

50376  
1984  
183

50376.  
1984.  
483.

N° d'ordre: 1160

# THESE

Présentée à

L'UNIVERSITE DE SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

Par

## RACHED TEKAÏA

Pour l'obtention du diplôme de Docteur de troisième cycle

APPLICATION DE LA THEORIE DE LANDAU A L'ETUDE DES TRANSITIONS  
DE PHASES DANS LES CRISTAUX LIQUIDES



Soutenue le 12 Juin 1984 devant la commission d'examen

Président	R.FOURET	Professeur, université de Lille 1
Rapporteurs	N.BOCCARA	Directeur de recherche C.N.R.S (Saclay)
	J.PROST	Maitre de recherche C.N.R.S (Talence)
	P.TOLEDANO	Maitre- Assistant, Université de Picardie
Examineur	G.LEBEGUE	Professeur, Université de Picardie

Je remercie monsieur le professeur R.FOURET de l'université de Lille 1, responsable du DEA de sciences des matériaux, d'avoir bien voulu présider le jury de cette thèse. Messieurs N.BOCCARA directeur de recherche au CNRS et J.PROST, maître de recherches au CNRS, m'ont fait l'honneur de juger ce travail qu'ils trouvent ici l'expression de ma gratitude. Leurs importants travaux ont contribué largement à ma formation dans le domaine des cristaux liquides. Je suis reconnaissant à madame G.LEBEGUE, professeur à l'université de Picardie d'avoir bien voulu m'admettre au sein du groupe de physique et de m'avoir encouragé par ses conseils amicaux.

C'est monsieur P.TOLEDANO, maître assistant à l'université de Picardie qui m'a proposé le sujet de cette thèse. C'est lui qui m'a également guidé dans mon apprentissage de la théorie de Landau et dans l'application de cette théorie aux cristaux liquides. Qu'il trouve ici le témoignage de mon amitié sincère pour la patience et la disponibilité qu'il a bien voulu me montrer.

Je dois enfin remercier mon camarade de travail M.CLIN et madame M.COIRET, secrétaire du groupe de physique théorique, pour l'aide amicale qu'ils m'ont accordé.

APPLICATION DE LA THEORIE DE LANDAU  
A L'ETUDE DES TRANSITIONS DE PHASES  
DANS LES CRISTAUX LIQUIDES

## Sommaire

	Page
Introduction .....	1
<u>Chapitre 1: Problèmes posés par l'application de la théorie de Landau à</u>	
<u>l'étude des transitions de phases dans les cristaux liquides.</u>	
1) Introduction.....	3
2) Grandeurs fondamentales utilisées dans la théorie de Landau des cristaux liquides	
a) Groupes de symétrie des cristaux liquides.....	4
b) Représentations irréductibles.....	4
c) La fonction densité.....	8
d) Énergie libre.....	9
3) Méthode pratique utilisée pour appliquer la théorie de Landau	
a) Détermination des représentations irréductibles des groupes de symétrie des phases nématiques et smectiques.....	9
b) Construction des énergies libres de Landau.....	15
c) Détermination des groupes de symétrie des phases stables à basse température.....	19
4) Discussion des études similaires.....	22
Bibliographie.....	25
<u>Chapitre 2: Transitions entre phases smectiques</u>	
1) Introduction.....	26
2) Notation et organisation des tables	
a) Notations utilisées.....	26
b) Organisation des tables.....	28
3) Analyse des résultats	
a) Symétrie des phases smectiques stables à basse température.....	28
b) Symétrie du paramètre d'ordre et énergies libres de Landau.....	46
c) Transitions du 1 <sup>er</sup> ordre entre phases smectiques: généralisation du critère de Landau.....	47
d) Phases incommensurables smectiques.....	48
e) Couplage du paramètre d'ordre avec les grandeurs macroscopiques	56
Bibliographie.....	59
<u>Chapitre 3: Transition à partir d'une phase nématique</u>	
1) Présentation et analyse des résultats.....	60
Bibliographie.....	62

Chapitre 4: Comparaison avec les données expérimentales

1 )Introduction.....	75
2)Identification et classification des mésophases	
a)Remarques préliminaires .....	75
b)Phases nématiques et cholestériques .....	76
c)Phases smectiques .....	76
3)La théorie de Landau et l'interprétation des comporte- ments expérimentaux dans les cristaux liquides.....	78
i) Ordre bicouche dans les phases smectiques.....	79
ii)Phases rentrantes.....	79
iii)Phases incommensurables .....	80
i4)Points multicritiques et points de Lifchitz .....	80
i5)Transition nématique uniaxe -biaxe .....	80
Bibliographie .....	81
Conclusion .....	82
<u>Annexe 1</u> Tableaux de caractères des représentations irréductibles des groupes smectiques $T \square H$ et nématiques $R \square H$ .....	84
<u>Annexe 2</u> Images des représentations irréductibles des groupes smectiques et nématiques .....	100

## I N T R O D U C T I O N

La grande variété de phases mésomorphes mises en évidence au cours des dernières années conduit à une généralisation des concepts spécifiques qui ont été introduits primitivement pour caractériser ces phases. De même, les théories statistiques ou phénoménologiques proposées pour expliquer des mécanismes particuliers ou décrire telle phase particulière sont aujourd'hui insérées dans une présentation plus générale. C'est le cas pour la théorie de Landau des cristaux liquides.

Les premières indications concernant l'application de la théorie de Landau aux cristaux liquides se trouvent dans l'article original de Landau (1). Quelques lignes sont consacrées dans ce travail, à la densité de probabilité qui doit être utilisée pour décrire les phases nématiques. Ce n'est donc pas un hasard si les premières théories phénoménologiques des phases mésomorphes utilisent d'une manière plus ou moins directe le formalisme de la théorie de Landau (2). Ce n'est cependant qu'avec l'accumulation des données expérimentales qu'est apparue la nécessité d'appliquer de façon plus complète les concepts contenus dans cette théorie aux cristaux liquides afin de prédire les changements de symétrie les plus simples qui sont susceptibles de se produire dans ces systèmes (3).

C'est aux auteurs russes Indenbom, Pikin et Loginov que revient toutefois le mérite d'avoir examiné de manière détaillée l'applicabilité de la théorie de Landau aux situations les plus complexes relatives aux transitions de phases dans les cristaux liquides. Dans une série de trois articles (4, 5, 6) ces auteurs établissent la méthode qui permet de décrire les modifications de symétrie spatiale associées aux transitions entre phases smectiques, nématiques et cholestériques. La question des transitions à partir d'une phase isotrope est également effleurée dans leur étude. L'objet de notre travail est de préciser, en l'appliquant de façon systématique, la méthode développée par les auteurs russes. Nous présentons dans cette thèse les résultats que nous avons établis pour les transitions qui peuvent se produire à partir d'une phase smectique ou nématique.

Les arguments de symétrie utilisés dans la théorie de Landau nécessitent de connaître les représentations irréductibles des groupes de symétrie des phases considérées. Ces données n'étaient que partiellement disponibles. Nous avons donc été conduits à construire des représentations, dont les tableaux de caractères figurent dans l'annexe 1. Au chapitre 1, nous indiquons les conditions d'application de la théorie aux phases smectiques et nématiques. Plusieurs exemples détaillés sont traités. Les chapitres 2 et 3 contiennent sous forme de tableaux, nos résultats concernant les changements de symétrie et énergies libres associées aux transitions smectiques-smectiques et nématiques -(Nématiques, cholestériques ou smectiques). Une brève comparaison avec les données expérimentales est effectuée au chapitre 4. Enfin nous tirons les conclusions de notre étude.

#### REFERENCES

1. L.D. LANDAU, Phys. Z. Sowjet 11, 26 (1937) ; 11, 545 (1937), in collected papers of L.D. Landau. Ed. D. Ter Haar, Pergamon Press (1965).
2. P.G. de GENNES, The physics of liquid crystals, Oxford University Press (1974).
3. N. BOCCARA, Annals of Physics 76 , 72 (1973)
4. V.L. INDENBOM, S.A. PIKIN et E.B. LOGINOV, Sov. Phys. Crystallogr. 21, 632 (1977)
5. S.A. PIKIN et V.L. INDENBOM, Sov. Phys. Usp. 21, 487 (1978)
6. V.L. INDENBOM et E.B. LOGINOV, Sov. Phys. Crystallogr. 26, 526 (1981)

## CHAPITRE 1

PROBLEMES POSES PAR L'APPLICATION DE LA THEORIE DE LANDAUA L'ETUDE DES TRANSITIONS DE PHASES DANS LES CRISTAUX LIQUIDES1) Introduction

Trois quantités jouent un rôle fondamental dans la théorie de Landau des transitions de phases (1): 1) Le paramètre d'ordre dont les composantes  $\eta_i$  sous-tendent une représentation  $\tau$  appartenant au groupe d'invariance  $G_0$  de la phase la plus symétrique. Les propriétés de symétrie du paramètre d'ordre, sa dépendance en fonction des variables extérieures (par exemple, la température) déterminent le diagramme de phases, les anomalies au voisinage du point critique, le couplage entre les grandeurs physiques et l'ordre thermodynamique de la transition.

2) L'énergie libre de Landau F

qui est la somme de polynômes homogènes invariants par  $G_0$  des degrés successifs des composantes du paramètre d'ordre. F est tronquée à un certain degré, et pour chaque valeur de la température son minimum absolu donne l'état stable du système.

3) La densité de probabilité

$\delta\rho = \sum_i \eta_i^0 \phi_i$  d'un certain type de particules dans le système qui peut être considérée comme un vecteur dans l'espace  $\epsilon$  de la représentation  $\tau$ . Les composantes  $\eta_i^0$  de ce vecteur dans la base  $\phi_i$  de  $\epsilon$  sont les valeurs particulières de  $(\eta_i)$  qui minimisent F. Le groupe d'invariance G de  $\delta\rho$  est le groupe de symétrie de la phase la moins symétrique. C'est un sous groupe de  $G_0$ .

Les considérations précédentes doivent être précisées selon la nature du système auquel la théorie est appliquée et selon les caractéristiques de la transition. Ainsi pour des transitions continues entre phases cristallines strictement périodiques, le paramètre d'ordre correspond à une représentation irréductible unique de  $G_0$  qui est l'un des 230 groupes spatiaux.

Dans ce chapitre, nous nous proposons de préciser les conditions d'application de la théorie de Landau aux transitions de phases dans les cristaux liquides. Au §2, nous passons en revue les grandeurs fondamentales (groupes de symétrie, représentations irréductibles, fonction densité, énergie libre) qui doivent être utilisées pour l'étude de tels systèmes. Au §3 nous indiquons la méthode

pratique que nous avons utilisée pour appliquer la théorie de Landau à

l'étude des transitions de phases qui se produisent à partir d'une phase nématique ou smectique. Plusieurs exemples détaillés sont traités. Enfin, au §4 nous rappelons les études antérieures qui ont été effectuées sur le sujet.

## 2) Grandeurs fondamentales utilisées dans la théorie de Landau des cristaux liquides

### a) Groupes de symétrie des cristaux liquides

L'état liquide isotrope est caractérisé par le groupe  $G_0 = R^3 \square K_h$  qui est constitué par le produit semi-direct de  $R^3$  (groupe tridimensionnel des translations continues de l'espace réel) par le groupe orthogonal  $K_h$  (le groupe complet des rotations autour du point, muni d'un centre de symétrie) (2,3).

Les groupes de symétrie des phases mésomorphes combinent deux types d'opérations de symétrie. Les opérations punctuelles qui laissent invariantes les sous-unités du cristal liquide (molécules, groupe de molécules) et des opérations de translation

(discrètes ou continues). Les groupes ponctuels de symétrie des sous-unités -supposées de forme allongée- peuvent être continus ou finis. On distingue cinq groupes ponctuels continus et sept groupes finis pouvant représenter la symétrie d'un groupe de molécules allongées. Ce sont respectivement les

groupes  $D_{\infty h}$ ,  $C_{\infty h}$ ,  $C_{\infty v}$ ,  $D_{\infty}$ ,  $C_{\infty}$  et les groupes  $D_{nh}$ ,  $D_{nd}$ ,  $C_{nh}$ ,  $C_{nv}$ ,  $D_n$ ,  $S_{2n}$ ,  $C_n$ . Les relations entre ces groupes sont représentées sur la FIGURE 1.

Les formes possibles correspondant aux groupes continus et finis sont indiquées sur la FIGURE 2.

Le groupe de symétrie des phases rencontrées dans les cristaux liquides peuvent s'écrire comme le produit  $G_0 = T \square H$  (4), d'un groupe de translations discrètes ou continues  $T$  par l'un des groupes ponctuels précédents  $H$ . Ainsi pour les phases nématiques composées de sous-unités alignées le long d'un axe préférentiel,  $T = R^3$ . Le groupe des translations pour les phases smectiques (sous-unités ordonnées en couches) est  $T = R^2 \times Z$ , où  $Z$  est le groupe des translations discrètes unidimensionnelles. Dans les phases discotiques colonnaires (5), formées de couches ordonnées de sous-unités empilées arbitrairement,  $T = R \times Z^2$ . Enfin les phases cholestériques (voir 2,3) peuvent suivant le cas posséder le groupe des phases nématiques ou smectiques. Dans cette thèse les phases colonnaires ne sont pas considérées.

### b) Représentations irréductibles

L'application de la théorie de Landau aux transitions de phases dans les cristaux liquides nécessite de connaître les représentations irréductibles (RI) des groupes de symétrie de ces phases. Les RI des groupes  $H$

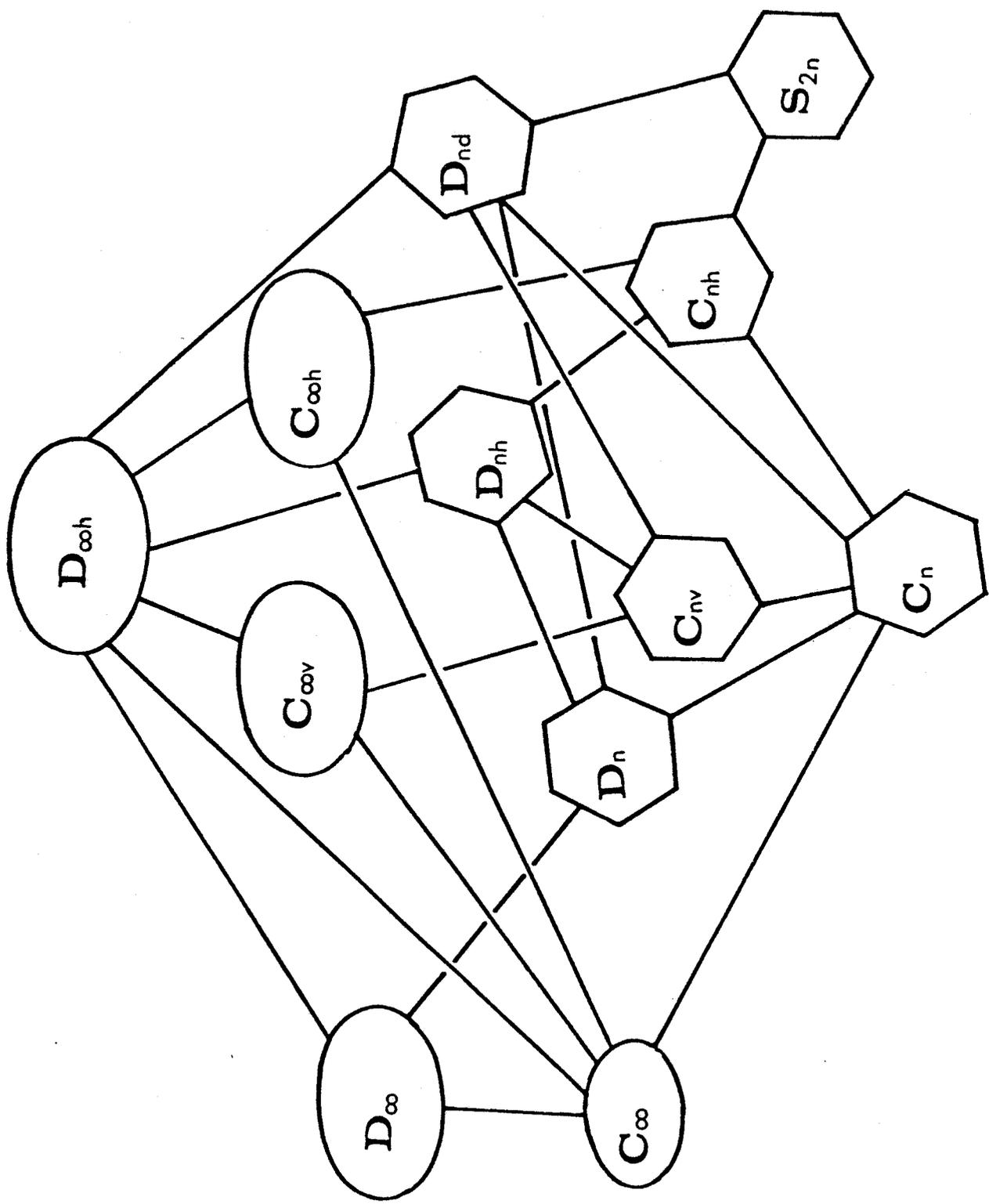
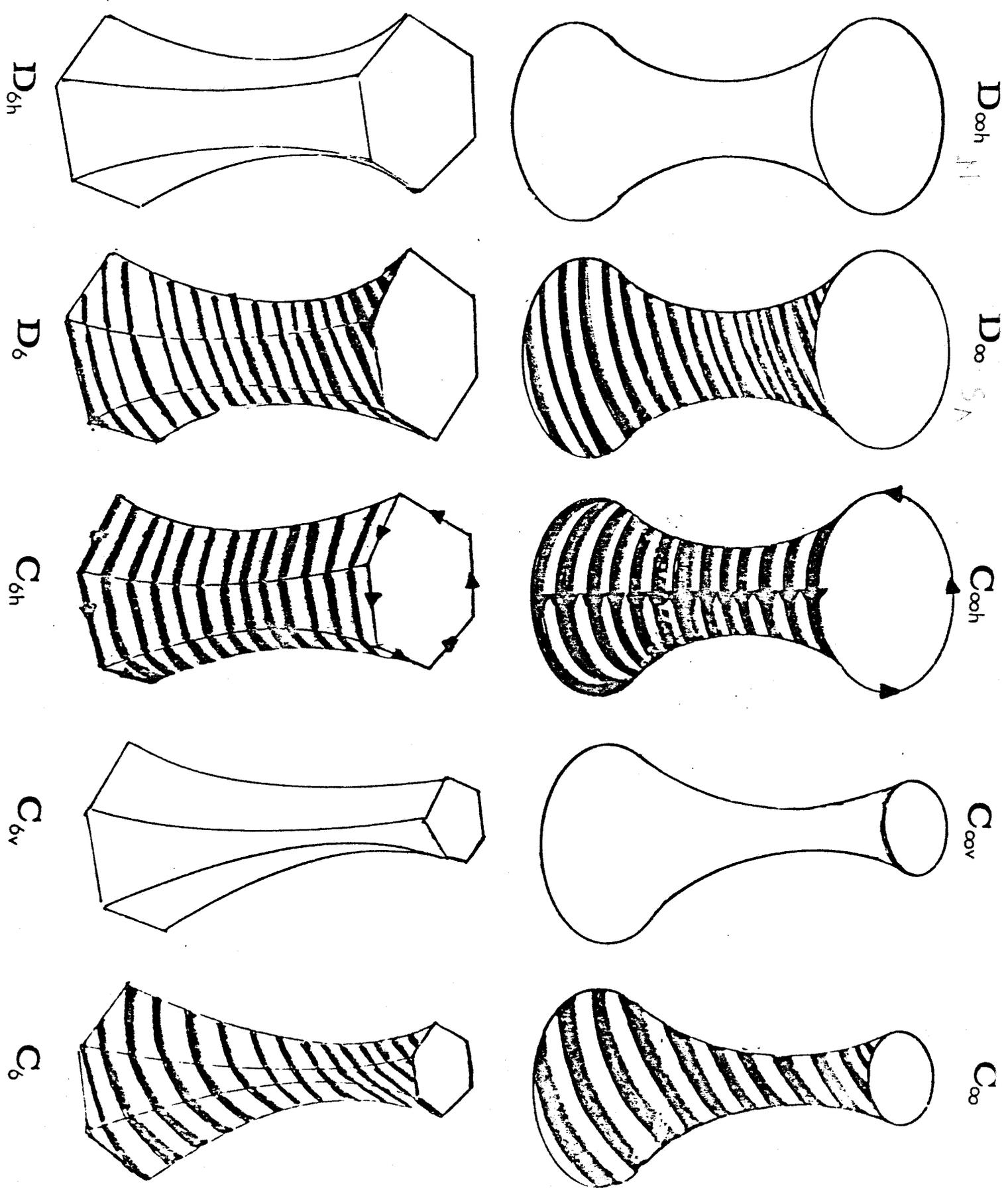


FIGURE 1: Relation entre groupes ponctuels de symétrie des sous-unités dans les cristaux liquides. On a distingué les groupes continus (ovales)

FIGURE 2 : Formes possibles des sous-unités (molécules ou groupes de molécules) dans les phases smectiques et nématiques.



d'invariance des sous-unités sont connues (6). Nous en avons rappelé les tables de caractères dans l'annexe 1.

Outre les représentations des groupes  $H$ , il faut également considérer les RI des groupes  $G_0 = T \square H$ . La détermination et l'identification de ces RI utilisent le fait que des points distincts de la 1<sup>ère</sup> zone de Brillouin associée au groupe  $G_0$  correspondent à des RI distinctes. Dans le cas des transitions entre phases smectiques trois cas sont à considérer.

1) Les représentations associées au centre de la zone de Brillouin. Celles-ci, s'identifient aux représentations des groupes ponctuels  $H$ .

2) Les représentations associées à des points de la surface de la zone de Brillouin. Dans le cas d'une zone de Brillouin unidimensionnelle, la surface se réduit au point de coordonnées  $K_z = \frac{K_0}{2}$ . Les représentations

irréductibles dont le groupe d'invariance s'identifie au groupe  $G_0$  sont obtenues en multipliant les matrices des représentations de  $H$  par  $e^{iK_0 d/2}$  où  $d$  est la translation primitive le long de l'axe perpendiculaire aux couches smectiques

3) Les RI correspondant à des points intérieurs à la zone de Brillouin. Ces points peuvent être à coordonnées rationnelles ( $K = \frac{K_0}{n_0}$  avec

$n_0$  entier  $\geq 3$ ) ou irrationnelles ( $K = \frac{K_0}{\alpha}$  avec  $\alpha$  irrationnel). Les RI de  $G_0$  sont construites selon la méthode décrite par Lyubarskii (3), en considérant le groupe d'invariance du vecteur  $K$  et la petite représentation qui lui est associée (voir exemples ci dessous et chapitre 2).

Dans le cas des transitions à partir de phases nématiques de symétrie  $G_0$ , deux situations sont à considérer. 1) La transition conduit à une phase nématique ou à une phase cholestérique sans ordre translationnel discret. Les RI sont alors celles du groupe ponctuel  $H$ .

2) La transition conduit à une phase smectique. L'apparition d'une période de translation discrète s'obtient en considérant les RI correspondant à une zone de Brillouin fictive unidimensionnelle associée à un vecteur  $K_z = \frac{2\pi}{\alpha}$ , où  $\alpha$  représente la distance entre les couches smectiques stables à basse température (voir exemple 2 ci dessous).

Les tables de caractères associées aux RI des groupes  $G_0$  pour  $K_z \neq 0$  n'avaient été que partiellement publiées (7,8). Nous les avons établies de manière systématique. Elles figurent dans l'annexe 1 de cette thèse. Au § 3, la construction des tables de caractères pour les groupes  $T \square C_{\infty h}$  est  $R \square C_{\infty}$  est donnée à titre d'exemple représentatif.

c) La fonction densité

Dans la théorie de Landau la symétrie d'un corps peut être définie par la fonction densité de probabilité  $\rho(x,y,z)$  qui décrit la distribution des atomes (ou d'un certain type de particules) dans le système. Ainsi Landau souligne que la fonction densité qui décrit l'état liquide isotrope est  $\rho(x,y,z) = \text{cte}$ , l'égalité précédente traduisant l'équiprobabilité des positions des atomes dans l'espace. De même la description traditionnelle des phases mésomorphes (10) consiste à introduire, outre la densité  $\rho(x,y,z)$ , un vecteur  $u(\vec{r})$  qui indique l'orientation moyenne des molécules. La phase nématique correspond à  $\rho(x,y,z) = \text{cte}$  et  $u(\vec{r}) = \text{cte}$ . Pour la phase smectique  $\rho(x,y) = \text{cte}$ ,  $\rho(z)$  est périodique alors que  $u(\vec{r})$  est constant.

La fonction densité de probabilité susceptible de décrire la symétrie complète du cristal liquide doit en fait posséder deux propriétés: 1) Elle doit décrire le désordre des centres d'inertie des molécules (dans l'espace tout entier pour les phases nématiques, ou à l'intérieur de chaque couche pour les phases smectiques).

2) Elle doit également tenir compte de l'orientation éventuelle des axes des molécules suivant la direction préférentielle. Landau est ainsi conduit à introduire une fonction densité qui dépend de la corrélation des différentes positions des centres d'inertie des sous-unités (1). Il utilise dans ce but la fonction densité notée  $\rho_{12}(\vec{r}_{12}) dV_2$  définie comme la probabilité de trouver l'atome 2 dans l'élément de volume  $dV_2$  à position donnée  $\vec{r}_{12}$  de l'atome 1, où  $\vec{r}_{12}$  est le rayon vecteur qui sépare les deux atomes. Remarquons que  $\rho_{12}$  dépend de la distance et de la direction du vecteur  $\vec{r}_{12}$  et non de son sens.

Goshen et Mukamel soulignent l'insuffisance de la description précédente (19) dans le cas des systèmes composés de molécules chirales. En effet dans ce cas  $\rho_{12}(\vec{r}_{12})$  est laissée invariante par l'inversion I alors que les sous-unités sont inversées par cette opération. Afin de distinguer entre systèmes chiraux et achiraux, Indenbom et Pikin (9) définissent la fonction densité  $\rho_{12}(\vec{r}_{12}, \vec{L}_1, \vec{L}_2)$  qui dépend non seulement du rayon vecteur  $\vec{r}_{12}$  qui sépare les centres d'inertie des molécules 1 et 2 mais également de l'orientation de leurs axes respectifs représentés par les vecteurs  $\vec{L}_1$  et  $\vec{L}_2$ . Ainsi le produit pseudo scalaire  $((\vec{L}_1 \wedge \vec{L}_2) \cdot \vec{r}_{12})(\vec{L}_1 \cdot \vec{L}_2)$  peut traduire le caractère chiral et achiral du système.

#### d) Energie libre

La troisième quantité qui joue un rôle essentiel dans la théorie de Landau est le potentiel thermodynamique  $F$  (energie libre de Landau). L'expression de  $F$  peut être subdivisée en deux parties :

$$F(T, P, \eta_i) = F_1(T, P, \eta_i) + F_2\left(\eta_i, \frac{\partial^n \eta_i}{\partial x_i^n}, X_i, \frac{\partial^n X_i}{\partial x_i^n}\right).$$

$$\text{Avec } F_1(T, P, \eta_i) = F_0(T, P) + F_1'(\eta_i)$$

où  $F_1'(\eta_i)$  contient des groupes de monômes formés des composantes du paramètre d'ordre, se transformant suivant les matrices de la représentation irréductible  $\tau$  qui induit la transition (1). Le degré auquel  $F_1$  est tronquée dépend de la symétrie du système mais également de l'ordre de la transition. Ainsi aux chapitres 2 et 3, nous serons amenés à prendre compte des invariants de degré supérieur à 4 pour traduire l'anisotropie du système.

$$F_2\left(\eta_i, \frac{\partial^n \eta_i}{\partial x_i^n}, X_i, \frac{\partial^n X_i}{\partial x_i^n}\right) \text{ exprime le couplage du paramètre d'ordre avec}$$

d'autres grandeurs physiques pouvant apparaître à la transition, telles que la polarisation ( $X_i = P_i$ ) ou la déformation spontanée ( $X_i = e_i$ ).  $F_2$  peut également contenir des couplages inhomogènes où figurent des dérivées spatiales des composantes du paramètre d'ordre et des  $X_i$  (voir exemple 1) Dans cette étude nous avons déterminé la forme des  $F_1(T, P, \eta_i)$  pour l'ensemble des transitions entre phases nématiques et smectiques. La forme des potentiels de couplage  $F_2$  est discutée dans un certain nombre de cas particuliers représentant un intérêt physique.

### 3) Méthode pratique utilisée pour appliquer la théorie de Landau

#### a) Détermination des représentations irréductibles des groupes de symétrie des phases nématiques et smectiques

Dans ce paragraphe nous considérons à titre d'exemples la construction des RI du groupe smectique  $T \square C_{\infty h}$  et du groupe nématique  $R \square C_{\infty}$ .

##### Exemple 1 : Représentations irréductibles du groupe $T \square H$

Considérons la phase smectique correspondant à des molécules dont le groupe ponctuel d'invariance est  $H = C_{\infty h}$  (voir FIGURE 2). Ces molécules sont réparties dans des couches perpendiculaires à l'axe OZ distantes de  $d$  formant une configuration semblable à celle sur la FIGURE 3a

Nous allons successivement construire : -les représentations du groupe ponctuel  $H$

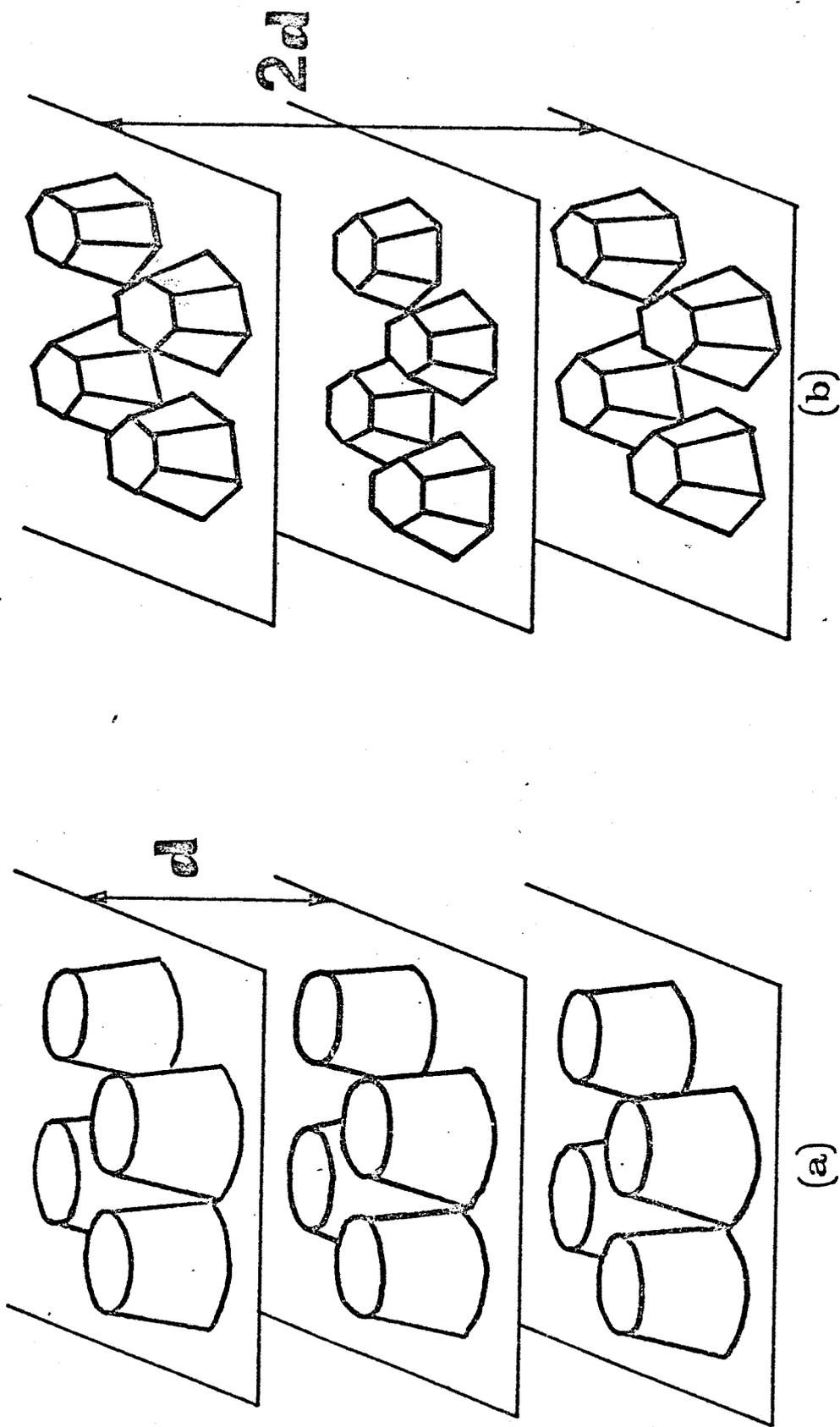


FIGURE 3: Phases smectiques décrites par le groupe (a)  $m \cdot \infty(d)$  ( $T_d \square C_{\infty v}$ ), (b)  $m(12)_6(2d)$   $T_{2d} \square C_{6v}$ . On remarquera dans le cas (b) que les molécules de la couche intermédiaires sont tournées d'un angle de  $\frac{\pi}{6}$  induisant un axe hélicoïdal  $(C_{12} | d)$  et un plan de glissement  $\sigma_v(d)$

-les représentations du groupe  $G_0 = T \square H$ , pour  $K_z = \frac{K_0}{n_0}$  avec  $n \geq 2$  où  $K_z$  est le vecteur de la zone de Brillouin.

i) Représentations irréductibles du groupe H

Le groupe  $C_{\infty h}$  est constitué de rotations  $C(\phi)$  d'angle arbitraire  $\phi$  autour d'un axe d'ordre infini  $C_\infty$  (OZ) et de réflexions rotations  $C(\phi)\sigma_z$ , où  $\sigma_z$  est la réflexion dans le plan orthogonal à (OZ).  $C_{\infty h}$  peut s'écrire comme le produit direct du groupe ponctuel  $C_\infty$  par le groupe fini  $C_2$ . On peut donc déduire les RI du groupe  $C_{\infty h}$  des représentations du groupe  $C_\infty$ , en multipliant ces dernières par les deux RI unidimensionnelles du groupe  $C_2$ . Le groupe  $C_\infty$  possède une RI unidimensionnelle notée A (la représentation identité) et une infinité de RI bidimensionnelles notées  $E_n$  (3) dont les matrices représentatives sont:

$$\begin{bmatrix} e^{in\phi} & \\ & e^{-in\phi} \end{bmatrix}.$$

Le groupe  $C_{\infty h}$  possèdera donc deux RI unidimensionnelles et une double infinité de représentations bidimensionnelles dont les caractères sont donnés dans la table 1 ci dessous.

$C_{\infty h}$	$C(\phi)$	$C(\phi)\sigma_z$
$A_1$	1	1
$A_2$	1	-1
$E_{n1}$	$2\cos n\phi$	$2\cos n\phi$
$E_{n2}$	$2\cos n\phi$	$-2\cos n\phi$

(table 1)

ii) Représentations du groupe  $G_0 = T \square H$  pour  $K_z = \frac{K_0}{n_0}$  ( $n_0 \geq 2$ )

Le groupe T des translations décrivant l'empilement des couches de phases smectiques est défini par la translation primitive  $|t| = d$  où d est la distance entre deux couches. La translation de base de la zone de Brillouin

associée à ce réseau unidimensionnel sera donc définie par le vecteur unique de l'espace réciproque  $K_0 = \frac{2\pi}{d}$ . La RI du groupe T au point de la zone de Brillouin de vecteur  $K = \frac{2\pi}{\alpha d}$  sera donc (3) :  $e^{ikt} = e^{i2\pi/\alpha}$

La détermination des RI du groupe  $G_0 = T \square C_{\infty h}$  conduit alors à distinguer trois situations :

1)  $\alpha=1 \Leftrightarrow K=K_0$ . Les RI du groupe  $G_0$  s'identifient aux représentations du groupe ponctuel  $C_{\infty h}$  (table 1).

2)  $\alpha=2 \Leftrightarrow K = \frac{K_0}{2}$ . La RI du groupe T associée à ce point de haute symétrie de la surface de la zone de Brillouin est  $e^{iK_0 t/2} = -1$ . Les caractères des représentations du groupe  $G_0$  sont alors donnés dans la table 2 (les notations  $E_{n3}$  et  $E_{n4}$  désignent comme pour le groupe  $C_{\infty h}$ , une infinité de RI bidimensionnelles)

$T \square C_{\infty h}$	$(C(\phi)   \vec{t})$	$(C(\phi)\sigma_z   \vec{t})$
$A_3$	-1	-1
$A_4$	-1	1
$E_{n3}$	$-2\cos n\phi$	$-2\cos n\phi$
$E_{n4}$	$-2\cos n\phi$	$2\cos n\phi$

(table 2)

3)  $\alpha > 2$

Les RI sont construites par la méthode décrite par Lyubarskii (3) (voir aussi (11)). Elle consiste à considérer la petite représentation  $\tau_p(K_1)$  où  $K_1$  est l'une des branches de l'étoile  $K^*$  du vecteur  $K_1$  (3,11).

Dans le cas où  $H = C_{\infty h}$ , le groupe du vecteur  $K_1$  est  $T \square C_{\infty}$  et  $K^*$  est une étoile à deux branches ( $K_1$  et  $-K_1$ ). La table de caractères de  $G_{K_1} = T \square C_{\infty}$  est:

$G_{K_1} = T \square C_{\infty}$	$(C(\phi)   \vec{t})$
$\tau_1$	$e^{i2\pi/\alpha}$
$\tau_2$	$2 e^{i2\pi/\alpha} \cos n\phi$

(table 3)

Nous voyons que le groupe  $G_{K_1}$ , possède deux représentations complexes  $\tau_1$  et  $\tau_2$

respectivement mono et bidimensionnelles. La construction des représentations physiquement irréductibles de dimensions respectives 2 et 4 du groupe  $G_0 = T \square C_{\infty h}$  selon la méthode décrite dans (3,11) conduit à la table de caractères 4.

Remarquons que  $E_q$  désigne une RI unique alors que  $G_{nq}$  se rapporte à une infinité de RI de dimension 4.

$T \square C_{\infty h}$	$(C(\phi)   \vec{t})$	$(C(\phi)   \sigma_z   \vec{t})$
$E_q$	$2 \cos \frac{2\pi}{\alpha}$	0
$G_{nq}$	$4 \cos n\phi \cdot \cos \frac{2\pi}{\alpha}$	0

(Table 4)

Ainsi pour les valeurs entières  $\alpha = n_0 \geq 3$ , nous obtenons la table de caractères 5.

$T \square C_{\infty h}$	$(C(\phi)   \vec{t})$	$(C(\phi)   \sigma_z   \vec{t})$
$E_q$	$2 \cos \frac{2\pi}{n_0}$	0
$G_{nq}$	$4 \cos n\phi \cdot \cos \frac{2\pi}{n_0}$	0

(Table 5).

Exemple 2: Représentations irréductibles du groupe  $G_0 = R \square C_{\infty}$

Les phases nématiques possèdent le groupe d'invariance  $G_0 = R^3 \square H$ . Toutefois, si l'on cherche à décrire dans le cadre de la théorie de Landau des transitions à partir d'une phase nématique vers des phases nématiques, cholestériques ou smectiques, il suffit de considérer le groupe réduit  $G_0 = R \square H$  où  $T=R$  est le groupe des translations continues parallèles à l'axe directeur de la phase nématique considérée (qui est également la direction perpendiculaire aux couches smectiques apparaissant à basse température). Si l'on considère en effet une zone de Brillouin unidimensionnelle fictive de vecteur d'onde  $K_0 = \frac{2\pi}{\alpha}$  ( $\alpha \in R$ ).

nous pouvons vérifier (voir chapitre 3) que les RI du groupe  $G_0 = R \square H$  correspondent à deux types de situations:

1) Des transitions vers des phases nématiques ou cholestériques de symétrie  $G = R \square H'$  où  $H'$  est sous-groupe de  $H$ . Cette situation se produit pour les représentations du groupe  $R \square H$  en  $K_0 = \frac{2\pi}{\alpha}$  (c'est à dire au centre de la zone de Brillouin fictive considérée). Dans ce cas les RI du groupe  $R \square H$  s'obtiennent en multipliant les RI du groupe  $H$  par le facteur  $e^{i2\pi\alpha/\alpha} = e^{i2\pi} = 1$  ( $\alpha$  est une translation primitive du réseau direct fictif) et donc s'identifient aux RI du groupe ponctuel  $H$ . Remarquons que les RI induisant une phase cholestérique se distinguent en ce qu'elles laissent invariants des termes inhomogènes couplant les composantes du paramètre d'ordre et leurs dérivées (voir chapitre 3).

2) Des transitions vers des phases smectiques. Ce cas se produit pour les RI du groupe  $R \square H$  correspondant à un vecteur  $K = \frac{2\pi}{\alpha'}$  avec  $\alpha' \neq \alpha$ ,

la distance entre les couches smectiques s'identifiant à  $\alpha' = d$ .

On remarque que le caractère fictif de la zone de Brillouin considérée est imposé par la définition même d'une zone de Brillouin, qui nécessite un groupe de translations discrètes.

Des considérations précédentes découle la méthode utilisée pour construire les RI du groupe  $R \square C_\infty$ . Ces représentations s'obtiennent en effectuant le produit des RI du groupe  $C_\infty$  par les nombres  $e^{iKd}$ ,  $K$  prenant les deux valeurs significatives  $K_0 = \frac{2\pi}{\alpha}$  et  $K = \frac{2\pi}{\alpha'}$ . La Table 6 fournit les caractères des RI du groupe  $G_0 = R \square C_\infty$ . Nous pouvons constater que pour  $\alpha \neq \alpha'$ ,  $G_0$  possède trois types de RI bidimensionnelles respectivement notées  $E_{q1}, E_{nq1}, E_{nq2}$ .

$R \square C_\infty$	$C(\phi)$
A	1
$E_n$	$2\cos n\phi$
$E_{q1}$	$2\cos 2\pi \frac{d}{\alpha'}$
$E_{nq1}$	$2\cos(n\phi + 2\pi \frac{d}{\alpha'})$
$E_{nq2}$	$2\cos(n\phi - 2\pi \frac{d}{\alpha'})$

(Table 6)

Les exemples considérés dans ce paragraphe se rapportent à des sous-unités dont le groupe d'invariance est continu. Une méthode semblable doit être utilisée pour la construction des RI des groupes  $G_0 = \sum_T \square H$  ou  $R \square H$ ,  $H$  étant un groupe fini (Figure 2). Les tables de caractères correspondant à l'ensemble des groupes smectiques, avec  $H$  continu ou fini figurent dans l'annexe 1.

#### b) Construction des énergies libres de Landau

L'énergie libre de Landau  $F_1$  associée à une représentation irréductible de  $G_0$

induisant une transition de phase, est une fonction composée de polynômes homogènes et indépendants de différents degrés qui restent invariants sous l'effet des opérations de symétrie du groupe  $G_0$  de la phase de haute symétrie.

Tous les invariants figurant dans le développement de  $F_1$  peuvent être construits par la méthode des projecteurs (3) qui utilise les matrices de la représentation irréductible associée à la transition. En fait il suffit de connaître le groupe fini des matrices distinctes correspondant à une RI donnée. Ce groupe constitue l'image de la représentation (12,13).

Dans ce travail nous avons été amenés à construire l'ensemble des images des RI des groupes d'invariance des phases nématiques ( $G_0 = R \square H$ ) et smectiques ( $G_0 = T \square H$ ).

Les matrices génératrices des images et les relations de groupe à sous-groupe entre ces dernières figurent dans l'Annexe 2 de cette thèse. A titre d'exemple, considérons les images associées aux RI du groupe  $T \square C_{\infty h}$  étudié ci dessous.

Pour ce groupe 5 images distinctes peuvent être construites. Elles sont indiquées dans le tableau récapitulatif 7.

Nous pouvons remarquer que plusieurs RI distinctes peuvent être associées à la même image. De même il apparaît dans ce qui suit que plusieurs images distinctes peuvent correspondre à la même énergie libre (tronquée à un degré donné). La connaissance des images contenues dans le tableau 7 permettent de construire la partie  $F_1$  de l'énergie libre de Landau contenant les composantes du paramètre d'ordre. La forme des potentiels  $F_1$  est donnée dans la table 8.

Les résultats indiqués dans la table 8 ont été obtenus par la procédure suivante:

- 1) Pour chaque RI, détermination à partir de l'image correspondante des invariants de divers degrés du paramètre d'ordre par projection des fonctions de base de la représentation considérée sur la représentation identique de  $T \square H$ .

Représentations Irréductibles	Matrices génératrices	Notation de l'Image
$A_1$	1	-
$A_2$	1,-1	-
$E_{n1}$	$\begin{bmatrix} e^{in\phi} & \\ & e^{-in\phi} \end{bmatrix}$	$L_1$
$E_{n2}, E_{n3}, E_{n4}$	$\begin{bmatrix} e^{in\phi} & \\ & e^{-in\phi} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$	$L_2$
$G_{nk}$	$\begin{bmatrix} e^{in\phi} & e^{ikd} & & \\ & e^{-in\phi} & e^{-ikd} & \\ & & e^{in\phi} & e^{-ikd} \\ & & & e^{-in\phi} & e^{ikd} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & & \\ & & & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$	$H_1$
$E_k$	$\begin{bmatrix} e^{ikd} & \\ & e^{-ikd} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}$	$G_3$

(Table 7).

2) Exprimer les invariants obtenus dans une base réelle de l'espace de la représentation. En effet tout au long de cette étude nous avons utilisé pour les RI de dimension  $\geq 2$ , des images complexes (dont la forme est plus aisément manipulable). Nous devons donc, pour obtenir la forme réelle de l'énergie libre, transformer les invariants obtenus dans une base complexe par le même changement de base qui transforme les matrices de la RI considérée en matrices réelles. Dans le cas des RI bidimensionnelles le changement de base consiste à transformer les composantes réelles du paramètre d'ordre  $(\eta_1, \eta_2)$  en fonction des composantes complexes  $(\eta_1, \eta_2)$  par le changement de base  $\eta_1' = \eta_1 + i \eta_2$  ,  $\eta_2' = \eta_1 - i \eta_2$  .

Tu Cooh

Représentations Irréductibles	Images	Energies libres de Landau	Invariants de Lifchitz
$A_1$	-	$a_1 = a_{10} + \alpha \eta + \frac{\beta}{2} \eta^2 + \frac{\gamma}{3} \eta^3 + \frac{\delta}{4} \eta^4$	-
$A_2$	-	$a_2 = a_{20} + \frac{\alpha}{2} \eta^2 + \frac{\beta}{4} \eta^4$	-
$E_{n1}, E_{n2}, E_{n3}, E_{n4}$	$L_1, L_2$	$b_1 = b_{30} + \frac{\alpha}{2} \rho^2 + \frac{\beta}{4} \rho^4$	
$E_k$	$G_3$	$b_5 = b_{50} + \frac{\alpha}{2} \eta^2 + \frac{\beta}{4} \eta^4 + \frac{\gamma}{n_0} \rho^{n_0} \cos n_0 \theta$	$I_1$
$\tilde{a}_{nk}$	$H_1$	$\left. \begin{array}{l} \text{--- } n_0 \text{ pair : } f_4 = f_{40} + \frac{\alpha}{2} (\rho_1^2 + \rho_2^2) + \frac{\beta}{4} (\rho_1^4 + \rho_2^4) + \\ \frac{\beta_2}{2} \rho_1^2 \rho_2^2 + \frac{2 \gamma_1}{n_0} \rho_1^{n_0/2} \rho_2^{n_0/2} \cos \frac{n_0}{2} (\theta_1 - \theta_2) \\ \text{--- } n_0 \text{ impair : } f_5 = f_{50} + \frac{\alpha}{2} (\rho_1^2 + \rho_2^2) + \frac{\beta_1}{4} (\rho_1^4 + \rho_2^4) + \\ \frac{\beta_2}{2} \rho_1^2 \rho_2^2 + \frac{\gamma_1}{n_0} \rho_1^{n_0} \rho_2^{n_0} \cos n_0 (\theta_1 - \theta_2) \end{array} \right\}$	$I_2$

où  $I_1 = \eta_1 \frac{\partial \eta_2}{\partial z} - \eta_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial z}$

$I_2 = \eta_1 \frac{\partial \eta_2}{\partial z} - \eta_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial z} + \eta_4 \frac{\partial \eta_3}{\partial z} - \eta_3 \frac{\partial \eta_4}{\partial z}$

(Table 8)

Pour les RI de dimension 4, le changement de base s'écrit:

$$\eta_1' = \eta_1 + i \eta_2, \quad \eta_2' = \eta_1 - i \eta_2, \quad \eta_3' = \eta_3 + i \eta_4, \quad \eta_4' = \eta_3 - i \eta_4$$

3) Les énergies libres associées aux RI de dimension 2 et 4 exprimées en coordonnées polaires sont alors :  $\eta_1' = \rho \cos \theta$ ,  $\eta_2' = \rho \sin \theta$  pour les RI de dimension deux, et  $\eta_1' = \rho_1 \cos \theta_1$ ,  $\eta_2' = \rho_1 \sin \theta_1$ ,  $\eta_3' = \rho_2 \cos \theta_2$ ,  $\eta_4' = \rho_2 \sin \theta_2$  pour les RI de dimension quatre.

Le contenu de la Table 8 appelle les commentaires suivants :

1) Deux énergies libres distinctes correspondent aux RI unidimensionnelles: l'une notée ( $a_1$ ) est associée à la représentation identique  $A_1$ , l'autre ( $a_2$ ) reliée aux trois RI  $A_2, A_3, A_4$ . Le potentiel  $a_1$  décrit une transition isomorphe (du 1<sup>er</sup> ordre) sans changement de symétrie (14).

2) Une seule énergie libre correspond aux images  $L_1$  et  $L_2$ . La forme de cette énergie libre notée  $b_1$  possède la caractéristique remarquable de ne pas contenir d'invariant anisotrope des composantes  $\eta_1'$  et  $\eta_2'$  du paramètre d'ordre.

Cette propriété, qui n'existe pas dans les transitions entre phases solides ordonnés est discutée aux chapitres 2 et 3.

3) L'énergie libre associée à la représentation  $E_k$  possède un invariant anisotrope de degré  $n_0$ , où  $n_0$  est un entier tel que  $k = \frac{K_0}{n_0}$ . Ainsi c'est la coordonnée (rationnelle)

considérée pour le vecteur d'onde qui détermine le degré auquel l'énergie libre doit être tronquée. Il faut souligner que pour les valeurs irrationnelles  $k = \frac{K_0}{\alpha}$ ,

aucun terme anisotrope n'est permis par symétrie dans l'expression de l'énergie libre.

4) La remarque précédente est valable également pour l'énergie libre associée aux représentations de dimension 4 notées  $G_{nk}$ . De plus nous voyons que selon la parité de  $n_0$ , le degré des invariants anisotropes diffère.

5) La symétrie des RI  $E_k$  et  $G_{nk}$  permet également la construction d'invariants inhomogènes antisymétriques qui couplent les composantes du paramètre d'ordre à leurs dérivées premières. L'existence de tels invariants indiqués dans la 4<sup>ème</sup> colonne de la Table 8 révèle que  $E_k$  et  $G_{nk}$  ne vérifient pas la condition de Lifchitz (1,15). Les phases apparaissant au dessous de la transition peuvent donc être inhomogènes. Une discussion détaillée de cette éventualité est effectuée aux chapitres 2 et 3, dans l'analyse d'ensemble des résultats.

Au §2d, nous avons indiqué que outre le potentiel  $F_1$  qui dépend des composantes du paramètre d'ordre  $\eta_i$ , l'énergie libre de Landau  $F$  contient des termes qui couplent les  $\eta_i$  non seulement à leurs dérivées successives, mais également à d'autres grandeurs macroscopiques spontanées, telles que la déformation ou la polarisation. La méthode pratique utilisée pour la construction des termes de couplage entre les composantes du paramètre d'ordre et les grandeurs physiques précédentes a été décrite par Levanyuk et Sannikov (16) et rappelée dans la Ref(13). Elle prend en compte les symétries respectives de la RI associée à la transition, et de la représentation (réductible ou irréductible) selon laquelle se transforme la grandeur macroscopique considérée. Aux chapitres suivants nous examinons les termes de couplage associés à divers effets (ferroélectrique, fléxoélectrique, piezoélectrique ...) qui peuvent se produire lors d'une transition entre phases mésomorphes.

### c) Détermination des groupes de symétrie

La dernière étape de l'application de la théorie de Landau aux transitions de phases dans les cristaux liquides est la détermination des groupes de symétrie  $G$  des phases stables à basse température. Rappelons que  $G$  est le groupe d'invariance de la fonction densité

$$\delta\rho_{12}(\vec{r}_{12}, \vec{L}_1, \vec{L}_2) = \sum \eta_i^0 \phi_i(\vec{r}_{12}, \vec{L}_1, \vec{L}_2) \text{ où les } \eta_i^0 \text{ sont}$$

Les valeurs particulières des composantes du paramètre d'ordre, qui minimisent la partie  $F_1$  de l'énergie libre de Landau (la prise en compte de  $F_2$  ne modifie pas de manière essentielle la stabilité des phases). La méthode utilisée pour déterminer les groupes  $G$  consiste donc à : 1) Déterminer les valeurs de  $\eta_i$  correspondant aux minima absolus de  $F_1$ .

2) Identifier les groupes  $G$  correspondant

aux minima précédents.

Les problèmes posés par la minimisation des énergies libres de Landau ont été discutés par de nombreux auteurs (voir les références (3,11,16,17)). A titre d'exemple, résumons brièvement les résultats de la discussion des potentiels  $a_2, b_1, b_5, f_4, f_5$  considérés dans la Table 7 ( $a_1$  n'est associé à aucun changement de symétrie).

#### i) Le potentiel $a_2$

C'est le cas classique d'un potentiel à une composante considéré par Landau (1). La minimisation de  $a_2$  conduit à une phase stable unique correspondant à la valeur

$$\eta_0^2 = -\frac{\alpha}{\beta} \quad (\alpha < 0).$$

La symétrie de cette phase s'obtient en retenant parmi les matrices associées aux représentations  $A_2, A_3, A_4$ , les sous groupes de matrices qui laissent invariant le "vecteur"  $\delta\rho = n_0 \phi_1$ . On obtient respectivement pour les représentations précédentes la Table 9 suivante:

Représentations Irréductibles	G
$A_2$	$\infty(d)$ $T_H C_{2d}$
$A_3, A_4$	$\infty:m(d)$ $T_H C_{2d}$

(Table 9)

Remarquons que les RI unidimensionnelles associées à la phase smectique dont le groupe ponctuel H correspondant est un groupe continu, conduisent à des phases smectiques dont le groupe H est également continu. Pour  $K=0$ , la symétrie du groupe H est abaissée, alors que pour les représentations de la surface de la zone de Brillouin il y a seulement brisure de la symétrie de translation (doublement de la distance d qui sépare deux couches successives) (FIGURE 3b) et conservation du groupe ponctuel H d'invariance des molécules.

ii) Potentiel  $b_1$

La minimisation de l'énergie libre  $b_1$ , conduit à une phase stable unique correspondant à  $\rho^2 = -\frac{\alpha}{\beta}$ . Remarquons que l'absence de termes anisotropes dans

$b_1$  réduit le résultat de la minimisation à celui obtenu pour une RI unidimensionnelle

Les groupes G d'invariance du vecteur  $\delta\rho = n_1^0 \phi_1 + n_2^0 \phi_2$  avec  $(n_1^0 + n_2^0 = -\frac{\alpha}{\beta})$  sont résumés ci dessous

Représentations Irréductibles	G
$E_{n1}$	$n:m(d)$
$E_{n2}$	$n(d)$
$E_{n3}, E_{n4}$	$(\tilde{2n})_n:m(2d)$

(Table 10)

Les notations des groupes G que nous avons adopté sont celles utilisées par Shubnikov (18). Ainsi une réflexion rotation d'ordre n est notée  $(R^n)$ , un axe hélicoïdal d'ordre n qui est simultanément un axe de rotation d'ordre 1 s'écrit  $(n)_1$ . A titre d'exemple le groupe de symétrie  $(2n)_n:m(2d)$  possède des réflexions rotations d'ordre 2n, ainsi qu'un axe hélicoïdal d'ordre 2n qui est également un axe de rotation d'ordre n. Les règles régissant les notations utilisées dans notre travail sont rappelées au début du chapitre 2.

iii) Potentiel  $b_5$

Les équations de minimisation du potentiel  $b_5$  sont:

$$\begin{aligned} \theta_m &= 0 \pmod{\frac{\pi}{n_0}} \\ \alpha + \beta \rho_m^2 + \gamma_1 \rho_m^{n_0-2} &= 0 \end{aligned}$$

Quelquesoit la valeur de  $n_0$  on peut aisément montrer (11,13) qu'il existe toujours deux symétries distinctes possibles pour les phases smectiques apparaissant à basse température correspondant aux deux séries de valeurs d'équilibre des composantes du paramètre d'ordre  $\eta_1^0 = \eta_2^0 \neq 0$  et  $\eta_1^0 \neq 0, \eta_2^0 = 0$

(ou  $\eta_1^0 = 0, \eta_2^0 \neq 0$ ). Remarquons que pour  $n_0$  impair la transition entre phases smectiques est du 1<sup>ère</sup> ordre alors que pour  $n_0$  pair elle est du second ordre (voir discussion détaillée au chapitre 2 de ce critère de Landau).

Les groupes smectiques G correspondant aux deux solutions précédentes sont: respectivement  $G = \infty:m(n_0d)$ , (dans le cas où  $\eta_1^0 = \eta_2^0 \neq 0$ ) et  $G = \infty(n_0d)$  (pour  $\eta_1^0 \neq 0, \eta_2^0 = 0$ ).

i4) Potentiel  $f_4$  et  $f_5$

La minimisation des potentiels  $f_4$  et  $f_5$  conduit comme pour le potentiel  $b_5$  à deux séries de valeurs d'équilibre pour les composantes du paramètre d'ordre, correspondant à deux symétries possibles pour les phases smectiques stables à basse température. Un premier ensemble de valeurs d'équilibre est

$$\eta_1^0 = \eta_2^0 = \eta_3^0 = \eta_4^0 \neq 0 \text{ qui est associé au groupe de symétrie } G = \infty:m(n_0d).$$

Une deuxième solution est  $\eta_1^0 = \eta_2^0 \neq 0, \eta_3^0 = \eta_4^0 = 0$  qui correspond au groupe d'invariance  $\infty(n_0d)$ .

Remarquons que pour certains groupes infinis ou discrets (par exemple pour  $m. \infty:m(d)$ ) on peut obtenir un plus grand nombre de solutions stables pour les  $n_i^0$ , associées à autant de groupes smectiques distincts (voir chapitre 2).

#### 4) Discussion des études similaires

. Plusieurs travaux ont abordé le problème de la classification des transitions de phases dans les cristaux liquides. Parmi ceux qui utilisent principalement des considérations de symétrie, il faut mentionner par ordre chronologique les études de Boccara (18), de Goshen, Mukamel et Shtrikman (19), de Kléman et Michel (4), de Indenbom, Pikin et Loginov (7,8,9) et enfin le travail de Prost(5). L'article de revue de Prost(5) présente de façon unifiée les principales symétries que l'on peut rencontrer parmi les phases mésomorphes ainsi que les grandeurs fondamentales (paramètres d'ordre, énergies libres, couplages entre le paramètre d'ordre et les grandeurs macroscopiques) que l'on doit utiliser dans le cadre d'une description phénoménologique de ces phases. L'accent est mis sur la description des cristaux liquides incommensurables. Remarquons toutefois que ce travail n'utilise pas de façon complète les considérations contenues dans la théorie de Landau

et qu'il s'agit d'une présentation de modèles empiriques de type Landau.

Un autre travail synthétique est effectué par Kléman et Michel (4) qui précisent les groupes complets de symétrie associés aux principales phases mésomorphes.

Remarquons que seules les symétries ponctuelles maximales ( $D_{\infty h}$ ) sont prises

en compte dans ce travail. L'article de Goshen et al (12) s'inscrit dans la même ligne. Ces auteurs donnent la liste complète des groupes de symétrie décrivant des phases pouvant apparaître entre le liquide isotrope et le solide ordonné.

Considérant les relations de groupes à sous groupes existant entre phases possédant un groupe de translations discrètes ou continues et un groupe d'opérations ponctuelles, Goshen et al, dressent les tables des groupes associés à un ordre translationnel unidimensionnel, bidimensionnel, ainsi que les groupes possédant un groupe continu de translations. Remarquons que ce travail purement mathématique ne prend pas en compte des considérations thermodynamiques (c'est à dire la stabilité possible des phases correspondant aux divers groupes de symétrie) et présente donc un caractère par trop exhaustif (comparable aux tables de Neubüser et Wondratschek (21) ou Boyle et Lawrenson (22) pour les groupes spatiaux cristallographiques.

Boccara (18) utilise les représentations  $D_j^{\pm}$  du groupe  $K_h(0(3))$  afin de déterminer

l'ensemble des groupes ponctuels de symétrie des phases nématiques pouvant apparaître

au dessous de la phase liquide isotrope. Il trouve ainsi que les phases nématiques peuvent être décrites par les groupes ponctuels maximaux  $D_{\infty h}$ ,  $D_{\infty}$ ,  $C_{\infty v}$ , et  $C_{\infty}$  et par tous leurs sous groupes discrets  $C_n$ ,  $C_{nv}$ ,  $D_n$ ,  $C_{nh}$ ,  $S_{2n}$ ,  $D_{nd}$ ,  $D_{nh}$ . Une correction de détail doit être apportée à ce résultat : c'est le groupe  $C_{\infty h}$  et non le groupe  $C_{\infty}$  qui est induit par la représentation  $D_j^+$  du groupe  $K_h$  (voir Référence 18). De plus Boccara discute l'ordre des transitions liquide isotrope nématique en examinant l'existence possible d'un invariant cubique associé aux  $D_j^+$ . Il trouve que pour les représentations  $D_j$  du groupe  $K$  (le groupe  $SO(3)$ ) avec  $j$  impair, le critère de Landau est satisfait alors que pour  $j$  pair le critère de Landau est violé et les transitions doivent être du 1<sup>er</sup> ordre dans ce dernier cas. Un résultat semblable est établi pour les représentations  $D_j^+$  du groupe  $K_h$  ( $O(3)$ ) alors que le critère de Landau est toujours satisfait pour les représentations  $D_j^-$ . Remarquons que pour les transitions correspondant à une énergie libre ou des invariants de degré supérieur à 4 doivent être pris en compte une généralisation du critère de Landau doit être introduite : lorsque des invariants de degré impairs apparaissent dans l'énergie libre, la transition est nécessairement du 1<sup>er</sup> ordre. Ce point est discuté en détail au chapitre 2. Enfin, Boccara examine la vérification du critère de Lifchitz pour les représentations du groupe  $K_h$ . Une généralisation du critère de Lifchitz est proposée par cet auteur : des phases inhomogènes peuvent apparaître non seulement lorsque des invariants de Lifchitz sont permis par symétrie (c'est-à-dire des invariants linéaires antisymétriques en  $\eta_i$  et

$\frac{\partial \eta_j}{\partial x_j}$ ) mais également lorsque des termes antisymétriques couplant le carré

des composantes du paramètre d'ordre aux dérivées de ces dernières peuvent être construits.

Notre étude s'inspire directement de la série d'articles publiés entre 1976 et 1981 par Indenbom, Pikin et Loginov (7,8,9). Ces auteurs appliquent la théorie de Landau sous sa forme la plus complète à l'étude des transitions entre phases mésomorphes. Dans la Référence (7), est effectuée l'étude détaillée des transitions pouvant se produire sans brisure de la symétrie de translation à partir de la phase smectique du groupe  $D_{\infty}$ . Les auteurs discutent également de l'existence possible d'effets ferroélectriques et fléxoélectriques dans les phases smectiques stables à basse température, ainsi que de l'influence des invariants de Lifchitz sur la modulation de ces phases (phases smectiques en spirales). Dans la Référence (9), le cas des transitions où l'ordre translationnel est brisé (ordre multicouche) est examiné

Pour le groupe  $T \square D_{\infty h}$ . Une attention particulière est aussi donnée aux phases smectiques incommensurables .

Aux chapitre 2 nous faisons une comparaison détaillée de nos résultats avec ceux obtenus dans les deux articles précédents. La Référence (8) reprend certains résultats contenus dans (7,9) dans le cadre d'une reformulation générale de la théorie de Landau des cristaux liquides. Nous reviendrons sur certains résultats mentionnés dans cet article général dans les chapitres 2 et 3 .

## BIBLIOGRAPHIE

- (1) L.D.LANDAU, Phys .Z.Sowjet 11 ,26(1937) ; 11 ,545 (1937) ,in Collected Papers of L.D.LANDAU.Ed .D.Ter-Haar,Pergamon Press (1965)
- (2) L.D.LANDAU;Physique Statistique, Chap 13 ,p.489- 490. Ed.Mir,Moscou (1967)
- (3) G.YA.LYUBARSKII,The application of group th eory in physics,Pergamon Press New-York (1960)
- (4) M.KLEMAN et L.MICHEL,Phys.Rev.Letters 40 ,1387 (1978)
- (5) J.PROST,dans " Symmetries and Broken symmetries in condensed matter physics " Ed.N.BOCCARA, Idset : -Paris (1981) pages 159-181.
- (6) -I.M.GEL'FAND,R.A.MINLOS et Z.YA.SHAPIRO: " Representations of the Rotation and Lorentz Groups and their applications " ,Pergamon Press ,Londres (1963).  
-N.JA.VILENKIN, " Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes " Dunod,Paris (1969).  
-L.H.HALL, " Group theory and Symmetry In Chemistry "
- (7) V.L.INDENBOM,S.A.PIKIN et E.B LOGINOV ,Sov.Phys.Crystallogr. 21,632 (1977)
- (8) S.A.PIKIN et V.L.INDENBOM,Sov.Phys.Usp .21 ,487 (1978)
- (9) V.L.INDENBOM et E.B.LOGINOV ,Sov.Phys.Cristallogr. 26 ,526 (1981)
- (10) P.G.DE GENNES, " The physics of Liquid Crystals " Oxford University Press(1974)
- (11) P.TOLEDANO,Thèse de doctorat,Université de Picardie (1979)
- (12) YU.M.GUFAN et V.P.SAKHNENKO,Sov.Phys.JETP.36 ,1009 (1973)
- (13) J.C.TOLEDANO et P.TOLEDANO ,Phys.Rev B 21 ,1139 (1980)
- (14) P.TOLEDANO et G.PASCOLI ,dans " Symmetries and Broken Symmetries in Condensed Matter Physics " Ed.N.BOCCARA ,Idset-Paris (1981) pages 291-311
- (15) E.M.LIFCHITZ,Z.EKSP.Teor.Fiziki 11,255 (1941)
- (16) AP.LEVANYUK et D.G.SANNIKOV ,Sov.Phys.USP.17 ,199 (1975)
- (17) YU.M.GUFAN et V.P.SAKHNENKO ,Fiz.Tverd.Tela 14 ,1915 (1972)
- (18) N.BOCCARA ,Annals of Physics 76 ,72 (1973)
- (19) S.GOSHEN,D.MUKAMEL et S.SHTRIKMAN,Mol.Crys.Liq.Cryst.31 ,171 (1975)
- (20) A.V.SHUBNIKOV et V.A.KOPTSIK dans " Symmetry in Science and Art ,Nauka,Moscou (1972)
- (21) J.NEUBUSER et H.WONDRATSCHEK,Maximal Subgroup of the space groups.Intrnal report.Univ.Of Karlsruhe (1965)
- (22) L.L.BOYLE et J.E.LAWRENSON ,Acta cryst.A 28 ,485 (1972) ; A 28 ,489. (1972).

## CHAPITRE 2

### TRANSITIONS ENTRE PHASES SMECTIQUES

#### 1) Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats de l'application de la théorie de Landau aux transitions de phases associées aux RI des groupes smectiques. Pour chaque représentation de ces groupes, dont les tables de caractères ont été préalablement établies, nous avons déterminé les modifications de symétrie et les énergies libres correspondantes selon la méthode exposée au chapitre précédent.

Au § 2, nous précisons les notations utilisées pour présenter nos résultats ainsi que la manière dont nos tableaux de résultats sont organisés. Au § 3, une analyse d'ensemble des résultats théoriques est effectuée.

#### 2) Notations et organisation des tables

Les tables 1 et 2 contenues au § 3, fournissent sous forme de tableaux les groupes de basse symétrie, les images et les énergies libres associées respectivement aux RI des groupes smectiques continus et finis. Ces deux tables renvoient à la table 3 dans laquelle sont exprimées les énergies libres et aux annexes 1 et 2 qui contiennent les tableaux de caractères et les images des représentations considérées. Nous précisons ici la notation utilisée dans les tables ainsi que la manière dont celles-ci sont organisées.

##### a) Notations utilisées

i) Indiquons tout d'abord les notations utilisées pour les opérations spatiales des groupes smectiques de haute symétrie  $G_0 = T \square H$ . Chaque opération s'écrit sous la forme  $(\alpha | \vec{t})$  qui désigne le produit d'une translation primitive ( $|\vec{t}| = d$ ) par une opération de symétrie ponctuelle  $\alpha$ .

Les opérations ponctuelles sont notées : -  $C(\phi)$  pour une rotation d'angle  $\phi$  autour de l'axe  $Oz$  choisi comme axe directeur

-  $U_2(\phi)$  pour un axe d'ordre 2 perpendiculaire à  $Oz$  et faisant un angle  $\phi$  avec  $Ox$  choisi comme axe d'origine ( $\phi = 0$ )

-  $\sigma_v(\phi)$  pour le plan vertical perpendiculaire à  $U_2(\phi)$

horizontal.  
 -  $\sigma_z$  pour le plan

- I pour l'inversion

-  $S(\phi) = C(\phi) \times \sigma_z$

pour une rotation-réflexion d'angle  $\phi$ .

ii) Les groupes smectiques de basse symétrie  $G = T \square H$  sont notés selon les conventions de Shubnikov qui nous sont apparues comme les plus explicites. Rappelons ces conventions : un axe d'ordre  $n$  est noté  $n$  ; un plan de symétrie par  $m$  ; une rotation-réflexion d'ordre  $n$  par  $\tilde{n}$  ; une translation primitive de longueur  $n_0 d$  ( $n_0$  entier) par  $(n_0 d)$  ; un axe hélicoïdal d'ordre  $n$  qui est en même temps un axe de rotation d'ordre  $l$  par  $(n)_l$  ; un plan de glissement de translation non-primitive  $d, 2d, \dots, (n_0-1)d$  par  $(\tilde{n}_0 d)$ .

iii) Les RI dont les tables de caractères figurent dans l'annexe 1 se subdivisent en trois familles : les RI du centre ( $K = 0$ ), de la surface ( $K = K_0/2$ ) de la zone de Brillouin et celles associées aux points de coordonnées rationnelles intérieures à cette zone ( $K = \frac{K_0}{n_0}$  avec  $n_0 \geq 3$ ). Cinq types de notations ont été utilisés pour désigner l'ensemble des représentations. Les RI unidimensionnelles dont le nombre, pour chaque groupe  $G_0$ , est fini sont notées  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Elles correspondent soit au centre, soit à la surface de la zone de Brillouin. Les RI bidimensionnelles en  $K = 0$  ou  $K = \frac{K_0}{2}$  sont notées  $E_{ni}$  ou  $E_{ri}$ , l'indice  $n$  (pour les groupes continus) ou  $r$  (pour les groupes discrets) se rapportant à l'angle de rotation considéré. Ainsi les RI  $E_{11}, E_{21}, \dots, E_{n1}$  correspondent respectivement à un angle de rotation  $\phi, 2\phi, \dots, n\phi$ . Ces RI sont donc en nombre infini (puisque  $\phi$  peut être aussi petit que l'on veut). Un autre groupe fini de RI bidimensionnelles est associé aux seuls points intérieurs de la zone de Brillouin : ce sont les RI construites à partir des RI unidimensionnelles  $A_i$  du centre de la zone de Brillouin : On les a notées  $E_{ki}$  puisque leur expression dépend exclusivement des coordonnées du vecteur  $K$ .

Enfin, les représentations de dimension 4 sont notées  $G_{nki}$  pour les groupes smectiques continus et  $G_{kri}$  pour les groupes smectiques discrets. Elles sont obtenues à partir des RI bidimensionnelles  $E_{ni}$  et  $E_{ri}$  en  $K = 0$ . Une exception est constituée par les groupes  $T \square C_\infty, T \square C_n$  et  $T \square S_{2n}$  dont les représentations  $G_{nk}$  et  $G_{rk}$  sont réductibles. Elles se décomposent en RI bidimensionnelles notées  $E_{nki}$  et  $E_{rki}$ .

i4) Les images associées aux RI unidimensionnelles ne sont pas mentionnées dans les tables. Elles peuvent être de deux sortes : l'image associée à la représentation identité qui se réduit au nombre 1 et l'image associée aux autres RI unidimensionnelles qui est composée du couple  $(-1, 1)$ . Les images associées aux représentations bidimensionnelles sont notées  $L_i$  ou  $G_i$  et les images des représentations de dimension 4,  $H_i$ . Les diverses classes d'images ainsi que les relations de groupe à sous-groupe à l'intérieur de chaque classe sont données dans l'annexe 2.

Les énergies libres de Landau associées aux transitions sont désignées par une lettre qui se réfère à la table 3. Les énergies libres correspondant respectivement à un paramètre d'ordre de dimension 1, 2 et 4 sont notées par  $a_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $b_i$  et  $f_i$ .

### b) Organisation des tables

La table 1 contient cinq tableaux qui se rapportent aux cinq groupes smectiques continus notés  $T \square C_\infty$ ,  $T \square D_\infty$ ,  $T \square C_{\infty v}$ ,  $T \square C_{\infty h}$  et  $T \square D_{\infty h}$ , ou en notation de Shubnikov  $\infty(d)$ ,  $\infty:2(d)$ ,  $\infty.m(d)$ ,  $\infty:m(d)$  et  $m.\infty:m(d)$ . Chaque tableau comporte 4 colonnes dans lesquelles on trouve respectivement : les RI considérées, les groupes smectiques induits par chacune des RI précédentes (colonne a), les images (colonne b) et énergies libres (colonne c) correspondantes.

La table 2 contient les résultats obtenus pour les groupes smectiques discrets  $T \square C_n$ ,  $T \square D_n$ ,  $T \square C_{nv}$ ,  $T \square C_{nh}$ ,  $T \square S_{2n}$ ,  $T \square D_{nd}$  et  $T \square D_{nh}$ . Pour chaque groupe deux tableaux de résultats sont donnés, associés aux cas  $n$  pair et  $n$  impair, dont l'organisation est identique à celle des groupes continus. La diversité des résultats obtenus nous a conduit à utiliser une multitude de signes qui sont précisés au début de la table 2.

## 3) Analyse des résultats

### a) Symétrie des phases smectiques stables à basse température

Considérons tout d'abord les changements de symétrie pouvant se produire à partir des groupes smectiques  $T \square H$  avec  $H$  continu. En centre de zone ( $K = K_0$ ) où l'ordre translationnel est conservé, deux types de situations sont rencontrées : les RI unidimensionnelles conservent le caractère continu des groupes smectiques alors que les RI bidimensionnelles conduisent à des groupes smectiques avec  $H$  fini. En bout de zone ( $K = \frac{K_0}{2}$ ) le doublément de la distance entre couches smectiques fait apparaître en outre des axes hélicoïdaux et des plans de glissement.

Par exemple, les RI  $A_3$  et  $E_{n_2}$  du groupe  $\infty \cdot m(d)$  sont associées respectivement à des transitions vers les groupes  $\infty (2d)$  et  $m.(2n)_n(2d)$  qui contiennent les plans de glissement  $(\sigma_v(\phi) | d)$  et les axes hélicoïdaux  $(C(\phi) | d)$ .

A l'intérieur de la zone de Brillouin ( $K = \frac{K_0}{n_0}$ ) les RI du type  $E_{ki}$  préservent le caractère continu du groupe H qui peut contenir des axes hélicoïdaux ou des plans de glissement alors que les RI  $E_{kni}$  et  $G_{nk}$  conduisent à des groupes finis non symorphiques avec une multiplication par  $n_0$  de la distance entre couches smectiques.

L'application de la théorie de Landau aux groupes smectiques avec H fini, révèle une variété de situations théoriques encore bien plus complexe. A titre d'exemple, examinons le cas du groupe le plus restreint  $T \square C_n$ .

i) Pour n impair les représentations  $E_{ri}$  conduisent, selon que n est premier ou non premier respectivement au groupe réduit à l'unité (avec conservation ou doublement de la distance d) ou vers un groupe possédant un axe de rotation d'ordre P, P étant un diviseur de n avec  $P \leq \frac{n-1}{2}$ . La même distinction doit être faite pour les représentations des points intérieurs à la zone de Brillouin ( $K = \frac{K_0}{n_0}, n_0 \leq 3$ ) avec, en outre, le cas particulier  $n = n_0$  qui autorise l'existence d'axes hélicoïdaux de translations non-primitives d, 2d, ...,  $(n_0-1)d$ .

ii) Pour n pair, deux sous-familles de transitions doivent être distinguées correspondant à  $\frac{n}{2}$  premier ou non-premier. Si  $\frac{n}{2}$  est un nombre premier les représentations  $E_{r_1}$  et  $E_{r_2}$  induisent un groupe de symétrie réduit à l'élément neutre ou avec un axe d'ordre 2, selon que r est impair ou pair. Dans le cas où  $\frac{n}{2}$  est non premier des sous-cas apparaissent lorsque  $\frac{n}{2}$  et P sont pairs ou impairs. C'est aussi le cas pour la représentation  $E_{kr_1}$  avec  $n \neq n_0$  : si  $\frac{n}{2}$  est premier, on peut avoir un axe hélicoïdal  $(2)_1$  ou un  $1$  axe d'ordre 2 selon que r est impair ou pair. Si  $\frac{n}{2}$  est non premier, selon que ce nombre est pair ou impair, on obtient des groupes smectiques possédant un axe de rotation d'ordre P, ou un axe hélicoïdal d'ordre 2P selon que  $\frac{n}{P}$  est premier ou non-premier ou des groupes smectiques possédant un axe hélicoïdal d'ordre 2P ou un axe non-hélicoïdal d'ordre P selon que P est impair ou pair.

Les RI de dimension 4 (qui ne figurent pas parmi les représentations du groupe  $T \square C_n$ ) conduisent à une variété de possibilités encore plus grande. Ainsi la représentation  $G_{rk}$  du groupe  $T \square D_{nh}$  induit cinq familles de transitions dont l'existence respective dépend des valeurs des coefficients de l'énergie libre associée à la représentation. Ceci nous rappelle que la détermination des symétries des phases smectiques induites par une RI donnée dépend également de la discussion de l'énergie libre associée à cette RI.

Table 1: (a) Changement de symétrie, (b) Images et (c) énergies libres des transitions de phases à partir d'une phase Smectique dont le groupe ponctuel H est continu,  $\square n_0$  est pair,  $\blacksquare n_0$  est impair

$\Gamma \square D_\infty$	(a)	(b)	(c)
$\infty(d)$			
$K=0$			
$A_1$	$\infty(d)$		$a_1$
$E_{n1}$	$n(d)$	$L_1$	$b_2$
$K = \frac{K_0}{2}$			
$A_2$	$\infty(2d)$		$a_2$
$E_{n2}$	$(2n)_n(2d)$	$L_2$	$b_2$
$K = \frac{K_0}{n_0}$			
$E_{k1}$	$\infty(n_0 d)$	$G_1$	$b_3$
$E_{nq1}$	$(n_0 n)_n(n_0 d)$	$G_5$	$b_2$
$E_{nq2}$	$(n_0 n)_n(n_0 d)$	$G_6$	$b_2$

$\Gamma \square D_\infty$	(a)	(b)	(c)
$\infty:2(d)$			
$K=0$			
$A_1$	$\infty:2(d)$		$a_1$
$A_2$	$\infty(d)$		$a_2$
$E_{n1}$	$n:2(d)$	$L_3$	$b_2$
$K = \frac{K_0}{2}$			
$A_3$	$\infty:2(2d)$		$a_2$
$A_4$	$\infty:2(2d)$		$a_2$
$E_{n2}$	$(2n)_n:2(2d)$	$L_4$	$b_2$
$K = \frac{K_0}{n_0}$			
$E_k$	$\infty:2(n_0 d), \infty(n_0 d)$	$G_3$	$b_5$
$G_{nk}$	$\left\{ \begin{array}{l} (n_0 n)_n(n_0 d) \\ (n_0 n)_n:2(n_0 d) \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} H_2 \\ H_2 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} f_4 \\ f_5 \end{array} \right.$

$\mathbb{T}\square C_{\infty V}$	(a)	(b)	(c)
$\infty.m(d)$			
$K=0$			
$A_1$	$\infty.m(d)$		$a_1$
$A_2$	$\infty(d)$		$a_2$
$E_{n1}$	$n.m(d)$	$L_3$	$b_1$
$K=\frac{K_0}{2}$			
$A_3$	$\infty.m(2d)$		$a_2$
$A_4$	$\infty(2d)$		$a_2$
$E_{n2}$	$m.(2n)_n \overset{\sim}{(}2d)$	$L_4$	$b_1$
$K=\frac{K_0}{n_0}$			
$E_{k1}$	$\infty.m(\text{nod})$	$G_1$	$b_3$
$E_{k2}$	$\left\{ \begin{array}{l} \infty(n_0 \overset{\sim}{d}) \\ \infty(n_0 d) \end{array} \right.$	$G_2$	$b_3^{\square}$
		$G_2$	$b_4^{\blacksquare}$
$G_{nk}$	$\left\{ \begin{array}{l} (n_0 n)_n (n_0 d) \\ m.(n_0 n)_n \overset{\sim}{(}n_0 d) \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} H_1 \\ H_1 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} f_2^{\square} \\ f_3^{\blacksquare} \end{array} \right.$

$\mathbb{T}\square C_{\infty H}$	(a)	(b)	(c)
$\infty:m(d)$			
$K=0$			
$A_1$	$\infty:m(d)$		$a_1$
$A_2$	$\infty(d)$		$a_2$
$E_{n1}$	$n:m(d)$	$L_1$	$b_1$
$E_{n2}$	$n(d)$	$L_2$	$b_1$
$K=\frac{K_0}{2}$			
$A_3$	$\infty:m(2d)$		$a_2$
$A_4$	$\infty:m(2d)$		$a_2$
$E_{n3}$	$\overset{\sim}{(}2n)_n :m(2d)$	$L_2$	$b_1$
$E_{n4}$	$(2n)_n :m(2d)$	$L_2$	$b_1$
$K=\frac{K_0}{n_0}$			
$E_k$	$\infty:m(\overset{\sim}{n}_0 d), \infty(n_0 d)$	$G_3$	$b_5^{\square}$
$G_{nk}$	$\left\{ \begin{array}{l} (n_0 n)_n (n_0 d) \\ (n_0 n)_n :m(n_0 d) \end{array} \right.$	$H_2$	$f_4^{\square}$
		$H_2$	$f_5^{\blacksquare}$

Table 1(fin)

$T_{\infty h}^D$	(a)	(b)	(c)
$K=0$			
$A_1$	$m.\infty:m(d)$		$a_1$
$A_2$	$\infty:m(d)$		$a_2$
$A_3$	$m.\infty(d)$		$a_2$
$A_4$	$\infty:2(d)$		$a_2$
$E_{n1}$	$m.n:m(d)$	$L_3$	$b_1$
$E_{n2}$	$m.(2n):2(d)$	$L_4$	$b_1$
$K=\frac{K_0}{2}$			
$A_5$	$m.\infty:m(2d)$		$a_2$
$A_6$	$\infty:m(2d)$		$a_2$
$A_7$	$m.\infty:m(2d)$		$a_2$
$A_8$	$\infty:m(2d)$		$a_2$
$E_{n3}$	$m.(2n)_n:m(2d)$	$L_4$	$b_1$
$E_{n4}$	$m.(2n)_n:m(2d)$	$L_4$	$b_1$
$K=\frac{K_0}{n_0}$			
$E_{k1}$	$m.\infty:m(n_0 d), m.(n_0 d)$	$G_3$	$b_5$
$E_{k2}$	$\left\{ \begin{array}{l} \infty:m(\tilde{n}_0 d), m.\infty(\tilde{n}_0 d) \\ \infty:m(n_0 d), m.\infty(n_0 d) \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} G_4 \\ G_4 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \square \\ b_5 \\ \blacksquare \\ b_6 \end{array} \right.$
$G_{nk}$	$\left\{ \begin{array}{l} (n_0 n)_n (n_0 d) \\ (n_0 n)_n : 2(n_0 d) \\ (n_0 n)_n : m(n_0 d) \\ m.(n_0 n)_n (\tilde{n}_0 d) \\ m.(n_0 n)_n : m(\tilde{n}_0 d) \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} H_3 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \square \\ f_4 \\ \blacksquare \\ f_5 \end{array} \right.$

Table 2 : Les tableaux sont organisés de la même façon que dans la Table 1. Les signes utilisés ont la signification suivante:

Pour les groupes avec n impair: • n est un nombre premier; \*n est non premier p étant un diviseur de n avec  $p \leq \frac{n-1}{2}$  (pour tous les groupes sauf  $T \square S_{2n}$  et  $T \square D_{nd}$  pour les quels p est un diviseur de 2n avec  $p \leq n-1$ );  $\square n_0$  pair;  $\blacksquare n_0$  impair.

Pour les groupes avec n pair : • n est un nombre premier; \*n est non premier, p étant un diviseur de n avec  $p \leq \frac{n}{2} - 1$  (sauf pour  $T \square S_{2n}$  et  $T \square D_{nd}$  pour lesquels p est un diviseur de 2n avec  $p \leq n-1$ );  $\square n_0$  est pair;  $\blacksquare n_0$  est impair;  $\nabla r$  est pair;  $\blacktriangledown r$  est impair;  $\triangle \frac{n}{2}$  est pair;  $\blacktriangle \frac{n}{2}$  est impair;  $\cdot + p$  est impair;  $\dagger p$  est pair;  $\circ \frac{n}{p}$  est premier;  $\odot \frac{n}{p}$  est non premier.

			$T \square C_n$			
			n(d)			
			(n even)	(a)	(b)	(c)
			K=0			
			A <sub>1</sub>	n(d)		a <sub>1</sub>
			A <sub>2</sub>	$\frac{n(d)}{2}$		a <sub>2</sub>
			E <sub>r1</sub>	$\left\{ \begin{matrix} l(d) \bullet \blacktriangledown, 2(d) \bullet \blacktriangledown \\ P(d)^* \end{matrix} \right.$	$\left\{ L_5 \right.$	$\left. \begin{matrix} 2 \\ b_3 \end{matrix} \right\}$
$T \square C_n$			K=K <sub>0</sub> 2			
1(d)	(a)	(b)	A <sub>3</sub>	n(2d)		a <sub>2</sub>
(n odd)		(c)	A <sub>4</sub>	$(n)_{n/2}(2d)$		a <sub>2</sub>
$\leq 0$			E <sub>r1</sub>	$\left\{ \begin{matrix} (2)_1(2d) \bullet \blacktriangledown, 2(2d) \bullet \blacktriangledown \\ P(2d)^* \blacktriangle \dagger, (2P)_p(2d)^* \blacktriangle \dagger \\ P(2d)^* \blacktriangle \circ, (2P)_p(2d)^* \blacktriangle \odot \end{matrix} \right.$	$\left\{ L_6 \right.$	$\left. \begin{matrix} 2 \\ b_3 \end{matrix} \right\}$
A <sub>1</sub>	n(d)	a <sub>1</sub>	E <sub>r2</sub>			
E <sub>r1</sub>	$\left\{ \begin{matrix} l(d) \bullet \\ P(d)^* \end{matrix} \right.$	L <sub>5</sub>	K=K <sub>0</sub> no			
A <sub>2</sub>	n(2d)	a <sub>2</sub>	E <sub>k1</sub>	$n(n_0 d)$	G <sub>1</sub>	b <sub>3</sub>
E <sub>r2</sub>	$\left\{ \begin{matrix} l(2d) \bullet \\ P(2d)^* \end{matrix} \right.$	L <sub>6</sub>	E <sub>k2</sub>	$\left\{ \begin{matrix} n(n_0 d) \blacksquare \\ (n)_{n/2}(n_0 d) \square \end{matrix} \right.$	$\left\{ G_2 \right.$	$\left. \begin{matrix} b_4 \\ b_3 \end{matrix} \right\}$
A <sub>1</sub>	n(d)	a <sub>1</sub>	E <sub>k</sub>	n(n <sub>0</sub> d)	G <sub>1</sub>	b <sub>3</sub>
E <sub>r1</sub>	$\left\{ \begin{matrix} l(d) \bullet \\ P(d)^* \end{matrix} \right.$	L <sub>5</sub>	E <sub>kr1</sub>	$\left\{ \begin{matrix} n=n_0 (n)_1(n_0 d) \bullet \blacktriangledown, 2(n_0 d) \bullet \blacktriangledown \\ n \neq n_0 (2P)_p(n_0 d)^* \blacktriangle \dagger, P(n_0 d)^* \blacktriangle \dagger \\ P(n_0 d)^* \blacktriangle \circ, (2P)_p(n_0 d)^* \blacktriangle \odot \end{matrix} \right.$	G <sub>7</sub>	b <sub>3</sub>
A <sub>2</sub>	n(2d)	a <sub>2</sub>	E <sub>kr2</sub>	$\left\{ \begin{matrix} n=n_0 (n)_1(n_0 d) \bullet \blacktriangledown, 2(n_0 d) \bullet \blacktriangledown \\ n \neq n_0 (2P)_p(n_0 d)^* \blacktriangle \dagger, P(n_0 d)^* \blacktriangle \dagger \\ P(n_0 d)^* \blacktriangle \circ, (2P)_p(n_0 d)^* \blacktriangle \odot \end{matrix} \right.$	G <sub>8</sub>	b <sub>2</sub>
E <sub>r2</sub>	$\left\{ \begin{matrix} l(2d) \bullet \\ P(2d)^* \end{matrix} \right.$	L <sub>6</sub>				
A <sub>1</sub>	n(d)	a <sub>1</sub>				
E <sub>r1</sub>	$\left\{ \begin{matrix} l(d) \bullet \\ P(d)^* \end{matrix} \right.$	L <sub>5</sub>				
A <sub>2</sub>	n(2d)	a <sub>2</sub>				
E <sub>r2</sub>	$\left\{ \begin{matrix} l(2d) \bullet \\ P(2d)^* \end{matrix} \right.$	L <sub>6</sub>				
A <sub>1</sub>	n(d)	a <sub>1</sub>				
E <sub>r1</sub>	$\left\{ \begin{matrix} l(d) \bullet \\ P(d)^* \end{matrix} \right.$	L <sub>5</sub>				
A <sub>2</sub>	n(2d)	a <sub>2</sub>				
E <sub>r2</sub>	$\left\{ \begin{matrix} l(2d) \bullet \\ P(2d)^* \end{matrix} \right.$	L <sub>6</sub>				

Table 2(suite)

$T \square C_{nv}$	(a)	(b)	(c)
$n.m(d)$ (n odd)			
$K=0$			
$A_1$	$n.m(d)$		$a_1$
$A_2$	$n(d)$		$a_2$
$E_{r1}$	$m(d) \bullet, P.m(d) \bullet^*$	$L_7$	$b_5^1$
$K=K_0$ $\frac{2}{2}$			
$A_3$	$n.m(2d)$		$a_2$
$A_4$	$n(\tilde{2}d)$		$a_2$
$E_{r2}$	$m(2d) \bullet, P.m(2d) \bullet^*$	$L_8$	$b_6^1$
$K=K_0$ $\frac{no}{no}$			
$E_{k1}$	$m.n(d) (n \circ d)$	$G_1$	$b_3$
$E_{k2}$	$\left\{ \begin{array}{l} n(\tilde{n} \circ d) \square \\ n(n \circ d) \blacksquare \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} G_2 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} b_3 \\ b_4 \end{array} \right.$
$G_{rk}$	$\left\{ \begin{array}{l} n=n \circ \left\{ \begin{array}{l} (n)_1 (n \circ d) \bullet, m.(n)_1 (\tilde{n} \circ d) \bullet \\ (n)_p (n \circ d) \bullet^*, m.(n)_p (\tilde{n} \circ d) \bullet^* \end{array} \right. \\ n \neq n \circ \left\{ \begin{array}{l} l(n \circ d) \bullet, m(n \circ d) \bullet \\ p(n \circ d) \bullet^*, P.m(n \circ d) \bullet^* \end{array} \right. \end{array} \right. \right\} H_4$		$\left\{ \begin{array}{l} f_{14} (I, II) \\ f_{12} \blacksquare, f_{13} \square (I, II) \end{array} \right.$

Table 2(suite)

TDC <sub>nv</sub> n.m(d) (n even)	(a)	(b)	(c)
K=0			
A <sub>1</sub>	n.m(d)		a <sub>1</sub>
A <sub>2</sub>	$\frac{(n)}{2}.m(d)$		a <sub>2</sub>
A <sub>3</sub>	n(d)		a <sub>2</sub>
A <sub>4</sub>	$\frac{(n)}{2}.m(d)$		a <sub>2</sub>
E <sub>r1</sub>	$\left\{ \begin{array}{l} m(d)^{\odot \nabla}, 2.m(d)^{\odot \nabla} \\ P.m(d)^* \end{array} \right.$	$\left. \vphantom{\left\{ \right.} \right\} L_7$	$\left. \vphantom{\left\{ \right.} \right\} b_5^1$
$K=\frac{K_0}{2}$			
A <sub>5</sub>	n.m(2d)		a <sub>2</sub>
A <sub>6</sub>	$(n)_{n/2}.m(2d)$		a <sub>2</sub>
A <sub>7</sub>	n(2d)		a <sub>2</sub>
A <sub>8</sub>	$(n)_{n/2}.m(2d)$		a <sub>2</sub>
E <sub>r2</sub>	$\left\{ \begin{array}{l} (2)_1.m(2d)^{\odot \nabla}, 2.m(2d)^{\odot \nabla} \\ (2P)_P.m(2d)^* \Delta^{\dagger}, P.m(2d)^* \Delta^{\dagger} \\ P.m(2d)^* \Delta^{\circ}, (2P)_P.m(2d)^* \Delta^{\circ} \end{array} \right.$	$\left. \vphantom{\left\{ \right.} \right\} L_{10}$	$\left. \vphantom{\left\{ \right.} \right\} b_5^1$
$K=\frac{K_0}{n_0}$			
E <sub>k1</sub>	n.m(nd)	G <sub>1</sub>	b <sub>3</sub>
E <sub>k2</sub>	$\left\{ \begin{array}{l} (n)_{n/2}.m(n \overset{\circ}{\underset{\circ}{d}})^{\square} \\ (n/2).m(n \overset{\circ}{\underset{\circ}{d}})^{\square} \end{array} \right.$	$\left. \vphantom{\left\{ \right.} \right\} G_2$	$\left. \vphantom{\left\{ \right.} \right\} \begin{array}{l} b_3^{\square} \\ b_4^{\square} \end{array}$
E <sub>k3</sub>	$\left\{ \begin{array}{l} n(n \overset{\circ}{\underset{\circ}{d}})^{\square} \\ n(n \overset{\circ}{\underset{\circ}{d}})^{\square} \end{array} \right.$		
E <sub>k4</sub>	$\left\{ \begin{array}{l} (n)_{n/2}.m(n \overset{\circ}{\underset{\circ}{d}})^{\square} \\ (n/2).m(n \overset{\circ}{\underset{\circ}{d}})^{\square} \end{array} \right.$		
G <sub>rk</sub>	$\left\{ \begin{array}{l} (n)_1(n \overset{\circ}{\underset{\circ}{d}})^{\odot \nabla}, m.(n)_1(n \overset{\circ}{\underset{\circ}{d}})^{\odot \nabla} \\ n=n \overset{\circ}{\underset{\circ}{d}} (n)_2(n \overset{\circ}{\underset{\circ}{d}})^{\odot \nabla}, m.(n)_2(n \overset{\circ}{\underset{\circ}{d}})^{\odot \nabla} \\ (n)_P(n \overset{\circ}{\underset{\circ}{d}})^*, (n)_P.m(n \overset{\circ}{\underset{\circ}{d}})^* \\ 1(n \overset{\circ}{\underset{\circ}{d}})^{\odot \nabla}, m(n \overset{\circ}{\underset{\circ}{d}})^{\odot \nabla} \\ n \neq n \overset{\circ}{\underset{\circ}{d}} 2(n \overset{\circ}{\underset{\circ}{d}})^{\odot \nabla}, 2.m(n \overset{\circ}{\underset{\circ}{d}})^{\odot \nabla} \\ P(n \overset{\circ}{\underset{\circ}{d}})^*, P.m(n \overset{\circ}{\underset{\circ}{d}})^* \end{array} \right.$		

Table 2(suite)

$T \square D_n$ $n:2(d)$ (n odd)	(a)	(b)	(c)
$K=0$			
$A_1$	$n:2(d)$		$a_1$
$A_2$	$n(d)$		$a_2$
$E_{r1}$	$(2)_x(d), P:2(d)^*$	$L_7$	$b_5^2$
$K=\frac{K_0}{2}$			
$A_3$	$n:2(2d)$		$a_2$
$A_4$	$n:2(2d)$		$a_2$
$E_{r2}$	$(2)_x(2d), P:2(2d)^*$	$L_8$	$b_6^2$
$K=\frac{K_0}{no}$			
$E_{k1}$	$n:2(n_0 d), n(n_0 d)$	$G_3$	$b_5$
$G_{rk}$	$n=n_0 \left\{ \begin{array}{l} (n)_1(n_0 d), (n)_1:2(n_0 d) \\ (n)_p(n_0 d)^*, (n)_p:2(n_0 d)^* \end{array} \right.$	$H_5$	$\left\{ \begin{array}{l} f_8(I, II) \\ f_6^{\square}, f_7^{\square}(I, II) \end{array} \right.$
	$n \neq n_0 \left\{ \begin{array}{l} 1(n_0 d), (2)_x(n_0 d) \\ P(n_0 d)^*, P:2(n_0 d)^* \end{array} \right.$		

Table 2(suite)

$TOD_n$ $n:2(d)$ (n even)	(a)	(b)	(c)
$K=0$			
$A_1$	$n:2(d)$		$a_1$
$A_2, A_4$	$\frac{(n)}{2}:2(d)$		$a_2$
$A_3$	$n(d)$		$a_2$
$E_{r1}$	$\left\{ \begin{array}{l} (2)_x(d) \blacktriangledown, 2:2(d) \blacktriangledown \\ P:2(d) * \end{array} \right.$	$\left\{ L_7 \right.$	$\left. \begin{array}{l} 2 \\ b_5 \end{array} \right\}$
$K=\frac{K_0}{2}$			
$A_5, A_7$	$n:2(2d)$		$a_2$
$A_6, A_8$	$(n)_{n/2}:2(2d)$		$a_2$
$E_{r2}$	$\left\{ \begin{array}{l} (2)_1:2(2d) \blacktriangledown, 2:2(2d) \blacktriangledown \\ (2P)_P:2(2d) \blacktriangle * \blacktriangledown, P:2(2d) \blacktriangle * \blacktriangledown \\ P:2(2d) * \Delta \circ, (2P)_P:2(2d) * \Delta \odot \end{array} \right.$	$\left\{ L_8 \right.$	$\left. \begin{array}{l} 2 \\ b_5 \end{array} \right\}$
$K=\frac{K_0}{n_0}$			
$E_{k1}$	$n:2(n_0 d), n(n_0 d)$	$G_3$	$b_5$
$E_{k2}$	$\left\{ \begin{array}{l} (n)_{n/2}:2(n_0 d) \square, (n)_{n/2}(n_0 d) \square \\ \frac{n}{2}:2(n_0 d) \square, n/2(n_0 d) \square \end{array} \right.$	$\left\{ G_4 \right.$	$\left. \begin{array}{l} b_5 \\ b_6 \end{array} \right\}$
$G_{rk}$	$\left\{ \begin{array}{l} n=n_0 \left\{ \begin{array}{l} (n)_1(n_0 d), (n)_1:2(n_0 d) \\ (n)_P(n_0 d) *, (n)_P:2(n_0 d) * \end{array} \right. \\ n \neq n_0 \left\{ \begin{array}{l} 1(n_0 d), (2)_x(n_0 d) \\ P(n_0 d) *, P:2(n_0 d) * \end{array} \right. \end{array} \right.$	$\left\{ H_5 \right.$	$\left. \begin{array}{l} f_{11}(I, II) \\ f_9 \square, f_{10} \square(I, II) \end{array} \right\}$

Table 2(suite)

$T \square C_{nh}$ $n:m(d)$ (n odd)	(a)	(b)	(c)
$K=0$			
$A_1$	$n:m(d)$		$a_1$
$A_2$	$n(d)$		$a_2$
$E_{r1}$	$m_h(d), P:m(d)^*$	$L_5$	$b_3^1$
$E_{r2}$	$l(d), P(d)^*$	$L_6$	$b_4^1$
$K=\frac{K_0}{2}$			
$A_3, A_4$	$n:m(2d)$		$a_2$
$E_{r3}, E_{r4}$	$m_h(2d), P:m(2d)^*$	$L_6$	$b_4^1$
$K=\frac{K_0}{n_0}$			
$E_{k1}$	$n:m(n_0 d), n(n_0 d)$	$G_3$	$b_5$
$G_{rk}$	$\left\{ \begin{array}{l} n=n_0 \left\{ \begin{array}{l} (n)_1(n_0 d), (n)_1:m(n_0 d) \\ (n)_p(n_0 d)^*, (n)_p:m(n_0 d)^* \end{array} \right. \\ n \neq n_0 \left\{ \begin{array}{l} l(n_0 d), m_h(n_0 d) \\ P(n_0 d)^*, P:m(n_0 d)^* \end{array} \right. \end{array} \right. \left. \right\} H_5$		$f_8(I, II)$
			$f_6, f_7^{\square}(I, II)$

$T \square C_{nh}$ $n:m(d)$ (n even)	(a)	(b)	(c)
$K=0$			
$A_1$	$n:m(d)$		$a_1$
$A_2$	$\frac{n:m(d)}{2}$		$a_2$
$A_3$	$n(d)$		$a_2$
$A_4$	$(2n)(d)$		$a_2$
$E_{r1}$	$\left\{ \begin{array}{l} \bar{1}(d), 2:m(d) \\ P:m(d)^{\ast \dagger}, (2P)(d)^{\ast +} \\ m_h(d), 2(d) \\ P:m(d)^{\ast \Delta}, P(d)^{\dagger \Delta \ast} \\ P(d)^{\ast \Delta \ominus}, P:m(d)^{\Delta \ast +}, (2P)(d)^{\Delta \ast + \ominus} \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} L_5 \\ L_6 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ b_3 \\ 1 \\ b_3 \end{array} \right\}$
$E_{r2}$			
$K=\frac{K_0}{2}$			
$A_5, A_7$	$n:m(2d)$		$a_2$
$A_6, A_8$	$(n)_{n/2}:m(2d)$		$a_2$
$E_{r3}, E_{r4}$	$\left\{ \begin{array}{l} (2)_1:m(2d), 2:m(2d) \\ (2P)_P:m(2d)^{\ast \Delta +}, P:m(2d)^{\Delta \dagger \ast} \\ (2P)_P:m(2d)^{\ast \Delta \ominus}, P:m(2d)^{\ast \Delta \ominus} \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} L_6 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ b_3 \end{array} \right\}$
$K=\frac{K_0}{no}$			
$E_{k1}$	$n:m(n_o d)$	$G_3$	$b_5$
$E_{k2}$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{n:m(n_o d)}{2} \\ (n)_{n/2}:m(n_o d) \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} G_4 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} b_6 \\ b_5 \end{array} \right\}$
$G_{rk}$	$\left[ \begin{array}{l} n=n_o \\ n \neq n_o \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} (n)_1(n_o d), (n)_1:m(n_o d) \\ (n)_2(n_o d), (n)_2:m(n_o d) \\ (n)_P(n_o d)^{\ast +}, (n)_P(2n)(n_o d)^{\ast +} \\ (n)_P(n_o d)^{\ast \dagger}, (n)_P:m(n_o d)^{\ast \dagger} \\ 1(n_o d), \bar{1}(n_o d) \\ 2(n_o d), 2:m(n_o d) \\ P(n_o d)^{\ast +}, P(2P)(n_o d)^{\ast +} \\ P(n_o d)^{\ast \dagger}, P:m(n_o d)^{\ast \dagger} \end{array} \right. \right.$	$\left. \begin{array}{l} H_5 \end{array} \right\}$	$\left[ \begin{array}{l} f_{11} \text{ (I, II)} \\ f_9, f_{10} \text{ (I, II)} \end{array} \right.$

Table 2 (suite)

$T \square S_{2n}$ $(2\tilde{n})(d)$ (n odd)	(a)	(b)	(c)
$K=0$			
$A_1$	$(2\tilde{n})(d)$	-	$a_1$
$A_2$	$n(d)$	-	$a_2$
$E_{r1}$	$\left\{ \begin{array}{l} \bar{1}(d) \\ (2\tilde{p})(d)^* \end{array} \right.$	$\left. \right\} L_5$	$\left. \right\} b_3^1$
$E_{r2}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1(d) \\ p(d)^* \end{array} \right.$	$\left. \right\} L_6$	$\left. \right\} b_4^1$
$K = \frac{K_0}{2}$			
$A_3$	$(2\tilde{n})(2d)$	-	$a_2$
$A_4$	$(2\tilde{n})(2d)$	-	$a_2$
$E_{r3}; E_{r4}$	$\left\{ \begin{array}{l} \bar{1}(2d) \\ (2\tilde{p})(2d)^* \end{array} \right.$	$\left. \right\} L_6$	$\left. \right\} b_4^1$
$K = \frac{K_0}{n_0}$			
$E_k$	$(2\tilde{n})(n_0 d); n(n_0 d)$	$G_3$	$b_5$
$E_{kr1}$	$\left[ \begin{array}{l} n=n_0 \\ n \neq n_0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} (n)_1(2\tilde{n})(n_0 d) \\ (n)_p(2\tilde{n})(n_0 d) \end{array} \right.$	$G_9$	$\left. \right\} b_5$
$E_{kr2}$	$\left[ \begin{array}{l} n=n_0 \\ n \neq n_0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \bar{1}(n_0 d) \\ (2\tilde{p})(n_0 d) \end{array} \right.$	$G_{10}$	$\left. \right\} b_2$

$T \square S_{2n}$ $(2n)(d)$ (n even)	(a)	(b)	(c)
$K=0$			
$A_1$	$(2\tilde{n})(d)$	-	$a_1$
$A_2$	$n(d)$	-	$a_2$
$E_{r1}$	$\left\{ \begin{array}{l} p(d) \\ (\tilde{p})(d)^* \end{array} \right.$	$\left. \right\} L_9$	$\left. \right\} b_4^1$
$K = \frac{K_0}{2}$			
$A_3, A_4$	$(2\tilde{n})(2d)$	-	$a_2$
$E_{r2}$	$\left\{ \begin{array}{l} (2\tilde{p})_p(2d) \\ (\tilde{p})(2d)^* \end{array} \right.$	$\left. \right\} L_{10}$	$\left. \right\} b_4^1$
$K = \frac{K_0}{n_0}$			
$E_k$	$(2\tilde{n})(n_0 d), n(n_0 d)$	$G_3$	$b_5$
$E_{kr1}$	$\left[ \begin{array}{l} n=n_0 \\ n \neq n_0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} (n)_1(2\tilde{n})(n_0 d) \\ (2\tilde{p})_p(n_0 d) \\ (\tilde{p})(n_0 d)^* \end{array} \right.$	$G_9$	$\left. \right\} b_5$
$E_{kr2}$	$\left[ \begin{array}{l} n=n_0 \\ n \neq n_0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} (2\tilde{p})_p(n_0 d) \\ (\tilde{p})(n_0 d)^* \end{array} \right.$	$G_{10}$	$\left. \right\} b_2$

$T \square D_{nd}$ $m. (\tilde{2n})(d)$ (n odd)	(a)	(b)	(c)
$K=0$			
$A_1$	$m. (\tilde{2n})(d)$	-	$a_1$
$A_2$	$n:m(d)$	-	$a_2$
$A_3$	$n:2(d)$	-	$a_2$
$A_4$	$m.n(d)$	-	$a_2$
$E_{r1}$	$(2)_x:m(d), m. (\tilde{2p})(d)^*$	$L_7$	$b_5^1$
$E_{r2}$	$(2)_x(d), p:2(d)^*$	$L_8$	$b_6^1$
$K = \frac{K_0}{2}$			
$A_5$	$m. (\tilde{2n})(2d)$	-	$a_2$
$A_6, A_7$	$(2n)(\tilde{2d})$	-	$a_2$
$A_8$	$m. (\tilde{2n})(2d)$	-	$a_2$
$E_{r3}$	$(2)_x:m(2d), m. (\tilde{2p})(2d)^*$	$L_8$	$b_6^1$
$E_{r4}$	$(2)_x:m(2d), (\tilde{2p})(\tilde{2d})^*$	$L_8$	$b_6^1$
$K = \frac{K_0}{n_0}$			
$E_{k1}$	$m. (\tilde{2n})(n_0 d), m.n(n_0 d)$	$G_3$	$b_5$
$E_{k2}$	$\left\{ \begin{array}{l} (\tilde{2n})(\tilde{n_0 d}), (\tilde{2n})(n_0 d) \\ (\tilde{2n})(n_0 d), n(n_0 d) \end{array} \right.$	$\left\{ G_4 \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} b_5 \\ b_6 \end{array} \right.$
$G_{rk}$	$n=n_0 \left\{ \begin{array}{l} (n)_1(n_0 d), (n)_1:2(n_0 d) \\ (n)_1(\tilde{2n})(n_0 d), m.(n)_1(\tilde{n_0 d}) \\ m.(n)_1(\tilde{2n})(n_0 d) \end{array} \right.$	$\left. \right\} H_6$	$n=n_0 \left\{ \begin{array}{l} f_{20} \\ f_{19} \\ f_{18} \end{array} \right.$
	$n \neq n_0 \left\{ \begin{array}{l} 1(n_0 d), (2)_x(n_0 d) \\ \bar{1}(n_0 d), m(n_0 d) \\ (2)_x:m(n_0 d) \end{array} \right.$		
	$n=n_0 \left\{ \begin{array}{l} (n)_p(n_0 d), (n)_p:2(n_0 d) \\ m.(n)_p(\tilde{2n})(n_0 d), m.(n)_p(\tilde{n_0 d}) \\ m.(n)_p(\tilde{2n})(\tilde{n_0 d}) \end{array} \right.$		
	$n \neq n_0 \left\{ \begin{array}{l} p(n_0 d), p:2(n_0 d) \\ m.(\tilde{2p})(n_0 d), m.p(n_0 d) \\ m(\tilde{2p})(n_0 d)^* \end{array} \right.$		
	$n=n_0 \left\{ \begin{array}{l} (n)_1(n_0 d), (n)_1:2(n_0 d) \\ (n)_1(\tilde{2n})(n_0 d), m.(n)_1(\tilde{n_0 d}) \\ m.(n)_1(\tilde{2n})(n_0 d) \end{array} \right.$		
	$n \neq n_0 \left\{ \begin{array}{l} 1(n_0 d), (2)_x(n_0 d) \\ \bar{1}(n_0 d), m(n_0 d) \\ (2)_x:m(n_0 d) \end{array} \right.$		

T □ D <sub>nd</sub>		(b)	(c)
m. (2n)(d)			
(n even) , (a)			
K=0			
A <sub>1</sub>	m. (2n)(d)	-	a <sub>1</sub>
A <sub>2</sub>	n.m(d)	-	a <sub>2</sub>
A <sub>3</sub>	(2ñ)(d)	-	a <sub>2</sub>
A <sub>4</sub>	n:2(d)	-	a <sub>2</sub>
E <sub>r1</sub>	m.p(d), m. (p̃)(d)*	L <sub>11</sub>	b <sub>5</sub> <sup>1</sup>
K= $\frac{K_0}{2}$			
A <sub>5</sub> , A <sub>6</sub>	m. (2ñ)(2d)	-	a <sub>2</sub>
A <sub>7</sub> , A <sub>8</sub>	(2n)(2d̃)	-	a <sub>2</sub>
E <sub>r2</sub>	(2p) <sub>p</sub> .m(2d̃), m. (p̃)(2d)*	L <sub>12</sub>	b <sub>5</sub> <sup>1</sup>
K= $\frac{K_0}{n_0}$			
E <sub>k1</sub>	m. (2n)(n <sub>0</sub> d), n.m(n <sub>0</sub> d)	G <sub>3</sub>	b <sub>5</sub>
E <sub>k2</sub>	{ (2n)(n <sub>0</sub> d), n(n <sub>0</sub> d) <sup>□</sup> (2ñ)(n <sub>0</sub> d), n(n <sub>0</sub> d) <sup>□</sup>	{ G <sub>4</sub>	{ b <sub>5</sub> <sup>□</sup> b <sub>6</sub> <sup>□</sup>
E <sub>rk</sub>	{ n=n <sub>0</sub> { (n) <sub>p</sub> (n <sub>0</sub> d), (n) <sub>p</sub> :2(n <sub>0</sub> d) (n) <sub>p</sub> :m(n <sub>0</sub> d), (n) <sub>p</sub> .m(n <sub>0</sub> d) m. (n) <sub>p</sub> (2ñ)(n <sub>0</sub> d) n≠n <sub>0</sub> { p(n <sub>0</sub> d), p:2(n <sub>0</sub> d) p:m(n <sub>0</sub> d), p.m(n <sub>0</sub> d) m. (2p̃)(n <sub>0</sub> d)	{ H <sub>6</sub>	{ n=n <sub>0</sub> f <sub>23</sub> n≠n <sub>0</sub> { f <sub>21</sub> <sup>□</sup> f <sub>22</sub> <sup>□</sup>

$T \square D_{nh}$

$m.n:m(d)$   
(n odd)

(a)

(b)

(c)

$K=0$

$A_1$   $m.n:m(d)$  -  $a_1$

$A_2$   $n:m(d)$  -  $a_2$

$A_3$   $n:2(d)$  -  $a_2$

$A_4$   $n.m(d)$  -  $a_2$

$E_{r1}$   $(2)_x \cdot m(d), m.p:m(d)$   $L_7$   $b_5^1$

$E_{r2}$   $(2)_x \cdot (d), p:2(d)$   $L_8$   $b_6^1$

$K = \frac{K_0}{2}$

$A_5, A_8$   $m.n:m(2d)$  -  $a_2$

$A_6, A_7$   $n:m(\tilde{2}d)$  -  $a_2$

$E_{r3}$   $(2)_x \cdot m(2d), m.p:m(2d)$   $L_8$   $b_6^1$

$E_{r4}$   $(2)_x \cdot (\tilde{2}d), p:m(\tilde{2}d)$   $L_8$   $b_6^1$

$K = \frac{k_0}{n_0}$

$E_{k1}$   $m.n:m(n_0 d), m.n(n_0 \tilde{d})$   $G_3$   $b_5$

$E_{k2}$   $\left\{ \begin{array}{l} n:m(n_0 \tilde{d}), n(n_0 \tilde{d}) \\ n:m(n_0 d), n(n_0 d) \end{array} \right\}$   $G_4$   $\left\{ \begin{array}{l} b_5 \\ b_6 \end{array} \right\}$

$G_{rk}$   $\left\{ \begin{array}{l} n=n_0 \left\{ \begin{array}{l} (n)_1(n_0 d), (n)_1:2(n_0 d) \\ (n)_1:m(n_0 d), m.(n)_1(n_0 d) \\ m.(n)_1:m(n_0 \tilde{d}) \end{array} \right. \\ n \neq n_0 \left\{ \begin{array}{l} 1(n_0 d), (2)_x(n_0 d) \\ 1:m(n_0 d), m(n_0 d) \\ 2.m(n_0 d) \end{array} \right. \\ n=n_0 \left\{ \begin{array}{l} (n)_p(n_0 d), (n)_p:2(n_0 d) \\ (n)_p:m(n_0 d), m.(n)_p(n_0 d) \\ m.(n)_p:m(n_0 \tilde{d}) \end{array} \right. \\ n \neq n_0 \left\{ \begin{array}{l} p(n_0 d), p:2(n_0 d) \\ p:m(n_0 d), p.m(n_0 d) \\ m.p:m(n_0 d) \end{array} \right. \end{array} \right\}$   $H_6$   $\left\{ \begin{array}{l} n=n_0 \quad f_{20} \\ n \neq n_0 \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{18} \\ f_{19} \end{array} \right. \end{array} \right\}$

Table 2(suite)

$T \square D_{nh}$ $m.n:m(d)$ (n even)	(a)	(b)	(c)
$K=0$			
$A_1$	$m.n:m(d)$	-	$a_1$
$A_2, A_4$	$\frac{m.n:m(d)}{2}$	-	$a_2$
$A_3$	$m:n(d)$	-	$a_2$
$A_5$	$n:2(d)$	-	$a_2$
$A_6, A_8$	$m:\hat{n}(d)$	-	$a_2$
$A_7$	$m.n(d)$	-	$a_2$
$E_{r1}$	$\left\{ \begin{array}{l} (2)_x : m(d), m.2:m(d) \\ m.p:m(d)^* \end{array} \right.$	$\left. \vphantom{\left\{ \right.} L_7 \right.$	$\left. \vphantom{\left\{ \right.} b_5^1 \right.$
$E_{r2}$	$\left\{ \begin{array}{l} (2)_x . m(d), 2:2(d) \\ m.(2p)(d), p:2(d)^* \end{array} \right.$	$\left. \vphantom{\left\{ \right.} L_8 \right.$	$\left. \vphantom{\left\{ \right.} b_5^1 \right.$
$K = \frac{K_0}{2}$			
$A_9, A_{15}$	$m.n:m(2d)$	-	$a_2$
$A_{10}, A_{12}$	$m.(n)_{n/2}:m(\hat{2}d)$	-	$a_2$
$A_{14}, A_{16}$	$n:m(\hat{2}d)$	-	$a_2$
$A_{11}, A_{13}$			
$E_{r3}$	$\left\{ \begin{array}{l} m.(2)_1 : m(\hat{2}d), m.2:m(2d) \\ m.p:m(2d), m.(2p)_p : m(\hat{2}d)^* \\ m.(2p)_p : m(\hat{2}d), m.p:m(2d) \end{array} \right.$	$L_8$	$b_5^1$
$E_{r4}$	$\left\{ \begin{array}{l} m.(2)_1 : 2(\hat{2}d), 2:m(\hat{2}d) \\ p:m(\hat{2}d), m;(2p)_p : m(\hat{2}d) \\ m.(2p)_p : m(\hat{2}d), p:m(\hat{2}d) \end{array} \right.$	$L_8$	$b_5^1$
$K = \frac{K_0}{n_0}$			
$E_{k1}$	$m.n:m(n_0 d), n:m(\hat{n}_0 d)$	$G_3$	$b_5$
$E_{k2}, E_{k4}$	$\left\{ \begin{array}{l} m.(n)_{n/2}:m(\hat{n}_0 d), (n)_{n/2}.m(\hat{n}_0 d) \\ m.n:m(n_0 d), n(n_0 d) \end{array} \right.$	$G_4$	$\left. \vphantom{\left\{ \right.} b_5^{\square} \right.$ $\left. \vphantom{\left\{ \right.} b_6^{\square} \right.$
$E_{k3}$	$\left\{ \begin{array}{l} n:m(\hat{n}_0 d), n(n_0 d) \\ m:n(n_0 d), n(n_0 d) \end{array} \right.$		

T □ D <sub>nh</sub>	(a)	(b)	(c)	
m.n:m(d)				
(n even)				
G <sub>rk</sub>	$  \begin{aligned}  n=n_0 & \left\{ \begin{array}{l} (n)_1(n_0d), (n)_1:2(n_0d) \\ (n)_1:m(n_0d), m.(n)_1(n_0\tilde{d}) \\ m:(n)_2:m(n_0\tilde{d}) \end{array} \right. \\  n \neq n_0 & \left\{ \begin{array}{l} 1(n_0d), (2)_x(n_0d) \\ \bar{1}(n_0d), m(n_0d) \\ (2)_x:m(n_0d) \end{array} \right.  \end{aligned}  $			
	$  \begin{aligned}  n=n_0 & \left\{ \begin{array}{l} (n)_2(n_0d), (n)_2:2(n_0d) \\ (n)_2:m(n_0d), m.2(n_0\tilde{d}) \\ m.(n)_2:m(n_0\tilde{d}) \end{array} \right. \\  n \neq n_0 & \left\{ \begin{array}{l} 2(n_0d), 2:2(n_0d) \\ 2:m(n_0d), 2.m(n_0d) \\ m.2:m(n_0d) \end{array} \right.  \end{aligned}  $	H <sub>6</sub>	$  \begin{aligned}  n=n_0 & \left\{ \begin{array}{l} f_{23} \\ f_{21} \end{array} \right. \\  n \neq n_0 & \left\{ \begin{array}{l} f_{21} \\ f_{22} \end{array} \right.  \end{aligned}  $	
	$  \begin{aligned}  n=n_0 & \left\{ \begin{array}{l} (n)_p(n_0d)^*, (n)_p:2(n_0d)^* \\ (n)_p:m(n_0d)^*, m.(n)_p(n_0\tilde{d})^* \\ m.(n)_p:m(n_0\tilde{d})^* \end{array} \right. \\  n \neq n_0 & \left\{ \begin{array}{l} p(n_0d)^*, (n)_p:2(n_0d)^* \\ p:m(n_0d)^*, p.m(n_0d)^* \\ m.p:m(n_0d)^* \end{array} \right.  \end{aligned}  $			

b) Symétrie du paramètre d'ordre et énergies libres de Landau

La complexité des résultats obtenus pour les symétries des phases smectiques stables à basse température contraste avec le nombre des symétries plus essentielles exprimées par les images des représentations et les énergies libres de Landau. Une conclusion remarquable que l'on peut tirer des résultats des tables 1 et 2 est en effet que la dimension du paramètre d'ordre des transitions entre phases smectiques ne peut être que 1, 2 ou 4. Au chapitre 3 nous indiquons qu'un résultat identique est obtenu pour les transitions à partir d'une phase nématique. Ces données sont à comparer à celles obtenues pour les transitions structurales (1) ou magnétiques (2) entre phases solides où le paramètre d'ordre peut être en outre de dimension 3, 6, 8, 12, 16 et 48.

La symétrie d'un paramètre d'ordre est traduite par l'image de la RI correspondante. Nous avons déjà mentionné au chapitre précédent que deux images seulement décrivent la symétrie des paramètres d'ordre unidimensionnels. Dans l'annexe 2, nous pouvons voir qu'il existe 22 types d'images distinctes (notées de  $L_1$  à  $L_{12}$  et de  $G_1$  à  $G_{10}$ ) pour les paramètres d'ordre à 2 composantes et 6 types d'images (notées  $H_1$  à  $H_6$ ) pour les paramètres d'ordre à 4 composantes. Le nombre des images à 2 et 4 dimensions se réduit respectivement à 8 et 3 pour les groupes smectiques avec  $H$  continu.

Les énergies libres données dans la table 3 fournissent une autre indication des situations rencontrées. Il existe 2 énergies libres associées à un paramètre d'ordre à une composante, 14 correspondant à un paramètre d'ordre à 2 composantes et 23 avec un paramètre d'ordre à 4 composantes. Toutefois, si l'on considère les formes des énergies libres, il n'en existe que 5 distinctes à deux composantes. D'autre part, les 23 énergies libres à 4 composantes sont composées de 12 types d'invariants indépendants seulement.

La discussion de la stabilité des énergies libres précédentes révèle que le nombre de phases stables à basse température est :

- 1 pour les potentiels  $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4, b_3^1, b_4^1, b_5^1, b_6^1, b_3^2, b_4^2, b_5^2, b_6^2$ .
- 2 pour les potentiels  $b_5, b_6$ .

Les potentiels associés à un paramètre d'ordre à 4 composantes peuvent avoir 2 minima ou 5 minima distincts. Ces minima correspondent respectivement aux solutions suivantes :

$$I(\eta_1 = \eta_2 \neq 0, \eta_3 = \eta_4 = 0), \quad II(\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 \neq 0)$$

et I( $n_1 \neq 0, n_2 = n_3 = n_4 = 0$ ), II( $n_1 = n_2 \neq 0, n_3 = n_4 = 0$ ),  
 III( $n_1 = n_3 \neq 0, n_2 = n_4 = 0$ ), IV( $n_1 = n_4 \neq 0, n_2 = n_3 = 0$ ),  
 V( $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 \neq 0$ ).

La discussion des énergies libres contenues dans la table 3 conduit d'autre part à deux types de considérations concernant l'ordre des transitions et le caractère inhomogène (incommensurable) possible des phases apparaissant à basse température. Ces points sont développés dans les paragraphes suivants :

c) Transitions du le ordre entre phases smectiques : généralisation du critère de Landau

Les invariants anisotropes qui figurent dans les énergies libres à 2 et 4 composantes sont notés  $\Delta_i(n)$  ou  $\Delta_i(n_0)$ . Les invariants  $\Delta_i$  avec  $i$  impair sont de degrés  $n$  ou  $n_0$ , et ceux avec  $i$  pair ( $2 \leq i \leq 4$ ) sont de degrés  $2n$  ou  $2n_0$ . Le nombre  $n$  dépend de l'ordre du groupe smectique fini considéré ( $C_n, D_n, \dots$ ) alors que le nombre  $n_0$  est déterminé par la coordonnée du vecteur d'onde  $K = \frac{k_0}{n_0}$ . Par exemple pour la RI  $E_{r2}$  du groupe  $T \square C_n$  (avec  $n$  pair) le potentiel associé  $b_3^2$  contient deux invariants anisotropes notés  $\Delta_1(n)$  et  $\Delta_3(n)$  qui sont de degré  $n$ . Ainsi les groupes  $C_4, C_6, C_8, \dots$  posséderont dans leur énergie libre des invariants de degrés respectifs 4, 6, 8... De même la représentation  $G_{rk}$  du groupe  $T \square C_{nv}$  ( $n$  pair) est associée pour  $n = n_0$  au potentiel thermodynamique  $f_{17}$  qui contient 5 invariants anisotropes distincts :  $\Delta_1(n_0), \Delta_3(n_0), \Delta_5(n_0), \Delta_{10}(n_0) + \Delta_{12}(n_0)$  et  $\Delta_9(n_0) - \Delta_{11}(n_0)$ , qui sont tous de degrés  $n_0$ . Ainsi aux points de la zone de Brillouin de coordonnées  $\frac{k_0}{3}, \frac{k_0}{4}, \frac{k_0}{5}, \dots$  correspondent des invariants anisotropes de degrés 3, 4, 5, ...

Les résultats précédents imposent d'examiner l'influence des termes anisotropes  $\Delta_i$  sur la stabilité des phases smectiques de basse symétrie et conjointement sur l'ordre de la transition vers ces phases. De la discussion générale des énergies libres associées à des paramètres d'ordre à 2 composantes (3) on peut déduire les résultats suivants :

i) Une énergie libre avec un invariant anisotrope  $\Delta_i$  de degré  $n$  pair permet de décrire une transition du second ordre vers une phase pouvant posséder deux types de symétries possibles selon le signe du coefficient  $\gamma$  de l'invariant anisotrope. Lorsque deux invariants anisotropes de même degré  $n$  figurent dans l'énergie libre, la transition est du second ordre mais la symétrie de la phase smectique apparaissant au-dessous de la transition est unique.

ii) Si l'invariant anisotrope  $\Delta_i$  est de degré  $n$  impair, l'énergie libre correspondante décrit obligatoirement une transition du 1<sup>er</sup> ordre. Selon qu'il existe un ou deux invariants  $\Delta_i$  dans l'énergie libre (tous deux de degrés  $n$  impairs) nous pouvons avoir deux ou une seule symétrie possible à basse température.

Remarquons que ce dernier résultat constitue une généralisation du critère de Landau, qui se réfère exclusivement à des invariants  $\Delta_i$  du 3<sup>e</sup> degré. Il faut également souligner que les conclusions précédentes sont obtenues en limitant le degré des termes isotropes à quatre ( $\rho^4$ ). Si l'on prend en compte des termes isotropes de degrés plus élevés, on obtient le résultat suivant (voir ref. 3) :

iii) Une énergie libre de la forme :

$$F = F_0 + \frac{\alpha}{2} \rho^2 + \frac{\beta_4}{4} \rho^4 + \dots + \frac{\beta_{2n}}{2n} \rho^{2n} + \text{termes anisotropes } \Delta_i$$

décrit une succession de transitions vers des phases dont la symétrie est identique (cas de deux  $\Delta_i$ ) ou correspond à deux groupes de symétrie possibles (cas d'un seul  $\Delta_i$ ). Si  $n$  est pair  $F$  peut décrire une séquence maximale de  $\frac{n}{2}$  transitions dont la première est du 2<sup>e</sup> ordre et les suivantes sont discontinues (Fig. 1a). Si  $n$  est impair on peut obtenir une séquence maximale de  $\frac{n-1}{2}$  transitions du 1<sup>er</sup> ordre (Fig. 1b).

Pour les énergies libres associées à un paramètre d'ordre à 4 composantes, les résultats précédents sont modifiés en ce qui concerne le nombre de symétries distinctes que l'on peut obtenir à basse température, mais restent valables en ce qui concerne l'ordre des transitions de phases. Ainsi des invariants  $\Delta_i$  de degrés impairs sont toujours associées à des transitions du 1<sup>er</sup> ordre (critère de Landau généralisé).

Dans la discussion précédente, nous avons négligé l'influence des invariants inhomogènes qui peuvent figurer dans l'énergie libre. Nous allons ci-dessous examiner leur rôle.

#### d) Phases incommensurables smectiques

L'ensemble des énergies libres à 4 composantes figurant dans la table 3 contiennent des invariants qui couplent les composantes du paramètre d'ordre à leurs dérivées par rapport aux coordonnées d'espace. Ces invariants (dits de Lifshitz) s'écrivent :

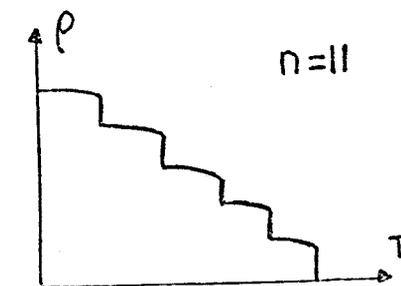
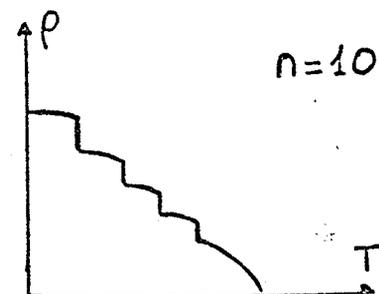
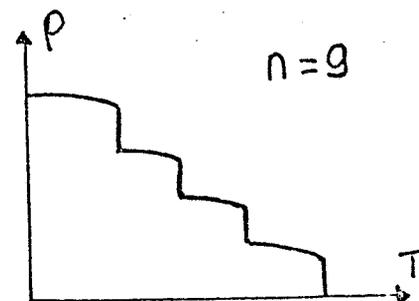
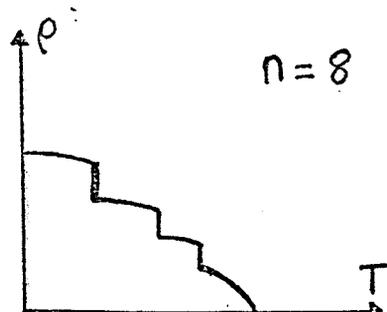
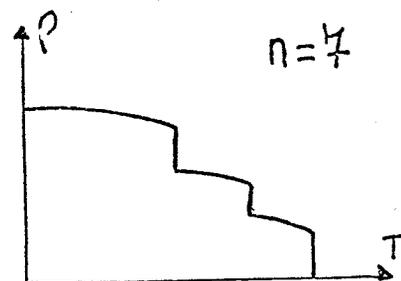
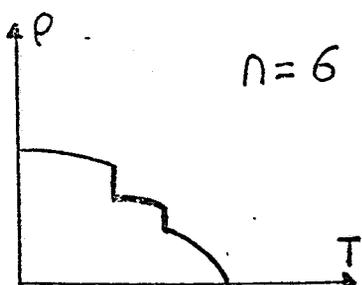
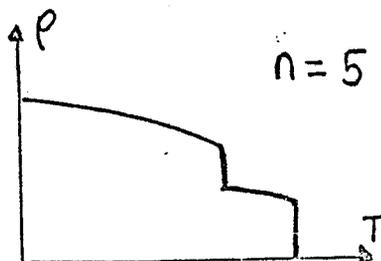
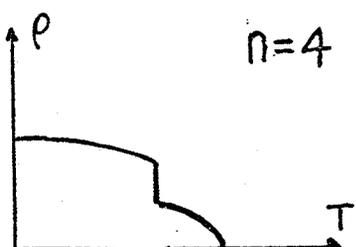
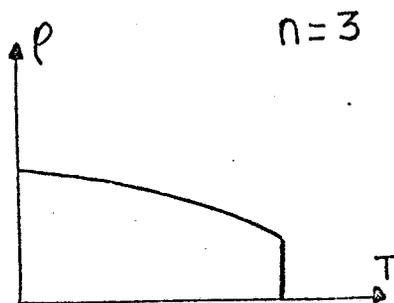
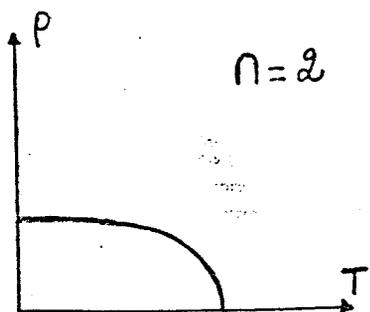
$$\eta_1 \frac{\partial \eta_2}{\partial z} - \eta_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial z} + \eta_4 \frac{\partial \eta_3}{\partial z} - \eta_3 \frac{\partial \eta_4}{\partial z}$$

Figure 1 : variation du paramètre d'ordre  $\rho(T)$  pour une séquence de transitions

décrite par l'énergie libre :

$$F = F_0(T) + \frac{\alpha}{2} \rho^2 + \sum_{P=2}^n \frac{\beta_{2P}}{2P} \rho^{2P}$$

(a) cas où  $n$  est pair, (b) cas où  $n$  est impair



(a)

(b)

Table 3 : Energies libres de Landau associées aux transitions entre phases smectiques

## 1) Energies libres correspondant à un paramètre d'ordre unidimensionnel

$$a_1 = a_{10} + \alpha n + \frac{\beta}{2} n^2 + \frac{\gamma}{3} n^3 + \frac{\delta}{4} n^4$$

$$a_2 = a_{20} + \frac{\alpha}{2} n^2 + \frac{\beta}{4} n^4$$

## 2) Energies libres avec un paramètre d'ordre bidimensionnel

On pose :  $\eta_1 = \rho \cos \theta$  ,  $\eta_2 = \rho \sin \theta$  ,  $\Delta_1(n) = \rho^n \cos n\theta$  ,  $\Delta_2(n) = \rho^{2n} \cos 2n\theta$

$$\Delta_3(n) = \rho^n \sin n\theta$$
 ,  $\Delta_4(n) = \rho^{2n} \sin 2n\theta$

$$b_1 = b_1^0 + \frac{\alpha}{2} \rho^2 + \frac{\beta}{4} \rho^4$$

$$b_2 = b_1 + \delta \rho^2 \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

$$b_3 = b_2 + \frac{\gamma_1}{n_0} \Delta_1(n_0) + \frac{\gamma_2}{n_0} \Delta_3(n_0)$$

$$b_4 = b_2 + \frac{\gamma_1}{2n_0} \Delta_2(n_0) + \frac{\gamma_2}{2n_0} \Delta_4(n_0)$$

$$b_5 = b_2 + \frac{\gamma}{n_0} \Delta_1(n_0)$$

$$b_6 = b_2 + \frac{\gamma}{n_0} \Delta_2(n_0)$$

$$b_3^1 = b_1 + \frac{\gamma_1}{n} \Delta_1(n) + \frac{\gamma_2}{n} \Delta_3(n) , \quad b_3^2 = b_2 + \frac{\gamma_1}{n} \Delta_1(n) + \frac{\gamma_2}{n} \Delta_3(n)$$

$$b_4^1 = b_1 + \frac{\gamma_1}{2n} \Delta_2(n) + \frac{\gamma_2}{2n} \Delta_4(n) , \quad b_4^2 = b_2 + \frac{\gamma_1}{2n} \Delta_2(n) + \frac{\gamma_2}{2n} \Delta_4(n)$$

$$b_5^1 = b_1 + \frac{\gamma}{n} \Delta_1(n) , \quad b_5^2 = b_2 + \frac{\gamma}{n} \Delta_1(n)$$

$$b_6^1 = b_1 + \frac{\gamma}{2n} \Delta_2(n) , \quad b_6^2 = b_2 + \frac{\gamma}{2n} \Delta_2(n)$$

## 3) Energies libres associées à un paramètre d'ordre de dimension 4

On pose  $\eta_1 = \rho_1 \cos \theta_1$  ,  $\eta_2 = \rho_1 \sin \theta_1$  ,  $\eta_3 = \rho_2 \cos \theta_2$  ,  $\eta_4 = \rho_2 \sin \theta_2$

$$\Delta_1(n) = \rho_1^{n/2} \rho_2^{n/2} \cos \frac{n}{2} (\theta_1 - \theta_2) ; \quad \Delta_2(n) = \rho_1^n \rho_2^n \cos n (\theta_1 - \theta_2)$$

$$\Delta_3(n) = \rho_1^{n/2} \rho_2^{n/2} \sin \frac{n}{2} (\theta_1 - \theta_2) ; \quad \Delta_4(n) = \rho_1^n \rho_2^n \sin n (\theta_1 - \theta_2)$$

$$\Delta_5(n) = \rho_1^{n/2} \rho_2^{n/2} \cos \frac{n}{2} (\theta_1 + \theta_2) ; \quad \Delta_6(n) = \rho_1^n \rho_2^n \cos n (\theta_1 + \theta_2)$$

$$\Delta_7(n) = \rho_1^{n/2} \rho_2^{n/2} \sin \frac{n}{2} (\theta_1 + \theta_2) ; \quad \Delta_8(n) = \rho_1^n \rho_2^n \sin n (\theta_1 + \theta_2)$$

$$\Delta_9(n) = \rho_1^n \sin n \theta_1 ; \quad \Delta_{10}(n) = \rho_1^n \cos n \theta_1 ; \quad \Delta_{11}(n) = \rho_2^n \sin n \theta_2$$

$$\Delta_{12}(n) = \rho_2^n \cos n \theta_2$$

$$f_1 = f_{10} + \frac{\alpha}{2} (\rho_1^2 + \rho_2^2) + \frac{\beta_1}{4} (\rho_1^4 + \rho_2^4) + \frac{\beta_2}{2} \rho_1^2 \rho_2^2 + \delta (\rho_1^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} - \rho_2^2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z})$$

$$f_2 = f_1 + \frac{2\gamma_1}{n_0} \Delta_1(n_0) + 2 \frac{\gamma_2}{n_0} \Delta_3(n_0)$$

$$f_3 = f_1 + \frac{\gamma_1}{n_0} \Delta_2(n_0) + \frac{\gamma_2}{n_0} \Delta_4(n_0)$$

$$f_4 = f_1 + \frac{\gamma}{n_0} \Delta_1(n_0)$$

$$f_5 = f_1 + \frac{\gamma}{n_0} \Delta_2(n_0)$$

$$f_6 = f_1 + \frac{\gamma_1}{n_0} \Delta_2(n_0) + \frac{\gamma_2}{n} \Delta_6(n) + \frac{\gamma_3}{n} \Delta_8(n)$$

$$f_7 = f_1 + \frac{2\gamma_1}{n_0} \Delta_1(n_0) + \frac{\gamma_2}{n} \Delta_6(n) + \frac{\gamma_3}{n} \Delta_8(n)$$

$$f_8 = f_1 + \frac{\gamma_1}{n} \Delta_2(n) + \frac{\gamma_2}{n} \Delta_6(n) + \frac{\gamma_3}{n} \Delta_8(n) + \frac{\gamma_4}{n} [\Delta_{10}(n) + \Delta_{12}(n)] + \frac{\gamma_5}{n} [\Delta_9(n) + \Delta_{11}(n)]$$

$$f_9 = f_1 + \frac{\gamma_1}{n_0} \Delta_2(n_0) + \frac{2\gamma_2}{n} \Delta_5(n) + \frac{2\gamma_3}{n} \Delta_7(n)$$

$$f_{10} = f_1 + \frac{2\gamma_1}{n_0} \Delta_1(n_0) + \frac{2\gamma_2}{n} \Delta_5(n) + \frac{2\gamma_3}{n} \Delta_7(n)$$

$$f_{11} = f_1 + \frac{2\gamma_1}{n} \Delta_1(n) + 2 \frac{\gamma_2}{n} \Delta_5(n) + \frac{2\gamma_3}{n} \Delta_7(n) + \frac{\gamma_4}{n} [\Delta_{10}(n) + \Delta_{12}(n)] + \frac{\gamma_5}{n} [\Delta_9(n) + \Delta_{11}(n)]$$

$$f_{12} = f_1 + \frac{\gamma_1}{n_0} \Delta_2(n_0) + \frac{\gamma_2}{n_0} \Delta_4(n_0) + \frac{\gamma_3}{n} \Delta_6(n)$$

$$f_{13} = f_1 + \frac{2\gamma_1}{n_0} \Delta_1(n_0) + \frac{2\gamma_2}{n_0} \Delta_3(n_0) + \frac{\gamma_3}{n} \Delta_6(n)$$

$$f_{14} = f_1 + \frac{\gamma_1}{n} \Delta_2(n) + \frac{\gamma_2}{n} \Delta_4(n) + \frac{\gamma_3}{n} \Delta_6(n) + \frac{\gamma_4}{n} [\Delta_{10}(n) + \Delta_{12}(n)] + \frac{\gamma_5}{n} [\Delta_9(n) - \Delta_{11}(n)]$$

$$f_{15} = f_1 + \frac{\gamma_1}{n_0} \Delta_2(n_0) + \frac{\gamma_2}{n_0} \Delta_4(n_0) + \frac{2\gamma_3}{n} \Delta_5(n)$$

$$f_{16} = f_1 + \frac{2\gamma_1}{n_0} \Delta_1(n_0) + \frac{2\gamma_2}{n_0} \Delta_3(n_0) + \frac{2\gamma_3}{n} \Delta_5(n)$$

$$f_{17} = f_1 + \frac{2\gamma_1}{n} \Delta_1(n) + \frac{2\gamma_2}{n} \Delta_3(n) + \frac{2\gamma_3}{n} \Delta_5(n) + \frac{\gamma_4}{n} [\Delta_{10}(n) + \Delta_{12}(n)] \\ + \frac{\gamma_5}{n} [\Delta_9(n) - \Delta_{11}(n)]$$

$$f_{18} = f_1 + \frac{\gamma_1}{n_0} \Delta_2(n_0) + \frac{\gamma_2}{n} \Delta_6(n)$$

$$f_{19} = f_1 + \frac{2\gamma_1}{n_0} \Delta_1(n_0) + \frac{\gamma_2}{n} \Delta_6(n)$$

$$f_{20} = f_1 + \frac{\gamma_1}{n} \Delta_2(n) + \frac{\gamma_2}{n} \Delta_6(n) + \frac{\gamma_3}{n} [\Delta_{10}(n) + \Delta_{12}(n)]$$

$$f_{21} = f_1 + \frac{\gamma_1}{n_0} \Delta_2(n_0) + \frac{2\gamma_2}{n} \Delta_5(n)$$

$$f_{22} = f_1 + \frac{2\gamma_1}{n_0} \Delta_1(n_0) + \frac{2\gamma_2}{n} \Delta_5(n)$$

$$f_{23} = f_1 + \frac{2\gamma_1}{n_0} \Delta_1(n) + \frac{2\gamma_2}{n} \Delta_5(n) + \frac{\gamma_3}{3} [\Delta_{10}(n) + \Delta_{12}(n)]$$

X ou, en coordonnées  $(\rho_i, \theta_i)$  :  $\rho_1^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} - \rho_2^2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z}$

De même, les énergies libres à deux composantes notées  $b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_3^2, b_4^2, b_5^2$  et  $b_6^2$  contiennent un invariant de Lifshitz de la forme :

$$\eta_1 \frac{\partial \eta_2}{\partial z} - \eta_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial z} = (\rho^2 \frac{\partial \theta}{\partial z})$$

Il est bien connu (4, 5, 6) que la présence de tels invariants dans l'énergie libre de Landau peut conduire à l'apparition de phases inhomogènes (incommensurables) au-dessous du point de transition. Si l'on se réfère aux observations effectuées pour les transitions cristallines, deux situations sont susceptibles de se produire.

i) L'invariant de Lifshitz est négligeable devant les invariants anisotropes  $\Delta_i$  qui abaissent l'énergie libre d'une manière substantielle. Dans ce cas, la phase inhomogène n'apparaît pas et l'on observe une transition du 1er ordre entre phases homogènes (la phase incommensurable est "comprimée" dans la discontinuité entre phases).

ii) L'invariant de Lifshitz prédomine dans un certain domaine de température  $\Delta T$  au-dessous du point de transition. Ceci se produit en général pour les transitions continues, car dans ce cas, le paramètre d'ordre prend de faibles valeurs (au voisinage de  $T_c$ ), de telle façon que l'invariant de Lifshitz -proportionnel à  $\rho^2$ - l'emporte sur les  $\Delta_i$  (dont le degré est au moins 3). Une phase smectique incommensurable apparaît alors au-dessous de la transition qui est caractérisée par une périodicité non-stricte le long de Oz.

La situation précédente peut être réalisée de nombreuses manières. Les figures 2a et 2b illustrent deux exemples de phases smectiques incommensurables décrites par Indenbom et al (7, 8, 9) dans lesquelles l'incommensurabilité est liée à la rotation du petit axe (Fig. 2a) ou du grand axe (Fig. 2b) des molécules. Dans ces exemples, on peut remarquer que les couches smectiques demeurent à distance  $d$ , l'incommensurabilité correspondant à une modification non strictement de période  $d \times n$  ( $n$  entier) de l'orientation des molécules.

On peut également avoir destruction de la périodicité dans la position des couches. Ainsi, la fig. 2c) illustre la situation où la distance entre deux couches successives varie légèrement. Si la distance entre couches smectiques varie de façon régulière, la phase incommensurable smectique peut s'identifier à une phase cholestérique (Fig. 2d).

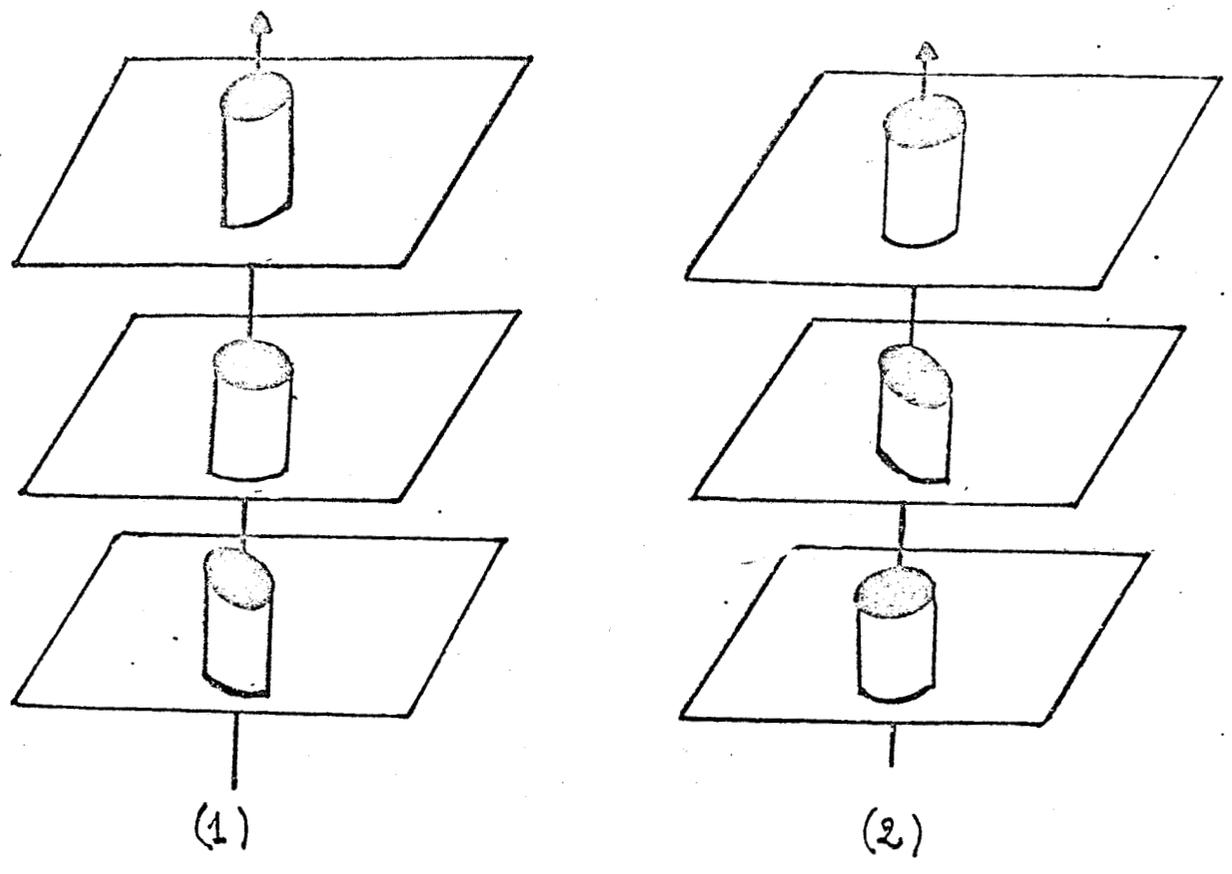


FIGURE 2 a: Rotation du petit axe des sous-unités dans une phase smectiques (1) incommensurable (2) commensurable (doublement de la distance entre couches smectiques).

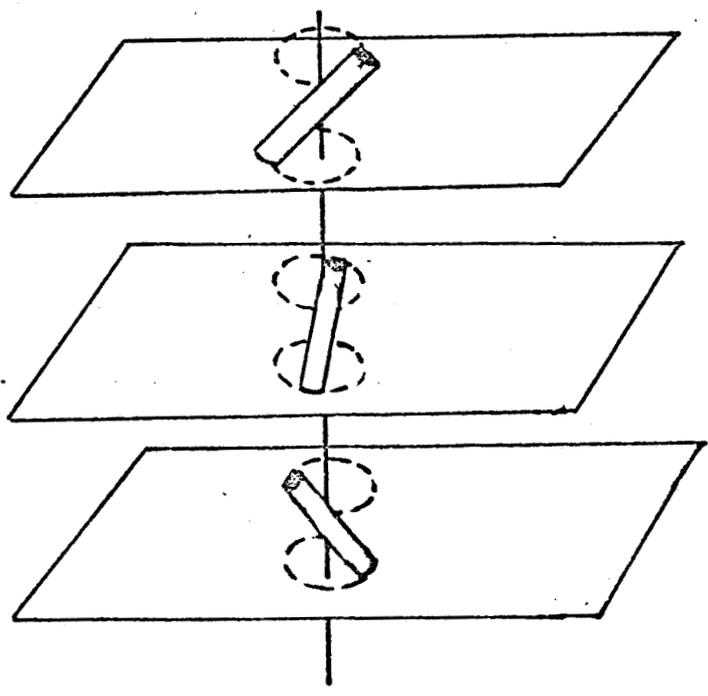


FIGURE 2b : Rotation du grand axe des sous-unités dans une phase smectique incommensurable.

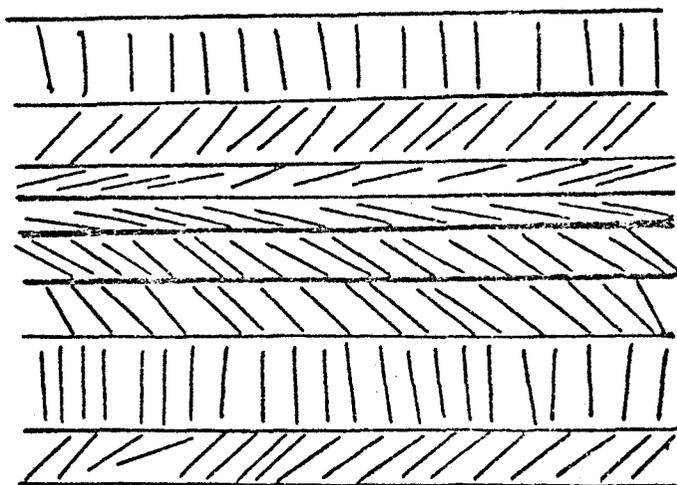


FIGURE 2c : Incommensurabilité dans la distance entre couche smectiques liée à une modification de l'orientation des sous-unités d'une couche à l'autre.

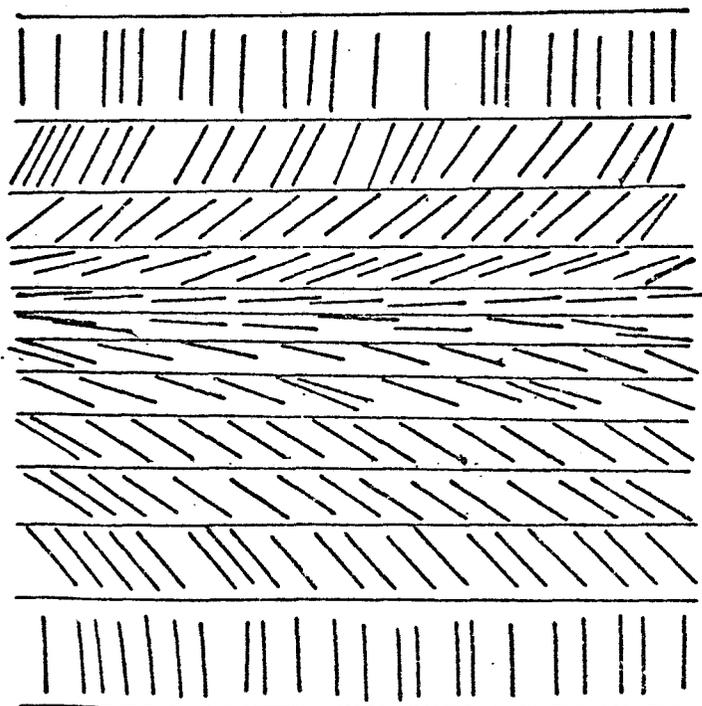


FIGURE 2d: Incommensurabilité dans la distance entre couches smectiques. La variation régulière de la distance entre les couches conduit à une phase de type cholestérique.

La théorie phénoménologique des phases smectiques incommensurables a été effectuée de façon simplifiée par Indenbom et al (7-9) dans le cas particulier des RI bidimensionnelles et à quatre dimensions des groupes  $T \square D_{\infty}$  et  $T \square D_{\infty h}$ .

### e) Couplage du paramètre d'ordre avec les grandeurs macroscopiques

Outre le couplage du paramètre d'ordre avec ses dérivées successives, on peut interpréter, dans le cadre d'une théorie phénoménologique, certaines anomalies élastiques, diélectriques, etc... en introduisant dans l'énergie libre de Landau des termes de couplages entre le paramètre d'ordre et les grandeurs macroscopiques correspondantes (déformation, polarisation, etc...). A cet égard, plusieurs types d'effets ont été mis en évidence dans des phases smectiques (flexoélectricité, ferroélectricité...). D'autres peuvent être prédits par des considérations de symétrie (ferroélectricité impropre, ferroélasticité,...). Nous discutons brièvement dans ce paragraphe de la forme des termes de couplages associés à chacun de ces effets en considérant que le paramètre d'ordre s'identifie à la déformation des molécules liée à une déformation éventuelle de l'ensemble des couches smectiques. Cette hypothèse raisonnable ne réduit cependant pas la généralité des considérations qui suivent (d'autres mécanismes pouvant être représentés par les composantes  $\eta_i$ .)

#### i) Ferroélectricité

Lorsque le changement de symétrie qui accompagne une transition entre phases smectiques se produit entre une phase non-polaire et une phase polaire (ou entre deux phases de polarités différentes), on peut prédire l'apparition d'une polarisation macroscopique spontanée au-dessous du point de transition. Le fait que cette polarisation n'ait pu être, pendant longtemps, observée sur le plan expérimental avait conduit à suggérer que les couches smectiques successives formaient un assemblage antiferroélectrique ("Head to tail") schématisé sur la fig. 3). Toutefois, des résultats expérimentaux récents (10, 11, 12) ont montré que la ferroélectricité pouvait être observée. Il faut toutefois souligner qu'il ne s'agit pas ici de transitions ferroélectriques propres dont le paramètre d'ordre est la polarisation, mais d'une ferroélectricité pseudopropre car cet effet, du type piézoélectrique, résulte du couplage linéaire entre les composantes de la polarisation macroscopique et les composantes du paramètre d'ordre (qui traduisent une déformation). Par exemple, les représentations  $A_2$  et  $E_2$  du groupe non polaire  $T \square C_{\infty h}$  conduisent respectivement aux phases polaires de symétries  $\infty(d)$  et  $n(d)$  avec l'existence de termes de couplage de la forme  $\eta P_z$  et  $P_x n_2 - P_y n_1$  (pour  $E_{12}$ ).

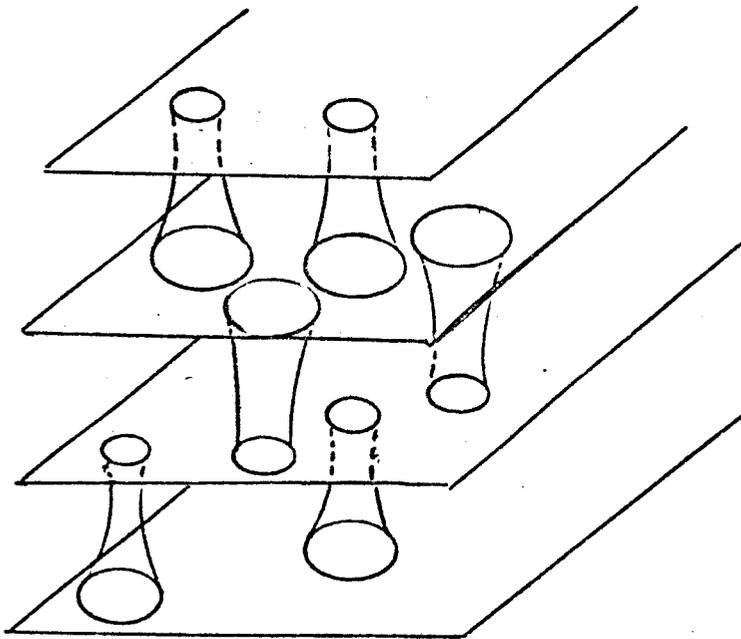
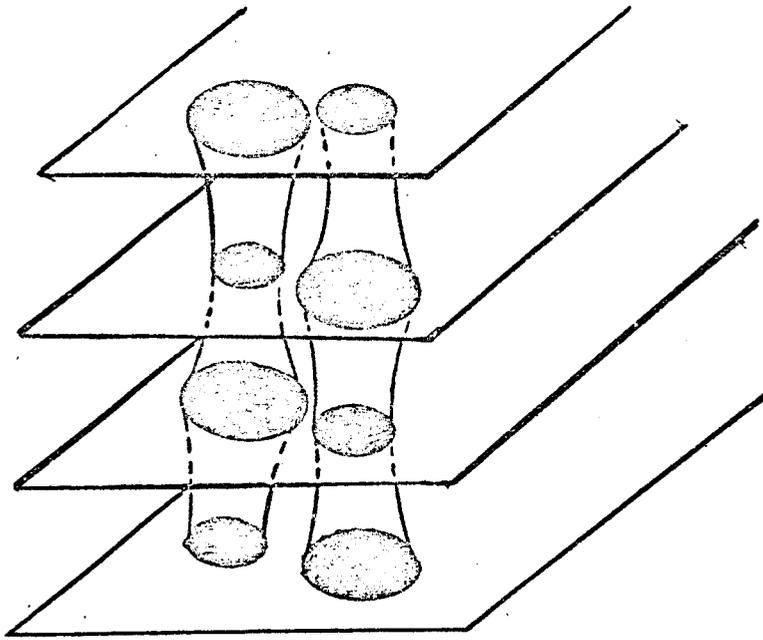


FIGURE 3: Phases smectiques antiferroelectriques. Les sous-unités ont la symétrie polaire  $C_{\infty v}$  mais sont ordonnées tête bêche (1) à l'intérieur de chaque couche (2) d'une couche à l'autre.

Lorsqu'un ordre multicouche accompagne la transition, on peut également prédire l'existence d'un effet ferroélectrique impropre qui résulte d'un couplage non linéaire de la polarisation macroscopique avec le paramètre d'ordre. Ainsi, pour la représentation  $G_{nk}$  du groupe  $T \square C_{\infty v}$ , la transition conduit vers la phase polaire  $(n_0 n)_n (n_0 d)$  et induit un couplage de la forme  $P_z (\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + \eta_4^2)$  qui expérimentalement doit conduire à l'apparition d'une faible polarisation et à des anomalies secondaires de la constante diélectrique. Remarquons que ces effets faibles peuvent être masqués par l'incommensurabilité de la phase smectique basse température, qui peut accompagner un ordre smectique multicouche.

### ii) Effet flexoelectrique

Un effet typique observé dans les transitions entre phases smectiques est la flexoélectricité qui résulte d'un couplage entre les composantes de la polarisation macroscopique et les dérivées du paramètre d'ordre par rapport aux coordonnées d'espace. Ainsi, dans le cas du groupe smectique  $T \square D_{\infty}$  les représentations  $E_{n_1}$  en  $K = K_0$ , conduisent aux groupes non-polaires de symétrie  $n : 2(d)$ , permettant l'existence de termes de couplages de la forme :

$$P_x \frac{\partial \eta_1}{\partial z} + P_y \frac{\partial \eta_2}{\partial z}$$

la polarisation apparaît ici comme le résultat de la déformation spatiale des molécules à courte distance. L'effet flexoélectrique a été mis en évidence expérimentalement (13, 14) et fait l'objet de nombreuses études théoriques détaillées.

### iii) Ferroélasticité

L'apparition d'une déformation spontanée dans les phases smectiques de basse symétrie peut correspondre, dans le cadre d'une description phénoménologique, à plusieurs situations distinctes :

- la déformation spontanée est le paramètre d'ordre de la transition. On est en présence d'une transition ferroélastique propre caractérisée par de fortes anomalies des constantes élastiques.
- la déformation spontanée se couple linéairement au paramètre d'ordre (transitions ferroélastiques pseudopropres).
- la déformation spontanée est couplée non linéairement au paramètre d'ordre. Cette ferroélasticité impropre peut être prédite par exemple pour

la transition associée à la représentation unidimensionnelle  $A_8$  du groupe  $T \square D_{\infty h}$  en  $K = \frac{K_0}{2}$  où la phase smectique ferroélastique  $\infty : m(2\vec{d})$  est associée à un couplage de la forme  $e_3 n^2$  (où  $e_3$  est la composante  $e_{33}$  du tenseur de déformations).

### Bibliographies

- (1) P. TOLEDANO, thèse de doctorat, université de Picardie (1979) et J.C. TOLEDANO, phys. Rev. B14, 3097 (1976); B16, 386 (1977); B21, 1139 (1980); B25, 1946 (1982) et article en préparation.
- (2) M. CLIN, thèse de 3<sup>ème</sup> cycle, université de Paris VII (1983); M. HEDOUX, thèse de 3<sup>ème</sup> cycle, université de Lille I (1983); P. TOLEDANO, M. CLIN et M. HEDOUX, ferroelectrics, 35, 239 (1981) et article en préparation.
- (3) P. TOLEDANO et N. LIMNIOS, soumis pour publication à Phys. Rev. B.
- (4) E.M. LIFCHITZ, Z. Eksp. Teor. Fiziki 11, 255 (1941)
- (5) A.P. LEVANYUK et D.G. SANNIKOV, Sov. Phys. Solid state 18, 245 (1976)
- (6) M. GUILLUY, thèse de 3<sup>ème</sup> cycle, université de Lille I (1983).
- (7) V.L. INDENBOM, S.A. PIKIN et E.B. LOGINOV, Sov. Phys. Crystallogr. 21, 632 (1977)
- (8) S.A. PIKIN et V.L. INDENBOM, Sov. Phys. Usp. 21, 487 (1978)
- (9) V.L. INDENBOM et E.B. LOGINOV, Sov. Phys. Crystallogr. 26, 526 (1981)
- (10) R.B. MEYER, L. LIEBERT, L. STRZELECKI et P. KELLER Le Journal de Physique Lettres, 36, L69 (1975).  
B. OSTROVSKII, A.Z. RABINOVICH, A.S. SONIN, B.A. STRUXOV et N.I. CHERNOVA, JETP 25, 70 (1977)
- (11) G. DURAND et Ph. MARTINOT-LAGARDE. Ferroelectrics, 24, 89 (1980)  
- Ph. MARTINOT-LAGARDE, Le Journal de physique C3, 129 (1975)  
- L.A. BERESNEV et L.M. BLINOV, Ferroelectrics 33, 129 (1981)
- (12) H. TERAUCHI, Mol. Cryst. Liq. Cryst. 70, 79 (1981)  
- H. TERAUCHI, T. KOHIGASHI et N. MARUYAMA, Solid stat commun. 31, 241 (1979)
- (13) R.B. MEYER, Phys. Rev. Letters, 22; 918 (1969)  
- J. PROST et J.P. MARCEROU, Le Journal de physique, 38, 315 (1977)  
- V.L. INDENBOM, E.B. LOGINOV et M.A. OSIPOV, Sov. Phys. Crystallogr. 26, 656 (1982).
- (14) A.S. VASILEVSKAYA, A.V. KAZNACHEEV et S.A. SONIN, Sov. Phys. Solid stat 24, 2118 (1982)  
- B.A. UMANSKII, L.M. BLINOV et M.I. BARNIK, Sov. Phys. Crystallogr. 27, 437 (1982)  
- I. DOZOV, Ph. MARTINOT-LAGARDE et G. DURAND, Journal de physique Lettres 43, L365 (1982)  
- H.R. HINOV, Mol. Cryst. Liq. Cryst. 89, 227 (1982)

## CHAPITRE 3

### TRANSITION A PARTIR D'UNE PHASE NEMATIQUE

Dans ce chapitre nous présentons les résultats de l'application de la théorie de Landau aux RI des groupes nématiques  $R \square H$  où  $H$  est un groupe continu ou fini. Le nombre des représentations considérées est sensiblement plus réduit que dans le cas des transitions entre phases smectiques.

L'analyse de ces représentations conduit à des situations théoriques en grande partie similaires à celles soulignées au chapitre précédent. Aussi afin de ne pas nous répéter nous nous bornons ci dessous à insister sur les seuls points qui distinguent les transitions à partir d'une phase nématique des transitions entre phases smectiques.

#### 1) Présentation et analyse des résultats

Les résultats de notre étude sont contenus dans la table 1, sous forme de tableaux, dont les notations sont en grande partie similaires à celles utilisées dans les tables 1 et 2 du chapitre 2 (quelques différences de détail sont indiquées à la page 65). Dans chaque tableau, la 1<sup>ère</sup> colonne indique les RI considérées, dont les tables de caractères peuvent être trouvées dans l'annexe 1. Deux familles de représentations sont distinguées (voir chapitre 1): celles avec  $\alpha = \alpha'$  pour lesquelles la symétrie de translation n'est pas brisée, et celles avec  $\alpha \neq \alpha'$  qui induisent un ordre translationnel discret caractérisé par la distance  $d$ . Les colonnes (a), (c), et (d) indiquent respectivement les groupes de basse symétrie, les images et les énergies libres associées à la représentation considérée.

La colonne supplémentaire (b) indique la nature (nématique, cholestérique ou smectique) de la phase obtenue. Cette colonne qui ne figurait pas dans les tableaux du chapitre précédent, appelle les commentaires suivants:

i) Les phases nématiques -notées N- sont exclusivement induites par les RI du groupe ponctuel  $H$  (ou en d'autres termes par les RI du groupe  $R \square H$  avec  $\alpha = \alpha'$ ). Les groupes d'invariance des sous-unités dans les nématiques stables à basse température peuvent être continus ou finis. Ils sont continus pour les seules RI unidimensionnelles  $A_i$  des groupes nématiques  $G_0 = R \square H$  avec  $H$  continu. Dans tous les autres cas ces groupes sont finis.

ii) Certaines RI unidimensionnelles  $A_i$ , et bidimensionnelles  $E_n$  ou  $E_r$ , conduisent

pour  $\alpha = \alpha'$  à des phases indiquées comme cholestériques (C). Nous avons relié l'apparition d'une phase cholestérique à l'existence dans l'énergie libre de la transition, de deux types d'invariants: -des invariants de Lifchitz,

$\eta_1 \frac{\partial \eta_2}{\partial z} - \eta_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial z}$  qui peuvent être construits pour les RI bidimensionnelles  $E_n$  et  $E_r$  des 4 groupes nématiques  $R \square C_\infty$ ,  $R \square D_\infty$ ,  $R \square C_n$  et  $R \square D_n$ .

-des invariants de la forme

$\eta \vec{n} \text{ rot } \vec{n}$  où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire porté par l'axe directeur. Indenbom et Loginov (1) ont en effet montré que ce type d'invariant a le même effet qu'un invariant de Lifchitz (à savoir, de rendre inhomogène la phase apparaissant à basse température). De tels invariants peuvent être construits pour certaines RI unidimensionnelles  $A_i$  ( $\alpha = \alpha'$ ) des groupes nématiques  $R \square H$  avec H continu ou H fini (dans le seul cas où n est pair).

Remarquons que l'apparition d'une phase cholestérique ne découle pas obligatoirement de l'existence des deux types d'invariants mentionnés ci-dessus. Il faut que la transition nématique - cholestérique soit continue ou faiblement du 1<sup>er</sup> ordre, de telle sorte que l'influence des invariants inhomogènes soit prédominante (voir discussion effectuée au chapitre précédent).

iii) Les RI avec  $\alpha \neq \alpha'$  conduisent nécessairement à une phase smectique désignée par (S) dans la colonne (b). Il faut souligner que ces représentations (notées  $E_k, E_{nk}$  et  $G_{rk}$ ) sont associées à un invariant de Lifchitz susceptible

d'induire une incommensurabilité des phases smectiques correspondantes.

L'ensemble des résultats contenus dans la table 1 révèle une variété de situations bien limitées que dans le cas des transitions entre phases smectiques. Ainsi les groupes de basse symétrie sont en nombre plus limité. Remarquons que ces groupes peuvent contenir des axes hélicoïdaux et des plans de glissement de translation non primitive. De même un nombre réduit d'énergies libres suffisent

pour décrire l'ensemble des transitions: 2 énergies libres unidimensionnelles ( $a_1$  et  $a_2$ ), 8 énergies libres associées à un paramètre d'ordre à 2 composantes ( $b_1, b_2, b_3^1, b_4^1, b_5^1, b_5^2, b_6^2$ ) et 5 énergies libres correspondant à un paramètre d'ordre de dimension 4. Ces dernières à l'exception de  $f_1$ , ne figurent pas dans la table 3 du chapitre précédent et sont explicitées dans la table 2. Remarquons que les phases nématiques continues sont exclusivement décrites par des énergies libres

composées d'invariants isotropes  $(a_1, a_2, b_1, b_2, f_1)$ . Pour les groupes avec H fini, le degré des termes anisotropes  $\Delta_i(n)$  est uniquement lié à l'ordre du groupe H correspondant et non plus, comme dans le cas des transitions à partir d'une phase smectique, aux coordonnées du vecteur d'onde.

Bibliographie

(1) V.L. INDENBOM et E.B. LOGINOV, Sov. Pys. Crystallogr. 26, 526 (1981)

TABLE 1

Resultats de l'application de la théorie de Landau aux transitions à partir d'une phase nématique. Pour chacune des représentations irréductibles indiquées dans la 1<sup>ère</sup> colonne, sont données: (a) les groupes de symétrie des phases stables à basse température, (b) la nature de la phase correspondante avec la convention suivante: C=cholestérique, N=nématique, S=smectique; (c) l'indication de l'image; (d) l'énergie libre

1) Groupes nématiques avec H continu

R $\square$ C $_{\infty}$					R $\square$ D $_{\infty}$				
$\infty(\alpha)$	(a)	(b)	(c)	(d)	$\infty:2(\alpha)$	(a)	(b)	(c)	(d)
$\alpha=\alpha'$					$\alpha=\alpha'$				
A <sub>1</sub>	$\infty$	C	-	a <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	$\infty:2$	C	-	a <sub>1</sub>
E <sub>n</sub>	n	C	L <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	A <sub>2</sub>	$\infty$	N	-	a <sub>2</sub>
$\alpha \neq \alpha'$					E <sub>n</sub>	n:2	C	L <sub>3</sub>	b <sub>2</sub>
E <sub>k</sub>	$\infty(d)$	S	G <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	$\alpha \neq \alpha'$				
E <sub>nk1</sub>	} n(d) }	} S }	G <sub>5</sub>	} b <sub>2</sub> }	E <sub>k</sub>	$\infty:2(d)$	S	G <sub>3</sub>	b <sub>2</sub>
E <sub>nk2</sub>			G <sub>6</sub>				G <sub>nk</sub>	} n(d) }	} S }
R $\square$ C $_{\infty v}$					R $\square$ C $_{\infty h}$				
$\infty.m(\alpha)$	(a)	(b)	(c)	(d)	$\infty:m(\alpha)$	(a)	(b)	(c)	(d)
$\alpha=\alpha'$					$\alpha=\alpha'$				
A <sub>1</sub>	$\infty.m$	N	-	a <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	$\infty:m$	N	-	a <sub>1</sub>
A <sub>2</sub>	$\infty$	C	-	a <sub>2</sub>	A <sub>2</sub>	$\infty$	C	-	a <sub>2</sub>
E <sub>n</sub>	n.m	N	L <sub>3</sub>	b <sub>1</sub>	E <sub>n1</sub>	n:m	N	L <sub>1</sub>	b <sub>1</sub>
$\alpha \neq \alpha'$					E <sub>n2</sub>	n	N	L <sub>2</sub>	b <sub>1</sub>
E <sub>k1</sub>	$\infty.m(d)$	S	G <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	$\alpha \neq \alpha'$				
E <sub>k2</sub>	$\infty(d)$	S	G <sub>2</sub>	b <sub>2</sub>	E <sub>k</sub>	$\infty:m(d)$	S	G <sub>3</sub>	b <sub>2</sub>
G <sub>nk</sub>	} n.m(d) }	} S }	} H <sub>1</sub> }	} f <sub>1</sub> }	G <sub>nk</sub>	} n:m(d) }	} S }	} H <sub>2</sub> }	} f <sub>1</sub> }
					} n(d) }				

$R \square D_{\infty h}$	(a)	(b)	(c)	(d)
$\alpha = \alpha'$				
$A_1$	$m.\infty:m$	N	-	$a_1$
$A_2$	$\infty:m$	N	-	$a_2$
$A_3$	$\infty.m$	N	-	$a_2$
$A_4$	$\infty:2$	C	-	$a_2$
$E_{n1}$	$m.n:m$	N	$L_3$	$b_1$
$E_{n2}$	$m.(2\hat{n}):2$	N	$L_4$	$b_1$
$\alpha \neq \alpha'$				
$E_{k1}$	$m.\infty:m(d)$	S	$G_3$	$b_2$
$E_{k2}$	$\infty:m(\hat{d})$	S	$G_4$	$b_2$
$G_{nk}$	$\left\{ \begin{array}{l} n(d) \\ n:2(d) \\ n:m(d) \\ n.in(d) \\ m.n:m(d) \end{array} \right.$	$\left. \vphantom{\left\{ \begin{array}{l} n(d) \\ n:2(d) \\ n:m(d) \\ n.in(d) \\ m.n:m(d) \end{array} \right.}} \right\} S$	$\left. \vphantom{\left\{ \begin{array}{l} n(d) \\ n:2(d) \\ n:m(d) \\ n.in(d) \\ m.n:m(d) \end{array} \right.}} \right\} H_3$	$\left. \vphantom{\left\{ \begin{array}{l} n(d) \\ n:2(d) \\ n:m(d) \\ n.in(d) \\ m.n:m(d) \end{array} \right.}} \right\} f_1$

1) Groupes nématiques avec H fini

Les notations suivantes sont utilisées: pour  $n$  impair la notation est la même que dans la table 2 du chapitre 2. Pour  $n$  pair  $(\odot, *, +, \circ)$  ont la même signification qu'au chapitre précédent, les autres signes ayant la signification suivante  $\square$  r impair,  $\square$  r pair,  $\times$  p pair,  $\&$   $\frac{2n}{p}$  est premier,  $\emptyset$   $\frac{2n}{p}$  est non premier,  $\Delta \frac{n}{2}$  impair,  $\Delta \frac{n}{2}$  pair,  $+ p$  pair.

$R \square C_n$ $n(\alpha)$ (n odd)	(a)	(b)	(c)	(d)
$\alpha = \alpha'$ A	n	N	-	$a_1$
$E_r$	$\left\{ \begin{matrix} 1^\odot \\ p^* \end{matrix} \right.$	$\left\{ C \right.$	$\left\{ L_5 \right.$	$\left. \begin{matrix} b_2 \\ b_3 \end{matrix} \right\}$
$\alpha \neq \alpha'$ $E_k$	$n(d)$	S	$G_1$	$b_2$
$E_{kr1}$	$\left\{ \begin{matrix} 1(d)^\odot \\ p(d)^* \end{matrix} \right.$	$\left\{ S \right.$	$G_7$	$\left. \begin{matrix} b_2 \end{matrix} \right\}$
$E_{kr2}$			$G_8$	

$R \square D_n$ $n:2(\alpha)$ (n odd)	(a)	(b)	(c)	(d)
$\alpha = \alpha'$ $A_1$	$n:2$	N	-	$a_1$
$A_2$	n	N	-	$a_2$
$E_r$	$\left\{ \begin{matrix} (2)_x^\odot \\ p:2^* \end{matrix} \right.$	$\left\{ C \right.$	$\left\{ L_7 \right.$	$\left. \begin{matrix} b_2 \\ b_5 \end{matrix} \right\}$
$\alpha \neq \alpha'$ $E_k$	$\left\{ \begin{matrix} n:2(d) \\ n(d) \end{matrix} \right.$	S	$G_3$	$b_2$
$G_{rk}$	$\left\{ \begin{matrix} 1(d)^\odot, (2)_x(d)^\odot \\ p(d)^*, p:2(d)^* \end{matrix} \right.$	$\left\{ S \right.$	$\left\{ H_5 \right.$	$\left. \begin{matrix} f_{25} \end{matrix} \right\}$

$R \square C_{nv}$				$R \square D_{nd}$					
$m(\alpha)$				$m.(2\tilde{n})(\alpha)$					
$(n \text{ odd})$	(a)	(b)	(c)	(d)	$(n \text{ odd})$	(a)	(b)	(c)	(d)
$\alpha = \alpha$									
$A_1$	$n.m$	$N$	-	$a_1$	$A_1$	$m.(2\tilde{n})$	$N$	-	$a_1$
$A_2$	$n$	$N$	-	$a_2$	$A_2$	$(2\tilde{n})$	$N$	-	$a_2$
$E_r$	$\left\{ \begin{matrix} m^\circ \\ p.m^* \end{matrix} \right\}$	$\left\{ N \right\}$	$\left\{ L_7 \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} b_1^1 \\ b_5^1 \end{matrix} \right\}$	$A_3$	$n:2$	$N$	-	$a_2$
$A_4$	$n.m(d)$	$S$	$G_1$	$b_2$	$A_4$	$n.m$	$N$	-	$a_2$
$E_{r1}$	$n(d)$	$S$	$G_2$	$b_2$	$E_{r1}$	$\left\{ \begin{matrix} (2)_x^\circ : m \\ m.(2\tilde{p})^* \end{matrix} \right\}$	$\left\{ N \right\}$	$\left\{ L_7 \right\}$	$\left\{ b_5^1 \right\}$
$E_{r2}$	$\left\{ \begin{matrix} m(d)^\circ, 1(d)^\circ \\ p.m(d)^*, p(d)^* \end{matrix} \right\}$	$\left\{ S \right\}$	$\left\{ H_4 \right\}$	$\left\{ f_{24} \right\}$	$E_{r2}$	$\left\{ \begin{matrix} (2)_x^\circ \\ p:2^* \end{matrix} \right\}$	$\left\{ N \right\}$	$\left\{ L_8 \right\}$	$\left\{ b_6^1 \right\}$
$\alpha \neq \alpha'$									
$E_{k1}$					$E_{k1}$	$\left\{ \begin{matrix} m.(2\tilde{n})(d) \\ m.n(d) \end{matrix} \right\}$	$\left\{ S \right\}$	$\left\{ G_3 \right\}$	$\left\{ b_2 \right\}$
$E_{k2}$					$E_{k2}$	$\left\{ \begin{matrix} (2\tilde{n})(d) \\ n(d) \end{matrix} \right\}$	$\left\{ S \right\}$	$\left\{ G_4 \right\}$	$\left\{ b_2 \right\}$
$\alpha = \alpha'$									
$A_1$	$(2\tilde{n})$	$N$	-	$a_1$	$G_{rk}$	$\left( \begin{matrix} 1(d)^\circ, P(d)^* \\ (2)_x^\circ(d), p; 2(d)^* \\ \bar{1}(d)^\circ, (2\tilde{p})(d)^* \\ m(d)^\circ, p:m(d)^* \\ (2)_x^\circ : m(d)^\circ \\ m.(2\tilde{p})(d)^* \end{matrix} \right)$	$\left\{ S \right\}$	$\left\{ H_6 \right\}$	$\left\{ f_2 \right\}$
$A_2$	$n$	$N$	-	$a_2$					
$E_{r1}$	$\left\{ \begin{matrix} \bar{1}^\circ \\ (2\tilde{p})^* \end{matrix} \right\}$	$\left\{ N \right\}$	$\left\{ L_5 \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} b_1^1 \\ b_3^1 \end{matrix} \right\}$					
$E_{r2}$	$\left\{ \begin{matrix} \bar{1}^\circ \\ p^* \end{matrix} \right\}$	$\left\{ N \right\}$	$\left\{ L_6 \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} b_1^1 \\ b_4^1 \end{matrix} \right\}$					
$\alpha \neq \alpha'$									
$E_k$	$\left\{ \begin{matrix} n(d) \\ (2\tilde{n})(d) \end{matrix} \right\}$	$\left\{ S \right\}$	$\left\{ G_3 \right\}$	$\left\{ b_2 \right\}$					
$E_{kr1}$	$\left\{ \begin{matrix} \bar{1}^\circ(d) \\ (2\tilde{p})(d)^* \end{matrix} \right\}$	$\left\{ S \right\}$	$G_7$	$\left\{ b_2 \right\}$					
$E_{kr2}$			$G_8$						

A<sub>1</sub>

A<sub>2</sub>

E<sub>r1</sub>

E<sub>r2</sub>

α≠α

E<sub>k</sub>

G<sub>rk</sub>

n:m

n

$\left\{ \begin{matrix} m_h^{\circ} \\ p:m \end{matrix} \right\}^*$

$\left\{ \begin{matrix} 1^{\circ} \\ p \end{matrix} \right\}^*$

$\left\{ \begin{matrix} n:m(d) \\ n(d) \end{matrix} \right\}$

$\left\{ \begin{matrix} m_h(d)^{\circ}, 1(d)^{\circ} \\ P(d)^{\circ}, p:m(d)^{\circ} \end{matrix} \right\}^*$

N

N

$\left\{ N \right\}$

$\left\{ N \right\}$

$\left\{ S \right\}$

$\left\{ S \right\}$

(a)

(b)

(c)

(d)

α=α

A<sub>1</sub>

A<sub>2</sub>

A<sub>3</sub>

A<sub>4</sub>

E<sub>r1</sub>

E<sub>r2</sub>

α≠α

E<sub>k1</sub>

E<sub>k2</sub>

G<sub>rk</sub>

m.n:m(α)

(n odd)

(a)

(b)

(c)

(d)

m.n:m

n:m

n:2

n.m

$\left\{ \begin{matrix} (2)_x \cdot m^{\circ} \\ m.p:m^{\circ} \end{matrix} \right\}^*$

$\left\{ \begin{matrix} (2)_x^{\circ} \\ p:2^{\circ} \end{matrix} \right\}^*$

$\left\{ \begin{matrix} m.n:m(d) \\ m.n(d) \end{matrix} \right\}$

$\left\{ \begin{matrix} n:m(d) \\ n(d) \end{matrix} \right\}$

$\left\{ \begin{matrix} 1(d), p(d) \\ (2)_x(d), p:2(d) \\ m_h(d), p:m(d) \\ m(d), m.p(d) \\ (2)_x \cdot m(d), m.p:m(d) \end{matrix} \right\}^*$

N

N

N

N

$\left\{ N \right\}$

$\left\{ N \right\}$

$\left\{ S \right\}$

$\left\{ S \right\}$

$\left\{ S \right\}$

a<sub>1</sub>

a<sub>2</sub>

a<sub>2</sub>

a<sub>2</sub>

$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ b_5 \end{matrix} \right\}$

$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ b_6 \end{matrix} \right\}$

$\left\{ b_2 \right\}$

$\left\{ b_2 \right\}$

$\left\{ f_2 \right\}$

$R \sqcap C_n$				
$n(\alpha)$				
(n even)	(a)	(b)	(c)	(d)
$\alpha = \alpha'$				
$A_1$	$\{n\}$	$\begin{cases} C, n=2 \\ N, n>2 \end{cases}$	-	$\{a_1\}$
$A_2$	$\{\frac{n}{2}\}$	$\begin{cases} C, n=4 \\ N, n>4 \end{cases}$	-	$\{a_2\}$
$E_r$	$\begin{cases} 1^{\circ \square}, 2^{\circ \blacksquare} \\ p^* \end{cases}$	$\{C\}$	$\{L_5\}$	$\{b_3^2\}$
$\alpha \neq \alpha'$				
$E_{k1}$	$n(d)$	S	$G_1$	$b_2$
$E_{k2}$	$(n)_{\frac{n}{2}}(d)$	S	$G_2$	$b_2$
$E_{kr1}$	$\begin{cases} 1(d)^{\circ \square}, 2(d)^{\circ \blacksquare} \\ p(d)^* \end{cases}$	$\{S\}$	$G_7$	$\{b_2\}$
$E_{kr2}$			$G_8$	

$R \sqcap S_{2n}$				
$(2n)(\alpha)$				
(n even)	(a)	(b)	(c)	(d)
$\alpha = \alpha'$				
$A_1$	$\{(2\tilde{n})\}$	$\begin{cases} C, n=2 \\ N, n>2 \end{cases}$	-	$\{a_1\}$
$A_2$	n	N	-	$a_2$
$E_r$	$\begin{cases} p \& \\ (\tilde{p})^{\circ} \end{cases}$	$\{N\}$	$\{L_9\}$	$\{b_4^1\}$
$\alpha \neq \alpha'$				
$E_k$	$\begin{cases} (2\tilde{n})(n)(d) \\ n(d) \end{cases}$	$\{S\}$	$G_3$	$\{b_2\}$
$E_{kr1}$	$p(d) \&$		$G_7$	
$E_{kr2}$	$\begin{cases} (\tilde{p})^{\circ}(d) \end{cases}$	$\{S\}$	$G_8$	$\{b_2\}$

$R \square D_n$

$n:2(\alpha)$

(n even)

(a) (b) (c) (d)

$\alpha = \alpha'$

$A_1 \left\{ \begin{array}{l} n:2 \\ \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} C, n=2 \\ N, n>2 \end{array} \right\} - \left\{ a_1 \right\}$

$A_2 \left\{ \begin{array}{l} (n):2 \\ 2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} C, n=4 \\ N, n>4 \end{array} \right\} - \left\{ a_2 \right\}$

$A_3 \quad n \quad N \quad - \quad a_2$

$A_4 \quad \left( \frac{n}{2} \right) : 2 \quad N \quad - \quad a_2$

$E_r \left\{ \begin{array}{l} (2)_{x^{\square}} \cdot 2:2^{\bullet \square} \\ p:2^* \end{array} \right\} \left\{ C \right\} \left\{ L_7 \right\} \left\{ b_5^2 \right\}$

$\alpha \neq \alpha'$

$E_{k1} \left\{ \begin{array}{l} n:2(d) \\ n(d) \end{array} \right\} \left\{ S \right\} \left\{ G_3 \right\} \left\{ b_2 \right\}$

$E_{k2} \left\{ \begin{array}{l} (n)_{\frac{n}{2}}:2(d) \\ (n)_{\frac{n}{2}}(d) \end{array} \right\} \left\{ S \right\} \left\{ G_4 \right\} \left\{ b_2 \right\}$

$G_{rk} \left\{ \begin{array}{l} (2)_{x^{\square}}(d) \cdot 1(d) \\ 2(d) \cdot 2:2(d) \\ p(d)^* \cdot p:2(d)^* \end{array} \right\} \left\{ S \right\} \left\{ H_5 \right\} \left\{ f_{27} \right\}$

$R \square C_{nv}$	(a)	(b)	(c)	(d)
$\alpha = \alpha'$				
$A_1$	$n \cdot m$	$N$	-	$a_1$
$A_2$	$\left\{ \frac{(n)}{2} \cdot m \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} C, n=4 \\ N, n>4 \end{array} \right\}$	-	$\left\{ a_2 \right\}$
$A_3$	$\left\{ n \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} C, n=2 \\ N, n>2 \end{array} \right\}$	-	$\left\{ a_2 \right\}$
$A_4$	$\left( \frac{n}{2} \right) \cdot m$	$N$	-	$a_2$
$E_r$	$\left\{ \begin{array}{l} m^{\oplus \square}, 2 \cdot m^{\oplus \square} \\ p \cdot m^* \end{array} \right\}$	$\left\{ N \right\}$	$\left\{ L_7 \right\}$	$\left\{ b_5^1 \right\}$
$\alpha \neq \alpha'$				
$E_{k1}$	$n \cdot m(d)$	$S$	$G_1$	$b_2$
$E_{k2}$	$(n) \frac{n}{2} \cdot m(d)$	$S$	$G_2$	$b_2$
$E_{k3}$	$n(d)$	$S$	$G_2$	$b_2$
$E_{k4}$	$(n) \frac{n}{2} \cdot m(d)$	$S$	$G_2$	$b_2$
$G_{rk}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1(d)^{\oplus \square}, m(d)^{\oplus \square} \\ 2(d)^{\oplus \square}, 2 \cdot m(d)^{\oplus \square} \\ p(d)^*, p \cdot m(d)^* \end{array} \right\} S$		$\left\{ H_4 \right\}$	$\left\{ f_{26} \right\}$

$R \square C_{nh}$ $n:m(\alpha)$ (n even)	(a)	(b)	(c)	(d)
$\alpha = \alpha'$				
$A_1$	$n:m$	N	-	$a_1$
$A_2$	$\binom{n}{2}:m$	N	-	$a_2$
$A_3$	$\left\{ \begin{array}{l} n \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} C, n=2 \\ N, n>2 \end{array} \right.$	-	$\left\{ a_2 \right.$
$A_4$	$\left\{ \begin{array}{l} 2\tilde{n} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} C, n=4 \\ N, n>4 \end{array} \right.$	-	$\left\{ a_2 \right.$
$E_{r1}$	$\left\{ \begin{array}{l} \overset{\circ}{\bar{1}}^{\square}, 2:m \\ *x, \tilde{m}^{*+} \\ p:m, (2p) \end{array} \right.$	$\left\{ N \right.$	$\left\{ L_5 \right.$	$\left\{ b_3^1 \right.$
$E_{r2}$	$\left\{ \begin{array}{l} \overset{\circ}{m}_h^{\square}, 2 \\ * \Delta^+, p^{* \Delta x} \\ p:m^{* \Delta^+}, \tilde{m}^{* \Delta x} \\ p(d)^{* \Delta \circ} \end{array} \right.$	$\left\{ N \right.$	$\left\{ L_6 \right.$	$\left\{ b_3^1 \right.$
$\alpha \neq \alpha'$				
$E_{k1}$	$\left\{ \begin{array}{l} n:m(d) \\ n(d) \end{array} \right.$	$\left\{ S \right.$	$\left\{ G_3 \right.$	$\left\{ b_2 \right.$
$E_{k2}$	$\left\{ \begin{array}{l} \binom{n}{2}_n:m(d) \\ \binom{n}{2}_n(d) \end{array} \right.$	$\left\{ S \right.$	$\left\{ G_4 \right.$	$\left\{ b_2 \right.$
$G_{rk}$	$\left\{ \begin{array}{l} \overset{\circ}{1}(d)^{\square}, 2(d)^{\square} \\ \overset{\circ}{\bar{1}}(d)^{\square}, 2:m(d)^{\square} \\ p(d)^*, p:m(d)^{**} \\ (2\tilde{p})(d)^{**x} \end{array} \right.$	$\left\{ S \right.$	$\left\{ H_5 \right.$	$\left\{ f_{27} \right.$

$R \square D_{nd}$ $m. (2n)(\alpha)$	(a)	(b)	(c)	(d)
$\alpha = \alpha$				
$A_1$	$m. (2n)$	N	-	$a_1$
$A_2$	$n.m$	N	-	$a_2$
$A_3$	$(2n)$	C, n=2 N, n>2	-	$a_2$
$A_4$	$n:2$	N	-	$a_2$
$E_r$	$\left\{ \begin{array}{l} p.m \& \\ m. (\tilde{p}) \end{array} \right.$	$\left\{ N \right.$	$\left\{ L_{11} \right.$	$\left\{ b_5^1 \right.$
$\alpha \neq \alpha$				
$E_{k1}$	$\left\{ \begin{array}{l} m. (2n)(d) \\ m.n(d) \end{array} \right.$	$\left\{ S \right.$	$\left\{ G_3 \right.$	$\left\{ b_2 \right.$
$E_{k2}$	$\left\{ \begin{array}{l} (2n)(\tilde{d}) \\ n(d) \end{array} \right.$	$\left\{ S \right.$	$\left\{ G_4 \right.$	$\left\{ b_2 \right.$
$G_{rk}$	$\left\{ \begin{array}{l} p(d) \&, p(d) \\ p:2(d) \&, p:2(d) \\ (2\tilde{p})(d) \&, (\tilde{p})(d) \\ p.m(d) \&, p.m(d) \\ p:m(d) \&, m.(\tilde{p})(d) \end{array} \right.$		$\left\{ H_6 \right.$	$\left\{ f_{26} \right.$

$R \square D_{nh}$	$m.n:m(\alpha)$ ( $n$ even)	(a)	(b)	(c)	(d)
$\alpha = \alpha'$					
$A_1$	$m.n:m$		N	-	$a_1$
$A_2$	$m.(\frac{n}{2}):m$		N	-	$a_2$
$A_3$	$n:m$		N	-	$a_2$
$A_4$	$m.(\frac{n}{2}):m$		N	-	$a_2$
$A_5$	$\left\{ \begin{array}{l} n:2 \\ m.(\frac{n}{2}) \end{array} \right\}$		$\left\{ \begin{array}{l} c,n=2 \\ N,n>2 \end{array} \right\}$	-	$\left\{ \begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \end{array} \right\}$
$A_6$	$\left\{ \begin{array}{l} m.(\frac{n}{2}) \\ m.n \end{array} \right\}$		$\left\{ \begin{array}{l} c,n=4 \\ N,n>4 \end{array} \right\}$	-	$\left\{ \begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \end{array} \right\}$
$A_7$	$m.n$		N	-	$a_2$
$A_8$	$m.(\frac{n}{2})$		N	-	$a_2$
$E_{r1}$	$\left\{ \begin{array}{l} (2)_x \overset{\square \oplus}{:m}, m.2:m \overset{\oplus \square}{} \\ m.p:m \overset{*}{} \end{array} \right\}$		N	$\left\{ L_7 \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} b_1 \\ b_5 \end{array} \right\}$
$E_{r2}$	$\left\{ \begin{array}{l} (2)_x \overset{\oplus \square}{:m}, 2:2 \overset{\oplus \square}{} \\ m.(\frac{n}{2}) \overset{* \Delta +}{}, p:2 \overset{* \Delta \times}{} \\ m.(\frac{n}{2}) \overset{* \Delta}{}, p:2 \overset{* \Delta \circ}{} \end{array} \right\}$		N	$\left\{ L_8 \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} b_1 \\ b_5 \end{array} \right\}$
$\alpha \neq \alpha'$					
$E_{k1}$	$\left\{ \begin{array}{l} m.n:m(d) \\ n.m(d) \end{array} \right\}$		S	$\left\{ G_3 \right\}$	$\left\{ b_2 \right\}$
$E_{k2}$	$\left\{ \begin{array}{l} m.(\frac{n}{2}) \overset{\sim}{:m}(d) \\ (n) \overset{\sim}{:m}(d) \end{array} \right\}$		S	$\left\{ G_4 \right\}$	$\left\{ b_2 \right\}$
$E_{k3}$	$\left\{ \begin{array}{l} n:m(d) \\ n(d) \\ m.(\frac{n}{2}) \overset{\sim}{:m}(d) \end{array} \right\}$		S	$\left\{ G_4 \right\}$	$\left\{ b_2 \right\}$
$E_{k4}$	$\left\{ \begin{array}{l} m.(\frac{n}{2}) \overset{\sim}{:m}(d) \\ (n) \overset{\sim}{:m}(d) \end{array} \right\}$		S	$\left\{ G_4 \right\}$	$\left\{ b_2 \right\}$
$G_{rk}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1(d), 2(d) \\ p(d) \overset{*}{} \\ (2)_x \overset{\oplus \Delta}{(d)}, 2:2(d) \overset{\oplus \Delta}{} \\ p:2(d) \overset{*}{} \\ m(d), 2.m(d) \overset{\oplus \Delta}{} \\ p.m(d) \overset{\gamma}{} \\ m_n(d), 2:m(d) \overset{\oplus \Delta}{} \\ p:m(d) \overset{\gamma}{} \\ (2)_x \overset{\oplus \Delta}{:m}(d), m.2:m(d) \overset{\oplus \Delta}{} \\ m.n:m(d) \overset{\gamma}{} \end{array} \right\}$		S	$H_6$	$f_{26}$

TABLE 2: Energies libres associées à un paramètre d'ordre à 4 composantes décrivant des transitions à partir d'une phase nématique

$$f_{24} = f_1 + \frac{\gamma_1}{n} \Delta_6(n)$$

$$f_{25} = f_1 + \frac{\gamma_1}{n} \Delta_6(n) + \Delta_7(n)$$

$$f_{26} = f_1 + \frac{2\gamma_1}{n} \Delta_5(n)$$

$$f_{27} = f_1 + \frac{2\gamma_1}{n} \Delta_5(n) + \frac{2\gamma_2}{n} \Delta_7(n)$$

## CHAPITRE 4

### COMPARAISON AVEC LES DONNEES EXPERIMENTALES

#### 1) Introduction

Dans ce court chapitre nous nous bornons à discuter des problèmes posés par l'interprétation de données expérimentales dans les cristaux liquides, dans le cadre de la théorie de Landau. Cette théorie requiert en effet la connaissance détaillée de la symétrie des phases en présence. Malgré les progrès importants réalisés au cours des dernières années dans l'identification des mésophases, de nombreuses ambiguïtés subsistent quant à la symétrie complète de plusieurs de ces phases. Au §1 nous indiquons la situation actuelle sur ce point, en suivant la classification habituelle des nématiques et smectiques. Au §2 nous discutons brièvement des effets qui peuvent être interprétés à l'aide de nos résultats.

#### 2) Identification et classification des mésophases

##### a) Remarques préliminaires

La classification actuelle des mésophases est une classification encore en grande partie historique, c'est à dire qu'elle reflète l'ordre dans lequel ces phases ont été identifiées chronologiquement. Toutefois un effort a été fait au cours des dix dernières années pour appuyer cette classification sur des critères objectifs: la symétrie des phases, leur miscibilité, ou la place qu'elles prennent dans la séquence de transitions se produisant entre l'état liquide isotrope et l'état solide cristallin. Des incertitudes subsistent toutefois quant à l'ordre cristallin représenté par telle ou telle phase, qui tiennent au nombre de paramètres principaux ou secondaire qu'il faut déterminer expérimentalement afin d'identifier une mésophase. Les paramètres habituellement discutés sont:

1) L'orientation des molécules qui peuvent être parallèles à une direction principale (l'axe directeur) ou, dans le cas des mésophases en couches, inclinées par rapport à la normale aux couches.

2) L'existence d'un ordre translationnel discret suivant une direction (cas d'un empilement de couches liquides), deux directions (cas de couches ordonnées sans ordre à longue portée entre les couches) ou tridimensionnel (cristal moléculaire).

Ces deux premières caractéristiques sont donc liées à l'existence d'un ordre à courte ou à longue portée dans la position et dans l'orientation des molécules.

Dans le cas d'une phase possédant un empilement en couches, un troisième paramètre expérimental est:

3) L'épaisseur des couches qui peuvent être voisine de la longueur des molécules (ordre monocouche) ou d'un multiple entier (ordre multicouche) ou fractionnaire de cette longueur.

D'autres paramètres secondaires permettent l'identification expérimentale des mésophases parmi lesquels on peut citer:

- 4) Le caractère optiquement uniaxe ou biaxe des phases.
- 5) Les degrés de liberté des sous-unités autour de leurs axes.
- 6) La forme des molécules ou des sous-unités.
- 7) La polarisation des molécules etc....

De l'analyse de l'ensemble des données précédentes découle la classification (1-5) que nous rappelons ci-dessous.

#### b) Phases nématiques et cholestériques

Les phases nématiques correspondent à une absence totale de symétrie discrète de translation. Toutefois si les positions des sous-unités sont aléatoires leur orientation est parallèle en moyenne à une direction principale. Les sous-unités identifiées expérimentalement sont de forme cylindrique, c'est à dire que leur groupe d'invariance est  $D_{\infty h}$  (pour les molécules achirales) ou  $D_{\infty}$  (pour les molécules chirales). Le cas de phases nématiques avec un groupe d'invariance fini ( $D_{nh}$ ,  $D_{nd}$  ou l'un de leurs sous-groupes) n'a pas été rapporté. D'autre part, les phases nématiques sont optiquement uniaxes ou biaxes (6). Les phases cholestériques sont des phases nématiques déformées hélicoïdalement.

#### c) Phases smectiques

La séquence complète des principales phases smectiques identifiées jusqu'ici est:

$S_m^A - S_m^D - S_m^C - S_m^{B_h} - S_m^I - S_m^{B_c} - S_m^F - S_m^J - S_m^G - S_m^E - S_m^K - S_m^H$ .

Bien que toutes ces phases aient en commun l'existence d'un ordre translationnel discret suivant une direction (empilement en couches) elles forment plusieurs familles possédant des propriétés de symétrie distinctes.

1) Les phases smectiques A et C sont constituées d'une superposition régulière de couches liquides équidistantes. Il existe une correlation d'orientation à longue portée entre les couches et à l'intérieur des couches, un ordre de position à longue portée entre les couches mais un désordre des positions des molécules à l'intérieur de chaque couche. La phase A est uniaxe avec des molécules perpendiculaires aux couches alors que la phase C est biaxe avec des molécules inclinées par rapport à l'axe directeur.

Les lettres  $A_1, A_2$  et  $A_d$  désignent des phases smectiques respectivement monocouches, bicouches, ou dont l'épaisseur correspond à une distance intermédiaire entre une et deux couches. Les phases  $\hat{A}$  et  $A^*$  correspondent à une déformation incommensurable et à l'existence d'une polarisation. De même les lettres  $C_2, \hat{C}$  et  $C^*$  désignent respectivement des phases smectiques C, bicouches, incommensurables et polaires.

2) Les phases smectiques  $B_h$  et I dites hexatiques correspondent à un empilement désordonné de couches dans lesquelles existe un réseau cristallin hexagonal ou quasi-hexagonal.  $B_h$  est uniaxe alors que I est biaxe.

On a identifié également des phases  $I^*$  et  $F^*$  avec une déformation hélicoïdale.

3) Les phases smectiques  $B_c$  (ou L), G, H, E, de même que des phases notées parfois  $S'_G$  (ou J) et  $S'_H$  (ou K) sont considérées comme cristallines puisqu'on y observe simultanément un ordre bidimensionnel et une corrélation à longue portée entre les couches. A l'exception de  $B_c$  qui est uniaxe, les autres phases sont biaxes avec un réseau hexagonal ( $B_c$ ), pseudo-hexagonal ( $S'_G, G$ ) orthorhombique (E) ou monoclinique centré ( $S'_H$  et H). Remarquons que la phase smectique B ne possède pas d'ordre orientationnel alors que la phase H est orientée.

4) Un autre groupe de mésophases à structure périodique dans lesquelles l'ordre est bi ou tridimensionnel avec un ordre local isotrope est représenté par la phase notée  $M_2$  (7) qui est considérée comme un état intermédiaire entre la phase cristalline de symétrie cubique  $Ia3d$ , et des phases bidimensionnelles en rubans de réseau rectangulaire ou oblique, ou de la phase dite bleue qui apparaît au dessous de certaines phases isotropes.

Il faut souligner le sens particulier de certains des termes employés dans le vocabulaire spécialisé des cristaux liquides. Ainsi les phases smectiques cristallines diffèrent fondamentalement des phases cristallines solides par une bien plus grande amplitude des fluctuations autour des positions d'équilibre. L'ordre tridimensionnel de ces phases doit être considéré comme un ordre moyen comparé à l'ordre strict des cristaux solides. Ainsi dans la phase smectique  $B_c$  de pentoxybenzylidène octylaniline (50.8) les molécules sont mobiles autour de leur grand et de leur petit axe, une situation que l'on peut comparer à celle rencontrée dans les cristaux plastiques (dont les molécules ont toutefois une forme sphérique). Ainsi l'ensemble des phases cristallines smectiques ( $B_c, J, G, H, K, E$ ) possèdent des propriétés typiques des cristaux liquides (commiscibilité, texture microscopique) qui les distinguent des cristaux solides. De même, le réseau

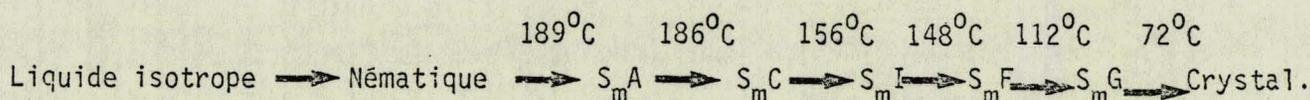
bidimensionnel des phases hexatiques I est quasi cristallin et ne peut être identifié à un réseau cristallin bidimensionnel solide.

### 3) La théorie de Landau et l'interprétation des comportements expérimentaux dans les cristaux liquides

Les considérations du paragraphe précédent nous invitent à une certaine prudence quant à l'utilisation de nos résultats pour l'interprétation des séquences de transitions observées dans les cristaux liquides. Si l'ordre à longue portée mis en évidence dans certaines phases smectiques est compris comme un ordre strict, les résultats des chapitres 2 et 3 nous permettent exclusivement de décrire les transitions entre phases nématiques, cholestériques et smectiques A et C (ainsi que les variantes de ces dernières phases).

Si au contraire l'ordre à l'intérieur de chaque couche smectique est approximatif, nos résultats peuvent s'appliquer aux phases smectiques correspondantes, en assimilant le motif observé dans les couches (hexagonal, quadratique, monoclinique etc...) aux sous-unités décrites par un groupe fini (respectivement hexagonal, quadratique, monoclinique etc ...).

Un autre problème soulevé par l'interprétation des données expérimentales à l'aide de nos résultats, est lié au fait que les phases nématiques et smectiques apparaissent toujours dans des séquences de transitions, généralement assez longues entre l'état liquide isotrope et l'état cristallin, chaque phase étant stable dans un domaine relativement étroit en température (quelques degrés à quelques dizaines de degrés). A titre d'exemple, dans TBBA(C<sub>10</sub>), l'un des systèmes les mieux connus, la séquence observée est:



Dans l'esprit de la théorie de Landau, la description d'une succession de transitions doit mettre en jeu le nombre minimal de paramètres phénoménologiques. Dans le cas présent nous devons donc déduire l'ensemble des phases de la phase "prototype" isotrope ou nématique. Une telle interprétation requiert, outre nos résultats théoriques, la connaissance des changements de symétrie se produisant à partir:

- de la phase liquide vers les phases nématiques et smectiques
- des diverses mésophases vers l'état solide cristallin.
- des phases smectiques à une dimension vers les phases smectiques possédant un ordre

bi et tridimensionnel.

En dépit des restrictions précédentes, nos résultats peuvent toutefois permettre l'interprétation d'un certain nombre de phénomènes observés dans les cristaux liquides.

i) Ordre bicouche dans les phases smectiques (8,9)

La transition  $S_m A_1$  (monocouche)  $\rightarrow$   $S_m A_2$  (bicouche) a été identifiée dans TBBA (8), de même qu'un ordre partiellement bicouche  $S_m A_d$  (l'épaisseur des couches est comprise entre l'épaisseur dans  $A_1$  et celle dans  $A_2$ ) et une antiphase fluide  $\tilde{S}A$ . Le même phénomène a été observé dans les mésophases C et E. Nos résultats permettent de relier ce type de transition à une RI de la surface de la zone de Brillouin unidimensionnelle considérée pour les phases smectiques, avec un paramètre d'ordre mono ou bidimensionnel. Le doublement de l'épaisseur des couches peut en effet être assimilé à un doublement de la "maille" smectique, c'est à dire de la période de translation le long de l'axe perpendiculaire aux couches. De même la phase  $A_d$  peut être décrite comme un état intermédiaire "incommensurable" avec  $A_1$ , apparaissant au dessous de la phase "d'ancrage"  $A_2$ .

ii) Phases rentrantes (10 - 12)

La séquence de phase;

Nématique - Smectique A - Nématique - Smectique A, au cours de laquelle la phase nématique réapparaît au dessous d'une phase smectique A peut être interprétée à l'aide d'une représentation multidimensionnelle induisant plusieurs phases stables à basse température. La phase smectique A serait stable dans deux domaines distincts de valeurs des coefficients de l'énergie libre en fonction de la température.

iii) Phases incommensurables (13- 15)

Les phases cholestériques sont des phases nématiques incommensurables. De même les phases  $\tilde{A}$  et  $\tilde{C}$  sont des phases smectiques incommensurables. L'interprétation de cette incommensurabilité s'effectue en prenant en compte dans l'énergie libre de Landau des invariants de Lifchitz, ou des invariants de la forme  $\eta \vec{n} \cdot \text{rot } \vec{n}$  (voir chapitre 2).

4) Points multi critiques et points de Lifchitz (16-19)

La théorie de Landau interprète l'existence de points multicritiques ou de points de Lifchitz par l'annulation fortuite d'un coefficient dans l'énergie libre. Le point triple séparant des phases nématique, smectique A et smectique C (incommensurable) a été interprété de plusieurs manières. Nos résultats indiquent que l'énergie libre associée au diagramme de phase contenant un point NAC, correspond à un paramètre d'ordre ayant deux ou quatre composantes.

i 5) Transition nématique uniaxe -nématique biaxe

La possibilité d'une transition conduisant d'une phase nématique uniaxe à une phase nématique biaxe, a été vérifiée expérimentalement (20,21). Ce type de changement de symétrie est induit, selon nos résultats par des RI unidimensionnelles ou bidimensionnelles de la zone de Brillouin fictive considérée au chapitre 3. Plus généralement, le caractère nécessairement discontinu de certaines transitions, les phénomènes de ferroélectricité (22-25), fléxoelectricité (26-28), d'antiferroélectricité (29), peuvent trouver une justification théorique dans nos résultats. Ainsi la description d'une séquence de transitions à l'aide d'énergie libres contenant des invariants de degrés impairs, conduit nécessairement à des transitions de 1<sup>er</sup> ordre. De même, l'identification de la RI associée à une séquence de transitions permet de prédire (par les couplages induits par cette représentation) l'apparition de phases polaires, ou permettant l'existence de l'effet fléxoelectrique. La discussion des effets précédents nécessite dans chaque cas une discussion dont l'étape préalable est l'identification expérimentale du paramètre d'ordre de la transition.

### Bibliographie

- 1) J.M.GOODBY, Mol.Cryst and Liq.Cryst. 92 ,171(1983)
- 2) G.W.GRAY, in "The molecular physics of liquid crystals" Ed:G.R.Lukhurst et G.W.GRAY, Academic Press, New York (1979)
- 3) "Liquid crystals of one and two dimensionnal order" Ed.W.HEFRICH et G.HEPPKE, Springer-Verlag, Berlin (1980)
- 4) J.PROST in "Symmetries and Broken Symmetries in condensed matter". Ed. N.BOCCARA, Idset Paris (1981)
- 5) J.D.LISTER, Ferroelectrics 52,225(1983)
- 6) J.B.SWIFT et H.BRAND, Phys.Rev A 28 ,505(1983)
- 7) A.M.LEVELUT, C.GERMAIN, P.KELLER, L.LIEBERT et J.BILLART, J.Physique 44,623(1983)
- 8) G.SIGAUD, F.HARDOUIN, M.F.ACHARD et H.GASPAROUX, journal de physique 40,C3,356 (1979).
- 9) A.M.LEVELUT, B.ZAGHLOUL et F.HARDOUIN, journal de physique lettres, 43,L83(1982)
- 10) P.S.PERSHAN et J.PROST, journal de physique lettres ,40,L27(1979).
- 11) F.HARDOUIN , D.SIGAUD, M.F.ACHARD et H.GASPAROUX, solid state commun. 30 ,265(1979).
- 12) L.BENIGUI et F.HARDOUIN, journal de physiques lettres , 42 ,L111(1981).
- 13) P.E.CLADIS, D.GUILLON, W.B.DANIELS et A.C.GRIFFIN, Mol.Cryst.Liq.Cryst. 56,89(1979).
- 14) M.YAMASHIKA et H.KHIMURA, Jour.Of the phys.Soc.Japan 51,2419(1982).
- 15) O.HUDAK, journal de physique 44,57(1983).
- 16) G.SIGAUD, F.HARDOUIN, M.F.ACHARD, solid state commun. 23,35(1979).
- 17) L.BENIGUI, journal de physique 40,C3,419(1979).
- 18) C.CHUANG et S.C.LIEN , phys.Rev.Letters 47,1917(1981).
- 19) L.BENIGUI, journal de physique 44,273(1983).
- 20) T.A.KAHANE et J.SWIFT, Mol.Cryst.liq.Cryst. 70,57(1981).
- 21) E.A.JACOBEN et J.SWIFT, Mol.Cryst.Liq.Cryst. 87,29(1982)
- 22) R.BMEYER, L.LIEBERT, L.STRZELECKI et P.KELLER, le journal de physique lettres 36,L69(1975).
- 23) G.DURAND, PH.MARTINOT-LAGARDE, Ferroelectrics, 24,89(1980).
- 24) L.BERESNEV, V.A.BAIKALOV, L.M.BLINOV, E.P.POZHIADEV, et G.V.PARVANESTSKAS, J.E.T.P. LETTERS 33,553(1981).
- 25) J.W.GOODBY, Ferroelectrics 49,275(1983).
- 26) J.PROST et J.P.MARCEROU, Le journal de physique 38,315(1977).
- 27) V.L.INDENBOM, E.B.LOGINOV et M.A.OSIPOV, Sov .Phys.Crystallogr. 26,656(1982).
- 28) B.A.UMANSKII, L.M.BLINOV et M.I.BARNIK, SOV.Phys.Crystallogr. 27,437(1982).
- 29) L.BENIGUI. et F.HARDOUIN, journal de physique lettres, 42,L381(1981).

## CONCLUSION

Cette thèse contient les résultats de l'application de la théorie de Landau à l'ensemble des représentations irréductibles des groupes susceptibles de décrire une phase nématique ou smectique unidimensionnelle. Ainsi ont été déterminés les changements de symétrie et les énergies libres associées aux transitions nématique-nématique, nématique-cholestérique, nématique-smectique, smectique-smectique. Les résultats de notre étude, présentés sous forme de tables, fournissent une image synthétique des situations théoriques que l'on peut rencontrer parmi les transitions précédentes. On peut en tirer les conclusions générales suivantes:

1) La dimension du paramètre d'ordre (et par voie de conséquence le nombre de composantes indépendantes dans l'énergie libre de Landau) ne peut être que 1, 2 ou 4. Les transitions nématique-nématique et nématique-cholestérique sont associées à des représentations uni ou bidimensionnelles du centre de la zone de Brillouin fictive considérée dans la phase nématique. Les transitions nématique-smectique correspondent pour leur part à un paramètre d'ordre de dimension 2 ou 4. D'autre part les transitions smectiques unidimensionnelles correspondent à des représentations de dimension 1, 2 ou 4 du centre de la zone de Brillouin ou associées à des points situés à la surface et à l'intérieur de la zone de Brillouin monodimensionnelle (ordre multicouche).

2) Un grand nombre des représentations étudiées sont susceptibles d'induire une incommensurabilité de la phase stable à basse température, y compris certaines RI unidimensionnelles. L'observation des phases cholestériques et de phases smectiques partiellement ordonnées atteste du caractère fréquent des mésophases incommensurables, en accord avec la nature intermédiaire de ces phases.

3) Nos résultats prédisent que la plupart des transitions entre mésomorphes nématiques et smectiques doivent être discontinues.

Trois raisons théoriques contribuent à cette conclusion :

- a) L'existence d'invariants impairs des composantes du paramètre d'ordre dans une fraction importante des énergies libres de Landau.
- b) Le fait que les mésophases apparaissent généralement dans des séquences de plusieurs transitions. La théorie de Landau prévoit à cet égard que seule la 1<sup>ère</sup> transition (nématique-smectique A) peut être continue, les autres étant obligatoirement du 1<sup>er</sup> ordre.
- c) L'existence d'invariants de Lifchitz qui peuvent induire soit une transition continue vers une phase incommensurable, soit une transition du 1<sup>er</sup> ordre vers une phase commensurable.

4) Les résultats purement cristallographiques établissent l'existence de groupes smectiques possédant des axes hélicoïdaux et de plans de glissements. Ces résultats font d'autre part une place importante à des groupes ponctuels nématiques et smectiques possédant un nombre fini d'éléments de symétrie.

5) L'existence de termes de couplages linéaires et non-linéaires entre les composantes du paramètre d'ordre et les grandeurs macroscopiques spontanées (polarisation, déformation) démontre l'existence d'une ferroélectricité (ferroélasticité) pseudopropre et improprie. De même le couplage des grandeurs macroscopiques avec les dérivées des composantes du paramètre d'ordre par rapport aux coordonnées d'espace permettent d'interpréter des effets secondaires tels la fléxoelectricité.

Aucune comparaison détaillée n'a été effectuée avec les données expérimentales concernant des mésophases particulières. Nous nous sommes bornés à discuter les problèmes posés par l'interprétation de ces données dans le cadre de la théorie de Landau. Ces problèmes sont liés principalement à la difficulté d'une identification précise de l'ordre réalisé dans les mésophases. A cet égard, il s'avère que notre travail doit être complété par des études semblables, en particulier concernant les transitions à partir de l'état liquide isotrope vers des phases possédant un ordre translationnel mono, bi et tridimensionnel. Ce type d'étude devrait contribuer à déterminer la symétrie détaillée et l'identification précise des mésophases.

Annexe 1

Tables de caractères des représentations irréductibles des groupes Smectiques  $T \square H$   
et Nématiques  $R \square H$ .

$T \square C_{\infty}$ $\infty(d)$	$(C(\phi)   \vec{t})$
K=0	
A <sub>1</sub>	1
E <sub>n1</sub>	2cosnφ
$K=\frac{K_0}{2}$	
A <sub>2</sub>	-1
E <sub>n2</sub>	-2cosnφ
$K=\frac{K_0}{no}$	
E <sub>kl</sub>	2 coskd
E <sub>nk1</sub>	2cos(nφ+kd)
E <sub>nk2</sub>	2cos(nφ-kd)

$T \square D_{\infty}$ $\infty:2(d)$	$(C(\phi)   \vec{t})$	$(U_2(\phi)   \vec{t})$
K=0		
A <sub>1</sub>	1	1
A <sub>2</sub>	1	-1
E <sub>n1</sub>	2cosnφ	0
$K=\frac{K_0}{2}$		
A <sub>3</sub>	-1	-1
A <sub>4</sub>	-1	1
E <sub>n2</sub>	-2cosnφ	0
$K=\frac{K_0}{no}$		
E <sub>k</sub>	2coskd	0
G <sub>nk</sub>	4cosnφcoskd	0

$T \square C_{\infty v}$ $\infty:m(d)$	$(C(\phi)   \vec{t})$	$(\sigma_v(\phi)   \vec{t})$
K=0		
A <sub>1</sub>	1	1
A <sub>2</sub>	1	-1
E <sub>n1</sub>	2cosnφ	0
$K=\frac{K_0}{2}$		
A <sub>3</sub>	-1	-1
A <sub>4</sub>	-1	1
E <sub>n2</sub>	-2cosnφ	0
$K=\frac{K_0}{no}$		
E <sub>kl</sub>	2coskd	2coskd
E <sub>kl2</sub>	2coskd	-2coskd
G <sub>nk</sub>	4cosnφcoskd	0

$T \square C_{\infty h}$ $\infty:m(d)$	$(C(\phi)   \vec{t})$	$(S(\phi)   \vec{t})$
K=0		
A <sub>1</sub>	1	1
A <sub>2</sub>	1	-1
E <sub>n1</sub>	2cosnφ	2cosnφ
E <sub>n2</sub>	2cosnφ	-2cosnφ
$K=\frac{K_0}{2}$		
A <sub>3</sub>	-1	-1
A <sub>4</sub>	-1	1
E <sub>n3</sub>	-2cosnφ	-2cosnφ
E <sub>n4</sub>	-2cosnφ	2cosnφ
$K=\frac{K_0}{no}$		
E <sub>k</sub>	2coskd	0
G <sub>nk</sub>	4cosnφcoskd	0

$T_{\infty h}$	$m \cdot \infty : m(d)$	$(C(\phi)   \vec{t})$	$(\sigma_v(\phi)   \vec{t})$	$(S(\phi)   \vec{t})$	$(U_2(\phi)   \vec{t})$
$K=0$					
$A_1$	1	1	1	1	1
$A_2$	1	-1	1	-1	-1
$A_3$	1	1	-1	-1	-1
$A_4$	1	-1	-1	1	1
$E_{n1}$	$2\cos n\phi$	0	$2\cos n\phi$	0	0
$E_{n2}$	$2\cos n\phi$	0	$-2\cos n\phi$	0	0
$K=\frac{K_0}{2}$					
$A_5$	-1	-1	-1	-1	-1
$A_6$	-1	1	-1	1	1
$A_7$	-1	-1	1	1	1
$A_8$	-1	1	1	-1	-1
$E_{n3}$	$-2\cos n\phi$	0	$-2\cos n\phi$	0	0
$E_{n4}$	$-2\cos n\phi$	0	$2\cos n\phi$	0	0
$K=\frac{K_0}{n_0}$					
$E_{k1}$	$2\cos kd$	$2\cos kd$	0	0	0
$E_{k2}$	$2\cos kd$	$-2\cos kd$	0	0	0
$G_{nk}$	$4\cos n\phi \cos kd$	0	0	0	0

2) Groupes Smectiques avec H fini

$\epsilon=1$  si  $m$  est pair  
 $\epsilon=-1$  si  $m$  est impair

$T \square C_n$ $n(d)$ ( $n$ odd)	$(C_n^m   \vec{t})$
$K=0$	
$A_1$	1
$E_{r1}$	$2 \cos 2mr \frac{\pi}{n}$
$K=\frac{K_0}{2}$	
$A_2$	-1
$E_{r2}$	$-2 \cos 2mr \frac{\pi}{n}$
$K=\frac{K_0}{n_0}$	
$E_{k1}$	$2 \cos kd$
$E_{k2}$	$2 \cos (2mr \frac{\pi}{n} + kd)$
$E_{k3}$	$2 \cos (2mr \frac{\pi}{n} - kd)$

$T \square C_n$ $n(d)$ ( $n$ even)	$(C_n^m   \vec{t})$
$K=0$	
$A_1$	1
$A_2$	$\epsilon$
$E_{r1}$	$2 \cos 2mr \frac{\pi}{n}$
$K=\frac{K_0}{2}$	
$A_3$	-1
$A_4$	$-\epsilon$
$E_{r2}$	$-2 \cos 2mr \frac{\pi}{n}$
$K=\frac{K_0}{n_0}$	
$E_{k1}$	$2 \cos kd$
$E_{k2}$	$2 \cos kd$
$E_{kr1}$	$2 \cos (2mr \frac{\pi}{n} + kd)$
$E_{kr2}$	$2 \cos (2mr \frac{\pi}{n} - kd)$

$T \square S_{2n}$ $(2\tilde{n})(d)$ ( $n$ odd)	$(C_n^m   \vec{t})$	$(S_{2n}^m   \vec{t})$
$K=0$		
$A_1$	1	1
$A_2$	1	-1
$E_{r1}$	$2 \cos 2mr \frac{\pi}{n}$	$2 \cos 2mr \frac{\pi}{n}$
$E_{r2}$	$2 \cos 2mr \frac{\pi}{n}$	$-2 \cos 2mr \frac{\pi}{n}$
$K=\frac{K_0}{2}$		
$A_3$	-1	-1
$A_4$	-1	1
$E_{r3}$	$-2 \cos 2mr \frac{\pi}{n}$	$-2 \cos 2mr \frac{\pi}{n}$
$E_{r4}$	$-2 \cos 2mr \frac{\pi}{n}$	$2 \cos 2mr \frac{\pi}{n}$
$K=\frac{K_0}{n_0}$		
$E_{k1}$	$2 \cos kd$	0
$E_{kr1}$	$2 \cos (2mr \frac{\pi}{n} + kd)$	0
$E_{kr2}$	$2 \cos (2mr \frac{\pi}{n} - kd)$	

$T \square S_{2n}$ $(n)(2\tilde{n})(d)$ ( $n$ even)	$(C_n^m   \vec{t})$	$(S_{2n}^{2m}   \vec{t})$
$K=0$		
$A_1$	1	1
$A_2$	1	-1
$E_{r1}$	$2 \cos 2mr \frac{\pi}{n}$	$2 \cos mr \frac{\pi}{n}$
$K=\frac{K_0}{2}$		
$A_3$	-1	-1
$A_4$	-1	1
$E_{r2}$	$-2 \cos 2mr \frac{\pi}{n}$	$-2 \cos mr \frac{\pi}{n}$
$K=\frac{K_0}{n_0}$		
$E_{k1}$	$2 \cos kd$	0
$E_{kr1}$	$2 \cos (2mr \frac{\pi}{n} + kd)$	0
$E_{kr2}$	$2 \cos (2mr \frac{\pi}{n} - kd)$	0

$T_{0C_{nv}}$ $n:m(d)$ ( $n$ odd)	$(c_n^m   \vec{t})$	$(\sigma_v^m   \vec{t})$
$K=0$		
$A_1$	1	1
$A_2$	1	-1
$E_{r1}$	$2\cos 2m\frac{\pi}{n}$	0
$K=\frac{K_0}{2}$		
$A_3$	-1	-1
$A_4$	-1	1
$E_{r2}$	$-2\cos 2m\frac{\pi}{n}$	0
$K=\frac{K_0}{n_0}$		
$E_{k1}$	$2\cos kd$	$2\cos kd$
$E_{k2}$	$2\cos kd$	$-2\cos kd$
$G_{rk}$	$4\cos 2m\frac{\pi}{n}\cos kd$	0

$T_{0D_n}$ $n:2(d)$ ( $n$ odd)	$(c_n^m   \vec{t})$	$(u_2^m   \vec{t})$
$K=0$		
$A_1$	1	1
$A_2$	1	-1
$E_{r1}$	$2\cos 2m\frac{\pi}{n}$	0
$K=\frac{K_0}{2}$		
$A_3$	-1	-1
$A_4$	-1	1
$E_{r2}$	$-2\cos 2m\frac{\pi}{n}$	0
$K=\frac{K_0}{n_0}$		
$E_{k1}$	$2\cos kd$	0
$G_{rk}$	$4\cos 2m\frac{\pi}{n}\cos kd$	0

$T_{0C_{nv}}$ $n:m(d)$ ( $n$ even)	$(c_n^m   \vec{t})$	$(\sigma_v^m   \vec{t})$
$K=0$		
$A_1$	1	1
$A_2$	$\epsilon$	$\epsilon$
$A_3$	1	-1
$A_4$	$\epsilon$	$-\epsilon$
$E_{r1}$	$2\cos 2m\frac{\pi}{n}$	0
$K=\frac{K_0}{2}$		
$A_5$	-1	-1
$A_6$	$-\epsilon$	$-\epsilon$
$A_7$	-1	1
$A_8$	$-\epsilon$	$\epsilon$
$E_{r2}$	$-2\cos 2m\frac{\pi}{n}$	0
$K=\frac{K_0}{n_0}$		
$E_{k1}$	$2\cos kd$	$2\cos kd$
$E_{k2}$	$2\epsilon\cos kd$	$2\epsilon\cos kd$
$E_{k3}$	$2\cos kd$	$-2\cos kd$
$E_{k4}$	$2\epsilon\cos kd$	$-2\epsilon\cos kd$
$G_{rk}$	$4\cos 2m\frac{\pi}{n}\cos kd$	0

$T \square D_n$ $n:2(d)$ ( $n$ even)	$(C_n^m   \vec{t})$	$(U_2^m   \vec{t})$
$K=0$		
$A_1$	1	1
$A_2$	$\epsilon$	$\epsilon$
$A_3$	1	-1
$A_4$	$\epsilon$	$-\epsilon$
$E_{r1}$	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0
$K=\frac{K_0}{2}$		
$A_5$	-1	-1
$A_6$	$-\epsilon$	$-\epsilon$
$A_7$	-1	1
$A_8$	$-\epsilon$	$\epsilon$
$E_{r2}$	$-2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0
$K=\frac{K_0}{n_0}$		
$E_{k1}$	$2\cos kd$	0
$E_{k2}$	$2\epsilon \cos kd$	0
$G_{rk}$	$4\cos 2mr\frac{\pi}{n} \cos kd$	0

$T \square C_{nh}$ $n:m(d)$ ( $n$ odd)	$(C_n^m   \vec{t})$	$(S_n^m   \vec{t})$
$K=0$		
$A_1$	1	1
$A_2$	1	-1
$E_{r1}$	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$
$E_{r2}$	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	$-2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$
$K=\frac{K_0}{2}$		
$A_3$	-1	-1
$A_4$	-1	1
$E_{r3}$	$-2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	$-2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$
$E_{r4}$	$-2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$
$K=\frac{K_0}{n_0}$		
$E_{k1}$	$2\cos kd$	0
$G_{rk}$	$4\cos 2mr\frac{\pi}{n} \cos kd$	0

$T \square C_{nh}$	$(C_n^m   \vec{t})$	$(S_n^m   \vec{t})$
$n:m(d)$		
$(n \text{ even})$		
$K=0$		
$A_1$	1	1
$A_2$	$\epsilon$	$\epsilon$
$A_3$	1	-1
$A_4$	$\epsilon$	$-\epsilon$
$E_{r1}$	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$
$E_{r2}$	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	$-2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$
$K=\frac{K_0}{2}$		
$A_5$	-1	-1
$A_6$	$-\epsilon$	$-\epsilon$
$A_7$	-1	1
$A_8$	$-\epsilon$	$\epsilon$
$E_{r3}$	$-2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	$-2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$
$E_{r4}$	$-2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$
$K=\frac{K_0}{n_0}$		
$E_{k1}$	$2\cos kd$	0
$E_{k2}$	$2\epsilon \cos kd$	0
$G_{rk}$	$4\cos 2mr\frac{\pi}{n} \cos pkd$	0

$T \square D_{nd}^d (2\tilde{n}) (d)$ n odd	$(c_n^m   \tilde{t})$	$(u_2^m   \tilde{t})$	$(s_{2n}^m   \tilde{t})$	$(\sigma_d^m   \tilde{t})$
K=0				
A <sub>1</sub>	1	1	1	1
A <sub>2</sub>	1	-1	1	-1
A <sub>3</sub>	1	1	-1	-1
A <sub>4</sub>	1	-1	-1	1
E <sub>r1</sub>	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0
E <sub>r2</sub>	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0	$-2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0
$K=\frac{K_0}{2}$				
A <sub>5</sub>	-1	-1	-1	-1
A <sub>6</sub>	-1	1	-1	1
A <sub>7</sub>	-1	-1	1	1
A <sub>8</sub>	-1	1	1	-1
E <sub>r3</sub>	$-2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0	$-2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0
E <sub>r4</sub>	$-2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0
$K=\frac{K_0}{n_0}$				
E <sub>k1</sub>	$2\cos kd$	0	0	$2\cos kd$
E <sub>k2</sub>	$2\cos kd$	0	0	$-2\cos kd$
G <sub>rk</sub>	$4\cos 2mr\frac{\pi}{n}\cos kd$	0	0	0
$T \square D_{nd}^d (2\tilde{n}) (d)$ (n. even)	$(c_n^m   \tilde{t})$	$(s_{2n}^m   \tilde{t})$	$(\sigma_d^m   \tilde{t})$	$(u_2^m   \tilde{t})$
K=0				
A <sub>1</sub>	1	1	1	1
A <sub>2</sub>	1	-1	1	-1
A <sub>3</sub>	1	1	-1	-1
A <sub>4</sub>	1	-1	-1	1
E <sub>r1</sub>	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0	0
$K=\frac{K_0}{2}$				
A <sub>5</sub>	-1	-1	-1	-1
A <sub>6</sub>	-1	1	-1	1
A <sub>7</sub>	-1	-1	1	1
A <sub>8</sub>	-1	1	1	-1
E <sub>r2</sub>	$-2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	$-2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0	0
$K=\frac{K_0}{n_0}$				
E <sub>k1</sub>	$2\cos kd$	0	$2\cos kd$	0
E <sub>k2</sub>	$2\cos kd$	0	$-2\cos kd$	0
G <sub>rk</sub>	$4\cos 2mr\frac{\pi}{n}\cos kd$	0	0	0

$T_{nh}$ m.n:m(d) n odd	$(c_n^m   \xi)$	$(u_2^m   \xi)$	$(s_n^m   \xi)$	$(\sigma_n^m   \xi)$
K=0				
A <sub>1</sub>	1	1	1	1
A <sub>2</sub>	1	-1	1	-1
A <sub>3</sub>	1	1	-1	-1
A <sub>4</sub>	1	-1	-1	1
E <sub>r1</sub>	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0
E <sub>r2</sub>	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0	$-2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0
K= $\frac{K_0}{2}$				
A <sub>5</sub>	-1	-1	-1	-1
A <sub>6</sub>	-1	1	-1	1
A <sub>7</sub>	-1	-1	1	1
A <sub>8</sub>	-1	1	1	-1
E <sub>r3</sub>	$-2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0	$-2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0
E <sub>r4</sub>	$-2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0
K= $\frac{K_0}{n_0}$				
E <sub>k1</sub>	$2\cos kd$	0	0	$2\cos kd$
E <sub>k2</sub>	$2\cos kd$	0	0	$-2\cos kd$
G <sub>rk</sub>	$4\cos 2mr\frac{\pi}{n}\cos kd$	0	0	0

$T_{D_{nh}}$	$(C_n^m   \xi)$	$(U_{2n}^m   \xi)$	$(S_{2n}^m   \xi)$	$(\sigma_V^m   \xi)$
$m.n:m(d)$ $n$ even $K=0$				
$A_1$	1	1	1	1
$A_2$	$\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$
$A_3$	1	-1	1	-1
$A_4$	$\epsilon$	$-\epsilon$	$\epsilon$	$-\epsilon$
$A_5$	1	1	-1	-1
$A_6$	$\epsilon$	$\epsilon$	$-\epsilon$	$-\epsilon$
$A_7$	1	-1	-1	1
$A_8$	$\epsilon$	$-\epsilon$	$-\epsilon$	$\epsilon$
$E_{r1}$	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0
$E_{r2}$	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0	$-2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0
$K=\frac{K_0}{2}$				
$A_9$	-1	-1	-1	-1
$A_{10}$	$-\epsilon$	$-\epsilon$	$-\epsilon$	$-\epsilon$
$A_{11}$	-1	1	-1	1
$A_{12}$	$-\epsilon$	$\epsilon$	$-\epsilon$	$\epsilon$
$A_{13}$	-1	-1	1	1
$A_{14}$	$-\epsilon$	$-\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$
$A_{15}$	-1	1	1	-1
$A_{16}$	$-\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$	$-\epsilon$
$E_{r3}$	$-2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0	$-2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0
$E_{r4}$	$-2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0
$K=\frac{K_0}{n_0}$				
$E_{k1}$	$2\cos kd$	0	0	$2\cos kd$
$E_{k2}$	$2\epsilon \cos kd$	0	0	$2\epsilon \cos kd$
$E_{k3}$	$2\cos kd$	0	0	$-2\cos kd$
$E_{k4}$	$2\epsilon \cos kd$	0	0	$-2\epsilon \cos kd$
$G_{rk}$	$4\cos 2mr\frac{\pi}{n} \cos kd$	0	0	0

$R \square C_{\infty}$ $\infty(\alpha)$	$(C(\phi)   \alpha)$
$\alpha = \alpha'$	
$A_1$	1
$A_2$	1
$E_n$	$2\cos n\phi$
$\alpha \neq \alpha'$	
$E_k$	$2\cos kd$
$E_{nk1}$	$2\cos(n\phi + kd)$
$E_{nk2}$	$2\cos(n\phi - kd)$

$R \square D_{\infty}$ $\infty:2(\alpha)$	$(C(\phi)   \alpha)$	$(U_2(\phi)   \alpha)$
$\alpha = \alpha'$		
$A_1$	1	1
$A_2$	1	-1
$E_n$	$2\cos n\phi$	0
$\alpha \neq \alpha'$		
$E_k$	$2\cos kd$	0
$G_{nk}$	$4\cos n\phi \cos kd$	0

$R \square C_{\infty v}$ $\infty.m(\alpha)$	$(C(\phi)   \alpha)$	$(\sigma_v(\phi)   \alpha)$
$\alpha = \alpha'$		
$A_1$	1	1
$A_2$	1	-1
$E_n$	$2\cos n\phi$	0
$\alpha \neq \alpha'$		
$E_{k1}$	$2\cos kd$	$2\cos kd$
$E_{k2}$	$2\cos kd$	$-2\cos kd$
$G_{nk}$	$4\cos n\phi \cos kd$	0

$R \square C_{\infty h}$ $\infty:m(\alpha)$	$(C(\phi)   \alpha)$	$(C(\phi)\sigma_h   \alpha)$
$\alpha = \alpha'$		
$A_1$	1	1
$A_2$	1	-1
$E_{n1}$	$2\cos n\phi$	$2\cos n\phi$
$E_{n2}$	$2\cos n\phi$	$-2\cos n\phi$
$\alpha \neq \alpha'$		
$E_k$	$2\cos kd$	0
$G_{nk}$	$4\cos n\phi \cos kd$	0

$R \square D_{\infty h}$ $m, \infty : m(\alpha)$	$(C(\phi)   \alpha)$	$(\sigma_v(\phi)   \alpha)$	$(C(\phi) \sigma_h   \alpha)$	$(\sigma_v(\phi) \sigma_h   \alpha)$
$\alpha = \alpha'$				
$A_1$	1	1	1	1
$A_2$	1	-1	1	-1
$A_3$	1	1	-1	-1
$A_4$	1	-1	-1	1
$E_{n1}$	$2\cos n\phi$	0	$2\cos n\phi$	0
$E_{n2}$	$2\cos n\phi$	0	$-2\cos n\phi$	0
$\alpha \neq \alpha'$				
$E_{k1}$	$2\cos kd$	$2\cos kd$	0	0
$E_{k2}$	$2\cos kd$	$-2\cos kd$	0	0
$G_{nk}$	$4\cos n\phi \cos kd$	0	0	0

4) Groupes Nématiques avec H fini

$R \square C_n$ $n(\alpha)$ (n odd)	$(C_n^m   \alpha)$
$\alpha = \alpha'$	
A	1
$E_r$	$2\cos \frac{2mr\pi}{n}$
$\alpha \neq \alpha'$	
$E_k$	$2\cos kd$
$E_{qr1}$	$2\cos \left( \frac{2mr\pi}{n} + kd \right)$
$E_{kr2}$	$2\cos \left( \frac{2mr\pi}{n} - kd \right)$

$R \square C_n$ $n(\alpha)$ (n even)	$(C_n^m   \alpha)$
$\alpha = \alpha'$	
$A_1$	1
$A_2$	$\epsilon$
$E_r$	$2\cos \frac{2mr\pi}{n}$
$\alpha \neq \alpha'$	
$E_{k1}$	$2\cos kd$
$E_{k2}$	$2\epsilon \cos kd$
$E_{kr1}$	$2\cos \left( \frac{2mr\pi}{n} + kd \right)$
$E_{kr2}$	$2\cos \left( \frac{2mr\pi}{n} - kd \right)$

$R \square S_{2n}$ $(2\tilde{n})(\alpha)$ (n odd)	$(C_n^m   \alpha)$	$(S_{2n}^m   \alpha)$
$\alpha = \alpha'$		
$A_1$	1	1
$A_2$	1	-1
$E_{r1}$	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$
$E_{r2}$	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	$-2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$
$\alpha \neq \alpha'$		
$E_k$	$2\cos kd$	0
$E_{kr1}$	$2\cos(2mr\frac{\pi}{n} + kd)$	0
$E_{kr2}$	$2\cos(2mr\frac{\pi}{n} - kd)$	0

$R \square S_{2n}$ $(2\hat{n})(\alpha)$ (n even)	$(C_n^m   \alpha)$	$(S_{2n}^m   \alpha)$
$\alpha = \alpha$		
$A_1$	1	1
$A_2$	1	-1
$E_r$	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	$2\cos mr\frac{\pi}{n}$
$\alpha \neq \alpha'$		
$E_k$	$2\cos kd$	0
$E_{kr1}$	$2\cos(2mr\frac{\pi}{n} + kd)$	0
$E_{kr2}$	$2\cos(2mr\frac{\pi}{n} - kd)$	0

$R \square D_n$ $n:2(\alpha)$ (n odd)	$(C_n^m   \alpha)$	$(U_2^m   \alpha)$
$\alpha = \alpha$		
$A_1$	1	1
$A_2$	1	-1
$E_r$	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0
$\alpha \neq \alpha'$		
$E_k$	$2\cos kd$	0
$G_{rk}$	$4\cos 2mr\frac{\pi}{n} \cos kd$	0

$R \square D_n$ $n:2(\alpha)$ (n even)	$(C_n^m   \alpha)$	$(U_2^m   \alpha)$
$\alpha = \alpha'$		
$A_1$	1	1
$A_2$	$\epsilon$	$\epsilon$
$A_3$	1	-1
$A_4$	$\epsilon$	$-\epsilon$
$E_r$	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0
$\alpha \neq \alpha'$		
$E_{k1}$	$2\cos kd$	0
$E_{k2}$	$2\epsilon \cos kd$	0
$G_{rk}$	$4\cos 2mr\frac{\pi}{n} \cos kd$	0

$R \square C_{nv}$ $n:m(\alpha)$ (n odd)	$(C_n^m   \alpha)$	$(\sigma_v^m   \alpha)$
$\alpha = \alpha'$		
$A_1$	1	1
$A_2$	1	-1
$E_r$	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0
$\alpha \neq \alpha'$		
$E_{k1}$	$2\cos kd$	$2\cos kd$
$E_{k2}$	$2\cos kd$	$-2\cos kd$
$G_{rk}$	$4\cos 2mr\frac{\pi}{n} \cos kd$	0

$R \square C_{nv}$ $n:m(\alpha)$ (n even)	$(C_n^m   \alpha)$	$(\sigma_v^m   \alpha)$
$\alpha = \alpha'$		
$A_1$	1	1
$A_2$	$\epsilon$	$\epsilon$
$A_3$	1	-1
$A_4$	$\epsilon$	$-\epsilon$
$E_r$	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0
$\alpha \neq \alpha'$		
$E_{k1}$	$2\cos kd$	$2\cos kd$
$E_{k2}$	$2\epsilon \cos kd$	$2\epsilon \cos kd$
$E_{k3}$	$2\cos kd$	$-2\cos kd$
$E_{k4}$	$2\epsilon \cos kd$	$-2\epsilon \cos kd$
$G_{rk}$	$4\cos 2mr\frac{\pi}{n} \cos kd$	0

$R \square C_{nh}$ $n:m(\alpha)$ (n odd)	$(C_n^m   \alpha)$	$(S_{2n}^m   \alpha)$
$\alpha = \alpha'$		
$A_1$	1	1
$A_2$	1	-1
$E_{r1}$	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$
$E_{r2}$	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	$-2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$
$\alpha \neq \alpha'$		
$E_k$	$2\cos kd$	0
$G_{rk}$	$4\cos 2mr\frac{\pi}{n} \cos kd$	0

$R \square C_{nh}$ $n:m(\alpha)$ (n even)	$(C_n^m   \alpha)$	$(S_{2n}^m   \alpha)$
$\alpha = \alpha'$		
$A_1$	1	1
$A_2$	$\epsilon$	$\epsilon$
$A_3$	1	-1
$A_4$	$\epsilon$	$-\epsilon$
$E_{r1}$	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$
$E_{r2}$	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	$-2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$
$\alpha \neq \alpha'$		
$E_{k1}$	$2\cos kd$	0
$E_{k2}$	$2\epsilon \cos kd$	0
$G_{rk}$	$4\cos 2mr\frac{\pi}{n} \cos kd$	0

$R \square D_{nd}$ $m. (\tilde{2n})(\alpha)$ (n odd)	$(C_n^m   \alpha)$	$(U_2^m   \alpha)$	$(S_{2n}^m   \alpha)$	$(\sigma_d^m   \alpha)$
$\alpha = \alpha$				
$A_1$	1	1	1	1
$A_2$	1	-1	1	-1
$A_3$	1	1	-1	-1
$A_4$	1	-1	-1	1
$E_{r1}$	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0
$E_{r2}$	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0	$-2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0
$\alpha \neq \alpha$				
$E_{k1}$	$2\cos kd$	0	0	$2\cos kd$
$E_{k2}$	$2\cos kd$	0	0	$-2\cos kd$
$G_{rk}$	$4\cos 2mr\frac{\pi}{n} \cos kd$	0	0	0

$R \square D_{nd}$ $m. (\tilde{2n})(\alpha)$ (n even)	$(C_n^m   \alpha)$	$(S_{2n}^m   \alpha)$	$(\sigma_d^m   \alpha)$	$(U_2^m   \alpha)$
$\alpha = \alpha$				
$A_1$	1	1	1	1
$A_2$	1	-1	1	-1
$A_3$	1	1	-1	-1
$A_4$	1	-1	-1	1
$E_r$	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	$2\cos mr\frac{\pi}{n}$	0	0
$\alpha \neq \alpha$				
$E_{k1}$	$2\cos kd$	0	$2\cos kd$	0
$E_{k2}$	$2\cos kd$	0	$-2\cos kd$	0
$G_{rk}$	$4\cos 2mr\frac{\pi}{n} \cos kd$	0	0	0

$R \sqcup U_{nh}$					
$m.n:m(\alpha)$					
$(n \text{ odd})$		$(C_n^m   \alpha)$	$(U_2^m   \alpha)$	$(S_n^m   \alpha)$	$(\sigma_V^m   \alpha)$
$\alpha = \alpha$	$A_1$	1	1	1	1
	$A_2$	1	-1	1	-1
	$A_3$	1	1	-1	-1
	$A_4$	1	-1	-1	1
	$E_{r1}$	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0
	$E_{r2}$	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0	$-2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0
	$\alpha \neq \alpha$				
	$E_{k1}$	$2\cos kd$	0	0	$2\cos kd$
	$E_{k2}$	$2\cos kd$	0	0	$2\cos kd$
	$G_{rk}$	$4\cos 2mr\frac{\pi}{n} \cos kd$	0	0	0
$R \sqcup D_{nh}$					
$m.n:m(\alpha)$					
$(n \text{ even})$		$(C_n^m   \alpha)$	$(U_2^m   \alpha)$	$(S_{2n}^m   \alpha)$	$(\sigma_V^m   \alpha)$
$\alpha = \alpha$	$A_1$	1	1	1	1
	$A_2$	$\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$
	$A_3$	1	-1	1	-1
	$A_4$	$\epsilon$	$-\epsilon$	$\epsilon$	$-\epsilon$
	$A_5$	1	1	-1	-1
	$A_6$	$\epsilon$	$\epsilon$	$-\epsilon$	$-\epsilon$
	$A_7$	1	-1	-1	1
	$A_8$	$\epsilon$	$-\epsilon$	$-\epsilon$	$\epsilon$
	$E_{r1}$	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0
	$E_{r2}$	$2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0	$-2\cos 2mr\frac{\pi}{n}$	0
	$\alpha \neq \alpha$				
	$E_{k1}$	$2\cos kd$	0	0	$2\cos kd$
	$E_{k2}$	$2\epsilon \cos kd$	0	0	$2\epsilon \cos kd$
	$E_{k3}$	$2\cos kd$	0	0	$-2\cos kd$
$E_{k4}$	$2\epsilon \cos kd$	0	0	$-2\epsilon \cos kd$	
$G_{rk}$	$4\cos 2mr\frac{\pi}{n} \cos kd$	0	0	0	



ANNEXE 2

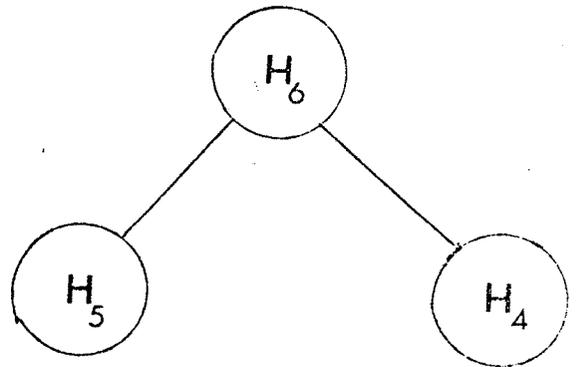
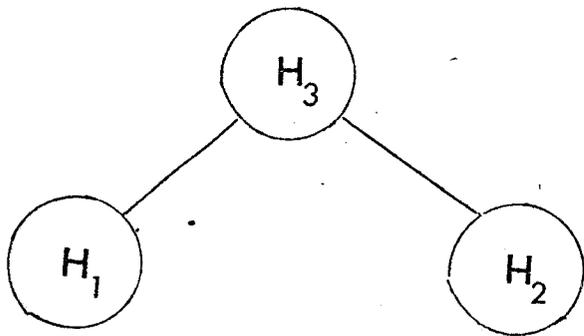
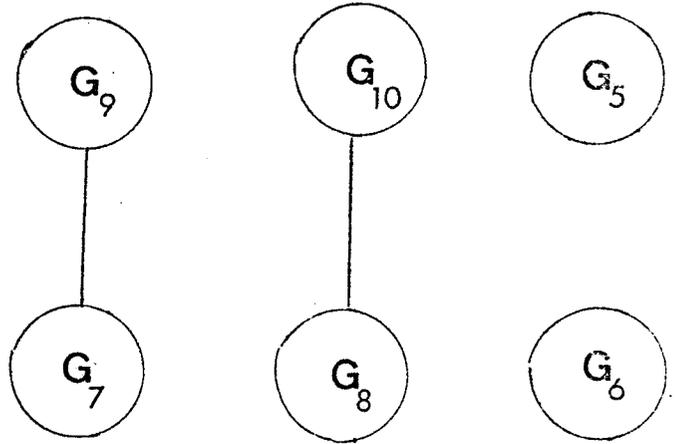
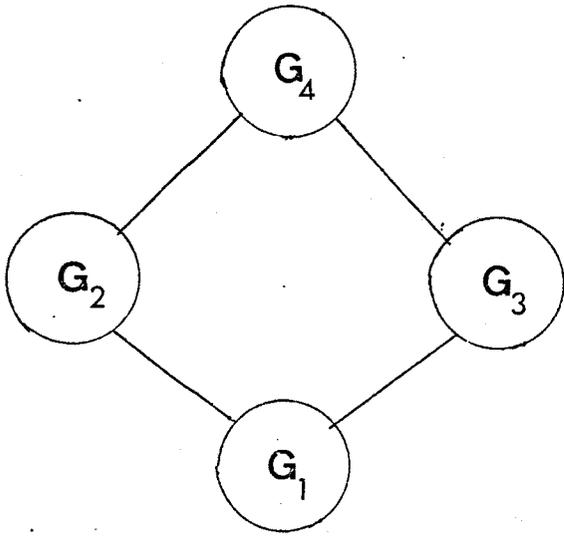
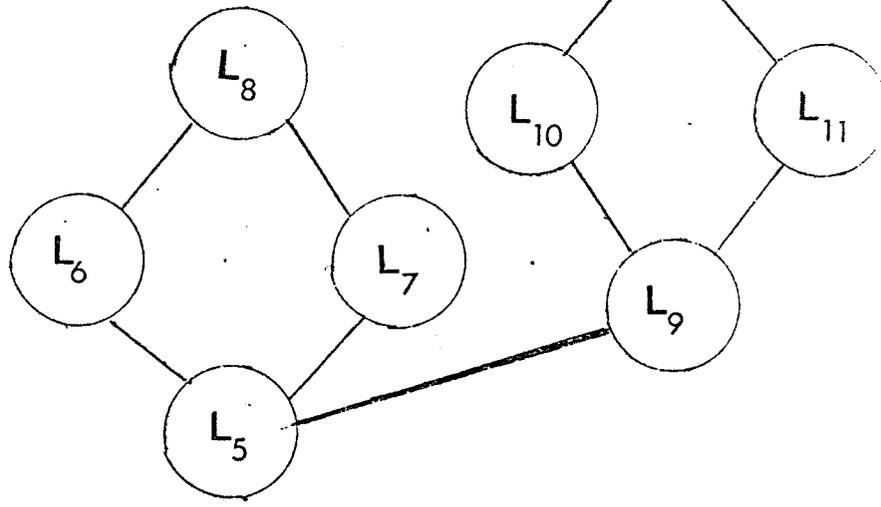
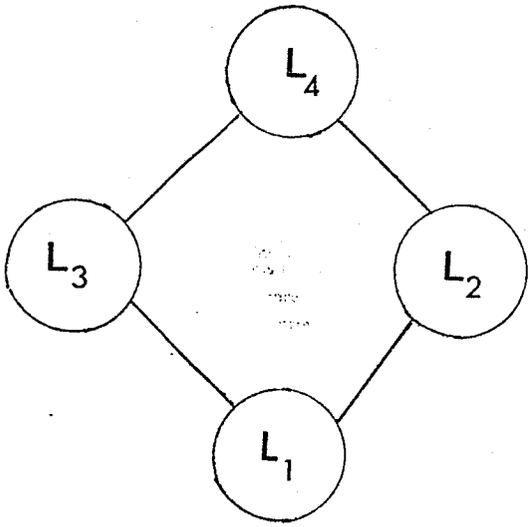
IMAGES DES REPRESENTATIONS IRREDUCTIBLES  
DES GROUPES SMECTIQUES ET NEMATIQUES.

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \begin{bmatrix} e^{i\phi} & \\ & e^{-i\phi} \end{bmatrix} ; & L_2 &= L_1 + \begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix} ; & L_3 &= L_1 + \begin{bmatrix} & 1 \\ +1 & \end{bmatrix} \\
 L_4 &= L_2 + L_3 ; & L_5 &= \begin{bmatrix} e^{2imr\pi/n} & \\ & e^{-2imr\pi/n} \end{bmatrix} ; & L_6 &= L_5 + \begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \\
 L_7 &= L_5 + \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} ; & L_8 &= L_6 + L_7 ; & L_9 &= L_5 + \begin{bmatrix} e^{imr\pi/n} & \\ & e^{-imr\pi/n} \end{bmatrix} \\
 L_{10} &= L_9 + \begin{bmatrix} & -1 \\ & -1 \end{bmatrix} ; & L_{11} &= L_9 + \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} ; & L_{12} &= L_{10} + L_{11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_1 &= \begin{bmatrix} e^{ikd} & \\ & e^{-ikd} \end{bmatrix} ; & G_2 &= G_1 + \begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix} ; & G_3 &= G_1 + \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \\
 G_4 &= G_2 + G_3 ; & G_5 &= L_1 \times G_1 ; & G_6 &= L_1 \times G_1^* \\
 G_7 &= \begin{bmatrix} e^{2imr\pi/n} & \\ & e^{-rimr\pi/n} \end{bmatrix} \times G_1 ; & G_8 &= \begin{bmatrix} e^{2imr\pi/n} & \\ & e^{-rimr\pi/n} \end{bmatrix} \times G_1^* \\
 G_9 &= G_7 + \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} ; & G_{10} &= G_8 + \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_0 &= \begin{bmatrix} e^{i\phi} e^{ikd} & & & \\ & e^{-i\phi} e^{-ikd} & & \\ & & e^{i\phi} e^{-ikd} & \\ & & & e^{-i\phi} e^{ikd} \end{bmatrix} ; & H_1 &= H_0 + \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & & 1 \\ & & 1 & \\ 1 & & & \end{bmatrix} \\
 H_2 &= H_0 + \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & & 1 \\ & & 1 & \\ 1 & & & \end{bmatrix} ; & H_3 &= H_1 + H_2 \\
 H_0^1 &= \begin{bmatrix} e^{2imr\pi/n} e^{ikd} & & & \\ & e^{-2imr\pi/n} e^{-ikd} & & \\ & & e^{2imr\pi/n} e^{-ikd} & \\ & & & e^{-2imr\pi/n} e^{ikd} \end{bmatrix} ; & H_4 &= H_0^1 + \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & & 1 \\ & & 1 & \\ 1 & & & \end{bmatrix} \\
 H_5 &= H_0^1 + \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & & 1 \\ & & 1 & \\ 1 & & & \end{bmatrix} ; & H_6 &= H_4 + H_5
 \end{aligned}$$

2) Relations entre Images d'une même classe



## RESUME DE LA THESE

Nous présentons les résultats de l'application de la théorie de Landau aux transitions susceptibles de se produire à partir d'une phase nématique ou smectique. Ces résultats présentent sous forme de tables les changements de symétrie et les énergies libres de Landau associées aux transitions nématique-nématique, nématique-cholestérique, nématique-smectique et smectique-smectique. Ils révèlent que seuls des paramètres d'ordre de dimension 1, 2 ou 4 décrivent les transitions précédentes. D'autre part, ils prédisent une prépondérance des transitions du 1er ordre, des phases semi-ordonnées (incommensurables) ainsi que l'existence d'effets (ferroélectrique, flexoélectrique) résultant du couplage des grandeurs macroscopiques spontanées (polarisation, déformation) avec le paramètre d'ordre.

### Mots clefs

- Cristaux liquides
- Transitions de phases
- Théorie de Landau