

Nos d'ordre : 1156

50376
1984
14

50376
1984
14

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

THÈSE

MATHEMATIQUES APPLIQUEES

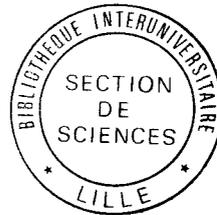
présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE 3^{ème} CYCLE

Mohamed Noureddine SENHADJI



**TRANSFORMATIONS DE SUITES
PAR COMPOSITION DE METHODES**

Thèse soutenue le 19 Avril 1984 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :	C.	BREZINSKI	Président
	B.	GERMAIN BONNE	Rapporteur
	S.	PASZKOWSKI	Examineur

P R O F E S S E U R S C L A S S E E X C E P T I O N N E L L E

M. CONSTANT Eugène	I.E.E.A.
M. FOURET René	Physique
M. GABILLARD Robert	I.E.E.A.
M. MONTREUIL Jean	Biologie
M. PARREAU Michel	Mathématiques
M. TRIDOT Gabriel	Chimie
M. VIVIER Emile	Biologie
M. WERTHEIMER Raymond	Physique

P R O F E S S E U R S l è r e c l a s s e

M. BACCHUS Pierre	Mathématiques
M. BEAUFILS Jean-Pierre (dét.)	Chimie
M. BIAYS Pierre	G.A.S.
M. BILLARD Jean (dét.)	Physique
M. BOILLY Bénoni	Biologie
M. BOIS Pierre	Mathématiques
M. BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M. BOUGHON Pierre	Mathématiques
M. BOURIQUET Robert	Biologie
M. BREZINSKI Claude	I.E.E.A.
M. CELET Paul	Sciences de la Terre
M. CHAMLEY Hervé	Biologie
M. COEURE Gérard	Mathématiques
M. CORDONNIER Vincent	I.E.E.A.
M. DEBOURSE Jean-Pierre	S.E.S.
M. DYMENT Arthur	Mathématiques

PROFESSEURS 1ère classe (suite)

M. ESCAIG Bertrand	Physique
M. FAURE Robert	Mathématiques
M. FOCT Jacques	Chimie
M. GRANELLE Jean-Jacques	S.E.S.
M. GRUSON Laurent	Mathématiques
M. GUILLAUME Jean	Biologie
M. HECTOR Joseph	Mathématiques
M. LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M. LACOSTE Louis	Biologie
M. LAVEINE Jean Pierre	Sciences de la Terre
M. LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique
M. LHOMME Jean	Chimie
M. LOMBARD Jacques	S.E.S.
M. LOUCHEUX Claude	Chimie
M. LUCQUIN Michel	Chimie
M. MIGEON Michel Recteur à Grenoble	E.U.D.I.L.
M. MIGNOT Fulbert (dét.)	Mathématiques
M. PAQUET Jacques	Sciences de la Terre
M. PROUVOST Jean	Sciences de la Terre
M. ROUSSEAU Jean-Paul	Biologie
M. SALMER Georges	I.E.E.A.
M. SEGUIER Guy	I.E.E.A.
M. SIMON Michel	S.E.S.
M. STANKIEWICZ François	S.E.S.
M. TILLIEU Jacques	Physique
M. VIDAL Pierre	I.E.E.A.
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mathématiques

P R O F E S S E U R S 2ème classe

M. ANTOINE Philippe	Mathématiques (Calais)
M. BART André	Biologie
Mme BATTIAU Yvonne	Géographie
M. BEGUIN Paul	Mathématiques
M. BELLET Jean	Physique
M. BERZIN Robert	Mathématiques
M. BKOUICHE Rudolphe	Mathématiques
M. BODARD Marcel	Biologie
M. BOSQ Denis	Mathématiques
M. BRASSELET Jean-Paul	Mathématiques
M. BRUYELLE Pierre	Géographie
M. CAPURON Alfred	Biologie
M. CARREZ Christian	I.E.E.A.
M. CAYATTE Jean-Louis	S.E.S.
M. CHAPOTON Alain	C.U.E.E.P.
M. COQUERY Jean-Marie	Biologie
Mme CORSIN Paule	Sciences de la Terre
M. CORTOIS Jean	Physique
M. COUTURIER Daniel	Chimie
M. CROSNIER Yves	I.E.E.A.
M. CURGY Jean-Jacques	Biologie
Mlle DACHARRY Monique	Géographie
M. DAUCHET Max	I.E.E.A.
M. DEBRABANT Pierre	E.U.D.I.L.
M. DEGAUQUE Pierre	I.E.E.A.
M. DELORME Pierre	Biologie
M. DELORME Robert	S.E.S.
M. DE MASSON D'AUTUME Antoine	S.E.S.
M. DEMUNTER Paul	C.U.E.E.P.

PROFESSEURS 2^{ème} classe (Suite 1)

M. DENEL Jacques	I.E.E.A.
M. DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques (Calais)
M ^{le} DESSAUX Odile	Chimie
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie
M. DHAINAUT André	Biologie
M ^{me} DHAINAUT Nicole	Biologie
M. DORMARD Serge	S.E.S.
M. DOUKHAN Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M. DUBOIS Henri	Physique
M. DUBRULLE Alain	Physique (Calais)
M. DUBUS Jean-Paul	I.E.E.A.
M. FAKIR Sabah	Mathématiques
M. FONTAINE Hubert	Physique
M. FOUQUART Yves	Physique
M. FRONTIER Serge	Biologie
M. GAMBLIN André	G.A.S.
M. GLORIEUX Pierre	Physique
M. GOBLOT Rémi	Mathématiques
M. GOSSELIN Gabriel (dét.)	S.E.S.
M. GOUDMAND Pierre	Chimie
M. GREGORY Pierre	I.P.A.
M. GREMY Jean-Paul	S.E.S.
M. GREVET Patrice	S.E.S.
M. GUILBAULT Pierre	Biologie
M. HENRY Jean-Pierre	E.U.D.I.L.
M. HERMAN Maurice	Physique
M. JACOB Gérard	I.E.E.A.
M. JACOB Pierre	Mathématiques
M. JEAN Raymond	Biologie
M. JOFFRE Patrick	I.P.A.

PROFESSEURS 2ème classe (suite 2)

M. JOURNEL Gérard	E.U.D.I.L.
M. KREMBEL Jean	Biologie
M. LANGRAND Claude	Mathématiques
M. LATTEUX Michel	I.E.E.A.
Mme LECLERCQ Ginette	Chimie
M. LEFEVRE Christian	Sciences de la Terre
Mlle LEGRAND Denise	Mathématiques
Mlle LEGRAND Solange	Mathématiques (Calais)
Mme LEHMANN Josiane	Mathématiques
M. LEMAIRE Jean	Physique
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique
M. LOSFELD Joseph	C.U.E.E.P.
M. LOUAGE Francis(dét.)	E.U.D.I.L.
M. MACKE Bruno	Physique
M. MAIZIERES Christian	I.E.E.A.
M. MESSELYN Jean	Physique
M. MESSERLIN Patrick	S.E.S.
M. MONTEL Marc	Physique
Mme MOUNIER Yvonne	Biologie
M. PARSY Fernand	Mathématiques
Mlle PAUPARDIN Colette	Biologie
M. PERROT Pierre	Chimie
M. PERTUZON Emile	Biologie
M. PONSOLLE Louis	Chimie
M. PORCHET Maurice	Biologie
M. POVY Lucien	E.U.D.I.L.
M. RACZY Ladislas	I.E.E.A.
M. RAOULT Jean François	Sciences de la Terre
M. RICHARD Alain	Biologie

PROFESSEURS 2ème Classe (suite 3)

M. RIETSCH François	E.U.D.I.L.
M. ROBINET Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M. ROGALSKI Marc	Mathématiques
M. ROY Jean-Claude	Biologie
M. SCHAMPS Joël	Physique
Mme SCHWARZBACH Yvette	Mathématiques
M. SLIWA Henri	Chimie
M. SOMME Jean	G.A.S.
Mlle SPIK Geneviève	Biologie
M. STAROSWIECKI Marcel	E.U.D.I.L.
M. STERBOUL François	E.U.D.I.L.
M. TAILLIEZ Roger	Institut Agricole
Mme TJOTTA Jacqueline (dét.)	Mathématiques
M. TOULOTTE Jean-Marc	I.E.E.A.
M. TURRELL Georges	Chimie
M. VANDORPE Bernard	E.U.D.I.L.
M. VAST Pierre	Chimie
M. VERBERT André	Biologie
M. VERNET Philippe	Biologie
M. WALLART Francis	Chimie
M. WARTEL Michel	Chimie
M. WATERLOT Michel	Sciences de la Terre
Mme ZINN JUSTIN Nicole	Mathématiques

CHARGES DE COURS

M. ADAM Michel S.E.S.

CHARGES DE CONFERENCES

M. BAF COP Joël I.P.A.

M. DUVEAU Jacques S.E.S.

M. HOF LACK Jean I.P.A.

M. LATOUCHE Serge S.E.S.

M. MALAUSSENA DE PERNO Jean-Louis S.E.S.

M. NAVARRE Christian I.P.A.

M. OPIGEZ Philippe S.E.S.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 0 : COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS DE SUITES

- I. Introduction
- II. Présentation des ensembles LIN et LOG ainsi que certains de leurs sous-ensembles.
- III. Quelques propriétés d'une transformation de suites
- IV. Composition de deux transformations de suites
- V. Conclusion

CHAPITRE I : CONDITIONNEMENT D'UNE SUITE CONVERGENTE POUR UNE TRANSFORMATION DE SUITES DONNÉE

- I. Introduction
- II. Présentation du procédé δ^2 d'Aitken
- III. Conditionnement d'une suite convergente pour une transformation de suites donnée
- IV. Conditionnement des suites de LIN pour le procédé δ^2 d'Aitken
- V. Recherche d'une transformation de LIN^+ dans LIN^- , synchrone au sens large et de conditionnement ≤ 1
 - V.a. Première tentative : Par une méthode d'Opfer.
 - V.b. Deuxième tentative : Par une méthode de Longman.
- VI. Transformation de préconditionnement
- VII. Un résultat négatif, théorème.

CHAPITRE II : COMPOSITION DE CERTAINS PROCÉDES DE SOMMATION ET DU PROCÉDE δ^2 D'AITKEN

- I. Introduction
- II. Première transformation envisagée : le procédé de Césaro
- III. Deuxième type de transformations envisagées : les procédés de sommation donnés par une matrice de Toeplitz dite à bande diagonale.
- IV. Troisième type de transformations envisagées : les procédés de sommation donnés par une matrice de Toeplitz triangulaire inférieure aux éléments non négatifs
- V. Les matrices d'extraction de sous-suites
- VI. Algorithme d'extraction de sous-suite P_1
- VII. Exemples numériques

CHAPITRE III : LES PROCÉDES D'EXTRACTION DE SOUS-SUITE, DE TYPE P_2

- I. Les différentes possibilités d'extraction
- II. Exemples numériques d'extractions de type P_2
- III. Une propriété du procédé δ^2 d'Aitken sur les ensembles L_α , $\alpha > 1$
- IV. Composition des procédés d'extraction de type P_2 et du procédé δ^2 d'Aitken itéré. Ensemble LW
- V. Suites et séries appartenant à LW
- VI. Exemples numériques
- VII. Théorème de synchronisation
- VIII. Accélération de la convergence des suites de point fixe.

IX. Exemples numériques

CHAPITRE IV : EXTRACTIONS DE SOUS-SUITES ET θ_2 -ALGORITHME

I. Introduction

II. Accélération de la sous-suite et de la suite initiale

III. Les ensembles $\widehat{\text{LOG2}}$, G_1 et \widetilde{G}_1

IV. Recherche de suites de LOGSF dont les suites extraites par le procédé P_2 appartiennent au sous-ensemble \widetilde{G}_1 de $\widehat{\text{LOG2}}$.

V. Etude numérique

VI. Conclusion

CHAPITRE 0

COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS DE SUITES

I. INTRODUCTION

Dans ce travail, nous étudions les nouvelles possibilités d'accélération de la convergence offertes par la composition de deux ou même de plusieurs transformations de suites, déjà connues ou non.

Cette idée n'est pas nouvelle en soi, puisque plusieurs auteurs ont fait certaines tentatives en ce sens là. WYNN [17] a proposé une méthode d'intercalation de suites convergentes, afin de transformer des suites monotones en suites alternées. LONGMAN [13] et VAN-WIJNGAARDEN [5] se sont intéressés à la même question. Leur motivation commune sera explicitée dans le Chapitre I. Le procédé standard, étudié par GERMAIN-BONNE [7] et par KOWALEWSKI [12] est une composition de deux transformations de suites. On peut aussi trouver beaucoup d'autres exemples dans la littérature.

L'idée essentielle qui anime ce travail possède le schéma suivant : Etant donné un ensemble S de suites convergentes, S accélérable par une transformation de suites A , et étant donné une autre transformation de suites T , préalable, peut-on trouver un nouvel ensemble de suites convergentes U , tel que $T : U \rightarrow S$, de sorte que la nouvelle transformation, obtenue par composition de A et de T , et que nous noterons $A \circ T$, accélère la convergence des suites de U ?

Notations, Définitions

On désignera par (S_n) , $n \geq 1$, une suite convergente de réels, de limite S^* .

Comme (S_n) , toutes les autres suites utilisées seront des suites de réels.

On notera par e_n l'erreur commise en prenant S_n comme approximation de S^* :

$$e_n = S_n - S^*.$$

(e_n) est la suite erreur

ΔS_n désignera l'écart entre S_n et S_{n+1} :

$$\Delta S_n = S_{n+1} - S_n.$$

II. PRESENTATION DES ENSEMBLES LIN ET LOG AINSI QUE CERTAINS DE LEURS SOUS-ENSEMBLES

a) Ensemble LIN des suites à convergence linéaire

Il est défini par :

$$* \text{ LIN} = \{(S_n) \text{ convergente, } S^* = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n : \exists \rho, -1 \leq \rho < 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho\}$$

- Quelques sous-ensembles de LIN

$$* \text{ LIN}^+ = \{(S_n) \text{ convergente, } S^* = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n : \exists \rho, 0 < \rho < 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho\}$$

LIN^+ est le sous-ensemble de LIN, formé des suites strictement monotones à partir d'un certain rang.

$$* \text{ LIN}^- = \{(S_n) \text{ convergente, } S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n : \exists \rho, -1 \leq \rho < 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho\}$$

LIN^- est quant à lui, le sous-ensemble de LIN, formé des suites alternées (c'est-à-dire $e_n \cdot e_{n+1} < 0$), et ce, à partir d'un certain rang.

$$* \text{ LIN}_1 = \{(S_n) \text{ convergente, } S^* = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n : \exists \rho, 0 \leq |\rho| < 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho\}$$

Par ailleurs, si α est une constante telle que $-1 \leq \alpha < 1$, alors

$$* \text{ LIN}(\alpha) = \{(S_n) \text{ convergente, } S^* = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \alpha\}$$

Remarque : (S_n) étant une suite appartenant à LIN, et S^* étant sa limite, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n}.$$

b) Ensemble LOG des suites à convergence logarithmique

$$\text{LOG} = \{(S_n) \text{ convergente, } S^* = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = 1\}$$

Toute suite $(S_n) \in \text{LOG}$ est à convergence lente. Effectivement, le rapport, pour n suffisamment grand, de deux erreurs successives e_n et e_{n+1} étant très voisin de 1, signifie en fait que ces deux erreurs sont presque égales, et donc que S_{n+1} reste encore trop proche de S_n , et trop loin de la limite S^* .

Les suites de LOG sont en général difficiles à accélérer. Il n'existe d'ailleurs aucun procédé capable d'accélérer la convergence de toutes les suites de LOG. La raison en est que LOG est rémanent (J.P. DELAHAYE et B. GERMAIN-BONNE [6]).

Un sous-ensemble important de LOG est le suivant :

$$\text{LOGSF} = \{(S_n) \in \text{LOG} \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1\}$$

LOGSF est aussi rémanent [6].

Propriété 1 : Toute suite de LOGSF est monotone strictement, au delà d'un certain rang.

KOWALEWSKI [12] exhibe une classe de sous-ensembles de LOGSF :

$$* L_\rho = \{(S_n) \in \text{LOG} : \exists \rho \in [0, 1] \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1}{\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1} = \rho\}$$

$$* L = \bigcup_{\rho \in [0, 1]} L_\rho$$

$$* \mathcal{L} = \bigcup_{\rho \in]0, 1]} L_\rho$$

$$* \mathcal{L} = \bigcup_{\rho \in]0, 1[} L_\rho$$

III. QUELQUES PROPRIETES D'UNE TRANSFORMATION DE SUITES

Soit E un ensemble de suites convergentes et P une transformation de suites, définie sur E.

Soient aussi $(S_n) \in E$, $S^* = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, et (t_n) la suite transformée de (S_n) par P.

On note alors $(t_n) = P(S_n)$.

Le procédé P est dit :

1. Exact sur E si, pour toute suite $(S_n) \in E$, il existe un rang N, $N \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall n \geq N, t_n = S^*$.

2. Régulier sur E si, pour toute suite (S_n) appartenant à E, $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = S^*$.

3. D'accélération de la convergence sur E si, pour toute suite (S_n) ,

$$(S_n) \in E, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n - S^*}{S_n - S^*} = 0.$$

- On dit plus simplement que P accélère E.

4. Synchrone sur E si, pour toute suite $(S_n) \in E$, il existe un réel K,

$$K \neq 0 \text{ tel que : } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n - S^*}{S_n - S^*} = K.$$

5. Synchrone au sens large sur E si, pour toute suite $(S_n), (S_n) \in E$,

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \exists N \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } \forall n \geq N, \left| \frac{t_n - S^*}{S_n - S^*} \right| \leq M.$$

Nous notons alors : P est S.L. sur E.

6. Ralentissant la convergence sur E si, pour toute suite $(S_n), (S_n) \in E$,

• P est régulier sur E

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - S^*}{t_n - S^*} = 0$$

• On dit plus simplement que P ralentit E.

Remarque : Les définitions 3, 4 et 5 entraînent nécessairement que le procédé P est régulier sur E.

Suites synchrones, définition :

Deux suites (u_n) et (v_n) convergentes, de limites respectives u^* et v^* sont dites synchrones si et seulement si il existe un réel K non nul tel que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n - u^*}{v_n - v^*} = K$$

Exemple : $u_n = \frac{1}{n}$, donc $u^* = 0$ et $v_n = \frac{n+1}{n^2}$, d'où $v^* = 0$, et ce, $\forall n \geq 1$.

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

IV. COMPOSITION DE DEUX PROCÉDES. DEFINITION

Soient U et S deux ensembles de suites convergentes, T un procédé régulier sur U qui transforme toute suite $(u_n) \in U$, (u_n) de limite S^* , en une suite $(S_n) \in S$, et A un procédé régulier sur S , qui transforme (S_n) en (t_n) .

$A \circ T$ désigne le procédé obtenu par composition des procédés T et A et est défini par

$$A \circ T(u_n) = (t_n).$$

Propriétés des compositions :

Faisons auparavant les remarques suivantes :

Soient E un ensemble de suites convergentes, et P un procédé sur E .

1. Si P est exact sur E , alors P accélère E .
2. Si P accélère E , alors P est S.L. sur E .
3. Si P est synchrone sur E , alors P est S.L. sur E .
4. Si P est S.L. sur E , alors P est régulier sur E .
5. Si P est ralentissant sur E , alors P n'est pas S.L. sur E .

Composition de deux procédés de même nature :

Il est aisé d'établir le tableau suivant :

T	A	A o T
Exact sur U	Exact sur S	Exact sur U
Accélère U	Accélère S	Accélère U
Synchrone sur U	Synchrone sur S	Synchrone sur U
S.L. sur U	S.L. sur S	S.L. sur U
Régulier sur U	Régulier sur S	Régulier sur U
Ralentissant sur U	Ralentissant sur S	Ralentissant sur U

Dans la composition de deux procédés de même nature est un procédé de même nature.

* Si le procédé A est exact sur S :

T	A	A o T
Exact sur U	Exact sur S	Exact sur U
Accélère U	Exact sur S	Exact sur U
Synchrone sur U	Exact sur S	Exact sur U
S.L. sur U	Exact sur S	Exact sur U
Ralentissant sur U	Exact sur S	Exact sur U
Régulier sur U	Exact sur S	Exact sur U

Nous constatons que l'hypothèse d'exactitude de A sur S est très forte.

En effet, quelque soit la nature de T, le procédé A o T est exact sur U .

Faisons maintenant une hypothèse moins forte sur A : A accélère S .

T	A	A o T
Exact sur U	Accélère S	Accélère U
Accélère U	Accélère S	Accélère U
Synchrone sur U	Accélère S	Accélère U
S.L. sur U	Accélère S	Accélère U
Ralentissant sur U	Accélère S	?
Régulier sur U	Accélère S	?

Nous ne pouvons rien conclure sur la nature de $A \circ T$, dans les deux derniers cas. Pour cela, il faudrait des hypothèses supplémentaires sur A et sur T .

L'hypothèse que nous nous donnerons en général est la suivante : la donnée d'un ensemble S de suites convergentes, et A un procédé d'accélération sur S , connu.

Nous souhaitons alors que $A \circ T$ accélère S , avec une hypothèse faible sur T .

Retenons alors la

Proposition 1 : Soient U et S deux ensembles de suites convergentes, T une transformation de suites, de U dans S , et A un procédé qui accélère S .

Si T est synchrone au sens large sur U , alors $A \circ T$ est un procédé qui, aussi, accélère U .

Preuve :

Soient $(u_n) \in U$, $(S_n) = T(u_n)$, $(S_n) \in S$, $S^* = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

T étant S.L. sur U , alors il existe $M \in \mathbb{R}^+$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$\forall n \geq N, \left| \frac{S_n - S^*}{u_n - S^*} \right| \leq M.$$

Le procédé $A \circ T$ accélère la convergence de (u_n) si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n - S^*}{u_n - S^*} = 0$.

$$\text{Or } \left| \frac{t_n - S^*}{u_n - S^*} \right| = \left| \frac{t_n - S^*}{S_n - S^*} \right| \cdot \left| \frac{S_n - S^*}{u_n - S^*} \right|$$

Le premier rapport du produit converge vers 0, le second est borné. Il est alors clair que ce produit converge vers 0.

c.q.f.d.

Cette démonstration nous permet de remarquer que l'hypothèse de régularité sur U est insuffisante. Par exemple, si T est un procédé ralentissant sur U , il est alors nécessaire d'avoir des informations supplémentaires sur T pour lever l'indétermination $0 \cdot \infty$.

Voici un résultat plus général, dont la démonstration est tout aussi aisée.

Propriété 2 : Soient U et S deux ensembles de suites convergentes, T une transformation de suites de U dans S , synchrone au sens large sur U , et A une autre transformation synchrone au sens large sur S . Alors $A \circ T$ est aussi synchrone au sens large sur U .

Considérons $I \subset [-1, +1[$, \dot{I} y étant un sous-ensemble quelconque, et E_1 le sous-ensemble de LIN construit comme suit :

$$E_1 = \{(S_n) \text{ convergente, } S^* = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n : \exists \rho, \rho \in \dot{I} \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho\}$$

Proposition 2 : Soient P un procédé synchrone sur E_1 , (S_n) une suite convergente, et $(t_n) = P(S_n)$.

$$(S_n) \in E_1 \iff (t_n) \in E_1$$

Preuve :

$$(\implies) : \text{ Soient } S^* = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \text{ et } \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*}, \ell \in \dot{I}$$

On a :

$$\frac{t_{n+1} - S^*}{t_n - S^*} = \frac{t_{n+1} - S^*}{S_{n+1} - S^*} \cdot \frac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*} \cdot \frac{S_n - S^*}{t_n - S^*};$$

P étant synchrones sur E, $\exists K \in \mathbb{R} - \{0\}$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n - S^*}{S_n - S^*} = K$.

Par suite, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{n+1} - S^*}{t_n - S^*} = K \cdot K \cdot K^{-1} = K$. Puisque $K \in \mathbb{I}$, alors $(t_n) \in E_1$.

La réciproque se démontre par interversion des rôles de (S_n) et (t_n) .

c.q.f.d.

Corollaire 1 : Un procédé synchrones sur LIN ne transforme aucune suite de LOG en suite de LIN, ni aucune suite de LIN en suite de LOG.

En effet, il suffit de lire la proposition avec $E_1 = \text{LIN}$.

Le cas logarithmique :

Proposition 3 : Soient $(S_n) \in \text{LOG}$, $S^* = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Alors toute suite synchrones avec (S_n) est aussi à convergence logarithmique.

Preuve : Soit (u_n) une suite telle qu'il existe $K \in \mathbb{R} - \{0\}$, $K = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n - S^*}{S_n - S^*}$

$$\text{On a } \frac{u_{n+1} - S^*}{u_n - S^*} = \frac{u_{n+1} - S^*}{S_{n+1} - S^*} \cdot \frac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*} \cdot \frac{S_n - S^*}{u_n - S^*}$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*} = 1$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1} - S^*}{u_n - S^*} = K \cdot 1 \cdot K^{-1} = 1$.

C'est-à-dire que $(u_n) \in \text{LOG}$.

c.q.f.d.

V. CONCLUSION

Un procédé synchrone sur un ensemble E ne modifie donc pas la "manière de converger" des suites de E .

Si nous prenons par exemple $S = \text{LIN}$ et pour A le procédé δ^2 d'Aitken, qui comme nous le verrons plus loin accélère LIN , et si T est une transformation synchrone sur un ensemble E , envoyant dans LIN , on ne peut alors espérer augmenter le domaine d'accélération de A , puisque le domaine d'accélération de $A \circ T$ sera encore LIN . En ce sens là, le cas où T est synchrone au sens large risque fort d'être plus intéressant.

CHAPITRE I

CONDITIONNEMENT D'UNE SUITE CONVERGENTE
POUR UNE TRANSFORMATION DE SUITES DONNEE

I. INTRODUCTION

Certains auteurs ont remarqué que les divers procédés d'accélération de la convergence donnent des résultats assez stables lorsque la suite initiale est alternée, et moins stables lorsqu'elle est monotone.

Diverses tentatives ont alors été effectuées pour rendre une suite alternée (Intercalation de Wynn [17], Longman [13], Van Wijgarden [5]).

Notre propos est de préciser cette notion de stabilité pour le procédé δ^2 d'Aitken, qui, on le sait, est le procédé classique accélérant LIN. Pour cela, on va définir auparavant, le conditionnement d'une suite convergente pour une transformation de suites régulière quelconque. Il s'agira, ensuite, d'établir rigoureusement que toute suite alternée de LIN est mieux conditionnée, pour le procédé d'Aitken, que toute suite monotone de LIN.

Cela nous amènera, par la suite, à définir la notion de "transformation de préconditionnement", c'est-à-dire une transformation de suites de LIN^+ dans LIN^- qui, composée avec le procédé d'Aitken nous permettrait d'accélérer la convergence des suites monotones et telle que ces suites aient un bon conditionnement pour ce nouveau procédé composé.

Nous démontrerons qu'une telle transformation n'existe pas, ce qui expliquera le constat cité plus haut.

II. PRESENTATION DU PROCEDE δ^2 D'AITKEN

Soit (S_n) une suite de limite S^* . On notera Δ_2 le procédé δ^2 d'Aitken.

Il est construit comme suit :

$(S_n) \xrightarrow{\Delta^2} \Delta_2(S_n) = (\epsilon_2^{(n)})$ où la quantité $\epsilon_2^{(n)}$ est donnée par

$$\epsilon_2^{(n)} = \begin{cases} S_n - \frac{\Delta S_n}{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1} & \text{si } \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \neq 1 \\ S_n & \text{si } \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1 \end{cases}$$

Il est clair que $(\varepsilon_2^{(n)})$ est défini pour tout $n \geq 1$

Propriété 1 : Le procédé δ^2 d'Aitken accélère la convergence de toute suite de LIN.

III. CONDITIONNEMENT D'UNE SUITE POUR UNE TRANSFORMATION DONNEE

Nous allons adopter cette définition maintenant classique du conditionnement : Il représentera une influence des erreurs absolues introduites dans les données sur le résultat recherché. Cette définition ne tient pas du tout compte des erreurs relatives, ce qui serait une autre définition du conditionnement, comme celle qu'a utilisée A.J. Geurts [8].

Hypothèses, définitions

Soient (x_n) une suite convergente, de limite x^* , et une transformation de suites définie par une application f , f définie sur \mathbb{R}^{p+1} , où $p \in \mathbb{N}$, et soit (y_n) la suite obtenue de (x_n) comme suit :

$$y_n = f(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+p}), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Hypothèses sur f :

(i) f est continûment différentiable au voisinage de tout $(p+1)$ uplet de la forme (x, x, \dots, x) , $x \in \mathbb{R}$.

(ii) f est différentiable en tout point $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p+1}) \in \mathbb{R}^{p+1}$.

- Appelons δ_{s_q} l'erreur commise sur le calcul de x_q , $q \geq 1$, et soit ε_{s_q} une majoration de $|\delta_{s_q}|$.

- Appelons δ_{y_n} l'erreur commise par conséquent sur le calcul de y_n , $n \geq 1$:

$$\delta_{y_n} = \delta_{x_n} \cdot f'_{x_1} + \delta_{x_{n+1}} \cdot f'_{x_2} + \dots + \delta_{x_{n+p}} \cdot f'_{x_{p+1}}$$

où f'_{x_i} , $1 \leq i \leq p+1$ est la dérivée partielle de f par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable et dont la valeur est calculée en un point voisin de $(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+p})$.

Une majoration de $|\delta_{y_n}|$ est la suivante :

$$|\delta_{y_n}| \leq \text{Max}(\epsilon_{x_n}, \dots, \epsilon_{x_{n+p}}) \cdot \sum_{j=1}^{p+1} |f'_{x_j}|.$$

La quantité $\sum_{j=1}^{p+1} |f'_{x_j}|$ est proportionnelle à la majoration et nous permettra, dans un premier temps, de définir le

- Conditionnement asymptotique de la suite (x_n) pour la transformation f .

Il est noté et donné par :

$$C_i((x_n), f) = \sum_{j=1}^{p+1} |f'_{x_j}|, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

. Les dérivées partielles f'_{x_j} étant calculées en un point du voisinage de $(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+p})$.

. L'hypothèse (1) permet alors de définir le

- Conditionnement de la suite (x_n) pour le procédé f .

Il est quant à lui noté et donné par :

$$C((x_n), f) = \sum_{j=1}^{p+1} |f'_{x_j}(x^*, \dots, x^*)|$$

IV. CONDITIONNEMENT DES SUITES DE LIN POUR LE PROCÉDÉ δ^2 D'AITKEN

Soit la suite (s_n) , de limite s^* , $(s_n) \in \text{LIN}$, et considérons l'application f définie sur \mathbb{R}^3 de la façon suivante :

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x - \frac{(y-x)^2}{z-2y+x} & \text{si } \frac{z-y}{y-x} \neq 1 & \text{(a)} \\ x & \text{si } \frac{z-y}{y-x} = 1 & \text{(b)} \end{cases}$$

Notre but étant l'étude de $f(s_n, s_{n+1}, s_{n+2})$, nous nous intéresserons uniquement au cas (a) ; d'autre part, l'application f n'étant pas définie en tout point (s^*, s^*, s^*) , nous poserons $f(x, x, x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$.

(Il est facile de constater que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} f(x, y, z) = 0$ lorsque x, y, z tendent

vers zéro de façon que : $\lim \frac{y}{x} = \lim \frac{z}{y} = \rho$). L'application f sera donc considérée comme continue en tout point de la forme (x, x, x) et pour toute suite $(s_n) \in \text{LIN}$ on aura : $\lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) = f(s^*, s^*, s^*) = s^*$.

Remarque : On a exactement, pour tout $n \geq 1$

$$\varepsilon_2^{(n)} : f(s_n, s_{n+1}, s_{n+2})$$

Etude du cas (a) :

$$\text{Notons : } \rho(x, y, z) = \frac{z-y}{y-x}$$

$$a(x, y, z) = (\rho(x, y, z) - 1)^{-1}$$

$$\text{Alors } f(x, y, z) : x - (y-x) a(x, y, z)$$

Le calcul des dérivées partielles donne :

- $f'_x = (1 + a(x, y, z))^2$
- $f'_y = -2(a(x, y, z) + a^2(x, y, z))$
- $f'_z = a^2(x, y, z)$

Tableau des variations des signes des dérivées partielles, par rapport à celui de $\rho(x, y, z)$:

$\rho(x, y, z)$	-1	0	+1
f'_x	+	+	+
f'_y	+	+	-
f'_z	+	+	+

Calcul de la quantité $|f'_x| + |f'_y| + |f'_z|$:

1er cas : $\rho(x, y, z) \in [-1, 0]$:

$$|f'_x| + |f'_y| + |f'_z| = f'_x + f'_y + f'_z = +1.$$

2ème cas : $\rho(x, y, z) \in]0, 1[$

$$\begin{aligned} |f'_x| + |f'_y| + |f'_z| &= f'_x - f'_y + f'_z = (1 + 2 a(x, y, z))^2 \\ &= \left(\frac{\rho(x, y, z) + 1}{\rho(x, y, z) - 1} \right)^2 \end{aligned}$$

De l'étude de ces deux cas, nous pouvons déduire :

• $\forall (x, y, z) \in [-1, +1[$,

$$|f'_x| + |f'_y| + |f'_z| = \frac{\rho^2(x, y, z) + 2|\rho(x, y, z)| + 1}{(\rho(x, y, z) - 1)^2}$$

Notons $\rho_n = \rho(S_n, S_{n+1}, S_{n+2})$

En conclusion, le point $\epsilon_2^{(n)}$ calculé à partir des trois points successifs S_n, S_{n+1}, S_{n+2} respectivement affectés des majorations d'erreurs $\epsilon_{S_n}, \epsilon_{S_{n+1}}, \epsilon_{S_{n+2}}$, admet l'erreur $\delta\epsilon_2^{(n)}$ qui peut être majorée comme suit :

$$|\delta\epsilon_2^{(n)}| \leq \text{Max}(\epsilon_{S_n}, \epsilon_{S_{n+1}}, \epsilon_{S_{n+2}}) \left[\frac{\rho_n^2 + 2|\rho_n| + 1}{(\rho_n - 1)^2} \right].$$

Cette majoration d'erreur est effectivement calculable, puisque :

$$\rho_n = \frac{S_{n+2} - S_{n+1}}{S_{n+1} - S_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Nous sommes maintenant en mesure de citer le résultat suivant, qui donne la valeur du conditionnement d'une suite de LIN pour le procédé d'Aitken.

Proposition 1 : Soient $(S_n) \in \text{LIN}$, de limite S^* , f l'application définissant le procédé δ^2 d'Aitken, et

$$\rho_n = \frac{S_{n+2} - S_{n+1}}{S_{n+1} - S_n}.$$

Alors

$$C_i((S_n), f) = \begin{cases} \frac{\rho_i^2 + 2|\rho_i| + 1}{(\rho_i - 1)^2} & \text{si } \rho_i \neq 1 \\ 1 & \text{si } \rho_i = 1 \end{cases}$$

et donc, en posant $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n$

$$C((S_n), f) = \frac{\rho^2 + 2|\rho| + 1}{(\rho - 1)^2}$$

Explicitons ce résultat pour les différentes suites de LIN, mais donnons auparavant la

Définition : Soient (u_n) et $(v_n) \in \text{LIN}$. La suite (u_n) est dite mieux conditionnée, pour le procédé δ^2 d'Aitken, que la suite (v_n) si :

$$C((u_n), f) < C((v_n), f)$$

f étant l'application qui définit le procédé δ^2 d'Aitken.

Remarque : De la proposition précédente, nous constatons immédiatement que

- $\forall (S_n) \in \text{LIN}^-$, $C((S_n), f) = +1$
- $\forall (S_n) \in \text{LIN}^+$, $C((S_n), f) > +1$

Les suites de LIN^- ont donc toutes un conditionnement égal à 1 sur LIN^- est supérieur à 1 sur LIN^+ . Ceci peut paraître surprenant, mais c'est non seulement une conséquence de notre définition du conditionnement, mais aussi du fait que le procédé d'Aitken peut être interprété comme une formule d'extrapolation par une exponentielle sur LIN^+ , et comme une formule d'interpolation sur

LIN^- . Pour cela, on peut se référer à [1].

Nous en concluons alors le

Théorème 1 : Toute suite de LIN^- est mieux conditionnée, pour le procédé δ^2 d'Aitken, que toute suite de LIN^+ .

Par ailleurs, la fonction donnée par $C(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$ et qui est strictement croissante sur l'intervalle $]0, 1[$ nous permet alors d'affirmer le

Théorème 2 : Soient (u_n) et $(v_n) \in LIN^+$, $u^* = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, $v^* = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$,

$$\rho_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1} - u^*}{u_n - u^*} \text{ et } \rho_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_{n+1} - v^*}{v_n - v^*}$$

Si $\rho_1 < \rho_2$, alors la suite (u_n) est mieux conditionnée, pour le procédé δ^2 d'Aitken, que la suite (v_n) .

Il faut donc remarquer, pour le procédé δ^2 d'Aitken, que le conditionnement d'une suite de LIN^+ s'accroît au fur et à mesure que sa constante asymptotique ρ s'accroît.

Donnons, à titre d'exemple, le conditionnement d'une suite de LIN^+ pour le procédé d'Aitken, relatif à certaines valeurs de ρ .

Soit $(S_n) \in LIN^+$.

ρ	$C((S_n), f)$
0.1	1.488
0.3	3.422
0.5	9
0.7	32.35
0.9	361
0.96	2401

Le théorème 1 nous amène ainsi à rechercher une transformation régulière de suites T de LIN^+ dans LIN^- , de sorte que le procédé composé $\Delta_2 \circ T$ accélère la convergence des suites de LIN^+ et leur assure aussi un conditionnement inférieur ou égal à 1.

On demandera alors à la transformation T d'être synchrone au sens large, ce qui est une condition suffisante pour l'accélération du procédé $\Delta_2 \circ T$.

Il est aussi naturel d'exiger des suites de LIN^+ d'avoir un conditionnement ≤ 1 pour le procédé T , car si tel n'est pas le cas, elles seraient alors mal conditionnées pour le procédé composé $\Delta_2 \circ T$, ce qui n'arrangerait rien.

Une telle transformation T sera définie plus loin comme étant une transformation de préconditionnement. Dans ce qui suit quelques tentatives seront faites en ce sens là. La première se basera sur une méthode d'Opfer [14], la seconde sur une méthode de Longman [13].

V. RECHERCHE D'UNE TRANSFORMATION DE LIN^+ DANS LIN^- , SYNCHRONE AU SENS LARGE, ET ASSURANT UN CONDITIONNEMENT ≤ 1

V.a. Une première tentative : Par une méthode d'Opfer [14]

Elle consiste à construire une transformation de suites, de LIN^+ dans LIN^- dont l'idée essentielle est une méthode d'intercalation de suites de monotonies opposées. En effet, Opfer [14], construit, à partir d'une suite de monotonie donnée, une autre de monotonie opposée.

Hypothèses

- Soit $(u_n) \in LIN^+$, de limite u^* , vérifiant en outre :

$$u_n > u_{n+1}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Ici la suite a été choisie décroissante, ce qui n'est point restrictif.

$\epsilon > 0$ étant choisi suffisamment petit, on sait alors qu'il existe un rang N_ϵ , $N_\epsilon \in \mathbb{N}^*$, tel que :

$$\forall n \geq N^*, 0 < \left| \frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n} - \rho \right| \leq \varepsilon,$$

$$\text{où } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n}; 0 < \rho < 1.$$

Posons $k = \rho^{1/2}$. Alors $0 < \rho < k < 1$ et il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$, tel

$$\text{que } \forall n \geq N, 0 < \frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n} < k < 1.$$

En choisissant par exemple $\varepsilon = \frac{k-\rho}{2}$, il suffit de prendre $N = N_\varepsilon$.

- Construisons $v_n = \frac{u_{n+1} - k u_n}{1-k}$, $n \geq 1$.

- Alors :

- * $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = u^*$

- * la suite (v_n) est monotone, croissante à partir d'un certain rang.

En effet, la suite (u_n) étant décroissante, alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta u_n < 0$

et de plus, $\forall n \geq N$, $0 < \frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n} < k$ implique que

$$\Delta u_{n+1} > k \cdot \Delta u_n, \forall n \geq N^*. \text{ Ce qui équivaut à } v_{n+1} > v_n, \forall n \geq N.$$

La suite (S_n) recherchée se construit par intercalation des deux suites (u_n) et (v_n) , comme suit :

$$S_{2n-1} = u_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$S_{2n} = v_n$$

La suite (S_n) est alternée à partir d'un certain rang, sa limite S^* est tel que $S^* = u^*$.

Proposition 2 : La suite (S_n) appartient à LIN^- .

Preuve : Pour cela, calculons $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$:

1^{er} Cas :

$$\frac{S_{2n+1} - S_{2n}}{S_{2n} - S_{2n-1}} = \frac{u_{n+1} - v_n}{v_n - u_n}$$

où $u_{n+1} - v_n = \frac{-k \cdot \Delta u_n}{1-k}$, et $v_n - u_n = \frac{\Delta u_n}{1-k}$

Ce qui donne :

$$\frac{S_{2n+1} - S_{2n}}{S_{2n} - S_{2n-1}} = -k, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

2^{ème} Cas :

$$\frac{S_{2n+2} - S_{2n+1}}{S_{2n+1} - S_{2n}} = \frac{v_{n+1} - u_{n+1}}{u_{n+1} - v_n} = -\frac{1}{k} \cdot \frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n}$$

Et donc,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{2n+2} - S_{2n+1}}{S_{2n+1} - S_{2n}} = -k, \quad (\text{où } -1 < -k < -\rho < 0)$$

En conclusion,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = -k, \quad \text{où } -1 < -k < -\rho < 0$$

c-à-d $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*} = -k$, en d'autres termes, $(S_n) \in \text{LIN}^-$.

c.q.f.d.

En pratique, il est coûteux de calculer $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n}$. On se propose

pour cela, de remplacer ρ par $\rho_n = \frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n}$.

Les v_n s'écriront ainsi :

$$v_n = \frac{u_{n+1} - \rho_n^{1/2} u_n}{1 - \rho_n^{1/2}} = u_n - \frac{\Delta u_n}{\left(\frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n} \right)^{1/2} - 1}$$

Il est à remarquer que cette nouvelle transformation accélère l'ensemble $L_{1/2}$ défini par Kowalewski [12].

Appliquons maintenant le procédé d'Aitken à la sous-suite de (s_n) :

$$\left. \begin{array}{l} S_n = u_n \\ S_{n+1} = v_n \\ S_{n+2} = u_{n+1} \end{array} \right\} \longrightarrow \varepsilon_2^{(n)} = u_n - \frac{v_n - u_n}{\frac{u_{n+1} - v_n}{v_n - u_n} - 1} = u_n - \frac{\Delta u_n}{\frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n} - 1}$$

C'est exactement le procédé d'Aitken appliqué à la suite initiale, ce qui permet d'affirmer que le conditionnement de (u_n) pour cette nouvelle transformation est supérieur à 1.

Remarque : Il n'y a pas uniquement le procédé accélérant $L_{1/2}$ qui puisse transformer toute suite monotone, en suite de monotonie opposée. Effectivement :

Proposition 3 : Soit $(u_n) \in \text{LIN}^+$, de limite u^* ,

Tout procédé $v_n = u_n - \frac{\Delta u_n}{\beta \left[\frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n} - 1 \right]}$, $0 < \beta < 1$, accélérant L_ρ , change

la monotonie de la suite (u_n) .

$$\text{En effet, } \Delta v_n = \Delta u_n - \Delta u_n \left[\frac{\frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n}}{\beta \left[\frac{\Delta u_{n+2}}{\Delta u_{n+1}} - 1 \right]} - \frac{1}{\beta \left[\frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n} - 1 \right]} \right]$$

Quand n est suffisamment grand, nous avons les estimations suivantes :

$$\frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n} \sim \rho, \text{ où } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n}$$

$$\text{et } \Delta v_n \sim \Delta u_n \left[1 - \left[\frac{\rho}{\beta(\rho-1)} + \frac{1}{\beta(\rho-1)} \right] \right]$$

i.e.

$$\Delta v_n \sim \Delta u_n \cdot \frac{\beta-1}{\beta}. \text{ Ce qui entraîne que}$$

$$\Delta v_n \cdot \Delta u_n \sim \Delta u_n^2 \cdot \frac{\beta-1}{\beta} < 0 \text{ puisque } 0 < \beta < 1.$$

La suite (v_n) a donc la monotonie opposée à celle de (u_n) .

De plus, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = u^*$.

Nous pouvons, comme précédemment, montrer que la suite (S_n) , obtenue par intercalation des suites (u_n) et (v_n) , appartient à LIN^- et que le nouveau procédé obtenu par application du δ^2 d'Aitken à (S_n) ne donne pas un conditionnement $C \leq 1$ à la suite initiale (u_n) . Nous pouvons nous en douter puisque le calcul des v_n fait intervenir une variante du procédé d'Aitken.

V.b. Une deuxième tentative : Par une méthode de Longman

Description du procédé L de Longman [13] :

Faisons les hypothèses suivantes sur une suite (u_n) convergente :

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a^*$
- (ii) (a_n) strictement croissante
- (iii) $0 < \dots < \Delta a_{n+1} < \Delta a_n < \dots < \Delta a_1 < a_1, n = 2, 3, 4, \dots$

Ecrivons a_n sous la forme suivante :

$$a_n = \Delta a_{n-1} + \Delta a_{n-2} + \dots + \Delta a_1 + a_1$$

Posons :

$$a(x) = a_1 \cdot x + \Delta a_1 \cdot x^2 + \dots + \Delta a_{n-1} \cdot x^n + \dots,$$

et considérons l'expression formelle :

$$\begin{aligned} \frac{a(x)}{1+x} &= (a_1 \cdot x + \Delta a_1 \cdot x^2 + \dots + \Delta a_n \cdot x^{n-1} + \dots)(1 - x + x^2 - x^2 + \dots) \\ &= (a_1 \cdot x + (\Delta a_1 - a_1) x^2 + (\Delta a_2 - \Delta a_1 + a_1) x^3 + \dots) \\ &= b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + b_3 \cdot x^3 + \dots \end{aligned}$$

où

$$b_1 = a_1 > 0$$

$$b_2 = \Delta a_1 - a_1 < 0$$

$$b_3 = \Delta a_2 - \Delta a_1 + a_1 > 0$$

⋮

$$b_n = \Delta a_{n-1} - \Delta a_{n-2} + \Delta a_{n-3} + \dots + (-1)^{n-1} a_1, \quad b_n \text{ a le signe de } (-1)^{n+1}$$

Remarquons que l'on peut déterminer les b_n par la relation de récurrence suivante :

$$b_1 = a_1$$

$$b_n = a_{n-1} - b_{n-1}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

Pour $x = 1$, on déduit :

$$\frac{1}{2} a^* = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots$$

Si on appelle $t_n = 2(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$, alors (t_n) converge vers a^* ; (t_n) est alternée, en effet :

$$\frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n} = \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} < 0, \text{ au vu du signe des } b_n.$$

Cependant, les exemples numériques réalisés avec les suites $a_n = 2 - \frac{1}{2^n}$,

$n = 1, 2, 3, \dots$ et $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{4}$, où $a_1 = 0.5$ montrent que le procédé composé $\Delta_2 \circ L$ n'apporte aucun gain. Une expérience identique faite avec la suite de LOG $a_n = 2 - \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, n'est pas plus concluante.

Expériences numériques :

Nous avons les tests numériques suivants :

La suite suivante appartient à $LIN(\frac{1}{2})$.

$a_n = 2 - \frac{1}{2^n}$, $a = 2$. Nous remarquons que la suite obtenue dans la

troisième colonne n'accélère pas la convergence de la suite initiale (a_n).

$$n \quad a_n \quad t_n = 2(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \quad \delta^2 \text{ d'Aitken appliqué à } (t_n)$$

1	.15000000000000000000+01	.30000000000000000000+01	.1809523809523810+01
2	.17500000000000000000+01	.50000000000000000000+00	.1906976744186050+01
3	.18750000000000000000+01	.32500000000000000000+01	.1952941176470590+01
4	.19375000000000000000+01	.62500000000000000000+00	.1976608187134500+01
5	.19687500000000000000+01	.33125000000000000000+01	.1988269794721410+01
6	.19843750000000000000+01	.65625000000000000000+00	.19941434846626650+01
7	.19921875000000000000+01	.33281250000000000000+01	.1997069597069600+01
8	.19960937500000000000+01	.66406250000000000000+00	.1998553335042110+01
9	.19980468750000000000+01	.33320312500000000000+01	.1999267533418790+01
10	.19990234375000000000+01	.66601562500000000000+00	.19996335800238030+01
11	.19995117187500000000+01	.33330078125000000000+01	.19998168917337240+01
12	.19997558593750000000+01	.66650390625000000000+00	.1999908447964110+01
13	.19998779296687500000+01	.33332519531250000000+01	.1999954223458190+01
14	.19999389648437500000+01	.66662597656250000000+00	.1999977111669060+01
15	.19999694824218700000+01	.33333129882812500000+01	.1999988555697290+01
16	.19999847412109400000+01	.66665649414062500000+00	.1999994277956830+01
17	.19999923766054700000+01	.33333282470703100000+01	.1999997138976370+01
18	.19999961853027300000+01	.66666412353515600000+00	.1999998569488760+01
19	.19999980926513700000+01	.33333320617675300000+01	.1999999284744220+01
20	.19999990463256800000+01	.66666603088378900000+00	.1999999642372140+01
21	.19999995231628400000+01	.33333333015441890000+01	.1999999821180060+01
22	.19999997615814200000+01	.66666650772094700000+00	.1999999910593030+01
23	.19999998807967100000+01	.33333332536604700000+01	.1999999955296520+01
24	.19999999403953600000+01	.66666662693023700000+00	.1999999977648260+01
25	.19999999701976800000+01	.33333333413465120000+01	.19999999882624130+01
26	.19999999950988400000+01	.66666665673255900000+00	.1999999994412060+01
27	.19999999992549420000+01	.33333333328366280000+01	.1999999997206030+01
28	.19999999996274710000+01	.66666666641831400000+00	.19999999996603026+01
29	.19999999998137350000+01	.33333333332691570000+01	(.199999999970710+01)
30	.199999999990680000+01	.66666666660045785000+00	
31	.20000000000465600000+01	.33333333334485590000+01	



Soit la suite de point fixe

$$\begin{cases} a_1 = 0.5 \\ a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n^2 + 2), n \geq 1 \end{cases}$$



$S^* = 0.585786437626905$

n	a_n	$t_n = 2(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$	δ^2 d'Aitken appliqué à t
1	.500000000000000000+00	.100000000000000000+01	.5706462212406310+00
2	.562500000000000000+00	.032500000000000000+00	.5814830328333640+00
3	.579101562500000000+00	.103320312500000000+01	.5845273661909090+00
4	.5838396549224850+00	.01344761848449710+00	.5854185770738520+00
5	.5852171856650020+00	.10355958186485030+01	.5856787036910920+00
6	.5856197885994160+00	.1352813907138000+00	.5857548897756330+00
7	.5857376341998060+00	.1036193877685810+01	.5857771975481640+00
8	.5857721440294960+00	.1353504103731800+00	.5857837313197000+00
9	.5857822517802280+00	.1036214091987280+01	.5857856449684140+00
10	.5857852114494440+00	.1353563309116120+00	.5857862054629700+00
11	.5857860784682170+00	.1036215826064820+01	.5857863696276670+00
12	.5857863324376510+00	.1353564388104790+00	.5857864177103920+00
13	.5857864068176890+00	.1036215974824900+01	.5857864317954930+00
14	.5857864286060950+00	.1353564823612910+00	.5857864359183380+00
15	.58578643709838920+00	.1036215987586490+01	.5857864371264770+00
16	.58578643762527840+00	.1353564841198750+00	.5857864374803330+00
17	.58578643764011700+00	.1036215988681260+01	.5857864375839750+00
18	.5857864376449600+00	.1353564844397270+00	.5857864376143310+00
19	.5857864376474540+00	.1036215990775100+01	.5857864376232220+00
20	.5857864376212080+00	.1353564864672340+00	.5857864376254260+00
21	.5857864376252360+00	.1036215988783240+01	.585786437625890+00
22	.5857864376264160+00	.1353564864695940+00	.5857864376268120+00
23	.5857864376267620+00	.1036215988783930+01	.5857864376268780+00
24	.5857864376268630+00	.1353564864697960+00	.5857864376269470+00
25	.5857864376268930+00	.1036215988783990+01	.5857864376269630+00
26	.5857864376269010+00	.1353564864698140+00	.5857864376269680+00
27	.5857864376269040+00	.1036215988783990+01	.5857864376269050+00
28	.5857864376269050+00	.1353564864698150+00	.5857864376269050+00

La suite obtenue à la 3^{ème} colonne n'accélère pas la convergence de (a_n) .

Cette suite appartient à LOGSF. Elle est définie par

$$a_n = 2 - \frac{1}{n}, \quad n \geq 1. \quad a^* = 2$$



BU
LILLE

$$a_n \quad t_n = 2(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

2 d'Aitken appliqué à (t_n)

1	.100000000000000000+01	.200000000000000000+01	.1571428571428570+01
2	.150000000000000000+01	.100000000000000000+01	.1711111111111110+01
3	.1666666666666670+01	.2333333333333330+01	.1773972602739730+01
4	.175000000000000000+01	.1166666666666670+01	.1817117117117120+01
5	.180000000000000000+01	.2433333333333330+01	.1845006485084310+01
6	.1833333333333330+01	.1233333333333330+01	.1866201070688980+01
7	.1857142857142860+01	.2400952380952380+01	.1881865760224450+01
8	.187500000000000000+01	.1269047619047620+01	.1894494680486940+01
9	.188888888888890+01	.2508730158730160+01	.1904511764705860+01
10	.190000000000000000+01	.1291269841269840+01	.1912902154735770+01
11	.19090909090910+01	.2526911976911980+01	.1919855040862390+01
12	.1916666666666670+01	.1306421356421360+01	.1925836469838590+01
13	.1923076923076920+01	.2539732089732490+01	.19309431412688520+01
14	.1928571428571430+01	.1317410367410370+01	.1935423737369700+01
15	.1933333333333330+01	.2549250299256300+01	.1939332720222580+01
16	.193750000000000000+01	.1325743700743700+01	.1942814807350810+01
17	.1941176470588240+01	.2556609240432770+01	.1945902949507820+01
18	.1944444444444440+01	.1332279648456120+01	.1948687031279240+01
19	.1947368421052630+01	.2562457193649140+01	.1951181666667230+01
20	.195000000000000000+01	.1337542806350860+01	.195346511623540+01
21	.1952380952380950+01	.2567219098411050+01	.1955532005692440+01
22	.1954545454545450+01	.1341871810679860+01	.1957428873056710+01
23	.1956521739130430+01	.2571171667581010+01	.1959165535040530+01
24	.1958333333333330+01	.1345494999085660+01	.1960770194890930+01
25	.196000000000000000+01	.2574505000914340+01	.1962249885545000+01
26	.1961538461538460+01	.1348571922162580+01	.196362505134920+01
27	.1962962962962960+01	.2577354003763350+01	.1964900859492430+01
28	.1964285714285710+01	.1351217424808030+01	.1966092492203060+01
29	.1965517241379310+01	.2579817057950540+01	.1967203836069240+01
30	.1966666666666670+01	.1353516275382800+01	.1968246361689410+01
31	.1967741935483870+01	.2581967595584950+01	.1969223119537810+01
32	.196875000000000000+01	.1355532404415050+01	.1970142926077860+01
33	.1969696969696970+01	.25838661534978890+01	.1971008115691340+01
34	.1970588235294120+01	.1357314935609350+01	.1971825053410180+01
35	.1971428571428570+01	.2585542207247790+01	.1972597367993980+01
36	.1972222222222220+01	.1358902237196650+01	.1973326797813640+01
37	.1972972972972970+01	.2587045708749290+01	.1974021406965810+01
38	.1973684210526320+01	.1360324712303330+01	.1974679654567750+01
39	.1974358974358970+01	.2588393236414610+01	.1975304720568930+01
40	.197500000000000000+01	.1361606763585390+01	.1975930253519320+01

Nous remarquons ici aussi que la suite obtenue à la 3^{ème} colonne

n'accélère pas la convergence de la suite initiale (a_n) .

Dans ce qui suit, nous allons montrer qu'une transformation dite de préconditionnement de LIN^+ dans LIN^- n'existe pas.

VI. TRANSFORMATION DE PRECONDITIONNEMENT

a) Conditionnement des suites de LIN et accélération de la convergence

- Soit $(S_n) \in LIN$, de limite S^* , et considérons la transformation suivante :

$$t_n = S_n + \phi(S_n, S_{n+1}, S_{n+2}), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- Remarque 1 : Tout ce qui suit est valable pour $t_n = S_n + \phi(S_n, S_{n+1}, \dots, S_{n+p})$, $p \geq 2$.

- Remarque 2 : Une application $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est dite homogène d'ordre q , $q > 0$, si $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$Q(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^q \phi(x, y, z)$$

Hypothèses

H(i) : ϕ différentiable en tout point, continuellement différentiable en $(0, 0, 0)$

H(ii) : ϕ homogène d'ordre q , $q > 0$

H(iii) : $\phi(x, x, x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

* L'hypothèse (iii) assure la régularité du procédé.

- Remarque 3 : (t_n) accélère la convergence de (S_n) ssi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi(S_n, S_{n+1}, S_{n+2})}{S_n - S^*} = -1$.

Introduisons maintenant l'application suivante :

$$f(x, y, z) = x + \phi(x, y, z)$$

On a alors $t_n = f(S_n, S_{n+1}, S_{n+2})$

Relation entre les dérivées partielles de ϕ

L'application ϕ étant homogène d'ordre q , l'identité d'Euler donne en tout point de la forme (x, y, z) :

$$x \cdot \phi'_x + y \cdot \phi'_y + z \cdot \phi'_z = q \cdot \phi(x, y, z)$$

Lemme 1 : En tout point de la forme (x, x, x) , $x \in \mathbb{R}$, les dérivées partielles de f vérifient :

$$f'_x + f'_y + f'_z = +1.$$

En effet, d'après l'identité d'Euler et l'hypothèse (iii) :

$$x \cdot \phi'_x(x, x, x) + x \cdot \phi'_y(x, x, x) + x \cdot \phi'_z(x, x, x) = q \cdot \phi(x, x, x) = 0$$

C'est-à-dire $x[\phi'_x(x, x, x) + \phi'_y(x, x, x) + \phi'_z(x, x, x)] = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \neq 0$, on déduit que

$$\phi'_x(x, x, x) + \phi'_y(x, x, x) + \phi'_z(x, x, x) = 0$$

Puisque ϕ est continuellement différentiable au point $(0, 0, 0)$, alors

$$\phi'_x(0, 0, 0) + \phi'_y(0, 0, 0) + \phi'_z(0, 0, 0) = 0$$

Par ailleurs, $f'_x(x, x, x) = 1 + \phi'_x(x, x, x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Donc, en tout point de la forme (x, x, x) , $x \in \mathbb{R}$,

$$f'_x(x, x, x) + f'_y(x, x, x) + f'_z(x, x, x) = 1 + \phi'_x(x, x, x) + \phi'_y(x, x, x) + \phi'_z(x, x, x)$$

Lemme 2 : Soient $(S_n) \in \text{LIN}$, de limite S^* , et $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*}$.

f définit un procédé qui accélère la suite (S_n) ssi $f'_x + \rho f'_y + \rho^2 f'_z = 0$,

chacune des dérivées partielles étant calculée au point (S^*, S^*, S^*) .

Preuve : Montrons plutôt que

f définit un procédé qui accélère la suite (S_n) ssi $\phi'_x + \rho\phi'_y + \rho^2\phi'_z = 0$, au point (S^*, S^*, S^*) .

En effet, au voisinage du point (S^*, S^*, S^*) on a :

$$\begin{aligned} \phi(S_n, S_{n+1}, S_{n+2}) &= \phi(S^*, S^*, S^*) + (S_n - S^*) \cdot \phi'_x(S_n, S_{n+1}, S_{n+2}) + \\ &\quad (S_{n+1} - S^*) \cdot \phi'_y(S_n, S_{n+1}, S_{n+2}) + (S_{n+2} - S^*) \cdot \phi'_z(S_n, S_{n+1}, S_{n+2}) \end{aligned}$$

D'après (iii), $\phi(S^*, S^*, S^*) = 0$, et la remarque 3 se traduit par :

$$f \text{ défini un procédé qui accélère } (S_n) \text{ ssi } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\phi'_x + \frac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*} \phi'_y + \frac{S_{n+2} - S^*}{S_n - S^*} \phi'_z \right] = -1,$$

chacune des dérivées partielles de ϕ étant calculée au point (S_n, S_{n+1}, S_{n+2}) .

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*} = \rho \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+2} - S^*}{S_n - S^*} = \rho^2 \text{ et donc :}$$

f défini un procédé qui accélère la suite (S_n) ssi $\phi'_x + \rho\phi'_y + \rho^2\phi'_z = -1$, où $\phi'_x, \phi'_y, \phi'_z$ sont calculées au point (S^*, S^*, S^*) .

c.q.f.d.

Lemme 3 : Soient $(S_n) \in \text{LIN}$, de limite S^* , et f définissant un procédé qui accélère la convergence de (S_n) . Alors

$C((S_n), f) \leq 1$ ssi $f'_x \geq 0, f'_y \geq 0$ et $f'_z \geq 0$, ces dérivées partielles étant calculées au point (S^*, S^*, S^*) , ces trois dérivées ne pouvant s'annuler en même temps.

Preuve : Toutes les dérivées partielles sont supposées être calculées au point (S^*, S^*, S^*) .

\Rightarrow : hypothèse : $C((S_n), f) \leq 1$.

Supposons par l'absurde que $f'_x \geq 0, f'_y < 0$ et $f'_z \geq 0$. Ceci est valable pour les autres cas de figure (par exemple $f'_x < 0, f'_y < 0$ et $f'_z \geq 0$).

$$\text{Alors } C((S_n), f) = f'_x - f'_y + f'_z = f'_x + f'_y + f'_z - 2f'_y.$$

En vertu du lemme 1, et puisque $f'_y < 0$ entraîne que $-2f'_y > 0$, alors

$C((S_n), f) > 1$, ce qui contredit l'hypothèse.

\Leftarrow : Réciproquement, chacune des dérivées partielles étant positive,

$C((S_n), f) = f'_x + f'_y + f'_z = +1$, et ce, d'après le lemme 1.

c.q.f.d.

Ces trois lemmes permettent d'établir le résultat suivant :

Proposition 4 : Soit $(S_n) \in \text{LIN}^+$, de limite S^*

Si, pour une transformation de suites définie par f , $C((S_n), f) \leq 1$, alors f ne définit pas un procédé d'accélération sur LIN^+ .

Démonstration : Soit $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*}$, $\rho \in]0, 1[$

Alors, d'après le lemme 3, $f'_x \geq 0$, $f'_y \geq 0$ et $f'_z \geq 0$, ces dérivées étant calculées au point (S^*, S^*, S^*) .

Par suite $\rho \cdot f'_y \geq 0$ et $\rho^2 \cdot f'_z \geq 0$, d'où :

$$f'_x + \rho f'_y + \rho^2 \cdot f'_z \geq \rho^2 [f'_x + f'_y + f'_z] = \rho^2 > 0.$$

Du lemme 2, on déduit que f ne saurait définir un procédé accélérant la convergence de (S_n) .

c.q.f.d.

En conclusion, nous ne pouvons construire aucune transformation qui permet à la fois un bon conditionnement ($C \leq 1$) aux suites de LIN^+ et l'accélération de leur convergence. Cela va nous permettre de démontrer qu'une bonne transformation de préconditionnement n'existe pas. Mais donnons d'abord une définition précise de cette notion :

Définition : Soit $T : U \rightarrow S$ la transformation régulière, qui à la suite $(u_n) \in U$ associe la suite $(s_n) \in S$. $s^* = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$. Supposons que T est définie par l'appli-

cation f , $f(x_1, x_2, \dots, x_p) = x + \phi(x_1, x_2, \dots, x_p)$ et ϕ vérifiant :

- (i) ϕ différentiable en tout point, continuellement différentiable en $(0, \dots, 0)$
- (ii) ϕ homogène d'ordre q , $q > 0$.
- (iii) $\phi(x, x, \dots, x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

La transformation T est dite de préconditionnement de U dans S ssi :

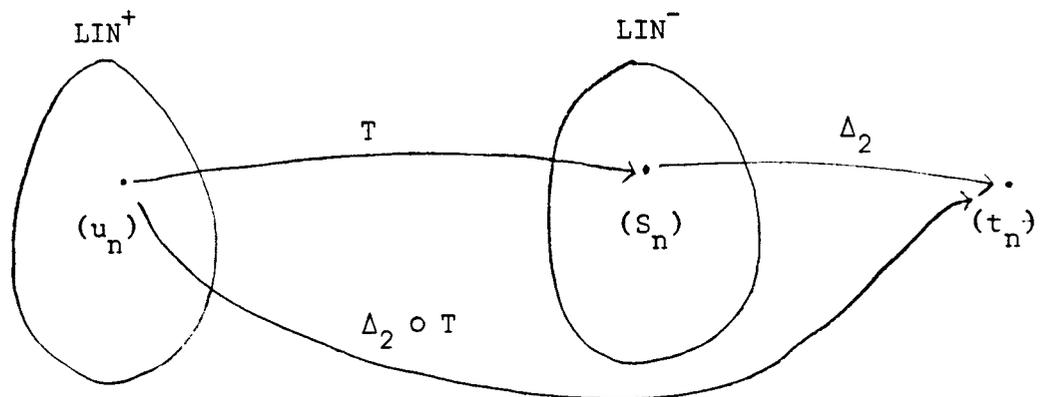
(a) T est synchrone au sens large sur U

i.e. $\forall (u_n) \in U$, $\exists M \in \mathbb{R}^+$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \frac{s_n - s^*}{u_n - s^*} \right| \leq M$

et

(b) $C((u_n), T) \leq 1$.

Considérons le schéma suivant :



Supposons que T est définie par l'application $g(x_1, \dots, x_\ell)$ $\ell \geq 3$ et que le procédé Δ_2 d'Aitken est défini par l'application $f(y_1, y_2, y_3)$ définie au Chapitre 1, § ,

- $(u_n) \in LIN^+$
- $(s_n) = T(u_n) \in LIN^-$
- $(t_n) = \Delta_2(s_n) = \Delta_2 \circ T(u_n)$

Appelons h l'application qui définit la transformation composée $\Delta_2 \circ T$.

Considérons l'élément t_r , $r \geq 1$, de la suite (t_n) . Alors

$$t_r = f(S_r, S_{r+1}, S_{r+2})$$

- or • $S_r = g(u_r, u_{r+1}, \dots, u_{r+l-1})$
- $S_{r+1} = g(u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_{r+l})$
 - $S_{r+2} = g(u_{r+2}, u_{r+3}, \dots, u_{r+l+1})$

Par conséquent, le calcul de t_r nécessite la connaissance des éléments $u_r, u_{r+1}, \dots, u_{r+l+1}$, donc de $l+2$ termes successifs de la suite (u_n) . Définissons donc l'application h sur \mathbb{R}^{l+2} par :

$$t_r = h(u_r, u_{r+1}, \dots, u_{r+l+1}), \quad r \geq 1$$

$$= f \circ \bar{g}(u_r, u_{r+1}, \dots, u_{r+l+1}), \quad \text{où}$$

$\bar{g} : \mathbb{R}^{l+2} \rightarrow \mathbb{R}^3$ est définie comme suit :

$$\bar{g}(u_r, u_{r+1}, \dots, u_{r+l+1}) = (\bar{g}_1(u_r, \dots, u_{r+l+1}), \bar{g}_2(u_r, \dots, u_{r+l+1}), \bar{g}_3(u_r, \dots, u_{r+l+1}))$$

avec $\bar{g}_i(u_r, u_{r+1}, \dots, u_{r+l+1}) = g(u_{r+i-1}, \dots, u_{r+l+i-2})$, $i = 1, 2, 3$.

Cela va nous permettre de prouver le lemme suivant :

Lemme 4 : Soient $(u_n) \in \text{LIN}^+$ et $T : \text{LIN}^+ \rightarrow \text{LIN}^-$, une transformation régulière de suites.

Si $C((u_n), T) \leq 1$ alors $C((u_n), \Delta_2 \circ T) \leq 1$.

Il suffit, d'après le lemme 3, de montrer que pour une suite $(u_n) \in \text{LIN}^+$, de limite S^* , nous avons :

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(S^*, \dots, S^*) \geq 0, \quad j = 1, \dots, l+2 \text{ et}$$

$\frac{\partial h}{\partial x_j}$ désignant la dérivée partielle de h par rapport à la $j^{\text{ème}}$ variable

On supposera que toutes les dérivées partielles sont calculées en (S^*, S^*, \dots, S^*) .

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial h}{\partial x_j} \right)_{j=1, \ell+2} &= \left(\frac{\partial f \circ \bar{y}}{\partial x_j} \right)_{j=1, \ell+2} = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}(S^*, S^*, S^*), \frac{\partial f}{\partial y_2}(S^*, S^*, S^*), \frac{\partial f}{\partial y_3}(S^*, S^*, S^*) \right) \times \\ &\times \left(\frac{\partial \bar{g}_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1, \ell+2}} \end{aligned} \quad (1)$$

où pour $i = 1, 2, 3$ et $j = 1, \dots, \ell+2$,

$$\frac{\partial \bar{g}_i}{\partial x_j} = \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x_j} & \text{si } j = i, \dots, \ell+i-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarquons que :

$\frac{\partial \bar{g}_i}{\partial x_j}$ est calculée au $(\ell+2)$ uplet (S^*, \dots, S^*) et $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ est calculée au ℓ -uplet

(S^*, \dots, S^*) .

Pour $(S_n) \in \text{LIN}^-$, et f l'application qui définit le procédé d'Aitken, on sait que $C((S_n), f) = 1$. Alors, d'après le lemme 3,

$$\frac{\partial f}{\partial y_i}(S^*, S^*, S^*) \geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Par hypothèse, pour $(u_n) \in \text{LIN}^+$, $C((u_n), g) \leq 1$. Il est alors clair que pour tout $j = 1, \dots, \ell+2$,

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(S^*, \dots, S^*) \geq 0$$

Il en découle que :

$$\forall i = 1, 2, 3, \forall j = 1, 2, \dots, \ell+2, \frac{\partial \bar{g}_i}{\partial x_j}(S^*, \dots, S^*) \geq 0 \quad (3)$$

(2) et (3) montrent que (1) est un produit de deux matrices formées d'éléments tous positifs ou nuls. Il s'ensuit que

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(S^*, \dots, S^*) \geq 0 \quad j = 1, \dots, \ell+2.$$

Afin de bien compléter cette démonstration faisons les remarques suivantes

Remarque 1 : Les applications f et g étant homogènes d'ordres respectivement q_1 et q_2 alors h est homogène d'ordre $q_1 \cdot q_2$.

Remarque 2 : Sachant que $\sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial y_i}(S^*, S^*, S^*) = 1$ et que $\sum_{j=1}^{\ell+2} \frac{\partial \bar{g}_i}{\partial x_j}(S^*, \dots, S^*) = 1$,

$i = 1, 2, 3$, il est alors aisé de vérifier que $\sum_{j=1}^{\ell+2} \frac{\partial h}{\partial x_i} = 1$.

Théorème 3 : Il n'existe pas de transformation de préconditionnement de LIN^+ dans LIN^- .

Démonstration : Supposons, par l'absurde, qu'il existe une transformation de préconditionnement, notée T , de LIN^+ dans LIN^- .

T étant donc synchrones au sens large, et le procédé Δ_2 accélérant LIN^- , alors, d'après la proposition 1 (Chapitre 0), le procédé composé $\Delta_2 \circ T$ accélère LIN^+ . D'autre part, d'après le lemme 4, pour toute suite (u_n) , $(u_n) \in \text{LIN}^+$, on a $C((u_n), \Delta_2 \circ T) \leq 1$. Mais, d'après la proposition 4, le procédé $\Delta_2 \circ T$ ne peut alors accélérer la convergence de (u_n) , d'où la contradiction.

c.q.f.d.

** CHAPITRE II **

COMPOSITION DE CERTAINS PROCESSES DE
SOMMATION ET DU PROCESSE δ^2 D'AITKEN

I. INTRODUCTION

L'ensemble LIN étant accéléré par le procédé Δ_2 d'Aitken, peut-on trouver une transformation de suites, préalable, plus précisément un procédé de sommation que nous définirons plus bas, noté P.S, P.S envoyant nécessairement d'un sous-ensemble de LOG dans LIN et tel que le procédé composé $\Delta_2 \circ$ P.S puisse accélérer ce sous-ensemble de LOG ?

Théorème 1 : Soit $(S_n)_{n \geq 1}$ une suite convergente, et soit $(t_n)_{n \geq 1}$ la suite déduite de $(S_n)_{n \geq 1}$ par :

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

où $A = (a_{n,k})_{\substack{n \geq 1 \\ k \geq 1}}$ est un tableau infini. Une condition nécessaire et suffisante

pour que la suite $(t_n)_{n \geq 1}$ converge vers la même limite que $(S_n)_{n \geq 1}$, et ceci quelque soit $(S_n)_{n \geq 1}$, est que les trois conditions suivantes soient vérifiées :

- (i) $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < M, \forall n \in \mathbb{N}, M \in \mathbb{R}^+$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0, k = 1, 2, 3, \dots$
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$

Dans ce cas, on dit que A définit un procédé régulier de sommation. On dira plus simplement que le tableau A définit une matrice de Toeplitz.

II. PREMIERE TRANSFORMATION ENVISAGEE : LE PROCEDE DE CESARO

Le tableau A est donné par

$$\left. \begin{array}{l} a_{ij} = \frac{1}{i} \quad j = 1, \dots, i \\ a_{ij} = 0 \quad j > i \end{array} \right\} i = 1, 2, 3, \dots$$

$(S_n)_{n \geq 1}$ étant une suite convergente de limite S^* , la suite $(t_n)_{n \geq 1}$ est alors donnée par :

$$t_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Remarques : - La matrice A est "triangulaire inférieure".
- Les éléments de A sont tous positifs ou nuls.

Le procédé de Césaro transforme-t-il certaines suites de LOG en suite LIN ? Avant d'y apporter une réponse, il est utile de faire le rappel suivant :

$$\text{LIN1} = \{(S_n) \text{ convergente, } S^* = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n : \exists \rho \in]-1, +1[\text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho\}$$

Rappelons aussi la propriété suivante :

Propriété 1 : Soit (S_n) une suite convergente, de limite S^* , et $\rho \in]-1, +1[$.

Alors

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} \Leftrightarrow \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}.$$

• Le cas $\rho = -1$ est épineux. Tout ce que nous pouvons dire est que, pour une suite (S_n) convergente, de limite S^* ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = -1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = -1.$$

Lemme 1 : Soit (S_n) une suite convergente, et (t_n) la suite obtenue de (S_n) par le procédé de Césaro. On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \in]-1, +1[\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n} \in]-1, +1[.$$

Preuve : De la définition de la suite (t_n) , nous avons :

$$nt_n = S_1 + S_2 + \dots + S_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

d'où $S_{n+1} = (n+1)t_{n+1} - nt_n = n\Delta t_n + t_{n+1}$,
ce qui donne :

$$\Delta t_n = \frac{1}{n} (S_{n+1} - t_{n+1})$$

$$\text{Calcul du rapport } \frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n} :$$

$$\frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{S_{n+2} - t_{n+2}}{S_{n+1} - t_{n+1}}$$

$$\text{Or } S_{n+1} - t_{n+1} = \frac{n \cdot S_{n+1} - \sum_{i=1}^n S_i}{n+1}, \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} \frac{S_{n+2} - t_{n+2}}{S_{n+1} - t_{n+1}} &= \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{(n+1) S_{n+2} - \sum_{i=1}^{n+1} S_i}{n \cdot S_{n+1} - \sum_{i=1}^n S_i} \\ &= \frac{n+1}{n+2} \frac{(S_{n+2} - S_{n+1}) + (S_{n+2} - S_n) + \dots + (S_{n+2} - S_1)}{(S_{n+1} - S_n) + \dots + (S_{n+1} - S_1)} \\ &= \frac{n+1}{n+2} \frac{(n+1) \Delta S_{n+1} + n \Delta S_n + \dots + 2 \Delta S_2 + S_1}{n \Delta S_n + \dots + 2 \Delta S_2 + \Delta S_1} \end{aligned}$$

Posons, pour tout $n \geq 1$: $U_n = n \Delta S_n + \dots + 2 \Delta S_2 + \Delta S_1$.

Il est alors clair que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n}.$$

$$\text{Appelons } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n}.$$

D'après la propriété précédente, si $\rho \in]-1, +1[$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta U_{n+1}}{\Delta U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \rho$$

Mais justement, $\frac{\Delta U_{n+1}}{\Delta U_n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}$ implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta U_{n+1}}{\Delta U_n}.$$

Le lemme 1 est alors démontré, et comme corollaire, nous avons le

Lemme 2 : Soit (s_n) une suite convergente, et (t_n) la suite obtenue de par le procédé de Césaro. On a

$$(s_n) \in \text{LIN1} \Leftrightarrow (t_n) \in \text{LIN1}$$

La démonstration est immédiate à partir de la définition de LIN1 et du lemme 1.

Conséquence :

Le procédé de Césaro ne transforme donc aucune suite de LOG en suite de LIN1. Le seul espoir serait alors que ce procédé transforme une suite de LOG en suite de LIN(-1), le lemme 1 n'étant pas vérifié si $\rho = -1$. Considérons alors une suite (s_n) convergente, de limite S^* .

$$\text{On a } t_n = \frac{1}{n} (s_1 + s_2 + \dots + s_n)$$

$$\text{Notons } \begin{cases} e_n = s_n - S^* \\ \varepsilon_n = t_n - S^* \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Etudions le comportement du rapport $\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}$, quand n tend vers l'infini,

relativement à celui du rapport $\frac{e_{n+1}}{e_n}$:

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \frac{n}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{e_{n+1}}{e_1 + e_2 + \dots + e_n} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Appelons, $\forall n \geq 1$, $\psi_n = \frac{e_{n+1}}{e_1 + e_2 + \dots + e_n}$. Cela permet d'écrire :

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \frac{n}{n+1} (1 + \psi_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

La suite (ψ_n) converge-t-elle, et si oui, quelle est sa limite ?

Un calcul immédiat de ψ_{n+1} donne :

$$\psi_{n+1} = \frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} \cdot \frac{\psi_n}{1 + \psi_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

* Supposons maintenant que $(S_n) \in \text{LOG}$, c'est-à-dire que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = 1$.

Il existe alors un rang N , que nous pourrions supposer, sans restreindre à généralité, égal à 1, au delà duquel

$$0 < \frac{e_{n+1}}{e_n} < 1.$$

(Ceci est donc valable, pour tout $n \geq 1$).

Considérons la suite itérative suivante :

$$\begin{cases} 0 < X_1 < 1, \text{ avec } X_1 = \psi_1. \\ X_{n+1} = \frac{X_n}{1+X_n}, n \geq 1 \end{cases}$$

Nous obtenons

$0 < \psi_2 < X_2$. En effet,

$$0 < \psi_1 = X_1 \Rightarrow 0 < \frac{\psi_1}{1+\psi_1} = \frac{X_1}{1+X_1} \Rightarrow 0 < \psi_2 = \frac{e_3}{e_2} \cdot \frac{\psi_1}{1+\psi_1} < X_2 = \frac{X_1}{1+X_1}.$$

Supposons maintenant, par récurrence, qu'au rang N , $0 < \psi_N < X_N$.

$$\text{Alors } \frac{1}{\psi_N} > \frac{1}{X_N} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\psi_N} > 1 + \frac{1}{X_N} \Rightarrow 0 < \frac{N}{1+\psi_N} < \frac{X_N}{1+X_N}$$

$$\text{et } 0 < \frac{e_{N+2}}{e_{N+1}} < 1 \text{ entraîne que } 0 < \psi_{N+1} < X_{N+1}.$$

Par conséquent, $\forall n \geq 1$, $0 < \psi_n \leq X_n$. (2)

Etudions la convergence de (X_n) , sachant que $0 < X_1 < 1$:

• (X_n) est décroissante et minorée par 0. Effectivement, supposons par récurrence qu'au rang N , $0 < X_N < 1$. Alors $A + X_N > 1$, et donc

$$0 < \frac{X_N}{1+X_N} < X_N < 1 \text{ i.e. } 0 < X_{n+1} < X_n < 1.$$

La suite (X_n) possède donc une limite X^* . X^* vérifie nécessairement l'égalité suivante :

$$X^* = \frac{X^*}{1+X^*} \Leftrightarrow X^* = 0 \quad (3)$$

(2) et (3) impliquent que la suite (ψ_n) est convergente, et est de limite $\psi^* = 0$, et par (1), on conclut que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n} = 1.$$

Proposition 1 : L'ensemble LOG est stable pour le procédé de Césaro.

Le corollaire suivant découle immédiatement :

Corollaire 1 : Le procédé de Césaro ne transforme aucune suite de LOG en suite de LIN.

III. DEUXIEME TYPE DE TRANSFORMATIONS ENVISAGEES : LES PROCEDES DE SOMMATION DONNES PAR UNE MATRICE DITE A "BANDE DIAGONALE"

C'est une matrice de Toeplitz dont le tableau est :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,p} & a_{2,p+1} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} & \dots & a_{2,p+1} & a_{2,p+2} & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n,n} & \dots & a_{n,p+n-1} & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots \end{pmatrix}$$

où $p \in \mathbb{N} - \{0\}$.

A est donc donné par :

- $a_{i,j} = 0$ pour $j < 1$ et $j > p+i-1$, $i = 1, 2, 3, \dots$

Soit (S_n) une suite convergence, de limite S^* . Sa suite (t_n) déduite de (S_n) par A est donnée par :

$$\cdot t_n = a_{n,n} \cdot S_n + \dots + a_{n,n+p-1} \cdot S_{n+p-1}, \quad n \geq 1$$

Appelons $e_n = S_n - S^*$ et $\epsilon_n = t_n - S^*$. On a alors

$$\cdot \epsilon_n = a_{n,n} \cdot e_n + \dots + a_{n,n+p-1} \cdot e_{n+p-1}, \quad n \geq 1.$$

Etudions le rapport $\frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n}$ relativement au rapport $\frac{e_{n+1}}{e_n}$:

$$\cdot \frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n} = \frac{a_{n+1,n+1} \cdot e_{n+1} + \dots + a_{n+1,n+p} \cdot e_{n+p}}{a_{n,n} \cdot e_n + \dots + a_{n,n+p-1} \cdot e_{n+p-1}}, \quad n \geq 1.$$

d'où

$$\frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n} = \frac{e_{n+1}}{e_n} \cdot \frac{a_{n+1,n+1} + a_{n+1,n+2} \cdot \frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} + \dots + a_{n+1,n+p} \cdot \left(\frac{e_{n+p}}{e_{n+p-1}} \frac{e_{n+p-1}}{e_{n+p-2}} \dots \frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} \right)}{a_{n,n} + a_{n,n+1} \cdot \frac{e_{n+1}}{e_n} + \dots + a_{n,n+p-1} \cdot \left(\frac{e_{n+p-1}}{e_{n+p-2}} \dots \frac{e_{n+1}}{e_n} \right)}$$

Supposons maintenant que $(S_n) \in \text{LOG}$. Ecrivons alors, pour n assez grand,

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = 1 - \mu_n, \quad \mu_n \text{ étant une quantité positive voisine de } 0.$$

Dans ce cas,

$$\frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n} = (1 - \mu_n) \cdot \frac{a_{n+1,n+1} + a_{n+1,n+2} (1 - \mu_{n+1}) + \dots + a_{n+1,n+p} \prod_{i=1}^{p-1} (1 - \mu_{n+i})}{a_{n,n} + a_{n,n+1} (1 - \mu_n) + \dots + a_{n,n+p-1} \prod_{i=1}^{p-1} (1 - \mu_{n-1+i})}$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0$, et que ce rapport porte haut et bas sur une somme

finie de produits finis, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1,n+1} + \dots + a_{n+1,n+p}}{a_{n,n} + \dots + a_{n,n+p-1}} = 1, \text{ et ce d'après la condition (iii)}$$

du Théorème de Toeplitz. D'où le

Théorème 2 : Les matrices de Toeplitz dites à "bande diagonale" ne transforment aucune suite de LOG en suite de LIN. Les suites transformées appartiennent encore à LOG.

IV. TROISIEME TYPE DE TRANSFORMATIONS ENVISAGEES : LES PROCEDES DE SOMMATION
DONNES PAR UNE MATRICE DE TOEPLITZ TRIANGULAIRE INFÉRIEURE AUX ELEMENTS
NON NEGATIFS

Considérons une matrice infinie $A = (a_{n,k})_{\substack{n \geq 1 \\ k \geq 1}}$ vérifiant les hypothèses ci-dessous :

- (i) $a_{n,k} \geq 0$, pour $k \leq n$ }
 (ii) $a_{n,k} = 0$, pour $k > n$ } $n = 1, 2, 3, \dots$
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,k} = 0$, $k = 1, 2, 3, \dots$
- (iv) $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=1}^n a_{n,k} = 1$, $\forall n \geq N$.

A est donc bien une matrice de Toeplitz, triangulaire inférieure, dont aucun des éléments n'est négatif. Démontrons qu'elle ne réalise pas du tout la transformation désirée.

Soit alors une suite $(S_n) \in \text{LOGSF}$, (S_n) de limite S^* .

Nous savons que pareille suite est strictement monotone à partir d'un certain rang. Pour plus de commodités, supposons que ce rang est $n = 1$.

• La suite (t_n) transformée par cette matrice s'écrit :

$$t_n = \sum_{k=1}^n a_{n,k} \cdot S_k, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Appelons B_n , $n \geq 1$, l'ensemble suivant :

$$B_n = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}.$$

Pour $n \geq N$, t_n s'avère être un barycentre, d'après les hypothèses (i) et (iv), des points S_1, S_2, \dots, S_n .

Si $E(B_n)$ désigne l'enveloppe convexe de B_n , alors $t_n \in E(B_n)$.

Supposons, et ceci n'est point restrictif, que la suite (S_n) est strictement croissante. Il est alors clair que

$$E(B_n) = [S_1, S_n], n \geq 1.$$

Ce qui revient à dire que

$$t_n \in [S_1, S_n], n \geq 1$$

Dans ce cas, la suite (t_n) ne peut appartenir à LIN.

En effet, supposons par l'absurde, qu'au contraire, $(t_n) \in \text{LIN}$.

Il existerait alors un réel ρ , $0 < \rho < 1$, ρ étant nécessairement positif, puisque, par construction, la suite (t_n) ne saurait être alternée, et ρ vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{n+1} - S^*}{t_n - S^*} = \rho$$

Par ailleurs, puisque $(S_n) \in \text{LOGSF}$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*} = 1$$

Prenons maintenant $\varepsilon = \frac{1-\rho}{3}$.

Il existe alors un rang $N \in \mathbb{N}$, suffisamment grand vérifiant :

$$\forall n \geq N, \frac{t_{n+1} - S^*}{t_n - S^*} \leq \rho + \varepsilon$$

et

$$\frac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*} \geq 1 - \varepsilon$$

Prenons $p_n \in \mathbb{N} - \{0\}$, et notons $R_n = \frac{S_n - S^*}{t_n - S^*}$. Il est clair que $0 < R_n \leq 1$.

Nous avons les inégalités suivantes :

$$\frac{t_{n+p_n} - S^*}{t_n - S^*} = \frac{t_{n+p_n} - S^*}{t_{n+p_n-1} - S^*} \cdot \frac{t_{n+p_n-1} - S^*}{t_{n+p_n-2} - S^*} \cdots \frac{t_{n+1} - S}{t_n - S} \leq (\rho + \varepsilon)^{p_n}$$

et

$$\frac{S_{n+p_n} - S^*}{t_n - S^*} = \frac{S_{n+p_n} - S^*}{S_{n+p_n-1} - S^*} \cdot \frac{S_{n+p_n-1} - S^*}{S_{n+p_n-2} - S^*} \cdots \frac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*} \geq \frac{S_n - S^*}{t_n - S^*} \geq (1 - \varepsilon)^{p_n} \cdot R_n.$$

Nous pouvons choisir l'entier p_n suffisamment grand afin que

$$(\rho + \varepsilon)^{p_n} < (1 - \varepsilon)^{p_n} \cdot R_n.$$

Et dans ce cas,

$$\frac{t_{n+p_n} - S^*}{t_n - S^*} < \frac{S_{n+p_n} - S^*}{t_n - S^*}$$

Bien entendu, $t_n - S^* < 0$, ce qui entraîne que

$$t_{n+p_n} - S^* > S_{n+p_n} - S^* \leftrightarrow t_{n+p_n} > S_{n+p_n},$$

Ce qui est en contradiction avec $t_{n+p_n} \in [S_1, \dots, S_{n+p_n}]$.

Nous en déduisons le

Théorème 3 : Les matrices de Toeplitz triangulaires inférieures à éléments non négatifs ne transforment aucune suite de LOGSF en suite de LIN.

Nous n'avons pu généraliser ce résultat aux matrices de Toeplitz triangulaires inférieures à éléments quelconques. Cependant, il semble bien difficile d'obtenir la transformation recherchée avec ces matrices. Nous nous retrouvons donc contraints à étudier d'autres transformations obtenues par un autre type de matrices de Toeplitz.

V. LES MATRICES D'EXTRACTION DE SOUS-SUITES

Les matrices de Toeplitz que nous venons d'étudier ne transforment aucune suite de LOG en suite de LIN. Mais cela ne nous permet pas d'affirmer qu'aucune matrice de Toeplitz n'est capable d'effectuer la transformation désirée.

Considérons en effet la matrice de Toeplitz dont le tableau A, qui n'appartient à aucun des cas étudiés précédemment, est donné par :

$$A = \left(\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \vdots & \leftarrow \text{Colonne d'indice } 2^n \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots & \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots & \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots & \\ \text{ligne } n \rightarrow 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots & \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots & \end{array} \right)$$

A est donc donné par :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 2^i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

• Soit $(D_n)_{n \geq 1}$ une suite convergente, de limite S^* . La suite (t_n) déduite de (S_n) par ce tableau est donné par :

$$t_n = S_{2^n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

La suite (t_n) s'obtient donc de (S_n) par une extraction des termes dont la suite des indices est $(2^n)_{n \geq 1}$.

Considérons maintenant la suite $(S_n)_{n \geq 1}$, définie par $S_n = \frac{1}{n}$. $(S_n) \in \text{LOGSF}$.

Alors $t_n = \frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. La suite $(t_n)_{n \geq 1}$ appartient à LIN^+ .

La matrice A possède trivialement la propriété suivante :

Propriété 2 : Soit (s_n) une suite strictement monotone au delà d'un certain rang. Alors la suite extraite $(t_n) = (s_{2^n})$ l'est aussi.

Application : Au cours du Chapitre 0, nous avons vu que toute suite de LOGSF est strictement monotone à partir d'un certain rang. Donc, de toute suite de LOGSF, la suite extraite est aussi monotone, et, plus précisément, de même monotonie, et ce, bien sûr, à partir d'un certain rang.

Remarque 1 : Il est naturel d'appliquer cette transformation à des suites monotones. En effet, pour des suites qui ne le sont pas, nous ne sommes plus sûrs de l'obtention d'une sous-suite qui ait un comportement régulier.

Remarque 2 : Cette propriété ainsi que les commentaires qui suivent ne sont pas spécifiques à la matrice A. Elle est encore vraie pour toute matrice B dont le tableau est de la forme :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \text{Colonne } p_1 & \text{Colonne } p_2 & \text{Colonne } p_3 & \dots\dots\dots & \text{Colonne } p_n & \dots\dots\dots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
 \text{ligne } 1 & \left(\begin{array}{cccccccc}
 0 & 0 & 1 & 0 & \dots\dots\dots & & & \\
 0 & \dots\dots\dots & 0 & 1 & 0 & \dots\dots\dots & & \\
 0 & \dots\dots\dots & & 0 & 1 & 0 & \dots\dots\dots & \\
 \dots\dots\dots & & & & & & & \\
 0 & \dots\dots\dots & & & & & 0 & 1 & 0 & \dots\dots\dots
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

où l'application $\alpha : \mathbb{N} - \{0\} \rightarrow \mathbb{N} - \{0\}$ avec $n \rightarrow \alpha(n) = p_n$, est monotone croissante.

A se déduit de B en prenant $\alpha(n) = 2^n$, $n \geq 1$.

Accélération de la sous-suite et de la suite initiale

Supposons, pour la matrice de Toeplitz B, qu'il existe un sous-ensemble de LOGSF, noté LS(B), non vide, tel que, pour toute suite $(s_n) \in \text{LS}(B)$, la suite (t_n) extraite par B, donc définie par $t_n = s_{p_n}$, $n \geq 1$, appartienne à LIN^+ .

Définition : Appelons P(B) le procédé d'extraction défini par la matrice de Toeplitz B.

Sachant que le procédé Δ^2 d'Aitken accélère LIN^+ , le procédé composé $\Delta_2 \circ P(B)$ accélère-t-il $LS(B)$?

Remarque : Nous pourrions être tentés de penser que le calcul de t_n ne fait intervenir que les $(n+p)$ premiers termes de la suite initiale (S_n) . Ceci n'est pas nécessairement vrai puisque l'extraction se réalise en réalité comme suit :

Appelons (S'_n) la suite obtenue de la manière suivante :

$$\left. \begin{array}{l} S_1 \longrightarrow S'_1 = S_1 \\ \vdots \\ S_{p_1-1} \longrightarrow S'_{p_1-1} = S_1 \end{array} \right\} p_1 - 1 \text{ fois}$$

$$\left. \begin{array}{l} S_{p_1} \longrightarrow S'_{p_1} = S_{p_1} \\ \vdots \\ S_{p_2-1} \longrightarrow S'_{p_2-1} = S_{p_1} \end{array} \right\} p_2 - p_1 \text{ fois}$$

$$\left. \begin{array}{l} S_{p_2} \longrightarrow S'_{p_2} = S_{p_2} \\ \vdots \\ S_{p_3-1} \longrightarrow S'_{p_3-1} = S_{p_3} \end{array} \right\} p_3 - p_2 \text{ fois}$$

$$\left. \begin{array}{l} S_{p_3} \longrightarrow S'_{p_3} = S_{p_3} \\ \vdots \\ \text{etc...} \end{array} \right\} p_4 - p_3 \text{ fois}$$

Cette transformation est représentée par une matrice de Toeplitz dont le tableau est

$$T = \begin{array}{l} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & & \\ \text{ligne } p_1 - 1 \rightarrow & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \\ \text{ligne } p_1 \rightarrow & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \text{ligne } p_n \rightarrow & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \end{array} \right) \end{array}$$

Colonne p_1
Colonne p_n

} $p_2 - p_1$ fois
} $p_{n+1} - p_n$ fois

Le calcul du $n^{\text{ième}}$ terme S'_n , comme on le voit, ne nécessite que la connaissance des n premiers termes de la suite $(S_j)_{j \geq 1}$.

Le tableau T est celui d'une matrice triangulaire inférieure, dont les éléments non nuls ont tous la valeur 1. Ils se disposent en forme de marches d'escalier.

D'après le théorème, cette matrice ne transforme aucune suite de LOG en suite de LIN.

Le tableau de B se déduit du tableau T en prenant :

- pour 1^{ère} ligne, la ligne p_1 de T ,
- pour 2^{ème} ligne, la ligne p_2 de T ,
-
- pour $n^{\text{ième}}$ ligne, la ligne p_n de T , etc...

On évite ainsi les lignes qui se répètent. Cela se traduit par le fait que la suite (t_n) est une "contraction" de la suite (S'_n) .

La procédure d'extraction, en tant que transformation terme à terme est donc réalisée par la matrice T .

La question de l'accélération de la convergence

Soit $(S_n) \in \text{LS}(B)$. La sous-suite (t_n) appartient alors à LIN^+ et est alors accélérée par le Δ^2 d'Aitken. Appelons T_n la quantité calculée par ce procédé appliqué aux trois points consécutifs t_{n-1} , t_n et t_{n+1} , $n \geq 2$.

La suite (t_n) est, comme nous venons de le voir, une contraction de (S'_n) .

Nous ne pouvons donc comparer les convergences des suites (T_n) et (S'_n) ou des suites (T_n) et (S_n) . Pour cela, il faut "étirer" la suite (T_n) de la façon suivante :

Pour $j < p_2$, $T'_j = T_1$

Pour $p_2 \leq j < p_3$, $T'_j = T_2$

.....

Pour $p_n \leq j < p_{n+1}$, $T'_j = T_n$

Proposition 2 : Pour toute matrice d'extraction de sous-suite de type B, si $LS(B)$ n'est pas vide, cet ensemble est alors accéléré par le procédé composé $\Delta_2 \circ P(B)$.

Démonstration : Soit $(S_n) \in LS(B)$. La suite transformée par le procédé $\Delta_2 \circ P(B)$ peut, comme nous venons de le voir, être représentée par la suite (T'_n) .

Montrons que (T'_n) accélère (S_n) :

Pour $p_n \leq j < p_{n+1}$, on a :

$$\left| \frac{T'_j - S^*}{S_j - S^*} \right| = \left| \frac{T_n - S^*}{S_j - S^*} \right| \leq \left| \frac{T_n - S^*}{S_{p_n} - S^*} \right| \cdot \left| \frac{S_{p_n} - S^*}{S_{p_{n+1}} - S^*} \right| \cdot \left| \frac{S_{p_{n+1}} - S^*}{S_j - S^*} \right|$$

$$\textcircled{1} : \left| \frac{T_n - S^*}{S_{p_n} - S^*} \right| = \left| \frac{T_n - S^*}{t_n - S^*} \right|, \text{ tend vers } 0 \text{ car } (T_n) \text{ accélère } (t_n).$$

$$\textcircled{2} : \left| \frac{S_{p_n} - S^*}{S_{p_{n+1}} - S^*} \right| = \left| \frac{t_n - S^*}{t_{n+1} - S^*} \right| \leq \rho^{-1} + 1 \text{ pour } n \text{ suffisamment grand, où}$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{n+1} - S^*}{t_n - S^*} \in]0, 1[. \text{ La quantité } \textcircled{2} \text{ est donc bornée.}$$

$$\textcircled{3} : \left| \frac{S_{p_{n+1}} - S^*}{S_j - S^*} \right| < 1 \text{ puisque la suite } (S_n) \text{ est monotone.}$$

$$\text{Ainsi } \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{T'_j - S^*}{S_j - S^*} = 0$$

c.q.f.d.

Commentaire :

Pour certaines matrices de type B, $LS(B)$ est vide. Considérons par exemple la "matrice identité" dont le tableau est

$$\dot{I} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Ici la suite extraite de toute suite (S_n) est encore (S_n) .

En tout cas, si $LS(B)$ n'est pas vide, on est sûr qu'il est alors accéléré par le procédé composé $\Delta_2 \circ P(B)$.

VI. ALGORITHME D'EXTRACTION DE SOUS-SUITE P_1

Cet algorithme est proposé par C. BREZINSKI, J.P. DELAHAYE et B. GERMAIN-BONNE [3].

On se propose d'exhiber un sous-ensemble de LOGSF sur lequel P_1 envoie dans LIN^+ .

Mais présentons auparavant cet algorithme :

a) Description de l'algorithme P_1

Soit un réel $\rho \in]0, 1[$.

Considérons une suite (S_n) appartenant à LOGSF, que nous supposons monotone strictement, dès le premier rang. Nous supposons la même chose pour la suite (ΔS_n) .

Soit $N \in \mathbb{N} - \{0\}$. On calcule $\Delta S_N = S_{N+1} - S_N$.

* On recherche algorithmiquement le premier indice $i(N)$ vérifiant :

$$\frac{\Delta S_{i(N)}}{\Delta S_N} \leq \rho, \text{ la suite } (\Delta S_n) \text{ étant supposé décroissante à partir}$$

du rang N .

* L'indice $i(N)$ existe puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta S_n = 0$.

* L'indice $i(N)$ étant connu, on recherche le premier indice $i(i(N))$ vérifiant

$$\frac{Si(i(N))}{Si(N)} \leq \rho.$$

etc...

Considérons dorénavant $N = 1$, ce qui n'est pas restrictif, et définissons la sous-suite $(S_\alpha^{(n)}(\rho))$, $n \geq 1$, de la façon suivante :

$$S_\alpha^{(1)}(\rho) = S_1$$

$$S_\alpha^{(2)}(\rho) = S_2$$

$$S_\alpha^{(3)}(\rho) = S_{i(1)}$$

$$S_\alpha^{(4)}(\rho) = S_{i^2(1)}$$

⋮
⋮
⋮

$$S_\alpha^{(p+2)}(\rho) = S_{i^p(1)}, \rho \geq 1.$$

Remarque : Il est évident que la sous-suite $(S_\alpha^{(n)}(\rho))_{n \geq 1}$ dépend du choix de ρ pris sur l'intervalle $]0, 1[$.

Définition : Soit un réel $\rho \in]0, 1[$.

Nous dirons que la sous-suite $(S_\alpha^{(n)}(\rho))$ est calculée par une $P_1(\rho)$ -extraction de la suite (S_n) .

Si l'on parle uniquement du procédé P_1 , cela signifie que le choix de ρ dans $]0, 1[$ est arbitraire.

Définition : Les ensemble $S_{\frac{1}{n}}^*$ $0 < \alpha < \infty$ et S^*

Soit $\alpha \in]0, \infty[$. Appelons $S_{\frac{1}{n}}^*$, l'ensemble de toutes les suites

$(S_n) \in \text{LOGSF}$, de limite S^* synchrones avec la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$:

$$S_{\alpha}^1 = \{(S_n) \in \text{LOGSF} : \exists K \neq 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha} (S_n - S^*) = K\}$$

et appelons aussi $S^* = \bigcup_{\alpha > 0} S_{\alpha}^1$.

b) Démontrons que pour tout réel ρ , $\rho \in]0, 1[$, $P_1(\rho)$ extrait de chaque suite (S_n) appartenant à S^* , une sous-suite $(S_{\alpha}^{(n)}(\rho))$ appartenant à LIN^+ .

Lemme 1 : Soit $(S_n) \in \text{LOGSF}$, Soient $0 < \rho < 1$ et $(S_{\alpha}^{(n)}(\rho))$ la sous-suite obtenue par une $P_1(\rho)$ -extraction de (S_n) .

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{\Delta} S_{\alpha}^{(n+1)}(\rho)}{\bar{\Delta} S_{\alpha}^{(n)}(\rho)} = \rho, \text{ où } \bar{\Delta} S_{\alpha}^{(n)}(\rho) = S_{\alpha}^{(n)}(\rho+1) - S_{\alpha}^{(n)}(\rho), \forall n \geq 1.$$

Preuve : Prenons, pour des commodités de signe, (S_n) monotone croissante. Supposons, par l'absurde, que

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall N \in \mathbb{N}, \exists n_0 \geq N \text{ vérifiant : } \frac{\bar{\Delta} S_{\alpha}^{(n_0+1)}(\rho)}{\bar{\Delta} S_{\alpha}^{(n_0)}(\rho)} \notin [\rho - \varepsilon, \rho + \varepsilon]$$

On peut se restreindre au cas où $\frac{\bar{\Delta} S_{\alpha}^{(n_0+1)}(\rho)}{\bar{\Delta} S_{\alpha}^{(n_0)}(\rho)} < \rho - \varepsilon$ puisque, par construc-

tion, la suite $(S_{\alpha}^{(n)}(1))_{n \geq 1}$ vérifie toujours :

$$\frac{\bar{\Delta} S_{\alpha}^{(n+1)}(\rho)}{\bar{\Delta} S_{\alpha}^{(n)}(\rho)} \leq \rho, n \geq 1$$

$\varepsilon > 0$ étant choisi suffisamment voisin de 0, choisissons $N \in \mathbb{N}$, assez grand, permettant à n_0 de vérifier la relation :

$$1 - \frac{\varepsilon}{\rho} < \frac{\bar{\Delta} S_{\alpha}^{(n_0+1)}(\rho)}{\bar{\Delta} S_{\alpha}^{(n_0)}(\rho)} < 1 \quad (1)$$

Un tel entier N existe puisque (S_n) est une suite de LOGSF. D'autre part,

$$\frac{\bar{\Delta} S_{\alpha}^{(n_0+1)}(\rho)}{\bar{\Delta} S_{\alpha}^{(n_0)}(\rho)} < \rho - \varepsilon \Rightarrow \bar{\Delta} S_{\alpha}^{(n_0+1)}(\rho) + \varepsilon \bar{\Delta} S_{\alpha}^{(n_0)}(\rho) < \rho \cdot \bar{\Delta} S_{\alpha}^{(n_0)}(\rho).$$

Puisque $\varepsilon \cdot \bar{\Delta S \alpha}^{(n_0)}(\rho) > 0$, alors

$$\bar{\Delta S \alpha}^{(n_0+1)}(\rho) < \bar{\Delta S \alpha}^{(n_0+1)}(\rho) + \varepsilon \cdot \bar{\Delta S \alpha}^{(n_0)}(\rho) < \rho \cdot \bar{\Delta S \alpha}^{(n_0)}(\rho)$$

Il existe un entier q tel que $\alpha^{(n_0)}(\rho) < q < \alpha^{(n_0+1)}(\rho)$ vérifiant l'inégalité :

$$\bar{\Delta S \alpha}^{(n_0+1)}(\rho) < \bar{\Delta S q} < \bar{\Delta S \alpha}^{(n_0+1)}(\rho) + \varepsilon \bar{\Delta S \alpha}^{(n_0)}(\rho) < \rho \cdot \bar{\Delta S \alpha}^{(n_0)}(\rho)$$

En effet, puisqu'on a

$$\frac{\bar{\Delta S \alpha}^{(n_0+1)}(\rho)}{\bar{\Delta S \alpha}^{(n_0)}(\rho)} < \rho - \varepsilon, \text{ alors } \frac{\bar{\Delta S \alpha}^{(n_0)}(\rho)}{\bar{\Delta S \alpha}^{(n_0+1)}(\rho)} > \frac{1}{\rho - \varepsilon} > 0,$$

et par conséquent, on obtient l'inégalité (2) :

$$\frac{\bar{\Delta S \varepsilon}^{(n_0+1)}(\rho)}{\bar{\Delta S \alpha}^{(n_0+1)}(\rho) + \varepsilon \cdot \bar{\Delta S \alpha}^{(n_0)}(\rho)} = \frac{1}{1 + \varepsilon \frac{\bar{\Delta S \alpha}^{(n_0)}(\rho)}{\bar{\Delta S \varepsilon}^{(n_0+1)}(\rho)}} < \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{\rho - \varepsilon}} = 1 - \frac{\varepsilon}{\rho} < 1 \quad (2)$$

Les inégalités (1) et (2) jointes, donnent la suivante :

$$\frac{\bar{\Delta S \varepsilon}^{(n_0+1)}(\rho)}{\bar{\Delta S \alpha}^{(n_0+1)}(\rho) + \varepsilon \cdot \bar{\Delta S \alpha}^{(n_0)}(\rho)} < \frac{\bar{\Delta S \alpha}^{(n_0+1)}(\rho)}{\bar{\Delta S}(\varepsilon^{(n_0+1)}(\rho) - 1)} < 1$$

Comme $\bar{\Delta S \varepsilon}^{(n_0+1)}(\rho) > 0$, on déduit que

$$\bar{\Delta S \alpha}^{(n_0+1)}(\rho) < \bar{\Delta S}(\alpha^{(n_0+1)}(\rho) - 1) < \bar{\Delta S \alpha}^{(n_0+1)}(\rho) + \varepsilon \bar{\Delta S \alpha}^{(n_0)}(\rho) < \rho \cdot \bar{\Delta S \alpha}^{(n_0)}(\rho).$$

Nous pouvons donc prendre, par exemple, $q = \alpha^{(n_0+1)}(\rho) - 1$.

Il existe donc bien un indice q précédant l'indice $\alpha^{(n_0+1)}(\rho)$ et vérifiant

$$\frac{\bar{\Delta S q}^{(n_0)}}{\bar{\Delta S \alpha}^{(n_0)}(\rho)} \leq \rho,$$

ce qui est en contradiction avec la construction de la suite d'indices $(\alpha^{(n)}(\rho))_1$

Lemme 2 : Quelle que soit $\beta > 0$, si $(S_n) \in S \frac{1}{\beta}$, alors $(\Delta S_n) \in S \frac{1}{\beta+1}$.

Preuve : Soit un réel $\beta > 0$.

Appelons $S^* = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Par hypothèse, $\exists K \neq 0$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\beta (S_n - S^*) = K$.

Posons, pour tout $n \geq 1$, $K_n = n^\beta (S_n - S^*)$. Bien entendu, $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = K$.

Alors, $\forall n \geq 1$, $S_n = S^* + \frac{K_n}{n^\beta}$, d'où $\Delta S_n = \frac{K_{n+1}}{(n+1)^\beta} - \frac{K_n}{n^\beta}$.

Pour n suffisamment grand,

$$\Delta S_n \sim K \left(\frac{1}{(n+1)^\beta} - \frac{1}{n^\beta} \right) \sim - \frac{K \cdot \beta}{n^{\beta+1}}.$$

$K \neq 0$ entraîne que $(\Delta S_n) \in S \frac{1}{\beta+1}$.

c.q.f.d.

Proposition 3 : De toute suite (s_n) appartenant à S^* , toute $P_1(\rho)$ -extraction, où $\rho \in]0, 1[$, en extrait une sous-suite $(s_{\alpha^{(n)}(\rho)})$ appartenant à LIN^+ . Plus précisément, si pour $\beta > 0$, $(s_n) \in S \frac{1}{\beta}$,

alors $(s_{\alpha^{(n)}(\rho)}) \in LIN(\rho \frac{\rho}{1+\rho})$.

Preuve : Soit un réel $\rho > 0$.

Soit $(s_n) \in S \frac{1}{\beta}$, $\beta > 0$. Appelons S^* la limite.

Il existe alors (K_n) de limite K non nulle, telle que,

$$\forall n \geq 1, S_n = S^* + \frac{K_n}{n^\beta} \quad (1)$$

Soit $(s_{\alpha^{(n)}(\rho)})$ la sous-suite obtenue par l'extraction $P_1(\rho)$. D'après (1),

$$\forall n \geq 1, s_{\alpha^{(n)}(\rho)} = S^* + \frac{K_{\alpha^{(n)}(\rho)}}{(\alpha^{(n)}(\rho))^\beta} \text{ et donc}$$

$$\forall n \geq 1, \frac{s_{\alpha^{(n+1)}(\rho)} - S^*}{s_{\alpha^{(n)}(\rho)} - S^*} = \frac{K_{\alpha^{(n+1)}(\rho)}}{K_{\alpha^{(n)}(\rho)}} \cdot \left(\frac{\alpha^{(n)}(\rho)}{\alpha^{(n+1)}(\rho)} \right)^\beta \quad (2)$$

D'autre part, d'après le lemme 2, il existe un réel $K_1 \neq 0$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\beta+1} \cdot \Delta S_n = K_1.$$

Posons alors $K_1^{(n)} = n^{\beta+1} \cdot \Delta S_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\text{Alors, } \forall n \geq 1, \bar{\Delta} S \alpha^{(n)}(\rho) = \frac{K_1^{(n)}(\rho)}{(\alpha^{(n)}(\rho))^{\beta+1}} \quad (3)$$

Or, d'après le lemme 1, la suite des écarts $(\bar{\Delta} S \alpha^{(n)}(\rho))$ vérifie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{\Delta} S \alpha^{(n+1)}(\rho)}{\bar{\Delta} S \alpha^{(n)}(\rho)} \quad (4)$$

De (3), de (4), et puisque $K_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} K_1^{(n)}$ non nul, on déduit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{(n+1)}(\rho)}{\alpha^{(n)}(\rho)} = \rho^{\frac{1}{\beta+1}} \quad (5)$$

Nous concluons par (2) et par (5) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S \alpha^{(n+1)}(\rho) - S^*}{S \alpha^{(n)}(\rho) - S^*} = \rho^{\frac{\beta}{\beta+1}} \quad (6)$$

Comme $0 < \rho < 1$ et $\beta > 0$, alors $0 < \rho^{\frac{\beta}{\beta+1}} < 1$ et donc $(S \alpha^{(n)}(\rho)) \in \text{LIN}(\rho^{\frac{\beta}{1+\beta}})$

c.q.f.d.

En conclusion, nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 2 : Pour tout $\rho \in]0, 1[$, le procédé composé $\Delta_2 \circ P_1(\rho)$ accélère S^* .

En définitive, il suffit de savoir qu'une suite (S_n) est synchrone avec une suite $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\alpha > 0$, pour pouvoir accélérer sa convergence par cette méthode d'extraction.

c) Séries appartenant à S^*

La propriété qui suit (réf. [16] page 19) va nous permettre de retrouver un grand nombre de séries connues appartenant à S^* :

Propriété 3 : Soit $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $S^* = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Si pour n suffisamment grand,

$$a_n = n^{\theta} \left(\alpha_0 + \frac{1}{n} + \dots + \frac{\alpha_{\rho}}{n^{\rho}} + \dots \right), \quad \alpha_0 \neq 0, \quad \theta < -1$$

alors il existe des constantes γ_j , $j \geq 1$, telles que

$$S_n - S^* = \frac{n^{\theta+1}}{\theta+1} \left(\alpha_0 + \frac{\gamma_1}{n} + \frac{\gamma_2}{n^2} + \dots + \frac{\gamma_{\rho}}{n^{\rho}} + \dots \right)$$

Remarque : Il est clair que toute série (S_n) vérifiant les hypothèses de la propriété ci-haut appartient à S^* . Nous avons alors le corollaire.

Corollaire 3 : Soit $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $S^* = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Si pour n suffisamment grand,

$$a_n = n^{\theta} \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \dots + \frac{\alpha_{\rho}}{n^{\rho}} + \dots \right), \quad \alpha_0 \neq 0 \text{ et } \theta < -1,$$

alors $(S_n) \in S^*$ et est accélérable par tout procédé composé $\Delta_2 \circ P_1(\rho)$, $\rho \in]0, 1[$.

Exemple : Toutes les séries harmoniques $S_n = \sum_{k=1}^n k^{-\rho}$, où $\rho > 1$, appartient à S^* .

IV. EXEMPLES NUMERIQUES

Soit (S_n) , $(S_n) \in \text{LOGSF}$. Nous calculons S_j , $j = 1, \dots, 1000$.

Nous appliquons les procédés $P_1(\rho)$, $\rho \in]0, 1[$.

ρ étant donné, nous appellerons $(S\alpha^{(n)}(\rho))$ la suite extraite sur les 1000 premiers termes de la suite (S_j) , et $(\varepsilon^{(n)})$ la suite obtenue par application du procédé δ^2 d'Aitken à $(S\alpha^{(n)}(\rho))$.

Exemple 1 : $S_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$. $S^* = 0$.

1) $\rho = 0.21$

n	$S_n^{(n)}(\rho)$	$\epsilon^{(n)}$
2	.3333333333333330+00	.3333333333333330+00
3	.1250000000000000+00	.1250000000000000+00
4	.5263157894736840-01	.1411290322580640-01
5	.2325581395348840-01	.3184116875819440-02
6	.1052631578947370-01	.7919936640506880-03
7	.4807692307692310-02	.1431310355795470-03
8	.2197802197802200-02	.6708407871200320-05
9	.1006036217303820-02	.4497548835884080-05

2) $\rho = 0.27$

n	$S_n^{(n)}(\rho)$	$\epsilon^{(n)}$
2	.3333333333333330+00	.3333333333333330+00
3	.1428571428571430+00	.1428571428571430+00
4	.7142857142857140-01	.2857142857142860-01
5	.3571428571428570-01	.4336808689942020-17
6	.1818181818181820-01	.1275510204081630-02
7	.9345794392523360-02	.3679502632747550-03
8	.4830917874396140-02	.1136266795443590-03
9	.2506265664160400-02	.3893486197591430-04
10	.1300390117035110-02	.6348726667637830-06

3) $\rho = 0.39$

n	$S_n^{(n)}(\rho)$	$\epsilon^{(n)}$
10	.7142857142857140-02	.5884429798752500-04
11	.4444444444444440-02	.3941974140649840-04
12	.2770083102493070-02	.3244120032441000-04
13	.1727115716753020-02	.4291231316587860-05
14	.1077586206896550-02	.5273117499881490-05

Exemple 2 : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$, $n \geq 1$. $S^* = 1.6449340668\dots$



$\rho = 0.4$

n	$S_n^{(n)}(\rho)$	$\epsilon^{(n)}$
2	.13611111111111110+01	.13611111111111110+01
3	.14913888888888890+01	.14913888888888890+01
4	.1558032193976460+01	.1627826598255040+01
5	.1590893160810530+01	.1622857885489060+01
6	.1612150117601590+01	.1651089950499240+01
7	.1624732733621520+01	.1642984521288410+01
8	.1632355616337560+01	.1644071637611670+01
9	.1637028969674200+01	.1644433619230060+01
10	.1639946546014980+01	.1644790685456550+01
11	.1641784463152650+01	.1644913172096400+01
12	.1642944017753690+01	.1644926094888260+01
13	<u>.1643676995989170+01</u>	<u>.1644936458859210+01</u>

Exemple 3 : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k^2 - 1)^2}$, $n \geq 1$. $S^* = 0.125$.

$\rho = 0.61$

n	$S_n^{(n)}(\rho)$	$\epsilon^{(n)}$
23	<u>.1249989498004610+00</u>	<u>.1249999553769000+00</u>
24	.1249992453923640+00	.1249999157686290+00
25	.1249994597187930+00	.1250000249750460+00
26	.1249996139127300+00	.1250000093024730+00
27	.1249997240185520+00	.124999989972450+00
28	.1249998022230110+00	.1249999939369830+00
29	.1249998582317960+00	.124999995649290+00
30	<u>.1249998983641470+00</u>	<u>.1249999998104540+00</u>
31	.1249999270490840+00	.1249999989278230+00
32	.1249999476335550+00	.124999999417060+00
33	.1249999623871060+00	.1249999997169380+00
34	.1249999729834860+00	.124999999930220+00
35	.1249999805791030+00	.1249999998053530+00
36	.1249999860460580+00	.1250000000866090+00
37	<u>.1249999899742900+00</u>	<u>.1250000000027460+00</u>

Dans cet exemple, la procédure d'extraction $P_1(0.61)$ a été réalisée sur les 2000 premiers termes de la suite (S_n) .

Exemple 4 : une suite de point fixe.

Les procédés $\mathcal{P}_1(\rho)$, $0 < \rho < 1$ accélèrent aussi les suites de point fixe. Prenons par exemple la suite (S_n) , de limite $S^* = 0$, générée par

$$S_1 = 0.5$$

$$S_{n+1} = S_n(1 - S_n), \quad n \geq 1.$$

Les extractions sont ici réalisées sur les 999 premiers termes de la suite (S_n) .

$\rho = 0.1$

n	$sa^{(n)}(\rho)$	$\epsilon^{(n)}$
2	.152343750000000D+00	.152343750000000D+00
3	.481302409465893D-01	.481302409465893D-01
4	.151631817698086D-01	.912904550854389D-04
5	.478220755514998D-02	.109235621014456D-04
6	.151226129489721D-02	.860407213011547D-05

$\rho = 0.6$

n	$sa^{(n)}(\rho)$	$\epsilon^{(n)}$
11	.193409659553606D-01	.105842156536054D-02
12	.149332596884243D-01	.288854254782931D-02
13	.114638440791124D-01	.136463776958690D-02
14	.881093569566442D-02	.191388105597494D-03
15	.681415569475397D-02	.737402306009887D-03
16	.526281324551300D-02	.140106615636647D-03
17	.406054440267908D-02	.802738772448510D-04
18	.313942035963467D-02	.121511071219304D-03
19	.242843826803510D-02	.229426918317061D-04
20	.187954457922942D-02	.207793843264052D-04
21	.145496864084878D-02	.493655101866476D-05
22	.112668959586906D-02	.757632474697445D-05

Nous constatons bien, pour chaque valeur de ρ , que la suite $(\epsilon^{(n)})$ accélère bien la convergence de la suite $(sa^{(n)}(\rho))$.

Pourquoi y-a-t-il accélération de la convergence ? Le théorème de synchronisation qui est démontré au Chapitre 3 nous permet d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow \infty} n S_n = 1$, c'est-à-dire que $(S_n) \in S_n^1$.

CHAPITRE III

PROCEDES D'EXTRACTION DE
SOUS-SUITE, DE TYPE P_2

Procédés d'extraction de sous-suite de type P_2

Les indices d'extraction obtenus par le procédé P_1 ne peuvent être connus à l'avance. Il ne le sout, en effet qu'après la réalisation d'un test. Néanmoins, il est possible, comme nous le verrons dans ce qui suit, d'effectuer directement nos extractions $t_n = S\alpha(n)$ où l'application $\alpha : \mathbb{N} - \{0\} \rightarrow \mathbb{N} - \{0\}$ est croissante et définie d'avance.

I. LES DIFFERENTES POSSIBILITES D'EXTRACTION POSSIBLES

1) Extraction de type périodique

Elle est définie par une application α de la forme :

$$\alpha(n) = k \cdot n + b \quad \text{où } k \in \mathbb{N} - \{0\} \text{ et } b \in \mathbb{N} \quad (1)$$

2) Extraction de type logarithmique

Elle est donnée par

$$\alpha(n) = E(k \cdot n^p + b) \quad \text{où } p, k \in [1, +\infty[\text{ et } b \in \mathbb{N} \quad (2)$$

, $E(k \cdot n^p + b)$ désignant la partie entière de $k \cdot n^p + b$.

3) Extraction de type géométrique

Dans ce cas,

$$\alpha(n) = E(k^n + b) \quad \text{où } k \in]1, \infty[\text{ et } b \in \mathbb{N} \quad (3)$$

Les procédés d'extraction de type géométrique seront appelés *procédés de type P_2* .

4) Extraction de type superlinéaire

$$\text{Ici, } \alpha(n) = E(k_1^{k_2^n} + b) \quad \text{où } k_1, k_2 \in [1, \infty[\text{ et } b \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Les extractions de type périodique ne sont d'aucun intérêt. En effet :

Proposition 1 : Quelque soit la suite (S_n) , $(S_n) \in \text{LOG}$, toute sous-suite de (S_n) obtenue par une extraction de type périodique appartient à LOG.

Preuve : Soit $(S_n) \in \text{LOG}$. Appelons S^* la limite et $e_n = S_n - S^*$, $n \geq 1$. Soit $(S^{\alpha(n)})_{n \geq 1}$, la sous-suite obtenue par une extraction de type périodique donnée par (1).

On a :

$$\frac{e_{\alpha(n+1)}}{e_{\alpha(n)}} = \underbrace{\frac{e_{k(n+1)+b}}{e_{k(n+1)+b-1}} \cdot \frac{e_{k(n+1)+b-1}}{e_{k(n+1)+b-2}} \cdots \frac{e_{kn+b+1}}{e_{kn+b}}}_{k \cdot \text{fois}}$$

Alors, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{\alpha(n+1)}}{e_{\alpha(n)}} = 1$, puisque chacun des k rapports converge vers 1.

c.q.f.d.

Définition : Soit $k \in]1, \infty[$. Appelons $\text{LOG}[1/k]$ le sous-ensemble de LOGSF sur lequel il existe un procédé de type P_2 donnant des sous-suites appartenant à $\text{LIN}\left[\frac{1}{k}\right]$.

Remarque 1 : $\text{LOG}[1/k] \neq \emptyset$. En effet, $\forall k \in]1, \infty[$, la suite $\left(\frac{1}{n}\right) \in \text{LOG}\left[\frac{1}{k}\right]$ pour l'extraction donnée par $\alpha(n) = E(k^n + b)$. La suite extraite est donnée par

$$t_n = \frac{1}{E(k^n + b)}, \quad n \geq 1, \quad \text{et } (t_n) \in \text{LIN}\left[\frac{1}{k}\right].$$

Remarque 2 : C'est une bonne définition, au sens où elle est indépendante de b . Soit $(S_n) \in \text{LOG}$, $S^* = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Supposons $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, $b \in \mathbb{N}^*$, et aussi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_k^{n+1}}{e_k^n} = \rho, \quad 0 < \rho < 1, \quad \text{c'est-à-dire que } (S_n) \in \text{LOG } \rho, \quad \text{par l'extraction}$$

$\alpha(n) = k^n$. Montrons que cela reste vrai même pour l'extraction $\alpha(n) = k^n + b$, quelque soit $b \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{e_k^{n+1} + b}{e_k^n + b} = \underbrace{\frac{e_k^{n+1} + b}{e_k^{n+1} + b - 1} \cdot \frac{e_k^{n+1} + b - 1}{e_k^{n+1} + b - 2} \cdots \frac{e_k^{n+1} + 1}{e_k^{n+1}}}_{b \cdot \text{fois}} \cdot \underbrace{\frac{e_k^{n+1}}{e_k^n} \cdot \frac{e_k^n}{e_k^n + 1} \cdot \frac{e_k^n + 1}{e_k^n + 2} \cdots \frac{e_k^n + b - 1}{e_k^n + b}}_{b \cdot \text{fois}}$$

Le rapport $\frac{e_k^{n+1}}{e_k^n}$ converge vers ρ . Les $2b$ autres rapports convergent chacun vers 1. Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_k^{n+1} + b}{e_k^n + b} = \rho$.

Rappelons la définition des ensembles $S_{\frac{1}{\alpha}}$, $\alpha > 0$:

$$S_{\frac{1}{\alpha}} = \{(S_n) \in \text{LOGSF}, S^* = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n : \exists K \neq 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha (S_n - S^*) = K\}.$$

Il est facile de vérifier, comme pour la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$, que toute suite $\left(\frac{1}{\alpha}\right)$, $\alpha > 0$, appartient à $\text{LOG}\left[\frac{1}{k}\right]$ pour l'extraction définie par $\alpha(n) = E(k^n + b)$,

$b \in \mathbb{N}$.

Cela est-il vrai pour toute suite de $S_{\frac{1}{\alpha}}$?

Prenons une suite $(S_n) \in S_{\frac{1}{\alpha}}$, de limite S^* .

$$\exists K \neq 0 \text{ tel que } \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha (S_n - S^*) = K. \quad (1)$$

Soit $k > 1$ et désignons par $(S_{E(k^n)})$ la suite extraite par $(n) = E(k^n)$, $n \geq 1$.

Alors, d'après (1),

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} E(k^{n+1})^\alpha \cdot (S_{E(k^{n+1})} - S^*) = K$$

et

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} E(k^n)^\alpha \cdot (S_{E(k^n)} - S^*) = K.$$

$$(i) \text{ et } (ii) \text{ impliquent que } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{E(k^{n+1})} - S^*}{S_{E(k^n)} - S^*} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{E(k^n)}{E(k^{n+1})} \right)^\alpha = \frac{1}{k^\alpha}$$

Puisque $k > 1$ et $\alpha > 0$, alors $\frac{1}{k^\alpha} \in]0, 1[$, et donc

Théorème 1 : $\forall k > 1, \forall \alpha > 0, S_{\frac{1}{n^\alpha}} \subset \text{LOG} \left[\frac{1}{k^\alpha} \right]$.

Remarque : Pour une suite $(S_n) \in S_{\frac{1}{n}}$, quelque soit $k \in]1, +\infty[$, l'extraction réalisée par $\alpha(n) = E(k^n + b)$ donne une sous-suite à convergence linéaire. Ceci nous amène à nous poser la question suivante :

Etant donné une suite $(S_n) \in \text{LOGSF}$ et un réel k_0 tels que la sous-suite $(S_{E(k_0^n)})$, appartient à LIN^+ , est-ce que tout autre procédé de type \mathcal{P}_2 donne une sous-suite de LIN^+ ?

Avant de répondre à cette question, appelons $S^* = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, et désignons, pour tout $k \in]1, +\infty[$ et tout $n \geq 1$, l'application ρ_n par :

$$\rho_n(k) = \frac{e_k^{n+1}}{e_k^n}.$$

Supposons alors qu'il existe un réel $k_0, k_0 \in]1, +\infty[$, tel que

$$\rho_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n^{(k_0)}, \quad \rho_0 \in]0, 1[$$

Prenons $p = \alpha \cdot k_0$ où $\alpha > \frac{1}{k_0}$, c'est-à-dire $p > 1$.

Montrons alors qu'il existe un réel $\rho_p \in]0, 1[$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(p) = \rho_p$.

Pour cela, cherchons d'abord un réel β_n réalisant

$$e_{p^n} = e_{k_0^{\beta_n}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{Or } p^n = k_0^{\beta_n} \leftrightarrow \beta_n = n \left(1 + \frac{\text{Log} \alpha}{\text{Log} k_0} \right)$$

En pratique, l'indice $k_0^{\beta_n}$ sera l'entier le plus proche du réel $k_0^{\beta_n}$, et sera considéré dorénavant comme tel.

Estimons maintenant la quantité $\frac{e_p^n}{e_{k_0^n}}$ dans le cas où $p > k_0$.

Le cas $p \in]1, k_0[$ peut être traité de façon similaire.

On a, pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{e_p^n}{e_{k_0}^n} = \frac{e_{k_0}^{\beta_n}}{e_{k_0}^n} = \frac{e_{k_0}^{\beta_n}}{e_{k_0}^{\beta_{n-1}}} \cdot \frac{e_{k_0}^{\beta_{n-1}}}{e_{k_0}^{\beta_{n-2}}} \cdot \dots \cdot \frac{e_{k_0}^{\beta_1}}{e_{k_0}^{\beta_0}} = \rho_{\beta_{n-1}}(k_0) \cdot \rho_{\beta_{n-2}}(k_0) \cdot \dots \cdot \rho_{\beta_1}(k_0)$$

$\beta_n - n$ fois

Par ailleurs,

$$\frac{e_{p_{n+1}}}{e_{k_0}^{n+1}} = \rho_{\beta_{n+1}-1}(k_0) \cdot \rho_{\beta_{n+1}-2}(k_0) \cdot \dots \cdot \rho_{\beta_{n+1}}(k_0)$$

$\beta_{n+1} - (n+1)$ fois

Ce qui donne, pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{e_{p_{n+1}}}{e_p^n} = \frac{e_{p_{n+1}}}{e_{k_0}^{n+1}} \cdot \frac{e_{k_0}^{n+1}}{e_{k_0}^n} \cdot \frac{e_{k_0}^n}{e_p^n} =$$

$$\underbrace{\rho_{\beta_{n+1}-1}(k_0) \cdot \rho_{\beta_{n+1}-2}(k_0) \cdot \dots \cdot \rho_{\beta_{n+1}}(k_0)}_{\beta_{n+1} - n - 1 \text{ fois}} \cdot \underbrace{\rho_n(k_0) \cdot \rho_{\beta_n-1}(k_0)^{-1} \cdot \rho_{\beta_n-2}(k_0)^{-1} \cdot \dots \cdot \rho_{\beta_1}(k_0)^{-1}}_{\beta_n - n \text{ fois}}$$

Puisque

$\beta_n - n = n \cdot \frac{\text{Log} \alpha}{\text{Log} k_0}$, $\beta_{n+1} = (n+1) \cdot \frac{\text{Log} \alpha}{\text{Log} k_0}$, et que quand n est assez grand, il

existe donc un réel ϵ_n suffisamment voisin de 0 pour que

$$\frac{e_{p_{n+1}}}{e_p^n} = \rho_0^{(n+1) \frac{\text{Log} \alpha}{\text{Log} k_0}} \cdot \rho_0 \cdot \rho_0^{-n} \frac{\text{Log} \alpha}{\text{Log} k_0} + \epsilon_n = \rho_0^{1 + \frac{\text{Log} \alpha}{\text{Log} k_0}} + \epsilon_n$$

Ainsi

$$\rho_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{p_{n+1}}}{e_p^n} = \rho_0^{1 + \frac{\text{Log} \alpha}{\text{Log} k_0}}$$

Comme $\alpha > k_0^{-1}$, alors $\text{Log} \alpha > -\text{Log} k_0$ et donc $\frac{\text{Log} \alpha}{\text{Log} k_0} > -1$, d'où

l'exposant $1 + \frac{\text{Log} \alpha}{\text{Log} k_0}$ est positif, ce qui nous permet d'affirmer que

$$0 < \rho_0^{1 + \frac{\text{Log} \alpha}{\text{Log} k_0}} < 1.$$

Nous venons alors de démontrer la

Proposition 2 : Soit $(S_n) \in \text{LOGSF}$. Si pour un réel $k_0 \in]1, +\infty[$ l'extraction $\alpha(n) = E(k_0^n)$, $n \geq 1$ donne une sous-suite $(S_{\alpha(n)})_{n \geq 1} \in \text{LIN}^+$, alors toute extraction de type géométrique donne une sous-suite appartenant aussi à LIN^+ .

Nous pouvons aussi formuler ce résultat comme suit :

Proposition 2 bis : Soient $k_0 \in]1, +\infty[$ et $(S_n) \in \text{LOG}[1/k_0]$. Alors, pour tout $k \in]1, +\infty[$, $(S_n) \in \text{LOG} 1/k$.

Preuve : On cherche α tel que $\frac{1}{k} = \rho_0^{1 + \frac{\text{Log} \alpha}{\text{Log} k_0}}$.

Définition : Appelons $\overline{\text{LOG}}^*$ le sous-ensemble de LOGSF sur lequel tout procédé de type P_2 envoie sur LIN^+ .

Soit $\alpha \in]1, +\infty[$.

$$L_\alpha = \{(S_n) \in \text{LOGSF} : \exists K \neq 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \Delta S_n = K\}$$

Proposition 3 : $L^* = \bigcup_{\alpha > 1} L_\alpha \subset \overline{\text{LOG}}^*$.

Démonstration : Soit α un réel, $\alpha > 1$, et considérons une suite $(S_n) \in L_\alpha$.

$$\text{Posons } K_n = n^\alpha \Delta S_n. \quad n \geq 1.$$

Bien entendu, $K = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n$. Soit $(S_{\alpha(n)})_{n \geq 1}$ la suite extraite par

$$\alpha(n) = k^n, \text{ où } k \in]1, +\infty[.$$

Montrons alors que $(S_{(n)})_{n \geq 1} \in \text{LIN}^+$:

On a :

$$\frac{S_{k^{n+2}} - S_{k^{n+1}}}{S_{k^{n+1}} - S_{k^n}} = \frac{\sum_{p=k^{n+1}}^{k^{(n+2)}-1} \Delta S_p}{\sum_{q=k^n}^{k^{n+1}-1} \Delta S_q} = \frac{\sum_{p=k^{n+1}}^{k^{n+2}-1} L_p/p^\alpha}{\sum_{q=k^n}^{k^{n+1}-1} K_q/q^\alpha}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = K$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{k^{n+2}} - S_{k^{n+1}}}{S_{k^{n+1}} - S_{k^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{p=k^{n+1}}^{k^{n+2}-1} 1/p^\alpha}{\sum_{q=k^n}^{k^{n+1}-1} 1/q^\alpha}$$

Dans le cas où (t_n) est une série harmonique, $(t_n) = \sum \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$, on a vu que si pour une extraction $\beta(n)$, il existait $\rho \in]0, 1[$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta t_{\beta(n)}}{\Delta t_n} = \rho, \text{ alors on avait } (t_{\beta(n)})_{n \geq 1} \in \text{LIN}(\rho \frac{\alpha-1}{\alpha}).$$

Dans ce cas, que vaut donc ρ ?

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{\Delta} S_{k^{n+1}}}{\overline{\Delta} S_{k^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{k^{n+1}}}{(k^{n+1})^\alpha} \cdot \frac{(k^n)^\alpha}{K_{k^n}} = \frac{1}{k^\alpha}.$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{k^{n+2}} - S_{k^{n+1}}}{S_{k^{n+1}} - S_{k^n}} = \left(\frac{1}{k^\alpha} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} = \frac{1}{k^{\alpha-1}} \in]0, 1[$$

Et puisque $(S_n) \in \text{LOGSF}$, $(S_{\alpha(n)})$ est donc strictement monotone à partir d'un certain rang, et donc d'après la remarque 1 (Ch. 0).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{k^{n+1}}}{e^{k^n}} = \frac{1}{k^{\alpha-1}}, \text{ c'est-à-dire que } (S_{k^n}) \in \text{LIN}^+.$$

c.q.f.d.

Cas des extractions de type superlinéaire :

La suite définie par $s_n = \frac{1}{\text{Log}(n+1)}$, $n \geq 1$, n'appartient à $\overline{\text{LOG}}^*$. En effet, pour tout $k > 1$,

$$\frac{e^{k^{n+1}}}{e^{k^n}} = \frac{\text{Log}(k^{n+1})}{\text{Log}(k^{n+1} + 1)} = \frac{n \text{Log}[k(1+k^{-n})]}{(n+1)\text{Log}[k(1+k^{-n-1})]}$$

Donc

$$\frac{e^{k^{n+1}}}{e^{k^n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

Faisons cependant une extraction $\alpha(n) = k^n - 1$, pour $k > 1$.

On obtient alors la sous-suite définie par $t_n = \frac{1}{n \text{Log} k}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, qui est de limite nulle.

Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} n t_n = \frac{1}{\text{Log} k} \neq 0$, c'est-à-dire que $(t_n) \in \mathcal{S} \frac{1}{n}$.

Ceci signifie que si on appliquait à nouveau une extraction $\alpha(n) = k'^n$, où $k' > 1$, on obtiendrait alors une suite de LIN^+ .

Cette double extraction est du type suivant : $\beta(n) = k^{k'^n}$, dite de type superlinéaire. La suite $(S_{\beta(n)})_{n \geq 1} \in \text{LIN}^+$. En effet, pour simplifier, considérons $\beta'(n) = k^{k'^n} - 1$, et alors :

$$\frac{e_{\beta'(n+1)}}{e_{\beta'(n)}} = \frac{\text{Log} k^{k'^{n+1}}}{\text{Log} k^{k'^{n+1}}} = \frac{k'^n}{k'^{n+1}} = \frac{1}{k'}, \text{ quelque soit } n \geq 1, \text{ d'où}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{\beta'(n+1)}}{e_{\beta'(n)}} = \frac{1}{k'} \in]0, 1[.$$

Il va de soit qu'une telle extraction est très coûteuse sur le plan pratique.

Son intérêt ne sera donc que théorique, malheureusement.

Nous pouvons, comme pour les extractions de type géométrique donner quelques définitions et propriétés similaires :

Définition : Appelons $\overline{\text{LOG}}^{**}$ le sous-ensemble de LOGSF sur lequel les extractions de type superlinéaire donnent des sous-suites appartenant à LIN^+ .

Nous avons de même la

Définition : Appelons $S_{\frac{1}{\text{Log}n}}$ le sous-ensemble de LOG des suites synchrones à $(\frac{1}{\text{Log}n})_{n \geq 2}$:

$$S_{\frac{1}{\text{Log}n}} = \{(S_n) \in \text{LOG} / \exists \rho \neq 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Log}n \cdot (S_n - S^*) = \rho\}$$

$$S^* = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Et, par une démonstration analogue à celle du théorème 1, nous avons la

Proposition 4 : $S_{\frac{1}{\text{Log}n}} \subset \overline{\text{LOG}}^{**}$

Remarque : L'inclusion $\bigcup_{\alpha > 1} L_\alpha \subset \overline{\text{LOG}}^*$ est stricte.

En effet, nous allons exhiber un sous-ensemble de $\overline{\text{LOG}}$ d'intersection vide avec $\bigcup_{\alpha > 1} L_\alpha$.

$$\left\{ \left(\frac{1}{n^\beta \text{Log}(n+1)} \right)_{n \geq 1}, 0 < \beta < 1 \right\}$$

C'est bien un sous-ensemble de $\overline{\text{LOG}}^*$:

En effet, considérons, pour $\beta \in]0, 1[$, la suite $S_n = \frac{1}{n^\beta \text{Log}(n+1)}$, $n \geq 1$,

et l'extraction donnée par $\alpha(n) = k^n - 1$, $n \geq 1$, où $k \in]1, +\infty[$.

Alors

$$\frac{e_{\alpha(n+1)}}{e_{\alpha(n)}} = \frac{\alpha(n)^\beta \text{Log}(\alpha(n)+1)}{\alpha(n+1)^\beta \text{Log}(\alpha(n+1)+1)} = \left(\frac{k^n}{k^{n+1}} \right)^\beta \cdot \frac{n \cdot \text{Log}k}{(n+1) \cdot \text{Log}k}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{\alpha(n+1)}}{e_{\alpha(n)}} = k^{-\beta} \in]0, 1[$. Cette suite appartient donc à $\overline{\text{LOG}}^*$.

Montrons qu'elle ne peut, en aucun cas, appartenir à un ensemble L^α , $\alpha > 1$.

Pour n suffisamment grand, nous avons l'équivalence suivante :

$$\Delta \frac{1}{n^\beta \text{Log}n} \sim \frac{1}{n^{\beta+1} \text{Log}n}$$

et donc,

1) Si on choisit α tel que $1 < \alpha \leq \beta+1$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \Delta \frac{1}{n^\beta \text{Log}n} = 0$$

2) Et si on le choisit tel que $\alpha > \beta+1$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \Delta \frac{1}{n^\beta \text{Log}n} = +\infty$$

c.q.f.d.

II. EXEMPLES NUMERIQUES D'EXTRACTIONS DE TYPE P_2 :

Etant donné une suite (S_n) , nous calculons S_n , $n = 1, \dots, 1024$. On en extrait la sous-suite $t_n = S_{2n-1}$, $n = 1, \dots, 11$.

Nous appelons $(\epsilon^{(n)})$ la suite transformée de (t_n) par le procédé δ^2 d'Aitken.

$$1) S_n = \frac{3}{1+n^4}, n \geq 1, S^* = 0. \quad (S_n) \in L_5.$$

n	t_n	$\epsilon^{(n)}$
1	.150000000000000000+01	.150000000000000000+01
2	.1764705882352940+00	.1760705882352940+00
3	.1167315175097280-01	-.1176470588235290-01
4	.7322431047107640-03	-.4577706569008930-04
5	.0577566870622700-04	-.1788139449843060-06
6	.2861020220737250-05	-.6984919311252980-09
7	.1788139236680310-06	-.2728484105318780-11
8	.1117587085375240-07	-.1065814103392000-13
9	.6984919307989790-09	-.4163336342344340-16
10	.4365574568446530-10	-.1626303258728260-18
11	.2728484105316300-11	-.6352747104407250-21

$$2) S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(4k^2 - 1)^2}, n \geq 1. S^* = 0.125$$

Cette suite appartient à L_3

n	t_n	$\epsilon^{(n)}$
1	.11111111111111110+00	.11111111111111110+00
2	.12000000000000000+00	.12000000000000000+00
3	.1234567901234570+00	.1256565656565660+00
4	.1245674740484430+00	.1250932894535710+00
5	.1248852157943070+00	.1250125388447420+00
6	.1249704142011830+00	.1250016288924570+00
7	.1249924884321850+00	.1250002076882000+00
8	.1249981074656690+00	.1250000262233890+00
9	.1249995250200420+00	.1250000032945620+00
10	.1249998810231970+00	.1250000004128640+00
11	<u>.1249999702267530+00</u>	<u>.1250000000516640+00</u>

III. UNE PROPRIÉTÉ DU PROCÉDÉ δ^2 D'AITKEN SUR LES ENSEMBLES L_α

Soient un réel α , $\alpha > 1$, et $(S_n)_{n \geq 1} \in L_\alpha$. On sait alors qu'il existe une suite de réels $(K_n)_{n \geq 1}$, de limite K non nulle, vérifiant $K_n = n^\alpha \Delta S_n$, $\forall n \geq 1$.

$$\text{Posons } \mu_n = \frac{K_{n+1}}{K_n} - 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{Bien entendu, } \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0$$

Appelons $(\varepsilon_2^{(n)})_{n \geq 1}$ la suite obtenue de $(S_n)_{n \geq 1}$ par application du procédé δ^2 d'Aitken.

Nous allons démontrer que si les deux conditions qui suivent sont vérifiées, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta \varepsilon_2^{(n)}}{\Delta S_n} = \frac{1}{\alpha}.$$

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \mu_n = 0$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \Delta \mu_n = 0$$

Exemple : La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ appartient à L_2 . Elle vérifie de surcroît les conditions (i) et (ii).

La démonstration : Posons $R_n = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$

$$\text{Alors } \frac{\Delta \varepsilon_2^{(n)}}{\Delta S_n} = R_n \left[\frac{1}{R_{n-1}} - \frac{1}{R_{n+1} - 1} \right]$$

Puisque $R_n = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} \cdot \frac{K_{n+1}}{K_n}$, nous avons alors, pour n suffisamment grand :

$$\frac{1}{R_n - 1} = \frac{1}{\frac{n^\alpha K_{n+1}}{(n+1)^\alpha K_n} - 1} = \frac{(n+1)^\alpha K_n}{n^\alpha K_{n+1} - (n+1)^\alpha K_n} = \frac{(n+1)^\alpha K_n}{n^\alpha (K_n + \Delta K_n) - (n+1)^\alpha K_n}$$

$$= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha K_n}{\Delta K_n + K_n - \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha K_n} \sim \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) K_n}{K_n + \Delta K_n - \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) K_n} = \frac{1 + \frac{\alpha}{n}}{\mu_n - \frac{\alpha}{n}}$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{R_n - 1} - \frac{1}{R_{n+1} - 1} \sim \frac{1 + \frac{\alpha}{n}}{\mu_n - \frac{\alpha}{n}} - \frac{1 + \frac{\alpha}{n+1}}{\mu_{n+1} - \frac{\alpha}{n+1}} = \frac{(1 + \frac{\alpha}{n})(\mu_{n+1} - \frac{\alpha}{n+1}) - (1 + \frac{\alpha}{n+1})(\mu_n - \frac{\alpha}{n})}{(\mu_n - \frac{\alpha}{n})(\mu_{n+1} - \frac{\alpha}{n+1})}$$

Développons cette dernière quantité :

$$= \frac{\mu_{n+1} - \frac{\alpha}{n+1} + \alpha \frac{\mu_{n+1}}{n} - \frac{\alpha^2}{n(n+1)} - \mu_n + \frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha \mu_n}{n+1} + \frac{\alpha^2}{n(n+1)}}{\mu_n \cdot \mu_{n+1} - \frac{\alpha \mu_n}{n+1} - \frac{\alpha \mu_{n+1}}{n} + \frac{\alpha^2}{n(n+1)}}$$

$$= \frac{(\mu_{n+1} - \mu_n) + \alpha(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) + \alpha(\frac{\mu_{n+1}}{n} - \frac{\mu_n}{n+1})}{\frac{n \mu_n (n+1) \mu_{n+1}}{n(n+1)} - \frac{\alpha}{n(n+1)} (n \mu_n - (n+1) \mu_{n+1}) + \frac{\alpha^2}{n(n+1)}}$$

$$= \frac{n(n+1) \Delta \mu_n + \alpha + \alpha[(n+1) \mu_{n+1} - n \mu_n]}{n \mu_n \cdot (n+1) \mu_{n+1} - \alpha[n \mu_n + (n+1) \mu_{n+1}] + \alpha^2}$$

Si les conditions (i) et (ii) sont vérifiées, il est alors clair que cette quantité a pour limite $\frac{1}{\alpha} \in]0, 1[$.

Il s'ensuit que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta \varepsilon_2^{(n)}}{\Delta S_n} = \frac{1}{\alpha}$.

Nous verrons plus loin qu'une telle suite est accélérée par le procédé standard.

Proposition 5 : Soient un réel α , $\alpha > 1$, et une suite $(S_n)_{n \geq 1} \in L_\alpha$. Soient aussi $(\varepsilon_2^{(n)})_{n \geq 1}$ la suite obtenue de $(S_n)_{n \geq 1}$, par le procédé δ^2 d'Aitken, et $(\mu_n)_{n \geq 1}$ une suite de limite nulle définie par

$$\mu_n = \frac{K_{n+1}}{K_n} - 1, \text{ où } K_n = n^\alpha \Delta S_n, n \geq 1. \text{ Supposons que}$$

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \mu_n = 0$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \Delta \mu_n = 0$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta \varepsilon_2^{(n)}}{\Delta S_n} = \frac{1}{\alpha}$$

Définition : Appelons \bar{I}_α , $\alpha > 1$, le sous-ensemble de I_α constitué des suite (S_n) vérifiant les conditions (i) et (ii).

Remarque : Soit $(S_n) \in \bigcup_{\alpha > 1} \bar{I}_\alpha$. Si $(\varepsilon_2^{(n)})$ représente la suite obtenue de (S_n)

par application du δ^2 d'Aitken, alors $\exists C \neq 1$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta \varepsilon_2^{(n)}}{\Delta S_n} = C$.

Rappelons maintenant le théorème suivant concernant le procédé standard, démontré par Kowalewski [12] :

Théorème 2 : Soit L un ensemble de suites strictement monotones pour lequel il existe une transformation auxiliaire de suites, transformant $(S_n) \in L$ en (t_n) de telle sorte que :

$$\bullet \forall (S_n) \in L, \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

(cette transformation auxiliaire est donc régulière sur L)

$$\bullet \forall (S_n) \in L, \exists C \neq 1 \text{ tel que } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta t_n}{\Delta S_n} = C$$

Alors, la transformation

$$T_n = S_n - \frac{S_n - t_n}{1 - \frac{\Delta t_n}{\Delta S_n}}$$

accélère la convergence de toute suite de L .

Définition 7 : La transformation $(S_n) \rightarrow (t_n)$ s'appelle procédé standard.

Définition : Dans le cas où la transformation auxiliaire est le procédé δ^2 d'Aitken le procédé standard correspond alors au θ_2 -algorithme.

La remarque précédente nous permet alors d'obtenir la

Proposition 6 : Le θ_2 -algorithme accélère $\bigcup_{\alpha > 1} \bar{I}_\alpha$.

IV. COMPOSITION DU PROCÉDE D'EXTRACTION P_2 ET DU PROCÉDE δ^2 D'AITKEN ITERÉ

Les procédés d'extraction P_2 , donc de type géométrique, transforment toute suite (S_n) , $(S_n) \in \bigcup_{\alpha > 1} L_\alpha$, en suites à convergence linéaire dont certaines peuvent appartenir au domaine d'accélération du procédé δ^2 d'Aitken itéré. Le but de ce paragraphe est de donner un sous-ensemble de $\bigcup_{\alpha > 1} L$ accélérable donc par la composition du procédé P_2 et du procédé δ^2 itéré.

Kateb [10] démontre le résultat suivant :

Théorème 3 : Soit $(t_n) \in \text{LIN}$, de limite t^* . S'il existe un réel ρ , $|\rho| < 1$ et une suite (u_n) de limite nulle, telle que $u_{n+1} = \phi(u_n)$, l'application ϕ étant analytique au voisinage de 0, vérifiant :

$$- \phi(0) = 0$$

$$- 0 < |\phi'(0)| < 1$$

et si, pour n suffisamment grand on a

$$\frac{t_{n+1} - t^*}{t_n - t^*} = \rho + C_1 u_n + C_2 u_n^2 + \dots + C_p u_n^p + \dots \quad (1)$$

les C_i étant non tous nuls, et $w_n = C_1 u_n + C_2 u_n^2 + \dots + C_p u_n^p + \dots$ convergeant vers 0, alors la suite (t_n) appartient au domaine d'accélération du procédé δ^2 d'Aitken itéré.

Considérons maintenant le sous-ensemble de $\bigcup_{\alpha > 1} L_\alpha$ des suites (S_n) de limite S^* qui s'écrivent sous la forme suivante, pour n assez grand :

$$S_n - S^* = \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \dots + \frac{\alpha_p}{n^p} + \dots \quad (2)$$

les coefficients α_i étant non tous nuls, le second membre de cette égalité représentant une série convergente, de limite nulle.

La suite qu'on extraira sera (S_{2^n}) , cas qui sera très représentatif, cette démonstration pouvant aisément être généralisée à toute extraction $(S_{E(k^n)})$, où $k > 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$, ce qui signifie que S_{2^n} appartient au disque de convergence de la série (2). Nous avons donc

$$S_{2^n} - S^* = \frac{\alpha_1}{2^n} + \frac{\alpha_2}{(2^n)^2} + \dots + \frac{\alpha_p}{(2^n)^p} + \dots \quad (3)$$

Montrons qu'il existe un réel ρ tel que $|\rho| < 1$ et une suite de réels (C_i) non tous nuls tels que, pour n assez grand,

$$\frac{S_{2^{n+1}} - S^*}{S_{2^n} - S^*} = \rho + \frac{C_1}{2^n} + \frac{C_2}{(2^n)^2} + \dots + \frac{C_p}{(2^n)^p} + \dots \quad (1\text{-bis})$$

Dans ce cas, $u_n = \frac{1}{2^n}$, $\forall n \geq 1$, et donc $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} = \phi(u_n)$ entraîne que l'application ϕ est définie par $\phi(x) = \frac{x}{2}$.

- ϕ vérifie bien l'hypothèse d'analyticité au voisinage de 0
- $\phi(0) = 0$
- $0 < |\phi'(0)| = \frac{1}{2} < 1$

Il suffit donc de réaliser (1-bis), pour que la suite (S_{2^n}) appartienne au domaine d'accélération du procédé δ^2 itéré.

D'après (3),

$$\frac{S_{2^{n+1}} - S^*}{S_{2^n} - S^*} = \frac{\frac{\alpha_1}{2^{n+1}} + \frac{\alpha_2}{(2^{n+1})^2} + \dots + \frac{\alpha_p}{(2^{n+1})^p} + \dots}{\frac{\alpha_1}{2^n} + \frac{\alpha_2}{(2^n)^2} + \dots + \frac{\alpha_p}{(2^n)^p} + \dots} \quad (4)$$

Posons $\psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x^i$. L'égalité (4) devient alors

Posons $\psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x^i$. L'égalité (4) devient alors

$$\frac{S_{2^{n+1}} - S^*}{S_{2^n} - S^*} = \frac{\psi\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\psi\left(\frac{1}{2^n}\right)} = \frac{\psi \circ \phi\left(\frac{1}{2^n}\right)}{\psi\left(\frac{1}{2^n}\right)} \quad (5)$$

Puisque $\psi(0) = 0$ et $\psi \circ \phi(0) = 0$, on suit alors, d'après la théorie des fonctions analytiques [4], qu'il existe une fonction θ , analytique au voisinage de 0, et un entier $q \geq 1$ tel que

$$\psi(x) = x^q \theta(x), \text{ et } \theta(0) \neq 0$$

Par conséquent,

$$\frac{\psi \circ \phi(x)}{\psi(x)} = \frac{\psi(x)^q \cdot \theta(\phi(x))}{x^q \theta(x)} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^q}{x^q} \cdot \frac{\theta \circ \phi(x)}{\theta(x)}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\psi \circ \phi(x)}{\psi(x)} = \frac{1}{2^q} \cdot \frac{\theta \circ \psi}{\theta}(x) \quad (6)$$

Les fonctions θ et ϕ étant analytiques au voisinage de 0, et $\theta(0) \neq 0$, impliquent que la fonction $\frac{\theta \circ \phi}{\theta}$ est aussi analytique au voisinage de 0.

Il existe donc une suite (β_i) de réels non tous nuls, telle que, pour x voisin de 0 :

$$\frac{\theta \circ \phi}{\theta}(x) = 1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_p x^p + \dots \quad (7)$$

Des égalités (5), (6) et (7), nous en déduisons alors :

$$\frac{S_{2^{n+1}} - S^*}{S_{2^n} - S^*} = \frac{1}{2^q} \left| 1 + \frac{\beta_1}{2^n} + \frac{\beta_2}{(2^n)^2} + \dots + \frac{\beta_p}{(2^n)^p} + \dots \right|$$

En posant $C_i = \frac{\beta_i}{2^q}$, $i = 1, 2, 3, \dots$, nous obtenons exactement l'expression

recherchée en (1-bis) avec $\rho = \frac{1}{2^q}$ ($q \geq 1$).

Remarque : Cette démonstration reste valable pour toute suite (S_n) de limite S^* , telle que :

$$S_n - S^* = \frac{\alpha_1}{n^\theta} + \frac{\alpha_2}{n^{\theta+1}} + \dots + \frac{\alpha_p}{n^{\theta+p}} + \dots, \alpha_1 \neq 0, \quad (8)$$

$\theta > 0$ et n suffisamment grand.

Définition : Appelons LW le sous-ensemble de LOGSF, formé des suites (S_n) qui s'écrivent sous la forme suivante :

$$S_n - S^* = \frac{\alpha_1}{n^\theta} + \frac{\alpha_2}{n^{\theta+1}} + \dots + \frac{\alpha_p}{n^{\theta+p}} + \dots, \text{ pour } n \text{ suffisamment grand, et}$$

$$* S^* = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

* θ étant un réel positif,

* les α_i , $i \geq 1$, étant non tous nuls et $\alpha_1 \neq 0$

Cela nous permettra d'énoncer la

Proposition 7 : Les procédés P_2 d'extraction de type géométrique extraient de chaque suite appartenant à LW une sous-suite appartenant au domaine d'accélération du procédé δ^2 d'Aitken, itéré.

Corollaire : L'ensemble LW est accélérable par la composition des procédés d'extraction P_2 et du procédé δ^2 d'Aitken itéré.

V. SUITES ET SERIES APPARTENANT A LW

a) La série d'Euler définie par $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ où

$$a_0 = 1 \text{ et } a_k = \frac{1}{k+1} + \text{Log}\left(\frac{k}{k+1}\right), k = 1, 2, 3, \dots$$

appartient à l'ensemble LW.

Preuve : Un calcul élémentaire montre que S_n peut aussi se mettre sous la forme suivante :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \text{Log}(n+1)$$

et un calcul détaillé dans [18] montre que

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \text{Log}(n+1) = \gamma + \int_0^{\infty} e^{-(n+1)t} d\phi(t) \text{ où}$$

γ désigne la constante d'Euler et où la fonction $\phi(t)$ est définie par

$$\phi'(t) = e^{-t} \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{e^t - 1} \right] = e^{-t} \left[\frac{e^t - 1 - t}{t(e^t - 1)} \right]$$

Appelons $\beta(t)$ la fonction définie par $\beta(t) = \phi'(t)$, $t \in]0, +\infty[$.

$$\text{Alors } S_n = \gamma + \int_0^{\infty} e^{-(n+1)t} \beta(t) dt$$

Faisons maintenant le rappel suivant :

Théorème [15] : La fonction $f(n) = \int_0^{\infty} e^{-nt} \psi(t) dt$ est une fonction entière en $\frac{1}{n}$ si et seulement si ψ est entière et $\varliminf_{n \rightarrow \infty} \text{Log} \frac{|\psi'(t)|}{|t|} < +\infty$.

Montrons donc que la quantité $e_n = S_n - \gamma$ est une fonction entière en $\frac{1}{n}$, qui est une condition suffisante d'appartenance de (S_n) à LW :

• Les fonctions $g(t) = \frac{e^{-t}}{e^t - 1}$ et $h(t) = \frac{e^t - 1 - t}{t}$ sont entières, ce qui

implique que $\beta(t) = g(t) \cdot h(t)$ est entière. De plus

$$\varliminf_{|t| \rightarrow \infty} \frac{\text{Log} |\beta(t)|}{|t|} = \varliminf_{|t| \rightarrow \infty} \frac{\text{Log} |e^{-t}|}{|t|} + \varliminf_{|t| \rightarrow \infty} \frac{\text{Log} |e^t - 1 - t|}{|t|} - \varliminf_{|t| \rightarrow \infty} \frac{\text{Log} |t|}{|t|} -$$

$$\varliminf_{|t| \rightarrow \infty} \frac{\text{Log} |e^t - 1|}{|t|}$$

$$\text{On a donc } \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Log} |\beta(t)|}{n+1} < +\infty$$

c.q.f.d.

Ce théorème [cf. Wimp [16] page 19], va nous permettre de retrouver un grand nombre de séries connues appartenant à LW :

Théorème 5 : Soit $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$, $S^* = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Si, pour n suffisamment grand,

$$a_n = \lambda^n \cdot n^\theta \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \dots \right), \alpha_0 \neq 0,$$

alors il existe des constantes $\beta_j, \gamma_j, \delta_j, j \geq 1$, telles que :

$$S_n - S^* = \begin{cases} \frac{\lambda^{n+1} n^\theta}{(\lambda-1)} \left(\alpha_0 + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \dots \right) & \text{si } |\lambda| < 1 \\ -\frac{n^{\theta+1}}{\theta+1} \left(\alpha_0 + \frac{\gamma_1}{n} + \frac{\gamma_2}{n^2} + \dots \right) & \text{si } \lambda = 1, \theta < -1 \end{cases}$$

$$S_n = \alpha_0 \operatorname{Log} n + \frac{\delta_1}{n} + \frac{\delta_2}{n^2} + \dots \quad \text{si } \lambda = 1, \theta = -1$$

Exemple : Considérons la série harmonique définie par $S_n = \sum_{p=1}^n p^\theta$, $\theta < -1, n \geq 1$.

Dans ce cas, $\alpha_0 = 1, \alpha_i = 0, \forall i = 1, 2, 3, \dots$ et $\lambda = 1$.

Alors il existe $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ tels que

$$S_n - S^* = -\frac{n^{\theta+1}}{\theta+1} \left(1 + \frac{\gamma_1}{n} + \frac{\gamma_2}{n^2} + \dots \right)$$

Par définition, $(S_n) \in \text{LW}$. De même, toute une famille de séries connues sera incluse dans l'ensemble LW. Elle est donnée par la

Proposition 8 : Soit $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$, (S_n) étant une série convergente vers S^* .

Si, pour n suffisamment grand,

$$a_n = n^\theta \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \dots \right), \alpha_0 \neq 0, \text{ et } \theta < -1,$$

alors $(S_n) \in \text{LW}$.

VI. EXEMPLES NUMERIQUES

1) Soit (S_n) définie par

$$\forall n \geq 1, S_n = \frac{n+n^2}{n^2+n^3+n^4+n^5}, S^* = 0.$$

Cette suite appartient à LW. Appelons (t_n) la suite définie par $t_n = S_{2^{n-1}}$. Sur les 1024 premiers termes de la suite (S_n) nous calculons t_1, \dots, t_{11} .

Appelons $(\epsilon^{(n)})$ la suite obtenue de (t_n) par application du procédé δ^2 d'Aitken, $(\epsilon_1^{(n)})$ la suite obtenue de $(\epsilon^{(n)})$ par le même procédé, et de façon générale, $(\epsilon_{k+1}^{(n)})$ la suite obtenue de $(\epsilon_k^{(n)})$.

Dans ce cas,

n	t_n	$\epsilon^{(n)}$	$\epsilon_1^{(n)}$
1	.500000000000000000+00	.500000000000000000+00	.500000000000000000+00
2	.100000000000000000+00	.100000000000000000+00	.100000000000000000+00
3	.1470588235294120-01	-.8411214953271030-02	-.4871794871794870-01
4	.1923076923076920-02	-.3303661558227040-03	-.8909203702879690-03
5	.2431906614785990-03	-.1097833760522810-04	.2164623326829290-05
6	.3048780487804880-04	-.3484930687846750-06	.1746820945663560-07
7	.3813766170368560-05	-.1093340595494000-07	.1376833390039360-09
8	.4768080561409170-06	-.3420060219539420-09	.1078087534191840-11
9	.5960373529456640-07	-.1069032414968830-10	.8427351309916110-14
10	.7450552175322820-08	-.3340932279928890-12	.6584805868212230-16
11	.9313216864379060-09	-.1044057430873720-13	.5144561310447740-18

Dans les exemples qui suivent, nous réaliserons ce procédé d'extraction ici décrit, ainsi que les mêmes notations.

2ème Exemple : La série d'Euler

$$\text{Posons donc } S_n = \sum_{k=1}^n (k^{-1} + \text{Log } \frac{k}{k+1}), \quad n \geq 1,$$

$$S^* = 0,577215664901533\dots$$

n	t_n	$\epsilon^{(n)}$
1	.100000000000000000+01	.100000000000000000+01
2	.8068528194400550+00	.8068528194400550+00
3	.6970389722134430+00	.5523299997009270+00
4	.6384156011773070+00	.5712800734894480+00
5	.6081402709802120+00	.5758066214466720+00
6	.5927592926367940+00	.5768757887631380+00
7	.5850078203460980+00	.5771324320591820+00
8	.5811168286695560+00	.5771950847883900+00
9	.5791675183377180+00	.5772105490439810+00
10	.5781919095102160+00	.5772143896234090+00
11	<u>.5777038666786810+00</u>	<u>.5772153465452380+00</u>

BU
LILLE

n	$\epsilon_1^{(n)}$	$\epsilon_2^{(n)}$
1	.100000000000000000+01	.100000000000000000+01
2	.8068528194400550+00	.8068528194400550+00
3	.1607828021950920+01	.4624736008427660+00
4	.5699664440894620+00	.1155748086455030+01
5	.5772271920234300+00	.5771767565392790+00
6	.5772064202062380+00	.5772064794655730+00
7	.5772134952397770+00	.5772116976900260+00
8	.5772153196098100+00	.5772159534965590+00
9	.5772156168748030+00	.5772156747401580+00
10	.5772156585894510+00	.5772156653987240+00
11	<u>.5772156640931290+00</u>	<u>.5772156649246280+00</u>

3ème Exemple : La série définie par $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$, $n \geq 1$.

$$S^* = \frac{\pi^2}{6} = 1, 644340668\dots$$

n	t_n	$\epsilon(n)$
1	.10000000000000000000+01	.10000000000000000000+01
2	.12500000000000000000+01	.12500000000000000000+01
3	.14236111111111110+01	.181°181818181820+01
4	.152742205215100+01	.1681815823254570+01
5	.1584346533440990+01	.1653450097579810+01
6	.1614167262827920+01	.1646977329270140+01
7	.1629130501408880+01	.1645433702451440+01
8	.1637152004954450+01	.16415057562060920+01
9	.1641035436308650+01	.1641964762890040+01
10	.1642082647955040+01	.1641941718572510+01
11	.1643957981030050+01	.1641935976989210+01

n	$\epsilon_1(n)$	$\epsilon_2(n)$
1	.100000000000000000+01	.100000000000000000+01
2	.125000000000000000+01	.125000000000000000+01
3	.8035714285711270+00	.1089713589713590+01
4	.1708209609774000+01	.1102480066189540+01
5	.1616012736118050+01	.1650013885097110+01
6	.1645057484696570+01	.1645042584613180+01
7	.1644951078293360+01	.1644937739789400+01
8	.1644936377274560+01	.1644934020597740+01
9	.1644934369549720+01	.1644934051983680+01
10	.1644934105617360+01	.1644934065669780+01
11	.1644934071753980+01	.1644934066769690+01

n	$\epsilon_3(n)$
1	.100000000000000000+01
2	.125000000000000000+01
3	.115234375000000000+01
4	.1101549217360630+01
5	.1089439873081000+01
6	.1645087315757720+01
7	.1644935408971510+01
8	.164493383013560+01
9	.1644934051721040+01
10	.1644934076252310+01
11	.164493406665820+01

4ème Exemple : La série définie par $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1}$, $n \geq 1$

$S^* = 0.5.$

n	t_n	$\epsilon^{(n)}$
1	.3333333333333330+00	.3333333333333330+00
2	.4000000000000000+00	.4000000000000000+00
3	.4444444444444440+00	.5333333333333330+00
4	.4705882352941180+00	.5079365079365080+00
5	.4848484848484850+00	.5019607843137250+00
6	.4923076923076920+00	.5004887585532740+00
7	.4961240310077520+00	.5001221001220990+00
8	.4980540747081700+00	.5000305194408820+00
9	.4990253411306030+00	.5000076295109450+00
10	.4995121951219480+00	.5000019073559010+00
11	<u>.4997559785261040+00</u>	<u>.5000004768375980+00</u>

n	$\epsilon_1^{(n)}$	$\epsilon_2^{(n)}$
1	.3333333333333330+00	.3333333333333330+00
2	.4000000000000000+00	.4000000000000000+00
3	.2666666666666670+00	.3555555555555560+00
4	.5120000000000000+00	.3530516431924880+00
5	.5001221001221000+00	.5006706162337330+00
6	.5000076295109480+00	.5000065155908040+00
7	.5000004768376120+00	.5000000001164140+00
8	.5000000298023220+00	.5000000000004520+00
9	.5000000018626400+00	<u>.499999999999970+00</u>
10	<u>.5000000001164040+00</u>	<u>.499999999999980+00</u>
11	<u>.5000000000072550+00</u>	<u>.4999999999999780+00</u>



n	$\epsilon_3^{(n)}$
1	.3333333333333330+00
2	.4000000000000000+00
3	.3733333333333330+00
4	.3529021558872300+00
5	.3555137925884700+00
6	.5000024898322530+00
7	.4999999355599000+00
8	.5000000000004500+00
9	<u>.4999999999999950+00</u>
10	<u>.4999999999999980+00</u>
11	<u>.5000000000002500+00</u>

VII. THEOREME DE SYNCHRONISATION

Introduction

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ la suite itérative suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 \in]0, \frac{1}{(1+p)^{1/p}}[, p \in \mathbb{N} - \{0\} \\ X_{n+1} = X_n \left(1 - \frac{X_n^p}{p} \right) \end{array} \right.$$

La suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est de limite nulle

* Cette suite est minorée par 0

Sous l'hypothèse $0 < X_n < \frac{1}{(1+p)^{1/p}}$, montrons que $0 < X_{n+1}$

Puisque $p \geq 1$, alors $\frac{1}{(1+p)^{1/p}} < 1$ et donc $0 < X_n < 1$

Or $0 < X_n < 1 \Rightarrow 0 < \frac{X_n^p}{p} < X_n < 1$

Et $0 < \frac{X_n^p}{p} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{X_n^{p+1}}{p} < X_n < 1 \Rightarrow 0 < X_n \left(1 - \frac{X_n^p}{p} \right)$

C'est-à-dire que $0 < X_{n+1}$.

* La suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est décroissante :

En effet, $X_{n+1} - X_n = -\frac{X_n^{p+1}}{p} < 0, n = 1, 2, 3, \dots$

(X_n) est donc une suite décroissante, minorée par 0. Elle est alors convergente.

Appelons X^* sa limite. X^* vérifie l'égalité suivante : $X^* = X^* - \frac{X^{*p+1}}{p} \leftrightarrow X^* = 0$

La suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est donc de limite nulle.

Remarque : $(X_n) \in \text{LOG}$. En effet, $\frac{X_{n+1}}{X_n} = 1 - \frac{X_n^p}{p}, n = 1, 2, 3, \dots$

Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_{n+1}}{X_n} = 1$.

Lemme 1 : Soient a et b deux réels vérifiant :

$$0 < a < b < \frac{1}{\frac{1}{\alpha-1}}, \text{ où } \alpha \in [2, +\infty[$$

$$\text{Alors } 0 < b^\alpha - a^\alpha < b - a.$$

Preuve :

Soit f l'application suivante :

$$f : \left[0, \alpha^{-\frac{1}{\alpha-1}}\right] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = x^\alpha - x$$

Montrons que f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[0, \alpha^{-\frac{1}{\alpha-1}}\right]$.

Pour cela, calculons le signe de la dérivée $f'(x)$ sur cet intervalle :

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - 1$$

Cette dérivée s'annule au point $\alpha^{-\frac{1}{\alpha-1}}$. De plus,

$$x \in \left]0, \alpha^{-\frac{1}{\alpha-1}}\right[\Rightarrow f'(x) < 0. \text{ } f \text{ y est donc strictement décroissante.}$$

On a donc, pour $0 < a < b < \alpha^{-\frac{1}{\alpha-1}}$, $f(a) > f(b)$, c'est-à-dire :

$$a^\alpha - a > b^\alpha - b \Leftrightarrow 0 < b^\alpha - a^\alpha < b - a$$

c.q.f.d.

Lemme 2 : Les suites itératives (X_n) et (Y_n) générées par

$$\begin{cases} X_1 \in]0, (\frac{1}{1+p})^{\frac{1}{p}}[\\ X_{n+1} = X_n - \frac{1}{p} X_n^{1+p}, n \geq 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Y_1 \in]0, (\frac{1}{1+p})^{\frac{1}{p}}[\\ Y_{n+1} = Y_n - \frac{1}{p} Y_n^{1+p}, n \geq 1 \end{cases}, p = 1, 2, 3, \dots$$

sont toutes deux strictement décroissantes sur l'intervalle $]0, (\frac{1}{1+p})^{\frac{1}{p}}[$, sont de limites nulles et vérifient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{Y_n} = 1.$$

Preuve : Soient $p \in \mathbb{N} - \{0\}$, (X_n) et (Y_n) deux suites de limites nulles vérifiant les hypothèses du lemme 2. Montrons que ces deux suites intercalées : Supposons qu'il existe deux indices n et m suffisamment grands tels que

$$0 < X_{n+1} \leq Y_m \leq X_n < \frac{1}{(1+p)^{1/p}}$$

Cette situation se produit nécessairement, puisque les deux suites (X_n) et (Y_n) convergent toutes deux vers 0 par valeurs positives.

Nous avons alors

$$0 < X_{n+2} \leq Y_{m+1} \leq X_{n+1} < \frac{1}{(1+p)^{1/p}}$$

En effet,

$$X_{n+1} - Y_{m+1} = Y_n - Y_m - \frac{1}{p} (X_n^{1+p} - Y_m^{1+p})$$

X_n et Y_m vérifient les conditions du lemme avec $\alpha = p+1$

Puisque $p \geq 1$, alors $\alpha \geq 2$, et donc

$$0 < \frac{1}{p} (X_n^{p+1} - Y_m^{p+1}) < X_n^{p+1} - Y_m^{p+1} < X_n - Y_m$$

Ceci entraîne que

$$X_n - Y_m - \frac{1}{p} (X_n^{p+1} - Y_m^{p+1}) \geq 0 \Leftrightarrow X_{n+1} \geq Y_{m+1}$$

$Y_{m+1} \geq X_{n+2}$ se démontre de la même façon.

Par conséquent, pour tout entier $J \geq 0$,

$$X_{n+1+J} \leq Y_{m+J} \leq X_{n+J}$$

Divisons par X_{n+J} :

$$\frac{X_{n+1+J}}{X_{n+J}} \leq \frac{Y_{m+J}}{X_{n+J}} \leq 1.$$

D'après la remarque précédente, la suite (X_n) étant à convergence logarithmique, alors $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{X_{n+1+j}}{X_{n+j}} = 1$. Ceci joint à la dernière inégalité et donne

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{Y_{m+j}}{X_{n+j}} = 1.$$

Supposons, et cela n'est point restrictif, que $m \geq n$. Alors

$$\frac{Y_{m+j}}{X_{n+j}} = \frac{Y_{m+j}}{Y_{m+j-1}} \cdot \frac{Y_{m+j-1}}{Y_{m+j-2}} \cdots \frac{Y_{n+1+j}}{Y_{n+j}} \cdot \frac{Y_{n+j}}{X_{n+j}}$$

$m - n$ fois

$$\text{Or } \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{Y_{k+j+1}}{Y_{k+j}} = 1, \quad k = m-1, \dots, n.$$

Et puisque $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{Y_{m+j}}{X_{n+j}} = 1$, alors $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{Y_{n+j}}{X_{n+j}} = 1$, ou plus simplement,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Y_n}{X_n} = 1.$$

c.q.f.d.

Ce lemme peut se généraliser un peu plus par le

Lemme 3 : Soient a et b deux réels positifs, non nécessairement égaux, p un entier naturel non nul, et

$$M = \text{Inf} \left(\frac{1}{a^{1/p} \cdot (1+p)^{1/p}}, \frac{1}{b^{1/p} \cdot (1+p)^{1/p}} \right)$$

Alors les suites itératives $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ générées par

$$\begin{cases} X_1 \in]0, M[\\ X_{n+1} = X_n - \frac{a}{p} X_n^{1+p}, \quad n \geq 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Y_1 \in]0, M[\\ Y_{n+1} = Y_n - \frac{b}{p} Y_n^{1+p}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

sont toutes deux strictement décroissantes sur l'intervalle $]0, M[$, sont de limites nulles, et vérifient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{Y_n} = \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{p}}$$

Preuve : Multiplions, par exemple, X_{n+1} par $a^{1/p}$:

$$a^{1/p} X_{n+1} = a^{1/p} X_n - \frac{(a^{1/p} X_n)^{1/p}}{p}$$

où $a^{1/p} X_1 \in]0, M[$, $a^{1/p} M \in]0, \frac{1}{(1+p)^{1/p}}[$

et posons $X_n = a^{1/p} X_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$

La suite $(X_n)_{n \geq 1}$ vérifie les hypothèses du lemme 2. Il en est de même

pour la suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ définie par $Y_n = b^{1/p} Y_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{Y_n} = 1, \text{ c'est-à-dire } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{Y_n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/p}$$

c.q.f.d.

Le théorème qui suit est une généralisation du lemme 3. Pour tout $n \geq 1$ nous remplaçons, dans les égalités donnant X_{n+1} et Y_{n+1} , les réels a et b par des réels α_n et β_n , de sorte que les suites (α_n) et (β_n) convergent, sous certaines conditions, vers des réels α et β qu'on supposera tous deux valant 1.

Nous l'appellerons "théorème de synchronisation".

Théorème 6 : Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Les suites itératives $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ générées par

$$\begin{cases} X_1 \in]0, M[\\ X_{n+1} = X_n - \frac{\alpha_n}{p} X_n^{1+p}, n \geq 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Y_1 \in]0, M[\\ Y_{n+1} = Y_n - \frac{\beta_n}{p} Y_n^{1+p}, n \geq 1 \end{cases}$$

où les suites $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ et $(\beta_n)_{n \geq 1}$ sont supposées à termes positifs et de limites

égales à 1, où $0 < M < \frac{1}{(1+p)^{1/p} B}$ et où $B > \sup \left[1, \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{\alpha_n}{p} \right)^{1/p}, \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{\beta_n}{p} \right)^{1/p} \right]$,

sont à convergence logarithmique dans l'intervalle $]0, M[$, sont de limites nulles,

et vérifient $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{Y_n} = 1$.

Démonstration : Soient (α_n) et (β_n) deux suites de réels positifs, de limites égales à 1.

Le réel B est choisi tel que $B > \sup(1, \sup_{n \in \mathbb{N}^*} (\alpha_n), \sup_{n \in \mathbb{N}^*} (\beta_n))$.

Ce sup existe car les suites (α_n) et (β_n) convergent.

Le réel M est choisi dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{(1+p)^{\frac{1}{p}} \cdot B}\right]$

Il existe alors un rang n_0 tel que

• $\forall n \geq n_0, X_{n_0} \in]0, M[$ et $Y_{n_0} \in]0, M[$.

Nous pouvons donc supposer, comme dans l'énoncé du théorème, que $n_0 = 1$.

Il est clair que cela n'est point restrictif.

Ces hypothèses étant bien fixées, montrons que le rapport $\frac{X_n}{Y_n}$ converge vers la valeur 1.

* Les suites (X_n) et (Y_n) ont tous leurs dans l'intervalle $]0, M[$, et sont décroissantes à partir du rang $n = 1$.

• $X_1 \in]0, M[$

• Supposons que $X_n \in]0, M[$, $n \geq 1$.

Pour tout $n \geq 1$, $B > \left(\frac{\alpha_n}{p}\right)^{\frac{1}{p}}$ donc $M < \frac{1}{(1+p)^{\frac{1}{p}} B} < \frac{1}{B} < \left(\frac{p}{\alpha_n}\right)^{\frac{1}{p}}$

Ce qui entraîne que

$X_n^p < \frac{p}{\alpha_n}$ et donc que $0 < X_n \left(1 - \alpha_n \frac{X_n^p}{p}\right) < X_n < M$

i.e. $0 < X_{n+1} < X_n < M$, $n \geq 1$

Il en est de même pour la suite (Y_n) .

* Encadrement des suites (X_n) et (Y_n) :

Soit un réel η voisin de 0 tel qu'il existe un entier $N(\eta) \in \mathbb{N} - \{0\}$ de sorte que : $\forall n \geq N(\eta)$, α_n et $\beta_n \in]1 - \eta, 1 + \eta[$

Pour des commodités d'écriture, écrivons $N = N(\eta)$.

Les suites (X_n) et (Y_n) vérifient donc

$$\left\{ \begin{array}{l} X_N \in]0, M[\\ X_{n+1} = X_n \left(1 - \alpha_n \frac{X_n^p}{p}\right), n \geq N \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_N \in]0, M[\\ Y_{n+1} = Y_n \left(1 - \beta_n \frac{Y_n^p}{p}\right), n \geq N \end{array} \right.$$

Définissons, pour $n \geq N$, les quatre suites itératives suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_N^+ = X_N \\ X_{n+1}^+ = X_n^+ \left(1 - (1+\eta) \frac{X_n^{+p}}{p}\right) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} X_N^- = X_N \\ X_{n+1}^- = X_n^- \left(1 - (1-\eta) \frac{X_n^{-p}}{p}\right) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_N^+ = Y_N \\ Y_{n+1}^+ = Y_n^+ \left(1 - (1+\eta) \frac{Y_n^{+p}}{p}\right) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_N^- = Y_N \\ Y_{n+1}^- = Y_n^- \left(1 - (1-\eta) \frac{Y_n^{-p}}{p}\right) \end{array} \right.$$

Nous pouvons, pour compléter ces suites, supposer que leur $N-1$ premiers termes sont ceux de (X_n) pour (X_n^+) et (X_n^-) , et ceux de (Y_n) pour (Y_n^+) et (Y_n^-) .

Montrons, par récurrence, que $\forall n \geq N$, $0 < X_n^+ \leq X_n \leq X_n^- < M$, sachant que $X_n^+ = X_n^- = X_n$, $X_n \in]0, M[$.

Considérons les trois fonctions suivantes :

$$f_n(Z) = Z \cdot \left(1 - \frac{\alpha_n}{p} Z^p\right)$$

$$f_n^+(Z) = Z \cdot \left(1 - \frac{(1+\eta)}{p} Z^p\right)$$

$$f_n^-(Z) = Z \cdot \left(1 - \frac{(1-\eta)}{p} Z^p\right)$$

* Ces trois fonctions sont à valeurs positives dans $]0, M[$.

En effet, $\forall Z \in]0, M[, Z \in]0, 1[$ et donc $0 < Z^{p+1} < Z < 1$, car $p \geq 1$.

L'indice n étant choisi suffisamment grand, alors $\alpha_n = 1 + \varepsilon_n$, ε_n voisin de 0 et permettant $\frac{\alpha_n}{p} < 1$. Il s'ensuit que

$$0 < \frac{\alpha_n}{p} Z^{p+1} < Z^{p+1} < Z < 1$$

Et donc,

$$f_n(Z) = Z - \frac{\alpha_n}{p} Z^{p+1} > 0.$$

Nous pouvons bien sûr, tenir un raisonnement analogue pour $f_+(Z)$ et $f_-(Z)$.

* Ces trois fonctions admettent des valeurs inférieures à M , puisque $f_n(Z) < Z$, $f_+(Z) < Z$ et $f_-(Z) < Z$, pour tout $Z \in]0, M[$.

* Ces trois fonctions sont croissantes sur $]0, M[$ car

$$f'_n(Z) = 1 - \alpha_n \cdot \frac{p+1}{p} Z^p$$

BU
LILLE

Le réel β a été donné tel que : $B > \sup_{n \in \mathbb{N}} (1, \sup_{n \in \mathbb{N}} (\frac{\alpha_n}{p})^{\frac{1}{p}}, \sup_{n \in \mathbb{N}} (\frac{\beta}{p})^{\frac{1}{p}})$, ce qui

conduit à $\frac{1}{B} < (\frac{p}{\alpha_n})^{\frac{1}{p}}$. Or M avait été choisi tel que $0 < M < \frac{p}{(1+p)^{\frac{1}{p}} B}$ donc

$$0 < M < (\frac{p}{\alpha_n(1+p)})^{1/p}.$$

Puisque $Z \in]0, M[$, alors $0 < Z < (\frac{p}{\alpha_n(1+p)})^{1/p}$ et donc $0 < Z^p < \frac{p}{\alpha_n(1+p)}$, ou

encore $0 < \alpha_n \frac{p+1}{p} Z^p < 1$, ce qui prouve que la dérivée $f'_n(Z)$ est à valeur positive sur $]0, M[$.

Par ailleurs,

$$f'_+(Z) = 1 - (1+\eta) \frac{p+1}{p} Z^p \text{ et } 0 < Z < M < (\frac{p}{(1+\eta)(1+p)})^{\frac{1}{p}}$$

ainsi que

$$f'_-(Z) = 1 - (1-\eta) \frac{p+1}{p} Z^p \text{ et } 0 < Z < M < \left(\frac{p}{(1-\eta)(1+\rho)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

permettent d'arriver à des conclusions identiques à celle de $f'_n(Z)$.

* Ces trois dérivées, toujours positives sur $]0, M[$, nous assurent la croissance des trois fonctions $f'_n(Z)$, $f'_+(Z)$ et $f'_-(Z)$ sur cet intervalle.

D'autre part, $\forall Z \in]0, M[$, $0 < f'_+(Z) \leq f'_n(Z) \leq f'_-(Z) < M$.

En effet, on a d'abord

$0 < f'_+(Z)$ et $f'_-(Z) < M$ car f'_+ et f'_- ont leur valeur dans $]0, M[$ et ensuite, puisque $(1-\eta) \leq \alpha_n \leq (1+\eta)$, alors pour tout $Z \in]0, M[$,

$$Z(1 - (1+\eta) \frac{Z^p}{p}) \leq Z(1 - \alpha_n \frac{Z^p}{p}) \leq Z(1 - (1-\eta) \frac{Z^p}{p})$$

L'hypothèse de récurrence $0 < X_n^+ \leq X_n \leq X_n^- < M$, les inégalités précédentes ainsi que la croissance des trois fonctions impliquent :

$$0 < f'_+(X_n^+) \leq f'_+(X_n) \leq f'_n(X_n) \leq f'_-(X_n) \leq f'_-(X_n^-) < M$$

Nous retiendrons plus particulièrement que $0 < X_{n+1}^+ \leq X_{n+1} \leq X_{n+1}^- < M$.

La récurrence est donc démontrée. Ainsi, $\forall n \geq N$, $0 < X_n^+ \leq X_n \leq X_n^- < M$.

Par la même, $\forall n \geq N$, $0 < Y_n^+ \leq Y_n \leq Y_n^- < M$.

Encadrement de la suite $(\frac{X_n}{Y_n})$.

Supposons, et cela ne restreint point la généralité, que $X_N \leq Y_N$. Alors,

$$\forall n \geq N, \begin{cases} X_n^+ \leq Y_n^+ \\ X_n^- \leq Y_n^- \end{cases}$$

Par conséquent, $\forall n \geq N$, $0 < \frac{X_n^+}{Y_n^-} \leq \frac{X_n}{Y_n} \leq \frac{X_n^-}{Y_n^+}$

Soit alors $\varepsilon' > 0$, ε' suffisamment voisin de 0.

$\forall \eta \in]0, \varepsilon'[$, $\exists N(\eta) \in \mathbb{N} - \{0\}$ tel que $\forall n \geq N(\eta)$,

$$0 < \frac{X_n^+(\eta)}{Y_n^-(\eta)} \leq \frac{X_n}{Y_n} \leq \frac{X_n^-(\eta)}{Y_n^+(\eta)}$$

où les suites $(X_n^+(\eta))$, $(X_n^-(\eta))$, $(Y_n^+(\eta))$ et $(Y_n^-(\eta))$ sont définies par

$$\left\{ \begin{array}{l} X_N^+(\eta) = X_N \in]0, M[\text{ où } N = N(\eta) \\ X_{n+1}^+(\eta) = X_n^+(\eta) \left(1 - (1+\eta) \frac{X_n^{+P}(\eta)}{p} \right), n \geq N \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} X_N^-(\eta) = X_n \in]0, M[\\ X_{n+1}^-(\eta) = X_n^-(\eta) \left(1 - (1-\eta) \frac{X_n^{-P}(\eta)}{p} \right), n \geq N \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_N^+(\eta) = Y_N \in]0, M[\\ Y_{n+1}^+(\eta) = Y_n^+(\eta) \left(1 - (1+\eta) \frac{Y_n^{+P}(\eta)}{p} \right), n \geq N \end{array} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} Y_N^-(\eta) = Y_n \in]0, M[\\ Y_{n+1}^-(\eta) = Y_n^-(\eta) \left(1 - (1-\eta) \frac{Y_n^{-P}(\eta)}{p} \right), n \geq N \end{array} \right\}$$

η étant choisi voisin de 0, et positif, les quantités $(1+\eta)$ et $(1-\eta)$ sont alors strictement positives et voisines de 1.

Les conditions du lemme 3 étant réunies, nous pouvons affirmer que

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n^+(\eta)}{Y_n^-(\eta)} = \left(\frac{1-\eta}{1+\eta} \right)^{\frac{1}{p}}$$

et

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n^-(\eta)}{Y_n^+(\eta)} = \left(\frac{1+\eta}{1-\eta} \right)^{\frac{1}{p}}$$

Il existe deux fonctions $\phi_p(\eta)$ et $\psi_p(\eta)$, positives, qui tendent vers 0 lorsque η tend vers 0 et telles que :

$$\left(\frac{1-\eta}{1+\eta} \right)^{\frac{1}{p}} = 1 - \phi_p(\eta) \text{ et } \left(\frac{1+\eta}{1-\eta} \right)^{\frac{1}{p}} = 1 + \psi_p(\eta).$$

En conclusion,

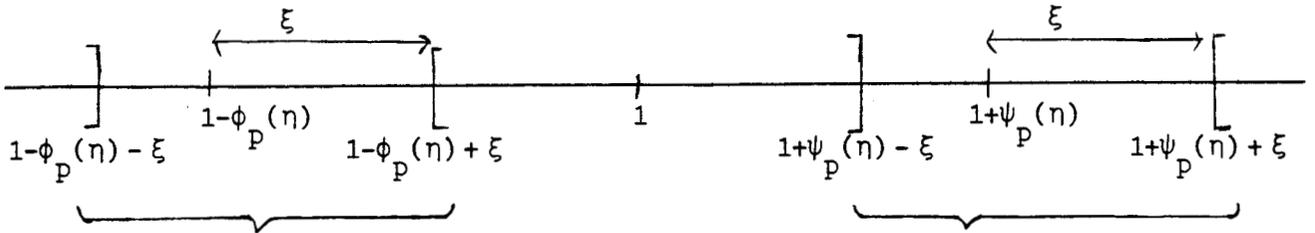
$$\forall \eta \in]0, \varepsilon[, \exists N(\eta) \in \mathbb{N} - \{0\} \text{ tel que } \forall n \geq N(\eta), 0 < \frac{X_n^+(\eta)}{Y_n^-(\eta)} \leq \frac{X_n}{Y_n} \leq \frac{X_n^-(\eta)}{Y_n^+(\eta)}$$

avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n^+(\eta)}{Y_n^-(\eta)} = 1 - \phi_p(\eta)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n^-(\eta)}{Y_n^+(\eta)} = 1 + \psi_p(\eta)$.

* La suite $(\frac{X_n}{Y_n})_{n \geq 1}$ converge vers 1 :

$\eta > 0$ étant choisi, fixons un réel $\xi > 0$, voisin de 0. Il existe un rang $M(\xi, \eta)$ qui peut être au moins égal à $N(\eta)$ et tel que :

$$\forall n \geq M(\xi, \eta) \begin{cases} \frac{X_n^+(\eta)}{Y_n^-(\eta)} \in]1 - \phi_p(\eta) - \xi, 1 - \phi_p(\eta) + \xi[\\ \text{et} \\ \frac{X_n^-(\eta)}{Y_n^+(\eta)} \in]1 + \psi_p(\eta) - \xi, 1 + \psi_p(\eta) + \xi[\end{cases}$$



Pour $n \geq M(\xi, \eta)$

$$\frac{X_n^+(\eta)}{Y_n^-(\eta)} \text{ appartient à cet intervalle.}$$

Pour $n \geq M(\xi, \eta)$

$$\frac{X_n^-(\eta)}{Y_n^+(\eta)} \text{ appartient à cet intervalle.}$$

$M(\xi, \eta)$ étant supposé au moins égal à $N(\eta)$, alors,

$$\forall n \geq M(\xi, \eta), \frac{X_n}{Y_n} \in \left[\frac{X_n^+(\eta)}{Y_n^-(\eta)}, \frac{X_n^-(\eta)}{Y_n^+(\eta)} \right].$$

Par conséquent,

$\forall \eta \geq]0, \varepsilon[$, $\forall \xi > 0$, $\exists M(\xi, \eta)$ tel que

$$\forall n \geq M(\xi, \eta), 1 - \phi_p(\eta) - \xi < \frac{X_n}{Y_n} < 1 + \psi_p(\eta) + \xi$$

Prenons un réel $\rho > 0$, voisin de 0.

Puisque $\lim_{n \rightarrow 0} \psi_p(\eta) = \lim_{n \rightarrow 0} \phi_p(\eta) = 0$, alors $\exists \eta \in]0, \varepsilon[$ tel que

$$\begin{cases} 0 < \phi_p(\eta) < \frac{\rho}{2} \\ 0 < \psi_p(\eta) < \frac{\rho}{2} \end{cases}$$

Pour cet η , il existe aussi un $\xi \in]0, \frac{\rho}{2}[$ et prenons $\bar{N}(\rho) = M(\eta, \xi)$.

$$\text{Alors, } \forall n \geq \bar{N}(\rho), 1 - \rho < 1 - \phi_p(\eta) - \xi \leq \frac{X_n}{Y_n} \leq 1 + \psi_p(\eta) + \xi < 1 + \rho$$

Et donc,

$$\forall \rho > 0, \exists \bar{N}(\rho) \text{ tel que } \forall n \geq \bar{N}(\rho), 1 - \rho < \frac{X_n}{Y_n} < 1 + \rho.$$

$$\text{C'est-à-dire } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{Y_n} = 1.$$

c.q.f.d.

VIII. ACCELERATION DE LA CONVERGENCE DES SUITES DE POINT FIXE

Soit $S_{n+1} = f(S_n)$ une suite itérative admettant pour limite un point fixe S^* , la fonction f vérifiant les hypothèses suivantes :

- (i) f est définie au voisinage de S^* , et est à valeurs réelles.
- (ii) f est de classe C^q , $q \geq 2$, au voisinage de S^* .
- (iii) $f(S^*) = S^*$ (i.e. S^* est un point fixe)
- (iv) $f'(S^*) = 1$

a) Etude du cas $q = 2$

Supposons que f est de classe C^2 et que $f''(S^*) \neq 0$. Alors, pour n assez grand, la formule de Taylor donne :

$$S_{n+1} = f(S_n) = f(e_n + S^*) = f(S^*) + e_n \cdot f'(S^*) + e_n^2 \cdot \frac{f''(S^*)}{2!} + e_n^2 \cdot \varepsilon_2(e_n) \quad (1)$$

sachant que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_2(e_n) = 0$

Puisque $f''(S^*) \neq 0$, alors $K = \frac{f''(S^*)}{2!} \neq 0$. Ceci joint aux conditions (iii) et (iv) entraîne, pour n assez grand :

$$e_{n+1} = e_n + K e_n^2 + \theta(e_n^2) \quad (2)$$

Multiplions les deux termes de l'égalité (2) par K :

$$K e_{n+1} = K e_n + K^2 e_n^2 + \theta(K^2 e_n^2) \quad (3)$$

Posons, $\forall n \geq 1$, $x_n = K e_n$. Alors, pour n suffisamment grand,

$$x_{n+1} = x_n + x_n^2 + \theta(x_n^2) \quad (3')$$

Remarque : Si $x_n = K e_n$ est positif, la suite (x_n) ne peut alors converger.

Il est donc nécessaire que le produit $K e_n$ soit toujours négatif, du moins à partir d'un certain rang.

Posons donc $y_n = -x_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Cette suite est toujours positive, après un certain rang, et vérifie, pour n assez grand,

$$Y_{n+1} = Y_n - \alpha_n Y_n^2 \quad (4)$$

où (α_n) est une suite de réels qu'on pourra supposer vérifier les conditions du théorème de synchronisation. Bien entendu, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1$.

Ce théorème est à considérer dans le cas $p = 1$.

La suite $Z_n = \frac{1}{n}$ vérifie elle aussi les hypothèses de ce théorème dans le même cas $p = 1$. En effet :

$$z_{n+1} = z_n - \beta_n z_n^2 \text{ avec } \beta_n = \frac{n}{n+1} \quad (5)$$

Les suites (Y_n) et (Z_n) sont donc synchrones et vérifient d'après ce même théorème :

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Y_n}{Z_n} = 1 \leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n y_n = 1$$

Mais $Y_n = -K e_n$ et cela se traduit donc par

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot e_n = -\frac{1}{K}. \quad (6)$$

De (6), il s'en déduit que

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n+1} \cdot e_{2^{n+1}} = -\frac{1}{K}$$

et

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \cdot e_{2^n} = -\frac{1}{K}$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{2^{n+1}}}{e_{2^n}} = \frac{1}{2}$$

Autrement dit, la suite extraite (S_{2^n}) appartient à $LIN(\frac{1}{2})$. De façon tout-à-fait similaire, nous pouvons démontrer que toute suite extraite $(S_{E(k^n)})$; où $k \in]1, +\infty[$ appartient à $LIN(\frac{1}{k})$. Citons alors la

Proposition 9 : Les suites de point fixe $S_{n+1} = f(S_n)$, de limite S^* , telles que :

- (i) f est définie au voisinage de S^* , et est à valeurs réelles,
- (ii) f est de classe C^2 au voisinage de S^* ,
- (iii) $f(S^*) = S^*$,
- (iv) $f'(S^*) = 1$ et
- (v) $f''(S^*) \neq 0$,

sont accélérées par tout procédé composé $\Delta_2 \circ P_2$.

b) Généralisation : Etude du cas $q \geq 2$

Supposons maintenant que $f \in C^q$, $q = p+1$, $p \geq 1$, et

- * $f(S^*) = S^*$
- * $f'(S^*) = 1$
- * $f''(S^*) = \dots = f^{(p)}(S^*) = 0$
- * $f^{(p+1)}(S^*) \neq 0$

La formule de Taylor donne, pour n suffisamment grand :

$$S_{n+1} = f(S_n) = f(e_n + S^*) = f(S^*) + e_n \cdot f'(S^*) + e_n^2 \cdot \frac{f''(S^*)}{2!} + \dots + e_n^{p+1} \frac{f^{(p+1)}(S^*)}{(p+1)!} + e_n^{p+1} \varepsilon_{p+1}(e_n),$$

avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_{p+1}(e_n) = 0$.

Posons $a = \frac{p}{(p+1)!} f^{(p+1)}(S^*)$, $a \neq 0$. L'égalité précédente, tenant compte des hypothèses initiales devient :

$$e_{n+1} = e_n + a \cdot \frac{e_n^{p+1}}{p} + \theta(e_n^{p+1}) \quad (7)$$

Il existe donc une suite (a_n) de limite a non nulle telle que, pour n assez grand,

$$e_{n+1} = e_n + a_n \cdot \frac{e_n^{p+1}}{p} \quad (7')$$

Entre autre,

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = 1 + a_n \cdot \frac{e_n^p}{p} \quad (8)$$

Il est donc nécessaire, afin que la suite (e_n) converge, que le produit $a_n \cdot e_n^p$ ne soit pas positif au delà d'un certain rang. Ceci nous oblige à faire l'hypothèse que les conditions p pair et $f^{(p+1)}(S^*) > 0$ ne peuvent se réaliser simultanément.

De plus, la nécessité que (S_n) soit strictement monotone au delà d'un certain rang nous oblige à supposer que le produit $a_n \cdot e_n^p$ soit même strictement négatif pour n assez grand.

* Cas p pair :

Alors, nécessairement $f^{(p+1)}(S^*) < 0$, d'où $a = \frac{p}{(p+1)!} f^{(p+1)}(S^*) < 0$

Posons $\bar{a} = -a$. $\bar{a} > 0$ et (7) s'écrit alors :

$$e_{n+1} = e_n - \bar{a} \cdot \frac{e_n^{p+1}}{p} + \theta(e_n^{p+1})$$

Multiplions les deux termes de cette égalité par $\frac{1}{\bar{a}^p}$:

$$\frac{1}{\bar{a}^p} e_{n+1} = \frac{1}{\bar{a}^p} e_n - \frac{(\frac{1}{\bar{a}^p} \cdot e_n)^{p+1}}{p} + \theta(e_n^{p+1}) \quad (9)$$

Définissons la suite (u_n) par $u_n = \frac{1}{\bar{a}^p} e_n$. D'après (9), pour n assez grand,

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^{p+1}}{p} + \theta(u_n^{p+1}) \quad (10)$$

Il existe donc une suite (α_n) , $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1$ telle que

$$u_{n+1} = u_n - \alpha_n \cdot \frac{u_n^{p+1}}{p}, \quad n \geq 1 \quad (11)$$

la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ et l'élément u_1 étant choisis convenablement, selon les hypothèses du théorème de synchronisation. Nous voulons donc $u_n > 0$, c'est-à-dire $e_n > 0$, $n \geq 1$.

Par ailleurs, la suite $(\frac{1}{n^{1/p}})$ vérifie elle aussi les hypothèses du théorème

En effet, posons, pour tout $n \geq 1$, $W_n = \frac{1}{n^{1/p}}$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)^{1/p}} &= \frac{1}{n^{1/p}} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{1/p}} = \frac{1}{n^{1/p}} \cdot \left(1 - \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{n} + \theta\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n^{1/p}} - \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{1}{n^{1/p}}\right)^{p+1} + \theta\left[\left(\frac{1}{n^{1/p}}\right)^{p+1}\right] \end{aligned}$$

Il existe donc une suite de réels (v_n) , de limite $v = 1$ telle que

$$w_{n+1} = w_n - \frac{v_n}{p} w_n^{p+1} \quad (12)$$

D'après le théorème de synchronisation, les suites (u_n) et (w_n) sont synchrones et vérifient en outre :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{w_n} = 1$$

En d'autres termes,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{p}} \cdot e_n = -\frac{1}{a^{-1/p}}. \quad (13)$$

De (13), il s'en déduit que

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n) \cdot e_{2^n} = -\frac{1}{a^{-1/p}}$$

et

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} (2^{n+1})^{\frac{1}{p}} \cdot e_{2^{n+1}} = -\frac{1}{a^{-1/p}}$$

D'où

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{2^{n+1}}}{e_{2^n}} = \frac{1}{2^{1/p}} \in]0, 1[, \text{ et ce, quelque soit l'entier } p \geq 1.$$

* Cas p impair :

e_n^p conserve alors le même signe que e_n ce qui entraîne que

$$a_n \cdot e_n^p < 0 \iff a_n \cdot e_n < 0.$$

Cela signifie qu'il faut que e_n doit être de signe opposé à celui de $f^{(p+1)}(S^*)$. Nous résolvons ensuite comme précédemment.

En définitive, il faut exclure l'hypothèse p pair et $f^{(p+1)}(S^*) > 0$.

Dans les autres cas, il suffit de choisir S_1 de façon à ce que $e_1 = S_1 - S^*$ et $f^{(p+1)}(S^*)$ soient de signes opposés. Bien entendu, le choix de S_1 doit satisfaire aux hypothèses du théorème de synchronisation qui assurent la convergence

de (S_n) . Nous pouvons donc généraliser la proposition précédente :

Proposition 9 bis : Les suites de point fixe $S_{n+1} = f(S_n)$, de limite S^* , où

- (i) f est définie au voisinage de S^* , et est à valeurs réelles,
- (ii) f est de classe C^{p+1} au voisinage de S^* , $p \in \{1, 2, 3, \dots\}$
- (iii) $f(S^*) = S^*$
- (iv) $f'(S^*) = 1$

sont accélérées par tout procédé composé de type $\Delta_2 \circ P_2$.

IX. EXEMPLES NUMERIQUES

Etant donnée la suite (S_n) , appelons t_n la sous-suite définie par $t_n = S_{2^{n+1}}$, $n \geq 1$.

Sur les 1024 premiers termes de (S_n) , nous calculons t_1, \dots, t_{11} .

$(\epsilon^{(n)})$ désigne la suite obtenue de (t_n) par application du procédé δ^2 d'Aitken.

1) Soit (S_n) la suite générée par

$$\begin{cases} S_1 = 1 \\ S_{n+1} = \frac{S_n}{1+S_n}, n \geq 1, S^* = 0 \end{cases}$$

n	t_n	$\epsilon^{(n)}$
1	.100000000000000000+01	.100000000000000000+01
2	.500000000000000000+00	.500000000000000000+00
3	.250000000000000000+00	.000000000000000000+00
4	.125000000000000000+00	.000000000000000000+00
5	.625000000000000000-01	-.5551115123125730-16
6	.312500000000000000-01	.2324529457808920-15
7	.156250000000000000-01	-.1734723075976810-16
8	.781250000000000030-02	-.4336808689942020-17
9	.390625000000000010-02	-.3469446951953610-16
10	.195312500000000040-02	.1371515748194160-15
11	.97656250000000410-03	.2591243192240360-16

Il n'est pas étonnant d'obtenir ici une aussi bonne accélération de la convergence.

En effet la suite initiale (S_n) n'est autre que $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$. D'où $t_n = \frac{1}{2^{n-1}}$, $n \geq 1$.

Or, pour tout $n \geq 1$, $\frac{t_{n+1} - S^*}{t_n - S^*} = \frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n} = \frac{1}{2}$, et le δ^2 d'Aitken est exact sur de telles suites.

2) Soit (S_n) la suite générée par

$$\begin{cases} S_1 = 0.1 \\ S_{n+1} = S_n(1 - 5S_n), n \geq 1, S^* = 0 \end{cases}$$

n	t_n	$\epsilon^{(n)}$
1	.100000000000000000+00	.100000000000000000+00
2	.500000000000000000-01	.500000000000000000-01
3	.304687500000000000-01	.1794871794871790-01
4	.1796993962368320-01	-.4244294579909490-02
5	.1014016268578920-01	-.2990051030967970-02
6	.5502503534034990-02	-.1235306236405570-02
7	.2898773153889660-02	-.4343877645868690-03
8	.1496339244888650-02	-.1409092748229950-03
9	.7623819172024230-03	-.4347033539972760-04
10	.3853423703285060-03	-.1295333683225710-04
11	.19267118516425180-03	-.5763251617002760-05

3) Soit (S_n) la suite définie par

$$\begin{cases} S_1 = 2.5 \\ S_{n+1} = \frac{9}{6 - S_n}, n \geq 1, S^* = 3 \end{cases}$$

n	t_n	$\epsilon^{(n)}$
1	.250000000000000000+01	.250000000000000000+01
2	.2571428571428570+01	.2571428571428570+01
3	.26666666666666670+01	.2285714285714280+01
4	.2769230769230770+01	.1333333333333380+01
5	.2857142857142860+01	.3384615384615370+01
6	.2918918918918920+01	.3064935064935060+01
7	.2950521739130430+01	.3015015015015010+01
8	.2977443609022550+01	.3003684598378760+01
9	.2988505747126430+01	.3000916926462470+01
10	.2994197292069610+01	.3000228969180710+01
11	<u>.2997034548104920+01</u>	<u>.3000057225916390+01</u>

La plupart des suites de point fixe que j'ai testées sont aussi accélérées par la composition du procédé δ^2 d'Aitken itéré avec les procédés d'extraction de type P_2 . Nous obtenons ainsi une meilleure qualité d'accélération.

Dans ce qui suit, deux exemples illustrent cette constatation.

$(\epsilon_1^{(n)})$ désigne la suite obtenue de $\epsilon^{(n)}$ par application du procédé δ^2 d'Aitken. De même, pour tout $k \geq 1$, $(\epsilon_{k+1}^{(n)})$ désignera la suite obtenue de $(\epsilon_k^{(n)})$ par application du même procédé.

Exemple 1 : Soit (S_n) la suite définie par

$$\begin{cases} S_1 = 0.5 \\ S_{n+1} = S_n(1 - S_n), n \geq 1, S^* = 0 \end{cases}$$

n	t_n	$\epsilon^{(n)}$
1	.5000000000000000+00	.5000000000000000+00
2	.2500000000000000+00	.2500000000000000+00
3	.1523037500000000+00	.8970358970358970-01
4	.8984069011841610-01	-.2122147289954730-01
5	.5070081302890610-01	-.1495025515483990-01
6	.2751251767017490-01	-.6176531182027850-02
7	.1409386576944830-01	-.2171938822934300-02
8	.7481696224443230-02	-.7045463741150710-03
9	.3811909586012090-02	-.2173516769986970-03
10	.1926711851642540-02	-.6076668016114030-04
11	.9692679274676050-03	-.1881625808503530-04

n	t_n	$\epsilon^{(n)}$
1	.5000000000000000+00	.5000000000000000+00
2	.2500000000000000+00	.2500000000000000+00
3	-.1964285714285710+00	.8181818181818180+00
4	-.2710268793981030+00	-.2859931371205070+00
5	-.1528571591725430-01	-.2132745981158580+00
6	-.3693698703487930-01	-.3524704353772710-01
7	.1190677531871350-02	-.2312756749326730-01
8	.1441217147226290-03	.1720808947056460-03
9	.2480218683741450-04	.9447794543235800-05
10	.4813425664111700-05	.7910008122426950-06
11	.9844662082328730-06	.7721915993285030-07



Cette suite est donc accélérable par la composition du procédé d'extraction P_2 et du procédé δ^2 d'Aitken itéré.

Exemple 2 : Soit (S_n) la suite définie par

$$\begin{cases} S_1 = 2.5 \\ S_{n+1} = \frac{9}{6 - S_n}, n \geq 1, S^* = 3 \end{cases}$$

n	t_n	$\epsilon^{(n)}$
1	.2500000000000000+01	.2500000000000000+01
2	.2571428571428570+01	.2571428571428570+01
3	.2666666666666670+01	.2285714285714280+01
4	.2769230769230770+01	.1333333333333380+01
5	.2857142857142860+01	.3384615384615370+01
6	.2918918918918920+01	.3064935064935060+01
7	.2956521739130430+01	.3015015015015010+01
8	.2977443609022550+01	.3003684598378760+01
9	.2988505747126430+01	.3000916926462470+01
10	.2994197292069610+01	.3000228969180710+01
11	.2997084548104920+01	.3000057225916390+01

n	$\epsilon_1^{(n)}$	$\epsilon_2^{(n)}$	$\epsilon_3^{(n)}$
1	.2500000000000000+01	.2500000000000000+01	.2500000000000000+01
2	.2571428571428570+01	.2571428571428570+01	.2571428571428570+01
3	.2514285714285710+01	.2539682539682540+01	.2549450549450550+01
4	.2693877551020420+01	.2557635467980300+01	.2551150269211940+01
5	.1983739837398390+01	.2550536311794600+01	.2552548041340790+01
6	.3108038029386340+01	.2418972567550510+01	.2558040386514440+01
7	.3005777141008450+01	.3014302852863040+01	.2526724011657700+01
8	.3000357841158590+01	.3000054574645620+01	.3000387613640600+01
9	.3000022352574460+01	.3000000213162860+01	.3000000004963050+01
10	.3000001306987060+01	.3000000000832610+01	.3000000000000020+01
11	.3000000087311400+01	.3000000000003140+01	.299999999999880+01

* * * * *
* * * * *
* * * * *
* * * * *
* * * * *
* * * * *
* * * * *
* * * * *
* * * * *
* * * * *
* * * * *
* * * * *

CHAPITRE IV

EXTRACTIONS DE SOUS-SUITES
ET θ_2 -ALGORITHME

I. INTRODUCTION

Existe-t-il un sous-ensemble de LOGSF tel que pour toute suite appartenant à cet ensemble, tout procédé d'extraction de type \mathcal{P}_2 donne une sous-suite appartenant au domaine d'accélération du θ_2 -Algorithme ?

Un tel ensemble n'est pas vide. Considérons en effet la suite $(S_n)_{n \geq 1}$, définie par

$$S_n = \frac{1}{\text{Log}(n+1)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Soit $(t_{k,n})_{n \geq 1}$ la suite extraite par $(n) = k^n - 1$, $k = 2, 3, 4, \dots$

$$t_{k,n} = \frac{1}{n \text{ Log} k}, \quad n \geq 1 \quad (2)$$

Il est connu que la suite $(t_{k,n})_{n \geq 1}$ est accélérée par le θ_2 -Algorithme.

Le but de ce chapitre n'est pas de trouver le sous-ensemble maximal de LOGSF répondant à cette question, mais de donner une classe assez large de suites appartenant à ce sous-ensemble. Celui-ci est très certainement constitué de suites à convergence très lente. En effet, considérons la suite (S_n) donnée par (1). Alors toute suite $(t_{k,n})$ extraite par \mathcal{P}_2 appartient encore à LOGSF. L'intérêt d'une telle extraction serait donc de pouvoir accélérer cette classe de suites qui n'est probablement accélérée par aucun algorithme connu. Vérifions, par exemple, que la suite donnée par (1) n'est pas accélérée par le θ_2 -algorithme :

Prenons, pour plus de commodités, la suite $t_n = S_{n-1}$, $n \geq 2$. Alors

$$t_n = \frac{1}{\text{Log} n}, \quad \text{et démontrons que } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta \varepsilon_2^{(n)}}{\Delta t_n} = 1, \quad \varepsilon_2^{(n)} \text{ étant la quantité calculée}$$

par le procédé δ^2 d'Aitken, à partir des points t_n , t_{n+1} et t_{n+2} :

$$\varepsilon_2^{(n)} = t_n - \frac{\Delta t_n}{\frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n} - 1}, \quad n \geq 2. \quad \text{Ceci nous permet de calculer le rapport } \frac{\Delta \varepsilon_2^{(n)}}{\Delta t_n} :$$

$$\frac{\Delta \varepsilon_2^{(n)}}{\Delta t_n} = 1 - \left[\frac{\Delta t_{n+1}/\Delta t_n}{(\Delta t_{n+2}/\Delta t_{n+1}) - 1} - \frac{1}{(\Delta t_{n+1}/\Delta t_n) - 1} \right], \quad n \geq 2.$$

Nous devons alors réaliser $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta \varepsilon_2^{(n)}}{\Delta t_n} = 1$ (cf. Chapitre III, §.III).

Démontrons alors que l'expression comprise entre les crochets converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Nous avons :

$$\Delta t_n = \frac{1}{\text{Log}(n+1)} - \frac{1}{\text{Log}n} = \frac{1}{\text{Log}n + \text{Log}(1 + \frac{1}{n})} - \frac{1}{\text{Log}n}$$

Or, pour n suffisamment grand, $\text{Log}(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$, d'où

$$\Delta t_n \sim \frac{1}{\text{Log}n + \frac{1}{n}} - \frac{1}{\text{Log}n}. \text{ C'est-à-dire}$$

$$\Delta t_n \sim - \frac{1}{n(\text{Log}n)^2 + \text{Log}n}. \text{ Donnons alors une estimation du rapport } \frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n}.$$

$$\frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n} \sim \frac{(n+1)(\text{Log}(n+1))^2 + \text{Log}(n+1)}{n(\text{Log}n)^2 + \text{Log}n}^{-1}$$

$$\text{Or } (\text{Log}(n+1))^2 = (\text{Log}n + \text{Log}(1 + \frac{1}{n}))^2 \sim (\text{Log}n)^2 + \frac{2}{n} \text{Log}n + \frac{1}{n^2} \text{ permet}$$

d'obtenir l'estimation suivante :

$$(n+1)(\text{Log}(n+1))^2 + \text{Log}(n+1) \sim n(\text{Log}n)^2 + \text{Log}n + (\text{Log}n)^2 + 2(1 + \frac{1}{n}) \text{Log}n + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Par conséquent, pour n assez grand :

$$\frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n} \sim (1 + \frac{1}{n})^{-1} \sim 1 - \frac{1}{n}, \text{ et cela nous donne immédiatement une approximation}$$

de l'expression entre crochets :

$$\left[\frac{\Delta t_{n+1}/\Delta t_n}{(\Delta t_{n+2}/\Delta t_{n+1})^{-1}} - \frac{1}{(\Delta t_{n+1}/\Delta t_n)^{-1}} \right] \sim \frac{1}{n} \text{ qui converge bien vers 0.}$$

Le principe de l'étude qui suit est le suivant : le sous-ensemble de LOGSF, $\hat{\text{LOG}}2$, dont nous donnerons une définition plus précise dans ce qui suivra, est accélérable par le θ_2 -algorithme (réf. [12], propriété 9, p. 108). Nous tâcherons alors de déterminer un sous-ensemble de $S_{\frac{1}{\text{Log}n}}$ qui est l'ensemble des suites de LOGSF, synchrones à la suite $S_n = \frac{1}{\text{Log}n}$, $n \geq 2$, de sorte que toute

sous-suite (u_{2^n}) d'une suite (u_n) appartenant à $S_{\text{Log}n}^1$, appartiennent à $\widehat{\text{LOG}2}$.

II. ACCELERATION DE LA SOUS-SUITE ET DE LA SUITE INITIALE

Soit (u_n) la suite initiale, $(u_n) \in S_{\text{Log}n}^1$, $t_n = u_{2^n}$, la sous-suite, supposée accélérée par le θ_2 -algorithme. $u^* = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

θ_n est la quantité calculée par le θ^2 -algorithme à partir des quatre points consécutifs t_{n-2} , t_{n-1} , t_n et t_{n+1} , $n \geq 3$.

Considérons alors la transformation suivante :

Pour $1 \leq j < 2^3$, le transformé de u_j est u_j

pour $2^3 \leq j < 2^4$, le transformé de u_j est θ_3

pour $2^n \leq j < 2^{n+1}$, le transformé de u_j est θ_n , $n \geq 3$.

Montrons que la convergence de la suite initiale est alors accélérée :

Pour $2^n \leq j < 2^{n+1}$, on a :

$$\left| \frac{\theta_n - S^*}{u_j - S^*} \right| \leq \left| \frac{\theta_n - u^*}{u_{2^n} - u^*} \right| \cdot \left| \frac{u_{2^n} - u^*}{u_{2^{n+1}} - u^*} \right| \cdot \left| \frac{u_{2^{n+1}} - u^*}{u_j - u^*} \right|$$

1 - Le rapport $\left| \frac{\theta_n - u^*}{u_{2^n} - u^*} \right|$ converge vers 0 puisque le θ_2 algorithme accélère par hypothèse la sous-suite (t_n) .

2 - Le rapport $\left| \frac{u_{2^n} - u^*}{u_{2^{n+1}} - u^*} \right|$ converge vers 1 puisque la suite extraite (t_n) reste

à convergence logarithmique. En effet, par hypothèse, $\exists K \neq 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Log}n(u_n - u^*) = K \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n(u_{2^n} - u^*) = \frac{K}{\text{Log}2} \neq 0, \text{ c'est-à-dire que } (t_n) \in S_{\frac{1}{n}}^1,$$

l'ensemble des suites synchrones avec $(\frac{1}{n})$, donc à convergence logarithmique.

3 - Le rapport $\left| \frac{u_{2^{n+1}} - u^*}{u_j - u^*} \right|$ est strictement inférieur à 1, pour n assez grand,

puisque (S_n) , appartenant à LOGSF, est strictement monotone à partir d'un certain rang.

Conclusion : La suite transformée accélère donc la convergence de la suite initiale.

III. ENSEMBLES $\widehat{\text{LOG2}}$, G_1 ET G_1^{\sim}

Définition 1 : L'ensemble G_1

Appelons G_1 l'ensemble des suites (x_n) de limite nulle telles que :

$$\exists C \neq 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} - \frac{\Delta x_n}{x_n^2} = C.$$

Remarque 1 : $G_1 \subset \text{LOGSF}$.

En effet, posons, pour tout $n \geq 1$, $C_n = - \frac{\Delta x_n}{x_n^2}$. Bien sûr, $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C$.

Alors $\Delta x_n = - C_n x_n^2 \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - C_n x_n$. D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$.

Par conséquent, $\frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n} = \frac{C_{n+1} x_{n+1}^2}{C_n x_n^2}$, $n \geq 1$, et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n} = 1$.

Donnons quelques caractérisations de l'ensemble G_1 :

La remarque 1 nous permet de donner immédiatement la

Propriété 1 : G_1 est l'ensemble des suites $(x_n)_{n \geq 1}$ de limite nulle telles que pour chacune d'elles, on peut trouver une suite $(C_n)_{n \geq 1}$, de limite C non nulle, vérifiant :

$$x_{n+1} = x_n - C_n \cdot x_n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

Propriété 2 : Toute suite (x_n) , $(x_n) \in G_1$, est synchrone avec la suite $(\frac{1}{n})$.

En effet, nous avons démontré dans le chapitre précédent, que les suites (x_n) données par (3), moyennant certaines hypothèses assurant leur convergence, étaient synchrones, d'après le théorème de synchronisation, dans le cas $p = 1$.

Nous avons aussi vu que la suite $(\frac{1}{n})$ vérifiait (3).

D'après ce même théorème, $\lim_{n \rightarrow \infty} n x_n = \frac{1}{C}$.

Citons alors la

Propriété 2 bis : Soit $(x_n) \in G_1$, (x_n) donnée par (3), alors $\lim_{n \rightarrow \infty} n x_n = \frac{1}{C}$.

Propriété 3 :

$$(x_n) \in G_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i) } (x_n) \text{ synchrone avec } (\frac{1}{n}) \\ \text{(ii) } (\Delta x_n) \text{ synchrone avec } (\frac{1}{n^2}) \end{cases}$$

Preuve :

a - La nécessité : Soit $(x_n) \in G_1$.

(i) est réalisé d'après la propriété 2-bis.

Montrons (ii) :

Ecrivons $x_{n+1} = x_n - C_n x_n^2$. Alors $n^2 \Delta x_n = -C_n (n x_n)^2$, $\forall n \geq 1$.

D'après la propriété 2-bis, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \Delta x_n = -\frac{1}{C} \neq 0$.

b - La suffisance : Soit (x_n) vérifiant (i) et (ii), et définissons la suite (C_n) par :

$$C_n = -\frac{\Delta x_n}{x_n^2} = -\frac{n^2 \Delta x_n}{(n x_n)^2}$$

(i) et (ii) $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} C_n \neq 0$, et donc, d'après la propriété (1), $(x_n) \in G_1$.

c.q.f.d.

Définition 2 : [12] : Suite dérivée première. Soit $(S_n) \in \text{LOG}$, (S_n) de limite S^* , $e_n = S_n - S^*$, $n \geq 1$, la suite erreur. La quantité

$\lambda_n = 1 - \frac{e_{n+1}}{e_n}$, $n \geq 1$, définit la suite dérivée première de (S_n) .

Ceci permet à KOWALEWSKI [12] de définir le sous-ensemble suivant de LOGSF

Définition 3 : Ensemble $\widehat{\text{LOG2}}$: (μ_n) étant la suite dérivée première de (λ_n) , l'ensemble $\widehat{\text{LOG2}}$ est défini par :

$$\widehat{\text{LOG2}} = \{(S_n) \in \text{LOG} : \exists K \neq 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta \mu_n}{\Delta \lambda_n} = K\}.$$

Remarque 2 : D'après [1] page 10, si $(S_n) \in \widehat{\text{LOG2}}$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n}{\lambda_n} = K \neq 0$.

Autre caractérisation de $\widehat{\text{LOG2}}$:

Propriété 4 : (ϕ_n) étant la suite dérivée première de (μ_n) , alors

$$\widehat{\text{LOG2}} = \{(S_n) \in \text{LOG} : \exists K \neq 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n}{\lambda_n} = K\}.$$

En effet,

$$\frac{\Delta \mu_n}{\Delta \lambda_n} = \frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = \frac{\mu_n \left(\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} - 1 \right)}{\lambda_n \left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} - 1 \right)} = \frac{\mu_n}{\lambda_n} \cdot \frac{\phi_n}{\mu_n} = \frac{\phi_n}{\lambda_n}, \quad \forall n \geq 1.$$

Remarque 3 : Si $(S_n) \in \widehat{\text{LOG2}}$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n}{\lambda_n} = K$ (remarque 2) et puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi_n}{\lambda_n} : K$ nous en déduisons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi_n}{\mu_n} = 1$$

ce qui revient à dire que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta \mu_n}{\mu_n^2} = 1$ ou encore que $(\mu_n) \in G_1$.

La propriété qui suit permet de caractériser une suite de G_1 par la notion de synchronisation.

Propriété 5 : Soit $(x_n) \in \text{LOG}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, et soit (λ_n) sa suite dérivée première.

Alors $(x_n) \in G_1 \iff (x_n)$ synchrone avec (λ_n) .

Preuve : La nécessité : Ecrivons $x_{n+1} = x_n - C_n x_n^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$, où $C_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} C$, $C > 0$.

Alors $\lambda_n = 1 - \frac{x_{n+1}}{x_n} = C_n x_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{x_n} = C \neq 0$.

i.e. (x_n) synchrones avec (λ_n) .

La suffisance : $\exists M \neq 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{x_n} = M \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n})}{x_n} = M \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\Delta x_n}{x_n^2} = M$

ce qui revient à dire que $(x_n) \in G_1$.

c.q.f.d.

Propriété 6 : $(S_n) \in \hat{L}OG2 \Leftrightarrow (\lambda_n) \in G_1$ et $(\mu_n) \in G_1$.

En effet, montrons d'abord la nécessité :

Soit $(S_n) \in \hat{L}OG2$. Les remarques (2) et (3) se traduisent respectivement par (i) et (ii).

(i) $\exists K \neq 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n}{\lambda_n} = K \Leftrightarrow (\lambda_n) \in G_1$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi_n}{\mu_n} = 1 \Leftrightarrow (\mu_n) \in G_1$

les deux dernières équivalences étant obtenues par la propriété 5.

La suffisance : D'après la même proposition :

$$\left. \begin{array}{l} (\lambda_n) \in G_1 \Rightarrow (\lambda_n) \text{ synchrones avec } (\mu_n) \\ (\mu_n) \in G_1 \Rightarrow (\mu_n) \text{ synchrones avec } (\phi_n) \end{array} \right\} \Rightarrow (\lambda_n) \text{ synchrones avec } (\phi_n)$$

et, d'après la proposition 4, $(S_n) \in \hat{L}OG2$.

c.q.f.d.

Supposons maintenant que $(\lambda_n) \in G_1$. Que faut-il savoir de plus pour que $(\mu_n) \in G_1$?

$(\lambda_n) \in G_1 \Leftrightarrow \exists (C_n), C_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} C, C \neq 0$ et, $\forall n \geq 1, \lambda_{n+1} = \lambda_n - C_n \lambda_n^2$.

Alors $\mu_n = C_n \cdot \lambda_n$, $n \geq 1$, et $(\mu_n) \in C_1 \iff \exists \bar{C} \neq 0$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta \mu_n}{\mu_n^2} = \bar{C}$

Calculons le rapport $\frac{\Delta \mu_n}{\mu_n^2}$:

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \mu_{n+1} - \mu_n = C_{n+1} \cdot \lambda_{n+1} - \mu_n = C_{n+1} (\lambda_n - C_n \lambda_n^2) - \mu_n \\ &= \frac{C_{n+1}}{C_n} \mu_n - \frac{C_{n+1}}{C_n} \mu_n^2 - \mu_n = \mu_n \left[\frac{C_{n+1}}{C_n} (1 - \mu_n) - 1 \right] \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\Delta \mu_n}{\mu_n^2} = \frac{\frac{C_{n+1}}{C_n} (1 - \mu_n) - 1}{\mu_n}, \quad \forall n \geq 1.$$

Par ailleurs, puisque $C_n \rightarrow C$, $C \neq 0$, alors $\frac{C_{n+1}}{C_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Posons alors :

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = 1 + \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \text{ avec } \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$$

En remplaçant, nous obtenons pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{\Delta \mu_n}{\mu_n^2} = \frac{(1 + \varepsilon_n)(1 - \mu_n) - 1}{\mu_n} = \frac{\varepsilon_n}{\mu_n} - 1 - \varepsilon_n.$$

Le rapport $\frac{\Delta \mu_n}{\mu_n^2}$ admet donc une limite non nulle si et seulement si

(i) le rapport $\frac{\varepsilon_n}{\mu_n}$ converge

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_n}{\mu_n} \neq 1$

Mais que vaut ce rapport ?

$$\frac{\varepsilon_n}{\mu_n} = \frac{\frac{C_{n+1}}{C_n} - 1}{C_n \lambda_n} = \frac{\Delta C_n}{C_n^2} \cdot \frac{1}{\lambda_n}, \text{ et donc le rapport } \frac{\varepsilon_n}{\mu_n} \text{ converge si et seulement si}$$

le rapport $\frac{\Delta C_n}{\lambda_n}$ converge.

$$\text{D'autre part, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_n}{\lambda_n} \neq 1 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta C_n}{\lambda_n} \neq C^2.$$

Un cas particulier intéressant est : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_n}{\mu_n} = 0$, c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta C_n}{\lambda_n} = 0 \text{ ou encore } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \Delta C_n}{n \lambda_n} = 0$$

Puisque par hypothèse $(\lambda_n) \in G_1$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} n \lambda_n = L$, $L \neq 0$, et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_n}{\mu_n} = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} n \Delta C_n = 0.$$

Nous pouvons donc énoncer la

Proposition 1 : Soit $(S_n) \in \text{LOG}$. Si la suite dérivée première (λ_n) appartient à G_1 , c'est-à-dire s'il existe une suite (C_n) de limite non nulle C telle que (λ_n) soit générée par $\lambda_{n+1} = \lambda_n - C_n \lambda_n^2$, $\forall n \geq 1$, et si

(i) le rapport $\frac{\Delta C_n}{\lambda_n}$ converge

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta C_n}{\lambda_n} \neq C^2$.

alors $(S_n) \in \widehat{\text{LOG}}_2$, un cas particulier de (ii) étant $\lim_{n \rightarrow \infty} n \Delta C_n = 0$.

Rappels [12] : Soit $(S_n) \in \text{LOGSF}$, (S_n) de limite S^* , et notons $e_n = S_n - S^*$, $\forall n \geq 1$.

$$L_\rho = \{(S_n) \in \text{LOGSF} : \exists \rho \in [0, 1] \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{e_{n+1}}{\Delta e_{n+1}} - 1}{\frac{e_n}{\Delta e_n} - 1} = \rho\}$$

$$\text{et } \frac{1}{2} = \bigcup_{\rho \in]0, 1[} L_\rho.$$

Nous allons donner une condition suffisante sur une suite (S_n) afin que sa suite dérivée première (λ_n) appartienne à G_1 . En l'occurrence nous avons la

Propriété 7 : Si $(S_n) \in \frac{1}{2}$, alors sa suite dérivée première (λ_n) appartient à G_1 .

Preuve : Soit $(S_n) \in \mathcal{L}$. On a, $\forall n \geq 1$, $\lambda_n = 1 - \frac{e_{n+1}}{e_n} = -\frac{\Delta e_n}{e_n}$.

Montrons que la quantité $-\frac{\Delta \lambda_n}{\lambda_n^2}$ admet une limite non nulle:

$$\Delta \lambda_n = - \left[\frac{\Delta e_{n+1}}{e_n} - \frac{\Delta e_n}{e_n} \right]$$

Notons $C_n = \frac{\Delta \lambda_n}{\lambda_n^2}$, et montrons que $\exists C \neq 0$ tel que $C = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$

$$\begin{aligned} C_n &= - \frac{\Delta \lambda_n}{\lambda_n^2} = \frac{\Delta e_n}{\Delta e_n^2} \left[\frac{e_n \cdot \Delta e_{n+1} - e_{n+1} \cdot \Delta e_n}{e_n \cdot e_{n+1}} \right] \\ &= \frac{e_n}{e_{n+1}} \left[\left(\frac{e_n}{\Delta e_n} \right) \cdot \left(\frac{e_{n+1}}{e_n} - \frac{e_{n+1}}{e_n} \right) \right], \text{ et ce, pour tout } n \geq 1. \end{aligned}$$

Posons alors

$$\varepsilon_n = - \frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} + \frac{e_{n+1}}{e_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad C_n \text{ s'écrit donc :}$$

$$C_n = \frac{e_n}{e_{n+1}} \cdot \frac{\varepsilon_n}{\lambda_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Pour que $(\lambda_n) \in G_1$, il faut et il suffit que (ε_n) soit synchrone avec (λ_n)

$$\frac{\varepsilon_n}{\lambda_n} = \frac{\left(\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1 \right) - \left(\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1 \right)}{1 - \frac{e_{n+1}}{e_n}} = \frac{\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1}{\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1} - 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Donc, si $(S_n) \in \mathcal{L}$, alors il existe un réel ρ , $0 < \rho < 1$, tel que $(S_n) \in L_\rho$, et par suite,

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_n}{\lambda_n} = \frac{1}{\rho} - 1 = \frac{1 - \rho}{\rho}$$

Remarquons que C est un réel positif. Ainsi $(\lambda_n) \in G_1$.

c.q.f.d.

Soit maintenant une suite (S_n) , $(S_n) \in L_\rho$, ρ étant un réel fixé dans $]0, 1[$. Quelle condition doit-elle vérifier pour que $\lim_{n \rightarrow \infty} n \Delta C_n = 0$? Ce sera alors une condition pour la suite dérivée première de (λ_n) , c'est-à-dire (μ_n) , appartenir à G_1 .

Faisons l'hypothèse suivante :

(C_n) est définie comme précédemment, d'où $\lim C_n = C = \frac{1}{\rho} - 1$ et pour n suffisamment grand, $C_n - C \sim \frac{1}{n}$. C'est-à-dire que si nous posons, pour tout n , $w_n = n(C_n - C)$, alors il existe w^* , $w^* \neq 0$, tel que $w^* = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$. Ceci étant, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} n \Delta C_n = 0$. En effet :

$$\forall n \geq 1, \Delta w_n = n \Delta C_n + C_{n+1} - C \Leftrightarrow n \Delta C_n = \Delta w_n - C_{n+1} + C.$$

La suite (w_n) étant convergente, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} n \Delta C_n = 0$.

Remarque 4 : Il n'est pas nécessaire que la limite w^* soit différente de 0. $w^* = 0$ permet aussi de montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} n \Delta C_n = 0$. La convergence de la suite (w_n) suffit donc.

$w^* = 0$ signifie que la suite des erreurs $C_n - C$ converge plus vite que $(\frac{1}{n})$.

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$R_n = \frac{\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1}{\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1}, \text{ et calculons } w_n :$$

Pour tout $n \geq 1$:

$$w_n = n(C_n - C) = n \left[\frac{e_n}{e_{n+1}} (R_n - 1) - \frac{1}{\rho} + 1 \right].$$

Par ailleurs, pour tout $n \geq 1$:

$$\lambda_n = 1 - \frac{e_{n+1}}{e_n} \Leftrightarrow \frac{e_n}{e_{n+1}} = 1 + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_n}, \text{ donc}$$

$$\begin{aligned}
 w_n &= n \left[\left(1 + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n} \right) (R_n - 1) - \frac{1}{\rho} + 1 \right] = n \left[R_n - 1 + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n} (R_n - 1) - \frac{1}{\rho} + 1 \right] \\
 &= n \left[R_n - \frac{1}{\rho} + \frac{n}{1-\lambda_n} (R_n - 1) \right] = n(R_n - \frac{1}{\rho}) + \frac{n\lambda_n}{1-\lambda_n} (R_n - 1)
 \end{aligned}$$

Puisque $(\lambda_n) \in G_1$, (λ_n) étant générée par $\lambda_{n+1} = \lambda_n - C_n \lambda_n^2$, alors, d'après

la propriété 2-bis, $\lim_{n \rightarrow \infty} n \lambda_n = \frac{1}{C} = (\frac{1}{\rho} - 1)^{-1}$. Il s'ensuit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\lambda_n}{1-\lambda_n} (R_n - 1) = (\frac{1}{\rho} - 1)^{-1} \cdot (\frac{1}{\rho} - 1) = 1$$

Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n(R_n - \frac{1}{\rho}) + 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n$ existe si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} n(R_n - \frac{1}{\rho})$ existe

et $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n \neq 0$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} n(R_n - \frac{1}{\rho}) \neq -1$. D'où le

Corollaire 1 : Soient un réel ρ , $\rho \in]0, 1[$, et une suite $(S_n) \in L_\rho$.

$$\text{Si } Z_n = n \left[\frac{\frac{\Delta e_{n+1} - 1}{\Delta e_n}}{\frac{e_{n+1} - 1}{e_n}} - \frac{1}{\rho} \right] \text{ converge, alors } (S_n) \in \hat{L}OG2.$$

En pratique, il faut connaître la limite de la suite (S_n) pour savoir si (Z_n) converge.

Nous allons donner maintenant une classe de suites (S_n) dont on sera sûrs que (Z_n) convergera.

Considérons maintenant une suite (S_n) , $(S_n) \in G_1$. Il existe donc une suite (α_n) de limite α non nulle telle que la suite erreur (e_n) est générée par :

$$e_{n+1} = e_n - \alpha_n \cdot e_n^2, n \geq 1,$$

l'élément e_1 étant choisi de façon convenable afin d'assurer la convergence de cette suite vers 0. Cette suite peut-elle appartenir à un ensemble L_ρ , $0 < \rho < 1$

Lemme : Soit $(S_n) \in G_1$.

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} n \Delta \alpha_n = 0$, alors $(S_n) \in L_{\frac{1}{2}}$.

Montrer que $(S_n) \in L_{\frac{1}{2}}$, revient à montrer que (R_n) converge vers 2.

$$R_n = \frac{\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1}{\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1} = \frac{\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \left(\frac{e_{n+1}}{e_n} \right)^2 - 1}{\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Posons, $\forall n \geq 1$, $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1 + \mu_n$, $\mu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, alors

$$R_n = \frac{\left(\frac{e_{n+1}}{e_n} \right)^2 - 1 + \mu_n \left(\frac{e_{n+1}}{e_n} \right)^2}{\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1} = \frac{e_{n+1}}{e_n} + 1 + \mu_n \frac{\left(\frac{e_{n+1}}{e_n} \right)^2}{\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1}$$

Nous avons les équivalences suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n}{\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1} = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - 1}{\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} - \frac{n \Delta \alpha_n}{\alpha_n \cdot n \lambda_n} = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} n \Delta \alpha_n = 0$$

la dernière équivalence étant vraie puisque, d'après la propriété 5, $(S_n) \in G_1$ ssi (S_n) est synchrone avec (λ_n) . Par ailleurs, puisque $(\frac{1}{n})$ est synchrone avec (S_n) . (Théorème de synchronisation dans le cas $\rho = 1$), alors $(\frac{1}{n})$ est aussi synchrone avec (λ_n) , ce qui se traduit par $\lim_{n \rightarrow \infty} n \lambda_n \neq 0$.

Le lemme est démontré.

La suite (S_n) de G_1 qui vérifie la condition du lemme appartient à $L_{\frac{1}{2}}$.

Si la convergence de la suite $Z_n = n[R_n - 2]$, $n = 1, 2, 3$, où

$$R_n = \frac{\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1}{\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \text{ est réalisée, alors d'après le corollaire 1,}$$

$$(S_n) \in \hat{\text{LOG}}2.$$

Recherchons alors une condition suffisante pour assurer la convergence de la suite (Z_n) ,

Relation entre Δe_{n+1} et Δe_n :

$$e_{n+1} = e_n - \alpha_n e_n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow \Delta e_n = -\alpha_n \cdot e_n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

D'où

$$\begin{aligned} \Delta e_{n+1} &= -\alpha_{n+1} e_{n+1}^2 = -\alpha_{n+1} [\Delta e_n + e_n]^2 = -\alpha_{n+1} [\Delta e_n^2 + 2e_n \Delta e_n + e_n^2] \\ &= -\alpha_{n+1} \cdot \Delta e_n^2 - 2\alpha_{n+1} \cdot e_n \cdot \Delta e_n + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} (-\alpha_n \cdot e_n^2) \\ &= -\alpha_{n+1} \cdot \Delta e_n^2 - 2\alpha_{n+1} \cdot e_n \cdot \Delta e_n + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \cdot \Delta e_n. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - 2\alpha_{n+1} \cdot e_n - \alpha_{n+1} \cdot \Delta e_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1 = \left(\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - 1 \right) - 2\alpha_{n+1} \cdot e_n - \alpha_{n+1} \cdot \Delta e_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

D'autre part, puisque, pour tout $n \geq 1$, $\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1 = -\alpha_n \cdot e_n$, alors

$$R_n = \frac{\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1}{-\alpha_n \cdot e_n} = \frac{1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}}{\alpha_n \cdot e_n} + 2 \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \cdot \frac{\Delta e_n}{e_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

D'où

$$R_n - 2 = -\frac{\Delta \alpha_n}{\alpha_n^2 \cdot e_n} + 2 \left(\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - 1 \right) + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \cdot \frac{\Delta e_n}{e_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

et

$$n(R_n - 2) = -\frac{n^2 \Delta \alpha_n}{\alpha_n^2 \cdot n \cdot e_n} + 2n \frac{\Delta \alpha_n}{\alpha_n} + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \cdot \frac{n \Delta e_n}{e_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\Delta e_n}{e_n} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \cdot n \cdot e_n = -1, \text{ car } \lim_{n \rightarrow \infty} n e_n = + \frac{1}{\alpha}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \Delta \alpha_n}{\alpha_n} = 0, \text{ puisque par hypothèse, } \lim_{n \rightarrow \infty} n \Delta \alpha_n = 0$$

Le rapport $\frac{n^2 \Delta \alpha_n}{\alpha_n^2 \cdot n e_n}$ converge si et seulement si $n^2 \Delta \alpha_n$ converge.

Prenons alors comme hypothèse : $n^2 \Delta \alpha_n$ converge.

Donc $\exists l \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \Delta \alpha_n = l$. Cela entraîne que $\lim_{n \rightarrow \infty} n \Delta \alpha_n = 0$, ce qui signifie que l'hypothèse du lemme est automatiquement vérifiée.

Par conséquent $(S_n) \in G_1 \cap L_{\frac{1}{2}}$ et de plus la suite $Z_n = n(R_n - 2)$ converge, ce qui implique, d'après le corollaire que $(S_n) \in \text{LOG}2$. On a donc la

Définition 4 : Ensemble \tilde{G}_1

Soit $(S_n) \in G_1$, (S_n) de limite S^* . Soit $e_n = S_n - S^*$, $n \geq 1$, la suite erreur. Il existe alors une suite (α_n) , de limite α non nulle, vérifiant

$$e_{n+1} = e_n - \alpha_n \cdot e_n^2, n \geq 1.$$

Si de plus, la quantité $n^2 \Delta \alpha_n$ converge, alors (S_n) appartient au sous-ensemble appelé \tilde{G}_1 de G_1 .

Propriété 2 : $\tilde{G}_1 \subset \hat{\text{LOG}}2$.

Preuve : Toute suite (S_n) appartenant à \tilde{G}_1 vérifie les conditions du corollaire avec $\rho = \frac{1}{2}$.

Corollaire 2 : Le θ_2 -algorithme accélère \tilde{G}_1 .

IV. RECHERCHE DE SUITES DE LOGSF DONT LES SUITES EXTRAITES PAR LE PROCEDE P_2
APPARTIENNENT AU SOUS-ENSEMBLE \tilde{G}_1 DE $\widehat{LOG2}$

Sachant maintenant que l'ensemble \tilde{G}_1 est accéléré par le θ_2 -algorithme, existe-t-il un sous-ensemble de LOGSF constitué de suites à convergence très lente de sorte que tout procédé d'extraction de type P_2 en donne des sous-suites appartenant à \tilde{G}_1 ?

Un tel ensemble n'est pas vide et contient au moins la suite $\left(\frac{1}{\text{Log}(n+1)}\right)_{n \geq 1}$

Considérons, en effet, l'extraction définie par $\alpha(n) = 2^n - 1$.

La suite extraite est donc $S_{\alpha(n)} = \frac{1}{n \text{Log} 2}$, $n \geq 1$, suite qui appartient bien à \tilde{G}_1 .

Remarque : Dans ce qui suit, nous allons considérer l'extraction définie par $\alpha(n) = 2^n$, $n \geq 1$.

Cela ne restreint point la généralité.

Rappelons maintenant la définition de l'ensemble $S_{\frac{1}{\text{Log} n}}$ constitué des suites synchrones avec $\left(\frac{1}{\text{Log} n}\right)_{n \geq 2}$.

$$S_{\frac{1}{\text{Log} n}} = \left\{ (S_n) \in \text{LOGSF} : \exists K \neq 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Log} n \cdot e_n = K \right\}$$

$$S^* = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Pourquoi un tel ensemble ?

Prenons une suite $(S_n) \in S_{\frac{1}{\text{Log} n}}$, de limite S^* .

Alors, il existe $K \neq 0$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Log} n \cdot e_n = K$. Ceci implique que $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot e_{2^n} = \frac{K}{\text{Log} 2}$. K étant non nul, (S_{2^n}) est alors synchrone avec $\left(\frac{1}{n}\right)$.

Cherchons une condition suffisante sur (S_n) pour que (S_{2^n}) appartienne à \tilde{G}_1 .

Tout d'abord, pour que la suite $e_{2^n} = S_{2^n} - S^*$, $n \geq 1$ appartienne à G_1 , il faut encore qu'elle réalise la condition (ii) de la propriété 3, la condition (1) l'étant déjà comme nous avons pu le constater plus haut.

Posons, pour tout $n \geq 2$, $K_n = \text{Log}n \cdot e_n$. Alors $K_{2^n} = n \cdot \text{Log}2 \cdot e_{2^n}$, d'où

$$e_{2^n} = \frac{K_{2^n}}{n \text{Log}2}, \quad n \geq 2.$$

Calculons l'écart $e_{2^{n+1}} - e_{2^n}$, $n \geq 2$, et tâchons de trouver une condition suffisante afin que la quantité $n^2 (e_{2^{n+1}} - e_{2^n})$ converge vers un réel non nul.

Nous avons, pour tout $n \geq 2$:

$$n^2(e_{2^{n+1}} - e_{2^n}) = n^2 \left[\frac{K_{2^{n+1}}}{(n+1)\text{Log}2} - \frac{K_{2^n}}{n\text{Log}2} \right] = \frac{1}{\text{Log}2} \frac{n^2}{n(n+1)} [n(K_{2^{n+1}} - K_{2^n}) - K_{2^n}].$$

ceci admet une limite non nulle si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} n(K_{2^{n+1}} - K_{2^n}) \neq K_{2^n}$ (étant bien entendu que cette limite existe).

Prenons alors comme condition suffisante le cas particulier suivant :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[K_{2^{n+1}} - K_{2^n}] = 0$$

Ceci étant, la sous-suite (S_{2^n}) appartient à G_1 . Posons alors, pour tout $n \geq 2$:

$$\alpha_n = - \frac{e_{2^{n+1}} - e_{2^n}}{e_{2^n}}. \quad \text{Il existe alors un réel } \alpha \text{ non nul tel que } \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha.$$

La condition supplémentaire à obtenir, pour que (S_{2^n}) appartienne à G_1 , est celle qui assure la convergence de la quantité $n^2 \Delta \alpha_n$. Définissons auparavant, pour des commodités d'écriture :

$$\Delta K_{2^n} = K_{2^{n+1}} - K_{2^n}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

Alors, $\forall n \geq 2$,

$$\alpha_n = \frac{n \text{Log}2}{(n+1)} \left[\frac{1}{K_{2^n}} - n \frac{\Delta K_{2^n}}{K_{2^n}^2} \right], \quad \text{et par conséquent,}$$

$$\Delta\alpha_n = \text{Log}_2 \left\{ \left[\frac{(n+1)}{(n+2)} \cdot \frac{n}{K_{2^{n+1}}} - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{K_{2^n}} \right] - \left[\frac{(n+1)^2}{(n+2)} \frac{\bar{\Delta} K_{2^{n+1}}}{K_{2^{n+1}}^2} - \frac{n^2 \bar{\Delta} K_{2^n}}{(n+1) K_{2^n}^2} \right] \right\},$$

Ce qui conduit, après une réduction au premier crochet, et en faisant le produit par n^2 , à :

$$n^2 \Delta\alpha_n = \text{Log}_2 \left\{ \left[\frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \cdot \left[\frac{-n^2 \bar{\Delta} K_{2^n} - 2n \cdot \bar{\Delta} K_{2^n} + K_{2^n}}{K_{2^n}} \right] \right] - n^2 \left[\frac{(n+1)^2}{n+2} \cdot \frac{\bar{\Delta} K_{2^{n+1}}}{K_{2^{n+1}}^2} - \frac{n^2}{n+1} \cdot \frac{\bar{\Delta} K_{2^n}}{K_{2^n}^2} \right] \right\}$$

Il suffit donc que la quantité $n^3 \bar{\Delta} K_{2^n}$ converge pour que $n^2 \Delta\alpha_n$ converge aussi, et cela nous permet d'énoncer la

Proposition 3 : Soit $(S_n) \in \mathcal{S}_{\frac{1}{\text{Log}_n}}$, de limite S^* . Appelons, pour tout $n \geq 2$, $K_n = \text{Log}_n(S_n - S^*)$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 [K_{2^{n+1}} - K_{2^n}]$ existe, alors la suite extraite (S_{2^n}) appartient à $\tilde{\mathcal{G}}_1$ et est donc accélérée par le θ_2 -algorithme.

Un sous-ensemble de $\frac{1}{\text{Log}_n}$ vérifiant les hypothèses ci-haut est celui des suites (S_n) pour lesquelles :

$$\exists \alpha > 0 : \exists M \neq 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha (K_n - K^*) = M$$

$$\text{Effectivement, dans ce cas } \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 (K_{2^{n+1}} - K_{2^n}) = 0$$

Exemples :

1. Soit $\mathcal{S}_{\frac{1}{\text{Log}_n}}$ = le sous-ensemble de $\mathcal{S}_{\frac{1}{\text{Log}_n}}$ des suites (S_n) de limite S^* telles que

$$S_n \sim S^* + \frac{1}{\text{Log}_n} \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \dots + \frac{\alpha_p}{n^p} + \dots \right), \text{ n assez grand où } \alpha_0 \neq 0 \text{ et où}$$

les autres α_i , $i \geq 1$, sont des réels.

Alors si $(S_n) \in \tilde{S}_{\text{Logn}}^1$, $(S_{2^n}) \in \tilde{G}_1$. En effet, pour n assez grand,

$$K_n = \text{Logn} \cdot e_n \sim \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \dots + \frac{\alpha_p}{n^p} + \dots$$

et donc

$$K_{2^n} \sim \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2^n} + \frac{\alpha_2}{(2^n)^2} + \dots, \text{ ce qui entraîne :}$$

$$\overline{\Delta}K_{2^n} = K_{2^{n+1}} - K_{2^n} \sim -\frac{\alpha_1}{2^{n+1}} + \Theta\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right), \text{ et nous déduisons facilement que}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \overline{\Delta}K_{2^n} = 0.$$

2. Soit $\tilde{S}_{\text{Logn}}^1$ le sous-ensemble de S_{Logn}^1 formé des suites (S_n) , de limite S^* , telles, pour n suffisamment grand,

$$S_n \sim S^* + \frac{1}{\text{Logn}} \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{(\text{Logn})^\beta} + \frac{\alpha_2}{(\text{Logn})^{\beta+1}} + \dots + \frac{\alpha_p}{(\text{Logn})^{\beta+p-1}} + \dots \right), \alpha_0 \neq 0, \beta \geq 2.$$

Alors, si $(S_n) \in \tilde{S}_{\text{Logn}}^1$, $(S_{2^n}) \in \tilde{G}_1$. En effet, pour n assez grand,

$$K_n = \text{Logn} \cdot e_n \sim \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{(\text{Logn})^\beta} + \frac{\alpha_2}{(\text{Logn})^{\beta+1}} + \dots, \text{ ce qui entraîne :}$$

$$K_{2^n} \sim \alpha_0 + \frac{\gamma_1}{n^\beta} + \frac{\gamma_2}{n^{\beta+1}} + \dots$$

$$\text{où } \gamma_i = \frac{\alpha_i}{(\text{Log}2)^{\beta+i-1}}, i = 1, 2, 3, \dots, \text{ et donc}$$

$$\overline{\Delta}K_{2^n} = K_{2^{n+1}} - K_{2^n} \sim -\frac{\beta \cdot \gamma_1}{n^{\beta+1}} + \Theta\left(\frac{1}{n^{\beta+1}}\right) \text{ qui donne}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 (K_{2^{n+1}} - K_{2^n}) = \begin{cases} -2\gamma_1 & \text{si } \beta = 2 \\ 0 & \text{si } \beta > 2 \end{cases}$$

c.q.f.d.

Exemple de suite appartenant à $\mathfrak{S}_{\text{Logn}}^1$:

Soit la suite $S_n = \sin \frac{1}{\text{Logn}}$, $n \geq 2$. Alors $S^* = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$, d'où

$$e_n \cdot \text{Logn} = \text{Logn} \cdot \sin \frac{1}{\text{Logn}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, \text{ puisque } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

C'est-à-dire que $(S_n) \in \mathfrak{S}_{\text{Logn}}^1$. Or, pour x voisin de 0,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \dots$$

Prenons, pour n suffisamment grand, $x = \frac{1}{\text{Logn}}$, alors

$$S_n = \sin \frac{1}{\text{Logn}} = \frac{1}{\text{Logn}} - \frac{1}{3!(\text{Logn})^3} + \frac{1}{5!(\text{Logn})^5} + \dots + (-1)^p \cdot \frac{1}{(2p+1)!(\text{Logn})^{2p+1}} + \dots$$

ce qui montre bien que $(S_n) \in \mathfrak{S}_{\text{Logn}}^2$ avec $\beta = 2$.

V. ETUDE NUMERIQUE

Nous testons ici quelques suites de limites nulles qui vérifient les hypothèses de la proposition... A titre purement expérimental, nous itérerons une ou deux fois le θ_2 -algorithme. J'appellerai (θ_n^1) la suite obtenue de (θ_n) par application du θ_2 -algorithme et (θ_n^{p+1}) la suite obtenue de (θ_n^p) toujours par ce même algorithme ($p \in \mathbb{N}$).

Exemple 1 : Soit (S_n) définie par

$$S_n = \frac{1}{\text{Log}(n+1)} \left(1 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2} \right), n \geq 1$$

Cette suite appartient à $\mathfrak{S}_{\text{Logn}}^1$. Nous appelons (t_n) la suite définie par $t_n = S_{2^{n-1}}$. Sur les 1024 premiers termes de la suite (S_n) , nous pouvons calculer t_1, \dots, t_n .

n	t_n	θ_n	θ_n^1
1	.0000000000000000D+00	.0000000000000000D+00	.0000000000000000D+00
2	.113779903328355D+01	.113779903328355D+01	.113779903328355D+01
3	.815502101609491D+00	.815502101609491D+00	.815502101609491D+00
4	.547565784767707D+00	.119832385928226D+01	.947844659649729D+00
5	.392939434771316D+00	.467457248420805D+00	.972669664370767D+00
6	.303036757070705D+00	.172790056925085D+00	.195551674267253D+01
7	.246866788224650D+00	.962311900745691D-01	.946998694205852D-01
8	.208946726754286D+00	.481506821843427D-01	.479433114453375D+00
9	.181609822647051D+00	.109744081449318D-01	.275497565794401D+00
10	.160873466304394D+00	-.129369989545196D-01	-.147338027389437D-01
11	.144530514999627D+00	-.220327538087857D-01	-.196441827701576D-01

(θ_n) accélère bien (t_n) mais (θ_n^1) ne semble pas accélérer (θ_n) .

Exemple 2 :

Testons maintenant une suite appartenant à $\tilde{S}_{\text{Log}n}^1$, en l'occurrence, la suite (S_n) définie par :

$$S_n = \sin\left(\frac{1}{\text{Log}(n+1)}\right), n \geq 1$$



n	t_n	θ_n	θ_n^1
1	.991806244393664D+00	.991806244393664D+00	.991806244393664D+00
2	.789650541422532D+00	.789650541422532D+00	.789650541422532D+00
3	.582121116976877D+00	.582121116976877D+00	.582121116976877D+00
4	.439569754639723D+00	.593556685455450D+00	.581832610715701D+00
5	.345673207271393D+00	.221922856066295D+00	.587772201700588D+00
6	.282116653217989D+00	.110120987180178D+00	.621262178516512D+00
7	.237271441392276D+00	.639249473689365D-01	.170556537265779D-02
8	.204320251611919D+00	.388972251820365D-01	-.407431740888508D-01
9	.179236353720851D+00	.238100371591077D-01	-.182605710679315D-01
10	.159564343367464D+00	.144792156344332D-01	-.346028458522274D-02
11	.143749459113149D+00	.874128933030097D-02	-.739418474032921D-04

(θ_n) accélère bien (t_n) . Il en est de même pour (θ_n^1) vis-à-vis de (θ_n) .

Exemple 3 :

Prenons $S_n = \exp(\text{Log}2/\text{Log}(n+1))$ ou encore $S_n = 2^{\frac{1}{\text{Log}(n+1)}}$. $S^* = 1$.

n	$t_n - s^*$	$e_n - s^*$
1	.171828182845905D+01	.171828182845905D+01
2	.879357106200235D+00	.879357106200235D+00
3	.538297919441157D+00	.538297919441157D+00
4	.370896460787697D+00	.823471813131185D-01
5	.277174916370054D+00	.631692015818966D-01
6	.219254813075122D+00	.454027238176963D-01
7	.180629352904278D+00	.310079239031348D-01
8	.153301134678920D+00	.203233482339641D-01
9	.133048942258468D+00	.128605952287493D-01
10	.117480244107964D+00	.789791323135008D-02
11	.105155357421553D+00	.473308298845771D-02

n	$e_n^1 - s^*$	$e_n^2 - s^*$
1	.171828182845905D+01	.171828182845905D+01
2	.879357106200235D+00	.879357106200235D+00
3	.538297919441157D+00	.538297919441157D+00
4	.777704719195964D+00	.605362199312382D+00
5	.889929749452033D-01	.644092730185977D+00
6	.840815670385753D-01	.692666793593258D-01
7	.372621182052759D-01	.866644413327763D-01
8	.136601287613708D-01	.792419057810975D-01
9	.449373459026893D-02	.281243334193828D-02
10	.173334071685333D-02	.121332545703097D-02
11	.764594808970033D-03	.567097318684419D-04

Exemple 4 : Ici $S_n = \frac{1}{\text{Log}(n+1)} \left(1 + \frac{\text{Log}(n+1)}{n^2} \right)$, $s = 0$

n	t_n	e_n
1	.244269504088896D+01	.244269504088896D+01
2	.116023922662684D+01	.116023922662684D+01
3	.683834934559612D+00	.683834934559612D+00
4	.470744613313419D+00	.190677287170039D+00
5	.356862373864761D+00	.100881436127863D+00
6	.286976230002674D+00	.335135704195638D-01
7	.239800256372019D+00	.296351719253616D-02
8	.205830294706784D+00	-.501310840101832D-03
9	.180225438772364D+00	.250708465245530D-02
10	.160253140978872D+00	.394726991800706D-02
11	.144250144673020D+00	.364875523347799D-02

n	θ_n^1	θ_n^2
1	.244269504088896D+01	.244269504088896D+01
2	.116023922662684D+01	.116023922662684D+01
3	.683834934559612D+00	.683834934559612D+00
4	.113580997898831D+01	.795455621966773D+00
5	.194508062734707D+00	.878940898225976D+00
6	.252315984352606D+00	.336986165255744D+00
7	.159018084910631D-01	.225707197669644D+00
8	.667143517611975D-03	-.111717903641284D+00
9	.509734948592449D-03	.516873235257225D-03
10	-.470447145166504D-02	.589236773203682D-03
11	.382896506059119D-02	.785024367946726D-03

En définitive, il semble que la procédure θ_2 itérée donne de bons résultats sur la plupart des suites testées. Son application à la sous-suite (t_n) n'est donc pas du tout donnée d'intérêt. Les résultats théoriques sur la procédure θ itérée, obtenus dans [10] pourraient nous aider à expliquer ce phénomène.

VI CONCLUSION

Les suites accélérées par ce dernier procédé composé sont à convergence très lente, car il ne faut pas oublier que pour chacune de ces suites, la suite erreur (e_n) correspondante doit être synchronisée avec la suite $\left(\frac{1}{\text{Log}n}\right)_{n \geq 2}$. D'ailleurs, même les suites de point fixe de classe C^{p+1} , n'entrent pas dans ce cadre car leurs suites erreurs sont, d'après le théorème de synchronisation, synchrones avec des suites du type $\left(\frac{1}{n^p}\right)$, $p \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

A titre d'exemple, pour atteindre l'estimation $\frac{1}{\text{Log}n} = 10^{-2}$, il faudrait que l'indice n soit de l'ordre de $2,6881 \cdot 10^{43}$

Les exemples précédents portent sur des suites de limites connues, ce qui facilite la vérification des hypothèses de la proposition 3. Il serait aussi intéressant de sommer des séries à termes positifs dont les suites erreurs (e_n) soient synchrones avec la suite $\left(\frac{1}{\text{Log}n}\right)$ ou, pourquoi pas, avec toute suite du type $\left(\frac{1}{(\text{Log}n)^\alpha}\right)$, $0 < \alpha < \infty$, ces derniers résultats pouvant être généralisés en ce sens là. Toute la difficulté est alors de déterminer ces séries là.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. BREZINSKI : "Accélération de la convergence en analyse numérique".
Lecture Notes in Mathematics, 584, Springer-Verlag, Heidelberg.
- [2] C. BREZINSKI : "Algorithmes d'accélération de la convergence : Etude numérique", Technip, Paris, (1978).
- [3] C. BREZINSKI, J.P. DELAHAYE and B. GERMAIN-BONNE : "Convergence Acceleration by extraction of linear subsequences". SIAM Jour. Numer. Anal. Vol. 20, n° 6, December 1983.
- [4] H. CARTAN : "Théorie élémentaire des fonctions analytiques". Hermann, (1960).
- [5] J.W. DANIEL : "Summation of series of positive terms by condensation transformations" Mathematics of Computation (1969).
- [6] J.P. DELAHAYE et B. GERMAIN-BONNE : "The set of logarithmically convergent sequences cannot be accelerated". SIAM Jour. Numer. Anal. (1982), pp. 840-844.
- [7] B. GERMAIN-BONNE : "Estimation de la limite de suites et formation de procédés d'accélération de la convergence". Thèse, Lille I, (1978).
- [8] A.J. GEURTS : "A contribution to the theory of condition". Numerisch. Mathematik. Vol. 39, (1982), pp. 85-96.
- [9] P. HILLION : "Intervalle d'approximation pour les suites à quotients de différences successives monotones". C.R. Acad. Sc. Paris, t. 277 (1973), Serie A, pp. 853-856.
- [10] M.E.D. KATEB : "Itérations d'algorithmes d'accélération de la convergence". Thèse de 3ème cycle, Lille 1, (1983).
- [11] K. KNOPP : "Theory and application of infinite series". Blackie & Son LTD.

- [14] G. OPFER : "On monotonicity preserving linear extrapolation sequences". Computing 5, pp. 259-266 (1970), by Springer-Verlag (1970).
- [15] D. WIDDER : "The Laplace Transform" Princeton-University-Press, (1946).
- [16] J. WIMP : "Sequence transformation and their applications". Academic press (1981).
- [17] P. WYNN : "Convergence Acceleration by a Method of intercalation". Computing 9, pp. 267-273, (1972). by Springer-Verlag (1972).
- [18] A. SIDI : "Convergence of the T-transform of Power series". Math. Comp. (1979).