnées, quoiqu'étant plus complexe que la précédente à l'avantage de pouvoir traiter une ligne de maillage supérieure inchangée. Il est donc possible de s'intéresser à l'écoulement dans des tuyères asymétriques de façon globale. L'intégration des équations se fait donc entre une section d'entrée et une section de sortie, d'une paroi inférieure déformée à la paroi supérieure non modifiée. Les conditions aux frontières sont plus faciles à appliquer. Cette transformation peut également être utilisée pour les problèmes de rampe si on veut inclure les effets de la présence de la paroi supérieure rectiligne.

V-5-3.- Coordonnées non rectangulaires dans l'opérateur implicite

Dérivons l'équation (V-66) par rapport au temps :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) = - \frac{1}{1 - \frac{y_B}{H}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(1 - \frac{y_B}{H} \right) A \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \right] - \frac{1}{1 - \frac{y_B}{H}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(B - r_g \theta A) \frac{\partial U}{\partial t} \right]$$

avec encore $A = \frac{\partial F}{\partial U}$ et $B = \frac{\partial G}{\partial U}$.

On peut alors approximer la dérivée temporelle par :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial U^{n+1}}{\partial t} - \frac{\partial U^n}{\partial t} \right)$$

et les dérivées spatiales implicitement. On obtient alors :

$$\left\{ I + \frac{\Delta t}{1 - \frac{y_B}{H}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(1 - \frac{y_B}{H} \right) A \cdot \right] + \frac{\Delta t}{1 - \frac{y_B}{H}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(B - r_g \theta A) \cdot \right] \right\} \frac{\partial U^{n+1}}{\partial t} = \frac{\partial U^n}{\partial t} \quad (V-67)$$



Après multiplication par Δt et factorisation il vient alors :

$$\left\{ I + \frac{\Delta t}{1 - \frac{y_B}{H}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(1 - \frac{y_B}{H} \right) A \cdot \right] \right\} \left\{ I + \frac{\Delta t}{1 - \frac{y_B}{H}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(B - r_g \theta A) \cdot \right] \right\} S U^{n+1} = \Delta U^n \quad (V-68)$$

avec $\Delta t \frac{\partial U^{n+1}}{\partial t} = S U^{n+1}$ et $\Delta t \frac{\partial U^n}{\partial t} = \Delta U^n$.

Définissons $S U^*$ par

$$\left\{ I + \frac{\Delta t}{1 - \frac{y_B}{H}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(B - r_g \theta A) \cdot \right] \right\} S U^{n+1} = S U^* \quad (V-69)$$

Il reste :

$$\left\{ I + \frac{\Delta t}{1 - \frac{y_B}{H}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(1 - \frac{y_B}{H} \right) A \cdot \right] \right\} S U^* = \Delta U^n \quad (V-70)$$

Cette équation est résolue avec une approximation de la forme :

$$\left\{ I + \frac{\Delta t}{\left(1 - \frac{y_B}{H}\right)_I \Delta \left\{ I \right.} \left(1 - \frac{y_B}{H}\right)_I |A|_I \right\} \delta U_I^* =$$

$$\Delta U^n + \frac{\Delta t}{\left(1 - \frac{y_B}{H}\right)_I \Delta \left\{ I \right.} \left(1 - \frac{y_B}{H}\right)_{I \pm 1} |A|_{I \pm 1} \delta U_{I \pm 1}^* \quad (V-71)$$

avec $|A| = S X^{-1} \cdot D_A \cdot S X$

Les matrices $S X^{-1}$, D_A et $S X$ sont définies de la même façon que pour les équations en coordonnées cartésiennes.

Revenons maintenant à l'autre partie de l'approximation.

$$\left\{ I + \frac{\Delta t}{1 - \frac{y_B}{H}} \frac{\partial}{\partial \eta} (B - r_g \theta \cdot A) \right\} \delta U^{n+1} = \delta U^*$$

se transforme en

$$\left\{ I + \frac{\Delta t}{\left(1 - \frac{y_B}{H}\right) \Delta \eta} |B_J - r_g \theta_J \cdot A_J| \right\} \delta U_J^{n+1} =$$

$$\delta U_J^* + \frac{\Delta t}{\left(1 - \frac{y_B}{H}\right) \Delta \eta} |B_{J \pm 1} - r_g \theta_{J \pm 1} \cdot A_{J \pm 1}| \delta U_{J \pm 1}^{n+1} \quad (V-72)$$

avec $|B - r_g \theta \cdot A| = S_\eta^{-1} \cdot D_{B - r_g \theta \cdot A} \cdot S_\eta$

Pour diagonaliser la matrice $|B - r_g \theta \cdot A|$ il suffira de reprendre la procédure qui a été expliquée précédemment en insérant les matrices de rotation S_R et S_R^{-1} entre les matrices $S Y_2$ et $S Y_1$, $S Y_1^{-1}$ et $S Y_2^{-1}$ respectivement.

Les matrices de rotation sont définies par :

$$SR = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & \dots & & \vdots \\ & & & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (V-73)$$

$$SR^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & \dots & & \vdots \\ & & & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (V-74)$$



On aura ainsi :

$$\Lambda_{B-\Gamma_y\theta, A} = SY_2 \cdot SR \cdot SY_1 \cdot (B-\Gamma_y\theta, A) SY_1^{-1} \cdot SR^{-1} \cdot SY_2^{-1} \quad (V-75)$$

En développant ce produit de matrices on obtient comme matrice

V-6.- PRINCIPALES CARACTERISTIQUES DE LA PROCEDURE NUMERIQUE

V-6-1.- Conditions aux limites

Le traitement des conditions aux limites est une question de première importance pour l'obtention de la solution des équations de Navier Stokes. Ce problème est tout spécialement crucial dans le cas d'écoulements subsoniques compressibles. Il a été longtemps admis qu'un problème à l'intérieur d'un domaine limité par des limites subsoniques ne pouvait être correctement résolu que si le domaine de calcul s'était étendu jusqu'à l'infini (ref. [23]). Quoique correcte en théorie, cette approche est pénalisée par une très grande difficulté de mise en oeuvre et par un manque certain de généralité (réf. [24]). Des travaux plus récents ont modifié cette idée et ont montré qu'il était possible de calculer des écoulements limités par des frontières subsoniques sans avoir à étendre le domaine de calcul jusqu'à l'infini (réf. [25], [26], [27]).

Toutefois il n'est pas possible d'imposer les valeurs exactes de tous les paramètres physiques aux frontières. En effet, même si les valeurs initiales sont exactes, les valeurs calculées tendent à dégénérer quelque peu et des perturbations se développent si les valeurs de la pression et de la vitesse sont maintenues constantes. Un tel phénomène se produit parce que la solution des équations aux dérivées partielles et la solution des équations aux différences finies ne peuvent pas être identiques, à cause de l'existence des erreurs de troncature. De petites différences doivent être permises à tous les points nodaux, car des valeurs exactes imposées à un point, ne permettent pas une distribution correcte des erreurs de troncature et les points voisins sont affectés. Il est donc faux de penser qu'une prescription stricte des conditions exactes aux frontières est nécessaire pour obtenir une solution correcte, car si cela était vrai, la plupart des problèmes d'intérêt pratique ne pourraient pas être résolus numériquement. La connaissance de la solution exacte aux frontières implique en effet que cette solution exacte est connue presque partout. Les limites doivent pouvoir interroger avec les ondes qui les atteignent. L'approximation dans une solution numérique discrétisée n'étant pas tout-à-fait compatible avec la valeur exacte, les ondes générées par les erreurs de troncature doivent être laissées libre d'interagir avec les frontières, faut de quoi une solution sera obtenue pour laquelle ces erreurs seront mutuellement stabilisées par la présence d'ondes locales qui dépendront évidemment du maillage.



D'une façon plus générale, le choix et la qualité des conditions aux limites sont liés également à la nature mathématique des équations. Il est plus que probable que l'ensemble des équations d'évolution conserve les propriétés mathématiques de chacune des équations prises séparément. Le système est donc de nature hybride parabolique-hyperbolique en régime non permanent et elliptique-hyperbolique en régime permanent (réf. [28]). Il est clair que le choix correct des conditions aux limites est toujours gouverné par le caractère des équations qui dépend des dérivées d'ordre le plus élevé. La solution dépendra donc fortement des termes dissipatifs des équations même si ces termes sont négligeables presque partout dans le domaine de calcul. Jusqu'à présent, aucune évidence mathématique n'existe pour guider le choix des conditions aux limites susceptibles d'assurer l'existence et l'unicité de la solution. Il est donc nécessaire d'introduire un peu d'empirisme dans le problème mathématique en tenant compte à la fois de la signification physique du problème et de la nature mathématique des équations. Les conditions les plus simples sont d'imposer de façon plus ou moins rigide la valeur des variables sur les frontières : ce qui correspond à une condition scalaire par équation scalaire et par frontière. Après de nombreuses tentatives pour inclure la juste mesure d'empirisme (ou plutôt de physique) dans le problème mathématique (réf. [24], [30]), nous avons retenu l'ensemble des conditions aux limites suivantes pour le traitement de l'écoulement transonique confiné (réf. [21]).

a) Entrée subsonique

Pour un écoulement bidimensionnel, quatre conditions sont prescrites.

* la première assurera la nullité de la vitesse normale :

$$v = 0 \quad (V-79)$$

* les deux suivantes seront :

- débit massique constant,
- entropie constante (Bernoulli),

cela se traduira par :

$$\rho u = cte \quad (V-80)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = cte \quad (V-81)$$

* la dernière condition sera une relation caractéristique le long de la caractéristique C^- , qui permet l'influence aval - amont.

$$\Delta p - \rho c \cdot \Delta u + (u - c) \frac{\Delta t}{\Delta x} (\Delta_+ p - \rho c \Delta_+ u) = 0 \quad (V-82)$$

Si la première condition ne pose pas de problème, l'expérience a montré que la 2^{ème} et la 3^{ème} ne donnent pas de résultats satisfaisants sous cette forme (pas de convergence vers une solution stationnaire). Il est plus sûr de calculer les accroissements Δp , Δu et $\Delta \rho$ à chaque itération, ce qui laisse la place au couplage entre le domaine de calcul et sa frontière, tout en satisfaisant les équations (V-80) à (V-81). En y adjoignant la quatrième condition (V-82) on se ramène donc à un système de trois équations à trois inconnues qui s'écrit sous forme matricielle.

$$\begin{bmatrix} -\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho^2} & u & \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{1}{\rho} \\ u & \rho & 0 \\ 0 & -\rho c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p \\ \Delta u \\ \Delta \rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix} \quad (V-83)$$

avec
$$r = \frac{(u-c) \Delta t}{\Delta x} (\Delta_+ p - \rho c \Delta_+ u) \quad (V-84)$$

Δp , Δu et $\Delta \rho$ sont les incréments recherchés tandis que $\Delta_+ p$ et $\Delta_+ u$ sont des différences entre les points frontières et les premiers points intérieurs. La résolution du système (V-40) est immédiate.

$$\Delta u = \frac{-u \cdot r}{\frac{\gamma-1}{\gamma} \rho u^2 + p + \rho c u} \quad (V-85)$$

$$\Delta p = \frac{\rho r}{\frac{\gamma-1}{\gamma} \rho u^2 + p + \rho c u} \quad (\text{V-86})$$

$$\Delta p = \frac{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \rho u^2 + p\right) r}{\frac{\gamma-1}{\gamma} \rho u^2 + p + \rho c u} \quad (\text{V-87})$$

b) Sortie subsonique

De même que pour l'entrée subsonique, trois conditions sont données par l'amont tandis qu'une seule est fournie par l'aval réf. [32]. La condition "aval" la plus physique est naturellement la pression. C'est en effet le seul paramètre aval que l'on peut aisément contrôler durant le fonctionnement d'une soufflerie transsonique à l'aide d'un second col par exemple. Ecrivons les équations de Navier-Stokes en négligeant les gradients normaux.

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\partial \rho u}{\partial x} \quad (\text{V-88})$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) \quad (\text{V-89})$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) \quad (\text{V-90})$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - u \frac{\partial P}{\partial x} - \gamma P \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{V-91})$$

L'équation de l'énergie (V-91) peut aisément s'obtenir à partir de l'équation de continuité et de

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = c^2 = \frac{\gamma P}{\rho} \quad (\text{V-91bis})$$

L'équation (V-89) peut se réécrire, à l'aide de (V-88) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (\text{V-92})$$

Si la pression de sortie est constante on aura :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\gamma P}{u} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (V-93)$$

Soient 2 et 1 les indices respectifs pour le point frontière et son premier point voisin intérieur. Nous avons alors deux possibilités pour calculer la vitesse longitudinale :

$$P_2 - P_1 = -\frac{\gamma P_2}{u_2} (u_2 - u_1) \Rightarrow u_2 = \frac{\gamma P_2 u_1}{(\gamma+1)P_2 + P_1} \quad (V-94)$$

ou

$$P_2 - P_1 = -\frac{\gamma P_2}{u_1} (u_2 - u_1) \Rightarrow u_2 = u_1 \left(1 - \frac{P_2 - P_1}{\gamma P_2}\right) \quad (V-95)$$

Nous pouvons résumer les quatre conditions, dans l'ordre :

$$\left[\begin{array}{l} \Delta P = -\frac{\Delta t}{\Delta x} [(Pu)_2 - (Pu)_1] \\ \Delta(Pu) = -\frac{\Delta t}{\Delta x} [(Pu)_2 (u)_2 - (Pu)_1 (u)_1] \\ P = \text{cte} \\ u_2 \begin{array}{l} \nearrow (V-94) \\ \text{ou} \\ \searrow (V-95) \end{array} \end{array} \right. \quad (V-96)$$



c) Ecoulements supersoniques

Les conditions sont plus faciles à imposer car dans ce cas, il n'y a pas d'influence aval amont possible. Une prescription stricte des variables est donc possible sur la limite amont. Si la limite aval est subsonique, une condition du type Neumann est appliquée pour les quatre variables.

d) Conditions aux limites à la paroi

Le problème du traitement des conditions aux limites sur une paroi rigide imperméable en écoulement visqueux compressible se ramène uniquement à la détermination de la pression ou de la masse volumique. En effet, la condition d'adhérence impose que la vitesse est nulle sur la paroi. D'autre part, la température de paroi ou le flux de chaleur qui la traverse sont imposées de l'extérieur. Les conditions aux limites du type miroir sont donc simplement employées pour la vitesse et la température. La pression de paroi (ou la masse volumique) ne peut pas être obtenue par les conditions aux limites et doit donc être déduite des équations de Navier-Stokes elles mêmes.

Une première valeur de la pression P est obtenue de l'équation

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \text{ou} \quad P_1 = P_2 = P_{\text{wall}} \quad (\text{V-97})$$

puis cette valeur est corrigée à l'aide d'une relation caractéristique qui prédira la pression en avance (réf. [31]). Cette relation caractéristique découle d'une combinaison des deux équations de mouvement suivantes :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (\text{V-98})$$

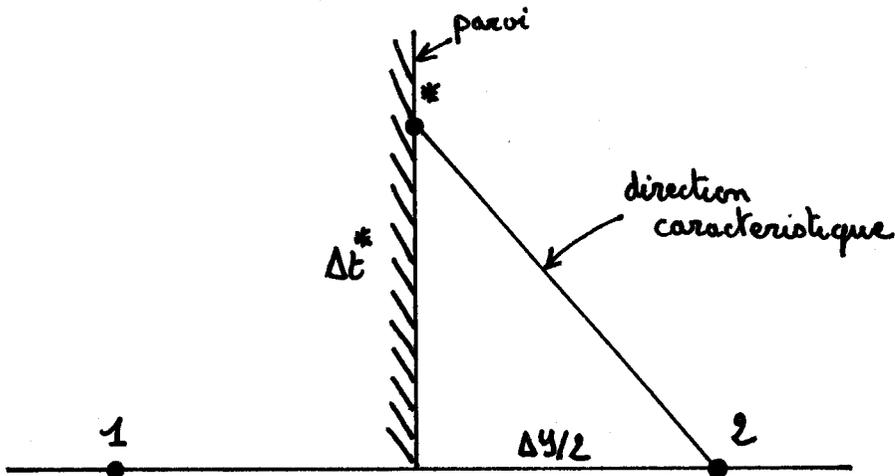
$$\frac{\partial P}{\partial t} = -v \frac{\partial P}{\partial y} - \gamma P \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{V-99})$$

Il vient alors :

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \rho c \frac{\partial v}{\partial t} = -(v-c) \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \rho c \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (\text{V-100})$$

Supposant que (ρc) est constant et que $v \ll c$ près de la paroi, nous obtenons l'équation caractéristique suivante :

$$\frac{d}{dt} (P - \rho c v) - c \frac{d}{dy} (P - \rho c v) = 0 \quad (\text{V-101})$$



La direction caractéristique est définie par $c \Delta t^* = \Delta y/2$.

Si nous appliquons l'équation (V-59) entre les points 2 et * il vient :

$$P^* - \rho c u^* = P_2 - \rho c u_2 \quad (V-102)$$

L'imperméabilité de la paroi nécessite que $u^* = 0$.

La pression de paroi atteindra donc la valeur P^* au temps $t = t^* + \Delta t^*$

Le pas de temps qui est utilisé dans le programme est habituellement beaucoup plus grand que $\Delta t^* = \frac{\Delta y_{wall}}{2c}$. Toutefois en fonctionnement strictement explicite, le pas de temps Δt est inférieur à Δt^* . La correction utilisée dans le programme a la forme :

$$P_1 = P_2 - \frac{\alpha \rho c u}{1 + \alpha} \quad (V-103)$$

avec
$$\alpha = \frac{\Delta t \cdot c}{\Delta y/2} \quad (V-104)$$

Si Δt est grand $\frac{\alpha}{1+\alpha} \sim 1$ et la correction est utilisée dans son entier. Si $\Delta t = \Delta t^*$ on a alors $\frac{\alpha}{1+\alpha} = \frac{1}{2}$ et seulement la moitié de la correction est utilisée. Si $\frac{\alpha}{\Delta t}$ est petit, $\frac{\alpha}{1+\alpha} \sim 0$ et il n'y a pas de correction.

e) Conditions aux limites dans l'écoulement non visqueux.

Ce type de condition aux limites se traite très simplement par des conditions de Dirichlet ou Neumann dépendant de la traversée ou de la non-traversée de la frontière par une onde de choc.

f) Conditions initiales

Comme l'indique le titre de cette thèse, l'un des objectifs de ce travail est de développer un outil numérique capable de prédire une certaine classe d'écoulements turbulents compressibles complexes. Pour assurer ce potentiel de prédiction, il a été choisi d'initialiser les calculs avec aussi peu d'information que possible au sujet de la structure ou des caractéristiques de l'écoulement qui est étudié et qui n'est pas supposé connu a priori. Pour illustrer cela nous donnerons deux exemples.

* couche limite supersonique.

Les vitesses, pressions et températures sont supposées constantes et égales aux valeurs dans l'écoulement non visqueux, partout sauf sur les points $J=1$, miroirs qui se trouvent en dehors du domaine physique. Sur ces points seulement, les valeurs sont modifiées pour assurer la condition d'adhérence et imposer une température ou un flux de chaleur de paroi donnés.

* tuyère transsonique.

De même que pour la couche limite supersonique, le nombre de Mach est supposé constant et égal à la valeur à l'entrée de la tuyère. On néglige donc les variations de section dans le champ initial. Seule la pression aval est donnée dès le début du calcul sur la dernière colonne de points à la sortie de la tuyère.

Le choix de tels champs initiaux est en fait un critère très sévère pour tester la qualité des conditions aux limites. En effet, des conditions aux limites moins rigoureuses permettraient de conserver une solution déjà convergée mais ne supporteraient aucun régime transitoire.

V-6-2.- Conditions d'exécution

Grâce à la présence des opérateurs implicites, cette méthode s'est montrée plus performante que les autres méthodes existantes par sa rapidité d'exécution. Tandis qu'une limite infranchissable des méthodes explicite est :

$$C.F.L = 1$$

nous avons pu utiliser des valeurs de ce nombre de Courant supérieures à 9. Quoique ce concept de nombre de Courant ait été développé originellement pour des calculs non visqueux, il permet néanmoins de mesurer le progrès qui est

obtenu dans le sens de la diminution de la taille des mailles de calcul à l'approche de la paroi. Tandis que, pour la version explicite [1] la condition

$$C.F.L \leq 1$$

est à la fois un critère de précision et de stabilité, la présente méthode, si elle ne souffre pas de strictes limitations sur la valeur du pas de temps exige quand même que les conditions de précision soient satisfaites.

$$\frac{\nu \Delta t}{\rho \Delta y^2}, \frac{\nu \Delta t}{\rho \Delta x^2}$$

bornées.

Ordinairement la borne est de l'ordre de l'unité, mais il a été observé, pour certains calculs de couche limite ayant des valeurs suffisamment petites de $y^+(z)$, qu'avec des valeurs de l'ordre de 10 pour cette borne les calculs restaient précis et convergèrent normalement.

Un défaut du schéma de Mac Cormack est la dépendance formelle à la valeur du pas de temps des solutions stationnaires (réf. [12],[33]). L'expérience que nous avons acquise durant ce travail est que cette dépendance n'est absolument pas critique pourvu que la convergence soit observée à travers un critère suffisamment rigoureux. Dans un esprit de purisme, il est toutefois possible de pallier cette faiblesse en diminuant progressivement la valeur du pas de temps à la fin des calculs (réf. [3]).

Le critère qui a été sélectionné pour observer la convergence de la solution est l'écart relatif de la moyenne des moindres carrés des coefficients des frottements sur la paroi solide. Certaines configurations simples ont montré une convergence impressionnante : par exemple un calcul de couche limite avec un nombre de Mach égal à 3 et un nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement égal à 10^4 a donné un critère de convergence inférieur à 10^{-14} en 300 pas de temps. De façon plus générale un calcul est considéré comme convergé si le critère de convergence est inférieur à 10^{-6} .

Une telle convergence est atteinte dans le cas de la tuyère transonique après un millier de pas de temps.

CHAPITRE VREFERENCES

- [1] R.W. MAC CORMACK (1969)
"The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering"
AIAA paper n° 69-354.
- [2] R.W. MAC CORMACK (1976)
"An efficient numerical method for solving the time dependent compressible Navier-Stokes equations at high Reynolds number".
Computing in Applied Mechanics, AMD vol. 18,
The American Society of Mechanical Engineers.
- [3] R.W. MAC CORMACK (1981)
"A numerical method for solving the equations of compressible viscous flow".
AIAA paper n° 81-0110.
- [4] P.D. LAX et B. WENDROFF (1960)
"Systems of conservation laws".
Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. 13, pp. 217-237.
- [5] P.D. LAX et B. WENDROFF (1964)
"Difference schemes with high order of accuracy for solving hyperbolic equations".
Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. 17, p. 381.
- [6] R.D. RICHTMYER (1963)
"A survey of difference methods for nonsteady fluid dynamics."
NCAR Technical Note 63-2. Boulder. Colorado.
- [7] R.M. BEAM et R.F. WARNING (1978)
"An implicit factored scheme for the compressible Navier-Stokes equations".
AIAA. J. vol. 16, n° 4, pp. 393-402.

- [8] G.K. BATCHELOR (1967)
"An introduction to fluid dynamics".
Cambridge University Press.
- [9] H. SCHLICHTING (1968)
"Boundary layer theory".
6ème édition. Mc Graw-Hill book Company - New-York.
- [10] A.H. SHAPIRO (1953)
"The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow".
Vol. I et II. Ronald Press. New York.
- [11] H.W. LIEPMAN et A. ROSHKO (1957)
"Elements of gas dynamics".
Wiley.
- [12] P.J. ROACHE (1972)
"Computational fluid dynamics".
Hermosa Publishers - Albuquerque - New Mexico.
- [13] R.D. RICHTMYER (1957)
"Difference methods for initial value problems".
Interscience Publishers Inc. New York.
- [14] V.J. SKOGLUND et J.K. COLE (1966)
"Numerical analysis of the interaction of an oblique shock wave and a
laminar boundary layer".
Bureau of Engineering Research report n° ME 23.
University of New Mexico. Albuquerque.
- [15] S.K. GODUNOV, A.W. ZABRODYN et G.P. PROKOPOV (1959)
"A computational scheme for two-dimensional non-stationary problems of
gas dynamics and calculation of the flow from a shock wave approaching
a stationary state".
U.S.S.R. J. Computational Mathematics and Mathematical Physics,
pp. 1187-1219.

- [16] G. MORETTI et G. BLEICH (1968)
"Three dimensional inviscid flow about supersonic blunt cones at angle of attack".
SC-RR-68-3728, Sandia Laboratories - Albuquerque - New Mexico.
- [17] G. MORETTI et M.D. SALAS (1969)
"The blunt body problem for a viscous rarefied gas flow".
AIAA paper n° 69-139 - New York.
- [18] R.W. BRILEY et H. Mc DONALD
"Solutions of the three dimensional compressible Navier-Stokes equations by an implicit technique".
Lecture Notes in Physics - Springer Verlag, vol. 35, pp. 105-110.
- [19] G.S. SETTLES, T.J. FITZPATRICK et S.M. BOGDONOFF (1979)
"Detailed study of attached and separated compression corner flow fields in high Reynolds number supersonic flow".
AIAA J. - 17 pp. 579-585.
- [20] J.P. DUSSAUGE et J. GAVIGLIO (1980)
"Turbulent boundary layer expansion interaction at supersonic speed".
Travaux - IMST - ONERA. Université d'Aix-Marseille. Voir aussi
"The 1980-81 AFOSR-HTTM-Stanford conference on complex turbulent flows - Comparison of computation and experiment - Volume I" Université de Stanford.
- [21] J. DELERY et P. LE DIUZET (1979)
"Décollement résultant d'une interaction onde de choc-couche limite turbulente".
ONERA, T.P. n° 1979-146.
- [22] R.D. RICHTMYER et K.W. MORTON (1967)
"Difference methods for initial value problems".
Second edition. Interscience Publishers - Wiley and Son.
- [23] G. MORETTI (1969)
"Importance of boundary conditions in the numerical treatment of hyperbolic equations".
Physics of Fluids Supplement II, pp. 13-20.

- [24] G. MORETTI et M. PANDOLFI (1981)
"Critical study of calculations of subsonic flows in ducts."
AIAA J. vol. 19, n° 4, pp. 449-457.
- [25] R.A. SERRA (1972)
"Determination of internal gas flows by a transient numerical technique".
AIAA J. vol. 10, pp. 603-611.
- [26] M. PANDOLFI et L. ZANNETTI (1978)
"Some permeable boundaries in multidimensional unsteady flows".
Lecture Notes in Physics, vol. 90, pp. 439-446.
- [27] M. PANDOLFI et L. ZANNETTI (1978)
"Some tests on finite difference algorithms for computing boundaries in
hyperbolic flows".
Notes on numerical fluid mechanics. vol. 1, p. 68, edited by K. Forster,
Vieweg Publishers.
- [28] R. PEYRET et H. VIVIAND (1975)
"Computation of viscous compressible flows based on the Navier Stokes
equations".
AGARD Ograph n° 212.
- [29] H. VIVIAND (1974)
"Formes conservatives des équations de la dynamique des gaz".
La recherche Aérospatiale, n° 1, pp. 65-66.
- [30] D.H. RUDY et J.C. STRIKWERDA
"A non reflecting outflow boundary condition for subsonic Navier-Stokes
calculations".
Journal of Computational Physics - vol. 36, n° 1, Juin 1980.
- [31] R.W. MAC CORMACK (1982)
Private communication.

- [32] H.O. KREISS (1970)
"Initial boundary value problems for hyperbolic systems".
Comm. Pure Appl. Math. Vol. 23, pp. 277-298.
- [33] W. SCHMIDT et A. JAMESON (1982)
"Recent developments in finite volume time dependent techniques for two
and three dimensional transonic flows".
VKI Lecture Series - 1982-04.

CHAPITRE VI

QUELQUES RESULTATS

CHAPITRE VILES RESULTATS

VI-1.- LE MELANGE ISOTHERME.

VI-1-1.- Modèle $k-\epsilon$ pour écoulement à masse volumique constante.VI-1-2.- Modèle $k-\epsilon$ pour écoulement à masse volumique variable.VI-1-3.- Modèle $k-\epsilon$ modifié pour écoulement à masse volumique variable.

VI-1-4.- Modèle RSE pour écoulement à masse volumique constante.

VI-1-5.- Fermeture au second ordre pour écoulement à masse volumique variable.

VI-2.- LA COUCHE DE MELANGE.

VI-2-1.- Influence du rapport des vitesses.

VI-2-2.- Influence des rapports des masses volumiques.

VI-2-3.- Influence du nombre de Mach.

VI-3.- L'INTERACTION ONDE DE CHOC - COUCHE LIMITE.

VI-3-1.- La couche limite compressible.

VI-3.2.- L'interaction onde de choc-couche limite turbulente.

VI.- LES RESULTATS

Après l'établissement des équations de la turbulence et la modélisation des termes inconnus, les modèles de turbulence ainsi formés sont confrontés aux données expérimentales pour vérifier leur capacité à prédire des écoulements réels. Dans les deux catégories de problèmes considérés, la difficulté ira croissante, tant du point de vue des modèles de turbulence que la complexité de l'écoulement considéré.

VI-1.- LE MELANGE ISOTHERME

La première série de résultats exclut les effets de compressibilité. On s'intéressera seulement au mélange à basse vitesse de deux gaz de masses moléculaires différentes. Tous les cas considérés dans cette partie pouvant se formuler avec l'approximation de couche limite (parabolique par rapport à la direction longitudinale), la méthode numérique qui est utilisée ici est celle qui a été décrite dans le chapitre IV.

VI-1-1.- Modèle $k-\epsilon$ pour écoulement à masse volumique constante

Une vérification préliminaire de ce modèle de turbulence est la prédiction d'un écoulement libre cisailé simple sans aucun effet de fluctuation de masse volumique ou de gradient de pression. Ce premier cas test est fourni par les travaux expérimentaux de GUTMARK et WYGNANSKI [1] sur le jet plan turbulent.

A) Configuration expérimentale

Un croquis de cet écoulement simple de jet libre est donné sur la figure (VI-1).

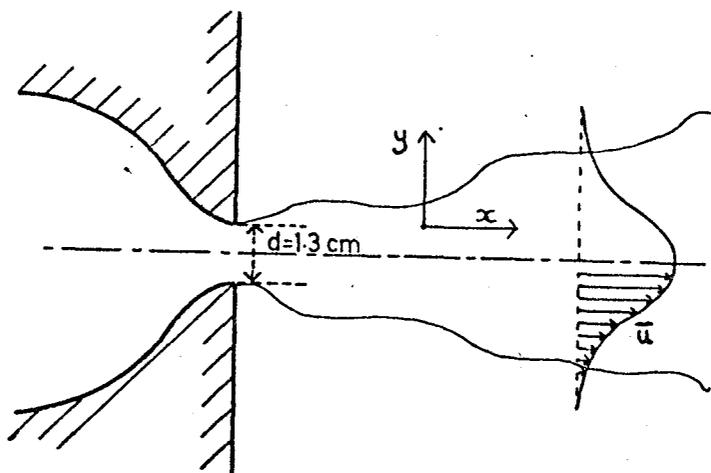


fig. (VI-1) - Jet plan turbulent.

Un jet d'air se décharge dans une atmosphère au repos avec une vitesse nominale de sortie égale à 35 m/s. Les dimensions de la fente d'injection sont 1,3 cm pour l'épaisseur et 50 cm pour l'envergure. La bidimensionnalité de l'écoulement est assurée dans la plus grande partie du jet (excepté dans le voisinage des parois latérales). Le nombre de Reynolds à la sortie, basé sur l'épaisseur de la fente est de $3 \cdot 10^4$ et le niveau de turbulence est approximativement 0.2 %. Le lecteur est renvoyé à la référence [1] pour une description détaillée des techniques de mesure. Dans l'esprit d'une comparaison avec les résultats d'un modèle de turbulence à deux équations, les mesures suivantes sont disponibles :

- le taux de dispersion de l'écoulement,
- les vitesses moyennes longitudinale et normale,
- l'énergie cinétique de turbulence,
- les contraintes de Reynolds,
- le taux de dissipation de l'énergie de turbulence.

B) Traitement numérique

Cet écoulement étant isovolume et homogène, les équations nécessaires sont :

- l'équation de continuité,
- l'équation de quantité de mouvement,
- l'équation de l'énergie cinétique de turbulence,
- l'équation du taux de dissipation.

L'équation de continuité est prise en compte implicitement par la technique numérique. Ainsi seulement trois équations de transport doivent être résolues. A cause du caractère parabolique de la méthode, les valeurs initiales et les conditions aux limites doivent être données pour la vitesse longitudinale moyenne \bar{u} , l'énergie cinétique de turbulence k et son taux de dissipation ϵ . On notera au passage que le caractère isovolume de l'écoulement enlève toute différence entre les moyennes pondérée et non pondérée.

B-1.- Conditions initiales

A cause de la forme particulière de la tuyère produisant le jet (partie fortement convergente avant le plan de sortie), il n'est pas acceptable de commencer le calcul avec un profil de vitesse semblable à celui d'un écoulement de tuyau établi. Le profil de vitesse initiale est un profil en marche d'escalier avec un léger arrondi pour prendre en compte l'effet d'une

très fine couche limite laminaire. La vitesse dans le coeur de l'écoulement est 35 m/s tandis que la vitesse extérieure au jet est égale au centième de cette valeur (cette vitesse non nulle est due au fait que le programme ne tolère pas de vitesse longitudinale négative ou nulle). Il est certain qu'après de tels effets de courbure sur la couche limite de paroi, il est inutile de supposer un profil de vitesse de couche limite de plaque plane et que, même si le profil de marche d'escalier, n'est pas tout-à-fait exact il n'est probablement pas plus erroné que n'importe quel profil calculé. Comme l'écoulement à la sortie a un niveau de turbulence très bas (0.2 %), il peut être raisonnablement espéré que les valeurs initiales de \bar{k} et ϵ n'ont pas grande importance sur le développement de l'écoulement. Pour des raisons similaires le niveau de turbulence dans l'écoulement de sortie est supposée constant et est fixé par la valeur expérimentale reportée par Gutmark et Wygnanski. Cette hypothèse de niveau constant de turbulence n'est pas physiquement très précise. Très probablement, le profil de \bar{k} n'est pas constant et comporte certainement un maximum au voisinage de la paroi de la tuyère à cause du cisaillement dans la couche limite. Néanmoins le frottement turbulent induit par un tel effet est négligeable comparé aux effets de la viscosité laminaire. De ce fait, la dissipation ϵ est choisie constante et correspondant à une valeur de la viscosité turbulente égale ou même plusieurs ordres de grandeur plus petite que la viscosité laminaire.

La viscosité turbulente est définie par

$$\mu_t = C_D \bar{\rho} \frac{\bar{k}^2}{\epsilon} \quad (\text{VI-1})$$

ou $\bar{\rho}$ est la masse volumique et C_D une constante dont la valeur est donnée dans la table I.

B-2.- Conditions aux limites

Des conditions aux limites sont aussi nécessaires pour résoudre ces équations de transport paraboliques. A cause de la symétrie de l'écoulement, le calcul est effectué sur une moitié du domaine. Le plan de symétrie de l'écoulement est considéré comme la frontière intérieure et l'atmosphère au repos (avec une petite vitesse non nulle) est la frontière extérieure. Ces considérations impliquent que pour toutes les variables, la condition à la limite intérieure est du type Neumann :

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \quad (\text{VI-2})$$

Comme le domaine de calcul évolue avec l'abscisse, la valeur extérieure de la vitesse longitudinale est gardée constante et égale à sa valeur initiale. Pour les variables de la turbulence, les valeurs à la frontière peuvent être calculées à partir des formes limites des équations de transport obtenues en prenant tous les gradients transverses égaux à zéro [2]. Il s'ensuit ainsi pour $y = y_{ext}$ les équations pour les valeurs limites de k et ε .

$$\left. \begin{aligned} u_{ext} \frac{\partial k_{ext}}{\partial x} &= - \varepsilon_{ext} \\ u_{ext} \frac{\partial \varepsilon_{ext}}{\partial x} &= - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon_{ext}^2}{k_{ext}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI-3})$$

L'expérience montre cependant que, pour les variables de turbulence, la transformation de ces conditions de Dirichlet évolutives en conditions de Dirichlet à valeurs constantes ou même en conditions de Neumann (par exemple $\frac{\partial}{\partial y} = 0$) ne modifie pas de façon significative la prédiction de l'écoulement.

b-3.- Constantes du modèle

Les constantes utilisées dans ce modèle sont données dans le tableau (VI-1). Elles ont des valeurs standard tirées de la littérature [4] [10].

C_D	σ_k	σ_ε	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$
0.09	1.0	1.3	1.45	2.0

Tableau VI-1.- Constantes du modèle
(écoulement à masse volumique constante).

C) Résultats

Une fois que les diverses conditions aux limites ont été établies, les résultats des calculs numériques sont analysés et comparés aux résultats expérimentaux.

C-1.- Taux de dispersion

Une caractéristique majeure d'un écoulement de jet est le taux de dispersion, défini comme le taux avec lequel augmente une épaisseur caractéristique du jet, ou le taux avec lequel diminue la vitesse sur la ligne centrale. L'importance d'un tel paramètre est due au fait que sa valeur est la conséquence du comportement de toutes les variables de l'écoulement. Comme nous l'avons mentionné précédemment, deux paramètres différents peuvent décrire le taux de dispersion. Une épaisseur caractéristique du jet peut être définie en prenant la distance $y_{1/2}$ entre le plan de symétrie et le point où la vitesse est égale à la moitié de la vitesse axiale. Le paramètre de décroissance de la vitesse sur l'axe est défini par le carré du rapport de la vitesse axiale initiale U_0 à la vitesse axiale locale U_m , c'est-à-dire $(U_0/U_m)^2$. Les résultats concernant ces deux paramètres sont rapportés par les figures (VI-2) et (VI-3) et comparés avec les résultats expérimentaux.

La prédiction de la croissance du jet n'est pas parfaite. D'après les résultats expérimentaux le jet s'ouvre linéairement.

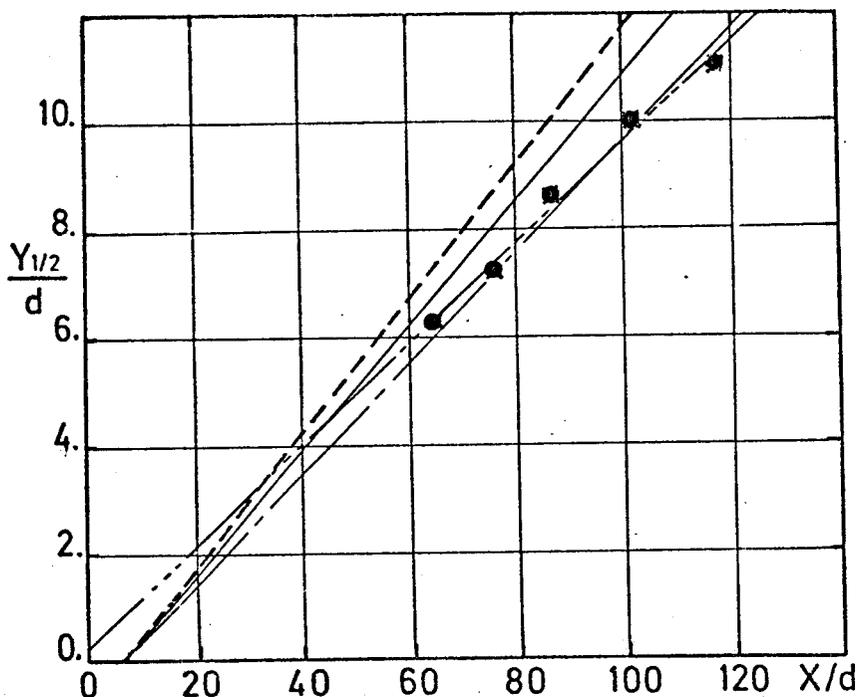


Fig. VI-2.- Croissance du jet plan.

., — — — — — : exp [1]; ---- calcul.
 ————— Heskestad [3] ; - - - - - exp [1]
 (incluant l'origine virtuelle prédite).

selon la relation

$$y_{1/2} \approx 0.1 (x - x_0) \quad (\text{VI-4})$$

avec $x_0 = -2d$ tandis que le calcul numérique prédit effectivement la linéarité de la croissance mais avec des paramètres sensiblement différents.

$$y_{1/2} \approx 0.12 (x - x_0) \quad (\text{VI-5})$$

avec $x_0 = 6d$. Ces résultats sont beaucoup plus proches des résultats expérimentaux de HESKESTAD [3] qui rapporte la même origine virtuelle avec un taux de dispersion plus proche, de l'ordre de 0.11. Selon GUTMARK et WYGNANSKI [1], les conditions initiales de HESKESTAD sont différentes, dans le sens que le profil de vitesse du jet émergent est plus proche de celui d'un écoulement de tuyau et a aussi un taux de turbulence plus élevé (2 à 4 %).

Dans notre esprit, la différence entre nos prédictions et les résultats expérimentaux est surtout due à la grossière approximation du profil de vitesse initiale en marche d'escalier. Des calculs furent faits en diminuant le niveau de turbulence jusqu'à 0.01 % sans changer notablement le taux de dispersion. A cause de la grande variété des taux de dispersion expérimentaux obtenus seulement en modifiant légèrement les conditions initiales (fil de transition, uniformité du champ de vitesse), il semble qu'un état universel d'équilibre ne puisse être atteint qu'à une distance aval relativement importante (par exemple $x > 50d$). La courbe de décroissance de la vitesse axiale (figure VI-3) montre un accord meilleur avec les résultats expérimentaux.

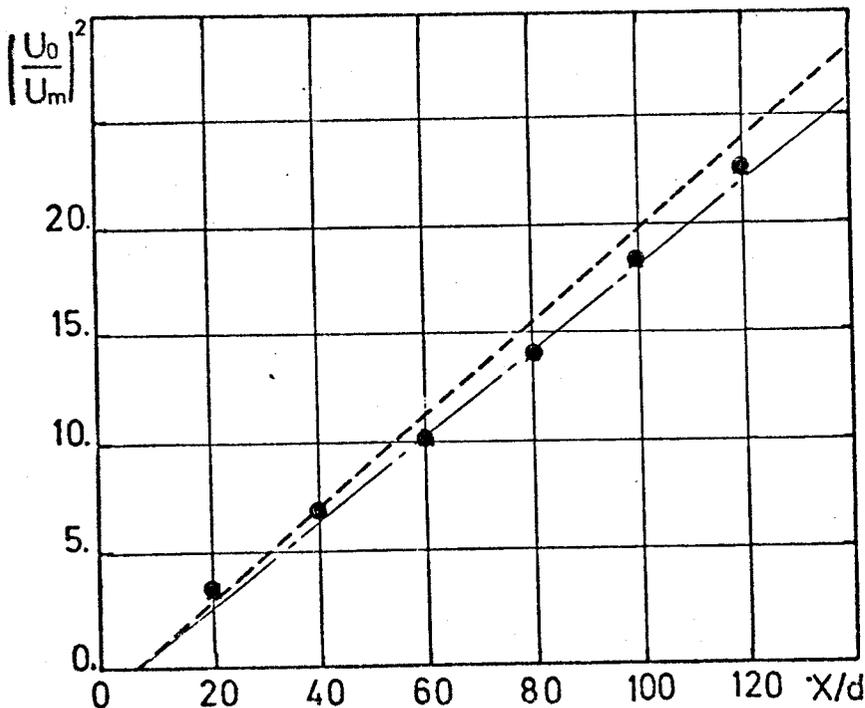


Fig. VI-3.-
Décroissance de la
vitesse axiale du
jet plan.

--- : exp [1];
— : calcul.

La loi générale de décroissance

$$U_m \sim x^{-1/2} \quad (\text{VI-6})$$

est correctement prédite avec une pente légèrement différente (8 %) mais avec la même origine virtuelle :

$$\text{expériences : } \left(\frac{U_o}{U_m}\right)^2 \simeq 0.190 \left(\frac{x}{d} - 6\right) \quad (\text{VI-7})$$

$$\text{calculs : } \left(\frac{U_o}{U_m}\right)^2 \simeq 0.207 \left(\frac{x}{d} - 6\right) \quad (\text{VI-8})$$

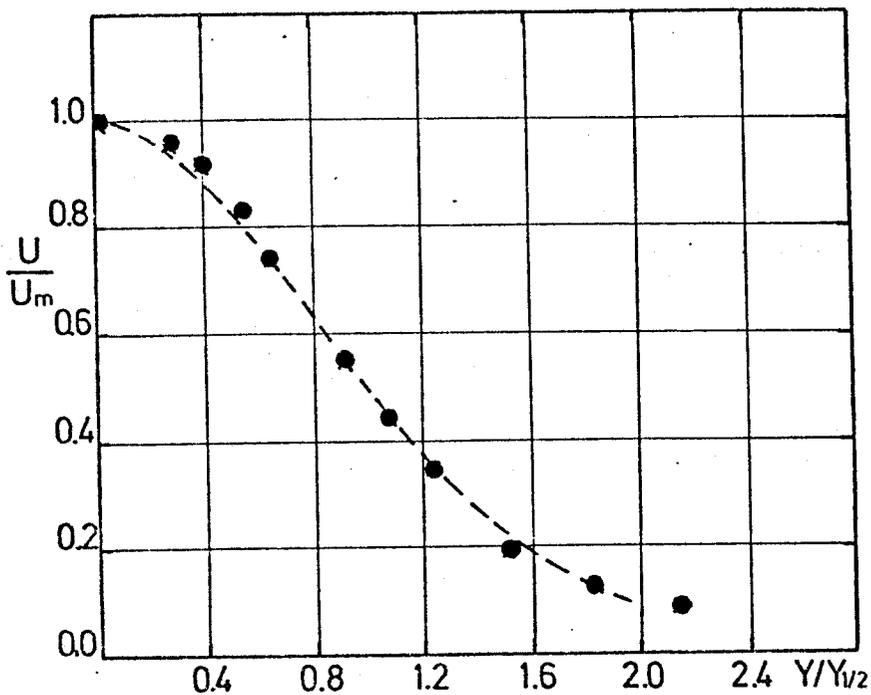
C-2.- Profil de vitesse moyenne

L'accord entre le calcul et les résultats expérimentaux est très bon. La comparaison est faite pour une position, correspondant à $x/d = 103$ (fig. VI-4) mais le même accord est obtenu à différentes positions pourvu que les résultats soient pris dans la partie du jet où les profils moyens sont en équilibre. A cause du manque de données expérimentales, nous ne pouvons tirer aucune conclusion au sujet de l'écoulement au coeur du jet. La vitesse moyenne est normalisée par sa valeur sur la ligne centrale et la variable d'abscisse est la distance sans dimension η du plan de symétrie, telle que

$$\eta = \frac{y}{y_{1/2}} \quad (\text{VI-9})$$

Fig. VI-4.-
Profil de
vitesse
moyenne longi-
tudinale du jet
plan ($x = 103$) $\frac{U}{U_m}$

● exp [1];
--- calcul.



C-3.- Variables de turbulence

Dans [1] les valeurs RMS conventionnelles des trois composantes de vitesse sont rapportées. De telles quantités ne sont pas prédites par le présent modèle, aussi la comparaison ne peut être faite que pour l'énergie de turbulence k , la demi trace du tenseur des contraintes de Reynolds.

$$k = \frac{1}{2} \left[\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right] \quad (\text{VI-10})$$

L'équation (VI-10) permet de calculer k à partir des valeurs expérimentales. Les résultats sont rapportés sur la figure (VI-5) et comparés avec les prédictions du modèle.

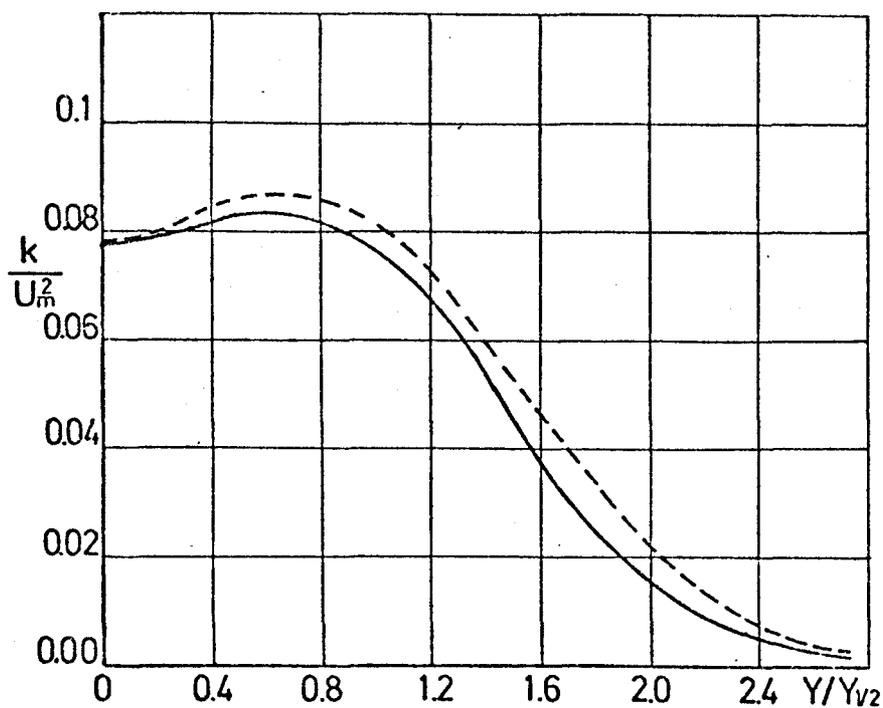


Fig. VI-5.- Distribution de l'énergie cinétique de turbulence à travers le jet plan ($x_d = 106$);
 — exp 1, ---- calcul.

L'accord entre les résultats expérimentaux et les calculs est tout à fait satisfaisant. Comme le montrent les expériences, les intensités normalisées de turbulence dans le plan central du jet atteignent leur état d'équilibre à une distance approximative d'environ 30 épaisseurs de fente de la tuyère. Ce qui signifie aussi que après $30 \times d$ en aval du plan d'émergence, la différence entre la valeur de k/U_m^2 dans le plan central et sa valeur aval asymptotique est inférieure à 10 % (voir figure VI-6).

A partir des quantités de turbulence qui sont calculées dans ce modèle de turbulence, les contraintes de cisaillement turbulent peuvent être

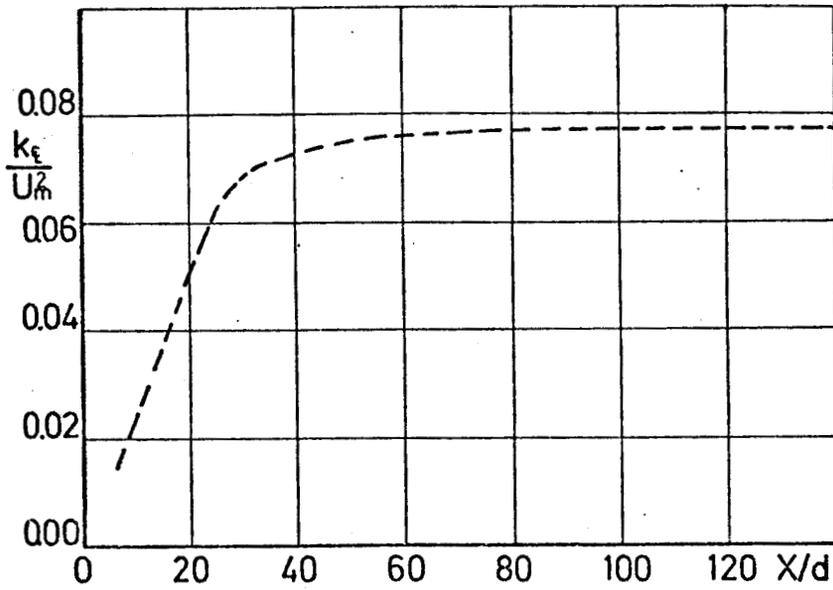


Fig. VI-6.- Décroissance prédite de l'énergie cinétique de turbulence normalisée sur la ligne centrale du jet plan.

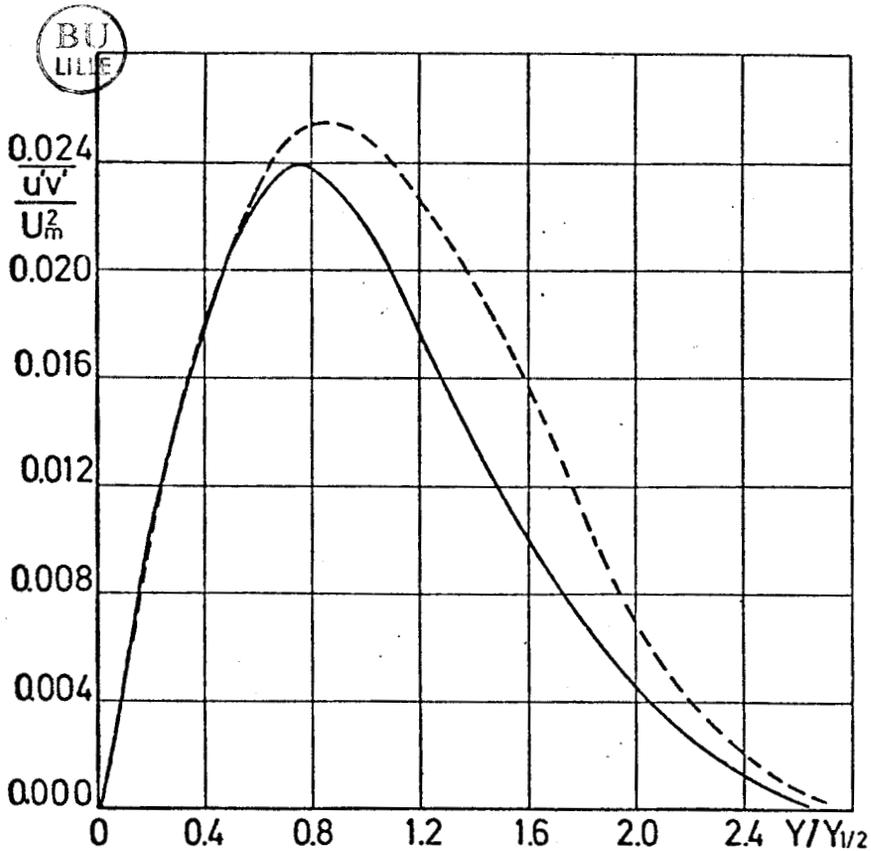


Fig. VI-7.- Distribution des contraintes de Reynolds à travers le jet plan ($\frac{x}{d} = 106$); — exp [1], --- calcul.

évaluées avec l'approximation de Boussinesq (pour un écoulement de type couche limite) :

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (\text{VI-II})$$

dans laquelle $\nu_t = C_D \bar{k}^2 / \epsilon$, ϵ est le taux de dissipation de \bar{k} . La valeur de la constante C_D est donnée dans le tableau (VI-1). L'équation (VI-II) permet donc une comparaison entre les contraintes de Reynolds calculées et mesurées. La prédiction est correcte excepté dans la partie intermittente de l'écoulement où le frottement turbulent est légèrement surestimé par le modèle $\bar{k}-\epsilon$.

VI-1-2.- Modèle $\bar{k}-\epsilon$ pour écoulement à masse volumique variable.

Les variations de masse volumique sont la conséquence du mélange de gaz ayant des masses moléculaires très différentes, même dans des écoulements à vitesse modérée. Des expériences correspondant à ce type d'écoulement furent rapportées en 1972 par ROSHKO [5] et en 1973 avec plus de détails par REBOLLO [6].

A) Configuration expérimentale

Le type d'écoulement couvert par les expériences est un écoulement plan de cisaillement sous forme de couche de mélange. Deux gaz, ayant des masses volumiques différentes aux mêmes conditions de pression et de température s'écoulent avec des vitesses parallèles de chaque côté d'une mince plaque plane. Ainsi les deux composants se mélangent dans la couche de cisaillement qui se développe en aval de la plaque de séparation. A cause des masses volumiques différentes des courants émergents, des fluctuations dans la masse volumique du mélange sont présentes dans l'écoulement cisailé. Les expériences de REBOLLO [6] concernent le mélange d'hélium et d'azote à une pression $p = 4$ atm. Les vitesses et masses volumiques des écoulements de gaz pur donnent les valeurs limites (fig. VI-2).

$$\begin{array}{l} \text{Helium} \\ \text{Azote} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \rho_E = 0.641 \text{ kg/m}^3 \\ U_E = 10.9 \text{ m/s} \\ \rho_I = 4.49 \text{ kg/m}^3 \\ U_I = 4.12 \text{ m/s} \end{array} \right.$$

Pour ces courants, les nombres de Reynolds respectifs par unité de longueur sont alors

$$Re_E = 3600 \text{ cm}^{-1} \quad (\text{Helium})$$

$$Re_I = 12000 \text{ cm}^{-1} \quad (\text{Azote})$$

De plus l'écoulement satisfait la condition d'équilibre

$$p_I U_I^2 = p_E U_E^2 \quad (\text{VI-13})$$

Dans sa thèse, REBOLLO [6] a considéré deux configurations différentes d'écoulement. Tout d'abord, le gradient de pression longitudinal est égal à zéro. Ce qui signifie que les valeurs limites de la vitesse sont constantes. Le second correspond à un gradient de pression positif. Pour un écoulement en équilibre [6], le gradient de pression est caractérisé par la constance du paramètre de Falkner-Skan α , défini par

$$\alpha = \frac{x}{U} \frac{\partial U}{\partial x} \quad (\text{VI-14})$$

Deux valeurs différentes de α sont considérées, correspondant respectivement à des gradients de pression positif et nul.

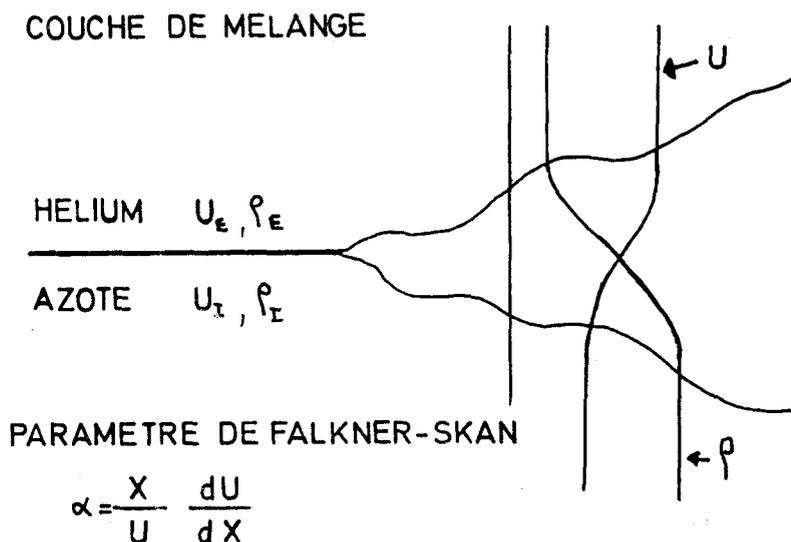


Fig. VI-8.- Configuration de l'écoulement de couche de mélange à masse volumique variable.

B) Traitement numérique

En addition aux équations utilisées dans le cas précédent, il est nécessaire de résoudre les équations de transport pour la fraction massique et les fluctuations de masse volumique afin de décrire correctement le processus de mélange avec ou sans gradient de pression.

B-1.- Conditions initiales

Des conditions initiales doivent être données pour toutes les équations de transport. De chaque côté de la plaque de séparation le profil de vitesse est à niveau constant et à la valeur nominale excepté au voisinage de la plaque de séparation où des profils de couches limites laminaires sont supposés de chaque côté. L'épaisseur de ces couches limites fut estimée par rapport au nombre de Reynolds par unité de longueur reportés dans [6]. Soixante points sont utilisés pour décrire l'écoulement dans la direction normale et leur distribution est plus serrée dans les zones à fort gradient. Puisque la procédure numérique ne tolère pas de vitesse moyenne longitudinale négative ou nulle, nous avons supposé, au bord de fuite de la plaque de séparation, une vitesse égale au centième de la vitesse nominale du flux d'azote. L'énergie cinétique de turbulence initiale, suivant la direction normale à l'écoulement est, comme son taux de dissipation, constante et très faible, de telle façon que la viscosité tourbillonnaire soit au maximum, de l'ordre de la viscosité laminaire ($\approx 2 \cdot 10^{-5}$ u.SI). De même que pour le cas précédent, nous avons pu observer des résultats inchangés avec une viscosité tourbillonnaire initiale comprise dans le domaine.

$$10^{-9} \leq \mu_t \leq 2 \cdot 10^{-5} \quad (\text{VI-15})$$

La fraction massique moyenne est une fonction échelon au bord de fuite de la plaque, ($\tilde{C}_I = 1$ dans le flux d'azote, $\tilde{C}_I = 0$ dans le courant d'Helium). Les corrélations de densités partielles sont initialement constantes et égales à zéro.

B-2.- Conditions aux limites

Deux cas différents sont possibles.

a) $\lambda = 0$, le gradient de pression longitudinal est égal à zéro. Les conditions aux limites pour l'équation de quantité de mouvement sont de type Dirichlet et les valeurs sont gardées constantes le long des bords de la couche de mélange. Evidemment, l'équation de fraction massique exige des

conditions aux limites identiques puisque les frontières du domaine de calcul évoluent avec les limites de la couche de mélange et restent en moyenne dans des zones où le fluide est homogène. Toutes les quantités d'ordre supérieur telles que k , ε , Q_{1T} ont des conditions aux limites du type Neumann.

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{y=y_1, y_2} = 0$$

L'expérience a montré à nouveau que l'utilisation de conditions de Dirichlet telles qu'elles ont été décrites précédemment ne modifie pas les résultats de façon significative.

b) $\alpha = -0.18$. Le paramètre de FALKNER-SKAN α est supposé constant pour produire des profils semblables dans la couche de mélange. Toutefois il n'est pas possible d'envisager un tel critère dans la région de la couche de cisaillement qui est proche de l'origine parce que la condition $\alpha = d\alpha/dx$ impliquerait que le gradient de pression tend vers l'infini quand x tend vers zéro. Pour supprimer cette condition irréaliste, le gradient de pression dans le domaine proche du bord de fuite ($0 \leq x \leq 2,5 \text{ cm}$) est décrit par un polynôme dont la valeur est nulle à l'origine ($x=0$) et qui rejoint la valeur théorique ainsi que sa dérivée pour $x=2,5 \text{ cm}$. Les valeurs limites de la vitesse sont calculées en fonction de $\partial P/\partial x$ et des valeurs initiales. Les conditions aux limites pour les autres variables sont identiques à celles décrites précédemment pour $\alpha=0$.

B-3.- Constantes

Le tableau II donne les valeurs des constantes qui sont utilisées dans ce modèle. Les cinq constantes qui furent utilisées dans le cas d'écoulements à masse volumique constante restent inchangées. Une propriété de ce modèle est que, en l'absence de gradient de pression ($\alpha=0$) les corrélations de masses volumiques partielles ne peuvent pas influencer les deux équations de turbulence ($k-\varepsilon$). Donc, entre le cas isovolume et ce cas dans lequel la masse volumique peut varier, une seule nouvelle constante est introduite, qui est susceptible de modifier le profil de vitesse moyenne. Cette constante σ_{c_T} est le nombre de Schmidt turbulent associé à la variable c_T . La valeur de σ_{c_T} est obtenue par comparaison des profils de pressions dynamiques mesurée et calculée. En même temps les constantes C_{q1} et C_{q2} sont ajustées pour représenter de façon correcte les fluctuations de masse volumique. Pour $\alpha \neq 0$ les équations de la turbulence sont couplées avec les équations de

Q_{IT} par l'intermédiaire des termes de gradient de pression. Donc, une fois que la constante σ_{c_I} est fixée dans le cas précédent ($\alpha = 0$), ce cas est utile pour vérifier la validité des équations pour les fluctuations de masse volumique et permet de fixer la valeur des constantes qui apparaissent dans les termes de gradient de pression [7].

eq. - k	$\sigma_k = 1.0$ $c_{p1} = 0$ $c_{p2} = 0.4$	eq - ε	$\sigma_\varepsilon = 1.3$ $c_{\varepsilon 1} = 1.45$ $c_{\varepsilon 2} = 2.0$
eq - Q_{IT}	$\sigma_p = 0.26$ $c_{q1} = 3.0$ $c_{q2} = 0.6$		$c_{\varepsilon 3} = 0.$ $c_{\varepsilon 4} = 0.4$ $c_{\varepsilon 5} = 0.$
eq - c_I	$\sigma_{c_I} = 0.26$		

Tableau VI-2.- Constantes du modèle $k-\varepsilon$
pour écoulement à masse volumique variable.

On notera au passage que les termes pression-divergence ne sont pris en compte ni dans l'équation de k ni dans celle de ε ; ces termes étant tout-à-fait négligeables dans le cas de mélange isovolume ainsi que l'a montré KUZNETSOV [8]. De plus, les corrélations vitesse-masse volumique ne sont pas déterminées par résolution d'équations différentielles ni par des approximations faisant intervenir les fluctuations de température (loi de comportement polytropique), mais par une forme simplifiée faisant intervenir les fluctuations de masse volumique [9].

$$-\overline{\rho' u'} = c_{p2} \sqrt{p''} \cdot k$$

Les termes nécessaires au traitement de la proximité d'une paroi solide étant bien entendu écartés.

C) Résultats

C-1.- Taux de dispersion

Comme dans le cas du jet, un paramètre important décrivant le développement global de cette couche de mélange est le taux de dispersion. Pour la comparaison avec les résultats expérimentaux, l'épaisseur caractéristique δ_c est définie par le profil de vitesse. Soit Δu , la différence de vitesse entre les deux courants de gaz pur $\Delta u = U_E - U_I$, δ_c est la distance entre les points correspondant à $U_I + 0.2 \Delta u$ et $U_I + 0.8 \Delta u$.

Les valeurs suivantes furent obtenues pour le taux de dispersion $\frac{d\delta_c}{dx}$ (figure VI-9).

$\lambda = 0$

$\frac{d\delta_c}{dx} = \begin{cases} 0.1 & \longrightarrow \text{expériences} \\ 0.085 & \longrightarrow \text{calcul} \end{cases}$

$\lambda = -0.18$

$\frac{d\delta_c}{dx} = \begin{cases} 0.129 & \longrightarrow \text{expériences} \\ 0.130 & \longrightarrow \text{calcul} \end{cases}$

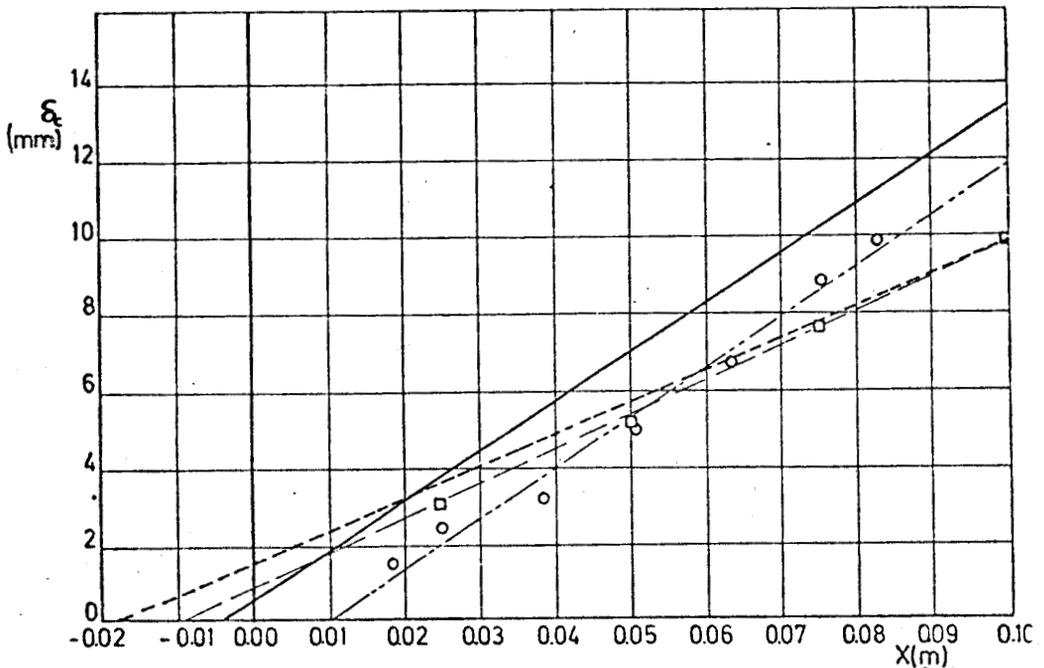


Fig. VI.9.- Taux de dispersion de la couche de mélange.

= 0.0 : , -- exp.[6], --- calcul
 = -0.18 : 0, - - - - exp.[6], — calcul.

L'accord est satisfaisant dans le cas du gradient de pression nul mais pour $\lambda = -0.18$, la courbe calculée est au-dessus des valeurs expérimentales tandis que sa pente est très bien prédite. La raison de cette différence est probablement le manque d'information au sujet du profil de vitesse initiale et de la distribution du gradient de pression dans le voisinage de la plaque de séparation. Des calculs furent faits avec différentes longueurs d'extrapolation pour le gradient de pression. Des polynômes du troisième et du quatrième ordre furent également utilisés mais aucune de ces tentatives n'améliora la qualité de la prédiction de façon significative, tout au moins en ce qui concerne la position de l'origine virtuelle de l'écoulement.

En accord avec les résultats expérimentaux, des profils d'équilibre sont prédits avec les conditions décrites dans (VI-13) et (VI-14). La similitude des profils devient correcte à 5 cm environ en aval du bord de fuite de la plaque. Nous verrons, dans la partie concernant la couche de cisaillement compressible, quelques résultats supplémentaires concernant ce taux de dispersion.

C-2.- Profil de masse volumique

La figure (VI-10) montre la différence entre les masses volumiques calculées et mesurées à $x = 5.08$ cm. Une caractéristique majeure de cet écoulement est la partie plane de la courbe située du côté de la masse volu-

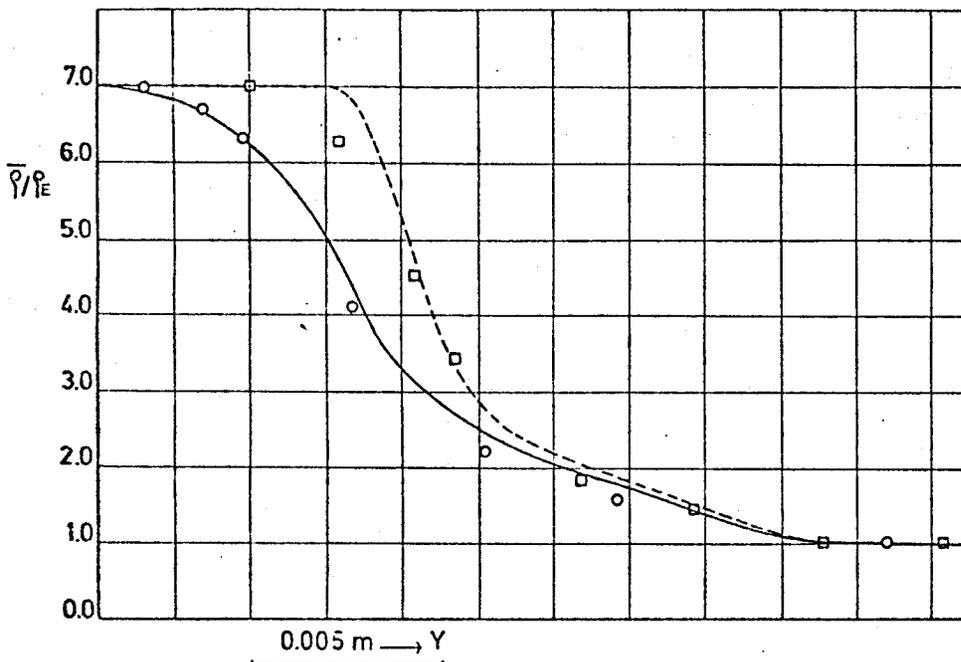


Fig. VI-10 .- Masse volumique moyenne à $x = 5.08$ cm

$\lambda = 0$, \square exp. [6], ---- calcul.
 $\lambda = -0.18$, \circ exp. [6], — calcul.

mique la plus petite qui est due au terme de diffusion de l'équation de fraction massique. Sur toutes les courbes de profils moyens (exceptée la vitesse) une caractéristique analogue sera observée. Sur les figures suivantes, les deux cas $\alpha = 0.0$ et $\alpha = -0.18$ seront rapportés ensemble pour mettre en évidence l'influence importante du gradient de pression.

C-3.- Profil de pression dynamique

Pour comparer correctement les résultats numériques et expérimentaux, nous supposons que la pression dynamique mesurée est $(\overline{\rho U^2})$ parce qu'elle est obtenue avec une sonde de type pitot. Des définitions de la moyenne pondérée par la masse volumique, il résulte que :

$$\overline{\rho U^2} = \bar{\rho} \tilde{u}^2 + \bar{\rho} \tilde{u}''^2 \quad (\text{VI-16})$$

A ce niveau de fermeture, les composantes normales du tenseur des contraintes de Reynolds ne sont pas connues. Donc \tilde{u}''^2 peut être approximée seulement comme une fraction de l'énergie de turbulence. L'hypothèse d'une turbulence isotrope amène donc $\tilde{u}''^2 = \frac{2}{3} R$, ce qui signifie que la correction qui apparaît dans l'équation (16) est de l'ordre de 2 % du terme principal. L'estimation du nombre de Schmidt turbulent \mathcal{C}_2 est obtenue par la comparaison des résultats expérimentaux avec les calculs de pression dynamique, parce que cette quantité combine à la fois les effets de masse volumique (donc de fraction massique) avec les effets de quantité de mouvement. Ce test doit être effectué avec $\alpha = 0$, car ainsi les fluctuations de masse volumique n'influencent pas les processus de diffusion turbulente par le biais des termes de gradient de pression qui sont présents dans les équations pour R et ε . Après un grand nombre de calculs, la valeur de 0,26 est retenue pour fournir le meilleur accord avec les résultats expérimentaux de REBOLLO [6] (voir fig. VI-11). Cette valeur étonnamment faible s'accorde très bien avec la valeur donnée par Rebollo, provenant d'une analyse de similitude. Dans des calculs d'écoulements réactifs turbulents, ELGOBASHI [10] donne une valeur de 0,6 pour le nombre de Schmidt turbulent associé à la fraction de mélange (mixture fraction) avec un niveau semblable de fluctuations de masse volumique. Une conséquence importante de la différence de masses volumiques des deux constituants du mélange est la forme particulière du profil de pression dynamique avec un minimum correspondant au sillage de la plaque séparatrice et également un maximum dû à des taux de diffusion différents pour la quantité de mouvement et la fraction massique, ces taux seraient identiques si $\mathcal{C}_2 = 1.0$.

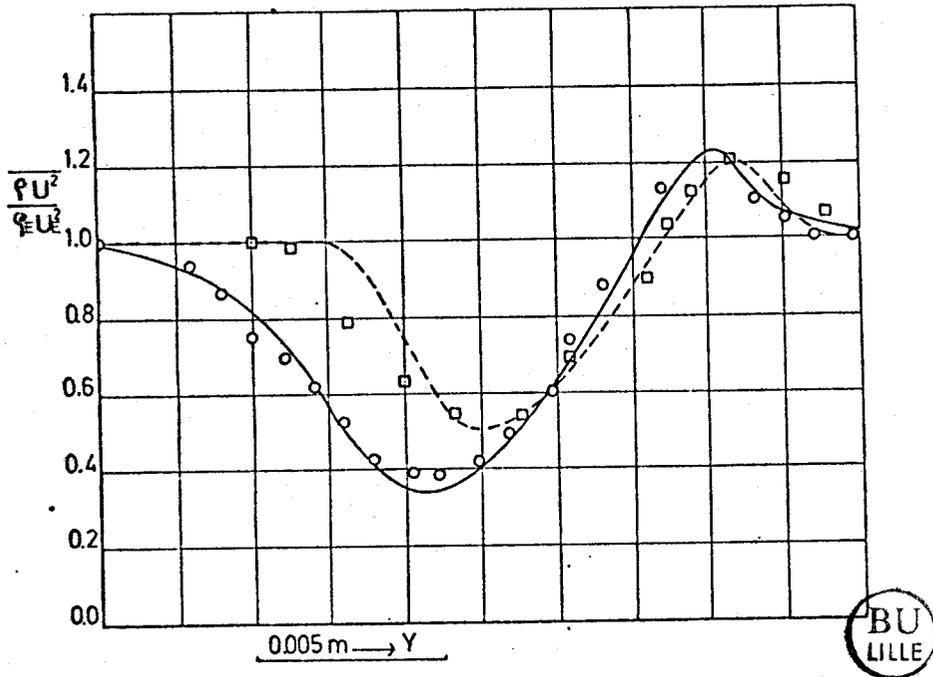


Fig. VI-11.- Pression dynamique à $\alpha = 5.09$ cm.
(Même symboles que sur la figure VI-10).

Pour montrer l'influence du nombre de Schmidt σ_{ct} sur le développement de ce maximum, différentes valeurs de σ_{ct} furent utilisées pour les deux cas de gradient de pression. Les résultats rapportés sur la figure (VI-12) montrent

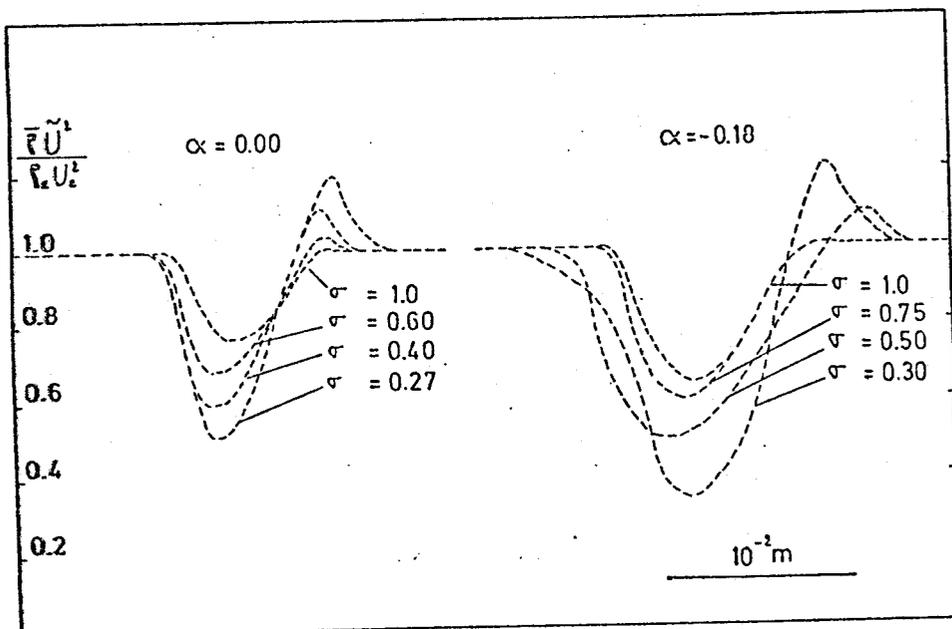


Fig. VI-12.- Influence du nombre de Schmidt turbulent sur le profil de pression dynamique à $\alpha = 5,08$ cm.

pour $\alpha = 0.0$ une relation simple entre σ_{cT} et la croissance du maximum (ou la décroissance du minimum), tandis que pour le cas du gradient de pression positif ($\alpha = -0.18$) la relation semble plus complexe. Ceci est du au couplage des équations de turbulence avec les fluctuations de masse volumique (donc à la diffusion massique) par le gradient de pression.

Pour $\sigma_{cT} = 1$ le profil de pression dynamique montre seulement un minimum qui correspond au sillage de la plaque de séparation. Puis avec des valeurs décroissantes de σ_{cT} ce minimum est accentué et le maximum apparaît sur le côté basse vitesse de la couche de mélange et s'accroît au fur et à mesure que σ_{cT} diminue. Cette tendance est observée dans les deux

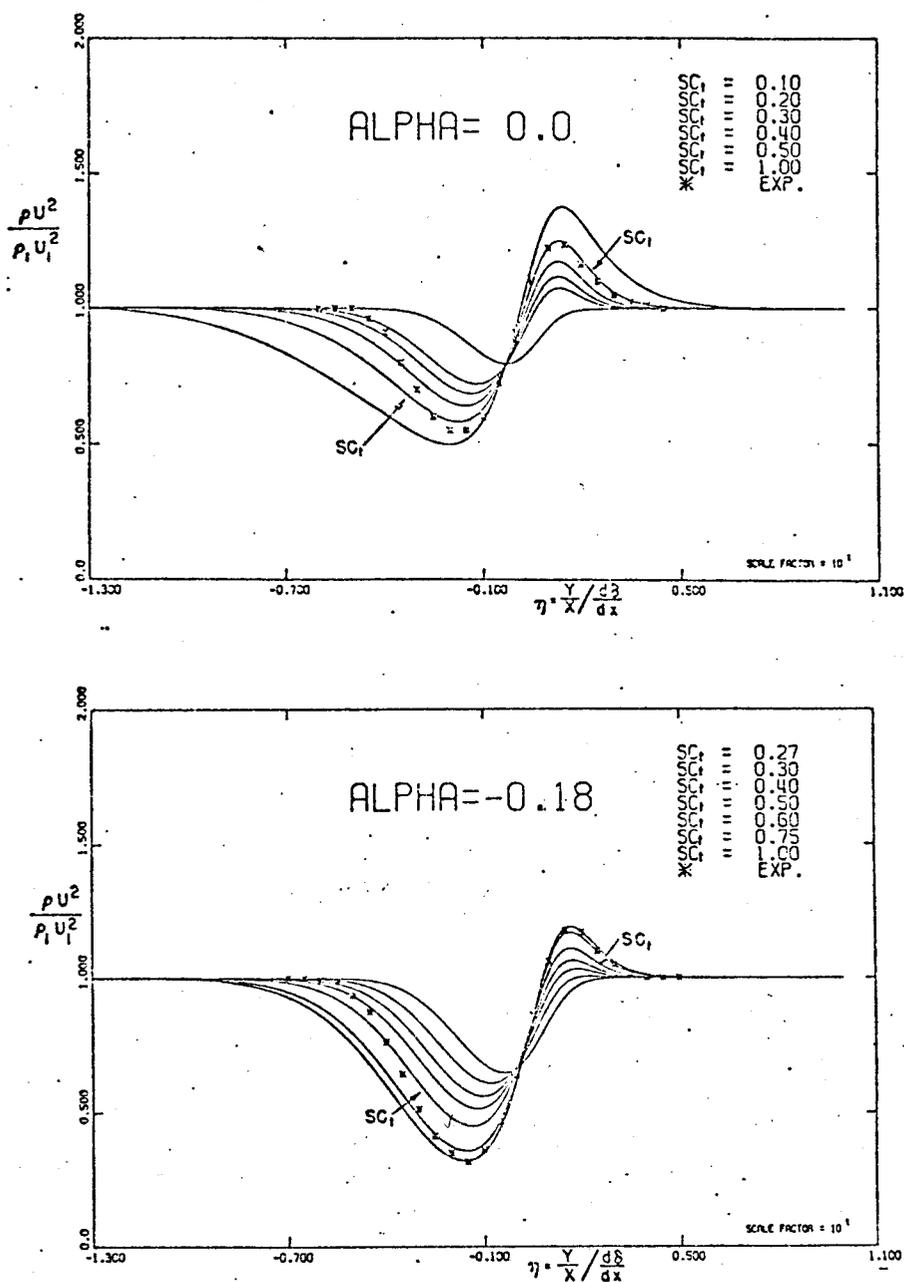


Fig. VI-13.- Influence du nombre de Schmidt turbulent selon l'analyse de REBOLLO [6].

cas $d=0$. et $d=-0.18$. Dans la figure (VI-13) qui est extraite de la thèse de REBOLLO, le même processus est montré pour des valeurs de σ_{ϵ} dans le même intervalle que celui préconisé par les calculs. Toutefois deux remarques sont nécessaires :

a) L'analyse de REBOLLO ne prédit pas très bien la largeur totale du profil de pression dynamique (en particulier le côté haute vitesse ne correspond pas aux mesures).

b) Les effets des fluctuations de masse volumique ne sont pas présents dans cette analyse. Ce qui explique l'absence de superposition des courbes pour différentes valeurs de σ_{ϵ} .

C-4.- Fluctuations de masse volumique

Le résultat des prédictions de fluctuations est montré dans la figure (VI-14).

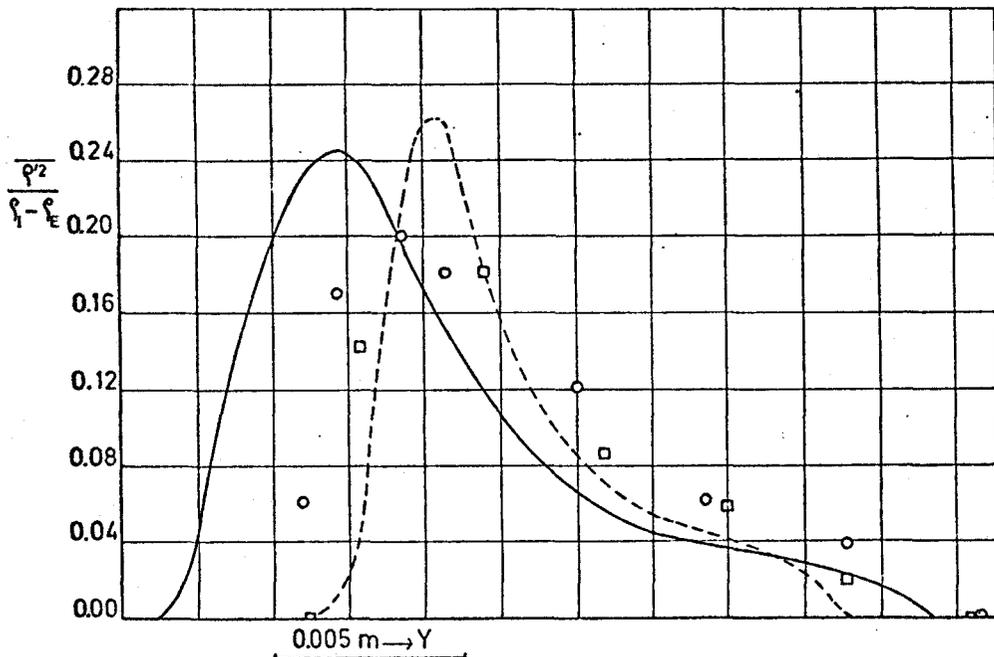


Fig. VI-14.- Fluctuations de masse volumique à $X = 5,08$ cm. (même symboles que sur la figure 10).

Les profils mesurés et calculés ont une forme particulière avec un plateau qui indique que les fluctuations de masse volumique sont fortement présentes dans toute la zone de mélange et tout particulièrement à l'endroit

du maximum de pression dynamique.

C-5.- Vitesse moyenne

La vitesse moyenne n'a pas été mesurée directement dans le travail expérimental de REBOLLO. Toutefois elle peut être calculée à partir des mesures de pression dynamique et de masse volumique.

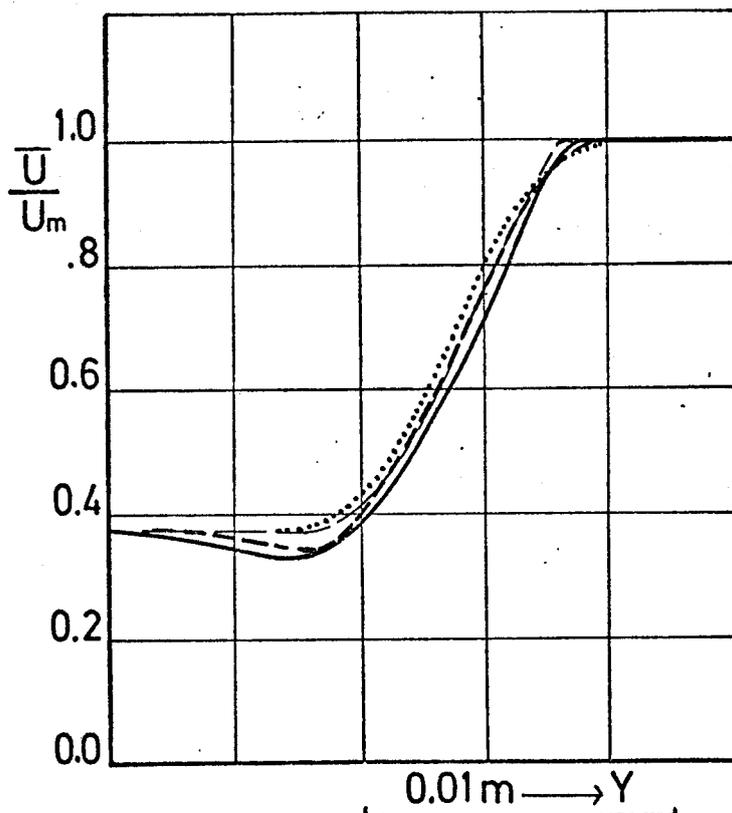


Fig. VI-15.- Vitesse moyenne à $\alpha = 5.08$ cm.

$\lambda = 0.0$... exp. [6] , --- calcul
 $\lambda = -0.18$ --- exp. [6] , ——— calcul.

La solution de l'équation de transport de quantité de mouvement donne la moyenne pondérée de la vitesse.

$$\tilde{u} = \bar{u} + \frac{\overline{p'u'}}{\bar{p}} \quad (\text{VI-17})$$

A ce niveau de fermeture, la corrélation vitesse-masse volumique n'est pas connue. Toutefois il est réaliste de supposer que cette quantité est petite comparée à la vitesse moyenne. Une évaluation possible de cette différence consiste à supposer que la turbulence est isotrope et à utiliser l'inégalité de SCHWARZ :

$$\overline{(\rho'u')^2} \leq \overline{\rho'^2} \cdot \overline{u'^2}$$

La valeur de cette borne supérieure confirme effectivement que ce terme peut être négligé devant la variable moyenne. Les différentes courbes de vitesse sont montrées dans la figure (VI-15) et montrent un accord très satisfaisant.

C-6.- Contraintes de frottement turbulent

Comme pour la vitesse moyenne, la comparaison entre les contraintes issues des mesures et celles issues du calcul nécessite quelques précautions, dues à la différence entre les deux sortes de moyenne concernées. La figure (VI-16) montre que les valeurs calculées sont sensiblement plus petites que les valeurs expérimentales. Néanmoins, les principales caractéristiques des courbes sont bien prédites. Pour $\alpha = -0.18$ la courbe de vitesse moyenne montre de légers dépassements avant d'atteindre les valeurs limites (fig. VI-15),

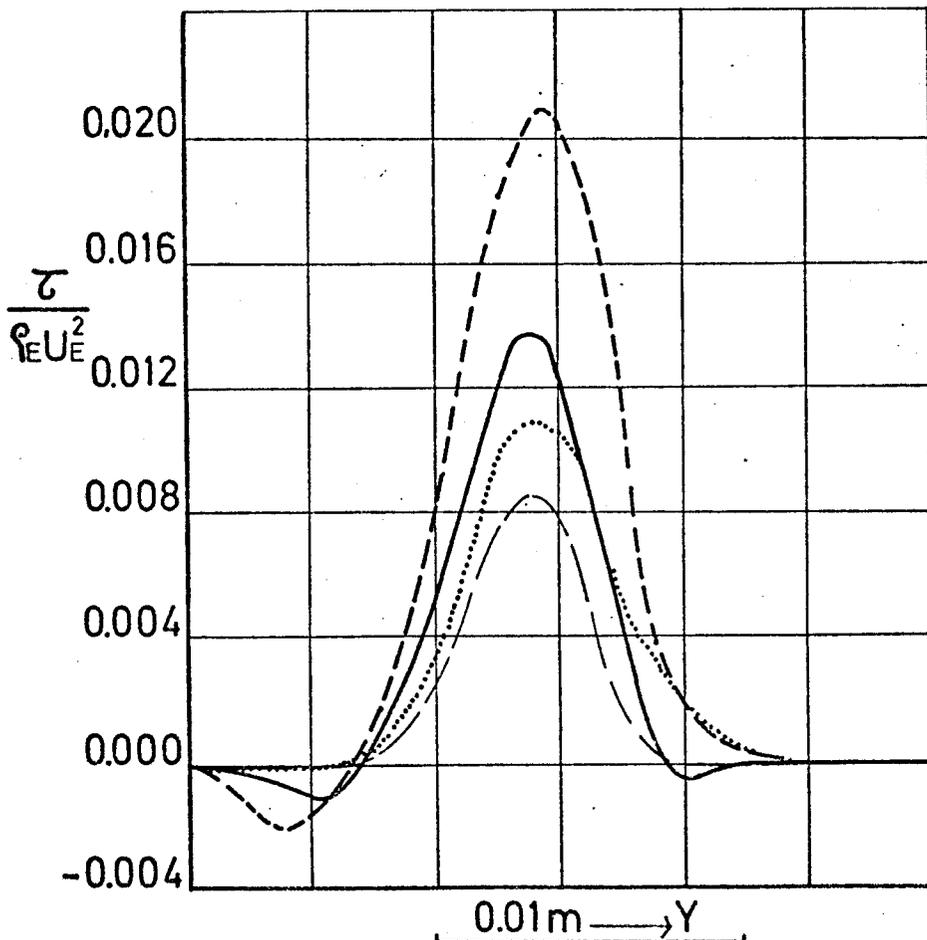


Fig. VI-16.- Contraintes de frottement turbulent à $\alpha = 5.08$ cm. (mêmes symboles que la figure VI-15).

ce qui est tout à fait en accord avec le comportement asymptotique qui a été montré par REBOLLO [6]. Par conséquent, les contraintes de Reynolds montrent une légère dépression du côté de faible vitesse. Cette dépression n'apparaît pas du côté à vitesse élevée, ce qui est imputable à la sous-estimation du niveau des fluctuations de masse volumique.

VI-1-3.- Modèle $\bar{\rho}$ - ϵ modifié pour écoulement à masse volumique variable.

Ce modèle n'est qu'une extension du premier. La principale différence est que l'approximation de transport par gradient est supposée valable pour la moyenne au sens de Reynolds uniquement, et ne peut pas être transposée directement au formalisme de FAVRE. Il s'ensuit que :

$$-\bar{\rho} \overline{v'' \phi''} = \frac{\mu_t}{\sigma_\phi} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} - \frac{\mu_t}{\bar{\rho}} \frac{\tilde{\phi}}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} \quad (\text{VI-18})$$

Cette approximation introduit de nouveaux termes sources dans les équations modélisées. Ce modèle est testé également pour la prédiction de l'écoulement étudié par REBOLLO et les résultats sont comparés en même temps à ceux du modèle précédent.

A) Constantes du modèle

Les constantes qui sont utilisées dans ce modèle ont des valeurs identiques à celles utilisées précédemment. Toutefois la nouvelle forme de l'approximation de transport introduit une constante σ_ρ . On pourrait s'attendre à ce que σ_ρ prenne une valeur proche de celles de σ_{c_1} ou σ_ϕ mais en fait, après qu'une grande variété de valeurs aient été testées, des résultats satisfaisants furent obtenus avec

$$\sigma_\rho = 7.3$$

Le choix de cette valeur provient seulement d'une optimisation numérique. Il est probable que l'universalité ne doit pas être attendue de cette constante et que sa valeur soit rattachée de façon plus ou moins simple à des paramètres propres de l'écoulement, comme par exemple le rapport des masses moléculaires des deux constituants.

B) Résultats

Les figures (VI-17), (VI-18) et (VI-19) montrent les résultats concernant la masse volumique moyenne, la pression dynamique et les fluctuations de masse volumique.

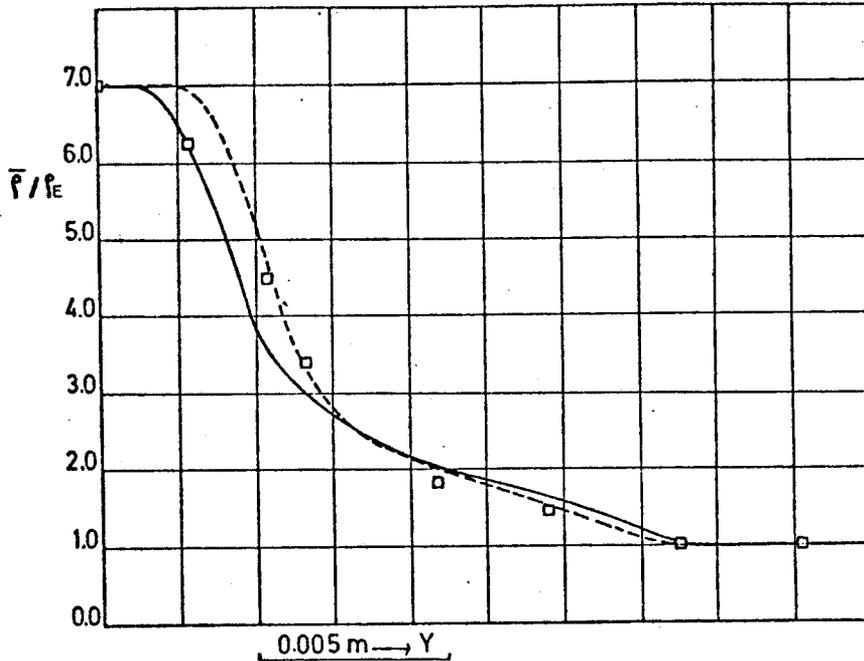


Fig. VI-17.- Masse volumique moyenne à $x = 5,08$ cm.

$\lambda = 0$; \square exp. [6] , --- $R-\epsilon$; — $R-\epsilon$ modifié.

La prédiction de la masse volumique moyenne est meilleure au bord de la zone de mélange à masse volumique élevée, mais on observe encore le même gradient très fort, ce qui est probablement une conséquence de l'approximation de transport par gradient elle-même, quand elle est utilisée pour décrire une région de grande intermittence, plutôt que les implications des fluctuations de masse volumique. La prédiction de la pression dynamique est réellement meilleure quoique la remarque ci-dessus soit encore valable. Sur la figure (VI-18), nous pouvons remarquer que le terme additif de l'équation de fraction massique agit pour renforcer l'effet du nombre de Schmidt turbulent

différent de l'unité. Les extrema sont renforcés et la largeur totale de la zone de mélange correspond mieux aux résultats expérimentaux.

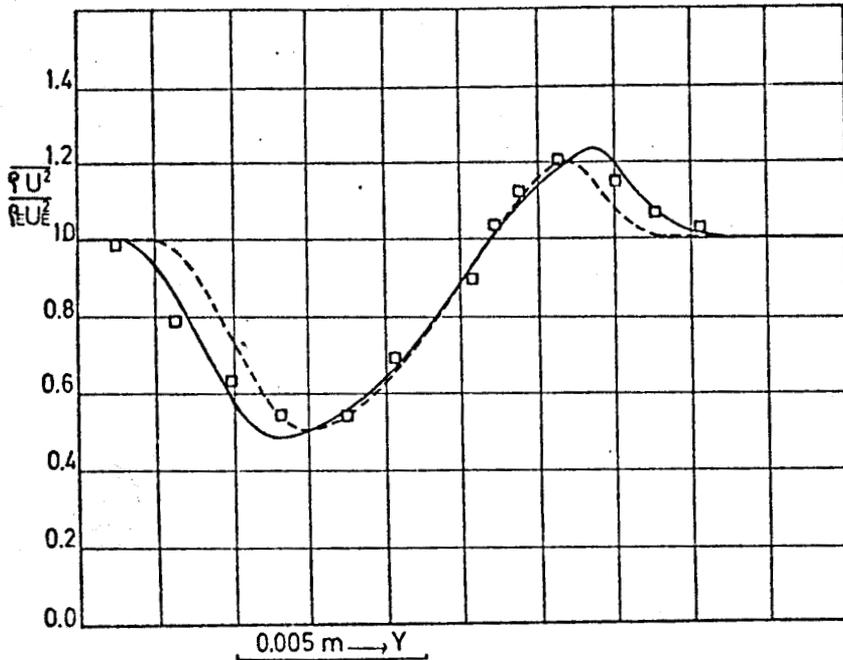


Fig. VI-18.- Pression dynamique à $x = 5.08$
(mêmes symboles que la fig. VI-17).

Le maximum des fluctuations de masse volumique est diminué d'environ 20 % par rapport aux prédictions du premier modèle, et s'est déplacé vers le côté à masse volumique élevée (Fig. VI-19). Ceci est dû aussi au fait que le transport diffusif de fraction massique s'étend sur une zone plus large, la valeur maximum des fluctuations de masse volumique correspond à l'endroit où est situé le maximum du gradient de masse volumique dans le domaine de l'écoulement.

Une autre approche a été suivie par SAETTRAN [11] pour améliorer l'approximation de transport par gradient. Ce travail est basé sur une suggestion de BRADSHAW [12] pour approximer la diffusion turbulente d'un scalaire. L'hypothèse émise par SAETTRAN est de la forme

$$-\bar{\rho} \overline{v'' \phi''} = \frac{M_t}{\sigma_\phi} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} + \kappa \bar{\rho} \tilde{\phi} (R)^{1/2} \quad (\text{VI-19})$$

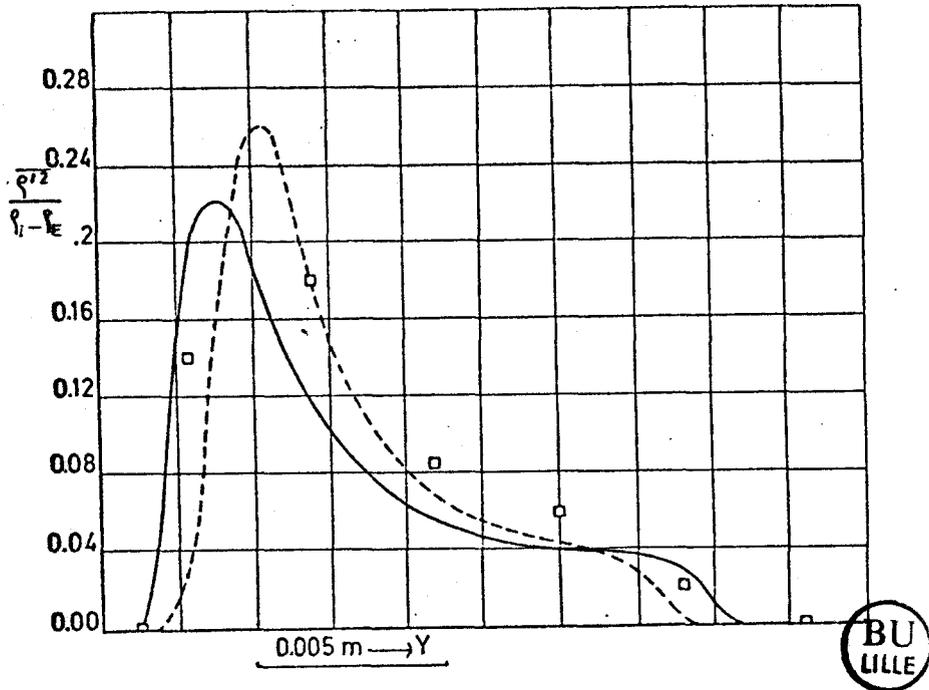


Fig. VI-19.- Fluctuations de masse volumique à $\delta = 5.08 \text{ cm}$.
(mêmes symboles que la fig. VI-17).

et les résultats sont alors en bon accord avec les données expérimentales. Il faut néanmoins souligner que dans ce travail, les deux principales constantes de l'équation de dissipation ($c_{\epsilon 1}, c_{\epsilon 2}$) n'ont pas des valeurs standard qui pourraient être utilisées pour le calcul d'écoulements à masse volumique constante. Une dernière comparaison est faite avec les contraintes de Reynolds. La figure (VI-20) montre que la prédiction a la même qualité que celle du modèle précédent, toutefois le maximum est inférieur d'environ 10 %.

L'hypothèse que nous avons faite pour exprimer les termes de diffusion turbulente (éq. VI-18) fut également utilisée pour le cas de gradient de pression positif ($\lambda = -0.19$) Les résultats sont rapportés dans les figures (VI-21) à (VI-23).

La propriété majeure de l'approximation est de renforcer le transport diffusif de masse. Ceci est montré sur le profil de masse volumique (fig. VI-21) par une diminution plus forte de la masse volumique à partir de la zone dense de la couche de mélange.

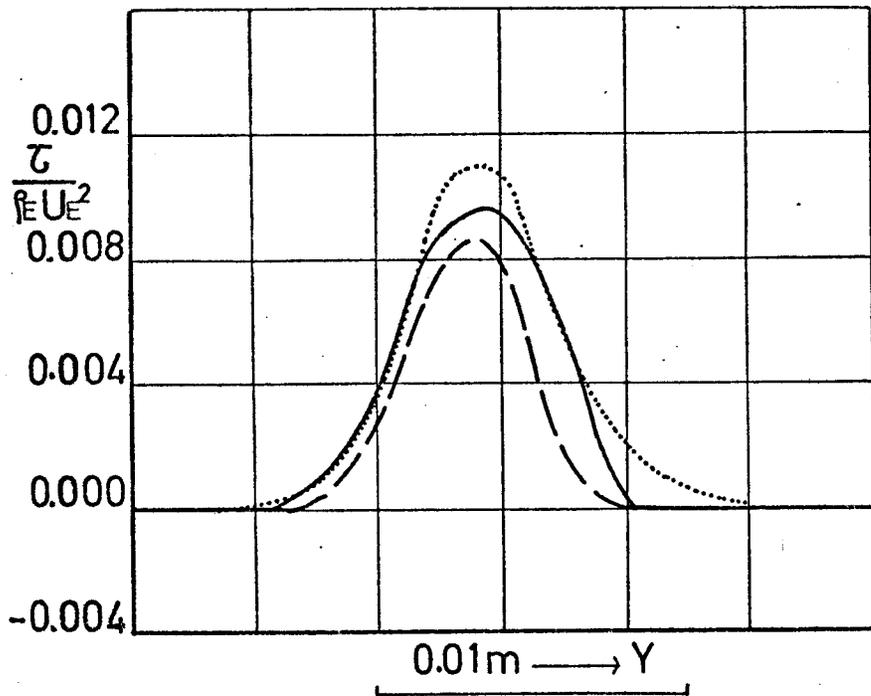


Fig. VI-20.- Frottement turbulent à $x = 5.08$ cm.
 $\lambda = -0.18$; exp [6], ---- $k-\epsilon$, — $k-\epsilon$ modifié.

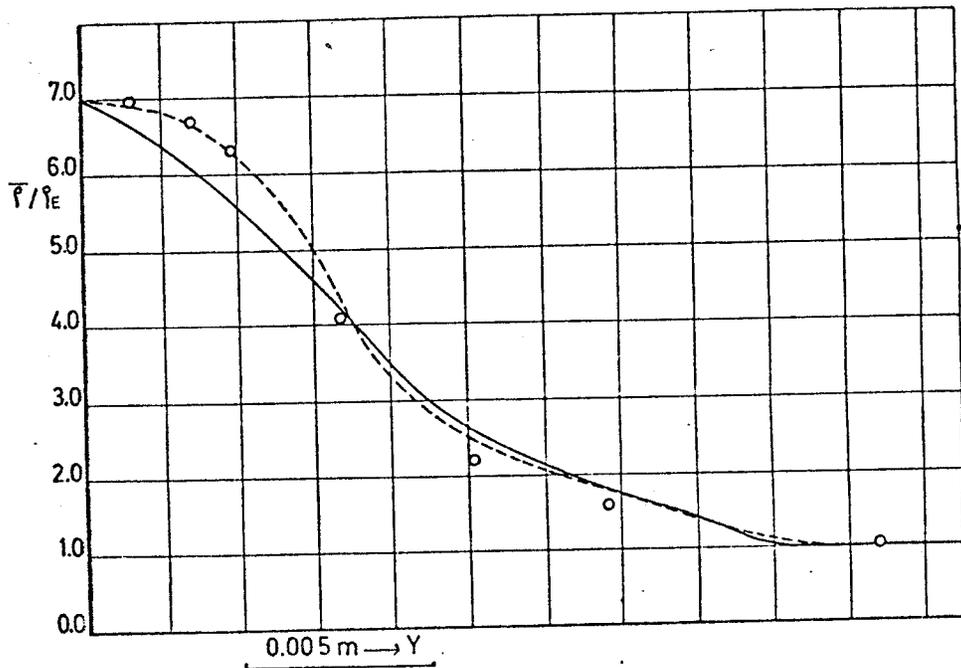


Fig. VI-21.- Masse volumique moyenne à $x = 5.08$ cm.
 $\lambda = -0.18$; \circ exp. [6], ---- $k-\epsilon$, — $k-\epsilon$ modifié.

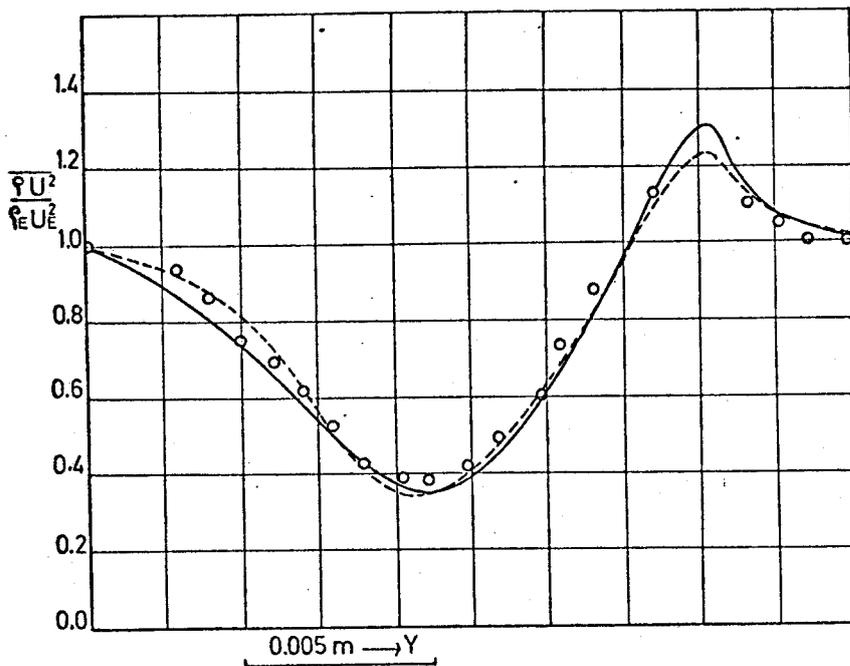


Fig. VI-22.- Pression dynamique à $\alpha = 5.08$ cm.

$\lambda = -0.19$ (mêmes symboles que la figure VI-21).

Sur la figure (VI-22) la même tendance peut être observée en même temps qu'un renforcement de maximum qui est un critère de différence des taux de diffusion de la masse et de la quantité de mouvement.

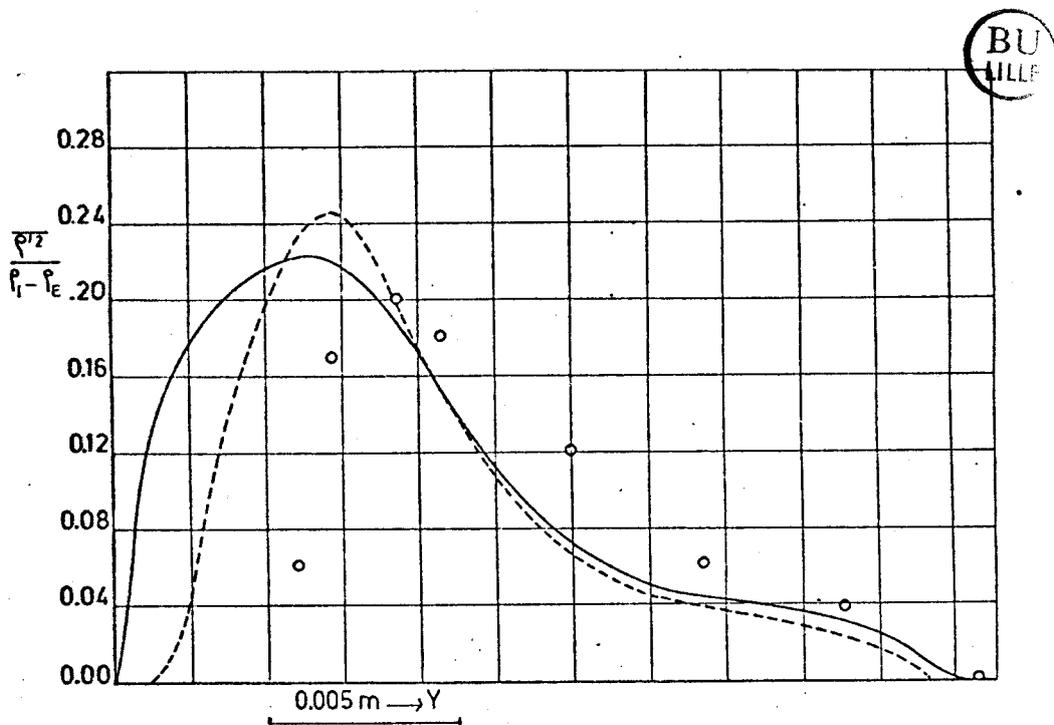


Fig. VI-23.- Fluctuations de masse volumique à $\alpha = 5.08$ cm.

$\lambda = -0.18$ (mêmes symboles que la fig. VI-21).

Ce fait peut également être remarqué sur les figures (VI-23) et (VI-24) où une forte différence apparaît sur le côté dense du profil des fluctuations de masse volumique tandis qu'un tel défaut n'apparaît pas dans la prédiction des contraintes de cisaillement turbulent.

Nous pouvons finalement observer que les prédictions des deux modèles $k-\epsilon$ sont équivalentes pour les contraintes de Reynolds.

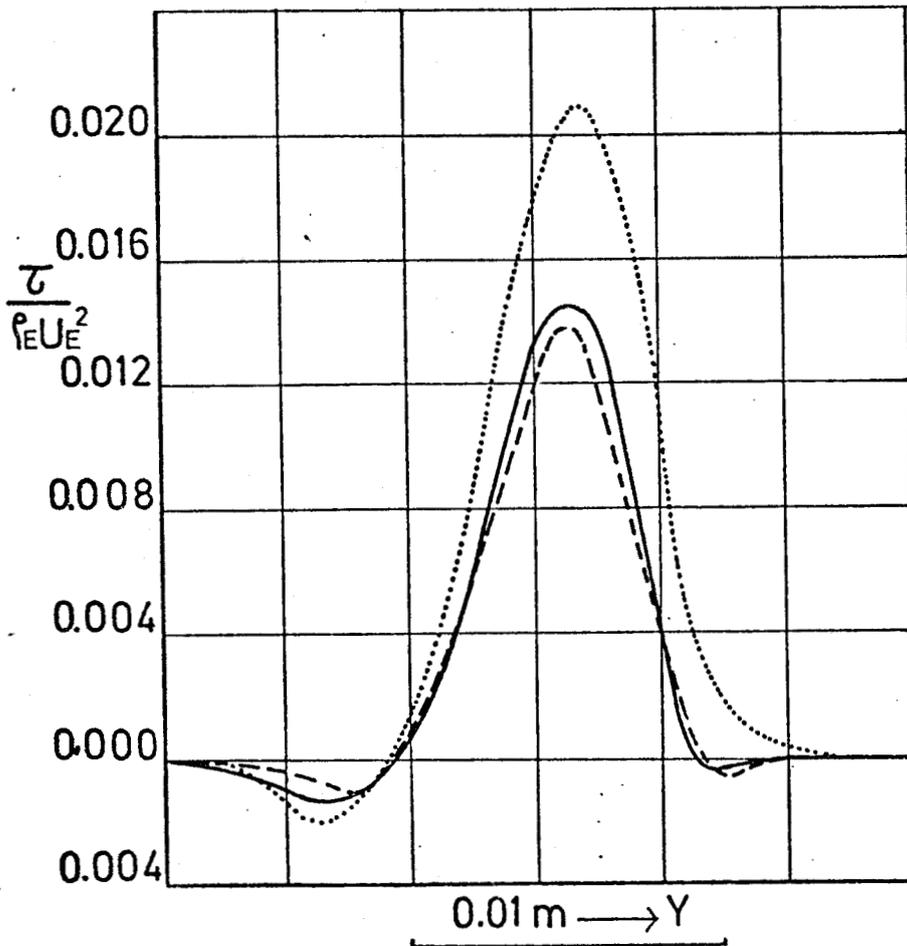


Fig. VI-24.- Frottement turbulent à $x = 5.08$ cm.

$\lambda = -0.19$; exp. [6], ---- $k-\epsilon$, — $k-\epsilon$ modifié.

VI-1-4.- Modèle RSE pour écoulement à masse volumique constante

A la suite des modèles à deux équations, une fermeture au second ordre (RSE) est utilisée pour la prédiction du mélange turbulent. Une première étape nécessaire avant d'aborder le calcul d'écoulements à masse volumique variable est de vérifier le modèle avec des données expérimentales à masse volumique constante. Le premier cas test choisi est la couche de

cisaillement bidimensionnelle qui fut étudiée par WYGNANSKI et FIEDLER [13]. Un intérêt majeur pour ce test est de vérifier que les constantes de l'équation de dissipation sont identiques à celles utilisées précédemment, et également de tester les nouvelles constantes sur un écoulement simple.

A) Configuration expérimentale

La couche de cisaillement est produite par un jet d'air émergent d'une tuyère rectangulaire. Le jet se mélange sur l'une de ses frontières avec l'air environnant qui est au repos (fig. VI-25).

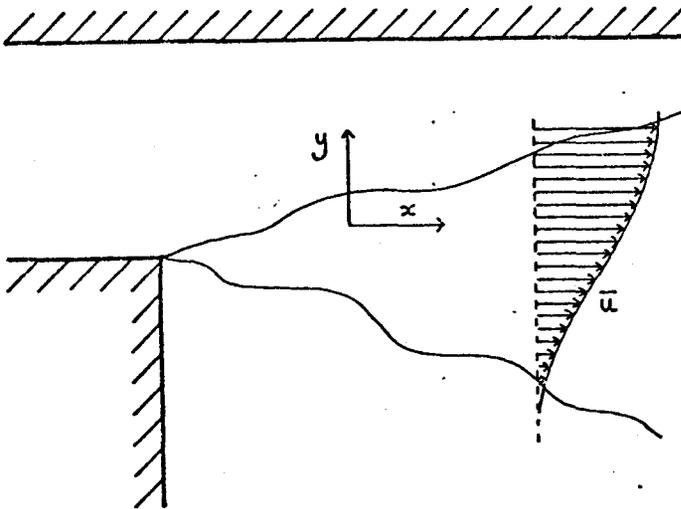


Fig. VI-25.- Configuration expérimentale de la couche de cisaillement plane [13].

La vitesse de sortie est de 12 m/s et le niveau de turbulence est inférieur à 0,1 %. Pour une comparaison avec les résultats numériques du modèle RSE on dispose des quantités suivantes :

- vitesse longitudinale moyenne,
- composantes normales du tenseur des contraintes de Reynolds $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$, $\overline{w'^2}$.
- contrainte de cisaillement turbulent.

Cette expérience est choisie parce que la couche de cisaillement est légèrement plus complexe que le jet à cause de la présence de conditions de Dirichlet pour la vitesse sur les deux frontières du domaine étudié.

B) Traitement numérique

Six équations de transport sont résolues :

- quantité de mouvement,
- contraintes de Reynolds $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$, $\overline{w^2}$, \overline{uv} ,
- dissipation de l'énergie de turbulence.

Des conditions initiales et aux limites doivent être spécifiées pour chacune de ces quantités.

B-1.- Conditions initiales

La vitesse est supposée constante au travers de l'écoulement de jet initial, excepté au voisinage de la paroi inférieure où un profil de couche limite turbulente de plaque plane est utilisé. Expérimentalement, un fil est utilisé pour provoquer la transition. Donc, à un bord de la couche initiale de cisaillement, la vitesse est constante et égale à 12 m/s. Une valeur constante, positive mais petite est assignée à l'autre bord. Le niveau de turbulence dans la partie externe est égal à 0,1 % et l'énergie est répartie entre les composantes normales du tenseur de Reynolds, en supposant que la turbulence est initialement isotrope. Puis la dissipation ϵ est calculée à partir de R , de façon à produire une viscosité turbulente égale à la viscosité laminaire, suivant la relation :

$$\mu_t = c_D \bar{p} \frac{R^2}{\epsilon} \quad (\text{VI-20})$$

Enfin la distribution du cisaillement turbulent est donnée par la formule

$$-\bar{p} \overline{uv} = \mu_t \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (\text{VI-21})$$

B-2.- Conditions aux limites

La vitesse longitudinale garde des valeurs constantes aux deux bords de la zone de cisaillement. Pour les équations du modèle de turbulence, la situation n'est pas aussi simple. L'utilisation des formes tronquées des équations de transport telles qu'elles ont été suggérées par JONES et LAUNDER [2] produit des profils de vitesse tout à fait irréalistes. Une condition plus

simple, telle que celle qui consiste à conserver des valeurs constantes, égales aux valeurs initiales a le même effet néfaste. Des résultats réalistes ne purent être obtenus qu'en imposant des conditions sur les dérivées plutôt que sur les variables (condition de Neumann) tant pour les contraintes de Reynolds que pour le taux de dissipation. C'est un résultat très marquant par rapport aux calculs $k-\epsilon$ pour lesquels la façon avec laquelle les conditions aux limites étaient spécifiées n'avait que peu d'importance.

B-3.- Constantes du modèle

Par rapport à la version première du modèle $k-\epsilon$ pour écoulements à masse volumique constante, deux constantes supplémentaires sont nécessaires maintenant. A la place des nombres de Prandtl turbulents pour k et ϵ , les termes de diffusion comportent les constantes C et C_ϵ . Les termes de production/dissipation sont modélisés à nouveau avec $C_{\epsilon 1}$ et $C_{\epsilon 2}$. Les deux nouvelles constantes sont C_1 et C_2 et sont issues de la modélisation du terme pression-déformation. Les valeurs sont résumées dans le tableau (VI-3).

C	C_1	C_2	C_ϵ	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$
0.11	1.5	0.4	0.13	1.4	2.1

Tableau VI-3.- Constantes du modèle RSE pour écoulements à masse volumique constante.

Initialement, toutes les constantes furent tirées de la littérature [14] mais en fonction de notre expérience préalable avec le modèle $k-\epsilon$ et des résultats expérimentaux [13] les valeurs de $C_{\epsilon 1}$ et $C_{\epsilon 2}$ ont été légèrement modifiées. Ces nouvelles valeurs sont valables aussi pour les écoulements à masse volumique variable.

C) Résultats

Aucune comparaison n'a pu être faite pour le taux de dispersion parce qu'aucune épaisseur caractéristique n'est définie expérimentalement. Seulement vitesse longitudinale moyenne et contraintes de Reynolds seront donc considérés. L'ensemble de ces résultats est regroupé sur les figures (VI-26) à (VI-28). La coordonnée η est une variable sans dimension définie

par

$$\eta = \frac{y - y_{1/2}}{x}$$

ou $y_{1/2}$ correspond au point où la vitesse est moitié de la vitesse extérieure et x la coordonnée longitudinale. La vitesse moyenne est correctement prédite excepté sur les bords où de petites différences peuvent être observées. Le défaut du côté basse vitesse provient de la vitesse non nulle qui est maintenue constante tout le long de l'écoulement (condition de Dirichlet).

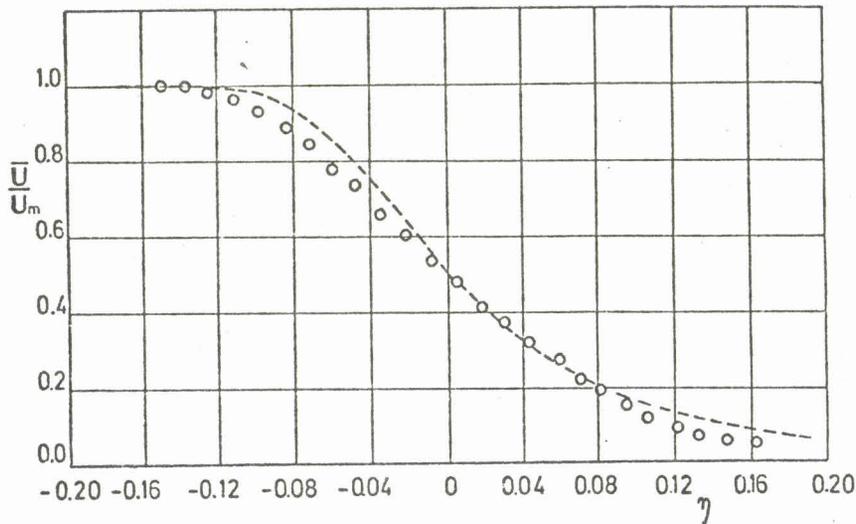


Fig. VI-26.- Profil de vitesse moyenne dans la couche de cisaillement à $x = 50.29$ cm; \circ exp. [13], --- calcul.

En fait la valeur minimale qui est utilisée est 0.2 m/s tandis que la vitesse est 12 m/s sur l'autre frontière. Les calculs n'ont pas pu être faits avec des valeurs inférieures à 0.2 m/s. Cela est dû au calcul initial de la coordonnée transverse transformée ω , qui est relié à la fonction de courant. Des valeurs de ω trop petites créent de trop grands espacements des points et perturbent fortement le calcul aux différences finies. Cette valeur de 0.2 m/s doit donc être considérée comme un minimum (numérique) tolérable pour la frontière à faible vitesse de ce cas-test. La différence du côté haute-vitesse a probablement aussi une distribution mal adaptée des points de maillage comme origine, mais ce n'est pas aussi clair que pour la frontière à basse vitesse. Comme cela est montré sur les figures (VI-27) et (VI-28) la prédiction des contraintes de Reynolds n'est pas très satisfaisante également.

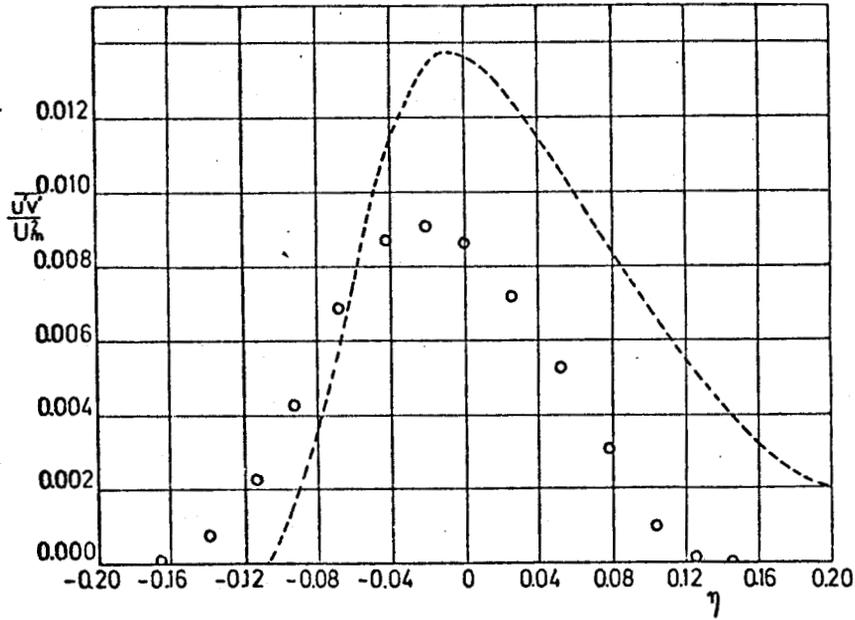


Fig. VI-27.- Distribution du frottement turbulent
à $x = 50.29$ cm (mêmes symboles que sur la figure VI-26).

Correspondant aux tendances observées sur les profils de vitesse moyenne, le frottement turbulent et les contraintes normales sont surestimés du côté basse vitesse tandis qu'ils sont sous-estimés de l'autre côté. Le point le plus surprenant est toutefois le manque de diffusion du côté à vitesse élevée pour lequel aucune justification physique rigoureuse ne peut être donnée.

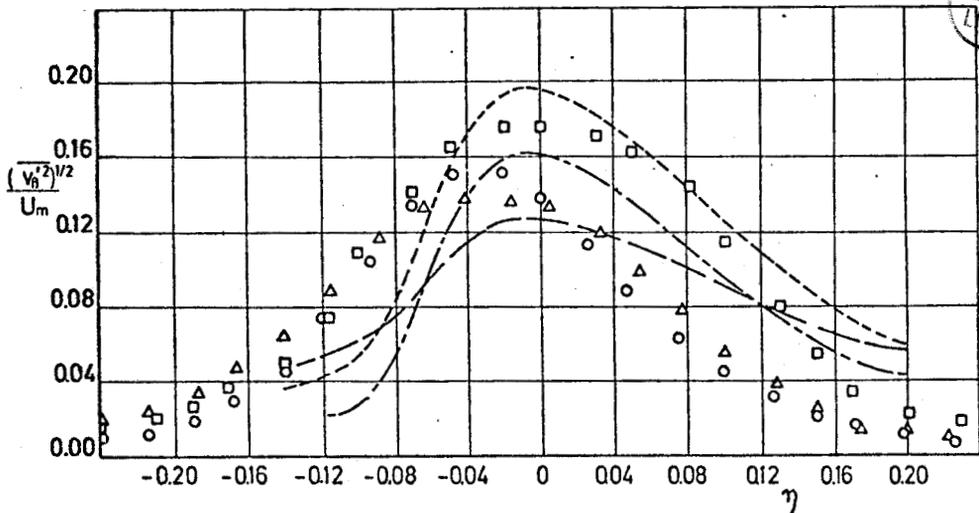


Fig. VI-28.- Distribution des contraintes de Reynolds
à $x = 50.29$ cm.

$(\overline{u^2})^{1/2}/U_m$: □ , exp. [11], ---- calcul

$(\overline{v^2})^{1/2}/U_m$: Δ , exp. [11], — calcul

$(\overline{w^2})^{1/2}/U_m$: ○ , exp. [11], - - - calcul.

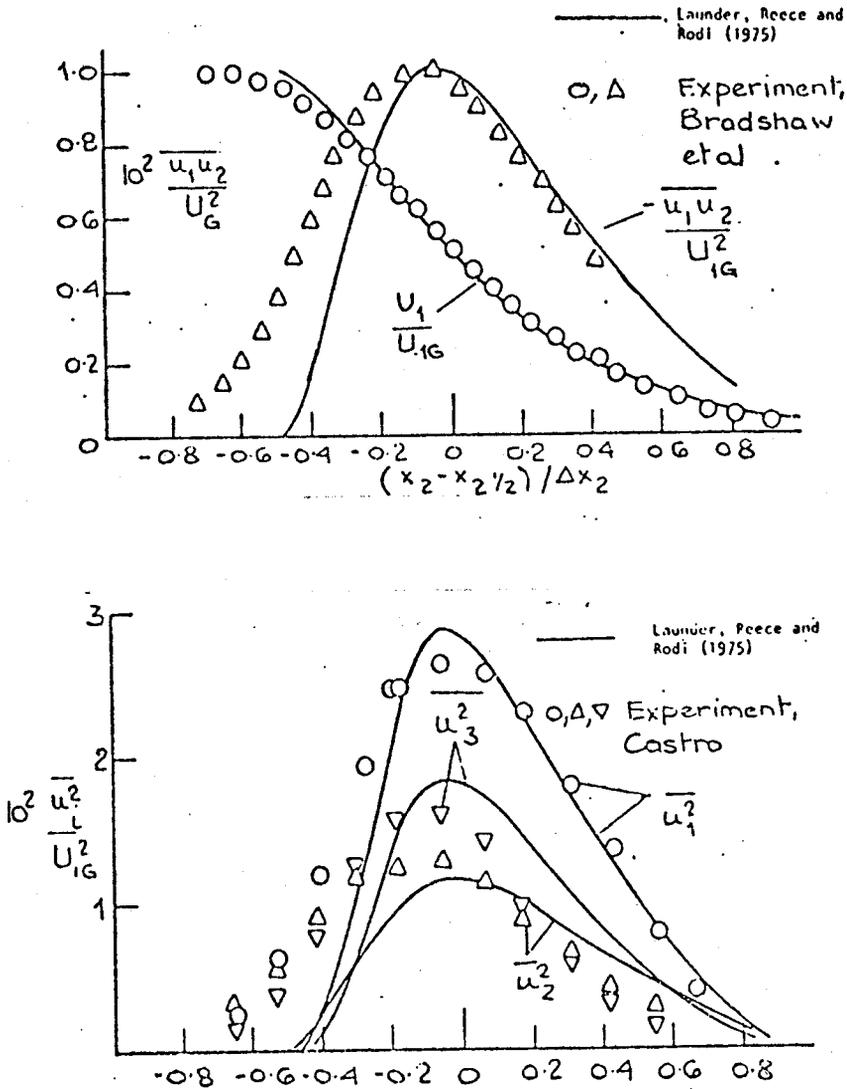


Fig. VI-29.- Résultats de LAUNDER, REECE et RODI [15]

A titre de comparaison également, les résultats obtenus par LAUNDER et al. [15] sont montrés sur la figure (VI-29) pour des configurations d'écoulements similaires, qui affichent les mêmes caractéristiques que nos calculs. C'est ce qui nous fait penser que le problème est probablement la particularité de ce type d'écoulement qui est toujours accompagné d'une importante zone de recirculation du côté basse vitesse. Une telle recirculation semble violer les hypothèses de conditions aux limites telles qu'elles sont traitées dans cette méthode numérique, à savoir vitesse constante et faible entrainement.

VI-1-5.- Fermeture au second ordre pour écoulement à masse volumique variable

A) Configurations expérimentales

Deux travaux expérimentaux différents furent examinés pour la validation de ce modèle : d'une part les résultats de REBOLLO [6], qui ont déjà été utilisés pour les calculs avec le modèle $k-\epsilon$, d'autre part les travaux de BROWN [16]. Dans cette dernière référence l'accent est mis sur l'influence du rapport des vitesses des courants avant confluence. Deux mélanges sont étudiés : air-air et freon 12-air. Le rapport des masses volumiques est alors 1 ou 4 et le rapport des vitesses est 0,0.3 ou 0.6 dans le premier cas et 0.3 ou 0.6 dans le second cas. Dans tous les cas le flux d'air est le plus rapide et a une vitesse égale à 14 m/s. Toutes les couches limites au bord de fuite de la plaque de séparation sont laminaires et le niveau de turbulence extérieure est très faible $[(\frac{u_{rms}}{U_\infty}) < 1\%]$. Différentes techniques expérimentales ont été utilisées dans ces expériences pour fournir une large gamme d'information au sujet de quantités turbulentes telles que contraintes de Reynolds, fluctuations de masse volumique, fluctuations de concentration, corrélations vitesse-masse volumique, flux turbulents etc...

B) Traitement numérique

Pour obtenir une quantité maximale d'information au sujet des champs turbulents, la fermeture complète au second ordre telle qu'elle a été décrite au Chapitre III est utilisée.

B-1.- Conditions initiales

Les profils de vitesse initiaux sont des profils de Blasius et s'accordent avec les épaisseurs de couche limite données par les résultats expérimentaux. Les contraintes de Reynolds normales sont supposées égales (turbulence isotrope) et choisies de telle façon que l'énergie cinétique de turbulence reste en deçà de la valeur limite rapportée par les expérimentateurs. Le frottement turbulent est assigné à zéro ainsi que toutes les autres corrélations turbulentes. Le taux de dissipation est déterminé de façon à produire une viscosité turbulente équivalente à la viscosité laminaire, selon la formule désormais classique (VI-1).

B-2.- Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont du type Dirichlet pour les variables primitives telles que la vitesse ou la concentration et du type Neumann (gradient nul) pour tous les moments du second ordre. Quand le gradient de pression longitudinal est différent de zéro, il doit être prescrit analytiquement ainsi que les valeurs externes de la vitesse. Le gradient de pression transverse ne peut pas être prescrit mais seulement approximé par une forme réduite de l'équation de quantité de mouvement transverse :

$$\frac{d\bar{P}}{dy} = - \frac{\partial}{\partial y} (\bar{P} \widetilde{v''^2}) \quad (\text{VI-22})$$

Le système d'équations différentielles pour les corrélations triples est résolu à chaque position longitudinale par un schéma simple de différences centrées plutôt qu'algébriquement (voir référence [17]).

B-3.- Constantes

L'ensemble des constantes qui sont utilisées dans ce modèle de turbulence est résumé dans le tableau (VI-4).

C	0.11	C_1	1,5	C_2	0.4	$C_{\varepsilon 3}$	-1.0
C_{ε}	0.13	$C_{\varepsilon 1}$	1,4	$C_{\varepsilon 2}$	2,1	$C_{\varepsilon 4}$	2.0
C_S	0.11	$C_{\phi 1}$	4,0	$C_{\phi 2}$	4,0	C_{uDP}	1.0
C_{DS}	0.014	C_{c1}	4,0	C_{c2}	-4.8	$C_{\rho 2}$	0.5
C_R	0.6	C_{q1}	3,0	C_{q2}	0.6	C_c	0.5

Tableau VI-4.- Valeurs des constantes de modélisation.

C) RésultatsC-1.- Influence du rapport des vitesses respectives des courants des constituants

Les principaux résultats de la comparaison avec les résultats expérimentaux de BROWN [16] sont regroupés dans le tableau (VI-5) pour les trois différents rapports de vitesses (0.0, 0.3 et 0.6) et les deux combinaisons de gaz (air-air et Freon 12-air). D'une façon globale, l'accord entre les résultats numériques et expérimentaux est très satisfaisant excepté sur les points suivants.

a) Position de l'origine virtuelle

Deux mécanismes différents déterminent la position de l'origine virtuelle. D'une part le taux d'expansion de la couche de mélange, qui est correctement décrit par le calcul, d'autre part les mécanismes de transition qui prennent place entre les couches limites laminaires attachées à la plaque de séparation et la couche de mélange turbulente libre qui se développe en

	ϕ_0	σ	$\frac{U'_{rms}}{\Delta U}$	$\frac{V'_{rms}}{\Delta V}$	$\frac{-10\langle u'v' \rangle}{\Delta U^2}$	K_{uv}
air-air						
exp	0.00	11.97	0.150	-	-	-
calc		11.30	0.192	0.125	0.131	0.548
0.30						
exp	0.30	23.34	0.165	0.125	0.105	0.509
calc		21.22	0.184	0.120	0.120	0.545
0.60						
exp	0.60	39.27	0.195	0.165	0.162	0.503
calc		40.37	0.184	0.120	0.120	0.542
F12-air						
exp	0.30	21.86	0.175	0.125	0.112	0.512
calc		25.67	0.181	0.113	0.112	0.548
0.60						
exp	0.60	23.76	0.168	0.195	0.180	0.549
calc		54.95	0.198	0.126	0.132	0.532

Fig. VI-29.- Résultats de LAUNDER, REECE et RODI [15].

aval. Il est sûr que le second mécanisme ne peut en aucun cas être prédit par une méthode basée sur des équations moyennées par une méthode basée sur des équations moyennées dans le temps. Quoique le calcul montre une zone qui a certaines des caractéristiques communes à une zone de transition, il n'y a aucune raison de relier les deux mécanismes. Les taux d'expansion sont comparés en utilisant le paramètre σ qui est défini à partir des profils de vitesse par

$$\sigma = 1.19 \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad (\text{VI-23})$$

Cette définition est similaire à celle donnée dans la référence [18], excepté que les épaisseurs caractéristiques sont déterminées entre les bornes (0.2, 0.8) au lieu de (0.1, 0.9).

b) un autre point de désaccord concerne le taux d'expansion de la couche de mélange freon 12-air avec un rapport de vitesse égal à 0.6. Comme cela est montré sur la figure (VI-30).

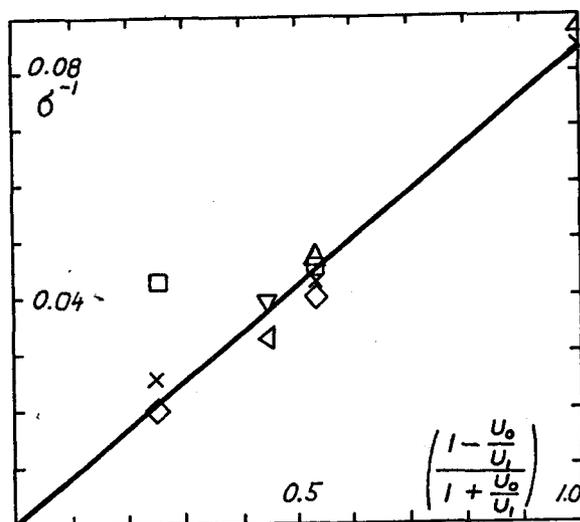


Fig. VI-30.- Taux d'expansion.

— theory [18]; x : air-air [16]; □ : freon 12-air [16]
 △ : air-air, calcul; ◇ : freon 12-air, calcul
 ▽ : helium-azote [6], ▽ : helium-azote, calcul.

Le point expérimental se trouve bien au-dessus de la courbe théorique pour un fluide homogène définie par :

$$\sigma = 11.5 \left(\frac{1 + \phi_0}{1 - \phi_0} \right) ; \quad \phi_0 = \frac{U_0}{U_1} \quad (\text{VI-24})$$

tandis que les résultats de calcul s'accordent très bien avec cette courbe théorique. Sur le tableau (VI-6) on remarque également un niveau de fluctuations normales supérieur à celui des fluctuations longitudinales. Cette particularité n'existe pas dans les résultats de calcul pour lesquels le rapport U'_{rms}/V'_{rms} reste approximativement constant comme dans le cas de rapport de vitesse égal à 0.3 ($U'_{rms}/V'_{rms} \approx 1.6$). Le dernier point de désaccord concerne les niveaux de turbulence pour lesquels BROWN rapport des valeurs croissant avec le rapport de vitesse. On doit s'attendre en effet à ce que la turbulence s'accroît avec le cisaillement, comme le montre le calcul.

C-2.- Influence du gradient de pression

$\lambda = \frac{x}{U} \frac{dU}{dx}$	$\lambda = 0.0$		$\lambda = -0.18$	
	exper.	calc.	exper.	calc.
$S_1/(x-x_0)$	0.10	0.10	0.16	0.15
σ	-	31.34	-	25.97
U/U_1	0.70	0.67	0.59	0.59
$\overline{pU^2}/\rho_1 U_1^2$	0.87	0.81	0.60	0.59
\overline{P}/ρ_1	1.78	1.74	1.70	1.62
$(\overline{pU^2}/\rho_1 U_1^2)_{\min}$	0.52	0.54	0.32	0.31
$(\overline{pU^2}/\rho_1 U_1^2)_{\max}$	1.22	1.19	1.20	1.22
$\overline{P}^{1/2}/\Delta P$	1.19	1.18	1.20	1.15
$\overline{\rho u'v'}/\rho_1 U_1^2$	0.012	0.012	0.0205	0.0147
$\overline{\rho'v'}/\rho_1 U_1$	0.068	0.044	0.082	0.040
Scht	0.16	0.22	0.33	0.16

Tableau VI-7.- Effets du gradient de pression (exp. [6]).

Un nombre de calculs plus important fut fait avec l'écoulement helium-azote [6] qu'avec le mélange freon 12-air, mais quelques unes des conclusions sont identiques.

L'origine virtuelle ne peut pas être déterminée correctement pour les raisons qui ont déjà été exposées dans les paragraphes précédents. La seule façon de comparer les croissances de la zone de mélange, est donc d'examiner le taux d'expansion. La figure (VI-31) montre que pour cet écoulement sans gradient de pression l'accord est également tout-à-fait satisfaisant. (δ_1 et δ_2 sont des épaisseurs caractéristiques calculées à

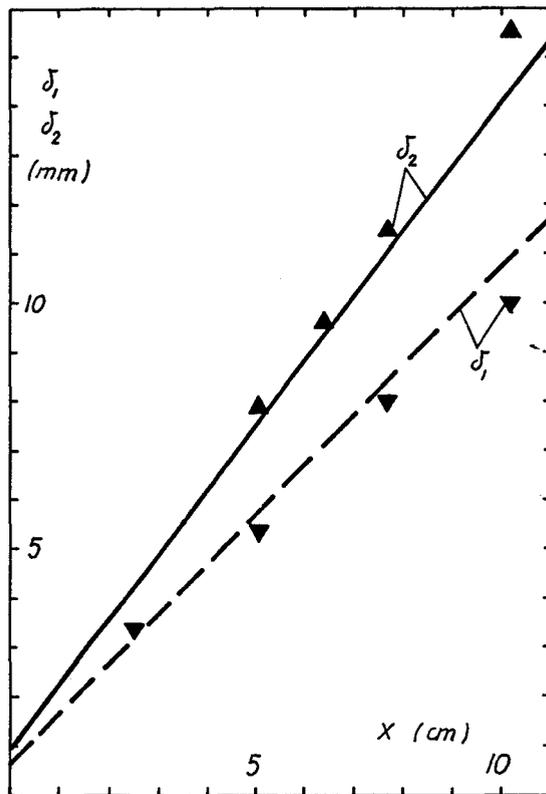


Fig. VI-31.- Taux d'expansion de la couche de mélange Hélium-Azote.

partir des profils de pression dynamique et de masse volumique moyenne [6]). Les résultats les plus intéressants sont montrés dans le tableau VI-7 pour les deux cas, avec et sans gradient de pression, pour lesquels le rapport des vitesses est $\phi_0 = 0.378$. Dans l'ensemble l'accord est bon pour le cas de gradient de pression nul, et plus faible dans le cas du gradient de pression positif, pour lequel les quantités turbulentes sont sous estimées de 25-40 %.

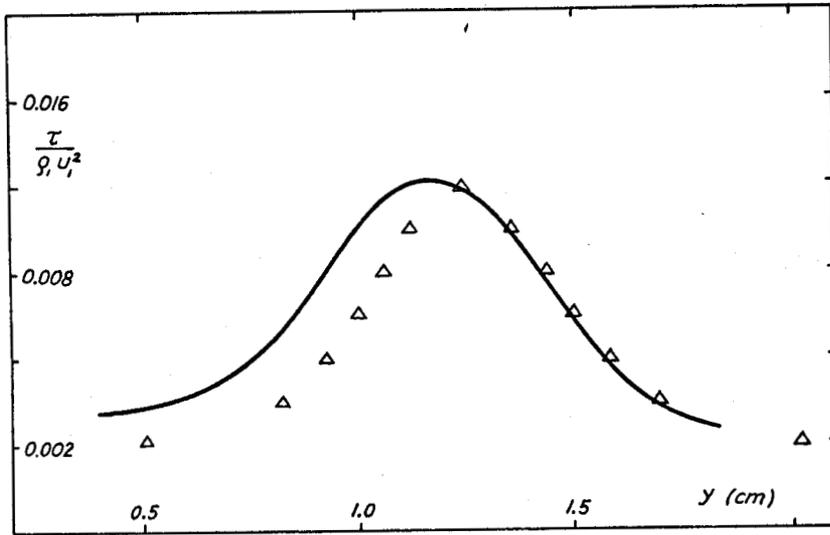


Fig. VI-31-bis.- Frottement turbulent dans la couche.
de mélange Helium-Azote à $x = 5.08$ cm.
($\lambda = 0$; Δ : exp. [6], — calcul).

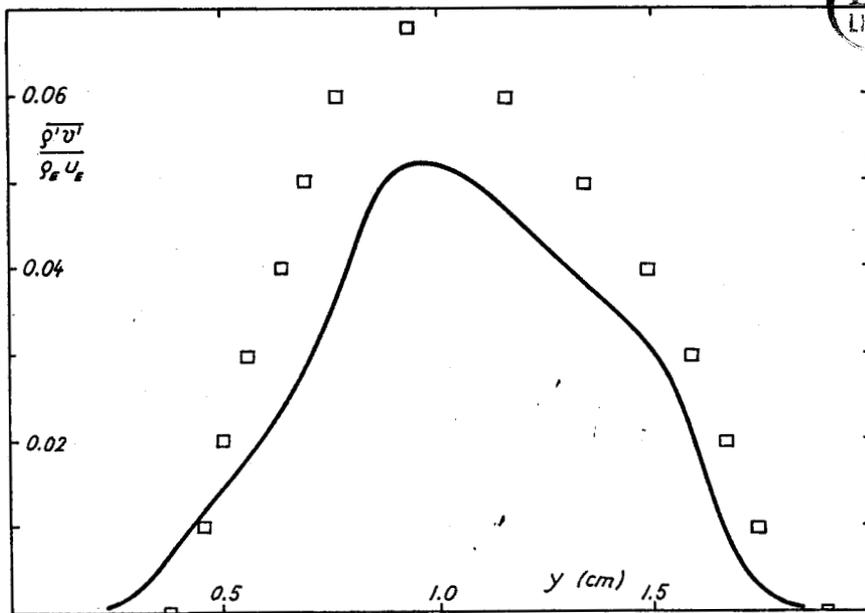


Fig. VI-32.- Corrélation vitesse-masse volumique
dans la couche de mélange Helium-Azote à $x = 5.08$ cm.
(même symboles que la figure VI-31).

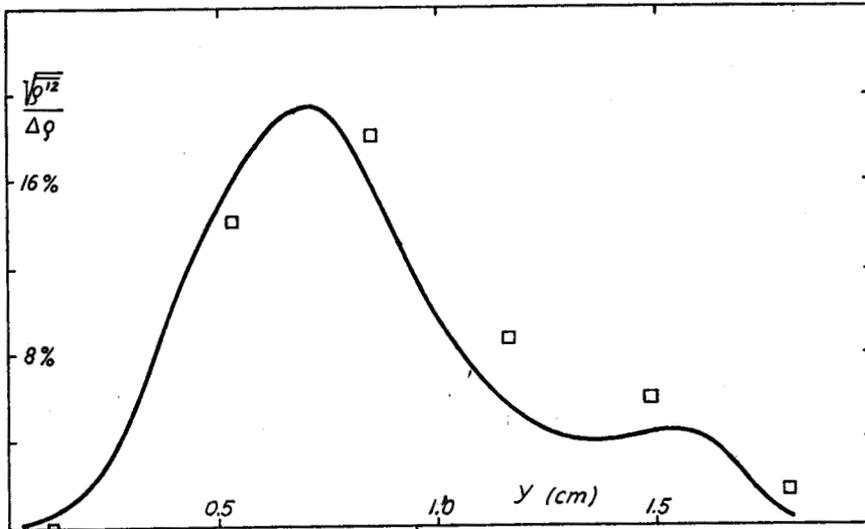


Fig. VI-33.- Fluctuations de masse volumique dans la couche de mélange Helium-Azote à $x = 5.08$ cm. (mêmes symboles que la figure VI-31).

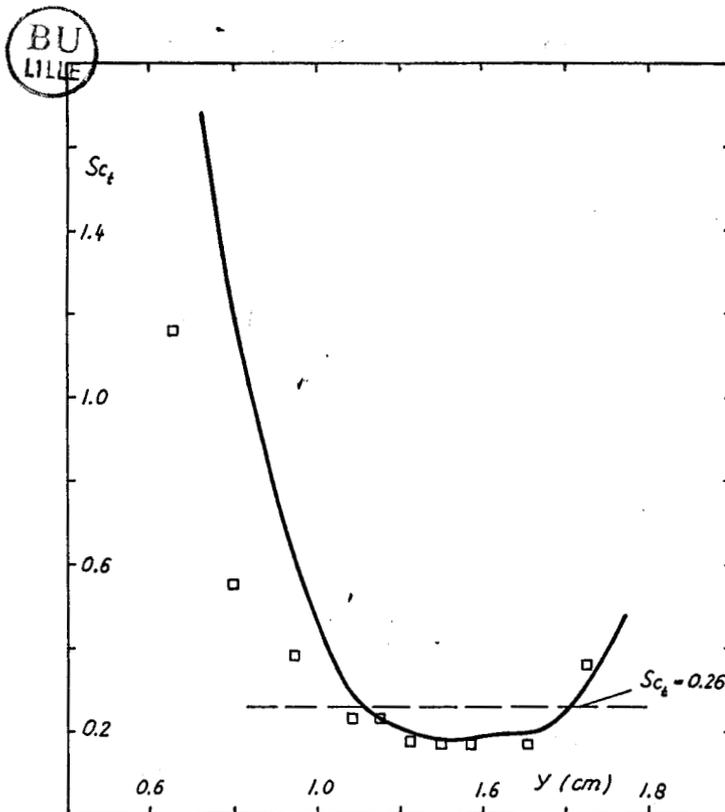


Fig. VI-34.- Nombre de Schmidt turbulent dans la couche de mélange Helium-Azote à $x = 5.08$ cm. (mêmes symboles que la figure VI-31).

Aucune comparaison directe du paramètre de taux d'expansion n'est rapportée ici parce qu'il a été observé dans les calculs que la zone de similitude des profils n'est strictement établie qu'après 5 cm en aval de la plaque de séparation et aucune valeur expérimentale n'est donnée au-delà de cette abscisse. Néanmoins le paramètre σ calculé est en accord avec les résultats de calcul précédents et avec la courbe théorique représentée sur la figure VI-30 quand le calcul est poursuivi sur une distance aval plus importante ($8 \leq x \leq 30$ cm) où la similitude des profils est assurée. Pour la région de sillage proche, deux épaisseurs différentes sont évaluées (fig. VI-31). Les figures (VI-32), (VI-33) et (VI-31-bis) montrent quelques résultats typiques pour le frottement turbulent, la corrélation vitesse-masse volumique et les fluctuations de masse volumique. Les nombres reportés dans le tableau (VI-7) soulignent que les résultats sont bons pour toutes les quantités moyennes mais ne s'accordent pas très bien avec l'influence du gradient de pression. Les résultats expérimentaux montrent que le gradient de pression tend à accroître le taux d'expansion, le frottement turbulent et les corrélations vitesse-masse volumique mais pas les fluctuations de masse volumique dont le maximum reste pratiquement inchangé. Les calculs montrent un accroissement moindre du frottement turbulent tandis que les corrélations de masse volumique diminuent et ne s'accordent plus du tout avec les résultats expérimentaux. Cette faiblesse semble due aux termes de gradient de pression présents dans l'équation pour les flux turbulents. En particulier, la corrélation masse volumique-fraction massique pourrait certainement être mieux prédite par une équation de transport plutôt que par une relation algébrique.

Finallement la figure (VI-34) donne une estimation du nombre de Schmidt turbulent dans la couche de mélange. La ligne droite représente la valeur constante qui est utilisée pour les modèles $k-\epsilon$. Cette figure montre clairement que même si une telle valeur est réaliste dans la partie centrale de la zone de mélange, elle devient totalement inadaptée sur les bords.

VI-2.- LA COUCHE DE MELANGE

Pour l'étude du mélange isotherme qui a été faite dans la première partie de ce chapitre, le très petit nombre de travaux expérimentaux n'a permis l'utilisation des différents modèles que sur un nombre très restreint de configurations expérimentales. Dans le but de présenter une plus grande généralité de nos travaux nous avons repris le rapport de BIRCH et EGGERS [18] concernant l'étude des couches libres de cisaillement. Le but n'est pas de répéter une batterie complète de tests du genre de ceux qui ont été faits dans la première partie mais de montrer que, à partir de conditions initiales très schématiques il est possible de prédire les principales caractéristiques de l'écoulement. Au lieu de comparer les résultats par rapport à un jeu de données expérimentales, nous prendrons maintenant comme référence une courbe théorique suggérée par BIRCH et EGGERS [18] à partir de la compilation de données d'origines différentes. Ces calculs ont été faits avec le modèle $k-\epsilon$ mais, pour des raisons matérielles, il n'a pas encore été possible de les reproduire avec une fermeture du second ordre.

Les trois premiers cas tests proposés à la conférence de LANGLEY [18] sont essentiellement théoriques. Ces trois cas tests furent choisis pour identifier les effets du rapport des vitesses, du nombre de Mach et du rapport des masses volumiques. Aucune donnée expérimentale n'est spécifiée pour comparaison avec ces prédictions à cause de l'incertitude générale qui existe dans l'interprétation des données disponibles au moment de la conférence. Pour une description détaillée de l'établissement des courbes théoriques ou leurs relations avec diverses données expérimentales, le lecteur est renvoyé au papier original de BIRCH et EGGERS [18].

VI-2-1.- Influence du rapport des vitesses

Avant d'aller plus en avant avec des valeurs différentes du rapport des vitesses, il est bon d'examiner tout d'abord le cas où l'un des courants à une vitesse nulle. Le taux d'expansion de ces couches de mélange est mesuré à l'aide du paramètre σ défini suivant la norme de [18]:

$$\sigma = \frac{1.855 (\alpha_2 - \alpha_1)}{(y_2 - y_1)} \quad (\text{VI-25})$$

ou y_1 et y_2 sont les distances entre les points auxquels $\frac{u - u_2}{u_1 - u_2}$ est 0.1 et 0.9 aux stations x_1 et x_2 . Les deux positions x_1 et x_2 sont supposées être à l'intérieur de la région de similitude des profils et suffisamment séparés pour assurer aux calculs un certain niveau de précision. Dans le but de supprimer l'influence des profils initiaux (épaisseur de couche limite, niveau de turbulence), et parce que les résultats sont pris uniquement dans la région où le régime turbulent est complètement établi, tous les calculs commencent avec un même profil de vitesse en marche d'escalier, avec un niveau de turbulence suffisamment petit pour correspondre à un régime laminaire et en plus de cela, une condition du type production = dissipation pour assurer que le développement de la turbulence se fera en même temps que le développement des profils de vitesse. Dans le but de situer l'écoulement dans une certaine gamme du nombre de Reynolds, la valeur de σ_0 ($\rightarrow u_2/u_1 = 0$) est calculée à partir des données expérimentales rapportées par LIEPMANN et LAUFER [19]. Pour ce cas précis seulement, nous donnons quelques éléments de comparaison autres que les taux d'expansion dans le tableau (VI-8). Puis dans le tableau (VI-9) les résultats avec des rapports de vitesse différents sont regroupés.

	exp. [19]	Calcul
$\frac{dy_c}{dx}$	0.16	0.173
$\frac{d\theta}{dx} = \lambda_c$	0.035	0.033
$\frac{\tau_{max}}{\lambda_c \rho_c U_c^2}$	0.34	0.325
$\frac{\tau_{max}}{\rho_c U_c^2}$	0.012	0.011
$\left(\frac{\sqrt{u'^2}}{U_c}\right)_{max}$ ou $\left(\frac{\sqrt{2g}}{U_c}\right)_{max}$	0.16 - 0.18	0.142
σ_0	12	11.94

Tableau VI-8.- Couche de mélange $\frac{u_2}{u_1} = 0$.

u_2/u_1	σ_0/σ
0.01	1
0.20	0.66
0.40	0.42
0.60	0.24
0.80	0.10

Tableau VI-9.- Variation du paramètre de taux d'expansion calculé en fonction de rapports de vitesse différents.

Les figures (VI-35) et (VI-36) montrent l'accord des résultats calculés avec la courbe théorique de SABIN et ABRAMOVICH (voir référence [18]).



$$\frac{\sigma_0}{\sigma} = \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2}$$

(VI-26)

La figure (VI-36) est analogue à (VI-30). A titre indicatif nous y avons reporté le point correspondant aux expériences de REBOLLO pour le mélange Helium-Azote (représenté par X).

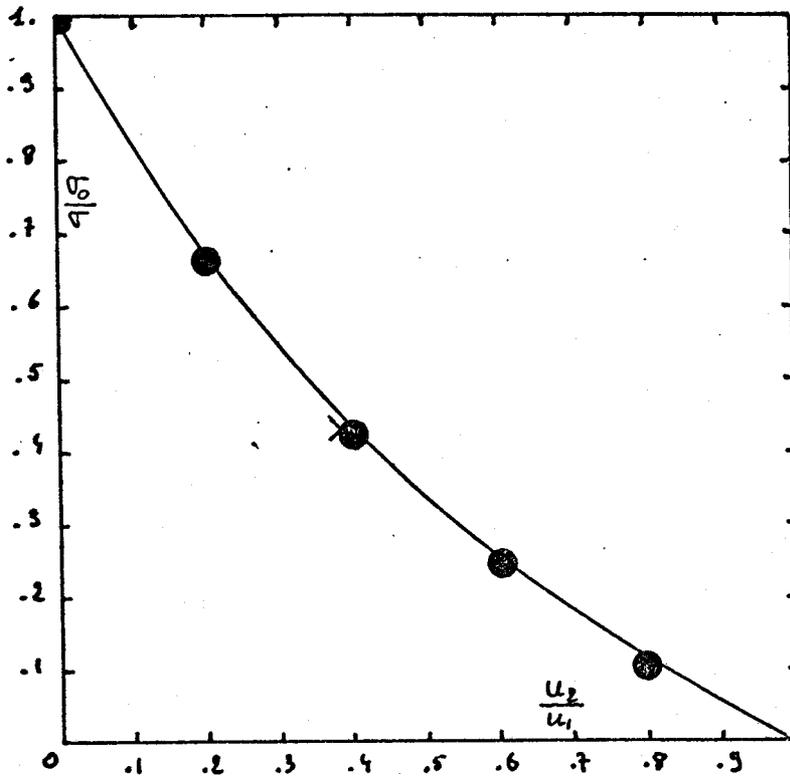


Fig. VI-35.- Taux d'expansion de la couche de mélange (courbe théorique de SABIN et ABRAMOVICH d'après [18]).

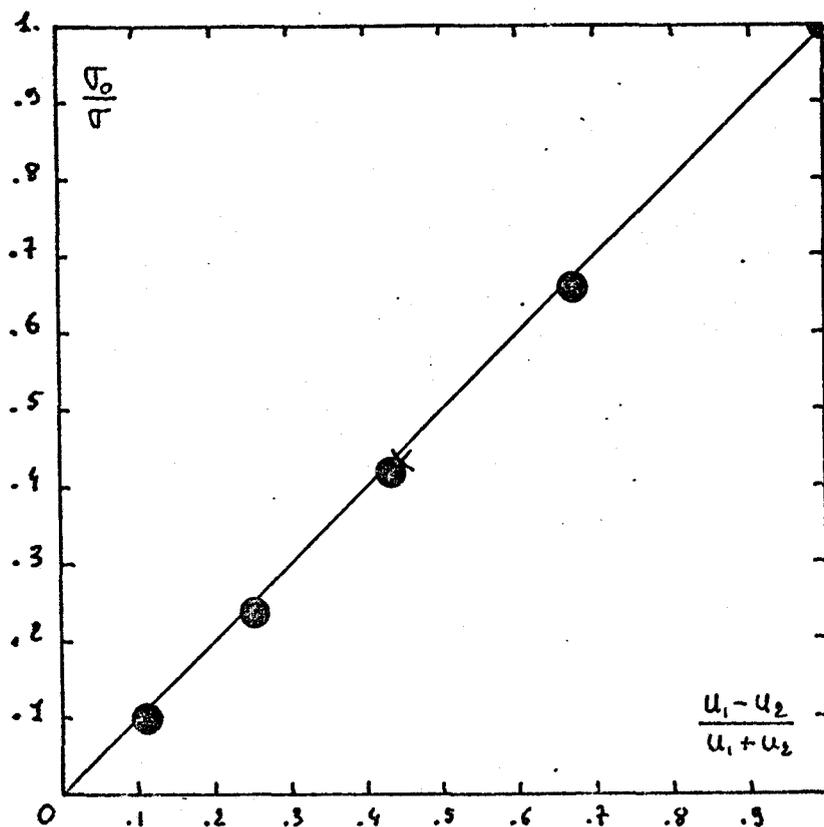


Fig. VI-36.- Taux d'expansion de la couche de mélange (formulation de S.J. KLINE d'après [18]).

VI-2-2.- Influence du rapport des masses volumiques

Pour ce cas test, répertorié sous le n° 3 dans le rapport de la conférence, il est demandé de calculer le paramètre de taux d'expansion pour une couche de mélange libre subsonique, avec un champ turbulent développé, un rapport de vitesse u_2/u_1 égal à 0.2 et des rapports de masse volumique ρ_2/ρ_1 égaux à 14.0, 0.5, 0.14 et 0.07.

Les résultats apparaissent dans le tableau (VI-10).

ρ_2/ρ_1	σ_0	σ	σ_0/σ
14.0	11.87	19	0.62
0.5	12.29	18.89	0.65
0.14	12.93	20.09	0.64
0.07	13.81	20.79	0.66

Tableau (VI-10).- Variation du paramètre de taux d'expansion calculé en fonction de rapports de masses volumiques différents.

Pour le rapport de vitesse considéré la valeur théorique de σ_0/σ est 0,667. La dispersion maximum est donc de 7 % ce qui s'accorde tout à fait avec les conclusions de BROWN et ROSHKO au sujet de l'absence d'effet des variations de masse volumique (à basse vitesse) sur le taux d'expansion. La figure (VI-37) reprend les résultats d'ABRAMOVICH et de EGGERS et ROSHKO qui sont présentés dans la référence [18] par BIRCH et EGGERS. Nous avons conservé quelques symboles correspondant aux données expérimentales tandis que le symbole plein représente les résultats du tableau (VI-10).

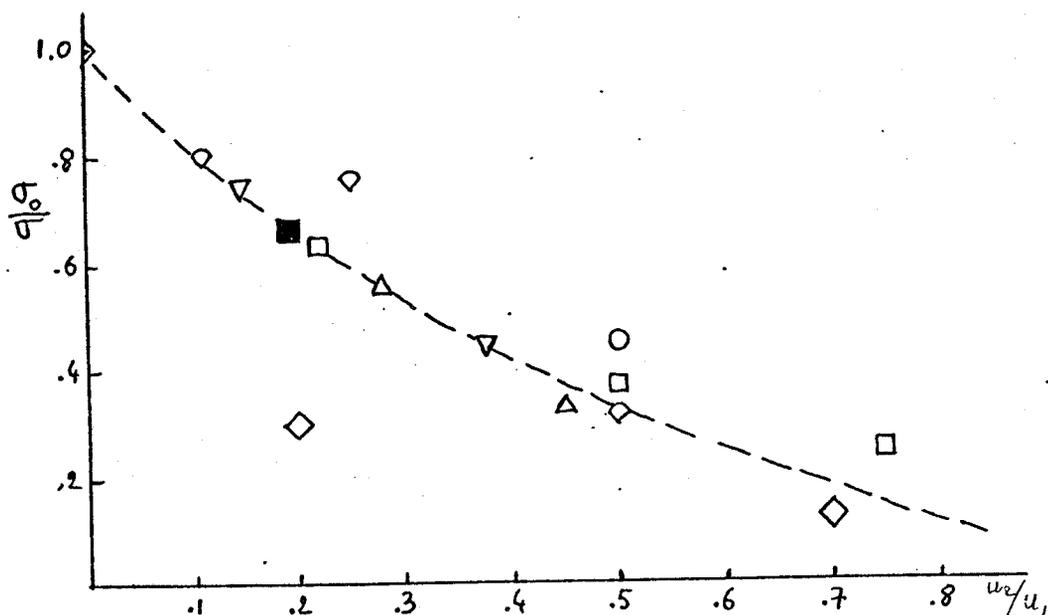


Fig. VI-38.- Variation de σ_0/σ en fonction du rapport de vitesse pour des couches de mélanges hétérogènes.

VI-2-3.- Influence du nombre de Mach

Seulement des résultats partiels ont pu être obtenus pour ce troisième cas test (cas n° 2 de la conférence de Langley). En effet des problèmes d'instabilité numérique ont été rencontrés pour les écoulements à Mach élevé ou les termes correspondant à la modélisation des termes pression divergence deviennent prédominants devant les termes production-dissipation conventionnels. Des résultats n'ont pu être obtenus que jusqu'à un nombre de Mach inférieur ou égal à 4. Ces résultats sont à rapprocher de ceux de OH [20] et de BONNET [21]. Il faut remarquer que OH présente une bonne justification physique de son modèle, supposant que l'écoulement turbulent supersonique ne peut pas être considéré comme isentropique toutefois, l'application de son modèle au calcul du mélange isovolume est médiocre. L'avis de l'auteur est toutefois que la tentative de prédiction qui est présentée ici ne doit pas être considérée comme un résultat achevé mais plutôt comme une ouverture vers une étude plus poussée de ce type d'écoulement qui, même physiquement, n'est pas encore très bien compris. Que ce soit avec un modèle à une équation [20] à deux équations (résultats présents) ou avec une fermeture du second ordre [21], un consensus semble exister pour attribuer l'anomalie (ou la particularité) de comportement du taux d'expansion de la couche limite supersonique ou terme de pression-déformation, et plus particulièrement à la partie pression-divergence. Une étude plus poussée de ce problème devrait pouvoir accéder à des conclusions plus fermes, quant à cela ou le rôle d'un terme équivalent dans l'équation de la dissipation.

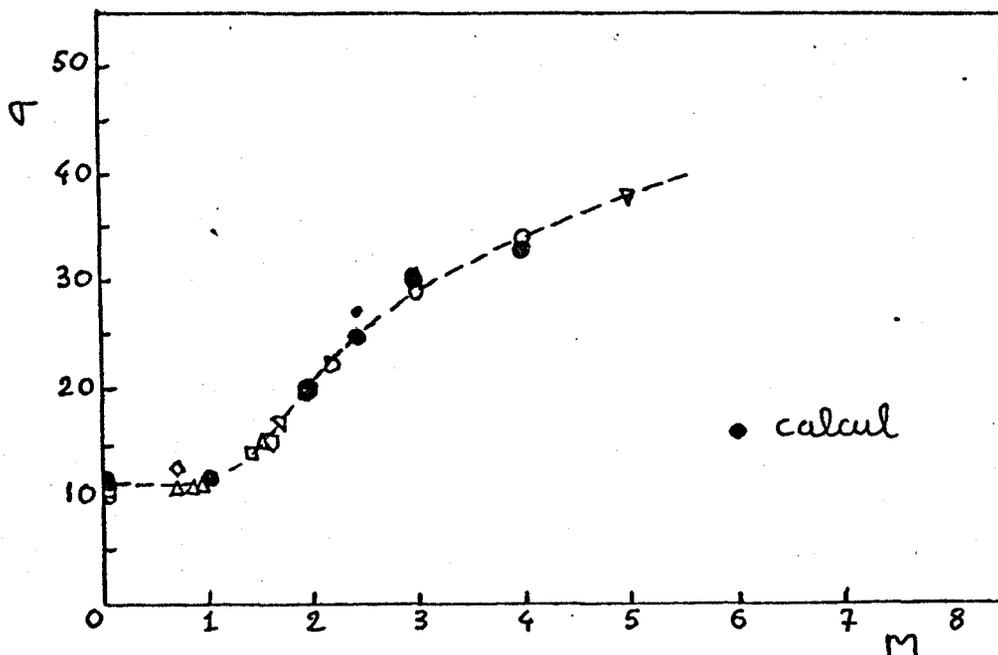


Fig. VI-37.- Influence du nombre de Mach sur le taux d'expansion (A titre d'illustration les symboles ouverts correspondent à des observations expérimentales [18]. Les symboles pleins sont les résultats du calcul.

VI-3.- L'INTERACTION ONDE DE CHOC-COUCHE LIMITE

Après la transition qui a été faite par le problème de la couche de mélange à masse volumique variable nous allons nous intéresser maintenant au traitement de problèmes strictement compressibles avec proximité de paroi solide. Une première étude est faite des couches limites compressibles sur plaques planes pour différents nombre de Mach ou différentes températures de paroi puis une seconde étude sera consacrée au problème plus complexe de l'interaction onde de choc-couche limite dans une tuyère bidimensionnelle transsonique. Dans tous les cas le but n'est pas de reporter systématiquement toutes les quantités mesurables, mais plutôt de mettre en évidence les faiblesses ou les points forts de tel ou tel modèle pour le calcul de chaque écoulement et de pouvoir établir de façon claire leurs limites respectives et leur domaine d'applicabilité.

VI-3-1.- La couche limite compressible

A) Configuration expérimentale

Pour cet aspect des calculs compressibles, plutôt que de s'attacher à un ou deux travaux expérimentaux donnés nous nous sommes orientés vers une comparaison plus globale des résultats, de façon indépendante de l'origine des expériences. Cette approche du problème a été rendue possible par la conférence de Stanford et tous les travaux préparatoires qui l'ont supportée. Dans le cadre de cette conférence, RUBESIN et HORSTMAN [22] ont été chargés d'évaluer et de sélectionner des écoulements étudiés expérimentalement en vue d'établir une base de données qui servirait de référence pour l'évaluation des modèles de turbulence (pour ce type d'écoulement). Une première remarque est que divers auteurs [23], [24], [27] ont montré que la théorie de la longueur de mélange modifiée par Van Driest II pouvait être utilisée pour prédire correctement le coefficient de frottement et la vitesse longitudinale dans la zone interne de la couche limite. Par cette théorie, le frottement peut être prédit avec une précision de l'ordre de 10 % dans les gammes suivantes :

$$2,8 \leq \eta \leq 7,4$$

$$0,2 \leq T_w / T_{aw} \leq 1,0$$

Pour des valeurs plus faibles de la température de paroi, cette théorie surestime les données expérimentales (d'environ 20 % si

$T_w/T_{aw} = 0.1$). De plus il a été vérifié que la "loi de paroi" isovolume s'accorde avec les mesures de vitesse moyenne jusqu'à un nombre de Mach égal à 7, pour une paroi athermane ou refroidie, à condition de redéfinir une vitesse incompressible équivalente U^* de la façon suivante :

$$U^* = \int_0^U \sqrt{\frac{p}{p_w}} dU \quad (\text{VI-27})$$

et d'utiliser les variables pariétales pour calculer la variable y^+ .
Finalement les facteurs de récupération

$$r = \frac{T_{aw} - T_e}{T_T - T_e} \quad (\text{VI-28})$$

sont proches de la valeur 0.88 dans une gamme très étendue de nombres de Mach [26].

A l'époque où ces travaux expérimentaux ont été effectués, les mesures de turbulence étaient encore loin d'être monnaie courante; les résultats de mesures au fil chaud ne faisaient pas la part des fluctuations de masse volumique et des fluctuations de vitesse et la vélocimétrie laser n'était pas encore développée. Puis, à mesure que les techniques expérimentales évoluèrent et s'améliorèrent, des profils de moments d'ordre deux furent mesurés sur des parois de soufflerie en l'absence de gradient de pression plutôt que sur des modèles de plaque plane [25], [28], [29]. Dans ces cas là, il est bien connu que les couches limites, qui sont beaucoup plus épaisses, gardent une certaine mémoire de leur état amont (accélération continue). L'enthalpie totale de ces couches limites est alors une fonction du second degré de la vitesse locale plutôt que la relation linéaire de Grocco que l'on peut observer pour les plaques planes [30]. Ainsi, ces mesures récentes de quantités turbulentes peuvent être différentes de celles correspondant au problème de la plaque plane. C'est pourquoi, seules les quantités moyennes calculables par la méthode de Van Driest II font l'objet d'une comparaison dans le cadre de la conférence [22]. En particulier le coefficient de frottement sur une plaque plane athermane est calculé en fonction du nombre de Mach pour un nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement égal à 10^4 . La loi de frottement est celle de KARMAN-SCHOENHERR modifiée par VAN DRIEST II (voir réf. [22] ou [30]). Le problème de la plaque isotherme refroidie est également traité

pour une valeur du nombre de Mach égal à 5.

Ce type de comparaison au niveau des grandeurs moyennes est satisfaisant pour l'élaboration de modèles de turbulence correspondant à une fermeture des équations au niveau zéro. Toutefois pour une fermeture d'ordre deux le besoin en données expérimentales est beaucoup plus grand. En effet, pour valider le modèle, ou plutôt les hypothèses qui le supportent une description plus fine de l'écoulement est nécessaire. En plus de la répartition de vitesse, il est également possible d'évaluer par le calcul les différentes contraintes du tenseur de Reynolds et ainsi l'anisotropie qui est caractéristique de la proximité d'une paroi solide. A ce jour, il n'existe pas encore de données suffisamment détaillées de ce type de résultat [31], [32], [33], aussi nous sommes résolus à utiliser des données expérimentales incompressibles, pour examiner le comportement du tenseur d'anisotropie, en transformant bien évidemment les vitesses calculées en vitesses incompressibles équivalentes par la relation (VI-27) citée précédemment. De plus les remarques de MORKOVIN [34] puis de BRADSHAW [27] nous laissent penser que dans le voisinage de la paroi, les effets de compressibilité ne sont pas prédominants. Les travaux expérimentaux qui ont été retenus sont ceux de KLEBANOFF [35] et de KREPLIN et EC ELMANN [36].

B) Traitement numérique

Tous les calculs dont les résultats sont présentés dans cette partie et tout ce qui va suivre ont été effectués avec la méthode numérique présentée au Chapitre V, pour la résolution des équations de Navier-Stokes complètes (le qualificatif "complet" est employé ici dans le sens qu'aucune simplification des équations moyennées n'est faite à priori à la différence des équations du type couche limite qui ont été utilisées dans les parties VI-1 et VI-2). Il est sûr qu'un tel moyen de calcul est "surdimensionné" par rapport au problème physique. La prédiction d'une couche limite, même compressible peut se faire tout aussi bien avec un code couche limite (parabolique). Toutefois, comme le but que nous nous sommes fixés dans cette thèse est le calcul d'une interaction forte, il nous a paru nécessaire de tester les modèles de turbulence sur des cas d'écoulements simples mais avec un outil numérique commun. A titre anecdotique nous présentons néanmoins quelques résultats obtenus avec le même modèle de turbulence (fermeture du second ordre) mais avec la méthode numérique décrite au chapitre IV.

B-1.- Conditions aux limites

Les conditions aux limites doivent être nécessairement imposées sur toutes les frontières du domaine de calcul. La frontière amont est supersonique. Les variables sont donc gardées à une valeur constante, et aucune influence aval-amont n'est possible. La présence de la plaque solide est introduite de façon très physique en imposant la condition d'adhérence au champ de vitesse, c'est-à-dire que les deux composantes de vitesse y sont nulles. Le gradient de pression y est supposé non nul mais faible et recalculé à chaque point pour ne pas violer la condition $U=0$ ainsi que cela a été montré dans le chapitre précédent. La condition d'adhérence n'est imposée qu'à partir de la seconde colonne de points, ce qui équivaut à simuler un bord d'attaque effilé entre le premier et le deuxième point. La quatrième condition peut être, ou bien une température tenue constante ou un flux de chaleur imposé.

La frontière aval est presque partout supersonique. Des conditions simples du type Neumann y sont donc appliquées. Pour la frontière supérieure du domaine, seule une grandeur est fixée, la vitesse longitudinale ou la pression. Les autres grandeurs satisfont une relation du type $\frac{\partial}{\partial y} = 0$.

B-2.- Conditions initiales

Dans le but de maintenir le caractère prédictif de la méthode un minimum d'informations est fourni au début du calcul. Nous prescrivons donc un champ de vitesse constante dans tout l'écoulement, excepté sur les points de paroi.

C) Résultats

Les premiers calculs de couche limite qui ont été faits portent sur la prédiction des valeurs moyennes mentionnées plus haut. L'influence du nombre de Mach sur l'évolution du coefficient de frottement est vérifiée et comparée à la valeur théorique de la loi de KARMAN-SCHOENHERR modifiée selon VAN DRIEST II, pour un écoulement sur une plaque plane adiabatique. Quelques résultats sont également reportés sur cette courbe concernant une modification du modèle algébrique de CEBECI [38] pour tenir compte d'un éventuel décollement de la couche limite. Au lieu de l'épaisseur de déplacement, une fonction du taux de tourbillon est utilisée comme longueur

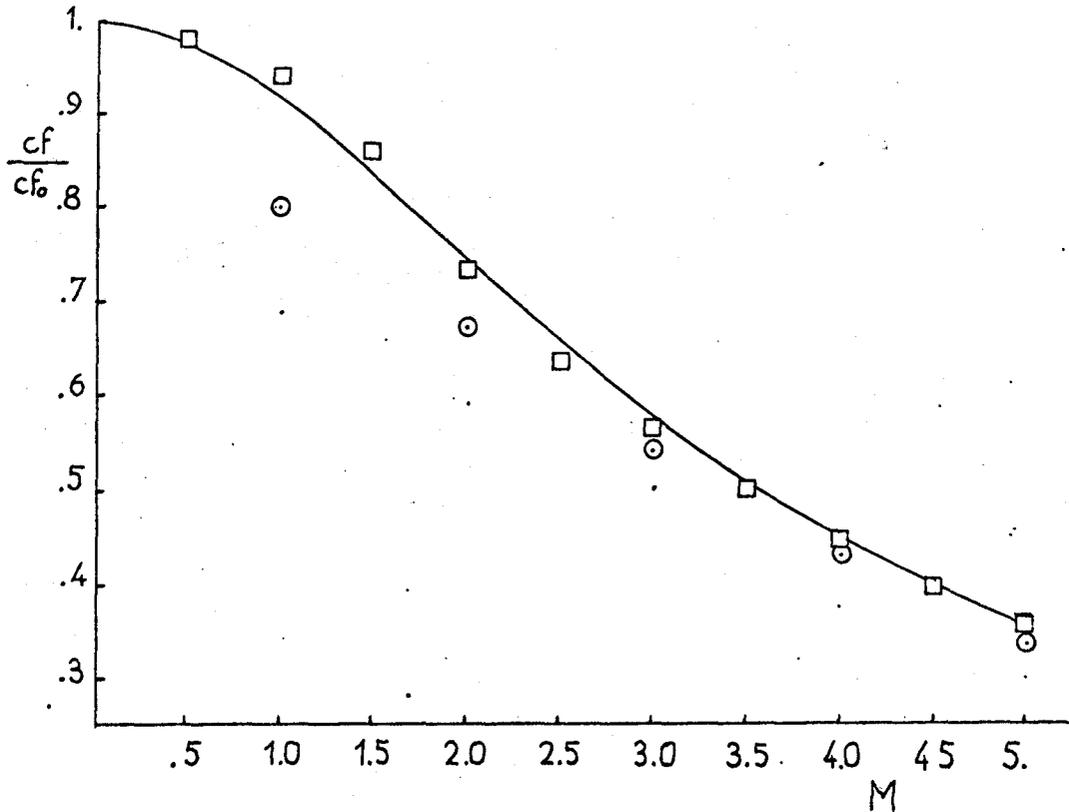


Fig. VI-38.- Influence du nombre de Mach sur le coefficient de frottement $R_0 = 10^4$; $\varphi_0 = 2.634 \cdot 10^{-3}$; paroi athermane.
 — courbe théorique, □ calcul longueur de mélange [38]
 ⊙ calcul longueur de mélange modifiée [37].

caractéristique de la couche limite [37]. On remarque que les prédictions avec le modèle de base sont bonnes dans tous les cas tandis que le modèle modifié est mieux adapté aux écoulements fortement supersoniques. Sur la figure suivante (VI-39) sont tracés quelques profils de vitesse correspondants aux nombres de Mach 1.0, 2.0, 3.0, 4.0 et 5.0.

La loi de paroi est bien suivie et les effets de compressibilité vont dans le sens des conclusions de WHITE [39]. La figure (VI-40) présente les résultats obtenus pour une plaque plane refroidie. Le nombre de Mach extérieur est constant et égal à 5 tandis que la température de paroi est diminuée jusqu'à 20 % de la température de paroi adiabatique. Le coefficient de frottement est sous-estimé d'environ 5 % mais la tendance attendue d'une surestimation pour les valeurs les plus faibles de température correspond effectivement aux attentes de RUBESIN et HORSTMAN [22]. Pour ce qui est

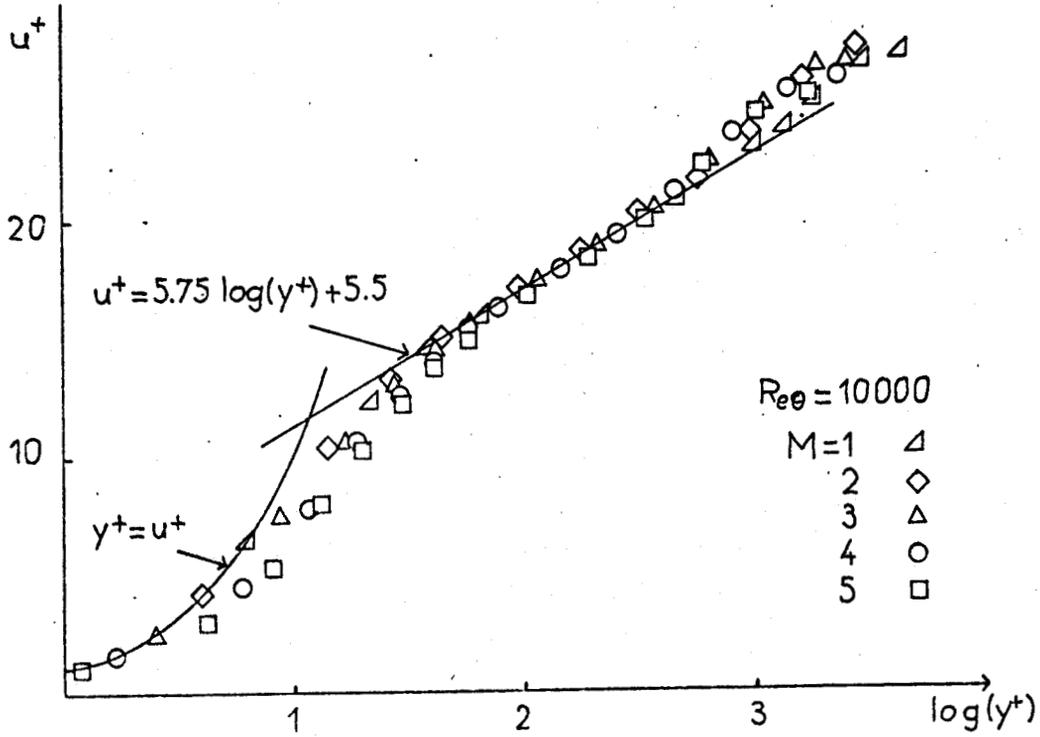


Fig. VI-39.- Profils de vitesse suivant la loi de paroi universelle (Paroi Athermane).

de l'influence du taux de refroidissement on observe à nouveau un très bon accord avec les résultats expérimentaux collectés.

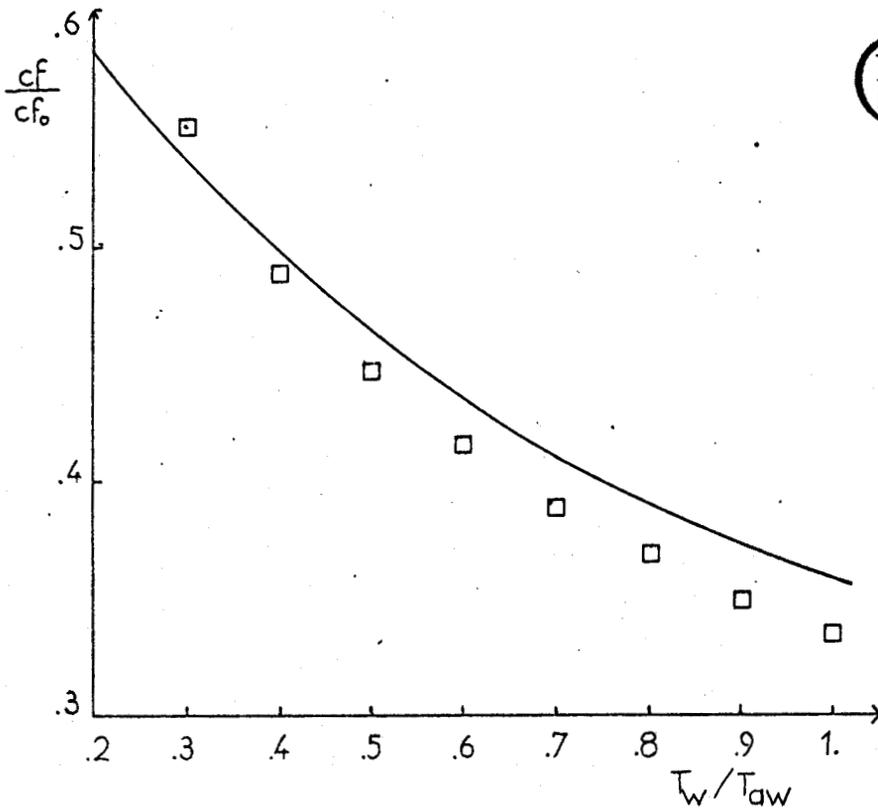


Fig. VI-40.- Influence de la température de paroi sur le coefficient de frottement. Ecoulement supersonique sur une plaque plane refroidie ($M = 5$, $Re = 10000$).

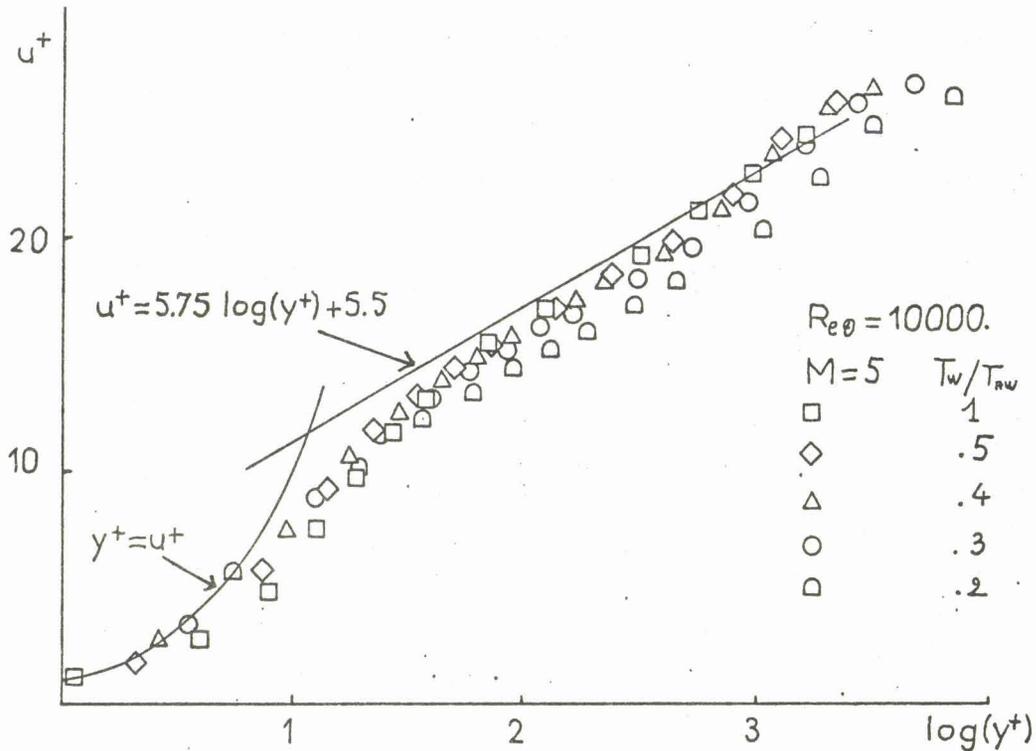


Fig. VI-41.- Profils de vitesse sur plaque plane isotherme (mêmes conditions que pour la figure VI-40).

L'utilisation de ce type de fermeture pour des problèmes plus complexes où apparaît un décollement ne donne que des résultats médiocres, comme nous le verrons dans un paragraphe suivant. C'est pourquoi il a été jugé nécessaire d'obtenir une description beaucoup plus fine de la couche limite, et tout particulièrement du tenseur des contraintes de Reynolds, en résolvant également les équations d'évolution de ses différentes composantes.

Un premier calcul a tout d'abord été effectué avec une version d'un modèle qui n'est que la stricte transposition de celui de LAUNDER, REECE et RODI [15], HANJALIC et LAUNDER [40] et GIBSON et LAUNDER [45]. Les résultats les plus marquants sont reportés sur les figures (VI-42) à (VI-55).

A la différence des calculs précédents, pour diminuer les coûts de calcul, cette deuxième partie n'a pas été traitée comme un problème de bord d'attaque. Initialement le premier profil est généré par un code parabolique qui contient le modèle de turbulence de WILCOX et RUBESIN [44].

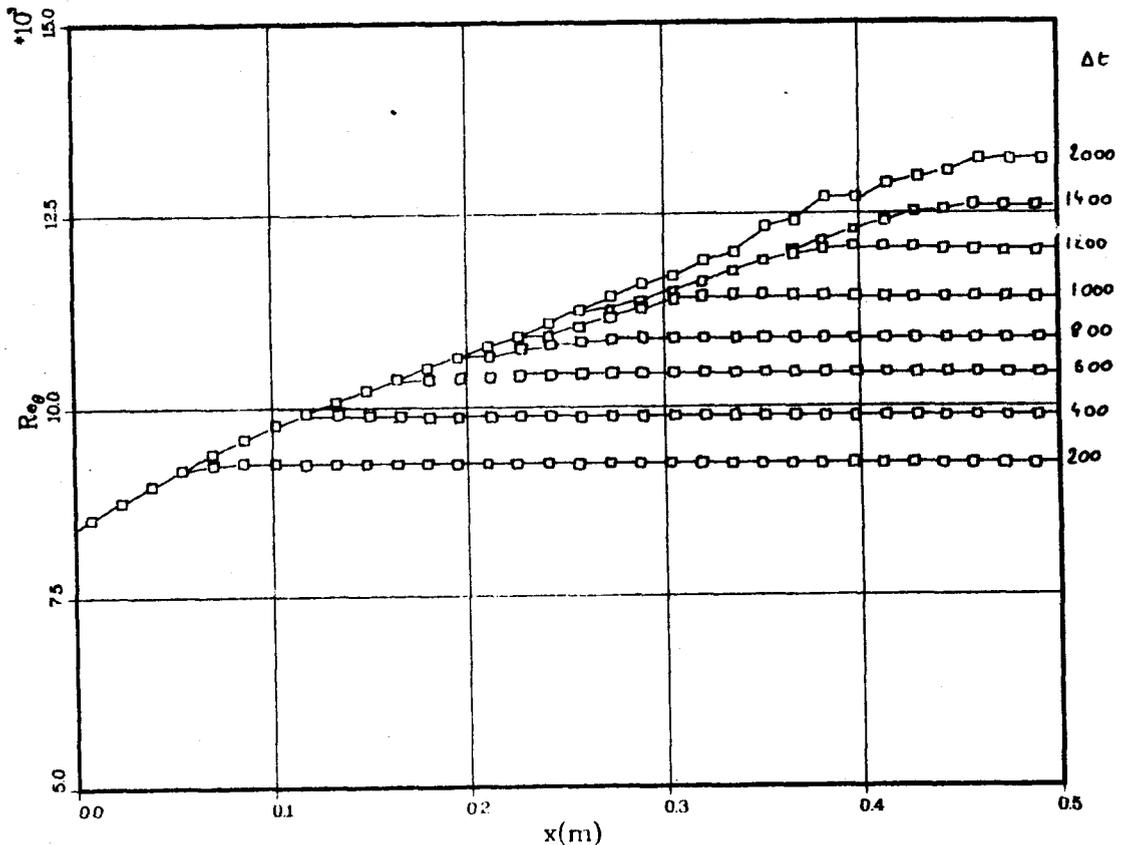


Fig. VI-42.- Courbes d'épaississement de la couche limite.
 ($n = 3$, $Re_0 = 10000$, modèle RSE).

Ce modèle utilise les résultats de LAUNDER et al. pour les termes de pression-déformation en écoulement à turbulence homogène sans les adaptations de proximité de paroi. Les effets de compressibilité sont pris en compte par la définition locale de la masse volumique et les termes de divergence non-nuls dans les corrélations pression-déformation. La longueur caractéristique est définie à partir du carré du taux de dissipation spécifique de l'énergie de turbulence.

Ce profil initial est reproduit identiquement dans toutes les sections. Le calcul ne converge alors que lorsque l'épaississement de la couche limite est obtenu de façon régulière sur toute la longueur de la plaque à partir du profil initial maintenu constant dans la première section. Cet épaississement est illustré par la figure (VI-42) qui montre l'évolution du nombre de Reynolds Re_0 au cours du calcul.

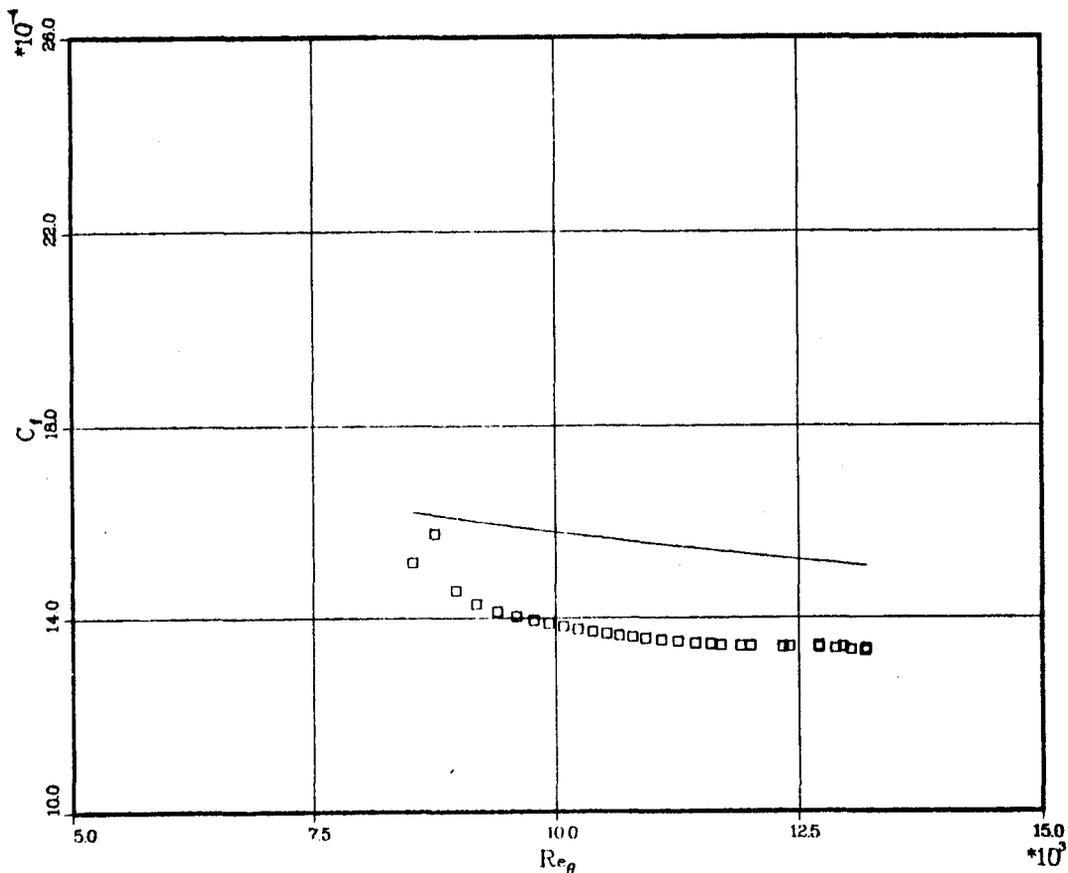


Fig. VI-43.- Répartition du coefficient de frottement.
(modèle standard, mêmes conditions que pour la figure VI-42).

Pour éviter la confusion entre les effets du modèle de turbulence et ceux de l'algorithme de calcul, le même modèle de turbulence a été implanté dans le programme parabolique décrit au chapitre IV. Les profils initiaux qu'utilise ce code sont identiques à ceux décrits précédemment pour le programme Navier-Stokes. Un autre argument en faveur de ce traitement en parallèle avec deux méthodes numériques différentes est que la vitesse du code couche limite est telle qu'il peut être utilisé aussi comme un outil pour guider et tester les différentes modifications susceptibles d'être apportées au modèle avant leur introduction dans le code Navier-Stokes.

Pour les calculs qui sont présentés dans cette partie, le programme couche limite emploie 128 points de calcul dans la direction normale à l'écoulement. De son côté, le programme Navier-Stokes n'emploie que 32 points dans cette même direction. La distance inter-nodale s'accroît de façon exponentielle à partir de la paroi solide pour les deux codes de

façon à obtenir une valeur minimale de l'ordre de 0.3 pour y^+ . Différentes grilles ont été essayées avec les deux programmes et le choix final a été fait de façon à avoir un compromis raisonnable entre précision et coût de calcul. Dans la direction de l'écoulement le programme couche limite calcule de lui-même son pas d'avancée en fonction d'une longueur caractéristique de l'écoulement (par exemple l'épaisseur de la couche) tandis que le programme Navier-Stokes utilise une grille dont la longueur des mailles est constante et approximativement égale à la moitié de l'épaisseur de la couche limite initiale. Une telle résolution est tout-à-fait suffisante pour l'obtention d'une solution précise pour une couche limite établie, VIEGAS et HORSTMAN [46].

Revenons maintenant à l'examen des résultats fournis par ce premier modèle que nous qualifierons de modèle standard dans la suite de ce chapitre. La figure VI-43 montre l'évolution du coefficient de frottement le long de la plaque. Bien que la tendance de cette évolution concorde avec la loi théorique de KARMAN-SCHOENHERR modifiée suivant la méthode de VAN DRIEST II [47], le frottement est partout sous-estimé d'environ 12 %.

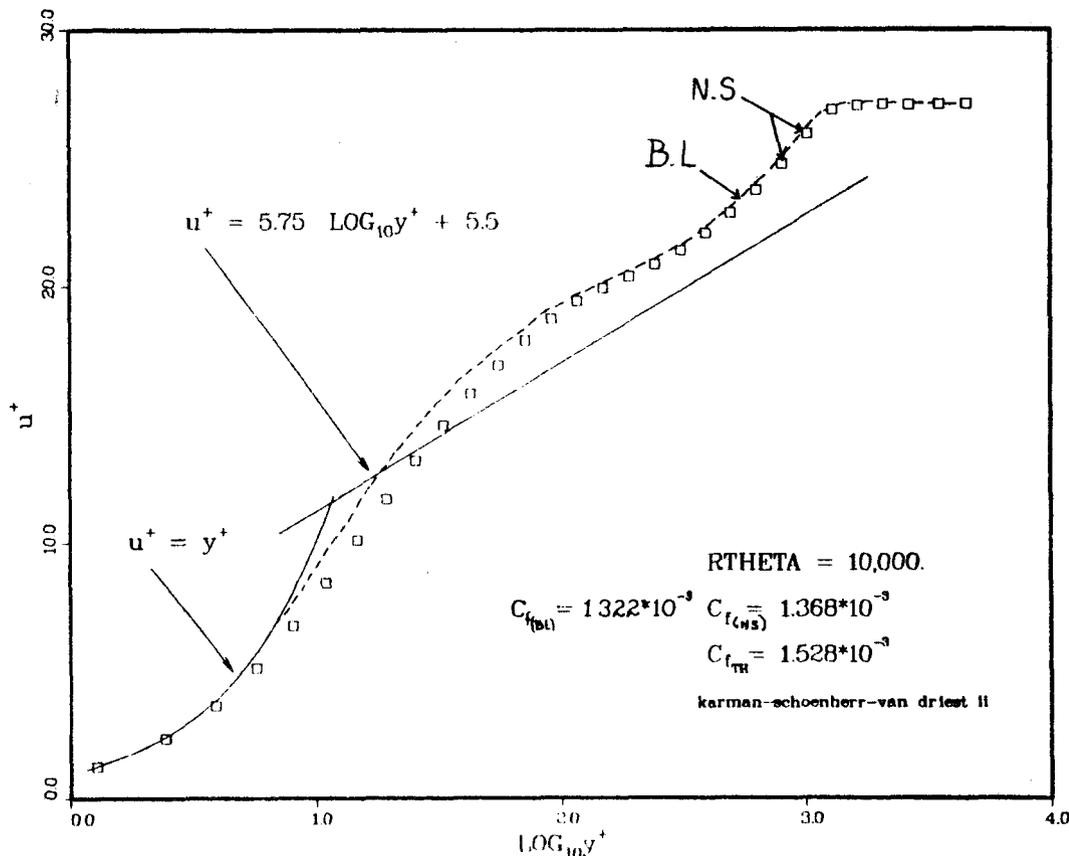


Fig. VI-44.- Profil de vitesse au voisinage de la paroi.
(modèle standard, mêmes conditions que pour la figure VI-42).

Les figures VI-44 et VI-45 montrent les profils de vitesse moyenne au voisinage de la paroi et dans la zone externe de la couche limite. Pour tenir compte de la compressibilité de l'écoulement, la vitesse moyenne a été transformée suivant la relation :

$$u_{mc} = \int_0^u \sqrt{\frac{\rho}{\rho_w}} du \quad (\text{VI-29})$$

Sur les deux figures sont reportés également les résultats fournis par le programme couche limite. Les résultats obtenus avec les deux programmes sont très proches les uns des autres et montrent ainsi que l'influence du facteur "algorithme" peut être raisonnablement négligée. La figure VI-44 compare les valeurs calculées avec la loi semi-logarithmique de VON KARMAN et une relation linéaire pour la zone visqueuse. La transition de la zone visqueuse à la zone logarithmique est correctement prédite. Toutefois si on admet que la région logarithmique correspond à une pente minimum, on peut alors noter une certaine différence avec la courbe théorique, quoique le niveau de la courbe semble bien prédit. Les valeurs exactes des coefficients de frottement sont imprimées sur cette figure. Les valeurs calculées diffèrent seulement à 3 % mais sont inférieures de 12 % à la valeur théorique.

La figure VI-45 montre plus particulièrement le profil de la vitesse transformée dans la partie extérieure de la couche limite. A titre de référence la ligne continue représente l'extension de la loi de sillage de Goules modifiée suivant l'équation (VI-29) ainsi que le suggèrent HOPKINS, KEENER, POLEK et DWYER [48]. Une partie de la différence entre les deux courbes doit être attribuée à la sous-estimation du coefficient de frottement. La valeur du facteur de récupération calculé est 0.85, qui est 4,5 % plus petite que la valeur théorique 0.89.

Les figures VI-46 à VI-55 se rapportent essentiellement aux grandeurs turbulentes. Tout d'abord les fluctuations de vitesse, normalisées par la vitesse de frottement u_τ , sont comparées aux résultats expérimentaux de KREPLIN et ECKELMANN [36] et de KLEBANOFF [35], en fonction de $\log(y^+)$.

Ainsi que l'ont montré les courbes de vitesse, l'accord entre les deux programmes de calcul est excellent. Toutefois les points expérimentaux sont bien distincts des courbes calculées. Alors que les mesures de KLEBANOFF d'une part, et celle de KREPLIN et ECKELMANN d'autre part, s'accordent pour situer la valeur du maximum de u'/u_τ aux environs de $y^+ = 24$, les calculs montrent une courbe en forme de plateau qui s'étend de $y^+ = 20$ à $y^+ = 500$.

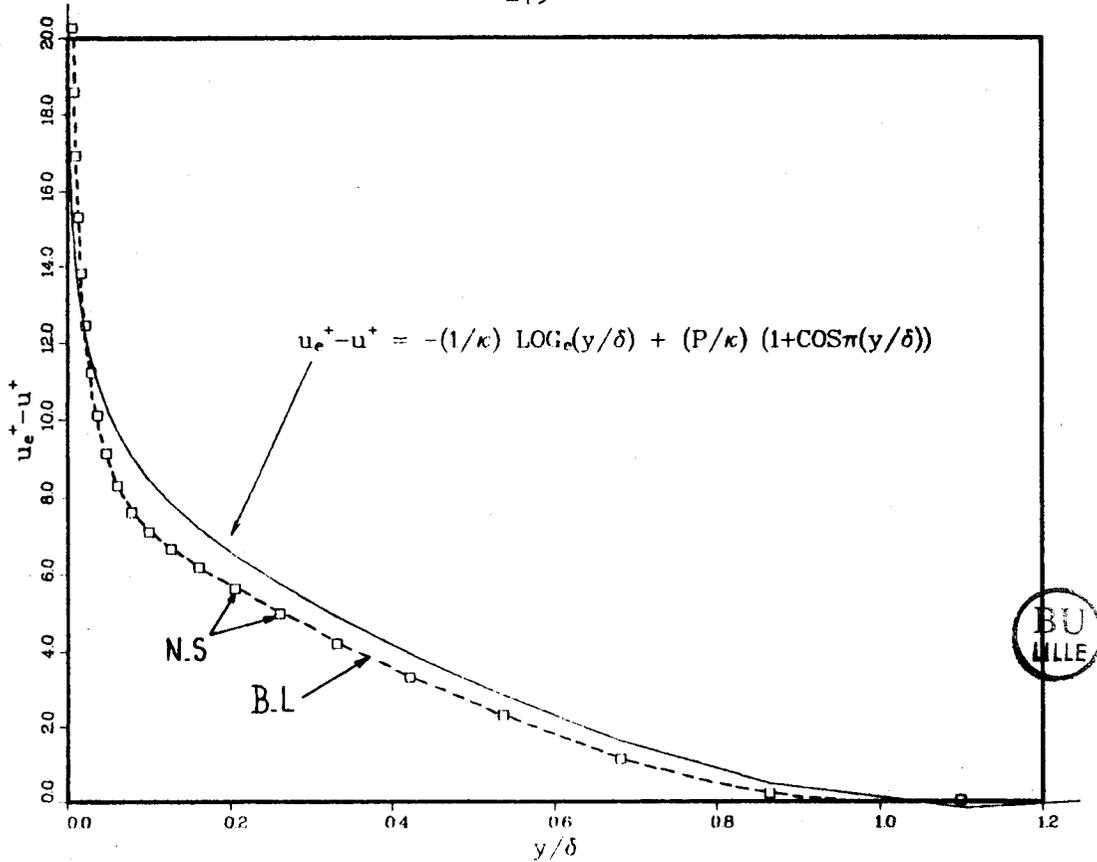


Fig. VI-45.- Profil de vitesse dans la zone de sillage
(modèle standard, mêmes conditions que pour la figure VI-42).

Tout en étant moins prononcée, l'allure des courbes de ω'/u_τ est analogue. Quant à ν'/u_τ , le maximum des points expérimentaux se trouve aux environs de $y^+ = 900$ tandis que les courbes calculées atteignent leur niveau le plus élevé au voisinage de $y^+ = 20$. On peut remarquer également que dans la zone adjacente à la paroi ($y^+ < 10$), les résultats expérimentaux montrent une anisotropie très importante du tenseur de Reynolds, ce que ne reflète absolument pas la prédiction numérique.

Il faut également souligner que ce type de représentation en fonction de $\log(y^+)$ perd tout son sens dans la zone de sillage où la forme et l'étendue des profils dépendent très fortement de la valeur du nombre de Reynolds. Une autre réserve à cette comparaison est due à la nature des écoulements. Les points expérimentaux sont issus de mesures dans des écoulements incompressibles tandis que les valeurs calculées correspondent à un écoulement dont le nombre de Mach est égal à 3. Pour pallier cette ambiguïté, la figure VI-47 montre les fluctuations de vitesse en termes de contraintes dynamiques. Les points expérimentaux ne sont pas modifiés mais les valeurs calculées reflètent aussi maintenant l'influence des variations de masse volumique.

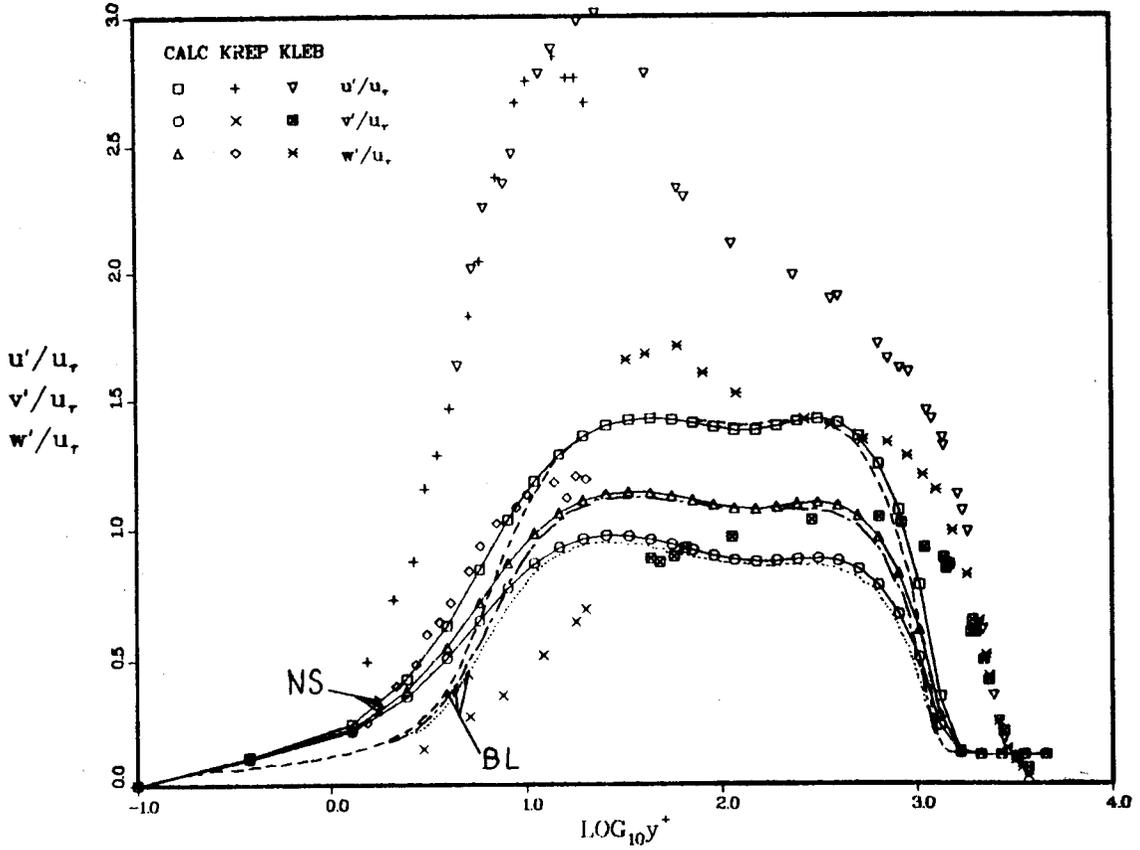


Fig. VI-46.- Distribution des fluctuations de vitesse (modèle standard, mêmes conditions que pour la figure VI-42).

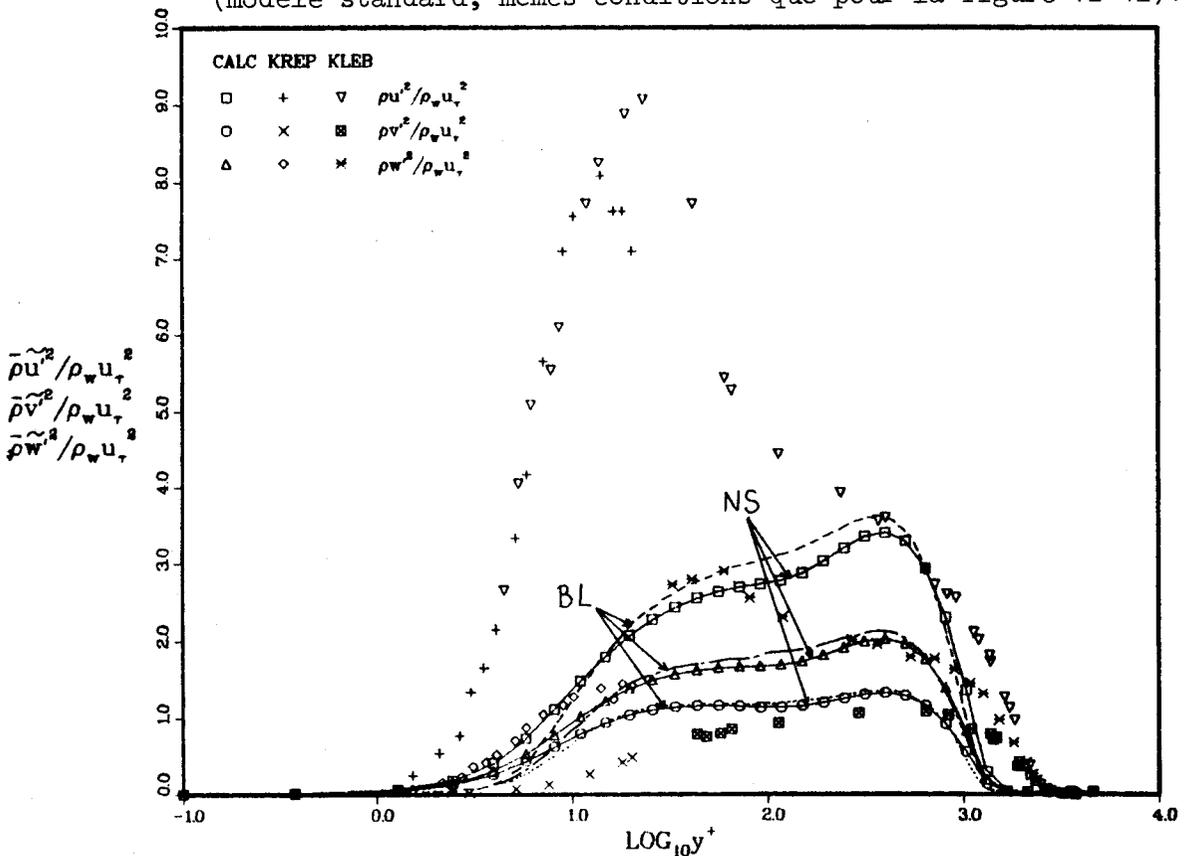


Fig. VI-47.- Distribution des contraintes normales. (modèle standard, mêmes conditions que pour la figure VI-42).

Le désaccord entre les points expérimentaux et les valeurs calculées est encore plus grand. Le maximum des trois composantes normales se trouve maintenant très éloigné de la paroi, $y^+ \approx 500$. La question de savoir si il est préférable de comparer les contraintes dynamiques plutôt que les fluctuations de vitesse pour éliminer l'influence du nombre de Mach ou du nombre de Reynolds est encore ouverte à la discussion. FERNHOLZ, FINLEY et MIKULLA [49] ont rassemblé des données expérimentales de couches limites compressibles avec et sans gradient de pression. Ils ont pu ainsi comparer des écoulements dont le nombre de Mach M s'étend de 1.7 à 6.4 et le nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement R_θ est compris entre 2000 et 25000. La dispersion des points est telle qu'il est très difficile de choisir une représentation libre de toute influence de M ou R_θ .

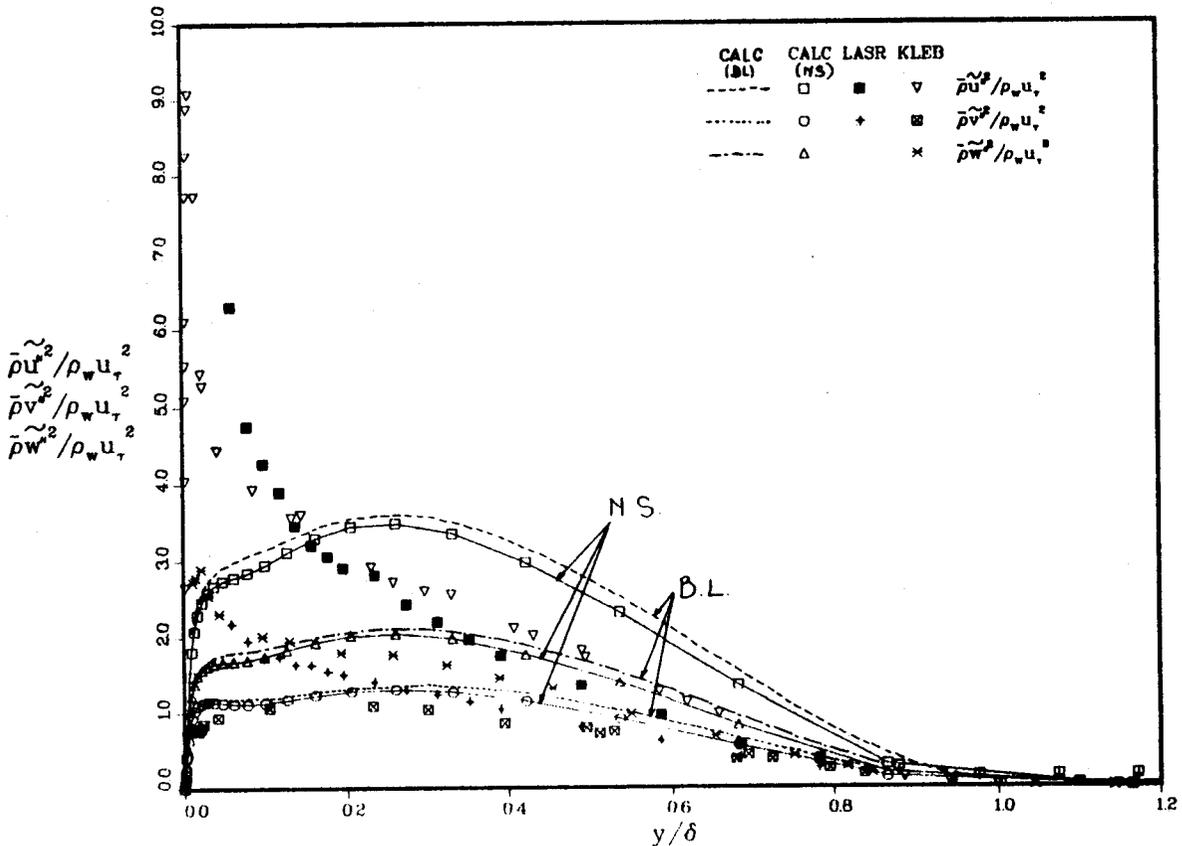


Fig. VI-48.- Profils des contraintes normales.

(modèle standard, mêmes conditions que pour la figure VI-42).

Suivant RUBESIN [50], il est plus juste de sélectionner la représentation en termes de contraintes plutôt que de fluctuations car seul le cas référencé par 72050201 (figure 3.1.1 réf. [49]) s'écarte des autres et peut être rejeté avec raison. Le comportement des contraintes normales peut être

mieux appréhendé dans l'ensemble de la couche limite grâce à la figure VI-48 où les mêmes quantités sont maintenant tracées en fonction de y/δ . Il devient alors évident que la turbulence est surestimée à l'extérieur tandis qu'elle est beaucoup trop faible au voisinage de la paroi.

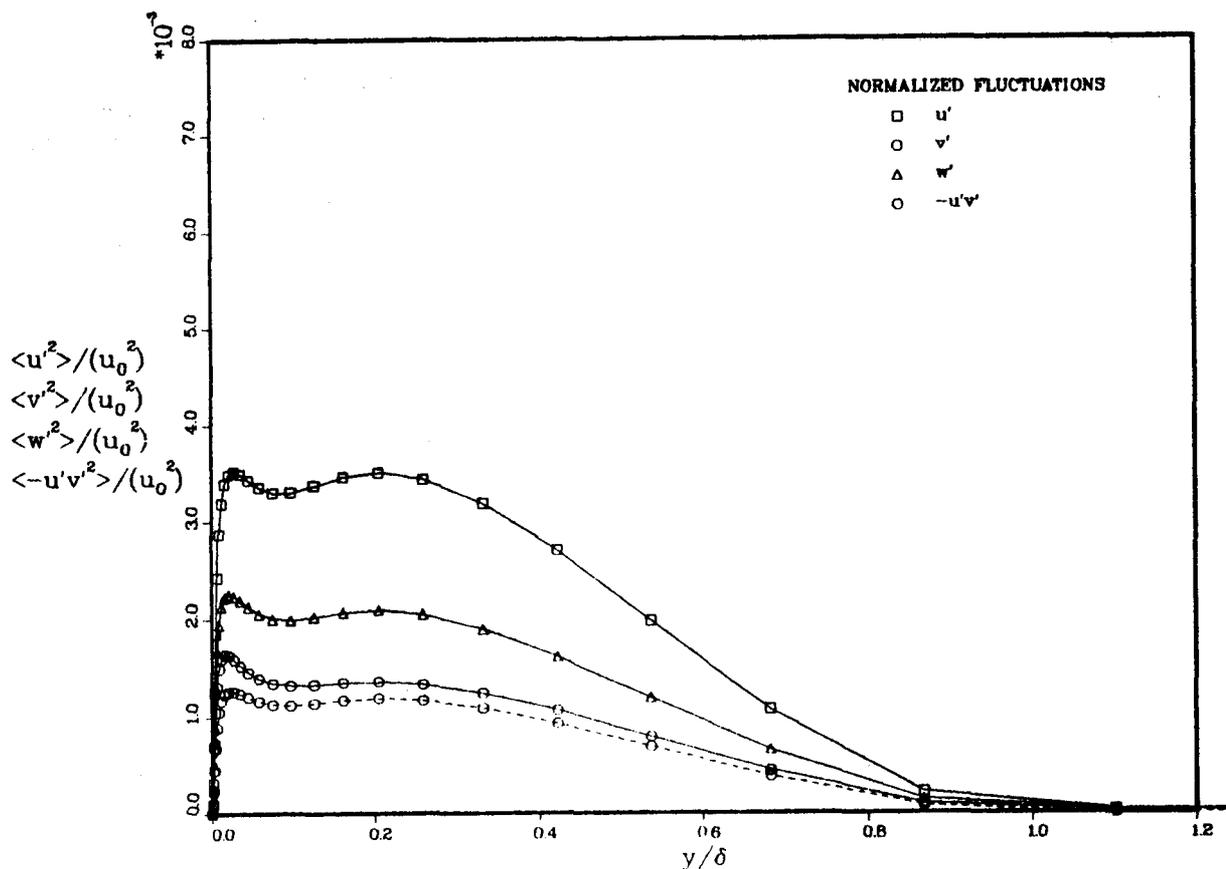


Fig. VI-49.- Profils des fluctuations de vitesse.

(modèle standard, mêmes conditions que pour la figure VI-42).

Deux jeux de valeurs expérimentales sont tracés sur cette figure. Le premier jeu, repéré par KLEB correspond aux résultats de KLEBANOFF [35] pour une couche limite à vitesse modérée (15.24 m/s) sur une longue plaque plane. Le deuxième jeu, repéré par LASR, est basé sur les travaux de ROBINSON, SEEGMILLER et KUSSOY [51]. Pour ce deuxième cas il s'agit d'un écoulement le long d'un cylindre avec un nombre de Mach égal à 3. La comparaison de ces résultats expérimentaux permet déjà de conclure qu'il est acceptable de comparer des résultats compressibles à des données incompressibles, et donc que les moyennes pondérées par la masse volumique tiennent correctement compte des effets de compressibilité.

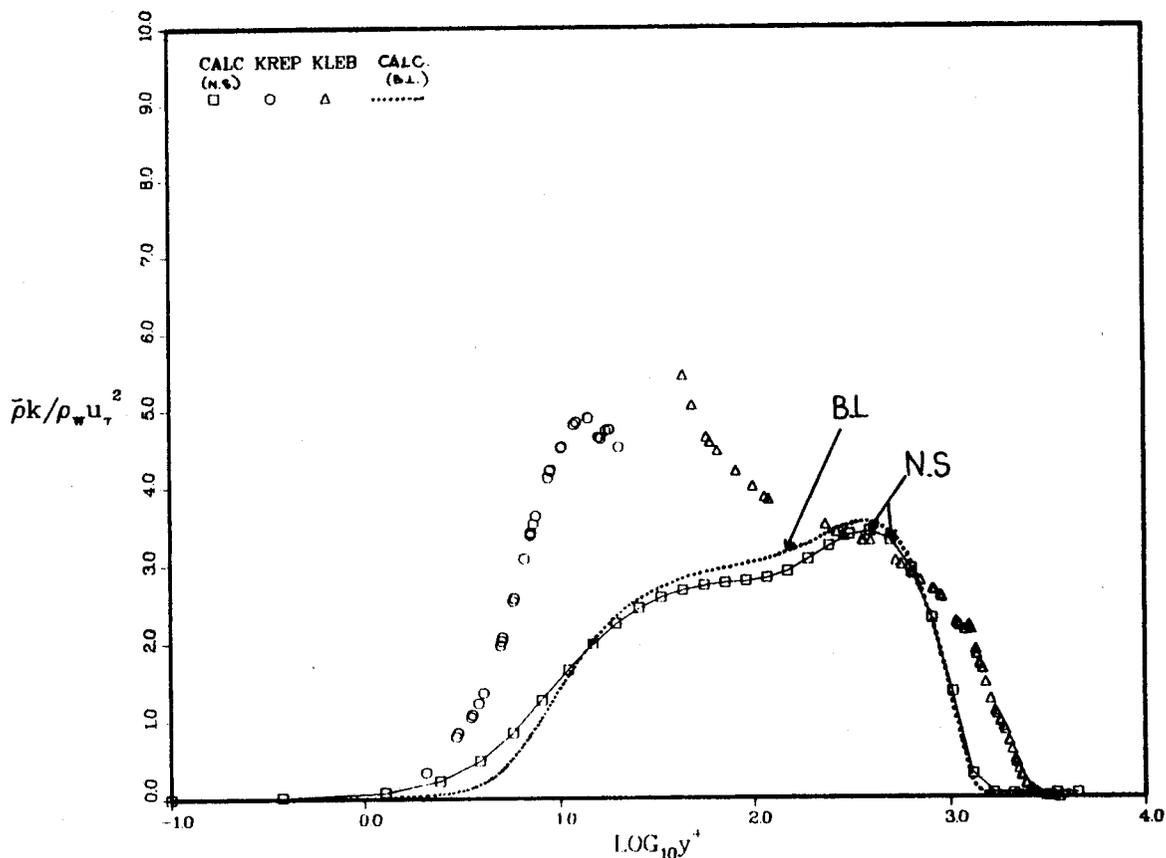


Fig. VI-50.- Distribution d'énergie turbulente.

(modèle standard, mêmes conditions que pour la figure VI-42).

Sur la figure VI-49, nous avons représenté les contraintes de Reynolds de façon conventionnelle sans tenir compte des variations de masse volumique. On observe évidemment les mêmes tendances que sur la figure VI-46. Ainsi le pic à la paroi que l'on observe dans le papier de KLEBANOFF est pratiquement inexistant pour $\overline{u'^2}/U_0^2$ et $\overline{w'^2}/U_0^2$ tandis que la courbe $\overline{v'^2}/U_0^2$ montre également un maximum dans cette région alors que l'expérience indique que le maximum de cette quantité se trouve aux environs de $y/\delta \approx 0.2$. Les figures VI-50 et VI-51 représentent l'énergie cinétique de turbulence au voisinage de la paroi et dans la partie externe de la couche limite. Les données de KREPLIN et ECKELMANN [36] et de KLEBANOFF [35] sont représentées par les symboles identifiés par KREP et KLEB, respectivement. La figure VI-50 montre jusqu'à quel point le modèle standard sous-estime l'énergie de turbulence pour $y^+ < 250$ (ce qui n'est pas très éloigné de la limite de signification des coordonnées de paroi).

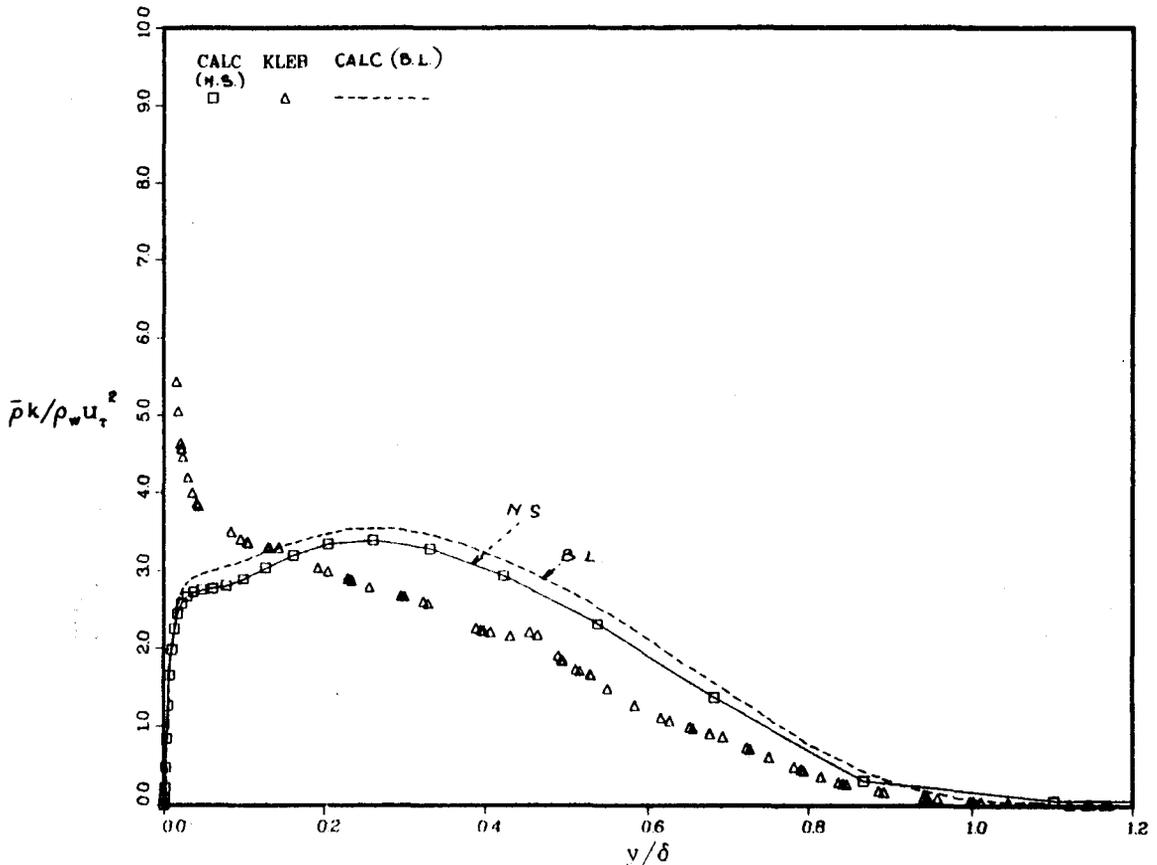


Fig. VI-51.- Profil d'énergie turbulente.

(modèle standard, mêmes conditions que pour la figure VI-42).

Au contraire, la figure VI-51 affiche une évidente sur-évaluation de l'énergie dans la zone externe de la couche limite. Cette figure montre néanmoins un bon accord quant à l'épaisseur de la couche limite de l'énergie de turbulence. Les figures VI-52 et VI-53 montrent la distribution des contraintes de frottement turbulent, à nouveau dans la zone de paroi et dans la partie externe de la couche limite. L'accord entre les deux programmes de calcul est très bon.

Au voisinage de la surface ($y^+ < 100$) l'accord avec les valeurs expérimentales de ECKELMANN [52] est étonnamment bon, bien meilleur en fait, que ce qu'on aurait pu attendre de l'examen de la figure VI-49. Un tel résultat assure que la description de la sous-couche visqueuse et de la couche de transition ("buffer zone"), où se produit environ 60 % du changement de quantité de mouvement est correcte. Dans la partie extérieure de la couche limite, le frottement turbulent prédit est 50 % trop grand, ce qui est consistant avec le comportement de l'énergie de turbulence (fig. VI-51). L'épaisseur

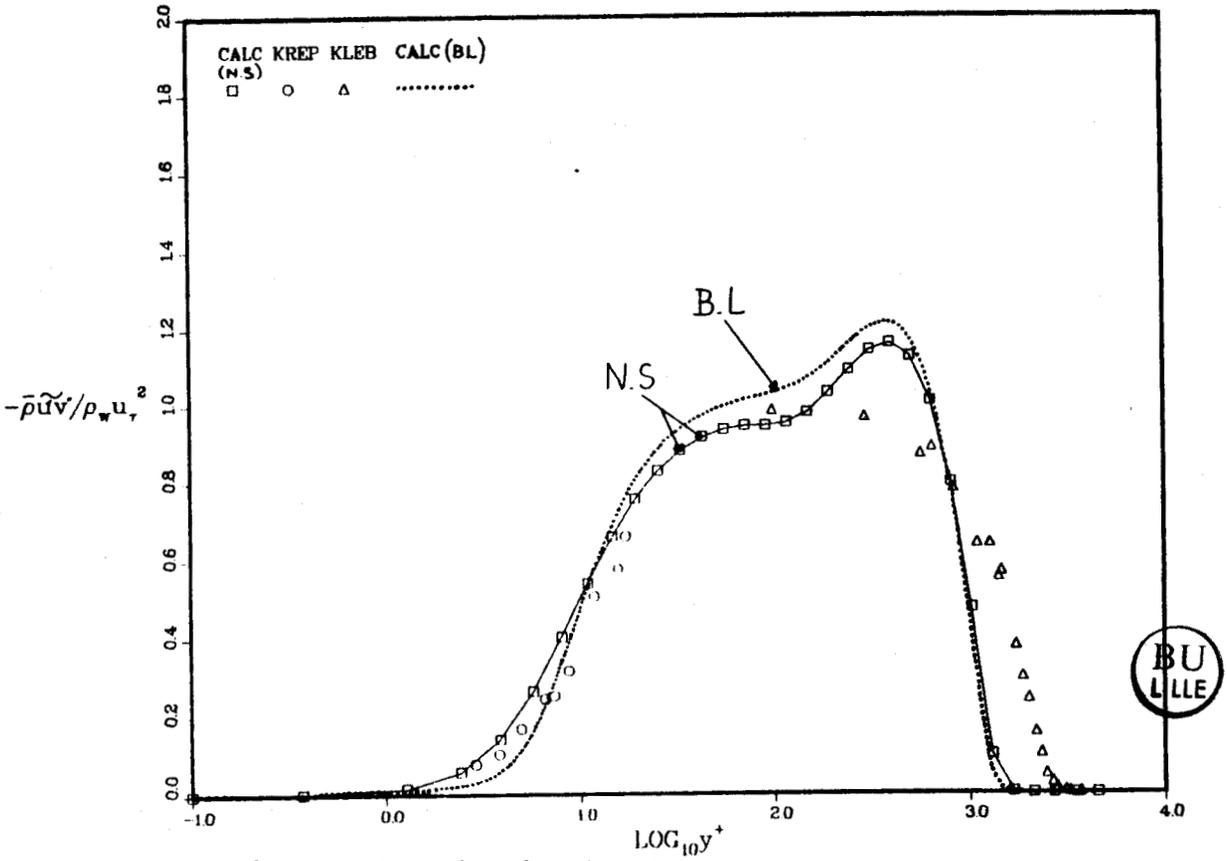


Fig. VI-52.- Distribution du frottement turbulent.

(modèle standard, mêmes conditions que pour la figure VI-42)

de la couche limite de frottement turbulent est également en bon accord avec les résultats expérimentaux.

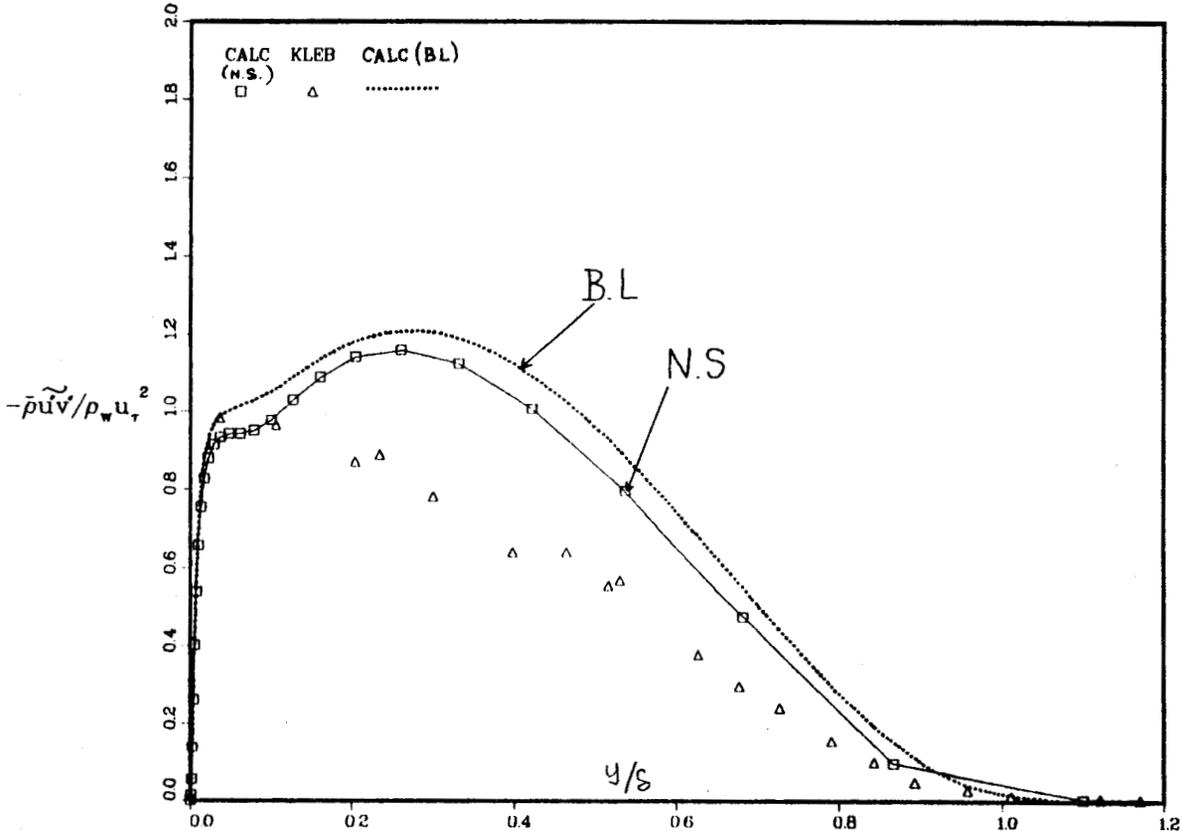


Fig. VI-53.- Profil de frottement turbulent.

(modèle standard, mêmes conditions que pour la figure VI-42)

Finalement le rapport du frottement turbulent à l'énergie cinétique de turbulence est montré sur les figures VI-54 et VI-55. On observe sur la figure VI-55 que ce rapport est constant et égal à 0.34 dans toute la section. Cette valeur est en accord avec la valeur rapportée par BRADSHAW [53], mais 10 % plus grande que la valeur obtenue des points expérimentaux de KLEBANOFF (voir figure VI-55). Les différences entre les résultats des programmes de calcul à la frontière extérieure sont attribuables à une trop grande différence dans la dimension des cellules utilisées pour l'intégration. Sur la figure VI-54, ce même rapport est comparé aux données de KREPLIN et ECKELMANN [36], ECKELMANN [53] et KLEBANOFF [35] en termes de coordonnées de paroi. Les valeurs expérimentales restent constantes beaucoup plus près de la paroi que ne le montrent les points expérimentaux, ce qui est cohérent avec les résultats des figures VI-51 et VI-53.

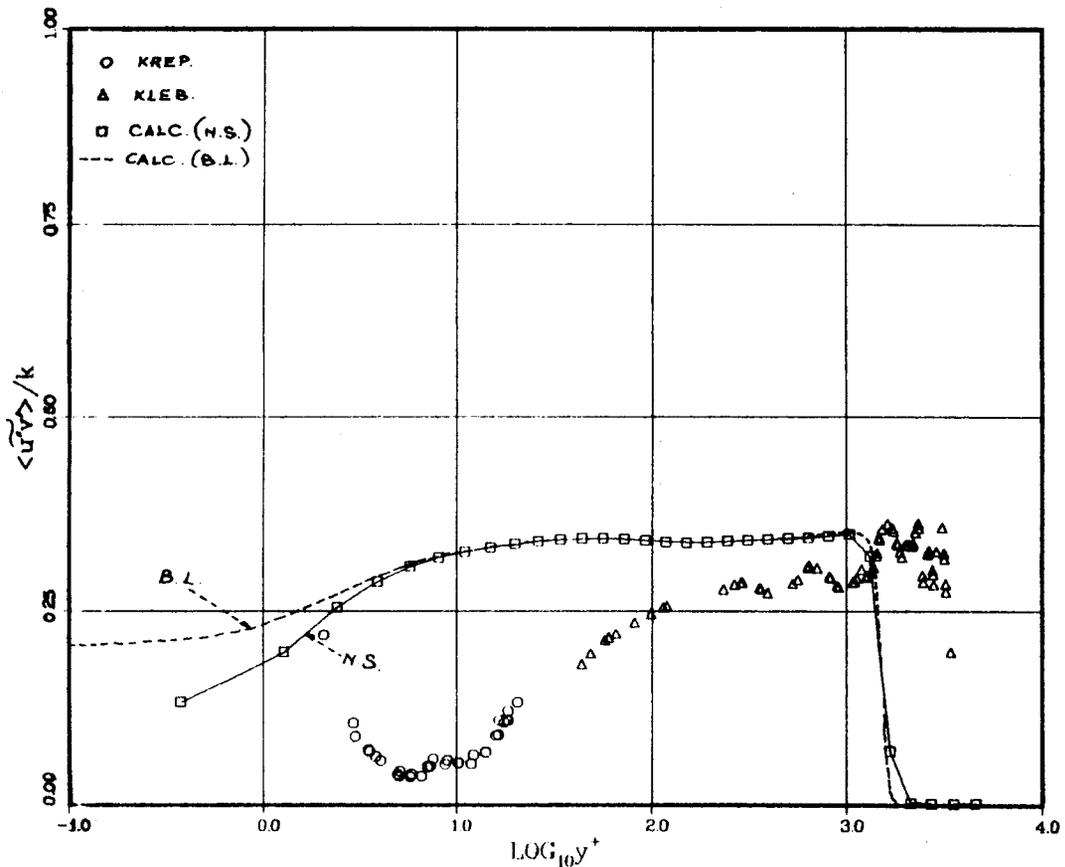


Fig. VI-54.- Rapport frottement-énergie.

(modèle standard, mêmes conditions que pour la figure VI-42).

La remontée des points de KREPLIN et ECKELMANN [36] les plus proches de la paroi ne peut être prise en considération car le rapport $\frac{\overline{uv'}}{\rho}$ doit tendre linéairement vers zéro avec la distance à la paroi.

Les résultats de calcul montrés sur les figures VI-44 à VI-55, représentent un test sur la validité du modèle standard pour un écoulement sur une plaque plane d'une couche limite supersonique ($\mathcal{N} = 3$). Ces résultats qui sont essentiellement indépendants de la méthode numérique de résolution s'accordent qualitativement avec les résultats expérimentaux, mais dans l'ensemble, le modèle de turbulence a besoin d'être amélioré avant de pouvoir être appliqué à la prédiction d'écoulements plus complexes pour lesquels l'évaluation correcte des contraintes normales est déterminante.

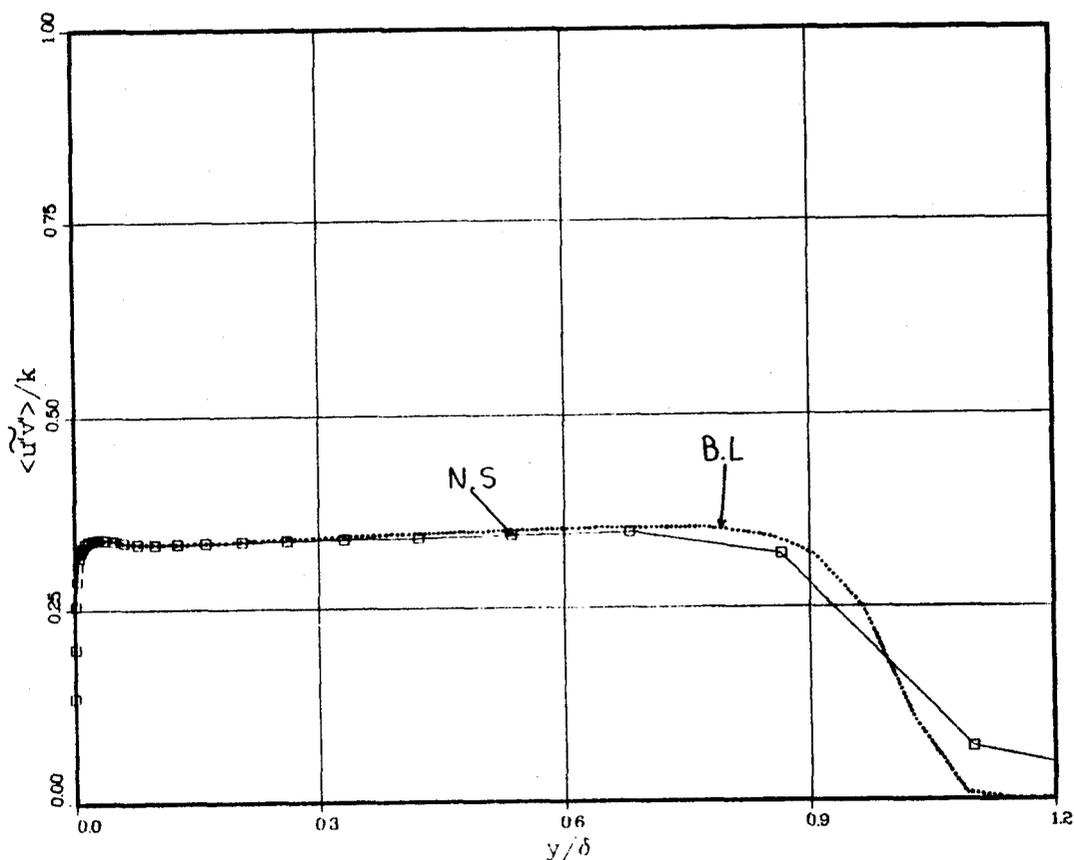


Fig. VI-55.- Rapport frottement-énergie.

(modèle standard, mêmes conditions que pour la figure VI-42).

L'examen des figures ci-dessus permet de souligner quelques uns des points faibles de ce modèle : (1) La valeur locale du coefficient de frottement est sous-estimée d'environ 10.5 à 13.5 %.(2) Le facteur de récupération est 0.85 au lieu de la valeur généralement admise de 0.89. (3) Le profil de vitesse est trop incurvé au début de la zone "logarithmique".

Ces observations sur les grandeurs moyennes de l'écoulement sont causées par les caractéristiques du modèle standard qui ont les conséquences suivantes : l'énergie de turbulence est trop faible à la paroi mais trop importante quand $y/s > 0.15$; l'anisotropie ne semble pas affectée par la présence de la paroi, qui devrait l'accentuer; finalement la détermination du frottement turbulent est très bonne dans la zone de paroi, mais de moindre qualité si $y/s > 0.1$. Ces particularités dans le modèle standard laissent penser qu'il serait inadapté au calcul d'écoulements complexes dans lesquels sont présents des gradients de pression très importants et où une connaissance précise des contraintes normales est nécessaire.

Dans le but d'améliorer les résultats de ce modèle, nous avons ré-examiné toutes les hypothèses de fermeture qui ont été faites jusqu'à présent pour dégager une influence possible de la proximité de la paroi.

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés aux termes de dissipation. L'hypothèse d'une dissipation isotrope à grand nombre de Reynolds n'est pas remise en question. Toutefois, au voisinage de la paroi, la valeur asymptotique des différentes composantes du tenseur de dissipation, à savoir ϵ_{11} , ϵ_{22} , ϵ_{33} et ϵ_{12} suivant la proposition originale de ROTTA [54], ne repose que sur la constatation d'une uniformisation des échelles caractéristiques du mouvement turbulent et un comportement supposé des vitesses instantanées dans cette région. LAUNDER et REYNOLDS ont supposé également que les vitesses instantanées pouvaient s'y exprimer par un développement en série de Taylor par rapport à la distance à la paroi (voir JONES et LAUNDER [2]). Toutefois, pour un écoulement incompressible (on peut admettre que cette hypothèse est presque toujours vérifiée pour $y^+ < 10$ en l'absence de transfert de chaleur), l'équation de continuité impose un comportement différent pour la deuxième composante normale $\overline{u'^2}$. En poursuivant ce développement, LAUNDER et REYNOLDS obtiennent l'expression suivante :

$$\epsilon_{11} = \frac{\overline{u'^2}}{R} \epsilon$$

$$\varepsilon_{22} = 4 \frac{\overline{v'^2}}{R} \varepsilon$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\overline{w'^2}}{R} \varepsilon$$

$$\varepsilon_{12} = 2 \frac{\overline{u'w'}}{R} \varepsilon$$

(VI-30)

On constate ainsi que cette nouvelle forme pour la dissipation anisotrope semble devoir agir dans le sens souhaité, c'est-à-dire accroître l'anisotropie en diminuant $\overline{v'^2}$ et $\overline{u'w'}$. Il faut néanmoins émettre quelques réserves quant à cette proposition.

La première remarque est que ce résultat est tensoriellement inexact. En effet, si on somme les trois composantes normales de cette dissipation on ne retrouve pas la dissipation totale ε de l'énergie turbulente. Cette approximation n'est exacte que si on remplace les ε_{ij} par leur développement en y . Cette remarque nous amène à penser que, si on utilise cette forme de dissipation pour un champ turbulent qui ne satisfait pas initialement les conditions de comportement en termes de y , la dissipation totale près de la paroi sera trop importante pour l'énergie de turbulence présente dans l'écoulement. Ce point a pu être vérifié pratiquement. Si on introduit cette forme de dissipation dans le modèle standard, on observe très rapidement que l'énergie turbulente est littéralement pompée à travers sa deuxième composante normale $\overline{v'^2}$. Une façon possible de corriger cela est de re-injecter le défaut d'énergie de $\overline{v'^2}$ sur $\overline{u'^2}$ et $\overline{w'^2}$. On revient alors à une forme tensoriellement exacte et qui est physiquement exacte à partir du moment où ε_{22} devient très petit devant ε_{11} et ε_{33} . On a alors :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\overline{u'^2} - 1,5 \overline{v'^2}}{R} \varepsilon$$

$$\varepsilon_{22} = 4 \frac{\overline{v'^2}}{R} \varepsilon$$

(VI-31)

$$\varepsilon_{33} = \frac{\overline{w'^2} - 1,5 \overline{v'^2}}{\rho} \varepsilon$$

(VI-31)

$$\varepsilon_{12} = 2 \frac{\overline{u'v'}}{\rho} \varepsilon$$

La seconde remarque est que cette modification est basée sur une forme contractée de la dissipation ε pour laquelle une partie des termes a été incluse dans les termes de diffusion moléculaire. En fait, comme cela a été montré dans l'équation (II-68) la forme exacte de la dissipation est :

$$\varepsilon_{ij} = 2 \nu \left[\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \right) \right] \quad (\text{VI-32})$$

Si on reprend alors les arguments de LAUNDER et REYNOLDS, on obtient les dissipations suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\overline{u'^2}}{\rho} \varepsilon \\ \varepsilon_{22} &= 8 \frac{\overline{v'^2}}{\rho} \varepsilon \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\overline{w'^2}}{\rho} \varepsilon \\ \varepsilon_{12} &= 3 \frac{\overline{u'v'}}{\rho} \varepsilon \end{aligned} \quad (\text{VI-33})$$

De plus KOLLMANN [56] a montré que, en présence de fluctuations de masse volumique, le rapport $\varepsilon_{22} / \overline{v'^2}$ ne pouvait pas être une constante mais devait nécessairement être une fonction de ces fluctuations. Un dernier point est qu'en fait, l'anisotropie qui est souhaitée [15] ne doit pas se faire uniquement aux dépens de $\overline{v'^2}$ mais également en faveur de $\overline{u'^2}$, ce qui ne fait pas partie de la proposition [55]. De plus, il est clair que cette dissipation anisotrope a pour conséquence de réduire les écarts entre les différentes

composantes et agit en fait dans le même sens que les termes de retour à l'isotropie, ce qui a été vérifié par ROGALLO [57] dans une simulation numérique de la turbulence. En vertu de toutes ces remarques, il a donc été décidé de ne pas modifier les termes de dissipation anisotrope et de conserver la proposition originale de ROTTA [54].

La modélisation de la corrélation pression-taux de déformation a été examinée en détail. Tout d'abord il faut noter que l'utilisation du terme $\phi_{ij,w}$ ne peut en aucun cas suffire à décrire l'influence de la paroi sur le champ des fluctuations de pression. En fait, ce terme, tel qu'il a été introduit par LAUNDER et al [15] agit principalement dans la partie externe de la zone de transition, mais son influence tend vers zéro au voisinage de la paroi, où $k^{3/2}/\epsilon y$ se comporte comme y^2 . De plus les valeurs des constantes utilisées dans $\phi_{ij,w}$ sont déterminées à partir des valeurs expérimentales de turbulence de paroi qui correspondent en fait à une distance $y^+ \approx 100$. C'est pourquoi il est nécessaire d'agir également sur les termes premiers tels que $\phi_{ij,1}$ ou $\phi_{i,1,2}$. Pour accentuer l'anisotropie dans la zone pariétale, nous avons donc introduit une fonction d'amortissement du coefficient C_1 , qui correspond au terme original de ROTTA pour le retour à l'isotropie.

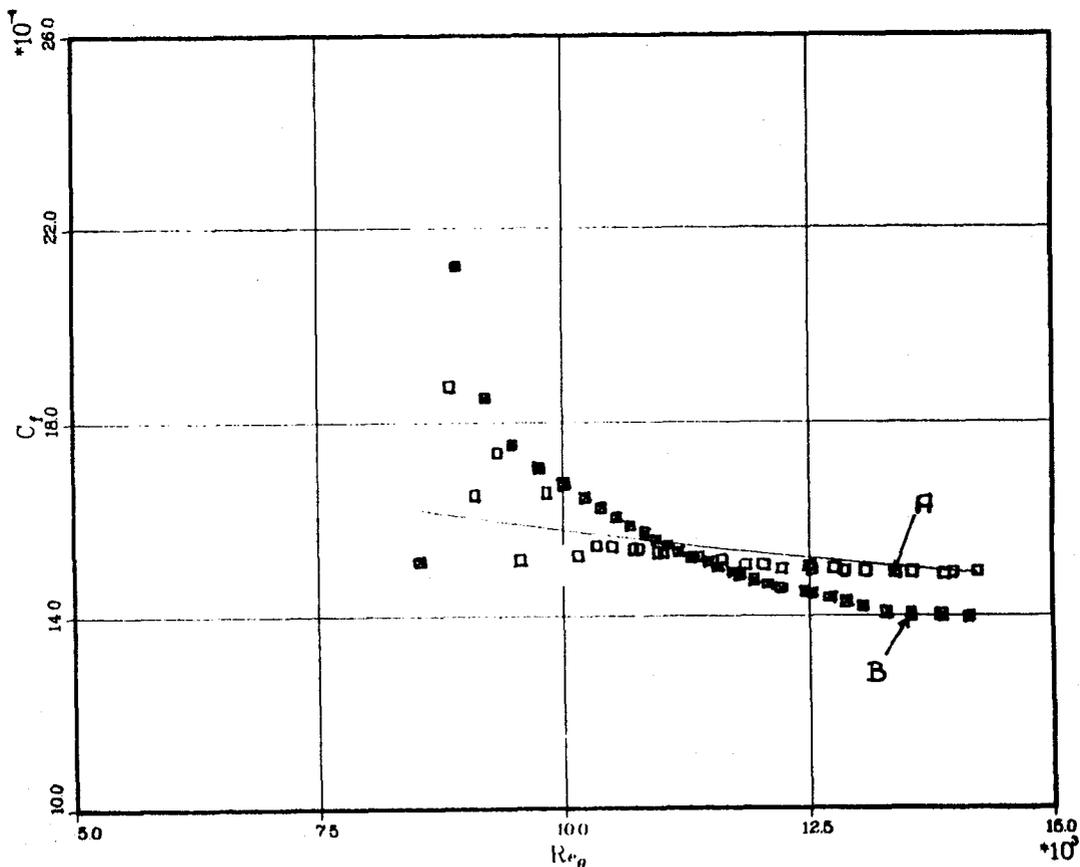


Fig. VI-56.- Répartition du coefficient de frottement.

($n = 3$, $Re = 10000$, modèle RSE modifié).

La fonction qui a été choisie est donnée dans le tableau VI-11. Le choix des valeurs des coefficients de cette fonction a été guidé d'une part par le souci d'accentuer l'anisotropie de $\overline{u'^2}$ et $\overline{v'^2}$ à la paroi et d'autre part par le respect de certaines conditions de réalisabilité (nous avons pu observer par exemple, qu'une augmentation de 25 % de la valeur absolue du coefficient supérieur entraînaient des valeurs négatives de la seconde composante normale). Lors de l'estimation des constantes qui apparaissent dans $\phi_{ij,w}$, un certain désaccord a été trouvé avec les valeurs données par LAUNDER et al [15]. En fait l'action de $\phi_{ij,w}$ se superpose partout à celles de $\phi_{ij,1}$ et $\phi_{ij,2}$, les constantes C_3 , C_4 et C_5 étant déterminées à la zone de raccordement à partir de valeurs expérimentales et en supposant que la production de ρ est égale à sa dissipation et que la loi logarithmique est applicable, (voir référence [58]).

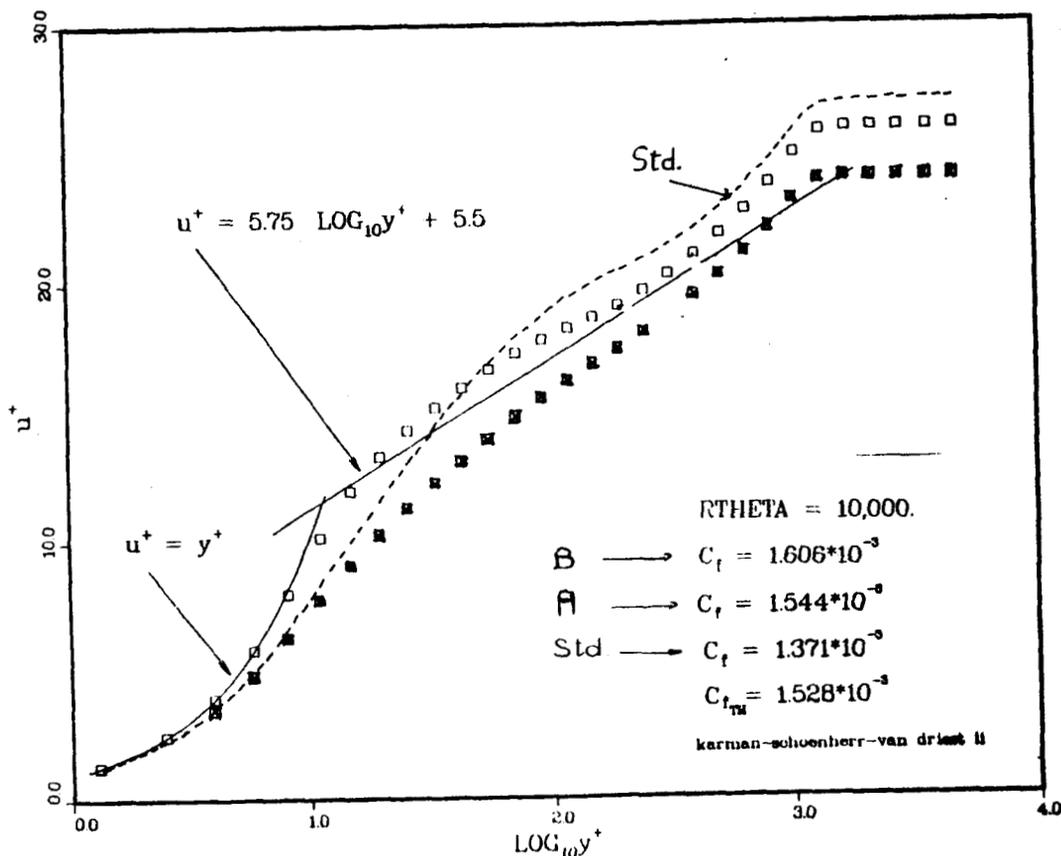


Fig. VI-57.- Profil de vitesse près de la paroi.

(modèle modifié, mêmes conditions que pour la figure VI-56).

Le désaccord avec LAUNDER et al. [15] est que, à notre avis rien ne permet de négliger C_5 ($S' = 0$ dans [15]). Ce terme, qui est négligeable

dans les équations des contraintes normales à une importance certaine dans l'équation de $\overline{u^2}$. Les valeurs des constantes qui sont utilisées ici sont montrées dans le tableau VI-11.

L'examen des équations de transport des contraintes normales suffit à montrer qu'il n'est pas envisageable de modifier la partie rapide de la corrélation pression déformation. En effet, ce terme tend à renforcer l'isotropie des productions. En particulier il tend à différencier les productions de $\overline{u^2}$ et $\overline{v^2}$. Il est donc le seul mécanisme permettant de séparer ces deux composantes. Une réduction de son influence tend donc à donner une même valeur à deux composantes qui doivent être différentes ainsi que le montrent toutes les expériences.

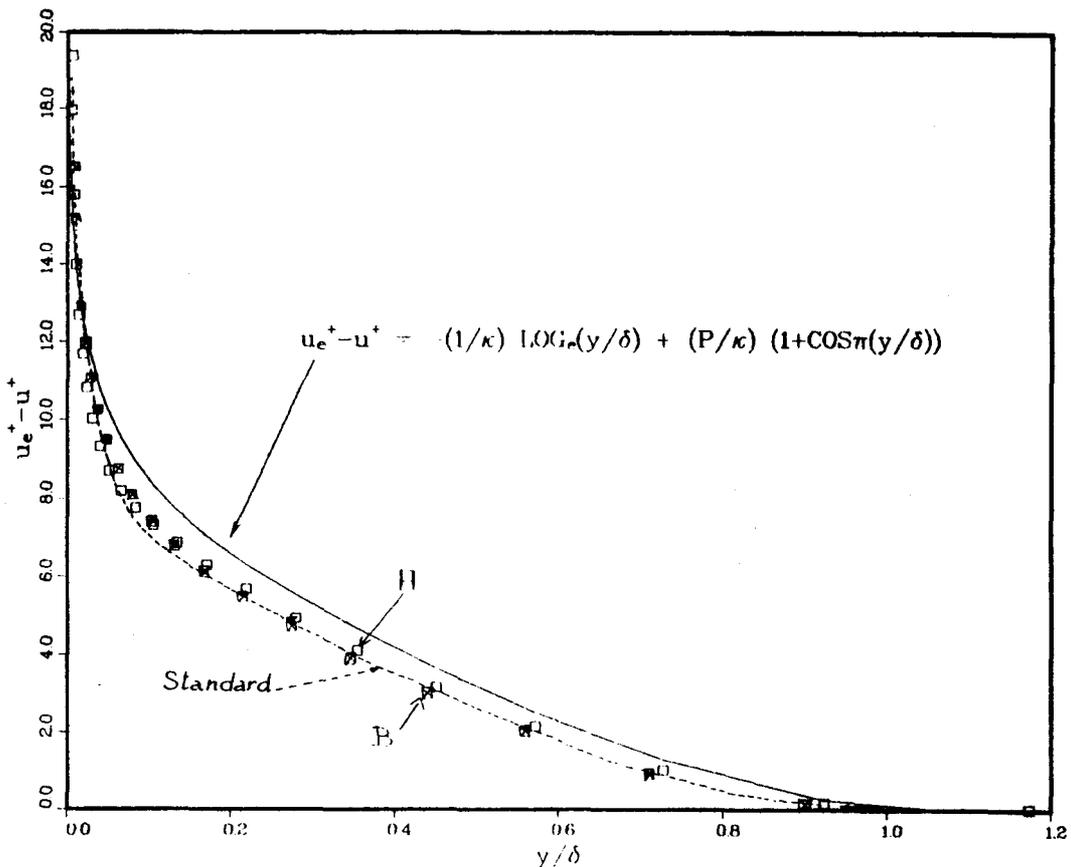


Fig. VI-58.- Profil de vitesse dans la zone externe.
(modèle modifié, mêmes conditions que pour la figure VI-56).

Par ces diverses modifications de la modélisation de la corrélation pression-déformation, une très forte augmentation de l'anisotropie de paroi a pu être obtenue mais les résultats n'ont évidemment pas été modifiés en ce qui concerne le niveau d'énergie, à cause du caractère redistributif du terme de pression (ce qui n'est rigoureusement vrai que si le champ de vitesse est à divergence nulle).

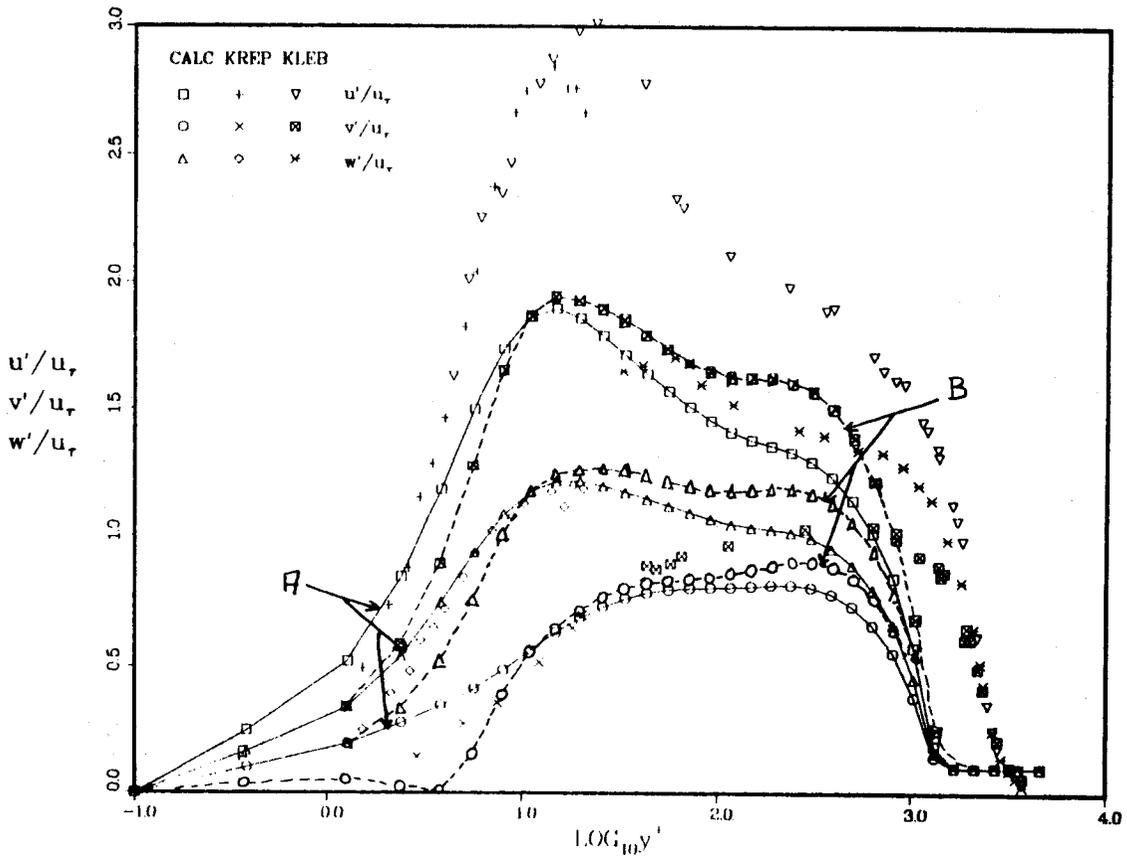


Fig. VI-59.- Répartition des fluctuations de vitesse.

(modèle modifié, mêmes conditions que pour la figure VI-56).

Une façon d'améliorer la répartition d'énergie turbulente est liée à une modification du taux de diffusion de la dissipation ϵ . On peut en effet s'attendre à ce qu'un renforcement de C_ϵ se traduise par une diminution de la valeur maximum de ϵ au voisinage de la paroi ($y^+ \approx 10$) et donc à une élévation globale du niveau de dissipation dans la partie externe de la couche limite, où la production est négligeable. Cela se traduit en fait par une augmentation de R au voisinage de la surface et une diminution dans la partie externe. Cette modification de C_ϵ doit être théoriquement accompagnée d'un changement de $C_{\epsilon 1}$ pour respecter la loi de comportement logarithmique (voir équation 31 de LAUNDER et al. [15]).

Une telle modification de $C_{\epsilon 1}$ est toutefois évitable aux yeux de l'auteur car la relation qui lie les coefficients $C_{\epsilon i}$ n'est applicable que dans une région très étroite de la couche limite. En dehors de cette zone il est inévitable que cette relation dépende aussi du nombre de Reynolds turbulent. Pour illustrer cette hypothèse, nous avons reporté sur les figures VI-56 à VI-67 les résultats correspondant à deux valeurs différentes de $C_{\epsilon 1}$:

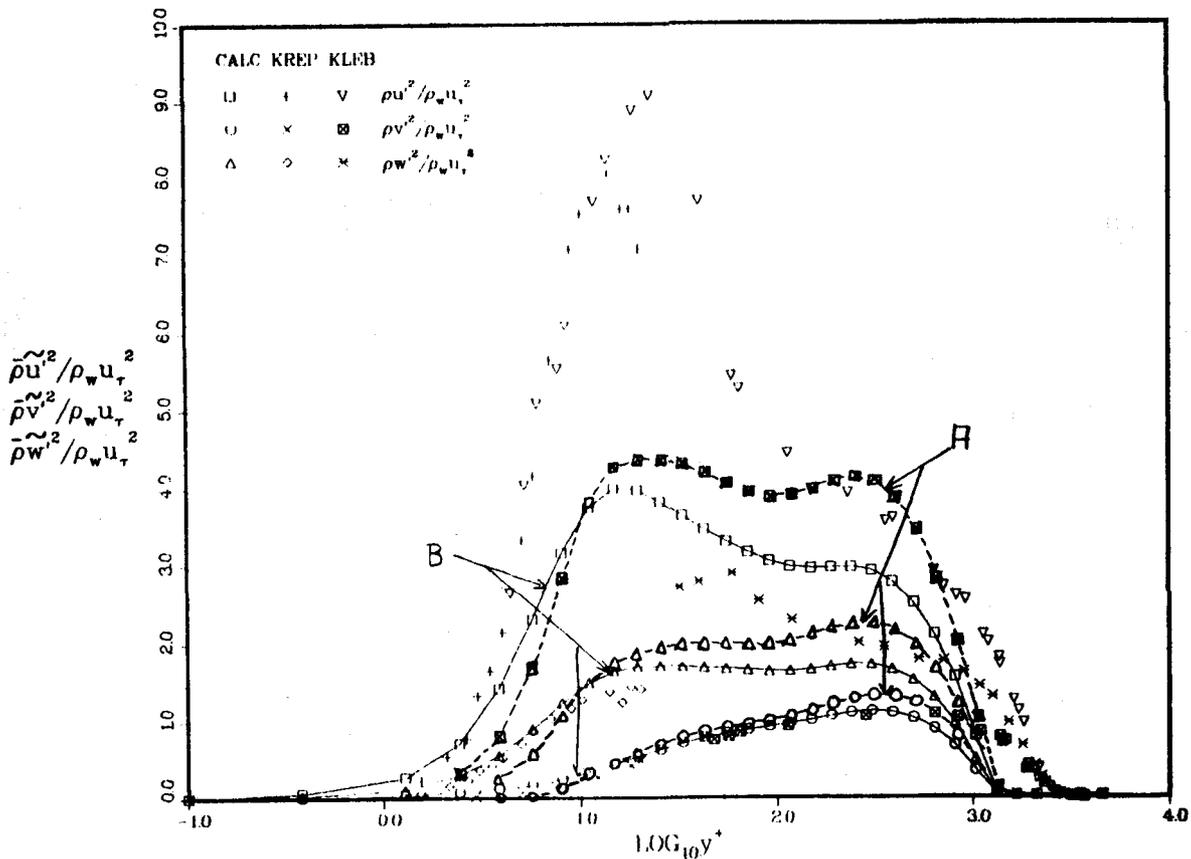


Fig. VI-60.- Répartition des contraintes turbulentes.

(modèle modifié, mêmes conditions que pour la figure VI-56).

la première valeur $C_{\epsilon 1} = 0.675$ correspond à une application stricte de la relation de compatibilité des $C_{\epsilon i}$ avec la loi logarithmique (modèle A). La deuxième valeur suppose possible une influence du nombre de Reynolds turbulent et laisse inchangée la valeur initiale donnée par HANJALIC et LAUNDER [40], $C_{\epsilon 1} = 1,28$ (modèle B). La fonction f_ϵ qui fut initialement introduite par JONES et LAUNDER [2] pour le modèle $k-\epsilon$ puis reprise par HANJALIC et LAUNDER [40] agit de façon très marginale dans un sens opposé à celui désiré et a été supprimée du modèle ($f_\epsilon = 1$).

Il a été finalement observé que le terme de l'équation pour comprenant les dérivées secondes de vitesse, agissait sur la valeur locale du coefficient de frottement plutôt que sur la distribution de k au voisinage de la paroi. Des tentatives ont été faites pour obtenir une modélisation plus exacte de ce terme qui éviterait l'introduction de la constante

$C_{\epsilon 3}$. Toutefois la pauvreté des résultats nous a amené à revenir à une forme semblable à celle utilisée par LAUNDER et al. [15] mais avec une valeur sensiblement différente pour la constante $C_{\epsilon 3}$ (voir tableau VI-11).

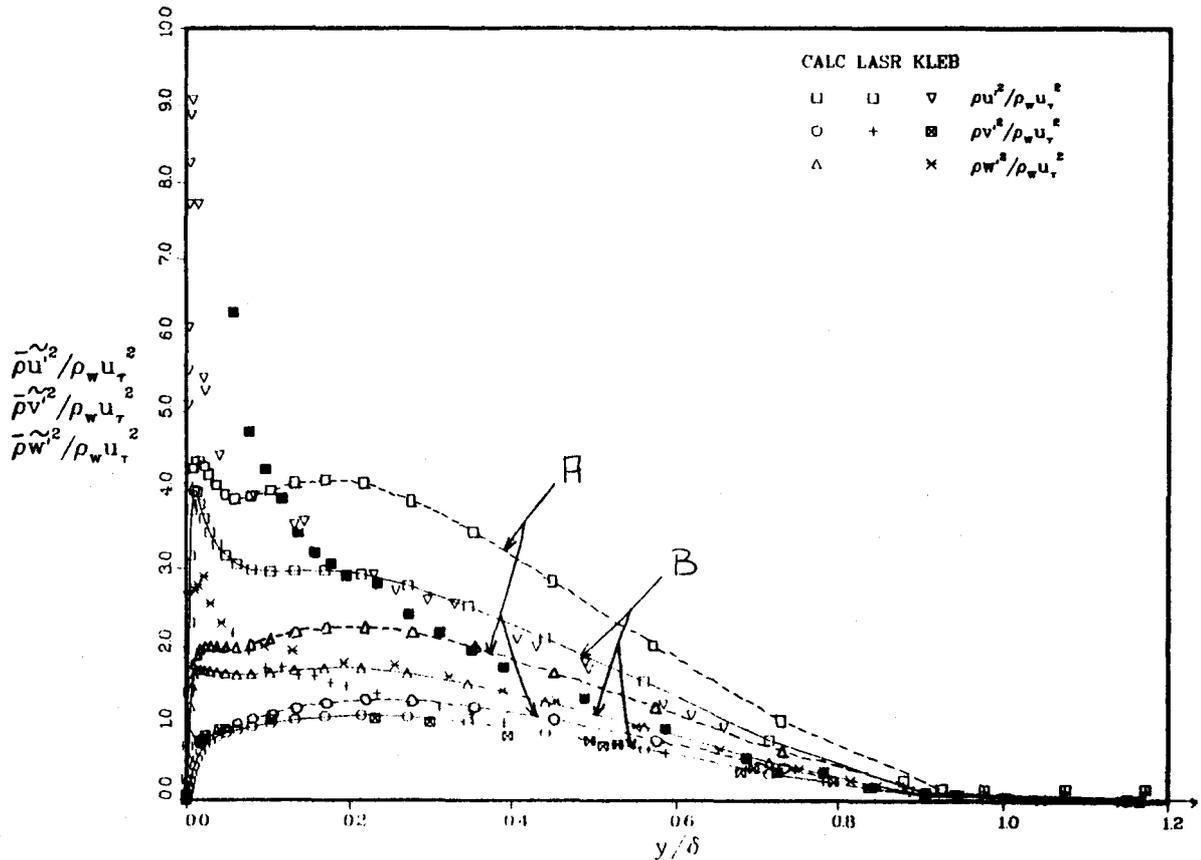


Fig. VI-61.- Profil des fluctuations de vitesse.

(modèle modifié, mêmes conditions que pour la figure VI-56).

Les résultats dus à ces diverses modifications du modèle sont montrés sur les figures VI-56 à VI-67. La figure VI-56 montre la répartition du coefficient de frottement le long de la plaque. Pour les deux modèles rapportés sur la figure, la perturbation de profils initiaux est plus difficile à "oublier" que dans le cas du calcul avec le modèle standard, ce qui n'est pas étonnant, du fait des hypothèses utilisées dans le modèle de WILCOX et RUBESIN [44]. Après un démarrage tourmenté, la courbe du modèle A s'accorde parfaitement avec la loi théorique de KARMAN-SCHOENHERR-VAN DRIEST II tandis que le modèle B évolue d'une façon beaucoup plus régulière vers une valeur asymptotique qui est approximativement 7 % inférieure à la valeur théorique.

Les figures VI-57 et VI-58 montrent les profils de vitesse à la fois dans la zone de paroi et dans la partie externe de la couche limite. Les valeurs différentes du coefficient de frottement expliquent la différence de niveau des courbes dans la partie logarithmique. On peut néanmoins remarquer

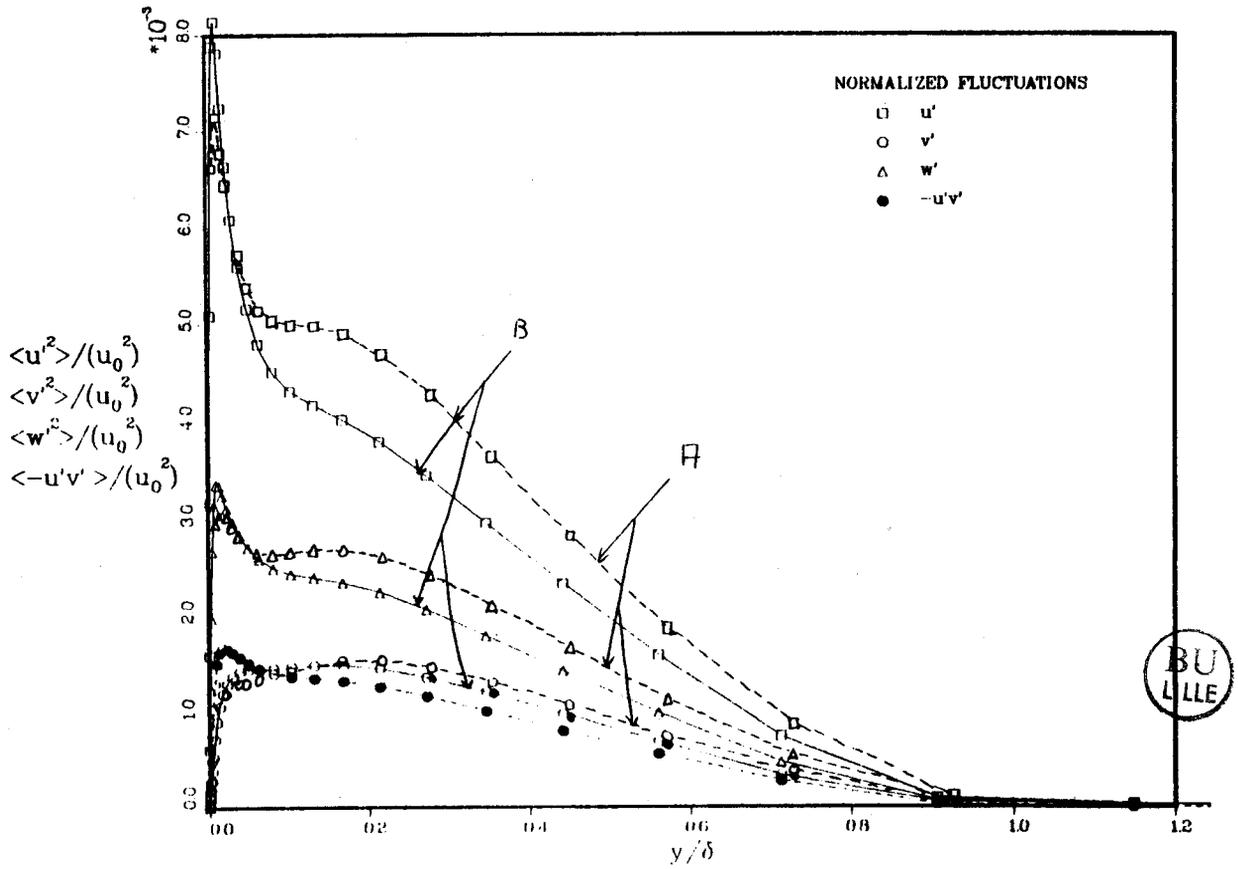


Fig. VI-62.- Profil des fluctuations de vitesse.
(modèle modifié, mêmes conditions que pour la figure VI-56).

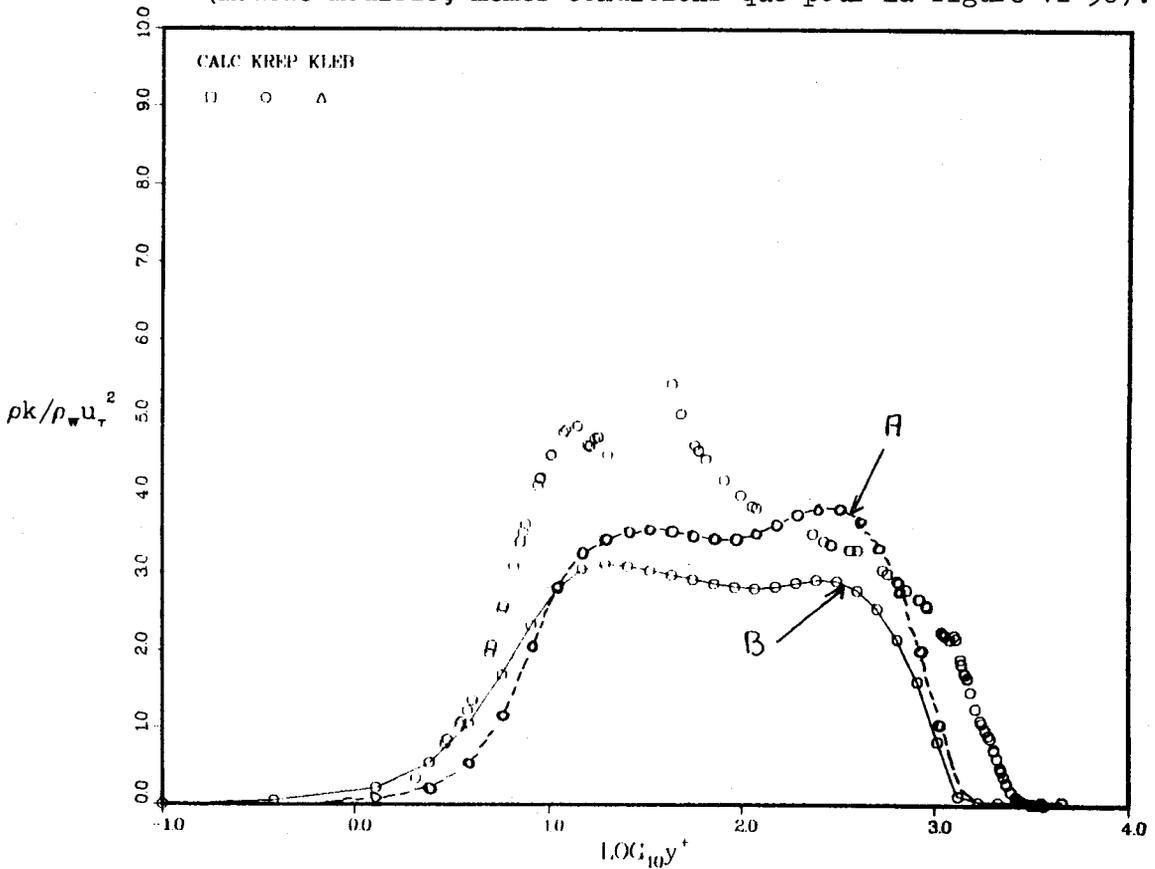


Fig. VI-63.- Distribution de l'énergie turbulente.
(modèle modifié, mêmes conditions que pour la figure VI-56).

que le non-respect, à priori de la loi logarithmique, affecte la forme des courbes. Il est établi que la pente de la courbe dans la zone logarithmique correspond à la pente minimale du profil de vitesse. Selon cette définition la courbe du modèle B est en meilleur accord avec la loi théorique de VON KARMAN alors que les modèle A, qui respecte cette loi en théorie, indique une valeur nettement plus faible, de même que le fait le modèle standard.

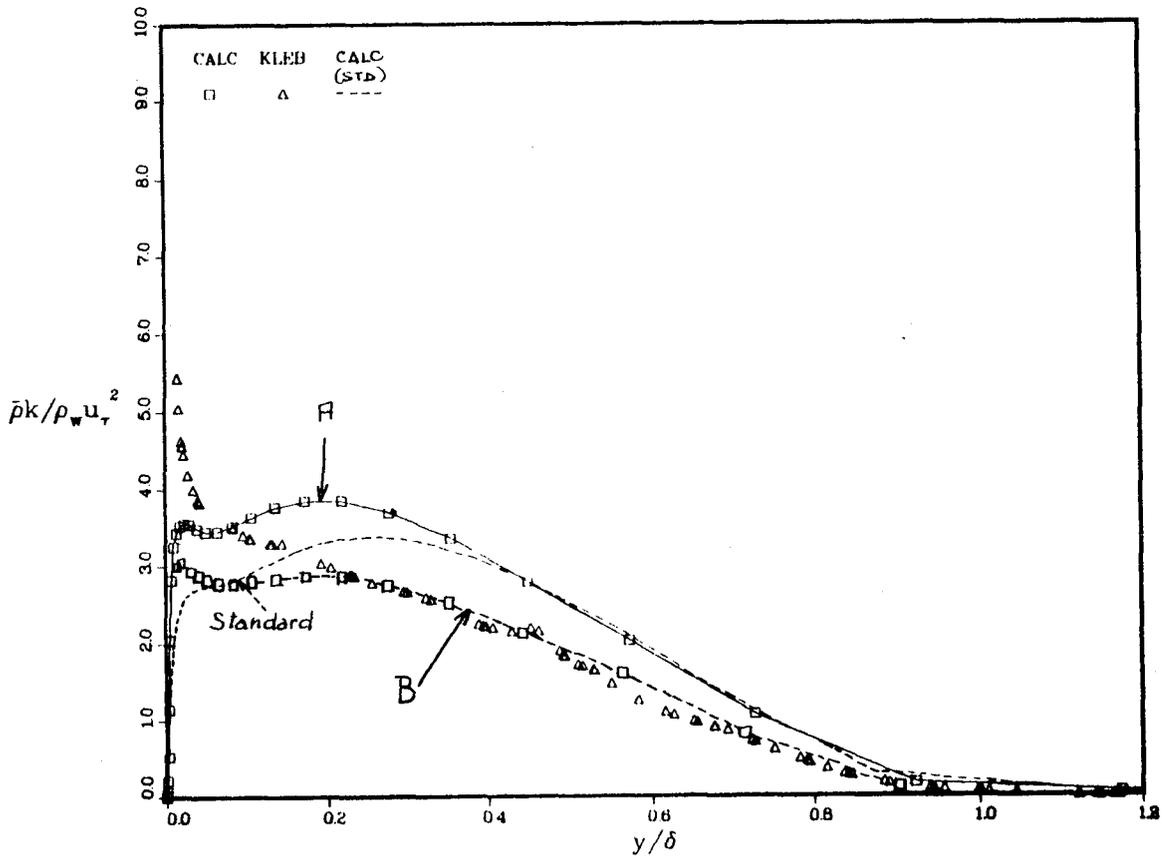


Fig. VI-64.- Profils de l'énergie turbulente.

(modèle modifié, mêmes conditions que pour la figure VI-56).

Les profils de vitesse dans la zone de sillage ne montrent pas de différences significatives. Il faut également remarquer que le facteur récupération est maintenant $r = 0.89$ en accord avec les valeurs expérimentales. Cette amélioration est une conséquence indirecte de l'accroissement de l'anisotropie et donc d'une diminution du taux de diffusion de la température au voisinage de la paroi. La figure VI-59 indique les changements obtenus

pour les fluctuations de vitesse. Les deux modèles montrent une très nette amélioration pour la description du comportement anisotrope du tenseur de Reynolds dans le voisinage proche de la paroi. La principale différence tient au comportement de la seconde composante, pour laquelle les résultats se trouvent de part et d'autre des points expérimentaux. Dans la partie externe, on retrouve évidemment les valeurs du modèle B à un niveau inférieur puisque la production de la dissipation y est renforcée par rapport au modèle A.

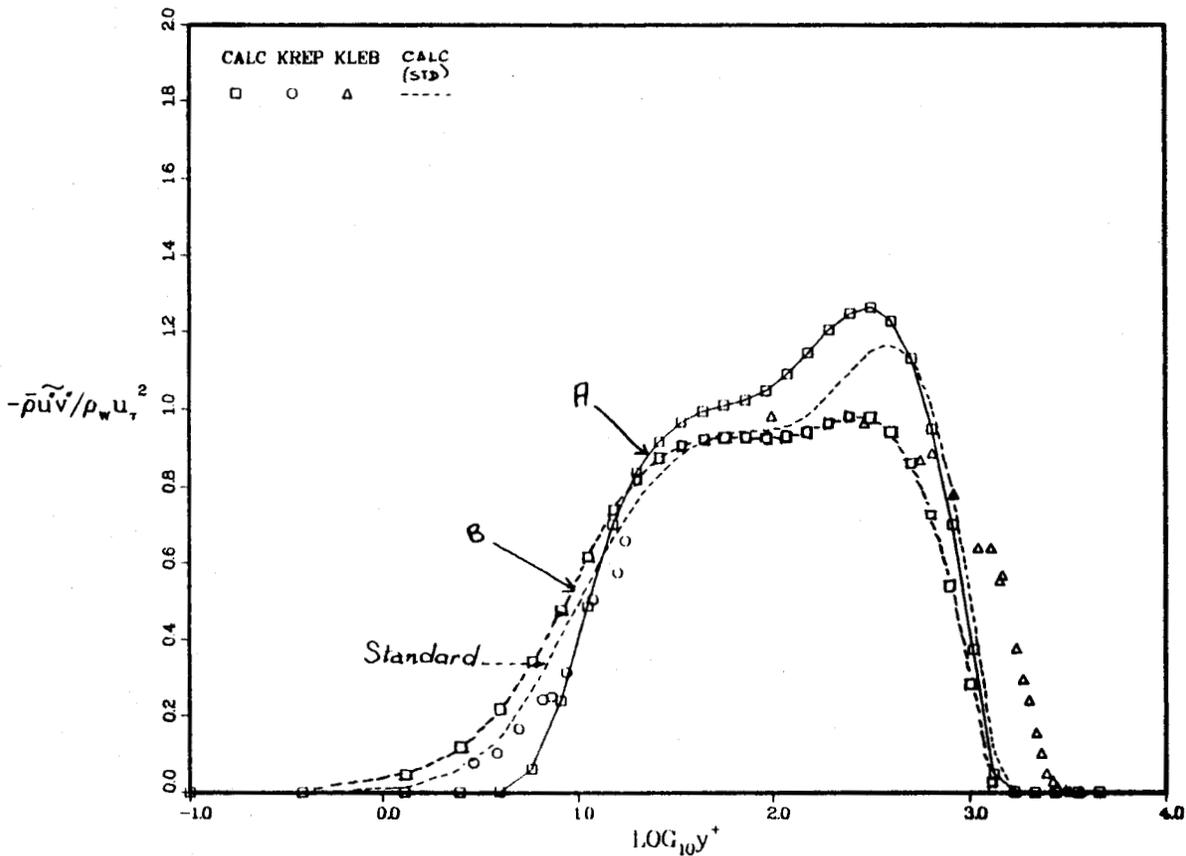


Fig. VI-65.- Distribution du frottement turbulent.
(modèle modifié, mêmes conditions que pour la figure VI-56).

Sur les figures VI-60 et VI-61 ont été ré-introduits les effets de la masse volumique variable. Les commentaires qui viennent d'être faits pour la figure précédente sont encore applicables en ce qui concerne la comparaison

des deux modèles entre eux. Toutefois on remarque maintenant que les courbes de $\overline{u'^2}$ et $\overline{w'^2}$ s'accordent beaucoup mieux avec les valeurs expérimentales. La valeur maximum de la courbe $\overline{u'^2}$ se trouve maintenant à $y^+ \approx 25$ ainsi que pour les points expérimentaux de KLEBANOFF [35] et de KREPLIN et ECKELMANN [36].

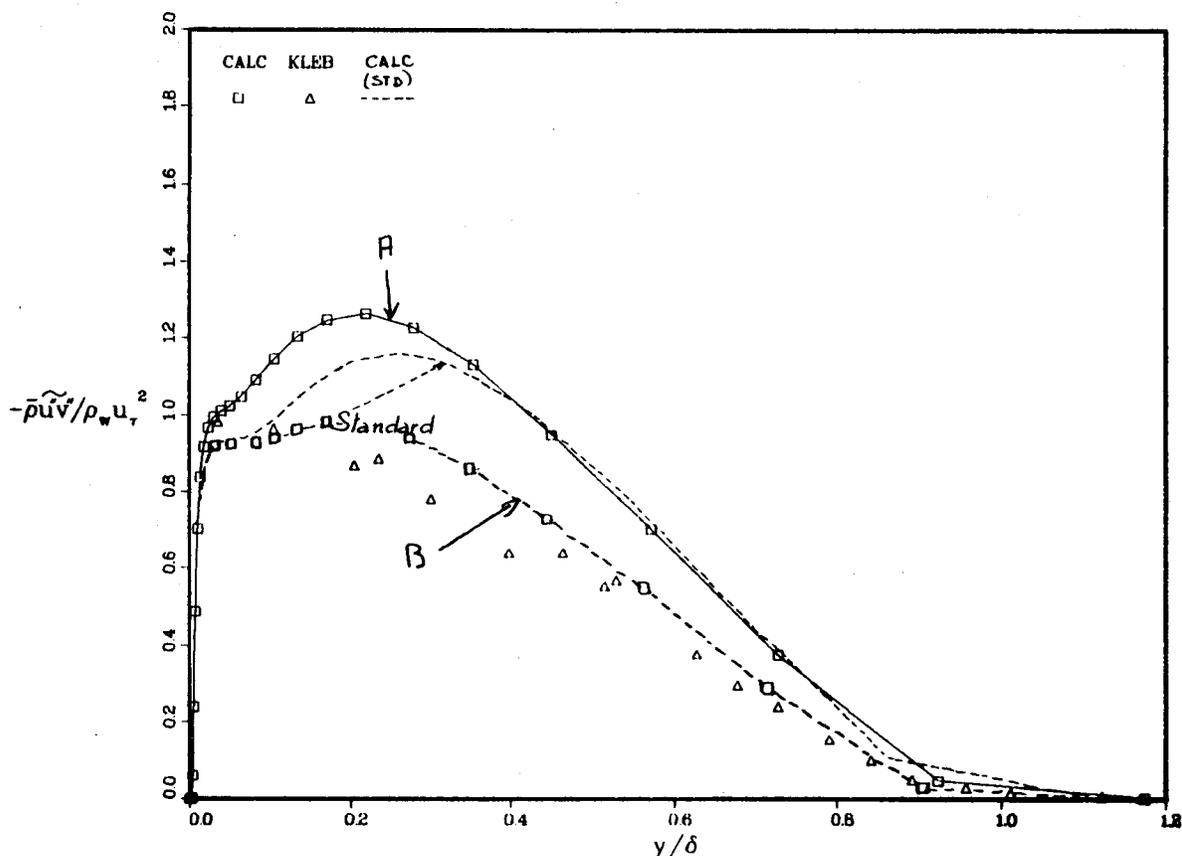


Fig. VI-66.- Profils de frottement turbulent.

(modèle modifié, mêmes conditions que pour la figure VI-56).

Dans la partie externe de la couche limite le modèle B montre un accord presque parfait avec les points de mesures alors que le modèle A est très nettement sur-estimé. Un autre critère remarquable de l'amélioration est la forme de la courbe de $\overline{u'^2}$. Le pic de cette courbe se trouve très nettement détaché de la paroi ainsi que le montrent les résultats expérimentaux. La figure VI-62 met en évidence les différences de comportement entre les deux modèles dans la zone externe. Une caractéristique intéressante

est le croisement des courbes de $\overline{v'^2}$ et $\overline{u'v'}$.

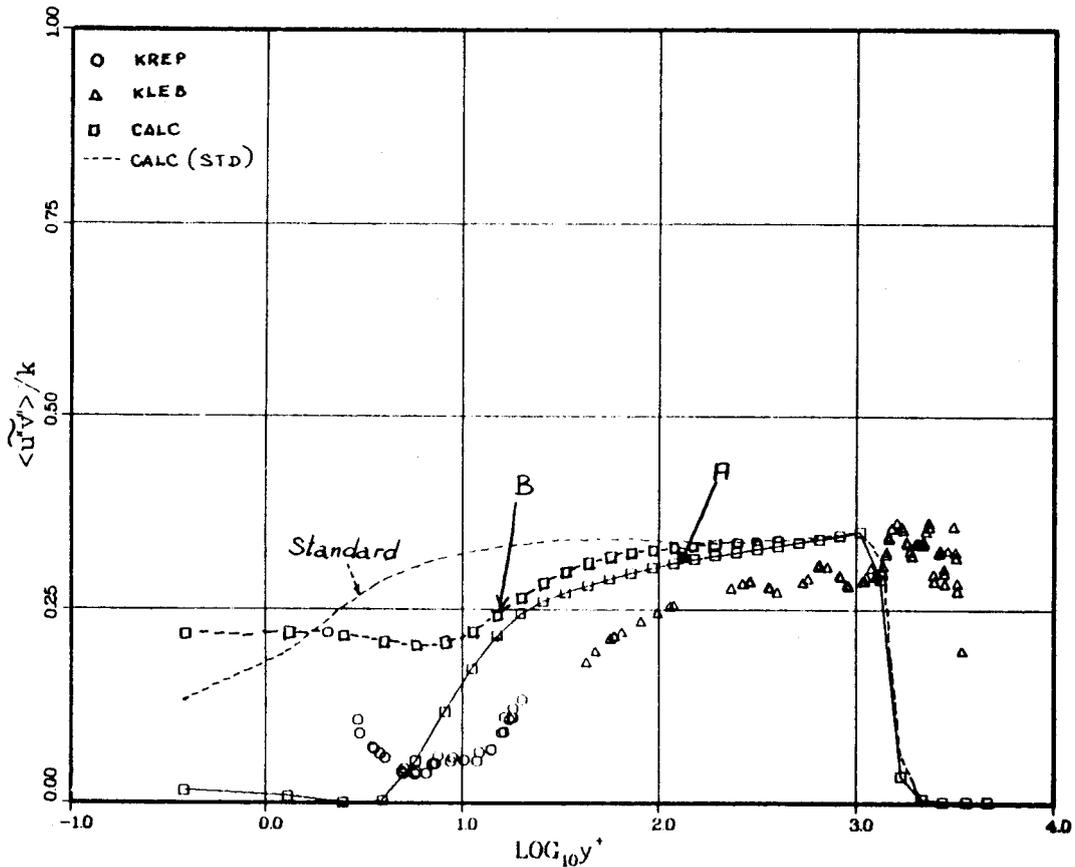


Fig. VI-67.- Rapport frottement-énergie.

(modèle modifié, mêmes conditions que pour la figure VI-56).

Les figures VI-63 et VI-64 montrent les améliorations qui ont été apportées concernant la prédiction de l'énergie cinétique de turbulence. Tant dans la voisinage proche de la paroi que dans la zone externe, le modèle B montre des résultats en accord nettement meilleur avec les résultats expérimentaux. Quoique de moindre qualité, le modèle A affiche également des résultats meilleurs que ceux obtenus avec le modèle standard quand à l'augmentation de l'énergie à la paroi. De même sur les figures VI-65 et VI-66, le modèle B est plus performant pour la prédiction du frottement turbulent, tout particulièrement dans la zone développée de la couche limite. Pour $y^+ < 10$ les deux modèles se trouvent de part et d'autre des points de KREPLIN et ECKELMANN [36]. A l'extérieur, les résultats du modèle A s'avèrent être moins bons que ceux du modèle standard tandis que le modèle B décrit remarquablement bien le frottement turbulent.

Pour clore ce paragraphe, la figure VI-67 montre la valeur du rapport du frottement turbulent à l'énergie turbulente. Les deux modèles donnent des résultats équivalents dans la partie externe de la couche limite, où on remarque un accord encore plus prononcé avec les points expérimentaux que ne l'avait montré le modèle standard. Au voisinage immédiat de la paroi le modèle A est sensiblement meilleur, ainsi que pouvaient le laisser prévoir les courbes de la figure VI-65.

En résumé, le modèle original de LAUNDER et al. [15], HANJALIC et LAUNDER [40] et GIBSON et LAUNDER [45] a été redéveloppé et modifié pour inclure des effets de compressibilité et pour permettre l'intégration de toutes les équations jusqu'à la paroi. Dans ce paragraphe, seul le dernier point a fait l'objet d'une attention particulière dans le but d'améliorer la prédiction des caractéristiques anisotropes du tenseur de Reynolds. Il est reconnu que l'ajustement des termes de pression moyenne dans les équations de contraintes de Reynolds ne peut être fait que dans ces configurations d'écoulements plus complexes telles que l'interaction onde de choc-couche limite (voir paragraphe suivant).

nom	equation	standard	modifiée
C1	R.S.	1.5	1.5
f1	R.S.	1.0	*
C2	R.S.	0.4	0.4
C3	R.S.	0.125	0.1597
C4	R.S.	0.015	0.0133
C5	R.S.	0.0	0.0041
C's	R.S., E.	0.250	0.250
Cε1	Eps.	1.28	0.675 (A) 1.280 (B)
Cε2	Eps.	1.8	1.8
feps	Eps.	**	1.0
Cε3	Eps.	2.0	1.0
Cε4	Eps.	0.0	0.0
Cse	E.	0.313	0.313
fε	R.S.	***	***

*	: f1	=	$\exp(-2.0/(1.0+Re_t/30.))$
**	: feps	=	$1.0-0.222\exp(-(Re_t/6.))^2$
***	: fε	=	$1.0/(1.0+Re_t/10.)$

Tableau VI-11.- Constantes du modèle.

VI-3-2.- L'interaction onde de choc-couche limite turbulente

Après avoir étudié le cas simple des couches limites compressibles, nous allons pouvoir mettre en oeuvre l'outil qui est développé dans ce mémoire pour calculer un écoulement compressible complexe; compressible parce que une onde de choc normale à la direction principale à l'écoulement est présente, complexe parce que les gradients de pression induits par cette onde de choc sont suffisamment forts pour provoquer un décollement étendu de la couche limite.

A) Configuration expérimentale

L'étude expérimentale qui est utilisée ici a été faite en 1978-1979 à l'O.N.E.R.A. sous la direction de DELERY [41] et a été incluse dans les cas tests de la conférence de STANFORD [42]. Elle s'inscrit dans un cadre plus vaste d'étude de l'O.N.E.R.A. où trois différentes configurations ont été étudiées : (1) le décollement naissant, (2) le décollement, (3) le décollement étendu.

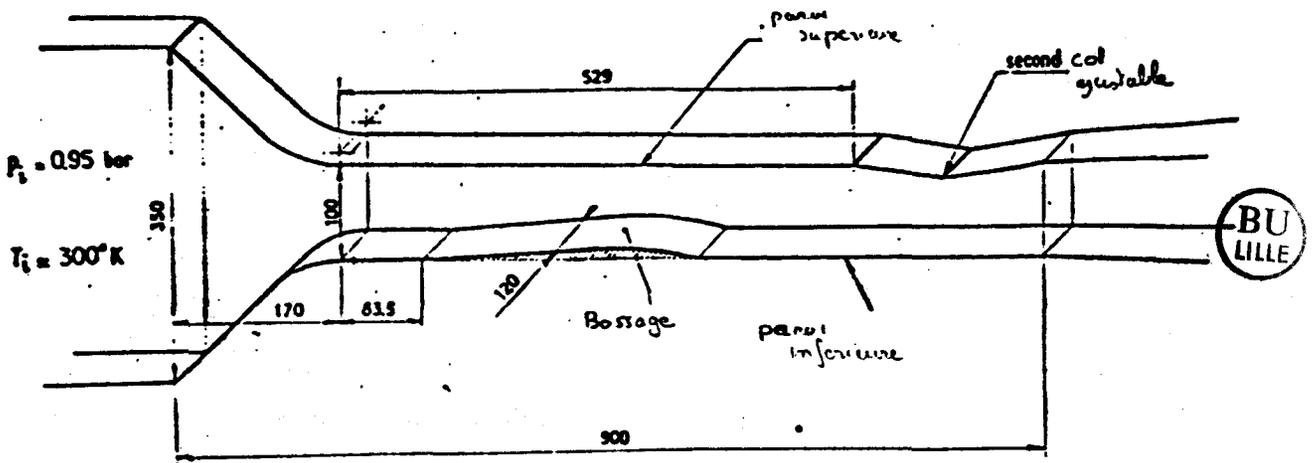


Fig. VI-68.- Configuration expérimentale (tiré de [42])
(vue d'ensemble).

Toutefois pour des raisons historiques, seul le troisième cas a été étudié jusqu'à présent dans l'optique de la compétition de Stanford. Les figures VI-68 à VI-72 montrent les principales caractéristiques de l'écoulement. La figure VI-68 donne une description d'ensemble de la tuyère. Un bossage, dont le profil exact est donné sur la figure VI-69 est monté sur la paroi inférieure d'une tuyère transsonique. Le nombre de Mach à l'entrée de cette tuyère est égal à 0.63. L'existence du bossage provoque une accélération de l'écoulement jusqu'à une valeur du nombre de Mach de l'ordre de 1.4.

La contre-pression aval, qui est contrôlée par un second col ajustable, rend nécessaire l'existence d'une onde de choc normale qui est maintenue au bord de fuite du bossage. La présence de cette onde de choc correspond à un gradient de pression suffisamment intense pour provoquer le décollement de la couche limite et la formation d'une zone de recirculation étendue.

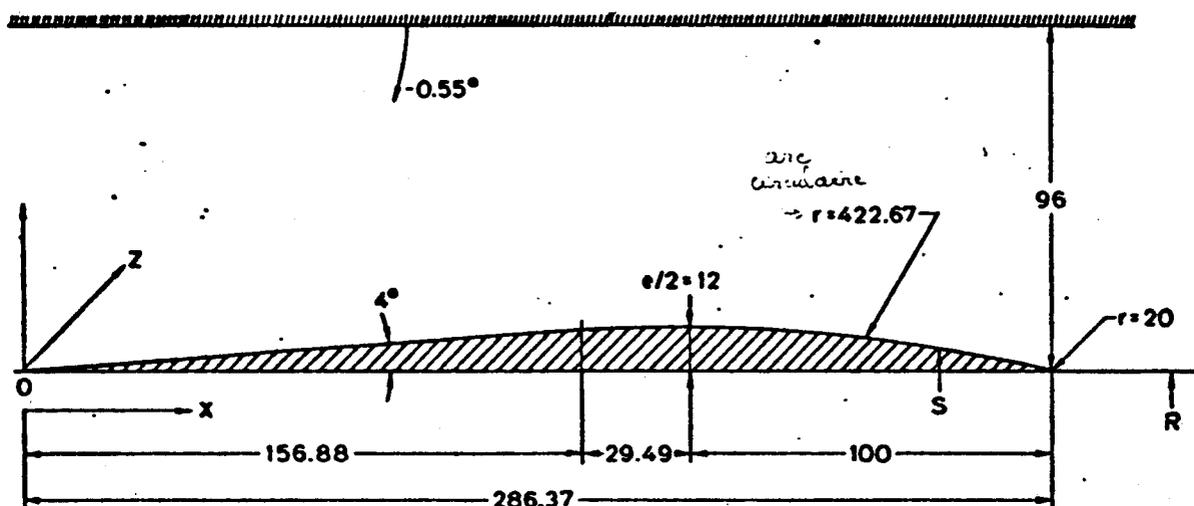


Figure VI-69.- Dimensionnement de la tuyère (tiré de [42]).

La figure VI-70 montre l'allure du choc au-dessus de la zone décollée. Le décollement est suffisamment important pour générer un choc oblique C1 issu du point de décollement (figure VI-72). En aval de C1, l'écoulement qui est encore supersonique, rencontre un second choc C2 qui

lui est presque normal. Les deux chocs C1 et C2 se rencontrent un peu plus haut pour ne plus former qu'un seul choc presque normal qui s'étend sur toute la hauteur restante de la tuyère. La zone séparée qui se forme au bord de fuite du bossage se traduit par un plateau très marqué sur la courbe de pression pariétale, qui correspond approximativement à la zone comprise entre les chocs C1 et C2. La localisation de la séparation à cet endroit est justifiée par les actions conjuguées du gradient de pression et de la courbure locale de la paroi inférieure.

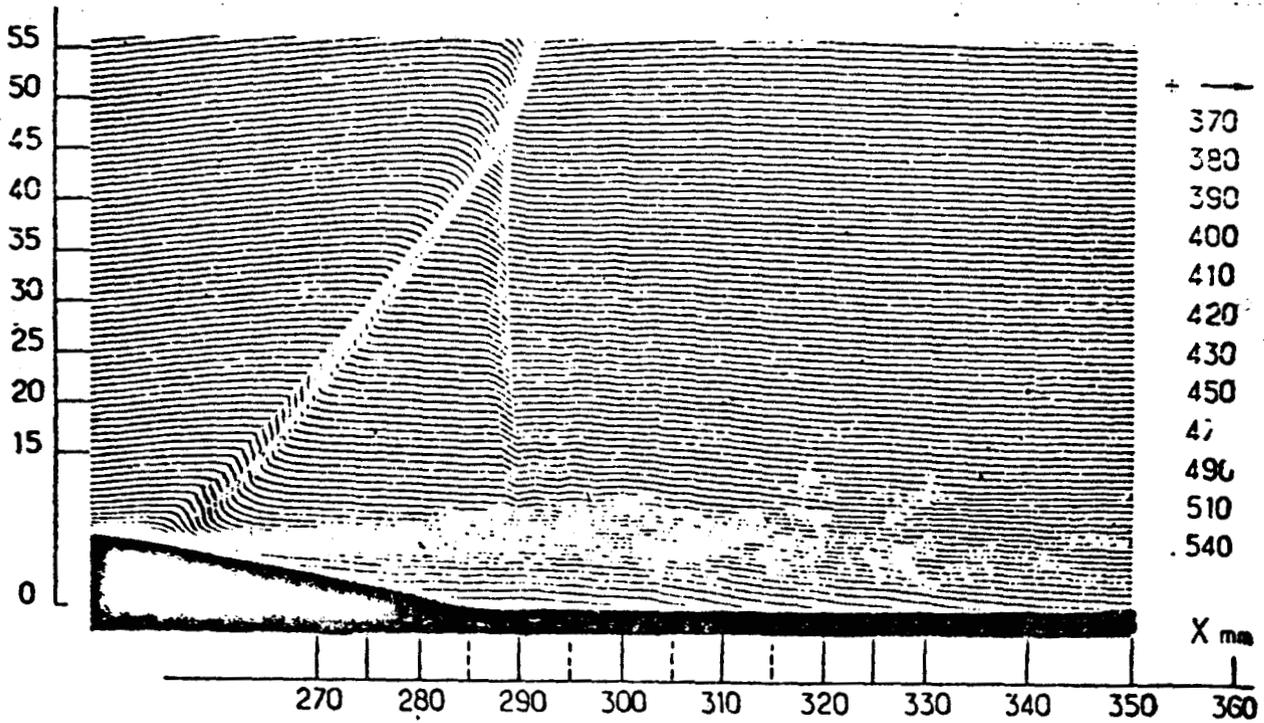


Fig. VI-70.- Forme de l'onde de choc (tiré de [42]).

Les positions respectives des points de décollement et de recollement sont évaluées par rapport à l'origine du bossage à $x = 0.260$ m et $x = 0.325$ m respectivement. Les conditions de stagnation sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 P_0 &= 95000 \text{ N/m}^2 \\
 T_0 &= 300 \text{ }^\circ\text{K}
 \end{aligned}
 \tag{VI-33}$$

Les caractéristiques de la couche limite au début de l'interaction sont :

$$\begin{aligned}
 \eta_c &= 1,36 \\
 \delta &= 5.0 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\
 \delta^* &= 5.18 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\
 \theta &= 2.65 \cdot 10^{-4} \text{ m}
 \end{aligned}
 \tag{VI-34}$$

Le nombre de Reynolds basé sur la vitesse extérieure et l'épaisseur de quantité de mouvement y est égal à :

$$Re_y = 3.80 \cdot 10^3
 \tag{VI-35}$$

B) Traitement numérique

C'est sans conteste cet écoulement qui a été la plus grande source de difficultés aussi bien numériques que de modélisation. Mais c'est également avec ce problème que nous avons eu vraiment le sentiment de prédire la physique des phénomènes grâce aux caractéristiques instationnaires de la méthode et à la diversité des problèmes physiques présents dans l'écoulement.

B-1.- Conditions aux limites

Les conditions à l'entrée de la tuyère sont identiques à celles qui ont été détaillées au chapitre V dans la rubrique conditions aux limites subsoniques. Le traitement des grandeurs turbulentes s'y fait alors d'une façon naturelle en supposant que leur gradient longitudinal est nul. Dans la section amont, les valeurs des quantités turbulentes sont figées après

que l'état stationnaire du champ moyen est atteint localement. Le traitement des parois se fait de façon plus délicate. Les conditions de miroir qui sont utilisées pour les variables primitives sont réellement justifiées quand le comportement de la variable est linéaire entre les deux points enveloppant la paroi. Au voisinage des parois, le comportement des composantes du tenseur de Reynolds est une fonction de y^2 plutôt que de y .

Nous avons donc dans un premier temps, été tentés d'utiliser une condition de gradient normal nul pour obtenir la valeur zéro désirée à la paroi. Cette méthode entraîne des valeurs trop importantes de la turbulence et il a été trouvé nécessaire d'utiliser également les conditions de miroir pour l'énergie turbulente, en conjonction avec une valeur raisonnablement petite pour $y^+(2)$: ($y^+(2) < 3$) et une valeur nulle pour les termes sources quand $J = 1$ dans les balayages verticaux issus de la paroi. La condition de gradient nul est conservée pour ε .

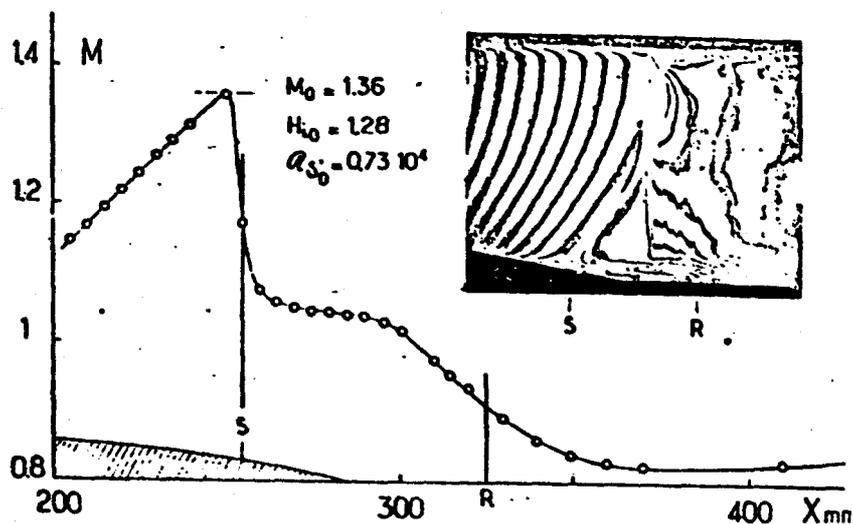


Fig. VI-71.- Distribution du nombre de Mach (tiré de [42]) calculé à partir de la pression pariétale inférieure en supposant l'écoulement isentropique.

B-2.- Conditions initiales

L'initialisation du calcul se fait d'une façon très grossière en prescrivant une pression et un nombre de Mach constants dans tout le domaine de calcul et égaux aux valeurs amonts. Le calcul construit alors l'écoulement de façon naturelle. Nous avons toutefois éprouvé certaines difficultés en voulant commencer à partir d'un tel champ initial le calcul avec le modèle $k-\epsilon$. Dans ce cas, les échelles caractéristiques initiales sont irréalistes et le calcul des termes sources est instable à la paroi. Les calculs doivent donc se faire de la façon suivante : (1) calcul avec longueur de mélange, (2) calcul du champ turbulent découplé, (3) couplage du champ turbulent et du champ moyen. La première étape a pour rôle de construire un champ dynamique moyen. La seconde étape va permettre d'obtenir des valeurs réalistes pour les quantités turbulentes et ainsi pour les échelles caractéristiques. La troisième étape réalise le couplage complet pour la viscosité turbulente et l'énergie.

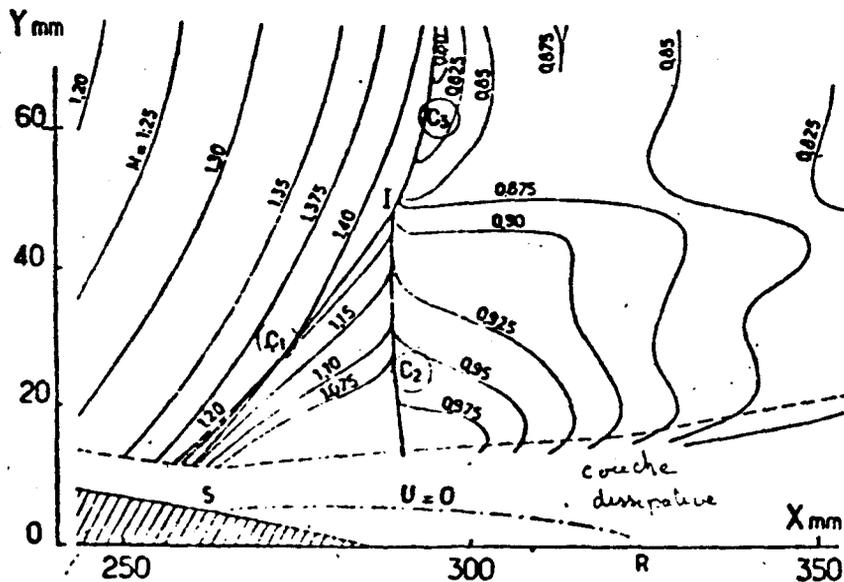


Fig. VI-72.- Représentation de la zone non visqueuse d'après les interférogrammes (tiré de [42]).

C) Résultats

Nous allons tout d'abord présenter le premier résultat obtenu, que nous avons longtemps considéré comme l'exemple d'application de la méthode (figures VI-73 à VI-78). Avant d'entrer dans le détail des figures, nous pouvons d'ores et déjà souligner deux traits caractéristiques de ce calcul :

- l'écoulement est prédit de façon correcte en dehors de la zone d'interaction (validation du schéma numérique et des conditions aux limites subsoniques).
- la zone d'interaction, qui est gouvernée par le couplage entre le champ moyen et le champ turbulent, est pratiquement ignorée.

La figure VI-73 donne une image du champ de pression tel qu'il est calculé. On constate bien évidemment la présence d'une onde de choc normale qui s'étend sur toute la hauteur de l'écoulement. Si on compare cette figure à la figure VI-72, la zone d'interaction commence approximativement à la même abscisse mais l'onde de choc qui la surplombe, a une structure tout-à-fait différente. Au lieu d'avoir un premier choc incliné vers l'arrière qui laisse un écoulement aval supersonique suivi d'un second choc presque normal qui rétablit une pression subsonique, le calcul montre un choc incurvé unique dans tout le canal, situé en aplomb du début de la zone d'interaction.

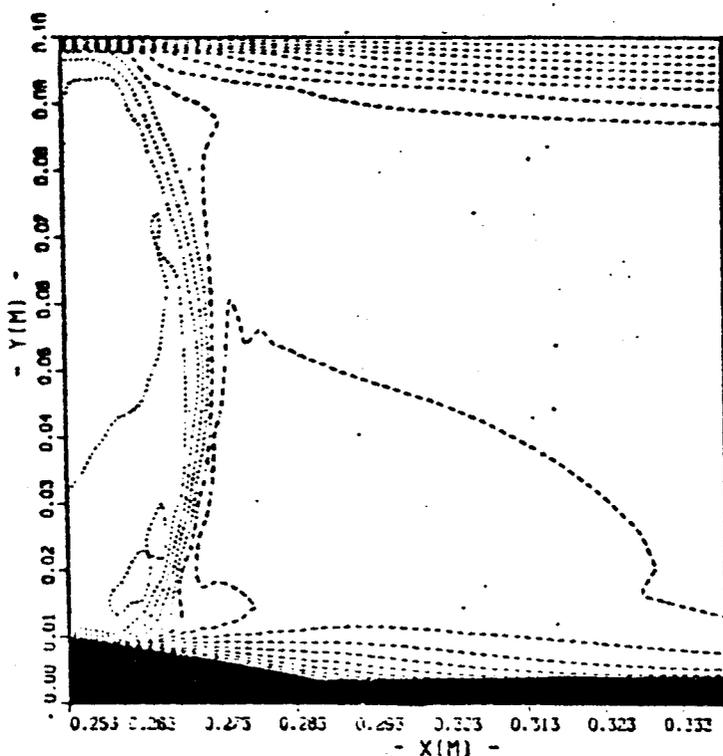


Fig. VI-73.- Champ des pressions calculées (modèle algébrique; maillage 80×40).

Les courbes de pressions pariétales montrent bien que la géométrie de la tuyère suffit à donner une bonne estimation de l'écoulement avant et après la zone d'interaction (grâce aussi aux conditions aux limites amont et aval). La courbe de pression de la figure VI-75 montre bien toutefois une différence d'environ 3 cm entre la position réelle du choc et la position du choc calculé, ce qui est vérifié également sur les figures VI-72 et VI-73.

Si on s'intéresse de plus près maintenant à la zone d'interaction, les résultats sont beaucoup plus décevants. La distribution de pression sur la paroi inférieure, figure VI-74, montre l'absence du plateau qui correspond au décollement étendu caractérisant cet écoulement. Ce décollement qui prend naissance au pied du choc C1 s'étend bien au-delà du choc C2 ($0.26 < x$, $x < 0.325$ m). La figure VI-76 montre quelques profils de vitesse longitudinale moyenne. A l'abscisse $x = 0.270$ m, le calcul et les résultats expérimentaux montrent tous deux un décollement. Toutefois l'épaisseur de la zone de recirculation calculée est insignifiante devant celle qui est observée expérimentalement.

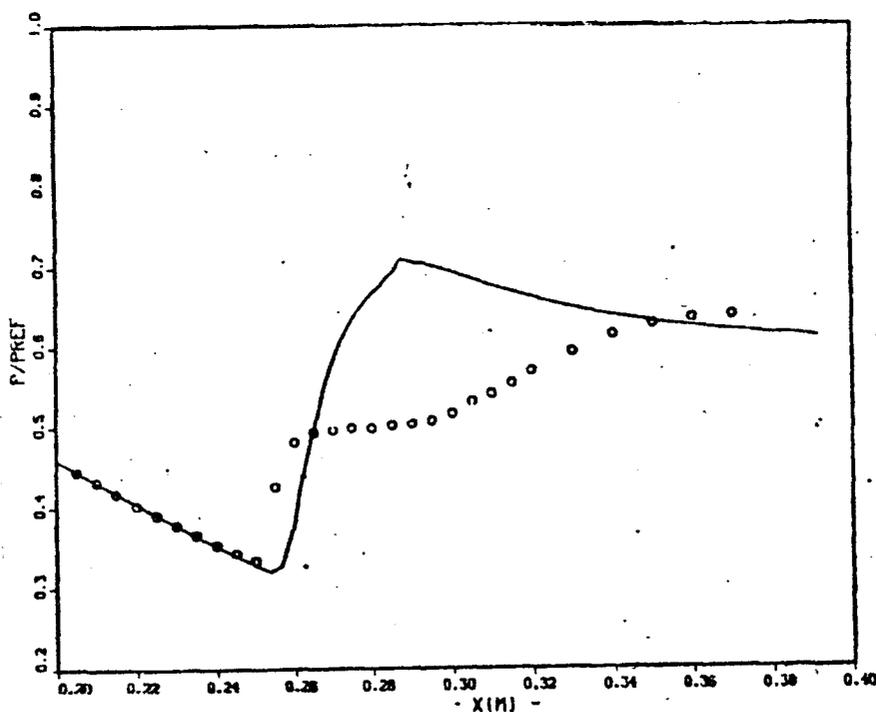


Fig. VI-74.- Distribution des pressions sur la paroi inférieure. (modèle algébrique; maillage 80x40; ● : exp. 41, —: calcul).

A l'abscisse $x = 0.310$ m le décollement réel est très épais tandis que l'écoulement calculé s'est déjà recollé à la paroi. Pour cette position comme pour la précédente, la vitesse extérieure calculée est inférieure à celle mesurée, ce qui est nécessaire pour respecter la continuité du débit. Pour $x > 0.350$ m, les couches limites sont pleinement recollées mais la distribution des points expérimentaux montrent que le retour à un profil de couche limite d'équilibre ne se fait que très lentement. Les distributions des quantités turbulentes montrent exactement les mêmes tendances. Au début de la zone d'interaction ($x = 0.270$ m), nous avons une estimation réaliste du niveau de turbulence.

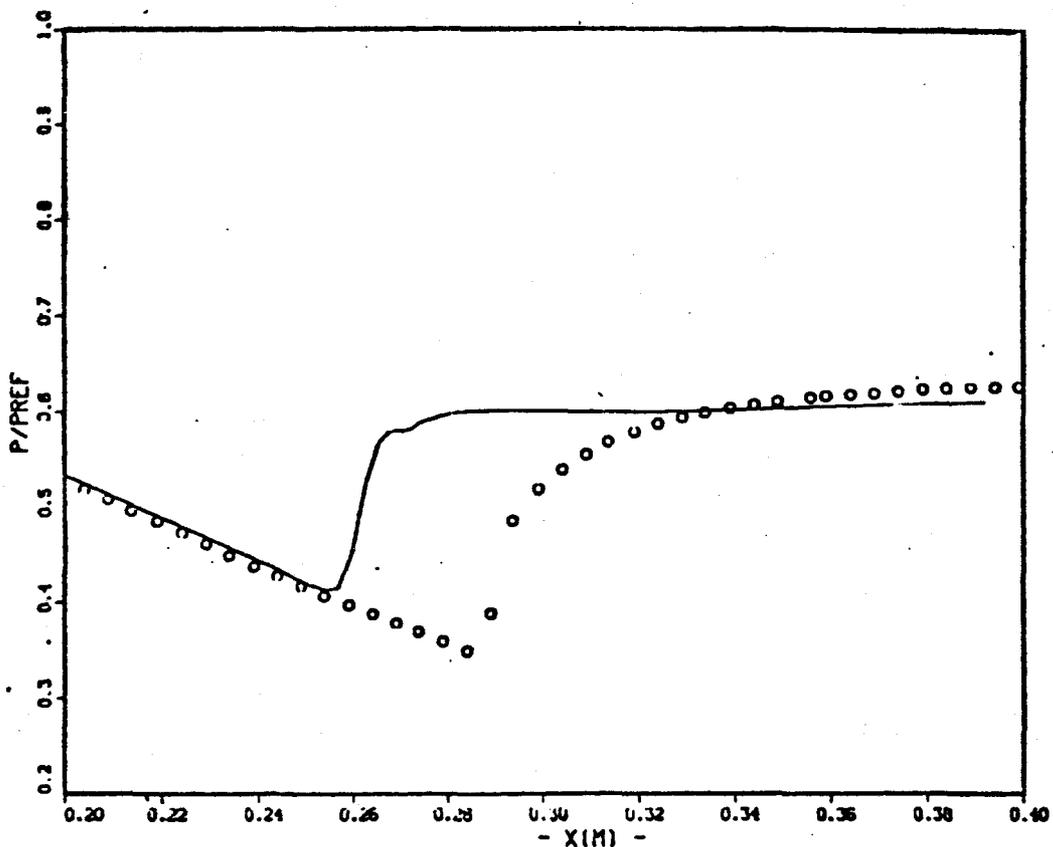


Fig. VI-75.- Distribution des pressions sur la paroi supérieure.
(modèle algébrique; maillage 80×40 ; \circ : exp. 41, —: calcul).

Puis à la différence des expériences qui montrent une croissance importante de la turbulence suivie d'une relaxation relativement lente, le calcul relaxe immédiatement ces grandeurs à tel point qu'elles finissent par disparaître des graphiques. L'ensemble de ces résultats montre bien les limitations qui sont inhérentes au modèle algébrique, qui tout en donnant

d'excellents résultats pour une couche limite attachée (voir VI-3-1) est tout-à-fait inadapté à la prédiction d'écoulements complexes.

Voyons maintenant ce qui se passe si on reprend la solution qui vient d'être obtenue pour poursuivre le calcul avec un modèle à deux équations.

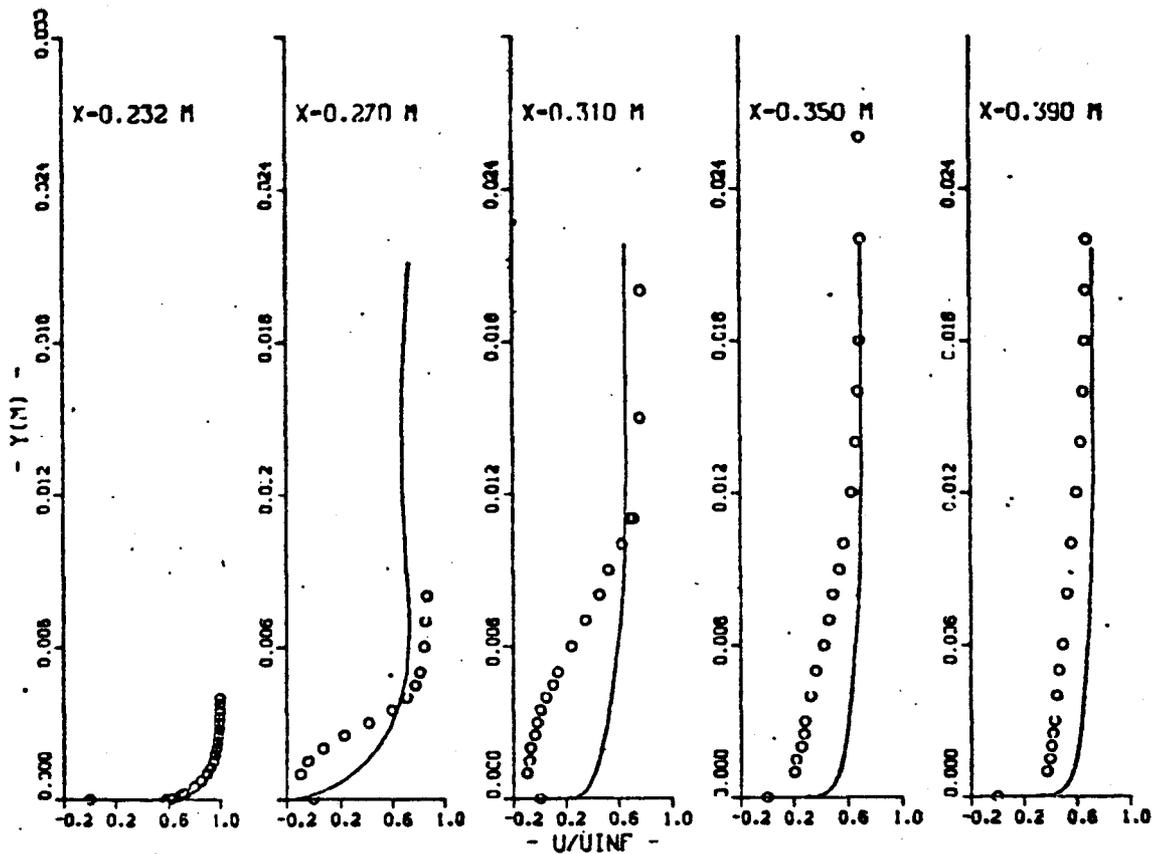


Fig. VI-76.- Profils de vitesse longitudinale moyenne (modèle algébrique; maillage 80x40; \circ : exp. 41, — : calcul).

Sur la figure VI-79 nous avons représenté l'évolution de la répartition du nombre de Mach calculé à partir de la pression pariétale (en supposant l'écoulement isentropique). On remarque que la restructuration du champ

turbulent par le modèle $k-\epsilon$ est très importante dans la zone d'interaction tandis qu'en amont, l'écoulement n'est que très peu affecté par le changement de modèle de turbulence. La courbe de pression se déforme notablement et se rapproche des valeurs expérimentales. Le plateau de pression qui caractérise l'existence d'un décollement étendu commence à apparaître tandis que la position du pied de l'onde de choc remonte légèrement en amont de sa position initiale. Si on poursuit le calcul, on assiste alors à une très nette détérioration des résultats.

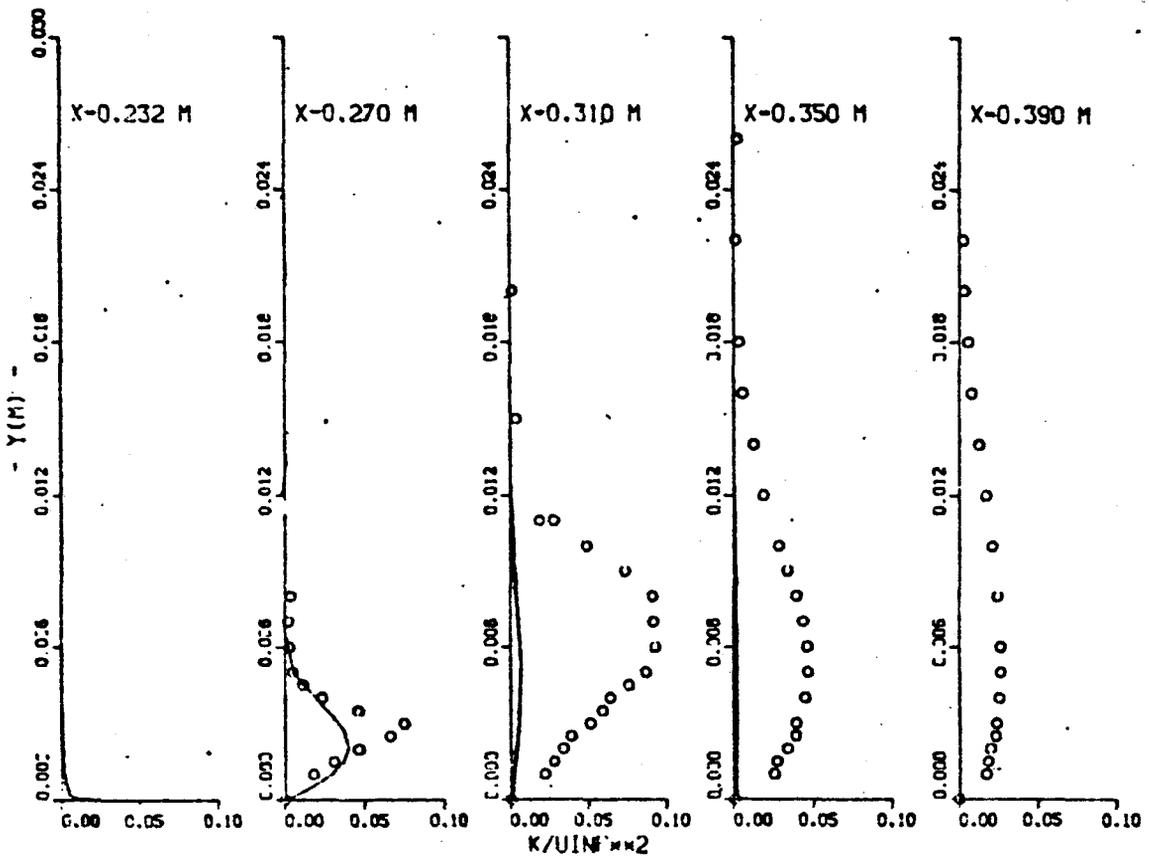


Fig. VI-77.- Profils de l'énergie turbulente.

(modèle algébrique; maillage 80×40 ; \circ : exp. 41, —: calcul).

En effet, le décollement tend alors à s'amincir et à se raccourcir sous l'effet d'une turbulence légèrement croissante quoique très nettement inférieure aux valeurs mesurées. L'amincissement de la zone de recirculation s'accompagne alors d'un déplacement du choc vers l'aval dans une partie de la tuyère légèrement convergente. L'onde de choc, ne pouvant plus trouver

de position d'équilibre continue alors sa progression vers l'aval.

Nous avons tout d'abord attribué cette instabilité à une valeur erronée de la pression qui est imposée à l'aval de la tuyère. Toutefois, des modifications de cette pression ($\pm 2\%$) n'ont eu pratiquement aucune influence sur le comportement du choc, ce qui montre bien que la structure de l'écoulement est dominée par le couplage étroit entre la zone non visqueuse et la zone de recirculation. Pour modifier la taille et la forme de la zone décollée nous avons donc décidé de changer le niveau de turbulence dans l'écoulement. Une façon parmi d'autres d'obtenir un tel résultat est de modifier la valeur de $C_{\epsilon 1}$, le paramètre qui contrôle la production du taux de dissipation ϵ . L'une des faiblesses du modèle $k-\epsilon$ est l'absence de critère rigoureux pour la détermination des constantes. Reprenons l'équation de ϵ dans la zone logarithmique, où on peut raisonnablement admettre que la production de k est égale à sa dissipation et que k et $\overline{u'v'}$ y sont approximativement constants. On obtient alors l'équation suivante :

$$C_{\epsilon 2} - C_{\epsilon 1} = \frac{C_D k^3 f_v \kappa^2}{\nu \epsilon u_\tau^2} \quad (\text{VI-36})$$

Les valeurs de $C_{\epsilon 2}$, C_D et $\nu \epsilon$ étant supposées déterminées par ailleurs (décroissance de turbulence de grille, utilisation antérieure pour des écoulements cisailés libres etc.), il reste toujours $C_{\epsilon 1}$ qui dépend de la valeur du nombre de Reynolds turbulent dans cette région pour que la vitesse suive la loi logarithmique. Ce nombre de Reynolds peut s'écrire sous la forme :

$$Re_T = \frac{k^2}{\nu \epsilon} = \frac{k^2 \kappa y}{\nu u_\tau^2} = 3.76 y^+ \quad (\text{VI-37})$$

Si on admet que la zone logarithmique commence aux environs de $y^+ \approx 20$, il vient alors $Re_T \approx 75$. et $C_{\epsilon 1} = 1.57$, valeur qui est proche de la valeur suggérée par Jones et Launder [2], ($C_{\epsilon 1} = 1.55$). Ceci montre bien la part de l'arbitraire dans la détermination de certaines constantes et explique que la façon la plus répandue (et peut-être aussi la plus commode) d'utiliser ce type de modèle à deux équations est l'optimisation numérique. Ceci n'est d'ailleurs en rien propre uniquement au modèle $k-\epsilon$.

La conférence de Stanford [22] a mis en évidence la disparité des différents jeux de constantes utilisables pour cette classe de modèles.

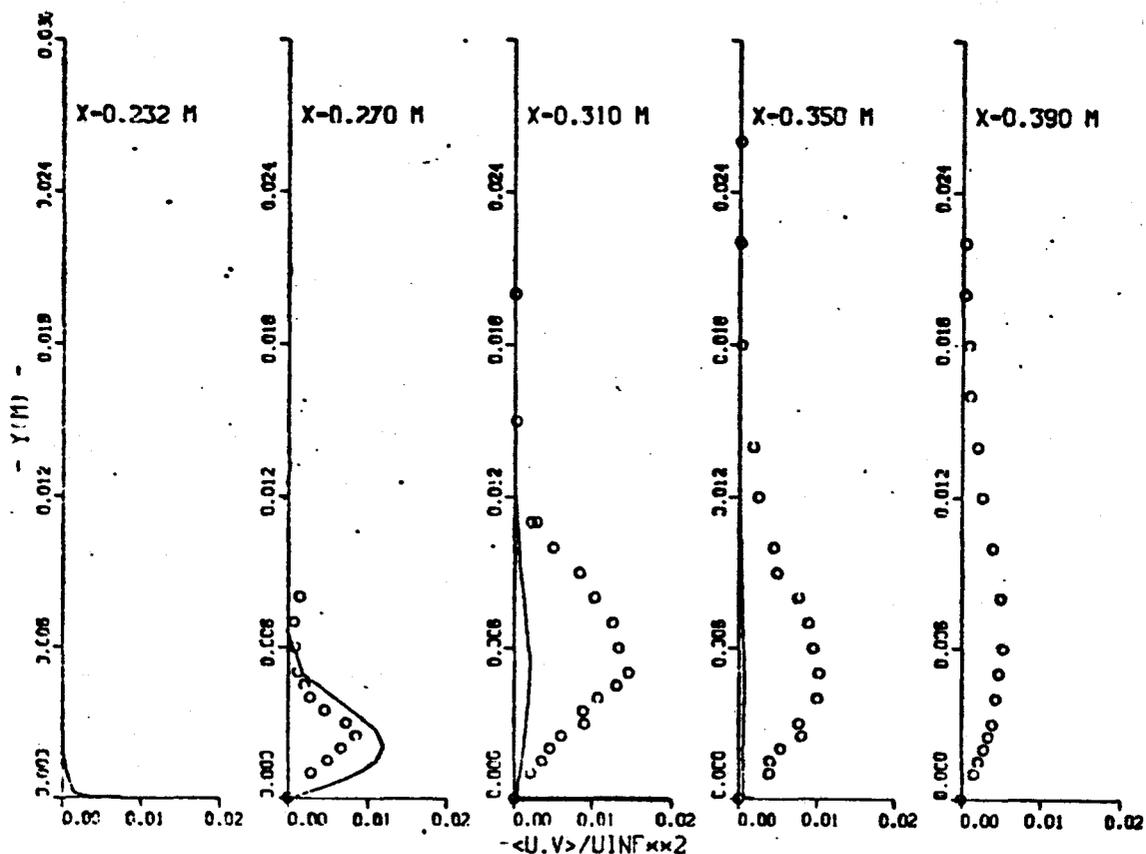


Fig. VI-78.- Profils de frottement turbulent.

(modèle algébrique; maillage 80 40; \circ exp. [41], —: calcul).

Mais revenons à l'examen des résultats de calcul. La figure VI-80 compare les distributions du nombre de Mach dans la zone d'interaction calculé à partir des pressions pariétales en supposant à nouveau que l'écoulement se fait de façon isentropique. Les symboles correspondent aux points expérimentaux. La courbe en pointillés reprend la solution du modèle algébrique qui a été présentée précédemment. Les deux autres courbes représentent les calculs $k-\epsilon$. Le modèle $k-\epsilon$ (A) utilise $C_{21} = 1.45$ et $C_{32} = 1.94$, valeurs qui ont été utilisées également pour les calculs d'écoulements cisailés libres. Cette courbe correspond à l'un des derniers instants avant que le calcul ne s'arrête quand le choc se perd en aval.

1500 Δt sont nécessaires à partir de la solution du modèle algébrique.

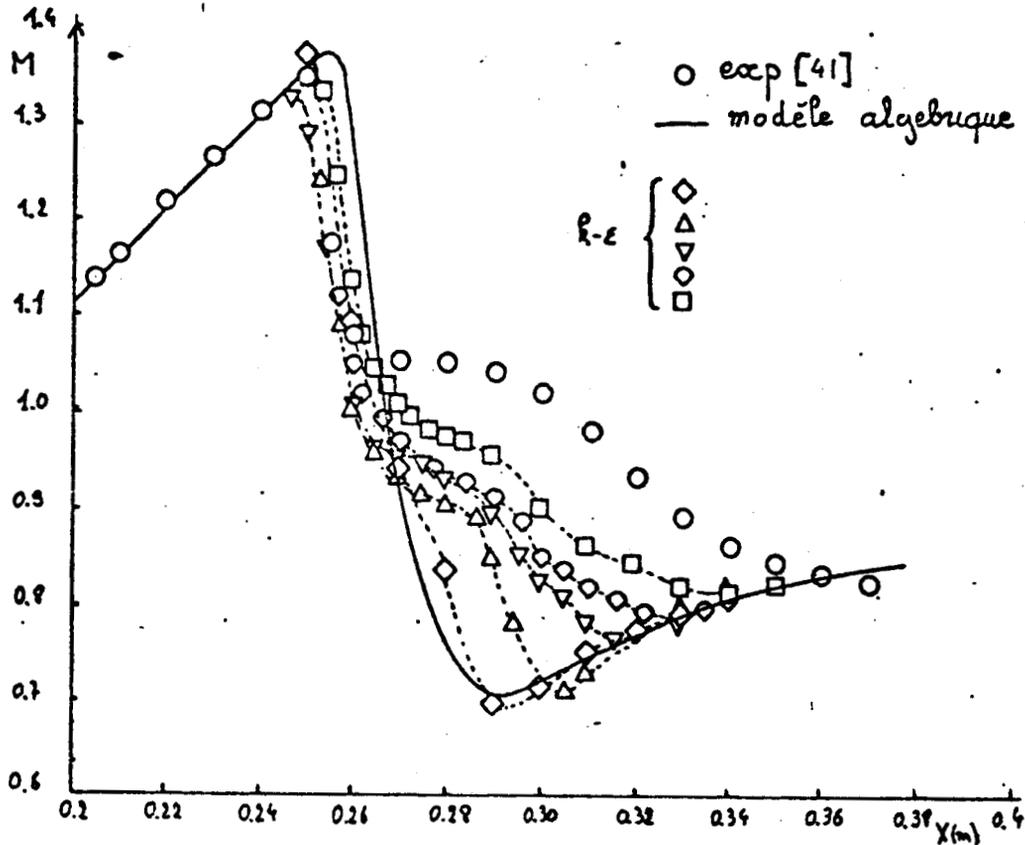


Figure IV-79.- Evolution du nombre de mach au cours du calcul.

Le modèle $k-\epsilon$ (B) qui utilise $C_{\epsilon 1} = 1.57$ et $C_{\epsilon 2} = 1.94$ commence à converger seulement 800 Δt après la solution algébrique. Le pas de temps a alors été réduit par un facteur 10 pour éliminer toute dépendance de la solution stationnaire vis-à-vis de la valeur du pas de temps [59] et le calcul s'est encore poursuivi sur quelques centaines d'itérations sans affecter la solution de façon notable.

L'ensemble des résultats du modèle $k-\epsilon$ (B) sont montrés sur les figures VI-81 à VI-86.

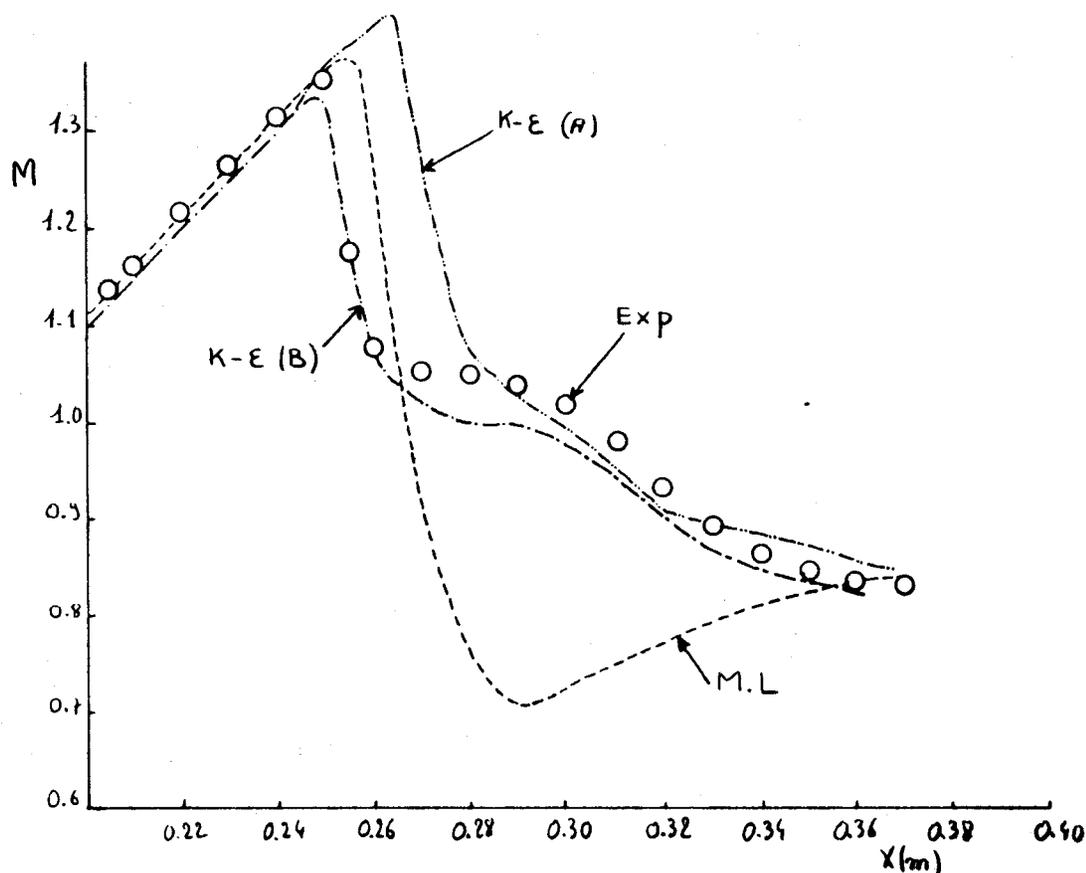


Fig. VI-80.- Répartitions du nombre de Mach.

La figure VI-80 montre le tracé des lignes isomach dans la zone de l'interaction. Sur cette figure, le dessin par endroits sinueux des lignes de niveaux laisse apparaître des cellules de taille régulière qui correspondent aux mailles sur lesquelles se fait le calcul dans la partie non-visqueuse. Dans la zone visqueuse, le resserrement des points est tel qu'on ne peut pas distinguer le maillage au travers des courbes de niveau. Pour éviter de surcharger la figure, seules les lignes correspondant à une valeur du nombre de Mach supérieure à 0.8 ont été tracées. Les lignes continues correspondent aux régions subsoniques et les lignes discontinues aux zones supersoniques. 40 courbes de niveau régulièrement réparties entre 1.5 et 0.8 sont tracées. Il faut également mentionner que l'aspect tourmenté des tracés est dû à la nature de ces tracés machines qui ne "pardonnent" pas la plus petite fluctuation, à la différence des tracés expérimentaux où un lissage est souvent possible à un endroit quelconque de la chaîne d'acquisition.

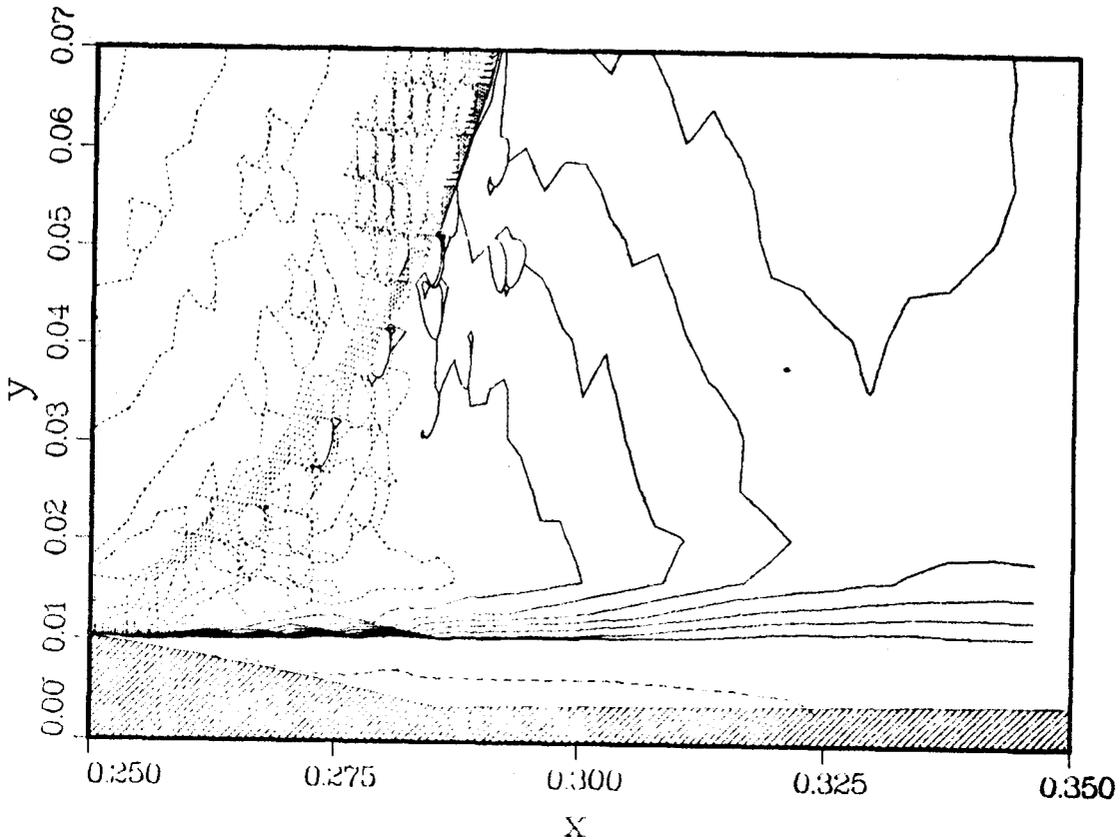


Fig. VI-81.- Répartition du nombre de Mach.

La ligne en pointillés qui s'étend le long de la paroi inférieure est le lieu des points à vitesse longitudinale nulle. Les points de décollement et de recollement sont correctement prédits à $x = 0.260$ m et $x = 0.325$ m respectivement. En comparant avec la figure VI-73, on constate une complète transformation de l'écoulement. Toutes les caractéristiques qui ont été soulignées en commentant les figures VI-70 et VI-72, apparaissent également sur la figure VI-81; le choc oblique C1, la structure en forme de lambda, le décollement étendu etc. Le seul point qui n'est que très faiblement résolu par le calcul est le second choc de l'interaction C2, pour lequel on ne voit pas d'accumulation des lignes de niveau.

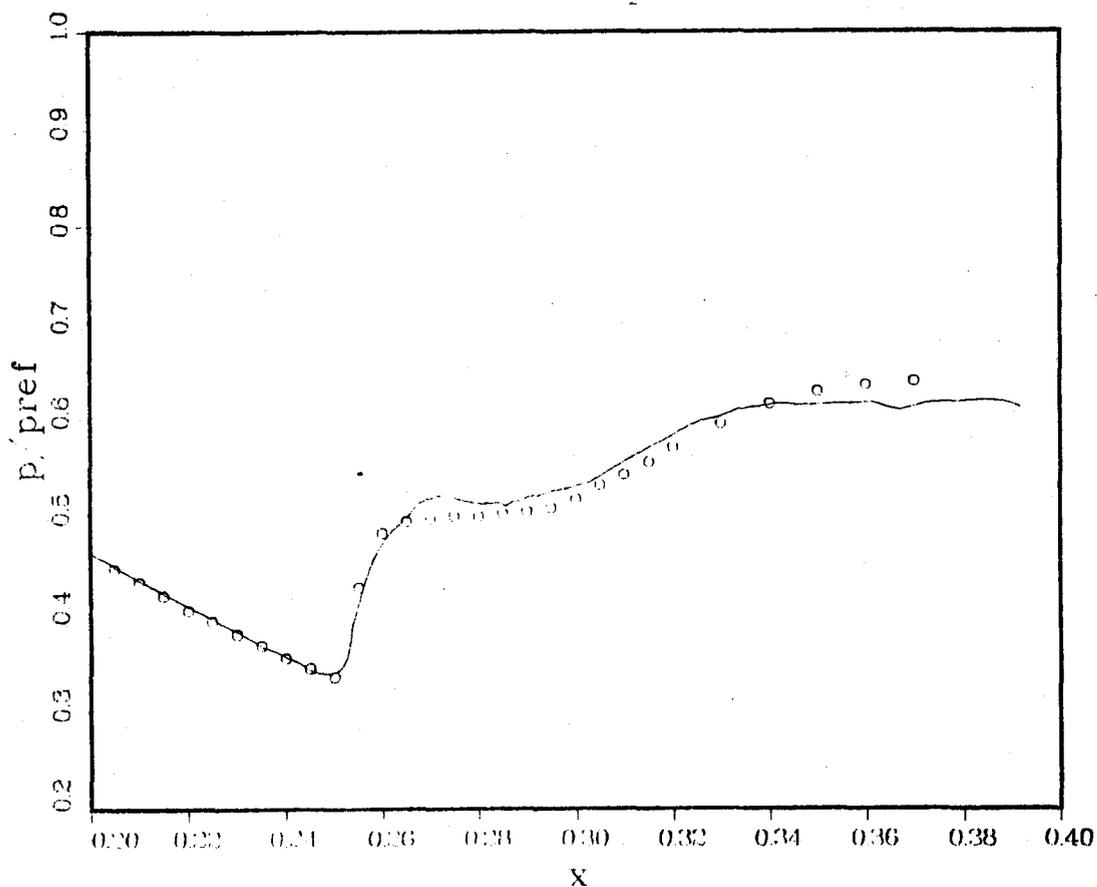


Fig. VI-82.- Distribution de pression (paroi inférieure)

La figure VI-82 montre la répartition de pression le long de la paroi inférieure. L'accord entre le calcul et l'expérience est remarquablement meilleur. En particulier la montée de pression qui correspond au début de l'interaction est parfaitement bien localisée.

On note une pression calculée inférieure aux valeurs expérimentales en aval de l'interaction, qui est probablement due à des effets tri-dimensionnels (couches limites sur les parois latérale et supérieure) qui imposeraient la prescription pour la pression aval d'une valeur 3 % plus élevée que celle mesurée.

La figure VI-83 est une très belle illustration des possibilités de capture de choc de la méthode numérique qui est employée ici. L'une des principales critiques à l'encontre des techniques de "shock capturing" a toujours été l'étalement des ondes sur plusieurs points de maillage plutôt que de confiner la discontinuité entre deux points adjacents de maillage, ainsi que l'on se doit d'attendre de l'épaisseur réelle d'une onde de choc.

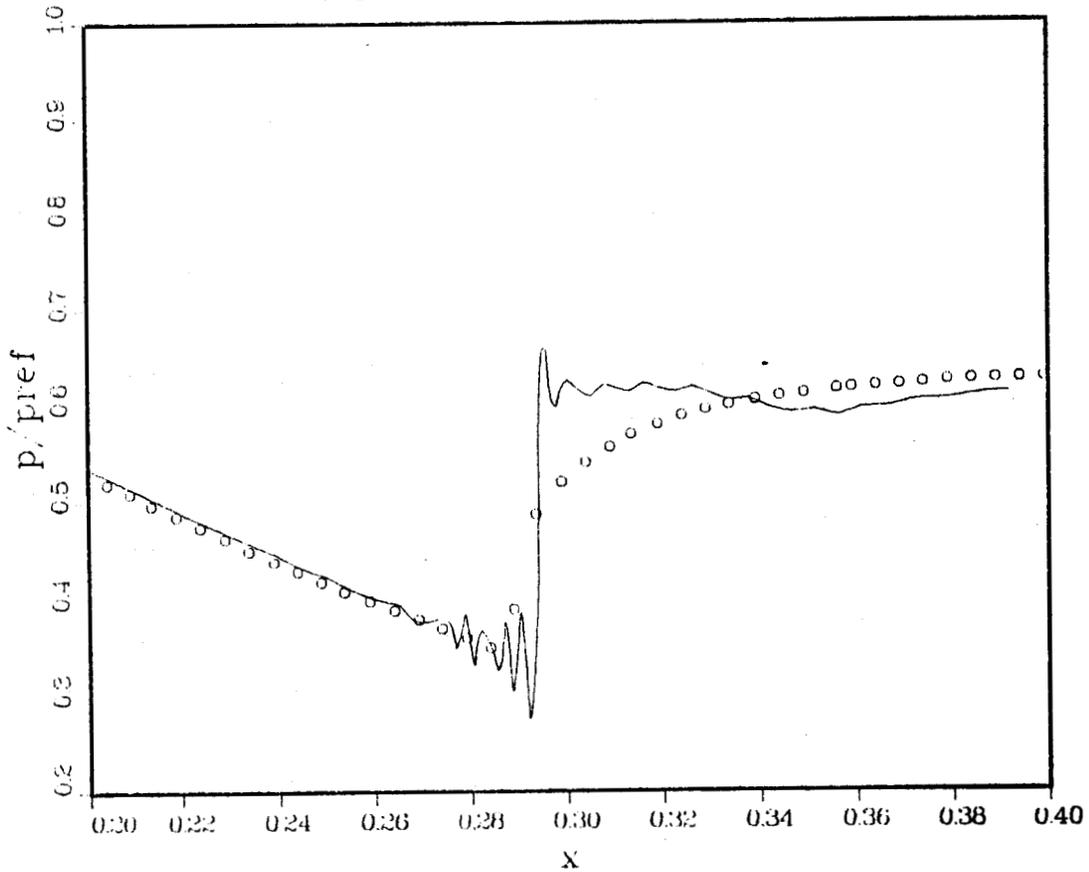


Fig. VI-83.- Distribution de pression (paroi supérieure).

Cette figure montre que, malgré la complexité de l'interaction sur la paroi inférieure, le choc est très finement résolu dans la partie non visqueuse. Les oscillations qui apparaissent immédiatement avant et après le choc pourraient disparaître en introduisant un terme de diffusion artificielle [60] mais nous nous sommes toujours refusés à employer cet artifice, comptant sur la viscosité effective présente dans l'écoulement pour éviter ces oscillations dans les zones cisillées. Le traitement homogène que nous nous efforçons d'appliquer à tout l'écoulement ne connaît pas a priori la délimitation entre les zones visqueuses et non visqueuses. Quoiqu'en plus grand désaccord avec les points expérimentaux, nous pensons que les résultats du modèle $k-\epsilon$ sont beaucoup plus physiques que ceux du modèle algébrique.

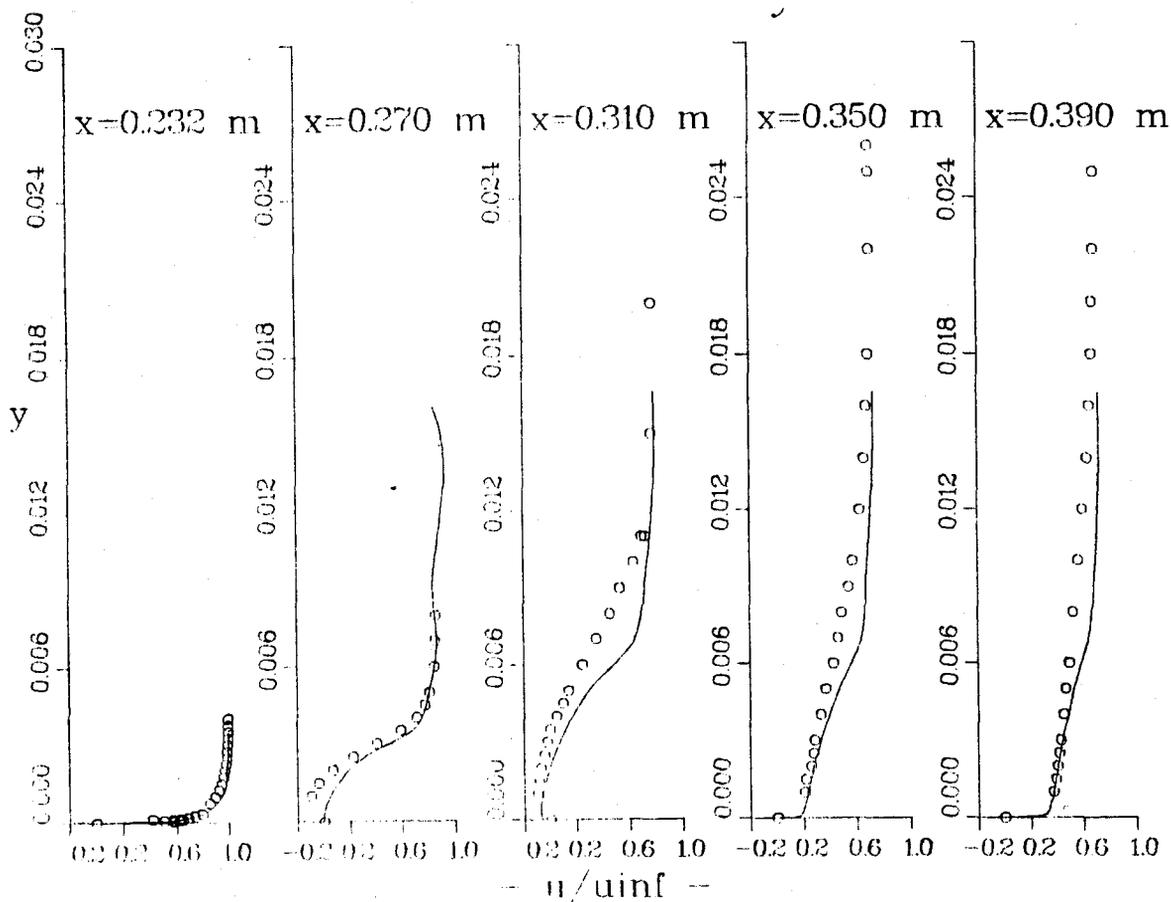


Fig. VI-84.- Profils de vitesse.

En effet, dans le voisinage de la paroi supérieure, le maillage ne permet pas la résolution de la couche limite. Nous ne pouvons donc pas espérer y voir l'influence de la viscosité. Dans le cas du modèle $k-\epsilon$ la viscosité redevient très petite dans la zone non visqueuse tandis que pour le calcul avec le modèle algébrique, la viscosité turbulente y est alors l'extension de celle qui est calculée pour la couche limite inférieure. Cela explique pourquoi le premier calcul montre un comportement visqueux à la paroi supérieure alors que la couche limite n'y est pas résolue. Cela renforce également notre assertion au sujet de la disparition des oscillations de pression de part et d'autre du choc à l'aide d'un terme de viscosité artificielle.

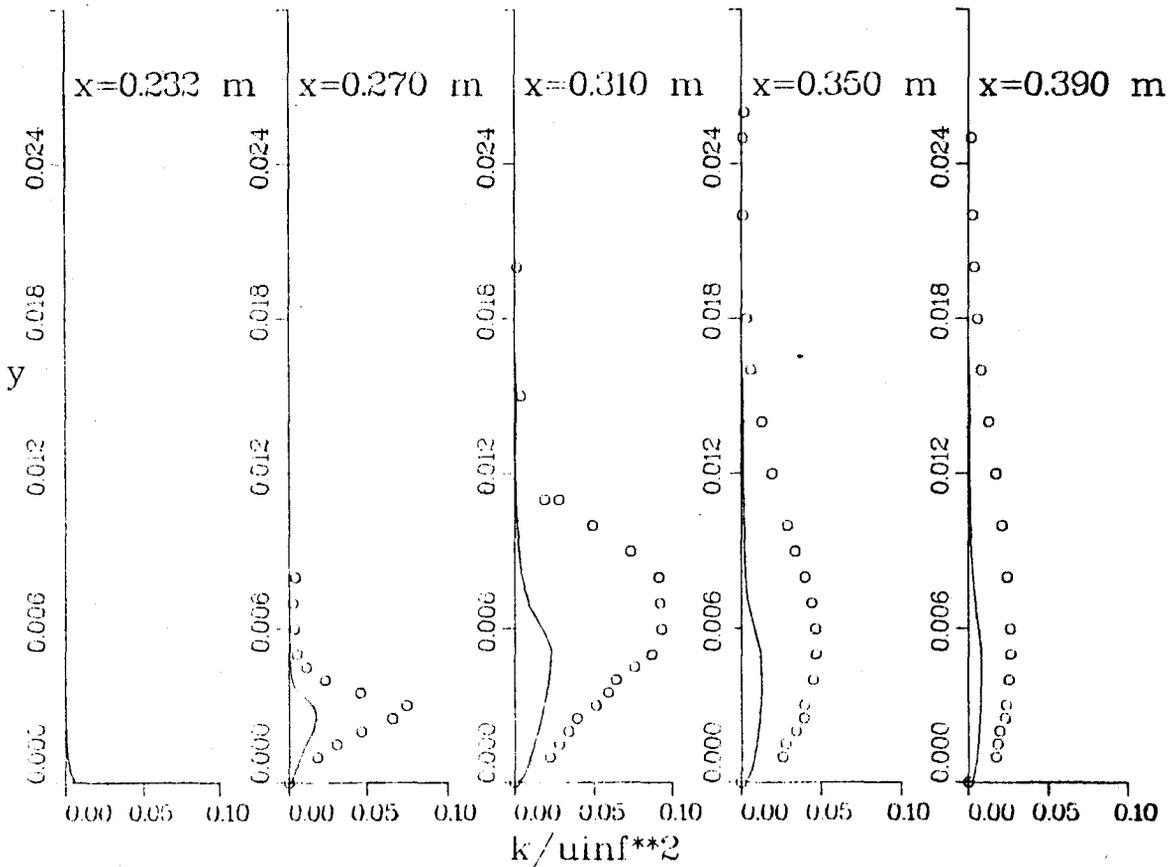


Fig. VI-85.- Profils d'énergie de turbulence.

La figure VI-84 montre quelques profils de vitesse longitudinale avant, dans et après la zone d'interaction. Pour $x = 0.270$ m le profil de vitesse représente correctement la recirculation de l'écoulement quoique le courant de retour y soit légèrement sous-estimé. Les profils suivants montrent un bon comportement au voisinage de la paroi mais une accélération plus forte à l'extérieure, signe d'un changement brusque des dérivées des termes de frottement turbulent. La figure VI-86 affiche en effet un profil à deux maxima pour $(\overline{u''v''})$, avec un creux qui correspond au changement de signe de la dérivée seconde de la vitesse longitudinale. Ce creux est dû à l'interaction des échelles caractéristiques de la couche visqueuse de paroi et de la zone de jet libre, qui provoque une décroissance trop lente de ϵ au voisinage de son deuxième maximum, et ainsi une valeur déficitaire de la viscosité turbulente. On observe néanmoins que, d'une façon générale la valeur du frottement turbulent est partout sous-estimée.

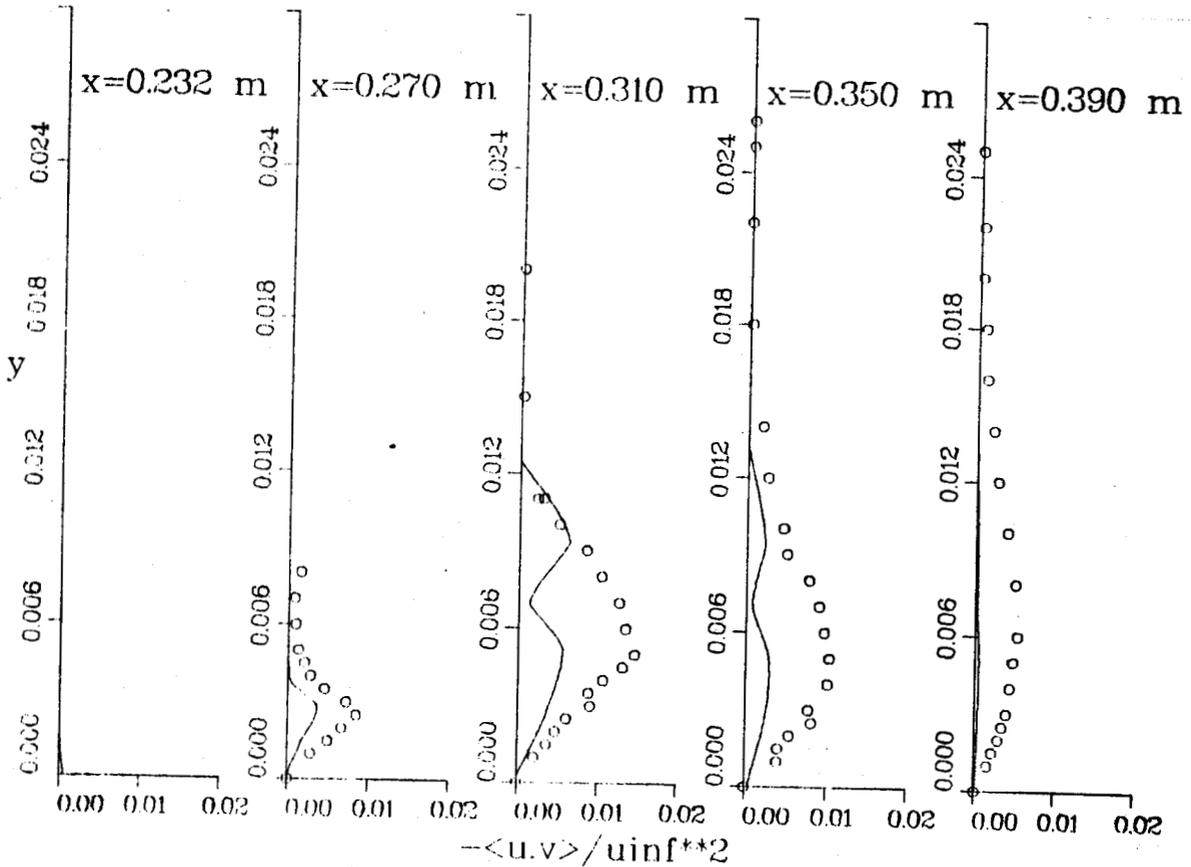


Fig. VI-86.- Profils de frottement turbulent.

La figure VI-85 met en évidence une insuffisante analogie des niveaux d'énergie turbulente par rapport aux valeurs mesurées. Ce point illustre l'ambiguïté qui semble exister entre les résultats expérimentaux et les résultats numériques. Déjà pour les calculs avec longueur de mélange, la viscosité turbulente au début de l'interaction semblait consistante avec le champ turbulent mesuré (le frottement turbulent et l'énergie de turbulence sont proches des valeurs expérimentales, figures VI-77 et VI-78). Pourtant un tel niveau de turbulence provoque un décollement beaucoup plus petit que celui qui est observé dans la réalité, signe que la quantité de mouvement près de la paroi est trop importante au début de l'interaction. De même lors du calcul $k-\epsilon$ (A), la croissance du niveau de turbulence dans la seconde phase de l'évolution du calcul, a provoqué une contraction de la zone décollée puis une fuite du choc vers l'aval. Pour corriger cela, il a été nécessaire de diminuer le niveau de turbulence ($c_{\epsilon 1} = 1.57$ dans $k-\epsilon$ (B) plutôt que $c_{\epsilon 1} = 1.45$ dans $k-\epsilon$ (A)) pour obtenir une zone décollée plus importante et également

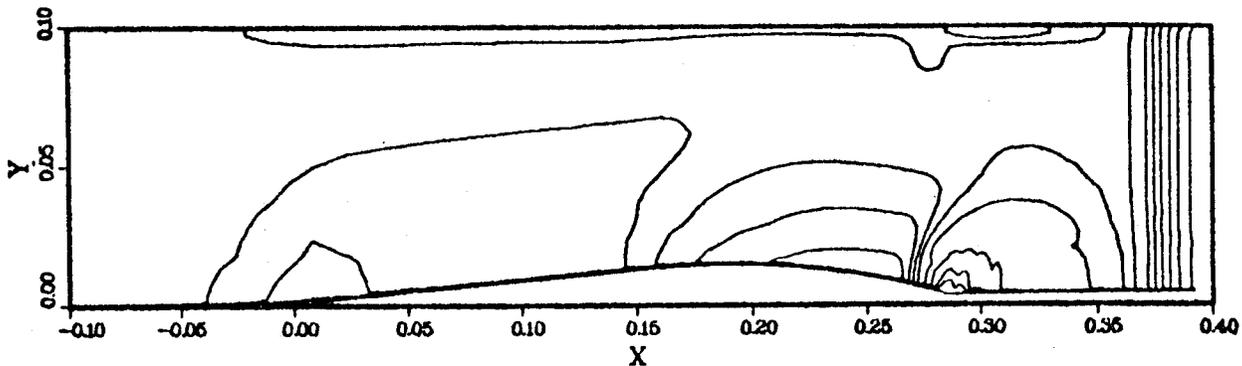
une position d'équilibre pour le choc. Naturellement la différence d'énergie turbulente entre le calcul et l'expérience s'est accentuée.

Il y a donc une incohérence entre la quantité de mouvement qui régit la dimension et la nature du décollement et le niveau de turbulence qui gouverne cette quantité de mouvement. HORSTMAN [61] a émis l'idée que la différence entre les niveaux d'énergie était principalement due à des effets instationnaires de l'onde de choc qui peuvent amplifier l'énergie turbulente mesurée. Notre opinion sur cette inconsistance est quelque peu différente. D'une part DELERY [62] n'a jamais pu observer de déplacements du choc durant les séances expérimentales. D'autre part, même si la position du choc était tributaire d'effets instationnaires, dans la partie visqueuse où est localisée la production de l'énergie turbulente ces fluctuations devraient avoir été filtrées par l'action de la viscosité, l'onde de choc au voisinage de la paroi n'étant qu'une suite continue de compressions faibles. C'est pourquoi il est probable que ce problème n'est qu'un défaut supplémentaire du modèle à deux équations. Hormis la faiblesse due à l'utilisation de l'approximation de BOUSSINESQ ce type de modèle est donc vraiment inadapté à la prédiction des écoulements pariétaux.

En effet, les équations qui ont été établies au chapitre III montrent très clairement que les mécanismes de diffusion dans la direction normale à la paroi, sont régis par la quantité $k \overline{v''^2} / \epsilon$, tandis que dans les modèles à deux équations, la diffusion se fait par k^2 / ϵ . En présence d'une paroi, nous avons vu précédemment que l'anisotropie du tenseur de Reynolds est très accentuée, $\overline{v''^2}$ étant fortement diminué. Pour prendre en compte ce phénomène, le modèle $k-\epsilon$ utilise une fonction d'amortissement f_v qui dépend également de k^2 / ϵ via le nombre de Reynolds turbulent, pour diminuer la diffusion près de la paroi. Comme k et $\overline{v''^2}$ ont des comportements différents (ex : forme de la dépendance vis-à-vis de y , positions des maxima), il n'est pas possible de représenter correctement les mécanismes de diffusion avec un tel modèle, à moins de l'ajuster à chaque calcul. Au contraire le modèle qui emploie la fermeture au second ordre des équations a la capacité intrinsèque de représenter correctement ces mécanismes, tout d'abord parce que les contraintes normales sont résolues individuellement et ensuite parce que le caractère anisotrope de la production de k y est respecté (voir DELERY [43]). Ce type de fermeture devrait également supprimer l'anomalie sur les profils de $\overline{u''^2}$ mentionnée plus haut, le frottement turbulent étant également résolu individuellement.

Pour conclure ce chapitre les planches VI-87 à VI-99 montrent le déroulement d'un calcul. Les 600 premiers pas de temps sont faits seulement à l'aide du modèle algébrique pour construire le champ de vitesse moyenne. On voit très bien l'onde de pression qui remonte de la frontière aval tandis que l'écoulement s'accélère sur le bossage puis se ralentit dans la partie divergente. Après 200 Δt , on voit apparaître une zone supersonique près de la paroi inférieure. Cette poche supersonique s'étend en même temps que les lignes isomach s'ordonnent dans la tuyère et que l'onde de choc se forme progressivement de la paroi inférieure jusqu'à la paroi supérieure. A 800 Δt , la solution est convergée pour ce modèle. Le calcul des termes sources a été commencé à partir de 600 Δt en utilisant la viscosité turbulente algébrique et sans coupler les équations du mouvement moyen aux équations pour ρ et ε . Durant 200 pas de temps, le champ turbulent peut donc se construire sans affecter le champ moyen. A partir de 800 Δt , le couplage complet est effectué avec un pas de temps divisé par 10. Après 200 Δt supplémentaires, ce pas de temps est multiplié par 2 et le calcul $\rho - \varepsilon$ se poursuit sur 800 Δt , durant lesquels le décollement s'amplifie, modifiant la forme de l'onde de choc. A partir de cet instant, l'écoulement n'évolue presque plus et le pas de temps est divisé à nouveau par 20 pour éliminer une éventuelle dépendance de la solution vis-à-vis de la valeur du pas de temps Δt . Le calcul se poursuit alors encore sur quelques centaines de Δt puis est arrêté.



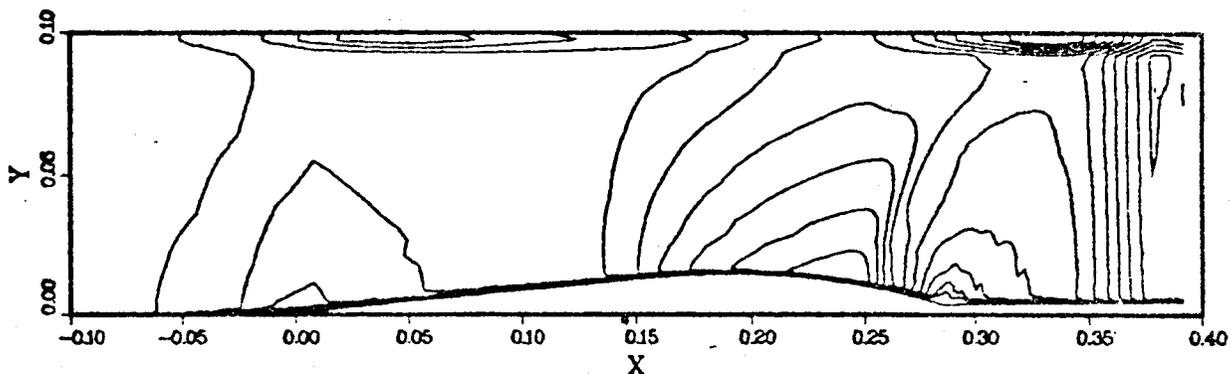


TURBULENCE MODEL : MIXING LENGTH

TIME STEP = $8.0459 \cdot 10^{-4}$

TIME STEP NUMBER = 20

ELAPSED TIME = $1.6092 \cdot 10^{-4}$

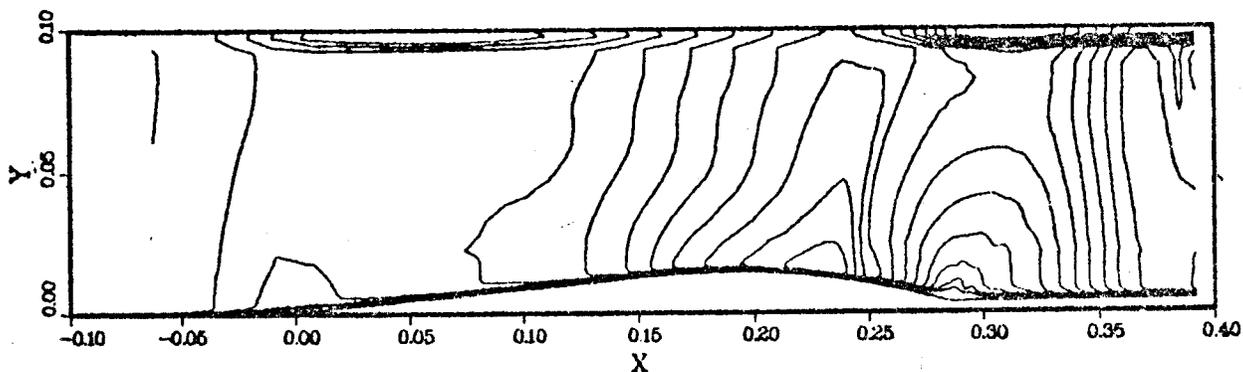


TURBULENCE MODEL : MIXING LENGTH

TIME STEP = $8.0459 \cdot 10^{-4}$

TIME STEP NUMBER = 40

ELAPSED TIME = $3.2183 \cdot 10^{-4}$



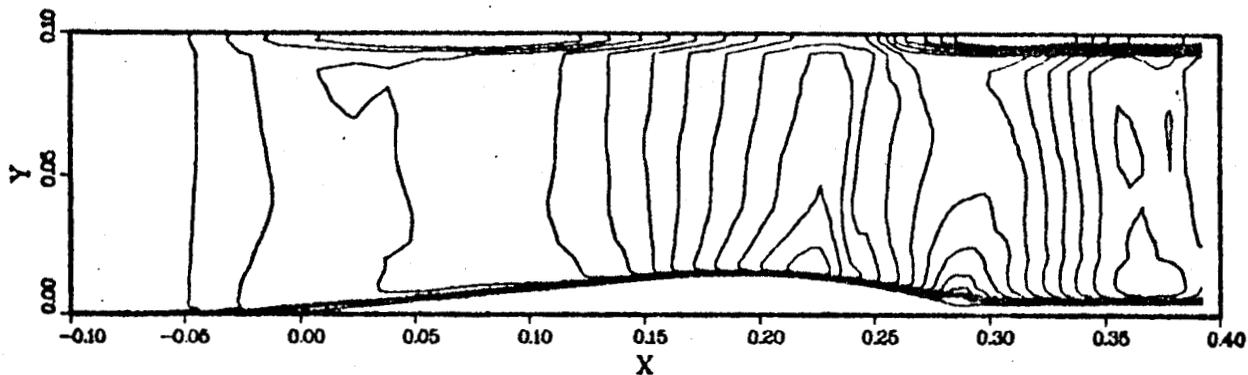
TURBULENCE MODEL : MIXING LENGTH

TIME STEP = $8.0459 \cdot 10^{-4}$

TIME STEP NUMBER = 60

ELAPSED TIME = $4.8275 \cdot 10^{-4}$

Fig. VI-87.- Déroulement du calcul de l'interaction.

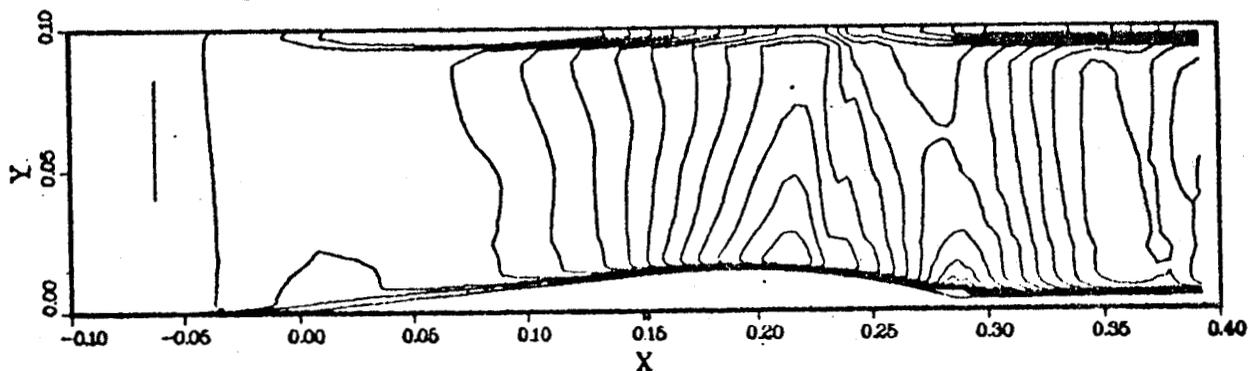


TURBULENCE MODEL : MIXING LENGTH

TIME STEP = $8.0459 \cdot 10^{-4}$

TIME STEP NUMBER = 80

ELAPSED TIME = $6.4367 \cdot 10^{-4}$

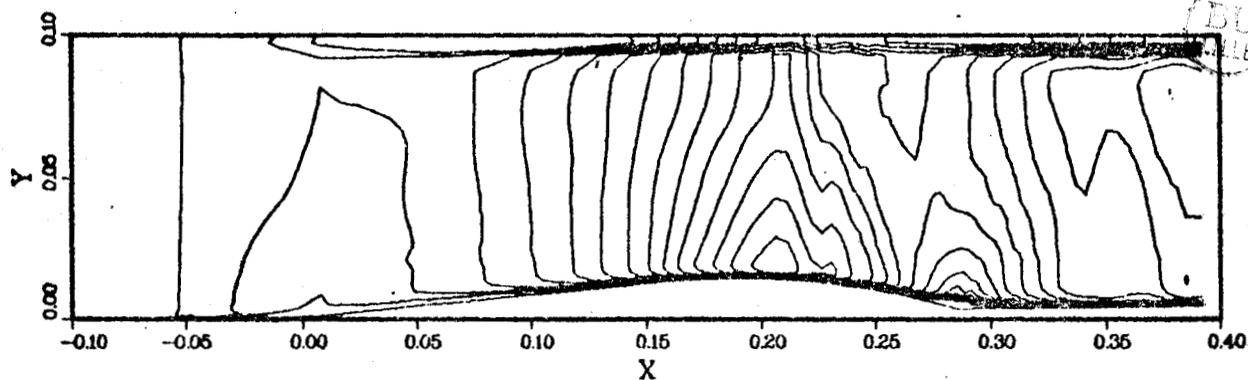


TURBULENCE MODEL : MIXING LENGTH

TIME STEP = $8.0459 \cdot 10^{-4}$

TIME STEP NUMBER = 100

ELAPSED TIME = $8.0459 \cdot 10^{-4}$



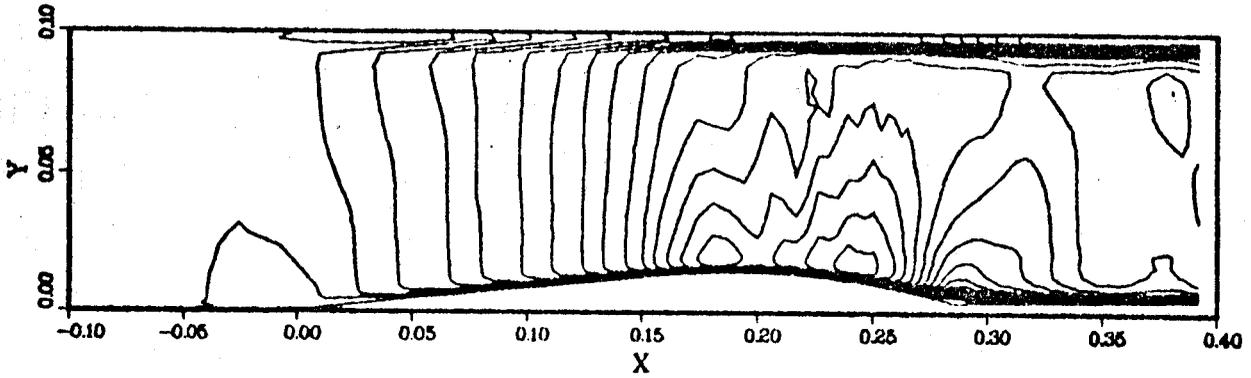
TURBULENCE MODEL : MIXING LENGTH

TIME STEP = $8.0459 \cdot 10^{-4}$

TIME STEP NUMBER = 120

ELAPSED TIME = $9.6550 \cdot 10^{-4}$

Fig. VI-88.- Déroulement du calcul de l'interaction.

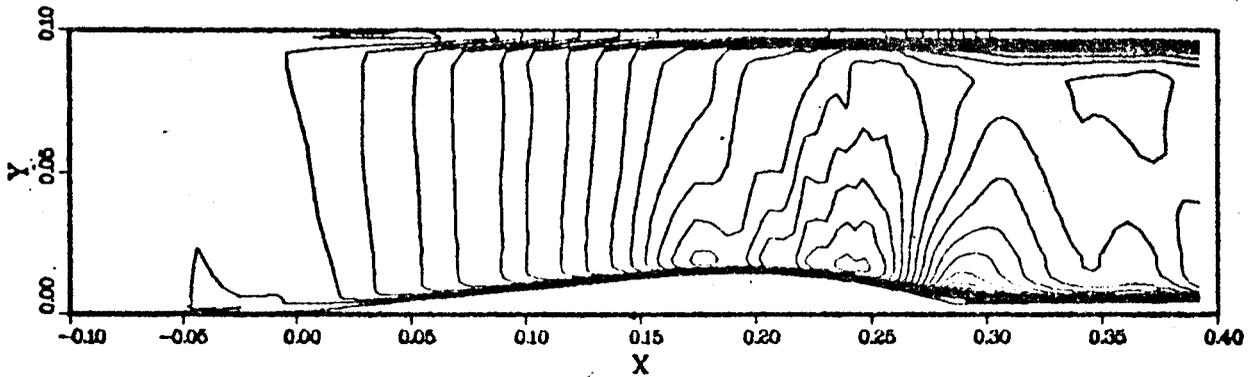


TURBULENCE MODEL : MIXING LENGTH

TIME STEP = $8.0459 \cdot 10^{-6}$

TIME STEP NUMBER = 200

ELAPSED TIME = $1.6092 \cdot 10^{-3}$

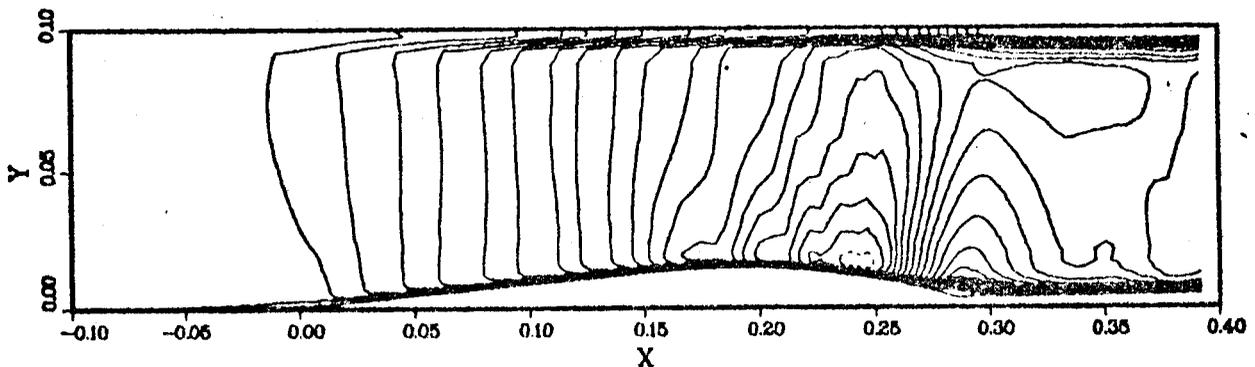


TURBULENCE MODEL : MIXING LENGTH

TIME STEP = $8.0459 \cdot 10^{-6}$

TIME STEP NUMBER = 220

ELAPSED TIME = $1.7701 \cdot 10^{-3}$



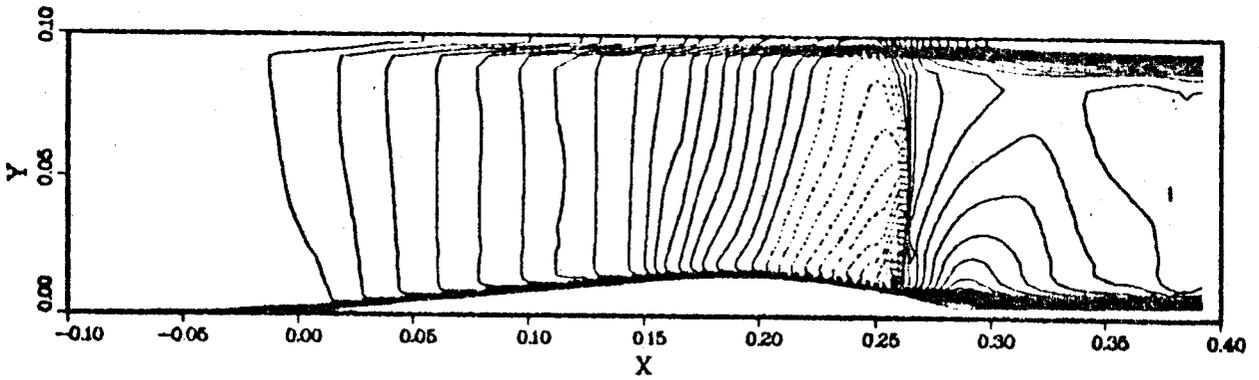
TURBULENCE MODEL : MIXING LENGTH

TIME STEP = $8.0459 \cdot 10^{-6}$

TIME STEP NUMBER = 240

ELAPSED TIME = $1.9310 \cdot 10^{-3}$

Fig. VI-89.- Déroulement du calcul de l'interaction.

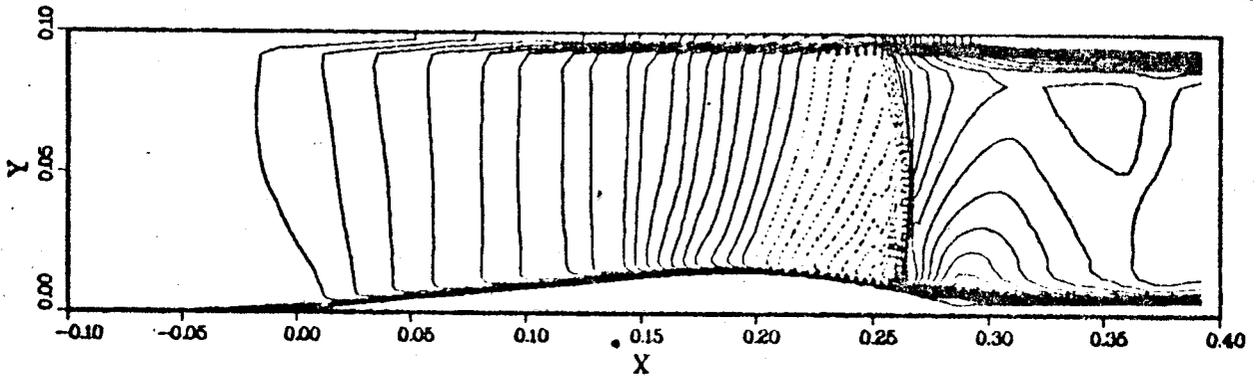


TURBULENCE MODEL : MIXING LENGTH

TIME STEP = $8.0459 \cdot 10^{-8}$

TIME STEP NUMBER = 320

ELAPSED TIME = $2.5747 \cdot 10^{-3}$

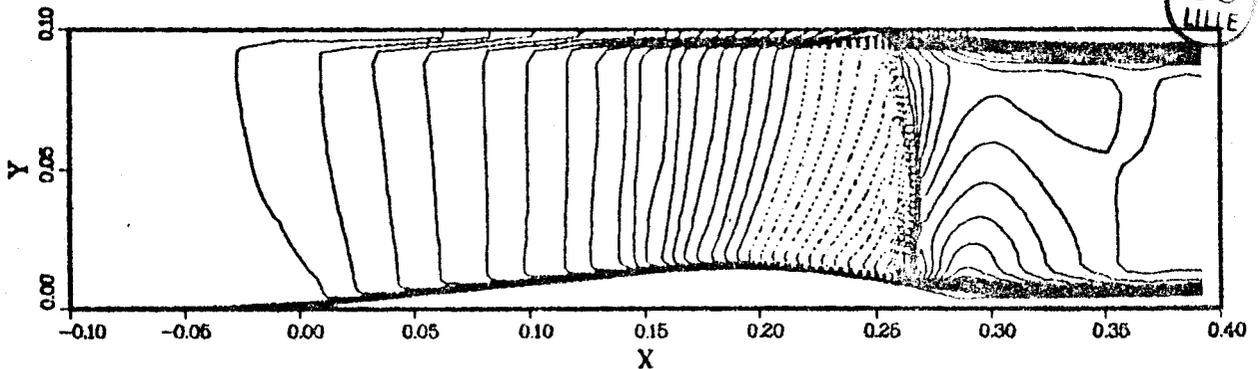


TURBULENCE MODEL : MIXING LENGTH

TIME STEP = $8.0459 \cdot 10^{-8}$

TIME STEP NUMBER = 340

ELAPSED TIME = $2.7356 \cdot 10^{-3}$



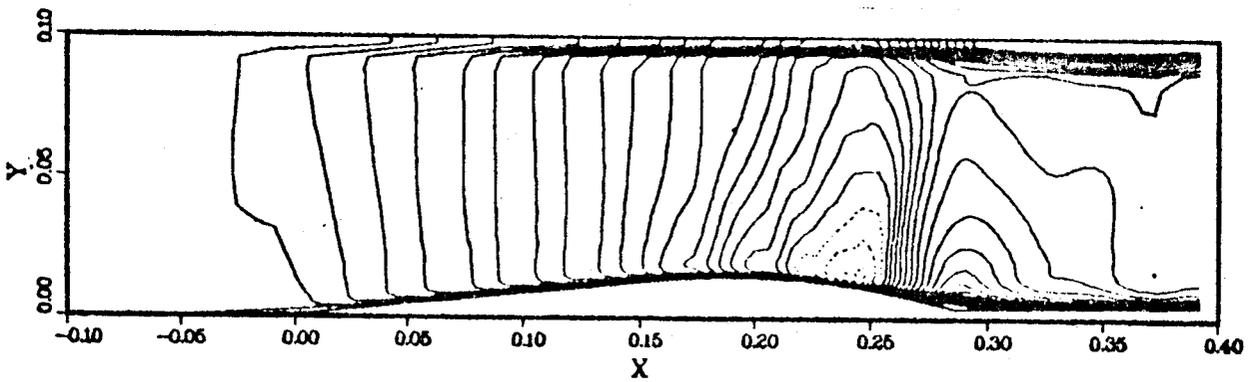
TURBULENCE MODEL : MIXING LENGTH

TIME STEP = $8.0459 \cdot 10^{-8}$

TIME STEP NUMBER = 360

ELAPSED TIME = $2.8965 \cdot 10^{-3}$

Fig. VI-90.- Déroulement du calcul de l'interaction.

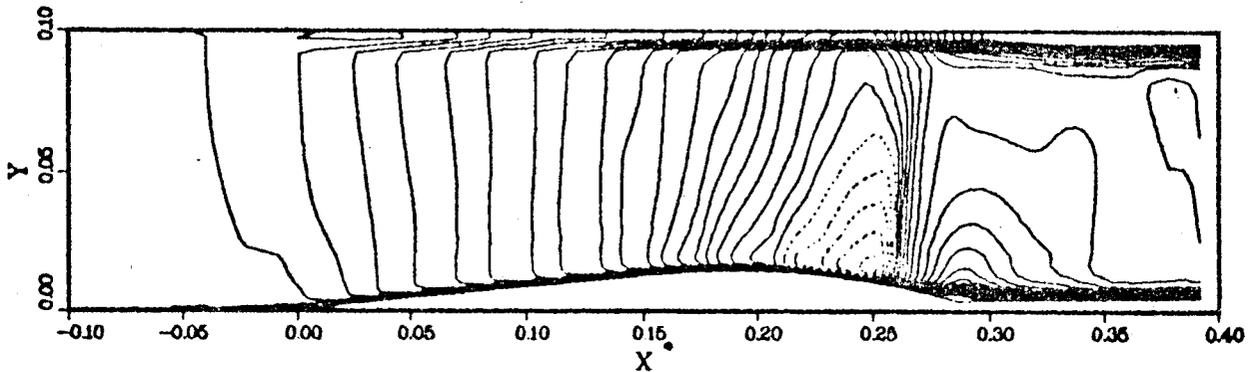


TURBULENCE MODEL : MIXING LENGTH

TIME STEP = $8.0459 \cdot 10^{-6}$

TIME STEP NUMBER = 260

ELAPSED TIME = $2.0919 \cdot 10^{-3}$

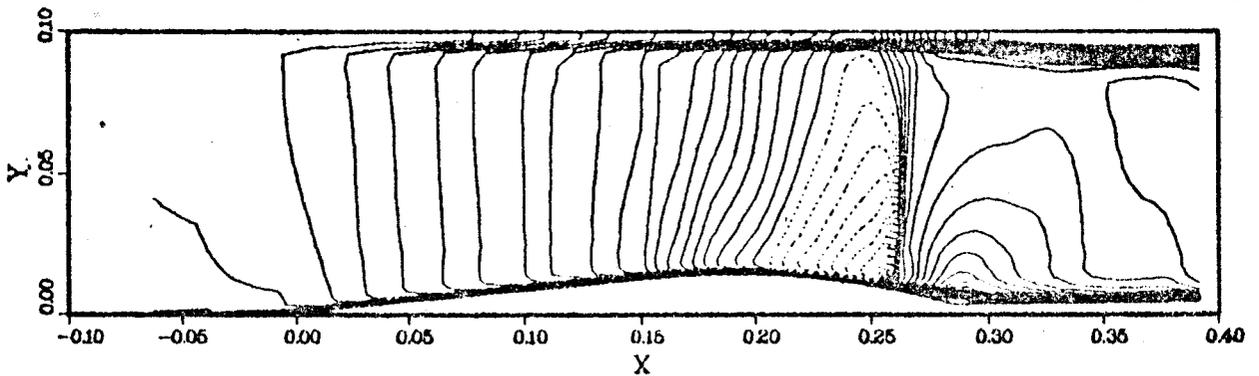


TURBULENCE MODEL : MIXING LENGTH

TIME STEP = $8.0459 \cdot 10^{-6}$

TIME STEP NUMBER = 280

ELAPSED TIME = $2.2528 \cdot 10^{-3}$



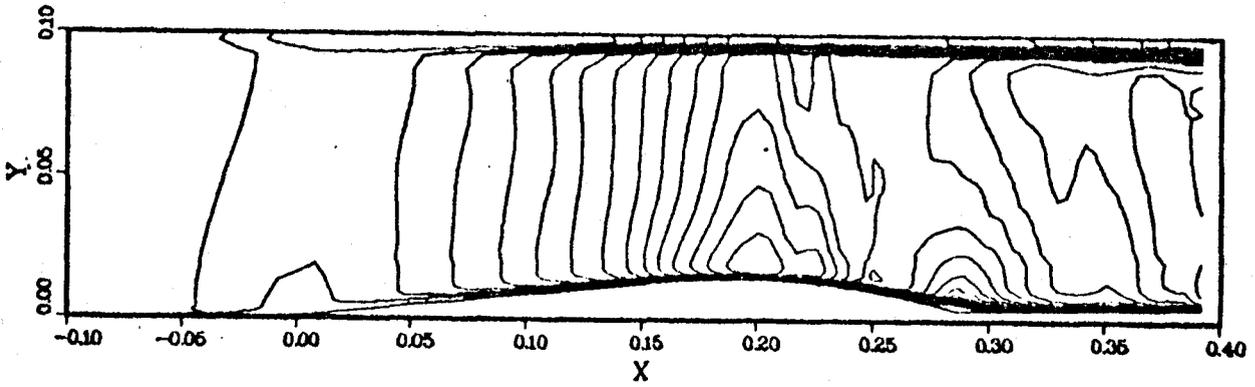
TURBULENCE MODEL : MIXING LENGTH

TIME STEP = $8.0459 \cdot 10^{-6}$

TIME STEP NUMBER = 300

ELAPSED TIME = $2.4138 \cdot 10^{-3}$

Fig. VI-91.- Déroulement du calcul de l'interaction.

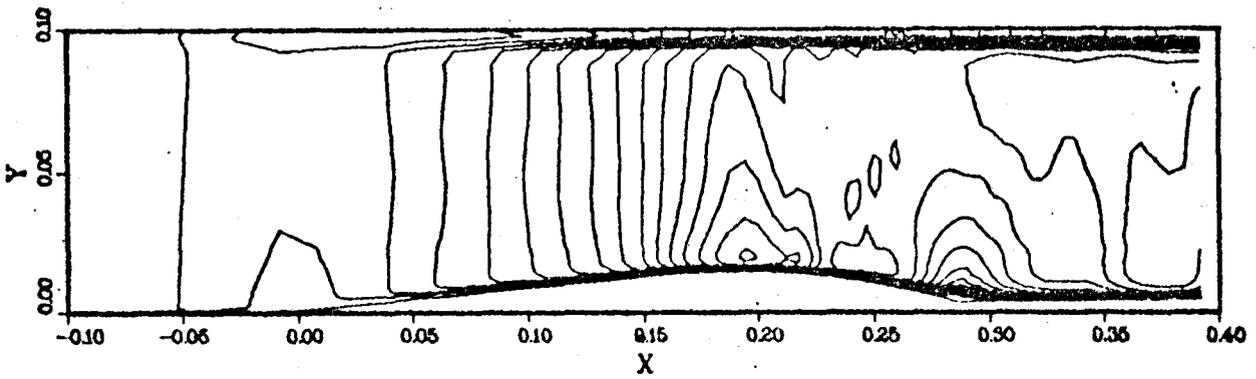


TURBULENCE MODEL : MIXING LENGTH

TIME STEP = $8.0459 \cdot 10^{-4}$

TIME STEP NUMBER = 140

ELAPSED TIME = $1.1264 \cdot 10^{-3}$

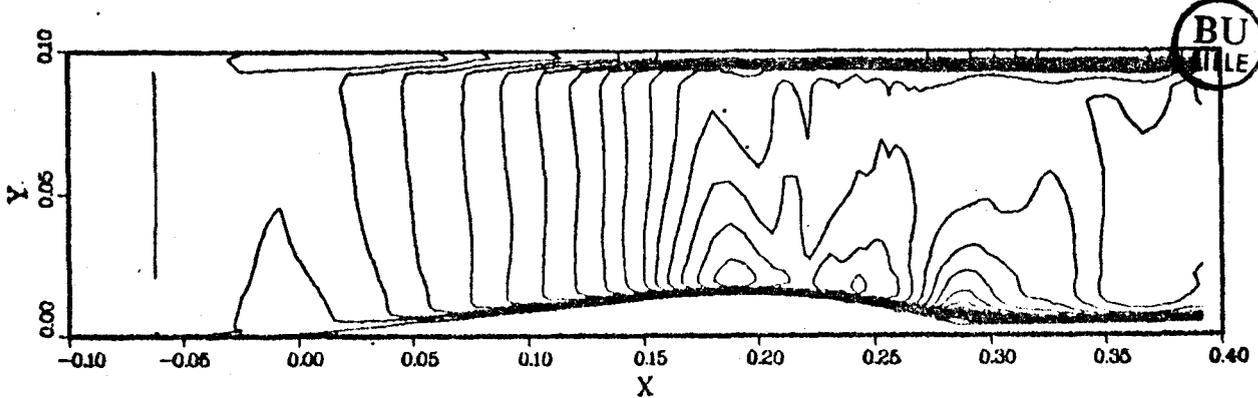


TURBULENCE MODEL : MIXING LENGTH

TIME STEP = $8.0459 \cdot 10^{-4}$

TIME STEP NUMBER = 160

ELAPSED TIME = $1.2873 \cdot 10^{-3}$



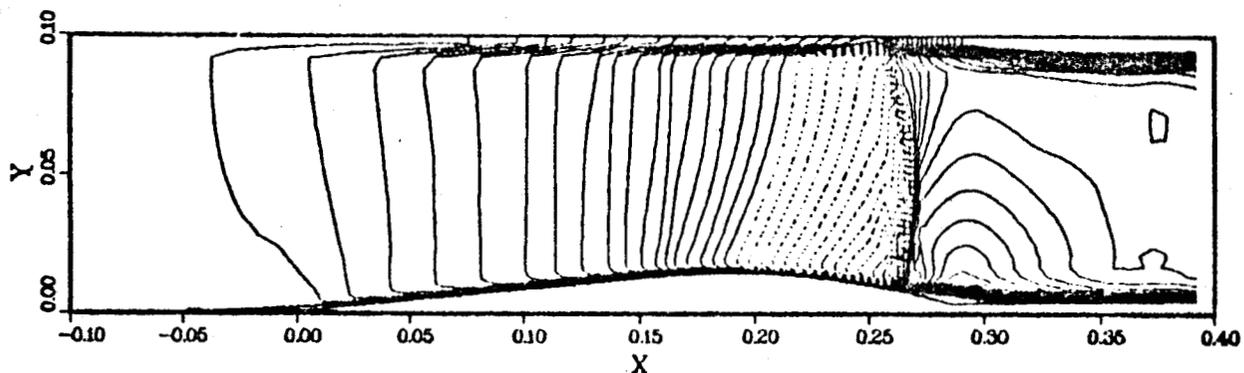
TURBULENCE MODEL : MIXING LENGTH

TIME STEP = $8.0459 \cdot 10^{-4}$

TIME STEP NUMBER = 180

ELAPSED TIME = $1.4483 \cdot 10^{-3}$

Fig. VI-92.- Déroulement du calcul de l'interaction.

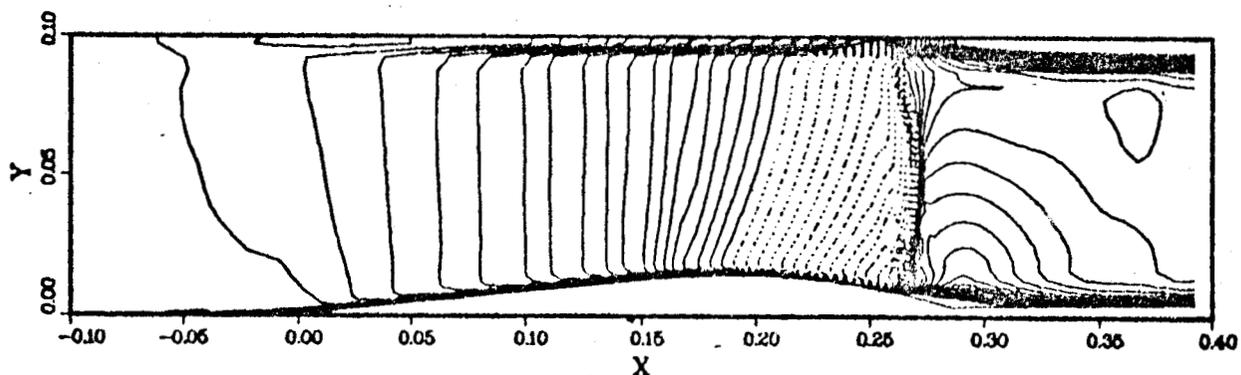


TURBULENCE MODEL : MIXING LENGTH

TIME STEP = $8.0459 \cdot 10^{-6}$

TIME STEP NUMBER = 380

ELAPSED TIME = $3.0574 \cdot 10^{-3}$

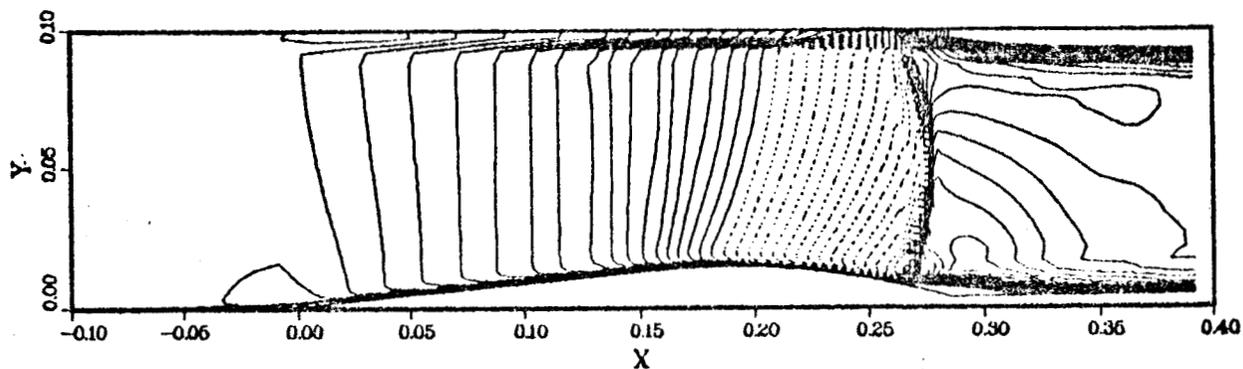


TURBULENCE MODEL : MIXING LENGTH

TIME STEP = $8.0459 \cdot 10^{-6}$

TIME STEP NUMBER = 400

ELAPSED TIME = $3.2183 \cdot 10^{-3}$



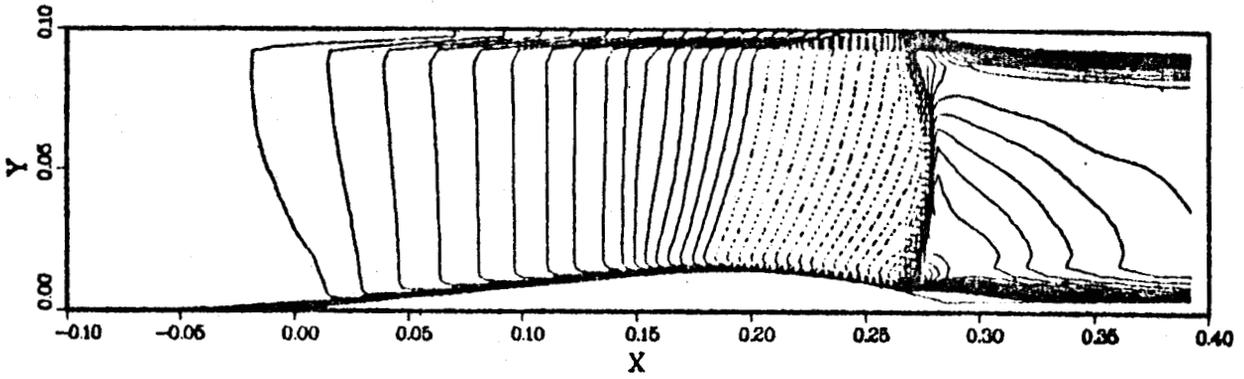
TURBULENCE MODEL : MIXING LENGTH

TIME STEP = $8.0459 \cdot 10^{-6}$

TIME STEP NUMBER = 500

ELAPSED TIME = $4.0229 \cdot 10^{-3}$

Fig. VI-93.- Déroulement du calcul de l'interaction.

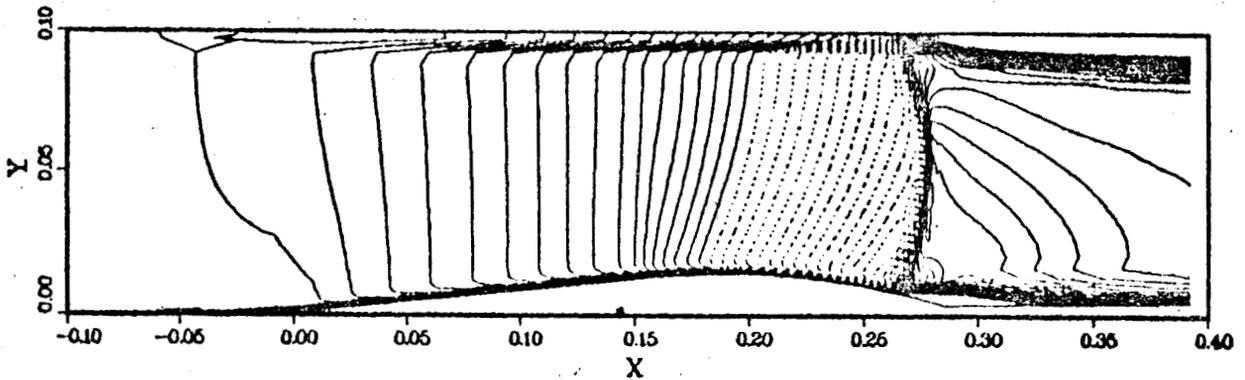


TURBULENCE MODEL : MIXING LENGTH

TIME STEP = $8.0459 \cdot 10^{-8}$

TIME STEP NUMBER = 600

ELAPSED TIME = $4.8275 \cdot 10^{-8}$

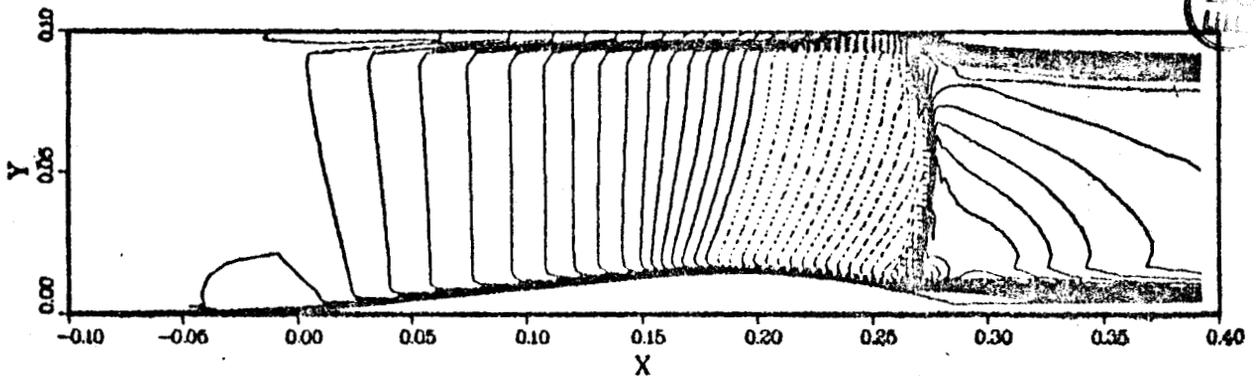


TURBULENCE MODEL : MIXING LENGTH

TIME STEP = $8.0459 \cdot 10^{-8}$

TIME STEP NUMBER = 700

ELAPSED TIME = $5.6321 \cdot 10^{-8}$



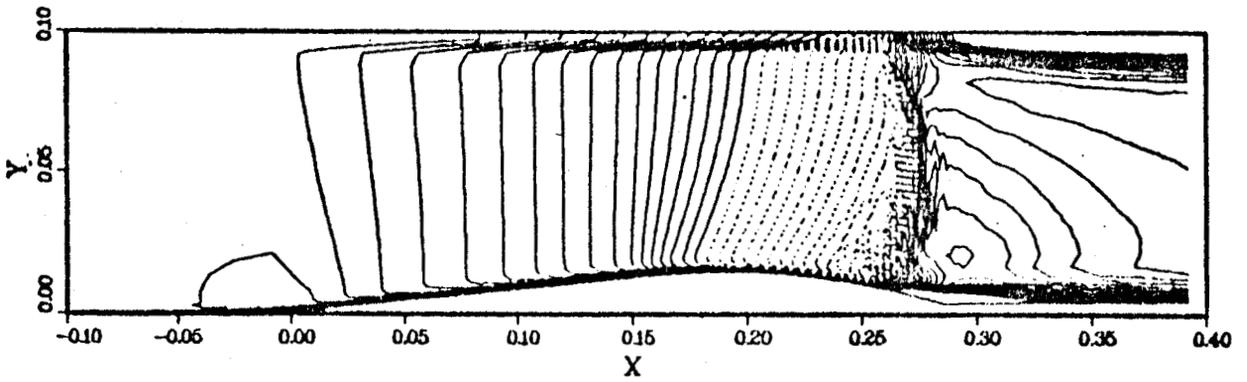
TURBULENCE MODEL : MIXING LENGTH

TIME STEP = $8.0459 \cdot 10^{-8}$

TIME STEP NUMBER = 800

ELAPSED TIME = $6.4367 \cdot 10^{-8}$

Fig. VI-94.- Déroulement du calcul de l'interaction.

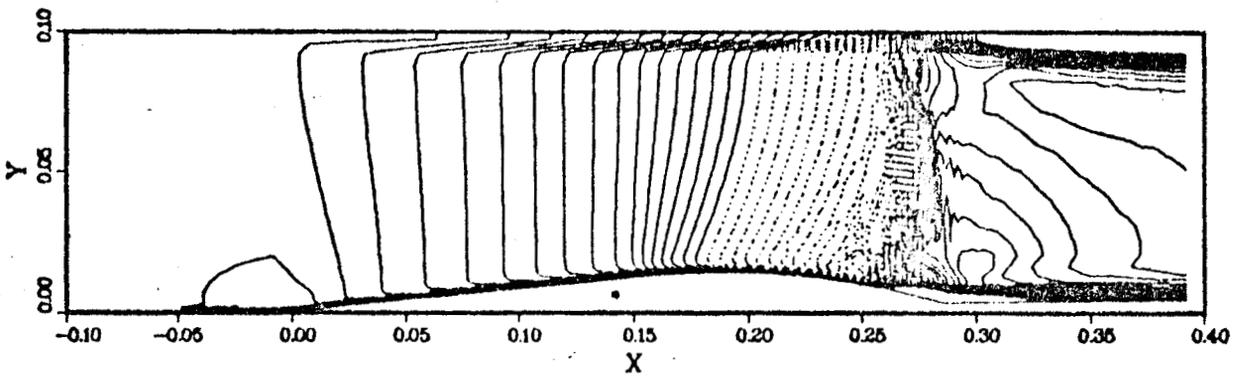


TURBULENCE MODEL : TWO EQUATIONS

TIME STEP = $8.0459 \cdot 10^{-7}$

TIME STEP NUMBER = 900

ELAPSED TIME = $6.5172 \cdot 10^{-5}$

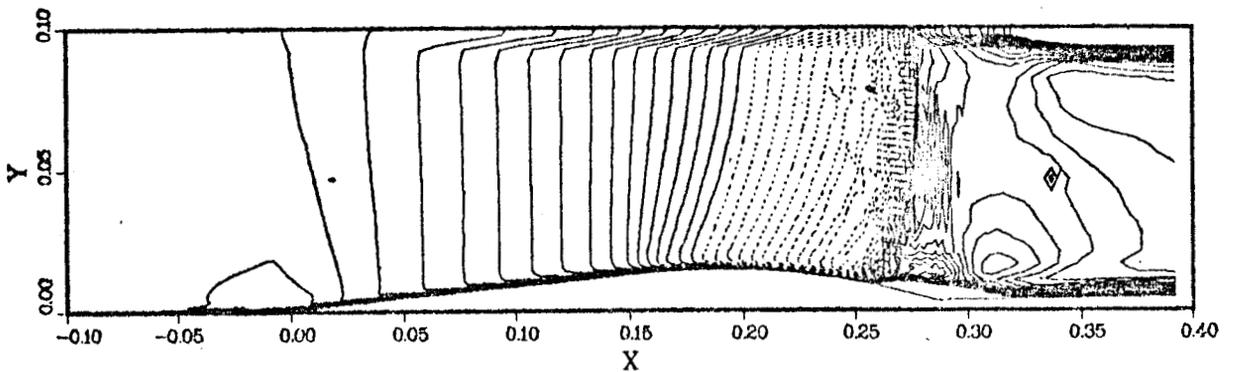


TURBULENCE MODEL : TWO EQUATIONS

TIME STEP = $8.0459 \cdot 10^{-7}$

TIME STEP NUMBER = 1000

ELAPSED TIME = $6.5976 \cdot 10^{-5}$



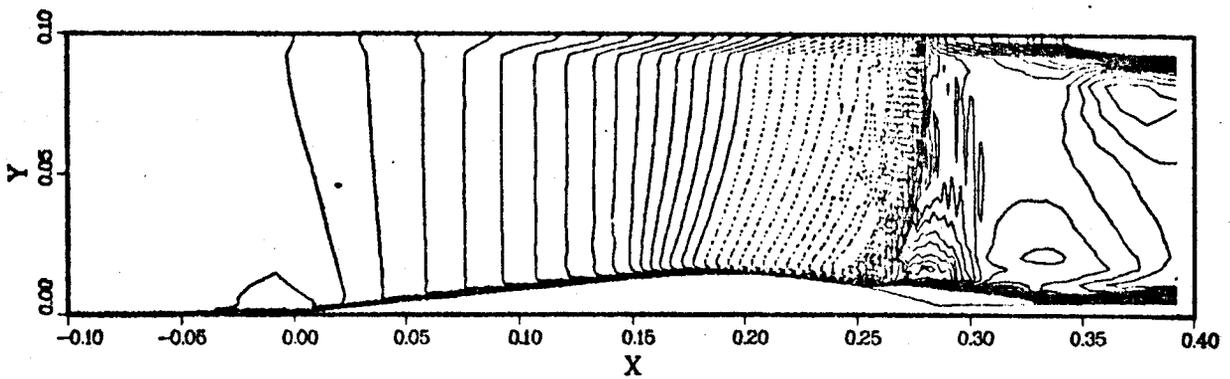
TURBULENCE MODEL : TWO EQUATIONS

TIME STEP = $1.6092 \cdot 10^{-6}$

TIME STEP NUMBER = 1100

ELAPSED TIME = $6.7585 \cdot 10^{-5}$

Fig. VI-95.- Déroulement du calcul de l'interaction.

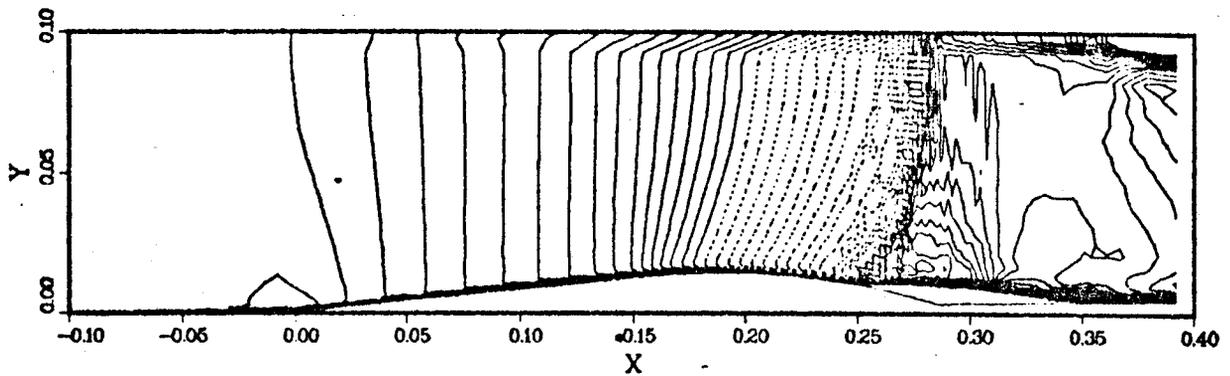


TURBULENCE MODEL : TWO EQUATIONS

TIME STEP = 1.6092×10^{-6}

TIME STEP NUMBER = 1200

ELAPSED TIME = 6.9194×10^{-3}

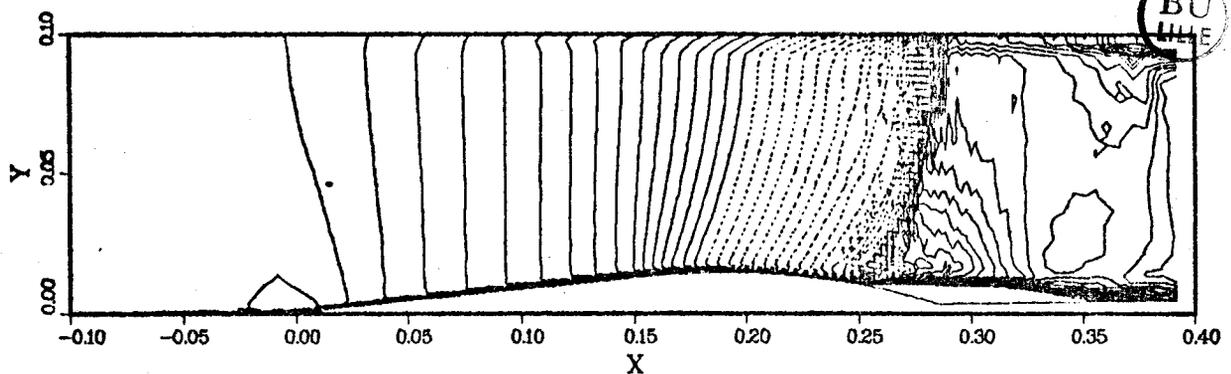


TURBULENCE MODEL : TWO EQUATIONS

TIME STEP = 1.6092×10^{-6}

TIME STEP NUMBER = 1300

ELAPSED TIME = 7.0804×10^{-3}



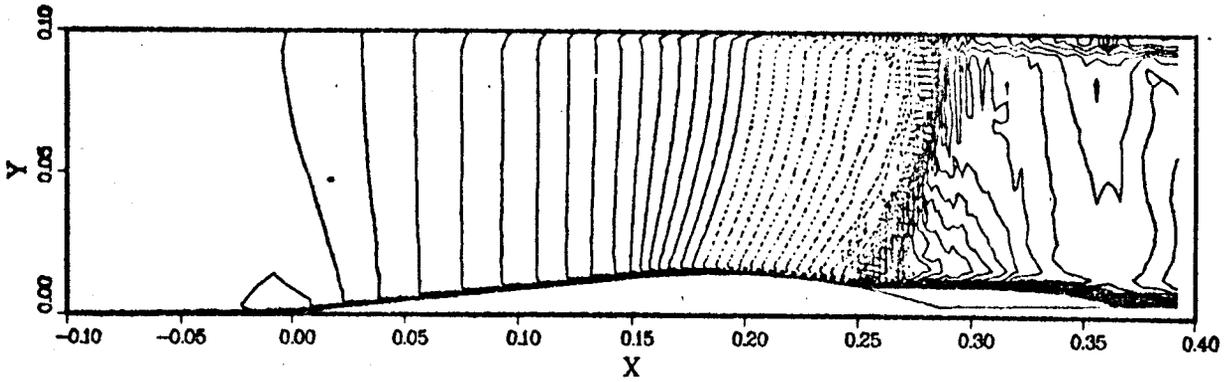
TURBULENCE MODEL : TWO EQUATIONS

TIME STEP = 1.6092×10^{-6}

TIME STEP NUMBER = 1400

ELAPSED TIME = 7.2413×10^{-3}

Fig. VI-96.- Déroulement du calcul de l'interaction.

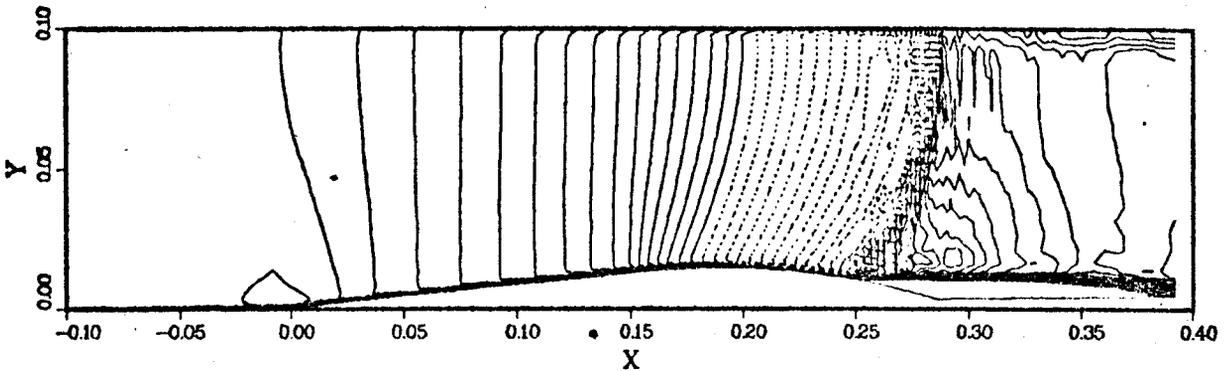


TURBULENCE MODEL : TWO EQUATIONS

TIME STEP = $1.6092 \cdot 10^{-6}$

TIME STEP NUMBER = 1500

ELAPSED TIME = $7.4022 \cdot 10^{-3}$

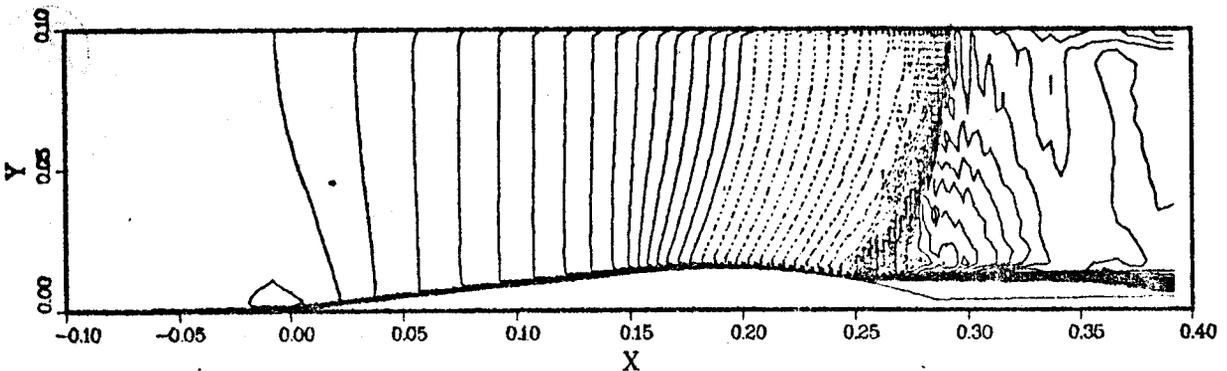


TURBULENCE MODEL : TWO EQUATIONS

TIME STEP = $1.6092 \cdot 10^{-6}$

TIME STEP NUMBER = 1600

ELAPSED TIME = $7.5631 \cdot 10^{-3}$



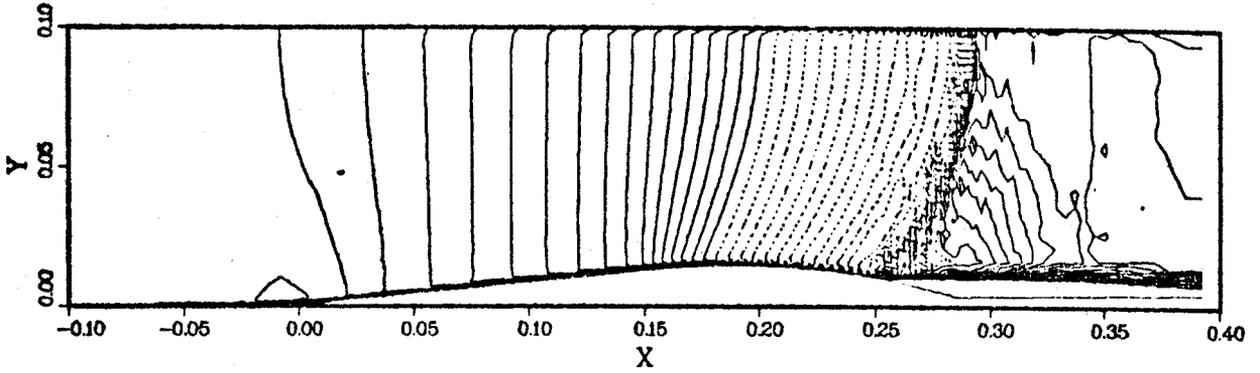
TURBULENCE MODEL : TWO EQUATIONS

TIME STEP = $1.6092 \cdot 10^{-6}$

TIME STEP NUMBER = 1700

ELAPSED TIME = $7.7240 \cdot 10^{-3}$

Fig. VI-97.- Déroulement du calcul de l'interaction.

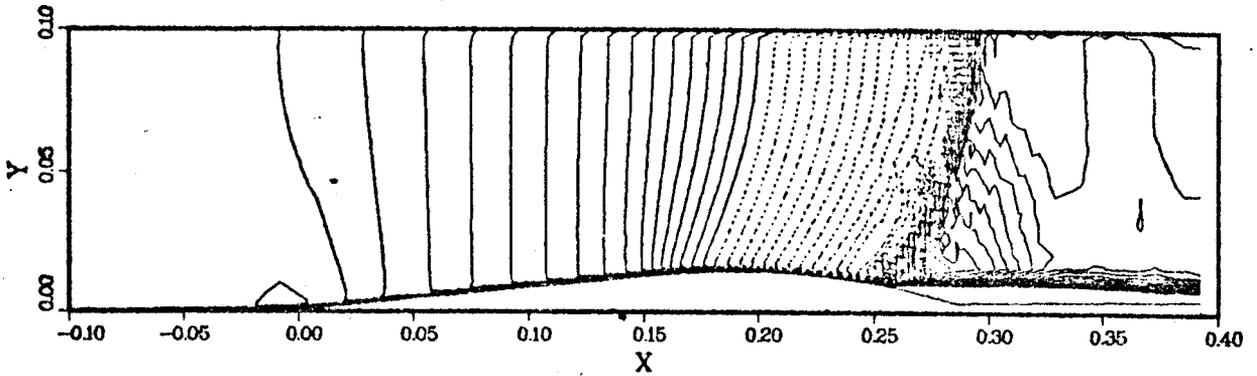


TURBULENCE MODEL : TWO EQUATIONS

TIME STEP = $1.6092 \cdot 10^{-6}$

TIME STEP NUMBER = 1800

ELAPSED TIME = $7.8850 \cdot 10^{-3}$

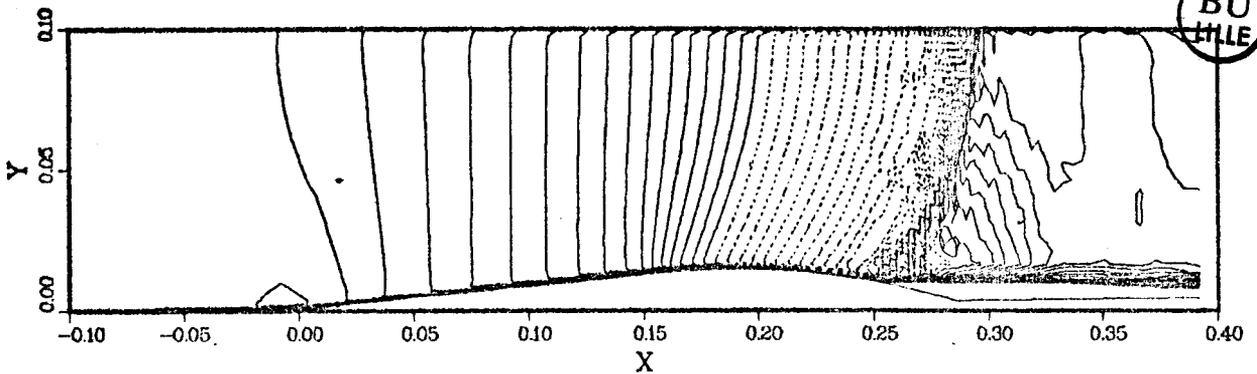


TURBULENCE MODEL : TWO EQUATIONS

TIME STEP = $1.6092 \cdot 10^{-7}$

TIME STEP NUMBER = 2000

ELAPSED TIME = $7.9171 \cdot 10^{-3}$



TURBULENCE MODEL : TWO EQUATIONS

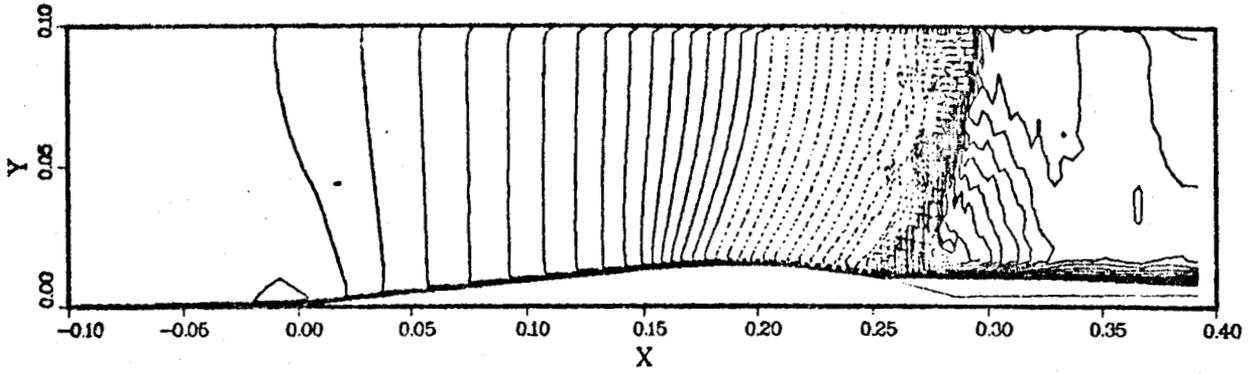
TIME STEP = $1.6092 \cdot 10^{-7}$

TIME STEP NUMBER = 2100

ELAPSED TIME = $7.9332 \cdot 10^{-3}$

Fig. VI-98.- Déroulement du calcul de l'interaction.

BU
FILE

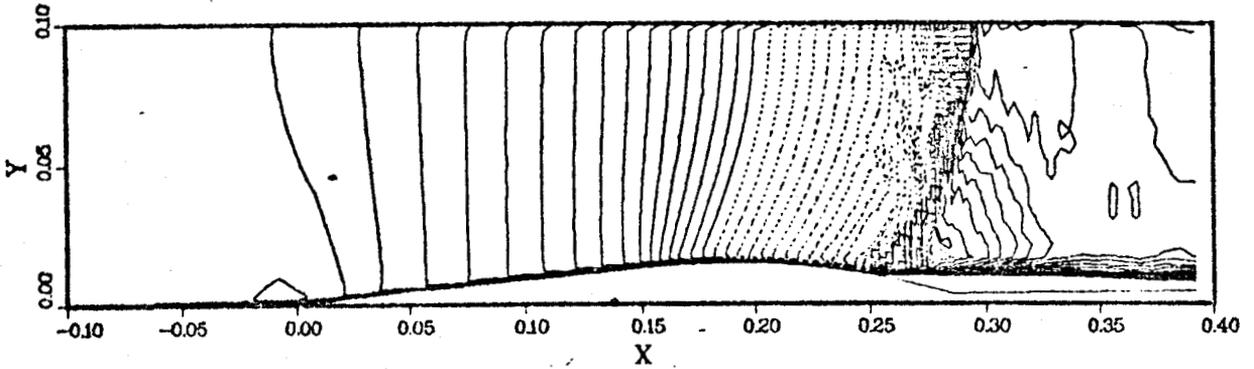


TURBULENCE MODEL : TWO EQUATIONS

TIME STEP = $1.6092 \cdot 10^{-7}$

TIME STEP NUMBER = 2200

ELAPSED TIME = $7.9493 \cdot 10^{-3}$

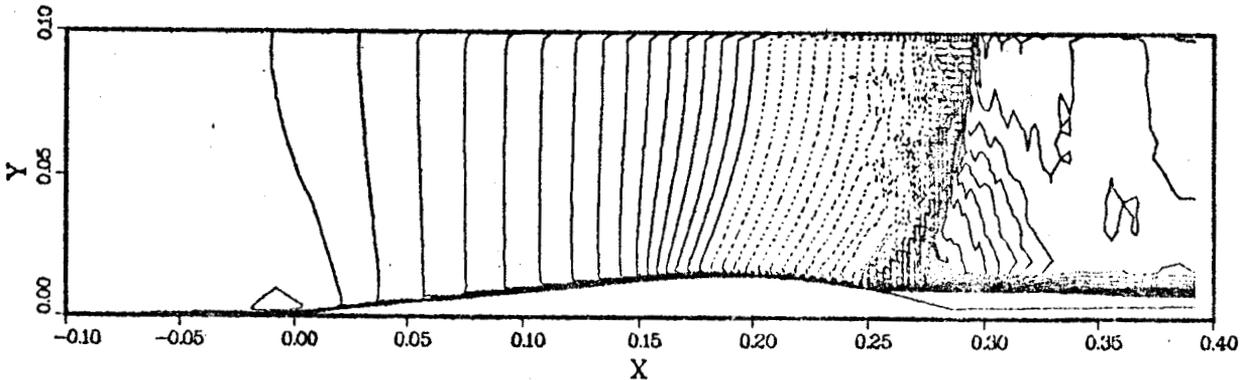


TURBULENCE MODEL : TWO EQUATIONS

TIME STEP = $1.6092 \cdot 10^{-7}$

TIME STEP NUMBER = 2300

ELAPSED TIME = $7.9654 \cdot 10^{-3}$



TURBULENCE MODEL : TWO EQUATIONS

TIME STEP = $1.6092 \cdot 10^{-7}$

TIME STEP NUMBER = 2400

ELAPSED TIME = $7.9815 \cdot 10^{-3}$

Fig. VI-99.- Déroulement du calcul de l'interaction.

CHAPITRE VIREFERENCES

- [1] E. GUTMARK et I. WYGNANSKI (1976)
"The planar turbulent jet".
J.F.M. 73-3, pp. 465-495.
- [2] W.P. JONES et B.E. LAUNDER (1972)
"The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence".
Int. J. heat Mass transfer, vol. 15, n° 2, pp. 301-314.
- [3] G. HESKESTAD (1965)
"Hot wire measurements in a plane turbulent jet".
J. of Applied Mech., vol. 32, pp. 721-734.
- [4] B.E. LAUNDER, A. MORSE, W. RODI et D.B. SPALDING (1972)
"Prédiction of free shear flows : a comparison of the performance of six turbulence models".
Free Turbulent Shear Flows Conference proceedings
NASA-Langley -Hampton Virginia NASA SP-321.
- [5] A. ROSHKO (1972)
Open forum of free turbulent shear flows conference
NASA SP-321.
- [6] M. REBOLLO (1973)
"Analytical and experimental investigation of a turbulent mixing layer of different gases on a pressure gradient".
Ph. D. Thesis - Californie Institute of Technology.
- [7] D. VANDROMME (1980)
"Modèle de turbulence à deux équations pour écoulement plan cisailé à masse volumique variable".
These de Docteur-Ingénieur. Université de Lille.

- [8] V. R. KUZNETSOV (1979)
"Estimate of the correlation between pressure pulsations and the divergence of the velocity in subsonic flows of variable density".
Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Mekanika Zhidkosti i Gaza n° 3,
pp. 4-11.
- [9] W. KOLLMANN et D. VANDROMME (1979)
"The fluctuation of free turbulent shear flows with strong density fluctuations".
Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 22, pp. 1557-1565.
- [10] S. ELGOBASHI (1977)
"Studies in the prediction of turbulent diffusion flames".
Studies in convection, vol. 2, ed. B.E. Launder, Academic Press.
- [11] L. SAETRAN (1979)
"Turbulent flux models".
VKI PR-1979-4 Rhode St Genese - Belgique.
- [12] P. BRADSHAW et D.H. FERRISS (1968)
NPL. Aero Rep. 1271.
- [13] I. WYGNANSKI et H.E. FIEDLER (1970)
"The two dimensional mixing region".
J.F.M. vol. 41, part 2, pp. 327-361.
- [14] K. HANJALIC et B.E. LAUNDER (1972)
"A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows".
J.F.M. 52-4, pp. 609-638.
- [15] B.E. LAUNDER, G.J. REECE et W. RODI (1975)
"Progress in the development of a Reynolds stress turbulence closure".
J.F.M. 68-3, pp. 537-566.

- [16] J.L. BROWN (1978)
"Heterogeneous turbulent mixing layer investigations utilizing a 2-D. 2 - color laser doppler anemometer and a concentration probe".
Ph. D. Thesis - University of Missouri - Columbia.
- [17] D. VANDROMME (1980)
"Turbulence modelling in variable density flow".
Thèse de Doctorat en Sciences Appliquées - Université de Bruxelles.
- [18] FREE TURBULENT SHEAR FLOWS - Tome II, p. 14,
NASA SP 321.
- [19] H.W. LIEPMANN et J. LAUFER (1947)
"Investigations of free turbulent mixing".
NASA TN 1257.
- [20] Y.H. OH (1974)
"Analysis of two dimensional free turbulent mixing"
AIAA paper 74-594.
- [21] J.P. BONNET (1981)
"Comparison of computation with experiment - case 8501"
1980-81 AFOSR-HTTM Stanford Conference on Complex turbulent flows.
Ed Kline, Cantwell et Lilley Stanford University - California.
- [22] M.W. RUBESIN et C.C. HORSTMAN (1981)
"Supersonic flow over a flat plate".
1980-81 AFOSR-HTTM Stanford Conference on Complex turbulent flows.
Ed. Kline, Cantwell et Lilley Stanford University - California.
- [23] E.J. HOPKINS et M. INOUE (1971)
"An evaluation of theories for predicting turbulent skin friction and heat transfer on flat plates at supersonic and hypersonic Mach numbers".
AIAA J. 9-6, pp. 993-1003.

- [24] E.J. HOPKINS, E.R. KEENER, T.E. POLEK et H.A. DWYER (1972)
"Hypersonic turbulent skin friction and boundary layer profiles
on non adiabatic flat plates".
AIAA J. 10-1, pp. 40-48.
- [25] D.A. JOHNSON et W.C. ROSE (1975)
"Laser velocimeter and hot-wire anemometer comparison in supersonic
boundary layer".
AIAA J. 3, pp. 512-514.
- [26] E.R. VAN DRIEST (1956)
"The problem of aerodynamic heating"
Aero. Engineering Review (October 1956).
- [27] P. BRADSHAW (1977)
"Compressible turbulent shear layers".
Ann. Rev. Fluid Mech., vol. 9, pp. 33-54.
- [28] M. ACHARYA, C.C. HORSTMAN et M.I. KUSSOY (1979)
"Reynolds number effects on the turbulence field in compressible
boundary layers".
AIAA J. 17-4, pp. 380-386.
- [29] P.E. DIMOTAKIS, D.J. COLLINS et D.B. LANG (1979)
"Measurements in the turbulent boundary layer at constant pressure
in subsonic and supersonic flow".
Arnold Engineering Development Center, AEDC-TR-79-49.
- [30] R. MICHEL (1972)
"Aerodynamique : couches limites, frottement et transfer de chaleur".
Cours de l'E.N.S.A.E., Toulouse.
- [31] H.H. FERNHOLZ et P.J. FINLEY (1977)
"A critical compilation of compressible turbulent boundary layer
data".
Agardograph AG 223.

- [32] H.H. FERNHOLZ et P.J. FINLEY (1980)
"A critical commentary on mean flow data for two dimensional compressible turbulent boundary layers".
Agardograph AG-253.
- [33] H.H. FERNHOLZ et P.J. FINLEY (1980)
"A further compilation of compressible boundary layer data with a survey of turbulence data".
Agardograph AG-263.
- [34] M.V. MORKOVIN (1962)
"Effects of compressibility on turbulent flows".
Mecanique de la turbulence - CNRS, A. Favre éditeur.
- [35] P.S. KLEBANOFF (1955)
"Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient".
NACA Tech. Rep. 1247.
- [36] H.P. KREPLIN et H. ECKELMANN (1979)
"Behavior of the three fluctuating velocity components in the wall region of a turbulent channel flow".
Phys. Fluids, vol. 22, n° 7, pp. 1233-1239.
- [37] B.S. BALDWIN et H. LOMAX (1978)
"Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows".
AIAA, paper 78-257.
- [38] T. CEBECI et A.M.O. SMITH (1975)
"Analysis of turbulent boundary layers".
Academic Press.
- [39] F.M. WHITE (1974)
"Viscous fluid flow"
Mac Graw Hill.

- [40] K. HANJALIC et B.E. LAUNDER (1976)
"Contribution towards a Reynolds stress closure for low-Reynolds number turbulence".
J.F.M. vol. 74, part 4, pp. 593-610.
- [41] J.M. DELERY et P. LE DIUZET (1979)
"Décollement résultant d'une interaction onde de choc-couche limite turbulente".
T.P. n° 1979-146, O.N.E.R.A.
- [42] M.W. RUBESIN et C.C. HORSTMAN (1981)
"Compressible flows over deflected surfaces".
1980-81 AFOSR-HITM- Stanford Conference on Complex turbulent flows.
Ed. Kline, Cantwell et Lilley Stanford University - California.
- [43] J.M. DELERY (1981)
"Investigation of strong shock turbulent boundary layer interaction in 2-D transonic flows with emphasis in turbulence phenomena".
AIAA paper 81-1245.
- [44] D.C. WILCOX et M.W. RUBESIN (1980)
"Progress in turbulence modeling for complex flow fields including effects of compressibility".
NASA Technical paper 1517.
- [45] M.M. GIBSON et B.E. LAUNDER (1976)
"On the calculation of horizontal turbulent free shear flows under gravitational influence".
Journal of Heat Transfer, Transactions of the ASME, vol. 98, serie C, n° 1, pp. 81-87.
- [46] J.R. VIEGAS et C.C. HORSTMAN (1978)
"Comparison of multiequation turbulence models for several shock separated boundary layer interaction flows".
AIAA paper 78-1165, Williamsburg.

- [47] E.R. VAN DRIEST (1956)
The problem of aerodynamic heating"
Aeronaut. Engr. Rev., vol. 15, n° 26.
- [48] E.J. HOPKINS, E.R. KEENER, T.E. POLEK et H.A. DWYER (1972)
"Hypersonic turbulent skin-friction and boundary layer profiles
measured on nonadiabatic flat plates".
AIAA Journal, vol. 10, n° 1, pp. 40-48.
- [49] H.H. FERNHOLZ, P.J. FINLEY et V. MIKULLA (1981)
"A further compilation of compressible boundary layer data with
a survey of turbulence data".
AGARDograph n° 263.
- [50] R.W. RUBESIN (1983)
Communication privée, NASA Ames Research Center, California.
- [51] S.K. ROBINSON, H.L. SEEGMILLER et M.I. KUSSOY (1983)
"Hot-wire and laser Doppler anemometer measurements in a supersonic
boundary layer".
AIAA pap. 83-1723.
- [52] H. ECKELMANN (1974)
"The structure of the viscous sublayer and the adjacent wall region
in a turbulent channel flow".
J.F.M. vol. 65, pp. 439-459.
- [53] P. BRADSHAW, D.H. FERRISS et N.P. ATWELL (1967)
"Calculation of boundary layer development using the turbulent energy
equation".
JFM vol. 28, p. 593.
- [54] J.C. ROTTA (1951)
"Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz"
Zeit. Phys. vol. 129, pp. 547-572.

- [55] B.E. LAUNDER et W.C. REYNOLDS (1983)
"Asymptotic near-wall stress dissipation rates in a turbulent flow"
Phys. Fluids vol. 26, n° 5, p. 1157.
- [56] W. KOLLMANN (1983)
Communication privée, University of California, Davis.
- [57] R.S. ROGALLO (1981)
"Numerical experiments in homogeneous turbulence".
NASA TM 81315.
- [58] D. VANDROMME, H. HAMINH et W. KOLLMANN (1983)
"Second order closure for compressible flows",
NASA Rep. NASA-NCC2-186.
- [59] R.W. MACCORMACK (1982)
"Numerical solution of the equations of compressible viscous flow".
Transonic, Shock and Multidimensional flows, (in Advances in
Scientific Computing). Academic Press.
- [60] R.W. MACCORMACK (1971)
"Numerical solution of the interaction of a shock wave with a laminar
boundary layer".
Lectures notes in Physics, vol. 8, pp. 151-163, Springer-Verlag.
- [61] C.C. HORSTMAN (1983)
Communication privée, NASA-Ames Research Center, California.
- [62] J. DELERY (1982)
Communication privée, O.N.E.R.A.

CHAPITRE VII

CONCLUSIONS

CHAPITRE VII

CONCLUSIONS

VII-1.- Type d'écoulement étudié.

VII-2.- Les différents niveaux de fermeture.

VII-3.- Les outils numériques.

VII-1.- TYPE D'ÉCOULEMENT ETUDIÉ

Tant dans leurs applications industrielles que de laboratoire, les problèmes de mécanique des fluides sont de plus en plus concernés par les écoulements à masse volumique variable.

Ces variations de masse volumique peuvent avoir différentes origines dans le cadre des milieux continus.

- 1 hétérogénéité de composition (mélange de fluides de masses moléculaires différentes).
- 2 inhomogénéité de température (mélange de deux courants du même fluide à des températures différentes).
- 3 effets de compressibilité des écoulements à grande vitesse.
- 4 réactions chimiques. Dans certains cas, une réaction chimique peut être liée à une forte production ou absorption de chaleur. Ce cas se ramène alors à celui des inhomogénéités de température.
- 5 Les écoulements dans les cavités laser peuvent aussi afficher de fortes fluctuations de masse volumique en cas d'extraction de puissance.

Jusqu'à il y a quelques années seulement, les expériences et les prédictions numériques ne concernaient pour la plupart, que les écoulements turbulents incompressibles. Ce n'est que récemment que l'intérêt pour des écoulements plus complexes est apparu et le progrès fut lié principalement aux nouvelles méthodes de diagnostic par laser et aussi à l'arrivée sur le marché d'ordinateurs de plus en plus performants. Le progrès fut induit essentiellement par un intérêt renforcé pour les problèmes énergétiques et de dispersion des polluants. Néanmoins, toute contribution dans ce domaine doit être basée sur le choix d'hypothèse tendant à limiter le sujet. Dans ce but deux critères peuvent être retenus :

- origine des fluctuations de masse volumique,
- configuration de l'écoulement.

Deux parties distinctes peuvent être dégagées dans ce travail :

a) le mélange isotherme

Les fluctuations de masse volumique n'ont pour origine que des inhomogénéités de composition (Helium - azote ; Air-freon 12). Tous les écoulements considérés dans cette partie sont des écoulements de cisaillement plans bidimensionnels libres (couche de mélange ou jet).

b) l'interaction onde de choc-couche limite

Les fluctuations de masse volumique sont dues uniquement aux effets de compressibilité. Les écoulements sont de configuration complexe (paroi solide, décollements, recirculation, ondes de choc...).

Une partie intermédiaire intitulée "couche de mélange" chevauche un peu ces deux applications.

VII-2.- LES DIFFERENTS NIVEAUX DE FERMETURE

Une des principales caractéristiques de la recherche en turbulence est qu'il n'existe aucun système universel pour prédire des écoulements turbulents. Différentes orientations sont explorées en différents endroits du monde scientifique mais il n'y a aucune raison d'exclure complètement l'une ou l'autre approche. Au départ de toute contribution il est donc nécessaire de faire un choix également sur l'approche utilisée.

Le travail qui fait l'objet de ce mémoire ne concerne que la modélisation des corrélations en un point apparaissant dans les équations moyennes du mouvement turbulent. Différents niveaux de fermeture sont étudiés et utilisés :

- fermeture à l'ordre zéro (algébrique ou avec des équations différentielles),
- fermeture à l'ordre deux (RSE).

VII-3.- LES OUTILS NUMERIQUES

Deux méthodes numériques différentes sont utilisées dans cette thèse.

- a) Les problèmes de mélange isotherme et de couche de mélange sont résolue avec une méthode parabolique dérivée de celle de PATANKAR et SPALDING.

- b) Les écoulements compressibles complexes sont étudiés avec un schéma implicite de résolution des équations de Navier-Stokes dérivé du schéma de Mac Cormack. Les propriétés de ce schéma en font une méthode relativement robuste et très rapide comparée aux méthodes explicites utilisées actuellement. Ces critères de robustesse et rapidité permettent l'implantation d'équations supplémentaires pour le traitement des quantités turbulentes sans induire des coûts de calcul prohibitifs.

VII-4.- LES RESULTATS

Dans ce mémoire nous avons montré la capacité des différents niveaux de fermeture à prédire de façon plus ou moins détaillée des écoulements à masse volumique variable. Pour le mélange isotherme, la qualité des résultats pour les grandeurs primaires moyennes et équivalentes avec des modèles utilisant ou évitant l'approximation de Boussinesq. Toutefois nous avons montré quelle était l'influence du nombre de Schmidt turbulent et nous avons souligné l'incertitude inhérente à l'utilisation d'un nombre de Schmidt constant. Le rôle et l'importance des termes de gradient de pression moyenne dans les équations des quantités turbulentes a été également souligné. Pour la couche de mélange, nous avons montré la capacité d'un modèle à deux équations à prédire correctement l'influence des variations de masse volumique dues à la composition du mélange ou aux effets de compressibilité. Toutefois dans le dernier cas, le manque de compréhension physique du phénomène rend incertaine toute conclusion définitive sur la capacité du modèle.

Finalement, dans les problèmes d'interaction, nous avons développé un outil numérique robuste et rapide pour le calcul d'écoulements turbulents complexes. Grâce à l'utilisation de niveau de fermeture différents, nous avons montré que, à la différence du mélange isotherme, la prédiction des champs moyens était très fortement dépendante du type de modèle utilisé, et qu'il était vain de vouloir calculer avec succès un écoulement complexe avec un modèle de turbulence trop simple.



RESUME

Deux types d'écoulements turbulents à masse volumique variable sont étudiés : le mélange isotherme de gaz de masses moléculaires différentes et les écoulements compressibles d'un fluide homogène.

Pour ces deux sortes d'écoulements différents niveaux de fermeture des équations régissant le mouvement sont utilisés pour prendre en compte les effets de fluctuations de masses volumiques.

Deux méthodes numériques implicites sont utilisées : une méthode de type couche limite pour les écoulements cisailés simples et une méthode instationnaire pour la résolution des équations de Navier Stokes moyennées sur une durée finie. La qualité de la prédiction des champs moyens est indépendante du niveau de fermeture pour les écoulements du premier type, quoique les fermetures de second ordre font apparaître certaines déficiences des fermetures d'ordre inférieur. La prédiction d'écoulements compressibles complexes passe nécessairement par l'utilisation de modèles de turbulence sophistiqués, même pour n'obtenir que les caractéristiques moyennes des écoulements. La simple extension de modèle incompressibles à des problèmes compressibles est insuffisante à la représentation correcte de tous les phénomènes physiques.

Mots clés : Couche de mélange - Couche limite turbulente - Ecoulement compressible - Ecoulement à densité variable - Ecoulement turbulent - Interaction choc - Couche limite - Modélisation turbulence - Résolution numérique.