

50376
1983
326

50376
1983
326

THÈSE

PRÉSENTÉE A

L'INSTITUT INDUSTRIEL DU NORD

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR INGÉNIEUR

par

Yves JOANNIC

Ingénieur I.D.N.

Sujet de la thèse: LA ROBUSTESSE DES SYSTEMES DYNAMIQUES A TEMPS DISCRET.
APPLICATION AU PILOTAGE NUMÉRIQUE MULTIVARIABLE DES AVIONS D'ARMES.



Soutenue le 24 novembre 1983 devant le jury d'examen:

MM.	J.C. GENTINA	Président
	P. BORNE	} Rapporteurs
	O. MERCIER	
	C. AUMASSON	
	P. HIPPE	} Examineurs
	D. DEBERGHES	
	D. VIAULT	Invité

O.N.E.R.A.
B.P. 72
92322 CHATILLON
1984

AVANT-PROPOS

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué à l'ONERA, que je remercie en la personne de M. Bismut, Directeur des Études de Synthèse. Je lui exprime toute ma gratitude pour l'accueil qu'il m'a réservé au sein de sa Direction et pour le soutien moral et financier qu'il m'a accordé.

J'adresse mes remerciements chaleureux à M. Mercier, Ingénieur Chef du Groupe Automatique à l'ONERA et co-Directeur de cette thèse, pour m'avoir confié ce sujet de recherche et pour les conseils avisés, l'aide et les encouragements sincères qu'il m'a dispensés tout en entretenant au sein de son équipe de travail une atmosphère dynamique marquée d'une profonde amitié.

J'exprime ma plus vive gratitude à M. Borne, Directeur du Laboratoire de Systématique de Lille-I, Directeur Scientifique de l'Institut industriel Du Nord (IDN) et également Directeur de cette thèse pour l'aide constante et l'appui scientifique permanent qu'il m'a prodigués au cours des développements de cette étude.

Que M. Gentina, Directeur de l'IDN trouve ici l'expression de ma reconnaissance pour m'avoir fait l'honneur de présider cette thèse.

Je remercie vivement M. Aumasson, Chef de Division adjoint et Maître de Recherche à l'ONERA pour le grand intérêt qu'il a porté à ce travail et l'à-propos de ses nombreuses remarques dont le document a bénéficié.

J'exprime toute ma gratitude au Docteur P. Hippe, Professeur à l'Institut d'Automatique de l'Université Erlangen-Nürnberg (R.F.A.) pour le profond intérêt qu'il a témoigné à l'égard de cette recherche et pour l'attention avec laquelle il a examiné cette thèse.

Je remercie M. Deberghes, membre de l'Agence De l'Informatique (ADI) pour sa participation au jury de soutenance malgré ses nombreuses responsabilités.

Que M. Viault, Professeur à l'École Supérieure d'Électricité (ESE), trouve ici mes remerciements les plus sincères pour l'enthousiasme qu'il a manifesté à la lecture de ce travail et pour l'intérêt qu'il lui a porté.

J'exprime enfin ma reconnaissance à M. Bourlès, Professeur à l'ESIEA, pour les conseils qu'il m'a prodigués durant la rédaction de cette thèse et également à tous mes collègues de la Division de Mécanique Aérospatiale de l'ONERA pour l'environnement amical dont j'ai bénéficié.

TABLE DES MATIERES

RÉSUMÉ	2
NOTATIONS UTILISÉES	4
I – INTRODUCTION	5
I.1 – Exposé du problème. Définitions de la robustesse	5
I.2 – Objectifs de la Thèse	5
I.3 – Revue bibliographique	6
I.4 – Organisation de la Thèse	8
II – LES DIVERS ASPECTS DE LA ROBUSTESSE D’UN ASSERVISSEMENT	11
II.1 – Régulateur de poursuite robuste vis-à-vis de perturbations extérieures	11
II.2 – Régulateur de poursuite optimale robuste	15
II.3 – Formalisation des différents types de perturbations	19
II.4 – Régulateur à deux niveaux pour un processus discret	23
II.5 – Application au pilotage d’un avion de combat	26
III – ROBUSTESSE STRUCTURELLE GÉNÉRALISÉE DES RÉGULATEURS NON LINÉAIRES À TEMPS DISCRET	37
III.1 – Définitions	37
III.2 – Résultats connus concernant la robustesse structurelle	38
III.3 – Notions fondamentales sur la stabilité externe (entrée-sortie)	43
III.4 – Robustesse structurelle généralisée vis-à-vis d’éléments dynamiques dans la chaîne de retour	57
III.5 – Récapitulation et portée des résultats	73
IV – ROBUSTESSE VIS-À-VIS DE PERTURBATIONS NON DYNAMIQUES : UN CAS PARTICULIER	75
IV.1 – Formulation mathématique	75
IV.2 – Robustesse structurelle	77
IV.3 – Robustesse des régulateurs linéaires quadratiques	78
IV.4 – Robustesse structurelle généralisée des régulateurs linéaires quadratiques	80
IV.5 – Récapitulation	81
V – ÉVALUATION NUMÉRIQUE DES MARGES DE STABILITÉ	83
V.1 – Choix du critère de robustesse	83
V.2 – Notion de valeur singulière – Algorithme de calcul	84
V.3 – Transformations bilinéaires	85
V.4 – Application aux "lieux en sigma"	87
V.5 – Organigramme du logiciel de synthèse SYNTZW	89
V.6 – Application au régulateur de pilotage	89
V.7 – Appréciation des résultats et recommandations	96
VI – CONCLUSION	99
VI.1 – Résumé de la contribution	99
VI.2 – Critiques et perspectives	100
ANNEXES	101
PLANCHES	115
RÉFÉRENCES	125

LA ROBUSTESSE DES SYSTÈMES DYNAMIQUES A TEMPS DISCRET APPLICATION AU PILOTAGE NUMÉRIQUE MULTIVARIABLE DES AVIONS D'ARMES

par

Yves JOANNIC

RÉSUMÉ

Cette thèse a pour objet de quantifier les systèmes de commande discrets (échantillonnés) multivariables du point de vue de leur robustesse et de proposer des moyens d'accroître cette propriété. Le problème est traité de trois manières qui se complètent et se renforcent mutuellement.

En premier lieu, une forme de loi de commande de poursuite intrinsèquement robuste vis-à-vis de perturbations additives constantes est proposée. Une démarche rationnelle permettant de calculer des lois optimales par rapport à une fonction de coût quadratique est proposée. Une application au pilotage numérique d'un avion de combat constitue la motivation de ce travail et fournit en même temps une application réaliste puisqu'une loi de commande à deux niveaux est développée, le premier servant de modèle de référence et le second réalisant l'asservissement proprement dit du mouvement non linéaire perturbé de l'avion.

En second lieu, des résultats permettant de quantifier la « robustesse structurelle généralisée » d'un système non linéaire récurrent à retour multivariable sont présentés. Ils sont rendus possibles par une formulation opérationnelle originale de la dynamique du processus.

Une généralisation du critère de Lyapounov aux systèmes munis d'un retour dynamique, décrits par un opérateur linéaire de convolution, a permis d'étendre et de généraliser au cas discret *multivariable* les notions classiques de marge de stabilité, de marge de gain et de marge de phase. Des expressions analytiques sont présentées, permettant la quantification de ces marges dans le cas où des perturbations dynamiques ou non linéaires affectent les chaînes de retour. Dans le cas particulier des régulateurs linéaires-quadratiques, ces marges ont été reliées aux matrices de pondération de la fonction de coût; elles peuvent donc faire l'objet d'une optimisation, prenant éventuellement en compte la structure algébrique des perturbations multiplicatives attendues.

Enfin, par application de théorèmes concernant la stabilité externe (entrées-sorties) d'un système récurrent, les perturbations additives tolérables (erreurs de modèle et de linéarisation, perturbations extérieures non constantes), ne déstabilisant pas le système contrôlé, sont quantifiées.

Ces différents aspects de la robustesse se trouvent unifiés dans l'exposé d'une *méthodologie originale* permettant la mise au point d'une régulation multivariable robuste, en présence d'éléments dynamiques (actionneurs et capteurs) non modélisés dans la chaîne de retour. Ces nouveaux outils sont appliqués au problème du pilotage d'un avion. L'exploitation numérique s'appuie sur des algorithmes performants, également exposés dans cette thèse, et qui se rapportent au « domaine fréquentiel discret » (transformées en z , w , w').

Mots clés (lexique CEDOCAR) : Théorie commande optimale – Commande avion – Régulateur – Stabilité avion – Échantillonnage – Robustesse – Pilotage.

**ROBUSTNESS OF DISCRETE-TIME DYNAMICAL SYSTEMS
APPLICATION TO THE MULTIVARIABLE DIGITAL CONTROL
OF COMBAT AIRCRAFT**

SUMMARY

This thesis deals with the synthesis of robust multivariable control laws for discrete-time processes.

A method to compute optimal feedback laws, capable of maintaining accurate tracking despite constantly acting disturbances, is developed and applied to the flight control problem of a combat aircraft.

A new formalism reduces robustness to preservation of stability of a properly augmented system. This leads to theoretical results which quantify the "generalized structural robustness" of a recurrent nonlinear multiple-loop system. Having extended the Lyapounov criterion to systems having a dynamical feedback, i. e. expressed by a linear convolution operator, classical concepts of stability margin and of gain and phase margins are generalized to the multivariable discrete case. Analytical expressions are given, allowing measurement of the margins when dynamical or nonlinear disturbances affect the feedback channels. In the special case of linear-quadratic regulators, the margins are linked to penalty matrices of the cost function, thus allowing optimization of margins, while taking in full account the algebraic structure of expected multiplicative perturbations.

Last, by application of external stability theorems to a recurrent system, admissible additive disturbances (including modeling and linearization errors, non constant external actions) which do not destabilize the controlled system are measured.

All these aspects are unified within the exposition of a novel methodology leading to the design of a robust multivariable regulation, accounting for unmodeled dynamical elements (actuators and transducers) in the feedback loops. The above analytical tools are applied to the flight control of an aircraft. The numerical exploitation implements algorithms in the "discrete frequency domain", which are also presented.

Keywords (NASA thesaurus) : Optimal control – Regulators – Aircraft control – Sampling.

NOTATIONS

\mathbf{Z}	Ensemble des entiers relatifs.
$\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z} - \{0\}$	
$\mathbf{Z}_+ = \mathbf{N}$	Ensemble des entiers positifs.
\mathbf{Z}_-	Ensemble des entiers négatifs.
$[a, b] \cap \mathbf{Z}$	$= \{a, \dots, b\}, (a, b) \in \mathbf{Z}^2$.
$\mathbf{F} = \mathbf{R} (= \mathbf{C})$	Corps des nombres réels (complexes).
$[t, +\infty[$	Intervalle ouvert à droite de \mathbf{R} , $t \in \mathbf{R}$.
\mathbf{C}_+	$= \{s \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re}(s) \geq 0\}$.
$\operatorname{Re}(s)$ et $\operatorname{Im}(s)$	$\forall s \in \mathbf{C}, s = \alpha + j\omega (j^2 = -1)$ et $\alpha = \operatorname{Re}(s), \omega = \operatorname{Im}(s)$.
$ s $	module de $s, s ^2 = s\bar{s}$, où \bar{s} est le conjugué de s .
\mathcal{C}_1 (cercle unité)	$= \{z \in \mathbf{C} \mid z = e^{j\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$.
$\mathbf{F}^n = \mathbf{R}^n (= \mathbf{C}^n)$	Espace vectoriel de dimension n sur \mathbf{R} (sur \mathbf{C}).
$\mathbf{F}^{n \times p}$	Espace des matrices de dimension $n \times p$ ($(n, p) \in \mathbf{N}^2$), à éléments dans le corps \mathbf{F} ($\mathbf{F} = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C}); cet espace est identifié pour des bases données de \mathbf{F}^n et \mathbf{F}^p à l'ensemble des applications linéaires de \mathbf{F}^p dans \mathbf{F}^n .
$\operatorname{Ker}(G)$	Noyau ($\operatorname{Ker}(G) = \{x \mid Gx = 0\}$).
G^T	Transposée de la matrice $G \in \mathbf{F}^{n \times p}$. Si G est symétrique, $G = G^T$.
\bar{G}	Conjuguée de la matrice $G \in \mathbf{F}^{n \times p}$.
$G^* = \bar{G}^T$	Transconjuguée de la matrice $G \in \mathbf{F}^{n \times p}$. Si G est une matrice hermitienne, $G^* = G$.
I	Matrice identité.
$(\operatorname{diag} r_i)_{1 \leq i \leq m}$	Matrice diagonale de dimension $m \times m$ dont les éléments diagonaux sont r_1, \dots, r_m .
$A \geq B, A > B$	Relation d'ordre (resp. d'ordre strict) sur l'espace des matrices $\mathbf{F}^{n \times n}$, signifiant $A - B$ semi-définie positive (noté ≥ 0) (resp. définie positive (noté > 0)).
$Q^{1/2}$	Racine carrée de la matrice hermitienne complexe (resp. symétrique) $Q \geq 0$.
$U\#$	Pseudo-inverse de $U \in \mathbf{F}^{n \times p}$ au sens de Penrose (cf. [78]).
$\ x_k\ _E$	Norme euclidienne ou hermitienne du vecteur $x_k \in \mathbf{F}^n$.
$\ P\ _s$	Norme spectrale de la matrice $P \in \mathbf{F}^{n \times p}$:
	$\ P\ _s = \sup_{x_k \in \mathbf{F}^p - \{0\}} \frac{\ Px_k\ _E}{\ x_k\ _E}$ ou de façon équivalente $[\lambda_{\max}(P^*P)]^{1/2}$.
l_2^n	Espace des fonctions $X(\{X : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^n\})$ telles que : $\int_{\mathcal{C}_1} \ X(e^{j\theta})\ _E^2 d\theta$ existe.
l_p^n	Espace des suites ($\{x : \mathbf{Z}_+ \rightarrow \mathbf{F}^n\}$) telles que :
	$\sum_{i=0}^{\infty} \ x_i\ _E^p$ existe (l'espace l_2 sera plus particulièrement utilisé).
\mathcal{A}	Opérateur, défini à la Section III,3.1.
$\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$	Composée de deux opérateurs.
\mathcal{I}	Opérateur identité.
F^0	Opérateur linéaire de \mathbf{F}^p dans \mathbf{F}^n tel que $F^0 x = Fx$, où $F \in \mathbf{F}^{n \times p}$.
$\ \mathcal{A}\ , \ A^0\ $	Norme de l'opérateur \mathcal{A} ou A^0 , définie à la Section III,3.1.
$\mathcal{L}(x) = X(z)$	Transformée en z de la suite x , où $x \in l_1$, ou l_2 (cf. Annexe D) :
	$X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i z^{-i}$
$\delta_{k,i}$	Symbole de Kronecker ($\delta_{k,k} = 1; \delta_{k,i} = 0$ si $i \neq k$).

I. — INTRODUCTION

I.1. — EXPOSÉ DU PROBLÈME. DÉFINITION DE LA ROBUSTESSE

Sous certains aspects, la robustesse des systèmes de commande automatiques est une préoccupation aussi ancienne que l'Automatique elle-même. Globalement, on entend en effet par robustesse l'insensibilité des lois de commande à des méconnaissances ou à des variations de modèle ainsi que la tolérance de perturbations. Ainsi, Bode [96] fut le premier à montrer les bénéfices de la rétroaction pour réduire la sensibilité des variables contrôlées à des variations de paramètres du processus. Ce n'est cependant que très récemment que la robustesse est redevenue un sujet d'inquiétude, ayant été éclipsée — pendant plus de deux décennies — par d'autres sujets mais principalement par les aspects analytiques et numériques liés à l'optimisation des performances.

Qu'entend-on aujourd'hui par robustesse? Les définitions abondent en effet. De manière générale, la robustesse est une *qualité* décrivant la résistance d'un processus contrôlé à un certain nombre de variations extérieures. En ce qui concerne cette « résistance », il peut s'agir tout d'abord du maintien des propriétés nominales (rapidité de convergence d'une variable, précision d'un asservissement, rejet d'une classe de perturbations, etc.) caractérisant le bon fonctionnement du système. L'exigence peut être apparemment plus faible et ne porter que sur la *stabilité* du système contrôlé; pourtant, il apparaîtra plus loin que par une formulation mathématique appropriée, la plupart des propriétés peuvent se ramener à la stabilité du « mouvement » dans un espace plus étendu. Les variations extérieures constituent également un terme générique rendant compte aussi bien d'*actions extérieures* au système (turbulence atmosphérique, par exemple, dans le cas d'un avion) que de *variations de paramètres* du modèle ou de *défauts de conformité* entre le processus réel et la représentation mathématique qui a servi de base à l'élaboration de la loi de commande. A ces erreurs de modèle, sont ainsi assimilées les relations de transfert caractérisant la dynamique interne des actionneurs (servo-gouvernes par exemple) ou des capteurs effectuant les mesures, avec les circuits de filtrage qui leur sont associés. Dans la mesure où ces éléments ont été idéalisés (mesures parfaites et action instantanée, avec une bande passante infinie) pour le calcul du régulateur, la substitution d'éléments réels, possédant une dynamique propre, non nécessairement linéaire, remet en question l'ensemble des performances du système contrôlé.

Toutes ces formes de perturbations s'appliquent au problème du pilotage multivariable d'un avion. Pour des raisons évidentes, la préservation de la stabilité du mouvement commandé de l'avion, à l'occasion de manœuvres de grande amplitude, dans un domaine de vol étendu et en dépit de ces perturbations revêt une importance toute particulière. Le problème est plus aigu encore pour un avion muni de lois de commande numériques (échantillonnées) surtout dans la mesure où, par économie, un cycle de calcul (période d'échantillonnage) relativement lent est envisagé. Or, l'« État de l'Art » actuel est caractérisé par une absence presque totale de conditions permettant de caractériser et encore moins d'améliorer la robustesse d'un schéma de commande à temps discret.

I.2. — OBJECTIFS DE LA THÈSE

L'objectif principal de cette thèse est de proposer des moyens analytiques permettant d'une part de quantifier la robustesse d'un système de commande multivariable, à temps discret et d'autre part — par une action sur les gains — d'accroître cette robustesse de manière à tolérer des perturbations plus pénalisantes sur le système contrôlé.

Un objectif plus immédiat est de proposer une méthodologie permettant de calculer des lois de commande multivariables possédant — de manière intrinsèque — une robustesse vis-à-vis de perturbations additives à l'équation récurrente décrivant la dynamique du processus. Cette démarche est évidemment fortement motivée par l'application considérée du pilotage d'un avion d'armes. En effet, la dynamique fortement non linéaire et sujette à de nombreuses incertitudes et variations de paramètres n'est que très imparfaitement restituée dans un modèle linéarisé, par exemple de la forme :

$$x_{k+1} = A x_k + B u_k + \text{perturbations.}$$

A l'occasion de manœuvres diverses, les erreurs de linéarisation s'ajoutent aux erreurs de modèle et aux actions atmosphériques extérieures. Il en résulte donc un ensemble de « perturbations » qui ne doivent pas perturber la régulation, c'est-à-dire la réalisation de manœuvres commandées par le pilote. Dans cette thèse, une démarche rationnelle permettant de calculer des lois de commande multivariables discrètes, comparables aux lois « proportionnelles et intégrales » des schémas à temps continu, est donc présentée. Ces lois sont optimales par rapport à une fonction de coût quadratique. Les conditions mathématiques assurant à la fois la stabilisation du système contrôlé, la réalisation précise des objectifs contrôlés et le « rejet » de perturbations additives constantes sont développées. Ces travaux théoriques sont complétés par une application numérique concernant le pilotage automatique du mouvement latéral et directionnel d'un avion de combat, avec une structure de régulateur à deux niveaux, permettant des évolutions commandées de grande amplitude.

L'aspect central de cette thèse concerne cependant le développement d'expressions analytiques exprimant, pour un régulateur donné — choisi pour conférer au système contrôlé nominal un comportement stable —, la tolérance d'éléments potentiellement déstabilisateurs placés dans la chaîne de retour (cf. Fig. I,1). Ces éléments statiques ou dynamiques, figurent naturellement les organes de mesures et de commandes. Ne pouvant les prendre explicitement en considération pour le calcul des gains du régulateur, il convient de pouvoir vérifier *a posteriori* dans quelle mesure ils ne déstabilisent pas la régulation et n'invalident pas la convergence des manœuvres vers les objectifs commandés. Plusieurs inéquations sont proposées, dont la vérification garantit la non-déstabilisation. De généralités différentes, ces résultats de robustesse s'appliquent à un régulateur dynamique relativement général ou à un régulateur optimal à retour d'état.

Lorsque le système (cf. Fig. I,1) est également soumis à des perturbations additives dynamiques, des résultats complémentaires permettent de conclure à la stabilité du système contrôlé.

La forme des résultats présentés dans cette thèse permet enfin de qualifier la robustesse résiduelle du système perturbé. Cette robustesse peut être quantifiée numériquement dans le domaine fréquentiel « discret » : des marges de stabilité sont ainsi mises en évidence. Elles peuvent faire l'objet d'une amélioration, dans des « directions » particulières correspondant aux directions des perturbations les plus sévères, éventuellement dans des bandes de fréquence choisies, ceci par action sur les gains ou sur la dynamique du régulateur.

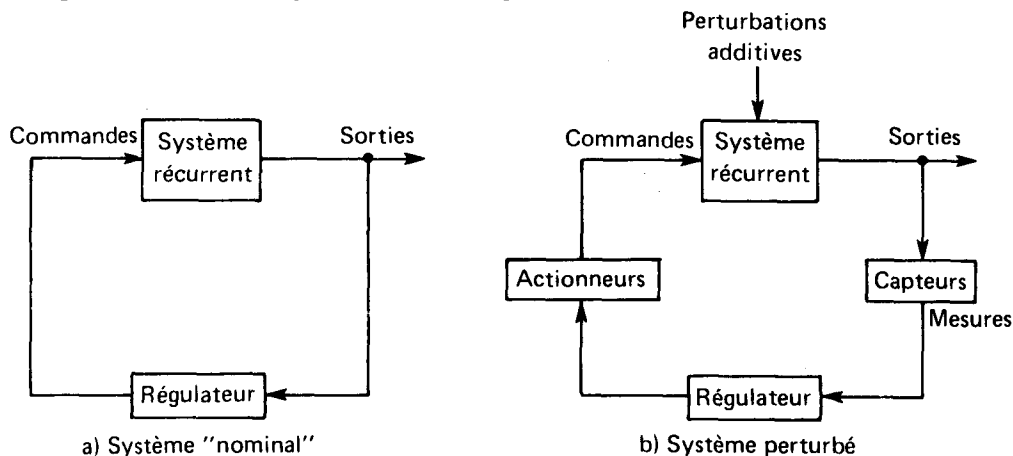


Fig. I,1—Perturbations affectant le système contrôlé.

Dans cette thèse, un point de vue déterministe est adopté pour caractériser les perturbations affectant le système. En toute rigueur, les résultats ne s'appliquent donc pas aux systèmes « incertains » (cf. Vinkler et Wood [97, 98], par exemple). En outre, si un grand nombre de pannes peuvent être formalisées par la considération de perturbations multiplicatives (cf. Fig. I,1) ce qui permet donc d'en évaluer la tolérance, les nombreux aspects complémentaires relevant de l'identification des pannes, de la construction de schémas redondants destinés à se prémunir contre ces pannes, et de dispositifs de reconfiguration automatique (cf. [99, 100]) ne sont pas adressés dans cette thèse.

I.3. — REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

Les travaux précurseurs concernant la robustesse des régulateurs sont à rechercher dans trois directions distinctes, d'une part dans la réduction de la sensibilité du système contrôlé, également dans le développement

de lois de commande dont la structure algébrique particulière assure le rejet de perturbations données, enfin dans des travaux visant à quantifier la tolérance de la stabilité de la régulation.

Cruz et Perkins [101] et Kreindler [102] constituent des exemples classiques de travaux visant à optimiser des lois de commande pour minimiser les variations des sorties du système à l'occasion de perturbations ou de variations de paramètres.

L'amélioration de la performance des asservissements monovariables du point de vue de leur précision a donné lieu au développement des lois de commande dites à effet « proportionnel et intégral ». L'efficacité de ces lois est bien connue et l'abondance des régulations « P.I. » et « P.I.D. » dans les commandes de processus industriels témoigne de ce succès. Ces régulateurs ont évolué à partir de 1970 de la réalisation analogique au numérique; pourtant ce savoir-faire ne s'est pas étendu du cas mono-retour au cas multi-retour. Dans le domaine continu, pour protéger une régulation contre les effets des perturbations extérieures, une école d'auteurs a envisagé leur « rejet » algébrique (*cf.* Johnson [2], par exemple). Généralement, les perturbations étant modélisées par un système différentiel donné, l'adoption d'une compensation dynamique de structure algébrique appropriée, placée dans la chaîne de retour, assurerait leur élimination (leur rejet). Cette approche a été renforcée par les travaux de Davison et de Wonham (*cf.* [1, 20, 103, 104]) pour donner naissance à ce qui a été convenu d'appeler l'école du « Modèle interne ». En effet, le compensateur contient un modèle interne de la dynamique du système « exogène », générateur non seulement des perturbations extérieures mais aussi des points de consignes (ou objectifs commandés), ces quantités étant supposées être solutions d'un système différentiel à coefficients connus et constants.

Réalisant qu'il était rarement possible de prévoir avec précision la dynamique des perturbations, Gustafsson [5] et Bourlès et Mercier [9] ont plus récemment proposé une structure de loi de commande, étendant les lois « P.I. » au cas multi-retour, et ont formulé le problème d'optimisation quadratique qui permettait de les synthétiser. Ces lois de commande, de type proportionnel et intégral, permettent de contrôler un système continu en garantissant le rejet de perturbations constantes, au moins par morceaux.

En ce qui concerne les aspects quantitatifs de la robustesse d'un schéma de commande, les premiers résultats modernes sont dus à Athans, Wong, Stein, Molander, Willems et Safonov (*cf.* [44-48, 52, 105]). Cette école d'auteurs a en effet contribué à généraliser aux systèmes linéaires et non linéaires multivariables continus les notions de marges de gain et de phase bien connues pour les asservissements monovariables. La plupart de leurs résultats pratiques reposent cependant sur des hypothèses simplificatrices, parmi celles-ci on retient que la chaîne de mesure n'est jamais perturbée et que la perturbation affectant la chaîne de commande est diagonale. Ils ont toutefois établi qu'un régulateur linéaire-quadratique multivariable possédait, sous certaines conditions, une marge de gain infinie, une marge de phase au moins égale à 60° et une tolérance de réduction de gain supérieure à 50%. Ce dernier résultat avait été démontré plus tôt par Anderson et Moore [10], en référence à un système contrôlé à retour scalaire.

La quantification de la norme des perturbations structurelles (erreurs de modèle et de linéarisation) tolérables, c'est-à-dire préservant la stabilité du processus contrôlé, est un sujet complémentaire du précédent qui a été examiné par Patel, Toda et Sridhar dans [42, 43]. Ce n'est cependant que très récemment que les différentes notions de la robustesse ont été réunies, en référence à un système continu, par Bourlès et Mercier (*cf.* [6-8, 49-51]), en généralisant la plupart des résultats précédemment obtenus dans [44-47, 105] puisque les perturbations étaient supposées affecter à la fois les chaînes de mesure et de commande sans hypothèse de diagonalité.

Parallèlement à ces travaux, il convient de mentionner le développement d'une méthodologie basée sur la matrice de différence de retour d'un système (*cf.* [85, 106-112]). Elle est particulièrement intéressante dans la mesure où les perturbations les plus sévères sont causées par des éléments dynamiques et leurs effets dépendent donc de la fréquence. La tolérance de perturbations additives ou multiplicatives est appréciée sur des courbes analogues aux lieux de Bode qui sont des lieux de valeurs singulières de matrices, dépendant de la fréquence (*cf.* [82, 83, 106]).

Ces « lieux en σ » se comparent aux lieux caractéristiques de MacFarlane *et al.* [111-112]. Par rapport aux autres méthodes mentionnées plus haut, ces lieux fournissent cependant une évaluation plus pessimiste de la robustesse car ils ne prennent pas en considération la nature algébrique et surtout les « directions » des perturbations.

Tous ces résultats n'ont aucun équivalent pour les systèmes de commande à temps discret. Une exception notable est pourtant le livre récent de Safonov [48] dont les résultats, basés sur une théorie de la stabilité de systèmes dont la dynamique est figurée par un graphe, s'appliquent de la même manière aux systèmes continus et discrets. Les limitations, hypothèses simplificatrices et difficultés d'application des résultats de [48] seront revues plus loin. A l'exception peut être de certaines réflexions concernant la manière de postuler une loi de commande échantillonnée pour renforcer la précision d'un asservissement multivariable (*cf.* [17, 18]), et qui seront revues plus loin avec davantage de détails, les systèmes à temps discret n'ont donc, à toutes fins utiles, jamais été étudiés sous l'angle de leur robustesse et les moyens de quantifier ou d'accroître la robustesse d'un schéma de commande discret n'existent pas.

En ce qui concerne le pilotage multivariable des avions de combat, une philosophie de commande, dans une structure de régulation à deux niveaux, a été abondamment étudiée dans le cas continu. Elle permet d'assurer la convergence des variables de sorties vers des consignes de pilotage en satisfaisant à la fois des critères de manœuvrabilité et d'anti-turbulence, ceci dans un domaine de vol étendu et pour des évolutions arbitrairement rapides, excitant fortement les termes non linéaires de la dynamique. Cette structure de pilotage a été démontrée et justifiée pour des manœuvres variées dans Mercier [29] et pour des tâches spécifiques de contrôle d'un point visé au sol par Dang Vu [113].

I.4. – ORGANISATION DE LA THÈSE

Le problème de la robustesse d'un schéma de régulation discret est traité dans cette thèse en trois parties dont les résultats s'associent ensuite. Ces trois parties concernent :

- la proposition d'une méthodologie conduisant à calculer une loi de commande optimale assurant le rejet de perturbations constantes;
- la quantification de perturbations additives dynamiques (erreurs de linéarisation, notamment) tolérables;
- la quantification de perturbations multiplicatives dynamiques admissibles, affectant simultanément les chaînes de mesure et de commande.

Tous ces aspects sont appliqués au problème du pilotage multivariable d'un avion qui est formalisé comme un problème de régulation de poursuite.

Le Chapitre II expose une démarche rationnelle permettant de calculer des lois de poursuite optimales par rapport à une fonction de coût quadratique. Les conditions minimales assurant à la fois la stabilisation du système contrôlé, la réalisation précise des objectifs commandés et donc le « rejet » de perturbations additives constantes sont développées. Ces lois de commande obtenues sont conceptuellement semblables aux lois « proportionnelles et intégrales » pour les systèmes continus. Les différents types de perturbations physiques sont ensuite formalisés en se ramenant à un schéma de régulation pure que l'on testera du point de vue de sa stabilité. Le chapitre se termine par une application numérique concernant le pilotage multivariable d'un avion de combat.

Le Chapitre III présente un ensemble de résultats théoriques nouveaux concernant la robustesse des systèmes de commande discrets. Ces résultats sont rendus possibles par une formulation opérationnelle de la dynamique du système contrôlé pour laquelle un critère de stabilité comparable au théorème de Lyapounov est développé. Ayant étendu au domaine fréquentiel le critère de Lyapounov (*cf.* Wonham [20]), un théorème général est établi caractérisant la stabilité d'un système récurrent avec opérateurs de convolution. Des théorèmes sont alors donnés pour qualifier d'une part la robustesse vis-à-vis de perturbations additives non dynamiques et d'autre part vis-à-vis de perturbations multiplicatives dynamiques, caractérisées par des matrices de transfert par exemple, au niveau des capteurs et des actionneurs. Dans le cas plus restreint des régulateurs linéaires-quadratiques, des résultats plus spécifiques expriment des marges garanties de stabilité; ces marges étendent au cas discret les notions classiques de marges de gain et de phase. Étant reliées aux matrices de pénalité de la fonction de coût, ces marges sont susceptibles d'être optimisées.

Le Chapitre IV présente un cas particulier du problème de robustesse traité dans le Chapitre III puisque des perturbations non dynamiques sont considérées, des résultats plus aisés à appliquer sont ainsi obtenus.

Le Chapitre V contient des évaluations numériques des marges de stabilité multivariées. Les différents aspects liés au passage du plan en z au plan en w' , par exemple, sont illustrés sur la base de l'application au pilotage d'un avion, prenant en compte des perturbations multiplicatives dynamiques sévères affectant le retour.

Une conclusion (Chapitre VI) rassemble une synthèse des résultats présentés dans cette thèse et évoque des perspectives de recherche complémentaires.

Des résultats complémentaires nécessaires aux développements théoriques ou justifiant des hypothèses ou des méthodes de calcul ainsi que des démonstrations de théorèmes sont rassemblés en Annexes.

II. — LES DIVERS ASPECTS DE LA ROBUSTESSE D'UN ASSERVISSEMENT

Ce chapitre présente une extension au domaine à temps discret des nombreux et récents résultats (cf. [5-9]) obtenus en continu et concernant le développement de lois de commande multivariables robustes assurant l'annulation asymptotique des erreurs de poursuite en dépit de perturbations extérieures persistantes. Une solution au problème de régulation de poursuite optimale robuste est suggérée.

Ces lois de commandes doivent également conférer au régulateur la faculté de tolérer des éléments non modélisés dans les chaînes de mesure (capteurs, filtres, estimateurs) ou d'action (actionneurs) et posséder une moindre sensibilité aux erreurs de modèle ou de linéarisation (perturbations structurelles). Une modélisation mathématique possible de ces éléments perturbateurs est proposée et leur compatibilité avec les lois de commande est étudiée. Enfin une application à l'élaboration de lois de commandes multivariables en vue du pilotage d'un avion d'arme est présentée.

II.1. — RÉGULATEUR DE POURSUITE ROBUSTE VIS-A-VIS DE PERTURBATIONS EXTÉRIEURES.

II.1.1. — Énoncé du problème de poursuite robuste

La plupart des solutions apportées au problème de poursuite, où la sortie d'un système dynamique doit suivre sans erreur un objectif de référence, ont été obtenues pour des processus à temps continu dont le modèle physique obéit à un système différentiel linéaire soumis à des perturbations extérieures (cf. [1-9]).

En appliquant la théorie de la commande optimale (cf. [10, 11]), Athans a montré dans [4] sur un exemple monovariante à temps continu l'importance que peut avoir un bon ou mauvais choix de la formulation de l'indice de performance à minimiser, sur l'élaboration d'une loi de commande conduisant à une erreur de poursuite nulle. Ce choix, conditionnant en particulier la sensibilité de la loi de contrôle vis-à-vis de variations sur les paramètres nominaux du système, est amélioré par la considération d'un *nouveau vecteur état* et d'une *commande fictive*. La loi de commande optimale que l'on obtient alors contient deux termes, dont l'un est *proportionnel à l'état originel* et l'autre à *l'intégrale de l'erreur de régulation*. La réduction importante de la sensibilité du système aux erreurs ou variations de modèle montre tout l'intérêt d'une loi de commande de type proportionnel et intégrale, désormais notée « PI ».

Dans le cas multivariable, où une représentation d'état du processus est possible, une généralisation de la loi de commande « PI » a été proposée par Gustafsson dans [5] et étudiée également par Bourlès et Mercier dans [9]. Celle-ci prend en compte l'effet nuisible de perturbations extérieures supposées constantes par morceaux et de conditions initiales quelconques. C'est en formulant un indice de coût quadratique, incluant des pénalités sur la sortie du système et la dérivée de la commande, que l'on se ramène au problème classique des régulateurs linéaires quadratiques, abondamment étudiés (cf. [10, 11, 12, 25]). L'optimisation est alors réalisée sur un système linéaire augmenté par rapport au système originel. Afin de justifier l'existence de la solution du problème d'optimisation, une condition de stabilisabilité portant sur les matrices décrivant la dynamique du processus d'origine et une condition concernant le rang d'une matrice spécifique du système augmenté ont été démontrées. Sous ces dernières contraintes, la régulation de la sortie à zéro est effectuée sans erreur en dépit des perturbations extérieures persistantes.

La volonté d'étendre au cas discret ces derniers résultats et le souci grandissant de concilier les théories de l'Automatique moderne avec la souplesse des « software » implantés sur les miniordinateurs et les microprocesseurs, ont incité au développement d'algorithmes numériques simulant les lois de commande analogiques de type « PID », « PI » et « P » pour des systèmes récurrents monovariants modélisant des processus physiques (cf. [13-18]).

Dans [16], par exemple, Takahashi *et al.* ont testé une loi de commande discrète à retour d'état avec « effet

intégral » sur la sortie, pour un processus mono-entrée/mono-sortie discret, en mettant un compensateur dynamique de type « I » dans la chaîne de commande, sans que les gains aient fait l'objet d'une optimisation. Par contre, la loi de contrôle discrète de type « PI » décrite par Auslander *et al.* dans [17], est le résultat d'une optimisation quadratique par rapport à un *incrément de commande*. Elle est l'analogie de celle présentée dans le cas continu par Athans dans [4] et fait référence à un bon choix de la fonction de coût à minimiser.

Trois constatations intéressantes ont été formulées au sujet de la sensibilité du système vis-à-vis de variations de paramètres et de perturbations influençant le comportement du processus pour les lois de commandes décrites dans [16] et [17]. En premier lieu, ces lois, optimisées ou non, confèrent aux performances du système, jugées sur la rapidité de temps de réponse, une moindre sensibilité à la période d'échantillonnage. En second lieu, le processus tolère des perturbations constantes additives et des erreurs de modèle même si cet effet pourrait être davantage renforcé ainsi que cela est montré par exemple dans [18].

En résumé, ces lois de commande, maintenant classiques pour les asservissements monovariabiles à temps discret, confèrent au système contrôlé de bonnes propriétés de robustesse intrinsèque.

Compte tenu des réflexions résumées ci-dessus, une extension de la commande « PI » à un *processus discret multivariable* soumis à des perturbations, constantes et additives au modèle récurrent, est maintenant proposée.

II.1.2. — Mise en forme et solution

Considérons le système dynamique décrit par les équations non linéaires récurrentes suivantes :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, u_k, w_k), \\ z_k &= g(x_k, w_k), \quad \forall k \in \mathbf{Z}_+, \\ x_{-1} &\text{ donnée et } x_k = 0, \quad \forall k \in \mathbf{Z}_-^* - \{-1\}, \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

où $x_k \in \mathbf{R}^n$ est un vecteur état du processus, $u_k \in \mathbf{R}^m$ est un vecteur de commande, $z_k \in \mathbf{R}^p$ est le vecteur de sortie contenant les variables à réguler et $w_k \in \mathbf{R}^l$ est un vecteur de perturbations (extérieures ou liées au système) *a priori* inconnues. Les fonctions f et g sont telles que :

$$\begin{aligned} f &: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^l \longrightarrow \mathbf{R}^n \\ g &: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^l \longrightarrow \mathbf{R}^p. \end{aligned}$$

et

Définition de la poursuite :

La poursuite d'une entrée de référence z_d , encore appelée consigne ou *objectif* ⁽¹⁾, par la sortie z_k du système dynamique (II.1) sera obtenue si une loi de commande (à déterminer) rend possible la propriété suivante :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [e_k \triangleq z_k - z_d] = 0. \quad (\text{II.2})$$

Pour z_d arbitraire et en présence de perturbations inconnues w_k , il est donc souhaité que la suite (e_k) , $k \in \mathbf{Z}_+ \cup \{-1\}$, appelée *erreur de poursuite*, converge vers la valeur zéro.

La linéarisation des équations (II.1) au voisinage d'un point de fonctionnement nominal défini par x_f, u_f, z_f conduit au système d'équations stationnaires :

$$\begin{aligned} \delta x_{k+1} &= A \delta x_k + B \delta u_k + \xi_k \\ \delta z_k &= C \delta x_k + \theta_k, \quad \forall k \in \mathbf{Z}_+ \\ x_{-1} &\text{ donnée et } x_k = 0, \quad \forall k \in \mathbf{Z}_-^* - \{-1\}, \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

où $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbf{R}^{p \times n}$, $\delta x_k = x_k - x_f \in \mathbf{R}^n$, $\delta u_k = u_k - u_f \in \mathbf{R}^m$ et $\delta z_k = z_k - z_f \in \mathbf{R}^p$. Sans perte de généralité, la matrice B sera supposée de rang maximum dans tous les développements qui suivent (aucune commande redondante).

⁽¹⁾ Le terme d'objectif sera gardé pour des raisons d'homogénéité avec l'application qui suivra.

Il est usuel de formuler l'hypothèse classique de contrôlabilité ⁽¹⁾ (cf. Kalman [79]) pour la paire (A, B) afin de justifier l'existence d'une commande δu qui ferait évoluer le système d'un état initial à un état final désiré. Dans le cas où le système (II.3) ne serait pas totalement contrôlable, mais où la partie incontrôlable du processus serait asymptotiquement stable ⁽²⁾, la condition plus faible de stabilisabilité de la paire (A, B) (cf. Wonham [20]) est supposée vérifiée.

Les perturbations $\xi_k \in \mathbb{R}^n$ et $\theta_k \in \mathbb{R}^p$ sont supposées contenir w_k et tous les termes résiduels résultant de la linéarisation. Une hypothèse portant sur ξ et θ et valable dans toute la suite des développements sera :

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{-1\}, \xi_k = \text{constante et } \theta_k = \text{constante}.$$

Cette hypothèse n'est guère restrictive car il est naturellement imaginable qu'en fonctionnement nominal, l'action nuisible des perturbations extérieures ne se fasse ressentir que pendant des intervalles de temps de longueur finie. Il revient à considérer les perturbations ξ et θ comme des fonctions constantes par palier. Sous ces dernières hypothèses, la différence entre le système (II.3) à l'instant $k+1$ et à l'instant k conduit aux « équations aux écarts » suivantes :

$$\begin{aligned} \delta x_{k+1} - \delta x_k &= A (\delta x_k - \delta x_{k-1}) + B (\delta u_k - \delta u_{k-1}) \\ \delta z_k - \delta z_{k-1} &= C (\delta x_k - \delta x_{k-1}). \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Or d'après (II.2), $\forall k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{-1\}$,

$$e_k = z_k - z_d = z_f + \delta z_k - z_d, \quad (\text{II.5})$$

ou, en supposant de plus que l'objectif z_d est constant :

$$e_k - e_{k-1} = \delta z_k - \delta z_{k-1}.$$

Par conséquent, (II.4) devient :

$$\begin{aligned} \delta x_{k+1} - \delta x_k &= A (\delta x_k - \delta x_{k-1}) + B (\delta u_k - \delta u_{k-1}) \\ e_k - e_{k-1} &= C (\delta x_k - \delta x_{k-1}). \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

Ce système linéaire s'écrit encore :

$$\begin{bmatrix} \delta x_{k+1} - \delta x_k \\ e_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_k - \delta x_{k-1} \\ e_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} [\delta u_k - \delta u_{k-1}]. \quad (\text{II.7})$$

La formulation du processus considéré dans cette section suppose que l'état complet δx et l'erreur e sont accessibles à la mesure à tout instant $k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{-1\}$.

Il est important de remarquer ici l'analogie profonde qui existe entre l'équation (II.7) et la formulation du problème de régulation posé dans [5, 9], où un système différentiel linéaire à temps continu est soumis à des perturbations constantes sous forme d'échelon. La variable à réguler étant la sortie y , la dérivation des équations différentielles conduit au nouveau système linéaire :

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} [\dot{u}],$$

où la dérivée de la commande, \dot{u} , est l'analogue de « l'incrément de commande » $\delta u_k - \delta u_{k-1}$, introduit dans l'équation (II.7) afin d'éliminer formellement des équations les perturbations extérieures constantes.

Le problème de poursuite posé initialement se ramène donc à celui d'une régulation classique dont une formulation synthétique possible serait :

⁽¹⁾ Les différentes notions de contrôlabilité, reconstructibilité, stabilisabilité et détectabilité pour les systèmes discrets multivariés sont détaillées en Annexe A.

⁽²⁾ Un rappel général de la stabilité au sens de Lyapounov incluant la définition de la stabilité asymptotique est donné en Annexe E.

$$\begin{aligned}
X_{k+1} &= F X_k + G U_k \\
e_{k+1} &= H X_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+ \\
X_0 &\text{ donne' et } X_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_-
\end{aligned} \tag{II.8}$$

$$\text{où } X_k = \begin{bmatrix} \delta x_k - \delta x_{k-1} \\ e_{k-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+p}, \quad U_k = [\delta u_k - \delta u_{k-1}] \in \mathbb{R}^m, \quad F = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)},$$

$$G = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times m} \quad \text{et } H = [0 \quad I] \in \mathbb{R}^{p \times (n+p)}$$

Il résulte de cette nouvelle formulation qu'il existera une loi de commande linéaire de la forme :

$$U_k = -K X_k \in \mathbb{R}^m \tag{II.9}$$

et stabilisante pour (II.8) si la paire (F, G) est stabilisable. Cette condition étant vérifiée l'état X_k aura la propriété suivante :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = 0.$$

L'étude détaillée de la loi de commande (II.9), proportionnelle à l'état augmenté $X_k = [(\delta x_k - \delta x_{k-1})^T, e_{k-1}^T]^T$, montre en effet qu'elle assure simultanément la stabilisation de l'état originel et la régulation à zéro de l'erreur de poursuite. En effet, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$:

$$\begin{aligned}
U_k &= -K X_k = -[K_1 \quad K_2] \left[(\delta x_k - \delta x_{k-1})^T, e_{k-1}^T \right]^T, \\
\text{où : } K_1 &\in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \text{et } K_2 \in \mathbb{R}^{m \times p}, \\
\text{soit } \delta u_k - \delta u_{k-1} &= -K_1 (\delta x_k - \delta x_{k-1}) - K_2 e_{k-1}.
\end{aligned} \tag{II.10a}$$

Observant par ailleurs que :

$$\sum_{i=0}^k (\delta u_i - \delta u_{i-1}) = -K_1 \sum_{i=0}^k (\delta x_i - \delta x_{i-1}) - K_2 \sum_{i=0}^k e_{i-1},$$

le calcul des différentes quantités mène à une autre expression :

$$\text{soit } \delta u_k - \delta u_{-1} = -K_1 (\delta x_k - \delta x_{-1}) - K_2 \sum_{i=0}^k e_{i-1}$$

ou, puisque $\delta u_k = u_k - u_f$ et d'après (II.5), $\forall k \in \mathbb{Z}_+$:

$$u_k = u_{-1} - K_1 (\delta x_k - \delta x_{-1}) - K_2 \sum_{i=1}^{k-1} (z_i - z_d). \tag{II.10b}$$

qui met davantage en évidence « l'effet intégral » de la loi de commande.

Sous l'une ou l'autre des formes (II.10a) ou (II.10b) cette loi de commande, qui est la transposée dans le domaine temporel discret de la loi de commande « PI » en continu, est stabilisante pour l'état δx_k du système (II.3). Elle régule également l'erreur de poursuite, e_k , à zéro en dépit de perturbations ξ_k et θ_k . Ces propriétés confèrent à cette loi de commande une robustesse intrinsèque vis-à-vis de perturbations extérieures additives tendant vers des constantes ou vis-à-vis d'erreurs de modèle pouvant s'assimiler à des quantités additives à l'équation récurrente (cf. (II.3)). Le cas où la loi de commande robuste est optimale pour un certain indice de performance sera examiné ultérieurement dans la Section II,2.

Remarques :

1. Les expressions (II.10a) et (II.10b) sont respectivement appelées dans la littérature classique concernant les systèmes monovariabiles discrets, « algorithme incrémental ou aux vitesses » et « algorithme de position », (cf. [17 et 21]).

2. L'importance de la propriété de robustesse de la loi de commande (II.10a) ou (II.10b) est d'autant plus apparente si on la compare à la loi de contrôle obtenue à partir d'un processus de poursuite où les perturbations extérieures ξ et θ prennent des valeurs nominales, $\bar{\xi}$ et $\bar{\theta}$ connues, pouvant par exemple représenter les espérances mathématiques des signaux ξ et θ (cf. [12]). Dans ce dernier cas il existe un état $\bar{\delta x}$ et une commande $\bar{\delta u}$, solutions des équations de régime permanent, correspondant à la situation où l'objectif de poursuite est atteint :

Il est usuel de formuler l'hypothèse classique de contrôlabilité ⁽¹⁾ (cf. Kalman [19]) pour la paire (A, B) afin de justifier l'existence d'une commande δu qui ferait évoluer le système d'un état initial à un état final désiré. Dans le cas où le système (II.3) ne serait pas totalement contrôlable, mais où la partie incontrôlable du processus serait asymptotiquement stable ⁽²⁾, la condition plus faible de stabilisabilité de la paire (A, B) (cf. Wonham [20]) est supposée vérifiée.

Les perturbations $\xi_k \in \mathbf{R}^n$ et $\theta_k \in \mathbf{R}^p$ sont supposées contenir w_k et tous les termes résiduels résultant de la linéarisation. Une hypothèse portant sur ξ et θ et valable dans toute la suite des développements sera :

$$\forall k \in \mathbf{Z}_+ \cup \{-1\}, \xi_k = \text{constante et } \theta_k = \text{constante}.$$

Cette hypothèse n'est guère restrictive car il est naturellement imaginable qu'en fonctionnement nominal, l'action nuisible des perturbations extérieures ne se fasse ressentir que pendant des intervalles de temps de longueur finie. Il revient à considérer les perturbations ξ et θ comme des fonctions constantes par palier. Sous ces dernières hypothèses, la différence entre le système (II.3) à l'instant $k+1$ et à l'instant k conduit aux « équations aux écarts » suivantes :

$$\begin{aligned} \delta x_{k+1} - \delta x_k &= A(\delta x_k - \delta x_{k-1}) + B(\delta u_k - \delta u_{k-1}) \\ \delta z_k - \delta z_{k-1} &= C(\delta x_k - \delta x_{k-1}). \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Or d'après (II.2), $\forall k \in \mathbf{Z}_+ \cup \{-1\}$,

$$e_k = z_k - z_d = z_f + \delta z_k - z_d, \quad (\text{II.5})$$

ou, en supposant de plus que l'objectif z_d est constant :

$$e_k - e_{k-1} = \delta z_k - \delta z_{k-1}.$$

Par conséquent, (II.4) devient :

$$\begin{aligned} \delta x_{k+1} - \delta x_k &= A(\delta x_k - \delta x_{k-1}) + B(\delta u_k - \delta u_{k-1}) \\ e_k - e_{k-1} &= C(\delta x_k - \delta x_{k-1}). \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

Ce système linéaire s'écrit encore :

$$\begin{bmatrix} \delta x_{k+1} - \delta x_k \\ e_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_k - \delta x_{k-1} \\ e_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} [\delta u_k - \delta u_{k-1}]. \quad (\text{II.7})$$

La formulation du processus considéré dans cette section suppose que l'état complet δx et l'erreur e sont accessibles à la mesure à tout instant $k \in \mathbf{Z}_+ \cup \{-1\}$.

Il est important de remarquer ici l'analogie profonde qui existe entre l'équation (II.7) et la formulation du problème de régulation posé dans $[\mathcal{S}, \mathcal{G}]$, où un système différentiel linéaire à temps continu est soumis à des perturbations constantes sous forme d'échelon. La variable à réguler étant la sortie y , la dérivation des équations différentielles conduit au nouveau système linéaire :

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} [\dot{u}],$$

où la dérivée de la commande, \dot{u} , est l'analogie de « l'incrément de commande » $\delta u_k - \delta u_{k-1}$, introduit dans l'équation (II.7) afin d'éliminer formellement des équations les perturbations extérieures constantes.

Le problème de poursuite posé initialement se ramène donc à celui d'une régulation classique dont une formulation synthétique possible serait :

⁽¹⁾ Les différentes notions de contrôlabilité, reconstructibilité, stabilisabilité et détectabilité pour les systèmes discrets multivariables sont détaillées en Annexe A.

⁽²⁾ Un rappel général de la stabilité au sens de Lyapounov incluant la définition de la stabilité asymptotique est donné en Annexe E.

$$\begin{aligned}
 X_{k+1} &= F X_k + G U_k \\
 e_{k+1} &= H X_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+^* \\
 X_0 &\text{ donné et } X_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_-^*
 \end{aligned}
 \tag{II.8}$$

$$\text{où } X_k = \begin{bmatrix} \delta x_k - \delta x_{k-1} \\ e_{k-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+p}, \quad U_k = [\delta u_k - \delta u_{k-1}] \in \mathbb{R}^m, \quad F = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)},$$

$$G = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times m} \quad \text{et} \quad H = [0 \quad I] \in \mathbb{R}^{p \times (n+p)}$$

Il résulte de cette nouvelle formulation qu'il existera une loi de commande linéaire de la forme :

$$U_k = -K X_k \in \mathbb{R}^m \tag{II.9}$$

et stabilisante pour (II.8) si la paire (F, G) est stabilisable. Cette condition étant vérifiée l'état X_k aura la propriété suivante :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = 0.$$

L'étude détaillée de la loi de commande (II.9), proportionnelle à l'état augmenté $X_k = [(\delta x_k - \delta x_{k-1})^T, e_{k-1}^T]^T$, montre en effet qu'elle assure simultanément la stabilisation de l'état original et la régulation à zéro de l'erreur de poursuite. En effet, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$:

$$\begin{aligned}
 U_k &= -K X_k = -[K_1 \quad K_2] [(\delta x_k - \delta x_{k-1})^T, e_{k-1}^T]^T, \\
 \text{où : } & K_1 \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ et } K_2 \in \mathbb{R}^{m \times p}, \\
 \text{soit} & \delta u_k - \delta u_{k-1} = -K_1 (\delta x_k - \delta x_{k-1}) - K_2 e_{k-1}.
 \end{aligned}
 \tag{II.10a}$$

Observant par ailleurs que :

$$\sum_{i=0}^k (\delta u_i - \delta u_{i-1}) = -K_1 \sum_{i=0}^k (\delta x_i - \delta x_{i-1}) - K_2 \sum_{i=0}^k e_{i-1},$$

le calcul des différentes quantités mène à une autre expression :

$$\text{soit } \delta u_k - \delta u_{-1} = -K_1 (\delta x_k - \delta x_{-1}) - K_2 \sum_{i=0}^k e_{i-1}$$

ou, puisque $\delta u_k = u_k - u_{-1}$, et d'après (II.5), $\forall k \in \mathbb{Z}_+$:

$$u_k = u_{-1} - K_1 (\delta x_k - \delta x_{-1}) - K_2 \sum_{i=0}^{k-1} (z_i - z_d). \tag{II.10b}$$

qui met davantage en évidence « l'effet intégral » de la loi de commande.

Sous l'une ou l'autre des formes (II.10a) ou (II.10b) cette loi de commande, qui est la transposée dans le domaine temporel discret de la loi de commande « PI » en continu, est stabilisante pour l'état δx_k du système (II.3). Elle régule également l'erreur de poursuite, e_k , à zéro en dépit de perturbations ξ_k et θ_k . Ces propriétés confèrent à cette loi de commande une robustesse intrinsèque vis-à-vis de perturbations extérieures additives tendant vers des constantes ou vis-à-vis d'erreurs de modèle pouvant s'assimiler à des quantités additives à l'équation récurrente (cf. (II.3)). Le cas où la loi de commande robuste est optimale pour un certain indice de performance sera examiné ultérieurement dans la Section II,2.

Remarques :

1. Les expressions (II.10a) et (II.10b) sont respectivement appelées dans la littérature classique concernant les systèmes monovariabiles discrets, « algorithme incrémental ou aux vitesses » et « algorithme de position », (cf. [17 et 21]).

2. L'importance de la propriété de robustesse de la loi de commande (II.10a) ou (II.10b) est d'autant plus apparente si on la compare à la loi de contrôle obtenue à partir d'un processus de poursuite où les perturbations extérieures ξ et θ prennent des valeurs nominales, $\bar{\xi}$ et $\bar{\theta}$ connues, pouvant par exemple représenter les espérances mathématiques des signaux ξ et θ (cf. [12]). Dans ce dernier cas il existe un état $\bar{\delta x}$ et une commande $\bar{\delta u}$, solutions des équations de régime permanent, correspondant à la situation où l'objectif de poursuite est atteint :

$$\begin{aligned} \delta \bar{x}_k &= A \delta \bar{x}_k + B \delta \bar{u}_k + \bar{\xi}_k \\ z_d - z_f &= C \delta \bar{x}_k + \bar{\theta}_k \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

où la condition nécessaire :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + p$$

assure l'existence du couple $(\delta \bar{x}_k, \delta \bar{u}_k)$ solution de (II.11).

La différence entre les équations des systèmes (II.3) et (II.11) conduit au système :

$$\begin{aligned} \Delta x_{k+1} &= A \Delta x_k + B \Delta u_k \\ e_k &= C \Delta x_k \end{aligned} \quad , \quad (\text{II.12})$$

stabilisable au point $(\Delta x=0, \Delta u=0)$ au moyen d'une commande proportionnelle, $\Delta u_k = -K \Delta x_k$, qui existe compte tenu des hypothèses de contrôlabilité ou de stabilisabilité portant sur le processus (II.3).

L'évolution réelle d'un processus fait malheureusement intervenir des perturbations ξ et θ dont les valeurs sont en général différentes des quantités prédites $\bar{\xi}$ et $\bar{\theta}$ et *a priori* inconnues. Le système (II.3) n'étant qu'un modèle linéarisé du processus non linéaire (II.1), les matrices A et B peuvent être entachées d'erreurs de modèle δA et δB . Dans l'un ou l'autre de ces cas, le point de fonctionnement $(\Delta x=0, \Delta u=0)$ de (II.12) n'est plus un point d'équilibre et l'erreur de poursuite, e , ne converge plus vers zéro, la commande proposée n'est alors pas robuste. On retrouve ainsi une réflexion qui a déjà été formulée dans [6, 8].

II.2. – RÉGULATEUR DE POURSUITE OPTIMALE ROBUSTE

II.2.1. – Généralités

Dans la Section II.1.2 une loi de commande multivariable discrète, de type « PI », robuste vis-à-vis de perturbations extérieures constantes a été calculée en supposant qu'un système augmenté (II.8) était stabilisable au moyen d'une commande à rétroaction d'état, de la forme $U = -KX$. Le choix de la matrice de gains $K \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)}$, qui était arbitraire jusqu'à ce point, résulte maintenant d'une optimisation quadratique.

II.2.2. – Rappels théoriques sur les régulateurs linéaires quadratiques à temps discret ⁽¹⁾

Le processus dynamique de référence est le système introduit dans la Section précédente (Équation (II.8)), soit :

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= F X_k + G U_k, \quad \forall k \in \mathbf{Z}_+ \\ X_0 &\text{ donné et } X_k = 0, \quad \forall k \in \mathbf{Z}_-^* \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

La loi de commande optimale considérée ici résulte de la minimisation d'un indice de performance quadratique pénalisant à la fois l'état augmenté $X_k \in \mathbb{R}^{n+p}$ et la commande $U_k \in \mathbb{R}^m$, soit :

$$J = (1/2) \sum_{i=0}^{\infty} (X_i^T Q X_i + U_i^T R U_i), \quad (\text{II.14})$$

où $Q \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)}$ est une matrice symétrique semi définie positive et où $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est une matrice symétrique définie positive.

Par application de la programmation dynamique [23, 24] la commande optimale obtenue est alors donnée par :

⁽¹⁾ cf. [22] et [23] pour détails.

$$U_k = -(R + G^T P G)^{-1} G^T P F X_k = - [K_1 \ K_2] X_k, \forall k \in \mathbb{Z}_+ \quad (\text{II.15})$$

où $P \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)}$ est solution de l'équation algébrique de Riccati discrète :

$$F^T P F + Q - F^T P G (R + G^T P G)^{-1} G^T P F = P. \quad (\text{II.16})$$

Dans [19], Kalman a montré qu'il existait une solution unique au problème d'optimisation formulé ci-dessus si le système est complètement contrôlable et sous la contrainte $Q > 0$ et non $Q \geq 0$. Dans ce cas la loi de commande obtenue est linéaire et le système est asymptotiquement stable. Cependant, si l'hypothèse $Q > 0$ est affaiblie en $Q \geq 0$, la stabilité du système en boucle fermée ne peut plus être garantie.

Une autre étude sérieuse, plus récente est celle de Dorato et Levis [23]. L'une ou l'autre des hypothèses de contrôlabilité ou de stabilisabilité de la paire (F, G) assure que l'équation récurrente associée à (II.16), correspondant à une optimisation sur un horizon infini (cf. (II.14)), admet une solution P_k bornée. La suite P_k étant par ailleurs décroissante, $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = P$ existe. L'hypothèse supplémentaire d'observabilité ou de reconstructibilité de la paire $(F, Q^{1/2})$ confère à P d'être définie positive et au système (II.13) d'être asymptotiquement stable. Ceci est analogue au résultat de Kalman [25] dans le cas continu.

Une condition beaucoup plus faible que la précédente a été donnée par Wonham (cf. [20], p. 282) : les hypothèses de stabilisabilité de la paire (F, G) et de détectabilité de la paire $(F, Q^{1/2})$ assurent que (II.16) admet une solution unique $P^0 \geq 0$ et telle que le système en boucle fermée ⁽¹⁾ :

$$X_{k+1} = (F - G(R + G^T P G)^{-1} G^T P F) X_k, \forall k \in \mathbb{Z}_+ \quad (\text{II.17})$$

est asymptotiquement stable.

II.2.3. — Poursuite optimale robuste

La loi de commande (II.15) est de la forme (II.10a) ou (II.10b) par rapport à l'état réel δx_k et aux erreurs de poursuite $e_i, i \in [-1, k-1] \cap \mathbb{Z}$. Sous les conditions (F, G) stabilisable et $(F, Q^{1/2})$ détectable, le système commandé (II.3) est asymptotiquement stable :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\delta x_k - \delta x_{k-1}) = 0$$

et :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (e_{k-1} \stackrel{\Delta}{=} H X_k) = 0 \quad (\text{II.18})$$

La première de ces expressions montre que la solution δx_k du système perturbé (II.3) tend vers une limite non spécifiée *a priori*, mais qui dépend de la valeur de régime permanent prise par ξ_k et z_d . Elle correspond à la stabilité en « vitesse » obtenue par la loi de poursuite optimale d'un système à temps continu, exposée dans [6, 7, 9]. La seconde expression montre l'annulation asymptotique de l'erreur de poursuite, z_k tendant vers z_d , sans erreur de régime permanent si z_d et θ_k sont tous deux constants par morceaux.

II.2.4. — Conditions minimales nécessaires et suffisantes pour une poursuite optimale robuste

Les conditions (F, G) stabilisable et $(F, Q^{1/2})$ observable ne sont en réalité que des conditions suffisantes pour que le problème d'optimisation admette une solution unique rendant le système contrôlé asymptotiquement stable. Ainsi, tout l'état augmenté $X_k \in \mathbb{R}^{n+p}$ défini par le système dynamique (II.13) converge vers zéro lorsque k devient indéfiniment grand. En conséquence, le processus originel (II.3) vérifie les deux propriétés (II.18).

La paire (F, G) n'ayant aucune raison d'être toujours stabilisable, des conditions minimales nécessaires et suffisantes qui assurent une solution au problème de poursuite optimale sont recherchées. En effet, seule la convergence vers zéro de l'erreur de poursuite (e_k), est requise afin de réaliser une poursuite optimale, il n'est donc pas nécessaire d'imposer que tout l'état $X_k \stackrel{\Delta}{=} [(\delta x_k - \delta x_{k-1})^T, e_{k-1}^T]^T$ du système augmenté tende vers zéro.

Cette dernière approche a été complètement résolue dans le cas continu par Bourlès et Mercier dans [9]. Or, les manipulations des concepts de stabilisabilité, observabilité (reconstructibilité), forme standard d'observabilité

⁽¹⁾ Résultat laissé en exercice par Wonham et démontré par l'auteur de cette Thèse.

étant rigoureusement identiques dans le cas continu et discret ⁽¹⁾, un examen attentif de [9] permet de valider tous les développements et résultats au domaine à temps discret compte tenu de la similitude existant entre les équations du problème d'optimisation en continu et en discret (cf. [23] et [25]).

Sachant que F_H, G_H dénotent respectivement les restrictions des matrices F et G au sous-espace observable de la paire (H, F) et que F_L, G_L sont les restrictions de F et G au sous-espace observable de (L, F) , on peut énoncer le Théorème suivant dans une version adaptée au cas discret.

Théorème (adapté de Bourlès et Mercier [9]) : Supposons que les matrices F, G, H de (II.13) vérifient la condition nécessaire et suffisante :

(i) (F_H, G_H) stabilisable,

et que la matrice $L \stackrel{\Delta}{=} Q^{1/2}$ soit telle que,

(ii) $\text{Ker } L \subset \text{Ker } H$ (l'existence d'une matrice $L = Q^{1/2}$ satisfaisant cette condition est assurée par (i)),

(iii) (F_L, G_L) stabilisable,

soient également vérifiées. Le problème d'optimisation défini par l'indice de performance (II.14) et sous la contrainte dynamique (II.13) admet alors une solution unique :

$$U_k = -(R + G^T P G)^{-1} G^T P F X_k,$$

où $P \geq 0$ vérifie (II.16) ⁽²⁾. Le système en boucle fermée issu de la forme standard d'observabilité est asymptotiquement stable et le coût (II.14) prend la valeur minimale (par rapport à la suite $U_k = \delta u_k - \delta u_{k-1}$) $J_m = (1/2) X_0 P X_0$, où X_0 est l'état initial de (II.13).

Remarques :

1. La condition (iii) de stabilisabilité portant sur la paire (F_L, G_L) assure que la fonction de coût J admet une valeur finie et que l'état X_{Lk} (projection de l'état X_k sur le sous-espace observable de (L, F)) est tel que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_{Lk} = 0. \quad (\text{II.19})$$

L_L étant la restriction de L au sous-espace observable de la paire (L, F) , $Q^{1/2} X_k \stackrel{\Delta}{=} L X_k = L_L X_{Lk}$ vérifie :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (L X_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (L_L X_{Lk}) = 0, \quad (\text{II.20})$$

d'après (II.19).

2. La condition (ii) est nécessaire car $\text{Ker } L \subset \text{Ker } H$ se traduit par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+, L X_k = 0 \text{ implique } e_{k-1} \stackrel{\Delta}{=} H X_k = 0$$

Compte tenu de la remarque 1. et de (II.20) il vient :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_{k-1} = 0$$

cette propriété permet une poursuite optimale robuste puisqu'elle est vérifiée quelles que soient les perturbations constantes ξ_k et θ_k agissant sur le processus originel (II.3).

II.2.5. — Optimisation de la commande initiale

La loi de commande proportionnelle et intégrale (II.15), résultat d'une optimisation de l'indice de performance (II.14) par rapport à l'incrément $U_k = \delta u_k - \delta u_{k-1}$, peut se mettre sous l'une ou l'autre des formes (II.10a) ou (II.10b). Sous la forme (II.10b) :

$$u_k = u_{-1} - K_1 (\delta x_k - \delta x_{-1}) - K_2 \sum_{i=1}^{k-1} (z_i - z_d),$$

⁽¹⁾ Il suffit pour cela de consulter l'Annexe A et le document de synthèse de Mercier [26].

⁽²⁾ (II.16) n'admet en général pas de solution unique $P \geq 0$ sous les seules conditions (i)-(iii) du Théorème (cf. [9] pour les détails du calcul exact de P à partir de la forme standard d'observabilité).

il est clair que cette loi optimale dépend de la commande initiale u_{-1} dont le choix est resté jusqu'ici arbitraire. A cette quantité correspond dans le cas continu la constante d'intégration qui s'introduit naturellement dans le calcul de la loi de commande de poursuite optimale multivariable (cf. [5] et [9]).

Comme dans [9], l'état initial x_{-1} étant donné, l'objectif désiré z_d étant une quantité fixée et connaissant les valeurs nominales des perturbations δ_k et θ_k , le problème considéré est la détermination de la constante d'initialisation optimale u_{-1}^* qui minimise le coût $J_m = (1/2) X_0^T P X_0$.

L'optimisation quadratique effectuée en II.2.2 et II.2.3 sous des conditions spécifiques de stabilisabilité et détectabilité ou celle développée en II.2.4 sous des conditions moins restrictives pour le problème de poursuite (cf. II.2.4, Théorème de Bourlès et Mercier) conduit à un indice de performance minimal par rapport à la suite $U_k = \delta u_k - \delta u_{k-1}$:

$$J_m = (1/2) X_0^T P X_0$$

$$\text{où } X_0 \triangleq \begin{bmatrix} \delta x_0 - \delta x_{-1} \\ e_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \delta x_{-1} + B \delta u_{-1} + \xi_k - \delta x_{-1} \\ C \delta x_{-1} + \theta_k - (z_d - z_f) \end{bmatrix}, \quad (\text{II. 21})$$

qui dépend manifestement de $U_{-1} = \delta u_{-1} + u_f$, $x_{-1} = \delta x_{-1} + x_f$, ξ_k , θ_k et de l'objectif désiré z_d . Parmi ces variables, seule la commande initiale u_{-1} peut être librement choisie. Par conséquent la valeur du coût $J_m(u_{-1})$ peut être minimisée par rapport à la constante u_{-1} . La matrice $P \geq 0$, solution de l'Équation de Riccati (II. 16) se factorise selon :

$$P \triangleq \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{II. 22})$$

où $P_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_{12} = P_{21}^T \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $P_{22} \in \mathbb{R}^{p \times p}$.

De même, le vecteur X_0 (cf. Équation (II. 21)) se décompose en une somme de vecteurs :

$$X_0 = \begin{bmatrix} A \delta x_{-1} + B \delta u_{-1} \\ C \delta x_{-1} \end{bmatrix} + \delta - Y_0 \quad \text{où } Y_0 = \begin{bmatrix} \delta x_{-1} \\ z_d - z_f \end{bmatrix} \quad \text{et } \delta = \begin{bmatrix} \xi_k \\ \theta_k \end{bmatrix}.$$

La valeur du coût J_m est alors donnée par :

$$2 J_m = \{ ((A \delta x_{-1} + B \delta u_{-1})^T (C \delta x_{-1})^T) + \delta^T - Y_0^T \} P \{ ((A \delta x_{-1} + B \delta u_{-1})^T (C \delta x_{-1})^T) + \delta - Y_0 \},$$

soit, compte tenu de (II. 22) :

$$2 J_m = \delta^T P \delta + \delta u_{-1}^T N \delta + \delta u_{-1}^T M Y_0 + Y_0^T S Y_0 + Y_0^T V \delta + \delta u_{-1}^T W \delta u_{-1}, \quad (\text{II. 23})$$

$$\text{avec } N \triangleq 2 B^T P_1, \quad M \triangleq [-2 B^T P_{11} + 2 B^T P_{11} A + 2 B^T P_{12} C \quad | \quad -2 B^T P_{12}],$$

$$S \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \frac{P_{11} + A^T P_{11} A + 2 C^T P_{21} A + C^T P_{22} C - 2 A^T P_{11} - 2 C^T P_{21}}{P_{21} - P_{21} A - P_{22} C} & P_{12} - A^T P_{12} - C^T P_{22} \\ \hline & P_{22} \end{array} \right],$$

$$V \triangleq 2 (A^T P_1 + C^T P_2 - P) \quad \text{et } W \triangleq B^T P_{11} B.$$

La quantité $2J_m$ donnée par (II. 23) est rigoureusement identique à la valeur du coût qui a été formulée par Bourlès et Mercier dans [9] dans un exposé analogue mené dans le domaine continu; les résultats correspondants de [9] s'appliquent donc ici.

En particulier, puisque la matrice B du système (II. 3) a été supposée de rang maximum, la quantité :

$$\frac{\partial^2 2J_m}{\partial (\delta u_{-1})^2} = W = B^T P_{11} B$$

est définie positive et la valeur optimale pour δu_{-1} est donnée par :

$$\frac{\partial 2J_m}{\partial (\delta u_{-1})} = 0,$$

soit

$$\delta u_{-1}^* = -(1/2) W^{-1} (N \delta + M Y_0) \quad (\text{II. 24})$$

Les valeurs nominales des perturbations sont en général inconnues et dans ce dernier cas la valeur optimale δu_{-1}^* est elle-même inconnue. Supposons cependant que l'on connaisse une prédiction des quantités ξ_k et θ_k , donnée par les espérances mathématiques $\bar{\xi}_k = E(\xi_k)$ et $\bar{\theta}_k = E(\theta_k)$, leurs moments d'ordre 2 étant supposés finis. Le calcul de l'espérance mathématique du coût (II.23) donne :

$$2 E(J_m) = E(\delta^T P \delta) + \delta u_{-1}^T N E(\delta) + \delta u_{-1}^T M Y_0 + Y_0^T S Y_0 + Y_0^T V E(\delta) + \delta u_{-1}^T W \delta u_{-1}, \quad (\text{II.25})$$

où $E(\delta) = [E(\bar{\xi}_k)^T \quad E(\bar{\theta}_k)^T]^T$.

La valeur optimale de δu_{-1} est obtenue par la même équation que (II.24) où δ est remplacée par $E(\delta)$, soit :

$$\delta u_{-1}^* = -(1/2) W^{-1} (N E(\delta) + M Y_0). \quad (\text{II.26})$$

Finalement la valeur d'initialisation de la commande est :

$$\delta u_{-1}^* = -(B^T P_{11} B)^{-1} B^T (P_{11} (E(\bar{\xi}_k) - \delta x_{-1}) + P_{12} (E(\theta_k) - (z_d - z_f)) + (P_{11} A + P_{12} C) \delta x_{-1}) \quad (\text{II.27})$$

les matrices W , N , M ayant été définies plus haut (Équation (II.23)).

Remarque : Si B n'est pas de rang maximum, une pseudo inverse devrait être substituée au 1^{er} terme de l'Équation (II.27); en outre les conditions du Théorème de la page 17 ne seraient que suffisantes.

II.3. – FORMALISATION DES DIFFÉRENTS TYPES DE PERTURBATIONS

II.3.1. – Perturbations dynamiques affectant la chaîne de retour

II.3.1.1. – Motivation

L'existence d'une loi de commande de poursuite intrinsèquement robuste vis-à-vis de perturbations additives constantes, agissant à la fois sur la dynamique du processus et sur les chaînes de retour a été mise en évidence à la section II.1.2. L'obtention de ce résultat a été cependant soumise à un certain nombre d'hypothèses restrictives qu'il est utile de rappeler ici. En effet, il a été supposé que l'état x_k et l'erreur de poursuite e_k étaient directement mesurables et que la commande u_k , élaborée par le régulateur, attaquait le processus sans intermédiaire. De plus, une condition de stabilisabilité, portant sur les matrices $F \in \mathbf{R}^{(n+p) \times (n+p)}$ et $G \in \mathbf{R}^{(n+p) \times m}$ de la dynamique du processus, a été formulée afin de conclure à l'existence d'un gain $K = [K_1 \ K_2]$ qui 1° stabilise le système augmenté (II.8) et 2° règle l'erreur de poursuite à zéro pour un objectif désiré constant.

Les développements précédents reposent sur des conditions idéales de fonctionnement du régulateur, rappelées ci-dessus, qui en général ne sont techniquement jamais réalisables. En effet, l'état complet d'un processus n'est pas toujours accessible et il devient alors nécessaire d'introduire un estimateur dans la chaîne de mesure. De plus, des capteurs, filtres, transducteurs sont nécessaires à la mesure des signaux physiques. L'état qui sera accessible au régulateur sera donc un état X_k^M , appelé « état mesuré ». De même, la commande qui excite réellement le processus physique ne provient pas directement du régulateur mais transite par des actionneurs, des servo-gouvernes dans le cas d'un avion. Cette commande, notée U_k^P , sera appelée, « commande perturbée ».

Tous ces organes, ajoutés de part et d'autre du régulateur dans la chaîne de retour, constituent des perturbations, caractérisées par des effets dynamiques et des non-linéarités variés, et sont donc des éléments potentiellement déstabilisateurs.

II.3.1.2. – Formulation mathématique des éléments non modélisés

Le processus linéaire stationnaire et stabilisable considéré dans cette section est décrit par l'équation :

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= F X_k + G U_k^P, \quad \forall k \in \mathbf{Z}_+, \\ X_0 &\text{ donné et } X_k = 0, \quad \forall k \in \mathbf{Z}_-, \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

où X_k est l'état du système et U_k^P la « commande perturbée » (cf. Section II,3.1.1). F et G sont des matrices dont les dimensions correspondent à celles des vecteurs X_k et U_k^P .

Compte tenu de l'origine et de la nature, déjà discutées à la section précédente, des perturbations dynamiques ou non linéaires qui agissent à la fois dans la chaîne de commande et de mesure, une modélisation mathématique de type opérationnelle est maintenant proposée pour ces perturbations. Soit U^M la commande effectivement calculée par le régulateur, celle-ci est reliée à la commande perturbée U^P par la relation opérationnelle

$$U^P = \mathcal{E}_C(\nu) U^M, \quad (\text{II.29})$$

où $\mathcal{E}_C(\nu)$ est un opérateur dynamique, non-anticipatif, non linéaire en ν (ν étant un vecteur formé des suites (X_k) ou (U_{k-1}^P)) et à gain incrémental fini ⁽¹⁾.

De même, l'état réel X est relié à l'état mesuré X^M par la relation opérationnelle :

$$X^M = \mathcal{E}_M(\nu) X, \quad (\text{II.30})$$

où $\mathcal{E}_M(\nu)$ est un opérateur ayant les mêmes propriétés que $\mathcal{E}_C(\nu)$.

La Figure ci-dessous précise ces différentes relations lorsque l'état X doit être régulé à zéro par retour d'état en dépit des perturbations $\mathcal{E}_C(\nu)$ et $\mathcal{E}_M(\nu)$.

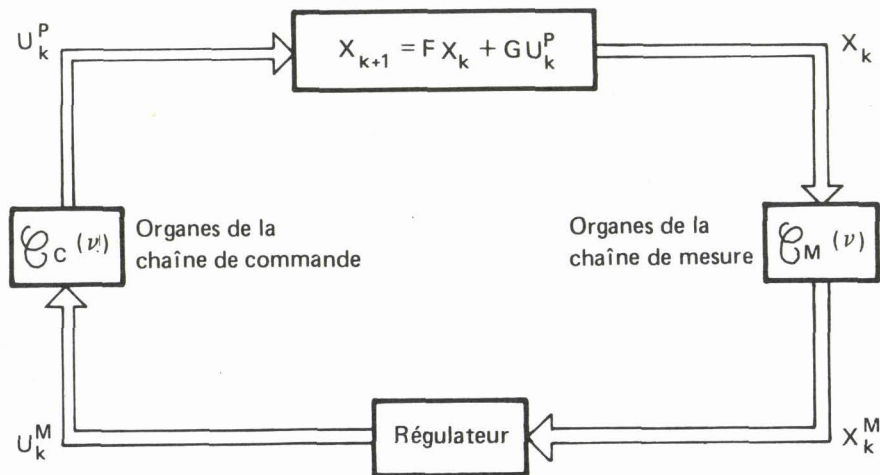


Fig. 1 – Schéma de l'asservissement perturbé dynamiquement.

Deux cas sont envisageables quant aux organes perturbant les chaînes de commande et de mesure :

- (i) Les opérateurs sont linéaires stationnaires et
- (ii) Les opérateurs sont non linéaires mais non dynamiques.

Ces deux cas sont maintenant considérés à la suite.

- (i) $\mathcal{E}_C(\nu)$ et $\mathcal{E}_M(\nu)$ sont des opérateurs linéaires dynamiques et stationnaires.

Les opérateurs généraux considérés précédemment dégénèrent alors en opérateurs de type convolution (cf. [27] et [28]). Ces opérateurs, notés \mathcal{E}_C et \mathcal{E}_M , sont dynamiques, non anticipatifs, linéaires et stationnaires (par conséquent dépendants des suites (X_k) ou (U_{k-1}^P)) et donc définis par les relations temporelles :

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+, U_k^P = (\mathcal{E}_C U^M)_k = \sum_{i=-1}^k C_c(k-i) U_i^M, \quad (\text{II.31})$$

avec

$$\forall i > k, C_c(k-i) = 0,$$

⁽¹⁾ La notion d'opérateur ainsi que des propriétés mathématiques spécifiques aux problèmes de contrôle utilisant la modélisation opérationnelle sont résumées au Chapitre III, Section III,3.1.

et

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+, X_k^M = (\mathcal{E}_M X)_k = \sum_{i=-1}^k C_M(k-i) X_i, \quad (\text{II.32})$$

avec

$$\forall i > k, C_M(k-i) = 0,$$

où les noyaux $C_C(k)$ et $C_M(k)$, matrices de dimensions adaptées à celles des vecteurs U_k^P, U_k^M, X_k^M et X_k , caractérisent les réponses impulsionnelles des opérateurs \mathcal{E}_C et \mathcal{E}_M .

Les expressions du type (II.31) ou (II.32) seront désormais appelées « convolutions discrètes ». Le retour d'état qui permet de calculer la commande U^M étant supposé linéaire, la relation liant U^M à X^M entre l'entrée et la sortie du régulateur (cf. Figure 1) est

$$U^M = -K X^M \quad (\text{II.33})$$

La dynamique de la chaîne de retour calculée à partir des équations (II.29), (II.30) et (II.33) est donc décrite globalement par l'équation opérationnelle

$$U^P = -\mathcal{E}_C K \mathcal{E}_M X \triangleq -\mathcal{E} X, \quad (\text{II.34})$$

où \mathcal{E} est un opérateur de convolution discrète (cf. Annexe B).

Il est clair que la commande perturbée U^P ne dépend que des entrées $\{X_i, i \in [0, k] \cap \mathbb{Z}_+\}$ antérieures à l'état courant X_k , par conséquent \mathcal{E} rend compte, au sens large, des effets de « mémoire » et de causalité [28].

Le problème de stabilité causé par les perturbations dynamiques \mathcal{E}_C et \mathcal{E}_M peut être traité tout à fait indépendamment de l'étude, menée à la section II.1.2, sur la régulation de poursuite robuste vis-à-vis de perturbations extérieures constantes ⁽¹⁾. Cependant dans le cas où le système (II.28) représenterait le système augmenté (II.8) perturbé dans les chaînes de commande et de mesure, où l'état $X_k = [(\delta x_k - \delta x_{k-1})^T, e^T_{k-1}]^T$ et la « commande fictive » $U_k^M = \delta u_k - \delta u_{k-1}$ (incrément de commande), la finalité du travail entrepris dans ce mémoire nous amène à étudier la compatibilité entre les propriétés de stabilité démontrées sur (II.28) et les propriétés correspondantes du processus originel (II.3).

Or, (cf. Section II.1.2) l'état δx et la commande δu vérifient :

$$\forall i \in \mathbb{Z}_-^* - \{-1\}, \delta x_i = \delta u_i = 0.$$

Par conséquent, si $\mathcal{E}_{M/x}$ est la restriction à l'état originel δx_k de l'opérateur de convolution \mathcal{E}_M qui agit sur l'état augmenté $[(\delta x_k - \delta x_{k-1})^T, e^T_{k-1}]^T$,

$$(\mathcal{E}_{M/x} \delta x)_k - (\mathcal{E}_{M/x} \delta x)_{k-1} = (\mathcal{E}_{M/x} \Delta \delta x)_k,$$

et pour la commande δu

$$(\mathcal{E}_C \delta u)_k - (\mathcal{E}_C \delta u)_{k-1} = (\mathcal{E}_C U^M)_k,$$

ces deux dernières équations étant une conséquence de la propriété démontrée en bas de page et qui sera nommée « Distributivité de la convolution discrète par rapport à un incrément » ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Cet aspect sera traité dans le Chapitre III, Section III.4.

⁽²⁾ Distributivité de la convolution discrète par rapport à un incrément :

$$\begin{aligned} \forall \delta t \in \mathcal{R}^n, \forall k \in \mathbb{Z}_+, \forall i \delta t_i = 0, \forall j \in \mathbb{Z}_-^* - \{-1\}, \\ (\mathcal{E} \delta t)_k - (\mathcal{E} \delta t)_{k-1} &= \sum_{i=-1}^k C(k-i) \delta t_i - \sum_{i=-1}^{k-1} C(k-1-i) \delta t_i \\ &= \sum_{i=-1}^k C(k-i) \delta t_i - \sum_{j=0}^k C(k-j) \delta t_{j-1} \\ &= \sum_{i=-1}^k C(k-i) \delta t_i - \sum_{j=-1}^k C(k-j) \delta t_{j-1} \quad \text{car } \delta t_{-2} = 0 \\ &= \sum_{i=-1}^k C(k-i) (\delta t_i - \delta t_{i-1}) = (\mathcal{E} \Delta \delta t)_k \end{aligned}$$

$$\text{avec } \forall i \in \mathbb{Z}_+ \cup \{-1\}, (\Delta \delta t)_i = \delta t_i - \delta t_{i-1}.$$

Remarque : Cette propriété est la transposée au cas discret d'une autre plus générale concernant les systèmes continus, énoncée par Schwartz dans [81], et stipulant que la dérivation vectorielle (au sens des distributions) commute avec le produit de convolution.

En conséquence, toutes les propriétés de stabilité qui seront démontrées dans les Chapitres suivants en référence à un système augmenté tel que (II. 28) seront identiques à celles qui concernent le système originel (II. 3).

(ii) Les opérateurs $\mathcal{C}(\nu)$ et $\mathcal{M}(\nu)$ sont des matrices dont les éléments sont des fonctions non linéaires mais non dynamiques.

Dans ce cas, les équations (II. 29) et (II. 30) deviennent des relations algébriques matricielles

$$U^P = \Lambda_C(\nu) U^M \quad (\text{II. 35})$$

et

$$X^M = \Lambda_M(\nu) X, \quad (\text{II. 36})$$

où les matrices $\Lambda_C(\nu)$ et $\Lambda_M(\nu)$, encore appelées *perturbations multiplicatives*, sont de dimensions appropriées aux vecteurs U^P , U^M , X^M et X . Les éléments de ces matrices sont des fonctions non-linéaires instantanées de l'état, de la commande ou d'autres paramètres. Le retour d'état qui est envisagé ici est défini par la matrice de gain (gains non-linéaires en ν) $K(\nu)$ telle que :

$$U^M = -K(\nu) X^M \quad (\text{II. 37})$$

Il résulte donc pour la chaîne de retour que :

$$U^P = -\Lambda_C(\nu) K(\nu) \Lambda_M(\nu) X^M \quad (\text{II. 38})$$

Les relations entre les différentes grandeurs de la chaîne de retour sont illustrées sur la Figure 2, ci-dessous.

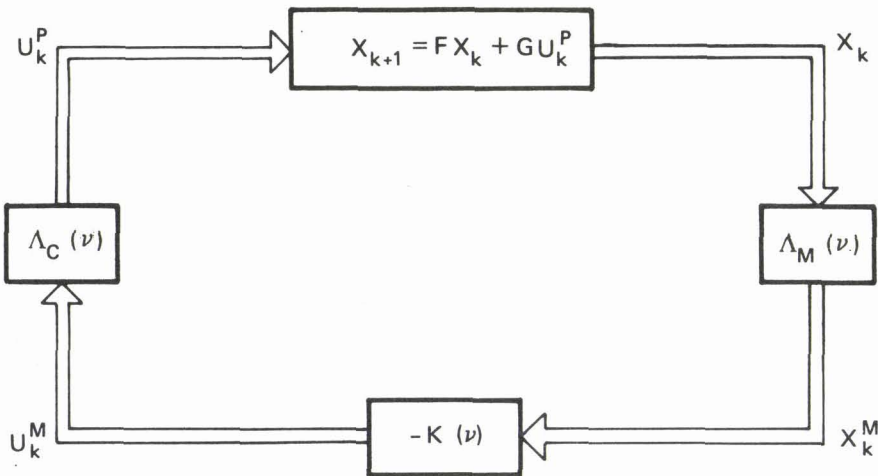


Fig. 2 — Schéma de l'asservissement perturbé multiplicativement.

Dans ce dernier cas, les propriétés du produit d'une matrice par un vecteur assurent que les résultats de stabilité démontrés sur le système augmenté (II. 28), équivalents à (II. 8), sont identiques à ceux concernant le système (II. 3).

Ce second aspect des perturbations affectant la chaîne de retour sera traité au Chapitre IV.

II.3.2. — Perturbation dynamique d'origine structurelle

II.3.2.1. — Justification

La mise au point actuelle des régulateurs multivariables nécessite de plus en plus de tenir compte de toutes les incertitudes (erreurs de modèle et, le cas échéant, erreurs de linéarisation), que peut rassembler un modèle mathématique supposé décrire le processus réel mais reflétant plutôt un comportement nominal idéalisé.

Cette incertitude a été considérée, dans les développements de la Section II.1.2, sous la forme d'une perturbation supposée constante et additive, et le rejet de cette quantité a été rendu possible grâce à une loi de commande discrète de type proportionnel et intégral. Dans le cas plus général et moins trivial où ces perturbations

ne seraient pas constantes, mais évolueraient de façon non linéaire et arbitraire, une nouvelle formulation du processus est proposée. La prise en compte des variations non linéaires de ces quantités, susceptibles de déstabiliser le système nominal contrôlé, incite à chercher une quantification des limites de variations tolérables pour ces perturbations, qualifiées de *structurelles*, puisque se rapportant au modèle.

II.3.2.2. — Formulation mathématique

Considérons le système récurrent linéaire stationnaire suivant :

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= F X_k + G U_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \\ X_0 &\text{ donnée et } X_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_-^*, \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

où X_k est l'état du système et U_k la commande non perturbée (cas où $\mathcal{C}(v) = \mathcal{C}_M(v) = \mathcal{I}$, avec \mathcal{I} opérateur identité). Ce système est supposé stabilisable par rapport à l'état $X=0$, par rétroaction d'état à l'aide de la loi de commande :

$$U = -K X, \quad (\text{II.40})$$

où K est une matrice de gain de dimension convenable.

Le modèle mathématique choisi pour représenter la perturbation structurelle est un opérateur $\mathcal{F}(v)$, dynamique, non anticipatif et non linéaire, vérifiant $\mathcal{F}(v)0=0$.

La classe d'opérateur $\mathcal{F}(v)$ telle que le système contrôlé :

$$X_{k+1} = (F - G K) X_k + (\mathcal{F}(v) X)_k \quad (\text{II.41})$$

reste stable est recherchée : elle caractérisera la *robustesse structurelle* du système contrôlé.

II.3.3. — Définition globale de la robustesse

Des réponses sont apportées dans les Chapitres III (Section III,4) et IV, en associant le problème de robustesse structurelle et celui posé par les perturbations affectant les chaînes de commande et de mesure (décrit à la Section II,3.1). Un résultat plus général sera ainsi obtenu, caractérisant la robustesse globale du processus régulé.

Plus généralement, un système aura la propriété d'être *robuste* s'il reste stable malgré les influences de toutes les perturbations, qu'elles soient additives (actions extérieures, erreurs de modèle ou de linéarisation) ou multiplicatives (d'origine structurelle). Par conséquent, on appellera *marge de stabilité multivariable* toute classe de perturbations qui ne détruira pas la stabilité du régulateur.

II.4. — RÉGULATEUR A DEUX NIVEAUX POUR UN PROCESSUS DISCRET

II.4.1. — Philosophie générale

Cette structure de régulateur a fait l'objet de travaux récents dans le domaine continu (cf. [6], [7] et Mercier [29] pour une version plus appliquée) ⁽¹⁾.

Ce régulateur a été développé afin :

1. de réaliser, avec une dynamique satisfaisant des critères de pilotabilité, une poursuite d'objectifs très éloignés des conditions nominales de fonctionnement du processus et
2. d'assurer, en l'absence de modification des consignes, une régulation rapide et précise du processus soumis à des perturbations extérieures imprévisibles et à de fortes erreurs de modèle.

Après un rappel concernant la philosophie du régulateur à deux niveaux, une extension possible de ces résultats au domaine discret sera présentée.

⁽¹⁾ La genèse de cette philosophie est plus ancienne et repose sur les travaux d'autres auteurs, présentés dans [6].

Ce régulateur comporte un schéma de régulation à deux niveaux en cascade (cf. Figure 3), de manière à partager les responsabilités de l'asservissement du processus.

Le premier niveau constitue un modèle de référence et engendre, pour tout objectif désiré, dans l'espace des variables d'état et de commande des trajectoires « idéales » par rapport auxquelles le deuxième niveau effectuera la régulation. Si on se rapporte à la formulation du problème de poursuite, décrite au II,1.2, le premier niveau élabore une réponse (x_k^m, z_k^m) , et donc une séquence de commandes u_k^m , à partir d'un modèle idéalisé et linéarisé (II.3) du processus de manière à réaliser, avec des performances spécifiées, un objectif désiré z_d .

Le second niveau, quant à lui, constitue le véritable régulateur. Il assure un asservissement « rapide », encore dénommé ralliement, du mouvement non linéaire perturbé du processus par rapport à la réponse (x_k^m, z_k^m) fournie par le premier niveau, ce dernier jouant un rôle de « feedforward ». Cet asservissement rapide est réalisé en dépit d'erreurs importantes de modèle et en présence de perturbations extérieures.

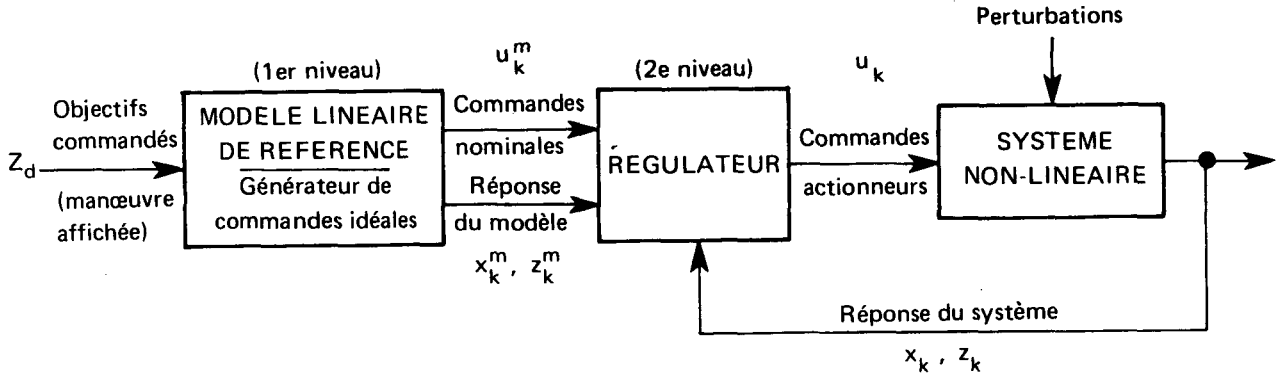


Fig. 3 – Structure de régulation à deux niveaux.

II,4.2. – Formulation mathématique et calcul des lois de commande

Soit le processus décrit par les équations non linéaires :

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} &= f(x_k, u_k, w_k) \\
 z_k &= g(x_k) \quad , \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+ , \\
 x_{-1} & \text{ donné et } x_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_-^* - \{-1\} ,
 \end{aligned}
 \tag{II.42}$$

où f et g sont des fonctions (cf. Section II,1.2 pour détails).

Premier niveau du régulateur

Une linéarisation de ces équations autour d'un point de fonctionnement x_f^m, u_f^m, z_f^m et pour une valeur nominale w_f^m des perturbations ⁽¹⁾ conduit au modèle de référence idéalisé (repéré par la lettre m), appelé premier niveau du régulateur :

$$\begin{aligned}
 \delta x_{k+1}^m &= A_m \delta x_k^m + B_m \delta u_k^m + \delta_{1k}^m \\
 \delta z_k^m &= C_m \delta x_k^m + \delta_{2k}^m ,
 \end{aligned}
 \tag{II.43}$$

où $\delta x_k^m = x_k^m - x_f^m$, $\delta u_k^m = u_k^m - u_f^m$ et $\delta z_k^m = z_k^m - z_f^m$ avec $z_f^m = C_m x_f^m$.

La théorie détaillée du régulateur de poursuite optimale traitée en II,1 et II,2 conduit, en considérant ici $\delta_{1k}^m = 0$ et $\delta_{2k}^m = 0$, à une loi de commande δu_k^m de type « PI » qui assure à la fois la stabilité en boucle fermée du modèle de référence et la convergence asymptotique de z_k^m vers z_d , l'erreur de poursuite étant définie par :

$$e_k^m = z_k^m - z_d = g(x_k^m) - z_d \simeq \delta z_k^m - z_d + z_f^m .$$

En effet, en choisissant comme vecteur état, le vecteur augmenté $X_k^m = [(\delta x_k^m - \delta x_{k-1}^m)^T, e_{k-1}^m]^T$ et comme commande fictive U_k^m , l'incrément de commande originel $\delta u_k^m - \delta u_{k-1}^m$, la minimisation par rapport à la suite (U_k^m) de la fonction de coût :

⁽¹⁾ Le plus souvent, $w_f^m = 0$.

$$J^m = (1/2) \sum_{i=0}^{\infty} (X_i^{mT} Q_m X_i^m + U_i^{mT} R_m U_i^m), \quad (\text{II.44})$$

où $Q_m \geq 0$ et $R_m > 0$ sont des matrices symétriques, fournira une loi de commande optimale stabilisante pour le système augmenté. Celui-ci s'écrit :

$$\begin{aligned} X_{k+1}^m &= F_m X_k^m + G_m U_k^m \\ e_{k-1}^m &= H_m X_k^m, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \\ X_0 \text{ donné et } X_k &= 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_-^*, \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

où :
$$\text{où } F_m = \begin{bmatrix} A_m & 0 \\ C_m & I \end{bmatrix}, \quad G_m = \begin{bmatrix} B_m \\ 0 \end{bmatrix}$$

et $H_m = [0 \quad I]$. Les paires (F_m, G_m) et (F_m, H_m) étant respectivement stabilisables et reconstructibles, la loi de commande :

$$U_i^m = \delta u_i^m - \delta u_{i-1}^m = - (R_m + G_m^T P_m G_m)^{-1} G_m^T P_m F_m X_i^m = - [K_{1m} \quad K_{2m}] X_i^m \quad (\text{II.46})$$

est unique et optimale pour le système (II.45). Deux formes équivalentes de cette loi sont, en référence aux variables du système (II.43) :

$$\delta u_k^m - \delta u_{k-1}^m = -K_{1m} (\delta x_k^m - \delta x_{k-1}^m) - K_{2m} e_{k-1}^m \quad (\text{II.47a})$$

et :

$$\delta u_k^m = \delta u_{-1}^m - K_{1m} (\delta x_k^m - \delta x_{-1}^m) - K_{2m} \sum_{i=-1}^{k-1} (z_i^m - z_d). \quad (\text{II.47b})$$

Remarque : Si la condition de stabilisabilité de la paire (F_m, G_m) n'était pas satisfaite ⁽¹⁾, des tests spécifiques, portant sur la matrice $L = Q^{1/2}$, développés à la Section II.2.4 permettraient de vérifier que l'erreur de poursuite $e_k^m = g(x_k^m) - z_d$ tend néanmoins vers zéro.

L'une ou l'autre des lois de commande (II.47a) ou (II.47b) garantit une convergence parfaite de $z_k^m = g(\delta x_k^m + x_f^m)$ vers z_d en assurant la stabilité en « vitesse » du comportement de (II.43) sans exiger la connaissance des valeurs de régime permanent de δx_k^m et δu_k^m qui correspondent à $z_k^m = z_d$ (objectif atteint).

Dans ces lois, δu_{-1}^m est une constante d'initialisation qui peut, le cas échéant, être choisie de façon à optimiser le coût final $J^m = (1/2) X_0^m P_m X_0^m$; son expression calculée, à la Section II.2.5, est donnée par (II.27) qui se réduit ici en :

$$\delta u_{-1}^{m*} = - (B^T P_{11} B)^{-1} B^T [(P_{11} A + P_{12} C - P_{11}) \delta x_{-1} - P_{12} (z_d - z_f)],$$

puisque $E(\delta_{1k}^m) = E(\delta_{2k}^m) = 0$, le premier niveau n'étant pas perturbé. L'intérêt essentiel d'un tel choix pour δu_{-1} est de précipiter les régimes transitoires. Le choix $\delta u_{-1} = 0$ ne représente cependant aucun inconvénient du point de vue de la convergence asymptotique.

Second niveau

Le second niveau asservit le processus non linéaire décrit par les équations (II.42) au modèle de référence proposé précédemment. Pour cela un modèle dynamique de la différence entre le système non linéaire (II.42), sensé représenter le processus réel, et le modèle de référence (II.43) doit être considéré, soit :

$$\begin{aligned} x_{k+1} - \delta x_{k+1}^m - x_f^m &= f(x_k, u_k, w_k) - A_m \delta x_k^m - B_m \delta u_k^m - x_f^m \\ e_k^r \stackrel{\Delta}{=} z_k - \delta z_k^m - z_f^m &= g(x_k) - C_m \delta x_k^m - z_f^m. \end{aligned} \quad (\text{II.48})$$

Le vecteur e_k^r est appelé erreur de ralliement (indice r). A ce système est associé un modèle, linéarisé autour d'un point de fonctionnement (x_f^r, u_f^r, z_f^r) pour une perturbation nominale $w_f^r \neq 0$ et qui admet $\delta x_k^r = x_k - \delta x_k^m - x_f^r$ pour vecteur état.

⁽¹⁾ On observerait alors qu'une ou plusieurs colonnes de K_{1m} seraient nulles ou, en général, que la matrice K_{1m} ne serait pas de rang maximum.

Le système linéaire correspondant est alors :

$$\begin{aligned} \delta x_{k+1}^r &= A_r \delta x_k^r + B_r \delta u_k^r + (A_r - A_m) \delta x_k^m + (B_r - B_m) \delta u_k^m + \delta_{1k}^r \\ e_k^r &= C_r \delta x_k^r + (C_r - C_m) \delta x_k^m + \delta_{2k}^r, \end{aligned} \quad (\text{II.49})$$

où $\delta x_k^r = x_k - \delta x_k^m - x_f^m$ et $\delta u_k^r = u_k - \delta u_k^m - u_f^m$.

Une autre formulation possible du système (II.49) est :

$$\begin{aligned} \delta x_{k+1}^r &= A_r \delta x_k^r + B_r \delta u_k^r + \delta_{1k} \\ e_k^r &= C_r \delta x_k^r + \delta_{2k}, \end{aligned} \quad (\text{II.50})$$

où la quantité δ_{1k} rassemble les perturbations extérieures du système (II.42) ainsi que tous les résidus de linéarisation et les erreurs de modèle (terme δ_{1k}^r), et le terme $(A_r - A_m) \delta x_k^m + (B_r - B_m) \delta u_k^m + \delta_{2k}$ rend compte des résidus de linéarisation (δ_{2k}) ainsi que du terme $(C_r - C_m) \delta x_k^m$ ⁽¹⁾.

Il est commode de supposer que les équations du premier et deuxième niveau sont linéarisées par rapport au même point, soit $(x_f^r, u_f^r, z_f^r) = (x_f^m, u_f^m, z_f^m)$, ce qui entraîne $A_r = A_m$, $B_r = B_m$ et $C_r = C_m$. Dans ces conditions les quantités δ_{1k} et δ_{2k} ne contiennent plus que les erreurs de linéarisation et les perturbations extérieures.

On retrouve par ailleurs la formulation du II.1.2 (cf. Équation (II.3)), où les perturbations δ_{1k} et δ_{2k} sont non nulles et supposées constantes, ou au moins constantes par morceaux, ce qui est justifié si celles-ci évoluent lentement par rapport à la dynamique du système (II.50).

Définissant le vecteur d'état augmenté $X_k^r = [(\delta x_k^r - \delta x_{k-1}^r)^T, e_{k-1}^r]^T$, l'incrément de commande $U_k^r = \delta u_k^r - \delta u_{k-1}^r$ et minimisant par rapport à la suite (U_i^r) l'indice de performance :

$$J^r = (1/2) \sum_{i=0}^{\infty} (X_i^{rT} Q_r X_i^r + U_i^{rT} R_r U_i^r), \quad (\text{II.51})$$

où $Q_r \geq 0$ et $R_r > 0$, la loi de commande optimale pour (II.50) est obtenue directement de la forme (cf. Sections II.1 et II.2 pour la théorie détaillée) :

$$\delta u_k^r - \delta u_{k-1}^r = K_{1r} (\delta x_k^r - \delta x_{k-1}^r) + K_{2r} e_{k-1}^r \quad (\text{II.52 a})$$

ou :

$$\delta u_k^r = \delta u_{k-1}^r - K_{1r} (\delta x_k^r - \delta x_{k-1}^r) - K_{2r} \sum_{i=2-k}^{k-1} (z_k - \delta z_k^m - z_f^m). \quad (\text{II.52 b})$$

La constante d'initialisation δu_{-1}^r pourra être choisie suivant la démarche indiquée en Section II.2.5, Équation (II.27), soit par :

$$\delta u_{-1}^{r*} = - (B^T P_{11} B)^{-1} B^T (P_{11} (E(\delta_{1k}) - \delta x_{-1}) + P_{12} (E(\delta_{2k}) - (z_d - z_f)) + (P_{11} A + P_{12} C) \delta x_{-1})$$

La propriété majeure des lois de commande (II.52 a-b) est d'assurer la convergence asymptotique (ralliement sans erreur) de $z_k^r = g(x_k^r)$ vers $z_k^m = g(x_f + \delta x_k^m)$ qui converge parfaitement vers z_d .

II.5. - APPLICATION AU PILOTAGE D'UN AVION DE COMBAT

II.5.1. - Modélisation du mouvement latéral de l'avion

II.5.1.1. - Équations de la mécanique du vol [32]

Les différentes variables permettant de définir le mouvement de l'avion à tout instant sont les projections, dans un repère $Gxyz$ lié à l'avion, des quantités physiques suivantes :

$V = [u \ v \ w]^T$ = vecteur vitesse de l'avion, où u , v et w sont les composantes longitudinale, latérale (encore appelée vitesse de dérapage) et normale du vecteur vitesse,

$\Omega = [p \ q \ r]^T$ = vecteur vitesse instantanée de rotation, où p , q et r sont les vitesses de roulis, de tangage et de lacet,

⁽¹⁾ Dans ce cas la dynamique des termes $(C_r - C_m) \delta x_k^m$ et $(A_r - A_m) \delta x_k^m + (B_r - B_m) \delta u_k^m$ étant connue, l'effet de forçage provoqué par ceux-ci peut-être explicitement corrigé dans la loi de commande par une action de type feedforward.

$U = [\delta l \delta m \delta n]^T$ = vecteur de commande, où δl , δm et δn sont les angles de braquage des gouvernes de « gauchissement » (créant un couple de roulis), de « profondeur » (créant un couple de tangage) et de « direction » (produisant un couple de lacet).

La Figure 4 précise la nature et les effets de ces variables sur un avion de combat.

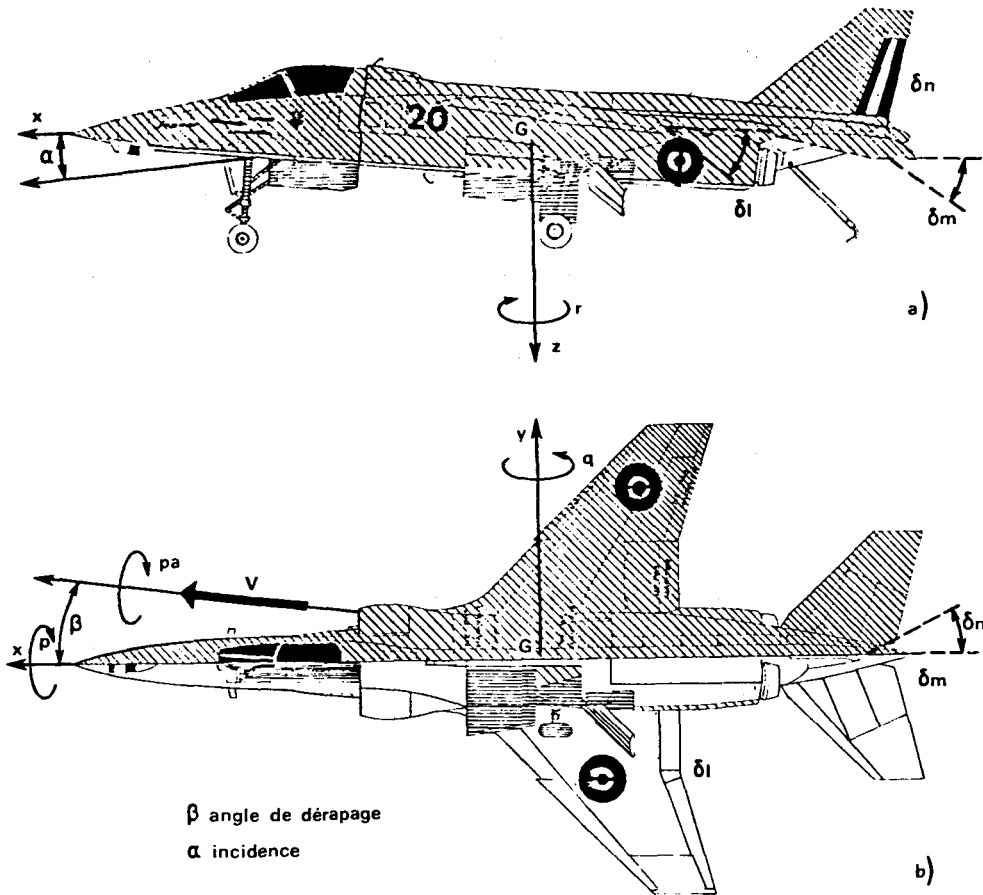


Fig. 4 – Définition des axes et des variables du mouvement.

De l'application du Principe fondamental de la dynamique au système mécanique « avion », il découle les équations générales du mouvement de l'avion :

$$\begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= \sum F_e \\ \frac{d\mathcal{B}}{dt} &= \sum M_e, \end{aligned} \quad (\text{II.53})$$

où, $\sum F_e$ est la résultante de toutes les forces extérieures agissant sur l'avion, $\mathcal{B} = J \cdot \Omega$ est le moment cinétique de l'avion autour de son centre de gravité G et $\sum M_e$ est le moment résultant des forces aérodynamiques et de propulsion.

Ces équations sont complétées par les relations cinématiques faisant intervenir les angles ψ , θ et φ respectivement dénommés azimut, assiette longitudinale et angle de gîte et repérant le trièdre avion $Gxyz$ par rapport au trièdre terrestre $Gx_0y_0z_0$ de référence.

En définissant comme vecteur état de l'avion le vecteur ⁽¹⁾ $X = [v \ w \ p \ q \ r \ \varphi \ \theta \ \psi]^T$, l'ensemble des équations des forces, des moments (cf. Équation (II.53)) et des relations cinématiques conduit au système non linéaire

$$\dot{X} = f(X, U), \quad (\text{II.54})$$

⁽¹⁾ La composante u du vecteur vitesse V ne figure pas dans le vecteur état X car elle est supposée être contrôlée indépendamment des autres variables.

où X est le vecteur état et U le vecteur commande.

II.5.1.2. — Linéarisation au voisinage du vol horizontal rectiligne stabilisé.

Le point de linéarisation choisi est supposé correspondre au vol horizontal stabilisé ($\theta_f=0$) de l'avion défini par $X_f=[0 \ w_e \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ et $U_f=[0 \ \delta m_e \ 0]^T$, où w_e correspond à l'incidence d'équilibre α_e (indice e) ($w_e = \|V\| \sin \alpha_e$, $\|V\|$ étant le module de la vitesse) et δm_e au braquage d'équilibre de la gouverne de profondeur. Les deux vecteurs X_f et U_f vérifient l'équation $f(X_f, U_f)=0$. La linéarisation de (II.54) au voisinage du point de fonctionnement retenu conduit au système linéaire

$$\dot{X} = \frac{\partial f}{\partial X} \bigg|_{X_f, U_f} (X - X_f) + \frac{\partial f}{\partial U} \bigg|_{X_f, U_f} (U - U_f) + \eta (X - X_f, U - U_f). \quad (\text{II.55})$$

Ce modèle linéaire retenu rend compte de manœuvres de faible amplitude autour des conditions d'équilibre correspondant au vol horizontal stabilisé (X_f, U_f).

II.5.1.3. — Équations du mouvement latéral

La restriction de l'Équation (II.55) aux variables du mouvement latéral ⁽¹⁾ conduit aux équations linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{v} &= w_e p - V \cos \alpha_e r + g \varphi + Y_v(\alpha_e) v + Y_p(\alpha_e) p + Y_r(\alpha_e) r + Y_{\delta l}(\alpha_e) \delta l + Y_{\delta n}(\alpha_e) \delta n \\ \dot{p} &= L_v(\alpha_e) v + L_p(\alpha_e) p + L_r(\alpha_e) r + L_{\delta l}(\alpha_e) \delta l + L_{\delta n}(\alpha_e) \delta n \\ \dot{r} &= N_v(\alpha_e) v + N_p(\alpha_e) p + N_r(\alpha_e) r + N_{\delta l}(\alpha_e) \delta l + N_{\delta n}(\alpha_e) \delta n \end{aligned} \quad (\text{II.56})$$

$$\dot{\varphi} = p$$

$$\dot{\psi} = r$$

$$\text{avec } \alpha_e = \text{Arctg}(w_e / \|V\|),$$

et où les Y, L et N sont les « coefficients aérodynamiques », dépendant de l'incidence α .

En ne retenant que les composantes du mouvement latéral dans le vecteur état X et le vecteur commande U , (II.56) s'écrit encore :

$$\dot{x} = A x + B u + \eta (\delta x, \delta u), \quad (\text{II.57})$$

où $A \in \mathbf{R}^{5 \times 5}$ et $B \in \mathbf{R}^{5 \times 2}$.

II.5.2. — Choix du vecteur de sortie et réduction du modèle

Le vecteur sortie z , défini à la Section II.1.2 et choisi pour l'application envisagée ici est :

$$z \triangleq [p_a \quad r]^T. \quad (\text{II.58})$$

La composante p_a (cf. Figure 4b), encore appelée « roulis aérodynamique », est la projection du vecteur instantané de rotation sur la direction du vecteur vitesse,

$$\begin{aligned} p_a &= \Omega \cdot V / \|V\|, \\ \text{soit } p_a &= (1 / \|V\|) (p u + q v + r w). \end{aligned} \quad (\text{II.59})$$

Le vecteur z s'exprime alors linéairement en fonction de l'état x ,

$$z \triangleq C x,$$

où $C \in \mathbf{R}^{2 \times 5}$.

(1) Le mouvement latéral est préféré dans cette Thèse au mouvement longitudinal pour disposer d'un modèle à commande multivariable et ainsi appliquer — dans des conditions non triviales — les résultats de robustesse qui seront exposés plus loin.

Le système (II.56) mis sous la forme (II.57) se partitionne de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_v & w_e + Y_p & Y_r - \|V\| \cos \alpha_e & g & 0 \\ L_v & L_p & L_r & 0 & 0 \\ N_v & N_p & N_r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \\ r \\ \varphi \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{\delta l} & Y_{\delta n} \\ L_{\delta l} & L_{\delta n} \\ N_{\delta l} & N_{\delta n} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta l \\ \delta n \end{bmatrix} + \eta(\delta x, \delta u). \quad (\text{II.60})$$

Il apparaît clairement que la dynamique associée au vecteur état réduit $x = [vpr]^T$ est indépendante des variables cinématiques φ et ψ ; elle suffit donc à décrire le mouvement latéral de l'avion si l'action de la pesanteur est considérée comme une perturbation. Pour les besoins du pilotage, les calculs seront donc effectués sur le modèle suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} v \\ p \\ r \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \delta l \\ \delta n \end{bmatrix} + \delta_1 \quad (\text{II.61})$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_a \\ \dot{r} \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} v \\ p \\ r \end{bmatrix} + \delta_2,$$

où δ_1 et δ_2 sont des perturbations additives constantes par morceaux sur un intervalle de temps grand par rapport au temps de réponse du système. Elles sont sensées représenter les erreurs de linéarisation et les erreurs de modèle (ex. : couplage entre les variables et les équations de la cinématique, terme de pesanteur g , φ).

II.5.3. – Modèle numérique à temps continu

Les valeurs numériques utilisées sont celles d'un avion de combat typique. Le point de fonctionnement est choisi pour une vitesse moyenne $\|V\| = 230$ m/s (Mach 0.7) pour laquelle $\alpha_e = 1.48^\circ$, $w_e = 5.945$ m/s, $\theta_e = 0$ et $\delta m_e = -3.901 \times 10^{-3}$. Dans ces conditions les matrices $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $B \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ et $C \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ de l'Équation (II.61) ont pour valeurs :

$$A = \begin{bmatrix} -3.4622\text{E-}01 & 5.9450\text{E+}00 & -2.3000\text{E+}02 \\ -1.6019\text{E-}01 & -1.8565\text{E+}00 & 3.9464\text{E-}01 \\ 1.9299\text{E-}02 & -5.1817\text{E-}02 & -2.7967\text{E-}01 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0. & 1.1856\text{E+}01 \\ -6.0514\text{E+}00 & 6.1611\text{E+}00 \\ -2.8907\text{E-}01 & -2.2395\text{E+}00 \end{bmatrix} \quad (\text{II.62})$$

$$C = \begin{bmatrix} 0. & 9.9967\text{E-}01 & 2.5800\text{E-}02 \\ 0. & 0. & 1.0000\text{E+}00 \end{bmatrix}$$

II.5.4. – Échantillonnage du modèle linéaire continu

Le calcul du modèle discret

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \quad (\text{II.63})$$

est effectué à partir de la solution générale du système matriciel différentiel

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad \text{où } A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ et } B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad (\text{II.64})$$

modélisant un processus linéaire stationnaire.

Cette solution est calculée à partir du système homogène ($\forall t \in \mathbf{R}_+, u(t)=0$) qui s'écrit :

$$x(t) = \Phi(t, t_k) x(t_k), \quad (\text{II.65})$$

où $\Phi(t, t_k) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ est la matrice de transition du système (II.64) (cf. [23] et [33]). Cette matrice vérifie les propriétés suivantes :

$$P.1 \quad \Phi(t_k, t_k) = I, \quad (\text{P.1})$$

$$P.2 \quad \Phi^{-1}(t_{k+1}, t_k) = \Phi(t_k, t_{k+1}),$$

$$P.3 \quad \Phi(t_{k+2}, t_k) = \Phi(t_{k+2}, t_{k+1}) \Phi(t_{k+1}, t_k),$$

$$P.4 \quad \frac{d(\Phi(t, t_k))}{dt} = A \Phi(t, t_k). \quad (\text{P.4})$$

Lorsque le processus est forcé par une commande $u(t)$, la solution de l'Équation (II.40), issue des propriétés P.2 et P.3 ci-dessus, est donnée par :

$$x(t) = \Phi(t, t_k) x(t_k) + \int_{t_k}^t \Phi(t, \tau) B u(\tau) d\tau.$$

Dans cette application, le processus stationnaire continu modélisant le mouvement latéral de l'avion est échantillonné toutes les $T_e = 1/F_e = 0.0333$ s. Par conséquent, en faisant l'hypothèse désormais classique que :

$$\forall t \in [t_k, t_k + T_e], u(t) = u_k = \text{constante},$$

$$x_{k+1} = x(t_k + T_e) = \Phi(t_k + T_e, t_k) x_k + \left[\int_{t_k}^{t_k + T_e} \Phi(t_k + T_e, \tau) B d\tau \right] u_k. \quad (\text{II.66})$$

Les matrices du processus discret (II.63) se déduisent donc de (II.66) en posant ⁽¹⁾ :

$$A_d = \Phi(t_k + T_e, t_k)$$

et :

$$B_d = \int_{t_k}^{t_k + T_e} \Phi(t_k + T_e, \tau) B d\tau.$$

Le processus étant linéaire stationnaire, à la sortie $z = Cx$ correspond l'équation discrétisée $z_k = z(t_k) = Cx(t_k) = Cx_k$.

À partir des données de la Section II.5.3, la mise en œuvre d'une méthode d'intégration de Runge Kutta d'ordre 4 appliquée à $\Phi(t, t_k)$ conduit, pour une fréquence d'échantillonnage de 30 Hz, aux matrices A_d et B_d suivantes :

$$A_d = \begin{bmatrix} 9.8556E-01 & 1.9729E-01 & -7.5782E+00 \\ -5.1384E-03 & 9.3947E-01 & 3.2586E-02 \\ 6.4047E-04 & -1.6033E-03 & 9.8826E-01 \end{bmatrix}$$

$$B_d = \begin{bmatrix} 1.6726E-02 & 6.9682E-01 \\ -1.9569E-01 & 1.9710E-01 \\ -9.4171E-03 & -7.4284E-02 \end{bmatrix}$$

(II.67)

où

$$C_d = \begin{bmatrix} 0. & 9.9967E-01 & 2.5800E-02 \\ 0. & 0. & 1.0000E+00 \end{bmatrix}$$

⁽¹⁾ Pour une fréquence d'échantillonnage beaucoup plus rapide, la matrice A_d pourrait être calculée à partir de $A_d = \exp(AT_e) \approx I + AT_e$, où $T_e = 1/F_e$. Dans le cas présent, l'intégration de l'équation différentielle (P.4) à partir de la condition initiale (P.1) est préférable pour préserver la représentativité du modèle.

II,5.5. – Calcul des gains. Simulations

La qualification des propriétés de robustesse de la loi de commande (II.52) ne peut se concevoir qu'après une première mise au point, destinée à conférer à l'avion contrôlé (avec ses saturations de gouvernes et toutes les non linéarités de son modèle) de « bonnes » propriétés de pilotabilité. Ces propriétés et donc le bon choix des matrices de pénalité des fonctions de coût (II.44) et (II.51) sont donc principalement jugés à partir de simulations numériques portant sur le modèle non linéaire et en référence à un ensemble de « normes » qui constituent les spécifications.

Ces simulations sont effectuées à l'aide d'un logiciel dont la structure est indiquée par l'organigramme de la Planche 1.

II,5.5.1. – Organigramme du logiciel de simulation

Le modèle linéaire discret (II.63), défini par le triplet (A_d, B_d, C_d) établi à la Section précédente (cf. (II.67)) constitue à la fois le modèle de référence (A_m, B_m, C_m) du premier niveau et le modèle linéarisé (A_r, B_r, C_r) associé au second niveau. Sous ces hypothèses, l'effet de forçage décrit en II,4.2 et résultant des termes $A_r - A_m$, $B_r - B_m$ et $C_r - C_m$ est inexistant.

Calcul des gains :

Les gains optimaux K_{1m} , K_{2m} et K_{1r} , K_{2r} des lois de commande des deux niveaux sont donc calculés à partir du même triplet (A_d, B_d, C_d) . C'est le choix particulier des matrices de réglage Q et R (Q_m et R_m ou Q_r et R_r) qui permet de calculer les gains optimaux du premier niveau K_{1m} et K_{2m} ou du 2^e niveau K_{1r} et K_{2r} . Dans chacun des cas, il est nécessaire de calculer la solution $P \geq 0$ de l'équation de Riccati discrète :

$$F^T P F + Q - F^T P G (R + G^T P G)^{-1} G^T P F = P,$$

$$\text{où } F = \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ C_d & I \end{bmatrix} \text{ et } G = \begin{bmatrix} B_d \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{II.68})$$

(cf. Équations (II.13-17) en Section II,2.2).

Ce calcul est effectué par le logiciel ALMARID, basé sur l'algorithme de Potter [37] et O'Donnell [38], développé dans le cas continu, et étendu maintenant aux systèmes discrets.

Soient X_k^* le vecteur correspondant à la trajectoire optimale et U_k^* la commande optimale. D'après le Principe du minimum (cf. [22]) il existe une suite de « vecteurs-adjoints » p_k^* telle que la suite U_k^* minimise l'Hamiltonien :

$$\mathcal{H}_a = (1/2) (X_k^{*T} Q X_k^* + U_k^T R U_k) + p_{k+1}^{*T} (F X_k^* + G U_k),$$

associé à (II.13) et à l'indice de performance :

$$J = (1/2) (X_N^T S X_N) + (1/2) \sum_{k=0}^{N-1} (X_k^T Q X_k + U_k^T R U_k),$$

où $S \in \mathbf{R}^{(n+p) \times (n+p)}$ est une matrice symétrique semi définie positive.

La commande optimale est alors donnée par :

$$U_k^* = - R^{-1} G^T p_{k+1}^*,$$

où p_k^* est solution du système récursif :

$$\begin{aligned} X_{k+1}^* &= F X_k^* + G U_k^* \\ p_k^* &= Q X_k^* + F^T p_{k+1}^*, \end{aligned}$$

avec les conditions limites X_0 et $p_N^* = S X_N^*$. Posant $p_{k+1}^* = P_{k+1} X_{k+1}^*$, les équations ci-dessus conduisent alors à l'équation de Riccati récursive :

$$P_k = F^T P_{k+1} F + Q - F^T P_{k+1} G (R + G^T P_{k+1} G)^{-1} G^T P_{k+1} F.$$

Il vient également le système *Hamiltonien* récursif suivant :

$$\begin{bmatrix} X_{k+1}^* \\ P_{k+1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F + GR^{-1}G^T(F^T)^{-1}Q & -GR^{-1}G^T(F^T)^{-1} \\ -(F^T)^{-1}Q & (F^T)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k^* \\ P_k^* \end{bmatrix} \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{H} \begin{bmatrix} X_k^* \\ P_k^* \end{bmatrix}$$

De l'étude de Vaughan [39], complétée par celles de Michelsen [40] et Gaalman [41], les résultats suivants peuvent être extraits :

– Toute inverse d'une valeur propre de \mathcal{H} est également valeur propre de \mathcal{H} .

– Si toutes les valeurs propres de \mathcal{H} sont distinctes, la matrice V des vecteurs propres associés est non singulière; il est alors possible de diagonaliser \mathcal{H} en séparant les pôles stables et instables, soit :

$$V^{-1} \mathcal{H} V = \begin{bmatrix} \text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n+p} & 0 \\ 0 & \text{diag}(1/\lambda_i)_{1 \leq i \leq n+p} \end{bmatrix},$$

où $\text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n+p}$ est telle que $|\lambda_i| < 1$ (valeurs propres stables intérieures au cercle unité \mathcal{C}_1). La matrice V étant partitionnée sur quatre blocs :

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix},$$

l'unique solution définie positive de (II. 68) calculée pour $S=0$ et sur un horizon infini ($N \rightarrow \infty$) est alors donnée directement par :

$$P = \lim_{k \rightarrow \infty} P_k = V_{21} V_{11}^{-1}.$$

Les pôles stables de la matrice \mathcal{H} sont ceux du système en boucle fermée (II. 17).

Calcul des commandes :

Les différents vecteurs de variables « avion » (cf. définitions en Section II.5.1) intervenant dans le logiciel sont d'une part pour le modèle de référence linéaire et discret :

$$\delta x_k^m = [v_k^m \ p_k^m \ r_k^m]^T, \delta u_k^m = [\delta l_k^m \ \delta n_k^m]^T, \delta z_k^m = [p_{ak}^m \ r_k^m]^T,$$

et d'autre part pour l'avion réel (modèle non linéaire continu) :

$$x = [v \ p \ r]^T, u_k = [\delta l_k \ \delta n_k]^T$$

(commande échantillonnée appliquée toutes les $T_e = 1/F_e = 0.0333$ s) et $z = [p_a \ r]^T$.

Au vecteur x sont associées deux variables supplémentaires :

$$V_x = u = \|V\| \cos \beta \cos \alpha_e \quad (1)$$

et φ (angle de gîte ou de roulis). Les quantités à intégrer sont donc rassemblées dans le vecteur :

$$x_{int} = [v \ p \ r \ V_x \ \varphi]^T.$$

L'initialisation est donnée par :

$$\delta x_{-1}^m = \delta x_{-1}^n = [0 \ 0 \ 0]^T, \delta u_{-1}^m = \delta z_{-1}^m = \delta u_{-1}^r = [0 \ 0]^T, u_{-1} = [0 \ 0]^T$$

et $x_{int} = [0 \ 0 \ 0 \ 230. \ 0]^T$.

(1) $V_x = u$ est la vitesse longitudinale solution de l'Équation :

$$\dot{u} = ((\rho S \|V\|^2) / 2m) (f_{\max} \delta f - C_x) + v r - g \sin \theta,$$

où δf est la manette des gaz.

A un instant d'échantillonnage k donné (cheminement $A-G-B$, Planche 1), c'est-à-dire lorsque $T_e = n \Delta t$ (la signification de ce test sera explicitée plus loin), l'objectif désiré (affichage du pilote pour la manœuvre considérée) est indiquée par $z_d = [p_{ad} r_d]^T$. Le calcul des lois de commande des différents niveaux du régulateur est alors effectué :

Premier niveau :

La loi de commande « PI » du modèle de référence est donnée par l'expression (II. 47 b) :

$$\delta u_k^m = \delta u_{-1}^m - K_{1,m} (\delta x_k^m - \delta x_{-1}^m) - K_{2,m} \sum_{i=-1}^{k-1} (\delta z_i^m - z_d + z_f^m).$$

D'après l'initialisation figurant plus haut et compte tenu du point de fonctionnement choisi pour les variables du mouvement latéral $x_f = [0 \ 0 \ 0]^T$ et $u_f = [0 \ 0]^T$ (cf. II,5.1.2), d'où :

$$\delta u_k^m = -K_{1,m} \delta x_k^m - K_{2,m} \sum_{i=-1}^{k-1} (\delta z_i^m - z_d), \quad (\text{II. 69})$$

puisque $z_f^m = C_m x_f^m = 0$.

L'évolution du modèle de référence est alors calculée à partir du processus récurrent :

$$\begin{aligned} \delta x_{k+1}^m &= A_d \delta x_k^m + B_d \delta u_k^m \\ \delta z_k^m &= C_d \delta x_k^m. \end{aligned} \quad (\text{II. 70})$$

Second niveau :

La loi de commande appliquée à l'avion réel (modèle non linéaire continu) a pour expression (cf. (II. 52 b)) :

$$\delta u_k^r = \delta u_{-1}^r - K_{1,r} (\delta x_k^r - \delta x_{-1}^r) - K_{2,r} \sum_{i=-1}^{k-1} (z_k - \delta z_k^m - z_f^m)$$

ou encore, puisque $u_k = \delta u_k^r + \delta u_k^m + u_f^m$ (cf. (II. 49)) :

$$u_k = \delta u_k^m + u_f^m + \delta u_{-1}^r - K_{1,r} (x_k - \delta x_k^m - x_f^m - \delta x_{-1}^r) - K_{2,r} \sum_{i=-1}^{k-1} (z_k - \delta z_k^m - z_f^m).$$

Les quantités initiales δu_{-1}^r et δx_{-1}^r étant nulles, ainsi que x_f^m et u_f^m , cette loi devient :

$$u_k = \delta u_k^m - K_{1,r} (x_k - \delta x_k^m) - K_{2,r} \sum_{i=-1}^{k-1} (z_k - \delta z_k^m). \quad (\text{II. 71})$$

La commande réelle u_k appliquée à l'avion pendant une période d'échantillonnage T_e (entre les instants k et $k+1$) est donc la somme de la commande δu_k^m élaborée par le premier niveau et d'un terme correctif. Celui-ci est proportionnel à l'écart entre l'état réel échantillonné x_k et l'état δx_k^m du modèle de référence, et « intégral » sur l'erreur entre l'objectif réel échantillonné z_k et l'objectif recopié par le premier niveau δz_k^m .

Une particularité des lois de commande (II. 69) et (II. 71) est de ne pas prendre explicitement en compte la dernière erreur entre objectifs ($\delta z_k^m - z_d$) et $(z_k - \delta z_k^m)$, à l'instant d'échantillonnage en cours. Cette spécificité contribue à l'originalité des lois de commande (II. 69) et (II. 71) et ne porte en aucun cas préjudice à la qualité de ces lois multivariables. En effet, il a été démontré en Sections II,1 et II,2 que ces lois assuraient une convergence asymptotique de l'erreur de poursuite en conférant au système contrôlé la propriété d'être robuste vis-à-vis de perturbations extérieures constantes.

A ce même instant d'échantillonnage k , sont évalués les seconds membres du modèle non linéaire de l'avion réel continu $\dot{x}_{int} = f(x_{int}, u_k)$ et de l'objectif z_k pour la commande u_k qui vient d'être calculée (cheminement $G-B$ sur la Planche 1).

Parallèlement (l'instant d'échantillonnage k étant écoulé), la détermination de l'évolution de l'avion réel entre deux instants d'échantillonnage k et $k+1$ est effectuée par intégration numérique. Le vecteur :

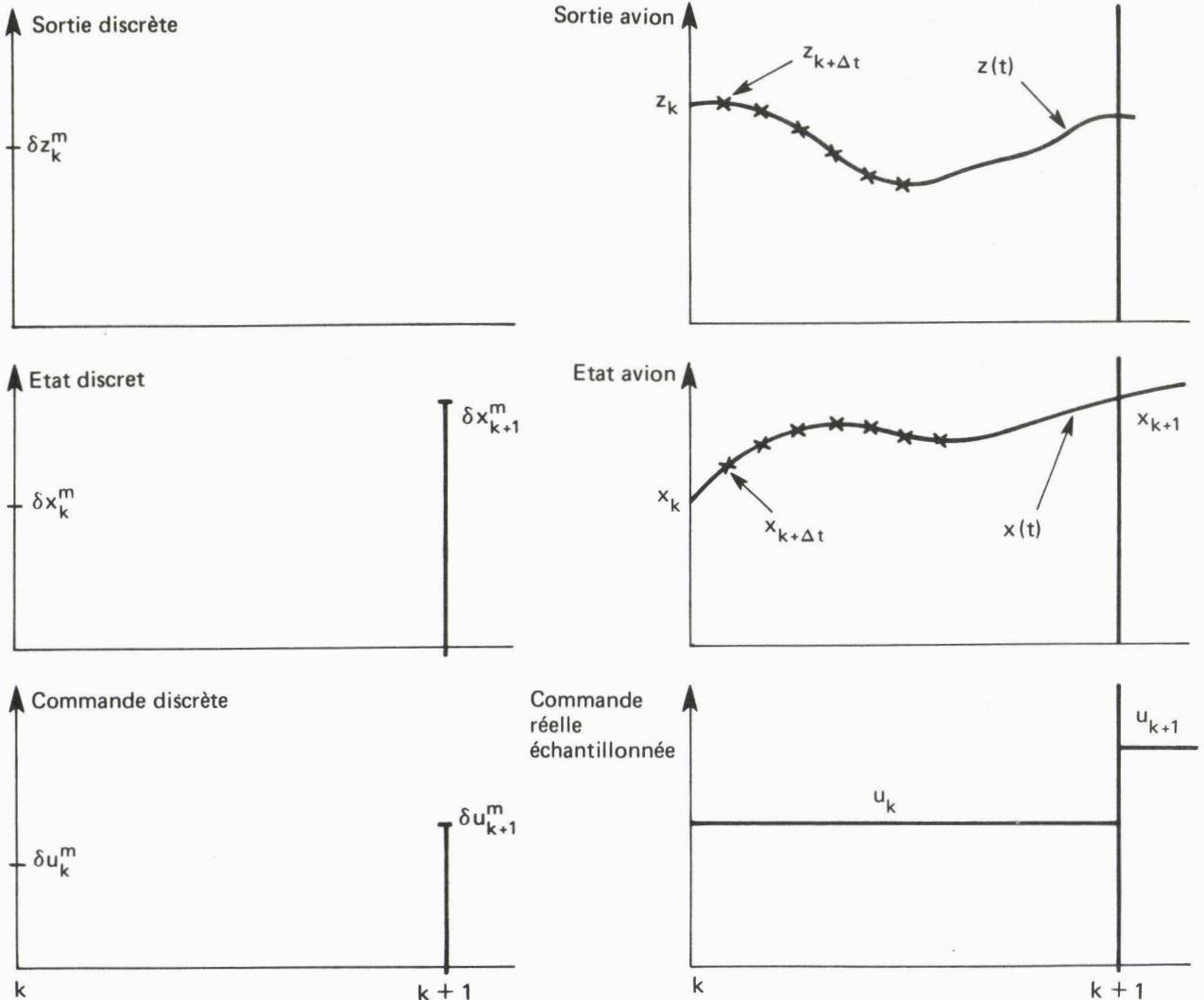
$$\dot{x}_{int} = \begin{bmatrix} \dot{v} & \dot{p} & \dot{n} & \dot{V}_x & \dot{\varphi} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \dot{x}^T & \dot{V}_x & \dot{\varphi} \end{bmatrix}^T$$

est intégré pour un pas d'intégration :

$$\Delta t = ((k+1) - k \stackrel{\Delta}{=} T_e) / n = 1/n E$$

donné, où n caractérise le nombre de pas d'intégration (pas constants) entre deux échantillonnages successifs. Cette phase d'intégration (cheminement C-D-E-F-G-H-C) se déroule jusqu'à la dernière intégration précédant l'instant d'échantillonnage $k+1$. Lors de cette dernière intégration, x_{k+1} est mémorisé ($x(t)$ est échantillonné) afin de calculer une nouvelle commande pour l'avion (u_{k+1}) (cheminement I-E-A).

Les diagrammes temporels suivants précisent les relations existant entre les différentes quantités entre deux instants d'échantillonnage k et $k+1$.



1er niveau : modèle linéaire discret de référence

2è niveau : comportement de l'avion réel.

$$u_{k+1} = c(x_{k+1}, \delta u_{k+1}^m, \delta x_{k+1}^m, z_k)$$

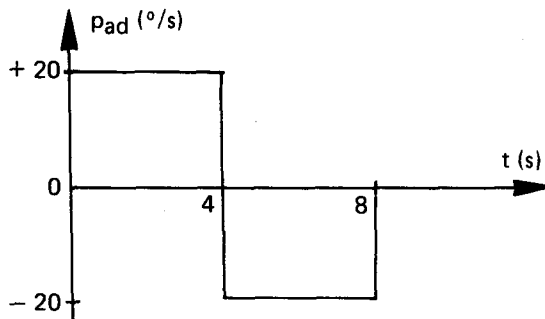
II,5.5.2. — Réglage des gains

Afin de réaliser correctement la poursuite de l'objectif désiré $z_d = [p_{ad} r_d]^T$, les dynamiques du premier et du second niveau sont réglées de manière distincte. Dans une application où les écarts δx_k^m corrigés par le premier niveau seraient plus importants que les écarts δx_k^r corrigés par le second, les pôles en boucle fermée du premier niveau pourraient être plus proches du cercle unité que ceux du second niveau (plus rapide). Dans les deux cas, le comportement dynamique doit être le moins oscillant possible.

Les configurations retenues pour les simulations figurent sur les Planches 2 et 3.

II,5.5.3. – Simulations

Les simulations effectuées à partir des gains de la Planche 2 figurent sur la Planche 4. Elles décrivent les variables du mouvement latéral de l'avion réel lorsque l'objectif commandé par le pilote est un double créneau de roulis d'amplitude $|p_{ad}| = 20^\circ/s$ (cf. Figure ci-dessous).



Sur les Planches 4, 5, 6 et 7 les différentes courbes en trait discontinu représentent l'évolution du modèle linéaire de référence (cf. Équations (II. 61) et (II. 70)). Les courbes en trait plein décrivent quant à elles la dynamique de l'avion réel modélisée par le système différentiel non linéaire (II. 54), restreint aux variables du mouvement latéral de l'avion.

La Planche 4 (tracé 2) montre clairement la convergence parfaite de la sortie $p_a^m(t)$ du modèle linéaire de référence vers l'objectif de pilotage $p_{ad}(t)$ décrit sur la Figure ci-dessus. La sortie $p_a(t)$ du modèle non linéaire de l'avion rallie également sans erreur (cf. aussi tracé 6) le modèle de référence $p_a^m(t)$ et *a fortiori* la valeur spécifiée pour l'objectif $p_{ad}(t)$. Il est important d'insister ici sur le fait que la convergence de $p_a(t)$ vers $p_a^m(t)$ s'effectue parfaitement alors que le second niveau du régulateur (différence entre l'avion non linéaire et le premier niveau) est entaché d'une erreur de modèle importante par rapport au premier niveau (modèle linéaire de référence). De plus, le modèle non linéaire de l'avion est fortement sollicité par le terme de pesanteur $g \sin(\varphi)$ ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$ et φ (angle de gîte) $\in [0^\circ, 80^\circ]$) qui a été négligé lors de la réduction du modèle (cf. II,5. 2) et qui a été relégué dans le terme perturbateur δ_1 (cf. Équation (II. 61)). Cette remarque importante renforce la propriété de robustesse de la loi de commande discrète « PI » proposée au II,1. 2 qui a été démontrée pour des perturbations additives constantes et inconnues. Les tracés 3 et 7 représentent l'évolution de la vitesse de lacet, r ($^\circ/s$), qui est également une composante du vecteur de sortie.

Les tracés 1 (v (m/s) vitesse de dérapage), 4 (δl ($^\circ/s$) gouverne de gauchissement) et 5 (δn ($^\circ/s$) gouverne de direction) mettent en évidence les écarts entre les variables non régulées des deux niveaux du régulateur. Ces écarts, qui traduisent la non-correspondance entre la dynamique réelle de l'avion et son modèle linéarisé, s'accroissent au fur et à mesure que l'avion s'éloigne de son point de fonctionnement moyen, à savoir le vol horizontal stabilisé.

Les évolutions de la vitesse longitudinale ($u = V_x$ (m/s)) et de l'angle de gîte (φ ($^\circ$)) sont données par les tracés 8 et 9.

La Planche 3 présente une autre configuration de gains plus rapides pour le second niveau que ceux de la Planche 2. La simulation correspondante figure sur la Planche 5. Celle-ci révèle une convergence plus rapide de $p_a - p_a^m$ et $r - r^m$, au prix d'évolutions plus importantes des gouvernes δl et δn .

Une simulation dans laquelle la vitesse de roulis commandée est $90^\circ/s$ avec le jeu de gains de la Planche 2, est présentée sur la Planche 6. Dans cette simulation l'angle de roulis atteint la valeur 341° , ce qui accroît la valeur de l'erreur de modèle lorsque $\varphi = 90$ ou 270° , cependant la régulation continue de s'effectuer avec une convergence correcte. Le non-maintien de $p_a = 90^\circ/s$ entre 3 et 4 secondes (cf. tracé 2) est dû à la saturation des deux gouvernes. Le dépassement transitoire de la consigne $p_{ad} = -90^\circ/s$ est enfin causé par le terme intégral; il serait supprimé par une remise à zéro de l'accumulateur $\Sigma(p_a - p_a^m)$ à l'occasion du changement de consigne.

La simulation correspondant au jeu de gains plus rapide de la Planche 3 se trouve sur la Planche 7. Le tracé 2 révèle la disparition du dépassement transitoire mentionné précédemment lors du changement de consigne à 4 s.

III. — ROBUSTESSE STRUCTURELLE GÉNÉRALISÉE DES RÉGULATEURS NON LINÉAIRES A TEMPS DISCRET

III.1. — DÉFINITIONS

La plupart des résultats concernant la robustesse des schémas de régulation multivariables à retour d'état ont été obtenus dans le domaine temporel continu (cf. [42-51]).

Lorsque des perturbations structurelles (erreurs de modèle ou de linéarisation) sont représentées par une quantité non linéaire, *additive* à la dynamique linéarisée du processus, des limites de variations tolérables maintenant la stabilité du système contrôlé, ont été quantifiées dans [42] et [43].

Dans le fonctionnement d'un schéma de régulation il est également nécessaire d'évaluer l'influence sur le comportement du système contrôlé d'éléments déstabilisateurs issus de la structure même du régulateur. Il a été mentionné plus haut (Section II,3.1) que ces éléments peuvent rendre compte de tous les types de perturbations, causées par des effets dynamiques non modélisés (capteurs, filtres, actionneurs, etc.), à action linéaire ou non linéaire, pouvant éventuellement être caractérisés par des hystérésis ou des retards. Ces éléments introduisent dans les chaînes de commande et de mesure des modifications de gain et des déphasages qui peuvent être nuisibles au bon fonctionnement de l'asservissement. Une revue bibliographique (cf. par exemple [44-47]) révèle que seules ont été considérées les perturbations agissant dans la chaîne de commande, ce qui restreint largement la classe des processus auxquels ces résultats s'appliquent.

De plus, les résultats de [42, 43, 44-47] reposent sur l'hypothèse restrictive d'une indépendance totale entre les actions néfastes des perturbations structurelles et celles affectant la chaîne de retour (commande et mesure).

Ces dernières lacunes ont été récemment comblées dans le cas continu par Bourlès et Mercier dans [8,49-51]; le problème de robustesse y a été abordé globalement en considérant l'effet conjoint de perturbations additives non linéaires (structurelles) et de perturbations multiplicatives non dynamiques, ces dernières agissant dans les chaînes de mesure et de commande. Une extension au cas où les perturbations multiplicatives sont dynamiques a été présentée dans [8,51]. C'est l'étude *conjointe* de ces deux types de perturbations, provenant toutes deux de la structure même du schéma de régulation, qui a justifié l'appellation de *robustesse structurelle généralisée*.

Si Bourlès et Mercier ont obtenu dans [8,50] des résultats beaucoup plus généraux que ceux de [42-47] en définissant la notion de marge de gain et de marge de phase multivariables pour une classe de systèmes beaucoup plus vaste, il convient cependant de mentionner le travail précurseur de Safonov et Athans [46], où il a été démontré pour la première fois qu'un régulateur linéaire quadratique *multivariable* admettait une marge de phase d'au moins 60°. En outre, il a été montré dans [44,45] que ces mêmes régulateurs présentaient une tolérance de réduction de gain d'au moins 50% ainsi qu'une marge de gain infinie. Ces résultats antérieurs sont résumés de manière plus complète dans la Section III,2.

Une nouvelle approche de la stabilité (cf. [52]), fondée sur les notions de secteurs coniques et d'algèbre des opérateurs, introduites pour la première fois par Zames [53,54] et développées principalement par Willems [55] et Desoer-Vidyasagar [56] a permis également à Safonov [48] d'établir, pour des processus à dynamique non linéaire et à retour d'état non linéaire non dynamique, des lemmes généraux de marge de stabilité dans les cas continu et discret.

Dans [48], la notion de marge de stabilité multivariable est définie en termes d'écart entre le système non linéaire et le système linéaire qui lui est associé. Ce sont là les seuls résultats de robustesse connus lorsque le processus est discret et à retour multivariable. Une description approfondie de la stabilité entrée-sortie et des nouveaux concepts de Safonov [48] et [52] est donnée dans la Section III,3.

Ceux-ci sont cependant relativement difficiles à interpréter lorsqu'il s'agit de dissocier les résultats de robustesse structurelle et ceux se rapportant à des perturbations dynamiques affectant la chaîne de retour. Pour obtenir une solution plus simple, permettant de qualifier par des expressions numériquement vérifiables les limites admissibles des perturbations dynamiques, additives ou multiplicatives, agissant sur le système, une formulation

particulière de la dynamique du système, mathématiquement équivalente à celle de Safonov sera donc proposée dans la Section III,4.

Ce formalisme conduit à une mesure de la robustesse vis-à-vis de perturbations quelconques affectant la chaîne de retour (commande et mesure), et non pas nécessairement découplées (diagonales) comme Safonov le suppose dans [48] (Chapitre 4).

Dans une première étape, une généralisation au temps discret du Critère de Lyapounov (cf. Section III,4.1), initialement énoncé par Wonham [20] (p. 282), est démontrée. Il en résulte un théorème général de stabilité (cf. Section III,4.2), qui généralise un lemme de Safonov. Des théorèmes de robustesse structurelle, permettant de quantifier des marges de stabilité, sont alors établis (Section III,4.3). Les sections suivantes se rapportent au cas particulier des régulateurs linéaires quadratiques. Spécifiquement, une formulation originale des perturbations de la chaîne de commande, inspirée de [8,49-57], conduit à la définition et à une quantification explicite des marges de gain et de phase multivariées dans le domaine fréquentiel « discret ».

III.2. – RÉSULTATS CONNUS CONCERNANT LA ROBUSTESSE STRUCTURELLE

Ne sont rappelés ici que des résultats concernant les processus modélisés par un système différentiel continu puisque la littérature concernant la robustesse des systèmes multivariés discrets est pratiquement inexistante ⁽¹⁾. L'exposé de Bourlès [8] et Mercier [57] sera donc suivi. Soit le processus linéaire stationnaire :

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) + f(x(t), t) + \delta, \quad \forall t \in [0, +\infty[\quad (\text{III.1})$$

x_p donné,

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur état du système, $u(t)$ le vecteur commande, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. La quantité δ rend compte de tous les termes constants, issus de la linéarisation d'un système non linéaire différentiel plus général que (III.1), et en particulier des perturbations extérieures constantes, connues ou inconnues. La fonction non linéaire $f(\cdot, t)$ rassemble tous les résidus de linéarisation, les perturbations extérieures non constantes ($f(0, t) = 0$ pour $\delta = 0$) ainsi que les erreurs ou variations de modèle. Conformément au vocabulaire défini en III,1, $f(\cdot, t)$ est une perturbation structurelle.

La commande appliquée au système nominal (III.1) est de la forme : $u(t) = K x(t)$, $\forall t \in [0, +\infty[$ où K est une matrice de gain, pouvant éventuellement faire l'objet d'une optimisation quadratique. Le système (III.1) est également supposé perturbé (en plus de $f(\cdot, t)$) d'une part par une quantité $\mathcal{N}_M(x)$ (atténuation ou déphasages constants) affectant la chaîne de mesure du retour d'état et d'autre part par une perturbation $\mathcal{N}_C(u)$ affectant la chaîne d'action. $\mathcal{N}_M(\cdot)$ et $\mathcal{N}_C(\cdot)$ sont des fonctions définies sur des ensembles de dimensions appropriées. Le schéma de la régulation perturbée est représenté sur la Figure 5.

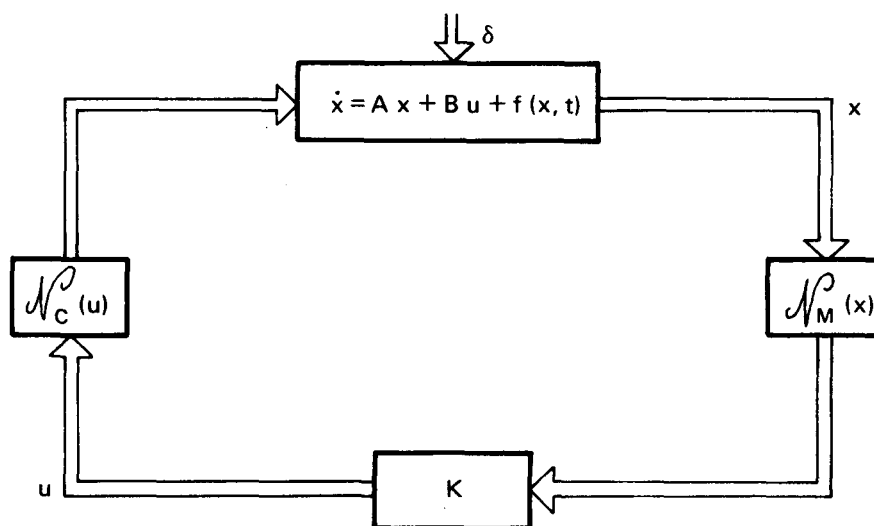


Fig. 5 – Schéma perturbé du régulateur continu.

⁽¹⁾ Un théorème abstrait de robustesse, dû à Safonov [48] et concernant les systèmes multivariés discrets, sera donné en Section III,3.3.

III.2.1. — Perturbations multiplicatives affectant la chaîne de retour.

Pour une raison de commodité, l'hypothèse $\delta=0$ est désormais retenue. Cette hypothèse n'est pas restrictive car δ peut être « rejetée » par application d'une loi de commande de type proportionnelle et intégrale (cf. [5-9]).

Deux autres hypothèses sont temporairement introduites, à savoir :

$f(\cdot, t)=0$ (aucune perturbation structurelle n'agit sur (III.1)),

et $\mathcal{N}_M(x)=x$ (la chaîne de mesure n'est pas perturbée).

Par conséquent, seule la chaîne de commande est perturbée, et $u=\mathcal{N}_C(Kx)$.

La matrice $A+BK$ est enfin supposée stable (valeurs propres à parties réelles strictement négatives). D'après Molander-Willems [47], le système nominal :

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad \forall t \in [0, +\infty[\quad (\text{III.2})$$

possède alors :

— une marge de gain, $g \geq 1$, s'il est stable pour toute matrice réelle symétrique Λ_C , ayant des valeurs propres réelles λ_i telles que :

$$1 \leq \lambda_i \leq g$$

et telle que $u \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{N}_C(Kx) = \Lambda_C Kx$,

— une tolérance de réduction de gain ρ (en %) si la matrice Λ_C est telle que : $1 - \rho/100 \leq \lambda_i \leq 1$,

— une marge de phase φ , $0 \leq \varphi \leq \pi$, s'il reste stable pour toute matrice Λ_C unitaire ($\Lambda_C \Lambda_C^* = \Lambda_C^* \Lambda_C = I_m$) dont les valeurs propres $\lambda_i = \exp j\varphi_i$ sont telles que :

$$|\varphi_i| \leq \varphi,$$

et :

— un secteur de robustesse (k_1, k_2) , $-\infty \leq k_1 \leq 1 \leq k_2 \leq \infty$, s'il reste stable pour toute fonction *non linéaire* :

telle que :

$$u(t) \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{N}_C(Kx)(t) = k(Kx(t), t)$$

avec $\sigma = Kx$.

$$\sup_{\sigma, t} [k(\sigma, t) - k_1 \sigma]^T [k(\sigma, t) - k_2 \sigma] < 0,$$

Les résultats suivants découlent alors de la vérification de cette dernière propriété :

$$\begin{aligned} \text{- marge de gain} & \quad g = k_2 \\ \text{- marge de phase} & \quad \varphi = \arccos \frac{k_1 k_2 + 1}{k_1 + k_2} \end{aligned}$$

et tolérance de réduction de gain $\rho = (1 - k_1) 100$.

Une illustration du secteur de robustesse dans le cas monovarié est donnée par la Figure 6 :

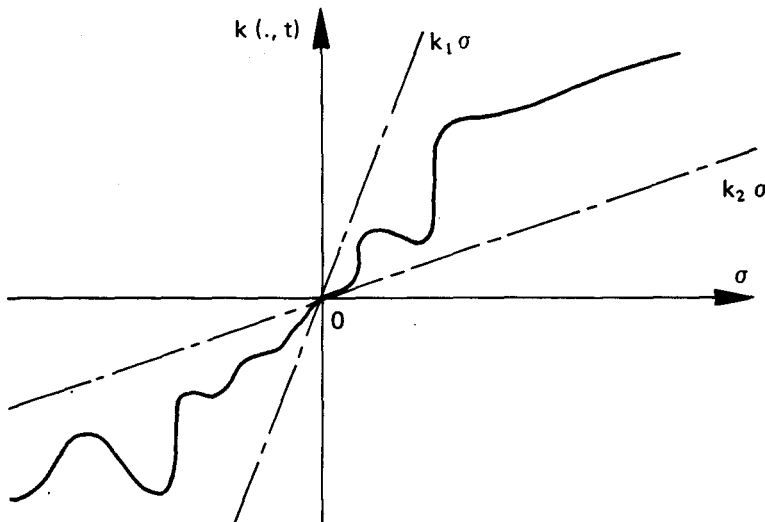


Fig. 6 — Secteur de robustesse.

Lorsqu'une perturbation affecte conjointement la chaîne d'action (\mathcal{N}_C) et la chaîne de mesure (\mathcal{N}_M), la loi de commande appliquée au processus (III.2) est donnée par l'expression :

$$u \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{N}_C(K \mathcal{N}_M(x)) = \Lambda_C K \Lambda_M x, \quad (\text{III.3})$$

où K est une matrice de gain telle que la matrice $A+BK$ est stable. Le système nominal est donc asymptotiquement stable. Les matrices $\Lambda_C \in \mathbb{C}^{m \times m}$ et $\Lambda_M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sont les perturbations multiplicatives de la chaîne de retour.

Sous ces hypothèses, le critère suivant dû à Bourlès et Mercier [8, 50], s'applique :

Soit $V(x) = x^T P x$ une fonction de Lyapounov telle que $P = P^T > 0$, le système (III.2) muni du retour (III.3) admet une marge de stabilité garantie vis-à-vis de $\Lambda_C \in \mathbb{C}^{m \times m}$ et $\Lambda_M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si :

$$D \stackrel{\Delta}{=} -PA - A^T P - PB \Lambda_C K \Lambda_M - \Lambda_M^* K^T \Lambda_C^* B^T P > 0. \quad (\text{III.4})$$

Le cas où les perturbations multiplicatives sont des éléments dynamiques, définis par leur transformée de Laplace par exemple, a été également examiné par les mêmes auteurs dans [8, 51]. Les perturbations dynamiques résultent alors des fonctions de transfert non modélisées des actionneurs et des capteurs et la dynamique du retour sera donc décrite par la matrice :

$$\Lambda_C(s) K \Lambda_M(s). \quad (\text{III.5})$$

Le résultat suivant généralise la condition précédente aux cas où Λ_C et Λ_M dépendent de la fréquence ω (suivant $s = \alpha + j\omega$, $\alpha \geq 0$).

Marge de stabilité garantie : Une marge de stabilité du système (III.2) muni du retour dynamique (III.5) est l'ensemble des couples de matrices de transfert $\Lambda_C(s)$ et $\Lambda_M(s)$ tels que :

$$-P(A + B \Lambda_C(s) K \Lambda_M(s)) - (A^T + \Lambda_M^*(s) K^T \Lambda_C^*(s) B^T) P - D_0 \geq 0, \quad (\text{III.6})$$

$\forall s \in \mathbb{C}_+$ tel que $\text{Re}(s) > 0$, où P et D_0 sont des matrices symétriques définies-positives arbitrairement choisies.

Cas des régulateurs linéaires quadratiques

Lorsque la matrice K du retour d'état résulte de la minimisation d'une fonction de coût quadratique de la forme :

$$J = \int_0^\infty (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)) dt, \quad Q \geq 0, R > 0,$$

la loi de commande appliquée à (III.2) devient :

$$u = -R^{-1} B^T P x = K x, \quad (\text{III.7})$$

où P est solution de :

$$PA + A^T P - PB R^{-1} B^T P + Q = 0.$$

Les conditions assurant la stabilisation du système (III.2) au moyen de la loi de commande (III.7) sont supposées vérifiées (cf. [10-12, 25] pour détails).

Les résultats suivants dûs à Safonov et Athans [46], s'appliquent alors :

(a) Le système (III.2) muni de la commande $u(t) \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{N}_C(Kx)(t) = k(Kx(t), t)$, où K est défini par (III.7) et où $k(\cdot, t)$ est une fonction non linéaire sans mémoire, est asymptotiquement stable s'il existe deux constantes $\beta \geq 0$ et $\alpha < \infty$ telles que :

$$\forall u(t) \in \mathbb{R}^m \text{ et } \forall t \in [0, \infty[, \alpha u^T u \geq u^T k(R^{-1}u, t) \geq ((1+\beta)/2) u^T R^{-1}u$$

et si le système perturbé est détectable ⁽¹⁾ par $Q^{1/2}$.

(b) Cas particulier. Soit $Q > 0$, R diagonale et $u_i(t) = k_i(Kx_i(t), t)$ ce qui signifie que la perturbation est totalement découplée, chaque canal (composante) de la commande étant perturbé indépendamment des autres, il découle alors de l'énoncé précédent que :

le système (III.2) perturbé par les éléments $k_i(\cdot, t)$ dans sa chaîne de retour est asymptotiquement stable s'il existe $\beta \geq 0$ et $\alpha < \infty$ tels que $\forall u(t) \in \mathbb{R}^m - \{0_{\mathbb{R}^m}\}, \forall t \in [0 + \infty[: k_i(0, t) = 0$

$$\text{et : } \alpha \geq (1/\alpha) k_i(u, t) \geq (\beta + 1)/2.$$

⁽¹⁾ La notion de détectabilité (entrée-sortie) employée ici est rappelée à la Section III.3.1 pour les systèmes discrets. Pour les systèmes à temps continu le concept est identique; une définition en est donnée dans [46].

Un secteur de robustesse peut ainsi être défini pour chaque canal de commande.

(c) Lorsque la perturbation affectant la chaîne de commande est représentée par une matrice de transfert $L(s) \in \mathbb{C}^{m \times m}$, où s est l'opérateur de Laplace, le système (III.2) muni du retour perturbé $L(s)K$, où K est le gain optimal donné par (III.7), est asymptotiquement stable si : $\forall \omega \in [0, +\infty[$,

$$L(j\omega) R^{-1} + R^{-1} L^*(j\omega) - R^{-1} > 0$$

et si le système (III.2) à retour d'état perturbé dynamiquement est détectable ⁽¹⁾ par $Q^{1/2}$.

(d) Lorsque $Q > 0$, R diagonale et $L(s) = \text{diag}(P_i(s))$, où les $P_i(s)$ sont des fonctions de transferts rationnelles, le système (III.2) muni du retour $\text{diag}(P_i(s)K)$ est asymptotiquement stable si :

1. tout pôle s_i de $P_i(s)$ vérifie $\text{Re}(s_i) < 0$ et si :
2. $\forall \omega \in [0, +\infty[$, $P_i(j\omega) \geq 1/2$.

Ce dernier résultat a deux conséquences :

1. $P_i(j\omega) = \exp(j\varphi_i(\omega))$ entraîne $|\varphi_i(\omega)| \leq 60^\circ$,
2. $P_i(j\omega) = a_i$ entraîne $a_i \geq 1/2$.

On démontre ainsi qu'un régulateur linéaire quadratique multivariable a :

une marge de phase $\varphi = 60^\circ$,
 une marge de gain $g = \infty$
 et une tolérance de réduction de gain $\rho = 50\%$.

Ces résultats sont complétés par celui de Wong *et al.* [45], faisant suite à une étude plus théorique de Wong et Athans [44] :

Le système contrôlé (III.2) est asymptotiquement stable pour toute perturbation multiplicative \mathcal{N}_c telle que :

$$u = \mathcal{N}_c^o(Kx) = \Lambda_c Kx,$$

où Λ_c est une matrice diagonale réelle telle que :

$$\Lambda_c > (1/2) (I_m - (R^{1/2} K Q^{-1} K^T R^{1/2})^{-1});$$

en outre :

$$\begin{aligned} g &= \infty \\ \varphi &= 60^\circ \\ \rho &> 50(1 + \sigma^{-1}) \end{aligned}$$

où : $\sigma \triangleq \lambda_{\max}(R^{1/2} K Q^{-1} K^T R^{1/2})$.

Des résultats plus généraux (cf. [8, 50]), correspondants au cas où la commande est perturbée conformément à l'Équation (III.3) et où K est donné par l'Équation (III.7), sont maintenant énoncés :

(a) Le système contrôlé (III.2, III.7) possède une marge de stabilité garantie vis-à-vis de $\Lambda_c \in \mathbb{C}^{m \times m}$ et $\Lambda_M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si :

$$\text{Ker}(K) \subset \text{Ker}(K \Lambda_M)$$

et :

$$H \triangleq \Lambda + \Lambda^* - I_m + L > 0,$$

où : $\Lambda = R^{1/2} \Lambda_c R^{-1/2} S \Lambda_M S^* = \text{perturbation réduite}$, (III.8)

et où L est une matrice hermitienne telle que $Q - S^T L S \geq 0$.

(b) Quand seule la chaîne de commande est perturbée, une marge de stabilité explicite est fournie par le résultat suivant :

Si $\Lambda_c = G \exp(j\Phi)$ est normale et diagonalise dans la même base que R et si $Q > 0$, une marge de stabilité du système (III.2), contrôlé optimalement par (III.7) et tel que $\Lambda_M = I_m$, est donnée par l'ensemble des couples $(G, \Phi) \in \mathbb{C}^{m \times m} \times \mathbb{C}^{m \times m}$ tels que : $G \cos \Phi > (1/2) (I_m - (R^{-1/2} B^T P Q^{-1} P B R^{-1/2})^{-1})$

⁽¹⁾ Voir note de bas de page précédente.

Ce dernier résultat montre la corrélation existant entre le choix des matrices de pondération d'une fonction de coût lors de la mise au point des régulateurs linéaires quadratiques et l'accroissement des marges de gain et de phase multivariables.

III,2.2. — Perturbations structurelles

Soit le système (III.1), avec $\delta=0$ et où la chaîne de retour est parfaite ($\mathcal{N}_C(u)=u$, $\mathcal{N}_M(x)=x$). Le processus s'exprimera donc par :

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) + f(x(t), t), \quad \forall t \in [0, \infty[\quad (\text{III.9})$$

Une loi de contrôle de la forme $u=Kx$, avec $A+BK$ stable, est à nouveau considérée.

La tolérance de la stabilité du système perturbé (III.9) vis-à-vis de $f(\cdot, t)$, est mesurée par le résultat suivant, dû à Patel et Toda [43] et à Mercier et Bourlès [7] :

Soit la fonction de Lyapounov $V(x)=x^T P x$, où $P=P^T > 0$, la perturbation $f(\cdot, t)$ est admissible pour (III.9) si les deux conditions suivantes sont vérifiées conjointement :

$$\begin{aligned} 1. \quad D &\triangleq -P(A+BK) - (A+BK)^T P > 0, \text{ et} \\ 2. \quad \forall x \neq 0, \quad \frac{\|f(x,t)\|_E}{\|x\|_E} &< \frac{1}{2 \|P\|_s \|D^{-1}\|_s} \end{aligned}$$

où $\|M\|_s$ dénote la norme spectrale de la matrice M et $\|x\|_E$ la norme euclidienne de x .

Cas des régulateurs linéaires quadratiques (cf. Patel et al. [42])

Si le gain K résulte de la minimisation de la fonction de coût quadratique :

$$J = \int_0^\infty e^{2\alpha t} (x^T Q x + u^T R u) dt,$$

où $\alpha \geq 0$, $Q > 0$ et $R > 0$,

alors $K = -R^{-1} B^T P$,

(III.10)

où P est solution de l'équation (les conditions classiques portant sur l'existence et l'unicité de P sont supposées vérifiées) :

$$P [A + \alpha I] + [A + \alpha I]^T P - P B R^{-1} B^T P + Q = 0,$$

la condition de robustesse vis-à-vis de $f(\cdot, t)$ devient :

Soit $D_\alpha \triangleq 2Q + P(A + \alpha I) + (A + \alpha I)^T P$, la perturbation $f(x, t)$ est admissible pour (III.9) contrôlé par la loi de commande optimale (III.10) si :

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{\|f(x,t)\|_E}{\|x\|_E} < \mu \triangleq \frac{1}{2 \|P\|_s \|D_\alpha^{-1}\|_s} + \frac{\alpha}{\|P\|_s \|P^{-1}\|_s}.$$

En particulier, si $f(x, t) = (\Delta A + \Delta B K)x(t)$ (erreur de modèle), une condition suffisante est alors :

$$\|\Delta A\|_s + \|\Delta B\|_s \|K\|_s < \mu.$$

III,2.3. — Robustesse structurelle généralisée

Les résultats bibliographiques mentionnés plus haut n'établissent aucun lien entre la robustesse structurelle (Section III,2.2) et la tolérance vis-à-vis d'éléments $\mathcal{N}_C(u)$ et $\mathcal{N}_M(x)$ affectant la chaîne de retour. Enfin, un inconvénient des différentes conditions de robustesse structurelle données plus haut est l'absence de choix dans la métrique utilisée, pouvant conduire à une estimation exagérément pessimiste de la robustesse structurelle.

Des résultats de robustesse structurelle généralisée, dus à Bourlès et Mercier [8,49-50], et présentés maintenant, répondent à ce problème.

Le système considéré est le processus (III. 1), avec $\delta=0$ mais sans la moindre hypothèse restrictive concernant $f(\cdot, t)$, $\Lambda_C(u)$ et $\Lambda_C(x)$.

$$\text{La loi de commande considérée est : } u = \Lambda_C K \Lambda_M x$$

où K est une matrice de gain telle que la matrice $A+BK$ est stable. Le système nominal est donc asymptotiquement stable. Les matrices $\Lambda_C \in \mathbb{C}^{m \times m}$ et $\Lambda_M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sont les perturbations multiplicatives de la chaîne de retour.

Le processus perturbé est gouverné par l'équation :

$$\dot{x} = (A + B \Lambda_C K \Lambda_M) x + f(x, t). \quad (\text{III. 11})$$

Lorsque le système contrôlé (III. 11) vérifie (III. 4), celui-ci tolère une perturbation structurelle $f(x, t)$ si :

$$\forall x \neq 0, \frac{\|T^{-1} f(x, t)\|_E}{\|T^{-1} x\|_E} < \mu \triangleq \frac{1}{2 \|T^* P T\|_S \|(T^* D T)^{-1}\|_S},$$

où T est une matrice carrée non singulière, pouvant faire l'objet d'une optimisation. Cette matrice T pallie au défaut de choix de la métrique, assurant une transformation de l'espace d'état (rotation + facteur d'échelle par exemple).

Il est important de remarquer que, conformément aux développements bibliographiques revus dans la Section III.2.1 ($D>0$ et $H>0$), aucune hypothèse restrictive ne porte sur Λ_C et Λ_M qui sont des matrices *non diagonales* quelconques.

Cas des régulateurs linéaires quadratiques

Lorsque le gain K est optimal ⁽¹⁾ ($K = -R^{-1} B^T P$), le système contrôlé (III. 11) possède une marge de stabilité garantie vis-à-vis de Λ_C et Λ_M si les conditions (III. 8) sont vérifiées. Il tolère en outre la perturbation additive $f(x, t)$ si :

$$\forall x \neq 0, \frac{\|T^{-1} f(x, t)\|_E}{\|T^{-1} x\|_E} < \mu \triangleq \frac{1}{2 \|T^* P T\|_S \|(T^* D_m T)^{-1}\|_S},$$

où T est une matrice inversible arbitraire et où $D_m \triangleq Q + S^T (\alpha^{-1} \Lambda_\alpha) S$, α et Λ_α vérifiant $H - \alpha L \triangleq \Lambda_\alpha$ (cf. (III. 8)).

Si les perturbations de la chaîne de retour sont dynamiques le retour d'état est défini par (III. 5). Dans ces conditions, il vient le résultat suivant, dû à Bourlès et Mercier [8, 51] :

Si $\Lambda_C(s)$ et $\Lambda_M(s)$ vérifient (III. 6), la perturbation $f(x, t)$ ne déstabilise pas (III. 11) s'il existe deux réels $\varepsilon > 0$ et $\tau \geq 0$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}_+, t \geq \tau$ et $\forall x(t) \neq 0$:

$$\frac{\|T^{-1} f(x(t), t)\|_E}{\|T^{-1} x(t)\|_E} \leq \mu \triangleq \frac{1}{2 \|T^* P T\|_S \|(T^* D_0 T)^{-1}\|_S} - \varepsilon$$

où T est une matrice inversible arbitrairement choisie et où P et D_0 sont définies par (III. 6).

III.3. — NOTIONS FONDAMENTALES SUR LA STABILITÉ EXTERNE (ENTRÉE-SORTIE)

Il existe deux manières, apparemment totalement distinctes, de modéliser mathématiquement le comportement d'un processus physique.

La première est la *description interne*, où les équations régissant la dynamique du système physique sont requises. Cette description prend généralement la forme d'un système différentiel ou récurrent comportant deux équations. L'une exprime les relations ou les échanges internes d'énergie entre un nombre minimal de variables physiques ou de « coordonnées généralisées » du système (« vecteur état » introduit par Kalman [19]), excitées de façon indépendantes par un vecteur de « commande ». L'autre met en correspondance le vecteur état et les sorties utiles ou mesurées du processus.

La seconde approche, appelée *description externe*, ignore les lois physiques gouvernant le processus étudié, ne prenant en considération que les variables externes. On ne relie en effet que les entrées aux sorties en ne jugeant

⁽¹⁾ Au sens défini plus haut.

le comportement que sur la qualité des sorties, réponses à des entrées qui excitent une « boîte noire » dont le détail interne est ignoré. Cette méthode, plutôt que d'obéir à une formulation mathématique précise de lois physiques, se rattache par son concept au domaine de la physique expérimentale.

L'étude de la stabilité d'un système modélisé par une description interne est maintenant bien connue. L'outil le plus utilisé est la méthode directe de Lyapounov (cf. Kalman et Bertram [57, 58]) qui a donné suite à de nombreux travaux sur les systèmes continus et discrets (cf. [59, 60, 61, 62]).

Les conditions de *stabilité interne* ainsi obtenues résultent de propriétés spécifiques portant sur l'état du système. Excité par un état initial considéré comme une perturbation, l'état doit demeurer borné et doit converger vers le point d'équilibre du système.

Par contre, en ce qui concerne les processus décrits de façon externe, les premiers fondements n'ont été établis que depuis 1964 par Sandberg [63-66] et Zames [53, 54, 67, 68, 70]. Plus récemment cette approche a été développée par J. C. Willems [55, 69], Desoer et Vidyasagar [56] et — d'une manière relativement originale — par Safonov [48, 52]. Le système est vu comme une fonction reliant un espace de signaux d'entrée à un espace de sorties; le fait que cette fonction soit bornée conduit à la *stabilité entrée-sortie*. Les entrées peuvent être des perturbations additives, distinctes des conditions initiales.

Les deux concepts de stabilité sont en compétition mais le choix de l'un ou l'autre dépend exclusivement de la nature du problème posé. Il faut cependant remarquer que la stabilité entrée-sortie est plus apte à traiter les cas où le système est à la fois excité par une condition initiale et une perturbation additive quelconque et où des éléments de type hystérésis ou retard interviennent dans la régulation.

Parce que moins connue et plus technique, cette dernière forme de stabilité est maintenant présentée.

III,3.1. — Préliminaires mathématiques

Dans le but de limiter l'exposé, cette revue de définitions et de résultats est délibérément orientée en vue de l'étude des systèmes discrets dans le domaine opérationnel.

Considérons le processus discret représenté sur la Figure 7 :

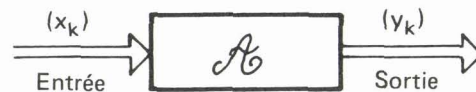


Fig. 7 — Schéma opérationnel d'un processus.

où le couple de suites $((x_k), (y_k)) \in d^2$ avec $d = \{x: \mathbf{Z}_+ \rightarrow \mathbf{R}^n\}$.

d , espace vectoriel des suites à valeur dans \mathbf{R}^n , est un ensemble de fonctions entrées-sorties pour le processus.

Le sous espace vectoriel de d formé des signaux entrées-sorties discrets x de carré sommable (série $\sum x_i^T x_i$ convergente) et noté $l_2^n(\mathbf{R})$, peut être muni d'une norme définie par, $\forall x \in l_2^n(\mathbf{R})$,

$$\|x\| = \left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i^T x_i \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \|x_i\|_{\mathbf{E}}^2 \right)^{1/2},$$

où $\|x_i\|_{\mathbf{E}} = (x_i^T x_i)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^n (x_i^j)^2 \right)^{1/2}$ est la norme euclidienne définie sur \mathbf{R}^n ⁽¹⁾. $l_2^n(\mathbf{R})$ est alors un sous espace vectoriel *normé* de d défini par :

$$\begin{aligned} l_2^n(\mathbf{R}) &= l_2(\mathbf{Z}_+, \mathbf{R}^n) = \{ x \in d \mid \|x\|^2 < \infty \} \\ &= \{ x: \mathbf{Z}_+ \rightarrow \mathbf{R}^n \mid \sum_{i=0}^{\infty} x_i^T x_i < \infty \}. \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, la notation $\|\cdot\|$ sera réservée à la norme- l_2 et $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}$ à la norme euclidienne.

Définition préliminaire : Le système représenté sur la Figure 7 est stable du point de vue entrée-sortie si une entrée (x_k) de « norme finie » engendre une sortie (y_k) également de « norme finie » (au sens de la norme définie sur $l_2^n(\mathbf{R})$).

(1) \mathbf{R}^n (ou \mathbf{C}^n) sont des espaces de Banach (espaces vectoriels normés complets).

La théorie de la stabilité externe englobe l'étude de tous les systèmes, stables ou instables : elle doit donc permettre l'étude d'un ensemble d de fonctions, entrées ou sorties, susceptibles de posséder une norme, finie ou infinie (cas des systèmes divergents). Or l'espace classique de l'analyse, adapté à l'étude du cas discret, $l_2^n(\mathbf{R})$, exclut par définition toute fonction divergente. Il est donc nécessaire de construire un espace plus vaste, noté l_{2e} contenant à la fois des fonctions à « bon » comportement (bornées, convergentes) et des fonctions divergentes. Cet espace de signaux, appelé espace étendu (indice e) a été largement utilisé de façon implicite par Sandberg dans [64, 65, 66], Zames dans [67, 68] et défini de manière explicite par Zames dans [53].

Définition : Soit \mathcal{P}_τ l'opérateur de troncature linéaire défini par :

$$\forall k \in \mathbf{Z}_+, \forall x \in d, (\mathcal{P}_\tau x)_k \triangleq x_{\tau k} = x_k \quad \text{si } k \in [0, \tau] \cap \mathbf{Z}_+ \\ = 0 \quad \text{si } k \notin [0, \tau] \cap \mathbf{Z}_+$$

On note $\forall x \in d, (\mathcal{P}_\tau x) = x_\tau$ (fonction tronquée). Cet opérateur est une projection et vérifie $\mathcal{P}_\tau \circ \mathcal{P}_\tau = \mathcal{P}_\tau$ ⁽¹⁾.

L'espace étendu $l_{2e}^n(\mathbf{R})$ associé à $l_2^n(\mathbf{R})$ est alors défini par :

$$l_{2e}^n(\mathbf{R}) = l_{2e}(\mathbf{Z}_+, \mathbf{R}^n) \triangleq \{ x \in d \mid \forall \tau \in \mathbf{Z}_+, \mathcal{P}_\tau x = x_\tau \in l_2^n(\mathbf{R}) \} \\ \triangleq \{ x \in d \mid \forall \tau \in \mathbf{Z}_+, \sum_{i=0}^{\tau} x_{\tau i}^T x_{\tau i} < \infty \},$$

qui est l'ensemble des fonctions entrée-sortie convergentes ou divergentes, dont la troncature x_τ est de carré sommable.

La norme définie sur $l_{2e}^n(\mathbf{R})$ possède les propriétés suivantes :

(i) $\forall x \in l_{2e}^n(\mathbf{R})$, soit $h: \mathbf{Z}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$

$$\tau \mapsto \|x_\tau\| = \|\mathcal{P}_\tau x\|$$

h est une fonction monotone croissante.

(ii) Elle satisfait en outre : $\forall x \in l_{2e}^n(\mathbf{R})$,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\mathcal{P}_\tau x\| = \|x\|.$$

Une visualisation synthétique d'une fonction tronquée et des différents espaces l_2 , l_{2e} est donnée, dans le cas monovarié, sur la Figure 8.

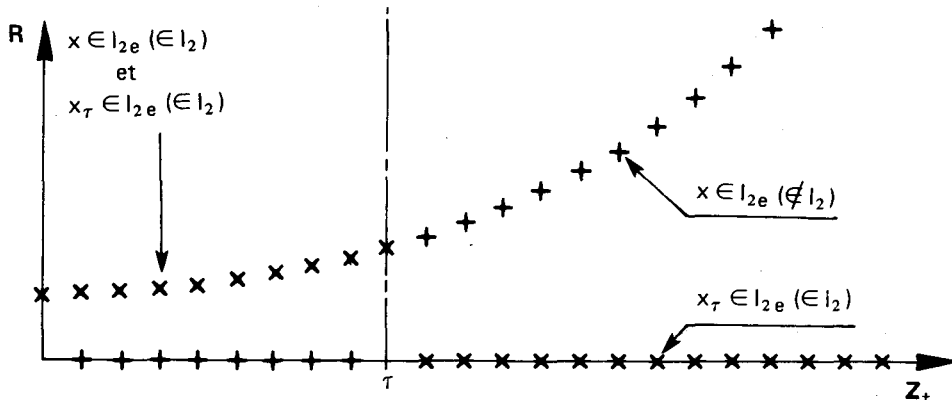


Fig. 8 - Illustration des espaces l_2 et l_{2e} .

L'espace de référence dans lequel les calculs seront effectués est l'espace vectoriel étendu :

$$l_{2e}^n(\mathbf{C}) \triangleq l_{2e}(\mathbf{Z}_+, \mathbf{C}^n) \triangleq \{ x: \mathbf{Z}_+ \rightarrow \mathbf{C}^n \mid \forall \tau \in \mathbf{Z}_+, \sum_{i=0}^{\tau} x_{\tau i}^* x_{\tau i} < \infty \},$$

construit de la même façon que $l_{2e}^n(\mathbf{R})$, à partir de $l_2^n(\mathbf{C})$, espace vectoriel muni de la norme :

$$\|x\| = \left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i^* x_i \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \|x_i\|_2^2 \right)^{1/2},$$

⁽¹⁾ Le symbole \circ dénote ici la composée de deux opérateurs.

$$\text{avec } \|x_i\|_E = \left(\sum_{j=1}^n x_i^j \bar{x}_i^j \right)^{1/2}.$$

L'espace des signaux entrée-sortie est :

$$l_{2e}^n(\mathbf{R}) \triangleq l_{2e}(\mathbf{Z}_+, \mathbf{R}^n) \triangleq \left\{ x : \mathbf{Z}_+ \longrightarrow \mathbf{R}^n \mid \forall \tau \in \mathbf{Z}_+, \sum_{i=0}^{\infty} x_{\tau i}^T x_{\tau i} < \infty \right\}$$

qui sera désormais noté $l_{2e}^n(\mathbf{R}) \triangleq l_{2e}^n$.

Remarque 1 : $l_{2e}^n \triangleq l_{2e}^n(\mathbf{R}) \subset l_{2e}^n(\mathbf{C})$.

Remarque 2 : $l_{2e}^n(\mathbf{R})$ et $l_{2e}^n(\mathbf{C})$ sont des espaces vectoriels mais ne sont pas normés.

Remarque 3 : L'espace $l_{2e}^n(\mathbf{R})$ possède une norme qui caractérise une « énergie ».

Définition : Le produit hermitien sur $l_{2e}^n(\mathbf{C})$ dégénérant en produit scalaire sur $l_{2e}^n(\mathbf{R})$ est donné par l'expression :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in l_{2e}^n(\mathbf{C}) \times l_{2e}^n(\mathbf{C}), \\ \langle x, y \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} x_i^* y_i \quad \text{où} \quad x_i^* y_i = \sum_{j=1}^n \bar{x}_i^j y_i^j, \end{aligned}$$

de plus, $\|x\| = (\langle x, x \rangle)^{1/2} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i^* x_i \right)^{1/2}$ est la norme- l_2 définie sur $l_{2e}^n(\mathbf{C})$. $l_{2e}^n(\mathbf{C})$ et $l_{2e}^n(\mathbf{R})$ sont des espaces de Hilbert (espaces vectoriels normés complets pourvus respectivement d'un produit hermitien sur \mathbf{C} et d'un produit scalaire sur \mathbf{R}).

Notation : $\forall \tau \in \mathbf{Z}_+, \forall (x, y) \in l_{2e}^n(\mathbf{C}) \times l_{2e}^n(\mathbf{C})$,

$$\langle x_{\tau}, y_{\tau} \rangle = \langle \mathcal{P}_{\tau} x, \mathcal{P}_{\tau} y \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} x_{\tau i}^* y_{\tau i} = \sum_{i=0}^{\tau} x_i^* y_i \triangleq \langle x, y \rangle_{\tau},$$

par conséquent cette notation induit la suivante :

$$\langle x_{\tau}, y_{\tau} \rangle = \|\mathcal{P}_{\tau} x\|^2 \triangleq \langle x, x \rangle_{\tau} \triangleq \|x\|_{\tau}^2.$$

Opérateurs et propriétés des opérateurs adaptées à l'étude des systèmes discrets dans l'espace $l_{2e}^n(\mathbf{C})$ [48, 53, 54, 55, 56].

Les équations régissant le processus décrit par le schéma de la Figure 7 sont :

$$\begin{aligned} y_k &= (\mathcal{A} x)_k, \quad \forall k \in \mathbf{Z}_+, \\ x_0 &\text{ donné et } x_k = 0, \quad \forall k \in \mathbf{Z}_-^*, \end{aligned} \tag{III.12}$$

il est équivalent d'écrire : $y = \mathcal{A} x$,
 x_0 donné.

où $x \in l_{2e}^n(\mathbf{C})$ et $y \in l_{2e}^n(\mathbf{C})$.

Définition d'un opérateur : Un opérateur non linéaire \mathcal{A} est une fonction de l'espace $l_{2e}^n(\mathbf{C})$ sur $l_{2e}^n(\mathbf{C})$ telle que pour tout $x \in l_{2e}^n(\mathbf{C})$, il existe un unique $y \in l_{2e}^n(\mathbf{C})$ tel que $y \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{A} x$.

Opérateur dynamique : Un opérateur \mathcal{A} est dit non dynamique (sans mémoire) si la valeur instantanée de ses sorties à l'instant k_0 dépend uniquement de la valeur de ses entrées à ce même instant k_0 . Un opérateur dynamique est un opérateur non nécessairement non dynamique.

Opérateur non anticipatif (causal) : Un opérateur \mathcal{A} est dit non anticipatif si la valeur prise par sa fonction sortie ($y = \mathcal{A} x$) à tout instant k_0 ne dépend aucunement des valeurs prises par sa fonction entrée aux instants $k > k_0$ (la sortie ne dépend pas des entrées futures).

Une traduction mathématique de cette propriété est donnée par (cf. Willems [55]) :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \text{ est non anticipatif si } \forall x \in l_{2e}^n(\mathbb{C}), \forall \tau \in \mathbb{Z}_+, \\ \mathcal{P}_\tau(\mathcal{P}_\tau \mathcal{K})(x) = (\mathcal{P}_\tau \mathcal{K})\mathcal{P}_\tau(x) \iff (\mathcal{P}_\tau \mathcal{K})(x) = (\mathcal{P}_\tau \mathcal{K})\mathcal{P}_\tau(x) \\ \text{car } \mathcal{P}_\tau \circ \mathcal{P}_\tau = \mathcal{P}_\tau. \end{aligned}$$

Cette condition exprime que $\mathcal{P}_\tau \mathcal{A}$ commute avec \mathcal{P}_τ .

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES CONCERNANT LES OPÉRATEURS NON ANTICIPATIFS.

Deux définitions importantes concernant un opérateur \mathcal{F} de l_2^n sur l_2^n sont considérées à la suite :

1. \mathcal{F} est continu au sens de Lipschitz s'il existe $k_L \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall (x, y) \in l_2^n \times l_2^n, \|\mathcal{F}x - \mathcal{F}y\| \leq k_L \|x - y\|,$$

k_L est appelée la constante de Lipschitz.

2. Un opérateur \mathcal{F} , tel que $\mathcal{F}0=0$, est borné s'il existe $\rho: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, fonction continue croissante, telle que :

$$\forall x \in l_2^n, \quad \|\mathcal{F}x\| \leq \rho(\|x\|).$$

Si ρ est linéaire, $\rho(\|x\|) = k_S \|x\|$, où $k_S \in \mathbb{R}_+$, alors \mathcal{F} est dit *stable à gain fini*.

Une spécificité des opérateurs non anticipatifs est de pouvoir définir ces notions sur des espaces étendus bien que ceux-ci ne soient pas normés. Ainsi, désignant par \mathcal{A} un opérateur *non anticipatif* de l_{2e}^n dans l_{2e}^n il vient les définitions suivantes :

1. \mathcal{A} est continu au sens de Lipschitz si $\mathcal{P}_\tau \mathcal{A} = \mathcal{P}_\tau \mathcal{A} \mathcal{P}_\tau$ est continu au sens de Lipschitz, soit s'il existe $k_L \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall \tau \in \mathbb{Z}_+, \forall (x, y) \in l_{2e}^n \times l_{2e}^n$,

$$\|\mathcal{K}x - \mathcal{K}y\|_\tau = \|\mathcal{P}_\tau \mathcal{K}x - \mathcal{P}_\tau \mathcal{K}y\| = \|\mathcal{P}_\tau \mathcal{K} \mathcal{P}_\tau x - \mathcal{P}_\tau \mathcal{K} \mathcal{P}_\tau y\| \leq k_L \|\mathcal{P}_\tau x - \mathcal{P}_\tau y\| = k_L \|x - y\|_\tau$$

2. \mathcal{A} , tel que $\mathcal{A}0=0$, est borné si $\mathcal{P}_\tau \mathcal{A} = \mathcal{P}_\tau \mathcal{A} \mathcal{P}_\tau$ est borné, soit s'il existe $\rho: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, fonction continue croissante, telle que $\forall \tau \in \mathbb{Z}_+, \forall x \in l_{2e}^n$,

$$\|\mathcal{K}x\|_\tau = \|\mathcal{P}_\tau \mathcal{K}x\| = \|\mathcal{P}_\tau \mathcal{K} \mathcal{P}_\tau x\| \leq \rho(\|\mathcal{P}_\tau x\|) = \rho(\|x\|_\tau).$$

S'il existe $k_S \in \mathbb{R}_+$ tel que $\rho(\|x\|_\tau) = k_S \|x\|_\tau$, alors \mathcal{A} est dit *stable à gain fini*.

Il est démontré dans Willems [55] (Théorème 2. 1, page 15) que, pour un *opérateur non anticipatif*, les notions de continuité au sens de Lipschitz sur un espace vectoriel normé et sur l'espace étendu qui lui correspond sont équivalentes. Il en est de même pour la notion d'opérateur borné et la stabilité à gain fini.

Un parallèle similaire pourrait être fait afin de montrer que « l'algèbre de Banach » des opérateurs continus au sens de Lipschitz sur l_2 et « l'algèbre de Banach » des opérateurs *non anticipatifs* continus au sens de Lipschitz sur l_{2e} sont *isométriquement isomorphes*. La même propriété concernant les opérateurs bornés d'une part et les opérateurs stables à gain fini d'autre part est valide. Par conséquent la même notation peut être utilisée pour la norme d'un opérateur sur l_2 et sur l_{2e} . Il vient alors les définitions suivantes :

Gain incrémental : Soit \mathcal{A} un opérateur non linéaire dynamique et non anticipatif tel que $\mathcal{A}0=0$. Le gain incrémental de \mathcal{A} est défini par

$$\tilde{g}(\mathcal{A}) \triangleq \sup_{\substack{0 < \|u-v\|_\tau < \infty \\ \tau \in \mathbb{Z}_+}} \frac{\|\mathcal{K}u - \mathcal{K}v\|_\tau}{\|u - v\|_\tau},$$

si $\tilde{g}(\mathcal{A})$ existe, \mathcal{A} est dit à gain incrémental fini.

Soit \mathcal{A} un opérateur non linéaire dynamique et non anticipatif tel que $\mathcal{A}0=0$:

Opérateur borné : Un opérateur \mathcal{A} est borné si des entrées de norme finie engendrent des sorties de norme finie ou, plus formellement, s'il existe ρ (fonction continue croissante), $\rho: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\forall x \in l_{2e}^n, \forall \tau \in \mathbb{Z}_+$,

$$\|\mathcal{A}x\|_\tau < \rho(\|x\|_\tau).$$

Si de plus, ρ est strictement croissante et $\rho(0)=0$ (fonction de classe \mathcal{K}) alors l'opérateur \mathcal{A} est dit être « stable ».

Gain d'un opérateur : Le gain de \mathcal{A} est la norme- l_2 de \mathcal{A} , soit :

$$g(\mathcal{K}) \triangleq \|\mathcal{K}\| \triangleq \sup_{\substack{0 < \|x\|_\tau < \infty \\ x \in \mathbb{Z}_+}} \frac{\|\mathcal{K}x\|_\tau}{\|x\|_\tau};$$

si $g(\mathcal{A})$ est constant et existe, l'opérateur \mathcal{A} est dit « à gain fini ». L'opérateur \mathcal{A} , et donc le système (III.12) représenté sur la Figure 7 sont alors dit être « stables à gain fini ».

Opérateur positif : Un opérateur \mathcal{A} est dit positif, noté > 0 , si

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \tau \in \mathbb{Z}_+, \forall x \in l_{2e}^n(\mathbb{C}), \operatorname{Re}(\langle x, \mathcal{A}x \rangle_\tau) \gg \varepsilon \|x\|_\tau^2;$$

si $\varepsilon \geq 0$, \mathcal{A} est dit semi-positif, noté ≥ 0 .

Opérateur différentiable (linéarisable) : Un opérateur \mathcal{A} est différentiable au point x_0 s'il existe un opérateur linéaire borné L_{x_0} tel que, $\forall \tau \in \mathbb{Z}_+$,

$$\lim_{\|x\|_\tau \rightarrow 0} \frac{\|P_\tau \mathcal{K}(x_0 + x) - P_\tau \mathcal{K}x - L_{x_0}x\|_\tau}{\|x\|_\tau} = 0.$$

L_{x_0} est alors appelé la linéarisation de \mathcal{A} en x_0 .

Remarque 4 : La propriété de « gain incrémental » est l'une des plus importantes et constitue même le point de départ de l'étude de la stabilité entrée-sortie pour trois raisons essentielles (1, 2 et 3), qui sont maintenant considérées à la suite :

1. Considérons le système non linéaire à rétroaction de la Figure 9 ci-dessous :

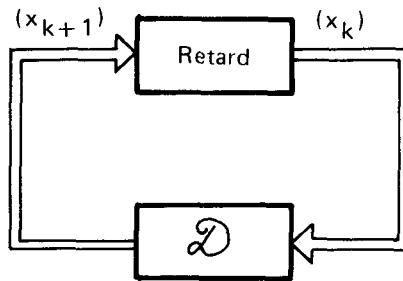


Fig. 9 - Schéma opérationnel en boucle fermée.

Pour la classe des processus multivariables non perturbés muni d'un retour unitaire (cf. Figure 9), Zames a montré (cf. [67]) que la propriété de gain incrémental ($\tilde{g}(\mathcal{D})$ existe), suffisait à garantir l'existence d'une solution unique aux équations opérationnelles modélisant le processus. Ces équations constituent alors une bonne approximation d'une vaste classe de processus physiques (excluant toutefois les hystérésis et les saturations). Zames caractérise ce résultat par l'expression « Réalisabilité de systèmes non linéaires à rétroaction ».

Pour le système de la Figure 9 il vient la définition suivante :

Opérateur détectable - Système détectable : Soit un opérateur \mathcal{D} vérifiant $\mathcal{D}0=0$. Soit le système dynamique, (S), $x_{k+1}=(\mathcal{D}x)_k$, avec $x \in l_{2e}^n$. Le processus ainsi décrit est détectable par $D_0 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si, pour tout x satisfaisant (S),

$$\sum_{i=0}^{+\infty} (D_0 x)_i^* (D_0 x)_i < +\infty \Rightarrow \sum_{i=0}^{+\infty} x_i^* x_i < +\infty.$$

D'un point de vue physique, si le signal d'entrée x est instable, alors la sortie observée $D_0 x$ sera également instable.

2. Elle induit la continuité uniforme pour l'opérateur \mathcal{A} , en effet, $\forall \tau \in \mathbb{Z}_+$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \triangleq \frac{\varepsilon}{\tilde{g}(\mathcal{K})} > 0, (\|u-v\|_\tau < \delta \Rightarrow \|\mathcal{K}u - \mathcal{K}v\|_\tau < \varepsilon),$$

ce qui interdit toute discontinuité pour les sorties du système (III.12).

3. Elle permet de définir un ensemble de processus contractants pour (III.12) lorsque $\tilde{g}(\mathcal{A}) < 1$.

L'utilisation de cette propriété portant sur le gain incrémental pour un système à rétroaction modélisé de façon opérationnelle (cf. Figure 10),

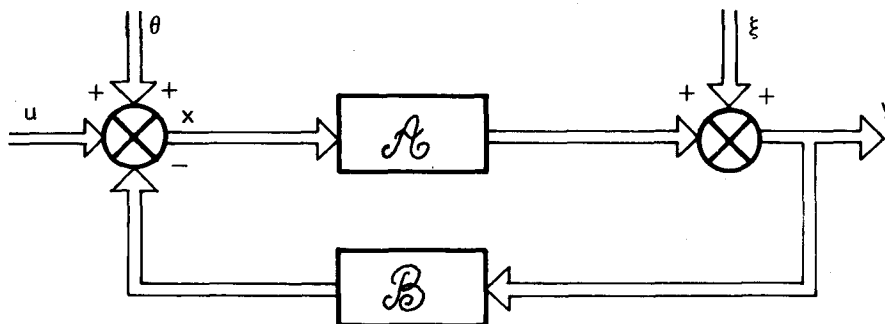


Fig. 10 – Schéma opérationnel à rétroaction.

où $\forall k \in \mathbb{Z}_+$,

$$\begin{aligned} y_k &= (\mathcal{A} x)_k + \xi_k \\ x_k &= u_k - (\mathcal{B} y)_k + \theta_k, \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

θ_k et ξ_k représentant des perturbations, conduit aux résultats fondamentaux suivants (cf. Zames [68]) :

(i) Cas où $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, $\xi_k = \theta_k = 0$.

Si $\mathcal{A}\mathcal{B}$ est une contraction ($\tilde{g}(\mathcal{A}\mathcal{B}) < 1$) alors une unique solution existe pour x_k et y_k .

(ii) Cas où $(\xi_k) \neq 0$ et $(\theta_k) \neq 0$.

Si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont non anticipatifs et s'il existe une unique solution $(x_k) \in l_{2e}^n$, alors (x_k) est bornée si $\tilde{g}(\mathcal{A}) \tilde{g}(\mathcal{B}) < 1$ et (y_k) est bornée si \mathcal{A} l'est.

Un énoncé global de ces résultats intitulé « Théorème du faible gain » a été donné simultanément par Zames dans [53] et Sandberg dans [65] pour des systèmes excluant les non-linéarités à mémoire (hystérésis et saturations). Une généralisation de ce théorème, prenant en compte la présence éventuelle d'hystérésis et de saturations, a été donné par Desoer et Vidyasagar (1975) dans [56] (p. 36-56).

Théorème du faible gain : Considérons le schéma de la Figure 10, décrit par les Équations (III.13) et avec $\xi = \theta = 0$. Supposons que les opérateurs des chaînes d'action et de retour, \mathcal{A} et \mathcal{B} , soient à gain incrémental fini; $\forall \tau \in \mathbb{Z}_+$,

$$\|\mathcal{A} x_1 - \mathcal{A} x_2\|_\tau \leq \tilde{g}(\mathcal{A}) \|x_1 - x_2\|_\tau$$

et

$$\|\mathcal{B} x_1 - \mathcal{B} x_2\|_\tau \leq \tilde{g}(\mathcal{B}) \|x_1 - x_2\|_\tau ;$$

alors, si

$$\tilde{g}(\mathcal{A}) \tilde{g}(\mathcal{B}) < 1,$$

(i) Pour tout u élément de l_{2e}^n , il existe une unique solution $(x, y) \in l_{2e}^n \times l_{2e}^n$ qui peut être obtenue par itération.

(ii) L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : l_{2e}^n &\longrightarrow l_{2e}^n \\ u &\longmapsto x = \mathcal{T}(u), \end{aligned}$$

est uniformément continue.

(iii) Si pour $u=0$ (régime autonome), la solution unique (x, y) est telle que $(x, y) \in l_2^n \times l_2^n$, alors :

$$u \in l_2^n \implies x \in l_2^n$$

Par conséquent, si la commande u est bornée (au sens de la norme- l_2 choisie) l'erreur x et la sortie y le sont également.

En réalité, le « Théorème du faible gain » garantit un résultat plus fort encore; en effet, si $u \in l_2^n$ (commande bornée), alors il existe une constante $k < \infty$, indépendante de la commande u et de τ , telle que, $\forall \tau \in \mathbb{Z}_+$,

et

$$\|x\|_\tau \leq k \|u\|_\tau$$

$$\|y\|_\tau \leq k \|u\|_\tau .$$

Cette remarque et les résultats conjugués des différentes versions du « Théorème du faible gain » conduisent à la définition suivante :

Définition : Le système (III. 13) est dit l_2 -stable (à gain fini), s'il existe $k_S < \infty$ tel que, $\forall \tau \in \mathbb{Z}_+$,

$$\begin{aligned} \|x\|_\tau &\leq k_S \|u\|_\tau \\ \|y\|_\tau &\leq k_S \|u\|_\tau, \end{aligned}$$

pour toute commande $u \in l_2^n$.

Une définition analogue pourrait être donnée pour la \mathcal{L} -stabilité, où \mathcal{L} est un espace vectoriel muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$. De même, la l_p -stabilité correspondrait à la norme

$$\|x\|_{l_p} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \|x_i\|_{\mathcal{E}}^p \right)^{1/p}.$$

III, 3. 2. – Théorie de la stabilité de Safonov pour les systèmes à retour

Pour permettre d'étudier sous l'angle de sa stabilité entrée/sortie une classe très générale de processus perturbés (par des actions externes ou d'origine structurelle), une approche complémentaire, développée récemment (1979-1980) par Safonov [48, 52] est maintenant résumée. Celle-ci utilise une nouvelle formulation qui rapproche la théorie opérationnelle et les concepts relationnels tout en s'appuyant sur les différentes définitions et propriétés décrites dans la section précédente.

Cette section considère un système multivariable à retour formé de deux sous-systèmes dont l'entrée de l'un est la sortie de l'autre (cf. Figure 11).

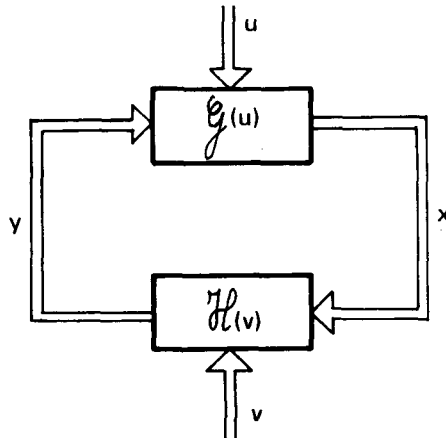


Fig. 11 – Schéma opérationnel en boucle fermée de Safonov.

Sur cette Figure, $u \in l_{2e}^n$ et $v \in l_{2e}^m$ sont des perturbations additives et $x \in l_{2e}^n(\mathbb{C})$, $y \in l_{2e}^m(\mathbb{C})$ dénotent respectivement les « entrées » et « sorties » du processus. $\mathcal{G}(u)$ et $\mathcal{H}(v)$ sont des opérateurs non linéaires dépendants respectivement des perturbations u et v .

Le processus est donc décrit par les équations $x = \mathcal{G}(u) y$ (III. 14)

et

$$y = \mathcal{H}(v) x.$$

De manière équivalente, définissant par $\overline{\mathcal{A}}$ le graphe d'un opérateur non linéaire \mathcal{A} , soit :

$$\overline{\mathcal{A}} = \text{Graphe}(\mathcal{A}) \triangleq \{ (x, y) \in l_{2e}^n(\mathbb{C}) \times l_{2e}^m(\mathbb{C}) \mid x \in l_{2e}^n(\mathbb{C}) \text{ et } y = \mathcal{A} x \},$$

le processus se trouve décrit par :

$$\begin{aligned} (y, x) &\in \overline{\mathcal{G}(u)} \\ (x, y) &\in \overline{\mathcal{H}(v)}, \end{aligned} \quad (\text{III. 15})$$

où $\overline{\mathcal{G}}(u)$ et $\overline{\mathcal{H}}(v)$ sont des *relations non linéaires* exclusivement dépendantes des perturbations u et v . Ainsi (III.15) définit une application de $l_{2e} \times l_{2e}$ dans $l_{2e} \times l_{2e}$ qui à tout couple (u, v) de perturbations associe un couple $(x, y) \in \overline{\mathcal{H}}(v) \cap \overline{\mathcal{G}}(u)$ de « sorties »⁽¹⁾. L'hypothèse $(0, 0) \in \overline{\mathcal{G}}(0)$ et $(0, 0) \in \overline{\mathcal{H}}(0)$ est également introduite : le couple $(0, 0)$ est donc un point d'équilibre pour le système non perturbé.

La stabilité du système (III.15) se définit alors d'une façon analogue à celle du processus (III.12) (cf. Section précédente). Relativement à l'application définie sur $l_{2e} \times l_{2e}$ par (III.15), le processus sera *stable en boucle fermée* s'il existe une fonction Φ de classe \mathcal{X} (fonction continue strictement croissante telle que $\Phi(0)=0$) telle que, $\forall \tau \in \mathbb{Z}_+$,

$$\| (x, y) \|_{\tau} \leq \Phi (\| (u, v) \|_{\tau}).$$

Si Φ est linéaire ($\Phi(\| (u, v) \|_{\tau}) = k_1 \| (u, v) \|_{\tau}$, $k_1 \in \mathbb{R}_+$) alors (III.15) est dit *stable à gain fini en boucle fermée*. Dans ces expressions,

$$\| (x, y) \|_{\tau} = \| \mathcal{P}_{\tau} (x, y) \| = (\| x \|_{\tau}^2 + \| y \|_{\tau}^2)^{1/2} = (\| \mathcal{P}_{\tau} x \|^2 + \| \mathcal{P}_{\tau} y \|^2)^{1/2}$$

est la notation employée pour définir la norme- $l_2 \times l_2$ d'un élément $(x, y) \in l_{2e} \times l_{2e}$ tronqué sur $[0, \tau] \cap \mathbb{Z}_+$. En effet sur l'espace produit $l_2 \times l_2$, $\forall (x, y) \in l_2 \times l_2$,

$$\| (x, y) \| = (\| x \|^2 + \| y \|^2)^{1/2},$$

où $\| \cdot \|$ est la norme sur l_2 (cf. Section précédente).

Il est approprié à ce point de rappeler quelques définitions complémentaires se rapportant à la notion de « secteur multivariable ».

Ces secteurs ont été introduits par Safonov [52]. Ils constituent une généralisation des *secteurs coniques monovariabiles* définis antérieurement par Zames [53, 54] pour interpréter géométriquement la stabilité entrée-sortie.

Secteurs multivariabiles [48, 52, 55] :

Soit \mathcal{F} la fonctionnelle telle que $\forall (x, y) \in l_{2e}(\mathbb{C}) \times l_{2e}(\mathbb{C})$, $\forall \tau \in \mathbb{Z}_+$,

$\mathcal{F}(x, y, \tau) \triangleq \langle \mathcal{F}_{11}y + \mathcal{F}_{12}x, \mathcal{F}_{21}y + \mathcal{F}_{22}x \rangle_{\tau}$, où \mathcal{F}_{ij} ($i, j=1, 2$) sont des opérateurs tels que $\forall (i, j) \in \{1, 2\}^2$, $\mathcal{F}_{ij}0=0$. Le secteur de \mathcal{F} , noté $\text{Sect}(\mathcal{F})$ est défini par

$$\text{Sect}(\mathcal{F}) \triangleq \{ (x, y) \in l_{2e}^{\tau}(\mathbb{C}) \times l_{2e}^{\tau}(\mathbb{C}) \mid \forall \tau \in \mathbb{Z}_+, \text{Re}(\mathcal{F}(x, y, \tau)) \leq 0 \},$$

et noté en abrégé par le tableau

$$\text{Sect}(\mathcal{F}) = \text{Sect} \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{11} & \mathcal{F}_{12} \\ \mathcal{F}_{21} & \mathcal{F}_{22} \end{bmatrix}.$$

Un secteur particulièrement utilisé est le cône multivariable généralisé de centre \mathcal{C} et de rayon \mathcal{R} , noté $\text{Cône}(\mathcal{C}, \mathcal{R})$, où \mathcal{C} et \mathcal{R} sont des opérateurs à gain incrémental fini, avec :

$$\text{Cône}(\mathcal{C}, \mathcal{R}) \triangleq \text{Sect} \begin{bmatrix} \mathcal{I} & -\mathcal{C}-\mathcal{R} \\ \mathcal{I} & -\mathcal{C}+\mathcal{R} \end{bmatrix},$$

et où \mathcal{I} est l'opérateur identité.

L'inclusion d'un graphe d'un opérateur non linéaire dans un secteur multivariable peut maintenant être définie mathématiquement.

Définition : Le graphe de \mathcal{A} , noté $\overline{\mathcal{A}}$, est intérieur, respectivement strictement intérieur, au $\text{Sect}(\mathcal{F})$ défini plus haut si et seulement si, $\forall \tau \in \mathbb{Z}_+$, $\forall (x, y) \in \overline{\mathcal{A}}$, $\text{Re}(\langle \mathcal{F}_{11}y + \mathcal{F}_{12}x, \mathcal{F}_{21}y + \mathcal{F}_{22}x \rangle_{\tau}) \leq 0$, respectivement $\leq -\varepsilon(\|x\|_{\tau}^2 + \|y\|_{\tau}^2)$ pour $\varepsilon > 0$.

(1) $\overline{\mathcal{G}}(u)$ est l'inverse du graphe de l'opérateur perturbé $\mathcal{G}(u) : \forall (y, x) \in \overline{\mathcal{G}}(u), (x, y) \in \overline{\mathcal{G}}(u)$.

Remarque 1 : Si $\text{Sect}(\mathcal{F}) = \text{Cône}(\mathcal{C}, \mathcal{R})$, alors $\mathcal{F}_{11} = \mathcal{F}_{21} = \mathcal{I}$ (opérateur identité), $\mathcal{F}_{12} = -\mathcal{C} - \mathcal{R}$ et $\mathcal{F}_{22} = -\mathcal{C} + \mathcal{R}$. Dans le cas scalaire, la validité de cette écriture se vérifie trivialement par développement du produit scalaire.

Un théorème caractérisant la stabilité externe (à gain fini) du système (III.15) (Figure 11) peut maintenant être énoncé. Dans le cas considéré, les « entrées » sont constituées du couple (u, v) de perturbations et les « sorties » du couple (x, y) .

Théorème du secteur de stabilité de Safonov [48] : Soit $\text{Sect}(\mathcal{F})$ un secteur tel que les opérateurs \mathcal{F}_{ij} ($i, j = 1, 2$) servant à le définir aient un gain incrémental fini. Supposant (i) les applications de $u \in l_{2e}^n$ dans $\overline{\mathcal{G}}(u)$ et $v \in l_{2e}^n$ dans $\overline{\mathcal{H}}(v)$ stables à gain fini par rapport aux ensembles respectifs $\overline{\mathcal{G}}(0)$ et $\overline{\mathcal{H}}(0)$, si (ii) la relation inverse $(^1)$, $\overline{\mathcal{G}}^I(0)$, (inverse du graphe de l'opérateur non perturbé $\mathcal{G}(0)$), est strictement à l'intérieur du $\text{Sect}(\mathcal{F})$ et si $\overline{\mathcal{H}}(0)$ est à l'extérieur $(^2)$ du même $\text{Sect}(\mathcal{F})$, alors le système (III.15) (cf. Figure 11) est stable à gain fini en boucle fermée.

Remarque 2 : L'hypothèse (i) exigeant que les applications de $u \in l_{2e}^n$ dans $\overline{\mathcal{G}}(u)$ et $v \in l_{2e}^n$ dans $\overline{\mathcal{H}}(v)$ soient stables à gain fini sur les ensembles $\overline{\mathcal{G}}(0)$ et $\overline{\mathcal{H}}(0)$ est peu restrictive. Elle n'exige aucunement que les sous systèmes décrits par les opérateurs $\mathcal{G}(u)$ et $\mathcal{H}(v)$ soient stables en boucle ouverte. Une interprétation physique de cette hypothèse est que de faibles perturbations ne produisent pas de variations arbitrairement grandes pour les « trajectoires » nominales de (III.12), décrites par $\overline{\mathcal{G}}(0)$ et $\overline{\mathcal{H}}(0)$. Autrement dit, l'application de $u \in l_{2e}^n$ dans $\overline{\mathcal{G}}(u)$ est stable à gain fini par rapport à $\overline{\mathcal{G}}(0)$ si $\exists k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in l_{2e}^n, \forall \tau \in \mathbb{Z}_+$,

$$\|\mathcal{G}(u)x - \mathcal{G}(0)x\|_\tau \leq k \|(x, u)\|_\tau.$$

Dans le cas particulier où les perturbations u et v ont un effet additif, cette condition est toujours vérifiée avec un gain fini valant au plus 1. Cette dernière propriété étant très importante pour les développements des sections et chapitres suivants, elle est démontrée en Annexe C.

Interprétation géométrique du théorème dans le cas monovarié.

L'espace de référence est ici $l_{2e}^1(\mathbb{C})$ et l'espace des signaux $l_{2e}^1(\mathbb{R})$ ($\stackrel{\Delta}{=} l_{2e}^1(\mathbb{R})$). Ce théorème de stabilité est en fait un théorème de séparation topologique dont une visualisation géométrique est donnée par la Figure 12.

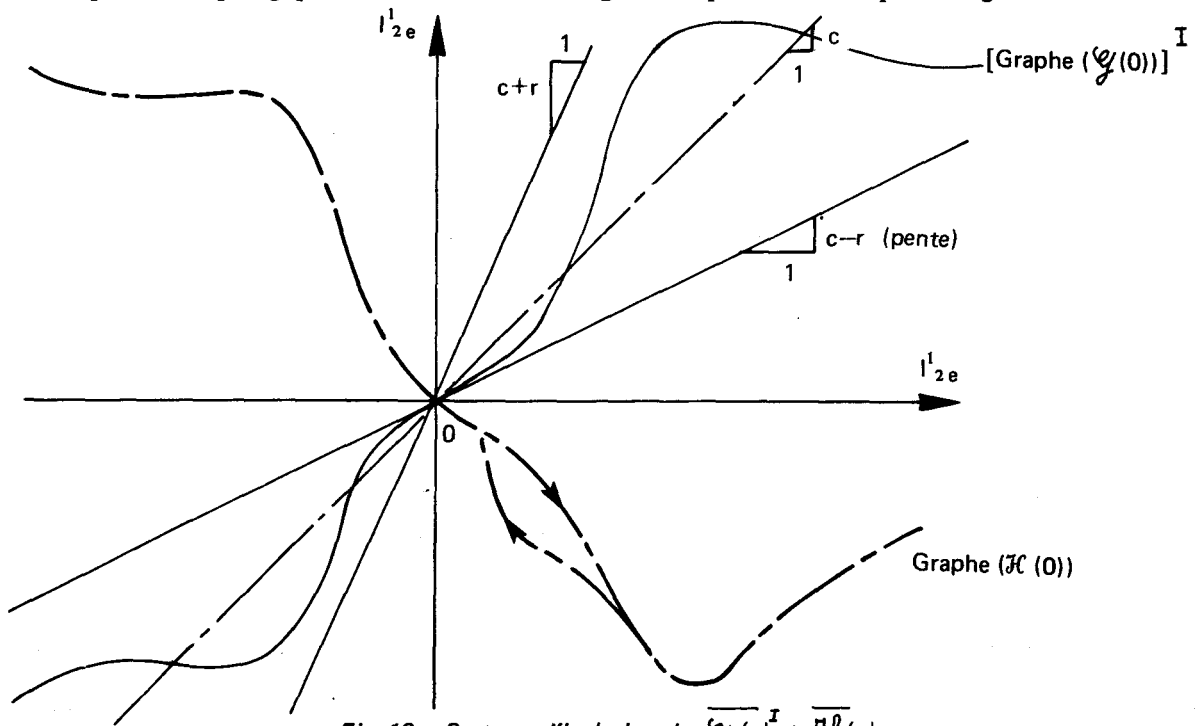


Fig. 12 - Secteurs d'inclusion de $\overline{\mathcal{G}}(0)^I$ et $\overline{\mathcal{H}}(0)$.

(¹) $\forall (x, y) \in \overline{\mathcal{G}}(0), (y, x) \in \overline{\mathcal{G}}^I(0)$.

(²) Dans la définition d'inclusion d'un graphe dans l'intérieur d'un secteur, il suffit de changer le sens des inégalités pour obtenir une inclusion dans l'extérieur d'un secteur.

La Figure 12 transcrit donc, dans l'espace $l_{2e}^1 \times l_{2e}^1$, les conditions de stabilité d'un processus monovarié, décrit par un modèle relationnel de la forme (III.15). Cette modélisation peut correspondre au schéma de la Figure 13.

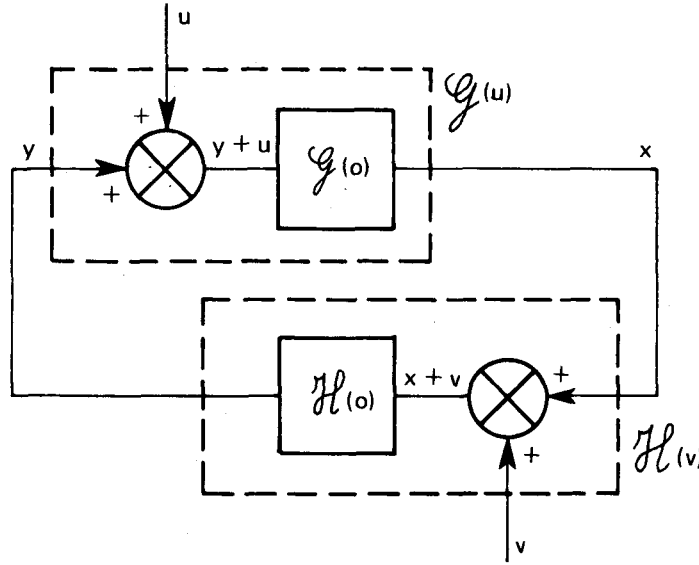


Fig. 13 — Schéma opérationnel servant à la vérification de la condition de stabilité de Safonov.

Supposant que le secteur $\text{Sect}(\mathcal{F})$ est le cône monovarié de centre c et de rayon r , noté $\text{Cône}(c, r) \triangleq \{c-r, c+r\}$ et défini par :

$$\text{Cône}(c, r) = \{(x, y) \in l_{2e}^1 \times l_{2e}^1 \mid \forall \tau \in \mathbb{Z}_+, \|y - cx\|_\tau \leq r \|x\|_\tau\},$$

le processus est stable à gain fini si

$$\overline{\mathcal{G}(0)} \subset \text{Cône}(c, r) \subset l_{2e}^1 \times l_{2e}^1,$$

$$\overline{\mathcal{H}(0)} \subset \text{région de } l_{2e}^1 \times l_{2e}^1 \text{ extérieure au Cône}(c, r) \text{ (cf. Figure 12)}.$$

Remarque finale : La condition (ii) du « Théorème du secteur de stabilité de Safonov » suffit à assurer la stabilité à gain fini du processus de la Figure 13 car la condition (i) de ce théorème est naturellement vérifiée d'après la Remarque 2 précédente, compte tenu que les perturbations u et v sont additives.

On retrouve ainsi un résultat désormais classique de stabilité externe, exposé par Zames dans [53,70], concernant les systèmes non linéaires et utilisant les propriétés des secteurs coniques monovariés.

III.3.3. — Applicabilité de cette théorie aux processus non linéaires multivariés discrets

Soit le système non linéaire récurrent

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (\mathcal{A}x)_k + (\mathcal{B}u)_k + \xi_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \\ x_0 &\text{ donne' et } x_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_-^*, \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

où $x \in l_{2e}^m$, $u \in l_{2e}^m$ et $\xi \in l_{2e}^m$, et où \mathcal{A} et \mathcal{B} sont des opérateurs dynamiques et non linéaires. Ces opérateurs résultent d'une décomposition d'un système plus général, de la forme

$$x_{k+1} = \mathcal{F}((x_k), (u_k)) + \xi_k,$$

en deux opérateurs, \mathcal{A} dépendant de la suite (x_k) de \mathbb{R}^n et \mathcal{B} dépendant de la suite (u_k) — et éventuellement aussi de la suite (x_k) —. La dépendance explicite vis-à-vis des suites (x_k) et (u_k) justifie la notation employée en (III.16). Ils vérifient les propriétés de différentiabilité, de non anticipativité et de gain incrémental fini; enfin, $\mathcal{A}0=0$ et $\mathcal{B}0=0$.

Dans la modélisation (III.16), ξ représente une perturbation extérieure.

Soit q l'opérateur « avance », défini par $x_{k+1} = q x_k$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$.

Une expression équivalente à (III.16) est alors $q x = \mathcal{A} x + \mathcal{B} u + \xi$. (III.17)

Ce mode d'écriture opérationnel sera employé jusqu'à la fin de cette Thèse.

A ce système non linéaire, est associé le processus linéaire

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= F x_k + G u_k + \eta_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \\ x \text{ donné et } x_k &= 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_-^*, \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

où $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $\eta_k \in \mathbb{R}^n$, qui est supposé décrire, au premier ordre, le comportement du système non linéaire (III.16) au voisinage d'un point de fonctionnement, ici $x=0$ et $u=u_f$. Il est supposé que le retour non linéaire

$$u_k = -N(v) x_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \quad (\text{III.19})$$

où $N(v)$ ⁽¹⁾ est une matrice dont les éléments peuvent être des fonctions non linéaires des *composantes instantanées* de l'état et de la commande, assure la stabilité du système linéarisé (III.18) en l'absence de perturbations additives ($\eta=0$). De l'application du « Théorème du secteur de stabilité de Safonov » (cf. III,3.2) au système (III.17) muni du retour d'état (III.19) il découle le lemme suivant :

Lemme de Marge de stabilité de Safonov [48] : Soient la matrice constante $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $S(v) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ deux matrices symétriques définies positives satisfaisant l'équation (Lyapounov), $\forall v \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$:

$$P - (F - GN(v))^T P (F - GN(v)) = S(v), \quad (\text{III.20})$$

signifiant donc que le système (III.18) muni de la loi de commande (III.19) est asymptotiquement stable. Alors, si, $\forall v \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned} \text{Graphé} (P^{1/2} (F^0 - GN^0(v) + (\mathcal{A} - F^0) - (\mathcal{B} - G^0) N^0(v))) \\ \text{est strictement intérieur au Cône}(0, P^{1/2}) \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

et si $\eta \equiv \xi$, le système non linéaire (III.16) muni de la loi de commande (III.19) est stable à gain fini en boucle fermée.

Dans ce lemme, la notation F^0 est utilisée dans l'expression (III.21) afin de définir un opérateur linéaire, interprété comme $(F^0 x)_k = F x_k$ où F est une matrice de $\mathbb{R}^{n \times n}$. Cette justification permet de donner un sens à la quantité $\mathcal{A} - F^0$, différence de deux opérateurs et non d'un opérateur et d'une matrice.

La dernière condition de ce lemme, qui est une condition *suffisante* de stabilité, définit de façon implicite la notion de marge de stabilité pour le processus (III.17). Cette marge est obtenue en termes d'écart entre la paire $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ de (III.17) et la paire (F^0, G^0) ⁽²⁾ de (III.18), les quantités $\mathcal{A} - F^0$ et $\mathcal{B} - G^0$ pouvant regrouper *a priori* des erreurs de modèle et de linéarisation, par conséquent des perturbations structurelles.

Une première critique pouvant être formulée vis-à-vis de ce résultat relativement abstrait est la très grande difficulté de vérifier numériquement, et donc de chiffrer ces marges de stabilité.

Lorsque le gain de la chaîne de retour est optimal par rapport à une fonction de coût de la forme :

$$J = \sum_{i=0}^{\infty} (x_i^T Q x_i + u_i^T R u_i),$$

⁽¹⁾ v est utilisé ici pour rappeler que les éléments de la matrice N sont des fonctions non linéaires.

⁽²⁾ Il est équivalent de parler de la paire (F, G) ou (F^0, G^0) .

où $Q > 0$ et $R > 0$, $N(v)$ est donné par l'expression :

$$N = (R + G^T P G)^{-1} G^T P F, \quad (\text{III. 22})$$

où P est solution de l'équation (les conditions classiques portant sur l'existence et l'unicité de P sont supposées vérifiées) :

$$P = F^T P F + Q - F^T P G (R + G^T P G)^{-1} G^T P F.$$

Supposons de plus que $\mathcal{A}x = F^0 x = Fx$ et $\mathcal{B}u = G \mathcal{N}_c u$ c'est-à-dire que l'unique différence entre le système non linéaire (III.16) et le système linéarisé (III.18) est contenue dans la perturbation non linéaire dynamique (à mémoire) \mathcal{N}_c agissant dans la chaîne de commande.

Supposons enfin que cette perturbation \mathcal{N}_c ($\mathcal{N}_c 0 = 0$) est totalement découplée, un effet dynamique non linéaire se produit alors sur chaque composante de la commande calculée par le régulateur linéaire quadratique. L'asservissement ainsi perturbé est représenté sur la Figure 14.

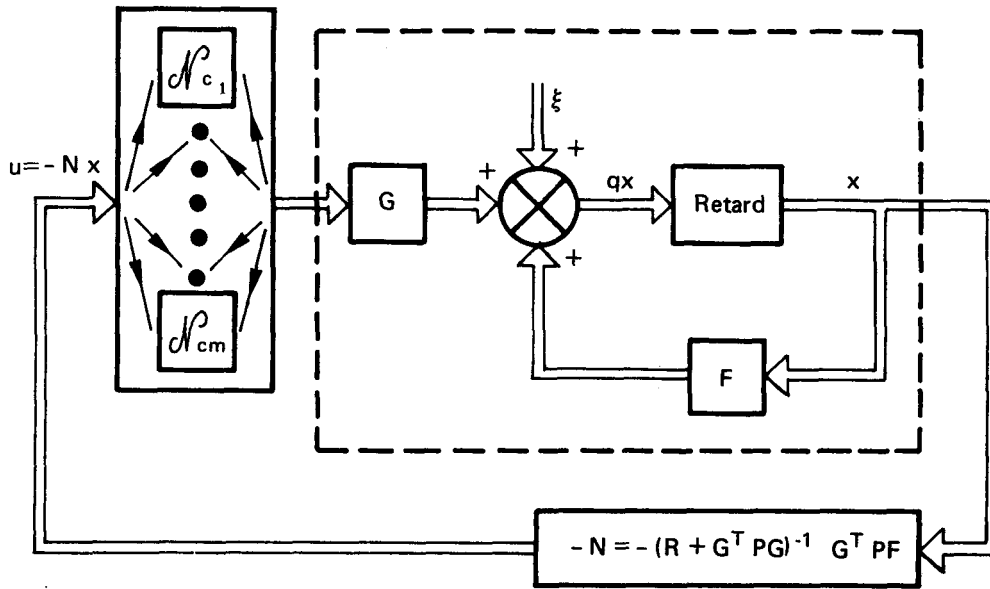


Fig. 14 – Système perturbé à commande nominale optimale.

Soit $R = \text{diag}[r_i]_{1 \leq i \leq m} \in \mathbf{R}^{m \times m}$.

Corollaire. Marge de gain et marge de phase multivariables [4-8] :

Soit :
$$a_i = \sqrt{\frac{r_i}{r_i + \lambda_{\max}(G^T P G)}}, \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

Si, $\forall i (i = 1, 2, \dots, m)$,

Graphes (\mathcal{N}_{c_i}) est intérieur au Cône $\left(\frac{1}{1-a_i^2}, \frac{a_i}{1-a_i^2} \right)$,

alors le système (III.16) muni du retour d'état optimal (III.19, III.22) est stable à gain fini en boucle fermée.

Si \mathcal{N}_{c_i} est un opérateur linéaire stationnaire à gain fini admettant pour transformée en $z, L_i(z)$ ($i = 1, 2, \dots, m$), la condition suffisante du théorème est vérifiée si, $\forall i (i = 1, 2, \dots, m)$,

$$\{ L_i(z \triangleq e^{j\theta}) \in \mathcal{C} \mid \theta \in [0, \pi] \}$$

est intérieur au cercle de rayon $(a_i / (1 - a_i^2))$ centré au point, $(1 / (1 - a_i^2)) + j0$, dans le plan complexe (III.23).

De plus si $L_i(z) = K_i$ (gain pur), alors cette condition se traduit par :

$$1 / (1 + a_i) \leq K_i \leq 1 / (1 - a_i), \quad \forall i (i = 1, 2, \dots, m)$$

Si par contre $L_i(z) = \exp(j\varphi_i)$ (déphasage pur) alors la condition devient :

$$|\varphi_i| \leq 2 \arcsin(a_i/2), \quad \forall i (i = 1, 2, \dots, m)$$

La traduction de (III.23) sous la forme de lieux aidant à la synthèse de l'asservissement est décrite par la Figure 15 (cf. [48], Chapitre 4)

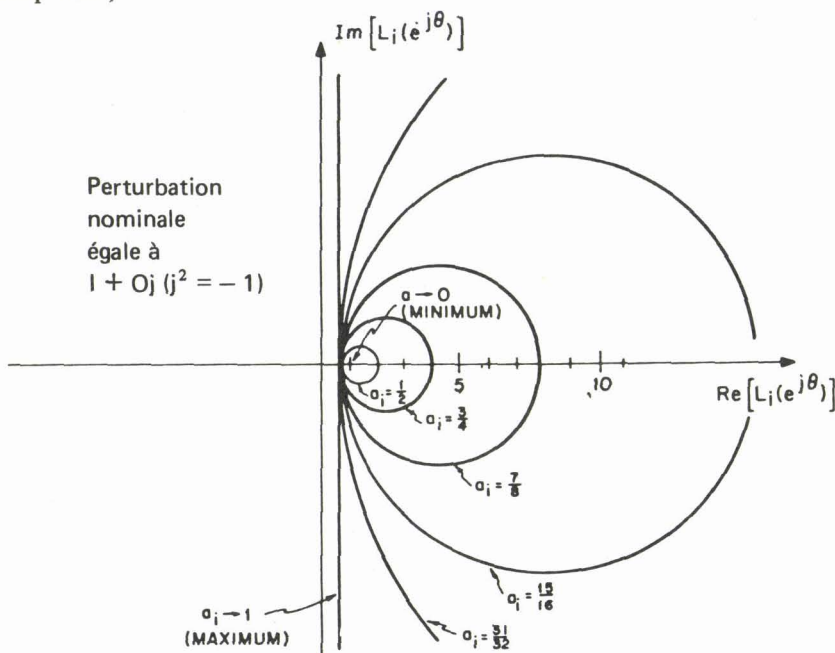


Fig. 15 – Lieux des cercles de Safonov.

La Figure 15 représente des cercles de rayon $(a_i/1 - a_i^2)$ centrés au point $(1/1 - a_i^2) + j0$ pour différentes valeurs de a_i . Les quantités a_i dépendent du système contrôlé et des matrices servant à l'optimisation des gains, la stabilité du système, perturbé « diagonalement » par $(\mathcal{N}_{Ci})_{1 \leq i \leq m}$, est assurée si le lieu de Nyquist de chaque perturbation $L_i(z)$ est intérieur au « cercle de robustesse » correspondant.

Lorsque $\lambda_{\max}(G^T P G) \ll \lambda_{\min}(R)$, condition réalisée lorsque le processus (III.16) modélise un système continu échantillonné à une période d'échantillonnage très petite, la quantité a_i du Corollaire énoncé plus haut devient $a_i \simeq 1, \forall i (i = 1, 2, \dots, m)$.

Dans ce cas, si la perturbation \mathcal{N}_{Ci} est un gain pur K_i ,

$$1/2 \leq K_i, \quad \forall i (i = 1, 2, \dots, m)$$

ou si elle représente un déphasage pur φ_i ,

$$|\varphi_i| \leq 2 \arcsin(1/2) = 60^\circ, \quad \forall i (i = 1, 2, \dots, m)$$

et les inéquations ci-dessus assurent une marge de gain infinie, une tolérance de réduction de gain de 50% et une marge de phase de 60° .

Par conséquent, $\lambda_{\max}(G^T P G) \ll \lambda_{\min}(R)$ est révélateur d'un bon choix de la période d'échantillonnage conférant au système contrôlé des propriétés minimales de robustesse.

Une motivation majeure de cette Thèse est d'étendre ces résultats pratiques ou de fournir d'autres moyens de quantifier numériquement les marges de stabilité dans les cas plus réalistes où :

- la perturbation \mathcal{N}_C n'est pas « diagonale »;
- la matrice R n'est pas diagonale;
- une perturbation dynamique affecte à la fois la chaîne de mesure et de commande.

III.4. – ROBUSTESSE STRUCTURELLE GÉNÉRALISÉE VIS-À-VIS D'ÉLÉMENTS DYNAMIQUES DANS LA CHAÎNE DE RETOUR

III.4.1. – Préliminaires : Généralisation du critère de Lyapounov aux systèmes linéaires à retour d'état dynamique.

Considérons le système linéaire :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= F x_k + G u_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \\ x_0 &\text{ donné et } x_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_-^*, \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

où $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x \in l_{2e}^n$ et $u \in l_{2e}^m$, et le retour linéaire stationnaire dynamique :

$$u = -\mathcal{C} x, \quad (\text{III.25})$$

où \mathcal{C} est un opérateur non anticipatif, dynamique, linéaire, stationnaire, défini par une relation appelée « convolution discrète », et admettant pour transformée en z la matrice de transfert ⁽¹⁾ $C(z)$. \mathcal{C} est défini à tout instant $k \in \mathbb{Z}_+$ par :

$$u_k = -(\mathcal{C} x)_k = -\sum_{i=0}^k C(k-i) x_i, \quad (\text{III.26})$$

avec $\forall i > k$, $C(k-i) = 0$, où le noyau $C(k) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ caractérise la réponse impulsionnelle de l'opérateur \mathcal{C} .

Muni du retour d'état (III.25), le système (III.24) est décrit par la forme réduite équivalente :

$$x_{k+1} = F x_k - (G \mathcal{C} x)_k = (F - G \mathcal{C}) x_k = (\mathcal{D} x)_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \quad (\text{III.27})$$

où $\mathcal{D} \stackrel{\Delta}{=} F - G \mathcal{C}$ est un opérateur de convolution discrète, dynamique, linéaire, stationnaire, et non anticipatif. En effet, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$,

$$x_{k+1} = \sum_{i=0}^k (F \delta_{k,i} - G C(k-i)) x_i,$$

où $F \delta_{k,k} - G C(k)$ est le noyau ou la réponse impulsionnelle de \mathcal{D} et où $\delta_{k,i}$ est le symbole de Kronecker ($\delta_{k,i} = 1$ si $k=i$ et $\delta_{k,i} = 0$ si $k \neq i$). De plus, la transformée en z de \mathcal{D} est la matrice (cf. [71] et Annexe D, Section D, 3)

$$\Gamma(z) = F - G C(z). \quad (\text{III.28})$$

Une condition suffisante de stabilité du système (III.24, III.25) est obtenue en postulant comme fonction quadratique la quantité réelle,

$$V_\tau \in \mathbb{Z}_+, \quad V(x)_\tau = \sum_{i=0}^{\tau} x_i^* P x_i \quad (2), \quad (\text{III.29})$$

où $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ est une matrice hermitienne semi définie positive, et en étudiant le signe de la quantité :

$$\Delta V_\tau \stackrel{\Delta}{=} V(x)_{\tau+1} - V(x)_\tau, \quad (\text{III.30})$$

lorsque l'état x est donné par le système réduit (III.27).

⁽¹⁾ cf. Annexe D, Sections D, 2 et D, 3.

⁽²⁾ Ici $x^* = x^T$ puisque $x \in l_{2e}(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^n)$.

Théorème 1 : Le système dynamique, linéaire, stationnaire, autonome (III.27) ou le processus à retour d'état causal (III.24, III.25) est attractif ⁽¹⁾ s'il existe deux matrices hermitiennes $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et $D_0 \in \mathbb{C}^{n \times n}$, semi définies positives, telles que :

(i) le système soit détectable ⁽²⁾ par $D_0^{1/2}$.

(ii) $\forall z = e^{j\theta} \in \mathcal{E}_1, \theta \in [0, \pi], \Gamma^*(z) \bar{P} \Gamma(z) - \bar{P} \leq -D_0$.

Démonstration du Théorème 1 :

Par développement de (III.29, III.30) en tenant compte de (III.27), $\forall \tau \in \mathbb{Z}_+$,

$$\begin{aligned} \Delta V_\tau &= x_0^* P x_0 + \sum_{i=1}^{\tau+1} x_i^* P x_i - \sum_{i=0}^{\tau} x_i^* P x_i \\ &= x_0^* P x_0 + \sum_{j=0}^{\tau} x_{j+1}^* P x_{j+1} - \sum_{i=0}^{\tau} x_i^* P x_i \\ &= x_0^* P x_0 + \sum_{j=0}^{\tau} (\mathcal{D}x)_j^* P (\mathcal{D}x)_j - \sum_{i=0}^{\tau} x_i^* P x_i \\ &= x_0^* P x_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{P}_\tau((\mathcal{D}x)_j^*) P \mathcal{P}_\tau((\mathcal{D}x)_j) - \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}_\tau(x_i^*) P \mathcal{P}_\tau(x_i), \end{aligned}$$

où \mathcal{P}_τ est l'opérateur de troncature (cf. Section III,3.1). Puisque \mathcal{D} est non anticipatif ($\mathcal{P}_\tau \mathcal{D} = \mathcal{D} \mathcal{P}_\tau, \mathcal{D} \mathcal{P}_\tau \Rightarrow \forall \tau \in \mathbb{Z}_+, \mathcal{P}_\tau(\mathcal{D}x) = \mathcal{D}x_\tau$), il vient :

$$\Delta V_\tau = x_0^* P x_0 + \sum_{i=0}^{\infty} (\mathcal{D}x_\tau)_i^* P (\mathcal{D}x_\tau)_i - \sum_{i=0}^{\infty} x_{\tau+i}^* P x_{\tau+i}, \quad (\text{P1.1})$$

où $x_\tau = \mathcal{P}_\tau(x)$.

Soit le vecteur $s_\tau = \mathcal{D}x_\tau$ admettant pour transformée en z la quantité $S_\tau(z) = \Gamma(z) X_\tau(z)$. Avec cette nouvelle notation, une expression équivalente à (III.30) est :

$$\Delta V_\tau = x_0^* P x_0 + \sum_{i=0}^{\infty} s_{\tau+i}^* P s_{\tau+i} - \sum_{i=0}^{\infty} x_{\tau+i}^* P x_{\tau+i},$$

soit, d'après les résultats de l'annexe D, Section D,1 :

$$\begin{aligned} \Delta V_\tau &= x_0^* P x_0 + (1/2\pi j) \int_{\mathcal{E}_1} S_\tau^*(z) \bar{P} S_\tau(z) z^{-1} dz - \int_{\mathcal{E}_1} X_\tau^*(z) \bar{P} X_\tau(z) z^{-1} dz \\ &= x_0^* P x_0 + (1/2\pi j) \int_{\mathcal{E}_1} X_\tau^*(z) (\Gamma^*(z) \bar{P} \Gamma(z) - \bar{P}) X_\tau(z) z^{-1} dz. \end{aligned}$$

La condition suffisante du Théorème 1 étant vérifiée :

$$\Delta V_\tau \leq x_0^* P x_0 - (1/2\pi j) \int_{\mathcal{E}_1} X_\tau^*(z) D_0 X_\tau(z) z^{-1} dz \stackrel{\Delta}{=} x_0^* P x_0 - \sum_{i=0}^{\infty} x_{\tau+i}^* D_0 x_{\tau+i}. \quad (\text{P1.2})$$

Puisque par ailleurs, $\forall \tau \in \mathbb{Z}_+$:

$$\Delta V_\tau = \sum_{i=0}^{\tau+1} x_i^* P x_i - \sum_{i=0}^{\tau} x_i^* P x_i = x_{\tau+1}^* P x_{\tau+1} \geq 0, \quad (\text{cf. (III.30)})$$

⁽¹⁾ La propriété d'attractivité est définie en Annexe E

⁽²⁾ Il s'agit de la détectabilité entrée-sortie définie en Section III,3.1. Le processus (III.22) est détectable par l'opérateur linéaire $D_0^{1/2}$.

on obtient, $\forall \tau \in \mathbb{Z}_+$:

$$0 \leq \Delta V_\tau \leq x_0^* P x_0 - \sum_{i=0}^{\tau} x_{\tau i}^* D_0 x_{\tau i},$$

soit :

$$\sum_{i=0}^{\tau} x_i^* D_0 x_i \leq x_0^* P x_0. \tag{P1.3}$$

L'état initial x_0 et la matrice $P \geq 0$ étant donnés, la quantité $x_0^* P x_0$ réelle et positive est majorée par $\|x_0\|_E^2 \|P\|_S$. L'inéquation (P1.3) signifie donc que la série de terme général $\|D_0^{1/2} x_i\|_E^2$, réel positif, est majorée par $\|x_0\|_E^2 \|P\|_S$ et converge, donc :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \|D_0^{1/2} x_i\|_E^2 < +\infty.$$

Or le système est supposé détectable par $D_0^{1/2}$; par conséquent :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \|x_i\|_E^2 \triangleq \sum_{i=0}^{+\infty} x_i^* x_i < +\infty \tag{P1.4}$$

Cette dernière expression montre que la série de terme général $\|x_i\|_E^2$ est convergente et que la suite (x_i) est telle que $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \|x_\tau\|_E = 0$ ⁽¹⁾.

Il résulte alors de ce développement :

$$\exists \delta_1 > 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \|x_0\|_E < \delta_1 \implies (\forall \varepsilon > 0, \exists T(\varepsilon) > 0, \forall \tau \in \mathbb{Z}_+, \tau > T(\varepsilon) \implies \|x_\tau\|_E < \varepsilon),$$

qui est la condition d'attractivité rappelée en Annexe E.

Le Théorème 1 généralise le Lemme 12.2' (Critère de Lyapounov) de Wonham [20], démontré pour un asservissement multivariable discret à retour d'état non dynamique. Dans ce cas en effet, si l'opérateur \mathcal{D} défini par (III.27) a un noyau de la forme $D \delta_{k,k} = D$, où $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice constante, l'équation (III.27) se réduit à :

$$x_{k+1} = D x_k. \tag{III.31}$$

En supposant alors que $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $D_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ soient deux matrices symétriques semi définies-positives et que le processus (III.31) soit détectable par $D_0^{1/2}$, la condition suffisante de stabilité (ii) du Théorème 1 devient :

$$D^T P D - P \leq -D_0,$$

qui est le résultat de [20].

Un théorème moins général mais plus pratique d'utilisation, ne supposant pas que le système est détectable par $D_0^{1/2}$, est maintenant proposé.

Théorème 2 : Le système dynamique, linéaire, stationnaire, autonome (III.27) ou le processus à retour d'état causal (III.24, III.25) est asymptotiquement stable s'il existe deux matrices hermitiennes $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et $D_0 \in \mathbb{C}^{n \times n}$, définies positives, telles que : $\forall z = e^{j\theta} \in \mathcal{E}_1, \theta \in [0, \pi], \Gamma^*(z) \bar{P} \Gamma(z) - \bar{P} \leq -D_0$. (III.32)

Démonstration du Théorème 2 :

Les développements de la démonstration du Théorème 1 sont repris à partir de l'équation (P1.3) avec les nouvelles hypothèses $P > 0$ et $D_0 > 0$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\forall i \in [0, \tau] \cap \mathbb{Z}_+$:

$$\varepsilon x_i^* x_i = \varepsilon \|x_i\|_E^2 \leq x_i^* D_0 x_i. \tag{P2.1}$$

Puisque :

$$D_0 > 0, \quad \frac{\|x_i\|_E^2}{\|D_0^{-1}\|_S} \leq x_i^* D_0 x_i; \tag{P2.2}$$

une condition suffisante pour que (P2.1) soit vérifiée est donc :

$$\varepsilon \|x_i\|_E^2 \leq \frac{\|x_i\|_E^2}{\|D_0^{-1}\|_S} \quad \text{ou} \quad \varepsilon \leq \frac{1}{\|D_0^{-1}\|_S}.$$

⁽¹⁾ $\|x_\tau\|_E$ signifie ici la norme euclidienne de l'élément x_τ ($\in \mathbb{R}^n$) de la suite x .

Ceci signifie que ε doit être choisi plus petit que l'inverse de la plus grande valeur propre de $D_0^{-1} D_0^{-1*} = (D_0 D_0^*)^{-1}$ ou que :

$$\varepsilon \leq \lambda_{\min} (D_0 D_0^*);$$

ce choix est toujours possible puisque D_0 est donnée.

Les expressions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \varepsilon \sum_{i=0}^{\tau} \|x_i\|_{\varepsilon}^2 &\leq \sum_{i=0}^{\tau} x_i^* D_0 x_i \leq x_0^* P x_0 \\ \text{et : } \sum_{i=0}^{\tau} \|x_i\|_{\varepsilon}^2 &\leq (x_0^* P x_0) / \varepsilon \leq \|x_0\|_{\varepsilon}^2 \|P\|_s / \varepsilon \end{aligned} \quad (\text{P2.3})$$

L'état initial x_0 , la matrice $P > 0$ et $\varepsilon(D_0)$, où $D_0 > 0$ étant donnés, la série de terme général $\|x_i\|_{\varepsilon}^2$, réel et positif est majorée et donc converge, par conséquent :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \|x_i\|_{\varepsilon}^2 < +\infty.$$

Cette dernière expression montre que la série de terme général $\|x_i\|_{\varepsilon}^2$ est convergente et que la suite (x_i) est telle que $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|x_{\tau}\|_{\varepsilon} = 0$ ⁽¹⁾.

Il en découle l'assertion suivante :

$$\exists \delta_1 > 0, \forall x_0 \in \mathbf{R}^n, \|x_0\|_{\varepsilon} \leq \delta_1 \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists T(\varepsilon) > 0, \forall \tau \in \mathbf{Z}_+, \tau > T(\varepsilon) \Rightarrow \|x_{\tau}\|_{\varepsilon} < \varepsilon),$$

qui est la condition d'attractivité rappelée en Annexe E.

Montrons également que le processus (III.24) muni du retour d'état dynamique (III.25) mis sous la forme réduite (III.27) est stable d'après la condition (P1.3). De la vérification de l'inégalité (P2.3), issue de (P1.3), il résulte ainsi que :

$$\forall \varepsilon_1 > 0, \|x_0\|_{\varepsilon} < \frac{\varepsilon_1^{1/2} \varepsilon_1}{\|P\|_s^{1/2}} \Rightarrow \forall \tau \in \mathbf{Z}_+, \|x_{\tau}\|_{\varepsilon} \leq \left[\sum_{i=0}^{\tau} \|x_i\|_{\varepsilon}^2 \right]^{1/2} < \varepsilon_1,$$

$$\text{soit encore : } \forall \varepsilon_1 > 0, \exists \delta(\varepsilon_1), \|x_0\|_{\varepsilon} < \delta(\varepsilon_1) \Rightarrow \forall \tau \in \mathbf{Z}_+, \|x_{\tau}\|_{\varepsilon} < \varepsilon_1, \text{ ⁽¹⁾},$$

qui prouve la stabilité au sens de Lyapounov (cf. Annexe E) du processus (III.27).

Par conséquent, la condition suffisante (III.32) du Théorème 2 assure que le système (III.27) est à la fois stable et attractif pour toute condition initiale x_0 ; il est donc asymptotiquement stable (cf. Annexe E, [57, 58, 72]).

Remarque : La condition fréquentielle commune aux deux théorèmes qui viennent d'être énoncés peut être démontrée pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| \geq 1$, $z \in \gamma$, où γ est un contour fermé (par exemple un cercle), contenant les singularités (pôles) des quantités intervenant dans le Théorème de Parseval et dans les expressions qui en découlent (cf. Annexe D).

Dans l'étude spectrale qui est faite ici, il est suffisant de vérifier les inégalités de ces deux théorèmes pour $z \in \mathcal{C}_1$ (cercle unité). En effet, le problème considéré ici est celui de la *stabilité d'un processus* en boucle fermée. Il est donc nécessaire de supposer que l'élément dynamique \mathcal{C} de la chaîne de retour est à *stabilité interne* de telle sorte que les pôles z_p de la quantité correspondante $C(z)$ dans le domaine opérationnel (de la Transformée en z) vérifient $|z_p| < 1$. Cette condition est supposée vérifiée sur la base d'arguments physiques liés à la nature des capteurs et actionneurs placés dans la chaîne de retour. De manière abstraite, il serait toutefois licite de considérer des perturbations à dynamique interne instable mais telles que le système contrôlé soit stable par une action de stabilisation réciproque.

Il est clair que la condition suffisante de stabilité (III.32) est équivalente à la vérification de la positivité d'un opérateur qui s'écrirait :

$$\bar{P} - \Gamma^*(z) \bar{P} \Gamma(z) - D_0.$$

Une méthode pour vérifier la semi définie-positivité de cet opérateur dans le cas où $\Gamma(z)$ est lui-même un *opérateur rationnel*, c'est-à-dire une matrice dont les éléments sont des fractions rationnelles à coefficients réels, est d'utiliser les résultats de la théorie des opérateurs rationnels positifs (cf. Faurre, Clerget et Germain [28]).

(1) $\|x_{\tau}\|_{\varepsilon}$ signifie ici la norme euclidienne de l'élément $x_{\tau} (\in \mathbf{R}^n)$ de la suite x .

En effet, le Théorème sur les fonctions rationnelles non négatives (cf. [28], p. 121) s'étend sans difficultés au cas discret. On a le résultat suivant :

La fonction rationnelle $Z(z)$ est réelle non négative si et seulement si :

- (i) $Z(z)$ n'a pas de pôles dans le domaine d'analyticité $|z| > 1$,
- (ii) $Z(e^{j\theta}) + Z^*(e^{j\theta}) \geq 0$ pour tout $\theta \in [0, \pi]$ à l'exception des réels θ pour lesquels $e^{j\theta}$ est p le de $Z(\cdot)$.

(iii) Si $\rho e^{j\theta_0}$, $\rho \in \mathbb{R}_+$, fini ou infini, est p le de $Z(\cdot)$, il est simple et le résidu correspondant est une matrice hermitienne semi définie positive.

Or on peut écrire $Z(z) = 1/2[\Gamma^*(z)\bar{P}\Gamma(z) + \bar{P} - D_0]$ et la fonction spectrale :

$$\Gamma^*(z) \bar{P} \Gamma(z) + \bar{P} - D_0 = Z(z) + Z^*(z),$$

sera semi-positive si $Z(z) \geq 0$ a les propriétés (i), (ii) et (iii) du résultat énoncé précédemment.

Le Théorème 2 est cependant plus général, ne requérant pas que les éléments $Z(z)$ soient des fractions rationnelles.

III.4.2. – Stabilité des processus non linéaires à retour d'état dynamique. Marge de stabilité

La formalisation des processus récurrents discrets à dynamique non linéaire utilisée ici est celle de Safonov [48], qui a été présentée au paragraphe III.3.3 (cf.  quations (III.16-III.18)).

Dans cette section, le système (III.16) est encore supposé muni d'un retour dynamique défini par (III.25-III.26). Des conditions suffisantes de stabilité sont donc recherchées lorsque le processus (III.16) subit les effets de perturbations extérieures. Le système contrôlé est alors décrit ⁽¹⁾ par :

$$qx = (\mathcal{K} - \mathcal{B} \circ \mathcal{E})x + \xi, \tag{III.33}$$

la loi de commande (III.25)  tant supposée assurer la stabilité asymptotique du système linéarisé (III.18) associé à (III.16) en l'absence de perturbations additives ($\eta = 0$).

Une vue synthétique de l'asservissement multivariable décrit par (III.17, III.25) ou (III.33) est donnée par la Figure 16.

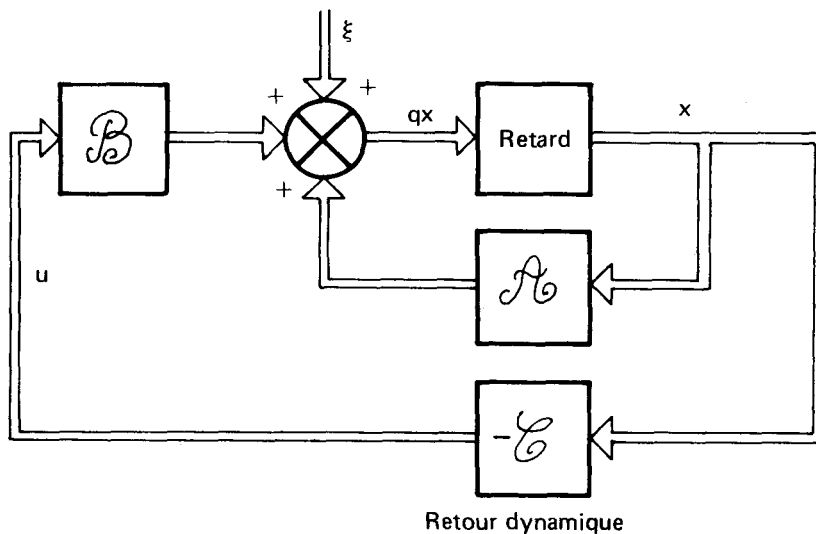


Fig. 16 – Schéma général de l'asservissement.

⁽¹⁾ Le symbole \circ dénote ici la composition de deux opérateurs.

Ce schéma se simplifie notablement en considérant la structure équivalente représentée sur la Figure 17, destinée à mettre en évidence les relations empruntées aux formulations de Safonov [48,52], détaillées dans la Section III,3.2.

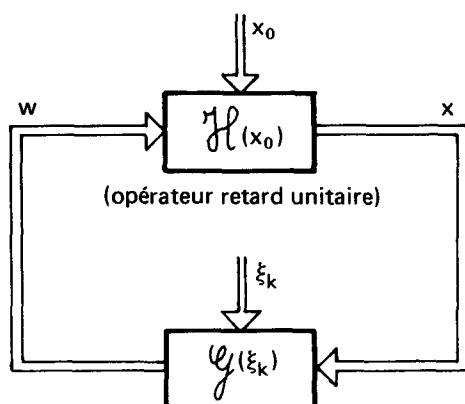


Fig. 17 – Schéma relationnel équivalent.

Il en découle les relations suivantes, équivalentes à (III.33) :

$$\begin{aligned} w_k &= ((\mathcal{K} - \mathcal{B} \circ \mathcal{C})x)_k + \xi_k \triangleq (\mathcal{G}(\xi_k)x)_k \\ x_k &\triangleq \{x_0, k=0; w_{k-1}, k \geq 1\} \triangleq (\mathcal{F}(x_0)w)_k, \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

où $w \in \mathbb{L}_2^e$ et où $\mathcal{G}(\xi_k)$ et $\mathcal{H}(x_0)$ sont des opérateurs non linéaires.

L'utilisation des concepts relationnels et du Graphe d'un opérateur non linéaire conduit au système suivant :

$$\begin{aligned} (x, w) &\in \overline{\mathcal{G}(\xi_k)} \\ (w, x) &\in \overline{\mathcal{F}(x_0)}. \end{aligned} \quad (\text{III.35})$$

Dans ce contexte, l'action de l'état initial x_0 est considérée comme celle d'une perturbation additive.

Par application conjointe du « Théorème du secteur de stabilité de Safonov » (cf. Section III,3.2) et du Théorème 2 au système (III.34, III.35) considéré, à retour dynamique, le résultat suivant est proposé.

Théorème 3 : Soient $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et $D_0 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ deux matrices hermitiennes, définies positives, et satisfaisant, $\forall z = e^{j\theta} \in \mathcal{C}_1, \theta \in [0, \pi]$:

$$(F - GC(z))^* \bar{P} (F - GC(z)) - \bar{P} \leq -D_0. \quad (\text{III.36})$$

Si $\forall x \in \mathbb{L}_2^e, \forall u \in \mathbb{L}_2^m$:

$$\begin{aligned} &\text{Graphe } (P^{1/2} (F^0 - G \mathcal{C} + (\mathcal{K} - F^0) - (\mathcal{B} - G^0) \circ \mathcal{C})) \\ &\text{strictement intérieur au Cône } (0, P^{1/2}), \end{aligned} \quad (\text{III.37})$$

alors le système non linéaire dynamique (III.17), muni du retour linéaire stationnaire (III.25) est stable à gain fini en boucle fermée.

Démonstration du Théorème 3 :

Muni de la même loi de commande (III.25) le système linéaire non perturbé (III.24) ($\xi \equiv 0$) associé à (III.17) est stable en boucle fermée si (cf. Théorème 2 et Équation (III.28)) :

$$\forall z \in \mathcal{C}_1, (F - GC(z))^* \bar{P} (F - GC(z)) - \bar{P} \leq -D_0$$

Les perturbations ξ_k et x_0 qui agissent sur le système (III.34) étant additives, les développements qui suivent peuvent être faits sur le système non perturbé ($\xi = x_0 \equiv 0$). En effet, dans ce cas le graphe de $\mathcal{G}(\xi_k)$ est stable à gain fini par rapport au graphe de $\mathcal{G}(0)$, ce gain valant au plus 1 (cf. Remarque 2, Section III,3.2). De même $\overline{\mathcal{H}(x_0)}$

est stable à gain fini par rapport à $\overline{\mathcal{H}}(0)$. Il est aisé de vérifier ici que, pour toute perturbation additive f quelconque, le gain $k > 0$ vaut au plus 1 car celui-ci doit satisfaire l'inégalité suivante pour tout τ et tout x (cf. Annexe C) :

$$\|f\|_{\tau} \leq k \| (x, f) \|_{\tau} \stackrel{\Delta}{=} k (\|x\|_{\tau}^2 + \|f\|_{\tau}^2)^{1/2}.$$

Supposons vérifiée la condition (III.37), équivalente à Graphe $[P^{1/2}(\mathcal{A} - \mathcal{B} \circ \mathcal{C})]$ strictement à l'intérieur du Cône $(0, P^{1/2})$, où :

$$\text{Cône}(0, P^{1/2}) \stackrel{\Delta}{=} \text{Sect} \begin{bmatrix} I & -P^{1/2} \\ I & P^{1/2} \end{bmatrix},$$

d'après les définitions de secteur et de cône multivariables (cf. Section III,3.2).

Les règles de calculs sur les secteurs rappelées en Annexe F étant compatibles, il vient le résultat suivant :

$$\{ \text{Graphe}(\mathcal{G}(0)) \}^I = (\overline{\mathcal{K} - \mathcal{B} \circ \mathcal{C}})^I$$

est strictement intérieur au :

$$\text{Sect} \left(\begin{bmatrix} I & -P^{1/2} \\ I & P^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \right) = \text{Sect} \begin{bmatrix} -P^{1/2} & P^{1/2} \\ P^{1/2} & P^{1/2} \end{bmatrix}$$

Par ailleurs, le graphe $\overline{\mathcal{H}}(0)$ de $\mathcal{H}(0)$ est strictement extérieur à ce même secteur. En effet, d'après la définition (III.34-35) de $\mathcal{H}(0)$, $\forall \tau \in \mathbb{Z}_+$, $\forall (w, x) \in \text{Graphe}(\mathcal{H}(x_0))$:

$$\begin{aligned} \text{Re} \left\{ \sum (x_0) \right\} &\stackrel{\Delta}{=} \text{Re} \left\{ \langle -P^{1/2} x + P^{1/2} w, P^{1/2} x + P^{1/2} w \rangle_{\tau} \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ -\langle P^{1/2} x, P^{1/2} x \rangle_{\tau} + \langle P^{1/2} w, P^{1/2} w \rangle_{\tau} - 2j \text{Im}(\langle P^{1/2} x, P^{1/2} w \rangle_{\tau}) \right\} \quad (j^2 = -1) \\ &= -\sum_{i=0}^{\tau} x_i^* P x_i + \sum_{i=0}^{\tau} w_i^* P w_i \\ &= -x_0^* P x_0 - \sum_{i=1}^{\tau} x_i^* P x_i + \sum_{i=0}^{\tau} w_i^* P w_i \\ &= -x_0^* P x_0 - \sum_{i=1}^{\tau} w_{i-1}^* P w_{i-1} + \sum_{i=0}^{\tau} w_i^* P w_i \quad (x_i = w_{i-1}, \forall i \geq 1, \text{ cf. (III.34)}) \\ &= -x_0^* P x_0 + w_{\tau}^* P w_{\tau}. \end{aligned}$$

En particulier,

$$\text{Re} \left\{ \sum (0) \right\} = w_{\tau}^* P w_{\tau} > 0 \quad \text{car } P > 0,$$

$\overline{\mathcal{H}}(0)$ est donc strictement extérieur au Sect $\begin{bmatrix} -P^{1/2} & P^{1/2} \\ P^{1/2} & P^{1/2} \end{bmatrix}$. Par application du théorème du secteur de stabilité de Safonov (cf. Section III,3.2), le Théorème 3 est prouvé.

Le théorème est une généralisation du Lemme 4.1 de Safonov [48], rappelé en Section III,3.3, où un retour d'état non linéaire mais non dynamique est considéré. L'originalité du présent résultat est cependant de prendre en compte dans la chaîne de retour tout élément non modélisé pouvant présenter un effet de « mémoire » (sans anticipation toutefois).

Les conditions (III.36) et (III.37) donnent à la fois une condition algébrique dans le domaine fréquentiel discret (puisque $z = e^{j\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ est un point courant du cercle unité) et une condition géométrique dans le domaine temporel. La condition (III.36) assure que, muni de la même loi de commande (III.25) le système linéaire non perturbé (III.24) est asymptotiquement stable en boucle fermée. Une classe importante de perturbations multiplicatives, modélisées par l'opérateur \mathcal{C} (ou la matrice $C(z)$ dans le domaine fréquentiel) est ainsi quantifiée par l'inégalité (III.36). Cette remarque sera développée de façon détaillée dans les sections suivantes.

Lorsque (III.37) est vérifiée, les quantités $\mathcal{A} - F^0$ et $\mathcal{B} - G^0$ caractérisent la tolérance d'un défaut de conformité entre le système non linéaire dynamique $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ et le système linéaire associé (F, G) . On définit ainsi

la marge de stabilité (marge de phase et marge de gain implicites) du processus (III.33). Cette remarque sera exploitée dans la section suivante pour qualifier la *robustesse structurelle*.

Afin de mieux appréhender la nature de la « stabilité à gain fini » dont un exposé théorique a été donné à la Section III, 3, la signification du concept de stabilité externe est ici détaillée vis-à-vis du processus particulier (III.33). La condition suffisante de stabilité à gain fini (III.37) découle du « Théorème du secteur de stabilité de Safonov » (cf. Section III, 3.2 et [48]); par conséquent, la nature de cette stabilité résulte des théorèmes de complémentarité de Zames [53] et de séparation topologique (de l'espace produit $l_{2e}^n \times l_{2e}^n$) de Safonov [48]. Par définition [48], le système non linéaire (III.33) est « stable » en présence de perturbation ξ et de conditions initiales x_0 si, pour tout τ élément de \mathbf{Z}_+ ,

$$\forall (x, w) \in l_{2e}^n \times l_{2e}^n, \forall (\xi, v) \in l_{2e}^n \times l_{2e}^n, \quad (1)$$

$$\| (x, w) \|_{\tau} \triangleq (\| \mathcal{P}_{\tau} x \|^2 + \| \mathcal{P}_{\tau} w \|^2)^{1/2} \leq \Phi (\| (\xi, v) \|_{\tau}),$$

où Φ est une fonction continue strictement croissante et telle que $\Phi(0)=0$ (fonction de « classe \mathcal{X} »); de plus, si Φ est linéaire ($\forall (\xi, v) \in l_{2e}^n \times l_{2e}^n, \Phi(\|(\xi, v)\|_{\tau}) = k_1 \|(\xi, v)\|_{\tau}$, $k_1 \in \mathbf{R}_+$) (1) le processus est dit « stable à gain fini ». En d'autres termes, si la norme sur l'espace produit $l_{2e}^n \times l_{2e}^n$ des entrées (ξ_k) et (x_0) , considérées comme des perturbations pour le système, est finie, les « sorties » (x_k) et (w_k) sont également de norme finie. Cette définition de la stabilité relative à (III.33) et par conséquent à (III.35-36) est relativement originale; elle résulte de la démarche de type relationnelle de Safonov où les perturbations (ξ_k) et (x_0) sont considérées comme des « entrées » et les variables intermédiaires x et w comme des « sorties » (cf. Figure 17). Le lien entre ce type de stabilité entrée-sortie, plus particulièrement la stabilité à gain fini, et la stabilité asymptotique au sens de Lyapounov a été étudié par Willems [73] et Hill-Moylan [74]. Dans [73], l'étude de systèmes dynamiques non linéaires (2), décrits par une équation d'état, a révélé que les hypothèses minimales d'observabilité uniforme et d'atteignabilité de tout état suffisent pour que la stabilité (entrée-sortie) permette de conclure à la stabilité asymptotique globale. Un résultat analogue postulant la stabilité à gain fini conduit à la « stabilité asymptotique globale uniforme ». Dans [74], il est montré que la stabilité à gain fini implique la stabilité asymptotique locale si les hypothèses « dures » de [73], énoncées ci-dessus, sont remplacées par des propriétés locales de détectabilité et d'atteignabilité. Une étude moins générale, due à Anderson [75] montre que la stabilité asymptotique exponentielle de la partie homogène d'un processus linéaire instationnaire commandé est équivalente à la stabilité externe du processus vis-à-vis de ses entrées (commandes) et de ses sorties (mesures). D'autre part, l'application du « Principe de séparation topologique » de Safonov (cf. [48, 52]) à un système récurrent autonome excité par une condition initiale x_0 , et ne subissant aucune action extérieure ($\xi=0$), a permis de retrouver le théorème fondé sur le postulat d'une fonction de Lyapounov $V(x_k) \geq 0$ (cf. Kalman et Bertram [58]) telle que $V(x_{k+1}) - V(x_k) \leq 0$ assure la stabilité du système. Un résultat analogue, initialement énoncé par Kalman et Bertram [57], a été démontré dans le cas continu par Safonov [48].

III.4.3. – Robustesse structurelle généralisée des systèmes non linéaires munis d'un retour dynamique.

Sans perte de généralité, la dépendance explicite de l'opérateur $\mathcal{F}(v)$ d'un vecteur de paramètre v , introduit à la section II, 3, est désormais omise. Cet opérateur demeure, pour une valeur donnée de v , une fonction non linéaire de l_{2e}^n dans l_{2e}^n .

Un cas particulier pourrait être par exemple la représentation en « flèche » de Benrejeb *et al.* [76] où l'opérateur \mathcal{F} est de la forme $(\mathcal{F} x)_k = F(x_k) \cdot x_k$, $F(x_k)$ étant une matrice dont les éléments sont des fonctions non linéaires de l'état x_k (ici $v = x_k$).

Dans le but d'établir de nouveaux résultats de robustesse structurelle, une formulation modifiée du processus dynamique non linéaire (III.17) est maintenant proposée. L'expression mathématiquement équivalente, suivante est considérée :

$$q x = F x + G u^p + \mathcal{F} x + \beta$$

$$x_0 \text{ donnée et } x_k = 0, \forall k \in \mathbf{Z}_+^*, \quad (III.38)$$

(1) Où v est une suite définie par $v_0 = x_0$ et $\forall k \in \mathbf{Z}^*, v_k = 0, v \in l_{2e}^n$. Au lieu de noter (v_k) on écrira par abus (x_0) .

(2) Supposées différentiables (« smooth »), ce qui entraîne la continuité au sens de Lipschitz et la propriété de gain incrémental fini (cf. Section III,3.1).

où \mathcal{F} est un opérateur dynamique, non anticipatif, non linéaire tel que $\mathcal{F}0=0$, à laquelle on associe le retour linéaire dynamique (indice p signifiant « perturbé »)

$$u^p = - \mathcal{E} x \quad (\text{III.39})$$

Justification de la modélisation adoptée

Il avait été montré dans la section II, 3 qu'il n'était pas suffisant de rechercher une loi de commande optimale (de type « P.I. ») robuste vis-à-vis de perturbations extérieures constantes, mais que cette loi devait être également robuste vis-à-vis d'éléments dynamiques non modélisés dans les chaînes d'action et de mesure ainsi que vis-à-vis de perturbations structurelles. A cette occasion, ces différentes perturbations ont été formalisées à partir d'un processus linéarisé :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= F x_k + G u_k^p, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \\ x_0 &\text{ donné et } x_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_-^* \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

résultant de l'étude détaillée du problème de poursuite (cf. Sections II, 1 et II, 2).

Lorsque la dynamique de la chaîne de retour est donnée par l'équation opérationnelle :

$$u^p = - \mathcal{E}_c K \mathcal{E}_M x \stackrel{\Delta}{=} - \mathcal{E} x, \quad (\text{III.41})$$

où \mathcal{E} , \mathcal{E}_c et \mathcal{E}_M représentent des opérateurs linéaires de convolution, une équation représentant le système contrôlé est :

$$x_{k+1} = ((F - G \mathcal{E}) x)_k, \quad (\text{III.42})$$

ou, en écriture opérationnelle (cf. Section III,3.3, Équation (III.17)),

$$q x = F x - G \mathcal{E} x. \quad (\text{III.43})$$

Dans le cas où les perturbations structurelles sont prises en compte, le modèle établi à la Section II,3.2 et décrit par l'Équation (II.41) devient :

$$q x = (F - G K) x + \mathcal{F} x. \quad (\text{III.44})$$

La formulation adoptée revient donc à considérer le problème de la robustesse sous une forme globale, prenant en compte de manière *conjointe* les perturbations structurelles et multiplicatives dynamiques. Parce qu'il prend en considération une perturbation dans la chaîne de mesure (opérateur \mathcal{E}_M), le modèle (III.38-39) retenu tient compte des différentes critiques formulées vis-à-vis des résultats bibliographiques de robustesse, exposés en Section III, 2, en conformité avec la modélisation proposée récemment, dans le cas continu par Bourlès et Mercier [8 , 49 , 50 , 51].

La quantité $(\mathcal{F} x)_k$ représente une perturbation structurelle additive pouvant rendre compte à la fois des erreurs de modèle ou de linéarisation. β_k est une perturbation additive qui contient les actions extérieures ξ_k ainsi que des biais. Les matrices F et G sont celles du système linéaire (III.24) non perturbé ($\xi=0$) rendant compte du mouvement « local » linéarisé de (III.38) au voisinage d'un point de fonctionnement nominal.

Dans les développements qui suivent, seule la partie non dynamique de l'opérateur \mathcal{F} est prise en compte.

Sans pertes de généralité, G est supposée de rang maximum ; cette hypothèse est vérifiée lorsque G correspond à la matrice $[B^T 0]^T$ du système augmenté (II.8), associée au problème de poursuite robuste, B étant elle-même supposée de rang maximum. Pour pallier à la difficulté d'exploitation du résultat abstrait du Théorème 3, basé sur des inclusions de secteurs, le théorème qui suit permet de quantifier une classe de perturbations additives admissibles, conformes à la modélisation (III.38).

Théorème 4 : « Soit $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et $D_0 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ deux matrices hermitiennes définies positives et satisfaisant, $\forall z = e^{j\theta} \in \mathcal{C}_1$, $\theta \in [0, \pi]$, l'inégalité :

$$(F - GC(z))^* \bar{P} (F - GC(z)) - \bar{P} \leq -D_0 \quad (\text{III.45})$$

Si $\forall x \in l_{2e}^n - \{0_{l_{2e}^n}\}$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$,

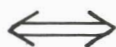
$$\frac{\|(\mathcal{F}x)_k\|_E^2}{\|x_k\|_E^2} + \frac{\|(\bar{P} + P)(F^0 - G\mathcal{G})\|}{\|P\|_S} \frac{\|(\mathcal{F}x)_k\|_E}{\|x_k\|_E} < \frac{1}{\|P\|_S \|D_0^{-1}\|_S} \quad (\text{III.46})$$

alors le système dynamique non linéaire (III.38) muni du retour linéaire dynamique (III.39) est stable à gain fini ⁽¹⁾ en boucle fermée ».

Démonstration du Théorème 4 :

Par application du Théorème 3 au système non-linéaire (III.38), avec ici $\mathcal{A}x = F^0x + \mathcal{F}x = Fx + \mathcal{F}x$ et $\mathcal{B}x = G^0x = Gx$, les conditions (III.36) et (III.37) se transcrivent ⁽²⁾ d'une part dans l'équation (III.45) portant sur la partie linéaire et d'autre part dans la condition géométrique $\text{Graphe}(P^{1/2}(F^0 - G\mathcal{G} + \mathcal{F}))$ strictement à l'intérieur du Cône $(0, P^{1/2})$. Par définition (cf. Section III,3.2), cette dernière condition équivaut à :

$$\forall x \in l_{2e}^n - \{0_{l_{2e}^n}\}, \forall \tau \in \mathbb{Z}_+, \text{Re} \{ \langle y - P^{1/2}x, y + P^{1/2}x \rangle_\tau \} < 0,$$



$$\text{Re} \{ \langle y, y \rangle_\tau - \langle P^{1/2}x, P^{1/2}x \rangle_\tau + 2j \text{Im} \langle y, P^{1/2}x \rangle_\tau \} < 0,$$

c'est-à-dire :

$$\langle y, y \rangle_\tau - \langle P^{1/2}x, P^{1/2}x \rangle_\tau < 0, \quad (\text{P4.1})$$

où $y = P^{1/2}(F^0 - G\mathcal{G} + \mathcal{F})x$.

Posons alors $t = \mathcal{F}x$ et $d = \mathcal{D}x$ avec $(t, d) \in l_{2e}^n \times l_{2e}^n$ et $\mathcal{D} = F^0 - G\mathcal{G}$ (cf. Section III,4.1, équation (III.27)), il vient alors :

$$y = P^{1/2}(\mathcal{D}x + t) = P^{1/2}(d + t);$$

omettant l'indice récurrent i , $\langle y, y \rangle_\tau$ se développe suivant :

$$\begin{aligned} \langle y, y \rangle_\tau &= \sum_{t=0}^{\tau} \{ P^{1/2}(d+t) \}^* \{ P^{1/2}(d+t) \} \\ &= \sum_{t=0}^{\tau} \{ d^* P d + d^* P t + t^* P d + t^* P t \}, \\ &= \sum_{t=0}^{\tau} \{ d^* P d + t^* (P + \bar{P}) d + t^* P t \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{car : } d^* P t &= \langle P^{1/2}d, P^{1/2}t \rangle = \overline{\langle P^{1/2}t, P^{1/2}d \rangle} = \overline{t^* P d} = \overline{\bar{t}^T P d} = t^T \bar{P} d \\ &= t^T \bar{P} d = t^* \bar{P} d \end{aligned}$$

puisque $d \in l_{2e}(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^n)$ et $t \in l_{2e}(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^n)$. Il vient :

$$\langle y, y \rangle_\tau - \langle P^{1/2}x, P^{1/2}x \rangle_\tau = \sum_{t=0}^{\tau} \{ (\mathcal{D}x)^* P (\mathcal{D}x) - x^* P x + t^* (P + \bar{P}) d + t^* P t \}.$$

⁽¹⁾ Au même sens que dans le Théorème 3, la norme des variables intermédiaires x et w (cf. équations (III.35)) étant bornée par une fonction de classe \mathcal{X} des perturbations β et (x_0) .

⁽²⁾ On remarque en particulier que, du fait du caractère *additif* de la perturbation β , le graphe de $\mathcal{G}(\beta_k)$ est stable à gain fini (≤ 1) par rapport au graphe de $\mathcal{G}(0)$ (cf. Annexe C), ce qui permet d'appliquer le Théorème 3.

Puisque :

$$x_0^* P x_0 + \sum_{i=0}^{\tau} (\mathcal{D} x)^* P (\mathcal{D} x) - \sum_{i=0}^{\tau} x^* P x \leq x_0^* P x_0 - \sum_{i=0}^{\tau} x^* D_0 x$$

(cf. démonstration du Théorème 1, Équations (P1.1) et (P1.2)), il résulte que :

$$\langle y, y \rangle_{\tau} - \langle P^{n_2} x, P^{n_2} x \rangle_{\tau} \leq \sum_{i=0}^{\tau} \{ t^* P t + t^* (P + \bar{P}) d - x^* D_0 x \}. \quad (P4.2)$$

D'après (P4.2), une condition suffisante vérifiant (P4.1) est donc, $\forall i \in \mathbb{Z}_+$:

$$t^* P t + t^* (P + \bar{P}) d < x^* D_0 x. \quad (P4.3)$$

$$\begin{aligned} \text{Or : } |t^* P t + t^* (P + \bar{P}) d| &< |t^* P t| + |t^* (P + \bar{P}) d| \\ &\leq \|t\|_E^2 \|P\|_s + \|t\|_E \|(P + \bar{P}) \mathcal{D} x\|_E; \end{aligned}$$

Utilisant également l'inéquation (P2.2) (cf. Démonstration du Théorème 2), une condition suffisante pour que (P4.3) soit vérifiée est donc :

$$\|t\|_E^2 \|P\|_s + \|t\|_E \|(P + \bar{P}) (\mathcal{D} x)\|_E < \frac{\|x\|_E^2}{\|D_0^{-1}\|_s},$$

soit $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ ($k=i$),

$$\frac{\|(\mathcal{F} x)_k\|_E^2}{\|x_k\|_E^2} \frac{1}{\|P\|_s} \frac{\|((P + \bar{P})(F^0 - G \mathcal{E}) x)_k\|_E}{\|x_k\|_E} \frac{\|(\mathcal{F} x)_k\|_E}{\|x_k\|_E} < \frac{1}{\|P\|_s \|D_0^{-1}\|_s}$$

Par utilisation de la norme d'un opérateur linéaire (cf. [27], Chapitre 3), cette norme étant compatible avec les normes euclidiennes et spectrales, on obtient :

$$\forall x_k \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\frac{\|((P + \bar{P})(F^0 - G \mathcal{E}) x)_k\|_E}{\|x_k\|_E} < \|(P + \bar{P})(F^0 - G \mathcal{E})\| \triangleq \sup_{\substack{0 < \|x_k\|_E < \infty \\ k \in \mathbb{Z}_+}} \frac{\|((P + \bar{P})(F^0 - G \mathcal{E}) x)_k\|_E}{\|x_k\|_E}$$

ce qui démontre la condition (III.46) du Théorème 4.

Remarque : Si $\mathcal{F} = 0$ (absence de perturbations additives), alors (III.45) suffit pour assurer la stabilité asymptotique du système contrôlé (cf. Théorème 2). Cette remarque sera développée dans la section suivante, consacrée au cas particulier des régulateurs linéaires quadratiques.

A la suite du Théorème 3 il avait été mentionné que l'opérateur dynamique \mathcal{C} pouvait rendre compte d'éléments non modélisés perturbant la chaîne de retour de la régulation (cf. Figure 18). Il s'agit en particulier d'éléments dynamiques présents dans les chaînes de mesure (ex. capteurs, filtres et estimateurs de l'état) et dans la chaîne de commande (dynamique des servo gouvernes). Formellement, ces effets respectifs sont modélisés par des opérateurs de type convolution discrète.

L'opérateur caractérisant la dynamique de la chaîne de mesure (resp. de la chaîne d'action) est noté \mathcal{C}_M (resp. \mathcal{C}_C) et admet pour transformée en z la matrice de transfert $\Lambda_M(z)$ (resp. $\Lambda_C(z)$) ⁽¹⁾. $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ désigne enfin la matrice de gains du régulateur.

⁽¹⁾ Compte tenu de la remarque de la Section III, 4.1 les éléments dynamiques \mathcal{C}_C et \mathcal{C}_M sont supposés posséder une stabilité interne.

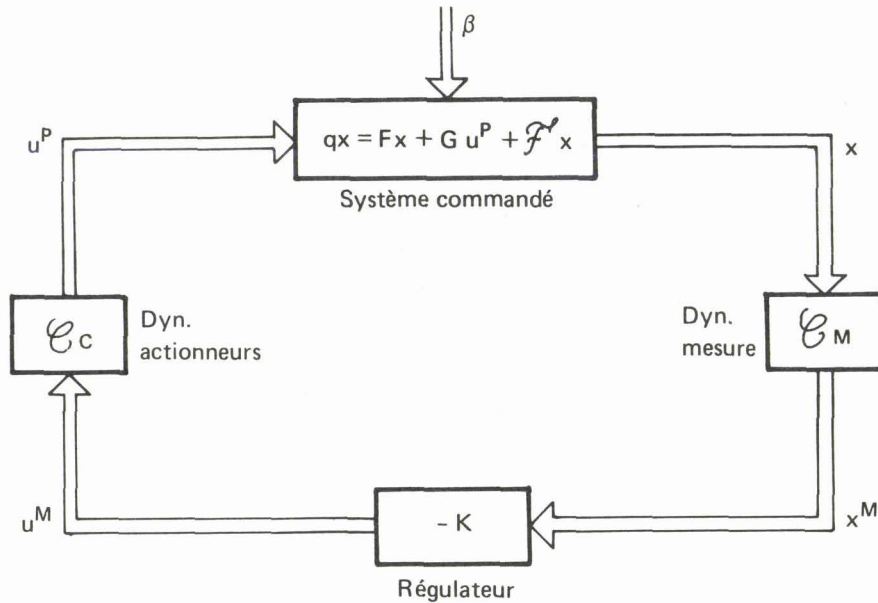


Fig. 18 – Schéma bloc de l'asservissement perturbé.

On obtient globalement la loi de commande donnée par l'expression (III.41) où \mathcal{C} est un opérateur de convolution discrète (cf. Annexe B). Ces opérateurs étant linéaires, leurs transformées en z respectives vérifient la relation suivante (cf. Annexe D) :

$$C(z) = \Lambda_c(z) K \Lambda_M(z). \quad (\text{III.47})$$

Les conditions du Théorème 4 deviennent alors :

Corollaire 1 : Soient $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et $D_0 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ deux matrices hermitiennes définies positives, et satisfaisant, $\forall z = e^{j\theta} \in \mathcal{C}_1, \theta \in [0, \pi]$,

$$(F - G \Lambda_c(z) K \Lambda_M(z))^* \bar{P} (F - G \Lambda_c(z) K \Lambda_M(z)) - \bar{P} \leq -D_0 \quad (\text{III.48})$$

Si $\forall x \in \mathbb{R}_e - \{0\}, \forall k \in \mathbb{Z}_+$,

$$\frac{\|(\mathcal{F}x)_k\|_{\mathcal{E}_+}^2}{\|x_k\|_{\mathcal{E}}^2} \frac{\|(P + \bar{P})(F - G \mathcal{E}_c K \mathcal{E}_M)\|}{\|P\|_s} \frac{\|(F - G \mathcal{E}_c K \mathcal{E}_M)\|_{\mathcal{E}}}{\|x_k\|_{\mathcal{E}}} < \frac{1}{\|P\|_s \|D_0^{-1}\|_s} \quad (\text{III.49})$$

alors le système dynamique non linéaire (III.38) à retour linéaire dynamique (III.39) est stable à gain fini en boucle fermée.

La démonstration est immédiate en substituant les égalités (III.47) et (III.41) dans les expressions (III.45) et (III.46).

Ce corollaire permet, à partir d'une classe de perturbations dynamiques multiplicatives $\Lambda_c(z)$ et $\Lambda_M(z)$ données, vérifiant l'inéquation (III.48), dans le domaine « fréquentiel discret » de quantifier un ensemble de perturbations additives $\mathcal{F}x$ préservant la stabilité de l'asservissement représenté sur la Figure 18.

Les conditions (III.48) et (III.49) généralisent et étendent au cas discret les résultats déjà obtenus en continu par Patel et Toda [43] et par Patel *et al.* [42] (où $\mathcal{E}_c = \mathcal{I}$ et $\mathcal{E}_M = \mathcal{I}$ = opérateur identité) ainsi que ceux de Bourlès et Mercier [49, 50] (avec $\mathcal{E}_c = \Lambda_c \neq I_m$ et $\mathcal{E}_M = \Lambda_M \neq I_n$ opérateurs matriciels constants non dynamiques), de Bourlès et Mercier [8, 51] (où \mathcal{E}_c et \mathcal{E}_M sont des opérateurs dynamiques). Ces résultats avaient été rappelés dans les Sections III.2.2 et III.2.3.

Parce qu'il permet d'étudier d'une manière globale la robustesse d'un schéma de commande, en considérant l'action conjointe des perturbations multiplicatives et additives, le Corollaire 1 fournit un résultat de *robustesse structurelle généralisée*.

III.4.4. – Robustesse des régulateurs linéaires quadratiques

Par rapport aux résultats généraux des Sections III.4.2 et III.4.3 et sans perte de généralité, le système contrôlé est maintenant supposé ne plus être perturbé additivement ($\mathcal{F}=0$ et $\beta=0$). Le schéma de régulation subit cependant encore l'influence déstabilisatrice des éléments dynamiques \mathcal{E}_M et \mathcal{E}_C de la chaîne de mesure et de commande. Le processus contrôlé considéré est donc défini par :

$$q x = F x - G \mathcal{E}_c K \mathcal{E}_M x. \quad (\text{III.50})$$

En référence au système linéaire (III.24), le gain K est maintenant supposé minimiser une fonction de coût quadratique, de la forme :

$$J = (1/2) \sum_{i=0}^{\infty} (x_i^T Q x_i + u_i^T R u_i), \quad (\text{III.51})$$

où $Q > 0$ et où $R > 0$. Il en résulte la loi de commande optimale (cf. [23, 77]) :

$$u_k = -K x_k,$$

$$\text{avec : } K = (R + G^T P G)^{-1} G^T P F, \quad K \in \mathcal{R}^{m \times n} \quad (\text{III.52})$$

La matrice $P \in \mathcal{R}^{n \times n}$, symétrique définie positive (elle vérifie donc $\bar{P}=P$), est l'unique solution de l'équation algébrique (Riccati) :

$$P = F^T P F + Q - F^T P G (R + G^T P G)^{-1} G^T P F. \quad (\text{III.53})$$

Les conditions classiques portant sur Q et F sont supposées vérifiées pour que le système nominal soit asymptotiquement stable, c'est-à-dire pour que $F - GK$ soit stable.

Une condition suffisante de stabilité asymptotique pour le système (III.45) lorsque le gain K est quelconque, est donnée par l'inégalité (III.48) du Corollaire 1.

Une nouvelle condition est maintenant donnée, tenant compte du fait que le gain K est optimal et dépend des matrices de pondération Q et R de J , Équation (III.51).

Pour simplifier les écritures, il est utile de définir plusieurs quantités matricielles dans le domaine opérationnel (transformée en z) :

$$\text{Soient : } U \triangleq (R + G^T P G)^{1/2} K, \quad U \in \mathcal{R}^{m \times n}; \quad (\text{III.54})$$

$(R + G^T P G)^{1/2}$ est la racine carrée symétrique de $R + G^T P G$, celle-ci existe puisque $R > 0$ et $P > 0$,

$$\text{et : } E^T \triangleq (R + G^T P G)^{1/2} K Q^{-1/2} = U Q^{-1/2}, \quad E^T \in \mathcal{R}^{m \times n}, \quad (\text{III.55})$$

cette dernière quantité a un sens car $Q > 0$.

La matrice F (cf. (III.50)) est désormais supposée inversible. Cette hypothèse est peu restrictive en général; elle est vérifiée dans l'application présente au pilotage d'un avion de combat. En effet, la matrice F définie par (II.68) est formée de différents blocs $A_d, C_d, I, 0$ qui résultent de l'échantillonnage d'un modèle continu à une fréquence donnée (cf. Chapitre II, Section II, 5). De plus, la forme particulière de F ne requiert que la condition A_d inversible (qui est trivialement vérifiée) pour obtenir F inversible.

La matrice $G = [B_d^T \ 0]^T$ (cf. (II.68)) étant en outre de rang maximum et supposant $m \leq n$:

$$E^T E \text{ est inversible.}$$

Soient les matrices à valeurs dans $\mathcal{C}^{m \times m}$, dont les éléments sont des fonctions de z :

$$\Lambda(z) \triangleq (R + G^T P G)^{1/2} \Lambda_c(z) (R + G^T P G)^{-1/2}; \quad (\text{III.56})$$

$$\Gamma(z) \triangleq \Lambda(z) U \Lambda_M(z) U^\#, \quad (\text{III.57})$$

$$\Lambda_1(z) \triangleq R^{1/2} \Lambda_c(z) (R + G^T P G)^{-1/2};$$

et :

$$D(z) \stackrel{\Delta}{=} P - (F - G\Lambda_c(z)K\Lambda_M(z))^* P (F - G\Lambda_c(z)K\Lambda_M(z)). \quad (\text{III.58})$$

Le cas où $m=n$ est préalablement considéré.

Théorème 5 : Soit $(\mathcal{C}_M, \mathcal{C}_C)$ l'ensemble des couples de perturbations multiplicatives dynamiques affectant le système (III.50). Si, $\forall z = e^{j\theta} \in \mathcal{C}_1, \theta \in [0, \pi]$:

$$(i) \quad U\Lambda_M(z) = \Lambda_M(z)U, \quad (\text{III.59})$$

$$(ii) \quad \text{Ker}(K) \subset \text{Ker}(K\Lambda_M(z)), \quad (\text{III.60})$$

$$(iii) \quad \exists \lambda \in]0, 1] \text{ tel que } H(z) - \lambda(E^T E)^{-1} \geq 0, \quad (\text{III.61})$$

avec :

$$H(z) = \Gamma(z) + \Gamma^*(z) - \Lambda_M^*(z)\Lambda^*(z)\Lambda(z)\Lambda_M(z) + \Lambda_M^*(z)\Lambda_1^*(z)\Lambda_1(z)\Lambda_M(z) + (E^T E)^{-1} - I_m,$$

alors le système (III.50) est asymptotiquement stable en boucle fermée. En effet, $D(z) \geq \lambda Q$, avec $\lambda = \|Q^{-1/2} D_0 Q^{-1/2}\|_s \leq 1$ et la condition $D(z) \geq D_0$ du Corollaire 1 (Équation (III.48)) est alors vérifiée.

Démonstration du Théorème 5.

Préliminaires : Par substitution dans la définition (III.58) de $D(z)$, des quantités définies en (III.54), (III.56) et (III.57) et de :

$$P - F^T P F = Q - F^T P G K = Q - U^T U,$$

résultant de (III.53), et après addition et soustraction de quantités identiques multipliées par $U^{\#}U$, il vient :

$$\begin{aligned} D(z) = & Q + U^T (\Gamma(z) + \Gamma^*(z) - I_m) U + U^T \Lambda(z) U \Lambda_M(z) (I_n - U^{\#}U) \\ & + (I_n - U^T U^{\#}) \Lambda_M^*(z) U^T \Lambda^*(z) U - \Lambda_M^*(z) U^T \Lambda^*(z) \Lambda(z) U \Lambda_M(z) \\ & + \Lambda_M^*(z) U^T \Lambda_1^*(z) \Lambda_1(z) U \Lambda_M(z). \end{aligned}$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists y \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = (I_n - U^{\#}U)x$, de plus, $U = U U^{\#}U$ (cf. [78]); par conséquent, $Uy = 0$. Il résulte de cette propriété que :

$$(R + B^T P B)^{1/2} K y = 0 \Rightarrow y \in \text{Ker}(K) \text{ puisque } R + B^T P B \text{ est inversible.}$$

L'hypothèse non restrictive $\text{Ker}(K) \subset \text{Ker}(K\Lambda_M(z))$, est maintenant introduite : elle signifie que si la commande est transparente pour certaines composantes du vecteur état non perturbées elle l'est également lorsque celles-ci subissent l'influence de perturbations de la chaîne de mesure.

$$\begin{aligned} \text{d'où : } D(z) = & Q + U^T (\Gamma(z) + \Gamma^*(z) - I_m) U - \Lambda_M^*(z) U^T \Lambda^*(z) \Lambda(z) U \Lambda_M(z) \\ & + \Lambda_M^*(z) U^T \Lambda_1^*(z) \Lambda_1(z) U \Lambda_M(z). \end{aligned}$$

Si les matrices U et $\Lambda_M(z)$ commutent, ce qui suppose bien sûr que $m=n$, alors $D(z)$ se simplifie en :

$$\begin{aligned} D(z) = & Q + U^T (\Gamma(z) + \Gamma^*(z) - \Lambda_M^*(z)\Lambda^*(z)\Lambda(z)\Lambda_M(z) + \Lambda_M^*(z)\Lambda_1^*(z)\Lambda_1(z)\Lambda_M(z) - I_n) U \\ = & Q + U^T (H(z) - (E^T E)^{-1}) U, \end{aligned}$$

où :

$$H(z) = \Gamma(z) + \Gamma^*(z) - \Lambda_M^*(z)\Lambda^*(z)\Lambda(z)\Lambda_M(z) + \Lambda_M^*(z)\Lambda_1^*(z)\Lambda_1(z)\Lambda_M(z) + (E^T E)^{-1} - I_n,$$

et où E est définie en (III.55).

Par ailleurs supposons que :

$$\exists \lambda \in]0, 1] \text{ tel que } H(z) - \lambda (E^T E)^{-1} \succcurlyeq 0,$$

alors : $D(z) \succcurlyeq \lambda Q + (1-\lambda) (Q - U^T (E^T E)^{-1} U).$

Or : $Q - U^T (E^T E)^{-1} U = Q^{1/2} (I_n - E^T (E^T E)^{-1} E) Q^{1/2}.$

Les seules valeurs propres possibles de la quantité $I_n - E^T (E^T E)^{-1} E$ étant 0 ou 1, il vient :

$$Q - U^T (E^T E)^{-1} U \succcurlyeq 0.$$

il résulte donc que $D(z) \succcurlyeq \lambda Q.$

Une condition suffisante pour que l'inégalité (III. 48) du Corollaire 1, $\forall z \in \mathcal{C}_1, D(z) \succcurlyeq D_0$ soit vérifiée est donc donnée par $\lambda Q \succcurlyeq D_0.$ Cette dernière condition est toujours possible puisque l'existence de $\lambda \in]0, 1]$ est garantie du fait que $Q > 0$ et $D_0 \geq 0$ sont des matrices de réglage. On remarque que le choix de Q et D_0 telles que :

$$0 < \lambda \stackrel{\Delta}{=} \|Q^{-1/2} D_0 Q^{-1/2}\|_s \leq 1 \text{ convient.}$$

Le Théorème 5 est donc démontré.

Remarque : L'hypothèse $m = n$ restreint le champ d'application de ce théorème aux systèmes dont la dimension de l'espace d'état est égale à celle de l'espace des commandes. Elle a cependant l'avantage de fournir un résultat théorique qui conserve la généralité du problème de robustesse posé initialement puisqu'il prend en compte l'effet simultané des perturbations dynamiques de la chaîne de commande et de la chaîne de mesure.

Le cas général ($m < n$) est maintenant considéré.

Théorème 6 : Si $\mathcal{C}_M = \mathcal{I}$ (opérateur identité) et si la perturbation multiplicative dynamique \mathcal{C}_C affectant la chaîne de commande est telle que $\forall z = e^{j\theta} \in \mathcal{C}_1, \theta \in [0, \pi].$

$$\exists \lambda^{(1)} \in]0, 1] \text{ tel que } H(z) - \lambda (E^T E)^{-1} - I_m, \quad (\text{III. 62})$$

$$\text{avec : } H(z) = \Lambda(z) + \Lambda^*(z) - \Lambda^*(z) \Lambda(z) + \Lambda_1^*(z) \Lambda_1(z) + (E^T E)^{-1} - I_m,$$

alors le système (III. 50) est asymptotiquement stable en boucle fermée.

Démonstration du Théorème 6.

Puisque $\mathcal{C}_M = \mathcal{I}$ et $\Lambda_M(z) = I_m$, l'hypothèse $\text{Ker}(K) \subset \text{Ker}(K \Lambda_M(z))$ est vérifiée de façon triviale. D'autre part $\Gamma(z) = \Lambda(z) U U^* = \Lambda(z) I_m$; $D(z)$ se simplifie donc en :

$$\begin{aligned} D(z) &= Q + U^T (\Lambda(z) + \Lambda^*(z) - \Lambda^*(z) \Lambda(z) + \Lambda_1^*(z) \Lambda_1(z) - I_m) U \\ &= Q + U^T (H(z) - (E^T E)^{-1}) U, \end{aligned}$$

$$\text{où : } H(z) = \Lambda(z) + \Lambda^*(z) - \Lambda^*(z) \Lambda(z) + \Lambda_1^*(z) \Lambda_1(z) + (E^T E)^{-1} - I_m$$

et où E est définie en (III. 55).

La démonstration se continue comme celle du Théorème 5.

Par rapport au précédent théorème, le problème de robustesse envisagé perd de sa généralité en excluant les perturbations affectant la chaîne de mesure ($\mathcal{C}_M = \mathcal{I}$). Seule une classe de perturbations dynamiques de la chaîne de commande est donc mise en évidence ⁽²⁾. C'est ce qu'il en coûte pour lever l'hypothèse restrictive précédemment

⁽¹⁾ λ est défini comme au Théorème 5.

⁽²⁾ L'admissibilité de perturbations multiplicatives dynamiques dans la chaîne de mesure peut toujours être vérifiée par application de la condition (III. 48) (Corollaire 1).

utilisée, soit $m=n$. Parce qu'il ne place aucune restriction sur les dimensions respectives de l'espace d'état et des commandes, le Théorème 6 constitue donc un résultat fort utile d'un point de vue pratique. Il l'est d'autant plus que les conditions se rapportent au domaine fréquentiel.

Vérfiées le long du contour $z=e^{j\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, elles permettent ainsi d'envisager la quantification numérique des marges de gain et de phase multivariées du système de commande à temps discret considéré.

III.4.5. — Marge de stabilité multivariable des régulateurs linéaires quadratiques discrets

Le développement qui suit suppose que les hypothèses d'application du Théorème 6 sont vérifiées. Étant une matrice complexe de $\mathbb{C}^{m \times m}$, $\Lambda_C(z)$ admet (cf. [79], Chapitre 9) la factorisation suivante :

$$\Lambda_C(z) = G_C(z) \exp(j \Phi(z)), \quad (\text{III.63})$$

où $G_C(z)$ et $\Phi(z)$ sont des matrices hermitiennes.

Par analogie avec la représentation polaire d'un point dans le plan complexe, $G_C(z)$ et $\Phi(z)$ seront respectivement appelées gain et déphasage multivariable de la perturbation multiplicative $\Lambda_C(z)$.

Théorème 7 (marge de stabilité, marge de gain, marge de phase multivariées): Si la matrice de transfert $\Lambda_C(z)$ associée à l'opérateur \mathcal{E}_C et factorisée suivant (III.63) est normale et diagonalise dans la même base orthonormale ⁽¹⁾ de vecteurs propres que R et si en outre, $\forall z \in \mathcal{E}_1, \exists \lambda \in]0, 1[$ ⁽²⁾ :

$$\begin{aligned} & R G_C(z) [\exp(-j \Phi(z)) + \exp(j \Phi(z))] + G^T P G G_C(z) \exp(j \Phi(z)) \\ & + \exp(-j \Phi(z)) G_C(z) G^T P G + \exp(-j \Phi(z)) G_C(z) G^T P G G_C(z) \exp(j \Phi(z)) \\ & \geq (R + G^T P G)^{1/2} \{ I_m - (1 - \lambda) [(R + G^T P G)^{1/2} K Q^{-1/2} K (R + G^T P G)^{1/2}]^{-1} \} (R + G^T P G)^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{III.64})$$

alors la perturbation multiplicative dynamique \mathcal{E}_C associée à $\Lambda_C(z)$ est admissible et préserve la stabilité asymptotique du système contrôlé (III.50).

L'ensemble des couples $(G_C(z), \Phi(z)) \in \mathbb{C}^{m \times m} \times \mathbb{C}^{m \times m}$ de matrices hermitiennes satisfaisant (III.64) forment une *marge de stabilité* multivariable du régulateur linéaire quadratique à temps discret.

Une *marge de gain* (resp. une *marge de phase*) multivariable est l'ensemble des matrices hermitiennes $G_C(z)$ (resp., $\Phi(z)$) de $\mathbb{C}^{m \times m}$ qui diagonalisent dans la même base que R et vérifient (III.64) après substitution de $\Phi=0$ (resp., $G_C=I_m$).

Démonstration du Théorème 7.

Sans hypothèse complémentaire, la condition (III.62) du Théorème 6 se développe suivant :

$$\begin{aligned} & (R + G^T P G) \Lambda_C(z) + \Lambda_C^*(z) (R + G^T P G) - \Lambda_C^*(z) (R + G^T P G) \Lambda_C(z) + \Lambda_C^*(z) R \Lambda_C(z) \\ & \geq (R + G^T P G)^{1/2} \{ I_m - (1 - \lambda) (E^T E)^{-1} \} (R + G^T P G)^{1/2}. \end{aligned} \quad (\text{P7.1})$$

Si $\Lambda_C(z) \in \mathbb{C}^{m \times m}$ est une matrice normale, elle diagonalise dans une base orthonormale [79, p. 275]. Si de plus $\Lambda_C(z)$ diagonalise dans la même base orthonormale de vecteurs propres que R , ce qui suppose en outre que les directions propres de $\Lambda_C(z)$ soient indépendantes de z , alors $\Lambda_C(z)$ et R commutent.

Si cette hypothèse n'est pas vérifiée, il convient de prendre $R = \rho I_m$ avec $\rho > 0$ pour calculer les gains optimaux du régulateur.

Dans l'une ou l'autre de ces hypothèses, $R \Lambda_C(z) = \Lambda_C(z) R$. Il découle en outre de la factorisation (III.63) de $\Lambda_C(z)$ et de sa normalité que les matrices hermitiennes $G_C(z)$ et $\exp(j \Phi(z))$ commutent (cf. [79], Chapitre 9).

⁽¹⁾ Ceci suppose que les directions propres de Λ_C et R soient indépendantes de z . Dans le cas contraire où si elles sont inconnues, la condition (III.64) pourra être vérifiée en prenant $R = \rho I_m$, $\rho > 0$.

⁽²⁾ λ est défini comme au Théorème 5.

L'équation (P7.1) devient donc :

$$\begin{aligned}
 & R G_c(z) \left[\exp(j \Phi(z)) + \exp(-j \Phi(z)) \right] + G^T P G G_c(z) \exp(j \Phi(z)) \\
 & + \exp(-j \Phi(z)) G_c(z) G^T P G + \exp(-j \Phi(z)) G_c(z) G^T P G G_c(z) \exp(j \Phi(z)) \\
 & \geq (R + G^T P G)^{1/2} \left\{ I_m - (1 - \lambda) \left[(R + G^T P G)^{1/2} K Q^{-1} K (R + G^T P G)^{1/2} \right]^{-1} \right\} (R + G^T P G)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Ce théorème est une généralisation aux systèmes à temps discret du Théorème 1 de Wong *et al.* [45] qui, dans le domaine temporel continu, définit par une inégalité matricielle la notion de marge de gain multivariable lorsque $\Lambda_M = I_n$ et R et Λ_C sont des matrices diagonales constantes. Il correspond enfin au Théorème 3 de Bourlès et Mercier [50], et aux résultats de [8, 51], démontrés dans le cas continu, qui considèrent des perturbations $\Lambda_M = I_n$ et $\Lambda_C = G_C \exp j \Phi \neq I_m$, où $G_C \in \mathbb{C}^{m \times m}$ et $\Phi \in \mathbb{C}^{m \times m}$ sont des matrices constantes dans le cas de [50] et dépendantes de $s = j\omega$ ($j^2 = -1$), et par conséquent de la fréquence, dans le cas de [8, 51]. Un résumé de ces résultats avait été présenté dans les Sections III,2.1 et III,2.3.

Ce théorème aboutit naturellement à deux types d'applications :

1. Le problème d'optimisation quadratique étant fixé (par conséquent Q et R étant donnés), l'inégalité (III.64) rend possible la recherche de la plus importante perturbation $G_c(z) \exp(j \Phi(z))$ susceptible de déstabiliser le processus décrit par (III.50), pour différentes fréquences de travail; une marge de stabilité généralisée (gain et phase) est alors quantifiée.

2. La perturbation multiplicative $\Lambda_C(z)$ admissible dans la chaîne de commande étant fixée par la structure même du régulateur, (III.64) fournit un moyen d'agir sur les matrices de pondération Q et R de la fonction de coût (III.51) afin d'accroître la marge de stabilité par rapport à la chaîne de commande. Par une démarche itérative procédant de celle exposée dans [80], le régulateur peut ainsi être optimisé à la fois du point de vue de ses performances dynamiques (ex. nature et rapidité des transitoires) et de celui de sa robustesse.

III,5. – RÉCAPITULATION ET PORTÉE DES RÉSULTATS.

A partir de conditions générales concernant la stabilité des processus discrets à retour dynamique multivariable (Théorèmes 1, 2 et 3), des résultats nouveaux ont été présentés, permettant de quantifier la tolérance d'un schéma de régulation multivariable à temps discret vis-à-vis des effets conjugués de perturbations structurelles non linéaires et de perturbations multiplicatives dynamiques (Théorème 4 et Corollaire 1).

Dans le cas particulier des régulateurs linéaires quadratiques, les quantités théoriques définissant les marges de stabilité se simplifient notablement, d'une part lorsque la chaîne de retour comporte des perturbations dynamiques dans les chaînes de commande et de mesure (Théorème 5) et d'autre part lorsque la seule chaîne de commande est perturbée (Théorème 6).

Ces résultats inédits sont seuls à permettre la vérification de la stabilité d'un système contrôlé dont l'équation récurrente décrivant son comportement en boucle fermée contient des opérateurs dynamiques (de dimensions finies ou infinies), représentables par des matrices de transfert.

Une formulation originale des perturbations multiplicatives dans le domaine opérationnel (transformée en z) a permis de généraliser au cas discret (Théorème 7) les notions de marges de gain et de phase multivariables déjà définies en continu [8,44-51]. Le résultat mentionné montre de plus le lien existant entre ces marges de stabilité et les quantités caractéristiques du problème d'optimisation. Une conséquence importante est donc que les marges de stabilité sont susceptibles d'être optimisées, au même titre que les performances dynamiques d'un schéma de régulation.

Les résultats analytiques présentés dans ce chapitre sont vérifiables numériquement. Ces applications numériques sont présentées dans le Chapitre V, en référence au problème de pilotage multivariable d'un avion d'arme.

IV. — ROBUSTESSE VIS-A-VIS DE PERTURBATIONS NON DYNAMIQUES : UN CAS PARTICULIER

Ce chapitre examine le cas particulier mentionné au paragraphe II,3.1.2, pour lequel la chaîne de retour du processus contrôlé est perturbée par des éléments non-linéaires non dynamiques (cf. Équation (II.38)).

IV.1. — FORMULATION MATHÉMATIQUE

Comme il a été rappelé en Section III,3.3, la formulation de Safonov [48] est basée sur la considération du système dynamique non linéaire récurrent :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (\mathcal{A}x)_k + (\mathcal{B}u)_k + \xi_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \\ x_0 &\text{ donné et } x_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_-^*, \end{aligned} \quad (\text{IV.1})$$

où \mathcal{A} et \mathcal{B} sont des opérateurs dynamiques, différentiables, non anticipatifs, non linéaires et à gain incrémental fini (cf. Section III,3.1) tels que :

$$\mathcal{A}0 = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{B}0 = 0,$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$.

ξ_k est une perturbation extérieure. La régulation à $x=0$ du système (IV.1) est envisagée.

Le système linéaire :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Fx_k + Gu_k + \eta_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \\ x_0 &\text{ donné et } x_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_-^*, \end{aligned} \quad (\text{IV.2})$$

où $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $\eta_k \in \mathbb{R}^n$, est supposé décrire, au premier ordre, le comportement du système non linéaire (IV.1) au voisinage de $x=0$.

Une loi de commande :

$$u_k = -K(v)x_k \quad (\text{IV.3})$$

où $K(v) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est une matrice donnée, dont les éléments dépendent de fonctions non linéaires des composantes instantanées de l'état ou de la commande ⁽¹⁾, est supposée assurer la stabilité asymptotique du système linéarisé (IV.2) en l'absence de perturbations extérieures ($\eta \equiv 0$). Cette loi assure-t-elle également la stabilité asymptotique du système non linéaire (IV.1), en particulier lorsqu'il est sujet à des perturbations extérieures ?

Le lemme de marge de stabilité de Safonov [48], rappelé en Section III,3.3, fournit une condition suffisante de stabilité du système non linéaire (IV.1) muni de la loi (IV.3) lorsque $\eta \equiv \xi$. Il est intéressant de remarquer que ce lemme apparaît comme un cas particulier du Théorème 3 (Section III,4.2) dans lequel l'opérateur dynamique \mathcal{G} de convolution discrète aurait pour réponse impulsionnelle $N(v)\delta_{k,k_0}$, où $N(v)$ est une matrice du même type que $K(v)$, décrite plus haut. L'opérateur dynamique \mathcal{G} dégénère donc en un opérateur *linéaire non dynamique*. Cependant la nature géométrique de la condition de stabilité donnée par ce lemme ou le Théorème 3, occasionne des difficultés de vérifications numériques, même dans les cas les plus simples et plus particulièrement lorsque $\eta \neq \xi$.

Pour les mêmes raisons qu'en Section III,4.3, une nouvelle formulation de (IV.1), identique à (III.38), est proposée.

⁽¹⁾ La lettre v est utilisée pour différencier une matrice de la forme $K(v)$, où $v = [x_k^T, u_k^T]^T \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ d'une matrice à coefficients constants.

Considérons maintenant le système dynamique non linéaire suivant :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (\mathcal{A}x)_k + (\mathcal{B}u^p)_k + \xi_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \\ &= Fx_k + Gu_k^p + (\mathcal{F}x)_k + \beta_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \\ x_0 &\text{ donné et } x_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_-^*, \end{aligned} \quad (\text{IV.4})$$

où \mathcal{F} est un opérateur dynamique, non anticipatif, non-linéaire et tel que $\mathcal{F}0=0$ et où β_k est une perturbation additive constante contenant ξ_k et tout biais issu de la linéarisation.

$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{Z}_+, (\mathcal{F}x)_k$ représente une perturbation structurelle additive. Il est clair d'après (IV.4) que ce terme rassemble non seulement les erreurs de modèle mais également les erreurs de linéarisation. En effet, $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$ résultent de la linéarisation de l'Équation (IV.4) au voisinage de $x=0, u=u_{\text{nominal}}$ et $\xi_k = \xi_{\text{nominal}}$, le système linéaire non perturbé associé à (IV.4) s'écrivant :

$$x_{k+1} = Fx_k + Gu_k^p, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+. \quad (\text{IV.5})$$

G sera supposée être de rang maximum ($m \leq n$) dans tous les développements qui suivent.

Dans les développements qui suivent, seule la partie non dynamique de l'opérateur \mathcal{F} est prise en compte.

Pour le système dynamique (IV.4), une loi de contrôle de la forme (IV.3) est également considérée. Enfin, en vue de déterminer la tolérance de cette régulation vis-à-vis de perturbations dans les chaînes de mesure et de commande, celles-ci sont modélisées par des perturbations multiplicatives non dynamiques et non linéaires (cf. Figure 19).

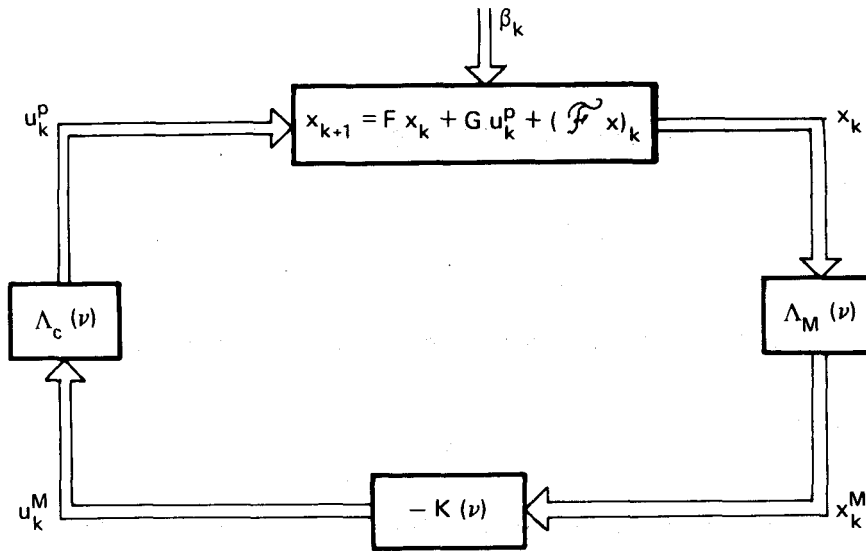


Fig. 19 – Schéma de l'asservissement perturbé.

Les perturbations multiplicatives, $\Lambda_c(v) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et $\Lambda_M(v) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sont des matrices dont les éléments sont des fonctions non linéaires instantanées de l'état et de la commande. $K(v) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est, comme précédemment, une matrice de gains non linéaires.

Les différentes grandeurs de la chaîne de retour sont donc telles que :

$$x_k^M = \Lambda_M(v) x_k, \quad u_k^M = -K(v) x_k^M \quad \text{et} \quad u_k^p = \Lambda_c(v) u_k^M,$$

où $(x_k^M) \in \mathbb{R}^n$ et $(u_k^M) \in \mathbb{R}^m$; il en résulte que :

$$u_k^p = -N(v) x_k = -\Lambda_c(v) K(v) \Lambda_M(v) x_k. \quad (\text{IV.6})$$

On retrouve ainsi l'une des formulations de la Section II,3.1.2 lorsque les matrices F et G résultent de la solution du problème de poursuite robuste exposée en Section II,1.

IV.2. – ROBUSTESSE STRUCTURELLE

La modélisation adoptée pour le système dynamique non linéaire perturbé (IV.4, IV.6) conduit au théorème suivant :

Théorème 8 : Soient $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice constante et $S(v) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice dont les éléments dépendent des valeurs instantanées de l'état et de la commande, toutes deux symétriques et définies positives. Si ces matrices satisfont pour tout $v \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ l'équation de Lyapounov :

$$S(v) = P - (F - G \Lambda_c(v) K(v) \Lambda_M(v))^T P (F - G \Lambda_c(v) K(v) \Lambda_M(v)) \quad (IV.7)$$

et si, $\forall x \in \mathbb{E}^n - \{0\}$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, l'inégalité :

$$\frac{\|(\mathcal{F}x)_k\|_{\mathbb{E}}^2}{\|x_k\|_{\mathbb{E}}^2} + \frac{2 \|P(F - G \Lambda_c(v) K(v) \Lambda_M(v))\|_S}{\|P\|_S} \frac{\|(\mathcal{F}x)_k\|_{\mathbb{E}}}{\|x_k\|_{\mathbb{E}}} < \frac{1}{\|S^{-1}(v)\|_S \|P\|_S} \quad (IV.8)$$

est vérifiée, alors le système dynamique non linéaire (IV.4), muni de la loi de commande non linéaire perturbée (IV.6), est stable à gain fini ⁽¹⁾ en boucle fermée.

La démonstration figure en Annexe G, Section G,1.

La notation (.) sera employée dans tout ce qui suit afin de préciser la dépendance vis-à-vis de v de toute matrice à éléments non linéaires.

Le Théorème 8 appelle trois observations :

1. Cas $\mathcal{F}x \equiv 0$. Si le système (IV.4) n'est sujet à aucune perturbation additive, mais seulement à des perturbations multiplicatives $\Lambda_c(\cdot)$ et $\Lambda_M(\cdot)$, la condition (IV.7) suffit pour assurer la stabilité asymptotique de (IV.4, IV.6). Cette réflexion sera développée dans la Section IV,3, dans le cas particulier des régulateurs linéaires quadratiques échantillonnés pour lesquels F est inversible (cf. Section III,4:4, commentaire de l'Équation (III.55)).

2. Dans le cadre plus général où $\mathcal{F}x \neq 0$ mais où $\forall k \in \mathbb{Z}_+$:

$$\lim_{\|x_k\|_{\mathbb{E}} \rightarrow 0} \sup \frac{\|(\mathcal{F}x)_k\|_{\mathbb{E}}}{\|x_k\|_{\mathbb{E}}} = 0,$$

condition nécessaire à l'application de la première méthode de Lyapounov au système non linéaire (IV.4, IV.6) (cf. [72]), la seule condition (IV.7) assure la stabilité asymptotique du système. En effet, il est alors équivalent d'étudier la stabilité du système linéarisé non perturbé (IV.5) muni du retour d'état (IV.6) en choisissant par exemple comme fonction de Lyapounov $V(x_k) = x_k^T P x_k$, $P > 0$, et en établissant la condition suffisante pour laquelle :

$$\Delta V(x_k) = V(x_{k+1}) - V(x_k) \text{ est négatif.}$$

Cette condition serait par ailleurs identique à celle du Corollaire 1 (Section III,4.3, Équation (III.48)) lorsque les matrices de transfert $\Lambda_c(z)$ et $\Lambda_M(z)$ sont obtenues à partir des réponses impulsionnelles $\Lambda_c(v) \delta_{k,k}$ et $\Lambda_M(v) \delta_{k,k}$, puisque dans l'étude présente $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($\bar{P} = P$).

3. Ce théorème permet, à partir d'une classe de perturbations $\Lambda_c(\cdot)$ et $\Lambda_M(\cdot)$ admissibles (vérifiant (IV.7)), de quantifier par (IV.8) un ensemble de perturbations additives assurant la stabilité de l'asservissement décrit par la Figure 19. Ce résultat caractérise donc bien la *robustesse structurelle* du système contrôlé considéré. En ce qui concerne la tolérance vis-à-vis des seules perturbations additives, la condition (IV.8) étend au cas discret les

⁽¹⁾ Le système (IV.4, IV.6) est stable à gain fini en présence de perturbations β et de conditions initiales x_0 si, pour tout τ élément de \mathbb{Z}_+ , $\forall (x, w) \in \mathbb{E}^n$, $\forall (\beta, (x_0)) \in \mathbb{E}^n$:

$$\|(x, w)\|_s = (\|\mathcal{P}_\tau x\|^2 + \|\mathcal{P}_\tau w\|^2)^{1/2} \leq \Phi(\|(\beta, (x_0))\|_s),$$

où Φ est une fonction continue linéaire strictement croissante vérifiant $\Phi(0) = 0$ (fonction de classe \mathcal{X} et où w est une variable vectorielle intermédiaire (cf. [48] pour détails).

résultats obtenus en continu par Patel et Toda [43] et par Patel *et al.* [42], où $\Lambda_C(\cdot) = I_m$ et $\Lambda_M(\cdot) = I_n$ et plus récemment par Boulès et Mercier [49, 50] lorsque $\Lambda_M(\cdot) \neq I_m$ et $\Lambda_C(\cdot) \neq I_n$.

IV.3. – ROBUSTESSE DES RÉGULATEURS LINÉAIRES QUADRATIQUES

Le cas où $\mathcal{F} = 0$ est considéré dans cette section. Le processus contrôlé est uniquement sujet à des perturbations multiplicatives et se réduit à :

$$x_{k+1} = (F - G\Lambda_c(\cdot)K\Lambda_M(\cdot))x_k \stackrel{\Delta}{=} (F - GN(\cdot))x_k. \quad (\text{IV.9})$$

Le gain K est obtenu par minimisation de la fonction de coût quadratique :

$$J = (1/2) \sum_{i=0}^{\infty} (x_i^T Q x_i + u_i^T R u_i), \quad (\text{IV.10})$$

où $Q > 0$ et où $R > 0$, par rapport au système linéaire idéalisé (IV.5), obtenu à partir de l'échantillonnage d'un système continu à une fréquence donnée (cf. Section II,5). Il est bien connu (cf. [22, 23] pour détails) que la minimisation de J donne la loi de commande optimale :

$$u_k = -Kx_k,$$

$$\text{avec : } K = (R + G^T P G)^{-1} G^T P F, \quad (\text{IV.11})$$

où $K \in \mathbf{R}^{m \times n}$.

La matrice $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$ symétrique définie positive est solution de l'équation algébrique (Riccati) :

$$P = F^T P F + Q - F^T P G (R + G^T P G)^{-1} G^T P F. \quad (\text{IV.12})$$

les hypothèses assurant l'existence et l'unicité de P et détaillées en Section II,2.2 sont supposées vérifiées.

Une condition suffisante de stabilité portant sur $\Lambda_c(\cdot)$ et $\Lambda_M(\cdot)$ est recherchée afin de conclure à la stabilité asymptotique du système (IV.9). D'après le Théorème 8 et les remarques qui s'y rapportent, il revient à déterminer l'ensemble des couples $(\Lambda_c(\cdot), \Lambda_M(\cdot))$ de matrices qui assurent $S(\cdot) > 0$ (cf. Équation (IV.7)).

Plusieurs quantités sont maintenant introduites afin de simplifier les écritures :

$$\begin{aligned} U &= (R + G^T P G)^{1/2} K, \quad U \in \mathbf{R}^{m \times n}; \\ (R + G^T P G)^{1/2} &\text{ est la racine carrée symétrique de } R + G^T P G, \text{ celle-ci existe puisque } R > 0 \text{ et } P > 0, \\ \Lambda(\cdot) &= (R + G^T P G)^{1/2} \Lambda_c(\cdot) (R + G^T P G)^{-1/2}, \\ \Lambda(\cdot) &\in \mathbf{R}^{m \times m}, \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

$$\begin{aligned} \Gamma(\cdot) &= \Lambda(\cdot) U \Lambda_M(\cdot) U^*, \quad \Gamma(\cdot) \in \mathbf{R}^{m \times m}; \\ \Lambda_1(\cdot) &= R^{1/2} \Lambda_c(\cdot) (R + G^T P G)^{-1/2}, \quad \Lambda_1(\cdot) \in \mathbf{R}^{m \times m} \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

$$E^T = (R + G^T P G)^{1/2} K Q^{-1/2} = U Q^{-1/2}, \quad (\text{IV.15})$$

$E^T \in \mathbf{R}^{m \times n}$ a un sens car $Q > 0$. La matrice F (cf. (IV.9)) est supposée inversible. La justification de cette hypothèse non restrictive peut être trouvée en Section III,4.4, Équation (III.55). La matrice G étant également de rang maximum avec $m \leq n$,

$(E^T E)^{-1}$ existe.

Cas où $m = n$:

$$H(.) = \Gamma(.) + \Gamma^T(.) + \Lambda_M^T(.) \Lambda_d^T(.) \Lambda_d(.) \Lambda_M(.) - \Lambda_M^T(.) \Lambda^T(.) \Lambda(.) \Lambda_M(.) - I_m + (E^T E)^{-1}, \quad (IV.16)$$

Théorème 9 : Si l'ensemble des couples $(\Lambda_C(.), \Lambda_M(.)) \in \mathbf{R}^{m \times m} \times \mathbf{R}^{n \times n}$ de perturbations multiplicatives admissibles pour (IV.9) vérifie pour tout $v \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$:

$$U \Lambda_M(.) = \Lambda_M(.) U \quad (IV.17)$$

$$\text{Ker}(K) \subset \text{Ker}(K \Lambda_M(.)) \quad (IV.18)$$

et :

$$H(.) > 0 \quad (IV.19)$$

alors $\exists \lambda \in]0, 1]$ et $\exists J(.) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ semi-définie positive tels que :

$$H(.) - \lambda (E^T E)^{-1} \geq J(.) \geq 0; \quad (IV.20)$$

dans ce cas, $S(.) \geq \lambda Q + U^T J(.) U > 0$ et le système (IV.9) est asymptotiquement stable.

La démonstration se trouve en Annexe G (Sections G,2 et G,2.1).

Remarques :

1. L'hypothèse $m = n$ restreint le champ d'application de ce théorème aux systèmes dont la dimension de l'espace des valeurs de l'état est égale à celle de l'espace des valeurs des commandes. Elle a cependant l'avantage de fournir un résultat qui conserve la généralité du problème de robustesse posé initialement puisqu'il prend conjointement en compte l'effet des perturbations de la chaîne de commande et de la chaîne de mesure, ce qui constitue un progrès par rapport à la littérature existante [48].

2. L'hypothèse (IV.17) de commutativité est très restrictive. Elle est cependant vérifiée dans le cas où les matrices U et $\Lambda_M(.)$ diagonaliseraient dans la même base.

Le cas où $m < n$, plus réaliste, est maintenant considéré. Il ne permet cependant de prendre en considération que les seules perturbations $\Lambda_C(.)$, affectant la chaîne de commande.

Théorème 10 : Si $\Lambda_M(.) = I_m$ et si la perturbation multiplicative $\Lambda_C(.) \in \mathbf{R}^{m \times m}$ de la chaîne de commande admissible pour (IV.9) vérifie ⁽¹⁾ pour tout $v \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$:

$$H(.) > 0,$$

$$H(.) = \Lambda(.) + \Lambda^T(.) - \Lambda^T(.) \Lambda(.) + \Lambda_d^T(.) \Lambda_d(.) - I_m + (E^T E)^{-1}, \quad (IV.21)$$

alors $\exists \lambda \in]0, 1]$ et $\exists J(.) \in \mathbf{R}^{m \times m}$ semi définie-positive tels que :

$$H(.) - \lambda (E^T E)^{-1} \geq J(.) \geq 0; \quad (IV.22)$$

on a dans ce cas $S(.) \geq \lambda Q + U^T J(.) U > 0$ et le système (IV.9) est asymptotiquement stable.

La démonstration est donnée en Annexe G (Sections G,2 et G,2.2).

Une condition, plus simple d'utilisation que les précédentes et déduite du Théorème 10, permet de caractériser la capacité du système (IV.9) à tolérer une perturbation Λ_C de la chaîne de commande, constante et modélisée par une matrice normale ($\Lambda_C \Lambda_C^T = \Lambda_C^T \Lambda_C$). Les hypothèses d'application du Théorème 10 sont maintenues.

Théorème 11 (Marge de gain) : La perturbation multiplicative affectant la chaîne de commande, $\Lambda_C \in \mathbf{R}^{m \times m}$, étant une matrice normale et la matrice R diagonalisant dans la même base orthonormale que Λ_C ⁽²⁾, la perturbation Λ_C sera non déstabilisante et donc admissible pour (IV.9) (avec $\Lambda_M = I_m$) si :

⁽¹⁾ Dans ce cas ($\Lambda_M(.) = I_m$), $\Lambda(.) \equiv \Gamma(.)$.

⁽²⁾ Les matrices Λ_C et R commutent (cf. [79], Chapitre 9).

$$(R + G^T P G) \Lambda_c + \Lambda_c^T (R + G^T P G) + R \Lambda_c \Lambda_c^T - \Lambda_c^T (R + G^T P G) \Lambda_c \quad (\text{IV.23})$$

$$> (R + G^T P G)^{1/2} \left\{ I_m - \left[(R + G^T P G)^{1/2} K Q^{-1} K (R + G^T P G)^{1/2} \right]^{-1} \right\} (R + G^T P G)^{1/2}$$

La démonstration de ce théorème se déduit directement du Théorème 10 en exprimant que Λ_c commute avec R .

Les applications qui découlent du Théorème 11 sont de deux types :

1. Le problème d'optimisation du régulateur linéaire quadratique étant donné, il est possible d'utiliser l'inégalité (IV.23) pour rechercher (par optimisation paramétrique) la plus importante perturbation susceptible de ne pas déstabiliser le système (IV.9).

2. La perturbation Λ_c étant connue en direction et éventuellement en grandeur, l'utilisation de l'inéquation (IV.23) permet d'ajuster les matrices de pondération de la fonction de coût (IV.10) afin d'accroître la marge de tolérance vis-à-vis de Λ_c .

Ce théorème est à la fois une généralisation et une extension au cas discret du Théorème 1 de Wong, Stein et Athans [4-5] qui, dans le cas continu, définit par une inégalité matricielle la notion de marge de gain multivariable lorsque $\Lambda_M = I_n$ et lorsque Λ_c et R sont des matrices constantes diagonales. Ce théorème étend également au domaine temporel discret le Théorème 3 de Bourlès et Mercier [50], obtenu plus récemment également dans le cas continu, et qui caractérise une marge multivariable de stabilité lorsque Λ_c est normale. La nature des équations ne permet cependant pas ici d'obtenir un résultat *explicite*, analogue à celui de [50], fournissant un minorant pour la marge de stabilité du système contrôlé.

IV.4. — ROBUSTESSE STRUCTURELLE GÉNÉRALISÉE DES RÉGULATEURS LINÉAIRES QUADRATIQUES

Par opposition à la section précédente, des perturbations additives, prises en compte par \mathcal{F} , et des perturbations multiplicatives sont maintenant supposées affecter simultanément le système linéarisé (IV.5).

Il est donc possible de faire la synthèse des résultats généraux obtenus en Section IV.2, avec K optimal et donné par l'équation (IV.11), et des résultats plus particuliers présentés en Section IV.3.

a. Cas où $m = n$.

Théorème 12 : Soit $(\Lambda_c(\cdot), \Lambda_M(\cdot)) \in \mathbf{R}^{m \times m} \times \mathbf{R}^{n \times n}$ l'ensemble des couples de perturbations multiplicatives vérifiant les hypothèses (IV.17), (IV.18), (IV.19) du Théorème 9 et soient $\lambda \in]0, 1]$ et $J(\cdot) \in \mathbf{R}^{n \times n}$, semi-définie positive, les quantités qui résultent de l'application de (IV.20). Le système non linéaire dynamique perturbé (IV.4, IV.6) muni de la loi de commande optimale (IV.11), est stable à gain fini en boucle fermée si la perturbation additive \mathcal{F} vérifie l'inégalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}, \forall k \in \mathbf{Z}_+,$$

$$\frac{\|(\mathcal{F}x)_k\|_E^2}{\|x_k\|_E^2} + \frac{2\|P(F - G\Lambda_c(\cdot)K\Lambda_M(\cdot))\|_S}{\|P\|_S} \frac{\|(\mathcal{F}x)_k\|_E}{\|x_k\|_E} < \frac{\lambda}{\|S_m^{-1}\|_S \|P\|_S} \quad (\text{IV.24})$$

où $S_m = Q + \lambda^{-1} U^T J(\cdot) U$ est une matrice minorante de $\lambda^{-1} S(\cdot)$ (voir Théorème 9).

b. Cas où $m < n$

Comme pour le Théorème 10, les conditions générales du Théorème 8 ne peuvent se simplifier qu'en restreignant le problème aux seules perturbations de la chaîne de commande ($\Lambda_M(\cdot) = I_n$).

Théorème 13 : Soit $\Lambda_c(\cdot) \in \mathbf{R}^{m \times m}$ l'ensemble des perturbations de la chaîne de commande vérifiant la condition (IV.21) du Théorème 10 et soient $\lambda \in]0, 1]$ et $J(\cdot) \in \mathbf{R}^{m \times m}$, semi-définie positive, les quantités qui résultent de l'application de (IV.22).

Le système non linéaire dynamique (IV.4, IV.6) (avec $\Lambda_M(\cdot) = I_n$), muni de la loi de commande optimale (IV.11) est stable à gain fini en boucle fermée si la perturbation additive \mathcal{F} vérifie l'inégalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}^m - \{0_{\mathbb{R}^m}\}, \forall k \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\frac{\|(\mathcal{F}x)_k\|_E^2}{\|x_k\|_E^2} + 2 \frac{\|P(F - G\Lambda_E(\cdot)K)\|_S}{\|P\|_S} \frac{\|(\mathcal{F}x)_k\|_E}{\|x_k\|_E} < \frac{\lambda}{\|S_m^{-1}\|_S \|P\|_S} \quad (\text{IV.25})$$

avec $S_m = Q + \lambda^{-1} U^T J(\cdot) U$, matrice minorante de $\lambda^{-1} S(\cdot)$ (voir Théorème 10).

Ces deux derniers théorèmes représentent, dans le cadre restrictif de leurs hypothèses particulières (cas $m = n$ ou $m < n$ avec $\Lambda_M(\cdot) = I_n$), une extension au cas discret du Théorème 4 de Bourlès et Mercier [50], démontré dans le domaine continu. Ils constituent également une généralisation des Théorèmes 9 et 10 (Section précédente).

Le problème d'optimisation quadratique étant posé et des perturbations multiplicatives $\Lambda_C(\cdot)$ et $\Lambda_M(\cdot)$ étant données, les inégalités (IV.24) et (IV.25) fournissent un moyen permettant de déterminer la plus grande classe de perturbations additives tolérables vis-à-vis de la stabilité du système contrôlé. Ces résultats qualifient donc bien la *robustesse structurelle généralisée* du système linéarisé (IV.5). Bien plus, en raison de la définition de \mathcal{F} , opérateur non linéaire pouvant rassembler à la fois les résidus de linéarisation du système non linéaire (IV.4) et les erreurs de modèle, ces résultats permettent de conclure à la stabilité du système non linéaire (IV.4), commandé optimalement (loi L.Q.).

IV.5. – RÉCAPITULATION

Pour un système à retour non linéaire et non dynamique donné, le Théorème 8 permet de déterminer l'ensemble des perturbations additives (éventuellement non linéaires et non dynamiques) que le processus peut supporter en présence de perturbations multiplicatives dans les chaînes de mesure et de commande. Ces perturbations multiplicatives peuvent être des éléments non linéaires (Théorèmes 8-10, 12, 13) ou des matrices constantes (Théorème 11).

L'application très importante aux régulateurs linéaires quadratiques aboutit, sous certaines hypothèses (cf. Théorèmes 9-13), à des expressions numériquement exploitables, permettant de qualifier des classes de perturbations admissibles qu'elles soient multiplicatives ou additives. Par rapport au Chapitre III la restriction aux systèmes à retour non dynamique se traduit donc par une plus grande facilité d'exploitation numérique des résultats.

Cette démarche représente un progrès décisif vers la quantification et l'optimisation des propriétés de robustesse des régulateurs à temps discret, peu étudiées jusqu'à maintenant si ce n'est dans [48] où l'inclusion d'un graphe dans un secteur conique se prête cependant mal aux exploitations numériques. Elle étend également d'une manière non triviale au cas discret les résultats déjà obtenus (cf. [42-46, 49, 50]) dans le domaine temporel continu.

Tous ces résultats s'appliquent tout particulièrement dans le cas encore plus simplifié mais très réaliste, où les perturbations de la chaîne de commande et de mesure sont des matrices de gain constantes. Même dans ces conditions les Théorèmes présentés ici étendent au domaine discret les principaux résultats de robustesse [42-46, 49, 50].

V. — ÉVALUATION NUMÉRIQUE DES MARGES DE STABILITÉ

Les conditions suffisantes de stabilité provenant des différents théorèmes et corollaires du Chapitre III fournissent des résultats de robustesse pour un système non linéaire récurrent discret soumis à des perturbations additives non constantes ou à des perturbations affectant la chaîne de retour, ces dernières pouvant être dynamiques. La signification théorique ainsi que la portée de ces résultats nouveaux ayant déjà été explicitées dans les chapitres précédents, cette dernière partie de la Thèse est consacrée aux exploitations pratiques des conditions théoriques présentées précédemment. Les sections qui suivent proposent, sous une forme qui n'est encore qu'une ébauche une *méthode d'analyse des processus multivariables discrets linéaires, soumis à des perturbations dynamiques dans les chaînes de mesure et d'action*. Cette *méthode multivariable* est basée sur un *critère de mesure de la robustesse résiduelle* d'un régulateur perturbé. Une originalité de la démarche est de présenter ce critère sous la forme de lieux utilisant les plans de synthèse classiques des systèmes discrets monovariables : plan en z ou plan en w' (Transformée de Tustin ou de Whitbeck). L'application qui est présentée concerne le second niveau du régulateur de pilotage d'un avion de combat (cf. II, 5 et plus particulièrement la Section II,5.5).

V.1. — CHOIX DU CRITÈRE DE ROBUSTESSE

Le processus discret considéré dans cette section est celui de la Figure 18 où $\mathcal{F}=0$ et $\beta=0$. Le gain K du régulateur est supposé être optimal vis-à-vis d'un critère de performance quadratique (cf. II,2.2). La matrice symétrique réelle, P , solution de l'équation de Riccati discrète, est calculée selon la méthode décrite au (II,5.5.1).

Compte tenu du schéma de régulation de la Figure 18 et des résultats du Corollaire 1, l'expression permettant le plus large spectre d'applications pour l'évaluation de la robustesse vis-à-vis de perturbations multiplicatives dynamiques, $\Lambda_M(z)$ et $\Lambda_C(z)$, agissant respectivement dans la chaîne de mesure et dans la chaîne d'action est donnée par l'Équation (III.48). Cela revient donc à vérifier l'inéquation suivante, $\forall z=e^{j\theta} \in \mathcal{C}_1$, $\theta \in [0, \pi]$:

$$D(z) \triangleq \bar{P} - [F - G \Lambda_C(z) K \Lambda_M(z)]^* \bar{P} [F - G \Lambda_C(z) K \Lambda_M(z)] - D_0 \succcurlyeq 0, \quad (V.1)$$

où P , définie par la fonction quadratique (III.29), et D_0 sont des matrices de réglage hermitiennes complexes. Les matrices F et G sont caractéristiques de la dynamique linéaire du processus (III.38); $D(z) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ est une matrice hermitienne.

Par conséquent, une *mesure* de la robustesse vis-à-vis des perturbations dynamiques $\Lambda_C(z)$ et $\Lambda_M(z)$ peut être définie par « le degré de définie positivité » de la quantité $D(z=e^{j\theta})$ en régime fréquentiel, lorsque θ varie dans l'intervalle $[0, \pi]$. Afin d'effectuer cette évaluation la définition suivante est proposée :

Définition : Une mesure (dépendante des matrices P et D_0 choisies) de la marge de stabilité d'un processus linéaire discret vis-à-vis de perturbations dynamiques affectant les chaînes de commande et de mesure est donnée par la quantité $\sigma(D(z))$, où σ est la plus petite valeur singulière de la matrice complexe hermitienne $D(z)$.

Remarque : La définition et la méthode de calcul de la quantité σ seront présentées dans la section suivante.

Cette définition appelle un certain nombre de commentaires quant à l'utilité des quantités σ . La mise en évidence d'une marge de stabilité résiduelle éventuelle du processus multivariable consistera à tracer le lieu $\sigma(D(z=e^{j\theta}))=f(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$ tant que la propriété $D(z) \succcurlyeq 0$ est vérifiée. Si $D(z)$ devient non définie positive, le lieu sera complété par le tracé de $\lambda_{\min}(D(z=e^{j\theta}))$, $\theta \in [0, \pi]$, où λ_{\min} est la plus petite valeur propre réelle de $D(z)$. Globalement ce lieu sera dénommé « lieu en sigma ».

La robustesse vis-à-vis de perturbations $\Lambda_C(z)$ et $\Lambda_M(z)$ connues en direction, par exemple, mais dont les effets ne sont pas prévisibles peut être testée. En effet, lorsque $\Lambda_C(z)$ et $\Lambda_M(z)$ sont des opérateurs rationnels, il est possible de cerner une classe de perturbations admissibles en modifiant les coefficients des fractions rationnelles de $\Lambda_C(z)$ et $\Lambda_M(z)$.

V.2. – NOTION DE VALEUR SINGULIÈRE. ALGORITHME DE CALCUL

Décomposition en valeurs singulières

Considérons une matrice $D \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$, où $\mathbb{C}_r^{m \times n}$ dénote l'ensemble des matrices complexes rectangulaires de rang r , il vient alors le théorème suivant (cf. les articles de synthèse de Laub [82] et Klema et Laub [83]) :

Théorème de décomposition : Il existe des matrices unitaires $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et $V \in \mathbb{C}^{m \times m}$ telles que :

$$D = U \Sigma V^* = \sum_{i=1}^r \sigma_i(D) u_i v_i^*,$$

où

$$\Sigma = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$$

et $S = \text{diag}(\sigma_i)_{1 \leq i \leq r}$, avec $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$.

Les quantités $\sigma_1, \dots, \sigma_r, \sigma_{r+1}=0, \dots, \sigma_m=0$ (en supposant $n \geq m$) sont appelées les *valeurs singulières* de la matrice D et sont les racines carrées positives des valeurs propres de D^*D ($\sigma_i = [\lambda_i(D^*D)]^{1/2}$). Le nombre de valeurs singulières non nulles détermine le rang de la matrice D .

Les colonnes de U sont appelées les « vecteurs singuliers à gauche » de D et les colonnes de V les « vecteurs singuliers à droite de D ».

Les nombreuses propriétés algébriques des valeurs singulières fournissent d'importantes possibilités d'applications à la théorie des systèmes comme à l'Automatique moderne. Ce type de décomposition permet une résolution particulièrement efficace des systèmes linéaires ($Ax=b$) ainsi que des minimisations de type moindres carrés (cf. Forsythe *et al.* [84]); il permet également le calcul de pseudo-inverses de matrices rectangulaires quelconques.

Après ces quelques rappels mathématiques, il est possible de justifier la Définition de la Section V.1. Celle-ci repose sur la propriété fondamentale suivante (cf. [85]), vérifiée lorsque $D \in \mathbb{C}^{n \times n}$:

Si λ_i est valeur propre de D , $\forall i \in [1, n] \cap \mathbb{N}$,

$$0 \leq \underline{\sigma} \leq |\lambda_i| \leq \bar{\sigma},$$

où $\underline{\sigma}$ est la plus petite valeur singulière de D et $\bar{\sigma}$ la plus grande ($\bar{\sigma} = \|D\|_S$). Considérant une matrice $D(z) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, dépendante de la fréquence (cf. Section V.1), la quantité $\underline{\sigma}(z)$ peut donc être interprétée comme une mesure de son « degré de définie positivité ». Dans l'application particulière envisagée ici, la matrice $D(z)$ (cf. Équation (V.1)) étant hermitienne ($D(z) = D^*(z)$), $\underline{\sigma}$ se confond avec $|\lambda_{\min}(D(z))|$. En effet, si λ_{\min} est valeur propre de D alors λ_{\min}^2 est valeur propre de $D^*D = D^2$.

Pour ce qui est des applications récentes, la plupart des logiciels mettant en œuvre une méthode de décomposition en valeurs singulières ont été développés pour des matrices à coefficients réels (cf. [84, 86, 87]). Un algorithme s'appliquant à une matrice complexe avait été décrit par Golub et Kahan dans [88] mais sans que le logiciel correspondant ait été mis au point. Le développement de ce logiciel, appelé CXSVD, a été effectué dans le cadre de cette Thèse. L'algorithme est basé sur une série de transformations hermitiennes opérant directement sur la matrice $D \in \mathbb{C}^{n \times n}$. La solution de facilité qui consisterait à calculer les quantités, $\sigma_i = [\lambda_i(D^*D)]^{1/2}$, est ici rejetée car cette méthode est peu précise en raison du calcul du produit D^*D ; elle est donc peu fiable lorsque σ_i est petit, ce qui sera le cas des applications numériques qui suivront.

Description sommaire de l'algorithme (cf. [88] pour détails).

Celui-ci se décompose en deux étapes successives :

TRANSFORMATION DE HOUSEHOLDER [89]

La matrice D est réduite à une forme bidiagonale, JC (diagonale et surdiagonale). Elle est obtenue en opérant alternativement des transformations unitaires élémentaires sur les colonnes et les lignes de D . La propriété de ces transformations est d'assurer l'invariance de la norme des vecteurs colonnes et lignes.

RÉDUCTION DE LA FORME BIDIAGONALE À UNE FORME DIAGONALE

Des rotations planes complexes, dites de Givens (cf. [89]), sont appliquées alternativement à droite et à gauche de la matrice JC . Une suite de transformations d'indice i est ainsi définie par $JC_{i+1} = S_i JC_i T_i$. Dans cette dernière expression, la transformation de droite T_i est choisie pour que la matrice $(JC_{i+1})^*(JC_{i+1})$, initialement tridiagonale, converge vers une matrice diagonale. Celle de gauche, S_i , est déterminée pour que JC_{i+1} conserve une forme bidiagonale. Les termes surdiagonaux de JC convergent très rapidement vers la valeur nulle et la matrice diagonale finale contient les valeurs singulières de D .

V.3. – TRANSFORMATIONS BILINÉAIRES

Un rappel concernant les différentes formes de la transformation bilinéaire ou homographique et ses applications aux systèmes discrets est effectué dans cette section.

Transformation ou méthode de Tustin

L'origine de cette transformation provient d'une *approximation* qui consiste à utiliser la « règle des trapèzes » pour intégrer un signal continu entre deux instants d'échantillonnage et obtenir ainsi une « transformée en z ». Cette méthode fut particulièrement développée par Tustin vers 1947 d'où le nom actuel de « méthode de Tustin ». La règle pratique qui en découle consiste simplement à substituer à la variable de Laplace s d'une fonction de transfert $H(s)$ la quantité $s = (2/T) (z-1)/(z+1)$ où z est la variable de la transformée en z et T la période d'échantillonnage. Cette transformation particulière met en correspondance d'une part la région stable du plan en s ($\text{Re}(s) < 0$) avec l'intérieur du cercle unité et d'autre part l'axe imaginaire ($j\omega, \omega \in]-\infty, +\infty[$) avec le cercle unité $\mathcal{C}_1 (e^{j\theta}, \theta \in [0, 2\pi])$ (cf. Figure 20).

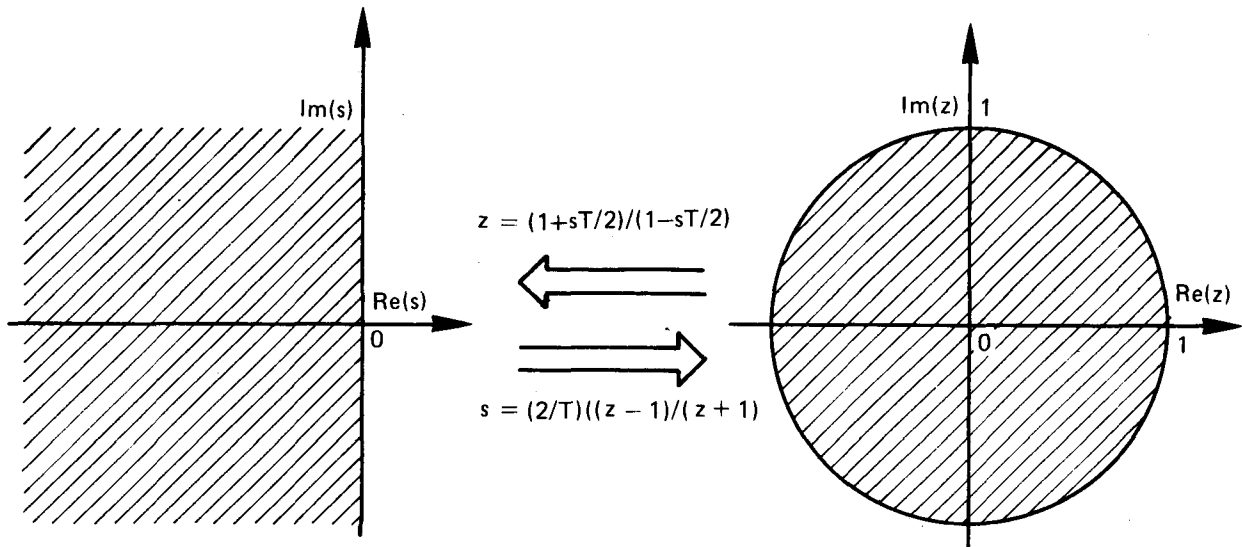


Fig. 20. – Transformation de Tustin.

Cette méthode n'est plus utilisée aujourd'hui pour obtenir une fonction de transfert en z , un calcul direct étant préféré. On verra cependant plus loin l'analogie entre la méthode de Tustin et la transformation en w' .

Utilisation de la transformation bilinéaire

L'augmentation sans cesse croissante des régulateurs numériques depuis les années 1950-1960 a incité les automaticiens à trouver une méthode directe de synthèse des asservissements discrets.

Si la méthode des lieux de Bode a un sens pour les systèmes continus, elle perd sa validité dans le domaine en z , puisque la fréquence ω d'un signal harmonique est reliée à z par la relation transcendante $z = e^{j\omega T}$, T étant la période d'échantillonnage. Dans ces conditions, il n'est guère possible de donner une signification graphique aux notions de marge de gain et marge de phase.

Différentes transformations ont été proposées dans la littérature pour essayer de pallier à ce défaut et permettre d'étudier la stabilité des processus discrets à retours monovariabiles.

Transformation en w

La transformation en $w = \frac{z-1}{z+1}$ met en correspondance le disque de rayon 1 du plan en z et le demi-plan gauche du plan en s (cf. Figure 21).

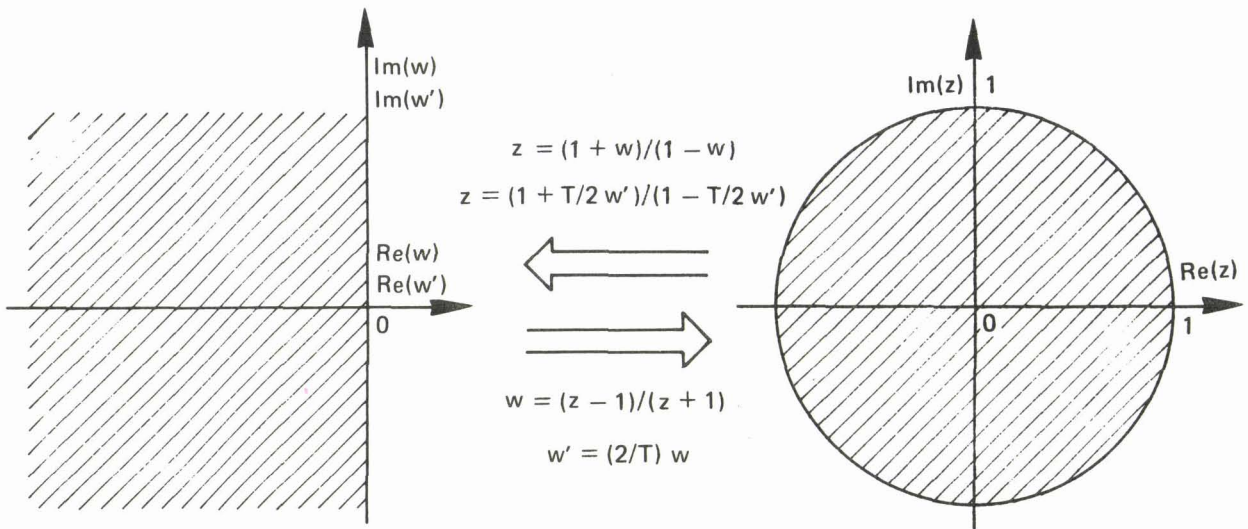


Fig. 21. — Transformations bilinéaires réciproques.

Cette transformation permet d'obtenir à partir d'une fonction de transfert discrète $H(z)$ une autre, $H(w)$, sur laquelle les critères de stabilité classiques de Routh-Hurwitz, Schur-Cohn, etc. sont applicables (cf. [90] et [91]). Un défaut du plan en w est toutefois de ne pas approcher le plan en s lorsque la période d'échantillonnage appliquée à un processus continu devient très faible, en effet pour $z = e^{sT}$ et $T \approx 0$,

$$w \sim sT/2 \quad \text{et} \quad \lim_{T \rightarrow 0} w = 0.$$

Cet inconvénient disparaît si une transformation bilinéaire modifiée est considérée.

Transformation en w'

Cette transformation se distingue de la précédente par le facteur d'échelle $2/T$. Elle porte tantôt le nom de « Transformation en w » (cf. Franklin et Powell [77]) ou « Transformation en w' » (cf. Whitbeck et Hofmann [92, 93]); cette dernière appellation sera retenue pour cet exposé. Par définition,

$$w' = (2/T) w = (2/T) \frac{z-1}{z+1}.$$

D'un point de vue strictement littéral cette transformation est celle de Tustin rappelée plus haut. Elle se traduit donc graphiquement par la Figure 21, où la variable s de la Figure 20 est remplacée par w' .

Contrairement à la transformation en w , dont un rappel a été effectué au paragraphe précédent, pour $z = e^{sT}$ et lorsque $T \approx 0$,

$$w' \sim (2/T)(sT/2) = s \quad \text{et} \quad \lim_{T \rightarrow 0} w' = s.$$

Dans l'étude harmonique d'un processus ($s = j\omega$), soit lorsque $z = e^{j\omega T}$, le calcul de la quantité w' aboutit à

$$w' = j(2/T) \operatorname{tg}(\omega T/2). \quad (\text{V. 2})$$

En posant $w' = j\nu$, l'Équation (V. 2) définit une fréquence fictive ν , où ν est l'analogue dans le plan en w' de la fréquence réelle ω du plan en s . Il vient alors,

$$\nu \simeq \omega \quad \text{pour} \quad |\omega| < (\pi/2T).$$

Ainsi, pour un asservissement numérique *monovariante* donné, caractérisé par une fonction de transfert $H(z)$, il sera approprié d'effectuer la transformation $z = (1 + T/2w') / (1 - T/2w')$ pour réaliser la mise au point dans le plan en w' . La synthèse se fera plus particulièrement à l'aide des lieux de Bode, tracés en fonction de la fréquence fictive v (en rad/s), pendant les phases *qualitatives* de la mise au point ($|v| < 2/T$). La notion de marge de gain et marge de phase reprend alors le sens qu'elle possédait déjà dans le plan en s .

D'autres propriétés ont été récemment mises en évidence sur un exemple particulier par Whitbeck et Hofmann [92, 93].

Considérons le filtre du premier ordre :

$$H(s) = \frac{1}{1 + \tau s}, \quad (\text{V. 3})$$

dont l'entrée $e(t)$ est reconstituée par un bloqueur d'ordre zéro (B_0) à partir d'un signal échantillonné (cf. Figure 22).

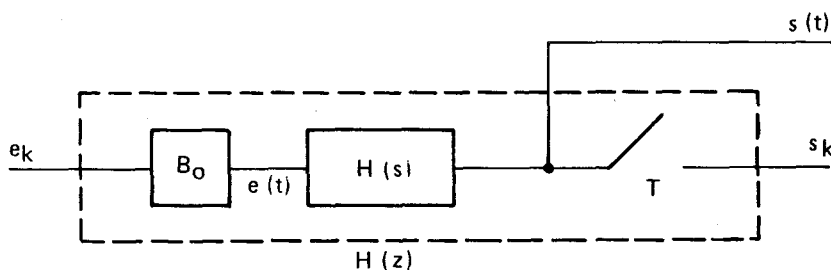


Fig. 22. — Échantillonnage d'un processus continu monovariante.

La transformée en z de $H(s)$ muni de B_0 est alors donnée par :

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathcal{Z}(B_0 H(s)) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}(H(s)/s) \\ &= ((z - 1)/z) \mathcal{Z}(1/(s(1 + \tau s))) \\ &= ((z - 1)/z) \mathcal{Z}(1/s - \tau/(1 + \tau s)) \\ &= ((z - 1)/z) (z/(z - 1) - z/(z - e^{-T/\tau})) \\ &= (1 - e^{-T/\tau}) / (z - e^{-T/\tau}). \end{aligned} \quad (\text{cf. Annexe H}).$$

L'utilisation de la transformation $z = (1 + T/2w') / (1 - T/2w')$ conduit à la fonction de transfert :

$$H(w') = \frac{z}{T} \times \frac{1 - e^{-T/\tau}}{1 + e^{-T/\tau}} \times \frac{1 - T/2 w'}{w' + \frac{z}{T} \frac{1 - e^{-T/\tau}}{1 + e^{-T/\tau}}} \quad (\text{V. 4})$$

A priori, aucune ressemblance n'est détectable au seul examen de la forme des fonctions de transfert $H(s)$ et $H(w')$. Le pôle $-1/\tau$ de $H(s)$ est transformé en $-(2/T)(1 - e^{-T/\tau}) / (1 + e^{-T/\tau})$ tandis qu'un zéro fini valant $2/T$ est apparu dans $H(w')$. Il est possible de justifier ce zéro en considérant le « zéro à l'infini » du filtre $H(s)$. En effet, pour de faibles fréquences d'échantillonnage, $\lim_{T \rightarrow 0} 2/T = \infty$ et

$\lim_{T \rightarrow \infty} -(2/T)(1 - e^{-T/\tau}) / (1 + e^{-T/\tau}) = -1/\tau$; $H(w')$ s'identifie donc à $H(s)$ (cf. (V. 3-4)). La signification du zéro

$2/T$ dans le plan en w' provient de la contribution à déphasage non minimal produite par le bloqueur d'ordre zéro utilisé pour reconstruire l'entrée du processus continu $H(s)$ (cf. Figure 22).

Un avantage appréciable du plan en w' est donc de faire plus clairement apparaître sur la fonction de transfert $H(w')$ et *a fortiori* sur les lieux classiques de synthèse (lieux de Bode, lieux des racines) l'effet du bloqueur d'ordre zéro B_0 et de la période d'échantillonnage T . Ces propriétés ne sont pas explicites sur la fraction rationnelle $H(z)$.

V.4. — APPLICATION AUX « LIEUX EN SIGMA »

Une méthodologie de la mesure de la robustesse des régulateurs multivariables a été exposée en Section V.1.

Cette méthode se traduit pratiquement par le tracé de

et

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} (D(z \triangleq e^{j\theta})) &= f(\theta) & \text{si } D(z) \geq 0 \\ \lambda_{\min} (D(z \triangleq e^{j\theta})) & & \text{si } D(z) < 0, \theta \in [0, \pi], \end{aligned} \quad (V.5)$$

où $D(z)$ est définie par l'Équation (V. 1), donc pour $\Lambda_c(z)$ et $\Lambda_M(z)$ données.

Compte tenu des nombreuses propriétés qualitatives et fréquentielles de la transformée en w' , il semble souhaitable d'exploiter, parallèlement à (V.5), un mode de synthèse qui mesurerait le degré de robustesse résiduelle d'un régulateur multivariable discret par :

et

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} (D(j\nu)) &= g(\nu) & \text{si } D(j\nu) \geq 0 \\ \lambda_{\min} (D(j\nu)) & & \text{si } D(j\nu) < 0, \nu \in [0, +\infty], \end{aligned}$$

où $D(j\nu)$ se déduit de $D(z)$ par la transformation en w' , $z = (1 + T/2 w') / (1 - T/2 w')$ avec $w' = j\nu$.

A cette occasion, un logiciel de calcul automatique (appelé TRANSZW) a été mis au point afin d'obtenir pour une matrice de transfert $D(z)$ donnée, la matrice de transfert équivalente $D(w')$ résultant de la transformée en w' . Seul le cas d'une matrice $D(z)$ dont les éléments sont des fractions rationnelles est examiné ici.

Description de l'algorithme

La logique utilisée résulte des algorithmes de transformation bilinéaire proposés par Greaves *et al.* [94], puis par Jury et Chan [95] et appliqués à un polynôme de degré n .

Soit $N(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$. L'application de la transformation $z = (x+1)/(x-1)$ à ce polynôme conduit à la fraction rationnelle :

$$X(x) = \frac{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0}{(x-1)^n} = \frac{N(x)}{D(x)}$$

Jury et Chan proposent dans [95] une élégante relation algébrique pour déduire les coefficients de $N(x)$ à partir de ceux de $N(z)$. En effet, si $a = [a_n a_{n-1} \dots a_0]^T$ alors le nouveau vecteur $b = [b_n b_{n-1} \dots b_0]^T$ est engendré par la relation

$$b = Q a,$$

où la matrice $Q \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ est définie par les récurrences suivantes :

$$\begin{aligned} Q_{k+1}(1, j) &= 1 & \forall j = 1, \dots, k+1 \\ Q_{k+1}(i, 1) &= \binom{k}{i-1} & \forall i = 1, \dots, k+1 \\ Q_{k+1}(k+1, j) &= (-1)^{j+1} & \forall j = 1, \dots, k+1 \\ Q_{k+1}(i, j) &= Q_k(i, j-1) - Q_k(i-1, j-1) & \forall i = 2, 3, \dots, k \\ & & \forall j = 2, 3, \dots, k+1 \end{aligned}$$

La matrice Q est obtenue lorsque $k = n$ (degré du polynôme).

La transformée en w' se traduit par l'équation :

$$z = \frac{1 + (T/2) w'}{1 - (T/2) w'} = \frac{1 + x}{1 - x} = -1 \times \frac{x+1}{x-1},$$

en posant $x = T/2 w'$.

Il suffit donc d'appliquer l'algorithme précédent au vecteur $a = [(-1)^n a_n (-1)^{n-1} a_{n-1} \dots a_0]^T$ pour obtenir un polynôme :

$$\begin{aligned} N(x) &= b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0 \\ &= b_n (T/2)^n w'^n + b_{n-1} (T/2)^{n-1} w'^{n-1} + \dots + b_0 \\ &= B_n w'^n + B_{n-1} w'^{n-1} + \dots + B_0. \end{aligned}$$

La suite $B_i = b_i (T/2)^i, \forall i = 0, \dots, n$ fournit alors les coefficients du polynôme transformé. Pour une fraction rationnelle $F(z) = N(z)/D(z)$, où $p = \deg N(z) \leq n = \deg D(z)$, l'algorithme est appliqué à la fois au numérateur $N(z)$ et au dénominateur $D(z)$ pour finalement obtenir :

$$F(\omega') = ((T/2)\omega' - 1)^{n-p} N(\omega') / D(\omega').$$

Cette opération est effectuée pour chaque coefficient $F_{ij}(z)$ de la matrice $D(z) = [F_{ij}(z)]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ de l'expression (V. 1).

V.5. – ORGANIGRAMME DU LOGICIEL DE SYNTHÈSE SYNTZW

Ce logiciel effectue le calcul de la marge résiduelle de robustesse d'un processus linéaire multivariable discret dont les chaînes de commande et de mesure sont perturbées par des éléments *dynamiques* modélisés par des matrices de transfert $\Lambda_C(z)$ et $\Lambda_M(z)$. Les éléments de ces tableaux sont des *fractions rationnelles*.

Les algorithmes explicités précédemment (cf. Sections V,2 et V,4) ont été appliqués au *deuxième niveau du régulateur* décrit au II,4 dans le cas où le processus étudié est le modèle linéaire de l'avion de combat déjà considéré en Section II,5.

Description sommaire de l'organigramme (cf. Planche 8)

A partir des matrices F et G du modèle linéaire de l'avion discret, la matrice des gains optimaux K est préalablement calculée. La matrice P , solution de l'équation de Riccati (II. 68), est calculée à l'aide de l'algorithme de Potter et O'Donnell décrit en Section II,5. 5. 1. K est alors donnée par l'expression $K = -(R + G^T P G)^{-1} G^T P F$.

La matrice de réglage hermitienne, également notée P , figurant dans la condition suffisante de stabilité (III. 48) du Corollaire 1 ou dans l'expression équivalente (V. 1) est ensuite lue. Il est clair qu'un choix particulier de P sera la solution de l'équation de Riccati, précédemment calculée.

Après initialisation des « fréquences » v et θ et lecture des matrices de transfert $\Lambda_C(z)$ et $\Lambda_M(z)$ suivant quatre choix possibles :

1. $\Lambda_C(z) = I_m$ et $\Lambda_M(z) = I_n$
(chaînes de mesure et de commande parfaites : cas nominal).
2. $\Lambda_C(z)$ et $\Lambda_M(z) = I_n$
(chaîne de commande perturbée).
3. $\Lambda_C(z) = I_m$ et $\Lambda_M(z)$
(chaîne de mesure perturbée).
4. $\Lambda_C(z)$ et $\Lambda_M(z)$
(chaînes de mesure et de commande affectées).

L'une ou l'autre des synthèses, $\underline{\sigma} = f(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$ (boucle A sur la Planche 8) ou $\underline{\sigma} = g(v)$, $v \in [0, +\infty[$ (boucle B sur la Planche 8) est effectuée. La séquence des calculs de ces deux boucles (A et B) conduit à la recherche de la plus petite valeur singulière de $D(z)$ ou $D(jv)$ à partir de l'algorithme exposé en Section V,2.

Simultanément, le calcul des valeurs propres $\lambda_{\min}(D(z = e^{j\theta}))$, $\theta \in [0, \pi]$ et $\lambda_{\min}(D(jv))$, $v \in [0, +\infty[$ est effectué afin de compléter les « lieux en sigma » (cf. Section V,4). La boucle B se différencie cependant de la boucle A par la mise en œuvre du logiciel TRANSW (cf. Section V,4).

V.6. – APPLICATION AU RÉGULATEUR DE PILOTAGE

Les données du modèle linéaire (matrices F et G) du *second niveau* du régulateur de poursuite décrit en Section II,4 figurent sur la Planche 2. Les quantités spécifiques au problème d'optimisation, matrices Q_r et R_r , gain optimal $K = [K_{1r}, K_{2r}]$, solution de l'équation de Riccati discrète, P_{Riccati} , sont également rassemblées sur cette planche.

Afin de mettre en œuvre le logiciel de la section précédente, un exemple de perturbations affectant d'une part la chaîne de commande et d'autre part la chaîne de mesure est maintenant proposé.

V.6.1. — Perturbations affectant les chaînes de commande et de mesure

Action sur la gouverne de gauchissement δl

Sur cette gouverne la dynamique de l'actionneur est supposée modélisée par un filtre du premier ordre,

$$H(s) = \frac{1}{1 + \tau s} = \frac{1/\tau}{s + 1/\tau}$$

Le comportement ultime de ce filtre en réponse à un échelon unitaire est donné par :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \delta l(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \times (1/s) \times \frac{1}{1 + \tau s}) = 1.$$

Son action en régime fréquentiel est décrite par le lieu de Bode de la Figure 23 lorsque $1/\tau = 10$ rad/s

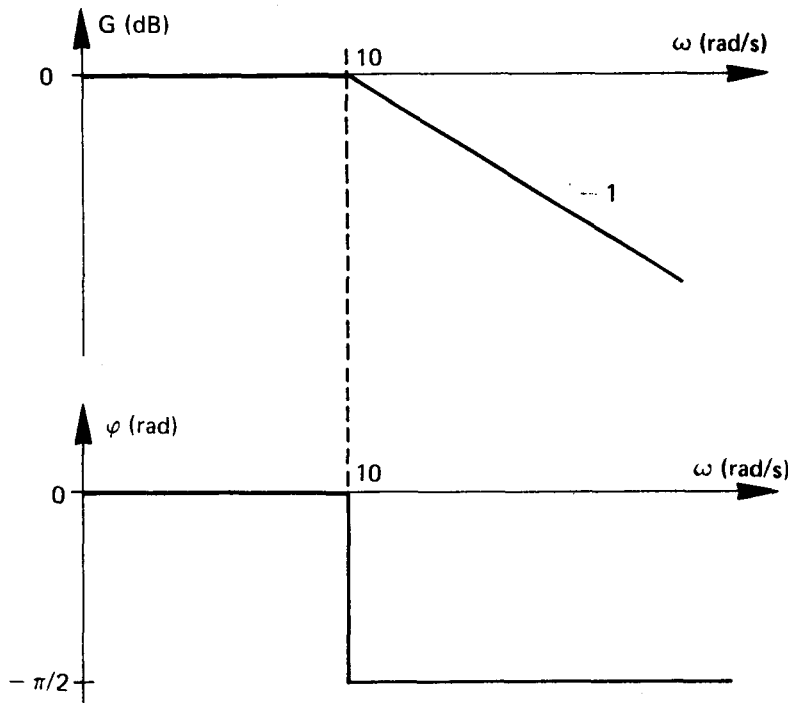


Fig. 23. — Lieu de Bode pour le filtre $10/(s+10)$ (diagramme asymptotique).

Il n'est pas nécessaire de donner ici le détail du calcul du filtre équivalent dans le domaine discret, ceci ayant été décrit en Section V.3. L'expression littérale étant :

$$H(z) = \frac{1 - e^{-T/\tau}}{z - e^{-T/\tau}},$$

où T est la période d'échantillonnage, le comportement ultime de ce filtre en réponse à un échelon est :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \delta l(t) = \lim_{z \rightarrow 1} ((z-1) \times z / (z-1) \times \frac{1 - e^{-T/\tau}}{z - e^{-T/\tau}}) = 1.$$

Puisque : $T = 1/F_e = 1/30$ s et $1/\tau = 10$ rad/s,

$$H(z) = \frac{0.284}{z - 0.717}.$$

Action sur la gouverne de direction δn

La dynamique de l'actionneur agissant sur cette gouverne est supposée être donnée par le second ordre :

$$G(s) = \frac{1}{\tau_1 \tau_2} \frac{1}{(s + 1/\tau_1)(s + 1/\tau_2)}.$$

En réponse à un échelon, le régime permanent est donné par :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f_n(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \times (1/s) \times G(s)) = 1.$$

En choisissant $1/\tau_1 = 20$ rad/s et $1/\tau_2 = 35$ rad/s, le comportement de ce filtre en régime harmonique peut être décrit par le lieu de Bode de la Figure 24.

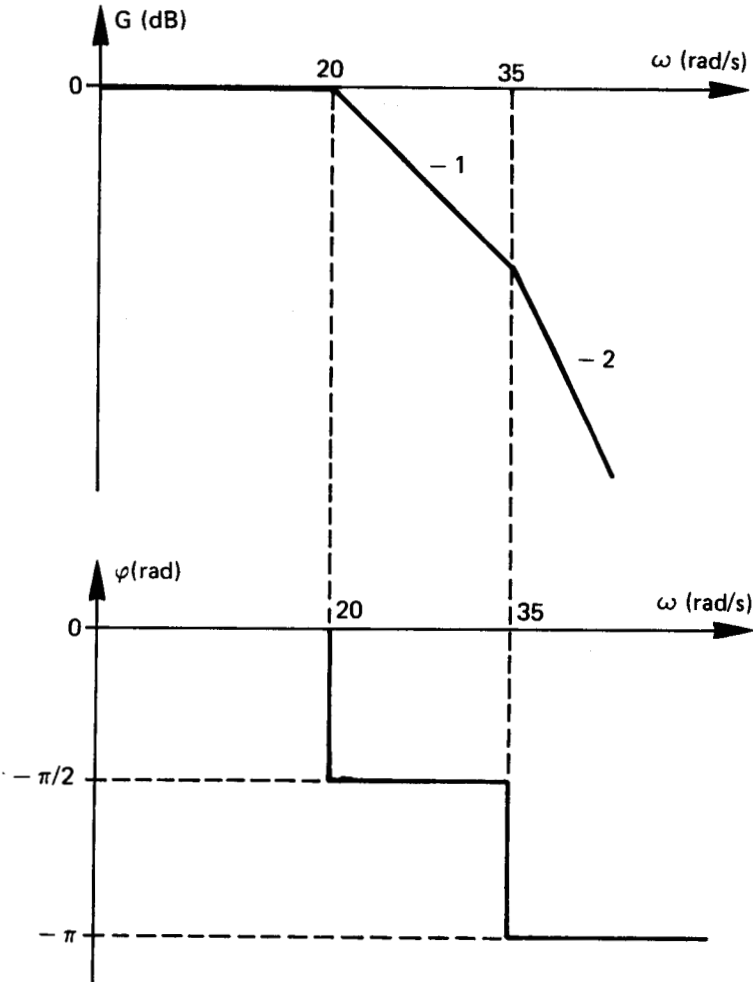


Fig. 24. — Lieu de Bode pour le filtre $20 \times 35 / (s+20)(s+35)$ (diagramme asymptotique).

Le calcul du filtre discret équivalent s'effectue en considérant le signal continu à l'entrée de $\Lambda_c(s)$, $e(t)$, comme reconstitué par l'intermédiaire d'un bloqueur d'ordre zéro, B_0 , à partir du signal naturellement discret, e_k , issu du calculateur de bord (cf. Section V,3, Figure 22). Il vient alors le résultat suivant :

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}(B_0 G(s)) = (z-1)/z \times \mathcal{Z}(G(s)/s) \\ &= (z-1)/z \times \mathcal{Z}\left(\frac{1-\tau_1}{s} \frac{1}{\tau_1-\tau_2} \frac{1}{s+(1/\tau_1)} - \frac{\tau_2}{\tau_2-\tau_1} \frac{1}{s+(1/\tau_2)}\right) \\ &= (z-1)/z \times \left(\frac{z}{z-1} - \frac{\tau_1}{\tau_1-\tau_2} \frac{z}{z-e^{-T/\tau_1}} - \frac{\tau_2}{\tau_2-\tau_1} \frac{z}{z-e^{-T/\tau_2}}\right). \end{aligned}$$

(cf. Annexe H).

Par conséquent,

$$G(z) = \frac{e^{-T/\tau_1} e^{-T/\tau_2} - c + (1 - e^{-T/\tau_1} - e^{-T/\tau_2} + c)z}{(z - e^{-T/\tau_1})(z - e^{-T/\tau_2})}$$

avec

$$C = \frac{\tau_1 e^{-T/\tau_2} - \tau_2 e^{-T/\tau_1}}{\tau_1 - \tau_2} .$$

En réponse à un échelon, le comportement ultime de ce filtre est donné par :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s_m(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \times z / (z-1) \times G(z) = 1 .$$

Compte tenu des valeurs numériques : $T=1/30$ s, $1/\tau_1=20$ rad/s et $1/\tau_2=35$ rad/s,

$$G(z) = \frac{0.118 + 0.217z}{z^2 - 0.825z + 0.160} .$$

La matrice de transfert $\Lambda_C(z)$ a donc pour expression :

$$\Lambda_C(z) = \begin{bmatrix} \frac{0.284}{z - 0.717} & 0 \\ 0 & \frac{0.217z + 0.118}{z^2 - 0.825z + 0.160} \end{bmatrix} .$$

V.6.2. – Perturbation affectant la chaîne de mesure

Cette perturbation est donnée par la matrice de transfert suivante :

$$\Lambda_M(z) = \begin{bmatrix} v & p & r & e_{pa} & e_r \\ \hline G_{11}(z) & G_{12}(z) & G_{13}(z) & 0 & 0 & v \\ 0 & G_{22}(z) & G_{12}(z) & 0 & 0 & p \\ 0 & G_{12}(z) & G_{22}(z) & 0 & 0 & r \\ G_{41}(z) & G_{12}(z) & G_{12}(z) & G_{22}(z) & 0 & e_{pa} \\ 0 & G_{12}(z) & 0 & 0 & G_{22}(z) & e_r \end{bmatrix}$$

Les éléments diagonaux $G_{ii}(z)$, $i \in \{1, 2\}$ sont de type passe-bas et représentent les termes principaux des différentes mesures. Leur réponse indicielle est supposée être sans erreur de régime permanent ($\lim_{z \rightarrow 1} ((z-1) z / (z-1)) G_{ii}(z) = 1$ ou $\lim_{s \rightarrow 0} (s \times (1/s) G_{ii}(s) = 1)$). Les termes hors diagonaux traduisent des couplages transitoires avec les autres variables du mouvement. Les quantités retenues dans cette application sont réunies dans le tableau figurant à la fin de cette section.

Les fonctions de transfert $G_{ij}(z)$ sont obtenues à partir du calcul suivant :

$$G_{i,j}(z) = (z-1)/z \times \mathcal{Z} (G_{i,j}(s) \times (1/s)) ,$$

prenant ainsi en compte l'échantillonneur-bloqueur qui agit dans la chaîne de mesure. Ainsi les premiers ordres $G_{12}(z)$, $G_{41}(z)$ et le second ordre $G_{11}(z)$ sont calculés comme en Section V.6.1. Par contre, la fonction de transfert,

$$G_{13}(s) = \frac{b \omega_0 s}{(s+a)^2 + \omega_0^2} = \frac{b \omega_0 s}{s^2 + 2as + a^2 + \omega_0^2} = \frac{b \omega_0 s}{s^2 + 2 \xi \omega_m s + \omega_m^2}$$

où $\omega_n = (a^2 + \omega_0^2)^{1/2}$ et $\xi \omega_n = a$, qui possède une réponse indicielle du type oscillatoire amortie a pour filtre discret équivalent :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(B_0 G_{13}(s)) &= (z-1)/z \times \mathcal{L}\left(\frac{1}{s} \times \frac{b \omega_0 s}{(s+a)^2 + \omega_0^2}\right) \\ &= (z-1)/z \times \mathcal{L}\left(\frac{b \omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}\right) \\ &= (z-1)/z \times b \frac{z e^{-aT} \sin \omega_0 T}{z^2 - 2 z e^{-aT} \cos \omega_0 T + e^{-2aT}} \end{aligned}$$

Par conséquent,

(cf. Annexe H).

$$G_{13}(z) = \frac{b e^{-aT} (z-1) \sin \omega_0 T}{z^2 - 2 z e^{-aT} \cos \omega_0 T + e^{-2aT}},$$

avec les valeurs numériques $\omega_0 = 120$ rad/s, $T = 1/30$ s, $a = 38$ et $b = 10^{-2}$, à savoir pour un amortissement $\xi = 0.3$ et une fréquence de coupure $\omega_n = 129$ rad/s.

La fonction de transfert retenue pour $G_{22}(s)$ est

$$G_{22}(s) = b \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2};$$

le filtre discret équivalent est donné par

$$\begin{aligned} G_{22}(z) &= (z-1)/z \times \mathcal{L}\left(\frac{1}{s} \times \frac{b(s+a)}{(s+a)^2 + \omega_0^2}\right) \\ &= (z-1)/z \times \frac{ab}{a^2 + \omega_0^2} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z^2 - z e^{-aT} \sec \theta \cos(\omega_0 T - \theta)}{z^2 - 2 z e^{-aT} \cos \omega_0 T + e^{-2aT}} \right) \end{aligned}$$

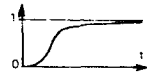
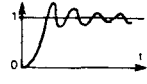
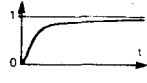
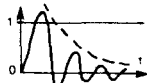
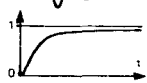
avec $\text{tg } \theta = \omega_0/a$ (cf. Annexe H).

Par conséquent,

$$G_{22}(z) = \frac{ab}{a^2 + \omega_0^2} \frac{z(1 + e^{-aT}((\omega_0/a) \sin \omega_0 T - \cos \omega_0 T)) + e^{-aT}(e^{-aT} - \cos \omega_0 T - (\omega_0/a) \sin \omega_0 T)}{z^2 - 2 z e^{-aT} \cos \omega_0 T + e^{-2aT}}$$

avec les valeurs numériques $\omega_0 = 120$ rad/s, $T = 1/30$ s, $a = 38$ et $b = 417$.

Le terme $G_{41}(z)$ résulte de l'erreur d'évaluation de la vitesse de roulis aérodynamique (autour du vecteur vitesse V (cf. Figure 4)), à partir des mesures gyrométriques de p et r (en axes principaux) et d'une mesure anémométrique de la vitesse de dérapage.

Termes de $\Lambda_M(z)$	Type de capteur	$G_{ij}(s)$	$G_{ij}(z)$	Réponse indicielle ⁽¹⁾
$G_{11}(z)$	anémomètre	$\frac{250 \times 315}{(s+250)(s+315)}$	$\frac{0.998z + 0.791 \times 10^{-3}}{z^2 - 0.268 \times 10^{-3}z + 0.662 \times 10^{-8}}$	
$G_{22}(z)$	gyromètre	$\frac{417 \times (s+38)}{(s+38)^2 + 120^2}$	$\frac{0.511z + 0.937}{z^2 + 0.368z + 0.794 \times 10^{-1}}$	
$G_{12}(z)$		$\frac{1}{250} \frac{250}{s+250}$	$\frac{0.399 \times 10^{-2}}{z - 0.240 \times 10^{-3}}$	
$G_{13}(z)$		$\frac{10^{-2} \times 120 \times s}{(s+38)^2 + 120^2}$	$\frac{-0.213 \times 10^{-2}(z-1)}{z^2 + 0.368z + 0.794 \times 10^{-1}}$	
$G_{41}(z)$		$1.75 \times 10^{-3} \times \frac{250}{s+250}$	$\frac{1.75 \times 10^{-3}}{z - 0.240 \times 10^{-3}}$	

⁽¹⁾ Au gain statique près.

V,6.3. – Lieux en sigma

Cette section présente des lieux en sigma obtenus lorsque la matrice P de l'Équation (V. 1) est la solution de l'équation de Riccati, matrice symétrique réelle ($P=P^T$), qui est une matrice hermitienne particulière ($P=\bar{P}$).

La mise en œuvre du logiciel de synthèse (cf. Section V,5) avec les matrices de transfert $\Lambda_C(z)$ et $\Lambda_M(z)$ données plus haut aboutit aux « lieux en sigma » de la Planche 9.

Ces lieux fournissent une mesure de la robustesse du régulateur multivariable discret dans différents cas qui sont maintenant passés en revue.

Lorsque les chaînes de commande et de mesure sont parfaites ($\Lambda_C(z)=I_m$ et $\Lambda_M(z)=I_n$), la robustesse propre du régulateur linéaire quadratique est donnée par la droite horizontale d'ordonnée 4.91×10^{-4} . Cette valeur dépend évidemment du choix de P et D_0 et ne peut donc être interprétée comme une mesure absolue de la robustesse. Elle correspond à ce que l'on convient d'appeler : « robustesse du système nominal ».

La perturbation $\Lambda_C(z)$ affectant seule la chaîne de retour, le lieu correspondant à l'évolution de $\underline{\sigma}(e^{j\theta})$ pour $\theta \in [0, \pi]$, présente une coupure pour $\theta_1 = 0.200$ rad, valeur correspondant à la violation du critère de robustesse formulé par l'Équation (V. 1). On enregistre en effet que $\lambda_{\min}(D(e^{j\theta}))$ reste négatif pour $\theta \in [\theta_1, \pi]$ et atteint la valeur maximale -20 .

La perturbation $\Lambda_M(z)$ qui a été choisie présente quant à elle un lieu en sigma avec une rupture à $\theta_2 = 0.800$ rad et une valeur maximale de $\lambda_{\min}(D(e^{j\theta}))$ à -47 . Dans le cas plus réaliste où les perturbations dynamiques $\Lambda_C(z)$ et $\Lambda_M(z)$ affectent conjointement la chaîne de régulation le tracé de la Planche 9 montre une rupture de la condition de robustesse pour $\theta_3 = 0.167$ rad, la valeur maximale atteinte par $\lambda_{\min}(D(e^{j\theta}))$ étant -28 .

La forme générale des lieux en sigma pour une synthèse effectuée après transformation en w' (cf. Section V,4) est qualitativement semblable à celle qui vient d'être décrite.

L'exploitation pratique de ces lieux n'est cependant pas concluante puisque le choix de P considéré ici fournit des tracés qui ne se trouvent pas totalement au-dessus de l'axe origine. En effet, $\lambda_{\min}(D(z))$ peut être très négatif, ce qui invalide le test $D(z) \geq 0$ (cf. (V. 1)). Pour corriger cette disparité il est maintenant proposé d'introduire un facteur de mise à l'échelle du vecteur état afin d'essayer de décaler les lieux vers le domaine positif.

V,6.4. – Action d'une mise à l'échelle

Soit T , la matrice qui vérifie $x'_k = T x_k$, où $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est symétrique définie positive. On a donc $x_k = T^{-1} x'_k$. Un examen rapide des expressions de la Section III,4.1 aboutit aux résultats partiels suivants :

$$T x_{k+1} = T F T^{-1} T x_k + T G u_k,$$

$$x'_{k+1} = T F T^{-1} x'_k + T G u_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+,$$

avec

$$u_k = - (E x)_k = - \sum_{i=0}^k C(k-i) x_i$$

$$= - \sum_{i=0}^k C(k-i) T^{-1} x'_i.$$

Par conséquent, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$,

$$x'_{k+1} = \sum_{i=0}^k (T F T^{-1} \delta_{k,i} - T G C(k-i) T^{-1}) x'_i.$$

d'où

$$\begin{aligned}\Pi'(z) &= T F T^{-1} - T G C(z) T^{-1} \\ &= T (F - G C(z)) T^{-1} \\ &= T \Pi(z) T^{-1}\end{aligned}$$

d'autre part (II. 29) devient dans la nouvelle base, $\forall \tau \in \mathbb{Z}_+$,

$$\begin{aligned}V(x') &= \sum_{i=0}^{\tau} x_i'^* T^{-1} P T^{-1} x_i' \quad (T^{-1*} = T^{-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{\tau} x_i'^* P' x_i'\end{aligned}$$

La nouvelle expression de $D(z)$ avec $C(z) = \Lambda_C(z) K \Lambda_M(z)$ est alors donnée par :

$$\begin{aligned}D(z) &\stackrel{\Delta}{=} \bar{P}' - \Pi'^*(z) \bar{P}' \Pi'(z) - D_0 \\ &\stackrel{\Delta}{=} T^{-1} (\bar{P} - \Pi^*(z) \bar{P} \Pi(z)) T^{-1} - D_0.\end{aligned}$$

Afin de faciliter le choix de la matrice T , celle-ci est prise diagonale réelle. Deux essais différents figurent respectivement sur les Planches 10 et 11 en donnant simultanément la synthèse dans le plan en z et dans le plan en w' . Pour retenir la meilleure configuration parmi les deux mises à l'échelle envisagées il est utile de définir un critère comparatif constatant l'amélioration de ces lieux.

Définition : Le facteur d'amélioration η_θ d'un lieu en sigma est donné par le rapport de la plus grande valeur prise par σ à la plus grande valeur absolue de λ_{\min} :

$$\eta_\theta \stackrel{\Delta}{=} \frac{\max(\underline{\sigma}(\theta))}{\max(|\lambda_{\min}(\theta)|)}, \quad \theta \in [0, \pi].$$

Remarque 1 : Plus η_θ est grand, plus le lieu est décalé vers le demi-plan positif.

Remarque 2 : Une définition analogue peut être donnée pour les lieux en sigma utilisant le plan en w' , le facteur d'amélioration $\eta_{w'}$ serait alors défini.

Les lieux des Planches 10 et 11 ont une allure identique aux lieux décrits en Section V.6.3 (cf. Planche 9). Les matrices P et D_0 étant données, le facteur d'échelle T n'influe aucunement sur les coupures (ruptures) enregistrées sur les lieux. Seuls les extréma changent sensiblement. Les facteurs d'améliorations η_θ sont dans le cas des Planches 10 et 11 les valeurs respectives suivantes : 0.695×10^{-3} et 0.738×10^{-2} . La matrice $T^{-1} = \text{diag}(1, 0.01, 0.01, 1, 0.05)$ pour laquelle $\eta_\theta = 0.738 \times 10^{-2}$ est retenue. Il est important de remarquer que le facteur d'amélioration correspondant à la Planche 9 (cas ne comportant pas de mise à l'échelle et traité à la section précédente) est $\eta_\theta = 10^{-5}$. La configuration retenue pour T modifie le facteur d'amélioration dans le rapport 738!

Par cette méthode et comparativement au V.6.3 la valeur la plus négative de $\lambda_{\min}(D(e^{j\theta}))$ a évolué de -47 à -2.3×10^{-2} . Cependant le lieu reste négatif pour certaines valeurs de $\theta \in [0, \pi]$ et le test de robustesse ne peut être complètement validé.

On remarque que le lieu en sigma dans le plan en w' obtenu pour $T^{-1} = \text{diag}(1, 0.01, 0.01, 1, 0.05)$ a une allure identique au lieu lui correspondant dans le plan en z . La valeur du facteur d'amélioration est la même : $\eta_\theta = \eta_{w'} = 0.738 \times 10^{-2}$.

Une conclusion aux réflexions concernant les développements des Sections V.6.3 et V.6.4 est que le choix arbitraire fait pour la matrice P de l'Équation (V.1), en l'occurrence la solution de l'équation de Riccati, ne convient pas en général. Ce choix sera cependant reconsidéré dans la section suivante mais pour une nouvelle perturbation de la chaîne de commande.

V,6.5. — Autre exemple de lieux en sigma

La Planche 12 montrent des lieux en sigma différents obtenus pour une perturbation de la chaîne de commande définie par :

$$\Lambda_c(z) = \begin{bmatrix} G_{22}(z) & 0 \\ 0 & G_{22}(z) \end{bmatrix},$$

où la fonction de transfert $G_{22}(z)$ est décrite dans le tableau récapitulatif de la Section V,6.2. La matrice de transfert $\Lambda_M(z)$ reste quant à elle inchangée.

L'allure générale de ces nouveaux tracés diffère de celle des lieux présentés sur les Planches 9, 10 et 11. Cependant la plupart des commentaires qualitatifs effectués en Section V,6.3 et V,6.4 restent valides, seules les valeurs numériques des ruptures et des extréma changent.

La Planche 12 est constituée de deux lieux (synthèses dans le plan en z uniquement) correspondant aux cas décrits respectivement en Sections V,6.3 et V,6.4. Les facteurs d'amélioration sont dans l'ordre $\eta_0 = 0.980 \times 10^{-5}$ et $\eta_0 = 0.629 \times 10^{-2}$. La mise à l'échelle utilisant la matrice $T^{-1} = \text{diag}(1, 0.01, 0.01, 1, 0.05)$ modifie donc favorablement le résultat dans le rapport 640 pour ce nouvel exemple de perturbations.

V,7. — APPRÉCIATION DES RÉSULTATS ET RECOMMANDATIONS

Ces résultats bien que limités dans leur application, illustrent partiellement le réalisme des expressions des Théorèmes 2-4 et du Corollaire 1, formellement équivalentes à l'Équation (V.1). Tous permettent de qualifier la robustesse d'un processus discret dont le retour est perturbé dynamiquement.

Plusieurs recommandations sont maintenant proposées afin de procéder à une meilleure détermination des quantités de réglage intervenant dans la condition (V.1). En effet les sections précédentes ont montré que le choix de la solution de l'équation de Riccati pour la matrice hermitienne P de l'Équation (V.1) ne convenait pas pour les perturbations considérées. L'introduction d'une mise à l'échelle n'ayant qu'une influence limitée (cf. V,6.4) sur l'amélioration des résultats, différentes directions de recherche sont maintenant proposées.

Il apparaît manifestement que le choix d'une matrice réelle symétrique pour P , alors que la condition (V.1) est démontrée pour une matrice hermitienne complexe reste insuffisant. Une première étape d'une étude future consisterait à calculer une matrice P_C , complexe, qui résulterait d'un choix particulier de la valeur $\underline{\sigma}(D(e^{j\theta}))$ (ou $\underline{\sigma}(D(j\nu))$) à atteindre pour des « fréquences » θ_0 ou ν_0 fixées. P_C serait par exemple la solution d'une équation de Lyapounov appropriée. A partir de la matrice P_C , ou d'une autre postulée, une deuxième étape consisterait à développer une argumentation mathématique qui permettrait une *optimisation complexe* de ces matrices. Une autre voie possible serait de rechercher une matrice P , complexe, non constante (dépendante éventuellement de la « fréquence » θ ou ν) et qui vérifierait une condition du type (V.1).

Aucune méthodologie de réglage de la matrice $D_0 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ n'a été proposée ici, elle reste à définir et à développer.

Les difficultés liées à la vérification de l'expression (V.1) portent davantage sur la nature des relations de transfert postulées pour $\Lambda_C(z)$ et $\Lambda_M(z)$. Il est probable que des perturbations moins sévères fourniraient des lieux en sigma en accord avec la théorie. C'est pourquoi une paramétrisation des perturbations est proposée afin de cerner la plus défavorable qui satisferait le test (V.1). On pourrait en effet remplacer dans cette dernière expression $\Lambda_C(z)$ par $I_m - \alpha(I_m - \Lambda_C(z))$, $\alpha \in [0, 1]$ et $\Lambda_M(z)$ par $I_n - \beta(I_n - \Lambda_M(z))$, $\beta \in [0, 1]$ avec $P = P^*$ donnée.

Les développements du Chapitre V ont porté principalement sur la recherche et la mesure de marges résiduelles pour un système perturbé dynamiquement. Ce problème est bien sûr beaucoup plus difficile à résoudre que celui consistant à améliorer la marge de stabilité du système nominal (non perturbé). Il n'est d'ailleurs pas surprenant d'obtenir des lieux non valides dans les exemples traités car la valeur très faible (cf. Planches 9-12) de $\underline{\sigma}$ pour le système nominal prouve que le processus contrôlé évolue à la limite de la stabilité, ce qui constitue une situation très défavorable.

Pour acquérir une meilleure robustesse du système nominal, il semble impératif d'étudier la possibilité d'optimiser les gains optimaux du régulateur (matrice $K \in \mathbf{R}^{m \times n}$). Une voie de recherche serait de reconsidérer le réglage des gains effectué en Section II,5.5.2 à l'occasion de la mise au point du régulateur de poursuite. En effet, les matrices de pondération Q et R de la fonctionnelle de coût J , explorées au II,5.5.2 étaient toutes diagonales et le réglage ne bénéficiait aucunement des bienfaits qui pourraient être apportés par l'utilisation des termes hors diagonaux de ces matrices. Il faudrait cependant veiller à ne pas détériorer les performances du régulateur.

Une difficulté secondaire porte sur l'interprétation à donner à la graduation en « fréquence » du lieu en θ ou w' . Des expériences complémentaires sont nécessaires pour indiquer la relation entre les fréquences caractéristiques révélées par les « accidents » des différents lieux et les fréquences des signaux physiques se propageant dans la partie continue du processus. Ceci est surtout vrai pour un système échantillonné à basse fréquence, ce qui est le cas de cette étude ($F_e = 30$ Hz).

Ce sont les résultats combinés de ces différents axes de recherche qui permettront une meilleure exploitation des résultats de robustesse.

La méthodologie développée ici offre le moyen de tester globalement la robustesse (stabilité) d'un processus perturbé dynamiquement sans pour autant calculer laborieusement le système augmenté équivalent qui serait de grande dimension et pour lequel les théorèmes classiques de stabilité pourraient s'appliquer. Elle constitue donc un progrès important par rapport à la littérature actuelle.

VI. — CONCLUSION

VI.1. — RÉSUMÉ DE LA CONTRIBUTION

Après une revue de la bibliographie portant sur les lois de commande multivariables continues (de type « PI ») appliquées au problème de poursuite, les résultats connus concernant les lois monovariables discrètes équivalentes ont été examinés dans le Chapitre II. Dans les deux cas, les propriétés d'insensibilité et de robustesse de ces lois ont été mises en évidence. Les lois de commande de poursuite, robustes vis-à-vis de perturbations extérieures constantes, ont été généralisées aux processus multivariables discrets. Une structure de régulateur optimal a été proposée et les conditions minimales nécessaires et suffisantes assurant une erreur de poursuite nulle ont été démontrées. La façon d'initialiser au mieux la valeur de la commande à partir de prédictions sur les perturbations extérieures a été indiquée. Un bilan des différents types de perturbations (perturbations affectant la chaîne de retour et perturbations structurelles), intervenant sur la chaîne de régulation d'un processus multivariable discret a été effectué et une formalisation de ces quantités a été proposée. Une structure de régulateur à deux niveaux a été développée, basée sur des lois de commande multivariables discrètes de type « PI ». Enfin, un modèle linéaire discret décrivant le mouvement latéral d'un avion de combat typique a été mis au point à partir d'un modèle continu échantillonné à 30 Hz. L'efficacité de ces nouvelles lois de commande, dans une structure de régulateur à deux niveaux, a été appuyée par des simulations portant sur le modèle non linéaire continu de l'avion.

Les développements théoriques présentés dans le Chapitre III constituent certainement la partie la plus originale de cette Thèse. A partir d'une revue bibliographique détaillée (Section III,2) des résultats concernant la robustesse structurelle généralisée des processus multivariables continus, le concept de *stabilité externe* (entrée-sortie) a été détaillé (Section III,3). Dans un premier temps, les critères de stabilité multivariables fréquentiels reposant exclusivement sur la stabilité au sens de Lyapounov ont été généralisés. L'utilisation conjointe de ces nouveaux résultats et du concept de stabilité entrée-sortie a permis d'énoncer un théorème abstrait de stabilité pour les systèmes *non linéaires* récurrents (Théorème 3). La notion de marge de stabilité a alors été définie. Une modélisation mathématique simplifiée de type opérationnel, justifiée en fait par le problème de poursuite (Chapitre II) mais conservant la généralité du problème de robustesse, a abouti à plusieurs résultats pratiques. Ceux-ci ont permis d'une part de quantifier des *marges de stabilité* lorsque la chaîne de retour est perturbée par des éléments dynamiques et d'autre part de qualifier la tolérance d'un régulateur vis-à-vis de perturbations structurelles non dynamiques, additives à l'équation récurrente (cf. Section III,4.3, Corollaire 1). Le cas des régulateurs linéaires quadratiques a été étudié de façon approfondie et des relations analytiques montrant la relation existant entre les marges de stabilité multivariables (marge de gain et marge de phase) et les quantités de réglage spécifiques au problème d'optimisation ont été établies. Il a été mentionné à cette occasion qu'une optimisation paramétrique de ces marges était possible, par action directe sur les quantités de réglage. Tous ces résultats théoriques ont été rassemblés par Joannic et Mercier dans [114].

Des résultats analogues, particularisant ceux du Chapitre III lorsque les perturbations sont non dynamiques ont été présentés dans le Chapitre IV. Ces résultats ont été soumis pour publication [115].

Une méthodologie de synthèse, fournissant une mesure chiffrée de la robustesse résiduelle du régulateur lorsque la commande est multivariable constitue l'aboutissement des résultats théoriques de cette Thèse (Chapitre V). L'utilisation de « lieux en sigma » permet en effet une visualisation des marges de stabilité dans le domaine fréquentiel discret. L'application numérique porte sur le modèle d'avion de combat, muni de la loi de poursuite développée précédemment et soumis à des perturbations dynamiques constituées des matrices de transfert des capteurs et des actionneurs (servo-gouvernes).

VI.2. – CRITIQUES ET PERSPECTIVES

Les résultats théoriques et numériques de ce mémoire ne prétendent pas répondre à toutes les questions qui se posent au sujet de la robustesse des processus multivariables. S'ajoutant à la longue liste des résultats dans le domaine continu, ils contribuent cependant largement à combler les lacunes concernant la robustesse des processus multivariables discrets (révélées par la revue bibliographique effectuée).

La mise au point du régulateur de poursuite à deux niveaux pour l'application considérée a nécessité un réglage soigné des matrices de pondération de la fonctionnelle de coût quadratique. Ce réglage qualitatif n'a cependant utilisé que les termes diagonaux des matrices de pénalité. Pourtant, les bienfaits de l'utilisation de tous les degrés de liberté supplémentaires offerts par les coefficients non diagonaux de ces matrices avaient été démontrés récemment par Mercier *et al.* dans [80] dans le cas temporel continu et par Hippe et Wurmthaler dans une approche fréquentielle [116]. En référence à ces publications, le développement prochain d'un logiciel interactif permettant un réglage rapide des matrices de pondération, tout en garantissant des marges de stabilité sécurisantes est recommandé. Une direction de recherche comporterait dans un premier temps le calcul de relations de sensibilité d'un pôle donné de la matrice du système contrôlé ou de l'expression matricielle caractérisant la robustesse par rapport aux coefficients des matrices de pondération (*cf.* [117] et [80]).

Le cheminement théorique du Chapitre III a démontré que des conditions de robustesse exploitables numériquement pouvaient être obtenues en simplifiant la formulation opérationnelle abstraite de Safonov (*cf.* [48] et [52]) et en s'inspirant des travaux de Bourlès et Mercier [8, 49, 50]. Pour cette formulation particulière (*cf.* Section III,4. 3), la forme des résultats des Théorèmes 3 et 4 prouve l'équivalence de deux approches séparées distinctes, l'une utilisant la stabilité externe (à travers un « Théorème de séparation topologique ») (*cf.* [48, 52]) et l'autre le concept classique de la stabilité au sens de Lyapounov (*cf.* [8, 49, 50]).

L'étude particulière des régulateurs linéaires quadratiques (*cf.* Sections III,4. 4 et IV,3) a révélé les différences importantes qui existent entre un asservissement perturbé dans sa seule chaîne de commande et un autre qui serait également perturbé dans sa chaîne de mesure. Ceci est attesté par la différence de complexité des expressions caractérisant les marges de stabilité. Dans le cas le plus simple où la seule chaîne de commande est perturbée, des expressions théoriques permettant l'optimisation de ces marges ont été énoncées (*cf.* Sections III,4. 4 et IV,3). Aucune application numérique concernant l'accroissement de ces marges n'a cependant été effectuée. Une recommandation concerne donc le développement d'un algorithme d'optimisation paramétrique ou de type gradient, pour accroître cette marge par action sur les matrices de pénalité ou sur les gains de la régulation.

Le critère de robustesse qui a été choisi prend en compte la forme algébrique et donc les « directions » des perturbations; leur réalité physique (bande passante, etc.) est donc prise en considération. Ce nouveau moyen de mesure de la marge de stabilité résiduelle est en compétition directe avec les méthodes basées sur les valeurs singulières de la matrice de différence de retour (*cf.* [85, 108-109]). Un inconvénient majeur de cette dernière méthode est de protéger le régulateur contre des perturbations qui pourraient théoriquement déstabiliser le système contrôlé mais qui n'existent pas nécessairement. De plus, cette démarche suppose que toutes les boucles de régulation possèdent la même bande passante, ce qui n'est pas nécessairement vrai. Ces désavantages, qui contribuent d'ailleurs à donner une mesure exagérément pessimiste de la robustesse, sont maintenant exposés dans la littérature récente, où l'efficacité présumée de cette méthode est de plus en plus contestée (*cf.* [118]). L'étude faite au Chapitre V pourrait ainsi être avantageusement complétée par le calcul de la matrice de différence de retour et par le tracé des lieux correspondants. Une comparaison des deux méthodes enrichirait alors les recommandations déjà formulées; dans l'application au pilotage numérique d'un avion, par exemple, ces conclusions faciliteraient la mise au point des régulateurs numériques et pourraient déboucher sur la proposition de normes de certification.

La période d'échantillonnage utilisée pour le calcul de la loi de commande discrète appliquée à l'avion est de 30 Hz. Cette fréquence est très *pénalisante* par rapport aux valeurs généralement considérées (de l'ordre de 100 Hz). Le choix $F_e = 30$ Hz était cependant dicté par le souci de taxer au maximum la régulation de manière à mieux en apprécier la robustesse. Un complément utile de la recherche présentée dans cette Thèse pourra donc être l'étude de la variation des critères de robustesse (marge de gain, marge de phase) en fonction de la période d'échantillonnage. Dans ce contexte, une tâche initiale pourrait être de tester l'évolution des lieux en σ en fonction de ce paramètre.

ANNEXES

ANNEXE A

NOTIONS DE CONTRÔLABILITÉ (COMMANDABILITÉ),
OBSERVABILITÉ (RECONSTRUCTIBILITÉ),
STABILISABILITÉ ET DÉTECTABILITÉ POUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES STATIONNAIRES
DISCRETS

Soit le système linéaire stationnaire

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A x_k + B u_k, \forall k \in \mathbb{Z}_+, \\ x_0 &\text{ donné; } x_k = 0, \forall k \in \mathbb{Z}_-^*, \\ z_k &= C x_k, \end{aligned} \tag{A.1}$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et où $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^m$ et $z_k \in \mathbb{R}^p$ dénotent respectivement les vecteurs d'état, de commande et de sortie.

$X \subset \mathbb{R}^n$ est l'espace d'état.

Contrôlabilité

La définition de la contrôlabilité proposée par Kalman en 1960 dans [19] est rappelée ici pour son caractère historique.

Définition C1 [19]: L'état initial x_0 d'un processus discret est dit (être) contrôlable s'il existe une commande u_k définie sur $[0, N]$ telle que $x_N = 0$. Si tous les états initiaux sont contrôlables le processus est dit complètement contrôlable.

Conformément à cette définition il vient :

Théorème C1 [23, 30]: Le système (A.1) est contrôlable si et seulement si, $\exists v \in [0, n-1] \cap \mathbb{Z}_+$ tel que :

$$\text{s.e.v. } [B | AB | \dots | A^{v-1}B] \supset \text{s.e.v. } [A^v],$$

s.e.v. $[Y]$ signifie « sous espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de la matrice Y ».

Dans le cas où la matrice A est non singulière, hypothèse formulée par Kalman dans [19], le Théorème C1 devient :

Théorème C2 [23, 30]: Le système (A.1) est contrôlable si et seulement si

$$\text{rang } [B | AB | \dots | A^{n-1}B] = n.$$

on dit également que la paire (A, B) est contrôlable.

Une définition plus actuelle de la contrôlabilité qui regroupe la Définition C1 et l'ancien concept « d'atteignabilité » (cf. [30], p. 32) est proposée par d'autres auteurs (cf. [12, 31, 34, 35]) :

Définition C2 [12, 31, 34, 35]: Le processus (A.1) est dit contrôlable si pour toute condition initiale x_0 il existe une commande u_k définie sur $[0, N]$ qui transfère x_0 en un état final x_N .

Une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité est alors donnée par le Théorème C2 *sans hypothèse concernant la singularité de la matrice A* .

Remarque : Si la matrice A est nilpotente ($\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$) et si $B = 0$ alors le système (A.1) n'est pas contrôlable au sens de la Définition C2 (Théorème C2 non vérifié). Il est cependant contrôlable pour la Définition C1 qui n'est autre que la notion de « zéro-contrôlabilité » introduite par Hautus dans [34].

Définition C3 [12] : Le sous espace contrôlable C ($C \subset X$) du système (A.1) est le sous espace formé des états contrôlables ou de façon équivalente, le s.e.v. engendré par les vecteurs colonnes de la matrice

$$[B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1} B] .$$

Observabilité ou restructibilité

La notion d'observabilité introduite par Kalman en 1960 dans [19] peut se formuler pour les systèmes discrets de la façon suivante.

Définition O1 : Étant donné le système (A.1) où z_k est un vecteur d'observation (mesures), un état initial x_0 est dit observable à $k_0 = 0$ si pour une commande u_k donnée il existe $k_f \geq k_0$ ($= 0$) tel que la connaissance de u_k et z_k pour tout $k \in [k_0, k_f]$ soit suffisante pour déterminer x_0 de façon unique. Le système (A.1) est dit complètement observable ou observable si tous les états initiaux le sont.

Remarque : La notion d'observabilité permet donc de déterminer l'état présent à partir de mesures futures.

Aujourd'hui il est préféré au concept d'observabilité la propriété de restructibilité, pour laquelle l'état présent peut-être déterminé à partir des mesures passées. Ceci se justifie d'autant plus par le fait que l'on a uniquement accès aux informations passées et non futures pour un processus donné.

Définition O2 [23, 30] : L'état x_k du système (A.1) est dit être restructible s'il existe un temps fini $k_r < k$ tel que l'état x_k est uniquement déterminé par la connaissance de l'entrée u_k et la sortie z_k sur l'intervalle de temps $[k_r, k]$.

Remarque : Les concepts d'observabilité et de restructibilité ont un sens bien différent pour les systèmes stationnaires; ils coïncident cependant pour les processus stationnaires tels que (A.1).

Théorème O1 [23, 31] : Le système (A.1) est observable (restructible) si et seulement si

$$\text{rang } [C^T \mid A^T C^T \mid \dots \mid (A^T)^{n-1} C^T] = n .$$

On dit également que la paire (A, C) est observable.

Définition O3 [12] : Le sous espace non observable, NO , du système (A.1) est le sous espace vectoriel de tous les états $x_0 \neq 0$ tels que la mesure (l'observation) z_k pour $k \geq 0$ est nulle. Il s'agit encore du sous espace vérifiant

$$NO = \text{Ker} ([C^T \mid A^T C^T \mid \dots \mid (A^T)^{n-1} C^T]) .$$

Un sous espace observable O est un supplémentaire de NO dans X .

Principe de dualité

Ce principe, énoncé par Kalman en 1960 dans [19] met en évidence la symétrie qui existe entre les notions de contrôlabilité et d'observabilité. Une formulation pour les systèmes discrets a été proposée par Kwakernaak et Sivan dans [12].

Principe : Considérant la classe des systèmes asservis par une loi de contrôle linéaire, dont un représentant serait le système (A.1), le processus dual de (A.1) est obtenu de la façon suivante :

- (i) la matrice A est changée en A^T ,
- (ii) la matrice B est changée en C^T ,
- (iii) la matrice C est changée en B^T ,
- (iv) les variables de sortie (z_k) et d'entrée (u_k) sont inversées,

d'où le système dual :

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= A^T y_k + C^T u_k, \\ z_k &= B^T y_k. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Théorème P1 [19] : Le système (A.1) est contrôlable si et seulement si (A.2) est observable et réciproquement.

Rappels concernant la stabilité des systèmes linéaires stationnaires discrets (cf. [12]).

Soit le processus linéaire stationnaire autonome

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A x_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \\ x_0 &\text{ donné et } x_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_-, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Définition AS 1 [12] : Le système (A.3) est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A ont un module strictement inférieur à 1.

Cas où toutes les valeurs propres sont distinctes :

Définition AS 2 [12] : Le sous espace stable ($S \subset X$) (resp. instable ($IS \subset X$)) du système linéaire (A.3) est le sous espace vectoriel engendré par les vecteurs propres de A associés aux valeurs propres ayant un module strictement inférieur à 1 (resp. supérieur ou égal à 1).

Stabilisabilité

Définition S1 [12] : Le système (A.1) est stabilisable si et seulement si son sous espace instable, IS , (cf. Définition AS2) est inclu dans son sous espace contrôlable, C , (cf. Définition C3) on dit également que la paire (A, B) est stabilisable.

Théorème S1 [34-36] : Considérant le système (A.1), la paire (A, B) est stabilisable si il existe une matrice $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telle que $A+BK$ soit asymptotiquement stable, ou de façon équivalente si toutes les valeurs propres de $A+BK$ sont à l'intérieur du cercle unité ($|\lambda_i| < 1$) ou encore si $\text{rang} [\lambda_i I_n - A, B] = n, \forall \lambda_i \in \sigma_{\text{instable}}(A)$.

Remarque : Ce théorème est une conséquence directe de la Définition S1 car (A, B) stabilisable signifie que l'on peut déplacer les pôles instables de A , par rétroaction d'état afin de stabiliser le système.

Déteçtabilité et forme canonique d'observabilité

Définition D1 [12] : Le système (A.1) est déteçtable si et seulement si son sous espace non observable, NO , est inclu dans son sous espace stable, S , on dit également que la paire (A, C) est déteçtable.

Théorème D1 [12, 34-36] : Considérant le système (A.1), la paire (A, C) est déteçtable si pour le système dual (A.2) la paire (A^T, C^T) est stabilisable, de façon équivalente s'il existe une matrice $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ telle que $A^T + C^T D$ est asymptotiquement stable, ou encore si $\text{rang} [\lambda I_n - A^T, C^T] = n, \forall \lambda_i \in \sigma_{\text{instable}}(A)$.

Remarque : Ce théorème est une conséquence du Principe de dualité énoncé plus haut.

Forme standard d'observabilité

Théorème D2 [12] : Considérons le système (A.1) et soit la matrice de transformation non singulière $U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$, telle que les n_r lignes de U_1 forment une base d'un sous espace observable, O , de (A.1) et telle que U_2 est choisi de façon que toutes les lignes de U engendrent l'espace entier. Soit $x'_k = U x_k, \forall k \in \mathbb{Z}_+$, le vecteur état transformé.

Cette transformation étant opérée sur le système (A.1), celui-ci prend alors une « Forme standard d'observabilité »,

$$\begin{aligned} x'_{k+1} &= \begin{bmatrix} A'_{11} & 0 \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} x'_k + \begin{bmatrix} B'_1 \\ B'_2 \end{bmatrix} u_k, \\ y_k &= [C'_1 \quad 0] x'_k, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

où la paire (A'_{11}, C'_1) est observable. $A'_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ et les valeurs propres de A'_{11} et A'_{22} sont respectivement les valeurs propres observables et non observables de A .

Théorème D 3 [12] : Considérons le système (A.1) et supposons qu'il a été transformé sous une forme standard d'observabilité (A.4) telle que la paire (A'_{11}, C'_1) est observable. Le système (A.1) est détectable si la matrice A'_{22} a toutes ses valeurs propres dans le cercle unité ($|\lambda_i| < 1$).

ANNEXE B

COMPOSITION DE DEUX CONVOLUTIONS VECTORIELLES DISCRÈTES

Lemme : Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}_M deux opérateurs de convolution discrète vérifiant les équations opérationnelles suivantes

$$X^M = \mathcal{C}_M X, \quad X^M \in \mathbb{R}^m, \quad X \in \mathbb{R}^n,$$

et

$$U^P = \mathcal{C} U^M, \quad U^P \in \mathbb{R}^m, \quad U^M \in \mathbb{R}^m;$$

soit $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice (opérateur linéaire particulier) vérifiant $U^M = KX^M$, alors le produit $\mathcal{C} = \mathcal{C}_C K \mathcal{C}_M$ est un opérateur de convolution discrète.

Démonstration : $\forall k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{-1\}$, $U_k^P = (\mathcal{C}_C K \mathcal{C}_M X)_k$.

Les opérateurs de convolution discrète \mathcal{C}_C et \mathcal{C}_M admettant $C_C \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et $C_M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ comme noyaux

$$U_k^P = \sum_{i=-1}^k C_C(k-i) K \sum_{j=-1}^i C_M(i-j) X_j,$$

posant $l = i - j$ il vient

$$U_k^P = \sum_{l+j=-1}^k \left\{ \sum_{j=-1}^{l+j} C_C(k-l-j) K C_M(l) \right\} X_j. \quad (\text{B.1})$$

L'hypothèse de récurrence, déduite de quelques calculs directs réalisés pour différentes valeurs de $l+j$ (c'est-à-dire pour différents couples (l, j) puisque $(l, j) \in (\mathbb{Z}_+ \cup \{-1\})^2$) sur la quantité entre crochets de l'équation (B.1), est :

$$\mathcal{P}(k) : \sum_{l+j=-1}^k \sum_{j=-1}^{l+j} C_C(k-l-j) K C_M(l) X_j \stackrel{\Delta}{=} \sum_{j=-1}^k \left[\sum_{l=0}^{k-j} C_C(k-l-j) K C_M(l) \right] X_j, \quad (\text{B.2})$$

où la quantité du premier membre est notée $Q_1(k)$ et celle du second $Q_2(k)$.

L'affirmation $\mathcal{P}(k)$, équation (B.2), est valide pour $k = -1$ et $k = 0$; en effet :

$$\begin{aligned} k = -1 : \quad Q_1(-1) &= C_C(1) K C_M(0) X_{-1} + C_C(0) K C_M(1) X_{-1} + C_C(0) K C_M(0) X_0 \\ Q_2(-1) &= [C_C(1) K C_M(0) + C_C(0) K C_M(1)] X_{-1} + C_C(0) K C_M(0) X_0, \\ k = 0 : \quad Q_1(0) &= C_C(0) K C_M(0) X_{-1} \\ Q_2(0) &= C_C(0) K C_M(0) X_{-1}. \end{aligned}$$

$\mathcal{P}(k+1)$ est également vraie puisque

$$\begin{aligned} U_{k+1}^{\mathcal{P}} &= \sum_{l+j=k+1}^{k+1} \sum_{j=-1}^{l+j} C_c(k+1+l-j) K C_M(l) X_j, \text{ posons } k+1 = N \\ &= \sum_{l+j=N}^N \sum_{j=-1}^{l+j} C_c(N-l-j) K C_M(l) X_j \end{aligned}$$

et, utilisant l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(k)$ (cf. (B.2)) pour $k=N$,

$$\begin{aligned} U_{k+1}^{\mathcal{P}} &= \sum_{j=-1}^N \left(\sum_{l=0}^{N-j} C_c(N-l-j) K C_M(l) \right) X_j \\ &= \sum_{j=-1}^{k+1} \left(\sum_{l=0}^{k+1-j} C_c(k+1-l-j) K C_M(l) \right) X_j, \end{aligned}$$

ce qui démontre la propriété $\mathcal{P}(k+1)$.

Par conséquent, en posant :

$$C(k-j) = \sum_{l=0}^{k-j} C_c(k-l-j) K C_M(l), \quad (\text{B.3})$$

l'opérateur $\mathcal{G} = \mathcal{G}_C K \mathcal{G}_M$ défini par (B.1) est un opérateur de convolution discrète dont le noyau $C(k) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est donné par (B.3) d'après (B.1) et (B.2).

ANNEXE C

STABILITÉ DU GRAPHE PERTURBÉ PAR RAPPORT A UN GRAPHE NON PERTURBÉ LORSQUE LA PERTURBATION EST ADDITIVE

Est étudiée ici la stabilité à gain fini de l'application de $f \in \mathcal{L}_{2e}^n$ dans $\overline{\mathcal{G}}(f) = \text{Graphe}(\mathcal{G}(f))$ par rapport à $\overline{\mathcal{G}}(0) = \text{Graphe}(\mathcal{G}(0))$, lorsque f est une perturbation additive.

L'espace des signaux est $\mathcal{L}_{2e}^n = \mathcal{L}_{2e}(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^n)$. Il convient de montrer que l'application :

$$\mathcal{F} : \{ f \in \mathcal{L}_{2e}^n \} \longrightarrow \overline{\mathcal{G}}(f) \subset \mathcal{L}_{2e}^n \times \mathcal{L}_{2e}^n$$

est stable à gain fini sur $\overline{\mathcal{G}}(0) \subset \mathcal{L}_{2e}^n \times \mathcal{L}_{2e}^n$. Une formulation équivalente de ce problème est de considérer l'application induite :

$$\mathcal{F}' : \{ (f, x) \in \mathcal{L}_{2e}^n \times \mathcal{L}_{2e}^n \} \longrightarrow I_m(\overline{\mathcal{G}}(f), \{x\}) \subset \mathcal{L}_{2e}^n$$

et d'étudier la stabilité à gain fini de \mathcal{F}' sur : $I_m(\overline{\mathcal{G}}(0), \{x\}) \subset \mathcal{L}_{2e}^n$,

$$\begin{aligned} \text{où } I_m(\overline{\mathcal{G}}(f), \{x\}) &= \{ z \in \mathcal{L}_{2e}^n \mid (x, z) \in \overline{\mathcal{G}}(f) \} \\ &= \{ z \in \mathcal{L}_{2e}^n \mid z = \mathcal{G}(f)x \} \subset \mathcal{L}_{2e}^n \end{aligned}$$

$$\text{et où : } I_m(\overline{\mathcal{G}}(0), \{x\}) = \{ z \in \mathcal{L}_{2e}^n \mid z = \mathcal{G}(0)x \} \subset \mathcal{L}_{2e}^n$$

sont respectivement appelés « ensembles images » du graphe de $\mathcal{G}(f)$ et de $\mathcal{G}(0)$.

Définition d'un voisinage : Soient $A \subset \mathbb{I}_{2e}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Le voisinage de A , $\mathcal{V}(A, \alpha)$, est défini par :

$$\mathcal{V}(A, \alpha) = \{x \in \mathbb{I}_{2e}^n \mid \forall \tau \in \mathbb{Z}_+, \forall x_0 \in A, \|x - x_0\|_\tau \leq \alpha\}.$$

Compte tenu de cette définition l'application induite \mathcal{S}' sera stable à gain fini sur $\text{Im}(\overline{\mathcal{G}}(0), \{x\})$ s'il existe une constante $k \in \mathbb{R}_+$ telle que, $\forall \tau \in \mathbb{Z}_+$:

$$\text{Im}(\overline{\mathcal{G}}(f), \{x\}) \subset \mathcal{V}(\text{Im}(\overline{\mathcal{G}}(0), \{x\}), k \|(x, f)\|_\tau),$$

où $\|(x, f)\|_\tau = (\|x\|_\tau^2 + \|f\|_\tau^2)^{1/2}$. Cette dernière assertion se traduit par :

$$z \in \text{Im}(\overline{\mathcal{G}}(f), \{x\}) \implies z \in \mathcal{V}(\text{Im}(\overline{\mathcal{G}}(0), \{x\}), k \|(x, f)\|_\tau),$$

$$\text{soit, } \forall z_0 \in \text{Im}(\overline{\mathcal{G}}(0), \{x\}) : \|z - z_0\|_\tau \leq k \|(x, f)\|_\tau. \quad (\text{C.1})$$

$$\text{Or : } z_0 = \mathcal{G}(0)x = \mathcal{K}x$$

$$\text{et : } z = \mathcal{G}(f)x = \mathcal{K}x + f,$$

puisque f est additive. Dans ces expressions \mathcal{K} est un opérateur non linéaire. Par conséquent (C.1) devient :

$$\|f\|_\tau \leq k \|(x, f)\|_\tau \triangleq k (\|x\|_\tau^2 + \|f\|_\tau^2)^{1/2}.$$

La quantité $k \in \mathbb{R}_+$ vérifie donc : $\forall \tau \in \mathbb{Z}_+, \forall x \in \mathbb{I}_{2e}^n, \forall f \in \mathbb{I}_{2e}^n,$

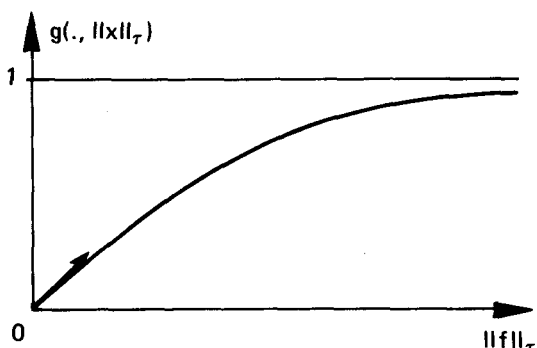
$$\frac{\|f\|_\tau}{(\|x\|_\tau^2 + \|f\|_\tau^2)^{1/2}} \leq k. \quad (\text{C.2})$$

Le plus petit k vérifiant cette inégalité est le gain k de l'application \mathcal{S}' .

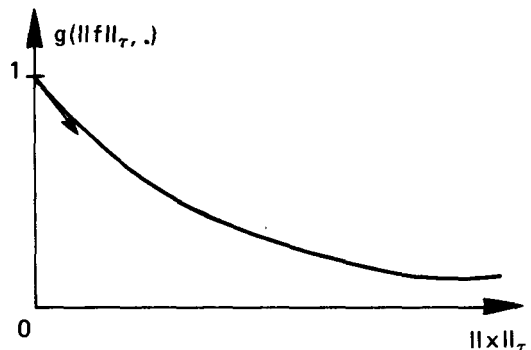
L'étude de la fonction :

$$g(\|f\|_\tau, \|x\|_\tau) = \frac{\|f\|_\tau}{\sqrt{\|f\|_\tau^2 + \|x\|_\tau^2}}$$

pour tout $\|f\|_\tau \in \mathbb{R}_+$ et tout $\|x\|_\tau \in \mathbb{R}_+$ conduit aux graphes représentés ci-dessous :



$$\forall \|f\|_\tau \in \mathbb{R}_+, g(\|f\|_\tau, \|x\|_\tau) < 1$$



$$\forall \|x\|_\tau \in \mathbb{R}_+, g(\|f\|_\tau, \|x\|_\tau) \leq 1$$

Le gain k valant au plus 1, l'application \mathcal{S}' est stable à gain fini. Le graphe perturbé est donc stable à gain fini par rapport au graphe non perturbé, pour toute perturbation additive appartenant à \mathbb{I}_{2e}^n .

Cas particulier où $f=0$: Le Graphe de $\mathcal{G}(0)$ est stable à gain fini sur le Graphe de $\mathcal{G}(0)$ puisque, dans ce cas, (C.1) devient :

$$0 \leq k \| (x, f) \|_{\tau},$$

qui est vrai pour tout $k \in \mathbf{R}_+$.

ANNEXE D

TRANSFORMÉE EN z ET CONVOLUTION DISCRÈTE

D.1. — Calcul de la somme d'une série convergente (Théorème de Parseval) (cf. [71], Chapitre 4). Égalité de Parseval.

L'ensemble des fonctions $x \in l_1^n$, où :

est considéré ici. $l_1^n = l_1(\mathbf{Z}_+, \mathbf{R}^n) \triangleq \{ x : \mathbf{Z}_+ \rightarrow \mathbf{R}^n \mid \sum_{i=0}^{\infty} \|x_i\|_{\mathbf{E}} < \infty \},$

Soit $X(z) = \mathcal{Z}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i z^{-i}$ la transformée en z de x . Cette série est convergente pour tout $x \in l_1^n$ lorsque $\forall z \in \mathbf{C}, |z| \geq 1$ (il suffit d'appliquer le Théorème de d'Alembert).

Théorème de Parseval [71] : Soit $f \in l_1(\mathbf{Z}_+, \mathbf{R})$ et $h \in l_1(\mathbf{Z}_+, \mathbf{R})$ tels que $F(z) = \mathcal{Z}(f)$ et $H(z) = \mathcal{Z}(h)$. Alors :

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i h_i = (1/2\pi j) \int_{\gamma} F(z) H(z^{-1}) z^{-1} dz,$$

où le contour γ peut être pris dans le sens positif le long d'un cercle contenant les pôles de $F(z)z^{-1}$. Dans le cas où les singularités sont à l'intérieur du cercle unité \mathcal{C}_1 :

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i h_i = (1/2\pi j) \int_{\mathcal{C}_1} F(z) \bar{H}(z) z^{-1} dz. \quad (\text{D.1})$$

Une généralisation de l'expression (D.1) dans un cas particulier multivariable est maintenant présentée.

Soit $P \in \mathbf{C}^{n \times n}$ une matrice hermitienne et soit : $(x, y) \in l_1^n \times l_1^n$ ($l_1^n \triangleq l_1(\mathbf{Z}_+, \mathbf{R}^n)$).

Le calcul de la quantité réelle $\sum_{i=0}^{\infty} x_i^* P y_i$ est obtenu à partir des quantités élémentaires :

$$x_i^* P y_i = \sum_{l=1}^n \bar{x}_i^l \sum_{j=1}^n P^{lj} y_i^j = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n P^{lj} x_i^l y_i^j$$

(car $\bar{x}_i^l = x_i^l$, puisque $x_i \in \mathbf{R}^n$). D'où :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} x_i^* P y_i &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n P^{lj} x_i^l y_i^j \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n P^{lj} \sum_{i=0}^{\infty} x_i^l y_i^j \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n P^{lj} (1/2\pi j) \int_{\mathcal{C}_1} X^l(z) \bar{Y}^j(z) z^{-1} dz \quad (\text{cf. (D.1)}) \\ &= (1/2\pi j) \int_{\mathcal{C}_1} \left(\sum_{l=1}^n X^l(z) \sum_{j=1}^n P^{lj} \bar{Y}^j(z) \right) z^{-1} dz \end{aligned}$$

soit :

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i^* P y_i = (1/2 \pi j) \int_{\mathcal{C}_1} X^T(z) P \bar{Y}(z) z^{-1} dz \quad (D.2)$$

De l'équation (D.2) on déduit les relations suivantes :

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i^* P x_i = (1/2 \pi j) \int_{\mathcal{C}_1} X^*(z) \bar{P} X(z) z^{-1} dz \quad (D.3)$$

et lorsque $P = I_n$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i^* x_i = \sum_{i=0}^{\infty} x_i^* y_i = (1/2 \pi j) \int_{\mathcal{C}_1} Y^*(z) X(z) z^{-1} dz$$

$[y_i^* x_i = x_i y_i^*$ car $(x_i, y_i) \in (\mathbb{R}^n)^2$].

Cette dernière expression devient, $\forall z = e^{j\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i^* x_i = (1/2 \pi j) \int_{\mathcal{C}_1} Y^*(e^{j\theta}) X(e^{j\theta}) e^{-j\theta} d(e^{j\theta})$$

et compte tenu de $d(e^{j\theta}) = j e^{j\theta} d\theta$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i^* x_i = (1/2 \pi) \int_0^{2\pi} Y^*(e^{j\theta}) X(e^{j\theta}) d\theta \quad (D.4)$$

qui s'écrit encore (Égalité de Parseval) :

$$\langle Y, X \rangle_{l_2^n} = \langle Y, X \rangle_{L_2^n}, \quad (D.5)$$

où L_2^n est l'ensemble des fonctions à valeurs complexes de carré intégrable.

De (D.4) on déduit que :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|x_i\|_E^2 = (1/2 \pi) \int_0^{2\pi} \|X(e^{j\theta})\|_E^2 d\theta$$

soit :

$$x \in l_2^n \implies X \in L_2^n$$

D.2. — Existence de la transformée en z sur l'espace l_2^n .

L'extension de la notion de transformée en z des espaces l_1^n aux espaces l_2^n n'est pas triviale et est rendue possible grâce à la « limite au sens de la transformée en z ». En effet, pour tout $(x, y) \in (l_2^n \cap l_1^n)^2$, tel que

$X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i z^{-i}$ et $Y(z) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i z^{-i}$, l'Égalité de Parseval (Équation (D.5)) est vérifiée :

$$\langle Y, X \rangle_{l_2^n} = \langle Y, X \rangle_{L_2^n}.$$

Soit $x \in l_2^n$; puisque $l_2^n \cap l_1^n$ est dense dans l_2^n (ou en d'autres termes puisque toute fonction de l_2^n peut être approximée arbitrairement au sens de la topologie de l_2^n par une fonction de $l_1^n \cap l_2^n$), il existe une suite (x_n) d'éléments de $l_2^n \cap l_1^n$, de Cauchy, qui converge vers x au sens de la norme l_2^n . $X_n(z)$ désignant la transformée en z de x_n , il vient d'après l'Égalité de Parseval :

$$\|x_n - x_m\|_{l_2^n} = \|X_n - X_m\|_{L_2^n},$$

avec $X_n \in L_2^n$.

Or L_2^n est complet; par conséquent, la suite de Cauchy X_n converge vers une quantité $X \in L_2^n$.

$X(z \rightarrow X(z))$ est appelée la « limite au sens de la transformée en z » relativement à la norme de L_2^n . Il résulte donc que :

$$\forall x \in l_2^n, X(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N x_i z^{-i} \triangleq \sum_{i=0}^{\infty} x_i z^{-i},$$

où la limite est prise relative à la norme de L_2^n . Il sera noté $X(z) = \mathcal{Z}(x)$.

D.3. — Convolution discrète.

Soit la convolution discrète définie par la relation opérationnelle : $u = \mathcal{C}x$,

telle que : $\forall k \in \mathbb{Z}_+, u_k = \sum_{i=0}^k C(k-i) x_i$.

La transformée en z de la convolution discrète est dans le cas monovarié un résultat bien connu (cf. Jury [77]). Sa transposition pour les systèmes multivariés est obtenue aisément en raisonnant par rapport à chaque composante vectorielle; en effet $\forall l \in [1, m] \cap \mathbb{N}, \forall u \in l_2^m, \forall x \in l_2^n$:

$$\begin{aligned} U^l(z) &= \mathcal{Z}(u^l) = \mathcal{Z}\left(\sum_{i=0}^k \sum_{j=1}^m C^{lj}(k-i) x_i^j\right) \\ &= \sum_{j=1}^m \mathcal{Z}\left(\sum_{i=0}^k C^{lj}(k-i) x_i^j\right) \\ &= \sum_{j=1}^m C^{lj}(z) X^j(z), \end{aligned}$$

où $X^j(z) = \mathcal{Z}(x^j)$ et où $C^{lj}(z)$ est la transformée en z de l'élément (l, j) du noyau $C(k) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de la convolution \mathcal{C} . L'existence de $C^{lj}(z)$ est liée au fait que les quantités $C^{lj}(k)$ du noyau $C(k)$ appartiennent à l'espace l_2 (cf. Section D.2).

Si $U(z) = \mathcal{Z}(u)$, $X(z) = \mathcal{Z}(x)$ et $C(z) = \mathcal{Z}(C(k))$, alors : $U(z) = C(z) X(z)$.

Remarque : Le noyau du système dynamique défini par l'opérateur $\mathcal{D} = F^0 - G\mathcal{C}$ étant de la forme $F - GC(k)$, où $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$, et $C(k) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, l'application du résultat précédent donne : $\Gamma(z) = F - G C(z)$,

où $\Gamma(z) = \mathcal{Z}(\mathcal{D})$, $C(z) = \mathcal{Z}(C(k))$ et $1 = \mathcal{Z}(\delta_{k,k})$, où $\delta_{k,i}$ est le symbole de Kronecker.

ANNEXE E

STABILITÉ, ATTRACTIVITÉ ET STABILITÉ ASYMPTOTIQUE DES PROCESSUS DISCRETS

Soit le processus récurrent :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \\ x_0 &\text{ donné}, \quad x_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_-^*, \end{aligned}$$

(E.1)

où f est une fonction et x_k un vecteur de \mathbb{R}^n .

Par hypothèse, le point d'équilibre du système à l'instant $k_0=0$ est le vecteur nul. L'excitation donnée au processus (E.1) est imposée par l'état initial $x_0 \neq 0$, $X \subset \mathbb{R}^n$ est l'espace des états.

Stabilité.

Définition S1 [57, 58, 72] : Le point d'équilibre 0 à l'instant $k_0=0$ du système (E.1) est « stable à $k_0=0$ » si :
 $\forall \epsilon_1 > 0, \exists \delta(k_0, \epsilon_1) > 0$ tel que $\forall x_0 \in X, \|x_0\|_E < \delta(k_0, \epsilon_1) \Rightarrow \forall k \in \mathbf{Z}_+, \|x_k\|_E < \epsilon_1$;
 de manière abrégée, le processus (E.1) est dit stable.

Attractivité.

Définition A1 [62, 72] : Le point d'équilibre 0 du système est attractif à l'instant $k_0=0$ si :

$$\exists \delta_1 > 0 \text{ tel que } \forall x_0 \in X, \|x_0\|_E < \delta_1 \Rightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists T(\epsilon) > 0, \forall k \in \mathbf{Z}_+, k > T(\epsilon) \Rightarrow \|x_k\|_E < \epsilon).$$

Une formulation équivalente de cette assertion est :

$$\exists \delta_1 > 0 \text{ tel que } \forall x_0 \in X, \|x_0\|_E < \delta_1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0.$$

Le processus est alors dit attractif.

Stabilité asymptotique.

Définition SA1 [57, 58, 62, 72] : Le point d'équilibre 0 à $k_0=0$ est asymptotiquement stable s'il est à la fois :

- (i) stable à $k_0=0$,
- (ii) attractif à $k_0=0$.

Le processus (E.1) est dit asymptotiquement stable.

Une visualisation de ces notions est présentée sur les Figures E1 et E2.

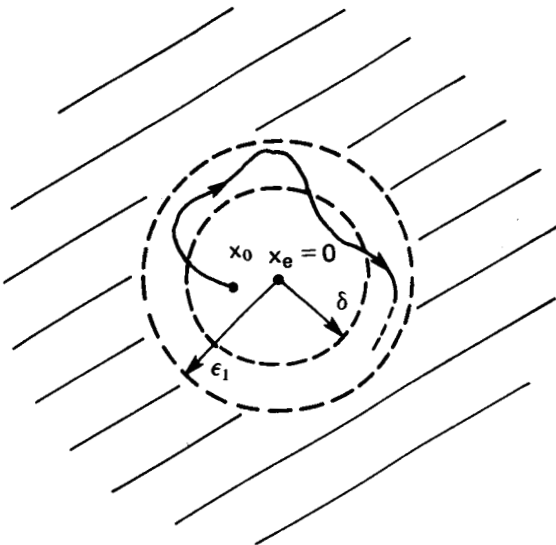


Fig.E1—Définition de la stabilité.

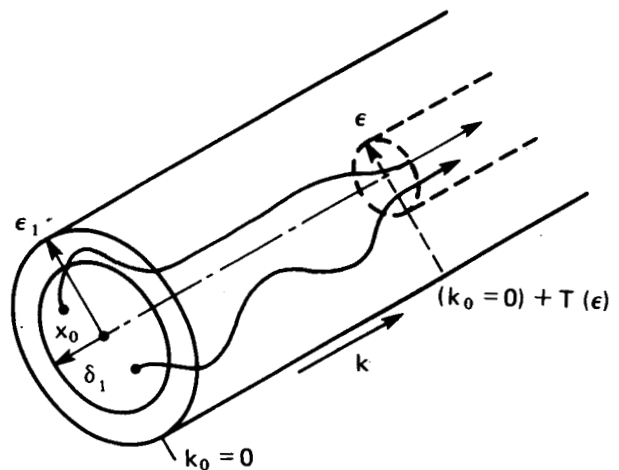


Fig.E2—Définition de la stabilité asymptotique.

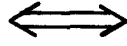
ANNEXE F

RÈGLE DE CALCUL SUR LES SECTEURS

Soient \mathcal{A} et \mathcal{F}_{ij} ($i, j=1, 2$) des opérateurs.

Grphe inverse :

$$\overline{\mathcal{K}} = \text{Grphe}(\mathcal{K}) \text{ strictement intérieur au Sect } \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{11} & \mathcal{F}_{12} \\ \mathcal{F}_{21} & \mathcal{F}_{22} \end{bmatrix}$$



$$\forall (x, y) \in \text{Grphe}(\mathcal{K}), (y = \mathcal{K}x), \forall \tau \in \mathbb{Z}_+, \\ \text{Re}(\langle \mathcal{F}_{11}y + \mathcal{F}_{12}x, \mathcal{F}_{21}y + \mathcal{F}_{22}x \rangle_\tau) \leq -\varepsilon \|(x, y)\|_\tau^2;$$

cette dernière expression s'écrit encore :

$$\text{Re}(\langle \mathcal{F}_{12}x + \mathcal{F}_{11}y, \mathcal{F}_{22}x + \mathcal{F}_{21}y \rangle_\tau) \leq -\varepsilon \|(x, y)\|_\tau^2;$$

qui se traduit par :

$$\overline{\mathcal{K}}^I = \text{Grphe}(\mathcal{K})^I \text{ strictement intérieur au Sect } \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{12} & \mathcal{F}_{11} \\ \mathcal{F}_{22} & \mathcal{F}_{21} \end{bmatrix}$$

On remarque alors que le secteur correspondant au grphe inverse de \mathcal{A} se déduit de celui de \mathcal{A} par la transformation suivante :

$$\text{Sect} \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{12} & \mathcal{F}_{11} \\ \mathcal{F}_{22} & \mathcal{F}_{21} \end{bmatrix} = \text{Sect} \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{11} & \mathcal{F}_{12} \\ \mathcal{F}_{21} & \mathcal{F}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & 0 \end{bmatrix}$$

où \mathcal{I} est l'opérateur identité et où la multiplication des quantités entre crochet s'effectue comme sur les matrices.

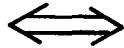
Produit d'une matrice hermitienne et d'un opérateur non linéaire.

\mathcal{A} est à gain fini et $P^{1/2}$ est une matrice hermitienne définie positive.

Posons $y = P^{1/2} \mathcal{A} x = P^{1/2} \tilde{y}$, où $\tilde{y} = \mathcal{A} x$:

(F.1)

$$P^{1/2} \overline{\mathcal{K}} = \text{Grphe}(P^{1/2} \mathcal{K}) \text{ strictement intérieur au Sect } \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{11} & \mathcal{F}_{12} \\ \mathcal{F}_{21} & \mathcal{F}_{22} \end{bmatrix}$$



$$\forall (x, y) \in \text{Grphe}(P^{1/2} \mathcal{K}), (y = P^{1/2} \mathcal{K} x), \forall \tau \in \mathbb{Z}_+, \\ \text{Re}(\langle \mathcal{F}_{11}y + \mathcal{F}_{12}x, \mathcal{F}_{21}P^{1/2}y + \mathcal{F}_{22}x \rangle_\tau) \leq -\varepsilon \|(x, y)\|_\tau^2,$$

qui s'écrit encore compte tenu de (F.1) :

$$\text{Re}(\langle \mathcal{F}_{11}P^{1/2}\tilde{y} + \mathcal{F}_{12}x, \mathcal{F}_{21}P^{1/2}\tilde{y} + \mathcal{F}_{22}x \rangle_\tau) \leq -\varepsilon \|(x, P^{1/2}\tilde{y})\|_\tau^2. \quad (\text{F.2})$$

$$\text{Or: } -\varepsilon \|(x, P^{1/2}\tilde{y})\|_\tau^2 = -\varepsilon (\|x\|_\tau^2 + \|P^{1/2}\tilde{y}\|_\tau^2) \leq -\varepsilon \|x\|_\tau^2, \quad (\text{F.3})$$

et l'opérateur \mathcal{A} est à gain fini; par conséquent, $\exists k \stackrel{\Delta}{=} g(\mathcal{A}) \in \mathbf{R}_+$ vérifiant : $\|\mathcal{K}x\|_{\tau} \leq k \|x\|_{\tau}$.

Il vient alors : $\|\tilde{y}\|_{\tau}^2 = \|\mathcal{K}x\|_{\tau}^2 \leq k^2 \|x\|_{\tau}^2$,

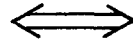
donc : $\|x\|_{\tau}^2 + \|\tilde{y}\|_{\tau}^2 \leq (1+k^2) \|x\|_{\tau}^2$,

soit : $-\varepsilon (\|(x, \tilde{y})\|_{\tau}^2) = -\varepsilon (\|x\|_{\tau}^2 + \|\tilde{y}\|_{\tau}^2) \geq -\varepsilon \|x\|_{\tau}^2 (1+k^2)$,

ou encore : $-\varepsilon \|x\|_{\tau}^2 \leq -\varepsilon \frac{(\|x\|_{\tau}^2 + \|\tilde{y}\|_{\tau}^2)}{1+k^2}$. (F.4)

En rapprochant (F.2), (F.3) et (F.4), il vient : $\forall (x, \tilde{y}) \in \text{Graphe}(\mathcal{K}), \forall \tau \in \mathbf{Z}_+$,

$$\text{Re} \langle \mathcal{F}_{11} P^{1/2} \tilde{y} + \mathcal{F}_{12} x, \mathcal{F}_{21} \tilde{y} + \mathcal{F}_{22} x \rangle_{\tau} \leq -(\varepsilon / (1+k^2)) \|(x, \tilde{y})\|_{\tau}^2$$



Graphe(\mathcal{K}) strictement intérieur au Sect $\begin{bmatrix} \mathcal{F}_{11} P^{1/2} & \mathcal{F}_{12} \\ \mathcal{F}_{21} P^{1/2} & \mathcal{F}_{22} \end{bmatrix}$.

Il est utile de remarquer que :

$$\text{Sect} \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{11} P^{1/2} & \mathcal{F}_{12} \\ \mathcal{F}_{21} P^{1/2} & \mathcal{F}_{22} \end{bmatrix} = \text{Sect} \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{11} & \mathcal{F}_{12} \\ \mathcal{F}_{21} & \mathcal{F}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix}$$

ANNEXE G

G.1. - Démonstration du Théorème 8.

Appliquant le Lemme de marge de stabilité de Safonov (cf. Section III,3.3) ou le Théorème 3 lorsque l'opérateur dynamique de la chaîne de retour admet pour réponse impulsionnelle $N(v)\delta_{k,k}$ où $N(v)$ est une matrice définie par $N(\cdot) = \Lambda_c(\cdot)K(\cdot)\Lambda_M(\cdot)$ (cf. Équation (IV.6)) et remarquant que $\mathcal{A}x = Fx + \mathcal{F}x$ et $\mathcal{B}x = Gx$ les conditions (III.20) et (III.21) (cf. Section III,3.3) se réécrivent, $\forall v \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$:

$$S(\cdot) = P - (F - G\Lambda_c(\cdot)K\Lambda_M(\cdot))^T P (F - G\Lambda_c(\cdot)K\Lambda_M(\cdot)) \quad (\text{G.1})$$

et : *Graphe*($P^{1/2}(F - GN(\cdot) + \mathcal{F})$) strictement à l'intérieur du Cône $(0, P^{1/2})$.

(G.2)

Une expression algébrique équivalente à cette dernière condition est :

$$\text{Re} \langle y - P^{1/2}x, y + P^{1/2}x \rangle_{\tau} \leq -\varepsilon (\|x\|_{\tau}^2 + \|y\|_{\tau}^2) < 0,$$

où : $\forall x \in \mathcal{L}_{ie}^n - \{0_{ie}^n\}, \forall \tau \in \mathbf{Z}_+, y = P^{1/2}(F - GN(\cdot) + \mathcal{F})x$,

soit encore :

$$\langle y, y \rangle_{\tau} - \langle P^{1/2}x, P^{1/2}x \rangle_{\tau} < 0.$$

Écrivant $t = \mathcal{F}x, t \in \mathcal{L}_{ie}^m$, $\langle y, y \rangle_{\tau}$ se développe suivant :

$$\begin{aligned} \langle y, y \rangle_{\tau} &= \sum_{i=0}^{\tau} \{ P^{1/2}((F - GN(\cdot))x_i + t_i) \}^T \{ P^{1/2}((F - GN(\cdot))x_i + t_i) \} \\ &= \sum_{i=0}^{\tau} \{ x_i^T (F - GN(\cdot))^T P (F - GN(\cdot)) x_i + 2 t_i^T P (F - GN(\cdot)) x_i + t_i^T P t_i \}, \end{aligned}$$

d'où :

$$\langle y, y \rangle_{\mathcal{E}} - \langle P^{-1/2}x, P^{-1/2}x \rangle_{\mathcal{E}} = \sum_{i=0}^{\tau} \{ -x_i^T S(\cdot) x_i + 2t_i^T P(F - GN(\cdot))x_i + t_i^T P t_i \} < 0.$$

Les conditions (IV.7) et (IV.8) assurent la négativité à chaque instant de l'expression entre crochet; en effet, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ ($k=i$):

$$\begin{aligned} |2t^T P(F - GN(\cdot))x + t^T P t| &\leq 2|t^T P(F - GN(\cdot))x| + |t^T P t| \\ &\leq 2\|t\|_{\mathcal{E}}\|P(F - GN(\cdot))\|_s\|x\|_{\mathcal{E}} + \|t\|_{\mathcal{E}}\|P\|_s\|t\|_{\mathcal{E}} \end{aligned}$$

et d'autre part, $S(\cdot)$ étant > 0 : $x^T S(\cdot) x \geq \|x\|_{\mathcal{E}}^2 / \|S^{-1}(\cdot)\|_s$,

d'où la condition suffisante: $\frac{\|x\|_{\mathcal{E}}^2}{\|S^{-1}(\cdot)\|_s} > 2\|x\|_{\mathcal{E}}\|P(F - GN(\cdot))\|_s\|t\|_{\mathcal{E}} + \|t\|_{\mathcal{E}}^2\|P\|_s$

dont (IV.8) constitue un réarrangement équivalent.

On notera que

(IV.7) \equiv (G.1) \equiv (III.20) (1^{re} condition du Lemme de Safonov)

alors que

(IV.8) \Rightarrow (G.2) \equiv (III.21) (2^e condition du Lemme de Safonov).

D'un point de vue strictement mathématique, (IV.8) constitue un affaiblissement de la condition (G.2) de Safonov. Elle a cependant le mérite de proposer une condition dont la vérification devient possible.

Le Théorème 8 est démontré.

G.2. — Préliminaires aux Théorèmes 9 et 10.

Préalablement à la démonstration des Théorèmes 9 et 10, un support de calcul est développé.

D'après (IV.7):

$$S(\cdot) = P - F^T P F + F^T P G \Lambda_C^T(\cdot) K \Lambda_M(\cdot) + \Lambda_M^T(\cdot) K^T \Lambda_C(\cdot) G^T P F - \Lambda_M^T(\cdot) K \Lambda_C^T(\cdot) G^T P G \Lambda_C(\cdot) K \Lambda_M(\cdot).$$

Les équations (IV.11), (IV.12) donnent par ailleurs: $P - F^T P F = Q - F^T P G K$.

Utilisant la définition (IV.13) de U et $\Lambda(\cdot)$ il vient:

$$\begin{aligned} S(\cdot) &= Q - U^T U + U^T \Lambda(\cdot) U \Lambda_M(\cdot) + \Lambda_M^T(\cdot) U^T \Lambda^T(\cdot) U - \Lambda_M^T(\cdot) U^T \Lambda^T(\cdot) \Lambda(\cdot) U \Lambda_M(\cdot) \\ &\quad + \Lambda_M^T(\cdot) U^T (R + G^T P G)^{-1/2} \Lambda_C^T(\cdot) R \Lambda_C(\cdot) (R + G^T P G)^{-1/2} U \Lambda_M(\cdot) \\ &= Q - U^T U + U^T \{ \Lambda(\cdot) U \Lambda_M(\cdot) U^* + U^T * \Lambda_M^T(\cdot) U^T \Lambda^T(\cdot) \} U \\ &\quad + U^T \Lambda(\cdot) U \Lambda_M(\cdot) (I_n - U^* U) + (I_n - U^T U^T *) \Lambda_M^T(\cdot) U^T \Lambda^T(\cdot) U \\ &\quad - \Lambda_M^T(\cdot) U^T \Lambda^T(\cdot) \Lambda(\cdot) U \Lambda_M(\cdot) \\ &\quad + \Lambda_M^T(\cdot) U^T (R + G^T P G)^{-1/2} \Lambda_C^T(\cdot) R \Lambda_C(\cdot) (R + G^T P G)^{-1/2} U \Lambda_M(\cdot). \end{aligned}$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\exists y \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = (I_n - U^* U)x$; de plus, $U = U U^* U$ (cf. [78]); par conséquent, $U y = 0$. Il résulte de cette propriété que:

$$(R + B^T P B)^{1/2} K y = 0 \implies y \in \text{Ker}(K) \text{ puisque } R + B^T P B \text{ est inversible.}$$

L'hypothèse non restrictive $\text{Ker}(K) \subset \text{Ker}(K \Lambda_M(\cdot))$, est maintenant introduite.

D'où, si $y \in \text{Ker}(K)$, $K \Lambda_M(\cdot) = 0$ et $U \Lambda_M(\cdot) (I_n - U^* U) = 0$.

Utilisant enfin les expressions de $\Gamma(\cdot)$ et $\Lambda_1(\cdot)$ (IV.14), l'expression de $S(\cdot)$ se simplifie en:

$$\begin{aligned} S(\cdot) &= Q - U^T U + U^T \{ \Gamma(\cdot) + \Gamma^T(\cdot) \} U - \Lambda_M^T(\cdot) U^T \Lambda^T(\cdot) \Lambda(\cdot) U \Lambda_M(\cdot) \\ &\quad + \Lambda_M^T(\cdot) U^T \Lambda_1^T(\cdot) \Lambda_1(\cdot) U \Lambda_M(\cdot). \end{aligned}$$

G,2.1. — Démonstration du Théorème 9.

Si les matrices U et $\Lambda_M(\cdot)$ commutent (ce qui suppose bien sûr que $m=n$), alors :

$$S(\cdot) = Q + U^T \{ \Gamma(\cdot) + \Gamma^T(\cdot) + \Lambda_M^T(\cdot) \Lambda_M^T(\cdot) \Lambda_M(\cdot) \Lambda_M(\cdot) - \Lambda_M^T(\cdot) \Lambda^T(\cdot) \Lambda(\cdot) \Lambda_M(\cdot) - I_m \} U.$$

Par application de (IV.15) et (IV.16) : $S(\cdot) = Q + U^T \{ H(\cdot) - (E^T E)^{-1} \} U.$

Par ailleurs, si $H(\cdot) > 0$ (et puisque $E^T E > 0$) : $\exists \lambda \in]0, 1[$ et $\exists J(\cdot) \in \mathbf{R}^{n \times m}$ définie positive tels que :

$$H(\cdot) - \lambda (E^T E)^{-1} \geq J(\cdot) \geq 0.$$

Par conséquent : $S(\cdot) \geq \lambda Q + (1-\lambda) \{ Q - U^T (E^T E)^{-1} U \} + U^T J(\cdot) U$

Or : $Q - U^T (E^T E)^{-1} U = Q^{1/2} \{ I_n - E^T (E^T E)^{-1} E \} Q^{1/2}.$

Les seules valeurs propres possibles de la quantité $I_n - E^T (E^T E)^{-1} E$ étant 0 ou 1, il vient :

$$Q - U^T (E^T E)^{-1} U \geq 0,$$

d'où :

$$S(\cdot) \geq \lambda Q + U^T J(\cdot) U > 0.$$

Le Théorème 9 est démontré.

G,2.2. — Démonstration du Théorème 10.

$\Lambda_M(\cdot) = I_m$, donc l'hypothèse $\text{Ker}(K) \subset \text{Ker}(K \Lambda_M(\cdot))$ est vérifiée de façon tout à fait banale. D'autre part, l'expression de $\Gamma(\cdot)$ se réduit à $\Gamma(\cdot) U U^\#$ et permet d'écrire, puisque $U U^\# = I_m$:

$$S(\cdot) = Q + U^T \{ \Lambda(\cdot) + \Lambda^T(\cdot) - \Lambda^T(\cdot) \Lambda(\cdot) + \Lambda_1^T(\cdot) \Lambda_1(\cdot) - I_m \} U$$

et : $H(\cdot) = \Lambda(\cdot) + \Lambda^T(\cdot) + \Lambda_1^T(\cdot) \Lambda_1(\cdot) - \Lambda^T(\cdot) \Lambda(\cdot) - I_m + (E^T E)^{-1}$

où (IV.15) définit E : $S(\cdot) = Q + U^T \{ H(\cdot) - (E^T E)^{-1} \} U.$

Supposons par ailleurs que $H(\cdot) > 0$, $E^T E$ étant définie positive, on conclut de la même façon qu'en G,2.1.

Le Théorème 10 est démontré.

ANNEXE H

Table de Transformée en z
pour un signal échantillonné à T s.

Fonction de transfert en s	Fonction de transfert en z
$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s+1/\tau}$	$\frac{z}{z-e^{-T/\tau}}$
$b \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$b \frac{ze^{-aT} \sin \omega_0 T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega_0 T + e^{-2aT}}$
$b \frac{s+a}{s((s+a)^2 + \omega_0^2)}$	$\frac{ab}{a^2 + \omega_0^2} \left[\frac{z}{z-1} - \frac{z^2 - ze^{-aT} \sec \theta \cos(\omega_0 T - \theta)}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega_0 T + e^{-2aT}} \right]$ avec $\text{tg } \theta = \omega_0/a$

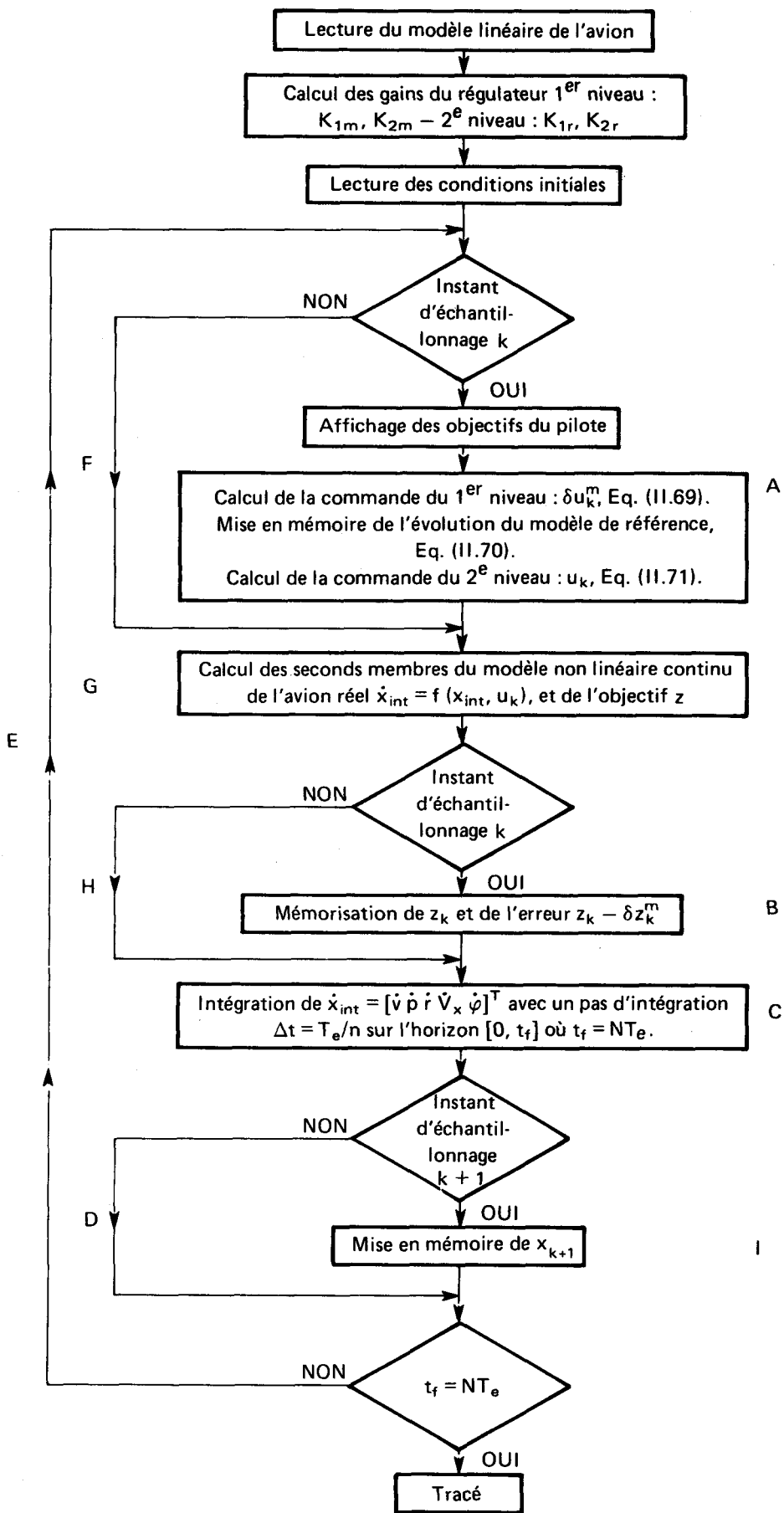


Planche 1 – Organigramme du logiciel de simulation.

Matrices du modèle linéaire discret augmenté (cf. (II.68)).

$$F = \begin{bmatrix} 9.8556E-01 & 1.9729E-01 & -7.5782E+00 & 0. & 0. \\ -5.1384E-03 & 9.3947E-01 & 3.2586E-02 & 0. & 0. \\ 6.4047E-04 & -1.6033E-03 & 9.8826E-01 & 0. & 0. \\ 0. & 9.9967E-01 & 2.5800E-02 & 1.0000E+00 & 0. \\ 0. & 0. & 1.0000E+00 & 0. & 1.0000E+00 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1.6726E-02 & 6.9682E-01 \\ -1.9569E-01 & 1.9710E-01 \\ -9.4171E-03 & -7.4284E-02 \\ 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix}$$

Premier niveau du régulateur de poursuite.

$$Q_m = \begin{bmatrix} 1.0000E-05 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 5.0000E+01 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 1.0000E-05 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 5.0000E-02 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 5.0000E-02 \end{bmatrix} \quad R_m = \begin{bmatrix} 1.0000E+00 & 0. \\ 0. & 1.0000E+00 \end{bmatrix}$$

Matrices de gains.

$$K_{1m} = \begin{bmatrix} -1.8753E-02 & 2.3519E+00 & 2.1617E+00 \\ 6.9811E-03 & -1.7294E+00 & 2.0385E+00 \end{bmatrix} \quad K_{2m} = \begin{bmatrix} 8.0528E-02 & 1.3750E-01 \\ -5.0914E-02 & 1.4999E-01 \end{bmatrix}$$

Deuxième niveau du régulateur de poursuite.

$$Q_r = \begin{bmatrix} 3.0000E-04 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 4.0000E+00 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 1.3000E+00 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 8.0000E-03 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 7.0000E-02 \end{bmatrix} \quad R_r = \begin{bmatrix} 1.0000E+00 & 0. \\ 0. & 4.0000E+00 \end{bmatrix}$$

Solution de l'équation de Riccati discrète (deuxième niveau)

$$P_{\text{Riccati}} = \begin{bmatrix} 5.88564E-02 & -1.12809E-01 & 4.97165E-01 & -1.53427E-02 & 4.16221E-01 \\ -1.12809E-01 & 1.13772E+01 & 4.00093E+00 & 5.18447E-01 & -1.41994E-02 \\ 4.97165E-01 & 4.00093E+00 & 1.08051E+02 & 1.65837E-01 & 1.10641E+01 \\ -1.53427E-02 & 5.18447E-01 & 1.65837E-01 & 2.08759E-01 & -8.07166E-02 \\ 4.16221E-01 & -1.41994E-02 & 1.10641E+01 & -8.07166E-02 & 4.29450E+00 \end{bmatrix}$$

Matrices de gains.

$$K_{1r} = \begin{bmatrix} -1.8172E-02 & 1.4645E+00 & 1.7494E+00 \\ 5.4123E-03 & -2.8762E-01 & 1.5760E+00 \end{bmatrix} \quad K_{2r} = \begin{bmatrix} 6.8224E-02 & 8.8403E-02 \\ -1.2052E-02 & 1.1531E-01 \end{bmatrix}$$

Valeurs propres du processus contrôlé.

Premier niveau :		Deuxième niveau :	
Re (λ_j)	Im (λ_j)	Re (λ_j)	Im (λ_j)
1.67978E-01	0.	6.40428E-01	0.
9.07091E-01	7.64713E-02	9.24278E-01	-8.35565E-02
9.07091E-01	-7.64713E-02	9.24278E-01	8.35565E-02
9.68878E-01	0.	9.56305E-01	0.
9.93899E-01	0.	9.94640E-01	0.

Matrices F et G du modèle linéaire de référence (cf. Planche 2).

Le premier niveau est identique à celui de la Planche 2.

Deuxième niveau du régulateur de poursuite.

$$Q_r = \begin{bmatrix} 1.0000E-04 & -1.1000E-01 & 0. & 0. & 0. \\ -1.1000E-01 & 2.0000E+02 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 5.0000E-08 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 2.0000E-01 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 5.0000E-05 \end{bmatrix} \quad R_r = \begin{bmatrix} 1.0000E+00 & 0. \\ 0. & 1.0000E+00 \end{bmatrix}$$

Matrices de gains

$$K_{1r} = \begin{bmatrix} -2.8074E-02 & 2.5211E+00 & 1.5997E+00 \\ -7.1138E-04 & -2.1425E+00 & 1.4356E+00 \end{bmatrix}$$

$$K_{2r} = \begin{bmatrix} 3.3410E-02 & 4.8043E-03 \\ -1.1495E-01 & 4.4432E-03 \end{bmatrix}$$

Valeurs propres du deuxième niveau.

λ_i	Re (λ_i)	Im (λ_i)
{	5.42021E-02	0.
	9.27046E-01	5.66637E-02
	9.27046E-01	-5.66637E-02
	9.66995E-01	0.
	9.99685E-01	0.

Planche 3 – Autre configuration de réglage du régulateur de poursuite (deuxième niveau plus rapide que celui de la planche 2).

Tracés

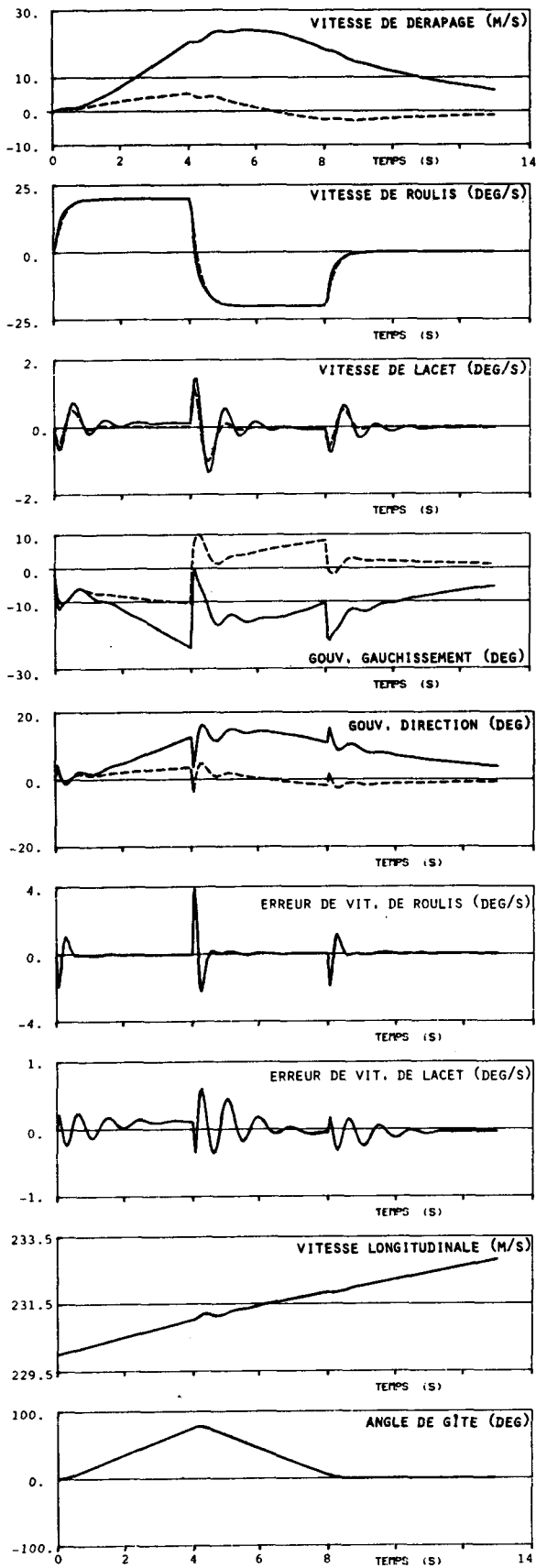


Planche 4 – Jeu de gains Planche 2.

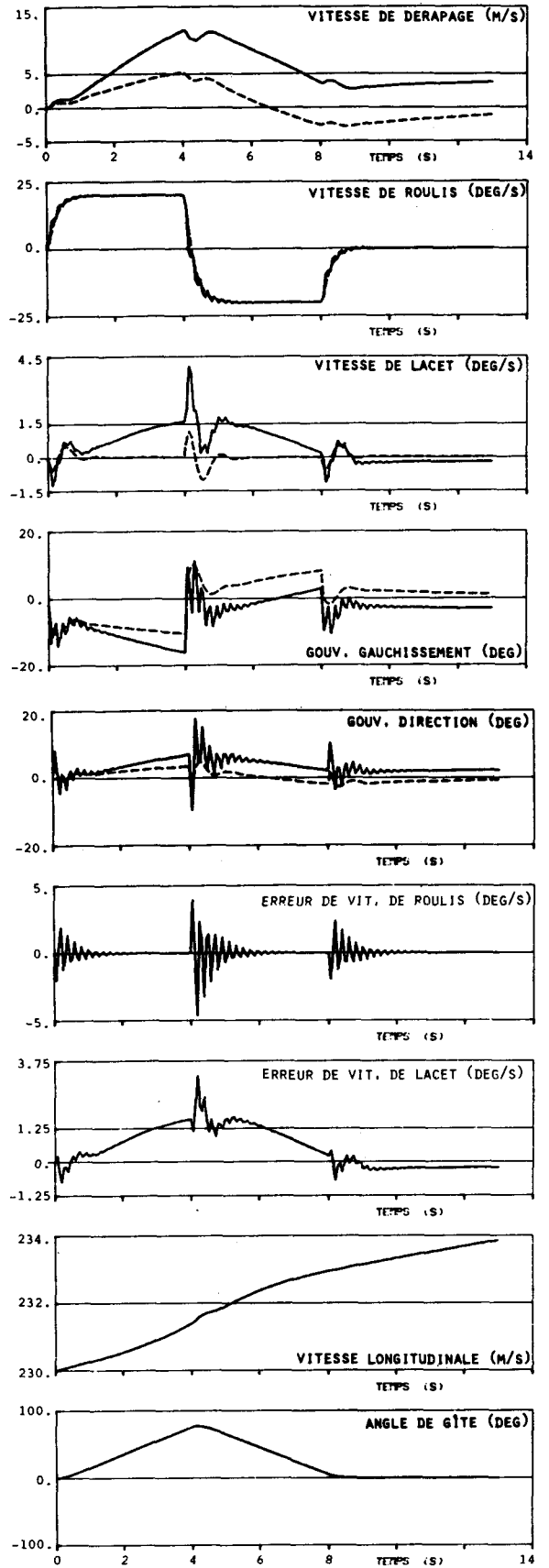


Planche 5 – Jeu de gains Planche 3.

Simulation de l'avion contrôlé avec commande de roulis (double créneau d'amplitude 20°/s).

Tracés

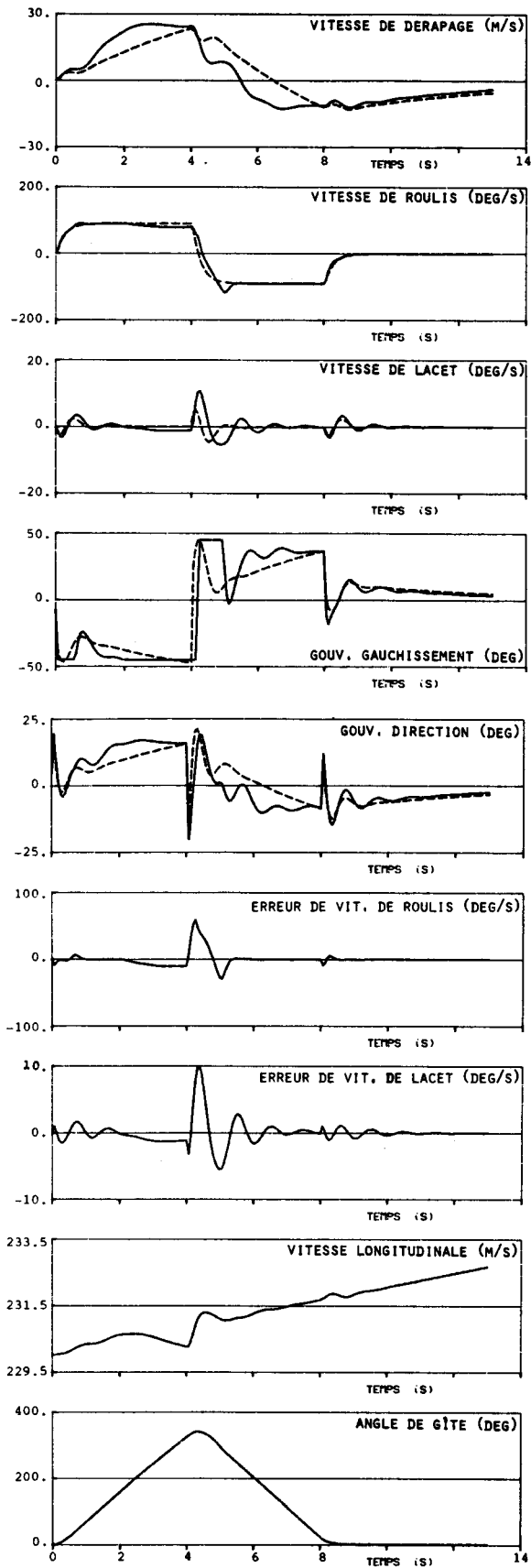


Planche 6 – Jeu de gains Planche 2.

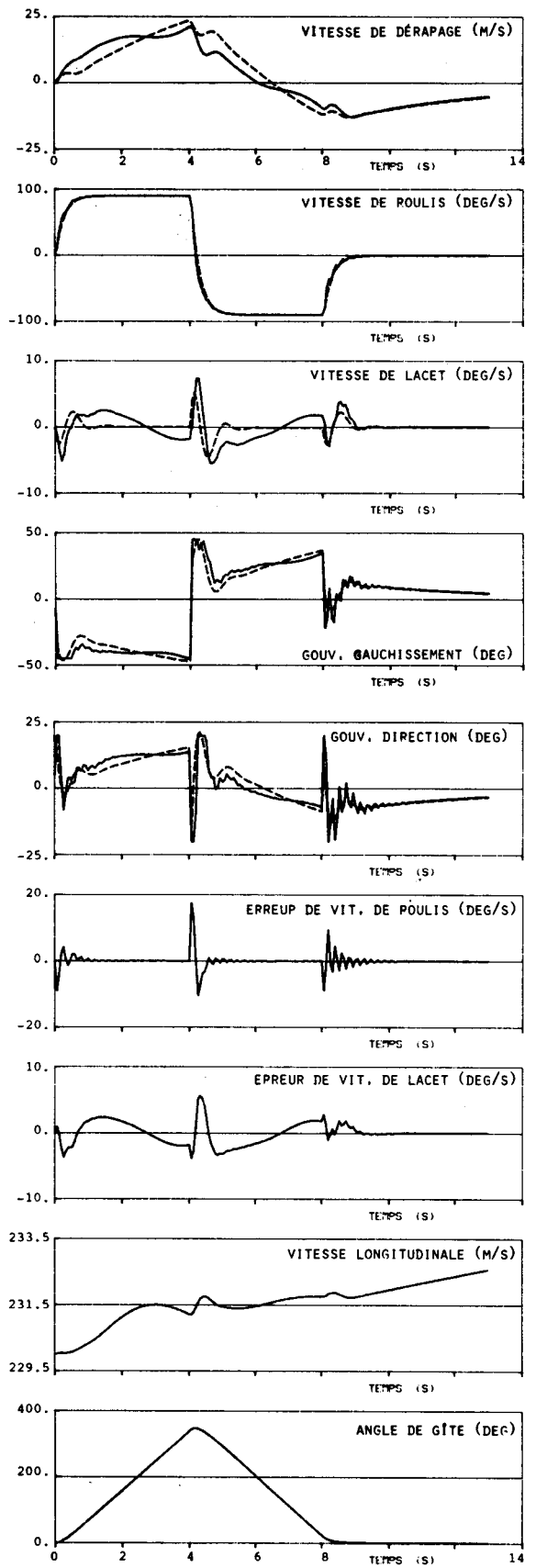


Planche 7 – Jeu de gains Planche 3.

Simulation de l'avion contrôlé avec commande de roulis (double créneau d'amplitude 90°/s).

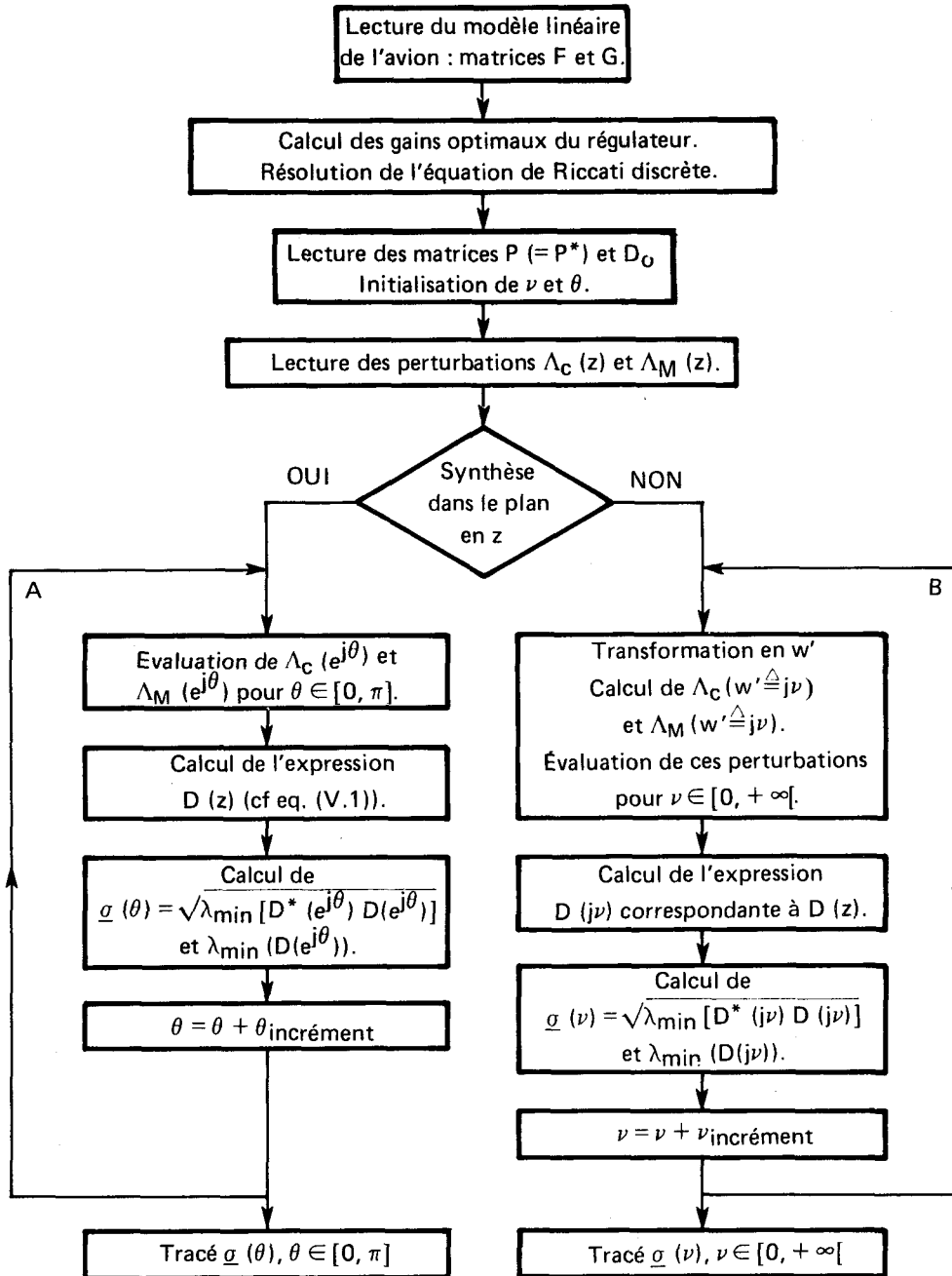


Planche 8 — Organigramme du logiciel de synthèse.

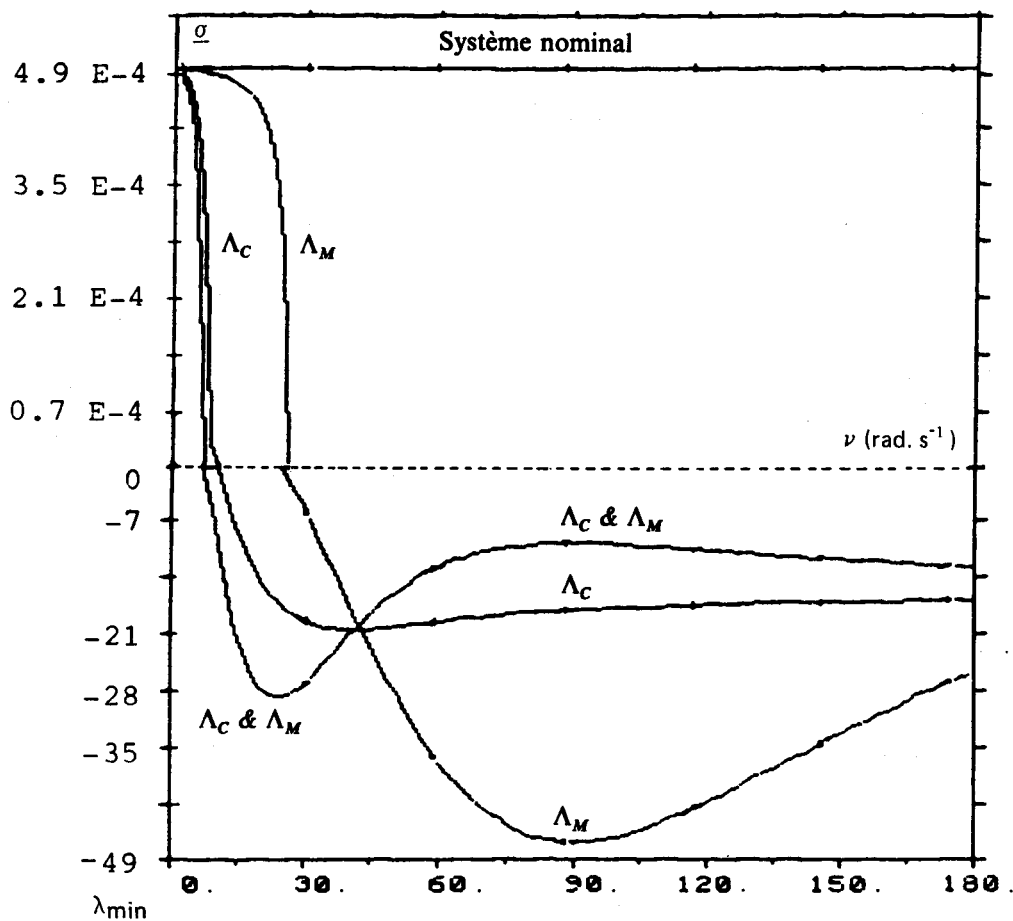
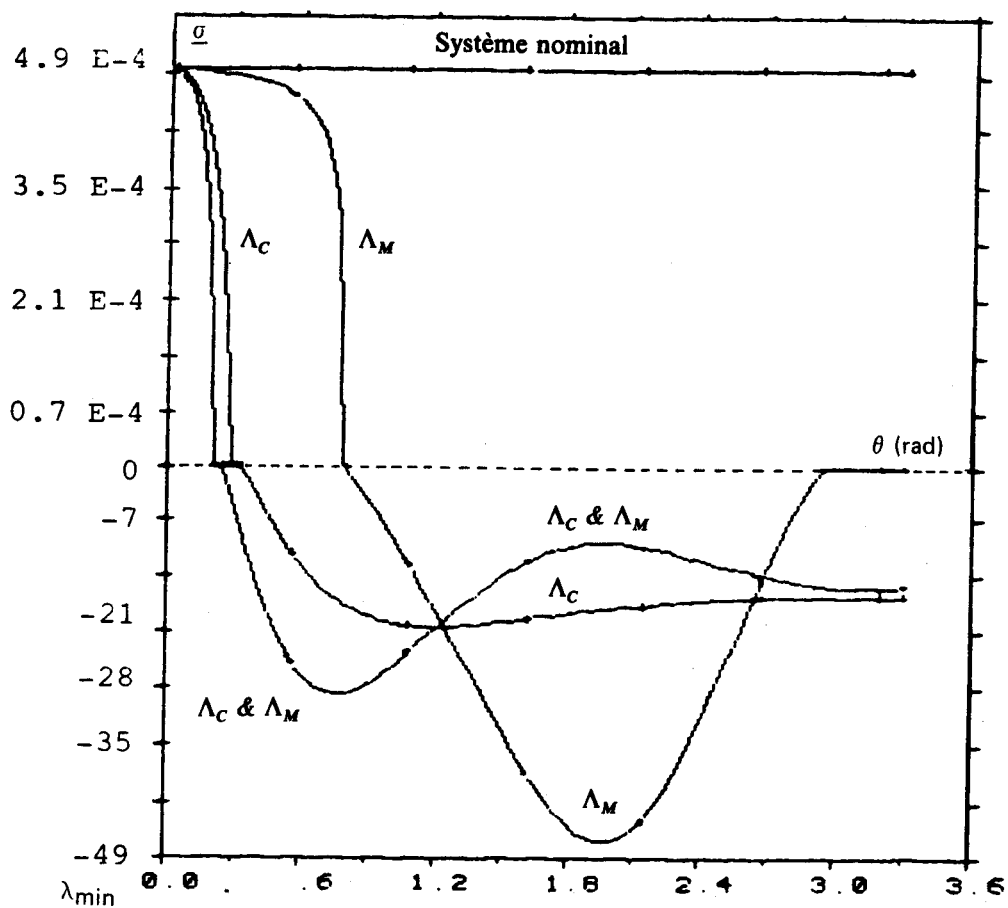


Planche 9 -- Lieux en sigma obtenus pour $P = P_{Riccati}$.

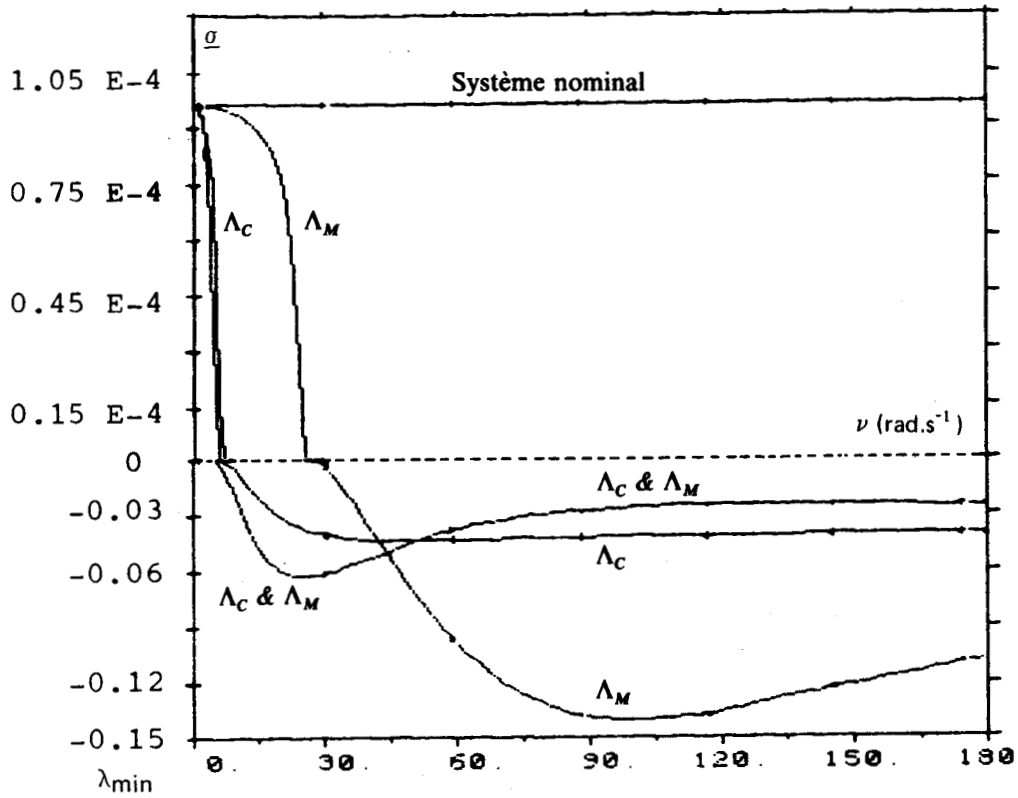
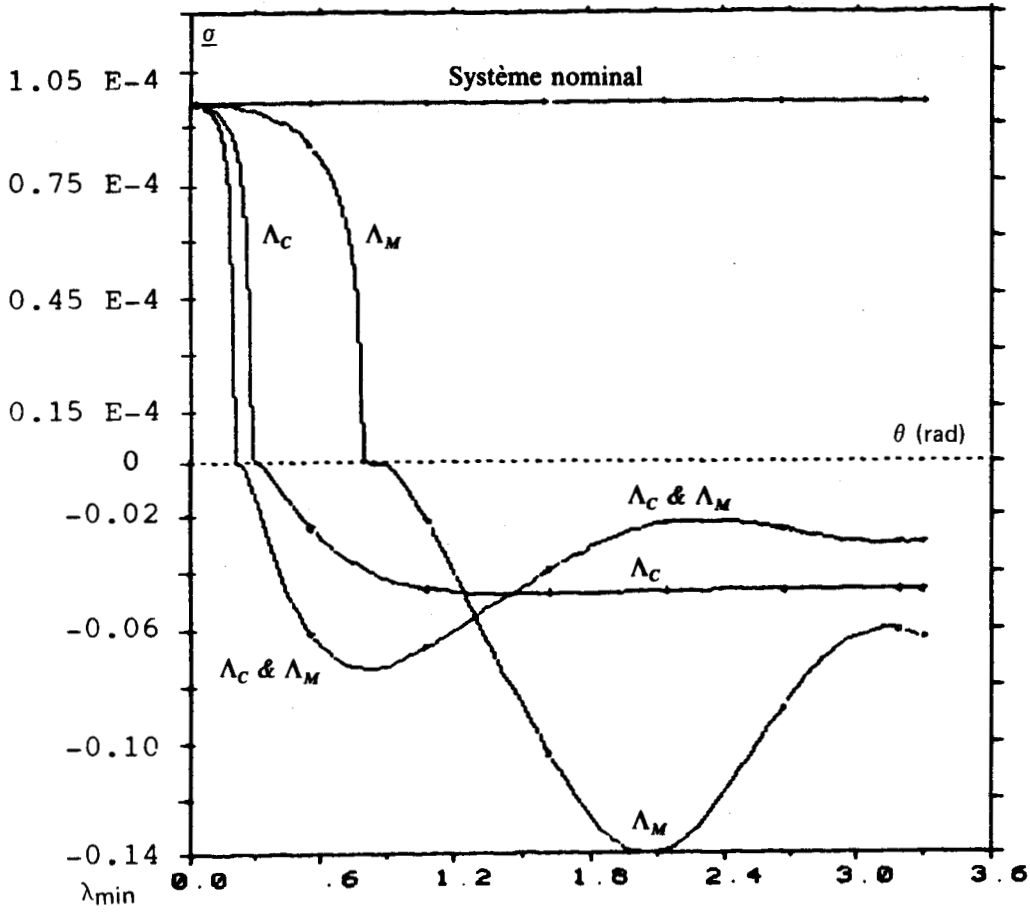


Planche 10 – Influence d'un facteur d'échelle T sur les lieux en sigma
 $P = P_{\text{Riccati}}$ et $T^{-1} = \text{diag}(5, 0.1, 0.01, 0.1, 0.5)$.

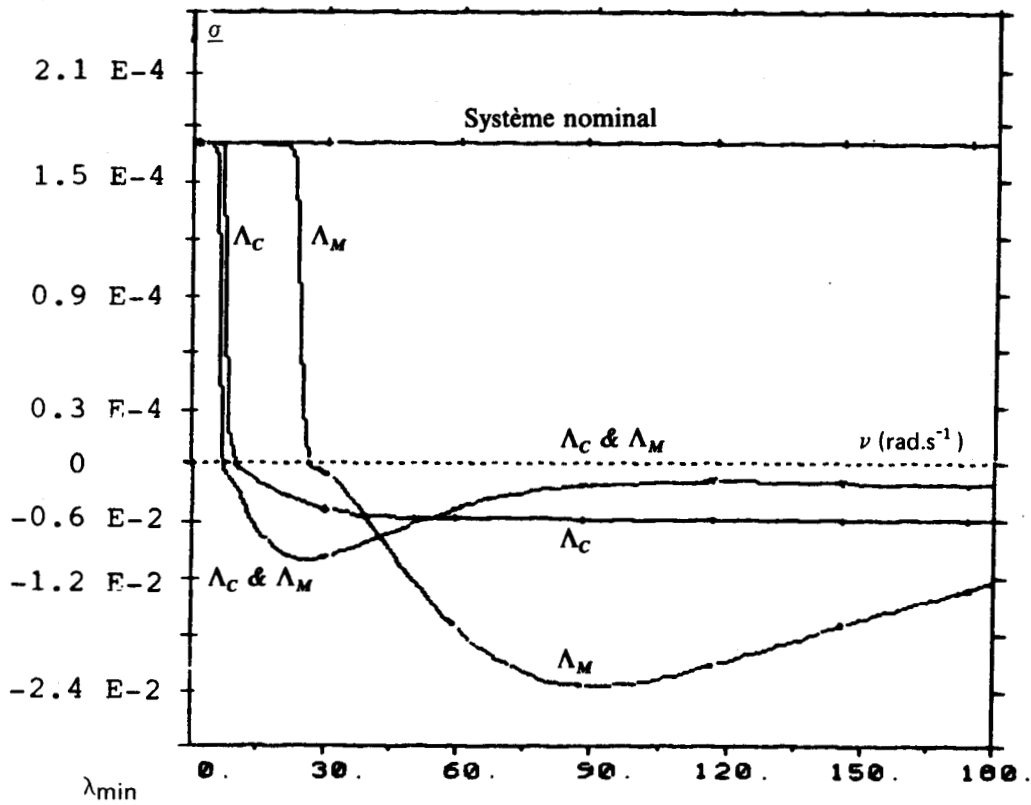
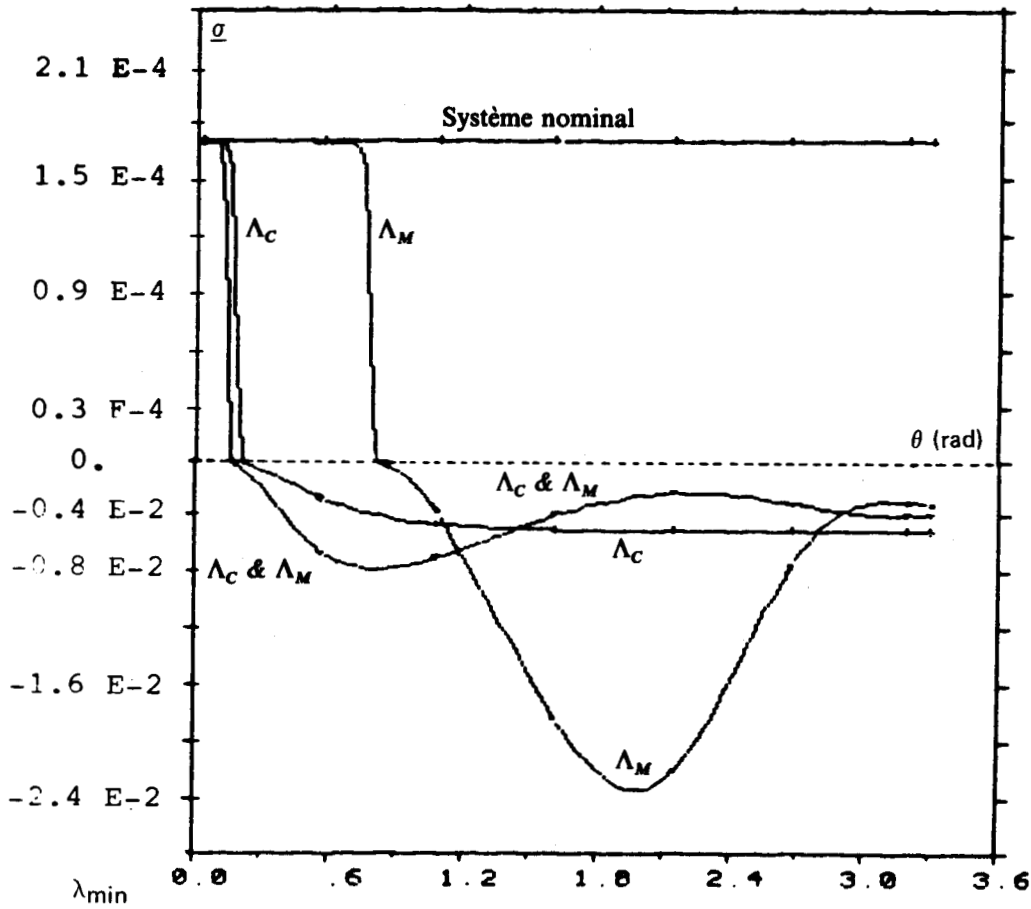


Planche 11 – Influence d'un facteur d'échelle T sur les lieux en sigma
 $P = P_{Riccati}$ et $T^{-1} = \text{diag}(1, 0.01, 0.01, 1, 0.05)$.

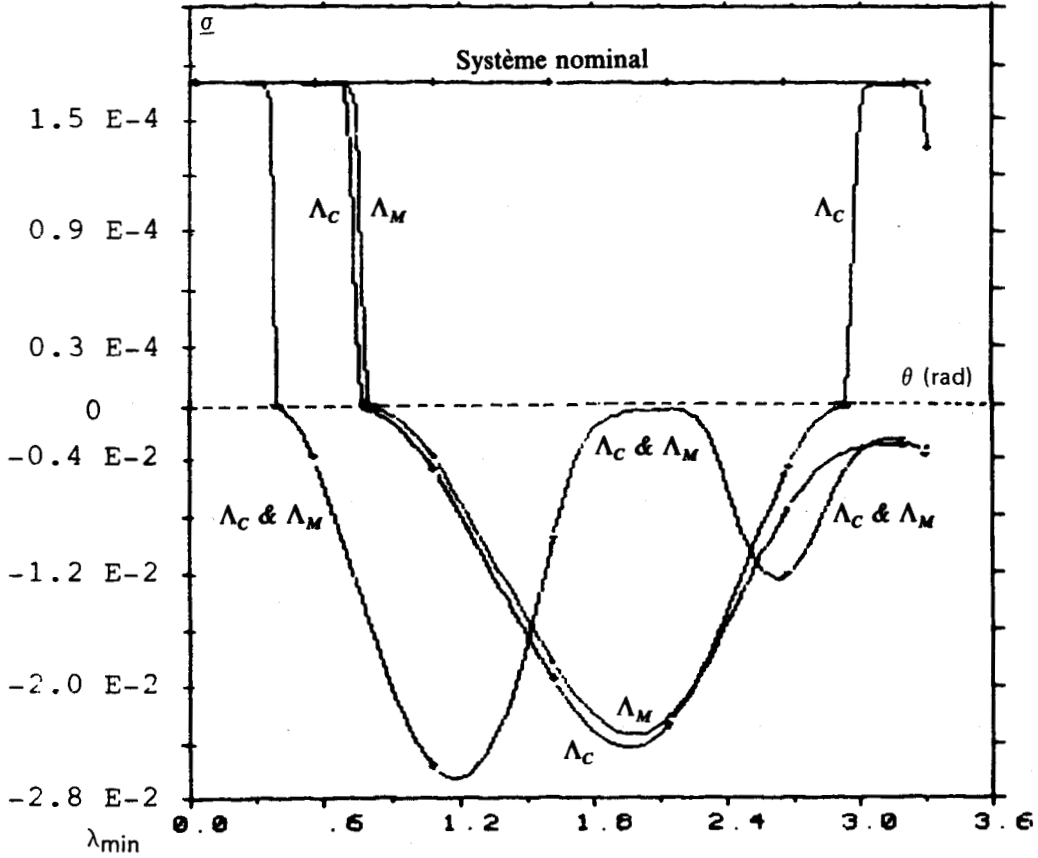
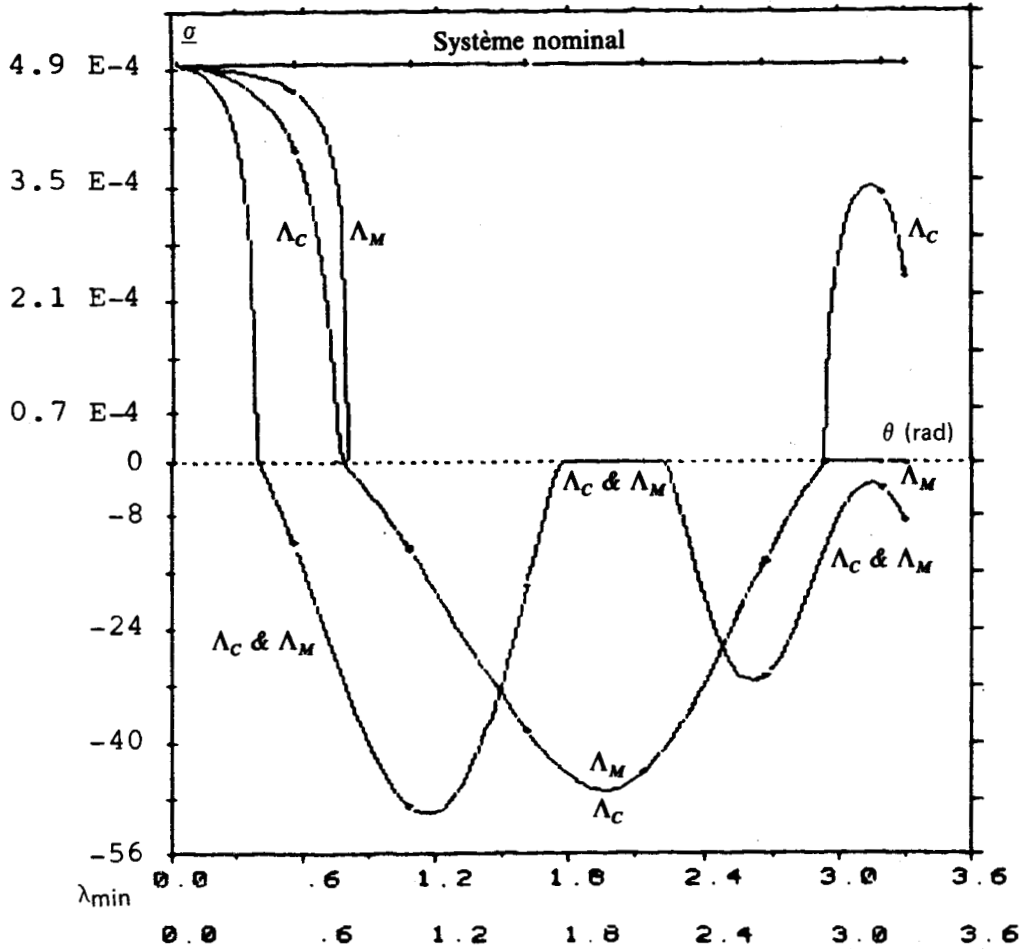


Planche 12 – Lieux en sigma pour un autre exemple de perturbations.

RÉFÉRENCES

- [1] E. J. DAVISON et H. W. SMITH — Pole Assignment in Linear Time-Invariant Multivariable Systems with Constant Disturbances. *Automatica*, vol. 7 (1971), p. 489-498.
- [2] C. D. JOHNSON — Accommodation of External Disturbances in Linear Regulator and Servomechanism Problems. *IEEE Trans.*, vol. AC-16, n° 6 (décembre 1971), p. 635-644.
- [3] N. SANDELL, Jr et M. ATHANS — On "Type-L" Multivariable Linear Systems. *Automatica*, vol. 9, n° 1 (janvier 1973), p. 131-136.
- [4] M. ATHANS — On the Design of P.I.D. Controllers Using Optimal Linear Regulator Theory. *Automatica*, vol. 7 (1971), p. 643-647.
- [5] S. E. GUSTAFSSON — A Theory for Optimal PI-Control of Multivariable Linear Systems. *Acta Polytechnica Scandinavia*, Math. and Comp. Sci. Series, Helsinki, n° 27 (1975), p. 5-31.
- [6] O. L. MERCIER — Étude de la robustesse des systèmes de pilotage nouveaux. Rapport Technique ONERA n° 2/7224SY (août 1980).
- [7] O. L. MERCIER et H. BOURLÈS — Développement de lois de pilotage multivariées robustes pour les avions d'arme futurs. Rapport Technique ONERA n° 4/7224SY (décembre 1981).
- [8] H. BOURLÈS — Qualification et amélioration de la Robustesse des régulateurs multivariés avec application au pilotage d'un avion. Thèse de Docteur-Ingénieur, ONERA-Université de Grenoble (octobre 1982); Note Technique ONERA n° 1983-2.
- [9] H. BOURLÈS et O. L. MERCIER — La régulation de poursuite optimale quadratique multivariable des systèmes linéaires perturbés. *RAIRO/Automatique*, vol. 16, n° 4 (octobre 1982), p. 297-310.
- [10] B. D. O. ANDERSON et J. B. MOORE — *Linear Optimal Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1972).
- [11] M. ATHANS et P. L. FALB — *Optimal Control*. McGraw-Hill, New York, N.Y. (1966).
- [12] H. KWAKERNAAK et R. SIWAN — *Linear Optimal Control Systems*. Wiley-Interscience, New York (1972).
- [13] Y. TAKAHASHI, C. S. CHAN et D. M. AUSLANDER — Parametereinstellung bei linearen DDC-Algorithmen. *Regelungstechnik und Prozess Datenverarbeitung*, vol. 19, Heft 6 (juin 1971), p. 237-244.
- [14] D. M. AUSLANDER, Y. TAKAHASHI et M. TOMIZUKA — The Next Generation of Single Loop Controllers: Hardware and Algorithms for the Discrete/Decimal Process Controller. *Trans. ASME, J. of Dyn. Syst., Meas. and Cont.*, vol. 97, Ser. G, n° 3 (septembre 1975), p. 280-282.
- [15] D. M. AUSLANDER, M. TOMIZUKA et Y. TAKAHASHI — Process Control Experience and a Self Tuning Method for a Discrete-Time, Finite Time Settling Controller/Observer. *Trans. ASME, J. of Dyn. Syst., Meas. and Cont.* (septembre 1977), p. 209-211.
- [16] Y. TAKAHASHI, M. TOMIZUKA et D. M. AUSLANDER — Simple Discrete Control of Industrial Processes. (Finite Time Settling Control Algorithm for Single Loop Digital Controller). *Trans. ASME, J. of Dyn. Syst., Meas. and Cont.*, vol. 97, Ser. G, n° 4 (décembre 1975), p. 354-361.
- [17] D. M. AUSLANDER, Y. TAKAHASHI et M. TOMIZUKA — Direct Digital Process Control: Practice and Algorithms for Microprocessor Application. *Proc. of the IEEE*, vol. 66, n° 2 (février 1978), p. 199-208.
- [18] Y. TAKAHASHI — Simple Integral Control of Industrial Processes. *Proc. JACC (27-30 juillet 1976)*, Purdue Univ., West Lafayette, In., p. 291-293.
- [19] R. E. KALMAN — On the General Theory of Control Systems. *Proc.*, 1^{er} Congrès Int. de l'IFAC, Moscou (1960); Butterworths, Londres (1961), p. 481-482.
- [20] W. M. WONHAM — *Linear Multivariable Control: a Geometric Approach*. Springer Verlag, New York (1979).
- [21] E. H. BRISTOL — Designing and Programming Control Algorithms for DDC Systems. *Contr. Eng.*, vol. 24, n° 1 (janvier 1977), p. 24-26.
- [22] D. L. KLEINMAN et M. ATHANS — The Discrete Minimum Principle with Application to the Linear Regulator Problem. *Electron. Syst. Lab., MIT, Cambridge, Mass.*, Report ESL-R-260 (février 1966).
- [23] P. DORATO et A. H. LEVIS — Optimal Linear Regulators: the Discrete-Time Case. *IEEE Trans.*, vol. AC-16, n° 6 (décembre 1971), p. 613-620.
- [24] R. BELLMAN — *Dynamic Programming*. Princeton University Press (1957).
- [25] R. E. KALMAN — When is a Linear System Optimal? *Trans. ASME, J. of Basic Eng.*, Ser. D, 86 (1964), p. 51-60.
- [26] O. L. MERCIER — Propriétés structurelles des systèmes linéaires dynamiques. Application à la commande optimale et au filtrage. Note Technique ONERA n° 1977-4; ESA Technical Translation TT403 (juillet 1977).
- [27] A. V. BALAKRISHNAN — *Applied Functional Analysis*. Springer Verlag, New York (1976) (Chapitre 3).
- [28] P. FAURRE, M. CLERGET et F. GERMAIN — *Opérateurs rationnels positifs*. Dunod, Paris (1979).
- [29] O. L. MERCIER — Réalisation de régulateurs de poursuite améliorés pour le pilotage des avions à grande manœuvrabilité. *Proc.*, 35^e Symposium AGARD GCP. Advances in Guidance and Control Systems, Lisbonne, Portugal (12-15 octobre 1982); AGARD C.P. n° 321 (janvier 1983).
- [30] R. E. KALMAN, P. L. FALB et M. A. ARBIB — *Topics in Mathematical System Theory*. McGraw-Hill, New York (1969).
- [31] P. E. SARACHIK et K. KREINDLER — Controllability and Observability of Linear Discrete-Time Systems. *Int. J. Contr.* (mai 1965), p. 419-432.
- [32] J. C. WANNER — Dynamique du vol et pilotage des avions. ONERA, Publication n° 1983-1 (mars 1983).
- [33] L. A. ZADEH et C. A. DESOER — *Linear System Theory, The State Space Approach*. McGraw-Hill, New York (1963).
- [34] M. L. J. HAUTUS — Stabilization Controllability and Observability of Linear Autonomous Systems. *Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch.*, Amsterdam, Series A (Mathematics), vol. 73, n° 5 (1970), p. 448-455.
- [35] M. L. J. HAUTUS — Controllability and Observability Conditions of Linear Autonomous Systems. *Proc. Ned. Akad. v. Wetensch.*, Amsterdam, Series A (Mathematics), vol. 72, n° 5 (1969), p. 447-448.

- [36] M. L. J. HAUTUS — Controllability and Stabilizability of Sampled Systems. *IEEE Trans.*, vol. AC-17, n° 4 (août 1972), p. 528-531.
- [37] J. E. POTTER — Matrix Quadratic Solutions. *SIAM J. on Appl. Math.*, vol. 14, n° 3 (mai 1966), p. 496-501.
- [38] J. J. O'DONNELL — Asymptotic Solution of the Matrix Riccati Equation of Optimal Control. *Proc.*, 4^e Conf. on Circuit and System Theory, Univ. of Illinois, Monticello, Ill. (octobre 1966), p. 577-586.
- [39] D. R. VAUGHAN — Nonrecursive Algebraic Solution for the Discrete Riccati Equation. *IEEE Trans.*, vol. AC-15, n° 5 (octobre 1970), p. 597-599.
- [40] M. L. MICHELSEN — On the Eigenvalue-Eigenvector Method for Solution of the Stationary Discrete Matrix Riccati Equation. *IEEE Trans.*, vol. AC-24, n° 3 (juin 1979), p. 480-481.
- [41] G. J. GAALMAN — A Nonrecursive Algebraic Solution for the Discrete Riccati Equation. *IEEE Trans.*, vol. AC-25, n° 3 (juin 1980), p. 610-612.
- [42] R. V. PATEL, M. TODA et B. SRIDHAR — Robustness of Linear Quadratic State Feedback Designs in the Presence of System Uncertainty. *IEEE Trans.*, vol. AC-22, n° 6 (décembre 1977), p. 945-949.
- [43] R. V. PATEL et M. TODA — Quantitative Measures of Robustness for Multivariable Systems. *Proc. JACC*, vol. 2, TP8A, San Francisco, Californie (13-15 août 1980).
- [44] P. K. WONG et M. ATHANS — Closed-loop Structural Stability for Linear Quadratic Optimal Systems. *Proc. 1976 IEEE Conf. on Decision and Control* (décembre 1976), Clearwater, Floride, p. 1231-1239; *IEEE Trans.*, vol. AC-22, n° 1 (février 1977), p. 94-99.
- [45] P. K. WONG, G. STEIN et M. ATHANS — Structural Reliability and Robustness Properties of Optimal Linear-Quadratic Multivariable Regulators. *Proc.*, 7^e Congrès IFAC, Helsinki (1978), p. 1797-1805.
- [46] M. G. SAFONOV et M. ATHANS — Gain and Phase Margin for Multiloop LQG Regulators. *IEEE Trans.*, vol. AC-22, n° 2 (avril 1977), p. 173-179; *Proc.* (1976), IEEE Conf. on Decision and Control (décembre 1976), Clearwater, Floride, p. 361-368.
- [47] P. MOLANDER et J. C. WILLEMS — Synthesis of State Feedback Control Laws with a Specified Gain and Phase Margin. *IEEE Trans.*, vol. AC-25, n° 5 (octobre 1980), p. 928-931.
- [48] M. G. SAFONOV — *Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems*. MIT Press, Cambridge (mars 1980).
- [49] H. BOURLÈS — Sur la robustesse des régulateurs linéaires multivariables, optimaux pour une fonctionnelle de coût quadratique. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 292, Série I (juin 1981), p. 971-974.
- [50] H. BOURLÈS et O. L. MERCIER — Marge de stabilité et robustesse structurelle généralisée des régulateurs-linéaires quadratiques multivariables. *RAIRO/Automatique*, vol. 16, n° 1 (janvier 1982), p. 49-70.
- [51] O. L. MERCIER — Robustesse des régulateurs de pilotage multivariables à temps continu. Rapport Technique ONERA, n° 11/7224SY (août 1983) et RTS n° 12/7224SY (septembre 1983).
- [52] M. G. SAFONOV et M. ATHANS — On Stability Theory. *Proc.* (1978) IEEE Conf. on Decision and Control, San Diego, Cal. (janvier 1979), p. 301-314.
- [53] G. ZAMES — On the Input-Output Stability of Time Varying Nonlinear Feedback Systems Part I: Conditions Using Concepts of Loop Gain, Conicity and Positivity. *IEEE Trans.*, vol. AC-11, n° 2 (avril 1966), p. 228-238.
- [54] G. ZAMES — On the Input-Output Stability of Time Varying Nonlinear Feedback Systems Part II: Conditions Involving Circles in the Frequency Plane and Sector Nonlinearities. *IEEE Trans.*, vol. AC-11, n° 3 (juillet 1966), p. 465-476.
- [55] J. C. WILLEMS — *The Analysis of Feedback Systems*. MIT Press, Cambridge, Mass.
- [56] C. A. DESOER et M. VIDYASAGAR — *Feedback Systems: Input-Output Properties*. Academic Press, New York (1975).
- [57] R. E. KALMAN et J. E. BERTRAM — Control System Analysis and Design via the "Second Method" of Lyapounov: 1. Continuous-Time Systems. *Trans. of the ASME, J. of Basic Eng., Ser. D*, vol. 82 (juin 1960), p. 371-393.
- [58] R. E. KALMAN et J. E. BERTRAM — Control System Analysis and Design via the "Second Method" of Lyapounov: 2. Discrete-Time Systems. *Trans. of the ASME, J. of Basic Eng., Ser. D*, vol. 82 (juin 1960), p. 394-400.
- [59] J. C. HSU et A. U. MEYER — *Modern Control Principles and Applications*. McGraw-Hill, New York (1968).
- [60] S. RAMARAJAN et S. N. RAO — Absolute Stability of NLTV Discrete Systems. *IEEE Trans.*, vol. AC-17, n° 1 (février 1972), p. 139-141.
- [61] T. N. SHARMA et VIMAL SINGH — On the Absolute Stability of Multivariable Discrete-Time Nonlinear Systems. *IEEE Trans.*, vol. AC-26, n° 2 (avril 1981), p. 585-586.
- [62] P. BORNE — Contribution à l'étude des systèmes discrets non linéaires de grande dimension. Application aux systèmes interconnectés. Thèse de Docteur ès Sciences, Université des Sciences et Techniques de Lille (mars 1976).
- [63] I. W. SANDBERG — On the Response of Nonlinear Control Systems to Periodic Input Signals. *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 43 (mai 1964), p. 911-926.
- [64] I. W. SANDBERG — A Frequency-Domain Condition for the Stability of Feedback Systems Containing a Single Time-Varying Nonlinear Element. *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 43 (juillet 1964), p. 1601-1608.
- [65] I. W. SANDBERG — On the L_2 -boundedness of Solutions of Nonlinear Functional Equations. *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 43 (juillet 1964), p. 1581-1599.
- [66] I. W. SANDBERG — Some Results on the Theory of Physical Systems Governed by Nonlinear Functional Equations. *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 44 (mai 1965), p. 871-898.
- [67] G. ZAMES — Realizability Conditions for Nonlinear Feedback Systems. *IEEE Trans.*, vol. CT-11 (juin 1964), p. 186-194.
- [68] G. ZAMES — On the Stability of Nonlinear, Time-Varying Feedback Systems. *Proc. NEC*, vol. 20 (octobre 1964), p. 725-730.
- [69] J. C. WILLEMS — Some Results on the L_p -Stability of Linear Time-Varying Systems. *Proc.*, 10^e Joint Autom. Control Conf., Univ. of Colorado, Boulder, Col. (août 1969), p. 913-917.
- [70] G. ZAMES — Nonlinear Time Varying Feedback Systems. Conditions for L_∞ Boundedness Derived Using Conic Operators on Exponentially Weighted Spaces. *Proc.* (1965), Allerton Conf. on Circuit Theory, Monticello, Ill., p. 460-471.
- [71] E. I. JURY — *Theory and Application of the z-Transform Method*. Wiley, New York (1964).
- [72] M. VIDYASAGAR — *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1978).
- [73] J. C. WILLEMS — The Generation of Lyapounov Functions for Input-Output Stable Systems. *SIAM J. on Control*, vol. 9, n° 1 (février 1971), p. 105-134.
- [74] D. J. HILL et P. J. MOYLAN — Connections between Finite Gain and Asymptotic Stability. *IEEE Trans.*, vol. AC-25, n° 5 (octobre 1980), p. 931-936.

- [75] B. D. O. ANDERSON — External and Internal Stability of Linear Systems. A New Connection. *IEEE Trans.*, vol. AC-17, n° 1 (février 1972), p. 107-111.
- [76] M. BENREJEB, P. E. BORNE et F. LAURENT — Sur une application de la représentation en flèche à l'analyse des processus. *RAIRO/Automatique*, vol. 16, n° 2 (1982), p. 133-146.
- [77] G. F. FRANKLIN et J. D. POWELL — *Digital Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley (1980).
- [78] R. PENROSE — A Generalized Inverse for Matrices. *Proc. of the Cambridge Phil. Soc.*, vol. 51, part. 3 (juillet 1955), p. 406-413.
- [79] F. R. GANTMACHER — *Théorie des matrices*. Dunod, Paris (1966).
- [80] O. L. MERCIER, Y. JOANNIC et O. MOREIGNE — Mise au point interactive des régulateurs linéaires quadratiques par action directe et sélective sur les pôles du système contrôlé. *Proc.*, 1^{er} Symp. d'Informatique Appliquée de l'IASTED, Lille (15-17 mars 1983), vol. II, p. 201-206.
- [81] L. SCHWARTZ — *Théorie des distributions*. Hermann, Paris (1973), p. 160.
- [82] A. J. LAUB — Computational Aspects of the Singular Value Decomposition and Some Applications. *Proc.*, 16^e Allerton Conf. on Commun., Cont. & Computing, Monticello, Ill. (4-6 octobre 1978), p. 432-442.
- [83] V. C. KLEMA et A. J. LAUB — The Singular Value Decomposition: Its Computation and Some Applications. *IEEE Trans.*, vol. AC-25, n° 2 (avril 1980), p. 164-176.
- [84] G. E. FORSYTHE, M. A. MALCOLM et C. B. MOLER — *Computer Methods for Mathematical Computations*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1977).
- [85] J. C. DOYLE — Robustness of Multiloop Linear Feedback Systems. *Proc.* (1978), 17^e IEEE Conf. on Decision and Control, San Diego, California (janvier 1979), p. 12-17.
- [86] B. S. GARROW, J. M. BOYLE, J. J. DONGARA et C. B. MOLER — *Matrix Eigensystem Routines-EISPACK—Guide Extension*. Lecture Notes in Computer Science, vol. 51, Springer Verlag, Berlin (1977), p. 265-275.
- [87] G. H. GOLUB et C. REINSCH — Singular Value Decomposition and Least Squares Solutions. *Numer. Math.*, vol. 14 (1970), p. 403-420.
- [88] G. H. GOLUB et KAHAN — Calculating the Singular Values and Pseudo-Inverse of a Matrix. *SIAM J. on Numer. Anal.*, Ser. B, vol. 2, n° 2 (1965), p. 205-224.
- [89] J. H. WILKINSON — *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Oxford Univ. Press, London (1965).
- [90] H. BÜHLER — *Réglages échantillonnés. Traitement par la transformation en z*. vol. 1, Presses polytechniques romandes, Lausanne (1982).
- [91] R. ISERMANN — *Digital Control Systems*. Springer Verlag, Berlin (1981).
- [92] R. F. WHITBECK et L. G. HOFMANN — Digital Control Law Synthesis in the w Domain. *J. of Guidance and Control*, vol. 1, n° 5 (septembre-octobre 1978), p. 319-326.
- [93] R. F. WHITBECK et L. G. HOFMANN — Analysis of Digital Flight Control Systems with Flying Qualities Applications. Rapport technique AFFDL-TR-78-115, vol. 1 & 2, Systems Technology, INC., Hawthorne, Cal. (septembre 1978).
- [94] G. J. GREAVES, G. A. GAGNE et G. W. BORDNER — Evaluation of Integrals Appearing in Minimization Problems of Discrete-Data Systems. *IEEE Trans.*, vol. AC-11 (janvier 1966), p. 145-148.
- [95] E. I. JURY et O. W. C. CHAN — Combinatorial Rules for Some Useful Transformations. *IEEE Trans.*, vol. CT-20, n° 5 (septembre 1973), p. 476-480.
- [96] H. W. BODE — *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. Van Nostrand, New York (1945).
- [97] A. VINKLER et L. J. WOOD — A Comparison of Several Techniques for Designing Controllers of Uncertain Dynamic Systems. *Proc.* (1978), Decision and Control Conf., San Diego, Cal. (Janvier 1979), p. 31-38.
- [98] A. VINKLER et L. J. WOOD — Multistep Guaranteed Cost Control of Linear Systems with Uncertain Parameters. *J. Guidance and Control*, vol. 2, n° 6 (novembre-décembre 1979), p. 449-456.
- [99] J. J. DEYST, Jr., J. V. HARRISON, E. GAI et K. C. DALY — Fault Detection Identification and Reconfiguration for Spacecraft Systems. *J. of the Astron. Sciences*, vol. 29, n° 2 (avril-juin 1981), p. 113-126.
- [100] J. M. CORNEY — The Development of Multiple Redundant Flight Control Systems for High Integrity Applications. *Aeronautical J.*, vol. 84, n° 837 (octobre 1980), p. 327-338.
- [101] J. B. CRUZ et W. R. PERKINS — A New Approach to the Sensivity Problem in Multivariable Feedback System Design. *IEEE Trans.*, vol. AC-9 (juillet 1964), p. 216-223.
- [102] E. KREINDLER — Closed-Loop Sensitivity Reduction of Linear Optimal Control Systems. *IEEE Trans.*, vol. AC-13, n° 3 (juin 1968), p. 254-262.
- [103] E. J. DAVISON — The Output Control of Linear Time-Invariant Multivariable Systems with Unmeasurable Arbitrary Disturbances. *Proc.*, Joint Autom. Control Conf., Stanford, Cal. (août 1972); *IEEE Trans.*, vol. AC-17, n° 5 (octobre 1972), p. 621-630.
- [104] E. J. DAVISON — The Feedforward Control of Linear Multivariable Time-Invariant Systems. *Automatica*, vol. 9, n° 5 (septembre 1973), p. 561-573.
- [105] M. G. SAFONOV et M. ATHANS — A Multiloop Generalization of the Circle Criterion for Stability Margin Analysis. *IEEE Trans.*, vol. AC-26, n° 2 (avril 1981), p. 415-422.
- [106] G. STEIN et J. C. DOYLE — Singular Values and Feedback: Design Examples. *Proc.* 16^e Allerton Conf. on Comm., Control and Computing, Monticello, Ill. (octobre 1978), p. 461-470.
- [107] N. R. SANDELL, Jr. — Robust Stability of Multivariable Feedback Systems. *Proc.* 16^e Allerton Conf. on Comm., Control and Computing, Monticello, Ill. (octobre 1978), p. 471-479.
- [108] J. C. DOYLE et G. STEIN — Multivariable Feedback Design: Concepts for Classical/Modern Synthesis. *IEEE Trans.*, vol. AC-26, n° 1 (février 1981), p. 4-16.
- [109] J. C. DOYLE — Multivariable Design Techniques Based on Singular Value Generalization of Classical Control. *Multivariable Analysis and Design Techniques*, AGARD Lectures Series, n° 117 (septembre 1981), p. 3-1 à 3-15.
- [110] G. STEIN — LQG-Based Multivariable Design: Frequency Domain Interpretation. *Multivariable Analysis and Design Techniques*, AGARD Lectures Series n° 117 (septembre 1981), p. 5-1 à 5-9.
- [111] I. POSTLETHWAITE et A. G. J. MACFARLANE — *A Complex Variable Approach to the Analysis of Linear Multivariable Feedback Systems*. Springer Verlag, Berlin (1979).

- [112] I. POSTLETHWAITE, J. M. EDMUNDS et A. G. J. MACFARLANE — Principal Gains and Principal Phases in the Analysis of Linear Multivariable Feedback Systems. *Proc.*, 1980 JACC, San Francisco, Cal. (août 1980); *IEEE Trans.*, vol. AC-26, n° 1 (février 1981), p. 32-46.
- [113] B. DANG VU et O. L. MERCIER — Sur une loi de commande non linéaire pour le pilotage des avions en phase d'attaque au sol. 36^e Symp. AGARD « Integration of Fire Control, Flight Control and Propulsion Control Systems », Toulouse (mai 1983); AGARD CP n° 349.
- [114] Y. JOANNIC et O. L. MERCIER — Quantification de la robustesse des systèmes non linéaires à commande échantillonnée et à perturbations dynamiques. *La Recherche Aérospatiale*, 1983, n° 6 (novembre-décembre).
- [115] Y. JOANNIC, O. L. MERCIER et P. BORNE — Robustesse des régulateurs linéaires et non linéaires multivariables dans le domaine temporel discret. Soumis pour publication au RAIRO, série Automatique.
- [116] P. HIPPE et C. WURMTHALER — Design of State Controllers Using an Interactive Optimization Program. *Proc.*, 1^{er} Symp. d'Informatique Appliquée de l'IASTED, Lille (15-17 mars 1983), vol. III, p. 59-62.
- [117] O. L. MERCIER — Gradients et sensibilités associés aux problèmes de commande linéaires-quadratiques-gaussiens. Rapport Technique ONERA n° 1/3534SN (novembre 1982).
- [118] S. S. BANDA, Lt D. B. RIDGELY, H-H YEH et Capt D. V. PALMER — Design and Robustness Analysis of Reduced Order Controllers for Large Flexible Space Vehicles. *Proc.* 37^e Symp. AGARD GCP, Guidance and Control Tech. for Advanced Space Vehicles, Florence (27-30 septembre 1983).



**LA ROBUSTESSE DES SYSTÈMES DYNAMIQUES A TEMPS DISCRET
APPLICATION AU PILOTAGE NUMÉRIQUE MULTIVARIABLE
DES AVIONS D'ARMES**

par

Yves JOANNIC

RÉSUMÉ

Cette thèse a pour objet de quantifier les systèmes de commande discrets (échantillonnés) multivariables du point de vue de leur robustesse et de proposer des moyens d'accroître cette propriété. Le problème est traité de trois manières qui se complètent et se renforcent mutuellement.

En premier lieu, une forme de loi de commande de poursuite intrinsèquement robuste vis-à-vis de perturbations additives constantes est proposée. Une démarche rationnelle permettant de calculer des lois optimales par rapport à une fonction de coût quadratique est proposée. Une application au pilotage numérique d'un avion de combat constitue la motivation de ce travail et fournit en même temps une application réaliste puisqu'une loi de commande à deux niveaux est développée, le premier servant de modèle de référence et le second réalisant l'asservissement proprement dit du mouvement non linéaire perturbé de l'avion.

En second lieu, des résultats permettant de quantifier la « robustesse structurelle généralisée » d'un système non linéaire récurrent à retour multivariable sont présentés. Ils sont rendus possibles par une formulation opérationnelle originale de la dynamique du processus.

Une généralisation du critère de Lyapounov aux systèmes munis d'un retour dynamique, décrits par un opérateur linéaire de convolution, a permis d'étendre et de généraliser au cas discret *multivariable* les notions classiques de marge de stabilité, de marge de gain et de marge de phase. Des expressions analytiques sont présentées, permettant la quantification de ces marges dans le cas où des perturbations dynamiques ou non linéaires affectent les chaînes de retour. Dans le cas particulier des régulateurs linéaires-quadratiques, ces marges ont été reliées aux matrices de pondération de la fonction de coût; elles peuvent donc faire l'objet d'une optimisation, prenant éventuellement en compte la structure algébrique des perturbations multiplicatives attendues.

Enfin, par application de théorèmes concernant la stabilité externe (entrées-sorties) d'un système récurrent, les perturbations additives tolérables (erreurs de modèle et de linéarisation, perturbations extérieures non constantes), ne déstabilisant pas le système contrôlé, sont quantifiées.

Ces différents aspects de la robustesse se trouvent unifiés dans l'exposé d'une méthodologie originale permettant la mise au point d'une régulation multivariable robuste, en présence d'éléments dynamiques (actionneurs et capteurs) non modélisés dans la chaîne de retour. Ces nouveaux outils sont appliqués au problème du pilotage d'un avion. L'exploitation numérique s'appuie sur des algorithmes performants, également exposés dans cette thèse, et qui se rapportent au « domaine fréquentiel discret » (transformées en z, w, w').

Mots clés (lexique CEDOCAR) : Théorie commande optimale – Commande avion – Régulateur – Stabilité avion – Échantillonnage – Robustesse – Pilotage.