

50376
1983
47

50376
1983
47

THÈSE

PRÉSENTÉE A

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

PAR

SABEKO MARCEL BONKIAN

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES MESURES ALÉATOIRES
DU SECOND ORDRE



MEMBRES DU JURY : D. BOSQ, PRÉSIDENT

P. JACOB, RAPPORTEUR

J. DELPORTE, EXAMINATEUR

SOUTENUE LE 19 OCTOBRE 1983

Monsieur le Professeur Denis BOSQ me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse ; je tiens à le remercier très vivement ; en cette occasion mémorable, je lui témoigne ma profonde reconnaissance pour la grande contribution qu'il a apportée à ma formation tant en Maîtrise qu'au D.E.A..

Monsieur le Professeur Pierre JACOB a bien voulu m'initier à la recherche. Au moment où je me trouvais à des milliers de kilomètres d'ici, il n'a cessé de me donner des idées sur le sujet, à m'encourager ; bref à me maintenir dans le monde de la recherche. Il est certainement à l'origine de mon séjour qui aboutit à la soutenance de cette thèse, par son appui constant, tant au niveau moral que scientifique ; enfin, il m'a fait preuve d'une grande patience, sous tendue par un esprit de compréhension loin de la complaisance. Pour tout cela, qu'il me soit permis de lui dire ma profonde gratitude.

Monsieur le Professeur Jean DELPORTE a bien voulu accepter de juger ce travail ; qu'il en soit vivement remercié.

Qu'il me soit permis de rappeler ici la mémoire de mon professeur de D.E.A., Monsieur Christian GUILBART qui malheureusement nous a quitté prématurément.

C'est de façon très consciencieuse, avec diligence et beaucoup de patience que Arlette Lengaigne a dactylographié le texte de cette thèse ; qu'il me soit permis de la remercier chaleureusement, ainsi que tous ceux qui ont participé à la réalisation matérielle de ce travail.

P L A N.

	Pages
<u>INTRODUCTION.</u>	I
<u>NOTATIONS USUELLES.</u>	1
<u>CHAPITRE I - TOPOLOGIES SUR M_b^+ ET SUR M^+ : RAPPELS.</u>	3
<u>CHAPITRE II - TOPOLOGIE FAIBLE A DISTANCE FINIE SUR M ET TOPOLOGIE FAIBLE SUR M_b.</u>	8
<u>CHAPITRE III - MESURES SUR L'ESPACE PRODUIT $X \times X$.</u>	18
A - Préliminaires.	18
B - Classes déterminantes, C-déterminantes et $\bar{C}$ -déterminantes sur M^2 .	20
<u>CHAPITRE IV - CONVERGENCE EN MOYENNE QUADRATIQUE DE MESURES ALEATOIRES D'ORDRE DEUX.</u>	40
A - Préliminaires à l'étude de la convergence en moyenne quadratique.	40
B - Etude de la convergence en moyenne quadratique de mesures aléatoires d'ordre 2.	48
C - Introduction à l'étude de mesures aléatoires évolutives du second ordre.	82
Exemple 1 : migration d'étourneaux.	87
Exemple 2 : processus de lignes.	88
Exemple 3 : théorème ergodique.	89
<u>BIBLIOGRAPHIE.</u>	91

A N N E X E.

REPRESENTATIONS CONTINUES DE MESURES PAR DES PROCESSUS PONCTUELS DE POISSON.

I - PRELIMINAIRES.	11-01
II - REPRESENTATIONS CONTINUES DE MESURES.	11-04
BIBLIOGRAPHIE.	11-23

I N T R O D U C T I O N .

Le travail présenté dans cette thèse comporte deux parties toutes deux consacrées aux mesures aléatoires mais différentes quant à leur sujet.

La plus ancienne de ces parties a déjà fait l'objet d'une publication dans la revue de l'I.R.M.A. de Lille (Vol. 4, Fasc. 1, 1982), et est rejetée en annexe. Indiquons brièvement qu'il s'agit d'une étude qui se situe dans la lignée des théorèmes de représentation dûs à A.V. SKOROKHOD ([30], [31]), J. GEFFROY et O. JOUANDET [32], R.M. DUDLEY [33], et P. JACOB ([3], [36]). A une famille donnée Γ de mesures boréliennes positives sur un espace métrique séparable, nous associons un processus $\{f_\mu^\bullet ; \mu \in M\}$ tel que, pour tout élément $\mu \in \Gamma$, $f_\mu^\bullet$ est un processus ponctuel de Poisson de mesure moyenne μ . La construction est faite de façon que $\{f_\mu^\bullet ; \mu \in M\}$ présente des propriétés de continuité lorsque M est muni de la topologie "faible à distance finie". Une telle représentation est un outil très efficace lorsqu'il s'agit d'établir certains résultats de convergence (par exemple [1] ; [2] ; [37]).

La partie principale, plus récente, expose des résultats obtenus plus récemment, avec le concours de P. JACOB, sur les mesures aléatoires du second ordre. Il s'agit là d'objets mathématiques dont l'étude remonte aux travaux de K. KRICKEBERG [10], D. VERE-JONES [11] où la notion de moment d'une mesure aléatoire est notamment introduite.

On connaît par ailleurs les travaux de J. GEFFROY, H. ZEBoulON, P. QUIDEL sur les convergences stochastiques de mesures aléatoires et de processus ponctuels ([1] ; [2] ; [9]) et leurs développements. Cependant il manquait jusqu'ici une étude de la convergence en moyenne quadratique

des mesures aléatoires du second ordre ; c'est cette lacune que nous avons essayé de combler ici, en utilisant la notion de moment : la convergence en moyenne quadratique d'une suite de mesures aléatoires du second ordre $(\mu_n^\bullet)$ vers une mesure aléatoire du second ordre $\mu^\bullet$ est caractérisée par la convergence faible à distance finie de la suite de moments $E\{(\mu_n^\bullet - \mu^\bullet) \otimes (\mu_n^\bullet - \mu^\bullet)\}$. Une telle étude a, à notre connaissance été négligée jusqu'ici par les auteurs travaillant sur les mesures aléatoires du second ordre. Il s'agit en effet, dans leur optique, de généraliser les processus du second ordre : par voie de conséquence, l'espace où se réalisent les mesures aléatoires est un espace des temps plus ou moins général ($\mathbb{R}$ ou un groupe localement compact) permettant des travaux sur la stationnarité temporelle. Pour nous, les mesures aléatoires du second ordre se réalisent sur un espace où elles présentent des propriétés spécifiquement spatiales, et évoluent par ailleurs en fonction du temps : il s'agit donc, à proprement parler, de processus "à valeurs mesures", que nous appellerons mesures aléatoires évolutives du second ordre ; les exemples intuitifs ne manquent pas, que l'on considère les nuages se déformant dans le ciel, les migrations d'oiseaux ou l'envahissement d'une pelouse par la mousse ...

Mais c'est sans doute vers la mécanique statistique qu'il faudra chercher les principales applications.

Pour le moment, il va sans dire que nous sommes loin d'avoir réalisé ce vaste programme ; la simple étude des propriétés de la notion de convergence en moyenne quadratique des mesures aléatoires nous a en effet contraint à compléter ce que l'on sait déjà de la convergence faible à distance finie des mesures positives et qui fait l'objet du premier chapitre.

Dans le second chapitre, nous étendons des résultats de compacité faible à distance finie aux mesures à signe.

Dans le troisième chapitre, nous étudions les mesures sur les espaces produits, et plus spécialement les classes fonctionnelles qui déterminent la convergence faible sur ces espaces.

Dans le quatrième chapitre, nous abordons enfin la convergence en moyenne quadratique des mesures aléatoires ; les résultats principaux sont :

- un théorème de caractérisation de cette convergence pour les mesures aléatoires positives,

- un théorème de complétude essentiel pour les applications.

Nous généralisons ensuite ces propriétés aux mesures aléatoires à signe et nous terminons par une introduction à l'étude des mesures aléatoires évolutives du second ordre.

NOTATIONS USUELLES.

Notre intention n'est pas de consigner ici toutes les notations que nous serons amenés à utiliser. Nous voulons tout simplement préciser certaines d'entre elles, qui seront systématiques.

(X,d) désigne toujours un espace métrique séparable.

Pour toute partie A de X , on note :

∂A : la frontière de A .

A^c : le complémentaire de A .

A^ε : le dilaté de A à ε près, $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$:

$A^\varepsilon = \{x \in X : d(x,A) < \varepsilon\}$.

$\bar{A}$: l'adhérence de A : $\bar{A} = \{x \in X : d(x,A) = 0\}$.

On désigne par $\mathcal{B}$ la tribu borélienne de X et par $\mathcal{B}_b$ l'anneau des boréliens bornés de X .

$\mathcal{C}$ désigne l'ensemble des fonctions numériques continues et bornées sur X .

$\mathcal{C}_b$ désigne le sous-ensemble de $\mathcal{C}$, constitué par les éléments de $\mathcal{C}$ qui sont à support borné sur X .

$\mathcal{C}^+$ (resp. $\mathcal{C}_b^+$) désigne le sous-ensemble des éléments positifs de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}_b$).

M_b désigne l'espace vectoriel des mesures à signe bornées sur $(X,\mathcal{B})$.

M_b^+ est le sous-ensemble constitué des éléments positifs de M_b .

M^+ désigne l'espace des mesures positives, finies sur $\mathcal{B}_b$.

M désigne l'espace des "mesures à distance finie", appelées simplement mesures dans ce qui suit ; il s'agit des fonctions d'ensemble λ définies sur $\mathcal{B}_b$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, σ -additives sur $\mathcal{B}_b$, telles que $\lambda(\emptyset) = 0$. D'après [14], tout élément λ de M possède une décomposition minimale unique sous la forme $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ avec $\lambda^+ \in M^+$ et $\lambda^- \in M^+$; cette décomposition déduite de la décomposition classique de Hahn Jordan des mesures bornées, portera simplement dans ce qui suit, le nom de décomposition de Hahn-Jordan.

X^2 est le produit cartésien $X \times X$, qu'on munit de la métrique $d^2 = \max(d, d)$.

On adopte, pour simplifier des notations semblables à celles données pour X . Ainsi :

$\mathcal{B}^2$ désigne la tribu borélienne de X^2 .

$\mathcal{B}_b^2$ désigne l'anneau des boréliens bornés de X^2 .

M^2 désigne l'ensemble des mesures sur X^2 .

M_b^2 désigne l'ensemble des mesures bornées sur X^2 .

C^2 désigne l'ensemble des fonctions numériques continues, bornées sur X^2 .

C_b^2 désigne le sous-ensemble constitué des éléments à support borné de C^2 .

CHAPITRE I

TOPOLOGIES SUR M_b^+ ET SUR M^+ : RAPPELS .

Dans cette partie, nous donnons la définition de la convergence faible sur M_b^+ et celle de la convergence faible à distance finie sur M^+ . Nous rappelons quelques résultats somme toute classiques sur M_b^+ et M^+ dont le but est de saisir les liens immédiats entre topologie faible et topologie faible à distance finie ; ensuite, ces résultats sont susceptibles d'être utilisés dans la suite du travail.

Définition 1.1. - Une suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de M_b^+ converge faiblement vers μ si et seulement si, pour toute fonction $h \in C$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X h \, d\mu_n = \int_X h \, d\mu .$$

Cette convergence est notée : $\mu_n \rightrightarrows \mu$.

Théorème 1.1 d'Alexandrov ou théorème du porte-manteau :

Soit (μ_n) une suite d'éléments de M_b^+ ; les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $\mu_n \rightrightarrows \mu$.
- ii) $\forall h$, fonction numérique uniformément continue sur X , bornée :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X h \, d\mu_n = \int_X h \, d\mu .$$

- iii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(X) = \mu(X)$, et pour tout fermé F de X :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(F) \leq \mu(F) .$$

iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(X) = \mu(X)$ et, pour tout ouvert O de X :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(O) \geq \mu(O) .$$

v) Pour tout borélien A tel que $\mu(\partial A) = 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \mu(A)$$

Cette notion de convergence faible sur M_b^+ est en fait la convergence des suites dans l'espace métrique (M_b^+, ρ_p) , où ρ_p est la distance de Prokhorov définie par :

$$\forall (\mu, \nu) \in M_b^+ \times M_b^+ : \rho(\mu, \nu) = \inf \{ \varepsilon > 0 : \mu(F) \leq \nu(F^\varepsilon) + \varepsilon ; \nu(F) \leq \mu(F^\varepsilon) + \varepsilon ; \\ F \text{ fermé de } X \} .$$

La topologie induite par ρ_p sur M_b^+ est la topologie faible.

Théorème I.2. - L'espace (M_b^+, ρ_p) est un espace métrique séparable.

Théorème I.3. - L'espace (M_b^+, ρ_p) est un espace métrique complet si et seulement si (X, d) est un espace métrique complet.

Théorème I.4. (Prokhorov). - On suppose que (X, d) est polonais. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie M de M_b^+ soit relativement compacte est que :

- i) $\sup \{ \mu(X) ; \mu \in M \} < + \infty$
- ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_\varepsilon \subset X$ tel que :

$$\sup \{ \mu(X - K_\varepsilon) ; \mu \in M \} < \varepsilon .$$

Remarque : Cette condition n'est plus nécessaire quand (X, d) n'est pas complet, mais elle reste suffisante.

Définition 1.2. - On dira qu'une suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de M^+ converge faiblement à distance finie vers μ si et seulement si, pour toute fonction $h \in C_b$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X h d\mu_n = \int_X h d\mu$$

Cette notion de convergence faible à distance finie sur M^+ est en fait la convergence des suites dans l'espace métrique (M^+, ρ) , où ρ est la distance de Geffroy définie ci-dessous :

Définition 1.3. - Fixons un point arbitraire 0 dans X , pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, soit $B(0, r)$ la boule de centre 0 et de rayon r ; posons :

$$\forall (\mu, \nu) \in M^{+2} \quad \sigma_r(\mu, \nu) = \inf \{ \varepsilon > 0 : \mu(A) \leq \nu(A^\varepsilon) + \varepsilon ; A \in \mathcal{B} ; A^\varepsilon \subset B(0, r) \}$$

et

$$\forall (\mu, \nu) \in M^{+2} \quad \rho_r(\mu, \nu) = \max \{ \sigma_r(\mu, \nu) , \sigma_r(\nu, \mu) \} .$$

La famille $(\rho_r)_{r \in \mathbb{R}^+}$ est une famille croissante de semi-distances induisant la topologie faible à distance finie ; il existe une métrique uniformément équivalente à $(\rho_r)_{r \in \mathbb{R}^+}$; la plus "naturelle" est sans doute :

$$\rho = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\rho_r}{2^r (1 + \rho_r)}$$

ρ s'appelle la métrique de Geffroy ou métrique de la convergence faible à distance finie, dont l'emploi donne une réelle aisance technique dans l'étude de certaines questions relatives aux mesures aléatoires et aux processus ponctuels. Pour des détails, on s'adressera à [1] et [2].

Remarque : Si on change d'origine (prenons $0' \in X$ par exemple), on obtient une métrique ρ' uniformément équivalente à ρ : de façon plus précise :

$$2^{-k} \leq \frac{\rho}{\rho'} \leq 2^k$$

où k est le plus petit entier tel que $k \geq d(0, 0')$ voir [2].

Théorème I.5.- Soit $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de M^+ et $\mu \in M^+$: les propositions suivantes sont équivalentes :

i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(\mu_n, \mu) = 0$

ii) $\forall h \in C_b, \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X h d\mu_n = \int_X h d\mu$

iii) Pour tout $A \in \mathcal{B}_b : \mu(\partial A) = 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$$

iv) Pour tout borélien fermé borné F de X :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$$

et pour tout ouvert borné O de X :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(O) \geq \mu(O) .$$

Pour une reconstitution de la démonstration de ce théorème nous renvoyons à [2] et [3].

Le théorème I.5. est un théorème du "porte-manteau" sur (M^+, ρ) , assez pratique pour caractériser la convergence faible à distance finie à l'aide de ρ .

Le rapprochement des théorèmes I.5. et I.1. met à nu la similitude entre la topologie faible à distance finie et la topologie faible. On remarque alors que si (X, d) est borné, les deux notions coïncident car $C_b = C$ et tous les boréliens sont bornés.

Théorème I.6.- [2] . Comme (X, d) est un espace métrique séparable, (M^+, ρ) est un espace métrique séparable.

Théorème I.7.- [4] . Si (X,d) est complet, alors (M^+, ρ) est complet.

Les théorèmes I.2. et I.6. puis I.3. et I.7. montrent que les topologies faible sur M_b^+ et faible à distance finie sur M^+ , tiennent leurs propriétés de la topologie de X .

CHAPITRE II

TOPOLOGIE FAIBLE A DISTANCE FINIE SUR M ET TOPOLOGIE FAIBLE SUR M_b .

Par analogie avec la topologie faible sur M_b^+ , la topologie faible sur M_b est la topologie dont une base de voisinages de tout $\mu \in M_b$ est donnée par les ensembles de la forme :

$$V_{(\mu, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, f_1, \dots, f_k)} = \{v \in M_b : |\int_X f_i d\mu - \int_X f_i dv| < \varepsilon_i, i = 1, \dots, k\}$$

où $\varepsilon_i \in \mathbb{R}^+$, $f_i \in \mathcal{C}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

De même, la topologie de la convergence faible à distance finie sur M est la topologie dont une base de voisinages de tout $\mu \in M$ est constituée par les ensembles de la forme :

$$V_{(\mu, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, f_1, \dots, f_k)} = \{v \in M : |\int_X f_i d\mu - \int_X f_i dv| < \varepsilon_i, i = 1, \dots, k\}$$

où $\varepsilon_i \in \mathbb{R}^+$, $f_i \in \mathcal{C}_b$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Nous allons préciser les liens entre ces deux topologies ; la première étant plus classique que la seconde, il nous sera possible de déduire des résultats concernant la deuxième de résultats connus pour la première. Pour ce faire, nous reprenons une idée de K. MATTHES ; J. KERSTAN ; J. MECKE dans [5] p. 162.

Pour tout élément f de $\mathcal{C}_b$, on définit une application $\Psi_f :$

$$\begin{aligned} \Psi_f : M &\longrightarrow M_b \\ \mu &\longrightarrow \Psi_f(\mu) = \mu_f \end{aligned}$$

où , $\forall A \in \mathcal{B}$:

$$\mu_f(A) = \int_A f \, d\mu = \int_A f \, d\mu^+ - \int_A f \, d\mu^-$$

$\mu^+ - \mu^-$ étant une décomposition analogue à celle de Hahn - Jordan ;

μ^+ et μ^- appartiennent à M^+ , voir [6] ou [7].

μ_f est ainsi la mesure de densité f par rapport à la mesure μ .

Pour toute fonction $f \in C_b$, si on pose :

$$f^+ = f \cdot 1_{\{f \geq 0\}} \quad \text{et} \quad f^- = -f \cdot 1_{\{f < 0\}}$$

on obtient une expression de la variation totale de μ_f :

$$|\mu_f|(X) = \int_X f^+ \, d\mu^+ + \int_X f^- \, d\mu^+ + \int_X f^- \, d\mu^- + \int_X f^+ \, d\mu^- = \int_X |f| \, d|\mu| < +\infty$$

Nous nous intéressons au lien existant entre la topologie de la convergence faible à distance finie et la topologie induite par les fonctions $\{\psi_f, f \in C_b\}$ quand M_b est muni de la topologie faible. Ceci fait l'objet du résultat suivant qui généralise [5 p. 159].

Théorème 11.1. - La topologie de la convergence faible à distance finie sur M est la topologie initiale définie par $\{\psi_f; f \in C_b\}$.

Démonstration : Notons

T_2 cette topologie initiale sur M .

T la topologie de la convergence faible sur M_b .

T_1 la topologie de la convergence faible à distance finie sur M .

Pour μ fixé dans M , nous montrons que tout T_2 -voisinage de μ est un T_1 -voisinage de μ et réciproquement.

a) Une base de voisinages de T_2 est constituée par les ensembles de la forme :

$$W_{\mu, f_i, v_i, i \in I}^2 = \bigcap_{i \in I} \Psi_{f_i}^{-1}(v_i)$$

où I est un ensemble fini d'indices, $f_i \in C_b$, v_i un voisinage de $\Psi_{f_i}(\mu) = \mu_{f_i}$ dans M_b au sens de la topologie T , $\forall i \in I$.

Etant donné la forme des voisinages v_i , ces ensembles peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} W_{\mu, f_k, v_k, k \in K}^2 &= \bigcap_{k \in K} \Psi_{f_k}^{-1} \left\{ \nu \in M_b : \left| \int g_k d\nu - \int g_k d\mu_{f_k} \right| < \epsilon_k \right\} \\ &= \bigcap_{k \in K} \left\{ \gamma \in M : \left| \int g_k d\gamma_{f_k} - \int g_k d\mu_{f_k} \right| < \epsilon_k \right\} \\ &= \bigcap_{k \in K} \left\{ \gamma \in M : \left| \int g_k f_k d\gamma - \int g_k f_k d\mu \right| < \epsilon_k \right\} \end{aligned}$$

où K est un ensemble fini d'indices et, pour tout $k \in K$, g_k est un élément de C ; mais alors, pour tout $k \in K$, $g_k \cdot f_k \in C_b$; donc tout T_2 -voisinage de μ est un T_1 -voisinage de μ .

b) Réciproquement, considérons un T_1 -voisinage de μ :

$$W_{\mu, \epsilon_k, f_k, k \in K}^1 = \bigcap_{k \in K} \left\{ \gamma \in M : \left| \int f_k d\mu - \int f_k d\gamma \right| < \epsilon_k \right\} \quad \text{avec } K \text{ fini.}$$

Pour tout $k \in K$, soit g_k un élément de C_b défini ainsi qu'il suit :

$$\begin{cases} g_k(x) = 1 & \text{si } x \in S_{f_k} = \{\overline{f \neq 0}\} \\ g_k(x) = 0 & \text{si } x \in \{y \in X : d(y, S_{f_k}) \geq 1\} \end{cases}$$

g_k est une fonction uniformément continue et à valeurs dans $[0,1]$. Alors

$$\begin{aligned} W_{\mu, \varepsilon_k, f_k, k \in K}^1 &= \bigcap_{k \in K} \left\{ \gamma \in M : \left| \int f_k g_k d\mu - \int f_k g_k d\gamma \right| < \varepsilon_k \right\} \\ &= \bigcap_{k \in K} \left\{ \gamma \in M : \left| \int f_k d\mu_{g_k} - \int f_k d\gamma_{g_k} \right| < \varepsilon_k \right\} \\ &= \bigcap_{k \in K} \psi_{g_k}^{-1} \left\{ \nu \in M_b : \left| \int f_k d\mu_{g_k} - \int f_k d\nu \right| < \varepsilon_k \right\} \end{aligned}$$

Par conséquent, tout T_1 -voisinage de μ est un T_2 -voisinage de μ . ■

Théorème II.2. - Une partie A de M est relativement compacte si et seulement si, pour toute fonction $f \in C_b$, $\psi_f(A)$ est relativement compact dans M_b .

Démonstration :

1) d'après le théorème II.1., la topologie de la convergence faible à distance finie sur M est la topologie la moins fine rendant continues les applications $\{\psi_f, f \in C_b\}$.

Soit $A \subset M$ une partie de M relativement compacte au sens de cette topologie. Pour tout élément f de C_b , $\psi_f(\bar{A})$ est l'image continue d'un compact, donc compact. Comme $\psi_f(\bar{A})$ contient $\psi_f(A)$, il en résulte que $\psi_f(A)$ est relativement compact dans M_b pour la topologie faible.

2) Nous démontrons maintenant la réciproque. Pour toute fonction $f \in C_b$, on pose :

$$M_b(f) = M_b$$

et on plonge M dans : $\prod_{f \in C_b} M_b(f)$.

On définit une application Ψ à partir des $\{\psi_f, f \in C_b\}$ par :

$$\forall \mu \in M : \Psi(\mu) = \{\mu_f(\mu) , f \in C_b\} = \{\mu_f , f \in C_b\}$$

alors :

$$\Psi(M) \subset \prod_{f \in C_b} M_b(f)$$

donc Ψ est surjective de M sur l'image de M .

Maintenant, si μ et ν sont deux éléments distincts de M , on peut trouver $f \in C_b$ telle que :

$$\int f d\mu \neq \int f d\nu$$

et donc, il existe $A \in \mathcal{B}$ tel que :

$$\int_A f d\mu = \mu_f(A) \neq \int_A f d\nu = \nu_f(A) .$$

En d'autres termes, Ψ est injective.

Ψ est donc une bijection de M sur son image.

Notons T_3 la topologie induite sur M par la topologie produit de l'ensemble :

$$\prod_{f \in C_b} M_b(f) .$$

Les T_3 -voisinages de toute $\mu \in \Psi(M)$ sont les intersections avec $\Psi(M)$ des T_3 -voisinages de μ dans $\prod_{f \in C_b} M_b(f)$.

Or, un système fondamental de T_3 -voisinages est de la forme $\prod_{f \in C_b} V(f)$ où $V(f)$ est un voisinage de μ_f dans M_b pour la topologie T , et où les $V(f)$, sauf un nombre fini, sont égaux à M_b .

Un système fondamental de voisinages de μ dans $\Psi(M)$, pour T_3 , est donc de la forme :

$$\bigcap_{f \in F} \{\nu \in M : \nu_f \in V(f)\}$$

où F est une partie finie de C_b , et où, pour tout $f \in F$, $V(f)$ est un voisinage de base de μ_f pour T .

Ce système n'est autre qu'un système fondamental de voisinages de T_2 , ce qui montre que Ψ est un homéomorphisme de M sur son image. Alors, si $A \subset M$ est telle que, pour toute fonction $f \in C_b$, $\Psi_f(A)$ est relativement compacte, les inclusions :

$$A = \bigcap_{f \in C_b} \Psi_f(A) \subseteq \bigcap_{f \in C_b} \overline{\Psi_f(A)}$$

et le théorème de Tychonov montrent que A est relativement compacte. ■

Théorème II.3. - Une partie M de M est relativement compacte si et seulement si :

$$1) \forall B \in \mathcal{B}_b, \sup_{\mu \in M} |\mu|(B) < +\infty.$$

2) Pour toute suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de C_b qui tend vers 0 en décroissant ;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\mu \in M} \int h_n d|\mu| = 0.$$

Démonstration : En vertu des théorèmes 25, 26 et 27 de VARADARAJAN [8] et du théorème II.2. M est relativement compacte si et seulement si, pour toute fonction $f \in C_b$:

a) $\Psi_f(M) = \{\mu_f, f \in M\}$ est borné en norme :

$$\sup_{\mu \in M} |\mu_f|(X) < +\infty.$$

b) Pour toute suite $(g_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de C qui tend vers 0 en décroissant : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\mu \in M} \int g_n d|\mu_f| = 0.$

Il nous suffit alors de prouver les équivalences suivantes :

$$1) \iff a) \text{ et } 2) \iff b)$$

$\alpha)$ Démontrons d'abord $1) \iff a)$.

* Soit $B \in \mathcal{B}_b$; il existe une fonction f , à valeurs dans $[0,1]$, continue, à support borné telle que :

$$f(x) = 1 \quad \forall x \in \bar{B}$$

$$\text{or : } |\mu_f|(X) = \int_X f d|\mu| \geq |\mu|(B) \quad \text{donc } a) \implies 1) .$$

** Réciproquement, soit $f \in C_b$, de support S_f ; on a :

$$\sup_{\mu \in M} |\mu|(S_f) < +\infty$$

Donc, comme $|f|$ est bornée :

$$\sup_{\mu \in M} \int |f| d|\mu| = \sup_{\mu \in M} |\mu_f|(X) < +\infty$$

c'est-à-dire : $1) \implies a)$.

$\beta)$ Démontrons enfin $2) \iff b)$.

* Tout d'abord $b) \implies 2)$: en effet,

Soit $(h_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de C_b telle que : $h_n \downarrow 0$.

Soient S_1 le support de h_1 et f une fonction continue bornée telle que :

$$\begin{cases} 0 \leq f \leq 1 \\ f(x) = 1 & \forall x \in S_1 \\ f(x) = 0 & \forall x \in \{y : d(y, S_1) \geq 1\} . \end{cases}$$

Pour tout $n \geq 1$, on peut écrire :

$$\int h_n d|\mu| = \int h_n f d|\mu| = \int h_n d|\mu_f|$$

** Réciproquement, soit f un élément de C_b et soit $(g_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de C qui tend vers 0 en décroissant ; alors, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$|f| g_n \in C_b \quad \text{et} \quad |f| g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{ainsi :} \quad \sup_{\mu \in M} \int g_n |f| d|\mu| = \sup_{\mu \in M} \int g_n d|\mu| |f| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{or} \quad |\mu| |f| = |\mu_f|$$

Par conséquent 2) $\Rightarrow$ b) . ■

Nous étendons à M tout entier, dans le théorème II.4. ci-dessous, un résultat connu pour les éléments de M^+ [5 p. 162].

Théorème II.4. - Supposons que (X, d) soit, en plus de sa séparabilité, complet ; alors, une partie de M de M est relativement compacte si et seulement si :

$$1) \quad \forall B \in \mathcal{B}_b, \quad \sup_{\mu \in M} |\mu|(B) < +\infty$$

$$2) \quad \forall B \in \mathcal{B}_b, \quad B \text{ fermé}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists K_\varepsilon \subseteq B \text{ tel que :}$$

$$\sup_{\mu \in M} |\mu|(B - K_\varepsilon) < \varepsilon. \quad (K_\varepsilon \text{ compact})$$

Nous donnons de ce résultat deux démonstrations ; la première s'appuie sur le théorème II.3. et la deuxième est directe.

Première démonstration : Le théorème II.3. montre que M est relativement compact si et seulement si :

$$|M| = \{|\mu| ; \mu \in M\}$$

est relativement compact dans M^+ ; le théorème II.4. est donc une conséquence immédiate du théorème 3.2.5. de [5]. ■

Deuxième démonstration (démonstration directe).

a) Supposons que $M \subset M$ est relativement compact ; soit f une fonction continue, bornée, à support borné, égale à 1 sur B .

Pour tout élément $\mu \in M$, μ et μ_f coïncident sur B qui est métrique, séparable et complet comme fermé d'un espace polonais ; or, d'après le théorème II.2., $\{\mu_f, \mu \in M\}$ est relativement compact dans M_b pourvu que M le soit dans M ; en appliquant le théorème de Prokhorov, on obtient immédiatement les conditions 1) et 2).

b) Supposons maintenant que 1) et 2) soient réalisées et démontrons que : pour toute $f \in C_b$, $\Psi_f(M)$ est relativement compacte. On peut naturellement supposer que $|f| < 1$; on désignera par S_f le support de f , et, pour tout borélien B , on posera $B_f = S_f \cap B$; alors :

$$\sup_{\mu_f \in \Psi_f(M)} |\mu_f|(B) = \sup_{\mu \in M} \int_B |f| d|\mu| = \sup_{\mu \in M} \int_{B_f} |f| d|\mu| \leq \sup_{\mu \in M} |\mu|(B_f) < +\infty$$

d'autre part, pour tout compact K :

$$\sup_{\mu_f \in \Psi_f(M)} |\mu_f|(X-K) = \sup_{\mu \in M} \int_{X-K} |f| d|\mu| = \sup_{\mu \in M} \int_{S_f - K_f} |f| d|\mu| \leq \sup_{\mu \in M} |\mu|(S_f - K_f)$$

pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir $K_\varepsilon \subset S_f$ tel que $\sup_{\mu \in M} |\mu|(S_f - K_\varepsilon) < \varepsilon$; comme K_ε est aussi compact de X , et comme $K_{\varepsilon, f} = K_\varepsilon$:

$$\sup_{\mu_f \in \Psi_f(M)} |\mu_f|(X - K_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Le théorème de Prokhorov montre alors que $\Psi_f(M)$ est relativement faiblement compact. ■

Théorème II.5. - Supposons que $X = \mathbb{R}^k$, muni de sa métrique naturelle ; une partie M de $\mathcal{M}$ est relativement compacte si et seulement si :

$$\forall B \in \mathcal{B}_b, \quad \sup_{\mu \in M} |\mu|(B) < +\infty.$$

Démonstration : Soit $(h_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}_b$, qui converge vers 0 en décroissant ; d'après le lemme de Dini, la convergence de la suite $(h_n)_{n \geq 1}$ vers 0 est uniforme sur le support S de h_1 qui est un fermé borné de $\mathbb{R}^k$, donc compact. Dans ce cas, la condition 2) du théorème II.3. est automatiquement satisfaite dès que la condition 1) est remplie. ■

Remarque : On retrouve ainsi, enfin de compte, la condition classique de compacité d'une famille de mesures de Radon pour la topologie vague.

CHAPITRE III

MESURES SUR L'ESPACE PRODUIT $X \times X$.

Ⓐ - PRÉLIMINAIRES.-

Dans cette étude, on munit l'espace $X^2 = X \times X$ de la métrique $d^2 = \text{Max}(d, d)$, définie comme suit :

$$\left. \begin{array}{l} \forall x = (x_1, x_2) \in X^2 \\ \forall y = (y_1, y_2) \in X^2 \end{array} \right\} d^2(x, y) = \text{Max}\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)\}$$

Comme (X, d) est séparable, il en est de même de (X^2, d^2) .

Notons $B \otimes B$ la tribu produit de X^2 (tribu engendrée par les rectangles $A \times B : A \in B \text{ et } B \in B$) ; B^2 étant la tribu borélienne de X^2 , on a en général l'inclusion suivante :

$$B \otimes B \subseteq B^2$$

Cependant, comme (X^2, d^2) est séparable, $B^2 = B \otimes B$.

Nous donnons d'abord quelques propriétés immédiates concernant le produit de deux éléments de M .

Propriété III.1.- Si μ et ν sont deux éléments positifs de M (ce sont deux mesures σ -finies) il existe une mesure unique $\mu \otimes \nu$ sur (X^2, B^2) vérifiant :

$$\forall A \in B, \forall B \in B \quad \mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B).$$

Notons de suite que $\mu \otimes \nu$ est aussi un élément positif de M^2 .

Propriété III.2. - (Décomposition de HAHN-JORDAN).

Soient μ et ν deux éléments de M , de décompositions de Hahn et Jordan respectives $\mu^+ - \mu^-$ et $\nu^+ - \nu^-$; on a :

$$\mu \otimes \nu = (\mu \otimes \nu)^+ - (\mu \otimes \nu)^-$$

avec

$$(\mu \otimes \nu)^+ = \mu^+ \otimes \nu^+ + \mu^- \otimes \nu^-$$

$$(\mu \otimes \nu)^- = \mu^+ \otimes \nu^- + \mu^- \otimes \nu^+$$

Démonstration : Soient $(\mathcal{D}^+, \mathcal{D}^-)$ et (Δ^+, Δ^-) des décompositions de X , associées respectivement à μ et à ν ; on a :

$$\mu^+ \otimes \nu^+(\mathcal{D}^+ \times \Delta^-) = \mu^+ \otimes \nu^+(\mathcal{D}^- \times \Delta^+) = \mu^+ \otimes \nu^+(\mathcal{D}^- \times \Delta^-) = 0 .$$

Ce qui signifie que $\mu^+ \otimes \nu^+$ est concentrée sur $\mathcal{D}^+ \times \Delta^+$.

De même : $\mu^- \otimes \nu^-$ est concentrée sur $\mathcal{D}^- \times \Delta^-$

$\mu^- \otimes \nu^+$ est concentrée sur $\mathcal{D}^- \times \Delta^+$

$\mu^+ \otimes \nu^-$ est concentrée sur $\mathcal{D}^+ \times \Delta^-$

si on pose : $\mathcal{D}^+ = (\mathcal{D}^+ \times \Delta^+) \cup (\mathcal{D}^- \times \Delta^-)$

et $\mathcal{D}^- = (\mathcal{D}^+ \times \Delta^-) \cup (\mathcal{D}^- \times \Delta^+)$

il est immédiat que : $(\mu \otimes \nu)^+ = \mu^+ \otimes \nu^+ + \mu^- \otimes \nu^-$

$$(\mu \otimes \nu)^- = \mu^- \otimes \nu^+ + \mu^+ \otimes \nu^- . \blacksquare$$

Propriété III.3. - La variation totale de $\mu \otimes \nu$ est égale au produit des variations totales de μ et ν ; c'est-à-dire :

$$|\mu \otimes \nu| = |\mu| \otimes |\nu|$$

Démonstration : Il suffit de le montrer sur les pavés mesurables $A \times B$.

$$\begin{aligned} \text{Or } |\mu \otimes \nu|(A \times B) &= \mu^+(A) \nu^+(B) + \mu^-(A) \nu^-(B) + \mu^+(A) \nu^-(B) + \mu^-(A) \nu^+(B) \\ &= [\mu^+(A) + \mu^-(A)] [\nu^+(B) + \nu^-(B)] \\ &= (|\mu| \otimes |\nu|)(A \times B) . \end{aligned}$$

Ce qui prouve le résultat annoncé. ■

Propriété III.4.- On rappelle qu'une fonction numérique mesurable définie sur X^2 est $(\mu \otimes \nu)$ -intégrable si, par définition elle est $(\mu \otimes \nu)^+$ et $(\mu \otimes \nu)^-$ intégrable.

D'après la propriété III.2., pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire et suffisant que f soit $\mu^+ \otimes \nu^+$, $\mu^- \otimes \nu^-$, $\mu^+ \otimes \nu^-$ et $\mu^- \otimes \nu^+$ - intégrable.

On a alors :

$$\int_{X^2} f \, d\mu \otimes \nu = \int_{X^2} f \, d\mu^+ \otimes \nu^+ + \int_{X^2} f \, d\mu^- \otimes \nu^- - \int_{X^2} f \, d\mu^+ \otimes \nu^- - \int_{X^2} f \, d\mu^- \otimes \nu^+$$

En particulier, le théorème de Fubini est conservé :

$$\int_{X^2} f \, d\mu \otimes \nu = \int_X d\mu \int_X f \, d\nu = \int_X d\nu \int_X f \, d\mu .$$

ⓑ - CLASSES DÉTERMINANTES, C-DÉTERMINANTES ET $\bar{C}$ -DÉTERMINANTES SUR M^2 .

Les notions de classes déterminantes et C-déterminantes de boréliens pour la convergence faible d'une suite de probabilités sont utilisées par Billingsley dans [7 p. 15] .

Nous prenons ici une version fonctionnelle de ces notions, relativement à la convergence faible à distance finie sur M^2 . Il s'agit

de trouver un sous-ensemble assez simple de C_b^2 qui suffit à déterminer la convergence d'une suite d'éléments de M^2 .

Sauf mention expresse du contraire les topologies envisagées sur M_b^2 et M^2 sont respectivement les topologies faible et faible à distance finie.

Définition III.1.- Nous appellerons classe déterminante sur M^2 , toute famille $F \subset C_b^2$ de fonctions telle que : $\forall \mu \in M^2, \forall \nu \in M^2$:

$$\int f d\mu = \int f d\nu \quad \forall f \in F \implies \mu = \nu.$$

On définit de façon analogue une classe $F \subset C^2$, déterminante sur M_b^2 .

Définition III.2.- On dira qu'une classe $F \subset C_b^2$ de fonctions est C-déterminante sur M^2 si, pour toute suite (μ_n) d'éléments de M^2 , l'affirmation

$$[\forall f \in F ; \int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu_0] \text{ implique : } [\mu_n \rightarrow \mu_0 \text{ faiblement à distance finie}].$$

On définit de façon analogue une classe $F \subset C^2$, C-déterminante sur M_b^2 .

Définition III.3.- Soit $F \subset C_b^2$; on dira que F est une classe $\bar{C}$ -déterminante sur M^2 si, pour toute suite (μ_n) d'éléments de M^2 , l'affirmation :

$$[\forall f \in F, (\int_X f d\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}]$$

implique : il existe $\mu_0 \in M^2$ et $\mu_n \rightarrow \mu_0$ faiblement à distance finie.

On définit de façon analogue une classe $F \subset C^2$, $\bar{C}$ -déterminante sur M_b^2 .

Remarques :

1) Il est clair qu'une classe C-déterminante est une classe déterminante ; la réciproque n'est pas exacte en général.

2) La classe C_b^2 est déterminante sur M^2 , elle est même C-déterminante par définition de la topologie faible à distance finie.

3) Si une classe est $\bar{C}$ -déterminante, elle est a fortiori C-déterminante.

Théorème III.1.-

La classe $F^* = \{f(x) g(y) ; f \in C, g \in C\}$ est déterminante sur M_b^2 .

Démonstration : Soit $A \times B$ un rectangle ouvert non vide de X^2 ; à partir de l'ouvert A , on construit une fonction continue f_k telle que :

$$\begin{cases} 0 \leq f_k \leq 1 \\ f_k(x) = 0 & \forall x \in A^c \\ f_k(x) = 1 & \forall x \in A^{-1/k} = \{x \in A : d(x, A^c) \geq \frac{1}{k}\} \end{cases}$$

De même, à partir de l'ouvert B , on obtient une fonction g_k continue :

$$\begin{cases} 0 \leq g_k \leq 1 \\ g_k(x) = 0 & \forall x \in B^c \\ g_k(x) = 1 & \forall x \in B^{-1/k} \end{cases}$$

$(f_k g_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante de fonctions positives telle que :

$$f_k(x) g_k(y) \uparrow 1_{A \times B}(x, y), \forall (x, y) \in X^2.$$

Si μ est connue sur F^* , le théorème de la convergence monotone [par exemple 16 p. 111] appliqué à μ^+ et à μ^- montre que μ est connue sur tout rectangle ouvert $A \times B$. Or, tout ouvert de X^2 est une réunion dénombrable de rectangles ouverts, et la classe des rectangles ouverts est stable par intersection finie. On connaît ainsi la mesure $\mu(0)$ de tout ouvert de X^2 , ce qui détermine μ .

Théorème III.2.-

La famille de fonctions $F = \{f(x)g(y); f \in C_b, g \in C_b\}$ est déterminante sur M^2 .

Démonstration : Supposons que l'on connaisse, pour une mesure $\mu \in M^2$, les intégrales

$$\int h \, d\mu, \quad h \in F.$$

Alors, si $u \in F^*$, $hu \in F$ et on connaît

$$\int hu \, d\mu = \int u \, d\mu_h$$

D'après le théorème III.1., F^* est déterminante sur M_b^2 ; μ_h est donc connue, $\forall h \in F$.

Soient maintenant f et g deux éléments de C et h un élément de C_b^2 , de support H ; il existe un pavé $A \times B$ contenant H où A et B sont des fermés bornés de X . A partir de f et g , on construit un couple (f', g') d'éléments de C_b tels que :

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) & \forall x \in A \\ f'(x) = 0 & \forall x \in (A^1)^c \end{cases} \quad \begin{cases} g'(x) = g(x) & \forall x \in B \\ g'(x) = 0 & \forall x \in (B^1)^c \end{cases}.$$

On rappelle que A^1 et B^1 sont les dilatés respectifs de A et B à l'unité près.

On pose ensuite :

$$u(x,y) = f(x) g(y)$$

$$u'(x,y) = f'(x) g'(y)$$

Puisque $u' \in F$, on connaît les intégrales :

$$\int u d\mu_h = \int u' d\mu_h = \int u' h d\mu = \int h d\mu_{u'}.$$

Ainsi, μ_h est connue pour toute fonction $h \in C_b^2$, ce qui détermine μ . ■

Nous allons maintenant voir si la famille F est C-déterminante sur M^2 ; nous donnons une condition suffisante pour qu'il en soit ainsi dans le :

Théorème III.3. - Une condition suffisante pour que

$F = \{f(x) g(y) ; f \in C_b, g \in C_b\}$ soit C-déterminante sur M^2 est que
 $F^* = \{f(x) g(y) ; f \in C, g \in C\}$ soit C-déterminante sur M_b^2 .

Démonstration : Supposons que F^* est C-déterminante sur M_b^2 .

Soit (μ_n) une suite d'éléments de M^2 telle que :

$$\int h d\mu_n \longrightarrow \int h d\mu_0, \quad \forall h \in F.$$

Si $u \in F^*$, alors $uh \in F$ et donc :

$$\int uh d\mu_n = \int u d\mu_{n,h} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int uh d\mu_0 = \int u d\mu_{0,h}.$$

Ce qui montre que la suite $(\mu_{n,h})$ d'éléments de M_b^2 converge faiblement vers $\mu_{0,h}$, pour toute fonction $h \in F$.

Soient à présent (f,g) un couple d'éléments de C et h un élément de C_b^2 de support H . Il existe un pavé $A \times B$ contenant H où A et B sont des fermés bornés de X . On définit un couple (f',g') d'éléments de C_b exactement comme dans le théorème III.2..

$$\begin{cases} f' = f & \text{sur } A \\ f' = 0 & \text{sur } (A^1)^c \end{cases} \quad \begin{cases} g' = g & \text{sur } B \\ g' = 0 & \text{sur } (B^1)^c \end{cases}$$

et on pose : $u(x,y) = f(x) g(y)$

$$u'(x,y) = f'(x) g'(y)$$

$$\begin{aligned} \text{Alors : } \int u \, d\mu_{n,h} &= \int u' \, d\mu_{n,h} = \int h \, d\mu_{n,u'} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int h \, d\mu_{0,u'} = \int u' \, d\mu_{0,h} \\ &= \int u \, d\mu_{0,h} \end{aligned}$$

ce qui prouve que $(\mu_{n,h})_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers $\mu_{0,h}$, pour toute fonction $h \in C_b^2$; donc (μ_n) converge vers μ_0 faiblement à distance finie sur M^2 . ■

Corollaire III.3.- Une condition suffisante pour que

$F^+ = \{f(x) \cdot g(y) ; f \in C_b^+, g \in C_b^+\}$ soit C-déterminante sur M_b^{2+} est que $F^{*+} = \{f(x) \cdot g(y) ; f \in C^+, g \in C^+\}$ soit C-déterminante sur M_b^2 .

Il ne semble pas, néanmoins, que F^* soit C-déterminante sur M_b^2 ; cependant, F^{*+} est C-déterminante sur M_b^{2+} , ce qui permet d'énoncer le résultat suivant, à rapprocher du théorème 3.1. de Billingsley [7 p. 20].

Théorème III.4.-

La famille $F^+ = \{f(x) g(y) ; f \in C_b^+, g \in C_b^+\}$ est C-déterminante sur M_b^{2+} .

Démonstration : D'après le corollaire III.3., il suffit de montrer que la classe F^{*+} est C-déterminante sur M_b^{2+} .

Soit (μ_n) une suite d'éléments de M_b^{2+} telle que :

$$\forall h \in F^{*+}, \quad \int h \, d\mu_n \longrightarrow \int h \, d\mu_0$$

Le problème est de montrer que (μ_n) converge vers μ_0 faiblement.

Remarquons que, comme (X, d) est séparable, il existe, d'après le plongement classique de (X, d) dans $[0, 1]^N$, une métrique d' équivalente à d telle que (X, d') soit totalement borné. On conserve donc la même tribu borélienne pour X . Ainsi, X^2 , espace métrique séparable, peut être considéré comme un sous-espace topologique d'un espace compact K^2 métrisable. La tribu borélienne de X^2 est alors :

$$B^2 = \{A \cap X^2, A \in B_{K^2}\}$$

où B_{K^2} est la tribu borélienne de K^2 .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on prolonge la mesure μ_n en une mesure $\bar{\mu}_n$ sur (K^2, B_{K^2}) en posant :

$$\forall A \in B_{K^2} \quad \bar{\mu}_n(A) = \mu_n(A \cap X^2) .$$

Soit $\bar{f}$ une fonction continue sur K^2 ; sa restriction f à X^2 est continue. D'après une conséquence du théorème de STONE-WEIRSTRASS, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, une fonction $\bar{k}_\varepsilon$ sur K^2 de la forme :

$$\bar{k}_\varepsilon(x, y) = \sum_{i \in I} \alpha_i \bar{h}_i(x) \bar{g}_i(y)$$

où I est un ensemble fini d'indices et $\bar{h}_i$ et $\bar{g}_i$ des fonctions continues positives sur K , qui approche uniformément $\bar{f}$ à ε près c'est-à-dire :

$$||\bar{f} - \bar{k}_\varepsilon|| \leq \varepsilon .$$

Mais alors, en désignant par k_ε la restriction de $\bar{k}_\varepsilon$ à X^2 et par h_i et g_i celles de $\bar{h}_i$ et $\bar{g}_i$ à X , il vient :

$$||f - k_\varepsilon|| \leq \varepsilon .$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \left| \int_{K^2} \bar{f}(x,y) \bar{\mu}_n(dx,dy) - \int_{K^2} \bar{f}(x,y) \bar{\mu}_0(dx,dy) \right| &\leq \varepsilon \bar{\mu}_n(K^2) + \varepsilon \bar{\mu}_0(K^2) + \\ &+ \left| \int \bar{k}_\varepsilon(x,y) \bar{\mu}_n(dx,dy) - \int \bar{k}_\varepsilon(x,y) \bar{\mu}_0(dx,dy) \right| \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \left| \int_{K^2} \bar{f}(x,y) \bar{\mu}_n(dx,dy) - \int_{K^2} \bar{f}(x,y) \bar{\mu}_0(dx,dy) \right| &\leq \varepsilon \mu_n(X^2) + \varepsilon \mu_0(X^2) + \\ &+ \sum_{i \in I} |\alpha_i| \times \left| \int h_i(x) g_i(y) \mu_n(dx,dy) - \int h_i(x) g_i(y) \mu(dx,dy) \right|. \end{aligned}$$

Comme $1_{X \times X}(x,y)$ et $h_i(x) g_i(y)$ sont des éléments de F^* , on obtient :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int \bar{f}(x,y) \bar{\mu}_n(dx,dy) - \int \bar{f}(x,y) \bar{\mu}_0(dx,dy) \right| \leq 2 \varepsilon \mu_0(X^2), \quad \forall \varepsilon > 0.$$

ce qui montre que $(\bar{\mu}_n)$ converge faiblement vers $\bar{\mu}_0$ dans K^2 .

Soit maintenant C un fermé de X^2 ; il existe un fermé F de K^2 tel que :

$$C = F \cap X^2$$

or, $\limsup_n \bar{\mu}_n(F) \leq \bar{\mu}_0(F)$ équivaut à

$$\limsup_n \mu_n(C) \leq \mu_0(C)$$

Ce qui permet de conclure que (μ_n) converge faiblement vers μ_0 puisque, par ailleurs :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(X^2) = \mu_0(X^2). \quad \blacksquare$$

Remarque : Comme on le constate, cette démonstration n'est possible que grâce à cette dernière condition, qui est reliée à la relative compacité de la suite (μ_n) , liaison justifiée par les théorèmes de II .

C'est pourquoi nous ne pensons pas que la même propriété soit vraie pour des mesures à signe bien que nous n'ayons pas de contre-exemple.

Toutefois, dans M^2 , nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Théorème III.5.- Soit $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de M^2 , relativement compacte, telle que : $\forall f \in F$, $(\int f d\mu_n)$ converge vers un certain nombre $\alpha(f)$, alors, il existe une mesure $\mu_0 \in M^2$ telle que (μ_n) converge faiblement à distance finie vers μ_0 .

La démonstration suit un schéma classique dont l'argument essentiel est que F est déterminante sur M^2 .

Démonstration du théorème III.5.- Elle s'inspire de [7 p. 35].

Rappelons qu'une suite de nombres réels $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'un espace métrique converge vers x si et seulement si toute suite partielle (x_{n_i}) , on peut extraire une suite partielle $(x_{n''})$ qui converge vers x .

La suite $\{\mu_n ; n \in \mathbb{N}\}$ étant relativement compacte, de toute suite partielle $\{\mu_{n_i} ; n_i \in \mathbb{N}\}$ de $\{\mu_n ; n \in \mathbb{N}\}$ on peut extraire une sous-suite $\{\mu_{n''} ; n'' \in \mathbb{N}\}$ qui converge faiblement à distance finie vers une certaine mesure $\mu_0 \in M^2$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } & \forall f \in F, \int f d\mu_n \longrightarrow \alpha(f) \\ \text{et : } & \forall f \in F, \int f d\mu_{n''} \longrightarrow \int f d\mu_0 . \end{aligned}$$

Comme la classe $F = \{f(x) g(y) : f \in C_b ; g \in C_b\}$ est déterminante sur M^2 , on conclut immédiatement que la mesure μ_0 ne dépend pas des suites partielles (μ_n) et $(\mu_{n''})$ considérées.

Ainsi, de toute suite partielle (μ_n) extraite de (μ_n) on peut extraire une sous-suite $(\mu_{n''})$ qui converge faiblement à distance finie vers la mesure μ_0 . Par conséquent :

$$\mu_n \longrightarrow \mu_0 \text{ faiblement à distance finie.}$$

A propos du théorème III.5., signalons que Monsieur le Professeur J. GEFFROY nous a communiqué une jolie démonstration directe d'un théorème analogue, pour une suite de mesures boréliennes à signe sur $X^2 = R^{2k}$. Nous tenons à l'en remercier et reprenons le résultat ici dans un théorème III.5. bis.

Théorème III.5. bis. - Soit (μ_n) une suite d'éléments de M_b^2 telle que :

* si f et g sont deux applications continues et bornées de R^k dans R , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{R^{2k}} f(x) g(y) d\mu_n(x,y) = 0$$

** il existe un élément $\nu \in M_b^{2+}$, totalement borné vérifiant :

$$|\mu_n| \leq \nu \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors, pour toute fonction h continue et bornée sur $R^k \times R^k$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{R^{2k}} h(x,y) d\mu_n(x,y) = 0.$$

Remarque : On peut déjà signaler que la condition :

$$|\mu_n| \leq \nu, \quad \nu \in M_b^{2+} \quad \text{et} \quad \mu_n \in M_b^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

entraîne la relative compacité de la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Cette condition explique donc bien l'analogie entre les deux théorèmes.

Des détails sur cette condition peuvent être trouvés dans [3 p. 47 Théorème IV.1.] par exemple.

Dans le souci d'alléger les notations, nous faisons $k = 1$ dans la démonstration de ce théorème.

Nous aurons besoin d'un lemme technique qui est le suivant :

Lemme III.1. - $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite définie au théorème III.5. bis, ainsi que la mesure ν . Soit $A = [a, b[\times [a', b'[$ une cellule quelconque de $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$\nu(\{a\} \times \mathbb{R}) = \nu(\{b\} \times \mathbb{R}) = \nu(\mathbb{R} \times \{a'\}) = \nu(\mathbb{R} \times \{b'\}) = 0.$$

$$\text{Alors : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(A) = 0.$$

Démonstration : Tout d'abord, remarquons que l'ensemble $X = \{x \in \mathbb{R} : \nu(\{x\} \times \mathbb{R}) > 0\}$ est fini ou dénombrable puisque une fonction de répartition admet au plus une infinité dénombrable de points de discontinuité. Pour les mêmes raisons l'ensemble $Y = \{y : \nu(\mathbb{R} \times \{y\}) > 0\}$ est au plus dénombrable.

Par conséquent, si a et b sont choisis en dehors de X et si α est un nombre positif, on a :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \nu([a - \alpha, a] \times \mathbb{R}) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \nu([b, b + \alpha] \times \mathbb{R}) = 0 \quad (1)$$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. D'après (1), on peut choisir $\alpha > 0$ suffisamment petit pour que :

$$v([a - \alpha, b + \alpha] \times [a' - \alpha, b' + \alpha] - A) < \varepsilon . \quad (2)$$

Ensuite, on peut choisir une fonction continue $f(x)$ telle que :

$$\begin{cases} f(x) = 1 & \text{si } x \in [a, b[\\ 0 \leq f(x) \leq 1 & \text{si } x \in [a - \alpha, a[\cup [b, b + \alpha] \\ f(x) = 0 & \text{si } x \in]-\infty, a - \alpha] \cup [b + \alpha, +\infty[. \end{cases}$$

De même, on peut choisir une fonction continue $g(y)$ telle que :

$$\begin{cases} g(y) = 1 & \text{si } y \in [a', b'[\\ 0 \leq g(y) \leq 1 & \text{si } y \in [a' - \alpha, a'[\cup [b', b' + \alpha] \\ g(y) = 0 & \text{si } y \in]-\infty, a' - \alpha] \cup [b' + \alpha, +\infty[. \end{cases}$$

Il existe, au vu des hypothèses, un rang $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geq n_0 \implies \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(x) g(y) d\mu_n(x, y) \right| < \varepsilon . \quad (3)$$

Posons $A' = [a - \alpha, b + \alpha] \times [a' - \alpha, b' + \alpha]$; puisque $f(x) g(y) = 1$ sur A , on peut écrire :

$$\mu_n(A) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) g(y) d\mu_n(x, y) - \int_{A' - A} f(x) g(y) d\mu_n(x, y) . \quad (4)$$

Mais il est clair que :

$$\left| \int_{A' - A} f(x) g(y) d\mu_n(x, y) \right| \leq |\mu_n| (A' - A) \leq v(A' - A) .$$

L'égalité (4) nous donne alors, compte tenu de (2) et (3) :

$$n \geq n_0 \implies |\mu_n(A)| < 2\varepsilon$$

c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(A) = 0$. ■

Démonstration du théorème III.5. bis.-

Soit $h(x,y)$ une fonction réelle, continue et bornée sur $\mathbb{R}^2$;
notons $H = \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |h(x,y)|$. $\varepsilon > 0$ étant un nombre arbitraire donné,
on choisit une cellule :

$$D = [a_0, b_0[\times [a'_0, b'_0[\text{ telle que : } v(\mathbb{R}^2 - D) \leq \frac{\varepsilon}{H}$$

$$\text{et : } v(\{a_0\} \times \mathbb{R}) = v(\{b_0\} \times \mathbb{R}) = v(\mathbb{R} \times \{a'_0\}) = v(\mathbb{R} \times \{b'_0\}) = 0 \quad (i)$$

$$\text{on a : } \forall n \in \mathbb{N} , \quad \left| \int_{\mathbb{R}^2 - D} h(x,y) d\mu_n(x,y) \right| \leq \varepsilon . \quad (ii)$$

La fonction $h(x,y)$ étant continue sur $\bar{D}$ qui est compact y est
uniformément continue. Par conséquent, on peut fractionner D en un nombre
fini $m \times r$ de cellules :

$$D_{ij} = [a_{i-1}, a_i[\times [a'_{j-1}, a'_j[\quad i = 1, 2, \dots, m \text{ et } j = 1, 2, \dots, r$$

(avec $a_m = b_0$ et $a'_r = b'_0$) telles que l'oscillation de h sur chacune
d'elles soit inférieure à $\frac{\varepsilon}{v(D)}$ et que les nombres a_i et a'_j satisfassent
des relations analogues à (i).

$$\text{on a : } \int_D h(x,y) d\mu_n(x,y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r \int_{D_{ij}} h(x,y) d\mu_n(x,y) .$$

On peut aussi écrire :

$$\int_{D_{ij}} h(x,y) d\mu_n(x,y) = \int_{D_{ij}} [h(a_{i-1}, a'_{j-1}) + \tau(x,y)] d\mu_n(x,y)$$

$$\text{avec } |\tau(x,y)| \leq \frac{\varepsilon}{v(D)} .$$

Ainsi :

$$\int_D h(x,y) d\mu_n(x,y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r h(a_{i-1}, a'_{j-1}) \mu_n(D_{ij}) + \int_D \tau(x,y) d\mu_n(x,y) \quad (iii)$$

D'après le lemme III.1., il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$(n \geq n_0) \implies |\mu_n(D_{ij})| \leq \frac{\varepsilon}{mrH} \quad \forall (i,j) .$$

L'équation (iii) donne, $\forall n \geq n_0$: $|\int_D h d\mu_n| \leq 2\varepsilon$.

Et enfin, $\forall n \geq n_0$:

$$|\int_{\mathbb{R}^2} h d\mu_n| \leq |\int_{\mathbb{R}^2-D} h d\mu_n| + |\int_D h d\mu_n| \leq \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon .$$

C'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^2} h(x,y) d\mu_n(x,y) = 0 . \quad \blacksquare$$

A propos de classes $\bar{C}$ -déterminantes, donnons d'abord un résultat, très proche du théorème III.3.

Théorème III.6.- Posons :

$$F = \{f(x) g(y) ; f \in C_b, g \in C_b\} \quad \text{et} \quad F^* = \{f(x) g(y) ; f \in C, g \in C\} .$$

Pour que F soit $\bar{C}$ -déterminante sur M^2 , il suffit que F^* le soit sur M_b^2 .

Démonstration : Supposons donc que F^* soit $\bar{C}$ -déterminante sur M_b^2 et que (μ_n) soit une suite d'éléments de M^2 telle que :

$$\forall h \in F, \quad \text{la suite de réels } (\int h d\mu_n) \text{ converge.}$$

Il faut montrer qu'il existe $\mu_0 \in M^2$ et $\mu_n \rightarrow \mu_0$ faiblement à distance finie.

Fixons $h \in F$; soit $u \in F^*$: $hu \in F$ et :

$$\int hu \, d\mu_n = \int u \, d\mu_{n,h}$$

Donc la suite $(\int u \, d\mu_{n,h})$ est convergente, ce qui montre que $(\mu_{n,h})_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers une certaine mesure $\mu_{u,h}$, pour $h \in F$.

Soit $(f,g) \in C \times C$ et $h \in C_b^2$; le support de h étant noté H , il existe un pavé $A \times B$ (où A et B sont des fermés bornés de X) contenant H . On définit un couple (f',g') d'éléments de C_b tels que :

$$\begin{cases} f' = f & \text{sur } A \\ f' = 0 & \text{sur } (A^1)^c \end{cases} \quad \begin{cases} g' = g & \text{sur } B \\ g' = 0 & \text{sur } (B^1)^c \end{cases} .$$

On pose $u(x,y) = f(x) g(y) \in F^*$
 $u'(x,y) = f'(x) g'(y) \in F$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$;

$$\int u \, d\mu_{n,h} = \int uh \, d\mu_n = \int u'h \, d\mu_n = \int h \, d\mu_{n,u'} .$$

Comme $\{\mu_{n,u'}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers une certaine mesure

$\mu_{0,u'}$, $\int h \, d\mu_{n,u'} \longrightarrow \int h \, d\mu_{0,u'}$ donc $(\int u \, d\mu_{n,h})$ converge, pour toute $u \in F^*$.

Cela montre que $(\mu_{n,h})_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers une certaine mesure $\mu_{0,h}$, pour toute $h \in C_b^2$.

Par conséquent, $\forall h \in C_b^2$, $(\mu_{n,h})_{n \in \mathbb{N}}$ est relativement compacte dans M_b^2 . Il en résulte, d'après le théorème III.2. que (μ_n) est relativement compacte dans M^2 ; on peut en extraire une sous-suite (μ_{n_i}) qui converge dans M^2 vers une certaine mesure μ ; mais alors pour toute fonction $f \in C_b^2$,

$$\int f \, d\mu_{n_i} \longrightarrow \int f \, d\mu$$

Il en résulte que :

$$\forall f \in F, \int f d\mu_n \longrightarrow \int f d\mu.$$

Nous savons, puisque F^* est C-déterminante par hypothèse, que F est C-déterminante ; par conséquent,

$$\mu_n \longrightarrow \mu \text{ faiblement à distance finie. } \blacksquare$$

La classe F^* étant C-déterminante sur M_b^{2+} , on peut, au vu du corollaire p. 365 de [20], énoncer.

Corollaire III.6.- Pour que $F^+ = \{h(x) \cdot g(y) ; h \in C_b^+, g \in C_b^+\}$ soit $\bar{C}$ -déterminante sur M^{2+} , il suffit que $F^{*+} = \{h(x) \cdot g(y) ; h \in C^+, g \in C^+\}$ soit $\bar{C}$ -déterminante sur M^{2+} .

Théorème III.7.- Si (X, d) , en plus de sa séparabilité, est complet, alors la classe $F^{*+} = \{f(x) g(y) ; f \in C^+, g \in C^+\}$ est $\bar{C}$ -déterminante sur M_b^{2+} .

Démonstration : Soit (μ_n) une suite d'éléments de M_b^{2+} telle que :

$$\forall h \in F^{*+}, \left(\int h d\mu_n \right) \text{ converge.}$$

Il s'agit de montrer qu'il existe $\mu_0 \in M_b^{2+}$ et (μ_n) converge vers μ_0 faiblement.

D'après des raisons données au théorème III.4., on peut considérer X^2 comme sous-espace topologique d'un espace compact K^2 métrisable. La tribu borélienne de X^2 est alors :

$$B^2 = \{A \cap X^2 ; A \in B_{K^2}\}$$

où B_{K^2} est la tribu borélienne de K^2 .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on prolonge μ_n en une mesure $\bar{\mu}_n$ sur $(K^2, \mathcal{B}_{K^2})$ en posant :

$$\bar{\mu}_n(A) = \mu_n(A \cap X^2) \quad , \quad A \in \mathcal{B}_{K^2} \quad .$$

Comme X^2 est complet, c'est un G_δ de K^2 (intersection dénombrable d'ouverts), donc une partie mesurable de K^2 .

De la compacité de K^2 , on déduit que $(\bar{\mu}_n)$ est relativement compacte car :

$$\sup_n \bar{\mu}_n(K^2) < +\infty \quad .$$

Une suite partielle $(\bar{\mu}_{n_i})$ converge donc faiblement vers une mesure $\bar{\mu}_0$ sur $(K^2, \mathcal{B}_{K^2})$; si $f(x) g(y)$ est le produit de deux fonctions positives continues sur K , $f'(x) g'(y)$ produit de leurs restrictions à X est un élément de F^{*+} : on en tire que :

$$\left\{ \int_{K^2} f(x) g(y) \bar{\mu}_n(dx, dy) \right\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ \int_{X^2} f'(x) g'(y) \mu_n(dx, dy) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

converge et

$$\int_{K^2} f(x) g(y) \bar{\mu}_{n_i}(dx, dy) \longrightarrow \int_{K^2} f(x) g(y) \bar{\mu}_0(dx, dy) \quad .$$

Par conséquent :

$$\int_{K^2} f(x) g(y) \bar{\mu}_n(dx, dy) \longrightarrow \int_{K^2} f(x) g(y) \bar{\mu}_0(dx, dy)$$

et puisque la classe des fonctions de la forme $f(x) g(y)$ (f et g continues positives sur K) est C -déterminante, $(\bar{\mu}_n)$ converge vers $\bar{\mu}_0$ faiblement dans K^2 : la démonstration se fait comme au théorème III.4.

$\bar{\mu}_0$ prolonge une mesure μ_0 sur X^2 c'est-à-dire :

$$\bar{\mu}_0(A) = \mu_0(A \cap X^2) \quad \forall A \in \mathcal{B}_{K^2} ; \quad X^2 \in \mathcal{B}_{K^2} \quad .$$

Soit C un fermé de X^2 ; il existe un fermé F de K^2 tel que :

$$C = F \cap X^2$$

or $\limsup_n \bar{\mu}_n(F) \leq \bar{\mu}_0(F)$ équivaut à :

$$\limsup_n \mu_n(C) \leq \mu_0(C) .$$

Il reste enfin à prouver que $\lim \mu_n(X^2) = \mu_0(X^2)$.

Comme X^2 est un G_δ , considérons une suite d'ouverts (O_k) de K^2 telle que :

$$O_k \downarrow X^2$$

$$\limsup_n \bar{\mu}_n(O_k^c) \geq \bar{\mu}_0(O_k^c)$$

Donc $\mu_0(K^2 - X^2) = 0$, $\mu_0(X^2) = \bar{\mu}_0(X^2)$ et $\lim_n \bar{\mu}_n(X^2) = \lim_n \mu_n(X^2) = \mu_0(X^2)$.

Corollaire des théorèmes III.6. et III.7. - Si (X, d) est séparable complet, alors la classe :

$$F = \{f(x) \ g(y) \ ; \ f \in C_b^+ , g \in C_b^+\}$$

est $\bar{C}$ -déterminante sur M^{2+} .

Démonstration : C'est une conséquence immédiate des théorèmes III.6. et III.7. ■

Théorème III.8. - Soient (μ_n) et (ν_n) deux suites d'éléments de M , qui convergent faiblement à distance finie respectivement vers μ_0 et ν_0 .

Si X est polonais alors :

$(\mu_n \otimes \nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement à distance finie vers $\mu_0 \otimes \nu_0$ dans M^2 .

Preuve : La classe F est déterminante et, pour tout $f \in F$:

$$\int f d\mu_n \otimes \nu_n \longrightarrow \int f d\mu_0 \otimes \nu_0 .$$

Il suffit donc de démontrer que $(\mu_n \otimes \nu_n)_{n \in \mathbb{N}}^*$ est relativement compacte ; or, $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}^*$ et $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}^*$ sont relativement compactes.

En vertu du théorème II.4., on a :

$$* \quad \forall B \in \mathcal{B}_b \quad \sup_n |\mu_n| (B) < +\infty \quad \text{et} \quad \sup_n |\nu_n| (B) < +\infty$$

** $\forall B \in \mathcal{B}_b$, B fermé, $\forall \varepsilon > 0$, il existe un compact $K_\varepsilon \subseteq B$ tel que :

$$\sup_n |\mu_n| (B - K_\varepsilon) < \varepsilon \quad \text{et} \quad \sup_n |\nu_n| (B - K_\varepsilon) < \varepsilon .$$

Mais alors, comme pour tout n , $|\mu_n| \otimes |\nu_n| = |\mu_n \otimes \nu_n|$

(propriété III.3.) : $\forall B \in \mathcal{B}_b$, $\sup_n |\mu_n \otimes \nu_n| (B \times B) < +\infty$.

D'autre part, $B \in \mathcal{B}_b$, B fermé étant fixé, ainsi que $\varepsilon > 0$, soit K_ε un compact tel que :

$$\sup_n |\mu_n| (B - K_\varepsilon) < \varepsilon/2 \sup_n |\mu_n| (B)$$

et
$$\sup_n |\nu_n| (B - K_\varepsilon) < \varepsilon/2 \sup_n |\mu_n| (B)$$

Comme : $B^2 - K_\varepsilon^2 = [B \times (B - K_\varepsilon)] \cup [(B - K_\varepsilon) \times B]$, on a :

$$|\mu_n \otimes \nu_n| (B^2 - K_\varepsilon^2) \leq |\mu_n| (B) |\nu_n| (B - K_\varepsilon) + |\mu_n| (B - K_\varepsilon) |\nu_n| (B) < \varepsilon .$$

Ce qui montre que la suite $(\mu_n \otimes \nu_n)$ est relativement compacte. ■

Remarque : Dans le cas où (μ_n) et (ν_n) sont des lois de probabilité, on retrouve partiellement un résultat classique : " $(\mu_n \otimes \nu_n)$ converge faiblement vers $\mu \otimes \nu$ si et seulement si (μ_n) converge faiblement vers μ et (ν_n) converge faiblement vers ν " [7 p. 21] . L'hypothèse de complétude de l'espace X est surtout destinée à permettre l'utilisation d'un critère pratique de relative compacité sur M .

Cependant, contrairement à ce qu'on pourrait attendre au vu du théorème 3.2. [7 p. 21] la réciproque est fautive, comme le montre le contre-exemple suivant :

Contre-exemple :

Soit $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans M qui converge vers 0 faiblement à distance finie.

Soit $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite relativement compacte par exemple :

$$\begin{aligned} \mu_n &= \delta_{x_0} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \mu_n &= -\delta_{x_0} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{aligned}$$

Pour toute fonction h de C_b^2 , on a :

$$\int_{X^2} h(x,y) \mu_n \otimes \nu_n(dx,dy) = \int_X \pm h(x_0,y) \nu_n(dy) \longrightarrow 0 .$$

Donc $(\mu_n \otimes \nu_n)$ converge faiblement à distance finie vers 0 dans M^2 sans pour autant que $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ toutes les deux convergent faiblement à distance finie vers 0 dans M .

D'ailleurs $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est même pas convergente . ■

CHAPITRE IV

CONVERGENCE EN MOYENNE QUADRATIQUE DE MESURES ALEATOIRES D'ORDRE DEUX.

La topologie qu'on considère sur M est toujours la topologie faible à distance finie.

On note $\mathcal{B}_M$ (resp. $\mathcal{B}_{M^+}$) la tribu borélienne de M (resp. de M^+). J. GEFFROY, P. QUIDEL et H. ZEBoulON dans [1], [2] et [9] ont étudié les convergences en probabilité, presque sûre et en loi de mesures aléatoires positives. Ce travail nous suggère d'aborder l'étude de la convergence en moyenne quadratique. Le moment d'ordre deux d'une mesure aléatoire $\mu^\bullet$ est défini, de façon classique dans [10] ou [11] par exemple, comme une mesure $E(\mu^\bullet \otimes \mu^\bullet)$ sur un espace produit. Nous utilisons cette notion pour définir et étudier la convergence d'une suite de mesures aléatoires à signe. Avant de passer à la convergence proprement dite, nous abordons quelques propriétés des mesures aléatoires que nous utiliserons.

A - PRELIMINAIRES A L'ETUDE DE LA CONVERGENCE EN MOYENNE QUADRATIQUE.

Pour tout borélien borné $B \in \mathcal{B}_b$, on note ϕ_B l'application :

$$M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\mu \longrightarrow \phi_B(\mu) = \mu(B)$$

$\mathbb{R}$ étant muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}_\mathbb{R}$, $\mathcal{B}_M$ contient la tribu engendrée sur M par la famille d'applications $\{\phi_B ; B \in \mathcal{B}_b\}$ [cf. 12]. $\mathcal{B}_{M^+}$ est la tribu engendrée par les applications $\{\phi_B ; B \in \mathcal{B}_b\}$ restreintes à M^+ : [5] et [9].

Définition IV.1.-

Soit (Ω, A, P) un espace probabilisé fixé. On appelle :

- 1) mesure aléatoire positive, toute application mesurable $\mu^\bullet$ de (Ω, A) dans (M^+, B_{M^+}) .
- 2) mesure aléatoire à signe toute application mesurable $\mu^\bullet$ de (Ω, A) dans (M, B_M) .

Remarques :

1) Compte tenu de la définition des applications $\{\phi_B ; B \in B_B\}$, une application $\mu^\bullet$ de Ω dans M^+ est une mesure aléatoire positive si et seulement si, pour tout borélien borné B , $\mu^\bullet(B)$ est une variable aléatoire réelle positive.

2) Si $\mu^\bullet$ et $\nu^\bullet$ sont deux mesures aléatoires positives définies sur le même espace probabilisé (Ω, A, P) , l'application $\theta^\bullet = \mu^\bullet - \nu^\bullet$ est une mesure aléatoire à signe définie sur (Ω, A, P) .

3) Réciproquement, soit $\mu^\bullet$ une mesure aléatoire à signe définie sur (Ω, A, P) . Pour tout $\omega \in \Omega$, appelons $\mu^{+\omega}$ et $\mu^{-\omega}$ les composantes de Hahn-Jordan à distance finie de μ^ω [14 p. 2] c'est-à-dire $\mu^\omega = \mu^{+\omega} - \mu^{-\omega}$: alors les applications $\mu_+^\bullet$ et $\mu_-^\bullet$ sont des mesures aléatoires positives et $\mu^\bullet$ s'écrit sous la forme :

$$\mu^\bullet = \mu_+^\bullet - \mu_-^\bullet .$$

Ces résultats figurent dans [14 théorème III p. 364].

On munit M^2 et M^{2+} de leurs tribus boréliennes B_{M^2} et $B_{M^{2+}}$.

On définit de la même façon les mesures aléatoires à signe sur $X \times X$, c'est-à-dire, les éléments aléatoires de M^2 et M^{2+} .

Dans la suite, l'expression mesure aléatoire sans autre précision désignera une mesure aléatoire à signe.

Propriété IV.1. - Si $\mu^\bullet$ et $\nu^\bullet$ sont deux mesures aléatoires sur $(X, \mathcal{B})$, alors $\mu^\bullet \otimes \nu^\bullet$ est une mesure aléatoire sur $(X^2, \mathcal{B}^2)$.

Démonstration :

* Supposons d'abord que $\mu^\bullet$ et $\nu^\bullet$ soient deux mesures aléatoires positives.

Posons $\hat{\mathcal{C}} = \{A \times B ; A \in \mathcal{B}_b, B \in \mathcal{B}_b\}$

$\hat{\mathcal{C}}$ est un semi-anneau et l'anneau A^* engendré par $\hat{\mathcal{C}}$ est constitué des réunions finies d'éléments deux à deux disjoints de $\hat{\mathcal{C}}$ [16 p. 16 par exemple].

Il est immédiat que, pour tout élément $B \in A^*$, $\mu^\bullet \otimes \nu^\bullet(B)$ est une variable aléatoire positive.

De plus, A^* engendre le σ -anneau $\mathcal{B}_b^2$: soit $\mathcal{D}$ la classe des boréliens bornés B tels que $\mu^\bullet \otimes \nu^\bullet(B)$ est une variable aléatoire positive ; d'après un théorème voisin du théorème des classes monotones [5 p. 8], pour démontrer que $\mathcal{D} = \mathcal{B}_b^2$, il suffit de vérifier que :

- a) si $(B_n) \subset \mathcal{D}$ et $B_n \uparrow B$, alors $B \in \mathcal{D}$
- b) si $(B_n) \subset \mathcal{D}$ et $B_n \uparrow B \in \mathcal{B}_b^2$, alors $B \in \mathcal{D}$.

Ce qui est immédiat ; par conséquent, comme $\mathcal{B}_{M^{2+}}$ est la tribu engendrée par les applications $\{\phi_B ; B \in \mathcal{B}_b^2\}$ restreintes à M^{2+} , $\mu^\bullet \otimes \nu^\bullet$ est une variable aléatoire positive définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeur dans $(M^{2+}, \mathcal{B}_{M^{2+}})$.

** Maintenant, si $\mu^\bullet$ et $\nu^\bullet$ sont deux mesures aléatoires, $\mu^\bullet \ominus \nu^\bullet$ est une mesure aléatoire, comme différence de deux mesures aléatoires positives.

$$\mu^\bullet \ominus \nu^\bullet = (\mu_+^\bullet \ominus \nu_+^\bullet + \mu_-^\bullet \ominus \nu_-^\bullet) - (\mu_+^\bullet \ominus \nu_-^\bullet + \mu_-^\bullet \ominus \nu_+^\bullet) .$$

Définition IV.2.- On dit qu'une mesure aléatoire est d'ordre 2 si elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

- 1) $\forall B \in \mathcal{B}_b^2$, $E\{|\mu^\bullet \ominus \mu^\bullet| (B)\} < +\infty$
- 2) $\forall B \in \mathcal{B}_b$, $E\{|\mu^\bullet|^2 (B)\} < +\infty$.

Les conditions 1) et 2) sont effectivement équivalentes : la condition 2) est nécessaire pour la réalisation de 1) ; d'autre part, elle est suffisante puisque tout $B \in \mathcal{B}_b^2$ peut être contenu dans un pavé mesurable borné $C \times C$ et que : $|\mu^\bullet \ominus \mu^\bullet| = |\mu^\bullet| \ominus |\mu^\bullet|$.

Propriété IV.2.- Notons L_M^2 l'ensemble des mesures aléatoires d'ordre 2. L_M^2 est un espace vectoriel réel.

Démonstration : L'ensemble des mesures aléatoires $F(\Omega, M)$ est un espace vectoriel réel.

Il suffit de montrer que L_M^2 est un sous-espace vectoriel de $F(\Omega, M)$.

1) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\mu^\bullet \in L_M^2$: il est évident que $\alpha\mu^\bullet \in L_M^2$.

2) Soient $\mu^\bullet$ et $\nu^\bullet$ deux mesures aléatoires d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \forall B \in \mathcal{B}_b : E\{|\mu^\bullet + \nu^\bullet|^2(B)\} &\leq E\{(|\mu^\bullet| + |\nu^\bullet|)^2(B)\} = E\{|\mu^\bullet|^2(B)\} + E\{|\nu^\bullet|^2(B)\} \\ &\quad + 2E\{|\mu^\bullet|(B) |\nu^\bullet|(B)\} \end{aligned}$$

Or d'après l'inégalité de Schwarz :

$$E^2\{|\mu^\bullet|(B)|\nu^\bullet|(B)\} \leq E\{|\mu^\bullet|^2(B)\} E\{|\nu^\bullet|^2(B)\} .$$

On a donc : $\forall B \in \mathcal{B}_b \quad E\{|\mu^\bullet + \nu^\bullet|^2(B)\} < +\infty.$

Par conséquent $\mu^\bullet + \nu^\bullet \in L_M^2$.

Propriété IV.3.- Soient $\mu^\bullet$ et $\nu^\bullet$ deux mesures aléatoires du 2^{ème} ordre ; alors la fonction d'ensemble définie par $\mu\nu = E(\mu^\bullet \otimes \nu^\bullet)$ est un élément de M^2 .

En particulier, $\mu^2 = E(\mu^\bullet \otimes \mu^\bullet)$ est un élément non nécessairement positif de M^2 .

Démonstration :

* Pour tout $B \in \mathcal{B}_b^2$: $\mu^\bullet \otimes \nu^\bullet(B) = \mu_+^\bullet \otimes \nu_+^\bullet(B) + \mu_-^\bullet \otimes \nu_-^\bullet(B) - \mu_+^\bullet \otimes \nu_-^\bullet(B) - \mu_-^\bullet \otimes \nu_+^\bullet(B)$.

L'inégalité de Schwarz donne, pour tout pavé mesurable borné $C \times C$ contenant B :

$$E^2\{\mu_+^\bullet(C) \nu_+^\bullet(C)\} < E\{\mu_+^\bullet(C)^2\} E\{\nu_+^\bullet(C)^2\} < E\{|\mu^\bullet|^2(C)\} E\{|\nu^\bullet|^2(C)\} < +\infty$$

De même, $E\{\mu_-^\bullet(C) \nu_-^\bullet(C)\}$, $E\{\mu_+^\bullet(C) \nu_-^\bullet(C)\}$, $E\{\mu_-^\bullet(C) \nu_+^\bullet(C)\}$ sont finis.

Ce qui montre que : $\forall B \in \mathcal{B}_b^2 : |E\{\mu^\bullet \otimes \nu^\bullet(B)\}| < +\infty$.

Pour montrer que $\mu\nu$ est σ -additif sur $\mathcal{B}_b^2$, il suffit de le vérifier pour $\mu^+ \nu^+ = E\{\mu_+^\bullet \otimes \nu_+^\bullet\}$ par exemple. C'est alors une simple conséquence du théorème de convergence monotone.

** Montrons que $\mu^2 = E(\mu^\bullet \otimes \mu^\bullet)$ n'est pas toujours un élément positif de M^2 .

Prenons $\mu^\omega = \mu \quad \forall \omega \in \Omega$ où μ est une mesure à signe non dégénérée.

Soit (D^+, D^-) la décomposition de Hahn-Jordan de X associée à μ .

$$\text{Comme } E(\mu^\bullet \otimes \mu^\bullet) = E(\mu \otimes \mu) = \mu \otimes \mu$$

$$\text{On a } \mu^2(D^+ \times D^-) = \mu \otimes \mu (D^+ \times D^-) = \mu(D^+) \mu(D^-) < 0 \text{ car } \mu(D^-) < 0.$$

Propriété IV.4. - Soient $\mu^\bullet$ et $\nu^\bullet$ deux mesures aléatoires du second ordre positives, et $g(x,y)$ une fonction $\mu\nu$ -intégrable (ou mesurable positive) :

$$\int_X^2 g(x,y) \mu\nu(dx, dy) = E\left\{ \int_X^2 g(x,y) \mu^\bullet \otimes \nu^\bullet (dx, dy) \right\}.$$

Démonstration :

* Si $g(x,y) = 1_B(x,y)$ avec $B \in \mathcal{B}_b^2$, $E\{\mu^\bullet \otimes \nu^\bullet(B)\} = \mu\nu(B)$ par définition.

** Si $g(x,y)$ est une fonction mesurable étagée, la propriété IV.4. est donc vérifiée, par linéarité de l'espérance mathématique et de l'intégrale.

*** Supposons que g soit mesurable positive et que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit une suite de fonctions mesurables étagées telle que $g_n \uparrow g$: en appliquant trois fois le théorème de la convergence monotone, on obtient :

$$\begin{aligned} E\left\{ \int g(x,y) \mu^\bullet \otimes \nu^\bullet (dx, dy) \right\} &= E\left\{ \lim_n \uparrow \int g_n(x,y) \mu^\bullet \otimes \nu^\bullet (dx, dy) \right\} \\ &= \lim_n \uparrow E\left\{ \int g_n(x,y) \mu^\bullet \otimes \nu^\bullet (dx, dy) \right\} \\ &= \lim_n \uparrow \int g_n(x,y) \mu\nu(dx, dy) = \int g(x,y) \mu\nu(dx, dy). \end{aligned}$$

**** Enfin, si g est $\mu\nu$ -intégrable, on pose $g = g^+ - g^-$ et on raisonne comme en *** avec g^+ et g^- . ■

Propriété IV.5. - Soient $\mu^\bullet$ et $\nu^\bullet$ deux mesures aléatoires du second ordre, et $g(x,y)$ une fonction intégrable par rapport à la mesure : $[\mu\nu] = \mu_+ \nu_+ + \mu_- \nu_- + \mu_+ \nu_- + \mu_- \nu_+$.

$$\text{Alors} \quad E\left\{ \int g(x,y) \mu^\bullet \otimes \nu^\bullet(dx,dy) \right\} = \int g(x,y) \mu\nu(dx,dy)$$

Remarque :

La mesure $[\mu\nu] = \mu^+ \nu^+ + \mu^- \nu^- + \mu^+ \nu^- + \mu^- \nu^+$ est en général différente de la mesure $|\mu\nu|$, comme le montre l'exemple suivant :

Considérons l'espace probabilisé $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$ où :

- $\mathcal{B}_{[0,1]}$ est la tribu borélienne de $[0,1]$.
- λ est la probabilité uniforme sur $\mathcal{B}_{[0,1]}$.

On définit deux mesures aléatoires $\mu^\bullet$ et $\nu^\bullet$ sur $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$ par :

$$\begin{cases} \mu^\omega = \delta_0 & \text{si } \omega \in [0, \frac{1}{2}[\\ \mu^\omega = -\delta_0 & \text{si } \omega \in [\frac{1}{2}, 1] \\ \nu^\omega = \delta_0 & \text{si } \omega \in [0, 1] \end{cases}$$

où δ_0 est la mesure de Dirac au point 0.

Soit B un élément de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$

$$\text{a) } * \quad \text{si } (0,0) \notin B : E(\mu^\bullet \otimes \nu^\bullet(B)) = 0$$

$$** \quad \text{si } (0,0) \in B : \mu^\omega \otimes \nu^\omega(B) = 1 \quad \forall \omega \in [0, \frac{1}{2}[$$

$$\mu^\omega \otimes \nu^\omega(B) = -1 \quad \forall \omega \in [\frac{1}{2}, 1] .$$

Par conséquent : $E(\mu^\bullet \otimes \nu^\bullet) \equiv 0$ donc $\mu\nu = 0$.

On en tire $|\mu\nu| \equiv 0$ donc $(\mu\nu)^+ = 0$ et $(\mu\nu)^- = 0$.

b) Calcul de $\mu^+ \nu^+$; $\mu^+ \nu^-$, $\mu^- \nu^+$ et $\mu^- \nu^-$.

* $E(\mu_+^\bullet \otimes \nu_+^\bullet(B)) = 0$ si $(0,0) \notin B$

** Si $(0,0) \in B$: $\mu_+^\omega \otimes \nu_+^\omega(B) = 1$ si $\omega \in [0, \frac{1}{2}[$

$\mu_+^\omega \otimes \nu_+^\omega(B) = 0$ si $\omega \in [\frac{1}{2}, 1]$

On trouve $E(\mu_+^\bullet \otimes \nu_+^\bullet(B)) = \frac{1}{2}$.

De même si $(0,0) \in B$ on trouve :

$$E(\mu_-^\bullet \otimes \nu_-^\bullet(B)) = E(\mu_+^\bullet \otimes \nu_-^\bullet(B)) = 0$$

$$E(\mu_-^\bullet \otimes \nu_+^\bullet(B)) = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que $|\mu\nu| \neq [\mu\nu]$.

En réalité, on a $|\mu\nu| \ll [\mu\nu]$, résultat qui n'est pas en conflit avec la propriété IV.5.

Démonstration de la propriété IV.5.-

La propriété découle directement de la propriété IV.4.

Propriété IV.6.- Si $\mu^\bullet$ et $\nu^\bullet$ sont deux mesures aléatoires d'ordre deux ; on a :

$$(\mu + \nu)^2 = \mu^2 + \mu\nu + \nu\mu + \nu^2.$$

Démonstration : Soient h et g deux éléments positifs de C_b ;
par des applications successives du théorème de Fubini et de la propriété IV.5.,
on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{X^2} h(x) g(y) (\mu + \nu)^2 (dx, dy) &= \\ E\left\{ \int h(x) g(y) (\mu^\bullet + \nu^\bullet) \otimes (\mu^\bullet + \nu^\bullet) [dx, dy] \right\} &= E\{ [\mu^\bullet(h) + \nu^\bullet(h)] [\mu^\bullet(g) + \nu^\bullet(g)] \} = \\ E\{\mu^\bullet(h) \mu^\bullet(g)\} + E\{\mu^\bullet(h) \nu^\bullet(g)\} + E\{\nu^\bullet(h) \mu^\bullet(g)\} + E\{\nu^\bullet(h) \nu^\bullet(g)\} &= \\ E\left\{ \int h(x) g(y) \mu^\bullet \otimes \mu^\bullet (dx, dy) \right\} + E\left\{ \int h(x) g(y) \mu^\bullet \otimes \nu^\bullet (dx, dy) \right\} + \\ E\left\{ \int h(x) g(y) \nu^\bullet \otimes \mu^\bullet (dx, dy) \right\} + E\left\{ \int h(x) g(y) \nu^\bullet \otimes \nu^\bullet (dx, dy) \right\} &= \\ \int h(x) g(y) \mu^2(dx, dy) + \int h(x) g(y) \mu\nu(dx, dy) + \int h(x) g(y) \nu\mu(dx, dy) + \int h(x) g(y) \nu^2(dx, dy) &= \\ \int h(x) g(y) [\mu^2 + \mu\nu + \nu\mu + \nu^2] (dx, dy) . \end{aligned}$$

Comme la famille $F = \{h(x) \cdot g(y) ; h \in C_b, g \in C_b\}$ est
déterminante sur M^2 (théorème III.2.) on en déduit que :

$$(\mu + \nu)^2 = \mu^2 + \mu\nu + \nu\mu + \nu^2 . \quad \blacksquare$$

B - ETUDE DE LA CONVERGENCE EN MOYENNE QUADRATIQUE DE MESURES ALEATOIRES D'ORDRE 2.

Nous reprenons ci-dessous la définition classique du moment
d'ordre deux d'une mesure aléatoire : [5], [10], [11].

Définition IV.3.a. - On appellera moment d'ordre deux de $\mu^\bullet \in L_M^2$
la mesure $\mu^2 = E(\mu^\bullet \otimes \mu^\bullet)$ élément de M^2 .

Nous introduisons ensuite la notion de convergence en moyenne
quadratique des mesures aléatoires d'ordre deux :

Définition IV.3. b .- Une suite $(\mu_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de L_M^2 converge en moyenne quadratique vers une mesure aléatoire $\mu^\bullet$ d'ordre deux si et seulement si la suite de mesures de M^2 :

$$\{(\mu_n - \mu)^\bullet\}_{n \in \mathbb{N}} = (E\{(\mu_n^\bullet - \mu^\bullet) \otimes (\mu_n^\bullet - \mu^\bullet)\})_{n \in \mathbb{N}}$$

converge vers la mesure 0 faiblement à distance finie.

Cette définition nous permet d'énoncer immédiatement une condition suffisante de convergence en moyenne quadratique.

Propriété IV.7.- Une condition suffisante pour qu'une suite $(\mu_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de L_M^2 converge en moyenne quadratique vers $\mu^\bullet \in L_M^2$ est que :

$(\mu_n \mu)_n$ et $(\mu_n \mu_m)_{n,m}$ convergent faiblement à distance finie vers $\mu^2 = E(\mu^\bullet \otimes \mu^\bullet)$.

Démonstration :

On a : $(\mu_n - \mu)^\bullet{}^2 = \mu_n^\bullet{}^2 - \mu_n^\bullet \mu^\bullet - \mu^\bullet \mu_n^\bullet + \mu^\bullet{}^2$ [propriété IV.6] .

On peut énoncer un théorème genre porte-manteau pour la convergence en moyenne quadratique qui justifie par ailleurs la définition IV.3. b.

Théorème IV.1.- Soit $(\mu_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures aléatoires du second ordre positives ; les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $(\mu_n - \mu)^\bullet{}^2$ converge faiblement à distance finie vers 0 dans M^2 .

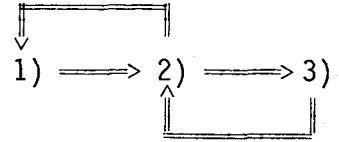
2) $\forall f \in C_b$, $\int f(x) \mu_n^\bullet(dx) \xrightarrow{m.q.} \int f(x) \mu^\bullet(dx)$

3) $\forall A \in \mathcal{B}_b$ tel que $\mu^\bullet(\partial A) = 0$ p.s. , $\mu_n^\bullet(A) \xrightarrow{m.q.} \mu^\bullet(A)$.



Démonstration :

Elle se fera selon le schéma suivant :



1) $\implies$ 2)

Soit h une fonction continue, bornée et à support borné sur X ;
comme la fonction $h(x) h(y)$ est intégrable par rapport à la mesure
 $[(\mu_n - \mu)^2]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on peut utiliser la propriété IV.5. ; on obtient :

$$E\left\{\int_{X^2} h(x) h(y) [(\mu_n^\bullet - \mu^\bullet) \otimes (\mu_n^\bullet - \mu^\bullet)](dx, dy) = E\left\{\left[\int_X h(x) \mu_n^\bullet(dx) - \int_X h(x) \mu^\bullet(dx)\right]^2\right\} = \int_{X^2} h(x) h(y) (\mu_n - \mu)^2(dx, dy) .$$

Par conséquent, si $\{(\mu_n - \mu)^2\}$ converge faiblement à distance finie vers 0, $\{\int_X h(x) \mu_n^\bullet(dx)\}$ converge en moyenne quadratique vers

$$\int_X h(x) \mu^\bullet(dx) .$$

2) $\implies$ 3) .

On procède comme dans la démonstration du théorème du porte-manteau.

a) * Soit F un fermé borné :

Pour $k \neq 0$ posons $F^{1/k} = \{x \in X : d(x, F) < \frac{1}{k}\}$

On a : $\mu^\bullet(F^{1/k}) \in L^2(\Omega, A, P)$

$$\mu^\bullet(F^{1/k}) \leq \mu^\bullet(F^1) \quad \forall k \geq 1 .$$

Puisque $F^{1/k} \downarrow F$, on a : $\mu^\bullet(F^{1/k}) \downarrow \mu^\bullet(F)$.

Le théorème de la convergence dominée dans $L^2(\Omega, A, P)$ montre que :

$$\mu^\bullet(F) \in L^2(\Omega, A, P)$$

et $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\mu^\bullet(F^{1/k}) - \mu^\bullet(F)\|_2 = 0$

en désignant par $||\cdot||_2$ la norme de la convergence en moyenne quadratique.

$\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ étant fixé, soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$||\mu^\bullet(F^{1/k}) - \mu^\bullet(F)||_2 < \varepsilon .$$

A ce choix de k , on associe une fonction continue f_k définie comme suit :

$$\begin{cases} 0 \leq f_k \leq 1 \\ f_k(x) = 1 & \forall x \in F \\ f_k(x) = 0 & \forall x \in (F^{1/k})^c \end{cases}$$

Le support de la fonction f_k est contenu dans le borélien borné $F^{1/k}$ et comme $0 \leq f_k \leq 1$, il est clair que :

$$\mu^\bullet(F) \leq \mu^\bullet(f_k) \leq \mu^\bullet(F^{1/k})$$

ce qui donne : $||\mu^\bullet(f_k) - \mu^\bullet(F)||_2 \leq ||\mu^\bullet(F) - \mu^\bullet(F^{1/k})||_2 \leq \varepsilon$

et, pour tout n : $||\mu_n^\bullet(F)||_2 \leq ||\mu_n^\bullet(f_k)||_2 \leq ||\mu_n^\bullet(f_k) - \mu^\bullet(f_k)||_2 + ||\mu^\bullet(f_k)||_2$
 $\leq ||\mu_n^\bullet(f_k) - \mu^\bullet(f_k)||_2 + ||\mu^\bullet(F)||_2 + \varepsilon$

Donc : $0 \leq \limsup_n ||\mu_n^\bullet(F)||_2 \leq ||\mu^\bullet(F)||_2 + \varepsilon$

Et, puisque ε est arbitraire :

$$\limsup_n ||\mu_n^\bullet(F)||_2 \leq ||\mu^\bullet(F)||_2 .$$

** Soit O un ouvert borné non vide :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \text{ posons : } O^{-1/k} = \{x \in O : d(x, O^c) \geq \frac{1}{k}\}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^* , \mu^\bullet(O^{-1/k}) \leq \mu^\bullet(O) \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P) .$$

Comme $0^{-1/k} \uparrow 0$, la suite de v.a.r. $\{\mu^\bullet(0^{-1/k})\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ est positive et croissante et $\mu^\bullet(0^{-1/k}) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \mu^\bullet(0)$.

On a, d'après le théorème de la convergence monotone dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\mu^\bullet(0^{-1/k}) - \mu^\bullet(0)\|_2 = 0.$$

Remarquons que, pour k assez grand, $0^{-1/k}$ n'est pas vide.

$\varepsilon > 0$ étant fixé, soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\|\mu^\bullet(0^{-1/k})\|_2 \geq \|\mu^\bullet(0)\|_2 - \varepsilon.$$

A un tel choix de k , on associe une fonction f_k continue ainsi définie :

$$\begin{cases} 0 \leq f_k \leq 1 \\ f_k(x) = 0 \quad \text{sur } 0^c \\ f_k(x) = 1 \quad \text{sur } 0^{-1/k} \end{cases}.$$

Le support de f_k est contenu dans le borélien borné 0 et comme $0 \leq f_k \leq 1$, il est clair que :

$$\mu^\bullet(0) \geq \mu^\bullet(f_k) \geq \mu^\bullet(0^{-1/k}).$$

Ce qui donne :

$$\|\mu_n^\bullet(0)\|_2 \geq \|\mu^\bullet(f_k)\|_2 \quad \text{et} \quad \|\mu^\bullet(f_k)\|_2 \geq \|\mu^\bullet(0^{-1/k})\|_2 \geq \|\mu^\bullet(0)\|_2 - \varepsilon$$

On peut donc écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \|\mu^\bullet(0)\|_2 - \varepsilon &\leq \|\mu^\bullet(f_k)\|_2 \leq \|\mu^\bullet(f_k) - \mu_n^\bullet(f_k)\|_2 + \|\mu_n^\bullet(f_k)\|_2 \\ &\leq \|\mu^\bullet(f_k) - \mu_n^\bullet(f_k)\|_2 + \|\mu_n^\bullet(0)\|_2 \end{aligned}$$

Ce qui fournit immédiatement :

$$\liminf_n ||\mu_n^\bullet(0)||_2 \geq ||\mu^\bullet(0)||_2$$

*** Si $A \in \mathcal{B}_b$ est tel que : $||\mu^\bullet(\partial A)||_2 = 0$, on a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} ||\mu_n^\bullet(A)||_2 = ||\mu^\bullet(A)||_2 .$$

b) * Soit F un fermé borné ; $\varepsilon > 0$ étant fixé , il existe :

un entier k tel que : $P\{|\mu^\bullet(f_k) - \mu^\bullet(F)| < \frac{\varepsilon}{2}\} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ et

un entier n tel que : $P\{|\mu_n^\bullet(f_k) - \mu^\bullet(f_k)| < \frac{\varepsilon}{2}\} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$.

La réalisation des deux événements $\{|\mu^\bullet(f_k) - \mu^\bullet(F)| < \frac{\varepsilon}{2}\}$ et $\{|\mu_n^\bullet(f_k) - \mu^\bullet(f_k)| < \frac{\varepsilon}{2}\}$ donne :

$$\mu_n^\bullet(F) \leq \mu_n^\bullet(f_k) \leq |\mu_n^\bullet(f_k) - \mu^\bullet(f_k)| + \mu^\bullet(f_k) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \mu^\bullet(F) + \frac{\varepsilon}{2} ,$$

ce qui fournit, pour n assez grand :

$$P\{\mu_n^\bullet(F) \leq \mu^\bullet(F) + \varepsilon\} \geq 1 - \varepsilon .$$

** De même, pour un ouvert borné O et n assez grand, on établit facilement que : $P\{\mu_n^\bullet(0) \geq \mu^\bullet(0) - \varepsilon\} \geq 1 - \varepsilon$.

*** Soit A un borélien borné tel que : $\mu^\bullet(\partial A) = 0$ p.s.

On choisit un fermé F et un ouvert O liés au choix de A par :

$$F = \bar{A} \quad \text{et} \quad O = \overset{\circ}{A}$$

si les deux événements $\{\mu_n^\bullet(F) \leq \mu^\bullet(F) + \varepsilon\}$ et $\{\mu_n^\bullet(0) \geq \mu^\bullet(0) - \varepsilon\}$ sont réalisés on a :

$$\mu^\bullet(A) - \varepsilon = \mu^\bullet(0) - \varepsilon \leq \mu_n^\bullet(0) \leq \mu_n^\bullet(A) \leq \mu_n^\bullet(F) \leq \mu^\bullet(F) + \varepsilon = \mu^\bullet(A) + \varepsilon .$$

Ainsi, pour n assez grand : $P\{|\mu_n^\bullet(A) - \mu^\bullet(A)| \leq \varepsilon\} \geq 1 - 2\varepsilon$.

c) Les résultats obtenus en a) et b) prouvent que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} ||\mu_n^\bullet(A) - \mu^\bullet(A)||_2 = 0 ,$$

pour tout borélien borné A tel que $\mu^\bullet(\partial A) = 0$ p.s.

3) $\implies$ 2)

Soit h une fonction continue, bornée et à support borné, fixons $\varepsilon > 0$; il existe une fonction simple $g_\varepsilon = \sum_{i=1}^k \alpha_i 1_{A_i}$ telle que :
 $\sup_{x \in X} |h(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon$, h et g_ε étant nulles en dehors de $B = \bigcup_{i=1}^k A_i$.

Dans l'écriture de g_ε , les α_i sont des réels et les A_i ($i = 1, \dots, k$) sont des boréliens bornés, disjoints deux à deux et dont la frontière vérifie :

$$\mu^\bullet(\partial A_i) = 0 \text{ p.s.}$$

Pour la construction effective d'une telle fonction on peut se reporter par exemple à [21].

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} & ||\mu_n^\bullet(h) - \mu^\bullet(h)||_2 = \\ & = ||\int_X h(x) \mu_n^\bullet(dx) - \int_X h(x) \mu^\bullet(dx)||_2 \\ & = ||\int_X (h(x) - g_\varepsilon(x)) \mu_n^\bullet(dx) + \int_X g_\varepsilon(x) (\mu_n^\bullet - \mu^\bullet)(dx) + \int_X (g_\varepsilon(x) - h(x)) \mu^\bullet(dx)||_2 \\ & \leq \varepsilon ||\mu_n^\bullet(B)||_2 + \sum_{i=1}^k |\alpha_i| ||\mu_n^\bullet(A_i) - \mu^\bullet(A_i)||_2 + \varepsilon ||\mu^\bullet(B)||_2 . \end{aligned}$$

Donc, pour n assez grand on a :

$$||\mu_n^\bullet(h) - \mu^\bullet(h)||_2 \leq 2 \varepsilon ||\mu^\bullet(B)||_2 + \varepsilon$$

En plus, comme $||\mu^\bullet(B)||_2 < +\infty$ et que ε est arbitraire, il vient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ||\mu_n^\bullet(h) - \mu^\bullet(h)||_2 = 0.$$

2) $\implies$ 1)

Soient f et g deux éléments de C_b^+ . On a :

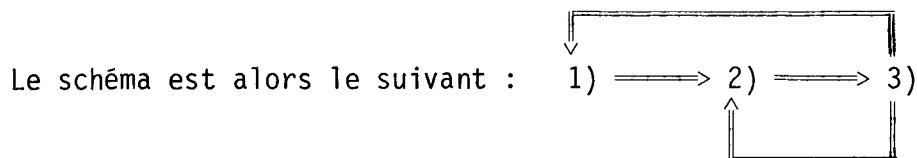
$$\begin{aligned} \left| \int_{X^2} f(x) g(y) (\mu_n - \mu)^2(dx, dy) \right| &= |E\{[\mu_n^\bullet(f(x)) - \mu^\bullet(f(x))][\mu_n^\bullet(g(y)) - \mu^\bullet(g)]\}| \\ &\leq ||\mu_n^\bullet(f) - \mu^\bullet(f)||_2 ||\mu_n^\bullet(g) - \mu^\bullet(g)||_2 \end{aligned}$$

Or, d'après le théorème III.4., la classe $F^+ = \{f(x) g(y) ; f \in C_b^+, g \in C_b^+\}$ est C -déterminante sur M^{2+} ; par conséquent, la propriété 2) implique la propriété 1).

Remarques sur le théorème IV.1.

1) La démonstration de 1) $\implies$ 2) n'utilise aucunement le fait que les mesures aléatoires sont positives ; aussi est on en droit de s'attendre à un résultat similaire pour les mesures aléatoires à signes.

2) Compte tenu de l'importance de ce théorème, nous proposons une démonstration directe de 3) $\implies$ 1) ; nous signalons qu'une démonstration directe peut aussi être obtenue en généralisant le résultat [7 p. 20] de Billingsley.



3) $\implies$ 1)

Si la condition 3) est réalisée, pour deux éléments A et B de $\mathcal{B}_b$ tels que :

$$\mu^\bullet(\partial A) = \mu^\bullet(\partial B) = 0 \text{ p.s.}$$

on a :

$$\begin{aligned} \mu_n^\bullet(A) &\xrightarrow{m.q} \mu^\bullet(A) \\ \mu_m^\bullet(B) &\xrightarrow{m.q} \mu^\bullet(B) \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après un résultat classique de convergence dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{\mu_n^\bullet \otimes \mu^\bullet(A \times B)\} = \lim_{n, m \rightarrow \infty} E\{\mu_n^\bullet \otimes \mu_m^\bullet(A \times B)\} = E\{\mu^\bullet \otimes \mu^\bullet(A \times B)\}$$

Nous montrons que la classe A_{μ^2} des pavés mesurables bornés $A \times B$ tels que :

$$\mu^\bullet(\partial A) = \mu^\bullet(\partial B) = 0 \text{ p.s.}$$

détermine la convergence faible à distance finie de (μ_n, μ) et de (μ_n, μ_m) vers μ^2 ; pour conclure il suffit alors d'appliquer la propriété IV.7..

Remarquons que si $A, B \in \mathcal{B}_b$ et $\mu^\bullet(\partial A) = \mu^\bullet(\partial B) = 0$ p.s. , alors $\mu^2[\partial(A \times B)] = 0$ à cause de l'inclusion :

$$\partial(A \times B) \subset [\partial A \times \bar{B}] \cup [\bar{A} \times \partial B]$$

La classe A_{μ^2} est manifestement stable par intersection finie.

* Soit G un ouvert borné et soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$.

Comme $\mu^2(G) < +\infty$, il existe une suite $(A_i \times B_i)_{i \in \mathbb{N}}$, de rectangles ouverts bornés μ^2 -continus et un entier $K(\varepsilon)$ tel que :

$$\mu^2\left[G - \bigcup_{i=1}^{K(\varepsilon)} (A_i \times B_i)\right] < \varepsilon.$$

Le lemme de Poincaré donne :

$$\mu_n \mu_m \left[\bigcup_{i=1}^{K(\varepsilon)} (A_i \times B_i) \right] = \sum_{k=1}^{K(\varepsilon)} (-1)^{k+1} S_k^{K(\varepsilon)}$$

$$\text{où } S_k^{K(\varepsilon)} = \sum_{i_1, \dots, i_k} \mu_n \mu_m [(A_{i_1} \times B_{i_1}) \cap \dots \cap (A_{i_k} \times B_{i_k})]$$

et où la sommation s'étend à toutes les combinaisons des $K(\varepsilon)$ premiers entiers pris k à k .

Comme la famille A_{μ^2} est stable par intersection finie :

$$\mu_n \mu_m \left[\bigcup_{i=1}^{K(\varepsilon)} (A_i \times B_i) \right] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{m \rightarrow +\infty} \mu^2 \left[\bigcup_{i=1}^{K(\varepsilon)} (A_i \times B_i) \right]$$

si bien que l'on peut écrire :

$$\mu^2(G) - \varepsilon < \mu^2 \left[\bigcup_{i=1}^{K(\varepsilon)} (A_i \times B_i) \right] = \lim_{n,m} \mu_n \mu_m \left[\bigcup_{i=1}^{K(\varepsilon)} (A_i \times B_i) \right] \leq \liminf_{n,m} \mu_n \mu_m(G)$$

et, puisque ε est arbitraire :

$$\liminf_{n,m} \mu_n \mu_m(G) \geq \mu^2(G) \quad (i)$$

** Soit 0 un point arbitraire de X et $\{B(0, r_n)\} = (B_n)$ une suite croissante de boules ouvertes de centre 0 et de rayon (r_n) telle que :

$$\begin{aligned} - \mu^*(\partial B_n) &= 0 \quad \text{p.s.} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ - X &= \bigcup_{n \geq 1} B_n \end{aligned}$$

Pour la distance d^2 introduite sur X^2 , $B_n \times B_n$ est la boule de centre $(0,0)$ et de rayon r_n .

Si F est un fermé borné de X^2 , il existe une boule $B_{n_0} \times B_{n_0}$ qui le contient ; comme

$$\lim_{n,m} \mu_n \mu_m [B_{n_0} \times B_{n_0}] = \mu^2(B_{n_0} \times B_{n_0})$$

et

$$\liminf_{n,m} \mu_n \mu_m [B_{n_0} \times B_{n_0} - F] \geq \mu^2[B_{n_0} \times B_{n_0} - F] .$$

On a :

$$\limsup_{n,m} \mu_n \mu_m(F) \leq \mu^2(F) \quad (ii)$$

De (i) et (ii) on déduit aisément que :

$$\forall C \in \mathcal{B}_b^2, \mu^2(\partial C) = 0 : \lim_{n,m} \mu_n \mu_m(C) = \mu^2(C) .$$

De même, $(\mu_n \mu)$ converge faiblement à distance vers μ^2 . ■

Nous avons déjà remarqué que, dans le théorème IV.1., l'implication 1) $\Rightarrow$ 2) est vraie pour des mesures aléatoires à signe. Par contre, pour passer de 2) à 1) nous avons utilisé le fait que la classe $F^+ = \{f(x) g(y) ; f \in C_b^+, g \in C_b^+\}$ est C -déterminante sur M^{2+} ; cette classe, semble-t-il n'est pas C -déterminante sur M^2 tout entier.

S'agissant donc de mesures aléatoires à signes, nous pouvons seulement énoncer le résultat suivant :

Théorème IV.2.- Soit $(\mu_n^\bullet)$ une suite de mesures aléatoires du second ordre qui converge en moyenne quadratique vers $\mu^\bullet$; alors, pour toute fonction f continue, bornée et à support borné :

$$\int_X f(x) \mu_n^\bullet(dx) \xrightarrow{m.q.} \int_X f(x) \mu^\bullet(dx) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty .$$

La propriété IV.8. nous permet de répondre à la question naturelle suivante : étant données deux suites de mesures aléatoires $(\mu_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\nu_m^\bullet)_{m \in \mathbb{N}}$ d'ordre deux qui convergent en moyenne quadratique vers $\mu^\bullet$ et $\nu^\bullet$ respectivement, que peut-on dire de la suite double $(\mu_n \nu_m)_{n,m}$, en termes de convergence de mesures ? On a le résultat suivant :

Propriété IV.8. - Soient $(\mu_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\nu_m^\bullet)_{m \in \mathbb{N}}$ deux suites de mesures aléatoires positives du second ordre telles que :

$$\mu_n^\bullet \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu^\bullet \quad \text{en moyenne quadratique}$$

$$\nu_m^\bullet \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \nu^\bullet \quad \text{en moyenne quadratique}$$

alors : $\mu_n \nu_m = E(\mu_n^\bullet \otimes \nu_m^\bullet) \longrightarrow E(\mu^\bullet \otimes \nu^\bullet)$ faiblement à distance finie.

Preuve : D'après le théorème III.4., la classe $F^+ = \{f(x) g(y) ; f \in C_b^+, g \in C_b^+\}$ est C-déterminante sur M^{2+} .

Il suffit de démontrer que :

$$\int_{X^2} f(x) g(y) \mu_n \nu_m(dx, dy) \longrightarrow \int_{X^2} f(x) g(y) \mu \nu(dx, dy)$$

où f et g sont des éléments positifs de C_b .

$$\text{On a : } \int_{X^2} f(x) g(y) \mu_n \nu_m(dx, dy) = E\left(\int_X f(x) \mu_n^\bullet(dx) \int_X g(y) \nu_m^\bullet(dy)\right)$$

d'après la propriété IV.5. et le théorème de Fubini.

Le théorème IV.1. du porte-manteau permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_X f(x) \mu_n^\bullet(dx) &\longrightarrow \int_X f(x) \mu^\bullet(dx) && \text{en moyenne quadratique} \\ \int_X g(y) \nu_m^\bullet(dy) &\longrightarrow \int_X g(y) \nu^\bullet(dy) && \text{en moyenne quadratique.} \end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$E\left(\int_X f(x) \mu_n^\bullet(dx) \int_X g(y) \nu_m^\bullet(dy)\right) \longrightarrow E\left(\int_X f(x) \mu^\bullet(dx) \int_X g(y) \nu^\bullet(dy)\right)$$

C'est-à-dire, d'après Fubini :

$$E \int_{X^2} f(x) g(y) \mu_n^\bullet \otimes \nu_m^\bullet(dx, dy) \longrightarrow E \int_{X^2} f(x) g(y) \mu^\bullet \otimes \nu^\bullet(dx, dy)$$

C'est-à-dire encore d'après la propriété IV.5.

$$\int_{X^2} f(x) g(y) \mu_n \nu_m(dx, dy) \longrightarrow \int_{X^2} f(x) g(y) \mu \nu(dx, dy)$$

ce qui est le résultat cherché. ■

La propriété IV.8. peut être étendue aux mesures aléatoires à signe, moyennant une condition supplémentaire ; nous obtenons alors la

Propriété IV.8. bis. - Soient $(\mu_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\nu_m^\bullet)_{m \in \mathbb{N}}$ deux suites de mesures aléatoires du second ordre, telles que :

$$\mu_n^\bullet \longrightarrow \mu^\bullet \quad \text{en moyenne quadratique}$$

$$\nu_m^\bullet \longrightarrow \nu^\bullet \quad \text{en moyenne quadratique}$$

si la suite $(\mu_n \nu_m) = \{E(\mu_n^\bullet \otimes \nu_m^\bullet)\}$ est relativement compacte dans M^2 muni de la topologie faible à distance finie alors :

$$\mu_n \nu_m \longrightarrow \mu \nu \quad \text{faiblement à distance finie.}$$

Démonstration : Le théorème IV.2. montre que pour deux éléments quelconques f et g de C_b :

$$\begin{aligned} \int_X f(x) \mu_n^\bullet(dx) &\xrightarrow{m.q.} \int_X f(x) \mu^\bullet(dx) \\ \int_X g(y) \nu_m^\bullet(dy) &\xrightarrow{m.q.} \int_X g(y) \nu^\bullet(dy) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$E\left(\int_X f(x) \mu_n^\bullet(dx) \int_X g(y) \nu_m^\bullet(dy)\right) \longrightarrow E\left(\int_X f(x) \mu^\bullet(dx) \int_X g(y) \nu^\bullet(dy)\right)$$

c'est-à-dire, en appliquant Fubini :

$$E\left(\int_{X^2} f(x) g(y) \mu_n^\bullet \otimes \nu_m^\bullet(dx, dy)\right) \longrightarrow E\left(\int_{X^2} f(x) g(y) \mu^\bullet \otimes \nu^\bullet(dx, dy)\right)$$

c'est-à-dire encore, d'après la propriété IV.5.

$$\int_{X^2} f(x) g(y) \mu_n \nu_m(dx, dy) \longrightarrow \int_{X^2} f(x) g(y) \mu \nu(dx, dy) .$$

Le théorème III.5. permet alors de conclure.

Si une suite (X_n) de v.a. du second ordre est telle que la suite double $E(X_n \cdot X_m)$ ait une limite α , il existe une v.a. X du second ordre telle que (X_n) converge en moyenne quadratique vers X .

Il est donc naturel de poser la question :

la convergence faible à distance finie de la suite $(\mu_n \mu_m)$ vers une certaine mesure $\alpha \in M^2$, quand n et m tendent simultanément vers $+\infty$, signifie-t-elle que α est nécessairement de la forme $\alpha = E(\mu^\bullet \otimes \mu^\bullet)$, où $\mu^\bullet$ est la limite en moyenne quadratique de la suite $(\mu_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de L_M^2 ?

Moyennant une hypothèse de positivité sur la suite $(\mu_n^\bullet)$ et de complétude pour l'espace métrique (X, d) , la réponse à cette question est affirmative et fait l'objet du :

Théorème IV.3. - Supposons que l'espace métrique (X, d) soit séparable et complet ; soit $(\mu_n^\bullet)$ une suite de mesures aléatoires du second ordre positives telle que :

$(E\{\mu_n^\bullet \otimes \mu_m^\bullet\}) = (\mu_n \mu_m)$ converge faiblement à distance finie vers $\alpha \in M^{2+}$, quand n et m tendent vers $+\infty$.

Alors, il existe une mesure aléatoire du second ordre positive telle que :

$$\alpha = \mu^2 = E(\mu^\bullet \otimes \mu^\bullet)$$

et $(\mu_n^\bullet)$ converge en moyenne quadratique vers $\mu^\bullet$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Avant d'entamer la démonstration de ce théorème, nous établissons d'abord quatre lemmes utiles.

Lemme IV.1. - La mesure α définie au théorème IV.3. est une mesure symétrique.

Preuve : Il est clair que $\mu_n \mu_n = E(\mu_n^\bullet \otimes \mu_n^\bullet)$ converge vers α faiblement à distance finie d'après l'hypothèse.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(\mu_n^\bullet \otimes \mu_n^\bullet)$ est une mesure symétrique en ce sens que pour tout borélien C , on a la propriété :

$$"S" : E\{\mu_n^\bullet \otimes \mu_n^\bullet(C)\} = E\{\mu_n^\bullet \otimes \mu_n^\bullet(C_S)\}$$

avec $C_S = \{(x, y) : (y, x) \in C\}$.

En effet, si $C = A \times B$ est un pavé mesurable, la propriété "S" est vérifiée puisque :

$$\mu_n^\bullet \otimes \mu_n^\bullet (A \times B) = \mu_n^\bullet (A) \mu_n^\bullet (B) = \mu_n^\bullet \otimes \mu_n^\bullet (B \times A) .$$

Or, tout ouvert O de X^2 est une réunion dénombrable de rectangles ouverts.

$$O = \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i .$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la formule de Poincaré permet d'écrire

$$E\{\mu_n^\bullet \otimes \mu_n^\bullet (\bigcup_{i=1}^k O_i)\} = \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} S_j^k$$

où $S_j^k = \sum_{i_1, \dots, i_j} E\{\mu_n^\bullet \otimes \mu_n^\bullet (O_{i_1} \cap \dots \cap O_{i_j})\}$ et où la sommation s'étend

à toutes les combinaisons des k premiers entiers pris j à j .

Comme la classe des rectangles ouverts est stable par intersection finie, cette formule montre que $\bigcup_{i=1}^k O_i$ vérifie la propriété "S", pour k fixé.

Il en résulte, d'après la propriété de continuité monotone croissante des mesures, que tout ouvert vérifie la propriété "S".

La régularité des mesures bornées sur les espaces métriques montre alors que tout borélien borné vérifie la propriété "S" et il en résulte que "S" est vraie pour tout borélien.

Comme la suite $(E\{\mu_n^\bullet \otimes \mu_n^\bullet\})$ converge vers α faiblement à distance finie, il est clair que pour tout borélien borné C tel que $\alpha(\partial C_S) = 0$ on a :

$$\alpha(C) = \alpha(C_S)$$

si F est un fermé borné, il existe une suite $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs telle que :

$$1) \delta_n \neq 0$$

$$2) \forall n \in \mathbb{N}, \alpha(\partial F_n^{\delta_n}) = \alpha(\partial F_S^{\delta_n}) = 0$$

Il en résulte que, pour tout fermé borné F , $\alpha(F) = \alpha(F_S)$.

Cette propriété s'étend, par régularité, à tout borélien borné, puis à tout borélien. ■

Lemme IV.2. - Notons $B(x,t)$ la boule ouverte de X , de centre x et de rayon $t > 0$, et $\partial B(x,t)$ sa frontière dans X ; étant donné une mesure positive α sur $X \times X$ et un point quelconque $x \in X$, l'ensemble des nombres réels positifs t tels que $\alpha[\partial(B(x,t)) \times X] > 0$ est au plus dénombrable.

Démonstration : Remarquons que $\partial B(x,t)$ est inclus dans la sphère $S(x,t) = \{y \in X, d(x,y) = t\}$ et que les frontières des boules $B(x,t)$ sont disjointes quand t varie et x reste fixe.

Soient m et n deux entiers positifs fixés; pour tout $t \in]0, n]$,

$$* \quad \alpha[B(x,n) \times B(x,m)] < +\infty$$

$$** \quad \partial(B(x,t)) \times B(x,m) \subset S(x,t) \times B(x,m)$$

*** et les ensembles $\{S(x,t) \times B(x,m) : t \leq n\}$ sont disjoints.

Par conséquent, l'ensemble $\{t \leq n : \alpha[\partial(B(x,t)) \times B(x,m)] > 0\}$ est au plus dénombrable.

Il en est de même par conséquent des ensembles :

$$E_n = \{t \leq n : \exists m \in \mathbb{N}^* : \alpha[\partial(B(x,t)) \times B(x,m)] > 0\}$$

et $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Cependant, si $t \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n^c$, on a :

$$\alpha[\partial(B(x,t)) \times X] = \lim_{m \rightarrow +\infty} \alpha[\partial(B(x,t)) \times B(x,m)] = 0 \quad . \quad \blacksquare$$

Lemme IV.3. - Etant donné une mesure positive α sur $X \times X$, un point quelconque x de X , un nombre réel positif t tel que $\alpha[\partial(B(x,t)) \times X] = 0$, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, une partition finie ou dénombrable $(\Delta_i ; i \in I)$ de la boule ouverte $B(x,t)$ telle que :

- 1) $\forall i \in I, \quad \alpha[\partial(\Delta_i) \times X] = 0$.
- 2) $\forall i \in I, \quad \text{diam } \Delta_i < \varepsilon$.

Démonstration : Quand $\varepsilon \geq t$, le lemme devient trivial.

Supposons donc que $\varepsilon < t$: pour tout $y \in X$, il existe une boule $B(y, s_y)$ de rayon inférieur à $\varepsilon/2$ telle que :

$$\alpha[\partial(B(y, s_y)) \times X] = 0.$$

Du recouvrement ouvert de $B(x,t)$ par les boules $\{B(y, s_y), y \in B(x,t)\}$ on peut extraire un recouvrement fini ou dénombrable puisque X est séparable :

$$B(x,t) \subset \bigcup_{i \in I} B(y_i, s_{y_i}).$$

On pose alors :

$$\Delta_1 = B(x,t) \cap B(y_1, s_{y_1})$$

$$\Delta_2 = B(x,t) \cap B(y_2, s_{y_2}) - B(y_1, s_{y_1})$$

⋮

$$\Delta_i = B(x,t) \cap B(y_i, s_{y_i}) - \bigcup_{j=1}^{i-1} B(y_j, s_{y_j})$$

⋮

Il est clair que $(\Delta_i; i \in I)$ forme une partition de $B(x,t)$ en boréliens de diamètre inférieur à ε et l'inclusion :

$$\forall i \in I, \quad \partial(\Delta_i) \subset \partial(B(x,t)) \cup \partial(B(y_1, s_{y_1})) \cup \dots \cup \partial(B(y_i, s_{y_i}))$$

montre que :

$$\forall i \in I, \quad \alpha[\partial(\Delta_i) \times X] = 0.$$

Lemme IV.4. - Soit A un borélien borné tel que : $\alpha[\partial(A) \times X] = 0$; sous l'hypothèse du théorème IV.3., la suite de v.a.r. $\{\mu_n^\bullet(A)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy en probabilité.

Démonstration : D'après le lemme IV.1., la mesure α est symétrique ; compte tenu de l'inclusion : $\partial(A \times A) \subset (\partial(A) \times X) \cup (X \times \partial(A))$ on a donc :

$$\alpha(\partial(A \times A)) = 0$$

Par conséquent : $\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} \mu_n \mu_m(A \times A) = \alpha(A \times A)$

Compte tenu de l'égalité : $(\mu_n - \mu_m)^2 = \mu_n^2 - \mu_n \mu_m - \mu_m \mu_n + \mu_m^2$.

on obtient :
$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} (\mu_n - \mu_m)^2 (A \times A) = 0$$

c'est-à-dire :
$$\lim_{n,m} E\{(\mu_n^\bullet - \mu_m^\bullet) \otimes (\mu_n^\bullet - \mu_m^\bullet) (A \times A)\} = 0$$

soit encore :
$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} E\{|\mu_n^\bullet(A) - \mu_m^\bullet(A)|^2\} = 0 .$$

D'après l'inégalité de Markov, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$P\{|\mu_n^\bullet(A) - \mu_m^\bullet(A)| > \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E\{|\mu_n^\bullet(A) - \mu_m^\bullet(A)|^2\}$$

et par conséquent il existe $K_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geq K_\varepsilon \quad \forall m \geq K_\varepsilon : P\{|\mu_n^\bullet(A) - \mu_m^\bullet(A)| > \varepsilon\} < \varepsilon . \quad \blacksquare$$

Cet "arsenal" de lemmes étant constitué, on peut maintenant passer à la démonstration du théorème IV.3. qui se déroulera en 3 étapes.

Démonstration du théorème IV.3.-

a) Soit 0 un point arbitrairement choisi dans X et

$$\rho = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\rho^r}{2^r(1+\rho_r)}$$

la distance de GEFFROY sur M^+ associée à ce choix ; ρ est évidemment continue sur M^{2+} , muni de la topologie faible à distance finie. Comme (X, d) est séparable, (M^+, ρ) est séparable d'après le théorème I.6., et on en déduit que $\rho(\mu_n^\bullet, \mu_m^\bullet)$ est une variable aléatoire réelle.

Nous allons montrer que la suite de v.a.r. $(\rho(\mu_n^\bullet, \mu_m^\bullet))_{n,m}$ converge vers 0 en probabilité ; il suffit naturellement de prouver qu'il en est de même de toute suite $(\rho_r(\mu_n^\bullet, \mu_m^\bullet))_{n,m}$ pour r fixé dans $\mathbb{N}^*$.

Fixons donc $r \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon_1 > 0$, $\eta > 0$: d'après le lemme IV.2.,
il existe

$$\varepsilon \in]0, \min(\frac{1}{2}, r, \varepsilon_1)[$$

tel que : $\alpha(\partial(B(0, r+1 - \varepsilon)) \times X) = 0$.

D'après le lemme IV.3., il existe une partition finie ou
dénombrable $(\Delta_i; i \in I)$ de la boule ouverte $B(0, r+1 - \varepsilon)$ telle que :

$$* \quad \forall i \in I, \text{diam}(\Delta_i) < \varepsilon$$

$$** \quad \forall i \in I, \alpha[\partial(\Delta_i) \times X] = 0.$$

Il est alors clair que :

$$[B(0, r+1 - \varepsilon) - \bigcup_{i=1}^j \Delta_i] \times [B(0, r+1 - \varepsilon) - \bigcup_{i=1}^j \Delta_i] \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \emptyset.$$

Il existe un borélien Δ qui s'écrit : $\Delta = B(0, r+1 - \varepsilon) - \bigcup_{i \leq j_0} \Delta_i$
tel que :

$$\alpha(\Delta \times \Delta) < \varepsilon^2 \frac{\eta}{24}.$$

De plus, on a : $\alpha(\partial(\Delta \times \Delta)) = 0$ à cause de la symétrie de α et
des inclusions :

$$\partial(\Delta) \subset \partial(B(0, r+1 - \varepsilon)) \cup \partial(\Delta_1) \cup \dots \cup \partial(\Delta_{j_0})$$

$$\partial(\Delta \times \Delta) \subset (\partial(\Delta) \times X) \cup (X \times \partial(\Delta))$$

L'hypothèse du théorème implique en particulier que $(\mu_n^2)_{n \in \mathbb{N}^*} = (E(\mu_n^\bullet \otimes \mu_n^\bullet))_{n \in \mathbb{N}^*}$
converge faiblement à distance finie vers α ; ainsi, il existe un entier
 n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$:

$$\mu_n^2(\Delta \times \Delta) < \varepsilon^2 \eta/12$$

ou encore : $E\{\mu_n^{\bullet 2}(\Delta)\} < \varepsilon^2 \eta/12$

Ce qui implique, compte tenu de l'inégalité de Markov :

$$P\{\mu_n^\bullet(\Delta) > \frac{\varepsilon}{2}\} < \frac{4}{\varepsilon^2} E\{\mu_n^{\bullet 2}(\Delta)\} < \eta/3 .$$

D'autre part, d'après le lemme IV.4., il existe un entier n_1 qu'on choisit supérieur à n_0 tel que, pour $n \geq n_1$ et $m \geq n_1$:

$$\sum_{i=1}^{j_0} P\{|\mu_n^\bullet(\Delta_i) - \mu_m^\bullet(\Delta_i)| \geq \frac{\varepsilon}{2j_0}\} < \eta/3 ,$$

ce qui implique : $P(\bigcap_{i=1}^{j_0} \{|\mu_n^\bullet(\Delta_i) - \mu_m^\bullet(\Delta_i)| < \frac{\varepsilon}{2j_0}\}) > 1 - \eta/3 .$

Si on note :

$$E_{n,m} = \{\mu_n^\bullet(\Delta) < \frac{\varepsilon}{2} ; \mu_m^\bullet(\Delta) < \frac{\varepsilon}{2} ; |\mu_n^\bullet(\Delta_i) - \mu_m^\bullet(\Delta_i)| < \frac{\varepsilon}{2j_0} ; i = 1, 2, \dots, j_0\} .$$

On obtient, pour $n \geq n_1$ et $m \geq n_1$:

$$P(E_{n,m}^c) < \eta \quad \text{ce qui équivaut à :}$$

$$P(E_{n,m}) > 1 - \eta .$$

Considérons un borélien A tel que $A^\varepsilon \subset B(0, r)$.

Si x appartient à A : $d(x, 0) < r < r+1 - \varepsilon$

donc : $A \subset B(0, r+1 - \varepsilon) .$

Posons $J_0 = \{i : i \leq j_0 ; \Delta_i \cap A \neq \emptyset\}$; pour $i \in J_0$: $\Delta_i \subset A^\varepsilon$.

Par conséquent : $\bigcup_{i \in J_0} \Delta_i \subset A^\varepsilon .$

Si on suppose l'événement $E_{n,m}$ réalisé, on a alors :

$$\mu_n^\bullet(A^\varepsilon) \geq \sum_{i \in J_0} \mu_n^\bullet(\Delta_i) \geq \sum_{i \in J_0} \mu_m^\bullet(\Delta_i) - \frac{\varepsilon}{2}$$

Or : $A \subset \Delta \cup (\bigcup_{i \in J_0} \Delta_i) .$

Par conséquent : $\mu_m^\bullet(A) \leq \mu_m^\bullet(\Delta) + \sum_{i \in J_0} \mu_m^\bullet(\Delta_i) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i \in J_0} \mu_m^\bullet(\Delta_i)$.

Au total, on a donc :

$$\mu_m^\bullet(A) \leq \mu_n^\bullet(A^\varepsilon) + \varepsilon.$$

Comme dans cette démonstration m et n jouent des rôles indiscernables, on peut aussi écrire :

$$\mu_n^\bullet(A) \leq \mu_m^\bullet(A^\varepsilon) + \varepsilon.$$

Ainsi : $E_{n,m} \subset \{\rho_r(\mu_n^\bullet, \mu_m^\bullet) < \varepsilon\} \subset \{\rho_r(\mu_n^\bullet, \mu_m^\bullet) < \varepsilon_1\}$.

Finalement, pour $n \geq n_1$ et $m \geq n_1$:

$$P\{\rho_r(\mu_n^\bullet, \mu_m^\bullet) < \varepsilon_1\} \geq P(E_{n,m}) \geq 1 - \eta.$$

b) Cette partie de la démonstration est sans doute classique [16 p. 221 par exemple]. On choisit une suite croissante $(n_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que :

$$P\{\rho(\mu_n^\bullet, \mu_m^\bullet) > \frac{1}{2}\} \leq \frac{1}{2} \quad \text{pour } m, n \geq n_1$$

$$P\{\rho(\mu_n^\bullet, \mu_m^\bullet) > \frac{1}{4}\} \leq \frac{1}{4} \quad \text{pour } m, n \geq n_1$$

⋮

$$P\{\rho(\mu_n^\bullet, \mu_m^\bullet) > \frac{1}{2^k}\} \leq \frac{1}{2^k} \quad \text{pour } m, n \geq n_k$$

⋮

On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $E_k = \bigcap_{i=k}^{\infty} \{\rho(\mu_n^\bullet, \mu_m^\bullet) < \frac{1}{2^i}\}$

Comme
$$P(E_k^c) \leq \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

on a :
$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 1 .$$

Si $\omega \in E_k$ et si i et j sont des entiers tels que $i > j > k$:

on a :
$$\rho(\mu_{n_i}^{\omega}, \mu_{n_j}^{\omega}) \leq \sum_{\ell=j}^{i-1} \rho(\mu_{n_{\ell+1}}^{\omega}, \mu_{n_{\ell}}^{\omega}) \leq \sum_{\ell=j}^{i-1} \frac{1}{2^{\ell}} \leq \frac{1}{2^{j-1}} .$$

Ainsi, $(\mu_{n_j}^{\omega})$ est une suite de Cauchy dans (M^+, ρ) ; on sait, d'après le théorème I.7. dû à GENSBITTEL que cet espace métrique est complet puisque (X, d) est complet. On note alors μ^{ω} la limite de $(\mu_{n_j}^{\omega})$; posons par ailleurs $\mu^{\omega} \equiv 0$ si $\omega \in \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k^c$.

On a donc obtenu :

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subseteq \{\omega \in \Omega : \lim_{j \rightarrow +\infty} \mu_{n_j}^{\omega} = \mu^{\omega}\} = \Omega_0$$

Puisque :
$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 1 \text{ on a } P(\Omega_0) = 1 .$$

$\mu^{\bullet}$ est donc une mesure aléatoire telle que :

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \mu_{n_j}^{\bullet} = \mu^{\bullet} , \text{ P . p.s.}$$

c) Il reste à vérifier que $\mu^{\bullet}$ est d'ordre deux , que $\alpha = E\{\mu^{\bullet} \otimes \mu^{\bullet}\}$, et que $(\mu_n^{\bullet})$ converge en moyenne quadratique vers $\mu^{\bullet}$.

* Il existe une suite croissante $(B_m)_{m \in \mathbb{N}}^* = \{B(0, r_m)\}_{m \in \mathbb{N}}^*$ de boules concentriques ouvertes telles que :

- $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$
- $\forall m \in \mathbb{N}^* , \mu^{\bullet}(\partial B_m) = 0 \text{ P . p.s.}$
- $\forall m \in \mathbb{N}^* , \alpha[\partial(B_m \times B_m)] = 0$

D'après le paragraphe b) de la démonstration : $\forall m \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_j \inf \mu_{n_j}^{\bullet 2}(B_m) = \lim_j \mu_{n_j}^{\bullet 2}(B_m) = \mu^{\bullet 2}(B_m), \text{ p. p. s.}$$

D'après le lemme IV.4., $(\mu_n^{\bullet}(B_m))$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega, A, P)$; donc ,

$$\forall m \in \mathbb{N}^* : \lim_j \inf E(\mu_{n_j}^{\bullet 2}(B_m)) = \lim_n E(\mu_n^{\bullet 2}(B_m)) < +\infty .$$

Or, d'après le lemme de FATOU : $\lim_j \inf E(\mu_{n_j}^{\bullet 2}(B_m)) \geq E(\lim_j \inf \mu_{n_j}^{\bullet 2}(B_m))$

par conséquent : $\forall m \in \mathbb{N}^* , E\{\mu^{\bullet 2}(B_m)\} < +\infty .$

Ce qui montre que $\mu^{\bullet}$ est une mesure aléatoire du second ordre.

** Compte tenu de l'égalité : $(\mu_n - \mu_m)^2 = \mu_n^2 - \mu_n \mu_m - \mu_m \mu_n + \mu_m^2$
et de l'hypothèse du théorème, on a, pour toute fonction $f \in C_b$:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} \int f(x) f(y) (\mu_n - \mu_m)^2 (dx, dy) = 0$$

Ce qui peut s'écrire :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} E\left\{ \int f(x) f(y) (\mu_n^{\bullet} - \mu_m^{\bullet}) \otimes (\mu_n^{\bullet} - \mu_m^{\bullet}) (dx, dy) \right\} = 0$$

ou encore : $\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} E\left\{ \left| \int f(x) \mu_n^{\bullet}(dx) - \int f(x) \mu_m^{\bullet}(dx) \right|^2 \right\} = 0 .$

La suite $(\int f(x) \mu_n^{\bullet}(dx))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega, A, P)$.

Cependant, il existe $\Omega_0 \subset \Omega$, de probabilité 1, tel que,
 $\forall \omega \in \Omega_0 , \forall f \in C_b :$

$$\int f d\mu_{n_j}^{\omega} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \int f d\mu^{\omega}$$

Ainsi, pour toute fonction f de C_b , $\int f d\mu^\bullet$ est un représentant de la limite en moyenne quadratique de $(\int f d\mu_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Le théorème IV.1. montre alors que la suite de mesures aléatoires positives $(\mu_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en moyenne quadratique vers $\mu^\bullet$.

*** Enfin, la propriété IV.8. montre que la suite $(\mu_n \mu_m)_{n,m}$ converge faiblement à distance finie vers μ^2 ; par conséquent :

$$\alpha = \mu^2 = E(\mu^\bullet \otimes \mu^\bullet) \quad . \quad \blacksquare$$

Le corollaire des théorèmes III.6. et III.7 peut se combiner de façon intéressante avec le théorème IV.3. pour donner un critère assez maniable de convergence en moyenne quadratique d'une suite de mesures aléatoires du second ordre.

Nous énonçons le résultat dans le théorème suivant :

Théorème IV.4. - Supposons que l'espace métrique (X,d) soit séparable et complet ; soit $(\mu_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de mesures aléatoires positives du second ordre telle que :

$$\forall f \in C_b^+ , \forall g \in C_b^+ : \lim_{n,m} \int_X \int_X f(x) g(y) \mu_n \mu_m(dx,dy) \quad \text{ou} \\ \lim_{n,m} E\{\mu_n^\bullet(f) \mu_m^\bullet(g)\} \quad \text{existe} .$$

Alors, il existe une mesure aléatoire positive $\mu^\bullet$ du second ordre telle que :

$$\mu_n^\bullet \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu^\bullet \quad \text{en moyenne quadratique} .$$

Démonstration : Puisque l'espace (X,d) est séparable et complet, on sait, d'après le corollaire des théorèmes III.6. et III.7. que la classe :

$$F^+ = \{f(x) g(y) ; f \in C_b^+, g \in C_b^+\}$$

est $\bar{C}$ -déterminante sur M^{2+} ; par conséquent, l'existence de

$$\lim_{n,m} \int_{X^2} f(x) g(y) \mu_n \mu_m(dx,dy) \quad \text{ou} \quad \lim_{n,m} E\{\mu_n^\bullet(f) \mu_m^\bullet(g)\} \quad \text{pour tout } f \in C_b^+$$

et tout $g \in C_b^+$ implique l'existence d'une mesure $\alpha \in M^{2+}$ et

$\{\mu_n \mu_m\} = \{E(\mu_n^\bullet \otimes \mu_m^\bullet)\}$ converge faiblement à distance finie vers α .

Le théorème IV.3. montre alors que α est de la forme :

$$\alpha = E(\mu^\bullet \otimes \mu^\bullet)$$

et que $(\mu_n^\bullet)$ converge en moyenne quadratique vers μ : ■

Nous arrivons à la fin des résultats concernant les mesures aléatoires positives avec l'énoncé d'un résultat qui découle directement du théorème IV.4..

Corollaire du théorème IV.4. - Supposons que (X,d) soit séparable et complet ; soit $(\mu_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures aléatoires positives d'ordre 2 telle que :

$\forall f \in C_b : \mu_n^\bullet(f)$ converge en moyenne quadratique vers une certaine variable aléatoire réelle $X(f)$.

Alors : $\{\mu_n^\bullet\}_{n \in \mathbb{N}}^*$ converge en moyenne quadratique vers une certaine mesure aléatoire positive $\mu^\bullet$ du second ordre.

Démonstration : Soient f et g deux éléments de C_b tels que :

$$\mu_n^\bullet(f) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} X(f) \quad \text{m.q.}$$

$$\mu_m^\bullet(g) \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} X(g) \quad \text{m.q.}$$

alors : $\mu_n^\bullet(f) \mu_m^\bullet(g)$ est une v.a.r P -intégrable et on a :

$$E\{\mu_n^\bullet(f) \mu_m^\bullet(g)\} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{m \rightarrow +\infty} E\{X(f) X(g)\}$$

Le théorème IV.4 permet alors de conclure. ■

Les théorèmes intéressants pour les applications sont manifestement les théorèmes IV.1., IV.3., et IV.4. ; malheureusement, comme nous l'avons déjà remarqué, il ne semble pas possible de les appliquer en toute généralité aux mesures aléatoires à signe : ici encore, comme dans le chapitre III., ce sont des questions de relative compacité dans l'espace M^2 muni de la topologie faible à distance finie qui interviennent. Pour pallier ces difficultés, nous introduisons, dans le cas des mesures aléatoires à signe une hypothèse rappelant curieusement, mais de façon formelle, celle du théorème de la convergence dominée de Lebesgue. Cette hypothèse non triviale, inspirée du théorème III.5. bis, permet de tirer quelque bénéfice des résultats acquis pour les mesures aléatoires à signe.

Le théorème IV.5. donne une condition suffisante de convergence en moyenne quadratique d'une suite de mesures aléatoires du second ordre et constitue une sorte de réciproque au théorème IV.2..

Théorème IV.5.- Soit $(\mu_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures aléatoires du second ordre et $\mu^\bullet$ une mesure aléatoire du second ordre telles que :

i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\mu_n^\bullet| \leq \nu^\bullet$ et $|\mu^\bullet| \leq \nu^\bullet$ où $\nu^\bullet$ est une mesure aléatoire du second ordre positive fixée.

ii) $\forall f \in C_b$, $(\int f d\mu_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers $\int f d\mu^\bullet$.

Alors $(\mu_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers $\mu^\bullet$.

Démonstration : Posons $\gamma_n^\bullet = \mu_n^\bullet + \nu^\bullet$ et $\gamma^\bullet = \mu^\bullet + \nu^\bullet$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En vertu de l'hypothèse 1) et de la propriété IV.2., $(\gamma_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de mesures aléatoires du second ordre positives. L'hypothèse 2) implique :

$$\forall f \in C_b : \int f d\gamma_n^\bullet \xrightarrow{\text{m.q.}} \int f d\gamma^\bullet .$$

Le théorème IV.1., valable pour des mesures aléatoires du second ordre positives, montre que :

$$\gamma_n^\bullet \xrightarrow{\text{m.q.}} \gamma^\bullet .$$

Autrement dit : $(\gamma_n^\bullet - \gamma^\bullet)^2 = (\mu_n^\bullet - \mu^\bullet)^2$ converge faiblement à distance finie vers l'élément nul de M^2 quand $n \rightarrow +\infty$. ■

La propriété IV.9., ci-dessous, qui prolonge la propriété IV.8. bis montre que l'hypothèse retenue est bien plus qu'un simple tour de passe-passe.

Propriété IV.9.- Soient $(\mu_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\nu_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de mesures aléatoires du second ordre, $\mu^\bullet$ et $\nu^\bullet$ deux mesures aléatoires

du second ordre ; $\gamma^\bullet$ et $\theta^\bullet$ étant deux mesures aléatoires positives du second ordre fixées, si on suppose que :

$$1) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |\mu_n^\bullet| \leq \gamma^\bullet \quad \text{et} \quad |\nu_n^\bullet| \leq \theta^\bullet$$

$$2) \quad \begin{cases} \mu_n^\bullet \xrightarrow{\text{m.q.}} \mu^\bullet \\ \nu_m^\bullet \xrightarrow{\text{m.q.}} \nu^\bullet \end{cases}$$

Alors $(\mu_n \nu_m)_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ converge faiblement à distance finie vers $\mu \nu$ dans M^2 .

Démonstration : En vertu de la propriété IV.8. bis, il suffit de démontrer que la suite $(\mu_n \nu_m)_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ est relativement compacte dans M^2 . D'après le théorème II.3., il nous faut donc montrer que :

$$a) \quad \forall B \in \mathcal{B}_b^2 : \sup_{n,m} |\mu_n \nu_m| (B) < +\infty$$

b) Pour toute suite $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de C_b^2 qui tend vers 0 en décroissant :

$$\lim_k \sup_{n,m} \int h_k d |\mu_n \nu_m| = 0$$

a) Soit B un borélien borné de $X \times X$ et $(P_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ l'ensemble des partitions mesurables de B , finies ou dénombrables. A chaque partition P_λ est donc associé un ensemble d'indices I_λ fini ou dénombrable. Pour tout $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$|\mu_n \nu_m| (B) = \sup_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \in I_\lambda} |\mu_n \nu_m (B_i)|.$$

Pour tout $\lambda \in \Lambda$, on a :

$$\sum_{i \in I_\lambda} |E\{(\mu_n^\bullet \otimes \nu_m^\bullet) (B_i)\}| \leq \sum_{i \in I_\lambda} E\{|\mu_n^\bullet \otimes \nu_m^\bullet (B_i)|\}$$

Et, d'après la propriété de Beppo Lévi :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_\lambda} E\{|\mu_n^\bullet \otimes \nu_m^\bullet(B_i)|\} &= E\left\{\sum_{i \in I_\lambda} |\mu_n^\bullet \otimes \nu_m^\bullet(B_i)|\right\} \\ &\leq E\left\{\sup_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \in I_\lambda} |\mu_n^\bullet \otimes \nu_m^\bullet(B_i)|\right\} \\ E\left\{\sup_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \in I_\lambda} |\mu_n^\bullet \otimes \nu_m^\bullet(B_i)|\right\} &= E\{|\mu_n^\bullet \otimes \nu_m^\bullet|(B)\} \end{aligned}$$

et ainsi : $|\mu_n \nu_m|(B) \leq E\{|\mu_n^\bullet \otimes \nu_m^\bullet|(B)\} .$

D'après la propriété III.3. et l'hypothèse 1) on a :

$$|\mu_n \nu_m|(B) \leq E\{|\mu_n^\bullet| \otimes |\nu_m^\bullet|(B)\} \leq E\{\gamma^\bullet \otimes \theta^\bullet(B)\} < +\infty .$$

Par conséquent,

$$\forall B \in \mathcal{B}_b^2 : \sup_{n,m} |\mu_n \nu_m|(B) < +\infty .$$

b) Soit maintenant $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}_b^2$ telle que

$$h_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0 .$$

A l'aide de l'inégalité :

$$|\mu_n \nu_m|(B) \leq E(\gamma^\bullet \otimes \theta^\bullet(B)) = \gamma \otimes \theta(B) < +\infty$$

on remarque facilement que :

$$0 \leq \lim_k \sup_{n,m} \int h_k d|\mu_n \nu_m| \leq \lim_k \int h_k d\gamma \otimes \theta = 0$$

ce qui achève la démonstration. ■

Les théorèmes IV.6. et IV.7. ci-dessous étendent les théorèmes IV.3. et IV.4. ; comme dans ces deux derniers, nous supposons que l'espace métrique (X, d) jouit, en plus de sa séparabilité de la complétude.

Théorème IV.6. - Soient $(\mu_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures aléatoires du second ordre et $\nu^\bullet$ une mesure aléatoire du second ordre positive ; on fait les deux hypothèses suivantes :

- 1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad |\mu_n^\bullet| \leq \nu^\bullet$
- 2) $(\mu_n \mu_m)_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ converge faiblement à distance finie vers une mesure α de M^2 .

Alors, il existe une mesure aléatoire du second ordre $\mu^\bullet$ telle que :

$$\alpha = \mu^2 = E(\mu^\bullet \otimes \mu^\bullet)$$

et $(\mu_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers $\mu^\bullet$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Démonstration :

- 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\gamma_n^\bullet = \mu_n^\bullet + \nu^\bullet$.

Nous allons démontrer que $\{E(\gamma_m^\bullet \otimes \gamma_n^\bullet)\}_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} = (\gamma_m \gamma_n)_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ converge faiblement à distance finie vers une certaine mesure positive $\beta \in M^{2+}$.

Comme (X, d) est complet et que $(\gamma_m \gamma_n)_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ est une suite de mesures positives il suffit, en vertu des théorèmes III.6. et III.7. de démontrer que, pour tout $f \in C_b^+$ et pour tout $g \in C_b^+$, la suite $\{ \int f(x) g(y) \gamma_m \gamma_n(dx, dy) \}$ est convergente.

Un calcul s'appuyant sur les propriétés IV.4. et IV.5. donne :

$\forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\int f(x) g(y) \gamma_m \gamma_n(dx, dy) = \int f(x) g(y) \mu_m \mu_n(dx, dy) + \int f(x) g(y) \mu_m \nu(dx, dy) \\ + \int f(x) g(y) \nu \mu_n(dx, dy) + \int f(x) g(y) \nu^2(dx, dy) .$$

Compte tenu de l'hypothèse et du caractère symétrique des deux termes centraux dans le dernier membre de l'égalité ci-dessus, il reste à démontrer que la suite :

$$\left\{ \int f(x) g(y) \mu_n \nu(dx, dy) \right\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente .}$$

Cependant, l'hypothèse 2) du théorème et l'égalité :

$$(\mu_n - \mu_m)^2 = \mu_n^2 - \mu_n \mu_m - \mu_m \mu_n + \mu_m^2$$

montrent que, pour toute fonction $f \in C_b$, la suite $\{\mu_n^\bullet(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega, A, P)$; comme $\{\mu_n^\bullet(f)\}$ converge en moyenne quadratique, $\{\mu_n^\bullet(f) \nu^\bullet(g)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $L^1(\Omega, A, P)$: ce qui entraîne en particulier la convergence de la suite :

$$\{E(\mu_n^\bullet(f) \nu^\bullet(g))\} = \left\{ \int f(x) g(y) \mu_n \nu(dx, dy) \right\}$$

L'égalité ci-dessus résulte de la propriété IV.5..

2) Ainsi, d'après le théorème IV.3., il existe une mesure aléatoire du second ordre positive $\gamma^\bullet$ telle que $\beta = \gamma^2 = E(\gamma^\bullet \otimes \gamma^\bullet)$ et $(\gamma_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers $\gamma^\bullet$.

Posons alors $\mu^\bullet = \gamma^\bullet - \nu^\bullet$

$(\gamma_n - \gamma)^2 = (\mu_n - \mu)^2$ converge faiblement à distance finie vers 0 donc $(\mu_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers $\mu^\bullet$.

D'après la propriété IV.9., $(\mu_m \mu_n)_{m,n}$ converge faiblement à distance finie vers μ^2 donc :

$$\alpha = \mu^2 \quad \blacksquare$$

Théorème IV.7. - Soit $(\mu_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures aléatoires du second ordre telle que :

1) $\forall n \in \mathbb{N}, |\mu_n^\bullet| \leq \nu^\bullet$ où $\nu^\bullet$ est une mesure aléatoire positive du second ordre.

2) $\forall f \in C_b^+, \forall g \in C_b^+; \lim_{n,m} \int f(x) g(y) \mu_m \mu_n(dx, dy)$ existe. Alors il existe une mesure aléatoire $\mu^\bullet$ du second ordre telle que : $(\mu_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers $\mu^\bullet$.

Démonstration : D'après le théorème IV.6., il suffit de démontrer que $(\mu_m \mu_n)_{m,n}$ converge faiblement à distance finie vers une certaine mesure α de M^2 .

Comme dans la démonstration de la propriété IV.9., l'hypothèse 1) implique que la suite $(\mu_m \mu_n)_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ est relativement compacte dans M^2 .

Or la classe $F^+ = \{f(x) g(y); f \in C_b^+, g \in C_b^+\}$ est déterminante sur M^2 ; on applique alors le théorème III.5. pour conclure. $\blacksquare$

Du théorème IV.7., on tire facilement le résultat suivant, à rapprocher du corollaire IV.4..

Corollaire IV.7. - Soit $(\mu_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures aléatoires du second ordre telle que :

1) $\forall n, |\mu_n^\bullet| \leq \nu^\bullet$ où $\nu^\bullet$ est une mesure aléatoire du second ordre positive.

2) $\forall f \in C_b : \{\mu_n^\bullet(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers une certaine variable aléatoire réelle $X(f)$.

Alors $(\mu_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ converge m.q. vers une certaine mesure aléatoire du second ordre $\mu^\bullet$.

C - INTRODUCTION A L'ETUDE DES MESURES ALEATOIRES EVOLUTIVES DU SECOND ORDRE.

Ce paragraphe est consacré à des applications à l'étude des processus à "valeurs mesures" des résultats obtenus précédemment ; nous supposons, dans tout ce qui suit que l'espace métrique séparable (X, d) jouit de la propriété de complétude.

T désignant un intervalle de la droite réelle, on appellera mesure aléatoire évolutive du second ordre toute famille $\{\mu_t^\bullet ; t \in T\}$ de mesures aléatoires du second ordre définies sur un même espace probabilisé (Ω, A, P) .

Pour toute fonction $f \in C_b$, $\{\mu_t^\bullet(f) ; t \in T\}$ est donc un processus réel du second ordre.

Compte tenu de la notion de convergence en moyenne quadratique introduite au paragraphe précédent, nous dirons que la mesure aléatoire évolutive $\{\mu_t^\bullet ; t \in T\}$ est continue en moyenne quadratique en un point $t_0 \in T$ si et seulement si pour tout voisinage faible à distance finie V de 0 dans M^2 , il existe un nombre réel positif ε tel que :

$$\forall t \in T \cap]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[, E[(\mu_t^\bullet - \mu_{t_0}^\bullet) \otimes (\mu_t^\bullet - \mu_{t_0}^\bullet)] = [\mu_t^\bullet - \mu_{t_0}^\bullet]^2 \in V$$

Nous supposons dans tout ce qui suit que $\{\mu_t^\bullet ; t \in T\}$ est continue en moyenne quadratique sur T , c'est-à-dire en tout point $t \in T$.

Les théorèmes IV.1. et le corollaire IV.7. montrent que cette hypothèse est vérifiée quand, pour toute fonction $f \in C_b$, le processus du second ordre $\{\mu_t^\bullet(f), t \in T\}$ est continu en moyenne quadratique sur T , et :

$$* \mu_t^\bullet \geq 0, \quad \forall t \in T$$

ou

* $|\mu_t^\bullet| \leq v^\bullet, \quad \forall t \in T$, où $v^\bullet$ est une mesure aléatoire du second ordre positive.

Rappelons brièvement les conséquences bien connues de la continuité en moyenne quadratique du processus réel du second ordre $\{\mu_t^\bullet(f); t \in T\}$ $\forall f \in C_b$. Tout d'abord, pour tout $f \in C_b$, la covariance $\Gamma_f(s, t) = E\{\mu_s^\bullet(f) \mu_t^\bullet(f)\}$ est continue sur $T \times T$ et il existe une version mesurable et séparable de $\{\mu_t^\bullet(f); t \in T\}$.

Si l'intervalle T est compact, $\Gamma_f(t, t)$ est intégrable Riemann, donc intégrable Lebesgue sur T ; d'après le théorème de Fubini,

$$\int_T [\mu_t^\bullet(f)]^2 dt < +\infty \text{ p.s.}$$

$$\text{et } E\left\{\int_T [\mu_t^\bullet(f)]^2 dt\right\} = \int_T \Gamma_f(t, t) dt.$$

De plus, comme la mesure de Lebesgue sur T est finie :

$$\int_T \mu_t^\bullet(f) dt < +\infty \text{ p.s.}$$

$$\text{et : } E\left\{\left[\int_T \mu_t^\bullet(f) dt\right]^2\right\} = E\left\{\int_T \int_T \mu_t^\bullet(f) \mu_s^\bullet(f) dt ds\right\} = \int_T \int_T \Gamma_f(s, t) ds dt < +\infty$$

D'après l'inégalité de Schwarz, pour tous $f \in C_b, g \in C_b$:

$$E\left\{\int_T \mu_t^\bullet(f) dt \int_T \mu_s^\bullet(g) ds\right\} < +\infty.$$

Donc :

$$\int_T \mu_t^\bullet(f) dt \int_T \mu_s^\bullet(g) ds = \int_T \int_T \mu_t^\bullet(f) \mu_s^\bullet(g) dt ds < +\infty \text{ p.s.}$$

Ceci étant dit, nous nous proposons, étant donnée une mesure aléatoire évolutive du second ordre $\{\mu_t^\bullet, t \in T\}$ de montrer l'existence d'une mesure aléatoire du second ordre $M^\bullet$ telle que :

$$\forall f \in C_b : M^\bullet(f) = \int_T \mu_t^\bullet(f) dt \text{ p.s.}$$

Cette mesure aléatoire vérifiera en outre la propriété :

$$\forall f, g \in C_b : M^\bullet \otimes M^\bullet(f.g) = \int_T \int_T \mu_t^\bullet \otimes \mu_s^\bullet(f.g) dt ds \text{ p.s.}$$

Pour cela, remarquons tout d'abord que, pour tout $f \in C_b$, $\int_T \mu_t^\bullet(f) dt$ peut être obtenu à une équivalence près pour l'égalité presque sûre, comme l'intégrale en moyenne quadratique du processus $\{\mu_t^\bullet(f); t \in T\}$ puisque la covariance $\Gamma_f(s, t)$ est intégrable Riemann sur le pavé $T \times T$.

Nous allons résoudre le problème posé en considérant deux cas :

a) Cas d'une mesure aléatoire évolutive du second ordre positive $\{\mu_t^\bullet; t \in T\}$. Considérons une suite quelconque de partitions $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de l'intervalle $T = [a, b]$.

$$P_n : a = t_{n,0} < t_{n,1} < \dots < t_{n,k(n)} = b$$

telle que : $\max_{j=1}^{k(n)} (t_{n,j} - t_{n,j-1}) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

$$\text{On forme : } S_{n,f} = \sum_{j=1}^{k(n)} (t_{n,j} - t_{n,j-1}) \mu_{t_{n,j}}^\bullet(f).$$

$$\text{On sait que : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{m.q. } S_{n,f} = \int_T \mu_t^\bullet(f) dt \text{ p.s.}$$

Remarquons alors que :

$$\left\{ \sum_{j=1}^{k(n)} (t_{n,j} - t_{n,j-1}) \mu_{t_{n,j}}^\bullet \right\}_{n \in \mathbb{N}^*} = (M_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

est une suite de mesures aléatoires positives du second ordre ; d'après le corollaire du théorème IV.4., dire que pour tout $f \in C_b$, le processus $\{\mu_t^\bullet(f) ; t \in T\}$ est intégrable en moyenne quadratique revient à dire que la suite $(M_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en moyenne quadratique vers une certaine mesure aléatoire $M^\bullet$ et on a :

$$\forall f \in C_b : M^\bullet(f) = \int_T \mu_t^\bullet(f) dt \text{ p.s.}$$

b) Cas d'une mesure aléatoire évolutive du second ordre quelconque $\{\mu_t^\bullet ; t \in T\}$. Nous supposons, en plus de l'hypothèse d'intégrabilité en moyenne quadratique du processus réel $\{\mu_t^\bullet(f) ; t \in T\}$ pour tout $f \in C_b$, qu'il existe une mesure aléatoire positive $\nu^\bullet$ du second ordre telle que :

$$|\mu_t^\bullet| < \nu^\bullet \quad \forall t \in T.$$

Considérons toujours la suite quelconque de partitions de l'intervalle $T = [a, b]$ définie ci-dessus, ainsi que la somme $S_{n,f}$ associée ; on sait que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{m.q. } S_{n,f} = \int_T \mu_t^\bullet(f) dt \text{ p.s.}$$

Dans le cas qui nous occupe maintenant

$\left\{ \sum_{j=1}^{k(n)} (t_{n,j} - t_{n,j-1}) \mu_{t_{n,j}}^\bullet \right\}_{n \in \mathbb{N}^*} = (M_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de mesures aléatoires du second ordre à signe.

Nous avons alors :

$$|M_n^\bullet| < (b-a) \nu^\bullet \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

D'après le corollaire IV.7., dire que pour tout $f \in C_b$ $\{\mu_t^\bullet(f) ; t \in T\}$ est intégrable en moyenne quadratique revient à dire que $(M_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en moyenne quadratique vers une certaine mesure aléatoire $M^\bullet$ et on a :

$$\forall f \in C_b : M^\bullet(f) = \int_T \mu_t^\bullet(f) dt \quad \text{p.s.} .$$

L'intégrale en moyenne quadratique d'une mesure aléatoire évolutive du second ordre $\{\mu_t^\bullet ; t \in T\}$ peut donc être toujours définie.

Ce résultat d'apparence naturelle, n'est acquis sans peine que grâce aux méthodes développées dans le paragraphe B.

Il faut remarquer, en outre, que ce résultat est bien plus qu'une simple mise en forme du fait que les processus $\{\mu_t^\bullet(f) ; t \in T\}$ sont tous intégrables en moyenne quadratique ; il permet de donner un sens à $\int_T \mu_t^\bullet(A) dt$, pour tout $A \in \mathcal{B}_b$, même si $\{\mu_t^\bullet(A) ; t \in T\}$ n'est pas a priori intégrable en moyenne quadratique, en posant :

$$M^\bullet(A) = \int_T \mu_t^\bullet(A) dt \quad \text{p.s.}$$

Ayant défini $M^\bullet = \int_T \mu_t^\bullet dt$ en tant que mesure aléatoire du second ordre, nous pouvons remarquer que $\int_T \mu_t^\bullet dt \otimes \int_T \mu_s^\bullet ds$ est une mesure aléatoire sur M^2 et nous préoccuper de donner un sens à l'écriture $\int_T \int_T \mu_t^\bullet \otimes \mu_s^\bullet dt ds$ à l'aide de cette remarque.

Supposons que f et g soient des éléments de C_b ; appliquons le produit $f \cdot g$ à la mesure aléatoire $M^\bullet \otimes M^\bullet$; on obtient :

$$M^\bullet \otimes M^\bullet(f \cdot g) = M^\bullet(f) M^\bullet(g)$$

$$\text{et} \quad M^\bullet(f) M^\bullet(g) = \int_T \mu_t^\bullet(f) dt \int_T \mu_s^\bullet(g) ds \quad \text{p.s.}$$

d'après la représentation obtenue plus haut ; ainsi on a :

$$M^\bullet \otimes M^\bullet(f \cdot g) = \int_T \int_T \mu_t^\bullet \otimes \mu_s^\bullet(f \cdot g) dt ds \quad \text{p.s.} .$$

Nous allons illustrer l'intérêt de l'intégrale en moyenne quadratique par les trois exemples suivants qui ouvrent, pour les deux derniers, de nouveaux thèmes de recherche.

Exemple 1 : Migration d'étourneaux dans l'intervalle de temps

$[0,1]$. Appelons :

C l'ensemble des migrations ou des chemins.

S la sphère terrestre.

Un élément de C est donc une application continue de $[0,1]$ dans S .

Une variable aléatoire à valeurs dans C définit un processus $\{X_t ; t \in [0,1]\}$ à trajectoires continues.

Soit d la métrique associée à la norme de la convergence uniforme ; (C,d) est un espace métrique séparable et complet qu'on munit de sa tribu borélienne B_C .

On représente les habitudes des étourneaux par une loi de probabilité Q sur (C, B_C) .

* A un instant $t \in [0,1]$, la position des étourneaux est une répartition ponctuelle aléatoire :

$$\mu_t^\bullet = \sum_{n=1}^N \delta_{X_n(t)}$$

où : N est le nombre d'étourneaux.

$X_1, \dots, X_N$ est un échantillon de la loi Q .

** Dans le cas où les étourneaux se promènent par familles, leur position à un instant $t \in [0,1]$ est aussi une répartition ponctuelle aléatoire qui s'écrit :

$$\mu_t^\bullet = \sum_{n=1}^N K_n \delta_{X_n}(t)$$

où : N est le nombre total de familles.

$X_1, \dots, X_N$ est un échantillon de la loi Q .

$K_1, \dots, K_N$ est un échantillon de la loi du nombre d'oiseaux dans une famille.

On vérifie trivialement que $\{\mu_t^\bullet ; t \in [0,1]\}$ est une mesure aléatoire évolutive du second ordre positive.

Soit A un borélien borné (un champ par exemple) : si on observe $\int_0^1 \mu_t^\bullet(A) dt$, il s'agit du peuplement aléatoire moyen du champ A entre les instants $t = 0$ et $t = 1$.

Exemple 2 : Processus de lignes.

Les méthodes développées jusqu'ici devraient permettre d'étudier ces problèmes sous un nouvel aspect : soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$. On considère un échantillon aléatoire de taille N du couple $(X, Y) : (X_1, Y_1) ; \dots ; (X_N, Y_N)$ et les segments aléatoires $\{t X_n + (1-t) Y_n ; t \in [0,1]\}$.

Posons
$$\mu_t^\bullet = \sum_{n=1}^N \delta_{tX_n + (1-t)Y_n}.$$

On constate facilement que $\{\mu_t^\bullet ; t \in T\}$ est une mesure aléatoire évolutive du second ordre positive.

Soit A une zone du plan : on interprète $\int_0^1 \mu_t^\bullet(A) dt$ comme le nombre aléatoire moyen de segments qui coupent la zone A entre les instants $t = 0$ et $t = 1$.

Exemple 3 : Théorème ergodique.

Soit $\{\mu_t^\bullet ; t \in \mathbb{R}^+\}$ une mesure aléatoire évolutive du second ordre.

On suppose que cette mesure aléatoire évolutive est intégrable en moyenne quadratique, et que $E\{\mu^\bullet(t)\} = \mu$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$.

L'objet de cette étude est de voir sous quelles conditions la "moyenne temporelle" $S_T^\bullet = \frac{1}{T} \int_0^T \mu_t^\bullet dt$ converge suivant T en moyenne quadratique vers μ , ce qui constituerait une sorte de loi des grands nombres et une première approche de problèmes relevant de la mécanique statistique.

$$\text{Posons : } \Lambda_T^\bullet = S_T^\bullet - \mu = \frac{1}{T} \int_0^T \mu_t^\bullet dt - \mu.$$

Pour que $\Lambda_T^\bullet \xrightarrow{\text{m.q.}} 0$ quand $T \rightarrow +\infty$, il suffit, en vertu du corollaire IV.7. que :

1) $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\mu_t^\bullet \geq 0$ ou $\forall t \in \mathbb{R}^+$ $|\mu_t^\bullet| < v^\bullet$ où $v^\bullet$ est une mesure aléatoire positive du second ordre.

2) $\forall f \in C_b : \{\Lambda_T^\bullet(f)\}_{T \in \mathbb{N}^*}$ converge en moyenne quadratique vers 0 au sens usuel.

On peut ainsi énoncer le résultat suivant, conséquence de [20] p. 222.

Propriété.- Soit $\{\mu_t^\bullet ; t \in \mathbb{R}^+\}$ une mesure aléatoire évolutive du second ordre, intégrable en moyenne quadratique sur $[0, T]$, pour tout $T \in \mathbb{R}^+$.

On suppose en outre que $E \mu_t^\bullet = \mu \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$.

Pour que $\frac{1}{T} \int_0^T \mu_t^\bullet dt \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{m.q.} \mu$ il est suffisant que :

1) $\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \mu_t^\bullet \geq 0$, ou $\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad |\mu_t^\bullet| < \nu^\bullet$, $\nu^\bullet$ positive
du second ordre.

$$2) \quad \forall f \in C_b : \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T R_f(t,s) dt ds = 0$$

où
$$R_f(t,s) = E\{[\mu_t^\bullet(f) - \mu(f)] [\mu_s^\bullet(f) - \mu(f)]\} .$$

B I B L I O G R A P H I E.

- [1] J. GEFFROY et P. QUIDEL - *Convergences stochastiques des répartitions ponctuelles aléatoires.*
Revista da Faculdade de Ciências de Coimbra.
Vol XLIX, 1974.
- [2] H. ZEBoulON - *Contribution à l'étude des convergences stochastiques des mesures aléatoires.*
Thèse de 3ème cycle. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1975.
- [3] P. JACOB - 1) *Représentations convergentes de mesures et de processus ponctuels.*
2) *Notion de convergence d'une suite de probabilités qualitatives.*
Thèse d'Etat présentée à l'Université Pierre et Marie Curie - Paris VI et à l'Université de Valenciennes, 1978.
- [4] M.H. GENSBITTEL - *Contribution à l'étude statistique des représentations ponctuelles aléatoires.*
Thèse de 3ème cycle présentée à l'Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1979.
- [5] K. MATTHES, J. KERSTAN, J. MECKE - *Infinitely divisible point processes.*
Wiley, 1978.
- [6] J. NEVEU - *Processus aléatoires gaussiens.*
Séminaire Math. Sup. (Presses de l'Université de Montréal).
- [7] P. BILLINGSLEY - *Convergence of probability measures.*
Wiley 1968.
- [8] V.S. VARADARAJAN - *Measures on topological spaces.*
Amer. Math. Soc. Transl. Series 2, t. 48, 1961, p. 161-228.
- [9] J. GEFFROY, H. ZEBoulON - *Sur certaines convergences stochastiques des mesures aléatoires et des processus ponctuels.*
CRASP, 280, série A, 1975.
- [10] K. KRICKEBERG - *Moments of point processes, dans stochastic geometry,*
(Cd D.G. KENDALL et E.F. HARDING) Wiley, 1974 p. 89-113.
- [11] D. VERE-JONES - *An elementary approach to the spectral theory of stationary random measures, dans stochastic geometry.*
(Cd. D.G. KENDALL et E.F. HARDING) Wiley, 1974 p. 307-321.

- [12] P. JAGERS - *Aspects of random measures and point processes.*
Dekker, 1974.
- [13] T.E. HARRIS - *Counting measures, monotone random set functions.*
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb. 10,
1968 p. 102-119.
- [14] P. JACOB - *Convergence uniforme à distance finie de mesures
signées.*
Annales Inst. H. Poincaré - Vol. XV, n° 4,
1974 p. 355-373 section B.
- [15] E. RAMIS,
C. DESCHAMPS,
J. ODOUX - *Cours de Maths. spéciales.*
tome 3., 1976, MASSON.
- [16] J. GENET - *Mesure et intégration : théorie élémentaire.*
Vuibert, 1976.
- [17] K. YOSIDA and
E. HEWITT - *Finitely additive measures.*
Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952) p. 46-66 ,
MR 13, 147.
- [18] A.D. ALEKSANDROV - *Additive set functions in abstract spaces.*
Ibid. 9 (51) (1941) p. 563-628.
(English Russian Summary) MR 3, 207.
- [19] J. DIEUDONNE - *Foundations of modern analysis.*
Academic Press 1960.
- [20] I.I. GIHMAN
A.V. SKOROKHOD - *The theory of stochastic processes I.*
Springer - Verlag, 1974.
- [21] K.R. PARTHASARATHY - *Probability measures on metric spaces.*
Academic Press 1967.
- [22] M. LOEVE - *Probability theory.*
Van Nostrand 1960.
- [23] E. PARSEN - *Stochastic processes.*
Holden Day 1962.
- [24] N.U. PRABHU - *Stochastic processes.*
Mac Millan 1965.
- [25] M. METIVIER - *Cours de D.E.A. de probabilité.*
Rennes 1966-67.
- [26] O. KALLENBERG - *Random measures.*
Academic Press 1976.
- [27] J. NEVEU - *Sur la structure des processus ponctuels stationnaires.*
CRASP, 267 série A, 1968 p. 561-564.

- [28] P.A. MEYER
 - *Processus de Poisson ponctuels, d'après K. ITO*
Séminaire de Probabilité V, Lectures Notes in
Mathematics p. 177 - Springer - Verlag 1971.
- [29] K. ITO
 - *Poisson point processes attached to Markov
processes.*
Lecture Note, University of Kioto, 1969.
- [30] A.V. SKOROKHOD
 - *Studies in the theory of random processes.*
ADDISON WESLEY.
- [31] A.V. SKOROKHOD
 - *Limit theorems for stochastic processes.*
Theor. Proba. Appl. I, p. 261-290 (1956).
- [32] J. GEFFROY et
O. JOUANDET
 - *Sur une interprétation nouvelle de la convergence
faible d'une suite de probabilités boréliennes
dans un espace polonais.*
CRASP 269, Série A, (1969) p. 1077.
- [33] R.M. DUDLEY
 - *Distances of probability measures and random
variables.*
Annals of Mathematical statistics, 39, 1968
p. 1563-1572.
- [34] L. SCHWARTZ
 - *Topologie générale et analyse fonctionnelle.*
Hermann, 1970.
- [35] C.M. MARLE
 - *Mesures et probabilités.*
Hermann, 1974.
- [36] P. JACOB
 - *Représentations convergentes de mesures
et de processus ponctuels.*
Pub. ISUP 1978 - XIII, 3-4, p. 89-104.
- [37] P. JACOB
 - *Représentations convergentes des intégrales
stochastiques.*
Ann. IHP, XVIII, 3, p. 249-275, 1982.

A N N E X E.

REPRESENTATIONS CONTINUES DE MESURES PAR
DES PROCESSUS PONCTUELS DE POISSON.

par

Sabeko Marcel BONKIAN
I.S.P. OUAGADOUGOU - (HAUTE - VOLTA).

Résumé : Soit M l'ensemble des mesures positives finies sur les boréliens bornés d'un espace métrique séparable X ; soit M un sous-ensemble dominé de M . On munit M de la topologie faible à distance finie et on construit un processus $(X_\mu, \mu \in M)$ presque sûrement continu sur M , tel que, pour tout $\mu \in M$, X_μ soit un processus de Poisson de moyenne μ se réalisant dans X .

Classification AMS (MOS) : 60 G 55 - 57 .

Mots clés : mesure aléatoire ; processus ponctuel de Poisson ;
convergence faible à distance finie ; théorème de Skorokhod.

I - PRELIMINAIRES.-

Soit (X,d) un espace métrique séparable, complet ; C_b l'ensemble des fonctions numériques continues et bornées, à support borné sur X .

$\mathcal{B}$ est la tribu borélienne de X et $\mathcal{B}_b$ est l'anneau des boréliens bornés de X .

M désigne l'ensemble des mesures positives, σ -additives sur $\mathcal{B}$, finies sur $\mathcal{B}_b$.

On note E l'ensemble des répartitions ponctuelles c'est-à-dire l'ensemble des éléments f de M tels que :

$$\forall A \in \mathcal{B}_b, \quad f(A) = N(f,A) \in \mathbb{N}$$

ou : mesures discrètes à masses entières.

Définition.- On appelle topologie de la convergence faible à distance finie sur M , la topologie dont une base de voisinages est donnée par les ensembles de la forme :

$$V(\lambda_0, h_1, \dots, h_n, \epsilon) = \{ \lambda \in M, \quad \left| \int_X h_r d\lambda_0 - \int_X h_r d\lambda \right| < \epsilon ;$$

$$h_r \in C_b ; \quad r = 1, \dots, n \}$$

où λ_0 décrit M , $n \in \mathbb{N}^*$ et $\epsilon \in \mathbb{R}^+$.

Une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de M converge faiblement à distance finie vers λ_0 si et seulement si :

$$\forall h \in C_b, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X h d\lambda_n = \int_X h d\lambda_0.$$

J. Geffroy avec P. Quidel [1] puis avec M. Zéboulon [2] ont défini une métrique ρ induisant la topologie de la convergence faible à distance finie sur M .

ρ se définit comme suit ; on fixe une origine 0 de façon quelconque dans X . Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$\forall (\mu, \nu) \in M^2 \quad \sigma_r(\mu, \nu) = \inf \{ \delta > 0, \forall A \in \mathcal{B} \text{ tel que } A^\delta \subset B(0, r) \}$$

$$\mu(A) \leq \nu(A^\delta) + \delta$$

$$\forall (\mu, \nu) \in M^2 \quad \rho_r(\mu, \nu) = \max \{ \sigma_r(\mu, \nu), \sigma_r(\nu, \mu) \}$$

$$\forall (\mu, \nu) \in M^2 \quad \rho(\mu, \nu) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^r} \frac{\rho_r(\mu, \nu)}{1 + \rho_r(\mu, \nu)}$$

$A^\delta = \{x \in X, d(x, A) < \delta\}$ est le dilaté de A à δ près.

$B(0, r)$ est la boule ouverte de centre 0 et de rayon r .

Le théorème suivant est utile pour caractériser la convergence faible à distance finie.

Théorème [2].- Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans M ; les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(\lambda_n, \lambda_0) = 0$$

$$b) \forall A \in \mathcal{B}_b \text{ tel que } \lambda_0(\partial A) = 0 : \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n(A) = \lambda_0(A) \text{ où}$$

∂A désigne la frontière de A .

On note $\mathcal{B}_M$ la tribu borélienne de M ; $E \in \mathcal{B}_M$, et on note $\mathcal{B}_E$ la trace de $\mathcal{B}_M$ sur E .

Définitions :

D_1 - On appellera mesure aléatoire toute variable aléatoire à valeurs dans $(M, \mathcal{B}_M)$, et processus ponctuel toute variable aléatoire à valeurs dans $(E, \mathcal{B}_E)$.

D_2 - Un processus ponctuel f^* est dit de Poisson (ce qu'on notera désormais p.p.p) si et seulement si il vérifie :

i) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall A_1, \dots, A_k \in \mathcal{B}_b$ deux à deux disjoints ; les variables aléatoires réelles $N(f^*, A_1), \dots, N(f^*, A_k)$ sont indépendantes (on dit alors que le processus est à accroissements indépendants).

ii) $\forall A \in \mathcal{B}_b$, $N(f^*, A)$ suit une loi de Poisson.

D_3 - On appelle mesure moyenne (ou intensité) du processus ponctuel de Poisson f^* la mesure $\mu \in M$ définie par :

$$\forall A \in \mathcal{B}_b, \quad \mu(A) = E \{N(f^*, A)\}$$

La loi de probabilité de f^* est une mesure de probabilité sur $(E, \mathcal{B}_E)$ entièrement déterminée par la mesure moyenne de f^* [10] p. 16, Théorème 3-1 ; soit $\mathcal{P}_M$ l'ensemble des probabilités sur $(M, \mathcal{B}_M)$; on définit ainsi une application :

$$M \longrightarrow \mathcal{P}_M$$

$$\mu \rightsquigarrow \pi_\mu \quad (\text{loi du p.p.p. d'intensité } \mu)$$

Si $\mathcal{P}_M$ est muni de la topologie faible classique, il est facile de vérifier que cette application est continue.

La construction d'un p.p.p. $f_\mu^\cdot$ d'intensité μ fixée est classique voir [3] ; [8] ; [9] .

Nous nous proposons de définir un procédé de construction suffisamment régulier pour que le processus stochastique $\{f_\mu^\cdot ; \mu \in M\}$ possède de bonnes propriétés de continuité. Nos résultats généralisent ceux obtenus par P. Jacob dans [4] .

II - REPRESENTATION CONTINUE DE MESURES. -

La représentation que nous allons construire est basée essentiellement sur une généralisation du théorème bien connu de A.V. Skorokhod dont on pourra trouver la démonstration dans [5] et [4].

Théorème 1.- Soit P l'ensemble des probabilités boréliennes définies sur un espace métrique séparable et complet Y ; on munit P de la topologie faible. Soit M le sous-ensemble d'éléments de P dominés par une probabilité fixée σ ; enfin, soit $(\Omega, A, \lambda) = ([0,1], B_{[0,1]}, \lambda)$ où λ est la mesure uniforme sur $B_{[0,1]}$.

Il existe une fonction aléatoire $X(.,.)$ définie sur $P \times \Omega$ et à valeurs dans X telle que :

- i) $\forall \mu \in P$, $X(\mu,.)$ est de loi μ .
- ii) $\forall \mu \in M$, il existe $\Omega_\mu \in A$ tel que $\lambda(\Omega_\mu) = 1$ et tel que, pour tout $\omega \in \Omega_\mu$, la trajectoire $X(.,\omega)$ est continue au point μ .

D'autre part, nous utiliserons en cours de démonstration plusieurs lemmes techniques.

Lemme 1. - Soit $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de M .

Il existe une famille A_{μ_0} dénombrable, de boréliens bornés μ_0 -continus telle que si :

$$\mu_n(A) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu_0(A) \quad \forall A \in A_{\mu_0} \quad \text{alors} \quad \mu_n \longrightarrow \mu_0 \quad \text{faiblement à distance finie.}$$

Démonstration : Soit $m \in \mathbb{N}^*$ quelconque ; pour tout $x \in X$, on peut choisir une boule ouverte de centre x , de diamètre inférieur à $\frac{1}{m}$ qui est μ_0 -continue. La possibilité d'un tel choix est claire. On la note $B_m(x)$.

X étant séparable, il existe, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ un recouvrement dénombrable de X par certaines de ces boules soit $\{B_m(x_i^m)\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ ce recouvrement ; $m = 1, 2, \dots$ Posons

$$\begin{aligned} A_1^m &= B_m(x_1^m) \\ A_2^m &= B_m(x_2^m) - B_m(x_1^m) \\ &\vdots \\ A_n^m &= B_m(x_n^m) - \bigcup_{k=1}^{n-1} B_m(x_k^m) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Les boréliens de la suite $(A_n^m)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont μ_0 -continus, forment pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ une partition dénombrable de X , et sont tous de diamètre inférieur à $\frac{1}{m}$.

$$\text{Posons } \mathcal{D}_1 = \{A_1^1 ; A_2^1 ; \dots ; A_m^1 ; \dots\} .$$

On obtient $\mathcal{D}_2$ en formant les intersections :

$$\begin{aligned} & A_1^1 \cap A_1^2 ; \dots ; A_1^1 \cap A_p^2 ; \dots \\ & A_n^1 \cap A_1^2 ; \dots ; A_n^1 \cap A_p^2 ; \dots \\ & \vdots \end{aligned}$$

On pourra noter $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^{*2} \quad A_n^1 \cap A_p^2 = A_{n,p}$ l'élément générique de la partition $\mathcal{D}_2$ et par généralisation

$$A_{n_1}^1 \cap A_{n_2}^2 \cap \dots \cap A_{n_k}^k = A_{n_1, \dots, n_k} \quad (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^{*k}$$

l'élément générique de la partition $\mathcal{D}_k$.

Par construction, $\mathcal{D}_k$ est un raffinement de $\mathcal{D}_{k-1}$.

Pour récapituler, la suite $(\mathcal{D}_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de partitions de X ainsi construites, emboîtées les unes dans les autres est telle que :

- i) $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad , \quad \forall A \in \mathcal{D}_k \quad \mu_o(\partial A) = 0$
- ii) $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad , \quad \forall A \in \mathcal{D}_k \quad \Delta(A) < \frac{1}{k} \quad \text{où } \Delta(A) \text{ désigne le}$

diamètre de A .

On appellera A_1 la famille de tous les boréliens des partitions $(\mathcal{D}_k)_{k \geq 1}$ à laquelle on ajoute éventuellement ϕ .

Comme ces partitions sont raffinement les unes des autres, A_1 est fermé pour l'intersection finie. En outre, tout ouvert de X est réunion dénombrable d'éléments de A_1 [4 p. 28-29].

Soit 0 un point arbitraire de X et $\{B(o, r_n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de boules ouvertes de centre 0 et de rayon $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ μ_o -continues telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = +\infty$.

Posons $A_2 = \{B(o, r_n), n \geq 1\}$ et enfin $A_{\mu_0} = A_1 \cup A_2$
 soit G un ouvert borné et soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$; comme $\mu_0(G) < +\infty$, il
 existe une suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de A_1 et un nombre entier
 $m(\varepsilon)$ tel que

$$\mu_0(G - \bigcup_{i=1}^{m(\varepsilon)} A_i) < \varepsilon$$

D'après le lemme de Poincaré on a :

$$\mu_n(\bigcup_{i=1}^{m(\varepsilon)} A_i) = \sum_{k=1}^{m(\varepsilon)} (-1)^{k+1} S_k^{m(\varepsilon)}$$

avec $S_k^{m(\varepsilon)} = \sum_{i_1, \dots, i_k} \mu_n(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$ et où la sommation s'étend
 à toutes les combinaisons des $m(\varepsilon)$ premiers entiers pris k à k .

Les $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$ sont des intersections finies d'éléments
 de A_1 et appartiennent donc à A_1 . On a par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(\bigcup_{i=1}^{m(\varepsilon)} A_i) = \mu_0(\bigcup_{i=1}^{m(\varepsilon)} A_i)$$

si bien que l'on peut écrire :

$$\mu_0(G) - \varepsilon < \mu_0(\bigcup_{i=1}^{m(\varepsilon)} A_i) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(\bigcup_{i=1}^{m(\varepsilon)} A_i) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(G)$$

et, puisque ε est arbitraire on a :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(G) \geq \mu_0(G) \quad (*)$$

D'autre part, si F est un fermé borné il existe un élément $B(o, r_\ell)$
 de A_2 qui le contient.

Comme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(B(o, r_\ell)) = \mu_o(B(o, r_\ell))$

et $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n [B(o, r_\ell) - F] \geq \mu_o [B(o, r_\ell) - F]$

on a : $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(F) \leq \mu_o(F) \quad (**)$

De (*) et (**) on déduit aisément :

$$\forall A \in \mathcal{B}_b / \mu_o(\partial A) = 0 : \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(A) = \mu_o(A)$$

Ce qui est la convergence faible à distance finie.

Lemme 2. - Soit :

- $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $(X, \mathcal{B})$, indépendantes et de même loi Q .
- Z une variable aléatoire indépendante des $(X_i)_{i \geq 1}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $(N, P(N))$.

On pose $f^* = \sum_{i=1}^Z \delta_{X_i}$

1) Si, pour une seule partition donnée $A_1 \dots A_r$ de X les v.a.r. $\sum_{i=1}^Z \delta_{X_i}(A_1) ; \dots ; \sum_{i=1}^Z \delta_{X_i}(A_r)$ sont indépendantes alors Z suit une loi de Poisson.

2) Si Z suit une loi de Poisson alors, pour toute partition $A_1 ; \dots ; A_r$ de X , les v.a.r. $\sum_{i=1}^Z \delta_{X_i}(A_1) ; \dots ; \sum_{i=1}^Z \delta_{X_i}(A_r)$ sont indépendantes.

Démonstration :

Partie 1 : On procède par récurrence sur r .

* si $r = 2$ on pose $A = A_1$ et $A_2 = A^c$

Les variables aléatoires X_i prennent leurs valeurs dans A ou dans son complémentaire A^c , avec les probabilités respectives $Q(A) = p$ et $Q(A^c) = q = 1 - p$.

On va montrer que si $\sum_{i=1}^Z \delta_{X_i}(A)$ et $\sum_{i=1}^Z \delta_{X_i}(A^c) = Z - \sum_{i=1}^Z \delta_{X_i}(A)$

sont indépendantes, alors Z suit une loi de Poisson.

Si $Y_1 = \sum_{i=1}^Z \delta_{X_i}(A)$ et $Y_2 = \sum_{i=1}^Z \delta_{X_i}(A^c)$ sont indépendantes,

on peut écrire :

$$E(s^{Y_1} t^{Y_2}) = E(s^{Y_1}) E(t^{Y_2}) .$$

D'autre part

$$\begin{aligned} E[s^{Y_1} t^{Y_2}] &= E_Z[E(s^{Y_1} t^{Y_2})/Z] \\ &= E_Z\left[E\left[s^{\sum_{i=1}^Z \delta_{X_i}(A)} t^{\sum_{i=1}^Z \delta_{X_i}(A^c)}\right] / Z\right] \\ &= E_Z\left[E\left(\prod_{i=1}^Z s^{\delta_{X_i}(A)} t^{\delta_{X_i}(A^c)}\right) / Z\right] \end{aligned}$$

Compte tenu du fait que $\delta_{X_i}(A)$ est une bernoulli de paramètre p et $\delta_{X_i}(A^c)$ est une bernoulli de paramètre q , on a :

$$E(s^{Y_1} t^{Y_2}) = E_Z\{[sp + tq]^Z\}$$

En calculant de même, on obtient :

$$E(s^{Y_1}) = E_Z \{ (sp + q)^Z \}$$

$$E(t^{Y_2}) = E_Z \{ (p + qt)^Z \} .$$

On a donc, en retenant l'hypothèse d'indépendance de Y_1 et Y_2 l'égalité :

$$E_Z \{ (sp + tq)^Z \} = E_Z \{ (sp + q)^Z \} E_Z \{ (p + qt)^Z \} .$$

Ce qui est équivalent à

$$\psi(ps + q) \psi(p + qt) = \psi(sp + qt)$$

où $\psi(s)$ est la fonction génératrice de Z c'est-à-dire

$$\psi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z = k) s^k . \text{ Comme } \psi \text{ est analytique dans le domaine}$$

$\{s \in \mathbb{R} \mid |s| < 1\}$, ψ y est dérivable.

$$\left\{ \begin{array}{lll} \psi(ps + q) \psi(p + qt) = \psi(sp + qt) <=> & \psi(u) \psi(v) = \psi(u + v - 1) \\ 0 \leq s < 1 & u = ps + q & q \leq u < 1 \\ 0 \leq t < 1 & v = p + qt & p \leq v < 1 \end{array} \right.$$

Dérivons par rapport à v : $\psi(u) \psi'(v) = \psi'(u + v - 1)$

Faisons $v = 1$: $\psi(u) \psi'(1) = \psi'(u)$

Ce qui donne : $\psi(u) = \alpha e^{\lambda u}$ avec $\lambda = \psi'(1) > 0$

Comme $\psi(1) = 1$ on a $\alpha = e^{-\lambda}$

Finalement on obtient :

$$\psi(u) = e^{\lambda(u-1)}$$

et alors $E(s^{Y_1}) = \psi(s) = e^{\lambda p(s-1)}$

$$E(t^{Y_2}) = \psi(t) = e^{\lambda q(t-1)} .$$

En conclusion, Y_1 et Y_2 suivent donc des lois de Poisson de paramètres respectifs λp et λq .

$$\text{Or} \quad Y_2 = Z - Y_1 \iff Z = Y_1 + Y_2.$$

Ainsi, Z , somme de deux v.a. de Poisson indépendantes de paramètres λp et λq est une v.a. de Poisson de paramètres $\lambda p + \lambda q = \lambda$.
Le lemme est démontré dans le cas $r = 2$.

Supposons le résultat établi jusqu'à l'ordre $r-1$ et prouvons le à l'ordre r .

En supposant que $\sum_{i=1}^Z \delta_{X_i}(A_1) ; \dots ; \sum_{i=1}^Z \delta_{X_i}(A_r)$ sont indépendantes, nous en tirons l'indépendance de :

$$\sum_{i=1}^Z \delta_{X_i}(A_r) \text{ et } \sum_{i=1}^Z \delta_{X_i}(A_1) + \dots + \sum_{i=1}^Z \delta_{X_i}(A_{r-1}) = \sum_{i=1}^Z \delta_{X_i}(\bigcup_{j=1}^{r-1} A_j).$$

Posons $A = A_r$ et $A^c = \bigcup_{j=1}^{r-1} A_j$. On se ramène au cas $r = 2$ et cela permet de conclure que Z suit une loi de Poisson.

Partie 2 :

Si Z suit une loi de Poisson de paramètre λ alors pour n'importe quelle partition finie $A_1 ; \dots ; A_r$ de X , les variables aléatoires :

$$\sum_{i=1}^Z \delta_{X_i}(A_1) ; \dots ; \sum_{i=1}^Z \delta_{X_i}(A_r) \text{ sont indépendantes.}$$

En effet si Z suit une loi de Poisson de paramètre λ , sa fonction génératrice est $g(s) = E(s^Z) = e^{\lambda(s-1)}$.

D'autre part la fonction génératrice de $\delta_{X_i}(A_j)$ est pour tout i :

$$f(s_j) = E(s_j^{\delta_{X_i}(A_j)}) = s_j p_j + \sum_{k \neq j} p_k \quad \text{où } p_j = Q(A_j) .$$

D'où, d'après [6 théorème 3 p. 129] la fonction génératrice de

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^Z \delta_{X_i}(A_j) \\ g(f(s_j)) = E(s_j^{\sum_{i=1}^Z \delta_{X_i}(A_j)}) &= e^{\lambda p_j (s_j - 1)} \quad j = 1, 2, \dots, r \\ &= E(s_j^{Y_j}) \quad \text{où } Y_j = \sum_{i=1}^Z X_i(A_j) . \end{aligned}$$

Mais, on sait que :

$$\begin{aligned} E(s_1^{Y_1} \dots s_r^{Y_r}) &= E_Z \{ [p_1 s_1 + p_2 s_2 + \dots + p_r s_r]^Z \} \\ &= e^{\lambda [p_1 s_1 + p_2 s_2 + \dots + p_r s_r - 1]} \\ &= e^{\lambda [p_1 s_1 + p_2 s_2 + \dots + p_r s_r - p_1 - p_2 - p_3 - \dots - p_r]} \\ &= e^{\lambda p_1 (s_1 - 1)} e^{\lambda p_2 (s_2 - 1)} \dots e^{\lambda p_r (s_r - 1)} \end{aligned}$$

d'où en tenant compte de $E(s_j^{Y_j}) = e^{\lambda p_j (s_j - 1)}$ $j = 1, 2, \dots, r$.

$$E(s_1^{Y_1} \dots s_r^{Y_r}) = E(s_1^{Y_1}) \dots E(s_r^{Y_r})$$

ce qui montre l'indépendance des v.a.

$$Y_1 = \sum_{i=1}^Z \delta_{X_i}(A_1) ; \dots ; Y_r = \sum_{i=1}^Z \delta_{X_i}(A_r)$$

Remarque :

Nous avons maintenant la preuve que si f^* est processus ponctuel à accroissements indépendants représenté par $f^* = \sum_{i=1}^Z \delta_{X_i}$ où :

- $(X_i)_{i \geq 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes et équidistribuées de loi Q sur $(X, \mathcal{B})$.

- Z est une v.a. à valeurs dans $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, indépendante des $(X_i)_{i \geq 1}$ alors Z suit une loi de Poisson ; ce qui à son tour implique que f^* est un p.p.p.

En effet, pour tout $A \in \mathcal{B}_b$, en notant $p = Q(A)$

$$E(s^{N(f^*, A)}) = E(s^{\sum_{i=1}^Z \delta_{X_i}(A)}) = e^{\lambda p(s-1)}$$

Autrement dit, $N(f^*, A)$ suit une loi de Poisson de paramètre λp .

Théorème 2 de représentation.

Soit Γ une famille dans M dominée par une mesure σ fixée de M .

Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ et une fonction aléatoire $\{f_\mu^*, \mu \in M\}$ dont l'espace des temps est M et l'espace des états celui des répartitions ponctuelles E telle que :

1) $\forall \mu \in M$, f_μ^* est un processus ponctuel de Poisson de mesure moyenne μ .

2) $\forall \mu \in \Gamma$, $\exists \Omega_\mu$, $\lambda(\Omega_\mu) = 1$ et $\forall \omega \in \Omega_\mu$, f_μ^ω est une trajectoire continue au point μ .

Démonstration : La preuve de ce théorème se fera en plusieurs étapes.

(a) Nous supposons que le diamètre de X est infini, ce qui est le cas le plus général.

Soit $0 \in X$ l'origine arbitraire choisie pour la construction de la métrique ρ de Geffroy.

On fait un découpage judicieux de X en construisant une suite $(B_s)_{s \in \mathbb{N}} = \{B(0, r_s)\}_{s \in \mathbb{N}}$ de boules ouvertes de centre 0 et de rayon r_s telle que :

$$1) \lim_{s \rightarrow +\infty} r_s = +\infty$$

2) $\forall s \in \mathbb{N}$, B_s est σ -continue i.e. $\sigma(\partial B_s) = 0$ où σ est la mesure qui domine Γ .

Ainsi, les éléments de la suite $(B_s)_{s \in \mathbb{N}}$ sont Γ -continus.

⑥ On fixe maintenant s et on pose :

$$E = E_s = B_s - B_{s-1} \quad \text{si } s \in \mathbb{N}^*$$

$$E = B_0 \quad \text{si } s = 0$$

On note M^* l'ensemble des éléments μ de M tels que $\mu(E) > 0$.

On pose $\Gamma^* = \Gamma \cap M^*$.

On peut ainsi définir pour tout $\mu \in \Gamma^*$ une probabilité $P_\mu = \mu/\mu(E)$ sur (E, T) où $T = \{A \cap E, A \in \mathcal{B}\}$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des probabilités sur (E, T) .

La famille $\Lambda' = (P_\mu)_{\mu \in \Gamma^*}$ est dominée par σ car Γ^* est elle-même dominée par σ . Alors, en remarquant que l'application :

$$\Gamma^* \longrightarrow \Lambda'$$

$$\mu \longrightarrow P_\mu$$

où Λ' est muni de la topologie faible, est continue, et en appliquant le théorème 1, on obtient :

Il existe une fonction aléatoire : $X(.,.) : M^* \times \Omega \longrightarrow E$
telle que :

- i) $\forall \mu \in M^*$, $X(\mu,.)$ est de loi $\mu/\mu(E)$.
- ii) $\forall \mu \in \Gamma^*$, $\exists \Omega_\mu : \lambda(\Omega_\mu) = 1$ et $\forall \omega \in \Omega_\mu$, $X(.,\omega)$ est continue en μ .

Regardons à présent la famille de nombres positifs ou nuls
 $(\gamma(E))_{\gamma \in M}$.

Chaque élément de la famille peut être considéré comme le paramètre d'une loi de Poisson, éventuellement dégénérée.

On applique à nouveau le théorème 1 et il vient :

Il existe une fonction aléatoire :

$$Z(.,.) : M \times \Omega \longrightarrow \mathbb{N} \quad \text{telle que :}$$

i) $\forall \gamma \in M$, la v.a. $Z(\gamma,.)$ suit la loi de Poisson de paramètre $\gamma(E)$. Cette variable est dégénérée si $\gamma(E) = 0$.

ii) $\forall \gamma \in M$, $\exists \Omega_\gamma$, $\lambda(\Omega_\gamma) = 1$ et $\forall \omega \in \Omega_\gamma$, $Z(.,\omega)$ est continue au point γ .

Posons :

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad (\Omega, A_i, \lambda_i) = (\Omega, A, \lambda)$$

où $\Omega = [0,1]$, $A = \mathcal{B}_{[0,1]}$; λ mesure uniforme sur $[0,1]$

$$\text{et} \quad (\Omega^\infty, A^\infty, \lambda^\infty) = \left(\prod_{i=0}^{\infty} \Omega_i, \bigotimes_{i=0}^{\infty} A_i, \bigotimes_{i=0}^{\infty} \lambda_i \right)$$

$$\pi_i : (\Omega^\infty, A^\infty, \lambda^\infty) \longrightarrow (\Omega_i, A_i, \lambda_i)$$

est la projection $i^{\text{ème}}$ coordonnée, pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Posons, pour tout $\gamma \in M^*$:

$$\forall i \in \mathbb{N}^* , \quad X_\gamma^i = X^i(\gamma, \cdot) = X(\gamma, \cdot) \circ \pi_i$$

$$i = 0 , \quad X_\gamma^0 = X^0(\gamma, \cdot) = Z(\gamma, \cdot) \circ \pi_0$$

Ainsi, $\forall \gamma \in M^*$ la suite $(X_\gamma^i)_{i \in \mathbb{N}}$ est formée de variables aléatoires indépendantes.

$$\text{On pose alors } f_\gamma^\omega = \sum_{i=1}^{X_\gamma^0(\omega)} \delta_{X_\gamma^i(\omega)} , \quad \forall \omega \in \Omega^\infty$$

(avec la convention : $f_\gamma^\omega \equiv 0$ si $X_\gamma^0(\omega) = 0$).

© Il est clair, d'après le lemme 2, que f_γ^* est un p.p.p.

L'intensité de ce processus est bien γ puisque :

$$\forall A \in \mathcal{B}_D \quad E\{s^{N(f_\gamma^*, A)}\} = e^{\gamma(E) \frac{\gamma(A)}{\gamma(E)}(s-1)} = e^{\gamma(A)[s-1]}$$

donc $E\{N(f_\gamma^*, A)\} = \gamma(A)$.

④ Dans le cas où $\gamma \in M \setminus M^*$, on construit un processus de Poisson dégénéré f_γ^* sur (E, T) en posant $f_\gamma^* \equiv 0$.

⑤ Nous allons donner la preuve de la continuité presque sûre de f_γ^* . Autrement dit, $\forall \gamma_0 \in \Gamma$, $\exists \Omega_{\gamma_0}$, $\lambda(\Omega_{\gamma_0}) = 1$ et $\forall \omega \in \Omega_{\gamma_0}$ f_γ^ω est continue au point γ_0 .

i) On suppose d'abord que $\gamma_0 \in \Gamma^*$

α_1) Par construction, $\forall i \in \mathbb{N}$, $X^i(\gamma, \cdot) \circ \pi_i$ est presque sûrement continue au point γ_0 .

Ainsi, il existe $\Omega_{\gamma_0}^\infty$ tel que $\lambda^\infty(\Omega_{\gamma_0}^\infty) = 1$ et tel que, pour tout $\omega \in \Omega_{\gamma_0}^\infty$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$ $X^i(\gamma, \omega)$ est continue en γ_0 ; ce qui est équivalent à - puisque X est un espace métrique -

$\forall \omega \in \Omega_{\gamma_0}^\infty$, $\forall i \in \mathbb{N}$ et pour toute suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant faiblement à distance finie vers γ_0 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} X^i(\gamma_n, \omega) = X^i(\gamma_0, \omega)$.

α_2) L'ensemble $\{A \in \mathcal{T}, N(f_{\gamma_0}^\omega, \partial A) = 0\}$ n'est pas dénombrable en général.

Pour cette raison, on se ramène à la famille dénombrable A_{γ_0} du lemme 1.

On a, pour tout $A \in A_{\gamma_0}$: $\gamma_0(\partial A) = EN(f_{\gamma_0}^\cdot, \partial A) = 0$.

Ce qui implique $N(f_{\gamma_0}^\cdot, \partial A) = 0$, λ^∞ p.s. .

L'hypothèse que A_{γ_0} est dénombrable entraîne l'existence d'un ensemble $\Omega_{\gamma_0}^{\infty'} \subset \Omega^\infty$, mesurable, vérifiant :

$\lambda^\infty(\Omega_{\gamma_0}^{\infty'}) = 1$ et tel que $\forall \omega \in \Omega_{\gamma_0}^{\infty'}$, $\forall A \in A_{\gamma_0}$ on a :

$$N(f_{\gamma_0}^\omega, \partial A) = 0$$

α_3) Soit A un borélien borné tel que : $N(f_{\gamma_0}^\omega, \partial A) = 0$ pour tout $\omega \in \Omega_{\gamma_0}^\infty \cap \Omega_{\gamma_0}^{\infty'}$, et une suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge faiblement à distance finie vers $\gamma_0 \in \Gamma^*$; comme $\gamma_0(E) > 0$, on peut supposer, sans perte de généralité, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n \in M^*$; il nous faut montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} N(f_{\gamma_n}^\omega, A) = N(f_{\gamma_0}^\omega, A)$$

$\forall \omega \in \Omega_{\gamma_0}^\infty \cap \Omega_{\gamma_0}^{\infty'}$, les points $X^j(\gamma_0, \omega)$ pour $j = 1, \dots, X^0(\gamma_0, \omega)$

sont dans l'intérieur de A ou dans l'intérieur de A^c ; ils sont même en nombre fini dans $\overset{\circ}{A}$.

Posons $r = \min_{j=1}^{X^0(\gamma_0, \omega)} d(X^j(\gamma_0, \omega), \partial A)$; r est strictement positif.

La fonction $X^0(-, \omega)$ étant continue en γ_0 , à valeurs entières positives, il existe $K(\omega)$ tel que :

$$\forall n \geq K(\omega) \quad , \quad X^0(\gamma_n, \omega) = X^0(\gamma_0, \omega)$$

On peut supposer $K(\omega)$ assez grand pour avoir de plus :

$$\forall n \geq K(\omega) \quad , \quad d(X^j(\gamma_n, \omega), X^j(\gamma_0, \omega)) < r \quad \text{pour } j = 1, \dots, X^0(\gamma_0, \omega) .$$

Cette inégalité signifie qu'à partir du rang $K(\omega)$, $X^j(\gamma_n, \omega)$ et $X^j(\gamma_0, \omega)$ sont soit tous les deux dans $\overset{\circ}{A}$, soit tous les deux dans $\bar{A}^c$, ce qui évite la situation où les 2 points seraient de part et d'autre de la frontière de A .

On en déduit que :

$$\forall n \geq K(\omega) \quad N(f_{\gamma_n}^\omega, A) = N(f_{\gamma_0}^\omega, A)$$

ii) Si maintenant $\gamma_0 \in \Gamma - \Gamma^*$, il existe

$$\Omega_{\gamma_0}^\infty : \lambda^\infty(\Omega_{\gamma_0}^\infty) = 1 \quad \text{et} \quad \forall \omega \in \Omega_{\gamma_0}^\infty, \quad X^0(\gamma, \omega) \text{ est continue}$$

au point γ_0 ; donc pour n assez grand,

$$X^0(\gamma_n, \omega) = X^0(\gamma_0, \omega) = 0$$

et donc $\sum_{i=1}^{X^0(\gamma_0, \omega)} \delta_{X^i(\gamma_n, \omega)} \equiv 0$ car c'est une somme qui ne contient pas d'élément.

Dans tous les cas, la fonction f_Y^ω construite est telle que :
 Pour tout $\omega \in \Omega_{Y_0}^\infty \cap \Omega_{Y_0}^{\infty'}$, pour toute suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge faiblement à distance finie vers γ_0 , $(f_{\gamma_n}^\omega)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement à distance finie vers $f_{\gamma_0}^\omega$; ce qui signifie (puisque M est muni de la métrique ρ) que f_Y^ω est continue au point γ_0 pour tout $\omega \in \Omega_{Y_0}^\infty \cap \Omega_{Y_0}^{\infty'}$.

(f) En somme, nous avons construit, pour tout $s \in \mathbb{N}$ un espace probabilisé $(\Omega_s^\infty, A_s^\infty, \lambda_s^\infty)$ et une fonction aléatoire

$$f_{\cdot}^{\cdot s} : M \times \Omega_s \longrightarrow E$$

telle que :

- $\forall \gamma \in M$, $f_{\gamma}^{\cdot s}$ est un processus ponctuel de Poisson de mesure moyenne γ .

- $f_{\cdot}^{\cdot s}$ est presque sûrement continue sur Γ .

Si on pose $(\Omega^\infty, A^\infty, \lambda^\infty) = (\prod_{s=0}^{\infty} \Omega_s^\infty, \prod_{s=0}^{\infty} A_s^\infty, \prod_{s=0}^{\infty} \lambda_s^\infty)$

alors : $\forall \gamma \in \Gamma$ $(f_{\gamma}^{\cdot s})_{s \in \mathbb{N}}$ est une suite de p.p.p. indépendants.

La superposition $f_{\gamma}^{\cdot} = \sum_{s=0}^{\infty} f_{\gamma}^{\cdot s}$ est encore un p.p.p. .

En effet si $(g_n^{\cdot})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de processus ponctuels indépendants, pour que la superposition infinie des $(g_n^{\cdot})$ soit un processus ponctuel il faut et il suffit que :

$$\forall A \in \mathcal{B}_b : \sum_{n=0}^{\infty} P\{N(g_n^{\cdot}, A) \neq 0\} < +\infty \quad [8 \text{ p. } 264] .$$

Dans la situation qui nous occupe, ce résultat s'applique puisque, si $A \in \mathcal{B}_b$, il n'y a qu'un nombre fini de $f_n^{\cdot}$ qui se réalisent dans A .

Pour tout $A \in \mathcal{B}_b$, $\forall \gamma \in M$, $N(f_\gamma^\cdot, A)$ suit la loi de Poisson de paramètre :

$$\begin{aligned} E N(f_\gamma^\cdot, A) &= \sum_{s=0}^{\infty} E(f_\gamma^{\cdot s}, A \cap E_s) \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \gamma(A \cap E_s) = \gamma(A) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la superposition $f_\gamma^\cdot$ a pour mesure moyenne γ . Il reste à montrer la continuité presque sûre de $f^\cdot$.

Soit γ_0 un élément de Γ :

On sait que pour tout $s \in \mathbb{N}$ il existe $\Omega_{\gamma_0}^{\infty, s} \in A^\infty$ tel que $\lambda^\infty(\Omega_{\gamma_0}^{\infty, s}) = 1$ et,

$$\forall \omega \in \Omega_{\gamma_0}^{\infty, s}, \quad f_\gamma^{\omega, s} \text{ est continue en } \gamma_0.$$

On pose $\Omega_{\gamma_0}^\infty = \bigcap_{s \in \mathbb{N}} \Omega_{\gamma_0}^{\infty, s} : \lambda^\infty(\Omega_{\gamma_0}^\infty) = 1$ et, $\forall s$, $\forall \omega \in \Omega_{\gamma_0}^\infty$

$$f_\gamma^{\omega, s} \text{ est continue en } \gamma_0.$$

Soit A un borélien borné tel que $\gamma_0(\gamma A) = 0$; soit S un entier tel que $A \subset \bigcup_{s=0}^S E_s$: pour tout $s = 0, \dots, S$, $\gamma_0(\partial A \cap E_s) = 0$.

Alors, pour toute suite (γ_n) d'éléments de M , qui converge faiblement à distance finie vers γ_0 , et pour tout $\omega \in \Omega_{\gamma_0}^\infty$:

$$f_{\gamma_n}^\omega(A) = \sum_{s=0}^S f_{\gamma_n}^{\omega, s}(A \cap E_s) \longrightarrow \sum_{s=0}^S f_{\gamma_0}^{\omega, s}(A \cap E_s) = f_{\gamma_0}^\omega(A)$$

ce qui montre que $\forall \omega \in \Omega_{\gamma_0}^\infty$, f^ω est continue en γ_0 , et achève la démonstration.

Remarque : Nous avons pu, grâce au théorème 2, obtenir une représentation d'une famille de mesures par une fonction aléatoire $\{f_\mu^\cdot, \mu \in M\}$ presque sûrement continue. Il semble alors naturel de voir sous quelles conditions $\{f_\mu^\cdot; \mu \in M\}$ présente une propriété de continuité uniforme. Le théorème que nous allons démontrer est le suivant :

Théorème 3.- Soit Γ une famille dominée et faiblement compacte à distance finie de mesures dans M .

Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$ et une fonction aléatoire $\{f_\mu^\cdot; \mu \in M\}$ dont l'espace des temps est M et l'espace des états celui des répartitions ponctuelles E telle que :

- 1) $\forall \mu \in M$, $f_\mu^\cdot$ est un p.p.p. d'intensité μ
- 2) $f_\mu^\cdot$ est uniformément continue en probabilité sur Γ .

Démonstration :

1) Nous ne revenons pas sur la construction de la fonction aléatoire car c'est exactement ce qui a été fait au théorème 2.

2) Pour démontrer la continuité uniforme en probabilité, nous nous appuyons aussi sur le théorème 2.

En effet, comme la famille Γ est dominée, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ et une fonction aléatoire :

$$f^\cdot : \Omega \times M \longrightarrow E$$

telle que :

- 1) $\forall \mu \in M$, f_μ^* est un p.p.p. de mesure moyenne μ .
- 2) $\forall \mu \in \Gamma$, $\exists \Omega_\mu : \lambda(\Omega_\mu) = 1$ et $\forall \omega \in \Omega_\mu$, f_ω^* est continue au point μ .

Notons $F(\Omega, M)$ l'ensemble des mesures aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$. On munit $F(\Omega, M)$ de la topologie de la convergence en probabilité métrisable par la distance en probabilité d_λ définie par :

$$\forall \mu^* \in F(\Omega, M), \forall \nu^* \in F(\Omega, M)$$

$$d_\lambda(\mu^*, \nu^*) = \inf \{ \varepsilon > 0 : \lambda\{\rho(\mu^*, \nu^*) \geq \varepsilon\} \leq \varepsilon \}.$$

[Comme M est un espace métrique séparable, $\rho(\mu^*, \nu^*)$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ [11 p. 225] ou [12 p. 77]].

Considérons l'application :

$$\psi : (M, \rho) \longrightarrow (F(\Omega, E), d_\lambda)$$

$$\mu \rightsquigarrow f_\mu^*$$

Cette application est continue : en effet, nous savons que si

$(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}^*$ tend vers μ faiblement à distance finie alors

$$f_{\mu_n}^* \longrightarrow f_\mu^* \text{ } \lambda \text{ p.s.}$$

ce qui à son tour implique :

$$f_{\mu_n}^* \xrightarrow{\lambda} f_\mu^*$$

La conclusion est que ψ est continue ; comme nous avons choisi Γ faiblement compact à distance finie, ψ est uniformément continue sur Γ .

B I B L I O G R A P H I E.

- [1] M.J. GEFFROY et M.P. QUIDEL - *Convergences stochastiques des répartitions ponctuelles aléatoires.*
Revista da Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra - Vol. XLIX , 1974.
- [2] M. ZEBoulON - *Contribution à l'étude des convergences stochastiques de mesures aléatoires.*
Thèse Université Pierre et Marie Curie (1975).
- [3] J.F.C. KINGMAN - *Completely random measures.*
Pacific Journal of Mathematics - Vol. 21, n° 1, 1967.
- [4] P. JACOB - 1) *Représentations convergentes de mesures et de processus ponctuels.*
2) *Notion de convergence d'une suite de probabilités qualitatives.*
Thèse Université Pierre et Marie Curie Paris VI et à Université de Valenciennes (1978).
- [5] R.M. DUDLEY - *Distances of probability measures and random variables.*
Annals of Mathematical statistics, 39, (1968), p. 1563-1572.
- [6] A. RENYI - *Calcul des probabilités.*
Dunod 1961.
- [7] G. CHOQUET - *Cours d'Analyse - Topologie - Tome II*
Masson et Cie 1964.
- [8] J. NEVEU - *Ecole d'été de probabilité de Saint Flour.*
VI, 1976, p. 249-445.
Lecture Notes in Math. Vol. 598 - Springer-Verlag Berlin 1977.
- [9] P. JAGERS - *Aspects of random measures and point processes.*
Dekker 1974.

- [10] O. KALLENBERG - *Random measures.*
Academic Press, 1976.

- [11] P. BILLINGSLEY - *Convergence of probability measures on metric spaces.*
Wiley, 1968.

- [12] C.M. MARLE - *Mesures et probabilités.*
Hermann, 1974.

- [13] D. DACUNHA-CASTELLE - *Recueil de problèmes de calcul de probabilités.*
D. REVUZ et Masson, 1965.
M. SCHREIBER



R É S U M É

On utilise la notion de moment d'ordre 2 d'une mesure aléatoire pour définir la convergence en moyenne quadratique d'une suite de mesures aléatoires se réalisant dans un espace métrique séparable par la convergence faible à distance finie de la suite de moments associée.

Un théorème de caractérisation de cette convergence, ainsi qu'un théorème de complétude sont établis, permettant d'introduire l'intégration m.q. de mesures aléatoires évolutives du second ordre. Cette étude a nécessité l'examen préalable des mesures à signe sur les espaces métriques produits (faible relative compacité - classes déterminantes).

En annexe on construit un processus $\{f_{\mu}^{\bullet} ; \mu \in M^{+}\}$ presque sûrement continu sur un sous-ensemble dominé M d'un espace M^{+} de mesures boréliennes positives, muni de la topologie faible, tel que $\forall \mu \in M^{+}$, $f_{\mu}^{\bullet}$ soit un processus ponctuel de Poisson d'intensité μ .

M O T S C L É S

- Convergence faible.
- Mesure aléatoire.
- Convergence moyenne quadratique.
- Processus ponctuel.
- Processus Poisson.
- Théorème Skorokhod.