N° d'ordre : 1171

THESE

présentée à

l'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ème CYCLE

Spécialité : MATHEMATIQUES PURES

par

Fatiha ABI AYAD

SOLUTIONS PERIODIQUES D'EQUATIONS D'EVOLUTION NON LINEAIRES DU TYPE :

$$u_t - L(t,\lambda)u = g(t,\lambda,u)$$

$$u(O,\lambda) = u_o(\lambda)$$

Membres du Jury : PARREAU M., Président
HECQUET G., Rapporteur
COEURÉ G., Examinateur

Soutenue le 28 JUIN 1984

A mes parents qui m'ont toujours encouragée dans mes études, *A tous ceux qui me sont chers.*

R E M E R C I E M E N T S

-=-=-=-=-=-=-=-

Je tiens à remercier très chaleureusement Monsieur le Professeur Michel Parreau de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

Que Monsieur Gérard Hecquet trouve ici, ma grande reconnaissance. C'est, en effet, lui qui m'a confié le sujet de cette étude et ce sont ses précieux conseils, sa disponibilité et nos fructueuses discussions qui ont permis la réalisation de ce travail.

Je tiens à exprimer ma grande estime à Monsieur le Professeur Gérard Coeuré et le remercie d'avoir accepté de faire partie du jury de thèse.

Ma profonde et sincère gratitude va aux chercheurs, aux étudiants chercheurs d'Analyse Fonctionnelle et à tous ceux qui, de près ou de loin, m'ont apporté leur concours.

Je remercie Madame Raymonde Bérat pour avoir, avec patience et efficacité, assuré la frappe de cette thèse, Madame Ginette Doclot, la bibliothécaire, pour son aide précieuse, Madame Françoise Wdowczyk, Messieurs Albert Gournay et Michel Provost qui se sont occupés de l'impression et de la reliure, ainsi que Madame Monique Lloret qui a toujours accepté, avec gentillesse, de photocopier mes documents.

TABLE DES MATIERES

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

.../...

.../...

INTRODUCTION

L'objet de ce travail est l'étude de l'existence, l'unicité et la périodicité de la solution de l'équation d'évolution non linéaire et non autonome

$$E(t,\lambda)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + L(t,\lambda)u = g(t,\lambda,u) \\ u(0,\lambda) = u_o(\lambda) \end{cases}$$

où λ est un paramètre dans un ouvert Λ de $\mathbb{R}$, t varie dans $\mathbb{R}$ et u appartient à E un espace de Banach sur $\mathbb{C}$ où g est "petite", relativement bornée et $L(t,\lambda)$ est une famille d'opérateurs linéaires non bornés à domaine B dense dans E avec $L(t,\lambda_o)$ inversible pour tout t. g et L sont périodiques en t et $u_o \in B$.

Notons que la dérivée $\dfrac{du}{dt}$ est supposée être la limite en norme dans E de la différence finie correspondante.

G. Ize [5] a donné une version, dans un espace de Banach, de la bifurcation globale d'orbites périodiques à partir d'une position d'équilibre pour des équations d'évolution non linéaires autonomes utilisant des outils topologiques. Il s'est occupé de la recherche de solutions périodiques du problème à deux paramètres (λ et la période T inconnue)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + L(\lambda)u = g(t,\lambda,u) \\ u(0,\lambda) = u_o(\lambda). \end{cases}$$

Lorsque l'opérateur L ainsi que la fonction g dépendent de t et non de λ, Sobolevskii [7] et Friedman [3] ont établi l'existence et l'unicité d'une solution $u(t,u_o)$ pour $t \in [0,T]$. L'hypothèse L et g périodiques en t de période 1, nous permet de ramener l'étude du problème $E(t,\lambda)$ à $[0,1]$, au moyen des méthodes basées sur le développement de la théorie des semi-groupes (Sobolevskii [7], Friedman [3] et Kato [6]).

Ce travail est divisé en 3 chapitres :

Dans le premier, nous reprenons l'étude de l'équation linéaire d'évolution dépendant d'un paramètre λ suivant les travaux de Sobolevskii, Friedman et de Ize.

Nous inspirant alors des travaux de L. Césari, nous sommes amenés à modifier l'équation initiale par l'introduction d'un terme correctif qui rend la solution périodique. Le chapitre II est consacré à cette étude (existence, unicité, dépendance continue...).

Le chapitre III basé sur le théorème des fonctions implicites nous donnera des conditions nécessaires d'existence de solution périodique du problème initial.

CHAPITRE I

EQUATION LINEAIRE D'EVOLUTION DEPENDANT D'UN PARAMETRE.

-=-=-=-=-=-

(A) POSITION DU PROBLEME.

1) *Rappels sur l'équation linéaire.*

Considérons l'équation différentielle ordinaire

$$(1\text{-}1) \qquad \frac{du}{dt} = L(t,\lambda)u$$

dans laquelle t désigne une variable réelle et u un élément d'un espace de Banach E. On notera par $U(t,\tau,\lambda)$ la solution satisfaisant à la condition, pour $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant 1$,

$$(1\text{-}2) \qquad u(\tau,\lambda) = I$$

de sorte que la solution du problème

$$\begin{cases} (1\text{-}3) \qquad \dfrac{du}{dt} = L(t,\lambda)u + f(t,\lambda,u) \\ (1\text{-}4) \qquad u(\tau,\lambda) = u_o(\lambda) \end{cases}$$

est de la forme

$$(1\text{-}5) \qquad u(t,\lambda,u_o) = U(t,\tau,\lambda)u_o(\lambda) + \int_\tau^t U(t,s,\lambda)f(s,\lambda,u(s,\lambda,u_o))ds.$$

La détermination de $U(t,\tau,\lambda)$ [7] peut se faire comme suit :

Soit $V(t,\tau,\lambda) = e^{(t-\tau)L(\tau,\lambda)}$ solution de

$$\frac{dv}{dt} - L(\tau,\lambda)V = 0 \quad \text{et} \quad V(t,\tau,\lambda) = I. \tag{1-6}$$

On constate que $U(t,\tau,\lambda) - V(t,\tau,\lambda)$ vérifie l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} - L(t,\lambda)v = [L(t,\lambda) - L(\tau,\lambda)]\,V(t,\tau,\lambda) \\ v(\tau,\lambda) = 0. \end{cases} \tag{1-7}$$

De ceci et de (1-5), il résulte que

$$U(t,\tau,\lambda) - e^{(t-\tau)L(\tau,\lambda)} = \int_\tau^t U(t,s,\lambda)[L(s,\lambda) - L(\tau,\lambda)]e^{(s-\tau)L(\tau,\lambda)}ds. \tag{1-8}$$

Nous allons considérer la relation (1-8) comme une équation définissant l'opérateur inconnu $U(t,\tau,\lambda)$. C'est une équation du type de Volterra (par rapport à t). En la résolvant par des approximations successives, on a :

$$U(t,\tau,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(t,\tau,\lambda) \tag{1-9}$$

avec $U_o(t,\tau,\lambda) = e^{(t-\tau)L(\tau,\lambda)}$, et les U_k sont définis par la relation de récurrence

$$U_{k+1}(t,\tau,\lambda) = \int_\tau^t U_k(t,s,\lambda)[L(s,\lambda) - L(\tau,\lambda)]e^{(s-\tau)L(\tau,\lambda)}ds \ . \tag{1-10}$$

Nous allons montrer que

$$U_k(t,\tau,\lambda) = \int_\tau^t e^{(t-s)L(s,\lambda)}\varphi_k(s,\tau,\lambda)ds, \qquad k = 1,2,\ldots \tag{1-11}$$

où $\varphi_1(t,\tau,\lambda) = [L(t,\lambda) - L(\tau,\lambda)]e^{tL(\tau,\lambda)}$

$$(1\text{-}12) \qquad \psi_{k+1}(t,\tau,\lambda) = \int_\tau^t \psi_k(t,s,\lambda)\psi_1(s,\tau,\lambda)ds \qquad k = 1,2,\ldots$$

La relation (1-11) est vraie pour $k = 1$ car d'après (1-10), pour $k = 0$

$$U_1(t,\tau,\lambda) = \int_\tau^t U_o(t,s,\lambda)\left[L(s,\lambda) - L(\tau,\lambda)\right]e^{sL(\tau,\lambda)}ds$$

$$= \int_\tau^t e^{(t-s)L(s,\lambda)}\psi_1(s,\tau,\lambda)ds.$$

Supposons que (1-11) soit vrai pour $k = n$. D'après (1-10)

$$U_{n+1}(t,\tau,\lambda) = \int_\tau^t\left[\int_s^t e^{(t-\xi)L(\xi,\lambda)}\psi_n(\xi,s,\lambda)d\xi\right]\psi_1(s,\tau,\lambda)ds$$

$$= \int_\tau^t \int_s^t e^{(t-\xi)L(\xi,\lambda)}\psi_n(\xi,s,\lambda)\xi_1(s,\tau,\lambda)d\xi ds.$$

Pour $s \in [\tau,t]$, $\xi \in [s,t]$. Donc en changeant l'ordre d'intégration, avec $\xi \in [\tau,t]$ et $s \in [\tau,\xi]$ (théorème de Fubini).

$$U_{n+1}(t,\tau,\lambda) = \int_\tau^t e^{(t-\xi)L(\xi,\lambda)}\left[\int_\tau^\xi \psi_n(\xi,s,\lambda)\psi_1(s,\tau,\lambda)ds\right]d\xi.$$

$$= \int_\tau^t e^{(t-\xi)L(\xi,\lambda)}\psi_{n+1}(\xi,\tau,\lambda)d\xi.$$

Par conséquent, (1-11) est démontré pour tout k. On pose $\Phi(t,\tau,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(t,\tau,\lambda)$.

D'après (1-12), $\sum_{k\geq 1} \psi_k$ étant convergente vers Φ,

$$(1\text{-}13) \qquad \Phi(t,\tau,\lambda) = \psi_1(t,\tau,\lambda) + \int_\tau^t \Phi(t,s,\lambda)\psi_1(s,\tau,\lambda)ds$$

et

$$(1\text{-}14) \qquad U(t,\tau,\lambda) = e^{(t-\tau)L(\tau,\lambda)} + \int_\tau^t e^{(t-s)L(s,\lambda)}\Phi(s,\tau,\lambda)ds.$$

Nous indiquerons les conditions pour lesquelles l'équation (1-13) admet une solution unique : $\Phi(t,\tau,\lambda)$, et la relation (1-14) définit une solution continue unique de l'équation intégrale (1-8) et du problème (1-1), (1-2).

2) *Ecriture du problème modifié et premières hypothèses.*

Nous intéressant à la recherche des solutions périodiques de période 1 de l'équation

$$E(t,\lambda) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = L(t,\lambda)u + g(t,\lambda,u) \\ u(0,\lambda) = u_o(\lambda) \end{cases}$$

ou bien de

$$(1) \qquad u(t,\lambda,u_o) = U(t,0,\lambda)u_o(\lambda) + \int_0^t U(t,s,\lambda)g(s,\lambda,u)ds$$

nous pouvons déjà écrire que la solution du problème $E(t,\lambda)$, $u(t,\lambda,u_o)$, doit satisfaire à

$$u(1,\lambda,u_o) = u_o(\lambda)$$

c'est-à-dire à la condition

$$0 = [U(1,0,\lambda) - I]u_o(\lambda) + \int_0^1 U(1,s,\lambda)g(s,\lambda,u(s,\lambda,u_o))ds.$$

Notons alors par $m(\lambda,u)$,

$$m(\lambda,u) = \left[U(1,0,\lambda) - I\right]u_o(\lambda) + \int_0^1 U(1,s,\lambda)g(s,\lambda,u)ds.$$

Nous étudierons donc l'équation modifiée suivante où u est telle que $u(1,\lambda) = u(0,\lambda) = u_o(\lambda)$.

(2) $$u(t,\lambda,u_o) = U(t,0,\lambda)u_o(\lambda) + \int_0^t \left[U(t,s,\lambda)g(s,\lambda,u) - m(\lambda,u)\right]ds$$

Chercher une solution de (2) revient à chercher celle de $\tilde{E}(t,\lambda)$ où

$$\tilde{E}(t,\lambda) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = L(t,\lambda)u+g(t,\lambda,u) + \left[tL(t,\lambda)-I\right]m(\lambda,u) \\ u(0,\lambda) = u_o(\lambda). \end{cases}$$

D'abord $\tilde{E}(t,\lambda)$ nous donne (2).

En effet, en posant $v(t,\lambda) = u(t,\lambda) + tm(\lambda,u)$ où u est solution de $\tilde{E}(t,\lambda)$, nous avons

$$v(0,\lambda) = u_o(\lambda)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{du}{dt} + m(\lambda,u) \\ &= L(t,\lambda)u + g(t,\lambda,u) + tL(t,\lambda)m(\lambda,u) - m(\lambda,u) + m(\lambda,u) \\ &= L(t,\lambda)v + g(t,\lambda,v-m) \end{aligned}$$

d'où d'après (1-5),

$$v(t,\lambda,u_o) = U(t,0,\lambda)u_o(\lambda) + \int_0^t U(t,s,\lambda)g(s,\lambda,v(s,\lambda)-m)ds$$

ou bien

$$u(t,\lambda,u_o) = U(t,0,\lambda)u_o(\lambda) + \int_0^t U(t,s,\lambda)g(s,\lambda,u)ds - tm(\lambda,u).$$

Inversement, (2) nous donne $\tilde{E}(t,\lambda)$ et donc elles sont équivalentes.

Premières conditions sur $L(t,\lambda)$.

$L(t,\lambda)$ est une famille d'opérateurs linéaires fermés avec un domaine commun B ne dépendant ni de t, ni de λ, dense dans E. $L(t,\lambda)$ est 1-périodique en t, continu en λ et t pour la topologie de la norme de B dans E, où B est muni de la norme du graphe $|||\cdot|||$:

$$|||u||| = (||u||^2 + ||L(t,\lambda)||^2)^{1/2} \qquad \lambda \in \Lambda \text{ et } t \in \mathbb{R}$$

$L(t,\lambda_o) = L(t)$ est inversible pour tout t dans $\mathbb{R}$. Λ est un petit intervalle autour de λ_o. Λ est réduit en Λ_o de façon que $L(t,\lambda)$ soit inversible pour $\lambda \in \Lambda_o$ et $t \in \mathbb{R}$.

Cette dernière condition sur $L(t,\lambda_o)$ nous permet de dire que la norme du graphe $|||\cdot|||$ de $L(t)$ est équivalente à la norme de $L(t)$ dans B car

$$|||x||| = (||L(t)x||^2 + ||x||^2)^{1/2} = (||L(t)x||^2 + ||L^{-1}(t)L(t)x||^2)^{1/2}$$
$$\leq (1 + ||L^{-1}(t)||^2)^{1/2}||L(t)x|| \leq (1 + \sup_{0\leq t\leq 1} ||L^{-1}(t)||^2)^{1/2}||L(t)x||.$$

Nous supposerons de plus que pour tout $t,\tau,s \in \mathbb{R}, \lambda,\mu \in \Lambda_o$ il existe $\delta_1 \in]0,1]$ tel que :

H1) $$||[L(t,\lambda) - L(\tau,\mu)]L^{-1}(s)|| \leq c_1(|\lambda-\mu|+|t-\tau|^{\delta_1})$$

H2) $$||[L(t,\lambda) - L(\tau,\lambda) - L(t,\mu) + L(\tau,\mu)]L^{-1}(s)|| \leq c_2|\lambda-\mu||t-\tau|^{\delta_1}.$$

En fait, on peut remplacer dans (H1) et (H2) $L^{-1}(s)$ par $L^{-1}(s,\nu)$ pour ν suffisamment proche de λ_o ([6] pages 30-214) de sorte que l'on a pour $t,\tau,s \in \mathbb{R}$, $\lambda,\mu,\nu \in \Lambda_o$ et Λ_o réduit de façon que $c_1|\nu-\lambda_o| < \frac{1}{2}$,

H1') $$\|[L(t,\lambda) - L(\tau,\mu)]L^{-1}(s,\nu)\| \leqslant \frac{c_1}{1-c_1|\nu-\lambda_o|}(|\lambda-\mu| + |t-\tau|^{\delta_1})$$

H2') $$\|[L(t,\lambda) - L(\tau,\lambda)+L(\tau,\mu)-L(t,\mu)]L^{-1}(s,\nu)\| \leqslant \frac{c_2}{1-c_1|\nu-\lambda_o|}|\lambda-\mu|\,|t-\tau|^{\delta_1}$$

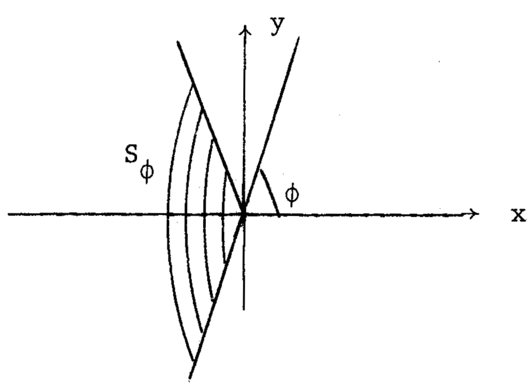
De plus,

Le spectre de $\{L(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ est supposé constitué de deux parties :

1) La première est contenue dans un secteur angulaire dans la moitié gauche de $\mathbb{C}$,

$$S_\phi = \{\theta/|\theta-\pi| \leqslant \phi < \frac{\pi}{2}\} .$$

2) La seconde consiste en un nombre fini de valeurs propres dans S_ϕ^c, dont chacune engendre un opérateur de Fredholm $L(t) - \mu I$ d'indice 0 (i.e. $\dim[\mathrm{Ker}(L(t)-\mu I)] = \mathrm{codim}[\mathrm{Im}(L(t)-\mu I)]$, pour chaque $t \in \mathbb{R}$).



D'après [6], chapitre IV-5, page 213, le spectre de $\{L(t,\lambda),\ t \in \mathbb{R}\}$, pour $\lambda \in \Lambda_o$, où Λ_o est une restriction de Λ, est formé aussi de deux parties, la première dans S_ϕ et la seconde qui consiste en un nombre fini de valeurs propres dans S_ϕ^c qui varient continûment par rapport à λ si les valeurs propres de $L(t)$ dans S_ϕ^c sont comptées en accord avec leur multiplicité. Une troisième hypothèse est émise sur $L(t)$,

H3) $$\left[\begin{array}{l} \exists\, K_o > 0, \quad \exists\, \omega > 0 \;/\; \forall t \in R, \forall \mu \in S_\phi^c, \\ \qquad ||(\mu I + \omega I - L(t))^{-1}|| \leqslant K_o(|\mu| + 1)^{-1} \end{array}\right.$$

Posons $-A(t) = L(t) - \omega I$

Il résulte d'après [3] page 108, que pour $\tau \in [0,1]$, $-A(\tau)$ engendre un semi-groupe analytique $e^{-tA(\tau)}$ $(t \geqslant 0)$,

$$e^{-tA(\tau)} = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma e^{\mu t}(\mu I + A(\tau))^{-1}d\mu$$

où Γ est le bord de S_ϕ.

Si λ est un réel assez voisin de λ_o, alors l'hypothèse (H3) reste valable pour $A(\tau,\lambda) = \omega I - L(\tau,\lambda)$ ([5] dans l'appendice).

H3') (1-15) $$\left[\begin{array}{l} \text{Pour } \lambda \text{ tel que} \\ \qquad c_1|\lambda-\lambda_o|(1+K_o\max(1,\omega)) < 1, \quad \tau \in [0,1] \quad \text{et} \quad \mu \in S_\phi^c, \\ ||(\mu I + A(\tau,\lambda))^{-1}|| \leqslant \dfrac{c_2}{1-c_1|\lambda-\lambda_o|(1+K_o\max(1,\omega))}(|\mu|+1)^{-1} \end{array}\right.$$

et par suite

(1-16) $$e^{-tA(\tau,\lambda)} = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma e^{\mu t}(\mu I + A(\tau,\lambda))^{-1}d\mu\ , \quad \text{avec } \Gamma \text{ bord de } S_\phi.$$

$-A(\tau,\lambda)$ est donc un opérateur infinitésimal générateur du semi-groupe fortement continu $e^{-tA(\tau,\lambda)}$ $(t \geq 0)$.

3) *Premières estimations.*

Rappelons d'abord que si $\phi \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et M est une constante positive, un opérateur B dans un Banach X est dit de type (ϕ,M) si :

(i) B est un opérateur fermé à domaine D_B dense dans X ;

(ii) la résolvante de B contient le secteur

$$T_\phi = \{\mu, \mu \neq 0 / \frac{\pi}{2} - \phi < \arg \mu < \frac{3\pi}{2} + \phi\}$$

et

$$||\mathbb{R}(\mu,B)|| = ||(\mu I - B)^{-1}|| \leq \frac{M}{|\mu|} \quad \text{si} \quad \mu \in T_\phi .$$

Notre opérateur $A(t,\lambda)$ est de type (α,M) où $\alpha = \frac{\pi}{2} - \phi$ et

$$M = \frac{K_o}{1-c_1|\lambda-\lambda_o|(1+K_o\max(1,\omega))} .$$ En effet :

$$\rho(-A(t,\lambda)) = \{\mu \in \mathbb{C}/\mu I - (-A(t,\lambda)) = \mu I + A(t,\lambda) \text{ est inversible}\}$$

contient S_ϕ^c. Donc $\rho(A(t,\lambda))$ contient le symétrique de S_ϕ^c par rapport à l'axe des imaginaires, à savoir le secteur

$$\{\theta / \phi < \theta < 2\pi - \phi\} = \{\theta / \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - \phi) < \theta < \frac{3\pi}{2} + (\frac{\pi}{2} - \phi)\} = T_{\frac{\pi}{2} - \phi}$$

et par définition, $A(t,\lambda)$ est de type (α,M) lorsque λ est voisin de λ_o.

Nous pouvons conclure d'après [3], théorème 2-1 que $-A(t,\lambda)$ engendre un semi-groupe $e^{-\tau A(t,\lambda)}$ analytique pour $\tau > 0$, fortement continu pour $\tau \geq 0$, lorsque λ est voisin de λ_o et $t \in [0,1]$.

Nous avons alors les estimations suivantes :

(1-17) $$||e^{-\tau A(t,\lambda)}|| \leq c_3 \, e^{-\delta\tau}$$

(1-18) $$||A(t,\lambda)e^{-\tau A(t,\lambda)}|| \leq c_3 \, e^{-\delta\tau} \, \tau^{-1}.$$

Montrons d'abord (1-17). Pour cela rappelons que pour tout $t \in [0,1]$ et pour λ assez près de λ_o, $L(t,\lambda)$ est inversible. Donc 0 est bien dans l'ensemble résolvant de $L(t,\lambda)$, et en particulier dans S_ϕ^c. D'après l'hypothèse (H3)', $\mu I + A(t,\lambda)$ est inversible pour tout $\mu \in S_\phi^c$, donc pour $\mu = 0$. La continuité de la résolvante de $A(t,\lambda)$, nous permet de dire qu'il existe un voisinage V_o de 0 dans $\mathbb{C}$ contenant un disque de centre 0 et de rayon δ_o, dans lequel $\mu I + A(t,\lambda)$ reste inversible.

Nous choisirons un $\delta < \delta_o$ tel que $\dfrac{\delta\, K_o}{1-c_1|\lambda-\lambda_o|\big(1+K_o \max(1,\omega)\big)} \leq \dfrac{1}{2}$ et on montrera que

$$||(\mu I + A(t,\lambda) - \delta I)^{-1}|| \leq \frac{K_o}{1-c_1|\lambda-\lambda_o|\big(1+K_o\max(1,\omega)\big)} \; \frac{1}{|\mu| + \frac{1}{2}} \qquad \forall \mu \in S_\phi^c$$

auquel cas l'opérateur $A(t,\lambda) - \delta I$ sera de type $\left(\frac{\pi}{2} - \phi, \dfrac{K_o}{1-c_1|\lambda-\lambda_o|(1+k_o\max(1,\omega))}\right)$

et $-(A(t,\lambda)-\delta I)$ engendrera un semi-groupe $e^{-\tau(A(t,\lambda)-\delta I)}$ analytique pour $\tau > 0$, et fortement continu pour $\tau \geq 0$, lorsque λ est voisin de λ_o.

Appelons par M la quantité $\dfrac{K_o}{1-c_1|\lambda-\lambda_o|\big(1+K_o\max(1,\omega)\big)}$.

$$(\mu I + A(t,\lambda) - \delta I)^{-1} = \frac{1}{\delta}\left(\frac{\mu I+A(t,\lambda)}{\delta} - I\right)^{-1}$$

$$= \left(I - \left(\frac{\mu I+A(t,\lambda)}{\delta}\right)^{-1}\right)^{-1}(\mu I + A(t,\lambda))^{-1}$$

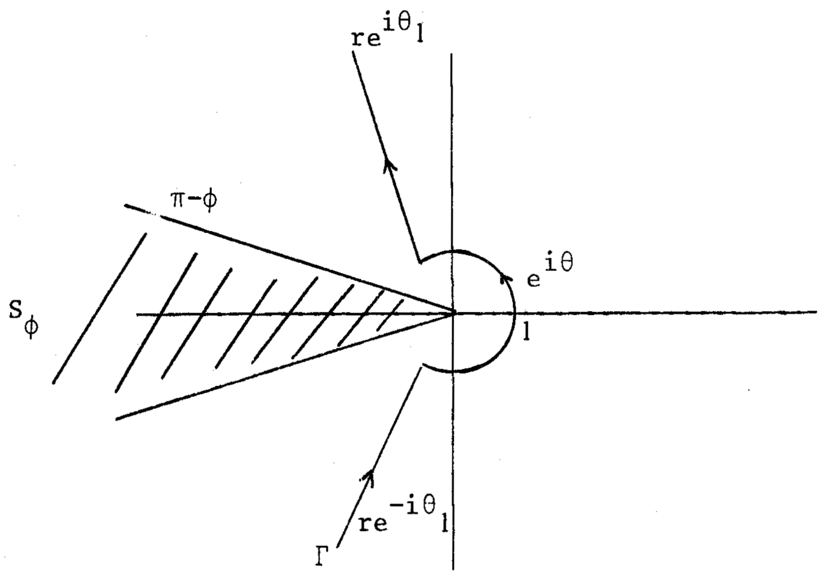
Pour $\mu \in S_\phi^c$, $\left|\left|\left(\frac{\mu I+A(t,\lambda)}{\delta}\right)^{-1}\right|\right| \leqslant \frac{M\delta}{|\mu|+1} \leqslant M\delta < 1$, donc

$$||(\mu I + A(t,\lambda) - \delta I)^{-1}|| \leqslant \frac{1}{1 - \frac{M}{|\mu|+1}} \cdot \frac{M}{|\mu| + 1} \leqslant \frac{M}{|\mu| + \frac{1}{2}} \leqslant \frac{M}{|\mu|} .$$

Considérons alors l'intégrale

$$e^{-\tau(A(t,\lambda)-\delta I)} = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma e^{\mu\tau}(\mu I + A(t,\lambda) - \delta I)^{-1}d\mu$$

où Γ est une courbe C^∞ entourant le spectre de $-(A(t,\lambda) - \delta I)$ et son intérieur, se composant des 3 courbes suivantes :



- $\{re^{i\theta_1}$, $1 \leqslant r < +\infty\}$ avec $\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \pi - \phi$
- $\{re^{-i\theta_1}$, $1 \leqslant r < +\infty\}$

- un arc de cercle centré en 0, de rayon 1, qui relie les points $e^{-i\theta_1}$ et $e^{+i\theta_1}$, i.e. $\{(r,\theta)/r = 1, \ -\theta_1 \leq \theta \leq \theta_1\}$.

Soit le changement de variable $\mu = \frac{\mu'}{\tau}$ dans l'expression de $e^{-\tau(A(t,\lambda)-\delta I)}$ et notons par Γ' le nouveau contour $(\Gamma' = \tau\Gamma)$. Le théorème de Cauchy nous permet de dire que le contour Γ' peut être modifié en Γ puisqu'on reste toujours en dehors de spectre de $-(A(t,\lambda) - \delta I)$.

D'autre part :

$$\left\|\left(\frac{\mu'}{\tau} I + A(t,\lambda) - \delta I\right)^{-1}\right\| \leq \frac{K_o}{1-c_1|\lambda-\lambda_o|(1+K_o\max(1,\omega))} \left|\frac{\mu'}{\tau}\right|^{-1}$$

$$\leq \frac{K_o\tau}{1-c_1|\lambda-\lambda_o|(1+K_o\max(1,\omega))} |\mu'|^{-1} \quad \text{pour } \tau \neq 0 \text{ et } \mu' \in \Gamma$$

ce qui nous donne

$$\|e^{-\tau(A(t,\lambda)-\delta I)}\| = \left\|\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma e^{\mu'}\left(\frac{\mu'}{\tau} I+A(t,\lambda)-\delta I\right)^{-1} \frac{d\mu'}{\tau}\right\|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \frac{K_o}{1-c_1|\lambda-\lambda_o|(1+K_o\max(1,\omega))} \int_\Gamma |e^{\mu'}| \frac{|d\mu'|}{|\mu'|}$$

$$\int_\Gamma |e^{\mu'}| \frac{|d\mu'|}{|\mu'|} \leq \int_1^{+\infty} e^{r\cos\theta_1} \frac{dr}{r} + \int_1^{+\infty} e^{r\cos(-\theta_1)} \frac{dr}{r} + \int_{-\theta_1}^{\theta_1} e^{\cos\theta} d\theta$$

$$= 2\int_1^{+\infty} \frac{e^{r\cos\theta_1}}{r} dr + 2\int_0^{\theta_1} e^{\cos\theta} d\theta = 2\left(e\theta_1 - \frac{e^{\cos\theta_1}}{\cos\theta_1}\right)$$

où $\cos\theta_1 < 0$. D'où (1-17), c'est-à-dire

$$||e^{-\tau A(t,\lambda)}||e^{\delta\tau} \leq \frac{1}{\pi}\left(\theta_1 e - \frac{e^{\cos\theta_1}}{\cos\theta_1}\right)\frac{K_o}{1-c_1|\lambda-\lambda_o|(1+K_o\max(1,\omega))} .$$

Puisque $A(t,\lambda)$ est fermé, nous avons

$$(A(t,\lambda)-\delta I)e^{-\tau(A(t,\lambda)-\delta I)} = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma e^{\mu'}(A(t,\lambda)-\delta I)\left(\frac{\mu'}{\tau} I+A(t,\lambda)-\delta I\right)^{-1}\frac{d\mu'}{\tau} .$$

En écrivant

$$A(t,\lambda) - \delta I = \left(A(t,\lambda) - \delta I + \frac{\mu'}{\tau} I\right) - \frac{\mu'}{\tau} I$$

et en rappelant que $\int_\Gamma e^{\mu'}d\mu' = 0$, on a

$$(A(t,\lambda) - \delta I)e^{-\tau(A(\tau,\lambda)-\delta I)} = -\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \left(\frac{\mu'}{\tau} I+A(t,\lambda)-\delta I\right)^{-1}e^{\mu'}\mu'\frac{d\mu'}{\tau^2}$$

et

$$||(A(t,\lambda)-\delta I)e^{-\tau(A(\tau,\lambda)-\delta I)}|| \leq \frac{1}{\tau}\cdot\frac{1}{\pi}\left(\theta_1 e - \frac{e^{\cos\theta_1}}{\cos\theta_1}\right)\frac{K_o}{1-c_1|\lambda-\lambda_o|(1+K_o\max(1,\omega))} .$$

On sait que $(A(t,\lambda)-\delta I)$ est inversible pour λ voisin de λ_o et

$$||(A(t,\lambda) - \delta I)^{-1}|| \leq \frac{2K_o}{1-c_1|\lambda-\lambda_o|(1+K_o\max(1,\omega))} .$$

En écrivant

$$A(t,\lambda)e^{-\tau A(t,\lambda)} = [I+\delta I(A(t,\lambda)-\delta I)^{-1}](A(t,\lambda)-\delta I)e^{-\tau A(t,\lambda)}$$

on montre que

$$||A(t,\lambda)e^{-\tau A(t,\lambda)}|| \leq \frac{e^{-\delta\tau}}{\tau} \cdot \frac{2}{\pi}(\theta_1 e - \frac{e^{\cos\theta_1}}{\cos\theta_1}) \frac{K_o}{1-c_1|\lambda-\lambda_o|(1+K_o\max(1,\omega))}$$

d'où (1-17) et (1-18) avec

$$c_3 = \frac{2}{\pi}(\theta_1 e - \frac{e^{\cos\theta_1}}{\cos\theta_1}) \frac{K_o}{1-c_1|\lambda-\lambda_o|(1+K_o\max(1,\omega))}$$

On a aussi les résultats suivants :

$$\forall\ t,\tau,s \in \mathbb{R}, \qquad \lambda,\mu,\nu \in \Lambda_o, \quad \lambda \text{ assez voisin de } \lambda_o,$$

$$(1\text{-}19)\ \begin{cases} E_1)\ \ ||A(t,\lambda)A^{-1}(\tau,\mu)|| \leq M_1 \\ E_2)\ \ ||[A(t,\lambda) - A(\tau,\mu)]A^{-1}(s,\nu)|| \leq M_2(|\lambda-\mu| + |t-\tau|^{\delta_1}) \\ E_3)\ \ ||[A(t,\lambda) - A(t,\mu) + A(\tau,\mu) - A(\tau,\lambda)]A^{-1}(s,\nu)|| \leq \frac{c_2}{c_1} M_2|\lambda-\mu|\ |t-\tau|^{\delta_1} \end{cases}$$

E_2) impliquerait que la fonction d'opérateur $(A(t,\lambda)A^{-1}(s,\nu))$ est uniformément continue pour $t \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \Lambda_o$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ autour de λ_o et périodique en t et s, donc uniformément bornée sur $\mathbb{R} \times \Lambda_o$, i.e.

$\exists\ M_1 > 0$ indépendant de t,λ,s et ν tel que $||A(t,\lambda)A^{-1}(s,\nu)|| \leq M_1$

d'où E1).

$E_2)$ est dûe essentiellement à la borne de $L(s,\nu)A^{-1}(s,\nu)$ qui est

$$||L(s,\nu)A^{-1}(s,\nu)|| \leqslant \frac{\omega\, c_2}{1-c_1|\nu-\lambda_o|(1+K_o\max(1,\omega))} + 1$$

et on a $E_2)$ avec $M_2 = \dfrac{c_1}{1-c_1|\nu-\lambda_o|}\left[1 + \dfrac{\omega\, c_2}{1-c_1|\nu-\lambda_o|(1+K_o\max(1,\omega))}\right]$.

De la même façon $E_3)$ est obtenue.

(B) SOLUTIONS FONDAMENTALES DU PROBLEME DE CAUCHY.

Définition :

Une fonction d'opérateur $U(t,\tau,\lambda)$ (à valeurs dans $B(E)$ espace de Banach dont les éléments T sont des opérateurs linéaires bornés muni de la norme $||T|| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{||Tx||}{||x||}$), définie et fortement continue en t, pour $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant 1$, continue en $\lambda \in \Lambda_o$, est appelée solution fondamentale de (1-1) si :

i) $\dfrac{\partial U}{\partial t}(t,\tau,\lambda)$ existe pour la topologie forte et appartient à $B(E)$ pour $0 \leqslant \tau < t \leqslant 1$ et est aussi fortement continue en t $(\tau < t \leqslant 1)$;

ii) l'image de $U(t,\tau,\lambda)$ est dans $B = D(L(t,\lambda))$ $\forall\, t,\lambda$

iii) $\dfrac{\partial U}{\partial t}(t,\tau,\lambda) - L(t,\lambda)U(t,\tau,\lambda) = 0 \qquad (\tau < t \leqslant 1)$

$U(\tau,\tau,\lambda) = I.$

La construction d'une solution fondamentale est donnée dans les prochains paragraphes.

1) *Propriétés du semi-groupe* $e^{-\tau A(t,\lambda)}$.

Lemme B.1.1.-

Les inégalités suivantes ont lieu pour $t,\tau,s,\xi,\eta \in [0,1]$ et $\lambda,\mu,\nu,\alpha \in \Lambda_o$:

(1-21) $||e^{-\tau A(t,\mu)} - e^{-\tau A(s,\nu)}|| \leqslant M_2 c_3(2c_3^2+c_3+1)\left[|\lambda-\mu| + |t-s|^{\delta_1}\right]e^{-\delta\tau}$

(1-22) $||A(\xi,\lambda)[e^{-\tau A(t,\mu)} - e^{-\tau A(s,\nu)}]|| \leqslant M_1M_2c_3(8c_3^3+2c_3+1)\left[|\lambda-\mu|+|t-s|^{\delta_1}\right]e^{-\delta\tau}\tau^{-1}$

(1-23) $||A(\xi,\lambda)[e^{-\tau A(t,\mu)} - e^{-\tau A(s,\nu)}]A^{-1}(\eta,\alpha)|| \leqslant$

$\leqslant M_1M_2c_3^2(2c_3^2+(M_1+1)c_3+3)\left[|\lambda-\mu|+|t-s|^{\delta_1}\right]e^{-\delta\tau}$.

Preuve :

Puisque les semi-groupes $e^{-(\tau-\xi)A(t,\lambda)}$ et $e^{-\xi A(s,\mu)}$ sont fortement continus pour $0 \leqslant \xi \leqslant \tau$, pour $v \in B$, la fonction $\phi(\xi) = -e^{-(+\tau-\xi)A(t,\lambda)}e^{-\xi A(s,\mu)}v$ est continûment différentiable et $\phi'(\xi) = e^{-(\tau-\xi)A(t,\lambda)}[A(s,\mu)-A(t,\lambda)]e^{-\xi A(s,\mu)}v$. En intégrant la dernière égalité de 0 à τ, on obtient :

$$(1\text{-}20)\quad [e^{-\tau A(t,\lambda)}-e^{-\tau A(s,\mu)}]v = \int_0^\tau e^{-(\tau-\xi)A(t,\lambda)}[A(s,\mu)-A(t,\lambda)]e^{-\xi A(s,\mu)}v\,d\xi,\ v \in B.$$

En utilisant (1-20) et en procédant comme Sobolewski [1], on peut écrire

$$e^{-\tau A(t,\mu)}-e^{-\tau A(s,\nu)} = \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-(\frac{\tau}{2}-\alpha)A(t,\mu)}[A(s,\nu)-A(t,\mu)]A^{-1}(s,\nu)e^{-\alpha A(s,\nu)}d\alpha A(s,\nu)\rho^{-\frac{\tau}{2}A(s,\nu)}$$

$$+ A(t,\mu)e^{-\frac{\tau}{2}A(t,\mu)}\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-(\frac{\tau}{2}-\alpha)A(t,\mu)}[A(s,\nu)-A(t,\mu)]A^{-1}(s,\nu)e^{-\alpha A(s,\nu)}d\alpha$$

$$+ e^{-\frac{\tau}{2}A(t,\mu)}[A(t,\mu) - A(s,\nu)]A^{-1}(s,\nu)e^{-\frac{\pi}{2}A(s,\nu)}$$

$$- e^{-\tau A(t,\mu)}[A(t,\mu) - A(s,\nu)]A^{-1}(s,\nu)$$

et d'après (1-17), (1-18) et (1-19) on a (1-21). (1-22) et (1-23) peuvent être vérifiées d'une manière analogue (en utilisant (1-19)).

A partir de l'identité

$$(1\text{-}24)\qquad (e^{-tA(\tau,\lambda)} - e^{-sA(\tau,\lambda)})v = -\int_s^t A(\tau,\lambda)e^{-\alpha A(\tau,\lambda)}\,v\,d\alpha \qquad (v \in B)$$

nous pouvons énoncer le lemme suivant.

Lemme B.1.2.-

Pour tout $t,s,\tau,\xi \in [0,1]$, $\lambda, \mu \in \Lambda_o$,

$$\|(e^{-tA(\tau,\lambda)} - e^{-sA(\tau,\lambda)})A^{-1}(\xi,\mu)\| \leqslant M_1 C_3 e^{-\delta\min\{t,s\}}|t-s| \tag{1-25}$$

$$\|A(\xi,\mu)(e^{-tA(\tau,\lambda)} - e^{-sA(\tau,\lambda)})A^{-2}(\tau,\lambda)\| \leqslant M_1 C_3 e^{-\delta\min\{t,s\}}|t-s|. \tag{1-26}$$

Ce lemme à son tour nous permet d'établir :

Lemme B.1.3.-

La fonction $A(t,\lambda)e^{-\tau A(s,\mu)}$ est uniformément continue pour la topologie uniforme (i.e., pour la norme de $B(E)$) par rapport à toutes ses variables où $0 < \tau \leqslant \tau + \Delta\tau$, t et $s \in [0,1]$ et λ et $\mu \in \Lambda_o$.

Preuve :

$$A(t+\Delta t,\lambda)e^{-(\tau+\Delta\tau)A(s+\Delta s,\mu)} - A(t,\nu)e^{-\tau A(s,\rho)} =$$

$$[A(t+\Delta t,\lambda)-A(t,\nu)]A^{-1}(s+\Delta s,\mu)A(s+\Delta s,\mu)e^{-(\tau+\Delta\tau)A(s+\Delta s,\mu)}$$

$$+ A(t,\nu)[e^{-\Delta\tau A(s+\Delta s,\mu)} - e^{-\nu . A(s+\Delta s,\mu)}]A^{-2}(s+\Delta s,\mu)A^2(s+\Delta s,\mu)e^{-\tau A(s+\Delta s,\mu)}$$

$$+ A(t,\nu)[e^{-\tau A(s+\Delta s,\mu)} - e^{-\tau A(s,\rho)}]$$

et d'après les bornes (1-17), (1-18), (1-19), (1-22) et (1-26),

$$\|A(t+\Delta t,\lambda)e^{-(\tau+\Delta\tau)A(s+\Delta s,\mu)} - A(t,\nu)e^{-\tau A(s,\rho)}\| \leqslant M_2 C_3 (\tau+\Delta\tau)^{-1}[|\lambda-\nu|+\Delta t^{\delta_1}]e^{-\delta(\tau+\Delta\tau)}$$

$$+ 4M_1 C_3^3 e^{-\delta\tau}\tau^{-2}\Delta\tau$$

$$+ M_1 M_2 C_3 (8C_3^3+2C_3+1)e^{-\delta\tau}\tau^{-1}[|\mu-\rho|+\Delta s^{\delta_1}] .$$

Nous avons alors le résultat suivant :

Corollaire :

Pour $0 \leqslant \tau < t \leqslant 1$, λ et $\mu \in \Lambda_o$, les fonctions d'opérateur $[A(\tau,\lambda) - A(t,\mu)]e^{-(t-\tau)A(\tau,\lambda)}$, $[A(\tau,\lambda)-A(t,\mu)]\, e^{-(t-\tau)A(t,\mu)}$, $e^{-(t-\tau)A(\tau,\lambda)}$ et $e^{-(t-\tau)A(t,\mu)}$ sont uniformément continues pour la topologie uniforme en t,τ,λ et μ.

Considérons maintenant l'opérateur $A(t,\lambda)e^{-A(s,\mu)}A^{-1}(\xi,\nu)$.

$$A(t,\lambda)e^{-\tau A(s,\mu)}A^{-1}(\xi,\lambda) = A(t,\lambda)A^{-1}(s,\mu)e^{-\tau A(s,\mu)}A(s,\mu)A^{-1}(\xi,\nu).$$

D'après (1-19), $A(t,\lambda)A^{-1}(s,\mu)$ et $A(s,\mu)A^{-1}(\xi,\nu)$ sont uniformément continus et $e^{-\tau A(s,\mu)}$ est fortement continuepour $\tau \geqslant 0$. Donc $A(t,\lambda)e^{-\tau A(s,\mu)}A^{-1}(\xi,\nu)$ est fortement continu pour $\tau \geqslant 0$. En conséquence, pour $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant 1$, les fonctions d'opérateur

$$e^{-(t-\tau)A(\tau,\mu)},\ e^{-(t-\tau)A(t,\lambda)} \text{ et } [A(\tau,\mu)-A(t,\lambda)]e^{-(t-\tau)A(\tau,\mu)}A^{-1}(\tau,\mu)$$

sont fortement continues en t,τ, λ et μ.

Reprenons les équations (1-12) et (1-13).

$$\begin{aligned} \varphi_1(t,0,\lambda) &= [L(t,\lambda) - L(0,\lambda)]e^{tL(0,\lambda)} \\ &= [A(0,\lambda) - A(t,\lambda)]e^{-tA(0,\lambda)}e^{\omega t} \\ &= \Psi_1(t,0,\lambda)e^{\omega t} \end{aligned}$$

où $\Psi_1(t,0,\lambda) = [A(0,\lambda) - A(t,\lambda)]e^{-tA(0,\lambda)}$. Soit

(1-12)' $\quad \Psi_{k+1}(t,0,\lambda) = \int_0^t \Psi_k(t,s,\lambda)\Psi_1(s,0,\lambda)ds$ et $\Psi(t,0,\lambda) = \sum_{k\geqslant 1} \Psi_k(t,0,\lambda)$.

on a alors

(1-13)' $$\Psi(t,0,\lambda) = \Psi_1(t,0,\lambda) + \int_0^t \Psi(t,s,\lambda)\Psi_1(s,0,\lambda)ds.$$

2) *Existence et continuité de* $\Psi(t,s,\lambda)$.

(1-13)' est une équation d'opérateurs du type de Volterra (par rapport à $\tau = 0$). Son noyau $\Psi_1(s,0,\lambda)$ est continu par rapport à s,λ, pour $s > 0$, d'après le corollaire du lemme B.1.3. Les estimations (1-18) et (1-19) nous donnent :

(1-27) $$||\Psi_1(t,s,\lambda)|| \leqslant M_2C_3|s-t|^{\delta_1-1}e^{-\delta(t-s)}.$$

De ceci, on peut dire que (1-13)' a une solution (t,τ,λ) unique et continue pour tout t et τ lorsque $t > \tau$ et qui vérifie

(1-28) $$||\Psi(t,\tau,\lambda)|| \leqslant M_2C_3\{1+M_2C_3\beta(\delta_1,\delta_1)e^{\frac{M_2C_3}{\delta_1}}\}|t-\tau|^{\delta_1-1}$$

où β représente la fonction d'Euler et pour $k \geqslant 2$, $\Psi_k(t,\tau,\lambda)$ est définie par la relation de récurrence (1-12)' et satisfait à

$$||\Psi_k(t,\tau,\lambda)|| \leqslant (M_2C_3)^k \frac{\Gamma(\delta_1)^k}{\Gamma(k\delta_1)} e^{-\delta(t-\tau)}|t-\tau|^{k\delta_1-1}$$

et (1-29) $$\Psi(t,\tau,\lambda) = \sum_{k\geqslant 1} \Psi_k(t,\tau,\lambda).$$

En multipliant (1-13)' à gauche par $\Psi_1(s,t,\lambda)$ et en l'intégrant de τ à s, on obtient

$$\int_\tau^s \Psi_1(s,t,\lambda)\Psi(t,\tau,\lambda)dt = \int_\tau^s \Psi_1(s,t,\lambda)\Big[\int_\tau^t \Psi_1(t,\xi,\lambda)\Psi_1(\xi,\tau,\lambda)d\xi\Big]dt + \Psi_2(s,\tau,\lambda)$$

$$= \int_\tau^s \Big[\int_\xi^s \Psi_1(s,t,\lambda)\Psi(t,\xi,\lambda)dt\Big]\Psi_1(\xi,\tau,\lambda)d\xi + \Psi_2(s,\tau,\lambda).$$

Ainsi la fonction $H(t,\tau,\lambda) = \int_\tau^t \Psi_1(t,s,\lambda)\Psi(s,\tau,\lambda)ds$ satisfait à l'équation

$$H(t,\tau,\lambda) = \Psi_2(t,\tau,\lambda) + \int_\tau^t H(t,s,\lambda)\Psi_1(s,\tau,\lambda)ds. \tag{1-30}$$

Par conséquent :

$$H(t,\tau,\lambda) = \Psi_1(t,\tau,\lambda) + \int_\tau^t \Psi_1(t,s,\lambda)\Psi(s,\tau,\lambda)ds$$

et la relation suivante a lieu

$$\Psi(t,\tau,\lambda) = \Psi_1(t,\tau,\lambda) + \int_\tau^t \Psi_1(t,s,\lambda)\Psi(s,\tau,\lambda)ds \tag{1-31}$$

(1-31) nous permet d'établir la régularité de $\Psi(t,\tau,\lambda)$ en t. Soit $0 \leqslant \tau < t \leqslant t + \Delta t \leqslant 1$. Alors, en premier lieu, grâce à (1-27),

$$||\Psi_1(t+\Delta t,\tau,\lambda) - \Psi_1(t,\tau,\lambda)|| \leqslant 2M_2C_3e^{-\delta(t-\tau)}|t-\tau|^{\delta_1-1}. \tag{1-32}$$

D'autre part,

$$\Psi_1(t+\Delta t,\tau,\lambda) - \Psi_1(t,\tau,\lambda) = \big[A(t,\lambda)-A(t+\Delta t,\lambda)\big]e^{-(t+\Delta t-\tau)A(\tau,\lambda)}$$

$$+ \big[A(\tau,\lambda)-A(t,\lambda)\big]\big[e^{-\Delta tA(\tau,\lambda)}-I\big]^{-(t-\tau)A(t,\lambda)}.$$

La norme du premier terme du second membre ne dépasse pas

(1-33) $$M_2C_3e^{-\delta(t-\tau)}\Delta t^{\delta_1}(t-\tau)^{-1} .$$

Puisque la norme du second terme ne dépasse pas celle de $\Psi_1(t+\Delta t,\tau,\lambda) - \Psi_1(t,\tau,\lambda)$, elle ne peut donc dépasser

(1-34) $$2M_2C_3e^{-\delta(t-\tau)}|t-\tau|^{\delta_1-1} .$$

D'autre part, ce terme est égal à

$$[A(\tau,\lambda) - A(t,\lambda)]A^{-1}(\tau,\lambda)[e^{-\Delta tA(t,\lambda)} - e^{-0.A(\tau,\lambda)}]A^{-1}(\tau,\lambda)A^2(\tau,\lambda)e^{-(t-\tau)A(\tau,\lambda)} .$$

Sa norme ne dépasse pas

(1-35) $$4M_2C_3^2e^{-\delta(t-\tau)}\Delta t|t-\tau|^{\delta_1-2} .$$

D'après (1-34) et (1-35), la norme du second terme est majorée par

$$\left\{2M_2C_3e^{-\delta(t-\tau)}|t-\tau|^{\delta_1-1}\right\}^{1-\delta_1}\left\{4M_2C_3^2e^{-\delta(t-\tau)}\Delta t(t-\tau)^{\delta_1-2}\right\}^{\delta_1} = 2M_2C_3(2C_3^2)^{\delta_1}e^{-\delta(t-\tau)}\Delta t^{\delta_1}|t-\tau|^{-1} .$$

Ainsi la norme de la différence $\Psi_1(t+\Delta t,\tau,\lambda) - \Psi_1(t,\tau,\lambda)$, ne dépasse pas

$\widetilde{(1-33)}$ $$2M_2C_3(1+(2C_3^2)^{\delta_1})e^{-\delta(t-\tau)}\Delta t^{\delta_1}(t-\tau)^{-1}$$

D'après ceci et (1-32), on peut écrire que

(1-36) $$\|\Psi_1(t+\Delta t,\tau,\lambda)-\Psi_1(t,\tau,\lambda)\| \leqslant 2M_2C_3(1+(2C_3^2)^{\delta_1})e^{-\delta(t-\tau)}\Delta t^{\delta_1-\eta}|t-\tau|^{\eta-1}$$

pour $\eta \in ([0,\delta_1])$.

Lemme B.2.1.-

Pour tout $\eta \in]0,\delta_1]$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant t+\Delta t \leqslant 1$, $\lambda \in \Lambda_o$

$$(1\text{-}37)\quad \|\Psi(t+\Delta t,\tau,\lambda)-\Psi(t,\tau,\lambda)\| \leqslant 2M_2C_3\left(1+(2C_3^2)^{\delta_1}\right)\left[1+\left(\frac{1}{2\delta_1}+\beta(\eta,\delta_1)\right)c(1\text{-}28)\right]\Delta t^{\delta_1-\eta}(t-\tau)^{\eta-1}.$$

Preuve : Pour démontrer ce lemme, on utilise (1-31) où

$$\Psi(t+\Delta t,\tau,\lambda) - \Psi(t,\tau,\lambda) = \Psi_1(t+\Delta t,\tau,\lambda) - \Psi_1(t,\tau,\lambda) + \int_t^{t+\Delta t} \Psi_1(t+\Delta t,s,\lambda)\Psi(s,\tau,\lambda)ds$$

$$+ \int_\tau^t [\Psi_1(t+\Delta t,s,\lambda) - \Psi_1(t,s,\lambda)]\Psi(s,\tau,\lambda)ds$$

et en se servant de (1-28) et (1-36) pour $\eta \in]0,\delta_1]$ on a ce qu'on veut.

On a besoin aussi d'une estimation de la norme de $[\Psi(t+\Delta t,\tau,\lambda) - \Psi(t,\tau,\lambda)]A^{-1}(s,\mu)$.

Tout d'abord à partir de l'estimation

$$(1\text{-}38)\qquad ||\Psi_1(t,\tau,\lambda)A^{-1}(s,\mu)|| \leqslant M_1M_2C_3e^{-\delta(t-\tau)}|t-\tau|^{\delta_1}$$

et de (1-13)', on a

$$(1\text{-}39)\qquad ||\Psi(t,\tau,\lambda)A^{-1}(s,\mu)|| \leqslant M_1M_2C_3\left(1+\frac{c(1\text{-}28)}{2}\beta(\delta_1,\delta_1)\right)|t-\tau|^{\delta_1}.$$

En utilisant (1-31), on établit de la même manière que pour (1-37) l'inégalité

$$(1\text{-}40)\quad \begin{cases} ||[\Psi(t+\Delta t,\tau,\lambda)-\Psi(t,\tau,\lambda)]A^{-1}(s,\mu)|| \leqslant c(1\text{-}40)\Delta t^{\delta_1-\eta}|t-\tau|^{\eta} \quad \text{où} \quad \eta \in]0,\delta_1] \\ \text{et}\quad C(1\text{-}40)=2M_1M_2C_3\mathrm{Sup}(3,1+3C_3^{\delta_1},1+2C_3^{2\delta_1})\left(1+\frac{C(1\text{-}28)}{2}\beta(\delta_1,\delta_1)\right) \\ \qquad\qquad \left\{1+\frac{M_2C_3}{\delta_1}+M_2C_3\beta(\eta,\delta_1)\right\}. \end{cases}$$

Soient $\lambda, \mu \in \Lambda_o$ et $0 \leqslant s < t \leqslant 1$.

$$\Psi_1(t,s,\lambda)-\Psi_1(t,s,\mu) = [A(s,\lambda)-A(t,\lambda)]A^{-1}(s,\lambda)A(s,\lambda)\left[e^{-(t-s)A(s,\lambda)}-e^{-(t-s)A(s,\mu)}\right]$$
$$+ [A(s,\lambda)-A(t,\lambda)-A(s,\mu)+A(t,\mu)]A^{-1}(s,\mu)A(s,\mu)e^{-(t-s)A(s,\mu)}.$$

D'après (1-18), (1-19) et (1-22)

$$(1\text{-}41) \quad ||\Psi_1(t,s,\lambda)-\Psi_1(t,s,\mu)|| \leqslant M_2C_3\left[M_2(8C_3^3+2C_3+1) + \frac{C_2}{C_1}\right]|\lambda-\mu||t-s|^{\delta_1-1}e^{-\delta(t-s)}$$

Nous pouvons énoncer le lemme,

Lemme B.2.2.-

Pour tout $0 \leqslant \tau < t \leqslant 1$ et $\lambda, \mu \in \Lambda_o$,

$$(1\text{-}42) \quad ||\Psi(t,\tau,\lambda)-\Psi(t,\tau,\mu)|| \leqslant |\lambda-\mu||t-\tau|^{\delta_1-1}.C(1\text{-}41)\beta(\delta_1,\delta_1)\left\{1+M_2C_3\left(1+M_2C_3\beta(\delta_1,\delta_1)e^{\frac{M_2C_3}{\delta_1}}\right)\right\}$$
$$\left\{1+M_2C_3\beta(\delta_1,\delta_1)e^{\frac{M_2C_3}{\delta_1}}\right\}.$$

Preuve : En utilisant (1-31), nous avons

$$\Psi(t,\tau,\lambda)-\Psi(t,\tau,\mu) = \Psi_1(t,\tau,\lambda)-\Psi_1(t,\tau,\mu) + \int_\tau^t [\Psi_1(t,s,\lambda)-\Psi_1(t,s,\mu)]\Psi(s,\tau,\lambda)ds$$
$$+ \int_\tau^t \Psi_1(t,s,\mu)[\Psi(s,\tau,\lambda)-\Psi(s,\tau,\mu)]ds.$$

Les estimations (1-27) et (1-28) nous permettent d'écrire

$$||\Psi(t,\tau,\lambda)-\Psi(t,\tau,\mu)|| \leqslant C(1\text{-}41)|\lambda-\mu||t-\tau|^{\delta_1-1}\left\{1+M_2C_3\left(1+M_2C_3\beta(\delta_1,\delta_1)e^{\frac{M_2C_3}{\delta_1}}\right)\right\}\beta(\delta_1,\delta_1)$$
$$+ M_2C_3\int_\tau^t (t-s)^{\delta_1-1}||\Psi(s,\tau,\lambda) - \Psi(s,\tau,\mu)||ds$$

et d'après un lemme dans les équations différentielles ordinaires, on obtient (1-42) (lemme de Gronwall).

3) *Continuité de* $U(t,\tau,\lambda)$ *par rapport à* t, τ *et* λ *et sa différentiabilité par rapport à* $t > \tau$.

En faisant le changement de variables $v(t,\lambda) = u(t,\lambda)e^{-\omega t}$ dans le système

$$\begin{cases} u_t = L(t,\lambda)u & (1\text{-}1) \\ u(0,\lambda) = I & (1\text{-}2) \end{cases}$$

on obtient le nouveau système à étudier

$$\begin{cases} v_t = -A(t,\lambda)v & (1\text{-}1)' \\ v(0,\lambda) = I\quad . & (1\text{-}2)' \end{cases}$$

Les équations en $U(t,\tau,\lambda)$ se transforment en :

$$(1\text{-}8)' \quad V(t,\tau,\lambda) = e^{-(t-\tau)A(\tau,\lambda)} + \int_\tau^t V(t,s,\lambda)\left[A(\tau,\lambda)-A(s,\lambda)\right]e^{-(s-\tau)A(\tau,\lambda)}ds$$

$$(1\text{-}9)' \quad V(t,\tau,\lambda) = \sum_{k\geqslant 0} V_k(t,\tau,\lambda) \quad \text{avec}$$

$$(1\text{-}10)' \quad \begin{cases} V_o(t,\tau,\lambda) = e^{-(t-\tau)A(\tau,\lambda)} \\ V_{k+1}(t,\tau,\lambda) = \int_\tau^t V_k(t,s,\lambda)\left[A(\tau,\lambda)-A(s,\lambda)\right]e^{-(s-\tau)A(\tau,\lambda)}ds \end{cases}$$

$$(1\text{-}11)' \quad V_k(t,\tau,\lambda) = \int_\tau^t e^{-(t-s)A(s,\lambda)}\Psi_k(s,\tau,\lambda)ds \qquad k = 1,2,\ldots$$

ce qui nous donne $U(t,\tau,\lambda) = e^{\omega(t-\tau)}V(t,\tau,\lambda)$ et toutes les propriétés de $U(t,\tau,\lambda)$ se déduiront de celles de $V(t,\tau,\lambda)$.

D'après les propriétés des fonctions d'opérateurs $e^{-(t-\tau)A(\tau,\lambda)}$ et $\Psi(t,\tau,\lambda)$ établies ci-dessus, il résulte que $V(t,\tau,\lambda)$ est uniformément continu en $t > \tau$ et fortement continu en $t \geqslant \tau$. De plus $V(\tau,\tau,\lambda) = I$. La formule

$$(1\text{-}14)' \qquad V(t,\tau,\lambda) = e^{-(t-\tau)A(\tau,\lambda)} + \int_\tau^t e^{-(t-s)A(s,\lambda)}\Psi(s,\tau,\lambda)ds$$

définit la solution unique continuede l'équation (1-8)'.

Sobolewskii [7] prouve que la fonction d'opérateur $V(t,\tau,\lambda)$ est fortement continûment différentiable en t pour $t > \tau$ et qu'elle vérifie (1-1)'. Pour cela, il considère

$$V_\rho(t,\tau,\lambda)v = e^{-(t-\tau)A(\tau,\lambda)}v + \int_\tau^{t-\rho} e^{-(t-s)A(s,\lambda)}\Psi(s,\tau,\lambda)v\, ds$$

où v est arbitraire dans E, $t-\tau \geqslant \gamma > 0$ et $0 < \rho < \gamma$.

Lorsque $\rho \to 0$, $V_\rho(t,\tau,\lambda)v \to V(t,\tau,\lambda)v$ uniformément par rapport à $t \geqslant \tau+\gamma$. De plus, $V_\rho(t,\tau,\lambda)v$ est continûment différentiable en t et d'après (1-31),

$$\frac{\partial V_\rho(t,\tau,\lambda)v}{\partial t} = -A(t,\lambda)e^{-(t-\tau)A(\tau,\lambda)}v - A(t,\lambda)\int_\tau^{t-\rho} e^{-(t-s)A(s,\lambda)}\Psi(s,\tau,\lambda)v\, ds$$

$$+ \int_{t-\rho}^t \Psi_1(t,s,\lambda)\Psi(s,\tau,\lambda)v\, ds + e^{-\rho A(t-\rho,\lambda)}\left[\Psi(t-\rho,\tau,\lambda)-\Psi(t,\tau,\lambda)\right]v$$

$$+ \left[e^{-\rho A(t-\rho,\lambda)} - I\right]\Psi(t,\tau,\lambda)v$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5.$$

I_3 , I_4 et I_5 convergent uniformément vers 0 par rapport à $t \geqslant \tau + \gamma$ lorsque $\rho \to 0$. Il montre de plus que

$$(1-43)\quad \begin{cases} \left\|A(t,\lambda)\int_\tau^t e^{-(t-s)A(s,\lambda)}ds\right\| \leqslant e^{\frac{M_2C_3}{\delta_1}}\left\{1+C_3+\frac{M_2C_3}{\delta_1}+\frac{8M_2C_3^2}{(\delta_1-\eta)\eta}\,(1+(2C_3^2)^{\delta_1})\right\} \\ \text{où } \eta \in \,]0,\delta_1]. \end{cases}$$

Donc

$$\left\|A(t,\lambda)\int_\tau^{t-\rho} e^{-(t-s)A(s,\lambda)}ds\right\| \leqslant 2C(1-43)$$

$\Psi(t,\tau,\lambda)v$ étant continue en t pour $t \geqslant \tau+\gamma$, $A(t,\lambda)$ étant fermé et B dense dans E, il résulte que $A(t,\lambda)\int_\tau^{t-\rho} e^{-(t-s)A(s,\lambda)}\Psi(s,\tau,\lambda)v\,ds$ converge uniformément par rapport à $t \geqslant \tau+\gamma$ vers $A(t,\lambda)\int_\tau^t e^{-(t-s)A(s,\lambda)}\Psi(s,\tau,\lambda)v\,ds$.

Ainsi $V(t,\tau,\lambda)$ est fortement continûment différentiable en t pour $t > \tau$ et satisfait à

$$(1-44)\qquad \frac{\partial V(t,\tau,\lambda)}{\partial t} + A(t,\lambda)V(t,\tau,\lambda) = 0.$$

Evaluons à présent $V(t,\tau,\lambda) - V(t,\tau,\mu)$ pour $\lambda, \mu \in \Lambda_o$ et $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant 1$.

$$\begin{aligned} V(t,\tau,\lambda) - V(t,\tau,\mu) &= e^{-(t-\tau)A(\tau,\lambda)} - e^{-(t-\tau)A(\tau,\mu)} \\ &+ \int_\tau^t \left[e^{-(t-s)A(s,\lambda)} - e^{-(t-s)A(s,\mu)}\right]\Psi(s,\tau,\lambda)ds \\ &+ \int_\tau^t e^{-(t-s)A(s,\mu)}\left[\Psi(s,\tau,\lambda) - \Psi(s,\tau,\mu)\right]ds. \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités (1-21), (1-28), (1-17) et (1-42)

$$(1\text{-}45)\quad \begin{cases} \|V(t,\tau,\lambda)-V(t,\tau,\mu)\| \leqslant |\lambda-\mu| . M_2 \dfrac{\operatorname{Sup}(1,C_3^2)}{\delta_1} \beta(\delta_1,\delta_1)\left[1 + M_2C_3\beta(\delta_1,\delta_1)e^{\frac{M_2C_3}{\delta_1}}\right] \\[2ex] \left[1+M_2C_3(1+M_2C_3\beta(\delta_1,\delta_1)e^{\frac{M_2C_3}{\delta_1}})\right]\left[(2C_3^2+C_3+1)(1+M_2)+M_2(8C_3^3+2C_3+1) + \dfrac{C_2}{C_1}\right] . \end{cases}$$

4) *Unicité de la solution.*

D'après ce qui précède, il résulte que le problème

$$\begin{cases} (a) & \dfrac{dv}{dt} + A(t,\lambda) = 0 \\[2ex] (b) & v(0,\lambda) = u_o(\lambda) \end{cases}$$

a une solution $v(t,\lambda) = V(t,0,\lambda)u_o(\lambda)$ (c)

qui est continue pour $t \geqslant 0$ et continûment différentiable pour $t \geqslant 0$ puisque $u_o(\lambda) \in B$. Reste à prouver que cette solution est unique. Si $A(t,\lambda)$ est borné, il est clair que $v(t,\lambda)$ est alors unique. Dans le cas où $A(t,\lambda)$ n'est pas borné, Sobolevskii [7] page 18, montre que le problème (a), (b) a une solution unique. Pour cela il approche le problème (a), (b) par

$$\begin{cases} (1\text{-}46) & \dfrac{dv}{dt} + A_n(t,\lambda)v = 0 \\[2ex] (1\text{-}47) & v(0,\lambda) = u_o(\lambda) \end{cases}$$

où $A_n(t,\lambda) = A(t,\lambda)\left[I + \frac{1}{n} A(t,\lambda)\right]^{-1}$ sont des opérateurs bornés pour chaque $n = 1, 2, \dots$

Il nous donne aussi le corollaire suivant

Corollaire.-

On a l'identité de semi-groupe suivante

(1-48) $$V(t,s,\lambda) = V(t,\tau,\lambda)V(\tau,s,\lambda), \quad \lambda \in \Lambda_o \ , \quad 0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t \leqslant 1.$$

$V(t,\tau,\lambda)$ est non seulement fortement différentiable mais aussi uniformément différentiable en t pour $t > \tau$.

(C) PRINCIPALES ESTIMATIONS.

1) *Puissances fractionnelles d'opérateurs.*

La borne (1-17) nous permet de définir les puissances fractionnelles négatives $A^{-\alpha}(t,\lambda)$ d'un opérateur $A(t,\lambda)$ par la formule

$$A^{-\alpha}(t,\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-\tau A(t,\lambda)} \tau^{\alpha-1} d\tau \qquad (\alpha > 0). \tag{1-49}$$

Pour tout $\alpha > 0$, on pose $A^{\alpha}(t,\lambda) = [A^{-\alpha}(t,\lambda)]^{-1}$. Cette définition est raisonnable puisque si $A^{-\alpha}(t,\lambda)v = 0 \implies v = 0$ et alors il existe un inverse $[A^{-\alpha}(t,\lambda)]^{-1}$.

Pour $\alpha > 0$, $A^{\alpha}(t,\lambda)$ est un opérateur fermé, généralement non borné dont le domaine de définition $D[A^{\alpha}(t,\lambda)]$ est dense dans E, où $D(A^{\alpha}(t,\lambda)) \subset D(A^{\beta}(t,\lambda))$ pour $\alpha \geqslant \beta$, et $B \subset D(A^{\gamma}(t,\lambda)) \subset E$ pour $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$. D'après Ize [5] $\forall\, \lambda, \mu \in \Lambda_0$, $t \in [0,1]$ et $0 \leqslant \alpha < \gamma \leqslant 1$,

$$D[A^{\gamma}(\lambda,t)] \subset D[A^{\alpha}(\mu,t)].$$

Pour tout α, β et pour $v \in D[A^{\gamma}(t,\lambda)]$ où $\gamma = \max\{\alpha,\beta,\alpha+\beta\}$, l'identité $A^{\alpha}(t,\lambda)A^{\beta}(t,\lambda)v = A^{\beta}(t,\lambda)A^{\alpha}(t,\lambda)v = A^{\alpha+\beta}(t,\lambda)v$ a lieu.

Théorème C.1.1.-

Soient $\alpha < \beta < \gamma$. Alors pour $v \in D[A^{\gamma}(t,\lambda)]$

$$||A^{\beta}(t,\lambda)v|| \leqslant C(1\text{-}50)\,||A^{\gamma}(t,\lambda)v||^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}\,||A^{\alpha}(t,\lambda)v||^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}} \tag{1-50}$$

où $C(1\text{-}50)$ sera précisé ultérieurement.

Preuve : Nous allons établir (1-50) dans le cas où $\alpha = -1$, $\gamma = 0$ et $1 < \beta < 0$.

Pour tout $\varepsilon > 0$

$$A^{\beta}(t,\lambda)v = \int_0^{\varepsilon} e^{-\tau A(t,\lambda)} v \frac{\tau^{-\beta-1}}{\Gamma(-\beta)} d\tau + \int_{\varepsilon}^{+\infty} A(t,\lambda)e^{-\tau A(t,\lambda)} A^{-1}(t,\lambda)v \frac{\tau^{-\beta-1}}{\Gamma(-\beta)} d\tau.$$

D'après (1-17) et (1-18)

$$||A^{\beta}(t,\lambda)v|| \leqslant \frac{C_3||v||}{(-\beta)\Gamma(-\beta)} \varepsilon^{-\beta} - \frac{C_3||A^{-1}(t,\lambda)v||}{(-\beta-1)\Gamma(-\beta)} \varepsilon^{-\beta-1} \qquad (-1 < \beta < 0).$$

En minimisant pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$||A^{\beta}(t,\lambda)v|| \leqslant \frac{C_3}{\Gamma(1-\beta)(1+\beta)} ||A^{-1}(t,\lambda)v||^{-\beta}||v||^{1+\beta}.$$

Ainsi (1-50) est prouvée pour $-1 = \alpha < \beta < \gamma = 0$. En faisant la substitution $A^{-1}(t,\lambda)v = w$, nous établissons sa validité pour $0 = \alpha < \beta < \gamma = 1$,

$$||A^{\beta}(t,\lambda)w|| \leqslant \frac{2C_3}{\beta} ||A(t,\lambda)w||^{\beta}||w||^{1-\beta}.$$

D'après cette inégalité et (1-18), pour $\beta \geqslant 0$, on a les bornes suivantes :

$$(1\text{-}51)_1 \qquad ||A^{\beta}(t,\lambda)e^{-\tau A(t,\lambda)}|| \leqslant \frac{2^{\beta+1} C_3^{2+[\beta]} [\beta]^{[\beta]}}{\beta - |\beta|} e^{-\delta\tau} \tau^{-\beta} \qquad \underline{\beta > 1}$$

$$(1\text{-}51)_2 \qquad ||A^{m}(t,\lambda)e^{-\tau A(t,\lambda)}|| \leqslant (mC_3)^m e^{-\delta\tau} \tau^{-m} \qquad \underline{m \in \mathbb{N}^*}$$

$$(1\text{-}51)_3 \qquad \| A^{\beta}(t,\lambda) e^{-\tau A(t,\lambda)} \| \leqslant \frac{2c_3^2}{\beta} e^{-\delta\tau} \tau^{-\beta} \qquad 0 < \beta < 1$$

où $[x]$ = partie entière de x.

En écrivant

$$A^{\beta}(t,\lambda)v =$$

$$\int_0^{\varepsilon} A^{-\gamma}(t,\lambda) e^{-\tau A(t,\lambda)} \frac{\tau^{-\beta-1}}{\Gamma(-\beta)} A^{\gamma}(t,\lambda)v \, d\tau + \int_{\varepsilon}^{+\infty} A^{-\alpha}(t,\lambda) e^{-\tau A(t,\lambda)} \frac{\tau^{-\beta-1}}{\Gamma(-\beta)} A^{\alpha}(t,\lambda)v \, d\tau$$

pour $\alpha < \beta < \gamma \leqslant 0$ et $\alpha, \gamma \notin \mathbb{Z}$, on montre que

$$\| A^{\beta}(t,\lambda)v \| \leqslant \frac{1}{\Gamma(-\beta)} \frac{C(-\gamma)^{-\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\alpha}} C(-\alpha)^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}} (\gamma-\alpha)}{(\gamma-\beta)(\beta-\alpha)} \| A^{\gamma}(t,\lambda)v \|^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}} \| A^{\alpha}(t,\lambda)v \|^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}}$$

où $C(-\gamma) = \dfrac{c_3^2 2^{-\gamma} (c_3 [-\gamma])^{[-\gamma]}}{-(\gamma + [-\gamma])}$ et $C(-\alpha) = \dfrac{c_3^2 2^{-\alpha} (c_3 [-\alpha])^{[-\alpha]}}{-(\alpha + [-\alpha])}$

et pour $0 \leqslant \alpha < \beta < \gamma$ et $\alpha, \gamma \notin \mathbb{Z}$,

$$\| A^{\beta}(t,\lambda)v \| \leqslant \frac{c_3 C(\gamma-\alpha)^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}} (\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\beta)(\gamma-\beta)(\beta-\alpha)} \| A^{\gamma}(t,\lambda)v \|^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}} \| A^{\alpha}(t,\lambda)v \|^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}}$$

où $C(\gamma-\alpha) = \dfrac{c_3^2 2^{\gamma-\alpha} (c_3 [\gamma-\alpha])^{[\gamma-\alpha]}}{\gamma - \alpha - [\gamma - \alpha]}$ et $\gamma-\alpha \notin \mathbb{Z}$

Pour $\alpha, \gamma \in \mathbb{Z}$, on utilise $(1\text{-}51)_2$, ce qui achève la démonstration de ce théorème.

On montre de manière analogue que l'inégalité

$$(1\text{-}52) \qquad ||A^{\beta}(t,\lambda)v|| \leqslant C(\alpha,\beta,\gamma)\left[\varepsilon^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}} ||A^{\gamma}(t,\lambda)v|| + \varepsilon^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}} ||A^{\alpha}(t,\lambda)v||\right]$$

est pour tout $\varepsilon > 0$, une condition nécessaire et suffisante à l'accomplissement de (1-50).

Définition.-

On dira qu'un opérateur B est subordonné à l'opérateur $A^{\rho}(t,\lambda)$ si

$$(1\text{-}53) \qquad ||BA^{-\rho}(t,\lambda)|| \leqslant C_{\rho}.$$

Sobolevskii ([7] page 22) a montré que $A^{\alpha}(t,\lambda)$ est subordonné à $A^{\beta}(\tau,\mu)$ pour $0 \leqslant \alpha < \beta$ et $\alpha < 1$. On a alors

$$(1\text{-}54) \qquad \begin{cases} ||A^{\alpha}(t,\lambda)A^{-\beta}(\tau,\mu)|| \leqslant \dfrac{4C_3^2 M_1^{\alpha} \delta^{\alpha-\beta}}{\alpha(\beta-\alpha)} & \text{où } 0 < \alpha < 1, \quad \alpha < \beta \\ ||A^{-\beta}(\tau,\mu)|| \leqslant C_3 \delta^{-\beta} & \text{pour } \beta > 0 \text{ .} \end{cases}$$

2) *Bornes de l'opérateur* $V(t,\tau,\lambda)$.

Lemme C.2.1.-

Si $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ et $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$ alors pour tout $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda_o$, $t, \tau \in [0,1]$ et $0 < s \leqslant 1$,

$$(1\text{-}55) \qquad ||A^{\gamma}(\xi,\lambda)\left[e^{-sA(t,\mu)} - e^{-sA(\tau,\nu)}\right]A^{-\alpha}(\tau,\nu)|| \leqslant C(1\text{-}55)(|\mu-\nu| + |t-\tau|^{\delta_1})e^{-\delta s}s^{\alpha-\gamma}.$$

Preuve : D'après (1-20), pour $x \in B$ tel que $x = A^{-\alpha}(\tau,\nu)y$, $y \in E$

$$A^{\gamma}(\xi,\lambda)\left[e^{-sA(t,\mu)}-e^{-sA(\tau,\nu)}\right]x = \int_0^s A^{\gamma}(\xi,\lambda)e^{-(s-\sigma)A(t,\mu)}\left[A(\tau,\nu)-A(t,\mu)\right]e^{-\sigma A(\tau,\nu)}x\, d\sigma$$

Pour $0 < \gamma < 1$, $0 < \alpha < 1$, on utilise (1-50) en prenant $x = A^{-\alpha}(\tau,\nu)y$,

$$(1\text{-}55)_1 \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } \alpha \in \left]0,1\right[, \quad \gamma \in \left]0,1\right[\\ \|A^{\gamma}(\xi,\lambda)\left[e^{-sA(t,\mu)}-e^{-sA(\tau,\nu)}\right]A^{-\alpha}(\tau,\nu)\| \leqslant \dfrac{8M_1^{\gamma}M_2C_3^4}{(\alpha-\alpha^2)(\gamma-\gamma^2)}\,(|\mu-\nu|+|t-\tau|^{\delta_1})e^{-\delta s}s^{-\gamma}\,. \end{array}\right.$$

Si $\alpha = 0$ et $\gamma \in \left]0,1\right[$, on utilise (1-21), (1-22) et (1-50) et on a

$$(1\text{-}55)_2 \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } \gamma \in \left]0,1\right[\\ \|A^{\gamma}(\xi,\lambda)\left[e^{-sA(t,\mu)}-e^{-sA(\tau,\nu)}\right]\| \leqslant \\ \leqslant \dfrac{2M_1^{\gamma}M_2C_3^2}{\gamma}\,(8C_3^3+2C_3+1)^{\gamma}(2C_3^2+C_3+1)^{1-\gamma}(|\mu-\nu| + |t-\tau|^{\delta_1})e^{-\delta s}s^{-\gamma} \end{array}\right.$$

$$(1\text{-}55)_3 \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } \alpha \in \left]0,1\right[\\ \|\left[e^{-sA(t,\mu)}-e^{-sA(\tau,\nu)}\right]A^{-\alpha}(\tau,\nu)\| \leqslant \dfrac{2M_2C_3^2}{\alpha(1-\alpha)}\,(|\mu-\nu| + |t-\tau|^{\delta_1})e^{-\delta s}s^{\alpha} \end{array}\right.$$

$$(1\text{-}55)_4 \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } \alpha \in \left]0,1\right[\\ \|A(\xi,\lambda)\left[e^{-sA(t,\mu)}-e^{-sA(\tau,\nu)}\right]A^{-\alpha}(\zeta,\rho)\| \\ \leqslant \dfrac{4M_1M_2C_3^4}{(1-\alpha)}\,(2C_3^2 + M_1C_3 + C_3 + 4)(|\mu-\nu| + |t-\tau|^{\delta_1})e^{-\delta s}s^{\alpha-1} \end{array}\right.$$

$$(1\text{-}55)_5 \begin{cases} \text{pour} \quad \gamma \in \left]0,1\right[\\ \|A^{\gamma}(\xi,\lambda)\left[e^{-sA(t,\mu)} - e^{-sA(\tau,\nu)}\right]A^{-1}(\zeta,\rho)\| \leqslant \dfrac{2M_1^{\gamma}M_2C_3^3}{\gamma(1-\gamma)}\left(|\mu-\nu|+|t-\tau|^{\delta_1}\right)e^{-\delta s}s^{1-\gamma}. \end{cases}$$

En posant

$$E(\alpha,\gamma) = \begin{cases} \left[\alpha(1-\alpha)\gamma(1-\gamma)\right]^{-1} & \text{si} \quad \alpha \neq \{^0_1 \quad \text{et} \quad \gamma \neq \{^0_1 \\ \left[\alpha(1-\alpha)\right]^{-1} & \text{si} \quad \text{"} \quad \text{et} \quad \gamma = 0 \quad \text{ou} \quad 1 \\ \left[\gamma(1-\gamma)\right]^{-1} & \text{si} \quad \alpha = 0 \quad \text{ou} \quad 1 \quad \text{et} \quad \gamma \neq \{^0_1 . \end{cases}$$

$$(1\text{-}55) \begin{cases} \text{Pour} \quad \gamma \in [0,1], \alpha \in [0,1], \quad \text{les cas} \begin{cases}\alpha=0\\ \gamma=0\end{cases}, \begin{cases}\alpha=1\\ \gamma=0\end{cases}, \begin{cases}\alpha=1\\ \gamma=1\end{cases} \text{et} \begin{cases}\alpha=0\\ \gamma=1\end{cases} \\ \text{étant exclus,} \\ \|A^{\gamma}(\xi,\lambda)\left[e^{-sA(t,\mu)} - e^{-sA(\tau,\nu)}\right]A^{-\alpha}(\tau,\nu)\| \leqslant \left(|\mu-\nu|+|t-\tau|^{\delta_1}\right)s^{\alpha-\gamma}e^{-\delta s} \\ \qquad 8M_1^{\gamma}M_2C_3^2\sup(1,C_3^2)\left[\dfrac{8C_3^3+2C_3+1}{2C_3^2+C_3+1}\right]^{\gamma}(2C_3^2+M_1C_3+C_3+4)E(\alpha,\gamma). \end{cases}$$

<u>*Lemme*</u> *C.2.2.-*

Si $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha \leqslant 1+\delta_1$ alors pour tout $\mu,\lambda \in \Lambda_o$, $\xi \in [0,1]$ et $0 \leqslant \tau < t \leqslant 1$,

$$(1\text{-}56) \qquad \|A^{\alpha}(\xi,\mu)e^{-(t-\tau)A(t,\lambda)}A^{-\beta}(\tau,\lambda)\| \leqslant C(1\text{-}56)|t-\tau|^{\beta-\alpha}e^{-\delta(t-\tau)}.$$

Pour pouvoir montrer (1-56), on aura besoin d'évaluer la quantité

$$\|A^{\gamma}(\xi,\mu)\left[A^{-\beta}(\tau,\lambda) - A^{-\beta}(t,\nu)\right]\| \qquad \text{pour} \quad \gamma < \beta \quad \text{et} \quad \beta > 0.$$

D'après (1-49), on a

$$(1\text{-}58)\qquad A^{-\beta}(\tau,\lambda) - A^{-\beta}(t,\nu) = -\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{+\infty}\left[e^{-sA(t,\nu)}-e^{-sA(\tau,\lambda)}\right]s^{\beta-1}ds.$$

En utilisant ceci, on montre que

$$(1\text{-}59)_1\left\{\begin{array}{l}\text{pour}\quad \gamma<0 \quad\text{et}\quad \beta>0\\ \|A^{\gamma}(\xi,\mu)\left[A^{-\beta}(\tau,\lambda)-A^{-\beta}(t,\nu)\right]\| \leqslant M_2C_3^2(2C_3^2+C_3+1)\delta^{\gamma-\beta}\{|\lambda-\nu| + |t-\tau|^{\delta_1}\}\end{array}\right.$$

et

$$(1\text{-}59)_2\left\{\begin{array}{l}\text{Pour}\quad 0\leqslant\gamma<\beta \quad\text{et}\quad \gamma\leqslant 1\\ \|A^{\gamma}(\xi,\mu)\left[A^{-\beta}(\tau,\lambda)-A^{-\beta}(t,s)\right]\| \leqslant \dfrac{2M_1^{\gamma}M_2C_3\operatorname{Sup}(1,C_3)\delta^{\gamma-\beta}\Gamma(\beta-\gamma)E_1(\gamma)}{\Gamma(\beta)}\\ \qquad\qquad (8C_3^3+2C_3+1)^{\gamma}(2C_3^2+C_3+1)^{1-\gamma}\{|\lambda-\nu| + |t-\tau|^{\delta_1}\}\end{array}\right.$$

$$\text{où}\quad E_1(x) = \begin{cases}(x-[x])^{-1} & \text{si}\quad x\notin\mathbb{N}\\ 1 & \text{si}\quad x\in\mathbb{N}\,.\end{cases}$$

Montrons à présent (1-56)

$$A^{\alpha}(t,\nu)e^{-(t-\tau)A(t,\nu)}A^{-\beta}(\tau,\lambda) = A^{\alpha-\beta}(t,\nu)e^{-(t-\tau)A(t,\nu)} + A^{\alpha}(t,\nu)e^{-(t-\tau)A(t,\nu)}\left[A^{-\beta}(\tau,\lambda)-A^{-\beta}(t,\nu)\right].$$

La norme du premier terme du second membre se majore grâce à (1-51) et celle du second terme grâce à (1-51) et (1-59). On a alors

$$(1\text{-}56)_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour} \quad \delta_1 \leqslant \beta \leqslant \alpha \leqslant 1+\delta_1 \\[2ex] \|A^{\alpha}(t,\nu)e^{-(t-\tau)A(t,\nu)}A^{-\beta}(\tau,\nu)\| \leqslant \\[1ex] \qquad e^{-\delta(t-\tau)}|t-\tau|^{\beta-\alpha}.8C_3\mathrm{Sup}(1,C_3^2)\left\{E_1(\alpha-\beta)+E_1(\alpha-\beta+\delta_1).\left(\begin{array}{c} C(1\text{-}59)_2 \\ \gamma=\beta-\delta_1 \end{array}\right)\right\} \end{array} \right.$$

$$(1\text{-}56)_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour} \quad 0 < \beta < \delta_1 \quad \text{et} \quad \beta \leqslant \alpha \leqslant 1+\delta_1 \\[2ex] \|A^{\alpha}(t,\nu)e^{-(t-\tau)A(t,\nu)}A^{-\beta}(\tau,\nu)\| \leqslant \\[1ex] \qquad e^{-\delta(t-\nu)}|t-\tau|^{\beta-\alpha}2^6C_3\mathrm{Sup}(1,C_3^3)\left\{E_1(\alpha-\beta)+E_1(\alpha-\beta+\delta_1)\left(\begin{array}{c} C(1\text{-}59)_1 \\ \gamma=\beta-\delta_1 \end{array}\right)\right. \end{array} \right.$$

<u>*Lemme*</u> *C.2.3.-*

Si $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha < 1 + \delta_1$ alors pour tout $\lambda \in \Lambda_o$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant 1$, on a l'inégalité de base suivante :

$$(1\text{-}60) \qquad \|A^{\alpha}(t,\lambda)V(t,\tau,\lambda)A^{-\beta}(\tau,\lambda)\| \leqslant C(1\text{-}60)|t-\tau|^{\beta-\alpha}$$

<u>*Preuve*</u> : D'après (1-53) de Sobolevskii [7], pour $x \in D[A^{1-\beta}(\tau,\lambda)]$ et $0 < \beta \leqslant 1$,

$$V(t,\tau,\lambda)A^{-\beta}(\tau,\lambda)x = e^{-(t-\tau)A(t,\lambda)}A^{-\beta}(\tau,\lambda)x$$

$$+ \int_{\tau}^{t} e^{-(t-s)A(t,\lambda)}[A(s,\lambda)-A(t,\lambda)]V(s,\tau,\lambda)A^{-\beta}(\tau,\lambda)x\,ds.$$

En composant à gauche par $A(t,\lambda)$ et en utilisant (1-56), on a

$$(1\text{-}60)_1 \begin{cases} 0 < \beta \leqslant 1 \\ \|A(t,\lambda)V(t,\tau,\lambda)A^{-\beta}(\tau,\lambda)\| \leqslant |t-\tau|^{\beta-1}\left(1+M_2C_3\beta(\beta,\delta_1)e^{\frac{M_2C_3}{\delta_1}}\right)2^6C_3\mathrm{Sup}(1,C_3^3) \\ \left\{E_1(1-\beta) + E_2(\beta,\delta_1)\dfrac{2M_2C_3\mathrm{Sup}(1,C_3)\delta^{-\delta_1}}{\delta_1^2}\left[\dfrac{8C_3^3+2C_3+1}{2C_3^2+C_3+1}\right]^{\max(0,\beta-\delta_1)}(2C_3^2+C_3+1)\right\} \end{cases}$$

$$\text{où} \quad E_2(\beta,\delta_1) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \beta = \delta_1 \\ \dfrac{1}{|\beta-\delta_1|} & \text{si} \quad \beta \neq \delta_1 \;, \quad 0 < \beta \leqslant 1 \end{cases} \;;$$

Appelons $H(\beta)$ la constante de $(1\text{-}60)_1$. Soit maintenant un α tel que $0 < \beta \leqslant \alpha < 1+\delta_1$. D'après (1-61), pour $x \in D[A^{1-\beta}(\tau,\lambda)]$ et $0 < \beta \leqslant 1$, en composant par $A^{\alpha}(t,\lambda)$ à gauche, on obtient

$$(1\text{-}60)_2 \begin{cases} \|A^{\alpha}(t,\lambda)V(t,\tau,\lambda)A^{-\beta}(\tau,\lambda)\| \leqslant \left\{C' + \dfrac{4C''M_2H(\beta)}{\beta(1+\delta_1-\alpha)}\right\}|t-\tau|^{\beta-\alpha} \\ 0 < \beta \leqslant 1, \qquad \beta \leqslant \alpha < 1+\delta_1 \end{cases}$$

où $C' = C(1\text{-}56)$ et $C'' = C(1\text{-}51)$.

$$(1\text{-}60)_3 \begin{cases} \|A^{\alpha}(t,\lambda)V(t,\tau,\lambda)A^{-\beta}(\tau,\lambda)\| \leqslant \left\{C(1\text{-}56)_1 + \dfrac{8M_2C_3^4\delta^{-(\beta-1)}}{(\alpha-1)(1+\delta_1-\alpha)}H(1)\right\}(t-\tau)^{\beta-\alpha} \\ \beta \leqslant \alpha < 1+\delta_1 \quad \text{et} \quad \beta > 1. \end{cases}$$

En utilisant (1-14)' on montre que

$$(1\text{-}60)_4 \begin{cases} \|A^{\alpha}(\xi,\mu)V(t,\tau,\lambda)\| \leqslant M_1^{\alpha} \dfrac{2C_3 \mathrm{Sup}(1,C_3)}{1-\alpha} E_1(\alpha)\left\{1+\dfrac{2M_2C_3}{\delta_1}\left(1+M_2C_3\beta(\delta_1,\delta_1)e^{\frac{M_2C_3}{\delta_1}}\right)\right\}|t-\tau|^{-\alpha} \\ 0 \leqslant \alpha < 1 \end{cases}$$

et en écrivant, pour $1 \leqslant \alpha < 1+\delta_1$,

$$A^{\alpha}(t,\lambda)V(t,\tau,\lambda) = A^{\alpha}(t,\lambda)V(t,\tfrac{t+\tau}{2},\lambda)A^{-\frac{1}{2}}(\tfrac{t+\tau}{2},\lambda)A^{\frac{1}{2}}(\tfrac{t+\tau}{2},\lambda)V(\tfrac{t+\tau}{2},\tau,\lambda),$$

$$(1\text{-}60)_5 \begin{cases} \|A^{\alpha}(t,\lambda)V(t,\tau,\lambda)\| \leqslant 2C_{\alpha,\frac{1}{2}}(1\text{-}60)_2 C_{\frac{1}{2}}(1\text{-}60)_4 |t-\tau|^{-\alpha} \\ \text{où} \quad 1 \leqslant \alpha < 1+\delta_1 \qquad (\text{ici} \quad C'' \leqslant 8C_3 \mathrm{Sup}(1,C_3^2)E_1(\alpha)). \end{cases}$$

La borne (1-60) va nous permettre d'établir la régularité par rapport à t des fonctions d'opérateurs $V(t,\tau,\lambda)$ et $\frac{\partial V}{\partial t}(t,\tau,\lambda) = -A(t,\lambda)V(t,\tau,\lambda)$

Lemme C.2.4.-

Si $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ alors pour tout $\mu, \lambda \in \Lambda_o$, $\xi \in [0,1]$ et $0 \leqslant \tau < t \leqslant 1$,

$$(1\text{-}62) \qquad \|A^{\alpha}(\xi,\mu)[V(t,\tau,\lambda)-e^{-(t-\tau)A(t,\lambda)}]A^{-\beta}(\tau,\lambda)\| \leqslant C_{\alpha,\beta}(1\text{-}62)|t-\tau|^{\delta_1+\beta-\alpha}.$$

Preuve :

Pour $(\alpha = 0, \beta = 0)$ et $(\alpha = 1, \beta = 0)$ l'égalité (1-14)' nous donne ce lemme. Lorsque $\alpha \in]0,1[$ et $\beta = 0$, on applique (1-50) et on a

$$(1\text{-}62)_1 \begin{cases} \text{pour} \quad \alpha \in [0,1], \quad \eta \in]0,\delta_1], \\ \|A^{\alpha}(\xi,\mu)[e^{-(t-\tau)A(t,\lambda)} - V(t,\tau,\lambda)]\| \leqslant |t-\tau|^{\delta_1-\alpha} E_1(\alpha) \dfrac{2M_2C_3\,\mathrm{Sup}(1,C_3)}{\eta^2\delta_1}(1+(2C_3^2)^{\delta_1}) e^{\frac{M_2C_3}{\delta_1}} \\ \left[\dfrac{M_1}{\delta_1-\eta}\left(1+\dfrac{M_2C_3}{\delta_1^2}e^{\frac{M_2C_3}{\delta_1}}\right)(8C_3^3+7C_3+M_2C_3+24M_2C_3^2+2)\right]^{\alpha}\left[2C_3^2+2C_3+2M_2C_3+1\right]^{1-\alpha} \end{cases}$$

Lorsque $\alpha \in [0,1]$ et $0 < \beta \leqslant 1$, on utilise l'identité (1-61) et on considère les cas $(\alpha = 0,\ 0 < \beta \leqslant 1)$, $(\alpha = 1,\ 0 < \beta \leqslant 1)$ et $(0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta \leqslant 1)$. En les résumant, on obtient

$$(1\text{-}62)_2 \begin{cases} \text{pour} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \quad 0 < \beta \leqslant 1 \\ \|A^{\alpha}(\xi,\mu)[V(t,\tau,\lambda) - e^{-(t-\tau)A(t,\lambda)}]A^{-\beta}(\tau,\lambda)\| \leqslant \dfrac{4M_1^{\alpha}M_2C_3\,\mathrm{Sup}(1,C_3)}{\delta_1\beta} E_1(\alpha)H(\beta)|t-\tau|^{\delta_1+\beta-\alpha} \end{cases}$$

Lemme C.2.5.-

Si $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant \gamma < 1+\delta_1$, $0 < \gamma - \alpha \leqslant 1$ alors pour tout $\mu, \lambda \in \Lambda_o$, $\xi \in [0,1]$, $0 \leqslant \tau < t < t+\Delta t \leqslant 1$

$$(1\text{-}63) \qquad \|A^{\alpha}(\xi,\mu)[V(t+\Delta t,\tau,\lambda) - V(t,\tau,\lambda)]A^{-\beta}(\tau,\lambda)\| \leqslant C_{\alpha,\beta,\gamma}(1\text{-}63)\Delta t^{\gamma-\alpha}(t-\tau)^{\beta-\gamma}.$$

Preuve : On écrit

$$A^{\alpha}(\xi,\mu)[V(t+\Delta t,\tau,\lambda) - V(t,\tau,\lambda)]A^{-\beta}(\tau,\lambda) =$$

$$\Big\{A^{\alpha}(\xi,\mu)[V(t+\Delta t,t,\lambda) - e^{-\Delta t A(t+\Delta t,\lambda)}]A^{-\gamma}(t,\lambda) - A^{\alpha}(\xi,\mu)\int_o^{\Delta t} A^{1-\gamma}(t+\Delta t,\lambda)e^{-sA(t+\Delta t,\lambda)}ds$$

$$+A^{\alpha}(\xi,\mu)\int_o^{\Delta t} A(t+\Delta t,\lambda)e^{-\Delta A(t+\Delta t,\lambda)}ds[A^{-\gamma}(t+\Delta t,\lambda) - A^{-\gamma}(t,\lambda)]\Big\}A^{\alpha}(t,\lambda)V(t,\tau,\lambda)A^{-\beta}(\tau)$$

$$= \{(a) - (b) + (c)\}(d).$$

D'après $(1\text{-}62)_2$, $||(a)|| \leqslant C_{\alpha,\gamma}(1\text{-}62)_2 \Delta t^{\delta_1+\gamma-\alpha}$ où $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ et $0 < \gamma \leqslant 1$,

Le terme (d) se majore en norme grâce à (1-60), suivant les différentes valeurs de γ et β, où $0 \leqslant \beta \leqslant \gamma < 1+\delta_1$. (b) et (c) se majorent en norme grâce à (1-50), (1-51) et (1-56), pour $0 \leqslant \alpha < \gamma < 1$. Alors

$$(1\text{-}63)_1 \left\{ \begin{array}{l} 0 \leqslant \alpha < \gamma \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \gamma < 1+\delta_1 \\ ||A^{\alpha}(\xi,\mu)\left[V(t+\Delta t,\tau,\lambda)-V(t,\tau,\lambda)\right]A^{-\beta}(\tau,\lambda)|| \leqslant \Delta t^{\gamma-\alpha}(t-\tau)^{\beta-\gamma}\, \dfrac{16M_1^{\alpha}\mathrm{Sup}(1,C_3^4)E_1(\alpha)}{\gamma-\alpha} \\ \qquad C_{\gamma,\beta}(1\text{-}60)\left\{\dfrac{M_2H(\gamma)}{\delta_1} + 2E_1(1-\gamma) + C_{1,\gamma}(1\text{-}56)\right\}. \end{array} \right.$$

Pour $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 < \gamma - \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant \gamma < 1+\delta_1$ et $1 < \gamma$, l'inégalité (1-63) est montrée dans [7].

Il résulte en particulier de (1-63) que pour tout $\lambda \in \Lambda_o$, $0 \leqslant \tau < t < t+\Delta t \leqslant 1$,

$$(1\text{-}64) \left\{ \begin{array}{l} 0 \leqslant \beta \leqslant \gamma < 1+\delta_1 , \quad \gamma > 1 \\ ||\left[A(t+\Delta t,\lambda)V(t+\Delta t,\tau,\lambda)-A(t,\lambda)V(t,\tau,\lambda)\right]A^{-\beta}(\tau,\lambda)|| \leqslant C_{\beta,\gamma}(1\text{-}64)\Delta t^{\gamma-1}|t-\tau|^{\beta-\gamma}. \end{array} \right.$$

En effet, il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} &\left[A(t+\Delta t,\lambda)V(t+\Delta t,\tau,\lambda) - A(t,\lambda)V(t,\tau,\lambda)\right]A^{-\beta}(\tau,\lambda) = \\ &\qquad A(t+\Delta t,\lambda)\left[V(t+\Delta t,\tau,\lambda) - V(t,\tau,\lambda)\right]A^{-\beta}(\tau,\lambda) \\ &\qquad + \left[A(t+\Delta t,\lambda) - A(t,\lambda)\right]A^{-1}(t,\lambda)A(t,\lambda)V(t,\tau,\lambda)A^{-\beta}(\tau,\lambda). \end{aligned}$$

La norme du premier terme du second membre est bornée grâce à (1-63) et celle du deuxième grâce à (1-19) et (1-60).

Lemme C.2.6.-

Si $0 \leq \beta \leq 1$, $0 \leq \alpha < \alpha+\varepsilon < \delta_1$ alors pour tout $\mu, \lambda \in \Lambda_o$,

$\xi \in [0,1]$, $0 \leq \tau < t \leq 1$,

$$(1\text{-}65) \quad \| A^{\alpha}(\xi,\mu)A(t,\lambda)\left[V(t,\tau,\lambda)-e^{-(t-\tau)A(t,\lambda)}\right]A^{-\beta}(\tau,\lambda)\| \leq C_{\alpha,\beta,\varepsilon}(1\text{-}65)(t-\tau)^{\beta-\alpha-1+\delta_1-\varepsilon}$$

Preuve :

Pour $\beta > 0$, i.e. $0 < \beta \leq 1$, (1-65) découle directement de l'identité (1-61) en utilisant (1-51) et $(1\text{-}60)_1$. On a alors

$$(1\text{-}65)_1 \begin{cases} 0 < \alpha < \delta_1 \quad , \quad 0 < \beta \leq 1 \\ \| A^{\alpha}(\xi,\mu)A(t,\lambda)\left[V(t,\tau,\lambda)-e^{-(t-\tau)A(t,\lambda)}\right]A^{-\beta}(\tau,\lambda)\| \leq (t-\tau)^{\delta_1-\alpha+\beta-1} \dfrac{16M_1^{\alpha}M_2C_3^2\mathrm{Sup}(1,C_3)H(\beta)}{\alpha.\beta(\delta_1-\alpha)} \end{cases}$$

Le cas où $\alpha = 0$ et $0 < \beta \leq 1$ est donné par $(1\text{-}62)_2$ et celui où $\alpha = \beta = 0$ est donné par $(1\text{-}62)_1$.

Pour $\beta = 0$, on écrit

$$V(t,\tau,\lambda) - e^{-(t-\tau)A(t,\lambda)} = (a) + (b) + (c) =$$

$$\left[V(t, \tfrac{t+\tau}{2},\lambda)-e^{-(\frac{t-\tau}{2})A(t,\tau)}\right]A^{-1}(\tfrac{t+\tau}{2},\lambda)A(\tfrac{t+\tau}{2},\lambda)A^{-1}(t,\lambda)A(t,\lambda)e^{-\frac{(t-\tau)}{2}A(t,\lambda)}$$

$$+ V(t, \tfrac{t+\tau}{2},\lambda)A^{-1}(\tfrac{t+\tau}{2},\lambda)A(\tfrac{t+\tau}{2},\lambda)\left[V(\tfrac{t+\tau}{2},\tau,\lambda) - e^{-(\frac{t-\tau}{2})A(\frac{t+\tau}{2},\lambda)}\right]$$

$$+ V(t, \tfrac{t+\tau}{2},\lambda)A^{-1}(\tfrac{t+\tau}{2},\lambda)A(\tfrac{t+\tau}{2},\lambda)\left[e^{-(\frac{t-\tau}{2})A(\frac{t+\tau}{2},\lambda)} - e^{-\frac{t-\tau}{2}A(t,\lambda)}\right].$$

D'après $(1\text{-}65)_1$, $\quad ||A^{\alpha}(\xi,\mu)A(t,\lambda)\ (a)|| \leqslant C_{\alpha,1}(1\text{-}65)_1 M_1 C_3 2e^{-\delta(\frac{t-\tau}{2})}(t-\tau)^{\delta_1-\alpha-1}$

$$||A^{\alpha}(\xi,\mu)A(t,\lambda)(b)|| \leqslant ||A^{\alpha}(\xi,\mu)A^{-\alpha-\varepsilon}(t,\lambda)||\ ||A^{\alpha+1+\varepsilon}(t,\lambda)(b)||$$

$$\leqslant (t-\tau)^{\delta_1-1-\alpha-\varepsilon}\ \frac{8M_1^{\alpha}C_3^2\delta^{-\varepsilon}}{\alpha\varepsilon}\ C_{\alpha+1+\varepsilon,1}(1\text{-}60)_2 C_1(1\text{-}62)_1$$

de la même façon, en utilisant (1-22),

$$||A^{\alpha}(\xi,\mu)A(t,\lambda)(c)|| \leqslant (t-\tau)^{+\delta_1-1-\alpha-\varepsilon}\ \frac{8M_1^{\alpha}C_3^2\delta^{-\varepsilon}}{\alpha\varepsilon}\ C_{\alpha+1+\varepsilon,1}(1\text{-}60)_2\ \frac{C_1(1\text{-}22)}{M_1}\ .$$

$(1\text{-}65)_2$

Pour $\quad 0 < \alpha < \alpha+\varepsilon < \delta_1$,

$$||A^{\alpha}(\xi,\mu)A(t,\lambda)\left[V(t,\tau,\lambda)-e^{-(t-\tau)A(t,\lambda)}\right]|| \leqslant (t-\tau)^{\delta_1-\alpha-\varepsilon-1}\ 8C_3\mathrm{Sup}(1,C_3,\frac{1}{\delta^{\delta_1-\alpha}})$$

$$\left\{M_1C_{\alpha,1}(1\text{-}65)_1 + \frac{M_1}{\alpha\varepsilon}C_{\alpha+1+\varepsilon,1}(1\text{-}60)_2(C_1(1\text{-}62)_1 + \frac{C_1(1\text{-}22)}{M_1})\right\}.$$

Corollaire.-

Si $\ 0 \leqslant \alpha < \alpha+\varepsilon < \delta_1$, $\ 0 \leqslant \beta < 1+\delta_1$, $\ \beta \leqslant \alpha + 1$, alors pour $\mu, \lambda \in \Lambda_o$, $\xi \in [0,1]$ et $0 \leqslant \tau < t \leqslant 1$,

(1-66) $\quad ||A^{\alpha}(\xi,\mu)A(t,\lambda)V(t,\tau,\lambda)A^{-\beta}(\tau,\lambda)|| \leqslant (t-\tau)^{\beta-\alpha-\varepsilon-1}C_{\alpha,\beta,\varepsilon}(1\text{-}66)$.

Lemme C.2.7.-

Si $\ 0 \leqslant \alpha < \alpha+\varepsilon < \delta_1$, $\ 0 \leqslant \beta \leqslant 1 + \alpha$, $\ 0 \leqslant \rho \leqslant \alpha$ alors pour tout $\mu, \lambda \in \Lambda_o$, $\xi \in [0,1]$ et $0 \leqslant \tau < t \leqslant t + \Delta t \leqslant 1$,

(1-67) $\ ||A^{\rho}(\xi,\mu)\left[A(t+\Delta t,\lambda)V(t+\Delta t,\tau,\lambda)-A(t,\lambda)V(t,\tau,\lambda)\right]A^{-\beta}(\tau,\lambda)|| \leqslant \Delta t^{\alpha-\rho}(t-\tau)^{\beta-\alpha-\varepsilon-1}C_{\alpha,\beta,\rho,\varepsilon}(1\text{-}67)$

La preuve est dans Sobolevskii [7]

- $\alpha = 0 = \rho$ (1-67) est donnée par (1-64) avec $\gamma = \alpha + 1$
- $\rho = 0$ et $0 < \alpha < \delta_1$ " " " " "

$$0 < \alpha < \alpha+\varepsilon < \delta_1 \ , \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \alpha, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant 1 + \alpha,$$

$$C(1\text{-}67) = 4\alpha E_1(\rho)\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1-\frac{\rho}{\alpha}} \operatorname{Sup}(1,C_3^3)(C_{\alpha,\beta,\varepsilon}(1\text{-}66))^{\frac{\rho}{\alpha}}(C_{\alpha+1,\beta}(1\text{-}64))^{1-\frac{\rho}{\alpha}} .$$

En particulier, il résulte de (1-67) que la fonction d'opérateur $A^{\alpha}(\xi,\mu)V(t,\tau,\lambda)$ est uniformément continûment différentiable en t pour $t > \tau$ et que

(1-68) $$\frac{\partial}{\partial t}\left[A^{\alpha}(\xi,\mu)V(t,\tau,\lambda)\right] = -A^{\alpha}(\xi,\mu)A(t,\lambda)V(t,\tau,\lambda).$$

En ce qui concerne l'équation conjuguée, Sobolevskii [7] a montré que pour $x \in B$, la fonction $V(t,\tau,\lambda)x$ est différentiable en τ pour $\tau \leqslant t$ et que

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left[V(t,\tau,\lambda)x\right] = V(t,\tau,\lambda)A(\tau,\lambda)x \ .$$

Lemme C.2.8.-

Soit $0 \leqslant \alpha < 1$. Alors pour tout $\mu, \lambda \in \Lambda_o$, $0 \leqslant \tau \leqslant t < t+\Delta t \leqslant 1$ et pour toute fonction $f(t)$ continue sur $[0,1]$,

(1-69) $$\left|\left|A^{\alpha}(\xi,\mu)\left[\int_{\tau}^{t+\Delta t} V(t+\Delta t,s,\lambda)f(s)ds - \int_{\tau}^{t} V(t,s,\lambda)f(s)ds\right]\right|\right| \leqslant C_{\alpha}(1\text{-}69)$$

$$\Delta t^{1-\alpha}(|\text{Log } \Delta t|+1)\max_{\tau\leqslant s\leqslant t+\Delta t}||f(s)|| .$$

La démonstration de ce lemme a été faite par Sobolevskii [7]. Toutefois nous précisons que

$$C_\alpha(1\text{-}69) = C_{\alpha,0}(1\text{-}63) + 3C_\alpha(1\text{-}60)_4 .$$

Lemme C.2.9.-

Si $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ alors pour tout $\mu, \nu, \lambda \in \Lambda_o$, $\xi \in [0,1]$ et $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant 1$,

(1-70) $$||A^\alpha(\xi,\nu)[V(t,\tau,\lambda) - V(t,\tau,\mu)]A^{-\beta}(\tau,\lambda)|| \leqslant C_{\alpha,\beta}(1\text{-}70)|\lambda-\mu| \; |t-\tau|^{\beta-\alpha}.$$

Preuve :

- Le cas où $\alpha = \beta = 0$ est donné par (1-45).

Pour $\beta \neq 0$, i.e. $0 < \beta \leqslant 1$, d'après l'identité (1-61) on a,

$$\begin{aligned}
&||A^\alpha(\xi,\nu)[V(t,\tau,\lambda) - V(t,\tau,\mu)]A^{-\beta}(\tau,\lambda)|| \leqslant \\
&\qquad ||A^\alpha(\xi,\nu)[e^{-(t-\tau)A(t,\lambda)} - e^{-(t-\tau)A(t,\mu)}]A^{-\beta}(\tau,\lambda)|| \\
&+ \int_\tau^t ||A^\alpha(\xi,\nu)[e^{-(t-s)A(t,\lambda)} - e^{-(t-s)A(t,\mu)}]||\cdot||[A(s,\lambda)-A(t,\lambda)]A^{-1}(s,\lambda)|| \\
&\qquad\qquad ||A(s,\lambda)V(s,\tau,\lambda)A^{-\beta}(\tau,\lambda)||ds \\
&+ \int_\tau^t ||A^\alpha(\xi,\nu)e^{-(t-s)A(t,\mu)}||\cdot||[A(s,\lambda)-A(t,\lambda)-A(s,\mu)+A(t,\mu)]A^{-1}(s,\lambda)|| \\
&\qquad\qquad ||A(s,\lambda)V(s,\tau,\lambda)A^{-\beta}(\tau,\lambda)||ds \\
&+ \int_\tau^t ||A^\alpha(\xi,\nu)e^{-(t-s)A(t,\mu)}||\cdot||[A(s,\mu)-A(t,\mu)]A^{-1}(\xi,\nu)||\cdot \\
&\qquad\qquad ||A(\xi,\nu)[V(s,\tau,\lambda) - V(s,\tau,\mu)]A^{-\beta}(\tau,\lambda)||ds .
\end{aligned}$$

Pour $\alpha = 1$, d'après les inégalités (1-55), (1-22), $(1\text{-}60)_1$ et un lemme dans les équations différentielles ordinaires :

$(1\text{-}70)_1$

Pour $0 < \beta \leqslant 1$

$$\|A(\xi,\nu)[V(t,\tau,\lambda)-V(t,\tau,\mu)]A^{-\beta}(\tau,\lambda)\| \leqslant |\lambda-\mu|\ |t-\tau|^{\beta-1}M_1M_2C_3\left(1+M_1M_2C_3\beta(\beta,\delta_1)e^{\frac{M_1M_2C_3}{\delta_1}}\right)$$

$$\left\{E_1(\beta)E_1(1-\beta)8\,\mathrm{Sup}(1,C_3^3)\ \frac{8C_3^3+2C_3+1}{2C_3^3+C_3+1}\ (2C_3^2+(M_1+1)C_3+4)+\beta(\beta,\delta_1)\left[M_2(8C_3^3+2C_3+1)+\frac{C_2}{C_1}\right]H(\beta)\right\}.$$

Lorsque $\xi = t$ et $\nu = \mu$,

$$\tilde{C}(1\text{-}70)_1 = M_2C_3\left(1+M_2C_3\beta(\beta,\delta_1)e^{\frac{M_2C_3}{\delta_1}}\right)\ \{\ldots\ldots\}$$

$(1\text{-}70)_2$

Pour $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta \leqslant 1$

$$\|A^{\alpha}(\xi,\nu)[V(t,\tau,\lambda) - V(t,\tau,\mu)]A^{-\beta}(\tau,\lambda)| \leqslant |\lambda-\mu|(t-\tau)^{\beta-\alpha}8M_1^{\alpha}M_2C_3\mathrm{Sup}(1,C_3^3)$$

$$\left\{E(\alpha,\beta)\left(\frac{8C_3^3+2C_3+1}{2C_3^2+C_3+1}\right)^{\alpha}(2C_3^2+(M_1+1)C_3+4)+\beta(\beta,1+\delta_1-\alpha)\left[E_1(\alpha)\tilde{C}(1\text{-}70)_1\right.\right.$$

$$\left.\left.+\ H(\beta)\left(M_2E(\alpha,0)\left(\frac{8C_3^3+2C_3+1}{2C_3^2+C_3+1}\right)^{\alpha}(2C_3^2+(M_1+1)C_3+4)+\frac{C_2}{C_1}\ E_1(\alpha)\right)\right]\right\}.$$

$$
(1\text{-}70)_3 \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour} \quad 0 < \beta \leqslant 1 \\ \| [V(t,\tau,\lambda)-V(t,\tau,\mu)] A^{-\beta}(\tau,\lambda) \| \leqslant |\lambda-\mu| \, |t-\tau|^{+\beta} \Big\{ C(1\text{-}55)^{\gamma=0}_{\beta \in]0,1]} + M_2 C_3 \beta(\delta_1+1,\beta) \\ \qquad\qquad [M_2 H(\beta) + \frac{C_2}{C_1} H(\beta) + \tilde{C}(1\text{-}70)_1] \Big\} . \end{array} \right.
$$

Reste le cas où $\beta = 0$. Lorsque $\alpha \in]0,1[$, d'après l'identité (1-14), les estimations (1-55), (1-28), $(1\text{-}51)_3$ et (1-42), on a

$$
(1\text{-}70)_4 \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour} \quad 0 < \alpha < 1 \\ \| A^{\alpha}(\xi,\mu) [V(t,\tau,\lambda)-V(t,\tau,\mu)] \| \leqslant |\lambda-\mu| \, |t-\tau|^{-\alpha} \Big\{ C(1\text{-}55)_{\alpha,0} + \\ \qquad \beta(\delta_1, 1-\alpha) \left[C(1\text{-}55)_{\alpha,0} M_2 C_3 (1+M_2 C_3 \beta(\delta_1,\delta_1) e^{\frac{M_2 C_3}{\delta_1}}) + \frac{2C_3^2}{\alpha} C(1\text{-}42) \right] \Big\} . \end{array} \right.
$$

CHAPITRE II

ETUDE DE L'EQUATION NON LINEAIRE MODIFIEE.

-=-=-=-=-=-

(A) INTRODUCTION.

Reprenons l'équation modifiée

$$\tilde{E}(t,\lambda) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = L(t,\lambda)u + g(t,\lambda,u) + \left[tL(t,\lambda) - I\right]m(\lambda,u) \\ m(\lambda,u) = (\mathcal{U}(1,0,\lambda) - I)u_o(\lambda) + \displaystyle\int_0^1 \mathcal{U}(1,s,\lambda)g(s,\lambda,u(\lambda,s))ds \\ u(0,\lambda) = u_o(\lambda) \end{cases}$$

et cherchons sa transformée $\tilde{E}'(t,\lambda)$ par l'application qui à $u(t,\lambda)$ associe $v(t,\lambda)$ telle que $u(t,\lambda) = e^{\omega t}v(t,\lambda)$

$$v_t = e^{-\omega t}(u_t - \omega u)$$

$$= -A(t,\lambda)v + g(t,\lambda,e^{\omega t}v)e^{-\omega t} + \left[(t\omega-1)I - tA(t,\lambda)\right]e^{-\omega t}m_1(\lambda,v)$$

où $m_1(\lambda,v) = (e^{\omega}V(1,0,\lambda)-I)u_o(\lambda) + \displaystyle\int_0^1 V(1,s,\lambda)e^{\omega(1-s)}g(s,\lambda,ve^{\omega s})ds.$

Ainsi le nouveau système à étudier est

$$\tilde{E}'(t,\lambda)\quad \begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + A(t,\lambda)v = h(t,\lambda,v) & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ v(0,\lambda) = u_o(\lambda) & \\ h(t,\lambda,v) = g(t,\lambda,e^{\omega t}v)e^{-\omega t} + \left[(t\omega-1)I - tA(t,\lambda)\right]e^{-\omega t}m_1(\lambda,v) & \\ m_1(\lambda,v) = (e^{\omega}V(1,0,\lambda)-I)u_o(\lambda) + \displaystyle\int_0^1 V(1,s,\lambda)e^{\omega(1-s)}g(s,\lambda,ve^{\omega s})ds & \end{cases}$$

que l'on peut écrire comme dans le premier chapitre sous la forme

$$(\tilde{2})\quad \begin{cases} v(t,\lambda,u_o) = V(t,0,\lambda)u_o(\lambda) + \displaystyle\int_0^t V(t,s,\lambda)g(s,\lambda,ve^{\omega s})e^{-\omega s}ds - te^{-\omega t}m_1(\lambda,v) \\ m_1(\lambda,v) = \left(e^{\omega}V(1,0,\lambda)-I\right)u_o(\lambda) + \displaystyle\int_0^1 V(1,s,\lambda)e^{\omega(1-s)}g(s,\lambda,ve^{\omega s})ds. \end{cases}$$

Pour $\lambda \in \Lambda$, soit l'opérateur A_o tel que

$$\begin{cases} A_o(\lambda) = A(0,\lambda) \\ A_o(\lambda_o) = A_o \end{cases}$$

et pour $t \in [0,1]$ on pose $A(t,\lambda_o) = A(t)$.

On sait que A_o a un domaine B dense dans E et vérifie grâce à l'hypothèse (H_4),

$$||(A_o + \mu I)^{-1}|| \leqslant \frac{K_o}{|\mu|+1} \quad \text{pour} \quad \mu \in S_\phi^c .$$

(B) <u>*EXISTENCE ET UNICITE D'UNE SOLUTION DE*</u> $\tilde{E}'(t,\lambda)$.

Soit $\alpha \in [0,1[$ et supposons que g, qui est 1-périodique en t vérifie l'hypothèse suivante sur $E \times \Lambda_o \times [0,1]$,

(H4)

$$\forall\, t,\tau \in [0,1],\ \forall\, u_1 u_2 \in E \,\Big/\, ||u_1|| < R,\quad ||u_2|| < R,\quad \mu,\nu \in \Lambda_o$$

$$||g(A_o^{-\alpha}u_1,\mu,t)-g(A_o^{-\alpha}u_2,\nu,\tau)|| \leqslant \varepsilon(||u_1||+||u_2||)\left[||u_1-u_2||+|\mu-\nu|+|t-\tau|^{\delta_1}\right]$$

où R est un réel positif et ε une fonction continue croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que $\varepsilon(0) = 0$. De plus $g(0,\lambda,t) = 0$ dans $\Lambda_o \times [0,1]$.

et que

(H5) $\forall\, \lambda,\mu,\nu \in \Lambda_o$, u_o est une fonction continue en λ et vérifie

$$||A_o(\lambda)\left[u_o(\mu) - u_o(\nu)\right]|| \leqslant N_o|\mu-\nu|.$$

Finalement, supposons comme Friedman [3] que

(H6) $$\forall\, \lambda \in v_{\lambda_o},\quad ||A_o^{\alpha}u_o(\lambda)|| < R$$

assurant l'existence d'une solution définie sur un voisinage de 0 et l'hypothèse

(H7)

R et $||A_o(\mu)u_o(\lambda)||$ sont tels que pour tout λ et $\mu \in \Lambda_o$,

$$1 - \varepsilon(2R)\,\frac{4e^{\omega}\, C_{\alpha}(1-60)_4}{1-\alpha} > 0$$

$$R > \left\{1-\varepsilon(2R)\,\frac{4e^{\omega}C_{\alpha}(1-60)_4}{1-\alpha}\right\}^{-1}\left\{\frac{4E_1(\alpha)M_1^{\alpha}C_3\,\mathrm{Sup}(1,C_3)\,\delta^{\alpha-1}(1+2e^{\omega}C_1(1-60)_1)}{1-\alpha}\right\}||A_o(\mu)u_o(\lambda)||$$

qui permettra d'affirmer que la solution obtenue est définie sur $[0,1]$. Ici, les constantes $C_\alpha(1\text{-}60)_4$, $C_1(1\text{-}60)_1$, $E_1(\alpha)$ sont celles définies dans le premier chapitre.

Théorème 2.1.-

Sous les hypothèses (H1),...,(H7) et $u_o \in B$, il existe une solution u unique de $\tilde{E}(t,\lambda)$ pour $t \in [0,1]$ qui est continûment différentiable par rapport à $t \in [0,1]$, dans le convexe $||u||_\alpha < R$.

Pour démontrer ce théorème, nous introduisons les ensembles $Q_\lambda(K,\eta)$ de toutes les fonctions $y_\lambda(t)$ continues sur $[0,1]$ telles que :

(2-1) $\quad y_\lambda(0) = A_o^\alpha v_{o,\lambda} = A_o^\alpha u_{o,\lambda}$

(2-2) $\quad \forall\, t,\tau \in [0,1], \quad ||y_\lambda(t) - y_\lambda(\tau)|| \leqslant K|t-\tau|^\eta$

où η est fixé dans $]0,1-\alpha[$ et K est un nombre positif vérifiant pour $\lambda \in V_{\lambda_o}$,

$$||A_o(\lambda)u_{o,\lambda}||C_{\alpha,1}(1\text{-}63) + R + R\varepsilon(R)C(1\text{-}69)\left(1 + \frac{1}{1-\alpha-\eta}\right) < K.$$

(2-3) $\quad ||y_\lambda(t)e^{\omega t}|| < R, \qquad \forall\, t \in [0,1].$

et une transformation $w_{y_\lambda} = Ty_\lambda$ définie par $w_{y_\lambda} = A_o^\alpha w_\lambda$ où w_λ est solution de

$$(*) \quad \begin{cases} \dfrac{dw}{dt} + A(t,\lambda)w = h(t,\lambda,A_o^{-\alpha}y_\lambda(t)) \\ w(0,\lambda) = u_o(\lambda) \end{cases}$$

ou bien de l'équation intégrale

$$(**) \quad w(t,\lambda) = V(t,0,\lambda)u_{o,\lambda} + \int_0^t V(t,s,\lambda)g(s,\lambda,A_o^{-\alpha}y_\lambda(s)e^{\omega s})e^{-\omega s}ds - te^{-\omega t}m_1(\lambda,A_o^{-\alpha}y_\lambda).$$

Cette équation est de la forme

$$u(t,\lambda) = V(t,0,\lambda)u_o + \int_0^t V(t,s,\lambda)f(s,\lambda)ds + te^{-\omega t}m(\lambda).$$

Friedman [3] a montré que (lemme 6-1, page 122) $V(t,0,\lambda)u_o$ est la solution unique du problème.

$$\frac{du}{dt} + A(t,\lambda)u = 0 \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1), \qquad u(0) = u_o$$

et que (page 129) $x(t,\lambda) = \int_0^t V(t,s,\lambda)f(s,\lambda)ds$ est l'unique solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} + A(t,\lambda)x = f(t,\lambda) & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

si f est holdérienne. Notre fonction m_1 étant indépendante de $w(t,\lambda)$ et g étant holdérienne, à λ fixé,(*) ou (**) admet une solution unique $w(t,\lambda)$.

On montrera ensuite que $w_y = A_o^\alpha w = Ty$ définie sur $[0,1]$ appartient à Q_λ et que T est une contraction, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $\tilde{v}_\lambda \in Q_\lambda$ telle que $T\tilde{v}_\lambda = \tilde{v}_\lambda$. Alors $v_\lambda = A_o^{-\alpha}\tilde{v}_\lambda$ est la solution cherchée de $\tilde{E}'(t,\lambda)$.

Commençons par donner une estimation sur

$$(1) = g(t,\lambda,A_o^{-\alpha}y(t)e^{\omega t})e^{-\omega t} - g(\tau,\lambda,A_o^{-\alpha}y(\tau)e^{\omega\tau})e^{-\omega\tau} \,.$$

Supposons d'abord que $0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant 1$.

$$\begin{aligned}(1) = & \left[g(t,\lambda,A_o^{-\alpha}y(t)e^{\omega t}) - g(\tau,\lambda,A_o^{-\alpha}y(\tau)e^{\omega t})\right]e^{-\omega t} \\ & + \left[g(\tau,\lambda,A_o^{-\alpha}y(\tau)e^{\omega t}) - g(\tau,\lambda,A_o^{-\alpha}y(\tau)e^{\omega\tau})\right]e^{-\omega t} \\ & + \ g(\tau,\lambda,A_o^{-\alpha}y(\tau)e^{\omega\tau})(e^{-\omega t} - e^{-\omega\tau}).\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (H4), pour $||y(t)e^{\omega t}|| < R$ et $||y(\tau)e^{\omega\tau}|| < R$,

$$\begin{aligned}||(1)|| \leqslant \ & \varepsilon(||y(t)||e^{\omega t} + ||y(\tau)||e^{\omega t})(|t-\tau|^{\delta_1} + ||y(t) - y(\tau)||e^{\omega t})e^{-\omega t} \\ & + \varepsilon(||y(\tau)||e^{\omega t} + ||y(\tau)||e^{\omega\tau})||y(\tau)||\left|e^{\omega t}-e^{\omega\tau}\right|e^{-\omega t} \\ & + \varepsilon(||y(\tau)||e^{\omega\tau})||y(\tau)e^{\omega\tau}||\left|e^{-\omega t} - e^{-\omega t}\right|.\end{aligned}$$

On a $|e^{-\omega t} - e^{-\omega\tau}| \leqslant \omega|t-\tau|$ et

$$||y(\tau)||e^{\omega t} = ||y(\tau)e^{\omega\tau}||e^{\omega(t-\tau)} < R$$

donc

$$\begin{aligned}||(1)|| \leqslant \ & \varepsilon(2R)(|t-\tau|^{\delta_1} + ||y(t) - y(\tau)||) \\ & + \varepsilon(2R)R\omega|t-\tau| + \varepsilon(R)R\omega|t-\tau| \\ \leqslant \ & \varepsilon(2R)\{|t-\tau|^{\delta_1} + K|t-\tau|^{\eta} + 2R\omega|t-\tau|\} \\ \leqslant \ & \varepsilon(2R)(1+K+2R\omega)|t-\tau|^{\min(\delta_1,\eta)} \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant 1\end{aligned}$$

Lorsque $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant 1$,

$$||(1)|| = ||-(1)|| \leqslant \varepsilon(||y(\tau)||e^{\omega\tau} + ||y(t)||e^{\omega\tau})(|t-\tau|^{\delta_1} + ||y(\tau)-y(t)||e^{\omega\tau})e^{-\omega\tau}$$
$$+ \varepsilon(||y(t)||e^{\omega\tau} + ||y(t)||e^{\omega t})||y(t)||\,|e^{\omega\tau} - e^{\omega t}|e^{-\omega\tau}$$
$$+ \varepsilon(||y(t)||e^{\omega t})||y(t)e^{\omega t}||\,|e^{-\omega\tau} - e^{-\omega t}|.$$

Dans ce cas, $||y(t)||e^{\omega\tau} = ||y(t)e^{\omega t}||e^{\omega(\tau-t)} < R$ et de la même manière que précédemment,

$$||(1)|| \leqslant \varepsilon(2R)(1+K+2R\omega)|t-\tau|^{\min(\delta_1,\eta)} .$$

On a donc montré que

$$(2\text{-}4)\quad \begin{cases} ||g(t,\lambda,A_o^{-\alpha}y(t)e^{\omega t})e^{-\omega t} - g(\tau,\lambda,A_o^{-\alpha}y(\tau)e^{\omega\tau})e^{-\omega\tau}|| \leqslant \varepsilon(2R)(1+K+2R\omega)|t-\tau|^{\min(\delta_1,\eta)} \\ \forall\, t,\tau \in [0,1],\ \lambda \in \Lambda_o \text{ et } y \,/\, ||y(t)e^{\omega t}|| < R \text{ pour tout } t \in [0,1]. \end{cases}$$

et que $g(t,\lambda,A_o^{-\alpha}y(t)e^{\omega t})e^{-\omega t}$ est uniformément bornée en y,

$$(2\text{-}5)\quad \begin{cases} ||g(t,\lambda,A_o^{-\alpha}y(t)e^{\omega t})e^{-\omega t}|| \leqslant R\varepsilon(R) \\ \text{pour } ||y(t)e^{\omega t}|| < R \text{ et tout } t \in [0,1],\ \lambda \in \Lambda_o. \end{cases}$$

Ces estimations permettent d'affirmer l'existence d'une solution de (**) unique pour un y dans Q_λ. Soit $w_y = A_o^\alpha w$.

Montrons que w_y qui s'écrit ainsi

$$w_y(t,\lambda) = A_o^\alpha V(t,0,\lambda)u_{o,\lambda} + A_o^\alpha \int_0^t V(t,s,\lambda)g(s,\lambda,A_o^{-\alpha}y(s)e^{\omega s})e^{-\omega s}ds - te^{-\omega t}A_o^\alpha m_1(\lambda,A_o^{-\alpha}y)$$

appartient à Q_λ. Pour cela, nous commencerons par donner une borne sur la norme de $A_o^\alpha m_1(\lambda, A_o^{-\alpha}y)$.

$$A_o^\alpha\, m_1(\lambda, A_o^{-\alpha}y) = A_o^\alpha e^\omega V(1,0,\lambda)u_{o,\lambda} - A_o^\alpha\, u_{o,\lambda}$$
$$+ \int_0^1 A_o^\alpha V(1,s,\lambda)e^{\omega(1-s)} g(s,\lambda,A_o^{-\alpha}ye^{\omega s})ds$$
$$= e^\omega A_o^\alpha A^{-1}(1,\lambda)A(1,\lambda)V(1,0,\lambda)A^{-1}(0,\lambda)A(0,\lambda)u_{o,\lambda} - A_o^\alpha A_o^{-1}(\lambda)A_o^\alpha(\lambda)u_{o,\lambda}$$
$$+ e^\omega \int_0^1 A_o^\alpha V(1,s,\lambda)g(s,\lambda,A_o^{-\alpha}ye^{\omega s})e^{-\omega s}ds.$$

En utilisant des estimations du chapitre 1 et (2-5), on a

$$\text{(2-6)}\quad \left[\; ||A_o^\alpha m_1(\lambda,A_o^{-\alpha}y)|| \leqslant \frac{E_1(\alpha)4M_1^\alpha C_3 \operatorname{Sup}(1,C_3)\delta^{\alpha-1}(1+e^\omega C_1(1-60)_1)}{1-\alpha}\, ||A_o(\lambda)u_{o,\lambda}|| + \frac{R\varepsilon(R)e^\omega C_\alpha(1-60)_4}{1-\alpha}\right.$$

et d'après l'hypothèse (H7),

$$||A_o^\alpha m_1(\lambda,A_o^{-\alpha}y)|| < R$$

Evaluons à présent $w_y(t+\Delta t,\lambda) - w_y(t,\lambda)$ pour $0 \leqslant t \leqslant t+\Delta t \leqslant 1$.

$$w_y(t+\Delta t,\lambda) - w_y(t,\lambda) = A_o^\alpha\big[V(t+\Delta t,0,\lambda) - V(t,0,\lambda)\big]u_{o,\lambda} +$$
$$+ A_o^\alpha \left\{\int_0^{t+\Delta t} V(t+\Delta t,s,\lambda)g(s,\lambda,A_o^{-\alpha}y(s)e^{+\omega s})e^{-\omega s}ds - \int_0^t V(t,s,\lambda)g(s,\lambda,A_o^{-\alpha}y(s)e^{\omega s})e^{-\omega s}ds\right\}$$
$$- \left[(t+\Delta t)e^{-\omega(t+\Delta t)} - te^{-\omega t}\right]A_o^\alpha m_1(\lambda,A_o^{-\alpha}y).$$

En utilisant (1-63) pour $0 \leqslant \alpha < 1$ et $\beta = \gamma = 1$, et (1-69) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
||w_y(t+\Delta t,\lambda) - w_y(t,\lambda)|| &\leqslant C_{\alpha,1}(1\text{-}63)\Delta t^{1-\alpha}||A_o(\lambda)u_{o,\lambda}|| \\
&\quad + C(1\text{-}69)\Delta t^{1-\alpha}\left[|\mathrm{Log}\ \Delta t|+1\right] \max_{0\leqslant s\leqslant t+\Delta t} ||g(s,\lambda,A_o^{-\alpha}y(s)e^{\omega s})e^{-\omega s}|| \\
&\quad + \Delta t||A_o^{\alpha}m_1(\lambda,A_o^{-\alpha}y)|| \\
&\leqslant C_{\alpha,1}(1\text{-}63)||A_o(\lambda)u_{o,\lambda}||\Delta t^{1-\alpha} + C(1\text{-}69)R\varepsilon(R)\Delta t^{1-\alpha}\left[\mathrm{Log}|\Delta t|+1\right] + R\Delta t.
\end{aligned}$$

On sait que $0 \leqslant \alpha < 1$ et $\eta \in \left]0,1-\alpha\right[$, donc

$$\Delta t^{1-\alpha}\left[|\mathrm{Log}\ \Delta t|+1\right] = \Delta t^{\eta}\left[\Delta t^{1-\alpha-\eta}|\mathrm{Log}\ \Delta t| + \Delta t^{1-\alpha-\eta}\right]$$

Sachant que pour $x \in \left]0,1\right]$ et $a \in \left]0,1\right[$, $x^a|\mathrm{Log}\ x| \leqslant \frac{1}{ea}$,

$$||w_y(t+\Delta t,\lambda) - w_y(t,\lambda)|| \leqslant \Delta t^{\eta}\left\{||A_o(\lambda)u_{o,\lambda}||C_{\alpha,1}(1\text{-}63)+C(1\text{-}69)R\varepsilon(R)\left(1+\frac{1}{1-\alpha-\eta}\right) + R\right\}$$

et d'après la condition (2-2),

$$||w_y(t+\Delta t,\lambda) - w_y(t,\lambda)|| \leqslant K\Delta t^{\eta}.$$

De plus, $w_y(0,\lambda) = A_o^{\alpha}u_{o,\lambda}$. Il reste donc à vérifier que $||w_y(t)e^{\omega t}|| < R$ pour que w_y soit dans Q_λ.

$$\begin{aligned}
||w_y(t)e^{\omega t}|| &\leqslant ||A_o^{\alpha}A^{-1}(t,\lambda)||.||A(t,\lambda)V(t,0,\lambda)A^{-1}(0,\lambda)||.||A(0,\lambda)u_{o,\lambda}||e^{\omega t} \\
&\quad + \int_o^t ||A_o^{\alpha}V(t,\tau,\lambda)||.||g(s,\lambda,A_o^{-\alpha}ye^{\omega s})e^{-\omega s}||ds\ e^{\omega t} \\
&\quad + t\ e^{-\omega t}||A_o^{\alpha}m_1(\lambda,A_o^{-\alpha}y)||e^{\omega t}
\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{4M_1^{\alpha}C_3 \mathrm{Sup}(1,C_3)\delta^{\alpha-1}E_1(\alpha)(e^{\omega}2C_1(1-60)_1+1)}{1-\alpha} \; ||A_o(\lambda)u_{o,\lambda}||$$

$$+ \frac{2R\varepsilon(2R)e^{\omega}C_{\alpha}(1-60)_4}{1-\alpha}$$

et d'après (H7),

$$||w_y(t)e^{\omega t}|| < R.$$

On considère à présent $Q_\lambda(t,\eta)$ comme un sous-espace de l'espace de Banach $Y = ([0,1],E)$ des fonctions continues $y_\lambda(t)$ de $[0,1]$ dans E, muni de la norme

$$|||y_\lambda||| = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} ||y_\lambda(t)||.$$

Nous allons montrer que $T : y_\lambda \to Ty_\lambda = w_{y_\lambda}$ est un opérateur continu dans Q_λ muni de la topologie induite par Y.

Soient $y_1(\lambda)$ et $y_2(\lambda) \in Q_\lambda$ (Pour plus commodité, on note par y_1, y_2, les fonctions $y_1(\lambda)$, $y_2(\lambda)$, où λ est fixé dans Λ_o) et

$$Z_1 = A_o^{-\alpha}w_{y_1} \qquad Z_2 = A_o^{-\alpha}w_{y_2} \quad .$$

Puisque $w_y = Ty = A_o^{\alpha}w$ où w est l'unique solution de $(*)$, alors pour $i = 1,2$, Z_i vérifie

$$\begin{cases} \dfrac{dz_i}{dt} + A(t,\lambda)Z_i = h(t,\lambda,A_o^{-\alpha}y_i) \\ Z_i(0) = u_{o,\lambda}. \end{cases}$$

On aura alors

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(Z_1-Z_2) + A(t,\lambda)(Z_1-Z_2) = h(t,\lambda,A_o^{-\alpha}y_1(t)) - h(t,\lambda,A_o^{-\alpha}y_2(t)) \\ Z_1(0) - Z_2(0) = 0 \end{cases}$$

ou bien, d'après (**),

$$\begin{aligned} Z_1(t) - Z_2(t) = {} & V(t,\tau,\lambda)\left[Z_1(0) - Z_2(0)\right] \\ & + \int_0^t V(t,s,\lambda)\left[g(s,\lambda,A_o^{-\alpha}y_1(s)e^{\omega s}) - g(s,\lambda,A_o^{-\alpha}y_2(s)e^{\omega s})\right]e^{-\omega s}ds \\ & - t\, e^{\omega t}\left[m_1(\lambda,A_o^{-\alpha}y_1) - m_1(\lambda,A_o^{-\alpha}y_2)\right]. \end{aligned}$$

Or, g étant uniformément continue au sens de Hölder, la différence $\left[g(s,\lambda,A_o^{-\alpha}y_1(s)e^{\omega s}) - g(s,\lambda,A_o^{-\alpha}y_2(s)e^{\omega s})\right]e^{-\omega s}$ l'est aussi par rapport à s, et donc $Z_1(t) - Z_2(t)$ sera l'unique solution de cette équation. Ceci nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} w_{y,1}(t) - w_{y,2}(t) = {} & A_o^{\alpha}\int_0^t V(t,s,\lambda)\left[g(s,\lambda,A_o^{-\alpha}y_1(s)e^{\omega s})-g(s,\lambda,A_o^{-\alpha}y_2(s)e^{\omega s})\right]e^{-\omega s}\,ds \\ & - t\, e^{-\omega t}A_o^{\alpha}\left[m_1(\lambda,A_o^{-\alpha}y_1) - m_1(\lambda,A_o^{-\alpha}y_2)\right] \\ = {} & \int_0^t A_o^{\alpha}V(t,s,\lambda)\left[g(s,\lambda,A_o^{-\alpha}y_1(s)e^{\omega s})-g(s,\lambda,A_o^{-\alpha}y_2(s)e^{\omega s})\right]e^{-\omega s}\,ds \\ & - t\, e^{-\omega t}\int_0^1 A_o^{\alpha}V(1,s,\lambda)e^{\omega(1-s)}\left[g(s,\lambda,A_o^{-\alpha}y_1(s)e^{\omega s}) - g(s,\lambda,A_o^{-\alpha}y_2(s)e^{\omega s})\right]ds. \end{aligned}$$

L'hypothèse (H4) permet d'établir l'estimation

$$\left\|\left[g(s,\lambda,A_o^{-\alpha}y_1(s)e^{\omega s}) - g(s,\lambda,A_o^{-\alpha}y_2(s)e^{\omega s})\right]e^{-\omega s}\right\| \leqslant \varepsilon(2R)\left\|y_1(s) - y_2(s)\right\|.$$

Nous avons donc en utilisant l'estimation $(1-60)_4$ pour $0 \leqslant \alpha < 1$,

$$||w_{y_1}(t) - w_{y_2}(t)|| \leqslant \int_0^t C_\alpha (1-60)_4 (t-s)^{-\alpha} \varepsilon(2R) ||y_1(s) - y_2(s)|| ds$$

$$+ \int_0^1 C_\alpha (1-60)_4 e^{\omega} (1-s)^{-\alpha} \varepsilon(2R) ||y_1(s) - y_2(s)|| ds.$$

Alors :

$$|||w_{y_1} - w_{y_2}||| \leqslant |||y_1 - y_2|||. \frac{2C_\alpha (1-60)_4 \varepsilon(2R)}{1-\alpha}$$

Sachant de plus, que $\frac{2C_\alpha (1-60)_4 \varepsilon(2R)}{1-\alpha} < 1$ ((H7)), T est alors une contraction et possède donc un point fixe $y \in Q_\lambda$ et

$$y(t) = A_o^\alpha V(t,0,\lambda) u_{o,\lambda} + A_o^\alpha \int_0^t V(t,s,\lambda) h(s,\lambda, A_o^{-\alpha} y(s)) ds.$$

En posant $v(t) = A_o^{-\alpha} y(t)$, on a alors

$$v(t) = V(t,0,\lambda) u_{o,\lambda} + \int_0^t V(t,s,\lambda) g(s,\lambda, v\, e^{\omega s}) e^{-\omega s} ds - t\, e^{-\,t} m_1(\lambda, v)$$

qui est continûment différentiable sur $[0,1]$ et solution du problème non linéaire $\tilde{E}'(t,\lambda)$. $u(t) = v(t) e^{\omega t}$ sera solution de $\tilde{E}(t,\lambda)$.

(C) *DEPENDANCE CONTINUE D'UNE SOLUTION DE* $\tilde{E}(t,\lambda)$ *PAR RAPPORT A SA CONDITION INITIALE ET A* λ.

Une solution de notre problème $\tilde{E}(t,\lambda)$ est donnée par

$$u(t,\lambda,u_{o,\lambda}) = e^{\omega t}V(t,0,\lambda)u_{o,\lambda} + e^{\omega t}\int_0^t V(t,s,\lambda)g(s,\lambda,u)e^{-\omega s}ds - tm(\lambda,u).$$

Notons $||u(t,\lambda,u_o)||_\alpha = ||A_o^\alpha u(t,\lambda,u_o)||$

et $||u||_{\alpha,t} = \sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t} ||u(s)||_\alpha$.

<u>*Théorème*</u> *2.2.-*

Avec les hypothèses du théorème 2.1., pour $0 \leqslant \alpha < \alpha + \beta < 1$, $0 \leqslant \tau \leqslant t,\mu,\nu$ dans Λ_o, $||u_o||_\alpha$, $||v_o||_\alpha \leqslant R$, on a pour $||u(t,\lambda,u_o) - v(\tau,\nu,v_o)||_\alpha = ||u(t) - v(\tau)||_\alpha$:

$$||u(t)-v(\tau)||_\alpha \leqslant |\lambda-\nu| \left\{4e^\omega C_{\alpha,1}(1-70)_2||A_o(\lambda)u_o|| + \frac{4e^\omega C_\alpha(1-70)_4}{1-\alpha} R\varepsilon(R) + 1\right\}$$

$$+ ||A_o(\lambda)(u_o-v_o)||C(1-54)(4e^\omega C_1(1-60)_1 + 2)$$

$$+ |t-\tau|^{1-\alpha-\beta}\left\{||A_o(\nu)v_o||e^\omega(C_{\alpha,1}(1-63) + \omega C(1-54)C_1(1-60)_1)\right.$$

$$\left. + R(1 + \frac{\omega\varepsilon^\omega}{4}) + (1 + \frac{1}{\beta e})R\varepsilon(R)e^\omega(C_{\alpha,0}(1-63) + 3C_\alpha(1-60)_4)\right\}$$

où $||u(t)||_\alpha$ et $||v(\tau)||_\alpha < R$ pour tout t et τ dans $[0,1]$.

Pour montrer ce théorème, nous aurons besoin de plusieurs estimations. Nous commencerons par une évaluation de $||A_o^\alpha[m(\lambda,u) - m(\nu,v)]||$ où

$||u(t)||_\alpha < R$ et $||v(\tau)||_\alpha < R \quad \forall\, t,\ t \in [0,1]$.

$$||m(\lambda,u)-m(\nu,v)||_\alpha \leqslant \begin{cases} e^\omega ||A_o^\alpha[V(1,0,\lambda) - V(1,0,\nu)]A_o^{-1}(\lambda)||.||A_o(\lambda)u_o|| \\ + e^\omega ||A_o^\alpha A^{-1}(1,\nu)||.||A(1,\nu)V(1,0,\nu)A_o^{-1}(\nu)||.||A_o(\lambda)(u_o-v_o)|| \\ + ||A_o^\alpha A_o^{-1}(\nu)||.||A_o(\nu)(u_o-v_o)|| \end{cases}$$

$$+ \int_0^1 ||A_o^\alpha[V(1,\sigma,\lambda) - V(1,\sigma,\nu)]||.||g(\sigma,\lambda,u)e^{\omega(1-\sigma)}||d\sigma$$

$$+ \int_0^1 ||A_o^\alpha V(1,\sigma,\nu)||.||[g(\sigma,\lambda,u) - g(\sigma,\nu,v)]e^{\omega(1-\sigma)}||d\sigma$$

$$\leqslant e^\omega C_{\alpha,1}(1\text{-}70)_2|\lambda-\nu|\,||A_o(\lambda)u_o|| + C(1\text{-}54)(e^\omega C_1(1\text{-}60)_1+1)||A_o(\nu)(u_o-v_o)||$$

$$+ \frac{e^\omega C_\alpha(1\text{-}70)_4}{1-\alpha}\,\varepsilon(||u||_{\alpha,1})||u||_{\alpha,1}|\lambda-\nu|$$

$$+ \frac{e^\omega C_\alpha(1\text{-}60)_4}{1-\alpha}\,\varepsilon(||u||_{\alpha,1} + ||v||_{\alpha,1})\left[|\lambda-\nu|+||u-v||_{\alpha-1}\right]$$

$$(2\text{-}7)\quad \begin{cases} ||m(\lambda,u)-m(\nu,v)||_\alpha \leqslant C(1\text{-}54)(e^\omega C_1(1\text{-}60)_1+1)||A_o(\nu)(u_o-v_o)|| \\ \qquad + \dfrac{e^\omega C_\alpha(1\text{-}60)_4\varepsilon(2R)}{1-\alpha}\,||u-v||_{\alpha,1} \\ \qquad + \left\{e^\omega C_{\alpha-1}(1\text{-}70)_2||A_o(\lambda)u_o|| + \dfrac{e^\omega C_\alpha(1\text{-}70)_4 R\varepsilon(R)}{1-\alpha} + \dfrac{e^\omega C_\alpha(1\text{-}60)_4\varepsilon(2R)}{1-\alpha}\right\}|\lambda-\nu| \end{cases}$$

D'autre part,

$$||u-v||_{\alpha,\tau} = \operatorname*{Sup}_{0\leqslant s\leqslant \tau} ||u(s) - v(s)||_{\alpha}$$

$$\leqslant \operatorname*{Sup}_{0\leqslant s\leqslant \tau} ||e^{\omega s}A_o^{\alpha}[V(s,0,\lambda) - V(s,0,\nu)]u_o||$$

$$+ \operatorname*{Sup}_{0\leqslant s\leqslant \tau} ||e^{\omega s}A_o^{\alpha}V(s,0,\nu)(u_o-v_o)||$$

$$+ \operatorname*{Sup}_{0\leqslant s\leqslant \tau} ||\int_0^s A_o^{\alpha}[V(s,\sigma,\lambda) - V(s,\sigma,\nu)]g(\sigma,\lambda,u)e^{\omega(s-\sigma)}d\sigma||$$

$$+ \operatorname*{Sup}_{0\leqslant s\leqslant \tau} ||\int_0^s A_o^{\alpha} (s,\sigma,\nu)[g(\sigma,\lambda,u)-g(\sigma,\nu,v)]e^{\omega(s-\sigma)}d\sigma||$$

$$+ \operatorname*{Sup}_{0\leqslant s\leqslant \tau} ||s(m(\lambda,u) - m(\nu,v))||_{\alpha}$$

$$\leqslant \operatorname*{Sup}_{0\leqslant s\leqslant \tau} e^{\omega s}C_{\alpha,1}(1\text{-}70)_2|\lambda-\nu|s^{1-\alpha}||A_o(\lambda)u_o||$$

$$+ \operatorname*{Sup}_{s} e^{\omega s}C(1\text{-}54)C_1(1\text{-}60)_1||A_o(\nu)(u_o-v_o)||$$

$$+ \operatorname*{Sup}_{s} \int_0^s C_{\alpha}(1\text{-}70)_4|\lambda-\nu||s-\sigma|^{-\alpha}\varepsilon(||u(s)||_{\alpha})||u(s)||_{\alpha}e^{\omega(s-\sigma)}d\sigma$$

$$+ \operatorname*{Sup}_{s} \int_0^s C_{\alpha}(1\text{-}60)_4(s-\sigma)^{\alpha}\varepsilon(||u(s)||_{\alpha}+||v(s)||_{\alpha})\Big[|\lambda-\nu|+||u(s)-v(s)||_{\alpha}\Big]e^{\omega(s-\sigma)}d\sigma$$

$$+ \quad \tau||m(\lambda,u)-m(\nu,v)||_{\alpha}.$$

En utilisant l'hypothèse 7, on a $\dfrac{e^{\omega}C_{\alpha}(1\text{-}60)_4\varepsilon(2R)}{1-\alpha} < \dfrac{1}{4}$ et alors,

$$||u-v||_{\alpha,\tau} \leqslant C(1\text{-}54)(2e^{\omega}C_1(1\text{-}60)_1+1)||A_o(\nu)(u_o-v_o)||$$

$$+ \frac{1}{4}||u-v||_{\alpha,\tau} + \frac{1}{4}||u-v||_{\alpha,1}$$

$$+ \left\{2e^{\omega}C_{\alpha,1}(1\text{-}70)_2||A_o(\lambda)u_o|| + \frac{2e^{\omega}C_{\alpha}(1\text{-}70)_4 R\varepsilon(R)}{1-\alpha} + \frac{1}{2}\right\}|\lambda-\nu|$$

ce qui nous donne,

$$(2\text{-}8)\quad \begin{cases} ||u-v||_{\alpha,1} \leqslant 2C(1\text{-}54)(2e^{\omega}C_1(1\text{-}60)_1+1)||A_o(\nu)(u_o-v_o)|| \\ \qquad + \left\{4e^{\omega}C_{\alpha,1}(1\text{-}70)_2||A_o(\lambda)u_o|| + \dfrac{4e^{\omega}C_{\alpha}(1\text{-}70)_4 R\varepsilon(R)}{1-\alpha} + 1\right\}|\lambda-\nu| \end{cases}$$

Reprenons à présent $A_o^{\alpha}(u(t) - v(\tau))$,

$$A_o^{\alpha}(u(t,\lambda,u_o) - v(\tau,\nu,v_o)) = A_o^{\alpha}(e^{\omega t}V(t,0,\lambda)u_o - e^{\omega\tau}V(\tau,0,\nu)v_o)$$

$$+ A_o^{\alpha}\left[\int_0^t V(t,s,\lambda)g(s,\lambda,u)e^{\omega(t-s)}ds - \int_0^{\tau} V(\tau,s,\nu)g(s,\nu,v)e^{\omega(\tau-s)}ds\right]$$

$$- A_o^{\alpha}\left[tm(\lambda,u) - \tau m(\nu,v)\right].$$

Le premier membre de cette égalité se décompose donc en la somme de trois quantités : une partie linéaire, une partie non linéaire et un terme correctif. Nous évaluerons chaque quantité à part.

a) *Partie linéaire.*

$$||A_o^\alpha(e^{\omega t}V(t,0,\lambda)u_o - e^{\omega\tau}V(\tau,0,\nu)v_o)|| \leq e^{\omega t}||A_o^\alpha\left[V(t,0,\lambda)-V(t,0,\nu)\right]A_o^{-1}(\lambda)||.||A_o(\lambda)u_o||$$

$$+ e^{\omega t}||A_o^\alpha A^{-1}(t,\nu)||.||A(t,\nu)V(t,0,\nu)A_o^{-1}(\nu)||.||A_o(\nu)(u_o-v_o)||$$

$$+ e^{\omega t}||A_o^\alpha\left[V(t,0,\nu) - V(\tau,0,\nu)\right]A^{-1}(0,\nu)||.||A_o(\nu)v_o||$$

$$+ (e^{\omega t}-e^{\omega\tau})||A_o^\alpha A_o^{-1}(\nu)||.||A_o(\nu)v_o||.$$

$$\leq e^{\omega}C_{\alpha,1}(1\text{-}70)_2||A_o(\lambda)u_o||\ |\lambda-\nu| + e^{\omega}C(1\text{-}54)C_1(1\text{-}60)_1||A_o(\nu)(u_o-v_o)||$$

$$+ e^{\omega}||A_o(\nu)v_o||(C_{\alpha,1}(1\text{-}63) + \omega C(1\text{-}54)C_1(1\text{-}60)_1)|t-\tau|^{1-\alpha}.$$

b) *Partie non linéaire.*

$$A_o^\alpha\int_0^t V(t,s,\lambda)g(s,\lambda,u)e^{\omega(t-s)}ds - A_o^\alpha\int_0^\tau V(\tau,s,\nu)g(s,\nu,v)e^{\omega(\tau-s)}ds$$

$$= A_o^\alpha\left[\int_0^t V(t,s,\lambda)g(s,\lambda,u)e^{\omega(t-s)}ds - \int_0^\tau V(\tau,s,\lambda)g(s,\lambda,u)e^{\omega(t-s)}ds\right]$$

$$+ A_o^\alpha\left[\int_0^\tau V(\tau,s,\lambda)g(s,\lambda,u)e^{\omega(t-s)}ds - \int_0^\tau V(\tau,s,\nu)g(s,\lambda,u)e^{\omega(t-s)}ds\right]$$

$$+ A_o^\alpha\left[\int_0^\tau V(\tau,s,\nu)g(s,\nu,u)e^{\omega(t-s)}ds - \int_0^\tau V(\tau,s,\nu)g(s,\lambda,u)e^{\omega(\tau-s)}ds\right]$$

$$+ A_o^\alpha\left[\int_0^\tau V(\tau,s,\nu)g(s,\lambda,u)e^{\omega(\tau-s)}ds - \int_0^\tau V(\tau,s,\nu)g(s,\nu,v)e^{\omega(\tau-s)}ds\right]$$

$$= A_o^\alpha\left[\int_0^t V(t,s,\lambda)g(s,\lambda,u)e^{\omega(t-s)}ds - \int_0^\tau V(\tau,s,\lambda)g(s,\lambda,u)e^{\omega(t-s)}ds\right]$$

$$+ \int_0^\tau A_o^\alpha\left[V(\tau,s,\lambda) - V(\tau,s,\nu)\right]g(s,\lambda,u)e^{\omega(t-s)}ds$$

$$+ \int_0^\tau A_o^\alpha V(\tau,s,\nu)g(s,\lambda,u)\left[e^{\omega(t-s)} - e^{\omega(\tau-s)}\right]ds$$

$$+ \int_0^\tau A_o^\alpha V(\tau,s,\nu)e^{\omega(\tau-s)}\left[g(s,\lambda,u) - g(s,\nu,v)\right]ds$$

$$= (1) + (2) + (3) + (4).$$

D'après (1-69), pour $\alpha \in [0,1[$,

$$||(1)|| \leqslant e^{\omega t}C(1-69)|t-\tau|^{1-\alpha}\left[|\mathrm{Log}(t-\tau)| + 1\right] \max_{0\leqslant s\leqslant t} ||g(s,\lambda,u(s))e^{-\omega s}||.$$

Sachant que pour $x \in [0,1]$ et $a \in]0,1]$, $x^a|\mathrm{Log}\, x| \leqslant \frac{1}{ea}$,

nous avons pour $0 \leqslant \alpha < \alpha+\beta < 1$ et pour $||A_o^\alpha u(s)|| < R \quad \forall\, s \in [0,1]$,

$$||(1)|| \leqslant (1 + \frac{1}{e\beta})R\varepsilon(R)e^{\omega}(C_{\alpha,0}(1-63) + 3C_\alpha(1-60)_4)|t-\tau|^{1-\alpha-\beta}.$$

L'inégalité (1-70) nous donne pour $0 \leqslant \alpha < 1$,

$$||(2)|| \leqslant e^{\omega\tau}\int_0^\tau C(1-70)_4|\lambda-\nu||\tau-s|^{-\alpha}\varepsilon(||u(s)||_\alpha)||u(s)||_\alpha ds$$

$$\leqslant \frac{e^{\omega}C(1-70)_4 R\varepsilon(R)}{1-\alpha}\,|\lambda-\nu|.$$

(1-60) nous donne pour $0 \leqslant \alpha < 1$,

$$||(3)|| \leqslant \int_0^\tau C(1-60)_4(\tau-s)^{-\alpha}\varepsilon(||u(s)||_\alpha)||u(s)||_\alpha ds\ e^{\omega\tau}\left[e^{\omega(t-\tau)}-1\right]$$

$$\leqslant \frac{e^{\omega} C_{\alpha}(1\text{-}60)_4 R\varepsilon(R)}{1-\alpha} \quad \omega e^{\omega} |t-\tau|$$

$$\leqslant \omega e^{\omega} \frac{R}{4} \; |t-\tau|$$

et enfin

$$||(4)|| \leqslant e^{\omega\tau} \int_0^{\tau} C_{\alpha}(1\text{-}60)_4 (\tau-s)^{-\alpha} \varepsilon(||u(s)||_{\alpha} + ||v(s)||_{\alpha}) \left[|\lambda-\nu| + ||u - v||_{\alpha}\right] ds$$

$$\leqslant \frac{e^{\omega} C_{\alpha}(1\text{-}60)_4 \varepsilon(2R)}{1-\alpha} \left[|\lambda-\nu| \; + \; ||u-v||_{\alpha,1}\right]$$

$$\leqslant \frac{1}{4} \left[|\lambda-\nu| \; + \; ||u-v||_{\alpha,1}\right]$$

ce qui nous permet d'avoir grâce à (2-8),

$$||(4)|| \leqslant \left\{ e^{\omega} C_{\alpha,1}(1\text{-}70)_2 ||A_o(\lambda)u_o|| + \frac{e^{\omega} C_{\alpha}(1\text{-}70)_4 R\varepsilon(R)}{1-\alpha} + \frac{1}{2} \right\} |\lambda-\nu|$$

$$+ \frac{1}{2} \; C(1\text{-}54)(2e^{\omega} C_1(1\text{-}60)_1 + 1) ||A_o(\nu)(u_o - v_o)||.$$

Ainsi

$$||A_o^{\alpha}\left[\int_o^t V(t,s,\lambda) g(s,\lambda,u) e^{\omega(t-s)} ds - \int_0^{\tau} V(\tau,s,\nu) g(s,\nu,v) e^{\omega(\tau-s)} ds\right]|| \leqslant$$

$$|t-\tau|^{\,1-\alpha-\beta} \left\{ (1 + \frac{1}{e\beta}) R\varepsilon(R) e^{\omega} (C_{\alpha,0}(1\text{-}63) + 3C_{\alpha}(1\text{-}60)_4) \; + \; \omega e^{\omega} \frac{R}{4} \right\}$$

$$+ \; ||A_o(\nu)(u_o - v_o)|| C(1\text{-}54)(e^{\omega} C_1(1\text{-}60)_1 \; + \frac{1}{2})$$

$$+ \; |\lambda-\nu| \left\{ e^{\omega} C_{\alpha,1}(1\text{-}70)_2 ||A_o(\lambda)u_o|| + \frac{2e^{\omega} C_{\alpha}(1\text{-}70)_4 R\varepsilon(R)}{1-\alpha} + \frac{1}{2} \right\} .$$

c) *Le terme correctif.*

$$||A_o^\alpha\left[tm(\lambda,u) - \tau m(\nu,v)\right]|| \leqslant |t-\tau| \; ||A_o^\alpha m_1(\lambda,u)|| + \tau||A_o^\alpha\left[m_1(\lambda,u) - m_1(\nu,v)\right]||.$$

D'après les estimations (2-6), (2-7) et (2-8), nous avons

$$||A_o^\alpha\left[tm(\lambda,u) - \tau m(\nu,v)\right]|| \leqslant R|t-\tau|+C(1-54)(e^\omega C_1(1-60)_1+1)||A_o(\nu)(u_o-v_o)||$$

$$+ \frac{e^\omega C_\alpha(1-60)_4\varepsilon(2R)}{1-\alpha}\;||u-v||_{\alpha,1}$$

$$+\left\{e^\omega C_{\alpha,1}(1-70)_2||A_o(\lambda)u_o|| + \frac{e^\omega C_\alpha(1-70)_4 R\varepsilon(R)}{1-\alpha} + \frac{e^\omega C_\alpha(1-60)_4\varepsilon(2R)}{1-\alpha}\right\}|\lambda-\nu|$$

$$\leqslant R|t-\tau| + C(1-54)(2e^\omega C_1(1-60)_1 + \tfrac{3}{2})||A_o(\nu)(u_o-v_o)||$$

$$+\left\{2e^\omega C_{\alpha,1}(1-70)_2||A_o(\lambda)u_o|| + \frac{2e^\omega C_\alpha(1-70)_4 R\varepsilon(R)}{1-\alpha} + \frac{1}{2}\right\}\;|\lambda-\nu|$$

En assemblant toutes ces parties, pour $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant 1$, λ et $\nu \in \Lambda_o$, $0 \leqslant \alpha < \alpha+\beta < 1$, $||u(t)||_\alpha$, $||v(\tau)||_\alpha < R$ sur $[0,1]$, nous avons

$$(2\text{-}9)\quad \left\{\begin{aligned} &||u(t,\lambda,u_o)-v(\tau,\nu,v_o)||_\alpha \leqslant |\lambda-\nu|\left\{4e^\omega C_{\alpha,1}(1-70)_2||A_o(\lambda)u_o|| + \frac{4e^\omega C_\alpha(1-70)_4 R\varepsilon(R)}{1-\alpha} + 1\right\}\\ &\qquad + ||A_o(\nu)(u_o-v_o)||C(1-54)(4e^\omega C_1(1-60)_1 + 2)\\ &\qquad + |t-\tau|^{1-\alpha-\beta}\left\{||A_o(\nu)v_o||e^\omega(C_{\alpha,1}(1-63) + \omega C(1-54)C_1(1-60)_1) + R(1+\frac{\omega e^\omega}{4})\right.\\ &\qquad \left. + (1+\frac{1}{e\beta})R\varepsilon(R)e^\omega(C_{\alpha,0}(1-63) + 3C_\alpha(1-60)_4)\right\}. \end{aligned}\right.$$

Remarque :

Grâce à l'hypothèse (H5), on peut donner une estimation sur la norme de $u(t,\lambda,u_o(\lambda)) - u(t,\mu,u_o(\mu))$.

$$
(2\text{-}10)\left\{\begin{aligned}
&||u(t,\lambda,u_o(\lambda)) - u(t,\mu,u_o(\mu)||_\alpha \leqslant |\lambda-\mu| \Big\{N_o C(1\text{-}54)(4e^\omega C_1(1\text{-}60)_1 + 2) \\
&\qquad + 4e^\omega C_{\alpha,1}(1\text{-}70)_2||A_o(\lambda)u_o(\lambda)|| + \frac{4e^\omega C_\alpha(1\text{-}70)_4 R\varepsilon(R)}{1-\alpha} + 1\Big\} .
\end{aligned}\right.
$$

CHAPITRE III

SOLUTION PERIODIQUE DU PROBLEME INITIAL

-=-=-=-=-=-

(A) INTRODUCTION ET HYPOTHESES.

La recherche des solutions périodiques en t de l'équation

$$(1) \qquad \frac{du}{dt} = L(t,\lambda)u + g(t,\lambda,u)$$

revient donc à choisir les conditions initiales assurant une solution de l'équation modifiée

$$u(t,\lambda,u_o) = e^{\omega t} V(t,0,\lambda)u_o + \int_0^t V(t,s,\lambda)g(s,\lambda,u)e^{\omega(t-s)}ds - tm(\lambda,u)$$

telle que $m(\lambda,u)$ soit nulle. Pour cela nous utiliserons le théorème des fonctions implicites de L. Césari [1] et [2], que nous indiquerons ultérieurement.

Soit Y_o la boule dans B définie par les fonctions $u(t,\lambda)$ périodiques de période 1 en t telles que $||A_o^{\alpha}u(t,\lambda)|| < R$ pour t dans $[0,1]$ et λ dans Λ_o. Faisons les hypothèses :

(H8) $A(t,\lambda)$ est continûment différentiable en λ. De plus, pour tout $t \in [0,1]$ et $\bar{\lambda}, \bar{\bar{\lambda}} \in \Lambda_o$, voisins de λ_o, il existe un $\alpha_o \in]0,1[$ tel que $||\frac{\partial A}{\partial \lambda}(t,\bar{\lambda})A^{-\alpha_o}(t,\bar{\lambda})|| \leq M_3$ et

$$||\left[\frac{\partial A}{\partial \lambda}(t,\bar{\lambda}) - \frac{\partial A}{\partial \lambda}(t,\bar{\bar{\lambda}})\right]A^{-\alpha_o}(t,\bar{\bar{\lambda}})|| \leq M_4|\bar{\lambda} - \bar{\bar{\lambda}}|.$$

(H9) à $\lambda = \lambda_o$ correspond une solution de $E(t,\lambda)$, $x(t,\lambda_o,u_o(\lambda_o))$ telle que $m(\lambda_o,x) = 0$.

(H10) g est continûment différentiable par rapport à u et $\forall\, t,\tau \in [0,1]$, $\lambda,\nu \in \Lambda_o$ et $||u||_\alpha < R$, il existe b_1 et C_4 des réels positifs et $\mu_\theta \in \left]0,1\right]$ tels que

$$||g_u(u,t,\lambda)|| \leq b_1$$
$$||g_u(u,t,\lambda) - g_u(u,\tau,\nu)|| \leq C_4(|t-\tau|^{\mu_o} + |\lambda-\nu|)$$

où $g_u(u,t,\lambda) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,t,\lambda)$.

(H11) g est continûment différentiable par rapport à λ et $\forall\, t,\tau \in [0,1]$, $\bar{\lambda}$ et $\bar{\bar{\lambda}} \in \Lambda_o$ et $||u||_\alpha < R$, il existe b_2, $C_5 > 0$ tels que

$$||g_\lambda(u,t,\bar{\lambda})|| \leq b_2$$
$$||g_\lambda(u,t,\bar{\lambda}) - g_\lambda(u,t,\bar{\bar{\lambda}})|| \leq C_5|\bar{\lambda}-\bar{\bar{\lambda}}|$$

où $g_\lambda(u,t,\bar{\lambda}) = \frac{\partial g}{\partial \lambda}(u,t,\bar{\lambda})$.

(H12) b_1 et R vérifient : pour λ voisin de λ_o et pour tout $\bar{u}_o$ voisin de u_o,

$$b_1 < \frac{1-\alpha}{4e^{\omega}C_\alpha(1-60)_4||A_o^{-\alpha}||}$$

et

$$R > \left\{1 - \frac{4||A_o^{-\alpha}||e^{\omega}C_\alpha(1-60)_4 b_1}{1-\alpha}\right\}^{-1}\left\{\frac{4M_1^{\alpha}C_3\,\mathrm{Sup}(1,C_3)\,\delta^{\alpha-1}E_1(\alpha)(2e^{\omega}C_1(1-60)_1+1)}{1-\alpha}\right\}||A_o(\lambda)\Delta u_o(\lambda)||$$

où $\Delta u_o(\lambda) = \bar{u}_o(\lambda) - u_o(\lambda)$.

On montrera que (H8) nous permet d'affirmer que $m(\lambda,u)$ est continûment différentiable dans Λ_o , et que (H10), (H11) et (H(12) entraînent la différentiabilité continue de m dans Y_o. On notera par $L_1(\lambda,u)$ la différentielle de m. On supposera de plus que :

(H13) | $L_1(\lambda_o,x)$ est inversible dans $L(Y_o,E)$.

(B) DIFFERENTIABILITE DE m PAR RAPPORT A λ.

Rappelons que $V(t,\tau,\bar{\lambda})$ est solution du système

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + A(t,\bar{\lambda})v = 0 \\ v(\tau,\bar{\lambda}) = I \end{cases}$$

ou bien de l'équation

$$(\tilde{a}) \qquad v(t,\tau,\bar{\lambda}) = I - \int_\tau^t A(s,\bar{\lambda})v(s,\tau,\bar{\lambda})ds.$$

Par analogie avec la différentiabilité par rapport au paramètre λ de la solution de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,\lambda)$$

il suffit que $\frac{\partial A}{\partial \lambda}(t,\bar{\lambda})$ appartienne à $L(\Lambda_o,E)$ pour assurer l'existence d'une solution au voisinage de λ_o, de classe C^1 et vérifiant de plus

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\frac{\partial v}{\partial t} \quad .$$

On a donc dans $(\tilde{a})$,

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda}(t,\tau,\bar{\lambda}) = -\int_\tau^t \frac{\partial A}{\partial \lambda}(s,\bar{\lambda})V(s,\tau,\bar{\lambda})ds - \int_\tau^t A(s,\bar{\lambda})\frac{dV}{\partial \lambda}(s,\tau,\bar{\lambda})ds.$$

$\frac{\partial V}{\partial \lambda}$ est ainsi solution du système

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + A(t,\bar{\lambda})y(t) = -\frac{\partial A}{\partial \lambda}(t,\bar{\lambda})V(t,\tau,\bar{\lambda}) \\ y(\tau) = 0 \end{cases}$$

ou bien, d'après (1-5), chapitre 1, de l'équation

$$y(t,\tau,\bar{\lambda}) = -\int_\tau^t V(t,s,\bar{\lambda})\frac{\partial A}{\partial \lambda}(s,\bar{\lambda})V(s,\tau,\bar{\lambda})ds.$$

c'est-à-dire,

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda}(t,\tau,\bar{\lambda}) = -\int_\tau^t V(t,s,\bar{\lambda})A'_\lambda(s,\bar{\lambda})V(s,\tau,\bar{\lambda})ds \tag{3-1}$$

pour $\bar{\lambda}$ assez voisin de λ_o, où $A'_\lambda(s,\bar{\lambda}) = \frac{\partial A}{\partial \lambda}(s,\bar{\lambda})$.

1) Quelques propriétés et estimations.

Rappelons que si Γ est le bord de S_ϕ,

$$e^{-tA(\tau,\lambda)} = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma e^{\mu t}(\mu I + A(\tau,\lambda))^{-1}d\mu.$$

Soit $B(\tau,\lambda,\mu) = (\mu I + A(\tau,\lambda))^{-1}$, alors, pour $\bar{\lambda}$ voisin de λ_o

$$B'_\lambda(\tau,\bar{\lambda},\mu) = -B(\tau,\bar{\lambda},\mu)A'_\lambda(\tau,\bar{\lambda})B(\tau,\bar{\lambda},\mu).$$

Donc

$$(3\text{-}2)\quad \frac{\partial}{\partial\lambda} e^{-tA(\tau,\lambda)}\Big|_{\lambda=\bar\lambda} = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma e^{\mu t}(\mu I+A(\tau,\bar\lambda))^{-1}A'_\lambda(\tau,\bar\lambda)(\mu I+A(\tau,\bar\lambda))^{-1}d\mu.$$

Comme dans le premier chapitre, pour calculer la norme de $e^{-tA(\tau,\bar\lambda)}$, on écrit :

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} e^{-tA(\tau,\lambda)}\Big|_{\lambda=\bar\lambda} = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma e^{\mu'}\left(\frac{\mu'}{t}\ I + A(\tau,\bar\lambda)\right)^{-1}A'_\lambda(\tau,\bar\lambda)\left(\frac{\mu'}{t}\ I+A(\tau,\bar\lambda)\right)^{-1}\frac{d\mu'}{t}$$

et sachant que

$$\left|\left|\left(\frac{\mu'}{t}\ I + A(\tau,\bar\lambda)\right)^{-1}\right|\right| \leqslant \frac{K_o}{1-C_1|\bar\lambda-\lambda_o|(1+K_o\max(1,\omega))}\ \frac{t}{|\mu'|}$$

$$||A'(\tau,\bar\lambda)A^{-1}(\tau,\bar\lambda)|| \leqslant ||A'_\lambda(\tau,\bar\lambda)A^{-\alpha_o}(\tau,\bar\lambda))||\ ||A^{\alpha_o-1}(\tau,\bar\lambda)||$$

$$\leqslant M_3C_3\delta^{\alpha_o-1}$$

et

$$||A(\tau,\bar\lambda)\left(\frac{\mu'}{t}\ I + A(\tau,\bar\lambda)\right)^{-1}|| = \left|\left|I - \frac{\mu'}{t}\left(\frac{\mu'}{t}\ I + A(\tau,\bar\lambda)\right)^{-1}\right|\right|$$

$$\leqslant 1 + \frac{K_o}{1-C_1|\bar\lambda-\lambda_o|(1+K_o\max(1,\omega))}$$

nous avons

$$\left|\left|\frac{\partial}{\partial\lambda} e^{-tA(\tau,\lambda)}\Big|_{\lambda=\bar\lambda}\right|\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma |e^{\mu'}|\ \frac{K_o}{1-C_1|\bar\lambda-\lambda_o|(\ldots)}\ \frac{t}{|\mu'|}\ M_3C_3\delta^{\alpha_o-1}\ \frac{|d\mu'|}{t}$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma |e^{\mu'}|\ \frac{K_o^2}{[1-C_1|\bar\lambda-\lambda_o|(\ldots)]^2}\ \frac{t}{|\mu'|}\ M_3C_3\delta^{\alpha_o-1}\ \frac{|d\mu'|}{t}$$

$$\leqslant \frac{K_o M_3 C_3 \delta^{\alpha_o - 1}}{2\pi\left[1 - C_1|\bar{\lambda}-\lambda_o|(\ldots)\right]}\left(1 + \frac{K_o}{1 - C_1|\bar{\lambda}-\lambda_o|(\ldots)}\right)\int_\Gamma |e^{\mu'}| \frac{|d\mu'|}{|\mu'|}$$

$$\text{(3-3)} \quad \left\|\frac{\partial}{\partial\lambda} e^{-tA(\tau,\lambda)}\Big|_{\lambda=\bar{\lambda}}\right\| \leqslant \frac{1}{\pi}\left(e\theta_1 - \frac{e^{\cos\theta_1}}{\cos\theta_1}\right)\frac{K_o M_3 C_3 \delta^{\alpha_o - 1}}{1 - C_1|\bar{\lambda}-\lambda_o|(1+K_o\max(1,\omega))}$$

$$\left(1 + \frac{K_o}{1 - C_1|\bar{\lambda}-\lambda_o|(1+K_o\max(1,\omega))}\right)$$

Reprenons (3-1). Alors la norme de $\frac{\partial V}{\partial\lambda}(t,\tau,\bar{\lambda})$ ne dépasse pas, pour $\bar{\lambda}$ voisin de λ_o,

$$\left\|\frac{\partial V}{\partial\lambda}(t,\tau,\bar{\lambda})\right\| \leqslant \int_\tau^t \|V(t,s,\bar{\lambda})\|.\|A'_\lambda(s,\bar{\lambda})A^{-\alpha_o}(s,\bar{\lambda})\|.\|A^{\alpha_o}(s,\bar{\lambda})V(s,\tau,\bar{\lambda})\|ds$$

$$\leqslant \frac{M_3 C_o(1-6\theta)_4 C_{\alpha_o}(1-6\theta)_4}{1-\alpha_o}|t-\tau|^{1-\alpha_o}.$$

Soit $\alpha \in \left]0,1\right[$. Alors,

$$\left\|A_o^\alpha \frac{\partial V}{\partial\lambda}(t,\tau,\bar{\lambda})\right\| \leqslant \int_\tau^t \|A_o^\alpha V(t,s,\bar{\lambda})\|.\|A'_\lambda(s,\bar{\lambda})A^{-\alpha_o}(s,\bar{\lambda})\|.\|A^{\alpha_o}(s,\bar{\lambda})V(s,\tau,\bar{\lambda})\|ds$$

$$\leqslant M_3 C_\alpha(1-6\theta)_4 C_{\alpha_o}(1-6\theta)_4 \beta(\alpha,\alpha_o)|t-\tau|^{1-\alpha_o-\alpha}$$

or $\beta(\alpha,\alpha_o) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha_o)}{\Gamma(\alpha+\alpha_o)} = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha_o+1)}{\alpha.\alpha_o\Gamma(\alpha+\alpha_o)} \leqslant \frac{2}{\alpha.\alpha_o}$ puisque $\alpha,\alpha_o \in \left]0,1\right[$.

Ainsi nous avons :

$$(3\text{-}4)\quad \begin{cases} \text{Pour} \quad 0 \leqslant \alpha < 1 \\[2ex] \| A_o^{\alpha} \ \dfrac{\partial V}{\partial \lambda} \ (t,\tau,\bar{\lambda}) \| \leqslant \dfrac{2M_3 C_{\alpha}(1\text{-}60)_4 C_{\alpha_o}(1\text{-}60)_4 E_1(\alpha)}{\alpha_o(1-\alpha_o)} \ |t-\tau|^{1-\alpha_o-\alpha} \quad . \end{cases}$$

Soit $\alpha \in [0,1[$,

$$\| A_o^{\alpha} \frac{\partial V}{\partial \lambda}(t,\tau,\bar{\lambda}) A^{-1}(\tau,\bar{\lambda}) \| \leqslant \int_{\tau}^{t} \| A_o^{\alpha} V(t,s,\bar{\lambda}) \| . \| A'_{\lambda}(s,\bar{\lambda}) A^{-1}(s,\bar{\lambda}) \| . \| A(s,\bar{\lambda}) V(s,\tau,\bar{\lambda}) A^{-1}(\tau,\bar{\lambda}) \| ds$$

$$\leqslant \int_{\tau}^{t} C_{\alpha}(1\text{-}60)_4 (t-s)^{-\alpha} M_3 C_3 \delta^{\alpha_o - 1} \ C_{1,1}(1\text{-}60)_2 ds.$$

$$(3\text{-}5)\quad \begin{cases} \text{Pour} \quad 0 \leqslant \alpha < 1, \\[2ex] \| A_o^{\alpha} \ \dfrac{\partial V}{\partial \lambda} \ (t,\tau,\bar{\lambda}) A^{-1}(\tau,\bar{\lambda}) \| \leqslant \dfrac{M_3 C_3 \delta^{\alpha_o - 1} \ C_{\alpha}(1\text{-}60)_4 C_{1,1}(1\text{-}60)_2}{1-\alpha} \ |t-\tau|^{1-\alpha}. \end{cases}$$

2) <u>*Continuité de*</u> $\dfrac{\partial V}{\partial \lambda}$ $(t,\tau,\bar{\lambda})$ <u>*par rapport à*</u> $\bar{\lambda}$.

Soient $\bar{\lambda}$ et $\bar{\bar{\lambda}}$ voisins de λ_o.

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} \ (t,\tau,\bar{\lambda}) - \frac{\partial V}{\partial \lambda} \ (t,\tau,\bar{\bar{\lambda}}) = - \int_{\tau}^{t} V(t,s,\bar{\lambda}) A'_{\lambda}(s,\bar{\lambda}) V(s,\tau,\bar{\lambda}) ds$$

$$+ \int_{\tau}^{t} V(t,s,\bar{\bar{\lambda}}) A'_{\lambda}(s,\bar{\bar{\lambda}}) V(s,\tau,\bar{\bar{\lambda}}) ds$$

$$= \int_{\tau}^{t} \left[V(t,s,\bar{\bar{\lambda}}) - V(t,s,\bar{\lambda}) \right] A'_{\lambda}(s,\bar{\bar{\lambda}}) V(s,\tau,\bar{\bar{\lambda}}) ds$$

$$+ \int_\tau^t V(t,s,\bar\lambda)\left[A'_\lambda(s,\bar{\bar\lambda}) - A'_\lambda(s,\bar\lambda)\right] V(s,\tau,\bar{\bar\lambda})ds$$

$$+ \int_\tau^t V(t,s,\bar\lambda)A'_\lambda(s,\bar\lambda)\left[V(s,\tau,\bar{\bar\lambda}) - V(s,\tau,\bar\lambda)\right]ds \ .$$

Soit $\alpha \in]0,1[$. Alors :

$$||A_o^\alpha\left[\frac{\partial V}{\partial\lambda}(t,\tau,\bar\lambda) - \frac{\partial V}{\partial\lambda}(t,\tau,\bar{\bar\lambda})\right]|| \leqslant \int_\tau^t |\lambda-\bar{\bar\lambda}|(t-s)^{-\alpha}C_\alpha(1-70)_4.M_3C_{\alpha_o}(1-60)_4(s-\tau)^{-\alpha_o}ds$$

$$+ \int_\tau^t C_\alpha(1-60)_4(t-s)^{-\alpha}.M_4|\bar\lambda-\bar{\bar\lambda}|.C_{\alpha_o}(1-60)_4(s-\tau)^{-\alpha_o}ds$$

$$+ \int_\tau^t C_\alpha(1-60)_4(t-s)^{-\alpha}.M_3.C_{\alpha_o}(1-70)_4(s-\tau)^{-\alpha}|\bar\lambda-\bar{\bar\lambda}|ds$$

c'est-à-dire que

$$(3\text{-}6)\begin{cases} \forall\alpha\in]0,1[, \quad \bar\lambda \text{ et } \bar{\bar\lambda} \text{ voisins de } \lambda_o, \\ ||A_o^\alpha\left[\frac{\partial V}{\partial\lambda}(t,\tau,\bar\lambda) - \frac{\partial V}{\partial\lambda}(t,\tau,\bar{\bar\lambda})\right]|| \leqslant |\bar\lambda-\bar{\bar\lambda}|.|t-\tau|^{1-\alpha_o-\alpha}.\frac{2}{\alpha\alpha_o} \\ \qquad \{M_3C_{\alpha_o}(1-60)_4C_\alpha(1-70)_4 + M_4C_{\alpha_o}(1-60)_4C_\alpha(1-60)_4 + M_3C_{\alpha_o}(1-70)_4C_\alpha(1-60)_4\} \end{cases}$$

D'autre part,

$$||\frac{\partial V}{\partial\lambda}(t,\tau,\bar\lambda) - \frac{\partial V}{\partial\lambda}(t,\tau,\bar{\bar\lambda})|| \leqslant \int_\tau^t C(1-45)|\bar\lambda-\bar{\bar\lambda}|M_3C_{\alpha_o}(1-60)_4(s-\tau)^{-\alpha_o}ds$$

$$+ \int_\tau^t C_o(1-60)_4M_4|\bar\lambda-\bar{\bar\lambda}|C_{\alpha_o}(1-60)_4(s-\tau)^{-\alpha_o}ds$$

$$+ \int_\tau^t C_o(1-60)_4M_3C_{\alpha_o}(1-70)_4(s-\tau)^{-\alpha_o}ds.$$

Si $\bar{\lambda}$ et $\bar{\bar{\lambda}}$ sont voisins de λ_o alors

$$(3\text{-}7)\quad \begin{cases} \left\|\frac{\partial V}{\partial \lambda}(t,\tau,\bar{\lambda}) - \frac{\partial V}{\partial \lambda}(t,\tau,\bar{\bar{\lambda}})\right\| \leqslant \|\lambda-\lambda\|.(t-\tau)^{1-\alpha_o}\frac{1}{1-\alpha_o} \\ \qquad \{ M_3 C_{\alpha_o}(1\text{-}60)_4.C(1\text{-}45) + M_4 C_{\alpha_o}(1\text{-}60)_4 C_o(1\text{-}60)_4 + M_3 C_{\alpha_o}(1\text{-}70)_4 C_o(1\text{-}60)_4 \} . \end{cases}$$

Soit $\alpha \in]0,1[$.

$$\left\|A_o^{\alpha}\left[\frac{\partial V}{\partial \lambda}(t,\tau,\bar{\lambda}) - \frac{\partial V}{\partial \lambda}(t,\tau,\bar{\bar{\lambda}})\right]A^{-1}(\tau,\bar{\bar{\lambda}})\right\| \leqslant$$

$$\int_\tau^t C_\alpha(1\text{-}70)_4|\bar{\lambda}-\bar{\bar{\lambda}}|(t-s)^{-\alpha}M_3 C_3 \delta^{\alpha_o-1} C_{1,1}(1\text{-}60)_2 ds$$

$$+ \int_\tau^t C_\alpha(1\text{-}60)_4(t-s)^{-\alpha}M_4|\bar{\lambda}-\bar{\bar{\lambda}}|C_3 \delta^{\alpha_o-1} C_{1,1}(1\text{-}60)_2 ds$$

$$+ \int_\tau^t C_\alpha(1\text{-}60)_4(t-s)^{-\alpha}M_3 C_{\alpha_o}(1\text{-}70)_2|\bar{\lambda}-\bar{\bar{\lambda}}|.|s-\tau|^{1-\alpha_o} ds$$

On a donc montré que :

$$(3\text{-}8)\quad \begin{cases} \forall \alpha \in]0,1[, \quad \bar{\lambda} \text{ et } \bar{\bar{\lambda}} \text{ voisins de } \lambda_o, \\ \left\|A_o^{\alpha}\left[\frac{\partial V}{\partial \lambda}(t,\tau,\bar{\lambda}) - \frac{\partial V}{\partial \lambda}(t,\tau,\bar{\bar{\lambda}})\right]A^{-1}(\tau,\bar{\bar{\lambda}})\right\| \leqslant |\bar{\lambda}-\bar{\bar{\lambda}}|.|t-\tau|^{1-\alpha} \\ \qquad \frac{1}{1-\alpha}\left\{C_3 \delta^{\alpha_o-1} C_{1,1}(1\text{-}60)_2(M_3 C_\alpha(1\text{-}70)_4 + M_4 C_\alpha(1\text{-}60)_4) + M_3 C_{\alpha_o}(1\text{-}70)_2 C_\alpha(1\text{-}60)_4\right\} \end{cases}$$

et que

$$(3\text{-}9)\quad \begin{cases} \left\|\left[\frac{\partial V}{\partial \lambda}(t,\tau,\bar{\lambda}) - \frac{\partial V}{\partial \lambda}(t,\tau,\bar{\bar{\lambda}})\right]A^{-1}(\tau,\bar{\bar{\lambda}})\right\| \leqslant |\bar{\lambda}-\bar{\bar{\lambda}}|.|t-\tau| \\ \qquad \left\{C_3 \delta^{\alpha_o-1} C_{1,1}(1\text{-}60)_2(M_3 C(1\text{-}45) + M_4 C_o(1\text{-}60)_4) + M_3 C_{\alpha_o}(1\text{-}70)_2 C_o(1\text{-}60)_4\right\} \end{cases}$$

3) *Continuité de* $\frac{\partial m}{\partial \lambda}(\bar{\lambda},u)$ *par rapport à* $\bar{\lambda}$.

Rappelons que $m(\lambda,u)$ s'écrit :

$$m(\lambda,u) = (e^{\omega}V(1,0,\lambda)-I)u_o + \int_o^1 V(1,s,\lambda)g(s,\lambda,u)e^{\omega(1-s)}ds$$

$V(1,s,\lambda)$ et $g(s,\lambda,u)$ étant différentiables par rapport à λ, $m(\lambda,u)$ l'est aussi, et, en considérant λ et u_o comme deux variables indépendantes,

$$\frac{\partial m}{\partial \lambda}(\bar{\lambda},u) = e^{\omega}\frac{\partial V}{\partial \lambda}(1,0,\bar{\lambda})u_o + \int_0^1 \frac{\partial V}{\partial \lambda}(1,s,\bar{\lambda})g(s,\bar{\lambda},u)e^{\omega(1-s)}ds$$

$$+ \int_0^1 V(1,s,\bar{\lambda})\frac{\partial g}{\partial \lambda}(s,\bar{\lambda},u)e^{\omega(1-s)}ds .$$

De plus, sachant que $\frac{\partial V}{\partial \lambda}(t,\tau,\bar{\lambda})$ et $\frac{\partial g}{\partial \lambda}(s,\bar{\lambda},u)$ sont continus en $\bar{\lambda}$, $\frac{\partial m}{\partial \lambda}(\bar{\lambda},u)$ le sera aussi et pour $\alpha \in]0,1[$ et $||A_o^{\alpha}u|| < R$,

$$||A_o^{\alpha}\left[\frac{\partial m}{\partial \lambda}(\bar{\lambda},u(\bar{\lambda})) - \frac{\partial m}{\partial \lambda}(\bar{\bar{\lambda}},u(\bar{\bar{\lambda}}))\right]|| \leqslant e^{\omega}||A_o^{\alpha}\left[\frac{\partial V}{\partial \lambda}(1,0,\bar{\lambda})u_o(\bar{\lambda}) - \frac{\partial V}{\partial \lambda}(1,0,\bar{\bar{\lambda}})u_o(\bar{\bar{\lambda}})\right]||$$

$$+ \int_0^1 ||A_o^{\alpha}\left[\frac{\partial V}{\partial \lambda}(1,s,\bar{\lambda}) - \frac{\partial V}{\partial \lambda}(1,s,\bar{\bar{\lambda}})\right]||.||g(s,\bar{\lambda},u)||e^{\omega(1-s)}ds$$

$$+ \int_0^1 ||A_o^{\alpha}\frac{\partial V}{\partial \lambda}(1,s,\bar{\bar{\lambda}})||.||g(s,\bar{\lambda},u) - g(s,\bar{\bar{\lambda}},u)||e^{\omega(1-s)}ds$$

$$+ \int_0^1 ||A_o^{\alpha}[V(1,s,\bar{\lambda}) - V(1,s,\bar{\bar{\lambda}})]||.||\frac{\partial g}{\partial \lambda}(s,\bar{\lambda},u)||e^{\omega(1-s)}ds$$

$$+ \int_0^1 ||A_o^{\alpha}V(1,s,\bar{\bar{\lambda}})||.||\frac{\partial g}{\partial \lambda}(s,\bar{\lambda},u) - \frac{\partial g}{\partial \lambda}(s,\bar{\bar{\lambda}},u)||e^{\omega(1-s)}ds$$

$$\leqslant e^{\omega}||A_o^{\alpha}\left[\frac{\partial V}{\partial \lambda}(1,0,\bar{\lambda}) - \frac{\partial V}{\partial \lambda}(1,0,\bar{\bar{\lambda}})\right]A_o^{-1}(\bar{\bar{\lambda}})||.||A_o(\bar{\bar{\lambda}})u_o(\bar{\lambda})||$$

$$+ e^{\omega}||A_o^{\alpha} \frac{\partial V}{\partial\lambda} (1,0,\bar{\bar{\lambda}})A_o^{-1}(\bar{\bar{\lambda}})||.||A_o(\bar{\bar{\lambda}})(u_o(\bar{\lambda}) - u_o(\bar{\bar{\lambda}}))||$$

$$+ \int_0^1 C_{\alpha}(3-6)|\bar{\lambda}-\bar{\bar{\lambda}}|(1-s)^{1-\alpha_o-\alpha} \varepsilon(||A_o^{\alpha}u||)||A_o^{\alpha}u||e^{\omega(1-s)}ds$$

$$+ \int_0^1 e^{\omega(1-s)}C_{\alpha}(3-4)(1-s)^{1-\alpha_o-\alpha} \varepsilon(2||A_o^{\alpha}u||)(|\bar{\lambda}-\bar{\bar{\lambda}}|+||A_o^{\alpha}(u(\bar{\lambda},s)-u(\bar{\bar{\lambda}},s))||)$$

$$+ \int_0^1 e^{\omega(1-s)}C_{\alpha}(1-70)_4|\bar{\lambda}-\bar{\bar{\lambda}}|.b_2e^{\omega(1-s)}(1-s)^{-\alpha}ds$$

$$+ \int_0^1 C_{\alpha}(1-60)_4C_5|\bar{\lambda}-\bar{\bar{\lambda}}|e^{\omega(1-s)}(1-s)^{-\alpha}ds.$$

D'après l'hypothèse (H5) et l'estimation (2-10)

$$(3\text{-}10)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{Pour } \bar{\lambda} \text{ et } \bar{\bar{\lambda}} \text{ voisins de } \lambda_o,\ \alpha \in]0,1[, \\ ||A_o^{\alpha}\left[\frac{\partial m}{\partial\lambda}(\bar{\lambda},u(\bar{\lambda})) - \frac{\partial m}{\partial\lambda}(\bar{\bar{\lambda}},u(\bar{\bar{\lambda}}))\right]|| \leqslant |\bar{\lambda}-\bar{\bar{\lambda}}|e^{\omega}\Big\{C_{\alpha}(3-5)N_o + \\ \qquad \frac{1}{1-\alpha}\Big[C_{\alpha}(3-7)||A_o(\bar{\bar{\lambda}})u_o(\bar{\lambda})|| + R\varepsilon(R)C_{\alpha}(3-6) + \varepsilon(2R)C_{\alpha}(3-4)(1+C(2-10)) \\ \qquad\qquad + b_2C_{\alpha}(1-70)_4 + C_5C_{\alpha}(1-60)_4\Big]\Big\} \end{array}\right.$$

et pour $\bar{\lambda}$ et $\bar{\bar{\lambda}}$ voisins de λ_o,

$$(3\text{-}11)\quad \left\{\begin{array}{l} ||\frac{\partial m}{\partial\lambda}(\bar{\lambda},u(\bar{\lambda})) - \frac{\partial m}{\partial\lambda}(\bar{\bar{\lambda}},u(\bar{\bar{\lambda}}))|| \leqslant |\bar{\lambda}-\bar{\bar{\lambda}}|e^{\omega}\Big\{C_o(3-5)N_o + C(3-9)||A_o(\bar{\bar{\lambda}})u_o(\bar{\lambda})|| \\ \qquad + R\varepsilon(R)C(3-7) + \varepsilon(2R)C_o(3-4)(1+C(2-10)) + b_2C(1-45) + C_5C'_o(1-60)_4\Big\} \end{array}\right.$$

(C) EXISTENCE DE LA SOLUTION PERIODIQUE DU PROBLEME INITIAL.

Proposition (*Théorème des fonctions implicites*).-

Sous les hypothèses (H1)...(H13), on peut trouver un voisinage ouvert I_o de λ_o dans Λ_o tel que pour tout voisinage ouvert I connexe de λ_o, $I \subset I_o$, il existe ψ une application continue unique de I dans Y_o telle que $u_o = \psi(\lambda_o)$, $(\lambda,\psi(\lambda)) \in \Lambda_o \times Y_o$ et $m(\lambda,\psi(\lambda)) = 0$ pour tout $\lambda \in I$.

En outre ψ est continûment différentiable dans I et sa dérivée est donnée par :

$$\frac{d\psi}{d\lambda} = \frac{du_o}{d\lambda} = -\left(\frac{\partial m}{\partial u_o}\right)^{-1} \frac{\partial m}{\partial \lambda} .$$

Preuve :

Nous allons montrer que les hypothèses (H1),..,(H13) nous permettent d'établir que m est continûment différentiable par rapport à u_o, auquel cas nous serons dans les conditions d'application du théorème des fonctions implicites.

Pour cela, nous nous aiderons du travail de Gérard Hecquet [4].

Reprenons l'équation modifiée

$$\tilde{E}(t,\lambda) \begin{cases} u(t,\lambda,u_o) = e^{\omega t}V(t,0,\lambda)u_o + \displaystyle\int_0^t V(t,s,\lambda)g(s,\lambda,u)e^{\omega(t-s)}ds - tm(\lambda,u) \\ m(\lambda,u) = (e^{\omega}V(1,0,\lambda)-I)u_o + \displaystyle\int_0^1 V(1,s,\lambda)g(s,\lambda,u)e^{\omega(1-s)}ds. \end{cases}$$

Soient u_1 et u deux solutions de ce problème avec des conditions initiales respectives u_{o1} et u_o. Soient $\Delta u = u_1-u$, $\Delta u_o = u_{o1}-u_o$ et $\Delta m = m(\lambda,u_1)-m(\lambda,u)$. Nous étudierons alors Δm pour une "petite" variation de u_o, i.e. pour Δu_o petit.

$$\Delta u = e^{\omega t}V(t,0,\lambda)\Delta u_o + \int_0^t V(t,0,\lambda)\left[g(s,\lambda,u+\Delta u) - g(s,\lambda,u)\right]e^{\omega(t-s)}ds - t\Delta m .$$

g étant de classe C^1 en u, on peut écrire en posant $a(s,\lambda) = g_u(s,\lambda,u)$,

$$g(s,\lambda,u+\Delta u) - g(s,\lambda,u) = a(s,\lambda).\Delta u + \varepsilon_1(s,\lambda,\Delta u)$$

et donc

$$(*)\ \begin{cases} \Delta u(t,\lambda) = e^{\omega t}V(t,0,\lambda)\Delta u_o + \displaystyle\int_0^t V(t,s,\lambda)\left[a(s,\lambda)\Delta u(s)+\varepsilon_1(s,\lambda,\Delta u(s))\right]e^{\omega(-s)}ds - t\Delta m \\ \Delta m = (e^{\omega}V(1,0,\lambda)-I)\Delta u_o + \displaystyle\int_0^1 V(1,s,\lambda)\left[a(s,\lambda)\Delta u(s)+\varepsilon_1(s,\lambda,\Delta u(s))\right]e^{\omega(t-s)}ds. \end{cases}$$

Soit le système obtenu à partir de (*) par linéarisation

$$(**)\ \begin{cases} \widetilde{\Delta u}(t) = e^{\omega t}V(t,0,\lambda)\Delta u_o + \displaystyle\int_0^t \left[V(t,s,\lambda)a(s,\lambda)\widetilde{\Delta u}(s)e^{\omega(t-s)} - \widetilde{\Delta m}\right]ds \\ \widetilde{\Delta m} = (e^{\omega}V(1,0,\lambda)-I)\Delta u_o + \displaystyle\int_0^1 V(1,\sigma,\lambda)a(\sigma,\lambda)\widetilde{\Delta u}(\sigma)e^{\omega(1-\sigma)}d\sigma. \end{cases}$$

Ce système se présente de la même manière que celui du second chapitre, $(\tilde{2})$, où $g(s,\lambda,u)$ est remplacé par $a(s,\lambda)\widetilde{\Delta u}(s)$. On utilisera donc la même méthode pour prouver l'existence d'une solution unique de (**) sous certaines hypothèses.

A λ fixé, soit donc $S_\lambda(\tilde{K},\tilde{\eta})$ l'ensemble de toutes les fonctions $\Delta y(t)$ continues sur $[0,1]$ telles que

(2-12) $\Delta y(0) = A_o^\alpha \Delta u_o$.

(3-13) $\forall\, t, \tau \in [0,1]$, $||\Delta y(t) - \Delta y(\tau)|| \leqslant \tilde{K}|t-\tau|^{\tilde{\eta}}$ où $\tilde{\eta}$ est un nombre fixé dans $]0,1-\alpha[$ et $\tilde{K}$ un nombre positif vérifiant pour $\lambda \in \Lambda$,

$$R + C_{\alpha,1}(1\text{-}63)||A_o(\lambda)\Delta u_o|| + C(1\text{-}69)b_1 R||A_o^{-\alpha}||\left(\frac{1}{1-\alpha-\tilde{\eta}} + 1\right) \leqslant \tilde{K} .$$

$$+ \; t\, e^{-\omega t} \| A_o^{\alpha} \Delta\tilde{m}_1 (\lambda, A_o^{-\alpha} \Delta y) \| e^{\omega t}$$

$$\leqslant \frac{4M_1^{\alpha}\, C_3 \mathrm{Sup}(1,C_3)\delta^{\alpha-1} E_1(\alpha)(e^{\omega} 2C_1(1-6\delta)_1+1)}{1-\alpha} \| A_o(\lambda)\Delta u_o \|$$

$$+ \frac{2R \| A_o^{-\alpha} \| e^{\omega} C_{\alpha}(1-6\delta)_4 b_1}{1-\alpha} < R.$$

Ce qui prouve que $w_{\Delta y} \in S_{\lambda}$. On montre de la même manière que dans le chapitre 2 que $\tilde{T} : \Delta y \to \tilde{T}\Delta y$ est une contraction.

Donc, il existe un point fixe unique $\Delta y \in S_{\lambda}$ tel que

$$\Delta y(t,\lambda) = A_o^{\alpha} V(t,0,\lambda)\Delta u_o + A_o^{\alpha} \int_0^t V(t,s,\lambda) a(s,\lambda) A_o^{-\alpha} \Delta y(s) ds - t e^{-\omega t} A_o^{\alpha} \Delta\tilde{m}_1 (\lambda, A_o^{-\alpha}\Delta y).$$

En posant $\Delta\tilde{u}(t,\lambda) = e^{\omega t} A_o^{-\alpha} \Delta y(t)$, on a (**).

De plus, d'après (C) du chapitre 2, $\Delta\tilde{u}(t,\lambda)$ est continue par rapport à λ et à sa condition initiale Δu_o.

D'autre part, d'après le lemme de Gronwall, dans la théorie des équations différentielles, si Δu_o est nulle, $\Delta\tilde{u}$ l'est aussi. Ceci et l'unicité de $\Delta\tilde{u}$, à Δu_o fixé, nous permet de dire que $\Delta\tilde{u}$ s'exprime linéairement par rapport à Δu_o, i.e, il existe une application linéaire continue $L_2(t,\lambda)$ telle que $\Delta\tilde{u} = L_2(t,\lambda)\Delta u_o$.

Reprenons le système (**). Pour établir que $\Delta u_o \curvearrowright \Delta\tilde{m}$ est la différentielle cherchée, il suffit de montrer que $\Delta\tilde{u} - \Delta u \to 0$ plus vite que Δu_o.

$$(3\text{-}14) \qquad ||\Delta y(t)e^{\omega t}|| < R, \quad \forall\, t \in [0,1].$$

$S(\tilde{K},\tilde{\eta})$ est un convexe fermé borné dans l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$.

D'autre part, d'après l'hypothèse (H10), la fonction $a(t,\lambda)A_o^{-\alpha}\Delta y(t)$ est continue en t et vérifie l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} ||a(t,\lambda)A_o^{-\alpha}\Delta y(t) - a(\tau,\lambda)A_o^{-\alpha}\Delta y(\tau)|| &\leqslant ||[a(t,\lambda) - a(\tau,\lambda)]A_o^{-\alpha}\Delta y(t)|| \\ &\quad + ||a(\tau,\lambda)A_o^{-\alpha}(\Delta y(t) - \Delta y(\tau))|| \\ &\leqslant C_4|t-\tau|^{\mu_o}||A_o^{-\alpha}||R + b_1||A_o^{-\alpha}||\tilde{K}|t-\tau|^{\tilde{\eta}} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(3\text{-}15) \quad \begin{cases} \forall\, t,\tau \in [0,1],\ \lambda \in \Lambda_o \ \text{ et } \ \Delta y \ \text{ tel que } \ ||\Delta y(t)e^{\omega t}|| < R \ \text{ pour tout } \ t \in [0,1], \\ ||a(t,\lambda)A_o^{-\alpha}\Delta y(t)-a(\tau,\lambda)A_o^{-\alpha}\Delta y(\tau)|| \leqslant ||A_o^{-\alpha}||(RC_4+b_1\tilde{K})|t-\tau|^{\min(\mu_o,\tilde{\eta})} \end{cases}$$

et

$$(3\text{-}16) \quad \Big[\ ||a(t,\lambda)A_o^{-\alpha}\Delta y(t)|| \leqslant b_1||A_o^{-\alpha}||R.$$

Soit la fonction $w_{\Delta y} = \tilde{T}\Delta y$ définie par $w_{\Delta y} = A_o^{\alpha}\,\Delta w$ où Δw est solution de :

$$\Delta w(t,\lambda) = \mathcal{V}(t,0,\lambda)\Delta u_o + \int_0^t \mathcal{V}(t,s,\lambda)a(s,\lambda)A_o^{-\alpha}\Delta y(s)ds - te^{-\omega t}\Delta\tilde{m}_1(\lambda,A_o^{-\alpha}\Delta y).$$

D'après le chapitre 2, $a(s,\lambda)A_o^{-\alpha}\Delta y(s)$ étant höldérienne, cette équation admet une solution unique $\Delta w(t,\lambda)$. Donc, en écrivant

$$w_{\Delta y}(t,\lambda) = A_o^{\alpha}\mathcal{V}(t,0,\lambda)\Delta u_o + \int_0^t A_o^{\alpha}\mathcal{V}(t,s,\lambda)a(s,\lambda)A_o^{-\alpha}\Delta y(s)ds - te^{-\omega t}A_o^{\alpha}\Delta\tilde{m}_1.$$

Montrons que $w_{\Delta y} \in S$. Pour cela, nous donnerons d'abord une estimation sur la norme de $A_o^\alpha \Delta\tilde{m}_1(\lambda, A_o^{-\alpha}\Delta y)$.

$$||A_o^\alpha \Delta\tilde{m}_1(\lambda, A_o^{-\alpha}\Delta y)|| \leqslant ||A_o^\alpha[e^\omega V(1,0,\lambda)-I]\Delta u_o|| + \int_0^1 ||A_o^\alpha V(1,s,\lambda)e^\omega a(s,\lambda)A_o^{-\alpha}\Delta y(s)||ds$$

et d'après le second chapitre et (H10),

$$(3\text{-}17)\quad \begin{cases} ||A_o^\alpha \Delta\tilde{m}_1(\lambda, A_o^{-\alpha}\Delta y)|| \leqslant \dfrac{4M_1^\alpha C_3 \operatorname{Sup}(1,C_3)\delta^{\alpha-1}E_1(\alpha)(1+e^\omega C_1(1\text{-}60)_1)}{1-\alpha}\,||A_o(\lambda)\Delta u_o|| \\ \qquad + \dfrac{Re^\omega C_\alpha(1\text{-}60)_4||A_o^{-\alpha}||b_1}{1-\alpha} \end{cases}$$

et en particulier

$$||A_o^\alpha \Delta\tilde{m}_1(\lambda, A_o^{-\alpha}\Delta y)|| < R \quad \text{pour} \quad \Delta u_o \quad \text{assez petit.}$$

$$\begin{aligned} ||w_{\Delta y}(t+\Delta t,\lambda) - w_{\Delta y}(t,\lambda)|| &\leqslant C_{\alpha,1}(1\text{-}63)\Delta t^{1-\alpha}||A_o(\lambda)\Delta u_o|| \\ &\quad + C(1\text{-}69)\Delta t^{1-\alpha}\Big[|\operatorname{Log}\Delta t|+1\Big] \max_{0\leqslant s\leqslant t+st} ||a(s,\lambda)A_o^{-\alpha}\Delta y(s)|| \\ &\quad + \Delta t||A_o^\alpha \Delta\tilde{m}_1(\lambda, A_o^{-\alpha}\Delta y)|| \\ &\leqslant \Delta t^{\tilde{\eta}}\left\{C_{\alpha,1}(1\text{-}63)||A_o(\lambda)\Delta u_o|| + C(1\text{-}69)b_1R||A_o^{-\alpha}||\left(\frac{1}{1-\alpha-\tilde{\eta}}+1\right)+R\right\} \\ &\leqslant \tilde{K}\Delta t^{\tilde{\eta}}. \end{aligned}$$

D'autre part, pour Δu_o assez petit

$$\begin{aligned} ||w_{\Delta y}(t)e^{\omega t}|| &\leqslant ||A_o^\alpha A^{-1}(t,\lambda)||.||A(t,\lambda)V(t,0,\lambda)A_o^{-1}(\lambda)||.||A_o(\lambda)\Delta u_o||e^{\omega t} \\ &\quad + \int_0^t ||A_o^\alpha V(t,s,\lambda)||.||a(s,\lambda)A_o^{-\alpha}\Delta y(s)||ds\; e^{\omega t} \end{aligned}$$

Posons $z(t) = \Delta u(t) - \Delta\tilde{u}(t)$. Alors

$$Z(t) = e^{\omega t}V(t,0,\lambda)\Delta u_o + \int_0^t V(t,s,\lambda)\left[a(s,\lambda)\Delta u(s) + \varepsilon_1(s,\lambda,\Delta u(s))\right]e^{\omega(t-s)}ds - t\Delta m$$

$$- e^{\omega t}V(t,0,\lambda)\Delta u_o - \int_0^t V(t,s,\lambda)a(s,\lambda)\Delta\tilde{u}(s)e^{\omega(t-s)}ds + t\Delta\tilde{m}.$$

$$\begin{cases} Z(t) = \displaystyle\int_0^t V(t,s,\lambda)a(s,\lambda)Z(s)e^{\omega(t-s)}ds \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_0^t V(t,s,\lambda)\varepsilon_1(s,\lambda,\Delta u(s))e^{\omega(t-s)}ds - t(\Delta m-\Delta\tilde{m}) \\ \Delta m-\Delta\tilde{m} = \displaystyle\int_0^1 V(1,\sigma,\lambda)a(\sigma,\lambda)Z(\sigma)e^{\omega(1-\sigma)}d\sigma - \int_0^1 V(1,\sigma,\lambda)\varepsilon_1(\sigma,\lambda,\Delta u(\sigma))e^{\omega(1-\sigma)}d\sigma. \end{cases}$$

Lorsque Δu_o tend vers 0, il en est de même pour $\Delta\tilde{u}$ et donc pour Δu. On peut donc écrire grâce à la continuité de la fonction g_u :

$$\forall\, k>0,\ \exists\, \eta > 0 \,/\, ||\Delta\tilde{u}||_\alpha + ||Z||_\alpha \leqslant \eta \Longrightarrow ||\varepsilon_1(t,\lambda,\Delta\tilde{u}+Z)|| \leqslant k(||\Delta\tilde{u}(t)||_\alpha + ||Z(t)||_\alpha).$$

Ce qui nous permet d'établir

$$||A_o^\alpha Z(t)|| \leqslant \int_0^t ||A_o^\alpha V(t,s,\lambda)||.||a(s,\lambda)||.||A_o^{-\alpha}||.||A_o^\alpha Z(s)||e^{\omega(t-s)}ds$$

$$+\int_0^t ||A_o^\alpha V(t,s,\lambda)||.||\varepsilon_1(s,\lambda,\Delta u)||e^{\omega(t-s)}ds$$

$$+ t\int_0^1 ||A_o^\alpha V(1,\sigma,\lambda)||.||a(\sigma,\lambda)||.||A_o^{-\alpha}||.||A_o^\alpha\, Z(s)||e^{\omega(1-\sigma)}d\sigma$$

$$+ t\int_0^1 ||A_o^\alpha\ (1,\sigma,\lambda)||.||\varepsilon_1(\sigma,\lambda,\Delta u(\sigma))||e^{\omega(1-\sigma)}d\sigma.$$

$$\leqslant \int_0^t C_\alpha(1-60)_4(t-s)^{-\alpha}b_1||A_o^{-\alpha}||.||Z(s)||_\alpha e^{\omega(t-s)}ds$$

$$+ \int_0^t C_\alpha (1-60)_4 (t-s)^{-\alpha} k(||\Delta\tilde{u}(s)||_\alpha + ||Z(s)||_\alpha) e^{\omega(t-s)} ds$$

$$+ t \int_0^1 C_\alpha (1-60)_4 (1-\sigma)^{-\alpha} b_1 ||A_o^{-\alpha}|| . ||Z(\sigma)||_\alpha e^{\omega(1-\sigma)} d\sigma$$

$$+ t \int_0^1 C_\alpha (1-60)_4 (1-\sigma)^{-\alpha} k(||\Delta\tilde{u}(\sigma)||_\alpha + ||Z(\sigma)||_\alpha) e^{\omega(1-\sigma)} d\sigma.$$

En rappelant que $||Z||_{\alpha,1} = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} ||A_o^\alpha Z(t)||$,

$$||Z||_{\alpha,1} \leqslant \frac{b_1 ||A_o^{-\alpha}|| C_\alpha (1-60)_4 e^\omega}{1-\alpha} ||Z||_{\alpha,1} + \frac{kC_\alpha (1-60)_4 e^\omega}{1-\alpha} (||\Delta\tilde{u}||_{\alpha,1} + ||Z||_{\alpha,1})$$

$$+ \frac{b_1 ||A_o^{-\alpha}|| C_\alpha (1-60)_4 e^\omega}{1-\alpha} ||Z||_{\alpha,1} + \frac{kC_\alpha (1-60)_4 e^\omega}{1-\alpha} (||\Delta\tilde{u}||_{\alpha,1} + ||Z||_{\alpha,1})$$

$$||Z||_{\alpha,1} \leqslant \frac{2C_\alpha (1-60)_4 e^\omega ||A_o^{-\alpha}||}{1-\alpha} (b_1+k) ||Z||_{\alpha,1} + \frac{2kC_\alpha (1-60)_4 e^\omega}{1-\alpha} ||\Delta\tilde{u}||_{\alpha,1} .$$

Par hypothèse, $\dfrac{4C_\alpha (1-60)_4 e^\omega ||A_o^{-\alpha}||}{1-\alpha} b_1 < 1$. Donc pour un k assez petit, $\dfrac{2C_\alpha (1-60)_4 e^\omega ||A_o^{-\alpha}||}{1-\alpha} (b_1+k) < 1$ et alors,

$$||Z||_{\alpha,1} \leqslant \frac{2C_\alpha (1-60)_4 e^\omega . k}{(1-\alpha) - 2C_\alpha (1-60)_4 e^\omega ||A_o^{-\alpha}|| (b_1+k)} ||\Delta\tilde{u}||_{\alpha,1}$$

Ceci achève la preuve de la différentiabilité de m par rapport à u_o. Il reste à voir que la différentielle de la fonction $u_o \curvearrowright m$ est continue par rapport à la condition initiale u_o. Pour cela, soient u_o et $\bar{u}_o$ des conditions initiales voisines de (u,m) et $(\bar{u},\bar{m})$ les solutions de l'équation $\tilde{E}(t,\lambda)$ correspondantes, nous posons alors

Preuve :

Soient u_o et $\bar{u}_o$ des conditions initiales voisines de (u,m) et $(\bar{u},\bar{m})$ les solutions de l'équation $\tilde{E}(t,\lambda)$ correspondantes, nous posons alors

$$a(t,\lambda) = g_u(t,\lambda,u)$$

$$\bar{a}(t,\lambda) = g_u(t,\lambda,\bar{u})$$

$$\Delta\tilde{u}(t,\lambda) = e^{\omega t}V(t,0,\lambda)\Delta u_o + \int_0^t [V(t,s,\lambda)a(s,\lambda)\Delta\tilde{u}(s)e^{\omega(t-s)} - \Delta\tilde{m}]ds$$

$$\Delta\tilde{\bar{u}}(t,\lambda) = e^{\omega t}V(t,0,\lambda)\Delta\bar{u}_o + \int_0^t [V(t,s,\lambda)\bar{a}(s,\lambda)\Delta\tilde{\bar{u}}(s)e^{\omega(t-s)} - \Delta\tilde{\bar{m}}]ds$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned}
\Delta\tilde{u} - \Delta\tilde{\bar{u}} &= e^{\omega t}V(t,0,\lambda)(\Delta u_o-\Delta\bar{u}_o) + \int_0^t V(t,s,\lambda)(a(s,\lambda)-\bar{a}(s,\lambda))\Delta\tilde{u}(s)e^{\omega(t-s)}ds \\
&\quad + \int_0^t V(t,s,\lambda)\bar{a}(s,\lambda)[\Delta\tilde{u}(s)-\Delta\tilde{\bar{u}}(s)]e^{\omega(t-s)} - t(\Delta\tilde{m}-\Delta\tilde{\bar{m}}) \\
\Delta\tilde{m} - \Delta\tilde{\bar{m}} &= (e^{\omega}V(1,0,\lambda)-I)(\Delta u_o-\Delta\bar{u}_o) + \int_0^1 V(1,\sigma,\lambda)(a(\sigma,\lambda)-\bar{a}(\sigma,\lambda))\Delta\tilde{u}(\sigma)e^{\omega(t-\sigma)}d\sigma \\
&\quad + \int_0^1 V(1,\sigma,\lambda)\bar{a}(\sigma,\lambda)(\Delta\tilde{u}(\sigma)-\Delta\tilde{\bar{u}}(\sigma))e^{\omega(1-\sigma)}d\sigma .
\end{aligned}\right.$$

Lorsque u_o et $\bar{u}_o$ sont suffisamment proches, a et $\bar{a}$ sont peut différents. On obtient alors une majoration pour $\Delta\tilde{u} - \Delta\tilde{\bar{u}}$. Ceci montre la continuité de la différentielle $u_o \curvearrowright \Delta\tilde{u}$ et donc celle de $u_o \curvearrowright \Delta\tilde{m}$.

(D) CONCLUSION.

Comme application à ce travail, on peut citer les équations du type

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}(t,\lambda,x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} a_i(t,\lambda,x) \frac{\partial v}{\partial x_i} + a(t,\lambda,x)v = \\ \qquad = g(t,\lambda,x,v, \dfrac{\partial v}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial v}{\partial x_m}) \\ v(t,\lambda,x) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \\ v(0,\lambda,x) = v_o(\lambda,x) \quad \text{sur} \quad \bar{\Omega} \end{cases}$$

où $x \in \Omega$ un domaine ouvert borné dans $\mathbb{C}^m$ de bord Γ, $t \in \mathbb{R}$, $v \in L_p(\Omega)$ et $\lambda \in \Lambda$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ autour de λ_o.

Les fonctions $a_{ik}(t,\lambda,x)$ sont continûment différentiables en x, périodiques en t, et toutes les fonctions $a_{ik}(t,\lambda,x)$, $\dfrac{\partial a_{ik}}{\partial x_i}(t,\lambda,x)$, $a_i(t,\lambda,x)$ et $a(t,\lambda,x)$ sont continues en toutes leurs variables pour $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \Lambda$ et $x \in \bar{\Omega}$ et qu'elles sont périodiques en t.

De plus, les $a_{ik}(t,\lambda,x)$, $a_i(t,\lambda,x)$ et $a(t,\lambda,x)$ sont continûment différentiables en λ, continues au sens de Hölder par rapport à t avec un exposant $\delta_1 > 0$ et une constante C ne dépendant pas de x. $A(t,\lambda)$ est un opérateur elliptique dont le domaine de définition B consiste en toutes les fonctions de $W_p^{(2)}(\Omega)$ qui s'annulent au bord, avec

$$a_{ik}(t,\lambda,x) = \overline{a_{ki}(t,\lambda,x)}$$

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}(t,\lambda,x)\gamma_i\bar{\gamma}_k \geq \alpha \sum_{i=1}^{m} |\gamma_i|^2 , \quad \alpha > 0, \text{ pour tout } \gamma_1,\ldots,\gamma_m.$$

et v_o qui est dans B est régulier en λ.

Finalement $g(t,\lambda,x,v,v_1,\ldots,v_m)$ est périodique en t, continue en toutes ses variables, pour $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \Lambda$, $x \in \bar{\Omega}$, v et v_i avec $||v|| < R$, $||v_i|| < R$, $i = 1,\ldots,m$ où R est un nombre positif. Elle est holdérienne par rapport à t avec un exposant $\delta_1 > 0$, continûment différentiable par rapport à λ,v,v_i, $i = 1,\ldots,m$.

De plus, on supposera qu'en λ_o, notre problème a une solution périodique.

B I B L I O G R A P H I E

[1] L. CESARI - *"Periodic solutions of non linear hyperbolic partial differential equations".* C.I.M.E., Bressanone dal 4 al 13 giugno 1972, pp. 22-32, Edizioni Cremonese, Roma (1973).

[2] L. CESARI - *"Functional analysis and differential equations".* Studies in Applied Mathematics, 5 (1969), pp. 143-155.

[3] A. FRIEDMAN - *"Partial differential equations".* Holt, Rinehart and Winston, New York, (1969).

[4] G. HECQUET - *"Solutions périodiques d'équations de type hyperbolique".* Annali di Matematica pura ed applicata (IV), Vol. CXVI, pp. 217-315 (1978).

[5] J. IZE - *"Periodic solutions of non linear parabolic equations".* Comm. in partial differential equations, 4 (12), 1299-1387 (1979).

[6] T. KATO - *"Perturbation theory for linear operators".* Springer Verlag, Berlin, (1966).

[7] P.E. SOBOLEVSKII - *"On equations of parabolic type in a Banach space".* Trudy Moscow Math. obšč (1961), English Transl. Amer. Math. Soc. Transl. Series 2, Vol. 49, (1965), 1-62.

R É S U M É

-=-=-=-=-=-

La première partie de ce travail concerne les équations linéaires d'évolution dépendant d'un paramètre dans le cas où les données sont périodiques ; en suivant les travaux de Sobolevskii, de Friedman et ceux de Ize, nous précisons les différentes estimations.

La suite de ce travail repose sur la technique de L. Cesari modifiant l'équation initiale par l'adjonction d'un terme correctif assurant la périodicité de la solution.

La dernière partie donne alors des conditions nécessaires permettant d'annuler ce terme correctif pour l'existence d'une solution périodique du problème initial.

MOTS CLÉS :

- EQUATION D'EVOLUTION.
- EQUATION PARABOLIQUE.
- EQUATION NON LINEAIRE.
- SOLUTION PERIODIQUE.