

50376
1984
177

50376
4984.
477.

N° d'ordre : 1196

THÈSE
présentée à
L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE
pour obtenir
LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE
Spécialité : MATHÉMATIQUES PURES

par

Carlos Filipe MONIZ-RIBEIRO



SUR LA κ -THÉORIE RÉELLE DE CERTAINS H-ESPACES

Membres du Jury : LEHMANN D., Président, UNIVERSITÉ DE LILLE I

MAHAMMED N., Rapporteur et Directeur de Recherche, UNIVERSITÉ DE LILLE I

GERGONDEY R., UNIVERSITÉ DE LILLE I

HUBBUCK J.R., UNIVERSITÉ D'ABERDEEN (Grande-Bretagne)

SUTER U., UNIVERSITÉ DE NEUCHATEL (Suisse)

} Examineurs

Soutenu le 2 octobre 1984

A ma Mère, à mon Père

à Joëlle

et à Isabelle

... et à tous mes amis

Je remercie Monsieur le Professeur D. LEHMANN d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse.

Monsieur N. MAHAMMED m'a initié à la K -théorie, ses remarques fructueuses m'ont beaucoup aidé lors de la rédaction de ce travail, qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude.

Je remercie Monsieur R. GERGONDEY d'avoir accepté de participer au jury.

Je remercie vivement Messieurs les Professeurs J.R. HUBBUCK, de l'Université d'ABERDEEN (Grande-Bretagne) et U. SUTTER, de l'Université de NEUCHATEL (Suisse) de s'être déplacés. Par leur présence, dans le jury de cette thèse, ils me font un grand honneur.

Madame R. BÉRAT a dactylographié ce travail avec soin et patience, je la remercie chaleureusement, ainsi que les services de l'imprimerie de l'U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées de l'Université de LILLE I.

INTRODUCTION

Dans ce travail, on s'intéresse au calcul des groupes de K-théorie réelle des H-espaces finis, simplement connexes, engendré par les éléments primitifs, de rang 2 et, dans le cas sans torsion, de rang 3. Pour ces cas, la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch et la suite exacte de Bott reliant la K-théorie complexe à la K-théorie réelle nous permet de décrire la structure additive de KO^* . L'étude des opérations d'Adams sur $KO(X)$ lorsque X est un H-espace de type (3,5,7) nous donne certains renseignements sur l'application d'attachement de la cellule de dimension 12 dans le cas où X est une $SU(3)$ -fibration principale de base S^7 .

En utilisant toujours les mêmes techniques et en connaissant peu de différentielles de la suite spectrale, on étudie le cas plus général des H-espaces sans torsion de même type que le groupe de Lie $SU(n)$. Aussi, on calcule le groupe $KO(F_4)$ où F_4 est le groupe de Lie exceptionnel de rang 4.

D'autre part, on vérifie que le groupe $KO(X)$ ne contient pas d'éléments primitifs lorsque X est l'un des H-espaces précités. Par contre, lorsque X est l'un des espaces projectifs $PR(3)$ ou $PR(7)$, l'étude de l'existence d'éléments primitifs dans $KO(X)$ nous amène à nous servir de la construction du plan projectif associé à un H-espace. Nous montrons alors que $K\mathbb{F}(PR(3))$ ($\mathbb{F} = \mathbb{U}$ ou 0) ne possède pas des éléments primitifs, mais l'élément d'ordre 2 de $K\mathbb{F}(PR(7))$ est primitif. Par ailleurs, on montre de manière générale que l'existence d'éléments primitifs dans $K\mathbb{F}(PR(7))$

est indépendante de la multiplication choisi sur $PR(7)$.

Ce travail est organisé comme suit : dans le chapitre 0, nous rappelons les techniques utilisés (suite exacte de Bott, suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch). Dans le chapitre I, on étudie la K-théorie réelle des H-espaces finis de rang 2 et 3. Nous terminons ce chapitre par l'étude des opérations d'Adams sur $KO(X)$ lorsque X est un H-espace de type $(3,5,7)$. Dans le chapitre II, on étudie la K-théorie réelle des H-espaces de même type que $SU(n)$. Dans le chapitre III, on étudie la K-théorie réelle de certains H-espaces dont la cohomologie entière contient de la torsion, plus précisément, les H-espaces de type $(3,11)$ et le groupe de Lie exceptionnel F_4 . Enfin, dans le chapitre IV, on étudie l'existence d'éléments primitifs dans l'anneau $KF(PR(i))$ pour $i = 3$ et 7 ($F = U$ ou O).

P L A N

=====

CHAPITRE 0 - SUITE EXACTE DE BOTT ET SUITE SPECTRALE D'ATIYAH-HIRZEBRUCH.

- 1, 2.- L'anneau $K\mathbb{F}^*(S^0)$
- 3 - La suite spectrale de Bott
- 4 - La suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch

CHAPITRE I - LES GROUPES $\hat{K}O^{-i}(X)$ DES H-ESPACES SANS TORSION DE RANG 2 ET 3.

- 1 - Les résultats
- 2 - Le type (3,5)
- 3 - H-espaces de type (3,5,7)
- 4 - H-espaces de type (3,3,5)
- 5 - H-espaces de type (3,7)
- 6 - H-espaces de type (3,7,11)
- 7 - H-espaces de type (3,3,7)
- 8 - H-espaces de type (3,7,7)
- 9 - Opérations d'Adams sur $\hat{K}O(X)$ pour X de type (3,5,7)

CHAPITRE II - K-THEORIE REELLE DES H-ESPACES DE MEME TYPE QUE $SU(n)$.

- 1 - H-espaces de type (3,5,...,2n+1)
- 2 - H-espaces de type (3,5,7,9)

CHAPITRE III - KO -THEORIE DE CERTAINS H-ESPACES AVEC TORSION.

- 1 - H-espaces de type (3,11)
- 2 - Le groupe $\hat{K}O(F_4)$

.../...

.../...

CHAPITRE IV - EXISTENCE D'ELEMENTS PRIMITIFS DANS LA K-THEORIE
DE PR(3) ET PR(7).

- 1 - *Introduction*
- 2 - *Plan projectif associé à un H-espace*
- 3 - *Le cas PR(3)*
- 4 - *Le cas PR(7)*

REFERENCES

CHAPITRE 0

SUITE EXACTE DE BOTT ET SUITE SPECTRALE D'ATIYAH-HIRZEBRUCH

Rappelons quelques propriétés élémentaires de la K-théorie topologique des CW-complexes finis.

0.1. - L'anneau $\tilde{K}U^*(\mathbb{S}^0)$.

On a $\tilde{K}U^{-1}(\mathbb{S}^0) = 0$ et $\tilde{K}U^{-2}(\mathbb{S}^0) = \tilde{K}U(\mathbb{S}^2) \cong \mathbb{Z}$ dont un générateur est la classe stable du fibré de Hopf, $[\eta] - 1$ avec la relation $([\eta] - 1)^2 = 0$. La multiplication par $[\eta] - 1$ induit l'isomorphisme de périodicité $\beta : \tilde{K}U^i(X) \rightarrow \tilde{K}U^{i-2}(X)$ ([3]).

0.2. - L'anneau $\tilde{K}O^*(\mathbb{S}^0)$.

Cet anneau est engendré par 4 éléments, 1, e_1 , e_4 et e_8 avec $e_i \in \tilde{K}O^{-i}(\mathbb{S}^0)$ et les relations $2e_1 = 0$, $e_1^3 = 0$, $e_4^2 = 4e_8$. La multiplication par e_8 induit l'isomorphisme de périodicité $\tilde{K}O^{-i}(X) \rightarrow \tilde{K}O^{-i-8}(X)$. La structure additive est décrite dans le tableau suivant

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$\tilde{K}O^{-i}(\mathbb{S}^0)$	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}	0	0	0

(Voir [6])

0.3. - La suite exacte de Bott.

Nous avons la suite exacte suivante due à Bott

$$\dots \longrightarrow KO^n(X) \xrightarrow{c} KU^n(X) \xrightarrow{r\beta^{-1}} KO^{n+2}(X) \xrightarrow{d} KO^{n+1}(X) \longrightarrow \dots$$

où c est le morphisme de complexification, r celui de réélification et d une certaine opération de cohomologie [6]. Rappelons que r n'est pas un morphisme d'anneaux.

Lemme 0.3.1. - Soit X un CW-complexe fini pour lequel $\tilde{K}U^*(X)$ est sans torsion. Alors le sous-groupe de torsion de $\tilde{K}O^*(X)$ est forcément de la forme $(\mathbb{Z}_2)^s$ ($s \geq 0$) ; il est égal à $\text{Im}d$ ($s = 0$ si $d = 0$).

Preuve : Comme $\tilde{K}U^*(X)$ est sans torsion et $rc = 2$, on déduit que $\tilde{K}O^*(X)$ n'a pas de torsion impaire et ne contient pas d'éléments de torsion d'ordre strictement supérieur à 2. Soit maintenant, pour un certain entier n , x non nul dans $\tilde{K}O^n(X)$ avec $2x = 0$. Alors $c(2x) = 2c(x) = 0$; par conséquent $c(x) = 0$ et il existe $y \in \tilde{K}O^{n+1}(X)$ tel que $d(y) = x$. Enfin, puisque $rc = 2$, les éléments non nuls de $\text{Im}d$ ont de la 2-torsion.

0.4. - La suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch.

Soit X un CW-complexe fini. A l'anneau gradué $\tilde{K}F^*(X)$ ($F = U$ ou O), muni de la filtration naturelle

$$F^p \tilde{K}F^n(X) = \text{Ker}(\tilde{K}F^n(X) \xrightarrow{i^!} \tilde{K}F^n(X_{p-1}))$$

où $i^!$ est le morphisme induit par l'inclusion canonique $i = X_{p-1} \rightarrow X$ du $(p-1)$ -ième squelette X_{p-1} dans X , est associée une suite spectrale $\{E_r(X)\}$ avec

$$E_2^{p,q}(X) = \hat{H}^p(X; \hat{K}F^q(S^0)) \implies \hat{K}F^{p+q}(X).$$

Les différentielles de cette suite spectrale sont des opérations stables de cohomologie et sont des dérivations [16]. Dans le cas de la K-théorie complexe, la différentielle d_3 est donnée par le carré de Steenrod Sq^3 . En K-théorie réelle, la différentielle d_2 est donnée par les formules suivantes :

$$d_2^{p,8k} = Sq^2 \circ \rho : E_2^{p,8k}(X) = \hat{H}^p(X; \mathbb{Z}) \rightarrow E_2^{p+2}(X)^{8k-1} = \hat{H}^{p+2}(X; \mathbb{Z}_2)$$

$$d_2^{p,8k-1} = Sq^2 : E_2^{p,8k-1}(X) = \hat{H}^p(X; \mathbb{Z}_2) \rightarrow E_2^{p+2}(X)^{8k-2} = \hat{H}^{p+2}(X; \mathbb{Z}_2)$$

où Sq^2 désigne le carré de Steenrod et $\rho : H^*(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Z}_2)$ l'homomorphisme de restriction induit par la projection canonique $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$. On a aussi

$$d_3^{p,8k-2} = \delta \circ Sq^2 : E_3^{p,8k-2}(X) \rightarrow E_3^{p+2,8k-4}(X)$$

où δ désigne l'opérateur de Bockstein associé à la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\rho} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$$

(pour les détails voir [4] et [10]).

Rappelons aussi que l'on a un isomorphisme

$$ch : KU^*(X) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow H^*(X; \mathbb{Q})$$

où ch désigne le caractère de Chern. Si X est sans torsion (c'est-à-dire, $H^*(X; \mathbb{Z})$ est sans torsion) alors la suite spectrale en K-théorie complexe est triviale, c'est-à-dire, toutes les différentielles d_s , $s \geq 2$, sont nulles. Dans le cas de la K-théorie réelle, on a le lemme suivant :

Lemme 0.4.1. - Soit X un CW-complexe fini sans torsion, alors dans la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch en K -théorie réelle, on a :

- (i) $d_s^{p,q} = 0$ pour $s \geq 2$, $q \equiv -2, -4 \pmod{8}$ et p quelconque ;
- (ii) $d_s^{p,8k} = 0$ pour $s \geq 5$, $s \equiv 1, 5 \pmod{8}$ (p et k quelconques).

Démonstration :

(i) Le morphisme de réélification r induit un homomorphisme de la suite spectrale $\{E_s^{p,q}(X)\}$ en K -théorie complexe dans la suite spectrale $\{E_s^{p,q}(X)\}$ en K -théorie réelle. On va montrer que r induit un épimorphisme pour $q \equiv -2, -4 \pmod{8}$. Pour $s = 2$, puisque $H^*(X;Z)$ est sans torsion, on a

$$E_2^{p,q} = H^p(X;Z) \otimes \tilde{K}U^q(S^0), \quad E_2^{p,q} = H^p(X;Z) \otimes \tilde{K}O^q(S^0) ;$$

d'où le morphisme $r_2 = 1 \otimes r : E_2^{p,q} \rightarrow E_2^{p,q}$. Ecrivons la suite exacte de Bott pour S^0 :

$$\begin{array}{ccccc} \dots & \rightarrow & \tilde{K}U^{q-2}(S^0) & \longrightarrow & \tilde{K}O^q(S^0) & \longrightarrow & \tilde{K}O^{q-1}(S^0) \\ & & \searrow \beta^{-1} & & \nearrow r & & \\ & & & & \tilde{K}U^q(S^0) & & \end{array}$$

Comme $KO^{-3}(S^0) = KO^{-5}(S^0) = 0$, r est un épimorphisme pour $q \equiv -2$ et $-4 \pmod{8}$; il en est donc de même pour r_2 . Supposons maintenant que r_s (pour un certain $s \geq 2$) est un épimorphisme dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 {}'E_s^{p-s, q+s-1} & \longrightarrow & {}'E_s^{p, q} & \xrightarrow{{}'d_s} & {}'E_s^{p+s, q-s+1} \\
 \downarrow & & \downarrow r_s & & \downarrow \\
 E_s^{p-s, q+s-1} & \longrightarrow & E_s^{p, q} & \xrightarrow{d_s} & E_s^{p+s, q-s+1}
 \end{array}$$

Puisque $'d_s = 0$, on a $d_s = 0$, ce qui entraîne que

$$r_{s+1} : {}'E_{s+1}^{p, q} = {}'E_s^{p, q} \longrightarrow E_{s+1}^{p, q} = E_s^{p, q} / \text{Im}d_s^{p-s, q+s-1}$$

est encore un épimorphisme. Comme r_2 est surjectif pour $q \equiv -2, -4 \pmod{8}$, le résultat s'ensuit.

(ii) Le morphisme de complexification c induit un homomorphisme de la suite spectrale $\{E_s^{p, q}\}$ en K -théorie réelle, dans la suite spectrale $\{{}'E_s^{p, q}\}$ en K -théorie complexe. En particulier :

$$E_2^{p, 8k} \xrightarrow{c} {}'E_2^{p, 8k} \quad \text{et} \quad E_2^{8, 8k-4} \xrightarrow{c} {}'E_2^{p, 8k-4}$$

ce sont des monomorphismes. Remarquons aussi que

$$c : E_5^{p, 8k} \rightarrow {}'E_5^{p, 8k-4}$$

est encore un monomorphisme car $E_5^{p, 8k} \subset E_2^{p, 8k}$ et $'E_5^{p, 8k-4} = {}'E_2^{p, 8k-4}$.

Supposons maintenant que pour un certain $s \geq 5$ et $s \equiv 1$ ou $5 \pmod{8}$ on ait, pour tout entier p , d'une part

$$E_s^{p, 8k} \subset E_2^{p, 8k}, \quad \text{c'est-à-dire, } E_s^{p, 8k} \text{ est libre}$$

et, d'autre part, dans le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 E_s^{p-s, 8k+s-1} & \longrightarrow & E_s^{p, 8k} & \xrightarrow{d_s} & E_s^{p+s, 8k-s+1} \\
 \downarrow c & & \downarrow c & & \downarrow c \\
 {}_1E_s^{p-s, 8k+s-1} & \longrightarrow & {}_1E_s^{p, 8k} & \xrightarrow{{}_1d_s} & {}_1E_s^{p+s, 8k-s+1}
 \end{array}$$

c est un monomorphisme. Alors, puisque ${}_1d_s = 0$, $d_s = 0$. Il s'ensuit que $E_{s+m}^{p, 8k}$ ($m = 3$ si $s \equiv 1 \pmod{8}$ ou $m = 4$ si $s \equiv 5 \pmod{8}$) est encore un sous-groupe de $E_2^{p, 8k}$. En effet, il suffit de remarquer que pour $s \equiv 5 \pmod{8}$ les différentielles $d_{s+2}^{p-(s+2), 8k+s+1}$ et $d_{s+3}^{p-(s+3), 8k+s+2}$ sont nulles car elles partent de groupes de torsion et aboutissent à un groupe libre. Le lemme en résulte.

La partie (ii) de ce lemme est, en fait, un cas particulier de la propriété plus générale suivante :

Proposition 0.4.2. - Soit X un CW-complexe fini. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\text{rang } \hat{K}O^{-n}(X) = \text{rang } \sum_{\substack{p \geq 1 \\ p+n \equiv 0, 4 \pmod{8}}} \hat{H}^p(X; \mathbb{Z}) .$$

Démonstration : Puisque $KU^*(X) \otimes \mathbb{Q} \cong H^*(X; \mathbb{Q})$ il résulte que les éléments d'ordre infini des termes $E_r^{p, q}$ de la suite spectrale en K -théorie complexe n'appartiennent à l'image d'aucune différentielle $d_r^{p-r, q+r-1}$, pour tout $r \geq 2$. En passant en K -théorie réelle à l'aide de la complexification $c : \hat{K}O^{-i}(S^0) \rightarrow \hat{K}U^{-i}(S^0)$ qui est un isomorphisme pour $i = 0$ et un monomorphisme pour $i = 4$, on déduit qu'il en est de même pour les éléments d'ordre infini des termes $E_r^{p, q}$, $q \equiv 0$ ou $4 \pmod{8}$, $r \geq 2$, de la suite

spectrale en K-théorie réelle. Comme

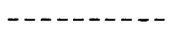
$$\text{rang } \hat{K}O^{-n}(X) = \text{rang } G_* \hat{K}O^{-n}(X)$$

où $G_* \hat{K}O^{-n}(X) = \bigoplus_p E_{\infty}^{p, -p-n}(X)$ est le groupe gradué associé, la proposition

en résulte.

CHAPITRE I

LES GROUPES $\tilde{K}O^{-i}(X)$ DES H-ESPACES X SANS TORSION DE RANG 2 ET 3.



1.1. - Les résultats.

On sait ([15]) que les H-espaces finis simplement connexes, engendré par les éléments primitifs, de rang 2 qui peuvent avoir un type d'homotopie distinct de celui d'un produit de sphères sont de type (3,5) ou (3,7). De même, la classification pour le rang 3 conduit ([13], [18]) aux types (3,5,7), (3,3,5), (3,3,7), (3,7,7) et (3,7,11). Dans ce chapitre, nous démontrons les deux résultats suivants :

Théorème I.1.1. - Soit X un H-espace fini simplement connexe sans torsion de type (3,5), (3,5,7) ou (3,3,5). Alors les groupes $\tilde{K}O^{-i}(X)$ sont donnés par le tableau suivant :

type de X \ i	0	1	2	3	4	5	6	7
(3,5)	\mathbb{Z}	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}
(3,5,7)	$\mathbb{Z}^{(2)}$	$\mathbb{Z}^{(3)} \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2^{(3)}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2^{(2)}$	$\mathbb{Z}^{(2)}$	$\mathbb{Z}^{(3)}$	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}
(3,3,5)	$\mathbb{Z}^{(2)}$	$\mathbb{Z}^{(3)} \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$	\mathbb{Z}	$\mathbb{Z}^{(2)}$	$\mathbb{Z}^{(3)}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2^{(2)}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2^{(2)}$

Théorème 1.1.2. - Soit X comme en I.1.1. mais de type $(3,7)$, $(3,3,7)$, $(3,7,11)$ ou $(3,7,7)$. Alors les groupes $\tilde{K}O^{-i}(X)$ sont donnés par le tableau suivant :

type de $X \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6	7
$(3,7)$	\mathbb{Z}_2	$\mathbb{Z}^{(2)}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$	\mathbb{Z}_2	0	$\mathbb{Z}^{(2)}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^{(2)}$
$(3,3,7)$ ou $(3,7,11)$	$\mathbb{Z}_2^{(2)}$	$\mathbb{Z}^{(3)}$	$\mathbb{Z}^{(3)} \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2^{(2)}$	$\mathbb{Z}^{(2)}$	$\mathbb{Z}^{(3)} \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}^{(3)} \oplus \mathbb{Z}_2^{(2)}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2^{(4)}$
$(3,7,7)$	$\mathbb{Z}_2^{(3)}$	$\mathbb{Z}^{(3)} \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}^{(3)} \oplus \mathbb{Z}_2^{(2)}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2^{(3)}$	\mathbb{Z}_2	$\mathbb{Z}^{(3)}$	$\mathbb{Z}^{(3)} \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2^{(3)}$

I.2. - Le type (3,5).

On sait qu'un H-espace X de type $(3,5)$ sans torsion a le même type d'homotopie que le groupe de Lie $SU(3)$. On a

$$H^*(X; \mathbb{Z}_2) = \Lambda(x_3, x_5)$$

avec la relation $Sq^2 x_3 = x_5$ [20]. Il résulte alors trivialement de la caractérisation des différentielles d_2 de la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch, décrite en 0.4, que

$$E_3^{5,8k-1} = E_3^{5,8k-2} = E_3^{3,8k-1} = 0.$$

Remarquons que $\rho : H^*(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Z}_2)$ est ici un épimorphisme.

Lemme 1.2.1. - La différentielle $d_3^{5,8k}$ est nulle.

Preuve : Soit $p : X \rightarrow \mathbb{S}^5$ la projection canonique de la fibration $\mathbb{S}^3 \rightarrow X \rightarrow \mathbb{S}^5$. Il est clair que p induit un isomorphisme en cohomologie en dimension 5. On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 H^5(X; \mathbb{Z}) = E_3^{5, 8k}(X) & \xrightarrow{d_3} & E_3^{8, 8k-2} = H^8(X; \mathbb{Z}_2) \\
 \uparrow \cong \quad p^* & & \uparrow \\
 H^5(\mathbb{S}^5; \mathbb{Z}) = E_3^{5, 8k}(\mathbb{S}^5) & \longrightarrow & E_3^{8, 8k-2}(\mathbb{S}^5) = 0
 \end{array}$$

qui montre que $d_3 = 0$.

Les différentielles $d_5^{3, q}$ pour $q \equiv 0$ et $-4 \pmod{8}$ étant nulles d'après (0.4.1), la machinerie habituelle des suites spectrales permet d'obtenir directement les groupes $\tilde{K}O^{-i}(X)$ annoncés en I.1.1. sauf $\tilde{K}O^{-7}(X)$. Pour ce dernier, on a

$$G_* \tilde{K}O^{-7}(X) \cong E_2^{3, -10} \oplus E_2^{5, -12} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}.$$

Ecrivons la suite exacte de Bott

$$\dots \longrightarrow \tilde{K}O^{-6}(X) \xrightarrow{d} \tilde{K}O^{-7}(X) \xrightarrow{c} \tilde{K}U^{-7}(X) \longrightarrow \dots$$

Puisque $\tilde{K}O^{-6}(X) = 0$ et $\tilde{K}U^*(X)$ est sans torsion, on déduit que $\tilde{K}O^{-7}(X) \cong \mathbb{Z}$.

Remarque I.2.2.- On a la cofibration suivante :

$$\mathbb{S}^3 \bigcup_{\alpha} e^5 \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} \mathbb{S}^8$$

où $X_5 = \mathbb{S}^3 \bigcup_{\alpha} e^5$ est le 5-ième squelette de X . On déduit alors aisément que $p! : \tilde{K}O(\mathbb{S}^8) \rightarrow \tilde{K}O(X)$ est un isomorphisme ; de même, pour

$$J(p!) : \tilde{J}(\mathbb{S}^8) \rightarrow \tilde{J}(X).$$

I.3.- H-espaces de type (3,5,7).

La cohomologie d'un H-espace fini X sans torsion de type (3,5,7) est donnée par

$$H^*(X; \mathbb{Z}) = \Lambda_{\mathbb{Z}}(h_3, h_5, h_7), \quad H^*(X; \mathbb{Z}_2) = \Lambda(x_3, x_5, x_7)$$

où $x_i = \rho(h_i)$, $i = 3, 5, 7$.

De plus, selon [20], on a

$$Sq^2 x_3 = x_5 \quad \text{et} \quad Sq^2 x_5 = Sq^2 x_7 = 0.$$

Ainsi, il résulte trivialement de la caractérisation de $d_2^{p,q}$ et de la formule de Cartan que pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

$$E_3^{p, 8k-1} = 0 \quad \text{pour } p = 3, 5, 10 \text{ et } 12,$$

$$E_3^{p, 8k-2} = 0 \quad \text{pour } p = 5 \text{ et } 12.$$

Lemme I.3.1.- Les différentielles $d_3^{p, 8k}$ sont nulles pour $p = 5, 7$ et 12.

Preuve : Puisque les différentielles sont des dérivations, on a

$$d_3^{12, 8k}(h_5 h_7) = d_3^{5, 8k}(h_5) h_7 + h_5 d_3^{7, 8k}(h_7)$$

où $h_i \in E_3^{i, 8k} = H^i(X; \mathbb{Z})$ ($i = 5, 7$).

Montrons d'abord que $d_3^{5, 8k} = 0$. Selon [18], X se fibre au-dessus de \mathbb{S}^7 avec comme fibre un espace ayant le même type d'homotopie que SU(3), soit

$$SU(3) \sim F \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} \mathbb{S}^7.$$

Il est clair que i induit des isomorphismes en cohomologie en dimension 3 et 5. Puisque $i^* : H^*(X) \rightarrow H^*(F)$ est un homomorphisme d'anneaux, on aura aussi un isomorphisme en dimension 8. D'où le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E_3^{5,8k}(X) & \xrightarrow{d_3} & E_3^{8,8k-2}(X) \\ \downarrow \cong i^* & & \downarrow \cong i^* \\ E_3^{5,8k}(F) & \xrightarrow{'d_3} & E_3^{8,8k-2}(F). \end{array}$$

Or $'d_3 = 0$ d'après I.2.1., donc $d_3 = 0$.

Pour $d_3^{7,8k}$, on procède de la même manière en remarquant que $p : X \rightarrow \mathbb{S}^7$ induit un isomorphisme en cohomologie en dimension 7.

Proposition 1.3.2. - Les différentielles $d_{10}^{5,8k}$ sont nulles.

Démonstration : Soit $\mu : X \times X \rightarrow X$ une multiplication sur X pour laquelle les générateurs h_3, h_5 et h_7 sont primitifs. Comme les différentielles sont des opérations stables de cohomologie, l'image d'un primitif est primitif modulo l'indétermination sur $X \times X$. Nous devons donc calculer $E_{10}^{15,8k-1}(X \times X)$. On a

$$E_2^{13,8k}(X \times X) \xrightarrow{Sq^2 \circ \rho} E_2^{15,8k-1}(X \times X) \xrightarrow{Sq^2} E_2^{17,8k-2}(X \times X)$$

$$Sq^2(x_5 x_7 \otimes x_3) = Sq^2(x_3 x_7 \otimes x_5) = x_5 x_7 \otimes x_5$$

$$Sq^2(x_3 \otimes x_5 x_7) = Sq^2(x_5 \otimes x_3 x_7) = x_5 \otimes x_5 x_7$$

$$Sq^2(x_3 x_5 x_7 \otimes 1) = Sq^2(1 \otimes x_3 x_5 x_7) = Sq^2(x_3 x_5 \otimes x_7) = Sq^2(x_7 \otimes x_3 x_5) = 0$$

et $Sq^2(x_3 \otimes x_3 x_7) = x_5 \otimes x_3 x_7 + x_3 \otimes x_5 x_7$

$$Sq^2(x_3 x_7 \otimes x_3) = x_5 x_7 \otimes x_3 + x_3 x_7 \otimes x_5.$$

Il s'ensuit que $E_3^{15,8k-1}(X \times X)$ est engendré par les éléments suivants :

$$x_3 x_5 x_7 \otimes 1, \quad 1 \otimes x_3 x_5 x_7, \quad x_3 x_5 \otimes x_7 \quad \text{et} \quad x_7 \otimes x_3 x_5.$$

Remarquons aussi que l'on a $E_3^{6,8k-1}(X \times X) = 0$ car $Sq^2(x_3 \otimes x_3) = x_3 \otimes x_5 + x_5 \otimes x_3$. On vérifie maintenant aisément, grâce au lemme 0.4.1. et pour des raisons de dimension, que $E_{10}^{15,8k-1}(X \times X) = E_3^{15,8k-1}(X \times X)$. De même, on a

$$E_{10}^{5,8k}(X \times X) = E_2^{5,8k}(X \times X) \quad \text{et} \quad E_{10}^{5,8k}(X) = E_2^{5,8k}(X).$$

Nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^5(X; \mathbb{Z}) = E_{10}^{5,8k}(X) & \xrightarrow{d_{10}} & E_{10}^{15,8k-9}(X) = H^{15}(X; \mathbb{Z}_2) \\ \downarrow \mu^* & & \downarrow \mu^* \\ H^5(X \times X; \mathbb{Z}) = E_{10}^{5,8k}(X \times X) & \longrightarrow & E_{10}^{15,8k-9}(X \times X) \end{array}$$

Si $d_{10} \neq 0$ alors $d_{10}(h_5) = x_3 x_5 x_7$. Or, sur $E_{10}^{15,8k-9}$, on a

$$\mu^*(x_3 x_5 x_7) = x_3 x_5 x_7 \otimes 1 + 1 \otimes x_3 x_5 x_7 + x_3 x_5 \otimes x_7 + x_7 \otimes x_3 x_5$$

ce qui entraîne que $d_{10}(h_5)$ ne serait pas primitif : par conséquent $d_{10} = 0$

C.Q.F.D.

Moyennant (0.4.1), on voit que toutes les autres différentielles sont nulles, ce qui nous permet maintenant de calculer les groupes $\tilde{K}O^{-i}(X)$.

Lemme 1.3.3. - $\tilde{K}O(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Preuve : On vérifie que

$$G_* \tilde{K}O(X) \cong E_{\infty}^{8,-8}(X) \oplus E_{\infty}^{10,-10}(X) \oplus E_{\infty}^{12,-12}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$$

et

$$G_* \tilde{K}O^1(X/X_7) \cong E_{\infty}^{10,-9}(X/X_7) = 0$$

où X_7 est le 7-ième squelette de X . Il s'ensuit que $\tilde{K}O^1(X/X_7) = 0$ et,

en se servant de la suite exacte de Bott (0.3), on a $\tilde{K}O(X/X_7) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

Remarquons maintenant que $\tilde{K}O(X_7) = 0$ ce qui entraîne que la projection canonique $p : X \rightarrow X/X_7$ induit un épimorphisme

$$p! : \tilde{K}O(X/X_7) \longrightarrow \tilde{K}O(X)$$

d'où le résultat.

Lemme 1.3.4. - $\tilde{K}O^{-1}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.

Preuve : Il suffit de vérifier que l'opération $d : \tilde{K}O(X) \rightarrow \tilde{K}O^{-1}(X)$ n'est pas nulle puisque

$$G_* \tilde{K}O^{-1}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}.$$

D'une part, de la suite exacte de la paire (X, X_8) , on voit que $i! : \tilde{K}O(X) \rightarrow \tilde{K}O(X_8)$ est un épimorphisme car $\tilde{K}O^1(X/X_8) = 0$; d'autre part, $G_* \tilde{K}O^{-1}(X_8) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ ce qui montre que

$$\tilde{K}O^{-1}(X_8) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}O(X) & \xrightarrow{d} & \tilde{K}O^{-1}(X) \\ \downarrow i! & & \downarrow \\ \tilde{K}O(X_8) & \longrightarrow & \tilde{K}O^{-1}(X_8) \end{array}$$

permet alors de voir que $d \neq 0$.

C.Q.F.D.

Lemme 1.3.5. - $\tilde{K}O^{-2}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Preuve : Montrons d'abord que l'inclusion canonique $i : X_8 \rightarrow X$ induit un épimorphisme $i^! : \tilde{K}O^{-1}(X) \rightarrow \tilde{K}O^{-1}(X_8)$. Soit $ch : \tilde{K}U(X) \rightarrow \tilde{H}^{Pair}(X; \mathbb{Q})$ le caractère de Chern. Comme $\tilde{K}U(X)$ et $\tilde{K}U(X/X_8)$ sont sans torsion, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}U(X/X_8) & \xrightarrow{p^!} & \tilde{K}U(X) \\ \text{ch} \downarrow & & \downarrow \text{ch} \\ \tilde{H}^{Pair}(X/X_8; \mathbb{Q}) & \xrightarrow{p^*} & \tilde{H}^{Pair}(X; \mathbb{Q}) \end{array}$$

qui montre que $p^!$ est un monomorphisme. Remarquons que $\tilde{K}O(X/X_8) \cong \mathbb{Z}$ car $\tilde{K}O^1(X/X_8) = 0$, d'où le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}O(X/X_8) & \xrightarrow{p^!} & \tilde{K}O(X) \\ \downarrow c & & \downarrow c \\ \tilde{K}U(X/X_8) & \xrightarrow{\quad} & \tilde{K}U(X) \end{array}$$

Il s'ensuit que $p^! : \tilde{K}O(X/X_8) \rightarrow \tilde{K}O(X)$ est aussi un monomorphisme. Par conséquent : $i^! : \tilde{K}O^{-1}(X) \rightarrow \tilde{K}O^{-1}(X_8)$ est bien un épimorphisme d'après la suite exacte de la pair (X, X_8) . Maintenant, on vérifie que

$$G_* \tilde{K}O^{-1}(X/X_8) \cong E_\infty^{15, -16}(X/X_8) \cong \mathbb{Z},$$

$$G_* \tilde{K}O^{-2}(X_8) \cong E_\infty^{7,-9}(X_8) \oplus E_\infty^{8,-10}(X_8) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2,$$

donc $\tilde{K}O^{-1}(X/X_8) \cong \mathbb{Z}$ et $\tilde{K}O^{-2}(X_8) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ d'après (0.3.1). Enfin, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}O^{-1}(X) & \longrightarrow & \tilde{K}O^{-1}(X_8) \\ \downarrow d & & \downarrow \\ \tilde{K}O^{-2}(X) & \xrightarrow{i!} & \tilde{K}O^{-2}(X_8) \end{array}$$

montre qu'il existe x et y dans $\tilde{K}O^{-2}(X)$ tels que $2x = 2y = 0$ et $x \neq y$. D'autre part, comme $E_\infty^{15,-17}(X) \cong \mathbb{Z}_2$ et $E_\infty^{10,-12}(X) \cong \mathbb{Z}$, on voit que $\text{Ker } i! = F^9 \tilde{K}O^{-2}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$. Par conséquent, la 2-torsion de $\tilde{K}O^{-2}(X)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

C.Q.F.D.

Pour calculer $\tilde{K}O^{-3}(X)$, on vérifie que

$$G_* \tilde{K}O^{-3}(X) \cong E_\infty^{5,-8} \oplus E_\infty^{7,-10} \oplus E_\infty^{15,-18} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

D'après (0.3.1), on conclut alors directement que $\tilde{K}O^{-3}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Pour $\tilde{K}O^{-i}(X)$, lorsque $i = 4, 5$ et 6 , le lecteur vérifiera aisément les résultats en écrivant les gradués associés respectifs.

Lemme I.3.6. - $\tilde{K}O^{-7}(X) \cong \mathbb{Z}$.

Preuve : On a

$$G_* \tilde{K}O^{-7}(X) \cong E_\infty^{3,-10}(X) \oplus E_\infty^{5,-12}(X) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}.$$

Il s'ensuit que $F^9 \tilde{K}O^{-7}(X) = 0$, c'est-à-dire, $i! : \tilde{K}O^{-7}(X) \rightarrow \tilde{K}O^{-7}(X_8)$

est un monomorphisme. D'autre part, $G_* \tilde{K}O^{-6}(X_8) = 0$, donc $\tilde{K}O^{-6}(X_8) = 0$.
Alors, en écrivant la suite exacte de Bott pour le 8-ième squelette X_8 de X , le résultat annoncé s'ensuit.

1.4.- H-espaces de type (3,3,5).

Soit X un H-espace fini sans torsion de type (3,3,5). On a

$$H^*(X; \mathbb{Z}_2) = \Lambda(x_3, x'_3, x_5).$$

De plus, selon [20], il existe un élément primitif dans $H^3(X; \mathbb{Z}_2)$, soit x_3 , tel que $Sq^2 x_3 = x_5$.

Lemme 1.4.1.- $Sq^2 x'_3 = 0$.

Preuve : Selon [18] X a une structure cellulaire du type

$$X \sim \{S^3 \times (S^3 \cup_{\eta} e^5)\} \cup_{\beta} e^8 \cup_{\gamma} e^{11}.$$

Prenons le sous-complexe $S^3 \times (S^3 \cup_{\eta} e^5)$ et soit

$p : S^3 \times (S^3 \cup_{\eta} e^5) \rightarrow S^3$ la projection sur le premier facteur. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^3(S^3; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{p^*} & H^3(S^3 \times (S^3 \cup_{\eta} e^5); \mathbb{Z}_2) \\ \downarrow Sq^2 & & \downarrow Sq^2 \\ 0 = H^5(S^3; \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & H^5(S^3 \times (S^3 \cup_{\eta} e^5); \mathbb{Z}_2) \end{array}$$

montre que $x'_3 \in \text{Imp}^*$ et donc $Sq^2 x'_3 = 0$.

Ainsi, il résulte trivialement de la caractérisation des différentielles $d_2^{p,q}$ que

$$E_3^{p,8k-1} = 0 \quad \text{pour } p = 5 \text{ et } 6, \quad E_3^{5,8k-2} = 0$$

$$E_3^{3,8k-1} \cong \mathbb{Z}_2 \quad \text{et} \quad E_3^{8,8k-1} = E_3^{8,8k-2} \cong \mathbb{Z}_2.$$

Proposition 1.4.2. - Les différentielles $d_3^{p,8k}$ sont nulles pour $p = 3$ et 8.

Démonstration : Montrons d'abord que $d_3^{8,8k} = 0$: à cet effet nous utilisons le théorème de Browder-Spanier [7] qui affirme qu'un H-espace fini est S-réductible. Soit la projection canonique

$$p : X \rightarrow X/X_7 \sim (\mathbb{S}^8 \vee \mathbb{S}^8) \underset{P_*\gamma}{\cup} e^{11}.$$

On a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^8(X; \mathbb{Z}) = E_3^{8,8k}(X) & \xrightarrow{d_3} & E_3^{11,8k-2}(X) = H^{11}(X; \mathbb{Z}_2) \\ \uparrow \cong P_* & & \uparrow \cong P_* \\ H^8(X/X_7; \mathbb{Z}) = E_3^{8,8k}(X/X_7) & \xrightarrow{d_3} & E_3^{11,8k-2}(X/X_7) = H^{11}(X/X_7; \mathbb{Z}_2) \end{array}$$

(remarquons que $P_* : H^8(X/X_7) \rightarrow H^8(X)$ est un isomorphisme car $H^7(X_7; \mathbb{Z}) = 0$).

Puisque X est S-réductible, on a

$$\gamma \in \text{Ker}(\Sigma^N : \pi_{10}(X_8) \rightarrow \pi_{N+10}(\Sigma^N X_8))$$

pour un certain entier N. Par conséquent

$$P_*\gamma \in \text{Ker}(\Sigma^N : \pi_{10}(\mathbb{S}^8 \vee \mathbb{S}^8) \rightarrow \pi_{N+10}(\Sigma^N(\mathbb{S}^8 \vee \mathbb{S}^8))).$$

Or ce dernier noyau est trivial, donc $p_*\gamma = 0$. Il s'ensuit que $d_3 = 0$.
et donc $d_3 = 0$.

Pour $d_3^{3,8k}$, remarquons que l'indétermination de cette opération de cohomologie sur $X \times X$ est nulle, en effet $E_3^{6,8k-2}(X \times X) = E_2^{6,8k-2}(X \times X)$. Les éléments de $E_3^{3,8k}(X)$ étant primitifs, on déduit que $d_3^{3,8k} = 0$ du fait que $x_3 x'_3$ n'est pas primitif. C.Q.F.D.

Maintenant le lemme 0.4.1 montre que toutes les autres différentielles sont nulles sauf éventuellement $d_3^{5,8k}$. En fait cette dernière est aussi nulle comme conséquence du résultat du calcul de $\tilde{KO}^{-2}(X)$.

Lemme 1.4.3.- $\tilde{KO}^{-2}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.

Preuve : Remarquons que

$$G_* \tilde{KO}^{-2}(X/X_5) \simeq E_\infty^{6,-8}(X/X_5) \oplus E_\infty^{8,-10}(X/X_5) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Par conséquent $\tilde{KO}^{-2}(X/X_5) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$. Nous allons maintenant montrer que la projection $p : X \rightarrow X/X_5$ induit un isomorphisme

$$p^! : \tilde{KO}^{-2}(X/X_5) \rightarrow \tilde{KO}^{-2}(X).$$

Puisque $\tilde{KO}^{-2}(X_5) = 0$, on déduit que $p^!$ est un épimorphisme. Aussi, d'après la suite exacte de la paire (X, X_5) , $p^!$ est un monomorphisme si et seulement si $i^! : \tilde{KO}^{-3}(X) \rightarrow \tilde{KO}^{-3}(X_5)$ est un épimorphisme. Nous avons le diagramme suivant en KU-théorie :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \rightarrow & \tilde{K}U^{-3}(X) & \xrightarrow{i^!} & \tilde{K}U^{-3}(X_5) & \longrightarrow & \tilde{K}U^{-2}(X/X_5) & \xrightarrow{p^!} & \tilde{K}U^{-2}(X) & \longrightarrow & \dots \\
 & & & & \downarrow \text{ch} & & \downarrow \text{ch} & & & & \\
 & & & & \tilde{H}^{\text{pair}}(X/X_5; \mathbb{Q}) & \xrightarrow{p^*} & \tilde{H}^{\text{pair}}(X; \mathbb{Q}) & & & &
 \end{array}$$

Comme X a une seule cellule en dimension 6, p^* est un isomorphisme, donc $i^! : \tilde{K}U^{-3}(X) \rightarrow \tilde{K}U^{-3}(X_5)$ est un épimorphisme. Notons maintenant que

$$G_* \tilde{K}O^{-4}(X_5) = E_{\infty}^{5, -9}(X_5) = 0.$$

Donc $\tilde{K}O^{-4}(X_5) = 0$. On déduit alors la suite exacte de Bott 0.3 que la réélicification $r : \tilde{K}U^{-3}(X_5) \rightarrow \tilde{K}O^{-3}(X_5)$ est un épimorphisme. Enfin, le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{K}U^{-3}(X) & \xrightarrow{r} & \tilde{K}O^{-3}(X) \\
 i^! \downarrow & & \downarrow i^! \\
 \tilde{K}U^{-3}(X_5) & \xrightarrow{r} & \tilde{K}O^{-3}(X_5)
 \end{array}$$

montre que $i^!$ est bien un épimorphisme.

C.Q.F.D.

Les groupes $\tilde{K}O^{-i}(X)$ pour $i = 0, 3$ et 5 se déduisent trivialement des groupes gradués associés respectives.

Lemme 1.4.4. - $\tilde{K}O^{-1}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.

Preuve : Remarquons que

$$G_* \tilde{K}O^{-1}(X_8) \cong E_{\infty}^{3,8k}(X_8) \oplus E_{\infty}^{8,8k-1}(X_8) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$$

et donc $\tilde{K}O^{-1}(X_8) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$. Il s'ensuit que l'opération $d : \tilde{K}O(X_8) \rightarrow \tilde{K}O^{-1}(X_8)$ n'est pas nulle. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & \tilde{K}O(X) & \xrightarrow{i^!} & \tilde{K}O(X_8) & \longrightarrow & \tilde{K}O^1(S^{11}) \xrightarrow{p^!} \tilde{K}O^1(X) \dots \\ & & \downarrow d & & \downarrow & & \\ & & \tilde{K}O^{-1}(X) & \longrightarrow & \tilde{K}O^{-1}(X_8) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dont les suites horizontales correspondent à la suite exacte associée à la cofibration

$$X_8 \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X/X_8 \sim S^{11}.$$

Puisque $\text{Imp}^! = F^{9\nu} \tilde{K}O^1(X) = F^{11\nu} \tilde{K}O^1(X) \cong E_{\infty}^{11,8k-2}(X) \cong \mathbb{Z}_2$ et $\tilde{K}O^1(S^{11}) \cong \mathbb{Z}_2$, $p^!$ est un monomorphisme. Il s'ensuit que $i^!$ est un épimorphisme et $d : \tilde{K}O(X) \rightarrow \tilde{K}O^{-1}(X)$ n'est pas nulle.

C.Q.F.D.

Lemme 1.4.5. - $\tilde{K}O^{-4}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Preuve : Puisque X est sans torsion et contient une seule cellule en dimension 6, le cobord $\delta : H^5(X_5) \rightarrow H^6(X/X_5)$ de la suite exacte de la paire (X, X_5) est le morphisme nul. Il en résulte que :

$$G_* \tilde{K}O^{-3}(X/X_5) \cong E_{\infty}^{6,8k-1}(X/X_5) = \text{Ker } \text{Sq}^2 = 0,$$

et donc $\tilde{K}O^{-3}(X/X_5) = 0$. Ceci entraîne, d'après la suite exacte de Bott, que $\tilde{K}O^{-4}(X/X_5) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. D'autre part, on a vu dans I.4.3. que

$\tilde{K}O^{-4}(X_5) = 0$. En utilisant alors la suite exacte en KO-théorie de la paire (X, X_5) , on déduit que $p^! : \tilde{K}O^{-4}(X/X_5) \rightarrow \tilde{K}O^{-4}(X)$ est un épimorphisme. D'où le résultat.

Lemme 1.4.6. - $\tilde{K}O^{-6}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Preuve : Dans la démonstration de 1.4.4, on a remarqué que $\text{rang } \tilde{K}O^{-4}(X/X_5) = \text{rang } \tilde{K}O^{-4}(X)$ et que $p^! : \tilde{K}O^{-4}(X/X_5) \rightarrow \tilde{K}O^{-4}(X)$ est un épimorphisme. Donc $p^!$ est un isomorphisme et on déduit alors que $i^! : \tilde{K}O^{-5}(X) \rightarrow \tilde{K}O^{-5}(X_5)$ est un épimorphisme. D'autre part, on vérifie que :

$$G_* \tilde{K}O^{-6}(X) \cong E_\infty^{3,-9} \oplus E_\infty^{6,-12} \oplus E_\infty^{11,-17} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Par conséquent

$$F^6 \tilde{K}O^{-6}(X) = \text{Ker}(\tilde{K}O^{-6}(X) \xrightarrow{i^!} \tilde{K}O^{-6}(X_5)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$$

et $\tilde{K}O^{-6}(X_5) \cong \mathbb{Z}_2$. Le diagramme suivant permet maintenant de conclure

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}O^{-5}(X) & \xrightarrow{d} & \tilde{K}O^{-6}(X) \\ \downarrow i^! & & \downarrow \\ \tilde{K}O^{-5}(X_5) & \longrightarrow & \tilde{K}O^{-6}(X_5) \end{array} .$$

Lemme 1.4.7. - $\tilde{K}O^{-7}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Preuve : Dans la preuve de (1.4.5), on a remarqué que $\tilde{K}O^{-6}(X_5) \cong \mathbb{Z}_2$.

De plus, on vérifie aisément que

$$\tilde{K}O^{-8}(X_5) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{K}O^{-7}(X/X_5) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \tilde{K}O^{-7}(X/X_5) & \longrightarrow & \tilde{K}O^{-7}(X) & \longrightarrow & \tilde{K}O^{-7}(X_5) \longrightarrow \dots \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & & & d & & \\
 & & & & \tilde{K}O^{-6}(X) & \longrightarrow & \tilde{K}O^{-6}(X_5) \longrightarrow 0 \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & \tilde{K}U^{-8}(X_5) = 0
 \end{array}$$

permet alors de conclure. \square

Ce dernier lemme achève donc la démonstration de I.1.1. Nous abordons maintenant la démonstration de I.1.2.

I.5.- H-espaces de type (3,7).

On sait qu'un H-espace sans torsion de type (3,7) est une \mathbb{S}^3 -fibration principale au-dessus de \mathbb{S}^7 . Il est muni d'une structure cellulaire du type

$$X \sim \mathbb{S}^3 \cup_{k\omega} e^7 \cup e^{10}$$

où ω est un générateur convenablement choisi dans $\pi_6(\mathbb{S}^7) \cong \mathbb{Z}_{12}$ et $k \not\equiv 2 \pmod{4}$; pour plus de détails voir [15].

En utilisant le lemme 0.4.1 et le fait que la projection $p : X \rightarrow \mathbb{S}^7$ induit un isomorphisme en cohomologie en dimension 7, on vérifie aisément que la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch en KO-théorie est triviale.

Nous obtenons alors directement les groupes $\tilde{K}O^{-i}(X)$ sauf pour $i = 2, 6$ et 7 . Pour $\tilde{K}O^{-7}(X)$, on a

$$G_* \tilde{K}O^{-7}(X) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

D'où $\tilde{K}O^{-7}(X) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ d'après le lemme 0.3.1.

Pour $\tilde{K}O^{-2}(X)$ et $\tilde{K}O^{-6}(X)$, on vérifie aisément, en écrivant les suites exactes de K-théorie associées à la paire (X, X_7) , que l'on a les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{K}O^{-1}(X) & \xrightarrow{d} & \tilde{K}O^{-2}(X) & & \tilde{K}O^{-5}(X) & \xrightarrow{d} & \tilde{K}O^{-6}(X) \\
 \parallel \downarrow & & \downarrow & & \parallel \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{K}O^{-1}(X_7) & \longrightarrow & \tilde{K}O^{-2}(X_7) & & \tilde{K}O^{-5}(X_7) & \longrightarrow & \tilde{K}O^{-6}(X_7).
 \end{array}$$

On voit donc que dans les deux cas $d \neq 0$: par conséquent :

$$\tilde{K}O^{-2}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \quad \text{et} \quad \tilde{K}O^{-6}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Remarque : La projection $p : X \rightarrow X/X_7 \sim \mathbb{S}^{10}$ induit un isomorphisme $p^! : \tilde{K}O(\mathbb{S}^{10}) \rightarrow \tilde{K}O(X)$. Il s'ensuit que $J(p^!) : \tilde{J}(\mathbb{S}^{10}) \rightarrow \tilde{J}(X)$ est aussi un isomorphisme et donc $\tilde{J}(X) \cong \mathbb{Z}_2$ ([14]).

I.6.- H-espaces de type (3,7,11).

Selon [18], un H-espace X sans torsion de type (3,7,11) se fibre au-dessus de \mathbb{S}^{11} avec comme fibre un espace ayant le même type d'homotopie qu'une \mathbb{S}^3 -fibration principale au-dessus de \mathbb{S}^7 . Pour ces espaces X nous avons la

Proposition I.6.1.- La suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch en KO-théorie pour X est triviale.

Démonstration : D'après (0.4.1), il suffit de montrer que les différentielles $d_r^{p,q}$ pour $q \equiv 0, -1 \pmod{8}$ ($r \geq 2$) sont nulles. Remarquons que $d_3^{p,8k}$ pour $p = 7$ et 11 sont nulles car elles ont leur domaine de définition dans le module des éléments primitifs et leur image dans

celui des éléments décomposables et par conséquent non primitifs car X est sans torsion. Il s'ensuit par dérivation que $d_3^{18,8k}$ est aussi nulle. Pour $d_{11}^{p,8k}$, $p = 3$ et 7 , on vérifie aisément que ces opérations de cohomologie ont une indétermination nulle sur $X \times X$. Par conséquent, pour les mêmes raisons que plus haut, elles sont nulles ; de même pour $d_{11}^{10,8k}$ par dérivation. Enfin, pour $d_{18}^{3,q}$, $q \equiv 0, -1 \pmod{8}$, on procède de la même manière en vérifiant que leur indétermination sur $X \times X$ est nulle.

C.Q.F.D.

Le calcul des groupes $\tilde{K}O^{-i}(X)$ pour $i = 0, 1, 4$ et 5 se déduit aisément de cette dernière proposition en utilisant (0.3.1).

Lemme 1.6.2. - $\tilde{K}O^{-2}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.

Preuve : On a

$$G_* \tilde{K}O^{-2}(X) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Il suffit de montrer que l'opération $d : \tilde{K}O^{-1}(X) \rightarrow \tilde{K}O^{-2}(X)$ n'est pas nulle. A cet effet, en écrivant la suite exacte de la paire (X, X_{10}) , on remarque que l'inclusion $i : X_{10} \rightarrow X$ induit un épimorphisme

$$i^! : \tilde{K}O^{-1}(X) \rightarrow \tilde{K}O^{-1}(X_{10}).$$

D'autre part, il est aisé de voir que $\tilde{K}O^{-2}(X_{10}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ en écrivant la suite exacte de la paire (X_{10}, X_7) . Nous avons alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}O^{-1}(X) & \xrightarrow{d} & \tilde{K}O^{-2}(X) \\ \downarrow i^! & & \downarrow \\ \tilde{K}O^{-1}(X_{10}) & \xrightarrow{d \neq 0} & \tilde{K}O^{-2}(X_{10}) \end{array}$$

qui montre que $d : \tilde{K}O^{-1}(X) \rightarrow \tilde{K}O^{-2}(X)$ n'est pas nulle.

C.Q.F.D.

Lemme I.6.3.- $\tilde{K}O^{-3}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Preuve : L'étude du gradué associé montre que

$$G_* \tilde{K}O^{-3}(X) \cong E_\infty^{7,-10} \oplus E_\infty^{14,-17} \oplus E_\infty^{21,-24} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}.$$

Montrons d'abord que

$$F^{14} \tilde{K}O^{-3}(X) = \text{Ker}(\tilde{K}O^{-3}(X) \xrightarrow{i^!} \tilde{K}O^{-3}(X_{13})) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2.$$

La suite exacte de la paire (X, X_{13}) implique que $p^! : \tilde{K}O^{-3}(X/X_{13}) \rightarrow \tilde{K}O^{-3}(X)$ est un monomorphisme (il suffit de remarquer que $\tilde{K}O^{-4}(X_{13}) = 0$), donc $F^{14} \tilde{K}O^{-3}(X) \cong \tilde{K}O^{-3}(X/X_{13})$. Posons maintenant $Y = X/X_{13}$: il a une structure cellulaire du type

$$Y \sim \mathbb{S}^{14} \cup e^{18} \cup e^{21}.$$

Soit $Y_{18} = \mathbb{S}^{14} \cup e^{18}$ le 18-ième squelette de Y . La suite exacte de KO -théorie associée à la cofibration

$$\mathbb{S}^{14} \longrightarrow Y_{18} \longrightarrow \mathbb{S}^{21}$$

montre que $\tilde{K}O^{-3}(Y_{18}) \cong \mathbb{Z}_2$; et celle associée à la paire (Y, Y_{18}) montre que $\tilde{K}O^{-2}(Y) \cong \tilde{K}O^{-2}(Y_{18})$. Ainsi le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}O^{-2}(Y) & \xrightarrow{d} & \tilde{K}O^{-3}(Y) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \\ \tilde{K}O^{-2}(Y_{18}) & \longrightarrow & \tilde{K}O^{-3}(Y_{18}) \end{array}$$

donne $d \neq 0$, d'où $F^{14} \tilde{K}O^{-3}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.

Ecrivons maintenant le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}O^{-2}(X) & \xrightarrow{d} & \tilde{K}O^{-3}(X) \\ \downarrow i_1^! & & \downarrow i^! \\ \tilde{K}O^{-2}(X_{13}) & \xrightarrow{d_1} & \tilde{K}O^{-3}(X_{13}) \end{array}$$

Puisque $G_* \tilde{K}O^{-3}(X_{13}) \cong E_\infty^{7,-10} \cong \mathbb{Z}_2$ on a $\tilde{K}O^{-3}(X_{13}) \cong \mathbb{Z}_2$. Il s'ensuit que d_1 est un épimorphisme. D'autre part, $i_i^!$ est aussi un épimorphisme du fait que $\tilde{K}O^{-1}(X/X_{13}) = 0$. Par conséquent, il existe $x \in \text{Im} d$ tel que $i^!(x) \neq 0$. Enfin, comme $\text{Ker } i^! \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ le lemme est démontré.

Lemme 1.6.4. - $\tilde{K}O^{-6}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Preuve : De manière analogue au lemme précédent, il est aisé de voir qu'on a la suite exacte courte suivante

$$0 \longrightarrow \tilde{K}O^{-6}(X/X_7) \xrightarrow{p^!} \tilde{K}O^{-6}(X) \xrightarrow{i^!} \tilde{K}O^{-6}(X_7) \longrightarrow 0,$$

et le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}O^{-5}(X) & \xrightarrow{d} & \tilde{K}O^{-6}(X) \\ \downarrow & & \downarrow i^! \\ \tilde{K}O^{-5}(X_7) & \longrightarrow & \tilde{K}O^{-6}(X_7) \end{array}$$

Il existe donc $x \in \tilde{K}O^{-6}(X)$ tel que $2x = 0$ et $i^!(x) \neq 0$. Il nous suffit maintenant de montrer que $\text{Ker } i^!$ contient de la 2-torsion.

On peut procéder de la manière suivante : selon [18] il existe une application

$h : X \rightarrow \mathbb{S}^{11}$ qui est un prolongement de la projection canonique

$e : X_{11} \rightarrow X_{11}/X_{10} \sim \mathbb{S}^{11}$. En écrivant la suite exacte associée à la cofibration

$$X_{10} \longrightarrow X_{11} \xrightarrow{e} \mathbb{S}^{11},$$

on déduit que $e^! : \tilde{K}O^{-6}(\mathbb{S}^{11}) \rightarrow \tilde{K}O^{-6}(X_{11})$ est un monomorphisme.

Puisque $h \circ j \sim e$ où $j : X_{11} \rightarrow X$ est l'inclusion cellulaire, il s'ensuit

que $h^! : \tilde{K}O^{-6}(\mathbb{S}^{11}) \rightarrow \tilde{K}O^{-6}(X)$ est aussi un monomorphisme. Enfin, remar-

quons que pour l'inclusion cellulaire $i : X_7 \rightarrow X$, $h \circ i$ est homotopiquement

triviale. Comme $\tilde{K}O^{-6}(\mathbb{S}^{11}) \cong \mathbb{Z}_2$, $\text{Ker } i^!$ contient de la 2-torsion.

C.Q.F.D.

Lemme 1.6.5. - $\tilde{K}O^{-7}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Preuve : Remarquons que

$$G_* \tilde{K}O^{-7}(X_{18}) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Par conséquent $\tilde{K}O^{-7}(X_{18}) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ d'après (0.3.1)

puisque $KU^*(X_{18})$ est sans torsion. Maintenant, la cofibration

$$X_{18} \longrightarrow X \longrightarrow \mathbb{S}^{21}$$

induit le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \tilde{K}O^{-7}(\mathbb{S}^{21}) & \longrightarrow & \tilde{K}O^{-7}(X) & \longrightarrow & \tilde{K}O^{-7}(X_{18}) \longrightarrow 0 \\ & & & & \uparrow d & & \uparrow \\ & & & & \tilde{K}O^{-6}(X) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{K}O^{-6}(X_{18}) \end{array}$$

qui nous permet de conclure.

I.7.- H-espaces de type (3,3,7).

En procédant de la même manière que dans la démonstration de la proposition I.6.1, on vérifie aisément que la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch en KO-théorie pour un H-espace X sans torsion de type (3,3,7) est aussi triviale. Par suite, le calcul des groupes $\tilde{K}O^{-i}(X)$ pour $i = 0, 1, 4$ et 5 se déduit directement des groupes gradués associés respectifs et du lemme 0.3.1.

Lemme I.7.1.- $\tilde{K}O^{-2}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.

Preuve : L'étude de la suite spectrale montre que

$$G_* \tilde{K}O^{-2}(X) \cong E_\infty^{6,-8} \oplus E_\infty^{7,-9} \oplus E_\infty^{10,-12} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Nous devons donc montrer que $F^7 \tilde{K}O^{-2}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.

En écrivant la suite exacte de la paire (X, X_6) , on vérifie que $p^! : \tilde{K}O^{-2}(X/X_6) \rightarrow \tilde{K}O^{-2}(X)$ est un monomorphisme. En effet, $G_* \tilde{K}O^{-3}(X_6) \cong \mathbb{Z}_2$ et donc $\tilde{K}O^{-3}(X_6) \cong \mathbb{Z}_2$. On en déduit que l'inclusion cellulaire $i : X_6 \rightarrow X$ induit un épimorphisme $i^! : \tilde{K}O^{-3}(X) \rightarrow \tilde{K}O^{-3}(X_6)$, ce qui entraîne que $p^!$ est un monomorphisme. Maintenant, comme $F^7 \tilde{K}O^{-2}(X) = \text{Im } p^!$, il suffit de montrer que

$$\tilde{K}O^{-2}(X/X_6) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Posons alors $Y = X/X_6$. Remarquons que $Y_7 \sim \mathbb{S}^7$; nous avons donc le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \dots \rightarrow & \tilde{K}O^{-2}(Y) & \longrightarrow & \tilde{K}O^{-2}(\mathbb{S}^7) \\ & \uparrow & & \uparrow \\ & d & & \\ \dots \rightarrow & \tilde{K}O^{-1}(Y) & \longrightarrow & \tilde{K}O^{-1}(\mathbb{S}^7) \end{array}$$

qui montre que $d \neq 0$. Par conséquent, $\tilde{K}O^{-2}(Y) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ puisque $G_* \tilde{K}O^{-2}(Y) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.

C.Q.F.D.

Lemme 1.7.2.- $\tilde{K}O^{-3}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Preuve : On vérifie aisément que $\tilde{K}O^{-3}(X_7) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, $\tilde{K}O^{-2}(X/X_7) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ et $\tilde{K}O^{-1}(X/X_7) = 0$, en écrivant les groupes gradués associés respectifs. Nous avons donc le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}O^{-3}(X) & \longrightarrow & \tilde{K}O^{-3}(X_7) \\ \uparrow d & & \uparrow \\ \tilde{K}O^{-2}(X) & \longrightarrow & \tilde{K}O^{-2}(X_7) \end{array}$$

qui permet de conclure.

Le calcul des groupes $\tilde{K}O^{-i}(X)$ pour $i = 6$ et 7 s'obtient de la même manière en écrivant le même type de diagramme qu'en 1.7.2., pour les paires (X, X_3) et (X, X_{10}) respectivement.

1.8.- H-espaces de type (3,7,7).

Soit X un H-espace sans torsion de type $(3,7,7)$, alors selon [18] X a le même type d'homotopie que le produit $\mathbb{S}^7 \times E_{k\omega}$ ($k \neq 2, 6$ et 10), où $E_{k\omega}$ est l'espace total d'une \mathbb{S}^3 -fibration principale au-dessus de \mathbb{S}^7 . Les groupes $\tilde{K}O^{-i}(X)$ s'obtiennent alors directement de l'isomorphisme

$$\tilde{K}O^{-i}(\mathbb{S}^7 \times E_{k\omega}) \cong \tilde{K}O^{-i}(\mathbb{S}^7) \oplus \tilde{K}O^{-i}(E_{k\omega}) \oplus \tilde{K}O^{-i}(\mathbb{S}^7 \wedge E_{k\omega})$$

en utilisant les résultats du paragraphe 1.5. Ceci achève donc la démonstration du théorème 1.1.2.

Remarque : La structure d'anneau de $\tilde{K}O(X)$ pour un quelconque des H-espaces X des théorèmes I.1.1 et I.2.2 se déduit aisément du groupe gradué associé $G_* \tilde{K}O(X)$. En fait, si x et y sont deux éléments quelconques de $\tilde{K}O(X)$, on a

$$x^2 = y^2 = xy = 0.$$

I.9.- Opérations d'Adams sur $\tilde{K}O(X)$ pour X de type (3,5,7).

Un H-espace fini simplement connexe sans torsion de type (3,5,7) possède une structure cellulaire de la forme

$$X \sim S^3 \cup_{\alpha} e^5 \cup_{\beta} e^7 \cup_{\gamma} e^8 \cup_{\delta} e^{10} \cup_{\varepsilon} e^{12} \cup_{\zeta} e^{15}.$$

Soit X_7 le 7-ième squelette de X et $p : X \rightarrow X/X_7$ la projection canonique. La structure cellulaire de $Y = X/X_7$ est de la forme

$$Y \sim S^8 \cup_{p_*\delta} e^{10} \cup_{p_*\varepsilon} e^{12} \cup_{p_*\zeta} e^{15}.$$

Lemme I.9.1.- L'application d'attachement $p_*\delta$ est homotopiquement triviale. Il s'ensuit que $\tilde{K}O(X)$ est isomorphe à $\tilde{K}O((S^8 \vee S^{10}) \cup_{p_*\varepsilon} e^{12})$.

Démonstration : L'élément $p_*\delta \in \pi_9(S^8) \cong \mathbb{Z}_2$ est détecté par le carré de Steenrod Sq^2 ([19]). Considérons donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 H^8(X; Z_2) & \xrightarrow{Sq^2} & H^{10}(X; Z_2) \\
 \uparrow p^* & & \uparrow p^* \\
 H^8(Y; Z_2) & \xrightarrow{Sq^2} & H^{10}(Y; Z_2) \\
 \downarrow i^* & & \downarrow i^* \\
 H^8(S^8 \underset{p_*^\delta}{\cup} e^{10}; Z_2) & \longrightarrow & H^{10}(S^8 \underset{p_*^\delta}{\cup} e^{10}; Z_2)
 \end{array}$$

où $i : S^8 \underset{p_*^\delta}{\cup} e^{10} \rightarrow Y$ est l'inclusion cellulaire du 10-ième squelette dans Y .

Remarquons que les flèches verticales sont des isomorphismes. Puisque $Sq^2(x_3 x_5) = x_5^2 = 0$, il s'ensuit que $p_*^\delta = 0$.

Pour la deuxième partie du lemme, rappelons que dans I.3.3, on a montré que

$$p^! : \tilde{K}O(X) \rightarrow \tilde{K}O(Y)$$

est un épimorphisme. Comme $\tilde{K}O(Y) \cong Z \oplus Z$, $p^!$ est en fait un isomorphisme. Maintenant, la cofibration

$$(\mathbb{S}^8 \vee \mathbb{S}^{10}) \underset{p_*^\epsilon}{\cup} e^{12} \xrightarrow{i} Y \rightarrow \mathbb{S}^{15}$$

montre que

$$i^! : \tilde{K}O(Y) \longrightarrow \tilde{K}O((\mathbb{S}^8 \vee \mathbb{S}^{10}) \underset{p_*^\epsilon}{\cup} e^{12})$$

est aussi un isomorphisme. D'où le résultat. \square

Posons $X' = (\mathbb{S}^8 \vee \mathbb{S}^{10}) \underset{p_*^\epsilon}{\cup} e^{12}$ et étudions les opérations d'Adams

sur $\tilde{K}O(X')$. La cofibration

$$\mathbb{S}^8 \vee \mathbb{S}^{10} \xrightarrow{i} X' \xrightarrow{\pi} \mathbb{S}^{12}$$

induit la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \tilde{K}O(\mathbb{S}^{12}) \xrightarrow{\pi!} \tilde{K}O(X') \xrightarrow{i!} \tilde{K}O(\mathbb{S}^8 \vee \mathbb{S}^{10}) \rightarrow 0.$$

Soit $\{x, y\}$ un couple de générateurs de $\tilde{K}O(X') \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ choisis de la manière suivante : $i!(x)$ est un générateur de $\tilde{K}O(\mathbb{S}^8)$ et $i!(y)$ est le générateur de $\tilde{K}O(\mathbb{S}^{10})$ (modulo l'isomorphisme $\tilde{K}O(\mathbb{S}^8 \vee \mathbb{S}^{10}) \cong \tilde{K}O(\mathbb{S}^8) \oplus \tilde{K}O(\mathbb{S}^{10})$). Dans ces conditions, $2y \in \text{Im } \pi!$. D'après les résultats bien connus sur l'action des opérations ψ^k sur la K-théorie des sphères, on a $\psi^k(2y) = k^6 2y$ et donc $\psi^k(y) = k^6 y$. On a aussi $\psi^k(i!(x)) = k^4 i!(x)$. Il existe donc un entier pair a_k tel que

$$\psi^k(x) = k^4 x + a_k y.$$

En utilisant l'égalité $\psi^k \psi^\ell = \psi^\ell \psi^k$, on déduit que

$$k^4 (k^2 - 1) a_\ell = \ell^4 (\ell^2 - 1) a_k.$$

On peut donc définir un "invariant" $\lambda(p_* \varepsilon) \in \mathbb{Q}$ par la formule

$$\lambda(p_* \varepsilon) = \frac{a_k}{k^4 (k^2 - 1)} \quad (k \neq 1 \text{ et } k \neq -1),$$

une fois x choisi.

Remarquons que c'est de cette manière que (dans [1]) Adams définit le e -invariant

$$e : \pi_r^S \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

En particulier

$$e : \pi_{11}(\mathbb{S}^8) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

est un monomorphisme ([1] 7-17).

Considérons maintenant le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{S}^{11} & \xrightarrow{p \circ \varepsilon} & \mathbb{S}^8 \vee \mathbb{S}^{10} \\
 & & \swarrow p_1 \\
 & & \mathbb{S}^8 \\
 & & \searrow p_2 \\
 & & \mathbb{S}^{10}
 \end{array}$$

où p_1 et p_2 sont les projections. Posons $\alpha_1 = p_1 \circ p \circ \varepsilon$ et $\alpha_2 = p_2 \circ p \circ \varepsilon$.

Proposition 1.9.2.- On peut choisir des générateurs x et x_0 de $KO(X')$ et $KO(\mathbb{S}^8 \cup_{\alpha_1} e^{12})$ respectivement, tels que $\lambda(p_* \varepsilon)$ soit un multiple pair de $e(\alpha_1)$.

Démonstration : Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{S}^{11} & \xrightarrow{p \circ \varepsilon} & \mathbb{S}^8 \vee \mathbb{S}^{10} \\
 \parallel & & \downarrow p_1 \\
 \mathbb{S}^{11} & \xrightarrow{\alpha_1} & \mathbb{S}^8
 \end{array}$$

induit le diagramme commutatif (à homotopie près)

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{S}^{11} & \xrightarrow{p \circ \varepsilon} & \mathbb{S}^8 \vee \mathbb{S}^{10} & \xrightarrow{i} & X' & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{S}^{12} \\
 \parallel & & \downarrow p_1 & & \downarrow \psi & & \parallel \\
 \mathbb{S}^{11} & \xrightarrow{\alpha_1} & \mathbb{S}^8 & \longrightarrow & \mathbb{S} \cup_{\alpha_1} e^{12} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{S}^{12}
 \end{array}$$

En appliquant le foncteur $\tilde{K}O$, on obtient

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \tilde{K}O(\mathbb{S}^{12}) & \longrightarrow & \tilde{K}O(X') & \xrightarrow{i^!} & \tilde{K}O(\mathbb{S}^8 \vee \mathbb{S}^{10}) \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \uparrow \psi^! & & \uparrow p_1^! \\
 0 & \longrightarrow & \tilde{K}O(\mathbb{S}^{12}) & \xrightarrow{\pi^!} & \tilde{K}O(\mathbb{S}^8 \cup_{\alpha_1} \mathbb{S}^{12}) & \xrightarrow{i^!} & \tilde{K}O(\mathbb{S}^8) \longrightarrow 0 .
 \end{array}$$

Il s'ensuit que $\psi^!$ est un monomorphisme. Soit $x_0 \in \tilde{K}O(\mathbb{S}^8 \cup_{\alpha_1} \mathbb{S}^{12})$ tel que $i^!(x_0)$ soit un générateur de $\tilde{K}O(\mathbb{S}^8)$ et $y_0 \in \tilde{K}O(\mathbb{S}^8 \cup_{\alpha_1} \mathbb{S}^{12})$ l'image par $\pi^!$ d'un générateur de $\tilde{K}O(\mathbb{S}^{12})$. On a alors

$$\psi^k(x_0) = k^4 x_0 + e(\alpha_1) k^4 (k^2 - 1) y_0.$$

Posons $x = \psi^!(x_0)$. Alors

$$\psi^k(x) = k^4 x + \lambda(p_* \varepsilon) k^4 (k^2 - 1) y$$

où y est tel que $i^!(y)$ est le générateur de $\tilde{K}O(\mathbb{S}^{10})$. Puisque $\psi^!(y_0) = ny$ pour un certain entier pair n , on a bien $\lambda(p_* \varepsilon) = ne(\alpha_1)$.

C.Q.F.D.

Supposons maintenant que X est une $SU(3)$ -fibration principale au-dessus de \mathbb{S}^7 . D'après [9], X est un H-espace, mais nous ne savons pas si tout H-espace fini sans torsion de type $(3,5,7)$ est une $SU(3)$ -fibration principale au-dessus de \mathbb{S}^7 (voir [18]). Nous allons montrer que pour X , l'application $\alpha_1 = p_1 \circ p \circ \varepsilon$ est homotopiquement triviale. Remarquons que ceci est évidemment vrai pour $X = \mathbb{S}^3 \times SU(3)$ d'après la construction cellulaire du produit cartésien. Notons aussi que, pour tout

H-espace de type (3,5,7), l'application $p \circ \varepsilon$ n'est pas homotopiquement triviale, sinon le groupe $\tilde{K}O$ d'un tel espace contiendrait de la 2-torsion. Par conséquent, pour une $SU(3)$ -fibration principale de base \mathbb{S}^7 , l'application $\alpha_2 = p_2 \circ p \circ \varepsilon$, en tant que classe d'homotopie de $\pi_{11}(\mathbb{S}^{10}) \cong \mathbb{Z}_2$, est non nulle et c'est donc la huitième suspension de l'application de Hopf $y : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$.

Proposition 1.9.3. - Soit X une $SU(3)$ -fibration principale de base \mathbb{S}^7 . Alors on peut choisir des générateurs x et y de $\tilde{K}O(X)$ pour lesquels

$$\Psi^k(x) = k^4 x \quad \text{et} \quad \Psi^k(y) = k^6 y.$$

Démonstration : La proposition est vraie pour $\mathbb{S}^3 \times SU(3)$: il suffit d'utiliser l'isomorphisme

$$\tilde{K}O(\mathbb{S}^3 \vee SU(3)) \cong \tilde{K}O(SU(3)) \oplus \tilde{K}O(\mathbb{S}^3 \wedge SU(3)),$$

et le fait que $\tilde{K}O(SU(3)) \cong \tilde{K}O(\mathbb{S}^8)$ (I.2.2). On pourrait aussi remarquer que, puisque $\alpha_1 = 0$, d'après I.9.2 $\lambda(p_* \varepsilon) = 0$ pour un certain $x \in \tilde{K}O(\mathbb{S}^3 \times SU(3))$ et donc $\Psi^k(x) = k^4 x$.

Rappelons maintenant qu'il y a quatre $SU(3)$ -fibrations principales, X_0, X_1, X_2 et X_3 avec des types d'homotopie distincts [9] : $X_0 = \mathbb{S}^3 \times SU(3)$, $X_1 = SU(4)$, X_2 et X_3 sont construits à l'aide du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 X_0 & \xrightarrow{\psi_m} & X_n & \xrightarrow{\psi_n} & X_1 & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \mathbb{S}^7 & \xrightarrow{m} & \mathbb{S}^7 & \xrightarrow{n} & \mathbb{S}^7 & \xrightarrow{\alpha} & BSU(3)
 \end{array}$$

où $\alpha \in \pi_7(\text{BSU}(3)) \cong \pi_6(\text{SU}(3)) \cong \mathbb{Z}_6$ est un générateur convenablement choisi et $nm = 6$ avec $n = 2$ ou 3 . Montrons que ψ_m induit un monomorphisme

$$\psi_m^! : \tilde{K}O(X_n) \longrightarrow \tilde{K}O(X_0) \quad \text{pour } m = 2 \text{ ou } 3.$$

On vérifie aisément que $\psi_m^* : H^*(X_n; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X_0; \mathbb{Z})$ est un isomorphisme en dimensions 3, 5 et 8, et un monomorphisme (multiplication par m) dans les autres dimensions. Rappelons (I.3.3) que

$$G_* \tilde{K}O(X) \cong E_2^{8, -8} \oplus E_2^{10, -10} \oplus E_2^{12, -12} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}.$$

Nous avons donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F^{12\tilde{\nu}} \tilde{K}O(X_n) & \longrightarrow & F^{10\tilde{\nu}} \tilde{K}O(X_n) & \longrightarrow & H^{10}(X_n; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \psi_m^! & & \downarrow \psi_m^! & & \downarrow \psi_m^* \\ 0 & \longrightarrow & F^{12\tilde{\nu}} \tilde{K}O(X_0) & \longrightarrow & F^{10\tilde{\nu}} \tilde{K}O(X_0) & \longrightarrow & H^{10}(X_0; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Si $m = 3$, alors ψ_m^* est un isomorphisme et on déduit immédiatement que $\psi_m^! : F^{10\tilde{\nu}} \tilde{K}O(X_n) \rightarrow F^{10\tilde{\nu}} \tilde{K}O(X_0)$ est injectif. Si $m = 2$, alors $\psi_m^* = 0$; mais $F^{10\tilde{\nu}} \tilde{K}O(X_n) \cong \mathbb{Z}$, donc si $x \in F^{10\tilde{\nu}} \tilde{K}O(X_n)$ alors $2x \in F^{12\tilde{\nu}} \tilde{K}O(X_n)$, et, par conséquent, $\psi_m^!(x) \neq 0$. Maintenant le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F^{10\tilde{\nu}} \tilde{K}O(X_n) & \longrightarrow & \tilde{K}O(X_n) & \longrightarrow & H^8(X_n; \mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \psi_m^! & & \downarrow \psi_m^! & & \cong \downarrow \psi_m^* \\ 0 & \longrightarrow & F^{10\tilde{\nu}} \tilde{K}O(X_0) & \longrightarrow & \tilde{K}O(X_0) & \xrightarrow{\nu} & H^8(X_0; \mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

entraîne que $\psi_m^! : \tilde{K}O(X_n) \rightarrow \tilde{K}O(X_0)$ est un monomorphisme. Soit alors x_0 un générateur de $\tilde{K}O(X_0)$ pour lequel $\psi^k(x_0) = k^4 x_0$. Il s'ensuit que $v(x_0)$ est un générateur de $H^8(X_0; \mathbb{Z})$. Par conséquent, il existe un générateur $x \in \tilde{K}O(X_n)$ tel que $\psi_m^!(x) = x_0$. Puisque $\psi_m^!$ est injectif, on déduit que $\psi^k(x) = k^4 x$.

Enfin, pour X_1 , puisque la propriété est vraie pour X_n ($n = 2$ ou 3), on procède de la même manière en remarquant que

$$\psi_n^! : \tilde{K}O(X_1) \rightarrow \tilde{K}O(X_n)$$

est aussi un monomorphisme. \square

Corollaire I.9.4. - Pour toute $SU(3)$ -fibration principale au-dessus de S^7 , l'application $\alpha_1 = p_1 \circ p \circ \varepsilon$ est homotopiquement triviale.

Preuve : Il suffit d'utiliser I.9.2, I.9.3 et le fait que

$$e : \pi_{11}(S^8) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

est injectif [1].

CHAPITRE II

K-THEORIE REELLE DES H-ESPACES DE MEME TYPE QUE $SU(n)$.

II.1. - H-espaces de type $(3, 5, \dots, 2n+1)$ avec n quelconque.

Dans ce paragraphe, nous démontrons le résultat suivant :

Théorème II.1.1. - Soit X un H-espace fini sans torsion de type $(3, 5, \dots, 2n+1)$ ($n \geq 1$) engendré par les éléments primitifs. Alors les groupes $KO^{-i}(X)$ pour $i = 0, 4$ et 5 sont sans torsion.

La démonstration se fait en 3 étapes :

1ère étape : On donne des renseignements sur la torsion des groupes $KO^{-i}(X)$ dans le cas où X est un CW-complexe fini sans torsion (Proposition II.1.2).

2ème étape : On étudie certains termes de la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch en utilisant l'action de l'algèbre de Steenrod $A(2)$ sur la cohomologie d'un H-espace sans torsion de type $(3, 5, \dots, 2n+1)$ (Proposition II.1.3).

3ème étape : Démonstration du théorème.

1ère étape :

Proposition II.1.2.- Soit X un CW-complexe fini sans torsion et soit $z \in \tilde{K}O^{p-1}(X)$ ($p \in \mathbb{Z}$) un élément de torsion. Alors, si $z \in F^{p+1} \tilde{K}O^{p-1}(X)$, il existe $y \in F^{p+1} \tilde{K}O^p(X)$ tel que $d(y) = z$ où d est l'opération de la suite exacte de Bott 0.3.

Démonstration : Soit $\pi : X \rightarrow X/X_p$ la projection canonique consistant à identifier le p -ième squelette X_p de X à un point. Nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & \tilde{K}O^p(X/X_p) & \xrightarrow{d} & \tilde{K}O^{p-1}(X/X_p) & \xrightarrow{c} & \tilde{K}U^{p-1}(X/X_p) \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow \pi^! & & \downarrow \pi^! & & \downarrow \pi^! \\
 \dots & \longrightarrow & \tilde{K}O^p(X) & \xrightarrow{d} & \tilde{K}O^{p-1}(X) & \xrightarrow{c} & \tilde{K}U^{p-1}(X) \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow i^! & & \\
 \dots & \longrightarrow & \tilde{K}O^p(X_p) & \longrightarrow & \tilde{K}O^{p-1}(X_p) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & &
 \end{array}$$

Soit $z \in F^{p+1} \tilde{K}O^{p-1}(X)$ comme dans l'énoncé, donc tel que $2z = 0$ et $i^!(z) = 0$. Il existe donc $x \in \tilde{K}O^{p-1}(X/X_p)$ tel que $\pi^!(x) = z$. Si x est un élément de torsion, il existe $a \in \tilde{K}O^p(X/X_p)$ tel que $d(a) = x$. En effet, remarquons que $H^*(X/X_p; \mathbb{Z})$ est sans torsion ce qui nous permet d'appliquer le lemme 0.3.1. Dans ces conditions, l'élément $y = \pi^!(a)$ est tel que $d(y) = z$ et $y \in F^{p+1} \tilde{K}O^p(X)$. La proposition sera donc démontrée si nous montrons que x est nécessairement un élément de torsion finie.

A cet effet, remarquons que $c\pi^!(x) = 0$ car $0 = 2z = 2\pi^!(x)$. Supposons maintenant par l'absurde que $c(x) \neq 0$, c'est-à-dire que x est un élément de torsion infinie et posons $Y = X/X_p$. Le groupe gradué associé à la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch pour Y est de la forme :

$$G_* \tilde{K}O^{p-1}(Y) \cong E_{\infty}^{p+1, -2}(Y) \oplus \dots \oplus E_{\infty}^{m, -m+p-1}(Y) \quad (m = \dim Y).$$

Puisque

$$E_{\infty}^{p+1, -2}(Y) \simeq \frac{F^{p+1} \tilde{K}O^{p-1}(Y)}{F^{p+2} \tilde{K}O^{p-1}(Y)}$$

est un groupe de 2-torsion, il s'ensuit que $2x \in F^{p+2} \tilde{K}O^{p-1}(Y)$.

Soit $i : Y_{p+1} \rightarrow Y$ l'inclusion cellulaire du $(p+1)$ -ième squelette Y_{p+1} dans Y . Alors $i^!(2x) = 0$ et donc $i^!c(2x) = 0$. Comme $\tilde{K}U^*(Y)$ et $\tilde{K}U^*(Y_{p+1})$ sont sans torsion, il s'ensuit que $i^!c(x) = 0$, c'est-à-dire $c(x) \in F^{p+2} \tilde{K}U^{p-1}(Y)$. Soit maintenant

$$\text{ch} : \tilde{K}U^*(Y) \rightarrow \tilde{H}^*(Y; \mathbb{Q})$$

le caractère de Chern. Alors, d'après [3], on a

$$\text{ch}(c(x)) = a + \text{termes de plus haut degré, avec } a \in H^q(Y; \mathbb{Z})$$

où $q \geq p+2$. De plus, ch est un monomorphisme et on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}U^*(Y) & \xrightarrow{\text{ch}} & \tilde{H}^*(Y; \mathbb{Q}) \\ \downarrow \pi^! & & \downarrow \pi^* \\ \tilde{K}U^*(X) & \xrightarrow{\text{ch}} & \tilde{H}^*(X; \mathbb{Q}) \end{array}$$

Or $\pi^* : H^q(Y; \mathbb{Q}) \rightarrow H^q(X; \mathbb{Q})$ est un isomorphisme pour $q \geq p+2$. Il s'ensuit que $\pi^* \text{ch}(c(x)) \neq 0$, donc $\pi^! c(x) = c\pi^!(x) \neq 0$ et on a une contradiction.

C.Q.F.D.

2ème étape :

Proposition II.1.3.- Soit X un H -espace fini sans torsion de type $(3, 5, \dots, 2n+1)$ ($n \geq 1$) dont la cohomologie est engendrée par les éléments primitifs. Alors, dans la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch en $\tilde{K}O$ -théorie, on a

$$E_3^{p, -1}(X) = 0 \quad \text{pour } p \equiv 1, 2, 4, 5 \text{ ou } 6 \pmod{8}.$$

Démonstration : On a

$$H^*(X; \mathbb{Z}_2) = \Lambda(x_3, x_5, \dots, x_{2n+1}).$$

Les générateurs x_{2j+1} , $1 \leq j \leq n$, étant primitifs, on a, selon [20],

$$\text{Sq}^2 x_{2j+1} = \binom{2j+1}{2} x_{2j+3} = \begin{cases} x_{2j+3} & \text{si } j \text{ est impair et } j < n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Vu la caractérisation des différentielles $d_2^{p, q}$ donnée en 0.4, nous devons montrer que la suite

$$E_2^{p-2, 0}(X) \xrightarrow{\text{Sq}^2 \circ \rho} E_2^{p, -1}(X) \xrightarrow{\text{Sq}^2} E_2^{p+2, -2}(X)$$

est exacte en $E_2^{p, -1}(X)$ lorsque $p \equiv 1, 2, 4, 5$ ou $6 \pmod{8}$. Notons que, puisque $H^*(X; \mathbb{Z}_2)$ est sans torsion, ρ est un épimorphisme et $\text{Sq}^1(H^*(X; \mathbb{Z}_2)) = 0$. Soit alors ξ un élément de $H^p(X; \mathbb{Z}_2)$; ξ est une somme finie d'éléments de la forme :

$$x(j_1, \dots, j_\alpha) = x_{2j_1+1} \cdot x_{2j_2+1} \cdots x_{2j_\alpha+1}$$

avec $\sum_{i=1}^{\alpha} (2j_i+1) = p$ et $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_\alpha \leq n$.

Si $Sq^2 \xi = 0$, alors $Sq^2 x(j_1, \dots, j_\alpha) = 0$ pour toute suite

(j_1, \dots, j_α) , ou bien, il existe des couples $(j_1, \dots, j_\alpha), (k_1, \dots, k_\beta)$ pour lesquels $Sq^2 x(j_1, \dots, j_\alpha) = Sq^2 x(k_1, \dots, k_\beta)$. Etudions d'abord ce dernier cas.

D'après la formule de Cartan, on a :

$$Sq^2 x(j_1, \dots, j_\alpha) = \sum_{i=1}^{\alpha} x_{2j_1+1} \cdots Sq^2 x_{2j_i+1} \cdots x_{2j_\alpha+1} \cdot$$

Si $Sq^2 x(j_1, \dots, j_\alpha) = Sq^2 x(k_1, \dots, k_\beta)$ alors il existe i_0 et i_1 ,

$1 \leq i_0 \leq \alpha$, $1 \leq i_1 \leq \beta$ (supposons que $i_0 < i_1$) tels que

$$x_{2j_1+1} \cdots Sq^2 x_{2j_{i_0}+1} \cdots x_{2j_\alpha+1} = x_{2k_1+1} \cdots Sq^2 x_{2k_{i_1}+1} \cdots x_{2k_\beta+1}.$$

Il s'ensuit que $\alpha = \beta$, $j_i = k_i$ pour tout $i \neq i_0, i_1$,

$j_{i_0} = k_{i_0} - 1$ et $j_{i_1} = k_{i_1} + 1$. De plus

$$x_{2j_1+1} \cdots Sq^2 x_{2j_i+1} \cdots x_{2j_\alpha+1} = 0 \text{ pour tout } i \neq i_0.$$

Dans ces conditions, l'élément $y \in H^{p-2}(X; \mathbb{Z}_2)$ défini par

$$y = x_{2j_1+1} \cdots x_{2j_{i_1-1}+1} \cdot x_{2k_{i_1}+1} \cdot x_{2j_{i_1+1}+1} \cdots x_{2j_\alpha+1}$$

est tel que

$$Sq^2 y = x_{(j_1, \dots, j_\alpha)} + x_{(k_1, \dots, k_\beta)}.$$

Par conséquent, il nous suffit maintenant de montrer que si $x_p = x_{(j_1, \dots, j_\alpha)}$ est un élément du noyau de Sq^2 , il existe $y \in H^{p-2}(X; \mathbb{Z}_2)$ tel que $Sq^2 y = x_p$ pour toute suite $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_\alpha \leq n$ tel que

$$\sum_{i=1}^{\alpha} (2j_i + 1) = p \text{ et } p \equiv 1, 2, 4, 5 \text{ ou } 6 \pmod{8}.$$

Remarquons que $x_p \in \text{Ker } Sq^2$ si et seulement si

$$x_{2j_1+1} \cdots Sq^2 x_{2j_i+1} \cdots x_{2j_\alpha+1} = 0 \text{ pour chaque } i, 1 \leq i \leq \alpha.$$

Nous avons alors deux possibilités pour chaque i :

soit $Sq^2 x_{2j_i+1} = 0$ auquel cas j_i est pair ou $i = \alpha$ et $j_\alpha = n$

soit $Sq^2 x_{2j_i+1} \neq 0$ et alors $x_{2j_{i+1}+1} = x_{2j_i+3}$ (i.e. $j_{i+1} = j_i + 1$).

Maintenant, remarquons que s'il existe i_0 , $1 < i_0 \leq \alpha$ ($i_0 < \alpha$, si $j_\alpha = n$ avec n impair) tel que $Sq^2 x_{2j_{i_0}+1} = 0$ et $j_{i_0-1} < j_{i_0} - 1$, alors j_{i_0} est pair et l'élément

$$y = x_{2j_1+1} \cdots x_{2j_{i_0-1}+1} \cdot x_{2j_{i_0}-1} \cdot x_{2j_{i_0}+1} \cdots x_{2j_\alpha+1} \in H^{p-2}(X; \mathbb{Z}_2)$$

est tel que $Sq^2 y = x_p$. Par conséquent, si un tel i_0 existe lorsque $p \equiv 1, 2, 4, 5$ ou $6 \pmod{8}$, la proposition est démontrée. Nous nous plaçons alors dans la situation la plus défavorable en faisant l'hypothèse suivante :

Hypothèse A : Supposons que pour chaque i , $1 < i \leq \alpha$ ($i < \alpha$ si $j_\alpha = n$ avec n impair) tel que $Sq^2 x_{2j_i+1} = 0$, on ait $j_{i-1} = j_i - 1$.

1er cas : $p \equiv 1$ ou $5 \pmod{8}$.

Supposons d'abord $j_\alpha < n$ ou $j_\alpha \leq n$ si n est pair. Puisque $Sq^2 x_{2j_\alpha+1} = 0$, d'après A, on a $j_{\alpha-1} = j_\alpha - 1$. Il s'ensuit que $j_{\alpha-1}$ est impair ce qui entraîne que $Sq^2 x_{2j_{\alpha-2}+1} = 0$, sinon on aurait

$j_{\alpha-1} = j_{\alpha-2} + 1$ et $j_{\alpha-1}$ serait pair. Donc, d'après A, $j_{\alpha-3} = j_{\alpha-2} - 1$.

En continuant ce procédé, on obtient la suite suivante (rappelons que α est impair car p est impair) :

$$\begin{aligned} & j_1 \\ & j_2, \quad j_2+1 = j_3 \\ & j_4, \quad j_4+1 = j_5 \\ & \quad \quad \quad \vdots \\ & j_{\alpha-1}, j_{\alpha-1}+1 = j_\alpha \end{aligned}$$

où $j_2, j_4, \dots, j_{\alpha-1}$ sont des entiers impairs. On déduit alors que j_1 est pair, sinon on aurait $j_1+1 = j_2$ qui serait pair. Dans ces conditions, l'élément $y \in H^{p-2}(X; \mathbb{Z}_2)$ défini par

$$y = x_{2j_1-1} \cdot x_{2j_2+1} \cdots x_{2j_\alpha+1}$$

est tel que $Sq^2 y = x_p$. Il s'ensuit que lorsque n est pair, le terme $E_3^{p,-1}(X)$ est nul pour tout entier p impair avec la condition $p < \dim X$.

Supposons maintenant que $j_\alpha = n$ avec n impair. Alors $j_{\alpha-1}$ est nécessairement pair, sinon on aurait $Sq^2 x_{2j_{\alpha-1}+1} = x_{2j_\alpha+1}$ et j_α

serait pair. D'après l'hypothèse A, on a donc $j_{\alpha-2} = j_{\alpha-1}^{-1}$.

En continuant ce même procédé, on obtient la suite suivante :

$$\begin{aligned} j_1, j_2 &= j_1^{+1} \\ j_3, j_4 &= j_3^{+1} \\ &\vdots \\ j_{\alpha-2}, j_{\alpha-1} &= j_{\alpha-2}^{+1} \\ j_\alpha &= n \end{aligned}$$

avec $j_2, j_4, \dots, j_{\alpha-1}$ des entiers pairs. Puisque $p = \sum_{i=1}^{\alpha} (2j_i + 1)$, on déduit que

$$p = 4j_2 + 4j_4 + \dots + 4j_{\alpha-1} + 2n + 1$$

c'est-à-dire, $p \equiv 2n+1 \pmod{8}$. Comme $p \equiv 1$ ou $5 \pmod{8}$, ceci entraîne que n est pair. Par conséquent, l'hypothèse A n'est pas vérifiée dans ce cas. Ceci termine donc la démonstration de la proposition pour $p \equiv 1$ ou $5 \pmod{8}$.

2ème cas : $p \equiv 2, 4$ ou $6 \pmod{8}$.

Supposons d'abord $j < n$ ou $j \leq n$ si n est pair. En procédant de la même manière que précédemment en supposant que l'hypothèse A est vérifiée, on obtient la suite suivante (rappelons que dans ce cas α est pair) :

$$\begin{aligned} j_1, j_1^{+1} &= j_2 \\ j_3, j_3^{+1} &= j_4 \\ &\vdots \\ j_{\alpha-1}, j_{\alpha-1}^{+1} &= j_\alpha \end{aligned}$$

où $j_2, j_4, \dots, j_\alpha$ sont des entiers pairs. Puisque $p = \sum_{i=1}^{\alpha} (2j_i+1)$, on obtient

$$p = 4j_2 + 4j_4 + \dots + 4j_\alpha$$

c'est-à-dire, $p \equiv 0 \pmod{8}$. L'hypothèse n'est donc pas vérifiée dans ce cas.

Supposons maintenant que $j_\alpha = n$ avec n impair. Alors $j_{\alpha-1}$ est nécessairement pair et en supposant que A est vérifiée, on obtient la suite

$$\begin{aligned} & j_1 \\ j_2, j_2+1 &= j_3 \\ j_4, j_4+1 &= j_5 \\ & \vdots \\ j_{\alpha-2}, j_{\alpha-2}+1 &= j_{\alpha-1} \\ j_\alpha &= n \end{aligned}$$

où $j_2, j_4, \dots, j_\alpha$ sont des entiers impairs. Il s'ensuit que j_1 est pair (sinon $j_2 = j_1+1$ et j_2 serait pair) et l'élément

$$y = x_{2j_1-1} \cdot x_{2j_2+1} \cdots x_{2j_\alpha+1} \in H^{p-2}(X; \mathbb{Z}_2)$$

est tel que $Sq_p^2 y = x_p$. La proposition est donc complètement démontrée.

3ème étape : Démonstration du théorème II.1.1.

Remarquons d'abord que si $m = \dim X$, on a

$$m = \sum_{j=1}^n (2j+1) = n(n+2)$$

et que $n(n+2) \equiv 0, 3$ ou $7 \pmod{8}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Etudions d'abord

les groupes $\tilde{K}O^{-i}(X)$ pour $i = 0$ ou 4 . Le terme $E_{\infty}^{m, -m}(X)$ (resp. $E_{\infty}^{m, -m-4}(X)$) est libre si $m \equiv 0 \pmod{8}$ d'après le lemme 0.4.1, et est trivial si $m \equiv 3$ ou $7 \pmod{8}$. Dans ce dernier cas, le groupe $E_{\infty}^{m-3, -(m-3)}(X)$ (resp. $E_{\infty}^{m-3, -(m-3)-4}(X)$) est libre.

D'autre part, si $\tilde{K}O^{-i}(X)$ possède des éléments de torsion pour $i = 0$ ou 4 , alors d'après 0.4.1 et II.1.3, ils ne peuvent provenir que des groupes $F^{p\tilde{K}O^q}(X)$ pour $p \equiv 2 \pmod{8}$ si $q \equiv 0 \pmod{8}$ et $p \equiv 6 \pmod{8}$ si $q \equiv 4 \pmod{8}$. Soit alors $x \in F^{p\tilde{K}O^q}(X)$ un élément de torsion (i.e. $2x = 0$) où p est le plus grand entier inférieur à $m = n(n+2)$ avec $p \equiv 2 \pmod{8}$ si $q \equiv 0 \pmod{8}$ ou $p \equiv 6 \pmod{8}$ si $q \equiv 4 \pmod{8}$. Dans ces conditions, selon II.1.2, il existe $y \in F^{p\tilde{K}O^{q+1}}(X)$ tel que $d(y) = x$; mais d'après II.1.3, $E_{\infty}^{p, -p+q+1}(X) = 0$. Par conséquent, $y \in F^{p+1\tilde{K}O^{q+1}}(X) = F^{p\tilde{K}O^{q+1}}(X)$ et donc $x \in F^{p+1\tilde{K}O^q}(X)$. Or, ce dernier groupe est sans torsion d'après le choix que nous avons fait de l'entier p . Il s'ensuit que $x = 0$ et $F^{p\tilde{K}O^q}(X)$ est aussi sans torsion. Une simple itération sur le choix de p permet maintenant de déduire le résultat. Pour $\tilde{K}O^{-5}(X)$, vérifions que le premier groupe $F^{p\tilde{K}O^{-5}}(X)$ non trivial, où p est le plus grand entier inférieur ou égal à $m = n(n+2)$, est sans torsion. Si $m \equiv 3$ ou $7 \pmod{8}$, alors $F^{m\tilde{K}O^{-5}}(X) = E_{\infty}^{m, -m-5}(X)$ est libre car $-m-5 \equiv 0$ ou $4 \pmod{8}$ respectivement. Si $m \equiv 0 \pmod{8}$ alors $E_{\infty}^{m, -m-5}(X) = 0$ et aussi $E_{\infty}^{m-3, -m-2}(X) = 0$. En effet

$$E_2^{m-3, -m-2}(X) = H^{m-3}(X; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$$

dont le générateur est $x_5, x_7, \dots, x_{2n+1}$. Or

$$Sq^2(x_3 x_7 x_9 \dots x_{2n+1}) = x_5 x_7 \dots x_{2n+1},$$

c'est-à-dire, la différentielle

$$d_2 = Sq^2 : E_2^{m-5, -1}(X) \rightarrow E_2^{m-3, -2}$$

est un épimorphisme. Par conséquent, $E_3^{m-2, -2}(X) = 0$. Enfin, puisque $H^{m-4}(X; \mathbb{Z}_2) = 0$, le premier terme non nul est donc

$$E_\infty^{m-5, -m}(X) = F^{m-5} \overset{\vee}{KO}^{-5}(X)$$

qui est sans torsion car $m \equiv 0 \pmod{8}$. En procédant maintenant de la même manière que précédemment, on remarque que si $\overset{\vee}{KO}^{-5}(X)$ possède des éléments de torsion, alors ils ne peuvent provenir que des groupes $F^p \overset{\vee}{KO}^{-5}(X)$ pour $p \equiv 5 \pmod{8}$. Soit donc $x \in F^p \overset{\vee}{KO}^{-5}(X)$ tel que $2x = 0$ avec p le plus grand entier inférieur à m tel que $p \equiv 5 \pmod{8}$. En utilisant II.1.2 et II.1.3, on vérifie que $x \in F^{p+1} \overset{\vee}{KO}^{-5}(X)$ et donc $x = 0$. Une simple itération permet maintenant de conclure.

C.Q.F.D.

Corollaire II.1.4. - Si n est pair alors les groupes $\overset{\vee}{KO}^{-i}(X)$ pour $i \neq 1$ et 2 sont sans torsion.

Preuve : Nous devons montrer que les groupes $\overset{\vee}{KO}^{-i}(X)$ pour $i = 3, 6$ et 7 sont sans torsion. Nous avons remarqué dans la démonstration de II.1.3 que si n est pair, les termes $E_3^{p, -1}(X)$ sont nuls pour tout entier p impair ($p < m = \dim X$). D'autre part, puisque $m = n(n+2) \equiv 0 \pmod{8}$, les termes $E_\infty^{m, -m-3}(X)$ est $E_\infty^{m, -m-7}(X)$ sont nuls et $E_\infty^{m-3, -m}(X)$, $E_\infty^{m-3, -m-4}(X)$ sont sans torsion. Enfin, on vérifie aussi aisément que $F^{m-10} \overset{\vee}{KO}^{-6}(X)$ est sans torsion du fait que $E_\infty^{m-5, -1}(X) = 0$. Le corollaire se démontre maintenant de la même manière que II.1.1.

II.2. - H-espaces de type (3,5,7,9).

Dans ce cas, $n = 4$. Des résultats du paragraphe précédent, on déduit aisément que

$$\begin{aligned} \tilde{K}O^{-i}(X) &\cong \mathbb{Z}^{(5)} && \text{pour } i = 0 \text{ et } 4 \\ \tilde{K}O^{-i}(X) &\cong \mathbb{Z}^{(4)} && \text{pour } i = 3, 5 \text{ et } 7 \\ \tilde{K}O^{-6}(X) &\cong \mathbb{Z}^{(2)}. \end{aligned}$$

Dans ce paragraphe, nous calculons les groupes $\tilde{K}O^{-i}(X)$ pour $i = 1$ et 2.

Calcul de $\tilde{K}O^{-2}(X)$.

Lemme II.2.1. - Soit X_5 le 5-ième squelette de X et $p : X \rightarrow X/X_5$ la projection canonique. Alors, p induit un isomorphisme

$$p^! : \tilde{K}O^{-2}(X/X_5) \rightarrow \tilde{K}O^{-2}(X).$$

Preuve : On procède exactement de la même manière que le lemme I.4.3, les arguments étant les mêmes. \square

Proposition II.2.2. - $\tilde{K}O^{-2}(X) \cong \mathbb{Z}^{(2)} \oplus \mathbb{Z}_2^{(3)}$.

La démonstration de cette proposition se fait en trois étapes.

Posons $Y = X/X_5$ et considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}O^{-2}(Y) & \xrightarrow{i^!} & \tilde{K}O^{-2}(Y_{14}) \\ \uparrow d & & \uparrow d_1 \\ \tilde{K}O^{-1}(Y) & \xrightarrow{i_1^!} & \tilde{K}O^{-1}(Y_{14}) \end{array}$$

La première étape consiste à montrer que

$$\text{Ker } i^! = F^{15\vee} \text{KO}^{-2}(Y) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

La deuxième consiste à montrer que $\tilde{\text{KO}}^{-2}(Y_{14}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$,

ce qui montre que $d_1 \neq 0$. Enfin, on démontre que $i_1^!$ est un épimorphisme.

La proposition II.2.2 résulte immédiatement de ces résultats puisque

$$G_* \tilde{\text{KO}}^{-2}(Y) \cong E_\infty^{8,-10} \oplus E_\infty^{10,-12} \oplus E_\infty^{14,-16} \oplus E_\infty^{16,-18} \oplus E_\infty^{24,-26}$$

et $\tilde{\text{KO}}^{-2}(Y) \cong \tilde{\text{KO}}^{-2}(X)$ d'après II.2.1.

Lemme II.2.3. - $\text{Ker } i^! = F^{15\vee} \text{KO}^{-2}(Y) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Preuve : En utilisant 0.4.1. et II.1.3., on vérifie aisément que

$$E_\infty^{16,8k-2}(Y) = E_2^{16,8k-2}(Y) \cong \mathbb{Z}_2 \quad \text{et} \quad E_\infty^{24,8k-2}(Y) = E_4^{24,8k-2}(Y).$$

Nous devons maintenant montrer que $E_4^{24,8k-2}(Y) = E_2^{24,8k-2}(Y)$.

A cet effet, il suffit de montrer que la différentielle

$$d_3 : E_3^{21,8k}(X) \rightarrow E_3^{24,8k-2}(X)$$

est nulle. Pour cela nous utilisons le même argument qu'en I.4.2. Plus précisément, X a une structure cellulaire de la forme

$$X \sim X_{19} \cup_\alpha e^{21} \cup_\beta e^{24}.$$

Soit $p : X \rightarrow X/X_{19} \sim \mathbb{S}^{21} \cup_{p_*\beta} e^{24}$ la projection canonique.

Nous avons alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 H^{21}(X; \mathbb{Z}) = E_3^{21, 8k}(X) & \xrightarrow{d_3} & E_3^{24, 8k-2}(X) = H^{24}(X; \mathbb{Z}_2) \\
 \uparrow \cong p_* & & \uparrow \cong p_* \\
 H^{21}(\mathcal{S}^{21} \cup_{p_*\beta} e^{24}; \mathbb{Z}) = E_3^{21, 8k}(\mathcal{S}^{21} \cup_{p_*\beta} e^{24}) & \xrightarrow{d_3} & E_3^{24, 8k-2}(\mathcal{S}^{21} \cup_{p_*\beta} e^{24}) = H^{24}(\mathcal{S}^{21} \cup_{p_*\beta} e^{24}; \mathbb{Z}_2)
 \end{array}$$

Or, d'après Browder-Spanier,

$$\beta \in \text{Ker}(\Sigma^N : \pi_{23}(X_{21}) \longrightarrow \pi_{23+N}(\Sigma^N X_{21})).$$

Donc

$$p_*\beta \in \text{Ker}(\Sigma^N : \pi_{23}(\mathcal{S}^{21}) \longrightarrow \pi_{23+N}(\mathcal{S}^{21+N}))$$

pour un certain entier N . Comme ce dernier noyau est trivial, $p_*\beta = 0$ et donc $d_3 = 0$.

Maintenant on a $F^{15\vee} \text{KO}^{-2}(Y) = F^{16\vee} \text{KO}^{-2}(Y)$ puisque $E_3^{15, 8k-1}(Y) = 0$.

Enfin,

$$\frac{F^{16\vee} \text{KO}^{-2}(Y)}{F^{17\vee} \text{KO}^{-2}(Y)} \cong E_\infty^{16, -18}(Y) \cong \mathbb{Z}_2 \quad \text{et} \quad F^{17\vee} \text{KO}^{-2}(Y) = F^{24\vee} \text{KO}^{-2}(Y) \cong \mathbb{Z}_2.$$

Le lemme 0.3.1 permet de conclure. \square

Lemme II.2.4. - $\text{KO}^{-2}(Y_{14}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.

Preuve : Puisque $E_3^{7, 8k-1}(X) = 0$, on a

$$G_* \text{KO}^{-2}(Y_{14}) \cong E_\infty^{8, -10}(Y_{14}) \oplus E_\infty^{10, -12}(Y_{14}) \oplus E_\infty^{14, -16}(Y_{14}) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{K}O^{-2}(Z) & \longrightarrow & \tilde{K}O^{-2}(Z_9) \\
 \uparrow d & & \uparrow d_1 \\
 \tilde{K}O^{-1}(Z) & \xrightarrow{i^!} & \tilde{K}O^{-1}(Z_9)
 \end{array}$$

où on a posé $Z = Y_{14}$. Remarquons que $\tilde{K}O^{-2}(Z_9) \cong \mathbb{Z}_2$ ce qui entraîne que $d_1 \neq 0$. Montrons maintenant que $i^!$ est un épimorphisme. A cet effet, d'après la suite exacte de paire (Z, Z_9) , il suffit de montrer que $p^! : \tilde{K}O(Z/Z_9) \rightarrow \tilde{K}O(Z)$ est un monomorphisme. Vérifions d'abord que $\tilde{K}O(Z/Z_9)$ et $\tilde{K}O(Z)$ sont sans torsion. On a

$$G_* \tilde{K}O^1(Z/Z_9) \cong E_\infty^{10, -9}(Z/Z_9).$$

Du fait que $Sq^2(x_3 x_7) = x_5 x_7 + x_3 x_9$, on vérifie aisément que $E_3^{10, -9}(Z/Z_9) = 0$. Par conséquent $\tilde{K}O^1(Z/Z_9) = 0$, ce qui entraîne que $\tilde{K}O(Z/Z_9)$ est sans torsion. Pour $\tilde{K}O(Z)$, on a

$$F^{10\tilde{K}O} \tilde{K}O(Z) = \text{Im}(\tilde{K}O(Z/Z_9) \xrightarrow{p^!} \tilde{K}O(Z)).$$

Si $\tilde{K}O(Z)$ avait de la torsion, alors $F^{10\tilde{K}O} \tilde{K}O(Z) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$. Or $\tilde{K}O(Z/Z_9) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, par conséquent $\tilde{K}O(Z)$ est sans torsion. En utilisant maintenant le morphisme de complexification et le caractère de Chern en remarquant que

$$p^* : H^{\text{pair}}(Z/Z_9; \mathbb{Q}) \rightarrow H^{\text{pair}}(Z; \mathbb{Q})$$

est un monomorphisme (Z ayant une seule cellule en dimension 10), on déduit que $p^!$ est bien un monomorphisme. Par conséquent $i^!$ est un épimorphisme et $d \neq 0$.

C.Q.F.D.

Lemme II.2.5.- $i^! : \tilde{K}O^{-1}(Y) \rightarrow \tilde{K}O^{-1}(Y_{14})$ est un épimorphisme.

Preuve : On procède de la même manière que le lemme précédent pour montrer que $p^! : \tilde{K}O(Y/Y_{14}) \rightarrow \tilde{K}O(Y)$ est un monomorphisme.

Le lemme s'en déduit d'après la suite spectrale de la paire (Y, Y_{14}) .

Ce lemme complète donc la démonstration de II.2.2.

Calcul de $\tilde{K}O^{-1}(X)$.

Soit X_{16} le 16-ième squelette de X et considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}O^{-1}(X) & \xrightarrow{i^!} & \tilde{K}O^{-1}(X_{16}) \\ \uparrow d & & \uparrow d_1 \\ \tilde{K}O(X) & \xrightarrow{i_1^!} & \tilde{K}O(X_{16}) \end{array} .$$

Pour calculer $\tilde{K}O^{-1}(X)$, on procèdera de la manière suivante : d'abord, on montrera que $i_1^!$ est un épimorphisme ; ensuite, on montrera que

$\text{Im } d_1 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$; et finalement on montrera que $\text{Ker } i^! = F^{17} \tilde{K}O^{-1}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.

Ces résultats avec le fait que

$$G_* \tilde{K}O^{-1}(X) \cong E_{\infty}^{3,-4} \oplus E_{\infty}^{7,-8} \oplus E_{\infty}^{8,-9} \oplus E_{\infty}^{15,-16} \oplus E_{\infty}^{16,-17} \oplus E_{\infty}^{19,-20} \oplus E_{\infty}^{24,-25}$$

montrent la

Proposition II.2.6.- $\tilde{K}O^{-1}(X) \cong \mathbb{Z}^{(4)} \oplus \mathbb{Z}_2^{(3)}$.

Lemme II.2.7.- $i^! : \tilde{K}O(X) \rightarrow \tilde{K}O(X_{16})$ est un épimorphisme.

Preuve : Ceci est équivalent à montrer que

$$p^! : \tilde{K}O^1(X/X_{16}) \rightarrow \tilde{K}O^1(X)$$

est un monomorphisme. Remarquons maintenant que

$$G_* \tilde{K}O^2(X/X_{16}) \cong E_\infty^{19, -17}(X/X_{16}) = 0.$$

Par conséquent, $\tilde{K}O^2(X/X_{16}) = 0$ ce qui entraîne que $\tilde{K}O^1(X/X_{16})$

est sans torsion. Nous avons alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{K}O^1(X/X_{16}) & \xrightarrow{c} & \tilde{K}U^1(X/X_{16}) & \xrightarrow{ch} & \tilde{H}^{\text{impair}}(X/X_{16}; \mathbb{Q}) \\ \downarrow p^! & & \downarrow p^! & & \downarrow p^* \\ \tilde{K}O^1(X) & \xrightarrow{\quad} & \tilde{K}U^1(X) & \xrightarrow{\quad} & \tilde{H}^{\text{impair}}(X; \mathbb{Q}). \end{array}$$

Du fait que $H^*(X; \mathbb{Z})$ est sans torsion et que X n'a qu'une seule cellule en dimension 17, on déduit que p^* est un monomorphisme. Le diagramme permet donc de conclure.

Lemme II.2.8. - Posons $Z = X_{16}$. Alors $\tilde{K}O^{-1}(Z) \cong \mathbb{Z}^{(3)} \oplus \mathbb{Z}_2^{(2)}$.

Preuve : Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow & \tilde{K}O^{-1}(Z/Z_9) & \xrightarrow{p^!} & \tilde{K}O^{-1}(Z) & \xrightarrow{i^!} & \tilde{K}O^{-1}(Z_9) & \rightarrow \dots \\ & & & \uparrow d & & \uparrow d_1 & \\ & & & \tilde{K}O(Z) & \xrightarrow{i_1^!} & \tilde{K}O(Z_9) & \rightarrow \tilde{K}O^1(Z/Z_9) \rightarrow \dots \end{array}$$

Montrons que $i_1^!$ est un épimorphisme. En effet, remarquons que

$$G_* \tilde{K}O^1(Z/Z_9) \cong E_\infty^{10, -9}(Z/Z_9).$$

Or $H^{10}(Z/Z_9; \mathbb{Z}_2) \cong H^{10}(Z; \mathbb{Z}_2) \cong H^{10}(X; \mathbb{Z}_2)$ et $Sq^2 x_3 x_7 = x_5 x_7 + x_3 x_9$.
 Donc $E_3^{10, -9}(Z/Z_9) = 0$. Il s'ensuit que $\tilde{K}O^1(Z/Z_9) = 0$ et $i_1^!$ est bien un épimorphisme.

Montrons maintenant que $d_1 \neq 0$. Pour cela, il suffit de vérifier que $\tilde{K}O^{-1}(Z_9)$ contient de la 2-torsion. On a $E_3^{9, 8k-2}(Z_9) = 0$, d'où

$$G_* \tilde{K}O^{-1}(Z_9) \cong E_\infty^{3, -4} \oplus E_\infty^{7, -8} \oplus E_\infty^{8, -9} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$$

et donc $\tilde{K}O^{-1}(Z_9) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$. Il s'ensuit que d est aussi non nulle.

Enfin, remarquons que $\text{Im } p^! = F^{10\tilde{K}O^{-1}}(Z) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.

En effet, on a $F^{10\tilde{K}O^{-1}}(Z) = F^{15\tilde{K}O^{-1}}(Z)$,

$$F^{15\tilde{K}O^{-1}}(Z) \begin{array}{l} \diagdown \\ \diagup \end{array} \cong E_\infty^{15, 8k}(Z) \cong \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad F^{16\tilde{K}O^{-1}}(Z) = E_\infty^{16, 8k-1}(Z) \cong \mathbb{Z}_2.$$

D'où le résultat.

Lemme II.2.9. - $F^{17\tilde{K}O^{-1}}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.

Preuve : On a $E_3^{17, 8k-2}(X) = 0$. En effet, $H^{17}(X; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ dont le générateur est $x_3 x_5 x_9 = Sq^2(x_3 x_5 x_7)$. Par conséquent

$$F^{17\tilde{K}O^{-1}}(X) = F^{19\tilde{K}O^{-1}}(X).$$

D'autre part

$$F^{19\tilde{K}O^{-1}}(X) \begin{array}{l} \diagdown \\ \diagup \end{array} \cong E_\infty^{19, -20}(X) = E_2^{19, -20}(X) \cong \mathbb{Z}$$

et $F^{20\tilde{K}O^{-1}}(X) = F^{24\tilde{K}O^{-1}}(X) = E_\infty^{24, -25}(X)$.

Il nous suffit donc de montrer que $E_{\infty}^{24,8k-1}(X) = E_2^{24,8k-1}(X)$.

En utilisant 0.4.1 et II.1.3, on vérifie aisément que toutes les différentielles qui aboutissent à ce terme sont nulles sauf éventuellement

$$d_{10} : E_{10}^{14,8k} \longrightarrow E_{10}^{24,8k-1}.$$

Or $E_{10}^{14,8k} = E_2^{14,8k} = H^{14}(X; \mathbb{Z})$ dont un générateur est $h_5 h_9$ où

$h_5 \in E_{10}^{5,8k} = E_2^{5,8k}$ (conséquence de II.2.1) et $h_9 \in E_{10}^{9,8k} = E_2^{9,8k}$ (on

vérifie aisément que $d_3^{9,8k} = 0$ en remarquant que $x_3 \otimes x_9 + x_9 \otimes x_3$ n'appartient pas à l'indétermination de cette différentielle sur $X \times X$).

Par dérivation, on déduit alors que $d_{10} = 0$ du fait que

$$E_{10}^{15,8k-1} = E_{10}^{19,8k-1} = 0, \text{ d'où le résultat.}$$

Ce dernier lemme complète donc la démonstration de II.2.6.

On peut maintenant énoncer le résultat suivant :

Théorème II.2.10.- Soit X un H -espace fini sans torsion de type $(3,5,7,9)$ engendré par les éléments primitifs. Alors les groupes $\tilde{K}O^{-i}(X)$ sont donnés par le tableau suivant :

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$\tilde{K}O^{-i}(X)$	$\mathbb{Z}^{(5)}$	$\mathbb{Z}^{(4)} \oplus \mathbb{Z}_2^{(3)}$	$\mathbb{Z}^{(2)} \oplus \mathbb{Z}_2^{(3)}$	$\mathbb{Z}^{(4)}$	$\mathbb{Z}^{(5)}$	$\mathbb{Z}^{(4)}$	$\mathbb{Z}^{(2)}$	$\mathbb{Z}^{(4)}$

CHAPITRE III

KO-THEORIE DE CERTAINS H-ESPACES AVEC TORSION.

III.1. - H-espaces de type (3,11).

C'est le seul type de H-espace fini, simplement connexe, de rang 2, dont l'homologie entière possède de la torsion (à savoir de la 2-torsion). Du point de vue homotopique ces H-espaces sont classifiés par certaines S^3 -fibrations principales sur la variété de Stiefel réelle $V_{7,2}$ (pour les détails voir [17]). Cette propriété permet de décrire la cohomologie entière d'un tel H-espace X. On a

$$H^p(X;Z) = \begin{cases} Z & \text{pour } p = 0, 3, 11 \text{ ou } 14 \\ Z_2 & \text{pour } p = 6 \text{ ou } 9 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

En ce qui concerne $H^*(X;Z_2)$, on sait ([23]) que cette algèbre est isomorphe à $H^*(G_2;Z_2)$ aussi bien en tant qu'algèbre de Hopf, qu'en tant que A(2)-algèbres où G_2 est le groupe de Lie compact exceptionnel de rang 2 et A(2) l'algèbre de Steenrod mod 2. Il s'ensuit que $H^*(X;Z_2)$ possède un système simple de générateurs $x_3, x_5, x_6 = x_3^2$ ($\deg x_i = i$) tels que

$$Sq^2 x_3 = x_5, \quad Sq^1 x_5 = x_6, \quad Sq^3 x_3 = x_6$$

$$Sq^i x_j = 0 \text{ dans tous les autres cas} \quad (\text{voir [5]}).$$

Dans [12], L. Hodgkin montre que $KU^*(G)$ est sans torsion lorsque G est un groupe de Lie connexe, compact dont le groupe fondamental est libre. Sa démonstration dans le cas de G_2 n'utilise que la structure de $A(2)$ -algèbre de $H^*(G_2; \mathbb{Z}_2)$. Par conséquent, on peut énoncer

Proposition III.1.1.- Soit X un H -espace simplement connexe de type $(3,11)$, alors $KU^*(X)$ est sans torsion. D'ailleurs $KU^{-1}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ et $\tilde{K}U(X) \cong \mathbb{Z}$.

Maintenant, en KO -théorie, l'examen des termes $E_2^{p,q}$ de la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch et de la différentielle $d_2^{9,-1} = Sq^2$, qui est un isomorphisme, montre immédiatement la

Proposition III.1.2.- Pour tout H -espace X simplement connexe de type $(3,11)$, on a $\tilde{K}O(X) = 0$.

Le calcul de $\tilde{K}O^{-1}(X)$ se déduit aisément de ce résultat. En effet, en écrivant la suite (0.3)

$$\dots \rightarrow \tilde{K}O(X) \xrightarrow{d} \tilde{K}O^{-1}(X) \xrightarrow{c} \tilde{K}U^{-1}(X) \rightarrow \dots$$

on voit que d'après III.1.2, c est un monomorphisme. Comme $KU^*(X)$ est sans torsion il s'ensuit que $\tilde{K}O^{-1}(X)$ est également sans torsion. On vérifie alors aisément, d'après (0.4.2), que l'on a la

Proposition III.1.3.- $\tilde{K}O^{-1}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Pour calculer les autres groupes, il est nécessaire de mieux contrôler les différentielles de la suite spectrale. En fait, on a :

Lemme III.1.4.- Les différentielles $d_3^{6,8k}$ et $d_3^{11,8k}$ sont nulles.

Démonstration : Puisque X est une \mathbb{S}^3 -fibration de base $V_{7,2}$, la projection $p : X \rightarrow V_{7,2}$ induit des isomorphismes en cohomologie en dimension 6 et 11. Le lemme en résulte par functorialité de la suite spectrale.

Proposition III.1.5.- La différentielle $d_3^{3,8k-2}$ est un isomorphisme et $d_3^{3,8k}$ est un épimorphisme.

Démonstration : On sait que $d_3^{3,8k-2} = \delta \circ \text{Sq}^2$. Comme $\text{Sq}^2 x_3 = x_5$, $\text{Sq}^2 : H^3(X; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^5(X; \mathbb{Z}_2)$ est un isomorphisme.

Maintenant la suite exacte de Bockstein

$$\dots \rightarrow H^5(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\rho} H^5(X; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\delta} H^6(X; \mathbb{Z}) \rightarrow \dots$$

montre que δ est aussi un isomorphisme car $H^5(X; \mathbb{Z}) = 0$, $H^5(X; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ et $H^6(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$.

En ce qui concerne $d_3^{3,8k}$, nous allons utiliser le fait que d_3 dans le cas complexe est le carré de Steenrod Sq^3 , en comparant les deux suites spectrales à l'aide du morphisme de réélification r . On a

$$E_2^{3,8k} = H^3(X; \tilde{K}O^{8k}(\mathbb{S}^0)) = H^3(X; \mathbb{Z}) \otimes \tilde{K}O^{8k}(\mathbb{S}^0)$$

$${}'E_2^{3,8k} = H^3(X; \tilde{K}U^{8k}(\mathbb{S}^0)) = H^3(X; \mathbb{Z}) \otimes \tilde{K}U^{8k}(\mathbb{S}^0)$$

$$E_2^{6,8k-2} = H^6(X; \tilde{K}O^{8k-2}(\mathbb{S}^0)) = H^6(X; \mathbb{Z}) \otimes \tilde{K}O^{8k-2}(\mathbb{S}^0)$$

$${}'E_2^{6,8k-2} = H^6(X; \tilde{K}U^{8k-2}(\mathbb{S}^0)) = H^6(X; \mathbb{Z}) \otimes \tilde{K}U^{8k-2}(\mathbb{S}^0).$$

D'où les morphismes

$$r_2 = 1 \otimes r : 'E_2^{3,8k} \rightarrow E_2^{3,8k}, \quad r_2 = 1 \otimes r : 'E_2^{6,8k-2} \rightarrow E_2^{6,8k-2}$$

où le premier est un monomorphisme et le deuxième un épimorphisme.

Maintenant, on a

$$\text{Im } r_2 \subset \text{Ker } d_2^{3,8k} = E_3^{3,8k} \quad \text{et} \quad E_3^{6,8k-2} = E_2^{6,8k-2}$$

d'où le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} 'E_3^{3,8k} & \xrightarrow{'d_3} & 'E_3^{6,8k-2} \\ r_2 \downarrow & & \downarrow r_2 \\ E_3^{3,8k} & \xrightarrow{d_3} & E_3^{6,8k-2} \end{array}$$

Soit alors $h_3 \in 'E_3^{3,8k} = H^3(X; \mathbb{Z})$ un générateur. On a $'d_3 h_3 = \text{Sq}^3 x_3 = x_6$, par conséquent $'d_3$ est un épimorphisme et il en est de même pour $d_3^{3,8k}$.

C.Q.F.D.

Rappelons aussi que $d_2^{9,8k}$ et $d_2^{9,8k-1}$ sont des isomorphismes.

Calculons maintenant les autres groupes.

Lemme III.1.6. - $\tilde{K}O^{-3}(X) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Preuve : Il suffit de vérifier que

$$G_* \tilde{K}O^{-3}(X) \cong E_\infty^{6,-9} \oplus E_\infty^{9,-12} \oplus E_\infty^{14,-17} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

et utiliser ensuite III.1.1 et (0.3.1).

Lemme III.1.7. - $\tilde{K}O^{-2}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Preuve : On vérifie que

$$G_* \tilde{K}O^{-2}(X) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}.$$

Nous allons alors montrer qu'il existe deux éléments x et y dans $\tilde{K}O^{-2}(X)$ avec d'une part $2x = 2y = 0$ et, d'autre part, $x \notin \text{Ker}(\tilde{K}O^{-2}(X) \xrightarrow{i^!} \tilde{K}O^{-2}(X_7))$ et $y \in \text{Ker } i^!$. De la suite spectrale A-H- $\tilde{K}O^*(-)$ pour les espaces X_7 et X/X_7 on tire immédiatement que

$$(1) \quad \tilde{K}O^{-2}(X_7) \cong \mathbb{Z}_2, \quad \tilde{K}O^{-3}(X_7) \cong \mathbb{Z}_2 \quad \text{et} \quad \tilde{K}O(X/X_7) = 0.$$

Il s'ensuit, en particulier, que le morphisme $i_2^! : \tilde{K}O^{-3}(X) \rightarrow \tilde{K}O^{-3}(X_7)$, compte tenu de III.1.6, est surjectif. En écrivant maintenant un diagramme commutatif avec en horizontal les suites exactes de la paire (X, X_7) et en vertical le morphisme d décrit en 0.3 :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 \dots & \rightarrow & \tilde{K}O^{-2}(X_7) & \longrightarrow & \tilde{K}O^{-1}(X/X_7) & \longrightarrow & \tilde{K}O^{-1}(X) \xrightarrow{i_1^!} \tilde{K}O^{-1}(X_7) \rightarrow \tilde{K}O(X/X_7) \rightarrow \dots \\
 & & \downarrow d_2 & & \downarrow d & & \downarrow d_1 \\
 \dots & \rightarrow & \tilde{K}O^{-3}(X) \xrightarrow{i_2^!} \tilde{K}O^{-3}(X_7) & \longrightarrow & \tilde{K}O^{-2}(X/X_7) \xrightarrow{p^!} \tilde{K}O^{-2}(X) \xrightarrow{i^!} \tilde{K}O^{-2}(X_7) & \rightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

de (1) et d'après (0.3.1), on voit que d_1 et $i_1^!$ ce sont des épimorphismes et que $p^!$ est un monomorphisme. Par conséquent, on a, d'une part, $i^! d \neq 0$

ce qui entraîne qu'il existe $x \in \tilde{K}O^{-2}(X)$ avec $x \in \text{Im } d$ et $i^!(x) \neq 0$ et, d'autre part, si nous montrons que $d_2 \neq 0$ alors il existe $y \in \text{Im } d$ avec $i^!(y) = 0$. Soit alors $Y = X/X_7$ qui a une structure cellulaire du type

$$Y \sim \mathbb{S}^8 \cup e^9 \cup e^{11} \cup e^{14}.$$

Comme $Y/Y_{11} \sim \mathbb{S}^{14}$ nous avons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}O^{-1}(Y) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{K}O^{-1}(Y_{11}) \\ \downarrow d_2 & & \downarrow d_3 \\ \tilde{K}O^{-2}(Y) & \xrightarrow{\quad} & \tilde{K}O^{-2}(Y_{11}) \end{array}$$

De la suite spectrale $A-H-KO^*(Y_{11})$ on déduit facilement que $\tilde{K}O^{-2}(Y_{11}) \cong \mathbb{Z}_2$. Par conséquent d_3 est un épimorphisme et $d_2 \neq 0$.

C.Q.F.D.

Maintenant, pour le calcul de $\tilde{K}O^{-4}(X)$, dont le groupe gradué se réduit à $E_{\infty}^{14,-18}$ d'après III.1.5 et III.1.4, nous remarquons que ce groupe ne peut être triviale en utilisant dans la suite exacte de Bott (0.3), le fait que $KU^{-5}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Pour les groupes $\tilde{K}O^{-5}(X)$, $\tilde{K}O^{-6}(X)$ et $\tilde{K}O^{-7}(X)$ on vérifie que, moyennant II.1.5 et II.1.4,

$$\begin{aligned} G_* \tilde{K}O^{-5}(X) &\cong E_{\infty}^{3,-8} \oplus E_{\infty}^{11,-16} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ G_* \tilde{K}O^{-6}(X) &\cong E_{\infty}^{14,-20} \cong \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad G_* \tilde{K}O^{-7}(X) = 0 \quad \text{d'où} \end{aligned}$$

Lemme III.1.8. - $\tilde{K}O^{-4}(X) \cong \mathbb{Z}_2$, $\tilde{K}O^{-5}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $\tilde{K}O^{-6}(X) \cong \mathbb{Z}$ et $\tilde{K}O^{-7}(X) = 0$.

consistant à identifier le 51-ième squelette de F_4 à un point. Dans ce paragraphe, nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème III.2.1. - La projection $p : F_4 \rightarrow \mathbb{S}^{52}$ induit un isomorphisme

$$p^! : \tilde{K}O(\mathbb{S}^{52}) \rightarrow \tilde{K}O(F_4).$$

D'abord, en utilisant la caractérisation suivante de certaines différentielles de la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch en KO-théorie :

$$d_2^{p,-1} = Sq^2, \quad d_2^{p,0} = Sq^2 \circ \rho \quad \text{et} \quad d_3^{p,-2} = \delta \circ Sq^2, \quad (0.4)$$

on démontre la

Proposition III.2.2. - Soit X un CW-complexe fini vérifiant les propriétés cohomologiques (iii) et (iv) de F_4 . Alors, dans la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch en K-théorie réelle, on a :

- (i) $E_3^{p,-1}(X) = 0$ pour $p = 9, 41$ et 49
- (ii) $E_4^{p,-2}(X) = 0$ pour $p = 3, 11, 18, 26$ et 34
- (iii) $E_4^{44,-4}(X) = 0$ et $E_3^{p,0}(X) = 0$ pour $p = 9, 24$ et 32 .

Démonstration :

(i) Puisque $Sq^2(x_3 x_6) = x_5 x_6$ et $Sq^2(x_3 x_{15} x_{23}) = x_5 x_{15} x_{23}$, on déduit que $d_2^{p,-1}$ est un isomorphisme pour $p = 9$ et 41 . D'autre part, on vérifie aisément que le morphisme de restriction

$$\rho : H^{47}(X; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{47}(X; \mathbb{Z}_2)$$

est un isomorphisme et que $Sq^2(x_3 x_6 x_{15} x_{23}) = x_5 x_6 x_{15} x_{23}$. Par conséquent, $d_2^{47,0}$ est aussi un isomorphisme.

(ii) Pour p = 3 : Puisque $H^5(X;Z) = 0$ et $H^6(X;Z) \cong Z_2$, on déduit que l'homomorphisme de Bockstein

$$\delta : H^5(X;Z_2) \rightarrow H^6(X;Z)$$

est un isomorphisme. Enfin, comme $Sq^2 x_3 = x_5$, $d_3^{3,-2}$ est un isomorphisme.

Pour p = 18 : Remarquons que $H^{16}(X;Z_2) = 0$ ce qui entraîne que $E_3^{18,-2}(X) = E_2^{18,-2}(X)$. Puisque $Sq^2 x_3 x_{15} = x_5 x_{15}$ et $\delta : H^{19}(X;Z_2) \rightarrow H^{21}(X;Z)$ est un isomorphisme on déduit que $d_3^{18,-2}$ est aussi un isomorphisme.

Pour p = 26 : On a $H^{26}(X;Z_2) \cong Z_2 \oplus Z_2$ dont les générateurs sont $x_3 x_{23}$ et $x_5 x_6 x_{15}$. Comme $x_5 x_6 x_{15} = Sq^2(x_3 x_6 x_{15})$ on déduit que $E_3^{26,-2}(X) \cong Z_2$ dont le générateur est $x_3 x_{23}$. De plus $Sq^2 x_3 x_{23} = x_5 x_{23}$ et $\delta(x_5 x_{23}) \neq 0$ car $H^{28}(X;Z) = 0$. Par conséquent, $d_3^{26,-2}$ est un monomorphisme.

Pour p = 11 et 34 : On constatera aisément que les différentielles $d_2^{9,-1}$ et $d_2^{32,-1}$ sont des isomorphismes.

(iii) On remarque que pour $p = 9, 24$ ou 32 , $\rho : H^p(X;Z) \rightarrow H^p(X;Z_2)$ est un isomorphisme. On vérifie alors aisément que $d_2^{p,0} = Sq^2 \rho$ est un isomorphisme pour $p = 9$ et un monomorphisme pour $p = 24$ ou 32 .

Enfin, pour montrer que $E_4^{44,-4}(X) = 0$, on remarque d'abord que $H^{39}(X;Z_2) = 0$ ce qui entraîne que $E_3^{41,-2}(X) = E_2^{41,-2}(X)$. Or, $H^{41}(X;Z_2) \cong Z_2$ dont le générateur $x_3 x_{15} x_{23}$ vérifie $Sq^2 x_3 x_{15} x_{23} = x_5 x_{15} x_{23}$ qui est le générateur de $H^{43}(X;Z_2)$. De plus, puisque $H^{43}(X;Z) = 0$ et $H^{44}(X;Z) \cong Z_2$, $\delta : H^{43}(X;Z_2) \rightarrow H^{44}(X;Z)$ est un isomorphisme ; il en est donc de même

pour $\delta \circ Sq^2 = d_3^{41, -2}$. Ceci achève donc la démonstration de III.2.2.

Corollaire III.2.3. - Soit X comme en II.2.2, alors on a

$$G_* \tilde{K}O(X) \cong E_\infty^{8, -8}(X) \oplus E_\infty^{16, -16}(X) \oplus E_\infty^{52, -52}(X),$$

$$G_* \tilde{K}O^1(X_{15}) = 0 \text{ et donc } \tilde{K}O^1(X_{15}) = 0$$

où X_{15} est le 15-ième squelette de X .

Nous rappelons maintenant les faits suivants :

Soit X un CW-complexe fini.

1) Pour définir la K -théorie à coefficients dans \mathbb{Z}_p ($p \geq 2$) on prend un espace de Moore $M_p = S^1 \cup_p e^2$ (e^2 étant attachée par une application de degré p). Alors par définition

$$\tilde{K}U^i(X; \mathbb{Z}_p) = \tilde{K}U^{i+2}(X \wedge M_p) \quad \text{pour tout } i$$

(pour plus de détails voir [2]).

2) On a une suite spectrale $\{E_r(X; \mathbb{Z}_p)\}$ avec

$$E_2^{*,*}(X; \mathbb{Z}_p) = H^*(X; KU^*(M_p))$$

et qui converge vers l'anneau gradué $KU^*(X; \mathbb{Z}_p)$.

Dans cette suite spectrale, on a (p étant un nombre premier quelconque ≥ 2) :

(i) $d_r = 0$ pour $2 \leq r \leq 2p-2$ de sorte que pour $2 \leq r \leq 2p-1$ $E_r^{q,0}(X; \mathbb{Z}_p)$ peut être identifié à $H^q(X; \mathbb{Z}_p)$.

(ii) En utilisant cette identification, d_{2p-1} est égal (à multiplication près par un élément non nul de \mathbb{Z}_p) à l'opération stable

de Milnor $\mathbb{Q}_1 : H^q(X; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^{q+2p-1}(X; \mathbb{Z}_p)$ ($\mathbb{Q}_1 = p^1\delta - \delta p^1$) (Voir [12], propos. 1-2, page 21).

3) L'anneau gradué $KU^*(X)$ a de la torsion d'ordre p seulement si $H^*(X; \mathbb{Z})$ l'a ([12], lemma 1.1, page 19). D'autre part $\dim_p KU^*(X; \mathbb{Z}_p) \geq \dim_{\mathbb{Q}} KU^*(X; \mathbb{Q})$ et l'égalité a lieu si et seulement si $KU^*(X)$ n'a pas de p -torsion ([12], lemma 1-2, page 20).

Proposition III.2.4.- Soit X un CW-complexe fini vérifiant les propriétés cohomologiques (ii) et (iv) de F_4 , et soit X_{15} le 15-ième squelette de X . Alors $KU^*(X_{15})$ n'a pas de torsion impaire.

Démonstration : Puisque $H^*(X_{15}; \mathbb{Z})$ n'a pas de p -torsion pour $p > 3$, il suffit de montrer que $KU^*(X_{15})$ n'a pas de la 3-torsion. Nous allons donc montrer que

$$\dim_3 KU^*(X_{15}; \mathbb{Z}_3) = \dim_{\mathbb{Q}} KU^*(X_{15}; \mathbb{Q}).$$

Cherchons d'abord $\dim_{\mathbb{Q}} KU^*(X_{15}; \mathbb{Q})$. D'après la suite exacte

$$0 \rightarrow H^{15}(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{15}(X_{15}; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{16}(X/X_{15}; \mathbb{Z}) \rightarrow H^6(X; \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

et du fait que $H^{15}(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, on voit que $H^{15}(X_{15}; \mathbb{Z})$ est un groupe libre. Remarquons que $\text{rang } H^{15}(X_{15}; \mathbb{Z}) > 1$. En effet, d'après la formule des coefficients universelle, on a

$$H^{15}(X_{15}; \mathbb{Z}_3) \cong H^{15}(X_{15}; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_3.$$

Or $H^{15}(X_{15}; \mathbb{Z}_3)$ contient $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$ car $H^{15}(X; \mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$ (propriété (ii)), par conséquent $\text{rang } H^{15}(X_{15}; \mathbb{Z}) = n > 1$. Il est alors aisé de voir, selon la propriété (iv) que $\text{rang } H^*(X_{15}; \mathbb{Z}) = n+4$ et donc

$$\dim_{\mathbb{Q}} KU^*(X_{15}; \mathbb{Q}) = n+4.$$

Prenons maintenant la suite spectrale $\{E_r(X_{15}; \mathbb{Z}_3)\}$; on a

$$E_5^{p,q}(X_{15}; \mathbb{Z}_3) = H^p(X_{15}; \mathbb{Z}_3) \quad (q \text{ pair})$$

et d'après la propriété (ii) $Q_1 x_3 = -\delta_3 P_3^1 x_3 = -x_8$.

Il s'ensuit que

$$E_6^{3,q}(X_{15}; \mathbb{Z}_3) = E_6^{8,q}(X_{15}; \mathbb{Z}_3) = 0.$$

De même $Q_1(x_3 x_7) = Q_1(x_3) x_7 = -x_8 x_7$, d'où

$$E_6^{10,q}(X_{15}; \mathbb{Z}_3) = 0 \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbb{Z}_3} E_6^{15,q}(X_{15}; \mathbb{Z}_3) = n-1.$$

Aussi, on vérifie aisément que $\dim_{\mathbb{Z}_3} E_6^{11,q}(X_{15}; \mathbb{Z}_3) = 2$ et

$$\dim_{\mathbb{Z}_3} E_6^{7,q}(X_{15}; \mathbb{Z}_3) = \dim_{\mathbb{Z}_3} E_6^{14,q}(X_{15}; \mathbb{Z}_3) = 1.$$

Par conséquent,

$$\dim_{\mathbb{Z}_3} E_6(X_{15}; \mathbb{Z}_3) = n+4.$$

Or

$$\dim_{\mathbb{Z}_3} E_{\infty}(X_{15}; \mathbb{Z}_3) \geq \dim_{\mathbb{Z}_3} KU^*(X_{15}; \mathbb{Z}_3).$$

On a donc bien

$$\dim_{\mathbb{Z}_3} KU^*(X_{15}; \mathbb{Z}_3) = \dim_{\mathbb{Q}} KU^*(X_{15}; \mathbb{Q})$$

C.Q.F.D.

Corollaire III.2.5. - Dans la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch en K-théorie réelle, on a : la différentielle

$$d_5 : E_5^{3,8k-4}(F_4) \rightarrow E_5^{8,8k-8}(F_4)$$

est un épimorphisme (pour tout k).

Démonstration : Soit X_{15} le 15-ième squelette de F_4 . On a

$$G_* \hat{K}O(X_{15}) \cong E_\infty^{8,-8}(X_{15}) .$$

Puisque $H^8(X_{15}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_3$, $\hat{K}O(X_{15})$ est trivial ou isomorphe à \mathbb{Z}_3 .

Or, d'après III.2.3., $\hat{K}O^1(X_{15}) = 0$; il s'ensuit, en utilisant la suite exacte de Bott que la complexification

$$c : \hat{K}O(X_{15}) \rightarrow \hat{K}U(X_{15})$$

est un monomorphisme. Mais $\hat{K}U(X_{15})$ est sans torsion impaire (III.2.4), par conséquent $\hat{K}O(X_{15}) = 0$. Le terme $E_\infty^{8,-8}(X_{15})$ est donc trivial.

Comme $E_3^{11,8k-2}(X_{15}) = 0$ (III.2.2), on déduit que la différentielle

$$d_5 : E_5^{3,-4}(X_{15}) \longrightarrow E_5^{8,-8}(X_{15})$$

est nécessairement un épimorphisme (rappelons que $H^{13}(X_{15}; \mathbb{Z}) = 0$). Le corollaire s'ensuit par functorialité

$$\begin{array}{ccc} E_5^{3,-4}(F_4) & \xrightarrow{d_5} & E_5^{8,-8}(F_4) \\ \cong \downarrow i^* & & \cong \downarrow i^* \\ E_5^{3,-4}(X_{15}) & \longrightarrow & E_5^{8,-8}(X_{15}) \end{array}$$

où $i : X_{15} \rightarrow F_4$ est l'inclusion canonique.

Démonstration du théorème III.2.1. : Soit x_3 et x_8 des générateurs de $H^3(F_4; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ et $H^8(F_4; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_3$. Alors d'après la propriété (iv), x_8^2 est un générateur de $H^{16}(F_4; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_3$ et $x_3 x_8$ est un générateur de la partie de torsion de $H^{11}(F_4; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3$. Il est clair que $x_3 x_8$ subsiste jusqu'au terme $E_5^{11, -12}(F_4)$. D'après III.2.5, on a

$$d_5(x_3) = \bar{n} x_8 \quad \bar{n} \in \mathbb{Z}_3 \quad \bar{n} \neq 0.$$

Il s'ensuit que la différentielle

$$d_5 : E_5^{11, -12}(F_4) \rightarrow E_5^{16, -16}(F_4)$$

est un épimorphisme. En effet, d_5 étant une dérivation, on a

$$d_5(x_3 x_8) = \bar{n} x_8^2 \quad \text{où } x_3 \in E_5^{3, -4}(F_4) \quad \text{et } x_8 \in E_5^{8, -8}(F_4).$$

On déduit alors, d'après III.2.3, que

$$G_* \tilde{K}O(F_4) \cong E_\infty^{52, -52}(F_4).$$

Or $E_\infty^{52, -52}(F_4) = E_2^{52, -52}(F_4) \cong H^{52}(F_4; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ d'après ()

et comme $E_\infty^{52, -52}(F_4) = F^{52} \tilde{K}O(F_4) = \text{Im}(\tilde{K}O(S^{52}) \xrightarrow{p!} \tilde{K}O(F_4)) = \tilde{K}O(F_4)$,

on déduit que $p! : \tilde{K}O(S^{52}) \rightarrow \tilde{K}O(F_4)$ est bien un isomorphisme.

C.Q.F.D.

Remarque : Du fait que $r : \tilde{K}U(S^{52}) \rightarrow \tilde{K}O(S^{52})$ est un épimorphisme, on déduit, en utilisant la suite exacte de Bott, que

$$c : \tilde{K}O^{-1}(F_4) \rightarrow \tilde{K}U^{-1}(F_4)$$

est un monomorphisme. Il s'ensuit que $\tilde{K}O^{-1}(F_4)$ est aussi sans torsion.

CHAPITRE IV

EXISTENCE D'ELEMENTS PRIMITIFS DANS LA K-THEORIE DE $\mathbb{R}P^3$ ET $\mathbb{R}P^7$.

IV.1. - Introduction.

Soit X, μ et X', μ' deux H-espaces et $f : X \rightarrow X'$ une application topologique. On dit que f est un homomorphisme de H-espaces si

$$f\mu \sim \mu'(f \times f).$$

Supposons que X', μ' est un H-espace associatif. Alors l'ensemble des classes d'homotopie des applications pointées de X dans X' - noté $[X, X']_*$ - a une structure de groupe induite par la multiplication μ' . Dans ce cas, $f : X \rightarrow X'$ est un homomorphisme de H-espaces si

$$f\mu \sim fp_1 + fp_2$$

où $p_i : X \times X \rightarrow X$, $i = 1, 2$, sont les projections sur le premier et le deuxième facteur respectivement et $+$ est au sens de la multiplication μ' .

Posons $X', \mu' = BF, \theta$ ($F = U$ ou O) ou θ indique la structure de H-espace sur BF induite par la somme de Whitney des fibrés vectoriels. Soit X un des H-espaces dont on a calculé les groupes de K-théorie réelle dans les chapitres précédents et on se pose la question de l'existence d'éléments primitifs x dans le groupe $\overset{\vee}{KO}(X)$, c'est-à-dire,

des éléments qui sont représentés par des homomorphismes de H-espaces $f : X, \mu \rightarrow BO, \theta$. Donc tels que

$$\mu^!(x) = p_1^!(x) + p_2^!(x).$$

Du fait que $KU^*(X)$ est sans torsion, il est trivial de voir qu'il n'existe pas de tels éléments dans le groupe $\tilde{K}U(X)$ en utilisant le caractère de Chern

$$\text{ch} : \tilde{K}U(X) \longrightarrow H^{\text{pair}}(X; \mathbb{Q}).$$

Il en est de même pour $\tilde{K}O(X)$ lorsque ce dernier est sans torsion. En effet, dans ce cas le morphisme de complexification c est un monomorphisme. Il nous reste le cas des H-espaces de type (3,7), (3,3,7), (3,7,7) et (3,7,11) pour lesquels on a vu que le groupe $\tilde{K}O(X)$ est de la forme

$$\tilde{K}O(X) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Mais pour tous ces types on a montré que la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch est triviale. En utilisant alors la functorialité des edges-homomorphismes, c'est-à-dire, des homomorphismes

$$F^p \tilde{K}O(X) \rightarrow E_2^{p, -p}(X) = E_\infty^{p, -p}(X)$$

on vérifie aisément que $\tilde{K}O(X)$ aussi ne contient pas des éléments primitifs.

Nous avons alors étudié le cas des espaces projectifs réels $\mathbb{R}P^3$ et $\mathbb{R}P^7$ pour lesquels nous avons été amené à nous servir de la construction du plan projectif associé à un H-espace.

IV.2. - Plan projectif associé à un H-espace.

Soit $X * Y$ le joint de deux CW-complexes (finis) X et Y .

On a une application canonique

$$j : X * Y \rightarrow \Sigma(X \times Y) \quad (\text{voir [15]})$$

où $\Sigma(X \times Y)$ est la suspension du produit $X \times Y$ des deux CW-complexes.

Si $p_1 : X \times Y \rightarrow X$, $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$ et $\Lambda : X \times Y \rightarrow X \wedge Y$ sont les projections canoniques, alors $([11])(\Sigma\Lambda) \circ j$ est une équivalence d'homotopie tandis que $(\Sigma p_1) \circ j$ et $(\Sigma p_2) \circ j$ sont homotopiquement triviales. Ceci entraîne que le noyau de

$$j^* : \hat{H}^n(\Sigma(X \times Y)) \longrightarrow \hat{H}^n(X * Y)$$

est égal à

$$\sigma_{p_1}^*(\hat{H}^{n-1}(X)) \oplus \sigma_{p_2}^*(\hat{H}^{n-1}(Y)) \quad \text{pour } n > 1$$

où $\sigma : \hat{H}^k(Z) \rightarrow \hat{H}^{k+1}(\Sigma Z)$ est l'isomorphisme de suspension.

De même, le noyau de

$$j^! : \check{K}F^{-n}(\Sigma(X \times Y)) (= \check{K}F^{-n-1}(X \times Y)) \longrightarrow \check{K}F^{-n}(X * Y)$$

est égal à

$$p_1^!(\check{K}F^{-n-1}(X)) \oplus p_2^!(\check{K}F^{-n-1}(Y)).$$

Soit maintenant X un H-espace avec une multiplication

$\mu : X \times X \rightarrow X$. La composée

$$X * X \xrightarrow{j} \Sigma(X \times X) \xrightarrow{\Sigma\mu} \Sigma X$$

$H(\mu) = (\Sigma\mu) \circ j$ est la construction de Hopf de μ . Le cône de $H(\mu)$:

$$C_{H(\mu)} = \Sigma X \cup_{H(\mu)} C(X * X) = P_2 X$$

est le plan projectif associé à l'H-espace X (pour plus de détails voir [15]).

On a alors une suite de Puppe

$$X * X \xrightarrow{H(\mu)} \Sigma X \xrightarrow{i} P_2 X \xrightarrow{p} \Sigma(X * X) \rightarrow \dots$$

qui induit une suite exacte longue

$$\dots \rightarrow \tilde{K}F^{-n}(\Sigma(X * X)) \xrightarrow{p!} \tilde{K}F^{-n}(P_2 X) \xrightarrow{i!} \tilde{K}F^{-n}(\Sigma X) \xrightarrow{H(\mu)!} \tilde{K}F^{-n}(X * X) \rightarrow \dots$$

Comme le noyau de $j!$ est égal à

$$p_1!(\tilde{K}F^{-n-1}(X)) \oplus p_2!(\tilde{K}F^{-n-1}(X))$$

on voit que le noyau de $H(\mu)!$ est constitué précisément par les éléments $x \in \tilde{K}F^{-n}(\Sigma X) = \tilde{K}F^{-n-1}(X)$ tels que

$$\mu!(x) = p_1!(x) + p_2!(x)$$

c'est-à-dire, les éléments primitifs de $\tilde{K}F^{-n-1}(X)$.

Nous rappelons maintenant un résultat sur les cup-produits dans $H^*(P_2 X)$. Soient a et b deux éléments quelconques de $\tilde{H}^*(X)$, le théorème de Künneth identifie $a \otimes b$ avec l'élément $p_1^*(a) \cup p_2^*(b) \in H^*(X \times X)$; on définit $a * b = j^* \sigma(a \otimes b) \in H^*(X * X)$ (σ est l'isomorphisme de suspension).

Théorème 2.1. - Soient u et v deux éléments quelconques de $\tilde{H}^*(P_2 X)$ et soit $a, b \in \tilde{H}^*(X)$ tels que $i^*(u) = \sigma(a)$, $i^*(v) = \sigma(b)$.

Alors $u \cup v = p^* \sigma(a * b)$, c'est-à-dire, on a la situation suivante :

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{H}^*(\Sigma(X*X)) & \xrightarrow{p^*} & \tilde{H}^*(p_2X) & \xrightarrow{i^*} & \tilde{H}^*(\Sigma X) \\
 & & u, v & \xrightarrow{\quad} & \sigma(a), \sigma(b) \\
 \sigma(a*b) & & u \cup v & &
 \end{array}$$

(voir [15], page 49).

IV. 3. - Le cas de $\mathbb{R}P^3$.

La cohomologie entière de $\mathbb{R}P^3$ est donnée par

$$H^0 = H^3 = \mathbb{Z}, \quad H^2 = \mathbb{Z}_2, \quad H^i = 0 \text{ pour } i \neq 0, 2, 3$$

et la cohomologie à coefficients dans \mathbb{Z}_2 est donnée par

$$H^*(\mathbb{R}P^3; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[\alpha] / \langle \alpha^4 \rangle \quad \text{où } \alpha \in H^1(\mathbb{R}P^3; \mathbb{Z}_2).$$

Remarquons que α et α^2 sont primitifs tandis que α^3 ne l'est pas. Soit $a \in H^2(\mathbb{R}P^3; \mathbb{Z})$ un générateur. Puisque

$$H^2(\mathbb{R}P^3 \times \mathbb{R}P^3; \mathbb{Z}) \cong H^2(\mathbb{R}P^3; \mathbb{Z}) \oplus H^0(\mathbb{R}P^3; \mathbb{Z}) \oplus H^0(\mathbb{R}P^3; \mathbb{Z}) \oplus H^2(\mathbb{R}P^3; \mathbb{Z})$$

on a

$$\mu^*(a) = p_1^*(a) + p_2^*(a)$$

c'est-à-dire, a est primitif, $\mu : \mathbb{R}P^3 \times \mathbb{R}P^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3$ étant une multiplication.

Soit b un générateur de $H^3(\mathbb{R}P^3; \mathbb{Z})$, on a $\rho(b) = \alpha^3$ où $\rho : H^*(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Z}_2)$ est le morphisme de restriction induit par la projection $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$. Il s'ensuit que b n'est pas primitif, donc

$$\mu^*(b) = p_1^*(b) + p_2^*(b) + \Lambda^*(z)$$

où z est un élément non nul de $H^3(\mathbb{R}P^3 \wedge \mathbb{R}P^3; \mathbb{Z})$. En utilisant la formule de Künneth on montre que $H^3(\mathbb{R}P^3 \wedge \mathbb{R}P^3; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$ ce qui entraîne que tout multiple pair de b est primitif.

Pour des raisons de commodité, écrivons X à la place de $\mathbb{R}P^3$.

Lemme 3.1.- La cohomologie de P_2X à coefficients dans \mathbb{Z}_2 est donnée

$$H^*(P_2X; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[\bar{y}_2, y_3] \quad \oplus S$$

\swarrow
 $\langle y_2^3, y_2^2 y_3, y_2 y_3^2, y_3^3 \rangle$

$\dim y_i = i$ et S a des générateurs en dimensions 6, 7 et 8.

De plus, $Sq^2 y_3 = y_2 y_3$.

La cohomologie entière est donnée par

$$H^p(P_2X, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{pour } p = 3, 6 \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & \text{pour } p = 7 \\ \mathbb{Z} & \text{pour } p = 0, 4, 8 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Preuve : C'est une conséquence de la suite exacte de cohomologie associée à la suite de Puppe

$$X * X \xrightarrow{H(\mu)} \Sigma X \longrightarrow P_2X \longrightarrow \Sigma(X * X) \rightarrow \dots$$

Les générateurs y_2 et y_3 sont tels que $i^*(y_2) = \sigma(\alpha)$, $i^*(y_3) = \sigma(\alpha^2)$. Pour le carré de Steenrod, il suffit de montrer que

$Sq^2 y_3 \neq 0$. Or $Sq^3 y_3 = y_3^2 = p^* \sigma(\alpha^2 * \alpha^2) \neq 0$ (2.1) et $Sq^3 = Sq^1 Sq^2$,
par conséquent $Sq^2 y_3 \neq 0$.

Pour la cohomologie entière, on procède de la même manière.

(Voir [8] pour des résultats généraux concernant la cohomologie du plan projectif $P_2 X$ associé à un H-espace X).

Lemme 3.2. - $\tilde{K}U(P_2 X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Preuve : On utilise la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch et on vérifie que

$$G_* \tilde{K}U(P_2 X) \cong E_\infty^{4,-4} \oplus E_\infty^{6,-6} \oplus E_\infty^{8,-8}$$

et que $E_\infty^{4,-4} = E_2^{4,-4} \cong \mathbb{Z}$, $E_\infty^{8,-8} = E_2^{8,-8} \cong \mathbb{Z}$. Il suffit donc de montrer que $E_\infty^{6,-6} = 0$. Or la différentielle

$$d_3 : E_3^{3,2q} \longrightarrow E_3^{6,2q-2}$$

est donnée par le carré de Steenrod

$$Sq^3 : H^3(P_2 X; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^6(P_2 X; \mathbb{Z}).$$

Le générateur x de $H^3(P_2 X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$ est tel que $i^*(x) = \sigma(a)$. Il s'ensuit d'après 2.1 que $Sq^3 x = x^2 = p^* \sigma(a*a) \neq 0$, d_3 est donc un isomorphisme, d'où le résultat.

Lemme 3.3. - $\tilde{K}O^1(P_2 X) = 0$.

Preuve : On a d'après 3.1

$$G_* \tilde{K}O^{-7}(P_2 X) \cong E_\infty^{2,-9} \oplus E_\infty^{3,-10}.$$

La différentielle $d_2 : E_2^{2,-9} \rightarrow E_2^{4,-10}$ est un isomorphisme. En effet $d_2 y_2 = Sq^2 y_2 = y_2^2$; par conséquent, $E_3^{2,-9} = 0$. La différentielle

$$d_3 : E_3^{3,-10} \rightarrow E_3^{6,-12}$$

est aussi un isomorphisme. En effet, $d_3 = \delta \circ Sq^2$ où δ est le morphisme de Bockstein associé à la suite exacte de coefficients $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$ (0.0.4). D'après 3-1, $Sq^2 y_3 = y_2 y_3$ et d'autre part

$$\delta : H^5(P_2 X; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^6(P_2 X; \mathbb{Z})$$

est un isomorphisme. D'où le résultat.

Théorème 3.4.- Pour $X = \mathbb{R}P^3$, il n'existe pas d'éléments primitifs dans $\tilde{K}\mathbb{F}(X)$ ($\mathbb{F} = U$ ou O).

Démonstration : Le cas réel résulte immédiatement de 3.3. En effet, puisque $\tilde{K}O^1(p_2 X) = 0$,

$$H(\mu)! : \tilde{K}O^1(\Sigma X) \rightarrow \tilde{K}O^1(X * X) \text{ est un monomorphisme.}$$

Pour la K-théorie complexe, on vérifie aisément que $\tilde{K}U(X) \cong \mathbb{Z}_2$ et $\tilde{K}U^1(X) \cong \mathbb{Z}$. Regardons maintenant la suite exacte

$$\dots \rightarrow \tilde{K}U^1(\Sigma X) \xrightarrow{H(\mu)!} \tilde{K}U^1(X * X) \rightarrow \tilde{K}U^2(P_2 X) \rightarrow \dots$$

associée à la construction de Hopf. En utilisant la formule de Künneth ([3]) on vérifie que $\tilde{K}U(X \wedge X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$. Or

$$\tilde{K}U^1(X * X) \cong \tilde{K}U^1(\Sigma(X \wedge X)) = \tilde{K}U(X \wedge X)$$

et d'après 3-2, $\tilde{K}U^2(P_2 X)$ est sans torsion ; par conséquent $H(\mu)!$ est un monomorphisme.

C.Q.F.D.

IV.4. - Le cas de $\mathbb{R}P^7$.

Il est bien connu ([10]) que $\tilde{K}F(\mathbb{R}P^7)$ ($F = U$ ou O) est un groupe fini d'ordre 8 dont le générateur σ pour le cas réel est donné par le fibré linéaire canonique et pour le cas complexe est donné par le complexifié $\rho = c(\sigma)$ de ce même fibré.

Soit $\mu : \mathbb{R}P^7 \times \mathbb{R}P^7 \rightarrow \mathbb{R}P^7$ une multiplication. Nous allons démontrer que les éléments d'ordre 8 de $\tilde{K}F(\mathbb{R}P^7)$ ne sont pas primitifs. Nous démontrerons ensuite que l'existence d'éléments primitifs dans $\tilde{K}F(\mathbb{R}P^7)$ ne dépend pas de la multiplication μ choisi sur $\mathbb{R}P^7$. Enfin, nous démontrerons que 4ρ et 4σ sont primitifs mais nous n'avons pas pu décider pour les éléments d'ordre 4.

On va procéder de la même manière que pour le cas de $\mathbb{R}P^3$ en étudiant l'image de l'homomorphisme

$$i^! : \tilde{K}F^1(P_2 X) \rightarrow \tilde{K}F^1(\Sigma X)$$

qui est constitué par les éléments primitifs de $\tilde{K}F(X) = \tilde{K}F^1(\Sigma X)$.

4.1.- Pour des raisons de commodité, écrivons X à la place de $\mathbb{R}P^7$. Rappelons que

$$H^*(X; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\alpha] / \langle \alpha^8 \rangle \quad \text{où } \alpha \in H^1(X; \mathbb{Z}_2),$$

α , α^2 et α^4 étant les seuls éléments primitifs. La cohomologie entière de X est donnée par

$$H^p(X; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{pour } 2 \leq p \text{ pair} \leq 6 \\ \mathbb{Z} & \text{pour } p = 0, 7 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Soit a le générateur de $H^2(X; \mathbb{Z})$, alors $\rho(a) = \alpha^2$ où ρ est le morphisme de restriction induit par la projection $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$. Remarquons que

$$\rho : H^2(X \times X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X \times X; \mathbb{Z}_2)$$

est un monomorphisme ce qui entraîne que a est primitif. On vérifie aussi aisément que a^2 est primitif mais que a^3 ne l'est pas.

Soit P_2X le plan projectif associé à X .

Proposition 4.1.1. - Les éléments d'ordre 8 de $\tilde{K}\mathbb{F}(X)$ ($\mathbb{F} = \mathbb{U}$ ou \mathbb{O}) ne sont pas primitifs.

Démonstration : Etudions le cas où $\mathbb{F} = \mathbb{U}$ (le cas réel s'en déduit à l'aide du morphisme de complexification $c : \tilde{K}\mathbb{O}(X) \rightarrow \tilde{K}\mathbb{U}(X)$ qui est ici un isomorphisme). Remarquons que les éléments d'ordre 8 de $\tilde{K}\mathbb{U}^1(\Sigma X)$ ($= \tilde{K}\mathbb{U}(X)$) appartiennent au degré 3 de filtration exacte, c'est-à-dire, leur projection dans $F^{3\tilde{K}\mathbb{U}^1}(\Sigma X)$ n'est pas nulle. Il nous suffit donc de démontrer que $i^!(\tilde{K}\mathbb{U}^1(P_2X)) \subset F^{5\tilde{K}\mathbb{U}^1}(\Sigma X)$. Pour cela nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{K}\mathbb{U}^1(P_2X) = F^{3\tilde{K}\mathbb{U}^1}(P_2X) & \xrightarrow{i^!} & F^{3\tilde{K}\mathbb{U}^1}(\Sigma X) = \tilde{K}\mathbb{U}^1(\Sigma X) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 E_{\infty}^{3,-2}(P_2X) \cong F^{3\tilde{K}\mathbb{U}^1}(P_2X) & \xrightarrow{i^*} & F^{3\tilde{K}\mathbb{U}^1}(\Sigma X) \cong \mathbb{Z}_2 \\
 \swarrow F^{5\tilde{K}\mathbb{U}^1}(P_2X) & & \swarrow F^{5\tilde{K}\mathbb{U}^1}(\Sigma X)
 \end{array}$$

Du fait que $a \in H^2(X; \mathbb{Z})$ est primitif, on vérifie aisément que

$$i^* : H^3(P_2X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(\Sigma X; \mathbb{Z})$$

est un isomorphisme. Il s'ensuit que $E_2^{3,-2}(P_2X) \cong \mathbb{Z}_2$. Or la différentielle

$$d_3 : E_3^{3,-2}(P_2X) \rightarrow E_3^{6,-2}(P_2X)$$

est donnée par le carré de Steenrod

$$Sq^3 : H^3(P_2X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^6(P_2X; \mathbb{Z})$$

Soit $x_3 \in H^3(P_2X; \mathbb{Z})$ le générateur, donc tel que $i^*(x_3) = \sigma(a)$. On a

$$Sq^3 x_3 = x_3^2 = p^* \sigma(a*a) \neq 0 \quad \text{selon 2-1.}$$

Par conséquent $E_\infty^{3,-2}(P_2X) = E_4^{3,-2}(P_2X) = 0$ et il s'ensuit que

$$i^! (\tilde{K}U^1(P_2X)) \subset F^5 \tilde{K}U^1(\Sigma X)$$

C.Q.F.D.

Remarque :

Soit $w_1 : BO \rightarrow K(\mathbb{Z}_2, 1)$ et $c_1 : BU \rightarrow K(\mathbb{Z}, 2)$ la première classe de Stiefel Whitney et la première classe de Chern respectivement. Ce sont des homomorphismes de H-espaces lorsque que BO et BU sont munis de la structure de H-espace canonique, c'est-à-dire, celle induite par la somme de Whitney des fibrés vectoriels réels et complexes respectivement.

Soit $f : X \rightarrow K(\mathbb{Z}_2, 1)$ et $g : X \rightarrow K(\mathbb{Z}, 2)$ des représentants de $\alpha \in H^1(X; \mathbb{Z}_2)$ et $a \in H^2(X; \mathbb{Z})$ respectivement. Puisque α et a sont primitifs, f et g sont des homomorphismes de H-espaces. La proposition 4.1.1 nous dit que les relèvements de f et g dans les diagrammes suivants

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{BO} & \\
 \nearrow \hat{f} & \downarrow w_1 & \\
 X & \xrightarrow{f} & K(\mathbb{Z}_2, 1)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & \text{BU} & \\
 \nearrow \hat{g} & \downarrow c_1 & \\
 X & \xrightarrow{g} & K(\mathbb{Z}, 2)
 \end{array}$$

ne sont pas des homomorphismes de H-espaces.

Remarquons que selon 4.1.1, les éléments d'ordre 8 de $\tilde{K}\mathbb{F}(X)$ ne sont pas primitifs quelle que soit la multiplication choisie sur X . Nous allons maintenant démontrer de manière générale que l'existence d'homomorphismes de H-espaces

$$f : X, \mu \longrightarrow BF, \theta$$

ne dépend pas de la multiplication μ choisie sur $X = \mathbb{R}P^7$.

Lemme 4.1.2. - $\tilde{K}U(X \wedge X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_8$.

Preuve : Du fait que $\tilde{K}U(X) \cong \mathbb{Z}_8$ et $KU^1(X) \cong \mathbb{Z}$, on vérifie aisément, en utilisant la formule de Künneth ([3]), que

$$\tilde{K}U(X \times X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_8.$$

Il s'ensuit que $\tilde{K}U(X \wedge X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_8$.

C.Q.F.D.

Proposition 4.1.3. - Il n'existe pas d'application topologique $v : X \wedge X \rightarrow X$ telle que $v! : \tilde{K}U(X) \rightarrow \tilde{K}U(X \wedge X)$ soit un monomorphisme, ou telle que $\text{Im } v!$ soit un sous-groupe d'ordre 4.

Démonstration : Soit $\rho \in \tilde{K}U(X)$ le générateur canonique et $h : X \rightarrow BU$ son représentant (à homotopie près). Soit $v : X \wedge X \rightarrow X$ une application topologique et soit $f = h \circ v$. Nous avons le triangle commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 & & H^*(X; \mathbb{Z}) \\
 & \nearrow v^* & \uparrow h^* \\
 H^*(X \wedge X; \mathbb{Z}) & \xleftarrow{f^*} & H^*(BU; \mathbb{Z}) .
 \end{array}$$

Rappelons que $h^*(c_1) = a \in H^2(X; \mathbb{Z}_2)$ où c_1 est la première classe de Chern et $h^*(c_n) = 0$ pour $n > 1$ car ρ est la classe stable d'un fibré vectoriel complexe de rang 1. Puisque $H^2(X \wedge X; \mathbb{Z}) = 0$, il s'ensuit que le fibré vectoriel dont f est l'application classifiante a toutes ces classes de Chern nulles. Remarquons maintenant que les éléments d'ordre 8 de $\tilde{K}U(X \wedge X)$ sont de degré de filtration exacte 4. Il suffit pour cela de démontrer que le terme $E_2^{4, -4}(X \wedge X)$ est éternel, c'est-à-dire $E_\infty^{4, -4}(X \wedge X) = E_2^{4, -4}(X \wedge X) = H^4(X \wedge X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$. Modulo la projection $\Lambda : X \times X \rightarrow X \wedge X$, le générateur de $H^4(X \wedge X; \mathbb{Z})$ est identifié avec l'élément $a \otimes a \in H^4(X \times X; \mathbb{Z})$. Du fait que la suite spectrale est triviale pour X et du fait que les différentielles sont des dérivations, il s'ensuit que $a \otimes a$ persiste à l'infini. Nous avons donc le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 {}^r E_r^{4,2k}(X \times X) & \xrightarrow{{}^r d_r} & {}^r E_r^{4+r,2k-r+1}(X \times X) \\
 \uparrow \Lambda^* & & \uparrow \Lambda^* \\
 {}^r E_r^{4,2k}(X \wedge X) & \xrightarrow{d_r} & {}^r E_r^{4+r,2k-r+1}(X \wedge X)
 \end{array}$$

où ${}^r d_r = 0$ (car les générateurs de $H^4(X \times X; \mathbb{Z})$ sont les éléments suivants $a^2 \otimes 1, 1 \otimes a^2$ et $a \otimes a$) et r est un entier impair. Supposons qu'il existe $\{x\} \in E_r^{4+r,2k-r+1}(X \wedge X)$ tel que $\Lambda^* \{x\} = 0$. Alors il existe $y \in E_{r-2}^{6,2k-2}(X \times X)$ tel que ${}^{r-2} d_{r-2}(y) = \Lambda^* \{x\}$. Mais ${}^{r-2} d_{r-2} = 0$ car $H^6(X \times X; \mathbb{Z})$ est engendré par les éléments suivants : $a^3 \otimes 1, 1 \otimes a^3, a^2 \otimes a$ et $a \otimes a^2$. Il s'ensuit que $\{x\} = 0$ et donc $d_r = 0$. Par conséquent, on a bien $E_\infty^{4,-4}(X \wedge X) = E_2^{4,-4}(X \wedge X)$.

Rappelons maintenant que le edge-homomorphisme

$$\mu_4^0 : F^{4\vee} KU(X \wedge X) \rightarrow H^4(X \wedge X; \mathbb{Z})$$

de noyau $F^{6\vee} KU(X \wedge X)$ est donné par la deuxième classe de Chern ($[21]$). Par conséquent, un élément z d'ordre 8 dans $\vee KU(X \wedge X)$ est tel que $c_2(z) = a \otimes a \neq 0$ (vu comme un élément de $H^4(X \wedge X; \mathbb{Z})$). Il s'ensuit que $v! : \vee KU(X) \rightarrow \vee KU(X \wedge X)$ ne peut pas être un monomorphisme. Pour la deuxième partie de la proposition, soit ξ un fibré vectoriel complexe sur $X \wedge X$ tel que z soit sa classe stable. On a

$$c_4(\xi \otimes \xi) = c_4(\xi) + c_1(\xi) \cup c_3(\xi) + c_3(\xi) \cup c_1(\xi) + c_2^2(\xi) + c_4(\xi).$$

Or $2c_4(\xi) = c_1(\xi) \cup c_3(\xi) = c_3(\xi) \cup c_1(\xi) = 0$.

Donc $c_4(\xi \otimes \xi) = c_2^2(\xi) = a^2 \otimes a^2 \neq 0$.

Il s'ensuit que f ne peut pas être un représentant de $2z = [\xi \otimes \xi]$, et de même pour $6z$, c'est-à-dire, les éléments d'ordre 4 de $\tilde{K}U(X \wedge X)$.

D'où le résultat.

Théorème 4.1.4.- L'existence d'homomorphisme de H-espaces $f : X, \mu \rightarrow BF, \theta$ ($F = U$ ou O) ne dépend pas de la multiplication choisi sur $X = \mathbb{R}P^7$.

Dans la démonstration de ce théorème, nous allons nous servir du critère suivant (Voir [22], Propos. 1.5.1. page 30).

Critère 4.1.5.- Soit (X, μ) , (X', μ') deux H-espaces et $h : X \rightarrow X'$ une application topologique. Supposons de plus que (X', μ') est associatif et que X est de dimension fini. Alors X admet une multiplication $\hat{\mu}$ telle que h est un homomorphisme de H-espaces pour $\hat{\mu}, \mu'$, si et seulement si

$$-HD(h, \mu, \mu') \in \text{IM}([X \wedge X, X] \xrightarrow{h_*} [X \wedge X, X'])$$

où $HD(h, \mu, \mu')$ est la H-déviation relativement à μ, μ' .

Démonstration de 4.1.4.- On va utiliser 4.1.5 pour $X = \mathbb{R}P^7$ et $X', \mu' = BU, \theta$. Soit $\rho \in \tilde{K}U(X)$ le générateur canonique et supposons que pour une certaine multiplication μ sur X , 2ρ ne soit pas primitif, c'est-à-dire,

$$\mu^!(2\rho) = p_1^!(2\rho) + p_2^!(2\rho) + \Lambda^1(y) \quad \text{avec } y \neq 0$$

($y \in \tilde{K}U(X \wedge X)$ est la H-déviation de 2ρ relativement à μ, θ).

S'il existait $\hat{\mu} : X \times X \rightarrow X$ pour laquelle 2ρ serait primitif :

$$\hat{\mu}!(2\rho) = p_1^!(2\rho) + p_2^!(2\rho)$$

alors, selon 4.1.5, il existerait $v : X \wedge X \rightarrow X$ tel que $v!(2\rho) = -y$.

Dans ces conditions, l'élément $z = v!(\rho)$ serait au minimum d'ordre 4 ce qui contredit la proposition 4.1.3. De même, si

$$\mu!(4\rho) = p_1^!(4\rho) + p_2^!(4\rho) + \Lambda^!(y) \quad y \neq 0$$

pour une certaine multiplication μ et

$$\hat{\mu}!(4\rho) = p_1^!(4\rho) + p_2^!(4\rho)$$

pour une autre multiplication $\hat{\mu}$, il existerait $v : X \wedge X \rightarrow X$ tel que $v!(4\rho) = -y$ et $v!$ serait un monomorphisme. Ceci montre donc 4.1.4, pour le cas complexe, compte tenu de 4.1.1.

Pour le cas réel, rappelons que le morphisme de réélification

$$r : \tilde{K}U(X) \longrightarrow \tilde{K}O(X)$$

est tel que $r(\rho) = 2\sigma$ où σ est le générateur canonique de $\tilde{K}O(X)$ et $\rho = c(\sigma)$ où c est le morphisme de complexification. Supposons par l'absurde que pour une certaine multiplication μ on ait

$$\mu!(2\sigma) = p_1^!(2\sigma) + p_2^!(2\sigma) + \Lambda^!(z) \quad z \neq 0$$

et pour une autre multiplication $\hat{\mu}$

$$\hat{\mu}!(2\sigma) = p_1^!(2\sigma) + p_2^!(2\sigma).$$

Puisque $c(2\sigma) = 2\rho$, ce dernier est primitif pour $\hat{\mu}$ et donc aussi pour μ d'après le résultat précédent pour le cas complexe. Or, selon 4.1.1, ρ n'est pas primitif pour toute multiplication, donc

$$\mu^!(\rho) = p_1^!(\rho) + p_2^!(\rho) + \Lambda^!(x) \quad x \neq 0$$

$$\hat{\mu}^!(\rho) = p_1^!(\rho) + p_2^!(\rho) + \Lambda^!(x') \quad x' \neq 0.$$

Puisque $r(\rho) = 2\sigma$, on a $r(x) = z \neq 0$ et $r(x') = 0$, mais $\mu^!(2\rho) = \hat{\mu}^!(2\rho)$, donc $2x = 2x' = 0$; comme $\tilde{K}U(X \wedge X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_8$, d'après 4.1.2, nécessairement $x = x'$ ce qui est contradictoire. Pour l'élément d'ordre 2, $4\sigma \in \tilde{K}O(X)$, on procède de la même manière. Si 4σ est primitif pour une certaine multiplication $\hat{\mu}$ alors $c(4\sigma) = 4\rho$ est primitif pour $\hat{\mu}$ et donc aussi pour toute multiplication μ . Mais si 4σ n'est pas primitif pour une autre multiplication μ ,

$$\mu^!(4\sigma) = p_1^!(4\sigma) + p_2^!(4\sigma) + \Lambda^!(z) \quad z \neq 0$$

alors, puisque $r(2\rho) = 4\sigma$, 2ρ aussi n'est pas primitif quelle que soit la multiplication. Par conséquent

$$\mu^!(2\rho) = p_1^!(2\rho) + p_2^!(2\rho) + \Lambda^!(x) \quad x \neq 0$$

$$\hat{\mu}^!(2\rho) = p_1^!(2\rho) + p_2^!(2\rho) + \Lambda^!(x') \quad x' \neq 0$$

avec $2x = 2x' = 0$, donc $x = x'$ d'après 4.1.2. Mais $r(x) = z \neq 0$ et $r(x') = 0$ puisque 4σ est primitif pour $\hat{\mu}$. D'où la contradiction.

Ceci achève donc la démonstration de 4.1.4.

4.2.- Nous allons maintenant montrer que l'élément d'ordre 2 de $\tilde{K}F(X)$ est primitif. A cet effet, nous avons besoin d'une série de lemmes concernant certains termes de la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch en K-théorie réelle de l'espace P_2X .

Lemme 4.2.1.- La différentielle $d_3 : E_3^{3,-2}(P_2X) \rightarrow E_3^{6,-4}(P_2X)$ est nulle.

Démonstration : Remarquons tout d'abord que, d'une part

$i^* : H^3(P_2X; Z_2) \rightarrow H^3(\Sigma X; Z_2)$ est un isomorphisme car α^2 est primitif et $H^2(X*X; Z_2) = 0$; et, d'autre part

$i^* : H^5(P_2X; Z_2) \rightarrow H^5(\Sigma X; Z_2)$ est un épimorphisme car α^4 est primitif. Puisque $Sq^2 \sigma(\alpha^2) = \cancel{Sq^2} \sigma(\alpha^4)$, il s'ensuit que

$Sq^2 : H^3(P_2X; Z_2) \rightarrow H^5(P_2X; Z_2)$ est un monomorphisme.

Rappelons que $d_3 = \delta \circ Sq^2$. Soit alors $x_3 \in H^3(P_2X; Z_2)$ le générateur ; on doit montrer que $\delta Sq^2 x_3 = 0$. Nous avons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \rightarrow & H^5(P_2X; Z) & \xrightarrow{\rho} & H^5(P_2X; Z_2) & \xrightarrow{\delta} & H^6(P_2X; Z) & \dots \\
 & & \downarrow i^* & & \downarrow i^* & & & \\
 0 & \rightarrow & H^5(\Sigma X; Z) & \xrightarrow{\rho} & H^5(\Sigma X; Z_2) & \longrightarrow & 0 &
 \end{array}$$

la flèche verticale de gauche étant un épimorphisme car a^2 est primitif. On a $i^* Sq^2 x_3 = \sigma(\alpha^4) = \rho \sigma(a^2)$, par conséquent, il existe $y \in H^5(P_2X; Z)$ tel que $\rho(y) = Sq^2 x_3$ et donc $\delta Sq^2 x_3 = \delta \rho(y) = 0$.

C.Q.F.D.

Remarque 4.2.2.- Du fait que $Sq^2 : H^3(P_2X; Z_2) \rightarrow H^5(P_2X; Z_2)$ est un monomorphisme on a $E_3^{3,-1}(P_2X) = 0$. On pourrait aussi remarquer que $Sq^2 : H^2(P_2X; Z_2) \rightarrow H^4(P_2X; Z_2)$ est un isomorphisme, en effet, le géné-

rateur $x_2 \in H^2(P_2X; Z_2)$ est tel que $i^*(x_2) = \sigma(\alpha)$, $Sq^2 x_2 = x_2^2 = p^* \sigma(\alpha * \alpha)$ selon 2-1 et $H^4(P_2X; Z_2) \cong H^3(X * X; Z_2) \cong Z_2$. Il s'ensuit que $E_3^{2, -1}(P_2X) = E_3^{4, -2}(P_2X) = 0$.

Lemme 4.2.3. - $E_3^{11, 8k-1}(P_2X) = 0$.

Démonstration : On doit montrer que la suite suivante

$$E_2^{9, 8k}(P_2X) \xrightarrow{Sq^2 \circ \rho} E_2^{11, 8k-1}(P_2X) \xrightarrow{Sq^2} E_2^{13, 8k-2}(P_2X)$$

est exacte. Commençons par étudier le noyau de

$$Sq^2 : H^{11}(P_2X; Z_2) \longrightarrow H^{13}(P_2X; Z_2).$$

On a les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{array}{ccc} H^{11}(P_2X; Z_2) & \xrightarrow{Sq^2} & H^{13}(P_2X; Z_2) \\ \cong \uparrow p^* & & \cong \uparrow p^* \\ H^{11}(\Sigma(X * X); Z_2) & \xrightarrow{Sq^2} & H^{13}(\Sigma(X * X); Z_2) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} H^{11}(\Sigma(X * X); Z_2) & \xleftarrow[\cong]{\sigma} & H^{10}(X * X; Z_2) & \xleftarrow[\cong]{} & H^{10}(\Sigma(X \wedge X); Z_2) & \xleftarrow[\cong]{\sigma} & H^9(X \wedge X; Z_2) \\ \downarrow Sq^2 & & \downarrow Sq^2 & & \downarrow Sq^2 & & \downarrow Sq^2 \\ H^{13}(\Sigma(X * X); Z_2) & \xleftarrow[\cong]{\sigma} & H^{12}(X * X; Z_2) & \xleftarrow[\cong]{} & H^{12}(\Sigma(X \wedge X); Z_2) & \xleftarrow[\cong]{\sigma} & H^{11}(X \wedge X; Z_2) \end{array}$$

Il suffit donc d'étudier $Sq^2 : H^9(X \wedge X; Z_2) \rightarrow H^{11}(X \wedge X; Z_2)$. On a

$$\text{Sq}^2(\alpha^7 \otimes \alpha^2) = \alpha^7 \otimes \alpha^4, \quad \text{Sq}^2(\alpha^2 \otimes \alpha^7) = \alpha^4 \otimes \alpha^7$$

$$\text{Sq}^2(\alpha^6 \otimes \alpha^3) = \alpha^6 \otimes \alpha^5, \quad \text{Sq}^2(\alpha^3 \otimes \alpha^6) = \alpha^5 \otimes \alpha^6$$

et $\text{Sq}^2(\alpha^5 \otimes \alpha^4) = \text{Sq}^2(\alpha^4 \otimes \alpha^5) = 0.$

Il s'ensuit que Ker Sq^2 possède deux générateurs : $p^* \sigma(\alpha^5 * \alpha^4)$ et $p^* \sigma(\alpha^4 * \alpha^5).$

Etudions maintenant la différentielle

$$\text{Sq}^2 \circ \rho : H^9(P_2 X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{11}(P_2 X; \mathbb{Z}_2).$$

Il est aisé de vérifier que $H^9(P_2 X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$; il s'ensuit que

$$\rho : H^9(P_2 X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^9(P_2 X; \mathbb{Z}_2) \text{ est un monomorphisme.}$$

On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} H^9(P_2 X; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\rho} & H^9(P_2 X; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\text{Sq}^2} & H^{11}(P_2 X; \mathbb{Z}_2) \\ \uparrow p^* & & \uparrow p^* & & \uparrow \cong p^* \\ H^9(\Sigma(X * X); \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\rho} & H^9(\Sigma(X * X); \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\text{Sq}^2} & H^{11}(\Sigma(X * X); \mathbb{Z}_2) \\ \uparrow \cong & & \uparrow \cong & & \\ H^7(X \wedge X; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\rho} & H^7(X \wedge X; \mathbb{Z}_2) & & \end{array}$$

Pour étudier l'image de ρ on va utiliser le fait que $\text{Sq}^1 = \rho \circ \delta$:

$$\begin{array}{ccccccc} H^7(X \wedge X; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\rho} & H^7(X \wedge X; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\delta} & H^8(X \wedge X; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \swarrow \text{Sq}^1 & \searrow \rho & \\ & & & & H^8(X \wedge X; \mathbb{Z}_2) & & \end{array}$$

On a

$$\text{Sq}^1(\alpha^6 \theta \alpha) = \text{Sq}^1(\alpha^5 \theta \alpha^2) = \alpha^6 \theta \alpha^2$$

$$\text{Sq}^1(\alpha \theta \alpha^6) = \text{Sq}^1(\alpha^2 \theta \alpha^5) = \alpha^2 \theta \alpha^6$$

et
$$\text{Sq}^1(\alpha^4 \theta \alpha^3) = \text{Sq}^1(\alpha^3 \theta \alpha^4) = \alpha^4 \theta \alpha^4.$$

Il s'ensuit que $\text{Im } \rho = \text{Ker}(H^9(\Sigma(X*X); \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\delta} H^{10}(\Sigma(X*X); \mathbb{Z}))$ est engendré par les éléments suivants : $\sigma(\alpha^2 * \alpha^5) + \sigma(\alpha * \alpha^6)$, $\sigma(\alpha^5 * \alpha^2) + \sigma(\alpha^6 * \alpha)$ et $\sigma(\alpha^4 * \alpha^3) + \sigma(\alpha^3 * \alpha^4)$. Maintenant, on a

$$\text{Sq}^2(\sigma(\alpha^2 * \alpha^5) + \sigma(\alpha * \alpha^6)) = \sigma(\alpha^4 * \alpha^5)$$

$$\text{Sq}^2(\sigma(\alpha^5 * \alpha^2) + \sigma(\alpha^6 * \alpha)) = \sigma(\alpha^5 * \alpha^4)$$

$$\text{Sq}^2(\sigma(\alpha^4 * \alpha^3) + \sigma(\alpha^3 * \alpha^4)) = \sigma(\alpha^4 * \alpha^5) + \sigma(\alpha^5 * \alpha^4).$$

Remarquons que

$$H(\mu)^*(\sigma \alpha^7) = \alpha^2 * \alpha^5 + \alpha^5 * \alpha^2 + \alpha * \alpha^6 + \alpha^6 * \alpha + \alpha^4 * \alpha^3 + \alpha^3 * \alpha^4.$$

Il s'ensuit que $\text{Ker}(H^9(\Sigma(X*X); \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p^*} H^9(P_2 X; \mathbb{Z}_2))$ est isomorphe à \mathbb{Z}_2 dont le générateur est $\sigma H(\mu)^*(\sigma \alpha^7)$. Par conséquent

$\text{Sq}^2 \circ \rho : H^9(P_2 X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{11}(P_2 X; \mathbb{Z}_2)$ est un monomorphisme et $\text{Im } \text{Sq}^2 \circ \rho = \text{Ker } \text{Sq}^2$.

C.Q.F.D.

Lemme 4.2.4. - $E_4^{12, 8k-2}(P_2 X) = 0$.

Démonstration : On doit étudier les deux différentielles suivantes

$$d_2 = \text{Sq}^2 : E_2^{10, 8k-1}(P_2 X) \longrightarrow E_2^{12, 8k-2}(P_2 X)$$

et
$$d_3 = \delta \circ \text{Sq}^2 : E_3^{12, 8k-2}(P_2 X) \longrightarrow E_3^{15, 8k-4}(P_2 X).$$

Pour la première, nous avons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 H^{10}(P_2X; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{Sq^2} & H^{12}(P_2X; \mathbb{Z}_2) \\
 \uparrow \cong \begin{array}{c} p^* \\ \uparrow \end{array} & & \uparrow \cong \begin{array}{c} p^* \\ \uparrow \end{array} \\
 H^{10}(\Sigma(X*X); \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{Sq^2} & H^{12}(\Sigma(X*X); \mathbb{Z}_2) \\
 \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\
 H^8(X \wedge X; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{Sq^2} & H^{10}(X \wedge X; \mathbb{Z}_2)
 \end{array}$$

Or

$$\begin{aligned}
 Sq^2(\alpha^7 \theta \alpha) &= Sq^2(\alpha \theta \alpha^7) = Sq^2(\alpha^4 \theta \alpha^4) = 0 \\
 Sq^2(\alpha^6 \theta \alpha^2) &= \alpha^6 \theta \alpha^4, \quad Sq^2(\alpha^2 \theta \alpha^6) = \alpha^4 \theta \alpha^6 \\
 Sq^2(\alpha^5 \theta \alpha^3) &= \alpha^6 \theta \alpha^4 + \alpha^5 \theta \alpha^5 \\
 Sq^2(\alpha^3 \theta \alpha^5) &= \alpha^5 \theta \alpha^5 + \alpha^4 \theta \alpha^6.
 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\text{Im}(H^{10}(P_2X; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{Sq^2} H^{12}(P_2X; \mathbb{Z}_2))$ est engendré par les éléments suivants : $p^* \sigma(\alpha^6 * \alpha^4)$, $p^* \sigma(\alpha^4 * \alpha^6)$ et $p^* \sigma(\alpha^5 * \alpha^5)$. Par conséquent, $E_3^{12, 8k-2}(P_2X)$ est engendré par $p^* \sigma(\alpha^7 * \alpha^3)$ et $p^* \sigma(\alpha^3 * \alpha^7)$.

Pour la deuxième différentielle, on a $Sq^2(\alpha^7 \theta \alpha^3) = \alpha^7 \theta \alpha^5$ et $Sq^2(\alpha^3 \theta \alpha^7) = \alpha^5 \theta \alpha^7$. Il nous faut maintenant calculer $\delta(\alpha^7 \theta \alpha^5)$ et $\delta(\alpha^5 \theta \alpha^7)$. Rappelons que $Sq^1 = \rho \circ \delta$. Or $Sq^1(\alpha^7 \theta \alpha^5) = \alpha^7 \theta \alpha^6$ et $Sq^1(\alpha^5 \theta \alpha^7) = \alpha^6 \theta \alpha^7$. Il s'ensuit que $d_3 = \delta \circ Sq^2$ est un monomorphisme.

C.Q.F.D.

Lemme 4.2.5. - $E_3^{10, 8k}(P_2X) \cong \mathbb{Z}_2$ dont le générateur est $p^* \sigma(a^2 * a^2)$.

Démonstration : On doit montrer que le noyau de la différentielle

$$d_2 = \text{Sq}^2 \circ \rho : E_2^{10,8k}(P_2X) \rightarrow E_2^{12,8k-1}(P_2X)$$

est isomorphe à \mathbb{Z}_2 . Nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 H^{10}(P_2X; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\rho} & H^{10}(P_2X; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\text{Sq}^2} & H^{12}(P_2X; \mathbb{Z}_2) \\
 \uparrow \cong \text{P}^* & & \uparrow \cong \text{P}^* & & \uparrow \cong \text{P}^* \\
 H^{10}(\Sigma(X * X); \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\rho} & H^{10}(\Sigma(X * X); \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\text{Sq}^2} & H^{12}(\Sigma(X * X); \mathbb{Z}_2) \\
 \uparrow \cong & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\
 H^8(X \wedge X; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\rho} & H^8(X \wedge X; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\text{Sq}^2} & H^{10}(X \wedge X; \mathbb{Z}_2)
 \end{array}$$

On vérifie aisément que $H^8(X \wedge X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ dont les générateurs sont : $a^3 \otimes a$, $a \otimes a^3$ et $a^2 \otimes a^2$. Or

$$\text{Sq}^2 \circ \rho(a^3 \otimes a) = \text{Sq}^2(\alpha^6 \otimes \alpha^2) = \alpha^6 \otimes \alpha^4,$$

$$\text{Sq}^2 \circ \rho(a \otimes a^3) = \text{Sq}^2(\alpha^2 \otimes \alpha^6) = \alpha^4 \otimes \alpha^6,$$

et $\text{Sq}^2 \circ \rho(a^2 \otimes a^2) = \text{Sq}^2(\alpha^4 \otimes \alpha^4) = 0$. D'où le résultat.

Lemme 4.8.6. - $E_4^{14,8k-4}(P_2X) = 0$.

Démonstration : On doit étudier les deux différentielles suivantes :

$$d_2 = \text{Sq}^2 : E_2^{9,8k-1}(P_2X) \longrightarrow E_2^{11,8k-2}(P_2X)$$

et $d_3 = \delta \circ \text{Sq}^2 : E_3^{11,8k-2}(P_2X) \longrightarrow E_3^{14,8k-4}(P_2X)$.

On a vu dans la démonstration de 4.2.3 que $H^9(P_2X; \mathbb{Z}_2)$ est engendré par les éléments $p^* \alpha(\alpha^i * \alpha^j)$, $i+j = 7$, $i, j \geq 1$, avec la relation

$$\sum_{\substack{i,j \geq 1 \\ i+j=7}} p^* \sigma(\alpha^i * \alpha^j) = 0.$$

Pour la première différentielle, on a

$$\begin{aligned} \text{Sq}^2 p^* \sigma(\alpha^6 * \alpha) &= \text{Sq}^2 p^* \sigma(\alpha * \alpha^6) = 0 \\ \text{Sq}^2 p^* \sigma(\alpha^5 * \alpha^2) &= \text{Sq}^2 p^* \sigma(\alpha^3 * \alpha^4) = p^* \sigma(\alpha^5 * \alpha^4) \\ \text{Sq}^2 p^* \sigma(\alpha^2 * \alpha^5) &= \text{Sq}^2 p^* \sigma(\alpha^4 * \alpha^3) = p^* \sigma(\alpha^4 * \alpha^5). \end{aligned}$$

On déduit que $E_3^{11, 8k-2}(P_2X)$ est engendré par $p^* \sigma(\alpha^7 * \alpha^2)$, $p^* \sigma(\alpha^2 * \alpha^7)$, $p^* \sigma(\alpha^6 * \alpha^3)$ et $p^* \sigma(\alpha^3 * \alpha^6)$. Pour la deuxième différentielle, on a :

$$\begin{aligned} \text{Sq}^2 p^* \sigma(\alpha^7 * \alpha^2) &= p^* \sigma(\alpha^7 * \alpha^4), & \text{Sq}^2 p^* \sigma(\alpha^2 * \alpha^7) &= p^* \sigma(\alpha^4 * \alpha^7) \\ \text{Sq}^2 p^* \sigma(\alpha^6 * \alpha^3) &= p^* \sigma(\alpha^6 * \alpha^5), & \text{Sq}^2 p^* \sigma(\alpha^3 * \alpha^6) &= p^* \sigma(\alpha^5 * \alpha^6). \end{aligned}$$

Puisque $\text{Sq}^1(\alpha^6 \otimes \alpha^5) = \text{Sq}^1(\alpha^5 \otimes \alpha^6) = \alpha^6 \otimes \alpha^6$, on a

$$\delta p^* \sigma(\alpha^6 * \alpha^5) = \delta p^* \sigma(\alpha^5 * \alpha^6) = p^* \sigma(\alpha^3 * \alpha^3) \in H^{14}(P_2X; \mathbb{Z}_2) \quad (\cong \mathbb{Z}_2),$$

d'où le résultat.

Lemme 4.2.7. - $E_4^{5, 8k-4}(P_2X) \cong \mathbb{Z}_2$ dont le générateur x_5 est tel que $i^*(x_5) = \sigma(a^2)$.

Démonstration : On doit étudier la différentielle

$$d_3 = \delta \circ \text{Sq}^2 : E_3^{2, 8k-2}(P_2X) \longrightarrow E_3^{5, 8k-4}(P_2X).$$

On a vu dans 4.2.2 que si x_2 est le générateur de $H^2(P_2X; \mathbb{Z}_2)$, alors $\text{Sq}^2 x_2 = p^* \sigma(\alpha * \alpha)$ qui est le générateur de $H^4(P_2X; \mathbb{Z}_2)$. Ecrivons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 H^4(P_2X; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\delta} & H^5(P_2X; \mathbb{Z}) \\
 \uparrow p^* & & \uparrow p^* \\
 H^4(\Sigma(X*X); \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\delta} & H^5(\Sigma(X*X); \mathbb{Z})
 \end{array}$$

et remarquons que $p^* : H^5(\Sigma(X*X); \mathbb{Z}) \rightarrow H^5(P_2X; \mathbb{Z})$ est un monomorphisme car $H^4(\Sigma X; \mathbb{Z}) = 0$. Or

$$\rho \circ \delta(\sigma(\alpha*\alpha)) = Sq^1 \sigma(\alpha*\alpha) = \sigma(\alpha^2*\alpha) + \sigma(\alpha*\alpha^2).$$

Il s'ensuit que $\delta(\sigma(\alpha*\alpha)) \neq 0$; par conséquent $\delta \circ Sq^2 x_2 \neq 0$ et appartient à

$$\text{Im}(H^5(\Sigma(X*X); \mathbb{Z}) \xrightarrow{p^*} H^5(P_2X; \mathbb{Z})).$$

Enfin, rappelons que $i^* : H^5(P_2X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^5(\Sigma X; \mathbb{Z})$ est un épimorphisme et $E_{\infty}^{5, 8k-4}(\Sigma X) = E_2^{5, 8k-4}(\Sigma X)$. D'où le résultat.

Remarque :

Montrons que $H^5(P_2X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_4$. On a la suite exacte courte suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H^5(\Sigma(X*X); \mathbb{Z}) & \xrightarrow{p^*} & H^5(P_2X; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{i^*} & H^5(\Sigma X; \mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \\
 & & \wr || & & & & \wr || \\
 & & \mathbb{Z}_2 & & & & \mathbb{Z}_2
 \end{array}$$

On a $H(\mu) \sigma(\alpha^3) = \sigma(\alpha^2*\alpha) + \sigma(\alpha*\alpha^2)$, par conséquent

$$\rho \circ \delta(p^* \sigma(\alpha*\alpha)) = Sq^1 p^* \sigma(\alpha*\alpha) = p^* \sigma(\alpha^2*\alpha) + p^* \sigma(\alpha*\alpha^2) = 0.$$

Or, on vient de démontrer dans le lemme précédent que $\delta(p^* \sigma(\alpha*\alpha)) \neq 0$. Par conséquent, le morphisme de restriction

$\rho : H^5(P_2X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^5(P_2X; \mathbb{Z}_2)$ n'est pas injectif et donc $H^5(P_2X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_4$ compte tenu de la suite exacte courte ci-dessus.

Théorème 4.2.8. - L'élément d'ordre 2 de $\tilde{K}F(X)$ ($F = U$ ou O , $X = \mathbb{R}P^7$) est primitif.

Démonstration : On vérifie aisément que les lemmes que l'on vient de démontrer entraînent que pour connaître les termes $E_\infty^{3,8k-2}(P_2X)$ et $E_\infty^{5,8k-4}(P_2X)$, il suffit de connaître les différentielles

$$d_5 : E_5^{5,8k-4}(P_2X) \longrightarrow E_5^{10,8k-8}(P_2X)$$

et

$$d_7 : E_7^{3,8k-2}(P_2X) \longrightarrow E_7^{10,8k-8}(P_2X).$$

Selon 4.2.5, $E_3^{10,8k}(P_2X) \cong \mathbb{Z}_2$; par conséquent, une des deux différentielles, d_5 ou d_7 , est nécessairement nulle. Remarquons que si σ est le générateur de $\tilde{K}O(X)$ vu comme élément de $\tilde{K}O^1(\Sigma X)$, alors 2σ et 6σ appartiennent au degré de filtration exacte 3, tandis que $4\sigma \in F^{5\tilde{v}1}(\Sigma X)$. Maintenant supposons que $d_5 \neq 0$; alors $d_7 = 0$ et nous avons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} F^{3\tilde{v}1}(P_2X) & \xrightarrow{i^!} & F^{3\tilde{v}1}(\Sigma X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_2^{3,-2}(P_2X) \cong F^{3\tilde{v}1}(P_2X) & \xrightarrow{i^*} & F^{3\tilde{v}1}(\Sigma X) \cong E_2^{3,-2}(\Sigma X) \\ & \cong & \\ & F^{5\tilde{v}1}(P_2X) & \xrightarrow{\cong} & F^{5\tilde{v}1}(\Sigma X) \end{array}$$

ce qui entraîne que 2σ et 6σ sont primitifs et donc aussi 4σ . Si par contre $d_5 = 0$, alors le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 F^{5\sim} KO^1(P_2 X) & \xrightarrow{i^!} & F^{5\sim} KO^1(\Sigma X) \\
 \downarrow & & \parallel \\
 E_4^{5,-4}(P_2 X) \cong F^{5\sim} KO^1(P_2 X) / F^6 KO^1(P_2 X) & \xrightarrow{i^*} & F^{5\sim} KO^1(\Sigma X) \cong E_2^{5,-4}(\Sigma X)
 \end{array}$$

où i^* est un épimorphisme selon 4.2.7, entraîne que 4σ est primitif. D'où le théorème pour le cas réel. Le cas complexe s'en déduit à l'aide du morphisme de complexification.

Remarque :

D'après la démonstration précédente, on voit que le fait que les éléments d'ordre 4 de $\tilde{KO}(X)$ soient primitifs ou non ne dépend que de la différentielle d_7 .

REFERENCES

- [1] ADAMS, J.F. - On the groups $J(X)$ - Part IV, *Topology* 5 (1966), 21-71.
- [2] ARAKI, S. ; TODA, H. - Multiplicative structures in mod q cohomology theories I - *Osaka J. Math.* 2 (1965), 71-115.
- [3] ATIYAH, M.F. - *K-theory* - Benjamin, New-York, 1967.
- [4] ATIYAH, M.F. ; HIRZEBRUCH, F. - Vector bundles and homogeneous spaces - *Proc. Symp. Pure Math. III. Amer. Math. Soc. Proc.* 1961.
- [5] BOREL, A. - Sur l'homologie et la cohomologie des groupes de Lie compacts connexes - *Am. J. Math.* 76 (1954), 273-342.
- [6] BOTT, R. - *Lectures on $K(X)$* - Benjamin, New-York, 1969.
- [7] BROWDER, W. ; SPANIER, E. - H-spaces and duality - *Pacific J. Math* 12 (1962), 411-414.
- [8] BROWDER, W. ; THOMAS, E. - On the projective plane of an H-space - *Illinois J. Math.* 7 (1963), 492-502.
- [9] CURTIS, M. ; MISLIN, G. - H-spaces which are bundles over S^7 - *J. Pure and Appl. Algebra* 1 (1971), 27-40.
- [10] FUJII, M. - KO -groups of projective spaces - *Osaka J. of Math.* 4 (1967), 141-149.
- [11] HELD, R. ; SJERVE, D. - On the homotopy properties of Thom complexes - *Math Z.* 135 (1973/74), 315-323.
- [12] HODGKIN, L. - On the K -theory of Lie groups - *Topology* 6 (1967), 1-36.
- [13] HUBBUCK, J. - Generalized cohomology operations and H-spaces of low rank - *Trans. Amer. Math. Soc.* 141 (1969), 335-360.
- [14] HUSEMOLLER, D. - *Fibre bundles* - Springer, Berlin-Heidelberg, New-York, 1975.
- [15] MAHAMMED, N. ; PICCININI, R. ; SUTER, U. - Some Applications of Topological K -theory - *North-Holland Math. Studies* 45, 1980.



- [16] MAUNDER, C.R.F. - The spectral sequence of an extraordinary cohomology theory. Proc. Camb. Philo. Soc. 59 (1963), 567-574.
- [17] MIMURA, M. ; NISHIDA, G. ; TODA, H. - On the classification of H-spaces of rank 2. J. Math. Kyoto Univ. 13 (1973), 611-627.
- [18] MISLIN, G. ; ROITBERG, J. - Remarks on the homotopy classification of finite-dimensional H-spaces - Proc. London Math. Soc. (3) 23 (1971), 593-612.
- [19] MOSHER, R.E. ; TANGORA, M.C. - Cohomology operations - Harper's Series in Modern Mathematics (1968).
- [20] THOMAS, E. - Steenrod squares and H-spaces II - Ann. of Math. 81 (1965), 473-495.
- [21] SEROUL, R. - Edge-homomorphismes en KU et KO-théorie.
- [22] ZABRODSKY, A. - H-espaces - North-Holland Math. Studies 22 (1976).
- [23] HUBBUCK, J. - Simply connected H-spaces of Rank 2 with 2-torsion - Quart. J. Math. Oxford (3), 26 (1975), 169-177.



RÉSUMÉ

Dans ce travail, on calcule les groupes de K-théorie réelle des H-espaces finis simplement connexes de rang 2 et aussi, dans le cas sans torsion, ceux de rang 3. Les opérations d'Adams sont étudiées pour les H-espaces de type (3,5,7).

Dans le chapitre II, on étudie le cas plus général des H-espaces sans torsion de même type que le groupe de Lie $SU(n)$. On montre que pour un tel H-espace X , les groupes $\overset{\vee}{KO}^{-i}(X)$ pour $i = 0, 4$ ou 5 , sont sans torsion.

On étudie ensuite le groupe $KO(F_4)$ où F_4 est le groupe de Lie exceptionnel de rang 4. On montre notamment que $KO(F_4)$ est isomorphe au groupe $KO(\mathbb{S}^{52})$.

Enfin, dans le dernier chapitre, on étudie l'existence d'éléments primitifs dans l'anneau $KO(X)$ où X est l'espace projectif $\mathbb{R}P_3$ ou $\mathbb{R}P_7$.

MOTS CLÉS :

C.W.-COMPLEXE ; COHOMOLOGIE ; SUITE SPECTRALE ; OPERATION STEENROD ; ELEMENT PRIMITIF ; H-ESPACE.