N° d'ordre : 1122

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE 3ème CYCLE

par

Pascal BROCHET

CONTRIBUTION A L'INVERSION NUMERIQUE DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE A L'AIDE DES POLYNOMES DE LAGUERRE ET APPLICATION A LA SIMULATION D'UNE LIGNE DE TRANSMISSION A CONSTANTES REPARTIES

Soutenue le 25 Novembre 1983 devant la Commission d'Examen

MEMBRES DU JURY :

Président	J. VIGNES
Rapporteur	C. BREZINSKI
Examinateur	F. DURBIN
	A. DRAUX

P R O F E S S E U R S CLASSE EXCEPTIONNELLE

M. CONSTANT Eugène	I.E.E.A.
M. FOURET René	Physique
M. GABILLARD Robert	I.E.E.A.
M. MONTREUIL Jean	Biologie
M. PARREAU Michel	Mathématiques
M. TRIDOT Gabriel	Chimie
M. VIVIER Emile	Biologie
M. WERTHEIMER Raymond	Physique

P R O F E S S E U R S 1ère classe

M. BACCHUS Pierre	Mathématiques
M. BEAUFILS Jean-Pierre (dét.)	Chimie
M. BIAYS Pierre	G.A.S.
M. BILLARD Jean (dét.)	Physique
M. BOILLY Bénoni	Biologie
M. BOIS Pierre	Mathématiques
M. BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M. BOUGHON Pierre	Mathématiques
M. BOURIQUET Robert	Biologie
M. BREZINSKI Claude	I.E.E.A.
M. CELET Paul	Sciences de la Terre
M. CHAMLEY Hervé	Biologie
M. COEURE Gérard	Mathématiques
M. CORDONNIER Vincent	I.E.E.A.
M. DEBOURSE Jean-Pierre	S.E.S.
M. DYMENT Arthur	Mathématiques

PROFESSEURS 1ère classe (suite)

M. ESCAIG Bertrand	Physique
M. FAURE Robert	Mathématiques
M. FOCT Jacques	Chimie
M. GRANELLE Jean-Jacques	S.E.S.
M. GRUSON Laurent	Mathématiques
M. GUILLAUME Jean	Biologie
M. HECTOR Joseph	Mathématiques
M. LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M. LACOSTE Louis	Biologie
M. LAVEINE Jean Pierre	Sciences de la Terre
M. LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique
M. LHOMME Jean	Chimie
M. LOMBARD Jacques	S.E.S.
M. LOUCHEUX Claude	Chimie
M. LUCQUIN Michel	Chimie
M. MIGEON Michel Recteur à Grenoble	E.U.D.I.L.
M. MIGNOT Fulbert (dét.)	Mathématiques
M. PAQUET Jacques	Sciences de la Terre
M. PROUVOST Jean	Sciences de la Terre
M. ROUSSEAU Jean-Paul	Biologie
M. SALMER Georges	I.E.E.A.
M. SEGUIER Guy	I.E.E.A.
M. SIMON Michel	S.E.S.
M. STANKIEWICZ François	S.E.S.
M. TILLIEU Jacques	Physique
M. VIDAL Pierre	I.E.E.A.
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mathématiques

P R O F E S S E U R S 2ème classe

M.	ANTOINE Philippe	Mathématiques (Calais)
M.	BART André	Biologie
Mme	BATTIAU Yvonne	Géographie
M.	BEGUIN Paul	Mathématiques
M.	BELLET Jean	Physique
M.	BERZIN Robert	Mathématiques
M.	BKOUCHE Rudolphe	Mathématiques
M.	BODARD Marcel	Biologie
M.	BOSQ Denis	Mathématiques
M.	BRASSELET Jean-Paul	Mathématiques
M.	BRUYELLE Pierre	Géographie
M.	CAPURON Alfred	Biologie
M.	CARREZ Christian	I.E.E.A.
M.	CAYATTE Jean-Louis	S.E.S.
M.	CHAPOTON Alain	C.U.E.E.P.
M.	COQUERY Jean-Marie	Biologie
Mme	CORSIN Paule	Sciences de la Terre
M.	CORTOIS Jean	Physique
M.	COUTURIER Daniel	Chimie
M.	CROSNIER Yves	I.E.E.A.
M.	CURGY Jean-Jacques	Biologie
Mle	DACHARRY Monique	Géographie
M.	DAUCHET Max	I.E.E.A.
M.	DEBRABANT Pierre	E.U.D.I.L.
M.	DEGAUQUE Pierre	I.E.E.A.
M.	DELORME Pierre	Biologie
M.	DELORME Robert	S.E.S.
M.	DE MASSON D'AUTUME Antoine	S.E.S.
M.	DEMUNTER Paul	C.U.E.E.P.

PROFESSEURS 2ème classe (Suite 1)

M. DENEL Jacques	I.E.E.A.
M. DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques (Calais)
Mle DESSAUX Odile	Chimie
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie
M. DHAINAUT André	Biologie
Mme DHAINAUT Nicole	Biologie
M. DORMARD Serge	S.E.S.
M. DOUKHAN Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M. DUBOIS Henri	Physique
M. DUBRULLE Alain	Physique (Calais)
M. DUBUS Jean-Paul	I.E.E.A.
M. FAKIR Sabah	Mathématiques
M. FONTAINE Hubert	Physique
M. FOUQUART Yves	Physique
M. FRONTIER Serge	Biologie
M. GAMBLIN André	G.A.S.
M. GLORIEUX Pierre	Physique
M. GOBLOT Rémi	Mathématiques
M. GOSSELIN Gabriel (dét.)	S.E.S.
M. GOUDMAND Pierre	Chimie
M. GREGORY Pierre	I.P.A.
M. GREMY Jean-Paul	S.E.S.
M. GREVET Patrice	S.E.S.
M. GUILBAULT Pierre	Biologie
M. HENRY Jean-Pierre	E.U.D.I.L.
M. HERMAN Maurice	Physique
M. JACOB Gérard	I.E.E.A.
M. JACOB Pierre	Mathématiques
M. JEAN Raymond	Biologie
M. JOFFRE Patrick	I.P.A.

PROFESSEURS 2ème classe (suite 2)

M. JOURNEL Gérard	E.U.D.I.L.
M. KREMBEL Jean	Biologie
M. LANGRAND Claude	Mathématiques
M. LATTEUX Michel	I.E.E.A.
Mme LECLERCQ Ginette	Chimie
M. LEFEVRE Christian	Sciences de la Terre
Mle LEGRAND Denise	Mathématiques
Mle LEGRAND Solange	Mathématiques (Calais)
Mme LEHMANN Josiane	Mathématiques
M. LEMAIRE Jean	Physique
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique
M. LOSFELD Joseph	C.U.E.E.P.
M. LOUAGE Francis(dét.)	E.U.D.I.L.
M. MACKE Bruno	Physique
M. MAIZIERES Christian	I.E.E.A.
M. MESSELYN Jean	Physique
M. MESSERLIN Patrick	S.E.S.
M. MONTEL Marc	Physique
Mme MOUNIER Yvonne	Biologie
M. PARSY Fernand	Mathématiques
Mle PAUPARDIN Colette	Biologie
M. PERROT Pierre	Chimie
M. PERTUZON Emile	Biologie
M. PONSOLLE Louis	Chimie
M. PORCHET Maurice	Biologie
M. POVY Lucien	E.U.D.I.L.
M. RACZY Ladislas	I.E.E.A.
M. RAOULT Jean François	Sciences de la Terre
M. RICHARD Alain	Biologie

PROFESSEURS 2ème Classe (suite 3)

M. RIETSCH François	E.U.D.I.L.
M. ROBINET Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M. ROGALSKI Marc	Mathématiques
M. ROY Jean-Claude	Biologie
M. SCHAMPS Joël	Physique
Mme SCHWARZBACH Yvette	Mathématiques
M. SLIWA Henri	Chimie
M. SOMME Jean	G.A.S.
Mle SPIK Geneviève	Biologie
M. STAROSWIECKI Marcel	E.U.D.I.L.
M. STERBOUL François	E.U.D.I.L.
M. TAILLIEZ Roger	Institut Agricole
Mme TJOTTA Jacqueline (dét.)	Mathématiques
M. TOULOTTE Jean-Marc	I.E.E.A.
M. TURRELL Georges	Chimie
M. VANDORPE Bernard	E.U.D.I.L.
M. VAST Pierre	Chimie
M. VERBERT André	Biologie
M. VERNET Philippe	Biologie
M. WALLART Francis	Chimie
M. WARTEL Michel	Chimie
M. WATERLOT Michel	Sciences de la Terre
Mme ZINN JUSTIN Nicole	Mathématiques

CHARGES DE COURS

M. ADAM Michel	S.E.S.

CHARGES DE CONFERENCES

M.	BAFCOP Joël	I.P.A.
M.	DUVEAU Jacques	S.E.S.
M.	HOFLACK Jean	I.P.A.
M.	LATOUCHE Serge	S.E.S.
M.	MALAUSSENA DE PERNO Jean-Louis	S.E.S.
M.	NAVARRE Christian	I.P.A.
M.	OPIGEZ Philippe	S.E.S.

Je remercie Monsieur J. VIGNES, Conseiller scientifique à l'Institut Français du Pétrole, qui me fait l'honneur de présider cette thèse de troisième cycle.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude que je dois à Monsieur C. BREZINSKI, Professeur à l'Université de Lille I, qui m'a accueilli dans son équipe, pour ses encouragements et ses conseils.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur F. DURBIN, Ingénieur du Service Electronique au C.E.A./D.A.M. pour les rencontres fructueuses que nous avons eues et l'intérêt constant qu'il a témoigné à la réalisation de cette thèse.

Je suis très honoré par la présence de Monsieur A. DRAUX, Enseignant à l'Université de Lille I, qui a accepté de s'intéresser à ce travail et de le juger.

Je remercie le Service Electronique du C.E.A./D.A.M. qui a financé cette étude.

Mes remerciements vont également à Madame F. TAILLY qui a dactylographié cette thèse et à Monsieur H. GLANC qui l'a imprimée.

A ma femme,
A ma fille.

INTRODUCTION.

Nous avons entrepris ce travail dans le but d'établir un modèle de ligne à retard et de simuler son fonctionnement ; le modèle obtenu est destiné à être intégré dans le code de Conception Assistée par Ordinateur de circuits électroniques ASTEC III, écrit à la Direction des Applications Militaires du Commissariat à l'Energie Atomique et commercialisé par la Compagnie Internationale de Services Informatique (CISI).

Au chapitre I, nous verrons que le coeur du problème est celui de l'inversion numérique de la transformation de Laplace, mais avec cette particularité que la méthode choisie doit fournir un approximant rationnel de la fonction à inverser dont tous les pôles aient une partie réelle strictement négative. C'est pourquoi nous nous sommes tournés vers des méthodes basées sur l'utilisation des polynômes de Laguerre.

Au chapitre II, nous rappelons la définition et les propriétés des polynômes de Laguerre et des fonctions qui s'en déduisent. Ces propriétés en font des instruments bien adaptés à l'inversion de la transformation de Laplace. Puis nous présentons les principales méthodes dont nous nous sommes inspirés.

La méthode originale que nous proposons en est une synthèse. Nous l'exposons complètement au chapitre III. Etant donné une fonction F *de la variable complexe* s *nous nous proposons de l'approcher par la fonction rationnelle* $F_N(s) = \sum_{m=o}^{N-1} a_m \frac{(s-c-\alpha)^m}{(s-c+\alpha)^{m+1}}$ *où* c *est un réel correctement choisi,* α *un paramètre réel strictement positif et les coefficients* a_m *ceux du développement en série de Taylor de la fonction*

$$H(z) = \frac{2\alpha}{1-z} F(c + \alpha \frac{1+z}{1-z}).$$

L'inverse exact de F_N, $f_N(t) = e^{ct} \sum_{m=o}^{N-1} a_m e^{-\alpha t} L_m(2\alpha t)$, L_m *désignant le* $m^{ième}$ *polynôme de Laguerre, est alors pris comme valeur approchée de l'inverse* f *de* F *au point* t*. Nous montrons que si* F *est telle que la fonction* $(s+\alpha) F(s)$ *n'est pas singulière à l'infini alors sa cotransformée (son inverse)* f *est définie et continue sur les réels positifs, la suite* f_N *convergeant uniformément vers* f *sur tout compact* $[0,T]$.

Si cette hypothèse n'est pas satisfaite, on peut toujours supposer l'existence de la cotransformée mais la convergence obtenue n'est qu'au sens des moindres carrés.

L'avantage décisif de cette méthode, comme nous le verrons au chapitre IV, est que pour calculer une approximation de f *nous n'avons besoin que des valeurs de* F *en certains points précis et de la Transformée de Fourier Discrète de cette suite de valeur. Cette dernière peut être calculée rapidement et précisément à l'aide des algorithmes de Transformée de Fourier Rapide.*

Le paramètre α *joue un grand rôle dans la minimisation de l'erreur d'approximation. Au chapitre V nous proposons certains choix de ce paramètre lorsque la fonction à inverser est méromorphe.*

Au chapitre VI, nous donnons les différents sous-programmes que nous avons écrit ou utilisés, ainsi que le programme principal, dans le cas de l'inversion d'une fonction provenant d'un problème d'électricité voisin de celui de la modélisation d'une ligne à retard.

Nous concluons, au chapitre VII, par une étude numérique qui illustre l'influence des différents paramètres et confirme le phénomène de convergence au sens des moindres carrés ou uniforme selon que l'infini est ou non une singularité de $(s+\alpha)\,F(s)$. *Nous vérifions l'efficacité de l'algorithme proposé sur des fonctions tirées de problèmes de la physique. Nous en conclurons que l'approximant rationnel* $F_N(s)$ *des fonctions de transfert d'une ligne permet de modéliser une ligne de transmission.*

CHAPITRE I

LA TRANSFORMATION DE LAPLACE ET SON UTILISATION EN ANALYSE DES CIRCUITS ÉLECTRIQUES.

I.1 - INTRODUCTION.

Après avoir rappelé la définition et les propriétés fondamentales de la transformation de Laplace, nous montrons comment la transformée de Laplace est utilisée en analyse des circuits électriques. Notre propos n'est pas de décrire de manière complète l'application de la théorie des systèmes à l'analyse des circuits électriques mais d'expliquer pourquoi nous sommes amenés à choisir parmi les méthodes d'inversion celles qui fournissent un approximant rationnel de la fonction à inverser dont les pôles aient tous une partie réelle strictement négative.

L'essentiel de ce chapitre est tiré de Henrici [1]

I.2 - DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE.

Soit Ω l'espace des fonctions de la variable réelle à valeurs complexes satisfaisant les conditions suivantes :

i) $f(t)$ est définie pour tout t réel et identiquement nulle pour $t < o$.

ii) $f(t)$ est continue par morceaux sur l'ensemble des réels strictement positif $\mathbb{R}^+_*$.

iii) La limite $f(0^+)$ n'existe pas forcément mais $|f(t)|$ est intégrale au voisinage de 0.

Définition 1.2.1.

Soit $f \in \Omega$, *la transformée de Laplace* $F = Lf$ *de* f *est la fonction définie par :*

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt.$$

pour tout nombre complexe s *tel que cette intégrale converge.*

L'ensemble de tout les nombres complexes pour lesquels cette intégrale converge est appellé domaine de convergence simple et noté $C(f)$. Concernant ce domaine de convergence nous avons le théorème suivant :

Théorème 1.2.1.

S'il est non vide, le domaine de convergence de l'intégrale de Laplace est soit le plan complexe tout entier, soit un demi-plan droit pouvant contenir certains ou tous les points de la droite qui le délimite i.e. :

$\exists\ \alpha_f \in \mathbb{R}$ *tel que :*

- $\forall s \in \mathbb{C}$ *vérifiant* $\mathrm{Re}(s) > \alpha_f \quad s \in C(f)$
- $\forall s \in \mathbb{C}$ *vérifiant* $\mathrm{Re}(s) < \alpha_f \quad s \notin C(f)$
- *on ne peut rien dire en ce qui concerne les points définis par* $\mathrm{Re}(s) = \alpha_f$.

α_f *est appelée abcisse de convergence simple de l'intégrale de Laplace.*

Sur ce domaine C(f), la transformée de Laplace F de f vérifie les deux propriétés fondamentales suivantes :

Propriété I.2.1.

Soit $f \in \Omega$, $\alpha_f \in \mathbb{R}$ *alors* $F = Lf$ *est analytique pour tout complexe vérifiant* $\mathrm{Re}(s) > \alpha_f$.

Propriété I.2.2.

Soit $f \in \Omega$, $F = Lf$, s_o *un nombre complexe donné de* $C(f)$, *alors quelque soit* β *vérifiant* $o \leq \beta < \frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{s \to \infty} F(s) = 0$$

pourvu que s *tende vers l'infini dans le cône* $\hat{S}_\beta = \{s, |\arg(s-s_o)| \leq \beta\}$

Nous supposerons que les règles opératoires de la transformation de Laplace sont connues et, à l'exception de celle-ci que nous utilisons très souvent, nous ne les rappellerons pas :

Propriété I.2.3.

Soit s_o *un complexe, alors pour tout* s *tel que* $s - s_o \in C(f)$, $e^{s_o t} f(t)$ *admet comme transformée de Laplace* $F(s - s_o)$, *où* F *désigne la transformée de Laplace de* f.

Pré i ons un point de vocabulaire :

Définition I.2.2.

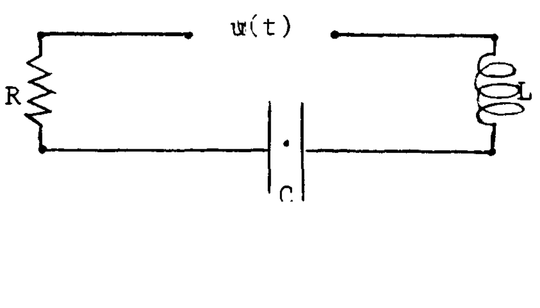
Nous appellerons cotransformée d'une fonction de la variable complexe $F(s)$ *son inverse par la transformation de Laplace. Celle-ci n'existe pas toujours.*

I.3 - SYSTÈMES ET FONCTIONS DE TRANSFERT.

Les propriétés opératoires de la transformation de Laplace font de celle-ci un instrument particulièrement bien adapté à la résolution des équations intégro-différentielles.
En effet, si f est la solution d'une telle équation, sa transformée de Laplace F satisfait, elle, une équation algébrique beaucoup plus facile à résoudre.

En électricité, on peut concevoir les circuits comme des systèmes qui à un certain signal d'entrée x_1 font correspondre un signal de sortie défini par $x_2 = T.x_1$, T étant la transformation réalisée par le circuit. Dans la quasi totalité des problèmes traités, les signaux d'entrée et de sortie sont des fonctions du temps qui appartiennent à Ω et il est possible de décrire le système à l'aide d'une équation intégro-différentielle à coefficients constants.
La transformation de Laplace permet alors de simplifier considérablement l'utilisation de la théorie des systèmes.

Considérons par exemple le circuit électrique suivant :



où R désigne la résistance du circuit, C sa capacité, L l'inductance et u la tension imposée aux bornes de ce circuit. On cherche à connaître l'intensité i(t) du courant qui le parcourt.

u(t) est le signal d'entrée du système, i(t) le signal de sortie. L'application des lois de Kirchoff conduit à décrire le système à l'aide de l'équation intégro-différentielle suivante :

$$R.i(t) + \frac{1}{c}\int_o^t i(\tau)d\tau + L\,\frac{di(t)}{d\tau} = u(t).$$

On suppose qu'à l'instant t=o le circuit est parcouru par une intensité nulle.

Considérons alors U(s) et I(s) les transformées de Laplace respectives de u et i et appliquons la transformation de Laplace à l'équation précédente, il vient :

$$R\,I(s) + \frac{1}{sC}\,I(s) + s.L.I(s) = U(s).$$

Soit :

$$I(s) = \frac{1}{R + \frac{1}{s.C} + sL}\;U(s)$$

que nous écrivons :

$$I(s) = G(s)\;.\;U(s).$$

G(s) est appelée la fonction de transfert du système. On voit sur cet exemple que la transformée de Laplace du signal de sortie est le produit de la transformée de Laplace du signal d'entrée par la fonction de transfert du système.

Nous définirons :

Définition I.3.1.

On appelle système linéaire toute transformation de Ω dans lui-même. telle que la transformée de Laplace $X_1(s)$ *du signal d'entrée* $x_1(t)$ *et la transformée de Laplace* $X_2(s)$ *du signal de sortie* $x_2(t)$ *vérifient une relation du type* $X_2(s) = G(s).X_1(s)$. $G(s)$ *est appelée fonction de transfert du système.*

Définition I.3.2.

Un système est stable si un signal d'entrée borné produit un signal de sortie borné.

En conception assistée par ordinateur les circuits considérés sont des circuits à constantes localisées dont les fonctions de transfert, comme celle de l'exemple, sont rationnelles. Pour de tels circuits, on démontre :

Proposition I.3.1.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction rationnelle $G(s)$ *soit la fonction de transfert d'un système stable est que tous les pôles de* $G(s)$ *aient une partie réelle strictement négative.*

Malheureusement, les lignes de transmission sont des circuits spéciaux dont les constantes sont réparties sur toute la longueur de la ligne et la fonction de transfert d'une telle ligne comporte des fonctions transcendantes. Fournir un modèle de ligne compatible avec un code de C.A.O. de circuits électroniques, c'est fournir un "bon" approximant rationnel de la fonction de transfert.

De plus, une ligne étant un système stable, il faudra choisir un approximant rationnel dont tous les pôles aient des parties réelles strictement négatives, ce qui exclut les approximants de Padé dont on ne connaît pas à priori les pôles. Il peut alors être intéressant d'utiliser les approximants de type Padé [2].

Chapitre II

L'inversion numérique de la transformée de Laplace à l'aide des polynômes de Laguerre

II.1 - INTRODUCTION.

Il existe une abondante littérature sur l'inversion numérique de la transformation de Laplace qui est un problème constant du numéricien, dans des applications très diverses. De nombreuses méthodes sont basées sur l'utilisation des polynômes et des fonctions de Laguerre. Elles ont toutes en commun l'approximation de la fonction à inverser par une fonction rationnelle dont l'unique pôle multiple a une partie réelle strictement négative. Elles sont donc susceptibles de nous fournir le modèle de ligne que nous recherchons.

Nous commencerons par rappeler les définitions et les propriétés des polynômes et des fonctions de Laguerre. Puis nous présenterons les méthodes qui nous ont paru les plus significatives et qui utilisent ces fonctions.

II.2 - POLYNÔMES ET FONCTIONS DE LAGUERRE.

a) Polynômes de Laguerre.

Définition II.2.1.

Nous appellerons polynôme de Laguerre de degré m *le polynôme* L_m *défini par :*

$$L_m(x) = \sum_{r=o}^{m} (-1)^r \frac{m!}{(m-r)!(r!)^2} x^r$$

Propriété II.2.1. *FONCTION GENERATRICE.*

$$\frac{\exp(-xt/(1-t))}{1-t} = \sum_{m=o}^{\infty} L_m(x)\ t^m.$$

Propriété II.2.2. *AUTRE EXPRESSION.*

$$L_m(x) = \frac{e^x}{m!} \frac{d^m}{dx^m} (x^m e^{-x}).$$

Propriété II.2.3.

Les polynômes de Laguerre sont orthonormaux sur $[o, +\infty[$ *pour la fonction poids* e^{-x} :

$$\int_o^{+\infty} e^{-x} L_n(x).L_m(x)\, dx = \delta_{n,m}$$

Propriété II.2.4. FORMULES DE RECURRENCE.

$$(m+1)\, L_{m+1}(x) = (2m+1 - x)\, L_m(x) - m\, L_{m-1}(x)$$

$$x \frac{d}{dx} L_m(x) = m\, Lm(x) - m\, L_{m-1}(x)$$

$$L_o = 1$$

$$L_1 = 1 - x.$$

b) Fonctions de Laguerre.

Définition II.2.2.

Nous appellerons fonction de Laguerre d'ordre m *et nous noterons* :

$$\mathcal{L}_m(t) = \sqrt{2\alpha}\, e^{-\alpha t}\, L_m(2\alpha t)$$

où α *est un réel strictement positif.*

Propriété II.2.5.

Les fonctions de laguerre forment un système orthonormé total, soit une base, de $L^2(o,+\infty)$.

Démonstration.

a) Orthonormalité.

Elle découle directement de l'orthonormalité des polynômes de Laguerre pour la fonction poids e^{-x}.

En faisant le changement de variable $x = 2\alpha t$, on obtient :

$$\int_{o}^{+\infty} \mathcal{L}_m(t).\mathcal{L}_n(t)\, dt = \int_{o}^{+\infty} e^{-x} L_m(x)\, L_n(x)\, dx = \delta_{n,m}$$

b) Totalité.

L'essentiel de la démonstration est tirée de [3]. Une condition nécessaire et suffisante est que : ([3] p. 120)

Si $f \in L_2(o, +\infty)$ et si $\int_{o}^{+\infty} f(t)\, \mathcal{L}_m(t)\, dt = o$, $m = 0, 1, \ldots$
alors f est nulle presque partant, c'est à dire sauf sur un ensemble de mesure nulle.

$$f(t)\, \mathcal{L}_m(t) = \sqrt{2}\ \ f(t\ e^{-\alpha t}\, L_m(2\alpha t)\, dt.$$

Posons $g(t) = f(t)\, e^{-\alpha t}$, et puisque $f \in L_2^2(o, +\infty)$ et $e^{-\alpha t} \in L_2(o,+\infty)$, $g(t) \in L_1(o, +\infty)$.

En regardant l'expression du polynôme de Laguerre, on s'aperçoit que l'on a seulement besoin de montrer que :

si $\int_{o}^{+} g(t)\, t^m\, dt = o$, pour $m = 0,1,\ldots$, alors $g = o.p.p.$
avec $g \in L_1(o, +\infty)$.

Considérons G(s) la transformée de Laplace de g

$$G(s) = \int_{o}^{+} e^{-st}\, g(t)\, dt$$

puisque $g \in L_1(o, +\infty)$, G(s) est définie pour tout s vérifiant $Re(s) \geq o$. Par suite, G(s) est analytique dans le demi-plan $Re(s) > 0$.

Nous allons maintenant montrer que G(s) est nulle ce qui prouvera que $g = o$ presque partout puisque deux fonctions ayant même transformée de Laplace sont égales presque portant.

Pour cela, montrons que la série nulle :

$$\sum_{m\geq o} (-1)^m \frac{s^m}{m!} \int_o^{+\infty} g(t).t^m \, dt$$

converge vers G(s), sur l'intervalle réel, $o \leq s < \alpha$.
En effet pour s réel positif :

$$\left|G(s) - \sum_{m=o}^{N-1} (-1)^m \frac{s^m}{m!} \int_o^{+\infty} g(t).t^m dt\right| \leq \int_o^{+\infty} \frac{s^N}{N!} t^N e^{-\alpha t} |f(t)| \, dt$$

et

$$\int_o^{+\infty} t^N e^{-\alpha t} |f(t)| \, dt \leq ||f||_{L^2} \left(\int_o^{+\infty} t^{2N} e^{-2\ t} dt\right)^{1/2}$$

soit :

$$\int_o^{+\infty} t^N e^{-\alpha t} |f(t)| dt \leq ||f||_{L^2} \frac{\sqrt{(2N)!}}{(2\alpha)^{N+1}}$$

par suite, en notant S_N la somme partielle jusqu'à l'ordre N-1 de la série considérée :

$$|G(s) - S_N| \quad \frac{||f||_{L^2}}{2\alpha} \left(\frac{s}{\alpha}\right)^N \frac{\sqrt{(2N)!}}{2^N \quad N!}$$

Or

$$\frac{\sqrt{(2N)!}}{2^N \quad N!} < 1 \quad \forall N \in \mathbb{N}^*$$

par suite $\forall s$ vérifiant $o \leq s < \alpha$

$$\lim_{N\to+\infty} |G(s) - S_N| = 0$$

et par prolongement G(s) est nulle sur Re(s) > 0.
Ce qui démontre que g(t) est nulle presque partout.∎

Propriété II.2.6.

La fonction de Laguerre d'ordre m, $L_m(t)$, *admet comme transformée de Laplace :*

$$\sqrt{2\alpha}\ \frac{(s-\alpha)^m}{(s+\alpha)^{m+1}}$$

$\forall s$ *vérifiant* $\mathrm{Re}(s) > -\alpha$.

Ce résultat s'obtient sans peine à l'aide de la propriété II.2.2 et des règles opératoires de la transformation de Laplace.

II.3 - PRINCIPALES MÉTHODES D'INVERSION NUMÉRIQUE DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE BASÉES SUR L'UTILISATION DES POLYNÔMES DE LAGUERRE.

a) Méthode de Lubell et Melzer (1973)

Dans leur article sur la modélisation d'une ligne à retard [4], Lubell et Melzer proposent la méthode suivante de construction d'un approximant rationnel d'une fonction de transfert :

Soit F cette fonction de transfert. Soit f sa cotransformée supposée de carré sommable. f est developpée sur la base des fonctions de Laguerre

$$f(t) = \sum_{m\geq o} b_m\, L_m(t)$$

F(s) peut "*alors*" être approchée par les sommes partielles de la série :

$$\sum_{m\geq o} b_m \sqrt{2}\ \frac{(s-\alpha)^m}{(s+\alpha)^{m+1}}\ , \tag{1}$$

Le théorème de Planchard-Perceval, donne ensuite comme expression des coefficients b_m :

$$b_m = \int_o^{+\infty} f(t)\ .\ L_m(t)dt = \frac{\sqrt{2\alpha}}{2Mi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(i\omega)\ \overline{\left[\frac{(i\omega-\alpha)^m}{(i\omega+\alpha)^{m+1}}\right]}$$

la deuxième intétrale pouvant se calculer à l'aide du théorème des résidus, ce qui conduit à :

$$b_m = \frac{\sqrt{2}}{m!} \frac{d^m}{ds^m} \left[F(s).(s+\alpha)^m \right]_{(s=\alpha)}$$

Nous voyons qu'en fait Lubell et Melzer supposent que :

- F(s) est inversible,
- sa cotransformée est de carré sommable,
- F(s) est analytique pour Re(s) ≥ 0,
- ses dérivées successives en α sont connues,
- la série (1) est convergente.

L'intérêt de leur méthode est que la somme partielle à l'ordre N-1 :

$$F_N(1) = \sum_{m=o}^{N-1} b_m \sqrt{2\alpha} \frac{(s-\alpha)^m}{(s+\alpha)^{m+1}}$$

est un approximant rationnel de F(s) de pôle strictement négatif, c'est à dire qu'il fournit un modèle de ligne stable. De plus, les résultats numériques qu'ils obtiennent montrent que leur méthode est performante.

b) Méthode de Bars et Mayers (1977).

Bars et Mayers [5] proposent un algorithme d'inversion de la transformée de Laplace dans le cas où celle-ci est déjà une fonction rationnelle. En lui-même, cet algorithme ne nous intéresse pas.
Mais Bars et Mayers se servent d'une fonction génératrice pour calculer les coefficients du développement de la cotransformée sur la base des fonctions de Laguerre.

Supposant que la cotransformée f(t) de F(s) est développable en série de fonction de Laguerre :

$$f(t) = \sum_{m\geq 0} b_m \, \mathcal{L}_m(t),$$

ils considèrent le changement variable $z = t_\alpha(s) = \frac{s-\alpha}{s+\alpha}$ et la fonction $H(z) = (s+\alpha)\, F(s)$, soit :

$$H(z) = \frac{2\alpha}{1-z} F(t_\alpha^{-1}(z)).$$

Ils considèrent alors le développement en série de Taylor de H(z) :

$$H(z) = \sum_{m\geq 0} a_m z^m$$

ce qui donne pour $F(s) = \dfrac{H(t_\alpha(s))}{s+\alpha}$:

$$F(s) = \sum_{m\geq 0} a_m \frac{(s-\alpha)^m}{(s+\alpha)^{m+1}}$$

Ils en déduisent alors que $b_m \sqrt{2\alpha} = a_m$ ce qui leur permet de construire f(t) dans le cas où F(s) est une fonction rationnelle.

c) Algorithme de Wing (1967).

Wing [6] suppose également l'existence de la cotransformée et son appartenance à $L^2(o, +\infty)$. Il se propose alors de la développer sur un espace de fonctions orthogonales :

$$f(t) = e^{ct} \sum_{m\geq 0} a_m e^{-\alpha t} L_m(2\,t)$$

et considère que F(s) s'écrit :

$$F(s) = \sum_{m\geq 0} a_m \frac{(s-c-\alpha)^m}{(s-c+\alpha)^{m+1}}$$

ce qui est vrai formellement.

Il considère alors la fonction :

$$(s-c+\alpha)\ F(s) = \sum_{m\geq o} a_m \frac{(s-c-\alpha)^m}{(s-c+\alpha)^m}$$

est évalue cette fonction en $s = c + i.\omega$, il obtient :

$$(i\omega+\alpha)\ F(c+i\omega) = \sum_{m\geq o} a_m \left(\frac{i\omega-\alpha}{i\omega+\alpha}\right)^m$$

comme $\left|\frac{i\omega-\alpha}{i\omega+\alpha}\right| = 1$ il pose $e^{i\theta} = \frac{i\omega-\alpha}{i\omega+\alpha}$, soit: $\omega = \alpha \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2}$, ce qui donne :

(1) $$[i\alpha \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} + \alpha] F(c+i\,\alpha \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2}) = \sum_{m\ o} a_m\ e^{i_m\theta}$$

Bien sûr tout ceci n'est pas justifié et peut même être faux comme nous le verrons. Wing a d'ailleurs quelques problèmes pour évaluer le premier membre de (1) au voisinage de $\theta = 0$. Mais l'intérêt principal de la méthode de Wing est que l'égalité (1) lui permet d'utiliser l'opérateur de Fourier Discret et les algorithmes de Transformation de Fourier Rapide pour calculer les coefficients a_m du développement de $f(t)$ sur l'espace des fonctions $e^{-\alpha t}$ $Lm(2\alpha t)$. Il n'a alors besoin que des valeurs numériques de $F(s)$ en certains points du plan complexe.

d) Le théorème de Tricomi (1935).

L'article de Tricomi [7] est très rarement cité dans la littérature sur la transformation de Laplace. Pourtant il a démontré le théorème suivant, qui suggère une méthode d'inversion de la transformation de Laplace, et dont nous avons essayé de donner la traduction :

Théorème.

Soit $F(s)$ *une fonction analytique et régulière à l'infini se comportant comme* $\frac{1}{s}$ *à l'infini, alors* $F(s)$ *est la transformée de Laplace de :*

$$f(t) = e^{-bt} \sum_{m=o}^{+\infty} a_m L_m(t)$$

où les coefficients a_m *sont ceux du développement de la fonction* $(s+b)\ F(s)$ *en série de puissance de* $\sigma = \frac{s+b-1}{s+b}$.

De plus la série (1) *converge uniformément sur tout le demi-axe* $t > o$.

La connaissance des coefficients a_m du développement de $H(\sigma) = (s+b)F(s)$ où $\sigma = \frac{s+b-1}{s+b}$ en série de Taylor, permet donc à Tricomi de calculer $f(t)$. Son point de vue est analogue à celui de Bars et Mayers mais l'intérêt principal de sa méthode est qu'elle lui permet de démontrer la convergence -niforme du développement utilisé et l'existence de la cotransformée.

e) La méthode de Van Iseghem (1981).

Dans sa thèse sur les applications des approximants de type Padé, Van Iseghem [8] propose également, lorsque $F(s)$ est analytique dans le demi-plan $Re(s) > o$, de l'écrire sous la forme :

$$F(s) = \sum_{m \geq o} a_m \frac{(s-\alpha)^m}{(s+\alpha)^{m+1}}$$

et démontre :

Théorème 1.

Si F *est analytique dans* $Re(s) > o$ *si sa cotransformée existe et est de carré sommable, alors ; pour tout* s *de* $Re(s) > o$:

$$F(s) = \sum_{m \geq o} a_m \frac{(s-\alpha)^m}{(s+\alpha)^{m+1}}$$

et la convergence est uniforme sur tout compact du demi-plan droit.

La suite $f_N(t) = e^{-\alpha t} \sum_{m=o}^{N-1} a_m L_m(2\alpha t)$ *vérifie :*

$$\lim_{N\to+\infty} \int_o^{+\infty} |f(t) - f_N(t)|^2 = 0.$$

Propriété 1.

La somme partielle $F_N(s) = \sum_{m=o}^{N-1} a_m \frac{(s+\alpha)^m}{(s+\alpha)^{m+1}}$ *vérifie :*

$$F(s+\alpha) - F_N(s+\alpha) = O(s^N),$$

lorsque s *tend vers* 0.

Ce qui lui permet de calculer les coefficients a_m :

Propriété 2.

$$a_m = \sum_{i=o}^{m} \binom{m}{i} \frac{F^{(i)}(\alpha)}{i!} (2\alpha)^{i+1}.$$

Lorsque F est analytique dans Re(s) > b, Van Iseghem se ramène au cas précédent en considérant G(s) = F(s+b) qui est analytique dans Re(s) > 0.

Théorème 2.

Si F *est analytique dans le demi-plan* Re(s) > b, *si sa cotransformée existe et est telle que :*

$$\int_o^{+\infty} e^{-2bt} f^2(t)\, dt < +\infty$$

alors, pour tout s *du demi-plan* Re(s) > b :

$$F(s) = \sum_{m\geq o} a_m \frac{(s-b-\alpha)^m}{(s-b+\alpha)^{m+1}}$$

et

$$f_N(t) = e^{(b-\alpha)t} \sum_{m=o}^{N-1} a_m L_m(2\alpha t)$$

vérifie :

$$\lim_{N\to+\infty} \int_o^{+\infty} e^{-2bt} |f(t) - f_N(t)|^2 \, dt = 0$$

Propriété 3.

La somme partielle $F_N(s) = \sum_{m=o}^{N-1} a_m \frac{(s-b-\alpha)^m}{(s-b+\alpha)^{m+1}}$ *vérifie :*

$$F_N(s+b+\alpha) - F(s+b+\alpha) = \sigma(s^N)$$

et les coefficients a_m *sont donnés par :*

Propriété 4.

$$a_m = \sum_{i=o}^{m} \binom{m}{i} \frac{F^{(i)}(\alpha+b)}{i!} (2\alpha)^{i+1}.$$

L'inconvénient majeur de cette méthode, par rapport à celle proposée par Wing, est qu'il est nécessaire de fournir les valeurs des dérivées successives de F en (α+c) jusqu'à l'ordre d'approximation choisi. Il faut donc connaître l'expression analytique de F(s) et en déduire les valeurs des dérivées successives. Ce qui nécessite au préalable ou de chercher l'équation différentielle vérifiée par F, travail fastidieux, où de faire appel à un code de dérivation formelle. Dans le premier cas, cela peut être une source d'instabilité numérique.

D'autre part, Van Iseghem est obligée de supposer l'existence de la cotransformée et la convergence de la suite f_N vers la cotransformée est au sens des moindres carrés.

Nous avons repris l'algorithme qu'elle propose car il permet d'obtenir le modèle de ligne stable indiqué par Lubell et Melzer mais en l'étudiant à l'aide de la notion de fonction génératrice introduite par Bars et Mayers. Cela nous permet de démontrer, sous certaines conditions, l'existence de la cotransformée et la convergence uniforme de la suite f_N, comme l'a fait Tricomi et, surtout, d'utiliser les algorithmes de transformée de Fourier Rapide pour le calcul des coefficients a_m ce qui ne nécessite que la connaissance des valeurs de la fonction à inverser en certains points déterminés.

CHAPITRE III

DESCRIPTION ET ÉTUDE DE LA MÉTHODE PROPOSÉS

III.1 - HYPOTHÈSE DE BASE.

Soit F une fonction de la variable complexe s. L'étude des propriétés de la transformation de Laplace montre que, pour que F soit la transformée de Laplace d'une fonction f de Ω, que nous appelerons cotransformée, il est nécessaire que F satisfasse les deux hypothèses suivantes :

i) $\exists b \in \mathbb{R}$ ou éventuellement $b = -\infty$ tel que F soit analytique dans le demi-plan $Re(s) > b$.

ii) Sur ce demi-plan, $\lim_{s \to \infty} F(s) = 0$.

Dans la suite de ce chapitre, nous considérons toujours que ces deux hypothèses sont satisfaites.

III.2 - DÉFINITIONS ET ÉTUDE DE LA FONCTION GÉNÉRATRICE.

Considérons $t_\alpha : s \to z = \frac{s-\alpha}{s+\alpha}$, $\alpha > o$.
En posant $t_\alpha(-\alpha) = \infty$ et $t_\alpha(\infty) = 1$, t_α définit une bijection du plan complexe complété par le point à l'infini dans lui-même. En effet, l'équation $z = \frac{s-\alpha}{s+\alpha}$ admet l'unique solution $s = t^{-1}(z) = \alpha \frac{1+z}{1-z}$ avec $s = \infty$ si $z = 1$ et $s = -\alpha$ si $z = \infty$.

Cette application a de plus la propriété de transformer le demi-plan $Re(s) > o$ dans l'intérieur du disque unité, l'axe imaginaire étant transformé en un cercle de centre 0 et de rayon 1.

En effet, posons :

$$s = \sigma + i\omega.$$

alors

$$|z|^2 = \frac{(\sigma-\alpha)^2 + \omega^2}{(\sigma+\alpha)^2 + \omega^2}$$

et puisque α est strictement positif :

$$\mathrm{Re}(s) > o \Longleftrightarrow |z| < 1$$

$$\mathrm{Re}(s) = o \Longrightarrow |z| = 1$$

$$\mathrm{Re}(s) < o \Longleftrightarrow |z| > 1$$

$$|z| = 1 \Longrightarrow \mathrm{Re}(s) = 0 \text{ ou } s = \infty.$$

a) Supposons en premier lieu que F soit analytique dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > b$ avec $b < o$.

Nous ne nous ramènerons pas à l'étude d'une fonction analytique dans le demi-plan droit $\mathrm{Re}(s) > o$, en considérant $F(s+b)$ au lieu de $F(s)$. Nous verrons pourquoi plus loin.

La fonction $(s+\alpha)\,F(s)$ est à fortiori analytique dans $\mathrm{Re}(s) > 0$. Par suite la fonction $H(z) = (s+\alpha)\,F(s)$ où $s = t^{-1}(z)$, soit :

$$H(z) = \frac{2}{1-z}\,F(\alpha\,\frac{1+z}{1-z}),$$

est au moins analytique dans $|z| < 1$ et :

$$H(z) = \sum_{m\geq o} a_m\, z^m,\ \forall z,\ |z| < 1.$$

Alors, pour tout s vérifiant $\mathrm{Re}(s) > o$, $F(s) = \dfrac{H(t_\alpha(s))}{(s+\alpha)}$ s'écrit :

$$F(s) = \sum_{m\geq o} a_m\,\frac{(s-\alpha)^m}{(s+\alpha)^{m+1}}$$

la convergence étant uniforme sur tous les disques fermés image par t_α^{-1} des disques $D(0, r)$, $r < 1$, soit sur tout compact de $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Formellement, F est alors la transformée de Laplace de f :

$$f(t) = \sum_{m\geq o} a_m\, e^{-\alpha t}\, L_m(2\alpha t).$$

C'est pourquoi nous définirons :

Définition III.2.1.

Soit b *le plus petit nombre réel tel que* F(s) *soit analytique dans le demi-plan* $Re(s) > b$.

Si b *est strictement négatif nous appellerons fonction génératrice du développement en série de fonctions de laguerre de la cotransformée, quand celle-ci existe, la fonction :*

$$H(z) = \frac{2\alpha}{1-z} F(\alpha \frac{1+z}{1-z})$$

Proposition III.2.1.

Si b *est strictement négatif, la fonction génératrice est au moins analytique à l'intérieur du disque unité. Et si, de plus, la fonction* $(s+\alpha)$ F(s) *est analytique à l'infini la fonction génératrice est analytique dans un disque centré à l'origine de rayon* R *strictement supérieur à 1.*

Démonstration.

Puisque les singularités de F sont toutes, sauf éventuellement le point à l'infini, dans le demi-plan $Re(s) < 0$ et que celui-ci est transformé par t_α à l'extéireur du disque unité fermé, les singularités de H à l'exception éventuellement du point $z = 1$ image par t_α du point à l'infini, sont toutes à l'extérieur du disque unité. Par suite si le point à l'infini n'est pas une singularité de $(s+\alpha)$ F(s), le point $z = 1$ n'est pas une singularité de H dont le rayon de convergence est alors strictement plus grand que 1.

Remarque.

Si nous avions considéré $G(s) = F(s+b)$ analytique dans $Re(s) > 0$, comme le fait Van Iseghem, nous n'aurions pas pu obtenir ce résultat.

Que F soit analytique ou non à l'infini, nous ne pouvons qu'énoncer :

Proposition III.2.2.

Soit b *le plus petit nombre réel tel que* F *soit analytique dans le demi-plan* Re(s) > b.

Si b *est strictement négatif, alors, pour tout* s *du demi-plan* Re(s) > o,

$$F(s) = \sum_{m\ o} a_m \frac{(s+\alpha)^m}{(s+\alpha)^{m+1}}$$

et la convergence est uniforme sur tout compact du demi-plan droit.

Propriété III.2.1.

La somme partielle

$$F_N(s) = \sum_{m=o}^{N-1} a_m \frac{(s-\alpha)^m}{(s+\alpha)^{m+1}}$$

définie pour tout s *tel que* Re(s) > $-\alpha$ *vérifie :*

$$F(s+\alpha) - F_N(s+\ ) = \sigma(s^N)$$

pour $s \to 0$.

La vérification de cette propriété est immédiate :
$\forall s$, $Re(s) > -\alpha$, $Re(s+\alpha) > o$

et
$$F(s+\alpha) = \sum_{m\geq o} a_m \frac{s^m}{(s+2\alpha)^{m+1}}$$

par suite :

$$\frac{F(s+\alpha) - F_N(s+\alpha)}{s^N} = \sum_{m\geq N} a_m \frac{s^{m-N}}{(s+2\alpha)^{m-N+1}}$$

b) Supposons maintenant que b soit positif ou nul.

Soit c > b, posons G(s) = F(s+c).

G est analytique dans le demi-plan $Re(s) > b-c$ et $b-c$ est strictement négatif. Quand à la fonction $(s+\alpha)\ G(s)$ elle est à fortiori analytique dans $Re(s) > 0$.

Nous définirons, de manière analogue à la définition III.2.1 :

Définition III.2.2.

Soit b *le plus petit nombre réel tel que* F *soit analytique dans* $Re(s) > b$.

Si b *est positif ou nul, nous appellerons fonction génératrice du développement de la cotransformée de* F, *si elle existe, en série de fonctions de Laguerre, la fonction :*

$$H(z) = \frac{2\alpha}{1-z}\ F(c + \alpha\ \frac{1+z}{1-z})$$

où $c > b$.

$H(z)$ peut aussi s'écrire $H(z) = (s+\alpha)\ G(s)$ où $s = t_\alpha^{-1}(z)$ et puisque les singularités de G sont toutes dans le demi-plan $Re(s) \leq b-c < o$, si $(s+\alpha)\ F(x)$ est analytique à l'infini, $(s+\alpha)\ G(s)$ l'est aussi et les singularités de $H(z)$ sont toutes à l'extérieur du disque unité. Nous énoncerons :

Proposition III.2.3.

Soit b *le plus petit nombre réel tel que* F *soit analytique dans* $Re(s) > b$, *si* b *est positif ou nul, alors pour tout* $c > b$, *la fonction génératrice* $H(z) = \frac{2\alpha}{1-z}\ F(c + \alpha\ \frac{1-z}{1+z})$ *est analytique dans le disque unité. Si de plus* $(s+\alpha)\ F(s)$ *est analytique à l'infini* $H(z)$ *est analytique dans un disque centré à l'origine de rayon* R *strictement supérieur à 1.*

Que $(s+\alpha)\ F(s)$ soit analytique ou non à l'infini, $H(z) = (s+\alpha)\ G(s)$ avec $z = t_\alpha(s)$ et $G(s)$ est analytique dans $Re(s) > b-c$.

alors d'après la proposition III.2.2 :

$$G(s) = \sum_{m\geq o} a_m \frac{(s-\alpha)^m}{(s+\alpha)^{m+1}}$$

pour tout s vérifiant $\mathrm{Re}(s) > 0$ et puisque $G(s-c) = F(s)$, nous pourrons énoncer :

Proposition III.2.4.

Soit b *le plus petit nombre réel tel que* F *soit analytique dans le demi-plan* $\mathrm{Re}(s) > b$.

Si b *est positif ou nul, alors pour tout* $c > b$ *et pour tout* s *du demi-plan* $\mathrm{Re}(s) > c$

$$F(s) = \sum_{m\geq o} a_m \frac{(s-c-\alpha)^m}{(s-c+\alpha)^{m+1}}$$

et la convergence est uniforme sur tout compact de $\mathrm{Re}(s) > c$, *les coefficients* a_m *étant ceux du développement de Taylor de la fonction génératrice.*

Propriété III.2.2.

La somme partielle $F_N(s) = \sum_{m=o}^{N-1} a_m \frac{(s-c-\alpha)^m}{(s-c+\alpha)^{m+1}}$ *vérifie :*

$$F(s+c+\alpha) - F_N(s+c+\sigma) = \sigma(s^N) \text{ pour } s \to o,\ \mathrm{Re}(s) > -\alpha.$$

Remarque.

La proposition III.2.4 permet de voir que *formellement* F est la cotransformée de $f_N(t) = e^{-ct} \sum_{m\geq o} a_m e^{-\alpha t} L_m(2\alpha t)$.

III.3 - CONDITION D'EXISTENCE ET CONSTRUCTION DE LA COTRANSFORMÉE.

Théorème III.3.1.

Soit F *une fonction de la variable complexe.*

Soit b *le plus petit nombre réel tel que* F *est analytique dans* $\mathrm{Re}(s) > b$. *Si* $(s+\alpha)\,F(s)$ *est analytique à l'infini et si* b *est stribtement négatif, alors :*

F *est la transformée de Laplace d'une fonction* f *de carré sommable définie par :*

$$f(t) = \sum_{m\geq 0} a_m \, e^{-\alpha t} \, L_m(2\alpha t)$$

et

$$f_N(t) = \sum_{m=0}^{N-1} a_m \, e^{-\alpha t} \, L_m(2\alpha t)$$

vérifie :

$$\lim_{N\to+\infty} ||f - f_N||_{L_2(0,+\infty)} = 0$$

les a_m *étant les coefficients de Taylor de la fonction génératrice.*

Démonstration.

D'après la proposition III.2.1, la fonction génératrice H est développable en série de Taylor dans un disque centré à l'origine de rayon strictement supérieur à 1 :

$$H(z) = \sum_{m\geq 0} a_m \, z^m, \; |z| < R, \; R > 1.$$

alors, pour tout $r < R$, on a :

$$\sum_{m\geq o} |a_m|^2 \quad r^{2m} = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} |H(re^{i\theta})| \, d\theta$$

et cette intégrale est bornée. En particulier, pour $r = 1$, $\sum_{m\geq o} |a_m|^2 < +\infty$.

Posons $b_m = \dfrac{a_m}{\sqrt{2\alpha}}$, $m \geq o$:

Puisque les fonctions de Laguerre, $\mathcal{L}_m(t) = \sqrt{2\alpha}\, e^{-\alpha t}\, L_m(2\alpha t)$, $m \geq o$, forment un système orthonormé total de $L^2(o, +\infty)$, la fonction

$$f_1(t) = \sum_{m\geq o} b_m \sqrt{2\alpha}\, e^{-\alpha t}\, L_m(2\alpha t)$$

vérifie l'égalité de Parseval :

$$||f_1||_{L^2(o,+\infty)} = \sum_{m\geq o} |b_m|^2 < +\infty.$$

f_1 est donc de carré sommable et admet alors une transformée de Laplace $F_1(s)$ définie et analytique dans $Re(s) > o$.

Montrons que F_1 vérifie :

$$F_1(s) = \sum_{m\geq o} a_m \frac{(s-\alpha)^m}{(s+\alpha)^{m+1}} \text{ , } \forall s,\ Re(s) > o$$

la proposition III.2.2 nous permettra alors d'identifier F et F_1.

Pour tout s, $Re(s) > o$, posons :

$$F_{1,N}(s) = \sum_{m=o}^{N-1} a_m \frac{(s-\alpha)^m}{(s+\alpha)^{m+1}} \text{ ,}$$

$F_{1,N}$ est la transformée de Laplace de $f_{1,N}$

$$f_{1,N}(t) = \sum_{m=o}^{N-1} a_m \, e^{-\alpha t}\, L_m(2\alpha t)$$

Etudions $|F_1(s) - F_{1,N}(s)|$:

$$|F_1(s) - F_{1,N}(s)| = \left|\int_o^{+\infty} e^{-st}\,[f_1(t) - f_{1,N}(t)]\,dt\right|$$

l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous donne :

$$|F_1(s) - F_{1,N}(s)|^2 \leq ||f_1 - f_{1,N}||^2_{L_2(o,+\infty)} \times \int_o^{+\infty} |e^{-st}|^2\,dt$$

Posons $s = \sigma + i\omega$, $\sigma > o$, nous pouvons écrire :

$$\int_o^{+\infty} |e^{-st}|^2\,dt = \frac{1}{2\sigma}.$$

Par suite :

$$|F_1(s) - F_{1,N}(s)|^2 \leq \frac{||f_1 - f_{1,N}||_{L_2(o,+\infty)}}{2\sigma}$$

et puisque $\lim\limits_{N\to+\infty} ||f_1 - f_{1,N}||^2_{L_2(o,+\infty)} = o$,

$$F_1(s) = \sum_{m\geq o} a_m \frac{(s+\alpha)^m}{(s+\alpha)^{m+1}}$$

et la convergence est uniforme sur tout demi-plan fermé $\mathrm{Re}(s) \geq \beta > o$.
Ce qui démontre le théorème.□

De plus, nous obtenons la proposition suivante :

Proposition III.3.1.

Avec les hypothèses du théorèmes III.3.1, la suite des sommes partielles

$$F_N(s) = \sum_{m=o}^{N-1} a_m \frac{(s-\alpha)^m}{(s+\alpha)^{m+1}}$$

converge uniformément vers F(s) *sur tous les demi-plans fermés* Re(s) ≥ β > o.

Concernant l'erreur commise en remplaçant f(t) par $f_N(t)$, nous avons le corollaire suivant :

Corollaire III.3.1.

$$||f - f_N||^2_{L_2(o,+\infty)} = \frac{1}{2\alpha} \sum_{m\geq N} |a_m|^2$$

Démonstration.

Puisque les fonctions de Laguerre forment un système orthonormé de $L_2(o, +\infty)$

$$||f - f_N||^2_{L_2(o,+\infty)} = ||f||^2_{L_2(o,+\infty)} - \sum_{m=o}^{N-1} |b_m|^2$$

et puisque ce système est total, l'égalité de Parseval nous donne :

$$||f||^2_{L_2(o,+\infty)} = \sum_{m\geq o} |b_m|^2.$$

Comme $b_m = \frac{am}{\sqrt{2\alpha}}$, on obtient bien le résultat énoncé.□

Nous pouvons maintenant envisager le cas où b est positif ou nul.

Théorème III.3.2.

Soit F *une fonction de la variable complexe. Soit* b *le plus petit réel tel que* F *soit analytique dans* Re(s) > b.

Si b *est positif ou nul et si pour tout* α > c, (s+α) F(s) *est analytique à l'infini, alors :*

pour tout $c > b$, F *est la transformée de Laplace d'une fonction telle que* $e^{-ct} f(t)$ *soit de carré sommable définie par :*

$$e^{-ct} f(t) = \sum_{m \geq o} a_m e^{-\alpha t} L_m(2\alpha t)$$

et la suite des sommes partielles $f_N(t) = e^{-ct} \sum_{m=o}^{N-1} a_m e^{-\alpha t} L_m(2\alpha t)$ *vérifie :*

$$\lim_{N \to +\infty} \int_o^{+\infty} e^{-2ct} |f(t) - f_N(t)|^2 dt = o,$$

les coefficients a_m, $m \geq o$, *étant ceux du développement en série de Taylor de la fonction génératrice.*

<u>Démonstration.</u>

Pour tout $c > b$, $b-c$ est le plus petit nombre réel tel que $G(s) = F(s+c)$ soit analytique dans $Re(s) > b-c$. $b-c$ étant strictement négatif et $(s+\alpha) G(s)$ étant analytique à l'infini, G est la transformée de Laplace d'une fonction de carré sommable définie par :

$$g(t) = \sum_{m \geq o} a_m e^{-\alpha t} L_m(2\ t)$$

La suite des sommes partielles :

$$g_N(t) = \sum_{m=o}^{N-1} a_m e^{-\alpha t} L_m(2\alpha t)$$

vérifie :

$$\lim_{N \to +\infty} ||g - g_N||^2_{L_2(o,+\infty)} = 0$$

Les coefficients a_m, $m \geq o$, sont ceux du développement en série de Taylor de $H(z) = \frac{2\alpha}{1-z} G(\alpha \frac{1+z}{1-z})$. $H(z)$ s'écrit encore $H(z) = \frac{2\alpha}{1-z} F(c + \alpha \frac{1+z}{1-z})$ qui est bien la fonction génératrice dans le cas $b \geq o$. Considérons maintenant $f(t) = e^{ct} g(t)$. Puisque $g \in L_2(o, +\infty)$, $e^{-c+} f(t) \in L_2(o,+\infty)$ et d'après la proposition I.2.3.

$$\forall s,\ \mathrm{Re}(s) > b,\ G(s-c) = F(s)$$

est la transformée de Laplace de $e^{ct}\ g(t)$. Par suite :

$$e^{-ct}\ f(t) = \sum_{m\geq o} a_m\ e^{-\alpha t}\ L_m(2\alpha t).$$

et, d'après la définition donnée de f_N,

$$\lim_{N\to+\infty} ||g-g_N||^2_{L_2(o,+\ )} = 0$$

s'écrit bien :

$$\lim_{N\to+\infty} \int_o^{+\infty} e^{-2ct}\ |f(t) - f_N(t)|^2\ dt = 0. \square$$

Proposition III.3.2.

Avec les hypothèses du théorème III.3.2, la suite des sommes partielles $F_N(s) = \sum_{m=o}^{N-1} a_m \dfrac{(s-c-\alpha)^m}{(s-c+\alpha)^{m+1}}$ *converge uniformément vers* $F(s)$ *sur tous les demi-plans fermés* $\mathrm{Re}(s) \geq \beta > c$.

Démonstration.

$\forall c > b$, la suite des sommes partielles $G_N(s) = \sum_{m=o}^{N-1} a_m \dfrac{(s-\alpha)^m}{(s+\alpha)^{m+1}}$ converge uniformément vers $G(s) = F(s+c)$ sur tout demi-plan fermé $\mathrm{Re}(s) \geq \beta' > o$.
Par suite $F_N(s) = G_N(s-c)$ converge uniformément vers $F(s)$ sur tous les demi-plans fermés $\mathrm{Re}(s-c) \geq \beta' > o$, soit $\mathrm{Re}(s) \geq \beta > c$.$\square$

Corollaire III.3.2.

$$||e^{-ct}\ (f(t) - f_N(t)||^2_{L_2(o,+\infty)} = \frac{1}{2\alpha} \sum_{m\geq N} |a_m|^2$$

Preuve.

Il suffit de considérer $g(t) = e^{-ct} f(t)$ et $g_N(t) = e^{-ct} f_N(t)$. □

Remarque.

Quelque soit le signe de b, la méthode de Van Iseghem consiste à considérer les approximants suivants de F :

$$F_N(s) = \sum_{m=o}^{N-1} a_m \frac{(s-b-\alpha)^m}{(s-b+\alpha)^{m+1}}$$

On peut vérifier alors que les coefficients a_m sont ceux de la fonction génératrice suivante :

$$H(z) = \frac{2\alpha}{1-z} F\left(b + \alpha \frac{1+z}{1-z}\right)$$

analytique dans $|z| < 1$. On ne peut plus alors obtenir l'existence de la cotransformée dans $L_2(o, +\infty)$. Par contre, la suite $F_N(s)$ converge uniformément vers $F(s)$ sur tout demi-plan fermé de $Re(s) \geq \beta > b$, soit sur une région du plan plus vaste que celles que nous obtenons.
En ce sens ils sont meilleurs que ceux que nous utilisons.

C'est là un des côtés paradoxaux de la transformation de Laplace : en étant moins exigeant sur l'approximation de la transformée, nous obtenons de meilleures propriétés sur l'approximation de la cotransformée. Nous allons voir, notamment, que nous obtenons la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}_*^+$ de la suite f_N vers la cotransformée.

Théorème III.3.3.

Avec les hypothèses du théorème III.3.1, F est la transformée de Laplace de la fonction f, définie et continue sur $\mathbb{R}^+$, donnée par :

$$f(t) = \sum_{m\geq o} a_m e^{-\alpha t} L_m(2\alpha t)$$

où les a_m sont les coefficients du développement en série de Taylor de

$$H(z) = \frac{2\alpha}{1-z} \; F(\alpha \; \frac{1+z}{1-z})$$

et la suite des sommes partielles

$$f_N(t) = \sum_{m=o}^{N-1} a_m \; e^{-\alpha t} \; L_m(2\alpha t)$$

converge uniformément sur tout compact $[o, T]$ *de* $\mathbb{R}^+$.

Démonstration.

D'après la proposition III.2.1, H(z) est analytique dans D(o, R), R > 1. Son $m^{\text{ième}}$ coefficient de Taylor vérifie l'inégalité de Cauchy :

$$(a_m) \leq \frac{A(\rho)}{\rho^m} \; \textit{avec} \; 1 < \rho < R$$

$$\forall m \geq o$$

En utilisant la définition des polynômes de Laguerre

$$|a_m \; L_m(2\alpha t)| \leq \frac{A(\rho)}{\rho^m} \sum_{r=o}^{m} \binom{m}{r} \frac{(2\alpha t)^r}{r!}$$

Considérons alors la série $\sum_{m\geq o} |e^{-\alpha t} \; a_m \; L_m(2\alpha t)|$

$$\sum_{m\geq o} |e^{-\alpha t} \; a_m \; L_m(2\alpha t)| \leq A(\rho) \; e^{-\alpha t} \sum_{m \; o} \frac{1}{\rho^m} \sum_{r=o}^{m} \binom{m}{r} \frac{(2\alpha t)^r}{r!}$$

Pour plus de clarté, posons :

$$U_{m,r} = \begin{cases} \binom{m}{r} \frac{(2\alpha t)^r}{r!} \frac{1}{\rho^m} & \text{si } r \leq m \\ 0 & \text{si } r > m \end{cases}$$

et étudions la série double $\sum_{m,r} U_{m,r}$.

Considérons $\sum\limits_{r\geq o} \sum\limits_{m\geq o} U_{m,r}$: à r fixé, $U_{m,r} = 0$ pour $m = o,\dots,r-1$,

soit :

$$\sum_{r\geq o} \sum_{m\geq o} U_{m,r} = \sum_{r\geq o} \frac{(2\alpha t)^r}{r!} \sum_{m\geq r} \binom{m}{r} \frac{1}{\rho^m}$$

Or

$$\sum_{m\geq r} \binom{m}{r} z^m = \frac{z^r}{(1-z)^{r+1}}, \ \forall z, \ |z| < 1$$

et comme $\rho > 1$,

$$\sum_{m\geq r} \binom{m}{r} \frac{1}{\rho^m} = \frac{1}{\rho^r} \frac{\rho^{r+1}}{(\rho-1)^{r+1}} = \frac{\rho}{(\rho-1)^{r+1}}$$

on obtient donc :

$$\sum_{r\geq o} \sum_{m\geq o} U_{m,r} = \frac{\rho}{\rho-1} \sum_{r\geq o} \left(\frac{2\alpha t}{\rho-1}\right)^r \frac{1}{r!}$$

Soit :

$$\sum_{r\geq o} \sum_{m\geq o} U_{m,r} = \frac{\rho}{\rho-1} e^{\frac{2\alpha t}{\rho-1}}$$

par suite :

$$\sum_{m,2} U_{m,r} = \frac{\rho}{\rho-1} e^{\frac{2\alpha t}{\rho-1}}$$

ce qui nous donne enfin la majoration :

$$\sum_{m\geq o} |e^{-\alpha t} a_m L_m(2\alpha t)| \quad \frac{A(\rho).\rho}{\rho-1} \ e^{\frac{2\alpha t}{\rho-1} - \alpha t}$$

La série $\sum\limits_{m\geq o} a_m e^{-\alpha t} L_m(2\alpha t)$ est absolument convergente sur $\mathbb{R}^+$ et uniformément convergente sur tout compact $[0,T]$ de $\mathbb{R}^+$.

La somme partielle $f_N(t) = \sum\limits_{m=o}^{N-1} a_m e^{-\alpha t} L_m(2\alpha t)$ étant continue et la suite f_N convergeant uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^+$, sa limite f est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

Il resterait à vérifier que f admet bien comme transformée de Laplace. Ce qui est bien le cas d'après le théorème III.3.1.□

Théorème III.3.4.

Avec les hypothèses du théorème III.3.2 F *est la transformée de Laplace de la fonction* f, *définie et continue sur* $\mathbb{R}^+$ *donnée par :*

$$f(t) = e^{ct} \sum_{m\geq o} a_m \, e^{-\alpha t} \, L_m(2\alpha t)$$

où les a_m *sont les coefficients du développement en série de Taylor de*

$$H(z) = \frac{2\alpha}{1-z} F(c + \alpha \frac{1+z}{1-z})$$

et la suite des sommes partielles

$$f_N(t) = e^{ct} \sum_{m=o}^{N-1} a_m \, e^{-\alpha t} \, L_m(2\alpha t)$$

converge uniformément sur tout compact [O, T] *de* $\mathbb{R}^+$.

Démonstration.

Il suffit de considérer $G(s) = F(s+c)$, $\forall c$, $c > b$ alors d'après le théorème précédent, G est la transformée de Laplace de

$$g(t) = \sum_{m\geq o} a_m \, e^{-\alpha t} \, L_m(2\alpha t)$$

définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ et la suite des sommes partielles

$$g_N(t) = \sum_{m=o}^{N-1} a_m \, e^{-\alpha t} \, L_m(2\alpha t)$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^+$.

Or $f(t) = e^{ct} g(t)$ admet $G(s-c) = F(s)$ comme transformée de Laplace, $\forall s$, $Re(s) > b$ et la suite des sommes partielles :

$$f_N(t) = e^{ct} g_N(t)$$

converge uniformément vers e^{ct} $g(t) = f(t)$ sur tout compact de $\mathbb{R}^+$.□

On peut se demander ce qui se passe lorsque la fonction (s+) F(s) est singulière à l'infini. Il n'est bien sûr plus possible de déduire l'existence de la cotransformée. Pourtant il se peut fort bien qu'elle existe.

Ainsi la fonction $F(s) = \frac{e^{-as}}{s}$ est telle que (s+) F(s) admette une singularité essentielle à l'infini cependant sa cotransformée existe bien, elle est définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < a \\ \\ 1 \text{ si } t > a \end{cases}$$

Nous énoncerons :

Proposition III.3.3.

L'analyticité de la fonction $(s+\alpha)$ F(s), $\alpha > o$, à l'infini est une condition suffisante mais non nécessaire d'existence de la cotransformée.

Théorème III.3.5.

Soit b le plus petit nombre réel tel que F soit analytique dans Re(s) > b.

Si b est strictement négatif.

Si le point à l'infini est une singularité de $(s+\alpha)$ F(s), $\alpha > o$, alors si F admet une cotransformée de carré sommable, celle-ci est représentable dans $L_2(o, +\infty)$ par la série :

(1) $$f(t) = \sum_{m\geq o} a_m e^{-\alpha t} L_m(2\alpha t)$$

où les coefficients a_m sont ceux du développement en série de Taylor de

$H(z) = \frac{2\alpha}{1-z} F(\alpha \frac{1+z}{1-z})$.

$f_N(t) = \sum_{m=o}^{N-1} a_m e^{-\alpha t} L_m(2\alpha t)$ *est le meilleur approximant au sens des moindres carrés de* f *sur le sous espace de* $L_2(o, +\infty)$ *engendré par* $(L_o,\dots,L_{N-1})$ *et la suite* f_N *converge vers* f *lorsque* N *tend vers l'infini et*

$$||f - f_N||^2_{L_2(o,+\infty)} = \frac{1}{2\alpha} \sum_{m\geq N} |a_m|^2$$

Démonstration.

Si f cotransformé de F existe et est de carré sommable elle est développable en série de Fourier par rapport à la base des fonctions de Laguerre. Notons b_m, $m \geq o$ les coefficients de ce développement :

$$f(t) = \sum_{m\geq o} b_m \sqrt{2\alpha}\, e^{-\alpha t} L_m(2\alpha t)$$

Si nous posons :

$$f^{(t)}_{1,N} = \sum_{m=o}^{N-1} b_m \sqrt{2\alpha}\, e^{-\alpha t} L_m(2\alpha t).$$

$$\lim_{N\to+\infty} ||f - f_{1,N}||^2_{L^2(o,+\infty)} = 0$$

et l'égalité de Parseval nous donne :

$$||f - f_{1,N}||^2_{L^2(o,+\infty)} = \sum_{m\geq N} |b_m|^2.$$

Il nous suffit donc de démontrer que $a_m = \sqrt{2\alpha}\, b_m$. Pour cela, considérons $F_{1,N}$ la transformée de Laplace de $f_{1,N}$. D'après la propriété II.2.6,

$$F_{1,N}(s) = \sum_{m=o}^{N-1} b_m \sqrt{2\alpha} \frac{(s+\alpha)^m}{(s+\alpha)^{m+1}} ,$$

pour tout s vérifiant $Re(s) > -\alpha$.

Soit s tel que Re(s) > o, considérons :

$$|F_{1,N}(s) - F(s)|^2$$

$$|F_{1,N}(s) - F(s)| \quad \left| \int_o^{+\infty} |e^{-st}|^2 \, dt \times ||f_{1,N} - f||^2_{L_2(o,+\infty)} \right.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz nous donne :

En posant $s = \sigma + i\omega$, $\sigma > o$, on obtient :

$$|F_{1,N}(s) - F(s)| \leq \frac{||f_{1,N} - f||^2_{L_2(o,+\ )}}{2\sigma}$$

Comme $\lim\limits_{N\to+\infty} ||f_{1,N} - f||_{L_2(o,+\infty)} = 0$, la suite $F_{1,N}(s)$ converge vers F(s) pour tout s tel que Re(s) > o et de plus la convergence est uniforme sur tout demi-plan fermé $Re(s) \geq \beta > o$.

La proposition III.2.2 nous permet alors d'identifier $F_{1,N}$ et F, nous avons donc

$$a_m = \sqrt{2\alpha}\, b_m . \square$$

Théorème III.3.6.

Soit b *le plus petit nombre réel tel que* F *soit analytique dans* Re(s) > b.

Si b *est positif ou nul et si* $(s+\alpha)\,F(s)$ *admet le point à l'infini comme singularité, alors, si* F *admet une cotransformée* f *telle que* $e^{-bt} f(t)$ *soit de carré sommable, pour tout* c > b, *la fonction* $g(t) = e^{-ct} f(t)$ *est représentable dans* $L_2(o,+\infty)$ *par la série*

$$g(t) = \sum_{m\geq o} a_m \, e^{-\alpha t} \, L_m(2\alpha t) \tag{2}$$

où les coefficients a_m, $m \geq o$, *sont ceux du développement en série de Taylor de la fonction :*

$$H(z) = \frac{2\alpha}{1-z} F(c + \alpha \frac{1+z}{1-z})$$

$$f_N(t) = e^{ct} \sum_{m=o}^{n-1} a_m e^{-\alpha t} L_m(2\alpha t)$$

est telle que $e^{-ct} f_N(t)$ *est le meilleur approximant au sens des moindres carrés de* $g(t)$ *sur le sous-espace de* $L_2(o,+\infty)$ *engendré par* $(L_o,\dots,L_{N-1})$ *et :*

$$\int_{o}^{+\infty} e^{-2ct} |f(t) - f_N(t)|^2 \, dt = \sum_{m \geq N} |a_m|^2$$

Démonstration.

Si $e^{-bt} f(t)$ est de carré sommable, il en est de même de la fonction $g(t) = e^{-ct} f(t)$, pour tout c, $c > b$. Or g admet comme transformée de Laplace $G(s) = F(s+c)$ analytique dans le demi-plan $Re(s) > b-c$, $b-c < 0$.

G(s) satisfait donc les hypothèses du théorème III.3.5 dont il suffit alors d'écrire les résultats avec $g_N = e^{-ct} f_N$.□

On peut alors se demander s'il est possible que les développements précédents définissant la cotransformée puissent convergen uniformément sur tout compact :

Proposition III.3.4.

Quel que soit le signe de b, *plus petit nombre réel tel que* F *soit analytique dans* $Re(s) > b$, *une condition nécessaire et suffisante pour que le développement (1), ou (2) selon le cas, converge uniformément sur tout compact est que la fonction* $(s+\alpha) F(s)$ *soit analytique à l'infini.*

Preuve.

Nous avons vu que c'était effectivement une condition suffisante. Montrons qu'e-le est nécessaire dans le cas où b est strictement négatif, le cas $b \geq o$ s'en déduisant facilement.

Supposons donc que la cotransformée f de F existe et que

$$f(t) = \sum_{m \geq o} a_m \, e^{-\alpha t} \, L_m(2\alpha t)$$

la convergence étant uniforme sur tout compact [0,T].
En particulier :

$$\sum_{m \geq o} a_m = f(o) < +\infty$$

la série $H(z) = \sum_{m \geq o} a_m z^m$ est donc défini en z = 1, son rayon de convergence est même strictement plus grand que 1, puisque b est strictement négatif.
Et puisque $H(z) = (s+\alpha)\ F(s)$ avec $s = t^{-1}(z)$ et que le point infini est l'image par t_α^{-1} de 1 le point infini n'est pas une singularité de $(s+\alpha)F(s)$.□

Chapitre IV

Calcul des coefficients du développement en série de Taylor de la fonction génératrice à l'aide de l'Opérateur de Fourier Discret.

IV.1 - INTRODUCTION.

Du chapitre précédent nous pouvons déduire la méthode d'inversion de la transformée de Laplace suivante.

Soit F, une fonction de la variable complexe dont on désire connaître une valeur approchée de la cotransformée en un point t.

Soit b le plus petit réel tel que F soit analytique dans Re(s) > b.

a) *Choix de C :*

si b est strictement négatif, c = o sinon prendre c > b.

b) *Calcul des N premiers coefficients* a_m, m = 0, N-1 *du développement en série de Taylor de la fonction*

$$H(z) = \frac{2\alpha}{1-z} F(c+ \alpha \frac{1+z}{1-z})$$

c) *Calcul de la valeur en t de l'approximant de la cotransformée :*

$$f_N(t) = e^{ct} \sum_{m=o}^{N-1} a_m e^{-\alpha t} L_m(2\alpha t).$$

Dans son principe, cette méthode revient à approcher la transformée de Laplace par la fonction rationnelle

$$F_N(1) = \sum_{m=o}^{N-1} a_m \frac{(s-c-\alpha)^m}{(s-c+\alpha)^{m+1}}$$

et à prendre comme approximants de la cotransformée l'inverse exacte f_N de F_N.

Une telle méthode n'est évidemment réalisable que si nous disposons d'un moyen simple de calculer les coefficients a_m.

Nous verrons justement dans ce chapitre, après en avoir rappelé la définition, que l'Opérateur de Fourier Discret permet le calcul de valeurs approchées $\bar{a}_m$ les n premiers coefficients a_m, m = o,...,n-1 à paritr de n valeurs de des n premiers coefficients a_m, m = o,...,n-1 à partir de n valeurs de la fonction génératrice en n points précisément choisis. Ces valeurs approchées tendent géométriquement vers les valeurs exactes lorsque n croît indéfiniment et il est alors nécessaire de dissocier le nombre n de coefficients calculés du degré N de l'approximation de la cotransformée qui est aussi le nombre effectivement ut-lisé de coefficients.

Nous comparerons l'approximant calculé :

$$\hat{F}_{N,n}(s) = \sum_{m=o}^{N-1} \hat{a}_m \frac{(s-c-\alpha)^m}{(s-c+\alpha)^{m+1}}$$

à l'approximant vrai

$$F_N(s) = \sum_{m=o}^{N-1} a_m \frac{(s-c-\alpha)^m}{(s-c+\alpha)^{m+1}}$$

ainsi que leurs cotransformées respectives.

cette étude montrera que l'utilisation de l'Opérateur de Fourier Discret constitue une méthode fiable de calcul des coefficients a_m.

IV.2 - L'OPÉRATEUR DE FOURIER DISCRET.

Ce rappel est tiré de Henrici [9].

Soit F une fonction de période 1 dont les valeurs sont connues aux points $\tau_k = \frac{k}{n}$, k = o,...,n.

Soit C_k le $k^{\text{ième}}$ coefficient du développement de F en série de Fourier :

$$c_k = \int_o^1 F(\tau)\, e^{-2i\Pi k\tau}\, d\tau,\ k \in Z.$$

On peut obtenir une approximation $\hat{c}_k$ de la valeur de c_k en utilisant la formule des Trapèzes avec un pas $h = \frac{1}{n}$:

$$\hat{c}_k = \frac{1}{n} \{\frac{1}{2} F(\tau_o) + \sum_{j=1}^{n-1} F(\tau_j) e^{-2i\Pi k\tau_j} + \frac{1}{2} F(\tau_n) e^{-2i\Pi k\tau_n}\}$$

D'autre part, on a $\tau_j = \frac{j}{n}$, $j = o,\ldots,n$.

Posons

$$W_n = \exp\left(\frac{2i}{n}\right),$$

alors

$$\exp(-2i\, k\tau_j) = W_n^{-k.j}.$$

De plus $W_n^{-k.n} = 1$ et $F(\tau_o) = F(\tau_n)$.

En posant $F(\tau_j) = f_j$, $j = o,\ldots,n$ la formule des trapèzes devient :

$$\hat{c}_k = \frac{1}{n} \sum_{j=o}^{n-1} f_j\, W_n^{-kj}, \quad k \in Z$$

On remarque immédiatement que la suite $\{\hat{c}_k\}_{k\in Z}$ ainsi obtenue est de période n et qu'il en était de même de la suite $\{f_k\}_{k\in Z}$.

Nous définirons :

Définition IV.2.1.

Nous appellerons Opérateur de Fourier Discret l'application linéaire F_n *de l'espace vectoriel* Π_n *des suites de période* n *dans lui-même qui à une suite* $x = \{x_n\}_{k\in Z}$ *fait correspondre la suite* $y = \{y_k\}_{k\in Z}$ *définie par :*

$$y_k = \frac{1}{n} \sum_{j=o}^{n-1} x_j\, W_n^{-kj}, \quad k \in Z.$$

où $W_n = \exp(i\, \frac{2}{n})$ *et nous noterons :*

$$y = F_n.x.$$

Proposition IV.2.1.

F_n est une application bijective, son inverse est définie par :

$$x = F_n^{-1}.y,$$

où :

$$x_r = \sum_{m=o}^{n-1} y_m \, W_n^{r.m}$$

Biensûr, une des principales utilisations de l'Opérateur de Fourier Discret est le calcul de valeurs approchées des coefficients de Fourier d'une fonction périodique. Si nous notons f la suite de période n des valeurs prises par la fonction F de période 1 aux points $\tau_k = \frac{k}{n}$, $k \in Z$, et $\hat{c}$ la suite des valeurs approchées par la méthode des trapèzes des coefficients de Fourier de la fonction F, alors :

$$\hat{c} = F_n.f.$$

Nous n'énoncerons pas les propriétés concernant l'erreur commise et l'utilisation de ces valeurs approchées dans ce cadre général. Nous avons préféré, ce qui est tout aussi simple, les redémontrer dans le cas particulier de la fonction qui nous intéresse.

IV.3 - CALCUL DE VALEURS APPROCHÉES DES COEFFICIENTS DE TAYLOR DE LA FONCTION GÉNÉRATRICE.

Quelles que soient les hypothèses faites sur la fonction à inverser, la fonction génératrice H est toujours analytique à l'intérieur du disque unité et y admet un développement en série de Taylor :

(1) $$H(z) = \sum_{m\geq o} a_m \, z^m, \; \forall z, \; |z| < 1.$$

Cette série est normalement convergente pour tout z vérifiant $|z| \leq r < 1$.

Posons $\rho = |z| \leq r < 1$ et $z = \rho\, e^{i\theta}$ et considérons $H(\theta) = H(\rho\, e^{i\theta})$ à ρ fixé.

H est une fonction de période 2Π et :

$$H(\theta) = \sum_{m \geq o} a_m\, \rho^m\, e^{im\theta}$$

Cette dernière série étant normalement convergente par rapport à θ, on peut l'intégrer terme à terme :

$$\frac{1}{2\Pi} \int_o^{2\Pi} H(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta = \frac{1}{2\Pi} \sum_{m \geq o} a_m \rho^m \int_o^{2\Pi} e^{i(m-n)\theta}\, d\theta$$

Soit :

$$a_m\, \rho^m = \frac{1}{2\Pi} \int_o^{2\Pi} H(\theta)\, e^{-im\theta}\, d\theta$$

ce que nous énoncerons :

Proposition IV.3.1.

Soit ρ, $o \leq \rho \leq r < 1$, a_m *est le quotient par* ρ^m, $m \geq o$, *du* $m^{ième}$ *coefficient de Fourier de la fonction* 2Π *périodique :*

$$H(\theta) = \frac{2\alpha}{1-\rho\, e^{i\theta}}\, F(c + \alpha\, \frac{1+\rho\, e^{i\theta}}{1+\rho\, e^{i\theta}})$$

Remarque.

Pour $\rho = 1$, H s'écrit :

$$H(\theta) = [i\alpha \operatorname{colg} (\frac{\theta}{2}) + \alpha].F(c+i\,\alpha \operatorname{cotg} (\frac{\theta}{2}))$$

qui est la fonction utilisée par Wing [6] dans son algorithme. Or ρ ne peut prendre la valeur 1 que si le rayon de convergence de la série (1) est strictement plus grand que 1, ce qui ne se produit que lorsque $(s+\alpha)\, F(s)$ est analytique à l'infini pour tout $\alpha > o$.

Posons $W_n = \exp\,(i\,\frac{2\Pi}{n})$ et considérons la suite h de période n définie par :

$$h_p = \frac{2\alpha}{1-\rho W_n^p}\,F(c + \alpha\,\frac{1+\rho\,W_n^p}{1-\rho\,W_n^p}),\ p \in Z$$

alors une valeur approchée $\hat{a}_m$ de a_m, $m \geq o$, nous est donnée par :

$$\hat{a}_m = \frac{\hat{c}_m}{\rho^m}$$

où

$$\hat{c} = F_n . h$$

i.e :

$$\hat{a}_m = \frac{1}{\rho^m}\,(\frac{1}{n}\sum_{p=o}^{n-1} h_p\,W_n^{-m.p}),\ m \geq o.$$

Concernant l'erreur commise en remplaçant a_m par $\hat{a}_m$, nous avons :

Proposition IV.3.2.

Il existe q, $o < q < 1$ *tel que :*

$$|\hat{a}_m - a_m| = O(q^n),\ m \geq o$$

lorsque n *tend vers* $+\infty$.

Démonstrations.

Montrons tout d'abord que :

$$\hat{a}_m - a_m = \sum_{k\geq 1} a_{m+k.n}\,\rho^{k.n}$$

et pour cela considérons :

$$\hat{c}_m = \frac{1}{n}\sum_{p=o}^{n-1} h_p\,W_n^{-m.p}$$

Puisque $\forall\theta$, $H(\theta) = \sum_{k\geq o} a_k \rho^k e^{ik}$, pour tout $p \geq o$,

$$h_p = \sum_{k\geq o} a_k \rho^k W_n^{kp},$$

et $\hat{c}_m$ s'écrit :

$$\hat{c}_m = \frac{1}{n} \sum_{p=o}^{n-1} W_n^{-m.p} \sum_{k\geq o} a_k \rho^k W_n^{k.p}$$

Les séries h_p étant convergentes :

$$\hat{c}_m = \frac{1}{n} \sum_{k\geq o} a_k \rho^k \sum_{p=o}^{n-1} W_n^{(k-m).p}$$

Or

$$\sum_{p=o}^{n-1} W_n^{p.r} = \begin{cases} 0 \text{ si } r \neq \nu.n \\ n \text{ si } r = \nu.n \end{cases} \quad \nu \in \mathbb{N}$$

et donc :

$$\hat{c}_m = \sum_{\nu\geq o} a_{m+\nu.n}\, \rho^{m+ \;.n}$$

ou encore :

$$\hat{c}_m - a_m\, \rho^m = \sum_{k\geq 1} a_{m+k.n} \cdot \rho^{m+k.n}$$

comme $\hat{a}_m = \frac{\hat{c}_m}{m}$, on obtient bien :

$$\hat{a}_m - a_m = \sum_{k\geq 1} a_m \qquad \rho^{m+k.n}$$

D'autre part, la fonction $H(\theta) = H(\rho e^{i\theta})$ à ρ fixé, $o \leq \rho \leq \; r < 1$, est analytique dans $\mathbb{R}$. On a donc la majoration suivante de ses coefficients de Fourier que nous notons c_m, (cf. [14] p.80) :

$\exists K > o$ et $\exists q$, $o < q < 1$ tels que :

$$|c_m| \leq K.q^m, \; \forall m \geq 0$$

Or :

$$a_m \rho^m = c_m,$$

d'où :

$$|a_m| \leq K.(\frac{q}{\rho})^m.$$

Par suite, $|\hat{a}_m - a_m| \leq K \sum_{k\geq 1} (\frac{q}{\rho})^{m+kn} \rho^{k.n}$. Soit, puisque $o < q < 1$:

$$|\hat{a}_m - a_m| \leq K.(\frac{q}{\rho})^m \frac{q^n}{1-q^n} \leq K.(\frac{q}{\rho})^m \frac{q^n}{1-q}$$

$\square$.

Supposons que, connaissant les valeurs h_p, $p = o,\dots,n$ nous ayons calculé les coefficients $\hat{a}_m$, $m = 0,\dots,n-1$.
Il serait alors tentant d'utiliser tous ces coefficients et de choisir comme approximant rationnel de la fonction F l'approximant $\hat{F}_n$:

$$\hat{F}_n(s) = \sum_{m=o}^{n-1} \hat{a}_m \frac{(s-c-\alpha)^m}{(s-c+\alpha)^{m+1}}$$

C'est d'ailleurs le choix que fait Wing [6]. Et effectivement, cet approximant a des propriétés intéressantes, notamment :

<u>*Propriété IV.3.1.*</u>

Considérons les points s_k *pour* k *variant de* 0 *à* n-1 *définis par :*

$$s_k = \frac{1+\rho\, W_n^k}{1-\rho\, W_n^k}$$

alors $\hat{F}_n$ *interpôle* F *aux points* $s_k + c$, *i.e* :

$$\hat{F}_n(c+s_k) = F(c+s_k),\ k = 0,\dots,n-1.$$

Démonstration.

Pour tout k variant de 0 à n-1, nous avons par définition de $\hat{F}_n$:

$$(s_k + \alpha)\ \hat{F}_n(s_k + c) = \sum_{m=o}^{n-1} \hat{a}_m \left(\frac{s_k-\alpha}{s_k+\alpha}\right)^m$$

Or

$$\frac{s_k-\alpha}{s_k+\alpha} = t_\alpha(s_k) = t_\alpha(t_\alpha^{-1}(\rho W_n^k)) = \rho W_n^{k.m}$$

Par suite,

$$(s_k+\alpha)\ \hat{F}_n(s_k + c) = \sum_{m=o}^{n-1} \hat{a}_m\ \rho^m\ W_n^{k.m}$$

comme $\hat{a}_m\ \rho^m = \hat{c}_m$:

$$(s_k + \alpha)\ \hat{F}_n(s_k + c) = \sum_{m=o}^{n-1} \hat{c}_m\ W_n^k$$

Comme $\hat{c} = \mathcal{F}_n.h$, $h = \mathcal{F}_n^{-1}.\hat{c}$, soit en détaillant :

$$h_k = \sum_{m=o}^{n-1} \hat{c}_m.W_n^{k.m}.$$

Nous avons donc :

$$(s_k + \alpha)\ \hat{F}_n(s_k) = h_k$$

et

$$h_k = (s_k + \alpha)\ F(c + s_k).$$

Finalement on obtient bien :

$$\hat{F}_n(c + s_k) = F(c + s_k).$$

Mais l'inconvénient de cet approximant est que les degrés de son numérateur et de son dénominateur augmentent au fur et à mesure que, cherchant à améliorer la précision sur les valeurs calculées $\hat{a}_m$, nous augmentons le nombre n de valeurs de H utilisées. De plus, la proposition IV.3.2 montre que l'on a intérêt à choisir n très grand par rapport à m. C'est pourquoi il paraît plus intéressant de dissocier le degré de l'approximation N et le nombre n de valeurs de H utilisées par l'Opérateur de Fourier Discret.

Nous considérerons désormais l'approximant suivant :

$$\hat{F}_{N,n}(s) = \sum_{m=o}^{N-1} \hat{a}_m \frac{(s-c-\alpha)^m}{(s-c+\alpha)^{m+1}}$$

défini pour $Re(s) > 0$ et obtenu à partir de :

$$F_N(s) = \sum_{m=o}^{N-1} a_m \frac{(s-c-\alpha)^m}{(s-c+\alpha)^{m+1}}$$

en remplaçant les coefficients a_m par leurs valeurs calculées à l'aide de l'Opérateur de Fourier Discret F_n.

Nous allons maintenant étudier la différence qui existe entre ces deux approximants.

Propriété IV.3.1.

La suite $\hat{F}_{N,n}(s)$ *converge vers* $F_N(s)$ *pour tout* s *vérifiant* $Re(s) > 0$ *quand* n *tend vers l'infini et il existe* q *strictement positif et inférieur à* 1 *tel que :*

$$|\hat{F}_{N,n}(s+c) - F_N(s+c)| = O(q^n)$$

lorsque n *tend vers* $+\infty$.

Démonstration.

Par définition de $\hat{F}_{N,n}$ et F_N :

$$\forall s,\ Re(s) > o,\ \hat{F}_{N,n}(s+c) - F_N(s+c) = \sum_{m=o}^{N-1} (\hat{a}_m - a_m) \frac{(s-\alpha)^m}{(s+\alpha)^{m+1}}$$

Soit :

$$(s+\alpha)\ [\hat{F}_{N,n}(s+c) - F_N(s+c)] = \sum_{m=o}^{N-1} (\hat{a}_m - a_m)\ z^m$$

avec

$$z = t_\alpha(s) = \frac{s-\alpha}{s+\alpha}\ ,$$

et puisque $Re(s) > o$, $\alpha > o$, $|z| < 1$ et $|s+\alpha| > \alpha$ ce qui nous permet d'écrire :

$$|\hat{F}_{N,n}(s+c) - F_N(s+c)| \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{m=o}^{N-1} |\hat{a}_m - a_m|.$$

D'après la proposition IV.3.2, $\exists q$, $o < q < 1$ tel que :

$$|\hat{a}_m - a_m| = O(q^n).$$

Par suite :

$$|F_{N,n}(s+c) - F_N(s+c)| = O(q^n).\square$$

Propriété IV.3.2.

Il existe q, $o < q < 1$, *tel que : pour* i *variant de* 0 *à* $N-1$,

$$|\hat{F}^{(i)}_{N,n}\ (\alpha+c) - F^{(i)}(\alpha+c)| = O(q^n),$$

lorsque n *tend vers* $+\infty$.

Démonstration.

$\hat{F}_{N,n}(s+c)$ et $F(s+c)$ sont indéfiniment dérivables dans $Re(s) > o$.

En $s = \alpha$, on obtient :

$$\hat{F}_{N,n}(\alpha+c) = \frac{\hat{a}_o}{2}, \; F(\alpha+c) = \frac{a_o}{2\alpha}.$$

comme $|\hat{a}_o - a_o| = \sigma(q^n)$, $o < q < 1$

$$|\hat{F}_{N,n}(\alpha+c) - F(\alpha+c)| = \sigma(q^n).$$

Supposons que nous ayons démontré que :

$$|\hat{F}^{(i)}_{N,n}(\alpha+c) - F^{(i)}(\alpha+c)| = O(q^n)$$

pour tout i, $o \leq i \leq N-2$, montrons qu'alors :

$$|\hat{F}^{(i+1)}_{N,n}(\alpha+c) - \hat{F}^{(i)}(\alpha+c)| = O(q^n).$$

Pour cela, considérons :

$$(s+\alpha)^{i+1} \, (\hat{F}_{N,n}(s+c) - F(s+c))$$

qui s'écrit :

$$\sum_{m=o}^{i} (\hat{a}_m - a_m)(s+\alpha)^{i-m}(s-\alpha)^m + (\hat{a}_{i+1} - a_{i+1}) \frac{(s-\alpha)^{i+1}}{(s+\alpha)}$$

$$+ \sum_{m\; i+2}^{N-1} (\hat{a}_m - a_m) \frac{(s-\alpha)^m}{(s+\alpha)^{m-i}} + \sum_{m \geq N} a_m \frac{(s-\alpha)^m}{(s+\alpha)^{m-i}}$$

Par suite, en dérivant jusqu'à l'ordre i+1 et en évaluant cette dérivée en $s=\alpha$, on obtient :

$$\frac{d^{i+1}}{ds^{i+1}}\left[(s+\alpha)^{i+1}\left(\hat{F}_{N,n}(s+c)-F(s+c)\right)\right]_{s=\alpha}=(\hat{a}_{i+1}-a_{i+1})\,\frac{d^{i+1}}{ds^{i+1}}\left[\frac{(s-\alpha)^{i+1}}{(s+\alpha)}\right]_{s=\alpha}$$

et ceci n'est vrai que pour $i+1 \leq N-1$, sinon on obtiendrait :

$$a_{i+1}\,\frac{d^{i+1}}{ds^{i+1}}\left[\frac{(s-\alpha)^{i+1}}{(s+\alpha)}\right]_{s=\alpha}$$

Comme

$$\frac{d^{i+1}}{ds^{i+1}}\left[\frac{(s-\alpha)^{i+1}}{(s+\alpha)}\right]_{s=\alpha}=\frac{(i+1)!}{2\alpha}$$

et que, d'autre part :

$$\frac{d^{i+1}}{ds^{i+1}}\left[(s+\alpha)^{i+1}\left(\hat{F}_{N,n}(s+c)-F(s+c)\right)\right]_{s=\alpha}=$$

$$\sum_{k=o}^{i+1}\binom{i+1}{k}\frac{(i+1)!}{k!}(2\alpha)^{k}\left[\hat{F}^{(k)}_{N,n}(\alpha+c)-F^{(k)}(\alpha+c)\right]$$

alors :

$$(2\alpha)^{i+1}\,\frac{\hat{F}^{(i+1)}_{N,n}(\alpha+c)-F^{(i+1)}(\alpha+c)}{(i+1)!}=\frac{\hat{a}_{i+1}-a_{i+1}}{2\alpha}-$$

$$\sum_{k=o}^{i}\binom{i+1}{k}\frac{\hat{F}^{(k)}_{N,n}(\alpha+c)-F^{(k)}(\alpha+c)}{k!}(2\alpha)^{k}$$

Or :

$$|\hat{a}_{i+1} - a_{i+1}| = O(q^n)$$

et

$$|\hat{F}^{(k)}_{N,n}(\alpha+c) - F^{(k)}(\alpha+c)| = O(q^n), \quad k=0,\dots,i$$

avec

$$o < q < 1.$$

On a donc bien :

$$|\hat{F}^{(i+1)}_{N,n}(\alpha+c) - F^{(i+1)}(\alpha+c)| = (q^n).$$

Ce qui établit la propriété IV.3.5 puisqu'elle est vérifié pour i=0. Si, nous avions eu $i+1 \geq N$, nous aurions obtenu

$$\frac{a_{i+1}}{2\alpha}$$

à la place de

$$\frac{\hat{a}_{i+1} - a_{i+1}}{2\alpha}$$

dans l'égalité ci-dessus et comme $|a_{i+1}| = O(q^{i+1})$, nous n'aurions pas pu écrire

$$|\hat{F}^{(i+1)}_{N,n}(\alpha+c) - F^{(i+1)}(\alpha+c)| = O(q^n). \ \square$$

Pour tout s vérifiant $Re(s) > o$, $\hat{F}_{N,n}$ est la transformée de Laplace de :

$$\hat{f}_{N,n}(t) = e^{ct} \sum_{m=o}^{N-1} \hat{a}_m \, e^{-t} \, L_m(2\alpha t)$$

et si nous utilisons à la place des coefficients a_m leurs valeurs calculés à l'aide de l'Opérateur de Fourier Discret, c'est cette fonction qui nous

fournira une valeur approchée de la cotransformée de F au point t.
Il est donc intéressant de vérifier que $\hat{f}_{N,n}$ tend vien vers f_N lorsque n tend vers l'infini. On a, de manière évidente, le résultat suivant :

Propriété IV.3.3.

Il existe q, $o < q < 1$, *tel que sur tout compact* [O, T]

$$|f_N(t) - \hat{f}_{N,n}(t)| = \sigma(q^n).$$

CHAPITRE V

INFLUENCE ET CHOIX ÉVENTUEL DU PARAMÈTRE α

V.1 - INTRODUCTION.

Nous avons vu que l'Opérateur de Fourier Discret permet d'obtenir de bonnes valeurs des coefficients a_m pour n suffisamment grand par rapport à N. Cette méthode est d'autant plus intéressante que l'Opérateur de Fourier Discret se calcule en n log n multiplications grâce aux algorithmes de Transformée de Fourier Rapide qui sont maintenant très répandus.

Dans ce chapitre nous nous proposons d'étudier la norme $L_2(o, +\infty)$ de l'erreur d'approximation, soit :

$$e_N = ||e^{ct} (f(t) - f_N(t))||^2_{L_2(o,+\infty)}$$

avec la convention suivante sur c :

soit b le plus petit réel tel que F est analytique dans Re(s)   b, alors :

$$c = \begin{cases} o & \text{si } b < o \\ \\ >b & \text{si } b \geq o. \end{cases}$$

En théorie du signal, il se pose souvent un problème assez voisin de celui de l'inversion de la transformée de Laplace qui est la recherche du développement d'une fonction sur une base de fonctions déduites des polynômes de Laguerre. L'erreur d'approximation commise en tronquant un tel développement à un ordre N semble avoir été bien étudiée. On peut trouver dan l'article de Martin Schetzen [10] un bon résumé des résultats obtenus. Nous n'avons fait qu'adapter ces résultats à notre méthode en simplifiant toutefois la façon de les obtenir.

Nous venons notamment qu'à N fixé, il existe un moyen de déterminer la valeur du paramètre α qui minimise e_N. Mais il est malheureusement assez coûteux à mettre en oeuvre. Aussi, reprenant l'idée de Schetzen, nous nous sommes intéressés à la valeur asymptotique optimale de α, c'est à dire au meilleur choix du paramètre α lorsque N tend vers l'infini, en nous limitant au cas où la fonction à inverser est une fonction méromorphe.

V.1 - Recherche des valeurs optimales de α à N fixé

Que F, la fonction à inverser, soit ou non singulière à l'infini, l'erreur e_N, avec la convention faite sur C, est donnée en norme $L_2(o, +)$ par :

$$e_N = ||e^{ct}(f - f_N||^2_{L_2(o,+\infty)} = ||e^{ct}\ f(t)||^2_{L_2(o,+\infty)} - \sum_{m=o}^{N-1} |b_m|^2$$

ou encore :

$$e_N = \sum_{m\geq N} |b_m|^2,$$

avec

$$b_m = \frac{a_m}{\sqrt{2\alpha}}$$

Les coefficients a_m dépendant de α, il en est de même de e_N. Parmi toutes les valeurs possibles de α, il en est certainement qui minimisent e_N. Pour ces valeurs, nous devrons avoir :

$$\frac{d}{d\alpha} e_N = 0$$

et les solutions d'une telle équation dépendront de l'approximation N choisie.

Puisque $||e^{ct}\ f(t)||^2_{L_2(o,+\infty)}$ ne dépend pas de α,

$$\frac{d}{d\alpha} e_N = - 2 \sum_{m=o}^{N-1} b_m \cdot \frac{d}{d\alpha} b_m.$$

Calculons $\frac{d}{d\alpha} b_m$.

b_m étant le $n^{\text{ième}}$ coefficient du développement de f sur la base des fonctions de Laguerre :

$$b_m = \int_o^{+\infty} \sqrt{2\alpha}\ \ f(t)\ e^{-\ t}\ L_m(2\alpha t)\ dt$$

Par suite :

$$\frac{d}{d} b_m = \int_o^{+\infty} e^{-\alpha t} f(t) \left[\frac{1}{\sqrt{2\alpha}} L_m(2\alpha t) - t\sqrt{2}\, L_m(2\alpha t) + \sqrt{2\alpha} \frac{d}{d\alpha} L_m(2\alpha t)\right] dt$$

On vérifie facilement que :

$$\frac{d}{d\alpha} L_m(2\alpha t) = \frac{m}{\alpha} L_m(2\alpha t) - \frac{m}{\alpha} L_{m-1}(2\alpha t)$$

et puisque :

$$(2m+1 - 2\alpha t)\, L_m(2\alpha t) = (m+1)L_{m+1}(2\alpha t) + mL_{m-1}(2\alpha t),$$

nous obtenons :

$$\frac{d}{d\alpha} b_m = \frac{m+1}{2} b_{m+1} - \frac{m}{2\alpha} b_{m-1}$$

ce qui donne, en reportant dans l'expression de $\frac{d}{d\alpha} e_N$:

$$\frac{d}{d\alpha} e_N = - 2 \sum_{m=o}^{N-1} \left(\frac{m+1}{2\alpha} b_m\, b_{m+1} - \frac{m}{2\alpha} b_m\, b_{m-1}\right)$$

D'où, finalement :

Proposition V.2.1.

$$\frac{d}{d\alpha} e_N = - \frac{N}{2\alpha^2} a_N\, a_{N-1}$$

Cette propriété peut nous permettre de déterminer, à N fixé, la valeur de   qui minimise e_N. Une recherche complète imposerait de déterminer toutes les racines de a_N et a_{N-1}, puis de choisir parmi elles la valeur qui rend la somme $\sum_{m=o}^{N-1} |b_m|^2$, maximum.

Mais une telle procédure entraînerait une grande perte de temps, puisque pour évaluer a_N et a_{N-1} pour une valeur de α, il faut évaluer la la suite $\{h_p\}$.

Un autre approche est possible. Considérons l'exemple suivant :

$$F(s) = \frac{1}{s+\beta}\ ,\ \beta > o$$

Cette fonction est analytique dans le demi-plan $Re(s) > -\beta$.
Son inverse est connue et est donné par :

$$f(t) = \exp\ (-\beta.t).$$

Les coefficients de son développement en série de fonctions de Laguerre, sont ceux du développement en série de Taylor de :

$$H(z) = \frac{2\alpha}{1-z}\ F(\alpha\ \frac{1+z}{1-z}\ ),$$

soit :

$$H(z) = \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\ \frac{1}{1\ -\ z\ \frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}}$$

<u>si $\alpha = \beta$</u> ; $H(z) = 1$, est analytique dans le plan complexe entier et son rayon de convergence est infini :

$$a_o = 1,\ a_m = o \quad \forall m > 0$$

par suite, $\forall N$, $N > o$,

$$f_N(t) = a_o\ e^{-\beta t}\ L_o(2\beta t) = e^{-\beta t}$$

l'erreur d'approximation est nulle.

si $\alpha \quad \beta$; $H(z) = \frac{2\alpha}{\alpha+\beta} \sum_{n=o}^{+\infty} (\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha})^n\ z^n$ pour tout z vérifiant :

$$|z| < \left|\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}\right|$$

Comme $\alpha > o$, on voit que le rayon de convergence de la série H est supérieur à 1 et qu'il tend vers l'infini lorsque α tend vers β.

Comme $a_m = 2\alpha \frac{(\beta-\alpha)^m}{(\beta+\alpha)^{m+1}}$, on obtient pour e_N :

$$e_N = \sum_{m\ N} |b_m|^2 = \frac{2\alpha}{(\beta+\alpha)^2} (\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha})^{2N} \sum_{m=o}^{\infty} (\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha})^{2m}$$

soit :

$$e_N = \frac{1}{2} (\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha})^{2N}$$

On s'aperçoit donc que le choix optimum de α est $\alpha = \beta$.

L'étude du comportement des coefficients a_m peut donc nous permettre de choisir la valeur optimale de α.
Lorsque l'expression de ces coefficients est compliquée on peut étudier leur comportement asymptotique. La valeur de α ainsi obtenue ne sera pas celle qui minimise e_N pour N donné mais une valeur asymptotique que nous considérons comme une bonne approximation.

V.3 - DÉTERMINATION DE LA VALEUR ASYMPTOTIQUE OPTIMALE DE α LORSQUE F EST UNE FONCTION MÉROMORPHE.

Supposons tout d'abord que F soit une fonction ratonnelle admettant q pôles simples $s_1,\ldots,s_q$ dont le degré du dénominateur soit strictement plus grand que celui du numérateur de sorte que :

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0.$$

Posons :

$$F(s) = \sum_{i=1}^{q} \frac{a_i}{s-s_i}$$

Supposons que $Re(sq) \geq Re(si)$ $i = 1,\dots,q$ et posons :

$$c = \begin{cases} 0 \text{ si } Re(sq) < o \\ > Re(sq) \text{ si } Re(sq) \geq o \end{cases}$$

La fonction $G(s) = F(s+c)$ admet q pôles simples $s_i' = s_i - c$ $i = 1,\dots,q$ de parties réelles strictement négatives.

Considérons $H(z) = \frac{2\alpha}{1-z} F(c + \alpha \frac{1+z}{1-z})$ H s'écrit :

$$H(z) = \sum_{i=1}^{q} \frac{\gamma_i}{1 - \frac{z}{z_i}}$$

avec

$$\gamma_i = 2\alpha \frac{a_i}{\alpha - s_i'}$$

$$z_i = \frac{s_i' - \alpha}{s_i' + \alpha}$$

et puisque $Re(s_i') < o$, $\alpha > o$,

$$|z_i| > 1 \quad i = 1,\dots,q.$$

Par suite, pour tout z vérifiant, $|z| < \underset{i}{\mathrm{Min}} |z_i|$, H est développable en série de Taylor et :

$$H(z) = \sum_{m=o}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{q} \frac{\gamma_i}{z_i^m} \right) z^m$$

autrement dit :

$$a_m = \sum_{i=1}^{q} \frac{\gamma_i}{z_i^m}$$

En particulier, nous nous apercevons que :

Propriété V.3.1.

Une condition nécessaire et suffisante pour que la cotransformée soit à valeurs réelles est que les pôles de F soient réels et/ou complexes conjugués deux à deux.

Supposons maintenant que :

$$|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_p| < |z_{p+1}| \leq \ldots \leq |z_q|$$

et posons $z_j = R\, e^{i\, j}$ pour $j = 1,\ldots,p$ alors a_m s'écrit :

$$a_m = \frac{1}{R^m}\left[\gamma_1\, e^{-i m\theta_1} + \ldots + \gamma_p\, e^{-i m\theta_p} + \sum_{j=p+1}^{q} \gamma_j \left(\frac{R}{z_j}\right)^m \right]$$

et comme $\dfrac{R}{|z_j|} < 1$, $\forall j = p+1,\ldots,q$, $a_m = \sigma(\frac{1}{R^m})$ lorsque m tend vers $+\infty$ et par suite :

$$e_N = \sigma\left(\frac{1}{R^{2N}}\right)$$

lorsque m tend vers $+\infty$.

La valeur asymptotique optimale de α est alors solution de :

$$\underset{\alpha > o}{\text{Max}}\ \underset{i}{\text{Min}}\ |z_i|$$

On voit l'intérêt qu'à la notion de fonction génératrice puisque l'erreur d'approximation en norme $L_2(o,+\infty)$ est une fonction décroissante de son rayon de convergence.

Nous résumerons :

Proposition V.3.1.

Soit F *une fonction rationnelle admettant* q *pôles simples* $s_1,\ldots,s_q$. *Soit* σ_q *la plus grande partie réelle de ces pôles. Soit* c *défini par :*

$$c = o \quad \text{si } \sigma_q < o$$

$$c > \sigma_q \quad \text{si } \sigma_q \geq o.$$

Soient

$$z_i = \frac{s_i - c - \alpha}{s_i - c + \alpha} \quad i = 1,\ldots,q$$

alors l'erreur d'approximation de la cotransformée de F *vérifie :*

$$e_N = 0\left[\frac{1}{(\underset{i}{\text{Min}}\ |z_i|)^{2N}}\right]$$

et la valeur asymptotique optimale de α *est solution de :*

$$\alpha^* = \underset{\alpha>o}{\text{Max}}\ \underset{i}{\text{Min}}\ |z_i|.$$

Ce dernier problème admet dans certains cas des solutions accessibles.

Proposition V.3.2.

Si F *n'admet que deux pôles complexes conjugués la valeur asymptotique optimale de* α *est donnée par :*

$$\alpha = |s_1'| = |s_2'|$$

avec $s_1' = s_1 - c$, $s_2' = s_2 - c$, c *étant défini comme précédemment.*

Démonstration.

Si $s_1 = \bar{s}_2$ alors $z_1 = \bar{z}_2$ et il suffit de résoudre $\frac{d}{d\alpha}|z_1| = 0$.
En posant $s_1' = -\sigma_1 + i\omega_1$ il vient :

$$\frac{d}{d\alpha}|z_1|^2 = \frac{-4\alpha^2\sigma_1 + 4\sigma_1(\sigma_1^2+\omega_1^2)}{(\alpha-\sigma_1)^2 + w_1^2\ \ ^2} .\square$$

Proposition V.3.3.

Si F *n'admet que* q *pôles réels simples* $x_q < x_{q-1} < \dots < x_1$ *alors la valeur asymptotique otpimale de* α *est :*

$$\alpha^* = \sqrt{(x_1-c)(x_q-c)}$$

Démonstration.

Nous supposerons que F admet q pôles réels simples strictement négatifs de sorte que c = 0. On peut toujours se ramener à ce cas de figure en considérant G(s) = F(s+c). Puisque ces pôles sont strictement négatifs nous les noterons $-x_1 - x_2, \dots, -x_q$.

Nous supposerons que :

$$-x_1 > -x_2 > \dots > -x_q$$

ou encore

$$x_1 < x_2 < \dots < x_q$$

alors les pôles de H sont tous réels et donnés par :

$$z_i = \frac{\alpha+x_i}{\alpha-x_i}, \quad \alpha > o.$$

Etudions d'abord la fonction $g(x,\alpha) = \dfrac{\alpha+x}{|\alpha-x|}$ où $\alpha > o$, $x > o$.

Cette fonction vérifie :

$$g(x_i, \alpha) = |z_i|$$

pour i variant de 1 à q, et elle n'est pas définie pour $\alpha = x$.
Si $\alpha < x$, α étant fixé :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-2\alpha}{(x-\alpha)^2} < o$$

g est une fonction décroissante de x, en particulier :

$$o < \alpha < x_i < x_j \Rightarrow |z_i| > |z_j|$$

x étant fixé :

$$\frac{\delta g}{\delta \alpha} = \frac{2x}{(x-\alpha)^2} > 0$$

g est une fonction croissante de α à x fixé.

Si $\alpha > x$, α étant fixé :

$$\frac{\delta g}{\delta x} = \frac{2\alpha}{(\alpha-x)^2} > 0$$

g est une fonction croissante de x, en particulier :

$$o < x_i < x_j < \alpha \Rightarrow |z_i| < |z_j|$$

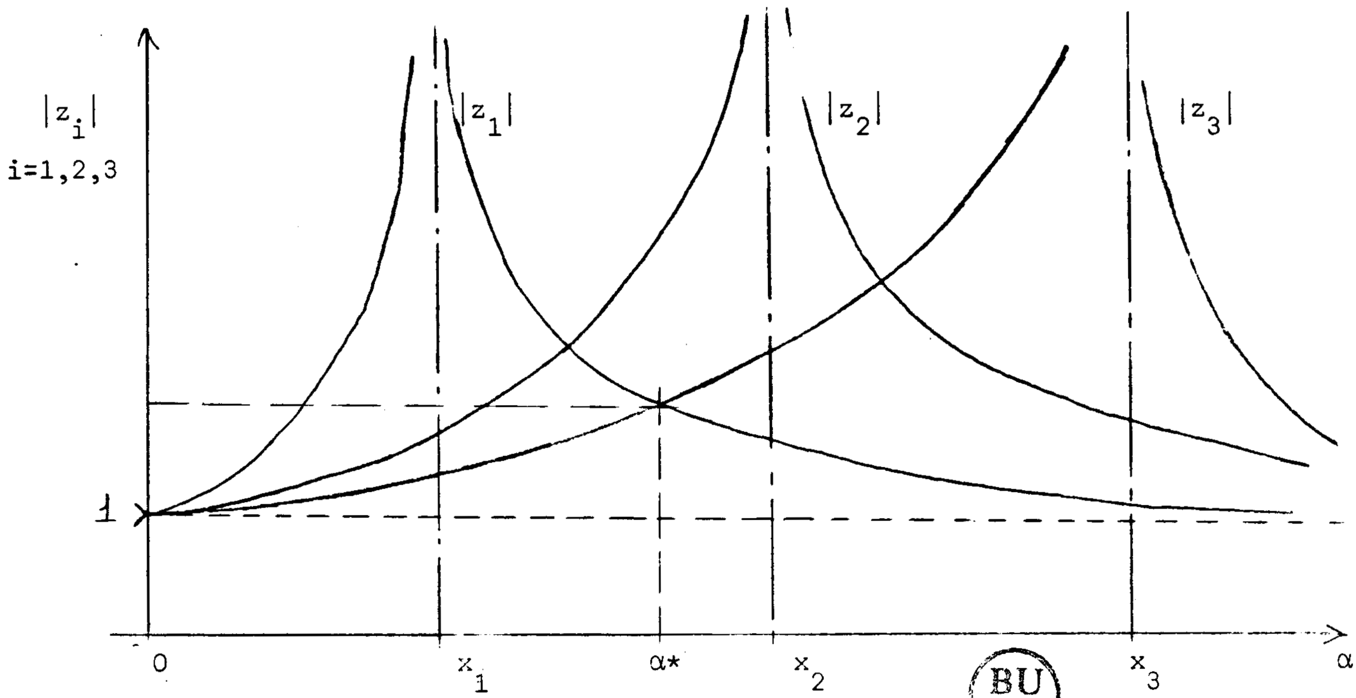
x étant fixé :

$$\frac{\delta g}{\delta \alpha} = \frac{-\ 2x}{(\alpha-x)^2} < 0$$

g est une fonction décroissante de α à x fixé.

Exemple :

Graphes des fonctions $|z_1(\alpha)|$, $|z_2(\alpha)|$, $|z_3(\alpha)|$



Cherchons maintenant $\alpha^* = \underset{o}{\mathrm{Max}} \ \underset{1 \ i \ q}{\mathrm{Min}} \ z_i$.

Supposons que $\alpha^* < x_1 < \ldots < x_q$ alors :

$$|z_1| > |z_2| > \ldots > |z_q|$$

Montrons que α^* n'est pas la meilleure solution, c'est à dire qu'il existe α' tel que :

$$|z_q(\alpha')| < |z_i(\alpha')| \quad \forall i \neq q$$

et

$$|z_q(\alpha')| > |z_q(\alpha^*)|$$

En effet :

$$\lim_{\alpha \to x_1^+} |z_1| = +\infty$$

i.e. :

$$\forall A > o, \exists \varepsilon > o \text{ tq } \forall \alpha \in \left]x_1, x_1 + \varepsilon\right], |z_1| > A$$

Choisissons A tel que :

$$x_1 + \varepsilon < x_2 \text{ et } |z_2| \leq A.$$

Soit $\alpha' \in]x_1, x_1 + \varepsilon[$, on a :

$$\alpha' < x_2 < \ldots < x_q$$

alors :

$$|z_1(\alpha')| > |z_2(\alpha')| > \ldots > |z_q(\alpha')|$$

et

$$|z_q(\alpha^*)| > |z_q(\alpha')|$$

car g est une fonction croissante de α à x fixé et $\alpha^* < \alpha'$.

On ne peut donc pas avoir $\alpha^* < x_1$. De même on montrerait qu'on ne peut pas avoir $\alpha^* > x_q$. On a donc nécessairement $\alpha^* \in]x_1, x_q[$ et puisque $\alpha \neq x_i$, $i = 1,\ldots,q$, on se trouve nécessairement dans la configuration suivante :

$$x_1 < \ldots < x_i < \alpha^* < x_{i+1} < \ldots < x_q$$

ce qui implique :

$$|z_1| < \ldots < |z_i|$$

$$|z_q| < \ldots < |z_{i+1}|$$

sur l'intervalle $]x_1, x_q]$, $|z_1|$ est une fonction strictement décroissante et continue de α, avec :

$$\lim_{\alpha \to x_1^+} |z_1| = +\infty$$

$$\lim_{\alpha \to x_q^+} |z_1| = |z_1(x_q)| > 1$$

et $|z_q|$ est une fonction strictement croissante et continue de α avec :

$$\lim_{\alpha\to x_1^+} |z_q| = |z_q(x_1)| > 1$$

et

$$\lim_{\alpha\to x_q^+} |z_q| = +\infty.$$

Soit $\bar{\alpha}$ tel que $|z_1(\bar{\alpha})| = |z_q(\bar{\alpha})|$, $\bar{\alpha}$ existe et est unique.

$$\forall\alpha \in]x_1, \bar{\alpha}[\qquad |z_1(\alpha)| > |z_q(\alpha)|$$

$$\text{et} \quad |z_q(\alpha)| < |z_q(\bar{\alpha})|$$

$$\forall\alpha \in]\bar{\alpha}, x_q[\qquad |z_q(\alpha)| > |z_1(\alpha)|$$

$$\text{et} \quad |z_1(\alpha)| < |z_1(\bar{\alpha})|$$

Par suite $\alpha^* = \bar{\alpha}$, α^* est solution de l'équation $|z_1| = |z_q|$ soit :

$$\frac{\alpha + x_1}{\alpha - x_1} = \frac{\alpha + x_q}{x_q - \alpha}$$

dont la solution est

$$\alpha^* = \sqrt{x_1 x_q} \; \square$$

Ces trois dernières propositions se généralisent sans difficulté au cas d'une fonction méromorphe.

<u>*Proposition V.3.4.*</u>

Soit F *une fonction méromorphe admettant* q *pôles simples* $s_1,\dots,s_q$. *Soit* σ_q *la plus grande partie réelle de ces pôles. Soit* c *défini par :*

$$c = o \quad si \quad \sigma_q < o$$

$$c > \sigma_q \quad si \quad \sigma_q \geq o$$

Soient $z_i = \dfrac{s_i - c - \alpha}{s_i - c + \alpha}$ $i = 1,\ldots,q$ *alors l'erreur d'approximation de la cotransformée vérifie :*

$$e_N = 0\left[\frac{1}{(\underset{i}{\mathrm{Min}}\ z_i\ )^{2N}}\right]$$

et la valeur asymptotique optimale de α *est donnée par :*

$$\alpha^* = \underset{\alpha>o}{\mathrm{Max}}\ \underset{1\le i\le q}{\mathrm{Min}}\ |z_i|$$

Si F *n'admet que deux pôles complexes conjugués* s_1 *et* s_2 *alors :*

$$\alpha^* = |s_1 - c|$$

Si F *n'admet que des pôles réels* $x_1,\ldots,x_q$

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_q$$

alors

$$\alpha^* = \sqrt{(x_1-c)(x_q-c)}$$

Démonstration.

Il suffit de vérifier que nous avons toujours

$$a_m = 0\left[\frac{1}{(\underset{1\le i\le q}{\mathrm{Min}}\ |z_i|)^{2N}}\right]$$

Considérons $H(z) = \frac{2\alpha}{1-z} F(c + \alpha \frac{1+z}{1-z})$ H est une fonction méromorphe admettant q pôles simples $z_1,\ldots,s_q$ donnés par :

$$z_i = \frac{s_i - c - \alpha}{s_i - c + \alpha} \quad i = 1,\ldots,q$$

et $|z_i| > 1 \quad \forall i \quad i = 1,\ldots,q.$

La partie principale de H est donnée par :

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{\gamma_i}{1 - \frac{z}{z_i}}$$

$H(z) - \sum_{i=1}^{q} \frac{\gamma_i}{1 - \frac{z}{z_i}}$ est analytique dans un disque dont le rayon ρ est strictement supérieur à $\max_{1\leq i\leq q} |z_i|$. Son $m^{\text{ième}}$ coefficient de Taylor est un $O(\rho^{-m})$, soit :

$$m!\, a_m - m! \sum_{i=1}^{q} \frac{\gamma i}{(z_i)^m} = O(\rho^{-m})$$

où a_m désigne le $m^{\text{ième}}$ coefficient de Taylor de H. Par suite :

$$a_m = \sum_{i=1}^{q} \frac{\gamma_i}{|z_i|^m} + O(\rho^{-m})$$

Supposons que :

$$|z_1| = \dots = |z_p| < |z_{p+1}| \leq \dots \leq |z_q|$$

et posons

$$z_j = R\, e^{i\theta_j},\ j = 1,\dots,p,$$

alors :

$$a_m = \frac{1}{R^m} [\gamma_1 e^{-im\theta_1} + \dots + \gamma_p e^{-im\theta_p} + \sum_{j=p+1}^{q} \gamma_j \left(\frac{R}{z_j}\right)^m + O[(\frac{R}{\rho})^m]$$

et puisque

$$R < |z_{p+1}| < \dots < |z_q| < \rho$$

$$a_m = O((\tfrac{1}{R})^n).\square$$

CHAPITRE VI

DESCRIPTION DE L'ALGORITHME DE PROGRAMMATION

VI.1 - INTRODUCTION.

Après avoir proposé une valeur empirique du paramètre dans le cas où l'étude de la fonction n'en fournit pas, nous donnons une description de l'algorithme qui se déduit des chapitre III et IV. Puis nous donnons le programme et les sous sous-programmes en Fortran IV ainsi qu'un exemple d'utilisation dans le cas de l'inversion d'une fonction apparaissant en analyse des circuits. Cette fonction est la transmittance d'un câble coaxial, proposée par Metzger et Vabre [11].
Nous donnerons dans le chapitre VII les résultats numériques obtenus.

VI.2 - VALEUR EMPIRIQUE DU PARAMÈTRE α

nous n'avons pas réussi à travers une solution au problème de la recherche de la valeur asymptotique optimale dans le cas général, c'est à dire lorsque les pôles de la fonction à inverser sont quelconques. Nous ne savons pas non plus comment obtenir une epxression de la valeur asymptotique de l'erreur lorsque la fonction $(s+\alpha)$ F(s) admet une singularité à l'infini. Pourtant nous osmmes bien obligé de donner une valeur au paramètre α.
Et il est certain que ce choix aura une influence sur l'erreur d'approximation. Il est donc nécessaire de cherche expérimentalement une bonne valeur pour ce paramètre. Cette recherche a déjà été effectuée par Weeks [12] dans le cadre d'un algorithme d'inversion de la transformation de Laplace basé également sur l'utilisation des polynômes de Laguerre.

L'algorithme de Wing est d'ailleurs une adaptation de l'utilisation de la transformée de Fourier Rapide à l'algorithme de Weeks.

Avec nos notations, le choix de Weeks est le suivant :

$$\alpha = \frac{\mathrm{NLAG}}{2\ \mathrm{Tmax}}$$

où NLAG désigne le degré de l'approximation choisi et Tmax la borne supérieure de l'intervalle de $\mathbb{R}^+$ où l'utilisateur désire connaître les valeurs de la cotransformée.
Il se base sur les considérations suivantes :

Le $m^{ième}$ polynômes de Laguerre admet m zéros distincts, réels et positifs et le plus grand, x_m, vérifie :

$$x_m < 2m+1 + \sqrt{(2m+1)^2 + \frac{1}{4}}$$

Soit :

$$x_m < 4m.$$

Par suite, la fonction $e^{-\alpha t}$ Lm(2 t) oscille sur l'intervalle $o < 2\alpha t < 4m$ et tend assymptotiquement vers 0 pour $2\alpha t > 4m$.
On ne peut donc espérer approcher correctement une fonction par une combinaison linéaire des fonctions $e^{-\ t}$ $L_m(2\ t)$, m = o,...,NLAG-1 en dehors de l'intervalle où ces fonctions oscillent :

$$0 < 2\alpha T_{max} < 4(NLAG - 1)$$

Les nombreux essais numériques effectués par Weeks l'amène alors à choisir :

$$\alpha = \frac{NLAG}{2\ T_{max}}$$

Choix auquel nous n'avons aucune raison de ne pas nous rallier.

Nous avons vu également que si la fonction à inverser était analytique dans un demi-plan Re(s) > b avec $b \geq o$, il était alors nécessaire de choisir un c   b. Nous pouvons nous attendre à ce que le choix de cette quantité joue un certain rôle dans l'erreur d'approximation. Weeks a également un problème de ce type puisqu'il se sert des valeurs de F(s) sur la droite Re(s) = c, ce qui implique c > b. Les expériences numériques qu'il a faites avec son algorithem l'ont amené à choisir c de la façon suivante :

$$c = \begin{cases} 0 \text{ si } b < 0 \\ b + \dfrac{1}{T_{Max}} \text{ si } b \geq 0. \end{cases}$$

Nous avons également adopté cette valeur.

VI.3 - DESCRIPTION DE L'ALGORITHME D'INVERSION DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE PROPOSÉ.

Nous nous sommes placés dans le cas où l'expression analytique de la fonction à inverser est connue. Mais ce qui est fondamental pour la mise en oeuvre, c'est la possibilité d'accéder aux valeurs de la fonction en certains points précis du plan complexe. Moyennant cette connaissance, nous nous proposons de calculer les valeurs approchées de la cotransformée sur l'intervalle $[o, T_{max}]$ parcouru avec le pas δ.

Les principales étapes du calcul sont les suivantes :

- 1 - Lecture des données

- 2 - Calcul des valeurs $h_p = \dfrac{2\alpha}{1-\rho W_n^p} F\left(c + \dfrac{1+\rho W_n^p}{1-\rho W_n^p}\right)$

pour $p = o,\ldots,n-1$.

- 3 - Calcul des valeurs approchées $\hat{c}_m$, $m = o,\ldots,n$ des coefficients de Fourier de $H(\theta) = H(\rho e^{i\theta})$:

$$\hat{c} = F_n . h$$

et le calcul des valeurs approchées $\hat{a}_m$ des coefficients du développement de la cotransformée en série de fonctions de Laguerre :

$$\hat{a}_m = \frac{\hat{c}_m}{\rho^m},\ m = o,\ldots,NLAG-1$$

- 4 - Calcul des valeurs approchées de la cotransformée sur l'intervalle $[O, T_{max}]$ par pas δ.

- 4b - Calcul des coefficients du numérateur et du dénominateur de $F_N(s)$.

L'étape 4 bis est seulement prévue pour l'obtention du modèle de ligne. L'étape 4 est alors inutile.

Nous allons maintenant détailler chaque étape. Le langage de programmation utilisé est le FORTRAN IV.

Etape 1 Les données fournies par l'utilisateur sont :

NLAG : degrés de l'approximation choisi.

TMAX : borne supérieure de l'intervalle où la cotransformée est évaluée. La borne inférieure est prise égale à 0.

DELTA : pas avec lequel cet intervalle est parcouru.

BO : la plus grande partie réelle des pôles de F(s).

NOPT : Booléen valant :

1, si l'utilisateur propose une valeur optimale pour le paramètre .

0, sinon

ALPHA : Valeur optimale proposée.

L'utilisateur doit également fournir l'expression analytique de la fonction a inverser sous la forme d'un sous programme du type

DOUBLE COMPLEX FUNCTION ZF(Z)

dont le seul paramètre formel est la variable complexe Z. Si d'autres paramètres sont nécessaires, il est alors possible de les fournir par l'intermédiaire du COMMON |CF|. L'initialisation des constantes de ce COMMON se fait par l'intermédiaire d'un sous-programme BLOCK DATA.

étape 2 Pas de problème, si ce n'est l'utilisation de l'arithmétique complexe double précision commodément offerte par le Fortran IV. Les W_n^p sont calculés une fois pour toute par le sous-programme TRIGO (N).

étape 3 Ce calcul est effectué à l'aide de la transformée de Fourier Rapide proposée par Carl de Boor [18]. Son avantage est que le nombre de points utilisés n'est pas nécessairement une puissance de 2. Le sous programme que nous avons utilisé a été écrit au C.E.A. - D.A.M. Nous en fournissons le listing un peu plus loin.

étape 4 Le calcul d'une valeur approchée de la cotransformée au point TIME est exécuté par le sous-programme.

LAGUERRE (ALPHA, C, TIME, A, NLAG, IMPR, FNUM)

FNUM est la valeur approchée obrenue.
Ce calcul se fait sans difficulté grâce à la relation de récurrence II.2.4.

étape 4 bis Ce calcul est effectué par le sous-programme :

COEF (ALPHA, C, NLAG, A, C1, CNUM, DENOM)

C1 : zone de travail

CNUM : tableau contenant les coefficients du numérateur par ordre des puissances croissantes.

DENOM : tableau contenant les coefficients du dénominateur par ordre des puissances croissantes.

La méthode utilisée est la suivante :

Nous avons vu que $F_N(s)$ est donnée par :

$$F_N(s) = \sum_{m=o}^{N-1} a_m \frac{(s-c-\alpha)^m}{(s-c+\alpha)^{m+1}}$$

Nous désirons $F_N(s)$ sous la forme :

$$F_N(s) = \frac{\sum\limits_{m=o}^{N-1} \;{}_{m}\; s^m}{\sum\limits_{m=o}^{N} \beta'_m \; s^m}$$

Si les coefficients α'_m et β'_m sont connus nous aurons alors :

$$\alpha_m = \sum_{i=m}^{N-1} \alpha'_i \binom{i}{m} (-c)^{i-m}$$

$$\beta_m = \sum_{i=m}^{N} \alpha'_i \binom{i}{m} (-c)^{i-m}$$

Il nous faut donc rechercher les coefficients α'_m et β'_m. Nous commencerons par mettre d'abord $F_N(s+c)$ sous la forme :

$$F_N(s+c) = \frac{b_o}{s+\alpha} + \ldots + \frac{b_{N-1}}{(s+\alpha)^N}$$

La formule de Taylor appliquée au polynôme $(s-\alpha)^m$ donne :

$$(s-\alpha)^m = \sum_{i=o}^{m} (-2\alpha)^{m-i} \binom{m}{i} (s+\alpha)^i$$

par suite :

$$\frac{(s-\alpha)^m}{(s+\alpha)^{m+1}} = \sum_{i=o}^{m} (-2\alpha)^{m-i} \binom{m}{i} \frac{1}{(s+\alpha)^{m+1-i}}$$

Par identification :

$$b_j = (-2\alpha)^j \sum_{m=j}^{N-1} a_m \binom{m}{j}$$

pour $j = 0,\ldots,N-1$ en posant $b'_j = \frac{b_j}{(-2)^j}$, $j = 0,\ldots,N-1$, les égalités précédentes s'écrivent sous forme vectorielle

$$\begin{bmatrix} b'_o \\ b'_1 \\ \\ \\ b'_{N-1} \end{bmatrix} = (a_o, a_1,\ldots,a_m) \begin{bmatrix} \binom{0}{0} & & & \\ \binom{1}{0} & -\binom{1}{1} & & 0 \\ & & & \\ \binom{N-1}{0} & \binom{N-1}{1} & \text{--------} & \binom{N-1}{N-1} \end{bmatrix}$$

La partie triangulaire inférieure de la matrice ci-dessus étant constituée par le triangle de Pascal, chaque colonne peut être facilement calculée à partir de la précédente au moment où nous en avons besoin. La matrice n'a pas besoin d'être gardée en mémoire.

Une fois les b_j, $j = 0,\ldots,N-1$, calculés, il reste à réduire $F_N(s+c)$ au même dénominateur $(s+\alpha)^N$:

$$F_N(s+c) = \frac{\sum_{j=o}^{N-1} b_j(s+\alpha)^{N-1-j}}{(s+\alpha)^N}$$

ce qui donne :

$$\alpha'_m = \sum_{j=o}^{N-1-m} b_j \binom{N-1-j}{m} \alpha^{N-1-j-m}$$

ou encore :

$$\alpha'_m = \sum_{j=m}^{N-1} b_{N-1-j} \binom{m}{j} \alpha^{j-m}$$

$$m' = 0,\ldots,N-1$$

et

$$\beta'_m = \binom{N}{m} \alpha^{N-m}$$

Vectoriellement, cela s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \alpha'_o \\ \alpha'_1 \\ \\ \alpha'_{N-1} \end{bmatrix} = [b_{N-1},\dots,b_o] \begin{bmatrix} \binom{0}{0} & & & \\ \alpha\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \\ & \alpha\binom{2}{1} & & \binom{N-2}{N-2} \\ \alpha^{N-1}\binom{N-1}{0} & \alpha^{N-2}\binom{N-1}{1} & \text{-----} & \alpha\binom{N-1}{N-2} \ \binom{N-1}{N-1} \end{bmatrix}$$

De même que précédemment, chaque colonne de cette matrice se calcule à partir de la précédente, de sorte qu'il n'est pas nécessaire de la garder en mémoire. De plus, si nous rajoutions une ligne à cette matrice, cette ligne serait constituée par les coefficients α'_m, m = 0,...,N.

Supposons que nous ayons calculé $b_{N-1},\dots,b_o$ respectivement dans (NUM(1),...,(NUM(N), le calcul de α'_j ne faisant intervenir que (NUM(j+1), (NUM(j+1),...,(Num(N)), celui-ci peut se faire dans (NUM(j+1).
Pour calculer les colonnes de cette matrice comme celles de la précédente, nous utiliserons le tableau C1 et deux mémoires auxiliaires U et S.

Le calcul des α_m, m = 0,...,N-1 et α_m, m = 0,...,N à partir des α'_m, m = 0,...,N-1 et β'_m, m = 0,...N est tout à fait analogue.
Nous donnons le listing du sous-programme un peu plus loin. □

VI.4 - PROGRAMME ET SOUS-PROGRAMMES EN FORTRAN IV, EXEMPLE D'UTILISATION DANS LE CAS DE L'INVERSION D'UNE FONCTION APPARAISSANT EN ANALYSE DES CIRCUITS ÉLECTRIQUE.

```
C************************************************************************
C   INVERSION NUMERIQUE DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE
C************************************************************************
C
C  CE PROGRAMME FOURNIT:
C
C  1) LES COEFFICIENTS DU NUMERATEUR ET DU DENOMINATEUR DE
C     L'APPROXIMANT RATIONNEL FN(S) DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE
C     F(S) EN VUE D'UNE UTILISATION ULTERIEURE PAR LE CODE DE
C     C.A.O. ASTEC III.
C
C  2) LES VALEURS NUMERIQUES APPROCHEES DE LA COTRANSFORMEE DE F(S)
C     SUR L'INTERVALLE DE TEMPS (0.0,TMAX) PAR PAS DELTA.
C     DANS LE BUT D'UNE REPRESENTATION GRAPHIQUE ULTERIEURE LES
C     VALEURS ET CELLES DES ABCISSES SONT SAUVEGARDEES RESPECTIVEMENT
C     DANS LES TABLEAUX FSAVE ET TSAVE.
C
C  L'UTILISATEUR DOIT FOURNIR LES DONNES SUIVANTES:
C
C  1) NLAG     : DEGRES DE L'APPROXIMATION.C'EST EGALEMENT LE DEGRES
C                DU DENOMINATEUR DE FN(S). NE DOIT PAS DEPASSE 100
C  2) TMAX     : BORNE SUPERIEURE DE L'INTERVALLE OU LA COTRANSFORMEE
C                EST EVALUEE.
C  3) DELTA    : PAS AVEC LEQUEL CET INTERVALLE EST PARCOURU.
C  4) B0       : ABCISSE DE CONVERGENCE SIMPLE DE L'INTEGRALE DE
C                LAPLACE,SOIT LA PLUS GRANDES DES PARTIES RELLES
C                DES SINGULARITES DE F(S).
C  5) NOPT     : BOOLEEN
C                NOPT=0 SI L'UTILISATEUR N A PAS DE VALEUR OPTIMALE
C                       A PROPOSER POUR LE PARAMETRE ALPHA.
C                       DANS CE CAS, ALPHA EST CHOISI EGAL A
C                       NLAG/(2*TMAX).
C                NOPT=1 SINON.
C  6) ALPHA    : VALEUR OPTIMALE PROPOSEE
C  7) NGRAPH   : BOOLEEN CONTROLANT LES REPRESENTATIONS GRAPHIQUES
C                SUR LE LISTING RESULTAT.
C                NGRAPH=0 PAS DE GRAPHE
C                NGRAPH=1 GRAPHE DES VALEURS APPROCHEES DE LA
C                         COTRANSFORMEE SUR L'INTERVALLE (0,TMAX)
C                NGRAPH=2 IDEM AVEC EN PLUS LES GRAPHES DES PARTIES
C                         RELLES ET IMAGINAIRES DES COEFFICIENTS DE
C                         FOURIER DE LA FONCTION H(TETA). LES PARTIES
C                         IMAGINAIRES DEVANT ETRE NULLES, CECI SERT
C                         DE CONTROLE.
C
C  L'ORDRE ET LES FORMATS DE CES DONNES SONT:
C
C NLAG;FORMAT(I3)
C TMAX,DELTA; FORMAT(D21.15,5X,D21.15)
C B0;FORMAT(D21.15)
C NOPT;FORMAT(I3)
```

```
C ALPHA:FORMAT(D21.15)
C NGRAPH:FORMAT(D21.15)
C
C  L'UTILISATEUR DOIT DEFINIR EGALEMENT LA FONCTION A INVERSER
C  A L'AIDE D'UN SOUS-PROGRAMME DOUBLE COMPLEX FUNCTION DE NOM ZF
C  LE SEUL PARAMETRE FORMEL ETANT LA VARIABLE COMPLEXE Z.
C  LES AUTRES PARAMETRES DEFINISSANT EVENTUELLEMENT LA FONCTION
C  SERONT FOURNIS PAR L'INTERMEDIAIRE DU COMMON /CF/ ET SERONT
C  INITIALISES PAR UN SOUS-PROGRAMME BLOCK DATA.
C
C*************************************************************************
C  PROGRAMME PRINCIPAL:
C*************************************************************************
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Y),DOUBLE COMPLEX(Z)
      DIMENSION Z1(500),Z2(500),XSAVE(500),RZ(500),AIZ(500)
      DIMENSION A(100),FSAVE(500),TSAVE(500)
      DIMENSION C1(100),CNUM(100),DENOM(100)
      COMMON /GRAF/LEC,IMP
      COMMON /TRIG/ ZEXP(1000),IFACT(20),NFACT
      COMMON /CF/ AR,AL,AG,AC,ALONG,RL,RO,TAU,PI
      DATA LEC/105/,IMP/108/
      READ(LEC,1)NLAG
      READ(LEC,2)TMAX,DELTA
      READ(LEC,3)BU
      READ(LEC,1)NOPT
      READ(LEC,3)ALPHA
      READ(LEC,1)NGRAPH
      WRITE(IMP,7)NLAG
      WRITE(IMP,8)TMAX,DELTA
C-----------------------------------------------------------------------
C--DEFINITION DE CONSTANTES
C-----------------------------------------------------------------------
C
C--N  EST LE NOMBRES D'EVALUATIONS DE LA FONCTION A INVERSER.
C
      N=300
      NFACT=5
      IFACT(1)=3
      IFACT(2)=2
      IFACT(3)=2
      IFACT(4)=5
      IFACT(5)=5
C
C--RO EST UN PARAMETRE INTERVENANT DANS LA DEFINITION DES VALEURS
C--DE LA FONCTION GENERATRICE.
C
      RO=.800000000000000D+00
C
C--IMPR COMMANDE LES IMPRESSIONS:
C-- =1, TOUTES IMPRESSIONS INTERMEDIAIRES
C-- =2, IMPRESSIONS PRINCIPALES
```

```
C-- >2, PAS D IMPRESSION.
C
      IMPR=2
      RN=DFLOAT(N)
      RNLAG=DFLOAT(NLAG)
      IF(NOPT.EQ.0)ALPHA=RNLAG/(2.0D+00*TMAX)
      ZALPHA=DCMPLX(ALPHA,0.0D+00)
      IF(B0.LT.0.0D+00)C=0.0D+00
      IF(B0.GE.0.0D+00)C=B0+1.0D+00/TMAX
      ZC=DCMPLX(C,0.0D+00)
      ZRO=DCMPLX(RO,0.0D+00)
      ZUN=DCMPLX(1.0D+00,0.0D+00)
      ZDE=DCMPLX(2.0D+00,0.0D+00)
      WRITE(IMP,10)ALPHA
      WRITE(IMP,12)C
      WRITE(IMP,13)ALPHA+C
C
C--UCTIME(B,I) EST UN SOUS-PROGRAMME PROPRE A L'IRIS 80
C--B=0 OU 1,0 SI C'EST LE PREMIER APPEL.UCTIME(1,I) DONNE
C--LE TEMPS EN DIXIEMES DE SECONDE ECOULE ENTRE LES DEUX
C--APPELS.
C
      CALL UCTIME(0,IT)
C
C------------------------------------------------------------------------
C--CALCUL DES VALEURS HP=H(RO*WN**P) DE LA FONCTION GENERATRICE
C-----------------------------------------------------------------------
C
C--LES WN**P,P=0,N-1,SONT CALCULEES DANS LE TABLEAU ZEXP(1),...,ZEXP(N)
C
      CALL TRIGO(N)
C
C--LES VALEURS HP SONT CALCULES DANS LE TABLEAU Z1(1),....,Z1(N)
C
      DO 110 IP=1,N
         ZP=ZRO*ZEXP(IP)
         ZDP=ZALPHA/(ZUN-ZP)
         ZSP=(ZUN+ZP)*ZDP
         Z1(IP)=ZDE*ZDP*ZF(ZC+ZSP)
110    CONTINUE
C-----------------------------------------------------------------------
C--CALCUL DES COEFFICIENTS DE FOURIER DE H(RO*EXP(I*TETA)
C-----------------------------------------------------------------------
      ISENS=-1
      CALL FFTCBO(Z1,Z2,N,ISENS)
C
C--LES PARTIES REELLES ET IMAGINAIRES SONT MISES DANS RZ ET AIZ;
C
      DO 120 IPART=1,N
      RZ(IPART)=DREAL(Z1(IPART))
      AIZ(IPART)=DIMAG(Z1(IPART))
```

```
              XSAVE(IPART)=DFLOAT(IPART-1)
      120     CONTINUE
      C-----------------------------------------------------------------------
      C--CALCUL DES COEFFICIENTS DE LA COTRANSFORMEE DE F
      C-----------------------------------------------------------------------
              A(1)=RZ(1)
              IF(IMPR.LE.2) WRITE(IMP,14) 0,A(1)
              ROI=RO
              DO 150 IA=2,NLAG
                 A(IA)=RZ(IA)/ROI
                 ROI=ROI*RO
                 IF(IMPR.LE.2)WRITE(IMP,14)IA-1,A(IA)
      150     CONTINUE
      C-----------------------------------------------------------------------
      C--CALCUL DES COEFFICIENTS DU NUMERATEUR ET DU DENOMINATEUR DE FN(S):
      C-----------------------------------------------------------------------
              CALL COEF(ALPHA,C,NLAG,A,C1,CNUM,DENOM)
              IF(IMPR.GT.2) GO TO 125
              WRITE(IMP,18)
              WRITE(IMP,19)(I-1,CNUM(I),I=1,NLAG)
              WRITE(IMP,20)
              WRITE(IMP,21)(I-1,DENOM(I),I=1,NLAG+1)
      C-----------------------------------------------------------------------
      C--CALCUL DES VALEURS DE LA COTRANSFORMEE SUR L'INTERVALLE
      C--(0,TMAX) PAR PAS DELTA DANS LE TABLEAU FSAVE. LES ABCISSES
      C--SONT MISES DANS LE TABLEAU TSAVE POUR UNE EVENTUELLE
      C--REPRESENTATION GRAPHIQUE.
      C-----------------------------------------------------------------------
      125     ISAVE=0
              DO 140 TIME=0.0D+00,TMAX,DELTA
              IMPR=3
                 CALL LAGUERRE(ALPHA,C,TIME,A,NLAG,IMPR,FNUM)
                ISAVE=ISAVE+1
                TSAVE(ISAVE)=TIME
                FSAVE(ISAVE)=FNUM
                 WRITE(IMP,15)TIME,FNUM
      140     CONTINUE
              NT=ISAVE
      C
      C--FIN DES CALCULS
      C
              CALL UCTIME(1,IT)
              WRITE(IMP,17)IT
      C-----------------------------------------------------------------------
      C--EVENTUELLE REPRESENTATION GRAPHIQUE DES COEFFICIENTS DE FOURIER
      C--ET DES VALEURS DE LA COTRANSFORMEE:
      C-----------------------------------------------------------------------
              IF(NGRAPH.EQ.0) GO TO 200
              NLINE=50
              IFRAME=2
              IF(NGRAPH.EQ.1) GO TO 210
```

```
      WRITE(IMP,22)
      CALL TRACXH(0.0,RN,XSAVE,RZ,N,NLINE,IFRAME)
      WRITE(IMP,23)
      CALL TRACXH(0.0,RN,XSAVE,AIZ,N,NLINE,IFRAME)
  210 WRITE(IMP,24)
      CALL TRACXH(0.0,TMAX,TSAVE,FSAVE,NT,NLINE,IFRAME)
  200 CONTINUE
C-----------------------------------------------------------------
C--FORMATS:
C-----------------------------------------------------------------
    1 FORMAT(I3)
    2 FORMAT(D21.15,5X,D21.15)
    3 FORMAT(D21.15)
    7 FORMAT(5X,'NOMBRE DE COEFFICIENTS RETENUS='I4)
    8 FORMAT(5X,'TMAX= 'D21.15,5X,'DELTA= 'D21.15)
   10 FORMAT(5X,'ALPHA= 'D21.15)
   12 FORMAT(5X,'C= 'D21.15)
   13 FORMAT(5X,'ALPHA+C= 'D21.15)
   14 FORMAT(5X,'A('I3,')= 'D21.15)
   15 FORMAT(20X,'F( 'D21.15,')= 'D21.15,/)
   17 FORMAT(5X,'TEMPS DE CALCUL DE L INVERSE:'I4,/)
   18 FORMAT(5X,'COEFFICIENTS DU NUMERATEUR DE FN(S):',/)
   19 FORMAT(5X,'COEFFICIENT DE S**'I3,' = 'D21.15)
   20 FORMAT(/,5X,'COEFFICIENTS DU DENOMINATEUR DE FN(S):',/)
   21 FORMAT(5X,'COEFFICIENTS DE S**'I3,' = 'D21.15)
   22 FORMAT(1H1,10X,'...PARTIES REELLES DES COEFFICIENTS...')
   23 FORMAT(1H1,10X,'...PARTIES IMAGINAIRES DES COEFFICIENTS...')
   24 FORMAT(1H1,10X,'...GRAPHE DE LA COTRANSFORMEE...')
      STOP
      END
```

```
C**********************************************************************
C  PROBLEME DU CABLE COAXIAL, DEFINITION DE LA TRANSFORMEE
C  DE LAPLACE DE LA TENSION A L'EXTREMITE DU CABLE:
      DOUBLE COMPLEX FUNCTION ZF(Z)
      IMPLICIT DOUBLE COMPLEX(Z)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Y)
      COMMON /CF/ AR,AL,AG,AC,ALONG,RL,RO,TAU,PI
C
C--DEFINITION DES CONSTANTES DU CABLE:
C
      ZAR=DCMPLX(AR,0.0D+00)
      ZAL=DCMPLX(AL,0.0D+00)
      ZAG=DCMPLX(AG,0.0D+00)
      ZAC=DCMPLX(AC,0.0D+00)
      ZL=DCMPLX(RL,0.0D+00)
      ZO=DCMPLX(RO,0.0D+00)
      ZALONG=DCMPLX(ALONG,0.0D+00)
      ZUN=DCMPLX(1.0D+00,0.0D+00)
      ZN=ZAR+ZAL*Z
      ZD=ZAG+ZAC*Z
      ZGAMA=CDSQRT(ZN*ZD)
C
C--IMPEDANCE CARACTERISTIQUE COMPLEXE DU CABLE:
C
      ZC=CDSQRT(ZN/ZD)
C
C--COEFFICIENTS DE REFLEXION EN X=0 ET X=ALONG
C
      ZREFO=(ZO-ZC)/(ZO+ZC)
      ZREFL=(ZL-ZC)/(ZL+ZC)
C
C--FONCTION DE TRANSFERT:
C
      ZTERM=ZC/(ZO+ZC)
      ZPROPA=CDEXP(-ZGAMA*ZALONG)
      ZTRANS=ZTERM*ZPROPA*(ZUN+ZREFL)
      ZTRANS=ZTRANS/(ZUN-ZREFO*ZREFL*ZPROPA*ZPROPA)
C
C--ZPULS EST LA TRANSFORMEE DE LA F.E.M. FOURNIE
C--PAR LE GENERATEUR:
C
      ZPI=DCMPLX(PI,0.0D+00)
      OMEGA=2.0D+00*PI/TAU
      ZOMEGA=DCMPLX(OMEGA,0.0D+00)
      ZTAU=DCMPLX(TAU,0.0D+00)
      ZPULS=ZOMEGA*(ZUN-CDEXP(-ZTAU*Z))/(ZOMEGA*ZOMEGA+Z*Z)
C
C--TRANSFORMEE DE LA TENSION AU POINT X=ALONG:
C
      ZF=ZPULS*ZTRANS
      RETURN
      END
```

```
C*****************************************************************************
C
C--INITIALISATION DES PARAMETRES DE LA FONCTION F(S)
C
C*****************************************************************************
      BLOCK DATA
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Y)
      COMMON /CF/ AR,AL,AG,AC,ALONG,RL,RO,TAU,PI
      DATA AR/.5D-01/,AL/.25D+03/,AG/.1D-06/,AC/.1D+00/,ALONG/.5D+01/
      DATA RL/.3D+02/,RO/.1D+00/,TAU/.4D+02/,PI/.31415926535897932D+0
     S1/
      END
```

```
      C
      C*****************************************************************
      C
      C  CE SOUS-PROGRAMME CALCULE L'INVERSE NUMERIQUE DE F AU POINT TIME
      C  EN UTILISANT LA SOMME PARTIELLE JUSQU'A L'ORDRE N DU DEVELOPPEMENT
      C  DE L'INVERSE SUR LA BASE DES FONCTION DE LAGUERRE. LES COEFFICIENTS
      C  DE CE DEVELOPPEMENT SONT CONNUS ET SE TROUVENT DANS LE TABLEAU
      C  A(N). LES VALEURS DES POLYNOMES DE LAGUERRES AU POINT TIME SONT
      C  CALCULES RECURSIVEMENT. FNUM DESIGNE LA SOMME PARTIELLE D'ORDRE I,
      C  I VARIANT DE 1 A N.
      C
      C*****************************************************************
      C
            SUBROUTINE LAGUERRE(ALPHA,C,TIME,A,N,IMPR,FNUM)
            IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
            DIMENSION A(1)
            COMMON /GRAF/LEC,IMP
            P0=DEXP((C-ALPHA)*TIME)
            IF(IMPR.EQ.1)OUTPUT P0
            X=2.D+00*ALPHA*TIME
            P1=P0*(1-X)
            IF(IMPR.EQ.1)OUTPUT P1
            FNUM=P0*A(1)+P1*A(2)
            IF(IMPR.LE.2)WRITE(IMP,20)1,FNUM
            DO 10 I=1,N-2
             DI=DFLOAT(I)
             PN=((2.D+00*DI+1.D+00-X)*P1-DI*P0)/(DI+1.D+00)
             IF(IMPR.EQ.1)OUTPUT PN
             FNUM=FNUM+PN*A(I+2)
             IF(IMPR.LE.2) WRITE(IMP,20) I+1,FNUM
             P0=P1
      10    P1=PN
      20    FORMAT(10X,'DEGRES DE L APPROXIMATION:'I3,10X,'FNUM='D21.15)
            RETURN
            END
```

```
C
C*************************************************************************
      SUBROUTINE COEF(ALPHA,C,N,A,C1,CNUM,DENOM)
C*************************************************************************
C
C--CE SOUS-PROGRAMME CALCULE LES COEFFICIENTS DU NUMERATEUR ET DU
C--DENOMINATEUR DE LA FRACTION RATIONNELLE FN(S).CES COEFFICIENTS
C--SONT RESPECTIVEMENT CALCULES DANS LES TABLEAUX CNUM(I),I=1,N
C--ET DENOM(I),I=1,N+1,AVEC CNUM(I),DENOM(I)=COEFFICIENTS DE S**(I-1).
C--PARAMETRES:
C-- ALPHA: PARAMETRE D'OPTIMALITE
C-- C:VECTEUR DE TRANSLATION
C-- N:DEGRES DE L'APPROXIMATION
C-- C1: ZONE DE TRAVAIL
C-- A: TABLEAU CONTENANT LES COEFFICIENTS DU DEVELOPPEMENT DE LA
C--    COTRANSFORMEE EN SERIE DE FONCTIONS DE LAGUERRE.
C
C*************************************************************************
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Y)
      DIMENSION A(1),C1(1),CNUM(1),DENOM(1)
C
C-1)CALCUL DES COEFFICIENTS DE FN(S+C):
C
C--CALCUL DES COEFFICIENT DE LA DECOMPOSISION DE FN(S+C)
C--EN ELEMENTS SIMPLES:
C--FN(S+C)=B1/(S+ALPHA)+...+BN/(S+ALPHA)**N,
C--BN,...,B1 SONT RESPECTIVEMENT CALCULES DANS CNUM(1),...
C--CNUM(N):
      CNUM(N)=0.0D+00
      DO 100 M=1,N
       CNUM(N)=CNUM(N)+A(M)
       C1(M)=1.0D+00
100   CONTINUE
      IF(N.EQ.1) GO TO 120
      POND=-2.0D+00*ALPHA
      IF(N.EQ.2) GO TO 110
      DO 110 J=2,N-1
       CNUM(N+1-J)=A(J)
       U=1.0D+00
       DO 111 M=J+1,N
        S=U+C1(M-1)
        C1(M-1)=U
        CNUM(N+1-J)=CNUM(N+1-J)+S*A(M)
        U=S
111    CONTINUE
       CNUM(N+1-J)=CNUM(N+1-J)*POND
       POND=-2.0D+00*ALPHA*POND
110   CONTINUE
      CNUM(1)=A(N)*POND
C
C--CALCUL DES COEFFICIENTS DU NUMERATEUR ET DU DENOMINATEUR
```

```
C--DE FN(S+C):
C
120    POND=ALPHA
       C1(1)=1.0D+00
       IF(N.EQ.1) C1(1)=0.0D+00;GO TO 210
       DO 200 M=2,N
        C1(M)=POND
        CNUM(1)=CNUM(1)+POND*CNUM(M)
        POND=ALPHA*POND
200    CONTINUE
       DENOM(1)=POND
       IF(N.EQ.2) GO TO 210
       DO 210 J=2,N-1
        U=1.0D+00
        DO 211 M=J+1,N
         S=ALPHA*U+C1(M-1)
         C1(M-1)=U
         CNUM(J)=CNUM(J)+S*CNUM(M)
         U=S
211     CONTINUE
        DENOM(J)=ALPHA*U+C1(N)
        C1(N)=U
210    CONTINUE
       DENOM(N)=ALPHA+C1(N)
       DENOM(N+1)=1.0D+00
C
C-2) CALCUL DES COEFFICIENTS DU NUMERATEUR ET DU DENOMINATEUR
C    DE FN(S) A PARTIR DE CEUX DE FN(S+C):
C
       IF(C.EQ.0.0D+00) GO TO 320
       POND=-C
       C1(1)=1.0D+00
       IF(N.EQ.1) GO TO 300
       DO 300 M=2,N
        C1(M)=POND
        CNUM(1)=CNUM(1)+CNUM(M)*POND
        DENOM(1)=DENOM(1)+DENOM(M)*POND
        POND=-C*POND
300    CONTINUE
       DENOM(1)=DENOM(1)+DENOM(N+1)*POND
       IF(N.EQ.1) GO TO 320
       IF(N.EQ.2) GO TO 310
       DO 310 J=2,N
        U=1.0D+00
        DO 311 M=J+1,N
         S=-C*U+C1(M-1)
         C1(M-1)=U
         CNUM(J)=CNUM(J)+S*CNUM(M)
         DENOM(J)=DENOM(J)+S*DENOM(M)
         U=S
311     CONTINUE
```

```
      S=-C*U+C1(N)
      C1(N)=U
      DENOM(J)=DENOM(J)+DENOM(N+1)*S
  310 CONTINUE
      S=-C+C1(N)
      DENOM(N)=DENOM(N)+S*DENOM(N+1)
  320 RETURN
      END
```

```
C*****************************************************************************
C--LE SOUS-PROGRAMME FFTCBO(ZINOUT,ZWORK,N,ISENS) EFFECTUE
C--LA TRANSFORMEE DE FOURIER DISCRETE DU VECTEUR Z1 DE DIMENSION N
C--EN UN MEME VECTEUR Z1 DE DIMENSION N.
C--LA MEHODE UTILISEE EST CELLE DE CARL DE BOOR, LE NOMBRE DE POINTS
C--N A TRANSFORMER EST DECOMPOSABLE EN PRODUIT DE FACTEURS:
C--N=IFACT(1)*...*IFACT(NFACT).
C--REF:SIAM J. SCI. COMPUT ,MARCH 1980.
C
C------------PARAMETRES D'ENTREE------------------------------------------
C--ZINOUT: N-VECTEUR DOUBLE COMPLEX D'ENTREE-SORTIE
C--ZWORK: N-VECTEUR DOUBLE COMPLEX DE TRAVAIL
C--ISENS:SENS DE LA F.F.T.(=+1,DIRECT,=-1:INVERSE)
C
C------------PARAMETRES INTERNES------------------------------------------
C--IAV:AVANT =IFACT(1)*...*IFACT(I-1)
C--IAP:APRES =IFACT(I+1)*...*IFAT(NFACT)
C--IMAINT:MAINTENANT =IFACT(I)
C--IFACT: TABLEAU CONTENANT LES FACTEURS DE N.
C
C*****************************************************************************
      SUBROUTINE FFTCBO(ZINOUT,ZWORK,N,ISENS)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Y),DOUBLE COMPLEX(Z)
      DIMENSION ZINOUT(N),ZWORK(N)
      COMMON /TRIG/ ZEXP(1000),IFACT(20),NFACT
      COMMON /GRAF/ LEC,IMP
C--LES FACTEURS IFACT DE N SONT CONNUS A L'AVANCE CE QUI PERMET DE
C--CALCULER LES INDICES IAV,IAP,IMAINT AVEC LES RELATIONS DE
C--DEFINITIONS,CONTRAIREMENT A LA METHODE ORIGINALE; LA BOUCLE
C--EXTERNE INDICEE PAR ISUIV REMPLACE TOUT LES TESTS DE DETERMINATION
C--DES FACTEURS IFACTS.
C
C--INITIALISATION DES INDICES :
      IAV=N
      IAP=1
      DO 2 ISUIV=1,NFACT
      IMAINT=IFACT(ISUIV)
      IAV=IAV/IMAINT
C--L'ORDRE DE LA F.F.T. PARTIELLE EST IMAINT*IAP,CE QUI CORRESPOND
C--A L'EXPONENTIELLE COMPLEXE ZEXP(IAV+1)
C--POUR LA F.F.T. DIRECTE:
      ZOMEGA=DCONJG(ZEXP(IAV+1))
C--POUR LA F.F.T. INVERSE:
      IF(ISENS.EQ.-1) ZOMEGA=DCONJG(ZOMEGA)
      ZARG=DCMPLX(1.0D+00,0.0D+00)
C--ON EFFECTUE LES PRODUITS D'ENTIERS COMMUNS A TOUS LES CALCUL
C--D'INDICES,POUR REDUIRE LE NOMBRES DE MULTIPLICATIONS
C--ENTIERES NECESSAIRES.
      IAPAV=IAV*IAP
      IAPNOW=IAP*IMAINT
      IAPVN=IAPAV*(IMAINT-1)
```

```
C--CALCUL D'UNE ETAPE DE LA F.F.T.
      DO 6 J=1,IMAINT
      IAPJ=IAP*(J-1)
      DO 10 IA=1,IAP
      IAPJIA=IA+IAPJ
      DO 14 IB=1,IAV
      IAPB=IA+IAP*(IB-1)
      ZVALUE=ZINOUT(IAPB+IAPVN)
C--BOUCLE DE SOMMATION DE HORNER
      DO 18 IN=IMAINT-1,1,-1
      INDEXN=IAPB+IAPAV*(IN-1)
      ZVALUE=ZVALUE*ZARG+ZINOUT(INDEXN)
18    CONTINUE
      INDEXB=IAPJIA+IAPNOW*(IB-1)
      ZWORK(INDEXB)=ZVALUE
14    CONTINUE
      ZARG=ZARG*ZOMEGA
10    CONTINUE
6     CONTINUE
C--APRES CHAQUE ETAPE,ON TRANSFERE LE RESULTAT INTERMEDIAIRE
C--ZWORK DANS LE TABLEAU ZINOUT,POUR SIMULER L'ALTERNANCE
C--DES TABLEAUX D'ENTREE Z1 ET Z2 DANS L'ALGORITHME ORIGINAL.
      DO 22 IEX=1,N
      ZINOUT(IEX)=ZWORK(IEX)
22    CONTINUE
C--LES NFACT F.F.T. PARTIELLES ONT ETE EFFECTUEES:
C--INCREMENTATION DE IAP:
      IAP=IAP*IMAINT
2     CONTINUE
C--POUR UNE F.F.T.INVERSE SORTIE IMMEDIATE:
      IF(ISENS.EQ.-1) RETURN
C--POUR UNE F.F.T. DIRECTE,DIVISION DE CHAQUE TERME PAR N:
      RN=DFLOAT(N)
      DO 26 IDIV=1,N
      ZINOUT(IDIV)=ZINOUT(IDIV)/RN
26    CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
C*************************************************************************
C
C--TRIGO EST UN SOUS PROGAMME QUI CALCULE UNE SEULE FOIS
C--LES RACINES COMPLEXES D'ORDRES N DE L'UNITE.
C
C*************************************************************************
C
      SUBROUTINE TRIGO(N)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Y),DOUBLE COMPLEX (Z)
      COMMON /TRIG/ ZEXP(1000),IFACT(20),NFACT
      PI=3.14159265358979323D+00
C--CALCUL DIRECTE DES N/2+1 PREMIERES RACINES;
      NHALF=N/2+1
      COEF=2.0D+00*PI
      RN=DFLOAT(N)
      ZEXP(1)=DCMPLX(1.0D+00,0.0D+00)
      DO 2 I=2,NHALF
      RI=DFLOAT(I-1)
      ANG=COEF*RI/RN
      WR=DCOS(ANG)
      WI=DSIN(ANG)
      ZEXP(I)=DCMPLX(WR,WI)
C--CALCUL DES N/2 DERNIERES RACINES PAR SYMETRIE:
      J=N-I+2
      ZEXP(J)=DCMPLX(WR,-WI)
2     CONTINUE
C--DANS LE CAS OU N EST PAIR ZEXP(NHALF)=(-1,0)EXACTEMENT.
C--IL EST PLUS PRECIS D'IMPOSER CES VALEURS PLUTOT QUE DE
C--CONSERVER CELLES OBTENUES PAR LA DIVISION IMPARFAITEMENT
C--UNIFORME DU CERCLE TRIGONOMETRIQUE.
      IF(MOD(N,2).EQ.0) ZEXP(NHALF)=DCMPLX(-1.0D+00,0.0D+00)
      RETURN
      END
```

```
C*************************************************************************
C
C--CE SOUS-PRORAMME TRACE LE GRAPHE D'UNE FONCTION SUR L'IMPRIMANTE.
C--2 OPTIONS SONT PERMISES:
C--IFRAME=1:TRACAGE AVEC 60 COLONNES
C--IFRAME=2:TRACAGE AVEC 100 COLONNES
C--NLINE EST QUELCONQUE;CELA SIGNIFIE QUE L'AXE DES Y
C--PEUT ETRE AUSSI LONG QUE L ON VEUT
C
C*************************************************************************
C
      SUBROUTINE TRACXH(XMIN,XMAX,X,Y,NXY,NLINE,IFRAME)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Y),COMPLEX(Z)
      DIMENSION X(1),Y(1)
      DIMENSION GRADX(10),FGRADX(2),ICOL(2),NGRADX(2)
      COMMON /GRAF/ LEC,IMP
      LOGICAL BIW(110),BIT(4)/'*','.','I',' '/
      DATA FGRADX/0,3333333,0,20/,ICOL/60,100/,NGRADX/4,6/
      NLINE1=NLINE+1
      ANL=DFLOAT(NLINE)
      NCOL=ICOL(IFRAME)
      COL=DFLOAT(NCOL)
      NCOL1=NCOL+1
      YMIN=Y(1)
      YMAX=Y(1)
C
C--THE SCALE OF THE PLOT IS OBTAINED THROUGH THE DETERMINATION
C--OF THE MAXIMUM AND MINIMUM ORDINATE.
C
      DO 10 I=1,NXY
      AY=Y(I)
      IF(AY.GT.YMAX) YMAX=AY
      IF(AY.LE.YMIN) YMIN=AY
10    CONTINUE
C--THE SCALES OF THE -X AND -Y GRADUATIONS ARE CALCULED:
      SCALEY=(YMAX-YMIN)/ANL
      SCALEX=(XMAX-XMIN)/COL
C
C--THE UPPER BORDER IS PRINTED:
C--60 OR 100 COLUMNS ACCORDING TO IFRAME:
C
      GO TO (3,5),IFRAME
3     WRITE(IMP,200)
200   FORMAT(12X,'I',6('....+....I'))
      GO TO 7
5     WRITE(IMP,210)
210   FORMAT(12X,'I',10('....+....I'))
C
C--SELECTION AND PRINTING OF THE POINTS.
C
7     DO 20 I=1,NLINE1
```

```
C--THE LEFT AND RIGHT BORDERS OF THE PLOT ARE PRINTED.
      BIW(1)=BIT(3)
      BIW(NCOL1)=BIT(3)
C--EACH LINE IS BLANKED BEFORE PRINTING.
      DO 30 J=2,NCOL
      BIW(J)=BIT(4)
30    CONTINUE
C
C--THE NXY POINTS ARE PLACED INTO THE NLINE ORDINATE INTERVALS
C--DETERMINED ON THE Y-AXIS:
C
      YUP=YMAX+0.5*SCALEY-DFLOAT(I-1)*SCALEY
      YDOWN=YUP-SCALEY
C--SELECTION OF THE POINTS TO BE PRINTED
      DO 40 IW=1,NXY
      YTEST=Y(IW)
      IF(YTEST.LT.YDOWN.OR.YTEST.GT.YUP) GO TO 40
      XWRITE=(X(IW)-XMIN)/SCALEX
      KWRITE=IFIX(XWRITE)+1
      BIW(KWRITE)=BIT(1)
40    CONTINUE
C--PRINTING OF THE SELECTED POINTS:
      YWRITE=YUP-0.5*SCALEY
      WRITE(IMP,100) YWRITE,(BIW(K),K=1,NCOL1)
100   FORMAT(E11.4,1X,101A1)
20    CONTINUE
C--THE X-AXIS IS PRINTED:
C--60 OR 100 COLUMNS ACCORDING TO IFRAME
      GO TO (9,11),IFRAME
9     WRITE(IMP,200)
      GO TO 13
11    WRITE(IMP,210)
C--THE X-AXIS IS GRATUETED:
13    FACT=FGRADX(IFRAME)
      IGRAD=NGRADX(IFRAME)
      XVAR=XMAX-XMIN
      DO 50 I=1,IGRAD
      GRADX(I)=XMIN+FACT*XVAR*DFLOAT(I-1)
50    CONTINUE
      GO TO (15,17),IFRAME
15    WRITE(IMP,300) (GRADX(I),I=1,4)
300   FORMAT(6X,E10.3,3('          ',E10.3))
      RETURN
17    WRITE(IMP,310) (GRADX(I),I=1,6)
310   FORMAT(6X,E10.3,5('          ',E10.3))
      RETURN
      END
```

CHAPITRE VII

ÉTUDE NUMÉRIQUE

VII.1 - INTRODUCTION.

Dans ce chapitre, nous rendons compte des essais numériques que nous avons effectués. Ces essais avaient deux buts, premièrement vérifier l'algorithme et les résultats théoriques obtenus, deuxièmement mettre au point cet algorithme en fixant les paramètres ρ et N.

Nous avons commencé par les fonctions les plus simples :

$$F_1(s) = \frac{1}{s+\beta}, \quad F_2(s) = \frac{1}{s^2+s+1}, \quad F_3(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \;;$$

puis nous avons fait des essais sur des fonctions présentant des singularités à l'infini :

$$F_4(s) = \frac{1}{se^{25s}}, \quad F_5(s) = e^{-18\sqrt{s}} \;;$$

pour finir par des fonctions provenant de la physique et dont l'expression analytique de l'inverse n'est pas connue :

$$F_6(s) = \frac{1}{s} \exp\left(\frac{-s}{\sqrt{1+\sigma.s}}\right), \quad F_7(s) = \frac{2\Pi}{\tau}\,\frac{1-e^{-\tau.s}}{(\frac{2\Pi}{\tau})^2+s^2}\cdot\frac{Z_c}{Z_o+Z_c}\cdot\frac{(1+\Gamma_\ell)e^{-\gamma.\ell}}{1-\Gamma_o\Gamma_\ell\, e^{-2\gamma\ell}}$$

où :

$$\gamma = \sqrt{(R+Ls)(G+Cs)}$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{R+L.s}{G+c.s}}$$

$$\Gamma_o = \frac{Z_o - Z_c}{Z_o + Z_c}$$

$$\Gamma_\ell = \frac{Z_\ell - Z_c}{Z_\ell + Z_c} .$$

Cette dernière fonction rassemble beaucoup aux fonctions de transferts de la ligne que nous devons modéliser.
Nous n'avons pas encore fait d'expérience numérique sur ces fonctions car cela nécessite la mise en oeuvre du code de C.A.O. Astec III si nous voulons pouvoir vérifier les résultats obtenus. Ceci sera fait prochainement au Service Electronique du Centre d'Etude Nucléaire de Bruyères Le Chatel.

VII.2 - FONCTIONS SIMPLES.

A) Inversion de $F_1(s) = \frac{1}{s+1}$.

Son inverse est connu :

$$f_1(t) = e^{-t}.$$

Nous l'avons inversée sur l'intervalle [0,10] parcouru avec un pas égal à 1.
$b = -1$, d'où $c = o$ et $\alpha_{opt} = -1$.

Cependant nous avons choisi de l'inverser en prenant pour la valeur proposée par Weeks :

$$\alpha_W = \frac{NLAG}{2.T_{max}} .$$

Dans les tableaux suivants nous donnons sous le libellé *"erreur"* la plus grande valeur de l'erreur absolue.

Influence du choix de ρ :

N = 200, NLAG = 50, α = 2.5.

ρ	erreur
0.3	10^{-9}
0.7	2.10^{-8}
0.9	4.10^{-14}
0.999	10^{-15}

Influence du choix de N :

NLAG = 50, α = 2.5

ρ	N	erreur
0.7	200	2.10^{-8}
0.7	500	2.10^{-9}
0.5	100	2.10^{-12}
0.5	500	4.10^{-13}

S'il est difficile de cerner avec précision l'influence respective de et N, on remarque, cependant qu'il vaut mieux choisir voisin de 1 et que le nombre de points d'interpolations N je joue pas un rôle prédominant.

B) Inversion de $F_2(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$

$$f_2(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-t/2} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$$

F_2 admet deux pôles complexes conjugués :

$$s = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

la valeur asymptotique optimale de α est donc 1 et $b = -\frac{1}{2}$, d'où $c = 0$.

Nous avons inversé cette fonction sur l'intervalle $[0, 10]$ parcouru avec un pas de 1.
La valeur de α proposée par Weeks est donc :

$$\alpha_W = 2.5.$$

Tableau 1.

ρ	N	α	erreur
0.999	200	2.5	$.8\ 10^{-8}$
0.999	200	1.	$.8\ 10^{-12}$

Tableau 2.

ρ	N	α	erreur
0.9	200	2.5	$.7\ 10^{-8}$
0.999	200	2.5	$.8\ 10^{-8}$

Tableau 3.

ρ	N	α	erreur
0.9	200	2.5	$.7\ 10^{-8}$
0.9	500	2.5	$.7\ 10^{-8}$

Le tableau 1 montre la forte influence du choix de α, puisque la valeur asymptotique optimale permet de diviser l'erreur par un facteur 10^4.

Les tableaux 2 et 3 montrent la faible influence de ρ et N.
Cette fonction a également été inversée par Weeks [12] qui obtient une erreur de 10^{-7}.

C) Inversion de $F_3(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$.

$$f_3(t) = e^t - e^{2t}.$$

F_3 admet 2 pôles strictement négatifs s = -1 et s = -2. La valeur asymptotique optimale de α est donc $\sqrt{2}$ et c=o. L'intervalle d'inversion est [0,10] et le pas vaut 1. Nous avons inversé cette fonction en utilisant successivement la valeur de α proposée par Weeks $\alpha_W = 2.5$ et la valeur $\alpha_{opt} = \sqrt{2}$ avec $\rho = 0{,}999$, N = 200, NLAG = 50. Nous n'avons pas pu observer de différence dans la précision obtenue puisque dans les deux cas nous avons obtenu 15 décimales exactes.

VII.3 - Fonctions présentant une singularité à l'infini.

A) Inversion de $F_4(s) = \dfrac{1}{s\, e^{25s}}$

$$f_4(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 25 \\ 1 \text{ si } t > 25 \end{cases}$$

F_4 admet 0 comme pôle et l'infini comme singularité essentielle. Remarquons aussi que f_4 n'est pas de carré sommable, cependant $\forall c > 0$ $e^{-ct} f_4(t)$ est de carré sommable, F_4 peut donc être inversée à l'aide de notre algorithme. Nous avons choisi cette fonction car elle est considérée dans la littérature sur l'inversion numérique de la transformée de Laplace, à juste raison, comme un test sévère.

L'intervalle choisi est [0,75], le pas vaut 5 et NLAG = 50. N ayant pas de valeur optimale à proposé pour α, nous avons pris $\alpha = \frac{NLAG}{2\,T_{max}}$, soit $\alpha = \frac{1}{3}$, c vaut $\frac{1}{75}$.

Nous avons dû choisir $\rho = 0.8$ car $\rho = 0.9$ provoquait des dépassements de capacité.

Nous comparons ci-dessous nos résultats avec ceux obtenus par Weeks [12] avec une approximation de même degré.

T	N = 200	N = 500	Weeks
0	.0956	.0981	
05	.0192	.0196	- .0612
10	- .0065	- .0066	.0570
15	.0307	.0311	.1071
20	.0496	.0499	.0952
25	.5048	.5052	.5162
30	.9799	.9802	.9589
35	1.0228	1.0225	1.0090
40	1.0052	1.0049	1.0206
45	0.9864	.9879	.9816
50	1.0092	1.0088	1.0030
55	.9949	.9950	1.0030
60	1.0026	1.0026	- .9901
65	0.9982	.9981	1.0076
70	1.0019	1.0019	.9892
75	.9973	0.9974	1.0050

Ce tableau met bien en évidence la faible influence de N, nombre de points d'interpolations utilisé par la transformée de Fourier Discrète. Si les résultats que nous obtenons sont un peu meilleurs que ceux de Weeks, il n'en reste pas moins que la précision est très inférieure à celle que nous avons obtenue sur les fonctions précédente. De plus un examen détaillé des approximations successives montrerait que sur cette fonction l'algorithme semble instable.

Ceci peut s'expliquer en partie par le fait qu'il n'y a plus convergence uniforme sur tout compact $[0,T]$ de $\mathbb{R}^+$ de la suite f_n, vers la cotransformée f_4 mais seulement convergence au sens des moindres carrés, puisque la fonction à inverser est singulière à l'infini. Il est d'ailleurs possible d'éliminer cette singularité en utilisant la propriété suivante de la transformation de Laplace :

soit $a > o$, si f admet F comme transformée de Laplace, la fonction g définie par :

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ f(t-a) & \text{si } t > a \end{cases}$$

admet comme transformée de Laplace G :

$$G(s) = e^{as} F(s)$$

On peut donc se ramener à l'inversion de $G_4(s) = \frac{1}{s}$. Soit g_4 sa cotransformée, f_4 est alors définie par :

$$f_4(t) = \begin{cases} o \text{ si } t < 25 \\ g_4(t-25) \end{cases}$$

L'exemple de l'inversion de $F(s) = \frac{1}{s+\beta}$ montre qu'alors, en choisissant $\alpha = \beta$, on peut obtenir jusqu'à 15 décimales exactes.

Cependant, il n'est pas toujours possible d'éliminer une singularité à l'infini.

B) Inversion de $F_5(s) = e^{-\beta\sqrt{s}}$

$$f_5(t) = \frac{\beta}{2\sqrt{\Pi t^3}} e^{-\frac{\beta^2}{4t}}$$

Ceffe fonction présente également une singularité à l'infini. D'autre part les variations de son inverse la rendent très intéressante puisque celle-ci tend vers 0 ainsi que toutes ses dérivées lorsque t tend vers 0, puis elle est croissante de 0 à 3β où elle admet un maximum, ensuite elle décroît et tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini.

Nous avons inversé cette fonction avec $\beta = 18$ sur l'interva-le [0,100] avec $N = 300$, $\rho = 0.8$, α est choisi par défaut.

t	NLAG = 20	NLAG = 50	Valeur Exacte
0	- 0.0000117	- .0000094	0
27	0.0018008	.0018005	. 0018019
54	.0028573	.0028557	. 0028551
81	.0025648	.0025629	. 0025623
Durée du calcul	1,91	2,7 s	

L'erreur, au sens où nous l'avons défini précédemment, est donc de 2.10^{-5} avec NLAG = 20 et 6.10^{-7} avec NLAG = 50.
L'examen des approximations successives montrerait que le calcul est encore entâché d'une certaine instabilité.

VII.4 - INVERSION DE FONCTIONS PROVENANT DE LA PHYSIQUE.

A) Inversion de $F_6(s) = \frac{1}{s} \exp\left(\frac{-s}{\sqrt{1+ .s}}\right)$ où α est un paramètre réel.

Cette fonction se rencontre souvent dans les problèmes de propagation en visco-élasticité. L'expression analytique de son inverse est inconnue. Longman [15] a consacré un article à son inversion à l'aide d'approximants de Padé.
Van Iseghem [8] s'y est également intéressé et obtient 9 chiffres décimaux exacts.

Nous nous proposons de l'inverser sur l'intervalle [0,2.6] avec $\sigma = 0.8$. Notons que pour $\sigma = 0$ on retrouve F_4.
F_6 admet deux pôles, 0 et $-\frac{1}{\sigma}$. La valeur asymptotique otpimale de α et donc

$$\alpha = \sqrt{c\,\frac{1+\sigma c}{\sigma}}$$

avec $c = \frac{1}{T_{max}}$. Soit :

$$\alpha = 0.7929049$$
$$c = 0.3846154$$

$N = 300$ et $\rho = 0.8$. Nous avons pris successivement pour NLAG les valeurs 20, 30, 40, 50. Pour NLAG = 50 nous avons également fait un essai avec la valeur de α prise par défaut. Le tableau suivant présente les résultats obtenus ainsi que ceux de Van Iseghem.

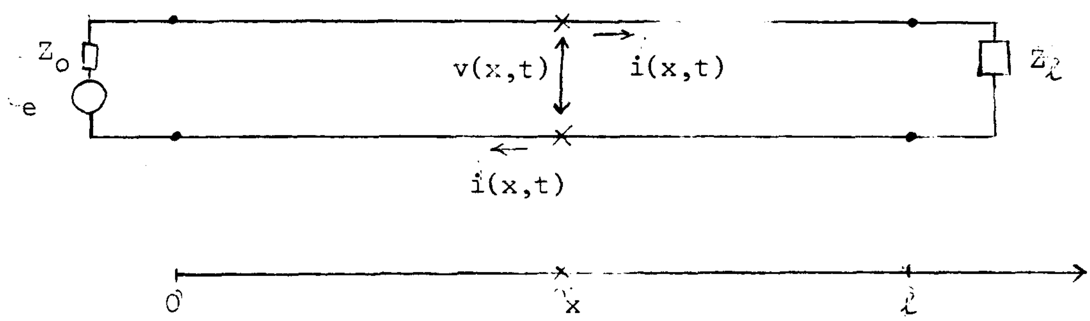
T	$\alpha = 0.7929049$				$\alpha = 9.615$	Van Iseghem (exact)
	NLAG=20	NLAG=30	NLAG=40	NLAG=50	NLAG=50	
0.5	.35529	.35541	.35540	.35531	.35398	.35483
1.0	.63415	.63494	.63514	.63565	.63777	.63526
1.5	.79090	.79121	.79095	.79067	.79260	.79098
2.0	.88152	.87945	.87975	.88002	.88257	.87977
2.5	.92926	.93117	.93100	.93054	.92841	.93084

La valeur asymptotique optimale de α fournit de meilleurs résultats que la valeur par défaut. On constate également une certaine instabilité.

B) Calcul de la tension à l'extrémité d'une ligne de transmission.

Nous commencerons par rappeler comment on obtient la transformée de Laplace de la tension en un point quelconque d'une ligne de transmission. L'essentiel de ce qui suit est tiré de [11].

On considère une ligne bifilaire, fermée par une impédance Z_{ℓ}, de longueur ℓ . A l'instant t = 0, on applique à l'entrée de la ligne la force électromotrice e(t) fournie par un générateur d'impédance interne Z_o.



Soit v(x,t) la tension en un point x et à l'instant t entre les deux fils et i(x,t) l'intensité du courant en ce point et au même instant.
Soient :

- R la résistance série par unité de longueur
- L la self-inductance par unité de longueur
- C la capacité par unité de longueur
- G la conductance parallèle par unité de longueur.

En considérant un élément de ligne bifilaire de longueur x comme un quadripôle, les lois de Kirschoff permettent d'établir les deux équations fondamentales :

(1) $$\frac{\partial v}{\partial x} = - R.i - L\frac{\partial i}{\partial t}$$

(2) $$\frac{\partial i}{\partial x} = - G.V - C\frac{\partial v}{\partial t}$$

En appliquant la transformation de Laplace à ces deux équations il vient, en notant V(x,s) et I(x,s) les transformées de Laplace de i et v :

$$(3) \qquad \frac{\partial V(x,s)}{\partial x} + (R + L.s)\, I(x,s) = 0$$

$$(4) \qquad \frac{\partial I(x,s)}{\partial x} + (G + C.s)\, V(x,s) = 0$$

Dérivons (3) par rapport à x et servons nous de (4) pour éliminer I, on obtient :

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 V(x,s)}{\partial x^2} - (R + Ls)\,(G + C.s)\, V(x,s) = 0$$

On pose $\gamma(s) = \sqrt{(R+L.s)(G+C.s)}$ qu'on appelle fonction de propagation. L'équation (5) admet alors des solutions de la forme :

$$(6) \qquad V(x,s) = V_1(s)\, e^{-\gamma x} + V_2(s)\, e^{\gamma x}$$

On en déduit :

$$\frac{\partial V(x,s)}{\partial x} = -\,\gamma(V_1(s)\, e^{-\gamma x} - V_2(s)\, e^{\gamma x})$$

ce qui donne avec (3) :

$$I(x,s) = \sqrt{\frac{G+C.s}{R+L.s}}\,(V_1(s)\, e^{-\gamma x} - V_2(s)\, e^{\gamma x})$$

On pose $Z_C(s) = \sqrt{\frac{R+L.s}{G+C.s}}$ qui a la dimension d'une impédance et est appelée impédance caractéristique de la ligne.

La solution complète est obtenue en déterminant les fonctions $V_1(s)$ et $V_2(s)$ à l'aide des conditions aux extrémités :

soit E la transformée de Laplace de la f.e.m. e.

En x = o, on a :

$$E(s) = Z_o\, I(o,s) + V(o,s) = \frac{Zo}{Zc}\,(V_1(s) - V_2(s)) + V_1(s) + V_2(s)$$

Soit :

$$V_1(s) - V_2(s) \frac{Z_o - Z_c}{Z_o + Z_c} = E(s) \cdot \frac{Z_c}{Z_o + Z_c} \quad .$$

On pose $\Gamma_o = \frac{Z_o - Z_c}{Z_o + Z_c}$ qu'on appelle coefficient de réflexion de la tension à l'entrée de la ligne.

En $x = \ell$, on a :

$$Z = \frac{V(\ell,s)}{I(\ell,s)} \; .$$

Soit :

$$V_1 \; e^{-\gamma\ell} \frac{Z_\ell - Z_c}{Z_\ell + Z_c} - V_2 \; e^{\gamma\ell} = o \; .$$

On pose $\Gamma_\ell = \dfrac{Z_\ell - Z_c}{Z_\ell + Z_c}$ qu'on appelle coefficient de réflexion de la tension à la sortie de la ligne.

Finalement, $V_1(s)$ et $V_2(s)$ sont solutions de :

(7) $$V_1(s) - \Gamma_o . V_2(s) = E(s) \frac{Z_c}{Z_o + Z_c}$$

(8) $$\Gamma_\ell . V_1(s) \; e^{-\gamma\ell} - V_2 \; e^{\gamma\ell} = 0$$

Soit :

$$V_1(s) = E(s) \frac{Z_c}{Z_o + Z_c} \frac{1}{1 - \Gamma_o \Gamma_\ell \; e^{-2\gamma\ell}}$$

$$V_2(s) = E(s) \frac{Z_c}{Z_o + Z_c} \frac{\Gamma_\ell \; e^{-2\gamma\ell}}{1 - \Gamma_o \Gamma_\ell \; e^{-2\gamma\ell}}$$

En reportant dans (6) on obtient enfin :

$$V(x,s) = E(s) \frac{Z_c}{Z_o+Z_c} \cdot \frac{e^{-\gamma x} + \Gamma_\ell \, e^{-\gamma(2\ell-x)}}{1 - \Gamma_o\Gamma_\ell \, e^{-2\gamma\ell}}$$

Mais V n'est que la transformée de Laplace de la tension σ. On ne peut donc connaître v que par l'intermédiaire d'une méthode numérique d'inversion de la transformée de Laplace.

Nous nous proposons de calculer une approximation de la tension à l'extrémité $x = \ell$ de la ligne. Cette fonction étant très proche de celles que nous devons inverser lors de la modélisation de la ligne, cela constitue un bon test pour la méthode que nous proposons.

Nous avons donc :

$$V(x,\ell) = E(s) \frac{Z_c}{Z_o+Z_c} \frac{(1 + \Gamma_\ell) \, e^{-\gamma\ell}}{1 - \Gamma_o\Gamma_\ell \, e^{-2\gamma\ell}}$$

avec :

$$\gamma = \sqrt{(R+Ls)\,(G+Cs)}$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{R+Ls}{G+Cs}}$$

$$\Gamma_o = \frac{Z_o-Z_c}{Z_o+Z_c}$$

$$\Gamma_\ell = \frac{Z_\ell-Z_c}{Z_\ell+Z_c}$$

Les constantes de la ligne sont :

$$R = 0.05 \ \Omega/m$$

$$L = 250 \ 10^{-9} \ H/m$$

$$G = 10^{-7}\ M\Omega/m$$

$$C = 10^{-9}\ F/m$$

$$\ell = 5m$$

Pour e(t) nous avons pris une unique période de sinusoïde de période T = 2 , ce qui donne pour E :

$$E(s) = \frac{2\tau}{\tau} \frac{(1 - \exp(-\tau.s))}{((\frac{2\Pi}{\tau})^2 + s^2)}$$

avec $\tau = 40$.

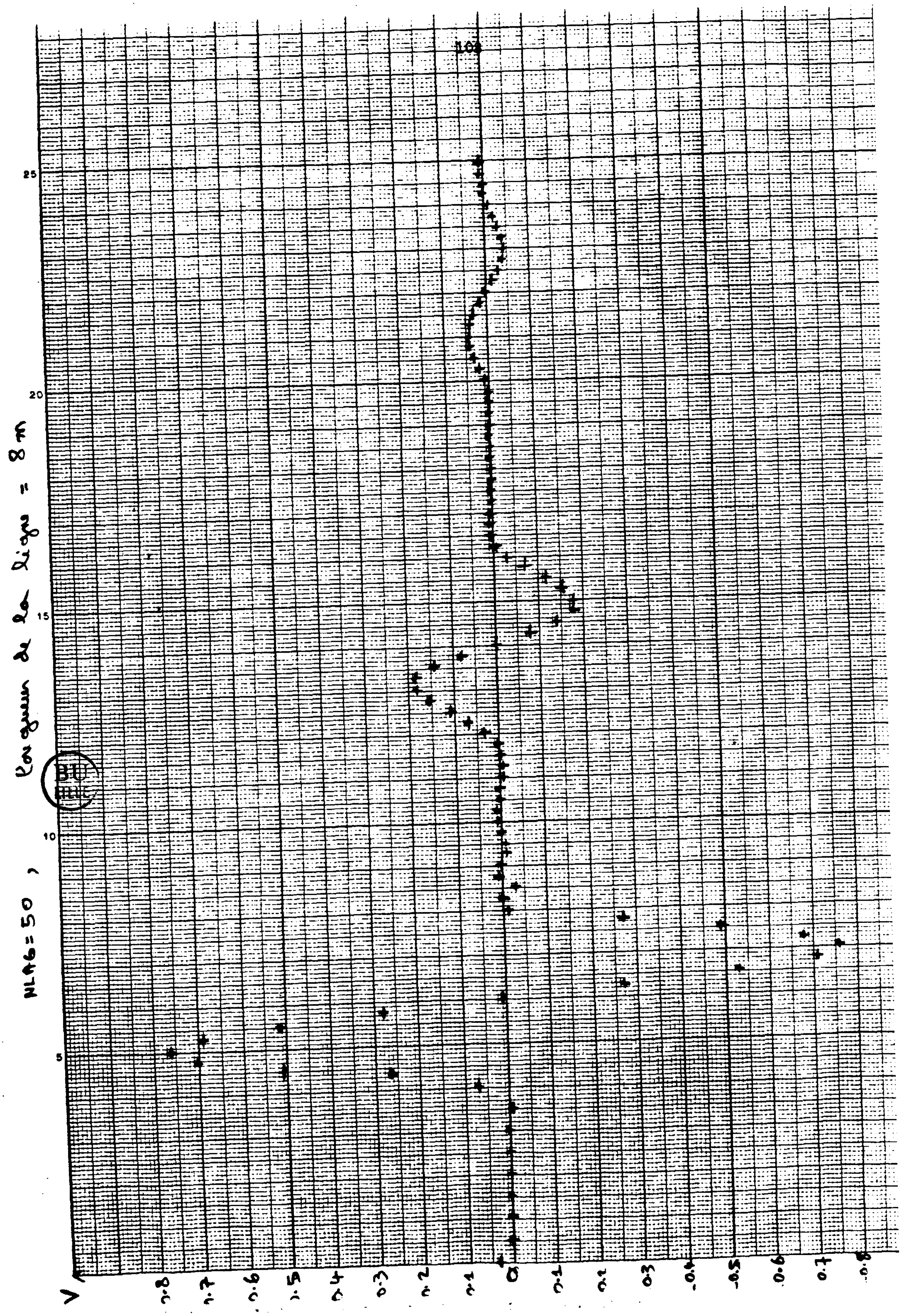
Nous avons comparé nos résultats avec ceux fournis par une autre méthode d'inversion numérique de la transformée de Laplace proposée par Durbin F. [16]. L'intervalle de temps choisi est [0, 250], $\rho = 0.8$, N=300. N'ayant pas de valeur asymptotique optimale à proposer pour le paramètre α, celui-ci est choisit par défaut.

Nous ne donnons pas les valeurs numériques obtenue mais seulement une représentation graphique sur papier.

La comparaison avec les résultats obtenus par Durbin montre que la précision est de l'ordre de 2 décimales exactes.

Nous pensons que les résultats qui seront obtenues sur les fonctions de transfert du modèle de ligne seront meilleurs que les précédents dans la mesure où les fonctions à inverser n'ont pas de singularité à l'infini ce qui n'est pas le cas de la fonction précédente.

Cependant, nous estimons que l'étude numérique que nous avons faite est incomplète dans la mesure où nous n'avons pas localisé les différentes sources d'instabilités numériques. Dans ce but, un premier travail consisterait dans l'utilisation des sous-programmes proposés par Vignes et Bois 17 et basés sr la méthode de Perturbation, pour déterminer les erreurs dues à l'algorithme de Transformée de Fourier Rapide.


NLA6=50 ,
Longueur de la ligne = 8 m
25
20
15
10
5
V
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8

BIBLIOGRAPHIE

-

[1] HENRICI P. - *Applied and computational complex analysis* - Vol. II, Wiley-Interscience, Wiley J., New-York, London, Sydney, Toronto (1977).

[2] BREZINSKI C. - *Padé Type approximation and general orthogonal polynomials* - ISNM 50 - Birkhäuser Verlag, Basel (1979).

[3] DIEUDONNE J. - *Fondements de l'analyse moderne* - Gauthier-Villars, Paris (1965).

[4] LUBELL-MELZER - *Transmission line models for use with circuit/system analysis programs* - TRW Systems Group (1973).

[5] BARS-MAYERS - *Algorithms for evaluating the Laguerre and x expansion coefficients of transfer functions* - Problems of Control and Information Theory 6 (3), 1977, 249-260.

[6] WING O. - *An efficient method of numerical inversion of Laplace transform* - Computing 2 (2), (1967), 153-166.

[7] TRICOMI F. - *Traformazione di Laplace e polinomi di Laguerre, Inversione della trasformazione* - R.C. Accad. Naz. Lincei - 6 (21) (1935), 232-239.

[8] VAN ISEGHEM J. - *Application des approximants de type Padé* - Thèse de 3e cycle, Université des Sciences et Techniques de Lille I, (1981).

[9] HENRICI P. - *Fast Fourier Methods in computational complex analysis* - Siam Review - 21 (4), (1979), 481-527.

[10] SCHETZEN M. - *Assymptotic Optimum Laguerre Series* - IEEE Transaction Circuits Theory 18 (5) (1971), 493-500.

[11] METZGER-VABRE - *Electronique des Impulsions* - Masson et Cie, Paris (1966).

[12] WEEKS W.T. - *Numerical Inversion of Laplace transforms using Laguerre functions* - JACM 13 (3) (1966), 419-426.

[13] DE BOOR C. - *F.F.T. as nested multiplication, with a twist* - SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1 (1) (1980), 173-178.

[14] BARY N.K. - *A treatise on trigonometric series* - Vol. I, Pergamen Press, Oxford, London, Edinburgh, New York, Paris, Frankfurt (1964).

[15] LONGMAN I.M. - *Numerical Laplace transform Inversion of a function arising in viscoelasticity* - Journal of Computational Physics 10 (2), (1972), 224-231.

[16] DURBIN F. - *Numerical Inversion of Laplace transforms : an efficient improvement to Dubner and Abata's method* - The Computer Journal (1984).

[17] BOIS-VIGNES - *A software for evaluating local accuracy in the Fourier Transform* - Mathematics and Computers in Simulation - 22 - (1980), 141-150.