N° d'ordre : 1152

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE 3ème CYCLE

Mathématiques Appliquées

Alami LEMBARKI

METHODES DE PROJECTION ET EXTENSIONS : ETUDE THEORIQUE ET PRATIQUE.

Thèse soutenue le Jeudi 22 mars 1984 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :		
	C. BREZINSKI	Président et Rapporteur
	J. BEUNEU	Rapporteur
	F. CHATELIN	Examinateur
	B. GERMAIN BONNE	Examinateur

P R O F E S S E U R S CLASSE EXCEPTIONNELLE

M. CONSTANT Eugène	I.E.E.A.
M. FOURET René	Physique
M. GABILLARD Robert	I.E.E.A.
M. MONTREUIL Jean	Biologie
M. PARREAU Michel	Mathématiques
M. TRIDOT Gabriel	Chimie
M. VIVIER Emile	Biologie
M. WERTHEIMER Raymond	Physique

P R O F E S S E U R S 1ère classe

M. BACCHUS Pierre	Mathématiques
M. BEAUFILS Jean-Pierre (dét.)	Chimie
M. BIAYS Pierre	G.A.S.
M. BILLARD Jean (dét.)	Physique
M. BOILLY Bénoni	Biologie
M. BOIS Pierre	Mathématiques
M. BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M. BOUGHON Pierre	Mathématiques
M. BOURIQUET Robert	Biologie
M. BREZINSKI Claude	I.E.E.A.
M. CELET Paul	Sciences de la Terre
M. CHAMLEY Hervé	Biologie
M. COEURE Gérard	Mathématiques
M. CORDONNIER Vincent	I.E.E.A.
M. DEBOURSE Jean-Pierre	S.E.S.
M. DYMENT Arthur	Mathématiques

PROFESSEURS 1ère classe (suite)

M. ESCAIG Bertrand	Physique
M. FAURE Robert	Mathématiques
M. FOCT Jacques	Chimie
M. GRANELLE Jean-Jacques	S.E.S.
M. GRUSON Laurent	Mathématiques
M. GUILLAUME Jean	Biologie
M. HECTOR Joseph	Mathématiques
M. LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M. LACOSTE Louis	Biologie
M. LAVEINE Jean Pierre	Sciences de la Terre
M. LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique
M. LHOMME Jean	Chimie
M. LOMBARD Jacques	S.E.S.
M. LOUCHEUX Claude	Chimie
M. LUCQUIN Michel	Chimie
M. MIGEON Michel Recteur à Grenoble	E.U.D.I.L.
M. MIGNOT Fulbert (dét.)	Mathématiques
M. PAQUET Jacques	Sciences de la Terre
M. PROUVOST Jean	Sciences de la Terre
M. ROUSSEAU Jean-Paul	Biologie
M. SALMER Georges	I.E.E.A.
M. SEGUIER Guy	I.E.E.A.
M. SIMON Michel	S.E.S.
M. STANKIEWICZ François	S.E.S.
M. TILLIEU Jacques	Physique
M. VIDAL Pierre	I.E.E.A.
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mathématiques

P R O F E S S E U R S 2ème classe

M.	ANTOINE Philippe	Mathématiques (Calais)
M.	BART André	Biologie
Mme	BATTIAU Yvonne	Géographie
M.	BEGUIN Paul	Mathématiques
M.	BELLET Jean	Physique
M.	BERZIN Robert	Mathématiques
M.	BKOUCHE Rudolphe	Mathématiques
M.	BODARD Marcel	Biologie
M.	BOSQ Denis	Mathématiques
M.	BRASSELET Jean-Paul	Mathématiques
M.	BRUYELLE Pierre	Géographie
M.	CAPURON Alfred	Biologie
M.	CARREZ Christian	I.E.E.A.
M.	CAYATTE Jean-Louis	S.E.S.
M.	CHAPOTON Alain	C.U.E.E.P.
M.	COQUERY Jean-Marie	Biologie
Mme	CORSIN Paule	Sciences de la Terre
M.	CORTOIS Jean	Physique
M.	COUTURIER Daniel	Chimie
M.	CROSNIER Yves	I.E.E.A.
M.	CURGY Jean-Jacques	Biologie
Mle	DACHARRY Monique	Géographie
M.	DAUCHET Max	I.E.E.A.
M.	DEBRABANT Pierre	E.U.D.I.L.
M.	DEGAUQUE Pierre	I.E.E.A.
M.	DELORME Pierre	Biologie
M.	DELORME Robert	S.E.S.
M.	DE MASSON D'AUTUME Antoine	S.E.S.
M.	DEMUNTER Paul	C.U.E.E.P.

PROFESSEURS 2ème classe (Suite 1)

M.	DENEL Jacques	I.E.E.A.
M.	DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques (Calais)
Mle	DESSAUX Odile	Chimie
M.	DEVRAINNE Pierre	Chimie
M.	DHAINAUT André	Biologie
Mme	DHAINAUT Nicole	Biologie
M.	DORMARD Serge	S.E.S.
M.	DOUKHAN Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M.	DUBOIS Henri	Physique
M.	DUBRULLE Alain	Physique (Calais)
M.	DUBUS Jean-Paul	I.E.E.A.
M.	FAKIR Sabah	Mathématiques
M.	FONTAINE Hubert	Physique
M.	FOUQUART Yves	Physique
M.	FRONTIER Serge	Biologie
M.	GAMBLIN André	G.A.S.
M.	GLORIEUX Pierre	Physique
M.	GOBLOT Rémi	Mathématiques
M.	GOSSELIN Gabriel (dét.)	S.E.S.
M.	GOUDMAND Pierre	Chimie
M.	GREGORY Pierre	I.P.A.
M.	GREMY Jean-Paul	S.E.S.
M.	GREVET Patrice	S.E.S.
M.	GUILBAULT Pierre	Biologie
M.	HENRY Jean-Pierre	E.U.D.I.L.
M.	HERMAN Maurice	Physique
M.	JACOB Gérard	I.E.E.A.
M.	JACOB Pierre	Mathématiques
M.	JEAN Raymond	Biologie
M.	JOFFRE Patrick	I.P.A.

PROFESSEURS 2ème classe (suite 2)

M. JOURNEL Gérard	E.U.D.I.L.
M. KREMBEL Jean	Biologie
M. LANGRAND Claude	Mathématiques
M. LATTEUX Michel	I.E.E.A.
Mme LECLERCQ Ginette	Chimie
M. LEFEVRE Christian	Sciences de la Terre
Mle LEGRAND Denise	Mathématiques
Mle LEGRAND Solange	Mathématiques (Calais)
Mme LEHMANN Josiane	Mathématiques
M. LEMAIRE Jean	Physique
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique
M. LOSFELD Joseph	C.U.E.E.P.
M. LOUAGE Francis(dét.)	E.U.D.I.L.
M. MACKE Bruno	Physique
M. MAIZIERES Christian	I.E.E.A.
M. MESSELYN Jean	Physique
M. MESSERLIN Patrick	S.E.S.
M. MONTEL Marc	Physique
Mme MOUNIER Yvonne	Biologie
M. PARSY Fernand	Mathématiques
Mle PAUPARDIN Colette	Biologie
M. PERROT Pierre	Chimie
M. PERTUZON Emile	Biologie
M. PONSOLLE Louis	Chimie
M. PORCHET Maurice	Biologie
M. POVY Lucien	E.U.D.I.L.
M. RACZY Ladislas	I.E.E.A.
M. RAOULT Jean François	Sciences de la Terre
M. RICHARD Alain	Biologie

PROFESSEURS 2ème Classe (suite 3)

M. RIETSCH François	E.U.D.I.L.
M. ROBINET Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M. ROGALSKI Marc	Mathématiques
M. ROY Jean-Claude	Biologie
M. SCHAMPS Joël	Physique
Mme SCHWARZBACH Yvette	Mathématiques
M. SLIWA Henri	Chimie
M. SOMME Jean	G.A.S.
Mle SPIK Geneviève	Biologie
M. STAROSWIECKI Marcel	E.U.D.I.L.
M. STERBOUL François	E.U.D.I.L.
M. TAILLIEZ Roger	Institut Agricole
Mme TJOTTA Jacqueline (dét.)	Mathématiques
M. TOULOTTE Jean-Marc	I.E.E.A.
M. TURRELL Georges	Chimie
M. VANDORPE Bernard	E.U.D.I.L.
M. VAST Pierre	Chimie
M. VERBERT André	Biologie
M. VERNET Philippe	Biologie
M. WALLART Francis	Chimie
M. WARTEL Michel	Chimie
M. WATERLOT Michel	Sciences de la Terre
Mme ZINN JUSTIN Nicole	Mathématiques

CHARGES DE COURS

M. ADAM Michel	S.E.S.

CHARGES DE CONFERENCES

M. BAFCOP Joël	I.P.A.
M. DUVEAU Jacques	S.E.S.
M. HOFLACK Jean	I.P.A.
M. LATOUCHE Serge	S.E.S.
M. MALAUSSENA DE PERNO Jean-Louis	S.E.S.
M. NAVARRE Christian	I.P.A.
M. OPIGEZ Philippe	S.E.S.

A la mémoire de mon père,
A la mémoire de ma mère.

A mes frères et soeurs,
A tous les ami(es),
A eux tous, qui, sans leur compréhension et leur aide, je n'aurais eu la chance d'élaborer ce travail.

Je remercie très vivement Monsieur Claude BREZINSKI, Professeur à l'Université de Lille I de m'avoir proposé ce sujet et d'avoir voulu présider le Jury de la Thèse.

Je remercie très vivement Monsieur Jean BEUNEU, Assistant à l'Université de Lille I d'avoir suivi mon travail avec beaucoup d'intérêt et une gentillesse sans pareille.

Je remercie très vivement Monsieur Bernard GERMAIN-BONNE, Professeur à l'Université de Lille I d'avoir voulu juger ce travail.

Je remercie très vivement Madame Françoise CHATELIN, Professeur de Grenoble d'avoir accepté de juger ce travail.

Je remercie très vivement Madame Bénédicte VANDROEMME pour le soin et la rapidité qu'elle a apportée dans la dactylographie de cette thèse, et à Madame Henriette DEBOCK pour le tirage.

METHODES DE PROJECTION ET EXTENSIONS :

ETUDES THEORIQUES ET PRATIQUES

INTRODUCTION

En 1953, dans son livre "Principles of numerical analysis" (1) A.S. HOUSEHOLDER, propose dans le cadre de la résolution des systèmes linéaires, un formalisme des méthodes de projection (minimisation) à plusieurs pas. Il met en évidence et sans condition de convergence, trois classes de méthodes, qui correspondent à des choix différents de produits scalaires.

En 1963, N. GASTINEL (2) introduit la surdécomposition de normes, en vue d'obtenir des conditions suffisantes de convergence linéaire de l'une des trois classes.

En 1976, J. BEUNEU (3) propose des conditions suffisantes de convergence linéaire plus faibles.

En même temps (1977), C. ESPINOZA (4) introduit les matrices liées en gradient, affaiblissant les conditions de la surdécomposition. Mais il obtient des conditions plus fortes que celles de J. BEUNEU.

Nous établissons dans le chapitre 1, une correspondance entre les trois classes de méthodes, par considération de systèmes linéaires équivalents. Ceci nous permet dans le chapitre 3, la recherche des méthodes correspondantes (ou homologues) à des méthodes de projection connues.

Nous montrons dans le chapitre 2, des insuffisances de la surdécomposition de normes vis-à-vis de la classe pour laquelle elle a été introduite. Ceci nous permet d'introduire une généralisation que nous désignons par "λ-décomposition de normes" et que nous étendons aux trois classes. Nous donnons ensuite une caractérisation théorique de la convergence linéaire des méthodes de projection. Nous proposons dans un dernier temps des conditions suffisantes de convergence plus faibles, englobant ainsi des cas de convergence logarithmique.

Dans le chapitre 3, nous donnons deux façons de mettre en oeuvre les méthodes de projection, par utilisation de l'algorithme R.P.A. de C. BREZINSKI.

Nous considérons dans le chapitre 4, les méthodes de projection par partitionnement. Nous proposons un critère de choix du vecteur à partitionner. Différents choix répondant aux conditions du critère sont donnés.

Nous définissons dans le chapitre 5, les méthodes à "itérations parallèles" à partir de méthodes de projections connues. Des conditions de convergence sont données. Ces méthodes pourraient avoir un grand intérêt lorsqu'on utilise des machines travaillant en parallèle.

Dans le dernier chapitre, nous proposons des méthodes itératives où la direction de progression est choisie de sorte que : la suite des itérés soit contenue dans une région donnée de l'espace, la suite des erreurs soit décroissante au sens d'une certaine norme. Ces méthodes sont désignées par "méthodes itératives à contraintes".

Références

(1) A.S. HOUSEHOLDER, *"Principles of numerical analysis"*. Mc Graw-Hill Book Company, Inc (1953).

(2) N. GASTINEL, *"Sur-décomposition de normes générales et procédés itératifs"*. Num. Math. 5, pp. 142-157, (1963).

(3) J. BEUNEU, *"Résolution des systèmes d'équations linéaires par les méthodes des compensations"*. ANO 69, Université de Lille I, (1976).

(4) C. ESPINOZA, *"Contribution à la résolution numérique de certains systèmes d'équations"*. Thèse de 3ème Cycle, Université de Grenoble (1977).

TABLE DES MATIERES

CORRESPONDANCE ENTRE METHODES DE PROJECTION

0 - INTRODUCTION

Les méthodes de projection considérées par HOUSEHOLDER et BAUER pour la résolution d'un système linéaire $Ax = b$ peuvent se scinder en trois classes principales [1], [2], [3], [4].

Ces méthodes ont été introduites comme constituant une même méthode pour résoudre un même système linéaire, la spécification d'une classe se fait par le choix du produit scalaire utilisé [1], [2], [5].

On montrera que ces méthodes peuvent être considérées comme constituant une même méthode de projection pour un même produit scalaire et que le passage d'une classe à une autre se fait par considération de systèmes équivalents.

1 - RAPPELS

Soit à résoudre le système linéaire $Ax = b$, où $A(n \times n)$ est régulière et $b \in \mathbb{R}^n$.

Soit E_j un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension k, $k \leq n$; et soit $V_j = (y_j^1, \ldots, y_j^k)$ une matrice dont les colonnes y_j^i, $i = 1, \ldots, k$ constituent une base de E_j.

On s'intéressera aux trois classes de méthodes de projection considérées par A.S. HOUSEHOLDER et BAUER [1], [2] :

* Classe A :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - V_j (V_j^T A V_j)^{-1} V_j^T \rho_j \\ \rho_j = Ax_j - b \end{cases} \qquad \text{(M.R.R.)}$$

où A est supposée symétrique définie positive.

On désignera cette classe par méthode de minimisation du résidu réduit.

* Classe B :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - V_j(V_j^T A^T A V_j)^{-1} V_j^T A^T \rho_j \\ \rho_j = Ax_j - b \end{cases} \qquad \text{(M.R.)}$$

dite méthode de minimisation du résidu ou de compensation [2], [3].

* Classe C :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - A^T V_j(V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T A^T \rho_j \\ \rho_j = Ax_j - b \end{cases} \qquad \text{(M.E.)}$$

sera désignée par méthode de minimisation de l'erreur [1], [2], [4].

2 - CORRESPONDANCE ENTRE CLASSES

Considérons les systèmes équivalents suivants :

(1) $Ax = b$

(2) $A^T Ax = A^T b$

(3) $A A^T y = b$, $x = A^T y$

Si A est symétrique définie positive, on considère en plus :

(4) $B^T x = B^{-1} b$

(5) $By = b$, $y = B^T x$

où $A = B B^T$

i) (A) appliquée au système (2) :

On obtient $\begin{cases} x_{j+1} = x_j - V_j(V_j^T A^T A V_j)^{-1} V_j^T r_j \\ r_j = A^T Ax_j - A^T b \end{cases}$

i.e. $$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - V_j(V_j^T A^T A V_j)^{-1} V_j^T A^T \rho_j \\ \rho_j = Ax_j - b \end{cases} \tag{B}$$

On obtient ainsi la méthode (B) pour résoudre (1).

ii) (A) appliquée à (3) :

Cela donne $$\begin{cases} y_{j+1} = y_j - V_j(V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T \rho_j \\ \rho_j = A A^T y_j - b \end{cases}$$

Posons $x_j = A^T y_j$

On obtient $$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - A^T V_j(V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T \rho_j \\ \rho_j = Ax_j - b \end{cases} \tag{C}$$

Inversement : Supposons A symétrique définie positive, $A = B B^T$.

iii) (B) appliquée à (4) :

On obtient $$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - V_j(V_j^T B B^T V_j)^{-1} V_j^T B r_j \\ r_j = B^T x_j - B^{-1} b \end{cases}$$

i.e. $$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - V_j(V_j^T A V_j)^{-1} V_j^T \rho_j \\ \rho_j = Ax_j - b \end{cases} \tag{A}$$

iv) (C) appliquée à (5) :

Cela donne $$\begin{cases} y_{j+1} = y_j - B^T V_j(V_j^T B B^T V_j)^{-1} V_j^T \rho_j \\ \rho_j = By_j - b \end{cases}$$

Posons $y_j = B^T x_j$

On obtient :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - V_j(V_j^T A V_j)^{-1} V_j^T \rho_j \\ \rho_j = Ax_j - b \end{cases} \qquad \text{(A)}$$

<u>Remarque</u> : On a vu dans i) et ii) que les méthodes (B) et (C) s'obtiennent par application de la méthode (A) aux systèmes (2) et (3) dont la matrice ($A^T A$ ou $A A^T$) est symétrique définie positive.

Ainsi pour passer de (B) à (C) ou inversement on peut supposer que A est symétrique définie positive, passer à (A) puis vers (B) ou (C) selon le besoin. L'hypothèse sur A sera affranchie lors de l'étude de la convergence.

On peut évidemment faire un passage direct comme on peut le voir ci-après.

Considérons les systèmes suivants :

(6) : $A^T y = A^T b$, $y = Ax$

(7) : $A^T y = A^{-1} b$, $x = A^T y$

v) (C) appliquée à (6) :

On obtient :

$$y_{j+1} = y_j - A V_j(V_j^T A^T A V_j)^{-1} V_j^T(A^T y_j - A^T b)$$

définissons x_j pour $y_j = Ax_j$.

Ce qui donne :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - V_j(V_j^T A^T A V_j)^{-1} V_j^T A^T \rho_j \\ \rho_j = Ax_j - b \end{cases} \qquad \text{(B)}$$

c'est donc la méthode (B) pour résoudre le système (1).

vi) (B) appliquée à (7) :

On obtient $y_{j+1} = y_j - V_j(V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T A(A^T y_j - A^{-1} b)$

donc $A^T y_{j+1} = A^T y_j - A^T V_j(V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T A(A^T y_j - A^{-1} b)$

comme $x_j = A^T y_j$

On a :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - A^T V_j(V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T \rho_j \\ \rho_j = Ax_j - b \end{cases} \qquad (C)$$

qui est la méthode (C) pour résoudre le système (1).

<u>*Définition 1.2.1.*</u>

Etant données deux méthodes (*) et (**) pour résoudre (1) et appartenant à deux classes différentes. On dira qu'elles sont homologues si l'une s'obtient par application de l'autre à l'un des systèmes de (2) à (7).

Les différents passages précédents peuvent se résumer dans le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
(A) \arrow[r] \arrow[d, swap, "\begin{array}{l} A A^T y = b \\ x = A^T y \end{array}"] & (B) \arrow[d, "\begin{array}{l} A = B B^T \\ B^T x = B^{-1} b \end{array}"] \arrow[dl, shift left, "\begin{array}{c} x = A^T y \\ A^T y = A^{-1} b \end{array}"] \\
(C) \arrow[r, swap, "\begin{array}{ll} A = B B^T & By = b \\ & y = B^T x \end{array}"] \arrow[ur, shift left, "\begin{array}{c} y = Ax \\ A^T y = A^T b \end{array}"] & (A)
\end{tikzcd}$$

<u>Remarque</u> : Une autre façon de rattacher ces méthodes serait de les considérer comme étant des méthodes de minimisation avec des normes différentes :

Soit M une matrice carrée de taille n, régulière.

Munissons $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire : $(x, y)_M = (Mx, My)$, soit $||\cdot||_M$ la norme associée.

Cherchons $x_{j+1} = x_j + A^T V_j \Lambda^*$

où : V_j une matrice à k colonnes linéairement indépendants.

$\Lambda^* \in \mathbb{R}^k$ solution du problème des moindres carrés :

$$\min_{\Lambda \in \mathbb{R}^k} ||x_{j+1} - x^*||_M = \min_{\Lambda \in \mathbb{R}^k} ||x_j - x^* + A^T V_j \Lambda||_M$$

x^* étant la solution du système $Ax = b$.

On a $\Lambda^* = -(V_j^T A M^T M A V_j)^{-1} V_j^T A M^T M S_j$

avec $S_j = x_j - x^*$.

d'où

$$(*) \begin{cases} x_{j+1} = x_j - A^T V_j (V_j^T A M^T M A V_j)^{-1} V_j^T A M^T M S_j \\ S_j = x_j - x \end{cases}$$

Cas particuliers :

i) $M = I$ on obtient (C)

ii) $M = A$ et $W_j = A^T V_j$ on obtient (B)

iii) Si A est symétrique définie positive, $A = C^T C$,

en prenant $M = C$ et $W_j = A^T V_j$ on obtient (A).

Remarque : La classe de méthodes (*) est identique à celle dans [5], qui sont évidemment des méthodes de projection de HOUSEHOLDER et BAUER. □

Théorème 1.2.1. (de correspondance)

i) Une méthode de (B) est convergente si et seulement si son homologue dans (C) est convergente.

ii) Si une méthode de (B) ou de (C) est convergente, et si A *est symétrique définie positive alors son homologue dans* A *est convergente.*

iii) Si une méthode de (A) est convergence alors ses homologues dans (B) et (C) sont convergentes.

Preuve :

Par définition même de deux méthodes homologues. □

Références

(1) A.S. HOUSEHOLDER and F.L. BAUER, "*On certain iterative methods for solving linear systems*". Numerish Mathematick 2 (1960), pp. 55-59.

(2) A.S. HOUSEHOLDER, "*Principles of numerical analysis*". Mc Graw-Hill Book Company, Inc (1953).

(3) J. BEUNEU, "*Résolution des systèmes d'équations linéaires par la méthode des compensations*". ANO 69 (1976).

(4) N. GASTINEL, "*Sur-décomposition de nromes générales et procédés itératifs*". Numer. Math. 5, pp. 142-157 (1963).

(5) C. ESPINOZA, "*Contribution à la résolution numérique de certains systèmes d'équations*". Thèse de 3ème Cycle, Université de Grenoble (1977).

λ-DECOMPOSITION DE NORMES ET CONVERGENCE DES METHODES DE PROJECTION

0 - INTRODUCTION

La sur-décomposition de normes introduite par N. GASTINEL [1] semble avoir deux buts :

1° Caractérisation d'une sous-classe convergente d'une classe de methodes de projection considérée par A.S. HOUSEHOLDER [2].

2° Construction de nouvelles méthodes de projection de la dite classe [3, 4].

On montrera que cette classe est une méthode de minimisation de l'erreur, qu'on désignera par (M.E.). Ceci nous permettra la mise en évidence de certaines insuffisances de la sur-décomposition de normes vis-à-vis de la M.E. Des conditions de convergence utilisant la sur-décomposition seront proposées.

On généralisera la notion de sur-décomposition de normes en introduisant la λ-décomposition de normes. Ce qui nous permettra de caractériser les méthodes M.E. à convergence linéaire.

On utilisera la correspondance entre classe définie dans le premier chàpitre pour étendre la notion de λ-décomposition aux autres classes. Des conditions suffisantes de convergence linéaire seront proposées.

On proposera ensuite des conditions de convergence englobant certains cas de convergence logarithmique.

1 - METHODE DE MINIMISATION DE L'ERREUR ET SUR-DECOMPOSITION DE NORMES

1° Méthode M.E.

Soit à résoudre le système linéaire $Ax = b$ où $A(n \times n)$ régulière, $b \in \mathbb{R}^n$.

Soit x^* la solution du système.

Itération

- $x \in \mathbb{R}^n$ une approximation connue de x^*.
- Choisire $V_x = (y_x^1, \ldots, y_x^k)$; $y_x^i \in \mathbb{R}^n$, $k \leq n$: $V_x^T A A^T V_x$ régulière.
- Chercher y, successeur de x :

$y = x + A^T V_x \Lambda^*$, $\Lambda^* \in \mathbb{R}^k$ solution de :

$$\min_{\Lambda \in \mathbb{R}^k} ||y - x^*|| = \min_{\Lambda \in \mathbb{R}^k} ||x - x^* + A^T V_x \Lambda||$$

Expression de y :

La solution de $\min_{\Lambda \in \mathbb{R}^k} ||x - x^* + A^T V_x \Lambda||$

est donnée par : $V_x^T A(x - x^* + A^T V_x \Lambda^*) = 0$.

Ce qui donne

$$\Lambda^* = -(V_x^T A A^T V_x)^{-1} V_x^T A(x - x^*)$$

d'où

$$y = x - A^T V_x (V_x^T A A^T V_x)^{-1} V_x^T A(x - x^*).$$

D'une façon itérative la méthode s'écrit, en notant V_j au lieu de V_{x_j} :

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ V_j \text{ choisie} \\ x_{j+1} = x_j - A^T\, V_j (V_j^T A\, A^T V_j)^{-1}\; V_j^T\, \rho_j \\ \rho_j = Ax_j - b \end{cases} \qquad \text{(M.E.)}$$

Définition 2.1.1.

La méthode précédente sera désignée par méthode de minimisation de l'erreur (M.E.).

2° Rappels

On va rappeler à présent la sur-décomposition de normes ainsi qu'un théorème de convergence de la méthode M.E. ; on peut consulter (1).

Définition 2.1.2.

On appelle sur-décomposition d'une norme vectorielle ϕ *à l'ordre* k *par rapport à* A *toute application :*

$$V : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^k,\; x \to V_x :$$

$$x^T\, V_x (V_x^T A\, A^T V_x)^{-1} V_x^T\, x \;\textit{trace}\; (V_x^T A\, A^T\; V_x) = \phi^2(x)$$

Elle est dite bornée si les éléments de V_x *sont bornés.*

Définition 2.1.3.

La méthode M.E. *est dite associée à une sur-décomposition d'une norme* ϕ *à l'ordre* k *par rapport à* A, *si :*

$$V_j \in (\mathbb{R}^n)^k \;\textit{et}\; \rho_j^T\, V_j (V_j^T A\, A^T V_j)^{-1} V_j^T\; \rho_j \;\textit{trace}\; (V_j^T A\, A^T V_j) = \phi^2(\rho_j)$$

Pour toute la suite chaque fois qu'on parlera d'une sur-décomposition de normes, ce sera celle correspondant à la M.E. considérée.

On confondra donc la sur-décomposition et la donnée des V_j servant dans l'itération de la méthode associée.

On relève dans (1) les deux théorèmes suivants :

Théorème 2.1.1.

Pour tout $1 \leq k \leq n$, A *régulière*, ϕ *donnés, il existe une infinité de sur-décomposition de* ϕ *par rapport à* A *à l'ordre* k.

On peut choisir V_x *tel que :*

1° Les colonnes de V_x *soient orthogonales pour le produit scalaire* $(x, y)_* = (Ax, Ay)$.

2° La sur-décomposition soit bornée.

Théorème 2.1.2.

Tout procédé M.E. associé à une sur-décomposition bornée d'une norme ϕ, *à l'ordre* k, *par rapport à* A, *pour résoudre le système* $Ax = b$, *est convergent.*

3° Etude de la sur-décomposition de normes

Proposition 2.1.1.

On a l'équivalence entre :

i) les éléments de V_x *sont bornés*

ii) Trace $(V_x^T A A^T V_x)$ *est bornée.*

Preuve :

$$\text{Trace } (V_x^T A A^T V_x) = \sum_{i=1}^{k} ||A^T y_x^i||^2$$

où $V_x = (y_x^1, \ldots, y_x^k)$.

Or $\exists m > 0$, $\exists M > 0$: $m\, ||y_x^i||^2 \leq ||A^T y_x^i||^2 \leq M\, ||y_x^i||^2$

donc, $m \sum_{i=1}^{k} ||y_x^i||^2 \leq \text{Trace } (V_x^T A A^T V_x) \leq M \sum_{i=1}^{k} ||y_x^i||^2$ $\square$

Définition 2.1.4.

La sur-décomposition de norme sera dite partiellement bornée, s'il existe une infinité d'indices j, *tels que Trace* $(V_j^T A A^T V_j)$ *soit bornée.*

Théorème 2.1.3.

Une sur-décomposition est partiellement bornée si et seulement si la M.E. associée est convergente de convergence non logarithmique.

Preuve :

On a $x_{j+1} = x_j - A^T V_j(V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T \rho_j$

Posons $S_j = x_j - x^*$.

donc $S_{j+1} = S_j - A^T V_j(V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T \rho_j$

donc,

$$\begin{aligned}||S_{j+1}||^2 = {} & ||S_j||^2 - 2\, S_j^T A^T V_j(V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T A S_j \\ & + S_j^T A^T V_j(V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T A A^T V_j(V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T A S_j\end{aligned}$$

donc,

$$||S_{j+1}||^2 = ||S_j||^2 - \rho_j^T V_j(V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T \rho_j$$

C.N.

La sur-décomposition étant partiellement bornée, on a :

$$\rho_j^T V_j(V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T \rho_j \text{ Trace } (V_j^T A A^T V_j) = \phi^2(\rho_j)$$

et $\exists N' \subset \mathbb{N}$ infini, $\exists \delta > 0$: Trace $(V_j^T A A^T V_j) \leq \delta \quad \forall j \in N'$.

Donc, $\rho_j^T V_j(V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j \rho_j \geq \dfrac{\phi^2(\rho_j)}{\delta} \qquad \forall j \in N'$

donc, $||s_{j+1}||^2 \leq ||s_j||^2 \left[1 - \dfrac{\phi^2(\rho_j)}{\delta ||s_j||^2}\right]$ $\forall j \in N'$

or, $\exists m > 0 : \dfrac{\phi^2(\rho_j)}{||s_j||^2} \geq m \quad \forall j.$

Donc,

$$||s_{j+1}||^2 \leq ||s_j||^2 \left[1 - \frac{m}{\delta}\right] \qquad \forall j \in N'$$

La suite $\{||s_j||\}_{N'}$ converge donc vers 0, et de convergence linéaire.

D'autre part la suite totale $\{||s_j||\}$ est décroissante minorée par 0, donc convergente de limite forcément 0.

C.S.

$$\begin{aligned} \text{On a } ||s_{j+1}||^2 &= ||s_j||^2 - \rho_j^T V_j (V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T \rho_j \\ &= ||s_j||^2 - \frac{\phi^2(\rho_j)}{\text{Trace}(V_j^T A A^T V_j)} \end{aligned}$$

donc,

$$\frac{||s_{j+1}||^2}{||s_j||^2} = 1 - \frac{\phi^2(\rho_j)}{||s_j||^2} \cdot \frac{1}{\text{Trace}(V_j^T A A^T V_j)}$$

or, $\exists m > 0, \exists M > 0 : m \leq \dfrac{\phi^2(\rho_j)}{||s_j||^2} \leq M$

donc $\dfrac{||s_{j+1}||^2}{||s_j||^2} \not\longrightarrow 1 \Rightarrow \text{Trace } (V_j^T A A^T V_j)$ partiellement bornée. □

<u>*Lemme*</u>

Soit E *un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$.

Soient V *et* W *deux matrices telles que les colonnes de chacune constituent une base de* E.

Alors, $W(W^T W)^{-1} W^T = V(V^T V)^{-1} V^T$

Preuve :

Posons $P = W(W^T W)^{-1} W^T$

P est idempotent et $Px \in E$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

de plus, $(x - Px, h) = 0$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall h \in E.$

En effet ;

$h \in E \Rightarrow \exists \Lambda \in \mathbb{R}^k$ $\quad (k = \dim E) : h = W\Lambda$

donc $h^T Px = \Lambda^T W^T W(W^T W)^{-1} W^T x$

$= \Lambda^T W^T x = h^T x.$

Px est donc la projection orthogonale de x sur E.

Comme la projection est unique on a $P = Q$ où $Q = V(V^T V)^{-1} V^T$. □

Proposition 2.1.2.

Pour toute méthode M.E. on a :

$$||s_{j+1}||^2 \leq ||s_j||^2 \left[1 - \frac{\gamma_2^2(A)}{k} \sum_{i=1}^{k} (\rho_j/||\rho_j||,\ y_j^i/||y_j^i||)^2\right]$$

où y_j^i $i = 1,\dots, k$ *sont les vecteurs colonnes de* V_j, *et* $\gamma_2(A)$ *le conditionnement de* A *mesuré par la norme euclidienne.*

Preuve :

Posons $W_j = \left[\frac{y_j^1}{||y_j^1||}, \dots, \frac{y_j^k}{||y_j^k||}\right]$, $S_j = x_j - x^*$.

D'après le lemme précédent on a encore :

$$x_{j+1} = x_j - A^T W_j (W_j^T A A^T W_j)^{-1} W_j \rho_j$$

donc, $||s_{j+1}||^2 = ||s_j||^2 - 2 s_j^T A^T W_j (W_j^T A A^T W_j)^{-1} W_j^T \rho_j$

$$+ \rho_j^T W_j^T (W_j^T A A^T W_j)^{-1} W_j^T A A^T W_j (W_j^T A A^T W_j)^{-1} W_j^T \rho_j$$

$$= ||s_j||^2 - \rho_j^T W_j (W_j^T A A^T W_j)^{-1} W_j^T \rho_j$$

donc,

$$||s_{j+1}||^2 \leq ||s_j||^2 \left[1 - \frac{||W_j^T \rho_j||^2}{||s_j||^2 \, \rho(W_j^T A A^T W_j)} \right]$$

or $\rho(W_j^T A A^T W_j) \leq \rho(A A^T)\, \rho(W_j^T W_j)$

$$\leq k \, \rho(A A^T).$$

Soit λ la plus petite valeur propre de $A A^T$.

On a,

$$\frac{||W_j^T \rho_j||^2}{||s_j||^2} = \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{\rho_j}{||\rho_j||}, \frac{y_j^i}{||y_j^i||} \right]^2 \times \frac{||\rho_j||^2}{||s_j||^2}$$

$$\geq \lambda^2 \sum_{i=1}^{k} \frac{\rho_j}{||\rho_j||}, \frac{y_j^i}{||y_j^i||}$$

donc $$\frac{||W_j^T \rho_j||^2}{||s_j||^2 \, \rho(W_j^T A A^T W_j)} \geq \frac{1}{k} \cdot \gamma_2^2(A) \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{\rho_j}{||\rho_j||}, \frac{y_j^i}{||y_j^i||} \right]^2 \qquad \square$$

Soit une méthode M.E. associée à une sur-décomposition de normes on a :

<u>*Théorème 2.1.4.*</u>

Si la quantité $\sum_{i=1}^{k} \left[\frac{\rho_j}{||\rho_j||}, \frac{y_j^i}{||y_j^i||} \right]^2$ *ne tend pas vers* 0 *alors, la sur-décomposition est partiellement bornée.*

<u>Preuve</u> :

On a $\rho_j^T V_j (V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T \rho_j$ Trace $(V_j^T A A^T V_j) = \phi^2(\rho_j)$

Soit $W_j = \left[\frac{y_j^1}{||y_j^1||}, \ldots, \frac{y_j^k}{||y_j^k||}\right]$

On a $\mathrm{Trace}\,(W_j^T A A^T W_j) = \sum_{i=1}^{k} \frac{||A^T y_j^i||^2}{||y_j^i||^2}$

$$\leq k\, \wedge^2$$

où $\wedge^2 = \max_{x \neq 0} \frac{||A^T x||^2}{||x||^2}$

Posons $M = \max_{x \neq 0} \frac{\phi^2(x)}{||x||^2}$.

D'après le lemme on a :

$$\rho_j^T V_j (V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T \rho_j = \rho_j^T W_j (W_j^T A A^T W_j)^{-1} W_j^T \rho_j$$

donc,

$$\rho_j^T W_j (W_j^T A A^T W_j)^{-1} W_j^T \rho_j = \frac{\phi^2(\rho_j)}{\mathrm{Trace}(V_j^T A A^T V_j)}$$

or,

$$\rho_j^T W_j (W_j^T A A^T W_j)^{-1} W_j^T \rho_j \geq \frac{||W_j^T \rho_j||^2}{\rho(W_j^T A A^T W_j)}$$

$$\geq \frac{||W_j^T \rho_j||^2}{\mathrm{Trace}(W_j^T A A^T W_j)}$$

donc,

$$\frac{\phi^2(\rho_j)}{\mathrm{Trace}\,(V_j^T A A^T V_j)} \geq \frac{||W_j^T \rho_j||^2}{\mathrm{Trace}(W_j^T A A^T W_j)} \geq \frac{||W_j^T \rho_j||^2}{k\, \wedge^2}$$

d'où

$$\frac{M}{\mathrm{Trace}(V_j^T A A^T V_j)} \geq \frac{||W_j^T \rho_j||^2}{k\, \wedge^2 ||\rho_j||^2} = \frac{1}{k\, \wedge^2} \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{\rho_j}{||\rho_j||}, \frac{y_j^i}{||y_j^i||}\right]^2$$

donc $\sum_{i=1}^{k} \left[\frac{\rho_j}{||\rho_j||}, \frac{y_j^i}{||y_j^i||} \right]^2 \not\longrightarrow 0 \Rightarrow \text{Trace}\,(V_j^T A A^T V_j) \not\longrightarrow \infty$ □

Voyons quelques insuffisances de la sur-décomposition de normes.

. <u>*Proposition 2.1.3.*</u>

1° Toute méthode M.E. est équivalente à une méthode M.E. associée à une sur-décomposition de normes si et seulement si $V_j^T \rho_j \neq 0$, *pour* $\rho_j \neq 0$.

2° Soit ψ *une norme quelconque de* $\mathbb{R}^n$

Si une méthode M.E. est associée à une sur-décomposition d'une norme ϕ elle est équivalente à une méthode M.E. associée à une sur-décomposition de la norme ψ.

<u>Preuve</u> :

1° C.N.

Soit $x_{j+1} = x_j - A^T V_j(V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T \rho_j$, $V_j = (y_j^1, \dots, y_j^k)$.

Soit $y_{j+1} = y_j - A^T W_j(W_j^T A A^T W_j)^{-1} W_j^T \rho_j$, une méthode équivalente et associée à une sur-décomposition d'une norme ϕ.

Supposons que $\rho_j \neq 0$.

Comme $\rho_j^T W_j(W_j^T A A^T W_j)^{-1} W_j^T \rho_j = \dfrac{\phi^2(\rho_j)}{\text{Trace}(W_j^T A A^T W_j)}$,

on a $W_j^T \rho_j \neq 0$.

Donc $y_{j+1} \neq y_j$, or $x_j = y_j \quad \forall j$

donc $x_{j+1} \neq x_j$ et par suite $V_j^T \rho_j \neq 0$.

C.S.

Considérons $Z_j = (\lambda_j y_j^1, \ldots, \lambda_j y_j^k)$, $\lambda_j \neq 0$

on a encore $x_{j+1} = x_j - A^T Z_j (Z_j^T A A^T Z_j)^{-1} Z_j^T \rho_j$ (lemme)

Posons $\mu_j^2 = \rho_j^T V_j (V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T \rho_j$ Trace $(V_j^T A A^T V_j) \neq 0$

Prenons $\lambda_j = \phi(\rho_j)/\mu_j$

on a,

$$\rho_j^T Z_j (Z_j^T A A^T Z_j)^{-1} Z_j^T \rho_j \times \text{Trace}\,(Z_j^T A A^T Z_j) = \phi^2(\rho_j)$$

car

$$\rho_j^T Z_j (Z_j^T A A^T Z_j)^{-1} Z_j^T \rho_j \times \text{Trace}(Z_j^T A A^T Z_j)$$

$$= \lambda_j^2\, \rho_j^T V_j (V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T \rho_j \times \text{Trace}(V_j^T A A^T V_j).$$

2°

Supposons que : $\rho_j^T V_j (V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T \rho_j \times$ Trace $(V_j^T A A^T V_j) = \phi^2\, \rho_j)$

on a $\phi^2(\rho_j) = \delta_j^2\, \psi^2(\rho_j)$ $\qquad \delta_j \neq 0.$

Prenons, $Z_j = \left[\dfrac{y_j^1}{\delta_j}, \ldots, \dfrac{y_j^k}{\delta_j}\right]$

La méthode M.E. définie par Z_j est équivalente à celle définie par V_j.

On a, $\rho_j^T Z_j (Z_j^T A A^T Z_j)^{-1} Z_j^T \rho_j \times$ Trace $(Z_j^T A A^T Z_j)$

$$= \rho_j^T V_j (V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T \rho_j \times \text{Trace}\,(V_j^T A A^T V_j) \times \frac{1}{\delta_j^2}$$

$$= \frac{\phi^2(\rho_j)}{\delta_j^2}$$

$$= \psi^2(\rho_j).$$

□

Exemple :

Considérons la méthode M.E. définie par :

$$x_{j+1} = x_j - \frac{||\rho_j||^2}{||A^T \rho_j||^2} A^T \rho_j$$

i.e. $V_j = \{\rho_j\}$

1° La méthode considérée n'est associée à aucune sur-décomposition de norme.

En effet, par définition d'une sur-décomposition d'une norme ϕ, on a :

$$\frac{||\rho_j||^4}{||A^T \rho_j||^2} \times ||A^T \rho_j||^2 = \phi^2(\rho_j) \qquad \text{i.e.} ||x||^2 = \phi(x) \ \forall x \text{ ce qui est}$$

impossible.

2° La même méthode est équivalente à une méthode M.E. associée à une sur-décomposition d'une norme ψ quelconque de $\mathbb{R}^n$.

Soit ψ une norme de $\mathbb{R}^n$.

Prenons $V_j = \left\{\frac{\psi(\rho_j)}{||\rho_j||^2} \rho_j\right\}$, ce qui ne modifie pas la méthode, compte tenu du lemme.

Le premier membre de la sur-décomposition s'écrit :

$$\frac{\psi^2(\rho_j)\ ||\rho_j||^4}{||\rho_j||^4 \frac{\psi^2(\rho_j)}{||\rho_j||^4} ||A^T \rho j||^2} \times \frac{\psi^2(\rho_j)}{||\rho_j||^4} ||A^T \rho_j||^2 \qquad \text{i.e. } \psi^2(\rho_j). \ \square$$

On voit ainsi que la sur-décomposition de deux normes différentes peut conduire à deux méthodes identiques. Donc le fait de sur-décomposer des normes différentes ne fournit pas des méthodes différentes.

Remarque : Il est à noter toutefois que l'expression algébrique d'une norme peut nous guider dans le choix des directions y_j^i, comme on le constate dans [3], ou dans l'exemple suivant :

$$\text{Soit } x_{j+1} = x_j - \frac{(v_j, \rho_j)}{||A^T v_j||^2} A^T v_j$$

La sur-décomposition de la norme euclidienne se traduit par :

$$(v_j, \rho_j)^2 = ||\rho_j||^2$$

On voit que l'ensemble des solutions est donné par les $V_j \in \mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$v_j = \frac{\rho_j}{||\rho_j||} + u_j \text{ avec } (u_j, \rho_j) = 0. \qquad \square$$

On verra dans ce qui suit une généralisation de la notion de sur-décomposition de normes, qui respecte l'invariance de la méthode par changement de base (Lemme) et l'équivalence des normes dans $\mathbb{R}^n$, contrairement à la sur-décomposition de normes.

2 - METHODE M.E. ET λ-DECOMPOSITION DE NORMES

Définition 2.2.1.

On appelera λ-décomposition d'une norme ϕ à l'ordre k par rapport à A, toute application :

$$V : \mathbb{R}^n \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^k \times \mathbb{R}_+^*$$

$$x \longrightarrow (V_x, \lambda_x)$$

telle que :

$$x^T V_x (V_x^T A A^T V_x)^{-1} V_x x \cdot \lambda_x = \phi^2(x)$$

Elle est dite bornée si λ_x est bornée.

Posons $V_x = (y_x^1, \ldots, y_x^k)$

Propriété 2.2.1.

1° Toute sur-décomposition (resp. bornée) d'une norme ϕ est une λ-décomposition (resp. bornée) de ϕ.

2° La λ-décomposition d'une norme ϕ est indépendante de la base choisie dans E_x, sous-espace engendré par $\{y_x^1, \ldots, y_x^k\}$.

3° Toute méthode M.E. telle que $V_j^T \rho_j \neq 0$, est associée à une λ-décomposition de norme.

4° Une méthode M.E. associée à une λ-décomposition d'une norme ϕ est associée à une λ-décomposition de toute autre norme.

Preuve :

1° Il suffit de prendre $\lambda_x = \text{Trace } (V_x^T A A^T V_x)$.

2° Soit la λ-décomposition d'une norme ϕ définie par (V_x, λ_x).

On sait que $x^T V_x(V_x^T A A^T V_x)^{-1} V_x^T x$ reste inchangé par changement de base dans E_x (Lemme).

Donc $x^T V_x(V_x^T A A^T V_x)^{-1} V_x^T \lambda_x = \phi^2(x)$ n'est pas modifiée par changement de base.

3° Soit la méthode M.E. :

$$x_{j+1} = x_j - A^T V_j(V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T \rho_j$$

$V_j^T \rho_j \neq 0 \Rightarrow \rho_j^T V_j(V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T \rho_j \neq 0.$

Il suffit donc de prendre $\lambda_j = \dfrac{\phi^2(\rho_j)}{\delta_j}$

où $\delta_j = \rho_j^T V_j(V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T \rho_j$.

4° Soit $\rho_j^T V_j(V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T \rho_j \ \lambda_j = \phi^2(\rho_j)$

Soit ψ une norme de $\mathbb{R}^n$ (quelconque).

Prenons $\mu_j = \lambda_j \dfrac{\psi^2(\rho_j)}{\phi^2(\rho_j)}$ i.e. $\mu_x = \lambda_x \dfrac{\psi^2(x)}{\phi^2(x)}$

On a $\rho_j^T\ V_j(V_j^T A A^T\ V_j)^{-1}\ V_j^T\ \rho_j\ \ \mu_j = \psi^2(\rho_j)$. □

Définition 2.2.2.

On dira qu'une méthode M.E. est associée à une λ-décomposition d'une norme ϕ, partiellement bornée, si la suite $\{\lambda_j\}$ possède une sous-suite bornée.

Théorème 2.2.1.

1° Une méthode M.E. est convergence de convergence non logarithmique si et seulement si elle est associée à une λ-décomposition partiellement bornée.

Preuve :

C.N. On a $\rho_j^T\ V_j(V_j^T A A^T\ V_j)^{-1}\ V_j^T\ \rho_j\ \ \lambda_j = \phi^2(\rho_j)$

et $x_{j+1} = x_j - A^T\ V_j(V_j^T A A^T\ V_j)^{-1}\ V_j^T\ \rho_j$

Posons $S_j = x_j - x^*$

On a

$$||s_{j+1}||^2 = ||s_j||^2 - \rho_j^T\ V_j(V_j^T A A^T\ V_j)^{-1}\ V_j^T\ \rho_j$$

donc $\dfrac{||s_{j+1}||^2}{||s_j||^2} = 1 - \dfrac{\phi^2(\rho_j)}{||s_j||^2\ \lambda_j}$

La convergence étant non logarithmique, il existe donc $N' \subset \mathbb{N}$ infini tel que :

$$\frac{||s_{j+1}||^2}{||s_j||^2} \underset{N'}{\not\longrightarrow} 1$$

Or $\exists m > 0,\ \exists M > 0 : m \leq \dfrac{\phi^2(\rho_j)}{||s_j||^2} \leq M \qquad \forall j \in \mathbb{N}$

donc $\lambda_j \underset{N'}{\not\longrightarrow} +\infty$.

C.S. Soit $x_{j+1} = x_j - A^T V_j (V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T \rho_j$

avec :

i) $\rho_j^T V_j (V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T \lambda_j = \phi^2(\rho_j)$

ii) $\exists N' \subset \mathbb{N}$ infini, $\exists \delta > 0 : \lambda_j \leq \delta \qquad \forall j \in N'$

On a $||s_{j+1}||^2 = ||s_j||^2 - \rho_j^T V_j (V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T \rho_j$ donc la suite $\{||s_j||\}$ est décroissante, de plus elle est minorée par 0, donc convergente.

Montrons qu'elle possède une sous-suite qui converge vers 0 et de convergence non logarithmique.

On a :

$$||s_{j+1}||^2 = ||s_j||^2 - \phi^2(\rho_j)/\lambda_j$$

$$= ||s_j||^2 \left[1 - \frac{\phi^2(\rho_j)}{||s_j||^2} \cdot \frac{1}{\lambda_j}\right]$$

Posons $\gamma = \min\limits_{x \neq 0} \dfrac{\phi^2(Ax)}{||x||^2}$

donc $||s_{j+1}||^2 \leq ||s_j||^2 \left[1 - \frac{\gamma}{\delta}\right] \quad \forall j \in N'$

donc $||s_j|| \xrightarrow[j \in N']{} 0$ et $\dfrac{||s_{j+1}||}{||s_j||} \xrightarrow[N']{\times} 1.$ □

<u>*Proposition 2.2.1.*</u>

Si $\sum\limits_{i=1}^{k} (\rho_j/||\rho_j||, y_j^i/||y_j^i||)^2$ *ne tend pas vers 0*

alors,

toute λ-décomposition de norme associée à la M.E. est partiellement bornée.

<u>Preuve</u> :

$$x_{j+1} = x_j - A^T\, V_j(V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T \rho_j,\ V_j = (y_j^1, \dots, y_j^k).$$

Soit ϕ une norme de $\mathbb{R}^n$ (on suppose que $V_j^T \rho_j \neq 0 \ \forall j$).

Il existe alors $\{\lambda_j\} > 0$:

$$\rho_j^T\, V_j(V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T \rho_j \times \lambda_j = \phi^2(\rho_j)$$

donc $\lambda_j = \dfrac{\phi^2(\rho_j)}{\delta_j}$ où $\gamma_j = V_j(V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T \rho_j$

or $\gamma_j = \rho_j^T\, W_j(W_j^T A A^T W_j)^{-1} W_j^T \rho_j$ où $W_j = \dfrac{y_j^1}{||y_j^1||}, \dots, \dfrac{y_j^k}{||y_j^k||}$

donc $\delta_j \geq \dfrac{||W_j^T \rho_j||^2}{\rho(W_j^T A A^T W_j)}$

$$\geq \frac{||W_j^T \rho_j||^2}{\text{Trace }(W_j^T A A^T W_j)} \geq \frac{||W_j^T \rho_j||^2}{k\, \wedge^2}$$

où $\wedge^2 = \max\limits_{x \neq 0} \dfrac{||Ax||^2}{||x||^2}$

donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} (\rho_j/||\rho_j||,\ y_j^i/||y_j^i||)^2 = \frac{||W_j^T \rho_j||^2}{||\rho_j||^2}$

$$\leq k\, \wedge^2 \frac{\delta_j}{||\rho_j||^2} \leq \frac{k\, \wedge^2\, \phi^2(\rho_j)}{\lambda_j\, ||\rho_j||^2}$$

comme $\exists m > 0,\ \exists M > 0 : m \leq \dfrac{\phi^2(\rho_j)}{||\rho_j||^2} \leq M$

On a,

$$\sum_{i=1}^{k} (\rho_j/||\rho_j||,\ y_j^i/||y_j^i||)^2 \leq k\, \wedge^2\, M \cdot \frac{1}{\lambda_j}$$

donc si le membre de gauche ne tend pas vers 0, la suite $\{\lambda_j\}$ possède une sous-suite bornée. $\square$

* Soit $V_j = (y_j^1, \ldots, y_j^k)$; les y_j^i linéairement indépendants.

Supposons que :

i) $V_j^T \rho_j \neq 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$

ii) $(A^T y_j^i, A^T y_j^i) = ||A^T y_j^i||^2 \delta_{iq}$; $i,q = 1,\ldots, k$

où $\delta_{iq} = 0$ si $i \neq q$ et $\delta_{ii} = 1$.

Soit ϕ une norme de $\mathbb{R}^n$ et $\{\lambda_j\}$ la suite correspondant à la λ-décomposition pour les V_j.

i.e. $\rho_j^T V_j (V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T \rho_j \quad \lambda_j = \phi^2(\rho_j)$.

Proposition 2.2.2.

Avec les notations et hypothèses précédentes, on a :

$$\sum_{i=1}^{k} (\rho_j/||\rho_j||, y_j^i/||y_j^i||)^2 \underset{j\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

si et seulement si la λ-décomposition est partiellement bornée.

Preuve :

On a, $V_j^T A A^T V_j = \begin{pmatrix} ||A^T y_j^1||^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & ||A^T y_j^k||^2 \end{pmatrix}$

donc,

$$\rho_j^T V_j (V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T \rho_j = \sum_{i=1}^{k} \left[\rho_j, \frac{y_j^i}{||A^T y_j^i||}\right]^2$$

$$= \frac{\phi^2(\rho_j)}{\lambda_j} \qquad \text{(définitions des } \lambda_j)$$

donc, $\dfrac{\phi^2(\rho_j)}{||\rho_j||^2} \times \dfrac{1}{\lambda_j} = \sum\limits_{i=1}^{k} (\rho_j/||\rho_j||,\ y_j^i/||y_j^i||)^2 \quad \dfrac{||y_j^i||^2}{||A^T\ y_j^i||^2}$

or, $\exists m > 0$, $\exists M > 0$, $\exists m' > 0$, $\exists M' > 0$ tels que

$$m \leq \frac{\phi^2(\rho_j)}{||\rho_j||^2} \leq M \text{ et } m' \leq \frac{||y_j^i||^2}{||A^T\ y_j^i||^2} \leq M'$$

d'où $\lambda_j \to \infty \iff \sum\limits_{i=1}^{k} (\rho_j/||\rho_j||,\ y_j^i/||y_j^i||)^2 \to 0.$ □

Proposition 2.2.3.

Une méthode M.E. dont les matrices V_j *vérifient :*

i) $||V_j^T\ \rho_j|| = \mu_j\ \phi(\rho_j)$, $\mu_j > 0 \quad \mu_j \not\longrightarrow 0$

ii) $\text{Trace } (V_j^T A A^T\ V_j) \leq M$

est associée à une λ*-décomposition partiellement bornée.*

Preuve :

On a $||V_j^T\ \rho_j|| > 0$ (pour $\rho_j \neq 0$)

donc,

$$\exists \lambda_j > 0 : \rho_j^T\ V_j(V_j^T A A^T\ V_j)^{-1}\ V_j^T\ \rho_j \times \lambda_j = \phi^2(\rho_j).$$

Soient m_j et M_j la plus petite et la plus grande valeur propre de $V_j^T A A^T\ V_j$.

$\exists \alpha_j : m_j \leq \alpha_j \leq M_j$ tel que

$$\rho_j^T\ V_j(V_j^T A A^T\ V_j)^{-1}\ V_j^T\ \rho_j = \alpha_j\ ||V_j^T\ \rho_j||^2$$

donc $\alpha_j\ ||V_j^T\ \rho_j||^2\ \lambda_j = \phi^2(\rho_j)$

donc $\alpha_j\ \mu_j^2\ \phi^2(\rho_j)\ \ \lambda_j = \phi^2(\rho_j)$

donc $\lambda_j = \dfrac{1}{\alpha_j\ \mu_j^2}$

Or Trace $(V_j^T A A^T V_j) \leq M \quad \forall j$

donc $\frac{1}{M} \leq \alpha_j \quad \forall j$

d'autre part : $\mu_j \not\longrightarrow 0 \Rightarrow \exists \delta > 0, \exists N' \subset \mathbb{N} : \mu_j \geq \delta \quad \forall j \in N'$.

Donc $\lambda_j \leq \frac{M}{\delta^2}$. □

Remarque : Si on impose dans la condition i) que $\mu_j \geq 1 \quad \forall j \in \mathbb{N}$, les V_j sont dits liées au gradient [5].

EXEMPLE D'APPLICATION

Soit la méthode M.E. définie par :

$$x_{j+1} = x_j - A^T V_j (V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T \rho_j \qquad (*)$$

Soit E_j le sous-espace engendré par les colonnes de V_j.

Proposition 2.3.1.

Si E_j *est tel que :*

$\exists N' \subset \mathbb{N}$ *infini*, $\exists N'' \subset \mathbb{N}$ *fini* :

$\forall j \in N' \quad \exists q_j \in N'' : (A^T A)^{q_j} \rho_j \in E_j$

Alors,

La méthode (*) est convergente de convergence non logarithmique.

Preuve :

Posons $V_j = (y_j^1, \ldots, y_j^k)$

On sait d'après le lemme que l'itération (*) n'est pas modifiée par changement de base dans E_j.

Si $(A^T A)^{q_j} \rho_j \in E_j$ prenons pour base :

$$W_j = \left(\frac{z_j^1}{||z_j^1||}, \ldots, \frac{z_j^k}{||z_j^k||}\right) \text{ avec } z_j^1 = (A^T A)^{q_j} \rho_j \text{ qu'on a complété.}$$

Pour assurer la convergence non logarithmique il suffit de montrer que :

$$\exists \delta > 0 : \left(\frac{z_j^1}{||z_j^1||}, \frac{\rho_j}{||\rho_j||}\right)^2 \geq \delta$$

or $$\left(\frac{\rho_j}{||\rho_j||}, \frac{z_j^1}{||z_j^1||}\right)^2 = \left(\frac{\rho_j}{||\rho_j||}, \frac{(A^T A)^{m_j} (A^T)^{L_j} (A^{L_j}) (A^T A)^{m_j} \rho_j}{||(A^T A)^{q_j} \rho_j||}\right)^2 \qquad (*)$$

où $q_j = 2m_j + L_j$ avec $L_j = 0$ ou 1.

Posons $D^{m_j} = A^{L_j}(A^T A)^{m_j}$

On a,

$$(*) = \left(\rho_j/||\rho_j||, \frac{(D^{m_j})^T D^{m_j} \rho_j}{||(D^{m_j})^T D^{m_j} \rho_j||}\right)^2$$

$$= \left(\frac{D^{m_j} \rho_j}{||\rho_j||}, \frac{D^{m_j} \rho_j}{||(D^{m_j}) D^{m_j} \rho_j||}\right)^2$$

$$= \frac{||D^{m_j} \rho_j||^2 \times ||D^{m_j} \rho_j||^2}{||\rho_j||^2 \, ||(D^{m_j})^T D^{m_j} \rho_j||^2}$$

$$\geq \frac{\lambda^2{}_{m_j}}{\Lambda^2{}_{m_j}}$$

où $\lambda_{m_j} = \min\limits_{x \neq 0} \frac{||D^{m_j} x||}{||x||}$ et $\Lambda_{m_j} = \max\limits_{x \neq 0} \frac{||D^{m_j} x||}{||x||}$

comme $m_j \in N"$ fini, $\exists \delta > 0 : \frac{\lambda^2{}_{m_j}}{\Lambda^2{}_{m_j}} \geq \delta$

donc $\left(\frac{\rho_j}{||\rho_j||}, \frac{z_j^1}{||z_j^1||}\right)^2 \geq \delta \qquad \forall j \in N'.$

Remarque : Soit $q \in \mathbb{N}$, si on prend $y_j^1 = (A^T A)^q \rho_j$ qu'on complète pour $y_j^2, \ldots, y_j^k$ d'une manière arbitraire la méthode est de convergence linéaire. □

3 - METHODES DE PROJECTION ET λ-DECOMPOSITION

On a vu dans le paragraphe précédent la notion de λ-décomposition de norme comme outil permettant de fournir des conditions de convergence de la méthode (M.E.). La correspondance établie dans le chapitre 1 nous permet d'étendre cette notion aux méthodes (M.R.) et (M.R.R).

a - Méthode (M.R.) associée à une λ-décomposition de norme

Soit la méthode (M.R.) définie par :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - V_j (V_j^T A^T A V_j)^{-1} V_j^T A^T \rho_j \\ \rho_j = Ax_j - b \end{cases} \qquad \text{(M.R.)}$$

où $V_j = (y_j^1, \ldots, y_j^k)$, les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ y_j^i $i = 1, \ldots, k$ sont linéairement indépendants.

Définition 2.3.1.

La méthode (M.R.) est dite associée à une λ-décomposition d'une norme ϕ à l'ordre k, par rapport à A si :

$$\forall j \; \exists \lambda_j > 0 : \rho_j^T A V_j (V_j^T A^T A V_j)^{-1} V_j^T A^T \rho_j \quad \lambda_j = \phi^2(\rho_j)$$

Elle est dite associée à une λ-décomposition de norme bornée respectivement partiellement bornée si la suite $\{\lambda_j\}$ est bornée respectivement possède une sous-suite bornée.

Théorème 2.3.1.

Une méthode (M.R.) est convergente de convergence linéaire si et seulement si elle est associée à une λ-décomposition de norme partiellement bornée.

Preuve :

Démonstration identique à celle du théorème 2.1.3. en raisonnant sur $||\rho_{j+1}||$ au lieu de $||s_{j+1}||$. □

Proposition 2.3.1.

$$||\rho_{j+1}||^2 \leq ||\rho_j||^2 \left[1 - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} \left(\rho_j/||\rho_j||,\ Ay_j^i/||Ay_j^i||\right)^2\right]$$

Preuve :

Même démonstration que celle de la proposition 2.1.2. en considérant $||\rho_{j+1}||$. □

Théorème 2.3.2.

Pour que la (M.R.) soit convergente et que $\lim\limits_{j\to\infty} \dfrac{||\rho_{j+1}||}{||\rho_j||} \neq 1$

il suffit que :

$$(**) \quad \sum_{i=1}^{k} \left[\rho_j/||\rho_j||,\ Ay_j^i/||Ay_j^i||\right]^2 \text{ ne tend pas vers } 0.$$

Si en plus, les y_j^i $i = 1,\dots, k$ *sont tels que :* $(Ay_j^i,\ Ay_j^p) = \delta_{ip}\ ||Ay_j^i||^2$ *la condition* (**) *est alors nécessaire et suffisante pour que la convergence de la (M.R.) ait lieu et que :*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{||\rho_{j+1}||}{||\rho_j||} \neq 1.$$

Preuve :

On procède de la même façon que dans la démonstration du théorème 2.1.4. et celle de la proposition 2.2.2. en considérant $||\rho_{j+1}||$. □

b - Méthode (M.R.R.) associée à une λ-décomposition de norme

Supposons la matrice A symétrique définie positive.

Soit la méthode (M.R.R.) définie par :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - V_j(V_j^T A V_j)^{-1} V_j^T \rho_j \\ \rho_j = Ax_j - b \end{cases} \qquad \text{(M.R.R.)}$$

$V_j = (y_j^1, \ldots, y_j^k)$; $y_j^1, \ldots, y_j^k$ linéairement indépendants.

<u>*Définition 2.3.2.*</u>

La méthode (M.R.R.) est dite associée à une λ-décomposition d'une norme ϕ à l'ordre k par rapport à A si :

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \exists \lambda_j > 0 : \rho_j^T V_j(V_j^T A V_j)^{-1} V_j^T \rho_j \quad \lambda_j = \phi^2(\rho_j).$$

Elle est dite associée à une λ-décomposition de norme bornée respectivement partiellement bornée si la suite $\{\lambda_j\}$ est bornée respectivement possède une sous-suite bornée.

<u>*Théorème 2.3.2.*</u>

Une méthode (M.R.R.) est convergente de convergence linéaire si et seulement si elle est associée à une λ-décomposition de norme partiellement bornée.

<u>Preuve</u> :

A étant symétrique définie positive elle s'écrit $A = B^T B$.

On procède de la même façon que pour le théorème 2.3.1. en considérant la norme du résidu réduit

$$r_j = Bx_j - B^{-1^T} b. \qquad \square$$

Proposition 2.3.2.

$$\bullet \; ||r_{j+1}||^2 \leq ||r_j||^2 \left[1 - \frac{\Gamma_2(A)}{k} \sum_{i=1}^{k} (\rho_j/||\rho_j||,\, y_j^i/||y_j^i||)^2\right]$$

$$\bullet \; ||\rho_{j+1}||^2 \leq ||\rho_j||^2 \left[\frac{1}{\Gamma_2(A)} - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} (\rho_j/||\rho_j||,\, y_j^i/||y_j^i||)^2\right]$$

où - $r_j = Bx_j - B^{-1^T} b$, *la matrice* B *est telle que* $A = B^T B$.

- $\Gamma_2(A)$ *est le rapport de la plus petite et la plus grande valeur propre de* A.

Preuve :

Le premier point se démontre de la même façon que la proposition 2.3.1. en considérant $||r_{j+1}||$.

Le deuxième point s'obtient à partir du premier en remarquant que

$$||\rho_{j+1}||^2 \leq \Lambda' \; ||r_{j+1}||^2 \text{ et } ||r_j||^2 \leq \frac{1}{\lambda'} \; ||\rho_j||^2$$

où λ' et Λ' sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de A. □

Théorème 2.3.4.

Une condition suffisante pour que la (M.R.R.) soit convergente et que $\lim\limits_{j \to \infty} \frac{||r_{j+1}||}{||r_j||} \neq 1$ *est que :*

(*) $\sum_{i=1}^{k} (\rho_j/||\rho_j||,\, y_j^i/||y_j^i||)^2$ *ne tend pas vers 0.*

Si en plus les y_j^i $r = 1,\dots, k$ *sont tels que* $(y_j^i, Ay_j^p) : \delta_{ip}(y_j^i, Ay_j^i)$, *la condition* (*) *est une condition nécessaire et suffisante pour que la (M.R.R.) soit convergente et de convergence linéaire.*

Preuve :

Démonstration identique à celle du théorème 2.3.2. en considérant $||r_{j+1}||$. □

4 - AFFAIBLISSEMENT DES HYPOTHESES DE CONVERGENCE

Les théorèmes précédents fournissent une condition suffisante de convergence non logarithmique (linéaire), condition basée sur les majorations des propositions 2.3.1, 2.3.2. et 2.1.2.

On va voir que ces majorations peuvent être raffinées, ce qui nous conduira à une condition suffisante de convergence logarithmique.

Utilisons le lemme suivant qu'on peut voir dans [6].

Lemme 2.4.1.

Soit $\{\mu_j\}$ *une suite rèlle telle que :*

$$\mu_j - \mu_{j+1} \geq \delta_j \, \mu_j$$

avec, $\mu_j > 0$ *et* $\delta_j \geq 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$

Alors :

$$\mu_j \leq \mu_0 \text{ Exp } \left(- \sum_{\rho=0}^{j-1} \delta_p \right)$$

où Exp *désigne la fonction exponentielle.*

Dans les propositions 2.1.2, 2.3.1. et 2.3.2. μ_j correspond respectivement à :

$$||s_j||^2, \; ||\rho_j||^2 \text{ et } ||r_j||^2.$$

En utilisant le lemme on a :

Proposition 2.4.1.

Pour les méthodes (M.E.), (M.R.) et (M.R.R.) on a respectivement :

i) $$||s_{j+1}||^2 \leq ||s_0||^2 \text{ Exp } \left(- \sum_{\rho=0}^{j} \delta_p \right)$$

où $$\delta_p = \frac{\gamma_2^2(A)}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(\rho_p/||\rho_p||, \, y_p^i/||y_p^i|| \right)^2$$

ii) $$||\rho_{j+1}||^2 \leq ||\rho_0||^2 \operatorname{Exp}\left(-\sum_{\rho=0}^{j} \alpha_p\right)$$

où $$\alpha_p = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} (\rho_p/||\rho_p||,\ Ay_p^i/||Ay_p^i||)^2$$

iii) $$||r_{j+1}||^2 \leq ||r_0||^2 \operatorname{Exp}\left(-\sum_{\rho=0}^{j} \beta_p\right)$$

où $$\beta_p = \frac{\Gamma_2(A)}{k} \sum_{i=1}^{k} (\rho_p/||\rho_p||,\ y_p^i/||y_p^i||)^2$$

Théorème 2.4.1.

Une condition suffisante pour que les méthodes (M.E.), (M.R.) et (M.R.R.) soient convergentes est qu'on ait respectivement :

i) $$\lim_{j\to\infty} \sum_{p=0}^{j} \delta_p = +\infty$$

ii) $$\lim_{j\to\infty} \sum_{p=0}^{j} \alpha_p = +\infty$$

iii) $$\lim_{j\to\infty} \sum_{p=0}^{j} \beta_p = +\infty$$ *avec A symétrique définie positive.*

Preuve :

Evidente à partir de la proposition 2.4.1. □

Remarque : Dans le théorème précédent δ_p, α_p et β_p peuvent tendre vers 0, la convergence (pouvant être logarithmique) est assurée tant que chacun soit le terme général d'une série divergente.

On donne Ci-dessous une deuxième extension des résultats de convergence.

Lemme 2.4.2.

Soit $\{\lambda_j\}$ *une suite réelle,* $\lambda_j > 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$

On a :

$\lambda_j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ *si et seulement si* $\frac{1}{\lambda_{j+1}} - \frac{1}{\lambda_j}$ *est le terme général d'une suite divergente.*

Preuve :

$$\frac{1}{\lambda_{j+1}} - \frac{1}{\lambda_0} = \sum_{p=0}^{j} \left(\frac{1}{\lambda_{p+1}} - \frac{1}{\lambda_p}\right)$$

donc $\lambda_{j+1} = \lambda_0 \left[1 + \lambda_0 \sum_{p=0}^{j} \left(\frac{1}{\lambda_{p+1}} - \frac{1}{\lambda_p}\right)\right]$ □

Avec les notations de la proposition 2.4.1. on a :

Théorème 2.4.2.

Une condition suffisante de convergence des méthodes (M.E.), (M.R.) et (M.R.R.) est qu'on ait respectivement :

i) $\lim_{j\to\infty} \sum_{p=0}^{j} \frac{\delta_p}{||\rho_p||^2} = +\infty$

ii) $\lim_{j\to\infty} \sum_{p=0}^{j} \frac{\alpha_p}{||\rho_p||^2} = +\infty$

iii) $\lim_{j\to\infty} \sum_{p=0}^{j} \frac{\beta_p}{||\rho_p||^2} = +\infty$ *avec A symétrique définie positive.*

Preuve :

Il suffit de prendre $\lambda_j = ||s_j||^2$ (resp. $||\rho_j||^2$, $||r_j||^2$), la démonstration dans chacun des trois cas est la même.

Voyons (M.E.) :

Avec $\lambda_j = ||s_j||^2$ une condition nécessaire et suffisante de convergence est que :

$\dfrac{||s_j||^2 - ||s_{j+1}||^2}{||s_j||^2 \cdot ||s_{j+1}||^2}$ soit le terme général d'une série divergente.

$$\text{Or, } \frac{||s_j||^2 - ||s_{j+1}||^2}{||s_j||^2\ ||s_{j+1}||^2} = \frac{\rho_j^T\ V_j\ (V_j^T A\, A^T\ V_j)^{-1}\ V_j^T\ \rho_j}{||s_j||^2\ [||s_j||^2 - \rho_j^T\ V_j(V_j^T A\, A^T\ V_j)^{-1}\ V_j^T\ \rho_j]}$$

$$\geq \frac{\rho_j^T\ V_j(V_j^T A\, A^T\ V_j)^{-1}\ V_j^T\ \rho_j}{||s_j||^4}$$

$$\geq \frac{||V_j^T\ \rho_j||^2}{||s_j||^4\ \rho(V_j^T A\, A^T\ V_j)} \qquad (*)$$

Prenons V_j sous la forme $V_j = \left[\frac{y_j^1}{||y_j^1||}, \ldots, \frac{y_j^k}{||y_j^k||}\right]$ ce qui ne change en rien à l'itération (pareillement pour (M.R.) et (M.R.R.)).

On a

$$(*) \geq \frac{\sum_{i=1}^{k} (\rho_j,\ y_j^i/||y_j^i||)^2}{||s_j||^4\ k\ \Lambda^2}$$

où Λ^2 est la plus grande valeur propre de $A\ A^T$.

Soit λ^2 la plus petite valeur propre de $A\ A^T$.

On a $\dfrac{||s_j||^4}{||\rho_j||^4} \leq \dfrac{1}{\lambda^4}$.

$$\text{Donc } (*) \geq \frac{\sum_{i=1}^{k} (\rho_j/||\rho_j||,\ y_j^i/||y_j^i||)^2}{k\ \frac{\Lambda^2}{\lambda^4}\ ||\rho_j||^2}$$

$$= \frac{\lambda^4}{k\ \Lambda^2}\ \frac{\delta j}{||\rho_j||^2}$$

Donc si $\dfrac{\delta_j}{||\rho_j||^2}$ est le terme général d'une série divergente $\dfrac{1}{||s_{j+1}||^2} - \dfrac{1}{||s_j||^2}$ l'est aussi et donc $||s_j|| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$. □

Remarques :

1° Le théorème 2.4.1 est un cas particulier du théorème 2.4.2.

En effet, si δ_p, α_p ou β_p est le terme général d'une série divergente, la méthode est convergente.

Donc il existe un rang N : $||\rho_j|| \leq 1 \quad \forall j \geq N$

Donc $\frac{\delta_j}{||\rho_j||^2} \geq \delta_j$ (pareillement pour α_p et β_p), donc $\frac{\delta_j}{||\rho_j||^2}$ est le terme général d'une série divergente. □

2° Dans le théorème 2.4.2. on n'a pas besoin à ce que δ_p (α_p ou β_p) soit le terme général d'une série divergente, mais d'une condition encore plus faible. La convergence peut dont être logarithmique. □

Références

(1) N. GASTINEL, "*Sur-décomposition de normes générales et procédés itératifs*". Numerische Mathematiques 5, pp. 142-151, (1963).

(2) ALSTON S. HOUSEHOLDER, "*Principles of numerical analysis*". Mc Grauw-Hill Book Company, Inc. 1953.

(3) N. GASTINEL, "*Matrices du second degré et Normes générales en analyse numérique*". 1ère Thèse, Université de Grenoble (1960).

(4) N. GASTINEL, "*Analyse numérique linéaire*". Hermann (1966).

(5) C. ESPINOZA, "*Contribution à la résolution numérique de certains systèmes d'équations*". Thèse de 3ème Cycle, Unviersité de Grenoble (1977).

(6) V. KARMANOV, "*Programmation mathématique*". Edition Moscou.

MISE EN OEUVRE ET APPLICATIONS

0 - INTRODUCTION

On commencera par donner deux façons de mettre en oeuvre les méthodes de projection en utilisant l'algorithme R.P.A. de C. BREZINSKI [1], [2].

Comme application de la correspondance on considèrera des méthodes de projections connues dont on déterminera les homologues, ce qui dans plusieurs cas nous fera retomber sur des méthodes connues. On proposera en même temps des majorations de l'erreur, ce qui nous conduit entre autres à proposer quelques variantes de la méthode de SOUTHWELL.

Quelques essais numériques seront exposés à la fin.

1 - MISE EN OEUVRE

Les méthodes relevant des classes (M.R.R.)(M.R.) et (M.E.) ont l'avantage de ramener la résolution d'un système linéaire de grande taille à la résolution d'une suite de systèmes dont la taille est choisie par l'utilisateur (k). Pour de tels systèmes une résolution par des méthodes directes est certainement intéressante.

Dans cet esprit on propose ci-dessous deux utilisations possibles de l'algorithme R.P.A. de C. BREZINSKI [1], [2].

Rappelons un algorithme d'interpolation se déduisant du R.P.A. qu'on désignera par R.I.A. (Algorithme récursif d'interpolation) [2].

$p \in \mathbb{N}^*$; x_i, z_i $i = 1,\dots, p$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ donnés et vérifiant :

$$(*) \quad \begin{vmatrix} (z_1, x_1) \dots\dots\dots\dots (z_1, x_i) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (z_i, x_1) \dots\dots\dots\dots (z_i, x_i) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad i = 1,\dots, p$$

Le polynome $P_p = a_1 x_1 + \ldots + a_p x_p$ vérifiant $(P_p, z_i) = \omega_i \quad i = 1,\ldots, p$ où $\omega_i \quad i = 1,\ldots, p$ des scalaires donnés, se calcule par :

$$\begin{cases} P_0 = 0 & & \text{(R.I.A)} \\ g_{0,i} = x_i \qquad i \geq 1 & & \\ P_p = P_{p-1} + \dfrac{\omega_p - (z_p, P_{p-1})}{(z_p, g_{p-1}, p)} g_{p-1,p} & p \geq 1 & \\ g_{p,i} = g_{p-1,i} - \dfrac{(z_p, g_{p-1,i})}{(z_p, g_{p-1,p})} g_{p-1,p} & i > p & \end{cases}$$

Cas 1 :

a - Mise en oeuvre de (M.R.R.)

La méthode est définie par :

$$x_{j+1} = x_j - V_j(V_j^T A V_j)^{-1} V_j^T \rho_j$$

où $V_j = (y_j^1,\ldots, y_j^k)$; y_j^i, $i = 1,\ldots, k$ sont linéairement indépendants.

Posons $t_j = V_j(V_j^T A V_j)^{-1} V_j^T \rho_j$

ce qui s'écrit $t_j = a_1^{(j)} y_j^1 + \ldots + a_k^{(j)} y_j^k$

t_j ainsi écrit est caractérisé par :

$$V_j^T (\rho_j - A t_j) = 0$$

i.e. $(A^T y_j^i, t_j) = (y_j^i, \rho_j) \qquad i = 1,\ldots, k$

Pour j fixé, prenons :

$$\begin{aligned} x_i &= y_j^i \\ z_i &= A^T y_j^i \\ \omega_i &= (y_j^i, \rho_j) \end{aligned}$$

L'algorithme R.I.A. s'écrit alors :

$$\begin{cases} P_0^{(j)} = 0 \\ g_{0,i}^{(j)} = y_j^i \qquad i = 1,\dots, k \\ P_p^{(j)} = P_{p-1}^{(j)} + \dfrac{(y_j^p, \rho_j - A\, P_{p-1}^{(j)})}{(y_j^p, A\, g_{p-1,p}^{(j)})}\, g_{p-1,p}^{(j)} & p = 1,\dots, k \\ g_{p,i}^{(j)} = g_{p-1,i}^{(j)} - \dfrac{(y_j^p, A\, g_{p-1,i}^{(j)})}{(y_j^p, A\, g_{p-1,p}^{(j)})}\, g_{p-1,p}^{(j)} & i > p \end{cases}$$

On a : $P_k^{(j)} = t_j$

Donc $x_{j+1} = x_j - P_k^{(j)}$.

b - Mise en oeuver de (M.R.)

La méthode est définie par :

$$x_{j+1} = x_j - V_j (V_j^T A^T A V_j)^{-1} V_j^T A^T \rho_j$$

On effectue les mêmes démarches que celles dans a, ce qui nous conduit à prendre :

$$x_i = y_j^i$$
$$z_i = A^T A\, y_j^i$$
$$\omega_i = (A\, y_j^i, \rho_j)$$

d'où,

On a alors : $x_{j+1} = x_j - P_k^{(j)}$.

c - Mise en oeuvre de (M.E.)

On a $x_{j+1} = x_j - A^T V_j (V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T \rho_j$

Posons $S_j = x_j - x^*$, $Ax^* = b$.

Calculons $t_j = A^T V_j (V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T \rho_j$

i.e. $t_j = a_1^{(j)} A^T y_j^1 + \ldots + a_k^{(j)} A^T y_j^k$

et $V_j^T A (S_j - t_j) = 0$

ou encore

$$(A^T y_j^i, t_j) = (y_j^i, \rho_j)$$

On doit donc prendre :

$$x_i = A^T y_j^i$$
$$z_i = x_i$$
$$\omega_i = (y_j^i, \rho_j)$$

Le R.I.A. s'écrit :

$$\begin{cases} P_0^{(j)} = 0 \\ g_{0,i}^{(j)} = A^T y_j^i \qquad i = 1, \ldots, k \\ P_p^{(j)} = P_{p-1}^{(j)} + \dfrac{(y_j^p, \rho_j) - (A^T y_j^p, P_{p-1})}{(A^T y_j^p, g_{p-1,p}^{(j)})} g_{p-1,p}^{(j)} \qquad p = 1, \ldots, k \\ g_{p,i}^{(j)} = g_{p-1,i}^{(j)} - \dfrac{(A^T y_j^i, g_{p-1,i}^{(j)})}{(A^T y_j^i, g_{p-1,p}^{(j)})} g_{p-1,p}^{(j)} \qquad i > p \end{cases}$$

On a $x_{j+1} = x_j - P_k^{(j)}$.

<u>Remarque</u> : Par le fait que les y_j^i $i = 1,\ldots, k$ sont linéairement indépendants le déterminant (*) n'est jàmais nul.

$P_k^{(j)}$ est donc toujours calculable.

<u>Cas 2</u> :

Soit à résoudre le système linéaire $Cx = d$ où C une matrice carrée d'ordre m, régulière. Soit t^* la solution.

On a $t^* = a_1\, e_1 +\ldots+ a_m\, e_m$

où e_i $i = 1,\ldots, m$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$ (on aurait pû prendre n'importe qu'elle base).

Prenons :

$$\begin{aligned} x_i &= e_i \\ z_i &= C^T\, e_i \\ \omega_i &= d_i \qquad\qquad i = 1,\ldots, m \end{aligned}$$

Le R.I.A. s'écrit :

$$(*)\begin{cases} P_0 = 0 \\ g_{0,i} = e_i \\ P_p = P_{p-1} + \dfrac{d_p - (C_p^T, P_{p-1})}{(C_p^T, g_{p-1,p})}\, g_{p-1,p} & p = 1,\ldots, m \\ g_{p,i} = g_{p-1,i} - \dfrac{(C_p^T, g_{p-1,i})}{(C_p^T, g_{p-1,p})}\, g_{p-1,p} & i > p \end{cases}$$

On a $P_p = a_1^{(p)}\, e_1 +\ldots+ a_p^{(p)}\, e_p$ avec, $(P_p, C_i^T) = d_i$, $i = 1,\ldots, p$

où C_i^T, la transposée de la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice C.

Donc, $P_m = t^*$.

<u>Remarques</u> : Posons $C_{E_p} = (C_1^T, \ldots, C_p^T)$; $C^{E_p} = (C^1, \ldots, C^p)$

où C^i $i = 1, \ldots, m$ sont les m colonnes de C.

$$C_{E_p}^{E_p} = \begin{pmatrix} C_1^1 \ldots\ldots\ldots\ldots C_1^p \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_p^1 \ldots\ldots\ldots\ldots C_p^p \end{pmatrix} \quad ; \quad d_{E_p} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_p \end{pmatrix}$$

où d_i est la $i^{\text{ème}}$ composente du vecteur d.

1 - La condition (*) se traduit ici par $\det(C_{E_p}^{E_p}) \neq 0$, $p = 1, \ldots, m$. On aura donc besoin du controle des mineurs (ou pivots) en changeant l'ordre de la base e_i, $i = 1, \ldots, m$. Situation qu'on retrouve dans la méthode d'élimination de Gauss.

2 - Le polynôme P_p est donné par :

$$P_p = \begin{pmatrix} (C_{E_p}^{E_p})^{-1} \; d_{E_p} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

En effet,

On a $P_p = \mathcal{E}_{E_p} \, a_{E_p}^{(p)}$ où $\mathcal{E}_{E_p} = (e_1, \ldots, e_p)$

donc $(P_p, e_i) = 0 \quad \forall i > p$

Soit $\tilde{P}_p$ le vecteur à p composentes tel que : $P_p = \begin{pmatrix} \tilde{P}_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

On a $\tilde{P}_p = E_{E_p}^{E_p} \, a_{E_p}^{(p)}$

or par construction de P_p on a : $\mathcal{E}_{E_p}^T \, C \, P_p = d_{E_p}$ ce qui s'écrit $C_{E_p}^T \, P_p = d_{E_p}$, donc $C_{E_p}^{E_p} \tilde{P}_p = d_{E_p}$

d'où

$$P_p = \begin{pmatrix} (C_{E_p}^{E_p})^{-1} d_{E_p} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

□

3 - On peut voir également que :

• $P_p = P_{p-1} - \mathcal{E}_{E_p} (C_{E_p}^T \mathcal{E}_{E_p})^{-1} C_{E_p}^T (P_{p-1} - x^*)$ $p = 1,\dots, m$

Il suffit pour cela de voir que $C_{E_p}^T (P_p - x^*) = 0$; chose évidente puisque :

$$C_{E_p}^T P_p = d_{E_p} \text{ et } C_{E_p}^T x^* = \mathcal{E}_{E_p}^T C x^*$$
$$= d_{E_p}.$$

□

L'itération (*) s'écrit également :

• $\begin{cases} P_p = P_{p-1} - \mathcal{E}_p (C_{E_p}^{E_p})^{-1} \mathcal{E}_{E_p}^T \rho_{p-1} \\ \rho_{p-1} = C P_{p-1} - d \end{cases}$ $p = 1,\dots, m$

Qui est une méthode de la classe (M.R.R.).

Il est claire qu'une telle itération est incalculable en pratique, puisque la $m^{\text{ème}}$ itération exige le calcul de C^{-1}.

Ceci montre le rôle important que joue la suite auxiliaire $g_{p,i}$.

□

Utilisation de l'algorithme (*) pour la mise en oeuvre de (M.R.R.) ; (M.R.) et (M.E.).

On a les quantités respectives à calculer ;

$(V_j^T A V_j)^{-1} V_j^T \rho_j$, $(V_j^T A^T A V_j)^{-1} V_j^T A^T \rho_j$, $(V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T \rho_j$;

ce qui revient à la résolution d'un système de taille k de la forme :

$C^{(j)}\ t^{(j)} = d^{(j)}$.

Soit $(e'_1, \ldots, e'_k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^k$.

L'algorithme (*) s'écrit :

$$\begin{cases} P_0^{(j)} = 0 & \\ g_{0,i}^{(j)} = e'_i & i \geq 1 \\ P_p^{(j)} = P_{p-1}^{(j)} + \dfrac{d_p^{(j)} - (C_p^{(j)^T}, P_{p-1}^{(j)})}{(C_p^{(j)^T}, g_{p-1,p}^{(j)})}\, g_{p-1,p}^{(j)} & p = 1, \ldots, k \\ g_{p,i}^{(j)} = g_{p-1,i}^{(j)} - \dfrac{(C_p^{(j)^T}, g_{p-1,i}^{(j)})}{(C_p^{(j)^T}, g_{p-1,p}^{(j)})}\, g_{p-1,p}^{(j)} & i > p \end{cases}$$

Pour $C^{(j)}\ t^{(j)} = d^{(j)}$ correspondant à (M.R.R.), (M.R.) et (M.E.) respectivement on a :

(M.R.R.) : $x_{j+1} = x_j - V_j\ P_k^{(j)}$

(M.R.) : $x_{j+1} = x_j - V_j\ P_k^{(j)}$

(M.E.) : $x_{j+1} = x_j - A^T\ V_j\ P_k^{(j)}$. □

2 - APPLICATION DE LA CORRESPONDANCE

1) Méthode du gradient [3]

La matrice A est supposée symétrique définie positive.

La méthode est définie par :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - \dfrac{||r_j||^2}{||B\ r_j||^2}\, B\ r_j \\ \\ r_j = B^T x_j - B^{-1} b \end{cases} \qquad (G_1)$$

où B est telle que $A = B\,B^T$.

C'est une méthode de (C) pour résoudre le système $B^T x = B^{-1} b$ et s'écrit :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - B\ V_j (V_j^T B^T B\, V_j)^{-1} V_j^T r_j \\ r_j = B^T x_j - B^{-1} b,\ V_j = \{r_j\} \end{cases}$$

i) Homologue de (G_1) dans (A).

On considère le système $B^T x = B^{-1} b$ jouant le rôle de $Ax = b$. On applique ensuite 1° iv) avec B supposée symétrique définie positive.

On obtient :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - \dfrac{||r_j||^2}{(r_j,\ B\ r_j)}\, r_j \\ r_j = B^T x_j - B^{-1} b \end{cases} \qquad (G_2)$$

Remarquons que ni (G_1) ni (G_2) ne peuvent être utilisées en pratique puisque B est à priori inconnue, sauf si le système est donné sous la forme $B\,B^T x = B\,b$.

ii) Homologue de (G_1) dans (B) :

On utilise 1° i) pour le système $B^T x = B^{-1} b$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - V_j (V_j^T B\,B^T\ V_j)^{-1} V_j^T \rho_j \\ \rho_j = B\,B^T x_j - B\,B^{-1} b\ ;\ V_j = B\ r_j = \rho_j \end{cases}$$

i.e.
$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - \dfrac{||\rho_j||^2}{(\rho_j,\ A\ \rho_j)}\ \rho_j \\ \rho_j = Ax_j - b \end{cases} \qquad (G_3)$$

Qui est la méthode de la plus profonde descente.

Théorème 3.2.1.1.

1- Si A est symétrique définie positive les méthodes (G_1) et (G_3) sont convergentes.

2- Si en plus B est symétrique définie positive, (G_2) est convergente.

Preuve :

1- On a $\left(\dfrac{r_j}{||r_j||}, \dfrac{y_j}{||y_j||}\right) = \left(\dfrac{r_j}{||r_j||}, \dfrac{r_j}{||r_j||}\right) = 1$, $V_j = \{y_j\} = \{r_j\}$.

Le théorème 2.1.4. conclut la convergence de (G_1).

(G_1) étant convergente donc (G_3) aussi d'après le théorème 1.2.1. i).

2- Si B est symétrique définie positive, comme (G_1) est alors convergente, (G_2) l'est également, d'après le théorème 1.2.1. ii). □

1 bis :

Lorsque A est seulement régulière on peut considérer le système des moindres carrés $A^T A x = A^T b$.

Ce qui donne :

i) Méthodes du gradient "aux moindres carrés"

La méthode s'écrit :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - \dfrac{||\rho_j||^2}{||A^T\ \rho_j||^2}\ A^T\ \rho_j \\ \rho_j = A\ x_j - b \end{cases} \qquad (G_1')$$

Méthode dite associée à une décomposition de la norme euclidienne [6].

ii) Homologue de (G_1') dans (A).

On obtient la méthode de la plus profonde descente.

iii) Homologue de (G_1') dans (B) :

On obtient :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - \dfrac{||A^T \rho_j||^2}{||A\, A^T \rho_j||^2} A^T \rho_j \\ \rho_j = A\, x_j - b \end{cases} \qquad (G_2')$$

<u>*Corollaire 3.2.1.1.*</u>

Les méthodes (G_1') et (G_2') sont convergentes.

De plus :

- Pour (G_1') on a : $||s_{j+1}||^2 \leq ||s_j||^2 \, [1 - \gamma_2^2(A)]$

- Pour (G_2') on a : $||\rho_{j+1}||^2 \leq ||\rho_j||^2 \, [1 - \gamma_2^2(A)]$

où $\gamma_2(A)$ est le conditionnement de A mesuré par la norme euclidienne.

<u>Preuve</u> :

La convergence est assurée par le théorème 1.2.1.

- Pour G_1' on a :

$$||s_{j+1}||^2 = ||s_j||^2 - \frac{||\rho_j||^2}{||A^T \rho_j||^2}$$

$$= ||s_j||^2 \left[1 - \frac{||\rho_j||^2}{||s_j||^2} \times \frac{||\rho_j||^2}{||A^T \rho_j||^2}\right]$$

d'où $||s_{j+1}||^2 \leq ||s_j||^2 \, [1 - \gamma_2^2(A)]$

- Pour G_2' :

$$||\rho_{j+1}||^2 = ||\rho_j||^2 - \frac{||A^T \rho_j||^2}{||A\ A^T \rho_j||^2}$$

$$= ||\rho_j||^2 \left[1 - \frac{||A^T \rho_j||^2}{||\rho_j||^2} \times \frac{||A^T \rho_j||^2}{||A\ A^T \rho_j||^2}\right]$$

$$\leq ||\rho_j||^2 \, [1 - \gamma_2^2(A)]. \qquad \square$$

2) Méthode de Gauss-Seidel

La méthode est définie par :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - (\rho_j,\ e_i)\ \dfrac{e_i}{A_i^i} \\ \rho_j = A\ x_j - b\ ;\ j+1 \equiv i \bmod(n) \end{cases} \qquad \text{(G.S.1.)}$$

où l'on suppose $A_i^i \neq 0 \quad i = 1,\ldots, m$

Itération qu'on peut écrire :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - V_j(V_j^T A\, V_j)^{-1}\ V_j^T\ \rho_j \\ \rho_j = A\ x_j - b\ ;\ j+1 \equiv i \bmod(n) \end{cases}$$

qui est une méthode de la classe (A).

i) Homologue de (G.S.1.) dans (B) :

En utilisant 2° i) on obtient :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - \left(\rho_j,\ \dfrac{A^i}{||A^i||^2}\right) e_i \\ \rho_j - A\ x_j - b\ ;\ j+1 \equiv i \bmod(n) \end{cases} \qquad \text{(G.S.2.)}$$

On obtient ainsi la méthode de la GARZA [10, 5]

ii) Homologue de (G.S.1.) dans (C) :

Par 2° ii) on obtient :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - (\rho_j, e_i) \dfrac{A_i^T}{||A_i^T||^2} \\ \rho_j = A\, x_j - b \;;\; j+1 \equiv i \bmod(n) \end{cases} \qquad \text{(G.S.3.)}$$

où A^i et A_i sont respectivement la $i^{\text{ème}}$ colonne et la $i^{\text{ème}}$ ligne de A.

La méthode (G.S.3.) obtenue est la méthode de S. KACZMARZ [4, 5].

Théorème 3.2.2.1.

Les méthodes (G.S.2.) et (G.S.3.) sont toujours convergentes.

De plus :

- *Pour (G.S.2.) on a :*

$$||\rho_{j+1}||^2 = ||\rho_j||^2 \left| 1 - \left(\frac{\rho_j}{||\rho_j||}, \frac{A^i}{||A^i||} \right)^2 \right|, \; j+1 \equiv i \bmod(n)$$

- *Pour (G.S.3) on a :*

$$||s_{j+1}||^2 = ||s_j||^2 \left[1 - \left(\frac{\rho_j}{||s_j||}, \frac{e_i}{||A_i^T||} \right)^2 \right]$$

Preuve :

(G.S.1.) étant convergente pour A symétrique définie positive ; le théorème 1.2.1. assure la convergence de (G.S.2.) et (G.S.3.) pour A régulière. □

On voit à travers les expressions de $||\rho_{j+1}||$ et $||s_{j+1}||$ pour (G.S.2.) et (G.S.3.) que les meilleurs indices i font que les méthodes deviennent respectivement :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - \left(\rho_j, \dfrac{A^{ij}}{||A^{ij}||}\right) e_{ij} \\ \rho_j = A\,x_j - b \;;\; \left|\left|\left(\rho_j, \dfrac{A^{ij}}{||A^{ij}||}\right)\right|\right| = \max\limits_{p=1,\dots,n} \left|\left|\left(\rho_j, \dfrac{A^{p}}{||A^{p}||}\right)\right|\right| \end{cases} \qquad \text{(G.S.4.)}$$

et

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - (\rho_j, e_{ij}) \dfrac{A^T_{ij}}{||A^T_{ij}||^2} \\ \rho_j = A\,x_j - b \;;\; \left|\left|\left(\rho_j, \dfrac{e_{ij}}{||A^T_{ij}||}\right)\right|\right| = \max\limits_{p=1,\dots,n} \left|\left|\left(\rho_j, \dfrac{e_p}{||A^T_p||}\right)\right|\right| \end{cases} \qquad \text{(G.S.5.)}$$

De la même manière en supposant A symétrique définie positive et en minimisant $||r_{j+1}|| = ||Bx_{j+1} - B^{T-1}\, b||$ où $A = B^T B_j$ (G.S.1.) dévient :

$$x_{j+1} = x_j - (\rho_j, e_{ij}) \frac{e_{ij}}{A^{ij}_{ij}}$$

$$\rho_j = A\,x_j - b \;;\; \left|\left|\left(\rho_j, \frac{e_{ij}}{\sqrt{A^{ij}_{ij}}}\right)\right|\right| = \max_{p=1,\dots,n} \left|\left|\left(\rho_j, \frac{e_p}{\sqrt{A^{p}_{p}}}\right)\right|\right| \qquad \text{(G.S.6.)}$$

On remarque que si les éléments diagonaux de A sont identiques, (G.S.6.) coïncide avec la méthode de SOUTHWELL.

Théorème 3.2.2.2.

- *Les méthodes (G.S.4.) et (G.S.5.) sont toujours convergentes.*
- *Si la matrice A est symétrique définie positive (G.S.6.) est convergente.*

Preuve :

Il suffit de montrer la convergence de (G.S.4.), le théorème 1.2.1. conclu pour (G.S.5) et (G.S.6.).

Montrons que $\left(\frac{\rho_j}{||\rho_j||}, \frac{e_{ij}}{||A_{ij}^T||}\right)$ ne tend pas vers 0.

Raisonnons par l'absurde :

On a $\frac{\rho_j}{||\rho_j||} \in S(0, 1)$ sphère unité de $\mathbb{R}^n$.

Donc,

$$\exists N' \subset \mathbb{N} \text{ infini} : \frac{\rho_j}{||\rho_j||} \xrightarrow[N']{} \rho \in S(0, 1)$$

or, $\left|\left|\left(\frac{\rho_j}{||\rho_j||}, \frac{e_{ij}}{||A_{ij}^T||}\right)\right|\right| \leq \varepsilon \Longrightarrow \left|\left|\left(\frac{\rho_j}{||\rho_j||}, \frac{e_p}{||A_p^T||}\right)\right|\right| \leq \varepsilon \quad p = 1,\ldots, n$

donc, $\left|\left|\left(\rho, \frac{e_p}{||A_p^T||}\right)\right|\right| \leq \varepsilon \quad p = 1,\ldots, n$ ce qui est impossible puisque $\rho \neq 0$.

□

2.1) Méthode de Espinoza

Voyons une classe de méthode englobant celle de Gauss-Seidel qu'on peut voir dans [6] et [5].

Soit $v_1,\ldots, v_n$ une base de $\mathbb{R}^n$, tel que $(v_i, Av_i) \neq 0 \quad i = 1,\ldots, n$

Soit la méthode définie par :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - \dfrac{(v_j, \rho_j)}{(v_i, Av_i)} v_i \\ \rho_j = Ax_j - b, \; j+1 \equiv i \bmod(n) \end{cases} \qquad \text{(G.G.S.1.)}$$

Homologue de (G.G.S.1.) dans B

On obtient :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - \dfrac{(Av_i, \rho_j)}{||Av_i||^2} v_i \\ \rho_j = Ax_j - b \; ; \; j+1 \equiv i \bmod(n) \end{cases} \qquad \text{(G.G.S.2.)}$$

Homologue de G.G.S.1. dans (C).

On obtient :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - \dfrac{(v_j, \rho_j)}{||A^T v_i||^2} A^T v_i \\ \rho_j = Ax_j - b \,;\, j+1 \equiv i \bmod(n) \end{cases} \qquad \text{(G.G.S.3.)}$$

L'étude de convergence de ces méthodes sera fait dans le chapitre 5.

3) Méthode du gradient conjugué (Stiefel-Hestenes)

La méthode est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \rho_0 \\ x_{j+1} = x_j - \dfrac{(u_j, \rho_j)}{(u_j, Au_j)} u_j \\ u_j = \rho_j - \dfrac{(\rho_j, Au_{j-1})}{(u_{j-1}, Au_{j-1})} u_{j-1} \end{cases} \qquad \text{(G.C.1.)}$$

Homologue de (G.C.1.) dans (B).

Par 2° i) on obtient :

$$\begin{cases} u_0 = A^T \rho_0 \\ x_{j+1} = x_j - \dfrac{(\rho_j, Au_j)}{||Au_j||^2} u_j \\ u_j = A^T \rho_j - \dfrac{(A^T \rho_j, A^T A u_{j-1})}{||Au_{j-1}||^2} u_{j-1} \end{cases} \qquad \text{(G.C.2.)}$$

Méthode qui accentue le mauvais conditionnement de A. une variante de celle-ci peut être consulter dans [7].

On a évidemment $x_n = x^*$.

Homologue de (G.C.1.) dans (C).

Par 2° ii) on obtient :

$$\begin{cases} u_0 = \rho_0 \\ x_{j+1} = x_j - \dfrac{(\rho_j,\ u_j)}{\|A^T\ u_j\|^2}\ A^T\ u_j \\ u_j = \rho_j - \dfrac{(A^T\ \rho_j,\ A^T\ u_{j-1})}{\|A^T\ u_{j-1}\|^2}\ u_{j-1} \end{cases} \qquad \text{(G.C.3.)}$$

On retombe ainsi sur la méthode qu'on peut voir dans [8] et [9].

Voyons quelques propriétés de cette méthode :

Théorème 3.2.3.1.

Pour tout $p < j$ *on a :*

i) $(\rho_j,\ \rho_p) = 0$

ii) $(A^T\ \rho_j,\ A^T\ u_{p-1}) = 0$

iii) $(A^T\ u_j,\ A^T\ u_p) = 0$

iv) $(A^T\ u_j,\ A^T\ \rho_p) = 0$

v) $\rho_j \neq 0 \Rightarrow u_j \neq 0$

vi) $(\rho_j,\ u_p) = 0$

(G.C.3.) converge en au plus n *itérations.*

Preuve :

On peut procéder par récurrence, d'une manière analogue à ce qui est fait dans [3] et [7]. □

Proposition 3.2.3.1.

S_{j+1} *est la projection de* S_j *sur l'orthogonal du sous-espace engendré par* $\{A^T\ u_0, \ldots, A^T\ u_j\}$ *; où* $S_j = x_j - x^*$.

Preuve :

Une telle projection se caractérise par montrer que :

$$S_{j+1} = S_j - A^T U_j (U_j^T A A^T U_j)^{-1} U_j^T A S_j$$

. où $U_j = (u_0, \dots, u_j)$

or d'après le théorème 3.2.3.1. la matrice $U_j^T A A^T U_j$ est diagonale et on a :

$$A^T U_j (U_j^T A A^T U_j)^{-1} U_j^T A S_j = (A^T u_0, \dots, A^T u_j) \begin{pmatrix} \frac{1}{||A^T u_0||^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{||A^T u_j||^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (u_0, \rho_j) \\ \vdots \\ (u_j, \rho_j) \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=0}^{j} (u_j, \rho_j) \frac{A^T u_j}{||A^T u_j||^2} \qquad (*)$$

Or $(\rho_j, u_p) = 0 \quad \forall p < j$ (Théorème 3.2.3.1., vi))

donc, $(*) = \dfrac{(u_j, \rho_j)}{||A^T u_j||^2} A^T u_j = S_j - S_{j+1}$. □

Proposition 3.2.3.2.

i) $(u_j, \rho_j) = ||\rho_j||^2$

ii) $(u_j, \rho_j) = (u_j, \rho_{j-1})$

iii) $(A^T \rho_j, A^T u_{j-1}) \dfrac{1}{||A^T u_{j-1}||^2} = - \dfrac{||\rho_j||^2}{||\rho_{j-1}||^2}$

<u>Preuve</u> :

i) $$(\rho_j, u_j) = ||\rho_j||^2 - \frac{(A^T \rho_j, A^T u_{j-1})}{||A^T u_{j-1}||^2} (u_{j-1}, \rho_j)$$

or $(\rho_j, u_{j-1}) = 0$; donc $(u_j, \rho_j) = ||\rho_j||^2$.

ii) on a

$$\rho_j = \rho_{j-1} - \frac{(\rho_{j-1}, u_{j-1})}{||A^T u_{j-1}||^2} A A^T u_{j-1}$$

donc $(\rho_j, u_j) = (\rho_{j-1}, u_j) - \dfrac{(\rho_{j-1}, u_{j-1})}{||A^T u_{j-1}||^2} (A^T u_{j-1}, A^T u_j)$

Comme $(A^T u_{j-1}, A^T u_j) = 0$ on a

$$(\rho_j, u_j) = (\rho_{j-1}, u_j).$$

iii) $$u_j = \rho_j - \frac{(A^T \rho_j, A^T u_{j-1})}{||A^T u_{j-1}||^2} u_{j-1}$$

donc $(u_j, \rho_{j-1}) = (\rho_j, \rho_{j-1}) - \dfrac{(A^T \rho_j, A^T u_{j-1})}{||A^T u_{j-1}||^2} (u_{j-1}, \rho_{j-1})$

or $(\rho_j, \rho_{j-1}) = 0$

donc $$\frac{(A^T \rho_j, A^T u_{j-1})}{||A^T u_{j-1}||^2} = - \frac{(u_j, \rho_{j-1})}{(u_{j-1}, \rho_{j-1})}$$

$$= - \frac{||\rho_j||^2}{||\rho_{j-1}||^2} \qquad \square$$

Compte-tenu des propriétés précédentes la méthode (G.C.3.) devient :

$$\begin{cases} u_0 = \rho_0 \\ x_{j+1} = x_j - \dfrac{||\rho_j||^2}{||A^T u_j||^2} A^T u_j \\ u_j = \rho_j + \dfrac{||\rho_j||^2}{||\rho_{j-1}||^2} u_{j-1} \end{cases} \qquad (G.C.3.)$$

Remarque :

La méthode habituelle du gradient conjugué (G.C.1.) s'écrit :

$$\begin{cases} u_0 = \rho_0 \\ x_{j+1} = x_j - \dfrac{||\rho_j||^2}{(u_j, Au_j)} u_j \\ u_j = \rho_j + \dfrac{||\rho_j||^2}{||\rho_{j-1}||} u_{j-1} \end{cases} \qquad (G.C.1.)$$

On voit que du point de vue nombre d'opérations les deux méthodes (G.C.1.) et (G.C.3.) sont à égalité. L'avantage de (G.C.3.) est qu'elle converge dès que A est régulière. Son inconvénient est qu'elle accentue le mauvais conditionnement de A, bien que cette accentuation n'est pas aussi importante que celle correspondant au problème des moindres carrés tel la méthode C.R. de [7]. Une illustration de ce qu'on vient de dire sera faite par des essais numériques à la fin de ce chapitre.

Proposition 3.2.3.3.

Pour la méthode (G.C.3.) on a :

i) $(u_j, \rho_j) = (u_j, \rho_0) \quad \forall j$

ii) S_{j+1} *est la projection de* S_0 *sur l'orthogonal du sous-espace engendré par* $\{A^T u_0, \ldots, A^T u_j\}$

<u>Preuve</u> :

i) D'après la proposition 3.2. 3.2. ii) on a : $(u_1, \rho_0) = (u_1, \rho_1)$

H.R. Suposons : $(u_j, \rho_j) = (u_j, \rho_0)$.

Montrons que c'est encore vrai pour j+1.

On a :

$$(u_{j+1}, \rho_0) = (\rho_{j+1}, \rho_0) + \frac{||\rho_{j+1}||^2}{||\rho_j||^2} (u_j, \rho_0)$$

$$= \frac{||\rho_{j+1}||^2}{||\rho_j||^2} (u_j, \rho_j), \text{ car } (\rho_{j+1}, \rho_0) = 0$$

d'où $(u_{j+1}, \rho_0) = ||\rho_{j+1}||^2 = (u_{j+1}, \rho_{j+1})$

ii) On doit montrer que :

$$S_{j+1} = S_0 - A^T U_j (U_j^T A A^T U_j)^{-1} U_j^T A S_0$$

où $U_j = (A^T u_0, \dots, A^T u_j)$

or $A^T U_j (U_j^T A A^T U_j)^{-1} U_j^T A S_0 = \sum_{i=0}^{j} (u_i, \rho_0) \frac{A^T u_i}{||A^T u_i||^2}$

$$= \sum_{i=0}^{j} \frac{(u_i, \rho_i)}{||A^T u_i||^2} A^T u_i$$

D'autre part,

$$S_{j+1} = S_j - \frac{(u_j, \rho_j)}{||A^T u_j||^2} A^T u_j$$

$$= S_{j-1} - \frac{(u_{j-1}, \rho_{j-1})}{||A^T u_{j-1}||^2} A^T u_{j-1} - \frac{(u_j, \rho_j)}{||A^T u_j||^2} A^T u_j$$

de proche en proche on obtient :

$$S_{j+1} = S_0 - \sum_{i=0}^{j} \frac{(u_i, \rho_i)}{||A^T u_i||^2} A^T u_i$$

i.e. $S_{j+1} = S_0 - A^T U_j (U_j^T A A^T U_j)^{-1} U_j^T A S_0$. □

Proposition 3.2.3.4.

La suite $\{||s_j||\}$ générée par (G.C.3.) est strictement décroissante.

La diminution est donnée par :

$$||s_{j+1}||^2 = ||s_j||^2 - \frac{||\rho_j||^2}{\dfrac{||A^T \rho_j||^2}{||\rho_j||^2} + \displaystyle\sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{j-i} \frac{||A^T \rho_j||^2}{||\rho_i||^2} \frac{||\rho_j||^2}{||\rho_i||^2}}$$

Preuve :

On a $||s_{j+1}||^2 = ||s_j||^2 - \dfrac{||\rho_j||^4}{||A^T u_j||^2}$

ce qui montre la stricte décroissance.

D'autre part : $||A^T u_j||^2 = ||A^T \rho_j||^2 + 2 \dfrac{||\rho_j||^2}{||\rho_{j-1}||^2} (A^T \rho_j, A^T u_{j-1})$

$$+ \frac{||\rho_j||^4}{||\rho_{j-1}||^4} ||A^T u_{j-1}||^2$$

En utilisant la proposition 3.2.3.2. iii) on obtient :

$$||A^T u_j||^2 = ||A^T \rho_j||^2 - \frac{||\rho_j||^4}{||\rho_{j-1}||^4} ||A^T u_{j-1}||^2$$

Posons : $\beta_j = ||A^T \rho_j||^2$ et $\alpha_{j-i} = \dfrac{||\rho_{j-i+1}||^4}{||\rho_{j-i}||^4}$.

Avec ces notations on a :

$$\|A^T u_j\|^2 = \beta_j - \alpha_{j-1}(\beta_{j-1} - \alpha_{j-2}(\beta_{j-2}, \ldots) - \alpha_1(\beta_1 - \alpha_0\ \beta_0)\ldots))$$
$$= \beta_j + \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{j-i} \left(\prod_{p=i}^{j-1} \alpha_p\right) \beta_i$$

$$\text{or } \prod_{p=i}^{j-1} \alpha_p = \prod_{p=i}^{j-1} \frac{\|\rho_{p+1}\|^4}{\|\rho_p\|^4} = \frac{\|\rho_j\|^4}{\|\rho_i\|^4}$$

$$\text{Donc } \|A^T u_j\|^2 = \|A^T \rho_j\|^2 + \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{j-i} \frac{\|\rho_j\|^4}{\|\rho_i\|^4} \|A^T \rho_i\|^2. \qquad \square$$

3 - ESSAIS NUMERIQUES

1. On procèdera dans ce qui suit à une comparaison des méthodes :

i) (G.C.1.)
ii) (G.C.3.)
iii) (C.R.)

On peut consulter [7] pour cette dernière méthode.

Dans un premier temps on mettra en évidence l'instabilité numérique de (G.C.3.) par rapport à (G.C.1.) et en même temps l'instabilité de (C.R.) par rapport à (G.C.3.).

On montrera dans un deuxième temps la compétitivité de (G.C.3.) par rapport à (G.C.1.) et (C.R.) lorsque la matrice A n'est pas symétrique.

Les matrices utilisées sont de taille 25 qu'on peut consulter dans [1], et sont :

Matrice de PEI (avec d = 2)
Matrice de GIVENS
Matrice d'ORTEGA
Matrice de NEWMAN.

Pour briser la symétrie de ces matrices on prendra A(3, 2) = 10, on dira alors qu'on a une matrice perturbée.

2. Deux essais sur la méthode de SOUTHWELL et sa variante (G.S.6.) seront donnés. OR_j désignera $||\rho_j||$.

-:-:-:-:-:-

Matrice de GIVENS

	G.C.1	G.C.3	C.R.
$\|\|\rho_1\|\|$	.5082472547361712D+02	.5655308846671697D+02	.5077224316730605
$\|\|\rho_2\|\|$	.7163660901599641D+01	.9413107407775040D+01	.7095588744849838
$\|\|\rho_{29}\|\|$	.6914417726471935D-08	.4094063673702709D-03	.8439197337592331
$\|\|\rho_{30}\|\|$	.3210012029582992D-08	.1647179593059403D-03	.8300232289312620

Matrice de PEI

	G.C.1	G.C.3	C.R.
$\|\|\rho_1\|\|$	.1733065418070659D+02	.1800589161107912D+02	.1733437428306393D+02
$\|\|\rho_2\|\|$	.5007469606909010D-12	.2653580601564971D-10	.7842523696216091D+00
$\|\|\rho_3\|\|$	.2000655771454653D-13	.2204054970237219D-13	.1898865086350938D-01
$\|\|\rho_4\|\|$			.6354034581027783D-04

Matrice de PEI perturbée

G.C.1

$\|\|\rho_1\|\|$	.4386236304829130D+02
$\|\|\rho_2\|\|$	.2943488727862606D+03
$\|\|\rho_{49}\|\|$	.1772094212201184D+08

G.C.3

	.5900302005532551D+02
	.2009338913107057D+02
$\|\|\rho_{49}\|\|$	.1217953601221621D-11
$\|\|\rho_{50}\|\|$	.4778860767296846D-12
$\|\|\rho_{44}\|\|$	.8601327046339234D-13

C.R.

	.4379354825823707D
	.4330309719268005D
$\|\|\rho_{44}\|\|$	.4311330996306648D+
$\|\|\rho_{45}\|\|$	.4311330996306647D+

Matrice d'ORTEGA 1^er^ espèce perturbée

	G.C.1	G.C3	C.R
$\|f_1\|$	.55002927066989410+02	.76322190825065960+02	.41716977283230940+02
$\|f_2\|$	.37361387066556640+02	.10468039651899000+03	.29800859238037410+02
$\|f_{29}\|$	.28179487880320550+05	.77804015745321870-09	
$\|f_{30}\|$	.29209659785243580+05	.45952820058916280-10	
$\|f_{31}\|$	.30231006522454000+05	.19164903059525400-11	
$\|f_{32}\|$	.31243875684629930+05	.30292125473700190-12	
$\|f_{48}\|$			.13688598550299640-02
$\|f_{49}\|$			.12507366513603740-02
$\|f_{50}\|$			.11443360860124690-02

Matrice de NEWMAN perturbée

	G.C.1		
$\|f_1\|$	.5325693392454956D+02	.9687297886925896D+02	.5316589099435732D+02
$\|f_2\|$	.9636015131870425D+01	.5151924746146345D+02	.1016700467622051D+02
$\|f_{22}\|$	.1043025103156685D+08		
$\|f_{23}\|$	.1928561237993469D+08		
$\|f_{41}\|$		.5032061342004949D-01	
$\|f_{48}\|$			.1323442142536518D+0
$\|f_{49}\|$			.1323442142470753D+0

Méthode de SOTHWELL :

Matrice de GIVENS N = 10

OR_0 = 108.931649066087
OR_1 = 28.7969107280951
OR_2 = 16.5600512199317
OR_3 = 17.0301843474411
OR_4 = 9.52223951163207
OR_5 = 12.0301620253243
OR_6 = 6.16167473712450

OR_{99} = .274506105576766
OR_{100} = .306165298372633

Méthode (G.S.6.)

Matrice de GIVENS N = 10

OR_0 = 108.931649086087
OR_1 = 13.7024142333307
OR_2 = 5.94664630819256
OR_3 = 12.0820559920590
OR_4 = 4.88261910255592
OR_5 = 8.78371115448062
OR_6 = 3.87340371647605

OR_{99} = .135080739654271
OR_{100} = .161601938192681

Matrice d'ORTEGA, 1^er espèce N = 10

$OR_0 =$ 14.1400809476139
$OR_1 =$ 13.7763441909086
$OR_2 =$ 13.0230058220152
$OR_3 =$ 12.1745928170846
$OR_4 =$ 12.5590537244927
$OR_5 =$ 11.1316802517283
$OR_6 =$ 9.90997192710996

$OR_{99} =$ 4.592075277074297E-02
$OR_{100} =$ 4.366150320931955E-02

Matrice d'ORTEGA, 1^er espèce N = 10

$OR_0 =$ 14.1400809476139
$OR_1 =$ 13.7086550056984
$OR_2 =$ 14.0450687098072
$OR_3 =$ 13.5884404046036
$OR_4 =$ 12.4388214761209
$OR_5 =$ 10.9587481367423
$OR_6 =$ 9.85100564320481

$OR_{99} =$ 4.372873245327907E-02
$OR_{100} =$ 4.304440447056373E-02

On relève à travers ces essais numériques que dans le cas des matrices symétriques considérées (G.C.) est meilleure que (G.C.3.) et cette dernière méthode est meilleure que (C.R.). L'écart entre les valeurs numériques fournies par (G.C.) et celles fournies par (G.C.3.) n'est cependant pas très grand.

Dans le cas où l'on a détruit la symétrie des matrices, (G.C.) diverge dans chaque cas par contre (G.C.3.) converge assez rapidement et nettement mieux que (C.R.).

Références

(1) C. BREZINSKI, "*Some determinental identities in a vector space, with applications*". ANO 98, (1963).

(2) C. BREZINSKI, "*Recursive interpolation extrapolation and projection*". ANO 99, (1983), Université des Sciences et Techniques de Lille 1.

(3) N. GASTINEL, "*Analyse numérique linéaire*". Herman (1966).

(4) S. KACZAMARZ, "*Angënaherte Auflösung von systemen linearer Gleïchungen*", Bull internat Acad. Polon. Sciences et lettres (1937), pp. 355-357.

(5) AKE BJORCK and TOMMY ELFVING, "*Accelerated projection methods for computing pseudoinverse solutions of systems of linear equations*". BIT 19 (1979), pp. 145-163.

(6) C. ESPINOZA, "*Contribution à la résolution numérique de certains systèmes d'équations*". Thèse de 3ème Cycle, Université de Grenoble (1977).

(7) STANLEY C. EISENSTAT, HOWARD C. ELMAN and MARTIN H. SHULTZ, "*Variational iterative methods for nonsymetrique systems of linear equations*".SIAM J. Numer. Anal. Vol. 20 n° 2, (1983).

(8) I.S. BERZIN and N.P. ZHIDKOV, "*Computing methods*". Volume 2.

(9) D.S. KERSHAW, "*The incomplete CHOLSKI - Conjugate gradient method for the iterative solution of systems of linear equations*". J. of Computationnel physics. V26 (1978).

(10) A. de la GARZA, "*An iterative method for solving systems of linear equations*". Union Carlide, oak Ridge, Report K-731, Tenessee (1951).

(11) WESTLAKE J.R., "*Numerical matrix inversion and solution of linear equations*". John Willey and sons (1968).

METHODES DE PROJECTION PAR PARTITIONNEMENT

0 - INTRODUCTION

On a vu dans le chapitre 1 l'ensemble des méthodes de projection de HOUSEHOLDER et BAUER [1], [2] réparties dans les trois classes usuellement rencontrées [1], [2], [3], [4], [5].

Une itération de ces méthodes exige le choix d'un sous-espace vectoriel suivant lequel on définit la projection.

Pour créer des simplifications sur le plan des calculs on considère un vecteur de $\mathbb{R}^n$ qu'on partitionne, constituant ainsi une base du sous-espace servant dans la projection. On peut voir [5], [6], [7]....

On proposera pour chacune des trois classes un critère suivant lequel on choisit le vecteur à partitionner.

Différents choix répondant aux conditions du critère seront proposés, dont certains constituent une amélioration de choix connue [5], [8].

En montrant qu'un vecteur choisi selon le critère assure la convergence pour tout partitionnement de celui-ci, une tentative sera faite pour choisir un "bon" partitionnement.

On fera dans un deuxième temps une hypothèse d'orthogonalité des lignes ou des colonnes de la matrice A, ce qui nous permettra l'obtention d'un vecteur optimal. Ce vecteur sera repris dans le cas général en montrant qu'il vérifie les conditions du critère.

Certains essais numériques portant sur certains choix seront exposés à la fin.

Rappels et définitions

Soit à résoudre un système linéaire $Ax = b$ où $A(n \times n)$ régulière.

Reprenons les méthodes du chapitre 1 [1], [2], [3], [4], [5].

1° Méthodes de minimisation du résidu :

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ x_{j+1} = x_j - V_j(V_j^T A^T A V_j)^{-1} V_j^T A^T \rho_j \\ \rho_j = Ax_j - b \end{cases} \qquad \text{(M.R.)}$$

2° Méthodes de minimisation de l'érreur :

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ x_{j+1} = x_j - A^T V_j(V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T \rho_j \\ \rho_j = Ax_j - b \end{cases} \qquad \text{(M.E.)}$$

3° Méthodes de minimisation du résidu "réduit"

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ x_{j+1} = x_j - V_j(V_j^T A V_j)^{-1} V_j^T \rho_j \\ \rho_j = Ax_j - b \end{cases} \qquad \text{(M.R.R.)}$$

Définitions :

1) Soit E_i, $i = 1, \dots, k$ *un partitionnement de* $\{1, \dots, n\}$. *Soit* $y \in \mathbb{R}^n$, *les vecteurs* y^i, $i = 1, \dots, k$ *sont dits obtenus par partitionnement de* y *suivant le mode* $(E_i, i = 1, \dots, k)$ *si* :

$(y^i, e_p) = (y, e_p)\, \delta_{E_{i,p}}$ *où* e_p *le* $p^{\text{ème}}$ *vecteur de la base canonique de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\delta_{E_{i,p}} = 1$ *si* $p \in E_i$ *et* $\delta_{E_{i,p}} = 0$ *si* $p \notin E_i$.

2) L'une des méthodes précédentes est dite de partitionnement si les vecteurs colonnes de V_j *sont obtenus par partitionnement d'un vecteur de* $\mathbb{R}^n$.

1 - METHODES DE MINIMISATION DU RESIDU (M.R.)

Posons $V_j = (y_j^1, \ldots, y_j^k)$, $y_j^i \in \mathbb{R}^n$

On se place dans le cas où la méthode (M.R.) est de partitionnement, et on la désigne par (M.R.R.).

On supposera donc que les y_j^i, $i = 1, \ldots, k$ sont obtenus par partitionnement d'un vecteur $y_j \in \mathbb{R}^n$, suivant un mode $(E_j^1, \ldots, E_j^k)$.

Lemme :

Si y_j *est choisi tel que :*

$$\text{Signe}(y_j, e_p) = \text{Signe}(\rho_j, A^p)$$

Alors, $\sum_{i=1}^{k} (\rho_j, Ay_j^i) = 0 \iff \rho_j = 0$

où e_p *est le* $p^{\text{ème}}$ *vecteur de la base canonique de* $\mathbb{R}^n$, *et* A^p *la* $p^{\text{ème}}$ *colonne de* A.

où $\text{Signe}(\rho_j, A^p) = +1$ *si* $(\rho_j, A^p) > 0$; 0 *si* $(\rho_j, A^p) = 0$ *et* -1 *si* $(\rho_j, A^p) < 0$.

Preuve :

On a $Ay_j^i = \sum_{p \in E_j^i} (y_j, e_p) A^p$

donc $(\rho_j, Ay_j^i) = \sum_{p \in E_j^i} (y_j, e_p)(\rho_j, A^p)$

donc $\sum_{i=1}^{k} (\rho_j, Ay_j^i) = \sum_{p=1}^{n} (y_j, e_p)(\rho_j, A^p)$

or $(y_j, e_p)(\rho_j, A^p) = 0 \iff (\rho_j, A^p) = 0$

donc $\sum_{i=1}^{k} (\rho_j, Ay_j^i) = 0 \iff \rho_j = 0$. $\square$

Remarque : Ce lemme est essentiel pour ce qui suit, puisqu'il fournit une première approche d'un choix possible de y_j.

En effet, on a vu au chapitre 2 théorème 2.3.2. qu'une condition suffisante de convergence est que :

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\rho_j/||\rho_j||, \frac{Ay_j^i}{||Ay_j^i||} \right) \text{ ne tendait pas vers 0.}$$

Ce qui signifie que ρ_j ne doit pas "s'écraser" contre le supplémentaire orthogonal du sous-espace engendré par $\{Ay_j^1, \ldots, Ay_j^k\}$, à moins que $\rho_j = 0$. □

Posons :

$$\varepsilon_j^p = \text{Signe}(\rho_j, A^p)$$

$$(y_j, e_p) = \varepsilon_j^p \, \alpha_j^p, \; \alpha_j^p > 0.$$

Théorème 4.1.1.

Si α_j^p, $p = 1, \ldots, n$ *sont choisis tels que :*

$$\exists M > 0, \; \exists N' \subset \mathbb{N} \text{ infini} : \frac{\alpha_j^q}{\alpha_j^{p_j}} \leq M, \; \forall j \in N', \; q = 1, \ldots, n$$

où p_j *vérifient :* $\exists \tau > 0$, $\exists \tau' > 0$, $\exists \tau_j^p$, $p = 1, \ldots, n$, $j \in N'$:

$$\tau' \geq \tau_j^p \geq \tau \; ; \; \tau_j^{p_j} \, |(\rho_j, A^{p_j})| = \max_{q=1,\ldots,n} \tau_j^q \, |(\rho_j, A^q)|, \; j \in N'.$$

Alors, la M.R.R. est convergente pour tout partitionnement de y_j.

De plus la suite $\{||\rho_j||\}$ *n'est pas à convergence logarithmique.*

Preuve :

Compte-tenu du théorème 2.3.2, il suffit de montrer que :

$$\sum_{i=1}^{k} (\rho_j/||\rho_j||, Ay_j^i/||Ay_j^i||)^2 \text{ ne tend pas vers 0.}$$

Ce qui revient à montrer que : $\sum_{i=1}^{k} (\rho_j/||\rho_j||,\ Ay_j^i/||y_j^i||)^2$ ne tend pas vers 0, vu que A est supposée régulière.

$$\sum_{i=1}^{k} (\rho_j/||\rho_j||,\ Ay_j^i/||y_j^i||)^2 = \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{\sum_{p\in E_j^i} \varepsilon_j^p\, \alpha_j^p\, (\rho_j/||\rho_j||,\ A^p)}{\left(\sum_{q\in E_j^i} (\varepsilon_j^q)^2\, (\alpha_j^q)^2\right)^{1/2}}\right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left|\frac{\sum_{p\in E_j^i} \alpha_j^p\, |(\rho_j/||\rho_j||,\ A^p)|}{\left(\sum_{q\in E_j^i} (\varepsilon_j^q)^2\, (\alpha_j^q)^2\right)^{1/2}}\right|^2$$

$$\geq \frac{\left(\alpha_j^{p_j}\, |(\rho_j/||\rho_j||,\ A^{p_j})|\right)}{\sum_{q\in E_j^i} (\varepsilon_j^q)^2\, (\alpha_j^q)^2}$$

$$= \frac{(\rho_j/||\rho_j||,\ A^{p_j})^2}{\sum_{q\in E_j^i} (\varepsilon_j^q)^2 \left(\frac{\alpha_j^q}{\alpha_j^{p_j}}\right)^2}$$

où E_j^i celui contenant l'indice p_j.

Or, $\exists N'' \subset N' : \rho_j/||\rho_j|| \xrightarrow[N'']{} \rho,\ ||\rho|| = 1$

Comme $\tau|(\rho_j/||\rho_j||,\ A^p)| \leq \tau'\ |(\rho_j/||\rho_j||,\ A^{p_j})|\ q = 1,\dots, n\ ;\ j \in N'$.

$(\rho_j/||\rho_j||,\ A^{p_j})$ ne peut tendre vers 0 dans N", car sinon on aura $|(\rho,\ A^p)| = 0\quad p = 1,\dots, n$ ce qui contredit $||\rho|| = 1$.

Donc, $\exists N''' \subset N'',\ \exists\delta > 0 : |(\rho_j/||\rho_j||,\ A^{p_j})| \geq \delta\quad \forall j \in N'''$.

D'autre part $\sum_{q\in E_j^i} (\varepsilon_j^q)^2 \left(\frac{\alpha_j^q}{\alpha_j^{p_j}}\right)^2 \leq M^2\ \mathrm{Card}(E_j^i)$

$$\leq M^2\ (n-k+1)$$

donc $\sum_{i=1}^{k} (\rho_j/||\rho_j||,\ Ay_j^i/||y_j^i||)^2 \geq \dfrac{\delta^2}{M^2(n-k+1)}$. □

Remarque : En prenant $\tau_j^p = 1$, $p = 1,\ldots, n$ ou bien $\tau_j^p = 1/||A^p||$ l'indice p_j est celui réalisant respectivement :

- $|(\rho_j,\ A^{p_j})| = \max\limits_{q=1,\ldots,n} |(\rho_j,\ A^q)|$
- $\left|\left(\rho_j,\ \dfrac{A^{p_j}}{||A^{p_j}||}\right)\right| = \max\limits_{q=1,\ldots,n} \left|\left(\rho_j,\ \dfrac{A^q}{||A^q||}\right)\right|$

Corollaire 4.1.1.

Si on prend α_j^p $p = 1,\ldots, n$ *tels que :*

$\exists m > 0,\ \exists M > 0,\ \exists N' \subset \mathbb{N}$ *(infini)* : $m \leq \alpha_j^p \leq M$, $p = 1,\ldots, n \quad j \in N'$

Alors la M.R.P. est convergente pour tout partitionnement de y_j.

La convergence de $\{||\rho_j||\}$ *n'est pas logarithmique.*

Preuve :

On a : $\dfrac{m}{M} \leq \dfrac{\alpha_j^p}{\alpha_j^q} \leq \dfrac{M}{m}$ $\quad p, q = 1,\ldots, n$; $j \in N'$.

Le théorème 4.1.1. conclut. □

Proposition 4.1.1.

Sous les conditions du corollaire 4.1.1., on a :

$$||\rho_{j+1}||^2 \leq ||\rho_j||^2 \left\{1 - \frac{\gamma_2^2(A)}{k} \cdot \frac{m^2}{M^2} \sum_{i=1}^{k} \frac{\left[\sum_{p\, E_j^i} |(\rho_j/||\rho_j||,\ A^p/||A^p||)|\right]^2}{\text{Card } E_j^i}\right\}$$

Preuve :

$$\text{On a : } ||\rho_{j+1}||^2 = ||\rho_j||^2 - \rho_j^T A V_j (V_j^T A^T A V_j)^{-1} V_j^T A^T \rho_j$$

$$\text{Posons } V_j = \left(\frac{y_j^1}{||y_j^1||}, \dots, \frac{y_j^k}{||y_j^k||} \right)$$

$$\text{Donc } \rho(V_j^T A^T A V_j) \le \sum_{i=1}^{k} \frac{||Ay_j^i||^2}{||y_j^i||^2}$$

$$\le k \wedge^2$$

où $\wedge^2 = \max\limits_{x \neq 0} \dfrac{||Ax||^2}{||x||^2}$.

$$\text{D'où } ||\rho_{j+1}||^2 \le ||\rho_j||^2 \left[1 - \frac{1}{k \wedge^2} \sum_{i=1}^{k} (\rho_j/||\rho_j||,\ Ay_j^i/||y_j^i||)^2 \right]$$

$$\text{or, } \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\rho_j}{||\rho_j||}, \frac{Ay_j^i}{||y_j^i||} \right)^2 = \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{\sum\limits_{p \in E_j^i} \alpha_j^p \left| \left(\frac{\rho_j}{||\rho_j||}, A^p \right) \right|}{\left(\sum\limits_{q \in E_j^i} (\varepsilon_j^q)^2 \ (\alpha_j^q)^2 \right)^{1/2}} \right]$$

$$\ge \frac{\lambda^2 \ m^2}{M^2} \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(\sum\limits_{p \in E_j^i} \left| \left(\frac{\rho_j}{||\rho_j||}, \frac{A^p}{||A^p||} \right) \right| \right)^2}{\text{Card } E_j^i}$$

où $\lambda^2 = \min\limits_{x \neq 0} \dfrac{||Ax||^2}{||x||^2}$. □

CHOIX PARTICULIERS

1° $(y_j, e_p) = \varepsilon_j^p$

où $\varepsilon_j^p = \text{Signe}(\rho_j, A^p)$ $\quad p = 1, \dots, n.$

2° $\quad (y_j, e_p) = (\rho_j, A^p), \qquad p = 1,\dots, n$

i.e. $\quad y_j = A^T \rho_j.$

3° $\quad 0 < \delta \le \delta_j^i \le 1 \qquad i = 1,\dots, k,\ j \in \mathbb{N}$

1. Pour $p \in E_j^i$, $(y_j, e_p) = \begin{cases} \varepsilon_j^k/|(\rho_j/||\rho_j||,\ A^p/||A_p||)| & \text{si } |(\rho_j/||\rho_j||,\ A^p/||A^p|| \\ & \ge \delta_j^i \\ \varepsilon_j^p/\delta_j^i & \text{sinon} \end{cases}$

2. $p \in E_j^i$; $(y_j, e_p) = \begin{cases} \varepsilon_j^p\ |(\rho_j/||\rho_j||,\ A^p/||A^p||)| & \text{si } |(\rho_j/||\rho_j||,\ A^p/||A^p||) \ge \delta \\ \varepsilon_j^p/\delta_j^i & \text{sinon} \end{cases}$

Proposition 4.1.2.

Pour les choix précédents la (M.R.P.) converge pour tout partitionnement de y_j.

Preuve :

1° $\quad$ On a $\alpha_j^p = 1,\ p = 1,\dots, n,\ j \in \mathbb{N}$

2° $\quad \alpha_j^p = |(\rho_j, A^p)|$ avec $\tau_j^p = 1$ on a $\dfrac{\alpha_j^p}{\alpha_j^{p_j}} \le 1 \quad q = 1,\dots, n,\ j \in \mathbb{N}$

3°

1. On a $\alpha_j^p = \min\left(\dfrac{1}{\left|\left(\dfrac{\rho_j}{||\rho_j||}, \dfrac{A_p}{||A^p||}\right)\right|}, \dfrac{1}{\delta_j^i}\right) \qquad p \in E_j^i$

donc $1 \le \alpha_j^p \le \frac{1}{\delta} \qquad p = 1,\dots, n.$

2. $\alpha_j^p = \max\left(\left|\left[\dfrac{\rho_j}{||\rho_j||}, \dfrac{A_p}{||A^p||}\right)\right|, \delta\right)$

donc $\delta \le \alpha_j^p \le 1.$

Le théorème 3.1.1. conclut. □

Remarque : 1) Le premier choix consiste à prendre le vecteur y_j de composentes +1 ou -1 selon que (ρ_j, A^p) est positif ou négatif. En comparaison de ce choix on peut voir la méthode de correction additive [5], [6], [7] où y_j est pris comme ayant toutes ses composantes valant +1.

2) Des conditions sur le meilleur choix des δ_j^i du choix 3 seront vues à la suite de la proposition 4.1.4.

4° Choix du type correction multiplicative :

Les méthodes de corrections multiplicatives consistent à prendre

$y_j = x_j, \forall j$ [5], [8].

On propose plutôt les choix suivant de y_j :

$(y_j, e_p) = \varepsilon_j^p \, |(x_j, e_p)| \qquad p \neq p_j$

où p_j est celui définit dans le théorème 3.1.1.

$(y_j, e_{p_j}) = \varepsilon_j^{p_j} \alpha_j^{p_j}$

où $\alpha_j^{p_j} \geq 0$ telle que : $\exists M > 0, \exists N' \subset \mathbb{N}$ (infini) ; $\dfrac{|(x_j, e_p)|}{\alpha_j^{p_j}} \leq M, \ p = 1,\dots, n$

On peut prendre en particulier :

i) $\alpha_j^{p_j} = \max\limits_{t=1,\dots,n} |(x_j, e_p)|$

ii) $\alpha_j^{p_j} = \gamma$ où $\gamma \in \mathbb{R}, \gamma > 0$.

iii) $\left\{\alpha_j^{p_j}\right\}$ une suite positive ne tendant pas vers 0.

Proposition 4.1.3.

Avec les choix précédents la (M.R.P.) converge pour tout partitionnement de y_j.

Preuve :

- Par construction on a : $\dfrac{\alpha_j^p}{\alpha_j^{p_j}} \leq M$, $p = 1,\dots, n$, le théorème 3.1.1. conclu.
- Pour les suggestions i), ii) et iii) on a :

i) $\dfrac{\alpha_j^p}{\alpha_j^{p_j}} \leq 1$

ii) on a $||\rho_j|| \leq ||\rho_0||$ $\forall j \in \mathbb{N}$ donc $||s_j||^2 \leq \dfrac{\Lambda^2}{\lambda^2} ||s_0||^2$

où Λ^2 et λ^2 la plus grande et la plus petite valeur propre de $A^T A$.

Donc

$||x_j|| - ||x^*|| \leq \frac{\Lambda}{\lambda} ||s_0||$ où x^* la solution du système $Ax = b$

donc $|(x_j, e_p)| \leq ||x^*|| + \frac{\Lambda}{\lambda} ||s_0||$

or $\alpha_j^p = |(x_j, e_p)|$ et $\alpha_j^{p_j} = \gamma$

donc $\dfrac{\alpha_j^p}{\alpha_j^{p_j}} \leq \dfrac{M'}{\gamma}$, où $M' = ||x^*|| + \frac{\Lambda}{\lambda} ||s_0||$

iii) $\alpha_j^{p_j} \geq 0$ ne tendant pas vers 0 donne :

$\exists N' \subset \mathbb{N}$ (infini) $\exists \tau > 0 : \alpha_j^{p_j} \geq \tau \quad \forall j \in N'$

donc $\dfrac{\alpha_j^p}{\alpha_j^{p_j}} \leq \dfrac{M'}{\tau}$ $p = 1,\dots, n$, $j \in N'$

Dans les trois cas le théorème 4.1.1. conclut. □

On dispose à présent d'un critère permettant le choix d'une famille de vecteurs y_j, dont tout partitionnement assure la convergence de la méthode (M.R.P).

Il est clair que pour y_j choisi selon les conditions du théorème 4.1.1, avec $\alpha_j^p > 0$, le meilleur partitionnement est celui pour lequel k est ajusté, de sorte que chaque y_j^i, $i = 1,\ldots, k$ ne contient qu'une seule composente non nul ; la solution s'obtient alors en une seule itération. Situation qui ne présente d'intérêt que si les quantités (ρ_j, A^p) sont presque toutes nulles, vue que la matrice A et à priori de grande taille.

On est amené à se poser deux questions :

1° Pour une taille k fixée et un mode $(E_j^i, i = 1,\ldots, k)$ fixé, quel est le meilleur vecteur y_j à partitionner suivant le mode $(E_j^i, i = 1,\ldots, k)$ et répondant aux conditions du théorème 4.1.1.

2° Pour une taille k fixée et y_j choisi selon le théorème 4.1.1, quel est le meilleur mode de partitionnement $(E_j^i, i = 1,\ldots, k)$. Le meilleur dans le sens de celui qui fournit la plus petite valeur de $||\rho_{j+1}||$, par rapport à tout autre partitionnement. Vue l'expression de $||\rho_{j+1}||$ il semble impossible de fournir des réponses définitives aux questions posées. On peut cependant considérer une majoration de $||\rho_{j+1}||$.

1. On peut voir à travers la démonstration de la proposition 4.1.1. qu'on a :

$$||\rho_{j+1}||^2 \leq ||\rho_j||^2 \left[1 - \frac{\gamma_2^2(A)}{k} \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{\left\{ \sum_{p\, E_j^i} \alpha_j^p \, \varepsilon_j^p (\rho_j/||\rho_j||, A^p/||A^p||) \right\}^2}{\left\{ \sum_{q\, E_j^i} (\varepsilon_j^q)^2 \, (\alpha_j^q)^2 \right\}^{1/2}} \right] \right] \quad (*)$$

Posons :

$$C_j = \begin{pmatrix} (\rho_j, A^1/||A^1||) \\ \vdots \\ (\rho_j, A^n/||A^n||) \end{pmatrix} ; \quad \alpha_j = \begin{pmatrix} \alpha_j^1 \\ \vdots \\ \alpha_j^n \end{pmatrix} ; \quad \varepsilon_j = \begin{pmatrix} \varepsilon_j^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_j^n \end{pmatrix}$$

L'égalité (*) s'écrit alors :

$$||\rho_{j+1}||^2 \leq ||\rho_j||^2 \left[1 - \frac{\gamma_2^2(A)}{k\ ||\rho_j||^2} \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(\varepsilon_j^{E_j^i}\alpha_j^{E_j^i},\ C_j^{E_j^i} \right)^2}{\left|\left| \varepsilon_j^{E_j^i}\alpha_j^{E_j^i} \right|\right|^2} \right]$$

où $C_j^{E_j^i} \in \mathbb{R}^{\mathrm{Card}E_j^i}$ dont les composentes sont $(C_j^{E_j^i}, e_p) = (C_j, e_p)$, $p \in E_j^i$.

Il en est de même pour $\alpha_i^{E_j^i}$.

$\varepsilon_j^{E_j^i}$ la matrice diagonale de taille $\mathrm{Card}E_j^i$, dont les éléments diagonaux

sont ε_j^p, $p \in E_j^i$.

On voit donc que les vecteurs $y_j = \varepsilon_j\ \alpha_j$ minimisant le second membre de (*) doivent satisfaire :

$$\max \left\{ \left(\frac{\varepsilon_j^{E_j^i}\alpha_j^{E_j^i}}{\left|\left|\varepsilon_j^{E_j^i}\alpha_j^{E_j^i}\right|\right|},\ C_j^{E_j^i} \right)^2 ;\ \alpha_j^{E_j^i} \geq 0 \right\} \text{ pour } i = 1,\ldots, k$$

Ce qui admet comme solutions :

$$\varepsilon_j^{E_j^i}\ \alpha_j^{E_j^i} = \lambda_j^i\ C_j^{E_j^i}\ ,\ i = 1,\ldots, k \text{ où } \lambda_j^i \neq 0.$$

On peut prendre $\lambda_j^i = 1$ vue que l'itération de la (M.R.) n'est pas modifier si on multiplie une colonne de V_j par un scalaire non nul.

D'où :

__Proposition 4.1.4.__

Avec les notations précédentes, le vecteur y_j *assurant le minimum de la quantité* (*) *est :*

$$y_j = C_j.$$

Avec ce choix on a :

$$||\rho_{j+1}||^2 \leq ||\rho_j||^2 \left[1 - \frac{\gamma_2^2(A)}{k} \sum_{p=1}^{n} (\rho_j/||\rho_j||,\ A^p/||A^p||)^2\right]$$

<u>Preuve</u> :

On a vu précédemment que :

$$||\rho_{j+1}||^2 \leq ||\rho_j||^2 \left[1 - \frac{\gamma_2^2(A)}{k\ ||\rho_j||^2} \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(\varepsilon_j^{E_j^i}\ \alpha_j^{E_j^i},\ C_j^{E_j^i}\right)^2}{\left|\left|\varepsilon_j^{E_j^i}\ \alpha_j^{E_j^i}\right|\right|^2}\right]$$

Avec $y_j = C_j$,

on a :

$$\left(\frac{\varepsilon_j^{E_j^i}\ \alpha_j^{E_j^i}}{\left|\left|\varepsilon_j^{E_j^i}\ \alpha_j^{E_j^i}\right|\right|},\ C_j^{E_j^i}\right)^2 = \left|\left|C_j^{E_j^i}\right|\right|^2$$

$$= \sum_{p\in E_j^i} \left(\rho_j,\ \frac{A^p}{||A^p||}\right)^2$$

d'où $||\rho_{j+1}||^2 \leq ||\rho_j||^2 \left[1 - \frac{\gamma_2^2(A)}{k} \sum_{p=1}^{k} (\rho_j/||\rho_j||,\ A^p/||A^p||)^2\right].$ □

On a vu dans le choix 3 des quantités δ_j^i qui sont comprises entre 0 et 1. Voyons dans quelle mesure on doit les prendre voisines de 0 ou de 1. On utilise pour ceci la majoration (*).

Posons $a_j^p = |(\rho_j/||\rho_j||,\ A^p/||A^p||)|$

$F_j^i = \{p \in E_j^i : \varepsilon_j^p \neq 0\}$

Pour les choix 3° 1. et 3° 2., l'inégalité (*) s'écrit respectivement :

- $$||\rho_{j+1}||^2 \leq ||\rho_j||^2 \left[1 - \frac{\gamma_2^2(A)}{k} d_j\right]$$

où $d_j = \left[\sum_{i=1}^{k} d_j^i(\delta_j^i)\right]^2$

$$d_j^i(\delta_j^i) = \left[\sum_{p\in F_j^i} \frac{a_j^p}{\max(\alpha_j^p, \delta_j^i)}\right]^2 \Big/ \sum_{q\in F_j^i} \frac{1}{\max(\alpha_j^p, \delta_j^i)^2}$$

- $$||\rho_{j+1}||^2 \leq ||\rho_j||^2 \left[1 - \frac{\gamma_2^2(A)}{k}\, d_j'\right]$$

avec $d_j' = \left[\sum_{i=1}^{k} d_j'^i\ (\delta_j^i)\right]^2$

$$d_j'^i(\delta_j^i) = \left[\sum_{p\in F_j^i} a_j^p \max(a_j^p, \delta_j^i)\right]^2 \Big/ \sum_{q\in F_j^i} \frac{1}{\max(a_j^p, \delta_j^i)^2}$$

<u>*Propriété*</u> :

i) $\quad d_j^i(0) \geq d_j^i(1) \iff (\mathrm{Card}F_j^i)^2 \geq \sum_{q\in F_j^i} \left(\frac{1}{a_j^q} \sum_{p\in F_j^i} a_j^p\right)^2$

ii) $\quad d_j'^i(0) \leq d_j'^i(1)$.

<u>Preuve</u> :

$$d_j^i(0) = (\mathrm{Card}F_j^i)^2 \Big/ \sum_{q\in F_j^i} \left(\frac{1}{a_j^q}\right)^2$$

$$d_j^i(1) = \sum_{p\in F_j^i} a_j^{p\,2} \Big/ \mathrm{Card}F_j^i$$

donc $$\frac{d_j^i(0)}{d_j^i(1)} - 1 = \left[(\mathrm{Card}F_j^i)^2 - \sum_{q\in F_j^i} \left[\frac{1}{a_j^q} \sum_{p\in F_j^i} a_j^p\right]^2\right] \Big/ \sum_{q\in F_j^i} \left(\frac{1}{a_j^q} \sum_{p\in F_j^i} a_j^p\right)^2$$

d'où l'assertion i).

D'autre part,

$$d_j'^{i}(0) = \left[\sum_{p\in F_j^i} (a_j^p)^2\right]^2 \Bigg/ \sum_{q\in F_j^i} \left(\frac{1}{a_j^q}\right)^2$$

$$d_j'^{i}(1) = \left(\sum_{p\in F_j^i} a_j^p\right)^2 \Bigg/ \mathrm{Card} F_j^i$$

or $0 < a_j^p \leq 1$, $p \in F_j^i$ donc,

$$(a_j^p)^2 \leq a_j^p \text{ et } \frac{1}{a_j^p} \geq 1$$

d'où $d_j'^{i}(0) \leq d_j'^{i}(1)$. □

<u>Remarques</u> :

1. Supposons qu'un mode $(E_j^i,\ i = 1,\ldots, k)$ ait été fixé. On prendra dans le choix 3° 1, δ_j^i petit si les a_j^p, $p \in E_j^i$ sont voisins, i.e. vérifiant i) ; dans le cas contraire on prendra δ_j^i grand (voisin de 1).

On remarque aussi que si la condition i) est vérifiée pour un mode $(E_j^i,\ i = 1,\ldots, k)$ la (M.R.P.) est convergente bien que les conditions du théorème 4.1.1. ne soient pas vérifiées. Ceci provient du fait que le théorème 4.1.1. assure la convergence pour tout partitionnement, alors que dans notre cas on a la convergence seulement pour le mode considéré.

2. Dans le choix 3° 2, le meilleur δ_j^i suivant la majoration (*) est $\delta_j^i = 0$, i.e. $y_j = C_j$ suivant les notations de la proposition 4.1.4. □

2. Choix du mode $(E_j^i,\ i = 1,\ldots, k)$, pour y_j et k fixés.

On peut là aussi considérer la quantité (*).

Le meilleur partitionnement est celui réalisant :

$$\max_{E_j^i,\, i=1,\ldots,k} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\varepsilon_j^{E_j^i}\ \alpha_j^{E_j^i}}{\left\|\varepsilon_j^{E_j^i}\ \alpha_j^{E_j^i}\right\|},\ C_j^{E_j^i} \right)^2$$ □

Une approche serait de prendre $E_j^i = \{i_j\}$ $i = 1, \ldots, k-1$ où les indices i_j correspondent aux k-1 plus grande valeurs de $|(\rho_j, A^p/||A^p||)|$; et E_j^k contenant le restant des indices. $\square$

5° Jusque là on a basé notre choix de y_j sur une majoration de l'erreur, à cause de la complexité de la relation reliant $||\rho_{j+1}||$ et $||\rho_j||$.

Pour obtenir une relation plus simple, on se placera dans le cas où la matrice A est à colonnes orthogonales.

Posons $D = \begin{pmatrix} 1/||A^1||^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/||A^n||^2 \end{pmatrix}$

Proposition 4.1.5.

Si la matrice A *est à colonnes orthogonales, le meilleur choix de* y_j *est donné par* $y_j = D\,A^T\,\rho_j$.

Avec un tel choix la (M.R.P) *converge en une seule itération, indépendamment du mode de partitionnement choisi.*

Preuve :

Posons $V_j = (y_j^1, \ldots, y_j^k)$ obtenu par partitionnement de y_j suivant un mode $(E_j^i,\ i = 1, \ldots, k)$.

On a,

$$(V_j^T\,A^T A\,V_j)_p^q = (Ay_j^p,\ Ay_j^q)$$

$$= \sum_{m \in E_j^p} (y_j, e_m)(y_j, e_t)(A^m, A^t)$$

$$= ||Ay_j^p||^2\ \delta_{pq}$$

or, $||\rho_{j+1}||^2 = ||\rho_j||^2 - \rho_j^T A\,V_j(V_j^T\,A^T A\,V_j)^{-1}\,V_j^T\,A^T\,\rho_j$

$$= ||\rho_j||^2 \left[1 - \sum_{i=1}^{k} (\rho_j/||\rho_j||,\ Ay_j^i/||Ay_j^i||)^2\right]$$

Posons :

$$y_j = \begin{pmatrix} d_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n \end{pmatrix}$$

On a : $\sum_{i=1}^{k} (\rho_j,\ Ay_j^i/||Ay_j^i||)^2 = \sum_{i=1}^{k} \left[\dfrac{\sum_{p\in E_j^i} d_p(\rho_j,\ A^p)}{(\sum_{q\in E_j^i} d_q^2\ ||A^q||^2)^{1/2}}\right]^2$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\gamma_j^i}{||\gamma_j^i||^2},\ a_j^i\right)^2$$

où $\gamma_j^i \in \mathbb{R}^{\mathrm{Card}E_j^i}$ de composentes $d_p||A^p||$, $p \in E_j^i$;

$a_j^i \in \mathbb{R}^{\mathrm{Card}E_j^i}$ de composentes $\left(\rho_j,\ \dfrac{A^p}{||A^p||}\right)$, $p \in E_j^i$

Or minimiser $||\rho_{j+1}||$ revient à maximiser, $\left(\dfrac{\gamma_j^i}{||\gamma_j^i||},\ a_j^i\right)^2$; ce qui admet $\gamma_j^i = \lambda_j^i\ a_j^i$ comme solution, $\lambda_j^i \neq 0$.

On peut prendre $\lambda_j^i = 1$.

D'où $d_p||A^p|| = (\rho_j,\ A^p/||A^p||) \quad p \in E_j^i,\ i = 1,\dots,k.$

- Avec $y_j = D\ A^T\ \rho_j$ on a $||\rho_{j+1}|| = 0$, en effet ;

$$\rho_j = \sum_{p=1}^{n} (\rho_j,\ A^p/||A^p||)\ \frac{A^p}{||A^p||}$$

donc $||\rho_j||^2 = \sum_{p=1}^{n} \left(\rho_j,\ \dfrac{A^p}{||A^p||}\right)^2$

D'autre part, $||Ay_j^i||^2 = \sum_{\substack{p\in E_j^i \\ q\in E_j^i}} \left(\rho_j, \frac{A^p}{||A^p||}\right)\left(\rho_j, \frac{A^q}{||A^q||^2}\right)(A^p, A^q)$

$$= \sum_{p\in E_j^i} \left(\rho_j, \frac{A^p}{||A^p||}\right)^2$$

et $(\rho_j, Ay_j^i) = \sum_{p\in E_j^i} \left(\rho_j, \frac{A^p}{||A^p||}\right)^2$

D'où $||\rho_{j+1}||^2 = ||\rho_j||^2 - \sum_{i=1}^{k} \sum_{p\in E_j^i} \left(\rho_j, \frac{A^p}{||A^p||}\right)^2$

$$= ||\rho_j||^2 - \sum_{p=1}^{n} \left(\rho_j, \frac{A^p}{||A^p||}\right)^2$$

$$= 0. \qquad \square$$

Le choix $y_j = D\,A^T\,\rho_j$ est optimal pour les matrices à colonnes orthogonales.

Adaptons-le dans le cas général (A seulement régulière).

Proposition 4.1.6.

Pour tout partitionnement de $y_j = D\,A^T\,\rho_j$ la M.R.P. est convergente.

De plus,

$$||\rho_{j+1}||^2 \leq ||\rho_j||^2 \left[1 - \frac{\gamma_2^2(A)}{k} \sum_{p=1}^{n} (\rho_j/||\rho_j||,\ A^p/||A^p||)^2\right]$$

Preuve :

On a $\alpha_j^p = \left|\left(\rho_j, \frac{A^p}{||A^p||^2}\right)\right|$

donc, $\dfrac{\alpha_j^p}{\alpha_j^{p_j}} = \dfrac{\tau_j^p \,|(\rho_j,\, A^p)|}{\tau_j^{p_j}\,|(\rho_j,\, A^{p_j})|} \cdot \dfrac{||A^{p_j}||^2\, \tau_j^{p_j}}{||A^p||^2\, \tau_j^p}$, avec $\tau_j^p = \dfrac{1}{||A^p||^2}$

Donc, $\dfrac{\alpha_j^p}{\alpha_j^{p_j}} \leq 1$ et le théorème 4.1.1. conclu la convergence.

- On a vu dans la proposition 4.1.1. que :

$$||\rho_{j+1}||^2 \leq ||\rho_j||^2 \left[1 - \frac{1}{k\,\Lambda^2} \sum_{i=1}^{k} (\rho_j/||\rho_j||,\, Ay_j^i/||y_j^i||)^2\right]$$

or, $$\left(\rho_j,\, \frac{Ay_j^i}{||y_j^i||}\right)^2 = \left[\sum_{p\in E_j^i} (y_j,\, e_p)(\rho_j,\, A^p)\right]^2 \Big/ \sum_{q\in E_j^i} (y_j,\, e_p)^2$$

$$= \sum_{p\in E_j^i} \left[\rho_j,\, \frac{A^p}{||A^p||}\right]^2 \Big/ \sum_{q\in E_j^i} \left(\rho_j,\, \frac{A^q}{||A^q||}\right)^2 \times \frac{1}{||A^q||^2}$$

$$\geq \lambda^2 \sum_{p\in E_j^i} \left(\rho_j,\, \frac{A^p}{||A^p||}\right)^2$$

Donc $$||\rho_{j+1}||^2 \leq ||\rho_j||^2 \left[1 - \frac{\gamma_2^2(A)}{k} \sum_{i=1}^{k} \sum_{p\in E_j^i} (\rho_j/||\rho_j||,\, A^p/||A^p||)^2\right]$$

d'où $$||\rho_{j+1}||^2 \leq ||\rho_j||^2 \left[1 - \frac{\gamma_2^2(A)}{k} \sum_{p=1}^{n} (\rho_j/||\rho_j||,\, A^p/||A^p||)^2\right]$$

□

2 - METHODE DE MINIMISATION DE L'ERREUR (M.E.)

La méthode est définie par :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - A^T V_j (V_j^T A A^T V_j)^{-1} V_j^T \rho_j \\ \rho_j = Ax_j - b \end{cases}$$

où $V_j = (y_j^1, \ldots, y_j^k)$; y_j^i, $i = 1, \ldots, k$ linéairement indépendants.

On peut par utilisation du chapitre 1, Reprendre tout ce qu'a été fait précédemment :

On se placera pour toute la suite dans le cas où la (M.E.) est de partitionnement, qu'on désignera par (M.E.P.).

Lemme :

Si y_j *est choisi tel que :* signe(y_j, e_p) = signe(ρ_j, e_p)

alors :

$$\sum_{i=1}^{k} (\rho_j, y_j^i) = 0 \iff \rho_j = 0.$$

Preuve :

Démonstration identique à celle du lemme du paragraphe 1°. □

Tout comme, pour la (M.R.P.) ce lemme permet de nous guider dans le choix de y_j en sorte de rendre grande la quantité :

$$\sum_{i=1}^{k} (\rho_j, y_j^i/||y_j^i||)^2$$

ce qui assurerait la convergence compte-tenu du théorème 2.1.4.

Posons :

$$\varepsilon_j^p = \text{Signe}(\rho_j, e_p)$$

$$(y_j, e_p) = \varepsilon_j^p \alpha_j^p \ ; \ \alpha_j^p \geq 0 \ ; \ p = 1, \ldots, n \ ; \ j \in \mathbb{N}.$$

Théorème 4.2.1.

En choisissant α_j^p, $p = 1,\ldots, n$ *tels que :*

$$\exists M > 0,\ \exists N' \subset \mathbb{N} \text{ (infini)} : \frac{\alpha_j^q}{\alpha_j^{p_j}} \leq M,\ q = 1,\ldots, n\ ;\ j \in N'$$

où l'indice p_j *est tel que :*

$$\exists\tau' > 0,\ \exists\tau > 0,\ \exists\tau' \geq \tau_j^p \geq \tau,\ p = 1,\ldots, n,\ j \in N'$$

et

$$\tau_j^{p_j}\ |(\rho_j, e_{p_j})| \geq \tau_j^p |(\rho_j, e_p)| \qquad p = 1,\ldots, n$$

Alors,

La (M.E.P.) est convergente de convergence non logarithmique, et ceci pour tout partitionnement de y_j.

Preuve :

Immédiat en utilisant le théorème 1.2.1. □

Corollaire 4.2.1.

Si les coefficients α_j^p $p = 1,\ldots, n$ *sont choisis tels que :*

$$\exists M > 0,\ \exists m > 0,\ \exists N' \subset \mathbb{N} \text{ (infini)} : m \leq \alpha_j^p \leq M,\ p = 1,\ldots, n\ ;\ j \in N'$$

Alors,

La méthode (M.E.P.) est convergente de convergence non logarithmique, et ceci pour tout partitionnement de y_j.

Preuve :

Pour le théorème 1.2.1, une démonstration directe est évidemment possible. □

Proposition 4.2.1.

Sous les conditions du corollaire précédent on a :

$$||s_{j+1}||^2 \leq ||s_j||^2 \left[1 - \frac{\gamma_2^2(A)}{k}\frac{m^2}{M^2}\sum_{i=1}^{k}\frac{\left(\sum_{p\,E_j^i}|(\rho_j,||\rho_j||,\ e_i)|\right)^2}{\mathrm{Card}E_j^i}\right]$$

ou encore

$$||s_{j+1}||^2 \leq ||s_j||^2 \left[1 - \frac{\gamma_2^2(A)}{k}\frac{m^2}{M^2}\sum_{i=1}^{k}\frac{\left(\sum_{p\,E_j^i}|(s_j/||s_j||,\ A_i^T/||A_i^T||)|\right)^2}{\mathrm{Card}E_j^i}\right]$$

Preuve :

Pour la première inégalité on peut procéder de la même façon que dans la proposition 4.1.1., en remarquant que :

$$||s_{j+1}||^2 \leq ||s_j||^2 \left[1 - \frac{1}{k\,\Lambda^2}\sum_{i=1}^{k}(\rho_j/||s_j||,\ y_j^i/||y_j^i||)^2\right]$$

La première inégalité se déduit facilement de la proposition 4.1.1. et la définition de deux méthodes homologues du chapitre 1.

Une démonstration directe serait analogue à celle de la première inégalité. □

CHOIX PARTICULIERS

1° $(y_j,\ e_p) = \varepsilon_j^p$

où $\varepsilon_j^p = \mathrm{Signe}(\rho_j,\ e_p)$, $p = 1,\ldots,\ n$; $j \in \mathbb{N}$.

2° $y_j = \rho_j$, $j \in \mathbb{N}$.

3° $0 < \delta \leq \delta_j^i \leq 1 \qquad i = 1,\ldots,\ k$; $j \in \mathbb{N}$

$$(y_j, e_p) = \begin{cases} \varepsilon_j^p / |(\rho_j, e_p)| & \text{si } |(\rho_j/||\rho_j||, e_p)| \geq \delta_j^p \\ \\ \varepsilon_j^p/\delta_j^p & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 4.2.1.

Pour les choix précédents la (M.E.P.) converge pour tout partitionnement de y_j.

Preuve :

Les choix 1° et 2° sont les homologues de 1° et 2° de la (M.R.P.). Le théorème 1.2.1. conclut.

Pour le choix 3° on a :

$$\alpha_j^p = \min\left\{\frac{1}{|(\rho_j/||\rho_j||, e_i)|}, \frac{1}{\delta_j^i}\right\}$$

donc $1 \leq \alpha_j^p \leq \frac{1}{\delta}$. Le corollaire précédent conclu. □

Remarque : Le choix 1° coïncide avec celui de la décomposition de la norme ϕ_1 qu'on peut voir dans [9].

4° Choix du type corrections multiplicatives

Identique à celui du paragraphe 1, avec les mêmes suggessions en adaptant les nouvelles significations de ε_j^p et de l'indice p_j.

La convergence est assurée, soit par une démonstration directe et utilisation du théorème 4.2.1. ; soit par application du théorème 1.2.1. □

Tout comme dans 1° on peut rechercher soit le meilleur vecteur à partitionner soit le meilleur mode de partitionnement pour un vecteur y_j choisi selon le théorème 4.2.1.

Là aussi on aura besoin d'une majoration de l'erreur.

Propriété :

Soit $y_j \in \mathbb{R}^n$ *de composentes* $\varepsilon_j^p\ \alpha_j^p \in \mathbb{R}$, $p = 1,\dots, n$.

Soit $V_j = (y_j^1,\dots, y_j^k)$ *obtenu par partitionnement de* y_j *suivant un mode* $(E_j^i,\ i = 1,\dots, k)$.

On a :

$$||s_{j+1}||^2 \leq ||s_j||^2 \left[1 - \frac{\gamma_2^2(A)}{k||s_j||^2} \sum_{i=1}^{k} \frac{\left\{ \sum_{p\in E_j^i} \varepsilon_j^p\ \alpha_j^p \left(\rho_j, \frac{e_p}{||A_p^T||} \right) \right\}^2}{\sum_{q\in E_j^i} (\varepsilon_j^q)^2\ (\alpha_j^q)^2} \right] \qquad (*)$$

Preuve :

Itérons dans la (M.E.P) avec $V_j = \left(\frac{y_j^1}{||y_j^1||},\dots, \frac{y_j^k}{||y_j^k||} \right)$

On a :

$$||s_{j+1}||^2 = ||s_j||^2 - \rho_j^T\ V_j\ (V_j^T A A^T\ V_j)^{-1}\ V_j^T\ \rho_j$$

$$\leq ||s_j||^2 - \frac{||V_j^T\ \rho_j||^2}{\rho(V_j^T A A^T\ V_j)}$$

$$\leq ||s_j||^2 - \frac{||V_j^T\ \rho_j||^2}{\mathrm{Trace}(V_j^T A A^T\ V_j)}$$

$$\leq ||s_j||^2 - \frac{||V_j^T\ \rho_j||^2}{k\ \Lambda^2}$$

où $\Lambda^2 = \max\limits_{x\neq 0} \frac{||A^T\ x||^2}{||x||^2}$

Donc, $||s_{j+1}||^2 \leq ||s_j||^2 - \frac{1}{k\ \Lambda^2} \sum_{i=1}^{k} \left(\rho_j, \frac{y_j^i}{||y_j^i||} \right)^2$

L'expression (*) s'obtient en explécitant y_j^i, $i = 1,\dots, k$; et en minorant $||A_p^T||^2$ par

$$\min_{x\neq 0} \frac{||A^T\ x||^2}{||x||^2} \quad \text{où } A_p^T \text{ désigne la transposée de la } p^{\text{ième}}$$

ligne de A. □

Proposition 4.2.2.

Pour k *et* (E_j^i, $i = 1,\dots, k$), $j \in \mathbb{N}$, *fixés le* y_j *rendant minimum la quantité* (*) *est* $y_j = C_j$

où $(C_j, e_p) = (\rho_j, e_p) \dfrac{1}{||A_p^T||}$

De plus :

$$||s_{j+1}||^2 \leq ||s_j||^2 \left[1 - \frac{\gamma_2^2(A)}{k} \sum_{p=1}^{n} (s_j/||s_j||,\ A_p^T/||A_p^T||)^2\right]$$

Preuve :

Posons : $C_j = \begin{pmatrix} \left(\rho_j, \dfrac{e_1}{||A_1^T||}\right) \\ \vdots \\ \left(\rho_j, \dfrac{e_n}{||A_n^T||}\right) \end{pmatrix}$; $\varepsilon_j = \begin{pmatrix} \varepsilon_j^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_j^n \end{pmatrix}$; $\alpha_j = \begin{pmatrix} \alpha_j^1 \\ \vdots \\ \alpha_j^n \end{pmatrix}$

Avec ces notations la majoration (*) s'écrit :

$$||s_{j+1}||^2 \leq ||s_j||^2 \left[1 - \frac{\gamma_2^2(A)}{k\ ||s_j||^2} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\varepsilon_j^{E_j^i}\ \alpha_j^{E_j^i}}{||\varepsilon_j^{E_j^i}\ \alpha_j^{E_j^i}||},\ C_j^{E_j^i}\right)^2\right]$$

or le minimum suivant $\alpha_j^p \geq 0$, $p = 1,\dots, n$ du membre de droite est donné par les $\alpha_j^{E_j^i}$ réalisant :

$$\max_{\varepsilon_j^{E_j^i} \alpha_j^{E_j^i}} \left(\frac{\varepsilon_j^{E_j^i}\ \alpha_j^{E_j^i}}{||\varepsilon_j^{E_j^i}\ \alpha_j^{E_j^i}||},\ C_j^{E_j^i}\right) \qquad i = 1,\dots, k$$

ce qui donne :

$$\varepsilon_j^{E_j^i}\ \alpha_j^{E_j^i} = C_j^{E_j^i} \qquad i = 1,\dots, k$$

i.e. $(y_j,\ e_p) = \left(\rho_j,\ \dfrac{e_p}{||A_p^T||}\right).$

De plus pour un tel y_j on a :

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\varepsilon_j^{E_j^i}\ \alpha_j^{E_j^i}}{||\varepsilon_j^{E_j^i}\ \alpha_j^{E_j^i}||},\ C_j^{E_j^i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} ||C_j^{E_j^i}||^2$$

$$= \sum_{p=1}^{n} \left(\rho_j,\ \frac{e_p}{||A_p^T||}\right)^2$$

$$= \sum_{p=1}^{n} (S_j,\ A_p^T/||A_p^T||)^2. \qquad \square$$

2.

Supposons cette fois-ci que la taille k et le vecteur y_j soient fixés.

Une approche du meilleur mode de partitionnement est celui minimisant la quantité (*).

$$\text{i.e.} \quad \max_{E_j^i,\ i=1,\dots,k} \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{\varepsilon_j^{E_j^i}\ \alpha_j^{E_j^i}}{||\varepsilon_j^{E_j^i}\ \alpha_j^{E_j^i}||},\ C_j^{E^i}\right]^2$$

Une heuristique serait de prendre $E_j^i = \{i_j\}$ $i = 1,\dots, k-1$ correspondant aux plus grandes valeurs de $\left|\left(\rho_j,\ \dfrac{e_p}{||A_p^T||}\right)\right|$; et E_j^k le restant des indices. $\square$

5° Là encore et pour les mêmes raisons que dans la (M.R) on considèrera le cas où la matrice A est à lignes orthogonales.

Posons :

$$D' = \begin{bmatrix} 1/||A_1^T||^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/||A_n^T||^2 \end{bmatrix}$$

Proposition 4.2.3.

Si la matrice A est à lignes orthogonales le meilleur choix de y_j est donné par :

$$y_j = D' \rho_j$$

Avec ce choix la (M.E.P) converge en une seule itération, indépendamment du partitionnement.

Preuve :

On peut utiliser le théorème 1.2.1, ou faire une démonstration analogue à celle de la proposition 4.1.5, en considérant $||s_{j+1}||^2$. □

Supposons que la matrice A est seulement régulière.

Proposition 4.2.4.

Pour tout partitionnement de $y_j = D' \rho_j$ la (M.E.P) est convergente.

De plus,

$$||s_{j+1}||^2 \leq ||s_j||^2 \left[1 - \frac{\gamma_2^2(A)}{k} \sum_{p=1}^{n} (s_j/||s_j||,\ A_p^T/||A_p^T||)^2\right]$$

Preuve :

La démonstration de la majoration se fait de la même façon que celle de la proposition 4.1.6.

La convergence est assurée par le théorème 1.2.3. □

3 - METHODES DE MINIMISATION DU RESIDU REDUIT (M.R.R.)

La matrice A sera supposée symétrique définie positive.

La méthode est définie par :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - V_j^T (V_j^T A V_j)^{-1} V_j^T \rho_j \\ \rho_j = A x_j - b \end{cases} \qquad \text{(M.R.R)}$$

Soit B une matrice régulière telle que : $A = B^T B$.

La méthode s'écrit alors :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - V_j (V_j^T B^T B V_j)^{-1} V_j^T B^T r_j \\ r_j = B x_j - B^{T-1} b \end{cases}$$

On peut donc reprendre tout ce qu'a été fait pour la (M.R.P) en l'adaptant au système $Bx = B^{T-1} b$.

La méthode partitionné sera désignée par (M.R.R.P).

Les indices p_j désigneront ceux pour lesquels :

$$\exists \tau > 0,\ \exists \tau' > 0,\ \exists \tau' \geq \tau_j^p \geq \tau :$$

$$\tau_j^{p_j} \, |(\rho_j, e_{p_j})| \geq \tau_j^{p_j} \, |(\rho_j, e_q)| \quad q = 1, \ldots, n.$$

Posons : $\varepsilon_j^p = \text{Signe}(\rho_j, e_p)$.

$$(y_j, e_p) = \varepsilon_j^p \, \alpha_j^p, \ \alpha_j^p \geq 0.$$

Théorème 4.3.1.

Si les α_j^p, $p = 1,\ldots, n$ *sont choisis tels que :*

$$\exists m > 0,\ \exists N' \subset \mathbb{N}\ (\text{infini}) : \frac{\alpha_j^p}{\alpha_j^{p_j}} \leq m \qquad q = 1,\ldots, n \ ;\ j \in N'$$

Alors, la (M.R.R.P) converge pour tout partitionnement de y_j.

Preuve :

Par application du théorème 1.2.1. □

Corollaire 4.3.1.

Pour α_j^p *choisis tels que :*

$$\exists M > 0,\ \exists m > 0,\ \exists N' \subset \mathbb{N}\ (\text{infini}) : m \leq \alpha_j^p \leq M \ ;\ p = 1,\ldots,\ j \in N'$$

Alors, la (M.R.R.P) converge pour tout partitionnement de y_j.

Proposition 4.3.1.

Avec α_j^p, $p = 1,\ldots, n$ *choisis suivant le corollaire précédent, on a :*

$$||r_{j+1}||^2 \leq ||r_j||^2 \left[1 - \frac{\Gamma(A)}{k} \frac{m^2}{M} \sum_{i=1}^{k} \frac{\left[\sum_{p \in E_j^i} (\rho_j/||\rho_j||,\ e_p) \right]^2}{\text{Card } E_j^i} \right]$$

où $\Gamma(A) = \frac{\lambda'}{\Lambda'}$; λ' *et* Λ', *la plus petite et la plus grande valeur propre de* A.

Preuve :

Démonstration identique à celle de la proposition 4.1.1. □

Une majoration analogue à celle figurant dans la démonstration de la proposition 4.1.1. est donnée par :

$$||r_{j+1}||^2 \leq ||r_j||^2 - \frac{1}{k\,\Lambda'} \sum_{i=1}^{k} (\rho_j,\ y_j^i/||y_j^i||)^2 \qquad (*)$$

Proposition 4.3.2.

Le vecteur y_j *minimisant* (*) *est :* $y_j = \rho_j$

On a alors :

$$||r_{j+1}||^2 \le ||r_j||^2 \left[1 - \frac{\Gamma(A)}{k}\right]$$

Preuve :

- Identique à la proposition 4.1.4.

- Pour la majoration il suffit de remarquer que :

$$\sum_{i=1}^{k} (\rho_j, y_j^i/||y_j^i||)^2 = ||\rho_j||^2. \qquad \square$$

CHOIX PARTICULIERS

1. $(y_j, e_p) = \varepsilon_j^p$

2. $y_j = \rho_j$

3. $0 < \gamma \le \delta_j^i \le 1 \qquad i = 1,\dots, k, \ j \in \mathbb{N}$

$$(y_j, e_p) = \begin{cases} \varepsilon_j^p/|(\rho_j, e_p)| & \text{si } |(\rho_j/||\rho_j||, e_p)| \ge \delta_j^i \\ \varepsilon_j^p/\delta_j^i & \text{sinon} \end{cases}$$

$p \in E_j^i$, $i = 1,\dots, k$.

Proposition 4.3.3.

Avec les choix précédent la (M.R.R.P) converge pour tout partitionnement de y_j.

Preuve :

Les choix 1° et 2° sont les homologues de 1° et 2° de la (M.R.P) le théorème 1.2.1. conclu.

Pour le choix 3, on a :

$$\alpha_j^p = \min(1/|(\rho_j/||\rho_j||,\ e_p)\ ,\ 1/\delta_j^i)$$

donc $1 \leq \alpha_j^p \leq 1/\delta$, le corollaire 4.3.1. assure la convergence. □

4° Choix du type corrections multiplicatives.

On reprend le même choix et suggestions que ceux concernant la (M.R.P) avec ρ_j l'indice réalisant :

$$\max_{t=1,\dots,n} |(\rho_j,\ e_t)|$$

La convergence est assurée par le théorème 1.2.1. □

5°

L'hypothèse d'orthogonalité des colonnes de A pour la (M.R.) se traduit ici par l'horthogonalité des colonnes de la matrice B. Ce qui signifie puisque $A = B^T B$, que A est une matrice diagonale.

Posons
$$D = \begin{pmatrix} 1/A_1^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/A_n^n \end{pmatrix}$$

Proposition 4.3.4.

Si la matrice A *est diagonale,* $y_j = D\ \rho_j$ *assure la convergence de la (M.R.R.P) en une seule itération.*

Remarque : Dans cette proposition on ne suppose pas que les A_i^i sont de même signe.

On s'affranchit à présent de l'orthogonalité de B.

Proposition 4.3.5.

Si la matrice A est symétrique définie positive, la (M.R.R.P) converge pour tout partitionnement de $y_j = D\,\rho_j$.

De plus,

$$\bullet\ ||r_{j+1}||^2 \leq ||r_j||^2 \left[1 - \frac{\Gamma(A)}{k} \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{p \in E_j^i} (\rho_j/||r_j||,\ e_p)^2 \times \frac{1}{A_p^p} \right) \right]$$

$$\bullet\ ||r_{j+1}||^2 \leq ||r_j||^2 \left[1 - \Gamma(A)^2\right]$$

Preuve :

• La convergence est assurée par la proposition 4.1.6. et le théorème 1.2.1.

$$\bullet\ \text{On a, } ||r_{j+1}||^2 \leq ||r_j||^2 \left[1 - \frac{1}{k\,\Lambda} \sum_{i=1}^{k} (\rho_j/||r_j||,\ y_j^i/||y_j^i||)^2\right]$$

$$\text{or } \sum_{i=1}^{k} (\rho_j,\ y_j^i)^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(\sum_{p \in E_j^i} (\rho_j,\ e_p)^2 \frac{1}{A_p^p} \right)^2}{\sum_{q \in E_j^i} (\rho_j,\ e_p)^2 \times \frac{1}{(A_p^p)^2}}$$

$$\geq \lambda \sum_{i=1}^{k} \sum_{p \in E_j^i} (\rho_j,\ e_p)^2 \frac{1}{A_p^p}$$

D'autre part $A_p^p \leq \Lambda$

$$\text{d'où } \|r_{j+1}\|^2 \leq \|r_j\|^2 \left[1 - \frac{\lambda}{\Lambda^2} \frac{\|\rho_j\|^2}{\|r_j\|^2}\right]$$

$$\leq \|r_j\|^2 \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^2\right] \qquad \square$$

Remarque : La direction $\mathcal{D}\,\rho_j$ diffère de celle de la méthode de la plus profonde descente par la normalisation $\mathcal{D}$. $\square$

ESSAIS NUMERIQUES

On présentera quelques essais numériques portant sur la (M.R.P).

i.e. $x_{j+1} = x_j - V_j(V_j^T\, A^T A\, V_j)^{-1}\, V_j^T\, A^T\, \rho_j$

où V_j est obtenu par partitionnement "naturel" (par tranches) du vecteur y_j défini suivant les cas par :

1° $(y_j, e_j) = \begin{cases} 1/(\rho_j, A^p/\|A^p\|) & \text{si } (\rho_j, A^p/\|A^p\|) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2° $(y_j, e_p) = (\rho_j, A^p/\|A^p\|)$

3° $(y_j, e_p) = (x_j, e_p)$ (correction multiplicative)

4° $(y_j, e_p) = \begin{cases} \varepsilon_j^p\ (x_j, e_p) \\ \varepsilon_j^{p_j}\ \|x_j\| \end{cases}$ (correction de "type multiplicative")

5° $(y_j, e_p) = \varepsilon_j^p$ (correction de "type additive")

6° $(y_j, e_p) = 1$ (correction additive)

On prendra comme matrice A celles, de PE1 (d = 2), de GIVENS, de NEWMAN et celle d'ORTEGA du 1er espèce, [10].

La taille de ces matrice sera fixée à 25, et celle du partitionnement à 5.

On prendra comme point initial $(x_0, e_p) = \frac{b_p}{A_p^p}$.

w_j désignera $||\rho_j||$.

Matrice de PEI

$$(y_j, e_i) = \begin{cases} 1/(\rho_j, A^i/||A^i||) \\ 0 \quad \text{si } (\rho_j, A^i/||A^i||) \end{cases}$$

W_0 = 780.208305518469
W_1 = 3.54076764053794
W_{11} = 2.85248552440839
W_{14} = 2.65760933431049
W_{24} = 1.96288674161537
W_{25} = 1.94139300614158
$W_{[illegible]}$ = 1.50109413831453

$$(y_j, e_i) = (\rho_j, A^i/||A^i||)$$

W_0 = 780.208305518469
W_1 = 3.53030784974175
W_2 = 1.5978135472222208F-02
W_3 = 7.23168698P1231743F-05
W_4 = 3.2730537709918 58F-07
W_5 = 1.4813806260041445F-09
W_6 = 6.70471272927047 8F-12
W_7 = 3.0345457468340 64F-14
W_8 = 1.37343212185293 8F-16

$(y_j, e_i) = (x_j, e_i)$ (correction multiplicative)

W_0 = 780.208305518469
W_1 = 13.8395201365651
W_{100} = 7.5144238P147008

$(y_j, e_i) = \varepsilon_j^i (x_j, e_i)$ et

$(y_j, e_{p_j}) = \varepsilon_j^{p_j} ||x_j||$

W_0 = 780.208305518409
W_1 = 23.1049653947620
W_{50} = .202301587662631
W_{62} = .199958220689077
W_{81} = 4.459530386986897E-02
W_{100} = 3.641267180886168F-03

$(y_j, e_i) = \varepsilon_j^i$

$W_0 =$ 780.208305518469
$W_1 =$ 3.53553390593274

$W_{97} =$ 1.36301161146280
$W_{98} =$ 1.35316971321935
$W_{99} =$ 1.34359682617811
$W_{100} =$ 1.33364184473895

$(y_j, e_i) = 1.$ (correction additive)

$W_0 =$ 780.208305518469
$W_1 =$ 3.53553390593274
$W_2 =$ 3.53553390593274

stationnaire

<u>Matrice de GIVENS</u>

$$(y_j, e_i) = \begin{cases} 1/(\rho_j, A^i/||A^i||) \\ 0 \quad \text{si } (\rho_j, A^i/||A^i||) = 0 \end{cases}$$

$W_0 =$ 1117.51808989430
$W_1 =$ 1.28984539575969
$W_2 =$ 1.21870224857526
$W_3 =$ 1.21801118721795
$W_4 =$ 1.20236980928719

$W_{97} =$ .350561822947519
$W_{98} =$ .350514883997489
$W_{99} =$ .350016683908514
$W_{100} =$ .348119021550455

$$(y_j, e_i) = (\rho_j, A^i/||A^i||)$$

$W_0 =$ 1117.51808989430
$W_1 =$ 1.28846131905223
$W_2 =$ .787018380748268
$W_3 =$ .669168567866565
$W_4 =$ .615271829383555

$W_{97} =$ .342845239261837
$W_{98} =$ .341879492970861
$W_{99} =$ .340921760920940
$W_{100} =$ .339971838692872

$(y_j, e_i) = (x_j, e_i)$ (correction multiplicative)

$W_0 =$ 1117.51808989430
$W_1 =$ 1.32995826179214
$W_2 =$ 1.32939647878324
$W_3 =$ 1.32939006637166
$W_4 =$ 1.32939000189811
$W_5 =$ 1.32939000125847
$W_6 =$ 1.32939000125213
$W_7 =$ 1.32939000125207
$W_8 =$ 1.32939000125207

stationnaire

$(y_j, e_i) = \varepsilon_j^i (x_j, e_i)$ et

$(y_j, e_{p_j}) = \varepsilon_j^{p_j} ||x_j||$

$W_0 =$ 1117.51808989430
$W_1 =$ 2.96367034700945
$W_2 =$ 2.36163968516423
$W_3 =$ 2.03801664501953
$W_4 =$ 1.98293435895022
$W_5 =$ 1.92753727344504

$W_{97} =$ .509584272575665
$W_{98} =$ .508093186754294
$W_{99} =$ .505706171854685
$W_{100} =$ .504542348635017

$(y_j, e_i) = \varepsilon_j^i$

$W_0 =$ 1117.51808989430
$W_1 =$ 1.28873492478374
$W_2 =$ 1.11115566129910
$W_3 =$ 1.03081010382207
$W_4 =$ .910267823039526
$W_5 =$ .840589840497052

$W_{97} =$ .433559564254360
$W_{98} =$ .433497671111117
$W_{99} =$ .433435838566748
$W_{100} =$ .433374267673283

$(y_j, e_i) = (\rho_j, A^p)$

$W_0 =$ 1117.51808989430
$W_1 =$ 1.28846131905223
$W_2 =$ .787018380740422
$W_3 =$ .669168567188081

$W_{97} =$ .342845304631859
$W_{98} =$ .341879557975358
$W_{99} =$ .340921825598861
$W_{100} =$ .339971903104004

<u>Matrice de NEWMAN</u>

$$(y_j, e_i) = \begin{cases} 1/(\rho_j, A^i/||A^i||) \\ 0 \quad \text{si } (\rho_j, A^i) = 0 \end{cases}$$

$W_0 =$ 908.056838651756
$W_1 =$ 4.07646331625658
$W_2 =$ 3.99906233824653
$W_3 =$ 3.76013917098184
$W_4 =$ 3.74418995172827

$W_{97} =$ 2.25738370508349
$W_{98} =$ 2.25643063320757
$W_{99} =$ 2.25532941410559
$W_{100} =$ 2.25504045855329

$$(y_j, e_i) = (\rho_j, A^i/||A^i||)$$

$W_0 =$ 908.056838651756
$W_1 =$ 2.59199891210788
$W_2 =$ 1.62799698877438
$W_3 =$ 1.38584670804526
$W_4 =$ 1.23741383303587

$W_{97} =$ .942229441058576
$W_{98} =$ .941900277353777
$W_{99} =$ .941571510984832
$W_{100} =$ .941243138778672

$(y_j, e_i) = (x_j, e_i)$ (correction multiplicative)

$W_0 =$ 908.056838651756
$W_1 =$ 2.55700971090375
$W_2 =$ 2.55631876294335
$W_3 =$ 2.55631875956082

stationnaire

$(y_j, e_i) = \varepsilon_j^i\,(x_j, e_i)$ et

$(y_j, e_{p_j}) = \varepsilon_j^{p_j}||x_j||$

$W_0 =$ 908.056838651756
$W_1 =$ 6.26841977046339
$W_2 =$ 5.31272556975790
$W_3 =$ 4.96226330829568

$W_{97} =$ 1.04972193007875
$W_{98} =$ 1.04874184999265
$W_{99} =$ 1.04807600500402
$W_{100} =$ 1.04763059215062

$(y_j, e_i) = \varepsilon_j^i$

$W_0 = 908.056838651756$
$W_1 = 3.17153014510514$
$W_2 = 2.48531794451370$
$W_3 = 2.26886574162853$
$W_4 = 2.08124346407327$

$W_{97} = .697693782224143$
$W_{98} = .697630032085289$
$W_{99} = .697567440284939$
$W_{100} = .697505951655995$

$(y_j, e_i) = (\rho_j, A^i)$

$W_0 = 908.056838651756$
$W_1 = 2.59199891210789$
$W_2 = 1.62799698877382$
$W_3 = 1.38584670688935$
$W_4 = 1.23741383081732$

$W_{97} = .942229425391705$
$W_{98} = .941900261687771$
$W_{99} = .941571495319688$
$W_{100} = .941243123114442$

$(y_j, e_i) = (\rho_j, A^i/||A^i||)$

$W_0 = 908.056838651756$
$W_1 = 3.15089680117963$
$W_2 = 1.98655006655278$
$W_3 = 1.61815123004079$
$W_4 = 1.44394656680714$

$W_{97} = .779421582815987$
$W_{98} = .778586895911619$
$W_{99} = .777761068519896$
$W_{100} = .776943901281770$

Matrice d'ORTEGA 1ère espèce

$$(y_j, e_i) = \begin{cases} 1/(\rho_j, A^i/||A^i||) \\ 0 \quad \text{si } (\rho_j, A^i) = 0 \end{cases}$$

$W_0 = 62.7921579515284$
$W_1 = 49.5567770082108$
$W_2 = 47.9145860406448$
$W_3 = 47.7132013904456$
$W_4 = 47.2178633582410$

$W_{97} = 43.9571811405969$
$W_{98} = 43.9571811299110$
$W_{99} = 43.9571811229560$
$W_{100} = 43.9571811165756$

$(y_j, e_i) = (\rho_j, A^i/||A^i||)$

$W_0 = 62.7921579515284$
$W_1 = 48.2850637365346$
$W_2 = 43.3584435265656$
$W_3 = 40.8278902052063$
$W_4 = 38.7658706680035$
$W_5 = 37.4863129948052$

$W_{97} = 8.33833046841685$
$W_{98} = 8.21594964610452$
$W_{99} = 8.09536500275987$
$W_{100} = 7.97655017364595$

$(y_j, e_i) = (x_j, e_i)$ (correction multiplicative

$W_0 = 62.7921579515284$
$W_1 = 28.9901523015855$
$W_2 = 28.7424601438272$
$W_3 = 28.7378615199954$
$W_4 = 28.7377481920367$
$W_5 = 28.7377452545193$
$W_6 = 28.7377451777500$
$W_7 = 28.7377451757410$
$W_8 = 28.7377451756884$

stationnaire

$(y_j, e_i) = \varepsilon_j^i (x_j, e_i)$ et

$(y_j, e_{p_j}) = \varepsilon_j^{p_j} \, ||x_j||$

$W_0 = 62.7921579515284$
$W_1 = 48.1847547126503$
$W_2 = 45.0309210202590$

$W_{97} = 4.9215666276863000$
$W_{98} = 4.82551821167906$
$W_{99} = 4.75039703465169$
$W_{100} = 4.63919406391157$

$(y_j, e_i) = \varepsilon_j^i$

$W_0 = 62.7921579515284$
$W_1 = 48.2436922098750$
$W_2 = 43.1586232658019$
$W_3 = 39.9356887796950$
$W_4 = 37.2223506551267$

$W_{97} = 14.9295380395714$
$W_{98} = 14.8896542034875$
$W_{99} = 14.8498839634161$
$W_{100} = 14.8102262141766$

$(y_j, e_i) = (\rho_j, A^i)$

$W_0 = 62.7921579515284$
$W_1 = 48.2850637365346$
$W_2 = 43.3584435265656$
$W_3 = 40.8278902052063$
$W_4 = 38.7658706680035$
$W_5 = 37.4863129948052$

$W_{97} = 8.3383304684180 8$
$W_{98} = 8.21594964610576$
$W_{99} = 8.09536500276112$
$W_{100} = 7.97655017364722$

$(y_j, e_i) = (\rho_j, A^i/||A^i||^2)$

$W_0 = 62.7921579515284$
$W_1 = 48.1977222950524$
$W_2 = 43.1933529967832$
$W_3 = 40.5711705032119$
$W_4 = 38.4336058144160$
$W_5 = 36.9900579665284$

$W_{97} = 6.73537358164218$
$W_{98} = 6.61974851466879$
$W_{99} = 6.50610836454877$
$W_{100} = 6.39441905651346$

Ces quelques essais numériques montrent que les choix utilisés sont légèrement meilleurs que ceux habituellement utilisés tels les choix de correction additive, multiplicative et le choix consistant à prendre ρ_j comme vecteur à partitionner. $\square$

Références

(1) A.S. HOUSEHOLDER and F.L. BAUER, *"On certain iterative methods for solving linear systems"*. Numerishe Mathematick 2, pp. 55-59 (1960).

(2) A.S. HOUSEHOLDER, *"Principles of numerical analysis"*. Mc Grauw-Hill Book Company, Inc (1953).

(3) J. BEUNEU, *"Les méthodes de projection-minimisation pour les systèmes linéaires"*. Université de Lille I, ANO 58, (1981).

(4) N. GASTINEL, *"Sur-décomposition de Normes Générales et procédés itératifs"*. Num. Math. 5, pp. 142-157, (1973).

(5) J. BEUNEU, *"Résolutions des systèmes d'équations linéaires par la méthode des compensations"*. Université de Lille I, 1NO 69, (1976).

(6) DVID RYAN and G. TRAPP, *"Partitionning methods for accelerating Gaus-Seidel iterations"*. Proceedings of West Virginia Academy of Science, 4 - 5, pp. 323-326, (1973).

(7) SETTARI A., AZIZ K., *"A generalisation of the additive correction methods for the iterative solution of matrix equations"*. SIAM J.N. Anal. 10, 3, pp. 506-521, (1973).

(8) F. CHATELIN and W.L. MIRANKER, *"Acceleration by agregation of successive approximation methods"*. Linear Algebra and its Applications, 43, pp. 17-47, (1982).

(9) N. GASTINEL, *"Matrices du second degré et normes generales en A.N.L"*. Université de Grenoble, 1ère Thèse (1960).

(10) WESTLAKE J.R., *"Numerical matrix inversion and solution of linear equation"*. John Willey and Sons (1968).

METHODES A ITERATIONS PARALLELES

0 - INTRODUCTION

Parmi les méthodes itératives de résolution de système linéaire, on rencontre des méthodes itératives "basées sur des méthodes de projection" comme on peut le voir sur l'exemple suivant :

Reprenons la méthode de Gauss-Seidel (G.S.1) :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - \dfrac{(\rho_j, e_i)}{A_i^i} e_i \\ j+1 \equiv i \bmod(n) \end{cases}$$

Une variante de cette méthode est de considérer pour j fixé :

$$y_j^i = x_j - \frac{(\rho_j, e_i)}{A_i^i} e_i \qquad i = 1,\ldots, n$$

$$x_{j+1} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_j^i \, y_j^i \qquad \text{avec} \qquad \sum_{i=1}^{n} \gamma_j^i = 1$$

i.e. $$x_{j+1} = x_j - \sum_{i=1}^{n} \gamma_j^i \frac{(\rho_j, e_i)}{A_i^i} e_i$$

ou encore $$x_{j+1} = x_j - \gamma_j \sum_{i=1}^{n} \frac{(\rho_j, e_i)}{A_i^i} e_i.$$

Pour $\gamma_j = 1$ on obtient la méthode de JACOBI.

On dira que la méthode de JACOBI est une méthode à itérations parallèles (basée sur la méthode de GAUSS-SEIDEL).

On considèrera dans ce qui suit la méthode de ESPINOZA [1] sur laquelle ainsi que sur ses homologues, on basera des méthodes à itérations parallèles.

On cherchera pour les méthodes obtenues des valeurs optimales de γ_j et on proposera des condition de convergence.

Rappelons la méthode de Espinoza et ses homologues.

Soit $v_1, \ldots, v_n$ une base de $\mathbb{R}^n$, tel que $(v_i, A v_i) \neq 0 \quad i = 1, \ldots, n$.

Considérons la méthode suivante :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - \dfrac{(v_i, \rho_j)}{(v_i, A v_i)} v_i \\ \rho_j = Ax_j - b \; ; \; j+1 \equiv i \bmod(n) \end{cases} \qquad \text{(G.G.S.1)}$$

Ses homologues dans (B) et (C) respectivement sont :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - \dfrac{(Av_i, \rho_j)}{||Av_i||^2} v_i \\ \rho_j = Ax_j - b \; ; \; j+1 \equiv i \bmod(n) \end{cases} \qquad \text{(G.G.S.2)}$$

et

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - \dfrac{(v_i, \rho_j)}{||A^T v_i||^2} A^T v_i \\ \rho_j = Ax_j - b \; ; \; j+1 \equiv i \bmod(n) \end{cases} \qquad \text{(G.G.S.3)}$$

1° Méthode basée sur G.G.S.1

Considérons :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - \gamma_j \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{(v_i, \rho_j)}{(v_i, Av_i)} v_i \\ \rho_j : Ax_j - b \end{cases}$$

Posons $V = (v_1, \ldots, v_n)$, $W = \begin{pmatrix} 1/(v_1, Av_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/(v_n, Av_n) \end{pmatrix}$

La méthode s'écrit :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j \;)\; \gamma_j \; V\, W\, V^T \rho_j \\ \rho_j = Ax_j - b \end{cases}$$

i) Supposons A symétrique définie positive.

Soit $A = B^T B$.

On a $||BS_{j+1}||^2 = ||BS_j||^2 - 2\gamma_j \, \rho_j^T \, V\, W\, V^T \rho_j + \gamma_j^2 \, ||B\, V\, W\, V^T \rho_j||^2$

La valeur de γ_j rendant minimum $||BS_{j+1}||$ est donnée par :

$$\gamma_j = \frac{\rho_j^T V W V^T \rho_j}{||B V W V^T \rho_j||^2}$$

Soit donc : $$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - \dfrac{\rho_j^T V W V^T \rho_j}{(V W V^T \rho_j, \, A V W V^T \rho_j)} V\, W\, V^T \rho_j \\ \rho_j : Ax_j - b \end{cases} \qquad \text{(G.G.S.1')}$$

<u>Remarque</u> :

On a : $V W V^T = I_{\mathbb{R}^n} \iff (v_i, v_p) = \delta_{ip}(v_i, A\, v_p)$.

S'il en est ainsi la méthode (G.G.S.1') n'est autre que la méthode de la plus profonde descente. □

ii) Prenons $\gamma_j = \gamma$ (indépendante de j).

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - \gamma\, V\, W\, V^T \rho_j \\ \rho_j = Ax_j - b \end{cases} \qquad \text{(G.G.S.1")}$$

Avec $v_i = e_i$, $i = 1,\ldots, n$ et $\gamma = 1$; (G.G.S.1") est la méthode de JACOBI.

Théorème 5.1.1.

i) *Si A est symétrique définie positive les méthodes (G.G.S.1) et (G.G.S.1') sont convergentes.*

ii) *Si A est seulement régulière et si :*

- $(v_i, A\, v_i) \neq 0 \quad i = 1,\ldots, n$

- *Les valeurs propres de* $A\,V\,W\,V^T$ *et* γ *sont de même signe.*

Une condition nécessaire et suffisante pour que la méthode (G.G.S.1") soit convergente est que :

$$0 < |\gamma| < \frac{2}{\rho(A\,V\,W\,V^T)}$$

iii) *Si A est symétrique définie positive une condition nécessaire et suffisante de convergence de G.G.S.1" est que :*

$$0 < \gamma < \frac{2}{\rho(A\,V\,W V^T)}.$$

Preuve :

i) • Pour la démonstration de la convergence de (G.G.S.1) on peut voir [1].

• A étant symétrique définie positive, elle s'écrit $A = B^T B$.

Posons $r_j = Bx_j - {B^{-1}}^T b$.

Les normes des résidus de G.G.S.1 sont reliés par :

$$||r_{j+1}||^2 = ||r_j||^2 - \frac{(\rho_j, V\,W\,V^T \rho_j)^2}{||B\,V\,W\,V^T \rho_j||^2}$$

or $V W V^T \rho_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{(v_i, \rho_j)}{(v_i, Av_i)} v_i$

donc $(\rho_j, V W V^T \rho_j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(v_i, \rho_j)^2}{(v_i, Av_i)}$.

Soit $M = \max_{i=1,\dots,n} (v_i, Av_i)$

Posons $K = ||B V W V^T||$

On a

$$||B V W V^T \rho_j|| \leq K ||\rho_j||$$

donc,

$$||r_{j+1}||^2 \leq ||r_j||^2 \left[1 - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{(v_i, \rho_j)^2}{M K ||r_j|| \, ||\rho_j||}\right)^2\right]$$

Soit λ la plus petite valeur proper de A.

On a,

$$\frac{||\rho_j||^2}{||r_j||} \geq \lambda$$

donc $||r_{j+1}||^2 \leq ||r_j||^2 \left[1 - \frac{\lambda}{M^2 K^2} \left(\sum_{i=1}^{n} v_i, \frac{\rho_j}{||\rho_j||}\right)^2\right]$

Or une condition suffisante de convergence est que $\sum_{i=1}^{n} \left(v_i, \frac{\rho_j}{||\rho_j||}\right)^2$ ne tend pas vers 0.

Or $\frac{\rho_j}{||\rho_j||} \in S(0, 1)$ sphère unité de $\mathbb{R}^n$,

donc, $\exists N' \subset \mathbb{N} : \frac{\rho_j}{||\rho_j||} \xrightarrow[N']{} \rho$ et $||\rho|| = 1$.

Si $\sum_{i=1}^{n} \left(v_i, \frac{\rho_j}{||\rho_j||}\right)^2$ tend vers 0 on aura alors $\sum_{i=1}^{n} (v_i, \rho)^2 = 0$ ce qui est impossible.

Donc G.G.S.1 est convergente.

ii) (G.G.S.1")

On a $\rho_{j+1} = (I - \gamma A V W V^T)\ \rho_j$.

La méthode est donc convergente si et seulement si :

$\rho(I - \gamma A V W V^T) < 1.$

Soit λ une valeur propre de $A V W V^T$.

$|1 - \gamma\lambda| < 1 \iff 0 < \gamma\lambda < 2.$

Il faut donc que γ et λ soient de même signe.

$0 < \gamma\lambda < 2 \iff 0 < |\gamma|\ |\lambda| < 2$ (pour tout λ)

$$\iff 0 < |\gamma| < \frac{2}{|\lambda|}$$

$$\iff 0 < |\gamma| < \frac{2}{\rho(A V W V^T)}.$$

iii) Remarquons que si deux matrices E et F sont symétriques définies positives, les valeurs propres de EF sont alors positives.

En effet ; E s'écrit $E = C^T C$ (C régulière).

Si (λ, x) est tel que : $EFx = \lambda x$.

On a $C^T c\ Fx = \lambda x$.

Soit $y \in \mathbb{R}^n : x = C^T y$.

$$\text{Donc } C^T c\ Fx = \lambda x \iff C^T c\ F\ C^T y = \lambda\ C^T y$$
$$\iff C\ F\ C^T y = \lambda y$$

donc λ est valeur propre de $C F C^T$ qui est symétrique définie positive, donc $\lambda > 0$.

Donc si A est symétrique définie positive les valeurs propres de $A V W^T V$ sont de même signe (positives) on conclut avec ii). □

Remarque : Dans le cas de la méthode de JACOBI on a $v_i = e_i$ et $\gamma = 1$.

On a :

$$A V W V^T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{A_1^2}{A_2^2} & \cdots & \frac{A_1^n}{A_n^n} \\ \frac{A_2^1}{A_1^1} & 1 & \cdots & \frac{A_2^n}{A_n^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_n^1}{A_1^1} & \frac{A_1^2}{A_2^2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Posons : $A V W V^T = I + C$.

La condition de convergence se traduit par :

$\rho(C) < 1$

$$\text{où} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{A_1^2}{A_2^2} & \cdots & \frac{A_1^n}{A_n^n} \\ \frac{A_2^1}{A_1^1} & 0 & \cdots & \frac{A_2^n}{A_n^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_n^1}{A_1^1} & \frac{A_1^2}{A_2^2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

2° Méthode basée sur (G.G.S.2)

Posons $W' = \begin{pmatrix} 1/\|Av_1\|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\|Av_n\|^2 \end{pmatrix}$

La méthode basée sur (G.G.S.2) est donnée par :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - \gamma_j V W' V^T A^T \rho_j \\ \rho_j = Ax_j - b \end{cases}$$

i) γ_j rendant minimum $\|\rho_{j+1}\|$:

On a $\|\rho_{j+1}\|^2 = \|\rho_j\|^2 - 2\gamma_j \rho_j^T A V W' V^T A^T \rho_j$

$+ \gamma_j^2 \|A V W' V^T A^T \rho_j\|^2$

Ce qui est minimisé pour $\gamma_j = \dfrac{\rho_j^T A V W' V^T A^T \rho_j}{\|A V W' V^T A^T \rho_j\|}$

d'où :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - \dfrac{\rho_j^T A V W' V^T A^T \rho_j}{\|A V W' V^T A^T \rho_j\|^2} V W' V^T A^T \rho_j \\ \rho_j = Ax_j - b \end{cases} \qquad \text{(G.G.S.2')}$$

ii) Fixons $\gamma_j = \gamma$

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - \gamma V W' V^T A^T \rho_j \\ \rho_j = Ax_j - b \end{cases} \qquad \text{(G.G.S.2")}$$

Théorème 5.2.1.

i) *Les méthodes (G.G.S.2) et (G.G.S.2') sont convergentes.*

ii) *Une condition nécessaire et suffisante pour que (G.G.S.2") soit convergente est que*

$$0 < \gamma < \frac{2}{\rho(A\,V\,W'\,V^T\,A^T)}$$

En particulier si : $0 < \gamma \leq \dfrac{2}{\mathrm{Trace}(A\,V\,W'\,V^T\,A^T)}$; *(G.G.S.2") est convergente.*

Preuve :

i) C'est dû au théorème 2.2.2, iii).

ii) On a :

$$\rho_{j+1} = (I - \gamma A\,V\,W'\,V^T\,A^T)\,\rho_j$$

Soit λ une valeur propre de $A\,V\,W'\,V^T\,A^T$, on a $\lambda > 0$

donc,

$$0 < \gamma\lambda < 2 \iff 0 < \gamma < \frac{2}{\lambda}$$

d'où $0 < \gamma < \dfrac{2}{\rho(A\,V\,W'\,V^T\,A^T)}$ comme condition nécessaire et suffisante de convergence.

La matrice $A\,V\,W'\,V^T\,A^T$ est symétrique définie positive,

donc

$$\rho(A\,V\,W'\,V^T\,A^T) < \mathrm{Trace}(A\,V\,W'\,V^T\,A^T). \qquad \square$$

Remarque : Pour $v_i = e_i$, $i = 1,\ldots,n$ on a $\mathrm{Trace}(A\,V\,W'\,V^T\,A^T) = n$.

Il s'en suit qu'une condition suffisante de convergence de (G.G.S.2") est que $0 < \gamma \leq \frac{2}{n}$. $\square$

3° Méthode basée sur G.G.S.3.

Posons

$$W'' = \begin{pmatrix} 1/\|A^T v_1\|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\|A^T v_n\|^2 \end{pmatrix}$$

La méthode basée sur (G.G.S.3) est donnée par :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - \gamma_j\, A^T V W'' V^T \rho_j \\ \rho_j = Ax_j - b \end{cases}$$

i) γ_j minimisant $||s_{j+1}||$

On a $||s_{j+1}||^2 = ||s_j||^2 - 2\gamma_j\, \rho_j^T V W'' V^T \rho_j$

$$+ \gamma_j^2\, ||A^T V W'' V^T \rho_j||^2.$$

Le minimum est obtenu pour :

$$\gamma_j = \frac{\rho_j^T V W'' V^T \rho_j}{||A^T V W'' V^T \rho_j||^2}$$

Soit donc,

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - \dfrac{\rho_j^T V W'' V^T \rho_j}{||A^T V W'' V^T \rho_j||^2} \cdot A^T V W'' V^T \rho_j \\ \rho_j = Ax_j - b \end{cases} \qquad \text{(G.G.S.3')}$$

ii) $\gamma_j = \gamma$, $\forall j \in \mathbb{N}$.

i.e.
$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - \gamma\, A^T V W'' V^T \rho_j \\ \rho_j = Ax_j - b \end{cases} \qquad \text{(G.G.S.3")}$$

Théorème 5.3.1.

i) *Les méthodes (G.G.S.3) et (G.G.S.3') sont toujours convergentes.*

ii) *La méthode (G.G.S.3") est convergente si et seulement si :*

$$0 < \gamma < \frac{2}{\rho(A^T V W'' V^T A)}$$

En particulier si $0 < \gamma \leq \dfrac{2}{\text{Trace}(A^T V W'' V^T A)}$, *(G.G.S.3") est convergente.*

Preuve :

i) Due au Théorème 2.2. iii).

ii) • $S_{j+1} = (I - \gamma A^T V W'' V^T A) S_j$ d'où cqfd.

• La matrice $A^T V W'' V^T A$ est symétrique définie positive donc $\rho(A^T V W'' V^T A) < \text{Trace}(A^T V W'' V^T A)$

donc pour $0 < \gamma \leq \dfrac{2}{\text{Trace}(A^T V W'' V^T A)}$ la convergence est assurée. □

Remarque : Pour $v_i = e_i$, $i = 1,\ldots, n$ on a $\text{Trace}(A^T V W'' V^T A) = n$, (G.G.S.3") est ainsi convergente pour $\gamma \in]0, \frac{2}{n}]$, ce qui englobe le cas des deux formes de la méthode de CIMMINO [2] à savoir $\gamma = \frac{1}{n}$ et $\gamma = \frac{2}{n}$.

Références

(1) C. ESPINOZA, "*Contribution à la résolution numérique de certains systèmes d'équations*". Thèse de 3ème Cycle, Université de Grenoble (1977).

(2) N. GASTINEL, "*Analyse Numérique Linéaire*". Hermann (1966).

METHODES ITERATIVES A CONTRAINTES

0 - INTRODUCTION

Pour la résolution du système linéaire $Ax = b$ selon les notations précédentes, on considèrera les méthodes itératives de la forme :

$$x_{j+1} = x_j + \lambda_j v_j, \ \lambda_j \in \mathbb{R} \text{ et } v_j \in \mathbb{R}^n.$$

Ce qui englobe les méthodes précédemment étudiées.

Les inconnues λ_j et v_j seront déterminées de sorte que les deux conditions suivantes soient vérifiées.

1° La norme de l'erreur $S_j = x_j - x^*$ soit décroissante (tout comme pour les méthodes de projection des chapitres précédents).

Les normes utilisées suivant le cas sont, la norme euclidienne, la norme définie par : $(x, y)_* = (Ax, Ay)$ et la norme définie par :

$(x, y)_{**} = (x, Ay)$ lorsque A est symétrique définie positive.

2° Les itérés $\{x_j\}$ seront astreints à demeurer dans une région de l'espace $\mathbb{R}^n$, contenant la solution x^* et fixée à l'avance.

Dans chaque cas la suite $\{x_j\}$ possède une limite qu'on rattachera à la solution x^*, par une expression permettant un calcul effectif de celle-ci.

PRELIMINAIRE

On considèrera les régions de $\mathbb{R}^n$ définies par :

1 - $H = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ (Ax, b) = ||b||^2\}$

$= \{y \in \mathbb{R}^n \ / \ (y, A^T b) = 0\} + \{x^*\}$

translaté d'un hyperplan.

$x^* \in H$

2 - $K = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ ||Ax||^2 = ||b||^2\}$

- ellipsoïde passant par x^*

3 - $H' = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ (x, b) > 0\}$

demi-espace passant par x^*, lorsque $(x^*, b) > 0$.

Remarque :

- $H \cap K = \{x^*\}$
- $AH \subset H'$
- Si A est symétrique définie positive, $x^* \in H'$.

Représentation géométrique

1°

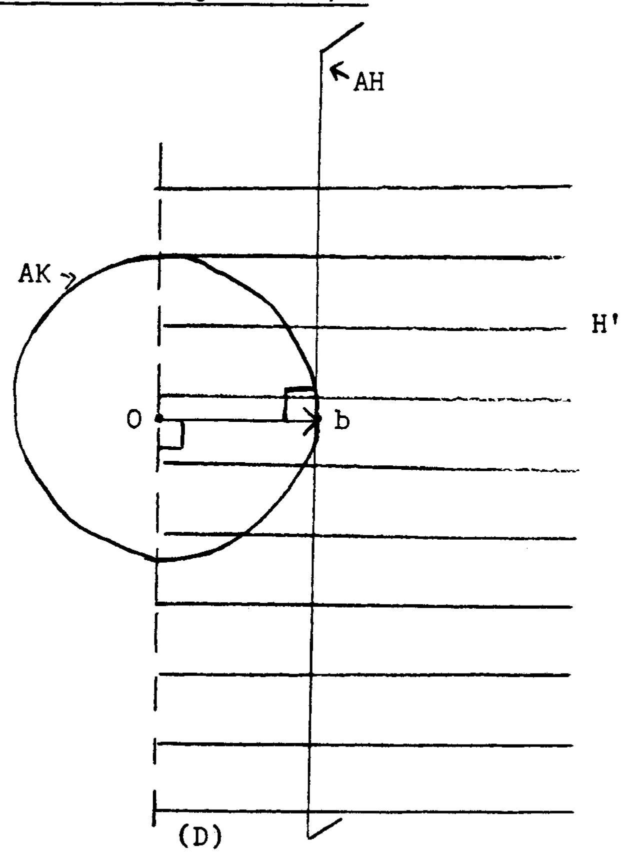

Fig. 1

2°

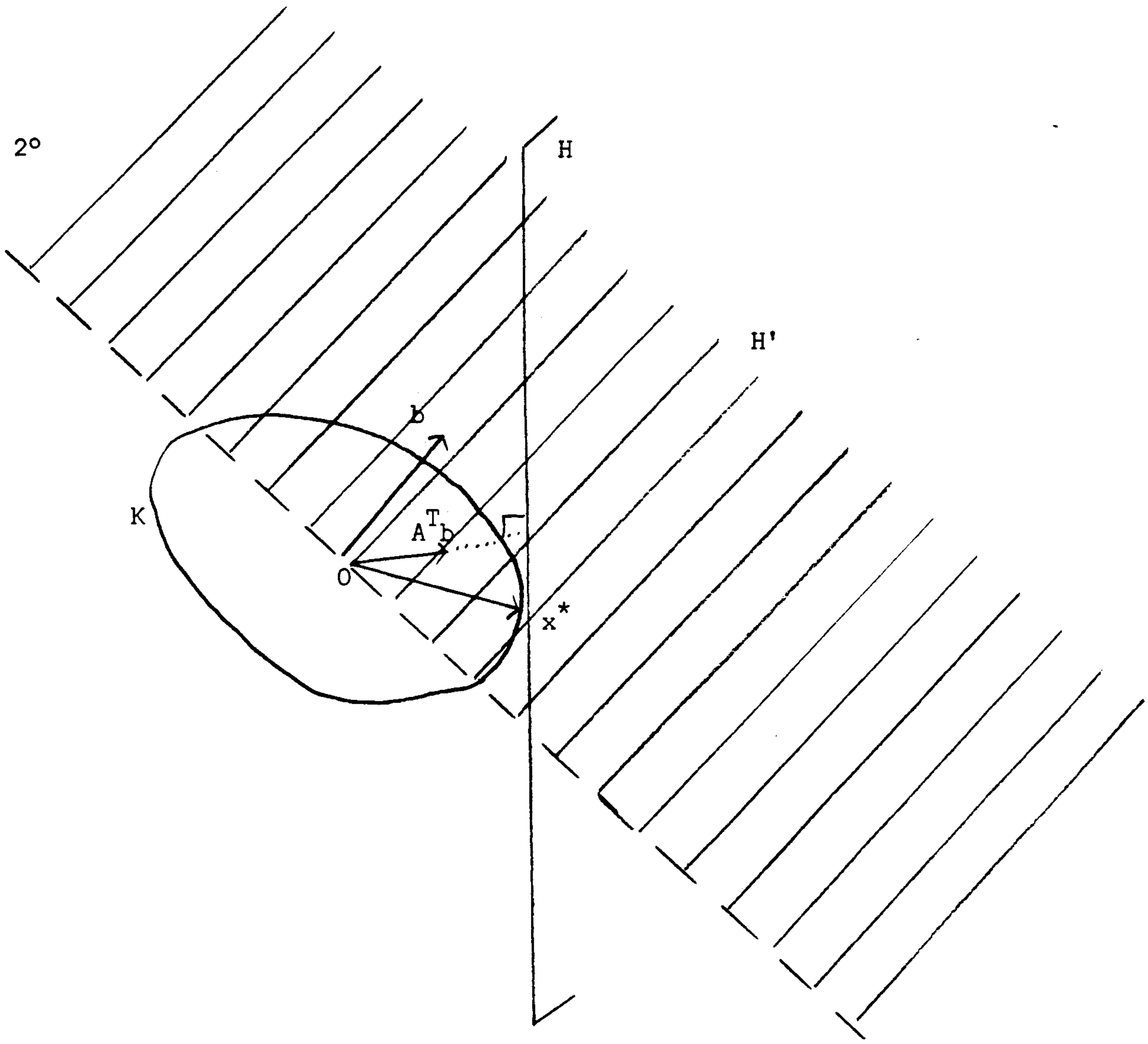

Fig. 2

La figure 1 représente H' (hachuré) ainsi que les images par A de K (sphère) et de H.

Le plan (D) est défini par $\{x \in \mathbb{R}^n \ / \ (x, b) = 0\}$.

La figure 2 représente H' (hachuré),K (ellipsoïde) et H.

Le plan (C) est la frontière de H' : $(C) = \{x \ / \ (x, b) = 0\}$.

On imposera dans ce qui suivra que les itérés successifs restent constamment dans l'une des régions K, H où H' selon le cas et moyennant des choix convenables du point initial et des directions suivant lesquelles on génère les itérés.

Notations

$\{x_j\}$: la suite des itérés.

$S_j = x_j - x^*$

$\rho_j = Ax_j - b$

$||\cdot||$ la norme euclidienne.

$\gamma_2(A)$: le conditionnement de A mesuré par $||\cdot||$

1° DOMAINE H

$H = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ (Ax, b) = ||b||^2\}$

a) Méthodes aux résidus décroissants

On entend par décroissance des résidus la décroissance de $\{||\rho_j||\}$

Considérons l'itération :

$$(*) \begin{cases} x_{j+1} = x_j + \lambda_j \ v_j \\ \lambda_j \in \mathbb{R}, \ v_j \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Propriété 6.1.a.1.

$$\left.\begin{array}{l} (Ax_{j+1}, b) = (Ax_j, b) \\ ||\rho_{j+1}|| < ||\rho_j|| \end{array}\right\} \iff \begin{cases} (Av_j, b) = 0 \\ (Av_j, Ax_j) \neq 0 \\ \lambda_j = -\mu_j \dfrac{(Av_j, \rho_j)}{||Av_j||^2} \\ \mu_j \in]0, 2[\end{cases}$$

Preuve :

- $(Ax_{j+1}, b) = (Ax_j, b) + \lambda_j(Av_j, b)$

donc

$$(Ax_{j+1}, b) = (Ax_j, b) \Longleftrightarrow \lambda_j(Av_j, b) = 0$$

$$\bullet \; ||\rho_{j+1}||^2 = ||\rho_j||^2 + 2\lambda_j(Av_j, \rho_j) + \lambda_j^2 \; ||Av_j||^2$$

donc, $||\rho_{j+1}|| < ||\rho_j|| \Longleftrightarrow \lambda_j \; [2(Av_j, \rho_j) + \lambda_j \; ||Av_j||^2] < 0$

Posons $\lambda_j = -\mu_j \dfrac{(Av_j, \rho_j)}{||Av_j||^2}$

$$||\rho_{j+1}|| < ||\rho_j|| \Longleftrightarrow \frac{(Av_j, \rho_j)^2}{||Av_j||^2} [-2\mu_j + \mu_j^2] < 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (Av_j, \rho_j) \neq 0 \\ \mu_j \in \,]0, 2[\end{cases}$$

d'où, $\mu_j(Av_j, \rho_j)(Av_j, b) = 0$; $(Av_j, \rho_j) \neq 0$ et $\mu_j \in \,]0, 2[$.

i.e. $(Av_j, b) = 0$, $(Av_j, Ax_j) \neq 0$ et $\mu_j \in \,]0, 2[$. □

La méthode (*) répondant aux éxigences de la propriété 1.a.1. s'écrit donc :

$$(\mathcal{H}a) \begin{cases} x_{j+1} = x_j - \mu_j \dfrac{(Av_j, \rho_j)}{||Av_j||^2} v_j \\ (Av_j, b) = 0 \\ (Av_j, Ax_j) \neq 0 \\ \mu_j \in \,]0, 2[\end{cases}$$

*** Recherche d'une direction**

Posons $(Av_j, Ax_j) = \psi_j$

Vues les expressions que doit vérifier v_j on est amené à prendre v_j sous la forme :

$$v_j = \alpha_j\, A^T b + \beta_j\, A^T A x_j$$

α_j et β_j sont donnés par le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha_j\, ||A^T b||^2 + \beta_j (A^T A x_j,\, A^T b) = 0 \\ \alpha_j (A^T A x_j,\, A^T b) + \beta_j\, ||A^T A x_j||^2 = \psi_j \end{cases}$$

Le déterminant principal est donné par :

$$\Delta_j = ||A^T b||^2\, ||A^T A x_j||^2 - (A^T A x_j,\, A^T b)^2$$

Propriété 1.a.2.

- $\Delta_j = 0 \iff x_j = \dfrac{(Ax_0,\, b)}{||b||^2}\, x^*$
- *Si* $x_0 \in H$, *alors* : $\Delta_j = 0 \iff x_j = x^*$

Preuve :

$$\Delta_j = 0 \iff A^T A x_j = \lambda\, A^T b$$

$$\iff x_j = \lambda x^*$$

or $(Ax^*, b) = ||b||^2$

donc, $\lambda = (Ax_j, b)/||b||^2$.

D'autre part, par construction de la méthode on a :

$(Ax_j, b) = (Ax_0, b)$.

D'où, $x_j = \dfrac{(Ax_0,\, b)}{||b||^2}\, x^*$

De plus si $x_0 \in H$ on a, $(Ax_0, b) = ||b||^2$

i.e. $\lambda = 1$. $\square$

Supposons à présent que $\Delta_j \neq 0$.

On a : $\begin{cases} \alpha_j = -\dfrac{\psi_j}{\Delta_j} \cdot (A^T A x_j, A^T b) \\ \beta_j = \dfrac{\psi_j}{\Delta_j} \cdot ||A^T b||^2 \end{cases}$

D'où, $v_j = \dfrac{\psi_j}{\Delta_j} [-(A^T A x_j, A^T b) A^T b + ||A^T b||^2 A^T A x_j]$.

Posons $v_j = \dfrac{\psi_j}{\Delta_j} u_j$

On peut remarquer que la méthode Ha est invariante par multiplication de v_j par un scalaire non nul. On considèrera donc u_j.

Propriété 6.1.a.3.

i) $\Delta_j = (Au_j, \rho_j)$

ii) $||u_j||^2 = ||A^T b||^2 \Delta_j$

iii) $||\rho_{j+1}||^2 = ||\rho_j||^2 - (2\mu_j - \mu_j^2) \dfrac{\Delta_j^2}{||Au_j||^2}$

Preuve :

i) $(Au_j, \rho_j) = (Au_j, Ax_j)$

$$= ||A^T b||^2 \, ||A^T A x_j||^2 - (A^T A x_j, A^T b)^2$$

$$= \Delta_j$$

ii) $||u_j||^2 = ||A^Tb||^4 \, ||A^T A x_j||^2 + ||A^Tb||^2 (A^T A x_j, A^Tb)^2$

$$- 2||A^Tb||^2 (A^T A x_j, A^Tb)^2$$

$$= ||A^Tb||^2 [||A^T b||^2 \, ||A^T A x_j||^2 - (A^T A x_j, A^T b)^2]$$

$$= ||A^Tb||^2 \Delta_j$$

iii) $$||\rho_{j+1}||^2 = ||\rho_j||^2 - \frac{\Delta_j^2}{||Au_j||^2}(2\mu_j - \mu_j^2).$$ □

La méthode s'écrit :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n : (Ax_0, b) \neq 0 \\ x_{j+1} = x_j - \mu_j \dfrac{\Delta_j}{||Au_j||^2} u_j \\ \Delta_j = ||A^T b||^2 \, ||A^T A x_j||^2 - (A^T A x_j, A^T b)^2 \\ u_j = ||A^T b||^2 A^T A x_j - (A^T A x_j, A^T b) A^T b \\ \mu_j \in]0, 2[\end{cases} \qquad (H_1)$$

<u>*Théorème 6.1.a.1.*</u>

Soient $0 < \alpha \leq \beta < 2$.

Si on prend $\mu_j \in [\alpha, \beta]$ $\forall j \in \mathbb{N}$, *alors ;*

La suite $\{x_j\}$ *générée par* (H_1) *est convergente de limite :*

$$\tilde{x} = \frac{(Ax_0, b)}{||b||^2} x^*$$

Si en plus, $x_0 \in H$ *alors* $\tilde{x} = x^*$.

<u>Preuve</u> :

La suite $\{||\rho_j||\}$ est par construction décroissante.

Donc $||\rho_j|| \leq ||\rho_0||$ $\forall j \in \mathbb{N}$.

i.e. $||A(x_j - x^*)|| \leq ||\rho_0||$ $\forall j \in \mathbb{N}$.

Soit λ la plus petite valeur propre de $A^T A$.

On a $||x_j|| \leq ||x^*|| + \dfrac{||\rho_0||}{\lambda} = M$.

La suite $\{x_j\}$ est donc contenue dans le compact B(0, m) (la boule fermée de centre 0 et de rayon m), elle possède donc au moins une valeur d'adhérence.

Montrer la convergence de $\{x_j\}$ revient ainsi à montrer que ses valeurs d'adhérence sont identiques (et valent

$$\frac{(Ax_0, b)}{||b||^2} x^*).$$

Soit $\tilde{x}$ une valeur d'adhérence de $\{x_j\}$ et $\rho = A\tilde{x} - b$.

Comme la suite $\{||\rho_j||\}$ est convergente sa limite est donc $||\rho||$

Or $||\rho_{j+1}||^2 = ||\rho_j||^2 - (2\mu_j - \mu_j^2) \dfrac{\Delta_j^2}{||Au_j||^2}$

donc $\lim\limits_{j\to\infty} (2\mu_j - \mu_j^2) \dfrac{\Delta_j^2}{||Au_j||^2} = 0.$

Comme $\mu_j \in [\alpha, \beta]$, on a $\lim\limits_{j\to\infty} \dfrac{\Delta_j^2}{||Au_j||^2} = 0$

ou encore $\lim\limits_{j\to\infty} \dfrac{\Delta_j^2}{||u_j||^2} = 0.$

Or $\dfrac{\Delta_j^2}{||u_j||^2} = \dfrac{\Delta_j}{||A^T||^2}$ (propriété 6.1.a.3.ii)

donc $\lim\limits_{j\to\infty} \Delta_j = 0.$

Or $\exists N' \subset \mathbb{N}$ infini tel que : $\lim\limits_{N'} x_j = \tilde{x}$.

De plus $\lim\limits_{N'} \Delta_j = 0$

i.e. $\lim\limits_{\substack{j\to\infty \\ N'}} [||A^Tb||^2 \, ||A^T A x_j||^2 - (A^T A x_j, A^Tb)^2] = 0$

donc, $||A^Tb||^2 \, ||A^T A \tilde{x}||^2 - (A^T A \tilde{x}, A^Tb)^2 = 0$

donc, $A\tilde{x} = \varepsilon \dfrac{||A^T A \tilde{x}||}{||A^Tb||} b$

Or la méthode est conçue pour que : $(Ax_{j+1}, b) = (Ax_j, b)\ \forall j$, donc $(A\tilde{x}, b) = (Ax_0, b)$

donc, $\varepsilon \dfrac{||A^T A \tilde{x}||}{||A^T b||} = \dfrac{(Ax_0, b)}{||b||^2}$

d'où $\tilde{x} = \dfrac{(Ax_0, b)}{||b||^2}\, x^*$.

- Pour $x_0 \in H$ on a par définition de H : $(Ax_0, b) = ||b||^2$.

$\square$

Remarque : $\mu_j = 1$ réalise le minimum de $||\rho_{j+1}||$, et fait que H_a soit une méthode de projection (minimisation du résidu) [1], [2], [3].

b) Méthodes aux erreurs décroissantes

Considérons l'itération :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j + \lambda_j\, \omega_j \\ \lambda_j \in \mathbb{R},\ \omega_j \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

On déterminera λ_j et ω_j de sorte que :

$(Ax_{j+1}, b) = (Ax_j, b)$ et la suite $\{||s_j||\}$ soit décroissante.

Propriété 6.1.b.1.

$$\left.\begin{array}{l} (Ax_{j+1}, b) = (Ax_j, b) \\ ||s_{j+1}|| < ||s_j|| \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \begin{cases} \bullet\ (A^T v_j, A^T b) = 0 \\ \bullet\ (v_j, \rho_j) \neq 0 \\ \bullet\ \omega_j = A^T v_j \\ \bullet\ \lambda_j = -\mu_j \dfrac{(\rho_j, v_j)}{||A^T v_j||^2} \\ \bullet\ \mu_j \in]0, 2[\end{cases}$$

Preuve :

A est supposée régulière, on peut toujours écrire : $\omega_j = A^T v_j$.

- $(Ax_{j+1}, b) = (Ax_j, b) + \lambda_j (A A^T v_j, b)$

donc,

$$(Ax_{j+1}, b) = (Ax_j, b) \Longleftrightarrow \lambda_j(A\, A^T v_j, b) = 0$$

$$\bullet\ ||s_{j+1}||^2 = ||s_j||^2 + 2\lambda_j(\rho_j, v_j) + \lambda_j^2||A^T v_j||^2$$

donc, $||s_{j+1}|| < ||s_j|| \Longleftrightarrow \lambda_j[\,2(\rho_j, v_j) + \lambda_j\ ||A^T v_j||^2\,] < 0$

Posons

$$\lambda_j = -\ \mu_j \frac{(\rho_j, v_j)}{||A^T v_j||^2}$$

donc, $||s_{j+1}|| < ||s_j|| \Longleftrightarrow \dfrac{(\rho_j, v_j)^2}{||A^T v_j||^2}\left[-2\mu_j + \mu_j^2\right] < 0$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (\rho_j, v_j) \neq 0 \\ \mu_j \in\ ]0, 2[\end{cases}$$

On a donc,

$$\left.\begin{array}{l} (Ax_{j+1}, b) = (Ax_j, b) \\ ||s_{j+1}|| < ||s_j|| \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mu_j(v_j, \rho_j)(A^T v_j, A^T b) = 0 \\ (v_j, \rho_j) \neq 0 \\ \mu_j \in\ ]0, 2[\end{cases}$$

La méthode cherchée s'écrit donc :

$$(H_b) \begin{cases} x_0 \text{ quelconque} \\ x_{j+1} = x_j - \mu_j \dfrac{(v_j, \rho_j)}{||A^T v_j||^2} A^T\ v_j \\ (A^T v_j, A^T b) = 0 \\ (v_j, \rho_j) \neq 0 \\ \mu_j \in\ ]0, 2[\end{cases}$$

Posons $(v_j, \rho_j) = \gamma_j$, $\gamma_j \in \mathbb{R}$.

*** Recherche d'une direction**

Prenons v_j sous la forme :

$$v_j = \alpha_j\, b + \beta_j\, \rho_j$$

où α_j et β_j sont solutions du système :

$$\begin{cases} \alpha_j\, ||A^T b||^2 + \beta_j (A^T \rho_j, A^T b) = 0 \\ \alpha_j (\rho_j, b) + \beta_j\, ||\rho_j||^2 = \gamma_j \end{cases}$$

Imposons que $x_0 \in H$.

On a donc $(\rho_j, b) = 0$.

Le déterminant principal du système vaut :

$$\Delta_j = ||A^T\, b||^2\, ||\rho_j||^2$$

On a donc,

$$\Delta_j = 0 \iff \rho_j = 0.$$

On voit donc que v_j est calculable tant que $x_j \neq x^*$.

Supposons que, $\Delta_j \neq 0$.

On a alors,

$$\alpha_j = -\frac{\gamma_j}{\Delta_j} (A^T\, \rho_j, A^T b) \;;\; \beta_j = \frac{\gamma_j}{\Delta_j}\, ||A^T b||^2$$

d'où v_j.

Posons $v_j = \dfrac{\gamma_j}{\Delta_j} u_j$

On a : $$u_j = -(A^T\, \rho_j, A^T b) b + ||A^T b||^2\;\; \rho_j.$$

Propriété 6.1.b.2.

Soit $x_0 \in H$

i) $(u_j, \rho_j) = \Delta_j$

ii) $u_j = 0 \Longleftrightarrow x_j = x^*$

iii) $||A^T u_j||^2 \leq ||A^T b||^4 \; ||A^T \rho_j||^2$

Preuve :

i) $(u_j, \rho_j) = ||A^T b||^2 \; ||\rho_j||^2 - (A^T \rho_j, A^T b) \; (b, \rho_j)$

$= ||A^T b||^2 \; ||\rho_j||^2$ (car $x_0 \in H \Rightarrow x_j \in H, \forall j$)

$= \Delta_j$

ii) $u_j = 0 \Longleftrightarrow ||A^T b||^2 \quad \rho_j = (A^T \rho_j, A^T b) b$

$\Longleftrightarrow x_j = \lambda x^*, \; \lambda \neq 0$

or, $(Ax_j, b) = ||b||^2$

donc, $\lambda = 1$.

iii) $||A^T u_j||^2 = (A^T \rho_j, A^T b)^2 \; ||A^T b||^2 + ||A^T b||^4 \; ||A^T \rho_j||^2$

$- 2(A^T \rho_j, A^T b) \; ||A^T b||^2$

$= ||A^T b||^4 \; ||A^T \rho_j||^2 - (A^T \rho_j, A^T b)^2 \; ||A^T b||^2$

$\leq ||A^T b||^4 \; ||A^T \rho_j||^2$ □

On obtient ainsi la méthode définie par :

$$
(H_2)\quad
\begin{cases}
x_0 \in H \\
x_{j+1} = x_j - \mu_j \dfrac{\Delta_j}{||A^T u_j||^2} A^T u_j \\
\Delta_j = ||A^T b||^2 \, ||\rho_j||^2 \\
u_j = ||A^T b||^2 \rho_j - (A^T \rho_j, A^T b) b \\
\mu_j \in \,]0, 2[
\end{cases}
$$

Théorème 6.1.b.1.

i) $||s_{j+1}||^2 \leq ||s_j||^2 \, [1 - (2\mu_j - \mu_j^2) \, \gamma_2^2(A)]$

ii) *Si la suite* μ_j *est choisie telle que* $\mu_j(2-\mu_j)$ *ne tend pas vers* 0 *alors suite* $\{x_j\}$ *générée par* (H_2) *converge vers* x^*.

Preuve :

$$||s_{j+1}||^2 = ||s_j||^2 + \mu_j^2 \frac{\Delta_j^2}{||A^T u_j||^2} - 2\mu_j \frac{\Delta_j^2}{||A^T u_j||^2}$$

$$= ||s_j||^2 - (2\mu_j - \mu_j^2) \frac{\Delta_j^2}{||A^T u_j||^2}$$

$$\leq ||s_j||^2 - (2\mu_j - \mu_j^2) \frac{\Delta_j^2}{||A^T b||^4 \, ||A^T \rho_j||^2}$$

or, $\dfrac{\Delta_j^2}{||A^T b||^4 \, ||A^T \rho_j||^2} = \dfrac{||A^T b||^4 \, ||\rho_j||^4}{||A^T b||^4 \, ||A^T \rho_j||^2}$

donc, $||s_{j+1}||^2 \leq ||s_j||^2 \left[1 - (2\mu_j - \mu_j^2) \dfrac{||\rho_j||^4}{||s_j||^2 \, ||A^T \rho_j||^2} \right]$

or,

$$\frac{||\rho_j||^4}{||s_j||^2 \, ||A^T \rho_j||^2} = \frac{||\rho_j||^2}{||s_j||^2} \cdot \frac{||\rho_j||^2}{||A^T \rho_j||^2}$$

$$\geq \frac{\lambda^2}{\Lambda^2} = \gamma_2^2(A).$$

ii) On a,

$$||s_{j+1}||^2 \leq ||s_j||^2 \, [1 - (2\mu_j - \mu_j^2) \, \gamma_2^2(A)]$$

Si $\mu_j(2-\mu_j)$ ne tend pas vers 0 ils existent alors

$\tau > 0$ et $N' \subset \mathbb{N}$ tels que :

$2\mu_j - \mu_j^2 \geq \tau \qquad \forall j \in N'.$

Donc,

$$||s_{j+1}||^2 \leq ||s_j||^2 \, (1 - \tau \, \gamma_2^2(A)) \qquad \forall j \in N'$$

donc $||s_j|| \xrightarrow[N']{} 0.$

Comme $\{||s_j||\}$ est convergente on a :

$$\lim_{j\to\infty} ||s_j|| = \lim_{N'} ||s_j|| = 0. \qquad \square$$

<u>Remarque</u> : La valeur de μ_j minimisant $||s_{j+1}||$ est $\mu_j = 1$.

Pour $\mu_j = 1$, la méthode $(\mathcal{H}_b)$ est une méthode de projection (de minimisation de l'erreur) [1], [2], [4] et chapitre 1.

c) Méthodes aux résidus réduits décroissants

La matrice A sera supposée symétrique définie positive.

Soit B une matrice régulière telle que : $A = B^T B$.

Considérons l'itération :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j + \lambda_j \, v_j \\ \lambda_j \in \mathbb{R}, \; v_j \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Posons : $r_j = Bx_j - B^{-1^T} b$, $B^T r_j = \rho_j$.

On imposera à la méthode recherchée que :

- $(Ax_{j+1}, b) = (Ax_j, b) \quad \forall j \in \mathbb{N}$

- $\{||r_j||\}$ soit décroissante.

Propriété 6.1.c.1.

$$\left.\begin{array}{l}(Ax_{j+1}, b) = (Ax_j, b)\\ ||r_{j+1}|| < ||r_j||\end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l}(Av_j, b) = 0\\ (v_j, \rho_j) \neq 0\\ \lambda_j = -\mu_j \dfrac{(v_j, \rho_j)}{(v_j, Av_j)}\\ \mu_j \in \left]0, 2\right[\end{array}\right.$$

Preuve :

- $(Ax_{j+1}, b) = (Ax_j, b) \iff \lambda_j(Ax_j, b) = 0$

- $||r_{j+1}||^2 = ||r_j||^2 + 2\lambda_j(v_j, \rho_j) + \lambda_j^2(v_j, Av_j) < 0$

donc, $||r_{j+1}|| < ||r_j|| \iff \lambda_j[2(v_j, \rho_j) + \lambda_j(v_j, Av_j)] < 0.$

Ceci exige en particulier que, $\lambda_j(v_j, \rho_j) \neq 0$.

Posons, $\lambda_j = -\mu_j \dfrac{(v_j, \rho_j)}{(v_j, Av_j)}$

On a ainsi,

$$||r_{j+1}|| < ||r_j|| \iff \frac{(v_j, \rho_j)^2}{(v_j, Av_j)} [\mu_j^2 - 2\mu_j] < 0$$

$$\iff (v_j, \rho_j) \neq 0 \text{ et } \mu_j \in \left]0, 2\right[. \qquad \square$$

La méthode s'écrit donc :

$$(\mathcal{H}_c)\quad\begin{cases} x_0 \text{ quelconque} \\ x_{j+1} = x_j - \mu_j \dfrac{(v_j,\ \rho_j)}{(v_j,\ Av_j)}\, v_j \\ (Av_j,\ b) = 0 \\ (v_j,\ \rho_j) \neq 0 \\ \mu_j \in\ ]0,\ 2[\end{cases}$$

Prenons : $(v_j, \rho_j) = \gamma_j$, $\gamma_j \in \mathbb{R}^*$.

<u>* Recherche d'une direction</u>

Cherchons v_j sous la forme :

$$v_j = \alpha_j\, \rho_j + \beta_j\, b$$

α_j et β_j doivent être solutions du système :

$$\begin{cases} \alpha_j(\rho_j,\ Ab) + \beta_j(b,\ Ab) = 0 \\ \alpha_j\ ||\rho_j||^2 + \beta_j(\rho_j,\ b) = \gamma_j \end{cases}$$

Prenons, $x_0 \in H$ on a ainsi $(\rho_j, b) = 0$

On a, $\Delta_j = -(b, Ab)\ ||\rho_j||^2$

Donc, $\Delta_j = 0 \iff \rho_j = 0$.

Supposons que, $\rho_j \neq 0$.

v_j est alors donné par :

$$\begin{aligned} v_j &= \frac{\gamma_j}{\Delta_j}\,[-(b,\ Ab)\ \rho_j + (\rho_j,\ Ab)b] \\ &= \frac{\gamma_j}{\Delta_j}\, u_j \end{aligned}$$

Propriété 6.1.c.2.

i) $(u_j, \rho_j) = \Delta_j$

ii) $||u_j||^2 \geq (b, Ab)\ |\Delta_j|$

iii) $(u_j, Au_j) \leq (b, Ab)^2\ (A\rho_j, \rho_j)$

Preuve :

La construction de u_j est basée sur le fait que, $x_0 \in H$, i.e. que $(\rho_j, b) = 0$.

i) $$\begin{aligned}(u_j, \rho_j) &= -(b, Ab)\ ||\rho_j||^2 + (\rho_j, Ab)\ (\rho_j, b)\\ &= -(b, Ab)\ ||\rho_j||^2\\ &= \Delta_j\end{aligned}$$

ii) $$\begin{aligned}||u_j||^2 &= (b, Ab)^2\ ||\rho_j||^2 + (\rho_j, Ab)^2\ ||b||^2\\ &\quad - 2(\rho_j, b)\ (b, Ab)\ (\rho_j, Ab)\\ &= (b, Ab)^2\ ||\rho_j||^2 + (\rho_j, Ab)^2\ ||b||^2\\ &\geq (b, Ab)\ [(b, Ab)\ ||\rho_j||^2]\\ &= +(b, Ab)\ |\Delta_j|\end{aligned}$$

iii) $$\begin{aligned}(u_j, Au_j) &= (-(b, Ab)\ A\rho_j + (\rho_j, Ab)\ Ab, u_j)\\ &= (b, Ab)^2\ (A\rho_j, \rho_j) - (\rho_j, Ab)^2\ (b, Ab)\\ &\quad - (\rho_j, Ab)^2\ (b, Ab) + (\rho_j, Ab)^2\ (b, Ab)\\ &= (b, Ab)^2\ (A\rho_j, \rho_j) - (\rho_j, Ab)^2\ (b, Ab)\\ &\leq (b, Ab)^2\ (A\rho_j, \rho_j).\end{aligned}$$ □

On obtient ainsi la méthode :

$$\begin{cases} x_0 \in H \\ x_{j+1} = x_j - \mu_j \dfrac{\Delta_j}{(u_j,\ Au_j)}\, u_j \\ u_j = -(b,\ Ab)\ \rho_j + (\rho_j,\ Ab)b \\ \Delta_j = -\ ||\rho_j||^2\ (b,\ Ab) \\ \mu_j \in\ ]0,\ 2[\end{cases} \qquad (H_3)$$

Théorème 6.T.c.1.

i) $\quad ||r_{j+1}||^2 \leq ||r_j||^2\ [1 - (2\mu_j - \mu_j^2)\ \frac{\lambda}{\Lambda}]$

où λ *et* Λ *sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de* A.

ii) *Si* $\mu_j \in\ ]0,\ 2[$ *est choisie telle que la suite* $(2\mu_j - \mu_j^2)$ *ne tend pas vers* 0, *alors la suite* $\{x_j\}$ *générée par* (H_3) *converge vers* x^*.

Preuve :

i) $$||r_{j+1}||^2 = ||r_j||^2 - 2\mu_j\ \Delta_j\ \frac{(u_j,\ \rho_j)}{(u_j,\ Au_j)} + \mu_j^2\ \frac{\Delta_j^2}{(u_j,\ Au_j)}$$

$$= ||r_j||^2 - (2\mu_j - \mu_j^2)\ \frac{\Delta_j^2}{(u_j,\ Au_j)}$$

or, $$\frac{\Delta_j^2}{||r_j||^2(u_j,\ Au_j)} \geq \frac{(b,\ Ab)^2\ ||\rho_j||^2}{||r_j||^2\ (b,\ Ab)^2\ (A\rho_j,\ \rho_j)}$$

$$= \frac{||\rho_j||^4}{||r_j||^2\ ||B\rho_j||^2}$$

$$= \frac{||B^T\ r_j||^2}{||r_j||^2} \cdot \frac{||\rho_j||^2}{||B\rho_j||^2}$$

$$\geq \frac{\lambda}{\Lambda}$$

d'où $||r_{j+1}||^2 \leq ||r_j||^2 \, [1 - (2\mu_j - \mu_j^2) \frac{\lambda}{\Lambda}]$

ii) Si $(2\mu_j - \mu_j^2)$ ne tend pas vers 0 :

$$\exists N' \subset \mathbb{N} \text{ (infini) } \exists \tau > 0 : (2\mu_j - \mu_j^2) \geq \tau \quad \forall j \in N'$$

donc,

$$||r_{j+1}||^2 \leq ||r_j||^2 \, [1 - \tau \frac{\lambda}{\Lambda}]$$

donc,

$$\lim_{N'} ||r_j|| = 0$$

Comme $\{||r_j||\}$ est décroissante minorée, elle est convergente et on a

$$\lim_{j\to\infty} ||r_j|| = \lim_{N'} ||r_j|| = 0. \qquad \square$$

Remarque : En prenant $\mu_j = 1 \;\; \forall j \in \mathbb{N}$, la méthode (H_c) rentre dans le cadre des méthodes de projection (minimisation du résidu réduit) [1], [2], [3] et chapitre 2.

Dans toutes les méthodes précédentes on a vu que chaque fois que le point initial x_0 est pris dans H, la suite générée converge vers x^*, la solution du système considéré.

D'où l'intérêt de proposer quelques choix de x_0.

Choix de x_0

1° $\quad x_0 = \dfrac{||b||^2}{(A^i, b)} \, e_i$

où A^i est la $i^{\text{ème}}$ colonne de A et e_i le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

2° $\quad x_0 = \dfrac{||b||^2}{||A^T b||^2} \, A^T b$

3° $\quad x_0 = \dfrac{||b||^2}{(Ab, b)}\, b \qquad$ si $(Ab, b) \neq 0$

4° $\quad$ Plus généralement :

$$x_0 = \frac{||b||^2}{(Au, b)}\, u, \text{ avec } u \in \mathbb{R}^n \text{ et } (Au, b) \neq 0.$$

Remarque :

$$\text{On a : } ||\rho_0||^2 = ||b||^2 \left[\frac{1}{\left(\frac{Au}{||Au||}, \frac{b}{||b||} \right)^2} - 1 \right]$$

En considérant le choix 1°, le meilleurs indice i est celui réalisant :

$$\left| \left(\frac{A^i}{||A^i||}, b \right) \right| = \max_{p=1,\dots,n} \left| \left(\frac{A^p}{||A^p||}, b \right) \right|. \qquad \square$$

2° Domaine K

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \;/\; ||Ax|| = ||b||\}$$

Considérons l'itération :

$$x_{j+1} = x_j + \lambda_j\, v_j$$

Propriété 6.2.1.

On a l'équivalence entre :

i) $\quad ||Ax_{j+1}|| = ||Ax_j||$ *et* $||\rho_{j+1}|| < ||\rho_j||$

ii) $\quad (Av_j, \rho_j) \neq 0, \; (Av_j, Ax_j)(Av_j, b) < 0$ *et* $\lambda_j = -2\, \dfrac{(Av_j, Ax_j)}{||Av_j||^2}$

Preuve :

$$||Ax_{j+1}||^2 = ||Ax_j||^2 + 2\lambda_j(Ax_j, Av_j) + \lambda_j^2\, ||Av_j||^2$$

donc,

$$||Ax_{j+1}|| = ||Ax_j|| \iff \begin{cases} \lambda_j = 0 \\ \text{ou} \\ \lambda_j = -2\,\dfrac{(Av_j,\ Ax_j)}{||Av_j||^2} \end{cases}$$

$$\bullet \ ||\rho_{j+1}||^2 = ||\rho_j||^2 + 2\lambda_j(Av_j,\ \rho_j) + \lambda_j^2\ ||Av_j||^2$$

donc, $||\rho_{j+1}|| < ||\rho_j|| \iff \lambda_j[2(Av_j,\ \rho_j) + \lambda_j\ ||Av_j||^2] < 0.$

C.N.

$$||\rho_{j+1}|| < ||\rho_j|| \Rightarrow (Av_j,\ \rho_j) \neq 0$$

car sinon on aura $\lambda_j^2\ ||Av_j||^2 < 0$ ce qui est impossible.

De même λ_j doit être non nul.

Si, en plus $||Ax_{j+1}|| = ||Ax_j||$

alors, $\lambda_j = -2\,\dfrac{(Av_j,\ Ax_j)}{||Av_j||^2}$

La condition pour que $||\rho_{j+1}|| < ||\rho_j||$ devient alors,

$$4\,\frac{(Av_j,\ Ax_j)}{||Av_j||^2}[-(Av_j,\ \rho_j) + (Av_j,\ Ax_j)] < 0$$

i.e. $\quad (Av_j,\ Ax_j)(Av_j,\ b) < 0.$

C.S.

On a $\lambda_j = -2\,\dfrac{(Av_j,\ Ax_j)}{||Av_j||^2} \Rightarrow ||Ax_{j+1}|| = ||Ax_j||$

Avec une telle valeur de λ_j on obtient :

$$||\rho_{j+1}||^2 = ||\rho_j||^2 - 4\,\frac{(Av_j,\ Ax_j)}{||Av_j||^2}(Av_j,\ \rho_j) + 4\,\frac{(Av_j,\ Ax_j)^2}{||Av_j||^2}$$

$$= ||\rho_j||^2 + 4\,\frac{(Av_j,\ Ax_j)}{||Av_j||^2}(Av_j,\ b)$$

donc $(Av_j, Ax_j)(Av_j, b) < 0 \Rightarrow ||\rho_{j+1}|| < ||\rho_j||$. □

La méthode telle que $||Ax_j|| = ||Ax_0||$ et $||\rho_{j+1}|| < ||\rho_j|| \quad \forall j \in \mathbb{N}$ s'écrit donc,

$$(K) \quad \begin{cases} x_0 \text{ quelconque non nul} \\ x_{j+1} = x_j - 2 \dfrac{(Av_j, Ax_j)}{||Av_j||^2} v_j \\ (Av_j, Ax_j)(Av_j, b) < 0 \end{cases}$$

Remarque : On a omis la condition $(Av_j, \rho_j) \neq 0$, car celle-ci est contenue dans $(Av_j, Ax_j)(Av_j, b) < 0$. □

<u>Recherche d'une direction</u>

Soient ϕ_j et ψ_j deux réels tels que $\phi_j\, \psi_j < 0$.

Posons,

$$(v_j, A^T b) = \phi_j \text{ et } (v_j, A^T A x_j) = \psi_j$$

Il apparait naturel de rechercher v_j sous la forme :

$$v_j = \alpha_j\, A^T A x_j + \beta_j\, A^T b$$

On a le système :

$$\begin{cases} \alpha_j (A^T A x_j, A^T b) + \beta_j\, ||A^T b||^2 = \phi_j \\ \alpha_j\, ||A^T A x_j||^2 + \beta_j (A^T A x_j, A^T b) = \psi_j \end{cases}$$

Le déterminant principal est donné par :

$$\Delta_j = (A^T A x_j, A^T b)^2 - ||A^T b||^2\, ||A^T A x_j||^2.$$

Propriété 6.2.2.

i) $\Delta_j = 0 \iff \begin{cases} x^* = \varepsilon \dfrac{\|b\|}{\|Ax_0\|} x_j \; ; \; \varepsilon = \text{Signe}(Ax_j, b) \\ \text{ou encore} \\ x^* = \dfrac{\|b\|^2}{(Ax_j, b)} x_j \end{cases}$

ii) *Si* $x_0 \in K$ *et* $(Ax_0, b) > 0$ *on a* :

$$\Delta_j = 0 \iff x_j = x^*$$

Preuve :

i) $$\Delta_j = 0 \iff \left(\frac{A^T A x_j}{\|A^T A x_j\|}, \frac{A^T b}{\|A^T b\|}\right)^2 = 1$$

$$\iff \frac{A^T A x_j}{\|A^T A x_j\|} = \varepsilon \frac{A^T b}{\|A^T b\|}, \quad \varepsilon = \pm 1$$

$$\iff x^* = \varepsilon \frac{\|A^T b\|}{\|A^T A x_j\|} x_j$$

En composant par A et en prenant la norme des deux membres on a :

$$\|b\| = \frac{\|A^T b\|}{\|A^T A x_j\|} \|Ax_j\|$$

Donc $$\frac{\|A^T b\|}{\|A^T A x_j\|} = \frac{\|b\|}{\|Ax_j\|}$$

or, par construction de la méthode on a, $\|Ax_j\| = \|Ax_0\|$ donc,

$$x^* = \varepsilon \frac{\|b\|}{\|Ax_0\|} x_j .$$

D'autre part,

$$(||b||^2) = (Ax^*, b) = \varepsilon \frac{||b||}{||Ax_0||} (Ax_j, b)$$

donc, ε = Signe(Ax_j, b) ou encore $\varepsilon = \dfrac{||b|| \, ||Ax_0||}{(Ax_j, b)}$

Donc $x^* = \dfrac{||b||^2}{(Ax_j, b)} x_j$.

ii) Si $x_0 \in K$ on a par définition, $||Ax_j|| = ||Ax_0|| = ||b||$

D'autre part,

$(Ax_0, b) > 0 \Rightarrow (Ax_j, b) > 0$, en effet ;

$(Ax_{j+1}, b) = (Ax_j, b) - 2 \dfrac{\phi_j \psi_j}{||Av_j||^2}$ comme $\phi_j \psi_j < 0$

La suite $\{(Ax_j, b)\}$ est croissante.

Donc $\varepsilon = 1$, d'où $x_j = x^*$. □

On a ainsi vu que le fait que Δ_j soit nul, non seulement ne pose pas de problème, mais nous permet l'obtention de la solution x^*.

Supposons $\Delta_j \neq 0$.

α_j et β_j sont données par :

$$\alpha_j = \frac{1}{\Delta_j} [\phi_j(A^T A x_j, A^T b) - \psi_j ||A^T b||^2]$$

$$\beta_j = \frac{1}{\Delta_j} [\psi_j(A^T A x_j, A^T b) - \phi_j ||A^T A x_j||^2]$$

d'où v_j.

Posons $\xi_j = \dfrac{\phi_j}{\psi_j}$ et $v_j = \dfrac{\psi_j}{\Delta_j} u_j$

On a,

$$u_j = [\xi_j(A^T A x_j, A^T b) - ||A^T b||^2] A^T A x_j$$
$$+ [(A^T A x_j, A^T b) - \xi_j ||A^T A x_j||^2] A^T b$$

<u>*Propriété 6.2.3.*</u>

i) $(Au_j, Ax_j) = \Delta_j$

ii) *La suite* $\{(Ax_j, b)\}$ *est croissante.*

iii) $||u_j||^2 = - \Delta_j ||\xi_j A^T A x_j - A^T b||^2$

<u>Preuve</u> :

i) $$\begin{aligned}(Au_j, Ax_j) &= (u_j, A^T A x_j) \\ &= \xi_j(A^T A x_j, A^T b) ||A^T A x_j||^2 - ||A^T b||^2 ||A^T A x_j||^2 \\ &+ (A^T A x_j, A^T b)^2 - \xi_j ||A^T A x_j||^2 (A^T A x_j, A^T b) \\ &= (A^T A x_j, A^T b)^2 - ||A^T b||^2 ||A^T A x_j||^2 \\ &= \Delta_j.\end{aligned}$$

ii) Voir la démonstration de la propriété 4.2.2, ii).

iii) $$\begin{aligned}||u_j||^2 &= \frac{\Delta_j^2}{\psi_j^2} ||v_j||^2 \\ &= \frac{\Delta_j^2}{\psi_j^2} (\alpha_j A^T A x_j + \beta_j A^T b, v_j) \\ &= \frac{\Delta_j^2}{\psi_j^2} (\alpha_j \psi_j + \beta_j \phi_j) \\ &= \frac{\Delta_j^2}{\psi_j} (\alpha_j + \beta_j \xi_j)\end{aligned}$$

or,

$$\frac{\Delta_j}{\psi_j}(\alpha_j + \beta_j\, \xi_j) = \frac{1}{\psi_j}[\phi_j(A^T A\, x_j,\, A^T b) - \psi_j\, ||A^T b||^2$$
$$+ \xi_j(\psi_j(A^T A\, x_j,\, A^T b) - \phi_j\, ||A^T A\, x_j||^2)]$$
$$= \xi_j(A^T A\, x_j,\, A^T b) - ||A^T b||^2 + \xi_j\, [(A^T A\, x_j,\, A^T b) - \xi_j\, ||A^T A\, x_j||^2]$$

donc,

$$||u_j||^2 = -\Delta_j\, [\xi_j^2\, ||A^T A\, x_j||^2 + ||A^T b||^2 - 2\xi_j(A^T A\, x_j,\, A^T b)]$$
$$= -\Delta_j\, ||\xi_j\, A^T A\, x_j - A^T b||^2.$$

On obtient ainsi la méthode définie par :

$$\begin{cases} x_0 \neq 0 \\ x_{j+1} = x_j - 2\,\dfrac{\Delta_j}{||Au_j||^2}\, u_j \\ u_j = [\xi_j(A^T A\, x_j,\, A^T b) - ||A^T b||^2]\, A^T A\, x_j + [(A^T A\, x_j,\, A^T b) \\ \quad - \xi_j ||A^T A\, x_j||^2]\, A^T b \\ \Delta_j = (A^T A\, x_j,\, A^T b)^2 - ||A^T A\, x_j||^2\ \ ||A^T b||^2 \\ \xi_j < 0 \end{cases} \qquad (K_1)$$

<u>*Propriété 6.2.4.*</u>

i) $(Au_j,\, b) = \xi_j\, \Delta_j$

ii) $||\rho_{j+1}||^2 = ||\rho_j||^2 + 4\, \xi_j\, \dfrac{\Delta_j^2}{||Au_j||^2}$

iii) ξ_j *réalisant le minimum de* $||\rho_{j+1}||$ *suivant la direction* Au_j *est* $\xi_j = -1$.

<u>Preuve</u> :

i) $(Au_j, b) = (u_j, A^T b)$

$$= [\xi_j (A^T A x_j, A^T b) - ||A^T b||^2] (A^T A x_j, A^T b)$$

$$+ [(A^T A x_j, A^T b) - \xi_j ||A^T A x_j||^2] ||A^T b||^2$$

$$= \xi_j (A^T A x_j, A^T b)^2 - ||A^T b||^2 (A^T A x_j, A^T b)$$

$$+ ||A^T b||^2 (A^T A x_j, A^T b)^2 - \xi_j ||A^T b||^2 ||A^T A x_j||^2$$

$$= \xi_j [(A^T A x_j, A^T b)^2 - ||A^T A x_j||^2 ||A^T b||^2]$$

$$= \xi_j \Delta_j.$$

ii) $$||\rho_{j+1}||^2 = ||\rho_j||^2 - 4 \frac{(Au_j, Ax_j)}{||Au_j||^2} (Au_j, \rho_j) + 4 \frac{(Au_j, Ax_j)^2}{||Au_j||^2}$$

$$= ||\rho_j||^2 + 4 \xi_j \frac{\Delta_j^2}{||Au_j||^2}$$

iii) On a $\rho_{j+1} = \rho_j - 2 \dfrac{\Delta_j}{||Au_j||^2} Au_j$

On doit chercher ξ_j de sorte que :

$2 \dfrac{\Delta_j}{||Au_j||^2} Au_j$ soit la projection de ρ_j sur la droite portée par Au_j.

On doit donc avoir : $2 \dfrac{\Delta_j}{||Au_j||^2} Au_j = \dfrac{(Au_j, \rho_j)}{||Au_j||^2} Au_j$

i.e. $2\Delta_j = (Au_j, \rho_j)$

or, $(Au_j, \rho_j) = (Au_j, Ax_j) - (Au_j, b)$

$$= \Delta_j - \xi_j \Delta_j$$

donc, $2\Delta_j = \Delta_j - \xi_j \Delta_j$

d'où $\xi_j = -1.$ $\square$

Théorème 6.2.1.

Soient τ *et* M *deux réels strictement positifs.*

Si on choisit $\xi_j \in [-M, \tau]$ $\forall j \in \mathbb{N}$, *la suite* $\{x_j\}$ *générée par* (K_1) *a pour limite* $\tilde{x}$ *vérifiant :*

$$\varepsilon \frac{||b||}{||Ax_0||} \tilde{x} = x^*$$

où $\varepsilon = \text{Signe}(A\tilde{x}, b)$.

ou d'une manière équivalente :

$$\frac{||b||^2}{(A\tilde{x}, b)} \tilde{x} = x^*$$

Preuve :

Il suffit de montrer que toute valeur d'adhérence de $\{x_j\}$ vérifie $\varepsilon \frac{||b||}{||Ax_0||} \tilde{x} = x^*$ et que $\tilde{x}$ est unique.

• Soit $\tilde{x}$ une valeur d'adhérence de $\{x_j\}$ et $\rho = A\tilde{x} - b$.

La suite $\{||\rho_j||\}$ est décroissante minorée donc convergente, de limite $||\rho||$

Or, $||\rho_{j+1}||^2 = ||\rho_j||^2 + 4\, \xi_j \frac{\Delta_j^2}{||Au_j||^2}$

donc $\lim_{j\to\infty} \xi_j \frac{\Delta_j^2}{||Au_j||^2} = 0$

ou encore,

$$\lim_{j\to\infty} \xi_j \frac{\Delta_j^2}{||u_j||^2} = 0$$

or, $||u_j||^2 = -\Delta_j\, ||\xi_j\, A^T A\, x_j - A^T b||^2$ (Propriété 4.2.3.)

donc, $\lim_{j\to\infty} \xi_j \frac{\Delta_j}{||\xi_j\, A^T A\, x_j - A^T b||^2} = 0.$

D'autre part,

$$||\xi_j\, A^T A x_j - A^T b||^2 \le \xi_j^2\, ||A^T A x_j||^2 + 2\,|\xi_j|\, ||A^T A x_j||\, ||A^T b|| + ||A^T b||^2$$

$$\le \alpha^2\,\beta^2 + 2\,\alpha\,\beta\, ||A^T b|| + ||A^T b||^2$$

où $\alpha = \max\,(|M|,\, \tau)$

et β un majorant de $||A^T A x_j||$, car $||A^T A x_j|| \le ||A^T||\, ||Ax_j||$

$$\le ||A^T||\, (||b|| + ||\rho_0||) \text{ vue que } ||\rho_j|| \le ||\rho_0|| \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Donc,

$$|\xi_j|\, \frac{|\Delta_j|}{||\xi_j\, A^T A x_j - A^T b||^2} \ge \frac{\gamma}{\alpha^2\,\beta^2 + 2\alpha\,\beta||A^T b|| + ||A^T b||^2} \cdot \Delta_j$$

où $\gamma = \min(M,\, \tau)$.

D'où $\lim\limits_{j\to\infty} \Delta_j = 0$ et en particulier $\lim\limits_{N'} \Delta_j = 0$.

Or $\Delta_j = ||A^T A x_j||^2\, ||A^T b||^2 - (A^T A x_j,\, A^T b)^2$

donc, $||A^T A \tilde{x}||^2\, ||A^T b||^2 - (A^T A \tilde{x},\, A^T b) = 0$

ce qui donne

$$\frac{1}{||A^T A \tilde{x}||}\, \tilde{x} = \frac{\varepsilon}{||A^T b||}\, x^*,\ \varepsilon = \pm 1$$

donc $\dfrac{||A\tilde{x}||}{||A^T A \tilde{x}||} = \dfrac{||b||}{||A^T b||}$ ou $\dfrac{||b||}{||A\tilde{x}||} = \dfrac{||A^T b||}{||A^T A \tilde{x}||}$

d'où $\text{Signe}(A\tilde{x},\, b)\, \dfrac{||b||}{||A\tilde{x}||}\, \tilde{x} = x^*$

or $||Ax_j|| = ||Ax_0|| \quad \forall j \in \mathbb{N}$, donc $||A\tilde{x}|| = ||Ax_0||$

d'où $\qquad \text{Signe}(A\tilde{x},\, b)\, \dfrac{||b||}{||Ax_0||}\, \tilde{x} = x^*$

ou encore :

On a $(A\tilde{x}, b) \dfrac{||b||}{||A\tilde{x}||} = \varepsilon\ ||b||^2$ donc $\varepsilon = \dfrac{(A\tilde{x}, b)}{||b||\ ||A\tilde{x}||}$

d'où $\dfrac{||b||^2}{(A\tilde{x}, b)} \tilde{x} = x^*$.

- Unicité

Soient $\bar{x}$ et $\tilde{x}$ deux valeurs d'adhérence de $\{x_j\}$.

On a :

$$\frac{||b||}{||Ax_0||} \bar{x} = \tilde{\varepsilon} \frac{||b||}{||Ax_0||} \tilde{x} \text{ avec } \bar{\varepsilon} = \text{Signe}(A\bar{x}, b)$$

et $\tilde{\varepsilon} = \text{Signe}(A\tilde{x}, b)$.

Donc $\bar{\varepsilon}\ \bar{x} = \tilde{\varepsilon}\ \tilde{x}$.

Montrons que $\bar{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}$ ou encore que $(A\tilde{x}, b) = (A\bar{x}, b)$.

Supposons que $(A\tilde{x}, b) > (A\bar{x}, b)$

Soit $\alpha = (A\tilde{x}, b) - (A\bar{x}, b)$

On a $\lim\limits_{N'} x_j = \bar{x}$ et $\lim\limits_{N''} x_j = \tilde{x}$

donc, $\exists N \in N''$: $\forall j \geq N$, $j \in N''$ $\quad 0 \leq (A\tilde{x}, b) - (Ax_j, b) < \alpha$

donc $(Ax_j, b) > (A\bar{x}, b) \qquad \forall j \geq N \qquad j \in N''$

or $\{(Ax_j, b)\}$ est croissante

donc, $(Ax_j, b) > (A\bar{x}, b)$ $\forall j \geq N$ et $j \in N'$ ce qui contredit le fait que $\lim\limits_{N'} x_j = \bar{x}$ et $\{(Ax_j, b)\}$ croissante.

Donc $(A\tilde{x}, b) = (A\bar{x}, b)$

d'où $\tilde{x} = \bar{x}$.

La suite $\{x_j\}$ étant bornée ne possédant qu'une valeur d'adhérence donc convergente de limite la dite valeur d'adhérence. □

Corollaire :

Si on choisit $\{\xi_j\}$ *comme dans le théorème précédent et* $x_0 \in K$ *vérifiant l'une des conditions suivantes.*

i) $(Ax_0, b) > 0$

ii) $||Ax_0 - b|| < 2||b||$

Alors $\tilde{x} = x^*$.

Preuve :

Le théorème précédent assure la convergence de $\{x_j\}$ vers $\tilde{x} = \varepsilon\, x^*$ avec $\varepsilon = \text{Signe}(A\tilde{x}, b)$.

i) Si $(Ax_0, b) > 0$ on sait qu'alors $(A\tilde{x}, b) > 0$, d'après la propriété 6.3, ii) donc $\varepsilon = 1$.

ii) On a $$||A\tilde{x} - b||^2 = ||A\tilde{x}||^2 + ||b||^2 - 2(A\tilde{x}, b)$$
$$= 2||b||^2 - 2(A\tilde{x}, b)$$
$$= 2||b||^2 - 2\,\varepsilon\,||b||^2$$

car $\tilde{x} = \varepsilon\, x^*$.

Donc, $$||A\tilde{x} - b||^2 = \begin{cases} 0 \\ \text{ou} \\ 4||b||^2 \end{cases}$$

Or $\{||\rho_j||\}$ est par construction décroissante, donc si $||\rho_0|| < 2||b||$, $||A\tilde{x} - b||$ serait forcément nulle et donc $\tilde{x} = x^*$. □

Remarques : 1) On a vu dans la propriété 2.4, iii) que ξ_j faisant que (K_1) soit une méthode de minimisation du résidu et $\xi_j = -1$.

or, $$||\rho_{j+1}||^2 = ||\rho_j||^2 + 4\,\xi_j \frac{\Delta_j^2}{||Au_j||^2}$$

$$= ||\rho_j||^2 + 4\,\xi_j \frac{\Delta_j^2}{||u_j||^2} \times \frac{||u_j||^2}{||Au_j||^2}$$

On peut ainsi envisager la recherche de ξ_j minimisant la quantité :

$$\frac{\xi_j}{||u_j||^2} .$$

Ce qui est réalisé pour $\xi_j = - \dfrac{||A^T b||}{||A^T A\, x_j||}$. □

2) On peut également reprendre la direction u_j de la méthode (K_1) et l'utiliser dans des itérations de minimisation du résidu, comme on peut le voir ci-après :

On a : $(Au_j, \rho_j) = (1 - \xi_j)\, \Delta_j$ (propriété 4.2.3, i) et 2.4, i)).

La méthode de minimisation du résidu s'écrit donc :

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 \in \mathbb{R}^n \quad x_0 \neq 0 \\[2mm] x_{j+1} = x_j - (1 - \xi_j) \dfrac{\Delta_j}{||Au_j||^2}\, u_j \\[2mm] u_j = [\xi_j (A^T A\, x_j,\ A^T b) - ||A^T b||^2]\ A^T A\, x_j \\[2mm] \qquad + [(A^T A\, x_j,\ A^T b) - \xi_j\ ||A^T A\, x_j||^2]\ A^T b \\[2mm] \Delta_j = (A^T A\, x_j,\ A^T b)^2 - ||A^T b||^2\ ||A^T A\, x_j||^2 \\[2mm] \xi_j \in \mathbb{R} \end{array}\right. \qquad (K_1')$$

<u>*Théorème 6.2.2.*</u>

Si dans (K_1') x_0 *et* ξ_j *sont choisis tels que :*

i) $||Ax_0 - b|| < ||b||$

ii) $|\xi_j - 1| \geq \tau > 0$

Alors, $\lim\limits_{j\to\infty} x_j = \tilde{x}$ *vérifiant :*

$$\text{Signe}(A\tilde{x},\ b) \cdot \frac{||b||}{||A\tilde{x}||}\, \tilde{x} = x^* \text{ ou encore : } \frac{||b||^2}{(A\tilde{x},\ b)}\, \tilde{x} = x^*.$$

<u>Preuve</u> :

La suite $\{|\rho_j|\}$ est décroissante donc $\{x_j\}$ est bornée.

Montrons que toute valeur d'adhérence $\tilde{x}$ de $\{x_j\}$ vérifie :

$$\frac{||b||^2}{(A\tilde{x}, b)} \tilde{x} = x \quad \text{et qu'un tel } \tilde{x} \text{ est unique.}$$

<u>1° Unicité</u>

Soient $\tilde{x}$ et $\bar{x}$ deux valeurs d'adhérence de $\{x_j\}$.

$$x_j \xrightarrow[N']{} \tilde{x} \text{ et } x_j \xrightarrow[N'']{} \bar{x}$$

avec,

$$\frac{||b||^2}{(A\tilde{x}, b)} \tilde{x} = x^* \quad \text{et} \quad \frac{||b||^2}{(A\tilde{x}, b)} \bar{x} = x^*.$$

On a

$$\frac{\tilde{x}}{(A\tilde{x}, b)} = \frac{\bar{x}}{(A\bar{x}, b)}$$

Montrons que $(A\tilde{x}, b) = (A\bar{x}, b)$.

Supposons que $(A\tilde{x}, b) - (A\bar{x}, b) = \alpha > 0$

$\exists N \in N' : \forall j \geq N \quad j \in N', \; 0 \leq (A\tilde{x}, b) - (Ax_j, b) < \alpha$

donc $\quad (Ax_j, b) > (A\bar{x}, b) \quad \forall j \geq N \quad j \in N'$

or $\xi_j \notin [0, 1] \Rightarrow \{(Ax_j, b)\}$ croissante.

donc $(Ax_j, b) > (A\bar{x}, b) \quad \forall j \geq N$ et $j \in N''$

ce qui contredit la croissance de $\{(Ax_j, b)\}$ et le fait que $\lim\limits_{N''} x_j = \bar{x}$.

donc $(A\tilde{x}, b) = (A\bar{x}, b)$ et par suite $\tilde{x} = \bar{x}$.

2°

Soit $\tilde{x}$ une valeur d'adhérence de $\{x_j\}$: $\tilde{x} = \lim_{N'} x_j$.

Montrons que

$$\frac{||b||^2}{(A\tilde{x},\, b)}\,\tilde{x} = x^*.$$

On a $||\rho_{j+1}||^2 = ||\rho_j||^2 - (1-\xi_j)^2 \dfrac{\Delta_j^2}{||Au_j||^2}$

or $\{||\rho_j||\}$ est convergente

donc, $\lim\limits_{j\to\infty} (1-\xi_j)^2 \dfrac{\Delta_j^2}{||Au_j||^2} = 0$

ou encore $\lim\limits_{j\to\infty} (1-\xi_j)^2 \dfrac{\Delta_j^2}{||u_j||^2} = 0$

or, $||u_j||^2 = \Delta_j \; ||\xi_j \; A^T A\, x_j - A^T b||^2$ (Propriété 4.2.3, iii)

donc, $\lim\limits_{j\to\infty} \dfrac{(1-\xi_j)^2 \; \Delta_j}{||\xi_j \; A^T A\, x_j - A^T b||^2} = 0$

D'autre part $\{||\rho_j||\}$ décroissante entraîne $\{||A^T A\, x_j||\}$ borné.

Soit M tel que $||A^T A\, x_j|| \le M \quad \forall j$.

On a,

$$\frac{(1-\xi_j)^2 \; |\Delta_j|}{||\xi_j \; A^T A\, x_j - A^T b||^2} \ge \frac{(1-\xi_j)^2 \;\; \Delta_j}{\xi_j^2 \; ||A^T A\, x_j||^2 + 2\,|\xi_j| \; ||A^T A\, x_j|| \; ||A^T b|| + ||A^T b||^2}$$

$$\ge \frac{(1-\xi_j)^2 \;\; \Delta_j}{\xi_j^2 \; M^2 + 2\,|\xi_j| \; M \; ||A^T b|| + ||A^T b||^2}$$

$$\ge \frac{|\Delta_j|}{\dfrac{\tau^2}{(1-\tau)^2}\, M^2 + 2\,\dfrac{\tau}{(1-\tau)^2}\, M \; ||A^T b|| + ||A^T b||^2}$$

donc $\lim\limits_{j\to\infty} \dfrac{(1-\xi_j)^2 \; \Delta_j}{||\xi_j \; A^T A\, x_j - A^T b||^2} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{j\to\infty} |\Delta_j| = 0$

or $|\Delta_j| = ||A^T b||^2 \; ||A^T A x_j||^2 - (A^T A x_j, A^T b)^2$

donc $\lim\limits_{N'} |\Delta_j| = ||A^T b||^2 \; ||A^T A x||^2 - (A^T A x, A^T b)^2$

De plus $\tilde{x} \neq 0$ car $||\rho_j|| \leq ||\rho_0|| < ||b|| \quad \forall j$.

Donc $A^T A \tilde{x} = \lambda \, A^T b \qquad \lambda \neq 0$

ou encore $A\tilde{x} = \lambda b \qquad \lambda \neq 0$

donc,

$$A\tilde{x} = \frac{(A\tilde{x}, b)}{||b||^2} b \text{ et } (A\tilde{x}, b) \neq 0$$

et $\tilde{x} = \dfrac{(A\tilde{x}, b)}{||b||^2} \; x^*$. □

Propriété 6.2.5.

Si on prend dans (K_1), $\xi_j = \dfrac{(A^T A x_j, Ab) - ||A^T b||^2}{||A^T A x_j||^2 - (A^T A x_j, A^T b)}$ *on a :*

$$||\rho_{j+1}||^2 \leq ||\rho_j||^2 \, [1 - \gamma_2^2(A)]$$

Preuve :

$$\text{On a } ||\rho_{j+1}||^2 = ||\rho_j||^2 - (1 - \xi_j)^2 \frac{\Delta_j^2}{||Au_j||^2}$$

$$= ||\rho_j||^2 - (1 - \xi_j)^2 \frac{\Delta_j^2}{||u_j||^2} \cdot \frac{||u_j||^2}{||Au_j||^2}$$

or, $||u_j||^2 = |\Delta_j| \; ||\xi_j \, A^T A x_j - A^T b||^2$

Posons $a = ||A^T A x_j||^2$, $b = (A^T A x_j, A^T b)$, $c = ||A^T b||^2$

On a alors, $||u_j||^2 = |\Delta_j| \quad [a \, \xi_j^2 - 2 \, b \, \xi_j + c]$

et $\xi_j = \frac{b-c}{a-b}$.

ce qui donne :

$$||u_j||^2 = |\Delta_j| \; [a(b-c)^2 - 2b(b-c)(a-b) + c(a-b)^2]/(a-b)^2$$

$$= |\Delta_j| \; [ab^2 + ac^2 - 2abc - 2ab^2 + 2b^3 + 2abc - 2cb^2$$

$$+ ca^2 + cb^2 - 2abc]/(a-b)^2$$

$$= |\Delta_j| \; (a+c-2b)(ac-b^2)/(a-b)^2$$

$$= |\Delta_j| \; ||A^T \rho_j||^2 \; |\Delta_j|/(a-b)^2$$

$$= \Delta_j^2 \; ||A^T \rho_j||^2/(a-b)^2$$

D'autre part, $(1-\xi_j)^2 = (1 - \frac{b-c}{a-b})^2$

$$= (a-2b+c)^2/(a-b)^2$$

$$= ||A^T \rho_j||^4/(a-b)^2$$

Donc $(1 - \xi_j)^2 \dfrac{\Delta_j^2}{||u_j||^2} = ||A^T \rho_j||^2$

d'où $||\rho_{j+1}||^2 = ||\rho_j||^2 \left[1 - \dfrac{||A^T \rho_j||^2}{||\rho_j||^2} \cdot \dfrac{||u_j||^2}{||A^T u_j||^2}\right]$

$$\leq ||\rho_j||^2 \; [1 - \gamma_2^2(A)]. \qquad \square$$

<u>Remarque</u> : $\frac{b-c}{a-c} = 1 \iff a + c - 2b = 0$

$$\iff ||A^T \rho_j|| = 0 \qquad \text{i.e. } x_j = x^*. \qquad \square$$

<u>CHOIX DE x_0</u>

1° $\quad x_0 = \dfrac{||b||}{||Ab||} b \quad$ si $(Ab, b) > 0$ et $-x_0$ si $(Ab, b) < 0$

2° $\quad x_0 = \dfrac{||b||}{||A^i||} e_i \quad$ si $(A^i, b) > 0$ et $-x_0$ si $(A^i, b) < 0$

3° D'une façon générale :

$$x_0 = \varepsilon \frac{||b||}{||Au||} u, \; u \in \mathbb{R}^n$$

tel que, $(Au, b) \neq 0$, $\varepsilon = \text{Signe}(Au, b)$.

Les choix ci-dessus font que la suite $\{x_j\}$ fournie par (K_1) converge vers x^*. □

3° Domaine H'

$$H' = \{x \in \mathbb{R}^n \; / \; (x, b) > 0\}$$

a) Cas où la matrice A est symétrique définie positive.

$A = B\, B^T$.

Dans ce cas on a, $x^* \in H'$.

Considérons l'itération :

(1) $x_{j+1} = x_j + \lambda_j \, v_j$

Propriété 6.3.a.1.

Une condition suffisante pour que :

i) $x_j \in H' \Rightarrow x_{j+1} \in H'$

ii) $||r_{j+1}|| < ||r_j||$

est que

i') $(v_j, \rho_j)\,(v_j, b) \leq 0$; $(v_j, \rho_j) \neq 0$

ii') $\mu_j \in \,]0, 2[$

où μ_j *est telle que :* $\lambda_j = - \mu_j \dfrac{(v_j, \rho_j)}{(v_j, Av_j)}$

Preuve :

• $(x_{j+1}, b) = (x_j, b) + \lambda_j(v_j, b)$

donc $\lambda_j(v_j, b) \geq 0 \Rightarrow [(x_j, b) > 0 \Rightarrow (x_{j+1}, b) > 0]$.

D'autre part, $||r_{j+1}||^2 = ||r_j||^2 + 2\lambda_j (v_j, \rho_j) + \lambda_j^2(v_j, Av_j)$

donc, $||r_{j+1}|| < ||r_j|| \Leftrightarrow \lambda_j[2(v_j, \rho_j) + \lambda_j(v_j, Av_j)] < 0$.

Ce qui exige en particulier que $\lambda_j(v_j, \rho_j) \neq 0$.

Posons $\lambda_j = -\mu_j \dfrac{(v_j, \rho_j)}{(v_j, Av_j)}$.

On a : $||r_{j+1}|| < ||r_j|| \Leftrightarrow (v_j, \rho_j) \neq 0$ et $(-2\mu_j + \mu_j^2) < 0$

$\Leftrightarrow (v_j, \rho_j) \neq 0$ et $\mu_j \in]0, 2[$.

or,

$$\lambda_j(v_j, b) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\mu_j(v_j, \rho_j)(v_j, b) \geq 0 \\ (v_j, \rho_j) \neq 0 \end{cases}$$

D'où, $(v_j, \rho_j) \neq 0$, $\mu_j \in]0, 2[$ et $(v_j, \rho_j)(v_j, b) \leq 0$. $\square$

La méthode s'écrit :

$$H'_a \begin{cases} x_0 \in H' \\ x_{j+1} = x_j - \mu_j \dfrac{(v_j, \rho_j)}{(v_j, Av_j)} v_j \\ (v_j, \rho_j) \neq 0 \\ (v_j, \rho_j)(v_j, b) \leq 0 \\ \mu_j \in]0, 2[\end{cases}$$

*** Recherche d'une direction**

Posons : $(v_j, \rho_j) = \phi_j \neq 0$

$(v_j, b) = \psi_j$

Cherchons v_j sous la forme :

$$v_j = \alpha_j \rho_j + \beta_j b$$

On a le système :

$$\begin{cases} \alpha_j \|\rho_j\|^2 + \beta_j(\rho_j, b) = \phi_j \\ \alpha_j(\rho_j, b) + \beta_j \|b\|^2 = \psi_j \end{cases}$$

Le déterminant principal est :

$$\Delta_j = \|\rho_j\|^2 \|b\|^2 - (\rho_j, b)^2$$

Propriété 6.3.a.2.

i) *Sous les conditions (i' et ii') de la propriété 4.3.a.1, la suite* $\{(x_j, b)\}$ *est croissante.*

ii) *Si* $(x_0, b) > 0$ *alors :*

$$\Delta_j = 0 \iff \frac{\|b\|^2}{(Ax_j, b)} x_j = x^*$$

Preuve :

i) Sous les conditions i' et ii' on a : $\mu_j(v_j, \rho_j)(v_j, b) \leq 0$ comme $(x_{j+1}, b) = (x_j, b) - 2\mu_j(v_j, \rho_j)(v_j, b)$

On a $(x_{j+1}, b) \geq (x_j, b)$.

ii) $\Delta_j = 0 \iff \rho_j = \lambda b$

$$\iff \rho_j = (\rho_j, \frac{b}{||b||^2})\, b$$

$$\iff x_j = \left[1 + (\rho_j, \frac{b}{||b||^2})\right] x^*$$

$$= (Ax_j, \frac{b}{||b||^2})\, x^*$$

Or $(x_j, b) \geq (x_0, b)\ \forall j$ donc $(Ax_j, b) \neq 0$.

d'où $\frac{||b||^2}{(Ax_j, b)}\, x_j = x^*$. □

Supposons donc $\Delta_j \neq 0$.

On a $\begin{cases} \alpha_j = \phi_j\ ||b||^2 - \psi_j(\rho_j, b) \\ \beta_j = \psi_j\ ||\rho_j||^2 - \phi_j(\rho_j, b) \end{cases}$

Posons, $\xi_j = \frac{\psi_j}{\phi_j}$ et $v_j = \frac{\phi_j}{\Delta_j}\, u_j$

On a :

$$u_j = [||b||^2 - \xi_j(\rho_j, b)]\, \rho_j + [\xi_j\ ||\rho_j||^2 - (\rho_j, b)]\, b$$

Propriété 6.3.a.4.

i) $(u_j, \rho_j) = \Delta_j$

ii) $(u_j, b) = \xi_j\ \Delta_j$

iii) $||u_j||^2 = \Delta_j\ ||\xi_j\ \rho_j - b||^2$

Preuve :

i) $$(u_j, \rho_j) = ||b||^2\ ||\rho_j||^2 - \xi_j(\rho_j, b)\ ||\rho_j||^2 + \xi_j\ ||\rho_j||^2\ (\rho_j, b) - (\rho_j\ b)^2$$

$$= ||b||^2\ ||\rho_j||^2 - (\rho_j, b)^2$$

$$= \Delta_j.$$

ii) $$(u_j, b) = ||b||^2 (\rho_j, b) - \xi_j(\rho_j, b)^2 + \xi_j ||\rho_j||^2 ||b||^2 - (\rho_j, b) ||b||^2$$
$$= \xi_j ||b||^2 ||\rho_j||^2 - (\rho_j, b)^2$$
$$= \xi_j \Delta_j.$$

iii) $$||u_j||^2 = \frac{\Delta_j^2}{\phi_j^2} ||v_j||^2$$
$$= \frac{\Delta_j^2}{\phi_j^2} (\alpha_j \rho_j + \beta_j b, v_j)$$
$$= \frac{\Delta_j^2}{\phi_j^2} (\alpha_j \phi_j + \beta_j \psi_j)$$
$$= \frac{\Delta_j^2}{\phi_j^2} \left[\frac{\phi_j ||b||^2 - \psi_j(\rho_j, b)}{\Delta_j} \phi_j + \frac{\psi_j ||b||^2 - \phi_j(\rho_j, b)}{\Delta_j} \psi_j\right]$$
$$= \Delta_j [||b||^2 + \xi_j^2 ||\rho_j||^2 - 2\xi_j(\rho_j, b)]$$
$$= \Delta_j ||\xi_j \rho_j - b||^2. \qquad \square$$

La méthode s'écrit donc :

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 \in H' \\ x_{j+1} = x_j - \mu_j \dfrac{\Delta_j}{(u_j, Au_j)} u_j \\ u_j = [||b||^2 - \xi_j(\rho_j, b)] \rho_j + [\xi_j ||\rho_j||^2 - (\rho_j, b)] b \\ \Delta_j = ||b||^2 ||\rho_j||^2 - (\rho_j, b)^2 \\ \mu_j \in]0, 2[\\ \xi_j \le 0 \end{array}\right. \qquad (H_1')$$

Théorème 6.3.a.1.

Si $\{\mu_j\}$ *et* $\{\xi_j\}$ *sont choisis tels que :*

$$\left(\sqrt{\mu_j(2-\mu_j)}/|\xi_j| \quad ||\rho_j|| + ||b||\right) \geq \tau \qquad \forall j \in \mathbb{N}$$

où τ *un réel strictement positif.*

Alors,

La suite générée par (H_j') *converge vers* $\tilde{x}$ *vérifiant,*

$$\frac{||b||^2}{(A\tilde{x},\ b)}\,\tilde{x} = x^*$$

Preuve :

La suite $\{||r_j||\}$ est décroissante donc la suite $\{x_j\}$ est bornée.

On montrera successivement que toute valeur d'adhérence $\tilde{x}$ de $\{x_j\}$ vérifie :

$$\frac{||b||^2}{(A\tilde{x},\ b)}\,\tilde{x} = x^*$$

et qu'un tel $\tilde{x}$ est unique. L'assertion du théorème serait ainsi démontrée.

Soit $\tilde{x}$ une valeur d'adhérence de $\{x_j\}$: $\lim\limits_{N'} x_j = \tilde{x}$

et $r = B^T\,\tilde{x} - B^T\,B^{-1}\,b$.

La suite $\{||r_j||\}$ est convergente donc de limite $||r||$.

or,

$$||r_{j+1}||^2 = ||r_j||^2 - \mu_j(2-\mu_j)\,\frac{\Delta_j^2}{(u_j,\ Au_j)}$$

donc $\lim\limits_{j\to\infty} \mu_j(2-\mu_j)\,\dfrac{\Delta_j^2}{(u_j,\ Au_j)} = 0$

donc $\lim\limits_{j\to\infty} \mu_j(2-\mu_j)\,\dfrac{\Delta_j^2}{||u_j||^2} = 0$ car $(u_j,\ Au_j) \leq ||A||\ ||u_j||^2$

or $||u_j||^2 = \Delta_j ||\xi_j \rho_j - b||^2$ (propriété 4.3.a.4, iii)).

$$\leq \Delta_j [|\xi_j| \, ||\rho_j|| + ||b||]^2$$

donc,

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\mu_j(2-\mu_j)\,\Delta_j}{(|\xi_j| \, ||\rho_j|| + ||b||)^2} = 0$$

comme, $\dfrac{\mu_j(2-\mu_j)}{(|\xi_j| \, ||\rho_j|| + ||b||)^2} \geq \tau^2$ on a $\lim\limits_{j\to\infty} \Delta_j = 0$

$$\text{Or } \Delta_j = ||\rho_j||^2 \, ||b||^2 - (\rho_j, b)^2$$

donc,

$$||\rho \, || \, ||b||^2 - (\rho, b)^2 = 0$$

où $\rho = A\tilde{x} - b$.

donc, $\rho = \lambda b$

- Si $\lambda = 0$ on a $\tilde{x} = x^*$ et donc $\dfrac{||b||^2}{(A\tilde{x}, b)} \tilde{x} = x^*$.

- Si $\lambda \neq 0$

On a $\tilde{x} - x^* = \lambda x^*$

donc $\tilde{x} = (1+\lambda) \, x^*$ $\quad \lambda \neq 0$

donc $\tilde{x} = \dfrac{(\tilde{x}, b)}{(x^*, b)} x^*$

or $(x_j, b) \geq (x_0, b) > 0$

donc $(\tilde{x}, b) > 0$

d'où $\frac{(x^*, b)}{(\tilde{x}, b)} \tilde{x} = x^*$

ou encore :

$$\tilde{x} = (1+\lambda)\, x^* \Rightarrow A\tilde{x} = (1+\lambda)\, b$$

donc,

$$1 + \lambda = \frac{(A\tilde{x}, b)}{||b||^2}$$

d'où

$$\frac{||b||^2}{(A\tilde{x}, b)} \tilde{x} = x^*$$

• Unicité de $\tilde{x}$.

Soient $\tilde{x}$ et $\overline{x}$ deux valeurs d'adhérence de $\{x_j\}$.

On a :

$$\frac{(x^*, b)}{(\tilde{x}, b)} \tilde{x} = \frac{(x^*, b)}{(\overline{x}, b)} \overline{x}$$

et $\lim\limits_{N'} x_j = \tilde{x}$; $\lim\limits_{N''} x_j = \overline{x}$

Montrons que $(\tilde{x}, b) = (\overline{x}, b)$:

Supposons $(\tilde{x}, b) > (\overline{x}, b)$

Soit $\alpha = (\tilde{x}, b) - (\overline{x}, b)$

$\exists N \in N' : \forall n \geq N \quad n \in N', \; 0 \leq (\tilde{x}, b) - (x_n, b) < \alpha$

donc,

$(x_n, b) > (\overline{x}, b) \quad \forall n \geq N$ et $n \in N'$

or la suite $\{(x_j, b)\}$ est croissante.

Soit $P \geq N$ et $P \in N''$

On doit avoir $(x_p, b) > (\overline{x}, b)$ ce qui est impossible vue la croissance de $\{(x_j, b)\}$ et le fait que $\overline{x} = \lim\limits_{N''} x_j$.

Donc $\tilde{x} = \overline{x}$. □

La méthode (H_1') possède deux paramètres $\mu_j \in]0, 2[$ et $\xi_j \leq 0$ qu'on peut choisir comme dans le théorème 6.3.a.1.

Propriété 6.3.a.5.

i) *La valeur de* μ_j *faisant de* (H_1') *une méthode de minimisation du résidu réduit est* $\mu_j = 1$.

ii) $\xi_j = \dfrac{(\rho_j, b)}{||\rho_j||^2}$ *minimise* $||u_j||$.

iii) *Pour* $\xi_j = \dfrac{(\rho_j, b)}{||\rho_j||^2}$ *on a :*

$$||r_{j+1}||^2 \leq ||r_j||^2 \left[1 - (2\mu_j - \mu_j^2) \frac{\lambda}{\Lambda}\right]$$

où λ *et* Λ *la plus petite et la plus grande valeur propre de* A.

Preuve :

i) On a $r_{j+1} = r_j - \mu_j \dfrac{\Delta_j}{(u_j, Au_j)} Bu_j$ où $A = B^T B$.

On doit chercher μ_j faisant que r_{j+1} soit la projection de r_j sur le supplémentaire orthogonale de Bu_j.

$$\mu_j \frac{\Delta_j}{(u_j, Au_j)} Bu_j = \frac{(\rho_j, u_j)}{(u_j, Au_j)} Bu_j$$

or $(\rho_j, u_j) = \Delta_j$ (propriété 6.3.a.4.) donc $\mu_j = 1$.

ii) $||u_j||^2 = \Delta_j ||\xi_j \rho_j - b||^2$, propriété 4.3.a.4, iii))

or, $||\xi_j \rho_j - b||^2 = \xi_j^2 ||\rho_j||^2 + ||b||^2 - 2\xi_j(\rho_j, b)$.

La valeur annulant la dérivée par rapport à ξ_j est $\dfrac{(\rho_j, b)}{||b||^2}$

qui réalise bien le minimum.

iii) Pour $\xi_j = \dfrac{(\rho_j, b)}{||\rho_j||^2}$

On a :

$$||u_j||^2 = \Delta_j \left[\frac{(\rho_j, b)^2}{||\rho_j||^2} - 2\,\frac{(\rho_j, b)^2}{||\rho_j||^2} + ||b||^2\right]$$

$$= \frac{\Delta_j}{||\rho_j||} [||b||^2\, ||\rho_j||^2 - (\rho_j, b)^2]$$

$$= \frac{\Delta_j^2}{||\rho_j||^2}$$

D'autre part,

$$||r_{j+1}||^2 = ||r_j||^2 - (2\mu_j - \mu_j^2)\,\frac{\Delta_j^2}{(u_j, Au_j)}$$

$$= ||r_j||^2 - 2(\mu_j - \mu_j^2)\,\frac{||\rho_j||^2\, ||u_j||^2}{||B\, u_j||^2}$$

donc,

$$||r_{j+1}||^2 = ||r_j||^2 \left[1 - (2\mu_j - \mu_j^2)\,\frac{||\rho_j||^2}{||r_j||^2} \cdot \frac{||u_j||^2}{||Bu_j||^2}\right]$$

d'où $||r_{j+1}||^2 \leq ||r_j||^2\, [1 - (2\mu_j - \mu_j^2)\,\frac{\lambda}{\Lambda}]$. □

Remarque :

1) La valeur $\xi_j = \dfrac{(\rho_j, b)}{||b||^2}$ n'est pas forcément négative, il en résulte que les itérés x_j peuvent être en dehors de H'.

Pour $\xi_j = (\rho_j, b)/||b||^2$ et $\mu_j = 1$ la méthode (H_1') devient la méthode de la plus profonde descente.

2) Un autre choix de ξ_j serait par exemple :

$$\xi_j = - \frac{||b||^2 \, |(A\rho_j, b)|}{||\rho_j||^2 \, (Ab, b)}$$

Avec ce choix on a : $x_j \in H \cap H' \Rightarrow x_{j+1} \in H \cap H'$.

Ce choix assure la convergence en prenant $\mu_j \in [\tau, 2-\tau]$ ou $\tau \in]0, 2[$, le théorème 4.3.a.1 conclu.

3) Dans la propriété 6.3.a.1. on a donné une condition suffisante pour que :

$$\begin{cases} (x_j, b) > 0 \Rightarrow (x_{j+1}, b) > 0 \\ \text{et} \\ ||r_{j+1}|| < ||r_j|| \end{cases}$$

On pouvait choisir l'itération de sorte que :

$$\begin{cases} (x_{j+1}, b) = (x_j, b) \ \forall j \\ \text{et} \\ ||r_{j+1}|| < ||r_j|| \end{cases}$$

ce qui se caractérise par :

$$\begin{cases} (v_j, \rho_j) \neq 0 \\ (v_j, b) = 0 \\ \lambda_j = -\mu_j \dfrac{(v_j, \rho_j)}{(v_j, Av_j)} \\ \mu_j \in]0, 2[\end{cases}$$

La méthode sera définie par :

$$(H'')\quad\begin{cases} x_0 \text{ quelconque non nul} \\ x_{j+1} = x_j - \mu_j \dfrac{(v_j,\ \rho_j)}{(v_j,\ Av_j)}\, v_j \\ (v_j,\ \rho_j) \neq 0\ ;\ (v_j,\ b) = 0 \\ \mu_j \in \left]0,\ 2\right[\end{cases}$$

Remarque : (H'') est un cas particulier de (H'_a). Un choix de direction pourrait être celui de (H'_1) avec $\xi_j = 0$.

Les méthodes H'_a et en particulier H'_1, sont basées sur le choix de $x_0 \in H'$.

CHOIX DE x_0

1) Soit $u \in \mathbb{R}^n$ quelconque tel que $(u, b) \neq 0$.

On prend u si $(u, b) > 0$ et $-u$ si $(u, b) < 0$.

2) Dans la remarque précédente 2) on a besoin de $x_0 \in H \cap H'$.

Prenons $\Delta = (Ab, b)^2 - ||Ab||^2\ ||b||^2$.

Soit $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$.

Soit $x_0 = \dfrac{||b||^2\ (Ab, b) - \gamma ||Ab||^2}{\Delta}\, b + \dfrac{\delta(Ab, b) - ||b||^4}{\Delta}\, Ab$

On a $x_0 \in H \cap H'$. □

b) A quelconque

On suppose cette fois-ci que la matrice A est seulement régulière.

Dans ce cas la solution x^* n'est pas forcément dans H'.

Considérons l'itération :

$$(*) \begin{cases} x_{j+1} = x_j + \lambda_j \, \omega_j \\ \lambda_j \in \mathbb{R}, \ \omega_j \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

<u>Remarque préliminaire</u> : On imposera à l'itération précédente à ce qu'elle vérifie entre-autres :

$$||s_{j+1}|| < ||s_j||, \ s_j = x_j - x^*.$$

or,

$$||s_{j+1}||^2 = ||s_j||^2 + 2\lambda_j(s_j, \omega_j) + \lambda_j \, ||\omega_j||^2$$

donc,

$$||s_{j+1}|| < ||s_j|| \iff \lambda_j[2(s_j, \omega_j) + \lambda_j \, ||\omega_j||^2] < 0$$

Ce qui exige en particulier que : $(s_j, \omega_j) \neq 0$.

On peut donc pour tout λ_j écrire :

$$\lambda_j = -\mu_j \frac{(s_j, \omega_j)}{||\omega_j||^2}$$

D'autre part, la matrice A est régulière ; il existe donc v_j unique, $v_j \in \mathbb{R}^n$, tel que : $\omega_j = A^T \, v_j$.

D'où la possibilité d'écrire l'itération (*) sous la forme :

$$x_{j+1} = x_j - \mu_j \frac{(v_j, \rho_j)}{||A^T \, v_j||^2} A^T \, v_j. \qquad \square$$

Compte-tenu de la remarque précédente on considèrera la méthode définie par :

$$(*) \ x_{j+1} = x_j - \mu_j \frac{(v_j, \rho_j)}{||A^T \, v_j||^2} A^T \, v_j.$$

Propriété 6.3.b.1.

Une condition nécessaire et suffisante pour que :

i) *La suite* $\{(x_j, b)\}$ *soit croissante*

ii) $||s_{j+1}|| < ||s_j||$

Est que :

iii) $(v_j, \rho_j)\,(v_j, Ab) \leq 0,\ (v_j, \rho_j) \neq 0$

iv) $\mu_j \in]0, 2[.$

Preuve :

$$\bullet\ (x_{j+1}, b) = (x_j, b) - \mu_j \frac{(v_j, \rho_j)}{||A^T v_j||^2} (v_j, Ab)$$

donc,

$$(x_{j+1}, b) \geq (x_j, b) \iff \mu_j (v_j, \rho_j)\,(v_j, Ab) \leq 0$$

$$\bullet\ ||s_{j+1}|| < ||s_j|| \iff (v_j, \rho_j)^2\,[2\mu_j - \mu_j^2] > 0$$

$$\iff \begin{cases} (v_j, \rho_j) \neq 0 \\ \mu_j \in]0, 2[. \end{cases} \qquad \square$$

La méthode (*) pour laquelle on ait :

$||s_{j+1}|| < ||s_j||$ et $(x_{j+1}, b) \geq (x_j, b)$, $\forall j \in \mathbb{N}$ est donc donnée par :

$$H'_b \begin{cases} x_0 \text{ quelconque} \\ x_{j+1} = x_j - \mu_j \dfrac{(v_j, \rho_j)}{||A^T v_j||^2} A^T v_j \\ (v_j, \rho_j)(v_j, Ab) \leq 0 \; ; \; (v_j, \rho_j) \neq 0 \\ \mu_j \in]0, 2[\end{cases}$$

* **Recherche d'une direction**

Posons : $(v_j, \rho_j) = \phi_j$; $(v_j, Ab) = \psi_j$

Cherchons v_j sous la forme :

$$v_j = \alpha_j \rho_j + \beta_j Ab.$$

ce qui revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} \alpha_j ||\rho_j||^2 + \beta_j(\rho_j, Ab) = \phi_j \\ \alpha_j(\rho_j, Ab) + \beta_j ||Ab||^2 = \psi_j \end{cases}$$

d'où le déterminant principal :

$$\Delta_j = ||\rho_j||^2 \, ||Ab||^2 - (\rho_j, Ab)^2$$

Propriété 6.3.b.2.

$$\Delta_j = 0 \iff x_j - (\rho_j, \frac{Ab}{||Ab||^2})b = x^*.$$

Preuve :

$$\Delta_j = 0 \iff \rho_j = (\rho_j, \frac{Ab}{||Ab||^2}) \, Ab$$

$$\iff x_j - x^* = (\rho_j, \frac{Ab}{||Ab||^2})b.$$

□

Supposons à présent que : $\Delta_j \neq 0$.

v_j est alors donné par :

$$\Delta_j \; v_j = [||Ab||^2 \; \phi_j - (\rho_j, Ab) \; \psi_j] \; \rho_j$$

$$+ [\psi_j \; ||\rho_j||^2 - \phi_j(\rho_j, Ab)] \; Ab$$

Posons : $u_j = \dfrac{v_j}{\phi_j \; \Delta_j}$ et $\xi_j = \dfrac{\psi_j}{\phi_j}$

On a :

$$u_j = [||Ab||^2 - \xi_j(\rho_j, Ab)] \; \rho_j + [\xi_j \; ||\rho_j||^2 - (\rho_j, Ab)] \; Ab$$

Propriété 6.3.b.3.

i) $(u_j, \rho_j) = \Delta_j$

ii) $||u_j||^2 = \Delta_j \; ||\xi_j \; \rho_j - Ab||^2$

iii) $(u_j, Ab) = \Delta_j \; \xi_j$

Preuve :

i) Evident

ii) $$||u_j||^2 = [||Ab||^2 - \xi_j(\rho_j, Ab)]^2 ||\rho_j||^2 + [\xi_j \; ||\rho_j||^2 - (\rho_j, Ab)]^2 \; ||Ab||^2$$

$$+ 2(\rho_j, Ab) \; [||Ab||^2 - \xi_j(\rho_j, Ab)][\xi_j \; ||\rho_j||^2 - (\rho_j \; Ab)]$$

$$= ||Ab||^4 \; ||\rho_j||^2 + \xi_j^2(\rho_j, Ab)^2 \; ||\rho_j||^2 - 2\xi_j \; ||Ab||^2 \; (\rho_j, Ab) \; ||\rho_j||^2.$$

$$+ \xi_j^2 \; ||\rho_j||^4 \; ||Ab||^2 + (\rho_j, Ab)^2 \; ||A^Tb||^2 - 2\xi_j \; ||\rho_j||^2 \; (\rho_j, Ab) \; ||Ab||^2$$

$$+ 2(\rho_j, Ab) \; [\xi_j \; ||Ab||^2 \; ||\rho_j||^2 - ||Ab||^2(\rho_j, Ab) - \xi_j^2 \; ||\rho_j||^2(\rho_j, Ab)$$

$$+ \xi_j \; (\rho_j, Ab)].$$

$$= ||A^Tb||^4 \; ||\rho_j||^2 - 2\xi_j \; ||Ab||^2 \; ||\rho_j||^2(\rho_j, Ab) + \xi_j^2 \; ||\rho_j||^4 \; ||Ab||^2$$

$$- ||Ab||^2 \; (\rho_j, Ab)^2 - \xi_j^2 \; ||\rho_j||^2 \; (\rho_j, Ab)^2 + 2\xi_j(\rho_j, Ab)^3$$

$$= ||Ab||^2 \; \Delta_j - 2\xi_j(\rho_j, Ab) \; \Delta_j + \xi_j^2 \; ||\rho_j||^2 \; \Delta_j$$

$$= \Delta_j \; ||\xi_j \; \rho_j - Ab||^2.$$

iii) Evident. □

On a ainsi la méthode définie par :

$$\begin{cases} x_0 \text{ quelconque} \\ x_{j+1} = x_j - \mu_j \dfrac{\Delta_j}{||A^T \; u_j||^2} A^T \; u_j \\ \Delta_j = ||\rho_j||^2 \; ||Ab||^2 - (\rho_j, Ab)^2 \\ u_j = [||Ab||^2 - \xi_j(\rho_j, Ab)] \; \rho_j + [\xi_j \; ||\rho_j||^2 - (\rho_j, Ab)] \; Ab \\ \mu_j \in]0, 2[\\ \xi_j \leq 0 \end{cases} \qquad (H_2')$$

<u>*Théorème 6.3.b.1.*</u>

Si μ_j *et* ξ_j *sont choisies telles que ;*

$\mu_j \in]0, 2[\; ; \; \xi_j \leq 0$:

$\sqrt{\mu_j(2 - \mu_j)}/||\xi_j \; \rho_j - Ab|| \geq \tau$ *où* $\tau > 0$.

Alors :

La suite générée par (H_2') *a pour limite* $\tilde{x}$ *vérifiant :*

$\tilde{x} - (\tilde{\rho}, \dfrac{Ab}{||Ab||^2})b = x^*$, *où* $\tilde{\rho} = A\tilde{x} - b$.

Preuve :

La suite $\{||S_j||\}$ est par construction décroissante, de plus minorée par 0 donc convergente.

D'autre part $\{||x_j||\}$ est bornée à cause de la décroissance de $\{||S_j||\}$.

- Montrons que toute valeur d'adhérence $\tilde{x}$ de $\{x_j\}$ vérifie :

$$\tilde{x} = (\tilde{\rho}, \frac{Ab}{||Ab||^2})b + x^*$$

où $\tilde{\rho} = A\tilde{x} - b$.

On a $\lim\limits_{N'} x_j = \tilde{x}$

donc $\lim\limits_{j\to\infty} ||S_j|| = ||S||$ où $S = \tilde{x} - x^*$

D'autre part,

$$||S_{j+1}||^2 = ||S_j||^2 - (2\mu_j - \mu_j^2) \frac{\Delta_j^2}{||A^T u_j||^2}$$

donc $\lim\limits_{j\to\infty} (2\mu_j - \mu_j^2) \dfrac{\Delta_j^2}{||A^T\ u_j||^2} = 0$

ou encore $\lim\limits_{j\to\infty} (2\mu_j - \mu_j^2) \dfrac{\Delta_j^2}{||u_j||^2} = 0$

or $||u_j||^2 = \Delta_j\ ||\xi_j\ \rho_j - Ab||^2$ (propriété 6.3.b.3.)

donc,

$$\lim_{j\to\infty} (2\mu_j - \mu_j^2) \frac{\Delta_j^2}{||\xi_j\ \rho_j - Ab||^2} = 0$$

donc $\lim\limits_{j\to\infty} \Delta_j = 0$

i.e. $\lim\limits_{j\to\infty} [||\rho_j||^2\ ||Ab||^2 - (\rho_j, Ab)^2] = 0$

donc,

$$||\tilde{\rho}||^2\ ||Ab||^2 - (\tilde{\rho}, Ab)^2 = 0$$

donc, $\tilde{\rho} = (\tilde{\rho}, \frac{Ab}{||Ab||^2})\, Ab$

d'où $\tilde{x} - (\tilde{\rho}, \frac{Ab}{||Ab||^2})b = x^*$

ou encore :

$$\tilde{\rho} = \lambda\, Ab \Rightarrow \tilde{x} - x^* = \lambda b$$

$$\Rightarrow \tilde{x} - \frac{(\tilde{x} - x^*, b)b}{||b||^2} = x^*$$

- Unicité de $\tilde{x}$.

Soient $\tilde{x}$ et $\overline{x}$ deux valeurs d'adhérence de $\{x_j\}$.

$\lim_{N'} x_j = \tilde{x}$ et $\lim_{N''} x_j = \overline{x}$

On doit avoir : $\tilde{x} - \frac{(\tilde{x} - x^*, b)}{||b||^2} = \overline{x} - \frac{(\overline{x} - x^*, b)}{||b||^2}$

donc $\tilde{x} - \frac{(\tilde{x}, b)}{||b||^2} = \overline{x} - \frac{(\overline{x}, b)}{||b||^2}$

or la suite $\{(x_j, b)\}$ est croissante (propriété 4.3.b.1, i)).

Supposons que $(\tilde{x}, b) > (\overline{x}, b)$:

Soit $\alpha = (\tilde{x}, b) - (\overline{x}, b)$

$\exists N \in N' : \forall j \geq N \quad j \in N' \quad 0 \leq (\tilde{x}, b) - (x_j, b) < \alpha$

donc,

$(x_j, b) > (\overline{x}, b) \quad \forall j \in N'\ j \geq N$

donc $(x_j, b) > (\overline{x}, b) \quad \forall j \geq N$

ce qui contredit la croissance de $\{(x_j, b)\}$ et le fait que $x_j \xrightarrow[N'']{} \overline{x}$.

Donc $\tilde{x} = \overline{x}$. $\square$

Corollaire :

Soient $\tau \in]0, 2[$ *et* $M > 0$.

En prenant $\mu_j \in [\tau, 2-\tau]$ *et* $|\xi_j| \leq M$, $\forall j \in \mathbb{N}$;

la suite $\{x_j\}$ *dans* (H_2') *a pour limite* $\tilde{x}$ *vérifiant* :

$$\tilde{x} - (\tilde{\rho}, \frac{Ab}{||Ab||^2})b = x^*$$

Preuve :

Identique à celle du théorème précédent.

Remarque : 1) Dans (H_2') on a $(x_j, b) \geq (x_0, b)$ $\forall j \in \mathbb{N}$, donc si on choisit x_0 dans H' la suite $\{x_j\}$ sera entièrement dans H' et en particulier pour $\tilde{x}$.

2) On a :

$$||s_{j+1}||^2 = ||s_j||^2 - (2\mu_j - \mu_j^2)\frac{(v_j, \rho_j)}{||A^T v_j||^2}$$

$$= ||s_j||^2 \left[1 - (2\mu_j - \mu_j^2)\left(\frac{v_j}{||v_j||}, \frac{\rho_j}{||\rho_j||}\right)^2 \frac{||v_j||^2}{||A^T v_j||^2} \quad \frac{||\rho_j||^2}{||s_j||^2}\right]$$

$$\leq ||s_j||^2 \left[1 - (2\mu_j - \mu_j^2)\,\gamma_2^2(A)\left(\frac{v_j}{||v_j||}, \frac{\rho_j}{||\rho_j||}\right)^2\right]$$

Une valeur remarquable de ξ_j pourrait donc être celle rendant maximum la quantité :

$$\left(\frac{v_j}{||v_j||}, \frac{\rho_j}{||\rho_j||}\right)^2.$$

or, $$\frac{(u_j, \rho_j)}{||u_j||^2\,||\rho_j||^2} = \frac{\Delta_j^2}{\Delta_j\,||\xi_j\,\rho_j - Ab||^2\,||\rho_j||^2}$$

$$= \frac{\Delta_j}{||\xi_j\,\rho_j - Ab||^2\,||\rho_j||^2}.$$

Le ξ_j recherché est celui minimisant $||\xi_j \rho_j - Ab||^2$, ce qui est donné par :

$$\hat{\xi}_j = \frac{(\rho_j, Ab)}{||\rho_j||^2}$$

En prenant dans H_2', $\mu_j = 1$ et $\xi_j = \hat{\xi}_j$, on obtient la méthode :

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - \dfrac{||\rho_j||^2}{||A^T \rho_j||^2} A^T \rho_j \\ \rho_j = Ax_j - b \end{cases} \qquad \text{(M.G.)}$$

qui est une méthode du gradient et est convergente [6].

Seulement $\hat{\xi}_j$ n'est pas forcément négative, et donc la suite $\{x_j\}$ n'est pas contrainte à demeurer dans H'.

3) Pour la méthode (*) (b) remarque préliminaire) on a :

$$\left.\begin{array}{l} (x_{j+1}, b) = (x_j, b) \\ ||s_{j+1}|| < ||s_j|| \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \begin{cases} (v_j, \rho_j) \neq 0 \\ (v_j, Ab) = 0 \\ \mu_j \in]0, 2[\end{cases}$$

Conditions qui constituent un cas particulier de celles de (H_b'), et se traduisent dans (H_2') par prendre $\xi_j = 0$. □

ESSAIS NUMERIQUES

On a pris quelques-unes des méthodes précédentes, sur lesquelles on a fait quelques essais numériques.

Le choix de ces méthodes est dû soit à la simplicité de leurs expressions, soit à la discussion que sussite le choix de l'un de leurs paramètres.

Les matrices utilisées peuvent être consultées dans [5].

Pour la matrice de PEI on a pris : $A_i^i = 2$, $i = 1, \dots, 25$.

La taille de ces matrices est fixée à 25.

Points initiaux : x_0 :

• $x_0 = \frac{||b||^2}{(Ab,\ b)}\ b$ pour (H_2) et (H_3), $(x_0 \in H)$.

• $x_0 = \frac{||b||}{||Ab||}\ b$ pour (K_1), $(x_0 \in K)$

• Pour (H_2') on a pris : $\begin{cases} x_0 = \dfrac{||b||^2}{||A^T b||^2} A^T b, \ (x_0 \in H') \\ \text{sauf pour l'essai 5) où} \\ x_0 = b. \end{cases}$

• Pour (H_1') : $x_0 = Db$, où $D = \begin{pmatrix} 1/A_1^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/A_n^n \end{pmatrix}$

* w_j désigne :

• $||\rho_j||$ où $\rho_j = Ax_j - b$, lorsque $\{x_j\}$ converge vers, x^*, tel le cas de (H_1) et (H_3).

• $||Ay_j - b||$ où $\{y_j\}$ la suite déduite de $\{x_j\}$ par les théorèmes de convergence des méthodes (K_1) et (H_2').

i.e.

$$y_j = \frac{||b||^2}{(Ax_j,\ b)}\ x_j \text{ pour } (K_1) \text{ et } (H_1')$$

$$y_j = x_j - \left(Ax_j - b, \frac{Ab}{||Ab||}\right)b, \text{ pour } (H_2').$$

* OR_j désigne $||Ax_j - b||$.

MATRICE DE PEI

$H_2 : \mu_j = 1$	$H_3 : \mu_j = 1$
W_0 = 39.1815593077701 W_1 = 6.844018439466730E-14	W_0 = 39.1815593077701 W_1 = 9.689595078595481E-14

$K_1 : \mu_j = 1,\ \xi_j = -1$

$W_0 = 35.7060965054698$
$W_1 = 4.497444190140401E-11$

$K_1 : \mu_j = 1,\ \xi_j = -\|A^T b\| / \|A^T A x_j\|$

$W_0 = 35.7060965054698$
$W_1 = 2.45452543534230$
$W_2 = 2.332359048336805E-02$
$W_3 = 1.975304252028638E-06$

$H_2' : \mu_j = 1,\ \xi_j = \left|(\rho_j, \frac{Ab}{\|\rho_j\|^2})\right|$

$W_0 = 36.4033802472131$
$W_1 = 37.9476903650416$
$W_2 = 39.3712766987399$

$W_{12} = 8.600582457983517E-02$
$W_{13} = 4.296655542589087E-02$

$W_{21} = 1.677643325960143F-04$
$W_{22} = 8.390559634196558E-05$

$W_{26} = 7.378655035339056E-06$
$W_{27} = 5.569350088466919E-06$

$H_2' : \mu_j = 1,\ \xi_j = (\rho_j, \frac{\;}{\|A_j\|^2})$ (i.e. M.G)

$W_0 = 36.4033802472131$
$W_1 = 34.3774051692392$
$W_2 = 36.1056596147355$

$W_{12} = 34.6531837026576$
$W_{13} = 32.7246131667001$

$\vdots$

$W_{49} = 28.2279154448611$

$H_2' : \mu_j = 1,\ \xi_j = 0$

$W_0 = 36.4033802472131$
$W_1 = 1.391353535738621E-13$

$H_2' : \mu_j = 1,\ \xi_j = -(\rho_j, \frac{Ab}{\|\rho_j\|^2})$

$W_0 = 34.6608749332356$
$W_1 = 16.0925490761451$

$W_{10} = 5.652208811091206E-02$

$W_{20} = 4.965469395453413E-05$

$W_{23} = 2.332608096500648E-06$

$H_2' : \mu_j = 1,\ \xi_j = (\rho_j, \frac{Ab}{\|\rho_j\|^2})$ (i.e. M.G)

$W_0 = 34.6608749332356$
$W_1 = 7.887693222943390E-13$

$H_2' : \mu_j = 1,\ \xi_j = 0$

$W = 34.6608749332356$
$W = 1.367291757235246E-12$

$H_2' : \mu_j = 1 ; \xi_j = (\rho_j/||\rho_j||^2, b)$

(Méthode de la plus profonde descente)

$W_0 = 39.1815593077701$
$W_4 = 6.312500075091382E-02$
$W_5 = 2.400236533368352E-03$
$W_{14} = 7.058344666955243E-13$

$H_1' : \mu_j = 1 ; \xi_j = - (\rho_j/||\rho_j||^2, b)$

$W_0 = 39.1815593077701$
$W_8 = 9.213430132929359E-02$
$W_{17} = 1.797715687387519E-04$
$W_{32} = 5.540119134895038E-06$

$H_1' : \mu_j = 1 ; \xi_j = 0$

$W_0 = 39.1815593077701$
$W_4 = 2.909716423516991E-14$

MATRICE DE ORTEGA du 1er espèce

H_2

$W_0 = 53.2563547028833$
$W_1 = 78.3788081273488$
$W_2 = 47.9141750783170$
$W_3 = 51.1500188193951$
$W_4 = 43.7436498234329$

$W_{48} = 27.1917500044820$
$W_{49} = 30.1222043034562$
$W_{51} = 26.8430564700048$

H_3

$W_0 = 53.2563547028833$
$W_1 = 40.0344245971727$
$W_2 = 27.0907692957484$
$W_3 = 25.6248335793890$
$W_4 = 19.8332806047259$

$W_{41} = .330107825599919$
$W_{45} = .333430745167464$
$W_{50} = .276496942129197$

$K_1 : \xi_j = -1$

$OR_0 = 45.4707103159703$
$OR_1 = 39.9823273619452$
$OR_2 = 37.8034580391628$

$OR_{99} = 7.88177468526369$
$OR_{100} = 7.84499187385317$

$K_1 : \xi_j = - ||A^T b||/||A^T A x_j||$

$OR_0 = 45.4707103159703$
$OR_1 = 39.9848536496682$
$OR_2 = 37.4507328963413$

$OR_{99} = 19.9450087143654$
$OR_{100} = 19.8069165975822$

$H'_2 : \xi_j = -|(\rho_j/||\rho_j||^2, Ab)|$

identique au cas de

$\xi_j = (\rho_j/||\rho_j||, Ab)$

$H'_2 : \xi_j = (\rho_j/||\rho_j||^2, Ab)$

$W_0 =$ 80.4798445736344
$W_{99} =$ 35.8198692068943
$W_{100} =$ 33.5272106233264

$H'_2 : \xi_j = 0$

$W_0 =$ 80.4798445736344
$W_{99} =$ 31.7292015915356
$W_{100} =$ 27.5684678271226

$H'_1 : \xi_j = (\rho_j/||\rho_j||^2, b)$ $\begin{cases}\text{Méthode de la}\\ \text{plus profonde}\\ \text{descente}\end{cases}$

$W_0 =$ 103.7185787035370
$W_1 =$ 80.4289159790774
$W_{99} =$ .536075347209547
$W_{100} =$ .602687041635083

$H'_1 : \xi_j = -|(\rho_j/||\rho_j||^2, b)|$

$W_0 =$ 103.718578703537
$W_1 =$ 80.4289159790774
$W_{99} =$ .536075347209547
$W_{100} =$ .602687041635083

$H'_1 : \xi_j = 0$

$W_0 =$ 103.718578703537
$W_1 =$ 44.8486544006945
$W_{99} =$ .155779931217158
$W_{100} =$ .122811749265817

MATRICE DE GIVENS

H_2

$W_0 =$ 7.40216903585395
$W_1 =$ 3.65809479160532
$W_{49} =$ .868572075759419
$W_{50} =$ 1.41192812290535

H_3

$W_0 =$ 7.40216903585395
$W_1 =$ 2.71034745420133
$W_{49} =$ .122543133982983
$W_{50} =$ .166342880501496

$K_1 : \xi_j = -1$

$OR_0 =$ 7.37481595633080
$OR_1 =$ 3.27741198682875
$OR_{99} =$ .589483568037548
$OR_{100} =$ .585413886649001

$K_1 : \xi_j = -||A^Tb||/||A^T A x_j||$

$OR_0 =$ 7.37481595633080
$OR_1 =$ 3.27744995076732
$OR_{99} =$ .602244579731180
$OR_{100} =$ .598169831792851

$H'_2 : \xi_j = - |(\rho_j/||\rho_j||^2, Ab)$

W₀ = 8.05765335126403
W₁ = 4.40137789029659
W₉₉ = .539635993065751
W₁₀₀ = .445869702863866

$H'_2 : \xi_j = (\rho_j/||\rho_j||^2, Ab)$

W₀ = 8.05765335126403
W₁ = 4.36833227691892
W = 1.42465699046689
W = 1.42260897028783

$\xi_j = 0$

W = 8.05765335126403
W = 3.72045222614590
W = .843572368082137
W = 1.45109088354899

$H'_1 : \mu_j = 1 ; \xi_j = (\rho_j/||\rho_j||^2, b)$ Méthode de la plus profonde descente

W₀ = 10.8367626718218
W₁ = 55.6545590294072
W₉₉ = .504900955346688
W₁₀₀ = .489312593435718

$H'_1 : \mu_j = 1 ; \xi_j = -|(\rho_j/||\rho_j||^2, b)|$

W₀ = 10.8367626718218
W₁ = 5.48262400631668
W₉₉ = 7.2445429999875264F-02
W₁₀₀ = 4.465509483726881F-02

$H'_1 = \mu_j = -1 ; \xi_j = 0$

W₀ = 10.8367626718218
W₁ = 2.31152276419713
W₉₉ = .167771936342153
W₁₀₀ = .119523107398345

MATRICE DE NEWMAN

H_2

W₀ = 19.1673646076644
W₁ = 11.4677526753480
W₄₉ = 2.86676880385931
W₅₀ = 3.66078433213120

H_3

W₀ = 19.1673646076644
W₁ = 8.06430451163871
W₄₉ = .339752074472853
W₅₀ = .402198176297952

$K_1 : \mu_j = 1 ; \xi_j = - 1$

OR₀ = 18.7089597070021
OR₁ = 9.79442871335032
OR₉₉ = 1.85664393182287
OR₁₀₀ = 1.84073759291533

$H_2' : \mu_j = 1 \; ; \; \xi_j = -\,|(\rho_j/||\rho_j||^2,\ Ab)|$

$W_0 = 23.3160803220579$
$W_1 = 12.2827752698522$
$W_{99} = 2.63844581387284$
$W_{100} = 1.53756743798973$

$H_2' : \mu_j = 1 \; ; \; \xi_j = (\rho_j/||\rho_j||^2,\ Ab)$ (M

$W_0 = 23.3160803220579$
$W_1 = 12.0770385613865$
$W_{99} = 4.44184236860662$
$W_{100} = 4.38835727393485$

$H_2' : \mu_j = 1 \; ; \; \xi_j = 0$

$W_0 = 23.3160803220579$
$W_1 = 11.9714365010822$
$W_{99} = 2.69650598802452$
$W_{100} = 3.89915463269245$

$H_1' : \mu_j = 1 \; ; \; \xi_j = (\rho_j/||\rho_j||^2,\ b)$ $\left\{\begin{array}{l}\text{Méthode de la}\\ \text{plus profonde}\\ \text{descente}\end{array}\right.$

$W_0 = 19.1673646076644$
$W_1 = 40.3044602391740$
$W_{99} = .775465349286350$
$W_{100} = .681167707076208$

$H_1' : \mu_j = 1 \; ; \; \xi_j = -\,|(\rho_j/||\rho_j||^2,\ b$

$W_0 = 19.1673646076644$
$W_1 = 10.0917946440381$
$W_{99} = .124528576417380$
$W_{100} = .343605534192213$

$H_1' : \mu_j = 1 \; ; \; \xi_j = 0$

$W_0 = 19.1673646076644$
$W_1 = 8.06430451163872$
$W_{99} = .473187815824596$
$W_{100} = .344827627788265$

On constate à travers ces quelques essais numériques que les méthodes proposées peuvent être très compétitives pour les matrices pas trop mal conditionnées tel le cas de la matrice de PEI.

Pour des matrices quelconques ces méthodes semblent fournir des améliorations sensibles à des méthodes voisines telles la méthode de la plus profonde descente ou la méthode du gradient [6]. □

APPENDICE

On a vu dans l'étude de convergence des méthodes précédentes que la suite $\{x_j\}$ obtenue converge en général vers une limite différente de la solution du système considéré. Pour illustrer une telle situation considérons la méthode (K_1) en prenant $\xi_j = -1$ et $x_0 = 0{,}8 \frac{b}{||Ab||} b$, ainsi x_0 n'est pas dans K.

La matrice considérée est celle de PEI de teille 25 avec 2 sur la diagonale. Les composantes de b valent respectivement 1, 2,..., 25.

$$(K_1)\ \xi_j = -1$$

OR_0 = 35.2269820164236
W_0 = 39.1815593077701
OR_1 = 15.3085807638055
W_1 = 4.09007325615332
OR_2 = 14.8716162713938
W_2 = .454113342066066
OR_3 = 14.8661372485246
W_3 = 5.045657863777002E-02
OR_4 = 14.8660695930123
W_4 = 5.606322000975552E-03
OR_5 = 14.8660687577562
W_5 = 6.233975214591195E-04
OR_6 = 14.8660687474407
W_6 = 7.237008610770101E-05
OR_7 = 14.8660687473176
W_7 = 1.387653995557622E-05

OR_j désigne $||Ax_j - b||$

W_j désigne $||Ay_j - b||$ où $y_j = \frac{||b||^2}{(Ax_j,\ b)} x_j$.

On voit bien que W_j tend vers 0 ce qui n'est pas le cas pour OR_j qui converge vers $0{,}2 \times ||b||$ soit 14,86606... □

Références

(1) A.S. HOUSEHOLDER and F.L. BAUER, *"On certain iterative methods for solving linear systems"*. Numerishe Mathematick 2 (1960), pp. 55-59.

(2) A.S. HOUSEHOLDER, *"Principles of numerical analysis"*. Mc Graw-Hill Book Company (1953).

(3) J. BEUNEU, *"Résolution des systèmes d'équations linéaires par la méthode des compensations"*. ANO n° 69 (1976).

(4) N. GASTINEL, *"Sur-décomposition de normes générales et procédés itératifs"*. Num. Math. 5, pp. 142-157, (1973).

(5) WESTLAKE J.R. *"Numerical matrix inversion and solution of lineare equations"*. John Wiley and Sons, 1968.

(6) N. GASTINEL, *"Analyse numérique linéaire"*. HERMANN (1966).