50 376
1983
317

N° d'ordre : 1052

50376
1983
317

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE 3ème CYCLE

(Mathématiques Appliquées)

par

Bruno SIX

BIBLIOTHEQUE INTERUNIVERSITAIRE
SECTION DE SCIENCES
LILLE

ETUDE DES ELEMENTS PROPRES D'UNE MATRICE SYMETRIQUE REELLE PARAMETREE : CAS NON ANALYTIQUE

Thèse soutenue le Jeudi 23 Juin 1983 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :	P. POUZET	Président
	J. DENEL	Rapporteur
	C. LEMARECHAL	Examinateur
	F. CHATELIN-LABORDE	Examinatrice
	B. ROUSSELET	Examinateur
	G. COEURE	Examinateur

PROFESSEURS 1ère CLASSE

M.	BACCHUS Pierre	Mathématiques
M.	BEAUFILS Jean-Pierre (dét.)	Chimie
M.	BIAYS Pierre	G.A.S.
M.	BILLARD Jean	Physique
M.	BONNOT Ernest	Biologie
M.	BOUGHON Pierre	Mathématiques
M.	BOURIQUET Robert	Biologie
M.	CELET Paul	Sciences de la Terre
M.	COEURE Gérard	Mathématiques
M.	CONSTANT Eugène	I.E.E.A.
M.	CORDONNIER Vincent	I.E.E.A.
M.	DEBOURSE Jean-Pierre	S.E.S.
M.	DELATTRE Charles	Sciences de la Terre
M.	DURCHON Maurice	Biologie
M.	ESCAIG Bertrand	Physique
M.	FAURE Robert	Mathématiques
M.	FOURET René	Physique
M.	GABILLARD Robert	I.E.E.A.
M.	GRANELLE Jean-Jacques	S.E.S.
M.	GRUSON Laurent	Mathématiques
M.	GUILLAUME Jean	Biologie
M.	HECTOR Joseph	Mathématiques
M.	HEUBEL Joseph	Chimie
M.	LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M.	LACOSTE Louis	Biologie
M.	LANSRAUX Guy	Physique
M.	LAVEINE Jean-Pierre	Sciences de la Terre
M.	LEBRUN André	C.U.E.E.P.
M.	LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme	LENOBLE Jacqueline	Physique
M.	LHOMME Jean	Chimie
M.	LOMBARD Jacques	S.E.S.
M.	LOUCHEUX Claude	Chimie
M.	LUCQUIN Michel	Chimie

M.	MAILLET Pierre	S.E.S.
M.	MONTREUIL Jean	Biologie
M.	PAQUET Jacques	Sciences de la Terre
M.	PARREAU Michel	Mathématiques
M.	PROUVOST Jean	Sciences de la Terre
M.	SALMER Georges	I.E.E.A.
Mme	SCHWARTZ Marie-Hélène	Mathématiques
M.	SEGUIER Guy	I.E.E.A.
M.	STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M.	TILLIEU Jacques	Physique
M.	TRIDOT Gabriel	Chimie
M.	VIDAL Pierre	I.E.E.A.
M.	VIVIER Emile	Biologie
M.	WERTHEIMER Raymond	Physique
M.	ZEYTOUNIAN Radyadour	Mathématiques

PROFESSEURS 2ème CLASSE

M.	AL FAKIR Sabah	Mathématiques
M.	ANTOINE Philippe	Mathématiques
M.	BART André	Biologie
Mme	BATTIAU Yvonne	Géographie
M.	BEGUIN Paul	Mathématiques
M.	BELLET Jean	Physique
M.	BKOUCHE Rudolphe	Mathématiques
M.	BOBE Bernard	S.E.S.
M.	BODART Marcel	Biologie
M.	BOILLY Bénoni	Biologie
M.	BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M.	BOSQ Denis	Mathématiques
M.	BREZINSKI Claude	I.E.E.A.
M.	BRUYELLE Pierre (Chargé d'enseignement)	Géographie
M.	CAPURON Alfred	Biologie
M.	CARREZ Christian	I.E.E.A.
M.	CHAMLEY Hervé	E.U.D.I.L.

M. CHAPOTON Alain	C.U.E.E.P.
M. COQUERY Jean-Marie	Biologie
Mme CORSIN Paule	Sciences de la Terre
M. CORTOIS Jean	Physique
M. COUTURIER Daniel	Chimie
Mle DACHARRY Monique	Géographie
M. DEBRABANT Pierre	E.U.D.I.L.
M. DEGAUQUE Pierre	I.E.E.A.
M. DELORME Pierre	Biologie
M. DEMUNTER Paul	C.U.E.E.P.
M. DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie
M. DHAINAUT André	Biologie
M. DORMARD Serge	S.E.S.
M. DOUKHAN Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M. DUBOIS Henri	Physique
M. DUBRULLE Alain	Physique
M. DUEE Gérard	Sciences de la Terre
M. DYMENT Arthur	Mathématiques
M. FLAMME Jean-Marie	E.U.D.I.L.
M. FONTAINE Hubert	Physique
M. GERVAIS Michel	S.E.S.
M. GOBLOT Rémi	Mathématiques
M. GOSSELIN Gabriel	S.E.S.
M. GOUDMAND Pierre	Chimie
M. GREVET Patrice	S.E.S.
M. GUILBAULT Pierre	Biologie
M. HANGAN Théodore	Mathématiques
M. HERMAN Maurice	Physique
M. JACOB Gérard	I.E.E.A.
M. JACOB Pierre	Mathématiques
M. JOURNEL Gérard	E.U.D.I.L.
M. KREMBEL Jean	Biologie
M. LAURENT François	I.E.E.A.
Mle LEGRAND Denise	Mathématiques
Mle LEGRAND Solange	Mathématiques (Calais)
Mme LEHMANN Josiane	Mathématiques

M.	LEMAIRE Jean	Physique
M.	LENTACKER Firmin	G.A.S.
M.	LEVASSEUR Michel	I.P.A.
M.	LHENAFF René	G.A.S.
M.	LOCQUENEUX Robert	Physique
M.	LOSFELD Joseph	I.E.E.A.
M.	LOUAGE Francis	E.U.D.I.L.
M.	MACKE Bruno	Physique
M.	MAIZIERES Christian	I.E.E.A.
Mle	MARQUET Simone	Mathématiques
M.	MESSELYN Jean	Physique
M.	MIGEON Michel	E.U.D.I.L.
M.	MIGNOT Fulbert	Mathématiques
M.	MONTEL Marc	Physique
Mme	NGUYEN VAN CHI Régine	G.A.S.
M.	PARSY Fernand	Mathématiques
Mle	PAUPARDIN Colette	Biologie
M.	PERROT Pierre	Chimie
M.	PERTUZON Emile	Biologie
M.	PONSOLLE Louis	Chimie
M.	PORCHET Maurice	Biologie
M.	POVY Lucien	E.U.D.I.L.
M.	RACZY Ladislas	I.E.E.A.
M.	RICHARD Alain	Biologie
M.	RIETSCH François	E.U.D.I.L.
M.	ROGALSKI Marc	M.P.A.
M.	ROUSSEAU Jean-Paul	Biologie
M.	ROY Jean-Claude	Biologie
M.	SALAMA Pierre	S.E.S.
Mme	SCHWARZBACH Yvette (CCP)	M.P.A.
M.	SCHAMPS Joël	Physique
M.	SIMON Michel	S.E.S.
M.	SLIWA Henri	Chimie
M.	SOMME Jean	G.A.S.
Mle	SPIK Geneviève	Biologie
M.	STERBOUL François	E.U.D.I.L.
M.	TAILLIEZ Roger	Institut Agricole

M.	TOULOTTE Jean-Marc	I.E.E.A.
M.	VANDORPE Bernard	E.U.D.I.L.
M.	WALLART Francis	Chimie
M.	WATERLOT Michel	Sciences de la Terre
Mme	ZINN JUSTIN Nicole	M.P.A.

CHARGES DE COURS

M.	TOP Gérard	S.E.S.
M.	ADAM Michel	S.E.S.

CHARGES DE CONFERENCES

M.	DUVEAU Jacques	S.E.S.
M.	HOFLACK Jacques	I.P..A
M.	LATOUCHE Serge	S.E.S.
M.	MALAUSSENA DE PERNO Jean-Louis	S.E.S.
M.	OPIGEZ Philippe	S.E.S.

Je remercie vivement Monsieur le Professeur POUZET de l'honneur qu'il me fait de présider le jury de cette thèse.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude envers Monsieur le Professeur DENEL pour l'intérêt constant dont il a fait preuve à l'égard de ce travail, et surtout pour l'aide précieuse et les encouragements qu'il a pu m'apporter depuis le début.

Monsieur LEMARECHAL m'a fait l'amitié d'examiner cette thèse dans ses moindres détails : je lui en suis profondément reconnaissant.

Que Madame le Professeur CHATELIN-LABORDE, Monsieur le Professeur COEURE et Monsieur ROUSSELET, qui ont accepté de porter leur attention sur mon travail et de faire partie du jury, trouvent ici exprimés mes plus sincères remerciements.

Un grand merci aussi à Madame CARON, pour avoir aussi rapidement mené à bien la lourde tâche de taper cette thèse , à Madame DEBOCK, pour l'avoir imprimée et reliée malgré l'affluence du mois de juin, à tous ceux enfin dont les marques d'amitié ont jalonné ces deux années.

Table des Matières

* * *

INTRODUCTION

Le but de cette thèse est d'essayer de compléter, par quelques propriétés, l'éventail des réponses existantes à la question suivante : dans quelle mesure est-il possible de parler de continuité, et éventuellement de différentiabilité à propos des éléments propres, et plus particulièrement des vecteurs propres, d'un opérateur paramétré ?

Cet éventail de réponses, qui sera décrit au chapitre 1, est pratiquement limité au cas d'un opérateur dépendant d'*une* variable (réelle ou complexe), supposé diagonalisable et même presque toujours auto-adjoint. Nous nous restreindrons ici à une matrice réelle symétrique, de dimension *finie* N, fonction d'une variable *réelle* x. Si l'analyticité de la matrice permet d'obtenir des résultats très complets à la question posée, l'absence de celle-ci empêche l'existence de tels résultats dans un cadre général. Il s'agira pour nous de remplacer l'analyticité par d'autres conditions (d'un genre tout à fait différent) sur la matrice A et ses dérivées successives jusqu'à un certain ordre, en des points où celle-ci a des valeurs propres multiples, afin d'obtenir l'existence de fonctions continues représentant ses éléments propres au voisinage de tels points.

Après avoir terminé le premier chapitre par un théorème d'existence dans le cas de valeurs propres simples, nous introduirons, dans un second chapitre, une première condition simple, assurant l'existence de telles fonctions continues, dans le cas restreint d'une valeur propre double en un point x_o.

Nous construirons alors, au chapitre 3, une suite récurrente de conditions, impliquant une différentiabilité à des ordres de plus en plus élevés de la matrice, permettant d'obtenir le résultat escompté, dans le même cas d'une valeur propre double isolée.

Nous verrons que ces différentes conditions *suffisantes* induisent une méthode simple pour sélectionner les vecteurs propres, associés à une valeur propre double en un point x_o, qui seront les valeurs en x_o des fonctions les représentant au voisinage de ce point.

Dans un quatrième chapitre, des conditions supplémentaires, portant toujours sur la différentiabilité de la matrice, seront apportées, pour que les fonctions continues exhibées aux chapitres 2 et 3 soient différentiables, de classe C^K, pour K quelconque donné, ou même C^∞.

Enfin, le cinquième et dernier chapitre aura pour but d'étendre les résultats obtenus au cas plus général de valeurs propres de multiplicité quelconque.

Nous conclurons alors par quelques commentaires sur les questions traitées et les problèmes rencontrés.

NOTATIONS

N	: Dimension de l'espace ($\mathbb{R}^N$).
$<, >$	: Produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^N$.
$\| \|$	: Norme associée à ce produit scalaire (ou valeur absolue dans $\mathbb{R}$).
P_n	: L'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.
x_o	: Point de $\mathbb{R}^N$ où l'on fait l'étude.
$A(x)$	: Matrice réelle symétrique, ayant des valeurs propres multiples en x_o.
λ_o	: Valeur propre multiple de $A(x_o)$, à laquelle on s'intéresse.
m	: Multiplicité de λ_o.
M_o	: Espace propre associé à λ_o.
$\lambda_i(x)$, $V_i(x)$	: Fonctions représentant les valeurs propres de $A(x)$ et les vecteurs propres normés associés, pour $i \in P_N$.
I_N	: Matrice unité de $\mathbb{R}^N$.
$B_i(x)$	: La matrice $[A(x) - \lambda_i(x)\, I_N]$ notée aussi $[A(x) - \lambda_i(x)]$.
f', $f^{(p)}$	: Pour une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^N$, ou de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, respectivement les dérivées première et p-ième de f.
$DTT_p(f)(x)$	: Pour une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^N$ ou $\mathbb{R}$, le développement de "type Taylor", défini au chapitre 4, de f au point x_o
$\mathcal{V}(x)$	: L'ensemble des voisinages d'un point x
<u>Convention</u>	: Dans l'écriture $\sum_{k=n_1}^{n_2} [\ ]$, on conviendra de la nullité de cette expression si $n_1 > n_2$.

REFERENCES

[1] RAYLEIGH L.,"*The theory of sound*", Vol. 1, London (1927).

[2] SCHRÖDINGER E.,"*Collected papers on wave mechanics*", London and Glasgow (1928).

[3] COURANT R. et HILBERT D.,"*Methods of mathematical physics*", New-York, Interscience (1953).

[4] RELLICH F.,"*Perturbation theory of eigenvalue problems*", Lecture notes, New-York (1953).

[5] FRIEDRICHS K.O.,"*Perturbation of spectra in Hilbert spaces*", Providence : An. Math. Soc. (1965).

[6] KATO T.,"*Perturbation theory for linear operators*", Springer-Verlag, New-York (1966).

[7] KURODA S.T., "*Finite-dimensional perturbation and a representation of scattering operator*", Pacific J. Math. 13, 1305-1318 (1963).

[8] MASLOV V.P.,"*The use of perturbation theory for finding the spectrum of ordinary differential operators involving a small parameter in the term with the highest derivative*", Dokl. Akad. Nauk SSSR 111, 977-980 (1956).

[9] LION J.L., "*Remarks on the theory of optimal control of distributed systems*", Communication at the conference on control theory of systems governed by partial differential equations. (Ed. Aziz, Wingate, Balas), Academic Press, New-York (1977).

[10] HAUG E.J. et ROUSSELET B., "*Design sensitivity analysis in structural mechanics II : eigenvalue variations*", J. of structural mechanics, technical report n° 52 (1981).

[11] LIDSKII V.B.,"*The proper value of the sum and product of symetric matrices*", Dokl. Akad. Nauk SSSR 75, 769-772 (1950).

[12] CHATELIN-LABORDE F., "*Perturbation d'une matrice hermitienne ou normale*", Numerische mathematik 17, 318-337 (1971).

[13] THOMPSON R.C. et FREEDE L.J.,"*On the eigenvalues of sums of hermitian matrices*", Linear Algebra and its applications 4, 369-376 (1971).

[14] DUC-JACQUET M.,"*Résolution de quelques problèmes d'analyse numérique linéaire à l'aide de perturbations par des matrices antiscalaires*".

[15] DAVIS C.,"*The rotation of eigenvectors by a perturbation*", Journal of mathematical analysis and application 6, 159-173 (1963).

[16] KALABA R., SPINGARN K., TESFATSION L., "*Variational equations for the eigenvalues and eigenvectors of non-symetric matrices*", Journal of optimization theory and applications, Vol 33, n° 1 (1981).

[17] ANDREW A.L.,"*Iterative computation of derivatives of eigenvalues and eigenvectors*", J. Inst. Maths Applics 24, 209-218 (1979).

[18] SOULIE E. et GOODMAN G.,"*Niveaux d'énergie électronique et susceptibilité magnétique des ions de configuration f^2 en champ cristallin cubique*", Theoretical chimica acta 41, 17-36 (1976).

[19] DENEL J. et SIX B.,"*Une condition suffisante de dérivabilité des éléments propres d'une matrice réelle symétrique, fonction non analytique d'une variable réelle*", Publication ANO 82, Université de Lille 1 (1982).

[20] SIX B.,"*Rapport préliminaire à l'étude d'un problème d'optimisation lié à la différentiabilité des éléments propres d'une matrice*", Université de Lille I (1982).

CHAPITRE 1

QUELQUES REMARQUES SUR LES RESULTATS EXISTANTS

1 - INTRODUCTION

Lorsqu'on examine la littérature mathématique au sujet des éléments propres d'un opérateur paramétré, on s'aperçoit du fait que la multitude de résultats, concernant les valeurs propres, que l'on peut y trouver, n'a d'égal que la rareté de ceux qui existent à propos des vecteurs propres. Bien évidemment, l'intérêt (surtout pratique) de tels résultats y est pour beaucoup : il suffit de voir le nombre de problèmes physiques, parmi les plus fréquents, dont la résolution s'appuie sur des théories comme les équations aux dérivées partielles, les équations intégrales et plus généralement les problèmes variationnels pour se persuader de la nécessité de progrès dans l'analyse des opérateurs, et plus particulièrement dans la théorie spectrale de ceux-ci (Rayleigh [1], Schrödinger [2], Courant-Hilbert [3]).

Les problèmes concrets où interviennent les vecteurs propres, et dans lesquels la continuité, voire la différentiabilité, de ceux-ci est à envisager sont beaucoup moins fréquents, mais existent néanmoins. C'est d'ailleurs lors du traitement d'un problème issu du département de physico-chimie du C.E.A. que se sont posées les premières questions relatives à ce sujet : il s'agissait de minimiser, par une méthode de gradient, une fonction calculée à partir des éléments propres d'une matrice paramétrée (Soulié et Goodman [18]). Il fallait donc mettre au point un logiciel permettant de calculer les dérivées partielles de cette fonction. Des résultats numériques satisfaisants quant au gradient ont été obtenus dans des cas simples (ces résultats sont consignés dans [20]). Cependant, bien des problèmes étaient restés dans l'ombre, en raison surtout de la rareté des outils mathématiques utilisables, en dehors de quelques puissants théorèmes soumis à des hypothèses assez limitatives, comme nous le verrons par la suite.

2 - UN APERÇU DES RÉSULTATS EXISTANTS ET DE LEURS LIMITES

Ce sont les physiciens du début du siècle qui, les premiers, se posèrent des questions sur la régularité des éléments propres d'un opérateur : il est très fréquent, en physique, d'essayer de ramener l'étude d'un système donné à celle d'un autre système, plus simple, que l'on sait résoudre, et dont le premier ne diffère que très peu. Or, dans le cadre des phénomènes vibratoires par exemple, cette méthode revient à chercher des valeurs approchées des éléments propres d'un opérateur linéaire légèrement différent d'un opérateur plus simple, pour lequel ceux-ci sont parfaitement connus (Courant-Hilbert [3]).

Ce n'est donc pas un hasard si ces mêmes physiciens se trouvent à l'origine de la vaste théorie des perturbations, dont le développement ultérieur donnera la plupart des outils nécessaires à la résolution de ce genre de problème. Ce sont en effet des physiciens, comme Rayleigh, puis Schrödinger en mécanique quantique, qui donneront les premières résolutions approchées de systèmes légèrement "perturbés", à partir de celles des systèmes "non perturbés" correspondants (Rayleigh [1], Schrödinger [2]).

Cependant, ces méthodes utilisaient en particulier des développements en séries des éléments propres, dont ni l'existence, ni la convergence n'étaient justifiées, et il faut attendre jusqu'en 1940 environ pour qu'enfin la preuve en soit donnée, par Rellich, sous la forme suivante (Rellich [4]) :

Soit $T(x)$ un opérateur borné, auto-adjoint, dans un espace de Hibert, développable en série convergente de la variable *réelle* x

$$T(x) = T + xT^{(1)} + x^2T^{(2)} + \dots$$

Si l'opérateur non perturbé $T = T(0)$ a une valeur propre λ isolée, avec une multiplicité finie m, alors, pour $|x|$ assez petit, $T(x)$ a exactement m valeurs propres $\lambda_j(x)$, $j = 1, \dots, m$ (comptées avec leur multiplicité), dans un voisinage de λ. De plus, ces valeurs propres peuvent être développées en séries convergentes :

$$\lambda_j(x) = \lambda + x\lambda_j^{(1)} + x^2 \lambda_j^{(2)} + \dots \quad , j = 1, \dots, m$$

Les vecteurs propres associés $V_j(x)$ de $T(x)$ peuvent être choisis de manière à former des séries convergentes :

$$V_j(x) = V_j + xV_j^{(1)} + x^2V_j^{(2)} + \dots , \qquad j = 1, \dots, m$$

satisfaisant les conditions d'orthonormalité :

$$<V_j(x), V_k(x)> = \delta_{jk}$$

et où les V_j, $j = 1, \dots, m$, forment une famille orthonormale de vecteurs propres de T, associés à la valeur propre λ.

Ce remarquable résultat de Rellich a donné lieu par la suite à de nombreuses généralisations : perturbations du spectre continu (Friedrichs [5]) où l'on considère que les valeurs propres, ou plutôt les valeurs spectrales, peuvent ne plus être isolées, perturbations des valeurs propres isolées pour un opérateur $T(x)$ dépendant d'une variable x *complexe* (Kato [6]), chose naturelle lorsqu'on suppose l'opérateur T analytique, etc ; la liste de ces élargissements est longue et a engendré une très vaste théorie, fondée sur l'analyse complexe des opérateurs (Kuroda [7], Maslov [8]), synthétisée par Kato dans un ouvrage extrêmement complet et détaillé sur la question (Kato [6]).

Cependant, tous ces résultats importants restent subordonnés à une hypothèse très forte sur l'opérateur : son analyticité. Or le problème qui nous concerne ici est justement de supprimer cette hypothèse. De manière évidente, on peut dire qu'alors les résultats sont rares, et que, même lorsqu'ils existent, ils n'ont jamais la portée de ceux que l'on peut établir dans le cas analytique.

Dans le cas d'une valeur propre simple, le théorème des fonctions implicites nous fournit la réponse (voir par exemple Lions [9]) : si $A(x)$ est un opérateur linéaire auto-adjoint de dimension *finie*, fonction de classe C^K d'une variable x de $\mathbb{R}^n$, si $\bar{\lambda}$ est une valeur propre *simple* de la matrice $A(\bar{x})$ et si $\bar{V}$ est un vecteur propre associé, de norme 1, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de $\bar{x}$ dans lequel sont définies des fonctions $\lambda(x)$ et $V(x)$, de classe C^K dans ce voisinage, et vérifiant, pour tout x de $\mathcal{U}$:

$$\begin{cases} A(x)\ V(x) = \lambda(x)\ V(x) \\ |V(x)| = 1 \\ \lambda(\bar{x}) = \bar{\lambda} \text{ et } V(\bar{x}) = \bar{V} \end{cases}$$

De plus, les différentiations successives du système ci-dessus nous permettent de calculer les dérivées correspondantes des fonctions λ et V. (Nous donnerons au paragraphe suivant une variante du précédent théorème, ainsi que les formules de dérivation correspondantes).

En revanche, dans le cas de valeurs propres multiples, les choses ne se passent pas aussi bien, lorsque la matrice n'est plus analytique : si l'on peut toujours affirmer que les valeurs propres peuvent être représentées par des fonctions continues si l'opérateur T est continu et dépend d'une seule variable (et sont même différentiables si T l'est [6]), il est impossible en général d'obtenir un résultat similaire pour les vecteurs propres, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple (1.1)

Soit la matrice A(t) définie, pour t réel, par :

$$A(t) = e^{-1/t^2} \begin{pmatrix} \cos 2/t & \sin 2/t \\ \sin 2/t & -\cos 2/t \end{pmatrix} \text{ si } t \neq 0 \text{ et } A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie aisément que A est de classe C^∞ ainsi que ses valeurs propres que l'on peut mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \lambda_1(t) = e^{-1/t^2} \\ \lambda_2(t) = -e^{-1/t^2} \end{cases} \text{ si } t \neq 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \lambda_1(0) = 0 \\ \lambda_2(0) = 0 \end{cases}$$

pour tout t non nul, on peut écrire les vecteurs propres de A comme suit :

$$V_1(t) = \begin{cases} \cos 1/t \\ \sin 1/t \end{cases} \text{ (associé à } \lambda_1(t)) \text{ et } V_2(t) = \begin{cases} \sin 1/t \\ -\cos 1/t \end{cases} \text{ (associé à } \lambda_2(t))$$

V_1 et V_2 forment ainsi une base orthonormée de vecteurs propres de classe C^∞ en dehors de $x_o = 0$. Cependant, V_1 et V_2 n'ont pas de limite lorsque x tend vers 0.

Un autre exemple va nous montrer que la situation est encore bien plus compliquée si l'opérateur dépend de plusieurs variables, même si celui-ci est analytique :

Exemple (1.2)

Soit la matrice $A(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & -x_1 \end{pmatrix}$

ses valeurs propres $\lambda_1(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$ et $\lambda_2(x_1, x_2) = -\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ ne sont pas différentiables au sens de Fréchet au point (0, 0) ; on montre très facilement que les vecteurs propres ne sont pas continus en (0, 0) car la base de vecteurs propres à choisir en ce point dépend de la direction suivie. En effet, dans la direction (1, k) pour t > 0, le vecteur propre normé associé à $\lambda_1(0 + t, 0 + tk) = t\sqrt{1+k^2}$ est, pour $k \neq 0$:

$$V_1(t, tk) = \begin{cases} \dfrac{k}{\sqrt{2(1+k^2-\sqrt{1+k^2})}} \\ \dfrac{\sqrt{1+k^2}-1}{\sqrt{2(1+k^2-\sqrt{1+k^2})}} \end{cases}$$

Ce vecteur propre, constant quand t varie, est différent selon la direction choisie. Il ne peut y avoir donc en (0, 0) qu'une continuité directionnelle au mieux.

Dans ce dernier cas, on montre en fait que si A(u) est une matrice réelle symétrique, d'ordre N×N, fonction de classe C^1 de la variable u de $\mathbb{R}^n$, ses valeurs propres peuvent être représentées par des fonctions continues, admettant, en un point u_o où $A(u_o)$ a des valeurs propres multiples, des dérivées *directionnelles* seulement (différentiabilité au sens de Gâteaux). Dès lors, les résultats que nous démontrerons pour une variable réelle seront vrais ici "directionnellement" (Haug et Rousselet [10]).

En bref, si on abandonne l'analyticité de la matrice et si on autorise celle-ci à avoir des valeurs propres multiples en un point, on ne peut plus espérer, en général, la continuité des vecteurs propres. Presque tous les travaux effectués dans ces conditions s'intéressent exclusivement au comportement des valeurs propres : il s'agit en général de "préciser" la notion de continuité de celles-ci en "localisant" le plus finement possible les valeurs propres d'une matrice perturbée ; on trouve des résultats du type suivant (un "classique" de la théorie des perturbations, énoncé, entre autres, par Kato [6]) :

Soit A une matrice hermitienne, λ une valeur propre de A, Q un vecteur propre normé associé. Soit $A' = A+H$ où H est une autre matrice hermitienne (la perturbation) ; si toute autre valeur propre μ de A est telle que $|\lambda-\mu| \geq d$, si λ est de multiplicité m, et si $2||H|| < d$, il existe exactement m valeurs propres de A', distinctes ou non, dans l'intervalle $[\lambda-||H||, \lambda+||H||]$ ($||\ \ ||$ représentant une norme de matrices donnée).

La plupart des auteurs obtiennent des résultats, soit plus fins, soit du même genre dans un cas plus délicat. (Lidskii [11], Chatelin-Laborde [12], Thompson et Freede [13], Duc-Jacquet [14]). On trouve aussi des résultats similaires en ce qui concerne les vecteurs propres, ou plutôt la variation *globale* d'un sous-espace propre lors d'une perturbation (Davis [15]). Et si certains parlent de dérivation des vecteurs propres, c'est toujours pour donner une méthode numérique efficace pour le calcul des dérivées, *quand elles existent ;* la plupart du temps d'ailleurs, on suppose toutes les valeurs propres simples.(Kalaba, Spingarn et Tesfatsion [16], Andrew [17]).

Quoiqu'il en soit, l'analyticité ou les valeurs propres distinctes ne représentent pas *tous* les cas où les valeurs propres et surtout les vecteurs propres peuvent être rendus continus (et même plus), comme nous le verrons au paragraphe suivant. Nous allons ici essayer d'élargir les conditions dans lesquelles cela est possible ...

3 - MOTIVATION ET BUT DU TRAVAIL

Un petit exemple pour fixer les idées :

Exemple (1.3):

Considérons la matrice $A(x) = \begin{pmatrix} x(|x|+1) & x|x| \\ x|x| & x(|x|-1) \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$

$A(x)$ est de classe C^1 seulement en $x_o = 0$.

Ses valeurs propres peuvent être mises sous la forme :

$\lambda_\varepsilon(x) = x(|x|+\varepsilon\sqrt{x^2+1})$, avec $\varepsilon = \pm 1$ (valeur propre double en 0), ce qui en fait des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Un vecteur propre normé associé à $\lambda_\varepsilon(x)$ est, pour $x \neq 0$:

$$V_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{2x^2(x^2+1-\varepsilon\sqrt{x^2+1})}} \\[2ex] \dfrac{\varepsilon\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{2(x^2+1-\varepsilon\sqrt{x^2+1})}} \end{cases}$$

que l'on peut aisément prolonger en 0 par $V_\varepsilon(0) = \begin{cases} \frac{1+\varepsilon}{2} \\ \frac{\varepsilon-1}{2} \end{cases}$.

(c'est à dire $V_1(0) = \begin{cases}1\\0\end{cases}$ et $V_{-1}(0) = \begin{cases}0\\-1\end{cases}$)

On a donc une base orthonormée $(V_1(x), V_{-1}(x))$ *continue* en 0 où la matrice a une valeur propre double.

Cet exemple nous montre qu'avec une matrice A de classe C^1 (et donc beaucoup moins régulière que celle de l'exemple (1.1)), il est possible de représenter les vecteurs propres normés par des fonctions continues. La question qui se pose alors est de savoir ce qui différencie ces deux exemples.

Nous aurons donc pour but de mettre en évidence, dans ce travail, des conditions sur la matrice (que vérifiera l'exemple (1.3) et pas l'exemple (1.1)), permettant d'exhiber des vecteurs propres continus. Comme nous le verrons, ces conditions permettront de plus de sélectionner, en un point où la matrice a des valeurs propres multiples, la base orthonormée adéquate à choisir en ce point, ceci valant tout autant pour le cas analytique, dans lequel l'existence de fonctions analytiques est assurée, mais la détermination des vecteurs à choisir est assez difficile.

4 - THÉORÈME PRÉLIMINAIRE ET FORMULES DE DÉRIVATION

Ce premier théorème est en fait une généralisation de celui obtenu à l'aide des fonctions implicites. Il sera simplement énoncé, sa démonstration n'apportant rien au présent travail (elle est néanmoins faite dans [19]).

Théorème 1 :

Soit $A(x)$ *une matrice carrée* $N\times N$*, fonction de classe* C^K *d'une variable réelle* x*, et réelle symétrique pour tout* x*. Si, sur l'intervalle* $]a, b[$*, cette matrice n'a que des valeurs propres simples, il existe des fonctions* $\lambda_i(x)$ *et* $V_i(x)$*, de classe* C^K *sur* $]a, b[$*, telles que, pour* i *dans* P_N :

$$(1.4.1)\quad \begin{cases} A(x)\ V_i(x) \equiv \lambda_i(x)\ V_i(x) \\ \\ \langle V_i(x),\ V_j(x)\rangle \equiv \delta_{ij} \end{cases}$$

Pour obtenir les dérivées successives des différentes fonctions considérées, il suffit de différencier à l'ordre voulu, soit p, $p \leq K$, les équations du système (1.4.1). On a donc, en posant $B_i(x) = A(x) - \lambda_i(x)$, pour tout i de P_N :

$$(1.4.2)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=o}^{p} C_p^k\ B_i^{(k)}(x)\ V_i^{(p-k)}(x) \equiv 0 \\ \displaystyle\sum_{k=o}^{p} C_p^k\ \langle V_i^{(k)}(x),\ V_i^{(p-k)}(x)\rangle \equiv 0 \end{cases}$$

le produit scalaire avec $V_i(x)$ de la première équation de (1.4.2) nous donne :

$$\sum_{k=1}^{p-1} C_p^k \langle B_i^{(k)}(x) V_i^{(p-k)}(x), V_i(x)\rangle + \langle (A^{(p)}(x) - \lambda_i^{(p)}(x)) V_i(x), V_i(x)\rangle + \langle B_i(x) V_i^{(p)}(x), V_i(x)\rangle = 0$$

d'où, puisque $V_i(x)$ est normé et que $B_i(x)$ est symétrique :

$$(1.4.3)\quad \boxed{\lambda_i^{(p)}(x) = \langle A^{(p)}(x) V_i(x), V_i(x)\rangle + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k \langle B_i^{(k)}(x) V_i^{(p-k)}(x), V_i(x)\rangle}$$

(moyennant la convention faite dans les notations)

Le produit scalaire de la première équation de (1.4.2) avec $V_j(x)$, pour $j \neq i$, nous donne :

$$(1.4.4)\quad \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k <B_i^{(k)}(x)V_i^{(p-k)}(x),V_j(x)>+<(A^{(p)}(x)-\lambda_i^{(p)}(x))V_i(x),V_j(x)>+<(A(x)-\lambda_i(x))V_i^{(p)}(x), V_j(x)> = 0$$

quant à la deuxième équation de (1.4.2) elle peut s'écrire :

$$(1.4.5)\quad <V_i^{(p)}(x),\ V_i(x)> = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-1} C_p^k <V_i^{(k)}(x),\ V_i^{(p-k)}(x)>$$

Alors, puisque les $V_i(x)$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^N$, on a, avec (1.4.4) et (1.4.5) :

$$(1.4.6)\quad \boxed{\begin{array}{l} V_i^{(p)}(x) = \displaystyle\sum_{h=1}^{N} \alpha_{i,h}^p\ V_h(x) \text{ avec} \\ \text{si } h \neq i, \alpha_{i,h}^p = \dfrac{<A^{(p)}(x)V_i(x),V_h(x)>+\sum_{k=1}^{p-1} C_p^k <B_i^{(k)}(x)V_i^{(p-k)}(x),V_h(x)>}{\lambda_i(x)-\lambda_h(x)} \\ \qquad\qquad \alpha_{ii}^p = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} C_p^k <V_i^{(k)}(x),\ V_i^{(p-k)}(x)> \end{array}}$$

CHAPITRE 2

UNE PREMIERE CONDITION ASSURANT L'EXISTENCE DE FONCTIONS CONTINUES REPRESENTANT LES ELEMENTS PROPRES

1 - Introduction

Nous introduisons dans ce chapitre une première condition, qui n'est en fait qu'un cas particulier simple de celles qui feront l'objet du chapitre 3. Il était néanmoins souhaitable de la séparer du cas général pour au moins deux raisons : d'une part, la simplicité de sa formulation nous permettra de décrire les choses de manière plus tangible que si elle était restée incluse dans le cadre général ; d'autre part, cela reflètera, d'un point de vue chronologique, la façon dont tout ce travail s'est agencé et dégagera ce qui, dans cette première approche, a conduit à "intuiter" les résultats plus complets qui forment les chapitres suivants.

Néanmoins, seules les démonstrations utiles à la compréhension de la technique utilisée seront faites, ceci par souci de clarté de l'exposé. Les autres, souvent très lourdes, seront des cas particuliers des propositions et théorèmes établis dans les chapitres 3 et 4. On peut les trouver aussi dans une publication consacrée au seul cas de cette première condition [19].

2 - POSITION DU PROBLÈME - NOTATIONS

Dans tout ce chapitre, nous ferons les hypothèses suivantes : $A(x)$ est une matrice carrée d'ordre N, *réelle symétrique*, dépendant d'un paramètre réel x ; les coefficients de $A(x)$ sont des fonctions de classe C^K, $K \geq 1$, ou C^∞ de la variable x ; la matrice A possède, au point x_o, une valeur propre *double* λ_o, et des valeurs propres toutes simples en dehors de x_o. M_o est l'espace propre associé à λ_o et $\mathcal{V}(x_o)$ l'ensemble des voisinages de x_o. Nous noterons λ_h, $h = 3, \ldots, N$, les valeurs propres de $A(x_o)$ autres que λ_o et nous les supposerons toutes simples. Nous avons vu dans le chapitre 1 l'existence de fonctions $\lambda_h(x)$ et $V_h(x)$, pour $h \geq 3$, de même classe que $A(x)$ dans un voisinage de x_o, puisque dans ce voisinage, les valeurs propres en question restent toutes simples. Nous allons ici prouver l'existence de fonctions $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$, $V_1(x)$, $V_2(x)$, sous certaines conditions, continues (et plus) dans un voisinage U de x_o et telles que, pour tout x de U :

$$(2.2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (A(x)-\lambda_1(x))V_1(x) \equiv (A(x)-\lambda_2(x))V_2(x) \equiv 0 \\ |V_1(x)| \equiv |V_2(x)| \equiv 1 \\ \langle V_1(x), V_2(x)\rangle \equiv 0 \end{array} \right. \\ \text{et } \lambda_1(x_o) = \lambda_2(x_o) = \lambda_o \end{array} \right.$$

3 - Une condition suffisante d'existence

a) Analyse

Si, dans un premier temps, on suppose l'existence de fonctions de classe C^1 dans U représentant toutes les valeurs propres et tous les vecteurs propres normés associés de la matrice A(x), alors on a, si on les note $\lambda_i(x)$ et $V_i(x)$ pour $i = 1$ à N :

(2.3.1) $\quad (A(x) - \lambda_i(x))\, V_i(x) \equiv 0 \qquad \forall\, x \in U,\ \forall\, i \in P_N$

Toutes ces fonctions étant de classe C^1, ainsi que la matrice A, on peut différentier l'équation (2.3.1) et l'on a :

(2.3.2) $\quad -(A'(x) - \lambda'_i(x))\, V_i(x) \equiv (A(x) - \lambda_i(x))\, V'_i(x),\ \forall\, x \in U$

Après produit scalaire de (2.3.2) par $V_j(x)$, on obtient, en x_o, puisque $<V_i(x), V_j(x)> \equiv 0$:

(2.3.3) $\quad (\lambda_i(x_o)-\lambda_j(x_o))<V'_i(x_o),V_j(x_o)>=<A'(x_o)V_i(x_o),V_j(x_o)>$

Si maintenant $\lambda_1(x_o) = \lambda_2(x_o) = \lambda_o$, cette relation s'écrit, pour $i = 1$, $j = 2$:

(2.3.4) $\quad \boxed{<A'(x_o)\, V_1(x_o),\ V_2(x_o)> = 0}$

b) La condition (H_1)

Une idée naturelle est alors d'imposer, au point x_o, l'unicité d'une base orthonormée de l'expace M_o, notée (v_1, v_2), vérifiant :

$$<A'(x_o)\, v_1,\ v_2> = 0$$

ceci afin de pouvoir sélectionner en x_o les "bons" vecteurs propres, qui seront les valeurs en x_o des fonctions continues les représentant dans U (si elles existent).

La condition annoncée, appelée (H_1), est donc la suivante :

(H_1)
- La matrice A est de classe C^1 au moins dans U
- en x_o, il existe une unique base orthonormée (v_1, v_2) de M_o telle que

$$<A'(x_o)\, v_1,\ v_2> = 0$$

Remarque importante :

L'unicité de la base (v_1, v_2) signifie bien sûr unicité à l'ordre et à l'orientation près des vecteurs v_1, v_2 (car des bases comme (v_2, v_1) ou $(-v_1, -v_2)$ vérifient la même condition). Cette remarque concerne toute la suite du travail.

c) Vérification de (H_1)

Cette vérification est assez simple : soit (u_1, u_2) une base orthonormée quelconque de M_o fixée. Toute autre base orthonormée de M_o peut s'écrire (v, w) avec

$$\begin{cases} v = au_1 + bu_2 \\ w = bu_1 - au_2 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

alors on a, puisque A est symétrique :

(2.3.5) $\langle A'(x_o)v,w\rangle=ab(\langle A'(x_o)u_1,u_1\rangle-\langle A'(x_o)u_2,u_2\rangle)+(b^2-a^2)\langle A'(x_o)u_1,u_2\rangle$

De deux choses l'une :

- soit $\langle A'(x_o)u_1, u_2\rangle = 0$; alors si $\langle A'(x_o)u_1, u_1\rangle = \langle A'(x_o)\, u_2, u_2\rangle$, $\langle A'(x_o)\, v, w\rangle = 0$ pour toute base orthonormée (v, w) de M_o et (H_1) n'est pas vérifiée. Si en revanche $\langle A'(x_o)\, u_1, u_1\rangle \neq \langle A'(x_o)\, u_2, u_2\rangle$, $\langle A'(x_o)\, v, w\rangle = 0$ si et seulement si $ab = 0$. Il y a alors "égalité" des bases (u_1, u_2) et (v, w) ("égalité" au même sens que "unicité"). (H_1) est vérifiée ; la base correspondante est (u_1, u_2).

- soit $\langle A'(x_o)\, u_1, u_2\rangle \neq 0$; posons $K_1 = \langle A'(x_o)\, u_1, u_1\rangle - \langle A'(x_o)\, u_2, u_2\rangle$ et $K_2 = \langle A'(x_o)\, u_1, u_2\rangle$. On doit alors résoudre :

$$(2.3.6) \qquad \begin{cases} K_1\, ab = K_2(a^2 - b^2) \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

en posant $a = \cos\phi$ et $b = \sin\phi$, on a à résoudre

$$K_1 \sin\phi \cos\phi = K_2 (\cos^2\phi - \sin^2\phi)$$

ou encore : $K_1 \sin 2\phi = 2K_2 \cos 2\phi$

$$\mathrm{tg}\ 2\phi = \frac{2K_2}{K_1}$$

d'où $\phi = \frac{1}{2} \mathrm{Arctg} \frac{2K_2}{K_1} + \frac{k\pi}{2}$

(si $K_1 = 0$, comme $K_2 \neq 0$, $\phi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$)

ce qui nous donne 4 solutions pour (a, b) correspondant aux 4 bases que l'on peut former avec v, w, -v et -w. La condition (H_1) est alors vérifiée.

Finalement, (H_1) est vérifiée *si et seulement si,* pour toute base orthonormée (u_1, u_2) de M_o, $\langle A'(x_o)\, u_1, u_2\rangle$ n'est pas nul, ou si $\langle A'(x_o)\, u_1, u_1\rangle$ et $\langle A'(x_o)\, u_2, u_2\rangle$ sont différents. De plus, la base orthonormée *unique* correspondante est obtenue en résolvant le système (2.3.6).

4 - Existence de fonctions continues représentant les éléments propres

Dans toute la suite du chapitre, nous supposerons la condition (H_1) vérifiée et la base correspondante (v_1, v_2) de M_o connue. Nous allons, dans ce paragraphe, prouver que (H_1) est une condition suffisante pour l'existence de fonctions $\lambda_i(x)$ et $V_i(x)$, pour i dans P_N, représentant respectivement les N valeurs propres de A et les N vecteurs propres associés, formant, pour tout x d'un voisinage U de $\mathcal{V}(x_o)$, une base orthonormée de $\mathbb{R}^N$, ces fonctions étant continues sur U.

Nous allons au préalable établir une proposition qui jouera un rôle fondamental dans ce travail. Soient v_1, v_2 les vecteurs de M_o sélectionnés par (H_1). Soient $v_3, \ldots, v_N$ les vecteurs propres de $A(x_o)$, normés, associés aux valeurs propres autres que λ_o (supposées toutes simples). Appelons F_o l'ensemble :

$$F_o = \{v_1, -v_1, v_2, -v_2, v_3, -v_3, \ldots, v_N, -v_N\}$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 2.1 :

Soit $(x_n, n \in \mathbb{N})$ *une suite de limite* x_o *telle que :* $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq x_o$.
Soit $(v^n, n \in \mathbb{N})$ *une suite où* v^n *est un vecteur propre normé de* $A(x_n)$.
Alors, tout point d'accumulation de la suite $\{v^n, n \in \mathbb{N}\}$ *est un élément de* F_o.

Démonstration :

v^n est de norme 1. La suite $\{v^n, n \in \mathbb{N}\}$ est donc bornée et a toujours un point d'accumulation au moins.

Soit donc v^* un point d'accumulation de cette suite : $v^* = \lim\limits_{n \in \mathbb{N}' \subset \mathbb{N}} v^n$

on a pour tout n : $\begin{cases} A(x_n)\, v^n = \langle A(x_n)\, v^n, v^n\rangle\, v^n \\ \quad\quad \text{et} \\ \langle v^n, v^n\rangle = 1 \end{cases}$

(en effet la valeur propre λ^n associée à v^n est égale à $\langle A(x_n)\, v^n, v^n\rangle$ puisque v^n est de norme 1).

Alors, en passant à la limite sur $\mathbb{N}'$, on obtient :

$$\begin{cases} A(x_o)\, v^* = \langle A(x_o)\, v^*, v^*\rangle\, v^* \\ \langle v^*, v^*\rangle = 1 \end{cases}$$

v^* est donc un vecteur propre normé de $A(x_o)$

- si v^* est associé à une valeur propre de $A(x_o)$ autre que λ_o, cette valeur propre étant simple, v^* est forcément l'un des v_h, pour $h \geq 3$, ou bien son opposé et dans ce cas $v^* \in F_o$.

- si v^* est associé à λ_o, il existe un vecteur $\tilde{v}^*$ de M_o, formant avec v^* une base orthonormée de M_o ;

alors $(v^*, \tilde{v}^*, v_3, \ldots, v_N)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^N$ et on peut décomposer v^n sur cette base :

(2.4.1) $v^n = \alpha_1^n v^* + \alpha_2^n \tilde{v}^* + \sum_{h=3}^{N} \alpha_h^n\, v_h$ $\quad\quad$ avec $\lim_{n\in\mathbb{N}'} \alpha_k^n = \delta_{1k}$, $k \in P_N$

introduisons le vecteur w^n suivant :

(2.4.2) $w^n = \alpha_1^n\, \tilde{v}^* - \alpha_2^n\, v^*$

on peut alors écrire :

(2.4.3) $(A(x_n) - A(x_o))\, v^n = \langle A(x_n)\, v^n, v^n\rangle\, v^n - A(x_o)\, v^n$

mais $\langle v^n, w^n\rangle = \alpha_1^n\, \alpha_2^n - \alpha_2^n\, \alpha_1^n = 0$

et $\langle A(x_o)\, v_n, w_n\rangle = \langle A(x_o)\, w^n, v^n\rangle = \lambda_o\, \langle w^n, v^n\rangle = 0$ car $w^n \in M_o$

de par sa construction . En reportant dans (2.4.3), il vient :

$$\langle (A(x_n) - A(x_o))\, v^n, w^n\rangle = 0$$

ou encore

$$(2.4.4) \qquad <(\frac{A(x_n)-A(x_o)}{x_n-x_o})\, v^n,\, w^n> = 0 \qquad\qquad (\text{puisque } x_n \neq x_o)$$

alors en passant à la limite sur $\mathbb{N}'$ dans (2.4.4), puisque A est de classe C^1 :

$$(2.4.5) \qquad <A'(x_o)\, v^*,\, \tilde{v}^*> = 0$$

car $\lim\limits_{n \in \mathbb{N}'} w^n = \tilde{v}^*$

En vertu de l'unicité de la base de M_o vérifiant la relation (2.4.5), v^* est forcément l'un des vecteurs v_1, v_2 sélectionnés par (H_1) ou son opposé. Dans ce cas aussi, v^* est un élément de F_o.

q.e.d.

Grâce à cette proposition, nous allons maintenant pouvoir établir un premier résultat important. Choisissons comme base de $\mathbb{R}^N$ la base $(v_1, v_2, \ldots, v_N)$ formée des vecteurs définis précédemment. Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème 2 :

Il existe N *fonctions* $V_1(x)$, $V_2(x)$, ..., $V_N(x)$, *continues dans un voisinage* U *de* x_o, *formant, pour tout* x *de* U, *une base orthonormée de vecteurs propres de* A(x), *et telles que :*

$$V_i(x_o) = v_i \text{ pour } i \in P_N$$

Démonstration :

Pour $h \geq 3$, v_h est associé à une valeur propre simple et nous sommes assurés de l'existence d'une fonction $V_h(x)$ continue dans un voisinage U_h de x_o (cf. Chap. 1).
Intéressons-nous à l'existence de la fonction $V_1(x)$.
Soit $k \in P_N$ tel que $v_1^k \neq 0$ (k-ième composante de v_1 sur la base canonique) supposons, sans restreindre le problème, que $v_1^k > 0$.
Soit alors l'ensemble $F(x) = \{v \in \mathbb{R}^N$ tel que $|v| = 1,\ v^k \geq 0,\ \exists\, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $A(x)v = \mu v\}$.

Soit $B(v_1, \varepsilon)$ la boule ouverte $\{v \in \mathbb{R}^N$ tel que $|v-v_1| < \varepsilon\}$

Nous allons, dans un premier temps, prouver que :

$$(2.4.6) \quad \left[\begin{array}{l} \exists\ \bar{\varepsilon} > 0 \text{ tel que } \forall\ \varepsilon \in\ ]0, \bar{\varepsilon}],\ \exists\ V_\varepsilon \in \mathcal{V}(x_o) \text{ tel que :} \\ \qquad \forall\ x \in V_\varepsilon,\ x \neq x_o,\ \exists\ !\ u \in F(x) \cap B(v_1, \varepsilon) \end{array}\right.$$

Si cela n'était pas vrai, on aurait, avec des suites :

$\forall\ \bar{\varepsilon} > 0,\ \exists\ \varepsilon \in\ ]0, \bar{\varepsilon}],\ \exists\ \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$

telle que $\lim\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n = x_o$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq x_o$ et $\left\{\begin{array}{l} F(x_n) \cap B(v_1, \varepsilon) = \emptyset \quad \text{(i)} \\ \qquad \text{ou bien} \\ \exists\ w_n \text{ et } z_n \in F(x_n) \cap B(v_1, \varepsilon) \quad \text{(ii)} \\ \qquad \text{et } w_n \neq z_n \end{array}\right.$

* <u>(ii) est impossible si $\bar{\varepsilon} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$</u> : en effet w_n et z_n, étant dans $F(x_n)$, seraient des vecteurs propres normés de $A(x_n)$, qui a toutes ses valeurs propres simples (si $x_n \neq x_o$). Alors, puisqu'ils sont distincts, w_n et z_n sont opposés ou orthogonaux.

En conséquence :

$$\left\{\begin{array}{l} - \text{ si } w_n = -z_n,\ |w_n - z_n| = 2|w_n| = 2 \\ - \text{ si } w_n \perp z_n,\ |w_n - z_n| = \sqrt{\langle w_n - z_n, w_n - z_n\rangle} = \sqrt{w_n^2 + z_n^2} = \sqrt{2} \end{array}\right.$$

et dans les deux cas $|w_n - z_n| \geq \sqrt{2} \geq 2\bar{\varepsilon} \geq 2\varepsilon$ (si $\bar{\varepsilon} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$)

mais w_n et z_n sont dans $B(v_1, \varepsilon)$, d'où :

$$|w_n - z_n| \leq |w_n - v_1| + |v_1 - z_n| < 2\varepsilon, \text{ ce qui est impossible.}$$

* <u>on devrait donc avoir (i) pour $\bar{\varepsilon} \leq \sqrt{2}/2$</u>

On peut, pour tout n, construire une base orthonormée de $\mathbb{R}^N$ parmi les vecteurs de $F(x_n)$. Soit $\mathcal{B}_n$ cette base.

$$\mathcal{B}_n = (t_{1,n}, t_{2,n}, \ldots, t_{N,n})$$

Chaque suite $\{t_{i,n}, n \in \mathbb{N}\}$ est bornée et a un point d'accumulation $t_i^\star$; on peut de proche en proche, extraire une suite $\{x_n, n \in \mathbb{N}_k\}$ de la suite $\{x_n, n \in \mathbb{N}_{k-1}\}$, avec $\mathbb{N}_o = \mathbb{N}$, de manière à ce que :

$$\lim_{n\in\mathbb{N}_N} t_{i,n} = t_i^*, \quad \forall\ i \in P_N$$

Par les mêmes arguments que ceux utilisés dans la proposition 2.1, on montre que $(t_1^*, t_2^*, \ldots, t_N^*)$ est une base orthonormée de vecteurs propres de $A(x_o)$. Mais d'après cette même proposition, $t_i^* \in F_o$ pour tout i. L'un des t_i^* est donc forcément égal à v_1 ou $-v_1$, par exemple t_1^*. Comme $t_{1,n} \in F(x_n)$, $t_{1,n}^k \geq 0$ et donc $t_1^* \geq 0$. Alors forcément $t_1^* = v_1$ car $-v_1^k < 0$. Donc pour n assez grand dans $\mathbb{N}_N$, $t_{1,n} \in B(v_1, \varepsilon) \cap F(x_n)$ et cet ensemble est donc non vide.

(i) est alors impossible

<u>L'assertion (2.4.6) est donc démontrée pour $\bar{\varepsilon} \leq \sqrt{2}/2$</u>

L'existence et l'unicité du vecteur u dans $F(x) \cap B(v_1, \varepsilon)$, pour $\varepsilon \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ et pour tout x dans V_ε, nous permet de définir une fonction $V_1^\varepsilon(x)$ dans V_ε, $V_1^\varepsilon(x)$ étant ce vecteur u et $V_1^\varepsilon(x_o) = v_1$. Cette fonction est continue en x_o de par sa construction.

$V_1^\varepsilon(x)$ semble dépendre de ε, mais il n'en n'est rien : si $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, on choisit $V_{\varepsilon'} \subset V_\varepsilon$ et alors $V_1^{\varepsilon'}(x) \in F(x) \cap B\ (v_1, \varepsilon') \subset F(x) \cap B\ (v_1, \varepsilon)$, $\forall\ x \in V_{\varepsilon'}$. Par conséquent, l'ensemble $F(x) \cap B(v_1, \varepsilon)$ étant un singleton, les fonctions V_1^ε et $V_1^{\varepsilon'}$ coïncident sur $V_{\varepsilon'}$.

Nous pouvons donc noter cette fonction $V_1(x)$, avec $V_1(x_o) = v_1$. Elle est définie sur un voisinage U_1 de x_o, restreint de telle manière que $V_1^k(x) > 0$, pour tout x de U_1 (ce qui est possible car V_1 est continue en x_o et $v_1^k = V_1^k(x_o) > 0$), $U_1 \subset V_{\bar{\varepsilon}}$ et $\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Cette fonction $V_1(x)$ représente en fait un prolongement par continuité en x_o de celle que l'on peut définir dans $U_1 - \{x_o\}$ par le théorème des fonctions implicites :

Soit $y_o \in U_1 - \{x_o\}$. $A(y_o)$ a toutes ses valeurs propres simples. On peut alors définir une fonction $W_1(x)$ dans un voisinage $U'(y_o) \in \mathcal{V}(y_o)$ avec comme conditions en y_o : $\bar{\lambda} = \langle A(y_o)\, V_1(y_o), V_1(y_o)\rangle$ et $\bar{V} = V_1(y_o)$, et continue dans $U'(y_o)$ (cf. chap. 1).

Comme $W_1(y_o) = \bar{V} = V_1(y_o) \in B(v_1, \bar{\varepsilon})$, par continuité, pour $U'(y_o)$ assez petit, $W_1(x) \in B(v_1, \bar{\varepsilon})$. En outre, $W_1^k(y_o) = V_1^k(y_o) > 0$ et donc $W_1^k(x) > 0$ pour $x \in U'(y_o)$, quitte à restreindre encore $U'(y_o)$.

$W_1(x)$ est donc un élément de $F(x) \cap B(v_1, \bar{\varepsilon})$ et coïncide avec $V_1(x)$.

Les fonctions V_1 et W_1 coïncident donc sur $U'(y_o)$, cela pour tout y_o de U_1.

(Ce qui prouve d'ailleurs la continuité de V_1 sur tout U_1, en vertu du théorème 1).

On construirait de la même manière une fonction $V_2(x)$, définie et continue sur un voisinage U_2.

Finalement, $(V_1(x), V_2(x), \ldots, V_N(x))$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^N$, formée de vecteurs propres de $A(x)$, continus sur $U = \bigcap_{i=1}^{N} U_i$.

q.e.d.

<u>Remarque</u> :

En posant $\lambda_i(x) = \langle A(x)\, V_i(x), V_i(x)\rangle$, pour i dans P_N, les $\lambda_i(x)$ sont des fonctions continues sur U, représentant pour tout x de U les N valeurs propres de A(x). (Résultat classique énoncé au chapitre 1).

5 - INTERPRÉTATION DE LA CONDITION (H_1)

La condition (H_1) signifie en fait que l'on peut "séparer" les valeurs propres qui coïncident par leurs dérivées premières.
En effet, A étant de classe C^1, on sait (chapitre 1) que l'on peut représenter les valeurs propres par des fonctions de classe C^1 dans un voisinage de x_o.
Si l'on note $\lambda_i(x)$, $i \in P_N$, ces fonctions, on a vu que leur dérivée $\lambda'_i(x)$ avait pour expression :

$$\lambda'_i(x) = \langle A'(x)\, V_i(x), V_i(x)\rangle \text{ pour } i \in P_N, \quad x \neq x_o$$

Alors, si $\lambda_1(x_o) = \lambda_2(x_o) = \lambda_o$, et si v_1^* et v_2^* sont les points d'accumulation de suites $\{v_1^n, n \in \mathbb{N}\}$ et $\{v_2^n, n \in \mathbb{N}\}$ de vecteurs propres normés de $A(x_n)$, associés dans cet ordre à $\lambda_1(x_n)$ et $\lambda_2(x_n)$, lorsqu'on fait tendre x_n vers x_o, on obtient, puisque λ_1 et λ_2 sont C^1 :

$$\begin{cases} \lambda'_1(x_o) = \langle A'(x_o)\, v_1^*, v_1^*\rangle \text{ et } \lambda'_2(x_o) = \langle A'(x_o)\, v_2^*, v_2^*\rangle \\ \text{avec } \langle A'(x_o)\, v_1^*, v_2^*\rangle = 0 \end{cases}$$

Alors (H_1) sera vérifiée, en vertu du paragraphe 3, si et seulement si $\lambda'_1(x_o) \neq \lambda'_2(x_o)$.

Remarque :
Cette interprétation permet aussi, lorsqu'on connaît les expressions analytiques des valeurs propres (ce qui est plutôt rare) de vérifier (H_1) très simplement.

Si l'on reprend les exemples simples étudiés dans le chapitre 1, on s'aperçoit facilement que dans un cas (H_1) n'est pas vérifiée mais que dans l'autre elle l'est.

Dans l'exemple (1.1), en effet, les valeurs propres se mettent sous la forme $\lambda \pm (x) = \pm\, e^{-1/x^2}$, formant ainsi deux fonctions de classe C^∞ en posant $\lambda \pm (0) = 0$. Mais les dérivées de ces fonctions coïncident et (H_1) n'est pas vérifiée en 0.

Dans l'exemple (1.3), en revanche, (H_1) est vérifiée : on peut prendre $\lambda_1(x) = x\,(|x| + \sqrt{1+x^2})$ et $\lambda_2(x) = x(|x| - \sqrt{1+x^2})$ qui sont de classe C^1 et dont les dérivées en 0 sont :

$$\lambda'_1(0) = 1 \quad \lambda'_2(0) = -1$$

De plus $A'(x_o) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $u\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$ et $v\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ forment la base "unique" qui convient (résultat auquel on était parvenu).

6 - Différentiabilité des fonctions construites

Toujours dans le cadre de la condition (H_1), nous allons pouvoir obtenir des résultats de différentiabilité quant aux fonctions $\lambda_i(x)$ et $V_i(x)$ construites. Nous ne démontrerons pas les différents résultats énoncés dans ce paragraphe (cf. Introduction), mais nous décrirons par ceux-ci la technique utilisée pour obtenir le théorème voulu.

Nous savons que les fonctions en question sont de même classe que la matrice A en dehors de x_o (et aussi en x_o pour $V_h(x)$, $h \geq 3$). Nous allons ici montrer que si A est de classe C^K au voisinage de x_o, $V_1(x)$ et $V_2(x)$ sont de classe C^{K-1} en x_o, $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$ sont de classe C^K en x_o. Ceci se fait par récurrence sur K : c'est vrai pour K = 1 (il suffit de démontrer que $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$ sont C^1 : voir paragraphe 5).

Supposons avoir montré que si A est de classe C^K en x_o, V_1 y est de classe C^{K-1}, et prenons maintenant A de classe C^{K+1}.

Posons $t_1(x) = \dfrac{V_1^{(k-1)}(x)-V_1^{(k-1)}(x_o)}{x-x_o}$. Il s'agit dans un premier temps de prouver que $t_1(x)$ a une limite en x_o ; cela se fait en étudiant, pour tout h de P_N, la limite de $<t_1(x), V_h(x)>$. Pour $h = 1$ et $h \geq 3$, nous ne rencontrerons aucune difficulté pour calculer cette limite directement. Pour $h = 2$, en revanche, nous devrons procéder en deux temps : il nous faudra d'abord prouver que

$$\frac{<V_1(x) - \sum_{j=o}^{K-1} \frac{(x-x_o)^j}{j!} V_1^{(j)}(x_o), V_2(x)>}{(x-x_o)^K}$$

a une limite ; ensuite nous établirons le lien entre cette limite et celle de $<t_1(x), V_2(x)>$.

Finalement, $t_1(x)$ ayant une limite, on montrera que $V_1^{(K)}(x)$, qui existe en dehors de x_o, a la même limite que $t_1(x)$ en x_o.

Et l'on a démontré dans [19], le résultat suivant, cas particulier du chapitre 4 :

Théorème 3 :

Si A *est de classe* C^K *(resp.* C^∞*) dans un voisinage* U *de* x_o, *alors, sous la condition* (H_1), λ_1 *et* λ_2 *sont de classe* C^K *(resp.* C^∞*) dans* U, V_1 *et* V_2 *sont de classe* C^K *(resp.* C^∞*) dans* $U - \{x_o\}$, C^{K-1} *(resp.* C^∞*) en* x_o.

CHAPITRE 3

UNE SUITE DE CONDITIONS SUFFISANTES SUR LE MODELE (H_1)

1 - INTRODUCTION

Gardons les notations utilisées en chapitre 2 §2, et supposons que la condition (H_1) ne soit plus vérifiée. On ne peut plus "séparer" les valeurs propres qui coïncident en x_o par les dérivées premières. On peut alors tout naturellement se demander s'il est possible de le faire avec les dérivées secondes, troisièmes, ..., p-ièmes. Cette idée se trouve d'ailleurs quelque peu étayée par le fait que dans l'exemple (1.1) du chapitre 1, pour lequel il est impossible d'exhiber des "fonctions vecteurs propres" continues, les valeurs propres qui coïncident sont de classe C^∞ et ont toutes leurs dérivées égales. Nous allons donc essayer de bâtir des conditions (H_2), (H_3), ..., (H_p), du même type que (H_1), qui nous permettront, elles aussi, d'exhiber des fonctions continues représentant les éléments propres, et reposant sur la séparation des dérivées secondes, ..., p-ièmes des valeurs propres.

2 - ANALYSE DU PROBLÈME

Pour obtenir la condition (H_1), nous avions différentié l'équation (2.3.1), en supposant les éléments propres de classe C^1, et multiplié scalairement le résultat obtenu par $V_2(x)$. L'écriture en x_o de cette relation nous donnait alors une condition nécessaire que devaient vérifier $V_1(x_o)$ et $V_2(x_o)$ (s'ils existent), en l'occurence :

(3.2.1) $$\langle A'(x_o)\, V_1(x_o),\ V_2(x_o)\rangle = 0$$

A partir de cette relation, on construisait donc la condition (H_1) en imposant l'unicité des vecteurs v_1 et v_2 de M_o vérifiant $\langle A'(x_o)\, v_1,\ v_2\rangle = 0$. Si (H_1) n'est plus vérifiée, on peut essayer d'utiliser la même méthode en supposant cette fois les éléments propres de classe C^2 et en différentiant deux fois l'équation (2.3.1), ce qui nous donne :

(3.2.2) $$(A''(x)-\lambda_1''(x))V_1(x)+2(A'(x)-\lambda'_1(x))V'_1(x)+(A(x)-\lambda_1(x))V''_1(x) \equiv 0$$

Par produit scalaire avec $V_2(x)$, on obtient, en x_o, puisque $\lambda_2(x_o) = \lambda_1(x_o)$:

(3.2.3) $$\langle A''(x_o)V_1(x_o),V_2(x_o)\rangle+2\langle(A'(x_o)-\lambda'_1(x_o))V'_1(x_o),V_2(x_o)\rangle = 0$$

en décomposant $V'_1(x_o)$ sur la base $(V_1(x_o),\ V_2(x_o),\ \dots,\ V_N(x_o))$, il vient

(3.2.4) $$\langle A''(x_o)V_1(x_o),V_2(x_o)\rangle+2\sum_{h=1}^{N}\langle(A'(x_o)-\lambda_1'(x_o))V_h(x_o),V_2(x_o)\rangle\langle V_1'(x_o),V_h(x_o)\rangle=0$$

mais $\langle V_1(x),V_1(x)\rangle \equiv 1$ et donc $\langle V'_1(x),V_1(x)\rangle \equiv 0$ d'où $\langle V'_1(x_o),V_1(x_o)\rangle = 0$ et $\langle(A'(x_o)-\lambda'_1(x_o))V_2(x_o),V_2(x_o)\rangle = \lambda'_2(x_o)-\lambda'_1(x_o) = 0$ *car (H_1) n'est pas vérifiée.*

Comme $\langle V'_1(x_o),V_h(x_o)\rangle = \dfrac{\langle A'(x_o)V_1(x_o),V_h(x_o)\rangle}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)}$ pour $h \geq 3$ (cf. chapitre 1), on a :

(3.2.5) $$\boxed{\langle A''(x_o)V_1(x_o),V_2(x_o)\rangle+2\sum_{h\geq 3}\frac{\langle A'(x_o)V_1(x_o),V_h(x_o)\rangle\langle A'(x_o)V_2(x_o),V_h(x_o)\rangle}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)}=0}$$

L'intérêt d'avoir d'exprimé (3.2.3) sous la forme (3.2.5) vient de ce que dans cette dernière formulation n'apparaissent plus les dérivées des éléments propres. On peut par conséquent introduire une condition similaire à (H_1) en imposant l'unicité d'une base (v_1, v_2) orthonormée de M_o vérifiant :

$$<A''(x_o)v_1,v_2> + 2 \sum_{h\geq 3} \frac{<A'(x_o)v_1,v_h><A'(x_o)v_2,v_h>}{\lambda_o-\lambda_h} = 0$$

D'où une condition (H_2) formulée comme suit :

(H_2)
- La matrice A est de classe C^2 au moins dans U
- (H_1) n'est pas vérifiée. Autrement dit, pour toute base orthonormée (u, v) de M_o, on a $<A'(x_o)\,u, v> = <A'(x_o)u,u>-<A'(x_o)v,v> = 0$
- il existe une unique base (v_1, v_2) de M_o, orthonormée, telle que :

$$<A''(x_o)v_1,v_2>+2 \sum_{h\geq 3} \frac{<A'(x_o)v_1,v_h><A'(x_o)v_2,v_h>}{\lambda_o-\lambda_h} = 0$$

On pourrait essayer de traiter ce cas de la même manière que celui de (H_1) et on s'apercevrait en particulier que (H_2) correspond au fait que $\lambda''_1(x_o)$ et $\lambda''_2(x_o)$ sont distinctes.

Puis on exhiberait une condition (H_3), etc. Mais il est bien évident que la technique utilisée va compliquer très rapidement la formulation de ces conditions. En effet, pour (H_3) on aura besoin des coordonnées de $V''_1(x_o)$, dans lesquelles intervient $V'_1(x_o)$ (cf chapitre 1), qu'il faudra encore décomposer pour ne plus avoir de dérivées de vecteurs propres, rendant ainsi l'expression de (H_3) "horrible".

D'où la nécessité d'obtenir la formulation de ces conditions de manière récurrente en fonction des précédentes. Ce sera le but du paragraphe suivant.

3 - FORMULATION PAR RÉCURRENCE DES CONDITIONS (H_K)

a) Une condition nécessaire

Si l'on calcule l'équivalent des relations (3.2.1), pour (H_1), et (3.2.5), pour (H_2), dans le cas de (H_3), on obtient, en arrangeant correctement les termes, avec $B_1(x) = A(x) - \lambda_1(x)$:

$$(3.3.1)\quad \left\{ \begin{array}{l} <A'''(x_o)V_1(x_o)V_2(x_o)>+3 \sum\limits_{h\geq 3} \left[\dfrac{<A'(x_o)V_1(x_o),V_h(x_o)>}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)} <A''(x_o)V_2(x_o),V_h(x_o)> \right] \\ +3 \sum\limits_{h\geq 3} \left[\dfrac{\left(<A''(x_o)V_1(x_o)>+2 \sum\limits_{k\geq 3} \dfrac{<A'(x_o)V_1(x_o),V_k(x_o)><B_1'(x_o)V_h(x_o),V_k(x_o)>}{\lambda_1(x_o)-\lambda_k(x_o)} \right)}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)} \times \right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. <A'(x_o)V_2(x_o),V_h(x_o)> \right] \\ = 0 \end{array} \right.$$

BU LILLE

Malgré l'extrême complexité de cette formule, on commence à y discerner une structure particulière qui apparaît aussi dans (3.2.5) : dans les sommes de (3.3.1) se trouvent des quantités qui ressemblent beaucoup à celles de (3.2.5) et (3.2.1) ; même constatation en ce qui concerne (3.2.5).

Essayons de formaliser un peu tout cela.

Soit u et v deux vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^N$.

Posons alors, si A est de classe C^1 ainsi que les éléments propres

$$E_1(u, v) = <A'(x_o)\, u, v>$$

La relation (3.2.1) devient alors :

$$(3.3.2)\qquad E_1(V_1(x_o), V_2(x_o)) = 0$$

Si (H_1) n'est pas vérifiée, on a vu qu'alors, avec cette notation :

$$\lambda'_1(x_o) = \lambda'_2(x_o) = E_1(V_1(x_o), V_1(x_o)) = E_1(V_2(x_o), V_2(x_o))$$

posons alors, si A et les éléments propres sont de classe C^2

$$F_1(u, v) = <B'_1(x_o)\, u, v> = E_1(u, v) - \lambda'_1(x_o) <u, v>$$

$$\text{et } E_2(u,v) = \langle A''(x_o)u,v\rangle + 2\sum_{h\geq 3} \frac{F_1(u,V_h(x_o))\langle B'_1(x_o)v,\ V_h(x_o)\rangle}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)}$$

La relation (3.2.5) devient alors :

(3.3.3) $\quad E_2(V_1(x_o),\ V_2(x_o)) = 0$

Si maintenant (H_2) n'est pas vérifiée non plus, et si on peut montrer qu'alors $\lambda''_1(x_o)=E_2(V_1(x_o),V_1(x_o))=\lambda''_2(x_o)=E_2(V_2(x_o),V_2(x_o))$, on pose :

$$F_2(u,v)=E_2(u,v)-\lambda''_1(x_o)\langle u,v\rangle$$

$$\text{et } E_3(u,v)=\langle A'''(x_o)u,v\rangle+3\sum_{h\geq 3}\frac{F_1(u,V_h(x_o))\langle B''_1(x_o)v,V_h(x_o)\rangle}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)}+3\sum_{h\geq 3}\frac{F_2(u,V_h(x_o))\langle B'_1(x_o)v,V_h(x_o)\rangle}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)}$$

(Si A et les éléments propres sont de classe C^3)

et la relation (3.3.1) devient alors :

(3.3.4) $\quad E_3(V_1(x_o),\ V_2(x_o)) = 0.$

De manière plus générale, si on suppose que A et les éléments propres sont de classe C^{q+1}, et que, pour $k = 1, 2, \ldots, q$, on a :

$$\lambda_1^{(k)}(x_o) = E_k(V_1(x_o),\ V_1(x_o)) = \lambda_2^{(k)}(x_o) = E_k(V_2(x_o),\ V_2(x_o))$$

On pose

$$F_q(u,\ v) = E_q(u,\ v) - \lambda_1^{(q)}(x_o)\ \langle u,\ v\rangle$$

et

$$\text{(3.3.5)}\quad \boxed{E_{q+1}(u,v)=\langle A^{(q+1)}(x_o)u,v\rangle+\sum_{k=1}^{q} C_{q+1}^{k}\left[\sum_{h\geq 3}\frac{F_k(u,V_h(x_o))\langle B_1^{(q+1-k)}(x_o)v,V_h(x_o)\rangle}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)}\right]}$$

Pour conserver l'analogie avec les cas de (H_1), (H_2), (H_3), en différenciant l'équation (2.3.1) à l'ordre (q+1) et par produit scalaire avec $V_2(x)$, on va obtenir la relation suivante, en x_o :

$$\text{(3.3.6)}\quad \langle A^{(q+1)}(x_o)V_1(x_o),V_2(x_o)\rangle+\sum_{k=1}^{q} C_{q+1}^{k}\langle B_1^{(q+1-k)}(x_o)V_1^{(k)}(x_o),V_2(x_o)\rangle = 0$$

Nous allons donc essayer de prouver que la relation (3.3.6) se met sous la forme :

(3.3.7) $E_{q+1}(V_1(x_o), V_2(x_o)) = 0$

Plus précisément, nous allons démontrer le résultat suivant :

Proposition 3.1 :

Si A *est de classe* C^{q+1} *et s'il existe des fonctions de classe* C^{q+1} *représentant les éléments propres,*

si, de plus, on a, pour $1 \le k \le q$, *les propriétés suivantes :*

(avec la convention que $\sum_{k=1}^{o} [\ ] = 0$)

a) $E_k(V_1(x_o),V_2(x_o))=<A^{(k)}(x_o)V_1(x_o)V_2(x_o)>+\sum_{j=1}^{k-1} C_k^j<B_1^{(k-j)}(x_o)V_1^{(j)}(x_o),V_2(x_o)>=0$

b) $E_k(V_1(x_o),V_1(x_o))=\lambda_1^{(k)}(x_o)$ et $E_k(V_2(x_o), V_2(x_o)) = \lambda_2^{(k)}(x_o)$

c) pour $h \ge 3$, on a

$$<V_1^{(k)}(x_o), V_h(x_o)> = \frac{F_k(V_1(x_o), V_h(x_o))}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)}$$
$$+\sum_{j=1}^{k-1} C_k^j\frac{F_j(V_2(x_o),V_h(x_o))}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)}<V_1^{(k-j)}(x_o),V_2(x_o)>+\sum_{j=1}^{k-1} C_k^j\frac{F_j(V_1(x_o),V_h(x_o))}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)}\times$$
$$<V_1^{(k-j)}(x_o),V_1(x_o)>$$

d) $E_k(u,v) = E_k(v,u)$

e) $\lambda_1^{(k)}(x_o) = \lambda_2^{(k)}(x_o)$

Alors les propriétés a), b), c), d) sont encore vraies pour l'indice $k = q+1$.

Démonstration :

1) A et les éléments propres étant C^{q+1}, on a (cf.(3.3.6)) :

$$<A^{(q+1)}(x_o)V_1(x_o),V_2(x_o)>+\sum_{k=1}^{q} C_{q+1}^k<B_1^{(q+1-k)}(x_o)V_1^{(k)}(x_o), V_2(x_o)> = 0$$

relation qui peut s'écrire, en décomposant $V_1^{(k)}(x_o)$ sur la base $(V_1(x_o),\dots,V_N(x_o))$

$$<A^{(q+1)}(x_o)V_1(x_o),V_2(x_o)>+\sum_{k=1}^{q} C_{q+1}^k[\sum_{h\ge3} <B_1^{(q+1-k)}(x_o)V_h(x_o),V_2(x_o)><V_1^{(k)}(x_o),V_h(x_o)>]$$

BU LILLE

$$+\sum_{k=1}^{q} C_{q+1}^{k}[<B_1^{(q+1-k)}(x_o)V_2(x_o),V_2(x_o)><V_1^{(k)}(x_o),V_2(x_o)>+$$

$$<B_1^{(q+1-k)}(x_o)V_1(x_o),V_2(x_o)><V_1^{(k)}(x_o),V_1(x_o)>]=0$$

Si maintenant nous remplaçons $<V_1^{(k)}(x_o),V_h(x_o)>$ dans cette relation par son expression dans l'hypothèse c), il vient :

$$(3.3.8)\left\{\begin{array}{l}
<A^{(q+1)}(x_o)V_1(x_o),V_2(x_o)>+\sum_{k=1}^{q} C_{q+1}^{k}\left[\sum_{h\geq 3}\frac{F_k(V_1(x_o),V_h(x_o))<B_1^{(q+1-k)}(x_o)V_2(x_o),V_h(x_o)>}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)}\right] \\
+\sum_{k=1}^{q} C_{q+1}^{k}[<B_1^{(q+1-k)}(x_o)V_2(x_o),V_2(x_o)><V_1^{(k)}(x_o),V_2(x_o)> \\
\qquad +<B_1^{(q+1-k)}(x_o)V_1(x_o),V_2(x_o)><V_1^{(k)}(x_o),V_1(x_o)>] \\
+\sum_{k=2}^{q} C_{q+1}^{k}[\sum_{h\geq 3}<B_1^{(q+1-k)}(x_o)V_h(x_o),V_2(x_o)> \times \\
\qquad \sum_{j=1}^{k-1} C_k^j\frac{F_j(V_2(x_o),V_h(x_o))}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)}<V_1^{(k-j)}(x_o),V_2(x_o)>] \\
+\sum_{k=2}^{q} C_{q+1}^{k}[\sum_{h\geq 3}<B_1^{(q+1-k)}(x_o)V_h(x_o),V_2(x_o)> \times \\
\qquad \sum_{j=1}^{k-1} C_k^j\frac{F_j(V_1(x_o),V_h(x_o))}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)}<V_1^{(k-j)}(x_o),V_1(x_o)>]=0
\end{array}\right.$$

On reconnaît dans la première ligne de cette relation la quantité $E_{q+1}(V_1(x_o), V_2(x_o))$.

Calculons le coefficient de $(V_1^{(i)}(x_o), V_1(x_o))$ pour $i = 1, 2, \ldots, q$ dans cette relation.

* pour $i = q$, ce coefficient est : $C_{q+1}^{q}<B'_1(x_o)V_1(x_o),V_2(x_o)>=C_{q+1}^{q}F_1(V_1(x_o),V_2(x_o))$

* pour $i = 1$ à $q-1$, ce coefficient s'écrit :

$$C_{q+1}^{i}<B_1^{(q+1-i)}(x_o)V_1(x_o),V_2(x_o)>+\sum_{k=i+1}^{q} C_{q+1}^{k}[\sum_{h\geq 3}<B_1^{(q+1-k)}(x_o)V_h(x_o)V_2(x_o)> \times$$

$$C_k^{k-i}\frac{F_{k-i}(V_1(x_o),V_h(x_o))}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)}]$$

et en posant $\ell = k-i$

$$=C^i_{q+1}<B_1^{(q+1-i)}V_1(x_o),V_2(x_o)>+\sum_{\ell=1}^{q-i} C^{\ell+i}_{q+1}[\sum_{h\geq 3}<B_1^{(q+1-i-\ell)}(x_o)V_h(x_o),V_2(x_o)> \times$$

$$C^{\ell}_{\ell+i}\ \frac{F_{\ell}(V_1(x_o),V_h(x_o))}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)}\ ]$$

$$=C^i_{q+1}\Big[<B_1^{(q+1-i)}(x_o)V_1(x_o),V_2(x_o)>+\sum_{\ell=1}^{q-i} C^{\ell}_{q+1-i}[\sum_{h\geq 3}\frac{F_{\ell}(V_1(x_o),V_h(x_o))}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)}\times$$

$$<B_1^{((q+1-i)-\ell)}(x_o)V_h(x_o),V_2(x_o)>]\Big]$$

(car $\dfrac{C^{\ell+i}_{q+1}\ C^{\ell}_{\ell+i}}{C^i_{q+1}}=\dfrac{\cancel{(q+1)!}}{\cancel{(\ell+i)!}(q+1-\ell-i)!}\times\dfrac{\cancel{(\ell+i)!}}{\ell!\ \cancel{i!}}\times\dfrac{\cancel{i!}(q+1-i)!}{\cancel{(q+1)!}}=\dfrac{(q+1-i)!}{\ell!(q+1-\ell-i)!}=C^{\ell}_{q+1-i}$)

$$= C^i_{q+1}[F_{q+1-i}(V_1(x_o),V_2(x_o))]$$

Si on calcule le coefficient de $<V_1^{(i)}(x_o),\ V_2(x_o)>$ dans (3.3.8), un calcul similaire nous donnerait $C^i_{q+1}[F_{q+1-i}(V_2(x_o),V_2(x_o))]$, pour i = 1 à q.

Et finalement, on peut réécrire (3.3.8) sous la forme .

BU LILLE

$$\boxed{\begin{aligned}&E_{q+1}(V_1(x_o),V_2(x_o))+\sum_{i=1}^{q} C^i_{q+1}F_{q+1-i}(V_1(x_o),V_2(x_o))<V_1^{(i)}(x_o),V_1(x_o)>\\ &\qquad+\sum_{i=1}^{q} C^i_{q+1}F_{q+1-i}(V_2(x_o),V_2(x_o))<V_1^{(i)}(x_o),V_2(x_o)> = 0\end{aligned}} \tag{3.3.9}$$

mais pour i = 1 à q, on a :

$$\left\{\begin{aligned}&F_{q+1-i}(V_1(x_o),V_2(x_o)) = E_{q+1-i}(V_1(x_o),V_2(x_o)) = 0 \text{ d'après a)}\\ &\text{et}\\ &F_{q+1-i}(V_2(x_o),V_2(x_o)) = E_{q+1-i}(V_2(x_o),V_2(x_o))-\lambda_1^{(q+1-i)}(x_o)<V_2(x_o),V_2(x_o)>\\ &\qquad\qquad = \lambda_2^{(q+1-i)}(x_o)-\lambda_1^{(q+1-i)}(x_o) = 0\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{d'après b) et d)}\end{aligned}\right.$$

et finalement (3.3.9) se ramène à

$$E_{q+1}(V_1(x_o),V_2(x_o)) = 0$$

ce qui prouve le point a) pour l'indice q+1.

2) Pour prouver b), calculons $\lambda_1^{(q+1)}(x_o)$.

Pour cela, on différentie (2.3.1) à l'ordre q+1 ; alors après produit scalaire par $V_1(x)$, on a, en x_o :

(3.3.10) $\lambda_1^{(q+1)}(x_o)=<A^{(q+1)}(x_o)V_1(x_o),V_1(x_o)>+\sum_{k=1}^{q} C_q^k<B_1^{(q+1-k)}(x_o)V_1^{(k)}(x_o),V_1(x_o)>$

En faisant exactement les mêmes calculs que pour le point a) on obtient, de manière analogue :

(3.3.11)
$$\boxed{\begin{aligned}\lambda_1^{(q+1)}(x_o)=&E_{q+1}(V_1(x_o),V_1(x_o))+\sum_{i=1}^{q} C_{q+1}^i F_{q+1-i}(V_1(x_o),V_1(x_o))<V_1^{(i)}(x_o),V_1(x_o)>\\ &+\sum_{i=1}^{q} C_{q+1}^i F_{q+1-i}(V_2(x_o),V_1(x_o))<V_1^{(i)}(x_o),V_2(x_o)>\end{aligned}}$$

Et donc, avec les propriétés a) d) et e), on a

(3.3.12) $\lambda_1^{(q+1)}(x_o) = E_{q+1}(V_1(x_o), V_1(x_o))$

On aurait pu, de manière absolument identique, introduire des expressions $E'_k(u, v)$ et $F'_k(u, v)$ en privilégiant cette fois $V_2(x)$ (c'est à dire, en utilisant l'équation $B_2(x)V_2(x) \equiv 0$). On aurait alors les définitions suivantes :

$E'_1(u,v)=<A'(x_o)u,v>=E_1(u,v)$

$F'_1(u,v)=<A'(x_o)u,v>-\lambda'_2(x_o)<u,v>=<A'(x_o)u,v>-\lambda'_1(x_o)<u,v>=F_1(u,v)$

alors, si, pour $j \le k$, $F'_j(u,v) = F_j(u,v)$ et $\lambda_1^{(j)}(x_o) = \lambda_2^{(j)}(x_o)$

$$E'_{k+1}(u,v)=<A^{(k+1)}(x_o)u,v>+\sum_{h\geq 3}\sum_{j=1}^{k} C_{k+1}^j \frac{F'_j(u,V_h(x_o))<B_2^{k+1-j}(x_o)v,V_h(x_o)>}{\lambda_2(x_o)-\lambda_h(x_o)}$$

et donc $E'_{k+1}(u,v) = E_{k+1}(u,v)$ puisque $F_j(u,v)=F'_j(u,v)$, $B_2^{(k+1-j)}(x_o)=B_1^{(k+1-j)}(x_o)$, $\lambda_1(x_o) = \lambda_2(x_o)$;ici, $E'_{q+1}(u,v) = E_{q+1}(u,v)$, puisque $\lambda_1^{(k)}(x_o) = \lambda_2^{(k)}(x_o)$ pour $k \le q$ et, comme pour (3.3.12), on aurait eu : $\lambda_2^{(q+1)}(x_o)=E'_{q+1}(V_2(x_o),V_2(x_o))$;

alors :

(3.3.13) $\lambda_2^{(q+1)}(x_o) = E_{q+1}(V_2(x_o), V_2(x_o))$

3) La preuve de d) se fait de la manière suivante :

$$E_{q+1}(u,v)=\langle A^{(q+1)}(x_o)u,v\rangle+\sum_{h\geq 3}\left[\sum_{k=1}^{q} C_{q+1}^{k}\frac{F_k(u,V_h(x_o))}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)}\langle B_1^{(q+1-k)}(x_o)V_h(x_o),v\rangle\right]$$

mais pour $k \leq q$, $F_k(u,V_h(x_o)) = F_k(V_h(x_o),u)$; il vient donc, en exprimant $F_k(u,V_h(x_o))$

$$E_{q+1}(u,v)=\langle A^{(q+1)}(x_o)u,v\rangle+\sum_{h\geq 3}\left[\sum_{k=1}^{q} C_{q+1}^{k}\frac{\langle B_1^{(k)}(x_o)V_h(x_o),u\rangle}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)}\langle B_1^{(q+1-k)}(x_o)V_h(x_o),v\rangle\right]$$

$$+\sum_{h\geq 3}\left[\sum_{k=2}^{q} C_{q+1}^{k}\left(\sum_{\ell\geq 3}\sum_{j=1}^{k-1} C_k^j\frac{F_{k-j}(V_h(x_o),V_\ell(x_o))}{\lambda_1(x_o)-\lambda_\ell(x_o)}\langle B_1^{(j)}(x_o)V_\ell(x_o),u\rangle\right)\times\frac{\langle B_1^{(q+1-k)}(x_o)V_h(x_o),v\rangle}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)}\right]$$

(en changeant j en k-j dans la deuxième somme).

Alors, en inversant les sommations, on a :

BU LILLE

$$E_{q+1}(u,v)=\langle A^{(q+1)}(x_o)u,v\rangle+\sum_{h\geq 3}\left[\sum_{k=1}^{q} C_{q+1}^{k}\langle B_1^{(q+1-k)}(x_o)V_h(x_o),u\rangle\frac{\langle B_1^{(k)}(x_o)V_h(x_o),v\rangle}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)}\right]$$

$$+\sum_{h\geq 3}\sum_{\ell\geq 3}\left[\sum_{j=1}^{q-1}\frac{(q+1)!}{j!}\frac{\langle B_1^{(j)}(x_o)V_\ell(x_o),u\rangle}{\lambda_1(x_o)-\lambda_\ell(x_o)}\times\left(\sum_{k=j+1}^{q}\frac{F_{k-j}(V_h(x_o),V_\ell(x_o))}{(q+1-k)!(k-j)!}\frac{\langle B_1^{(q+1-k)}(x_o)V_h(x_o),v\rangle}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)}\right)\right]$$

où encore, en posant $r = q+1-k$ et $s = q+1-j$, après avoir fait apparaître $(q+1-j)!$

$$E_{q+1}(u,v)=\langle A^{(q+1)}(x_o)u,v\rangle+\sum_{\ell\geq 3}\left[\sum_{s=1}^{q} C_{q+1}^{s}\langle B_1^{(q+1-s)}(x_o)V_\ell(x_o),u\rangle\frac{\langle B^{(s)}(x_o)V_\ell(x_o),v\rangle}{\lambda_1(x_o)-\lambda_\ell(x_o)}\right]$$

$$+\sum_{h\geq 3}\sum_{\ell\geq 3}\left[\sum_{s=2}^{q} C_{q+1}^{s}\frac{\langle B_1^{(q+1-s)}V_\ell(x_o),u\rangle}{\lambda_1(x_o)-\lambda_\ell(x_o)}\times\left(\sum_{r=1}^{s-1} C_s^r F_{s-r}(V_h(x_o),V_\ell(x_o))\frac{\langle B_1^{(r)}(x_o)V_h(x_o),v\rangle}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)}\right)\right]$$

ce qui peut encore s'écrire

$$E_{q+1}(u,v)=\langle A^{q+1}(x_o)u,v\rangle+\sum_{\ell\geq 3}\left[\sum_{s=1}^{q} C_{q+1}^{s}\frac{\langle B_1^{(q+1-s)}V_\ell(x_o),u\rangle}{\lambda_1(x_o)-\lambda_\ell(x_o)}F_s(V_\ell(x_o),v)\right]$$

$$= E_{q+1}(v,u)$$

et d) est démontré.

4) Il nous reste donc à prouver c) ; en différentiant à l'ordre (q+1) la relation (2.3.1), après produit scalaire par $V_h(x)$, pour $h \geq 3$), on a, en x_o

$$<B_1(x_o)V_1^{(q+1)}(x_o),V_h(x_o)>=(\lambda_h(x_o)-\lambda_1(x_o))<V_1^{(q+1)}(x_o),V_h(x_o)>$$

(car $A(x_o)V_h(x_o)=\lambda_h(x_o)V_h(x_o)$)

$$= -[\sum_{k=o}^{q} C_{q+1}^{k} <B_1^{(q+1-k)}(x_o)V_1^{(k)}(x_o),V_h(x_o)]$$

En décomposant $V_1^{(k)}(x_o)$, compte-tenu que $\lambda_1(x_o) \neq \lambda_h(x_o)$, on a :

$$<V^{(q+1)}(x_o),V_h(x_o)>=\frac{1}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)}[\sum_{k=1}^{q} C_{q+1}^{k}(\sum_{\ell\geq 3}<B_1^{(q+1-k)}(x_o)V_h(x_o),V_\ell(x_o)><V_1^{(k)}(x_o),V_\ell(x_o)>$$
$$+ <A^{(q+1)}(x_o)V_1(x_o),V_h(x_o)>]$$
$$+\frac{1}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)}[\sum_{k=1}^{q} C_{q+1}^{k}(<B_1^{(q+1-k)}(x_o)V_h(x_o),V_1(x_o)><V_1^{(k)}(x_o),V_1(x_o)>$$
$$+<B_1^{(q+1-k)}(x_o)V_h(x_o),V_2(x_o)><V_1^{(k)}(x_o),V_2(x_o)>)]$$

d'où, d'après c) pour $k \leq q$:

$$(3.3.14)\left\{\begin{aligned}
&<V_1^{(q+1)}(x_o),V_h(x_o)>=\frac{1}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)}[<A^{q+1}(x_o)V_1(x_o),V_h(x_o)>\\
&\qquad+\sum_{\ell\geq 3}(\sum_{k=1}^{q} C_{q+1}^{k}\frac{<B_1^{(q+1-k)}(x_o)V_h(x_o),V_\ell(x_o)>F_k(V_1(x_o),V_\ell(x_o))}{\lambda_1(x_o)-\lambda_\ell(x_o)})]\\
&+\frac{1}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)}[\sum_{k=1}^{q} C_{q+1}^{k}(<B_1^{(q+1-k)}(x_o)V_1(x_o),V_h(x_o)><V_1^{(k)}(x_o)V_1(x_o)>\\
&\quad+\sum_{\ell\geq 3}<B_1^{(q+1-k)}(x_o)V_\ell(x_o),V_h(x_o)>(\sum_{j=1}^{k-1} C_k^j\frac{F_j(V_1(x_o),V_\ell(x_o))<V_1^{(k-j)}(x_o),V_1(x_o)>}{\lambda_1(x_o)-\lambda_\ell(x_o)}))]\\
&+\frac{1}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)}[\sum_{k=1}^{q} C_{q+1}^{k}(<B_1^{(q+1-k)}(x_o)V_2(x_o),V_h(x_o)><V_1^{(k)}(x_o),V_2(x_o)>\\
&\quad+\sum_{\ell\geq 3}<B_1^{(q+1-k)}(x_o)V_\ell(x_o),V_h(x_o)>(\sum_{j=1}^{k-1} C_k^j\frac{F_j(V_2(x_o),V_\ell(x_o))<V_1^{(k-j)}(x_o),V_2(x_o)>}{\lambda_1(x_o)-\lambda_\ell(x_o)}))]
\end{aligned}\right.$$

Dans le premier crochet, on reconnaît $E_{q+1}(V_1(x_o),V_h(x_o))=F_{q+1}(V_1(x_o),V_h(x_o))$ puisque $V_1(x_o) \perp V_h(x_o)$.

Par un calcul identique à celui effectué en 1), on montre facilement que, dans le reste de l'expression, les coefficients de $<V_1^{(i)}(x_o),V_1(x_o)>$ et $<V_1^{(i)}(x_o),V_2(x_o)>$, pour i = 1 à q sont respectivement $C^i_{q+1}[F_{q+1-i}(V_1(x_o),V_h(x_o))]$ et $C^i_{q+1}[F_{q+1-i}(V_2(x_o), V_h(x_o))]$.

En reportant dans (3.3.14), on obtient bien c) pour l'indice q+1, et la proposition est démontrée.

Les propriétés de la proposition (3.1) étant vraies pour k = 1, tant que $\lambda_1^{(k)}(x_o) = \lambda_2^{(k)}(x_o)$, le point a) est donc vrai pour l'indice k+1.

Finalement la condition $E_{q+1}(V_1(x_o),V_2(x_o)) = 0$ est une condition que doivent nécessairement vérifier $V_1(x_o)$ et $V_2(x_o)$ si $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$ ont leurs q premières dérivées confondues en x_o.

b) <u>Formulation des (H_k), $k \geq 1$</u>

Si maintenant on ne suppose plus rien quant à l'existence de "fonctions éléments propres" au moins continues, il reste toujours possible de construire les expressions $E_k(u,v)$, pour u et v dans $\mathbb{R}^N$; on pose encore :

$$E_1(u, v) = \langle A'(x_o)\, u, v\rangle$$

Soit (u_1, u_2) une base orthonormée de M_o. On a vu (chapitre 2) que (H_1) n'est pas vérifiée si et seulement si $E_1(u_1, u_2) = E_1(u_1, u_1) - E_1(u_2, u_2) = 0$.

On pose alors $F_1(u, v) = E_1(u, v) - E_1(u_1,u_1)\, \langle u,v\rangle$ et

$$E_2(u,v) = \langle A''(x_o)u,v\rangle + 2 \sum_{h\geq 3} \frac{\langle B'_1(x_o)u,v_h\rangle F_1(v,v_h)}{\lambda_o-\lambda_h}$$

avec $\begin{cases} *(u_1, u_2, v_3, \ldots, v_N) \text{ base orthonormée de vecteurs propres de } A(x_o) \text{ où} \\ v_h, \text{ pour } h \geq 3, \text{ est associé à une valeur propre } \lambda_h \text{ simple} \\ *B'_1(x_o) = A'(x_o) - E_1(u_1, u_1)I_N \end{cases}$

et la condition (H_2) :

$$\left[\begin{array}{l} * \text{ A de classe } C^2 \text{ dans un voisinage U de } x_o \\ * \ (H_1) \text{ n'est pas vérifiée} \\ * \text{ il existe une unique base orthonormée } (v_1,v_2) \text{ de } M_o \text{ telle que} \\ \qquad\qquad E_2(v_1,v_2) = 0 \end{array}\right.$$

Remarque : $E_2(u,v)$ est une forme bilinéaire symétrique :

- bilinéaire : trivial de par son expression
- symétrique : il suffit de remarquer que dans la démonstration du d) de la proposition 3.1, on n'a pas utilisé le fait que les éléments propres étaient C^{q+1}, mais simplement un travail sur les indices de sommation. On peut donc prouver la même chose avec la nouvelle expression de $E_2(u, v)$.

On cherche donc à quelle condition (H_2) est vérifiée. Pour cela, on procède comme pour (H_1) :

Si (u_1, u_2) est une base orhtonormée de M_o, fixée. (v, w) est une autre base de M_o avec :

$$\begin{cases} v = au_1 + bu_2 \\ w = bu_1 - au_2 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

alors, compte-tenu de la remarque précédente, on a :

$$(3.3.15) \quad E_2(v,w)=ab(E_2(u_1,u_1)-E_2(u_2,u_2))+(b^2-a^2)E_2(u_1,u_2)$$

et en recommençant exactement le travail fait en chapitre 2 § 3c., on en déduit que (H_2) n'est pas vérifiée dans le seul cas où

$$E_2(u_1,u_2) = E_2(u_1,u_1) - E_2(u_2,u_2) = 0$$

Dans ce cas, on pose $F_2(u,v) = E_2(u,v) - E_2(u_1,u_1) <u,v>$

et $B''_1(x_o) = A''(x_o) - E_2(u_1,u_1)I_N$

et on définit $E_3(u,v)$

Plus généralement, on a :

$$(3.3.16) \quad \boxed{E_q(u,v)=<A^{(q)}(x_o)u,v>+ \sum_{h\geq 3} \sum_{k=1}^{q-1} C_q^k \frac{F_{q-k}(u,v_h)<B_1^{(k)}(x_o)v,v_h>}{\lambda_o-\lambda_h}]}$$

et la condition (H_q) s'énonce comme suit :

$$(H_k)\quad \left[\begin{array}{l} * \ A \ \text{ de classe } C^q \text{ dans } U \\ * \text{ les condition } (H_k), \text{ pour } k \leq q-1, \text{ ne sont pas vérifiées.} \\ \quad (\text{autrement dit, pour } k \leq q-1,\ E_k(u_1,u_1)-E_k(u_2,u_2) = E_k(u_1,u_2) = 0 \\ * \text{ il existe une unique base } (v_1,\ v_2) \text{ orthonormée de } M_o \text{ telle que} \\ \qquad\qquad E_q(v_1,\ v_2) = 0 \end{array}\right.$$

$E_q(u,v)$ étant toujours une forme bilinéaire symétrique, la remarque faite pour (H_2) tient toujours ; (H_q) sera vérifiée si et seulement si $E_q(u_1,u_2) \neq 0$ ou $E_q(u_1,u_1) \neq E_q(u_2,u_2)$; de plus, on pourra construire la base $(v_1,\ v_2)$ comme en chapitre 2, §3.c.

Si tel n'est pas le cas, comme précédemment, on pose :

$$\left\{\begin{array}{l} * \ F_q(u,v) = E_q(u,v) - E_q(u_1,u_1) \langle u,v\rangle \\ * \ B_1^{(q)}(x_o) = A^{(q)}(x_o) - E_q(u_1,u_1) I_N \end{array}\right.$$

On construit alors E_{q+1} comme en (3.3.16) et l'on peut formuler (H_{q+1}).

<u>Remarque importante</u> :

Contrairement aux notations du début de ce paragraphe, $B_1^{(q)}(x_o)$ n'est *plus* la q-ième dérivée de $B_1(x)$ en x_o, mais simplement la matrice $A^{(q)}(x_o) - E_q(u_1,u_1)I_N$ (on ne sait pas a priori que $E_q(u_1,u_1) = \lambda_1^{(q)}(x_o)$)

4 - EXISTENCE DE FONCTIONS CONTINUES REPRÉSENTANT LES ELÉMENTS PROPRES

Dans ce paragraphe, nous aurons pour but de prouver que la proposition 2.1 du chapitre 2, vraie pour (H_1), est encore vérifiée pour la condition (H_p), pour tout $p \geq 2$. La démonstration, quoique dans le même esprit, est beaucoup plus délicate. Celle-ci sera scindée en deux parties assez techniques dont découlera immédiatement le résultat escompté.

Le lemme suivant nous renforcera dans l'idée qu'il y a identité entre les dérivées successives des valeurs propres et les expressions $E_k(v_1,v_1)$

Lemme 3.2

Soit $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *une suite de limite* x_o*, telle que* $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq x_o$ *et telle qu'on ait une suite* $\{v^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *de vecteurs propres normés de* $A(x_n)$*, convergente, de limite* $v_1 \in M_o$.

Alors, pour $q \geq 0$*, on a, en convenant que* $\sum_{k=1}^{o} [\ ] = 0$:

Si $A\ C^{q+1}$*, si* (H_q) *n'est pas vérifiée,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda^n-\lambda_o - \sum_{k=1}^{q} \frac{(x_n-x_o)^k}{k!} E_k(v_1,v_1)}{(x_n-x_o)^{q+1}} = \frac{E_{q+1}(v_1,v_1)}{(q+1)!}$$

où $\lambda^n = \langle A(x_n)v^n,v^n\rangle$.

Démonstration :

Elle se fait par récurrence sur q.

(i) Cette propriété est vraie pour $q = 0$

On a $\langle (A(x_n)-A(x_o))v^n,v_1\rangle = (\lambda^n-\lambda_o)\ \langle v^n,v_1\rangle$

alors si on divise par x_n-x_o, puisque $\langle v^n,v_1\rangle$ a pour limite 1 et que A est C^1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^n-\lambda_o}{x_n-x_o} = \lim_{n\to\infty}\Big[\Big\langle \frac{(A(x_n)-A(x_o))}{x_n-x_o}\, v^n,v_1\Big\rangle \times \frac{1}{\langle v^n,v_1\rangle}\Big] = \langle A'(x_o)v_1,v_1\rangle = E_1(v_1,v_1)$$

(ii) on suppose alors cette propriété vraie pour $k \leq q$

Soit $v_2 \in M_o$ tel que (v_1, v_2) forme une base orthonormée de M_o.

Soient $v_3, \ldots, v_N$ les vecteurs propres normés de $A(x_o)$ associés aux valeurs propres simples. $(v_1, v_2, \ldots, v_N)$ est alors une base orthonormée de $\mathbb{R}^N$ et on peut écrire

$$v^n = \alpha_1^n v_1 + \alpha_2^n v_2 + \sum_{h\geq 3} \alpha_h^n v_h \text{ avec } \lim_{n\to\infty} \alpha_h^n = \delta_{1h} \text{ et } \alpha_h^n = <v^n, v_h>, h \in P_N$$

on a alors, en posant :

$$\lambda^n - \lambda_o - \sum_{k=1}^{q} \frac{(x_n - x_o)^k}{k!} E_k(v_1, v_1) = X^n$$

$$X^n = \frac{1}{\alpha_1^n} <(A(x_n) - A(x_o))v^n, v_1> - \sum_{k=1}^{q} \frac{(x_n-x_o)^k}{k!} E_k(v_1, v_1) \quad \text{(d'après (i))}$$

$$= \frac{1}{\alpha_1^n} <(A(x_n) - A(x_o) - \sum_{k=1}^{q} \frac{(x_n-x_o)^k}{k!} A^{(k)}(x_o))v^n, v_1> + \frac{1}{\alpha_1^n} \sum_{k=1}^{q} \frac{(x_n-x_o)^k}{k!} <A^{(k)}(x_o)v^n, v_1>$$
$$- \sum_{k=1}^{q} \frac{(x_n-x_o)^k}{k!} E_k(v_1, v_1)$$

en posant $u^n = \frac{1}{\alpha_1^n} <(A(x_n) - A(x_o) - \sum_{k=1}^{q} \frac{(x_n-x_o)^k}{k!} A^{(k)}(x_o)v^n, v_1>$ avec

$\lim_{n\to\infty} \frac{u^n}{(x_n-x_o)^{q+1}} = <A^{(q+1)}(x_o)v_1, v_1>$ et en faisant apparaître les quantités

$E_k(v^n, v_1)$ dont le premier terme est $<A^{(k)}(x_o)\, v^n, v_1>$, on a, en vertu de la symétrie de E_k :

$$\text{(3.4.1)} \quad X^n = u^n + \frac{1}{\alpha_1^n} \sum_{k=1}^{q} \frac{(x_n-x_o)^k}{k!} E_k(v^n, v_1) - \frac{1}{\alpha_1^n} \sum_{k=2}^{q} \frac{(x_n-x_o)^k}{k!} [\sum_{h\geq 3} (\sum_{j=1}^{k-1} C_k^j \frac{F_j(v_1, v_h)}{\lambda_o - \lambda_h} <B_1^{(k-j)}(x_o)v^n, v_h>)]$$
$$- \sum_{k=1}^{q} \frac{(x_n-x_o)^k}{k!} E_k(v_1, v_1)$$

que l'on peut encore écrire, en décomposant v^n dans $E_k(v^n, v_1)$, et en remarquant que pour $h \geq 3$, puisque v_1 et v_h sont orthogonaux, $F_j(v_1, v_h) = E_j(v_1, v_h)$:

$$\text{(3.4.2)} \quad X^n = u^n + \frac{\alpha_2^n}{\alpha_1^n} \sum_{k=1}^{q} \frac{(x_n-x_o)^k}{k!} E_k(v_2, v_1) + \frac{1}{\alpha_1^n} \sum_{h\geq 3} \alpha_h^n (\sum_{k=1}^{q} \frac{(x_n-x_o)^k}{k!} E_k(v_h, v_1))$$
$$- \frac{1}{\alpha_1^n} \sum_{k=2}^{q} \frac{(x_n-x_o)^k}{k!} [\sum_{k\geq 3} (\sum_{j=1}^{k-1} C_k^j \frac{E_j(V_1, V_h)}{\lambda_o - \lambda_h} <B_1^{(k-j)}(x_o)v^n, v_h>)]$$

alors, en inversant les sommations sur k et j dans le dernier tèrme et en séparant $B_1^{(r)}(x_o)$ en $A^{(r)}(x_o) - E_r(v_1,v_1)$, on obtient :

$$X^n=u^n+\frac{\alpha_2^n}{\alpha_1^n}\sum_{k=1}^{q}\frac{(x_n-x_o)^k}{k!}E_k(v_2,v_1)+\frac{1}{\alpha_1^n}\sum_{h\geq 3}\Big(\sum_{k=1}^{q}\frac{(x_n-x_o)^k}{k!}E_k(v_h,v_1)\Big)\alpha_h^n$$

$$-\frac{1}{\alpha_1^n}\sum_{h\geq 3}\Big[\sum_{j=1}^{q-1}\frac{(x_n-x_o)^j}{j!}\frac{E_j(v_1,v_h)}{\lambda_o-\lambda_h}\Big(\sum_{k=j+1}^{q}\frac{(x_n-x_o)^{k-j}}{(k-j)!}<A^{(k-j)}(x_o)v^n,v_h>\Big)\Big]$$

$$+\frac{1}{\alpha_1^n}\sum_{h\geq 3}\Big[\sum_{j=1}^{q-1}\frac{(x_n-x_o)^j}{j!}\frac{E_j(v_1,v_h)}{\lambda_o-\lambda_h}\Big(\sum_{k=j+1}^{q}\frac{(x_n-x_o)^{k-j}}{(k-j)!}E_{k-j}(v_1,v_1)\Big]\alpha_h^n$$

mais $\alpha_n^h=<v^n,v_h>=\dfrac{<(A(x_n)-A(x_o))v^n,v_h>}{\lambda^n-\lambda_h}$

alors, en posant $r = k-j$, et en faisant apparaître $\dfrac{\lambda_o-\lambda^n}{(\lambda_o-\lambda_h)(\lambda^n-\lambda_h)}=\dfrac{1}{\lambda^n-\lambda_h}-\dfrac{1}{\lambda_o-\lambda_h}$:

$$X^n=u^n+\frac{\alpha_2^n}{\alpha_1^n}\sum_{k=1}^{q}\frac{(x_n-x_o)^k}{k!}E_k(v_2,v_1)+\frac{1}{\alpha_1^n}\sum_{h\geq 3}\Big[\frac{(x_n-x_o)^q}{q!}E_q(v_h,v_1)\frac{<(A(x_n)-A(x_o))v_h,v^n>}{\lambda^n-\lambda_h}\Big] \tag{3.4.3}$$

$$+\frac{1}{\alpha_1^n}\sum_{h\geq 3}\Big[\sum_{j=1}^{q-1}\frac{(x_n-x_o)^j}{j!}\frac{E_j(v_1,v_h)}{\lambda_o-\lambda_h}\sum_{r=1}^{q-j}\frac{(x_n-x_o)^r}{r!}E_r(v_1,v_1)\Big]\frac{<(A(x_n)-A(x_o))v^n,v_h>}{\lambda^n-\lambda_h}$$

$$+\frac{1}{\alpha_1^n}\sum_{h\geq 3}\sum_{k=1}^{q-1}\frac{(x_n-x_o)^k}{k!}\frac{E_k(v_h,v_1)}{\lambda_o-\lambda_h}<(A(x_n)-A(x_o))v^n,v_h>$$

$$+\frac{1}{\alpha_1^n}\sum_{h\geq 3}\sum_{k=1}^{q-1}\frac{(x_n-x_o)^k}{k!}E_k(v_h,v_1)\frac{(\lambda_o-\lambda^n)}{(\lambda_o-\lambda_h)(\lambda^n-\lambda_h)}<(A(x_n)-A(x_o))v^n,v_h>)$$

$$-\frac{1}{\alpha_1^n}\sum_{h\geq 3}\Big(\sum_{j=1}^{q-1}\frac{(x_n-x_o)^j}{j!}\frac{E_j(v_1,v_h)}{\lambda_o-\lambda_h}\Big(\sum_{r=1}^{q-j}\frac{(x_n-x_o)^r}{r!}<A^{(r)}(x_o)v^n,v_h>\Big)\Big)$$

BU LILLE

Alors, en regroupant correctement les termes, il vient

$$(3.4.4)\quad \boxed{\begin{aligned} X^n &= u^n + \frac{\alpha_2^n}{\alpha_1^n}\sum_{k=1}^{q}\frac{(x_n-x_o)^k}{k!}\,E_k(v_2,v_1) \\ &\quad + \frac{1}{\alpha_1^n}\sum_{h\geq 3}\frac{(x_n-x_o)^q}{q!}\,E_q(v_h,v_1)\,\frac{<(A(x_n)-A(x_o))v^n,v_h>}{\lambda^n-\lambda_h} \\ &\quad + \frac{1}{\alpha_1^n}\sum_{h\geq 3}\Big[\sum_{j=1}^{q-1}\frac{(x_n-x_o)^j}{j!}\,\frac{E_j(v_1,v_h)}{\lambda_o-\lambda_h}\Big(<\Big(A(x_n)-A(x_o)-\sum_{r=1}^{q-j}\frac{(x_n-x_o)^r}{r!}\,A^{(r)}(x_o)\Big)v^n,v_h>\Big)\Big] \\ &\quad - \frac{1}{\alpha_1^n}\sum_{h\geq 3}\Big[\sum_{j=1}^{q-1}\frac{(x_n-x_o)^j}{j!}\,\frac{E_j(v_1,v_h)}{\lambda_o-\lambda_h}\Big(\lambda^n-\lambda_o-\sum_{r=1}^{q-j}\frac{(x_n-x_o)^r}{r!}\,E_r(v_1,v_1)\Big)\Big]\,\alpha_h^n \end{aligned}}$$

Si maintenant on suppose que A est C^{q+1} et que (H_1), ..., (H_q) ne sont pas vérifiées, on sait que $E_k(v, w) = 0$ pour toute base orthonormée (v, w) de M_o, et pour $k \leq q$ (cf paragraphe précédent).

Alors $\displaystyle\frac{\alpha_2^n}{\alpha_1^n}\sum_{k=1}^{q}\frac{(x_n-x_o)^k}{k!}\,E_k(v_2,v_1) = 0.$

Mais puisque la propriété à démontrer est vraie pour $k \leq q$, on a, comme $\alpha_h^n \to 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{X^n}{(x_n-x_o)^{q+1}} &= \frac{<A^{(q+1)}(x_o)v_1,v_1>}{(q+1)!} + \sum_{h\geq 3}\frac{1}{q!}\,\frac{E_q(v_h,v_1)<A'(x_o)v_1,v_h>}{\lambda_o-\lambda_h} \\ &\quad + \sum_{h\geq 3}\Big[\sum_{j=1}^{q-1}\frac{1}{j!}\,\frac{E_j(v_1,v_h)}{\lambda_o-\lambda_h}\,\frac{<A^{(q+1-j)}(x_o)v_1,v_h>}{(q+1-j)!}\Big] \\ &= \frac{1}{(q+1)!}\Big[<A^{(q+1)}(x_o)v_1,v_1>+\sum_{h\geq 3}\Big(\sum_{j=1}^{q}C_{q+1}^{j}\,\frac{E_j(v_1,v_h)<A^{(q+1-j)}(x_o)v_1,v_h>}{\lambda_o-\lambda_h}\Big)\Big] \\ &= \frac{1}{(q+1)!}\;E_{q+1}(v_1,v_1) \end{aligned}$$

q.e.d.

Le lemme 3.2 va nous permettre de démontrer la proposition suivante :

Proposition 3.3 :

Avec les mêmes hypothèses que celles du lemme 3.2, si v_2 *forme, avec* v_1, *une base orthonormée de* M_o, *si* A *est de classe* C^{q+1} *et si* (H_1), ..., (H_q) *ne sont pas vérifiées, alors,*

$$E_{q+1}(v_1, v_2) = 0$$

<u>Démonstration</u> :

Par récurrence sur q.

Comme pour le lemme 3.2, on pose

$$v^n = \alpha_1^n v_1 + \alpha_2^n v_2 + \sum_{h\geq 3} \alpha_h^n v_h \text{ avec } \lim_{n\to\infty} \alpha_h^n = \delta_{1h}$$

Considérons le vecteur $w^n = \alpha_1^n v_2 - \alpha_2^n v_1$ (cf proposition 2.1)

Soit alors T_q^n la quantité suivante :

(3.4.5)
$$\boxed{\begin{aligned} T_q^n = {} & <(A(x_n)-A(x_o)-\sum_{k=1}^{q} \frac{(x_n-x_o)^k}{k!} A^{(k)}(x_o))\, v^n,\, w^n> \\ & + \sum_{k=1}^{q} \frac{(x_n-x_o)^k}{k!} \Big[\sum_{h\geq 3} \frac{F_k(w^n,v_h)}{\lambda^n-\lambda_h} <(A(x_n)-A(x_o)-\sum_{j=1}^{q-k} \frac{(x_n-x_o)^j}{j!} A^{(j)}(x_o))v_h, v^n> \Big] \end{aligned}}$$

BU LILLE

Puisque $\lim_{n\to+\infty} v^n = v_1$ et $\lim_{n\to+\infty} w^n = v_2$, comme A est de classe C^{q+1}, on a

(3.4.6)
$$\lim_{n\to+\infty} T_q^n = \frac{E_{q+1}(v_1,v_2)}{(q+1)!} \qquad \text{(car } v_1 \text{ et } v_2 \text{ sont orthogonaux)}$$

Nous allons rechercher une autre expression de la quantité T_q^n. Pour cela nous allons poser $T_q^n = \sum_{r=o}^{q} \frac{(x_n-x_o)^r}{r!} a_r$ et calculer les coefficients a_r :

* <u>calcul de a_o</u> : $a_o = <(A(x_n)-A(x_o))v^n, w^n>$

* <u>calcul de a_1</u> : $a_1 = -<A'(x_o)v^n,w^n> + \sum_{h\geq 3} \frac{F_1(w^n,v_h)}{\lambda^n-\lambda_h} <(A(x_n)-A(x_o))v_h,v^n>$

d'où, en décomposant v^n :

$$a_1 = -(\alpha_1^n<A'(x_o)v_1,w^n> + \alpha_2^n<A'(x_o)v_2,w^n>) - \sum_{h\geq 3} \alpha_h^n<A'(x_o)v_h,w^n>$$
$$+ \sum_{h\geq 3} F_1(w^n, v_h) \frac{<(A(x_n)-A(x_o))v_h,v^n>}{\lambda^n-\lambda_h}$$

mais comme $F_1(w^n, v_h) = <A'(x_o)w^n,v_h>$ (car $w^n \perp v_h$)

et $\frac{<(A(x_n)-A(x_o))v_h,v^n>}{\lambda^n-\lambda_h} = <v_h,v^n> = \alpha_h^n$

$$a_1 = -(\alpha_1^n<A'(x_o)v_1,w^n>+\alpha_2^n<A'(x_o)v_2,w^n>) = -(\alpha_1^n E_1(v_1,w^n)+\alpha_2^n E_1(v_2,w^n))$$

* calcul de a_r pour $2 \le r \le q$

$$a_r = -<A^{(r)}(x_o)v^n,w^n> + \sum_{h\geq 3} F_r(w^n,v_h)\,\frac{<(A(x_n)-A(x_o))v^n,v_h>}{\lambda^n-\lambda_h}$$
$$-\sum_{k=1}^{r-1} C_r^k\,[\sum_{h\geq 3}\frac{F_k(w^n,v_h)}{\lambda^n-\lambda_h}<A^{(r-k)}(x_o)v^n,v_h>]$$

alors, en faisant apparaître $E_r(v^n,w^n)$:

$$a_r = -E_r(v^n,w^n) + \sum_{k=1}^{r-1} C_r^k\,[\sum_{h\geq 3}\frac{F_k(w^n,v_h)}{\lambda_o-\lambda_h}<B_1^{(r-k)}(x_o)v_h,v^n>]$$
$$+\sum_{h\geq 3}\alpha_h^n\,F_r(w^n,v_h) - \sum_{k=1}^{r-1} C_r^k\,[\sum_{h\geq 3}\frac{F_k(w^n,v_h)}{\lambda^n-\lambda_h}<A^{(r-k)}(x_o)v^n,v_h>]$$

$$(\text{car } \alpha_h^n = \frac{<(A(x_n)-A(x_o))v^n,v_h>}{\lambda^n-\lambda_h})$$

mais, pour $h \geq 3$, $F_k(w^n,v_h) = E_k(w^n,v_h)$ car $w^n \perp v_h$.

en décomposant v^n on a donc, puisque E_r est symétrique :

$$a_r = -(\alpha_1^n E_r(v_1,w^n)+\alpha_2^n E_r(v_2,w^n)) - \sum_{k=1}^{r-1} C_r^k\,[\sum_{h\geq 3}\frac{E_k(w^n,v_h)}{\lambda_o-\lambda_h}\,\alpha_h^n\,E_{r-k}(v_1,v_1)]$$
$$+\sum_{k=1}^{r-1} C_r^k[\sum_{h\geq 3}\frac{E_k(w^n,v_h)}{\lambda_o-\lambda_h}<A^{(r-k)}(x_o)v_h,v^n>] - \sum_{k=1}^{r-1} C_r^k[\sum_{h\geq 3}\frac{E_k(w^n,v_h)}{\lambda^n-\lambda_h}<A^{(r-k)}(x_o)v_h,v^n>]$$

(en décomposant $B_1^{(r-k)}(x_o) = A^{(r-k)}(x_o)-E_{r-k}(v_1,v_1)I_N$)

alors, en regroupant les deux derniers termes, il vient :

$$a_r=-(\alpha_1^n E_r(v_1,w^n)+\alpha_2^n E_r(v_2,w^n))-\sum_{k=1}^{r-1} C_r^k[\sum_{h\geq 3}\alpha_h^n\,\frac{E_k(w^n,v_h)}{\lambda_o-\lambda_h}\,E_{r-k}(v_1,v_1)]$$
(3.4.7)
$$+(\lambda^n-\lambda_o)\sum_{k=1}^{r-1} C_r^k\,[\sum_{h\geq 3}\frac{E_k(w^n,v_h)}{\lambda^n-\lambda_h}\,\frac{<A^{(r-k)}(x_o)v_h,v^n>}{\lambda_o-\lambda_h}]$$

Et finalement T_q^n s'écrit :

$$T_q^n=\sum_{r=o}^{q}\frac{(x_n-x_o)^r}{r!}\,a_r=<(A(x_n)-A(x_o))v^n,w^n>-\sum_{r=1}^{q}[\alpha_1^n E_r(v_1,w^n)+\alpha_2^n E_r(v_2,w^n)]\,\frac{(x_n-x_o)^r}{r!}$$
$$+(\lambda^n-\lambda_o)\sum_{r=2}^{q}\frac{(x_n-x_o)^r}{r!}\,[\sum_{k=1}^{r-1} C_r^k(\sum_{h\geq 3}\frac{E_k(w^n,v_h)}{\lambda^n-\lambda_h}\,\frac{<A^{(r-k)}(x_o)v_h,v^n>}{\lambda_o-\lambda_h})]$$
$$-\sum_{r=2}^{q}\frac{(x_n-x_o)^r}{r!}\,[\sum_{k=1}^{r-1} C_r^k(\sum_{h\geq 3}\alpha_h^n\,\frac{E_k(w^n,v_h)}{\lambda_o-\lambda_h}\,E_{r-k}(v_1,v_1))]$$

Ce qui peut encore s'écrire, en inversant les sommations sur r et k, et en posant j = r-k

$$T_q^n=<(A(x_n)-A(x_o)v^n,w^n>-\sum_{r=1}^{q}[\alpha_1^nE_r(v_1,w^n)+\alpha_2^nE_r(v_2,w^n)]\frac{(x_n-x_o)^r}{r!}$$

$$+(\lambda^n-\lambda_o)\sum_{h\geq 3}[\sum_{k=1}^{q-1}\frac{(x_n-x_o)^k}{k!}\frac{E_k(w^n,v_h)}{\lambda_o-\lambda_h}(\sum_{j=1}^{q-k}\frac{(x_n-x_o)^j}{j!}\frac{<A^{(j)}(x_o)v_h,v^n>}{\lambda^n-\lambda_h})]$$

$$-\sum_{h\geq 3}\frac{\alpha_n^n}{\lambda_o-\lambda_h}[\sum_{k=1}^{q-1}\frac{(x_n-x_o)^k}{k!}E_k(w^n,v_h)(\sum_{j=1}^{q-k}\frac{(x_n-x_o)^j}{j!}E_j(v_1,v_1))]$$

On peut maintenant ajouter et retrancher à T_q^n la quantité :

$$(\lambda^n-\lambda_o)\sum_{h\geq 3}[\sum_{k=1}^{q-1}\frac{(x_n-x_o)^k}{k!}\frac{E_k(w^n,v_h)}{\lambda_o-\lambda_h}\frac{<(A(x_n)-A(x_o))v_h,v^n>}{\lambda^n-\lambda_h}]$$

$$=\sum_{h\geq 3}\frac{\alpha_h^n}{\lambda_o-\lambda_h}[\sum_{k=1}^{q-1}\frac{(x_n-x_n)^k}{k!}E_k(w^n,v_h)(\lambda^n-\lambda_o)]$$

et on obtient, en regroupant les termes correspondants

$$\boxed{\begin{aligned}T_q^n&=<(A(x_n)-A(x_o))v^n,w^n>-\sum_{r=1}^{q}[\alpha_1^nE_r(v_1,w^n)+\alpha_2^nE_r(v_2,w_n)]\frac{(x_n-x_o)^r}{r!}\\&-(\lambda^n-\lambda_o)\sum_{h\geq 3}[\sum_{k=1}^{q-1}\frac{(x_n-x_o)^k}{k!}\frac{E_k(w^n,v_h)}{(\lambda_o-\lambda_h)(\lambda^n-\lambda_h)}<(A(x_n)-\sum_{j=o}^{q-k}\frac{(x_n-x_o)^j}{j!}A^{(j)}(x_o))v_h,v^n>]\\&+\sum_{h\geq 3}\frac{\alpha_h^n}{\lambda_o-\lambda_h}[\sum_{k=1}^{q-1}\frac{(x_n-x_o)^k}{k!}E_k(w^n,v_h)(\lambda^n-\lambda_o-\sum_{j=1}^{q-k}\frac{(x_n-x_o)^j}{j!}E_j(v_1,v_1))]\end{aligned}}\qquad(3.4.8)$$

BU LILLE

mais $<(A(x_n)-A(x_o))v^n,w^n> = (\lambda^n-\lambda_o)<v^n,w^n> = 0$

D'autre part, (H_1), ..., (H_q) ne sont pas vérifiées. D'après le paragraphe précédent, on a donc, pour $r \leq q$, $E_r(v_1, v_2) = E_r(v_1, v_1) - E_r(v_2, v_2) = 0$, (v_1, v_2) formant une base orthonormée de M_o.

Alors on a, en vertu de la symétrie des formes linéaires E_k

$$\alpha_1^nE_r(v_1,w^n)+\alpha_2^nE_r(v_2,w^n)=[(\alpha_1^n)^2-(\alpha_2^n)^2]E_r(v_1,v_2)+(\alpha_1^n.\alpha_2^n)[E_r(v_2,v_2)-E_r(v_1,v_1)]$$

$$= 0 \text{ pour } r = 1, 2, ..., q$$

Les deux premiers termes de l'expression (3.4.8) de T_q^n sont donc nuls.

Comme A est de classe C^{q+1} et que, de ce fait, les hypothèses du lemme 3.2 sont vérifiées, il résulte de l'expression (3.4.8) que :

$$\lim_{n\to+\infty} T_q^n = 0 \qquad \text{(puisque } \lambda^n-\lambda_o \to 0 \text{ et } \alpha_h^n \to 0 \text{ pour } h \geq 3)$$

autrement dit, en vertu de (3.4.6)

$$\boxed{E_{q+1}(v_1,v_2) = 0}$$

q.e.d.

Supposons maintenant que la condition (H_p) soit vérifiée $(p \geq 2)$ c'est à dire :

- A est de classe C^p dans un voisinage U de x_o
- les conditions (H_1), ..., (H_{p-1}) ne sont pas vérifiées
- il existe une unique base orthonormée (v_1, v_2) de M_o telle que

$$E_p(v_1, v_2) = 0$$

Si v_3, ..., v_N sont les vecteurs propres normés de $A(x_o)$, associés aux valeurs propres λ_3, ..., λ_N supposées simples , on note, comme pour la proposition 2.1, F_o l'ensemble

$$F_o = \{v_1,-v_1,v_2,-v_2,v_3,-v_3, \dots, v_N,-v_N\}$$

On peut alors énoncer la proposition suivante :

<u>*Proposition 3.4*</u> :

Soit $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ *une suite de limite* x_o *telle que* $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq x_o$.
Soit $\{v_n, n \in \mathbb{N}\}$ *une suite où* v^n *est un vecteur propre normé de* $A(x^n)$.
Alors, si (H_p) *est vérifiée, tout point d'accumulation de la suite* $\{v^n, n \in \mathbb{N}\}$ *est un élément de* F_o.

Démonstration :

Identique à celle de la proposition (2.1).

Si v^* est un tel point d'accumulation (il y en a toujours) et si $\tilde{v}^*$ forme avec v^* une base orthonormée de M_o, la proposition (3.3) nous dit qu'alors

$$E_p(v^*, \tilde{v}^*) = 0$$

Alors, forcément, $v^* \in \{v_1,-v_1,v_2,-v_2\}$, donc à F_o

q.e.d.

Finalement, on a le résultat suivant :

Théorème 4 :

Si (H_p) *est vérifiée, il existe* N *fonctions* $V_1(x), \ldots, V_N(x)$, *continues dans* U, *formant, pour tout* x *de* U, *une base orthonormée de* $\mathbb{R}^N$ *composée de vecteurs propres de* A(x) *et telle que*

$$V_i(x_o) = v_i \quad \textit{pour } i \in P_N$$

Démonstration :

En tout point identique à celle du théorème 2, cette démonstration ne reposant que sur la proposition 3.4.

CHAPITRE 4

DIFFERENTIABILITE, SOUS LA CONDITION (H_P), DES FONCTIONS REPRESENTANT LES ELEMENTS PROPRES

I - Introduction

Nous supposerons, dans tout ce chapitre, que, pour un certain indice p, la condition (H_p) est vérifiée. Nous pourrons alors, moyennant certaines conditions *suffisantes* sur A, prouver la différentiabilité en x_o des fonctions $\lambda_i(x)$ et $V_i(x)$, pour i dans P_N, jusqu'à un certain ordre. Malheureusement, les choses ne se passent pas aussi bien pour le cas général que pour celui de (H_1). Néanmoins, à la base de la plupart des résultats se retrouvent les idées et les techniques déjà utilisées pour (H_1) ; en particulier, nous essayerons toujours de faire intervenir les développements de Taylor des fonctions à dériver (ou plutôt ce que nous appellerons des "développements de type Taylor", comme nous le verrons au paragraphe suivant).

2 - DÉFINITIONS PRÉALABLES ET AVERTISSEMENT

a) Développement de type Taylor

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$

Définition :

On dira que f *admet un développement de type Taylor (DTT) à l'ordre* q *en un point* x_o *de* $\mathbb{R}$ *si il existe* q+1 *vecteurs* $f_o, f_1, \ldots, f_q$ *de* $\mathbb{R}^m$ *tels que :*

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - \sum_{k=o}^{q-1} \frac{(x-x_o)^k}{k!} f_k}{(x-x_o)^q} = \frac{1}{q!} f_q \quad (\Longleftrightarrow \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - \sum_{k=o}^{q} \frac{(x-x_o)^k}{k!} f_k}{(x-x_o)^q} = 0)$$

Ce développement, noté $DTT_q(f)(x_o)$, *sera l'expression :*

$$DTT_q(f)(x_o) = \sum_{k=o}^{q} \frac{(x-x_o)^k}{k!} f_k$$

Quelques remarques :

i) Si f admet un DTT à l'ordre q en x_o, celui-ci est bien évidemment unique.

ii) Si f est de classe C^q en x_o, elle y admet un DTT à l'ordre q qui coïncide alors avec son véritable développement de Taylor en ce point :

$$DTT_q(f)(x_o) = \sum_{k=o}^{q} \frac{(x-x_o)^k}{k!} f^{(k)}(x_o)$$

iii) Si f admet en x_o un DTT à l'ordre q, elle y admet de manière triviale un DTT à tout ordre r inférieur ou égal à q : en effet

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - \sum_{k=o}^{r-1} \frac{(x-x_o)^k}{k!} f_k}{(x-x_o)^r} = \frac{1}{r!} f_r$$

b) Avertissement

Pour démontrer la différentiabilité des fonctions représentant les éléments propres à un ordre donné, nous prouverons au préalable que celles-ci admettent des DTT à tout ordre, si tant est que la matrice A soit suffisamment dérivable. C'était d'ailleurs la technique utilisée dans le cas de (H_1) [19]. Mais dans ce cas précis, nous avions pu établir que la fonction V_1 était de classe C^{q+1} si le rapport $\dfrac{V_1(x)-\sum\limits_{k=o}^{q}\dfrac{(x-x_o)^k}{k!}V_1^{(k)}(x_o)}{(x-x_o)^{q+1}}$ avait une limite, autrement dit, si V_1 admettait un DTT au même ordre q+1. Nous avions donc ainsi une condition *nécessaire et suffisante* pour que V_1 soit de classe C^{q+1} (car si V_1 est de classe C^{q+1}, le rapport ci-dessus a bien sûr une limite).

Dans le cas général, en revanche, nous prouverons que la fonction V_1 est de classe C^{q+1} si elle admet un DTT à un ordre strictement supérieur à q+1. Nous n'aurons donc qu'une condition *suffisante* pour que V_1 soit de classe C^{q+1}.

Un tel résultat n'est pourtant pas absurde, car une fonction de classe C^q au maximum peut très bien admettre un DTT à un ordre beaucoup plus grand que q, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple (4.1.)

Considérons les fonctions f_q et g_q définies par :

$$\begin{cases} f_q(t) = t^{2q+1}\sin\frac{1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ g_q(t) = t^{2q+1}\cos\frac{1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ f_q(0) = g_q(0) = 0 \end{cases}$$

On montre facilement (par récurrence) que ces fonctions sont de classe C^q au maximum en 0.

En effet, $f'_{q+1}(t)=(2q+3)t^{2(q+1)}\sin\frac{1}{t} - t^{2q+1}\cos\frac{1}{t}$ et $g'_{q+1}(t)=(2q+3)t^{2(q+1)}\cos\frac{1}{t} + t^{2q+1}\sin\frac{1}{t}$; alors, comme f_o et g_o sont simplement C^o, par récurrence, les fonctions f_q et g_q sont de classe C^{q+1}(au plus).

Cependant, f_q admet un DTT à l'ordre 2q puisque $\dfrac{f_q(t)}{t^{2q}}$ a une limite nulle en x_o (les coefficients de ce DTT étant d'ailleurs tous nuls).

Même résultat pour g_q.

3 - EXISTENCE DE DTT POUR LES ÉLÉMENTS PROPRES

Maintenant que nous disposons de fonctions continues $\lambda_i(x)$ et $V_i(x)$, pour i dans P_N, nous pouvons énoncer le lemme suivant, (H_p) étant vérifiée :

Lemme 4.1 :

La fonction λ_1 admet un DTT à l'ordre p en x_o :

$$DTT_p(\lambda_1)(x_o) = \sum_{k=o}^{p} \frac{(x-x_o)^k}{k!} \lambda_{1,k}$$

$$\textit{avec} \begin{cases} \lambda_{1,k} = E_k(V_1(x_o),\ V_1(x_o)) & \textit{pour } k = 1,\ 2,\ \ldots,\ p \\ \lambda_{1,0} = \lambda_1(x_o) \end{cases}$$

Démonstration :

En écrivant $V_1(x) = \alpha_1(x)V_1(x_o)+\alpha_2(x)V_2(x_o)+\ldots+\alpha_N(x)V_N(x_o)$

et $\lambda_1(x) = \langle A(x)V_1(x),V_1(x)\rangle$

le preuve est tout à fait identique à celle du lemme 3.2 du chapitre 3, puisque (Hp) étant vérifiée, (Hp-1) ne l'est pas : il suffit de remplacer v^n par $V_1(x)$, λ^n par $\lambda_1(x)$, v_1 par $V_1(x_o)$, λ_o par $\lambda_1(x_o)$, x_n par x, etc. A étant de classe C^p, les mêmes calculs conduisent au résultat.

Les expressions $E_k(u, v)$, définies au chapitre 3, peuvent alors être redéfinies de la manière suivante, pour u et v dans $\mathbb{R}^N$, $k \geq 1$:

$E_1(u,v) = \langle A'(x_o)u,v\rangle$

et de manière générale, <u>si λ_1 admet un DTT à l'ordre q en x_o</u> sous la forme :

$$DTT_q(\lambda_1)\ (x_o) = \sum_{k=o}^{q} \frac{(x-x_o)^k}{k!} \lambda_{1,k}$$

(avec éventuellement $q \geq p$)

en *posant* pour $k \leq q$:

$$F_k(u,v) = E_k(u,v) - \lambda_{1,k} \langle u,v\rangle$$

$$B_1^{(k)}(x_o) = A^{(k)}(x_o) - \lambda_{1,k}I_N$$

$$E_{q+1}(u,v) = \langle A^{(q+1)}(x_o)u,v\rangle + \sum_{h\geq 3}\left[\sum_{k=1}^{q} C_{q+1}^{k}\,\frac{F_k(u,V_h(x_o))\langle B_1^{(q+1-k)}(x_o)v,V_h(x_o)\rangle}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)}\right]$$

Remarque :

Compte tenu du lemme 4.1, cette nouvelle définition coïncide avec celle du chapitre 3 pour $q \leq p-1$.

Avec cette nouvelle définition des E_k, nous allons pouvoir maintenant établir la propriété recherchée dans ce paragraphe :

Proposition 4.2 :

Si la matrice A *est de classe* C^{p+q} *dans le voisinage* U *de* x_o *avec* $q \geq 0$ *(et* p *tel que* (H_p) *est vérifiée),*

alors λ_1 *admet un* DTT *à l'ordre* p+q *en* x_o *sous la forme*

$$DTT_{p+q}(\lambda_1)(x_o) = \sum_{k=o}^{p+q} \frac{(x-x_o)^k}{k!}\,\lambda_{1,k}$$

Et V_1 *admet un* DTT *à l'ordre* q *en* x_o *sous la forme*

$$DTT_q(V_1)(x_o) = \sum_{k=o}^{q} \frac{(x-x_o)^k}{k!}\,V_{1,k}$$

De plus, les coefficients de ces DTT *peuvent être obtenus par récurrence à l'aide des relations (4.3.1) à (4.3.4) suivantes.*

(4.3.1)

* $\lambda_{1,o} = \lambda_1(x_o)$
* pour $1 \leq k \leq p+1$, $\lambda_{1,k} = E_k(V_1(x_o), V_1(x_o))$
* $\lambda_{1,p+2}=E_{p+2}(V_1(x_o),V_1(x_o))+(p+2)E_{p+1}(V_1(x_o),V_2(x_o))\langle V_{1,1},V_2(x_o)\rangle$
* pour $p+3\leq k\leq p+q$ on a : (pour p+1 et p+2 aussi, avec la convention $\sum_{k=n_1}^{n_2}[\,]=0$ si $n_1>n_2$)

$$\lambda_{1,k}=E_k(V_1(x_o),V_1(x_o))+\sum_{j=p+2}^{k-1} C_k^j F_j(V_1(x_o),V_1(x_o))\langle V_{1,k-j},V_1(x_o)\rangle$$
$$+\sum_{j=p+1}^{k-1} C_k^j E_j(V_1(x_o),V_2(x_o))\langle V_{1,k-j},V_2(x_o)\rangle$$

(4.3.2)

pour $h \geq 3$, V_h étant de classe C^{p+q} :

$$* \ \langle V_{1,o}, V_h(x_o)\rangle = \langle V_1(x_o), V_h(x_o)\rangle = 0$$

$$* \ \text{pour } 1 \leq k \leq q, \ \langle V_{1,k}, V_h(x_o)\rangle = -\Big(\sum_{j=o}^{k-1} C_k^j \langle V_{1,j}, V_h^{(k-j)}(x_o)\rangle\Big)$$

(4.3.3)

$$* \ \langle V_{1,o}, V_2(x_o)\rangle = \langle V_1(x_o), V_2(x_o)\rangle = 0$$

$*$ pour $1 \leq k \leq q$ (moyennant la convention que $\sum\limits_{j=p+1}^{p} [\ ] = 0$) :

$$E_{p+k}(V_1(x_o)V_2(x_o)) + \sum_{j=p+1}^{p+k-1} C_{p+k}^j (E_j(V_1(x_o),V_2(x_o)) \langle V_{1,p+K-j},V_1(x_o)\rangle)$$

$$+ \sum_{j=p+1}^{p+k-1} C_{p+k}^j (F_j(V_2(x_o),V_2(x_o)) \langle V_{1,p+k-j},V_2(x_o)\rangle)$$

$$+ C_{p+k}^p . F_p(V_2(x_o),V_2(x_o)) \langle V_{1,k},V_2(x_o)\rangle = 0$$

BU LILLE

(4.3.4)

$$* \ \langle V_{1,o},V_1(x_o)\rangle = \langle V_1(x_o), V_1(x_o)\rangle = 1$$

$$* \ \langle V_{1,1},V_1(x_o)\rangle = 0$$

$$* \ \text{pour } 2 \leq k \leq q, \ \langle V_{1,k},V_1(x_o)\rangle = -\frac{1}{2}\Big(\sum_{j=1}^{k-1} C_k^j \langle V_{1,j},V_{1,k-j}\rangle\Big)$$

Remarques

(i) La formule (4.3.3) définit parfaitement $\langle V_{1,k},V_2(x_o)\rangle$ par récurrence, puisque, (H_p) étant vérifiée, on a

$$F_p(V_2(x_o),V_2(x_o)) = E_p(V_2(x_o),V_2(x_o)) - E_p(V_1(x_o),V_1(x_o)) \neq 0$$

(ii) Les coefficients des DTT de λ_1 et V_1, même si ces fonctions ne sont pas suffisamment dérivables, vérifient les mêmes propriétés que les dérivées, lorsqu'on suppose leur existence (ce qui est d'ailleurs normal !). Voir les relations (3.3.9) et (3.3.11).

Démonstration de la proposition 4.2 : par récurrence sur q

a) Elle est vraie pour $q = 0$

En effet, pour $q = 0$, A est de classe C^p et V_1 est continue. V_1 a donc un DTT à l'ordre 0 en x_o et $\underline{V}_{1,o} = V_1(x_o)$.

D'autre part, d'après le lemme 4.1, λ_1 admet un DTT à l'ordre p en x_o et on a bien

$$\begin{cases} \lambda_{1,o} = \lambda_1(x_o) \\ \lambda_{1,k} = E_k(V_1(x_o),V_1(x_o)) \text{ pour } 1 \leq k \leq p \end{cases}$$

b) Supposons donc cette proposition vraie pour $0 \leq k \leq q$, et A de classe C^{p+q+1}

On a donc :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{\lambda_1(x)-DTT_{q+p}(\lambda_1)(x_o)}{(x-x_o)^{q+p}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{V_1(x)-DTT_q(V_1)(x_o)}{(x-x_o)^q} = 0 \end{cases}$$

Nous poserons toujours :

$$V_1(x) = \alpha_1(x)V_1(x_o)+\alpha_2(x)V_2(x_o) + \sum_{h\geq 3} \alpha_h(x)V_h(x_o)$$

* Existence d'un DTT à l'ordre p+q+1 pour λ_1

$$\begin{aligned} \text{Soit } L_q(x) &= \lambda_1(x) - DTT_{q+p}(\lambda_1)(x_o) \\ &= \lambda_1(x) - \lambda_1(x_o) - \sum_{k=1}^{q+p} \frac{(x-x_o)^k}{k!} \lambda_{1,k} \end{aligned}$$

En procédant comme pour le lemme 3.2 du chapitre 3, à la différence près que pour $k \geq p$, $\lambda_{1,k}$ peut être différent de $E_k(V_1(x_o),V_1(x_o))$, on obtient comme relation correspondant à (3.4.4) :

$$
\boxed{
\begin{aligned}
(4.3.5)\quad L_q(x) &= u(x)+\frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}\sum_{k=1}^{q+p}\frac{(x-x_o)^k}{k!}E_k(V_2(x_o),V_1(x_o))+\sum_{k=1}^{q+p}\frac{(x-x_o)^k}{k!}[E_k(V_1(x_o),V_1(x_o))-\lambda_{1,k}] \\
&+\frac{1}{\alpha_1(x)}\sum_{h\geq 3}\frac{(x-x_o)^{q+p}}{(q+p)!}\,\frac{E_{q+p}(V_h(x_o),V_1(x_o))}{\lambda_1(x)-\lambda_h(x_o)}\,\langle(A(x)-A(x_o))V_1(x),V_h(x_o)\rangle \\
&+\frac{1}{\alpha_1(x)}\sum_{h\geq 3}\Big[\sum_{j=1}^{p+q-1}\frac{(x-x_o)^j}{j!}\,\frac{E_j(V_1(x_o),V_h(x_o))}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)} \\
&\qquad (\langle(A(x)-A(x_o)-\sum_{r=1}^{p+q-j}\frac{(x-x_o)^r}{r!}A^{(r)}(x_o))V_1(x),V_h(x_o))\Big] \\
&-\frac{1}{\alpha_1(x)}\sum_{h\geq 3}\alpha_h(x)\Big[\sum_{j=1}^{p+q-1}\frac{(x-x_o)^j}{j!}\,\frac{E_j(V_1(x_o),V_h(x_o))}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o}\\
&\qquad (\lambda_1(x)-\lambda_1(x_o)-\sum_{r=1}^{p+q-j}\frac{(x-x_o)^r}{r!}\lambda_{1,r})\Big] \\
&\left(\text{avec } u(x)=\langle(A(x)-\sum_{k=o}^{p+q}\frac{(x-x_o)^k}{k!}A^{(k)}(x_o))V_1(x),V_1(x_o)\rangle\times\frac{1}{\alpha_1(x)}\right)
\end{aligned}
}
$$

BU

Mais comme A est de classe C^{p+q+1}, $\lambda_1(x)$ a un DTT à l'ordre p+q en x_o, par hypothèse de récurrence, et $L_q(x)$ prend la forme suivante

$$
(4.3.6)\quad L_q(x)=u'(x)+\frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}\sum_{k=1}^{q+p}\frac{(x-x_o)^k}{k!}E_k(V_2(x_o),V_1(x_o))+\sum_{k=1}^{q+p}\frac{(x-x_o)^k}{k!}[E_k(V_1(x_o),V_1(x_o))-\lambda_{1,k}]
$$

$$
\begin{aligned}
\text{avec } \lim_{x\to x_o}\frac{u'(x)}{(x-x_o)^{p+q+1}} &= \frac{\langle A^{(p+q+1)}(x_o)V_1(x_o),V_1(x_o)\rangle}{(p+q+1)!} \\
&+\sum_{h\geq 3}\frac{1}{(q+p)!}E_{q+p}(V_h(x_o),V_1(x_o))\,\frac{\langle A'(x_o)V_1(x_o),V_h(x_o)\rangle}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)} \\
&+\sum_{h\geq 3}\sum_{j=1}^{p+q-1}\frac{1}{j!}E_j\,\frac{(V_1(x_o),V_h(x_o))}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)}\,\langle A^{(p+q+1-j)}(x_o)V_h(x_o),V_1(x_o)\rangle \\
&= \frac{E_{p+q+1}(V_1(x_o),V_1(x_o))}{(p+q+1)!}
\end{aligned}
$$

D'autre part, on sait que $E_k(V_2(x_o),V_1(x_o)) = 0$ pour $k \leq p$, et que, d'après le lemme 4.1, $E_k(V_1(x_o),V_1(x_o)) = \lambda_{1,k}$ pour $k \leq p$.

Finalement on a :

. <u>si q = 0</u>, $L_o(x) = u'(x)$ et $\lambda_1(x)$ admet un DTT à l'ordre p+1 avec :

$$(4.3.7) \quad \boxed{\lim_{x\to x_o} \frac{L_o(x)}{(x-x_o)^{p+1}} = \lim_{x\to x_o} \frac{\lambda_1(x)-DTT_p(\lambda_1)(x_o)}{(x-x_o)^{p+1}} = \frac{\lambda_{1,p+1}}{(p+1)!} = \frac{E_{p+1}(V_1(x_o),V_1(x_o))}{(p+1)!}}$$

. <u>si q = 1</u>, $L_1(x) = u'(x) + \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} (x-x_o)^{p+1} E_{p+1}(V_2(x_o),V_1(x_o))$

(puisque $E_{p+1}(V_1(x_o),V_1(x_o)) - \lambda_{1,p+1} = 0$, d'après (4.3.7))

comme $\frac{\alpha_2(x)}{x-x_o} = \frac{<V_1(x),V_2(x_o)>}{x-x_o} = <\frac{V_1(x)-V_1(x_o)}{x-x_o}, V_2(x_o)>$ (puisque $V_1(x_o) \perp V_2(x_o)$)

et que, puisque q = 1, par hypothèse $<\frac{V_1(x)-V_1(x_o)}{x-x_o}, V_2(x_o)>$ a pour limite $<V_{1,1}, V_2(x_o)>$, $\lambda_1(x)$ admet un DTT à l'ordre p+2 avec :

$$(4.3.8) \quad \boxed{\lim_{x\to x_o} \frac{L_1(x)}{(x-x_o)^{p+2}} = \frac{\lambda_{1,p+2}}{(p+2)!} = \frac{E_{p+2}(V_1(x_o),V_1(x_o))}{(p+2)!} + \frac{E_{p+1}(V_2(x_o),V_1(x_o))}{(p+1)!} <V_{1,1},V_2(x_o)>}$$

. <u>si q ≥ 2</u> : dans ce cas, V_1 admet un DTT à tout ordre $j \leq q$.

Les fonctions α_1 et α_2 vérifient la même propriété et on a, pour $j \leq q$

$$\begin{cases} \alpha_{1,j} = <V_{1,k}, V_1(x_o)> \\ \\ \alpha_{2,j} = <V_{1,k}, V_2(x_o)> \end{cases}$$

Alors, en faisant intervenir dans (4.3.6) les DTT de α_1 et α_2 à l'ordre j,

$$(4.3.9) \quad L_q(x)=u'(x)+\frac{1}{\alpha_1(x)} \Big[\sum_{k=p+1}^{p+q} \frac{(x-x_o)^k}{k!} E_k(V_2(x_o),V_1(x_o))<(V_1(x)-DTT_{p+q-k}(V_1)(x_o)),V_2(x_o)>$$

$$+ \sum_{k=p+1}^{p+q} \frac{(x-x_o)^k}{k!} (E_k(V_1(x_o),V_1(x_o))-\lambda_{1,k})<(V_1(x)-DTT_{p+q-k}(V_1)(x_o)),V_1(x_o)>$$

$$+\frac{1}{\alpha_1(x)}\Big[\sum_{k=p+1}^{p+q}\frac{(x-x_o)^k}{k!}(E_k(V_2(x_o),V_1(x_o))<(DTT_{p+q-k}(V_1)\ (x_o)),V_2(x_o)>)$$

$$+\sum_{k=p+1}^{p+q}\frac{(x-x_o)^k}{k!}((E_k(V_1(x_o),V_1(x_o))-\lambda_{1,k})<(DTT_{p+q-k}(V_1)(x_o)),V_1(x_o)>)\Big]$$

Calculons le coefficient de $(x-x_o)^r$ dans le dernier crochet du second membre. Soit a_r ce coefficient pour $p+1 \leq r \leq p+q$.

Comme $<V_1(x_o),\ V_2(x_o)> = <V_{1,o},\ V_2(x_o)> = 0$ et $\lambda_{1,p+1} = E_{p+1}(V_1(x_o),V_1(x_o))$ il vient, en isolant le terme en $[E_r(V_1(x_o),\ V_1(x_o))-\lambda_{1,r}] = F_r(V_1(x_o),V_1(x_o))$:

$$a_r = \sum_{k=p+1}^{r-1}\frac{E_k(V_2(x_o),V_1(x_o))}{k!}\ \frac{<V_{1,r-k},V_2(x_o)>}{(r-k)!} + \frac{F_r(V_1(x_o),V_1(x_o))}{r!}<V_{1,o},\ V_1(x_o)>$$

$$+\sum_{k=p+2}^{r-1}\frac{F_k(V_1(x_o),V_1(x_o))}{k!}\ \frac{<V_{1,r-k},V_1(x_o)>}{(r-k)!}$$

Alors, puisque, par hypothèse de récurrence, (4.3.1) est vraie pour $k \leq p+q$, $a_r = 0$ pour $p+1 \leq r \leq p+q$ (en multipliant a_r par $r!$, on retrouve (4.3.1)).

Finalement, le dernier terme de (4.3.9) est nul et on a, compte-tenu de (4.3.7) :

$$\boxed{\begin{aligned}\lim_{x\to x_o}\frac{L_q(x)}{(x-x_o)^{p+q+1}} &= \frac{E_{p+q+1}(V_1(x_o),V_1(x_o))}{(p+q+1)!} + \sum_{k=p+1}^{p+q}\frac{E_k(V_2(x_o),V_1(x_o))}{k!}\ \frac{<V_{1,p+q+1-k},V_2(x_o)>}{(p+q+1-k)!}\\ &+\sum_{k=p+2}^{p+q}\frac{F_k(V_1(x_o),V_1(x_o))}{k!}\ \frac{<V_{1,p+q+1-k},V_1(x_o)>}{(p+q+1-k)} = \frac{\lambda_{1,p+q+1}}{(p+q+1)!}\end{aligned}} \quad (4.3.10)$$

La première partie de la proposition est par conséquent démontrée, et la formule (4.3.1) est bien vérifiée pour l'indice q+1, d'après (4.3.7), (4.3.8) et (4.3.10).

Il s'agit maintenant de prouver le résultat pour la fonction V_1.

Prouver que V_1 admet un DTT à l'ordre q+1, est équivalent à prouver que les fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ en admettent un, puisque

$$\lim_{x\to x_o} \frac{V_1(x)-\sum_{k=o}^{q}\frac{(x-x_o)^k}{k!}V_{1,k}}{(x-x_o)^{q+1}} = \frac{V_{1,q+1}}{(q+1)!} \iff \lim_{x\to x_o} <\frac{V_1(x)-\sum_{k=o}^{q}\frac{(x-x_o)^k}{k!}V_{1,k}}{(x-x_o)^{q+1}}, V_h(x_o)> = \frac{<V_{1,q+1},V_h(x_o)>}{(q+1)!}$$

$$\iff \lim_{x\to x_o} \frac{\alpha_1(x)-\sum_{k=o}^{q}\frac{(x-x_o)^k}{k!}<V_{1,k},V_h(x_o)>}{(x-x_o)^{q+1}} = \frac{<V_{1,q+1},V_h(x_o)>}{(q+1)!}$$

$$= \frac{\alpha_{1,q+1}}{(q+1)!} \quad \forall\ h\in P_N$$

Et on aura alors :

(4.3.11) $$\boxed{V_{1,q+1} = \sum_{h=1}^{N} \alpha_{1,q+1}\, V_h(x_o)}$$, $(V_1(x_o),\dots,V_N(x_o))$ étant une base orthonormée de $\mathbb{R}^N$

* <u>Preuve pour h ≥ 3</u> : On suppose donc que $\alpha_1(x)$ admet un DTT à l'ordre q :

$DTT_q(\alpha_1)(x_o) = \sum_{k=o}^{q} \frac{(x-x_o)^k}{k!} <V_{1,k}, V_h(x_o)>$. On peut écrire :

(4.3.12) $$<V_1(x)-DTT_q(V_1)(x_o),V_h(x_o)> = <V_1(x)-DTT_q(V_1)(x_o),V_h(x_o)-V_h(x)> + <V_1(x)-DTT_q(V_1)(x_o),V_h(x)>$$

Lorsque nous divisons cette égalité par $(x-x_o)^{q+1}$, puisque $V_h(x)$ est dérivable (A étant de classe C^1 au moins et $h \geq 3$), le premier terme du membre de droite aura une limite nulle en x_o. Il nous suffit donc d'étudier celle de $<V_1(x)-DTT_q(V_1)(x_o),V_h(x)>$ et l'on peut écrire :

$$t_h(x) = <V_1(x)-DTT_q(V_1)(x_o),V_h(x)> = -<DTT_q(V_1)(x_o),V_h(x)> \quad (\text{car } V_1(x) \perp V_h(x))$$

$$= - \sum_{k=o}^{q} \frac{(x-x_o)^k}{k!} <V_{1,k}, V_h(x)>$$

Mais A est de classe C^{p+q+1} ; V_h admet donc un DTT à tout ordre $k \leq q+p+1$ (qui est d'ailleurs son véritable développement de Taylor puisque d'après le chapitre 1, $\lambda_h(x_o)$ étant simple pour $h \geq 3$, V_h est dérivable jusqu'à l'ordre p+q+1)

Il vient alors

$$(4.3.13)\quad t_h(x) = -\sum_{k=o}^{q} \frac{(x-x_o)^k}{k!} \langle V_{1,k},\ (V_h(x) - DTT_{q-k}(V_h)(x_o))\rangle$$

$$-\sum_{k=o}^{q} \frac{(x-x_o)^k}{k!} \langle V_{1,k},\ \sum_{j=o}^{q-k} \frac{(x-x_o)^j}{j!} V_h^{(j)}(x_o)\rangle$$

mais le coefficient de $(x-x_o)^r$, pour $0 \leq r \leq q$, dans le deuxième terme du membre de droite, noté b_r, s'écrit :

$$b_r = -\sum_{k=o}^{r} \frac{1}{k!} \langle V_{1,k},\ \frac{V_h^{(r-k)}(x_o)}{(r-k)!}\rangle = -\frac{1}{r!} \left(\sum_{k=o}^{r} C_r^k \langle V_{1,k}, V_h^{(r-k)}(x_o)\rangle\right)$$

alors $b_r = 0$ d'après (4.3.2), pour $r \leq q$. Il vient donc :

$$t_h(x) = -\sum_{k=o}^{q} \frac{(x-x_o)^k}{k!} \langle V_{1,k},\ V_h(x) - DTT_{q-k}(V_h)(x_o)\rangle$$

Finalement, $\dfrac{t_h(x)}{(x-x_o)^{q+1}}$ a une limite notée $\dfrac{\alpha_{h,q+1}}{(q+1)!}$, puisque V_h est de classe C^{p+q+1}

et on a :

$$(4.3.14)\quad \boxed{\alpha_{h,q+1} = -\left(\sum_{k=o}^{q} C_{q+1}^k \langle V_{1,k},\ V_h^{(q+1-k)}(x_o)\rangle\right)}$$

* <u>Preuve pour h = 2</u>

Considérons la quantité $S_q(x)$ suivante :

$$S_q(x) = \langle (A(x) - \sum_{k=o}^{p+q} \frac{(x-x_o)^k}{k!} A^{(k)}(x_o))\ V_1(x),\ V_2(x_o)\rangle$$

$$+ \sum_{k=1}^{p+q} \frac{(x-x_o)^k}{k!} \left[\sum_{h\geq 3} \frac{E_k(V_2(x_o),V_h(x_o))}{\lambda_1(x)-\lambda_h(x_o)} \langle (A(x)-\sum_{j=o}^{p+q-k} \frac{(x-x_o)^j}{j!} A^{(j)}(x_o))V_h(x_o), V_1(x)\rangle\right]$$

Manifestement, puisque A est supposée de classe C^{p+q+1}, on a :

$$(4.3.15) \quad \boxed{\lim_{x\to x_o} \frac{S_q(x)}{(x-x_o)^{p+q+1}} = \frac{E_{p+q+1}(V_1(x_o),V_2(x_o))}{(p+q+1)!}}$$

(E_{p+q+1} est définie puisque λ_1 admet un DTT à l'ordre p+q)

Si maintenant on se réfère à la formule (3.4.5) du chapitre 3, on s'aperçoit que $S_q(x)$ ressemble beaucoup à l'expression que nous avions notée T^n_q, (ou plutôt à T^n_{q+p}).

On peut faire pour $S_q(x)$ la même transformation que celle effectuée avec T^n_q en remplaçant

$$\begin{cases} v^n_1 \text{ par } V_1(x),\ w^n \text{ par } V_2(x_o),\ v_h \text{ par } V_h(x_o) \text{ pour } h \in P_N, \\ x_n \text{ par } x,\ E_j(v_1, v_1) \text{ par } \lambda_{1,j}, \\ \lambda^n \text{ par } \lambda_1(x),\ \lambda_h \text{ par } \lambda_h(x_o),\ \lambda_o \text{ par } \lambda_1(x_o),\ \alpha^n_h \text{ par } \alpha_h(x),\ h \in P_N \end{cases}$$

On obtient alors la formule (4.3.16) (correspondant à (3.4.8)) :

$$(4.3.16) \quad \boxed{\begin{aligned} S_q(x) = &<(A(x)-A(x_o))V_1(x),V_2(x_o)> - \sum_{r=1}^{q+p} \frac{(x-x_o)^r}{r!}[\alpha_1(x)E_r(V_1(x_o),V_2(x_o)) \\ &\qquad + \alpha_2(x)E_r(V_2(x_o),V_2(x_o))] \\ &-(\lambda_1(x)-\lambda_1(x_o))\sum_{h\geq 3}[\sum_{k=1}^{q+p-1}\frac{(x-x_o)^k}{k!}\frac{E_k(V_2(x_o),V_h(x_o))}{(\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o))(\lambda_1(x)-\lambda_h(x_o))} \\ &\qquad <(A(x)-\sum_{j=o}^{p+q-k}\frac{(x-x_o)^j}{j!}A^{(j)}(x_o))V_h(x_o),V_1(x)>] \\ &+\sum_{h\geq 3}\frac{\alpha_h(x)}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)}[\sum_{k=1}^{q+p-1}\frac{(x-x_o)^k}{k!}E_k(V_2(x_o),V_h(x_o))(\lambda_1(x)-\lambda_1(x_o) \\ &\qquad -\sum_{j=1}^{p+q-k}\frac{(x-x_o)^j}{j!}\lambda_{1,j})] \end{aligned}}$$

Les deux derniers termes du membre de droite, divisés par $(x-x_o)^{p+q+1}$, auront une limite nulle en x_o puisque A est de classe C^{p+q+1} et que λ_1 admet un DTT à l'ordre q+p (car l'ordre atteint au maximum est p+q-1).

On peut donc écrire, puisque $<(A(x)-A(x_o)V_1(x),V_2(x_o)>=(\lambda_1(x)-\lambda_1(x_o))\alpha_2(x)$

(4.3.17) $$S_q(x)=R_q(x)+(\lambda_1(x)-\lambda_1(x_o))\alpha_2(x)-\sum_{r=1}^{q+p}\frac{(x-x_o)^r}{r!}[\alpha_1(x)E_r(V_1(x_o),V_2(x_o))+\alpha_2(x)E_r(V_2(x_o),V_2(x_o))]$$

avec $\lim\limits_{x\to x_o} \frac{R_q(x)}{(x-x_o)^{p+q+1}} = 0$

Mais on a montré que $\frac{\lambda_1(x)-DTT_{p+q}(\lambda_1)(x_o)}{(x-x_o)^{p+q+1}}$ avait une limite en x_o. Nous pouvons faire apparaître $DTT_{p+q}(\lambda_1)(x_o)$ dans (4.3.17), puisque $\lambda_{1,o} = \lambda_1(x_o)$, pour obtenir, en regroupant les termes en $\alpha_2(x)$:

(4.3.18) $$S_q(x) = R_q(x) + (\lambda_1(x) - DTT_{p+q}(\lambda_1)(x_o)).\alpha_2(x)$$
$$-\sum_{r=1}^{q+p}\frac{(x-x_o)^r}{r!}[\alpha_1(x)E_r(V_1(x_o),V_2(x_o))+\alpha_2(x)(E_r(V_2(x_o),V_2(x_o))-\lambda_{1,r})]$$

Mais puisque (H_p) est vérifiée on sait que (cf Chap. 3 §2) :

- pour $1 \le r \le p$, $E_r(V_1(x_o),V_2(x_o)) = 0$
- pour $1 \le r \le p-1$, $E_r(V_2(x_o),V_2(x_o)) = E_r(V_1(x_o),V_1(x_o)) = \lambda_{1,r}$
- $E_p(V_1(x_o),V_1(x_o)) = \lambda_{1,p} \neq E_p(V_2(x_o),V_2(x_o))$

BU LILLE

Alors (4.3.18) devient, puisque $E_r(V_2(x_o),V_2(x_o))-\lambda_{1,r}=F_r(V_2(x_o),V_2(x_o))$:

(4.3.19) $$\boxed{\begin{aligned} S_q(x) &= R_q(x) + (\lambda_1(x) - DTT_{p+q}(\lambda_1)(x_o))\alpha_2(x) \\ &- \sum_{r=p+1}^{p+q}\frac{(x-x_o)^r}{r!}(E_r(V_1(x_o),V_2(x_o))\alpha_1(x)) \\ &- \sum_{r=p}^{p+q}\frac{(x-x_o)^r}{r!}(F_r(V_2(x_o),V_2(x_o))\alpha_2(x))\end{aligned}}$$

Par hypothèse de récurrence, α_1 et α_2 admettent des DTT à tout ordre $j \le q$, que l'on peut introduire dans (4.3.19) :

$$(4.3.20)\quad \boxed{\begin{aligned} S_q(x) &= R_q(x)+(\lambda_1(x)-DTT_{p+q}(\lambda_1)(x_o))\alpha_2(x) \\ &- \sum_{r=p+1}^{p+q} \frac{(x-x_o)^r}{r!}[E_r(V_1(x_o),V_2(x_o))(\alpha_1(x)-DTT_{p+q-r}(\alpha_1)(x_o))] \\ &- \sum_{r=p}^{p+q} \frac{(x-x_o)^r}{r!}[F_r(V_2(x_o),V_2(x_o))(\alpha_2(x)-DTT_{p+q-r}(\alpha_2)(x_o))] \\ &- \sum_{r=p+1}^{p+q} \frac{(x-x_o)^r}{r!}[E_r(V_1(x_o),V_2(x_o))(\sum_{j=o}^{p+q-r} \frac{(x-x_o)^j}{j!}<V_{1,j},V_1(x_o)>)] \\ &- \sum_{r=p}^{p+q} \frac{(x-x_o)^r}{r!}[F_r(V_2(x_o),V_2(x_o))(\sum_{j=1}^{p+q-r} \frac{(x-x_o)^j}{j!}<V_{1,j},V_2(x_o)>)] \end{aligned}}$$

(Compte-tenu de (4.3.11) et du fait que $<V_{1,o}, V_2(x_o)> = 0$)

Si maintenant on calcule le coefficient c_k de $(x-x_o)^k$ dans les deux dernières sommes de (4.3.20), pour $p+1 \le k \le p+q$, il vient :

$$\begin{aligned} c_k &= - \sum_{r=p+1}^{k} \frac{E_r(V_1(x_o),V_2(x_o))}{r!} \frac{<V_{1,k-r},V_1(x_o)>}{(k-r)!} \\ &\quad - \sum_{r=p}^{k-1} \frac{F_r(V_2(x_o),V_2(x_o))}{r!} \frac{<V_{1,k-r},V_2(x_o)>}{(k-r)!} \\ &= - \frac{1}{k!} [E_k(V_1(x_o),V_2(x_o)) + \sum_{r=p+1}^{k-1} C_k^r \, E_r(V_1(x_o),V_2(x_o))<V_{1,k-r},V_1(x_o)> \\ &\quad + \sum_{r=p+1}^{k-1} C_k^r \, F_r(V_2(x_o),V_2(x_o))<V_{1,k-r},V_2(x_o)> \\ &\quad + C_k^p \, F_p(V_2(x_o),V_2(x_o))<V_{1,k-p},V_2(x_o)> \end{aligned}$$

(puisque $<V_{1,o}, V_1(x_o)> = <V_1(x_o),V_1(x_o)> = 1$)

et par conséquent, $c_k = 0$, en vertu de (4.3.3), pour $p+1 \le k \le p+q$. (4.3.20) peut donc s'écrire, en isolant $[\alpha_2(x)-DTT_q(\alpha_2)(x_o)]$:

(4.3.21)
$$\boxed{\begin{aligned} S_q(x) = {} & R_q(x) + (\lambda_1(x) - DTT_{p+q}(\lambda_1)(x_o))\alpha_2(x) - \frac{(x-x_o)^p}{p!} F_p(V_2(x_o),V_2(x_o))(\alpha_2(x) - DTT_q(\alpha_2)(x_o)) \\ & - \sum_{r=p+1}^{p+q} \frac{(x-x_o)^r}{r!} [E_r(V_1(x_o),V_2(x_o))(\alpha_1(x) - DTT_{p+q-r}(\alpha_1)(x_o))] \\ & - \sum_{r=p+1}^{p+q} \frac{(x-x_o)^r}{r!} [F_r(V_2(x_o),V_2(x_o))(\alpha_2(x) - DTT_{p+q-r}(\alpha_2)(x_o)] \end{aligned}}$$

Mais puisque (H_p) est vérifiée, $F_p(V_2(x_o), V_2(x_o)) \neq 0$ (voir la remarque après (4.3.18)), et finalement, si on divise la relation (4.3.21) par $(x-x_o)^{p+q+1}$ et qu'on fait tendre x vers x_o, $\dfrac{\alpha_2(x)-DDT_q(\alpha_2)(x_o)}{(x-x_o)^{q+1}}$ a une limite $\dfrac{\alpha_{2,q+1}}{(q+1)!}$ telle que :

BU LILLE

(4.3.22)
$$\boxed{\begin{aligned} \frac{E_{p+q+1}(V_1(x_o),V_2(x_o))}{(p+q+1)!} = {} & - \frac{F_p(V_2(x_o),V_2(x_o))}{p!} \frac{\alpha_{2,q+1}}{(q+1)!} \\ & - \sum_{r=p+1}^{p+q} \left(\frac{F_r(V_2(x_o),V_2(x_o))}{r!} \frac{\alpha_{2,p+q+1-r}}{(p+q+1-r)!}\right) \\ & - \sum_{r=p+1}^{p+q} \left(\frac{E_r(V_1(x_o),V_2(x_o))}{r!} \frac{\alpha_{1,p+q+1-r}}{(p+q+1-r)!}\right) \end{aligned}}$$

* <u>Preuve pour h = 1</u>

On se sert essentiellement du fait que V_1 est normé :

on a :

$$\langle V_1(x),V_1(x)\rangle = \langle V_1(x_o),V_1(x_o)\rangle = 1$$

que l'on peut écrire :

(4.3.23)
$$\boxed{\langle V_1(x) - V_1(x_o),\ V_1(x)\rangle + \langle V_1(x_o),\ V_1(x) - V_1(x_o)\rangle = 0}$$

. <u>si q = 0</u>

On peut réécrire (4.3.23) sous la forme :

(4.3.24)
$$\langle V_1(x) - V_1(x_o),\ V_1(x) + V_1(x_o)\rangle = 0$$

et en décomposant $[V_1(x)+V_1(x_o)]$ sur les $V_h(x_o)$, $h = 1, \ldots, N$, on a

$$V_1(x)+V_1(x_o) = \left(\sum_{h=1}^{N} \alpha_h(x)V_h(x_o)\right) + V_1(x_o) = (1+\alpha_1(x))V_1(x_o) + \sum_{h=2}^{N} \alpha_h(x)V_h(x_o)$$

d'où, en reportant dans (4.3.24)

$$(1+\alpha_1(x))<V_1(x)-V_1(x_o),V_1(x_o)>+\sum_{h=2}^{N}\alpha_h(x)<V_1(x)-V_1(x_o),V_h(x_o)> = 0$$

mais $\lim\limits_{x\to x_o} (1+\alpha_1(x)) = 2.$

Alors, comme on a précédemment prouvé que $<\dfrac{V_1(x)-V_1(x_o)}{x-x_o}, V_h(x_o)>$ a une limite pour $h \geq 2$, on en déduit que :

$$\lim_{x\to x_o} <\frac{V_1(x)-V_1(x_o)}{(x-x_o)},V_1(x_o)>=\alpha_{1,1}=\lim_{x\to x_o} \left[\frac{-1}{1+\alpha_1(x)} \sum_{h=2}^{N} \alpha_h(x)<\frac{V_1(x)-V_1(x_o)}{x-x_o},V_h(x_o)>\right]$$

$$= 0 \text{ car } \lim_{x\to x_o} \alpha_h(x) = 0$$

(4.3.25) $\boxed{\alpha_{1,1} = 0}$

. <u>si $q \geq 1$</u>

On fait alors intervenir $DTT_q(V_1)(x_o)$ dans 4.3.23 et on a :

$$<V_1(x)-DTT_q(V_1)(x_o),V_1(x)> + <V_1(x)-DTT_q(V_1)(x_o),V_1(x_o)>$$

$$+ \sum_{k=1}^{q} \frac{(x-x_o)^k}{k!} <V_{1,k},V_1(x)> + \sum_{k=1}^{q} \frac{(x-x_o)^k}{k!} <V_{1,k}, V_1(x_o)> = 0$$

ce qui s'écrit encore :

(4.3.26)
$$\boxed{\begin{aligned}&<V_1(x)-DTT_q(V_1)(x_o),V_1(x)-V_1(x_o)>+2<V_1(x)-DTT_q(V_1)(x_o),V_1(x_o)>\\ &+ \sum_{k=1}^{q} \frac{(x-x_o)^k}{k!} <V_{1,k}, V_1(x) - DTT_{q-k}(V_1)(x_o)>\\ &+ \sum_{k=1}^{q} \frac{(x-x_o)^k}{k!} <V_{1,k}, V_1(x_o)> + \sum_{k=1}^{q} \frac{(x-x_o)^k}{k!} \sum_{j=o}^{q-k} \frac{(x-x_o)^j}{j!} <V_{1,k}, V_{1,j}> = 0\end{aligned}}$$

Si, comme dans les autres cas, on calcule le coefficient d_r de $(x-x_o)^r$ pour $r = 1,\ldots,q$ dans les deux dernières sommes de (4.3.26), on a :

$$d_r = \frac{1}{r!} <V_{1,r}, V_1(x_o)> + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} \frac{1}{(r-k)!} <V_{1,k}, V_{1,r-k}>$$

$$= \frac{1}{r!} (2<V_{1,r}, V_1(x_o)> + \sum_{k=1}^{r-1} C_r^k <V_{1,k}, V_{1,r-k}>)$$

$= 0$ d'après (4.3.4).

Finalement, si on divise par $(x-x_o)^{q+1}$ la relation (4.3.26),
$<\frac{V_1(x)-DTT_q(V_1)(x_o)}{(x-x_o)^{q+1}}, V_1(x_o)>$ aura une limite $\frac{\alpha_{1,q+1}}{(q+1)!}$ en x_o telle que

$$\boxed{2 \frac{\alpha_{1,q+1}}{(q+1)!} + \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k!(q+1-k)!} <V_{1,k}, V_{1,q+1-k}> = 0} \tag{4.3.27}$$

On a donc montré que $<\frac{V_1(x)-DTT_q(V_1)(x_o)}{(x-x_o)^{q+1}}, V_h(x_o)>$ a une limite $\alpha_{1,q+1}$ en x_o.
pour $h \in P_N$

Alors $\frac{V_1(x)-DTT_q(V_1)(x_o)}{(x-x_o)^{q+1}}$ a une limite $\frac{V_{1,q+1}}{(q+1)!} = \sum_{h=1}^{N} \frac{\alpha_{h,q+1}}{(q+1)!} V_h(x_o)$ en x_o et les relations (4.3.14) pour $h \geq 3$, (4.3.22) pour $h = 2$, (4.3.25) et (4.3.27) pour $h = 1$ sont équivalentes aux relations (4.3.2), (4.3.3) et (4.3.4) pour l'indice $(q+1)$.

q.e.d.

Remarque :

On aurait bien évidemment pu démontrer exactement les mêmes propriétés pour les fonctions λ_2 et V_2, en construisant des quantités E'_k, comme dans la proposition (3.1). On aurait alors, pour $k \leq p-1$, $\lambda_{1,k} = \lambda_{2,k}$, et $\lambda_{1,p} \neq \lambda_{2,p}$.

La proposition que nous venons d'établir va nous permettre, au paragraphe 4), de trouver des conditions de dérivabilité sur la matrice A pour que les fonctions représentant les éléments propres soient de classe C^K en x_o, K donné.

4 - DIFFÉRENTIABILITÉ DES ÉLÉMENTS PROPRES

a) Première approche

Supposons que la condition (H_2) soit vérifiée et que la matrice A soit de classe C^3. Alors, d'après le paragraphe 3, V_1 admet un DTT à l'ordre 1 en x_o ; autrement dit, V_1 est dérivable en x_o. La question est la suivante :

A quelle condition V_1 est-il de classe C^1 en x_o ?

V_1 sera de classe C^1 en x_o si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_o} V'_1(x) = V'_1(x_o)$ ou bien encore si, pour $1 \leq h \leq N$,

$$\lim_{x \to x_o} \langle V'_1(x), V_h(x) \rangle = \langle V'_1(x_o), V_h(x_o) \rangle$$

$$\text{(car alors } \lim_{x \to x_o} V'_1(x) = \lim_{x \to x_o} \sum_{h=1}^{N} \langle V'_1(x), V_h(x) \rangle V_h(x)$$

$$= \sum_{h=1}^{N} \langle V'_1(x_o), V_h(x_o) \rangle V_h(x_o) = V'_1(x_o))$$

. V_1 étant de classe C^1 au voisinage de x_o, on peut différentier

les relations $\begin{cases} \langle V_1(x), V_1(x) \rangle = 1 \\ \langle V_1(x), V_h(x) \rangle = 0 \text{ pour } h \geq 2 \end{cases}$

BU

alors $\begin{cases} V'_1(x), V_1(x) = 0 \\ V'_1(x), V_h(x) = - V_1(x), V'_h(x) \end{cases}$

et donc $\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_o} \langle V'_1(x), V_1(x) \rangle = 0 = \langle V'_1(x_o), V_1(x_o) \rangle \\ \lim\limits_{x \to x_o} \langle V'_1(x), V_h(x) \rangle = - \langle V_1(x_o), V'_h(x_o) \rangle \text{ pour } h \geq 3 \text{ car } V_h C^1 \text{ en } x_o \\ \qquad = \langle V'_1(x_o), V_h(x_o) \rangle \end{cases}$

(ce qui correspond bien aux formules (4.3.2) et (4.3.4))

. D'autre part, on peut écrire, en dérivant l'équation aux valeurs propres, $x \neq x_o$

$$(A(x) - \lambda_1(x)) V'_1(x) = -(A'(x) - \lambda'_1(x)) V_1(x)$$

d'où, par produit scalaire avec $V_2(x)$

$$(4.4.2) \quad \langle (A(x)-\lambda_1(x))V'_1(x),V_2(x)\rangle = (\lambda_2(x)-\lambda_1(x))\langle V'_1(x),V_2(x)\rangle = -\langle A'(x)V_1(x), V_2(x)\rangle$$

mais, (H_2) étant vérifié, on a (voir chapitre 3) :

$$(4.4.3) \begin{cases} \text{(i)} \ \langle A'(x_o)V_1(x_o), V_2(x_o)\rangle = 0 \\ \text{(ii)} \ \langle A'(x_o)V_1(x_o), V_1(x_o)\rangle = \langle A'(x_o)V_2(x_o), V_2(x_o)\rangle \\ \text{(iii)} \ \langle A''(x_o)V_1(x_o),V_2(x_o)\rangle + 2\sum\limits_{h\geq 3} \dfrac{\langle A'(x_o)V_1(x_o),V_h(x_o)\rangle\langle A'(x_o)V_2(x_o),V_h(x_o)\rangle}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)} = 0 \end{cases}$$

en introduisant la relation (i) dans (4.4.2), il vient, en changeant de signe :

$$(4.4.4) \quad (\lambda_1(x)-\lambda_2(x))\langle V'_1(x),V_2(x)\rangle=\langle (A'(x)-A'(x_o))V_1(x),V_2(x)\rangle+\langle A'(x_o)(V_1(x)-V_1(x_o)),V_2(x)\rangle + \langle A'(x_o)V_1(x_o),V_2(x)-V_2(x_o)\rangle$$

le second membre divisé par $x-x_o$ a une limite en x_o, notée ℓ, et on a :

$$(4.4.5) \quad \ell = \langle A''(x_o)V_1(x_o),V_2(x_o)\rangle+\langle A'(x_o)V'_1(x_o),V_2(x_o)\rangle+\langle A'(x_o)V'_2(x_o),V_1(x_o)\rangle$$

en décomposant $V'_1(x_o)$ et $V'_2(x_o)$ sur la base $(V_1(x_o), \ldots, V_N(x_o))$, on obtient

$$\begin{aligned} \ell = {} & \langle A''(x_o)V_1(x_o),V_2(x_o)\rangle+ \sum_{h\geq 3} \langle A'(x_o)V_2(x_o)V_h(x_o)\rangle\langle V'_1(x_o),V_h(x_o)\rangle \\ & + \sum_{h\geq 3} \langle A'(x_o)V_1(x_o)V_h(x_o)\rangle\langle V'_2(x_o),V_h(x_o)\rangle \\ & + \langle A'(x_o)V_1(x_o),V_2(x_o)\rangle(\langle V'_1(x_o)V_1(x_o)\rangle+\langle V'_2(x_o),V_2(x_o)\rangle) \\ & + \langle A'(x_o)V_1(x_o),V_1(x_o)\rangle(\langle V'_1(x_o)V_2(x_o)\rangle+\langle V'_2(x_o),V_1(x_o)\rangle) \quad \text{(d'après (ii))} \end{aligned}$$

mais on peut faire les remarques suivantes :

a) $\langle V_1(x)-V_1(x_o), V_2(x_o)\rangle + \langle V_2(x)-V_2(x_o), V_1(x)\rangle = 0$

(car $\langle V_1(x), V_2(x)\rangle = \langle V_1(x_o), V_2(x_o)\rangle = 0$)

alors, en divisant par $(x-x_o)$ et en passant à la limite sur x :

$$\langle V'_1(x_o),V_2(x_o)\rangle + \langle V'_2(x_o), V_1(x_o)\rangle = 0$$

b) $\langle V'_1(x_o),V_h(x_o)\rangle = -\langle V'_h(x_o), V_1(x_o)\rangle$ (d'après (4.4.1))

$$= \frac{\langle A'(x_o)V_1(x_o),V_h(x_o)\rangle}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)}$$ pour $h \geq 3$, d'après le chapitre 1.

de même, $\langle V'_2(x_o),V_h(x_o)\rangle = \dfrac{\langle A'(x_o)V_2(x_o),V_h(x_o)\rangle}{\lambda_1(x_o)-\lambda_h(x_o)}$ car $\lambda_1(x_o) = \lambda_2(x_o)$

alors, compte-tenu des remarques a) et b), de (ii) et (iii) dans (4.4.3), il vient

$$\ell = E_2(V_1(x_o), V_2(x_o)) = 0$$

En réintroduisant donc la relation (4.4.5), multiplié par $(x-x_o)$, dans (4.4.4) :

4.4.6)
$$\boxed{\begin{aligned}(\lambda_1(x)-\lambda_2(x))\langle V'_1(x),V_2(x)\rangle = {} & \langle (A'(x)-A'(x_o)-(x-x_o)A''(x_o))V_1(x),V_2(x)\rangle \\ & +(x-x_o)[\langle A''(x_o)(V_1(x)-V_1(x_o)),V_2(x)\rangle \\ & \qquad +\langle A''(x_o),(V_1(x_o),(V_2(x)-V_2(x_o))\rangle] \\ & + \langle A'(x_o)(V_1(x)-V_1(x_o)-(x-x_o)V'_1(x_o)),V_2(x)\rangle \\ & + (x-x_o)\langle A'(x_o)V'_1(x_o),(V_2(x)-V_2(x_o))\rangle \\ & + \langle A'(x_o)V_1(x_o),(V_2(x)-V_2(x_o)-(x-x_o)V'_2(x_o))\rangle\end{aligned}}$$

Enfin, $\lambda_1(x)-\lambda_2(x)=\lambda_1(x)-\lambda_2(x)-(\lambda_1(x_o)-\lambda_2(x_o))-(x-x_o)(\lambda'_1(x_o)-\lambda'_2(x_o))$

puisque $\lambda_1(x)=\lambda_2(x_o)$ et $\lambda'_1(x_o)=\langle A'(x_o)V_1(x_o),V_1(x_o)\rangle=\lambda'_2(x_o)=\langle A'(x_o)V_2(x_o),V_2(x_o)\rangle$

et d'après la proposition 4.2, $\lim\limits_{x\to x_o} 2\dfrac{\lambda_1(x)-\lambda_2(x)}{(x-x_o)^2} = E_2(V_1(x_o),V_1(x_o))-E_2(V_2(x_o),V_2(x_o))\neq 0$

Finalement, $\langle V'_1(x), V_2(x)\rangle$ aura une limite en x_o si et seulement si le membre de droite de (4.4.6), divisé par $(x-x_o)^2$ en a une.

Cela sera vrai en particulier si V_1 et V_2 admettent des DTT à l'ordre 2 en x_o, autrement dit, si A est de classe C^4 en x_o, d'après la proposition 4.2.

Le but poursuivi est donc atteint, puisque l'on a une condition suffisante sur la matrice A pour que V_1 soit de classe C^1.

Cependant, comme le disions au paragraphe 2, nous n'avons qu'une condition *suffisante*. En effet, il n'est pas évident, à priori, que, par exemple, V_1 admette forcément un DTT à l'ordre 2 pour que $\dfrac{\langle A'(x_o)(V_1(x)-V_1(x_o)-(x-x_o)V'_1(x_o)),V_2(x)\rangle}{(x-x_o)^2}$ ait une limite.

Nous parlerons plus en détail de ce problème au paragraphe 5.

b) Un premier résultat

Supposons (H_p) vérifiée, pour $p \geq 1$. Nous allons montrer ici que V_1 (ainsi que V_2) sont dérivables à tout ordre désiré si la matrice A vérifie certaines conditions. Nous avons vu, au chapitre 3, que si A est de classe C^p, alors V_1 est une fonction continue (donc de classe C^o).
Supposons avoir démontré que V_1 est de classe C^q. A quelle condition sera-t-il de classe C^{q+1} ?

Nous allons établir une première proposition concernant l'existence de développements de type Taylor pour les fonctions $V_1^{(\ell)}(x)$, pour $\ell \leq q$:

Proposition 4.3 :

Pour $\ell \leq q$, *la fonction* $V_1^{(\ell)}(x)$ *admet un* DTT *à l'ordre* j *en* x_o *si :*

(i) A *est de classe* $C^{p+j+\ell}$ *au moins*

(ii) les fonctions $V_1^{(k)}(x)$ *et* $\lambda_1^{(k)}(x)$, *pour* $k \leq \ell-1$, *admettent un* DTT *à l'ordre* p+j *en* x_o, $V_2(x)$ *admet un* DTT *à l'ordre* p+j.

Démonstration :

$V_1^{(\ell)}$ admet un DTT à l'ordre 0 puisque V_1 est de classe C^q avec $q \geq \ell$. Supposons donc que $V_1^{(\ell)}(x)$ admette un DTT à l'ordre j en x_o, et que les conditions (i) et (ii) soient vérifiées pour l'indice j+1.

Nous allons prouver que $\dfrac{V_1^{(\ell)}(x)-DTT_j(V_1^{(\ell)})(x_o)}{(x-x_o)^{j+1}}$ a une limite quand x tend vers x_o.

. Composante sur $V_1(x)$

On a, d'après (1.4.6), pour $x \neq x_o$:

(4.4.7) $$<V_1^{(\ell)}(x)-DTT_j(V_1^{(\ell)})(x_o),V_1(x)>=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\ell-1} C_\ell^k<V_1^{(\ell-k)}(x),V_1^{(k)}(x)>-<DTT_j(V_1^{(\ell)})(x_o),V_1(x)>$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\ell-1} C_\ell^k<V_1^{(\ell-k)}(x)-DTT_j(V_1^{(\ell-k)})(x_o),V_1^{(k)}(x)>-<DTT_j(V_1^{(\ell)})(x_o),V_1(x)-DTT_j(V_1)(x_o)>$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\ell-1} C_\ell^k<DTT_j(V_1^{(\ell-k)})(x_o),V_1^{(k)}(x)-DTT_j(V_1^{(k)})(x_o)>$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\ell-1} C_\ell^k<DTT_j(V_1^{(\ell-k)})(x_o),DTT_j(V_1^{(k)})(x_o)>-<DTT_j(V_1^{(\ell)})(x_o),DTT_j(V_1)(x_o)>$$

(puisque pour $k \leq \ell$, $V_1^{(k)}(x)$ admet un DTT à l'ordre j+1 au moins)

dans (4.4.7), le membre de droite se compose de deux termes d'un genre différent ; un premier terme (formé par les trois premières sommes) qui, divisé par $(x-x_o)^{j+1}$ aura, par hypothèse, une limite en x_o((i) et (ii) étant supposés vrais pour l'indice j+1) et un second terme résiduel que l'on peut écrire sous la forme : $\sum_{i=o}^{2j} (x-x_o)^i a_i$, les a_i étant des *constantes* de $\mathbb{R}^N$.

Si l'on divise (4.4.7) par $(x-x_o)^i$ successivement pour i = 0, 1, ..., j, on va obtenir, puisque $\dfrac{V_1^{(\ell)}(x)-DTT_j(V_1^{(\ell)})(x_o)}{(x-x_o)^i}$ aura une limite nulle :

$a_o = 0$, puis $a_1 = 0$, puis $a_2 = 0$, ..., puis $a_j = 0$. Finalement, ce second terme sera de la forme : $\sum_{i=j+1}^{2j} (x-x_o)^i a_i$ et en divisant (4.4.7) par $(x-x_o)^{j+1}$, $<\dfrac{V_1^{(\ell)}(x)-DTT_j(V_1^{(\ell)})(x_o)}{(x-x_o)^{j+1}}, V_1(x)>$ aura une limite en x_o.

. composante sur $V_h(x)$, $h \geq 3$

On peut écrire, d'après (1.4.4), avec toujours $B_1(x) = A(x) - \lambda_1(x)I_N$:

$$(4.4.8) \quad <B_1(x)[V_1^{(\ell)}(x)-DTT_j(V_1^{(\ell)})(x_o)],V_h(x)>$$

$$= (\lambda_h(x)-\lambda_1(x)) \times <[V_1^{(\ell)}(x)-DTT_j(V_1^{(\ell)})(x_o)],\ V_h(x)>$$

$$= - \sum_{k=1}^{\ell-1} C_\ell^k <B_1^{(k)}(x)V_1^{(\ell-k)}(x),V_h(x)> - <B_1(x)[DTT_j(V_1^{(\ell)})(x_o)],V_h(x)>$$

$$- <A^{(\ell)}(x)\ V_1(x),\ V_h(x)>$$

mais, par hypothèse de récurrence, les fonctions $V_1^{(k)}(x)$ et $\lambda_1^{(k)}(x)$, pour $k \leq \ell-1$, admettent un DTT à l'ordre j+1 ($\leq$p+j). D'autre part, A étant de classe $C^{p+j+\ell+1}$ ((i) à l'ordre j+1), $A^{(k)}(x)$, pour $k \leq \ell$, et $V_h(x)$ admettent des DTT à l'ordre j+1. En faisant apparaître, dans (4.4.8), ces différents DTT dans le membre de droite, comme pour (4.4.7), et en procédant comme pour la composante sur $V_1(x)$, on prouve que, puisque $\lambda_1(x_o) \neq \lambda_h(x_o)$,

$$<[\frac{V_1^{(\ell)}(x)-DTT_j(V_1^{(\ell)})(x_o)}{(x-x_o)^{j+1}}]\ ,\ V_h(x)> \text{ a une limite en } x_o$$

. Composante sur $V_2(x)$

(4.4.8) étant toujours valide pour h = 2, on a :

$$(4.4.9) \quad (\lambda_1(x)-\lambda_2(x))\ <[V_1^{(\ell)}(x)-DTT_j(V_1^{(\ell)})(x_o)],V_2(x)>$$

$$= \sum_{k=1}^{\ell-1} C_\ell^k <B_1^{(k)}(x)V_1^{(\ell-k)}(x),V_2(x)> + <A^{(\ell)}(x)V_1(x),V_2(x)>$$

$$+ <B_1(x)[DTT_j(V_1^{(\ell)})(x_o)],V_2(x)>$$

mais on sait que, (H_p) étant vérifiée, d'après la remarque faite à la suite de la proposition 4.2, λ_1 et λ_2 ont des DTT qui coïncident jusqu'à l'ordre p-1. Autrement dit on a :

$$\begin{cases} \text{pour } k \le p-1 \ \lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{\lambda_1(x)-\lambda_2(x)}{(x-x_o)^k} = 0 \\ \lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{\lambda_1(x)-\lambda_2(x)}{(x-x_o)^p} = E_p(V_1(x_o),V_1(x_o))-E_p(V_2(x_o),V_2(x_o)) \neq 0 \end{cases}$$

Finalement, si dans (4.4.9) on peut diviser par $(x-x_o)^{p+j+1}$ et si le membre de droite a une limite, on prouvera que $<[\dfrac{V_1^{(\ell)}(x)-DTT_j(V_1^{(\ell)})(x_o)}{(x-x_o)^{j+1}}], V_2(x)>$ a une limite en x_o.

Mais par hypothèse (i) et (ii) sont vrais pour l'indice j+1. Alors $V_1^{(k)}(x)$ et $\lambda_1^{(k)}(x)$ admettent un DTT à l'ordre p+j+1, pour $k \le \ell-1$. A étant de classe $C^{p+j+\ell+1}$, $A^{(k)}(x)$ admet un DTT à l'ordre p+j+1 pour $k \le \ell$.
Enfin V_2 admet un DTT à l'ordre p+j+1.

On peut alors à nouveau introduire ces DTT dans (4.4.9) et employer la méthode utilisée précédemment. Cette fois, on aura dans le membre de droite un terme résiduel de la forme $\sum\limits_{i=o}^{3(p+j)} (x-x_o)^i a_i$.

Mais si l'on divise successivement (4.4.9) par $(x-x_o)^i$ pour $i = 0, 1, \ldots, p+j$, le membre de gauche ayant une limite nulle en x_o, on aura $a_o = a_1 = \ldots = a_{p+j} = 0$, et le terme résiduel sera de la forme $\sum\limits_{i=p+j+1}^{3(p+j)} (x-x_o)^i a_i$.
En divisant alors par $(x-x_o)^{p+j+1}$, on prouvera que
$<[\dfrac{V_1^{(\ell)}(x)-DTT_j(V_1^{(\ell)})(x_o)}{(x-x_o)^{j+1}}], V_2(x)>$ a une limite en x_o

q.e.d.

c) <u>Différentiabilité de V_1</u>

Grâce à la proposition 4.3, nous allons pouvoir établir le résultat suivant, concernant la dérivée $(q+1)^e$ de V en x_o.

Proposition 4.4 :

Si V_1 *est de classe* C^q *en* x_o *et si la matrice* A *est de classe* $C^{(q+1)p+1}$, *alors la fonction* V_1 *admet une dérivée* $(q+1)^e$ *en* x_o.

Démonstration :

Il s'agit de prouver que $\dfrac{V_1^{(q)}(x)-V_1^{(q)}(x_o)}{x-x_o}$ a une limite quand x tend vers x_o, autrement dit , que $V_1^{(q)}(x)$ admet un DTT à l'ordre 1 en x_o. Si $q = 0$, le résultat découle directement de la proposition 4.2. Sinon, d'après la proposition 4.3, ceci sera vrai si, pour $k \le q-1$, les fonctions $V_1^{(k)}(x)$, $\lambda_1^{(k)}(x)$ et $V_2(x)$ admettent des DTT à l'ordre p+1 en x_o, et si A est de classe C^{p+q+1} au moins.

Mais, d'après la proposition 4.2, $V_1(x)$ et $V_2(x)$ admettront des DTT à l'ordre p+1 si A est de classe C^{2p+1}.

D'autre part, si $V_1^{(k)}$ admet un DTT à l'ordre p+1 en x_o pour $k \le q-1$, cette propriété sera forcément vraie pour $\lambda_1^{(k)}(x)$, d'après (1.4.3), puisque A est de classe C^{p+q+1}. Si $q = 1$, la proposition est démontrée, car $2p+1 \ge p+2$.

Sinon, $V_1^{(q)}(x)$ aura un DTT à l'ordre 1 en x_o si :

$$(4.4.10)\quad \begin{cases} - \ V_1^{(k)}(x) \text{ admet un DTT à l'ordre } p+1 \text{ en } x_o, \text{ pour } 1 \le k \le q-1 \\ \\ - \ A \text{ est de classe } C^K \text{ au moins avec } K = \sup\,(p+q+1,\ 2p+1) \end{cases}$$

Toujours d'après la proposition (4.3), (4.4.10) sera vrai si, pour $1 \le k \le q-1$, on a :

$$\begin{cases} - \ V_1^{(i_k)}(x),\ \lambda_1^{(i_k)}(x),\ V_2(x) \text{ admettent des DTT à l'ordre } 2p+1 \text{ en } x_o \\ \quad \text{pour } 0 \le i_k \le k-1 \\ - \ A \text{ est de classe } C^{2p+k+1} \text{ au moins} \end{cases}$$

Si cette dernière série de propriété est vraie pour $k = q-1$, elle le sera bien évidemment pour $k \le q-1$.

(4.4.10) sera donc vraie, avec $q \ge 2$, si :

$$\begin{cases} - V_1^{(k)}(x),\ \lambda_1^{(k)}(x),\ V_2(x) \text{ admettent des DTT à l'ordre } 2p+1 \text{ en } x_o \\ \quad \text{pour } 0 \le k \le q-2 \\ - A \text{ est de classe } C^{2p+q} \text{ au moins (car } 2p+q \ge \sup(p+q+1, 2p+1) \text{ car } p\ge 1 \text{ et } q \ge 1) \end{cases}$$

En refaisant le même travail que précédemment, on prouverait que (4.4.10) est vraie si, soit $q = 2$ et A de classe C^{3p+1} (car $3p+1 \ge 2p+2$), soit $q \ge 3$ et

$$\text{(4.4.11)} \quad \begin{cases} - V_1^{(k)}(x) \text{ admet un DTT à l'ordre } 2p+1 \text{ en } x_o, \text{ pour } 1 \le k \le q-2 \\ \\ - A \text{ est de classe } C^k \text{ au moins, avec } K = \sup(2p+q,\ 3p+1) \end{cases}$$

En itérant q fois ce procédé, on obtient finalement que (4.4.10) est vraie si :

$$\text{(4.4.12)} \quad \begin{cases} - V_1(x), \lambda_1(x), V_2(x) \text{ admettent des DTT à l'ordre } qp+1 \text{ en } x_o \\ \\ - A \text{ est de classe } C^{qp+2} \text{ au moins} \end{cases}$$

Et d'après la proposition 4.3, (4.4.12) sera vérifiée si la matrice A est de classe $(q+1)p+1$ (car $(q+1)p+1 \ge qp+2$ puisque $p \ge 1$)

q.e.d.

Maintenant, il ne nous reste plus qu'à démontrer que sous certaines conditions, V_1 est de classe C^{q+1} :

Proposition 4.5 :

Si V_1 *est de classe* C^q *en* x_o *et si la matrice* A *est de classe* $C^{(q+2)p}$, *alors* V_1 *est de classe* C^{q+1} *en* x_o.

Démonstration :

On prouve que $\langle V_1^{(q)}(x), V_h(x)\rangle$ a une limite pour $1 \le h \le N$.

. composante sur $V_1(x)$

On a, en $x \ne x_o$, d'après (1.4.6), puisque A est de classe C^{q+1} (au moins) :

$$<V_1^{(q+1)}(x),\ V_1(x)> = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{q} C_{q+1}^{k} <V_1^{(q+1-k)}(x),\ V_1^{(k)}(x)>$$

alors, V_1 étant de classe C^q en x_o, $<V_1^{(q+1)}(x),\ V_1(x)>$ a donc une limite en x_o.

. Composante sur $V_h(x)$, $h \geq 3$

On a, pour tout x, $<V_1(x),\ V_h(x)> = 0$. En différentiant cette équation à l'ordre q+1, en $x \neq x_o$ on a, puisque A est de classe C^{q+1} (au moins)

$$<V_1^{(q+1)}(x),\ V_h(x)> = -\sum_{k=1}^{q+1} C_{q+1}^{k} <V_1^{(q+1-k)}(x),\ V_h^{(k)}(x)>$$

mais V_1 est de classe C^q en x_o et V_h de classe C^{q+1} au moins en x_o ;
$<V_1^{(q+1)}(x),\ V_h(x)>$ a donc une limite en x_o

. Composante sur $V_2(x)$

On peut écrire, d'après (1.4.4),pour $x \neq x_o$:

$$<B_1(x)V_1^{(q+1)}(x),\ V_2(x)> = -\sum_{k=1}^{q} C_{q+1}^{k} <B_1^{(k)}(x)\ V_1^{(q+1-k)}(x),\ V_2(x)> - <A^{(q+1)}(x)\ V_1(x),\ V_2(x)>$$

ou encore

$$\boxed{(\lambda_1(x)-\lambda_2(x))<V_1^{(q+1)}(x),V_2(x)>=<A^{(q+1)}(x)V_1(x),V_2(x)>+\sum_{k=1}^{q} C_{q+1}^{k}<B_1^{(k)}(x)V_1^{(q+1-k)}(x),V_2(x)>} \quad (4.4.13)$$

Mais la fonction f, *à valeurs réelles*, définie par :

$$f(x) = <V_1^{(q)}(x)-V_1^{(q)}(x_o),V_2(x_o)>$$

est une fonciton dérivable sur $[x_o,\ x]$, de classe C_1 sur $]x_o,\ x]$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe y dans $]x_o,\ x]$ tel que :

$$f(x) - f(x_o) = (x-x_o)f'(y)$$

ou encore

$$<\frac{V_1^{(q)}(x)-V_1^{(q)}(x_o)}{x-x_o},\ V_2(x_o)> = <V_1^{(q+1)}(y),\ V_2(x_o)>$$

Soit alors une suite $\{x^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ de limite x_o ; il existe donc une suite $\{y^n,\ n \in \mathbb{N}\}$, de limite x_o puisque $y^n \in]x_o, x^n[$, telle que

$$< \frac{V_1^{(q)}(x^n)-V_1^{(q)}(x_o)}{x^n-x_o},\ V_2(x_o)> = <V_1^{(q+1)}(y^n),\ V_2(x_o)>.$$

Alors, puisque $V_1^{(q+1)}(x_o)$ existe, $\lim\limits_{n\to\infty} <V_1^{(q+1)}(y^n),V_2(x_o)> = <V_1^{(q+1)}(x_o),V_2(x_o)>$

mais on a, en décomposant $V_1^{(q+1)}(y^n)$ sur $(V_1(y^n),\ \ldots,\ V_N(y^n))$:

$$<V_1^{(q+1)}(y^n),V_2(x_o)> = \sum_{h=1}^{N} <V_1^{(q+1)}(y^n),V_h(y^n)><V_h(y^n),V_2(x_o)>$$

Comme d'après ce qui précède, $<V_1^{(q+1)}(y^n),V_h(y^n)>$ a une limite pour $h \neq 2$, comme $<V_h(y^n),V_2(x_o)>$ a pour limite $\delta_{h,2}$, on a

BU LILLE

4.4.14) $$\boxed{\lim_{n\to\infty}<V_1^{(q+1)}(y^n),V_2(y^n)> = \lim_{n\to\infty} <V^{(q+1)}(y^n),V_2(x_o)> = <V_1^{(q+1)}(x_o),V_2(x_o)>}$$

D'autre part, si $V_1^{(k)}(x)$, $\lambda_1^{(k)}(x)$, pour $k \leq q$, $V_2(x)$ et $A^{(k)}(x)$, pour $k \leq q+1$, admettent, en x_o, des DTT à l'ordre p, on pourra écrire :

4.4.15)
$$\begin{aligned}
&<\lambda_1(x)-\lambda_2(x)><V_1^{(q+1)}(x),V_2(x)>=<[A^{(q+1)}(x)-DTT_{p-1}(A^{(q+1)}(x_o))]V_1(x),V_2(x)>\\
&+ \sum_{k=1}^{q} C_{q+1}^{k} <[B_1^{(k)}(x)-DTT_{p-1}(B_1^{(k)})(x_o)]V_1^{(q+1-k)}(x),V_2(x)>\\
&+ <[DTT_{p-1}(A^{(q+1)})(x_o)][V_1(x)-DTT_{p-1}(V_1)(x_o)],V_2(x)>\\
&+ \sum_{k=1}^{q} C_{q+1}^{k} <[DTT_{p-1}(B_1^{(k)})(x_o)][V_1^{(q+1-k)}(x)-DTT_{p-1}(V_1^{(q+1-k)})(x_o)],V_2(x)>\\
&+ <[DTT_{p-1}(A^{(q+1)})(x_o)][DTT_{p-1}(V_1)(x)],\ [V_2(x)-DTT_{p-1}(V_2)(x_o)]>\\
&+ \sum_{k=1}^{q} C_{q+1}^{k} <[DTT_{p-1}(B_1^{(k)})(x_o)][DTT_{p-1}(V_1^{(q+1-k)})(x_o)],[V_2(x)-DTT_{p-1}(V_2)(x_o)]>\\
&+ <[DTT_{p-1}(A^{(q+1)})(x_o)][DTT_{p-1}(V_1)(x_o)],[DTT_{p-1}(V_2)(x_o)]>\\
&+ \sum_{k=1}^{q} C_{q+1}^{k} <[DTT_{p-1}(B_1^{(k)})(x_o)][DTT_{p-1}(V_1^{(q+1-k)}(x_o))],[DTT_{p-1}(V_2)(x_o)]>
\end{aligned}$$

Alors, en écrivant (4.4.15) en y^n, le membre de gauche divisé par $(y^n-x_o)^i$, pour $i \leq p-1$ a une limite nulle, d'après (4.4.14). Il en va de même pour le second membre, à l'exception peut-être du terme résiduel formé par les deux dernières expressions. Celui-ci est de la forme $\sum_{i=o}^{3(p-1)} (x-x_o)^i a_i$. Comme précédemment, en divisant (4.4.15), écrit en y^n, par $(y^n-x_o)^i$ successivement pour $i = 0, 1, \ldots, p-1$, on montre que $a_o = a_1 = \ldots = a_{p-1} = 0$. Et finalement, en divisant, pour tout x cette fois, (4.4.15) par $(x-x_o)^p$, puisque $\frac{\lambda_1(x)-\lambda_2(x)}{(x-x_o)^p}$ a une limite non nulle, $<V_1^{(q+1)}(x),V_2(x)>$ aura une limite.

En résumé, donc, $V_1^{(q+1)}(x)$ a une limite en x_o si $V_1^{(k)}(x),\lambda_1^{(k)}(x)$, pour $k \leq q$, $V_2(x)$ et $A^{(k)}(x)$, pour $k \leq q+1$, admettent des DTT à l'ordre p. En refaisant un raisonnement absolument identique à celui de la proposition 4.4, on montrerait que cela est vrai si A est de classe $C^{(q+2)p}$.

q.e.d.

Remarques

a) D'après (1.4.3), si V_1 est de classe C^q en x_o, $\lambda_1^{(q+1)}(x)$ a une limite en x_o. On montrerait, en appliquant le théorème des accroissements finis que cette limite est $\lambda_1^{(q+1)}(x_o)$. λ_1 est donc de classe C^{q+1}.

b) Si V_1 est de classe C^q et λ_1 de classe C^{q+1}, les valeurs $V_1^{(j)}(x_o)$ pour $j \leq q$ et $\lambda_1^{(j)}(x_o)$ pour $j \leq q+1$ coïncident bien évidemment avec les coefficients $V_{1,j}$ et $\lambda_{1,j}$ correspondants des DTT de V_1 et λ_1 aux ordres respectifs q et q+1. Les formules données à la suite de la proposition 4.2 permettent donc de les calculer.

c) On a bien évidemment le même résultat pour V_2. Les composantes de $V_2(x_o)$ se calculent par des formules analogues à (4.3.4) pour la composante sur $V_2(x_o)$ et (4.3.2) pour la composante sur $V_h(x_o)$, $h \geq 3$ ainsi que sur $V_1(x_o)$ (car on connaît les $V_1^{(j)}(x_o)$, $j \leq q$).

Finalement, on peut énoncer le théorème suivant :

<u>*Théorème 5*</u> :

Si la matrice A *vérifie la condition* (H_p) *au point* x_o, *et si elle est de classe* $C^{p(q+1)}$ *(resp.* C^∞*) dans un voisinage* U *de* x_o, *il existe des fonctions* $\lambda_i(x)$ *et* $V_i(x)$, *pour* i *dans* P_N, *de classe* C^q *au moins (resp.* C^∞*) en* x_o *et* $C^{(q+1)p}$ *(resp.* C^∞*) en dehors de* x_o *dans* U, *représentant, pour tout* x *de* U, *les valeurs propres et les vecteurs propres normés associés de* A(x).

5 - Remarques sur la non-optimalité des résultats

Considérons à nouveau le cas simple étudié en § 5, a) ; on voulait savoir à quelle condition la fonction V_1 serait de classe C^1, sous (H_2). Nous avions alors conclu que cette propriété sera vérifiée si A est de classe C^4 (pour $p = 2$ et $q = 1$, $p(q+1) = 4$). Dans ce cas précis, on peut cependant améliorer le résultat et montrer qu'il suffit que A soit de classe C^3. En effet, si A est de classe C^3, d'après la proposition 4.2, V_1 admet un DTT à l'ordre 1 en x_o, autrement dit une dérivée $V'_1(x_o)$ (de même que V_2 a en x_o une dérivée $V'_2(x_o)$).

Mais d'après (4.4.6), pour que $<V'_1(x), V_2(x)>$ ait une limite en x_o, si A est de classe C^3, il suffit que

$$\frac{<A'(x_o)(V_1(x)-V_1(x_o)-(x-x_o)V'_1(x_o)),V_2(x)>+<A'(x_o)(V_2(x)-V_2(x_o)-(x-x_o)V'_2(x_o)),V_1(x_o)>}{(x-x_o)^2}$$

ait une limite en x_o ; ou encore, puisque V_1 et V_2 sont dérivables en x_o, que

$$t(x)=\frac{<A'(x_o)(V_1(x)-V_1(x_o)-(x-x_o)V'_1(x_o)),V_2(x_o)>+<A'(x_o)(V_2(x)-V_2(x_o)-(x-x_o)V'_2(x_o)),V_1(x_o)>}{(x-x_o)^2}$$

ait une limite en x_o

mais en décomposant $A'(x_o)V_1(x_o)$ et $A'(x_o)V_2(x_o)$, on peut écrire :

$$\boxed{\begin{aligned} t(x)= &\sum_{h\geq 3} [<A'(x_o)V_2(x_o),V_h(x_o)><\frac{V_1(x)-V_1(x_o)-(x-x_o)V'_1(x_o)}{(x-x_o)^2}, V_h(x_o)>] \\ &+\sum_{h\geq 3} [<A'(x_o)V_1(x_o),V_h(x_o)><\frac{V_2(x)-V_2(x_o)-(x-x_o)V'_2(x_o)}{(x-x_o)^2}, V_h(x_o)>] \\ &+<A'(x_o)V_1(x_o),V_1(x_o)>[\frac{<(V_1(x)-V_1(x_o)-(x-x_o)V'_1(x_o)),V_2(x_o)>}{(x-x_o)^2} \\ &\qquad + \frac{<(V_2(x)-V_2(x_o)-(x-x_o)V'_2(x_o)),V_1(x_o)>}{(x-x_o)^2}] \end{aligned}} \quad (4.5.1)$$

(ceci en vertu des points (i) et (ii) de (4.4.3))

Mais on sait que $<\frac{V_1(x)-V_1(x_o)-(x-x_o)V'_1(x_o)}{(x-x_o)^2}, V_h(x_o)>$ aura une limite, d'après la proposition 4.2 pour $h \geq 3$, si V_h admet un DTT à l'ordre 2. A étant de classe C^3, V_h l'est aussi pour $h \geq 3$ et cette propriété est vraie. Ce résultat étant tout aussi valide pour V_2, les deux premiers termes de (4.5.1) ont une limite.

D'autre part, on a, puisque pour tout x, $<V_1(x), V_2(x)> = 0$:

$$<V_1(x)-V_1(x_o),V_2(x)> = - <V_1(x_o),V_2(x)> = - <V_1(x_o),V_2(x)-V_2(x_o)>$$

En divisant par $(x-x_o)$, on obtient donc à la limite, V_1 et V_2 étant dérivables :

$$<V'_1(x_o), V_2(x_o)> = - <V_1(x_o), V'_2(x_o)>$$

Alors (4.5.1) devient :

$$t(x) = t_1(x) + <A'(x_o)V_1(x_o),V_1(x_o)> \left[\frac{<V_1(x),V_2(x_o)> + <V_2(x),V_1(x_o)>}{(x-x_o)^2}\right] \tag{4.5.2}$$

(où $t_1(x)$ a une limite en x_o)

Enfin on peut écrire :

$<V_1(x),V_2(x_o)> = <V_1(x)-V_1(x_o),V_2(x_o)>$ et $<V_2(x),V_1(x_o)> = -<V_2(x),V_1(x)-V_1(x_o)>$

d'où $<V_1(x),V_2(x_o)>+<V_2(x),V_1(x_o)> = -<(V_1(x)-V_1(x_o)), (V_2(x)-V_2(x_o))>$

Ceci prouve donc que $t(x)$ a une limite en x_o, d'après (4.5.2), sans qu'il soit *nécessaire* que V_1 et V_2 admettent des DTT à l'ordre 2 en x_o. Finalement si A est de classe C^3, $V'_1(x)$ a une limite en x_o (on montrerait sans peine, à l'aide du théorème des accroissements finis, que cette limite est forcément $V'_1(x_o)$ et que par conséquent, V_1 est de classe C^1).

On peut donc conclure de cette remarque que le résultat énoncé sous la forme du théorème 5 n'est sans doute pas "optimal" en ce qui concerne les hypothèses faites sur la matrice. Néanmoins, la technique utilisée pour les démonstrations n'a pas permis jusqu'ici de faire, pour p et q quelconques, les mêmes manipulations que pour (H_2).

CHAPITRE 5

EXTENSION AU CAS D'UNE VALEUR PROPRE DE MULTIPLICITE QUELCONQUE

1 - INTRODUCTION

Jusqu'à présent, nous nous sommes toujours intéressés au cas où la matrice A possède, en un point x_o, une valeur propre double, toutes les autres étant simples. Peut-on étendre les résultats obtenus au cas d'une valeur propre de multiplicité plus grande, ou même de plusieurs valeurs propres multiples ? Si la chose est simple en ce qui concerne l'extension de la condition (H_1), de très sérieuses complications apparaissent pour (H_p), $p \geq 2$, comme nous le verrons dans ce chapitre.

2 - EXTENSION DE LA CONDITION (H_1)

a) Notations et cadre du problème

Nous ferons, dans ce chapitre, les hypothèses suivantes : $A(x)$ est une matrice de classe C^K en x dans un voisinage U de x_o, avec $K \geq 1$, ou C^∞. $A(x_o)$ a une valeur propre λ_o de multiplicité m, l'espace propre associé à λ_o étant noté M_o (A est bien sûr carrée $N \times N$, réelle symétrique pour tout x de U).

Il s'agit ici de générer une nouvelle condition (H_1), du même type que celle du chapitre 2, permettant d'exhiber des fonctions continues représentant les éléments propres. Cette étude étant consignée dans sa totalité dans [19], nous n'en donnerons qu'un bref aperçu.

b) Une nouvelle condition (H_1)

Comme au chapitre 2, nous supposerons l'existence a priori de fonctions de classe C^1 dans U représentant les valeurs propres et les vecteurs propres normés associés de $A(x)$. Soient $\lambda_i(x)$ et $V_i(x)$, pour i dans P_N, ces fonctions et supposons que :

$$\lambda_1(x_o) = \lambda_2(x_o) = \ldots = \lambda_m(x_o) = \lambda_o$$

On obtiendrait facilement que $V_1(x_o), \ldots, V_m(x_o)$ vérifient (voir (2.3.5)) :

$$\langle A'(x_o)V_i(x_o), V_j(x_o)\rangle = 0 \text{ pour } i \leq m,\ j \leq m,\ i \neq j$$

La condition (H_1) s'énonce alors comme suit :

- La matrice A est de classe C^1 au moins dans U
- en x_o, il existe une unique base orthonormée $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ de M_o telle que :

$$\langle A'(x_o)\, v_i, v_j\rangle = 0 \quad \text{pour } i \neq j$$

(unicité à prendre au sens souligné au chapitre 2).

c) Vérification de (H1)

Cette vérification est en fait le seul point où la généralisation demande une étude un peu différente.

Soit $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_N)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^N$, formée de vecteurs propres de $A(x_o)$, telle que

$u_i \in M_o$ si $i \leq m$

Si H est la matrice de passage de cette base $\mathcal{B}'$ à la base canonique, celle-ci est formée par les vecteurs u_i, $i \leq N$, en colonnes :

$$\begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_N \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix}$$

Dans cette base, $A'(x_o)$ devient $B' = {}^TH\, A'(x_o) H$.

On cherche des vecteurs $(v_1, \ldots, v_m)$ formant une base orthonormée de M_o et vérifiant : $\langle A'(x_o)\, v_i, v_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$.

Dans $\mathcal{B}'$, ces vecteurs deviennent $w_i = {}^TH\, v_i$, pour $i \leq m$, et doivent vérifier :

$$(5.2.1) \qquad \langle B'\, w_i, w_j \rangle = 0 \quad \text{pour } i \leq m,\ j \leq m,\ i \neq j$$

Si Q est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base

$\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m, u_{m+1}, \ldots, u_N)$ on a $\begin{cases} w_i = Qu_i & i \leq m \\ u_j = Qu_j & j \geq m+1 \end{cases}$

Q s'écrit donc, dans $\mathcal{B}'$, sous la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} Q_o & 0 \\ \hline 0 & I_{N-m} \end{array}\right)$$

(où Q_o est une matrice orthogonale, carrée $m \times m$)

(5.2.1) devient alors

$$(5.2.2) \qquad \langle u_i, {}^TQ\, B'Q\, u_j \rangle = 0 \quad i \leq m,\ j \leq m,\ i \neq j$$

Si on pose $C' = {}^{T}Q\, B'\, Q$, on a :

$$C' = \left(\begin{array}{c|c} C'_1 & C'_2 \\ \hline C'_2 & C'_3 \end{array}\right)$$

et d'après (5.2.2), C'_1 est carrée $m \times m$, et *diagonale*.

Soit par exemple :

BU LILLE

$$C'_1 = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_m \end{pmatrix}$$

Alors, si $B' = \left(\begin{array}{c|c} B'_1 & B'_2 \\ \hline B'_2 & B'_3 \end{array}\right)$, la relation $C' = {}^{T}Q\, B'Q$ s'écrit encore

$QC' = B'Q$ et l'hypothèse (H_1) se traduit par

(5.2.3) $\qquad Q_o\, C'_1 = B'_1\, Q_o$

Si Q_o^j est la j-ème colonne de Q_o, on obtient, en identifiant colonne par colonne

$$a_j\, Q_o^j = B'_1\, Q_o^j \qquad \text{pour } j \leq m$$

ou encore

$$\boxed{(B'_1 - a_j\, I_m)\, Q_o^j = 0 \qquad \text{pour } j \leq m}$$

Q_o^j est donc un vecteur propre (normé car Q_o est orthogonale) de B'_1, associé à la valeur propre a_j.

L'hypothèse (H_1) équivaut à l'unicité (aux permutations près des lignes et des colonnes) de la matrice Q_o. Elle sera donc vérifiée si et seulement si B'_1 a toutes ses valeurs propres simples, car alors les Q_o^j sont uniques.

Pour vérifier (H_1), il suffit donc de diagonaliser B'_1. De plus les vecteurs cherchés s'écrivent $v_j = Hw_j$, $j \leq m$, avec :

$$w_j \quad \begin{cases} Q_o^j \\ — \\ 0 \end{cases} \qquad \text{dans la base } \mathcal{B}'$$

D'où une construction simple des vecteurs de M_o qui conviennent.

d) <u>Existence, continuité et différentiabilité des "fonctions éléments propres"</u>

Tous les résultats de continuité et de différentiabilité sont obtenus exactement de la même manière que dans le cas double. Nous ne nous étendrons pas sur ceux-ci, qui sont traités en détail dans [19]. Enonçons néanmoins le résultat global de l'étude de ce cas :

<u>Théorème 6</u> :

Dans tout intervalle]a, b[où la matrice A(x) n'a que des valeurs propres simples, ou bien multiples mais pour lesquelles elle vérifie la condition (H_1), il existe des fonctions $\lambda_i(x)$ et $V_i(x)$ représentant pour tout x de]a, b[les N valeurs propres et les N vecteurs propres normés associés de A(x). Si A est de classe C^{p+1}, $p \geq 1$, (resp. C^∞) dans]a, b[, les fonctions $\lambda_i(x)$ sont de classe C^{p+1} (resp. C^∞) dans]a, b[; les fonctions $V_i(x)$ sont elles de classe C^{p+1} (resp. C^∞) en tout point x_o où $\lambda_i(x_o)$ est simple, C^p (resp. C^∞) si $\lambda_i(x_o)$ est multiple.

De plus, on peut calculer les dérivées successives de ces fonctions par récurrence à l'aide des formules de (5.2.4).

(5.2.4)

$$\star\lambda_i^{(p)}(x)=\langle A^{(p)}(x)V_i(x),V_i(x)\rangle+\sum_{k=1}^{p-1} C_p^k\langle B_i^{(k)}(x)V_i^{(p-k)}(x),V_i(x)\rangle$$

$$\star\langle V_i^{(p)}(x),V_i(x)\rangle = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-1} C_p^k \langle V_i^{(p-k)}(x), V_i^{(k)}(x)\rangle$$

$\star$ <u>si $i \neq j$ et $\lambda_i(x) \neq \lambda_j(x)$</u>

$$\langle V_i^{(p)}(x),V_j(x) = \frac{\langle A^{(p)}(x)V_i(x),V_j(x)\rangle+\sum_{k=1}^{p-1} C_p^k\langle B_i^{(k)}(x)V_i^{(p-k)}(x),V_j(x)\rangle}{\lambda_i(x)-\lambda_j(x)}$$

$\star$ <u>si $i \neq j$ et $\lambda_i(x) = \lambda_j(x)$, $p \geq 2$</u>

$$\langle V_i^{(p)}(x),V_j(x)\rangle=\frac{\langle A^{(p+1)}(x)V_i(x),V_j(x)\rangle+\sum_{k=2}^{p} C_{p+1}^k\langle B_i^{(k)}(x)V_i^{(p+1-k)}(x),V_j(x)\rangle}{(p+1)(\lambda'_i(x)-\lambda'_j(x))}$$
$$+\frac{\sum_{k=1}^{p} C_p^k\langle B_1^{(k)}(x)V_i^{(p-k)}(x),V'_j(x)\rangle}{\lambda'_i(x)-\lambda'_j(x)}$$

$\star$ <u>si $i \neq j$, $\lambda_i(x) = \lambda_j(x)$, $p = 1$</u>

$$\langle V'_i(x),V_j(x)\rangle=\frac{1}{2}\,\frac{\langle A''(x)V_i(x),V_j(x)\rangle+\sum\limits_{\substack{h\ \text{tq}\\ \lambda_h(x)\neq\lambda_i(x)}}\dfrac{\langle A'(x)V_h(x),V_i(x)\rangle\langle A'(x)V_h(x),V_j(x)\rangle}{\lambda_i(x)-\lambda_h(x)}}{\lambda'_i(x)-\lambda'_j(x)}$$

(avec toujours $\sum_1^0 [\ ] = 0$)

La division par $\lambda'_i(x) - \lambda'_j(x)$ dans les deux dernières formules de (5.2.4) se justifie par le fait que la condition (H_1) signifie que les dérivées des valeurs propres sont toutes distinctes. En effet, ces dérivées s'écrivent, pour tout i, $\langle A'(x)V_i(x),V_i(x)\rangle$; ce sont les valeurs propres a_i de la matrice B'_1 de c), qui sont toutes simples si (H_1) est vérifiée.

BU LILLE

3 - CAS GÉNÉRAL

Il serait bien séduisant de pouvoir, de la même manière, étendre les conditions (H_p), $p \geq 2$, au cas d'une valeur propre de multiplicité quelconque. Hélas, nous rencontrons, dans ce cas, une difficulté qui n'apparaît pas dans le cas de (H_1). En effet, lorsque (H_1) est vérifiée, les valeurs propres qui coïncident sont *toutes* "séparées" par leurs dérivées premières. En revanche, l'ordre de séparation, pour $p \geq 2$, peut ne pas être le même pour toutes les valeurs propres qui coïncident, et l'expression des conditions va être différente.

Supposons, par exemple, qu'au point x_o, la matrice $A(x_o)$ ait une valeur propre triple λ_o, et des valeurs propres simples λ_h, $h \geq 4$. (H_1) n'étant pas vérifiée, on veut exhiber une condition (H_2). Pour cela, on suppose l'existence de fonctions $\lambda_i(x)$ et $V_i(x)$, de classe C^2 telles que $\lambda_1(x_o) = \lambda_2(x_o) = \lambda_3(x_o) = \lambda_o$. Supposons de plus que :

$$\lambda'_1(x_o) = \lambda'_2(x_o) \neq \lambda'_3(x_o) \qquad ((H_1) \text{ n'est alors pas vérifiée}).$$

on a toujours ; pour $i \neq j$ (cf (3.2.3))

$$<A''(x_o)V_i(x_o),\ V_j(x_o)> + 2 <B'_i(x_o)V'_i(x_o),V_j(x_o)> = 0$$

où encore, en décomposant $V'_i(x_o)$ sur la base $(V_1(x_o), \ldots, V_N(x_o))$:

$$<A''(x_o)V_i(x_o),V_j(x_o)> + 2 \sum_{h=1}^{N} <B'_i(x_o)V_h(x_o),V_j(x_o)><V'_i(x_o),V_h(x_o)> = 0$$

alors, si $i = 1$ et $j = 3$, on obtient

$$<A''(x_o)V_1(x_o),V_3(x_o)>+2 \sum_{h\geq 4} \frac{<A'(x_o)V_h(x_o),V_3(x_o)><A'(x_o)V_h(x_o),V_1(x_o)>}{\lambda_o-\lambda_h(x_o)}$$

$$+ (\lambda'_3(x_o)-\lambda'_1(x_o))<V'_1(x_o),V_3(x_o)> = 0$$

et $<V'_1(x_o),\ V_3(x_o)>$ ne s'élimine pas.

On pourrait bien sûr exprimer $<V'_1(x_o),V_3(x_o)>$ (comme en (5.2.4) puisque $\lambda'_1(x_o) \neq \lambda'_2(x_o)$), mais on voit bien comment va se compliquer l'expression de (H_2) et de (H_p) pour p quelconque, surtout si les valeurs propres se séparent à des ordres différents nombreux.

Il serait plus intéressant d'exprimer (H_2) sous la forme suivante :

- A est de classe C^2 au moins
- il existe une unique base (v_1, v_2, v_3) de M_o telle que :
  a) $<A'(x_o)v_i,v_j> = 0$ pour $i \neq j$, $i \leq 3$, $j \leq 3$

  b) $$<A''(x_o)v_i,v_j> + 2 \sum_{h\geq 4} \frac{<A'(x_o)v_i,v_h><A'(x_o)v_j,v_h>}{\lambda_o-\lambda_h} = 0$$

  si $<A'(x_o)v_i,v_i> = <A'(x_o)v_j,v_j>$

Peut-on, pour une multiplicité m quelconque, exprimer les conditions (H_p) de cette manière ? La réponse est sans doute affirmative, mais de toute façon, les difficultés d'aspect combinatoire qui apparaissent alors rendront impossibles certaines démonstrations de continuité et de dérivabilité avec la même technique que dans le cas double (en particulier, on ne pourra plus obtenir une formule comme (4.4.14) de la même manière).

BIBLIOTHEQUE INTERUNIVERSITAIRE
SECTION DE SCIENCES
LILLE

QUELQUES COMMENTAIRES

Il faut bien avouer que le champ d'application des résultats obtenus ici n'est pas très large, dans l'état actuel des choses. Il est cependant vraisemblable que les problèmes rencontrés, et détaillés à la fin des chapitres 4 et 5, ne soient finalement que des difficultés techniques dues au type de démonstrations utilisées, et que l'on puisse, par une méthode plus appropriée, les surmonter, et en particulier étendre les résultats obtenus pour une valeur propre double au cas d'une valeur propre de multiplicité plus grande, dans le cas des conditions (H_p), pour p quelconque.

Mais l'intérêt de cette étude est plutôt d'avoir fait apparaître des conditions simples pour qu'une matrice paramétrée, réelle symétrique, ait des éléments propres vérifiant certaines propriétés de régularité (continuité, différentiabilité) ; conditions simples non pas par leur formulation, qui reste encore irrésolue dans certains cas, mais surtout par leur interprétation faisant intervenir la séparation, à un ordre plus ou moins élevé, des dérivées des valeurs propres.

On peut penser qu'en se servant comme guide de cette idée de séparation des valeurs propres, il soit possible de formuler des conditions, d'une manière éventuellement différente, permettant d'étendre les résultats obtenus. Une idée naturelle serait par exemple de trouver, à partir d'une matrice donnée, une autre matrice, ayant les mêmes vecteurs propres, mais dont les valeurs propres se séparent à des ordres moins élevés de dérivation (autrement dit, dans le contexte présent, ramener l'étude d'une condition (H_p) à celle d'une condition (H_q) où $q < p$). Et lorsqu'aucune des conditions n'est vérifiée, comme c'est le cas pour l'exemple (1.1) du chapitre 1 où toutes les dérivées des valeurs propres coïncident, peut-on conclure à l'impossibilité d'exhiber des "fonctions vecteurs propres" continues ?

BIBLIOTHEQUE INTERUNIVERSITAIRE
SECTION
DE
SCIENCES
LILLE

RÉSUMÉ :

Lorsqu'on étudie les propriétés de continuité et de différentiabilité des éléments propres d'une matrice réelle symétrique A(x), fonction d'une variable réelle x, on n'obtient de résultats généraux que dans le cas où cette matrice est analytique en x ; plus précisément, on établit, en théorie des perturbations, l'existence de fonctions analytiques de x représentant sur $\mathbb{R}$ les valeurs propres et les vecteurs propres normés associés de A(x).

Si A n'est pas analytique, on n'a même plus, en général, la continuité des vecteurs propres en un point x_o où des valeurs propres de $A(x_o)$ sont multiples. En de tels points x_o, nous introduisons une suite récurrente de conditions, sur A et ses dérivées jusqu'à un certain ordre en x_o. Ces conditions (suffisantes) assureront l'existence de fonctions continues différentiables représentant les éléments propres de A(x) dans un voisinage de x_o. Elles nous permettront en outre de calculer les vecteurs propres qui seront les valeurs en x_o des fonctions obtenues. Nous donnerons enfin une interprétation de ces conditions faisant intervenir la séparation, à un certain ordre de dérivation, des fonctions représentant les valeurs propres.

Mots-Clefs :

Matrice symétrique - Perturbation - Valeur propre - Vecteur propre - Continuité - Différentiabilité.