N° d'ordre : 1066

THÈSE

présentée à

l'UNIVERSITÉ des SCIENCES et TECHNIQUES de LILLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

Spécialité : MATHÉMATIQUES PURES

par

HILALI Mohammed Rachid

STABILITÉ STRUCTURELLE DES ACTIONS DE $\mathbb{R}^2$ SUR LES SURFACES

Membres du Jury : J.P. BRASSELET, *Président*
G. HECTOR, *Rapporteur*
D. TANRÉ } *Examinateurs*
A. EL-KACIMI ALAOUI } *Examinateurs*

Soutenue le 29 Septembre 1983

A mes parents,

A ma bien aimée NADIA,

A mes amis.

Je remercie très vivement Monsieur le Professeur J.P. BRASSELET qui a bien voulu présider le jury.

Monsieur le Professeur G. HECTOR m'a fait découvrir la théorie des feuilletages, des systèmes dynamiques. Son aide constante m'a permis de mener à bien ce travail, qu'il trouve ici toute ma reconnaissance.

Mes remerciements s'adressent également à Messieurs D. TANRÉ et A. EL-KACIMI ALAOUI qui ont accepté de juger cette thèse.

Enfin, je remercie tous ceux qui ont contribué à la réalisation matérielle de ce travail, particulièrement Madame C. EVRARD qui en a assuré la présentation dactylographique.

P L A N

INTRODUCTION

Dans ce travail nous nous intéressons aux actions de $\mathbb{R}^2$, sans point fixe et de classe C^2, sur les surfaces compactes éventuellement avec bord. D'après le théorème de Lima [8], on sait que les seules surfaces compactes sur lesquelles $\mathbb{R}^2$ peut agir sans point fixe sont : le tore T^2 ; la bouteille de Klein K^2 ; le cylindre $\mathbb{S}^1 \times I$ et le ruban de Mobeius Mb. Par des techniques adaptées de celles de N. Kopell [5] on classifiera les orbites des actions du type décrit ci-dessus. Dans [2] C. Camacho s'est intéressé à la stabilité locale des actions de $\mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^\ell$ $((k,\ell) \in \mathbb{N}^2)$ sur les surfaces compactes, au voisinage d'un point fixe. Nous allons faire une étude similaire, mais portant sur la stabilité globale des actions de $\mathbb{R}^2$ sans point fixe.

Le plan du travail est le suivant : le chapitre I est un résumé de propriétés générales des actions de groupes de Lie sur les variétés. Dans le chapitre II, on décrit certaines propriétés topologiques, de l'ensemble S_N des C^2-difféomorphismes de $\mathbb{S}^1$ qui ne sont pas plongeables dans un C^2-flot, relativement à la C^1-topologie sur $\mathrm{Diff}^2(\mathbb{S}^1)$. Cette étude servira pour formuler des conditions de stabilité pour certains types d'actions. En plus, il nous semble que la démonstration du lemme de Kopell [5, p. 174] concernant la densité de S_N dans $\mathrm{Diff}^2(\mathbb{S}^1)$ contient une erreur ; nous proposons une rectification de cette démonstration. Le chapitre III est consacré à l'étude d'une part, des ensembles minimaux des actions de $\mathbb{R}^2$ sur les surfaces compactes ; des singularités des champs de vecteurs fondamentaux d'autre part. Dans le chapitre IV, on montre qu'une action sans point fixe et de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ sur une surface compacte M, ne possède pas d'orbite planaire (c'est-à-dire homéomorphe à $\mathbb{R}^2$), en donnant dans un premier temps un exemple d'action sans point fixe et de classe C^0, de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{S}^1 \times I$ qui admet une telle orbite.

Nous terminons, au chapitre V, par l'étude de la stabilité structurelle des éléments de l'ensemble $\mathrm{Act}(\mathbb{R}^2, M)$, [muni de la C^1-topologie qu'on définira dans un premier temps], des actions de $\mathbb{R}^2$ sans point fixe et de classe C^2 sur la surface compacte et orientable M.

CHAPITRE I

ACTIONS DE GROUPES DE LIE

I - *PRELIMINAIRES.*

Soient G un groupe de Lie de dimension n ; M une variété de dimension p et

$$\Phi : G\times M \longrightarrow M$$
$$(g,m) \to \Phi(g,m).$$

1.1. Définition. On dit que Φ est une action de classe C^r $(r \in \mathbb{N})$ de G sur M, si Φ est une application de classe C^r, de $G\times M$ dans M, qui vérifie :

i) $\Phi(e,m) = m$; pour tout $m \in M$ et, e l'élément neutre de G.

ii) $\Phi(g_1+g_2,m) = \Phi(g_1,\Phi(g_2,m))$, pour tout $m \in M$ et tout couple (g_1,g_2) d'éléments de G.

Il suit immédiatement de la définition ci-dessus que, si g est un élément fixé de G ; l'application

$$\Phi_g : M \to M$$
$$m \mapsto \Phi(g,m)$$

est un C^r-difféomorphisme de M, (homéomorphisme si $r = 0$).

1.2. Exemples.

1) Soient $G = \mathbb{Z}$ et f un difféomorphsme de classe C^r sur M, pour tout $m \in M$, et tout $k \in \mathbb{Z}$ on pose :

$$\Phi(k,m) = f^k(m)$$

où $f^k(m) = f \circ f \ldots \circ f$ k fois. Alors Φ définie une action de classe C^r de $\mathbb{Z}$ sur M.

2) Tout champ de vecteurs complet sur M, défini une action de $\mathbb{R}$ sur M.

3) Plus généralement, soient $(X_i)_{1\leq i\leq k}$ k champs de vecteurs complets sur M ; commutants deux à deux.

On note par ψ_t^i, $1 \leq i \leq k$, le flot associé à X_i, alors l'application :

$$\begin{aligned} \Phi : \quad & \mathbb{R}^k \times M \longrightarrow M \\ & [(t_1,\ldots,t_k),m] \longrightarrow \psi^1_{t_1} \circ \ldots \circ \psi^k_{t_k}(m) \end{aligned}$$

est une action de $\mathbb{R}^k$ sur M.

4) Soit $p : \tilde{G} \to G$ un revêtement. Si $\Phi : G\times M \to M$ est une action de classe C^r sur M, alors l'application

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} : \tilde{G}\times M & \longrightarrow M \\ (\tilde{g},m) & \longmapsto \Phi(p(\tilde{g}),m) \end{aligned}$$

est aussi une action de classe C^r de $\tilde{G}$ sur M.

5) Soit $p : \tilde{M} \to M$ un revêtement.

On suppose que G est simplement connexe ; et soit $\Phi : G\times M \to M$ une action de classe C^r.

On définit :

$$\begin{aligned} \psi : G\times\tilde{M} & \longrightarrow M \\ (g,\tilde{m}) & \longmapsto \Phi(g,p(\tilde{m})). \end{aligned}$$

Alors, $\psi_*(\Pi_1(G\times\tilde{M})) = p_*(\Pi_1(\tilde{M}))$, et d'après la théorie des revêtements ; l'application ψ se relève en une application $\tilde{\Phi}$ qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} G\times\tilde{M} \arrow[r, dashed, "\tilde{\Phi}"] \arrow[d, "{(id,p)}"'] \arrow[dr, "\psi"] & \tilde{M} \arrow[d, "p"] \\ G\times M \arrow[r, "\Phi"'] & M \end{tikzcd}$$

On vérifie aisément que $\tilde{\Phi}$ est une action de classe C^r de G sur $\tilde{M}$.

1.3. Dynamique topologique des actions.

Soit Φ une action de classe C^r de G sur M.

i) Pour tout $m \in M$, on pose :

$$O_m(\Phi) = \{\Phi(g,m)/g \in G\}.$$

Cet ensemble est appelé <u>l'orbite</u> de m par Φ .

ii) On considère pour tout $m \in M$:

$$G_m(\Phi) = \{g \in G/\Phi(g,m) = m\}.$$

On vérifie facilement que $G_m(\Phi)$ est un sous-groupe de G, on l'appelle le <u>groupe de stabilité</u> de m par Φ.

iii) Pour $m \in M$ fixé, l'application

$$\begin{aligned} \Phi_m : G &\to M \\ g &\mapsto \Phi(g,m) \end{aligned}$$

est de classe C^r.

On a $G_m(\Phi) = \Phi_m^{-1}(\{m\})$ et donc $G_m(\Phi)$ est fermé dans G.

De plus on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\Phi_m"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \\ G/G_m(\Phi) \arrow[ur, dashed, "\bar{\Phi}_m"'] & \end{tikzcd}$$

On vérifie facilement que :

1) $\bar{\Phi}_m$ est une immersion injective de classe C^r de $G/G_m(\Phi)$ dans M.

2) $\bar{\Phi}_m$ est un C^r-difféomorphisme de $G/G_m(\Phi)$ sur $O_m(\Phi)$.

iv) Si m et m' sont deux éléments de M appartenant à la même orbite, alors $G_m(\Phi)$ et $G_{m'}(\Phi)$ sont conjugués dans G. En particulier si G est abélien, on a $G_m(\Phi) = G_{m'}(\Phi)$.

v) Soit $A \subset M$.

1) A est dit invariant par Φ, si pour tout $m \in A$, on a $O_m(\Phi) \subset A$.

2) A est dit un <u>ensemble minimal</u> de Φ si A est non vide, fermé et invariant par Φ, et de plus si $B \subset A$ vérifie ces trois propriétés, alors $B = A$.

3) Si A est invariant par Φ, alors $\bar{A}, \overset{\circ}{A}$ et $\partial A = \bar{A} - \overset{\circ}{A}$ sont aussi invariants par Φ.

vi) Si pour tout $m \in M$, $G_m(\Phi)$ est discret dans G, on dit que l'action Φ est <u>localement libre</u>.

On vérifie que si l'action Φ est localement libre, les orbites de Φ déterminent un <u>feuilletage</u> de M.

1.4. <u>Exemples</u>.

1) Actions de $\mathbb{R}$ sur une variété M. L'orbite de m est soit une droite, soit un cercle, soit $\{m\}$, selon que $G_m(\Phi)$ est isomorphe soit à $\{0\}$, soit à $\mathbb{Z}$, soit à $\mathbb{R}$.

2) Actions de $\mathbb{R}^k$ sur M, $k \geq 2$. L'orbite de m est de type $\mathbb{R}^{k_1} \times T^{k_2}$ avec $k_1+k_2 \leq k$ et la convention $T^o = \mathbb{S}^1$, et $G_m(\Phi)$ est isomorphe à $\mathbb{R}^{k-k_1-k_2} \oplus \mathbb{Z}^{k_2}$.

3) Actions du groupe affine sur M. On prend $M = SL_2(\mathbb{R})/\Gamma$ où Γ est un sous-groupe discret uniforme de SL_2.

Comme GA se plonge naturellement sur $SL_2(\mathbb{R})$, alors GA opère sur M, et définit une action de GA sur M. De plus, cette action est localement libre.

Les orbites d'une telle action sont ou bien des plans ou bien des cylindres, selon que le groupe de stabilité est trivial ou isomorphe à $\mathbb{Z}$.

II - *LES CHAMPS DE VECTEURS FONDAMENTAUX DE* Φ.

Considérons Φ une action de classe C^r $(r \geq 1)$ de G sur M, et soit $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à droite, de G. On note $\chi(M)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M. On définit :

$$\psi : \mathcal{G} \longrightarrow \chi(M).$$

$$\bar{X} \longmapsto \psi(\bar{X})$$

$$\psi(\bar{X})(m) = D\Phi_m(0) \cdot \bar{X}(0)$$

pour tout $m \in M$.

On montre facilement que ψ est un homomoprhisme d'algèbres de Lie, on l'appelle l'homomorphisme de Lie associé à Φ.

2.1. *Définition*. Un champ de vecteurs sur M appartenant à l'image de ψ est appelé : champ de vecteurs fondamental de Φ.

Pour simplifier on écrit $X = \psi(\bar{X})$. On vérifie que $X(m)$ est tangent en m à $O_m(\Phi)$, et que si $\{\bar{X}_1,\dots,\bar{X}_n\}$ est une base de $\mathcal{G}$, alors le rang de $\{X_1(m),\dots,X_n(m)\}$ est égal à la dimension de la sous-variété $O_m(\Phi)$ de M, pour tout $m \in M$.

Réciproquement si :

$$\psi : G \longrightarrow \chi(M)$$

est un homomorphisme d'algèbres de Lie tel que : tout élément X de l'image de ψ est complet ; alors il existe une unique action Φ, du groupe de Lie G, simplement connexe, d'algèbre de Lie G, sur la variété M, dont ψ est l'homomorphisme de Lie (cf [3]).

Si de plus, pour tout $m \in M$ le rang de $\{X_1(m),\ldots,X_n(m)\}$, où $X_i = \psi(\bar{X}_i)$, est n, l'action Φ est localement libre.

CHAPITRE II

PLONGEMENT DES DIFFEOMORPHISMES DE $[0,1]$ ET $\mathbb{S}^1$ DANS UN FLOT DIFFERENTIABLE

Soit $f \in \mathrm{Diff}_+(T)$, $T = \mathbb{S}^1$ ou $[0,1]$. Rappelons que f est dit :

i) hyperbolique : si pour tout $x \in T$ périodique de période n, on a : $(f^n)'(x) \neq 1$.

ii) contractant en un point fixe x_o : s'il existe un voisinage V de x_o dans T, tel que :

$$\bigcap_{n\geq 0} f^n(V) = \{x_o\}.$$

iii) plongeable dans un flot : s'il existe $\varphi : \mathbb{R}\times T \to T$ un flot tel que $\varphi(1,x) = f(x)$, pour tout $x \in T$.

I - *RAPPEL DES THEOREMES DE STERNBERG ET KOPELL.*

1.1. Le théorème de Sternberg. Soit $f \in \mathrm{Diff}^2([0,1])$, croissant et hyperbolique dont les seuls points fixes sont 0 et 1. On suppose que f est contractant en 0. Alors Sternberg montre que :

i) la suite $\left\{\dfrac{f^n(x)}{(f'(0))^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, converge uniformément sur tout compact de $[0,1[$ pour la C^1-topologie.

ii) la fonction $\alpha(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f^n(x)}{[f'(0)]^n}$, définie pour $x \in [0,1[$ est un C^1-difféomorphisme de $[0,1[$ tel que :

$$(\alpha \circ f \circ \alpha^{-1})(x) = f'(0)\cdot x$$

Autrement dit α conjugue f à sa partie linéaire sur $[0,1[$.

iii) Le difféomorphisme f restreint à $[0,1[$ se plonge dans un flot φ_t de $[0,1[$, de classe C^1 définie par :

$$\varphi_t(x) = \alpha^{-1}\Big([f'(0)]^t\, \alpha(x)\Big)$$

Ce flot est unique.

iv) Si $g \in \mathrm{Diff}^1[0,1[$ et commute avec f, alors il existe $t_o \in \mathbb{R}$ tel que :

$$g = \varphi_{t_o} .$$

Comme conséquence, si g a un point fixe dans $]0,1[$, alors g est l'identité sur $[0,1[$.

1.2. Le théorème de N. Kopell. Soit $f \in \mathrm{Diff}^2[0,1]$, dont les seuls points fixes sont 0 et 1, et tel que : $f'(0) = 1$. Alors Kopell montre que :

i) il existe $\delta \in]0,1[$ tel que le produit infini $\prod_{j=0}^{\infty} \frac{f'(f^j(y))}{f'(f^j(x))}$, converge uniformément sur tout compact de $]0,\delta]\times]0,\delta]$ vers une fonction continue A (définie sur $]0,\delta]\times]0,\delta]$).

ii) Si $g \in \mathrm{Diff}^1[0,1]$ et qui commute avec f, alors

$$g'(f^k(x)) = g'(x) \prod_{j=0} \frac{f'[f^j(g(x))]}{f'[f^j(x)]} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Donc par passage à la limite, g satisfait l'équation différentielle suivante :

$$g'(x) = A(g(x),x) \qquad \text{pour} \qquad x \in]0,\delta]$$

iii) S'il existe $x_o \in]0,1[$ tel que $g(x_o) = x_o$, alors g est l'identité sur $[0,1]$.

Remarque. D'après ce qui est dit ci-dessus, on remarque en particulier que deux C^2-difféomorphismes locaux commutants de $[0,+\infty[$, définis au voisinage de 0 et ayant 0 comme point fixe, ont les mêmes points fixes.

II - DIFFEOMORPHISMES DE $\mathbb{S}^1$ PLONGEABLES DANS UN FLOT.

Pour $f \in \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$ on note : Fix(f), l'ensemble des points fixes de f et Per(f) , l'ensemble des points périodiques de f.

2.1. Condition nécessaire de plongement.

Proposition 2.1. Soit $f \in \mathrm{Diff}^r \mathbb{S}^1$, $r \geq 0$, hyperbolique, si f est plongeable dans un flot de $\mathbb{S}^1$, alors :

$$\mathrm{Per}(f) = \mathrm{Fix}(f).$$

Démonstration : On remarque d'abord que tous les points périodiques de f ont la même période n. Soit alors un flot :

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

tel que $\varphi(1,x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}^1$.

Si $n > 1$, φ n'a pas de point fixe et donc l'orbite de tout point périodique x_o de f est le cercle $\mathbb{S}^1$ tout entier. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{S}^1$ il existe un réel t tel que : $x = \varphi(t,x_o)$. D'où :

$$f^n(x) = \varphi(n,x) = \varphi(n,\varphi(t,x_o)) = \varphi(t,\varphi(n,x_o)) = \varphi(t,x_o) = x.$$

Et donc f^n est l'identité de $\mathbb{S}^1$, or ceci contredit l'hyperbolicité de f. Par ailleurs puisque f est hyperbolique $\mathrm{Per}(f) \neq \emptyset$ et donc $n = 1$ ∎

Remarque. La condition $\mathrm{Per}(f) = \mathrm{Fix}(f)$ est nécessaire et suffisante pour plonger f dans un C^o-flot de $\mathbb{S}^1$.

Notations. On pose :

$$\mathcal{S} = \{f \in \mathrm{Diff}^2_+(\mathbb{S}^1) \ / \ f \text{ est hyperbolique}\}$$

$$\mathcal{S}_N = \{f \in \mathcal{S} \ / \ f \text{ est non plongeable dans un } C^2\text{-flot}\}.$$

2.2. *Propriétés topologiques de* S_N.

i) Dans [12] Peixoto montre que S est ouvert dans $\mathrm{Diff}^2(\mathbb{S}^1)$ pour la C^1-topologie. De plus si $f \in S$ a un point périodique de période n, alors il existe un voisinage V de f (pour la C^1-topologie) contenu dans S, tel que tout $g \in V$ a également un point périodique de période n.

ii) Dans [5] N. Kopell montre que S_N est un ouvert de S pour la C^2-topologie.

Nous nous interressons ici aux propriétés topologiques de S_N, lorsqu'on munit $\mathrm{Diff}_+^2(\mathbb{S}^1)$ de la C^1-topologie, nous allons montrer que S_N est d'intérieur non vide pour cette topologie. En plus dans [5, p.174] Kopell affirme que S_N est dense dans S ; sa démonstration nous semble incorrecte, nous proposons donc également une rectification de sa démonstration.

Proposition 2.2.1. S_N est dense dans S pour la C^1-topologie.

Démonstration : On remarque d'abord que si $f \in S$ alors $\mathrm{Per}(f) \neq \emptyset$.

Soit $f \in S - S_N$; on va montrer que pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $\tilde{f} \in S_N$ tel que :

$$\|f-\tilde{f}\|_1 = \mathrm{Max}\,\{\sup_{x\in\mathbb{S}^1} |(f-\tilde{f})(x)|,\ \sup_{x\in\mathbb{S}^1} |D(f-\tilde{f})(x)|\} < \varepsilon$$

En effet, comme f est plongeable dans un flot, alors d'après la proposition 2.1. on a

$$\mathrm{Per}(f) = \mathrm{Fix}(f).$$

Soit $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ l'ensemble des points fixes de f, par une petite perturbation on peut supposer que f vérifie :

$$f'(x_i) \neq f'(x_j) \qquad \text{si } i \neq j.$$

On suppose que $]x_o,x_1[$ est une composante connexe de $\mathbb{S}^1 - \mathrm{Fix}(f)$.

On peut alors considérer f restreint à $[x_o,x_1]$, comme un C^2-difféomorphisme de l'intervalle $[x_o,x_1]$. Alors d'après Kopell [5, p.173], il existe $\bar{f} \in \mathrm{Diff}^2[x_o,x_1]$ tel que :

i) $\bar{f}^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i)$, $i = 0,1$ et $k = 0,1,2$

ii) $\|\bar{f}-f\|_1 < \varepsilon$

iii) si $\bar{g} \in \mathrm{Diff}^1([x_o,x_1])$ commute avec $\bar{f}$, alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\bar{g} = \bar{f}^n$.

Considérons maintenant $\tilde{f} \in \mathrm{Diff}^2(\mathbb{S}^1)$ défini par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \bar{f}(x) & \text{si } x \in [x_o,x_1] \\ f(x) & \text{si } x \in S^1 - [x_o,x_1] \end{cases}$$

Il est clair que $\mathrm{Fix}(\tilde{f}) = \mathrm{Fix}(f)$ et $\tilde{f} \in S$, on va montrer que $\tilde{f} \in S_N$.

En effet soit $g \in \mathrm{Diff}^1(\mathbb{S}^1)$ qui commute avec $\tilde{f}$, on a alors $g(x_i) = x_i$ $(i = 0,1)$ car on a :

1) $\tilde{f}(g(x_i)) = g(x_i)$ d'où $g(x_i) \in \mathrm{Fix}(\tilde{f}) = \mathrm{Fix}(f)$

2) $\tilde{f}'(g(x_i)) = \tilde{f}'(x_i)$ d'où $f'(g(x_i)) = f'(x_i)$

1) et 2) montrent bien que $g(x_i) = x_i$.

Or g restreint à $[x_o,x_1]$ commute avec $\bar{f}$ et d'après iii) $g|_{[x_o,x_1]} = \bar{f}^n$, où $n \in \mathbb{Z}$.

Mais d'après [5, lemme 1] g est complètement déterminé par sa valeur $g'(x_o)$, or on a :

$$g'(x_i) = (\tilde{f}^n)'(x_i) \qquad i = 0,1$$

et par conséquent $g = \tilde{f}^n$ ∎

Proposition 2.2.2. S_N est d'intérieur non vide pour la C^1-topologie.

Démonstration : Soit $f \in S$ qui a des points périodiques de période deux. D'après la proposition 2.1. on a $f \in S_N$. De plus d'après i) 2.2., il existe un voisinage V de f dans S (pour la C^1-topologie) dont tous les éléments ont des points périodiques de période deux, on a donc $V \subset S_N$, c'est-à-dire S_N est d'intérieur non vide ∎

CHAPITRE III

ACTIONS DE $\mathbb{R}^2$ SUR LES SURFACES

I- PRELIMINAIRES.

Rappelons le théorème de Lima [8], dont on donnera ici une esquisse de démonstration.

Théorème (Lima). Soit une action Φ de $\mathbb{R}^2$, sur une surface compacte M, éventuellement avec bord, telle que toute composante de ∂M est une orbite, alors si l'invariant d'Euler-Poincaré de M est non nul, l'action Φ possède un point fixe.

Esquisse de démonstration. Nous passons en revue les différents cas possibles :

1) Si $M = D^2$. On note par $\mathcal{M}(\Phi)$ la famille de tous les ensembles minimaux de Φ. On vérifie que toute action de $\mathbb{R}^2$ sur D^2 ne possède pas de minimal exceptionnel, et donc tout élément de $\mathcal{M}(\Phi)$ est ou bien une orbite fermée de Φ ou bien un point fixe de Φ. Il y a une relation d'ordre évidente sur $\mathcal{M}(\Phi)$, et on montre facilement qu'un élément minimal de $\mathcal{M}(\Phi)$ pour cette relation d'ordre ne peut être qu'un point fixe de Φ.

2) Si $M = \mathbb{S}^2$. Si on suppose que l'action Φ n'a pas de point fixe, alors Lima montre que Φ possède une orbite fermée. Or une orbite fermée dans $\mathbb{S}^2$ coupe $\mathbb{S}^2$ en deux disques, on obtient une contradiction car la restriction de Φ a chaque disque possède un point fixe.

3) Cas général.

Lima procède par une récurrence sur le genre de M. Pour cela il montre qu'il existe une orbite fermée de Φ qui soit non homotope ni à zéro, ni à une composante de ∂M. Il suffit de couper M suivant cette orbite fermée et on se ramène au cas d'une surface de genre strictement plus petit que celui de M ∎

1.1. *<u>Classification des orbites des actions de $\mathbb{R}^2$ sur les surfaces.</u>*

Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \times M \to M$ une action de classe C^r $(r \geq 0)$ de $\mathbb{R}^2$ sur une surface compacte M. Si on désigne par $O(x)$ l'orbite de $x \in M$ par Φ et G_x le groupe de stabilité de x par Φ, et si on pose :

$$\begin{aligned} \psi_x : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow M \\ (t,s) &\longrightarrow \Phi[(t,s),x] \end{aligned}$$

Alors ψ_x se factorise par $\mathbb{R}^2/G_x$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[rr, "\psi_x"] \arrow[d, "\Pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & & M \\ \mathbb{R}^2/G_x \arrow[urr, dashed, "\bar{\psi}_x"'] & & \end{tikzcd}$$

et l'application $\bar{\psi}_x$ est un homéomorphisme de classe C^r de $\mathbb{R}^2/G_x$ sur $O(x)$ (cf. Chapitre I). Donc pour classifier les orbites de Φ, il suffit de classifier les sous-groupes fermés de $\mathbb{R}^2$. Pour cela on a la proposition suivante :

<u>*Proposition*</u> *1.1.1.* Tout sous-groupe fermé de $\mathbb{R}^2$ est isomorphe à l'un des groupes suivants : $\mathbb{R}^2$; $\mathbb{R} \oplus \mathbb{Z}$; $\mathbb{R}$; $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$; $\mathbb{Z}$, $\{0\}$.

<u>Démonstration</u> : Soit G un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}^2$, et soit G_o la composante connexe de 0 dans G. On a trois cas suivant les valeurs que prend la dimension de G_o considéré comme une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.

i) $\dim G_o = 2$, alors G_o est évidemment ouvert dans $\mathbb{R}^2$, comme il est aussi fermé on a $G_o = \mathbb{R}^2$ et donc $G = \mathbb{R}^2$.

ii) $\dim G_o = \{0\}$, c'est-à-dire $G_o = \{0\}$. On suppose que $G \neq \{0\}$. Soit $g_1 \in G$ tel que :

$$\|g_1\| = \inf\{ \|g\| \ / \ g \in G - \{0\}\}$$

alors $G \supset g_1\mathbb{Z} = \{ng/n \in \mathbb{Z}\}$ on a : ou bien $G = g_1\mathbb{Z}$ ou bien $G-g_1\mathbb{Z} \neq \emptyset$, on choisit alors $g_2 \in G$ tel que :

$$\|g_2\| = \inf\{ \|g\| \ / \ g \in G - g_1\mathbb{R}\}.$$

Soit R le réseau de $\mathbb{R}^2$, $g_1\mathbb{Z} + g_2\mathbb{Z}$, il est contenu dans G, il reste à montrer que c'est égal à G, en effet soit P le parallélogramme de sommets 0 ; g_1 ; g_2 et g_1+g_2, comme $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{g\in R} g(P)$, il suffit de montrer que $P \cap G = \{0,g_1,g_2,g_1+g_2\}$. Pour cela soient T_1 et T_2 les deux triangles de sommets $(0,g_1,g_2)$ et (g_1,g_2,g_1+g_2) respectivement, or par définition de g_1 et g_2 on $G \cap T_1 = \{0,g_1,g_2\}$, de plus si $g \in G \cap T_2$, alors $g_1+g_2-g \in G \cap T_1$ et donc $G \cap T_2 = g_1,g_2,g_1+g_2$.

iii) $\dim G_o = 1$. Alors ou bien G_o est un sous-espace vectoriel de dimension un de $\mathbb{R}^2$ et il n'y a rien à montrer, ou bien il existe une suite $(g_n)_{n\in N}$ de G_o telle que :

a) $\lim g_n = 0$

b) g_n et g_{n+1} sont linéairement indépendants, pour tout n.

Donc G_o contient le réseau $R_n = g_n\mathbb{Z} + \mathbb{Z}g_{n+1}$ dont le parallélogramme générateur P_n (c'est-à-dire de sommets $0,g_n,g_{n+1},g_n+g_{n+1}$) a un diamètre qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini, ceci implique que pour tout $\varepsilon > 0$ et $Z \in \mathbb{R}^2$, si on choisit n tel que $\mathrm{diam}(P_n) < \varepsilon$ alors le disque de centre Z et de rayon ε intersepte le réseau R_n d'où $Z \in \bar{G}_o = G_o$, ceci contredit que $\dim G_o = 1$ et donc $G_o = g\,\mathbb{R}$. Posons $\tilde{G} = G/G_o$. $\tilde{G}$ s'identifie à un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$, comme G est différent de $\mathbb{R}^2$, alors G est isomorphe soit à $\{0\}$ soit à Z ∎

Proposition 1.1.2. Toute orbite de l'action Φ est homéomorphe à l'une des sous-variétés suivantes : $\{0\}$, $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{R}$, T^2, $\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1$ ou $\mathbb{R}^2$.

Démonstration : C'est évident d'après la proposition 1.1.1 ∎

Proposition 1.1.3. Si une action Φ de $\mathbb{R}^2$ sur une surface compacte M est localement libre, alors nécessairement $M = T^2$.

Démonstration :

1) c'est facile de donner un exemple d'action localement libre sur T^2.

2) Toute orbite 0 de l'action Φ étant de dimension deux et donc ouverte, par ailleurs son complémentaire est réunion d'orbites de dimension deux, donc aussi 0 est fermée. Par connexité de M on a $M = 0$, et d'après la proposition 1.1.2 nécessairement $M = T^2$ ∎

II - THEOREME DE POINCARE-BENDIXON POUR LES ACTIONS DE $\mathbb{R}^2$ SUR LES SURFACES.

Ce paragraphe est consacré à étudier les ensembles minimaux des actions de $\mathbb{R}^2$ sur les surfaces. Un ensemble minimal d'une action Φ de $\mathbb{R}^2$ sur une surface M est l'un des types suivants :

i) une orbite fermée de Φ

ii) un point fixe de Φ

iii) toute la surface M

iv) un minimal exceptionnel ; c'est-à-dire qui n'est d'aucun des trois types précédents.

On va montrer que si l'action Φ est de classe C^2, alors un ensemble minimal de Φ ne peut pas être de type iv).

2.1. *Propriétés des ensembles minimaux.*

Soit $\mathcal{M}$ un ensemble minimal d'une action Φ de $\mathbb{R}^2$ sur une surface M. On sait que toute orbite d'un point de $\mathcal{M}$ est dense dans $\mathcal{M}$.

Lemme 2.1.1. Pour tout couple (x,y) d'éléments de $\mathcal{M}$ on a :

$$G_x = G_y.$$

Démonstration : En effet on a évidemment les deux propriétés suivantes :

i) si $z \in O(x)$: $G_z = G_x$

ii) si $z \in \overline{O(x)}$ $G_z \supset G_x$.

Comme $\overline{O(x)} = \overline{O(y)} = \mathcal{M}$ alors c'est facile de vérifier que

$$G_x = G_y \quad \blacksquare$$

Corollaire 2.1.2. Toutes les orbites de Φ dans $\mathcal{M}$ sont homéomorphes.

Démonstration : C'est évident puisque tous les groupes de stabilité des éléments de $\mathcal{M}$ sont égaux $\blacksquare$

Corollaire 2.1.3. Si toutes les orbites de Φ dans $\mathcal{M}$ sont de dimension un, alors il existe un flot ψ sur M de même classe de différentiabilité que Φ et tel que $\mathcal{M}$ est aussi un ensemble minimal du flot ψ.

Démonstration : Soit G le groupe de stabilité commun pour tous les points de $\mathcal{M}$. On considère g_1 et g_2 deux éléments appartenant respectivement à $\mathbb{R}^2-G$ et G. On définit les deux flots sur M suivants :

$$\psi_1 : \mathbb{R}\times M \longrightarrow M$$
$$(t,x) \longmapsto \Phi(tg_1,x)$$

$$\psi_2 : \mathbb{R}\times M \longrightarrow M$$
$$(s,x) \longmapsto \Phi(sg_2,x)$$

Comme g_1 et g_2 engendrent $\mathbb{R}^2$ on a pour tout $r \in \mathbb{R}^2$: $r = ag_1+bg_2$ et donc, pour tout $x \in M$:

$$\Phi(r,x) = \psi_1(a,\psi_2(b,x)).$$

Or la restriction de ψ_2 à $\mathcal{M}$ est triviale par conséquent :

$$\Phi(r,x) = \psi_1(a,x).$$

De ceci on déduit que $\mathcal{M}$ est un ensemble minimal du flot ψ_1. ∎

Lemme 2.1.4. Si l'intérieur de $\mathcal{M}$ est non vide, alors on a :

$$\mathcal{M} = M = T^2.$$

Démonstration : On a $\mathcal{M} = M$, car sinon comme la relation d'équivalence associe à Φ est ouverte, $\mathcal{M} - \overset{\circ}{\mathcal{M}}$ serait aussi minimal, ce qui contredirait le fait que $\mathcal{M}$ est minimal. Il nous reste donc à montrer que $M = T^2$, pour ceci on va distinguer deux cas :

i) S'il existe une orbite O de dimension deux. Dans ce cas, on a $O = M$ car sinon $M-O$ serait minimal, donc l'action Φ est localement libre et d'après la proposition 1.1.3. il vient que : $M = T^2$.

ii) Si toutes les orbites de Φ sont de dimension un, alors d'après le corollaire 2.1.3., il existe un flot ψ sur M ayant M pour unique ensemble minimal et donc toutes les orbites de ψ sont denses dans M. En adaptant le théorème de Knesers [4] au cas topologique (ceci si ψ est de classe C^0) on déduit que $M = T^2$ ∎

2.2. *Théorème de Poincara-Bendixon pour les actions de $\mathbb{R}^2$ sur les surfaces.*

D'abord on rappelle la généralisation du théorème de Poincaré-Bendixon pour les flots dûe à Schwartz [13] :

Théorème (Schwartz). Soit φ un flot de classe C^2 sur une surface compacte M, alors un ensemble minimal de φ est de l'un des types suivants :

i) un point fixe de φ

ii) une orbite périodique de φ

iii) toute M et dans ce cas $M = T^2$.

En transportant ce résultat au cas des actions de $\mathbb{R}^2$, on va montrer le théorème suivant :

2.2. *Théorème.* Soit une action Φ de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ sur une surface compacte M, alors un ensemble minimal de Φ est l'un des types suivants :

i) un point fixe de Φ ;

ii) une orbite périodique de Φ homéomorphe à $\mathbb{S}^1$ ou T^2 ;

iii) toute la surface M, et dnas ce cas $M = T^2$

Démonstration : Soit $\mathcal{M}$ un ensemble minimal de l'action Φ , on va procéder par deux cas :

a) $\mathcal{M}$ contient une orbite de dimension deux, alors d'après le lemme 2.1.4, il vient que $\mathcal{M} = M = T^2$.

b) $\mathcal{M}$ contient uniquement des orbites de dimension un, d'après le corollaire 2.1.3. il existe un flot φ de classe C^2 sur M pour lequel $\mathcal{M}$ est aussi un ensemble minimal et on déduit le résultat du théorème de Schwartz ■

2.3. *Application du théorème aux actions de $\mathbb{R}^2$ sans point fixe.*

Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \times M \to M$ une action de classe C^2 et sans point fixe de $\mathbb{R}^2$ sur la surface M. On note par $C(\Phi)$ l'ensemble des orbites périodiques de dimension un de Φ.

Corollaire 2.3.1. Si $C(\Phi) = \emptyset$, alors $M = T^2$ et M est l'unique ensemble minimal de Φ.

Démonstration : D'après le théorème 2.2. et les conditions sur l'action Φ, un ensemble minimal sera nécessairement toute la surface M et donc $M = T^2$ ■

Corollaire 2.3.1.*bis*. Si $C(\Phi) = \emptyset$, alors tout champ de vecteurs fondamental de Φ qui s'annule en un point de M est identiquement nul.

Démonstration : Soit X un tel champ de vecteurs avec $X(x_o) = 0$, $x_o \in M$, et soit $\mathcal{V}$ le flot associé à X. Comme l'action Φ commute avec le flot $\mathcal{V}$, alors X est identiquement nul sur $O(x_o)$ et le résultat en découle d'après le corollaire 2.3.1. et la continuité de $\mathcal{V}$ et Φ

Corollaire 2.3.2. Si $C(\Phi) \neq \emptyset$, alors tout ensemble minimal appartient à $C(\Phi)$.

Démonstration : En effet soit $\mathcal{M}$ un ensemble minimal de Φ, d'après le théorème 2.2. $\mathcal{M}$ est nécessairement de type ii) car :

1) $\mathcal{M}$ n'est pas un point fixe du fait que Φ ne possède pas de points fixes

2) $\mathcal{M} \neq M$ car sinon on aurait $C(\Phi) = \emptyset$ et ceci contredirait le fait que $C(\Phi) \neq \emptyset$ ■

Corollaire 2.3.2.*bis*. Si $\partial M \neq \emptyset$, alors tout ensemble minimal appartient à $C(\Phi)$.

Démonstration : C'est évident car $C(\Phi) \neq \emptyset$ et le résultat se déduit d'après le corollaire 2.3.2. ■

III - SINGULARITES DES CHAMPS DE VECTEURS FONDAMENTAUX.

On suppose que l'action Φ est de classe C^2 et sans point fixe. On va montrer dans ce paragraphe que si $C(\Phi)$ est dénombrable alors il existe un ensemble résiduel de champs de vecteurs fondamentaux de Φ qui sont sans singularité sur M.

Notation.

On désigne par $G_1(\mathbb{R}^2) \subset G(\mathbb{R})$ l'ensemble des champs de vecteurs unitaires et invariants de $\mathbb{R}^2$.

Si $\bar{X} \in G_1(\mathbb{R}^2)$ on note par X le champ de vecteurs fondamental de Φ qui est l'image de $\bar{X}$ par l'homomorphisme de Lie associé à Φ.

3.1. *Singularités de* X.

Soit $\bar{X} \in G_1(\mathbb{R}^2)$ et X l'image de $\bar{X}$ par l'homomorphisme de Lie associé à Φ, alors X a les propriétés suivantes :

i) Si $x \in M$ est tel que $X(x) = 0$, alors pour tout $y \in \overline{O(x)}$ on a : $X(y) = 0$, ceci se déduit d'après le corollaire 2.3.1. bis.

ii) Si $C(\Phi) = \emptyset$ et $X(x) = 0$ pour $x \in M$, alors X est identiquement nul (corollaire 2.3.1. bis).

iii) Si $C(\Phi) \neq \emptyset$ et $X(x) = 0$ pour $x \in M$, alors il existe $\gamma \in C(\Phi)$ telle que $X/\gamma \equiv 0$. En effet on a :

$$X/_{\overline{O(x)}} \equiv 0 \quad \text{et} \quad \overline{O(x)} \cap C(\Phi) \neq \emptyset$$

iv) Soient X_1 et X_2 deux champs de vecteurs fondamentaux de Φ tels qu'ils s'annulent sur $\gamma \in C(\Phi)$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $X_1 = \lambda X_2$. En effet puisque l'action Φ n'a pas de point fixe alors $\bar{X}_1$ et $\bar{X}_2$ sont liés c'est-à-dire il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\bar{X}_1 = \lambda \bar{X}_2$, par conséquent $X_1 = \lambda X_2$.

3.2. *Lemme.* Si $C(\Phi)$ est fini alors il n'y a qu'un nombre fini de champs de vecteurs unitaires fondamentaux de Φ avec singularités.

Démonstration : Soit $C(\Phi) = \{\gamma_1,\ldots,\gamma_n\}$. Comme deux champs de vecteurs fondamentaux qui s'annulent sur le même γ_k, $1 \leq k \leq n$ sont colinéaires, alors il existe $\bar{X}_k \in G_1(\mathbb{R}^2)$ tel que : pour tout X image de $\bar{X} \in G_1(R^2) - \{\pm\bar{X}_k\} = V_k$, X est sans singularité sur γ_k. Il suffit alors de poser $V = \bigcap_{k=1}^{n} V_k$, V vérifie ce qu'on veut, en effet pour tout $\bar{X} \in V$, son image X est sans singularité sur M (iii) 3.1.) ∎

Remarque. Si $C(\Phi) \neq \emptyset$ alors toute adhérence d'une composante connexe V de $M-C(\Phi)$ est homéomorphe soit à un cylindre, soit à une bande de Mobeius, alors d'après le lemme 3.2. , il existe un ouvert dense V de $G_1(\mathbb{R}^2)$ tel que : X est sans singularité sur $\bar{V}$ pour tout $\bar{X} \in V$.

3.3. *Théorème.* Si $C(\Phi)$ est dénombrable, alors il existe un ensemble résiduel $V \subset G_1(\mathbb{R}^2)$ tel que : X est sans singularité sur M pour tout $\bar{X} \in V$.

Démonstration :

1) Si $C(\Phi) = \emptyset$, c'est évident d'après ii) (3.1)

2) On suppose que $C(\Phi) \neq \emptyset$, on note par $\{V_n | n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des composantes connexes de $M-C(\Phi)$. Alors il existe une famille dénombrable $(\gamma_p)_{p\in\mathbb{N}}$ dans $C(\Phi)$ telle que :

$$M = \left(\bigcup_{p\in N} \gamma_p\right) \cup \left(\bigcup_{n\in N} \bar{V}_n\right) .$$

D'après la remarque ci-dessus, on a :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un ouvert dense V_n de $G_1(\mathbb{R}^2)$ tel que : X est sans singularité sur $\bar{V}_n$ pour tout $\bar{X} \in V_n$. De plus pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe un ouvert dense W_p de $G_1(\mathbb{R}^2)$ tel que X est sans singularité sur γ_p pour tout $\bar{X} \in W_p$. On obtient $\mathcal{V}$ en posant :

$$\mathcal{V} = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n \right) \cap \left(\bigcap_{p\in\mathbb{N}} W_p \right) \quad \blacksquare$$

3.4. *Contre-exemple dans le cas où* $C(\Phi)$ *n'est pas dénombrable.*

Soient X et Y les deux champs de vecteurs de classe C^∞ sur $\mathbb{S}\times I$ définis par :

$$X(\theta,r) = r(1-r)\frac{\partial}{\partial\theta} \quad \text{et}$$

$$Y(\theta,r) = (\cos \Pi r)\frac{\partial}{\partial\theta}$$

[où (θ,r) sont les coordonnées canoniques de $\mathbb{S}\times I$].

Evidemment $[X,Y] = 0$ donc le couple (X,Y) définit une action de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{S}'\times I$ de classe C^∞. On va vérifier que tout champ de vecteurs fondamental de Φ a une singularité.

1) Toutes les orbites de Φ sont les cercles $\mathbb{S}'\times\{r\}$, $r \in I$ et donc $C(\Phi)$ n'est pas dénombrable.

2) Un champ de vecteurs fondamental $\tilde{X}$ de Φ s'écrit :

$$\tilde{X}(\theta,r) = (\alpha r(1-r) + \beta \cos \Pi r)\frac{\partial}{\partial\theta} ,$$

où α et β sont réels.

Par conséquent $\tilde{X}$ s'annule si et seulement si la fonction :

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$r \longmapsto \alpha r(1-r) + \beta \cos \Pi r$$

s'annule sur I.

Si $\beta = 0$ on a $f(0) = 0$. Supposons donc $\beta \neq 0$ et soit

$$h :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$r \longmapsto \frac{\cos \Pi r}{r(1-r)}$$

La fonction h est continue sur $]0,1[$, de plus on a :

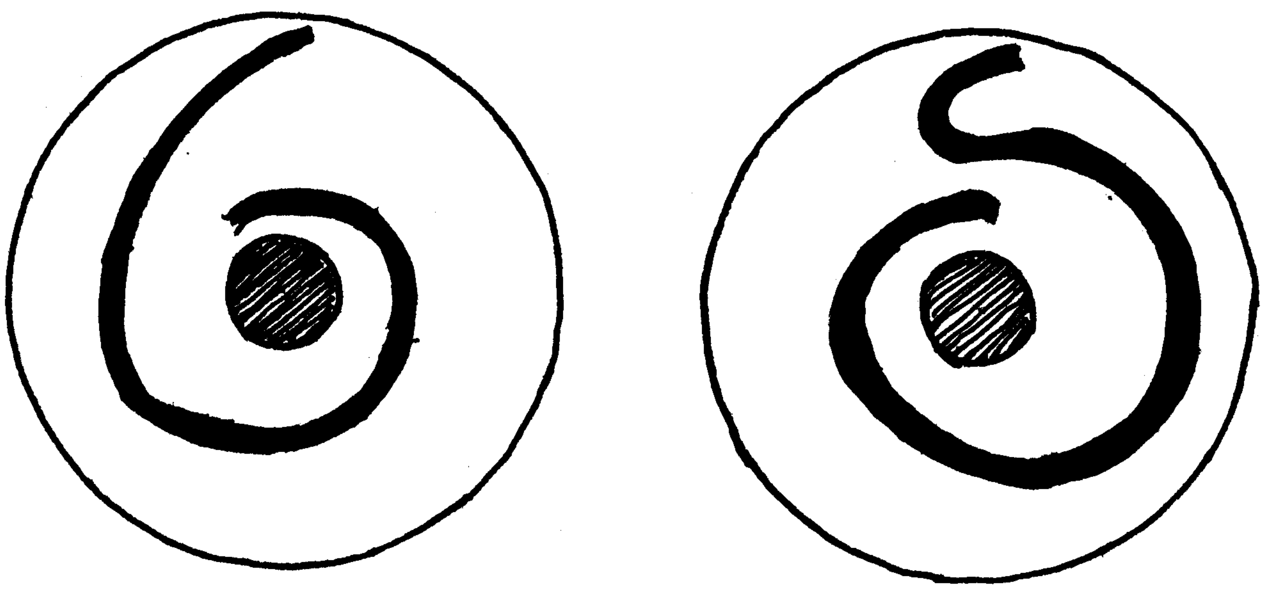
$$\lim_{r \to 0} h(r) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{r \to 1} h(r) = -\infty \quad ,$$

c'est-à-dire que h est surjective, en particulier il existe $r_o \in]0,1[$ tel que $h(r_o) = -\frac{\alpha}{\beta}$ et donc $f(r_o) = 0$.

CHAPITRE IV

NON EXISTENCE D'ORBITE PLANAIRE POUR LES ACTIONS DE $\mathbb{R}^2$ DE CLASSE C^2 ET SANS POINT FIXE SUR LES SURFACES COMPACTES

Dans ce chapitre on va montrer qu'une action de $\mathbb{R}^2$ de classe C^2 et sans point fixe sur une surface compacte M n'admet pas d'orbite homéomorphe à $\mathbb{R}^2$ (ce qui revient à dire qu'aucun groupe de stabilité des éléments de M n'est réduit à $\{0\}$), ou géométriquement, il n'existe pas de bande qui spirale le long du bord d'un anneau contenu dans M [voir le dessin ci-dessous].



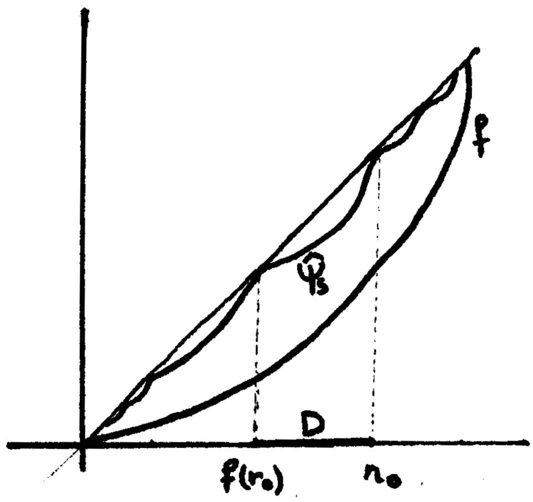
On commence par construire un exemple d'une action de $\mathbb{R}^2$ sur le cylindre $S^1 \times I$, de classe C^0 qui possède une telle orbite planaire.

I - EXEMPLE.

Soit f un difféomorphisme de $[0,1]$ tel que : $f(r) < r$ pour tout $r \in]0,1[$. Fixons $r_o \in]0,1[$ et posons $D = [f(r_o), r_o]$. Soit $\bar{\psi}_s$, $s \in \mathbb{R}$, un flot continu sur D dont r_o et $f(r_o)$ sont ses seuls points fixes.

1) Comme $]0,1[= \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(D)$ on peut définir un flot $\hat{\psi}_s$ continu sur $[0,1]$ en posant :

$$\hat{\psi}_s(r) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r = 0 \\ f^n \circ \bar{\psi}_s \circ f^{-n}(r) & \text{si} \quad r \in f^n(D) \\ 1 & \text{si} \quad r = 1 \end{cases}$$



On vérifie facilement que l'on a : $\hat{\psi}_s \circ f = f \circ \hat{\psi}_s$, pour tout $s \in \mathbb{R}$.

2) Sur $\mathbb{R} \times [0,1]$ on considère les deux flots suivants :

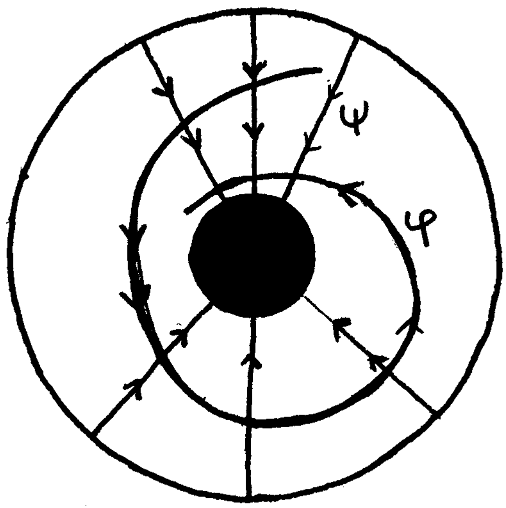
$$\tilde{\varphi} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times I \longrightarrow \mathbb{R}\times I$$
$$(t,x,r) \longmapsto (t+x,r)$$

$$\tilde{\psi} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times I \longrightarrow \mathbb{R}\times I$$
$$(s,x,r) \longmapsto (x,\hat{\psi}_s(r))$$

3) On considère :

$$p : \mathbb{Z}\times\mathbb{R}\times I \longrightarrow \mathbb{R}\times I$$
$$(n,x,r) \longmapsto (x+n,f^n(r))$$

l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}\times I$ définie par le difféomorphisme f, on a évidemment $\mathbb{S}'\times I$ est homéomorphe à $\mathbb{R}\times I/p$. De plus on vérifie aisément que $\tilde{\varphi}_t$ et $\tilde{\psi}_s$ passent au quotient et définissent deux flots commutants φ_t et ψ_s sur $\mathbb{S}'\times I$ tels que : si on désigne par (F) la fibration triviale sur $\mathbb{S}^1\times I$, $\mathbb{S}'\times I \to \mathbb{S}^1$, le flot ψ_s est tangent aux fibres de (F) tandis que le flot φ_t est transverse aux fibres de (F).



4) On définit l'action Φ continue de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{S}'\times I$ par :

$$\Phi : \mathbb{R}^2\times\mathbb{S}'\times I \longrightarrow \mathbb{S}'\times I$$

$$(t,s,m) \longmapsto \varphi_t \circ \psi_s(m) = \psi_s \circ \varphi_t(m).$$

Soit $m_0 = (\theta_0,R_0) \in \mathbb{S}'\times]f(r_0),r_0[$, alors l'orbite de m_0 par Φ est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$. En effet cherchons le groupe de stabilité de m_0 par Φ. Si $(t_0,s_0) \in \mathbb{R}^2$ vérifie :

$$\Phi(t_0,s_0,m_0) = \varphi_{t_0}(\psi_{s_0}(m_0)) = \psi_{s_0}(\varphi_{t_0}(m_0)) = m_0.$$

Ceci implique que m_0 et $\varphi_{t_0}(m_0)$ appartiennent à la même fibre de (F), par conséquent t_0 est entier, et donc : $\varphi_{t_0}(\theta_0,R_0) = (\theta_0,f^{t_0}(R_0))$, d'où $t_0 = 0$, car sinon $\theta_0 \times [R_0,f^{t_0}(R_0)]$ contiendra un point fixe de ψ_s et ceci contredirait le fait que $\psi_{s_o}(\varphi_{t_o}(m_o)) = m_o$. Il nous reste l'égalité $\psi_{s_o}(m_o) = m_o$ mais par définition de ψ_s on a nécessairement $s_o = 0$. Donc le groupe de stabilité de $\mathcal{M}_o$ est réduit à $\{0\}$ ce qu'il fallait démontrer.

II - NON EXISTENCE D'ORBITE PLANAIRE.

Ce paragraphe est consacré à démontrer le théorème suivant :

2.1. *Théorème*. Soit Φ une action de $\mathbb{R}^2$ de classe C^2 et sans point fixe, sur une surface compacte M. Alors l'action Φ ne possède pas d'orbite planaire.

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin de la suite des propriétés et des réductions suivantes :

2.1.1. *Actions locales projetables de* $\mathbb{R}^2$ *sur* $S^1 \times [0,\varepsilon[$.

Dans un premier temps on définira les actions locales projetables de $\mathbb{R}^2$ sur $S^1 \times [0,\varepsilon[$ avec $0 < \varepsilon < 1$. Puis on montrera que pour des cas particuliers de telles actions, et sous certaines conditions de différentiabilités elles n'admettent pas d'orbite planaire.

1) Soient $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ deux champs de vecteurs de classe C^r $(r \geq 0)$ sur $S^1 \times [0,\varepsilon[$. Si $[\hat{X},\hat{Y}] = 0$ on dit qu'ils définissent une action locale $\hat{\Phi}$ de $\mathbb{R}^2$ sur $S^1 \times [0,\varepsilon[$, si de plus $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ sont complets, $\hat{\Phi}$ est une action au sens habituel du terme.

2) On écrit :

$$\hat{X} = \hat{a}\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{b}\,\frac{\partial}{\partial r} \qquad \text{et}$$

$$\hat{Y} = \hat{c}\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{d}\,\frac{\partial}{\partial r}$$

où (θ,r) est le système de coordonnées canoniques sur $S^1 \times [0,\varepsilon[$. Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

i) $[\hat{X},\hat{Y}] = 0$

ii) $\dfrac{\partial\hat{a}}{\partial r} = \dfrac{\partial\hat{c}}{\partial r} = 0$

On dit que l'action locale $\hat{\Phi}$ est projetable par rapport à la fibration triviale : $\mathbb{S}^1\times[0,\varepsilon[\to \mathbb{S}^1$.

Remarque. Soit $\hat{\Phi}$ une action locale projetable définie par : $\hat{X} = \hat{a}\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \hat{b}\dfrac{\partial}{\partial r}$ et $\hat{Y} = \hat{c}\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \hat{d}\dfrac{\partial}{\partial r}$. Supposons que $\hat{c} \equiv 0$ et que $\hat{a}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{S}^1\times[0,\varepsilon[$. Si on désigne par $\hat{\varphi}_t$ et $\hat{\psi}_s$ les flots locaux associés respectivement à $\hat{X}$ et $\hat{Y}$, alors on a :

a) $\hat{\varphi}_t$ préserve la fibration triviale (F) : $\mathbb{S}^1\times[0,\varepsilon[\to \mathbb{S}^1$

b) $\hat{\varphi}_t$ est transverse aux fibres de (F).

c) $\hat{\psi}_s$ préserve chaque fibre de (F).

Lemme de type Kopell. Soit $\hat{\Phi}$ une action locale projetable, de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{S}^1\times[0,\varepsilon[$ définie par $\hat{X} = \hat{a}\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \hat{b}\dfrac{\partial}{\partial r}$ et $\hat{Y} = \hat{d}\dfrac{\partial}{\partial r}$, si on suppose que $\hat{a}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{S}^1\times[0,\varepsilon[$, alors l'action $\hat{\Phi}$ n'a pas d'orbite planaire.

Démonstration : On distinguera deux cas :

i) $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ sont partout linéairement indépendants sur $\mathbb{S}^1\times]0,\varepsilon[$ (c'est-à-dire la fonction $\hat{d}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{S}^1\times]0,\varepsilon[$). Dans ce cas, il est évident que Φ a uniquement deux orbites qui sont $\mathbb{S}^1\times\{0\}$ et $\mathbb{S}^1\times]0,\varepsilon[$.

ii) Il existe $(\theta_o,r_o) \in \mathbb{S}^1\times]0,\varepsilon[$ tel que : $\hat{Y}(\theta_o,r_o) = 0$ et donc $\hat{\psi}_s(\theta_o,r_o) = (\theta_o,r_o)$, pour tout $s \in \mathbb{R}$. On pose $T_o = \{\theta_o\}\times[0,\varepsilon[$. Comme $\hat{\varphi}_t$ préserve la fibration (F) on peut supposer que $\hat{\varphi}_1$ envoie T_o dans T_o, et $\hat{\varphi}_1$ restreint à T_o est une contraction en $(\theta_o,0)$. Or pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a $\hat{\psi}_1 \circ \hat{\psi}_s = \hat{\psi}_s \circ \hat{\varphi}_1$, comme $\hat{\Phi}$ est de classe C^2, il découle du lemme de N. Kopell [5] que $\hat{\psi}_s|_{T_o}$ est trivial (car $\hat{\psi}_s$ a un point fixe dans l'intérieur de T_o). Par suite $\hat{Y}|_{T_o} \equiv 0$ et comme $S'\times]0,\varepsilon[$ est la réunion des orbites de $\hat{\Phi}$ passant par T_o, il s'ensuit que $\hat{Y} = 0$ sur $S'\times]0,\varepsilon[$. Et donc toutes les orbites de $\hat{\Phi}$ sont de dimension un ∎

2.1.2. *Différentes réductions.*

L'objet de ce sous-paragraphe est de ramener, par différentes réductions, la démonstration du théorème au cas particulier où M est le cylindre $S'\times I$ et $C(\Phi) = \partial M$.

1) Quitte à passer au revêtement des orientations de M, on peut supposer que $M = S'\times I$ ou T^2. En effet soit $p : \tilde{M} \to M$ le revêtement des orientations ($\tilde{M} = S'\times I$ ou T^2), et soit O une orbite de Φ. Alors $p^{-1}(O)$ est une réunion fini d'orbites de l'action $\tilde{\Phi}$ relevée de Φ, et si $\tilde{O}$ est une orbite de $\tilde{\Phi}$ contenu dans $p^{-1}(O)$ la restriction ; $p : \tilde{O} \to O$, de p à $\tilde{O}$ est un revêtement à un ou deux feuillets, en particulier on a :

$$0 \to \Pi_1(\tilde{O}) \xrightarrow{p_*} \Pi_1(O).$$

Par conséquent la non existence d'orbite planaire pour l'action $\tilde{\Phi}$ entraine la non existence d'orbite planaire pour Φ.

2) On peut supposer que $C(\Phi) \neq \emptyset$. En effet si $C(\Phi) = \emptyset$, alors d'après le corollaire 2.3.1. Φ possède un unique ensemble minimal égal à M et $M = T^2$, et les orbites de Φ sont ou bien toutes de dimension un ou seulement une seule orbite T^2. Donc il n'y a pas d'orbite planaire.

3) Quitte à couper suivant une orbite fermée de dimension un de Φ, on peut alors supposer que M est le cylindre $S'\times I$.

4) Comme $C(\Phi)$ est fermé, si V est une composante connexe de $S'\times I - C(\Phi)$, alors $\bar{V}$ est un cylindre invariant par Φ, tel que la restric-

tion $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \times \bar{V} \to \bar{V}$ de Φ à $\bar{V}$ vérifie :

$$C(\Phi_1) = \partial \bar{V}.$$

2.2. *Cas fondamental.*

Pour achever la démonstration du théorème 2.1. il nous suffit de démontrer la proposition fondamentale suivante :

Proposition 2.2. On considère une action :

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \times I \to \mathbb{S}^1 \times I$$

de classe C^2 et telle que $C(\Phi) = \partial(\mathbb{S}^1 \times I)$. Alors Φ n'a pas d'orbite planaire.

La démonstration de cette proposition se fait en plusieurs étapes.

Lemme 2.2.1. Si O est une orbite cylindrique de l'action Φ, alors $O = \mathbb{S}^1 \times]0,1[$.

Démonstration : Remarquons que tout ensemble minimal de Φ est soit $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ soit $\mathbb{S}^1 \times \{1\}$, or bien sûr O est contenu dans $\mathbb{S}^1 \times]0,1[$, donc si on suppose que O est contenu strictement dans $\mathbb{S}^1 \times]0,1[$, alors nécessairement il existe un ensemble minimal contenu dans $\bar{O} \cap \mathbb{S}^1 \times]0,1[$ ce qui est impossible ■

D'après le théorème 3.3. il existe un champ de vecteurs fondamental X de Φ tel que :

i) X est sans singularité

ii) X est tangent à $\partial(\mathbb{S}^1 \times I)$.

Lemme 2.2.2. Soit un champ de vecteurs fondamental X de Φ qui vérifie i) et ii), si de plus X possède une orbite fermée dans $\mathbb{S}^1 \times]0,1[$, alors $\mathbb{S}^1 \times]0,1[$ est une orbite de Φ.

Démonstration : D'après le lemme 2.2.1, il suffit de montrer que Φ possède une orbite cylindrique. En effet, une orbite de dimension deux de Φ est de l'un des types suivants :

1) une orbite cylindrique
2) une orbite planaire.

Soit $\gamma \subset S' \times]0,1[$ une orbite fermée de X, et soit $m \in \gamma$, alors nécessairement l'orbite O de m par Φ est de dimension deux (car sinon γ est une orbite fermée de Φ). Or si O est de type (2), alors γ est homotope à zéro et donc X a une singularité, ceci contredit le fait que X est sans singularité ∎

D'après le lemme 2.2.2., on peut donc supposer que les seules orbites fermées de X sont les composantes du $\partial(\mathbb{S}' \times I)$. Soit (r,θ) le système de coordonnées canoniques de $\mathbb{S}' \times I$, alors X s'écrit :

$$X(\theta,r) = a(\theta,r)\,\frac{\partial}{\partial\theta} + b(\theta,r)\,\frac{\partial}{\partial r}$$

où a et b sont des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{S}' \times I$ telles que a^2+b^2 ne s'annule pas sur $\mathbb{S}' \times I$.

Propriétés de X.

1) Comme $a(\theta,0) \neq 0$, pour tout $\theta \in \mathbb{S}^1$, il existe un voisinage V de $\mathbb{S}' \times \{0\}$ dans $\mathbb{S}' \times I$ tel que a ne s'annule pas sur V.

2) Comme $C(X) = \partial(\mathbb{S}' \times I)$, il existe une transversale fermée γ à X contenue dans V, en plus de la condition que a ne s'annule pas sur V on peut choisir γ de façon a être aussi transverse à la fibration triviale $(F) : \mathbb{S}' \times I \to \mathbb{S}^1$.

3) Notons K le cylindre de bord $\mathbb{S}' \times \{0\} \cup \gamma$, quitte à faire un changement de paramétrage on peut supposer qu'il existe ε, $0 < \varepsilon < 1$ tel que $K = \mathbb{S}' \times [0,\varepsilon]$.

Lemme 2.2.3. On suppose qu'il existe un champ de vecteurs fondamental X de Φ, sans singularité et tel que $C(X) = \partial(\mathbb{S}'\times I)$. Alors il existe une action locale projetable $\hat{\Phi}$ de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{S}'\times[0,\varepsilon[$ dont les orbites sont les traces sur $\mathbb{S}'\times[0,\varepsilon[$ des orbites de Φ.

Démonstration :

1) Détermination de $\hat{\Phi}$. Soit un champ de vecteurs fondamental Y de Φ tel que X et Y engendrent Φ. On écrit

$$Y(\theta,r) = c(\theta,r)\frac{\partial}{\partial\theta} + d(\theta,r)\frac{\partial}{\partial r} \quad .$$

Sur $\mathbb{S}'\times[0,\varepsilon[$ on pose :

$$\hat{X}(\theta,r) = \frac{1}{a(\theta,r)} X(\theta,r) = \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{b(\theta,r)}{a(\theta,r)}\frac{\partial}{\partial r} \qquad \text{et}$$

$$\hat{Y}(\theta,r) = Y(\theta,r) - \frac{c(\theta,r)}{a(\theta,r)} X(\theta,r) = \left(d(\theta,r) - \frac{(cb)(\theta,r)}{a(\theta,r)}\right)\frac{\partial}{\partial r}$$

Alors on a :

i) $\hat{X}$ préserve la fibration triviale (F_1) : $\mathbb{S}'\times[0,\varepsilon[\to S'$

ii) $\hat{X}$ est transverse aux fibres de (F_1)

iii) $\hat{Y}$ préserve chaque fibre de (F_1).

Enfin, vérifions que $[\hat{X},\hat{Y}] = 0$. Pour cela développons $[\hat{X},\hat{Y}]$:

$$[\hat{X},\hat{Y}] = \left[\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{b}{a}\frac{\partial}{\partial r}\,,\ (d - \frac{cb}{a})\frac{\partial}{\partial r}\right]$$

$$= \left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(d - \frac{cb}{a}) + \frac{b}{a}\frac{\partial}{\partial r}(d - \frac{cb}{a}) - (d - \frac{cb}{a})\frac{\partial}{\partial r}(\frac{b}{a})\right\}\frac{\partial}{\partial r}$$

$$= \left\{\frac{\partial d}{\partial\theta} - \frac{1}{a}(b\frac{\partial c}{\partial\theta} + c\frac{\partial b}{\partial\theta}) + \frac{cb}{a^2}\frac{\partial a}{\partial\theta} + \frac{b}{a}\frac{\partial d}{\partial r}\right.$$

$$\left. - \frac{b}{a^2}(b\frac{\partial c}{\partial r} + c\frac{\partial b}{\partial r}) + \frac{cb^2}{a^3}\frac{\partial a}{\partial r} - (d - \frac{cb}{a})(\frac{1}{a}\frac{\partial b}{\partial r} - \frac{b}{a^2}\frac{\partial a}{\partial r})\right\}\frac{\partial}{\partial r}$$

$$= (\frac{\partial d}{\partial\theta} + \frac{b}{a}\frac{\partial d}{\partial r} - \frac{c}{a}\frac{\partial b}{\partial\theta} - \frac{b}{a}\frac{\partial c}{\partial\theta} + \frac{cb}{a^2}\frac{\partial a}{\partial\theta} - \frac{b^2}{a^2}\frac{\partial c}{\partial r}$$

$$- \frac{cb}{a^2}\frac{\partial b}{\partial r} - \frac{d}{a}\frac{\partial b}{\partial r} + \frac{db}{a^2}\frac{\partial a}{\partial r} + \frac{cb}{a^2}\frac{\partial b}{\partial r})\frac{\partial}{\partial r}$$

$$= (\frac{\partial d}{\partial\theta} + \frac{b}{a}\frac{\partial d}{\partial r} - \frac{c}{a}\frac{\partial b}{\partial\theta} - \frac{d}{a}\frac{\partial b}{\partial r} - \frac{b}{a}\frac{\partial c}{\partial\theta}$$

$$+ \frac{cb}{a^2}\frac{\partial a}{\partial\theta} - \frac{b^2}{a^2}\frac{\partial c}{\partial r} + \frac{db}{a^2}\frac{\partial a}{\partial r})\frac{\partial}{\partial r}$$

$$= \frac{1}{a}(a\frac{\partial d}{\partial\theta} + b\frac{\partial d}{\partial r} - c\frac{\partial b}{\partial\theta} - d\frac{\partial b}{\partial r})\frac{\partial}{\partial r}$$

$$+ \frac{b}{a^2}(c\frac{\partial a}{\partial\theta} + d\frac{\partial a}{\partial r} - a\frac{\partial c}{\partial\theta} - b\frac{\partial c}{\partial r})\frac{\partial}{\partial r}$$

Or la condition $[X,Y] = 0$ signifie que a,b,c,d vérifient le système de deux équations aux dérivées partielles suivant :

$$(1)\qquad \begin{cases} a\dfrac{\partial c}{\partial\theta} + b\dfrac{\partial c}{\partial r} - c\dfrac{\partial a}{\partial\theta} - d\dfrac{\partial a}{\partial r} = 0 \\[2ex] a\dfrac{\partial d}{\partial\theta} + b\dfrac{\partial d}{\partial r} - c\dfrac{\partial b}{\partial\theta} - d\dfrac{\partial b}{\partial r} = 0 \end{cases}$$

D'où on tire du système (1) que $[\hat{X},\hat{Y}] = 0$.

2) Il nous reste à montrer que les orbites de $\hat{\Phi}$ sont les traces sur $\$'\times[0,\varepsilon[$ des orbites de Φ. Pour cela il suffit de remarquer que si $O(m)$ et $\hat{O}(m)$ sont les orbites en $m \in S'\times[0,\varepsilon[$ correspondantes respectivement à Φ et $\hat{\Phi}$, il faut qu'on a : $T_m(O(m)) = T_m(\hat{O}(m))$.
Or ceci est évident d'après les relations sur $\$'\times[0,\varepsilon[$:

$$\hat{X} = \frac{1}{a}X \qquad \text{et} \qquad \hat{Y} = Y - \frac{c}{a}X. \blacksquare$$

Démonstration de la proposition 2.2. : Soient X et Y deux champs de vecteurs fondamentaux qui engendrent l'action Φ. D'après le lemme 2.2.2., on peut supposer que X vérifie

i) X est sans singularité sur $\mathbb{S}'\times I$

ii) $C(X) = \partial(\mathbb{S}'\times I)$.

En outre d'après le lemme 2.2.3, il existe $\varepsilon > 0$ et une action locale projetable $\hat{\Phi}$ sur $\mathbb{S}'\times[0,\varepsilon[$ dont les orbites sont les traces sur $\mathbb{S}'\times[0,\varepsilon[$ des orbites de Φ. De plus la condition ii) implique que toute orbite non compacte de Φ coupe $\mathbb{S}'\times[0,\varepsilon[$. Deux cas sont alors à envisager :

1) Φ possède une orbite non compacte de dimension un

Il en sera de même pour $\hat{\Phi}$ et d'après le lemme de type Kopell toutes les orbites de $\hat{\Phi}$ sont de dimension un, et donc toutes les orbites de Φ sont de dimension un.

2) Les champs de vecteurs X et Y sont partout indépendants, il en sera de même pour $\hat{X}$ et $\hat{Y}$. D'après le lemme de type Kopell et le lemme 2.2.3. il existe une orbite O de Φ contenant $\mathbb{S}'\times]0,\varepsilon[$; elle est donc cylindrique et d'après le lemme 2.2.1, on a $O = \mathbb{S}'\times]0,1[$ ∎

Conclusion. La démonstration du théorème 2.1 se fait en deux étapes :

1) Par différentes réductions 2.1.2 on se ramènera au cas particulier où $M = \mathbb{S}'\times I$ et $C(\Phi) = \partial(\mathbb{S}'\times I)$.

2) On conclura d'après la proposition 2.2.

CHAPITRE V

STABILITÉ STRUCTURELLE

Nous désignons par $\mathrm{Act}(\mathbb{R}^2,M)$ l'ensemble des actions de $\mathbb{R}^2$ de classe C^2, et sans point fixe sur une surface compacte et orientable M. C'est la <u>stabilité structurelle</u> des éléments de $\mathrm{Act}(\mathbb{R}^2,M)$ qui est l'objet de ce chapitre. Nous commençons par rappeler quelques notions classiques pour les champs de vecteurs et nous les étendons aux actions de $\mathbb{R}^2$.

I - *GENERALITES - TOPOLOGIE SUR* $\mathrm{Act}(\mathbb{R}^2,M)$.

Nous notons par $\mathcal{X}(M)$ l'algèbre des champs de vecteurs de classe C^2 sur M. On munit $\mathcal{X}(M)$ de la C^1-topologie de Whitney qui est définie par la norme :

$$\|X\|_1 = \sup_{x\in M}\left(\|X_x\|,\ \|DX_x\|\right).$$

où on désigne par $\|\ \|$ la norme habituelle, relativement à une métrique riemannienne sur M.

<u>Définition</u> 1.1. Deux éléments X et Y de $\mathcal{X}(M)$ sont dits <u>topologiquement équivalents</u> s'il existe un homéomorphisme de M qui envoie les orbites de X sur les orbites de Y.

<u>Définition</u> 1.2. Un élément X de $\mathcal{X}(M)$ est <u>structurellement stable</u> s'il existe un voisinage V de X dans $\mathcal{X}(M)$ tel que : tout élément Y de V est topologiquement équivalent à X.

Soit $X \in \mathcal{X}(M)$ et soit γ une orbite fermée de X. Considérons une transversale Σ à X passant par un point $x_o \in \gamma$, et soit h l'application du premier retour associée à X définie sur un voisinage de x_o dans Σ. On sait que h est un difféomorphisme local de Σ qui laisse x_o fixe.

Définition 1.3.

i) On dit que γ est une orbite fermée hyperbolique de X si et seulement si l'application h du premier retour vérifie : $dh(x_o) \neq 1$.

ii) Si X est sans singularités, on dit qu'il est hyperbolique si toutes ses orbites fermées sont hyperboliques.

Le théorème suivant est un cas particulier du résultat de Peixoto énoncé et démontré dans [12].

Théorème 1.4. Si $X \in \mathcal{X}(M)$ est sans singularités, alors X est structurellement stable si et seulement si X est hyperbolique.

Passons aux actions de $\mathbb{R}^2$. Pour $\Phi \in Act(\mathbb{R}^2,M)$, on note :

$$\psi_\Phi : G_1(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{X}(M)$$

la restriction de l'homomorphisme de Lie, associé à Φ, à $G_1(\mathbb{R}^2)$. On munit $Act(\mathbb{R}^2,M)$ de la topologie définie par la métrique d_1 suivante. Pour tout Φ_1 et Φ_2 éléménts de $Act(\mathbb{R}^2,M)$, on pose :

$$d_1(\Phi_1,\Phi_2) = \sup_{\bar{X}\in G_1(\mathbb{R}^2)} \left\{ \|\psi_{\Phi_1}(\bar{X})-\psi_{\Phi_2}(\bar{X})\|_1 \right\} .$$

Définition 1.5. Deux éléments Φ_1 et Φ_2 de $Act(\mathbb{R}^2,M)$ sont dits équivalents s'il existe un homéomorphisme de M qui envoie les orbites de Φ_1 sur les orbites de Φ_2.

Définition 1.6. Un élément $\Phi \in Act(\mathbb{R}^2,M)$ est structurellement stable, s'il existe un voisinage V de Φ tel que : tout élément Φ_1 de V est équivalent à Φ.

Notation. On note par $Act_1(\mathbb{R}^2,M)$ le sous-ensemble de $Act(\mathbb{R}^2,M)$ dont tous les éléments ont uniquement des orbites de dimension un. On munit $Act_1(\mathbb{R}^2,M)$ de la topologie induite par celle de $Act(\mathbb{R}^2,M)$. L'étude de la stabilité se fera en trois temps : dans un premier temps on va étudier la stabilité des éléments de $\mathrm{Act}_1(\mathbb{R}^2,M)$ dans $\mathrm{Act}_1(\mathbb{R}^2,M)$; puis dans $\mathrm{Act}(\mathbb{R}^2,M)$. Le cas des éléments de $\mathrm{Act}(\mathbb{R}^2,M)-\mathrm{Act}_1(\mathbb{R}^2,M)$ sera l'objet du paragraphe 4.

2 - *STABILITE DES ELEMENTS DE* $\mathrm{Act}_1(\mathbb{R}^2,M)$ *DANS* $\mathrm{Act}_1(\mathbb{R}^2,M)$.

Soit $\Phi \in \mathrm{Act}_1(\mathbb{R}^2,M)$, pour étudier la stabilité de Φ dans $\mathrm{Act}_1(\mathbb{R}^2,M)$ on va envisager deux temps suivant que $C(\Phi)$ est d'intérieur vide ou non.

Tout d'abord supposons que $C(\Phi) = M$, ceci implique que $M = \mathbb{S}\times T$ où $T = I$ ou $\mathbb{S}^1$. Quitte à changer de paramétrage on peut supposer que les orbites de Φ sont données par l'équation : $dr = 0$, où (θ,r) est le système de coordonnées canoniques de $S'\times T$. Et donc tout système générateur X,Y de Φ peut s'écrire :

$$X = f\frac{\partial}{\partial\theta} \quad \text{et} \quad Y = g\frac{\partial}{\partial\theta}$$

où f et g sont des fonctions différentiables sur M. Enfin, on considère la fonction définie sur M par :

$$A(X,Y) = f\frac{\partial g}{\partial r} - g\frac{\partial f}{\partial r}$$

Lemme 2.1. Si (X,Y) et (X_1,Y_1) sont les images par ψ_Φ de deux bases orthogonales de $G_1(\mathbb{R}^2)$ alors on a :

$$A(X,Y) = \pm A(X_1,Y_1).$$

Démonstration : Comme X et Y engendrent Φ, il existe quatre réels a_1,b_1,c_1,d_1 tels que :

$$X_1 = (a_1f+b_1g)\frac{\partial}{\partial\theta}, \quad \text{et} \quad Y_1 = (c_1f+d_1g)\frac{\partial}{\partial\theta}$$

où $X = f\frac{\partial}{\partial\theta}$ et $Y = g\frac{\partial}{\partial\theta}$. De plus comme (X,Y) et (X_1,Y_1) sont les images de deux bases orthonormées de $G_1(\mathbb{R}^2)$ on a $a_1d_1-b_1c_1 = \pm 1$. Et donc :

$$A(X_1,Y_1) = (a_1f+b_1g)\frac{\partial}{\partial r}(c_1f+d_1g) - (c_1f+d_1g)\frac{\partial}{\partial r}(a_1f+b_1g)$$

$$= a_1c_1f\frac{\partial f}{\partial r} + a_1d_1f\frac{\partial g}{\partial r} + b_1c_1g\frac{\partial f}{\partial r} + b_1d_1g\frac{\partial g}{\partial r} - c_1a_1f\frac{\partial f}{\partial r}$$

$$- c_1b_1f\frac{\partial g}{\partial r} - d_1a_1g\frac{\partial f}{\partial r} - d_1b_1g\frac{\partial g}{\partial r}$$

$$= (a_1d_1-c_1b_1)f\frac{\partial g}{\partial r} + (b_1c_1-d_1a_1)g\frac{\partial f}{\partial r}$$

$$= \pm\left(f\frac{\partial g}{\partial r} - g\frac{\partial f}{\partial r}\right) = \pm A(X,Y) \blacksquare$$

Définition 2.2. Si (X,Y) est l'image par ψ_Φ d'une base orthogonale de $G_1(\mathbb{R}^2)$ on pose :

$$|A(X,Y)| = A(\Phi).$$

Théorème 2.3. Une action $\Phi \in \mathrm{Act}_1(\mathbb{R}^2,M)$ qui vérifie $C(\Phi) = M$, est stable dans $\mathrm{Act}_1(\mathbb{R}^2,M)$ si et seulement si la fonction $A(\Phi)$ ne s'annule pas sur M.

Démonstration : Soit (X,Y) un système générateur de Φ, image par ψ_Φ d'une base orthogonale de $G_1(\mathbb{R}^2)$, fixé une fois pour toutes, avec

$$X = f\frac{\partial}{\partial\theta} \quad \text{et} \quad Y = g\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

1) On suppose qu'il existe $x_o \in M$ tel que : $A(\Phi)(x_o) = 0$. Soit γ_o l'orbite de x_o par Φ. On peut supposer que X ne s'annule pas sur γ_o, et donc il existe un voisinage U de γ_o saturé pour Φ tel que X ne s'annule pas sur U. Les conditions $[X,Y] = 0$ et $Y_{|U} = \frac{g}{f}X$ impliquent que $\frac{g}{f}$ est une fonction de la seule variable r (sur U) et qui vérifie :

1) $\frac{g}{f}(x) = a$ pour tout $x \in \gamma_o$ $(a \in \mathbb{R})$

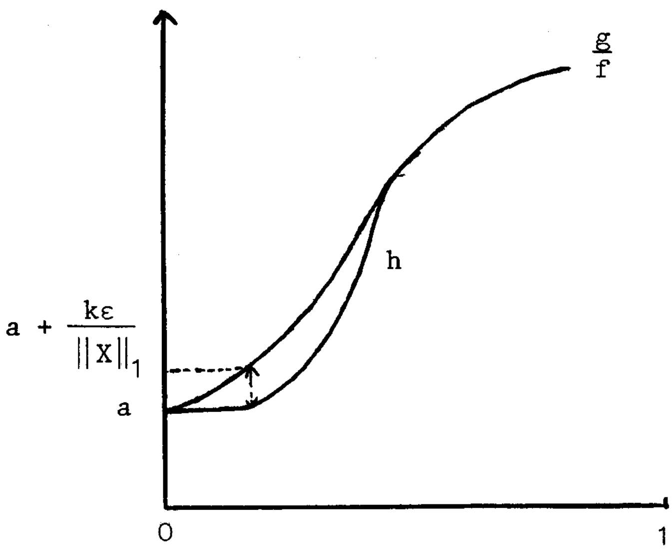
2) $d(\frac{g}{f})(x) = \frac{\partial}{\partial r}(\frac{g}{f})(x) = 0$ pour tout $x \in \gamma_o$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On vérifie facilement qu'il existe deux voisinages V_1 et V_2 de γ_o saturés pour Φ ; et une fonction différentiable h, dépendant uniquement de la variable r, définie sur U ; tels que :

i) $V_1 \subset \bar{V}_1 \subset V_2 \subset \bar{V}_2 \subset U$

ii) $h/V_1 = a$ et $h/U-V_2 = \frac{g}{f}$

iii) $\sup\limits_{x \in U} \left\{ |h(x) - \frac{g}{f}(x)| \quad ; \quad |\frac{\partial h}{\partial r}(x) - \frac{\partial}{\partial r}(\frac{g}{f})(x)| \right\} < \frac{\varepsilon}{\|X\|_1}$



$(0 \leq k < 1)$

Soit $\tilde{X}$ un champ de vecteurs sur M tel que :

a) $\tilde{X}_{|M-V_1} = X$

b) les orbites de $\tilde{X}$ dans V_1 ne sont pas toutes fermées

c) $\|\tilde{X}-X\|_1 < \varepsilon$.

Enfin soit $\tilde{Y}$ le champ de vecteurs de M défini par :

$$\tilde{Y} = \begin{cases} hX & \text{sur } U \\ Y & \text{sur } M-U \end{cases} .$$

Il est clair qu'on a : $[\tilde{X},\tilde{Y}] = 0$ et $\|\tilde{Y}-Y\|_1 < \varepsilon$; et donc l'action $\tilde{\Phi}$ engendrée par $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ est ε-voisine de Φ, mais elle n'est pas équivalente à Φ du fait que $\tilde{\Phi}$ à des orbites non fermées. D'où Φ est instable.

2) Réciproquement, on suppose que $A(\Phi)$ ne s'annule pas sur M, donc il existe $a > 0$ tel que :

$$\|A(\Phi)\| = \sup_{x\in M} A(\Phi)(x) > a.$$

On remarque d'abord que si X ou Y s'annule sur une infinité d'orbites de Φ, alors $A(\Phi)$ s'annule sur M. En effet, supposons que Y s'annule sur une infinité d'orbites de Φ il existe alors une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'orbites de Φ qui tend vers une orbite γ telle que : Y s'annule sur γ_n pour tout n, il suffit de choisir un voisinage U de γ_o tel que X ne s'annule pas sur U, alors sur U la fonction $\frac{g}{f}$ vérifie :

$$\frac{g}{f}\Big|_{\gamma_o} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{g}{f}\right)\Big|_{\gamma_o} = 0.$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que Φ est instable dans $Act_1(\mathbb{R}^2,M)$. Donc pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe deux éléments $\tilde{X} = \tilde{a}\frac{\partial}{\partial\theta} + \tilde{b}\frac{\partial}{\partial r}$ et $\tilde{Y} = \tilde{c}\frac{\partial}{\partial\theta} + \tilde{d}\frac{\partial}{\partial r}$ de $\mathcal{X}(M)$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{i)} \quad \|\tilde{X}-X\|_1 < \varepsilon \quad , \quad \|\tilde{Y}-Y\|_1 < \varepsilon \\ \text{ii)} \quad [\tilde{X}-\tilde{X}] = 0, \quad \tilde{X} \text{ et } \tilde{Y} \text{ sont partout colinéaires} \\ \text{iii)} \quad \text{l'action } \tilde{\Phi} \text{ engendrée par } \tilde{X} \text{ et } \tilde{Y} \text{ a des orbites non compactes.} \end{array}\right.$$

D'après la condition iii) et le fait que Φ soit sans point fixe, il existe un ouvert V de M tel que :

a) toutes les orbites de $\tilde{\Phi}$ dans V ne sont pas fermées

b) X ne s'annule pas sur $\bar{V}$ (l'adhérence de V).

Les conditions a) et ii) impliquent qu'il existe un réel c tel que : $\tilde{Y} = c\tilde{X}$ dans $\bar{V}$. Donc dans $\bar{V}$ on a les inégalités suivantes : pour tout $x \in \bar{V}$

$$\begin{cases} \text{i')} \quad |\tilde{a}(x)-f(x)| < \varepsilon \ ; \text{ et } \quad |\frac{\partial \tilde{a}}{\partial r}(x) - \frac{\partial f}{\partial r}(x)| < \varepsilon \\ \text{ii')} \quad |c\tilde{a}(x)-g(x)| < \varepsilon \ ; \text{ et } \quad |c\,\frac{\partial \tilde{a}}{\partial r}(x) - \frac{\partial g}{\partial r}(x)| < \varepsilon \end{cases}$$

Or on a :

$$|c\tilde{a}(x)-g(x)| = |(c-\frac{g}{f}(x))\,\tilde{a}(x) - \frac{g}{f}(x)(f(x)-\tilde{a}(x))| < \varepsilon$$

et par conséquent on aura :

$$|c - \frac{g}{f}(x)|\,|\tilde{a}(x)| < \varepsilon + \varepsilon|\frac{g}{f}(x)| < \varepsilon(\,\|\frac{g}{f}\|_{\bar{V}} + 1)$$

Et donc :

$$(1) \qquad \sup_{x\in\bar{V}} |c - \frac{g}{f}(x)|\,|\tilde{a}(x)| < \varepsilon\left(\|\frac{g}{f}\|_{\bar{V}} + 1\right)$$

De même on a :

$$|c\,\frac{\partial \tilde{a}}{\partial r}(x) - \frac{\partial g}{\partial r}(x)| = |\left(c - \frac{g}{f}(x)\right)\frac{\partial \tilde{a}}{\partial r}(x) + \frac{g}{f}(x)\left(\frac{\partial \tilde{a}}{\partial r}(x) - \frac{\partial f}{\partial r}(x)\right)$$

$$- f(x)\,\frac{\partial}{\partial r}(\frac{g}{f})(x)| < \varepsilon.$$

Et donc :

$$|\frac{\partial}{\partial r}\,(\frac{g}{f})(x)|\,|f(x)| \;<\; \varepsilon + |\frac{g}{f}\,(x)|\varepsilon + |c - \frac{g}{f}\,(x)|\,|\frac{\partial\tilde{a}}{\partial r}\,(x)|$$

$$< \varepsilon(1+|\frac{g}{f}(x)| \;+\; (1+|\frac{g}{f}(x)|)\;|\frac{\frac{\partial\tilde{a}}{\partial r}\,(x)}{\tilde{a}(x)}|)$$

$$< \varepsilon(1+\|\frac{g}{f}\|_{\bar{V}})(1 + \frac{1}{|\tilde{a}(x)|}\,\|\frac{\partial\tilde{a}}{\partial r}\|_{\bar{V}}) \;.$$

D'où

$$A(\Phi)(x) = f^2(x)\;\frac{\partial}{\partial r}(\frac{g}{f})(x)| \;<\; \|f\|\;\; M(g,f)\;\;\varepsilon < k\varepsilon$$

où k ne dépend pas de ε, or pour un choix convenable de ε on obtiendra une contradiction avec le fait que $\|A(\Phi)\| > a$ ∎

Exemple 2.4. Soit l'action Φ sur $S'\times I$ engendrée par les deux champs de vecteurs X et Y suivants :

$$\begin{cases} X(\theta,r) = (r+1)\,\dfrac{\partial}{\partial\theta} \\[2ex] Y(\theta,r) = (r+1)\;e^{r+1}\,\dfrac{\partial}{\partial\theta} \end{cases} .$$

Alors l'action Φ est stable dans $Act_1(\mathbb{R}^2,M)$. En effet, on a :

$$A(\Phi)(\theta,r) = (r+1)^2\;e^{r+1} > e.$$

Passons maintenant au cas où la réunion des orbites fermées de Φ est d'intérieur vide.

Lemme 2.5. Soit $\Phi \in Act_1(\mathbb{R}^2,M)$ telle que : $\overset{\circ}{\widehat{C(\Phi)}} = \emptyset$, alors il existe un champ de vecteurs fondamental de Φ sans singularité.

Démonstration : Soit (X,Y) un système générateur de Φ. On peut supposer que X n'est pas identiquement nul, soit alors V une composante connexe de l'ouvert de M où X ne s'annule pas. Comme $\Phi \in Act_1(\mathbb{R}^2,M)$, il existe une fonction différentiable f définie sur $\bar{V}$ telle que :

i) $Y(x) = f(x)\, X(x)$ pour tout $x \in \bar{V}$

ii) $X(f) = 0$.

La condition ii) implique que f est constante sur l'adhérence de chaque composante de $\bar{V} - C(\Phi)$. En effet si U est une telle composante, puisque X est sans singularité sur U, nécessairement f est constante sur chaque orbite de X dans U, mais comme ces orbites ont les mêmes ensembles limites, f sera constante sur $\bar{U}$. Donc sur une telle $\bar{U}$ on a : $df = 0$, et puisque l'intérieur de $C(\Phi)$ est vide alors f est identiquement constante égale à k sur $\bar{V}$. Choisissons Y non identiquement nul sur V et donc X ne s'annule pas sur $\bar{V}$, ceci implique que $V = \bar{V}$ et par connexité de M on déduit que $V = M$ ∎

Remarque. Si X est un champ de vecteurs fondamental de Φ, sans singularité, le lemme 2.5. montre en plus que tous les autres champ de vecteurs fondamentaux de Φ sont proportionnels à X.

Définition 2.6. Soit $\Phi \in Act_1(\mathbb{R}^2,M)$, Φ est dit hyperbolique s'il existe un champ de vecteurs fondamental de Φ qui soit hyperbolique.

Théorème 2.7. Soit $\Phi \in Act_1(\mathbb{R}^2,M)$ telle que : $\overset{\circ}{\widehat{C(\Phi)}} = \emptyset$, alors Φ est stable dans $Act_1(\mathbb{R}^2,M)$ si et seulement si Φ est hyperbolique.

Démonstration : En effet d'après la remarque, tous les champs de vecteurs fondamentaux de Φ sont proportionnels et par conséquent Φ est stable dans $Act_1(\mathbb{R}^2,M)$ si et seulement si il existe un champ de vecteurs fondamental de Φ qui soit stable dans $\mathcal{X}(M)$; d'où on conclut d'après le théorème de Peixoto [12] ∎

Maintenant on suppose que : $\overset{\circ}{\widehat{C(\Phi)}} \neq \emptyset$ et $C(\Phi) \neq M$ alors on a le théorème suivant :

Théorème 2.8. Soit $\Phi \in Act_1(\mathbb{R}^2,M)$ telle que : $C(\Phi) \neq M$ et $\overset{\circ}{\overline{C(\Phi)}} \neq \emptyset$, si on suppose qu'il existe ou bien un nombre fini de composantes connexes de $M - C(\Phi)$, ou bien un nombre fini de composantes connexes de $M - (M-\overset{\circ}{\overline{C(\Phi)}})$; alors l'action Φ est instable.

Démonstration : Soit (X,Y) un système générateur de Φ fixé, et soit γ une orbite appartenant au bord de $\overset{\circ}{\overline{C(\Phi)}}$, on peut supposer que X est non nul sur γ, comme $\gamma \in \partial(\overset{\circ}{\overline{C(\Phi)}})$ alors il existe un voisinage U saturé pour Φ, de γ, et une fonction différentiable h définie sur U tels que :

i) $Y(x) = h(x)\, X(x)$ pour tout $x \in U$

ii) $X(h) = 0$

iii) h est constante sur un semi-voisinage U^+ de γ.

De plus il existe un champ de vecteurs $\tilde{X}$ de M tel que :

a) $\tilde{X}/M-U^+ = X$ et $\tilde{X}$ voisin de X

b) les composantes connexes de $U^+ - C(\tilde{X})$ et de $U^+ - (U^+-\overset{\circ}{\overline{C(\tilde{X})}})$ sont en nombre infini.

Enfin, posons :

$$\tilde{Y} = \begin{cases} h\tilde{X} & \text{sur } U \\ Y & \text{sur } M-U \end{cases}$$

Evidemment $[\tilde{X},\tilde{Y}] = 0$, et l'action $\tilde{\Phi}$ engendré par $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ est voisine de Φ, mais elle n'est pas équivalente à Φ du fait qu'il existe une infinité de composantes connexes de $M - C(\tilde{\Phi})$ et de $M - (M-(\overset{\circ}{\overline{C(\tilde{\Phi})}}))$ ∎

3 - *STABILITE DES ELEMENTS DE* $Act_1(\mathbb{R}^2,M)$ *DANS* $Act(\mathbb{R}^2,M)$.

Pour étudier la stabilité d'un élément Φ de $Act_1(\mathbb{R}^2,M)$ on va distinguer essentiellement deux cas suivant que toutes les orbites de Φ sont fermées, on sait que Φ a un nombre fini d'orbites fermées. Nous nous intéressons tout d'abord au premier cas alors on a :

Théorème 3.1. Soit $\Phi \in Act_1(\mathbb{R}^2,M)$ telle que $C(\Phi) = M$. Alors Φ est stable si et seulement si :

i) la fonction $A(\Phi)$ ne s'annule pas sur M,

ii) pour tout champ de vecteurs fondamental $X = f\frac{\partial}{\partial\theta}$ de Φ, la fonction

$$\begin{aligned} F_f : T - f^{-1}(0) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ r &\longmapsto \frac{\partial}{\partial r}\left(\int_0^1 \frac{d\theta}{f(\theta,r)}\right) \end{aligned}$$

ne s'annule pas sur $T-f^{-1}(0)$.

Avant de démontrer le théorème 3.1, on a besoin des lemmes préliminaires suivants :

Lemme 3.1.1. Soit une fonction différentiable g sur M telle que 0 est une valeur régulière. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1) il existe un champ de vecteurs $Z = \alpha\frac{\partial}{\partial\theta} + \beta\frac{\partial}{\partial r}$, $\beta \neq 0$, qui commute avec $X = g\frac{\partial}{\partial\theta}$.

2) la fonction

$$\begin{aligned} F_g : T-g^{-1}(0) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ r &\longmapsto \frac{\partial}{\partial r}\left(\int_0^1 \frac{d\theta}{g(r,\theta)}\right) \end{aligned}$$

s'annule sur un ouvert de $T-g^{-1}(0)$.

<u>Démonstration</u> : Supposons que la condition 1) soit satisfaite, ceci implique qu'on a le système de deux équations aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} g\dfrac{\partial\beta}{\partial\theta} = 0 \\ g\dfrac{\partial\alpha}{\partial\theta} - \alpha\dfrac{\partial g}{\partial\theta} = \beta\dfrac{\partial g}{\partial r} \end{cases}$$

La résolution de ce système implique que β est une fonction de r seulement. De plus, pour tout $(\theta,r) \in M-g^{-1}(0)$ on a :

$$g^2(\theta,r) \frac{\partial}{\partial\theta} (\frac{\alpha}{g})(\theta,r) = \beta(r) \frac{\partial g}{\partial r} (\theta,r),$$

donc il existe une fonction $\gamma(r)$ telle que :

$$\alpha(\theta,r) = g(\theta,r) \left[-\beta(r) \frac{\partial}{\partial r}\left(\int_{\theta_o}^{\theta} \frac{dt}{g(t,r)}\right) + \gamma(r)\right] .$$

Soit U l'ouvert $T-\beta^{-1}(0)$. Puisque la fonction α doit être périodique par rapport à θ de période un, il faut donc que pour tout $(\theta,r) \in \mathbb{S}^1 \times U$ on ait :

$$\frac{\partial}{\partial r} \int_{\theta_o}^{\theta} \left(\frac{dt}{g(t,r)}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\int_{\theta_o}^{\theta+1} \frac{dt}{g(t,r)}\right) ,$$

et par conséquent $F(r) = 0$ pour tout $r \in U$.

Réciproquement, soit V une composante connexe de $\overset{\circ}{\widehat{F^{-1}(0)}}$. Il suffit de choisir une fonction β de classe C^∞, dont le support est contenu dans V, et de prendre

$$\alpha = -\beta g \frac{\partial}{\partial r}\left(\int_{\theta_o}^{\theta} \frac{dt}{g(t,r)}\right) \blacksquare$$

Lemme 3.1.2. Soit une fonction différentiable g sur M, dont 0 est une valeur régulière, et telle que $\frac{\partial g}{\partial r}$ ne s'annule pas sur M. Alors il existe un voisinage V de g, pour la C^1-topologie, tel que : pour tout $h \in V$, la fonction F_h ne s'annule pas sur $T-h^{-1}(0)$.

Démonstration : On pose :

$$m_o = \sup_{x\in M} (g^2(x))$$

$$m_1 = \inf_{x\in M}\left(\frac{\partial g}{\partial r} (x)\right) < M_1 = \sup_{x\in M}\left(\frac{\partial g}{\partial r} (x)\right)$$

Puisque $\frac{\partial g}{\partial r}$ ne s'annule pas sur M, m_1 et M_1 ont le même signe, et sont non nuls. On peut supposer que m_1 est strictement positif, alors il existe un voisinage V de g tel que, pour tout $h \in V$ on ait :

$$\sup_{(\theta,r)\in M} (h^2(\theta,r)) \geq \frac{m_o}{2} \quad \text{et}$$

$$\inf_{(\theta,r)\in M} \frac{\partial h}{\partial r}(\theta,r) \geq \frac{m_1}{2} \quad \text{et donc}$$

$$-\int_0^1 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{h}\right) d\theta = \int_0^1 \frac{1}{h^2}\frac{\partial h}{\partial r}\, d\theta \geq \frac{m_1}{m_o} > 0.$$

C'est-à-dire que pour tout $h \in V$, la fonction F_h ne s'annule pas sur $T\text{-}h^{-1}(0)$ ∎

Lemme 3.1.3. Soit un champ de vecteurs $X = a\frac{\partial}{\partial\theta} + b\frac{\partial}{\partial r}$, de M, dont la réunion des orbites fermées $C(X)$ est d'intérieur non vide. Alors il existe un C^∞-difféomorphisme φ de M tel que :

$$\varphi_* X_{|\overset{\circ}{\widehat{C(X)}}} = a\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

Démonstration : Puisque l'intérieur de $C(X)$ est non vide, on peut choisir une fonction f de classe C^∞ sur M telle que :

i) $X(f) = 0$ sur $\overset{\circ}{\widehat{C(X)}}$, c'est-à-dire la restriction de f à $\overset{\circ}{\widehat{C(X)}}$ est une intégrale première de X.

ii) l'application :

$$\varphi : M \longrightarrow M$$
$$(\theta,r) \longmapsto (\theta, f(\theta,r))$$

est un C^∞-difféomorphisme de M.

Or on a :

$$\varphi_* X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} & \frac{\partial f}{\partial r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \\ b \end{pmatrix} = a \frac{\partial}{\partial \theta} + X(f) \frac{\partial}{\partial r} \quad ,$$

et donc d'après la condition i), $\varphi_*(X) = a \frac{\partial}{\partial \theta}$ sur $\widehat{\overset{\circ}{C}(X)}$ ∎

<u>Démonstration du théorème</u> 3.1. : Supposons que Φ est stable. Donc $A(\Phi)$ ne s'annule pas sur M. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un champ de vecteurs fondamental $X = f \frac{\partial}{\partial \theta}$ tel que : la fonction F_f s'annule en un point $r_o \in T\text{-}f^{-1}(0)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction différentiable h sur M telle que :

a) $\|f-h\|_1 < \varepsilon$

b) F_h s'annule sur un voisinage U de r_o dans $T\text{-}h^{-1}(0)$.

Remarquons d'abord que pour un choix convanable de ε, f ne s'annule pas sur $S\times\bar{U}$. Enfin, soit $Y = g \frac{\partial}{\partial \theta}$ tel que X et Y engendrent Φ, et soit une fonction h_1 de la variable r telle que $\text{support}(h_1) \subset U$, et h_1 voisin de la fonction nulle. Posons :

$$\tilde{X} = h \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \text{et}$$

$$\tilde{Y} = \left[-h_1 \frac{\partial}{\partial r}\left(\int_{\theta_o}^{\theta} \frac{dt}{h(t,r)}\right) + \frac{g}{f} h\right] \frac{\partial}{\partial \theta} + h_1 \frac{\partial}{\partial r}$$

On a évidemment :

1) $\|\tilde{X}-X\|_1 < \varepsilon$

2) $\|\tilde{Y}-Y\|_1 < \varepsilon$ et $[\tilde{X},\tilde{Y}] = 0$

En outre l'action $\tilde{\Phi}$ engendrée par $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ est voisine de Φ, mais elle n'est pas équivalente à Φ ce qui est impossible du fait que Φ est stable.

Réciproquement, supposons que les deux conditions i) et ii) soient vérifiées. Fixons deux champs de vecteurs fondamentaux $X = f\frac{\partial}{\partial\theta}$ et $Y = g\frac{\partial}{\partial\theta}$, qui engendrent Φ. D'après la condition ii) et la compacité de l'ensemble $E = \{af+bg \mid a^2+b^2 = 1\}$, il existe un voisinage V de E tel que pour tout $h \in V$, F_h ne s'annule pas sur $T-h^{-1}(0)$. Raisonnons par l'absurde et supposons que Φ soit instable. Et donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe deux éléments $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ de $\mathcal{X}(M)$ tels que :

i') $\|\tilde{X}-X\|_1 < \varepsilon$

ii') $\|\tilde{Y}-Y\|_1 < \varepsilon$ et $[\tilde{X},\tilde{Y}] = 0$

iii) l'action $\tilde{\Phi}$ engendrée par $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ n'est pas équivalente à Φ.

D'après le théorème 2.3., l'action $\tilde{\Phi}$ a nécessairement une orbite de dimension deux, donc cylindrique, et par conséquent il existe un champ de vecteurs fondamental $\tilde{Z} = \tilde{\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta} + \tilde{\beta}\frac{\partial}{\partial r}$ de $\tilde{\Phi}$ tel que $\overset{\circ}{\overline{C(\tilde{Z})}} \neq \emptyset$. Pour un choix convenable de Φ, on peut supposer que $\tilde{\alpha} \in V$, mais d'après le lemme 3.1.3., il existe $\varphi \in \mathrm{Diff}^\infty(M)$ tel que $\varphi_*(\tilde{Z}) = \tilde{\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta}$ sur $\overset{\circ}{\overline{C(\tilde{Z})}}$, ceci implique que le champ de vecteurs $\tilde{\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta}$ commute avec $\tilde{a}\frac{\partial}{\partial\theta} + \tilde{b}\frac{\partial}{\partial r}$, où $\tilde{b}^{-1}(0) \neq M$, or d'après le lemme 3.1.1. ceci est impossible car $F_{\tilde{\alpha}}$ ne s'annule pas ∎

Passons maintenant au cas où $C(\Phi)$ est fini, alors Φ est stable si et seulement si la restriction de Φ à l'adhérence de chaque composante connexe de $M-C(\Phi)$ est stable. Par suite on peut supposer que l'action Φ a une seule orbite fermée si $M = T^2$, et deux orbites fermées (les composantes de ∂M) si $M = S^1\times I$. D'après le lemme 2.5 du chapitre V, on déduit que Φ est définie par un seul champ de vecteurs fondamental X sans singularité, et par conséquent l'action Φ définie un feuilletage $\mathcal{F}(\Phi)$ sur M. Nous distinguerons deux cas suivant que le feuilletage $\mathcal{F}(\Phi)$ est une composante de Reeb ou une suspension.

Théorème 3.2. Si l'action $\Phi \in \mathrm{Act}_1(\mathbb{R}^2,M)$ est hyperbolique et $\mathcal{F}(\Phi)$ est de Reeb, alors Φ est stable.

Démonstration : Soit X un champ de vecteurs fondamental hyperbolique fixé de Φ, et soit V un voisinage de X dans $\mathcal{X}(M)$ dont tous les éléments sont hyperboliques.

Supposons que Φ est instable. Comme Φ est hyperbolique alors d'après le théorème 2.7 elle est stable dans $\mathrm{Act}_1(R^2,M)$. Par conséquent pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux éléments $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ de $\mathcal{X}(M)$ tels que :

i) $||\tilde{X}-X||_1 < \varepsilon$

ii) $[\tilde{X},\tilde{Y}] = 0$

iii) l'action $\tilde{\Phi}$ engendrée par $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ a une orbite de dimension deux.

Soit O une telle orbite de dimension deux. Pour tout $a \in R$ on note par $\tilde{\mathcal{F}}_a$ le feuilletage défini par le champ de vecteurs $\tilde{X} + a\,\tilde{Y}$. Pour $a \neq 0$, $\tilde{\mathcal{F}}_a$ et $\tilde{\mathcal{F}}_o$ sont transverses sur l'orbite O. Mais pour un choix convenable de ε, le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_o$ et aussi de Reeb (ceci par stabilité de X dans $\mathcal{X}(M)$, et donc $\tilde{\mathcal{F}}_a$ a une feuille fermée dans O. Puisque $[\tilde{X},a\tilde{Y}+\tilde{X}] = 0$, il s'ensuit que toutes les feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}_a$ sont fermées dans O, ceci contredit le fait que pour un choix convenable de ε et a on aura $\tilde{X} + a\,\tilde{Y} \in V$, c'est-à-dire que $\tilde{X} + a\,\tilde{Y}$ est hyperbolique ∎

Nous passons maintenant au deuxième cas.

Définition 3.3. Soit $f \in \mathrm{Diff}^2(T)$, $T = \mathbb{S}^1$ ou I. Nous allons définir le champ de vecteurs suspension de f. Pour cela soit :

$$p : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \times T \longrightarrow \mathbb{R} \times T$$
$$(n,x,r) \longmapsto (x+n,\ f^n(r))$$

l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}\times T$, et soit $M = \mathbb{R}\times T/p$ l'ensemble quotient, M est une surface compacte. Sur $\mathbb{R}\times T$ définissons le flot $\bar{\psi}_t$ suivant :

$$\begin{aligned} \bar{\psi} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times T &\longrightarrow \mathbb{R} \times T \\ (t,x,r) &\longmapsto (t+x,r) \end{aligned}$$

On vérifie facilement que $\bar{\psi}_t$ passe au quotient sur M et définit un flot ψ de classe C^2 sur M qui est transverse aux fibres de la fibration : $\tilde{p} : M \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ définie par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \times T \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "\bar{p}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{R} \arrow[d, "\Pi"] \\ M \arrow[r, "\tilde{p}"'] & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

On pose :

$$X_f(m) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \psi_t(m)$$

$X_f(m)$ est dit le champ de vecteurs suspension de f. On remarque que si (θ,r) est le système de coordonnées canoniques de M, X_f s'écrit :

$$X_f(m) = \frac{\partial}{\partial\theta} + a\,\frac{\partial}{\partial r}$$

où a est une fonction définie sur M.

Définition. Une action $\Phi \in \mathrm{Act}_1(\mathbb{R}^2,M)$ est dite définie par la suspension de f, si X_f est un champ de vecteurs fondamental de Φ.

Définition 3.4. Soit Φ une action définie par la suspension de $f \in \mathrm{Diff}^2(T)$, alors si f est plongeable dans un C^2-flot $\tilde{\psi}_t$ de T, l'action Φ est instable.

Démonstration : En effet il suffit de montrer que X_f commute avec un champ de vecteurs Y de M tel que l'action engendrée par X et Y possède une orbite de dimension deux. Pour cela soit $\bar{\psi}_s$ le flot sur $\mathbb{R}\times T$ défini par :

$$\begin{aligned} \bar{\psi} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times T &\longrightarrow \mathbb{R} \times T \\ (s,x,r) &\longmapsto (x,\tilde{\psi}_s(r)). \end{aligned}$$

Puisque f commute avec $\tilde{\psi}_s$, $\bar{\psi}_s$ passe au quotient , et définit un flot ψ_s sur M qui commute avec le flot ψ_t associé à X_f. Or on vérifie aisément que le flot ψ_s préserve chaque fibre de la fibration $\tilde{p} : M \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et a pour seules singularités les points d'intersection des fibres avec les orbites fermées de Φ. Et donc l'action $\tilde{\Phi}$ de $\mathbb{R}^2$ sur M définie par :

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} : \mathbb{R}^2 \times M &\longrightarrow M \\ (t,s,m) &\longmapsto \phi_t \circ \psi_s(m) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

a une orbite de dimension deux.

Théorème 3.5. Soit Φ une action définie par la suspension de $f \in \mathrm{Diff}^2(S^1)$, alors Φ est stable si et seulement si $f \in \mathring{\overline{S_N}}$.

Pour démontrer le théorème 3.5. on a besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 3.5.1. Soient $f \in \mathrm{Diff}^2(T)$ $(T = S^1$ ou $I)$ et h une fonction différentiable qui ne s'annule pas sur M. S'il existe $Y \in \mathcal{X}(M)$ qui n'est pas partout colinéaire avec hX_f, et qui commute avec hX_f, alors il existe $Z \in \mathcal{X}(M)$ qui commute avec X_f et qui n'est pas partout colinéaire avec X_f.

Démonstration : On écrit : $X_f = \frac{\partial}{\partial\theta} + a \frac{\partial}{\partial r}$. Supposons qu'il existe $Y = \alpha \frac{\partial}{\partial\theta} + \beta \frac{\partial}{\partial r}$ commutant avec hX_f. Alors d'après le lemme 2.3.3. du chapitre IV, le champ de vecterus $(\beta-\alpha a) \frac{\partial}{\partial r}$ commute avec X_f. De plus si en point m de M, $Y(m)$ et $h(m)X_f(m)$ sont indépendants, il en serait de même pour $X_f(m)$ et $(\beta-\alpha a)(m) \frac{\partial}{\partial r}$, car sinon on devrait avoir $\beta(m) = \alpha(m)a(m)$ et donc $Y(m) = \frac{\alpha(m)}{h(m)} (hX_f)(m)$ ce qui est impossible ∎

Lemme 3.5.2. Soit $f \in S_N$, alors si $Y \in X(M)$ commute avec X_f, il est proportionnel à X_f.

Démonstration : On écrit : $X_f = \frac{\partial}{\partial\theta} + a \frac{\partial}{\partial r}$ et $Y = \alpha \frac{\partial}{\partial\theta} + \beta \frac{\partial}{\partial r}$.
La condition $[X_f, Y] = 0$ équivaut à :

$$\begin{cases} X(\alpha) = 0 & (1) \\ Y(a) = X(\beta) & (2) \end{cases}$$

Or la condition (1) entraine que α est une intégrale première de X_f ce qui implique que α est une constante égale à k (car α est constante sur chaque orbite de X_f, comme toutes les orbites de X_f ont les mêmes ensembles limites α serait partout constante). De plus $k \neq 0$ car sinon f serait plongeable dans un flot ce qui contredirait le fait que $f \in S_N$.
D'après le lemme 2.3.3 du chapitre IV, X_f commute avec $(\beta-ka) \frac{\partial}{\partial r}$ et donc $\beta = ka$ car sinon f serait plongable dans un flot ce qui est impossible du fait que $f \in S_N$ ∎

Démonstration du théorème 3.5. : Si Φ est stable on a évidemment $f \in \overset{\circ}{\overline{S_N}}$. En effet dans le cas contraire on pourrait approcher f par un difféomorphisme de $\mathbb{S}^1$ plongeable dans un C^2-flot ce qui contredirait la stabilité de Φ d'après le théorème 3.4.

Réciproquement, supposons que $f \in \overset{\circ}{\overline{S_N}}$, et soit V un voisinage de f contenu dans S_N. On vérifie facilement qu'il existe un voisinage U de X_f dans $X(M)$ tel que tout $\tilde{X} \in U$ s'écrit : $\tilde{X} = \tilde{h}\, Xg$ où $g \in V$ et $\tilde{h}$

une fonction de classe C^2 qui ne s'annule pas sur M. Enfin, considérons le voisinage W de Φ tel que tout $\tilde{\Phi} \in W$ admet un champ de vecteurs fondamental $\tilde{X}$ appartenant à U. Tout élément $\tilde{\Phi} \in W$ est équivalent à Φ. En effet si $\tilde{X} = hX_g$ est un champ de vecteurs fondamental de $\tilde{\Phi}$ qui commute avec $\tilde{Y} \in \mathcal{X}(M)$, alors d'après les lemme 3.5.1. et 3.5.2. on déduit que $\tilde{Y} = k\tilde{X}$ avec $k \in \mathbb{R}$ ∎

Théorème 3.6. On munit $Act(\mathbb{R}^2,M)$ de la C^2-topplogie. Alors l'action Φ définie par la suspension de $f \in Diff^2(T)$ ($T = S^1$ ou I) est stable si et seulement si $f \in \mathcal{S}_N$.

Démonstration : En effet d'après le théorème de Kopell [5] $\mathcal{S}_N$ est ouvert pour la C^2-topologie dans $Diff^2(T)$, donc on reprend le même raisonnement que dans le théorème 3.5. ci-dessus ∎

4 - STABILITE DES ELEMENTS DE $Act(\mathbb{R}^2,M) - Act_1(\mathbb{R}^2,M)$.

Revenons à la C^1-topologie sur $Act(\mathbb{R}^2,M)$. Soit $\Phi \in Act(\mathbb{R}^2,M)$. Dans tout ce paragraphe on supposera que toutes les orbites de dimension un sont fermées, et que leur réunion $C(\Phi)$ est d'intérieur vide. On étudiera la stabilité de Φ dans trois cas définis par le nombre d'orbites dans $C(\Phi)$.

Proposition 4.1. Si $C(\Phi) = \emptyset$, alors l'action Φ est stable.

Démonstration : On désigne par $\mathcal{F}(M)$ l'ensemble des fonctions continues sur M, muni de la topologie de la C^0-convergence uniforme. Soit l'application :

$$S : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$$
$$(X,Y) \longmapsto \sin\langle X,Y\rangle (x \mapsto \sin \langle X_x,Y_x\rangle)$$

où $\langle X_x,Y_x\rangle$ désigne l'angle entre X_x et Y_x. On vérifie que S est continue.

Choisissons $\{\bar{X},\bar{Y}\}$ une base de $G_1(\mathbb{R}^2)$. L'application :

$$\begin{aligned} R : \mathrm{Act}(\mathbb{R}^2,M) &\longrightarrow \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \\ \Phi &\longmapsto (X,Y) \end{aligned}$$

où (X,Y) est l'image par ψ_Φ de $(\bar{X},\bar{Y})$, est également continue.

Alors si $C(\Phi) = \emptyset$, d'après le corollaire 2.3.1. $M = T^2$ est l'unique orbite de Φ. Par compacité de T^2, et l'indépendance de X et Y sur T^2, on déduit qu'il existe un réel $a > 0$ tel que :

$$\sin(\Phi) = \sin\langle X,Y\rangle > a.$$

Par continuité de R et S, il existe donc un voisinage V de Φ tel que :

$$\sin(\tilde{\Phi}) > \frac{a}{2} \quad , \quad \text{pour tout } \tilde{\Phi} \in V.$$

Par conséquent $C(\tilde{\Phi}) = \emptyset$, pour tout $\tilde{\Phi} \in V$, c'est-à-dire que $\tilde{\Phi}$ est équivalente à Φ ∎

Proposition 4.2. Si $C(\Phi)$ est infini, l'action Φ est instable.

Démonstration : Soit γ une orbite qui est limite d'une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'orbite dans $C(\Phi)$. En coupant suivant γ on peut supposer que M est le cylindre $\mathbb{S}^1\times I$. Soient $X = a\frac{\partial}{\partial\theta} + b\frac{\partial}{\partial r}$ et $Y = c\frac{\partial}{\partial\theta} + d\frac{\partial}{\partial r}$ deux champs de vecteurs fixés qui engendrent Φ, de plus on peut supposer que a ne s'annule pas sur $\mathbb{S}^1\times\{0\}$. Comme $\mathbb{S}^1\times\{0\}$ est limite d'une suite dans $C(\Phi)$ ceci implique que :

1) $b\big|_{\mathbb{S}^1\times\{0\}} = d\big|_{\mathbb{S}^1\times\{0\}} = 0.$

2) $Db\big|_{\mathbb{S}^1\times\{0\}} = Dd\big|_{\mathbb{S}^1\times\{0\}} = 0.$

On considère M_ε le cylindre $\mathbb{S}^1\times[-\varepsilon,1]$, et deux prolongements $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ de X et Y à M_ε tels que :

$$\tilde{X} = \tilde{a}\frac{\partial}{\partial\theta} + \tilde{b}\frac{\partial}{\partial r} \quad , \quad \tilde{b}\Big|_{\mathbb{S}^1\times[-\varepsilon,0]} = 0$$

$$\tilde{Y} = \tilde{c}\frac{\partial}{\partial\theta} + \tilde{d}\frac{\partial}{\partial r} \quad , \quad \tilde{d}\Big|_{\mathbb{S}^1\times[-\varepsilon,0]} = 0.$$

et

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\tilde{c}}{\tilde{a}}\right) = 0 \qquad \left(\text{ceci car } \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{c}{a}\right)\Big/_{S^1\times\{0\}} = 0\right)$$

Enfin soit $i : M \hookrightarrow M_\varepsilon$ l'inclusion naturelle. Il existe un difféomorphisme H de M_ε sur M tel que $H \circ i$ est C^1 - voisin de l'identité de M. Alors, on a :

i) $H_*(\tilde{X})$ est voisin de X

ii) $H_*(\tilde{Y})$ est voisin de Y

iii) $[H_*(\tilde{X}), H_*(\tilde{Y})] = 0$

c'est-à-dire que l'action $\tilde{\Phi}$ engendrée par $H_*(\tilde{X})$ et $H_*(\tilde{Y})$ est voisine de l'action Φ, mais elle n'est pas équivalente à Φ du fait que $C(\tilde{\Phi})$ est d'intérieur non vide ∎

Enfin, nous en verrons au cas où l'action Φ admet un nombre fini d'orbites fermées. Alors Φ sera stable si et seulement si la restriction de Φ à l'adhérence de chaque composante connexe de $M-C(\Phi)$ est stable, donc on peut à nouveau réduire l'étude au cas où l'action Φ admet seulement une ou deux orbites fermées selon que $M = T^2$ ou $M = \mathbb{S}^1\times I$.

***Proposition* 4.3.** Si $C(\Phi)$ contient une ou deux orbites, l'action Φ est stable si et seulement si, il existe un champ de vecteurs fondamental de Φ qui soit hyperbolique.

Avant de démontrer cette proposition, on a besoin du lemme préliminaire suivant :

Lemme 4.3.1. Soit X un champ de vecteurs fondamental de Φ qui est hyperbolique. Alors $C(\Phi) = C(X)$.

Démonstration : D'après les hypothèses sur l'action Φ, l'ouvert $O = M-C(\Phi)$ est une orbite de Φ, et il existe un champ de vecteurs fondamental Y de Φ qui n'a pas d'orbite fermée dans O. La condition $[X,Y] = 0$ implique que si X possède une orbite fermée dans O, toutes ses orbites seront fermées ceci contredira l'hyperbolicité de X ■

Démonstration de la proposition : On suppose qu'il existe un champ de vecteurs fondamental X de Φ qui est hyperbolique. Soit $Y \in \mathcal{X}(M)$ tel que X et Y engendrent Φ, et soit un point fixé $m \in O$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout couple $(\tilde{X},\tilde{Y})$ de $\mathcal{X}(M)$ qui vérifie les deux conditions suivantes :

i) $||\tilde{X}-X||_1 < \varepsilon$ et $\tilde{X}$ hyperbolique

ii) $||\tilde{Y}-Y||_1 < \varepsilon$ et $[\tilde{X},\tilde{Y}] = 0$

alors $\tilde{X}(m)$ et $\tilde{Y}(m)$ sont linéairement indépendants.

On désigne par $B(\Phi,\varepsilon)$ la boule dans $Act(\mathbb{R}^2,M)$ de centre Φ et de rayon ε. Soit $\tilde{\Phi} \in B(\Phi,\varepsilon)$, supposons que $\tilde{\Phi}$ n'est pas équivalente à Φ ceci implique que :

1) ou bien $\tilde{\Phi}$ a uniquement une seule orbite, et donc $C(\tilde{X}) = \emptyset$ ce qui contredirait l'hyperbolicité de $\tilde{X}$.

2) $\tilde{\Phi}$ a des orbites de dimension un dans $M-C(\tilde{\Phi})$. Mais puisque $Card(C(\tilde{X})) = Card(C(X)) = 1$ ou 2 nécessairement toutes les orbites de $\tilde{\Phi}$ sont de dimension un et par conséquent $\tilde{Y} = \lambda\tilde{X}$, ce qui contredirait le fait que $\tilde{X}(m)$ et $\tilde{Y}(m)$ sont linéairement indépendants.

La réciproque se démontre par un procédé tout à fait analogue à celui que nous avons utilisé dans la démonstration de la proposition 4.2 du chapitre V ∎

Remarque. L'existence d'une orbite de dimension deux d'une action $\Phi \in \mathrm{Act}(\mathbb{R}^2,M)$ est un phénomène stable. En effet soient (X,Y) un couple générateur de Φ, et $m \in O$, où O est une orbite de dimension deux de Φ, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout couple $(\tilde{X},\tilde{Y})$ éléments de $\mathcal{X}(M)$ vérifiant :

i) $\|\tilde{X}-X\|_1 < \varepsilon$

ii) $\|\tilde{Y}-Y\|_1 < \varepsilon$

iii) $[\tilde{X},\tilde{Y}] = 0$

$\tilde{X}(m)$ et $\tilde{Y}(m)$ sont linéairement indépendants. Et donc tout point $\tilde{\Phi}$ appartenant à la boule $B(\Phi,\varepsilon)$ de centre Φ et de rayon ε, admet une orbite de dimension deux.

CONCLUSION

Pendant ce travail on a soulevé deux problèmes :

1) Soit $S_N([0,1])$ l'ensemble des difféomorphismes de $[0,1]$ de classe C^2 et hyperboliques qui ne sont pas plongeables dans un C^2-flot de $[0,1]$. Est-ce que $S_N([0,1])$ est d'intérieur non vide lorsque on munit $\mathrm{Diff}^2[0,1]$ de la C^1-topologie ?

2) Existe-t-il un difféomorphisme f de $[0,1]$ de classe C^1 admettant 0 et 1 comme seuls points fixes et tel que f est plongeable dans un C^1-flot φ de $[0,1]$, qui possède des points fixes dans $]0,1[$?

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. CAMACHO, A.L. NETO - *Introdução a teoria das folheaçoes* - 11ème coloquio Brasileiro de Math 77 IMPA.

[2] C. CAMACHO - *On* $R^k \times Z^p$ *actions* - Proc. Sympo. Université of Bahia Salvador (1971) A.P. New-York (1973).

[3] G. HECTOR, U. HIRSCH - *Introduction to the geometry of foliations* - Part. A - Aspects of Mathematics Vieweg (1981)

[4] H. KNESER - *Reguläre Kurvenshären auf den Ringflächen* - Math. Ann. Vol. 91 (1924) pp. 135-154.

[5] N. KOPELL - *Commuting diffeomorphisms,* Global analysis Proc. Sym. Pur Math (1970) pp. 165-184.

[6] P.F. LAM - *Embeding homeomorphisms in differentiable flow* - Coll. Math. 35 (1976) pp. 275-285.

[7] E. LIMA - *Commuting vecteur fields on* S^2 - Proc. Am. math. Soc. 15 (1964) pp. 138-141.

[8] E. LIMA - *Common singularities of commuting vecteur fields on 2-manifold* - Com. Math. Helv. 39 (1964) pp. 97-110.

[9] J. PALIS - *On Morse-Smale dynamical systemes* - Topologie 8 (1968) pp. 385-405.

[10] J. PALIS - *Vector fields generate few diffeomorphisms* - Bul. AMS 80 (1974) pp. 503.

[11] J. PALIS, W. de MELO - *Introdução aos sistemas dinamicos* - Projeto Euclides (1978) IMPA.

[12] M.M. PEIXOTO - *Structural stabilite on two dimensional manifolds* - Topology 1 (1962) pp. 101-120.

[13] A.J. SCHWARTZ - *A generalisation of a Poincaré-Bendixon theorem to closed 2-manifolds* - Am. J. Math. 85 (1963) pp. 453-458.

[14] STERNBERG - *Local* C^n *- transformation of the real line* - Duke Math. J. 24 (1957) 97-102.

RÉSUMÉ

Le travail a pour but l'étude des actions de $\mathbb{R}^2$ sur les surfaces. Plus précisément, nous nous intéressons aux actions de classe C^2 n'admettant pas de point fixe, ceci nous limite aux surfaces, éventuellement avec bord, de caractéristique d'Euler-Poincaré nulle. Nous avons essentiellement deux types de résultats :

i) Nous montrons, par des techniques adaptées de celles de N. Kopell, qu'une action de classe C^2 sans point fixe n'admet pas d'orbite planaire (alors qu'il en existe pour des actions de classe C^0).

ii) Nous caractérisons les actions du type décrit qui sont structurellement stables.

<u>MOTS CLÉS</u> : - ACTION

- FEUILLETAGE
- FLOT
- STABILITÉ STRUCTURELLE
- ORBITE