

N° d'ordre : 1183

50376  
1984  
119

50376.  
1984.  
119.

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

Spécialité : MATHÉMATIQUES PURES

par

LOUTFI MOHAMED



1ÈRE PARTIE : LEMME DE DUBOVITSKII-MILYUTIN SUR UN COUPLE D'ESPACES DE BANACH EN DUALITÉ, APPLICATION.

2ÈME PARTIE : SOLUTIONS PÉRIODIQUES D'UN SYSTÈME DE CAUCHY SEMI-LINÉAIRE DE BIOMATHÉMATIQUE.

Membres du Jury : PARREAU M., Président

ANTOINE Ph.,  
HECQUET G, } Rapporteurs  
COEURÉ G., Examineur

Soutenu le 5 Juillet 1984

Messieurs les Professeurs Philippe ANTOINE et Gérard HECQUET m'ont initié aux techniques et méthodes du calcul de variations et des équations aux dérivées partielles. Leurs remarques et conseils généreux sont à la base de l'élaboration de ce travail. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance et gratitude.

Je suis très honoré que Monsieur le Professeur Michel PARREAU ait bien voulu présider le jury de cette thèse. Je l'en remercie très vivement.

Monsieur le Professeur Gérard COEURÉ a bien voulu faire partie du jury. Qu'il trouve ici mes sincères remerciements.

Enfin, Mesdames Raymonde BÉRAT et Claudine EVRARD ont dactylographié ce texte avec soin et compétence. Je les remercie très infiniment, ainsi que Madame Françoise WDOWCZYK, Messieurs Albert GOURNAV et Michel PROVOST qui ont assuré l'impression et la reliure.

TABLE DES MATIERES DE LA 1ère PARTIE

---

INTRODUCTION		I - i
CHAPITRE 0	- RAPPELS SUR LES COUPLES D'ESPACES DE BANACH EN DUALITÉ.	I - 1
CHAPITRE I	- LEMME DE DUBOVITSKII-MILYUTIN DANS UN COUPLE D'ESPACES DE BANACH EN DUALITÉ.	I - 7
	§ 1 - Géométrie des cônes $K(A')$ .	I - 7
	§ 2 - Lemme de Dubovitskii-Milyutin dans un couple d'espaces de Banach en dualité.	I - 14
CHAPITRE II	- APPLICATION A UN PROBLEME D'OPTIMISATION.	I - 18
	§ 0 - Rappel sur la dérivabilité directionnelle.	I - 19
	§ 1 - Etude de l'application $N$ .	I - 22
	§ 2 - L'application $N$ sur un couple fonctionnel.	I - 31
	§ 3 - Cône de décroissance de l'application $N_{\omega_F}$ .	I - 37
	§ 4 - Problème d'optimisation.	I - 47
BIBLIOGRAPHIE.		I - 51



1ÈRE PARTIE

-----

LEMME DE DUBOVITSKII-MILYUTIN SUR UN COUPLE D'ESPACES DE BANACH  
EN DUALITE, APPLICATION.

## INTRODUCTION

-----

Soient  $E$  un espace vectoriel topologique sur  $\mathbb{R}$ ,  $U$  un ouvert de  $E$ .  $f$  une application de  $U$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\{Q_i\}_{i=2}^{n+1}$  une famille de parties de  $U$ .

Problème :

On cherche à minimiser  $f$  sur la partie  $Q = \bigcap_{i=2}^{n+1} Q_i$ .

Si on introduit la partie :

$$Q_1 = \{x \in U \mid f(x) < f(x_0)\} ,$$

une condition nécessaire et suffisante pour que  $f$  présente un minimum local en un point  $x_0$  de  $Q$  est que :  $\bigcap_{i=1}^{n+1} Q_i$  soit vide. En général, cette

condition est impossible à vérifier. On est amené à remplacer les parties  $Q_i$  par des approximations  $K_i$  convenables, telles que la condition  $\bigcap_{i=1}^{n+1} Q_i = \emptyset$

entraînerait  $\bigcap_{i=1}^{n+1} K_i = \emptyset$ , ce qui donne une condition nécessaire et telle

aussi qu'il serait plus facile de caractériser.

Suivant que  $Q_i$  a un intérieur vide ou non on prend une approximation différente.

Définition 1.-

Si  $Q_i$  a un intérieur non vide, on appelle cône des directions admissibles par la contrainte  $Q_i$  au point  $x_0$  et le note  $K_i$  l'ensemble

$$\{x \in E \mid \exists v \in V(x), \exists \varepsilon_0 > 0, \forall y \in V, \forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[, x_0 + \varepsilon y \in Q_i\}.$$

. C'est un cône ouvert de sommet 0 dans E.

. Si  $Q_i$  est d'intérieur non vide, le cône  $K_i$  s'appelle aussi cône des directions de décroissance de l'application  $f$  au point  $x_0$ .

Définition 2.-

Si  $Q_i$  est d'intérieur vide, on appelle cône tangent à la contrainte  $Q_i$  au point  $x_0$  et on le note  $K_i$  l'ensemble :

$$\{x \in E \mid \exists \varepsilon_0 > 0, \forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[, \exists x_\varepsilon \in Q_i \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{\frac{x_\varepsilon - x_0}{\varepsilon}} x\}.$$

On montre [1] que :

Proposition.

Si pour tout  $i$  compris entre 1 et  $n$ ,  $Q_i$  est d'intérieur non vide et  $Q_{n+1}$  est d'intérieur vide, une condition nécessaire pour que  $f$  présente un minimum local en  $x_0$  sur  $Q$  est que :  $\bigcap_{i=1}^{n+1} K_i = \emptyset$ .

Dans l'hypothèse où les cônes  $K_i$  sont convexes (on dit que l'application  $f$  est régulièrement décroissante au point  $x_0$  si le cône  $K_1$  est convexe et on dit que la contrainte  $Q_i$  est régulière au point  $x_0$  si le cône  $K_i$  est convexe), le lemme de Dubovitskii-Milyutin suivant [1] donne une condition nécessaire et suffisante pour que les cônes  $K_i$  soient d'intersection vide.

Lemme de Dubovitskii-Milyutin :

Etant donné un cône  $K$  de sommet  $0$  dans un espace vectoriel topologique sur  $\mathbb{R}$ , on note  $K^*$  et on appelle cône dual de  $K$ , l'ensemble des formes linéaires continues sur  $E$ , positives ou nulles sur  $K$ .

Enoncé du lemme :

Soient  $E$  un espace vectoriel topologique sur  $\mathbb{R}$ ,  $K_1, \dots, K_{n+1}$  des cônes convexes de sommet  $0$  dans  $E$ . Si  $K_1, \dots, K_n$  sont ouverts et non vides, une condition nécessaire et suffisante pour que  $\bigcap_{i=1}^{n+1} K_i$  soit vide est qu'il existe pour tout  $i$  compris entre  $1$  et  $n+1$ , une forme linéaire  $f_i$  appartenant à  $K_i^*$ , ces formes linéaires sont non toutes nulles, telles que :

$$\sum_{i=1}^{n+1} f_i = 0.$$

Si  $E = C([0,1], \mathbb{R})$  muni de la norme de la convergence uniforme, son dual topologique  $E^*$  est l'ensemble des mesures sur  $[0,1]$ . Par conséquent, les multiplicateurs  $f_i$  ne sont pas réguliers.

Etant donné un espace de Banach de dimension infinie, l'objet du travail est de chercher les multiplicateurs  $f_i$  dans un sous-espace vectoriel topologique  $E'$  de  $E^*$  assez régulier. On est amené à affaiblir la topologie de  $E$  et par conséquent on perd l'hypothèse d'ouverture des cônes  $K_1, K_n$  qui est essentielle dans le lemme de Dubovitskii-Milyutin. L'outil de cette démarche ce sont les couples d'espaces de Banach en dualité [2].

. Le chapitre 0 est un rappel des principaux résultats utilisés sur les couples d'espaces de Banach en dualité.

. Dans le chapitre I, on démontre un lemme de Dubovitskii-Milyutin sur un couple d'espaces de Banach en dualité relatif à un sous-espace vectoriel de codimension finie, un cône convexe non vide ouvert pour la topologie de Mackey et un cône convexe d'intérieur vide pour la topologie de Mackey.

. Dans le chapitre II, on applique ce résultat à l'étude de la régularité des multiplicateurs pour un problème de type min-max avec contraintes, sous des hypothèses faibles de dérivabilité directionnelle.



## CHAPITRE 0

## RAPPELS SUR LES COUPLES D'ESPACES DE BANACH EN DUALITE

-----

Dans ce chapitre, on énonce une série de résultats sur les couples d'espaces de Banach en dualité qu'on utilisera dans la suite. Certaines démonstrations classiques se trouvent dans [2]. Les propositions 11, 12 et 13 donnent des résultats nouveaux avec leurs démonstrations.

1. Définition.

On appelle couple d'espaces de Banach en dualité un triplet  $\mathbb{E} = (E, E', \Phi)$  où  $E$  et  $E'$  sont des espaces de Banach et  $\Phi$  est une forme bilinéaire continue sur  $E' \times E$  mettant  $E$  et  $E'$  en dualité séparante.

2. Définition.

Soient  $\mathbb{E} = (E, E', \Phi)$  et  $\mathbb{F} = (F, F', \Psi)$  deux couples d'espaces de Banach en dualité. On appelle morphisme de  $\mathbb{E}$  dans  $\mathbb{F}$ . Un couple d'applications linéaires  $(u, u')$  où  $u$  (respectivement  $u'$ ) est une application linéaire continue de  $E$  dans  $F$  (respectivement de  $F'$  dans  $E'$ ) vérifiant :

$$\forall y' \in F', \forall x \in E, \Phi(u'(y'), x) = \Psi(y', u(x)).$$

3. Définition.

On appelle morphisme identité d'un couple d'espaces de Banach en dualité  $\mathbb{E} = (E, E', \Phi)$  et on le note  $1_{\mathbb{E}}$ , le morphisme de  $\mathbb{E} : (1_E, 1_{E'})$ .

4. Composition des morphismes de couples.

Soient  $\mathbb{E}$ ,  $\mathbb{F}$  et  $\mathbb{G}$  trois couples d'espaces de Banach en dualité,  $(u, u')$  un morphisme de  $\mathbb{E}$  dans  $\mathbb{F}$  et  $(v, v')$  un morphisme de  $\mathbb{F}$  dans  $\mathbb{G}$ . Alors  $(v, v') \circ (u, u') = (v \circ u, u' \circ v')$  est un morphisme de  $\mathbb{E}$  dans  $\mathbb{G}$ .

5. Définition.

Soit  $(u, u')$  un morphisme d'un couple  $\mathbb{E}$  dans un couple  $\mathbb{F}$ . On dit que le morphisme  $(u, u')$  admet une section, s'il existe un morphisme  $(s, s')$  de  $\mathbb{F}$  dans  $\mathbb{E}$  tel que :

$$(u, u') \circ (s, s') = 1_{\mathbb{F}}.$$

6. Proposition.

Soient  $\mathbb{E} = (E, E', \Phi)$ ,  $\mathbb{F} = (F, F', \Psi)$  deux couples de Banach en dualité et  $(u, u')$  un morphisme de  $\mathbb{E}$  dans  $\mathbb{F}$ . Si  $\text{Im } u'$  est  $(E', E)$ -fermé dans  $E'$ , en particulier si le morphisme  $(u, u')$  admet une section, alors la forme bilinéaire  $\Theta$  définie sur  $\text{Coker } u' \times \text{Ker } u$  par :

$$\Theta(i'(x'), x) = \Phi(x', x).$$

met  $\text{Ker } u$  et  $\text{Coker } u'$  en dualité séparante.

$(\text{Ker } u, \text{Coker } u', \Theta)$  est un couple d'espaces de Banach en dualité qu'on note  $\mathbb{Ker}(u, u')$ .

7. Définition [4].

Si  $E$  et  $E'$  sont deux espaces vectoriels topologiques mis en dualité par  $\Phi$ , on dit qu'une topologie localement convexe séparée  $\mathcal{T}$  sur  $E$  est compatible avec la dualité  $\Phi$  si  $E'$  (identifié à un sous-espace vectoriel de  $E^*$ ) est le dual topologique de l'espace localement convexe séparé obtenu en munissant  $E$  de la topologie  $\mathcal{T}$ .

8. Définition.

Si  $E$  et  $E'$  sont deux espaces vectoriels topologiques mis en dualité par  $\Phi$ , la  $\sigma(E, E')$ -topologie sur  $E$  est la topologie définie par la famille de semi-normes :

$$\{ |\Phi(x', \cdot)| \}_{x' \in E' - \{0\}} .$$

Si la dualité est séparante, la  $\sigma(E, E')$ -topologie est localement convexe séparée et compatible avec la dualité  $\Phi$ .

9. Définition.

Si  $E$  et  $E'$  sont deux espaces vectoriels topologiques mis en dualité par  $\Phi$ , on appelle topologie de Mackey sur  $E$  et on la note la  $\tau(E, E')$ -topologie, la topologie de la convergence uniforme dans toutes les parties de  $E'$ , convexes, équilibrées et compactes pour la  $\sigma(E', E)$ -topologie. Si la dualité  $\Phi$  est séparante, cette topologie est localement convexe séparée et compatible avec la dualité  $\Phi$ .

10. Remarque.

Si  $E$  et  $E'$  sont deux espaces vectoriels topologiques mis en dualité par  $\Phi$ , par symétrie on peut définir aussi sur  $E'$  les  $\sigma(E', E)$  et  $\tau(E', E)$ -topologies.

11. Proposition.

Soit  $\mathbb{E} = (E, E, \Phi)$  un couple d'espaces de Banach en dualité.

Alors la  $\sigma(E', E)$ -topologie sur  $E'$  est la topologie induite par la  
 $\sigma(E^*, E)$ -topologie via le plongement  $\psi$  défini de  $E'$  dans  $E^*$  par :

$$\psi(x') = \Phi(x', \cdot).$$

Démonstration :

La  $\sigma(E', E)$ -topologie sur  $E'$  est définie par le système fondamental de voisinages de 0 suivant :

$$V = \{ \{x' \in E' \mid \forall k, 1 \leq k \leq n, |\Phi(x', x_k)| < \varepsilon, x_k \in E, \varepsilon \in \mathbb{R}^{**+} \} \}$$

et la  $\sigma(E^*, E)$ -topologie sur  $E^*$  est définie par le système fondamental de voisinage de 0 suivant :

$$W = \{ \{ \xi \in E^* \mid \forall k, 1 \leq k \leq n, |\xi(x_k)| < \varepsilon, x_k \in E, \varepsilon \in \mathbb{R}^{**+} \} \}$$

On a  $V = \psi^{-1}(W)$ . ■

12. Corollaire.

Soit  $\mathbb{E} = (E, E', \Phi)$  un couple d'espaces de Banach en dualité.

Si  $A'$  est un sous-ensemble  $\sigma(E', E)$ -fermé de  $E'$ , on a :

$$A' = \psi^{-1}(\overline{\psi(A')})$$

où  $\overline{\psi(A')}$  est l'adhérence de  $\psi(A')$  dans  $E^*$  pour la  $\sigma(E^*, E)$ -topologie.

13. Proposition.

Soient  $\mathbb{E} = (E, E', \Phi)$ ,  $\mathbb{F} = (F, F', \Psi)$  deux couples d'espaces de



Banach en dualité et  $(u, u')$  un morphisme de  $\mathbb{E}$  dans  $\mathbb{F}$ . Si  $\text{Im } u'$  est  $\sigma(E', E)$ -fermé dans  $E'$ , alors la topologie quotient sur  $\text{Coker } u'$  coïncide avec la  $\sigma(\text{Coker } u', \text{Ker } u)$ -topologie associée à la dualité  $\Theta$  entre  $\text{Ker } u$  et  $\text{Coker } u'$ .

Pour démontrer cette proposition, on a besoin du théorème suivant [3] :

Soient  $E$  un espace vectoriel semi-normé,  $(p_i)_{i \in I}$  une famille de semi-normes définissant la topologie de  $E$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On note  $\bar{x}$  la classe de  $x$  dans l'espace quotient  $E/F$ .

Alors, si on pose :

$$\bar{p}_i(\bar{x}) = \inf_{y \in x} p_i(y)$$

$\{\bar{p}_i\}_{i \in I}$  est une famille de semi-normes sur  $E/F$  et la topologie quotient sur  $E/F$  est définie par cette famille de semi-normes.

Démonstration de la proposition :

$\{p_x\}_{x \in E - \{0\}} = \{|\Phi(\cdot, x)|\}_{x \in E - \{0\}}$  est une famille de semi-normes définissant la  $\sigma(E', E)$ -topologie de  $E'$ . D'après le théorème précédent, la famille de semi-normes définies par :

$$\bar{p}_x(\bar{x}') = \inf_{z' \in x'} |\Phi(z', x)|$$

définit la topologie quotient sur  $\text{Coker } u'$ . On va montrer que cette topologie coïncide avec la  $\sigma(\text{Coker } u', \text{Ker } u')$ -topologie.

En effet, soit  $x$  un élément de  $E - \{0\}$ . On a :

$$\begin{aligned} \inf_{z' \in \bar{E}'} |\Phi(z', x)| &= \inf_{y' \in F'} |\Phi(x' + u'(y'), x)| \\ &= \inf_{y' \in F'} (|\Phi(x', x) + \Psi(y', u(x))|) \end{aligned}$$

. Si  $x$  appartient à  $\text{Ker } u$ , on a :

$$\inf_{z' \in \bar{E}'} |\Phi(z', x)| = |\Phi(x', x)| = |\Theta(\bar{x}', x)|.$$

. Si  $x$  n'appartient pas à  $\text{Ker } u$  il existe  $y'_0$  appartenant à  $F'$ , tel que :

$$\Psi(y'_0, u(x)) \neq 0$$

car la dualité  $\Psi$  est séparante et si on prend

$$y' = - \frac{\Phi(x', x)}{\Psi(y'_0, u(x))} \cdot y'_0.$$

On a alors

$$\Phi(x', x) + \Psi(y', u(x)) = 0$$

et par conséquent

$$\inf_{z' \in \bar{E}'} |\Phi(z', x)| = 0.$$

Finalement, la  $\sigma(\text{Coker } u', \text{Ker } u)$ -topologie sur  $\text{Coker } u'$  coïncide avec la topologie quotient sur  $\text{Coker } u'$ .

## CHAPITRE I

## LEMME DE DUBOVITSKII-MILYUIN DANS UN COUPLE D'ESPACES DE BANACH EN DUALITE.

Soit  $\mathbb{E} = (E, E', \Phi)$  un couple d'espaces de Banach en dualité :

. Si  $K$  est un cône de sommet  $0$  dans  $E$ , on note  $K'$  le cône :

$$K' = \{x' \in E' \mid \forall x \in K, \Phi(x', x) \geq 0\}.$$

C'est le cône dual de  $K$  pour toute topologie localement convexe séparée et compatible avec la dualité  $\Phi$ .

. Si  $A'$  est une partie de  $E'$ , on note  $K(A')$  le cône :

$$K(A') = \{x \in E \mid \forall x' \in A', \Phi(x', x) < 0\}.$$

. On se propose de démontrer un lemme de Dubovitskii-Milyutin relatif à un sous-espace vectoriel de  $E$  de codimension finie, un cône convexe non vide ouvert pour la  $\tau(E, E')$ -topologie et un cône réunion de cônes de la forme  $K(A')$ . Au paragraphe 1, on étudie certaines propriétés de ces cônes. Le lemme de Dubovitskii-Milyutin est énoncé au paragraphe 2.

1 - GEOMETRIE DES CONES  $K(A')$ .1. Proposition.

Soit  $A'$  une partie de  $E'$ , vérifiant les hypothèses suivantes :

- i)  $A'$  convexe,  $\sigma(E',E)$ -fermé dans  $E'$  et ne contenant pas  $0$ .
- ii)  $\psi(A')$  est borné dans  $E^*$ .

Alors  $K(A')$  est non vide et si on munit  $E$  de la  $\sigma(E,E')$ -topologie, le cône dual  $K'(A')$  de  $K(A')$  est égal à l'ensemble  $-\mathbb{R}^+A'$ .

## 2. Lemme.

Supposons que  $E'$  soit muni de la  $\sigma(E',E)$ -topologie et que l'ensemble  $A'$  vérifie les hypothèses i) et ii) de la proposition précé-  
dente. Alors le cône  $\mathbb{R}^+A'$  est  $\sigma(E',E)$ -fermé dans  $E'$ .

Pour démontrer ce lemme on a besoin de la proposition suivante [4]  
(Chapite II, p. 63-64) :

Soient  $E$  un espace vectoriel localement convexe séparé et  $K$   
un compact de  $E$  ne contenant pas  $0$ . Alors le cône  $\mathbb{R}^+K$  est fermé dans  $E$ .

### Démonstration du lemme 2 :

$A'$  étant  $\sigma(E',E)$ -fermé dans  $E'$ , on a :

$$A' = \psi^{-1}(\overline{\psi(A')})$$

où  $\overline{\psi(A')}$  est l'adhérence de  $\psi(A')$  dans  $E^*$  pour la  $\sigma(E^*,E)$ -topologie, donc :

$$\mathbb{R}^+A' = \mathbb{R}^+\psi^{-1}(\overline{\psi(A')}) = \psi^{-1}(\mathbb{R}^+\overline{\psi(A')}) \text{ car } \psi \text{ est linéaire.}$$

Or  $\psi(A')$  étant borné dans  $E^*$ , est contenu dans une boule fermée de  $E^*$ , qui  $\sigma(E^*,E)$ -compacte donc  $\overline{\psi(A')}$  est  $\sigma(E^*,E)$ -compact dans  $E^*$ .

Par ailleurs,  $\psi(A')$  ne contient pas  $0$  car sinon  $A' = \psi^{-1}(\overline{\psi(A')})$  contiendrait  $0$ . Donc  $\mathbb{R}^+\overline{\psi(A')}$  est  $\sigma(E^*,E)$ -fermé dans  $E^*$  et, par conséquent, sa trace  $\mathbb{R}^+A'$  est  $\sigma(E',E)$ -fermé dans  $E'$ .



Démonstration de la proposition 1 :

.  $A'$  est convexe,  $\sigma(E', E)$ -fermé dans  $E'$  et ne contient pas  $0$ .

D'après le théorème de séparation de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire  $\sigma(E', E)$ -continue sur  $E'$ , c'est-à-dire un élément  $x$  de  $E$ , tel que :

$$\forall x' \in A', \quad \Phi(x', x) < 0 = \Phi(0, x).$$

Cet élément  $x$  appartient à  $K(A')$ , qui n'est donc pas vide.

. Montrons maintenant que  $K'(A') = -R^+A'$ .

• Première inclusion :

D'après la définition de  $K(A)$ , on a :  $-R^+A' \subset K'(A')$ .

• Deuxième inclusion (par l'absurde) :

Supposons qu'il existe  $x'_0$  dans  $K'(A')$  n'appartenant pas à  $-R^+A'$ .

Comme  $A'$  est convexe,  $-R^+A'$  l'est aussi et d'après le lemme 2, il est  $\sigma(E', E)$ -fermé dans  $E'$ . En appliquant le théorème de séparation de Hahn-Banach on a :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \exists x \in E, \quad \Phi(x'_0, x) < \alpha, \quad \forall x' \in -R^+A', \quad \Phi(x', x) > \alpha.$$

Puisque  $0$  appartient à  $-R^+A'$ , on a nécessairement :

$\alpha < 0$ , donc  $\Phi(x'_0, x) < 0$ .

Par ailleurs, on a :

$$\forall \lambda > 0, \quad \forall a' \in A', \quad \Phi(a', x) < -\frac{\alpha}{\lambda}, \quad \text{en faisant tendre } \lambda \text{ vers}$$

$+\infty$ , on obtient :

$$\forall a' \in A', \quad \Phi(a', x) \leq 0.$$

Ce qui implique que  $x$  appartient à  $\overline{K(A')}$  et comme  $x'_0$  appartient à  $K'(A') = \overline{K(A')}$  et  $\Phi(x'_0, x) < 0$ , il y a une contradiction. ■

### 3. Proposition.

Soient  $\mathbb{E} = (E, E', \Phi)$ ,  $\mathbb{F} = (F, F', \Psi)$  deux couples d'espaces de Banach en dualité et  $(u, u')$  un morphisme de  $\mathbb{E}$  dans  $\mathbb{F}$  tel que  $\text{Im } u'$  soit de dimension finie. Supposons que l'ensemble  $A'$  vérifie les hypothèses i) et ii) de la proposition 1 et que  $A' \cap \text{Im } u' = \emptyset$ . Alors en posant  $L = \text{Ker } u$ , on a :

$$(K(A') \cap L)' = K'(A') + L'.$$

### 4. Lemme.

Supposons que  $\text{Im } u'$  soit de dimension finie et que l'ensemble  $A'$  vérifie les hypothèses i) et ii) de la proposition 1. Alors si on munit  $E'$  de la  $\sigma(E', E)$ -topologie  $i'(A')$  est  $\sigma(\text{Coker } u', \text{Ker } u)$ -fermé dans  $\text{Coker } u'$ .

#### Démonstration :

D'après la proposition 0.13, la topologie quotient sur  $\text{Coker } u'$  et la  $\sigma(\text{Coker } u', \text{Ker } u)$ -topologie coïncident sur  $\text{Coker } u'$  et  $i'(A')$  est fermé dans  $\text{Coker } u'$  pour la topologie quotient si et seulement si  $A' + \text{Im } u'$  est  $\sigma(E', E)$ -fermé dans  $E'$ .  $\overline{\Psi(A')}$  est  $\sigma(E^*, E)$ -compact puisque c'est une partie bornée et  $\sigma(E^*, E)$ -fermée dans  $E^*$ .  $\Psi(\text{Im } u')$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie car  $\Psi$  est linéaire et injective, donc  $\sigma(E^*, E)$ -fermé dans  $E^*$ . Alors  $\overline{\Psi(A')} + \Psi(\text{Im } u')$  est  $\sigma(E^*, E)$ -fermé dans  $E^*$ .  $A'$  étant  $\sigma(E', E)$ -fermé dans  $E'$ , on a :

$$A' = \Psi^{-1}(\overline{\Psi(A')}) \text{ et donc :}$$

$$A' + \text{Im } u' = \Psi^{-1}(\overline{\Psi(A')} + \Psi(\text{Im } u')) \text{ est } \sigma(E', E)\text{-fermé dans } E'. \blacksquare$$

Démonstration de la proposition 3 :

Posons :

$$H = K(A') \cap L.$$

Comme  $\text{Im } u'$  est de dimension finie, donc  $\sigma(E', E)$ -fermé dans  $E'$ , on peut définir le couple d'espaces de Banach en dualité suivant

$$((\text{Ker}(u, u') = (\text{Ker } u, \text{Coker } u', \Theta) \quad (\Theta \text{ est définie par } \\ \Theta(i'(x'), x) = \Phi(x', x).$$

D'autre part, on montre aisément que :

$$H = \{x \in L \mid \forall x' \in A', \quad \Theta(i'(x'), x) < 0\}.$$

Pour déterminer le cône dual de  $H$  dans  $\text{Coker } u'$ , on va montrer que  $i'(A')$  vérifie les hypothèses i) et ii) de la proposition 1

i)

- .  $A'$  est convexe et  $i'$  est linéaire, donc  $i'(A')$  est convexe.
- . D'après le lemme 4,  $i'(A')$  est  $(\text{Coker } u', \text{Ker } u)$ -fermé dans  $\text{Coker } u'$ .
- . Comme  $A' \cap \text{Im } u'$  est vide,  $0$  n'appartient pas à  $i'(A')$ .

ii)

. Soit  $\theta$  l'injection canonique de  $\text{Coker } u'$  dans le dual topologique fort de  $\text{Ker } u$  définie par :

$$\theta(i'(x')) = \Theta(i'(x'), \cdot)$$

on a :

$$\begin{aligned} \|\theta(i'(x'))\|_{\text{Ker } u^*} &= \sup_{x \in \text{Ker } u, \|x\|_{\text{Ker } u} \leq 1} |\Theta(i'(x'), x)| = \sup_{x \in \text{Ker } u, \|x\|_{\text{Ker } u} \leq 1} |\Phi(x', x)| \\ &\leq \sup_{x \in E, \|x\|_E \leq 1} |\Phi(x', x)| = \|\Phi(x')\|_{E^*}. \end{aligned}$$

et puisque  $x'$  appartient à  $A'$ , on a :

$$\|\psi(x')\|_{E^*} \leq r.$$

Donc  $\theta(i'(A'))$  est borné dans  $\text{Ker } u^*$ .

Conclusion :

$$H' = (K(A') \cap L)' = -\mathbb{R}^+ i'(A').$$

Et en identifiant  $i'(A')$  à l'ensemble  $A' + \text{Im } u'$ , on a :

$$H' = (K(A) \cap L)' = -\mathbb{R}^+(A' + \text{Im } u') = -\mathbb{R}^+ A' + \text{Im } u' = K'(A') + L'. \blacksquare$$

### 5. Théorème.-

Soient  $E$  un espace vectoriel topologique séparé sur  $\mathbb{R}$ ,  $(K_i)_{i \in I}$  ( $I$  est un ensemble ordonné) une famille décroissante de compacts de  $E$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$ . Alors sous les hypothèses suivantes :

- 1)  $\forall i \in I, K_i \cap F = \emptyset$  ;
- 2)  $\exists K_0$  compact de  $E, \forall i \in I, K_i \subset K_0$ , on a

$$\bigcap_{i \in I} (\mathbb{R}^+ K_i + F) = \bigcap_{i \in I} (\mathbb{R}^+ K_i) + F.$$

Démonstration :

• Première inclusion :

L'inclusion  $\bigcap_{i \in I} (\mathbb{R}^+ K_i) + F \subset \bigcap_{i \in I} (\mathbb{R}^+ K_i + F)$  est évidente.

• Deuxième inclusion :

Soit  $x$  un élément de  $\bigcap_{i \in I} (\mathbb{R}^+ K_i + F)$ . On a donc :



$$\forall i \in I, \exists \lambda_i \geq 0, \exists k_i \in K_i, \exists f_i \in F, x = \lambda_i k_i + f_i.$$

S'il existe un  $j$  tel que  $\lambda_j = 0$ , on aura :

$$x = 0 + f_j \text{ qui appartient à } \bigcap_{i \in I} (\mathbb{R}^+ K_i) + F.$$

Supposons donc que pour tout  $i$  dans  $I$ ,  $\lambda_i > 0$ .

Par conséquent, on a :

$$k_i = \frac{x - f_i}{\lambda_i}.$$

La famille  $(k_i)_{i \in I}$  est incluse dans le compact  $K_0$  car chaque  $K_i$  l'est. Il existe donc  $k$  appartenant à  $K_0$  vérifiant :

$$\forall v \in V(k), \forall j \in I, \exists i \in I, i \geq j, k_i \in v.$$

Donc appartient à l'adhérence de  $K_j$  qui est fermé puisqu'il est compact et, par conséquent,  $k$  appartient à  $\bigcap_{i \in I} K_i$ .

D'autre part,  $k$  appartient à l'adhérence de  $\mathbb{R}^+ x + F$ . Comme  $\mathbb{R}x + F$  est de dimension finie car  $F$  l'est, il est fermé dans  $E$  et puisque  $\mathbb{R}^+ x + F$  est fermé dans  $\mathbb{R}x + F$ , il l'est aussi dans  $E$ . Donc :

$$\exists \lambda \geq 0, \exists f \in F, k = \lambda x + f.$$

Comme pour tout  $i$  appartenant à  $I$ ,  $K_i \cap F = \emptyset$ ,  $\lambda$  est nécessairement strictement positif. Finalement,  $x = \frac{k}{\lambda} - \frac{f}{\lambda}$  qui appartient à

$\mathbb{R}^+ \left( \bigcap_{i \in I} K_i \right) + F$  et comme  $\mathbb{R}^+ \left( \bigcap_{i \in I} K_i \right)$  est inclus dans  $\bigcap_{i \in I} \mathbb{R}^+ K_i$ , on a :

$$\bigcap_{i \in I} (\mathbb{R}^+ K_i + F) \subset \bigcap_{i \in I} (\mathbb{R}^+ K_i) + F. \blacksquare$$

2 - LEMME DE DUBOVITSKII-MILYUTIN DANS UN COUPLE D'ESPACES DE BANACH EN DUALITE.

Théorème.

Soient  $E = (E, E', \Phi)$ ,  $F = (F, F', \Psi)$  deux couples d'espaces de Banach en dualité,  $(u, u')$  un morphisme de  $E$  dans  $F$ ,  $\{A_i\}_{i \in I}$  une famille ordonnée de parties de  $E'$  et  $K_2$  un cône convexe de sommet  $0$  de  $E$ . On pose :

$$L = \text{Ker } u$$

$$K_1 = \bigcup_{i \in I} K_i \quad \text{où } K_i = \{x \in E \mid \forall x' \in A_i', \Phi(x', x) < 0\}$$

et on suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

1)  $\text{Im } u'$  est de dimension finie et pour tout  $i$  appartenant à  $I$ ,  $A_i' \cap \text{Im } u' = \emptyset$ .

2) Pour tout  $i$  dans  $I$ ,  $A_i'$  est convexe,  $\sigma(E', E)$ -fermé dans  $E'$  et ne contenant pas  $0$  et il existe une boule  $B^*(0, r)$  de  $E^*$ , telle que pour tout  $i$  appartenant à  $I$  :  $\psi(A_i') \subset B^*(0, r)$ .

3)  $K_2$  est  $\tau(E, E')$ -ouvert et non vide dans  $E$ .

Alors une condition nécessaire et suffisante pour que  $K_1 \cap K_2 \cap L$  soit vide est que :

$$\exists x'_1 \in K'_1, \exists x'_2 \in K'_2, \exists x'_3 \in L' = \text{Im } u',$$

non tous nuls,  $x'_1 + x'_2 + x'_3 = 0$ .

Démonstration :

Quand on munit  $E$  de la  $\tau(E, E')$ -topologie, on ne sait pas si le cône  $K_1$  est ouvert dans  $E$  pour cette topologie et on ne peut donc pas appliquer le lemme de Dubovitskii-Milyutin classique. Cependant, les cônes  $K_2$ ,  $K_1 \cap L$  sont de sommet  $0$ , convexes et  $K_2$  est  $\tau(E, E')$ -ouvert et

non vide dans  $E$ . En appliquant le lemme de Dubovitskii-Milyutin dans  $E$  muni de la  $\tau(E, E')$ -topologie à ces deux cônes, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i)  $K_2 \cap (K_1 \cap L) = \emptyset$   
 ii)  $\exists x_2' \in K_2', \exists y_1' \in (K_1 \cap L)'$ , non tous nuls,  $x_2' + y_2' = 0$ .

Montrons maintenant que :

$$(K_1 \cap L)' = K_1' + L'.$$

En effet :

$$K_1 \cap L = \bigcup_{i \in I} (K_i \cap L).$$

Et on sait que [1] :

$$\left( \bigcup_{i \in I} (K_i \cap L) \right)' = \bigcap_{i \in I} (K_i \cap L)'.$$

Puisque  $\text{Im } u'$  est de dimension finie et pour chaque  $i$ ,  $A_i'$  vérifie les hypothèses de la proposition 1.3., on a :

$$(K_i \cap L)' = K_i' + L'.$$

Ensuite,  $A_i'$  vérifie aussi les hypothèses de la proposition 1.1.

Donc

$$(K_i \cap L)' = -R^+ A_i' + \text{Im } u'.$$

Donc

$$(K_1 \cap L)' = \bigcap_{i \in I} (-R^+ A_i' + \text{Im } u').$$

Montrons que :  $\bigcap_{i \in I} (-R^+ A_i' + \text{Im } u') = \bigcap_{i \in I} (-R^+ A_i') + \text{Im } u'$ .

Il est clair que  $\bigcap_{i \in I} (-\mathbb{R}^+ A_i') + \text{Im } u' \subset \bigcap_{i \in I} (-\mathbb{R}^+ A_i' + \text{Im } u')$ .

Soit  $x'$  un élément de  $\bigcap_{i \in I} (-\mathbb{R}^+ A_i' + \text{Im } u')$ . Donc  $\psi(x')$  appartient à  $\bigcap_{i \in I} (-\mathbb{R}^+ \overline{\psi(A_i')} + \psi(\text{Im } u'))$ .

Et comme  $\{\overline{\psi(A_i')}\}_{i \in I}$  et  $\psi(\text{Im } u')$  vérifient les hypothèses du théorème 1.5., on a :

$$\bigcap_{i \in I} (-\mathbb{R}^+ \overline{\psi(A_i')} + \psi(\text{Im } u')) = \bigcap_{i \in I} (-\mathbb{R}^+ \overline{\psi(A_i')}) + \psi(\text{Im } u')$$

et, par conséquent :

$$\exists y' \in F', \forall i \in I, \exists \lambda_i \geq 0, \exists \xi_i \in \overline{\psi(A_i')},$$

$$\psi(x') = -\lambda_i \xi_i + \psi(u'(y')).$$

. S'il existe un  $j$ , tel que  $\lambda_j = 0$ , on aura :

$\psi(x') = \psi(u'(y'))$  et comme  $\psi$  est injective, on a :

$x' = u'(y')$  qui appartient à  $\bigcap_{i \in I} (-\mathbb{R}^+ A_i') + \text{Im } u'$ .

. Supposons que pour tout  $i$  dans  $I$ ,  $\lambda_i > 0$ .

Par conséquent

$$\xi_i = \frac{1}{\lambda_i} (\psi(u'(y')) - \psi(x')) = \psi\left(\frac{1}{\lambda_i} (u'(y') - x')\right)$$

qui appartient à  $\text{Im } u'$ , donc peut s'écrire sous la forme :

$$\xi_i = \psi(a_i') \text{ avec } a_i' \text{ appartient à } A_i'.$$

Finalement, on a :

$$x' = -\lambda_i a_i + u'(y') \text{ qui appartient à } \bigcap_{i \in I} (-R^+ A_i) + \text{Im } u'. \blacksquare$$

## CHAPITRE II

## APPLICATION A UN PROBLEME D'OPTIMISATION.

. Si  $\mathbb{E} = (E, E', \Phi)$  est un couple d'espaces de Banach en dualité et  $A'$  l'ensemble :

$$\{x' \in E' \mid \|\psi(x')\|_{E^*} \leq 1\},$$

on définit l'application  $N$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$N(x) = \sup_{x' \in A'} \Phi(x', x)$$

. Soient  $I$  l'intervalle  $[0, 1]$ ,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,  $f$  une application de  $U$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$   $W$  l'ensemble :

$$\{h \in C(I, \mathbb{R}^n) \mid \forall t \in I, (t, h(t)) \in U\}$$

et soit  $\omega_f$  l'application définie de  $W$  dans  $C(I, \mathbb{R}^p)$  par :

$$\omega_f(h) = f(., h(.)).$$

. Soient  $g$  l'application de  $W$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^q$  qu'on suppose différentiable relativement aux couples  $C(I, \mathbb{R}^n)$  et  $\mathbb{R}^q$ .

. Dans ce chapitre, on se propose de trouver une condition nécessaire pour que l'application  $N \circ \omega_f$  présente un minimum local en un point  $h_0$  sur  $Q \cap g^{-1}(\{0\})$ . Le paragraphe 0 est un rappel sur la dérivabilité

directionnelle. Aux paragraphes 1 et 2, on étudie l'application  $N$  respectivement sur un couple quelconque et un couple fonctionnel. Au paragraphe 3, on étudie le cône des directions de décroissance de l'application  $N \circ \omega_f$ . Le théorème d'optimisation est énoncé au paragraphe 4.

### 0 - RAPPEL SUR LA DERIVABILITE DIRECTIONNELLE.

Soient  $E$  un espace vectoriel topologique sur  $\mathbb{R}$ ,  $U$  un ouvert de  $E$  et  $f$  une application de  $U$  dans  $\mathbb{R}$ .

#### 1. Condition (D).

On dit que l'application  $f$  vérifie la condition (D) en un point  $x_0$  de  $U$  si les deux propriétés suivantes sont vraies :

1) L'application  $f$  admet en  $x_0$ , une dérivée directionnelle,  $f'(x_0, h)$ , dans toute direction  $h$ .

2)  $\forall h_0 \in E, \forall \rho > 0, \exists \varepsilon_0 > 0, \exists v \in V(h_0), \forall h \in v, \forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ ,

$$\left| \frac{f(x_0 + \varepsilon h) - f(x_0)}{\varepsilon} - f'(x_0, h_0) \right| < \rho .$$

#### 2. Condition (D').

On dit que l'application  $f$  vérifie la condition (D') en  $x_0$ , si elle vérifie la condition (D) en  $x_0$  et la condition supplémentaire suivante.

3) L'application  $f'(x_0, \cdot)$  est convexe et il existe un  $\tilde{h}_0$  dans  $E$ , tel que,  $f'(x_0, \tilde{h}_0) < 0$ .

3. Théorème.-

Si  $f$  vérifie la condition (D') en un point  $x_0$  de  $U$ , le cône  $K_1$  des directions de décroissance de l'application  $f$  au point  $x_0$  est égal à l'ensemble :

$$\{h \in E \mid f'(x_0, h) < 0\}.$$

Démonstration :

• Première inclusion :

Soit  $h_0$  un élément de  $K_1$ . Par définition de  $K_1$ , on a :

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall h \in V, \forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[,$$

$$f(x_0 + \varepsilon h) < f(x_0).$$

Donc, on a :

$$\forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[, \quad \frac{f(x_0 + \varepsilon h) - f(x_0)}{\varepsilon} < 0.$$

En faisant tendre  $\varepsilon$  vers  $0^+$ , on obtient :

$$f'(x_0, h) \leq 0.$$

D'autre part, il existe  $\gamma > 0$ , tel que

$$h_\gamma = h_0 + \gamma(h_0 - h_0) \text{ appartienne à } V.$$

L'application  $f'(x_0, \cdot)$  étant convexe, on a :



$$f'(x_0, h_0) = f'(x_0, \frac{1}{1+\gamma} h_\gamma + \frac{\gamma}{1+\gamma} \tilde{h}_0)$$

$$\leq \frac{1}{1+\gamma} f'(x_0, h_\gamma) + \frac{\gamma}{1+\gamma} f'(x_0, \tilde{h}_0).$$

Comme  $f'(x_0, h_\gamma) \leq 0$  et  $f'(x_0, \tilde{h}_0) < 0$ ,  $f'(x_0, h_0) < 0$ .

• Deuxième inclusion :

Soit  $h_0$  un élément de  $E$ ,  $f'(x_0, h_0) < 0$ .

Posons  $f'(x_0, h_0) = -\beta < 0$ . Puisque  $f$  vérifie la condition (D) en  $x_0$ , on a en prenant  $\rho = \frac{\beta}{2}$  :

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \exists v \in V(h_0), \forall h \in v, \forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[ ,$$

$$\left| \frac{f(x_0 + \varepsilon h) - f(x_0)}{\varepsilon} - f'(x_0, h_0) \right| < \frac{\beta}{2} .$$

Par conséquent, on a :

$$\forall h \in v, \forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[ , f(x_0 + \varepsilon h) - f(x_0) \leq -\frac{\beta}{2} \cdot \varepsilon .$$

D'où  $h_0$  appartient à  $K_1$ . ■

4. Théorème.-

Soient  $E$  un espace normé,  $f$  une application localement lipschitzienne en  $x_0$  de rapport  $K$  et admettant une dérivée directionnelle,  $f'(x_0, h)$  en  $x_0$  suivant toute direction  $h$ . Alors  $f$  vérifie la condition (D) en  $x_0$ .

Démonstration :

Soient  $h_0$  un point fixé de  $E$  et  $B(x_0, r)$  la boule de  $E$  où  $f$  est localement lipschitzienne  $\forall \rho > 0$ , on a :

$$1) \exists \varepsilon_1 > 0, \forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_1[, \left| \frac{f(x_0 + \varepsilon h_0) - f(x_0)}{\varepsilon} - f'(x_0, h_0) \right| < \frac{\rho}{2}.$$

$$2) \exists \varepsilon_2 > 0, \forall h \in B(h_0, \rho/2K), \forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_2[,$$

$$x_0 + \varepsilon h \in B(x_0, r).$$

$$\text{Soit } \varepsilon_0 = \inf(\varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

$$\forall h \in B(h_0, \frac{\rho}{2K}), \forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[, \text{ on a :}$$

$$\left| \frac{f(x_0 + \varepsilon h) - f(x_0)}{\varepsilon} - f'(x_0, h_0) \right| \leq \left| \frac{f(x_0 + \varepsilon h) - f(x_0 + \varepsilon h_0)}{\varepsilon} \right| +$$

$$\left| \frac{f(x_0 + \varepsilon h) - f(x_0)}{\varepsilon} - f'(x_0, h_0) \right| \leq \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho. \blacksquare$$

1 - ETUDE DE L'APPLICATION N.1. Proposition.

Soient  $\mathbb{E} = (E, E', \Phi)$  un couple d'espaces de Banach en dualité

et  $A'$  l'ensemble :

$$\{x' \in E' \mid \|\psi(x')\|_{E^*} \leq 1\}.$$

Alors l'application N définie de E dans  $\mathbb{R}$  par :

$$N(x) = \sup_{x' \in A'} \Phi(x', x)$$

est une norme sur E continue pour la structure banachique de E.

Démonstration :

A' étant symétrique, on a :

$$\forall x \in E, \quad \sup_{x' \in A'} \Phi(x', x) = \sup_{x' \in A'} |\Phi(x', x)|.$$

Donc N est une semi-norme sur E et comme la dualité  $\Phi$  est séparante, cette semi-norme est une norme. D'autre part :

$$\sup_{x' \in A'} |\Phi(x', x)| = \sup_{x' \in A'} |\psi(x')|(x)| \leq \sup_{x' \in A'} \|\psi(x')\|_{E^*} \cdot \|x\|_E \leq \|x\|_E.$$

Donc N est continue pour la topologie associée à la norme  $\|\cdot\|_E$ . ■

2. Proposition.

Soient  $E = (E, E', \Phi)$  un couple d'espaces de Banach en dualité

et A' l'ensemble :

$$\{x' \in E' \mid \|\psi(x')\|_{E^*} \leq 1\}.$$

Alors une condition nécessaire et suffisante pour que :

$$\sup_{x' \in A'} \Phi(x', x) = \|x\|_E$$

est que la boule unité  $B(0, 1)$  de E soit  $\sigma(E, E')$ -fermée dans E.

Démonstration :

• Condition nécessaire :

Supposons que :  $\text{Sup}_{x' \in A'} \Phi(x', x) = ||x||_E$ .

Alors, on a

$$B(0,1) = \{x \in E \mid \text{Sup}_{x' \in A'} \Phi(x', x) \leq 1\}.$$

Donc  $B(0,1)$  est  $\sigma(E, E')$ -fermée dans  $E$ .

• Condition suffisante :

Supposons que  $B(0,1)$  soit  $\sigma(E, E')$ -fermée dans  $E$  et posons :

$$A' = \{x' \in E' \mid ||\psi(x)||_{E^*} \leq 1\} = \{x' \in E' \mid \text{Sup}_{||x||_E \leq 1} \Phi(x', x) \leq 1\}.$$

Donc  $A'$  est le polaire de  $B(0,1)$  dans  $E'$  et par conséquent le polaire de  $A'$  dans  $E$  est égal au bipolaire de  $B(0,1)$  qui est exactement  $B(0,1)$  car elle est convexe et  $\sigma(E, E')$ -fermée dans  $E$ .

D'où :

$$\{x \in E \mid \text{Sup}_{x' \in A'} \Phi(x', x) \leq 1\} = \{x \in E \mid ||x||_E \leq 1\}$$

et comme l'application définie dans  $E$  par

$$N(x) = \text{Sup}_{x' \in A'} \Phi(x', x)$$

est une norme sur  $E$ , on a finalement pour tout  $x$  dans  $E$  :

$$||x||_E = \text{Sup}_{x' \in A'} \Phi(x', x)$$

3. Proposition.

Si  $x_0$  est nul,  $N'(x_0, x) = N(x)$ . Si  $x_0$  est non nul, on pose  
pour tout  $\delta$  réel positif :

$$A'_\delta = \{x' \in A' \mid \Phi(x', x_0) \geq N(x_0) - \delta\}.$$

On a alors :

$$N'(x_0, x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{x' \in A'_\delta} \Phi(x', x).$$

4. Lemme.

Pour tout  $x$  non nul fixé dans  $E$ , on a :

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon_0 > 0, \forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[, N(x_0 + \varepsilon x) = \sup_{x' \in A'_\delta} \Phi(x', x_0 + \varepsilon x).$$

Démonstration :

Pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $x'$  dans  $A'$  :

$$\left| \frac{\Phi(x', x_0 + \varepsilon x) - \Phi(x', x_0)}{\varepsilon} \right| = |\Phi(x', x)| \leq N(x).$$

Donc soit  $x'$  dans  $A'$  :

$$- \varepsilon N(x) + \Phi(x', x_0) \leq \Phi(x', x_0 + \varepsilon x).$$

Et par conséquent en prenant la borne supérieure :

$$- \varepsilon N(x) + N(x_0) \leq N(x_0 + \varepsilon x).$$

D'autre part, si  $x'$  appartient au complémentaire de  $A'_\delta$  dans  $A'$  :

$$\Phi(x', x_0 + x) = \Phi(x', x_0) + \varepsilon \Phi(x', x) < N(x_0) - \delta + \varepsilon N(x).$$

Donc si :

$N(x_0) - \delta + \varepsilon N(x) < -\varepsilon N(x) + N(x_0)$ , c'est-à-dire si  $\varepsilon$  appartient à  $\left] 0, \frac{\delta}{2N(x)} \right[$ , on aura :

$$\sup_{x' \in A' - A'_\delta} \Phi(x', x_0 + \varepsilon x) < \sup_{x' \in A'} \Phi(x', x_0 + \varepsilon x).$$

Et par conséquent :

$$\sup_{x' \in A'} \Phi(x', x_0 + \varepsilon x) = \sup_{x' \in A'_\delta} \Phi(x', x_0 + \varepsilon x).$$

Démonstration de la proposition 3 :

- Si  $x_0$  est nul, on a pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$\frac{N(0 + \varepsilon x) - N(0)}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon} N(x) = N(x).$$

Donc :

$$N'(0, x) = N(x).$$

- Supposons que  $x_0$  et  $x$  soient des éléments non nuls de  $E$ ,
- Première inégalité :

Pour tout  $x'_0$  dans  $A'$  et tout  $\varepsilon > 0$  :

$$\Phi(x'_0, x_0 + \varepsilon x) \leq N(x_0 + \varepsilon x).$$

Donc quelque soit  $x'_0$  dans  $A'_\delta$

$$N(x_0) - \delta + \varepsilon \Phi(x'_0, x) \leq N(x_0 + \varepsilon x).$$

Et par conséquent :

$$N(x_0) - \delta + \varepsilon \sup_{x' \in A'_\delta} \Phi(x', x) \leq N(x_0 + \varepsilon x).$$

En faisant tendre  $\delta$  vers  $0^+$ , on obtient :

$$N(x_0) + \varepsilon \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{x' \in A'_\delta} \Phi(x', x) \leq N(x_0 + \varepsilon x).$$

D'où l'inégalité :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{x' \in A'_\delta} \Phi(x', x) \leq \frac{N(x_0 + \varepsilon x) - N(x_0)}{\varepsilon}.$$

C'est-à-dire en faisant tendre  $\varepsilon$  vers  $0^+$  :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{x' \in A'_\delta} \Phi(x', x) \leq N'(x_0, x).$$

• Deuxième inégalité :

Pour tout  $x'_0$  dans  $A'_\delta$  :

$$\Phi(x'_0, x_0 + \varepsilon x) = \Phi(x'_0, x_0) + \varepsilon \Phi(x'_0, x) \leq N(x_0) + \varepsilon \sup_{x' \in A'_\delta} \Phi(x', x).$$

D'autre part :

$$\forall \alpha > 0, \exists \delta_0 > 0, \varepsilon \sup_{x' \in A'_\delta} \Phi(x', x) \leq \varepsilon \inf_{\delta > 0} \sup_{x' \in A'_\delta} \Phi(x', x) + \varepsilon \alpha$$

Donc :

$$\sup_{x' \in A'_\delta} \Phi(x', x_0 + \varepsilon x) \leq N(x_0) + \varepsilon \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{x' \in A'_\delta} \Phi(x', x) + \varepsilon \alpha$$

Et d'après le lemme 4, pour tout  $\varepsilon$  appartenant à  $\left] 0, \frac{\delta_0}{2N(x)} \right[$  on a :

$$N(x_0 + \varepsilon x) = \sup_{x' \in A'_\delta} \Phi(x', x_0 + \varepsilon x).$$

Et, par conséquent :

$$N(x_0 + \varepsilon x) \leq N(x_0) + \varepsilon \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{x' \in A'_\delta} \Phi(x', x) + \varepsilon \alpha.$$

C'est-à-dire

$$\frac{N(x_0 + \varepsilon x) - N(x_0)}{\varepsilon} \leq \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{x' \in A'_\delta} \Phi(x', x) + \alpha.$$

Finalement, en faisant tendre  $\varepsilon$  et  $\alpha$  vers  $0^+$ , on obtient l'inégalité :

$$N'(x_0, x) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{x' \in A'_\delta} \Phi(x', x). \quad \blacksquare$$

##### 5. Proposition.-

Le cône des directions de décroissance de l'application  $N$  en un point  $x_0$  non nul est :

$$K_1 = \{x \in E \mid N'(x_0, x) < 0\}.$$



Démonstration :

On va montrer que l'application  $N$  vérifie la condition (D') en  $x_0$ .

•  $N$  étant une norme continue pour la topologie associée à la norme  $\| \cdot \|_E$ , elle est lipschitzienne.

D'autre part, elle admet une dérivée directionnelle en  $x_0$  suivant toute direction. Donc elle vérifie la condition (D) en  $x_0$ .

• Soit  $\delta_0 = N(x_0)$ , on va montrer la propriété suivante :

$$\forall \delta \in ]0, \delta_0[, \exists \tilde{x} \in E, \sup_{x' \in A'} \phi(x', \tilde{x}) < 0.$$

Puisque

$$\{x \in E \mid \sup_{\xi \in \overline{\psi(A'_\delta)}} \xi(x) < 0\} \subset \{x \in E \mid \sup_{x' \in A'_\delta} \phi(x', x) < 0\}$$

il suffit de montrer que l'ensemble :

$$\{x \in E \mid \sup_{\xi \in \overline{\psi(A'_\delta)}} \xi(x) < 0\} \text{ est non vide.}$$

$A'_\delta$  est convexe,  $A'$  est  $\sigma(E', E)$ -fermé dans  $E'$  car il est l'image réciproque par l'injection  $\psi$  de la boule unité de  $E^*$  et  $A'_\delta$  est  $\sigma(E', E)$ -fermé dans  $A'$ , donc  $A'_\delta$  est  $\sigma(E', E)$ -fermé dans  $E'$  et pour tout  $\delta$  appartenant à  $]0, \delta_0[$ ,  $A'_\delta$  ne contient pas 0. Donc  $\overline{\psi(A'_\delta)}$  est convexe et ne contient pas 0. On a :

$$\exists \tilde{x} \in E, \forall \xi \in \overline{\psi(A'_\delta)}, \xi(\tilde{x}) < 0.$$

D'autre part, l'application  $\Lambda$  définie de  $E^*$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\Lambda(\xi) = \xi(x)$$

est  $\sigma(E^*, E)$ -continue et  $\overline{\Psi(A'_\delta)}$  est  $\sigma(E^*, E)$ -compact dans  $E^*$ , on a :

$$\exists \xi_0 \in \overline{\Psi(A'_\delta)}, \quad \sup_{\xi \in \overline{\Psi(A'_\delta)}} \xi(\tilde{x}) = \xi_0(\tilde{x}).$$

Donc  $\tilde{x}$  appartient à l'ensemble :

$$\{x \in E \mid \sup_{\xi \in \overline{\Psi(A'_\delta)}} \xi(x) < 0\}. \quad \blacksquare$$

#### 6. Proposition.

Le cône des directions de décroissance de l'application  $N$  en  $x_0$ ,  
vérifie les hypothèses du lemme I.2.

#### Démonstration :

D'après la proposition 5, le cône  $K_1$  des directions de décroissance de l'application  $N$  en  $x_0$  est :

$$K_1 = \{x \in E \mid \inf_{\delta > 0} \sup_{x' \in A'_\delta} \phi(x', x) < 0\}.$$

Comme pour  $\delta \geq \delta_0$ ,  $A'_\delta$  contient 0, on a :

$$K_1 = \bigcup_{0 < \delta < \delta_0} K_\delta \quad \text{où} \quad K_\delta = \{x \in E \mid \sup_{x' \in A'_\delta} \phi(x', x) < 0\}.$$

On va montrer que la  $\sigma(E, E')$ -fermeture,  $\overline{K}_\delta$  de  $K_\delta$  dans  $E$   
est :

$$C_\delta = \{x \in E \mid \forall x' \in A'_\delta, \phi(x', x) \leq 0\}$$

et que la famille  $(A'_\delta)_{\delta \in ]0, \delta_0[}$  vérifie les hypothèses du lemme I.2.

• Soit  $z$  un élément de  $C_\delta$ , comme  $K_\delta$  est non vide ; il existe un point  $z_0$  de  $E$  tel que  $\sup_{x' \in A'_\delta} \Phi(x', z_0) < 0$ . La suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  définie par :

$$x_n = z + \frac{1}{n} z_0$$

est incluse dans  $K_\delta$  et converge vers  $z$  pour la  $\sigma(E, E')$ -topologie dans  $E$ .

• L'ensemble  $A'_\delta = \{x' \in A' \mid \Phi(x', x_0) \geq N(x_0) - \delta\}$  est convexe,  $\sigma(E', E)$ -fermé dans  $E'$  et pour tout  $\delta$  appartenant à  $]0, \delta_0[$ , il ne contient pas 0. La famille  $(A'_\delta)_{\delta \in ]0, \delta_0[}$  est décroissante et  $\psi(A'_\delta)$  est inclus dans  $\psi(A')$  qui est inclus dans la boule unité de  $E^*$ . D'autre part, si  $A'_\delta \cap \text{Im } u' \neq \emptyset$  pour  $\delta$  appartenant à  $]0, \delta_0[$ , il existe  $y'$  dans  $F'$  tel que  $\Phi(u'(y'), x_0) > 0$  et comme  $\Phi(u'(y'), x_0) = \Psi(y', u(x_0))$  et  $x_0$  appartient à  $\text{Ker } u$ , on aurait  $0 > 0$ . D'où la contradiction. ■

## 2. L'APPLICATION $N$ SUR UN COUPLE FONCTIONNEL.

### 1. Notations.

On notera :

•  $\|\cdot\|$  (respectivement  $\|\cdot\|_P$ ) une norme quelconque sur  $\mathbb{R}^n$  (respectivement sur  $\mathbb{R}^P$ ).

•  $I$  l'intervalle  $[0, 1]$ .

•  $\|\cdot\|_\infty$  (respectivement  $\|\cdot\|_{\infty, P}$ ) la norme de la convergence uniforme sur  $C(I, \mathbb{R}^n)$  (respectivement sur  $C(I, \mathbb{R}^P)$ ).

•  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^P$  et  $\mathbb{R}^n$ .

- $E = E' = C(I, \mathbb{R}^n)$ , muni de la norme  $\| \cdot \|_\infty$
- $F = F' = C(I, \mathbb{R}^n)$ , muni de la norme  $\| \cdot \|_\infty$ .

Si on définit la forme bilinéaire  $\Phi$  sur  $E' \times E$  par :

$$\Phi(h, \ell) = \int_0^1 \langle h(t), \ell(t) \rangle dt$$

on a alors un couple d'espaces de Banach en dualité qu'on note  $\mathbb{C}(I, \mathbb{R}^n)$ .

De même, on définit sur  $F' \times F$  la forme bilinéaire  $\Psi$  par :

$$\Psi(h, \ell) = \int_0^1 \langle h(t), \ell(t) \rangle dt \quad \text{et on a aussi un couple d'espaces de}$$

Banach en dualité :  $\mathbb{C}(I, \mathbb{R}^p)$ .

## 2. Proposition.-

$$\text{Soit } A' = \left\{ k \in F' \mid \sup_{\{\ell \in F, \|\ell\|_\infty \leq 1\}} \int_0^1 \langle k(t), \ell(t) \rangle dt \leq 1 \right\}.$$

Alors il existe une norme  $\| \cdot \|_1$  sur  $\mathbb{R}^p$  telle que

$$A' = \left\{ k \in F' \mid \int_0^1 \|k(t)\|_1 dt \leq 1 \right\}.$$

Démonstration :

Pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^p$  posons

$$\sup_{\{y \in \mathbb{R}^p, \|y\| \leq 1\}} \langle x, y \rangle = \|x\|_1$$

$\| \cdot \|_1$  est une norme sur  $\mathbb{R}^p$ .

On va montrer que pour tout élément  $k$  de  $F'$ , on a :

$$\sup_{\{\ell \in F \mid \|\ell\|_{\infty} \leq 1\}} \int_0^1 \langle k(t), \ell(t) \rangle dt = \int_0^1 \|k(t)\|_1 dt.$$

Soit  $k$  un élément de  $F'$ . Par définition de  $\|\cdot\|_1$ , on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall t \in I, \exists y_t \in \mathbb{R}^p, \|y_t\| \leq 1, \|k(t)\|_1 - \varepsilon \leq \langle k(t), y_t \rangle.$$

La fonction définie sur  $I$  par :  $\|k(s)\|_1 - \varepsilon - \langle k(s), y_t \rangle$  étant continue au point  $s = t$ , on a :

$$\forall t \in I, \exists V_t \text{ voisinage ouvert de } t \text{ dans } I, \forall s \in V_t \\ \|k(s)\|_1 - \varepsilon \leq \langle k(s), y_t \rangle.$$

D'autre part, l'intervalle  $I$  étant compact et la famille  $(V_t)_{t \in I}$  forme un recouvrement ouvert de  $I$ , il existe une partition :

$$0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_q \leq 1 \text{ telle que : } I = \bigcup_{i=0}^q V_i.$$

D'après le théorème de partition de l'unité, il existe des fonctions  $(\theta_i)_{i=0, q}$  définies et continues sur  $I$ , à valeurs dans  $I$  vérifiant :

$$\begin{aligned} \cdot \forall i = 0, q \quad \text{Supp}(\theta_i) \subset V_i \\ \cdot \forall t \in I, \sum_{i=0}^q \theta_i(t) = 1. \end{aligned}$$

On a :

$$\forall i = 0, q, \exists y_i \in \mathbb{R}^p, \|y_i\| \leq 1, \|k(t_i)\|_1 - \varepsilon \leq \langle k(t_i), y_i \rangle.$$

La fonction  $\ell$  définie sur  $I$  par :

$$\ell(t) = \sum_{i=0}^q \theta_i(t) y_i$$

appartient à  $F'$  et on a :  $\|\ell\|_\infty \leq 1$ .

On va montrer que pour tout  $t$  dans  $I$  on a :

$$\|k(t)\|_1 - \varepsilon \leq \langle k(t), \ell(t) \rangle.$$

Soient  $t$  un point de  $I$  et  $J$  l'ensemble :

$$\{i = 0, q \mid t \in V_i\}.$$

Pour  $i$  n'appartenant pas à  $J$ , on a :

$$\theta_i(t) = 0$$

et par conséquent :

$$\ell(t) = \sum_{i \in J} \theta_i(t) y_i.$$

D'autre part,  $\sum_{i \in J} \theta_i(t) = 1$ , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in J} \theta_i(t) (\|k(t)\|_1 - \varepsilon) &\leq \sum_{i \in J} \theta_i(t) \langle k(t), y_i \rangle \\ &= \langle k(t), \ell(t) \rangle. \end{aligned}$$

En intégrant sur  $I$ , on a :

$$\int_0^1 \|k(t)\|_1 dt - \varepsilon \leq \int_0^1 \langle k(t), \ell(t) \rangle dt.$$

Finalement, on a :

$$\begin{aligned} A' &= \{k \in F' \mid \sup_{\{\ell \in F \mid \|\ell\|_\infty \leq 1\}} \int_0^1 \langle k(t), \ell(t) \rangle dt \leq 1\} \\ &= \{k \in F' \mid \int_0^1 \|k(t)\|_1 dt \leq 1\}. \end{aligned}$$

3. Proposition.

Pour tout élément  $\ell$  de  $F$ , on a :

$$\sup_{k \in A'} \int_0^1 \langle k(t), \ell(t) \rangle dt = \|\ell\|_\infty.$$

Démonstration :

D'après la proposition 1.2., il suffit de montrer que la boule unité,  $B_F(0,1)$  de  $F$  est  $\sigma(F, F')$ -fermée. Pour ceci, on va montrer que tout élément de  $F$  n'appartenant pas à  $B_F(0,1)$  peut être séparé strictement de  $B_F(0,1)$  par un hyperplan  $\sigma(F, F')$ -fermé de  $F$ . En effet, soit  $k_0$  appartenant à  $F$  avec  $\|k_0\|_\infty > 1$ . Comme  $I$  est compact, il existe un point  $t_0$  dans  $I$ , tel que  $\|k_0\|_\infty = \|k_0(t_0)\|$  et comme la boule unité  $B(0,1)$  de  $\mathbb{R}^P$  est convexe et fermée, on a :

$$\exists \xi \in \mathbb{R}^P - \{0\}, \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad \langle \xi, k_0(t_0) \rangle > \alpha, \quad \forall x \in B(0,1), \quad \langle \xi, x \rangle \leq \alpha.$$

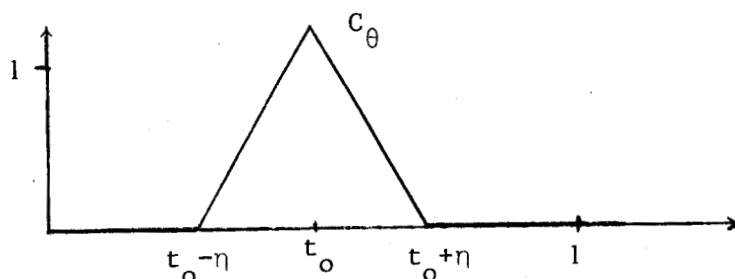
D'autre part, la fonction  $\ell_0$  définie sur  $I$  par :

$$\ell_0(t) = \langle \xi, k_0(t) \rangle$$

est continue. Donc, on a :

$$\exists \eta > 0, \quad \forall t \in ]t_0 - \eta, t_0 + \eta[, \quad \ell_0(t) > \alpha.$$

Soit maintenant la fonction  $\ell_1 = \theta \cdot \xi$  où  $\theta$  est définie par son graphe :



On a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \langle \ell_1(t), k_0(t) \rangle dt &= \int_0^1 \theta(t) \langle \xi, k_0(t) \rangle dt \\ &= \int_{t_0 - \eta}^{t_0 + \eta} \theta(t) \langle \xi, k_0(t) \rangle dt \\ &= \int_{t_0 - \eta}^{t_0 + \eta} \theta(t) \ell_0(t) dt \end{aligned}$$

et comme sur l'intervalle  $]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$ , on a :

$$\theta(t) > 0 \text{ et } \ell_0(t) > \alpha,$$

on obtient la minoration suivante :

$$\int_0^1 \langle \ell_1(t), k_0(t) \rangle dt > \alpha \cdot \int_{t_0 - \eta}^{t_0 + \eta} \theta(t) dt.$$

D'autre part, pour tout élément  $k$  appartenant à  $B_F(0,1)$ , on a :

$$\forall t \in I, \quad \langle \xi, k(t) \rangle \leq \alpha.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \langle \ell_1(t), k(t) \rangle dt &= \int_{t_0 - \eta}^{t_0 + \eta} \langle \xi, k(t) \rangle dt \\ &\leq \alpha \cdot \int_{t_0 - \eta}^{t_0 + \eta} \theta(t) dt. \end{aligned}$$

Et, par conséquent, l'hyperplan défini par la fonction  $\ell_1$  et la constante  $\alpha \cdot \int_{t_0 - \eta}^{t_0 + \eta} \theta(t) dt$  sépare strictement  $k_0$  et  $B_F(0,1)$ . ■



### 3. CONE DE DECROISSANCE DE L'APPLICATION $N \circ \omega_f$ .

#### 1. Définition de l'application $\omega_f$ .

Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , tel que sa projection sur  $\mathbb{R}$  contienne l'intervalle  $I$ ,  $f$  une application continue de  $U$  dans  $\mathbb{R}^p$  et

$$W = \{h \in E \mid \forall t \in I, (t, h(t)) \in U\}.$$

Il est bien connu que  $W$  est un ouvert de  $E$ .

On définit alors l'application  $\omega_f$  de  $W$  dans  $F$  par :

$$\omega_f(h) = f(., h(.))$$

et d'après la proposition 2.3., on a :

$$(N \circ \omega_f)(h) = \sup_{k \in A'} \int_0^1 \langle k(t), f(t, h(t)) \rangle dt = \|f(., h(.))\|_{\infty}.$$

#### 2. Théorème.

Si  $f$  vérifie l'hypothèse  $(D_2)$  suivante :

1) L'application  $f$  admet une dérivée directionnelle,  $f'_2(t, x, X)$  par rapport à la deuxième variable suivant la direction  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  et ceci pour tout  $(t, x)$  dans  $U$ .

2) L'application  $g$  définie par :

$$g(t, x, X, \varepsilon) = \frac{f(t, x + \varepsilon X) - f(t, x)}{\varepsilon} \quad \text{si } \varepsilon \neq 0$$

et  $g(t, x, X, 0) = f'_2(t, x, X)$

est continue.

Alors l'application  $\omega_f$  vérifie la condition (D) en tout point de  $W$  et de plus, on a :

$$\omega_f'(h, H)(t) = f_2'(t, h(t), H(t)).$$

### 3. Lemme.

Soient  $K, E, F$  trois espaces métriques avec  $K$  compact et  $g$  une application de  $K \times E$  dans  $F$  continue en tout point  $(a, x_0)$  où  $x_0$  est fixé dans  $E$ . Alors, on a :

$$\forall \rho > 0, \exists \alpha > 0, \exists \varepsilon_0 > 0, \forall a, b \in K, d(a, b) < \alpha,$$

$$\forall x \in E, d(x, x_0) < \varepsilon_0, d(g(a, x), g(b, x)) < \rho.$$

Démonstration (par l'absurde) :

$$\exists \rho_0 > 0, \forall n \geq 1, \exists a_n, b_n \in K, d(a_n, b_n) < \frac{1}{n},$$

$$\exists x_n \in E, d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}, d(g(a_n, x_n), g(b_n, x_n)) \geq \rho_0.$$

$K$  étant compact, il existe une sous-suite  $(a_m)_{m \geq 1}$  de la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  et un point  $a$  de  $K$ , tels que :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} a_m = a.$$

Et puisque, on a :

$$d(a_m, b_m) < \frac{1}{m} \quad \text{et} \quad d(x_m, x_0) < \frac{1}{m}$$

on a aussi

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} b_m = a \quad \text{et} \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} x_m = x_0.$$

D'autre part, l'application  $g$  est continue au point  $(a, x_0)$ ,

on a :

$\forall \rho > 0, \exists \alpha > 0, \exists \varepsilon_0 > 0, \forall b \in K, d(b, a) < \alpha, \forall x \in E, d(x, x_0) < \varepsilon_0,$   
 $d(g(b, x), g(a, x_0)) < \rho.$

Comme les deux suites  $(a_m)_{m \geq 1}$  et  $(b_m)_{m \geq 1}$  convergent vers  $a$   
 et  $(x_m)_{m \geq 1}$  converge vers  $x_0$ , on a :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall m \geq N, d(a_m, a) < \alpha, d(b_m, a) < \alpha, d(x_m, x_0) < \varepsilon_0$$

et par conséquent pour  $m \geq N$ , on a :

$$d(g(a_m, x_m), g(b_m, x_m)) \leq d(g(a_m, x_m), g(a, x_0)) + d(g(a, x_0), g(b_m, x_m)).$$

Donc

$$\rho_0 \leq d(g(a_m, x_m), g(b_m, x_m)) \leq 2\rho$$

et si on prend  $2\rho < \rho_0$ , on a une contradiction.

Démonstration du théorème 2 :

Soient  $h_0$  un élément de  $W$  et  $H_0$  un élément de  $E$  fixés.

Posons :

$$K = \{(t, h_0(t), H_0(t) + X), t \in I, X \in \mathbb{R}^n, |X| \leq 1\}$$

$K$  est un compact. Si  $H$  appartient à  $E$  tel que  $|H - H_0|_\infty \leq 1$ , alors le  
 point  $(t, h_0(t), H(t))$  appartient à  $K$ . Soit maintenant  $g$  la fonction  
 définie sur  $K \times [0, +\infty[$  par :

$$g(t, h_0(t), H(t), \varepsilon) = \frac{f(t, h_0(t) + \varepsilon H(t)) - f(t, h_0(t))}{\varepsilon} \quad \text{si } \varepsilon > 0$$

et  $g(t, h_0(t), H(t), 0) = f'_2(t, h_0(t), H_0(t)).$

g est continue car f vérifie la condition (D<sub>2</sub>) et, donc, d'après le lemme précédent, on a :

$$\forall \rho > 0, \exists \alpha > 0, \exists \varepsilon_0 > 0, \forall (t, h_0(t), H(t)) \in K$$

$$\forall (t, h_0(t), H_0(t)) \in K, \|H - H_0\|_\infty \leq \text{Inf}(1, \alpha),$$

$$\forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[, \left\| \frac{f(t, h_0(t) + \varepsilon H(t)) - f(t, h_0(t))}{\varepsilon} - f'_2(t, h_0(t), H_0(t)) \right\| < \rho.$$

Donc

$$\left\| \frac{\omega_f(h_0 + \varepsilon H) - \omega_f(h_0)}{\varepsilon} - \omega'_f(h_0, H_0) \right\|_\infty < \rho. \blacksquare$$

#### 4. Proposition.-

Si f vérifie la condition (D<sub>2</sub>), l'application N o ω<sub>f</sub> vérifie la condition (D) en tout point h<sub>0</sub> de W et on a :

$$\begin{aligned} (N \circ \omega_f)'(h_0, h) &= N'(\omega_f(h_0), \omega'_f(h_0, h)) \\ &= \text{Inf}_{\delta > 0} \text{Sup}_{k \in A'_\delta} \int_0^1 \langle k(t), f'_2(t, h_0(t), h(t)) \rangle dt \end{aligned}$$

où :

$$A'_\delta = \{k \in A' \mid \int_0^1 \langle k(t), f(t, h_0(t)) \rangle dt > \|f(\cdot, h_0(\cdot))\|_\infty - \delta\}.$$

#### Démonstration :

L'hypothèse (D<sub>2</sub>) étant vérifiée, l'application ω<sub>f</sub> vérifie la condition (D) en h<sub>0</sub>. Soit H<sub>0</sub> un élément fixé de E, on a :

$$\omega_f(h_0 + \varepsilon h) = \omega_f(h_0) + \varepsilon(\omega'_f(h_0, H_0)) + \rho(h, \varepsilon)$$

avec  $\lim_{\substack{h \rightarrow H_0 \\ \varepsilon \rightarrow 0^+}} \rho(h, \varepsilon) = 0.$

D'autre part, l'application  $N$  vérifie la condition (D) en  $\omega_f(h_0)$ ,  
on a :

$$\forall \rho > 0, \exists W \in \mathcal{V}(\omega'_f(h_0, H_0)), \exists \varepsilon_1 > 0, \forall k \in W,$$

$$\forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_1[, \left| \frac{N(\omega_f(h_0 + \varepsilon k)) - N(\omega_f(h_0))}{\varepsilon} - N'(\omega_f(h_0), \omega'_f(h_0, H_0)) \right| < \rho.$$

Comme  $\lim_{\substack{h \rightarrow H_0 \\ \varepsilon \rightarrow 0^+}} \rho(h, \varepsilon) = 0,$  on a :

$$\exists V \in \mathcal{V}(H_0), \exists \varepsilon_2 > 0, \forall h \in V, \forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_2[, \omega'_f(h_0, H_0) + \rho(h, \varepsilon) \in W.$$

Finalement,

$$\forall \rho > 0, \exists V \in \mathcal{V}(H_0), \exists \varepsilon_0 = \inf(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \forall h \in V$$

$$\forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[, |N(\omega_f(h_0 + \varepsilon h)) - N(\omega_f(h_0)) - N'(\omega_f(h_0), \omega'_f(h_0, H_0))| < \rho. \blacksquare$$

### 5. Proposition.-

Supposons que pour tout point  $(t, x)$  dans  $U$ , l'application  $f$  ait une application différentielle par rapport à la deuxième variable et qu'il existe un point  $h$  de  $E$  tel que  $(N \circ \omega_f)'(h_0, \tilde{h}) < 0.$

Alors le cône des directions de décroissance de l'application  $N \circ \omega_f$  en un point  $h_0$  de  $W$  vérifie les hypothèses du lemme I.2.

Démonstration :

Comme l'application  $\omega_f'(h_0, \cdot)$  est linéaire et  $N'(\omega_f(h_0), \cdot)$  est convexe, l'application  $(N \circ \omega_f)'(h_0, \cdot)$  est convexe. Par conséquent, elle vérifie la condition (D') en  $h_0$ . Donc son cône des directions de décroissance en  $h_0$  est :

$$\begin{aligned} K_1 &= \{h \in E \mid (N \circ \omega_f)'(h_0, h) < 0\} \\ &= \{h \in E \mid \inf_{\delta > 0} \sup_{k \in A'_\delta} \int_0^1 \langle k(t), D_2 f(t, h_0(t)) \cdot h(t) \rangle dt < 0\}. \end{aligned}$$

Il existe  $\delta_0$  appartenant à  $]0, \|f(\cdot, h_0(\cdot))\|_\infty[$  tel que :

$$\begin{aligned} K_1 &= \bigcup_{\delta \in ]0, \delta_0[} K_\delta \quad \text{avec} \\ K_\delta &= \{h \in E \mid \sup_{k \in A'_\delta} \int_0^1 \langle k(t), D_2 f(t, h_0(t)) \cdot h(t) \rangle dt < 0\}. \end{aligned}$$

L'application  $D_2 f(\cdot, h_0(\cdot))$  a une application transposée  ${}^t D_2 f(\cdot, h_0(\cdot))$  définie de  $F$  dans  $E$ . En posant :

$$C'_\delta = {}^t D_2 f(\cdot, h_0(\cdot))(A'),$$

on a :

$$\begin{aligned} K_\delta &= \{h \in E \mid \sup_{k \in A'_\delta} \int_0^1 \langle k(t), D_2 f(t, h_0(t)) \cdot h(t) \rangle dt < 0\}. \\ &= \{h \in E \mid \sup_{k \in A'_\delta} \int_0^1 \langle {}^t D_2 f(t, h_0(t)) k(t), h(t) \rangle dt < 0\} \\ &= \{h \in E \mid \sup_{\ell \in C'_\delta} \int_0^1 \langle \ell(t), h(t) \rangle dt < 0\}. \end{aligned}$$

Soit  $\bar{C}'_\delta$  la  $\sigma(E', E)$ -fermeture de  $C'_\delta$  dans  $E'$ .

On va montrer que :

$$K_\delta = \{h \in E \mid \sup_{\ell \in \bar{C}'_\delta} \int_0^1 \langle \ell(t), h(t) \rangle dt < 0\}.$$

En effet soit  $h$  un élément fixe de  $E$ , l'ensemble

$$\{\ell \in E' \mid \int_0^1 \langle \ell(t), h(t) \rangle dt \leq \sup_{\ell \in C'_\delta} \int_0^1 \langle \ell(t), h(t) \rangle dt\}$$

est  $\sigma(E', E)$ -fermé dans  $E'$  et contient  $C'_\delta$ .

Donc il contient aussi  $C'_\delta$  et par conséquent on a :

$$\sup_{\ell \in \bar{C}'_\delta} \int_0^1 \langle \ell(t), h(t) \rangle dt \leq \sup_{\ell \in C'_\delta} \int_0^1 \langle \ell(t), h(t) \rangle dt.$$

D'où :

$$K_\delta = \{h \in E \mid \sup_{\ell \in \bar{C}'_\delta} \int_0^1 \langle \ell(t), h(t) \rangle dt < 0\}.$$

Prenons maintenant  $B'_\delta = C'_\delta$ .

1°)

$A'_\delta$  étant convexe et l'application  ${}^t D_2 f(., h_o(.))$  est linéaire, l'ensemble  $C'_\delta = B'_\delta = {}^t D_2 f(., h_o(o))(A'_\delta)$  est convexe.

Puisque

$$K_\delta = \{h \in E \mid \sup_{\ell \in B'} \int_0^1 \langle \ell(t), h(t) \rangle dt < 0\}$$
 est non vide,  $B'$

ne contient pas  $0$ .

. Soit  $\ell$  un élément de  $C'_\delta$ , il existe  $k$  dans  $A'$  tel que :  
 $\ell = \int_0^1 D_2 f(., h_0(.)) \cdot k$  et puisque l'application  $D_2 f(., h_0(.))$  est continue  
 de  $E$  dans  $F$  munis respectivement de leurs normes  $\|\cdot\|_\infty$  et  $\|\cdot\|_\infty$   
 on a :

$$\begin{aligned} \|\psi(\ell)\|_{E^*} &= \sup_{h \in E, \|h\|_\infty \leq 1} \left| \int_0^1 \langle D_2 f(t, h_0(t)) \cdot k(t), h(t) \rangle dt \right| \\ &= \sup_{h \in E, \|h\|_\infty \leq 1} \left| \int_0^1 \langle k(t), D_2 f(t, h_0(t)) \cdot h(t) \rangle dt \right| \\ &\leq \sup_{h \in E, \|h\|_\infty \leq 1} \|\psi(k)\|_{F^*} \cdot \|D_2 f(., h_0(.))h\|_\infty \\ &\leq \sup_{h \in E, \|h\|_\infty \leq 1} \|\psi(k)\|_{F^*} \cdot \|D_2 f(., h_0(.))\|_{L(E, F)} \|h\|_\infty \end{aligned}$$

et comme  $\psi(A'_\delta)$  est inclus dans la boule unité de  $F^*$  et en posant  
 $r = \|D_2 f(., h_0(.))\|_{L(E, F)}$ , on a

$$\|\psi(\ell)\|_{E^*} \leq r.$$

Donc  $\psi(B'_\delta)$  est inclus dans la boule  $B^*(0, r)$  de  $E^*$ .

. Comme la famille  $(A'_\delta)_{\delta \in ]0, \delta_0[}$  est décroissante, il en est  
 de même pour  $(B'_\delta)_{\delta \in ]0, \delta_0[}$ . ■

### 6. Proposition.-

Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées :

1) L'application  $f$  vérifie l'hypothèse  $(D_2)$  et il existe un  
 point  $\tilde{h}$  de  $E$ , tel que :



$$(N \circ \omega_f)'(h_0, \tilde{h}) < 0.$$

2)

. L'application définie de E dans F par  $f'_2(\cdot, f_0(\cdot), h(\cdot))$  est continue de E muni de la  $\sigma(E, E')$ -topologie dans F muni de la  $\sigma(F, F')$ -topologie

$$\exists r > 0, \quad \sup_{\{h \in E, \|h\|_\infty \leq 1\}} \|f'_2(\cdot, h_0(\cdot), h(\cdot))\|_\infty \leq r.$$

3) Pour tout  $\delta > 0$ , l'application  $G_\delta$  définie de E dans  $\mathbb{R}$  par :

$$G_\delta(h) = \sup_{k \in A'_\delta} \int_0^1 \langle k(t), f'_2(t, h_0(t), h(t)) \rangle dt$$

est convexe.

Alors le cône des directions de décroissance de l'application  $N \circ \omega_f$  en  $h_0$ , vérifie les hypothèses du lemme I.2.

7. Proposition [4] (Chapitre II, p. 42-43).

Soit X un ensemble convexe fermé dans un espace localement convexe. Alors toute fonction convexe, semi-continue inférieurement f dans X est l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions qui sont des restrictions à X de fonctions affines continues dans E.

Démonstration de la proposition 6 :

L'application définie de E dans  $\mathbb{R}$  par

$\int_0^1 \langle k(t), f'_2(t, h_0(t), h(t)) \rangle dt$  est  $\sigma(E, E')$ -continue dans E comme composée de deux fonctions continues. Donc l'application

$$G_\delta = \sup_{k \in A'_\delta} \int_0^1 \langle \ell(t), f'_2(t, h_0(t), 0) \rangle dt$$

est semi-continue inférieurement dans  $E$  pour la  $\sigma(E, E')$ -topologie. Comme  $G_\delta(0) = 0$ , il existe d'après la proposition précédent un sous-ensemble  $C'_\delta$  de  $E'$ , tel que, pour tout  $h$  dans  $E$  :

$$G_\delta(h) = \sup_{\ell \in C'} \int_0^1 \langle \ell(t), h(t) \rangle dt.$$

Prenons  $B'_\delta = \bar{C}'_\delta$ .

Comme dans la démonstration du cas linéaire, on a :

$$\begin{aligned} K_\delta &= \{h \in E \mid \sup_{\ell \in C'} \int_0^1 \langle \ell(t), h(t) \rangle dt < 0\} \\ &= \{h \in E \mid \sup_{\ell \in C'} \int_0^1 \langle \ell(t), h(t) \rangle dt < 0\}. \end{aligned}$$

. En désignant par  $\text{conv}(B'_\delta)$ , l'enveloppe convexe de  $B'_\delta$ , on a :

$$\begin{aligned} K_\delta &= \{h \in E \mid \sup_{\ell \in B'_\delta} \int_0^1 \langle \ell(t), h(t) \rangle dt < 0\} \\ &= \{h \in E \mid \sup_{\ell \in \text{Conv}(B')} \int_0^1 \langle \ell(t), h(t) \rangle dt < 0\}. \end{aligned}$$

Donc on peut supposer que  $B'_\delta$  est convexe.

. Comme  $K_\delta$  est non vide pour tout  $\delta$  appartenant à  $]0, \delta_0[$ ,  $B'_\delta$  ne contient pas  $0$ .

. Soit  $\ell$  un élément de  $B'_\delta$ , on a :

$$\begin{aligned}
\|\psi(\ell)\|_{E^*} &= \sup_{h \in E, \|h\|_\infty \leq 1} \int_0^1 \langle \ell(t), h(t) \rangle dt \\
&\leq \sup_{h \in E, \|h\|_\infty \leq 1} \left( \sup_{\ell \in B'_\delta} \int_0^1 \langle \ell(t), h(t) \rangle dt \right) \\
&\leq \sup_{h \in E, \|h\|_\infty \leq 1} \left( \sup_{k \in A'_\delta} \int_0^1 \langle k(t), f'_2(t, h_0(t), h(t)) \rangle dt \right) \\
&\leq \sup_{h \in E, \|h\|_\infty \leq 1} \left( \sup_{k \in A'_\delta} \|\Psi(k)\|_{F^*} \cdot \|f'_2(\cdot, h_0(\cdot), h(\cdot))\|_\infty \right) \leq r.
\end{aligned}$$

Donc  $\psi(B'_\delta)$  est inclus dans la boule  $B^*(0, r)$  de  $E^*$ .

Comme la famille  $(A'_\delta)_{\delta \in ]0, \delta_0[}$  est décroissante, il en est de même pour  $(B'_\delta)_{\delta \in ]0, \delta_0[}$ . ■

#### 4 - PROBLEME D'OPTIMISATION.

##### 1. Théorème.-

Soient  $g$  une application de  $W$  dans  $\mathbb{R}^q$  et  $Q$  une partie de  $W$  et supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

1) L'application  $g$  est différentiable relativement aux couples  $\mathbb{C}(I, \mathbb{R}^n)$  et  $\mathbb{R}^q$ , strictement différentiable au point  $h_0$  et l'application  $Dg(h_0)$  est surjective.

2)  $Q$  est d'intérieur non vide, régulière au point  $h_0$  et son cône  $K_2$  des directions admissibles au point  $h_0$  est  $\tau(E, E')$ -ouvert dans  $E$ .

3) L'application  $f$  vérifie les hypothèses de la proposition 3.6.

Alors une condition nécessaire pour que  $h_0$  soit un minimum locale de l'application  $N \circ \omega_f$  sur  $Q \cap g^{-1}(\{0\})$  pour la topologie associée à la norme de  $E$  est qu'il existe  $h_1$  appartenant à  $K'_1$ ,  $h_2$  appartenant à  $K'_2$ ,  $h_3$  appartenant à  $\text{Im } D'g(h_0)$  non tous nuls, tels que :  $h_1 + h_2 + h_3 = 0$ .

Démonstration :

L'application  $g$  étant strictement différentiable au point  $h_0$  et  $Dg(h_0)$  est surjective, d'après le théorème de Lyusternik [1], le cône tangent  $K_3$  de  $g^{-1}(\{0\})$  au point  $h_0$  est égal à  $\text{Ker } Dg(h_0)$ .

D'autre part, l'application  $f$  vérifie les hypothèses de la proposition 3.6., donc le cône  $K_1$  des directions de décroissance de l'application  $N \circ \omega_f$  au point  $h_0$  vérifie les hypothèses du lemme I.2 et puisque  $h_0$  est un minimum local de  $N \circ \omega_f$  sur  $Q \cap g^{-1}(\{0\})$ , on a :  $K_1 \cap K_2 \cap K_3 = \emptyset$ . Ensuite,  $(Dg(h_0), D'g(h_0))$  est un morphisme du couple  $C(I, \mathbb{R}^n)$  dans le couple  $\mathbb{R}^q, \text{Im } D'g(h_0)$  est de dimension finie dans  $C(I, \mathbb{R}^n)$  et finalement en appliquant le théorème I.2.1., on a :

$$\exists h_1 \in K'_1, \exists h_2 \in K'_2, \exists h_3 \in \text{Im } D'g(h_0), \text{ non tous nuls,}$$

$$h_1 + h_2 + h_3 = 0. \quad \blacksquare$$

Exemple :

Soient  $H_1, \dots, H_q$  des fonctions définies de  $W$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  différentiables relativement aux couples  $C(I, \mathbb{R}^n)$  et  $\mathbb{R}$  et soit  $Q$  la partie de  $W$  :

$$Q = \{h \in W \mid i=1, q, H_i(h) \leq 0\}$$

qu'on suppose d'intérieur non vide et régulière au point  $h_0$ . On va montrer que le cône  $K_2$  des directions admissibles à la contrainte  $Q$  au point  $h_0$  et  $\tau(E, E')$ -ouvert dans  $E$ .

On a

$$Q = \{h \in E, \sup_{i=1, q} H_i(h) \leq 0\}.$$

Chaque  $H_i$  étant différentiable au point  $h_0$ , elle vérifie la condition (D) au point  $h_0$  et l'application  $H$  définie par :

$$H(h) = \sup_{i=1, q} H_i(h)$$

vérifie aussi la condition (D) au point  $h_0$  et en posant

$J = \{i=1, q \mid H(h_0) = H_i(h_0)\}$ , on a :

$$H'(h_0, h) = \sup_{i \in J} DH_i(h_0) \cdot h.$$

Si on suppose que pour tout  $i$  dans  $J$ ,  $DH_i(h_0)$  est non nulle, il existe un  $\tilde{h}$  dans  $E$  tel que :  $H'(h_0, \tilde{h}) < 0$  et, par conséquent, l'application  $H$  vérifie la condition (D') en  $h_0$ . Donc on a :

$$K_2 = \{h \in E \mid \sup_{i \in J} DH_i(h_0) \cdot h < 0\}$$

$$= \bigcap_{i \in J} \{h \in E \mid DH_i(h_0) \cdot h < 0\}.$$

Chaque application  $H_i$  étant différentiable relativement aux couples  $C(I, \mathbb{R}^n)$  et  $\mathbb{R}$ , il existe une application linéaire continue

$D'H_i(h_0)$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $C(I, \mathbb{R}^n)$  telle que  $(DH_i(h_0), D'H_i(h_0))$  soit un morphisme de  $C(I, \mathbb{R}^n)$  dans le couple  $\mathbb{R}$ . Donc l'application  $DH_i(h_0)$  est  $\sigma(E, E')$ -continue dans  $E$  et finalement il existe  $h_i$  appartenant à  $C(I, \mathbb{R}^n)$  tel que :

$$\{h \in E \mid DH_i(h_0) \cdot h < 0\} = \{h \in E \mid \int_0^1 \langle h_i(t), h(t) \rangle dt < 0\}. \blacksquare$$



B I B L I O G R A P H I E

---

- [1] I.V. GIRSANOV - Lectures on Mathematical.  
Theory of Extremum Problems.
  
- [2] Ph. ANTOINE - Conditions pour un minimum local d'une fonction  
différentielle.  
Cahiers de Topologie et Géométrie différentielle.
  
- [3] L. SCHWARTZ - Topologie générale et Analyse fonctionnelle.  
Editeur : Enseignement des Sciences, p. 243-244.
  
- [4] N. BOURBAKI - Espaces vectoriels topologiques.  
Editeur : Masson.

2ÈME PARTIE



SOLUTIONS PÉRIODIQUES D'UN SYSTÈME DE CAUCHY SEMI-LINÉAIRE DE  
BIOMATHÉMATIQUE.



TABLE DES MATIERES DE LA 2ème PARTIE

-----

INTRODUCTION		II - i
CHAPITRE I	- RESOLUTION DU PROBLEME ( $P_n$ )	II - 1
	§ 1 - Résolution du problème ( $P_0$ )	II - 1
	§ 2 - Résolution du problème (S)	II - 11
CHAPITRE II	- CONVERGENCE UNIFORME DES SERIES	
	$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \epsilon^n, \sum_{n=0}^{\infty} v_n \epsilon^n$ ET DES SERIES DERIVEES	II - 19
	§ 1 - Convergence uniforme des séries	
	$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \epsilon^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n \epsilon^n$	II - 19
	§ 2 - Convergence uniforme des séries dérivées	II - 23
	Conclusion	II - 30
BIBLIOGRAPHIE		II - 32

## INTRODUCTION

-----

1) Position du problème.

Le problème qu'on va étudier a un intérêt écologique.

Il s'agit de trouver une solution  $(u(x,y), v(x,y))$   $((x,y)$  appartient à  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ ),  $2\pi$ -périodique en  $y$  du problème de Cauchy (P) suivant :

$$(P) \begin{cases} L_\lambda(u) = \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \frac{\partial u}{\partial y} = au + bv - uv \\ L_\mu(v) = \frac{\partial v}{\partial x} - \mu \frac{\partial v}{\partial y} = cu + dv + uv \\ u(0,y) = \varphi(y) \\ v(0,y) = \psi(y) \end{cases}$$

où

.  $\lambda, \mu, a, b, c$  et  $d$  sont des constantes réelles avec  $\lambda \leq \mu$

.  $\varphi$  et  $\psi$  sont des fonctions numériques de classe  $C^2$  et

$2\pi$ -périodiques.

2) Méthode utilisée.

On pose :

$$a = \epsilon, \quad b = \alpha\epsilon, \quad c = \beta\epsilon, \quad d = \gamma\epsilon$$

et on cherche la solution du problème (P) en utilisant la méthode proposée par

M. YAMAGUCHI-S. NIIZEK [1] pour le problème :

$$\begin{cases} L_\lambda(u) = \epsilon u - uv \\ L_\mu(v) = \gamma \epsilon v + uv \\ u(0,y) = \varphi(y) \\ v(0,y) = \psi(y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \epsilon^n \\ v = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \epsilon^n \end{cases}$$

Sachant que  $(u_0, v_0)$  est solution du problème  $(P_0)$  :

$$(P_0) \begin{cases} L_\lambda(u_0) = -u_0 v_0 \\ L_\mu(v_0) = u_0 v_0 \\ u_0(0,y) = \varphi(y) \\ v_0(0,y) = \psi(y) \end{cases}$$

et que pour tout  $n \geq 1$   $(u_n, v_n)$  est solution du problème  $(P_n)$  construit par récurrence

$$(P_n) \begin{cases} L_\lambda(u_n) = u_{n-1} + \alpha v_{n-1} - (v_0 u_n + \dots + u_0 v_n) \\ L_\mu(v_n) = \beta u_{n-1} + \gamma v_{n-1} + (v_0 u_n + \dots + u_0 v_n) \\ u_n(0,y) = 0 \\ v_n(0,y) = 0 \end{cases}$$

Dans le chapitre I, on résout le problème  $(P_n)$  pour tout  $n$  dans  $N$ .

Dans le chapitre II, on montre la convergence uniforme des séries

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \epsilon^n$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} v_n \epsilon^n$  et des séries dérivées et la continuité de la solution

$(u,v)$  du problème  $P$  par rapport aux conditions initiales  $(\varphi, \psi)$ .

## CHAPITRE I

RESOLUTION DU PROBLEME (P<sub>n</sub>)

-----

I.1. RESOLUTION DU PROBLEME (P<sub>0</sub>) [2]Cas où  $\lambda = \mu \neq 0$ 

En faisant le changement de variables suivant :

$$\xi = y + \lambda x$$

$$\eta = y - \lambda x$$

et en posant :

$$u_0(x,y) = \bar{u}_0(\xi,\eta)$$

$$v_0(x,y) = \bar{v}_0(\xi,\eta)$$

le problème (P<sub>0</sub>) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} - 2\lambda \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \eta} = - \bar{u}_0 \bar{v}_0 \\ - 2\lambda \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \eta} = \bar{u}_0 \bar{v}_0 \\ \bar{u}_0(\xi, \xi) = \varphi(\xi) \\ \bar{v}_0(\xi, \xi) = \psi(\xi) \end{array} \right.$$

qui est équivalent au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} - 2\lambda \frac{\partial}{\partial \eta} (\bar{u}_0 + \bar{v}_0) = 0 \\ - 2\lambda \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \eta} = -\bar{u}_0 \bar{v}_0 \\ \bar{u}_0(\xi, \xi) = \varphi(\xi) \\ \bar{v}_0(\xi, \xi) = \psi(\xi) \end{array} \right.$$

Donc  $\bar{u}_0(\xi, \eta) + \bar{v}_0(\xi, \eta) = g(\xi)$  et comme  $\bar{u}_0(\xi, \xi) = \varphi(\xi)$  et  $\bar{v}_0(\xi, \xi) = \psi(\xi)$   
on a :

$$g(\xi) = \varphi(\xi) + \psi(\xi).$$

Par conséquent  $\bar{v}_0(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\xi) - \bar{u}_0(\xi, \eta)$ . L'équation  
 $- 2\lambda \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \eta} = -\bar{u}_0 \bar{v}_0$  devient

$$-2\lambda \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \eta} = -\bar{u}_0(\varphi + \psi - \bar{u}_0) = \bar{u}_0^2 - (\varphi + \psi)\bar{u}_0$$

qui est une équation de Bernoulli. La solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} - 2\lambda \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \eta} = \bar{u}_0^2 - (\varphi + \psi)\bar{u}_0 \\ \bar{u}_0(\xi, \xi) = \varphi(\xi) \end{array} \right.$$

a pour solution :

$$u_0(\xi, \eta) = \frac{\varphi(\xi) + \psi(\xi)}{1 + \psi(\xi) e^{(\varphi(\xi) + \psi(\xi))(\xi - \eta)}}$$

Donc

$$u_0(x, y) = \frac{\varphi(y + \lambda x) + \psi(y + \lambda x)}{1 + \psi(y + \lambda x) e^{(\varphi(y + \lambda x) + \psi(y + \lambda x))x}}$$

qui est  $2\pi$ -périodique en  $y$ .

Cas  $\lambda < \mu$

1.1.1. Proposition.

Toute solution du système :

$$\begin{cases} L_{\lambda}(u_o) = -u_o v_o \\ L_{\mu}(v_o) = u_o v_o \end{cases}$$

s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} u_o &= L_{\mu}(\phi) \\ v_o &= -L_{\lambda}(\phi) \end{aligned}$$

où  $\phi$  appartient à  $C^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  et vérifiant la propriété suivante :

$$L_{\lambda}(L_{\mu}(\phi)) = L_{\lambda}(\phi) \cdot L_{\mu}(\phi)$$

Démonstration.

S'il existe une fonction  $\phi$  dans  $C^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant :

$$L_{\lambda}(L_{\mu}(\phi)) = L_{\lambda}(\phi) \cdot L_{\mu}(\phi)$$

alors

$$\begin{cases} u_o = L_{\mu}(\phi) \\ v_o = -L_{\lambda}(\phi) \end{cases}$$

est une solution du système :

$$\begin{cases} L_{\lambda}(u_o) = -u_o v_o \\ L_{\mu}(v_o) = -u_o v_o \end{cases}$$

puisque  $L_{\lambda}(L_{\mu}) = L_{\mu}(L_{\lambda})$ .

Réciproquement : Soit  $(u_0, v_0)$  une solution du système :

$$\begin{cases} L_\lambda(u_0) = -u_0 v_0 \\ L_\mu(v_0) = u_0 v_0 \end{cases}$$

Cherchons  $\phi$  dans  $C^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant :

$$\begin{cases} u_0 = L_\mu(\phi) \\ v_0 = -L_\lambda(\phi) \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \mu \frac{\partial \phi}{\partial y} = u_0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} = -v_0 \end{cases}$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{cases} (\lambda - \mu) \frac{\partial \phi}{\partial y} = u_0 + v_0 \\ (\lambda - \mu) \frac{\partial \phi}{\partial x} = \lambda u_0 + \mu v_0 \end{cases}$$

et comme  $\lambda < \mu$ , on peut déterminer complètement  $\phi$  dans  $C^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

### I.1.2. Résolution de l'équation.

$$L_\lambda(L_\mu(\phi)) = L_\lambda(\phi) \cdot L_\mu(\phi).$$

Posons  $\phi = -\log \Psi$

$$L_\lambda(\phi) \cdot L_\mu(\phi) = L_\lambda(-\log \Psi) \cdot L_\mu(-\log \Psi) = L_\lambda(\log \Psi) \cdot L_\mu(\log \Psi)$$

$$= \frac{L_\lambda(\Psi) \cdot L_\mu(\Psi)}{\Psi^2}.$$

D'autre part, on a :

$$L_{\lambda}(L_{\mu}(-\log \Psi)) = \frac{-[L_{\lambda}(L_{\mu}(\Psi))\Psi - L_{\lambda}(\Psi) \cdot L_{\mu}(\Psi)]}{\Psi^2}$$

Donc

$$L_{\lambda}(\Phi) \cdot L_{\mu}(\Phi) = L_{\lambda}(L_{\mu}(\Phi))$$

si et seulement si  $L_{\mu}(L_{\lambda}(\Psi)) = 0$  or

$$L_{\mu}(L_{\lambda}(\Psi)) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + \lambda \mu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} .$$

Soit le changement de variables suivant :

$$X_1 = y + \lambda x \quad , \quad X_2 = y + \mu x .$$

On pose :

$$\Psi(x, y) = F(X_1, X_2) .$$

Par conséquent  $L_{\lambda}L_{\mu}(\Psi) = 0$  est équivalente à  $\frac{\partial^2 F}{\partial X_1 \partial X_2} = 0$ .

Donc  $F(X_1, X_2) = F_1(X_1) + F_2(X_2)$  où  $F_1, F_2$  sont des fonctions numériques de classe  $C^1$ .

$$u_o(x, y) = L_{\mu}(\Phi)(x, y) = -L_{\mu}(\log \Psi)(x, y)$$

$$= \frac{-L_{\mu}[F_1(y + \lambda x) + F_2(y + \mu x)]}{F_1(y + \lambda x) + F_2(y + \mu x)} = \frac{(\mu - \lambda)F_1'(y + \lambda x)}{F_1(y + \lambda x) + F_2(y + \mu x)} .$$

De même on a :

$$v_o(x, y) = \frac{(\mu - \lambda) F_2'(y + \mu x)}{F_1(y + \lambda x) + F_2(y + \mu x)} \quad \bullet .$$



1.1.3. Proposition.

Si les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  vérifient la relation (R) suivante :

$$\forall y \in [0, 2\pi], \forall x \geq 0, \mu - \lambda + \int_0^{y+\lambda x} \varphi(\tau)w(\tau)d\tau + \int_0^{y+\mu x} \psi(\tau)w(\tau)d\tau > 0$$

avec

$$w(y) = e^{\frac{1}{\mu-\lambda}} \cdot \int_0^y (\varphi(\tau) + \psi(\tau))d\tau$$

alors la solution  $(u_0, v_0)$  du problème (P) s'écrit sous la forme suivante :

$$u_0(x, y) = \frac{w(y+\lambda x)\varphi(y+\lambda x)}{1 + \frac{1}{\mu-\lambda} \cdot \left[ \int_0^{y+\lambda x} \varphi(\tau)w(\tau)d\tau + \int_0^{y+\mu x} \psi(\tau)w(\tau)d\tau \right]}$$

Démonstration :

On a vu que la solution  $(u_0, v_0)$  du système :

$$\begin{cases} L_\lambda(u_0) = -u_0 v_0 \\ L_\mu(v_0) = u_0 v_0 \end{cases}$$

s'écrit sous la forme :

$$u_0(x, y) = \frac{(\mu-\lambda) F_1'(y+\lambda x)}{F_1(y+\lambda x) + F_2(y+\mu x)}$$

$$v_0(x, y) = \frac{(\mu-\lambda) F_2'(y+\mu x)}{F_1(y+\lambda x) + F_2(y+\lambda x)}$$

Pour  $x = 0$ , on doit avoir

$$u_0(0, y) = \frac{(\mu-\lambda) F_1'(y)}{F_1(y) + F_2(y)} = \psi(y)$$

$$v_0(0, y) = \frac{(\mu-\lambda) F_2'(y)}{F_1(y) + F_2(y)} = \psi(y).$$

En posant  $w(y) = F_1(y) + F_2(y)$  on a :

$$\frac{w'(y)}{w(y)} = \frac{1}{\mu-\lambda} (\varphi(y) + \psi(y)).$$

Donc

$$w(y) = K \cdot e^{\frac{1}{\mu-\lambda} \cdot \left[ \int_0^y (\varphi(\tau) + \psi(\tau)) d\tau \right]}$$

avec  $K = w(0)$ .

D'autre part :

$$F_1'(y) = \frac{w(y) \varphi(y)}{\mu-\lambda}.$$

Donc

$$F_1(y) = F_1(0) + \int_0^y \frac{\varphi(\tau)w(\tau)}{\mu-\lambda} d\tau.$$

De même :

$$F_2(y) = F_2(0) + \int_0^y \frac{\psi(\tau)w(\tau)}{\mu-\lambda} d\tau.$$

Et finalement :

$$u_0(x, y) = \frac{w(y+\lambda x) \varphi(y+\mu x)}{1 + \frac{1}{\mu-\lambda} \left[ \int_0^{y+\lambda x} \varphi(\tau)w(\tau) d\tau + \int_0^{y+\mu x} \psi(\tau)w(\tau) d\tau \right]}$$

$$v_0(x, y) = \frac{w(y+\mu x) \psi(y+\lambda x)}{1 + \frac{1}{\mu-\lambda} \left[ \int_0^{y+\lambda x} \varphi(\tau)w(\tau) d\tau + \int_0^{y+\mu x} \psi(\tau)w(\tau) d\tau \right]}$$

I.1.4. Périodicité de la solution de (P<sub>0</sub>) par rapport à y.

Une condition nécessaire et suffisante pour que la solution du problème (P<sub>0</sub>) soit 2π-périodique en y et que les conditions initiales φ et ψ soient 2π-périodiques.

Démonstration.

. Condition nécessaire :

Si u<sub>0</sub> et v<sub>0</sub> sont 2π-périodiques en y, comme u<sub>0</sub>(0,y) = φ(y) et v<sub>0</sub>(0,y) = ψ(y), φ et ψ seront 2π-périodiques.

. Condition suffisante :

Supposons que φ et ψ soient périodiques et de période 2π.

On a :

$$u_0(x,y) = \frac{w(y+\lambda x)\psi(y+\lambda x)}{1 + \frac{1}{\mu-\lambda} \left[ \int_0^{y+\lambda x} \psi(\tau)w(\tau)d\tau + \int_0^{y+\mu x} \psi(\tau)w(\tau)d\tau \right]}$$

Il suffit de montrer que :

$$\begin{aligned} & \frac{w(y+\lambda x)}{1 + \frac{1}{\mu-\lambda} \left[ \int_0^{y+\lambda x} \psi(\tau)w(\tau)d\tau + \int_0^{y+\mu x} \psi(\tau)w(\tau)d\tau \right]} \\ &= \frac{w(y+2\pi+\lambda x)}{1 + \frac{1}{\mu-\lambda} \left[ \int_0^{y+\lambda x+2\pi} \psi(\tau)w(\tau)d\tau + \int_0^{y+\mu x+2\pi} \psi(\tau)w(\tau)d\tau \right]} \end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$1 + \frac{1}{\mu - \lambda} \left[ \int_0^{y+\lambda x+2\pi} \psi(\tau)w(\tau)d\tau + \int_0^{y+\mu x+2\pi} \psi(\tau)w(\tau)d\tau \right]$$

$$= w(y+\lambda x+2\pi) + \frac{1}{\mu - \lambda} \int_{y+\lambda x+2\pi}^{y+\lambda x+2\pi} \psi(\tau)w(\tau)d\tau$$

et en faisant le changement de variable :  $\tau = s + 2\pi$  et comme

$w(y+2\pi) = w(2\pi)w(y)$  pour tout  $y$  dans  $\mathbb{R}$  on a :

$$w(y+\mu x+2\pi) + \frac{1}{\mu - \lambda} \int_{y+\mu x+2\pi}^{y+\lambda x+2\pi} \psi(\tau)w(\tau)d\tau$$

$$= w(2\pi)w(y+\lambda x) + \frac{w(2\pi)}{\mu - \lambda} \int_{y+\mu x}^{y+\lambda x} \psi(s)w(s)ds$$

$$= w(2\pi) \left[ w(y+\lambda x) + \frac{1}{\mu - \lambda} \int_{y+\mu x}^{y+\lambda x} \psi(s)w(s)ds \right]$$

Finalement on a :

$$u_0(x, y+2\pi) = u_0(x, y).$$

De même, on a :

$$v_0(x, y+2\pi) = v_0(x, y). \quad \blacksquare$$

### I.1.5. Unicité de la solution du problème ( $P_0$ ).

$$u_0(x, y) = \frac{w(y+\lambda x) \psi(y+\lambda x)}{1 + \frac{1}{\mu - \lambda} \left[ \int_0^{y+\lambda x} \psi(\tau)w(\tau)d\tau + \int_0^{y+\mu x} \psi(\tau)w(\tau)d\tau \right]}$$

$$= \frac{w(y+\lambda x) \psi(y+\lambda x)}{w(y+\lambda x) + \frac{1}{\mu - \lambda} \int_{y+\mu x}^{y+\lambda x} \psi(\tau)w(\tau)d\tau}$$

D'autre part  $w(y) = K \cdot e^{\frac{1}{\mu-\lambda} \int_0^y (\varphi(\tau) + \psi(\tau)) d\tau} = K\gamma(y)$ . Donc

$$u_0(x,y) = \frac{\gamma(y+\lambda x) \varphi(y+\lambda x)}{1 + \frac{1}{\mu-\lambda} \left[ \int_0^{y+\lambda x} \varphi(\tau) \gamma(\tau) d\tau + \int_0^{y+\mu x} \psi(\tau) \gamma(\tau) d\tau \right]}$$

et de même on a :

$$v_0(x,y) = \frac{\gamma(y+\mu x) \psi(y+\mu x)}{1 + \frac{1}{\mu-\lambda} \left[ \int_0^{y+\lambda x} \varphi(\tau) \gamma(\tau) d\tau + \int_0^{y+\mu x} \psi(\tau) \gamma(\tau) d\tau \right]} .$$

1.1.6. Continuité de la solution du problème (P<sub>0</sub>) par rapport aux conditions initiales.

Soit  $E_1 = \{\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  et  $2\pi$ -périodique}.

On munit  $E_1$  de la norme suivante : pour  $\varphi$  appartenant à  $E_1$

$$||\varphi|| = ||\varphi||_\infty + ||\varphi'||_\infty$$

et soit maintenant :  $E = E_1 \times E_1$  muni de la norme :

$$||(\varphi, \psi)|| = ||\varphi|| + ||\psi|| .$$

Pour l'ensemble des solutions du problème (P<sub>0</sub>), on prend comme espace  $F_1 = \{u : [0, T] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$  et  $2\pi$ -périodique en  $y$ .  $F_1$  sera muni de la norme :

$$||u|| = ||u||_\infty + \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_\infty + \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_\infty .$$

On prend  $F = F_1 \times F_2$  muni de la norme  $\|(u,v)\| = \|u\| + \|v\|$ .

D'autre part, la solution  $(u_0, v_0)$  du problème  $(P_0)$  est donnée explicitement en fonction des conditions initiales :

$$u_0(x,y) = \frac{w(y+\lambda x) \psi(y+\lambda x)}{1 + \frac{1}{\mu-\lambda} \left[ \int_0^{y+\lambda x} w(\tau)\psi(\tau)d\tau + \int_0^{y+\mu x} w(\tau)\psi(\tau)d\tau \right]}$$

$$v_0(x,y) = \frac{w(y+\mu x) \psi(y+\mu x)}{1 + \frac{1}{\mu-\lambda} \left[ \int_0^{y+\lambda x} w(\tau)\psi(\tau)d\tau + \int_0^{y+\mu x} w(\tau)\psi(\tau)d\tau \right]}$$

donc elle est continue par rapport à  $(\psi, \psi)$  pour les normes définies précédemment. ■

1.2. RESOLUTION DU PROBLEME (S) [3].

Soit le problème de Cauchy pour un système hyperbolique (S) suivant :

$$(S) \begin{cases} L(u) = -v_0 u - u_0 v + b_1 \\ L(v) = v_0 u + u_0 v + b_2 \\ u(0,y) = h_1(y) \\ v(0,y) = h_2(y) \end{cases}$$

où  $(u_0, v_0)$  est solution du problème  $(P_0)$ ,  $b_1, b_2$  des fonctions définies dans  $\Omega = [0, T] \times [0, 2\pi]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  de classe  $C^2$  et  $2\pi$ -périodiques en  $y$ , et  $h_1$  et  $h_2$  sont des fonctions numériques de classe  $C^2$  et  $2\pi$ -périodiques et  $\lambda \leq \mu$ .

On pose :

$$a = \sup\{\|u_0\|_\infty, \|v_0\|_\infty\}, \quad b = \sup_{i=1,2} (\|b_i\|_\infty)$$

et

$$h = \sup_{i=1,2} (\|h_i\|_\infty)$$

### 1.2.1. Proposition.

Le problème (S) admet une solution sur  $\Omega_T$ ,  $2\pi$ -périodique en  $y$ , unique et elle vérifie l'inégalité de Haar suivante :

$$|u(x,y)|, |v(x,y)| \leq h e^{2ax} + \frac{b}{2a} (e^{2ax} - 1)$$

### Démonstration.

Avec les caractéristiques le problème (S) est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x,y) = h_1(y+\lambda x) + \int_0^x [-v_0(y+\lambda(x-\tau), \tau)u(y+\lambda(x-\tau), \tau) \\ \quad - u_0(y+\lambda(x-\tau), \tau)v(y+\lambda(x-\tau), \tau) + b_1(y+\lambda(x-\tau), \tau)] d\tau \\ \quad = G_1(u,v)(x,y) \\ \\ v_0(x,y) = h_2(y+\mu x) + \int [v_0(y+\mu(x-\tau), \tau)u(y+\mu(x-\tau), \tau) \\ \quad + u_0(y+\mu(x-\tau), \tau)v(y+\mu(x-\tau), \tau) + b_2(y+\mu(x-\tau), \tau)] d\tau \\ \quad = G_2(u,v)(x,y). \end{array} \right.$$

On utilise la méthode des approximations successives. Soit donc la suite de fonctions  $(W_n, \gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} W_0(x,y) = h_1(y+\lambda x) \\ \gamma_0(x,y) = h_2(y+\mu x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_{n+1}(x,y) = G_1(W_n, \gamma_n)(x,y) \\ \gamma_{n+1}(x,y) = G_2(W_n, \gamma_n)(x,y) \end{cases} \quad \text{pour } n \geq 1$$

Montrons par récurrence sur  $n$  que la suite  $(W_n, \gamma_n)$  est  $2\pi$ -périodique en  $y$  :

•  $n = 0$

$h_1$  et  $h_2$  étant  $2\pi$ -périodiques, donc  $(W_0, \gamma_0)$  est  $2\pi$ -périodique en  $y$ .

• Supposons que  $(W_n, \gamma_n)$  est  $2\pi$ -périodique en  $y$ .

Comme  $(G_1(W_n, \gamma_n), G_2(W_n, \gamma_n))$  est  $2\pi$ -périodique en  $y$ ,  $(W_{n+1}, \gamma_{n+1})$  est  $2\pi$ -périodique en  $y$ .

• Montrons aussi par récurrence sur  $n$  que la suite  $(W_n, \gamma_n)$  vérifie l'inégalité

$$|W_{n+1}(x,y) - W_n(x,y)| \quad \text{et} \quad |\gamma_{n+1}(x,y) - \gamma_n(x,y)| \leq M 2^n a^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

avec  $M = 2ah + b$ .

En effet pour  $n = 0$ , on a :

$$\begin{aligned} |W_1(x,y) - W_0(x,y)| &= \left| \int_0^x [-v_0(y+\lambda(x-\tau), \tau)h_1(y+\lambda x) - u_0(y+\lambda(x-\tau), \tau)h_2(y+\lambda x) \right. \\ &\quad \left. + b_1(y+\lambda(x-\tau), \tau)] d\tau \right| \leq (2ah+b)x = Mx \end{aligned}$$

et de même on a :

$$|\gamma_1(x,y) - \gamma_0(x,y)| \leq Mx.$$



Supposons maintenant que :

$$|W_n(x,y) - W_{n-1}(x,y)| \quad \text{et} \quad |\gamma_n(x,y) - \gamma_{n-1}(x,y)| \leq M 2^{n-1} \cdot a^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n!}$$

Comme on a :

$$\begin{aligned} |W_{n+1}(x,y) - W_n(x,y)| &= \left| \int_0^x [-v_0(y+\lambda(x-\tau), \tau) (W_n(y+\lambda(x-\tau), \tau) \right. \\ &- W_{n-1}(y+\lambda(x-\tau), \tau)) + u_0(y+\lambda(x-\tau), \tau) (\gamma_n(y+\lambda(x-\tau), \tau) \\ &- \gamma_{n-1}(y+\lambda(x-\tau), \tau))] d\tau \Big| \leq \int_0^x 2a M a^{n-1} 2^{n-1} \frac{\tau^{n-1}}{n!} d\tau \\ &= M 2^n a^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

et de même on a :

$$|\gamma_{n+1}(x,y) - \gamma_n(x,y)| \leq M 2^n a^n \frac{x^n}{(n+1)!} .$$

De la même manière si on pose :

$$a' = \sup \left( \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{\infty}, \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{\infty} \right)$$

$$b' = \sup_{i=1,2} \left( \left\| \frac{\partial b_i}{\partial y} \right\|_{\infty} \right)$$

$$h' = \sup_{i=1,2} \left( \left\| h' \right\|_{\infty} \right)$$

on montre par récurrence sur  $n$  que :

$$\left| \frac{\partial W_{n+1}}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial W_n}{\partial y}(x,y) \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial \gamma_{n+1}}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial \gamma_n}{\partial y}(x,y) \right|$$

$$\leq 2^n a^{n-1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} (n a' M + a M') \quad \text{où} \quad M' = (2ah' + 2a'h+b').$$

Prenons maintenant :

$$u = w_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (W_{n+1} - W_n)$$

$$v = \gamma_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (\gamma_{n+1} - \gamma_n).$$

Comme

$$\left| W_{n+1}(x,y) - W_n(x,y) \right| \quad \text{et} \quad \left| \gamma_{n+1}(x,y) - \gamma_n(x,y) \right|$$

$$\leq M 2^n a^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq M 2^n a^n \frac{T^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{pour tout } (x,y) \text{ dans } \Omega_T.$$

pour tout  $(x,y)$  dans  $\Omega_T$  la convergence des séries  $\sum_{n=0}^{\infty} (W_{n+1} - W_n)$  et  $\sum_{n=0}^{\infty} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)$  est normale sur  $\Omega_T$  et puisque la suite de fonctions  $(W_n, \gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est continue,  $u$  et  $v$  sont continues.

Donc  $(u,v)$  vérifie

$$\begin{cases} u(x,y) = G_1(u,v)(x,y) \\ v(x,y) = G_2(u,v)(x,y) \end{cases}$$

Pour montrer qu'elle est de classe  $C^1$ , il suffit de montrer que  $\frac{\partial u}{\partial y}$  et  $\frac{\partial v}{\partial y}$  existent et sont continues.

Puisque on a

$$\left| \frac{\partial W_{n+1}}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial W_n}{\partial y}(x,y) \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial \gamma_{n+1}}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial \gamma_n}{\partial y}(x,y) \right|$$

$$\leq 2^n a^{n-1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} (n a' M + a M') \leq 2^n a^{n-1} \frac{T^{n+1}}{(n+1)!} (n a' M + a M')$$

et la suite de fonctions  $\left( \frac{\partial W_n}{\partial y}, \frac{\partial \gamma_n}{\partial y} \right)_n$  est continue, on a alors sur  $\Omega_T$  :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial W_0}{\partial y} + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\partial W_{n+1}}{\partial y} - \frac{\partial W_n}{\partial y} \right) \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \gamma_0}{\partial y} + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\partial \gamma_{n+1}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_n}{\partial y} \right).$$

Donc  $(u,v)$  est une solution 2 -périodique en  $y$  du problème (S).

• Unicité de la solution.

Supposons qu'il existe une autre solution  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  du problème (S)

et posons

$$N = \sup \left\| \|u - \tilde{u}\|_{\infty}, \|v - \tilde{v}\|_{\infty} \right\|$$

On va montrer que  $N$  est nul. Puisque on a :

$$u(x,y) - \tilde{u}(x,y) = \int_0^x \left[ -v_0(y+\lambda(x-\tau), \tau) (u(y+\lambda(x-\tau), \tau) - \tilde{u}(y+\lambda(x-\tau), \tau)) \right.$$

$$\left. - u_0(y+\lambda(x-\tau), \tau) (v(y+\lambda(x-\tau), \tau) - \tilde{v}(y+\lambda(x-\tau), \tau)) \right] d\tau$$

et

$$v(x,y) - \tilde{v}(x,y) = \int_0^x \left[ v_0(y+\mu(x-\tau), \tau) (u(y+\mu(x-\tau), \tau) - \tilde{u}(y+\mu(x-\tau), \tau)) \right.$$

$$\left. + u_0(y+\mu(x-\tau), \tau) (v(y+\mu(x-\tau), \tau) - \tilde{v}(y+\mu(x-\tau), \tau)) \right] d\tau$$

On montre facilement par récurrence sur  $n$  que

$$|u(x,y)-u(x,y)| \quad \text{et} \quad |v(x,y)-v(x,y)| \leq N \frac{(2ax)^{n+1}}{(n+1)!} \leq N \frac{(2aT)^{n+1}}{(n+1)!}$$

et par conséquent on a :

$$N \leq N \frac{(2aT)^{n+1}}{(n+1)!}$$

et en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , le terme  $\frac{(2aT)^{n+1}}{(n+1)!}$  tend vers 0 donc  $N$  est nécessairement nul. ■

### 1.2.2. Continuité de la solution du problème (S) par rapport à $(\varphi, \psi)$ .

On a vu que  $(u_0, v_0)$  solution du problème  $(P_0)$  dépend d'une façon continue de  $(\varphi, \psi)$  et supposons de même pour les fonctions  $b_1$  et  $b_2$ . Montrons que la solution  $(u, v)$  du problème (S) est continue par rapport à  $(\varphi, \psi)$ .

La suite  $(W_n, \gamma_n)$  définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} W_0(x, y) = h_1(y + \lambda x) \\ \gamma_0(x, y) = h_2(y + \mu x) \\ \\ W_{n+1}(x, y) = G_1(W_n, \gamma_n)(x, y) \\ \gamma_{n+1}(x, y) = G_2(W_n, \gamma_n)(x, y) \end{array} \right. \quad \text{pour } n \geq 1$$

est continue par rapport à  $(\varphi, \psi)$  pour tout  $n$ .

D'autre part  $(u,v) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (W_n, \gamma_n)$  dans F. On a :

$$\begin{aligned} & ||(u(\varphi, \psi), v(\varphi, \psi)) - (u(\varphi_0, \psi_0), v(\varphi_0, \psi_0))|| \\ &= ||(u(\varphi, \psi), v(\varphi, \psi)) - (W_n(\varphi, \psi), \gamma_n(\varphi, \psi)) + (W_n(\varphi, \psi), \gamma_n(\varphi, \psi)) \\ &- (W_n(\varphi_0, \psi_0), \gamma_n(\varphi_0, \psi_0)) + (W_n(\varphi_0, \psi_0), \gamma_n(\varphi_0, \psi_0)) - (u(\varphi_0, \psi_0), v(\varphi_0, \psi_0))|| \\ &\leq ||(u(\varphi, \psi), v(\varphi, \psi)) - (W_n(\varphi, \psi), \gamma_n(\varphi, \psi))|| \\ &+ ||(W_n(\varphi, \psi), \gamma_n(\varphi, \psi)) - (W_n(\varphi_0, \psi_0), \gamma_n(\varphi_0, \psi_0))|| \\ &+ ||(W_n(\varphi_0, \psi_0), \gamma_n(\varphi_0, \psi_0)) - (u(\varphi_0, \psi_0), v(\varphi_0, \psi_0))|| \end{aligned}$$

Comme  $(u,v) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (W_n, \gamma_n)$  dans F et  $(W_n, \gamma_n)$  est continue en  $(\varphi_0, \psi_0)$  pour tout n, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \exists n > N_0, \exists r > 0, \forall (\varphi, \psi) \in B((\varphi_0, \psi_0), r)$$

boule de E tel que chacun des termes ci-dessus est  $\leq \varepsilon/3$ . D'où la continuité de  $(u,v)$  par rapport à  $(\varphi_0, \psi_0)$ . ■

Remarque.

Comme  $(\varphi, \psi)$  sont supposées de classe  $C^2$ ,  $(u_0, v_0)$  le sont aussi et si on suppose que  $b_1, b_2, h_1$  et  $h_2$  sont de classe  $C^2$ , on montre que la solution  $(u,v)$  du problème (S) est de classe  $C^2$ .

CHAPITRE II

CONVERGENCE UNIFORME DES SERIES :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \varepsilon^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} v_n \varepsilon^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial y} \varepsilon^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x} \varepsilon^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial v_n}{\partial y} \varepsilon^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial v_n}{\partial x} \varepsilon^n.$$

-----

II.1. CONVERGENCES UNIFORME DES SERIES :  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \varepsilon^n$  ET  $\sum_{n=0}^{\infty} v_n \varepsilon^n$ .

Soit le problème de Cauchy ( $P_n$ ) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{\lambda}(u_n) = u_{n-1} + \alpha v_{n-1} - (v_0 u_n + \dots + u_0 v_n) \\ L_{\mu}(v_n) = \beta u_{n-1} + \gamma v_{n-1} + (v_0 u_n + \dots + u_0 v_n) \\ u_n(0,y) = v_n(0,y) = 0 \end{array} \right.$$

Notations :

$$\Omega_T = [0, T] \times [0, 2]$$

$$\|u_0\|_{\infty} = \sup_{(x,y) \in \Omega_T} |u_0(x,y)|, \quad \|v_0\|_{\infty} = \sup_{(x,y) \in \Omega_T} |v_0(x,y)|$$

$$A = \sup\left(1+|\alpha|, \sup(1, |\gamma|+|\beta|)\right) \cdot \sup\left(\|u_0\|_{\infty}, \|v_0\|_{\infty}\right)$$

$$\delta = \sup\left(1+|\alpha|, \sup(1, |\beta|+|\gamma|)\right)$$

$$L = \sup\left(\frac{\delta}{2} (e^{2AT} - 1), \frac{1}{2A} (e^{2AT} - 1)\right)$$

$$P = \sup \left( \left\| \frac{\partial u_0}{\partial y} \right\|_{\infty}, \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\|_{\infty}, \left\| \frac{\partial v_0}{\partial y} \right\|_{\infty}, \left\| \frac{\partial v_0}{\partial x} \right\|_{\infty} \right)$$

$$Q_T = \sqrt{L(\delta+2L)}$$

$$M = \sup(\|\psi+\alpha\psi\|_{\infty}, \|\beta\psi+\gamma\psi\|_{\infty})$$

II.1.1. Lemme.

Pour tout  $n \geq 1$  et tout  $(x,y)$  dans  $\Omega_T$  on a :

$$|u_n(x,y)| \text{ et } |v_n(x,y)| \leq a_n Q_T^{2n-1}$$

où  $(a_n)_{n \geq 1}$  est la suite numérique définie comme suit :

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, 2, 3 \\ a_{n-1} a_1 + \dots + a_2 a_{n-2} & \text{si } n \geq 4 \end{cases}$$

Démonstration.

$n = 1$

$$(P_1) \begin{cases} L_{\lambda}(u_1) = -v_0 u_1 - u_0 v_1 + u_0 + \alpha v_0 \\ L_{\mu}(v_1) = v_0 u_1 + u_0 v_1 + \beta u_0 + \gamma v_0 \\ u_1(0,y) = v_1(0,y) = 0 \end{cases}$$

Si on prend  $b = \sup(\|u_0 + \alpha v_0\|_{\infty}, \|\beta u_0 + \gamma v_0\|_{\infty})$ , la solution du problème  $(P_1)$  vérifie l'inégalité de Haar :

$$|u_1(x,y)| \text{ et } |v_1(x,y)| \leq \frac{b}{2 \sup(\|u_0\|_{\infty}, \|v_0\|_{\infty})} \left( e^{2T \sup(\|u_0\|_{\infty}, \|v_0\|_{\infty})} - 1 \right)$$

Comme  $b \leq A$  et la fonction de  $a$  :  $f_T(a) = \frac{1}{2a} (e^{2aT} - 1)$  est croissante sur  $]0, +\infty[$  on a finalement :

$$|u_1(x,y)| \text{ et } |v_1(x,y)| \leq \frac{1}{2} (e^{2AT} - 1) \leq L \leq Q_T = a_1 Q_T$$

Supposons maintenant que cette inégalité soit vérifiée pour tout  $k \leq n$ .

$$(P_{n+1}) \begin{cases} L(u_{n+1}) = u_n + \alpha v_n - (v_0 u_{n+1} + \dots + u_0 v_{n+1}) \\ L(v_{n+1}) = \beta u_n + \gamma v_n + (v_0 u_{n+1} + \dots + u_0 v_{n+1}) \\ u_{n+1}(0,y) = v_{n+1}(0,y) = 0. \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned} |u_n + \alpha v_n - (u_n v_1 + \dots + u_1 v_n)| &\leq |u_n| + |\alpha| |v_n| + |u_n| |v_1| + |u_1| |v_n| + \\ &+ |u_{n-1}| |v_2| + \dots + |u_2| |v_{n-1}| \leq a_n Q_T^{2n-1} (1 + |\alpha| + 2L) + \\ &+ (a_{n-1} a_2 + \dots + a_2 a_{n-1}) Q_T^{2n} \end{aligned}$$

et en appliquant l'inégalité de Haar à  $(u_{n+1}, v_{n+1})$  on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(x,y)| \text{ et } |v_{n+1}(x,y)| &\leq \left( a_n Q_T^{2n-1} (\delta + 2L) + (a_{n-1} a_2 + \dots + a_2 a_{n-1}) \right) \\ &\quad \times Q_T^{2n} \left( \frac{e^{2AT} - 1}{2A} \right) \\ &\leq a_n a_1 Q_T^{2n-1} L(2L + \delta) + (a_{n-1} a_2 + \dots + a_2 a_{n-1}) L Q_T^{2n} \\ &\leq (a_n a_1 + \dots + a_2 a_{n-1}) Q_T^{2n+1} = a_{n+1} Q_T^{2n+1} \quad \blacksquare \end{aligned}$$



II.1.2. Lemme.

La série entière  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$  a pour rayon de convergence  $\frac{1}{3}$ .

Démonstration.

La suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  est définie par :

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = 1, 2, 3 \\ a_{n-1} + a_{n-2} & n \geq 4 \end{cases}$$

Supposons que cette série ait pour rayon de convergence  $R$ . On a donc :

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

en posant  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ , on vérifie facilement qu'on a :

$$(f(z))^2 - (z+1)f(z) + z^2 + z = 0.$$

En résolvant cette équation du second degré et sachant que  $f(0) = 0$ , on trouve :

$$f(z) = \frac{1}{2} (z+1 - \sqrt{(1+z)(1-3z)})$$

qui est holomorphe dans le disque  $D(0, \frac{1}{3})$ . ■

II.1.3. Proposition.

Pour tout réel  $T$  strictement positif et tout  $\varepsilon$  appartenant à l'intervalle  $]-\frac{1}{30_T^2}, \frac{1}{30_T^2}[$  les séries :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \varepsilon^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n \varepsilon^n$$

convergent uniformément sur  $\Omega_T$ .

Démonstration.

On a :

$$|u_n(x,y)| \quad \text{et} \quad |v_n(x,y)| \leq a_n Q_T^{2n-1} = \frac{a_n}{Q_T} (Q_T^2)^n$$

Donc :

$$|u_n(x,y)\varepsilon^n| \quad \text{et} \quad |v_n(x,y)\varepsilon^n| \leq \frac{a_n}{Q_T} (Q_T^2|\varepsilon|)^n$$

et comme  $Q_T^2|\varepsilon| < 1/3$ , la série  $\sum_{n \geq 1} a_n (Q_T^2\varepsilon)^n$  converge et par conséquent les deux séries  $\sum_{n \geq 1} u_n \varepsilon^n$  et  $\sum_{n \geq 1} v_n \varepsilon^n$  convergent uniformément sur  $\Omega_T$ . ■

II.2. CONVERGENCE UNIFORME DES SERIES DERIVEES.

Faisons :

$$\frac{\partial u_n}{\partial y} = \tilde{u}_n \quad , \quad \frac{\partial v_n}{\partial y} = \tilde{v}_n$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \bar{u}_n \quad , \quad \frac{\partial v_n}{\partial x} = \bar{v}_n$$

Puisque  $\psi$  et  $\varphi$  sont de classe  $C^2$ , d'après la remarque du chapitre I,  $(u_n, v_n)$  est de classe  $C^2$ . Donc  $(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n)$  vérifie le système suivant pour  $n \geq 1$  :

$$\left\{ \begin{aligned}
 L_\lambda(\hat{u}_n) &= (-v_0)\hat{u}_n + (-u_0)\hat{v}_n + \hat{u}_{n-1} + \alpha\hat{v}_{n-1} - (u_n\hat{v}_0 + \dots + u_1\hat{v}_{n-1}) \\
 &\quad - (\hat{u}_{n-1}v_1 + \dots + \hat{u}_0v_n) \\
 L_\mu(\hat{v}_n) &= v_0\hat{u}_n + u_0\hat{v}_n + \beta\hat{u}_{n-1} + \gamma\hat{v}_n + (u_n\hat{v}_0 + \dots + u_1\hat{v}_{n-1}) \\
 &\quad + (\hat{u}_{n-1}v_1 + \dots + \hat{u}_0v_n) \\
 \hat{u}_n(0,y) &= \hat{v}_n(0,y) = 0.
 \end{aligned} \right.$$

$(\bar{u}_n, \bar{v}_n)$  vérifie le système suivant pour  $n \geq 1$  :

$$\left\{ \begin{aligned}
 L_\lambda(\bar{u}_n) &= -v_0\bar{u}_n - u_0\bar{v}_n + \bar{u}_{n-1} + \alpha\bar{v}_{n-1} - (u_n\bar{v}_0 + \dots + u_1\bar{v}_{n-1}) \\
 &\quad - (\bar{u}_{n-1}v_1 + \dots + \bar{u}_0v_n) \\
 L_\mu(\bar{v}_n) &= v_0\bar{u}_n + u_0\bar{v}_n + \beta\bar{u}_{n-1} + \gamma\bar{v}_{n-1} + (u_n\bar{v}_0 + \dots + u_1\bar{v}_{n-1}) \\
 &\quad + (\bar{u}_{n-1}v_1 + \dots + \bar{u}_0v_n)
 \end{aligned} \right.$$

Pour les conditions initiales

$$\left\{ \begin{aligned}
 \bar{u}_1(0,y) &= u_0(0,y) + \alpha v_0(0,y) = \psi(y) + \alpha\psi(y) \\
 \bar{v}_1(0,y) &= \beta u_0(0,y) + \gamma v_0(0,y) = \beta\psi(y) + \gamma\psi(y)
 \end{aligned} \right.$$

pour  $n \geq 2$  on a :

$$\bar{u}_n(0,y) = \bar{v}_n(0,y) = 0.$$

II.2.1. Lemme.

Pour tout  $n \geq 1$  et tout  $(x,y)$  dans  $\Omega_T$ ,  $\bar{u}_n, \bar{v}_n, \tilde{u}_n$  et  $\tilde{v}_n$  vérifient les inégalités suivantes :

$$|\bar{u}_n(x,y)| \quad \text{et} \quad |\bar{v}_n(x,y)| \leq d_n n e^{2AT} Q_T^{2n-2} + P c_n Q_T^{2n}$$

$$|\tilde{u}_n(x,y)| \quad \text{et} \quad |\tilde{v}_n(x,y)| \leq P c_n Q_T^{2n}$$

où les suites  $(c_n)_{n \geq 1}$  et  $(d_n)_{n \geq 1}$  sont définies par :

$$c_n = \begin{cases} 1 & , \quad n = 1 \\ 2(a_n + a_{n-1} c_1 + \dots + a_1 c_{n-1}) - c_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$$

$$d_n = \begin{cases} 1 & , \quad \text{si } n = 1 \\ 2(a_1 d_{n-1} + \dots + a_{n-1} d_1) - d_{n-1}, & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Démonstration.

Montrons par récurrence la première inégalité :  $(\bar{u}_1, \bar{v}_1)$  vérifie le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_\lambda(\bar{u}_n) = -v_o \bar{u}_1 - u_o \bar{v}_1 + \bar{u}_o + \alpha \bar{v}_o - \bar{v}_o u_1 - \bar{u}_o v_1 \\ L_\mu(\bar{v}_1) = v_o \bar{u}_1 + u_o \bar{v}_1 + \beta \bar{u}_o + \gamma \bar{v}_o + \bar{v}_o u_1 + \bar{u}_o v_1 \\ \bar{u}_1(0,y) = \psi(y) + \alpha \psi(y) \\ \bar{v}_1(0,y) = \beta \psi(y) + \gamma \psi(y). \end{array} \right.$$

On a :

$$|\bar{u}_0 + \bar{v}_0 - \bar{v}_0 u_1 - \bar{u}_0 v_1| \leq P(1+|\alpha|+2L) \leq P(\delta+2L)$$

De même on a :

$$|\beta \bar{u}_0 + \gamma \bar{v}_0 + \bar{v}_0 u_1 + \bar{u}_0 v_1| \leq P(|\beta|+|\gamma|+2L) \leq P(\delta+2L)$$

Donc en appliquant l'inégalité de Haar au système précédent, on a :

$$\begin{aligned} |\bar{u}_1(x,y)| \quad \text{et} \quad |\bar{v}_1(x,y)| &\leq M e^{2AT} + P(\delta+2L) \frac{1}{2A} (e^{2AT} - 1) \\ &\leq d_1 M e^{2AT} + c_1 P Q_T^2 \end{aligned}$$

Supposons que l'inégalité soit vraie pour tout  $k \leq n$ ,  $(\bar{u}_{n+1}, \bar{v}_{n+1})$  vérifie le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{aligned} L_\lambda(\bar{u}_{n+1}) &= -v_0 \bar{u}_{n+1} - u_0 \bar{v}_{n+1} + \bar{u}_n + \alpha \bar{v}_n - (u_{n+1} \bar{v}_0 + \dots + u_1 \bar{v}_n) \\ &\quad - (\bar{u}_n v_1 + \dots + \bar{u}_0 v_{n+1}) \\ L_\mu(\bar{v}_{n+1}) &= v_0 \bar{u}_{n+1} + u_0 \bar{v}_{n+1} + \beta \bar{u}_n + \gamma \bar{v}_n + (u_{n+1} \bar{v}_0 + \dots + u_1 \bar{v}_n) \\ &\quad + (\bar{u}_n v_1 + \dots + \bar{u}_0 v_n) \\ \bar{u}_{n+1}(0,y) &= \bar{v}_{n+1}(0,y) = 0 \end{aligned} \right.$$

On a :

$$\begin{aligned}
 & |u_n + \alpha v_n - (u_{n+1} v_0 + \dots + u_1 v_n) - (u_n v_1 + \dots + u_0 v_{n+1})| \\
 & \leq |u_n| + |\alpha| |v_n| + |u_1| |v_n| + |u_n| |v_1| + (|u_{n+1}| |v_0| + \dots + |u_2| |v_{n-1}|) \\
 & + (|u_{n-1}| |v_2| + \dots + |u_0| |v_{n+1}|) \\
 & \leq (d_n M e^{2AT} Q_T^{2n-2} + c_n P Q_T^{2n}) (1 + |\alpha| + 2L) \\
 & + 2(a_{n+1} P Q_T^{2n+1} + a_n Q_T^{2n-1} (d_1 M e^{2AT} + c_1 P Q_Y^2) + \dots \\
 & + a_2 Q_T^3 (d_{n-1} M e^{2AT} Q_T^{2n-4} + c_n P Q_T^{2n-2})) \\
 & = d_n M e^{2AT} Q_T^{2n-2} + c_n P Q_T^{2n} (1 + |\alpha| + 2L) \\
 & + 2 (a_{n+1} + a_n c_1 + \dots + a_2 c_{n-1}) P Q_T^{2n+1} + M e^{2AT} (a_n d_1 + \dots + a_2 d_{n-1}) Q_T^{2n-1}
 \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Haar à  $(u_{n+1}, v_{n+1})$  on a :

$$|\bar{u}_{n+1}(x,y)| \quad \text{et} \quad |v_{n+1}(x,y)| \leq d_{n+1} M e^{2AT} Q_T^{2n} + P c_n Q_T^{2n+2} .$$

De la même façon on montre par récurrence sur  $n$  que :

$$|\tilde{u}_n(x,y)| \quad \text{et} \quad |\tilde{v}_n(x,y)| \leq P c_n Q_T^{2n} \quad . \blacksquare$$

II.2.2. Lemme.

Les séries  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n$  ont pour rayon de convergence  $1/3$ .

Démonstration.

Supposons que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$  a pour rayon de convergence  $R$ .

Soient  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$  et  $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ . La suite  $(c_n)_{n \geq 1}$

vérifie par définition la relation suivante :

$$a_{n-1} c_1 + \dots + a_1 c_{n-1} = \frac{1}{2} (c_n + c_{n-1}) - a_n$$

Donc pour  $|z| < \inf(R, 1/3)$  on a :

$$f(z) g(z) = \frac{1}{2} (z+1) g(z) - f(z) + \frac{1}{2} z$$

et sachant que  $f(z) = \frac{1}{2} (z + 1 - \sqrt{(1+z)(1-3z)})$ ,

$$g(z) = \frac{-1}{\sqrt{(1+z)(1-3z)}} + 1$$

qui est holomorphe dans le disque  $D(0, 1/3)$  et de la même façon, on déduit que sa série entière  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n$  a pour rayon de convergence  $1/3$ . ■

II.2.3. Proposition.

Pour tout réel  $T$  strictement positif et tout  $\varepsilon$  dans l'intervalle

$\left] -\frac{1}{30T^2}, \frac{1}{30T^2} \right[$ , les séries :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial y} \varepsilon^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x} \varepsilon^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial v_n}{\partial y} \varepsilon^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial v_n}{\partial x} \varepsilon^n$$

convergent uniformément sur  $\Omega_T$ .

Démonstration.

Elle est analogue à celle de la proposition I.1.3. ■

II.2.4. Théorème.

Pour tout réel  $T$  positif et tout  $\varepsilon$  appartenant à l'intervalle  $\left] -\frac{1}{30_T^2}, \frac{1}{30_T^2} \right[$ , le problème (P) admet une solution  $2\pi$ -périodique en  $y$

$(u,v)$  s'écrivant sous la forme :

$$\begin{cases} u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \varepsilon^n \\ v = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \varepsilon^n \end{cases}$$

De plus toute solution du problème (P) s'écrivant sous la forme précédente est unique et est continue par rapport aux conditions initiales.

Démonstration.Unicité de la solution.

Pour tout  $n$  le problème  $(P_n)$  admet une solution  $(u_n, v_n)$  unique.

Donc le problème (P) admet

$$\begin{cases} u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \varepsilon^n \\ v = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \varepsilon^n \end{cases}$$

comme solution unique.



Continuité.

Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$   $(u_n, v_n)$  est continue par rapport à  $(\phi, \psi)$ .

Il suffit donc de montrer que la convergence des séries est uniforme sur tout compact de  $E$ . En effet  $O_T$  est une fonction continue en  $(\phi, \psi)$ . Donc on a la convergence uniforme sur tout compact de  $E$  des deux séries :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \varepsilon^n \\ v = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \varepsilon^n \end{array} \right. \quad \blacksquare$$

Conclusion.

1) Etant donné le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{\lambda}(u) = \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \frac{\partial u}{\partial y} = au + bv - uv \\ L_{\mu}(v) = \frac{\partial v}{\partial x} - \mu \frac{\partial v}{\partial y} = cu + dv + uv \\ u(0, y) = \phi(y) \\ v(0, y) = \psi(y) \end{array} \right.$$

pour  $a, b, c, d$  des paramètres "assez petits", on trouve une solution  $2\pi$ -périodique en  $y$  sur  $[0, T] \times [0, 2\pi]$  continue par rapport à  $(\phi, \psi)$ .

2) La méthode précédente devrait s'appliquer au système :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{\lambda}(u) = f(u, v, \varepsilon) \\ L_{\mu}(v) = g(u, v, \varepsilon) \end{array} \right.$$

soumis aux mêmes conditions initiales où  $f$  et  $g$  désignent des fonctions :

$$f(u, v, \varepsilon) = au + bv - uv + \sum_{n \geq 1} \varepsilon^n f_n(u, v)$$

$$g(u, v, \varepsilon) = cu + dv + uv + \sum_{n \geq 1} \varepsilon^n g_n(u, v).$$

On résout d'abord le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{\lambda}(u_0) = au_0 + bv_0 - u_0 v_0 \\ L_{\mu}(v_0) = cu_0 + dv_0 + u_0 v_0 \\ u_0(0,y) = \phi(y) \\ v_0(0,y) = \psi(y) \end{array} \right.$$

et on cherche la solution sous la forme

$$u = u_0 + \sum_{n \geq 1} u_n \varepsilon^n$$

$$v = -v_0 + \sum_{n \geq 1} v_n \varepsilon^n$$

avec  $(u_n, v_n)$  solution du problème pour  $n \geq 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{\lambda}(u_n) = au_n + bv_n - (v_0 u_n + \dots + u_0 v_n) + f_n(u_{n-1} v_{n-1}) \\ L_{\mu}(v_n) = cu_n + dv_n + (v_0 u_n + \dots + u_0 v_n) + g_n(u_{n-1} v_{n-1}) \\ u_n(0,y) = 0 \\ v_n(0,y) = 0. \end{array} \right.$$

BIBLIOGRAPHIE

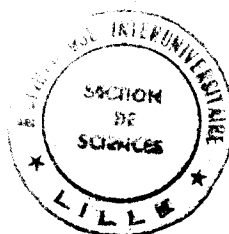
-----

- [1] M. YAMAGUTI, N. NIIZEKI : *On the Cauchy problem for a semi-linear hyperbolic system.*  
J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ) 20-4 (1980), p. 625-634.
- [2] H. HASIMOTO : *Exact solution of a certain semi-linear system of partial differential equations related to Mignating Predation Problem.*  
Proc. Japan. Acad. 50 (1974) p. 623-627.
- [3] PETROVOSKY : *Lectures on partial differential equation p. 67-72.*

\*

\*

\*



## RÉSUMÉ

(A) Dans la première partie, nous donnons une extension du lemme du Dubovitskii-Milyutin au cas où deux des cônes sont d'intérieur vide. Ce résultat est appliqué à l'étude de la régularité des multiplicateurs pour un problème de type mini-max avec contraintes, sous des hypothèses faibles de dérivabilité directionnelle.

(B) Dans une seconde partie, nous examinons l'existence d'une solution périodique en  $y$  d'un système (S) emprunté à la biomathématique :

$$(S) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \frac{\partial u}{\partial y} = au + bv - uv \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \mu \frac{\partial v}{\partial y} = cu + dv - uv \end{cases}$$

soumis aux conditions initiales  $u(0,y) = \psi(y)$ ,  $v(0,y) = \Psi(y)$ . La méthode inspirée des travaux de Yamaguti et de Hasimoto revient à résoudre d'abord le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \frac{\partial u}{\partial y} = uv \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \mu \frac{\partial v}{\partial y} = uv \end{cases}$$

et à montrer sous des hypothèses limitant les nombres  $a, b, c, d$  que le système (S) possède une solution périodique en  $y$  unique dépendant continûment des données périodiques  $\psi$  et  $\Psi$ , obtenue par un développement en série entière.

MOTS CLES DE LA PREMIERE PARTIE :

DUALITE,  
MULTIPLICATEURS,  
CONTRAINTES,  
DERIVABILITE DIRECTIONNELLE.

MOTS CLES DE LA DEUXIEME PARTIE :

SOLUTION PERIODIQUE, BIOMATHEMATIQUE.