N° d'ordre : 1198

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

Spécialité : MATHÉMATIQUES PURES

par

DJAHANBANI Mohammad

HOMOTOPIE RATIONNELLE D'UN ESPACE NILPOTENT ET MODÈLE MINIMAL

Membres du Jury : D. LEHMANN — Président, Rapporteur

J.C. THOMAS
B. CALLENAERE — Examinateurs

Soutenue le 23 octobre 1984

INTRODUCTION

Soit X un espace nilpotent avec les groupes d'homologie de rang fini. Ces conditions entraînent que les groupes d'homotopie sont de rang fini, ce qui signifie que pour $n \geqslant 2$ les espaces vectoriels $\pi_n(X) \otimes \mathbb{Q}$ sont de dimension finie et pour $n = 1$, le groupe $\pi_1(X)$ donne une suite finie d'extension centrale :

$$0 \to G_{\alpha}/G_{\alpha+1} \to G_1/G_{\alpha+1} \to G_1/G_{\alpha} \to 1$$

où $\pi_1(X) = G_1 \supset G_2 \supset \dots \quad G_\alpha \supset G_{\alpha+1} \supset \dots G_r \supset G_{r+1} = \{0\}$ désigne la suite centrale descendante. Les $G_\alpha/G_{\alpha+1} \otimes \mathbb{Q} = A_\alpha \otimes \mathbb{Q}$ sont abéliens et de rang fini : $\dim(A_\alpha \otimes \mathbb{Q}) < +\infty$.

Notons $\mathrm{grad}(\pi_1(X)) \otimes \mathbb{Q} = \underset{\alpha}{\oplus} A_\alpha \otimes \mathbb{Q}$.

La restriction du crochet de Whitehead à $\pi_1(X) \times \pi_n(X)$ définit une filtration sur $\pi_n(X)$ ($\pi_1(X)$ opère d'une façon nilpotente sur $\pi_n(X)$).

Notons à cette filtration $\mathrm{grad}(\pi_*(X)) \otimes \mathbb{Q} = \underset{i\geqslant 1}{\oplus} \mathrm{grad}(\pi_i(X)) \otimes \mathbb{Q}$ le gradué associé.

Le crochet de Whitehead habituel induit alors un crochet

$$(\mathrm{grad}(\pi_1(X))\otimes\mathbb{Q}) \otimes (\mathrm{grad}(\pi_n(X))\otimes\mathbb{Q}) \xrightarrow{[\ ]} (\mathrm{grad}(\pi_n(X) \otimes \mathbb{Q})$$

de façon naturelle (cf. Proposition II.3). On désigne par $X_{\mathbb{Q}}$ le rationalisé de X et on note par : $\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} = \pi_*(X_{\mathbb{Q}})$.

Soit $\mathfrak{m} = \Lambda V$ le modèle minimal de X. Il existe une base homogène $\{v_\alpha\}_{\alpha \in S}$ de $V = \bigoplus_{i \geq 1} V^i$. L'algèbre symétrique $V \otimes V$ est isomorphe en tant qu'espace vectoriel gradué, à la sous-algèbre de $\mathfrak{m}$ engendrée par les mots de longueur deux.

La partie quadratique de la différentielle d, par dualité définit une application bilinéaire

$$\mathrm{Hom}(V,\mathbb{Q}) \otimes \mathrm{Hom}(V,\mathbb{Q}) \xrightarrow{[\,]} \mathrm{Hom}(V,\mathbb{Q}).$$

Ceci définit une structure d'algèbre de Lie graduée sur $\mathrm{Hom}(V,\mathbb{Q})$ (graduation sur les degrés des générateurs).

Classiquement, on définit un isomorphisme

$$\Psi : \qquad \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{Hom}(V,\mathbb{Q})$$

en tant qu'espaces vectoriels gradués (voir [4]).

Le but de ce travail est de démontrer que Ψ est un isomorphisme d'algèbres de Lie graduées.

Les deux structures grad $\pi_1(X) \otimes \bar{Q}$-module sur grad $\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}$ et $\mathrm{Hom}(V^1,\mathbb{Q})$-module sur $\mathrm{Hom}(V^*,\mathbb{Q})$ sont isomorphes.

Ce résultat généralise au cas non 1-connexe, le résultat de P. ANDREWS et M. ARKOWITZ [10].

Plus précisément, nous établissons le théorème suivant :

<u>Théorème</u> 1.-

Le diagramme suivant commute dans la catégorie des espaces vectoriels gradués :

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(V,\mathbb{Q}) & & \mathrm{Hom}(V \otimes V,\mathbb{Q}) \arrow[ll, "{[\ ,\ ]_d}"'] \\
& & \mathrm{Hom}(V,\mathbb{Q}) \otimes \mathrm{Hom}(V,\mathbb{Q}) \arrow[u, "\Phi"'] \\
\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} \arrow[uu, "\Psi"'] & & \pi_*(X)\otimes\mathbb{Q})\otimes(\pi_*(X)\otimes\mathbb{Q}) \arrow[ll, "{[\ ,\ ]_{wh}}"'] \arrow[u, "\Psi \otimes \Psi"']
\end{tikzcd}
$$

où Φ est l'isomorphisme canonique défini par

$$\Phi(f\otimes g)(v\otimes w) = \begin{cases} (-1)^{pq}\, f(v)g(w) + g(v)f(w) & \text{si } (p,q) = (m,n) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$f \in \mathrm{Hom}(V^m,\mathbb{Q})$ $\quad g \in \mathrm{Hom}(V^n,\mathbb{Q})$ $\quad v \in V^p$ $\quad w \in W^q$

Dans le chapitre I, nous donnons quelques rappels sur l'espace X nilpotent et son modèle minimal.

Au chapitre II, nous construisons la structure de $\pi_1(X) \otimes \mathbb{Q}$-module sur $\mathrm{grad}(\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}$.

Nous démontrons un résultat équivalent du théorème 1 dans le cas universel, en construisant le n-ième étage tronqué de la tour de Postnikov de $S^1 \vee S^n$ au chapitre III.

Le chapitre IV sera consacré à la démonstration du théorème 1 : l'application $S^1 \vee S^n \xrightarrow{f_1 \vee f_2} X$ induit un unique morphisme d'A.D.G.C.

Θ au niveau des modèles minimaux, rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_{S^1} & & \\
& \mathcal{M}_{S^1 \vee S^n} \arrow[ul] \arrow[dl] & \mathcal{M}_X \arrow[l, "\Theta"'] \arrow[ull, bend right, "F_1"'] \arrow[dll, bend left, "F_2"] \\
\mathcal{M}_{S^n} & &
\end{tikzcd}$$

lorsque F_1 et F_2 sont des morphismes induits par f_1 et f_2.

Bien sûr, le résultat de ce travail se généralise pour les produits de Whitehead itérés, (Voir [10] et [12] dans le cas 1-connexe).

Dans le cas $X = K(G,1)$ où G est un groupe nilpotent de type fini voir [13] et [14].

P L A N

CHAPITRE I

RAPPELS SUR LA LOCALISATION DES ESPACES NILPOTENTS.

I.1.- GROUPES NILPOTENTS.

Soient π et G deux groupes. On dit que G est un π-groupe, s'il existe un homomorphisme de groupes $\pi \to \text{Aut } G$. Si G, est un groupe abélien, un π-groupe est classiquement appelé un π-module.

Dans la suite G opère sur lui-même par automorphisme intérieur.

Une suite centrale descendante d'un π-groupe G est une suite de sous-groupes normaux

$$G = G_o \supset G_1 \supset \dots \supset G_i \supset G_{i+1} \quad \dots \quad G_s \supset G_{s+1}$$

telle que :

a) Tous les sous-groupes sont invariants par l'action de π.

b) L'action de π sur $G_{i/G_{i+1}}$ est triviale.

Si un π-groupe G possède une suite centrale telle que $G_{s+1} = \{1\}$, pour un s, on dit que π opère d'une façon nilpotente sur G. Le plus petit s tel que $G_r = 0$, pour $r \geqslant s$ est l'ordre de nilpotence de G.

Si $\pi = G$, on dit que G est nilpotent.

Définition.-

Un espace topologique X est nilpotent si $\pi_1(X)$ est nilpotent et si $\pi_1(X)$ opère d'une façon nilpotente sur $\pi_n(X)$, pour $n > 1$.

I.2.- LOCALISATION DES GROUPES ET DES ESPACES NILPOTENTS.

Définition.-

Une catégorie $\mathcal{C}$ (avec une sous-catégorie pleine $\mathcal{L}$) est une catégorie avec localisation, si pour tous les objets $X \in \mathcal{C}$ il existe un objet $X_\ell \in \mathcal{L}$ et un morphisme $X \to X_\ell$ universel par rapport à $\mathcal{L}$ ($\forall$ $L \in \mathcal{L}$ et le morphisme $f : X \to L$, il existe un unique $g : X_\ell \to L$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & X_\ell \arrow[d, "y"] \\ & L \end{tikzcd} .$$

L'objet X_ℓ est appelé la localisation de X, le morphisme $X \xrightarrow{\ell} X_\ell$ est normé le morphisme de localisation et les objets de $\mathcal{L}$, les objets locaux.

Définition.-

Dans la catégorie des groupes, un groupe G est local si pour tout $g \in G$ et tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x \in G$ tel que $x^n = g$.

I.3.- LEMME [7].-

Soit une extension centrale

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

avec A et H locaux, alors G est aussi local.

Soit $G = G_o \supset G_1 \quad \ldots \supset G_i \supset G_{i+1} \supset \ldots \quad G_s \supset G_{s+1} = \{1\}$ la suite descendante de G, où G_{i+1} est engendré par les éléments $xyx^{-1}y^{-1}$ avec $x \in G_o$, $y \in G_i$.

La suite $\{G_i\}$ induit une suite finie d'<u>extensions centrales</u>

$$0 \to G_{1/G_2} \longrightarrow G_{o/G_2} \longrightarrow G_{o/G_1} \longrightarrow 1$$

$$0 \to G_{i/G_{i+1}} \longrightarrow G_{o/G_{i+1}} \longrightarrow G_{o/G_i} \longrightarrow 1$$

$$0 \to G_s \longrightarrow G_o \longrightarrow G_{o/G_s} \longrightarrow 1 .$$

Les $G_{i/G_{i+1}}$ sont appellés les <u>facteurs</u> de la suite centrale.

Notons $\mathrm{grad}\, G \otimes \mathbb{Q} = \bigoplus_i G_{i/G_{i+1}} \otimes \mathbb{Q}$. Rappelons que la catégorie des groupes nilpotents est une catégorie avec localisation.

Soit $\hat{G}$ la localisation d'un groupe nilpotent G et $J : G \to \hat{G}$ le morphisme de localisation (le complété de Malcev).

I.4.- LEMME [8].-

J induit un isomorphisme d'algèbre de Lie graduée sur $\mathbb{Q}$

$$\mathrm{grad}\, G \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \mathrm{grad}\, \hat{G}.$$

La structure d'algèbre de Lie sur grad $G \otimes \mathbb{Q}$ est donnée par le lemme suivant :

I.5.- LEMME [3].-

Sur grad $G \otimes \mathbb{Q}$, il existe une structure d'algèbre de Lie graduée définie par :

$$\begin{array}{ccc} G_i/G_{i+1} \times G_j/G_{j+1} & \longrightarrow & G_{i+j}/G_{i+j+1} \\ (\tilde{x}_i \quad , \quad \tilde{x}_j) & & [\tilde{x}_i,\tilde{x}_j] = \widetilde{[x_i,x_j]} \end{array}$$

où $x_i \in G_i$, $x_j \in G_j$ et $[x_i,x_j] = x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1}$.

I.6.- THEOREME.- Bausfield-Kan.

Tout espace X nilpotent admet une localisation $\ell : X \to X'$, où $\ell_\# : \pi_*(X) \to \pi_*(X')$ est un morphisme de localisation.

I.7.- Notons A.D.G.C. la catégorie des K-algèbres différentielles. N-graduées, associatives et commutatives (au sens de gradué). On dit qu'une A.D.G.C. $(\mathcal{M},d)$ est minimale ou K.S.-minimale (Koszul-Sullivan) si :

1) $\mathcal{M}$ est libre en tant que A.G.C. : il existe un K-espace vectoriel $V = \bigoplus_{n\geq 1} V^n$ tel que $\mathcal{M} = \Lambda V$.

2) Il existe une base homogène $\{x_\alpha\}_{\alpha\in S}$ de V indexée par un ensemble bien ordonné S telle que dx_α appartient à l'algèbre engendrée par les x_β avec $\beta < \alpha$.

3) L'application $\alpha \to \dim x_\alpha$ est une application croissante.

I.8.- *THEOREME* ([2], [9]).-

Soit (A,d_A) une A.D.G.C. connexe. Alors il existe une A.D.G.C. minimale (M_A,δ_A) et un homomorphisme

$$(M_A,\delta_A) \xrightarrow{\rho_A} (A,d_A)$$

tel que ρ_A^* est un isomorphisme.

Si $\rho'_A : (M'_A,\delta'_A) \to (A,d_A)$ est une autre solution du problème, il existe un isomorphisme

$$\Phi : (M'_A,\delta'_A) \longrightarrow (M_A,\delta_A)$$

unique à homotopie près tel que $\rho_A \circ \Phi \sim \rho'_A$.

I.9.- *REMARQUE.*-

La restriction de d à V^1, $d : V^1 \to V^1 \otimes V^1$, par dualité, donne une application bilinéaire alternée

$$(V^1)^* \otimes (V^1)^* \xrightarrow{[\,,\,]} (V^1)^*, \quad \text{et la condition} \quad d^2 = 0$$

exprime que le crochet vérifie l'identité de Jacobi.

D'une façon analogue, la partie quadratique de la différentielle définit une application bilinéaire.

$$\mathrm{Hom}(V^i,Q) \otimes \mathrm{Hom}(V^j,Q) \xrightarrow{[\,,\,]} \mathrm{Hom}(V^{i+j-1},Q).$$

Il suffit de la définir sur les générateurs.

Soient $\{\bar{x}_i\}$, $\{\bar{y}_j\}$, $\{\bar{z}_t\}$ un système de générateurs de $\mathrm{Hom}(V^i,Q)$, $\mathrm{Hom}(V^j,Q)$ et $\mathrm{Hom}(V^{i+j-1},Q)$ et $\{x_i\}$, $\{y_j\}$, $\{z_k\}$ les générateurs duaux. Soit $dz_k = \sum_{\alpha,\beta} a_s^{\alpha,\beta} x_\alpha \wedge y_\beta + F$ où F ne contient pas les produits des couples de dimension i et j ; on définit

$$<<[\bar{x}_\mu,\bar{y}_\nu],z_s>> = \sum_{\alpha,\beta} a_s^{\alpha,\beta} <<\bar{x}_\mu,x_\alpha>> <<\bar{y}_\nu,y_\beta>>$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} a_s^{\alpha,\beta}\, \delta_{\mu,\alpha}\, \delta_{\nu,\beta} = a_s^{\mu,\nu}$$

donc $[\bar{x}_\mu,\bar{y}_\nu] = \sum a_s^{\mu,\nu} \bar{z}_s$. On va vérifier que $[\,,\,]$ possède les propriétés d'un produit de Whitehead ordinaire.

Soient $\bar{x}_1 \in (V^m)^*$, $\bar{x}_2 \in (V^n)^*$ alors $[\bar{x}_1,\bar{x}_2] = -(-1)^{(m-1)(n-1)}[\bar{x}_2,\bar{x}_1]$ est évident.

Soient $\bar{x}_3 \in (V^q)^*$, $y_i^{(3)} \in (V^{m+n-1})^*$, $y_j^{(1)} \in (V^{q+n-1})^*$, $y_s^{(2)} \in (V^{m+q-1})^*$, on a $dy_i^{(3)} = p_i^{1,2} x_1 \wedge x_2 + f_i$, où f_i ne contient pas de terme multiple de $x_1 \wedge x_2$, donc $<<[\bar{x}_1,\bar{x}_2],y_i^{(3)}>> = p_i^{1,2}$.

$dy_j^{(1)} = r_j^{2,3}\ x_2 \wedge x_3 + y_j$ où y_j ne contient pas des multiples de $x_2 \wedge x_3$

et on a $<<[\bar{x}_2,\bar{x}_3], y_j^{(1)}>> = r_j^{2,3}$.

$dy_s^{(2)} = q_s^{3,1}\ x_3 \wedge x_1 + h_s$ où h_s ne contient pas des termes multiples de $x_3 \wedge x_1$ et où $<<[\bar{x}_3,\bar{x}_1], y_s^{(2)}>> = q_s^{3,s}$.

Soit z_α un générateur de degré $m + n + q - 2$

$$dz_\alpha = \sum_i a_\alpha^i y^{(3)} \wedge x_3 + \sum_j b_\alpha^j y_j^{(1)} \wedge x_1 + \sum_s c_\alpha^s y^{(2)} \wedge x_2 + R.$$

R est la somme de termes dont dR ne contient pas les multiples de $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$. On a

$$0 = d^2 z = \sum_i a_\alpha^i p^{1,2} x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 + \sum_j b_\alpha^j r^{2,3} x_2 \wedge x_3 \wedge x_1 + \sum_s c_\alpha^s q_s^{3,1} x_3 \wedge x_1 \wedge x_2$$

$$+ \sum_i a_\alpha^i f_i \wedge x_3 + \sum_j b_\alpha^j y_j \wedge x_1 + \sum_s c_\alpha^s h_s \wedge x_2$$

$$+ \sum_i a_\alpha^i y_i^{(3)} \wedge dx_3 + \sum_j b_\alpha^j y_j^{(1)} \wedge dx_1 + \sum_s c_\alpha^s y_s^{(2)} \wedge dx_2 + dR$$

$$= \{\sum_i a^i p^{1,2} + (-1)^{mn+mq} \sum_j b_\alpha^j r^{2,3} + (-1)^{qn+mq} \sum_s c_\alpha^s q^{3,1}\} x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 + \dots$$

Par conséquent $\sum_i a_\alpha^i p_i^{1,2} + (-1)^{mn+mq} \sum_j b_\alpha^j r_j^{2,3} + (-1)^{qn+mq} \sum_s c_\sigma^s q_s^{3,1} = 0.$

On a $[[\bar{x}_1,\bar{x}_2],\bar{x}_3] = \sum_\alpha (\sum_i a_\alpha^i p_i^{1,2}) \bar{z}_\alpha$,

$$[[\bar{x}_2,\bar{x}_3],\bar{x}_1] = \sum_\alpha (\sum_j b_\alpha^j r_j^{2,3}) \bar{z}_\alpha ,$$

$$[[\bar{x}_3,\bar{x}_1],\bar{x}_2] = \sum_\alpha (\sum_s c_\alpha^r q^{3,1}) \bar{z}_\alpha ,$$

d'où l'identité de Jacobi.

I.10.- THEORIE DE SULLIVAN.

Soit X un espace topologique connexe nilpotent, $C_*(X,\mathbb{Q})$ l'ensemble simplicial des chaînes rationnelles sur X.

Δ_p^q l'espace vectoriel de q-formes polynomiales à coefficients rationnels sur l'espace $\Delta_p = \{(t_o,\dots,t_p) \in \mathbb{Q}^{p+1} | \Sigma t_i = 1\}$.

Δ_p^* est une A.D.G.C. avec la différentielle extérieur.

Δ_*^q est l'espace vectoriel simplicial des q-formes rationnelles sur l'ensemble simplicial Δ_*.

Une P.L. forme rationnelle de degré q sur X est une application simpliciale $\omega : C_*(X,\mathbb{Q}) \to \Delta_*^q$ qui à tout r-simplexe σ associe une q-forme ω_σ sur Δ_r.

Notons $A_{PL}^q(X)$ cet espace de ces P.L. formes. Avec le produit extérieur $(\omega \wedge \omega')_\sigma = \omega_\sigma \wedge \omega'_\sigma$ et la différentielle extérieure $(d\omega)_\sigma = d_{DR}\omega_\sigma$, $A_{PL}^*(X)$ devient une Q-A.D.G.C.

L'intégration fournit une application d'espaces vectoriels différentiels gradués $A_{PL}^*(X) \to C^*(X,\mathbb{Q})$ induisant un isomorphisme d'algèbres graduées

$$H^*(A_{PL}^*(X),d) \xrightarrow{\sim} H^*(X,\mathbb{Q}).$$

<u>Réciproquement</u>, étant donné une k-A.D.G.C (k désigne un corps de caractéristique zéro), A , on associe à cette algèbre un ensemble simplicial $\langle A\rangle$ et on démontre l'existence d'un homomorphisme d'A.D.G.C. naturelle

$$A \xrightarrow{\zeta_A} A_{PL}(<A>)$$

qui induit un isomorphisme en cohomologie lorsque l'algèbre A est nilpotente. En particulier, si l'algèbre A est minimale, on démontre que (A,ζ_A) est le modèle minimal de $A^*_{PL}(<A>)$.

1.11.- Rappelons enfin le lemme de Hirsch qui donne la construction du modèle minimal et l'isomorphisme d'espaces vectoriels gradués entre $\underline{\mathrm{Hom}(V^n,Q)}$ et $\underline{\mathrm{grad}\ \pi_n(X) \otimes Q}$ qu'on va définir :

$$\text{Soit} \quad \pi_N(x) = G_1^N \supset G_2^N \supset \dots \supset G_i^N \supset G_{i+1}^N \dots \supset G_r^N \supset G_{r+1}^N = 0$$

la suite descendante centrale de $\pi_n(X)$, où G_{i+1}^N est le sous-module engendré par les éléments $h_\omega y - y = [\omega,y]$, pour tout $\omega \in \pi_1(x)$ et tout $y \in G_i^N$. $h_\omega : \pi_n(X) \to \pi_n(X)$ est l'opération canonique de $\pi_1(X)$ sur $\pi_n(X)$.

Les facteurs G_i^N / G_{i+1}^N sont abéliens, même pour $N = 1$, on note $\mathrm{grad}\ \pi_n(X) \otimes Q = \bigoplus_i G_i^N / G_{i+1}^N \otimes \mathbb{Q}$.

L'espace X nilpotent et de type fini est obtenu par une suite des fibrations principales

$$K(A_\alpha,n_\alpha) \longrightarrow X_{\alpha+1} \xrightarrow{q_\alpha} X_\alpha \qquad \alpha \in I$$

induit par une application classifiante $X_\alpha \xrightarrow{k_\alpha} K(A_\alpha,n_\alpha+1)$; k_α détermine un élément de $H^{n_\alpha+1}(X_\alpha,A_\alpha) \simeq [X_\alpha,K(A_\alpha,n_\alpha+1)]$ où les A_α sont les facteurs de $\pi_{n_\alpha}(X)$.

Notons $V_\alpha = \mathrm{Hom}_Z(A_\alpha, \mathbb{Q})$ qui est isomorphe à $H^{n_\alpha}(K(A_\alpha, n_\alpha), \mathbb{Q})$.

1.12.- LEMME [4].-

La fibration $K(A_\alpha, n) \to X_{\alpha+1} \to X_\alpha$ est une fibration totalement transgressive. Il existe un isomorphisme naturel

$$\sigma : H^n(K(A_\alpha, n), \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^{n+1}(K(A_\alpha, n+1), \mathbb{Q}),$$

d'espace vectoriel, tel que l'application composé

$$[\tau] : H^n(K(A\ , n), \mathbb{Q}) \underset{\sim}{\xrightarrow{\sigma}} H^{n+1}(K(A_\alpha, n+1), Q) \xrightarrow{k_\alpha^*} H^{n+1}(X_\alpha, \mathbb{Q})$$

soit la transgression.

1.13.- LEMME [4].-

On a le modèle minimal de $X_{\alpha+1}$ avec une différentielle d et un quasi-isomorphisme ρ'

$$\mathcal{M}_{\alpha+1} = \mathcal{M}_\alpha \otimes \Lambda(V_\alpha) \xrightarrow{\rho'} A_{PL}(X_{\alpha+1})$$

où A_{PL} est le foncteur de de Rham simplicial et $\mathcal{M}_\alpha$ est le modèle minimal de X_α.

Soit $\{x_i\}$ une base de l'espace vectoriel V_α, il existe une forme $\tilde{\alpha}_i \in A_{PL}(X_{\alpha+1})$ dont la restriction à la fibre est une forme fermée représentant x_i et il existe une forme $\beta_i \in A_{PL}(X_\alpha)$ telle que $d\tilde{\alpha}_i = A_{PL}(q_\alpha)(\beta_i)$. $\zeta : \mathcal{M}_\alpha \to A_{PL}(X_\alpha)$ étant un quasi-isomorphisme, on peut choisir $\bar{a}_i$ en cohomologie tel que $\beta_i = \zeta(a_i)$. Alors, on définit

$$dx_i = \alpha_i \quad , \qquad \rho'(x_i) = \tilde{\alpha}_i \; , \qquad \tau(x_i) = [\beta_i] \; ,$$

on définit la dualité entre V_α et A_α en posant :

$$\langle\langle x,f\rangle\rangle = \langle x,h(f)\rangle \quad \text{où}$$

$$\langle \, , \, \rangle = H^n(K(A_\alpha,n),\mathbb{Q}) \times H_n(K(A_\alpha,m),\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$$

est la dualité de Krönecker. Cette dualité s'étend par linéarité à V^n et $\pi_n(X) \otimes \mathbb{Q}$ et on a l'isomorphisme

$$\Psi : \qquad \pi_n(x) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{Hom}(V^n,\mathbb{Q}).$$

CHAPITRE II

STRUCTURE DE $\mathrm{grad}(\pi_1(X)) \otimes \mathbb{Q}$*-module sur* $\mathrm{grad}(\pi_*(X)) \otimes \mathbb{Q}$.

II.1.- PROPOSITION.- Le produit de Whitehead

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(X) & \times & \pi_n(X) & \to & \pi_n(X) \\ (\alpha & , & f) & \to & [\alpha, f] \end{array}$$

induit une application

$$G^1_i/G^1_{i+1} \times G^n_j/G^n_{j+1} \to G^n_{i+j}/G^n_{i+j+1} .$$

Démonstration :

On démontre cette proposition par récurrence sur i :

Pour $i = 1$, soient α et $\omega \in G^1_1$ et $f \in G^n_j$, on a $[\omega, f] \in G^n_{j+1}$ et $[\alpha, \omega] \in G^1_2$. Par l'identité de Jacobi habituelle de $\pi_*(X)$ nous avons :

$$[[\alpha,\omega], f] = \pm [[\omega, f], \alpha] + [[f,\alpha],\omega].$$

Les deux éléments du côté droit appartiennent à G^n_{j+2} donc

$[[\alpha,\omega],f] \in G^n_{j+2}$ et l'application est bien définie pour $i = 1$.

Supposons que c'est vrai pour $i-1$

$$G^1_{i-1}/G^1_i \times G^n_j/G^n_{j+1} \rightarrow G^n_{i+j-1}/G^n_{i+j}$$

et démontrons pour i.

Soient $\alpha \in G^1_1$, $\omega \in G^1_i$ et $f \in G^n_j$, on a $[\omega,f] \in G^n_{i+j}$,

par hypothèse de récurrence dans l'identité de Jacobi

$$[[\alpha,\omega],f] = \pm [[\omega,f],\alpha] \pm [[f,\alpha],\omega].$$

Les éléments du côte droit appartiennent à G^n_{i+j+1} d'où le résultat. □

II.3.- <u>PROPOSITION</u>.-

Il existe une structure d'algèbre de Lie graduée sur

$$S^{-1} \bigoplus_{i \geq 1} (\pi_i(X)) \otimes \mathbb{Q}$$

($|s^{-1}\alpha| = |\alpha| - 1$), $|\alpha|$ = degré de α

avec le crochet de Samelson

$$\{s^{-1}\alpha, s^{-1}\beta\} = (-1)^{|\alpha|-1} s^{-1}[\alpha,\beta].$$

CHAPITRE III

ETUDE DANS LE CAS UNIVERSEL DE L'ESPACE $S^1 \vee S^n$.

$S^1 \vee S^n$ n'est pas un espace nilpotent, car $\pi_n(S^1 \vee S^n)$ n'est pas de dimension finie.

Construisons le n-ième étage tronqué de la tour de Postnikov de cet espace.

III.1.- Notons $T_o = S^1 \times S^n$ et construisons l'espace T_1, image réciproque du fibré universel de base $K(\mathbb{Q},n+1)$ et l'application classifiante $\alpha_o \in [S^1 \times S^n, K(\mathbb{Q},n+1)]$ correspondant à la classe fondamentale de $H^{n+1}(S^1 \times S^n,\mathbb{Q})$.

Soient $\omega \in \pi_1(S^1 \times S^n)$ et $f_o \in \pi_n(S^1 \times S^n)$. La fibration principale

$$K(\mathbb{Q},n) \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_o$$

est une fibration totalement transgressive et on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & & K(\mathbb{Q},n) \arrow[r] \arrow[d] & K(\mathbb{Q},n) \arrow[d] \\
S^n \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr] & & S^1 \vee S^n \arrow[r, "\omega' \vee f'_o"'] \arrow[dr, "\omega \vee f_o"'] & T_1 \arrow[r] \arrow[d] & PK(\mathbb{Q},n+1) \arrow[d] \\
 & E^{n+1} \arrow[rr, "\tilde{\pi}"'] & & S^1 \times S^n \arrow[r, "\alpha_o"] & K(\mathbb{Q},n+1)
\end{tikzcd}$$

π désigne le produit de Whitehead universel. ω et f_o se relèvent en ω' et f'_o. $[\omega, f_o]$ est la classe d'homotopie nulle dans T_o et $[\omega', f'_o]$ représente un élément de $\pi_n(T_1)$.

LEMME III.1.-

La classe de $f_1 = [\omega', f'_o]$ est non nulle dans T_1.

Démonstration :

Supposons que $[\omega', f'_o] \sim 0$ dans T_1, donc elle se factorise à travers T_o : il existe une application $s : T_o \to T_1$ tel que $s \circ (\omega \vee f_o) = \omega' \vee f'_o$.

On a $p_1 \circ s \circ (\omega \vee f_o) = \omega \vee f_o$, c'est-à-dire que s est une section. Donc la fibration $T_1 \to T_o$ est triviale. Par conséquent, α_o est homotope à zéro, ce qui est absurde.

LEMME III.2.-

La classe de $[\omega', f_1]$ est nulle dans T_1.

Démonstration :

La suite exacte d'homotopie de la fibration

$$K(\mathbb{Q},n) \xrightarrow{J} T_1 \xrightarrow{p_1} T_o$$

est une suite exacte de $\pi_1(T_1)$-modules (cf. [7]).

$$\pi_n(K(\mathbb{Q},n)) \xrightarrow{J_{\#}} \pi_n(T_1) \longrightarrow \pi_n(T_o) \longrightarrow 0$$

$f_1 \in \pi_n(T_1)$ est un élément qui provient de $\pi_n(K(Q,n))$, puisque $p_1 \# (f_1) = 0$. $\pi_1(T_1) = \pi_1(T_o)$ opère trivialement sur $\pi_n(K(\mathbb{Q},n))$ donc opère trivialement sur $\mathrm{Im}\, J_{\#}$, car la suite exacte est $\pi_1(T_1)$-module donc $[\omega, f_1] \sim 0$. □

On continue la construction de $T_p \to T_{p-1}$ en utilisant les deux lemmes III.1 et III.2 et on a $\pi_1(T_p) = \{\omega\}$ et $\pi_n(T_p) = \{f_o, f_1, \ldots, f_p\}$ avec $f_p = [\omega, f_{p-1}]$ et f_p nul dans T_{p-1}. Le modèle minimal de T_o est $\{x, y, \ dx = 0, \ dy = 0\}$ et le modèle minimal de T_1 est $\{x, y, t_1, dx = 0, \ dy = 0, \ dt_1 = xy\}$, d'après le lemme I.14, on a $\tau(t_1^*) = x^* xy^*$ où

$$\tau : H^n(K(\mathbb{Q},n),Q) \xrightarrow{\sigma} H^{n+1}(K(\mathbb{Q},n+1),\mathbb{Q}) \xrightarrow{\alpha_o^*} H^{n+1}(S^1 \times S^n,\mathbb{Q})$$

σ <u>est la transgression</u> dans la fibration standard qui correspond <u>au connectant de la suite exacte</u> d'homotopie de cette fibration.

<u>*LEMME*</u> *III.3.-*

On a $\langle\langle t_1,\tilde{f}_1\rangle\rangle = (-1)^n$ ou $J_\#(\tilde{f}_1) = f_1 = [\omega',f_o']$.

<u>*Démonstration*</u> :

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & K(\mathbb{Q},n) \arrow[r] \arrow[d] & K(\mathbb{Q},n) \arrow[d] \\
S^n \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr] & S^1 \vee S^n \arrow[r, "\omega' \vee f_o'"'] \arrow[dr, "\omega \vee f_o"] & T_1 \arrow[r] \arrow[d, "p_1"] & PK(\mathbb{Q},n+1) \arrow[d] \\
 & E^{n+1} \arrow[r, "\tilde{\pi}"'] & S^1 \times S^n \arrow[r, "\alpha_o"] & K(\mathbb{Q},n+1)
\end{tikzcd}$$

La classe de $p_1 \circ [\omega',f_o'] = [\omega,f_o]$ est nul dans $S^1 \times S^n$, et, par conséquent homotope à une application constante.

Donc on peut envoyer $S^1 \vee S^n$ sur le point base de $S^1 \times S^n$ et considérer l'application suivante :

$$H_1 : (E^{n+1}, S^n) \longrightarrow (K(\mathbb{Q}, n+1), *)$$

$E^{n+1} \to K(\mathbb{Q}, n+1)$ est la composée $\alpha_o \circ \tilde{\pi}$ où $\tilde{\pi}$ est une application qui envoie S^n le bord de E^{n+1} sur le point base de $S^1 \times S^n$ et envoie l'intérieur d'une façon identique.

L'application H_1 définit la classe fondamentale de $\pi_{n+1}(K(\mathbb{Q}, n+1))$.

Dans la suite exacte d'homotopie de la fibration standard

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_i(K(\mathbb{Q},n)) & \longrightarrow & \pi_i(PK(\mathbb{Q},n+1)) & \longrightarrow & \pi_i(PK(\mathbb{Q},n+1), K(\mathbb{Q},n)) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{i-1}(K(\mathbb{Q},n)) \\
\Vert & & \Vert & & \downarrow & & \Vert \\
\pi_i(K(\mathbb{Q},n)) & \longrightarrow & \pi_i(PK(\mathbb{Q},n+1)) & \longrightarrow & \pi_i(K(\mathbb{Q},n+1)) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{i-1}(K(\mathbb{Q},n)
\end{array}$$

L'application connectant envoie H_1 sur la classe de $\tilde{f}_1$, élément de $\pi_n(K(\mathbb{Q},n))$, donc la classe de $\tilde{f}_1$ est la classe fondamentale de $\pi_n(K(\mathbb{Q},n))$.

Par conséquent, on a $\tau_*(x_* xy_*) = h([\tilde{f}_1])$ où τ_* est la transgression en homologie et $x_* xy_*$ est la classe fondamentale de $H_{n+1}(S^1 \times S^n, Q)$.

On a

$$\begin{aligned}
\langle\langle t_1, \tilde{f}_1 \rangle\rangle &= \langle t_1^*, h(\tilde{f}_1)\rangle \\
&= \langle t_1^*, \tau_*(x_* xy_*)\rangle \\
&= \langle \tau t_1^*, x_* xy_*\rangle \\
&= \langle x^* xy^*, x_* xy_*\rangle \\
&= (-1)^n
\end{aligned}$$

d'où le lemme. □

LEMME III.4.-

On a $<<t_i,\tilde{f}_1>> = 0$, $i > 1$ et $<<y,\tilde{f}_1>> = 0$.

Démonstration :

t_i est le nouveau générateur de $\mathcal{M}(T_i) = \mathcal{M}(T_{i-1}) \otimes \Lambda t_i$ qui provient de la fibre de T_i et f_1 ne se relève pas à cette fibre (cf. Lemme III.2).

De même, y ne provient pas de la fibre de T_1. □

CHAPITRE IV

DEMONSTRATION DU THEOREME

Soit $\mathcal{M}$ le modèle minimal de X. $\mathcal{M} = \Lambda V$.
Il existe une base homogène $\{v_\alpha\}_{\alpha\in S}$ de V indexée par un ensemble bien ordonné S tel que dv_α appartient à l'algèbre engendrée par v_β avec $\beta < \alpha$.

Notons $\{v_\alpha^n\}_{\alpha\in S}$ le système de générateurs donné où n désigne le degré des générateurs.

Le théorème énoncé dans l'introduction est équivalent au théorème suivant par dualité.

$\mathrm{Hom}\ \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q},\mathbb{Q})$ est un espace vectoriel gradué avec la graduation, des degrés des groupes d'homotopie et $V = \bigoplus_{n>1} V^n$ est un espace vectoriel gradué avec les degrés des générateurs.

THEOREME 1.-

Le diagramme suivant commute dans la catégorie des espaces gradués.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "d_2"] \arrow[dd] & & V \otimes V \arrow[d, "\Psi \otimes \Psi"] \\
& & \mathrm{Hom}(\pi_*(X)\otimes\mathbb{Q},\mathbb{Q})\otimes\mathrm{Hom}(\pi_*(X)\otimes\mathbb{Q},\mathbb{Q}) \arrow[d, "\Phi"] \\
\mathrm{Hom}(\pi_*(X)\otimes\mathbb{Q},\mathbb{Q}) \arrow[rr] & & \mathrm{Hom}(\pi_*(X)\otimes\mathbb{Q}\otimes\pi_*(X)\otimes\mathbb{Q},\mathbb{Q})
\end{tikzcd}$$

Dans l'énoncé du théorème 1, l'application d_2 est la partie quadratique de la différentielle d.

On note $V \otimes V$, l'algèbre symétrique, qui est isomorphe, en tant qu'espace vectoriel gradué à la sous-algèbre de $\mathcal{M}$ engendrée par les mots de longueur deux : $F^2(\mathcal{M}) / F^3(\mathcal{M})$ où $F^p(\mathcal{M})$ désigne l'idéal de $\mathcal{M} = \Lambda V$ engendré par les mots en V de longueur supérieure ou égale à p.

Φ est l'isomorphisme canonique définit par

$$\Phi(f \vee g)(v \vee w) = \begin{cases} (-1)^{pq} f(v)g(w)+g(v)f(w) & \text{si } (p,q) = (m,n) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$f \in \mathrm{Hom}(\pi_p(X) \otimes \mathbb{Q},\mathbb{Q})$ $\quad$ $g \in \mathrm{Hom}(\pi_q(X) \otimes \mathbb{Q},\mathbb{Q})$

$v \in \pi_m(X) \otimes \mathbb{Q}$ $\quad$ $w \in \pi_n(X) \otimes \mathbb{Q}$.

Démonstration :

Soient $f_1 \in \operatorname{grad} \pi_1(X) \otimes \mathbb{Q}$ et $f_2 \in \operatorname{grad} \pi_n(X) \otimes \mathbb{Q}$ et v_γ un générateur de degré n. On démontre que

$$\Phi(\Psi \otimes \Psi)(d_2 v_\gamma)(f_1 \otimes f_2) = \langle\langle v_\gamma, [f_1, f_2] \rangle\rangle \ . \qquad (1)$$

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
S_1 \arrow[dr] \arrow[drrr, bend left, "f_1"] & & & \\
& S^1 \vee S^n \arrow[rr, "f_1 \vee f_2"] & & X \\
S^n \arrow[ur] \arrow[urrr, bend right, "f_2"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Il suffit de construire Θ tel que le diagramme

(I)
$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{M}_{S^1} & & \\
& S^1 \vee S^n \arrow[ul] \arrow[dl] & \mathfrak{M} \arrow[l, "\Theta"'] \arrow[ull, bend right, "F_1"'] \arrow[dll, bend left, "F_2"] \\
\mathfrak{M}_{S^n} & &
\end{tikzcd}$$
commute

où F_1 et F_2 sont les morphismes au niveau des modèles associés à f_1 et f_2.

CONSTRUCTION DE θ :

Soit $I(\mathcal{M}_{S^1 \vee S^n})^{\leqslant n}$ l'espace vectoriel des générateurs de degré n. On remarque que $I(\mathcal{M}_{S^1 \vee S^n})^1$ est engendré par e_1 tel que $de_1 = 0$ et $I(\mathcal{M}_{S^1 \vee S^n})^{\alpha} = 0$, pour $1 < \alpha < n$ et $I(\mathcal{M}_{S^1 \vee S^n})^n$ est engendré par $\Sigma = \{e_n, t_1, \ldots, t_p, \ldots\}$ avec $de_n = 0$, $dt_p = e_1 t_{p-1} \ldots$

1°) On définit $\Theta : V^1 \to I(\mathcal{M}_{S^1 \vee S^n})^1$.

Par $\Theta(v^1) = a_{\alpha} e_1$ avec $a_{\alpha} = \langle\langle v^1, f_1 \rangle\rangle$.

Pour v^q_{β}, $1 < q < n$ $\Theta(v^q) = 0$.

On construit Θ par récurrence. Supposons que l'on a construit $(\Theta_{\beta})_{\beta \leqslant \alpha}$, $\beta \in S$, l'ensemble d'indice de base de V.

Pour définir $\Theta_{\alpha+1}(v^n_{\alpha+1})$, on remarque qu'il faut avoir $d(\Theta_{\alpha+1}(v^n_{\alpha+1})) = \Theta_{\alpha}(dv^n_{\alpha+1})$.

On a

$$dv^n_{\alpha+1} = \sum_{\beta \leqslant \gamma \leqslant \alpha} c_{\gamma\beta}\, v^1_{\gamma}\, v^n_{\beta} + \sum_{\substack{r,s \neq (1,n) \\ \gamma, \beta \leqslant \alpha}} c_{\gamma\beta}\, v^r_{\gamma}\, v^s_{\beta}$$

$$\Theta_{\alpha}(dv^n_{\alpha+1}) = \sum_{\gamma,\beta} c_{\gamma\beta}\, \Theta_{\alpha}(v^1)\Theta_{\alpha}(v^n_{\beta}).$$

D'autre part, $\Theta_{\alpha+1}$ peut s'exprimer comme suit :

$$\Theta_{\alpha+1}(v^n_{\alpha+1}) = \sum_{i=1}^{p} a^i_{\alpha+1}\, t_i + a^o_{\alpha+1}\, e_n .$$

$\Theta_{\alpha+1}$ est parfaitement déterminé si on connait les $a^i_{\alpha+1}$ et $a^o_{\alpha+1}$.

Or $d\Theta_{\alpha+1}(v^n_{\alpha+1}) = \sum_{i=1}^{p} a^i_{\alpha+1}\, e_1\, t_{i-1}$ et on a

$$\Theta_\alpha(v^1_\gamma) = \langle\langle v'_\gamma, f_1\rangle\rangle e_1 \qquad \Theta_\alpha(v^n_\beta) = \sum_i a^i_\beta\, t_i + a^o_\beta\, e_n$$

donc $\Theta_\alpha(dv^n_{\alpha+1}) = \sum_i \sum_{\alpha,\beta<\alpha} c_{\gamma,\beta}\, a^i_\beta \langle\langle v^1_\gamma, f_1\rangle\rangle e_1\, t_i$

$$+ \sum_{\gamma,\beta<\alpha} c_{\gamma,\beta}\, a^o_\beta \langle\langle v^1_\gamma, f_1\rangle\rangle e_1 . e_n$$

$$= d\Theta_{\alpha+1}(v^n_{\alpha+1}) = \sum_{i=1}^{p} a^i_{\alpha+1}\, e\, t_{i-1}$$

d'où $a^i_{\alpha+1} = \sum_{\gamma,\beta<\alpha} c_{\gamma,\beta}\, a^{i-1}_\beta \langle\langle v^1_\gamma, f_1\rangle\rangle$.

Pour que le diagramme I commute, on définit

$$a^o_{\alpha+1} = \langle\langle v^n_{\alpha+1}, f_2\rangle\rangle .$$

Ainsi $\Theta_{\alpha+1}$ est bien défini.

2°) Θ étant un morphisme d'algèbre. On a l'écriture de $\Theta(v_\gamma)$ en somme fini pour v de degré n :

$$\Theta(v_\gamma) = a_o e_n + a_1 t_1 + \sum_{i>1} a_i t_i$$

$$dv_\gamma = \sum_{\alpha,\beta<\gamma} K^{1,n}_{\alpha,\beta}\, v^1_\alpha v^n_\beta + \sum_{\substack{\alpha,\beta<\gamma \\ (i,j)\neq(1,n)}} K^{i,j}_{\alpha,\beta}\, v^i_\alpha\, v^j_\beta + F.$$

Calculons le côte gauche de l'égalité (1)

$$\Phi(\Psi\otimes\Psi)(d_2(v_\gamma))(f_1\otimes f_2) = \sum_{\alpha,\beta} K^{1,n}_{\alpha,\beta}\left[(-1)^n \langle\langle v^1_\alpha, f_1\rangle\rangle\langle\langle v^n_\beta, f_2\rangle\rangle + \langle\langle v^n_\beta, f_1\rangle\rangle\langle\langle v^1_\alpha, f_2\rangle\rangle\right]. \qquad (2)$$

On remarque que

$$\Phi(\Psi(v^i_\alpha) \otimes \Psi(v^j_\beta)(f_1\otimes f_2) = 0 \qquad (i,j) \neq (1,n).$$

Notons $v(A^{\alpha,\beta}_{1,n})$ l'expression du côte droit de l'égalité (2) où $A^{\alpha,\beta}_{1,n}$ est la matrice

$$\begin{pmatrix} \langle\langle v^1_\alpha, f_1\rangle\rangle & \langle\langle v^1_\alpha, f_2\rangle\rangle \\ \langle\langle v^n_\beta, f_1\rangle\rangle & \langle\langle v^n_\beta, f_2\rangle\rangle \end{pmatrix}$$

on a donc

$$\Phi(\Psi \otimes \Psi)(d_2 v_\gamma)(f_1\otimes f_2) = \sum_{\alpha,\beta} K^{1,n}_{\alpha,\beta} v(A^{\alpha,\beta}_{1,n}) \qquad (3)$$

Donc pour avoir l'égalité (1), il faut démontrer que

$$<<v_\gamma, [f_1, f_2]>> = \sum_{\alpha,\beta<\gamma} K^{1,n}_{\alpha,\beta} \, v(A^{\alpha,\beta}_{1,n}) \ . \tag{4}$$

On remarque que $[f_1, f_2] = (f_1 \vee f_2) \circ [i_1, i_n]$.

Ici $f_1 \in \pi_1(X)$ et $f_2 \in \pi_n(X)$, $[i_1, i_n]$ le produit de Whitehead universel.

Donc l'égalité (4) est équivalente à

$$<<\Theta v_\gamma, [i_1, i_n]>> = \sum_{\alpha,\beta<\gamma} K^{1,n}_{\alpha,\beta} \, v(A^{\alpha,\beta}_{1,n}) \tag{5}$$

3°) On se propose d'tablir l'égalité (5)

$$\Theta v = a_o e_n + a_1 t_1 + \sum_{i>1} a_i t_i$$

$$<<\Theta v_\gamma, [i_1, i_n]>> = a_o <<e_n, [i_1, i_n]>> + a_1 <<t_1, [i_1, i_n]>> + \sum_{i>1} a_\alpha <<t_\alpha, [i_1, i_n]>>.$$

D'après les lemmes III.3 et III.4, on a

$$<<\Theta v_\gamma, [i_1, i_n]>> = (-1)^n a_1 .$$

On va calculer le coefficient a_1 dans les expressions

$$d\Theta v_\gamma = \Theta d v_\gamma$$

$$d\Theta v_\gamma = a_1 e_1 e_n + \sum_{i>1} a_i e_1 t_{i-1}$$

$$\Theta dv = \sum_{\alpha,\beta<\gamma} K^{1,n}_{\alpha,\beta} \, \Theta(v^1_\alpha) \, \Theta(v^n_\beta) + \sum_{\substack{\alpha,\beta<\gamma \\ (i,j)\neq(1,n)}} K^{i,j}_{\alpha,\beta} \, \Theta(v^i_\alpha) \, \Theta(v^j_\beta) + \Theta(F).$$

<u>Les seuls termes</u> qui risquent de contenir le générateur $e_1 e_n$ est $\sum_{\alpha,\beta<\gamma} K^{1,n}_{\alpha,\beta}\, \Theta(v^1_\alpha)\, \Theta(v^n_\beta)$.

Le diagramme I étant commutatif, on a

$$\Theta(v^1_\alpha) = \langle\langle v^1, f_1\rangle\rangle e_1$$

$$\Theta(v^n_\beta) = \langle\langle v^n, f_2\rangle\rangle e_n$$

donc $a_1 = \sum_{\alpha,\beta<\gamma} K^{1,n}_{\alpha,\beta} \langle\langle v^1, f_1\rangle\rangle \langle\langle v^n, f_2\rangle\rangle$

et, par conséquent

$$(-1)^n a_1 = \sum_{\alpha,\beta<\gamma} K^{1,n}_{\alpha,\beta}\, v(A^{\alpha,\beta}_{1,n})$$

$$= \langle\langle \Theta v_\gamma, [i_1, i_n]\rangle\rangle = \langle\langle v_\gamma\, ,\ [f_1, f_2]\rangle\rangle.$$

En comparant avec l'égalité (3), on a la commutativité de diagramme du théorème 1 :

$$\Phi(\Psi\otimes\Psi)(d_2 v_\gamma)(f_1\otimes f_2) = \langle\langle v_\gamma, [f_1, f_2]\rangle\rangle \qquad \text{c.q.f.d.}$$

R E F E R E N C E S

----

[1] DELIGNE P., GRIFFITHS P., MORGAN J., SULLIVAN D.,
Real homotopy theory of Kähler manifolds,
Inventions. Math. 29, 245-274 (1975).

[2] HALPERIN S., Lectures on Minimal Models,
Publication Interne de l'U.E.R. de Mathématiques
Pures et Appliquées, N° 111.

[3] LAZARD M., Sur les groupes nilpotents et les anneaux de Lie,
Ann. Ec. Norm. Sup. 71 (1954), 101-190.

[4] LEHMANN D., Théorie homotopique des formes différentielles
(d'après D. Sullivan), Astérisque N° 45 (1977).

[5] MEYER J.P., Whitehead products and Postnikov systems.

[6] NEISENDORFER J., Lie algebras, coalgebra and rational homotopy
theory for nilpotent spaces,
Pacific Journal of Mathematics, Vol. 71 (1978).

[7] POSTNIKOV M.M., Localization of topological spaces,
Russian Math. Surveys 32 : 6 (1977), 121-184,

[8] QUILLEN D., On the associated graded ring of a group ring ;
Journal of algebra 10 (1964), 111-118.

[9] SULLIVAN D., Infinitesimal computations,
I.H.E.S. 47(1977).

[10] ANDREWS P., ARKOWITZ M., Sullivan's minimal models and higher order
Whitehead products. Can. J. Maths XXX - N° 5 (1978),
961-982.

.../...

[10] FELIX Y., Classification homotopique des espaces rationnels à cohomologie donnée, Louvain-la-Neuve, Thèse (1979).

[11] THOMAS J.C., Homotopie rationnelle des fibrés de Serre, Thèse n° 473, Univ. Sciences et Techniques de Lille I, (1980).

[12] TANRÉ D., Modèles de Chen, Quillen, Sullivan et applications aux fibrations de Serre, Thèse n° 535, Univ. Sciences et Techniques de Lille I, (1982).

[13] CENKL B., et PORTER R., Malcev's completion of a group and differential forms, J. Differential geometry : 15 (1980), 531-542,

[14] CENKL B., et PORTER R., Differential forms and torsion in the fundamental group : Advances in Mathematics 48 (1983), 189-204.

RÉSUMÉ

La théorie de Sullivan affirme l'existence d'une équivalence entre la catégorie homotopique T_Q des espaces rationnelles et la catégorie homotopique $(M\text{-ADGC})_Q$ des Q-algèbres différentielles graduée commutatives (modèles minimaux)

$$T_Q \longleftrightarrow (M\text{-ADGC})_Q.$$

Dans ce travail, nous démontrons que le produit de Whitehead se lit par la partie quadratique de la différentielle de $\mathcal{M}_{X_Q}$ et plus précisément : il existe un isomorphisme entre l'algèbre de Lie graduée V^* (dual des générateurs indécomposables de $\mathcal{M}_{X_Q}$ induit par d) et l'algèbre de Lie $\pi_*(X_Q)$ induit par le produit de Whitehead.

<u>MOTS CLÉS</u> : *Modèle minimal, homotopie rationnelle, algèbre de Lie, espace nilpotent, produit de Whitehead.*