N° d'ordre : 1103

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE 3ème CYCLE

par

Brahim AGHEZZAF

ETUDES DE QUELQUES PROBLEMES EN COMPLEMENTARITE

Soutenue le 27 Octobre 1983 devant la Commission d'Examen

MEMBRES DU JURY :

Président	C.	BREZINSKI
Rapporteur	J.	DENEL
Examinateur	J.P.	DELAHAYE

P R O F E S S E U R S CLASSE EXCEPTIONNELLE

M. CONSTANT Eugène	I.E.E.A.
M. FOURET René	Physique
M. GABILLARD Robert	I.E.E.A.
M. MONTREUIL Jean	Biologie
M. PARREAU Michel	Mathématiques
M. TRIDOT Gabriel	Chimie
M. VIVIER Emile	Biologie
M. WERTHEIMER Raymond	Physique

P R O F E S S E U R S 1ère classe

M. BACCHUS Pierre	Mathématiques
M. BEAUFILS Jean-Pierre (dét.)	Chimie
M. BIAYS Pierre	G.A.S.
M. BILLARD Jean (dét.)	Physique
M. BOILLY Bénoni	Biologie
M. BOIS Pierre	Mathématiques
M. BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M. BOUGHON Pierre	Mathématiques
M. BOURIQUET Robert	Biologie
M. BREZINSKI Claude	I.E.E.A.
M. CELET Paul	Sciences de la Terre
M. CHAMLEY Hervé	Biologie
M. COEURE Gérard	Mathématiques
M. CORDONNIER Vincent	I.E.E.A.
M. DEBOURSE Jean-Pierre	S.E.S.
M. DYMENT Arthur	Mathématiques

PROFESSEURS 1ère classe (suite)

M. ESCAIG Bertrand	Physique
M. FAURE Robert	Mathématiques
M. FOCT Jacques	Chimie
M. GRANELLE Jean-Jacques	S.E.S.
M. GRUSON Laurent	Mathématiques
M. GUILLAUME Jean	Biologie
M. HECTOR Joseph	Mathématiques
M. LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M. LACOSTE Louis	Biologie
M. LAVEINE Jean Pierre	Sciences de la Terre
M. LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique
M. LHOMME Jean	Chimie
M. LOMBARD Jacques	S.E.S.
M. LOUCHEUX Claude	Chimie
M. LUCQUIN Michel	Chimie
M. MIGEON Michel Recteur à Grenoble	E.U.D.I.L.
M. MIGNOT Fulbert (dét.)	Mathématiques
M. PAQUET Jacques	Sciences de la Terre
M. PROUVOST Jean	Sciences de la Terre
M. ROUSSEAU Jean-Paul	Biologie
M. SALMER Georges	I.E.E.A.
M. SEGUIER Guy	I.E.E.A.
M. SIMON Michel	S.E.S.
M. STANKIEWICZ François	S.E.S.
M. TILLIEU Jacques	Physique
M. VIDAL Pierre	I.E.E.A.
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mathématiques

P R O F E S S E U R S 2ème classe

M. ANTOINE Philippe	Mathématiques (Calais)
M. BART André	Biologie
Mme BATTIAU Yvonne	Géographie
M. BEGUIN Paul	Mathématiques
M. BELLET Jean	Physique
M. BERZIN Robert	Mathématiques
M. BKOUCHE Rudolphe	Mathématiques
M. BODARD Marcel	Biologie
M. BOSQ Denis	Mathématiques
M. BRASSELET Jean-Paul	Mathématiques
M. BRUYELLE Pierre	Géographie
M. CAPURON Alfred	Biologie
M. CARREZ Christian	I.E.E.A.
M. CAYATTE Jean-Louis	S.E.S.
M. CHAPOTON Alain	C.U.E.E.P.
M. COQUERY Jean-Marie	Biologie
Mme CORSIN Paule	Sciences de la Terre
M. CORTOIS Jean	Physique
M. COUTURIER Daniel	Chimie
M. CROSNIER Yves	I.E.E.A.
M. CURGY Jean-Jacques	Biologie
Mle DACHARRY Monique	Géographie
M. DAUCHET Max	I.E.E.A.
M. DEBRABANT Pierre	E.U.D.I.L.
M. DEGAUQUE Pierre	I.E.E.A.
M. DELORME Pierre	Biologie
M. DELORME Robert	S.E.S.
M. DE MASSON D'AUTUME Antoine	S.E.S.
M. DEMUNTER Paul	C.U.E.E.P.

PROFESSEURS 2ème classe (Suite 1)

M.	DENEL Jacques	I.E.E.A.
M.	DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques (Calais)
Mle	DESSAUX Odile	Chimie
M.	DEVRAINNE Pierre	Chimie
M.	DHAINAUT André	Biologie
Mme	DHAINAUT Nicole	Biologie
M.	DORMARD Serge	S.E.S.
M.	DOUKHAN Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M.	DUBOIS Henri	Physique
M.	DUBRULLE Alain	Physique (Calais)
M.	DUBUS Jean-Paul	I.E.E.A.
M.	FAKIR Sabah	Mathématiques
M.	FONTAINE Hubert	Physique
M.	FOUQUART Yves	Physique
M.	FRONTIER Serge	Biologie
M.	GAMBLIN André	G.A.S.
M.	GLORIEUX Pierre	Physique
M.	GOBLOT Rémi	Mathématiques
M.	GOSSELIN Gabriel (dét.)	S.E.S.
M.	GOUDMAND Pierre	Chimie
M.	GREGORY Pierre	I.P.A.
M.	GREMY Jean-Paul	S.E.S.
M.	GREVET Patrice	S.E.S.
M.	GUILBAULT Pierre	Biologie
M.	HENRY Jean-Pierre	E.U.D.I.L.
M.	HERMAN Maurice	Physique
M.	JACOB Gérard	I.E.E.A.
M.	JACOB Pierre	Mathématiques
M.	JEAN Raymond	Biologie
M.	JOFFRE Patrick	I.P.A.

PROFESSEURS 2ème classe (suite 2)

M. JOURNEL Gérard	E.U.D.I.L.
M. KREMBEL Jean	Biologie
M. LANGRAND Claude	Mathématiques
M. LATTEUX Michel	I.E.E.A.
Mme LECLERCQ Ginette	Chimie
M. LEFEVRE Christian	Sciences de la Terre
Mle LEGRAND Denise	Mathématiques
Mle LEGRAND Solange	Mathématiques (Calais)
Mme LEHMANN Josiane	Mathématiques
M. LEMAIRE Jean	Physique
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique
M. LOSFELD Joseph	C.U.E.E.P.
M. LOUAGE Francis (dét.)	E.U.D.I.L.
M. MACKE Bruno	Physique
M. MAIZIERES Christian	I.E.E.A.
M. MESSELYN Jean	Physique
M. MESSERLIN Patrick	S.E.S.
M. MONTEL Marc	Physique
Mme MOUNIER Yvonne	Biologie
M. PARSY Fernand	Mathématiques
Mle PAUPARDIN Colette	Biologie
M. PERROT Pierre	Chimie
M. PERTUZON Emile	Biologie
M. PONSOLLE Louis	Chimie
M. PORCHET Maurice	Biologie
M. POVY Lucien	E.U.D.I.L.
M. RACZY Ladislas	I.E.E.A.
M. RAOULT Jean François	Sciences de la Terre
M. RICHARD Alain	Biologie

PROFESSEURS 2ème Classe (suite 3)

M. RIETSCH François	E.U.D.I.L.
M. ROBINET Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M. ROGALSKI Marc	Mathématiques
M. ROY Jean-Claude	Biologie
M. SCHAMPS Joël	Physique
Mme SCHWARZBACH Yvette	Mathématiques
M. SLIWA Henri	Chimie
M. SOMME Jean	G.A.S.
Mle SPIK Geneviève	Biologie
M. STAROSWIECKI Marcel	E.U.D.I.L.
M. STERBOUL François	E.U.D.I.L.
M. TAILLIEZ Roger	Institut Agricole
Mme TJOTTA Jacqueline (dét.)	Mathématiques
M. TOULOTTE Jean-Marc	I.E.E.A.
M. TURRELL Georges	Chimie
M. VANDORPE Bernard	E.U.D.I.L.
M. VAST Pierre	Chimie
M. VERBERT André	Biologie
M. VERNET Philippe	Biologie
M. WALLART Francis	Chimie
M. WARTEL Michel	Chimie
M. WATERLOT Michel	Sciences de la Terre
Mme ZINN JUSTIN Nicole	Mathématiques

CHARGES DE COURS

M. ADAM Michel	S.E.S.

CHARGES DE CONFERENCES

M.	BAFCOP Joël	I.P.A.
M.	DUVEAU Jacques	S.E.S.
M.	HOFLACK Jean	I.P.A.
M.	LATOUCHE Serge	S.E.S.
M.	MALAUSSENA DE PERNO Jean-Louis	S.E.S.
M.	NAVARRE Christian	I.P.A.
M.	OPIGEZ Philippe	S.E.S.

Monsieur le Professeur C. BREZINSKI, dont j'ai suivi avec intérêt le Séminaire d'Analyse Numérique et d'Optimisation, a bien voulu me faire l'honneur de présider le Jury. Je le prie de croire à ma profonde gratitude.

Je suis très reconnaissant à Monsieur le Professeur J. DENEL de l'intérêt dont-il a fait preuve à l'égard de ce travail ; Son attention constante, ses nombreux conseils et encouragements m'ont été précieux dans l'accomplissement de cette thèse.

Je remercie très vivement Monsieur J.P. DELAHAYE pour avoir accepté de s'intéresser à ce travail et de le juger.

Je remercie également les membres de l'équipe d'Analyse Numérique et d'Optimisation du Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Lille I pour l'accueil qu'ils m'ont réservé et pour les facilités matérielles qu'ils m'ont accordées.

J'adresse mes vifs remerciements à Madame B. VANDROEMME pour le soin apporté à la dactylographie de ce document, ainsi qu'à Madame H. DEBOCK pour sa réalisation matérielle.

Qu'enfin soient remerciés tous ceux qui me sont chers et qui m'ont fourni le soutien moral à la réalisation de cette thèse.

A mon père et à ma mère,

A toute ma famille,

A Christine,

A mes amis.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

CHAPITRE I : CLASSE DE MATRICES, PROBLEME DE LA COMPLEMENTARITE LINEAIRE ET ALGORITHME DE LEMKE

1. Introduction.
2. Relation entre le P.C.L. et d'autres problèmes d'Optimisation.
3. Algorithme de lemke, caractérisation des classes de matrices Q_0 et Q.
4. Sur les sous-classes de matrices de la classe Q.
5. Caractérisation constructive pour que la classe de matrices L(d) soit dans Q.
6. Sur la classe de matrices colonnes adéquates et complémentarité linéaire.

   Annexe.

CHAPITRE II : APPROXIMATION SIMPLICIALE DE LA SOLUTION DU PROBLEME DE LA COMPLEMENTARITE NON LINEAIRE

1. Introduction.
2. Triangulation, Marquage et algorithme simplicial.
3. Subdivision, Marquage et algorithme simplicial à dimension variable.
4. Sur l'approximation simpliciale de la solution du problème de la complémentarité non linéaire.

CHAPITRE III : PROBLEME DE LA COMPLEMENTARITE GENERALISE

1. Introduction.
2. Extension du théorème de Ky Fan.
3. Sur le problème de la complémentarité généralisé.
4. Généralisation des résultats de Karamardian et Moré.
5. Contre-Exemple.

CHAPITRE IV : EXTENSION DU PROBLEME DE LA COMPLEMENTARITE GENERALISE

1. Introduction.
2. Extension du problème de la complémentarité généralisé.
3. Théorème de Ky Fan.
4. Sur l'extension du problème de la complementarité généralisé.
5. Sur les applications : Monotones, copositives, pseudomonotones et extension du problème de la complémentarité généralisé.

1. INTRODUCTION

De nombreux problèmes en économie, programmation mathématique, théorie des jeux, équilibre économique, ect... peuvent se formuler comme le problème de la complémentarité ; nous en donnons d'abord, une formulation plus générale :

Trouver $x \in X$:

$$x \in K,\ f(x) \in \Gamma(K),\ \langle x, f(x)\rangle = 0 \qquad \text{(I)}$$

où :

X espace vectoriel topologique, localement convexe, séparé réel.
Y espace vectoriel, réel.
$\langle ., .\rangle$ forme bilinéaire sur $X \times Y$.
K cône convexe fermé de X.
$\Gamma(K)$ cône polaire de K dans Y.
$f : K \to Y$ application.

Dans, le cas où $X = Y = \mathbb{R}^n$, $\langle ., .\rangle$ = produit scalaire usuel.

- $K = \mathbb{R}^n_+$, $f(x) = Mx + a$, M matrice $(n \times u)$ $q \in \mathbb{R}^n$, le problème (I) est connu sous le nom du problème de la complémentarité linéaire. Par contre, si f est non linéaire le problème (I) est appelé problème de la complémentarité non linéaire.

- K cône convexe fermé quelconque, le problème (I) est appelé problème de la complémentarité généralisé ; le problème (I) est appelé extension du problème de la complémentarité généralisé.

Ce travail comprend quatre chapitres. Dans le premier chapitre, nous faisons l'étude du problème de la complémentarité linéaire, Nous nous sommes intéressés, plus précisément, à la classe de matrices Q qui est caractérisée comme étant l'ensemble des matrices M pour lesquelles le problème de la complémentarité linéaire : $U\omega - Mz = q$, $\omega \geq 0$, $z \geq 0$, $\omega \cdot z = 0$ admet une solution $\forall q \in \mathbb{R}^n$. Nous donnons d'abord, une démonstration constructive pour le cas linéaire d'un théorème d'existence de Karamardian [12] en utilisant la méthode de lemke, nous aurons alors montré, de manière unifiée, que les différentes sous-classes de matrices introduites dans la littérature (Cf. [3], [7], [12], [16]) sont des sous-classes de matrices de la classe Q. Nous établissons par la suite, une caractérisation constructive pour que la classe de matrices $L(d)$, $d \in \mathbb{R}^n$ soit dans Q. Enfin, nous introduisons la classe de matrices colonnes adéquates et nous donnons une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution du problème de la complémentarité linéaire associé.

Le chapitre II étudie l'approximation simpliciale de la solution du problème de la complémentarité non linéaire. Après avoir, rappelé les principales propriétés se rapportant au concept de la triangulation du marquage et des algorithmes d'approximation simpliciale. Nous proposons un marquage de la triangulation de $\mathbb{R}^n_+$, l'utilisation d'un algorithme simpliciale à dimension variable basé sur ce marquage nous permet, sous certaines hypothèses, d'obtenir une approximation de la solution du problème de la complémentarité non linéaire. Nous donnons également une condition suffisante de convergence.

Dans le chapitre III est résolu, le problème de la complémentarité généralisé dans un espace vectoriel topologique, localement convexe, séparé réel. Nous donnons une extension du théorème de Ky Fan ; on obtient comme conséquences immédiates un théorème d'existence d'une solution du problème de la complémentarité généralisé. Nous généralisons à des espaces vectoriels topologiques, localement convexe certains résultats en dimension finie de Karamardian ([8], [9]) et de Moré ([11], [12]). Finalement un contre-exemple pour le résultat de G. Allen [1] est donné.

Le chapitre IV est consacré à l'extension du problème de la complémentarité généralisé dans un espace de Banach, réflexif réel. Nous montrons, en utilisant une extension du théorème de Ky Fan et sous une condition appropriée sur f, que l'extension du problème de la complémentarité généralisé admet une solution. Nous montrons également que cette condition est aussi vérifiée par certaines classes d'applications f rencontrées dans divers applications.

Les introductions de chacun des chapitres ont été rédigées de façon indépendante. Cette introduction générale en est un résumé.

CHAPITRE I

CLASSES DE MATRICES

PROBLEME DE LA COMPLEMENTARITE LINEAIRE

ALGORITHME DE LEMKE

NOTATIONS

Etant donné un ensemble J :

$|J|$: Cardinal de J.

$J\backslash I$: Complémentaire d'un sous-ensemble I de J.

Etant donné un vecteur $x \in \mathbb{R}^J$ (ligne ou colonne) indicé par J :

x_j	: Elément $j \in J$ de x.
$x_{J'}$	: Sous vecteur de x composé des éléments x_j, $j \in J' \subset J$.
$I(x)$(resp. $I_0(x)$)	: L'ensemble $\{j \in J \mid x_j \neq 0\}$ (resp. $\{j \in J \mid x_j = 0\}$).
$I_+(x)$(resp. $I_-(x)$)	: L'ensemble $\{j \in J \mid x_j > 0\}$ (resp. $\{j \in J \mid x_j < 0\}$).
$x \cdot y$	: Produit scalaire de $x \in \mathbb{R}^J$ par $y \in \mathbb{R}^J$.
$\|\|x\|\|$	: Norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^J$.

Etant donnée A une matrice de format $(I \times J)$ ou I et J sont des ensembles finis :

A_i^j : Elément $(i, j) \in I \times J$ de A.

A^j : Colonne $j \in J$ de A.

A_i : Ligne $i \in I$ de A.

$A^{J'}$: Sous-matrice de A composée des colonnes A^j, $j \in J' \subset J$.

$A_{I'}$: Sous-matrice de A composée des lignes A_i, $i \in I' \subset I$.

$A_{I'}^{J'}$: Sous-matrice réduite aux éléments $(i, j) \in I' \times J'$; $I' \subset I$, $J' \subset J$.

Etant donné H un ensemble de matrices :

U : Matrice unité.

H^T : L'ensemble des matrices transposée des matrices de l'ensemble H.

1. INTRODUCTION

Le problème de la complémentarité linéaire noté : P.C.L(M, q), peut se formuler de la manière suivante :

Trouver w, z $\in \mathbb{R}^n$:

$$\left| \begin{array}{ll} U\omega - Mz = q & \text{(1a)} \\ \omega \geq 0,\ z \geq 0 & \text{(1b)} \\ \omega \cdot z = 0 & \text{(1c)} \end{array} \right.$$

où : U et M sont des matrices ($N \times N$) avec $|N| = n$; $\omega, z, q \in \mathbb{R}^n$.

Le problème de la complémentarité linéaire est un problème très général ; On verra dans le paragraphe 2 qu'il englobe plusieurs problèmes bien connus dans la littérature.

Une littérature abondante traite de ce sujet, différents auteurs ont proposés des méthodes pour résoudre le P.C.L(M, q), citons par exemple, parmi les articles les plus classiques :

Cottle et Dantzig [3], Lemke ([13], [14], [15], [16]), Eaves [7], Garcia [10], Karamardian [12], Saigal ([25], [26], [27]), Murty ([20], [21]), Mangazarian ([17], [18], [19]), Cottle et Pang ([5], [6]), Pang ([23], [24]), Cottle et Aganagic [4], Aganagic [1], Watson [28]. Parmi les tours d'horizon : citons : Cottle et Dantzig [3] Lemke [16].

Une caractéristique commune à toutes ces méthodes est que leurs algorithmes et leurs résultats dépendent des classes de matrices. La caractéristique de ces méthodes, la méthode de Lemke ([13], [14], [15], [16]) en particulier, est qu'elles exhibent une solution du problème de la complémentarité linéaire P.C.L(M, q) pour tout $q \in \mathbb{R}^n$, ou bien si elles ne peuvent pas en exhiber une, alors le P.C.L(M, q) n'est pas réalisable (i.e. : que le système (1a, 1b) n'admet pas de solution). Pour traduire ce fait les classes de matrices suivantes sont introduites :

- Q_0 : M est une Q_0-matrice si et seulement si le P.C.L(M, q) admet une solution dès qu'il est réalisable. (Cette classe de matrices se note également par K).

- Q : M est une Q-matrice si et seulement si le P.C.L(M, q) admet une solution pour tout $q \in \mathbb{R}$.

La caractérisation complète de ces deux classes de matrices est une question centrale en théorie du problème de la complémentarité linéaire. Plusieurs travaux ont pour but de prouver qu'un tel type de classe de matrices appartiennent à la classe de matrices Q_0 ou à la classe Q (cf. Murty [20], Pang [24], Karamardian [12], Garcia [10], Cottle [2], Lemke [13], Eaves [7], Saigal [25],...).

Dans ce travail, on s'est intéressé essentiellement à la classe de matrices Q et surtout à la question suivante : qu'elles sont les conditions nécessaires et suffisantes sur la matrice M pour qu'elle appartiennent à la classe de matrices Q. Pour les conditions nécessaires introduites dans la littérature (cf. Cottle et Aganagic [4], Murty [20], Pang [24]) ; des conditions suffisantes sont également données (cf. Cottle [2], Saigal [25], Pang [23]).

Nous présentons, dans le paragraphe 3, la méthode de Lemke en donnant une description algébrique analogue à celle de la méthode simpliciale. Cette méthode consiste à générer une suite de bases complémentaires réalisables (et les solutions de la complémentarité correspondantes) du système, qu'on note : PC.L(M, q, d) suivant :

$$\left| \begin{array}{ll} U\omega - Mz - dz_0 = q & \quad (2a) \\ \omega \geq 0,\ z \geq 0,\ z_0 \geq 0 & \quad (2b) \\ \omega \cdot z = 0 & \quad (2c) \end{array} \right.$$

où : $d \in \mathbb{R}^n$, $d > 0$; $z_0 \in \mathbb{R}$.

Au bout d'un nombre fini d'itéractions, et sous l'hypothèse de la non dégénérescence, on obtien une solution du P.C.L(M, q, d) $\overline{x} = (\overline{\omega}, \overline{z}, \overline{z}_0)$ avec $\overline{z}_0 = 0$, ce qui est par conséquent, solution du P.C.L(M, q) qu'on cherche, ou bien une direction d'infinitude $\bar{c} = (\bar{v}, \bar{u}, \bar{u}_0) \in \mathbb{R}^{2n+1}\backslash\{0\}$ correspondante à la demi-droite $D^+(x, c) = (\bar{\omega}, \bar{z}, \bar{z}_0) + \lambda(\bar{v}, \bar{u}, \bar{u}_0)$, $\lambda \geq 0$ avec $\bar{z}_0 > 0$ et $\bar{u} \neq 0$ de l'ensemble C(M, q, d) des solutions du P.C.L(M, q, d). Il est évident que toute condition qui assure que l'ensemble C(M, q, d) ne contient pas de telles directions d'infinitudes, entraîne que la méthode de Lemke engendre une solution du P.C.L(M, q) et prouve de manière constructive l'existence d'une solution du P.C.L(M, q).

Dans le paragraphe 4, nous donnons une démonstration constructive pour le cas linéaire d'un théorème d'existence de Karamardian [12] en utilisant la méthode de Lemke ; Nous aurons alors montré, de manière unifiée, que les différentes sous-classes de matrices introduites dans la littérature (Karamardian [12], Cottle et Dantzig [3], Lemke [16], Eaves [7]) sont des sous-classes de matrices de la classe Q. Dans le paragraphe 5, nous établissons une caractérisation constructive pour que la classe de matrices L(d), $d \in \mathbb{R}^n$, $d > 0$ introduite par Garcia [10] appartienne à la classe de matrices Q. La démarche effectuée dans ce paragraphe est analogue à celle utilisée par Cottle et Aganagic [4] pour la classe de matrices (P_0) et par Pang [23] pour la classe de matrices (L).

Dans le paragraphe 6, nous étudions le problème de la complémentarité linéaire avec la classe de matrices colonnes adéquates. Après avoir, introduit la classe de matrices colonnes adéquates ; Nous donnons par la suite une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution du problème de la complémentarité linéaire, pour la matrice M appartenant à la classe de matrices colonnes adéquates.

2. RELATION ENTRE LE P.C.L ET D'AUTRES PROBLEMES D'OPTIMISATION

Le problème de la complémentarité linéaire est un problème très général, les problèmes suivants sont des cas particuliers de celui-ci :

a) La programmation linéaire (P.L)

On montre dans ([3], [7]) que la programmation linéaire peut se formuler comme le problème de la complémentarité linéaire.

b) La programmation quadratique connexe (P.Q.C)

On considère, le problème de la programmation quadratique connexe suivant :

$$(Q) \quad \left| \begin{array}{l} \min \frac{1}{2} x \cdot Qx + p \cdot x \\ Ax \geq a \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

La recherche d'une solution du problème (Q) est équivalente (cf. [3], [7]) à la recherche d'une solution des conditions de Kuhn et Tucker du problème (Q) :

$$\left| \begin{array}{l} u = Qx - A^T y + p \; ; \; x \geq 0, \; y \geq 0 \\ v = Ax \qquad\qquad - a \; ; \; u \geq 0, \; v \geq 0 \\ x \cdot u = y \cdot v = 0 \end{array} \right.$$

Ce qui peut se formuler, comme le problème de la complémentarité linéaire, suivant :

$$\left| \begin{array}{l} U\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q & -A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -a \end{pmatrix} \\ (u, v) \geq 0, \; (x, y) \geq 0 \\ (u, v) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \end{array} \right.$$

c) La théorie des jeux

Considérons, le jeux à deux personnes 1, 2 dont les matrices ($M \times N$), $|M| = m$, $|N| = u$ de gains sont A et B et dont les stratégies mixtes sont

$$x = \{x \in \mathbb{R}^n + \mid \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\} \ ; \ Y = \{y \in \mathbb{R}^n + \mid \sum_{i=1}^{n} y_i = 1\} \ ;$$

Le but du joueur 1 est :

$$(P_1) \left| \begin{array}{l} \max x \cdot Ay \\ x \in X \end{array} \right.$$

et du joueur 2 est :

$$(P_2) \left| \begin{array}{l} \max x \cdot Ay \\ y \in Y \end{array} \right.$$

Sans perte de généralité, on suppose que $A > 0$ et $B > 0$. La recherche d'un point d'équilibre de ce jeux c'est-à-dire d'un couple de solutions $(\hat{x}, \hat{y})$ de (P_1) et (P_2) est équivalent (cf. [3], [14]) à la recherche de la solution du problème de la complémentarité linéaire suivant :

$$\left| \begin{array}{l} U\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & A \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^m \\ -e^n \end{pmatrix} \\ (u, v) \geq 0, \ (x, y) \geq 0 \\ (u, v) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \end{array} \right.$$

où $e^i \in \mathbb{R}^i$ avec $e^i = (1,\dots, 1)$; $i = n, m$.

3. LE PROBLEME DE LA COMPLEMENTARITE LINEAIRE

3.1. Définition et résultats fondamentaux

Le problème de la complémentarité linéaire noté : P.C.L(M, q) peut s'énoncer sous la forme :

Trouver ω, $z \in \mathbb{R}^n$:

$$\left| \begin{array}{l} U\omega - Mz = q \\ \omega \geq 0,\ z \geq 0 \\ \omega \cdot z = 0 \end{array} \right.$$

où les matrices U, M, ω, z et q ont des formats appropriés.

Pour résoudre le P.C.L(M, q), Lemke transforme ce problème par introduction de variable artificielle $z_0 \in \mathbb{R}$ avec un coût $d \in \mathbb{R}^n$ $d > 0$, pour démarrer son algorithme, en un nouveau problème qu'on note : P.C.L(M, q d) suivant :

$$\left| \begin{array}{l} U\omega - Mz - dz_0 = q \\ \omega \geq 0,\ z \geq 0,\ z_0 \geq 0 \\ \omega \cdot z = 0 \end{array} \right.$$

Ce problème est important pour la recherche des solutions du P.C.L(M, q).

3.1.1. Solutions du P.C.L(M, q, d) et polyèdre des solutions réalisables

Notons $L(M, q, d) = \{(\omega, z, z_0) \in \mathbb{R}^{2n+1} \mid U\omega - Mz - dz_0 = q\ ; \omega \geq 0,\ z \geq 0,\ z_0 \geq 0\}$, l'ensemble des solutions réalisables du P.C.L(M, q, d). On remarque que L(M, q, d), intersection de la variété linéaire

$$\{(\omega, z, z_0) \in \mathbb{R}^{2n+1} \mid U\omega - Mz - dz_0 = q\}$$

avec l'orthan positif est un polyèdre.

$C(M, q, d) = \{(\omega, z, z_0) \in L(M, q, d) \mid \omega \cdot z = 0\}$, l'ensemble des solutions du problème de la complémentarité linéaire P.C.L(M, q, d).

Définition 3.1.1.1.

On dit que le problème de la complémentarité linéaire P.C.L(M, q, d) *(resp.* P.C.L(M, q)) *est réalisable si et seulement si* L(M, q, d) *(resp.* L(M, q)) *est non vide.*

Définition 3.1.1.2.

Le polyèdre L(M, q, d) *est non dégénéré si et seulement si* $\forall x = (\omega, z, z_0) \in C(M, q, d) \Rightarrow \text{rang}(U, -M, -d)^{S(X)} = n$, $S(x) = \{i \in J \mid x_i \neq 0\}$.

Cette définition, entraîne que toute solution de la complémentarité a exactement n composantes non nulles.

Définition 3.1.1.3.

$\bar{c} = (\bar{v}, \bar{u}, \bar{u}_0) \in \mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{0\}$ *est une direction d'infinitude de* C(M, q, d) *si et seulement si pour tout* $\bar{x} = (\bar{\omega}, \bar{z}, \bar{z}_0) \in C(M, q, d)$ *la demi-droite* $D^+(\bar{x}, \bar{c}) = \bar{x} + \theta\bar{c}$, $\theta \geq 0$ est entièrement contenue dans C(M, q, d), i.e. :

- $U\bar{\omega} - M\bar{z} - d\bar{z}_0 = q$, $\bar{\omega} \geq 0$, $\bar{z} \geq 0$, $\bar{z}_0 \geq 0$, $\bar{\omega} \cdot \bar{z} = 0$.
- $U\bar{v} - M\bar{u} - d\bar{u}_0 = 0$, $\bar{v} \geq 0$, $\bar{u} \geq 0$, $\bar{u}_0 \geq 0$, $\bar{v} \cdot \bar{u} = 0$.
- $\bar{\omega} \cdot \bar{v} = \bar{u} \cdot \bar{z} = 0$

3.1.1.4. Classification des directions d'infinitude de C(M, q, d)

Nous allons classifier les directions d'infinitude de C(M, q, d) en deux types distincts : initiale et finale.

Notons $\bar{z}_0^0 = \max \{- q_i/d_i \mid q_i < 0\}$ tel que :

$$q + d\bar{z}_0 \geq 0 \text{ pour tout } \bar{z}_0 \geq \bar{z}_0^0$$

$$q + d\bar{z}_0 \ngeq 0 \text{ pour tout } 0 \geq \bar{z}_0 < z_0^0$$

Définition 3.1.1.4.1.

On appelle direction d'infinitude initiale de $C(M, q, d)$, *tout vecteur* $\bar{c} = (d, 0, 1) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ *tel que la demi-droite* $D^+((q + D\bar{z}_0^0, 0, \bar{z}_0^0), \bar{c}) \subset C(M, q, d)$.

Définition 3.1.1.4.2.

On appelle direction d'infinitude finale de $C(M, q, d)$, *tout vecteur* $\bar{c} = (\bar{v}, \bar{u}, \bar{u}_0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ *tel que la demi-droite* $D^+((\bar{\omega}, \bar{z}, \bar{z}_0), \bar{c}) \subset C(M, q, d)$ *avec* $(\bar{\omega}, \bar{z}, \bar{z}_0) \in C(M, q, d)$ *et* $(\bar{z}, \bar{u}) \neq 0$.

Des classes de matrices sont caractérisées (cf. [7], [10]) comme étant l'ensemble des matrices M pour lesquelles toute direction d'infinitude $\bar{c} = (\bar{v}, \bar{u}, \bar{u}_0)$ de $C(M, q, d)$ est telle que :

- Si $\bar{u}_0 \neq 0$ alors, cette direction d'infinitude est une direction d'infinitude initiale.

- Si $\bar{u}_0 = 0$ alors, cette direction d'infinitude est une direction d'infinitude finale.

Nous donnons, maintenant deux lemmes qui serviront dans la suite :

Lemme 3.1.1.5.

Si $(\bar{v}, \bar{u}, \bar{u}_0)$ *est une direction d'infinitude de l'ensemble* $C(M, q, d)$ *telle que* $\bar{u} = 0$ *alors, cette direction d'infinitude est une direction d'infinitude initiale de* $C(M, q, d)$.

Preuve :

$$\left.\begin{array}{r}(\bar{v}, \bar{u}, \bar{u}_0) \text{ direction d'infinitude de } C(M, q, d) \\ \text{déf. 3.1.1.3.}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}(v, u, u_0) \neq 0 \\ \bar{u} = 0\end{array}\right\} \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\bar{u}_0 \neq 0 \\ \text{déf. 3.1.1.3.}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}\bar{v} = d\bar{u}_0 > 0 \\ \bar{v} \cdot \bar{z} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \bar{z} = 0.$$

donc, cette direction d'infinitude correspond à la demi-droite $D^+((\overline{\omega}, 0, \overline{z}_0),$ $(\overline{v}, 0, \overline{u}_0))$ qui n'est autre que la direction d'infinitude initiale.

<u>*Lemme 3.1.1.6.*</u>

Le système : $U\omega - Mz = q$, $\omega \geq 0$, $z \geq 0$ *admet une solution si et seulement si* $\nexists u$, $u \geq 0 : M \cdot u \leq 0$ *et* $q \cdot u < 0$.

<u>Preuve</u> :

On montre que :

Le système : $U\omega - Mz = q$, $\omega \geq 0$, $z \geq 0$ n'admet pas la solution si et seulement si $\exists u$, $u \geq 0 : M \cdot u \leq 0$ et $q \cdot u < 0$.

i) l'implication $\Rightarrow$

Par l'absurde, supposons que $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $u \geq 0$ $M \cdot u \nleq 0$ ou $q \cdot u \geq 0$.

$$\text{Ou encore, } \forall u \in \mathbb{R}^n, \left.\begin{array}{r} \begin{bmatrix} U \\ -M \end{bmatrix} \cdot u \geq 0 \Rightarrow q \cdot u \geq 0 \\ \text{lemme de Farkas} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists (v_1, v_2) \geq 0 : (v_1, v_2) \cdot \begin{bmatrix} U \\ -M \end{bmatrix} =$$

$\Rightarrow \exists (v_1, v_2) \geq 0 : Uv_1 - Mv_2 = q$, ce qui contredit l'hypothèse.

ii) l'implication $\Leftarrow$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Par l'absurde, supposons } \exists \omega \geq 0,\ z \geq 0 : U\omega - Mz = q \\ \text{Hypothèse} \end{array}\right\} \ldots$$

$\ldots \Rightarrow 0 \leq \omega \cdot u - z \cdot Mu = q \cdot u < 0$, ce qui est impossible.

3.1.2. Elimination. Solution de complémentarité. Changement de base complémentaire

Soit le P.C.L(M, q, d) présenté sous la forme suivante :

$$\left| \begin{array}{ll} U\omega - Mz - dz_0 = q & \text{(2a)} \\ \omega \geq 0,\ z \geq 0,\ z_0 \geq 0 & \text{(2b)} \\ \omega \cdot z = 0 & \text{(2c)} \end{array} \right.$$

où la matrice A = (U, -M, -d) est indicée par (L × J).

la colonne q " " " " (L)

la colonne d " " " " (L).

la colonne $x = (\omega, z, z_0)$ " " (J).

$|J| = 2n+1,\ |L| = n.$

3.1.2.1. Base complémentaire

On appelle base complémentaire, tout sous-ensemble $I \subset J = 1, \ldots, 2n+1$ tel que :

$$\left| \begin{array}{ll} |I| = |L| = u & (3) \\ A^I \text{ régulière (inversible)} & (4) \\ \{i, i+n\} \not\subset i,\ i = 1, \ldots, n & \\ \{i, i+u\} \not\subset I,\ i = 1, \ldots, n & (5) \end{array} \right.$$

Remarque : La dernière condition (5) entreîne que pour $\forall i = 1, \ldots, n$ au moins une des variables $\overline{\omega}_i$ ou $\overline{z}_i$ doit être nulle dans toute solution $\overline{x} = (\overline{\omega}, \overline{z}, \overline{z}_0)$ du P.C.L(M, q, d).

3.1.2.2. Elimination

Etant donnée une base complémentaire I, *en posant* $\overline{I} = \overline{J}\backslash\overline{I}$, *la relation (2a) est classiquement équivalente à :*

$$(A^I)^{-1} Ax = (A^I)^{-1}$$

ou $$x_I = (A^I)^{-1}q - (A^I)^{-1} A^{\overline{I}} x_{\overline{I}}$$

Si on pose :

$$T(I) = (A^I)^{-1} A \qquad \text{(matrice } (I \times J))$$

$$t(I) = (A^I)^{-1} q \qquad \text{(colonne } (I))$$

Le système (2a) est équivalent aux systèmes :

$$T(I)x = t(I) \qquad (2a')$$

$$x_I = t(I) - T^{\overline{I}}(I)\, x_{\overline{I}} \qquad (2a'')$$

Les variables x_I et $x_{\overline{I}}$ sont respectivement les variables de base et les variables hors-base.

3.1.2.3. Solution de la complémentarité

Etant donnée une base complémentaire I, on appelle solution de complémentarité, la solution de base x(I) réalisable définie par :

$$x(I) : \left|\begin{array}{l} x_I = t(I) \geq 0 \\ \\ x_{\overline{I}} = 0 \end{array}\right.$$

Critère 3.1.2.4.

Si I est une base complémentaire du P.C.L(M, q, d) telle que $2n+1 \notin I$ (i.e. : $2n+1 \in \overline{I}$) alors, la solution de base réalisable $x(I) = (\overline{\omega}, \overline{z}, \overline{z}_0)^I$ correspondante est telle que $\overline{z}_0 = 0$, par conséquent x(I) est une solution du P.C.L (M, q).

3.1.2.5. Bases complémentaires voisines

Soit I une base complémentaire du P.C.L(M, q, d), définissons $\overline{\overline{I}} \subset \overline{I}$ de la manière suivante :

i) Si 2n+1 $\notin$ I alors, $\overset{=}{I} = \{2n+1\}$

ii) Si 2n+1 $\in$ I alors, $\exists!\ i \in \{1,\dots, n\} : \{i, i+n\} \cap I = \emptyset$, dans ce cas $\overset{=}{I} = \{i, i+n\}$.

Deux bases complémentaires I, I' sont voisines lorsqu'elles ne diffèrent que par un seul élément, c'est-à-dire que :

$$I' = I + S - r \text{ avec } S \in \overset{=}{I} \text{ et } r \in I.$$

3.1.2.6. *Dégénérescence*

Définition 3.1.2.6.1.

On dit qu'une solution du P.C.L(M, q, d) *associée à une base complémentaire* I *est non dégénérée si et seulement si le vecteur* $x_I = (A^I)^{-1}_q > 0$.

Remarque :

- Si le P.C.L(M, q, d) est non dégénéré, alors chaque base complémentaire est exactement voisine à 0, 1 ou 2 bases complémentaires.

En effet : Si I est une base complémentaire et $i \in \overset{=}{I}$, alors I est voisine à au plus une base complémentaire de la forme $I' = I + i - j$, $j \in I$.

3.2. Résolution du problème de la complémentarité linéaire

3.2.1. Algorithme de Lemke

On considère, le P.C.L(M, q, d) sous la forme :

Trouver ω, $z \in \mathbb{R}^n$:

$$\left| \begin{array}{l} U\omega - Mz - dz_0 = q \\ \omega \geq 0,\ z \geq 0,\ z_0 \geq 0 \\ \omega \cdot z = 0 \end{array} \right.$$

avec les mêmes hypothèses qu'en 3.1.2.

L'algorithme de Lemke, consiste à générer une suite de bases complémentaires réalisables (et les solutions de la complémentarité correspondantes). Au bout, d'un nombre fini d'itérations, et sous l'hypothèse de la non-dégénérescence, on obtient soit :

- Une base complémentaire réalisable avec $2n+1 \notin I$, ce qui entraîne que la variable artificiale $\bar{z}_0 \in \mathbb{R}$ est hors-base, par conséquence la solution de base $x(I)$ correspondante est une solution du P.C.L(M, q) cherchée.

- Une direction d'infinitude finale de C(M, q, d) avec $\bar{z}_0 > 0$.

Pour certaines classes de matrices M, l'existence des directions d'infinitude finales de C(M, q, d) avec $\bar{z}_0 > 0$ entraîne que P.C.L(M, q) n'est pas réalisable ; Donc si le P.C.L(M, q) est réalisable et la matrice M appartienne à ces classes de matrices, l'algorithme de Lemke génère une solution du P.C.L(M, q).

3.2.2. Itération courante

- On suppose connus : | Une base complémentaire réalisable I.
  | Les valeurs correspondantes T(I), t(I) et x(I).

- On remplace I par une base complémentaire voisine $I' = I + s - r$ telle que $x(I') \geq 0$.

- Condition $x(I') \geq 0$

Etant donnée une base complémentaire I réalisable, et la solution de complémentarité x(I) correspondante. De deux choses l'une :

- $2n+1 \notin I$, et dans ces conditions la variable artificielle $\bar{z}_0$ est hors-base donc, la solution x(I) est une solution du P.C.L(M, q) d'après le critère 3.1.2.4.

- $2n+1 \in I$, ce qui entraîne qu'il existe un unique $s \in \bar{I}$: $\{s, s+n\} \cap I = \emptyset$
  C'est le deuxième cas qui nous intéresse ici. On considère dans ces conditions une solution courante $x'(\theta)$ dépendant d'un paramètre (scalaire) θ, et définie comme suit :

$$x'(\theta) : \begin{cases} x'_{\bar{I}-S} = 0 \\ x'_S = \theta \\ x'_I = t - T^S\,\theta \end{cases}$$

Par suite, le domaine des valeurs de θ rendant $x'(\theta) \geq 0$ est définie par :

$$\left| \begin{array}{ll} T\ \ \theta \geq t & \qquad\qquad (\text{c'est-à-dire } x'_I \geq 0). \\ \ \ \ \theta \geq 0 & \end{array} \right.$$

ce qui s'écrit, de façon plus détaillée :

$$\left| \begin{array}{l} T_i^S\ \theta \leq t_i,\ \forall i \in I \\ \theta \geq 0 \end{array} \right. \tag{6}$$

En remarquant que $t_i \geq 0$, $\forall i \in I$, puisque la base complémentaire I est réalisable, et en se bornant aux solutions $\theta \geq 0$, les inégalités (6) pour lesquelles $T_i^S \leq 0$ sont toujours satisfaites. Les autres inégalités, pour lesquelles $T_i^S > 0$, nous donnent :

$$\theta \leq \frac{t_i}{T_i^S},\ \forall i \in I,\ T_i^S > 0.$$

Par suite, le domaine des θ, tels que $x'(\theta) \geq 0$, est :

$$\left| \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \hat{\theta} \\ \hat{\theta} = \min \left\{ \dfrac{t_i}{T_i^S} \;\middle|\; i \in I,\ T_i^S > 0 \right\} = \dfrac{t_r}{T_r^S} \end{array} \right. \tag{7}$$

En résumé :

$$\left| \begin{array}{l} \text{On choisit } s \in \bar{I} : s \in \bar{\bar{I}} \\ \text{On détermine } r \in I \text{ d'après (7)} \end{array} \right.$$

Remarque : Si $\exists i \in I$: $T_i^s > 0$, alors $T^s \leq 0$. Dans ces conditions, on ne peut pas déterminer r d'après (7). Mais cette circonstance implique que la solution $x'(\theta)$ définie par :

$$\begin{pmatrix} x_T \\ x_s \\ x_{\bar{I}-s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} -T^s \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{est réalisable } \forall\theta \geq 0.$$

Si, on permute les variables, en les présentant dans leur ordre d'origine on obtient :

$$\begin{pmatrix} \omega \\ z \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\omega} \\ \bar{z} \\ \bar{z}_0 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} \bar{v} \\ \bar{u} \\ \bar{u}_0 \end{pmatrix} \quad ; \theta \geq 0$$

où : • $(\bar{\omega}, \bar{z}, \bar{z}_0)$ reste toujours une solution du P.C.L(M, q, d).

• $(\bar{v}, \bar{u}, \bar{u}_0)$ est une direction d'infinitude finale de C(M, q, d) avec $\bar{z}_0 > 0$ car $r \neq 2n+1$.

Donc, $x'(\theta)$ décrit une direction d'infinitude finale de C(M, q, d) avec $\bar{z}_0 > 0$.

3.2.3. Convergence de l'algorithme

Nous avons vu qu'une itération de l'algorithme consiste, étant donnée base complémentaire I, à trouver un indice s hors-base vérifiant $\{s, s+n\} \cap I = \emptyset$, puis un indice r de base, et de faire le changement de base $I \to I' = I + s - r$. Cela ne peut être impossible que dans l'un des deux cas suivants :

i) $2n+1 \notin I$, par suite la variable artificielle $\bar{z}_0$ est hors-base, ce qui entraîne que x(I) est une solution du P.C.L(M, q).

ii) $s \in \bar{\bar{I}}$ étant trouvé, $\nexists i \in I$: $T_i^s > 0$. Par suite $T^s \leq 0$, ce qui entraîne que l'algorithme se termine avec une direction d'infinitude de $C(M, q, d)$ avec $\bar{z}_0 > 0$.

Hormis ces deux cas, les changements de base pourront se faire. La question est de savoir s'il peuvent se poursuivre indéfiniment.

- Sous l'hypothèse de la non dégénérescence, les différentes bases $I_1, I_2, \ldots$ engendrées par l'algorithme sont distinctes, car sinon, $\exists i < j : I_i = I_j$ et $I_h \neq I_k$, $\forall h,k < j$. C'est-à-dire que I_j est la première base qui se répète.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Par suite, on a : } I_i \text{ est voisine à } I_{i-1}, I_{i+1} \text{ et } I_{j-1} \longrightarrow \\ \text{le P.C.L}(M, q, d) \text{ est non dégénéré} \Rightarrow I_i \text{ ne peut être voisine qu'à deux bases}\end{array}\right\} \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow I_{j-1} = \begin{cases} I_{i-1} \\ \text{ou} \\ I_{i+1} \end{cases}$$

On distingue deux cas :

1) $i \geq 2$ alors, $I_{j-1} \neq I_{i-1}$ car par hypothèse $I_h \neq I_k$ $\forall h,k < j$.

2) $i = 1$ alors, I_1 est voisine uniquement à I_2.

Donc, dans les deux cas on a : $I_{j-1} = I_{i+1} \Rightarrow j-1 = i+1$, sinon $I_{j-1} \neq I_{i+1}$ par hypothèse, donc $j = i+2$ et $I_i = I_j = I_{i+2}$.

Or, si par exemple :

$$I_i = I_{i-1} + \bar{s} - r$$
$$I_{i+1} = I_i + \bar{r} - t$$
$$I_{i+2} = I_{i+1} + \bar{t} - E$$

l'indice $t \in I_i$, $t \notin I_{i+1}$ et c'est $\bar{t} = \begin{cases} t-n, \text{ si } t > n \\ t+n, \text{ si } t \leq n \end{cases}$

Le complémentaire de t qui est candidat au changement de base pour obtenir I_{i+2} par suite, $t \notin I_{i+2}$ d'après la définition de la base complémentaire ce qui contredit $I_i = I_{i+2}$.

- A chaque base complémentaire I donnée correspond une solution de base x(I) unique.

Par conséquence, puisque le nombre de bases possibles est fini, l'algorithme converge en un nombre fini d'itérations.

3.2.4. Démarrage de l'algorithme

Il est nécessaire, pour commencer la première itération, de connaître une base complémentaire réalisable.

Pour cela :

On considère le P.C.L(M, q) :

$$\left| \begin{array}{l} U\omega - Mz = q \\ \omega \geq 0,\ z \geq 0 \\ \omega \cdot z = 0 \end{array} \right.$$

en introduisant une variable artificielle $z_0 \in \mathbb{R}$, de coût $d \in \mathbb{R}$, $d > 0$ ou transforme ce problème en un système qu'on note P.C.L(M, q, d) suivant :

$$\left| \begin{array}{l} U\omega - Mz - dz_0 = q \\ \omega \geq 0,\ z \geq 0,\ z_0 \geq 0 \\ \omega \cdot z = 0 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} A = (U_1 - M_1 - d) \text{ matrice } (L \times J) \\ d \in \mathbb{R}^n,\ d > 0 \\ |L| = n,\ |J| = 2n+1 \end{array}$$

Si • $q \geq 0$, la solution $(\omega, z, z_0) = (q, 0, 0)$ est une solution du problème de la complémentarité linéaire P.C.L(M, q) et l'algorithme s'arrête.

- $q \ngeq 0$, on démarre l'algorithme, avec la base complémentaire réalisable I_1 suivante :

$$I_1 = I + 2n+1 - r \; ; \; I = \{1,\dots, n\}$$

où

$$r : \frac{-q_r}{d_r} = \max\{-q_i/q_i \mid q_i < 0,\ i \in I\}.$$

Remarques :

- Pour déterminer r, on considère la direction d'infinitude initiale (d, 0, 1) de C(M, q, d) associée à la demi-droite $D^+((q + d\bar{z}_0, 0, \bar{z}_0^0), (d, 0, 1))$.

- Il est évident que toute condition qui assure que l'ensemble C(M, q, d) ne contient pas des directions d'infinitudes finales avec $\bar{z}_0 > 0$ entraîne que l'algorithme de Lemke génère une solution du P.C.L(M, q) et prouve de manière constructive l'existence d'une solution de la complémentarité. Pour satisfaire de telles conditions les classes de matrices suivantes sont introduites :

  - Q_0 : La matrice $M \in Q_0$ et l'algorithme de Lemke appliqué au P.C.L(M, q, d) engendre une direction d'infinitude finale de C(M, q, d) avec $\bar{z}_0 > 0$ alors, le P.C.L(M, q) n'est pas réalisable.

  - Q : La matrice $M \in Q$, l'algorithme de Lemke appliqué au P.C.L(M, q, d) n'engendre jamais de telles directions d'infinitude.

D'où les définitions suivantes :

Définition 3.2.5.

La matrice $M \in Q_0$ *si et seulement si le* P.C.L(M, q) *admet une solution dès qu'il est réalisable.*

Définition 3.2.6.

La matrice $M \in Q$ *si et seulement si le* P.C.L(M, q) *admet une solution pour* $\forall q \in \mathbb{R}^n$.

La caractérisation complète de ces deux classes de matrices, reste une question centrale en théorie du problème de la complémentarité linéaire. La plupart des sous-classes de matrices de la classe Q_0 ou Q dans la littérature sont caractérisées en terme de la complémentarité linéaire (cf. [3], [5], [6], [7] etc...).

4. SUR LES SOUS-CLASSES DE MATRICES DE LA CLASSE Q

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à un résultat d'existence des solutions du problème de la complémentarité linéaire. Nous présentons d'abord, les différentes sous-classes de matrices (R), (E), (P), (C) et (M^+) introduites dans la littérature (cf. [3], [7], [13], [16]) ; Nous étudions leurs propriétés et leurs relations d'inclusion. Par la suite, nous donnons une démonstration constructive pour le cas linéaire d'un théorème d'existence de Karamardian [12], en utilisant la méthode de Lemke. Nous aurons alors montré, de manière unifiée, que les différentes sous-classes de matrices (R), (E), (P), (C) et (M^+) sont des sous-classes de la classe de matrices Q.

4.1. Présentation des classes de matrices

4.1.1. Classes de matrices régulière : (R)

Définition 4.1.1.1. (*Karamardian* [12]). $M \in (R)$ *(ou* M *est une R-matrice) si et seulement si le système :*

$$\left|\begin{array}{ll} M_i s + t = 0 & \text{si } i \in I_+(x) \\ M_i x + t \geq 0 & \text{si } i \in I_0(x) \\ x \geq 0,\ x \neq 0,\ t \geq 0 & \end{array}\right.$$

n'admet pas de solution.

4.1.2. Classes de matrices (E) (Eaves [7], Cottle et Dantzig [3], Karamardian [12]

Définition 4.1.2.1. : $M \in (E)$ *(ou* M *est une matrice strictement semi-monotone) si et seulement si* $\forall I \subset \{1, \ldots, n\}$ *le système :*

$$M_I^I \, x_I \leq 0, \; x_I \geq 0, \; x_I \neq 0$$

n'admet pas de solution.

Proposition 4.1.2.1.

$(E) \subset (R)$.

Preuve :

$$\left.\begin{array}{r}\text{Soit } M \in (E) \text{, supposons que } M \notin (R) \\ \text{déf. 4.1.1.}\end{array}\right\} \; \exists x \geq 0, \; x \neq 0, \; t \geq 0 :$$

$$M_{I_+(x)}^{I_+(x)} \, x_{I_+(x)} = -t \, e_{I_+(x)} \leq 0 \Rightarrow \exists I = I_+(x) : \text{le système :}$$

$$\left.\begin{array}{r} M_I^I \, x_I \leq 0, \; x_I > 0 \text{ admet une solution} \\ M \in (E) \end{array}\right\} \text{impossible}$$

donc $M \in (R)$.

Remarque : $(E) \subsetneq (R)$, pour s'en convaincre, on considère $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ alors, $M \in (R)$ et $M \notin (E)$.

4.1.3. Classe de matrices (P) (Fielder et Ptak [8])

Définition 4.1.3.1.

$M \in (P)$ *(ou M est une P-matrice) si et seulement si* $\forall I \subset \{1,\ldots, n\}$ $\det M_I^I > 0$.

Proposition 4.1.3.2.

$M \in (P)$ *si et seulement si* $\forall x \in \mathbb{R}^n, \; x \neq 0 \; \exists i \in I(x) : x_i \cdot (Mx)_i > 0$.

Preuve :

Voir annexe : A-4.2.

Proposition 4.1.3.3.

$(P) \subset (E)$

Preuve :

$$\left.\begin{array}{r}\text{Soit } M \in (P), \text{ supposons que } M \notin (E) \\ \\ \text{déf. } 4.1.2.\end{array}\right\} \Rightarrow \exists I \subset \{1,\ldots, n\} :$$

Le système $M_I^I\, x_I \leq 0$, $x_I \geq 0$, $x_I \neq 0$ admet une solution.

Par conséquence, $\exists x = (x_I, 0) \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$, $x \neq 0 : \forall i \in I(x)\ x_i(Mx)_i = x_i(M_i^I\, x_I) \leq 0$, ce qui contredit le fait que $M \in (P)$.

4.1.4. Classe de matrices (C) (Cottle et Dantzig [3], Lemke [14])

Définition 4.1.4.1.

((C) : *matrices strictement copositives*).

$M \in (C)$ *si et seulement si* $x \cdot Mx > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$, $x \neq 0$.

Proposition 4.1.4.2.

$(C) \subset (E)$

Preuve :

$$\left.\begin{array}{r}\text{Soit } M \in (C), \text{ supposons que } M \in (E) \\ \\ \text{déf. } 4.1.2.\end{array}\right\} \Rightarrow \exists I \subset \{1,\ldots, n\} :$$

Le système $M_I^I\, x_I \leq 0$, $x_I \geq 0$, $x_I \neq 0$ admet une solution.

Par suite, $\exists x = (x_I, 0) \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$, $x \neq 0$: $x \cdot Mx = x_I \cdot M_I^I\, x_I \leq 0$, ce qui contredit le fait que $M \in (C)$.

4.1.5. Classe de matrices (D) (Lemke [14])

Définition 4.1.5.1.

((D) : *matrices définies positives*).

$M \in (D)$ *si et seulement si* $x \cdot Mx > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

Proposition 4.1.5.2.

i) $(D) \subset (P)$

ii) $(D) \subset (C)$

Preuve :

$$\left.\begin{array}{r} \text{i) } M \in (D), \text{ supposons que } M \notin (P) \Rightarrow \exists I \subset \{1,\ldots,n\} : \det M_I^I \leq 0 \\ \det M_I^I = \prod_{i=1}^{k} \lambda_i \text{ ; } \lambda_i \text{ valeur propre de } M_I^I \\ \text{les valeurs propres complexes sont conju-} \\ \text{guées 2 à 2} \end{array}\right\} \ldots$$

... $\Rightarrow$ Il existe, au moins une valeur propre réelle $\lambda \leq 0$, soit $x_I \neq 0$, le vecteur propre associé : $M_I^I\, x_I = \lambda\, x_I$

Posons, $y = (x_I, 0) \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$ $\quad y \cdot My = x_I \cdot M_I^I\, x_I = \lambda\, ||x_I||^2 \leq 0$. ce qui contredit que $M \in (D)$.

ii) Evident, il suffit d'utiliser les définitions 4.1.5.1. et 4.1.4.2.

4.1.6. Classe de matrices (M^+) (Lemke [14])

Définition 4.1.6.1.

((M^+) : *matrices strictement positives*).

$M \in (M^+)$ *si et seulement si* $M_i^j > 0$, $\forall i,j \in \{1,\ldots, n\}$.

Remarque : $(M^+) \subset (C)$.

Nous donnons, le diagramme d'inclusion. ($A \to B$ signifie que $A \subset B$).

$$
\begin{tikzcd}
 & (R) & & \\
 & (E) \arrow[u] & & \\
(P) \arrow[ur] & & (C) \arrow[ul] & \\
 & (D) \arrow[ul] \arrow[ur] & & (M^+) \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

4.2. Théorème d'existence

Nous donnons, une démonstration constructive pour le cas linéaire d'un théorème d'existence de Karamardian [12], en utilisant l'algorithme de Lemke.

Théorème 4.2.1.

Supposons que $M \in (R)$, $d = e$, *le* P.C.L(M, q, d) *non dégénéré. Alors, l'algorithme de Lemke appliqué au problème de la complémentarité linéaire* P.C.L(M, q, d) *génère une solution du* P.C.L(M, q) $\forall q \in \mathbb{R}^n$.

Preuve :

Posons : $d = e = (1,\ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$.

Supposons, que l'algorithme de Lemke appliqué au problème de la complémentarité linéaire P.C.L(M, q, d) engendre une direction d'infinitude finale de $C(M, q, d)$ avec $\bar{z}_0 > 0$.

Soit $(\bar{v}, \bar{u}, \bar{u}_0)$ une telle direction d'infinitude alors, d'après la définition 3.1.1.4.2. et le lemme 3.1.1.5. on a simultanément :

i) $U\bar{v} - M\bar{u} - e\,\bar{u}_0 = 0,\ \bar{v} \geq 0,\ \bar{u} \geq 0,\ \bar{u}_0 \geq 0$

ii) $\bar{v} \cdot \bar{u} = 0$

iii) $\bar{u} \neq 0$

Par conséquence, on a :

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\bar{v}\cdot\bar{u} = 0\\ \bar{u}_{I_+(\bar{u})} > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \bar{v}_{I_+(\bar{u})} = 0\\ \qquad\qquad \text{hypothèse i)}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}M_{I_+(\bar{u})}\,\bar{u} + e_{I_+(\bar{u})}\,\bar{u}_0 = \bar{v}_{I_+(\bar{u})} = 0\\ M_{I_0(\bar{u})}\,\bar{u} + e_{I_0(\bar{u})}\,\bar{u}_0 = \bar{v}_{I_0(\bar{u})} \geq 0\\ \text{hypothèse i) et ii)}\end{array}\right\} \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \exists x = \bar{u} \geq 0,\ x \neq 0\,;\ t = \bar{u}_0 : \left.\begin{array}{r}M_i\,x + t = 0 \text{ si } i \in I_+(x)\\ M_i x + t \geq 0 \text{ si } i \in I_0(x)\\ M \in (R)\end{array}\right\} \text{ impossible.}$$

Par conséquent, si $M \in (R)$, l'algorithme de Lemke appliqué au P.C.L(M, q, d) engendre une solution du P.C.L(M, q), et prouve d'une manière constructive l'existence d'une solution de la complémentarité.

Par suite, la classe de matrices (R) est une sous-classe de matrices de la classe Q.

<u>*Corollaire 4.2.2.*</u>

Supposons que la matrice M appartienne à l'une des classes de matrices (E), (P), (C), (D), (M^+) alors, l'algorithme de Lemke appliqué au problème de la complémentarité linéaire P.C.L(M, q, d) génère une solution du P.C.L(M, q) $\forall q \in \mathbb{R}^n$.

Preuve :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si la matrice } M \in (E) \text{ (resp. à } (P), (C), (D) \text{ et } (M^{+}))\\[2ex] \text{proposition 4.1.2.1. (resp. Prop. 4.1.3.2., 4.1.4.1.,}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{4.1.5.1., 5.1.6.}\end{array}\right\} \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l}\ldots \Rightarrow M \in (R)\\[2ex] \text{l'hypothèse + théorème 4.2.1.}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Le P.C.L}(M,\ q) \text{ admet une solution}$$

pour $\forall q \in \mathbb{R}^n$ si la matrice M appartient à l'une des classes de matrices (E), (P), (C), (D) et (M^{+}).

5. CARACTERISATION CONSTRUCTIVE POUR QUE LA CLASSE DE MATRICES L(d), $d \in \mathbb{R}^n$ SOIT DANS Q

Nous allons établir, dans ce paragraphe, une caractérisation constructive pour que la classe de matrices $L(d)$, $d \in \mathbb{R}^n$, $d > 0$ introduite par Garcia [10] soit un sous-ensemble de la classe de matrice Q. La démarche effectuée dans ce paragraphe est analogue à celle utilisée par Cottle et Aganagic [4] pour la classe de matrices (P_0) et Pang [23] pour la classe de matrices (L).

Pour établir le résultat énoncé plus haut, on a besoin de la classe de matrices (R_0) :

Définition 5.1.

$M \in (R_0)$ *si et seulement si le système :*

$$\left|\begin{array}{l} M_i\, x = 0 \quad \text{si } i \in I_+(x)\\[2ex] M_i\, x \geq 0 \quad \text{si } i \in I_0(x)\\[2ex] \quad x \geq 0,\ x \neq 0\end{array}\right.$$

n'admet pas de solution.

Remarque :

- $(R_0) \supset (R)$, en général ces deux classes de matrices sont distinctes ; pour s'en convaincre, on considère
$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$
il est facile de voir que $M \in (R_0)$ et $M \notin (R)$.

On présente maintenant la classe de matrices $L(d)$, $d \in \mathbb{R}^n$, $d > 0$ introduite par Garcia [10].

Définition 5.2.

La matrice $M \in E(d)$, $d \in \mathbb{R}^n$ *si et seulement si pour toute solution* (ω, z) *du* P.C.L(Q, q) *telle que* $(\omega, z) \neq (d, 0)$ *alors*, $\exists x \geq 0$, $x \neq 0$:

$$\text{i) } -M^T x = y \geq 0$$
$$\text{ii) } z \geq x,\ \omega \geq y$$

Remarque :

$$\left.\begin{array}{l} \text{La matrice } M \in E(d),\ d \in \mathbb{R}^n \\ \\ \qquad\qquad \text{déf. 5.2.} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \omega \cdot z \geq \omega \cdot x \geq 0 \\ \omega \cdot z \geq y \cdot z \geq y \cdot x \geq 0 \\ \omega \cdot z = 0 \end{array}\right\} \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \omega \cdot x = y \cdot z = y \cdot x = 0.$$

On définit $L(d) = E(d) \cap E(0)$, $d \in \mathbb{R}^n$, $d > 0$.

Nous allons donner, maintenant une série de lemmes, qui serviront dans la démonstration de notre théorème.

Lemme 5.3.

La matrice $M \in E(d) \cap (R_0)$ *entraîne que la matrice* $M \in (R)$.

Preuve :

Par l'absurde, supposons que la matrice $M \notin (R)$ alors, on aura :

$$\exists z \geq 0,\ z \neq 0\ ;\ t \geq 0 :\ \left|\begin{array}{ll} M_{i.}\, z + t = 0 & i \in I_+(z) \\ M_{i.}\, z + t \geq 0 & i \in I_0(z) \end{array}\right. \qquad (1)$$

On distingue deux cas :

• $t = 0$, entraîne $\exists z \geq 0,\ z \neq 0$: $\left.\left|\begin{array}{ll} M_{i.}\, z = 0 & i \in I_+(z) \\ M_{i.}\, z \geq 0 & i \in I_0(z) \\ \text{la matrice } M \in (R_0) & \end{array}\right.\right\}$ impossible

• $t > 0$, $(\omega, z) = (Mz + te, z)$ est une solution du P.C.L(M, te) :

$$\left.\begin{array}{l} (\omega, z) \neq (te, 0) \\ M \in E(d),\ d = te \\ \text{déf. 5.2.} \end{array}\right\}$$

$\ldots \Rightarrow \exists x \geq 0,\ x \neq 0$: i) $-M^T x = y \geq 0$

ii) $z \geq x,\ \omega \geq y$

d'autre part :

$$\left.\begin{array}{r} \omega \cdot x = x \cdot te + z \cdot M^T x \\ \text{i)} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \omega \cdot x = x \cdot te - zy \\ \text{Remarque 5.2.} \Rightarrow \\ \omega \cdot x = z \cdot y = 0 \end{array}\right\}$$

$$\ldots \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x \cdot te = 0 \\ te > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0 \text{ ce qui est impossible}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{donc, le système (1) n'admet pas de solution} \\ \text{déf. 4.1.1.} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{la matrice } M \in (R).$$

Corollaire 5.4.

La matrice $M \in E(d) \cap (R_0)$ *entraîne que la matrice* $M \in Q$.

Preuve :

$$\left.\begin{array}{r} \text{La matrice } M \in E(d) \cap (R_0) \\ \\ \text{lemme 5.3.} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{la matrice } M \in (R) \\ \\ \text{théorème 4.2.1.} \end{array}\right\} \ldots$$

$\ldots \Rightarrow$ la matrice $M \in Q$.

Lemme 5.5.

La matrice $M \in E(0) \cap Q$ *entraîne que la matrice* $M \in (R_0)$.

Preuve :

Par l'absurde, supposons que le système

$$\left|\begin{array}{ll} M_i\, z = 0 & i \in I_+(z) \\ \\ M_i\, z \geq 0 & i \in I_0(z) \\ \\ z \geq 0,\ z \neq 0 & \end{array}\right. \qquad (1)$$

admet une solution.

Par suite, on a : $(\omega, z) = (Mz, z)$ est une solution du P.C.L(M, 0) :

$$\left.\begin{array}{r} (\omega, z) \neq (0, 0) \\ \\ \text{la matrice } M \in E(0) \\ \\ \text{déf. 5.2.} \end{array}\right\} \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \exists x \geq 0,\ x \neq 0 : \left.\begin{array}{r} \text{i) } -M^T x = y \geq 0 \\ \text{ii) } z \geq x,\ \omega \geq y \end{array}\right\} \Rightarrow \exists x \geq 0,\ x \neq 0 :$$

$$\left.\begin{array}{l} M^T x = -y \leq 0 \\ \text{considérons, } q \in \mathbb{R}^n,\ q \leq 0 : q_i < 0,\ i \in I_+(x) \end{array}\right\} \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \exists x \geq 0,\ x \neq 0 : x \cdot M \leq 0 \text{ et } q \cdot x < 0 \\ \text{lemme 3.1.1.6.} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{le système} : U\omega - Mz = q,\ \omega \geq 0,\ z \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{n'admet pas de solution donc, le P.C.L}(M, q) \text{ n'est pas réalisable} \\ \text{la matrice } M \in Q \end{array}\right\} \text{impossible}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{donc, le système (1) n'admet pas de solution} \\ \text{déf. 5.1.} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{la matrice } M \in (R_0).$$

Nous sommes maintenant, en mesure d'établir la caractérisation suivante :

Théorème 5.6.

Si la matrice $M \in L(d) = E(d) \cap E(0)$ $d \in \mathbb{R}^n$, $d > 0$ *les propositions suivantes sont équivalentes :*

i) la matrice $M \in (R_0)$

ii) la matrice $M \in (R)$

iii) la matrice $M \in (Q)$

Preuve :

i) $\Rightarrow$ ii).

$$\left.\left.\begin{array}{r}\text{Supposons que la matrice } M \in L(d) \cap (R_0)\\ L(d) = E(d) \cap E(0)\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r}\text{la matrice } M \in E(d) \cap (R_0)\\ \text{lemme 5.3.}\end{array}\right\} \ldots$$

$\ldots \Rightarrow$ la matrice $M \in (R)$.

ii) $\Rightarrow$ iii)

$$\left.\begin{array}{r}\text{Supposons que la matrice } M \in L(d) \cap (R) \Rightarrow \text{la matrice } M \in (R)\\ \text{corollaire 5.4.}\end{array}\right\} \ldots$$

$\ldots \Rightarrow$ la matrice $M \in Q$.

iii) $\Rightarrow$ i)

$$\left.\left.\begin{array}{r}\text{Supposons que la matrice } M \in L(d) \cap Q\\ L(d) = E(d) \cap E(0)\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r}\text{la matrice } M \in E(0) \cap Q\\ \text{lemme 5.5.}\end{array}\right\} \ldots$$

$\ldots \Rightarrow$ la matrice $M \in (R_0)$.

6. SUR LA CLASSE DE MATRICES COLONNES ADEQUATES ET COMPLEMENTARITE LINEAIRE

Nous allons étudier, dans ce paragraphe, le problème de la complémentarité linéaire, avec la classe de matrices colonnes adéquates. Après avoir introduit la classe de matrices colonnes adéquates, nous donnons par la suite, une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution du problème de la complémentarité linéaire.

Ce travail a été motivé par le fait qu'une matrice M adéquate (Ingleton [11]) et régulière et une P-matrice (Cottle [ ]), et que cette dernière classe de matrices est caractérisée par la propriété que le P.C.L(M, q) admet une solution unique $\forall q \in \mathbb{R}^n$ (Murty [23]).

6.1. Notations et Définitions (Fielder et Ptak [8])

6.1.1. Classe de matrices (P_0)

Définition 6.1.1.1.

La matrice $M \in (P_0)$ *(ou la matrice* M *est une* P_0*-matrice) si et seulement si* $\forall I \subset \{1,\dots, n\}$ $\det M_I^I \geq 0$.

Remarque : Si la matrice $M \in (P_0)$ alors, la matrice $M^T \in (P_0)$, car $\det(M_I^I)^T = \det M_I^I$, $\forall I$.

Proposition 6.1.1.2.

La matrice $M \in (P_0)$ *si et seulement si* $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ $\exists i \in I(x)$ $x_i(Mx)_i \geq 0$.

Preuve :

Voir Annexe : A-4.4.

6.1.2. Classes de matrices adéquates : (A) (Ingleton [11], Cottle [ ])

Définition 6.1.2.1.

La matrice $M \in C(A)$ *si et seulement si :*

i) La matrice $M \in (P_0)$

ii) Pour tout $I \subset \{1,\dots, n\}$ *vérifiant* $\det M_I^I = 0$

alors, les colonnes M^I *sont linéairement dépendantes.*

Nous allons, maintenant introduire une classe de matrices avec des conditions plus faibles que celles données dans la définition 6.1.2.1. précédente, qu'on appelle classe de matrices colonnes adéquates.

6.1.3. Classes de matrices colonnes acéquates : C(A)

Définition 6.1.3.1.

La matrice $M \in C(A)$ *si et seulement si*

i) la matrice $M \in (P_0)$

ii) Pour tout $I \subset \{1, \ldots, n\}$ *vérifiant* $\det M_I^I = 0$

alors, les colonnes M^I *sont linéairement dépendantes.*

Propriété 6.1.3.2.

$$\left.\begin{array}{l} \textit{La matrice } M \in C(A) \longrightarrow \\ \textit{Si la matrice } \Lambda = (e_i^j)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \textit{ avec } e_i^i = \pm 1 \quad i = 1, \ldots, n, \; e_i^j = 0 \quad i \neq j \end{array}\right\} \ldots$$

... *la matrice* $\Lambda \cdot M \Lambda \in C(A)$.

Preuve :

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \text{i) } \forall I \subset \{1, \ldots, n\} \; \det(\Lambda \cdot M\Lambda)_I^I = \det M_I^I \\ \qquad \text{la matrice } M \in C(A) \end{array}\right\} \Rightarrow \det(\Lambda \cdot M\Lambda)_I^I \geq 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{déf. } 6.1.1.1. \end{array}\right\} \ldots$$

$\ldots \Rightarrow$ la matrice $\Lambda \cdot M\Lambda \in (P_0)$.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} \text{ii) Soit } I \subset \{1, \ldots, n\} \text{ vérifiant } \det(\Lambda \cdot M\Lambda)_I^I = 0 \\ (1) \end{array}\right\} \Rightarrow \det M_I^I = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{la matrice } M \in C(A) \end{array}\right\} \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \exists x_I \neq 0 : M^I x_I = 0 \Rightarrow (\Lambda \cdot M \Lambda)^I \Lambda_I^I x_I = (\Lambda \cdot M^I \Lambda_I^I) \Lambda_I^I x_I = \Lambda \cdot M^I (\Lambda_I^I \Lambda_I^I) x_I$$

$$= \Lambda \cdot M^I x_I = \Lambda(M^I x_I) = \Lambda \cdot 0 = 0.$$

donc, $\exists y_I = \Lambda_I^I \, x_I \neq 0 : (\Lambda \cdot M \Lambda)^I \, y_I = 0$

par suite, les colonnes $(\Lambda \cdot M \Lambda)^I$ sont linéairement dépendantes

donc, la matrice $\Lambda \cdot M \Lambda \in C(A)$.

6.2. Une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution du P.C.L(M, q)

Nous allons donner 3 lemmes, qui contiennent certaines propriétés des classes de matrices (P_0) et de $C(A)$ (classe de matrices colonnes adéquates). Ils serviront dans la démonstration de notre théorème d'existence des solutions du problème de la complémentarité linéaire P.C.L(M, q) avec la classe de matrices colonnes adéquates qu'on vient d'introduire.

Lemme 6.2.1. *(cf. Eaves [7])*

Soit M *une* P_0*-matrice alors,* $\exists x \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$, $x \neq 0$: $Mx \geq 0$.

Preuve :

$$\left.\begin{array}{l} \text{Par l'absurde, supposons que le système : } Mx \geq 0,\ x \geq 0,\ x \neq 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{n'admet pas de solution} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{lemme de Farkas (cf. lemme 3.1.1.6.)} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \ldots \Rightarrow \exists u,\ u \geq 0,\ u \neq 0 : u \cdot M < 0 \\ \qquad\qquad \text{Prop. 6.1.1.} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{la matrice } M \notin (P_0) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{hypothèse} \Rightarrow \text{la matrice } M \in (P_0) \end{array}\right\} \text{impossil}$$

Nous allons, utiliser le lemme précédent pour démontrer, le lemme suivant :

Lemme 6.2.2.

Soit M *une* P_0*-matrice. Supposons* : $\exists x > 0 : Mx = 0$

Alors, $\exists y \geq 0$, $y \neq 0$: $y \cdot M = 0$.

Preuve :

$$\left.\begin{array}{l}\text{La matrice } M \in (P_0) \Rightarrow M^T \in (P_0) \\ \qquad\qquad \text{lemme 6.2.1.}\end{array}\right\} \Rightarrow \exists y \geq 0,\ y \neq 0 : M^T y = y \cdot M \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{en fait, } y \cdot M = 0, \text{ car sinon,} \\ \exists i : (y \cdot M)_i > 0 \\ \qquad\qquad \text{hypothèse}\end{array}\right\} \ldots$$

$\ldots \Rightarrow \exists i : 0 < (y\ M)_i\ x_i = y_i\ (Mx)_i = 0$, ce qui est impossible

donc, $\exists y \in \mathbb{R}^n$, $y \geq 0$, $y \neq 0 : y \cdot M = 0$.

La démonstration du lemme suivant utilise la même démarche que celle utilisée dans Eaves [7].

Lemme 6.2.3.

La matrice M *est une matrice colonne adéquate si et seulement si* $\forall y \in \mathbb{R}^n$ *vérifiant* $y_i\ (My)_i \leq 0$ *pour* $i = 1, \ldots, n$ *alors*, $My = 0$.

Preuve :

i) L'implication $\Rightarrow$

• 1^er^ cas, supposons que la matrice $M \in C(A)$ et que $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $y \geq 0$ $y_i\ (My)_i \leq 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Considérons maintenant, $y \in \mathbb{R}^n$, $y \geq 0 : y_i\ (My)_i \leq 0$, $i = 1, \ldots, n$ alors, y vérifie : $y \in \mathbb{R}^n$, $y \geq 0$ $\ M \cdot y \leq 0$.

Ou encore, le système $My = q$, $y \geq 0$ $(q \leq 0)$ admet une solution, par suite, il admet une solution de base x vérifiant $Mx = My$ et $x_i(M \cdot x)_i \leq 0$ pour $i = 1, \ldots, n$ (1)

$$\left.\begin{array}{l}\text{En posant } I = \{i \mid x_i > 0\} \\ \text{déf. d'une solution de base}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}\text{les colonnes } M^I \text{ sont indépendantes} \\ \text{la matrice } M \in C(A)\end{array}\right\} \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}\det M_I^I > 0 \\ M_I^I \in (P_0)\end{array}\right\} \Rightarrow M_I^I \in (P) \\ (1) \\ \text{Prop. } 4.1.3.1.\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ (1)\end{array}\right\} \Rightarrow \quad My = Mx = 0$$

• $2^{\text{ème}}$ cas, supposons que la matrice $M \in C(A)$ et que $\forall y \in \mathbb{R}^n$ $y_i\ (My)_i \leq 0,\ i = 1, \ldots, n$.

Considérons, la matrice diagonale $\wedge = (e_i^j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$: $\left|\begin{array}{l} e_i^i = 1, \text{ si } y_i \geq 0 \\ e_i^i = -1, \text{ si sinon}\end{array}\right.$

$$\left.\begin{array}{l}\text{alors, } \wedge y \geq 0,\ y_i\ (My)_i = (y \wedge \wedge)_i\ (M \wedge y)_i = (y \wedge)_i \left[(\wedge M \wedge) \wedge y\right]_i \leq 0,\ \forall i \\ \left.\begin{array}{r}\text{la matrice } M \in C(A) \\ \text{Prop. } 6.1.3.1.\end{array}\right\} \Rightarrow \wedge M \wedge \in C(A) \xrightarrow{\hspace{4em}} \\ \hspace{12em} 1^{\text{ère}} \text{ partie de la démonstration}\end{array}\right\} \ldots$$

$\ldots \Rightarrow (\wedge M \wedge) \wedge y = 0 \Rightarrow My = 0$.

ii) l'implication $\Leftarrow$

Supposons que $\forall y \in \mathbb{R}^n$ $y_i\ (My)_i \leq 0,\ i = 1, \ldots, n$ alors, $My = 0$.

$$\left.\begin{array}{r}\bullet \text{ Si la matrice } M \notin (P_0) \\ \text{Prop. } 6.1.1.1.\end{array}\right\} \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R}^n,\ z \neq 0 :$$

$$\left.\begin{array}{r} z_i\ (Mz)_i < 0,\ i = 1, \ldots, n \quad (2) \\ \text{hypothèse ii)}\end{array}\right\} \ldots$$

$$\left.\begin{array}{r} \ldots \Rightarrow Mz = 0 \Rightarrow z \cdot Mz = 0 \\ \\ (2) \end{array}\right\} \text{ impossible}$$

par suite $M \in (M_0)$.

• Soit $I \subset \{1,\ldots, n\}$: $\det M_I^I = 0 \Rightarrow \exists x_I \neq 0 : M_I^I\, x_I = 0 \quad (3)$

en posant $y = (x_I, 0) \neq 0$ alors, on aura : $y \cdot My = x_I \cdot M_I^I\, x_I$ ...

$\ldots \Rightarrow y \cdot My = 0$, par conséquence $y_i\, (My)_i = 0$, $i = 1,\ldots, n$, car sinon

$$\left.\begin{array}{r} \exists i : y_i\, (My)_i > 0 \Rightarrow 0 < y_i\, (My)_i = x_i\, (M^I\, x_I)_i = x_i\, (M_i^I\, x_I) \\ (3) \end{array}\right\} \ldots$$

$\ldots \Rightarrow 0 < y_i\, (My)_i = 0$, ce qui est impossible.

$$\left.\begin{array}{r} \text{donc, on a : } y_i\, (My)_i = 0,\ i = 1,\ldots, n \\ \text{hypothèse ii)} \end{array}\right\} \Rightarrow My = 0 \text{ ce qui entraîne,}$$

$\exists x_I \neq 0 : M^I\, x_I = M \begin{pmatrix} x_I \\ 0 \end{pmatrix} = My = 0$ donc, les colonnes M^I sont linéairement dépendantes.

Nous rappelons également, le théorème de Cottle et Aganagic [4] qu'on va utiliser dans la suite.

Théorème 6.2.4. *(Cottle et Aganagic [4])*

Supposons que M *est une* P_0*-matrice ; les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) La matrice M *appartient à la classe de matrices* (R_0).
ii) La matrice M *appartient à la classe de matrices* (R).
iii) La matrice M *appartient à la classe de matrices* (Q).

Le théorème suivant, donne une condition nécessaire et suffisante, pour que le problème de la complémentarité linéaire P.C.L(M, q) admet une solution $\forall q \in \mathbb{R}^n$, pour la matrice M appartenant à la classe de matrices colonnes adéquates : C(A).

<u>*Théorème 6.2.5.*</u>

Soit M *une matrice colonne adéquate. Alors, la matrice* M *appartient à la classe* Q *si et seulement si* $\nexists I \subset \{1,\ldots, n\}$ *tel que le système :*

$$M_I^I \, x_I = 0 \qquad x_I > 0$$

admet une solution.

<u>Preuve</u> :

i) l'implication $\Longrightarrow$

Supposons, $\exists I \subset \{1,\ldots, n\}$ supposons que I est le plus petit tel que

$$\left.\begin{array}{l} \text{le système : } M_I^I \, x_I = 0 \quad x_I > 0, \text{ admet une solution} \longrightarrow \\ \qquad \left.\begin{array}{r} \text{la matrice } M \in C(A) \\ \text{déf. 6.3.1.} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{la matrice } M \in (P_0) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{lemme 6.2.2.} \end{array}\right\} \ldots$$

$\ldots \Rightarrow \exists y_I \geq 0,\ y_I \neq 0 : y_I \, M^I = 0.$

$$\left.\begin{array}{l} \text{En posant : } J = \{i \in I : y_i > 0\} \text{ on aura, } y_J \, M_J^J = 0 \ \ y_J > 0 \longrightarrow \\ \qquad\qquad \left.\begin{array}{r} \text{la matrice } M \in C(A) \\ \text{déf. 6.1.3.} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{la matrice } M \in (P_0) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{lemme 6.2.2.} \end{array}\right\} \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} \ldots \Rightarrow \exists u_J \geq 0,\ u_J \neq 0 : M^J \, u_J = 0 \longrightarrow \\ \qquad J \subset I, \text{ et } I \text{ étant le plus petit de tels sous-ensembles.} \end{array}\right\} \ldots$$

$$\left.\begin{array}{r} \ldots \Rightarrow J = I \text{ et } \exists u_I \geq 0,\ u_I \neq 0 : M_I^I\, u_I = 0 \\ \text{la matrice } M \in C(A) \\ \text{lemme 6.2.3.} \end{array}\right\} \Rightarrow M^I\, u_I = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{par suite en posant } v = (u_I,\ 0) \text{ on aura alors, } \exists v \geq 0,\ v \neq 0 : Mv = 0 \\ \text{considérons maintenant } q \in \mathbb{R}^n,\ q \leq 0 : q_i < 0 \text{ pour } i \in I_+(v) \longrightarrow \end{array}\right\} \ldots$$

$$\left.\begin{array}{r} \ldots \Rightarrow \exists v \geq 0,\ v \neq 0 : Mv = 0 \text{ et } q \cdot v < 0 \\ \text{lemme 3.1.1.6.} \end{array}\right\} \ldots$$

... $\Rightarrow$ le système : $U\omega - Mz = q,\ \omega \geq 0,\ z \geq 0$ n'admet pas de solution,

$$\left.\begin{array}{r} \text{c'est-à-dire que le P.C.L}(M,\ q) \text{ n'est pas réalisable} \\ \text{or la matrice } M \in (Q) \end{array}\right\} \text{Impossible}$$

donc, $\nexists I \subset \{1;\ldots,\ n\}$ tel que le système :

$$M_I^I\, x_I = 0,\ x_I > 0$$

admet une solution.

ii) l'implication $\Leftarrow$

Supposons que :

$\nexists I \subset \{1,\ldots,\ n\}$: le système $M_I^I\, x_I = 0 \quad x_I > 0$ admet une solution, entraîne que la matrice $M \in (R_0)$

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{l} \text{la matrice } M \in C(A) \\ \text{déf. 6.1.3.} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{la matrice } M \in (P_0) \\ \text{théorème 6.2.4.} \end{array}\right\} \ldots$$

... $\Rightarrow$ que la matrice $M \in Q$.

Si on applique l'algorithme de Lemke au P.C.L(M, q, d) :

$$\left|\begin{array}{l} U\omega - Mz - dz_0 = q \\ \omega \geq 0,\ z \geq 0,\ z_0 \geq 0 \\ \omega \cdot z = 0 \end{array}\right.$$

où la matrice M est une matrice colonne adéquate alors, soit qu'on obtient une solution du problème de la complémentarité linéaire P.C.L(M, q), soit un sous-ensemble $I \subset \{1, \ldots, n\}$ tel que le système

$$M_I^I\, x_I = 0 \qquad x_I > 0$$

admet une solution.

ANNEXE

Nous présentons, dans cette annexe, les différentes classes de matrices, introduites dans la littérature, pour résoudre le problème de la complémentarité linéaire avec l'algorithme de Lemke. Nous résumons certaines de leurs propriétés et leurs relations d'inclusion. Tout cela est bien connu, néanmoins certaines démonstrations simples sont données.

Nous terminons, cette annexe par un tableau qui résume toutes ces inclusions. Les différentes classes de matrices, qu'on présente sont d'origines diverses (cf. [3], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [14], [16], [19], [21], [22], [25],...).

Soit M matrice carrée indicée par (L L), avec $|L| = n$.

Définition A.1.

On appelle principal sous-matrice de M, *qu'on note par* M_I^I, $I \subset \{1,\ldots, n\}$, *la sous-matrice de* M *indicée en ligne et en colonne par* I

det M_I^I : *s'appelle principal mineur.*

A.2. Classes de matrices (S) et (S_0)

Cette classe de matrices est extensivement étudiée par Fielder et Ptak [9].

Définition A.2.1.

La matrice $M \in (S)$, *si et seulement si,* $\exists x \in \mathbb{R}^n$, $x > 0 : Mx > 0$.

Propriété A.2.2.

i) $M \in Q \Rightarrow M \in (S)$

ii) $M \in (S) \Rightarrow$ *le* P.C.L(M, q) *est réalisable.*

Proposition A.2.3.

$M \in (S)$, *si et seulement si*, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$, $x \neq 0$ $\exists i : (M^T x)_i > 0$.

Preuve :

i) implication $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} M \in (S) \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^n,\ x > 0 : Mx > 0 \\ \quad \forall u \in \mathbb{R}^n,\ u \geq 0,\ u \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x \cdot M^T u > 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists i : (M^T u)_i > 0$$

ii) implication $\Leftarrow$

Supposons que $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $u \geq 0$, $u \neq 0 \Rightarrow \exists i : (M^T u)_i > 0$.

$$\left.\begin{array}{r} \text{C'est-à-dire, que le système : } M^T u \leq 0,\ u \geq 0,\ u \neq 0 \text{ n'admet pas de solution} \\ \text{théorème alternatif de Motzkin [ ]} \end{array}\right\} .$$

$$\left.\begin{array}{r} \ldots \Rightarrow \text{le système } Mx > 0,\ x > 0 \text{ admet une solution} \\ \text{déf. 1.2.1.} \end{array}\right\} \Rightarrow M \in (S).$$

Définition A.2.4.

$M \in (S_0)$, *si et seulement si*, $\exists x \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$, $x \neq 0 : Mx \geq 0$.

Proposition A.2.5.

$M \in (S_0)$, *si et seulement si*, $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $u \geq 0$ $\exists i : (M^T u)_i \geq 0$.

Preuve :

Analogue à celle de la proposition A.2.3.

Remarque :

• $(S) \subset (S_0)$

Propriété A.2.6.

$$M^T \in (S) \Longleftrightarrow -M \in (S_0)$$

Preuve :

$\left.\begin{array}{l} M^T \in (S) \\ \\ \text{Proposition A.2.3.} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}^n,\ u \geq 0,\ u \neq 0\ \ \exists i : (-Mu)_i < 0$

$\Longleftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}^n,\ u \geq 0,\ u \neq 0\ \ -Mu \not\geq 0$

$\Longleftrightarrow$ $\left.\begin{array}{l}\text{le système } -Mu \geq 0,\ u \geq 0,\ u \neq 0 \text{ n'admet pas de} \\ \text{solution} \\ \text{déf. A.2.4.}\end{array}\right\}$ ...

... $\Longrightarrow -M \notin (S_0)$.

A.3. Classes de matrices (S) et (S_0)

Définition A.3.1. (*Lemke* [16])

$M \in (E)$, *si et seulement si*, $\forall I \subset \{1, \ldots, n\}$, $(M_I^I)^T \in (S)$.

Proposition A.3.2.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) $M \in (E)$

ii) le système $M_I^I\, x_I \leq 0,\ x_I \geq 0,\ x_I \neq 0$ *n'admet pas de solution*

$\forall I \subset \{1, \ldots, n\}$ (*cf. Cottle et Dantzig* [3]).

iii) $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0,\ x \neq 0 \Longrightarrow \exists i \in I_+(x) : (Mx)_i > 0$ (*cf. Eaves* [7], *Karamardian* [12]).

Preuve :

i) $\Rightarrow$ ii)

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} M \in (E) \\ \text{déf. A.2.3.} \end{array}\right\} \Rightarrow (M_I^I)^T \in (S),\ \forall I \subset \{1,\ldots, n\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{propriété A.2.6.} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists M_I^I \notin (S_0),\ \forall I \subset \{1,\ldots, n\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{déf. A.2.4.} \end{array}\right\} \ldots$$

... $\Rightarrow$ le système $M_I^I\, x_I \leq 0$, $x_I \geq 0$, $x_I \neq 0$ n'admet pas de solution $\forall I \subset \{1,\ldots, n\}$.

ii) $\Rightarrow$ iii)

Par l'absurde, supposons, $\exists x \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$, $x \neq 0$, $\forall i \in I_+(x) \Rightarrow (Mx)_i \leq 0$. Alors, on a : $\exists x \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$, $x \neq 0$:

$$M_{I_+(x)}\, x = M_{I_+(x)}^{I_+(x)}\, x_{I_+(x)} \leq 0.$$

ou encore :

$$\exists x_{I_+(x)} \in \mathbb{R}^{I_+(x)} : M_{I_+(x)}^{I_+(x)}\, x_{I_+(x)} \leq 0 \text{ ce qui contredit ii)}$$

iii) $\Rightarrow$ ii)

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \text{par l'absurde, supposons que } M \notin (E) \\ \qquad\qquad\qquad \text{déf. A.3.1.} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists I \subset \{1,\ldots, n\} : (M_I^I)^T \notin (S) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{Proposition A.2.6.} \end{array}\right\} \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} \ldots \Rightarrow \exists I \subset \{1,\ldots, n\} : -M_I^I \in (S_0) \\ \qquad\qquad\qquad \text{déf. A.2.4.} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists I \subset \{1,\ldots, n\} : M_I^I\, x_I \leq 0,\ x_I \geq 0,\ x_I \neq$$

admet une solution.

En posant $x = (x_I, 0)$, $x \geq 0$, $x \neq 0$: $\forall i \in I_+(x)$ $(Mx)_i = (M^I x_I)_i \leq 0$

ce qui contredit l'hypothèse.

Définition A.3.3. *(Classe de matrices semi-monotones)*

$M \in (E_0)$, *si et seulement si*, $(M_I^I)^T \in (S_0)$, $\forall I \subset \{1, \ldots, n\}$

Remarque :

- $(E) \subset (E_0)$

Proposition A.3.4.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) $M \in (E_0)$

ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$, $x \neq 0 \Rightarrow \exists i \in I_+(x)$: $(Mx)_i \geq 0$
(*cf. Eaves* [7], *Karamardian* [12]).

Preuve :

Analogue à celle de la proposition A.2.6.

Proposition A.3.5.

i) $(E) \subset (S)^T$; $(E_0) \subset (S_0)^T$

ii) $(E) \subset (S)$

Preuve :

i) Evident, on a le résultat à partir des définitions A.2.1., A.3.1., A.2.4. et A.3.3..

ii) $\left.\begin{array}{l} \text{Soit } M \in (E) \\ \\ \text{Corollaire 4.2.2.} \end{array}\right\} \Rightarrow M \in Q \Rightarrow$ le P.C.L(M, -e) admet une solution

$$\left.\begin{array}{r} \ldots \Rightarrow \exists x \geq 0 : Mx = U\omega + e > 0 \\ \\ \text{déf. A.2.1.} \end{array}\right\} \Rightarrow M \in (S).$$

A.4. Classe de matrices (P) et (P_0)

Classe de matrices extensivement étudiée par Fielder et Ptak [8]

Définition A.4.1.

$M \in (P)$, *si et seulement si*, $\det M_I^I > 0$, $\forall I \subset \{1, \ldots, n\}$.

Proposition A.4.2.

$M \in (P)$, *si et seulement si*, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ $\exists i \in I(x) : x_i (Mx)_i > 0$

Preuve :

i) implication $\Leftarrow$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Par l'absurde, supposons que } M \notin (P) \Rightarrow \exists I \subset \{1, \ldots, n\} : \det M_I^I \leq 0 \\ \det M_I^I = \prod_{i=1}^{r} \lambda_i,\ \lambda_i \text{ valeur propre de } M_I^I \\ \lambda_i \text{ complexes conjuguées 2 à 2} \Rightarrow \lambda_i \cdot \bar{\lambda}_i > 0 \end{array}\right\} \ldots$$

$\ldots \Rightarrow \exists \lambda$ valeur propre réelle : $\lambda \leq 0$ et x_I vecteur propre associé.

En posant, $x = (x_I, 0) \in \mathbb{R}^n$, on a : $x \cdot Mw = x_I \cdot M_I^I x_I = \lambda ||x_I||^2 \leq 0$

$\ldots \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0 : \forall i \in I(x)$, on a : $x_i (Mx)_i = x_i (M^I x_I)_i \leq 0$.

Ce qui contredit l'hypothèse.

ii) implication $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Par l'absurde, supposons } \exists x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0 : \forall i \in I(x) \Rightarrow x_i (Mx)_i \leq 0 \\ \text{en posant } y = Mx \end{array}\right\} \ldots$$

$\ldots \Rightarrow \forall i \in I(x) \Rightarrow x_i\, y_i \leq 0 \Rightarrow \exists U \geq 0$ diagonale : $y_{I(x)} = -Ux_{I(x)}$

$$\ldots \Rightarrow \left.\begin{array}{r} M_{I(x)}^{I(x)}\, x_{I(x)} = y_{I(x)} = -Ux_{I(x)} \Rightarrow (M_{I(x)}^{I(x)} + U)\, x_{I(x)} = 0 \\ x_I(x) \neq 0 \end{array}\right\} \ldots$$

$\ldots \Rightarrow M_{I(x)}^{I(x)} + U$ est une matrice singulière.

Or, $M \in (P) \Rightarrow \forall I \subset \{1,\ldots, n\}$, $M_I^I \in (P)$, sans perte de généralité. Supposons que :

$$U = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix},\ \varepsilon > 0,\ M + U = \begin{bmatrix} m_{11} + \varepsilon, & m_{12}, & \cdots, & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ m_{n1}, & \cdots & \cdots ; & m_{nn} \end{bmatrix}$$

en développant le déterminant de $M + U$ suivant la 1[ère] ligne, on obtient :

$$\left.\begin{array}{r} \det(M+U) = \det M + \varepsilon \det M_J^J \ ;\ J = \{2,\ldots, n\} \\ M \in (P)\ ;\ \varepsilon > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \det(M+U) > 0.$$

Par conséquent, $\det(M_{I(x)}^{I(x)} + U) > 0$, ce qui est impossible.

Définition A.4.3.

$M \in (P_0)$, *si et seulement si*, $\det M_I^I \geq 0$, $\forall I \subset \{1,\ldots, n\}$.

Proposition A.4.4.

$M \in (P_0)$, *si et seulement si*, $\forall x \in \mathbb{R}^n\ x \neq 0\ \ \exists i \in I(x) : x_i\, (Mx)_i \geq 0$.

Preuve :

Analogue à celle de la proposition A.4.2.

Remarque :

i) $(P) \subset (P_0)$

ii) $M \in (P) \Rightarrow M^T \in (P)$ (car $\det(M_I^I)^T = \det M_I^I$, $\forall I \subset \{1,\ldots, n\}$).

Proposition A.4.5.

i) $(P) \subset (E)$

ii) $(P_0) \subset (E_0)$

Preuve :

$$\left.\begin{array}{l} \text{i) } M \in (P) \\ \\ \quad \text{Prop. A.4.2.} \end{array}\right\} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0 \quad \exists i \in I(x) : x_i (Mx)_i > 0$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{en particulier, } \forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0,\ x \neq 0 \quad \exists i \in I_+(x) : \\ x_i\ (Mx)_i > 0 \\ \text{Prop. A.3.2.} \end{array}\right\} \ldots$$

$\ldots \Rightarrow M \in (E)$

ii) Analogue à celle de i).

A.5. Classe de matrices copositives C, C_0 (Lemke [16])

Définition A.5.1. *(matrices strictement copositives)*

$M \in (C)$, *si et seulement si,* $x \cdot Mx > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$, $x \neq 0$.

Définition A.5.2. *(matrices copositives)*

$M \in (C_0)$, *si et seulement si,* $x \cdot Mx \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$.

Remarque :

• $(C) \subset (C_0)$

Proposition A.5.3.

i) (C) $\subset$ (E)

ii) $(C_0) \subset (E_0)$

Preuve :

i) $M \in (C) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0,\ x \neq 0,\ x \cdot Mx > 0$

$$\ldots \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_{I_+(x)}(Mx)_{I_+(x)} = x \cdot Mx > 0 \\ x_{I_+(x)} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists i \in I_+(x) : (Mx)_i > 0 \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0,\ x \neq 0 \\ M \in (C) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists i \in I_+(x) : (Mx)_i > 0 \\ \text{Prop. A.3.2.} \end{array}\right\} \Rightarrow M \in (E).$$

ii) Analogue à celle de i).

A.6. Classe de matrices définies positives (D) et (D_0)

Définition A.6.1.

$M \in (D)$, *si et seulement si*, $x \cdot Mx > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0$.

Définition A.6.2.

$M \in (D_0)$, *si et seulement si*, $x \cdot Mx \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Remarque :

i) $(D) \subset (D_0)$

ii) $(D) \subset (C)$

iii) $(D_0) \subset (C_0)$

Proposition A.6.3.

i) $(D) \subset (P)$

ii) $(D_0) \subset (P_0)$

Preuve :

Analogue à celle de la Proposition 4.2. i).

A.7. Classe de matrices copositives plus : (C^+)

Définition A.7.1.

$$M \in (C^+), \text{ si et seulement si, } \left| \begin{array}{l} \bullet\ M \in (C_0) \\ \\ \bullet\ x \cdot Mx = 0,\ \forall x \geq 0 \Rightarrow (M + M^T)x = 0 \end{array} \right.$$

Proposition A.7.2.

i) $(D_0) \subset (C^+)$

ii) $(C) \subset (C^+)$

Preuve :

$$\text{i) Soit } \left.\begin{array}{r} x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0 \\ \\ M \in (D_0) \end{array}\right\} \Rightarrow x \cdot Mx \geq 0 \Rightarrow M \in (C_0)$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{si, } x \cdot Mx = 0 \\ \\ M \in (D_0) \end{array}\right\} \Rightarrow y \cdot My \geq x \cdot Mx,\ \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$\left.\begin{array}{r} \ldots \Rightarrow x \text{ est un minimum de } f(y) = y \cdot My \text{ sur } \mathbb{R}^n \\ \\ \text{conditions d'optimalité} \end{array}\right\} \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \frac{1}{2}\nabla(x \cdot Mx) = 0 \Rightarrow (M+M^T)x = 0, \text{ donc } M \in (C^+).$$

$$\text{ii) Soit } \left.\begin{array}{r} x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0 \\ M \in (C) \end{array}\right\} \Rightarrow x \cdot Mx > 0 \Rightarrow M \in (C_0)$$

$$\left.\begin{array}{r} \bullet \text{ Si, } x \cdot Mx = 0 \\ M \in (C) \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (M+M^T)x = 0,$$

donc $M \in (C^+)$.

A.8. Classe de matrices à diagonale dominante et à éléments diagonaux positifs

Définition A.8.1. (Matrice à diagonale dominante et à éléments diagonaux positifs (dd^+))

$M \in (dd^+)$, *si et seulement si,* $m_{ii} \geq \sum_{j \neq i} |m_{ij}|$, $i = 1, \ldots, n$

Proposition A.8.2.

$(dd^+) \subset (P_0)$.

Preuve :

(cf. J.J. Moré [22]).

A.9. Classe de matrices adéquates (A) (Ingleton [11])

Définition A.9.1.

$M \in (A)$, *si et seulement si, i)* $M \in (P_0)$

ii) Si, $\forall I \subset \{1, \ldots, n\}$, $\det M_I^I = 0$, *alors, les lignes* M_I *et les colonnes* M^I *sont linéairement dépendantes.*

Définition A.9.2. *(Matrices lignes adéquates* $\ell(A)$*) (Eaves [7])*

$M \in \ell(A)$, *ssi,* *i)* $M \in (P_0)$

ii) Si, $\forall I \subset \{1,\dots, n\}$, $\det M_I^I = 0$, *alors les lignes* M_I *sont linéairement dépendantes.*

Définition A.9.3. *(Matrices colonnes adéquates* $C(A)$*)*

$M \in C(A)$, *ssi,* *i)* $M \in (P_0)$

ii) Si, $\forall I \subset \{1,\dots, n\}$, $\det M_I^I = 0$, *alors les colonnes sont linéairement dépendantes.*

Proposition A.9.4.

$M \in C(A)$, *ssi,* $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $y_i(My)_i \le 0$, $i = 1,\dots, n \Longrightarrow My = 0$.

Preuve :

(cf. Lemme 6.3.).

Remarque :

i) $(P) \subset C(A)$; $((P) \subset (A))$

L'inclusion est stricte, comme le montre l'exemple suivant :

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} ; \ M \in C(A) \text{ et } M \notin (P).$$

Proposition A.9.5.

$(dd^+) \subset C(A)$.

Preuve :

(cf. Moré [22]).

A.10. Classe de matrices (L) (Eaves [7])

Définition A.10.1. (*Classe de matrices* (E_1))

$M \in (E_1)$, *si et seulement si*, $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $y \geq 0$, $y \neq 0$: $M^T y \geq 0$ *et* $y \cdot My = 0$.

$\ldots \Rightarrow \exists \Lambda \geq 0$, $\Omega \geq 0$ *diagonales* : $\Omega y \neq 0$ *et* $(\Lambda M + M^T \Omega)y = 0$.

Définition A.10.2.

$(L) = (E_0) \cap (E_1)$.

Propriété A.10.3.

$(C^+) \subset (L)$.

Preuve :

(cf. Eaves [7]).

A.11. Classe de matrices (L(d)) (Garcia [10])

Définition A.11.1. (*Classe de matrices* (E(d))

$M \in (E(d))$, *ssi*, (ω, z) *solution du* P.C.L(M, d) : $(\omega, z) \neq (d, 0)$

$\Rightarrow \exists x \geq 0$, $x \neq 0$: $-M^T x = y \geq 0$ *et* $(\omega, z) \geq (x, y)$.

Définition A.11.2.

$L(d) = E(d) \cap E(0)$.

Propriété A.11.3.

$$(L) = \bigcap_{d>0} L(d)$$

Preuve :

(cf. Garcia [10]).

A.12. Classe de matrices (Z) (Fielder et Ptak ([8], [9])

Définition A.12.1.

$M \in (Z)$, *si et seulement si*, $m_{ij} \leq 0$, $\forall i \neq j$.

Nous donnons un résumé des définition des classes de matrices, puis un tableau résumant les relations d'inclusions.

$(S_0) = \{M : \exists x \geq 0,\ x \neq 0 : Mx \geq 0\}$

$(S) = \{M : \exists x > 0 : Mx > 0\}$

$(E_0) = \{M : \forall I \subset \{1,\dots, n\},\ M_I^I \in (S_0)^T\}$

$(E) = \{M : \forall I \subset \{1,\dots, n\},\ M_I^I \in (S)^T\}$

$(P_0) = \{M : \forall I \subset \{1,\dots, n\},\ \det M_I^I\ M_I^I \geq 0\}$

$(P) = \{M : \forall I \subset \{1,\dots, n\},\ \det M_I^I > 0\}$

$(D_0) = \{M : \forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \cdot Mx \geq 0\}$

$(D) = \{M : M \in (D_0) \text{ et } x \cdot Mx = 0 \Longleftrightarrow x = 0\}$

$(C_0) = \{M : \forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0,\ x \cdot Mx \geq 0\}$

$(C) = \{M : M \in (C_0) \text{ et } x \geq 0,\ x \neq 0 \Longrightarrow x \cdot Mx > 0\}$

$(C^+) = \{M : M \in (C_0) \text{ et } [x \geq 0,\ x \cdot Mx = 0] \Longrightarrow [(M + M^T)x = 0]\}$

$(dd) = \{M : |m_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |m_{ij}|,\ i = 1,\dots, n\}$

$(dd^+) = \{M : M \in (dd) \text{ et } m_{ii} > 0,\ i = 1,\dots, n\}$

$(A) = \{M : M \in (P_0) \text{ et } \forall I \subset \{1,\dots, n\},\ \det M_I^I = 0 \Longrightarrow |M_i|_{i \in I} \text{ et } |M^j|_{j \in I} \text{ liées}\}$

$(\ell(A)) = \{M : M \in (P_0) \text{ et } \forall I \subset \{1,\dots, n\},\ \det M_I^I = 0 \Longrightarrow |M_i|_{i \in I} \text{ liées}\}$

$(C(A)) = \{M : M \in (P_0)$ et $\forall I \subset \{1,\ldots, n\}$, det $M_I^I = 0 \Rightarrow |M^j|_{j\in I}$ liées$\}$

$(Z) = \{M : m_{ij} \leq 0, \forall i \neq j\}$

$(E_1) = \{M : \forall y \in \mathbb{R}^n, y \geq 0, y \neq 0, M^T y \geq 0$ et $y \cdot My = 0 \Rightarrow \exists \begin{smallmatrix}\Omega \\ \Lambda\end{smallmatrix} \geq 0$ diagonales telles que $\Omega y \neq 0$ et $(\Lambda M + M^T\Omega)y = 0\}$

$(E(d)) = \{M :$ si $U\omega - Mz = d, \omega \geq 0, z \geq 0 : (\omega, z) \neq (d, 0) \Rightarrow \exists x \geq 0, x \neq 0 :$ $- M^T x = y \geq 0$ et $(\omega, z) \geq (x, y)\}$

Tableau des inclusions

	(S_0)	(E_0)	(P_0)	(C_0)	(D_0)	(C^+)	(dd^+)	$(\ell(A))$	(L)	$(L(d))$	(S)	(E)	(P)	(C)	(D)	(Z)	(R)	Q_0	Q
(E_0)	×	×																×	
(P_0)	×	×	×															×	
(C_0)	×	×		×														×	
(D_0)	×	×	×	×	×	×			×	×								×	
(C^+)	×	×	×	×		×			×	×								×	
(dd^+)	×	×	×				×	×	×	×								×	
$(\ell(A))$	×	×	×					×	×	×								×	
(L)	×	×							×	×								×	
$(L(d))$	×									×								×	
(S)	×										×								
(E)	×	×							×	×	×	×					×	×	×
(P)	×	×	×					×	×		×	×	×				×	×	×
(C)	×	×		×		×				×	×	×		×			×	×	×
(D)	×	×	×	×	×	×		×	×	×	×	×	×	×	×		×	×	×
(Z)																×		×	
(R)																	×	×	×

× signifie l'inclusion, par exemple $(D) \subset (S_0)$

REFERENCES

[1] AGAGAGIC. M., *"On diagonal dominance in linear complementarity"*. Linear Algebra and its Appl. 39 (1981), pp. 41-49.

[2] COTTLE. R.W., *"Completely Q-matrices"*. Mathematical Programming 19 (1980), pp.347-351.

[3] COTTLE. R.W. et DANTZIG. G.B., *"Complementary Pivot theory of Mathematical programming"*. Linear Algebra and its Appl. 1 (1968), pp. 103-125.

[4] COTTLE. R.W. et AGANAGIC. M., *"On Q-matrices"*. Mathematical Programming 16 (1979) pp. 274-277.

[5] COTTLE. R.W. et PANG. J.S., *"On solving linear complementarity problems as linear programs"*. Math. Programming Study 7 (1978), pp. 88-107.

[6] COTTLE. R.W. et PANG. J.S., *"A least-element theory of solving linear complementarity problems as linear programs"*. Math. Oper. Res. 3 (1978), pp. 155-170.

[7] EAVES. B.C., *"The linear complementarity problem"*. Management Science 17 (1971), pp. 612-634.

[8] FIELDER. M. et PTAK. V., *"On matrices with non-positive off diagonal elements and positive principal miners"*. Czechoslsvak Math. J. 12 (1962), pp. 382-400.

[9] FIELDER. M. et PTAK. V., *"Some generalisations of positive definiteness and monotonicity"*. Numer. Math. 9 (1966), pp. 163-172.

[10] GARCIA. C.B., *"Some classes of matrices in linear complementarity theory"*. Math. Programming 5 (1973), pp. 299-310.

[11] INGLETON. A.W., *"A problem in linear inequalities"*. Proc. London. Math. Soc. 16 (1966), pp. 319-536.

[12] KARAMARDIAN. S., *"The complementarity problem"*. Math. Programming 2 (1972), pp. 107-129.

[13] LEMKE. C.E. et HOWSON. J.T.J., *"Equilibruim points of bimatrix Games"*. SIAM J. Appl. Math. 12 (1964), pp. 413-423.

[14] LEMKE. C.E., *"Bimatrix equilibruim points and Mathematical Programming"*. Management Sci. 11 (1965).

[15] LEMKE. C.E., *"On complementarity pivot theory"*. Math. of decision Sciences, G.B. DANTZIG et A.F. VEINOTT, J.C. eds. American Mathematical Society (1968), pp. 95-118.

[16] LEMKE. C.E., *"Recent results on complementarity problems"*. Nonlinear Programming, J.B. ROSEN, O.L. MANGAZARIAN and K. RITTER, eds. Academic Press, N.Y. (1970).

[17] MANGAZARIAN. O.L., *"Linear Complementarity problems solvable by a single linear programming"*. Math. Programming 10 (1976), pp. 263-270.

[18] MANGAZARIAN. O.L., *"Solution of linear complementarity problems by linear programming"*. Lect. Notes in Math. N° 506 (1976), pp. 166-175.

[19] MANGAZARIAN. O.L., *"Characterization of linear complementarity problems as linear programs"*. Math. Programming Study 7 (1978), pp. 74-87.

[20] MURTY. K.G., *"On the number of solutions of the complementarity problem and spanning proprieties of complementarity cons"*. Linear Algebra and its Appl. 5 (1972), pp. 65-108.

[21] MURTY. K.G., *"On a characterization of P-matrices"*. SIAM J. Appl. Math. 20 (1971), pp. 378-384.

[22] MORE. J.J., *"Classe of functions and feasibility conditions in N.L.C.P."*, Math. Programming 6 (1974), pp. 327-338.

[23] PANG. J.S., *"On Q-matrices"*. Math. Programming 17 (1979), pp. 243-247.

[24] PANG. J.S., *"Note in an open problem in L.C."*. Math. Programming 13 (1977), pp. 360-363.

[25] SAIGAL. R., *"On the classe of complementary cones and Lemke's algorithm"*. SIAM J. Appl. Math. 23 (1972), pp. 46-50.

[26] SAIGAL. R., *"Lemke's algorithm and a special L.C.P."*. Opsearch 8 (1971), pp. 201-108.

[27] SAIGAL. R., *"A note on a classe of L.C.P."*. Opsearch 7 (1970), pp. 175-183.

[28] WATSON. L.T., *"Some perturbation theorems for Q-matrices"*. SIAM J. Appl. Math. 31 (1976), pp. 379-384.

CHAPITRE II

APPROXIMATION SIMPLICIALE DE LA SOLUTION DU PROBLEME DE LA COMPLEMENTARITE NON LINEAIRE

NOTATIONS

- $\mathbb{N}$: ensemble des entiers naturels
- $\mathbb{R}^n$: espace euclidien de dimension n
- $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\}$
- $x \cdot y$: produit scalaire de x par y
- e : vecteur des 1, (1,..., 1)
- e^i : $k^{\text{ième}}$ vecteur unité de $\mathbb{R}^n$
- $||x||_2$: norme euclidienne de x
- $||x||_\infty = \max\limits_i |x_i|$
- [J] : enveloppe convexe de J
- J\K : complémentaire d'un sous-ensemble K de J
- $\lfloor\lambda\rfloor$: partie entière d'un réel λ.
- $I_k = \{1,\ldots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$

1. INTRODUCTION

Le problème de la complémentarité non linéaire P.C.N.L., peut se formuler de la manière suivante :

Trouver $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x \geq 0, \; f(x) \geq 0 \qquad x \cdot f(x) = 0$$

où :

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Parmi les applications du problème de la complémentarité non linéaire, citons par exemple :

- La programmation mathématique convexe.
- La théorie de jeux.
- La recherche de l'équilibre économique.
- La recherche du point Selle.

D'autre part, le problème de la recherche du point fixe de l'application $g : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ peut se formuler comme le problème de la complémentarité non linéaire en posant $f(x) = x - g(x)$. Inversement, le problème de la recherche du point fixe de l'application $g : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ définie par $g_j(x) = \max\limits_{1 \leq j \leq n} (x_j - f_j(x), 0)$;

ou bien comme, le problème de la recherche d'une solution du système d'équations non linéaire $h(x) = 0$ où $h_j(x) = \min\limits_{1 \leq j \leq n} (x_j, f_j(x))$.

Le problème de la complémentarité non linéaire est résolu par les algorithmes qui utilisent les techniques de l'approximation simpliciale (cf. [1], [3], [4], [5], [9], [11],...) c'est-à-dire que $\mathbb{R}^n_+$ est triangulé, les sommets de cette triangulation sont marqués par un marquage spécial pour le problème de la complémentarité non linéaire ; Une procédure d'exploration de la triangulation, basée sur le marquage spécifique introduit permet d'obtenir un "simplexe complémentaire" pour lequel tout point correspondant à une approximation de la solution du problème de la complémentarité non linéaire.

Dans ce travail, nous rappelons dans la section 1, les principales propriétés se rapportant au concept de la triangulation, du marquage et des algorithmes d'approximation simpliciale. Dans la section 2 la subdivision, le marquage et les algorithmes d'approximation simpliciale à dimension variable. (cf. [1], [10], [11],...). Ces rappels sont indispensables pour la section 3.

Dans la section 3, nous proposons un marquage de la triangulation de $\mathbb{R}^n_+$, l'utilisation d'un algorithme simplicial à dimension variable basé sur ce marquage nous permet, sous certaines conditions, d'obtenir une approximation de la solution du problème de la complémentarité non linéaire. Nous donnons également une condition suffisante qui assure la convergence de l'algorithme.

2. TRIANGULATION, MARQUAGE ET ALGORITHME SIMPLICIAL

2.1. Introduction

Les algorithmes d'approximation simpliciale utilisent la technique de la triangulation simpliciale et le concept du marquage. Nous en donnons, dans ce paragraphe, les principales propriétés ; Ces notions sont classiques et se trouvent dans ([1], [3], [8], [12], [13],...).

2.2. Triangulation

Définition 2.2.1.

Soit $A \in \mathbb{R}^n$ *la variété linéaire engendrée par* A, *noté* L(A) *est définie par :*

$$L(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i \text{ avec } \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1 \text{ et } x^i \in A,\ 1 \le i \le k+1\}$$

Remarque :

dim A = dim L(A).

Dans tout ce qui suit, les concepts topologiques pour toute partie $A \in \mathbb{R}^n$ sont relatifs à la variété linéaire L(A).

Définition 2.2.2.

Soient $y^1,\dots, y^{k+1}$ $(k \le n)$ *des points de* $\mathbb{R}^n$. *On dira que* $y^1,\dots, y^{k+1}$ *sont affinements indépendants si et seulement si l'ensemble de vecteurs* $\{y^2 - y^1,\dots, y^{k+1} - y^1\}$ *sont linéairement indépendants.*

Remarque : Le choix de y^1 dans la définition 2.2.2. n'a aucune importance.

Définition 2.2.3.

On appelle k-*simplexe noté* $\sigma = [y^1,\dots, y^{k+1}]$, *l'enveloppe convexe des points* $y^1,\dots, y^{k+1}$ *affinement indépendants.*

C'est-à-dire :

$$\sigma = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i\, y^i \text{ avec } \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0 \quad 1 \leq i \leq k+1\}$$

Les points $y^1, \ldots, y^{k+1}$ *sont les sommets du* k*-simplexe* σ.

Remarque :

- La dimension de $\sigma = k$
- Le k-simplexe σ est un polyèdre compact.

Définition 2.2.4.

On dira qu'un t-simplexe $\tau (1 \leq t \leq k)$ *est une face d'un k-simplexe* σ, *si tous les sommets de* τ *sont des sommets de* σ *; on notera alors* $\tau < \sigma$

Si $t = k-1$, *on dira que* τ *est un facet de* σ. *Si de plus,* y *est le sommet de* σ *n'appartenant pas à* τ, *on dira que* τ *est le facet de* σ *opposé à* y.

Définition 2.2.5.

Deux simplexes σ_1 *et* σ_2 *sont adjacents si et seulement si*

- *Ils ont un facet commun, ou*
- *l'un est facet de l'autre.*

Soit G, un ensemble de n-simplexes dans $\mathbb{R}^n$ non vide, fini ou infini mais dénombrable.

Posons : $|G| = \bigcup_{\sigma \in G} \sigma$, le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ correspondant à la réunion de tous les n-simplexes de G.

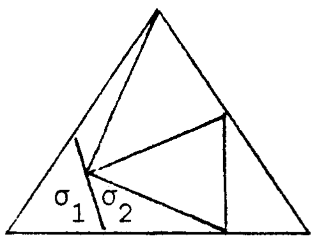
Définition 2.2.6.

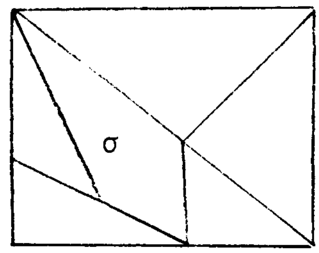
G *est une triangulation (de* $|G|$*) dans* $\mathbb{R}^n$ *si et seulement si* *i)* $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in G$, $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \phi$ *ou* $\sigma_1 \cap \sigma_2$ *est une face commune de* σ_1 *et* σ_2.

ii) $\forall x \in |G|$, $\exists V \in \mathcal{V}(x) = V$ *coupe un nombre fini de* n-*simplexes de* G.

<u>Exemples 2.2.7.</u>

a) Exemples qui ne sont pas des triangulations.

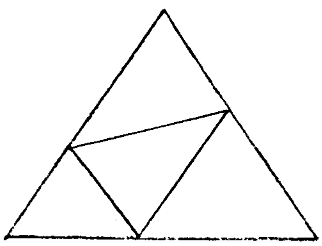


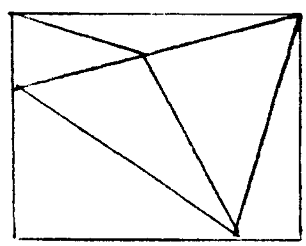


l'intersection de σ_1 et σ_2 n'est ni vide, ni face commune.

σ n'est pas un simplexe

b) Exemples de triangulation





Définissons maintenant, par :

• G^i : l'ensemble de toutes les i-faces (i.e. : les i-simplexes qui sont les faces des n-simplexes de G) pour $i \in \{0,\ldots, n\}$.

En particulier, $G^n = G$ et G^0 = ensemble des sommets de la triangulation G.

• $G^* = \{\tau : \tau < \sigma,\ \sigma \in G\}$ l'ensemble de toutes les faces des simplexes de la triangulation G.

Nous donnons maintenant, une proposition qui est souvent utilisée pour montrer qu'un ensemble de simplexes est une triangulation dans $\mathbb{R}^n$.

Pour cela, nous donnons d'abord le lemme suivant :

<u>*Lemme 2.2.8.*</u>

Tout k-*simplexe est partitionner par l'intérieur relatif de ses faces.*

<u>Preuve</u> :

$$\left.\begin{array}{r}\text{Soit } x \in \sigma \Rightarrow x \text{ est interne à la facette } F(x, \sigma) \text{ de } x \text{ dans } \sigma \\ F(x, \sigma) \text{ convexe, fermé et non vide}\end{array}\right\} \rightarrow x \in \mathring{F}(x, \sigma)$$

$$\left.\begin{array}{l}\sigma \text{ étant un polyèdre} \\ \text{théorème III.4.1.3. page 126 [2]}\end{array}\right\} \Rightarrow F(x, \sigma) = \tau,\ \tau \text{ face de } \sigma \longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\ldots \Rightarrow x \in \mathring{\tau} \text{ donc, } \sigma \subset \bigcup\limits_{\tau<\sigma} \mathring{\tau} \\ \text{d'autre part on a : } \sigma \supset \bigcup\limits_{\tau<\sigma} \mathring{\tau}\end{array}\right\} \Rightarrow \sigma = \bigcup_{\tau<\sigma} \mathring{\tau}$$

• Soient τ_1 et τ_2 deux faces de σ : $\mathring{\tau}_1 \cap \mathring{\tau}_2 \neq \phi \Rightarrow \exists x \in \mathring{\tau}_1 \cap \mathring{\tau}_2$.

ce qui entraîne :

$$\left|\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}x \in \mathring{\tau}_1 \Rightarrow x \text{ est un point interne à } \tau_1 \\ \text{théorème III.4.1.3. [2]}\end{array}\right\} \Rightarrow \tau_1 = F(x, \sigma) \\ \left.\begin{array}{r}x \in \mathring{\tau}_2 \Rightarrow x \text{ est un point interne à } \tau_2 \\ \text{théorème III.4.1.3. [2]}\end{array}\right\} \Rightarrow \tau_2 = F(x, \sigma)\end{array}\right\} \ldots$$

$\ldots \Rightarrow \tau_1 = \tau_2$.

Proposition 2.2.9.

G *est une triangulation de* $|G|$ *dans* $\mathbb{R}^n$ *si et seulement si*

i) $|G| = \bigcup_{\tau \in G^*} \mathring{\tau}$

ii) $\forall \tau_1, \tau_2 \in G^* \quad \tau_1 \neq \tau_2, \ \mathring{\tau}_1 \cap \mathring{\tau}_2 = \phi.$

iii) $\forall x \in |G|, \exists V \in \mathcal{V}(x)$: V *coupe un nombre fini de* n-*simplexes de* G.

Preuve :

1) l'implication $\Longrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} |G| = \bigcup_{\sigma \in G} \sigma \\ \\ \text{lemme 2.2.8.} \end{array}\right\} \Longrightarrow |G| = \bigcup_{\sigma \in G} \sigma = \bigcup_{\sigma \in G} \Big(\bigcup_{\tau < \sigma} \mathring{\tau}\Big) = \bigcup_{\tau \in G^*} \mathring{\tau}$$

i) Soients τ_1 et $\tau_2 \in G^*$ $\tau_1 \neq \tau_2$ et supposons que $\mathring{\tau}_1 \cap \mathring{\tau}_2 \neq$ alors on a :

a) $$\left.\begin{array}{l} \text{si } \tau_1 \text{ et } \tau_2 \text{ sont faces d'une même simplexe } \sigma \\ \\ \qquad\qquad\qquad \text{lemme 2.2.8.} \end{array}\right\} \Longrightarrow \tau_1 = \tau_2$$

ce qui contredit l'hypothèse, donc $\mathring{\tau}_1 \cap \mathring{\tau}_2 = \phi$

b) $$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \text{si } \tau_1 < \sigma_1 \\ \\ \quad \tau_2 < \sigma_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \phi \\ \\ \qquad\qquad\qquad \text{déf. 2.2.6.} \end{array}\right\} \Longrightarrow \sigma_1 \cap \sigma_2 \text{ est une face commune}$$

de σ_1 et de σ_2 ; par suite on a :

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}\bullet\ \tau_1 \text{ et } \sigma_1 \cap \sigma_2 \text{ sont des faces de } \sigma_1 \\ \text{l'hypothèse } \mathring{\tau}_1 \cap \mathring{\tau}_2 \neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \mathring{\tau}_1 \cap \overset{\circ}{\overbrace{(\sigma_1 \cap \sigma_2)}} \neq \sigma \\ \left.\begin{array}{r}\bullet\ \tau_2 \text{ et } \sigma_1 \cap \sigma_2 \text{ sont des faces de } \sigma_2 \\ \text{l'hypothèse } \mathring{\tau}_1 \cap \mathring{\tau}_2 \neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \mathring{\tau}_2 \cap \overset{\circ}{\overbrace{(\sigma_1 \cap \sigma_2)}} \neq \phi \\ \text{lemme 2.2.8.}\end{array}\right\}$$

$$\ldots \Rightarrow \tau_1 = \sigma_1 \cap \sigma_2 = \tau_2.$$

ii) c'est ii) de la définition 2.2.6.

2) l'implication $\Leftarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\text{i) } |G| = \bigcup\limits_{\tau \in G^*} \mathring{\tau} \\ \text{lemme 2.2.8.}\end{array}\right\} \Rightarrow |G| = \bigcup\limits_{\sigma \in G} \sigma$$

• Soient σ_1, $\sigma_2 \in G$ et supposons que $\sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \phi$. Nous allons montrer que $\sigma_1 \cap \sigma_2$ est une face commune de σ_1 et de σ_2.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Soit } x \in \sigma_1 \cap \sigma_2 \\ \text{lemme 2.2.8.}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}\left|\begin{array}{l}\exists!\ \tau_1 < \sigma_1 : x \in \mathring{\tau}_1 \\ \exists!\ \tau_2 < \sigma_2 : x \in \mathring{\tau}_2\end{array}\right. \\ \text{hypothèse ii)}\end{array}\right\} \Rightarrow \tau_1 = \tau_2$$

x appartient donc, à une face commune de σ_1 et σ_2 notée par $\tau_x = \tau_1 = \tau_2$ donc, $\forall x \in \sigma_1 \cap \sigma_2$, $x \in \tau = \bigcup\limits_{x \in \sigma_1 \cap \sigma_2} \tau_x$ face commune de σ_1 et $\sigma_2 \Rightarrow \sigma_1 \cap \sigma_2 \subset \tau$ (3

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}\text{Supposons par ailleurs que } \tau = [y^1,\ldots, y^{k+1}],\ (k \leq n) \\ \text{déf. 2.2.4.}\end{array}\right\} \Rightarrow y^i \in \sigma_1 \cap \sigma_2, \\ \hfill 1 \leq i \leq k+1 \\ \hfill \sigma_1 \cap \sigma_2 \text{ convexe}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}\ldots \Rightarrow [y^1,\ldots, y^{k+1}] \subset \sigma_1 \cap \sigma_2 \\ (3)\end{array}\right\} \Rightarrow \tau = \sigma_1 \cap \sigma_2 \text{ face commune de } \sigma_1 \text{ et de } \sigma_2.$$

Les théorèmes suivants contiennent des propriétés importantes de la triangulation. Soit G une triangulation de $|G|$ dans $\mathbb{R}^n$ alors, on a :

<u>*Théorème 2.2.10.*</u> (*cf.* [12], [13])

Soit τ *un facet d'un simplexe de* G.

Alors, i) Si $\tau \subset Fr(|G|)$, τ *est un facet d'exactement un seul simplexe de* G.
ii) Si $\tau \not\subset Fr(|G|)$, τ *est un facet d'exactement deux simplexes de* G.

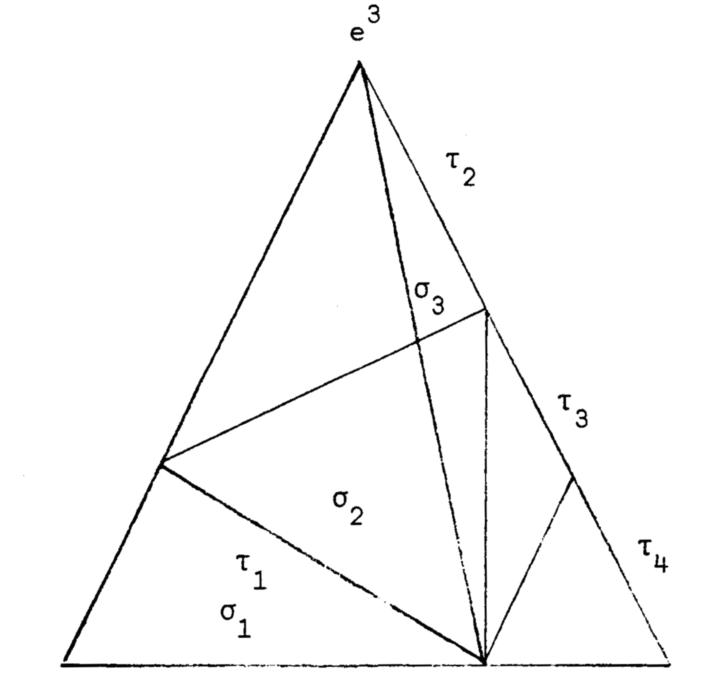
<u>*Théorème 2.2.11.*</u> (*cf.* [12], [13])

Soit $D \subset Fr(|G|)$ *tel que* $\dim D = n-1$ *et* $D = |G| \cap L(D)$.

Alors, $\{\tau \in G^{n-1} \mid \tau \subset D\}$ *triangularise* D.

On illustre les deux théorèmes précédents par la figure suivante :

où $|G| = S^2$, le 2-simplexe unité (i.e. : $S^2 = [e^1, e^2, e^3]$, $e^i \in \mathbb{R}^3$ vecteur unitaire).



- Le facet $\tau_1 \not\subset Fr(|G|)$ et il est facet de deux simplexes σ_1 et σ_2, alors que $\tau_2 \subset Fr(|G|)$ et il est facet d'un seul simplexe σ_3.

• La triangulation de $D = [e^2, e^3]$ consiste en les trois 1-simplexes τ_2, τ_3 et τ_4.

Définition 2.2.12.

La mesure de la triangulation G, *qu'on note par* mes G, *est définie par :*

$$\text{mes } G = \sup_{\sigma \in G} \{\text{diam } \sigma\}$$

où $\text{diam } \sigma = \max \{||x-y|| \mid x, y \in \sigma\}$.

2.3. Triangulations spéciales de $\mathbb{R}^n$

Nous donnons, dans ce paragraphe, certaines triangulations standard de $\mathbb{R}^n$, introduites dans la littérature.

2.3.1. Triangulation K de $\mathbb{R}^n$ de Kuhn (cf. [1], [12])

Définition 2.3.1.1.

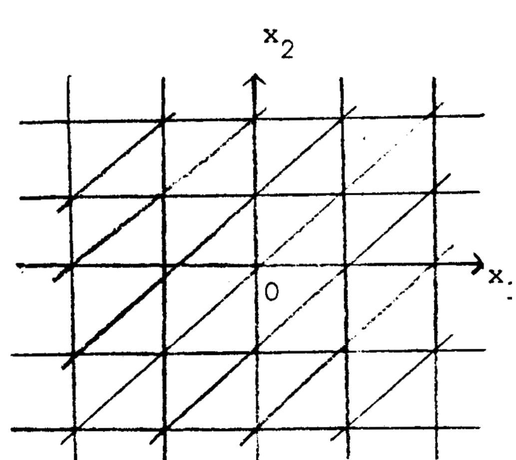
La triangulation K *de* $\mathbb{R}^n$ *de mesure* δ, $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, *est l'ensemble de tous les* n-*simplexes* $\sigma(y^1, \pi) = [y_1, \ldots, y^{n+1}]$:

i) $y^1 = (\delta \ell_1, \ldots, \delta \ell_n)$, $\ell_i \in Z$, $i \in I_n$

ii) $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ *est une permutation des éléments de* I_n.

iii) $y^{i+1} = y^i + \delta\, e^{\pi_i}$, $i = 1, \ldots, n$.

La figure (1) donne, la triangulation K *de* $\mathbb{R}^2$, *pour* $\delta = 1$.



(1)

Proposition 2.3.1.2. (cf. [12])

K *triangularise* $\mathbb{R}^n$.

Corollaire 2.3.1.3.

Si la triangulation H *est de taille* δ, $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, *alors* $\text{mes}_2\, K = \delta\sqrt{n}$.

2.3.2. Triangulation H de $\mathbb{R}^n$ de Eaves et Saigal (cf. [12], [1])

Définition 2.3.2.1.

La triangulation H *de* $\mathbb{R}^n$, *de mesure* δ, $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ *est l'ensemble de tous les* n-*simplexes* $\sigma(y^1, \pi)=[y^1,\dots, y^{n+1}]$:

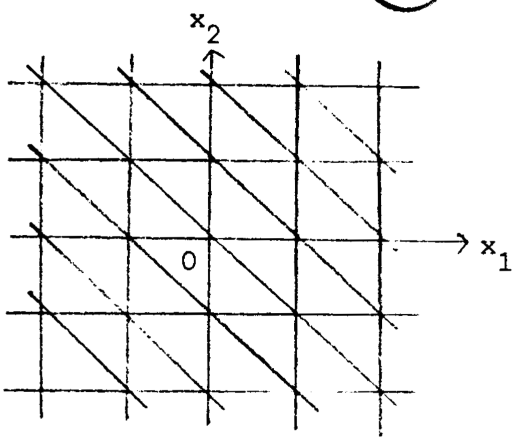
i) $y^1 = (\delta\ell_1,\dots, \delta\ell_n)$, $\ell_i \in Z$, $i \in I_n$

ii) $\pi = (\pi_1,\dots, \pi_n)$ *est une permutation des éléments de* I_n

iii) $y^{i+1} = y^i + \delta e^{\pi_i}$, $i = 1,\dots, n$

où q^i *est la* $i^{\text{ème}}$ *colonne de la matrice* $(L \times L)$, $|L| = n$

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix}$$



(2)

La figure (2) donne la triangulation de $\mathbb{R}^2$, *pour* $\delta = 1$.

Proposition 2.3.2.2. (cf. [1], [12])

H *triangularise* $\mathbb{R}^n$.

Corollaire 2.3.2.3.

Si la triangulation H *est de taille* δ, $\delta \in \mathbb{R}_+$, *alors* $\text{mes}_2\ H = \delta\sqrt{n}$.

On remarque que la triangulation H, peut être interprétée comme la transformée de la triangulation K, par une transformation de matrice régulière Q ; selon la définition suivante :

Définition 2.3.2.4.

Soit A *matrice* $(L \times L)$, *régulière* ; $|L| = n$.

Alors, la triangulation AK *de mesure* $\delta > 0$, *est l'ensemble des simplexes* $\sigma(y^1, \pi) = [y^1, \ldots, y^{n+1}]$:

i) $A^{-1}\ y^1 = (\delta \ell_1, \ldots, \delta \ell_n)$, $\ell_i \in Z$, $i \in I_n$

ii) $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ *est une permutation des éléments de* I_n.

iii) $y^{i+1} = y^i + \delta\ a^i$, $i = 1, \ldots, n$.

où : a^i *est la* $i^{\text{ème}}$ *colonne de la matrice* A.

Remarque : On peut aussi dire que la triangulation AK est l'ensemble des n-simplexes $\sigma(y^1, \ldots, y^{n+1})$ tels que $\sigma(A^{-1}\ y^1, \ldots, A^{-1}\ y^{n+1})$ est un simplexe de K.

Pour calculer, la mesure de AK, on se restreint aux simplexes $\sigma(y^1, \pi)$ avec $y^1 = 0 \in \mathbb{R}^n$.

Corollaire 2.3.2.5.

$$\text{mes}_2\ AK = \max_{S \in I_n} \left\| \sum_{j \in S} a^j \right\|_2$$

Preuve :

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{diam} \sigma(0, \pi) = \max\limits_{1 \le i \le k \le n} ||y^i - y^k||_2 = \delta \max\limits_{1 \le i \le k \le n} ||\sum\limits_{j=i}^{k} a^{\pi_j}||_2 \\ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \operatorname{mes}_2 AK = \sup\limits_{\sigma \in AK} \{\operatorname{diam} \sigma\} \end{array}\right\} \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \operatorname{mes}_2 AK = \delta \max_{S \subset I_n} ||\sum_{i \in S} a^i||_2.$$

On remarque, que pour la détermination des simplexes $\sigma(y^1, \pi)$ d'une triangulation AK, on a besoin seulement du premier sommet y^1 et de la permutation π ; c'est d'ailleurs, pour cette raison que les triangulation de type AK sont souvent utilisées dans le algorithmes d'approximation simpliciale.

Les algorithmes d'approximation simpliciale, engendrent une suite de simplexes adjacents σ_0, σ_1, $\sigma_2, \ldots$, en démarrant à partir d'un simplexe σ_0, déterminé à priori et se terminant avec un simplexe σ_k, qui est une approximation de la solution du problème de la complémentarité non linéaire.

Cependant, on a besoin d'une règle de remplacement qui nous donne la représentation du simplexe adjacent à un simplexe $\sigma(y^1, \pi)$ donné, si un de ses sommets y^s, doit être remplacé. Un tel simplexe si il existe est unique d'après le théorème 2.2.10.

Si on note $\sigma(\omega^1, \gamma)$ la représentation du nouveau simplexe qu'on obtient en remplaçant le sommet y^s, alors ω^1 et γ sont donnés par le théorème suivant :

Théorème 2.3.2.6.

Si $\sigma_1 = \sigma(y^1, \pi)$ *et* σ_2 *sont deux simplexes adjacents de la triangulation* AK *et si* $\tau(y^1, \ldots, y^{s-1}, y^{s+1}, \ldots, y^{n+1})$ *est le facet commun de* σ_1 *et* σ_2, *alors :*

$\sigma_2 = \sigma(\omega^1, \gamma)$ *où*

$$\omega^1 = y^1 + \delta a^{\pi_1} \text{ et } \gamma = (\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_n, \pi_1) \qquad \text{si } s = 1$$

$$\omega^1 = y^1 \qquad \text{et } \gamma = (\pi_2, \ldots, \pi_s, \pi_{s-1}, \ldots, \pi_n) \qquad 2 \le s \le n$$

$$\omega^1 = y^1 - \delta a^{\pi_n} \text{ et } \gamma = (\pi_n, \pi_1, \ldots, \pi_{n-1}) \qquad s = n+1$$

Preuve :

• $\sigma(\omega^1, \gamma)$ où δ^1 et γ sont donnés dans le théorème, pour les différentes valeurs de S, est un n-simplexe de la triangulation AK.

En effet : pour s = 1, par exemple, on a :

$$\omega^1 = y^1 + \delta\, a^{\pi_1} \text{ et } \gamma = (\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_n, \pi_1)$$

alors :

$$\omega^i = y^{i+1},\ i = 1, \dots, n$$

$$\omega^{n+1} = y^{n+1} + \delta\, a^{\pi_1}$$

donc, les points $\omega^1, \dots, \omega^{n+1}$ sont affinements indépendants, par conséquence, $\sigma(\omega^1, \gamma)$ est un n-simplexe de AK.

De plus, on a :

$$\left.\begin{array}{r} \sigma(\omega^1, \gamma) \cap \sigma(y^1, \pi) = \tau(y^2, y^3, \dots, y^{n+1}) \\ \text{théorème 2.2.10.} \end{array}\right\} \dots$$

$\dots \Rightarrow \sigma_2 = \sigma(\omega^1, \gamma)$. (i.e. : σ_2 a la représentation donnée par le théorème).

2.3.3. Triangulation J de $\mathbb{R}^n$ (cf. [12])

Définition 2.3.3.1.

La triangulation J *de* $\mathbb{R}^n$ *dite "Union Jack", de taille* $\delta > 0$, *est l'ensemble de tous les simplexes* $\sigma(y^1, \pi) = [y^1, \dots, y^{n+1}]$:

i) $y^1 = (\delta \ell_1, \dots, \delta \ell_n)$, $\ell_i = 2k \quad k \in \mathbb{Z},\ i \in I_n$.

ii) $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ *une permutation de* I_n

iii) $s \in \mathbb{R}^n$; $s_i \in \{1, -1\}$

iv) $y^{i+1} = y^i + \delta\, e^{\pi_i}$, $i = 1,\ldots, n$

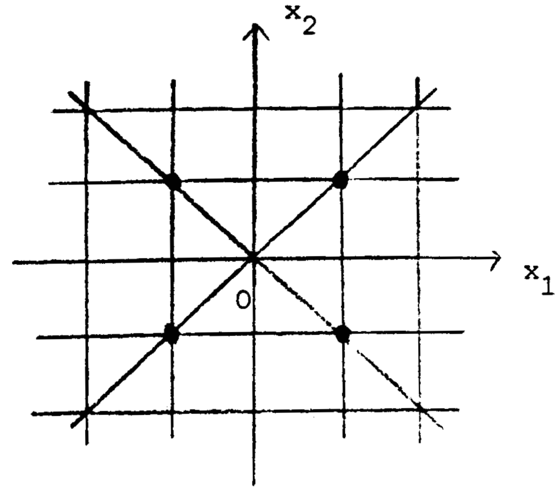


Figure 3

La figure (3) donne la triangulation J *de* $\mathbb{R}^2$*, pour* $\delta = 1$.

Corollaire 2.3.3.2.

$$\text{mes}_2\ J = \delta\sqrt{n}$$

2.4. Marquage et algorithme simplicial (cf. [1], [3], [12])

2.4.1. Concept de marquage

Soit G une triangulation (de $|G|$) dans $\mathbb{R}^n$.

G^0 ensemble des sommets de la triangulation G.

Définition 2.4.1.1. *(marquage entier)*

Un marquage de G^0 *est toute application* $\ell : G^0 \to \{1,\ldots, n+1\}$.

Si $\sigma = [y^1,\ldots, y^n]$ *est un simplexe de la triangulation* G*, on notera par* $\ell(\sigma)$ *l'ensemble des entiers* $\{\ell(y^1),\ldots, \ell(y^{n+1})\}$.

De même, on notera par $\ell(\tau) = \{\ell(y^1),\ldots,\ell(y^{i+1})\}$*, pour toute* i*-face de la forme* $\tau = [y^{\alpha_1},\ldots, y^{\alpha_{i+1}}]$ *d'un* n*-simplexe de* G.

Définition 2.4.1.2.

Un n*-simplexe* $\sigma = [y^1,\ldots, y^{n+1}]$ *est complètement marqué (c.m.) si* $\ell[\sigma] = \{1,\ldots, n+1\}$.

Définition 2.4.1.3.

Un simplexe $\tau \in G \cup G^{n-1}$ *est un i-presque complètement marqué* (i - p.c.m.) *si* $\ell(\tau) = \{1,\ldots, n+1\} - \{i\}$.

Remarque :

i) Il est important de remarquer qu'un n-simplexe, comme d'ailleurs un facet peut être i - p.c.m. :

- Si $\tau = [y^{\alpha_1},\ldots, y^{\alpha_{n+1}}]$ un n-simplexe de G est i - p.c.m. alors, $\ell(y^{\alpha_j}) = j$, $\forall j \neq i$ et $\ell(y^{\alpha_i}) = s \neq i$, c'est-à-dire que τ admet exactement deux sommets y^{α_s} et y^{α_i} qui ont la même marque s.

- Si $\tau = [y^{\beta_1},\ldots, y^{\beta_n}]$ un (n-1)-simplexe de G^{n-1}, i - p.c.m. alors, $\ell(y^{\beta_j}) = j \quad \forall j \neq i$, c'est-à-dire que les sommets de τ ont des marques distinctes entre-elles et distinctes de i.

ii) L'ensemble des simplexes c.m. ou i - p.c.m. peut être vide, pour un marquage arbitraire ; Il suffit de considérer pour $n \geq 3$, le marquage $\ell = c^{te}$.

Définition 2.4.1.4.

Soient, G *une triangulation* (*de* $|G|$) *dans* $\mathbb{R}^n$, ℓ *un marquage donné sur* G. *Alors deux simplexes distincts* σ_1, σ_2 *de* $G \cup G^{n-1}$ *sont dit i-adjacents si et seulement si* $\sigma_1 \cap \sigma_2$ *est i - p.c.m.*

Remarque :

Si σ_1 et σ_2 sont i-adjacents, par définition on a :

i) σ_1 et σ_2 ne peuvent pas appartenir tous les deux à G^{n-1}.

ii) Si $\sigma_i \in G$ pour i = 1 ou 2 alors, σ_i doit être c.m. ou i - p.c.m.

iii) Si $\sigma_i \in G^{n-1}$ pour i = 1 ou 2 alors, σ_i doit être i - p.c.m.

2.4.2. Marquage et approximation

Nous allons donner, un exemple de marquage proposé par Fisher et Gould [4] pour donner une approximation simpliciale de la solution du problème de la complémentarité non linéaire.

Définition 2.4.2.1. (*marquage entier sur* $\mathbb{R}^n_+$ (cf. [4]))

Un marquage entier sur une triangulation G *de* $\mathbb{R}^n$, *pour le P.C.N.L. est donné par :*

$$\ell(x) = \begin{cases} n+1, \text{ si } x > 0 \text{ et } f(x) > 0 \\ j, \text{ si } x > 0 \text{ et } f(x) \not> 0 \text{ et } j = \min\{i \in I_n \mid f_j(x) = \min\limits_{1 \le i \le n} f_i(x)\} \\ j, \text{ si } x \not> 0 \text{ et } j = \min\{i \in I_n \mid x_i = 0\} \end{cases}$$

où $x \in G^0$ *: ensemble des sommets de la triangulation* G *de* $\mathbb{R}^n_+$.

Pour ce marquage, le simplexe $\sigma(y^1, \pi)$ *définie par :* $y^1 = 0$, $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n) = (1, 2, \dots, n)$ *et* $y^{j+1} = y^j + \delta e^j$ $1 \le j \le n$ *est l'unique simplexe* (n-1)-*p.c.m. de la frontière de* $|G| = \mathbb{R}^n_+$ *à partir duquel l'algorithme démarrera* (*cf.* [4]).

Avant d'introduire, l'algorithme qui va engendrer le simplex "complémentaire" nous donnons le théorème d'approximation de la solution du P.C.N.L.

Théorème 2.4.2.2. (*Fisher et Gould* [4])

Soient, $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ *continue,* $\varepsilon > 0$ *donné,* G *une triangulation de* $\mathbb{R}^n_+$ *de mesure* δ, *où* δ *est déterminée par* ε *et l'uniforme continuité de* f *sur un certain compact* A *spécifique. Alors,* $\forall x \in \sigma$, *un simplexe "complémentaire" (c.m.) est une approximation de la solution du P.C.N.L. dans le sens suivant :*

$$f_i(x) \ge -\varepsilon,\ 1 \le i \le n$$

$$f_i(x) \le \varepsilon, \text{ si } x_i > \delta \quad 1 \le i \le n$$

2.4.3. Algorithme d'approximation simpliciale : forme générale

Soient : G une triangulation (de $|G|$) dans $\mathbb{R}^n$, et un marquage

$$\ell : G^0 \to \{1,\ldots, n+1\}$$

Nous allons introduire, deux sous-ensembles de $G \cup G^{n-1}$, qui serviront dans la suite :

- les n-simplexes c.m.

- les (n-1)-simplexes de la frontière de $|G|$ qui sont i - p.c.m.

<u>*Proposition 2.4.3.1.*</u>

Soit σ un n-simplexe de la triangulation G marquée, alors l'une des conditions suivantes est vérifiée :

i) σ n'admet aucun facet i - p.c.m.

ii) σ admet exactement deux facets i - p.c.m.

iii) σ admet exactement un seul facet i - p.c.m.

<u>Preuve</u> :

Soit $\sigma = [y^1,\ldots, y^{n+1}]$ un tel simplexe, alors :

i) si $\ell(\sigma) \neq \{1,\ldots, i-1, i+1,\ldots, n+1\}$, σ n'admet aucun facet i - p.c.m.

ii) si $\ell(\sigma) = \{1,\ldots, i-1, i+1,\ldots, n+1\}$, $\exists!\ k \in \{1,\ldots, n\}$: $\ell(y^t) = k = \ell(y$ pour exactement deux indices $t, s \in \{1,\ldots, n+1\}$; alors les facets $\tau_t = [y^1,\ldots, y^{t-1}, y^{t+1},\ldots, y^{n+1}]$ et $\tau_s = [y^1,\ldots, y^{s-1}, y^{s+1},\ldots, y^{n}$ sont i - p.c.m. Comme les autres facets doivent contenir les deux sommets y^t et y^s, donc ils ne sont pas i - p.c.m.

iii) si $\ell(\sigma) = \{1,\ldots, n+1\}$, alors on a : $\ell(y^i) = i$, $i = 1,\ldots, n+1$, donc σ admet exactement un seul facet $\tau_i = [y^1,\ldots, y^{i-1}, y^{i+1},\ldots, y^{n+1}]$ i - p.c.m. et

$\bullet$ Si $\tau_i \subset Fr(|G|)$
Théorème 2.2.10. i) $\Bigg\}$ $\Rightarrow$ τ_i est facet seulement de σ.

$\bullet$ Si $\tau_i \not\subset Fr(|G|)$
Théorème 2.2.10. ii) $\Bigg\}$ $\Rightarrow$ τ_i est facet d'exactement un seul autre simplexe σ'.

2.4.3.2. Algorithme

Soit G une triangulation (de $|G|$) dans $\mathbb{R}^n$.

ℓ un marquage de G

$\tau = [y^1, \ldots, y^{i-1}, \ldots, y^{n+1}] \subset Fr(|G|)$, i - p.c.m.

$\sigma = [y^1, \ldots, y^{n+1}]$, l'unique n-simplexe de G ayant τ comme facet

L'algorithme se déroule de la manière suivante :

it 0 : poser $\sigma_1 = \sigma$, $\bar{y} = y^i$ (sommet de σ_1 opposé au facet τ_1), $k = 1$

it 1 : calculer $\ell(\bar{y})$. Si $\ell(\bar{y}) = i$ σ_k est c.m. stop.
sinon, $\ell(\bar{y}) = \ell(y^s)$, pour exactement un seul sommet $y^s \neq \bar{y}$.
le facet $\tau_{k+1} = \tau_{k+1}(y^1, \ldots, y^{s-1}, y^{s+1}, \ldots, y^{n+1})$ est i - p.c.m.

it 2 : Si $\tau_{k+1} \in Fr(|G|)$, stop. Sinon, déterminer le simplexe σ_{k+1} qui admet τ_{k+1} comme facet. Poser $k = k+1$ et retourner en 1 avec $\bar{y}$ égal au nouveau sommet de σ_{k+1}.

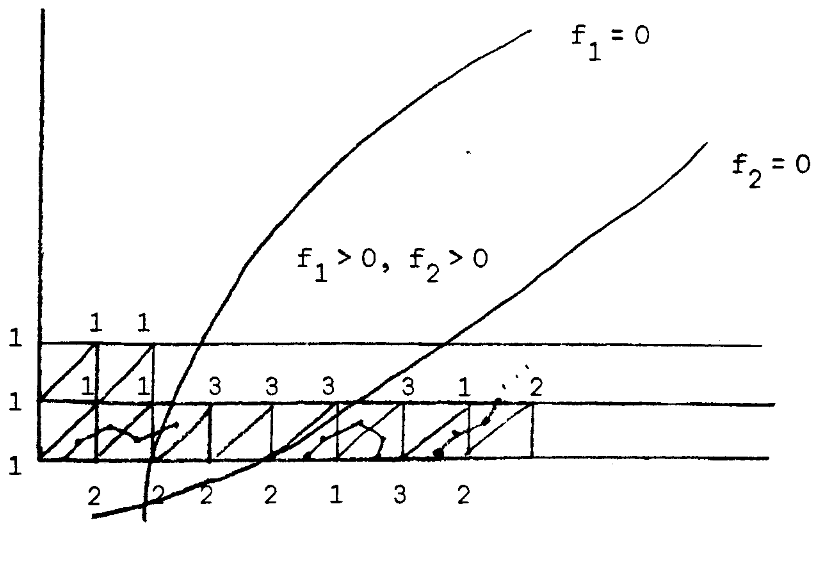


Fig. 1

Dans la figure 1, la triangulation, le marquage et l'algorithme sont illustré sur un exemple de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 2.4.3.2.1.

La suite de simplexe engendrée par l'algorithme est sans répétition.

Preuve :

L'algorithme génère une suite infinie ou finie de n-simplexes i-adjacents :

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$$

Montrons qu'aucune simplexe de la suite ne se répète pas.

Supposons, $\exists j < k : \sigma_j = \sigma_k$ et $\sigma_t \neq \sigma_s$, $\forall t,s < k$.

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_j, \ldots, \sigma_{k-1}, \sigma_j, \sigma_{j+1}, \ldots$$

c'est-à-dire que σ_j est le premier simplexe de la suite qui se répète. Donc

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_j \text{ est i-adjacent à } \sigma_{j-1}, \sigma_{j+1}, \sigma_{k-1} \\ \text{proposition 2.4.3.1.}\end{array}\right\} \Rightarrow \sigma_{k-1} = \begin{cases}\sigma_{j-1} \\ \text{ou} \\ \sigma_{j+1}\end{cases}$$

• Si $j > 1$, on a : $\sigma_{k-1} \neq \sigma_{j-1}$, car $k-1, j-1 < k$.

• Si $j = 1$, σ_1 admet seulement σ_2 comme simplexe i-adjacent. Donc, dans les deux cas on a $\sigma_{k-1} = \sigma_{k+1}$ et $k-1 = j-1 \Rightarrow k = j+2$ et $\sigma_j = \sigma_k = \sigma_{k+2}$. Soit maintenant y, le sommet de σ_{j+1}, qui n'est pas sommet de σ_j, comme σ_{j+2} est obtenu à partir de σ_{j+1} en remplaçant le sommet de σ_{j+1}, qui a la même marque que y, et par conséquence y est un sommet de σ_{j+2} ce qui contredit le fait que $\sigma_j = \sigma_{j+2}$. Donc, les simplexes de la suite $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{j+2}$ sont tous distincts.

La triangulation G étant localement finie (déf. 2.2.6.) on a le résultat suivant :

Proposition 2.4.3.2.2.

Soit $D \subset |G|$ *compact, on suppose que tous les simplexes* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ *engendrés par l'algorithme coupent* D.

Alors, l'algorithme se termine en un nombre fini d'itérations avec un n-*simplexes* σ_k *c.m., ou bien, avec un* (n-1)-*simplexe* $\tau_k \in Fr(|G|)$.

Preuve :

$$\left.\begin{array}{l} x \in D \subset |G| \\ \\ \text{déf. 2.2.6. ii)} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x) : V \text{ coupe un nombre fini de n-simplexe de } G$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{donc, } D \subset \bigcup\limits_{x\in D} V(x) \\ \\ \quad D \text{ compact} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists x^1, \ldots, x^n \in D : \left.\begin{array}{l} D \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} V(x^i) \\ \qquad (1) \end{array}\right\} \ldots$$

... => D coupe un nombre fini de n-simplexes de G ; comme l'algorithme chemine à travers les n-simplexes que coupe D, qui sont en nombre fini, donc l'algorithme se termine soit avec un n-simplexe c.m., ou bien, avec un (n-1)-simplexe (n+1)-p.c.m. frontière.

Donc, l'algorithme génère une suite $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \ldots$ de n-simplexes distincts i-adjacents vérifiant l'une des trois conditions suivantes :

i) une suite finie $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ se terminant avec un n-simplexe c.m.

ii) une suite infinie $\sigma_1, \ldots, \sigma_k, \ldots$ de n-simplexes i - p.c.m.

iii) une suite finie se terminant avec un (n-1)-simplexes, i - p.c.m. de la frontière différent de τ_1.

3. SUBDIVISION, MARQUAGE ET ALGORITHME SIMPLICIAL A DIMENSION VARIABLE

3.1. Introduction

Dans ce paragraphe, on introduit un concept plus général que la triangulation qu'est la subdivision en polyèdres ([5], [6], [7]).

3.2. Subdivision

Nous allons, donner une définition qui englobe toutes les propriétés de la subdivision, pour plus de détails, se reporter à la section de la triangulation.

Pour tout polyèdre c de $\mathbb{R}^n$, tous les concepts topologiques sont relatifs à la variété linéaire L(c).

Soit M un ensemble fini ou infini, mais dénombrable de polyèdres dans $\mathbb{R}^n$.

Nous définissons par :

t-polyèdre : polyèdre de dimension t

$B < C$: signifie que B est une face du polyèdre C

$M^* = \{B : B < C, C \in M\}$

$|M| = \bigcup_{C \in M} C$

Définition 3.2.1.

Un ensemble M *de* u-*polyèdre est une subdivision (de* $|M|$*) dans* $\mathbb{R}^n$*, ssi,*

i) $\forall C_1, C_2 \in M$, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ *ou* $C_1 \cap C_2$ *est une face commune de* C_1 *et* C_2.

ii) $\forall B \in M^*$, $B (n-1)$-*polyèdre, alors* B *est une face d'au plus 2* n-*polyèdres.*

iii) M *localement fini, i.e. :* $\forall x \in |M|$, $\exists V \in \underset{\mathbb{R}^n}{V(x)}$ V *coupe un nombre fini de* u-*polyèdres.*

Définition 3.2.2.

La frontière Fr(M) *de la subdivision de* $|M|$ *est l'ensemble de tous les* (n-1)*-polyèdres de* M^* *qui sont faces exactement d'un seul* n*-polyèdre de* M.

$$Fr(|M|) = \bigcup_{C \in Fr(|M|)} C \text{ , noté par } |Fr(M)|.$$

Remarque :

Si M et M' sont deux subdivisions de l'ensemble $|M|$ dans $\mathbb{R}^n$:
$\forall C' \in M', \exists C \in M : C' \subset C$, on dit que M' est plus fine que M.

Si, de plus les polyèdres de M' sont des simplexes, alors M' est un refinement simpliciale de M.

3.3. Algorithme à dimension variable sur une subdivision canonique

Pour étudier, les algorithmes simpliciaux à dimension variable, on se restreint à faire l'étude sur une subdivision canonique de $\mathbb{R}^n$, en (n+1)-cônes polyèdriques.

3.3.1. Subdivision canonique de $\mathbb{R}^n$

Soients : • $I' = \{I \subset I_{n+1} \mid |I| = n\}$; $I_{n+1} = \{1,\ldots, n+1\}$

• $\left| \begin{array}{l} e^i = \text{vecteur unitaire de } \mathbb{R}^n \\ \\ e^{n+1} = - \sum_{i=1}^{n} e_i \end{array} \right.$

• ω un point de $\mathbb{R}^n$, qui servira comme point de démarrage de l'algorithme.

On considère, la subdivision de $\mathbb{R}^n$ en cônes polyèdriques :

$$M = \{C(I) \ ; \ I \subset I_{n+1}\}$$

où $C(I) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i \in I} \lambda_i e^i, \lambda_i \geq 0, i \in I\}$

Remarques :

i) $\overset{\circ}{C}(I) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \omega - \sum_{i \in I} \lambda_i e^i, \lambda_i > 0, i \in I\}$

ii) $\dim C(I) = \text{rang } [e^i, i \in I] = |I| \Rightarrow \lambda_i$ (non nuls) sont uniques donc chaque $x \in \mathbb{R}^n$ est inférieur à un seul cône polyèdrique $C(I)$, $I \subset I_{n+1}$ avec $|I| \le n$, d'où le résultat suivant :

Corollaire 3.3.1.1.

L'ensemble des $\overset{\circ}{C}(I)$, $I \subset I_{n+1}$, $|I| \le n$ *est une partition de* $\mathbb{R}^n$; *de plus,* $C(I_1) \cap C(I_2) = C(I_1 \cap I_2)$, $\forall I_1, I_2 \in \{J \subset I_{n+1} \mid |J| \le n\}$.

3.3.2. Subdivision plus fine que la subdivision canonique

On considère, la triangulation de chaque cône polyèdrique $C(I)$ $I \subset I_{n+1}$, $|I| \le u$ par l'ensemble des i-simplexes

$\sigma(y^1, \pi(I)) = [y^1, \dots, y^{i+1}]$:

i) $y^1 = \omega + \delta \sum_{j \in I} \mu_j e^j$, $\mu_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, i$.

ii) $\pi(I) = (\pi_1, \dots, \pi_i)$ permutation des éléments de I.

iii) $y^{j+1} = y^j + \delta e^{\pi_j}$, $j = 1, \dots, i$.

Proposition 3.3.2.1.

L'ensemble des i-simplexes $\sigma(y^1, \pi(I))$ *triangularise le cône polyèdrique* $C(I)$, *si* $I \subset I_{n+1}$, $|I| \le n$ *et* $\overset{\circ}{C}(I) \neq \emptyset$.

Preuve (cf. [8])

Néanmoins, on remarque que les i-simplexes $\sigma(y^1, \pi(I))$ sont contenus dans $C(I)$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}\mu_i \in \mathbb{N},\ \delta > 0 \Rightarrow y^1 = \omega + \delta \sum\limits_{j\in I} \mu_j\, e^j \in C(I)\\ \text{ii) + iii)}\end{array}\right\} \Rightarrow y^j \in C(I),\ \forall j \geq 2\\ \hfill C(I) \text{ cône polyèdrique}\end{array}\right\} \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \sigma(y^1, \pi(I)) \subset C(I).$$

On montre, que l'ensemble des triangulations des $C(I)$, $I \in I'$, triangularise $\mathbb{R}^n$.

D'après, le corollaire 3.3.1.1., on a :

$$\left.\begin{array}{l}\mathbb{R}^n = \bigcup\limits_{I\in\{J \subset I_{n+1} \mid |I| \leq n\}} C(I)\\ I_1 \subset I_2 \Rightarrow C(I_1) \subset C(I_2)\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{R}^n = \bigcup_{I\in I'} C(I)$$

donc,

a) la réunion des n-simplexes de la triangulation de $C(I)$, $I \in I'$ est égal à $\mathbb{R}^n$.

b) Soient σ_1 et σ_2 deux n-simplexes, alors :

$$\bullet \text{ Si } \left.\begin{array}{r}\sigma_1 \text{ et } \sigma_2 \in C(I),\ I \in I'\\ \text{Prop. 3.3.2.1.}\end{array}\right\} \Rightarrow \sigma_1 \cap \sigma_2 = 0 \text{ ou } \sigma_1 \cap \sigma_2 \text{ est une}$$

face commune.

• Si $\sigma_1 \in C(I_1)$ et $\sigma_2 \in C(I_2)$, pour montrer que $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$ ou $\sigma_1 \cap \sigma_2$ est une face commune, il suffit de montrer que les triangulations de $C(I_1)$ et de $C(I_2)$ induisent la même triangulation sur $C(I_1) \cap C(I_2) = C(I_1 \cap I_2)$ (si $I_1 \cap I_2 = \emptyset \Rightarrow C(I_1) \cap C(I_2) = \{\omega\}$).

Pour cela, on considère, le théorème suivant :

Théorème 3.3.2.2.

Soient $I_1 \subsetneq I_2$, $I_2 \in I'$, *alors la triangulation* $G(I_1)$ *de* $C(I_1)$ *est la triangulation induite par la triangulation* $G(I_2)$ *de* $C(I_2)$.

Preuve :

Soit $\delta(y^1, \pi(I_2))$ un n-simplexe da la triangulation $G(I_2)$ de $C(I_2)$: $\sigma \cap C(I_1) \neq \emptyset$.

On montre que $\sigma \cap C(I_1)$ est une face des triangulations $G(I_1)$ et $G(I_2)$.

Supposons que $\sigma = y^1, \ldots, y^{n+1}$:

$$y^1 = \omega + \delta \sum_{j \in I_2} \mu_j e^j, \; \mu_j \in \mathbb{N}$$

$$y^{j+1} = y^j + \delta e^{\pi_j} = y^1 + \delta \sum_{i=1}^{j} e^{\pi_i}, \; j = 1, \ldots, n+1$$

donc, • Si $y^i \notin C(I_1) \Rightarrow y^j \notin C(I_1)$, pour $j \geq i$

et • Si $y^i \in C(I_1) \Rightarrow y^j \in C(I_1)$, pour $j \leq i$.

Par conséquent, puisque $y^1 \in C(I_1)$(car $\sigma \cap C(I_1) \neq \emptyset$), $\exists h \in \mathbb{N}$, $1 < h < n+1$: $y^1, \ldots, y^h \in C(I_1)$ et $y^{h+1}, \ldots, y^{n+1} \notin C(I_1)$.

En d'autres termes, $\sigma \cap C(I_1)$ est la face $\tau(y^1, \ldots, y^h)$ de σ pour la triangulation $G(I_2)$.

On montre, aussi que $\tau(y^1, \ldots, y^h)$ est une face de la triangulation $G(I_1)$ de $C(I_1)$. On a :

$$\left.\begin{array}{l} y^1, \ldots, y^h \in C'I_1) \\ \\ h \leq |I_1| < |I_2| = n \end{array}\right\} \Rightarrow \mu_j = 0, \text{ pour } j \notin I_1 \text{ et } \pi_j \in I_s, \; j = 1, \ldots, h-1$$

donc,

$$y^1 = \omega + \delta \sum_{j \in I_1} \mu_j e^{\pi_j}, \; \mu_j \in \mathbb{N}$$

$$y^{j+1} = y^j + \delta\, e^{\pi_j},\ j = 1,\ldots, h-1$$

et, par suite, la face $\tau(y^1,\ldots, y^h)$ est une face de tout simplexe $\sigma(y^1, \pi^*(I_1))$ de $G(I_1)$ où $\pi^*(I_1) = (\pi_1,\ldots, \pi_{h-1}, \pi^*_h,\ldots, \pi^*_{i_1})$ est une permutation de I_1.

D'où, le résultat suivant :

Corollaire 3.3.2.3.

$\mathbb{R}^n$ est triangulé par la réunion des triangulations $G(I)$ des $C(I)$, $I \in I'$.

3.3.3. Marquage

Soit G la triangulation de $\mathbb{R}^n$ décrite dans la section précédente.

$\ell : G^0 \to \{1,\ldots, n+1\}$ le marquage.

Définition 3.3.3.1.

Soit $I \subset I_{n+1}$, $|I| = i \leq n+1$, *alors un* $(i-1)$-*simplexe est* I-*complet si, les* i-*sommets de* σ *ont pour marques différentes l'ensemble* I.

Remarques :

i) $I = I_{n+1}$, si $i = n+1$, ce qui entraîne qu'un n-simplexe I_{n+1}-complet est un n-simplexe c.m.

ii) Le zéro-simplexe $[\omega]$ est $\{\ell(\omega)\}$-complet.

3.3.4. Algorithme

Etant donné, $\omega \in \mathbb{R}^n$ point de démarrage, on suppose que $\mathbb{R}^n$ est triangulé par la triangulation décrite dans les sections précédentes qui est à son tour, marquée par un marquage arbitraire ℓ.

Dans, la description de l'algorithme, le vecteur R de composantes entières représentera la "distance" entre le point de démarrage ω et le sommet y^1 du dernier simplexe $\sigma(y^1,\ldots, y^{i+1})$ engendré par l'algorithme,

i.e. : $y^1 = \omega + \delta \sum_{j=1}^{i+1} R_j\, e^j$.

L'algorithme, démarre avec ω et procède comme suit :

it 0 : poser $i=0$, $y^1=\omega$, $I=\emptyset$, $\sigma=\sigma^0(y^1, \pi(\emptyset))$, $\bar{y} = y^1$ et $R_j=0$, $j \in I_{n+1}$.

it 1 : calculer $\ell(\bar{y})$. Si $\ell(\bar{y}) \notin I$, un simplexe $I \cup \{\ell(\bar{y})\}$-complet est trouvé aller en 3).

- Sinon, $\ell(\bar{y}) = \ell(y^s)$ pour exactement un seul sommet $y^s \neq \bar{y}$ de σ. Le facet opposé à $\bar{y}$ est I-complet.

it 2 : Si $s = i+1$ et $R_{\pi_i} = 0$, aller en 4). Sinon, $\sigma(y^1, \pi(I))$ et R sont adaptés suivant la règle de remplacement (Tableau 3.3.4.) en remplaçant y^s. Retourner en 1) avec $\bar{y}$ égal au nouveau sommet de σ.

it 3 : Si $i = n+1$, un n-simplexe c.m. est trouvé et l'algorithme s'arrête. Sinon, poser $I = I \cup \{\ell(\bar{y})\}$, $\pi(I) = (\pi(I), \ell(\bar{y}))$, $\sigma = \sigma(y^1, \pi(I))$ $i = i+1$ et retourner en 1) avec $\bar{y}$ égal au nouveau sommet $y^{i+1} = y^i + \delta\, e^{\ell(\bar{y})}$.

it 4 : Supposons que $\pi_i = t$, la marque t est supprimée. Poser $I = I - \{t\}$, $\pi(I) = (\pi_1,\ldots, \pi_{i-1})$ et $i = i-1$, retourner en 2) avec y^s égal au sommet de σ qui a la marque t.

Règle de remplacement : Tableau 3.3.4.

	y^1 devient	$\pi(I)$ devient	R devient
$s = 1$	$y^1 + \delta\, e^{\pi_1}$	$(\pi_2,\ldots, \pi_i, \pi_1)$	$R + e^{\pi_1}$
$2 \le s \le i$	y^1	$(\pi_1,\ldots, \pi_s, \pi_{s-1}, \pi_{s_2},\ldots, \pi_i)$	R
$s = i+1$	$y^1 - \quad e^{\pi_i}$	$(\pi_i, \pi_1,\ldots, \pi_{i-1})$	$R - e^{\pi_i}$

On remarque que, le vecteur R est utiliser, seulement pour tester dans l'itération 2) si une marque doit être supprimée (it 4), ou non.

Chaque simplexe engendré par l'algorithme est de la forme $\sigma(y^1, \pi(I))$, $|I| = i \leq n$:

1) $y^1 = \omega + \delta \sum_{j \in I} R_j e^{\pi_j}$

2) $\pi(I) = (\pi_1, \ldots, \pi_i)$ permutation de I

3) $y^{j+1} = y^j + \delta e^{\pi_j}$, $j = 1, \ldots, i$

donc, par définition est un simplexe de la triangulation G(I) de C(I).

On montre que l'algorithme ne cycle pas.

Soit $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ la suite de simplexes engendrée par l'algorithme ; comme, il vient d'être mentionné, $\sigma_i = \sigma_i(y^1, \pi(I))$ pour un certain $I \subset I_{n+1}$, $|I| \leq n$, alors, soit que :

* σ_i admet un facet commun avec σ_{i-1} et σ_{i+1} I-complet, ou bien,

* σ_i est un facet de σ_{i-1} (ou σ_{i+1}), $(I \cup \{j\})$-complet et admettant un facet commun avec δ_{i-1} (ou δ_{i+1}) I-complet.

Si, on établi que σ^0 admet exactement un seul simplexe adjacent vérifiant l'une des deux propriétés précédentes et que σ_i, $i \geq 1$ en admet exactement deux, l'argumentation utilisée dans le théorème 2.4.2.3. nous garanti que l'algorithme ne cycle pas.

D'où :

- $\sigma(y^1, \pi(I))$ où : $y^1 = \omega$ et $I = \{\ell(\omega)\}$, est l'unique simplexe de G(I) adjacent à $\sigma_0 = [\omega]$, donc $\sigma(y^1, \pi(I))$ vérifie bien l'une des deux propriétés précédentes.

- Si $i > 1$, supposons que σ_i admet deux facets τ_1 et τ_2 I-complets.

a) Si τ_1 (ou τ_2) n'est pas contenu dans la frontière de C(I), il existe un seul simplexe adjacent à σ_i et admettant τ_1 (ou τ_2) comme facet commun avec σ_i tel que ce simplexe σ vérifie l'une des deux propriétés précédentes. σ est le i-simplexe obtenue en remplaçant le sommet opposé à τ_1 (ou τ_2).

b) Si τ_1 (ou τ_2) est sur la frontière de C(I), τ_1 (ou τ_2) est un (i-1)-simplexe de $C(I \setminus \{j\})$, I-complet pour $j \in I$ tel que τ_1 (ou τ_2) est le facet du simplexe σ_i opposé au sommet y^{i+1}, donc τ_1 (ou τ_2) est de la forme $\tau(y^1, \pi(I\setminus\{j\}))$ dans la triangulation $G(I\setminus\{j\})$, donc ce simplexe est adjacent à σ_i et vérifie l'une des deux propriétés précédentes. Et il n'existe pas d'autres simplexes adjacents à σ_i et admettant τ_1 (ou τ_2) comme facet commun ; σ_i vérifie bien l'une des deux propriétés précédentes.

- Si σ_i $(i > 1)$ est un simplexe $\sigma(y^1, \pi(I))$ de G(I), $T \cup \{j\}$-complet, alors σ_i est facet d'exactement un seul (i+1)-simplexe $\sigma(y^1, \pi(I'))$ de G(I') où $I' = I \cup \{j\}$ (d'après le théorème 2.2.9.), donc σ_i est un facet du simplexe $\sigma(y^1, \pi(I'))$ I'-complet ; donc, σ_i vérifie également l'une des deux propriétés précédentes (suivant que la marque du nouveau sommet y^{i+2} appartienne ou non à I).

4. SUR L'APPROXIMATION SIMPLICIALE DE LA SOLUTION DU PROBLEME DE LA COMPLEMENTARITE NON LINEAIRE

Cette section est consacrée à l'étude de l'approximation simpliciale de la solution du problème de la complémentarité non linéaire. Nous proposons un marquage de la triangulation de $\mathbb{R}^n_+$, l'utilisation d'un algorithme simpliciale à dimension variable basé sur ce marquage nous permet, sous certaines conditions, d'obtenir une approximation de la solution du problème de la complémentarité non linéaire. Nous donnons étalement des conditions suffisantes qui assurent la convergence de l'algorithme.

4.1. Le problème de la complémentarité non linéaire

Le problème de la complémentarité non linéaire (P.C.N.L) peut se formuler de la manière suivante :

Trouver $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x \geq 0,\ f(x) \geq 0,\ x \cdot f(x) = 0$$

où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

4.2. Triangulation de $\mathbb{R}^n_+$

Comme dans la section 3, pour trianguler $\mathbb{R}^n_+$, on considère d'abord, une subdivision de $\mathbb{R}^n_+$ en cônes polyèdriques, puis considérer un refinement simplicial de la subdivision. On obtient alors, la triangulation de $\mathbb{R}^n_+$ en considérant la réunion des triangulations des différents cônes polyèdriques de la subdivision.

4.2.1. Subdivision de $\mathbb{R}^n_+$

Soient :

- $T = \{-n, -n+1, \ldots, -1, 1, 2, \ldots, n\}$
- $Z = \{I \subset T \mid \forall i \subset I_n,\ \text{si } i \in I \Rightarrow -i \notin I\}$
- $Z' = \{I \subset Z \mid |I| = n\}$
- e^i vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$
- $e^{-i} = -e^i$
- $\omega \in \mathbb{R}^n_+$, point de démarrage de l'algorithme.

On considère, la subdivision en cônes polyèdriques de $\mathbb{R}^n_+$ suivante :

$$M = \{C(I),\ I \in Z'\}$$

où : $C(I) = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid x = \omega + \sum_{i \in I} \lambda_i e^i ; \lambda_i \geq 0,\ \forall i \in I\},\ \forall I \subset Z$

Remarques :

i) $\overset{o}{C}(I) = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid x = \omega + \sum_{i \in I} \lambda_i e^i,\ \lambda_i > 0,\ i \in I\}$.

ii) $\dim C(I) = \text{rang}[e^i,\ i \in I] = |I| \Rightarrow \lambda_i$ (non nuls) sont uniques donc, $\forall x \in \mathbb{R}_+^n$ x est intérieur a un seul cône polyèdrique $C(I)$, $I \in Z$.

Par suite on a le résultat suivant :

Corollaire 4.2.1.1.

L'ensemble $\{C(I) \mid I \subset Z\}$ *partitionne* $\mathbb{R}_+^n$.

De plus, on a : $C(I_1) \cap C(I_2) = C(I_1 \cap I_2)$

Définition 4.2.1.2.

Soit, $I \in Z$ $|I| = i$ *alors,* $G(I)$ *est l'ensemble des -simplexes* $\sigma(y^1, \pi(I)) = [y^1, \ldots, y^{i+1}]$:

i) $y^1 = \omega + \delta \sum_{i\ I} \mu_i e^i,\ \mu_i \in Z$

ii) $\pi(I) = (\pi_1, \ldots, \pi_i)$ *permutation des éléments de* I.

iii) $y^{j+1} = y^j + \delta e^{\pi_j},\ j = 1, \ldots, i$.

On montre de la même manière que dans la proposition 3.3.2.1. que $G(I)$ est une triangulation de $C(I)$.

En considérant, maintenant les cônes polyèdriques $C(I)$, $I \in Z'$ on a : le résultat suivant dont la démonstration est analogue à celle du corollaire 3.3.2.3.

Théorème 4.2.1.3.

$\mathbb{R}^n_+$ est triangulé par la réunion des triangulations $G(I)$ des $C(I)$ $I \in Z'$; de plus si $I_1 \subsetneq I_2$ alors, $G(I_1)$ est la triangulation de $C(I_1)$ induite par $G(I_2)$.

4.3. Marquage

On suppose que $\mathbb{R}^n_+$ est triangulé par la triangulation décrite dans la section précédente.

On propose, le marquage suivant :

$$\ell(x) : \begin{cases} n+1 \text{ si } x = 0,\ f(x) \geq 0 \\ j \quad \text{si } f_j(x) > 0 \text{ et } f_j(x) = \max\limits_{i \in \{k \mid x_k < 0\}} |f_i(x)| \\ -j \quad \text{si } f_j(x) < 0 \text{ et } f_j(x) = -\max\limits_{1 \leq i \leq n} |f_i(x)| \end{cases}$$

$x \in G^0$.

Définition 4.3.1.

Soit $I \in Z$, avec $|I| = i$, alors un $(i-1)$-simplexe σ est I-complet si, les i sommets de σ ont pour ensemble de marques l'ensemble I.

Définition 4.3.2.

Un $(i-1)$-simplexe σ est un simplexe j- de complémentarité pour un certain $j \in I_n$, si est I-complet et tel que j et $-j \in I$.

4.4. Algorithme

On suppose que :

- $\mathbb{R}^n_+$ est triangulé pour $\omega \in \mathbb{R}^n_+$, par la triangulation décrite dans la section précédente.

- $\forall x \in G^0$, x est marqué par la marquage proposé dans le paragraphe 4.3.

Pour engendrer, un simplexe j - de complémentarité, on utilise un algorithme simplicial à dimension variable, basé sur le marquage proposé, en l'occurence celui de Vander, laan et Talman ([8], [10]).

it 0 : Pour $t = 0$, $I = \emptyset$, $\pi(I) = \emptyset$, $y^1 = \omega$, $\sigma = \sigma(y^1, \pi(I))$, $\bar{y} = y^1$, $R_{|i|} = 0$, $i \in I$.

it 1 : Calculer $\ell(\bar{y})$. Si $\ell(\bar{y}) \notin I$, un simplexe $I \cup \{\ell(\bar{y})\}$-complet est trouvé, aller en 3).
Sinon, $\ell(\bar{y}) = \ell(y^s)$ pour exactement un seul sommet $y^s \neq \bar{y}$ de σ, le facet opposé à y^s est I-complet.

it 2 : Si $s = i+1$ et $R_{\pi_i} = 0$, aller en 4) sinon, $\omega(y^1, \pi(I))$ et R sont adaptés suivant la règle de remplacement (Tableau 4.4.1.) en remplaçant y^s, retourner en 1) avec $\bar{y}$ égal au nouveau sommet de σ.

it 3 : Poser $\ell(\bar{y}) = j$; si $-j \in I$ un simplexe j - de complémentarité est trouvé et l'algorithme s'arrête.
sinon, poser $I = I \cup \{\ell(\bar{y})\}$, $\pi(I) = (\pi(I), \ell(\bar{y}))$, $\sigma = \sigma(y^1, \pi(I))$, $i = i+1$ et retourner en 1) avec $\bar{y} = y^{i+1} + \delta\, e^{\ell(\bar{y})}$.

it 4 : Supposons que $\pi_i = t$, la marque t est supprimée. Poser $I = I\backslash\{t\}$, $\pi(I) = (\pi_1, \ldots, \pi_{i-1})$, $\sigma = \sigma(y^1, \pi(I))$, $i = i-1$ et retourner en 2) avec $\bar{y}$ égal au sommet de σ qui a la marque t.

D'après, les résultats des sections 1 et 2, aucun simplexe déjà rencontré ne se répète pas, les remplacements sont réalisables alors, l'algorithme engendre soit, un simplexe j - de complémentarité soit une suite infinie de simplexes à dimension variable.

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes qui assurent la convergence de l'algorithme, c'est-à-dire, que l'algorithme se termine avec un simplexe j - de complémentarité.

Théorème 4.4.1.

Soient, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *continue,* $\omega \in \mathbb{R}^n_+$ *point de démarrage de l'algorithme. Supposons* : $\exists r > \max\limits_{1\leq i\leq n} \omega_i$, $\exists \varepsilon > 0$: $\forall x \in Fr(B(0, r)) = \{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid \max\limits_{1\leq i\leq n} x_i = r\}$, *l'une au moins des conditions suivantes est vérifiée :*

i) $\exists i,j$: $x_i - \omega_i > 0$, $x_i > \delta$ et $f_i(x) < |f_j(x)| - \varepsilon$

ii) $\exists i,j$: $x_i - \omega_i < 0$, $x_i > \delta$ et $f_i(x) > -|f_j(x)| + \varepsilon$

Alors, l'algorithme se termine avec un simplexe j *- de complémentarité.*

Preuve :

Considérons une triangulation G de mesure δ assez petite telle que $\max\limits_{1\leq i\leq n} |f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall x, y \in \sigma$ tel que $\sigma \cap Fr(B(0, r)) \neq \emptyset$.

Supposons que l'algorithme engendre une suite $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \ldots$ infinie de simplexes à dimension variable $\Rightarrow \exists \sigma = \sigma(y^1, \pi(I))$ $I \in Z$, un simplexe de la triangulation G(I) de C(I) : $\sigma \cap Fr(B(0, r)) \neq \emptyset$.

On montre que σ n'admet pas de facet I-complet par conséquent, ne soit pas être engendré par l'algorithme.

Si la condition i) est satisfaite alors, $\forall x \in \sigma \cap Fr(B(0, r))$, $\forall y^k$ sommet de σ on a :

$$\left.\begin{array}{l} f_i(y^k) - f_i(x) < \frac{1}{2}\varepsilon \Rightarrow f_i(y^k) < f_i(x) + \frac{1}{2}\varepsilon \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{hypothèse i)} \end{array}\right\} \to f_i(y^k) < |f_j(x)| - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\big||f_j(y^k)| - |f_j(x)|\big| < |f_j(x) - f_j(y^k)| < \frac{1}{2}\varepsilon \Rightarrow |f_j(x)| < |f_j(y^k)| + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \ldots \Rightarrow f_i(y^k) < |f_j(y^k)| \longrightarrow \\ \text{Par ailleurs on a : } \left.\begin{array}{l} y_j^k - x_j > -\delta \Rightarrow y_j^k > x_j\ \delta \\ \qquad \text{Hypothèse i)} \end{array}\right\} \Rightarrow y_j^k > 0 \end{array}\right\} \quad \ldots$$

$$\left.\begin{array}{r} \ldots \Rightarrow \exists j : y_j^k > 0 \text{ et } f_j(x_j^k) < |f_j(y^k)| \;;\; 1 \le k \le i+1 \\ \text{déf. du marquage } \ell(.) \end{array}\right\} \Rightarrow i \notin I$$

or, $x_i - \omega_i > 0 \Rightarrow i \in I$ (car sinon, $x \in \sigma \subset C(I) \Rightarrow x_i = \omega_i$ ce qui est impossible) d'où la contradiction.

De même, si ii) est satisfaite on a : $x_i - \omega_i < 0 \Rightarrow -i \in I$ même démonstration que plus haut, on obtient pour $1 \le k \le i+1$.

$$\left.\begin{array}{r} f_i(y^k) - f_i(x) > -\frac{1}{2}\,\varepsilon \Rightarrow f_i(y^k) > f_i(x) - \frac{1}{2}\,\varepsilon \\ \text{hypothèse ii)} \end{array}\right\} \rightarrow f_i(y^k) > -\,|f_j(x)| + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\big||f_j(x)| - |f_j(y^k)|\big| < |f_j(x) - f_j(y^k)| < \frac{1}{2}\,\varepsilon \Rightarrow -|f_j(x)| > -|f_j(y^k)| - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left.\begin{array}{r} \ldots \Rightarrow f_i(y^k) > -|f_j(y^k)| \text{ pour } 1 \le k \le i+1 \\ \text{déf. du marquage } \ell(.) \end{array}\right\} \Rightarrow -\,i \notin I, \text{ ce qui est impossible.}$$

Donc, en démarrant l'algorithme à partir du 0-simplexe $[\omega]$, aucun simplexe engendré par l'algorithme ne quitte pas la boule
$B(0, r) = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid \max\limits_{1 \le i \le n} x_i \le r\}$.

$$\left.\begin{array}{r} \text{Par conséquent, l'algorithme se déroule dans } B(0, r) \text{ compact} \\ \text{Prop. 2.4.2.4.} \end{array}\right\} \ldots$$

... ⇒ que l'algorithme se termine en un nombre fini d'itérations avec le simplexe j - de complémentarité.

4.5. Approximation simpliciale de la solution du problème de la complémentarité non linéaire

Nous allons montrer dans ce paragraphe, qu'un simplexe j - de complémentarité est une approximation de la solution du problème de la complémentarité non linéaire.

Théorème 4.5.1.

Soit, $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ *continue,* $\varepsilon > 0$ *donné,* G *une triangulation de* $\mathbb{R}^n_+$ *de mesure* δ*, où* δ *est déterminée par* ε *et l'uniforme continuité de* f *sur* $B(0, r)$.

Alors, $\forall x \in \sigma$*,* σ *un simplexe* j *- de complémentarité, est une approximation de la solution du P.C.N.L. dans le sens suivant :*

$$f_i(x) \geq -2\varepsilon, \; i = 1,\dots, n$$

$$f_i(x) \leq 2\varepsilon, \; i \in \{j \mid x_j > 0, \; \forall x \in \sigma\}$$

Preuve :

Soit $\sigma = [y^1,\dots, y^i]$ le simplexe j - de complémentarité, et soient y^1 et y^2 les deux sommets de σ tels que $\ell(y^1) = j$ et $\ell(y^2) = -j$.

$$\max_{1 \leq i \leq n} |y_i^1 - y_i^2| \leq \delta \Rightarrow \max_{1 \leq i \leq n} |f_i(y^1) - f_i(y^2)| \leq \varepsilon$$

d'où :

$$\left.\begin{array}{r} f_j(y^1) - f_j(y^2) \leq \varepsilon \Rightarrow f_j(y^1) \leq \varepsilon + f_j(y^2) \\ \ell(y^2) = -j \Rightarrow f_j(y^2) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f_j(y^1) \leq \varepsilon$$

et

$$\left.\begin{array}{r} f_j(y^2) - f_j(y^1) \geq -\varepsilon \Rightarrow f_j(y^2) \geq -\varepsilon + f_j(y^1) \\ \ell(y^1) = j \Rightarrow f_j(y^1) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f_j(y^2) \geq -\varepsilon.$$

d'autre part on a :

- $f_i(x) - f_i(y^2) \geq -\varepsilon \Rightarrow f_i(x) \geq -\varepsilon + f_i(y^2) \geq -\varepsilon - \max\limits_{1 \leq i \leq n} |f_i(y^1)|$

$$\Rightarrow f_i(x) \geq -\varepsilon + f_j(y^2) \geq -2\varepsilon.$$

$$\left.\begin{array}{r} \bullet\ f_i(x) - f_i(y^1) \leq \varepsilon \Rightarrow f_i(x) \leq \varepsilon + f_i(y^1) \\ i \in \{j \mid x_j > 0,\ \forall x \in \sigma\} \end{array}\right\} \Rightarrow f_i(x) \leq \varepsilon + \max_{l \in \{j \mid y_j^1 > 0\}} |f_i(y^1$$

$$\Rightarrow f_i(x) \leq \varepsilon + f_i(y^1) \leq 2\varepsilon$$

donc, $\forall x \in \sigma$ on a :

$$f_i(x) \geq -2\varepsilon \quad 1 \leq i \leq n$$

$$f_i(x) \leq 2\varepsilon \quad i \in \{j \mid x_j > 0,\ \forall x \in \sigma\}$$

REFERENCES

[1] ALLGOWER. E. et GEORGE. K., *"Simplicial and continuation methods for approximating fixed points and solutions to systems of equations"*. SIAM Review 22 (1980), pp. 28-85.

[2] BAIR. J. et FOURNEAU. R., *"Etude géométrique des espaces vectoriels"*. Lecture Notes in Maths, n° 489, (1975).

[3] GOULD. F. et TOLLE. J., *"A unified approch to complementarity in optimisation"*. Discrète Maths. 7 (1974), pp. 225-271.

[4] GOULD. F. et FISHER., *"A simplicial algorithm for nonlinear complementarity problem"*. Math. Programming 6 (1974), pp. 281-300.

[5] GOULD. F., TOLLE. J. et FISHER., *"A new simplicial approximation algorithm with restarts ; Relations between convergence and labelings"*. In fixed points : algorithms and appl. S. Karamardian Ed. pp. 41-58.

[6] GARCIA. C.B., *"A hybride algorithm for computation of fixed points"*. Management science 22 (1976), pp. 606-613.

[7] KOJIMA. M. et YAMAMOTO. Y., *"Variable dimension algorithms : Basic theory, interpretations and extensions of existing methods"*. Math. Programming 24 (1982), pp. 177-215.

[8] VANDER LAAN et TALMAN., *"A class of simplicial restart fixed point algorithms without an extra dimension"*. Math. Programming 20 (1981), pp. 33-48.

[9] VANDER LAAN et TALMAN., *"A restart algorithm for computing fixed point without an extra dimension"*. Math. Programming 17 (1979), pp. 74-80.

[10] VANDER LAAN et TALMAN., *"A restart algorithm for computing fixed point in unbounded regions"*. Lecture Notes in Mathematics 730 (1979), pp. 247-256.

[11] LUTHIE. H.J., "*A simplicial approximation to a solution of the non-linear complementarity problem*". Math. Programming 9 (1975), pp. 278-293.

[12] TODD., "*The computation of fixed points and Appl.*". Lecture Notes in Economics and Math. System 129, Springer-Verlag, N.Y. 1976.

[13] SPANIER. E.H., "*Algebraic topology*". Mac Graw-Hill, N.Y. (1966).

CHAPITRE III

PROBLEME DE LA COMPLEMENTARITE GENERALISE

NOTATIONS

* Pour X un espace topologique :

  • e.v.t. espace vectoriel topologique

  • e.l.c.s. espace vectoriel topologique, localement convexe, séparé.

  • $\mathcal{V}(x)$ la famille des voisinages de x.

  • $\overset{\circ}{A}$ ($\bar{A}$, Fr(A)) l'intérieur (l'adhérence, la frontière) de $A \subset X$.

  • $C_X^A = X \backslash A$ le complémentaire de A dans X.

  • $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ($(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$) suite de points de X (une sous-suite infinie)

  • $x_n \xrightarrow[\mathbb{N}]{} x$ ($x_n \xrightarrow[\mathbb{N}']{} x$) la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (la sous-suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$) converge vers x.

  • X' (X^*) dual topologique (algébrique) de X.

* Pour $H \subset X$ et Y e.t. :

  • $\langle ., . \rangle : X \times Y \to \mathbb{R}$ forme bilinéaire.

  • $\mu(H)$ le cône polaire positif de H.

  $= \{y \in Y \mid \langle y, x \rangle \geq 0, \forall x \in H\}$

  • [H] l'enveloppe convexe de H.

* $f : X \to \mathbb{R}$:

  • s.c.s. la semi-continuité supérieure.

  • s.c.i. la semi-continuité inférieure.

1. INTRODUCTION

On considère, le problème de la complémentarité généralisé :

Trouver, $x \in X$:

$$x \in K,\ f(x) \in \Gamma(K),\ \langle x, f(x)\rangle = 0$$

où :

X est un espace vectoriel, topologique, localement convexe, séparé réel (e.l.c.s.).

Y est un espace vectoriel, topologique, réel (e.v.t.).

f une application de X à valeur dans Y.

$\langle .,\ .\rangle$ une forme bilinéaire de $X \times Y$ dans $\mathbb{R}$.

K un cône convexe, fermé de X.

$\Gamma(K)$ le cône polaire de K dans Y.

Le problème de la complémentarité généralisé, a été d'abord introduit par Habetler et Price [7]. Le travail a été repris par Karamardian ([8], [9], [10]). Il est le premier a remarqué que le problème de la complémentarité généralisé est un cas particulier des inégalités variationnelles. Et il établi l'équivalence entre le problème de la complémentarité généralisé et le problème d'inégalités variationnelles :

Trouver $x \in X$:

$$x \in K,\ \langle x' - x, f(x)\rangle \geq 0,\ \forall x' \in K$$

En utilisant le théorème d'inégalités variationnelles de Hartman et Stampacchia [11], il donne des conditions suffisantes d'existences des solutions du problème de la complémentarité généralisé (cf. [8], [9], [10]).

Par ailleurs J.J. Moré ([11], [12]) a établi l'équivalence entre le théorème d'inégalités variationnelles de Hartman et Stampacchia [11] et le théorème de point fixe de Brouwer. Et en utilisant une condition de coercivité, il donne des conditions suffisantes d'existence d'une solution du problème de la complémentarité généralisé.

G. Allen [1] est le premier, à notre connaissance, qui a utilisé le théorème de minimax de Fan [2] : $C \subset X$ convexe compact d'un e.v.t.s. réel X ; $\phi : C \times C \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(., y)$ s.c.s. et $\phi(x, .)$ convexe ; alors $\exists \bar{x} \in C$: $\phi(\bar{x}, y) \geq 0$, $\forall x \in C$. Pour obtenir des résultats d'existence du problème de la complémentarité généralisé, sous l'hypothèse d'une condition de coercivité semblable à celle de Karamardian ([8], [9], [10]).

Dans ce travail, on fournit d'abord une extension du théorème de Ky Fan ([5], [13]) à des ensembles non compacts. En utilisant, au paragraphe 3, cette extension on obtient un théorème d'existence pour le problème de la complémentarité généralisé. Nous obtenons comme conséquences immédiates le théorème de Karamardian ([8, Théorème 3.1.]) sous des hypothèses plus faibles.

Nous établissons, au paragraphe 4, une généralisation à des espaces vectoriels, topologique localement convexe, séparés réels ; les résultats en dimension finie de Karamardian [9, Théorème 4.1.] et de J.J. Moré [11, Théorème 3.2.]. Pour la classe d'applications pseudo-monotones d'une part et à des espaces de Banach réflexifs réels, des résultats en dimension finie ([10, Théorème 3.2.], [12, Théorème 3.2.]) pour la classe d'applications fortement copositives.

Finalement, au paragraphe 5, nous donnons un contre-exemple, qui montre que les hypothèses du résultat de G. Allen [1, Corollaire 1 et 2] ne sont pas suffisantes pour garantir l'hypothèse c) dans [1, Théorème 2].

2. EXTENSION DU THEOREME DE KY FAN

Nous allons donner, dans ce paragraphe, une extension du théorème de Ky Fan ([5], [13]) à des ensembles non compacts ; Cet affaiblissement, de l'hypothèse de la compacité est important, car les problèmes réels ne satisfont pas en général, une telle hypothèse.

Rappelons, le théorème de Ky Fan :

Théorème 2.1. *(Ky Fan [5], [13])*

Soit : X *e.v.t.s. réel ;* $K \subset X$ *convexe compact ;* $A \subset K \times K$ *tel que :*

1) $(x, x) \in A, \forall x \in K$

2) $\forall y \in K, \{x \in K : (x, y) \in A\}$ *fermé*

3) $\forall x \in K, \{y \in K : (x, y) \notin A\}$ *convexe (ou vide)*

Alors,

$$\exists \bar{x} \in K : \{\bar{x}\} \times K \subset A.$$

Nous donnons, le théorème suivant, qui est une extension du théorème 2.1., à des ensembles non compacts.

Théorème 2.2.

Soit, X *e.v.t.s. réel ;* $K \subset X$ *convexe fermé ;* $A \subset K \times K$ *tel que :*

i) $(x, x) \in A, \forall x \in K.$

ii) $\forall y \in K, \{x \in K : (x, y) \in A\} \cap E$ *fermé, pour tout sous-espace vectoriel* E *de* X*, de dimension finie.*

iii) $\forall x \in K, \{y \in K : (x, y) \notin A\}$ *convexe.*

iv) $\exists C \subset K$, *convexe compact :* $\forall x \in K \backslash C$, $\{y \in C : (x, y) \notin A\} \neq \emptyset$.

v) $\forall y \in K$, $\{x \in K : (x, y) \in A\} \cap C$ *fermé.*

Alors :

$$\exists \bar{x} \in K : \{\bar{x}\} \times K \subset A.$$

Preuve :

Soit $y \in K$, posons $M(y) = \{x \in K : (x, y) \in A\} \cap C$.

Nous allons montrer que $\bigcap_{y \in K} M(y) \neq \emptyset$.

• On se place d'abord, dans le cas où X est de dimension finie.

Pour montrer que $\bigcap_{y \in K} M(y) \neq \emptyset$, il suffit d'après ii) et iv) de montrer que $\bigcap_{i=1}^{n} M(y_i) \neq \emptyset$, pour toute partie finie $\{y_1, \ldots, y_n\}$ de K.

Soit : $\{y_1, \ldots, y_n\}$ une partie finie de K ; $D = [C \cup \{y_1, \ldots, y_n\}]$ enveloppe convexe de l'ensemble $\{C \cup \{y_1, \ldots, y_n\}\}$; qui est convexe et compact.

Posons : $K' = D$, $A' = K' \times K' \cap A \subset K' \times K'$.

Montrons que, pour K' et A', les hypothèses du théorème 2.1. sont vérifiées :

1) $\forall x \in K'$, $(x, x) \in A'$, en effet :

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} x \in K' \subset K \\ \text{i)} \end{array}\right\} \Rightarrow (x, x) \in A \\ \\ (x, x) \in K' \times K' \end{array}\right\} \Rightarrow (x, x) \in A \cap K' \times K' = A'.$$

2) $\forall y \in K'$, $\{x \in K' : (x, y) \in A'\} = \{x \in K' : (x, y) \in A\} \cap \{x \in K' : (x, y) \in K' \times K'$

$$\left.\begin{array}{l} = \{x \in K : (x, y) \in A\} \cap K' \\ \qquad K' \text{ compact} \\ \qquad \text{Hypo. ii)} \end{array}\right\} \ldots$$

$\ldots \Rightarrow \{x \in K' : (x, y) \in A'\}$ fermé.

3) $\forall x' \in K'$, $\{y \in K' : (x, y) \notin A'\} = \{y \in K' : (x, y) \notin A\}$

$$\left.\begin{array}{l} = \{y \in K : (x, y) \notin A\} \cap K' \\ \qquad K' \text{ convexe} \\ \qquad \text{Hypo. iii)} \end{array}\right\} \ldots$$

$\ldots \Rightarrow \{y \in K' : (x, y) \notin A'\}$ convexe.

Alors, d'après le théorème 2.1. on a :

$$\exists \bar{x} \in K' = D : (\bar{x}, y) \in A' \subset A, \ \forall y \in D \qquad (1)$$

En particulier :

$$\exists \bar{x} \in K' = D : (\bar{x}, y_i) \in A, \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{de plus, } \bar{x} \in C, \text{ car sinon, } \bar{x} \in D\backslash C \\ \text{Hypo. iv)} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists y \in C : (\bar{x}, y) \notin A.$$

$$\left.\begin{array}{r} \ldots \Rightarrow \exists y \in C : (\bar{x}, y) \notin A \cap K' \times K' \\ (1) \end{array}\right\} \text{impossible.}$$

Donc, $\exists \bar{x} \in C : (\bar{x}, y_i) \in A$, $i = 1, \ldots, n$.

C'est-à-dire que $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^{n} M(y_i)$.

Dans, le cas général, nous adaptons, la méthode de H. Brezis, Niremberg et Stampacchia [2] à notre situation.

Soit, $(E_i)_{i\in I}$ la famille de tous les sous-espaces vectoriels E_i de X de dimensions finies. Comme, $\forall E_i, E_j, \exists E_k = E_i + E_j$ tel que $E_i \subset E_k$ et $E_j \subset E_k$, on induit sur I l'ordre suivant :

$i \geq j \iff E_i \supset E_j$ telle que la famille $(E_i)_{i\in I}$ soit ordonnée croissante.

En se restreignant à E_i, posons : $K_i = K \cap E_i$; $A_i = A \cap E_i \times E_i$; $M_i(y) = M(y) \cap E_i$.

D'après, la première partie de la démonstration, on a : $\bigcap\limits_{y\in K_i} M_i(y) \neq \emptyset$.

C'est-à-dire, $\exists \bar{x}_i \in C \cap E_i$: $(\bar{x}_i, y)$: A_i, $\forall y$: K_i

Posons :

$Z_i = \bigcup\limits_{j\geq i} \{\bar{x}_j\}$; comme la famille $(E_i)_{i\in I}$ est ordonnée par inclusion,

alors, $\forall \bar{x} \in Z_i$, on a : $\bar{x} \in M_i(y) \subset M(y)$, $\forall y \in K_i$; par conséquent, on a :

$Z_i = \bigcap\limits_{y\in K_i} M(y) \subset C$.

Nous allons, montrer que la famille $\{\overline{Z}_i \mid i \in I\}$ de fermés de C, possède la propriété d'intersection finie.

Soit $\{i_1,\ldots, i_k\}$ une partie finie de I, alors $\bigcap\limits_{j=1}^{k} Z_{i_j} = Z_{\sup\limits_{j=1,\ldots,k}\{i_j\}} \neq \emptyset$.

donc, on a :

$$\emptyset \neq \bigcap_{j=1}^{k} Z_{i_j} \subset \bigcap_{j=1}^{k} \overline{Z}_{i_j}.$$

par conséquent, on a $\bigcap\limits_{i\in I} \overline{Z}_i \neq \emptyset \Rightarrow \exists \bar{z} \in \bigcap\limits_{i\in I} \overline{Z}_i$.

de plus, $\bar{z} \in K$ (car, $\overline{Z}_i \subset C \subset K$). Soit, maintenant, $E_{i_0} = \mathbb{R}\bar{z}$ le sous-espace vectoriel de X, de dimension finie contenant $\bar{z}$.

Considérons, $y_1 \in K$ un point arbitraire. On peut toujours trouvé un sous-espace vectoriel $E_{i_1} = E_{i_0} + \mathbb{R}y_1$ de X, de dimension finie et contenant y_1 tel que $E_{i_1} \supset E_{i_0}$. C'est-à-dire, $\exists i_1 \geq i_0 : y_1 \in E_{i_1}$.

Par suite, on a :

$$\bar{z} \in \bar{Z}_{i_1} \cap E_{i_0} \subset Z_{i_1} \cap E_{i_1} \subset \Big(\bigcap_{y \in K_{i_1}} M(y)\Big) \cap E_{i_1} \subset \bigcap_{y \in K_{i_1}} M(y) \subset M(y_{i_1})$$

Par conséquent, $\bar{z} \in \bigcap_{y \in K} M(y)$, donc $\bigcap_{y \in K} M(y) \neq \emptyset$.

c.q.f.d.

Remarques :

i) Les conditions ii) et v) sont un affaiblissement de l'hypothèse de la fermeture de l'ensemble $\{x \in K : (x, y) \in A\}$ dans le théorème 2.1.

ii) La condition iv) est la condition de coercivité qui remplace l'hypothèse de la compacité dans le théorème 2.1.

Corollaire 2.3. (*G. Allen* [1, *théorème* 2])

Soit, X *e.v.t.s. réel,* $K \subset X$ *convexe fermé ;* $\phi : K \times K \to \mathbb{R}$.

On suppose que :

a) $\phi(x, x) \geq 0, \forall x \in K$.

b) $\forall y \in K$, *la fonction* $x \to \phi(x, y)$ *est s.c.s. sur* K

c) $\forall x \in K$, *la fonction* $y \to \phi(x, y)$ *est quasi-convexe*

d) $\exists c \subset K$, *convexe compact :* $\forall x \in K \supset C, \exists y \in C : \Phi(x, y) > 0$

Alors :

$$\exists \bar{x} \in C : \phi(\bar{x}, y) \geq 0, \forall y \in K.$$

<u>Preuve</u> :

Posons : $A = \{(x, y) \in K \times K : \phi(x, y) \geq 0\}$

Montrons que, les hypothèses du théorème 2.2. sont satisfaites :

i) $\forall x \in K$, on a : $\phi(x, x) \geq 0$, $\forall x \in K$, d'après a), donc $(x, x) \in A$, $\forall x \in K$.

ii) $$\left.\begin{array}{r} \forall y \in K,\ \{x \in K : (x, y) \in A\} = \{x \in K : \phi(x, y) \geq 0\} \\ \text{Hypo. b)} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \{x \in K : \\ (x, y) \in A\} \text{ fe} \end{array}$$

par suite, $\{x \in K : (x, y) \in A\} \cap E$ est fermé, pour tout sous-espace vectoriel E de X, de dimension finie.

iii) $$\left.\begin{array}{r} \forall x \in K,\ \{y \in K : (x, y) \notin A\} = \{y \in K : \phi(x, y) < 0\} \\ \text{Hypo. c)} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \{y \in K : (x, y) \notin \\ \text{convexe.} \end{array}$$

iv) Hypo. c) $\Rightarrow \exists c \subset K$, convexe, compact : $\forall x \in K \backslash C$, $\exists y \in C : \phi(x, y) < 0$,

$\Rightarrow \forall x \in K \backslash C$, $\{y \in C : (x, y) \notin A\} \neq \emptyset/$

v) $$\left.\begin{array}{r} \forall y \in K,\ \{x \in K : (x, y) \in A\} \cap C = \{x \in C : \phi(x, y) \geq 0\} \\ c \subset K \\ \text{Hypo. b)} \end{array}\right\} \ldots$$

$\ldots \Rightarrow \forall y \in K$, $\{x \in K : (x, y) \in A\} \cap C$ fermé.

Donc, d'après le théorème 2.2., on a :

$$\exists \bar{x} \in K : (\bar{x}, y) \in A, \ \forall y \in K$$

c'est-à-dire : $\exists \bar{x} \in K : \phi(\bar{x}, y) \geq 0$, $\forall y \in K$.

3. PROBLEME DE LA COMPLEMENTARITE GENERALISE

Le problème de la complémentarité généralisé, a déjà été introduit et étudié par Habetter et Price [7] dans le cas des espaces vectoriels de dimension finie, et par S. Karamardian [8], G. Allen [1] et W. Takahashi [14] dans le cas des espaces vectoriels topologiques, localement convexes, séparés réels (e.l.c.s.).

En utilisant, l'extension du theorème de Ky Fan, que nous avons introduite dans le paragraphe 2, nous obtenons les mêmes résultats que dans Karamardian [8] et G. Allen [1] sous des hypothèses plus faibles.

Soient : X e.l.c.s. réel.

Y e.v.t. réel.

$f : X \to Y$ application.

$\langle .,. \rangle : X \times Y \to \mathbb{R}$ forme bilinéaire

K cône convexe fermé de X

$\Gamma(K) = \{y \in Y \mid \langle x, y\rangle \geq 0, \forall x \in K\}$ cône polaire de K.

Le problème de la complémentarité généralisé (P.C.G.(K, f)) est de trouver $x \in K$:

$$x \in K,\ f(x) \in \Gamma(K),\ \langle x, f(x)\rangle = 0 \tag{I}$$

ou, alternativement

$$x \overset{K}{\geq} 0,\ f(x) \overset{\Gamma(K)}{\geq} 0,\ \langle x, f(x)\rangle = 0$$

où :

$\overset{K}{\geq}$ (resp. $\overset{\Gamma(K)}{\geq}$) est le préordre induit par K (resp. par $\Gamma(K)$)

sur X (resp. sur Y). $x \overset{K}{\geq} y \iff x - y \in K$ (resp. $x \overset{\Gamma(K)}{\geq} y \iff x - y \in \Gamma(K)$).

Nous rappelons, le lemme dû à Karamardian [8] qui montre l'équivalence, entre le problème de la complémentarité généralisé et le problème d'inégalités variationnelles.

Le problème d'inégalités variationnelle P.I.V.(K, f) est de trouver $x \in X$:

$$x \in K, \langle x' - x, f(x)\rangle \geq 0, \forall x' \in K \tag{II}$$

<u>*Lemme 3.1.*</u> *(Karamardian [8])*

Le problème de la complémentarité généralisé P.I.V.(K, f) *est équivalent au problème d'inégalités variationnelles* P.I.V.(K, f).

<u>Preuve</u> :

i) l'implication $\Rightarrow$

Si $\bar{x} \in K$ est une solution du P.C.G.(K, f), on aura :

$$\bar{x} \in K, f(\bar{x}) \in \Gamma(K), \langle \bar{x}, f(\bar{x})\rangle = 0$$

ce qui entraîne :

$$\langle x - \bar{x}, f(\bar{x})\rangle = \langle x, f(\bar{x})\rangle \geq 0, \forall x \in K.$$

donc, on a :

$$\bar{x} \in K, \langle x - \bar{x}, f(\bar{x})\rangle \geq 0, \forall x \in K.$$

ii) l'implication $\Leftarrow$

Si $\bar{x} \in K$, est une solution du P.I.V.(K, f), on aura :

$$\bar{x} \in K, \langle x - \bar{x}, f(\bar{x})\rangle \geq 0, \forall x \in K \tag{III}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} \bullet\ 0 \in K \\ (II) \end{array}\right\} \Rightarrow \langle \bar{x}, f(\bar{x})\rangle \leq 0 \\ \\ \left.\begin{array}{r} \bullet\ x = 2\bar{x} \\ (II) \end{array}\right\} \Rightarrow \langle \bar{x}, f(\bar{x})\rangle \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \langle \bar{x}, f(\bar{x})\rangle = 0.$$

d'autre part, on a : $\langle x, f(\bar{x})\rangle = \langle x-\bar{x}, f(\bar{x})\rangle \geq 0$, $\forall x \in K \Rightarrow f(\bar{x}) \in \Gamma(K)$.

donc, on a :

$$\bar{x} \in K,\ f(\bar{x}) \in \Gamma(K),\ \langle \bar{x}, f(\bar{x})\rangle = 0.$$

On peut, maintenant donner, une condition suffisante d'existence des solutions du problème de la complémentarité généralisé.

Théorème 3.2.

Soient, X *e.l.c.s. réel ;* Y *e.v.t. réel ;* $K \subset X$ *cône convexe fermé ;*

$f : K \to Y$ *application. On suppose que :*

1) $\exists C \subset K$, *convexe compact :* $\forall x \in K\backslash C$, $\exists y \in C$: $\langle y-x, f(x)\rangle < 0$

2) $\forall y \in K$, *on a :*

i) *l'application* $x \in K \to \langle y-x, f(x)\rangle$ *s.c.s. sur* $K \cap E$, *pour tout sous-espace* E *de* X *de dimension finie.*

ii) *l'application* $x \quad K \to \langle y-x, f(x)\rangle$ *s.c.s. sur* C.

Alors :

$$\exists \bar{x} \in X : \bar{x} \in K,\ f(\bar{x}) \in \Gamma(K),\ \langle \bar{x}, f(\bar{x})\rangle = 0$$

Preuve :

Posons, $A = \{(x, y) \in K \times K : \langle y-x, f(x)\rangle \geq 0\}$

Montrons que A vérifie les hypothèses du théorème 2.2.

i) $(x, x) \in A$, $\forall x \in K$.

ii) Soient, $y \in K$; E sous-espace vectoriel de X de dimension finie ; alors :

$$\left.\begin{array}{r} \{x \in K : \langle y - x,\ f(x)\rangle \geq 0\} \cap E = \{x \in K \cap E : \langle y - x,\ f(x)\rangle \geq 0\} \\ \text{Hypo. 2. i)} \end{array}\right\} \ldots$$

$\ldots \Rightarrow \{x \in K : \langle y - x,\ f(x)\rangle \geq 0\} \cap E$ est fermé.

iii) Soit $x \in K$, $\{y \in K : (x,\ y) \notin A\} = \{y \in K : \langle y - x,\ f(x)\rangle < 0\}$ est convexe.

iv) Est vérifiée d'après 1).

v) Soit $y \in K$, $\left.\begin{array}{r} \{x \in K : \langle y - x,\ f(x)\rangle \geq 0\} \cap C = \{x \in C : \langle y - x,\ f(x)\rangle \geq 0\} \\ \text{Hyp. 2. ii)} \end{array}\right\}.$

$\ldots \Rightarrow \{x \in K : \langle y - x,\ f(x)\rangle \geq 0\} \in C$ est fermé.

donc, d'après le théorème 2.2., on a :

$$\left.\begin{array}{c} \exists \bar{x} \in K : \langle y - \bar{x},\ f(\bar{x})\rangle \geq 0,\ \forall y \in K \\ \text{lemme 3.1.} \end{array}\right\} \ldots$$

$\ldots \Rightarrow \exists \bar{x} \in X : \bar{x} \in K,\ f(\bar{x}) \in \Gamma(K),\ \langle \bar{x},\ f(\bar{x})\rangle = 0.$

<u>Remarques</u> :

i) On a, le théorème d'existence de Karamardian [8, théorème 3.1.], sous l'hypothèse 2) plus faible que l'hypothèse correspondante i) dans [8, théorème 3.1.].

ii) Dans, le paragraphe 5, nous donnerons, un contre-exemple, montrons que la condition i) dans G. Allen [1, corollaire 1 et 2] n'est pas suffisante pour garantir l'hypothèse c) dans [1, théorème 2].

4. GENERALISATION DES RESULTATS DE KARAMARDIAN ET MORE

Nous allons, généralisé à des e.l.c.s. réels en dualités, les résultats en dimension finie de Karamardian ([9], [10]) et Moré ([11], [12]) pour la classe d'applications monotones, pseudomonotones et copositives.

Nous rappelons d'abord, la définition d'espaces vectoriels topologiques, localement convexes réels en dualités.

Définition 4.1.

On dit que deux espaces vectoriels X *et* Y *sont mis en dualité par la forme bilinéaire* $<.,.>$ *si :*

- $\forall x \in X$, $x \neq 0$, $\exists y \in Y : <x, y> \neq 0$.

- $\forall y \in Y$, $y \neq 0$, $\exists x \in X : <x, y> \neq 0$.

Définition 4.2.

La topologie d'e.l.c. sont (resp. sur Y*) est compatible avec la dualité si :*

- $\forall y \in Y$ *(resp.* $x \in X$*), l'application* $x \to <x, y>$ *(resp.* $y \to <x, y>$*) est continue.*

- *Toute fonctionnelle linéaire continue* $\phi : X \to \mathbb{R}$ *(resp.* $Y \to \mathbb{R}$*) peut être représenté, c'est-à-dire :* $\exists !\ y \in Y$ *(resp.* $Y \in \mathbb{R}$*) :* $\phi(x) = <x, y>$ *(resp.* $\phi(y) = <x, y>$*).*

L'exemple, le plus usuel d'e.v.t. en dualité avec des topologies compatibles est celui d'un e.l.c.s. réel et de son dual topologique.

Dans tout ce qui suit :

- Sur X (resp. Y), la topologie la plus faible compatible avec la dualité, sera notée par $\sigma(X, Y)$ (resp. $\sigma(Y, X)$).

• Sur X (resp. Y), la topologie forte compatible avec la dualité sera notée par $\tau(X, Y)$ (resp. $\tau(Y, X)$).

4.3. Applications monotones et pseudomonotones

Soient X et Y deux e.l.c. réels, mis en dualité par la forme bilinéaire $\langle\cdot, \cdot\rangle$; $K \subset X$ sous-ensemble ; $f : K \to Y$ l'application.

Définition 4.3.1.

i) On dit que f *est une application monotone sur* K, *si :*

$$\langle x - y, f(x) - f(y)\rangle \geq 0, \forall x, y \in K.$$

ii) On dit que f *est strictement monotone sur* K, *si :*

$$\langle x - y, f(x) - f(y)\rangle > 0, \forall x, y \in K.$$

Définition 4.3.2. (Karamardian [9])

On dit que f *est une application pseudomonotone sur* K, *si :*

$$\forall x, y \in K, \langle x - y, f(y)\rangle \geq 0 \Rightarrow \langle x - y, f(x)\rangle \geq 0.$$

Propriété 4.3.3.

f *monotone* $\Rightarrow$ f *est pseudomonotone.*

Lemme 4.3.4. (Karamardian [9])

$f : K \to Y$ *pseudomonotone*

Alors, $\forall x, y \in K$ *on a :* $\langle x - y, f(y)\rangle > 0 \Rightarrow \langle x - y, f(x)\rangle > 0.$

4.4. Problème de la complémentarité généralisé pour les applications pseudo-monotones

Soient : X et Y deux e.l.c. réels en dualité.

$f : X \to Y$ application
$K \subset X$, cône convexe fermé
X est muni de la topologie $\sigma(X, Y)$
Y est muni de la topologie $\tau(Y, X)$

Le problème de la complémentarité généralisé P.C.G(K, f) est de trouver $x \in X$:

$$x \in K,\ f(x) \in \Gamma(K),\ \langle x, f(x)\rangle = 0 \tag{I}$$

Définition 4.4.1.

i) On dit que le P.C.G(K, f) *est réalisable, si* $\exists x \in X : x \in K$ *et* $f(x) \in \Gamma(K)$.

ii) On dit que le P.C.G(K, f) *est strict réalisable, si* $\exists x \in X : x \in K$ *et* $f(x) \in \overset{\circ}{\Gamma}(K)$.

Nous allons rappeler, un théorème de Ky Fan [4] qu'on utilisera dans la suite :

Théorème 4.4.2. (Ky Fan [4])

Soient X *et* Y *deux e.l.c.s. réels en dualité ;* $K \subset X$ *sous-ensemble.*

On suppose que : • K *est fermé pour la topologie* $\sigma(X, Y)$

• $\overset{\circ}{\Gamma}(K) \neq 0$ *est fermé pour la topologie* $\tau(Y, X)$

Alors, K *est complet et localement compact pour la topologie* $\sigma(X, Y)$. *Si, de plus,* $\exists h \in \overset{\circ}{\Gamma}(K)$: h *(en tant que fonctionnelle linéaire) est bornée sur* X. *Alors,* K *est compact pour la topologie* $\sigma(X, Y)$.

Nous donnons, maintenant, le théorème qui généralise à des e.l.c en dualité le résultat de Karamardian [9, theorème 4.1.] et de Moré [11, théorème 3.2.].

Théorème 4.4.3.

Soient : X *e.l.c.s. réel,* X' *son dual topologique,* $K \subset X$ *cône convexe fermé* $f : K \to X'$ *application pseudomonotone.*

On suppose que :

1) $\exists x_0 \in X : x_0 \in K$ *et* $f(x_0) \in \mathring{\Gamma}(K)$.

2) $\forall y \in K$, *on a :*

i) $x \to \langle y - x, f(x) \rangle$ *est s.c.s. sur* $K \cap E$, *pour tout sous-espace* E *de* X *de dimension finie.*

ii) $x \to \langle y - x, f(x) \rangle$ *est s.c.s. sur tout sous-ensemble compact de* K.

Alors,

$$\exists \bar{x} \in X : \bar{x} \in K,\ f(\bar{x}) \in \Gamma(K),\ \langle \bar{x}, f(\bar{x}) \rangle = 0.$$

Preuve :

Posons $C = \{x \in K : \langle x - x_0, f(x_0) \rangle \leq 0\}$

alors on a :

- C convexe, fermé pour la topplogie $\sigma(X, Y)$
- $f(x_0) \in \mathring{\Gamma}(K) \subset \mathring{\Gamma}(C)$
- $\forall x \in C$, on a : $\langle x, f(x_0) \rangle \leq \langle x_0, f(x_0) \rangle$

$$\Rightarrow 0 \leq \langle x, f(x_0) \rangle \leq \langle x_0, f(x_0) \rangle$$

théorème 4.4.2.

$$\left.\begin{array}{r} \ldots \Rightarrow C \text{ est un compact pour la topologie } \sigma(X, Y) \\ (a) \end{array}\right\} \ldots$$

$\ldots \Rightarrow C$ est un convexe compact pour la topologie $\sigma(X, Y)$.

D'autre part, on a :

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \forall x \in K\setminus C \Rightarrow \langle x - x_0, f(x_0)\rangle > 0 \\ f \text{ pseudomonotone} \\ \text{lemme 4.3.3.} \end{array}\right\} \Rightarrow \langle x - x_0, f(x)\rangle > 0 \\ \text{Hyp. 2)} \\ \text{théorème 2.2.} \end{array}\right\} \ldots$$

$\ldots \Rightarrow \exists \bar{x} \in X : \bar{x} \in K,\ f(\bar{x}) \in \Gamma(K),\ \langle \bar{x}, f(\bar{x})\rangle = 0.$

Remarque :

• On a, le théorème de G. Allen [1, théorème 4] sous l'hypothèse 2) plus faible que l'hypothèse correspondant à i).

4.5. Applications fortement monotones et fortement copositives

Soit X un espace de Banach réflexif réel (de norme $||\cdot||$) :

X' son dual (de $||\cdot||'$)

$K \subset X$ sous-ensemble

$f : X \to X'$ application.

Définition 4.5.1.

On dit que f est fortement monotone sur K, si :

$$\exists \alpha > 0 : \forall x, y \in K, \langle x - y, f(x) - f(y)\rangle \geq \alpha ||x - y||^2$$

Définition 4.5.2.

i) On dit que f *est copositive sur* K, *si :*

$\forall x \in K$, *on a* : $\langle x, f(x) - f(0)\rangle \geq 0$.

ii) On dit que f *est strictement copositive sur* K; *si :*

$\forall x \in K$, *on a* : $\langle x, f(x) - f\text{-}0)\rangle > 0$.

iii) On dit que f *est fortement copositive sur* K, *si :*

$\exists \alpha > 0 : \forall x \in K$, *on a* : $\langle x, f(x) - f(0)\rangle \geq \alpha||x||^2$.

On a, le lemme suivant, qui est une conséquence immédiate des définitions données plus haut.

Lemme 4.5.3.

Si f *est monotone (resp. strict. monotone, ou fortement monotone) alors,* f *est copositive (resp. strict. copositive, ou fortement copositive).*

4.6. Problème de la complémentarité généralisé pour les applications fortement copositives

Nous donnons, le théorème qui généralise à des espaces de Banach réflexifs réels, le résultat de Karamardian [10, théorème 3.2.] et de Moré [12, théorème 3.2.].

Théorème 4.6.1.

Soient, X *espace de Banach réflexif réel,* X' *son dual topologique,* $K \subset X$ *cône convexe fermé ;* $f : K \to X'$ *fortement copositive.*

On suppose que :

$$\left.\begin{array}{l} \text{donc, } \forall x \in K\backslash C,\ \exists 0 \in C : \langle 0 - x, f(x)\rangle < 0 \\[1em] \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{Hyp. 1)} \\[1em] \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{Théorème 2.2.} \end{array}\right\} \ldots$$

$\ldots \Rightarrow \exists \bar{x} \in X$:

$$\bar{x} \in K,\ f(\bar{x}) \in \Gamma(K),\ \langle \bar{x}, f(\bar{x})\rangle = 0.$$

5. CONTRE-EXEMPLE

Nous allons, montrer par un contre-exemple, que la condition i) dans le résultat de G. Allen ([1, Corollaire 1], [1, Corollaire 2]) n'est pas suffisante pour garantir la condition c) dans [1, théorème 2].

Résultat :

Soient, X e.v.t.s. réel, X^* son dual, $\langle \bullet, \bullet \rangle : X \times X^* \to \mathbb{R}$ forme bilinéaire ; $K \subset X$ convexe, $\psi : X \to]-\infty, +\infty]$, $\not\equiv +\infty$, convexe, s.c.i. ; $f : K \to X^*$ application.

On suppose que :

i) $x \to \langle x, f(x)\rangle$ s.c.i. sur X.

ii) $\exists C \subset K$, convexe compact : $\forall x \in K\backslash C$, $\exists y \in C$: $\langle x - y, f(x)\rangle > \Psi(y) - \Psi(x)$.

Alors ; $\exists \bar{x} \in X$:

$$\bar{x} \in K,\ \langle \bar{x} - y, f(\bar{x})\rangle \leq \psi(y) - \psi(\bar{x}),\ \forall y \in K.$$

Exemple :

$X = \mathbb{R}^2$, $K = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 1,\ x_2 \geq 0\}$; $\psi \equiv 0$.

On considère, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

1) $\forall y \in K$, *on a :*

i) $x \to \langle y - x, f(x)\rangle$ *s.c.s. sur* $K \cap E$, *pour tout sous-espace* E *de* X *de dimension finie.*

ii) $x \to \langle y - x, f(x)\rangle$ *s.c.s. sur tout sous-ensemble compact de* K.

Alors, $\exists \bar{x} \in X$:

$$\bar{x} \in K,\ f(\bar{x}) \in \Gamma(K),\ \langle \bar{x}, f(\bar{x})\rangle = 0.$$

Preuve :

f fortement copositive $\Rightarrow \exists \alpha > 0 : \forall x \in K,\ \langle x, f(x) - f(0)\rangle \geq \alpha ||x||^2$

• Si $f(0) = 0$, alors 0 est une solution du P.C.G(K, f).

• Si non, $f(0) \neq 0$, posons :

$$C = \{x \in K : ||x|| \leq ||f(0)||'/\alpha\}$$

alors, on a :

• C convexe, fermé, borné, donc convexe compact.

• $x \in K\backslash C \Rightarrow \alpha ||x||^2 > ||x||\ ||f(0)||'$

$$\Rightarrow \alpha ||x||^2 - ||x||\ ||f(0)||' > 0.$$

D'autre part :

$\langle x, f(x)\rangle \geq \alpha ||x||^2 - \langle x, f(0)\rangle$

$$\alpha ||x||^2 - ||x||\ ||f(0)||' > 0$$

$$\left| \begin{array}{l} f_1(x) = x_1 + x_2\ \phi(x_2) \\ \\ f_2(x) = x_2 - \phi(x_2) \end{array} \right.$$

où : $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\phi(t) = \begin{cases} t+1 & t \in [0, \beta[,\ \beta > 1 \\ \frac{2\beta+1}{2} & t = \beta \\ 1 & t > \beta \end{cases}$$

Il est clair, que cette fonction n'est si s.c.i, ni s.c.s. en .

Posons :

$C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 1,\ 0 < \alpha \leq x_2 \leq \beta\}$ convexe compact de K.

Nous allons montrer que les hypothèses du résulata de G. Allen sont satisfaites.

i) $\forall x \in K$, on a :

$$\begin{aligned} \langle x, f(x)\rangle &= x_1(x_1 + x_2\ \phi(x_2)) + x_2(x_2 - \phi(x_2)) \\ &= 1(1 + x_2\ \phi(x_2)) + x_2(x_2 - \phi(x_2)) \\ &= 1 + x_2^2 \end{aligned}$$

donc, $\forall x \in K,\ x \to \langle x, f(x)\rangle = 1 + x_2^2$ est continue.

ii) Vérifions, maintenant que : $\forall x \in K\backslash C,\ \exists y \in C : (x-y) \cdot f(x) > 0$.

- Si, $x \in K\backslash C : x_2 \in [0, \alpha[,\ \exists y = (1, \alpha) \in C$:
  $\langle x-y, f(x)\rangle = (x_2 - \alpha)(x_2 - x_2 - 1) = (\alpha - x_2) > 0$.

- Si, $x \in K\ C : x_2 > \beta,\ -y = (1, \beta) : \langle x-y, f(x)\rangle = (x_2 - \beta) \cdot (x_2 - 1) > 0$.

Donc, les hypothèses i) et ii) du résultat de G. Allen sont vérifiées.

Cependant :

- $\forall x \in C \setminus \{(1, \beta)\}$, $\exists y = (1, \beta) \in K : \langle x - y, f(x) \rangle = 2\beta - x_2 > 0$.

- $x = (1, \beta)$, $\exists y = (1, 2\beta) : \langle x - y, f(x) \rangle = (\beta - 2\beta)(\beta - \frac{2\beta+1}{2}) = \frac{\beta}{2} > 0$.

donc, $\forall x \in C$, $\exists y \in K : \langle x - y, f(x) \rangle > 0$.

Ce qui contredit, la conclusion de G. Allen ([1, corollaire 1, 2]).

REFERENCES

[1] ALLEN G. *"Variational inequalities, complementarity problems, and duality theorems"*. J. Math. Anal. and Appl. 58 (1977), pp. 1-10.

[2] BREZIS H, NIREMBERG et STAMPACCHIA. *"A remark on Ky Fan's minimax principle"*. Boll. Un. Maths. Italy 6 (1972), pp. 293-300.

[3] DUGUNDJI J. et GRANAS A. *K.K.M. maps and variational inequalities"*. Ann. Sc. normal. Sup. Pisa CI. Sci. 5(4), (1978), pp. 679-682.

[4] FAN K. *"A generalization of the alaoglu-Bourkaki theorem and its applications"*. Maths. Z. 88 (1965), pp. 48-60.

[5] FAN K. *"A generalization of Tychonoff's fixed point theorem"*. Maths. Ann. 142 (1961), pp. 305-310.

[6] GWINNER J. *"On fixed point and variational inequalities, a circular tour, Non-linear Analysis, theory"*. Methods et Appl. 5 (1980), pp. 565-583.

[7] HABETLER J. et PRICE J. *"Existence theory for generalized non-linear complementarity problems"*. J. Optimiz. Theory Appl. 7 (1971), pp. 229-239.

[8] KARAMARDIAN S. *"The genralized complementarity problems"*. J. Opt. Theory Appl. 8(1971) pp. 161-168.

[9] KARAMARDIAN S. *"Complementarity problems over cônes with monotones and pseudomonotones maps"*. J. Optimiz. Theory Appl. 8 (1976), pp. 499-506.

[10] KARAMARDIAN S. *"The nonlinear complementarity problems and appl."*. Part I et Part II ; J. Opti. Theory and Appl. 4 (1961), pp. 87-98 ; 167-181.

[11] MORE J.J. *"Classes of functions and feasibility conditions in non-linear complementarity problems"*. Maths. Prog. 6 (1975) pp. 327-338.

[12] MORE J.J. *"Coencivity conditions in non-linear complementarity problems"*. SIAM Rev. 16 (1974), pp. 1-16.

[13] ITOH, TAKAMASHI, YANAGI. *"Variational inequalities and complementarity problems"*. J. Math. Sci. Japan 30 (1978), pp. 23-28.

[14] TAKAHASHI. *"Non-linear compl. Problem and Syst. of convex inequalities"*. J. Opt. Theory. Appl. 24 (1978), pp. 499-606.

CHAPITRE IV

EXTENSION DU PROBLEME DE

LA COMPLEMENTARITE GENERALISE

NOTATIONS

* Pour X un espace topologique :

  - $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.
  - $\mathcal{V}(X)$ la famille des voisinages de x.
  - $C^A = X \setminus A$ le complémentaire de A dans X.
  - $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ($(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$) une suite de points de X (une sous-suite infinie).
  - $x_n \xrightarrow[\mathbb{N}]{} x$ ($x_n \xrightarrow[\mathbb{N}]{} x$) la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (la sous-suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$) converge vers x.
  - X' (X^*) dual topologique (algébrique) de X.
  - $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times Y \to \mathbb{R}$ forme bilinéaire.

* Pour $H \subset X$ et $K \subset X$:

  - $[H]$ l'enveloppe convexe de H.
  - $\Gamma(H)$ le cône polaire positif de H.

    $= \{y \in Y \mid \langle y, x\rangle \geq 0,\ \forall x \in H\}$.
  - $\mathrm{int}_K(H)$ l'intérieur topologique de H relativement à K.
  - $i_K(H)$ l'intérieur algébrique de H relativement à K.

* Pour $f : X \to \mathcal{P}(Y)$:

  - s.c. la sup-continuité : f s.c. en x, ssi,

$$\left.\begin{array}{l}\forall\{x_n \in X\}_{n\in\mathbb{N}} \to x \\ \forall\{y_n \in Y\}_{n\in\mathbb{N}} \to y : y_n \in f(x_n)\end{array}\right\} \Rightarrow y \in f(x).$$

• i.c. l'inf-continuité : f i.c. en x, ssi,

$$\left.\begin{array}{l}\forall\{x_n \in X\}_{n\in\mathbb{N}} \to x \\ \\ \forall y \in f(x)\end{array}\right\} \Rightarrow \exists\{y_n \in Y\}_{n\in\mathbb{N}} \to y,$$

$\exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow y_n \in f(x_n)$.

1. INTRODUCTION

On considère l'extension du problème de la complémentarité généralisé : Trouver $x \in X$:

$$x \in K,\ y \in f(x) \cap \Gamma(K),\ \langle x, y\rangle = 0 \qquad \text{(I)}$$

où :

X espace de Banach réflexif réel.

X' son dual topologique.

$f : X \to P(X')$ application multivoque

$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X' \to \mathbb{R}$ forme bilinéaire

K cône convexe fermé.

$\Gamma(K)$ le cône polaire de K dans X'.

Le premier a avoir introduit et étudier l'extension du problème de la complémentarité généralisé, en dimension finie, est R. Saigal [9], en utilisant une condition de coercivité semblable à celle de Karamardian ([6], [7]), il montre que l'extension du problème de la complémentarité généralisé admet une solution ; en formalisant le problème (I) comme un problème de point fixe qu'il résoud en utilisant le théorème de point fixe de Eilenberg et Montgomery. Fang et Peterson [3] ont donnés des conditions suffisantes d'existence des solutions du problème (I), en utilisant une extension à des ensembles non compacts du théorème d'inégalités variationnelles généralisées donné dans [9]. Le problème (I) est étudié, en dimension infinie par Takahashi et les autres [10].

Dans ce travail, nous établissons une extension du théorème de Ky Fan ([1], [10]) qu'on utilisera dans la démonstration de notre théorème d'existence de l'extension du problème de la complémentarité généralisé ; Pour cela on présente au paragraphe 2 l'extension du problème de la complémentarité généralisé. Au paragraphe 3 le théorème de Ky Fan ([1], [10]).

Au paragraphe 4, nous établissons sous une condition de coercivité semblable à celle de J.J. Moré [8], et sous l'hypothèse que f est sup-continue, à valeurs convexes compacts que l'extension du problème de la complémentarité généralisé admet une solution.

Au paragraphe 5, en utilisant le théorème du paragraphe 4, nous établissons que l'extension du problème de la complémentarité généralisé admet une solution pour les applications multivoques pseudomonotones et fortement copositives.

2. EXTENSION SU PROBLEME DE LA COMPLEMENTARITE GENERALISE

L'extension du problème de la complémentarité généralisé, a déjà été introduite et étudiée par R. Saigal [9], S.C. Fang et E.L. Peterson [3] en dimension finie et par Takahashi et les autres [10] en dimension infinie.

En utilisant, le théorème de Ky Fan ([1], [10]), on montre, sous une condition de coercivité semblable à celle de J.J. Moré [8], et sous l'hypothèse que f est sup-continue, à valeurs convexes compactes ; que l'extension du problème de la complémentarité généralisé, admet une solution dans un espace de Banach réflexif réel.

2.1. Extension du problème de la complémentarité généralisé

Soients, X espace de Banach réflexif réel, muni de la norme $||\cdot||$.

X' son dual topologique muni de la norme duale $||\cdot||'$.

$\langle\cdot, \cdot\rangle : X \times X' \to \mathbb{R}$ forme bilinéaire.

$K \subset X$, cône convexe fermé.

$\Gamma(K) = \{y \in X' \mid \langle y, x\rangle \geq 0, \forall x \in K\}$ cône polaire de K.

$f : K \to \mathcal{P}(X')$ application multivoque.

L'extension du problème de la complémentarité généralisé, qu'on considère, est de trouver $x \in X$:

$$x \in K,\ y \in f(x) \cap \Gamma(K),\ \langle x, y\rangle = 0.$$

3. THEOREME DE KY FAN

Nous allons, donner le théorème de Ky Fan ([1], [10]), qu'on utilisera dans la démonstration du principal résultat de ce paragraphe.

Théorème 3.1.

Soient, $K \subset X$ *convexe compact,* $A \subset K \times K$ *tel que :*

i) $(x, x) \in A, \forall x \in K$

ii) $\forall y \in K, \{x \in K : (x, y) \in A\}$ *fermé.*

iii) $\forall x \in K$, $\{y \in K : (x, y) \notin A\}$ *convexe (ou vide).*

Alors,

$$\exists \bar{x} \in K : \{\bar{x}\} \times K \subset A.$$

Preuve :

(cf. [1], [10]).

Nous donnons, maintenant le théorème analogue, pour une paire d'espaces de Banach réflexifs, réels, distincts.

Théorème 3.2.

Soient, $K_1 \subset X$ *convexe compact ;* $K_2 \subset X'$ *convexe, fermé non vide ;* $A \subset K_1 \times K_2$ *tel que :*

i) A *fermé.*

ii) $\forall y \in K_2$, $\{x \in K_1 : (x, y) \in A\}$ *convexe et non vide.*

iii) $\forall x \in K_1$, $\{y \in K_2 : (x, y) \notin A\}$ *convexe (ou vide).*

Alors,

$$\exists \bar{x} \in K_1 : \{\bar{x}\} \times K_2 \subset A.$$

Preuve :

(cf. [1], [10]).

Nous rappelons, le lemme dû à Karamardian [6], qui montre l'équivalence, entre l'extension du problème de la complémentarité généralisé et le problème d'inégalités variationnelles généralisées.

Le problème d'inégalités variationnelles généralisées, qu'on considère, est de trouver $x \in X$:

$$x \in K,\ y \in f(x),\ \langle x' - x, y\rangle \geq 0,\ \forall x' \in K \tag{II}$$

Lemme 3.3.

Soit, $K \subset X$ *cône convexe fermé. Alors :*

L'extension du problème de la complémentarité généralisé (I) est équivalente au problème d'inégalités variationnelles généralisées.

4. SUR L'EXTENSION DU PROBLEME DE LA COMPLEMENTARITE GENERALISE

Avant de donner, le principal résultat de ce paragraphe, nous rappelons, la notion d'internat algébrique, qu'on notera par $i_K(C)$, d'un sous-ensemble C relativement au sous-ensemble K d'un espace vectoriel.

Définition 4.1. (*cf. J. Bair et R. Fourneau [4] ; R.B. Holmes [5]*)

Soient, K *et* C *deux sous-ensembles d'un espace vectoriel, alors :*

$a \in i_K(C)$, *si et seulement si,* $\forall b \in K \setminus \{a\}$, $\exists x \in]a, b[: [a, x] \subset C$.

Nous donnons, maintenant, une condition suffisante d'existence des solutions de l'extension du problème de la complémentarité généralisé.

Théorème 4.2.

Soient, $K \subset X$ *cône, convexe, fermé ;* $f : K \to P(X')$.

On suppose que :

i) $\exists C \subset K$, *convexe compact tel que :*

- *i-1)* f *restreinte à* C *est sup-continue.*
- *i-2)* $\forall x \in C$, $f(x)$ *convexe, compacte.*
- *i-3)* $\forall x \in C \setminus i_K(C)$, $\exists u \in i_K(C) : \langle u - x, y\rangle \leq 0$, $\forall y \in f(x)$.

Alors, $\exists x \in X$:

$$x \in K,\ y \in f(x) \cap \Gamma(K),\ \langle x, y\rangle = 0.$$

<u>Preuve</u> :

Posons : $A = \{(z, x) \in C \times C : \sup\limits_{y \in f(x)} \langle z - x, y\rangle \geq 0\}$

Montrons que A vérifie les hypothèses du théorème 3.1.

i) $(x, x) \in A,\ \forall x \in C$.

ii) $\forall z \in C,\ \{x \in C : (x, z) \in A\} = \{x \in C : \sup\limits_{y \in f(x)} \langle z - x, y\rangle \geq 0\}$

Montrons que l'application $x \to \sup\limits_{y \in f(x)} \langle z - x, y\rangle$ est s.c.s.

Soient, $z \in C$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $S_\alpha = \{x \in C : \sup\limits_{y \in f(x)} \langle z - x, y\rangle \geq \alpha\}$ est fermé

En effet : soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de S_α : $x_n \to \bar{x}$

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in S_\alpha \Rightarrow \exists y_n \in f(x_n) : \langle z - x_n, y_n\rangle \geq \alpha$$

$$\left.\begin{array}{l} C \text{ convexe, compact} \\ \forall x \in C,\ f(x) \text{ compact} \\ \quad f \text{ s.c.} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(C) = \bigcup\limits_{x \in C} f(x) \text{ compact} \\ y_n \in f(x_n) \subset \bigcup\limits_{x \in C} f(x) \end{array}\right\} \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \ldots \Rightarrow \exists N' \subset N : y_n \to \bar{y} \\ \qquad x_n \xrightarrow[n \in \mathbb{N}']{} \bar{x} \\ \qquad f \text{ s.c.} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{y} \in f(\bar{x}) \\ \qquad\qquad \alpha \leq \lim\limits_{n \in \mathbb{N}'} \langle z - x_n, y_n\rangle = \langle z - \bar{x}, \bar{y}\rangle \end{array}\right\} \ldots$$

$\ldots \Rightarrow \bar{x} \in S_\alpha$.

donc, l'application, $x \to \sup\limits_{y \in f(x)} \langle z - x, y\rangle$ s.c.s., par conséquent,

l'ensemble $\{x \in C : \sup\limits_{y \in f(x)} \langle z - x, y\rangle \geq 0\}$ fermé.

iii) $\forall x \in C$, $\{z \in C : (x, z) \notin A\} = \{z \in C : \sup\limits_{y \in f(x)} \langle z - x, y\rangle < 0\}$ convexe.

donc, d'après le théorème 3.1., on a : $\exists \bar{x} \in C : \{\bar{x}\} \times C \subset A$.

C'est-à-dire, $\exists \bar{x} \in C : \sup\limits_{y \in f(\bar{x})} \langle z - \bar{x}, y\rangle \geq 0,\ \forall z \in C$ (1)

Par ailleurs, posons maintenant :

$B = \{(y, x) \in f(\bar{x}) \times C : \langle x - \bar{x}, y\rangle \geq 0\}$.

Montrons, également que B vérifie les hypothèses du théorème 3.2.

$$\left.\begin{array}{r} \text{i) l'application, } (x, y) \to \langle x - \bar{x}, y\rangle \text{ est continue} \\ f(\bar{x}) \text{ compact} \\ C \text{ compact} \end{array}\right\} \Rightarrow B \text{ fermé.}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{ii) } x \in C,\ \{y \in f(\bar{x}) : (y, x) \in A\} = \{y \in f(\bar{x}) : \langle x - \bar{x}, y\rangle \geq 0\} \\ y \to \langle x - \bar{x}, y\rangle \text{ continue} \\ f(\bar{x}) \text{ compact} \\ (1) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} \ldots \Rightarrow \{y \in f(\bar{x}) : \langle x - \bar{x}, y\rangle \geq 0\} \neq \emptyset \\ f(\bar{x}) \text{ convexe} \end{array}\right\} \Rightarrow \{y \in f(\bar{x}) : \langle x - \bar{x}, y\rangle \geq 0\}$$

est convexe et non vide.

iii) $\forall y \in f(\bar{x})$, $\{x \in C : (x, y) \notin A\} = \{x \in C : \langle x - \bar{x}, y\rangle < 0\}$ est convexe (ou vide).

Donc, d'après le théorème 3.2., on a : $\exists \bar{y} \in f(\bar{x}) : \{\bar{y}\} \times C \subset B$.

C'est-à-dire, $\exists \bar{y} \in f(\bar{x})$, $\langle x - \bar{x}, \bar{y}\rangle \geq 0$, $\forall x \in C$.

Par conséquent, $\exists \bar{x} \in C$, $\bar{y} \in f(\bar{x})$, $\langle x - \bar{x}, \bar{y}\rangle \geq 0$, $\forall x \in C$ (2)

Pour compléter, la démonstration, il suffit de montrer que cette dernière inégalité reste vraie pour $\forall x \in K$.

Pour cela, on distingue deux cas :

$\bar{x} \in i_K(C)$ ou $\bar{x} \notin i_K(C)$.

- Si, $\bar{x} \in i_K(C)$, soit $x_1 \in K \backslash C$, un point arbitraire, posons

$$\left.\begin{array}{r} x_2 = tx_1 + (1-t)\bar{x}, \text{ alors } x_2 \in K,\ \forall t \in]0,1[\\ \bar{x} \in i_K(C) \\ \text{déf. 4.1.} \end{array}\right\} \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \exists t > 0 \text{ assez petit} : x_2 \in C \\ (2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 0 \leq \langle x_2 - \bar{x}, \bar{y}\rangle = t\langle x_1 - \bar{x}, \bar{y}\rangle \\ t > 0 \end{array}\right\} \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \langle x_1 - \bar{x}, \bar{y}\rangle \geq 0$$

- Si, $\bar{x} \notin i_K(C)$, soit $x_1 \in K \backslash C$, arbitraire ; posons

$$\left.\begin{array}{r} x_2 = tx_1 + (1-t)u \\ \text{Hyp. i.3)} \end{array}\right\} \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \exists t > 0, \text{ assez petit} : x_2 \in C \\ (2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 0 \leq \langle x_2 - \bar{x}, \bar{y}\rangle = t\langle x_1 - \bar{x}, \bar{y}\rangle + (1-t) \\ \langle u - \bar{x}, \bar{y}\rangle \\ \text{Hyp. 1.3)} \end{array}\right\} \ldots$$

$$\left.\begin{array}{r}\ldots \Rightarrow 0 \leq \langle x_2 - \bar{x}, \bar{y}\rangle \leq t\langle x_1 - \bar{x}, \bar{y}\rangle \\ t > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \langle x_1 - \bar{x}, \bar{y}\rangle \geq 0.$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Donc, } \exists\bar{x} \in C,\ \bar{y} \in f(\bar{x}),\ \langle x - \bar{x}, \bar{y}\rangle \geq 0,\ \forall x \in K \\ \text{lemme 3.3.}\end{array}\right\} \ldots$$

$\ldots \Rightarrow \exists\bar{x} \in X$:

$$\bar{x} \in K,\ \bar{y} \in f(\bar{x}) \cap \Gamma(K),\ \langle\bar{x}, \bar{y}\rangle = 0.$$

Remarque :

i) Si, on remplace l'intérieur algébrique $i_K(C)$ de C relativement à K, par l'intérieur topologique $\mathrm{int}_K(C)$ de C relativement à K ; défini par :
$z \in \mathrm{int}_K(C) \Leftrightarrow z \in C,\ \exists V \in \underset{X}{\mathcal{V}(x)} : V \cap (K\backslash C) = \emptyset$.

On obtient, la condition de coercivité introduite par Takahashi et les autres [10] ; Puisque $\mathrm{int}_K(C) \subset i_K(C)$, cette dernière condition est plus forte que notre condition i-3), donc on a le théorème 3.1. [10].

5. SUR LES APPLICATIONS : MONOTONES, COPOSITIVES, PSEUDOMONOTONES ET PROBLEME DE LA COMPLEMENTARITE GENERALISE

Dans, ce paragraphe, on considère des applications multivoques, spéciales, intervenants dans les applications. On montrera par la suite que la conditions i-3) du théorème 4.2. est satisfaite pour ces applications.

5.1. Applications : Monotones, copositives, pseudomonotones

Soient, X espace de Banach réflexif réel, muni de la norme $||\cdot||$.

X' son dual topologique

$K \subset X$, sous-ensemble

$f : K \to \mathcal{P}(X')$.

Définition 5.1.1.

i) $f : K \to P(X')$ *est monotone, ssi,*
$\forall x, y \in K, \forall \bar{x} \in f(x), \bar{\forall} y \in f(y), \langle x - y, \bar{x} - \bar{y} \rangle \geq 0.$

ii) $f : K \to P(X')$ *est strictement monotone, ssi,*
$\forall x, y \in K, \forall \bar{x} \in f(x), \forall \bar{y} \in f(y), \langle x - y, \bar{x} - \bar{y} \rangle > 0.$

iii) $f : K \to P(X')$ *est fortement monotone, ssi*
$\exists \alpha > 0 : \forall x, y \in K, \forall \bar{x} \in f()x, \forall \bar{y} \in f(y), \langle x - y, \bar{x} - \bar{y} \rangle \geq \alpha ||x||^2$

Définition 5.1.2.

i) $f : K \to P(X')$ *est copositive, ssi,*
$\exists \bar{z} \in f(0) : \forall x \in K, \forall \bar{y} \in f(x), \langle x, \bar{y} - \bar{z} \rangle \geq 0$

ii) $f : K \to P(X')$ *est strictement copositive, ssi,*
$\exists \bar{z} \in f(0) : \forall x \in K, \forall \bar{y} \in f(x), \langle x, \bar{y} - \bar{z} \rangle > 0$

iii) $f : K \to P(X')$ *est fortement copositive, ssi,*
$\exists \alpha > 0, \bar{z} \in f(0) : \forall x \in K, \bar{\forall} y \in f(x), \langle x, \bar{y} - \bar{z} \rangle \geq \alpha ||x||^2.$

On a le lemme suivant qui est une conséquence immédiate des définitions données plus haut.

Lemme 5.1.3.

Si f est monotone (resp. stric. monotone, ou fortement monotone) alors, f est copositive (resp. strict. copositive, ou fortement copositive).

5.2. Applications multivoques fortement copositives et extension du problème de la complémentarité généralisé

Nous allons montrer, dans ce paragraphe, que si f est une application multivoque fortement copositive, sur un espace de Banach réflexif réel, alors sous certaines conditions du théorème 4.2., l'extension du problème de la complémentarité généralisé admet une solution.

Théorème 5.2.1.

Soient, $K \subset X$ *cône, convexe, fermé* ; $f : K \to P(X')$.

On suppose :

i) $\forall x \in K$, $f(x)$ *convexe, compact.*

ii) f *sup-continue.*

iii) f *fortement copositive.*

Alors, $\exists \bar{x} \in X$:

$$\bar{x} \in K,\ \bar{y} \in f(\bar{x}) \cap \Gamma(K),\ \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 0.$$

Preuve :

f fortement copositive $\Rightarrow \exists \alpha > 0$, $z \in f(0)$: $\forall x \in K$, $\bar{y} \in f(x)$, on a : $\langle x, \bar{y} - \bar{z} \rangle \geq \alpha ||x||^2$.

Soit,

$C = \{x \in K \mid ||x|| \leq ||\bar{z}||'/\alpha\}$ convexe, fermé, borné d'un espace de Banach réflexif réel, donc C est un compact, et $0 \in i_K(C)$.

Soit, $x \in C \backslash i_K(C) \Rightarrow ||x|| = ||\bar{z}||'/\alpha \Rightarrow \alpha ||x||^2 - ||\bar{z}||' \, ||x|| = 0$ (1)

d'autre part :

$$\langle x, \bar{y} - z \rangle \geq \alpha ||x||^2, \ \forall \bar{y} \in f(x).$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \langle x, \bar{y} \rangle \geq \alpha ||x||^2 + \langle x, \bar{z} \rangle \\ \qquad \geq \alpha ||x||^2 + ||x|| \, ||\bar{z}||' \\ \qquad\qquad (1) \end{array}\right\} \Rightarrow \langle x, \bar{y} \rangle \geq 0, \ \forall \bar{y} \in f(x).$$

$$\left.\begin{array}{l} , \forall x \in C\backslash i_K(C),\ \exists 0 \in i_K(C) : \langle 0 - x, \bar{y}\rangle \leq 0,\ \forall \bar{y} \in f(x) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{Hyp. i) + ii)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{théorème 4.2.} \end{array}\right\} \ldots$$

$\ldots \Rightarrow \exists \bar{x} \in X$:

$$\bar{x} \in K,\ \bar{y} \in f(\bar{x}) \cap \Gamma(K),\ \langle \bar{x}, \bar{y}\rangle = 0.$$

5.3. Applications multivoques pseudomonotones et extension du problème de la complémentarité généralisé.

Nous allons montrer, également dans ce paragraphe, que si f est une application multivoque pseudomonotone, et sous une condition de stricte réalisabilité, alors, sous certaines conditions du théorème 4.2., l'extension du problème de la complémentarité généralisé admet une solution.

Définition 5.3.1.

i) On dit que l'extension du P.C.G. est réalisable, si $\exists x_0 \in X$: $x_0 \in K,\ f(x_0) \cap \Gamma(K) \neq \emptyset$.

ii) On dit que l'extension du P.C.G. est strict. réalisable, si $\exists x_0 \in X : x_0 \in K,\ f(x_0) \cap \Gamma(K) \neq \emptyset$.

Définition 5.3.2.

$f : K \to P(X')$

$$\forall x, y \in K,\ \forall \bar{x} \in f(x),\ \forall \bar{y} \in f(y),\ \langle x - y, \bar{y}\rangle \geq 0 \Rightarrow \langle x - y, \bar{x}\rangle \geq 0.$$

Propriété 5.3.3.

f *multivoque monotone* $\Rightarrow$ f *multivoque pseudomonotone.*

Nous rappelons, un théorème de Ky Fan [2], qu'on utilisera dans la suite.

Théorème 5.3.4. *(Ky Fan [2])*

Soient X *et* Y *deux e.l.c.s. réels, en dualités ;* $K \subset X$ *sous-ensemble.*

On suppose que : • K *est fermé pour la topologie* $\sigma(X, Y)$.
• $\overset{\circ}{\Gamma}(K) \neq \emptyset$ *est fermé pour la topologie* $\tau(Y, X)$.

alors, K *est complet et localement compact pour la topologie* $\sigma(X, Y)$.

Si, de plus, $\exists h \in \overset{\circ}{\Gamma}(K)$: h *(en tant que forme linéaire de* X*) est bornée sur* X*, alors* K *est compact pour la topologie* $\sigma(X, Y)$.

On peut, maintenant, donner le théorème qui assure l'existence d'une solution de l'extension du problème de la complémentarité généralisé pour les applications multivoques pseudomonotones.

Théorème 5.3.5.

Soient, $K \subset X$ *cône convexe, fermé ;* $f : K \to P(X')$.

On suppose :

i) $\forall x \in K$, $f(x)$

ii) f *sup-continue sur* K.

iii) f *pseudomonotone sur* K.

iv) $\exists x_0 \in X : x_0 \in K,\ f(x_0) \cap \overset{\circ}{\Gamma}(K) \neq \emptyset$

Alors, $\exists x \in X$:

$$x \in K,\ y \in f(x) \cap \Gamma(K),\ \langle x, y\rangle = 0.$$

Preuve :

Soit, $y_0 \in f(x_0) \cap \overset{\circ}{\Gamma}(K)$ et posons : $S = \{x \in K : \langle x - x_0, y_0\rangle \leq 0\}$

alors, on a :

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \bullet\ C \text{ convexe, fermé pour la topologie } \sigma(X, X'). \\ \bullet\ y_0 \in f(x_0) \subset \overset{\circ}{\Gamma}(K) \subset \overset{\circ}{\Gamma}(K) \subset \overset{\circ}{\Gamma}(S) \\ \bullet\ \forall x \in S,\ \langle x, y_0\rangle \leq \langle x_0, y_0\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leq \langle x, y_0\rangle \leq \langle x_0, y_0\rangle \\ \hfill \text{théorème 5.3.4.} \end{array}\right\} \ldots$$

... => S est convexe, compact pour la topologie $\sigma(X, X')$, donc $\exists \rho > 0$: S est contenu dans l'intérieur, de $C = B(x_0, \rho) \cap K$, pour la topologie $\sigma(X', X)$.

Par conséquent :

$$\left.\begin{array}{r} \text{Si } x \in C\backslash i_K(C) \Rightarrow x \notin S \Rightarrow \langle x - x_0, y_0\rangle > 0 \\ f \text{ pseudomonotone} \end{array}\right\} \ldots$$

... => $\langle x - x_0, y\rangle \geq 0,\ \forall y \in f(x)$.

$$\left.\begin{array}{r} \text{Donc, } \forall x \in C\backslash i_K(C),\ \exists x_0 \in i_K(C) : \langle x - x_0, y\rangle \geq 0,\ \forall y \in f(x) \\ \text{Hyp. i) + ii)} \\ \text{théorème 4.2.} \end{array}\right\} \ldots$$

... => $\exists \bar{x} \in X$:

$$\bar{x} \in K,\ \bar{y} \in f(\bar{x}) \cap \Gamma(K),\ \langle \bar{x}, \bar{y}\rangle = 0.$$
$$,\ \bar{y} \in f(\bar{x}) \cap \Gamma(K)$$

REFERENCES

[1] FAN K. "*A generalization of the Tychonoff's-fixed point theorem*". Math. Ann. 142 (1961), pp. 305-310.

[2] FAN K. "*A generalization of the Alaoglu-Bourbaki theorem and its applications*". Maths Z 88 (1965), pp. 48-60.

[3] FANG S. et PETERSON E."*Generalized variational inequalities*". J. of Opt. Theory. Appl. 38 (1982), pp. 363-383.

[4] FOURNEAU R. et BAIR J. "*Etude géométrique des espaces vectoriels*". Lect. Notes in Maths, n° 489 (1975).

[5] HOLMES R.B. "*Geometric functional analysis and its applications*". G.T.M. 2Y, Springer-Verlag, Berlin (1975).

[6] KARAMARDIAN S. "*The generalized complementarity problem*". J. of Opt. Theory. Appl. 8 (1971), pp. 161-168.

[7] KARAMARDIAN S. "*Complementarity problems over cônes with monotones and pseudomonotones maps*". J. of Opt. Theory. Appl. 8 (1976), pp. 499-506.

[8] MORE J.J. "*Coercivity conditions in nonlinear complémentarity problems*". SIAM Review 16 (1974), pp. 1-16.

[9] SAIGAL R. "*Extension of the generalized complementarity problem*". Maths. of Operation Research 1 (1976), pp. 260-267.

[10] ITOHS, TAKAMASHI et YANAGI. "*Variational inequalities and complementarity problem*". J. Maths. Soc. Japan 30 (1978) pp. 23-28.

RESUME

Le travail a pour but l'étude du problème de la complémentarité. Plus précisément, nous nous sommes intéressés à la classe de matrices Q caractérisée comme étant l'ensemble des matrices M pour lesquelles le problème de la complémentarité linéaire : $U\omega - Mz = q$, $\omega \geq 0$, $z \geq 0$, $\omega \cdot z = 0$ admet une solution $\forall q \in \mathbb{R}^n$. Nous introduisons la classe de matrices colonnes adéquates et nous donnons une condition nécessaire et suffisante d'existence (Chapitre 1). Nous proposons, par la suite un marquage de $\mathbb{R}^n_+$, l'utilisation d'un algorithme d'approximation simpliciale basé sur ce marquage, nous permet d'avoir une approximation simpliciale de la solution du problème de la complémentarité non linéaire : Trouver $x \in \mathbb{R}^n$: $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$, $x \cdot f(x) = 0$. Une condition de convergence est donnée (Chapitre 2). Les Chapitres 3 et 4 sont consacrés à l'extension d'un théorème de Ky Fan ; Nous obtenons essentiellement comme résultat un théorème d'existence pour le problème de la complémentarité généralisé : Trouver $x \in K$: $f(x) \in \Gamma(K)$, $\langle x, f(x)\rangle = 0$. Nous généralisons à des espaces de dimension infini certains résultats de Karamardian et Moré.

Mots clés : Complémentarité. Classes de matrices. Approximation simpliciale. Inagélités variationnelles.