

50376  
1983  
309

N° d'ordre : 1115

50376

1983

309

# THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

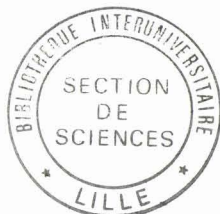
pour obtenir le titre de

**DOCTEUR DE 3ème CYCLE**

par

Catherine WERQUIN-BOGAERT

**SUR UNE ADAPTATION DE LA METHODE DES  
CENTRES AUX EGALITES NON LINEAIRES**



Soutenue la 24 Novembre 1983 devant la Commission d'Examen

**MEMBRES DU JURY**

Président

Rapporteur

Examineur

C.

J.

P.

BREZINSKI

DENEL

HUARD

P R O F E S S E U R S   C L A S S E   E X C E P T I O N N E L L E

M. CONSTANT Eugène	I.E.E.A.
M. FOURET René	Physique
M. GABILLARD Robert	I.E.E.A.
M. MONTREUIL Jean	Biologie
M. PARREAU Michel	Mathématiques
M. TRIDOT Gabriel	Chimie
M. VIVIER Emile	Biologie
M. WERTHEIMER Raymond	Physique

P R O F E S S E U R S l è r e   c l a s s e

---

M. BACCHUS Pierre	Mathématiques
M. BEAUFILS Jean-Pierre (dét.)	Chimie
M. BIAYS Pierre	G.A.S.
M. BILLARD Jean (dét.)	Physique
M. BOILLY Bénoni	Biologie
M. BOIS Pierre	Mathématiques
M. BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M. BOUGHON Pierre	Mathématiques
M. BOURIQUET Robert	Biologie
M. BREZINSKI Claude	I.E.E.A.
M. CELET Paul	Sciences de la Terre
M. CHAMLEY Hervé	Biologie
M. COEURE Gérard	Mathématiques
M. CORDONNIER Vincent	I.E.E.A.
M. DEBOURSE Jean-Pierre	S.E.S.
M. DYMENT Arthur	Mathématiques

PROFESSEURS 1ère classe (suite)

M. ESCAIG Bertrand	Physique
M. FAURE Robert	Mathématiques
M. FOCT Jacques	Chimie
M. GRANELLE Jean-Jacques	S.E.S.
M. GRUSON Laurent	Mathématiques
M. GUILLAUME Jean	Biologie
M. HECTOR Joseph	Mathématiques
M. LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M. LACOSTE Louis	Biologie
M. LAVEINE Jean Pierre	Sciences de la Terre
M. LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique
M. LHOMME Jean	Chimie
M. LOMBARD Jacques	S.E.S.
M. LOUCHEUX Claude	Chimie
M. LUCQUIN Michel	Chimie
M. MIGEON Michel Recteur à Grenoble	E.U.D.I.L.
M. MIGNOT Fulbert (dét.)	Mathématiques
M. PAQUET Jacques	Sciences de la Terre
M. PROUVOST Jean	Sciences de la Terre
M. ROUSSEAU Jean-Paul	Biologie
M. SALMER Georges	I.E.E.A.
M. SEGUIER Guy	I.E.E.A.
M. SIMON Michel	S.E.S.
M. STANKIEWICZ François	S.E.S.
M. TILLIEU Jacques	Physique
M. VIDAL Pierre	I.E.E.A.
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mathématiques

P R O F E S S E U R S 2ème classe

---

M. ANTOINE Philippe	Mathématiques (Calais)
M. BART André	Biologie
Mme BATTIAU Yvonne	Géographie
M. BEGUIN Paul	Mathématiques
M. BELLET Jean	Physique
M. BERZIN Robert	Mathématiques
M. BKOUICHE Rudolphe	Mathématiques
M. BODARD Marcel	Biologie
M. BOSQ Denis	Mathématiques
M. BRASSELET Jean-Paul	Mathématiques
M. BRUYELLE Pierre	Géographie
M. CAPURON Alfred	Biologie
M. CARREZ Christian	I.E.E.A.
M. CAYATTE Jean-Louis	S.E.S.
M. CHAPOTON Alain	C.U.E.E.P.
M. COQUERY Jean-Marie	Biologie
Mme CORSIN Paule	Sciences de la Terre
M. CORTOIS Jean	Physique
M. COUTURIER Daniel	Chimie
M. CROSNIER Yves	I.E.E.A.
M. CURGY Jean-Jacques	Biologie
Mlle DACHARRY Monique	Géographie
M. DAUCHET Max	I.E.E.A.
M. DEBRABANT Pierre	E.U.D.I.L.
M. DEGAUQUE Pierre	I.E.E.A.
M. DELORME Pierre	Biologie
M. DELORME Robert	S.E.S.
M. DE MASSON D'AUTUME Antoine	S.E.S.
M. DEMUNTER Paul	C.U.E.E.P.

PROFESSEURS 2ème classe (Suite 1)

M. DENEL Jacques	I.E.E.A.
M. DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques (Calais)
Mle DESSAUX Odile	Chimie
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie
M. DHAINAUT André	Biologie
Mme DHAINAUT Nicole	Biologie
M. DORMARD Serge	S.E.S.
M. DOUKHAN Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M. DUBOIS Henri	Physique
M. DUBRULLE Alain	Physique (Calais)
M. DUBUS Jean-Paul	I.E.E.A.
M. FAKIR Sabah	Mathématiques
M. FONTAINE Hubert	Physique
M. FOUQUART Yves	Physique
M. FRONTIER Serge	Biologie
M. GAMBLIN André	G.A.S.
M. GLORIEUX Pierre	Physique
M. GOBLOT Rémi	Mathématiques
M. GOSSELIN Gabriel (dét.)	S.E.S.
M. GOUDMAND Pierre	Chimie
M. GREGORY Pierre	I.P.A.
M. GREMY Jean-Paul	S.E.S.
M. GREVET Patrice	S.E.S.
M. GUILBAULT Pierre	Biologie
M. HENRY Jean-Pierre	E.U.D.I.L.
M. HERMAN Maurice	Physique
M. JACOB Gérard	I.E.E.A.
M. JACOB Pierre	Mathématiques
M. JEAN Raymond	Biologie
M. JOFFRE Patrick	I.P.A.

PROFESSEURS 2ème classe (suite 2)

M. JOURNEL Gérard	E.U.D.I.L.
M. KREMBEL Jean	Biologie
M. LANGRAND Claude	Mathématiques
M. LATTEUX Michel	I.E.E.A.
Mme LECLERCQ Ginette	Chimie
M. LEFEVRE Christian	Sciences de la Terre
Mle LEGRAND Denise	Mathématiques
Mle LEGRAND Solange	Mathématiques (Calais)
Mme LEHMANN Josiane	Mathématiques
M. LEMAIRE Jean	Physique
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique
M. LOSFELD Joseph	C.U.E.E.P.
M. LOUAGE Francis(dét.)	E.U.D.I.L.
M. MACKE Bruno	Physique
M. MAIZIERES Christian	I.E.E.A.
M. MESSELYN Jean	Physique
M. MESSERLIN Patrick	S.E.S.
M. MONTEL Marc	Physique
Mme MOUNIER Yvonne	Biologie
M. PARSY Fernand	Mathématiques
Mle PAUPARDIN Colette	Biologie
M. PERROT Pierre	Chimie
M. PERTUZON Emile	Biologie
M. PONSOLLE Louis	Chimie
M. PORCHET Maurice	Biologie
M. POVY Lucien	E.U.D.I.L.
M. RACZY Ladislas	I.E.E.A.
M. RAOULT Jean François	Sciences de la Terre
M. RICHARD Alain	Biologie

PROFESSEURS 2ème Classe (suite 3)

M. RIETSCH François	E.U.D.I.L.
M. ROBINET Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M. ROGALSKI Marc	Mathématiques
M. ROY Jean-Claude	Biologie
M. SCHAMPS Joël	Physique
Mme SCHWARZBACH Yvette	Mathématiques
M. SLIWA Henri	Chimie
M. SOMME Jean	G.A.S.
Mle SPIK Geneviève	Biologie
M. STAROSWIECKI Marcel	E.U.D.I.L.
M. STERBOUL François	E.U.D.I.L.
M. TAILLIEZ Roger	Institut Agricole
Mme TJOTTA Jacqueline (dét.)	Mathématiques
M. TOULOTTE Jean-Marc	I.E.E.A.
M. TURRELL Georges	Chimie
M. VANDORPE Bernard	E.U.D.I.L.
M. VAST Pierre	Chimie
M. VERBERT André	Biologie
M. VERNET Philippe	Biologie
M. WALLART Francis	Chimie
M. WARTEL Michel	Chimie
M. WATERLOT Michel	Sciences de la Terre
Mme ZINN JUSTIN Nicole	Mathématiques

CHARGES DE COURS

M. ADAM Michel S.E.S.

CHARGES DE CONFERENCES

M. BAF COP Joël I.P.A.

M. DUVEAU Jacques S.E.S.

M. HOF LACK Jean I.P.A.

M. LATOUCHE Serge S.E.S.

M. MALAUSSENA DE PERNO Jean-Louis S.E.S.

M. NAVARRE Christian I.P.A.

M. OPIGEZ Philippe S.E.S.



\*\*\*\*\*  
\*\*  
\*\*  
\*\* SUR UNE ADAPTATION DE LA METHODE DES \*\*  
\*\* CENTRES AUX EGALITES NON LINEAIRES \*\*  
\*\*  
\*\*\*\*\*

Catherine WERQUIN-BOGAERT

Mots clés : Optimisation non linéaire, méthode des centres, linéarisation, multiplicateurs de lagrange, optimum, stationnaire.

A MON MARI ET A MA FILLE  
=+=+=+=+=+=+=+=+=+=+=+=+=+=+=

NOTATIONS

$\mathbb{R}$  : ensemble des nombres réels

$\forall A \subset \mathbb{R}^n$       $\overset{\circ}{A}$  : intérieur de A  
 $\text{Fr}(A)$  = frontière de A  
 $\forall x \in \mathbb{R}^n$       $\|x\|$  = norme euclidienne de x

$\forall f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable en  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$   
 $\nabla f(\bar{x})$  vecteur représentant le gradient de f en  $\bar{x}$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$(x, y)$  le produit scalaire euclidien de x et y  
 $[x, y] = \{z \in \mathbb{R}^n : z = \lambda x + (1 - \lambda)y \quad \lambda \in [0, 1]\}$

Pour  $A \subset \mathbb{R}^n$  et  $\bar{x} \in \bar{A}$

$[A]$  : enveloppe convexe de A  
 $T(A, \bar{x})$  : cône tangent à A en  $\bar{x}$   
 $\Gamma^-(T(A, \bar{x}))$  : cône polaire négatif de  $T(A, \bar{x})$   
 $= \{u \in \mathbb{R}^n : (u, y) \leq 0 \quad \forall y \in T(A, \bar{x})\}$

$\forall h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable en  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

$$h'(t, \bar{x}) = h(\bar{x}) + (\nabla h(\bar{x}), t - \bar{x})$$

L'approximation tangentielle de h en  $\bar{x}$ .

## INTRODUCTION

La méthode des centres introduite par P. HUARD, est un algorithme général de résolution de programmes mathématiques non linéaires. Par la suite il propose une variante : La méthode des centres linéarisée qui utilise la linéarisation du domaine.

Mais en particulier cette méthode ne convient pas au cas des programmes qui contiennent des égalités non linéaires.

L'idée principale est de remplacer l'égalité :

$$h(t) = 0$$

par la double inégalité :

$$0 \leq h(t) \leq \varepsilon$$

La méthode proposée consiste à résoudre partiellement le problème obtenu avec cette double inégalité, puis de diminuer la valeur du  $\varepsilon$ .

Le chapitre I contient un bref rappel sur les propositions de BEUNEU et HUARD pour résoudre les programmes mathématiques contenant des égalités.

Dans le chapitre II, on trouve un rappel sur la méthode des centres linéarisée introduite par HUARD. Puis la présentation théorique d'un algorithme permettant de résoudre les programmes contenant des égalités non linéaires.

Le chapitre III présente des variantes de l'algorithme théorique. Le chapitre IV comprend la description du code N4MCL0, qui utilise la méthode des centres linéarisée avec des modifications qui améliorent les résultats. Puis une description du code N4MCL1 qui lui utilise les résultats de ce travail.

PLANChapitre I :

- I : Présentation
- II : Proposition de choix de problème équivalent : BEUNEU
- III : Recherche itérative proposée par P. HUARD

Chapitre II :

- I : Méthode des centres linéarisée
- II : Présentation d'un algorithme théorique pour la résolution d'un problème avec des égalités
- III : Description d'un algorithme approché

Chapitre III :

- I : Algorithme utilisant la notion de point stationnaire
- II : Algorithme utilisant la notion de point stationnaire à  $\epsilon$ -près
- III : Détermination d'un point de  $D(x)$

Chapitre IV :

- I : Méthode des centres linéarisée : code N4MCLO
- II : Traitement des programmes mathématiques avec des contraintes en égalité : code N4MCL1

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*  
\*  
\*  
\*  
\*  
\*  
\*  
\*  
\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

CHAPITRE I

INTRODUCTION

## I. PRESENTATION

On s'intéresse aux programmes du type :

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } f(t) \\ g(t) \geq 0 \\ h(t) = 0 \end{array} \right.$$

où  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$

$h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Ces fonctions sont continûment différentiables et supposées quelconques.

La plupart des méthodes proposées pour résoudre ce type de programme sont des généralisations de méthodes d'optimisation à contraintes linéaires, ou d'optimisation sans contrainte.

Le but de ce travail est d'essayer d'utiliser la méthode des centres et plus particulièrement la méthode des centres linéarisée pour résoudre ce programme. Il ne peut être résolu directement par cette dernière méthode, car elle exige que l'intérieur du domaine réalisable soit non vide.

Une première idée est de distinguer les égalités et les inégalités, en notant :

$$B = \{t \in \mathbb{R}^n / h(t) = 0\}$$

$$C = \{t \in \mathbb{R}^n / g(t) \geq 0\}$$

On remplace la résolution de (P) par la résolution d'une suite de programmes  $(P_k)$

$$(P_k) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } d(t, \lambda_k) \\ t \in E(\lambda_k) \cap B \end{array} \right.$$

avec  $\lambda_k = f(x_{k-1})$

$x_{k-1}$  étant une solution optimale de  $(P_{k-1})$

$d(t, \lambda_k) = \text{Min}\{f(t) - \lambda_k; g_i(t), i = 1 \dots p\}$

$E(\lambda_k) = C \cap \{t \in \mathbb{R}^n : f(t) \geq \lambda_k\}$

Sous des hypothèses larges, la suite infinie des points  $\{x_k\}$  converge vers  $\bar{x}$ , solution optimale de  $(P)$ . La contrainte  $t \in E(\lambda_k)$  est inutile dans la résolution du problème  $(P_k)$  car  $x_k \in \overset{\circ}{E}(\lambda_k)$ .

Donc on est ramené à résoudre le programme :

$$\left| \begin{array}{l} \text{maximiser } d(t, \lambda_k) \\ t \in B \end{array} \right.$$

La méthode des centres linéarisée consiste à linéariser le domaine  $E(\lambda_k)$ , c'est-à-dire à résoudre :

$$\left| \begin{array}{l} \text{maximiser } \lambda \\ f'(t, x_k) - \lambda_k \geq \mu \\ g_i'(t, x_k) \geq \mu \quad i = 1 \dots p \\ t \in B \end{array} \right.$$

Si les équations  $h(t) = 0$  sont linéaires, ce nouveau programme est linéaire et il peut donc être résolu facilement, par exemple par la méthode du simplex.

Par contre si les équations sont non linéaires, la résolution de ce nouveau programme n'est pas immédiate.

BEUNEU propose de trouver un problème  $(P')$  qui ne comporte que des inégalités, c'est-à-dire dont le domaine ait un intérieur non vide, tel que toute solution optimale de  $(P)$  soit solution optimale de  $(P')$ . HUARD propose un procédé itératif pour déterminer ce programme  $(P')$  équivalent à  $(P)$ .



## II. PROPOSITION DE CHOIX DE PROBLEME EQUIVALENT : BEUNEU

### 1) Introduction

On considère le programme :

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } f(t) \\ g(t) \geq 0 \\ g(t) = 0 \end{array} \right.$$

Mais la présence d'égalités non linéaires complique l'utilisation de la méthode des centres linéarisée.

$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p \text{ sont supposées continûment} \\ h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ différentiables} \end{array}$$

On pose

$$P'(\epsilon) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } f(t) \\ g(t) \geq 0 \\ \epsilon_j h_j(t) \geq 0 \quad j = 1 \dots m \end{array} \right.$$

avec  $\epsilon_j = \pm 1$

Le problème est de déterminer les  $\{\epsilon_j, j = 1 \dots m\}$  tels que toute solution optimale de (P) soit solution optimale de  $(P'(\epsilon))$ .

L'idée principale est de remplacer  $h_j(t) = 0$  par

$$\begin{cases} h_j(t) \geq 0 \\ h_j(t) \leq 0 \end{cases}$$

et qu'à l'optimum de (P) une seule de ces deux contraintes sera active, bien que toutes les deux soient saturées, en supprimant la non active, on obtient le programme  $(P'(\epsilon))$ . On note :

On note :

$A = \{t \in \mathbb{R}^n : g(t) \geq 0 \text{ et } h(t) = 0\}$  domaine réalisable

$T(A, \bar{x})$  : cône tangent à  $A$  en  $\bar{x}$

$P = \overline{T(A, \bar{x})}$  enveloppe convexe fermée de  $T(A, \bar{x})$ .

On considère l'hypothèse :

$$(H_1) P = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} (\nabla g_i(\bar{x}), y) \geq 0 \quad \forall i = 1 \dots p \text{ tq } g_i(\bar{x}) = 0 \\ (\nabla h_j(\bar{x}), y) = 0 \quad \forall j = 1 \dots m \end{array} \right\}$$

qui est la contrainte de qualification avec laquelle les conditions de Kuhn et Tucker sont des conditions nécessaires d'optimalité.

Proposition 1 :

*Sous l'hypothèse  $(H_1)$ , si  $\bar{x}$  est solution optimale de  $(P)$ . Alors il existe un choix des  $\{\epsilon_j, j = 1 \dots m\}$  tel que  $\bar{x}$  vérifie les conditions de Kuhn et Tucker pour le programme  $(P'(\epsilon))$  associé.*

Démonstration :

Cf. BEUNEU [2].

Remarque : Conditions de Kuhn et Tucker pour  $(P)$

$$\begin{array}{ll} \exists u \in \mathbb{R}^p & u \geq 0 \\ & : \quad \nabla f(\bar{x}) + u \nabla g(\bar{x}) + v \nabla h(\bar{x}) = 0 \\ \exists v \in \mathbb{R}^m & u g(\bar{x}) = 0 \end{array}$$

## 2) Existence d'un programme "quasi-équivalent"

On considère les hypothèses  $(H_2)$  : i)  $f$  est concave

ii) le domaine réalisable du

programme  $(P'(\epsilon))$  est convexe.

Proposition 2 :

On suppose que les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$  sont vérifiées. Dans ce cas le programme  $(P'(\epsilon))$  est "quasi-équivalent" au programme  $(P)$ , c'est-à-dire que toute solution optimale de  $(P)$  est aussi solution optimale de  $(P'(\epsilon))$ .

Démonstration :

cf. BEUNEU [2].

Remarque : L'hypothèse ii) de  $(H_2)$  est vérifiée en particulier si

$$\begin{cases} g_i \text{ sont des fonctions concaves} \\ h_j \text{ sont des fonctions linéaires} \end{cases}$$

3) Existence d'un programme "localement quasi-équivalent"

On considère l'hypothèse  $(H_3)$  :

$f, g, h$  sont des fonctions deux fois continûment différentiables.  $\bar{x}$  étant une solution optimale de  $(P)$ , on note  $(\hat{v}, \hat{w})$  les multiplieurs associés.

On considère le lagrangien

$$L(x, v, w) = f(x) + v g(x) + w h(x)$$

Soit l'ensemble

$$L = \{y \in \mathbb{R}^n : y^t \cdot \nabla^2 L(\bar{x}, \hat{v}, \hat{w}) \cdot y < 0\}$$

On suppose que

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla g_i(\bar{x}), y) = 0 \quad i \text{ tel que } v_i > 0 \\ (\nabla h_j(\bar{x}), y) = 0 \quad j \text{ tel que } w_j \neq 0 \\ (\nabla f(\bar{x}), y) = 0 \end{array} \right\} \subset L$$

Proposition 3 :

On suppose que les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_3)$  sont vérifiées. Alors il existe un programme  $(P'(\epsilon))$  ne comportant que des inégalités, "localement quasi-équivalent" à  $(P)$ , c'est-à-dire que toute solution optimale de  $(P)$  est une solution optimale locale de  $(P'(\epsilon))$ .

4) Conclusion

Donc si  $\bar{x}$  est solution optimale de  $(P)$ , on note  $\hat{w} \in \mathbb{R}^m$  les multiplicateurs associés aux contraintes

$$h_j(x) = 0 \quad j = 1 \dots m$$

Si on note  $\epsilon_j = \text{signe de } \omega_j$ .

On obtient le programme  $(P'(\epsilon))$ , ce dernier peut être résolu par la méthode des centres. Mais la connaissance de ces multiplicateurs n'est pas systématique, sauf dans le cas des problèmes d'origine concrète, où des raisonnements économiques fournissent le signe des multiplicateurs. Mais ce n'est pas toujours le cas, pour ne pas essayer les  $2^m$  programmes possibles HUARD dans [8] propose un procédé itératif pour essayer seulement une partie de ces programmes.

III. RECHERCHE ITERATIVE PROPOSEE PAR P. HUARD1) Introduction

L'idée est de remplacer les égalités par des inégalités de sens arbitraire, puis on résoud ce programme et suivant les résultats obtenus on corrige le sens des inégalités.

Si les contraintes sont linéaires, la résolution de ce programme est simple. Par contre, si les contraintes sont quelconques, on ne peut envisager qu'une résolution partielle de ce programme mathématique.

## 2) Cas linéaire

On considère le programme

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } f(t) \\ Bt \geq b \\ At = a \end{array} \right.$$

$f$  étant une fonction concave

$B$  une matrice  $(m, n)$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$

$A$  une matrice  $(p, n)$ ,  $a \in \mathbb{R}^p$

$\{t \in \mathbb{R}^n : Bt \geq b\}$  est supposé borné

On partitionne les lignes de  $A$  en  $S$  et  $\bar{S}$

$$S \cap \bar{S} = \emptyset$$

$$S \cup \bar{S} = \{1, 2, \dots, p\}$$

On note



$$D(S) = \left\{ t \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{ll} Bt \geq b & \\ A_i t \geq a_i & i \in S \\ A_i t \leq a_i & i \in \bar{S} \end{array} \right\}$$

et on considère le programme

$$P(S) \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } f(t) \\ t \in D(S) \end{array} \right.$$

### Description d'une itération

0 On dispose du partitionnement  $(S, \bar{S})$

On considère le programme  $P(S)$  et on note  $\hat{x}(S)$  une solution optimale de  $P(S)$ .

### 1 Test d'optimalité

si  $A \hat{x}(S) = a$ , alors  $\hat{x}(S)$  est solution optimale de (P)

sinon  $\exists s \in \{1, 2, \dots, p\}$  tel que  $A_s \hat{x}(S) \neq a_s$

On remplace S par S'

$$S' = \begin{cases} S + s & \text{si } s \notin S \\ S - s & \text{si } s \in S \end{cases}$$

et on note  $\hat{x}(S')$  une solution optimale de  $P(S')$  et on va en 2

2 si  $f(\hat{x}(S')) < f(\hat{x}(S))$  on passe à l'itération suivante avec S' comme partitionnement

sinon  $f(\hat{x}(S')) = f(\hat{x}(S))$

on détermine le point y intersection du segment  $[\hat{x}(S), \hat{x}(S')]$

avec le plan  $H_s = \{t \in \mathbb{R}^n : A_s t = a_s\}$

et on va en 1 avec S inchangé

et  $\hat{x}(S) \leftarrow y$

car  $f(\hat{x}(S)) = f(y) = f(\hat{x}(S'))$ .

fin de l'itération.

### Démonstration de la convergence [cf. HUARD [8]]

On montre facilement que cet algorithme converge en un nombre fini d'itérations, en utilisant la linéarité des contraintes et la concavité de l'objectif.

Dans un premier temps, on montre que :

$$(1) \quad \forall x \in D(S') \quad f(x) \leq f(\hat{x}(S))$$

ce qui entraîne en particulier que :

$$f(\hat{x}(S')) \leq f(\hat{x}(S))$$

Pour démontrer le résultat (1), on suppose que  $s \in S$

$$\text{Donc on a } \begin{cases} A_i \bar{x}(S) \geq a_i & \forall i \in S - s \\ A_s \bar{x}(S) > a_s \\ A_i \bar{x}(S) \leq a_i & \forall i \in \bar{S} \end{cases}$$

On considère  $x \in D(S')$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_i x \geq a_i & \forall i \in S' = S - s \\ A_i x \leq a_i & \forall i \in \bar{S}' = \bar{S} + s \end{cases}$$

en particulier  $A_s x \leq a_s$

$$\text{Donc on a } \begin{cases} A_s x \leq a_s \\ A_s \bar{x}(S) > a_s \end{cases}$$

ce qui entraîne l'existence de  $t_0 \in [x, \bar{x}(S)]$  unique tel que  $A_s t_0 = a_s$ .

La linéarité des autres contraintes entraîne :

$$t_0 \in D(S)$$

Si maintenant, on utilise la concavité de l'objectif  $f$  et  $t_0 = \lambda_0 x + (1 - \lambda_0) \bar{x}(S)$ .

On obtient :

$$f(t_0) \geq \lambda_0 f(x) + (1 - \lambda_0) f(\bar{x}(S))$$

$$\Rightarrow f(t_0) - f(\bar{x}(S)) \geq \lambda_0 [f(x) - f(\bar{x}(S))]$$

Mais on a  $t_0 \in D(S)$  et  $\lambda_0 \neq 0$

$\bar{x}(S)$  solution optimale de  $P(S)$ .

Donc  $f(t_0) \leq f(\bar{x}(S))$ .

Ce qui entraîne :  $\forall x \in D(S') \quad f(x) \leq f(\bar{x}(S))$ .

### 3) Cas général

On considère le programme

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } f(t) \\ g(t) \geq 0 \\ h(t) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} f \text{ concave} \\ h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \end{array}$$

On partitionne les composantes de  $h(x)$  en deux sous-ensembles  $S$  et  $\bar{S}$  tels que :  $S \cap \bar{S} = \emptyset$

$$S \cup \bar{S} = \{1, 2, \dots, m\}$$

$$D(S) = \left\{ t \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} g(t) \geq 0 \\ h_i(t) \geq 0 \quad i \in S \\ h_i(t) \leq 0 \quad i \in \bar{S} \end{array} \right\}$$

$$D(S) \neq \emptyset$$

et on considère le programme

$$P(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } f(t) \\ t \in D(S) \end{array} \right.$$

Soit  $\hat{x}(S)$  une solution optimale de  $P(S)$

→ si  $h(\hat{x}(S)) = 0$

Alors  $\hat{x}(S)$  est solution optimale de (P) et on a donc pris le bon partitionnement

→ sinon  $\exists s \in \{1, 2, \dots, m\}$  tel que  $h_s(\hat{x}(S)) \neq 0$

$$\text{On remplace } S' = \begin{cases} S + s & \text{si } s \notin S \\ S - s & \text{si } s \in S \end{cases}$$

C'est-à-dire que l'on modifie le sens de l'inégalité  $s$ .

Et on considère  $\hat{x}(S')$  une solution optimale de  $P(S')$ .



$\{t \in \mathbb{R}^n : h_S(t) = 0\}$  sépare  $D(S)$  et  $D(S')$ .

Mais  $\bar{x}(S)$  n'appartient pas à ce plan de séparation, donc :

$\exists y \in ]\bar{x}(S), \bar{x}(S')]$  tel que  $h_S(y) = 0$

Proposition :

*Si on suppose que pour tout partitionnement  $S'$  et  $S$  définis comme précédemment, le point  $y \in D(S)$ .*

Alors on a  $f(\bar{x}(S')) < f(\bar{x}(S))$

ou  $f(\bar{x}(S')) = f(y) = f(\bar{x}(S))$ .

Algorithme

Description d'une itération

0 on dispose du partitionnement  $(S, \bar{S})$ ,  
on considère le programme  $P(S)$  et on note  $\bar{x}(S)$  une solution optimale de  $P(S)$ .

1 si  $h(\bar{x}(S)) = 0$   
Alors  $\bar{x}(S)$  est solution optimale de  $(P)$   
Stop

sinon  $\exists s \in \{1, 2, \dots, m\}$  tel que  $h_S(\bar{x}(S)) \neq 0$   
on note  $S' = \begin{cases} S+s & \text{si } s \notin S \\ S-s & \text{si } s \in S \end{cases}$   
et on note  $\bar{x}(S')$  une solution optimale de  $P(S')$ .

2 si  $f(\bar{x}(S')) < f(\bar{x}(S))$   
on passe à l'itération suivante avec  $S'$ .

sinon on a  $f(\bar{x}(S')) = f(\bar{x}(S))$   
on détermine  $y$  point d'intersection du segment  $[\bar{x}(S), \bar{x}(S')]$

avec la contrainte  $h_s(t) = 0$  et on va en 1 avec le partitionnement  $S$  inchangé et avec  $\bar{x}(S) \leftarrow y$ .

fin de l'itération

Théorème :

*Si  $f$  est concave et si pour tous les partitionnements  $S$  et  $S'$  définis comme précédemment, le point  $y$  appartient à  $D(S)$  et si de plus chaque itération fournit un nombre fini de partitionnements  $S'$ .*

*Alors l'algorithme converge en un nombre fini d'itérations, c'est-à-dire que l'on obtient un partitionnement  $(S, \bar{S})$  tel que  $\bar{x}(S)$  soit solution optimale de (P).*

Remarque : La condition importante pour la convergence de l'algorithme est :  $y \in D(S)$ . Si les fonctions  $g$  sont concaves et les fonctions  $h$  linéaires, cette condition est bien vérifiée. Mais en général, il est difficile d'avoir  $y \in D(S)$ . Il faut que la non linéarité des contraintes  $h$  soit faible.

#### 4) Exemple

Si on considère un problème où les fonctions  $h$  ne sont pas linéaires, l'algorithme peut ne pas être utilisable.

On considère le problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{maximiser } 3x + 8y \\ -x^4 + 2x^2 - y = 0 \\ -0.25x^2 - y + 0.75 = 0 \\ -1 \leq x \leq 0.5 \\ -1 \leq y \leq 1.5 \end{array} \right.$$

On note  $B = [-1, 0.5] \times [-1, 1.5]$

On remarque que l'objectif est linéaire et que l'on a deux contraintes quelconques.

On partitionne les égalités  $(S_1, \bar{S}_1)$

$$P(S_1) \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } 3x + 8y \\ -x^4 + 2x^2 - y \geq 0 \\ -0.25x^2 - y + 0.75 \geq 0 \\ (x, y) \in B \end{array} \right.$$

$D(S_1)$  le domaine réalisable de ce programme

$x^1$   
 $x$  une solution optimale de  $P(S_1)$ .

$$x^1 = (0.5, 7/16)$$

$$h(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.25 \end{bmatrix} \quad f(x) = 5$$

On change le sens de la seconde inégalité.

$$P(S_2) \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } 3x + 8y \\ -x^4 + 2x^2 - y \geq 0 \\ 0.25x^2 + y - 0.75 \geq 0 \\ (x, y) \in B \end{array} \right.$$

$D(S_2)$  le domaine réalisable de ce nouveau programme  $x^2$  une solution optimale de  $P(S_2)$ .

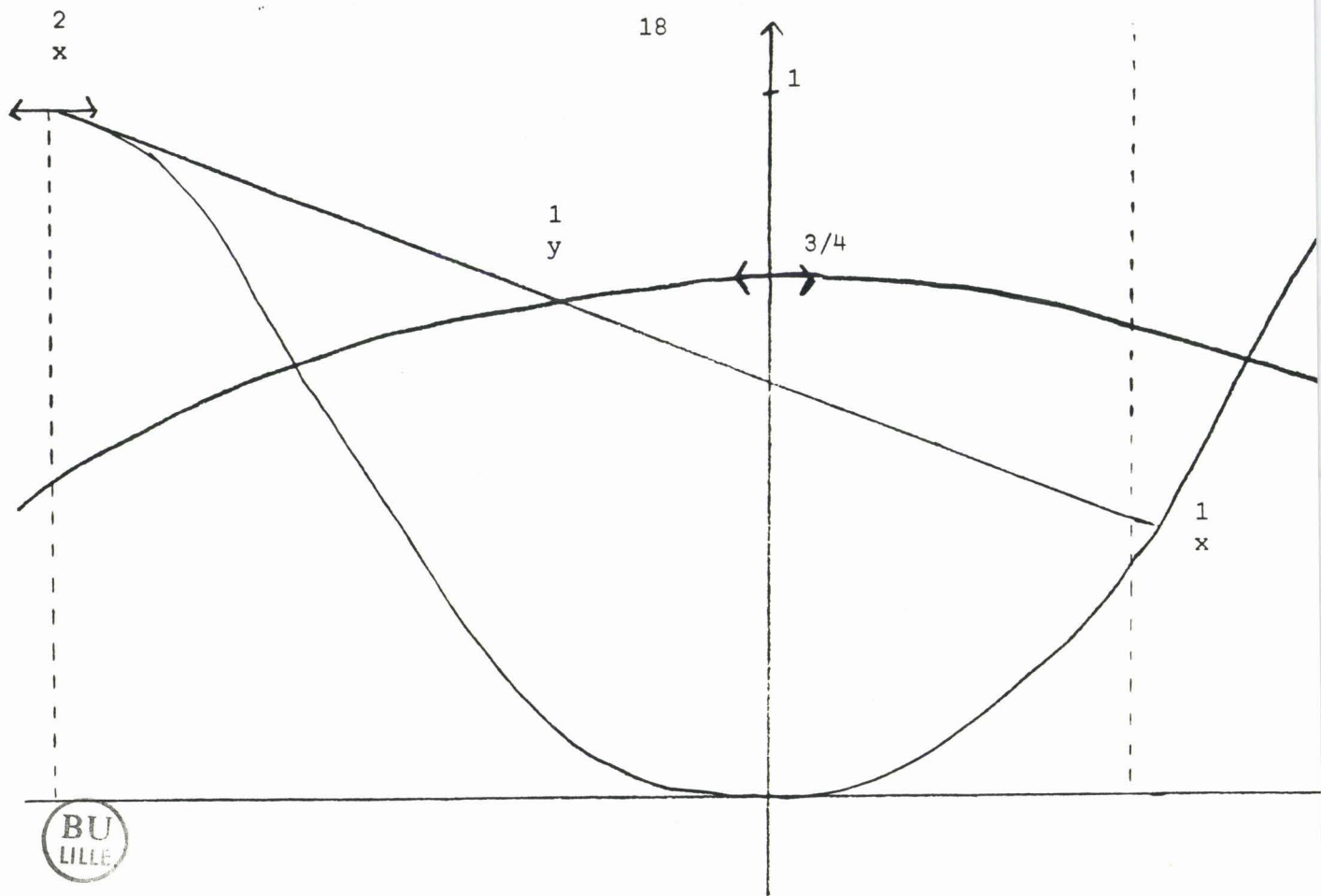
$$x^2 = (1, -1) \quad f(x) = 5$$

On considère le point  $y^1$  intersection du segment  $[x^1, x^2]$  avec l'ensemble  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0.25x^2 + y - 0.75 = 0\}$ .

$$\text{Donc } y^1 = \left( \frac{3 - \sqrt{15}}{4}, \frac{11 + 3\sqrt{15}}{32} \right)$$

Mais le point  $y^1 \notin D(S_1)$

$$y^1 \notin D(S_2)$$



```
*****  
*****  
*                                     *  
*                                     *  
*      CHAPITRE II                    *  
*                                     *  
*                                     *  
*****  
*****
```

BREF RAPPEL SUR LA METHODE DES CENTRES ET SUR LA METHODE DES CENTRES LINEARISEE.

INTRODUCTION D'UN ALGORITHME POUR LA RESOLUTION DES PROGRAMMES MATHEMATIQUES CONTENANT DES CONTRAINTES EN EGALITE PAR LE PRINCIPE DE LA METHODE DES CENTRES.

## I. METHODE DES CENTRES LINEARISEE

### I.1. Introduction

La méthode des centres introduite par P. HUARD [10, 12, 13] permet de résoudre des problèmes de la forme :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } f(t) \\ t \in A \cap B \end{array} \right.$$

On suppose que  $f$  atteint son maximum sur  $A \cap B$  en un point noté  $\hat{x}$ .

Cette méthode est une méthode intérieure qui construit une suite de points réalisables (c'est-à-dire de  $A \cap B$ ).

On suppose que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fr}\{x / f(x) \geq \lambda\} = \{x / f(x) = \lambda\} \quad \forall \lambda < f(\hat{x}) \\ \circ \\ A \cap B \cap O = \emptyset \Rightarrow A \cap B \cap O = \emptyset \quad \forall O \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

Dans la suite on considèrera :

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \geq 0 \quad i = 1 \dots m\} \quad \circ \quad A \neq \emptyset$$

$B =$  polyèdre compact.  $A \cap B$  fermé.

$f$  et  $g_i$  ( $i = 1 \dots m$ ) de classe  $C^1$ .

On considère  $\xi$  un ensemble de parties de  $\mathbb{R}^n$  et une fonction  $d : \mathbb{R}^n \times \xi \rightarrow \mathbb{R}$ .

•  $d$  est appelée F-distance sur  $\mathbb{R}^n \times \xi$ , si elle vérifie :

- i)  $d(x, E) = 0 \quad \forall E \in \xi \quad \forall x \in \text{Fr}(E)$
- ii)  $d(x, E) > 0 \quad \forall E \in \xi \quad \forall x \in \overset{\circ}{E}$

iii)  $\forall E \in \xi \quad \forall E' \in \xi \quad E \subset E'$ , on a :

$\forall x \in E$ , il existe un scalaire  $\rho(x) > 0$   
tel que :  $d(x, E) \leq \rho(x) \cdot d(x, E')$

• la F-distance  $d$  est dite régulière si de plus :

$\forall$  les suites  $\{E_k \in \xi, k \in \mathbb{N}\}$  et  $\{x^k \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}\}$   
telles que :

$$\left| \begin{array}{l} E_k \supset E_{k+1} \supset E \quad E \in \xi \quad E \neq \emptyset \\ x^k \in E_k \quad x^k \notin E_{k+1} \end{array} \right.$$

on a  $d(x^k, E_k) \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow \infty$

• étant donnés :  $d$  une F-distance sur  $\mathbb{R}^n \times \xi$

$E \in \xi$

$\varepsilon$  un nombre tel que  $0 \leq \varepsilon < \sup_{x \in E} \{d(x, E)\}$

on appelle  $\varepsilon$ -centre de  $E$  un point  $c \in E$  tel que :

$$d(c, E) \geq \sup_{x \in E} \{d(x, E)\} - \varepsilon$$

si  $\varepsilon = 0$ , le point  $c$  est appelé centre de  $E$ .

On s'intéresse au cas particulier de la famille  $\xi$ .

$$E(x) = A \cap \{y \in \mathbb{R}^n : f(y) \geq f(x)\} \text{ pour } x \in A \cap B$$

$$d(y, E(x)) = \text{Min}\{f(y) - f(x) ; g_i(y), i = 1 \dots m\}$$

L'éloignement à la frontière de  $E(x)$  est représenté par la F-distance  $d$ .

Pour simplifier la notation, dans la suite on notera cette F-distance :

$$d(y, x) = \text{Min}\{f(y) - f(x) ; g_i(y), i = 1 \dots m\}$$

pour  $x \in A \cap B$ .

La méthode consiste à résoudre une suite de programmes mathématiques :

$$P(x_n) \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } d(y, x_n) \\ y \in B \end{array} \right.$$

$x_{n+1}$  étant une solution optimale de ce programme, avec  $x_0$  point de départ  
 $x_0 \in A \cap B$ .

Ce programme  $P(x_n)$  est "équivalent" au suivant :

$$Q(x_n) \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } \mu \\ f(y) - f(x_n) \geq \mu \\ g_i(y) \geq \mu \quad i = 1 \dots m \\ y \in B \end{array} \right.$$

Ces programmes sont "équivalents" au sens que :

Si  $\hat{t}$  est une solution optimale de  $P(x_n)$

et

si  $(\hat{y}, \hat{\mu})$  est une solution optimale de  $Q(x_n)$ .

Alors  $d(\hat{y}, x_n) = \hat{\mu} = d(\hat{t}, x_n)$ .

## I.2. Méthode des centres linéarisée

### 1) Présentation de l'algorithme partiel

P. HUARD propose dans [13] un algorithme partiel qui permet d'obtenir un centre du tronçon  $E(x_n) \cap B$ .

On suppose que les fonctions  $f$  et  $g_i$  ( $i = 1 \dots m$ ) sont continûment différentiables et concaves.

Pour  $y \in A \cap B$ , on note :

$$f'(t, y) = f(y) + (\nabla f(y), t - y)$$

L'approximation tangentielle de  $f$  en  $y$

$$g_i'(t, y) = g_i(y) + (\nabla g_i(y), t - y)$$



L'approximation tangentielle de  $g_i$  en  $y$ .

On dispose du point  $x_n \in A \cap B$ .

L'algorithme partiel :

- ① Choisir une valeur de départ  $\overset{0}{y} \in B$ ,  
on pose  $h = 0$
- ② Résoudre le programme linéaire

$$\left| \begin{array}{l} \text{maximiser } \mu \\ f'(t, y) - f(x_n) \geq \mu \\ g_i'(t, y) \geq \mu \quad i = 1 \dots m \\ t \in B \end{array} \right.$$

on note  $(\mu, z)$  une solution

- ③ Déterminer  $y^{h+1} : d(y^{h+1}, x_n) = \text{Max}\{d(t, x_n), t \in [y^h, z^h]\}$ .
- ④ Aller en ② avec  $h+1$  au lieu de  $h$ .

Par cet algorithme, on obtient une suite de points  $\{y^h\}$  qui converge vers un centre du tronçon  $E(x_n) \cap B$ .

Mais HUARD [13] montre que le point  $y^1$  obtenu par une étape de cet algorithme partiel peut être considéré comme un  $\epsilon$ -centre du tronçon  $E(x_n) \cap B$ .

## 2) Conclusion

Pour  $x \in A \cap B$ , on note :

$$d(t, x) = \text{Min}\{f(t) - f(x) ; g_i(t), i = 1 \dots m\}$$

$$d'(t, x) = \text{Min}\{f'(t, x) - f(x) ; g_i'(t, x), i = 1 \dots m\}$$

On se donne  $x$  comme point de départ de l'itération,  $x \in A \cap B$

- On résoud le programme linéaire  

$$\text{Maximiser}\{d'(t, x), \text{ avec } t \in B\}$$
on note  $z$  une solution optimale.
- Recherche unidimensionnelle  

$$\text{Maximiser}\{d(t, x) \text{ avec } t \in [x, z]\}$$
on note  $x'$  un point obtenu  
 $x'$  est le successeur de  $x$ .

HUARD [8] propose de remplacer la maximisation de la F-distance sur le segment  $[x, z]$ , par la détermination d'un point  $x'$  vérifiant :

$$d(x', x) \geq \rho \text{ Max}\{d(t, x) \text{ avec } t \in [x, z]\}$$

$\rho \in ]0, 1]$ ,  $\rho$  étant une constante indépendante de l'itération en cours.

Cette modification permet de conserver les propriétés de convergence établies par HUARD.

Il existe dans la littérature de nombreux procédés de maximisation d'une fonction concave sur un segment. Il y a les méthodes de fractionnement comme la dichotomie, ou les méthodes d'interpolation polynomiale ou polygonale. On peut aussi utiliser la recherche linéaire proposée par ARMIJO, qui est une recherche discrète.

### I.3. Cas d'un problème contenant des égalités

La méthode des centres est une méthode intérieure et elle ne peut donc pas convenir pour des problèmes où certaines contraintes sont des égalités non linéaires.

Les contraintes linéaires en égalités sont rejetées dans le compact  $B$ .

Pour que le programme :

$$\text{Maximiser}\{d'(t, x) \text{ avec } t \in B\}$$

reste un programme linéaire, il n'est pas possible de rejeter les contraintes non linéaires dans B.

Mais si le programme initial (P) contient des égalités non linéaires, on peut chercher à définir un nouveau problème exprimé **uniquement** avec des inégalités et "équivalent" au problème (P). C'est-à-dire que toute solution optimale de (P) soit solution optimale du nouveau programme.

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } f(t) \\ g_i(t) \geq 0 \quad i = 1 \dots p \\ h_j(t) = 0 \quad j = 1 \dots m \\ t \in B \end{array} \right.$$

Si on note  $u_j$  le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte  $h_j(t) = 0$ , à l'optimum  $\hat{x}$  de (P). On note  $\epsilon_j = \text{signe}(u_j)$ .

$$(P') \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } f(t) \\ g_i(t) \geq 0 \quad i = 1 \dots p \\ \epsilon_j \cdot h_j(t) \geq 0 \quad j = 1 \dots m \\ t \in B \end{array} \right.$$

On note A le domaine réalisable de (P).

$$\begin{array}{ll} T(A, \hat{x}) & \text{le cône tangent en } \hat{x} \text{ de } A \\ \overline{[T(A, \hat{x})]} & \text{l'enveloppe convexe fermée de } T(A, \hat{x}) \\ A' & \text{le domaine réalisable de } (P') \end{array}$$

Sous les hypothèses :

i) f est une fonction concave

$$\text{ii) } \overline{[T(A, \hat{x})]} = \{y \in \mathbb{R}^n : \forall g_i(\hat{x}) y \geq 0 \quad i \in E \\ \forall h_j(\hat{x}) y = 0 \quad j = 1 \dots m\}$$

$$E = \{i \in \{1, 2 \dots p\} : g_i(\hat{x}) = 0\}$$

iii) Le domaine A' est convexe.

BEUNEU montre que les problèmes (P) et (P') sont "équivalents" au sens défini au-dessus.

Si on connaît les multiplicateurs  $u_j$   $\{j = 1 \dots m\}$ , on peut résoudre le problème (P') par la méthode des centres linéarisée.

Par contre, si on ne connaît pas les multiplicateurs P. HUARD [8] propose un procédé itératif de recherche de (P'). Dont la convergence n'est prouvée que dans le cas des contraintes  $h$  linéaires.

## II. PRESENTATION D'UN ALGORITHME THEORIQUE POUR LA RESOLUTION D'UN PROBLEME AVEC DES EGALITES

### II.1. Problème ne contenant que des contraintes en égalité

#### 1) Introduction

On considère le problème

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } f(t) \\ h_j(t) = 0 \quad j = 1 \dots m \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} t \in \mathbb{R}^n \\ m \leq n \end{array}$$

où les fonctions du problème sont continûment différentiables.

#### Hypothèses

- i) Le domaine réalisable de (P) est non vide, il existe au moins une solution optimale que l'on note  $\hat{x}$ .
- ii)  $\exists \bar{\epsilon} > 0$   $\mathcal{D}(\bar{\epsilon}) = \{t \in \mathbb{R}^n : 0 \leq h_j(t) \leq \bar{\epsilon} \quad j = 1 \dots m\}$  soit compact
- iii)  $\forall \epsilon \in ]0, \bar{\epsilon}]$   $\mathcal{D}(\epsilon) = \{t \in \mathbb{R}^n : 0 \leq h_j(t) \leq \epsilon \quad j = 1 \dots m\}$  a un intérieur non vide et vérifie.

$$\text{Fr}(\mathcal{D}(\epsilon)) = \left. \begin{array}{l} \{t \in \mathcal{D}(\epsilon) : \exists j_0 \text{ vérifiant } h_{j_0}(t) = 0\} \\ \text{ou } \exists j_1 \text{ vérifiant } h_{j_1}(t) = \epsilon \end{array} \right\}$$

iv)  $\forall t \in \mathcal{D}(\varepsilon) \quad \{\forall h_j(t), j = 1 \dots m\}$  est une famille de vecteurs linéairement indépendants.

v)  $\text{Pr}\{t / f(t) \geq \lambda\} = \{t / f(t) = \lambda\}$

Remarque : L'hypothèse iv) est une contrainte de qualification pour le problème (P). Cette contrainte est proposée par HESSTENES [14].

### Notations

Pour tout  $x$  qui vérifie :  $h_j(x) > 0 \quad j = 1 \dots m$

on note  $\omega(x) = \frac{1}{2} \max_{j=1 \dots m} \{h_j(x)\}$

$D(x) = \{t \in \mathbb{R}^n : 0 \leq h_j(t) \leq \omega(x) \quad j = 1 \dots m\}$

$d_0(t, x) = \text{Min}\{h_j(t), j = 1 \dots m; -h_j(t) + \omega(x), j = 1 \dots m\}$

$d_0(x) = \text{Max}_{t \in D(x)} \{d_0(t, x)\}$

Soit  $z$  un point de  $D(x)$ , on définit :

$E(x, z) = D(x) \cap \{t \in \mathbb{R}^n : f(t) \geq f(z)\}$

$d(t, z, x) = \text{Min}\{d_0(t, x) ; f(t) - f(z)\}$

### 2) Algorithme

#### → Initialisation

On dispose d'un point de départ  $x_0$  qui vérifie :

$$0 < h_j(x_0) \leq \bar{\varepsilon} \quad j = 1 \dots m$$

[ $\bar{\varepsilon}$  donné par l'hypothèse ii)]

Remarque : Eventuellement, on change  $h_j(\cdot)$  en  $-h_j(\cdot)$  pour avoir un point de départ vérifiant cette hypothèse.

→ itération k

On connaît  $x_k \in \{t \in \mathbb{R}^n, 0 < h_j(t) \leq \bar{\epsilon} \quad j = 1 \dots m\}$

i) Chercher  $z_k \in D(x_k)$  tel que

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & d(t, z_k, x_k) < d_0(x_k) \\ \text{t} \in & E(x_k, z_k) \end{aligned}$$

ii) Chercher  $x_{k+1} \in E(x_k, z_k)$  qui réalisa le maximum du point i)

Fin de l'itération k.

Remarque 0 : On verra par la suite qu'il suffit de prendre  $x_{k+1} \in E(x_k, z_k)$  mais pas forcément un point qui réalise le maximum.

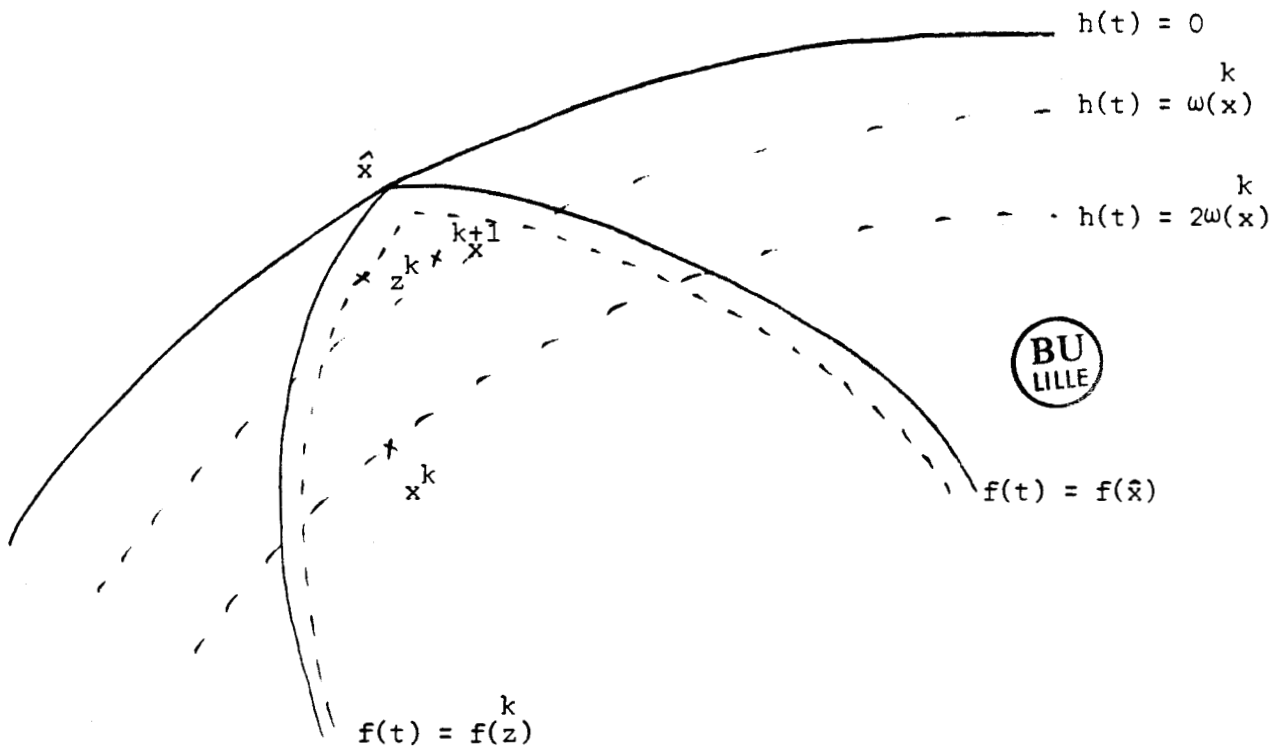


Figure 1 : Description de l'itération k.

Remarque 1 : On a  $d_0(x_k) > 0$

$$\text{En effet } d_0(x_k) = \text{Max}_{t \in D(x_k)} d_0(t, x_k)$$

par définition  $\omega(x_k) > 0$  et par l'hypothèse iii) on a  $\overset{\circ}{D}(x_k) \neq \emptyset$ .

$\Rightarrow$  Le maximum de la fonction continue  $d_0(\cdot, x_k)$  sur  $D(x_k)$  est atteint en un point intérieur à  $D(x_k)$ , ce qui prouve le résultat.

Remarque 2 : Il est toujours possible de trouver un point  $z$  de  $D(x_k)$  tel que :

$$\text{Max}_{t \in E(x_k, z)} d(t, z, x_k) < d_0(x_k)$$

En effet en raisonnant par l'absurde on aurait :

$$\forall z \in D(x_k) \quad \text{Max}_{t \in E(x_k, z)} d(t, z, x_k) \geq d_0(x_k)$$

On note  $\tilde{z}$  un point de  $D(x_k)$  solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } f(t) \\ t \in D(x_k) \end{array} \right.$$

Ce point existe toujours car  $f$  est continue et  $D(x_k)$  est compact.

Pour ce point  $\tilde{z}$ , il existe  $\bar{t} \in E(x_k, \tilde{z})$  tel que :

$$d(\bar{t}, \tilde{z}, x_k) \geq d_0(x_k)$$

(conséquence immédiate de la compacité de  $E(x_k, \tilde{z})$  et de la continuité de la fonction  $d(\cdot, \tilde{z}, x_k)$ ).

Mais par définition :

$$d(\bar{t}, \tilde{z}, x_k) = \text{Min}\{d_0(\bar{t}, x_k), f(\bar{t}) - f(\tilde{z})\}$$

on en déduit que :

$$f(\bar{t}) - f(\hat{z}) \geq d_0(x_k)$$

$$\Rightarrow f(\bar{t}) \geq f(\hat{z}) + d_0(x_k) > f(\hat{z})$$

$$\text{on a donc } \begin{cases} \bar{t} \in D(x_k) \\ f(\bar{t}) > f(\hat{z}) \end{cases}$$

ce qui est en contradiction avec le choix de  $\hat{z}$ .

### 3) Propriétés

#### Propriété II.1.1.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \omega(x_{n+1}) \leq \frac{\omega(x_n)}{2}$$

#### Démonstration



Par construction, on a  $x_{n+1} \in E(x_n, z_n)$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x_{n+1}) \geq f(z_n) \\ 0 \leq h_j(x_{n+1}) \leq \omega(x_n) \quad j = 1 \dots m \end{cases}$$

$$\text{Donc on a } \text{Max}_{j=1 \dots m} \{h_j(x_{n+1})\} \leq \omega(x_n)$$

ce qui entraîne :

$$\omega(x_{n+1}) \leq \frac{\omega(x_n)}{2}$$

#### Propriété II.1.2.

Tout point d'accumulation  $\bar{x}$  de la suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  construite par l'algorithme vérifie :  $h(\bar{x}) = 0$ .



Démonstration

\*  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est contenue dans  $D(x_0)$  qui est compact par l'hypothèse [ii)]. Il existe donc au moins un point d'accumulation  $\bar{x}$ .

Soit  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , une suite convergente vers  $\bar{x}$

\*  $\{\omega(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , étant une suite de nombres positifs, décroissante qui vérifie

$$\omega(x_{n+1}) \leq \frac{\omega(x_n)}{2}$$

Donc  $\omega(\bar{x}) = 0$

ce qui entraîne  $h_j(\bar{x}) = 0 \quad \forall j = 1 \dots m$ .

Propriété II.1.3.

$$\text{Max}_{t \in D(x_n)} d_0(t, x_n) = \text{Max}_{t \in D(x_0)} d_0(t, x_n)$$

Démonstration

\* On a  $D(x_n) \subset D(x_0)$

car  $\omega(x_n) \leq \omega(x_0)$

$$\text{Donc } \text{Max}_{t \in D(x_n)} d_0(t, x_n) \leq \text{Max}_{t \in D(x_0)} d_0(t, x_n)$$

\* On suppose que l'inégalité est stricte.

En notant  $\hat{t}_0$  un point qui vérifie :

$$\hat{t}_0 \in D(x_0) \text{ et } d_0(\hat{t}_0, x_n) = \text{Max}_{t \in D(x_0)} d_0(t, x_n)$$

Par hypothèse on a :

$$\text{Max}_{t \in D(x_n)} d_0(t, x_n) < d_0(\hat{t}_0, x_n)$$

Ce qui entraîne en particulier que  $\hat{t}_0 \notin D(x_n)$   $d_0$  étant une F-distance définie par la distance minimum au bord de  $D(x_n)$ .

$$\text{On a } d_0(\hat{t}_0, x_n) < 0$$

$$\Rightarrow \text{Max}_{t \in D(x_n)} d_0(t, x_n) < 0$$

Mais par hypothèse  $D(x_n) \neq \emptyset$ , donc il existe au moins un point  $t \in D(x_n)$  tel que  $d_0(t, x_n) \geq 0$ .

D'où la contradiction avec l'hypothèse de départ, et l'on a bien

$$\text{Max}_{t \in D(x_0)} d_0(t, x_n) = \text{Max}_{t \in D(x_n)} d_0(t, x_n)$$

#### Propriété II.1.4.

Pour tout  $z_n \in D(x_n)$ , on a

$$\text{Max}_{t \in E(x_n, z_n)} d(t, z_n, x_n) = \text{Max}_{t \in E(x_0, z_n)} d(t, z_n, x_n)$$

#### Démonstration

\* Par définition, on a :

$$E(x_n, z_n) = D(x_n) \cap \{t \in \mathbb{R}^n : f(t) \geq f(z_n)\}$$

$$E(x_0, z_n) = D(x_0) \cap \{t \in \mathbb{R}^n : f(t) \geq f(z_n)\}$$

$$\text{Mais } D(x_n) \subset D(x_0)$$

$$\Rightarrow E(x_n, z_n) \subset E(x_0, z_n)$$

$$\text{Donc } \text{Max}_{t \in E(x_n, z_n)} d(t, z_n, x_n) \leq \text{Max}_{t \in E(x_0, z_n)} d(t, z_n, x_n)$$

\* On suppose que l'inégalité est stricte.

On note  $\hat{t}_0$  une solution optimale sur  $E(x_0, z_n)$

$$d(\hat{t}_0, z_n, x_n) = \text{Max}_{t \in E(x_0, z_n)} d(t, z_n, x_n)$$

Ce qui donne

$$\text{Max}_{t \in E(x_n, z_n)} d(t, z_n, x_n) < d(\hat{t}_0, z_n, x_n)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{t}_0 \notin E(x_n, z_n) \\ \hat{t}_0 \in E(x_0, z_n) \end{cases}$$

$$\text{Donc} \begin{cases} f(\hat{t}_0) \geq f(z_n) \\ \hat{t}_0 \in D(x_0) \\ \hat{t}_0 \notin D(x_n) \end{cases}$$

$d_0(\cdot, x_n)$  est une F-distance définie par le minimum des contraintes définissant  $D(x_n)$ , ce qui entraîne :

$$d_0(\hat{t}_0, x_n) < 0$$

$$\Rightarrow d(\hat{t}_0, z_n, x_n) = \text{Min}\{d_0(\hat{t}_0, x_n) ; f(\hat{t}_0) - f(z_n)\} < 0$$

ce qui entraîne :

$$\text{Max}_{t \in E(x_n, z_n)} d(t, z_n, x_n) < d(\hat{t}_0, z_n, x_n) < 0$$

On a donc le résultat suivant :

$$\forall t \in E(x_n, z_n) \quad d(t, z_n, x_n) < 0$$

Mais  $E(x_n, z_n) \neq \emptyset$ .

D'où la contradiction avec l'hypothèse de départ, donc

$$\begin{aligned} \text{Max}_{t \in E(x_n, z_n)} d(t, z_n, x_n) &= \text{Max}_{t \in E(x_0, z_n)} d(t, z_n, x_n) \end{aligned}$$

#### 4) Convergence de l'algorithme

##### Proposition II.1.1.

Tout optimum local  $\hat{t}$  du problème :  $\text{Max}_{t \in D(x_n)} d_0(t, x_n)$   
 vérifie :  $d_0(\hat{t}, x_n) = \frac{\omega(x_n)}{2}$

##### Démonstration

On note  $\hat{t}$  un optimum local du problème

$$(Q) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } d_0(t, x_n) \\ t \in D(x_n) \end{array} \right.$$

$$d_0(\hat{t}, x_n) = \text{Min}\{h_j(\hat{t}), j = 1 \dots m ; -h_j(\hat{t}) + \omega(x_n) \quad j = 1 \dots m\}$$

$$\text{Donc } d_0(\hat{t}, x_n) \leq \frac{\omega(x_n)}{2}$$

$$\text{On suppose que } d_0(\hat{t}, x_n) < \frac{\omega(x_n)}{2}$$

On va générer une direction  $d$  telle que la fonction  $d_0(\cdot, x_n)$  soit croissante dans cette direction.

$\hat{t}$  étant un optimum local du problème Q

$$\exists V(\hat{t}) \text{ voisinage de } \hat{t} \text{ tel que } \forall t \in V(\hat{t}) \cap D(x_n) \\ d_0(t, x_n) \leq d_0(\hat{t}, x_n)$$

$$\text{On note } J_1(\hat{t}) = \{j = 1 \dots m / h_j(\hat{t}) = d_0(\hat{t}, x_n)\}$$

$$J_2(\hat{t}) = \{j = 1 \dots m / -h_j(\hat{t}) + \omega(x_n) = d_0(\hat{t}, x_n)\}$$

$$J_1(\hat{t}) \cap J_2(\hat{t}) = \emptyset.$$

En effet si  $j_0 \in J_1(\hat{t}) \cap J_2(\hat{t})$

$$\text{On a } h_{j_0}(\hat{t}) = d_0(\hat{t}, x_n) = -h_{j_0}(\hat{t}) + \omega(x_n)$$

$$\Rightarrow d_0(\hat{t}, x_n) = \frac{\omega(x_n)}{2}$$

ce qui est faux par hypothèse.

$\hat{t} \in D(x_n) \Rightarrow \{\nabla h_j(\hat{t}) \mid j = 1 \dots m\}$  sont linéairement indépendants [hypothèse iv)].

$$\text{On note } v_j = \nabla h_j(\hat{t}) \text{ si } j \in J_1(\hat{t})$$

$$v_j = -\nabla h_j(\hat{t}) \text{ si } j \in J_2(\hat{t})$$

$\Rightarrow \{v_j, j \in J_1(\hat{t}) \cup J_2(\hat{t})\}$  est une famille de vecteurs linéairement indépendants

Il existe une direction  $d$  vérifiant

$$(v_j, d) > 0 \quad j \in J_1(\hat{t}) \cup J_2(\hat{t})$$

On pose  $x = \hat{t} + \varepsilon_k d$  avec  $\{\varepsilon_k\}$  suite de nombre positifs, qui converge vers zéro

• Pour  $k$  assez grand  $x \in V(\hat{t})$

$$\bullet j \in J_1(\hat{t}) \quad h_j(\hat{t}) = d_0(\hat{t}, x_n) < \frac{\omega(x_n)}{2}$$

$$h_j(x) = h_j(\hat{t}) + \varepsilon_k (\nabla h_j(\hat{t}), d) + o(\varepsilon_k)$$

$o(\varepsilon_k)$  étant un infiniment petit par rapport à  $\varepsilon_k$ .  
 $(\nabla h_j(\hat{t}), d) > 0$ .

Donc pour  $k$  assez grand, on a :

$$h_j(\hat{t}) < h_j(x) \leq \frac{\omega(x_n)}{2}$$

$$\text{Donc } \frac{\omega(x_n)}{2} \leq -h_j(x) + \omega(x_n).$$

Donc  $\forall j \in J_1(\hat{t})$

$$\begin{cases} d_0(\hat{t}, x_n) < h_j^k(x) \leq \frac{\omega(x_n)}{2} \\ d_0(\hat{t}, x_n) < \frac{\omega(x_n)}{2} \leq -h_j^k(x) + \omega(x_n) \end{cases}$$

•  $j \in J_2(\hat{t}) \quad -h_j(\hat{t}) + \omega(x_n) = d_0(\hat{t}, x_n) < \frac{\omega(x_n)}{2}$

$$-h_j^k(x) + \omega(x_n) = -h_j^k(\hat{t}) + \omega(x_n) + \varepsilon_k (-\nabla h_j(\hat{t}), d) + o(\varepsilon_k)$$

$o(\varepsilon_k)$  étant un infiniment petit par rapport à  $\varepsilon_k$   
 $(-\nabla h_j(\hat{t}), d) > 0$   
 pour le assez grand, on a :

$$-h_j^k(\hat{t}) + \omega(x_n) < -h_j^k(x) + \omega(x_n) \leq \frac{\omega(x_n)}{2}$$

Donc on a  $\frac{\omega(x_n)}{2} \leq h_j^k(x)$ .



Donc  $\forall j \in J_2(\hat{t})$

$$\begin{cases} d_0(\hat{t}, x_n) < -h_j^k(x) + \omega(x_n) \leq \frac{\omega(x_n)}{2} \\ d_0(\hat{t}, x_n) < \frac{\omega(x_n)}{2} \leq h_j^k(x) \end{cases}$$

•  $j \notin J_1(\hat{t}) \cup J_2(\hat{t})$

$$d_0(\hat{t}, x_n) < h_j(\hat{t})$$

et

$$d_0(\hat{t}, x_n) < -h_j(\hat{t}) + \omega(x_n)$$

$$x = \hat{t} + \varepsilon_k d \quad \lim_k x = \hat{t}.$$

Donc pour  $k$  assez grand

$$d_0(\hat{t}, x_n) < h_j^k(x)$$

$$d_0(\hat{t}, x_n) < -h_j^k(x) + \omega(x_n)$$

Conclusion

$$d_0^k(x, x_n) = \text{Min}\{h_j^k(x), j = 1 \dots m ; -h_j^k(x) + \omega(x_n), j = 1 \dots m\}$$

en utilisant les résultats précédents, on obtient :

$$\begin{cases} d_0(\hat{t}, x_n) < d_0^k(x, x_n) \\ x \in V(\hat{t}) \cap D(x_n) \end{cases} \quad \text{pour } k \text{ assez grand}$$

d'où la contradiction avec l'optimalité locale de  $\hat{t}$ .

Proposition II.1.2.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad d_0(x_n) = \frac{\omega(x_n)}{2}$$

Démonstration

$$d_0(x_n) = \text{Max}_{t \in D(x_n)} d_0(t, x_n)$$

Donc  $d_0(x_n) =$  valeur de l'optimum global.

$$\Rightarrow d_0(x_n) = \frac{\omega(x_n)}{2} \quad (\text{Proposition précédente}).$$

Proposition II.1.3.

Si on note  $\hat{t}$  un optimum de la fonction  $d(\cdot, z_n, x_n)$  sur  $E(x_n, z_n)$ ,  $z_n$  étant déterminé par le i) de l'algorithme. Alors

$$d(\hat{t}, z_n, x_n) = f(\hat{t}) - f(z_n)$$

Démonstration

$$d(\hat{t}, z_n, x_n) = \text{Min}\{d_0(\hat{t}, x_n) ; f(\hat{t}) - f(z_n)\}$$

On suppose que  $d(\hat{t}, z_n, x_n) = d_0(\hat{t}, x_n) < f(\hat{t}) - f(z_n)$  et on montre que ceci entraîne la non-optimalité du point  $\hat{t}$  par rapport à la fonction  $d(\cdot, z_n, x_n)$  sur  $E(x_n, z_n)$ .

\* Par construction on a :

$$d(\hat{t}, z_n, x_n) < d_0(x_n) = \frac{\omega(x_n)}{2}$$

$$\text{ce qui entraîne } d_0(\hat{t}, x_n) < \frac{\omega(x_n)}{2}$$

En utilisant le résultat de la proposition II.1.1, on obtient que  $\hat{t}$  ne peut être un optimum local du problème : Maximiser  $\{d_0(t, x_n), t \in D(x_n)\}$

Donc

$$(1) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists t \in B(\hat{t}, \varepsilon) \cap D(x_n) \text{ tel que } d(t, x_n) > d_0(\hat{t}, x_n)$$

\* la fonction  $t \mapsto f(t) - f(z_n)$  est continue.

Donc on a :

$$\forall \alpha > 0 \quad \exists \varepsilon_1 > 0 \text{ tel que } \forall t \in B(\hat{t}, \varepsilon_1) \\ - \alpha < [f(t) - f(z_n)] - [f(\hat{t}) - f(z_n)] < \alpha$$

En particulier

$$\forall \alpha > 0 \quad \exists \varepsilon_1 > 0 \text{ tel que } \forall t \in B(\hat{t}, \varepsilon_1)$$

$$f(t) - f(z_n) > f(\hat{t}) - f(z_n) - \alpha$$

$$\text{Si on prend } \alpha = f(\hat{t}) - f(z_n) - d_0(\hat{t}, x_n)$$

$\alpha > 0$  par hypothèse.

On a :

$$(2) \quad \exists \varepsilon_1 > 0 \text{ tel que } \forall t \in B(\hat{t}, \varepsilon_1) \quad f(t) - f(z_n) > d_0(\hat{t}, x_n)$$

Conclusion :

En prenant  $\varepsilon = \varepsilon_1$  dans (1) et en utilisant (2), on obtient



$$\exists t \in B(\hat{t}, \varepsilon_1) \cap D(x_n) \text{ tel que } \begin{cases} d_0(t, x_n) > d_0(\hat{t}, x_n) \\ \text{et} \\ f(t) - f(z_n) > d_0(\hat{t}, x_n) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists t \in B(\hat{t}, \varepsilon_1) \cap D(x_n) \text{ tel que } d(t, z_n, x_n) > d_0(\hat{t}, x_n).$$

$$\text{Mais par hypothèse, on a : } d_0(\hat{t}, x_n) = d(\hat{t}, z_n, x_n)$$

ce qui donne :

$$\exists t \in B(\hat{t}, \varepsilon_1) \cap D(x_n) \text{ tel que } d(t, z_n, x_n) > d(\hat{t}, z_n, x_n).$$

On a déterminé un point  $t \in E(x_n, z_n)$  qui vérifie :  $d(t, z_n, x_n) > d(\hat{t}, z_n, x_n)$

$\Rightarrow \hat{t}$  n'est pas solution optimale de la fonction  $d(\cdot, z_n, x_n)$  sur  $E(x_n, z_n)$ .

L'hypothèse de départ est donc fausse

$$\Rightarrow d(\hat{t}, z_n, x_n) = f(\hat{t}) - f(z_n).$$

#### Proposition II.1.4.

Tout point d'accumulation  $\bar{z}$  de la suite  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  construite par l'algorithme vérifie :  $f(\bar{z}) \geq f(\hat{x})$ .

Démonstration :

\* La suite  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est contenue dans le compact  $D(x_0)$ , donc il existe au moins une sous-suite convergente extraite de  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$\text{On note } \bar{z} = \lim_{\mathbb{N}'} z_n \quad \mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow f(\bar{z}) = \lim_{\mathbb{N}'} f(z_n) \text{ car } f \text{ continue.}$$

On suppose que  $f(\bar{z}) < f(\hat{x})$  et on va montrer que ceci est impossible.

- On montre en premier lieu que :

$$\exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall t \in B(\bar{x}, \eta) \\ f(t) - f(z_n) > \frac{\omega(x_n)}{2} \\ \text{pour } n \text{ assez grand}$$

- Puis on montre que dans toute boule  $B(\bar{x}, \eta)$ , il existe des points  $t$  qui vérifient

$$d_0(t, x_n) = \frac{\omega(x_n)}{2}$$

pour  $n$  assez grand.

Ce qui entraîne que pour  $n$  assez grand

$$\exists t \in B(\bar{x}, \eta) \text{ tel que } d(t, z_n, x_n) = \frac{\omega(x_n)}{2}$$

Ce qui est en contradiction avec le choix du point  $z_n$  [par le i) de l'algorithme]

$$\text{Max}_{t \in E(x_n, z_n)} d(t, z_n, x_n) < d_0(x_n) = \frac{\omega(x_n)}{2}$$

Premier point :

- \* La continuité de la fonction  $f$  implique :

$$\forall \alpha > 0 \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall t \in B(\bar{x}, \eta) \\ -\alpha \leq f(t) - f(\bar{x}) \leq \alpha$$

en particulier

$$\forall \alpha > 0 \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall t \in B(\bar{x}, \eta) \quad f(t) \geq f(\bar{x}) - \alpha$$

Si on prend  $\alpha = \frac{2}{3} [f(\bar{x}) - f(\bar{z})]$  on remarque que  $\alpha > 0$  par hypothèse

$$\Rightarrow (1) \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall t \in B(\bar{x}, \eta) \quad f(t) \geq \frac{1}{3} f(\bar{x}) + \frac{2}{3} f(\bar{z}).$$

\* D'autre part  $\lim_{\mathbb{N}'} f(z_n) = f(\bar{z})$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N' \in \mathbb{N}'$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}' \quad n \geq N'$

$$f(\bar{z}) - f(z_n) \geq -\varepsilon$$

Si on prend  $\varepsilon = \frac{1}{6} [f(\bar{x}) - f(\bar{z})]$

on remarque que  $\varepsilon > 0$  par hypothèse

$\Rightarrow$  (2)  $\exists N' \in \mathbb{N}'$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}'$

$$f(\bar{z}) - f(z_n) \geq \frac{1}{6} [f(\bar{z}) - f(\bar{x})]$$

$n \geq N'$

\* En utilisant les résultats (1) et (2), on obtient :

$$\begin{array}{l} \exists \eta > 0 \quad \forall t \in B(\bar{x}, \eta) \\ \text{tels que} \quad f(t) - f(z_n) \geq \frac{f(\bar{x}) - f(\bar{z})}{6} \\ \exists N' \in \mathbb{N}' \quad \forall n \in \mathbb{N}' \quad n \geq N' \end{array}$$

Mais par construction  $\omega(x_n)$  converge vers zéro

Donc  $\exists N''$  tel que  $\forall n \geq N'' \quad \omega(x_n) < \frac{f(\bar{x}) - f(\bar{z})}{3}$

ce qui donne le résultat suivant :

$$(3) \quad \begin{array}{l} \exists \eta > 0 \quad \forall t \in B(\bar{x}, \eta) \\ \text{tels que} \quad f(t) - f(z_n) > \frac{\omega(x_n)}{2} \\ \exists N_1 \in \mathbb{N}' \quad \forall n \in \mathbb{N}' \quad n \geq N_1 \end{array}$$

Deuxième point :

On considère l'ensemble  $H(x_n)$  suivant :

$$H(x_n) = \left\{ \hat{t} \in \mathbb{R}^n : d_0(\hat{t}, x_n) = \frac{\omega(x_n)}{2} \right\}$$

i)  $H(x_n) \neq \emptyset$  car l'optimum du problème  $\text{Max}\{d_0(t, x_n), t \in D(x_n)\}$  existe et appartient à  $H(x_n)$ .

$$\text{ii) } H(x_n) = \{\tilde{t} \in \mathbb{R}^n : h_j(\tilde{t}) = \frac{\omega(x_n)}{2} \quad j = 1 \dots m\}$$

en effet  $d_0(t, x_n) = \text{Min}\{h_j(t), j = 1 \dots m ; -h_j(t) + \omega(x_n) \quad j = 1 \dots m\}$

il est évident que si  $\tilde{t} \in H(x_n)$

$$\text{Alors } \frac{\omega(x_n)}{2} \leq h_j(\tilde{t}) \quad j = 1 \dots m$$

Si on suppose que  $h_{j_0}(\tilde{t}) > \frac{\omega(x_n)}{2}$

$$\text{on a } -h_{j_0}(\tilde{t}) + \omega(x_n) < \frac{\omega(x_n)}{2}$$

ce qui est impossible.

iii) On va montrer que :

$$(4) \quad \forall \eta > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N \quad B(\hat{x}, \eta) \cap H(x_n) \neq \emptyset.$$

$\Lambda$  = ouvert de  $\mathbb{R}$  qui contient zéro

$B(\hat{x}, \eta)$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

On considère la fonction :

$$F : B(\hat{x}, \eta) \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$(x, \lambda) \rightarrow \begin{bmatrix} h_1(x) - \lambda \\ \vdots \\ h_m(x) - \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, \lambda) \\ \vdots \\ f_m(x, \lambda) \end{bmatrix}$$

$$(\hat{x}, 0) \in V = \bigcap_{\alpha=1}^m (f_\alpha)^{-1}(0) = \{(x, \lambda) \in B(\hat{x}, \eta) \times \Lambda : h_\alpha(x) = \lambda\} \\ \alpha = 1 \dots m \}$$

Les gradients des fonctions  $h_j$  calculés en  $\hat{x}$  sont linéairement indépendants par hypothèse.

On note  $I = \{i_1, \dots, i_m\}$   $m$  indices distincts compris entre 1 et  $n$ ,  
tels que le jacobien  $\frac{\partial F}{\partial x_I}(\bar{x})$  soit inversible  $\bar{I} = \{j_1, \dots, j_{n-m}\}$  les indices  
restants compris entre 1 et  $n$ .

On applique le théorème des fonctions implicites

$\Rightarrow \exists \Omega(\bar{x}, 0)$  voisinage de  $(\bar{x}, 0)$  dans  $B(\bar{x}, \eta) \times \Lambda$

tel que :  $\phi : \Omega(\bar{x}, 0) \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$$(x, \lambda) \mapsto [\lambda, x_{\bar{I}}, f_1(x, \lambda), \dots, f_m(x, \lambda)]$$

$\phi$  est un homéomorphisme de  $\Omega(\bar{x}, 0)$  dans  $\phi(\Omega(\bar{x}, 0))$  qui est un ouvert  
de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Donc  $\exists \varepsilon > 0$

$\exists V(\bar{x})$  voisinage de  $\bar{x}$  dans  $B(\bar{x}, \eta)$

tel que  $V(\bar{x}) \times ]-\varepsilon, \varepsilon[ \subset \Omega(\bar{x}, 0)$ .

Donc si on prend  $\lambda \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$

$$x_{\bar{I}} = \bar{x}_{\bar{I}}$$

Il existe  $x_I$  tel que  $(x_I, x_{\bar{I}}) \in V(\bar{x})$

$$\phi(x, \lambda) = (\lambda, \bar{x}_{\bar{I}}, 0, \dots, 0)$$

c'est-à-dire que  $\forall j = 1, \dots, m$

$$h_j(x_I, \bar{x}_{\bar{I}}) = \lambda$$

Si on note  $\lambda_n = \frac{\omega(x_n)}{2}$

$$\lim_n \lambda_n = 0$$

Donc pour  $n$  assez grand  $\lambda_n \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$

ce qui entraîne qu'il existe  $x_I$  tel que

$$x = (x_I, \hat{x}_{\bar{I}}) \in V(\hat{x})$$

$$\phi(x_I, \hat{x}_{\bar{I}}, \lambda_n) = (\lambda_n, \hat{x}_{\bar{I}}, 0, \dots, 0)$$

c'est-à-dire

$$\exists x \in B(\hat{x}, \eta) \text{ tel que } h_j(x) = \lambda_n = \frac{\omega(x_n)}{2}$$

$$j = 1 \dots m$$

Donc on a déterminé dans la boule  $B(\hat{x}, \eta)$  un point  $t$  qui vérifie

$$d_0(t, x_n) = \frac{\omega(x_n)}{2} \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

En utilisant les remarques initiales et les résultats (3) et (4), on obtient :

$$f(\bar{z}) \geq f(\hat{x})$$

### Proposition II.1.5.

Tout point d'accumulation  $\bar{x}$  de la suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  construite par l'algorithme, vérifie :

$$f(\bar{x}) \geq f(\hat{x})$$

$$h(\bar{x}) = 0$$

### Démonstration

\* La suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  construite par l'algorithme est contenue dans le compact  $D(x_0)$ . Il est donc toujours possible d'extraire une sous-suite convergente

$$\lim_{N'} x_n = \bar{x} \quad N' \subset \mathbb{N}$$

\* La suite  $\{z_{n-1}\}_{n \in \mathbb{N}'}$  est aussi contenue dans le compact  $D(x_0)$ . Il est donc possible d'extraire une sous-suite convergente.

$$\lim_{\mathbb{N}''} z_{n-1} = \bar{z} \quad \mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$$

$$\text{et on a } \lim_{\mathbb{N}''} x_n = \bar{x}$$

\* Par construction on a :

$$f(x_n) \geq f(z_{n-1})$$

par passage à la limite sur  $\mathbb{N}''$  en utilisant la continuité de la fonction  $f$ , on obtient :

$$f(\bar{x}) \geq f(\bar{z})$$

Mais  $f(\bar{z}) \geq f(\bar{x})$  (Proposition II.1.4.). D'où le résultat annoncé

$$f(\bar{x}) \geq f(\bar{x})$$

En utilisant la propriété 1.2, on obtient :  $h(\bar{x}) = 0$ .

La proposition précédente montre que tout point d'accumulation  $\bar{x}$  de la suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  construite par l'algorithme vérifie :

$$f(\bar{x}) \geq f(\bar{x})$$

$$h(\bar{x}) = 0$$

$\bar{x}$  est donc un point réalisable pour le problème initial.

D'autre part,  $\bar{x}$  est une solution optimale de ce problème, ce qui entraîne le théorème suivant.

Théorème II.1.

Tout point d'accumulation  $\bar{x}$  de la suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  construite par l'algorithme est solution optimale du problème initial :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } f(t) \\ h_j(t) = 0 \quad j = 1 \dots m \\ t \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

Remarque : Dans la démonstration de la proposition II.1.4. : on utilise uniquement  $f(x_{n+1}) \geq f(z_n)$ .

Donc dans l'algorithme, il suffit de prendre  $x_{n+1} \in E(x_n, z_n)$ , mais pas forcément un point qui maximise la F-distance.

II.2. Problème avec des égalités, des inégalités et un polyèdre B1) Introduction

On s'intéresse maintenant au problème général

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } f(t) \\ g_i(t) \geq 0 \quad i = 1 \dots p \\ h_j(t) = 0 \quad j = 1 \dots m \\ t \in B \end{array} \right.$$

où les fonctions du problème sont continûment différentiables

$B = \{t \in \mathbb{R}^n : At \geq b\}$  polyèdre compact

A matrice (q lignes, n colonnes)

$b \in \mathbb{R}^q$

Hypothèses

- i) Le domaine réalisable de (P) est non vide, il existe au moins une solution optimale, que l'on note  $\hat{x}$ .



$$\text{ii) } \forall \varepsilon > 0 \quad \mathcal{D}(\varepsilon) = \left\{ t \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} g_i(t) \geq 0 \quad i = 1 \dots p \\ 0 \leq h_j(t) \leq \varepsilon \quad j = 1 \dots m \end{array} \right\}$$

vérifie  $B \cap \overset{\circ}{\mathcal{D}}(\varepsilon) \neq \emptyset$

$$\text{fr}(\mathcal{D}(\varepsilon)) = \left. \begin{array}{l} \{ t \in \mathcal{D}(\varepsilon) : \exists i_0 \text{ tel que } g_{i_0}(t) = 0 \\ \text{ou} \\ \exists j_0 \text{ tel que } h_{j_0}(t) = 0 \\ \text{ou} \\ \exists j_1 \text{ tel que } h_{j_1}(t) = \varepsilon \} \end{array} \right\}$$

iii)  $\forall \tilde{t} \in \mathcal{D}(\varepsilon)$  on note

$$\gamma(\tilde{t}) = \min\{g_i(\tilde{t}), i = 1 \dots p ; h_j(\tilde{t}), j = 1 \dots m ; -h_j(\tilde{t}) + \varepsilon, j = 1 \dots m\}$$

$$I(\tilde{t}) = \{i = 1 \dots p / g_i(\tilde{t}) = \gamma(\tilde{t})\}$$

$$J_1(\tilde{t}) = \{j = 1 \dots m / h_j(\tilde{t}) = \gamma(\tilde{t})\}$$

$$J_2(\tilde{t}) = \{j = 1 \dots m / -h_j(\tilde{t}) + \varepsilon = \gamma(\tilde{t})\}$$

$$L(\tilde{t}) = \{\ell = 1 \dots q / A^\ell \tilde{t} = b_\ell\}$$

$J(\tilde{t})$  : Matrices dont les lignes sont

$$\nabla g_i(\tilde{t}) \quad i \in I(\tilde{t})$$

$$\nabla h_j(\tilde{t}) \quad j \in J_1(\tilde{t})$$

$$-\nabla h_j(\tilde{t}) \quad j \in J_2(\tilde{t})$$

en tout point  $\tilde{t}$  qui vérifie  $\gamma(\tilde{t}) \neq \frac{\varepsilon}{2}$  on suppose que

$$\{d \in \mathbb{R}^n : J(\tilde{t}) d > 0\} \cap \{d \in \mathbb{R}^n : A^{L(\tilde{t})} d \geq 0\} \neq \emptyset$$

iv)  $\{\nabla h_j(\tilde{x}), j = 1 \dots m ; \nabla g_i(\tilde{x}), i \in I(\tilde{x}) ; A^\ell, \ell \in L(\tilde{x})\}$  est une famille de vecteurs linéairement indépendants.

$$\text{v) } \text{Fr}\{t / f(t) \geq \lambda\} = \{t / f(t) = \lambda\}$$

Notations

Pour tout  $x \in B$  vérifiant  $h_j(x) > 0 \quad j = 1 \dots m$   
 $g_i(x) > 0 \quad i = 1 \dots p$

On note :  $\omega(x) = \frac{1}{2} \text{Max}_{j=1 \dots m} \{h_j(x)\}$

$$D(x) = \left. \begin{array}{l} \{t \in B \text{ tel que } g_i(t) \geq 0 \quad i = 1 \dots p \\ 0 \leq h_j(t) \leq \omega(x) \quad j = 1 \dots m\} \end{array} \right\}$$

$$d_0(t, x) = \text{Min}\{g_i(t), i = 1 \dots p ; h_j(t), j = 1 \dots m ; \\ -h_j(t) + \omega(x) \quad j = 1 \dots m\}$$

$$d_0(x) = \text{Max}_{t \in D(x)} d_0(t, x)$$

Soit  $z$  un point de  $D(x)$ , on pose :

$$E(x, z) = D(x) \cap \{t \in \mathbb{R}^n : f(t) \geq f(z)\}$$

$$d(t, z, x) = \text{Min}\{d_0(t, x) ; f(t) - f(z)\}$$

2) Algorithme

\* Initialisation :

On dispose d'un point de départ  $x_0$  qui vérifie

$$h_j(x_0) > 0 \quad j = 1 \dots m$$

$$g_i(x_0) > 0 \quad i = 1 \dots p$$

$$x_0 \in B$$

Remarque : Eventuellement, on change  $h_j(\cdot)$  en  $-h_j(\cdot)$  pour avoir un point de départ vérifiant cette hypothèse.

\* Itération k : on connaît un point  $x_k \in B$  tel que

$$g_i(x_k) > 0 \quad i = 1 \dots p$$

$$h_j(x_k) > 0 \quad j = 1 \dots m$$

i) Chercher  $z_k \in D(x_k)$  tel que :

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & d(t, z_k, x_k) < d_0(x_k) \\ & t \in E(x_k, z_k) \end{aligned}$$

ii) On prend  $x_{k+1}$  un point qui réalise ce maximum

Fin de l'itération.

Remarque 0 : On verra par la suite qu'il suffit de prendre  $x_{k+1} \in E(x_k, z_k)$  dans ii).

Remarque 1 : On a  $d_0(x_k) > 0$

En effet  $d_0(x_k) = \text{Max}_{t \in D(x_k)} d_0(t, x_k)$ . Par définition  $\omega(x_k) > 0$ .

En utilisant l'hypothèse ii), le maximum de la fonction continue  $d(\cdot, x_k)$  sur  $D(x_k)$  est atteint en un point de  $B \cap \overset{\circ}{D}(\omega(x_k))$  qui est bien non vide.

Remarque 2 : Il est toujours possible de trouver un point  $z_k \in D(x_k)$  tel que :

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & d(t, z_k, x_k) < d_0(x_k) \\ & t \in E(x_k, z_k) \end{aligned}$$

en effet, on peut faire une démonstration identique à celle de la remarque 2 du II.1.2.

### 3) Propriétés

#### Propriété II.2.1.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \omega(x_{n+1}) \leq \frac{\omega(x_n)}{2}$$

Propriété 11.2.2.

Tout point d'accumulation  $\bar{x}$  de la suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  construite par l'algorithme précédent vérifie :

$$\begin{aligned} h(\bar{x}) &= 0 \\ g(\bar{x}) &\geq 0 \\ \bar{x} &\in B \end{aligned}$$

Propriété 11.2.3.

$$\begin{aligned} \text{Max}_{t \in D(x_n)} d_0(t, x_n) &= \text{Max}_{t \in B} d_0(t, x_n) \end{aligned}$$

Propriété 11.2.4.

$$\begin{aligned} \text{Max}_{t \in E(x_n, z_n)} d(t, z_n, x_n) &= \text{Max}_{t \in B \cap \{f(t) \geq f(z_n)\}} d(t, z_n, x_n) \end{aligned}$$

Remarque : Les démonstrations de ces propriétés sont identiques à celles proposées dans II.1.3.

4) Convergence de l'algorithmeProposition 11.2.1.

Tout optimum local  $\hat{t}$  du problème

$$\text{Max}\{d_0(t, x_n), t \in D(x_n)\}$$

$$\text{vérifie } d_0(\hat{t}, x_n) = \frac{\omega(x_n)}{2}$$

Démonstration :

$$d_0(\hat{t}, x_n) = \text{Min}\{g_i(\hat{t}), i = 1 \dots p; h_j(\hat{t}), j = 1 \dots m; -h_j(\hat{t}) + \omega(x_n); j = 1 \dots m\}$$

$$\text{Donc } d_0(\hat{t}, x_n) \leq \frac{\omega(x_n)}{2}$$

Supposons que  $d_0(\hat{t}, x_n) < \frac{\omega(x_n)}{2}$  et montrons que cela entraîne une contradiction avec l'optimalité.

On va générer une direction  $d$ , telle que la fonction  $d_0(\cdot, x_n)$  soit croissante dans cette direction.

$\hat{t}$  étant un optimum local du problème  $\{\text{Max } d_0(t, x_n), t \in D(x_n)\}$

$\Rightarrow \exists V(\hat{t})$  voisinage de  $\hat{t}$  tel que  $\forall t \in V(\hat{t}) \cap D(x_n)$

$$d_0(t, x_n) \leq d_0(\hat{t}, x_n)$$

On note  $I(\hat{t}) = \{i = 1 \dots p / g_i(\hat{t}) = d_0(\hat{t}, x_n)\}$

$$J_1(\hat{t}) = \{j = 1 \dots m / h_j(\hat{t}) = d_0(\hat{t}, x_n)\}$$

$$J_2(\hat{t}) = \{j = 1 \dots m / -h_j(\hat{t}) + \omega(x_n) = d_0(\hat{t}, x_n)\}$$

$$L(\hat{t}) = \{\ell = 1 \dots q / A^\ell \hat{t} = b_\ell\}$$

On détermine, une direction  $d$  qui vérifie

$$(\nabla g_i(\hat{t}), d) > 0 \quad i \in I(\hat{t})$$

$$(\nabla h_j(\hat{t}), d) > 0 \quad j \in J_1(\hat{t})$$

$$(-\nabla h_j(\hat{t}), d) > 0 \quad j \in J_2(\hat{t})$$

$$A^\ell d \geq 0 \quad \ell \in L(\hat{t})$$

ceci est toujours possible [hypothèse iii)]

On pose  $x^k = \hat{t} + \epsilon_k d$  avec  $\{\epsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  suite de nombres positifs convergente vers zéro.

\* pour  $k$  assez grand  $x^k \in V(\hat{t})$ .

•  $j \in J_1(\hat{t})$  on montre facilement [démonstration de la proposition II.1.1] que :

$$\begin{cases} d_0(\hat{t}, x_n) < h_j(x^k) \leq \frac{\omega(x_n)}{2} \\ d_0(\hat{t}, x_n) < \frac{\omega(x_n)}{2} \leq -h_j(x^k) + \omega(x_n) \end{cases}$$

- $j \in J_2(\hat{t})$  on a :

$$\begin{cases} d_0(\hat{t}, x_n) < -h_j^k(x) + \omega(x_n) \leq \frac{\omega(x_n)}{2} \\ d_0(\hat{t}, x_n) < \frac{\omega(x_n)}{2} \leq h_j^k(x) \end{cases}$$

- $j \notin J_1(\hat{t}) \cup J_2(\hat{t})$

Pour  $k$  assez grand

$$d_0(\hat{t}, x_n) < h_j^k(x)$$

$$d_0(\hat{t}, x_n) < -h_j^k(x) + \omega(x_n)$$

- $i \in I(\hat{t})$   $g_i(\hat{t}) = d_0(\hat{t}, x_n)$  et  $(\nabla g_i(\hat{t}), d) > 0$

$$g_i^k(x) = g_i(\hat{t}) + \epsilon_k (\nabla g_i(\hat{t}), d) + o(\epsilon_k)$$



$o(\epsilon_k)$  étant un infiniment petit par rapport à  $\epsilon_k$ .

Donc pour  $k$  assez grand, on a

$$g_i(\hat{t}) < g_i^k(x)$$

$$\text{Donc } d_0(\hat{t}, x_n) < g_i^k(x)$$

- \*  $i \notin I(\hat{t})$   $g_i(\hat{t}) > d_0(\hat{t}, x_n)$

Donc pour  $k$  assez grand  $g_i^k(x) > d_0(\hat{t}, x_n)$

- si  $l \in L(\hat{t})$  on a  $A^l \hat{t} = b_l$   $A^l d \geq 0$   
si  $l \notin L(\hat{t})$  on a  $A^l \hat{t} > b_l$

$$A x - b = A \hat{t} - b + \epsilon_k A d$$

le choix de la direction  $d$  entraîne  $A x - b \geq 0$ .

Donc  $x \in B$ .

Conclusion

On a  $x \in V(\hat{t}) \cap D(x_n)$  pour  $k$  assez grand

et  $d_0^k(x, x_n) = \text{Min}\{g_i^k(x) \text{ ; } i = 1 \dots p \text{ ; } h_j^k(x), j = 1 \dots m \text{ ; } -h_j^k(x) + \omega(x_n), j = 1 \dots$

$$d_0^k(x, x_n) > d_0^k(\hat{t}, x_n)$$

D'où la contradiction avec l'optimalité locale de  $\hat{t}$ .

Proposition II.2.2.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad d_0(x_n) = \frac{\omega(x_n)}{2}$$

Démonstration

Identique à celle de la proposition II.1.2.

Proposition II.2.3.

Si on note  $\hat{t}$  un optimum de la fonction  $d(\cdot, z_n, x_n)$  sur  $E(x_n, z_n)$ .

Alors  $d(\hat{t}, z_n, x_n) = f(\hat{t}) - f(z_n)$ .

Démonstration

$$d(\hat{t}, z_n, x_n) = \text{Min}\{d_0(\hat{t}, x_n) \text{ ; } f(\hat{t}) - f(z_n)\}$$

On suppose que  $d(\hat{t}, z_n, x_n) = d_0(\hat{t}, x_n) < f(\hat{t}) - f(z_n)$  et on montre que ceci entraîne la non optimalité du point  $\hat{t}$ .

La démonstration est identique à celle de la proposition II.1.3.

Proposition II.2.4.

Tout point d'accumulation  $\bar{z}$  de la suite  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  construite par l'algorithme vérifie :  $f(\bar{z}) \geq f(\bar{x})$ .

Démonstration

- \* La suite  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est contenue dans le compact B, dont il existe au moins une sous-suite convergente extraite de  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

On note  $\bar{z} = \lim_{\substack{z_n \\ \mathbb{N}'}} z_n \quad \mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$

$\Rightarrow f(\bar{z}) = \lim_{\substack{z_n \\ \mathbb{N}'}} f(z_n) \quad (\text{continuité de } f)$

On suppose que  $f(\bar{z}) < f(x)$  et on va montrer que ceci est impossible.

- On montre en premier lieu que :

$$\exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall t \in B(\bar{x}, \eta) \quad \omega(x_n) \\ f(t) - f(z_n) > \frac{\omega(x_n)}{2} \\ \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

La démonstration est identique à celle proposée pour la proposition II.1.4.

- Puis on montre que dans toute Boule  $B(\bar{x}, \eta)$  il existe des points  $t$  qui vérifient :

$$d_0(t, x_n) = \frac{\omega(x_n)}{2}$$

pour  $n$  assez grand.

Ce qui entraîne que pour  $n$  assez grand  $\exists t \in B(\bar{x}, \eta)$  tel que

$d(t, z_n, x_n) = \frac{\omega(x_n)}{2}$  ce qui est en contradiction avec le choix du point  $z_n$ , c'est-à-dire :

$$\text{Max}_{t \in E(x_n, z_n)} d(t, z_n, x_n) < \frac{\omega(x_n)}{2}$$



\* Il reste à montrer que :

$$\forall \eta > 0 \quad \exists N(\eta) \text{ tel que } \forall n \geq N(\eta) \quad \exists t \in B(\bar{x}, \eta)$$

$$\text{vérifiant } d_0(t, x_n) = \frac{\omega(x_n)}{2}$$

Pour cela on note :

$$H(x_n) = \left\{ \hat{t} \in B \mid d_0(\hat{t}, x_n) = \frac{\omega(x_n)}{2} \right\}$$

i)  $H(x_n) \neq \emptyset$  car l'optimum du problème  $\text{Max}_{t \in D(x_n)} d_0(t, x_n)$  existe et appartient à cet ensemble.

ii) On considère les partitionnements suivants :

$$\begin{cases} g_{I_1}(\bar{x}) = 0 \\ g_{I_2}(\bar{x}) > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} A^{L_1} \bar{x} = b_{L_1} \\ A^{L_2} \bar{x} = b_{L_2} \end{cases}$$

Soit  $\eta > 0$

On note  $\alpha = \text{Min} \{g_i(\bar{x}), i \in I_2\}$

On peut toujours trouver un voisinage  $\Omega(\bar{x})$  de  $\bar{x}$  contenue dans  $B(\bar{x}, \eta)$  qui vérifie

$$\forall t \in \Omega(\bar{x}) \quad g_i(t) > \frac{\alpha}{2} \quad i \in I_2$$

$$A^{L_2} t > b_{L_2}$$

$\wedge$  ouvert de  $\mathbb{R}$  qui contient zéro.

On considère la fonction  $F$  :

$$F : \Omega(\bar{x}) \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^k \quad h = m + |I_1| + |L_1|$$

$$(x, \lambda) \rightarrow \begin{bmatrix} h_1(x) - \lambda \\ \vdots \\ h_m(x) - \lambda \\ g_i(x) - \lambda \quad i \in I_1 \\ A^\ell x - b_\ell \quad \ell \in L_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, \lambda) \\ \vdots \\ f_k(x, \lambda) \end{bmatrix}$$

$$(\bar{x}, 0) \in V = \bigcap_{\alpha=1}^k (f_\alpha)^{-1}(0) = \left. \begin{aligned} \{(x, \lambda) \in \Omega(\bar{x}) \times \Lambda : h_j(x) = \lambda \quad j = 1 \dots m\} \\ \{g_i(x) = \lambda \quad i \in I_1\} \\ \{A^\ell x - b_\ell = \lambda \quad \ell \in L_1\} \end{aligned} \right\}$$

Par hypothèse  $\{\nabla h_j(\bar{x}), j = 1 \dots m ; \nabla g_i(\bar{x}), i \in I_1, A^\ell, \ell \in L_1\}$  est une famille de vecteurs linéairement indépendants.

On note  $I = \{i_1 \dots i_k\}$   $k$  indices compris entre 1 et  $n$  tels que le

jacobien  $\frac{\partial F}{\partial x_I}(\bar{x})$  soit une matrice inversible

$\bar{I} = \{j_1 \dots j_{n-k}\}$  les indices restants compris entre 1 et  $n$ .

On applique le théorème des fonctions implicites

$\Rightarrow \exists \tilde{\Omega}(\bar{x}, 0)$  voisinage de  $(\bar{x}, 0)$  dans  $\tilde{\Omega}(\bar{x}) \times \Lambda$

tel que  $\phi : \tilde{\Omega}(\bar{x}, 0) \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$$(x, \lambda) \rightarrow (\lambda, x_{\bar{I}}, f_1(x, \lambda), \dots, f_k(x, \lambda))$$

$\phi$  est un homéomorphisme de  $\tilde{\Omega}(\bar{x}, 0)$  dans  $\phi(\tilde{\Omega}(\bar{x}, 0))$  qui est un ouvert de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Donc  $\exists \varepsilon > 0$

$\exists V(\bar{x})$  voisinage de  $\bar{x}$  contenu dans  $\Omega(\bar{x}) \subset B(\bar{x}, \eta)$

tel que  $V(\bar{x}) \times ]-\varepsilon, \varepsilon[ \subset \Omega(\bar{x}, 0)$ .

Si on prend  $\lambda \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$

$$x_{\bar{I}} = \bar{x}_{\bar{I}}$$

$\exists! x_{\bar{I}}$  tel que  $(x_{\bar{I}}, x_{\bar{I}}) \in V(\bar{x})$

$$\phi(x_{\bar{I}}, x_{\bar{I}}, \lambda) = (\lambda, \bar{x}_{\bar{I}}, 0 \dots 0)$$

Si on note  $\lambda_n = \frac{\omega(x_n)}{2}$   $\lim_n \lambda_n = 0$

$\exists N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N$   $\lambda_n \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$   
 $\lambda_n \leq \frac{\alpha}{2}$

ce qui entraîne

$\exists! x_{\bar{I}}^n$  tel que  $x^n = (x_{\bar{I}}^n, \bar{x}_{\bar{I}}^n) \in V(\bar{x})$

$$h_j(x) = \frac{\omega(x_n)}{2} \quad j = 1 \dots m$$

$$g_i(x) = \frac{\omega(x_n)}{2} \quad i \in I_1$$

$$g_i(x) \geq \frac{\omega(x_n)}{2} \quad i \in I_2$$

$$A^\ell x - b_\ell = \frac{\omega(x_n)}{2} \quad \ell \in L_2$$

$$A^\ell x - b_\ell \geq 0 \quad \ell \in L_2$$

Donc on a déterminé un point  $x^n \in B(\bar{x}, \eta) \cap B$  tel que  $d_0(x, x_n) = \frac{\omega(x_n)}{2}$

pour  $n$  assez grand en utilisant les remarques initiales, on obtient  $f(\bar{z}) \geq f(\bar{x})$ .

Proposition II.2.5.

Tout point d'accumulation  $\bar{x}$  de la suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  construite par l'algorithme, vérifie :

$$f(\bar{x}) \geq f(\hat{x}) \text{ et } \begin{cases} g(\bar{x}) \geq 0 \\ h(\bar{x}) = 0 \\ \bar{x} \in B \end{cases}$$

La démonstration de cette proposition est identique à celle proposée pour la proposition II.1.5. La proposition II.2.5 montre que le point  $\bar{x}$  est réalisable pour le problème initial. D'autre part  $\hat{x}$  est une solution optimale de ce problème.

Théorème II.2.

Tout point d'accumulation  $\bar{x}$  de la suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  construite par l'algorithme est solution optimale du problème initial :

$$(P) \quad \begin{cases} \text{maximiser } f(t) \\ g_i(t) \geq 0 \quad i = 1 \dots p \\ h_j(t) = 0 \quad j = 1 \dots m \\ t \in B \end{cases}$$

Remarque : Dans la démonstration de la proposition II.2.4, on utilise uniquement la relation :  $f(x_{n+1}) \geq f(z_n)$ .

Donc dans l'algorithme, il suffit de prendre

$$x_{n+1} \in E(x_n, z_n)$$

mais pas forcément un point qui maximise la fonction  $d(\cdot, z_n, x_n)$  sur  $E(x_n, z_n)$ .

### II.3. Problème avec des contraintes en égalité et en inégalité

Si on considère le problème

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } f(t) \\ g_i(t) \geq 0 \quad i = 1 \dots p \\ h_j(t) = 0 \quad j = 1 \dots m \\ t \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

où les fonctions du problème sont continûment différentiables.

#### Hypothèses

i) Le domaine réalisable de (P) est non vide, il existe au moins une solution optimale, notée  $\tilde{x}$ .

ii)  $\exists \bar{\epsilon} > 0 \quad \mathcal{D}(\bar{\epsilon}) = \left\{ t \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} g_i(t) \geq 0 \quad i = 1 \dots p \\ 0 \leq h_j(t) \leq \bar{\epsilon} \quad j = 1 \dots m \end{array} \right\}$  compact

iii)  $\forall \epsilon \in ]0, \bar{\epsilon}] \quad \mathcal{D}(\epsilon) = \left\{ t \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} g_i(t) \geq 0 \quad i = 1 \dots p \\ 0 \leq h_j(t) \leq \epsilon \quad j = 1 \dots m \end{array} \right\}$

vérifie  $\overset{0}{\mathcal{D}}(\epsilon) \neq \emptyset$

et

$$\text{Fr}(\mathcal{D}(\epsilon)) = \left\{ t \in \mathcal{D}(\epsilon) : \begin{array}{l} \exists i_0 \in \{1 \dots p\} \quad g_{i_0}(t) = 0 \\ \text{ou} \\ \exists j_1 \in \{1 \dots m\} \quad h_{j_1}(t) = 0 \\ \text{ou} \\ \exists j_2 \in \{1 \dots m\} \quad h_{j_2}(t) = \epsilon \end{array} \right\}$$

iv)  $\forall \tilde{t} \in \mathcal{D}(\epsilon)$  on note

$$\gamma(\tilde{t}) = \text{Min} \{ g_i(\tilde{t}), i = 1 \dots p; h_j(\tilde{t}), j = 1 \dots m; -h_j(\tilde{t}) + \epsilon, j = 1 \dots m \}$$

$$I(\tilde{t}) = \{ i = 1 \dots p / g_i(\tilde{t}) = \gamma(\tilde{t}) \}$$

$\{ \nabla h_j(\tilde{t}) \quad j = 1 \dots m; \nabla g_i(\tilde{t}), i \in I(\tilde{t}) \}$  est une famille de vecteurs linéairement indépendants.

$$v) \text{Fr} \{t / f(t) \geq \lambda\} = \{t / f(t) = \lambda\}$$

$$\forall \lambda \in [\text{Min}_{t \in \mathcal{D}(\bar{\epsilon})} f(t), \text{Max}_{t \in \mathcal{D}(\bar{\epsilon})} f(t)]$$

### Notations

Pour tout  $x$  qui vérifie :  $h_j(x) > 0 \quad j = 1 \dots m$

$$g_i(x) > 0 \quad i = 1 \dots p$$

On note  $\omega(x) = \frac{1}{2} \text{Max}_{j=1 \dots m} \{h_j(x)\}$

$$D(x) = \left. \left\{ t \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} g_i(t) \geq 0 \quad i = 1 \dots p \\ 0 \leq h_j(t) \leq \omega(x) \quad j = 1 \dots m \end{array} \right\} \right\}$$



$$d_0(t, x) = \text{Min} \{ g_i(t), i = 1 \dots p; h_j(t), j = 1 \dots m; -h_j(t) + \omega(x), j = 1 \dots m \}$$

$$d_0(x) = \text{Max}_{t \in \mathcal{D}(x)} d_0(t, x)$$

Soit  $z$  un point de  $D(x)$ , on pose :

$$E(x, z) = D(x) \cap \{t \in \mathbb{R}^n : f(t) \geq f(z)\}$$

$$d(t, z, x) = \text{Min} \{ d_0(t, x) ; f(t) - f(z) \}$$

### Algorithme

→ Initialisation

On dispose d'une point de départ  $x_0$  qui vérifie

$$g_i(x_0) > 0 \quad i = 1 \dots p$$

$$0 < h_j(x_0) < \bar{\epsilon} \quad j = 1 \dots m$$

→ Itération k :

Soit  $x_k$  le point de départ.

i) Chercher  $z_k \in D(x_k)$  tel que :

$$\text{Max}_{t \in E(x_k, z_k)} d(t, z_k, x_k) < d_0(x_k) = \frac{\omega(x_k)}{2}$$

ii) On prend  $x_{k+1} \in E(x_k, z_k)$

Fin de l'itération.

Sous ces hypothèses, on peut montrer que l'on a le théorème suivant, par un raisonnement identique à celui du paragraphe II.2.

### Théorème II.3.

Tout point d'accumulation  $\bar{x}$  de la suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  construite par l'algorithme est solution optimale du problème (P).

## III. DESCRIPTION D'UN ALGORITHME APPROCHE

### III.1. Introduction

L'algorithme présenté dans le II nécessite la détermination d'un point  $z_n \in D(x_n)$  tel que :

$$\text{Max}_{t \in E(x_n, z_n)} d(t, z_n, x_n) < \frac{\omega(x_n)}{2}$$

On vérifie facilement si  $z_n \in D(x_n)$ , mais par contre la vérification que :

$$\text{Max}_{t \in E(x_n, z_n)} d(t, z_n, x_n) < \frac{\omega(x_n)}{2}$$

est plus difficile.

La détermination d'un centre de  $E(x_n, z_n)$  est impossible par un procédé fini (sauf cas particuliers).

On va utiliser la notion d' $\epsilon$ -centre introduite par HUARD [13].

$\hat{t}$  est dit  $\epsilon$ -centre de  $E(x_n, z_n)$  si

$$d(\hat{t}, z_n, x_n) \geq \text{Max}_{t \in E(x_n, z_n)} d(t, z_n, x_n) - \epsilon$$

$\epsilon$  étant un nombre qui vérifie :

$$0 \leq \epsilon < \text{Max}\{d(t, z_n, x_n), t \in E(x_n, z_n)\}$$

HUARD propose d'un algorithme partiel qui permet de déterminer des  $\epsilon$ -centres.

L'idée est de décomposer chaque itération en deux phases.

1ère phase : Détermination d'un point  $t_0 \in D(x_n)$  à partir du point de départ  $x_n$ , par un procédé fini utilisant l'algorithme partiel de HUARD.

2ème phase : Détermination de  $z_n$  et  $x_{n+1} \in D(x_n)$  tels que  $x_{n+1}$  soit un  $\epsilon$ -centre du tronçon  $E(x_n, z_n)$  par un procédé fini.

### III.2. Algorithme modifié

On conserve les notations et les hypothèses introduites dans le paragraphe II.2 et on pose :

$$\text{Pour } x \text{ et } y \in \left. \begin{array}{l} \{t \in B : g_i(t) \geq 0 \quad i = 1 \dots p\} \\ \{h_j(t) > 0 \quad j = 1 \dots m\} \end{array} \right\}$$

$$\text{On note } F(x, y) = \left. \begin{array}{l} \{t \in B : g_i(t) \geq 0 \quad i = 1 \dots p\} \\ \{0 \leq h_j(t) \leq \text{Max}\{\omega(x), h_j(y)\} \quad j = 1 \dots m\} \end{array} \right\}$$



On considère la famille paramétrée par  $x$  et  $\lambda$

$$G(x, \lambda) = \left. \begin{aligned} &\{t \in B : f(t) \geq \lambda \\ &g_i(t) \geq 0 \quad i = 1 \dots p \\ &0 \leq h_j(t) \leq \omega(x) \quad j = 1 \dots m \end{aligned} \right\}$$

$$= D(x) \cap \{t \in \mathbb{R}^n : f(t) \geq \lambda\}$$

$$\lambda \in \left[ \underset{t \in D(x_0)}{\text{Min}} f(t), \underset{t \in D(x_0)}{\text{Max}} f(t) \right]$$

$x_0$  étant le point de départ.

On suppose que l'on a deux suite  $\{\epsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  et  $\{\eta_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ , chacune d'elles étant une suite décroissante de nombres positifs assez petits qui converge vers zéro.

On note pour  $t \in F(x, y)$  et  $z \in D(x)$ .

$$D(t, F(x, y)) = \text{Min}\{g_i(t), i = 1 \dots p; h_j(t), j = 1 \dots p; -h_j(t) \\ + \text{Max}\{\omega(x), h_j(y)\}; j = 1 \dots m\}$$

$$d(t, z, x) = \text{Min}\{g_i(t), i = 1 \dots p; h_j(t), j = 1 \dots m; -h_j(t) + \omega(x), j = 1 \dots m; \\ f(t) - f(z)\}$$

→ Initialisation

On suppose que l'on a un point de départ  $x_0 \in B$  qui vérifie

$$g_i(x_0) > 0 \quad i = 1 \dots p$$

$$h_j(x_0) > 0 \quad j = 1 \dots m$$

→ Itération n :

$x_n$  point de départ de l'itération.

① Détermination d'un point appartenant à  $D(x_n)$

On pose  $y_0 = x_n$   
 $k = 0$

i) On détermine  $y_{k+1}$  un  $\epsilon_k$ -centre de  $F(x_n, y_k)$

ii) si  $y_{k+1} \in D(x_n)$

On passe en ② avec  $t_0 = y_{k+1}$

sinon on va en i) avec  $k+1$  au lieu de  $k$

② Phase d'optimisation



$t_0$  point de départ  $\in D(x_n)$ , on pose  $h = 0$

i) On note  $\lambda_h = f(t_h)$

ii) on détermine  $t_{h+1}$  un  $\eta_h$ -centre de  $G(x_n, \lambda_h)$

iii) si  $d(t_{h+1}, t_h, x_n) + \eta_h < \frac{\omega(x_n)}{2}$

on pose  $z_n = t_h$

fin de l'itération  $n$

$$x_{n+1} = t_{h+1}$$

sinon on va en i) avec  $h+1$  au lieu de  $h$ .

Fin de l'itération

Remarque : On suppose que les nombres  $\epsilon_k$  sont assez petits pour avoir :

$$0 \leq \epsilon_k < \text{Max}\{D(t, F(x_n, y_k)), t \in F(x_n, y_k)\}$$

De même, on suppose que les nombres  $\eta_h$  vérifient

$$0 \leq \eta_h < \text{Max}\{d(t, t_h, x_n), t \in G(x_n, \lambda_h)\}.$$

### III.3. Propriétés

#### Propriété II.3.1.

La phase ① se termine en un nombre fini d'étapes, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p^* \text{ fini tel que } y_{p^*} \in D(x_n)$$

Démonstration :

Pour simplifier on note I les indices de  $g(\cdot)$

J les indices de  $h(\cdot)$ .

v

Par construction

$$(1) \quad D(y_{p+1}, F(x_n, y_p)) \geq \text{Max}_{t \in F(x_n, y_p)} D(t, x_n, y_p) - \varepsilon_p$$

en supposant que  $\forall p \in \mathbb{N} \quad y_p \notin D(x_n)$ , on montrera dans un premier temps que  $D(y_{p+1}, F(x_n, y_p)) \rightarrow 0 \quad p \xrightarrow{\mathbb{N}''} \infty$  et dans un deuxième temps que cela entraîne

une contradiction avec la relation (1).

\* Dans un premier temps on montre que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \text{Max}_{\mathbb{N}''} D(y_{p+1}, F(x_n, y_p)) = 0 \quad \mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}$$

$$\text{On a } D(y_{p+1}, F(x_n, y_p)) \geq \text{Max}_{t \in F(x_n, y_p)} D(t, F(x_n, y_p)) - \varepsilon_p$$

$$\text{et } 0 \leq \varepsilon_p < \text{Max}_{t \in F(x_n, y_p)} D(t, F(x_n, y_p))$$

$$\Rightarrow D(y_{p+1}, F(x_n, y_p)) > 0$$

$$\Rightarrow \forall p \begin{cases} g_i(y_{p+1}) > 0 \quad \forall i \in I \\ h_j(y_{p+1}) > 0 \quad \forall j \in J \\ -h_j(y_{p+1}) + \text{Max}\{\omega(x_n), h_j(y_p)\} > 0 \quad \forall j \in J \end{cases}$$

On a  $h_j(y_{p+1}) < \text{Max}\{\omega(x_n), h_j(y_p)\} \quad \forall j \in J$

ceci entraîne :  $\text{Max}\{\omega(x_n), h_j(y_{p+1})\} \leq \text{Max}\{\omega(x_n), h_j(y_p)\} \quad \forall j \in J$

ou de manière plus générale

$\forall j \in J$

$$\text{Max}\{\omega(x_n), h_j(y_{p'})\} \leq \text{Max}\{\omega(x_n), h_j(y_p)\}$$

$\forall p' \geq p$

Par hypothèse  $\forall p \quad y_p \notin D(x_n)$

Donc  $\forall p \in \mathbb{N}, \exists j_p \in J$  tel que  $h_{j_p}(y_p) > \omega(x_n)$

$J = \{1, 2, \dots, m\}$  ensemble des indices des composantes de  $h$  est fini.

$p \in \mathbb{N}$  est infini.

Donc  $\exists j_0 \in J$

tels que  $\forall p \in \mathbb{N}' \quad h_{j_0}(y_p) > \omega(x_n)$

$\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$

Si on considère la suite  $\{y_p\}_{p \in \mathbb{N}'}$ , elle est contenue dans un compact.

Il est donc toujours possible d'en extraire une sou-suite convergente.

$\exists \mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}'$  tel que  $\lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ \mathbb{N}''}} y_p = \bar{y}$

$$0 < D(y_p, F(x_n, y_{p-1})) = \text{Min}\{g_i(y_p) \quad i \in I; h_j(y_p) \quad j \in J; -h_j(y_p)$$

$$+ \text{Max}\{\omega(x_n), h_j(y_{p-1})\} \quad j \in J\}$$

$$\leq -h_{j_0}(y_p) + \text{Max}\{\omega(x_n), h_{j_0}(y_{p-1})\}$$

On considère  $p'$  le prédécesseur de  $p$  dans  $\mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}'$ .

Donc on a :

$$0 < D(y_p, F(x_n, y_{p-1})) \leq -h_{j_0}(y_p) + \text{Max}\{\omega(x_n), h_{j_0}(y_{p'})\}$$

$$0 < D(y_p, F(x_n, y_{p-1})) \leq -h_{j_0}(y_p) + h_{j_0}(y_{p'}) \quad \text{car } p' \in \mathbb{N}'$$

On passe à la limite  $p \xrightarrow[\mathbb{N}'']{\infty}$

$$-h_{j_0}(y_p) + h_{j_0}(y_{p'}) \rightarrow 0$$

Donc on a montré que  $\lim_{p \xrightarrow[\mathbb{N}'']{\infty} D(y_p, F(x_n, y_{p-1})) = 0$

\* On montre que cela entraîne une contradiction.

Par hypothèse (ii))  $\omega(x_n) > 0$  entraîne  $B \cap \overset{\circ}{D}(\omega(x_n)) \neq \emptyset$ .

Donc  $\exists \bar{t} \in B \cap \overset{\circ}{D}(\omega(x_n))$

c'est-à-dire :  $\bar{t} \in B \quad g_i(\bar{t}) > 0 \quad i \in I$

$$0 < h_j(\bar{t}) < \omega(x_n) \quad j \in J$$

$$D(\bar{t}, F(x_n, y_{p-1})) = \text{Min}\{g_i(\bar{t}) \quad i \in I ; h_j(\bar{t}) \quad j \in J ; -h_j(\bar{t}) + \text{Max}\{\omega(x_n), h_j(y_{p-1})\}\}$$

$$\geq \text{Min}\{g_i(\bar{t}) \quad i \in I ; h_j(\bar{t}) \quad j \in J ; -h_j(\bar{t}) + \omega(x_n) \quad j \in J\}$$

$$\geq d_0(\bar{t}, x_n) > 0$$

$$\text{Mais } D(y_p, F(x_n, y_{p-1})) \geq \text{Max}_{t \in F(x_n, y_{p-1})} D(t, F(x_n, y_{p-1})) - \epsilon_p$$

$$\geq D(\bar{t}, F(x_n, y_p)) - \epsilon_p$$

$$\geq d_0(\bar{t}, x_n) - \epsilon_p$$

On passe à la limite  $p \xrightarrow[\mathbb{N}'']{\infty}$ .

Donc on obtient  $0 \geq d_0(\bar{t}, x_n)$  ce qui est faux.

Donc l'hypothèse de départ est fausse

$\Rightarrow \exists p^* \in \mathbb{N}$  tel que  $y_{p^*} \in D(x_n)$ .

Proposition III.3.2.

Dans la phase d'optimisation

$\exists q^* \in \mathbb{N}$  tel que  $d(t_{q^*+1}, t_{q^*}, x_n) + \eta_{q^*} < \frac{\omega(x_n)}{2}$

c'est-à-dire la phase (2) comporte un nombre fini d'étapes.

Démonstration

On va montrer qu'il existe  $N' \in \mathbb{N}$  tel que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \inf_{N'} d(t_{h+1}, t_h, x_n) = 0$$

Car dans ce cas  $\lim_{h \rightarrow \infty} \inf_{N'} d(t_{h+1}, t_h, x_n) + \eta_h = 0$

et comme  $\frac{\omega(x_n)}{2} > 0$ .

Il existe  $q^* \in N'$  tel que

$$d(t_{q^*+1}, t_{q^*}, x_n) + \eta_{q^*} < \frac{\omega(x_n)}{2}$$

c'est-à-dire le résultat voulu.

Par construction

$$\forall h \in \mathbb{N} \quad d(t_{h+1}, t_h, x_n) \geq \max_{t \in E(x_n, \lambda_h)} d(t, t_h, x_n) - \eta_h$$

$$0 \leq \eta_h < \max_{t \in G(x_n, \lambda_h)} d(t, t_h, x_n)$$



Donc on a :

$$0 < d(t_{h+1}, t_h, x_n) = \text{Min}\{g_i(t_{h+1}) \ i \in I; h_j(t_{h+1}) \ j \in J; -h_j(t_{h+1}) + \omega(x_n) \ j \in J; \\ f(t_{h+1}) - f(t_h)\}$$

$$0 < d(t_{h+1}, t_h, x_n) \leq f(t_{h+1}) - f(t_h)$$

$\{t_h\}_{h \in \mathbb{N}}$  est une suite contenue dans un compact

$$\Rightarrow \exists \mathbb{N}' \subset \mathbb{N} \text{ tel que } \lim_{\substack{h \rightarrow \infty \\ h \in \mathbb{N}'}} t_h = \bar{t}$$

$$\text{D'autre part } f(t_{h'}) \geq f(t_{h+1}) \quad \forall h' \geq h+1$$

Donc si on note  $h'$  le successeur de  $h$  dans  $\mathbb{N}'$ , on a :

$$0 < d(t_{h'}, t_h, x_n) \leq f(t_{h'}) - f(t_h)$$

On passe à la limite sur  $\mathbb{N}'$

$$f(t_{h'}) - f(t_h) \rightarrow 0$$

$$\text{Donc } \lim_{\substack{h \rightarrow \infty \\ h \in \mathbb{N}'}} d(t_{h+1}, t_h, x_n) = 0.$$

Remarque : Les points  $z_n$  et  $x_{n+1}$  déterminés vérifient

$$z_n = t_h \\ x_{n+1} = t_{h+1} \text{ (un } \eta_h \text{-centre de } G(x_n, \lambda_h) \\ d(t_{h+1}, t_h, x_n) + \eta_h < \frac{\omega(x_n)}{2}$$

Donc on a

$$\text{Max}_{t \in G(x_n, h)} d(t, t_h, x_n) \leq d(t_{h+1}, t_h, x_n) + \eta_h < \frac{\omega(x_n)}{2}$$

c'est-à-dire en reprenant les notations du paragraphe II.2.

$$x_{n+1} \in E(x_n, z_n)$$

$$\text{Max}_{t \in E(x_n, z_n)} d(t, z_n, x_n) < \frac{\omega(x_n)}{2}$$

Les deux critères de fin d'itération de ces deux algorithmes sont bien de même nature.

### Conclusion

L'algorithme modifié comporte deux phases et chaque phase se compose d'un nombre fini d'étapes. Mais chaque étape est la détermination d'un  $\epsilon$ -centre d'un tronçon donné.

P. HUARD propose un algorithme partiel, qui sous des hypothèses de concavité, donne un  $\epsilon$ -centre.



```
*****  
*****  
*  
*  
*   CHAPITRE III   *  
*  
*  
*****  
*****
```

## I. ALGORITHME UTILISANT LA NOTION DE POINT STATIONNAIRE

### I.1. Introduction

Les deux algorithmes présentés dans le chapitre précédent demandent à chaque itération la détermination d'un centre ou d'un  $\epsilon$ -centre, dont la reconnaissance est difficile sauf cas concave.

Comme dans la méthode des centres linéarisée, on va essayer de remplacer la maximisation de la F-distance, par la résolution d'un nombre fini ou infini de problèmes linéaires.

P. HUARD [13, p. 65] introduit un algorithme partiel qui permet d'obtenir un point stationnaire pour le problème de maximisation de la F-distance. Comme dans la méthode des centres linéarisée, on va utiliser cet algorithme partiel.

Comme dans le chapitre précédent, on s'intéresse au problème

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } f(t) \\ g_i(t) \geq 0 \quad i = 1 \dots p \\ h_j(t) = 0 \quad j = 1 \dots m \\ t \in B \end{array} \right.$$

où les fonctions sont continûment différentiables

$$B = \{t \in \mathbb{R}^n : At \geq b\} \text{ polyèdre compact}$$

### Hypothèses

i) Le domaine réalisable de (P) est non vide, il existe au moins une solution optimale, que l'on note  $\bar{x}$ .

$$ii) \quad \forall \epsilon > 0 \quad \mathcal{D}(\epsilon) = \left\{ t \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} g_i(t) \geq 0 \quad i = 1 \dots p \\ 0 \leq h_j(t) \leq \epsilon \quad j = 1 \dots m \end{array} \right\}$$

$$B \cap \overset{0}{\mathcal{D}}(\epsilon) \neq \emptyset$$

$$\text{Fr}(\mathcal{D}(\varepsilon)) = \left\{ \begin{array}{l} t \in \mathcal{D}(\varepsilon) : \exists i_0 \text{ tel que } g_{i_0}(t) = 0 \\ \text{ou} \\ \exists j_1 \text{ tel que } h_{j_1}(t) = 0 \\ \text{ou} \\ \exists j_2 \text{ tel que } h_{j_2}(t) = \varepsilon \end{array} \right\}$$

iii)  $\forall \hat{t} \in \mathcal{D}(\varepsilon)$ , on note

$$\gamma(\hat{t}) = \text{Min}\{g_i(\hat{t}), i = 1 \dots p; h_j(\hat{t}), j = 1 \dots m; -h_j(\hat{t}) + \varepsilon, j = 1 \dots m\}$$

en tout point  $\hat{t}$  qui vérifie  $\gamma(\hat{t}) \neq \frac{\varepsilon}{2}$

$$\text{On note : } I(\hat{t}) = \{i = 1 \dots p / g_i(\hat{t}) = \gamma(\hat{t})\}$$

$$J_1(\hat{t}) = \{j = 1 \dots m / h_j(\hat{t}) = \gamma(\hat{t})\}$$

$$J_2(\hat{t}) = \{j = 1 \dots m / -h_j(\hat{t}) + \varepsilon = \gamma(\hat{t})\}$$

$$L(\hat{t}) = \{\ell = 1 \dots q / A^\ell \hat{t} = b_\ell\}$$

$J(\hat{t}) =$  Matrice dont les lignes sont

$$\nabla g_i(\hat{t}) \quad i \in I(\hat{t})$$

$$\nabla h_j(\hat{t}) \quad j \in J_1(\hat{t})$$

$$-\nabla h_j(\hat{t}) \quad j \in J_2(\hat{t})$$

$$\{d \in \mathbb{R}^n : J(\hat{t}) d > 0\} \cap \{d \in \mathbb{R}^n : A^{L(\hat{t})} d \geq 0\} \neq \emptyset$$

iv)  $\{\nabla h_j(\hat{x}) \quad j = 1 \dots m; \nabla g_i(\hat{x}) \quad i \in I(\hat{x}); A^\ell \quad \ell \in L(\hat{x})\}$  est une famille de vecteurs linéairement indépendants.

v)  $\text{Fr}\{t / f(t) \geq \lambda\} = \{t / f(t) = \lambda\}$

$$\text{pour tout } \lambda \in [\text{Min}_{t \in B} f(t), \text{Max}_{t \in B} f(t)]$$

## I.2. Algorithme

### → initialisation

On a un point de départ  $x_0$  qui vérifie

$$\begin{cases} x_0 \in B \\ g_i(x_0) > 0 & i = 1 \dots p \\ h_j(x_0) > 0 & j = 1 \dots m \end{cases}$$

On pose  $k = 0$ .

### → itération k

\*  $x_k$  point de départ de l'itération

On dispose de  $\omega(x_k)$  et  $D(x_k)$

(voir notation du chapitre précédent)

\* On détermine  $z_k \in D(x_k)$

$$y_k \in D(x_k)$$

tels que  $y_k$  soit point stationnaire pour la maximisation de

$d(t, z_k, x_k)$  sur  $B$  avec

$$d(y_k, z_k, x_k) < \frac{\omega(x_k)}{2}$$

\* On pose  $x_{k+1} = y_k$

### fin de l'itération

### Proposition I.2.1. :

Soit  $\bar{x}$  la limite d'une sous-suite convergente extraite de  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , alors  $\bar{x}$  est stationnaire pour le problème (P).

### Démonstration :

$\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  contenue dans un compact, donc il existe au moins une sous-suite convergente :

$$\exists \mathbb{N}' \subset \mathbb{N} \text{ tel que } \lim_{\substack{h \rightarrow \infty \\ \mathbb{N}'}} x_h = \bar{x}$$

Par construction  $x_h$  est un point stationnaire pour la maximisation de  $d(\cdot, z_{h-1}, x_{h-1})$  sur  $B$ . Par un raisonnement identique à celui d'HUARD [13] :

$$\forall x \in B \quad * (\nabla f(x_h), x - x_h) \leq 0 \text{ si } d(x_h, z_{h-1}, x_{h-1}) = f(x_h) - f(x_{h-1})$$

$$* (\nabla g_{i_0}(x_h), x - x_h) \leq 0 \text{ si } d(x_h, z_{h-1}, x_{h-1}) = g_{i_0}(x_h)$$

$$* (\nabla h_{j_1}(x_h), x - x_h) \leq 0 \text{ si } d(x_h, z_{h-1}, x_{h-1}) = h_{j_1}(x_h)$$

$$* (-\nabla h_{j_2}(x_h), x - x_h) \leq 0$$

$$\text{si } d(x_h, z_{h-1}, x_{h-1}) = -h_{j_2}(x_h) + \omega(x_{h-1})$$

$\{x_h, z_{h-1}\}_{h \in \mathbb{N}'}$  est contenue dans un compact

Donc on peut extraire une sous-suite convergente,

$$\exists \mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}' \subset \mathbb{N} \text{ tel que } \lim_{\substack{h \rightarrow \infty \\ \mathbb{N}''}} x_h = \bar{x}$$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow \infty \\ \mathbb{N}''}} z_{h-1} = \bar{z}$$

Il y a une infinité d'indices  $h$  dans  $\mathbb{N}''$ .

Il y a un nombre fini d'éléments dans  $\{f, g_1, \dots, g_p, h_1, \dots, h_m, -h_1, \dots, -h_m\}$

Donc pour une infinité d'indices  $h \in \mathbb{N}_1$  on a

$$\forall x \in B \quad * (\nabla f(x_h), x - x_h) \leq 0 \text{ si } d(x_h, z_{h-1}, x_{h-1}) = f(x_h) - f(x_{h-1})$$

ou

$$* (\nabla g_{i_0}(x_h), x - x_h) \leq 0 \text{ si } d(x_h, z_{h-1}, x_{h-1}) = g_{i_0}(x_h)$$

ou

$$* (\nabla h_{j_1}(x_h), x - x_h) \leq 0 \text{ si } d(x_h, z_{h-1}, x_{h-1}) = h_{j_1}(x_h)$$

ou

$$* (-\nabla h_{j_2}(x_h), x - x_h) \leq 0 \text{ si } d(x_h, z_{h-1}, x_{h-1}) = -h_{j_2}(x_h) + \omega(x_{h-1})$$

Par construction  $d(x_h, z_{h-1}, x_{h-1}) < \frac{\omega(x_{h-1})}{2}$

On passe à la limite  $h \rightarrow \infty$   
 $\mathbb{N}_1$

en utilisant  $\lim_{h \rightarrow \infty} x_h = \bar{x}$   
 $\mathbb{N}_1$

$\lim_{h \rightarrow \infty} z_{h-1} = \bar{z}$   
 $\mathbb{N}_1$

$\lim_{h \rightarrow \infty} \omega(x_{h-1}) = 0$   
 $\mathbb{N}_1$

Donc on a :

$$\forall x \in B \quad * (\nabla f(\bar{x}), (x - \bar{x})) \leq 0$$

ou

$$* (\nabla g_{i_0}(\bar{x}), (x - \bar{x})) \leq 0 \quad \text{si } g_{i_0}(\bar{x}) \leq 0$$

ou

$$* (\nabla h_{j_1}(\bar{x}), x - \bar{x}) \leq 0$$

ou

$$(-\nabla h_{j_2}(\bar{x}), x - \bar{x}) \leq 0$$

Maintenant on va montrer que ce résultat entraîne les conditions de Kuhn et Tucker pour le problème (P) c'est-à-dire l'existence de  $(u, v) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m$  tels que :  $u \geq 0$

$$\forall x \in B \quad [f(\bar{x}) + u \nabla g(\bar{x}) + v \nabla h(\bar{x})] (x - \bar{x}) \leq 0$$

$$u g(\bar{x}) = 0 \quad g(\bar{x}) \geq 0$$

$$h(\bar{x}) = 0$$

- le cas :  $(\nabla f(\bar{x}), (x - \bar{x})) \leq 0 \quad \forall x \in B$   
 est trivial, il suffit de prendre  $u = 0 \in \mathbb{R}^p$   
 $v = 0 \in \mathbb{R}^m$

- le cas :  $g_{i_0}(\bar{x}) = 0$   
 et

$$(\nabla g_{i_0}(\bar{x}), x - \bar{x}) \leq 0 \quad \forall x \in B$$

On pose  $u_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots p \quad i \neq i_0$   
 $v = 0 \in \mathbb{R}^m$

Il est toujours possible de trouver  $u_{i_0}$  assez grand pour que  $u_{i_0} > 0$  et

$$([\nabla f(\bar{x}) + u_{i_0} \nabla g_{i_0}(\bar{x})], x - \bar{x}) \leq 0 \quad \forall x \in B$$

- le cas :  $(\nabla h_{j_1}(\bar{x}), x - \bar{x}) \leq 0 \quad \forall x \in B$

se traite de la même manière en prenant

$$u = 0 \in \mathbb{R}^p$$

$$v_j = 0 \quad \forall j = 1 \dots m \quad j \neq j_1$$

$v_{j_1}$  nombre positif assez grand

- le cas :  $(-\nabla h_{j_2}(\bar{x}), x - \bar{x}) \leq 0 \quad \forall x \in B$

on prend :  $u = 0 \in \mathbb{R}^p$

$$v_j = 0 \quad \forall j = 1 \dots m \quad j \neq j_2$$

$v_{j_2}$  nombre négatif assez petit.

Donc on a montré que le point  $\bar{x}$  est un point stationnaire pour le problème (P).

### I.3. Description de l'algorithme partiel

#### I.3.1. Introduction

Dans l'algorithme décrit dans le paragraphe I.2, il faut déterminer :

$$z_k \in D(x_k)$$

$$y_k \in D(x_k)$$

tels que  $y_k$  soit point stationnaire pour la maximisation de  $d(\cdot, z_k, x_k)$  sur B

avec  $d(y_k, z_k, x_k) < \frac{\omega(x_k)}{2}$ .

Pour cela on se fixe  $z_k \in D(x_k)$ , puis on utilise l'algorithme partiel proposé par HUARD [13, p. 65]. Cet algorithme construit une suite de points  $\{y^h\}_{h \in \mathbb{N}}$  telle que tout point d'accumulation de cette suite soit stationnaire pour le problème :

$$\{\text{Max } d(t, z_k, x_k), t \in B\}$$

### 1.3.2. Description d'une itération

#### Itération k

- \* initialisation : soit  $t_0 \in D(x_k)$   
 on note  $\omega_k = \omega(x_k)$   
 on pose  $p = 0$

- \* étape :

0 initialisation : soit  $t_p \in D(x_k)$ , on note  $\lambda_p = f(t_p)$

1 on pose  $y^0 = t_p$ ,  $h = 0$

2 Résoudre le problème linéarisé en  $y^h$   

$$\text{Max}_{t \in B} \text{Min} \{ f^h(t, y) - \lambda_p ; g_i^h(t, y), i = 1 \dots p ; h_j^h(t, y) j = 1 \dots m ; \\ -h_j^h(t, y) + \omega_k j = 1 \dots m \}$$

on obtient le point  $z^{h+1}$

3 Maximiser la fonction

$$\text{Min} \{ f(t) - \lambda_p ; g_i(t), i = 1 \dots p ; h_j(t), j = 1 \dots m ; -h_j(t) + \omega_k \\ j = 1 \dots m \}$$

sur le segment  $[y^h, z^{h+1}]$

4 On obtient  $y^{h+1}$  et on retourne en 2 avec  $h+1$  au lieu de  $h$

4 On note  $t_{p+1}$  un point d'accumulation de  $\{y^h\}_{h \in \mathbb{N}}$



\* Test : si  $d(t_{p+1}, t_p, x_k) < \frac{\omega(x_k)}{2}$

on pose  $y_k = t_{p+1}$

$z_k = t_p$

$x_{k+1} = y_k$

fin de l'itération k

sinon on passe à l'étape p+1

Fin de l'itération

### I.3.3. Propriétés de cet algorithme

#### Propriété I.3.3.1.

Le point  $t_{p+1}$  est un point stationnaire pour la maximisation de  $d(\cdot, t_p, x_k)$  sur B.

#### Démonstration

Les pas 1, 2 et 3 de l'algorithme précédent correspondent à l'algorithme partiel décrit par HUARD [13, p. 65].

Dans ce même article HUARD montre que tout point d'accumulation de la suite  $\{y_h\}_{h \in \mathbb{N}}$  est un point stationnaire pour la maximisation de  $d(\cdot, t_p, x_k)$  sur B.

#### Propriété I.3.3.2.

$\exists p^* \in \mathbb{N}$  tel que  $d(t_{p^*+1}, t_{p^*}, x_k) < \frac{\omega(x_k)}{2}$

#### Démonstration

Par définition

$$d(t_{p+1}, t_p, x_k) = \text{Min}\{d_0(t_{p+1}, x_k), f(t_{p+1}) - f(t_p)\}$$

$$\frac{\omega(x_k)}{2} = d_0(x_k) = \text{Max}_{t \in B} d_0(t, x_k)$$

$$\text{Donc } d_0(t_{p+1}, x_k) \leq \frac{\omega(x_k)}{2}$$

$$\Rightarrow d(t_{p+1}, t_p, x_k) \leq \frac{\omega(x_k)}{2}$$

$$\text{On suppose que } \forall p \in \mathbb{N} \quad d(t_{p+1}, t_p, x_k) = \frac{\omega(x_k)}{2}$$

$$\Rightarrow \forall p \in \mathbb{N} \quad \frac{\omega(x_k)}{2} \leq f(t_{p+1}) - f(t_p)$$

Mais  $\forall p' \geq p+1 \quad f(t_{p'}) \geq f(t_{p+1})$  par construction.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \forall p \in \mathbb{N} \quad & \frac{\omega(x_k)}{2} \leq f(t_{p'}) - f(t_p) \\ \forall p' \geq p+1 \end{aligned}$$

$\{t_p\}_{p \in \mathbb{N}}$  est une suite contenue dans un compact

$$\Rightarrow \exists \mathbb{N}' \subset \mathbb{N} \text{ tel que } \lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ p \in \mathbb{N}'}} t_p = \bar{t}$$

Soit  $p'$  le successeur de  $p$  dans  $\mathbb{N}'$

$$0 < \frac{\omega(x_k)}{2} \leq f(t_{p'}) - f(t_p)$$

On passe à la limite dans cette double inéquation, en utilisant la continuité de  $f$ , on obtient :

$$0 < \frac{\omega(x_k)}{2} \leq 0$$

ce qui est impossible.

D'où la contradiction avec l'hypothèse de départ

$$\Rightarrow \exists p^* \in \mathbb{N} \text{ tel que } d(t_{p^*+1}, t_{p^*}, x_k) < \frac{\omega(x_k)}{2}$$

## Conclusion

On a montré que le nombre d'étapes est fini, mais par contre dans chaque étape on a un algorithme partiel qui est le plus souvent infini.

## II. ALGORITHME UTILISANT LA NOTION DE POINT STATIONNAIRE A $\epsilon$ -PRES

### II.1. INTRODUCTION

Dans chaque étape, l'algorithme partiel est le plus souvent infini.

Soit  $\epsilon > 0$  un petit nombre fixé.

Dans chaque étape, on va chercher à trouver un point  $t_{p+1}$  qui soit stationnaire à  $\epsilon$ -près.

### II.2. ALGORITHME

#### Itération k

\* initialisation : Soit  $x_k$  le point de départ, on lui associe  $\omega(x_k)$ ,  $D(x_k)$ .  
on note

$$L(x, \omega, u, v^1, v^2) = \omega f(x) + u g(x) + v^1 h(x) + v^2 (-h(x) + \omega(x_k))$$

$$u \in \mathbb{R}^p \quad v^1, v^2 \in \mathbb{R}^m \quad \omega \in \mathbb{R}$$

\* On détermine un point  $t_0 \in D(x_k)$   
et on pose  $p = 0$

\* étape p :

0 initialisation :  $t_p$  connu, on pose  $\lambda_p = f(t_p)$

1 on pose  $y = t_p$   $h = 0$

2 Résoudre le problème linéarisé en  $y$   

$$\text{Max}_{t \in B} \{ \text{Min}_{\substack{h \\ i=1 \dots p \quad j=1 \dots m \quad j=1 \dots m}} f^h(t, y) - \lambda_p ; g_i^h(t, y) ; h_j^h(t, y) ; -h_j^h(t, y) + \omega(x_k) \}$$

on obtient le point  $z^{h+1}$   
 on note  $(\omega^h, u^h, v_1^h, v_2^h)$  les multiplicateurs de ce  
 problème linéaire.

3 Test :

si  $\nabla_x L(y^h, \omega^h, u^h, v_1^h, v_2^h) \in \Gamma(T(B, y^h)) + B(0, \varepsilon)$

On pose  $t_{p+1}^h = y^h$  fin de l'étape p

sinon on va en 4

4 Maximisation sur  $[y^h, z^{h+1}]$  de la fonction

$\text{Min}\{f(t) - \lambda_p; g_i(t) \ i=1 \dots p; h_j(t) \ j=1 \dots m; -h_j(t) + \omega(x_k) \ j=1 \dots m\}$

On obtient le point  $y^{h+1}$  et on va en 2 avec  $h+1$  au lieu de  $h$ .

\* Test de Sortie

si  $d(t_{p+1}^h, t_p^h, x_k) < \frac{\omega(x_k)}{2}$  on pose  $x_{k+1} = t_{p+1}^h$

fin de l'itération k

sinon on passe à l'étape suivante.

Fin de l'itération

Remarque : Le test 3 est un critère d'arrêt pour l'algorithme partiel, plutôt qu'une notion mathématique.

### II.3. PROPRIÉTÉ

$\forall p \in \mathbb{N} \exists h^* \in \mathbb{N}$  tel que

$\nabla_x L(y^h, \omega^h, u^h, v_1^h, v_2^h) \in \Gamma(T(B, y^h)) + B(0, \varepsilon)$

Démonstration

Ce résultat prouve que dans chaque étape  $p$ , le nombre de pas pour déterminer le point  $t_{p+1}$  est fini.

On suppose que le nombre de pas est infini, donc si on note  $\bar{y}$  un point d'accumulation de la suite  $\{\bar{y}^h\}_{h \in \mathbb{N}}$ .

On sait que  $\bar{y}$  est un point stationnaire pour la maximisation de  $d(\cdot, t_p, x_k)$  sur  $B$ .

On considère le programme

$$\left| \begin{array}{l} \text{Maximiser } \mu \\ f(t) - \mu_p \geq \mu \\ g_i(t) \geq \mu \quad i \in I \\ h_j(t) \geq \mu \quad j \in J \\ -h_j(t) + \omega(x_k) \geq \mu \quad j \in J \\ At - b \geq 0 \end{array} \right.$$

On note  $(\bar{\omega}, \bar{u}, \bar{v}^1, \bar{v}^2, \bar{\alpha})$  les multiplicateurs associés.

$$\text{Donc } \bar{\omega} \nabla f(\bar{y}) + \bar{u} \nabla g(\bar{y}) + \bar{v}^1 \nabla h(\bar{y}) - \bar{v}^2 \nabla h(\bar{y}) + \bar{\alpha} A = 0$$

$$\bar{\omega} + \sum_{i \in I} \bar{u}_i + \sum_{j \in J} \bar{v}^1 + \sum_{j \in J} \bar{v}^2 = 1$$

$$\bar{\omega} \geq 0 \quad \bar{u} \geq 0 \quad \bar{v}^1 \geq 0 \quad \bar{v}^2 \geq 0 \quad \bar{\alpha} \geq 0$$

$$\bar{\omega}[f(\bar{y}) - \lambda_p - \bar{\mu}] = 0$$

$$\bar{u}_i[g_i(\bar{y}) - \bar{\mu}] = 0 \quad i \in I$$

$$\bar{v}_j^1[h_j(\bar{y}) - \bar{\mu}] = 0 \quad j \in J$$

$$\bar{v}_j^2[-h_j(\bar{y}) + \omega(x_k) - \bar{\mu}] = 0 \quad j \in I$$

$$\bar{\alpha}[A\bar{y} - b] = 0$$

$\bar{\mu}$  étant la valeur  
 $d(\bar{y}, t_p, x_k)$

Mais ces multiplicateurs  $[\bar{\omega}, \bar{u}, \bar{v}^1, \bar{v}^2, \bar{\alpha}]$  sont aussi des multiplicateurs pour le problème linéarisé en  $\bar{y}$ .

Si on note  $[\omega, u, v^1, v^2, \alpha]$  les multiplicateurs du problème linéarisé en  $y$ . Ces multiplicateurs sont bornés, donc ils convergent sur une sous-suite.

Si on note

$$L_1(x, \omega, u, v^1, v^2, \alpha) = \omega f(x) + u g(x) + v^1 h(x) + v^2 (-h(x) + \omega(x_k)) + \alpha[Ax - b]$$

$\|\nabla_x L_1(y, \omega, u, v^1, v^2, \alpha)\|$  converge vers

$$\|\nabla_x L_1(\bar{y}, \bar{\omega}, \bar{u}, \bar{v}^1, \bar{v}^2, \bar{\alpha})\| \text{ qui est nulle}$$

$\Rightarrow$  Pour  $h$  assez grand

$$\|\nabla_x L_1(y, \omega, u, v^1, v^2, \alpha)\| \leq \varepsilon$$

### Conclusion

On a un algorithme partiel fini pour déterminer  $t_{p+1}$ .

Donc on a un procédé fini pour déterminer le successeur  $x_{k+1}$  du point  $x_k$ . Mais il reste le problème de la détermination du point initial  $t_0 \in D(x_k)$ .

C'est le sujet du paragraphe suivant.

### III. DETERMINATION D'UN POINT DE $D(x_k)$

#### III.1. Rappels

On dispose d'un point  $x_k \in B$  tel que  $g_i(x_k) > 0 \quad i = 1 \dots p$   
 $h_j(x_k) > 0 \quad j = 1 \dots m$

On conserve les notations du chapitre précédent.

Mais pour simplifier on note pour  $\varepsilon > 0$  :

$$d_1(t, \epsilon) = \text{Min}\{g_i(t) \ i = 1 \dots p; h_j(t) \ j = 1 \dots m; -h_j(t) + \epsilon \ j = 1 \dots m\}$$

$$d_1'(t, y, \epsilon) = \text{Min}\{g_i'(t, y) \ i = 1 \dots p; h_j'(t, y) \ j = 1 \dots m; -h_j'(t, y) + \epsilon \ j = 1 \dots m\}$$

On va construire un algorithme fini qui permet d'obtenir un point  $\epsilon D(x_k)$  en partant du point  $x_k$ .

### III.2. ALGORITHME

0 initialisation : on connait  $x_k$  tel que  $\omega(x_k) > 0$

1 (a) on pose  $\overset{0}{x} = x_k$        $\epsilon_0 = 2 \omega(x_k)$

(b) on détermine  $\overset{0}{z}$  qui maximise  $d_1'(t, \overset{0}{x}, \epsilon_0)$  sur B

(c) on détermine  $\overset{0}{y}$  qui maximise  $d_1(t, \epsilon_0)$  sur  $[\overset{0}{x}, \overset{0}{z}]$

(d) on pose  $p = 1$        $\epsilon_1 = \text{Max}_{j=1 \dots m} \{h_j(\overset{0}{y})\}$

2 étape p :

(a) on détermine  $\overset{p}{z}$  qui maximise  $d_1'(t, \overset{p-1}{y}, \epsilon_1)$  sur B

(b) on détermine  $\overset{p}{y}$  qui maximise  $d_1(t, \epsilon_1)$  sur  $[\overset{p-1}{y}, \overset{p}{z}]$

3 Test :

si  $\overset{p}{y} \in D(x_k) \cap B$  on pose  $t_0 = \overset{p}{y}$  stop

sinon on va en 2 avec  $p+1$  au lieu de  $p$

### III.3. L'ALGORITHME EST FINI

#### Proposition III.3.1.

Tout point  $\bar{y}$  stationnaire pour la maximisation de  $d(\cdot, \epsilon_1)$  sur B vérifie :

$$d_1(\bar{y}, \epsilon_1) = \frac{\epsilon_1}{2}$$

Démonstration

Elle est identique à la proposition du chapitre 2.

Proposition 11.3.2.

$$\exists p^* \in \mathbb{N} \text{ tel que } y \in D(x_k) \cap B$$

Démonstration

On suppose que la suite  $\{y\}_{p \in \mathbb{N}}$  est infinie

$\{y, z\}_{p \in \mathbb{N}}$  est contenue dans un compact

$$\Rightarrow \mathbb{N}' \subset \mathbb{N} \quad \lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ \mathbb{N}'}} y = \bar{y}$$

$$\lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ \mathbb{N}'}} z = \bar{z}$$



Dans un premier temps, on montre que :

$$\bar{y} \in \{t \in B : g_i(t) \geq 0 \quad i = 1 \dots p\}$$

$$0 \leq h_j(t) \leq \frac{\varepsilon_1}{2} \quad j = 1 \dots m\}$$

$$\text{Puis comme } \varepsilon_1 = \max_{j=1 \dots m} \{h_j(\bar{y})\}$$

$$\text{avec } 0 < h_j(\bar{y}) < \varepsilon_0$$

$$\text{On a } \varepsilon_1 < \varepsilon_0 = 2\omega(x_k)$$

ce qui entraîne que :

$$\bar{y} \in \{t \in B : g_i(t) \geq 0 \quad i = 1 \dots p\}$$

$$0 \leq h_j(t) < \omega(x_k) \quad j = 1 \dots m\}$$



Donc en particulier on a :

$$\forall j = 1 \dots m \quad h_j(\bar{y}) < \omega(x_k)$$

$$\Rightarrow \text{pour } p \text{ assez grand, } \in \mathbb{N}' : h_j(\bar{y}^{p-1}) \leq \omega(x_k)$$

$$\Rightarrow \bar{y}^{p-1} \in D(x_k) \cap B \text{ pour } p \text{ assez grand.}$$

On suppose que  $\bar{y} \notin \{t \in B : g_i(t) \geq 0 \quad i = 1 \dots p$

$$0 \leq h_j(t) \leq \frac{\varepsilon_1}{2} \quad j = 1 \dots m\}$$

$$\text{Mais } \begin{cases} g_i(\bar{y}^{p-1}) \geq 0 & i = 1 \dots p \\ h_j(\bar{y}^{p-1}) \geq 0 & j = 1 \dots m \end{cases}$$

Par passage à la limite on a  $\begin{cases} g_i(\bar{y}) \geq 0 & i = 1 \dots p \\ h_j(\bar{y}) \geq 0 & j = 1 \dots m \end{cases}$

Donc  $\exists j_1 \in \{1 \dots m\}$  tel que  $h_{j_1}(\bar{y}) > \frac{\varepsilon_1}{2}$

$$-h_{j_1}(\bar{y}) + \varepsilon_1 < \frac{\varepsilon_1}{2}$$

$$d_1(\bar{y}, \varepsilon_1) < \frac{\varepsilon_1}{2}$$

En utilisant le résultat de la proposition III.3.1., on obtient :  
 $\bar{y}$  n'est pas un point stationnaire pour la maximisation de  $d_1(\cdot, \varepsilon_1)$  sur B.

On va montrer que c'est faux, en s'inspirant d'une démonstration de P. HUARD [13, p. 66-67].

Par construction, on a :

$$\begin{cases} d_1'(t, \bar{y}^{p-1}, \varepsilon_1) \leq d_1'(z, \bar{y}^{p-1}, \varepsilon_1) & \forall t \in B \\ d_1(t, \varepsilon_1) \leq d_1(\bar{y}^{p-1}, \varepsilon_1) & \forall t \in [\bar{y}^{p-1}, z] \end{cases}$$

$$\rightarrow d_1'(\bar{y}^{p-1}, \bar{y}^{p-1}, \varepsilon_1) \geq d_1'(\bar{y}^{p-1}, \bar{y}^{p-1}, \varepsilon_1) = d_1'(\bar{y}^{p-1}, \varepsilon_1)$$

On passe à la limite  $p \xrightarrow{\mathbb{N}'} \infty$

$$\text{Donc on a : } d'_1(\bar{z}, \bar{y}, \varepsilon_1) \geq d_1(\bar{y}, \varepsilon_1) \quad (1)$$

$$\rightarrow d_1(\theta \bar{y}^{p-1} + (1-\theta) \bar{z}, \varepsilon_1) \leq d_1(\bar{y}, \varepsilon_1) \quad \forall \theta \in [0, 1]$$

$\{d_1(\bar{y}, \varepsilon_1)^p\}_{p \in \mathbb{N}}$  est une suite non décroissante.

Donc  $\forall \theta \in [0, 1]$

$$d_1(\theta \bar{y}^{p-1} + (1-\theta) \bar{z}, \varepsilon_1) \leq d_1(\bar{y}^{p'}, \varepsilon_1) \quad \forall p' \geq p$$

On prend  $p'$  successeur de  $p$  tel que  $p'-1 \in \mathbb{N}'$  et on passe à la limite sur  $\mathbb{N}'$ .

$$\Rightarrow \forall \theta \in [0, 1] \quad d_1(\theta \bar{y} + (1-\theta) \bar{z}, \varepsilon_1) \leq d_1(\bar{y}, \varepsilon_1) \quad (2)$$

les relations (1) et (2) entraînent

$$d'_1(\bar{z}, \bar{y}, \varepsilon_1) = d_1(\bar{y}, \varepsilon_1)$$



car les fonctions  $g_i$  et  $h_j$  sont différentiables

Soit  $x \in B$  proche de  $\bar{y}$ .

Si  $p$  est assez grand,  $x$  est proche de  $\bar{y}^{p-1}$ .

$$\Rightarrow \exists i_0 \in \{1 \dots p\} \text{ tel que } \begin{cases} d_1(\bar{y}^{p-1}, \varepsilon_1) = g_{i_0}(\bar{y}^{p-1}) \\ d'_1(x, \bar{y}^{p-1}, \varepsilon_1) = g_{i_0}(\bar{y}^{p-1}) + (\nabla g_{i_0}(\bar{y}^{p-1}), x - \bar{y}^{p-1}) \end{cases}$$

ou

$$\exists j_0 \in \{1 \dots m\} \text{ tel que } \begin{cases} d_1(\bar{y}^{p-1}, \varepsilon_1) = h_{j_0}(\bar{y}^{p-1}) \\ d'_1(x, \bar{y}^{p-1}, \varepsilon_1) = h_{j_0}(\bar{y}^{p-1}) + (\nabla h_{j_0}(\bar{y}^{p-1}), x - \bar{y}^{p-1}) \end{cases}$$

ou

$$\exists j_1 \in \{1 \dots m\} \text{ tel que } \begin{cases} d_1^{p-1}(y, \varepsilon_1) = -h_{j_1}^{p-1}(y) + \varepsilon_1 \\ d_1'(x, y, \varepsilon_1) = -h_{j_1}^{p-1}(y) + \varepsilon_1 + (-\nabla h_{j_1}^{p-1}(y), x - y) \end{cases}$$

$$\text{Mais on a } d_1'(x, y, \varepsilon_1) \leq d_1'(z, y, \varepsilon_1).$$

Si on passe à la limite sur  $\mathbb{N}'$  dans les relations précédentes on obtient

$$\exists i_0 \in \{1 \dots p\} \text{ tel que } (\nabla g_{i_0}(\bar{y}), x - \bar{y}) \leq 0$$

$$\text{avec } d_1(\bar{y}, \varepsilon_1) = g_{i_0}(\bar{y})$$

ou

$$\exists j_0 \in \{1 \dots m\} \text{ tel que } (\nabla h_{j_0}(\bar{y}), x - \bar{y}) \leq 0$$

$$\text{avec } d_1(\bar{y}, \varepsilon_1) = h_{j_0}(\bar{y})$$

ou

$$\exists j_1 \in \{1 \dots m\} \text{ tel que } (-\nabla h_{j_1}(\bar{y}), x - \bar{y}) \leq 0$$

$$\text{avec } d_1(\bar{y}, \varepsilon_1) = -h_{j_1}(\bar{y}) + \varepsilon_1$$

c'est-à-dire que  $\bar{y}$  est un point stationnaire pour la maximisation de  $d_1(\cdot, \varepsilon_1)$  sur  $B$ .

D'où la contradiction.

```
*****  
*****  
*  
*  
*   CHAPITRE IV   *  
*  
*  
*****  
*****
```

DESCRIPTION DU CODE N4MCLO QUI PROGRAMME LA METHODE DES CENTRES  
LINEARISEE [9].

DESCRIPTION DU CODE N4MCL1 QUI PROGRAMME LA METHODE DECRITE DANS LE  
CHAPITRE III POUR RESOUDRE UN PROGRAMME MATHEMATIQUE CONTENANT DES  
CONTRAINTES EN EGALITE.

## I. METHODE DES CENTRES LINEARISEE : CODE N4MCL0

### I.1. BREF RAPPEL SUR LA METHODE DES CENTRES LINEARISEE

On considère le problème :

$$(P) \begin{cases} \text{maximiser } f(t) \\ g_i(t) \geq 0 \quad i = 1 \dots p \quad (1) \\ x_{\text{inf}} \leq t \leq x_{\text{sup}} \quad (2) \end{cases}$$

où les fonctions du problème sont continûment différentiables et concaves.

Les contraintes (1) définissent le domaine A.

Les contraintes (2) correspondent au polyèdre compact B.

On se limite ici, comme dans le code N4MCL0, à un pavé de bornes. La présence d'un polyèdre B quelconque n'ea pas d'incidence sur la mise en oeuvre de la méthode, seuls les programmes linéaires point i) doivent prendre en compte ces contraintes linéaires.

On suppose de plus que  $\{x / g_i(x) \geq 0 \quad i = 1 \dots p\} \cap B \neq \emptyset$

#### Notations

Pour  $x \in A \cap B$ ,  $p_0 \in \mathbb{R}$ ,  $p_0 > 0$  fixé.

$$E(x) = \{t \in B / g_i(t) \geq 0 \quad i = 1 \dots p \text{ et } f(t) \geq f(x)\}$$

$I(x) = \{1, 2, \dots, p\}$  ensemble des contraintes "presque actives"  
en x (voir la notion de presque en I.2.1.).

$$d(t, x) = \min\{p_0(f(t) - f(x)); g_i(t) \quad i = 1 \dots p\}$$

$$d'_0(t, x) = \min\{p_0(f(t, x) - f(x)); g'_i(t, x) \quad i \in I(x)\}$$

où  $f'$  et  $g'_i$  sont les approximations tangentielles en x de f et  $g_i$  (par exemple  $f'(t, x) = f(x) + (\nabla f(x), t - x)$ ).

## Algorithme de résolution du problème (P)

1° Phase : Recherche d'un point réalisable.

Cette recherche se fait par une suite finie (en général quelques itérations) d'étapes analogues à l'étape 0 de la 2° phase, mais en ne tenant pas compte de l'objectif  $f$ .

Une itération se décrit par :

$x$  point de départ de l'itération ( $x \in B$ )

- |      |  |
|------|--|
| i)   | maximiser $\min\{g_i(t, x), i = 1 \dots p\}$ : $z$ une solution<br>$t \in B$   |
| ii)  | maximiser $\min\{g_i(t), i = 1 \dots p\}$ : $x'$ une solution<br>$t \in [x, z]$<br>si $g_i(x') > 0 \quad \forall i = 1 \dots p$ stop |
| iii) | prendre $x'$ pour $x$ et retour en i)  |

Le point i) est un programme linéaire de  $p$  contraintes :

$$\left| \begin{array}{l} \max \mu \\ g_i(x) + (\nabla g_i(x), t - x) \geq \mu \quad i = 1 \dots p \\ t \in B \end{array} \right.$$

Le point ii) est une recherche unidimensionnelle sur le segment  $[x, z]$  (voir remarque 3 de la partie I.2).

2° Phase : Optimisation à partir d'un point réalisable  $x$ .

Cette phase est une suite d'itérations se décomposant en étapes (0, 1, ...)

On se donne  $x$  comme point de départ de l'itération ( $x \in A \cap B$ ).

Etape 0 : Résoudre

- i) maximiser  $d'_0(t, x)$  :  $z_0$  une solution  
 $t \in B$
- ii) maximiser  $d(t, x)$  :  $y_0$  une solution  
 $t \in [x, z_0]$
- si  $z_0 \in E(x)$  stop (fin de l'itération,  $y_0$  est le successeur de  $x$ ).
- iii) résoudre  $d(t, x) = 0$  sur  $[y_0, z_0]$  :  $\omega_0$  une solution.

(voir figure 1).

Etape h ( $h \geq 1$ )

Ces étapes successives permettent de construire des fonctions  $d'_h$  représentant une meilleure approximation de  $d$ , c'est-à-dire pour  $t \in A \cap B$  :

$$d(t, x) \leq d'_{h+1}(t, x) \leq d'_h(t, x) \leq \dots \leq d'_0(t, x)$$

Le nombre d'étapes est en général faible (quelques unités).

Elles correspondent à des linéarisations additionnelles du domaine  $E(x)$  (cf. figure 1) destinées à compenser les approximations du premier ordre qui sont faites.

En pratique  $d'_h(\cdot, x)$  est formée à partir de  $d'_{h-1}(\cdot, x)$  en ajoutant dans le minimum une fonction affine, linéarisation en  $\omega_{h-1}$  d'une des fonctions  $f(\cdot) - f(x)$ , ou  $g_i(\cdot)$  actives en  $\omega_{h-1}$ .

Description de l'étape h :

On dispose de  $x, z_{h-1}, \omega_{h-1}$

$$x' = y_k \text{ avec } k \text{ tel que } d'(y_k, x) = \max_{0 \leq \rho < h} \{d(y_\rho, x)\}$$

(le meilleur point, relativement à la F-distance, trouvé dans les étapes  $\rho, \rho < h$ ) par hypothèse  $z_{h-1} \notin E(x)$ .

On note par :  $a(\cdot)$  l'une des contraintes du domaine  $E(x)$  saturée en  $\omega_{h-1}$ .

$$\begin{aligned} a(t) &= p_0(f(t) - f(x)) \quad \text{si } f(\omega_{h-1}) = f(x) \\ &= g_i(t) \quad \text{si } g_i(\omega_{h-1}) = 0 \end{aligned}$$

On note  $d'_h(t, x) = \min\{d'_{h-1}(t, x); a'(t, \omega_{h-1})\}$ .

Résoudre :

- |  |
|--|
| <p>i) maximiser <math>d'_h(t, x)</math> : <math>z_h</math> une solution<br/><math>t \in B</math></p> <p>ii) maximiser <math>d(t, x)</math> : <math>y_h</math> une solution<br/><math>t \in [x, z_h]</math></p> <p>Choisir <math>x'</math> : le point <math>x'</math> ou <math>y_h</math> réalisant le maximum de <math>d(\cdot, x)</math><br/>si <math>z_h \in E(x)</math>. Stop (fin de l'itération, <math>x'</math> est le successeur de <math>x</math>).</p> <p>iii) résoudre <math>d(t, x) = 0</math> sur <math>[y_h, z_h]</math> : <math>\omega_h</math> la solution.</p> |
|--|

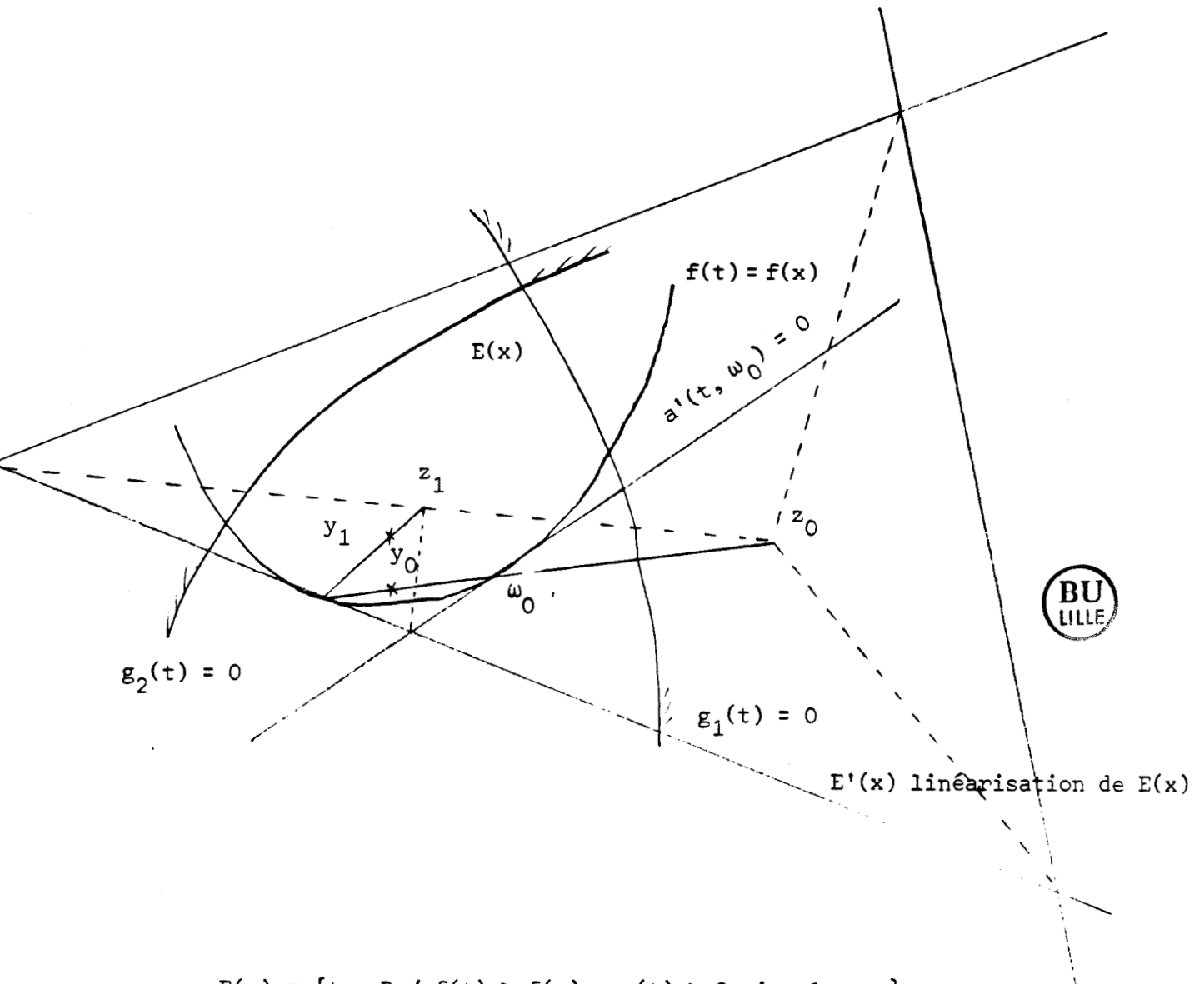
fin de l'étape h.

Remarques :

1° Les étapes  $h = 0, 1, \dots$  représentent l'algorithme de recentrage défini dans [9] sous une forme légèrement différente. Il est aisé de prouver sa convergence finie (i.e. arrêt par un point  $z_h \in E(x)$ , voir par exemple [7]). En pratique, une seule étape ( $h = 0$ ) est requise pour prouver la convergence de la méthode des centres linéarisée [13]. Cependant pour des considérations liées à la vitesse de convergence, il est numériquement préférable de réaliser plusieurs étapes.

2° Le point i) est un programme linéaire. C'est le programme linéaire de l'étape précédente (pour lequel  $z_{h-1}$  est solution optimale) augmenté d'une contrainte ( $a'(t, \omega_{h-1}) \geq \mu$ ). Sa résolution est enchaînée à partir de la solution  $z_{h-1}$ , pour  $h \geq 1$ . (voir remarque 1 en I.2.1.).





$$E(x) = \{t \in B / f(t) \geq f(x); g_i(t) \geq 0 \quad i = 1 \dots p\}$$

$$E'(x) = \{t \in B / (\nabla f(x), t-x) \geq 0; g_i(x) + (\nabla g_i(x), t-x) \geq 0 \quad i \in I(x)\}$$

Etape 0 : Construction de  $z_0$  (programme linéaire)

$y_0$  (recherche linéaire sur  $[x_0, z_0]$ )

$\omega_0$  (point frontière)

Etape 1 : Linéarisation additionnelle ( $a'(t, \omega_0) \geq 0$ )

Construction de  $z_1$  (programme linéaire augmenté)

$y_1$  (recherche linéaire sur  $[x, z_1]$ ).

Figure 1

3° La fonction  $d'_0(\cdot, x)$  ne prend en compte que certaines contraintes du domaine, c'est-à-dire celles qui sont "susceptibles" d'orienter la direction de recherche du point intérieur  $y_h$  ( $\epsilon$ -centre). Des détails théoriques sont présentés dans [13], la mise en oeuvre pratique est donnée dans la partie I.2.

## I.2. MISE EN OEUVRE DE L'ALGORITHME DE LA METHODE DES CENTRES LINEARISEE : LE CODE N4MCLO

Les problèmes algorithmiques posés par la mise en oeuvre de la méthode des centres linéarisée sont liés aux points i) à iii) des étapes  $h$  ( $h \geq 0$ ) de la description précédente.

Avant de les aborder remarquons que le facteur  $p_0$ , apparaissant dans ces définitions de  $d$  et  $d'_h$ , est une pondération de l'objectif économique. Intuitivement son rôle est d'obliger les directions de recherche d'un point intérieur,  $[x, z_h]$ , à "s'écartier" de la linéarisation de l'équipotentielle économique et à pénétrer dans l'intérieur du tronçon  $E(x)$ . La pondération  $p_0$  est inférieure à 1. Sur le plan numérique elle ne doit cependant pas être prise trop petite afin de préserver le conditionnement des matrices des programmes linéaires. Son choix optimal demeure délicat et semble dépendre en grande partie de la géométrie du domaine non linéaire.

### I.2.1. Les problèmes d'optimisation linéaire

a) A l'étape 0 de chaque itération, le point i) correspond à un programme linéaire ( $x$  est le point de départ de l'itération).

$$\left| \begin{array}{l} \max \mu \\ p_0(\nabla f(x), t - x) \geq \mu \\ g_i(x) + (\nabla g_i(x), t - x) \geq \mu \quad i \in I(x) \\ x_{\inf} \leq t \leq x_{\sup} \\ \mu \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Le code N4MCLO utilise la méthode simplex dans sa variante de l'inverse explicite stockée en mémoire centrale et des variables bornées.

Le démarrage de la résolution correspond à une base formée par les variables d'écart des contraintes à l'exception de l'une d'elles qui est remplacée par la variable  $\mu$  de manière à assurer la réalisabilité de la base pour les variables  $x$  fixées à leur borne inférieure.

Les contraintes non linéaires linéarisées ( $i \in I(x)$ ) sont déterminées de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1^{\circ} \text{ itération réalisable : } I(x) = \{1, 2, \dots, p\} \\ \text{itérations suivantes : } I(x) \text{ est formé par les indices des contraintes} \\ \text{linéarisées actives à la solution du programme linéaire de l'étape 0 de l'ité-} \\ \text{ration précédente et des indices des contraintes vérifiant la condition :} \\ i \text{ tel que } g_i(x) \leq \alpha \min\{g_j(x) / j = 1 \dots p\} \text{ le coefficient } \alpha \text{ est fixé dans N4MCLO} \\ \text{à la valeur 10.} \end{array} \right.$$

Cette technique de linéarisation partielle permet de ne pas introduire dans les programmes linéaires des contraintes qui ne seront pas actives à l'optimum.

Remarque 1 : Les programmes linéaires des étapes 0 correspondent à la linéarisation en  $x$  des fonctions du problème. Si ces fonctions sont suffisamment régulières les gradients ne varient que très peu. L'observation expérimentale des bases optimales des programmes successifs montre qu'elles ne varient pas ou peu, c'est-à-dire qu'elles diffèrent uniquement par quelques indices. Une technique adaptée à cette observation permettrait de diminuer considérablement le coût d'une itération en éliminant la quasi totalité de l'effet de calculs des programmes linéaires. Le code N4MCLO n'utilise pas cette particularité.

#### b) Programmes linéaires des étapes $h$ ( $h \geq 1$ )

Le problème de l'étape  $h$  se déduit du problème  $h-1$  par introduction d'une contrainte supplémentaire. La solution optimale  $z_{h-1}$  devient non réalisable, mais optimale pour le nouveau problème. Typiquement cette situation se formule schématiquement par :

$$\text{Problème PL}_{h-1} \quad \left| \begin{array}{l} \max c \cdot x \\ Ax = a \\ x_{\text{inf}} \leq x \leq x_{\text{sup}} \end{array} \right.$$

où  $x$  représente les variables (y compris  $\mu$  et les variables d'écart).

$I_{h-1}$  une base optimale.

$$\text{Problème PL}_h \quad \left| \begin{array}{l} \max c \cdot x \\ Ax = a \\ bx + v_e = \beta \\ x_{\text{inf}} \leq x \leq x_{\text{sup}} \\ v_e \geq 0 \end{array} \right.$$

Il est classique d'enchaîner la résolution de  $PL_h$  à celle de  $PL_{h-1}$  en formant la base  $I_{h-1} \cup \{v_e\} = I$ . Cette base est optimale mais non réalisable et la méthode duale-simplex conduit à l'optimum par une suite de bases non réalisables et optimales.

Néanmoins la méthode duale-simplex conduit à des oscillations incontrôlées sur la valeur des variables de base, certaines variables pouvant osciller d'une valeur réalisable ( $\geq 0$  pour une variable d'écart) à une valeur "hautement" non réalisable.

Dans le code N4MCL0, on a préféré utiliser une technique de paramétrisation de la borne de variable d'écart. Cette technique consiste à porter la borne de la variable d'écart  $v_e$  à sa valeur en  $z_{h-1}$ , c'est-à-dire à une valeur négative  $-\theta$ . La base  $I$  est alors réalisable et optimale mais dégénérée. Par un changement de base optimal, la variable  $v_e$  est introduite dans l'hors-base puis sa borne est augmentée de  $-\theta$  à 0 en assurant constamment la réalisabilité et l'optimalité des bases considérées. Cette technique permet de contrôler l'"irréalisabilité" de la solution courante et d'éviter le choix de la variable candidate dans la méthode duale-simplex. Sur l'ensemble des problèmes traités, le nombre de changements de base nécessaires est faible (de 1 à 3).

### 1.2.2. La recherche linéaire

Chaque étape de l'algorithme nécessite une double recherche sur le segment  $[x, z]$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{en premier lieu : Trouver } y \text{ approximation de } \hat{y} \text{ tel que} \\ \qquad \qquad \qquad d(\hat{y}, x) = \max_{t \in [x, z]} \{d(t, x)\} \\ \text{puis : Trouver } \omega \text{ approximation de } \hat{\omega} \text{ tel que} \\ \qquad \qquad \qquad d(\hat{\omega}, x) = 0 \quad \hat{\omega} \in [x, z] \end{array} \right.$$

voir figure 2.



L'appel à ce sous-programme est fréquent lors de la résolution d'un problème.

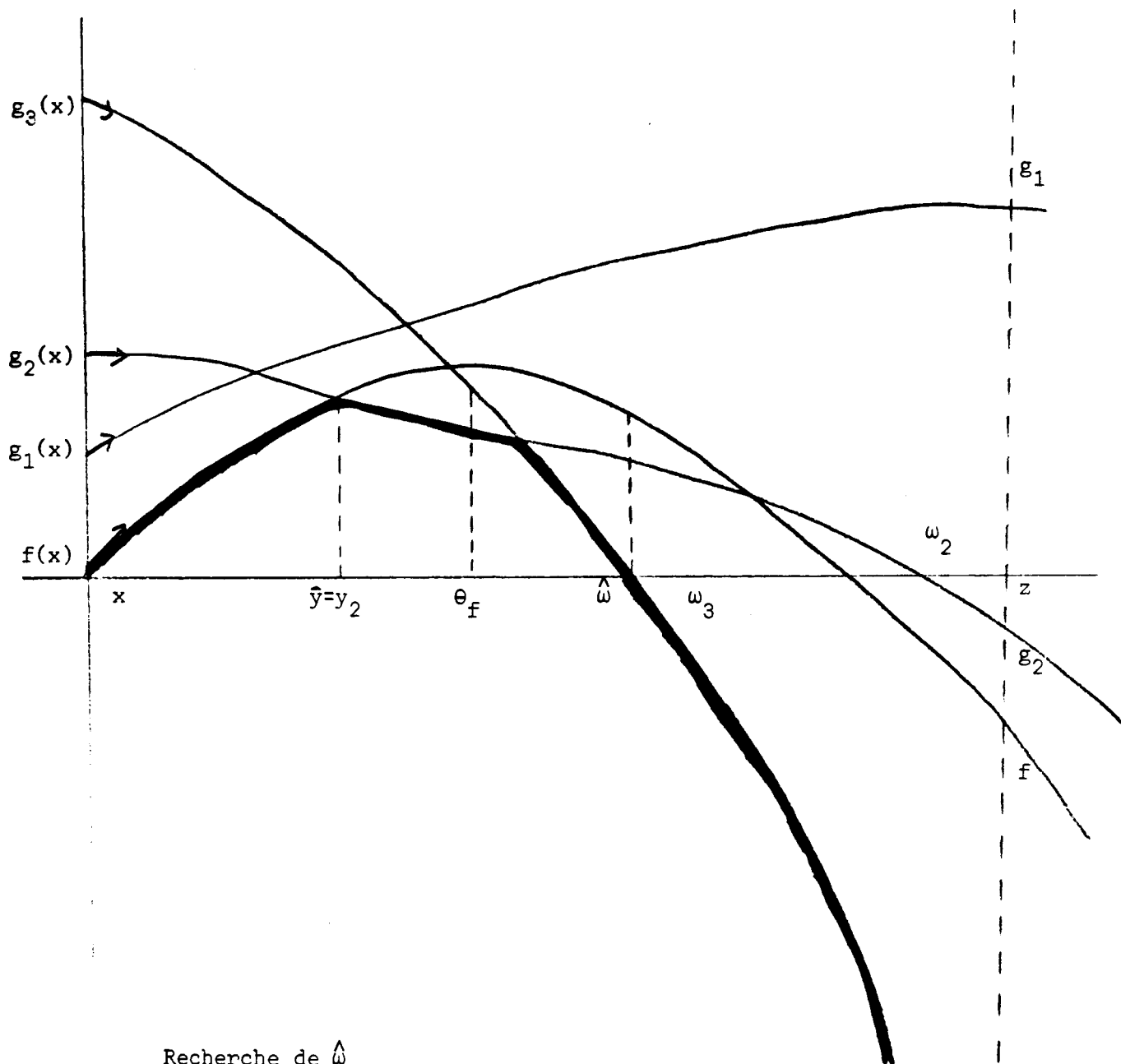
On peut estimer en moyenne que le nombre d'itérations pour obtenir une solution précise du problème est de l'ordre de 10 à 15, chaque itération nécessitant en moyenne 5 étapes. Le nombre de recherches linéaires requis est donc important.

D'autre part l'évaluation de la F-distance, minimum des contraintes, en un point  $t$  nécessite le calcul des  $(m+1)$  fonctions du problème en  $t$ . Pour des problèmes fortement contraints le temps de calculs des fonctions peut devenir prohibitif si les recherches linéaires imposent le calcul de la F-distance complète en de nombreux points.

La mise en oeuvre adoptée dans le code N4MCL0 a permis de réduire très sensiblement le nombre d'appels à la F-distance pour la double recherche de  $y$  et  $\omega$  (en moyenne trois appels) par rapport à des techniques de recherche discrète (du type section dorée).

Il est à noter également que les méthodes d'approximation polynomiale ne sont guère utilisables sur la fonction  $d$  du fait des points de "cassure", intersection de deux fonctions.

Enfin signalons que l'écriture du code N4MCL0 a été réalisé dans le souci d'obtenir des exécutions aussi fiables que possible. Cette orientation a conduit à rechercher des approximations des points  $\hat{y}$  et  $\hat{\omega}$  précises, ceci bien évidemment entraînant un effort de calculs peut être superflu à certaines itérations.



Recherche de  $\hat{\omega}$

- 1)  $g_1$  : calculée en  $z$  : abandonnée
- 2)  $g_2$  : recherche de la racine  $\omega_2$
- 3)  $g_3$  : recherche de la racine  $\omega_3$
- 4)  $f$  : calcul en  $\omega_3$  : abandonnée

Recherche de  $\hat{y}$

- 1)  $g_2$  : recherche de la racine  $y_2$
- 2)  $g_2$  : calcul en  $y_2$  : abandonnée
- 3)  $g_1$  : calcul en  $y_2$  : abandonnée

Figure 2

## Description

Recherche de  $y$  :  $y$  est recherché soit comme le maximum de  $f$  sur le segment  $[x, z]$ , soit comme l'intersection de  $f$  et d'une fonction  $g_i$ .

Cette recherche correspond à un résultat théorique relatif à la méthode des centres utilisant la F-distance minimum des contraintes dû à POLAK [15] et prouvant que la fonction économique  $f$  est active pour la définition du centre du tronçon  $E(x)$ , au moins à partir d'une certaine itération.

a) On dispose d'un classement des indices des contraintes :

$$\{i_1, i_2, \dots, i_p\} \text{ tel que } 0 < g_{i_1}(x) \leq g_{i_2}(x) \leq \dots \leq g_{i_p}(x)$$

Ce classement est conservé pour toute les étapes de l'itération.

La résolution du programme linéaire de solution optimale  $z$  permet un calcul immédiat des dérivées directionnelles des fonctions  $f$  et  $g_i (i \in I(x))$  le long de  $(x, z)$ .

b) Estimation du maximum de  $f$  sur  $[x, z]$ .

Cette estimation est réalisée par une série d'interpolations quadratiques de  $f$  : au départ on utilise les points  $x$  et  $z$  avec  $f(x)$ ,  $f'(x)$ ,  $f(z)$ , puis les valeurs connues dans les intervalles de localisation successifs.

Le nombre d'interpolation est limité à 10 excepté dans le cas d'un problème sans contrainte.

On obtient l'abscisse  $\theta_f$  et  $\bar{f} = f(\theta_f)$ .

c) Recherche du point  $\omega$  (racine de  $d(\cdot, x)$  sur  $[x, z]$ ).

Au départ  $\omega = z$ . On envisage successivement toutes les contraintes dans l'ordre de leur classement (donné en a)). Poser  $k = 1$  et  $\epsilon = .001 * \bar{f}$ .

Pas\_k : ( $k \leq p$ )

Calculer  $g_{i_k}(\omega)$

si  $g_{i_k}(\omega) \geq -\varepsilon$  abandon, on conserve

sinon recherche de la racine de  $g_{i_k}$ .

Cette recherche est conduite en premier lieu par la méthode régula falsi (méthode de Newton approximée par des différences finies) initialisée aux points  $x$  et  $\omega$ . Cette étape est limitée à 20 itérations. Un contrôle des itérés est assuré pour conserver le point courant dans l'intervalle du départ  $[x, \omega]$ .

Eventuellement la recherche est poursuivie par une dichotomie (20 étapes au maximum) pour assurer l'obtention d'une racine  $\omega'$  vérifiant  $|g_{i_k}(\omega')| \leq \varepsilon$  choisir  $\omega = \omega'$ .

fin du pas\_k.

La fonction économique est traitée comme une contrainte en initialisant la recherche de la racine avec  $\theta_f$  et  $\omega$ .

d) Recherche du point  $y$  (maximum de  $d(\cdot, x)$  sur  $[x, z]$ ).

On dispose du point  $y$ , "minimum" de  $\theta_f$  et  $\omega$ . On envisage successivement les contraintes dans l'ordre du classement a) en abandonnant en premier lieu les contraintes pour lesquelles la dérivée directionnelle en  $x$  le long de  $(x, z)$  est soit positive, soit non calculée.

d.1. Poser  $k = 1$  et  $\varepsilon = .001 * f(y)$ .

Pas\_k : ( $k \leq p$ )

si  $g'_{i_k}(x; x-z) \geq 0$  ou  $i_k \notin I(x)$

abandon provisoire, on conserve  $y$

sinon, calculer  $g_{i_k}(y)$

si  $g_{i_k}(y) \geq f(y) - \varepsilon$  abandon définitif de  $g_{i_k}$ , on conserve  $y$



sinon, recherche de la racine de  $f(\cdot) - g_{i_k}(\cdot)$  sur l'intervalle  $[x, y]$ .

Cette recherche est conduite avec la méthode régula falsi en premier lieu et poursuivie éventuellement par dichotomie.

L'initialisation est réalisée en calculant la racine des deux interpolations quadratiques de  $f$  et  $g_{i_k}$  aux points  $x$  et  $y$ . La technique utilisée est identique à celle exposée en c)<sup>k</sup>.

La racine trouvée à  $\epsilon$ -près remplace le point  $y$ .

fin du pas k.

d.2. Poser  $k = 1$ , conserver le seuil  $\epsilon$  de d.1.

On considère ici les contraintes qui ont été abandonnées provisoirement en d.1.

Pas k : ( $k \leq p$ )

Si  $g_{i_k}(y) \geq f(y) - \epsilon$  abandon, on conserve  $y$ .

Estimer le maximum de  $g_{i_k}$  sur  $[x, y]$ . Si ce maximum est "voisin" de  $y$ , abandon de la contrainte  $g_{i_k}$ . Cette estimation est réalisée par une seule interpolation quadratique.

Dans le cas contraire on détermine la racine par les mêmes procédés que précédemment. Le point trouvé est pris pour  $y$ .

fin du pas k.

Remarques :

1° : Cette recherche linéaire adopte, au moyen du classement des fonctions  $g_i$  en  $x$ , un "pari" sur la fonction qui sera active en  $\hat{y}$  avec l'objectif économique. Ce pari, dont le but est de diminuer le nombre de calculs des autres fonctions est justifié expérimentalement puisque le nombre de contraintes qui ont effectivement été traitées dans une recherche de racines est faible (1 ou 2 en moyenne).

2° : La technique exposée repose sur des résultats théoriques, rappelés plus haut, qui se sont expérimentalement trouvés être vérifiés. Cependant elle devient sans fondement lorsque le point  $x$  n'est pas réalisable (cf. 1° phase de la méthode). Dans ce cas le code N4MCLO réalise une recherche du maximum par une méthode dichotomique.

### I.3. COMPOSITION DU CODE N4MCLO

#### 1) Programme principal

Il doit contenir la construction des zones de mémoire utilisées dans le module de simulation et des zones de mémoire utilisées comme zones de travail. Il doit contenir les initialisations d'un certain nombre de paramètres d'entrée, comme le point de départ, les bornes de ces variables, le nombre de contraintes et des indicateurs sur la nature des fonctions  $f$  et  $g_i$  du problème. Puis on doit trouver l'appel à l'optimiseur N4MCLO.

#### 2) Module de simulation

Le but de ce module est de calculer les fonctions du problème, ou une partie de ces fonctions, ainsi que les gradients. Il doit être construit suivant les normes MODULOPT [ ]. C'est-à-dire que l'objectif est à minimiser et les contraintes en  $\leq$ .

#### 3) Module N4MCLO

Ce module initialise les différentes zones de travail et vérifie que le dimensionnement de ces zones est suffisant.

Il contient ensuite l'appel au module FMCLAL.

#### 4) Module FMCLAL

Ce sous-programme décrit une itération de la méthode.

- initialisation des constantes
- début de l'itération
  - \* classement des fonctions
  - \* construction du problème linéarisé
  - \* résolution de ce PL par l'appel au module FMCLSI.

- \* recherche unidimensionnelle par l'appel au module FMCLRL.
- \* contraintes additionnelles
  - initialisation par FMCLCA
  - résolution du nouveau PL par l'appel au module FMCLPB.
- sortie : calcul des variables duales et impressions.

#### 5) Module FMCLSI

Ce sous-programme permet de résoudre le PL de l'étape 0, où chaque variable est bornée inférieurement et supérieurement. On utilise la méthode simplex en variables bornées. Si un changement de base est nécessaire, il est fait par un appel au module FMCLCB.

#### 6) Module FMCLCB

Son but est de mettre à jour l'inverse de base lors d'un changement de base dans la méthode simplex.

#### 7) Module FMCLRL

Ce sous-programme correspond à la recherche unidimensionnelle décrite en I.2.2.

#### 8) Module FMCLCA

Ce module construit le problème linéaire de l'étape p en ajoutant une contrainte à celui de l'étape p-1.

#### 9) Module FMCLPB

Ce sous-programme résout le nouveau problème linéaire par la méthode décrite en I.2.1.

#### 10) Module FMCLFD

Souvent dans la recherche linéaire, on veut calculer la valeur de la F-distance en un point donné. Le module FMCLFD exécute ce calcul.

Remarque : Cet algorithme construit une suite de points réalisables le "plus au centre" du tronçon  $E(x)$ . Si le gradient de la contrainte  $g_{i_0}$  est élevé, alors ces points réalisables seront proches de la contrainte  $g_{i_0}$ . Pour conserver la symétrie de ce centre, on désire avoir des gradients du même ordre de grandeur. Dans ce but on normalise les fonctions qui interviennent dans l'expression de la F-distance.

Si  $x$  est le point de départ de l'itération en cours, on pose :

$$d(t, x) = \text{Min} \left\{ \frac{p_0(f(t) - f(x))}{\|\nabla f(x)\|} ; \frac{g_i(t)}{\|\nabla g_i(x)\|} \quad i = 1 \dots p \right\}$$

$$d'_0(t, x) = \text{Min} \left\{ \frac{p_0(f'(t, x) - f(x))}{\|\nabla f(x)\|} ; \frac{g_i(t, x)}{\|\nabla g_i(x)\|} \quad i = 1 \dots p \right\}$$

On normalise les contraintes additionnelles par le même procédé.

#### I.4. RESULTATS NUMERIQUES AVEC LE CODE N4MCLO

Les tableaux qui suivent regroupent divers résultats numériques obtenus sur 18 problèmes non linéaires extraits de la littérature. Les problèmes 17 et 18 sont des modèles de dispatching électrique (réseaux Cigné et grec) en actif, réactif.

##### a) Origine :

Problème 1 : Shell primal : Colville n° 1

Problème 2 : Shell dual : Colville n° 2

Problème 3 : Colville n° 3

Problème 4 : Wood : colville n° 4

Problème 5 : Pearson : (1908)

Problème 6 : Brocken, Mc Cornick "selected applications of non linear prog" (1968)

Problème 7 : Rasenbrock

Problème 8 : Barnes : Thesis 67

Problème 9 : US Steele Co (Holzman, SRCC Rpt, 1969)

Problème 10 : Himmelblau, problème n° 25

- Problème 11 : Powell, Computer Journal (1962)  
 Problème 12 : Wong, problème n° 1  
 Problème 13 : Wong, problème n° 2  
 Problème 14 : non précisée  
 Problème 15 : non précisée  
 Problème 16 : Lemarechel, Tulowitzhi (Problème de Gibbs)  
 Problème 17 : Cigré (dispatching à 10 noeuds, actif réactif sans transit)  
 Problème 18 : Grec (dispatching à 44 noeuds, actif réactif sans transit).

Nota : L'ensemble de ces problèmes est disponible sous forme de source fortran IV, normes 66. Ils sont programmés selon les normes du club de programmes Modulopt. Consulter les auteurs.

### b) Résultats :

Le tableau 1 résume les caractéristiques de ces problèmes et présente :

- ① Le nombre d'itérations pour atteindre une stabilisation de 8 chiffres sur la valeur économique entre deux itérés successifs. Cette précision correspond à d'excellents résultats ; par exemple sur le problème Shell dual (colville n° 2) la valeur de la solution fournie est :  
 $f_{19} = 32.348678874.$
- ② La pondération  $p_0$  de l'objectif économique choisie.
- ③ Le nombre moyen de calculs de la F-distance complète par étape. A part les problèmes sans contrainte où la recherche linéaire proposée n'est pas efficace et devrait être améliorée si le code N4MCLO était destiné à traiter des problèmes sans contrainte, il apparait que le nombre d'appels à la F-distance reste faible. A cette remarque il faut ajouter que le nombre de points où on calcule une fonction  $g_1$  quelconque est supérieur, ce qui peut conduire à un volume de calculs plus important si les fonctions sont difficiles à calculer.
- ④ Le nombre d'étapes par itération. Ce nombre reste faible et ne doit jamais être autorisé à grandir. On peut estimer que 10 à 15 contraintes additionnelles autorisées au maximum sont suffisantes.
- ⑤ Le nombre d'itérations de la première phase en cas de départ d'un point non réalisable.

Le tableau 2 présente les résultats de vitesse de convergence du code N4MCL0 sur les problèmes n° 2, 4, 5, 10, 11, 14, 15, 17, 18, sur lesquels la méthode a conduit à un nombre d'itérations important (de l'ordre de 20). Dans les colonnes 2 à 10 sont donnés les écarts  $(\bar{f} - f_{k+1}) / (\bar{f} - f_k)$  où  $\bar{f}$  est la valeur de l'objectif à la solution trouvée. Cette valeur  $\bar{f}$  représente toujours, pour les problèmes sur lesquels on connaît la solution, au moins de manière expérimentale avec d'autres méthodes, une bonne approximation de la solution.

La convergence sur les autres problèmes, étant rapide, n'a pas été étudiée.

L'étude de ce tableau amène deux remarques :

1) La convergence de la méthode des centres linéarisée peut être notablement ralentie sur certains problèmes, par exemple le problème n° 5. Ce phénomène correspond probablement à un phénomène de blocage le long des contraintes dans une région de non convexité. Le cheminement pour "contourner" cette zone étant difficile, (rappelons que la méthode est une méthode réalisable).

2) En règle générale, le taux de convergence est bon (au sens d'une convergence linéaire) au voisinage de la solution. Cette observation est à rapprocher d'un résultat théorique sur la vitesse de convergence de la méthode des centres utilisant la F-distance minimum des contraintes [15]. Ce résultat prouve une convergence asymptotique linéaire, ou par le jeu de la pondération  $p_0$  une convergence linéaire dès la 1ère itération (cf. [7]).

On sait d'autre part que la méthode des centres linéarisée ne peut pas converger linéairement dans certains cas [15], si elle n'est pas complétée par une technique empêchant les zig-zag. POLAK dans [15] utilise une pénalisation quadratique dans les points  $i$ ) de chaque étape 0. Cela conduit à résoudre un problème, non plus linéaire, mais quadratique. L'Algorithme partiel, présenté dans [8], utilise des plans additionnels pour représenter le domaine. L'un de ses buts est d'empêcher les zig-zag.

La mise en oeuvre reste dans le cadre de programmes linéaires. Bien qu'à l'heure actuelle il n'ait pas été possible de prouver que la vitesse de convergence restait linéaire avec l'algorithme de recentrage, des conditions suffisantes présentées dans [7 chapitre 6] permettent d'espérer un bon comportement linéaire. L'expérimentation semble confirmer cette espérance.

pb n°	taille		Nb d'itérations	Pondération $P_0 = 10^{-1}$ $\alpha$	Nb moyen de calculs de d	Nb d'étapes par itérations	Réalissabilité de départ	Nb d'ité de la 1 <sup>o</sup> phase
	contraintes	Variables						
1	10	5	6	3	2.25	1		/
2	5	15	19	3	3.3	1 à 5		/
3	6	5	4	3	1.67	1		/
4	/	4	20	/	23	7 à 8		/
5	17	9	20	1	2.4	2 à 8		/
6	2	2	5	3	8.4	1 à 7	non	3
7	/	2	9	/	15.2	2 à 3		/
8	3	2	7	3	4.8	1 à 3		/
9	4	6	2	4	1.6	/		/
10	/	2	20	/	1	1		/
11	/	4	20	/	27	5 à 8		/
12	4	7	17	2	9	~ 8		/
13	8	10	20	5	2.06	5 à 10		/
14	5	7	20	2	4	~ 3	non	2
15	19	16	20	3	3.67	2 à 10	non	12
16	2	2	5	4	3.6	1 à 3		/
17	20	50	20	5	3.35	~ 10	non	2
18	88	107	20	5	2.31	~ 10	non	7

BU  
LILLE

Tableau 1



k = pb n°	19	18	17	16	15	14	13	12	11
2	/	0.2	0.3	0.2	0.22	0.21	0.19	0.3	0.15
4	0.46	0.51	0.65	0.58	0.7	0.62	0.46	0.72	0.6
5	0.34	0.6	0.85	0.98	0.99	0.99	0.99	0.93	0.91
10	0.54	0.49	0.66	0.43	0.49	0.54	0.51	0.52	0.52
11	0.5	0.64	0.71	0.77	0.82	0.83	0.83	0.84	0.84
14	0.5	0.6	0.75	0.79	0.82	0.85	0.87	0.88	0.88
15	0.28	0.63	0.64	0.70	0.63	0.7	0.6	0.62	0.5
17	0.53	0.16	0.25	0.09	0.7	0.52	0.64	0.72	0.8
18	0.014	0.24	0.99	0.99	0.97	0.43	0.48	0.44	0.45

BU  
LILLE

$$P_k = (\bar{f} - f_{k+1}) / (\bar{f} - f_k)$$

Tableau 2

II. TRAITEMENT DES PROGRAMMES MATHÉMATIQUES AVEC DES CONTRAINTES EN ÉGALITÉ :  
CODE N4MCLI

II.1. BREF RAPPEL THÉORIQUE

On considère le programme

$$\left| \begin{array}{l} \text{maximiser } f(t) \\ g_i(t) \geq 0 \quad i = 1 \dots p \\ h_j(t) = 0 \quad j = 1 \dots m \\ x_{\text{inf}} \leq t \leq x_{\text{sup}} \end{array} \right.$$

où les fonctions  $f$ ,  $g_i$ ,  $h_j$  sont continûment différentiables on note  
 $B = \{t \in \mathbb{R}^n : x_{\text{inf}} \leq t \leq x_{\text{sup}}\}$ .

Notations

Pour tout  $x \in B$  qui vérifie  $g_i(t) > 0 \quad i = 1 \dots p$   
 $h_j(t) > 0 \quad j = 1 \dots m$

et pour tout  $\varepsilon > 0$ , on note :

$$d_0(t, \varepsilon) = \text{Min}\{g_i(t), i = 1 \dots p; h_j(t), j = 1 \dots m; -h_j(t) + \varepsilon, j = 1 \dots m\}$$

$$d'_0(t, y, \varepsilon) = \text{Min}\{g'_i(t, y), i = 1 \dots p; h'_j(t, y), j = 1 \dots m; -h'_j(t, y) + \varepsilon, j = 1 \dots m\}$$

$$d(t, \lambda, \varepsilon) = \text{Min}\{d_0(t, \varepsilon); f(t) - \lambda\}$$

$$d'(t, \lambda, y, \varepsilon) = \text{Min}\{d'_0(t, y, \varepsilon); f'(t, y) - \lambda\}$$

On suppose que l'on a un point de départ  $x$  qui vérifie :

$$\begin{array}{l} g_i(x) > 0 \quad i = 1 \dots p \\ h_j(x) > 0 \quad j = 1 \dots m \\ x_{\text{inf}} \leq x \leq x_{\text{sup}} \end{array}$$

et on cherche  $x'$  le successeur de  $x$ .

Chaque itération générale se décompose en deux phases.

## Description d'une itération

### 0 - initialisation :

au point  $x$ , on associe  $\omega(x)$  et  $D(x)$  (cf. chapitre II).

### 1 - phase de réalisabilité par rapport au domaine $D(x)$

i) on pose  $\overset{0}{\epsilon} = 2\omega(x)$

\* on détermine  $\overset{0}{z}$  qui maximise  $d'_0(t, x, \overset{0}{\epsilon})$  sur  $B$

\*  $\overset{0}{y}$  qui maximise  $d_0(t, \overset{0}{\epsilon})$  sur  $[x, \overset{0}{z}]$

\* on note  $\overset{1}{\epsilon} = \text{Max}_{j=1\dots m} \{h_j(\overset{0}{y})\}$

on pose  $\rho = 1$

ii)  $\overset{p}{z}$  un point qui maximise  $d'_0(t, \overset{p-1}{y}, \overset{1}{\epsilon})$  sur  $B$

$\overset{p}{y}$  un point qui maximise  $d_0(t, \overset{1}{\epsilon})$  sur  $[\overset{p-1}{y}, \overset{p}{z}]$

iii) si  $\overset{p}{y} \in D(x)$ , fin de la 1<sup>o</sup> phase, on va en 2 avec  $t_0 = \overset{p}{y}$ .

sinon on va en ii) avec  $p+1$  au lieu de  $p$ .

### 2 - phase d'optimisation

i) on pose  $\epsilon = \omega(x)$  et  $p = 0$

ii) étape  $p$  : 2.0 : on connaît  $t_p \in D(x)$ , on pose  $\lambda_p = f(t_p)$

2.1 : on pose  $\overset{0}{y} = t_p$  et  $h = 0$

2.2 :  $\overset{h+1}{z}$  point qui maximise  $d'(t, \overset{h}{y}, \lambda_p, \epsilon)$  sur  $B$

2.3 : si "la norme du Lagrangien en  $\overset{h}{y}$ " est petite, on pose  $t_{p+1} = \overset{h}{y}$  et on va en iii)

2.4 : on détermine  $\overset{h+1}{y}$  successeur de  $\overset{h}{y}$  par un procédé de recentrage identique à celui décrit en I.1.

On va en 2.2 avec  $h+1$  au lieu de  $h$ .

iii) si  $d(t_{p+1}, \lambda_p, \epsilon) < \frac{\epsilon}{2}$

fin de l'itération générale avec  $x' = t_{p+1}$  comme successeur de  $x$ .

sinon on va en ii) avec  $p+1$  au lieu de  $p$

fin de l'itération.

## II.2. REMARQUES SUR CET ALGORITHME THEORIQUE

### II.2.1. La phase de réalisabilité

\* Dans cet algorithme, on pose  $\varepsilon^0 = 2\omega(x)$ , puis on prend  $\varepsilon^1 = 2\omega(y^0)$  et on conserve cette valeur jusqu'à l'obtention d'un point de  $D(x)$ . Mais les essais numériques montrent que la convergence est beaucoup plus rapide, si à chaque pas, on prend  $\varepsilon^p = 2\omega(y^{p-1})$ . Ceci est tout-à-fait normal.

Dans la partie ii) de la 1<sup>o</sup> phase devient :

$$\left[ \begin{array}{l} \text{ii) } \overset{D}{z} \text{ un point qui maximise } d'_0(t, \overset{P-1}{y}, \overset{D}{\varepsilon}) \text{ sur } B \\ \overset{D}{z} \text{ un point qui maximise } d_0(t, \overset{D}{\varepsilon}) \text{ sur } [\overset{P-1}{y}, \overset{D}{z}] \\ \overset{P+1}{\varepsilon} = 2\omega(\overset{D}{y}) \end{array} \right.$$

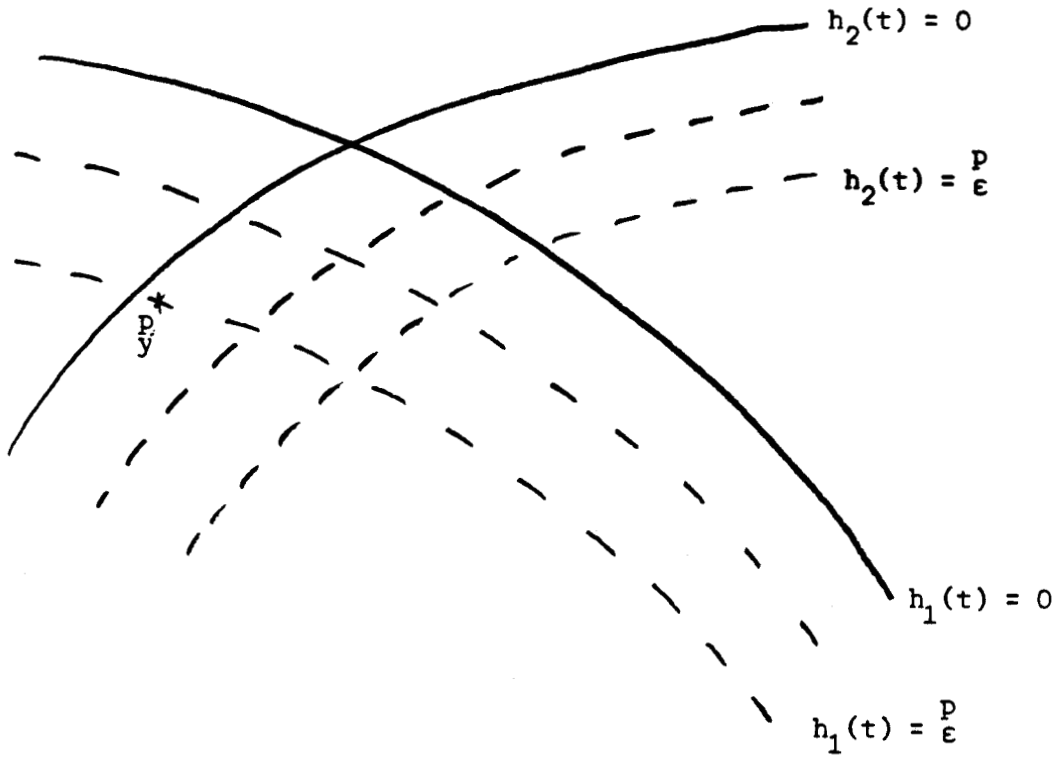
\* Mais au cours des essais numériques, on a remarqué que plus  $\omega(x)$  est petit plus le nombre de pas pour obtenir un point de  $D(x)$  est grand. Pour accélérer la convergence de cette phase de réalisabilité, on autorise le recentrage.

Donc la partie ii) de la 1<sup>o</sup> phase devient :

$$\left[ \begin{array}{l} \text{ii) } \overset{D}{z} \text{ point qui maximise } d'_0(t, \overset{P-1}{y}, \overset{D}{\varepsilon}) \text{ sur } B \\ \overset{D}{y} \text{ successeur de } \overset{P-1}{y} \text{ par un procédé de recentrage} \\ \overset{P+1}{\varepsilon} = 2\omega(\overset{D}{y}) \end{array} \right.$$

L'algorithme de recentrage utilisé est celui décrit dans la partie I.1, c'est-à-dire celui utilisé dans le code N4MCLO.

\* Mais sur certains problèmes, on a pu remarquer un phénomène de blocage sur une des contraintes  $h_{j_0}$  qui est presque active.



Pour éviter ce phénomène, on a pondéré les contraintes, dans le cas où  $\omega(x) < 10^{-3}$ .

$$\underline{\text{si}} \ 0 < h_{j_0}^{(p-1)} < \frac{\omega(x)}{10}$$

On pondère la fonction  $h_{y_0}$  par 10. C'est-à-dire que l'on considère la fonction  $10 \cdot h_{j_0}(t)$  au lieu de  $h_{j_0}(t)$  dans la définition de  $d_0(t, \frac{P}{\epsilon})$ . De même on remplace  $h_{j_0}^!(t, \frac{P-1}{y})$  par  $10 \cdot h_{j_0}^!(t, \frac{P-1}{y})$  dans la définition de  $d_0^!(t, \frac{P-1}{y}, \frac{P}{\epsilon})$ .

Cette pondération des contraintes permet d'obtenir un point  $t_0 \in D(x)$  avec des valeurs de contraintes  $h_j(t_0)$  du même ordre de grandeur.

### Conclusion

La phase de réalisabilité en utilisant les remarques précédentes devient :

- i) on pose  $\varepsilon^1 = 2\omega(x)$   $p = 1$   $\overset{0}{y} = x$
- ii) on détermine  $\overset{p}{z}$  un point qui maximise  $d'_0(t, \overset{p-1}{y}, \overset{p}{\varepsilon})$  sur B puis  $\overset{p}{y}$  successeur de  $\overset{p-1}{y}$  obtenu par le procédé de recentrage.
- iii) si  $\overset{p}{y} \in D(x)$  on pose  $t_0 = \overset{p}{y}$   
fin de la 1<sup>o</sup> phase  
sinon on pose  $\overset{p+1}{\varepsilon} = \text{Max}_{j=1\dots m} \{h_j(\overset{p}{y})\}$   
et on va en ii) avec  $p+1$  au lieu de  $p$ .

Ces différentes modifications permettent de diminuer fortement le nombre de pas pour obtenir un point de  $D(x)$ .

## II.2.2. Phase d'optimisation

Dans cette deuxième phase de l'itération, on construit une suite de points  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_p, \dots$ . Chaque étape  $p$  comprend un nombre fini de pas  $h^*$  (cf. chapitre III), au cours d'une étape la valeur de la troncature  $\lambda_p$  est fixe,  $\lambda_p = f(t_p)$ .

Mais numériquement, la convergence est plus rapide si on modifie la valeur de la troncature à chaque pas. C'est d'ailleurs ce qui est fait dans le code N4MCLO.

Si on utilise la remarque précédente, on obtient comme phase d'optimisation :

- i) on pose  $\varepsilon = \omega(x)$  et  $p = 0$
- ii) étape  $p$  : 2.0 : on connaît  $t_p \in D(x)$ 
  - 2.1 : on pose  $\overset{0}{y} = t_p$ ,  $\lambda_0 = f(t_p)$ ,  $h = 0$
  - 2.2 :  $\overset{h+1}{z}$  un point qui maximise  $d'(t, \overset{h}{y}, \lambda_h, \varepsilon)$  sur B
  - 2.3 : si "la norme du Lagrangien en  $\overset{h}{y}$ " est petit, on pose  $t_{p+1} = \overset{h}{y}$   $\lambda = f(\overset{h-1}{y})$  et on va en iii)  
sinon on continue
  - 2.4 : on détermine  $\overset{h+1}{y}$  successeur de  $\overset{h}{y}$  par un procédé de recentrage. On pose  $\lambda_{h+1} = f(\overset{h+1}{y})$  et on va en 2.2 avec  $h+1$  au lieu de  $h$ .

iii) si  $d(t_{p+1}, \lambda, \epsilon) < \frac{\epsilon}{2}$   
 le successeur de  $x$  est  $x' = t_{p+1}$   
sinon on va en ii) avec  $p+1$  au lieu de  $p$ .

Remarque : Cette phase d'optimisation est identique au procédé d'optimisation du code N4MCL0, appliqué au problème

$$P(x) = \begin{cases} \text{Max } f(t) \\ t \in D(x) \end{cases}$$

Le test sur la norme du Lagrangien en  $\bar{y}^h$  correspond à tester si  $\bar{y}^h$  est "proche" de l'optimum de ce problème  $P(x)$ .

Mais le Lagrangien étant inconnu, le test est fait sur une approximation du Lagrangien obtenue en confondant les multiplicateurs du problème avec ceux du problème linéarisé.

Pour éviter une erreur d'approximation, on teste aussi la variation relative de l'objectif.

2.4 : on détermine  $\bar{y}^{h+1}$  successeur de  $\bar{y}^h$  par un procédé de recentrage.  
 2.5 : on pose  $\lambda_{h+1} = f(\bar{y}^{h+1})$   
si  $\left| \frac{\lambda_{h+1} - \lambda_h}{\lambda_h} \right|$  est petite  
 on pose  $t_{p+1} = \bar{y}^{h+1}$ ,  $\lambda = f(\bar{y}^h)$  et on va en iii)  
sinon on va en 2.2 avec  $h+1$  au lieu de  $h$ .

Car si la variation relative est faible, c'est sans doute que le point  $\bar{y}^{h+1}$  est "proche" de l'optimum du problème  $P(x)$ .

### II.3. ALGORITHME MODIFIÉ UTILISÉ DANS LE CODE N4MCLI

On suppose que l'on a un point de départ  $x$  qui vérifie :

$$g_i(x) > 0 \quad i = 1 \dots p$$

$$h_j(x) > 0 \quad j = 1 \dots m$$

$$x \in B$$

### Description d'une itération générale

0 - initialisation :  $x$  point de départ, on lui associe  $\omega(x)$  et  $D(x)$ .

### 1 - phase de réalisabilité par rapport à $D(x)$

i) on pose  $\varepsilon^1 = 2\omega(x)$ ,  $p = 1$ ,  $\overset{0}{y} = x$

ii)  $\overset{p}{z}$  un point qui maximise  $d'_0(t, \overset{p-1}{y}, \overset{p}{\varepsilon})$  sur  $B$   
 $\overset{p}{y}$  successeur de  $\overset{p-1}{y}$  obtenue par recentrage

iii) si  $\overset{p}{y} \in D(x)$

on pose  $t_0 = \overset{p}{y}$  et on va en 2

sinon on pose  $\overset{p+1}{\varepsilon} = \text{Max}_{j=1 \dots m} \{h_j(\overset{p}{y})\}$  et on va en ii) avec  $p+1$  au lieu de  $p$ .

### 2 - phase d'optimisation

i) on pose  $\varepsilon = \omega(x)$ ,  $p = 0$

ii) étape  $p$  : 2.1 : on connaît  $t_p \in D(x)$ , on pose

$$\overset{0}{y} = t_p, h = 0, \lambda_0 = f(t_p)$$

2.2 :  $\overset{h+1}{z}$  qui maximise  $d'(t, \overset{h}{y}, \lambda_h, \varepsilon)$  sur  $B$

2.3 : si la "norme du Lagrangien en  $\overset{h}{y}$ " est petite, on pose

$$t_{p+1} = \overset{h}{y}$$

$$\lambda = f(\overset{h-1}{y})$$

et on va en iii)

2.4 : on détermine  $\overset{h+1}{y}$  successeur de  $\overset{h}{y}$  par recentrage.

2.5 : on pose  $\lambda_{h+1} = f(\overset{h+1}{y})$

si  $\left| \frac{\lambda_{h+1} - \lambda_h}{\lambda_h} \right|$  petite, on pose  $\lambda = f(\overset{h}{y})$

$$t_{p+1} = \overset{h+1}{y}$$

et on va en iii).



sinon on va en 2.2 avec  $h+1$  au lieu de  $h$ .

iii) si  $d(t_{p+1}, \lambda, \epsilon) < \frac{\epsilon}{2}$   $x' = t_{p+1}$  fin de l'itération

sinon on va en ii) avec  $p+1$  au lieu de  $p$ .

fin de l'itération.

## II.4. Résultats numériques du code N4MCL1

### 1) Problème n° 1

origine : Himmelblau, problème n° 1

caractéristiques : 2 variables

1 égalité

1 inégalité

iterg	nb d'étapes phase 1	nb d'étapes phase 2	valeur de l'objectif	valeur de la contrainte	$\omega(x)$
1	2	5 var. rel $< 10^{-4}$	0.76	0.499	0.5
2	2	5 "	1.04	0.249	0.249
3	2	5 "	1.205	0.124	0.124
4	2	6 "	1.29	0.06	$6 \cdot 10^{-2}$
5	2	8 "	1.34	0.03	$3 \cdot 10^{-2}$
6	2	2 Norme lag $< 10^{-2}$	9.13	0.007	$1.5 \cdot 10^{-2}$
7	2	6 "	11.98	$0.19 \cdot 10^{-2}$	$3.9 \cdot 10^{-3}$
8	2	11 "	14.53	$0.4 \cdot 10^{-3}$	$9.7 \cdot 10^{-4}$
9	1	2 "	16.51	$0.1 \cdot 10^{-3}$	$2.4 \cdot 10^{-4}$
10	2	25 nb max.	16.32	$0.3 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-5}$
11	1	25 "	16.53	$0.7 \cdot 10^{-5}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$
12	1	1 val. rel $< 10^{-4}$	16.605	$0.19 \cdot 10^{-5}$	$3.8 \cdot 10^{-6}$
13	2	1 "	16.606 35	$0.4 \cdot 10^{-6}$	$9.5 \cdot 10^{-7}$
14	2	1 "	16.606 49	$0.1 \cdot 10^{-6}$	$2.3 \cdot 10^{-7}$
15	1	1 "	16.606 523	$0.2 \cdot 10^{-7}$	$5.9 \cdot 10^{-8}$
16	2	1 "	16.606 532	$0.7 \cdot 10^{-8}$	$1.4 \cdot 10^{-8}$
17	1	1 "	16.606 534 32	$0.18 \cdot 10^{-8}$	$3.7 \cdot 10^{-9}$
18	2	1 "	16.606 534 84	$0.4 \cdot 10^{-9}$	$9 \cdot 10^{-10}$
19	1	1 "	16.606 534 97	$0.1 \cdot 10^{-9}$	$2.3 \cdot 10^{-10}$
20	1	1 "	16.606 535 008	$0.2 \cdot 10^{-10}$	$5.8 \cdot 10^{-11}$



Conclusion : L'algorithme converge vers un point qui est le maximum, donc bien vers un point stationnaire.

## 2) Problème n° 2

origine : Fletcher, Lill

caractéristiques : 3 variables  
pas d'inégalité  
2 égalités

itern	nb d'étapes 1° phase	nb d'étapes 2° phase	objectif	Valeurs des contraintes	$\omega(x)$
1	2	5 var. rel. $< 10^{-4}$	-143.616 8	$0.3 \cdot 10^{-1}$ ; $0.12 \cdot 10^{-2}$	1
2	1	2 "	-143.639 9	$0.5 \cdot 10^{-2}$ ; $0.49 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$
3	1	1 Norme $J_{ag} < 10^{-2}$	-143.643	$0.99 \cdot 10^{-5}$ ; $0.13 \cdot 10^{-2}$	$2.9 \cdot 10^{-3}$
4	1	1 var. rel. $< 10^{-4}$	-143.644	$0.107 \cdot 10^{-3}$ ; $0.61 \cdot 10^{-3}$	$6.8 \cdot 10^{-4}$
5	2	1 "	-143.644	$0.199 \cdot 10^{-5}$ ; $0.218 \cdot 10^{-4}$	$3.05 \cdot 10^{-4}$
6	2	1 "	-143.648	$0.5 \cdot 10^{-6}$ ; $0.7 \cdot 10^{-5}$	$1. \cdot 10^{-5}$
7	2	1 "	-143.646 139 7	$0.76 \cdot 10^{-6}$ ; $0.84 \cdot 10^{-6}$	$3.5 \cdot 10^{-6}$
8	2	1 "	-143.646 142 07	$0.78 \cdot 10^{-7}$ ; $0.2 \cdot 10^{-8}$	$4.2 \cdot 10^{-7}$
9	1	1 "	-143.646 142 193	$0.6 \cdot 10^{-9}$ ; $0.54 \cdot 10^{-9}$	$3.9 \cdot 10^{-8}$
10	2	1 "	-143.646 142 194	$0.3 \cdot 10^{-10}$ ; $0.6 \cdot 10^{-11}$	$3.1 \cdot 10^{-10}$
11	2	/	/	/	$1.5 \cdot 10^{-11}$
	arrêt				

Conclusion : L'algorithme converge vers le minimum donné dans la littérature.

Valeur de l'objectif : -143.646 142 194

3) Problème n° 3

origine : Evtushenko (problème 32 de [16]).

caractéristiques : 3 variables  
 1 inégalité  
 1 égalité linéaire

iterg	nb d'étapes 1° phase	nb d'étapes 2° phase	objectif	contrainte	$\omega(x)$
1	1	1 Norme lag $< 10^{-2}$	1.000 052	$0.2 \cdot 10^{-4}$	0.049
2	1	1 Var. rel $< 10^{-4}$	1.000 000 013	$0.6 \cdot 10^{-8}$	$1.3 \cdot 10^{-5}$
3	1	1 "	1.	$0.34 \cdot 10^{-8}$	$3.4 \cdot 10^{-5}$
4	1	1 "	1.000 000 000 00178	$0.8 \cdot 10^{-12}$	$8 \cdot 10^{-13}$

4) Problème n° 4

origine : Bartholomew-Biggs (problème 71 de [16]).

caractéristiques : 4 variables  
 1 égalité quadratique  
 1 inégalité

On fixe le nombre maximum d'itérations à 20.

Après 20 itérations générales on obtient le point  
 [1.000 034 ; 4.744 453 ; 3.819 26 ; 1.379 62].

valeur de l'inégalité :  $0.11 \times 10^{-4}$

valeur de l'égalité :  $0.13 \times 10^{-4}$

Donc la contrainte  $g_1$  est active à l'optimum.

itérg	nb d'étapes 1° phase	nb d'étapes 2° phase	objectif	Valeur de la contrainte	$\omega(x)$
1	2	1 Norme lag. $< 10^{-2}$	16.298	7.49	7.5
2	2	1 "	16.535	3.65	3.74
3	2	1 "	16.770	1.806	1.82
4	3	1 "	17.077	0.902	0.903
5	3	1 "	17.290	0.450	0.451
6	2	1 "	17.042	0.222	0.225
7	2	1 "	16.996	0.1111	0.1112
8	2	1 "	17.005	0.0554	0.0555
9	2	1 "	17.009	0.0276	0.0277
10	2	1 "	17.011	0.0138	0.0138
11	2	1 "	17.012	0.0069	0.0069
12	2	1 "	17.013 4	0.00344	0.00345
13	2	1 "	17.013 74	0.001719	0.00172
14	2	1 Var. rel $< 10^{-4}$	17.013 87	0.00085	0.00085
15	2	1 "	17.013 95	0.00042	0.00042
16	2	1 "	17.0142 09	0.00021	0.00021
17	2	1 "	17.0140 002	0.000107	0.000107
18	2	1 "	17.0140 088	$0.53 \cdot 10^{-4}$	$0.53 \cdot 10^{-4}$
19	2	1 "	17.0140 131	$0.26 \cdot 10^{-4}$	$0.26 \cdot 10^{-4}$
20	2	1 "	17.0140 6269	$0.13 \cdot 10^{-4}$	$0.13 \cdot 10^{-4}$

### 5) Problème n° 5

origine : Biggs, Bracken, Mc Cornick (Problème 73 de [16])

caractéristiques : 4 variables

1 égalité linéaire

2 inégalités

iterg	nb d'étapes 1° phase	nb d'étapes 2° phase	objectif	contrainte	$\omega(x)$
1	1	1 Norme lag $< 10^{-2}$	30.46	$0.2 \cdot 10^{-2}$	1.
2	1	2 "	30.39	$0.2 \cdot 10^{-6}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$
3	1	1 Var. rel. $< 10^{-4}$	38.99	$0.7 \cdot 10^{-7}$	$1.4 \cdot 10^{-7}$
4	1	1 "	38.99	$0.18 \cdot 10^{-7}$	$3.6 \cdot 10^{-8}$
5	1	1 "	"	$0.45 \cdot 10^{-8}$	$9 \cdot 10^{-9}$
6	1	1 "	"	$0.1 \cdot 10^{-8}$	$2.2 \cdot 10^{-10}$
7	1	1 "	"	$0.2 \cdot 10^{-9}$	$5.6 \cdot 10^{-10}$
8	1	1 "	"	$0.7 \cdot 10^{-10}$	$1.4 \cdot 10^{-10}$
9	1	1 "	"	$0.1 \cdot 10^{-10}$	$3.5 \cdot 10^{-11}$
10	1	1 "	"	$0.4 \cdot 10^{-11}$	$8.8 \cdot 10^{-12}$
11	1	1 "	"	$0.1 \cdot 10^{-11}$	$2.2 \cdot 10^{-12}$
12	1	1 "	38.99	$0.2 \cdot 10^{-12}$	$5.4 \cdot 10^{-13}$
13	arrêt	/	/		$1.4 \cdot 10^{-13}$



### 6) Problème n° 6

origine : Betts, Miele e. al. (problème 77 de [16]).

caractéristiques : 5 variables  
2 égalités  
pas d'inégalité

iterg	nb d'étapes phase 1	nb d'étapes phase 2	objectif	contraintes	$\omega(x)$
1	2	8 Var. rel $< 10^{-4}$	0.241 505 147	$0.6 \cdot 10^{-7}$ $0.4 \cdot 10^{-6}$	28.29
2	2	1 "	0.241 505 586	$0.2 \cdot 10^{-2}$ $0.1 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-7}$
3	arrêt sans obtenir un point $\in D(x)$	/	/	/	$5 \cdot 10^{-8}$

Point obtenue [1.1663 ; 1.1818 ; 1.38041 ; 1.5057 ; 0.6106]

Point optimal [1.16617 ; 1.1821 ; 1.38025 ; 1.5060 ; 0.6109]

Valeur optimale 0.24150 513

### 7) Problème n° 7

origine : Wong, problème n° 1.

caractéristique : 7 variables

2 égalités

2 inégalités

iterg	nb d'étapes 1° phase	nb d'étapes 2° phase	objectif	contraintes	$\omega(x)$
1	1	5 Norme lag $< 10^{-2}$	682.177	$0.7 \cdot 10^{-4}$ $0.7 \cdot 10^{-1}$	6.5
2	1	3 "	680.844	$0.1 \cdot 10^{-4}$ $0.7 \cdot 10^{-2}$	$3.9 \cdot 10^{-2}$
3	1	20 nb max.	680.641 632	$0.2 \cdot 10^{-4}$ $0.3 \cdot 10^{-6}$	$3.5 \cdot 10^{-3}$

### 8) Problème n° 8

origine : Colville n° 3 dans lequel les contraintes actives sont mises sous forme d'égalité.

caractéristiques : 5 variables

2 égalités

2 inégalités

iterg	nb d'étapes 1 <sup>o</sup> phase	nb d'étapes 2 <sup>o</sup> phase	objectif	con- traîntes	$\omega(x)$
1	2	1 Norme lag $< 10^{-2}$	-30 642.235	0.056 $0.9 \cdot 10^{-4}$	0.103
2	3	3 "	-30 664.59	0.02 $0.6 \cdot 10^{-5}$	$0.28 \cdot 10^{-1}$
3	3	1 "	-30 665.214	$0.7 \cdot 10^{-3}$ $0.8 \cdot 10^{-5}$	$0.103 \cdot 10^{-2}$
4	2	1 "	-30 665.520	$0.3 \cdot 10^{-5}$ $0.4 \cdot 10^{-5}$	$0.359 \cdot 10^{-3}$
5	2	4 Var. rel. $< 10^{-4}$	-30 665.44	$0.9 \cdot 10^{-6}$ $0.2 \cdot 10^{-6}$	$0.23 \cdot 10^{-4}$
6	4	1 "	-30 631.10	$0.2 \cdot 10^{-6}$ $0.2 \cdot 10^{-6}$	$0.48 \cdot 10^{-5}$
7	3	1 "	-30 625.59	$0.8 \cdot 10^{-7}$ $0.6 \cdot 10^{-7}$	$0.14 \cdot 10^{-6}$
8	2	1 "	-30 625 23	$0.19 \cdot 10^{-7}$ $0.19 \cdot 10^{-7}$	$0.44 \cdot 10^{-7}$
9	arrêt sans obtenir un point $\in D(x)$	/	/	/	$9.9 \cdot 10^{-9}$



### 9) Problème n° 9

origine : Beuneu

caractéristique : 4 variables  
2 égalités  
3 inégalités

itern	nb d'étapes 1° phase	nb d'étapes 2° phase	objectif	contraintes	$\omega(x)$
1	3	6 Var. rel. $< 10^{-4}$	1733.374	490.8 490.8	490.82
2	2	1 Norme lag $< 10^{-2}$	3373.98	235.47 235.47	245.41
3	3	1 "	4235.487	115.7 115.6	117.73
4	4	4 Var. rel. $< 10^{-4}$	4648.523	57.85 57.85	57.85
5	5	5 "	4884.217	28.92 28.92	28.92
6	5	5 "	5004.525	14.46 14.46	14.46
7	3	1 Norme lag $< 10^{-2}$	5244.881	4.33 4.07	7.23
8	3	4 Var. rel. $< 10^{-4}$	5108.133	2.16 2.16	2.16
9	2	4 "	5117.332	1.08 1.08	1.08
10	3	3 "	5122.174	0.54 0.539	0.540
11	2	2 "	5124.215 056	0.269 0.269	0.270
12	3	2 "	5125.361 105	0.134 0.134	0.134
13	arrêt sans obtenir un point de D(x)	/	/	/	



Conclusion : Sur ce problème de dispatching, le code donne un point pour lequel les égalités ne sont pas nulles.

Mais la valeur de l'objectif : 5 125.361 105 est proche de la valeur optimale donnée par Denel [6] 5126.200 on obtient  $X(1) = 0.118 898$

$$X(2) = -0.396 223$$

Denel obtient  $X(1) = 0.119 000$

$$X(2) = -0.396 175$$



10) Problème n° 10

origine : Cigré (dispatching à 10 noeuds, actif réactif sans transit).

caractéristiques : 50 variables  
20 égalités  
pas d'inégalité.

Dans un premier temps, on prend comme point de départ celui utilisé par le code N4MCLO.

Mais les temps de calculs sont très élevés. Donc dans un deuxième temps on relance le code avec comme point de départ, le point obtenu par le premier passage. Mais cette fois l'arrêt est provoqué par l'impossibilité d'obtenir un point réalisable par rapport à D(x).

BU  
LILLE

iterg	nb d'étapes 1° phase	nb d'étapes 2° phase	objectif	$\omega(x)$	Contraintes en fin d'iterg.	
					plus petite	plus grande
1	9	7 Var. rel $< 10^{-4}$	2371.718	788.54	$0.4 \cdot 10^{-4}$	788.26
2	10	6 "	2372.713	394.134	$0.2 \cdot 10^{-5}$	393.69
3	15	9 "	2411.314	196.84	$0.5 \cdot 10^{-2}$	196.84
4	20	8 "	3118.053	98.42	$0.2 \cdot 10^{-3}$	98.42
1	21	10 "	3005.021	50.46	$0.2 \cdot 10^{-2}$	50.46
2	27 arrêt	/	/	/	/	/

Une autre tentative a été faite en prenant comme point de départ un point proche de l'optimum obtenu par Beuneu [2]. Mais si la première itération générale se passe bien, dans la deuxième itération générale il est impossible d'obtenir un point réalisable par rapport à D(x) en 27 étapes.

## II.5. CONCLUSION

L'observation des résultats numériques amène plusieurs remarques.

Si le nombre de contraintes est faible, la phase 1 de recherche d'un point réalisable par rapport à  $D(x)$  ne comprend qu'un nombre limité d'étapes ( $\leq 5$ ). Par contre si le nombre de contraintes est élevé, cette phase 1 devient inefficace. Il faut rappeler que si le problème initial comprend  $p$  inégalités et  $m$  égalités, on travaille par la suite sur un problème à  $p+2m$  contraintes, ce qui augmente le temps de calcul. Et d'autre part le fait de remplacer toute égalité par une bande, ramène à travailler sur un problème dont le domaine a un intérieur petit.

Les améliorations proposées ne sont donc pas suffisantes pour les problèmes de grande taille.

L'arrêt de la phase 2 est souvent provoqué par une variable relative de l'objectif faible. Ceci est sans doute dû au mauvais choix du test d'arrêt sur la valeur de la norme de l'approximation du Lagrangien. Cette approximation est sans doute mauvaise.

Il est certain que les résultats obtenus avec ce code ne peuvent être comparés aux performances d'autres codes construits pour traiter des problèmes de même nature, comme le gradient réduit généralisé d'Abadie-guigou.

REFERENCES

- [1] BEUNEU J.  
*"Adaptation de la méthode des centres linéarisée à un problème de dispatching économique"*.  
Université des Sciences et Techniques de Lille 1, Octobre 72.
- [2] BEUNEU J.  
*"Adaptation de la méthode des centres linéarisée aux problèmes de grande taille"*.  
Thèse, Université des Sciences et Techniques de Lille 1, Février 75.
- [3] BUI TRONG LIEU - HUARD P.  
*"La méthode des centres dans un espace topologique"*.  
Numerish Mathematik, Vol. 8, 1966, p. 56.
- [4] COLVILLE A.R.  
*"A comparative study on non linear programming codes"*.  
IBM New-York, Scientific-center, Technical Report n° 320 - 2949,  
Juin 1968.
- [5] DENEL J.  
*"Résolution de problèmes d'optimisation non linéaire par la méthode des centres linéarisée"*.  
Thèse de Docteur de Spécialités, Université des Sciences et Techniques de Lille 1, Juin 72.
- [6] DENEL J.  
*"Résolution de problèmes d'optimisation non linéaire par la méthode des centres linéarisée"*.  
Bulletin de la direction des études et recherches EDF, Série C,  
n° 1, 1973, pp. 5-42.
- [7] DENEL J.  
*"Contribution à la synthèse des algorithmes d'optimisation"*.  
Thèse d'Etat, Université des Sciences et Techniques de Lille 1, 79.

- [8] DENEL J., HUARD P.  
*"Programmation non linéaire et linéarisation, applications of optimisation methods for large scale resource. Allocation problems"*.  
 NATO-conférence Elsinor, Danemark, Juillet 71.
- [9] DENEL J., WERQUIN-BOGAERT C.  
*"Résultats d'expériences numériques avec la méthode des centres linéarisée : le code N4MCL0"*.  
 Université des Sciences et Techniques de Lille 1, Février 82.
- [10] HUARD P.  
*"Méthode des centres et méthode des centres par majoration"*.  
 Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, EDF, Série C, n° 2, 1970, pp. 33-52.
- [11] HUARD P.  
*"Tour d'horizon en programmation non linéaire"*.  
 Bulletin de la Direction des Etudes et Recherche, EDF, Série C, n° 1, 1971, pp. 35-70.
- [12] HUARD P.  
*"Résolution of mathematical programming problems with non linear constraints by the "method of centers"."*  
 In non linear programming (Ed. Abadie), North-Holland, Publishing Co 1967.
- [13] HUARD P.  
*"Programmation mathématique convexe"*.  
 Revue française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, 7 (1968), pp. 43-59.
- [14] PETERSON D.  
*"A review of constraint qualifications in finite-dimensionnal space"*.  
 SIAM Journal, Vol. 15 n° 3, 1973.
- [15] PIRONNEAU O. et POLAK E.  
*"On the rate of convergence of certain methods of centers"*.  
 Mathematical Programming 2 (1972), pp. 230-257.

- [16] WILLIHOCK, KLAUS SCHITHOWSKI  
*"Tests examples for non linear programming codes"*.  
Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems.
- [17] LEMARECHAL C.  
Normes Modulopt 1, Brochure INRIA Le Chesnay.

ANNEXE 1

Enoncés des problèmes testés par le code N4MCL0.

I. Problème n° 1

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimiser } -15x_1 - 27x_2 - 36x_3 - 18x_4 - 12x_5 \\
 & +30x_1^2 - 20x_1 x_2 - 10x_1 x_3 + 32x_1 x_4 \\
 & -10x_1 x_5 - 20x_2 x_1 + 39x_2^2 - 6x_2 x_3 \\
 & +31x_2 x_4 + 32x_2 x_5 - 10x_3 x_1 - 6x_3 x_2 \\
 & +10x_3^2 - 6x_3 x_4 - 10x_3 x_5 + 32x_4 x_1 \\
 & -31x_4 x_2 - 6x_4 x_3 + 39x_4^2 - 20x_4 x_5 \\
 & -10x_5 x_1 + 32x_5 x_2 - 10x_5 x_3 - 20x_5 x_4 \\
 & +30x_5^2 + 4x_1^3 + 8x_2^3 + 10x_3^3 + 6x_4^3 + 2x_5^3
 \end{aligned}$$

sous les contraintes :

$$\begin{bmatrix} -40 \\ -2 \\ -0.25 \\ -4 \\ -4 \\ -1 \\ -40 \\ -60 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -16 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0.4 & 2 \\ -3.5 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & -9 & -2 & 1 & -2.8 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \leq 0$$

$$X \in \mathbb{R}^5 \quad 0 \leq x_i \leq 20 \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

Valeur optimale  $\hat{f} = -32.348\ 678\ 834 \dots$

II. Problème n° 2

$$\begin{aligned}
& \text{Minimiser } 8x_1^3 + 16x_2^3 + 20x_3^3 + 12x_4^3 + 4x_5^3 \\
& + 30x_1^2 + 39x_2^2 + 10x_3^2 + 39x_4^2 + 30x_5^2 \\
& + 40x_1 x_2 + 20x_1 x_3 + 64x_1 x_4 - 20x_1 x_5 \\
& - 12x_2 x_3 - 62x_2 x_4 + 64x_2 x_5 \\
& - 12x_3 x_4 - 20x_3 x_5 - 40x_4 x_5 \\
& + 40x_6 + 2x_7 + \frac{1}{4}x_8 + 4x_9 + 4x_{10} \\
& + x_{11} + 40x_{12} + 60x_{13} - 5x_{14} - x_{15}
\end{aligned}$$

sous les contraintes :



$$\begin{bmatrix} 15 - 12x_1^2 \\ 27 - 24x_2^2 \\ 36 - 30x_3^2 \\ 18 - 18x_4^2 \\ 12 - 6x_5^2 \end{bmatrix} + B X \leq 0$$

$X \in \mathbb{R}^{15}$   
 $0 \leq x_i \leq 20$   
 pour  $i = 1, 2, \dots, 15$

B étant une matrice constante à 5 lignes et 15 colonnes.

$$\begin{bmatrix} -30 & 20 & 10 & -32 & 10 & 16 & 0 & 3.5 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 20 & -39 & 6 & 31 & 32 & -2 & 2 & 0 & 2 & 9 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 10 & 6 & -10 & 6 & 10 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 4 & 1 & 3 & -3 & -1 \\ -32 & 31 & 6 & -39 & 20 & -1 & -0.4 & 0 & 4 & -1 & 0 & 1 & 2 & -4 & -1 \\ 10 & -32 & 10 & 20 & -30 & 0 & -2 & 0 & 1 & 2.8 & 0 & 1 & 1 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

La valeur optimale  $\hat{f} = 32.348\ 678\ 874\dots$

III. Problème n° 3

Minimiser  $5.357\ 8547\ x_3^2 + 0.835\ 6891\ x_1\ x_5$

$$+ 37.293\ 239\ x_1 - 40\ 792.141$$

sous les contraintes :

$$0 \leq (85.334\ 407 + 0.005\ 6858\ x_2\ x_5 + 0.000\ 6262\ x_1\ x_4) \leq 92 \\ - 0.002\ 2053\ x_3\ x_5$$

$$90 \leq (80.51249 + 0.00\ 71317\ x_2\ x_5 + 0.002\ 9555\ x_1\ x_2) \leq 110 \\ + 0.002\ 1813\ x_3^2$$

$$20 \leq (9.300961 + 0.004\ 7026\ x_3\ x_5 + 0.001\ 2547\ x_1\ x_3) \leq 25 \\ + 0.001\ 9085\ x_3\ x_4$$

$$78 \leq x_1 \leq 102$$

$$33 \leq x_2 \leq 45$$

$$27 \leq x_3 \leq 45$$

$$27 \leq x_4 \leq 45$$

$$27 \leq x_5 \leq 45$$

Valeur optimale  $\hat{f} = -30\ 665.538\ 650\ 9\dots$

IV. Problème n° 4

Minimiser  $100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 + 90(x_4 - x_3^2)^2$

$$+ (1 - x_3)^2 + 10.1(x_2 - 1)^2 + 10.1(x_4 - 1)^2$$

$$+ 19.8(x_2 - 1)(x_4 - 1)$$

sous les contraintes :  $-10 \leq x_i \leq 10 \quad i = 1, 2, 3, 4$

Valeur optimale  $\hat{f} = 0.$



V. Problème n° 5

Minimiser  $-\frac{1}{2}\{x_1 x_2 + x_3 x_4 - x_2 x_5 + x_6 x_5 - x_4 x_7 + x_8 x_7 - x_6 x_9\}$

sous les contraintes :

$$x_2^2 + x_3^2 - 1 \leq 0$$

$$x_4^2 + x_5^2 - 1 \leq 0$$

$$x_6^2 + x_7^2 - 1 \leq 0$$

$$x_8^2 + x_9^2 - 1 \leq 0$$

$$x_2^2 + (x_1 - x_3)^2 - 1 \leq 0$$

$$x_4^2 + (x_1 - x_5)^2 - 1 \leq 0$$

$$x_6^2 + (x_1 - x_7)^2 - 1 \leq 0$$

$$x_8^2 + (x_1 - x_9)^2 - 1 \leq 0$$

$$(x_2 - x_4)^2 + (x_3 - x_5)^2 - 1 \leq 0$$

$$(x_2 - x_6)^2 + (x_3 - x_7)^2 - 1 \leq 0$$

$$(x_2 - x_8)^2 + (x_3 - x_9)^2 - 1 \leq 0$$

$$(x_4 - x_6)^2 + (x_5 - x_7)^2 - 1 \leq 0$$

$$(x_4 - x_8)^2 + (x_5 - x_9)^2 - 1 \leq 0$$

$$(x_6 - x_8)^2 + (x_7 - x_9)^2 - 1 \leq 0$$

$$x_2 x_5 - x_4 x_3 \leq 0$$

$$x_4 x_7 - x_6 x_5 \leq 0$$

$$x_6 x_9 - x_8 x_7 \leq 0$$



$$0 \leq x_1 \leq 1$$

$$0 \leq x_2 \leq 1$$

$$-1 \leq x_3 \leq 1$$

$$0 \leq x_4 \leq 1$$

$$-1 \leq x_5 \leq 1$$

$$0 \leq x_6 \leq 1$$

$$-1 \leq x_7 \leq 1$$

$$0 \leq x_8 \leq 1$$

$$-1 \leq x_9 \leq 1$$

Valeur optimale obtenue  $\hat{f} = -0.672\ 320\ 273$

### VI. Problème n° 6

Minimiser  $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$

sous les contraintes :

$$x_1 - 2x_2 + 1 \leq 0$$

$$\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 - 1 \leq 0$$

$$-10 \leq x_1 \leq 10$$

$$-10 \leq x_2 \leq 10$$

Valeur optimale  $\hat{f} = 1.393465$

### VII. Problème n° 7

Minimiser  $100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$

Sans contrainte.

Valeur optimale  $\hat{f} = 0.$

VIII. Problème n° 8

$$\begin{aligned}
&\text{Minimiser } -75.196 + 3.8112 x_1 - 0.12694 x_1^2 + 2.0567 \cdot 10^{-3} x_1^3 \\
&\quad - 1.0345 \cdot 10^{-5} x_1^4 + 6.8306 x_2 - 0.30234 x_1 x_2 \\
&\quad + 1.28134 \cdot 10^{-3} x_2 x_1^2 - 3.5256 \cdot 10^{-5} x_2 x_1^3 \\
&\quad + 2.266 \cdot 10^{-7} x_2 x_1^4 - 0.25645 x_2^2 + 3.4604 \cdot 10^{-3} x_2^3 \\
&\quad - 1.3514 \cdot 10^{-5} x_2^4 + \frac{28.106}{x_2 + 1} + 5.2374 \cdot 10^{-3} x_1^2 x_2^2 \\
&\quad + 6.3 \cdot 10^{-8} x_1^3 x_2^2 - 7 \cdot 10^{-10} x_1^3 x_2^2 - 3.4054 \cdot 10^{-4} x_1 x_2^2 \\
&\quad - 1.6638 \cdot 10^{-6} x_1 x_2^3 + 2.8673 \exp(5 \cdot 10^{-4} x_1 x_2)
\end{aligned}$$

sous les contraintes :

$$-x_1 x_2 + 700 \leq 0$$

$$-x_2 + 5 \left(\frac{x_1}{25}\right)^2 \leq 0$$

$$-(x_2 - 50)^2 + 5(x_1 - 55) \leq 0$$

$$0 \leq x_1 \leq 75 \quad 0 \leq x_2 \leq 65$$

$$\text{Valeur optimale } \hat{f} = 58.903$$

IX. Problème n° 9

$$\text{Minimiser } 4.3x_1 + 31.8x_2 + 63.3x_3 + 15.8x_4 + 68.5x_5 + 4.7x_6$$

sous les conditions :

$$\left. \begin{aligned}
&-17.1x_1 - 38.2x_2 - 204.2x_3 - 212.3x_4 \\
&-623.4x_5 - 1495.5x_6 + 169x_1 x_3 + 3580x_3 x_4 \\
&+ 3816x_4 x_5 + 18.5x_4 x_6 + 24.3x_5 x_6 + 4.97
\end{aligned} \right\} \leq 0$$

$$\left. \begin{aligned}
&-17.9x_1 - 36.8x_2 - 113.9x_3 - 169.7x_4 - 337.8x_5 \\
&-1385.2x_6 + 139x_1 x_3 + 2450x_4 x_5 + 16.6x_4 x_6 \\
&+ 17.2x_5 x_6 - 1.88
\end{aligned} \right\} \leq 0$$

$$273x_2 + 70x_4 + 819x_5 + 26x_4 x_5 - 29.08 \leq 0$$

$$\left. \begin{aligned} -159.9x_1 + 311x_2 + 587x_4 - 319x_5 - 21.98x_6 \\ + 14x_1 x_6 - 78.02 \end{aligned} \right\} \leq 0$$

$$0 \leq x_1 \leq 0.31 \quad 0 \leq x_3 \leq 0.068 \quad 0 \leq x_5 \leq 0.028$$

$$0 \leq x_2 \leq 0.046 \quad 0 \leq x_4 \leq 0.042 \quad 0 \leq x_6 \leq 0.0134$$

$$\text{Valeur optimale } \hat{f} = 0.015\ 619$$

### X. Problème n° 10

$$\text{Minimiser } 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2$$

$$\text{sous les contraintes de bornes : } 0 \leq x_1 \leq 10$$

$$0 \leq x_2 \leq 10$$

$$\text{Valeur optimale } \hat{f} = 0.$$

### XI. Problème n° 11

$$\text{Minimiser } (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4$$

$$\text{sous les contraintes de bornes : } -10 \leq x_i \leq 10$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

$$\text{Valeur optimale } \hat{f} = 0.$$

### XII. Problème n° 12

$$\begin{aligned} \text{Minimiser } (x_1 - 10)^2 + 5(x_2 - 12)^2 + x_3^4 + 3(x_4 - 11)^2 + 10x_5^6 \\ + 7x_6^2 + x_7^4 - 4x_6 x_7 - 10x_6 - 8x_7 \end{aligned}$$

sous les contraintes :

$$2x_1^2 + 3x_2^4 + x_3 + 4x_4^2 + 5x_5 - 127 \leq 0$$

$$7x_1 + 3x_2 + 10x_3^2 + x_4 - x_5 - 282 \leq 0$$

$$23x_1 + x_2^2 + 6x_6^2 - 8x_7 - 196 \leq 0$$

$$4x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 x_2 + 2x_3^2 + 5x_6 - 11x_7 \leq 0$$

$$-10 \leq x_i \leq 10 \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

$$\text{Valeur optimale } \hat{f} = 680.630\ 652$$



### XIII. Problème n° 13

$$\begin{aligned} \text{Minimiser } & x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 - 14x_1 - 16x_2 + (x_3 - 10)^2 \\ & + 4(x_4 - 5)^2 + (x_5 - 3)^2 + 2(x_6 - 1)^2 + 5x_7^2 \\ & + 7(x_8 - 11)^2 + 2(x_9 - 10)^2 + (x_{10} - 7)^2 + 45 \end{aligned}$$

sous les contraintes :

$$3(x_1 - 2)^2 + 4(x_2 - 3)^2 + 2x_3^2 - 7x_4 - 120 \leq 0$$

$$5x_1^2 + 8x_2 + (x_3 - 6)^2 - 2x_4 - 40 \leq 0$$

$$0.5(x_1 - 8)^2 + 2(x_2 - 4)^2 + 3x_5^2 - x_6 - 30 \leq 0$$

$$x_1^2 + 2(x_2 - 2)^2 - 2x_1 x_2 + 14x_5 - 6x_6 \leq 0$$

$$4x_1 + 5x_2 - 3x_7 + 9x_8 - 105 \leq 0$$

$$10x_1 - 8x_2 - 17x_7 + 2x_8 \leq 0$$

$$-3x_1 + 6x_2 + 12(x_9 - 8)^2 - 7x_{10} \leq 0$$

$$-8x_1 + 2x_2 + 5x_9 - 2x_{10} - 12 \leq 0$$

avec  $-10 \leq x_i \leq 10$  pour  $i = 1, 2, \dots, 10$

Valeur optimale  $\hat{f} = 28.037$

#### XIV. Problème n° 14

Minimiser  $x_1 x_3$

sous les contraintes :

$$4 - (x_4 - x_6)^2 - (x_5 - x_7)^2 \leq 0$$

$$1 - \frac{x_3 x_4 - x_2 x_5}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}} \leq 0$$

$$1 - \frac{x_3(x_1 - x_4) + (x_2 - x_1)x_5}{\sqrt{x_3^2 + (x_2 - x_1)^2}} \leq 0$$

$$1 - \frac{x_6 x_3 - x_2 x_7}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}} \leq 0$$

$$1 - \frac{x_3(x_1 - x_6) + (x_2 - x_1)x_7}{\sqrt{x_3^2 + (x_2 - x_1)^2}} \leq 0$$

$$0 \leq x_1 \leq 10$$

$$-10 \leq x_2 \leq 10$$

$$0 \leq x_3 \leq 10$$

$$-10 \leq x_4 \leq 10$$

$$1 \leq x_5 \leq 10$$

$$-10 \leq x_6 \leq 10$$

$$1 \leq x_7 \leq 10$$

Valeur optimale  $\hat{f} = 23.383\ 285\ 47$

XV. Problème n° 15

Minimiser  $1.26 \ 26 \ 26 (x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16})$

$$-1.23 \ 106 (x_1 x_{12} + x_2 x_{13} + x_3 x_{14} + x_4 x_{15} + x_5 x_{16})$$

sous les contraintes :

$$\alpha \frac{x_i}{x_{i+5}} + \beta x_i + \gamma \frac{x_i^2}{x_{i+5}} - 1 \leq 0$$

pour  $i = 1, 2, 3, 4, 5$

avec  $\alpha = 0.034 \ 75$

$\beta = 0.975$

$\gamma = -0.00975$



$$\frac{x_6}{x_7} + \frac{x_1 x_{12}}{x_7 x_{11}} - \frac{x_6 x_{12}}{x_7 x_{11}} - 1 \leq 0$$

$$\frac{x_7}{x_8} + \frac{1}{500} \frac{x_7 x_{12}}{x_8} + \frac{1}{500} \frac{x_2 x_{13}}{x_8} - \frac{x_{13}}{500} - \frac{1}{500} \frac{x_1 x_{12}}{x_8} - 1 \leq 0$$

$$x_8 + \frac{x_8 x_{13}}{500} + \frac{x_3 x_{14}}{500} + x_9 - \frac{x_2 x_{13}}{500} - \frac{x_9 x_{14}}{500} - 1 \leq 0$$

$$\frac{x_9}{x_3} + \frac{x_4 x_{15}}{x_3 x_{14}} + \frac{500 x_{10}}{x_3 x_{14}} - \frac{500 x_9}{x_3 x_{14}} - \frac{x_8 x_{15}}{x_3 x_{14}} - 1 \leq 0$$

$$\frac{x_5 x_{16}}{x_4 x_{15}} + \frac{x_{10}}{x_4} + \frac{500}{x_{15}} - \frac{x_{16}}{x_{15}} - \frac{500 x_{10}}{x_4 x_{15}} - 1 \leq 0$$

$$\frac{0.9}{x_4} + \frac{x_{16}}{500} - \frac{x_5 x_{16}}{500 x_4} - 1 \leq 0$$

$$\frac{x_{11}}{500} - \frac{x_{12}}{500} - 1 \leq 0$$

$$x_{12} - x_{11} \leq 0$$

$$x_8 - x_9 \leq 0$$

$$x_9 - x_{10} \leq 0$$

$$x_1 - x_2 \leq 0$$

$$x_2 - x_3 \leq 0$$

$$x_3 - x_4 \leq 0$$

$$x_4 - x_5 \leq 0$$

$$0.1 \leq x_1 \leq 0.9$$

$$0.1 \leq x_7 \leq 0.9$$

$$0.1 \leq x_2 \leq 0.9$$

$$0.1 \leq x_8 \leq 0.9$$

$$0.1 \leq x_3 \leq 0.9$$

$$0.1 \leq x_9 \leq 0.9$$

$$1 \leq x_{13} \leq 500$$

$$0.1 \leq x_4 \leq 0.9$$

$$0.1 \leq x_{10} \leq 0.9$$

$$500 \leq x_{14} \leq 1000$$

$$0.9 \leq x_5 \leq 1$$

$$1 \leq x_{11} \leq 1000$$

$$500 \leq x_{15} \leq 1000$$

$$10^{-4} \leq x_6 \leq 0.1$$

$$10^{-6} \leq x_{12} \leq 500$$

$$10^{-6} \leq x_{16} \leq 500$$

Valeur optimale  $\hat{f} = 174.807\ 766$

#### XVI. Problème n° 16

Il s'agit des problèmes de Gibbs de la forme suivante

$$\text{Min } f(x_1, x_2)$$

sous les contraintes :

$$4x_1 + 2x_2 + \alpha \leq 0$$

$$-8x_1 - 2x_2 + \beta \leq 0$$

avec  $\alpha$  et  $\beta$  deux constantes qui dépendent du problème traité.

Pour plus de détails consulter la brochure MODULOPT C. Lemarechal et U. Tolowitzki. Le module V1 GI1 Janvier 1981, INRIA B.P. 105, 78153 LE CHESNAY CEDEX.



XVII. Problème n° 17

Il s'agit d'un problème à 50 variables et 20 contraintes. Pour plus de détails consulter la brochure MODULOPT J. Denel, le module V4 CIG, juin 1981, Université de Lille 1, 59655 VILLENEUVE D'ASCQ.

XVIII. Problème n° 18

Il s'agit d'un problème à 107 variables et 88 contraintes. Pour plus de détails consulter la brochure MODULOPT J. Denel, le module V4 DIG, juin 1981, Université de Lille 1, 59655 VILLENEUVE D'ASCQ.

ANNEXE 2

Enoncé des problèmes testés par le code N4MCLI.

I. Problème n° 1

$$\text{Minimiser } (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$$

sous les contraintes :

$$\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 - 1 \leq 0$$

$$x_1 - 2x_2 + 1 = 0$$

$$\text{Valeur optimale } \hat{f} = 9 - 2.875 \sqrt{7}$$

II. Problème n° 2

$$\text{Minimiser } 4x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 33x_1 + 16x_2 - 24x_3$$

sous les contraintes :

$$3x_1 - 2x_2^2 - 7 = 0$$

$$4x_1 - x_3^2 - 11 = 0$$

$$-10 \leq x_i \leq 10 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3$$

$$\text{Valeur optimale } \hat{f} = -143.6461422$$

III. Problème n° 3

$$\text{Minimiser } (x_1 + 3x_2 + x_3)^2 + 4(x_1 - x_2)^2$$

sous les contraintes :

$$-6x_2 - 4x_3 + x_1^3 + 3 \leq 0$$

$$1 - x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

$$0 \leq x_i \leq 10 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3$$

$$\text{Valeur optimale } \hat{f} = 1.$$

#### IV. Problème n° 4

Minimiser  $x_1 x_4 (x_1 + x_2 + x_3) + x_3$



sous les contraintes :

$$25 - x_1 x_2 x_3 x_4 \leq 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 40 = 0$$

$$1 \leq x_i \leq 5 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, 4$$

$$\text{Valeur optimale } \hat{f} = 17.014 \ 0173$$

#### V. Problème n° 5

Minimiser  $24.55 x_1 + 26.75x_2 + 39x_3 + 40.50x_4$

sous les contraintes :

$$-2.3x_1 - 5.6x_2 - 11.1x_3 - 1.3x_4 + 5 \leq 0$$

$$\left[ \begin{array}{l} -12x_1 - 11.9x_2 - 41.8x_3 - 52.1x_4 + 21 \\ + 1.645 \sqrt{0.28x_1^2 + 0.19x_2^2 + 20.5x_3^2 + 0.62x_4^2} \end{array} \right] \leq 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 1 = 0$$

$$0 \leq x_i \leq 5 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, 4$$

Valeur optimale  $\hat{f} = 29.894\ 378$

### VI. Problème n° 6

Minimiser  $(x_1 - 1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_3 - 1)^2 + (x_4 - 1)^4 + (x_5 - 1)^6$

sous les contraintes :

$$x_1^2 x_4 + \sin(x_4 - x_5) - 2\sqrt{2} = 0$$

$$x_2 + x_3^4 x_4^2 - 8\sqrt{2} = 0$$

$$-10 \leq x_i \leq 10 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, 4, 5$$

Valeur optimale  $\hat{f} = 0.241\ 505\ 13$

### VII. Problème n° 7

Minimiser  $(x_1 - 10)^2 + 5(x_2 - 12)^2 + x_3^4 + 3(x_4 - 11)^2 + 10x_5^6$   
 $+ 7x_6^2 + x_7^4 - 4x_6 x_7 - 10x_6 - 8x_7$

sous les contraintes :

$$7x_1 + 3x_2 + 10x_3^2 + x_4 - x_5 - 282 \leq 0$$

$$23x_1 + x_2^2 + 6x_6^2 - 8x_7 - 196 \leq 0$$

$$2x_1^2 + 3x_2^4 + x_3 + 4x_4^2 + 5x_5 - 127 = 0$$

$$4x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 x_2 + 2x_3^2 + 5x_6 - 11x_7 = 0$$

$$-10 \leq x_i \leq 10 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

Valeur optimale  $\hat{f} = 680.630\ 452$

VIII. Problème n° 8

Minimiser  $5.357\ 8547\ x_3^2 + 0.835\ 6891\ x_1\ x_5$

$$+37.293239\ x_1 - 40792.141$$

sous les contraintes :

$$90 - [80.51249 + 0.0071317x_2\ x_5 + 0.0029\ 555x_1\ x_2] \leq 0 \\ + 0.0021813x_3^2$$

$$-110 + [80.51249 + 0.0071317x_2\ x_5 + 0.0029555x_1\ x_2] \leq 0 \\ + 0.0021813x_3^2$$

$$92 - [85.334407 + 0.0056858x_2\ x_5 + 0.0006262x_1\ x_4] = 0 \\ - 0.0022053x_3\ x_5$$

$$20 - [9.300961 + 0.0047026x_3\ x_5 + 0.0012547x_1\ x_3] = 0 \\ + 0.0019085x_3\ x_4$$

$$78 \leq x_1 \leq 102$$

$$33 \leq x_2 \leq 45$$

$$27 \leq x_3 \leq 45$$

$$27 \leq x_4 \leq 45$$

$$27 \leq x_5 \leq 45$$

Valeur optimale  $\hat{f} = - 30\ 665.538\ 650 \dots$

Remarque : Ce problème est équivalent au problème n° 3 de l'Annexe 1 dans lequel les contraintes saturées sont mises en égalité.

IX. Problème n° 9

Minimiser  $3x_3 + 10^{-6} x_3^3 + 2x_4 + \frac{2}{3} 10^{-6} x_4^3$

sous les contraintes :

$$1000 \sin(x_2 - \frac{1}{4}) + 1000 \sin(x_2 - x_1 - \frac{1}{4}) + 1294.8 \leq 0$$

$$x_1 - x_2 - 0.55 \leq 0$$

$$x_1 + x_2 - 0.55 \leq 0$$

$$1000 \sin(x_1 + \frac{1}{4}) + 1000 \sin(x_2 + \frac{1}{4}) - 894.8 + x_3 = 0$$

$$1000 \sin(x_1 - \frac{1}{4}) + 1000 \sin(x_1 - x_2 - \frac{1}{4}) + 894.8 - x_4 = 0$$

$$-1 \leq x_1 \leq 1$$

$$-1 \leq x_2 \leq 1$$

$$0 \leq x_3 \leq 1200$$

$$0 \leq x_4 \leq 1200$$

Valeur optimale  $\hat{f} = 5126.200$

X. Problème n° 10

Il s'agit d'un problème à 50 variables et 20 contraintes en égalité. Pour plus de détails consulter la brochure MODULOPT, J. Denel, le module V4 CIG, juin 1981, Université de Lille I, 59655 VILLENEUVE D'ASCQ.

