

N° d'ordre : 1191

50376
1984
185

50376
1984
185

THÈSE

PRÉSENTÉE A

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

SPECIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

PAR

SBAÏ MOHAMED



LA COCATÉGORIE RATIONNELLE D'UN ESPACE

MEMBRES DU JURY : D. LEHMANN, PRÉSIDENT
J.C. THOMAS, RAPPORTEUR
Y. FÉLIX, } EXAMINATEURS
D. TANRÉ, }

SOUTENUE LE 11 SEPTEMBRE 1984

Monsieur Daniel LEHMANN m'a fait l'honneur de présider ce jury, je lui en suis très reconnaissant.

Je voudrais dire toute ma gratitude à Jean-Claude THOMAS qui a guidé mes premières tentatives de recherche mathématique.

Je tiens à remercier Daniel TANRÉ et Yves FÉLIX pour l'intérêt qu'ils ont marqué pour ce travail. Leur aide généreuse m'a été très bénéfique.

Je remercie également toutes celles et tous ceux qui en différentes circonstances m'ont apporté leur soutien durant l'élaboration de ce travail.

Madame Claudine EVRARD a dactylographié ce travail avec autant de soin que de patience, je l'en remercie sincèrement ainsi que les services de l'imprimerie de l'U.E.R. de Mathématiques de Lille I.

P L A N

<u>CHAPITRE I</u> : COCATEGORIE D'UNE ALGEBRE DE LIE DIFFERENTIELLE GRADUEE	
- 1.3. Cocatégorie rationnelle	4
- 1.4. cocat_0 et les autres invariants d'homotopie rationnelle	5
<u>CHAPITRE II</u> : COCATEGORIE RATIONNELLE ET SUITE SPECTRALE D'EILENBERG-MOORE D'UN ESPACE	14
- II.1.1. Définition de l'invariant $\varepsilon_0(S)$	15
- II.5. $\varepsilon_0(S)$ et l'invariant $\text{cocat}_0(S)$	22
<u>CHAPITRE III</u> : COCATEGORIE D'UNE ALGEBRE DIFFERENTIELLE GRADUEE COMMUTATIVE	26
- III.1.5. $\text{cocat}_0(S)$ et $\text{cocat}(A_{\text{PL}}(S), d_S)$	28
- III.1.6.2. cocat_0 d'un espace formel	28
- III.2. Défaut de dualité entre $\text{cocat}_0 S$ et la catégorie rationnelle	41
<u>CHAPITRE IV</u> : UN MODELE DE LA FIBRE HOMOTOPIQUE D'UNE APPLICATION	43
- IV.1. Suite exacte d'algèbre de Lie libres	43
- IV.3. Une différentielle sur le modèle de la fibre	48
- IV.7. La construction fibre-cofibre	58
<u>CHAPITRE V</u> : TYPE D'HOMOTOPIE RATIONNELLE DES ESPACES DE GANEA	61
- V.2.1. Modèle de Quillen de $G_n(S)$	62
- V.3. Une description de $H_*(G_n(S), Q)$	63

<u>CHAPITRE VI</u> : LA CO-CATEGORIE RATIONNELLE D'UN ESPACE TOPOLOGIQUE ET L'INVARIANT COCAT S_0	68
- VI.2. Une graduation sur $L(U \oplus V_n)$	70
- VI.2.3. Filtration compatible à la différentielle	72
- VI.2.5. Démonstration de $\text{cocat } S_0 \leq \text{cocat } S$	74
 BIBLIOGRAPHIE	 80

INTRODUCTION

La construction d'invariants algébriques facilitant l'étude des espaces topologiques constitue un principe fondamental de la topologie algébrique. Leur détermination explicite reste d'ailleurs souvent un problème ouvert, même pour ceux exprimés sous formes d'entiers naturels. Parmi eux la catégorie de Lusternick-Schnirelmann d'un espace topologique S , notée $\text{cat } S$, tient une place prépondérante.

Définition. $\text{cat } S$ est le plus petit entier n tel que S soit réunion de $(n+1)$ ouverts contractiles dans S .

Primitivement introduit en calcul de variation, il s'est révélé de première importance en topologie algébrique, après les travaux de G. Whitehead. Ce dernier démontre son invariance homotopique, à partir de la caractérisation suivante :

Théorème [Wh]. Soit $\Delta : S \rightarrow S^{n+1}$ la diagonale et $i : T^n(S) \rightarrow S^{n+1}$ l'inclusion du bouquet garni (fat wedge) dans le produit cartésien S^{n+1} . $\text{cat } S \leq n$ si et seulement si il existe une application continue $\psi : S \rightarrow T^n(S)$ telle que $i \circ \psi$ soit homotope à Δ .

T. Ganea fournit une deuxième caractérisation, mieux adaptée à une dualisation au sens Eckmann-Hilton sur laquelle nous reviendrons. Pour cela, il construit une suite d'espaces topologiques et d'applications continues $f_n : E_n(S) \rightarrow S$ de la manière suivante :

Soit $f_0 : P(S) \rightarrow S$, la fibration universelle, posons $E_0(S) = P(S)$. Supposons avoir construit $f_n : E_n(S) \rightarrow S$, et désignons par $j_n : F_n(S) \rightarrow E_n(S)$ l'inclusion de la fibre homotopique de f_n ;

$E_{n+1}(S)$ s'obtient alors comme le cône de j_n . Le prolongement de f_n à $E_{n+1}(S)$ envoie le cône de $F_n(S)$ sur le point base de S et définit ainsi $f_{n+1} : E_{n+1}(S) \rightarrow S$.

Théorème [Ga]₁ : $\text{cat } S \leq n$ si et seulement si il existe une application continue $s_n : S \rightarrow E_n(S)$ telle que $f_n \circ s_n$ soit homotope à l'identité de S .

Le calcul général s'avérant toujours un problème ouvert, T. Toomer en considère une approximation. Supposons désormais que S a le type d'homotopie rationnelle d'un CW-complexe, 1-connexe à nombre de Betti finis (S est dit de \mathbb{Q} -type fini) et désignons par S_0 le rationalisé ($[H-M-R]$) de S .

Théorème [To]₁ : $\text{cat } S_0 \leq \text{cat } S$

Mais surtout s'ouvre la possibilité de calculer $\text{cat } S_0$ à partir de la suite spectrale de Milnor-Moore de l'espace S . Cette dernière fournit un nombre $e(S)$ minorant $\text{cat } S_0$ et Toomer conjecture l'égalité.

Un contre exemple ($e = 2$, $\text{cat} = 3$) est donné par Lemaire-Sigrist [L-S], un deuxième construit par Félix-Halperin-Thomas [F-H-T]₃ ($e = 2$, $\text{cat} = \infty$) enlève tout espoir d'une relation liant $e(S)$ et $\text{cat } S_0$.

Se pose alors le problème de définir $\text{cat } S_0$ sans faire intervenir la construction topologique du rationalisé S_0 , c'est chose faite par Y. Félix et S. Halperin, avec la théorie du modèle minimal de Sullivan de S : Notons $(\Lambda X, d)$ un tel modèle, ΛX se décompose naturellement suivant la longueur des mots $\Lambda X = \bigoplus_{i \geq 0} \Lambda^i X$.

Théorème [F-H] : $\text{cat } S_0 \leq n$ si et seulement si la projection canonique $(\Lambda X, d) \rightarrow (\Lambda X / \Lambda^{>n} X, \bar{d})$ admet une rétraction homotopique.

Des invariants duaux, au sens Eckmann-Hilton ($[\text{Hi}]_1$), sont également introduits par T. Ganéa, P; Hilton et J. Hopkins. Plus précisément :

- Par une construction duale de celle donnée ci-dessus pour la catégorie d'un espace S , T. Ganéa, définit dans $[\text{Ga}]_2$ la cocatégorie de S . C'est un invariant homotopique, notons le $\text{cocat } S$.

- P.J. Hilton, définit dans $[\text{Hi}]_2$, un invariant noté "class" dans la catégorie des complexes semi-simpliciaux, en dualisant l'interprétation en bouquets garnis de G. Whitehead.

- Beaucoup plus récemment J. Hopkins, $[\text{Ho}]$, à partir des limites homotopiques projectives et inductives, dualise la définition originale de la catégorie d'un espace, il introduit ainsi l'invariant "Sym cocat S " et démontre :

$$\text{cocat } S \leq \text{Sym cocat } S.$$

Dans ce travail, nous étudions les deux premières dualisations, avec la théorie du modèle minimal. Nous distinguons deux étapes :

Première étape.

- Nous dualisons la définition de la catégorie rationnelle d'un espace telle qu'elle a été donnée par Y. Félix et S. Halperin $[\text{F-H}]$, on définit ainsi l'invariant homotopique noté $\text{cocat } S_0$ à partir du modèle minimal de Quillen de l'espace S . Nous le comparons par la suite à d'autres invariants de l'homotopie rationnelle de S (Théorème I.4.2.).

- Nous définissons ensuite l'invariant $\varepsilon_0(S)$ (dual de $e(S)$) à partir de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore de l'espace S . Désignons par $\text{Nil } \pi_*(\Omega S) \otimes \mathbb{Q}$ la nilpotence de l'algèbre de Lie d'homotopie de l'espace S ; nous avons alors :

Théorème. Soit S un espace topologique, pointé, 1-connexe et de \mathbb{Q} -type fini. Alors

$$\text{Nil } \pi_*(\Omega S) \otimes \mathbb{Q} \leq \varepsilon_0(S) \leq \text{cocat}_0 S.$$

. Lorsque S est coformal ces trois invariants sont égaux

. Lorsque S est formel $\varepsilon_0(S) = \text{cocat}_0 S$.

- L'adaptation de l'invariant "class" de Hilton $[\text{Hi}]_2$, à la catégorie des algèbres de Lie graduées et différentielles fournit un nouvel invariant du type d'homotopie rationnelle d'un espace S , on le note $h_0(S)$. Nous montrons $h_0(S) = \varepsilon_0(S)$.

- Le principe de dualité Quillen-Sullivan ($[\text{F-T}]_1$) permet encore d'exprimer $\text{cocat}_0 S$ en terme de modèle filtré de S , au sens Halperin-Stasheff ($[\text{H-S}]$). Comme conséquence nous obtenons :

Corollaire. Si S est formel alors

$$\text{cocat}_0 S \leq 2 \quad \text{ou} \quad \text{cocat}_0 S = \infty.$$

- Cependant un résultat fondamental (par ses différentes applications $[\text{F-H-T}]_{1,2,3,4}$) de $[\text{F-H}]$, le "Mapping theorem" n'admet aucun énoncé dual (III.2).

Deuxième étape.

Nous mimons algébriquement, à l'aide des modèles de Quillen, le procédé de construction de Ganéa, qui permet de définir $\text{cocat } S \text{ [Ga]}_2$.

Pour cela nous explicitons un modèle de Quillen de la fibre homotopique d'une application continue entre espaces topologiques 1-connexes. Ceci permet de calculer un modèle de Quillen des espaces de Ganéa, de définir $\text{cocat } S_0$ et de la comparer à $\text{cocat}_0 S$.

Théorème. Soit S un espace topologique pointé, 1-connexe, et de Q-type fini alors $\text{cocat } S_0 \leq \text{cocat}_0 S$.

Corollaire. Lorsque S est coformal $\text{cocat}_0 S = \text{cocat } S_0$.

Ceci confirme la conjecture $\text{cocat}_0 S = \text{cocat } S_0$ pour tout espace S , résultat dual de celui obtenu, pour la catégorie rationnelle, par Y. Félix et S. Halperin dans [F-H].

Nous avons suivi les notations et définitions utilisées par D. Tanré dans "Homotopie rationnelle : modèles de Chen, Quillen, Sullivan". Nous renvoyons le lecteur à cette référence, ce qui nous évite d'alourdir plus ce texte par des rappels.

CHAPITRE I

CO-CATÉGORIE D'UNE ALGÈBRE DE LIE DIFFÉRENTIELLE GRADUÉE

Dans ce chapitre nous rappelons les notations et définitions de base. Nous définissons ensuite la cocatégorie d'une algèbre de Lie différentielle graduée et d'un espace topologique 1-connexe, de type fini. Pour cela nous dualisons au sens d'Eckmann-Hilton, la définition de la catégorie rationnelle présentée par Y. Félix et S. Halperin [F,H].

Nous comparons ensuite cet invariant à la nilpotence de l'algèbre de Lie d'homotopie rationnelle et étudions sa compatibilité au produit Cartésien de deux espaces.

Enfin, pour tout entier, nous exhibons un espace de cocatégorie n .

I.1. Rappels et définitions.

I.1.1. a.l.d.g, modèle de Quillen.

. Les espaces vectoriels et les algèbres sont définis sur \mathbb{Q}

. Une a.l.d.g. (L, ∂) est une algèbre de Lie différentielle, graduée

$(L = \bigoplus_{p \geq 0} L_p)$, 1-réduite ($L_0 = 0$) et de type fini (pour tout p , L_p espace vectoriel de dimension finie). Rappelons que $\partial L_p \subset L_{p-1}$.

. Etant donné un espace vectoriel gradué V , $\mathcal{L}(V)$ désigne l'algèbre de Lie libre, graduée, engendrée par V et $\mathcal{L}^i(V)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(V)$ engendré par les crochets d'éléments de V , de longueur i .

On pose $\mathcal{L}^{\geq j}(V) = \bigoplus_{i \geq j} \mathcal{L}^i(V)$.

. Un homomorphisme d'a.l.d.g. $\psi : (L, \partial) \rightarrow (L', \partial')$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie graduées, compatible aux différentielles

. Un quasi-isomorphisme est un homomorphisme d'a.l.d.g, induisant un isomorphisme en homologie (il est désigné par \simeq)

. Toute a.l.d.g (L, ∂) possède un modèle libre de Quillen [B-L] unique à isomorphisme près : il s'agit d'un couple $((\mathbb{L}(V), \partial), \psi)$ ou $\psi : (\mathbb{L}(V), \partial) \rightarrow (L, \partial)$ est un quasi-isomorphisme. Le modèle de Quillen est dit minimal si $\partial V \subset \mathbb{L}^{\geq 2}(V)$.

S'il n'y a pas d'ambiguïté on appelle également modèle l'a.l.d.g. $(\mathbb{L}(V), \partial)$.

I.1.2. Retraction.

On considère $h : (L, \delta) \rightarrow (L', \delta')$ homomorphisme d'a.l.d.g et $((\mathbb{L}(V), \partial), \mu)$; (resp $((\mathbb{L}(V'), \partial'), \mu')$) un modèle de Quillen de (L, δ) (resp. (L', δ')).

Définition.

L'homomorphisme h fait de (L, δ) un retracté de (L', δ') s'il existe α et β deux homomorphismes d'a.l.d.g. tels que le diagramme suivant commute à homotopie près

$$\begin{array}{ccccc}
 (L, \delta) & \xrightarrow{h} & (L', \delta') & & \\
 \uparrow \mu \simeq & & \uparrow \mu' \simeq & & \\
 & \curvearrowright H & & & \\
 (\mathbb{L}(V), \partial) & \xrightarrow{\alpha} & (\mathbb{L}(V'), \partial') & \xrightarrow{\beta} & (\mathbb{L}(V), \partial)
 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu' \circ \alpha \sim h \circ \mu \quad (\alpha \text{ est appelé modèle de Quillen de l'homomorphisme } h) \\ \beta \circ \alpha \sim \text{Id}_{\mathbb{L}(V)}. \end{array} \right.$$

β est une rétraction homotopique de h .

On dit aussi que (L, δ) est rétracté de (L', δ') .

Le signe " \sim " désigne l'homotopie dans la catégorie LDG $[B, L]$, [Ta, Chap II].

1.2. Cocatégorie d'une a.l.d.g (L, δ)

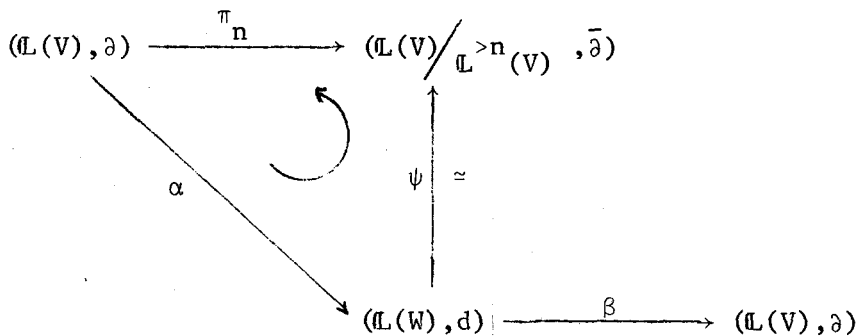
I.2.1. Définition. Soit $(\mathbb{L}(V), \partial)$ un modèle minimal de Quillen de (L, δ) . On dit que $\text{cocat}(L, \delta) \leq n$ si la projection canonique $\pi_n : \mathbb{L}(V) \rightarrow \mathbb{L}(V) / \mathbb{L}^{>n}(V)$ possède une rétraction homotopique. S'il n'existe aucun n pour lequel π_n possède une rétraction homotopique on pose $\text{cocat}(L, \delta) = \infty$.

I.2.1. Remarque. L'unicité à isomorphisme près du modèle minimal de Quillen d'une a.l.d.g. montre que la définition précédente a bien un sens. En particulier deux a.l.d.g. quasi-isomorphes ont la même cocatégorie.

I.2.2. Lemme. Si $\text{cocat}(L, \delta) \leq n$ alors la projection canonique π_n induit une injection entre algèbres d'homologie (i.e.)

$$\mathbb{L}^{\geq n+1}(V) \cap \ker \delta \subset \delta(\mathbb{L}(V)).$$

Preuve : Par définition $\text{cocat}(L, \delta) \leq n$ équivaut à : il existe α et β deux homomorphismes d'a.l.d.g. tels que



(•) $\psi \circ \alpha \sim \pi_n$ $(\mathbb{L}(W), \psi)$ est un modèle de Quillen de

(••) $\beta \circ \alpha \sim \text{Id}_{\mathbb{L}(V)}$ l'a.l.d.g $(\mathbb{L}(V) / \mathbb{L}^{>n}(V), \bar{\partial})$

d'où $\text{id} = H_*(\beta) \circ H_*(\alpha) = H_*(B) \circ H_*(\psi)^{-1} \circ H_*(\pi)$ et $H_*(\pi)$ est injectif. ■

1.3. Cocatégorie rationnelle de S : $\text{cocat}_0(S)$.

S désigne un espace topologique, pointé, 1-connexe qui a le même type d'homotopie qu'un CW-complexe de type fini (i.e. $\forall p \dim H^p(S, \mathbb{Q}) < +\infty$).

Rappelons que le foncteur PL-forme construit par Sullivan [Su], noté A_{PL} associe à chaque espace topologique, S, une algèbre différentielle graduée commutative $(A_{\text{PL}}(S), d_S)$ d'algèbre de cohomologie $H^*(S, \mathbb{Q})$.

1.3.1. Modèle de Quillen d'un espace, formalité, co-formalité.

1) Une a.l.d.g (L, ∂) est appelée modèle de Quillen de l'espace S, [Ta], s'il existe $\mu : C^*(L, \partial) \rightarrow A_{\text{PL}}(S)$ où μ est un homomorphisme d'algèbre différentielles graduées commutatives induisant un isomorphisme en cohomologie et C^* le foncteur cochaîne de Koszul.

2) Si ce modèle est minimal : $L = \mathbb{L}(V)$ et $\partial V \subset \mathbb{L}^{>2}(V)$, il vérifie [B-L] :

1) $V_q \cong \tilde{H}_{q+1}(S, \mathbb{Q})$ où \tilde{H} est le foncteur homologie réduite

2) $H_q(\mathbb{L}(V), \partial) \cong \pi_q(\Omega S) \otimes \mathbb{Q}$

isomorphisme d'algèbres de Lie entre $H_*(\mathbb{L}(V), \partial)$ et l'algèbre de Lie d'homotopie de S (pour le crochet de Samelson) notée $\pi_*(\Omega S) \otimes \mathbb{Q}$.

3) Espace formel : $[L, S]$ l'espace 1-connexe S est dit formel si $\partial V \subset [V, V] \subset \mathbb{L}(V)$: la différentielle du modèle minimal de Quillen est purement quadratique.

4) Espace co-formel : $[L, S]$ l'espace 1-connexe S est dit coformal s'il existe un quasi-isomorphisme d'algèbres de Lie

$$(\mathbb{L}(V), \partial) \xrightarrow{\cong} (\pi_*(\Omega S) \otimes \mathbb{Q}, 0).$$

I.3.2. Définition. Soit (L, ∂) un modèle de Quillen de l'espace topologique S , $\text{cocat}_0(S) = \text{cocat}(L, \partial)$ est appelé cocatégorie rationnelle de S .

I.3.3. Remarque. $\text{cocat}_0(S)$ est un invariant du type de l'homotopie rationnelle de S . En particulier pour un espace coformal

$$\text{cocat}_0(S) = \text{cocat}((\pi_*(\Omega S) \otimes \mathbb{Q}), 0)$$

I.3.4. Exemples.

o) $\text{cocat}_0(S) = 0$ équivaut à dire que S est contractile

1) $\text{cocat}_0(S) = 1$ si et seulement si S a le type d'homotopie rationnelle d'un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane.

En effet si $\text{cocat}_0(S) = 1$, la projection canonique

$\pi : (\mathbb{L}(V), \partial) \rightarrow (V, 0)$, V étant muni de la structure d'algèbre de Lie triviale, induit une injection $H_*(\mathbb{L}(V), \partial) \xrightarrow{\pi_*} V$; (lemme I.2.2.). Notons W un supplémentaire de $\pi_*(H_*(\mathbb{L}(V), \partial))$ dans V et p la projection canonique $p : V \rightarrow V/W$; alors $p \circ \pi : (\mathbb{L}(V), \partial) \xrightarrow{\pi} (V, 0) \xrightarrow{p} (V/W, 0)$ est un quasi-isomorphisme ■

2) pour tout $n \geq 1$, $\text{cocat}_0(\mathbb{S}^{2n}) = 2$:

. D'après 1) $\text{cocat}_0(\mathbb{S}^{2n}) > 1$.

. \mathbb{S}^{2n} a pour modèle de Quillen $(\mathbb{L}(x), 0)$ $|x| = 2n-1$. La projection canonique $(\mathbb{L}(x), 0) \rightarrow (\mathbb{L}(x)/\mathbb{L}^{>2}(x), 0)$ est un isomorphisme d'où $\text{cocat}_0(\mathbb{S}^{2n}) \leq 2$ ■

1.4. Cocat₀ et les autres invariants d'homotopie rationnelle.

I.4.1. Définition. Soit L une a.l.g. $L^{(1)} = L$ et pour $n \geq 2$ $L^{(n)} = [L^{(n-1)}, L]$ forme la suite centrale descendante. La nilpotence de L notée $\text{Nil}(L)$ est la longueur maximale des crochets non nuls d'éléments de L :

$$\text{Nil}(L) = \inf\{n / L^{(n+1)} = 0\}$$

I.4.2. Théorème.

$$\left[\begin{array}{l}
 \text{a) } \text{Nil}(H_*(L, \partial)) \leq \text{cocat}(L, \partial) \\
 \text{b) si } (L, \partial) \text{ est un rétracte de } (L', \partial') \text{ alors} \\
 \quad \text{cocat}(L, \partial) \leq \text{cocat}(L', \partial') \\
 \text{c) } \text{cocat}((L, \partial) \times (L', \partial')) = \text{Sup}(\text{cocat}(L, \partial), \text{cocat}(L', \partial'))
 \end{array} \right. \begin{cases}
 \leq \text{Nil}(L) \\
 \leq \text{Sup}\{p/H_p(L, \partial) \neq 0\}
 \end{cases}$$

La preuve est réportée en fin de chapitre.

I.4.3. Corollaire. Pour un espace coformel S

$$\text{cocat}_0(S) = \text{Nil}(\pi_*(\Omega S) \otimes \mathbb{Q}).$$

Preuve : D'après a) lorsque la différentielle sur L est nulle on a

$$\text{cocat}(L, 0) = \text{Nil}(L).$$

D'après la remarque (I.3.3).

$$\text{cocat}_0(S) = \text{cocat}(\pi_*(\Omega S) \otimes \mathbb{Q}, 0) = \text{Nil}(\pi_*(\Omega S) \otimes \mathbb{Q}).$$

I.4.4. Exemple $[\text{Th}]_1$: une variété de Stiefel a le type d'homotopie rationnelle d'un produit de sphères impaires : $SO(2n)/SO(2n-2p+1)$ et $SO(2n+1)/SO(2n-2p+1)$; ou bien d'un produit de sphères impaires et d'une sphère paire :

$$SO(2n)/SO(2n-2p) \quad \text{et} \quad SO(2n+1)/SO(2n-2p)$$

D'après le c) du théorème I.4.1 et les exemples 1) et 2) de I.3.4, les variétés de Stiefel sont de cocat_0 égale à 1 dans le premier cas et égale à 2 dans le deuxième cas.

I.4.5. Remarques.

1) il n'existe en général aucune relation entre $\text{Nil}(L)$ et $\text{Sup}\{p/H_p(L, \partial) \neq 0\}$.

En effet : *) prenons $L = (\mathbb{L}(x), 0)$, $|x| = 4$

$$\text{Nil}(L) = 1 < \text{sup}\{p/H_p(L, \partial) \neq 0\} = 4$$

*) si L est le modèle minimal de Quillen de $K(\mathbb{Q}, 2) \times K(\mathbb{Q}, 2)$; L n'est pas nilpotente ($\text{Nil}(L) = \infty$) alors que

$$\text{Sup}\{p ; H_p(L, \partial) \neq 0\} = 1.$$

2) La première inégalité de la partie a) peut-être stricte.

Exemple : prenons pour L le modèle minimal de Quillen de $\mathbb{C}P^2$: $(\mathbb{L}(x, x_3), \partial)$ $|x_i| = i$, $\partial x_1 = 0$, $\partial x_3 = [x_1, x_1]$, $H_* (\mathbb{L}(x_1, x_3),) = \pi_* (\Omega \mathbb{C}P^2) \otimes \mathbb{Q}$ est une algèbre de Lie abélienne (de nilpotence 1) alors que $\text{cocat}(\mathbb{L}(x_1, x_3), \partial) = 2$ comme nous le verrons en (II.5.1.).

3) Le principal intérêt de $\text{cocat}(L, \partial) \leq \text{Sup}\{p ; H_p(L, \partial) \neq 0\}$, est de pouvoir affirmer que cocat_0 d'un espace est fini lorsque ces groupes d'homotopie sont nuls à partir d'un certain rang. Ce dernier ne constituent cependant pas une bonne approximation de Cocat_0 :

$$\text{Exemple} : \text{cocat}_0 (\mathbb{S}^{2n+1}) = 1 < \text{sup}\{p/\pi_p (\Omega \mathbb{S}^{2n+1}) \otimes \mathbb{Q}\} = 2n$$

I.4.6. Corollaire. Soit S un espace topologique pointé, 1-connexe de type fini vérifiant $\pi_q(S) \otimes \mathbb{Q} = 0$ pour $q \leq n$ et $q > P$ alors

$$\text{cocat}_0(S) < \frac{P}{n}$$

La preuve est reportée en fin de chapitre.

Remarque. Cette majoration est encore grossière puisque $\text{cocat}_0(\mathbb{C}P^2) = 2$; $n = 1$, $P = 5$. Elle permet cependant de faire la construction suivante :

I.4.7. Construction d'un espace topologique de cocat_0 égale à n , pour chaque entier n donné.

On considère le CW-complexe 1-connexe S obtenu en attachant des cellules à $S_a^2 \vee S_b^2$ de manière à annuler tous les groupes d'homotopie $\pi_p(S_a^2 \vee S_b^2)$ avec $p \geq n+2$.

On a donc d'après le corollaire précédent $\text{cocat}_0(S) \leq n$. D'autre part, le modèle de Quillen d'un tel espace est de la forme $(L(a \oplus b \oplus V), \partial)$ où $|a| = |b| = 1$ et $\forall v \in V \quad |v| \geq n+2$, $\partial a = \partial b = 0$ et si v , élément de V est tel que $|v| = n+2$ alors $\partial v \in (L(a,b))_{n+1} = L^{n+1}(a,b)$. Donc tout élément γ de $L^n(a,b)$ est un cycle non homologue à zéro, sa classe d'homologie est un crochet de n classes d'homologie représentées par les cycles a et b ainsi $\text{Nil}(\pi_*(\Omega S) \otimes \mathbb{Q}) \geq n$. D'après le a) du théorème I.4.2 $\text{cocat}_0(S) \geq n$ d'où $\text{cocat}_0(S) = n$.

Démonstration du théorème I.4.2.

a) $\cdot \text{Nil } H_*(L, \delta) \leq \text{cocat}(L, \delta)$

- vrai pour $\text{cocat}(L, \partial) = \infty$

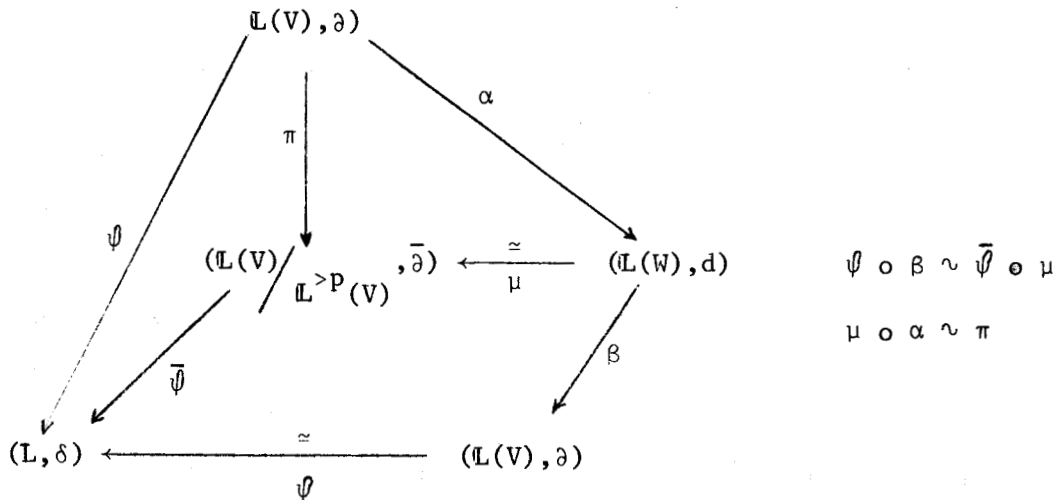
- Notons $(L(V), \partial)$ un modèle minimal de Quillen de (L, δ) et soit $[\gamma_1], \dots, [\gamma_{n+1}]$ $(n+1)$ classes d'homologie (γ_i cycle dans $L(V)$ représentant de la classe $[\gamma_i]$). Le crochet γ des ces $(n+1)$ -classes a pour représentant un crochet formé par les $(n+1)$ cycles γ_i . γ est donc un élément de $L^{>n+1}(V)$, or d'après le lemme I.2.2. si l'on suppose que $\text{cocat}(L, \delta) \leq n$ on a

$$L^{>n+1}(V) \cap \ker \partial \subset \partial(L(V))$$

• $\text{cocat}(L, \delta) \leq \text{Nil}(L)$.

Soit $(\mathbb{L}(V), \partial) \xrightarrow[\psi]{\cong} (L, \delta)$ un modèle minimal de Quillen de (L, δ) . Si $\text{Nil}(L) = p$ alors $\psi(\mathbb{L}^{>p}(V)) = 0$, par suite ψ induit un homomorphisme d'a.l.d.g $\bar{\psi} : (\mathbb{L}(V)/\mathbb{L}^{>p}(V), \bar{\partial}) \rightarrow (L, \delta)$.

Soit $((\mathbb{L}(W), d), \mu)$ un modèle de Quillen de $(\mathbb{L}(V)/\mathbb{L}^{>p}(V), \bar{\partial})$, d'après le lemme de relèvement [Ta, Chap II], il existe deux homomorphismes d'a.l.d.g α et β (α modèle de π et β modèle de $\bar{\psi}$) tels que le diagramme suivant commute à homotopie près :



On a alors $\psi \circ \beta \circ \alpha \sim \bar{\psi} \circ \mu \circ \alpha \sim \bar{\psi} \circ \pi = \psi$.

ψ est un quasi-isomorphisme, donc d'après [Ta, Chap. II],

$$\beta \circ \alpha \sim \text{Id} \blacksquare$$

• $\text{cocat}(L, \delta) \leq \text{Sup}\{p/H_p(L, \delta) \neq 0\}$.

Considérons la décomposition en sous-espaces vectoriels engendrés par les éléments de même degré

$$L(V) = \bigoplus_{p \geq 1} (L(V))_p \quad ; \quad \partial(L(V))_p \subset (L(V))_{p-1}$$

si l'on suppose que $H_q(L, \delta) = H_q(\mathbb{L}(V), \partial) = 0$ pour $q > P$ alors

$(\mathbb{L}(V))_{\geq p+1} + (\partial\mathbb{L}(V))_{p+1}$ est un idéal acyclique et la projection canonique

$$\mathbb{L}(V), \partial \longrightarrow \left(\mathbb{L}(V) \left/ \left(\mathbb{L}(V)_{\geq p+1} + (\partial\mathbb{L}(V))_{p+1} \right) \right., \bar{\partial} \right)$$

est un homomorphisme d'a.l.d.g. surjectif dont le noyau est acyclique, il induit donc un isomorphisme en homologie, d'autre part comme $V_{<1} = 0$ alors

$$\mathbb{L}^{\geq p+1}(V) \subset (\mathbb{L}(V))_{\geq p+1} \text{ et}$$

$$\text{Nil} \left(\mathbb{L}(V) \left/ \left(\mathbb{L}(V)_{\geq p+1} + (\partial\mathbb{L}(V))_{p+1} \right) \right. \right) \leq P$$

d'après le point précédant $\text{cocat}(L, \delta) = \text{cocat} \left(\mathbb{L}(V) \left/ \left(\mathbb{L}(V)_{\geq p+1} + (\partial\mathbb{L}(V))_{p+1} \right) \right.; \bar{\partial} \right) \leq P \blacksquare$

b) Vrai pour $\text{cocat}(L', \delta') = \infty$. Supposons $\text{Cocat}(L', \delta') \leq n$,

soit $h : (L, \delta) \rightarrow (L', \delta')$ un homomorphisme d'a.l.d.g. possédant une rétraction

homotopique. Notons $((\mathbb{L}(V), \partial), \mu)$ et $((\mathbb{L}(V'), \partial'), \mu')$ les modèles minimaux

respectifs de (L, δ) et (L', δ') , f et g les deux homomorphismes

d'a.l.d.g. donnés par la définition de la rétraction. $f : (\mathbb{L}(V), \partial) \rightarrow (\mathbb{L}(V'), \partial')$

induit un homomorphisme d'a.l.d.g. \bar{f} entre les algèbre quotients

$$\left(\mathbb{L}(V) \left/ \mathbb{L}^{>n}(V) \right., \partial \right) \xrightarrow{\bar{f}} \left(\mathbb{L}(V') \left/ \mathbb{L}^{>n}(V') \right., \partial' \right) . \text{ Si l'on note } ((\mathbb{L}(W), d), \mu),$$

$((\mathbb{L}(W'), d'), \mu')$ les modèles de Quillen respectifs de celles-ci nous obtenons

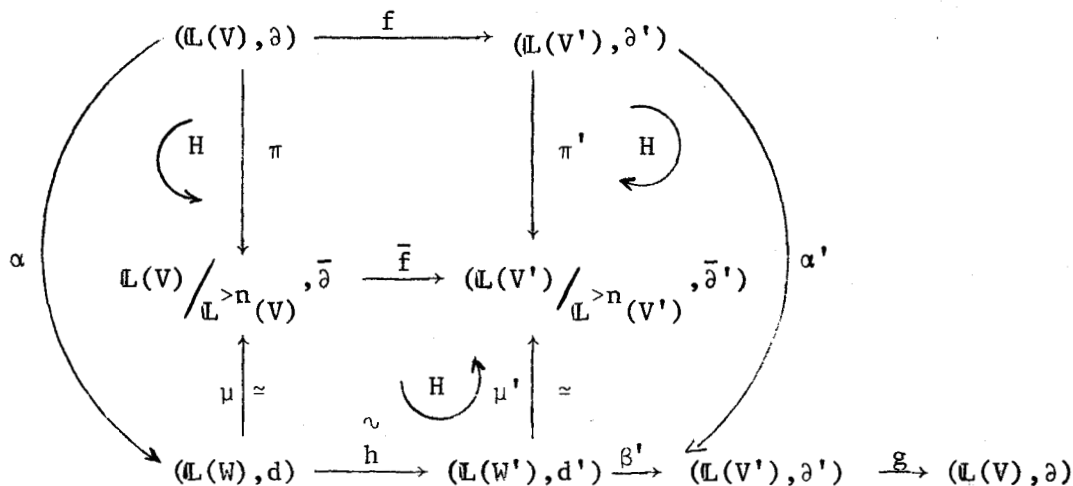
le diagramme suivant, commutatif à homotopie près, où \hat{h} est un modèle de

Quillen de \bar{f} , π et π' les projections canoniques, α et α' leurs

modèles de Quillen respectifs.

l'homomorphisme d'a.l.d.g. $\beta' : (\mathbb{L}(W'), d') \rightarrow (\mathbb{L}(V'), \partial')$ vérifie

$\beta' \circ \alpha' \sim \text{Id}$ par hypothèse.



$$\mu' \circ \alpha' \circ f \sim \pi' \circ f = \bar{f} \circ \pi$$

$$\mu' \circ \tilde{h} \circ \alpha \sim \bar{f} \circ \mu \circ \alpha \sim \bar{f} \circ \pi$$

μ' est un quasi-isomorphisme, d'où $\alpha' \circ f \sim \tilde{h} \circ \alpha$ l'homomorphisme

$\beta = g \circ \beta' \circ \tilde{h} : (\mathbb{L}(W), d) \rightarrow (\mathbb{L}(V), \partial)$ est tel que

$$\beta \circ \alpha \sim \text{Id} \blacksquare$$

c) Rappelons d'abord la construction du produit dans la catégorie LDG, [Ta] :

. Soient (L, ∂) et (L', ∂') deux a.l.d.g. $(L, \partial) \times (L', \partial')$ a pour espace vectoriel sous jacent $L \oplus L'$. Si $x \in L$ et $x' \in L'$, $[x, x'] = 0$

. (L, ∂) et (L', ∂') sont deux sous-a.l.d.g de $(L, \partial) \times (L', \partial')$

$$\bullet (L, \partial) \xrightarrow{i} (L, \partial) \times (L', \partial') \xrightarrow{p} (L, \partial) \quad p \circ i = \text{Id}_L$$

$$\bullet (L', \partial') \xrightarrow{i'} (L, \partial) \times (L', \partial') \xrightarrow{p'} (L', \partial') \quad p' \circ i' = \text{Id}_{L'}$$

. les homomorphismes d'a.l.d.g. i et i' font de (L, ∂) et de (L', ∂') des rétractes de $(L, \partial) \times (L', \partial')$ (notée aussi $(L \times L', \partial \times \partial')$).

D'après b)

$$\text{Sup}(\text{cocat}(L, \partial), \text{cocat}(L', \partial')) \leq \text{cocat}(L \times L', \partial \times \partial'),$$

. Supposons que $\text{cocat}(L, \partial) \leq \text{cocat}(L', \partial') \leq n$ (le cas où l'une des deux cocatégorises est égale à l'infini est trivial). Avec les notations précédentes nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{L}(V), \partial) \times (\mathbb{L}(V'), \partial') & \xrightarrow{\alpha \times \alpha'} & (\mathbb{L}(W), d) \times (\mathbb{L}(W'), d') & \xrightarrow{\beta \times \beta'} & (\mathbb{L}(V), \partial) \times (\mathbb{L}(V'), \partial') \\ & & \downarrow \mu \times \mu' \simeq & & \\ & & \left(\mathbb{L}(V) / \mathbb{L}^{>n}(V), \bar{\partial} \right) \times \left(\mathbb{L}(V') / \mathbb{L}^{>n}(V'), \bar{\partial}' \right) & & \end{array}$$

$\mu \times \mu'$ produit de deux quasi-isomorphismes est un quasi-isomorphisme et $(\beta \times \beta') \circ (\alpha \times \alpha') = (\beta \circ \alpha) \times (\beta' \circ \alpha') = \text{Id} \times \text{Id}$.

Comme $\text{Nil} \left(\mathbb{L}(V) / \mathbb{L}^{>n}(V) \times \mathbb{L}(V') / \mathbb{L}^{>n}(V') \right) \leq n$; d'après a)

$\text{Cocat}(L(W) \times L(W'), d \times d') \leq n$ et d'après b)

$$\text{cocat}(L(V) \times L(V'), \partial \times \partial') \leq n \quad \blacksquare$$

Démonstration du corollaire I.4.6.

Notons $(\mathbb{L}(V), \partial)$ un modèle minimal de Quillen de S d'après

$$[B-L] : V = \bigoplus_{i \geq n} V_i \quad \text{où} \quad V_i \simeq \tilde{H}_{i+1}(S, \mathbb{Q}) \quad \text{avec} \quad V_n \simeq \tilde{H}_{n+1}(S, \mathbb{Q}) \simeq \pi_{n+1}(S) \otimes \mathbb{Q}$$

$$\text{et} \quad H_q(\mathbb{L}(V), \partial) \simeq \pi_q(\Omega S) \otimes \mathbb{Q} = 0 \quad \text{pour} \quad q > P-1,$$

Avec les notations de la démonstration du théorème I.4.2. l'idéal $I_p = \mathbb{L}(V)_p + (\partial\mathbb{L}(V))_p$ est acyclique et par suite la projection canonique $(\mathbb{L}(V), \partial) \rightarrow (\mathbb{L}(V)/I_p, \bar{\partial})$ est un quasi-isomorphisme. Or l'a.l.g. $\mathbb{L}(V)/I_p$ est de nilpotence strictement inférieure à $\frac{p}{n}$ puisque $V_n \neq 0$. La remarque I.2.1. 1) et la partie a) du théorème I.4.2. permettent de conclure ■

CHAPITRE II

CO-CATEGORIE RATIONNELLE ET SUITE SPECTRALE

D'EILENBERG-MOORE D'UN ESPACE

Nous rappelons d'abord que la suite spectrale d'Eilenberg-Moore d'un espace peut s'obtenir à partir de la filtration en longueur des crochets de son modèle minimal de Quillen, s'introduit ainsi naturellement la longueur maximale en crochet des cycles non homologues à zéro dans le modèle minimal ; nous la notons $\varepsilon_0(S)$. C'est un invariant homotopique, il minore la cocatégorie rationnelle. Lorsque S est formel ou coformal l'égalité $\varepsilon_0(S) = \text{cocat}_0(S)$ permet de déterminer la cocatégorie rationnelle sur quelques exemples.

Nous relierons ensuite $\varepsilon_0(S)$ à l'invariant "class G" introduit par Hilton dans $[Hi]_2$.

II.1. Suite spectrale d'Eilenberg-Moore.

Soit S un espace topologique pointé, 1-connexe et de \mathbb{Q} -type fini, $(\mathbb{L}(V), \partial)$ son modèle minimal de Quillen.

- On a $\partial = \bigoplus_{i \geq 2} \partial_i$, ∂_i dérivation de degré -1 telle que $\partial_i(V) \subset \mathbb{L}^i(V)$.

- ∂_2 est une différentielle

- l'espace topologique dont le type d'homotopie rationnelle est représenté par $(\mathbb{L}(V), \partial_2)$ est appelé espace formel associé à S et est noté S_f .

La filtration $F_{-p}(\mathbb{L}(V)) = \mathbb{L}^{\geq p}(V)$ vérifie :

$$- F_{-p} \subset F_{-p+1}$$

$$- \partial F_{-p} \subset F_{-(p+1)}$$

- si S est r -connexe ($r \geq 1$), pour tout entier n , il existe un entier $N(N > \frac{n}{r})$ tel que $(\mathbb{L}^{\geq N}(V))_n = 0$ d'où une suite spectrale de second quadrant convergente

$$E_{-p,q}^2 = H_{-p+q}(\mathbb{L}^P(V), \partial_2) \implies H_{-p+q}(\mathbb{L}(V), \partial).$$

|||

|||

$$\Pi_{-p+q}(\Omega S_f) \otimes \mathbb{Q} \implies \Pi_{-p+q}(\Omega S) \otimes \mathbb{Q}.$$

Si U désigne le foncteur algèbre enveloppante et $\#$ note la dualisation $\text{Hom}(-, \mathbb{Q})$, l'image de cette suite spectrale par $\# U$ donne la s.s.E.M classique [Ta] :

$$\# U E^2 = \text{Tor}_{H^*(S, \mathbb{Q})}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \implies H^*(\Omega S, \mathbb{Q}).$$

II.1.1. Définition : $\varepsilon_0(S) = \sup \{p \text{ tel que } E_{-p, *}^\infty \neq 0\}$.

Cette définition est duale au sens Eckmann-Hilton de la définition donnée dans [F-H] de l'invariant de Toomer $([To]_1)_e(S)$.

Dans toute la suite nous utilisons la caractérisation suivante de $\varepsilon_0(S)$:

II.1.2. Proposition. $\varepsilon_0(S)$ est le plus petit entier p tel que $L^{\geq p}(V) \cap \ker \partial \subset \text{Im} \partial$.

Preuve : Pour tout p notons $i_p : (\mathbb{L}^{\geq p}(V), \partial) \hookrightarrow (\mathbb{L}(V), \partial)$ l'injection naturelle, c'est un homomorphisme d'a.l.d.g. on a alors :

$$E_{-p,*}^{\infty} = \frac{H(i_p)(H(\mathbb{L}^{\geq p}(V), \partial))}{H(i_{p+1})(H(\mathbb{L}^{\geq p+1}(V), \partial))}$$

supposons S r -connexe ($r \geq 1$) et $\varepsilon_0(S) = p_0$, soit α un cycle de degré n dans $\mathbb{L}^{\geq p_0+1}(V)$. Comme $E_{-p,*}^{\infty} = 0$ pour tout $p \geq p_0+1$, α est de proche en proche homologue à un cycle dans $\mathbb{L}^{\geq N}(V)$ où N est tel que $N \times r > n$; d'où $(\mathbb{L}^{\geq N}(V))_n = 0$ et par suite α est homologue à zéro ■

II.1.3. Remarques.

1) l'unicité à isomorphisme près du modèle minimal de Quillen montre que $\varepsilon_0(S)$ est un invariant du type d'homotopie rationnelle de l'espace S

2) $\varepsilon_0(S)$ est le plus petit entier p tel que la projection canonique $\mathbb{L}(V) \rightarrow \mathbb{L}(V) / \mathbb{L}^{\geq p}(V)$ induise une injection en homologie

3) la caractérisation de $\varepsilon_0(S)$ donnée dans la proposition II.1.2 ne dépend pas de la minimalité du modèle de Quillen de S en effet : soit $(\mathbb{L}(V'), \partial')$ un modèle de Quillen de S avec ∂' non décomposable (la partie linéaire de ∂' n'est pas nulle).

Cette a.l.d.g. possède un modèle minimal $(\mathbb{L}(V), \partial) \xrightarrow[\mu]{\simeq} \mathbb{L}(V'), \partial'$ et d'après le lemme de relèvement [Ta, Chap. II] il existe μ' , homomorphisme d'a.l.d.g. $\mu' : (\mathbb{L}(V'), \partial') \rightarrow (\mathbb{L}(V), \partial)$ tel que $\mu \circ \mu' \sim \text{Id}$. μ' est un quasi-isomorphisme et vérifie $\mu'(\mathbb{L}^{\geq p+1}(V') \cap \ker \partial') \subset \mathbb{L}^{\geq p+1}(V) \cap \ker \partial$ pour tout entier p .

II.1.4. Exemples

o) $\varepsilon_0(S) = 0$ si et seulement si S est contractile

1) Si $\varepsilon_0(S) = 1$ d'après la remarque 2) du II.1.3

$H(\pi) : H(\mathbb{L}(V), \partial) \rightarrow H(\mathbb{L}(V) / \mathbb{L}^{\geq 2}(V), 0)$ est injectif. La démonstration de 1) du (I.3.4) s'adapte immédiatement : S a le type d'homotopie rationnelle

d'un produit d'espaces d'Eilenbert-MacLane, on a alors $\text{cocat}_0(S) = \varepsilon_0(S) = 1$.

2) - pour tout $n \geq 1$, S^{2n} a pour modèle de Quillen $(\mathbb{L}(x), 0)$, $|x| = 2n-1$ d'où $\varepsilon_0(S^{2n}) = 2$.

- $\mathbb{C}P^2$ a pour modèle minimal de Quillen $(\mathbb{L}(x_1, x_3), \partial)$
 $|x_1| = 1, \partial x_1 = 0, \partial x_3 = [x_1, x_1]$. Les seuls cycles de $\mathbb{L}(x_1, x_3)$ non homologues à zéro sont x_1 et $[x_1, x_3]$. En particulier tout cycle dans $\mathbb{L}^{\geq 3}(x_1, x_3)$ est homologue à zéro d'où $\varepsilon_0(\mathbb{C}P^2) \leq 2$ d'après l'exemple 1) ci-dessus $\varepsilon_0(\mathbb{C}P^2) \neq 1$; le même raisonnement s'adapte à $\mathbb{C}P^n$ pour $n \geq 3$ ([Ta]) donc $\varepsilon_0(\mathbb{C}P^n) = 2, \forall n$ non nul.

II.2. Proposition.

Soit $f : S \rightarrow S'$ application continue entre espaces topologiques pointés 1-connexes, de \mathbb{Q} -type fini telle que $\pi(f) : \pi(S) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \pi(S') \otimes \mathbb{Q}$ soit injectif alors $\varepsilon_0(S) \leq \varepsilon_0(S')$.

Preuve :

- $\varepsilon_0(S') = \infty$ l'inégalité est vérifiée

- supposons $\varepsilon_0(S) = n$, notons $(\mathbb{L}(V), \partial)$ (resp. $(\mathbb{L}(V'), \partial')$) un modèle de Quillen minimal de S (resp. S') et ψ un modèle de Quillen de $f : (\mathbb{L}(V), \partial) \xrightarrow{\psi} (\mathbb{L}(V'), \partial')$ et $H(\psi) = \pi(f)$.

Soit α un cycle dans $\mathbb{L}^{\geq n+1}(V)$, $\psi(\alpha) \in \mathbb{L}^{\geq n+1}(V') \cap \ker \partial'$ qui est d'après (II.1.2) inclus dans $\partial'(L(V'))$: $\psi(\alpha)$ est homologue à zéro. Comme $H(\psi)$ est injectif le cycle α est homologue à zéro ■

II.2.1. Remarque. Si $f : S \rightarrow S'$ admet une rétraction à homotopie près, $\pi(f)$ est injectif d'où $\varepsilon_0(S) \leq \varepsilon_0(S')$. En particulier puisque S et S' sont rétractes de $S \times S'$ on a $\text{Sup}(\varepsilon_0(S), \varepsilon_0(S')) \leq \varepsilon_0(S \times S')$. En fait on démontre

II.2.2. Proposition.

$$\varepsilon_0(S \times S') = \text{Sup}(\varepsilon_0(S), \varepsilon_0(S'))$$

nous utilisons aussi le lemme suivant

II.2.3. Lemme. Soit (L, δ) une a.l.d.g. $\varepsilon_0(L, \delta) \leq \text{Nil}(L)$,

Preuve : Etant donnée une a.l.d.g. (L, δ) on considère $((L(V), \partial), \mu)$ un modèle minimal de Quillen de celle-ci ; la filtration sur $L(V)$ définie dans II.1. permet de définir $\varepsilon_0(L, \delta)$. On a évidemment $\varepsilon_0(S) = \varepsilon_0(L, \delta)$ si (L, δ) est un modèle de Quillen de l'espace S au sens rappelé dans (I.3.1).

- si $\text{Nil}(L) = \infty$ l'inégalité du lemme est vérifiée

- si $\text{Nil}(L) = p$. On a $\mu(L^{\geq p+1}(V)) = 0$, μ induit $\bar{\mu}$ homomorphisme d'a.l.d.g. tel que

$$\begin{array}{ccc}
 (L(V), \partial) & \xrightarrow[\mu]{\cong} & (L, \delta) \\
 \downarrow \pi & \curvearrowright & \uparrow \bar{\mu} \\
 (L(V) / L^{\geq p}(V), \bar{\partial}) & &
 \end{array}$$

On a :

$$\begin{cases}
 H(\bar{\mu}) \circ H(\pi) = H(\mu) \\
 H(\mu) \text{ est un isomorphisme}
 \end{cases}$$

$H(\pi)$ est donc injectif et d'après (II.2) $\varepsilon_0(L, \delta) \leq p$ ■

Démonstration de la proposition II,2.2.

- vraie si $\varepsilon_0(S)$ ou $\varepsilon_0(S')$ est infini

- supposons $\varepsilon_0(S) \leq \varepsilon_0(S') \leq n$. Les projections canoniques

$$\mathbb{L}(V) \xrightarrow{\pi} \mathbb{L}(V) / \mathbb{L}^{>n}(V) \quad \text{et} \quad \mathbb{L}(V') \xrightarrow{\pi'} \mathbb{L}(V') / \mathbb{L}^{>n}(V')$$

induisent des injections en homologie. Il en est de même de l'homomorphisme produit

$$\pi \times \pi' : (\mathbb{L}(V), \partial) \times (\mathbb{L}(V'), \partial') \longrightarrow \left(\mathbb{L}(V) / \mathbb{L}^{>n}(V), \bar{\partial} \right) \times \left(\mathbb{L}(V') / \mathbb{L}^{>n}(V'), \bar{\partial}' \right)$$

comme $\text{Nil} \left(\left(\mathbb{L}(V) / \mathbb{L}^{>n}(V) \right) \times \left(\mathbb{L}(V') / \mathbb{L}^{>n}(V') \right) \right) \leq n$ et que $(\mathbb{L}(V), \partial) \times (\mathbb{L}(V'), \partial')$

est un modèle de Quillen de l'espace produit $S \times S'$ [Ta, Chap III], on a d'après la proposition (II.2) et le lemme (II.2.3.) $\varepsilon_0(S \times S') \leq n$ ■

II.3. Lemme. [F,L].

La démonstration des propositions II.3.2 et II.4.2 qui suivent repose sur le résultat suivant :

II.3.1. Lemme. Soit $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} M$ une fibration entre espaces pointés, 1-connexes et de \mathbb{Q} -type fini telle que i induise l'homomorphisme nul en homotopie alors

1) F a le type d'homotopie rationnelle d'un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane

2) l'application i est homotope à une constante.

Une démonstration utilisant la K-S extension [Ha] est donnée en fin de chapitre.

Soit S un espace topologique pointé 1-connexe de Q -type fini et $(\mathbb{L}(V), \partial)$ un modèle minimal de S on considère $S[n]$ l'espace topologique 1-connexe, rationnel ayant l'a.l.d.g. $(\mathbb{L}(V) / \mathbb{L}^{>n}(V), \bar{\partial})$ comme modèle de Quillen.

II.3.2. Proposition. On note $f : S \rightarrow S[n]$ l'application continue qui réalise la projection canonique $(\mathbb{L}(V), \partial) \rightarrow (\mathbb{L}(V) / \mathbb{L}^{>n}(V), \bar{\partial})$. Supposons $\varepsilon_0(S) \leq n$ alors la fibre homotopique de f (notée F_f) a le type d'homotopie rationnelle d'un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane.

Preuve : D'après [Ta, Chap VI] la suite exacte d'a.l.d.g.

$(\mathbb{L}^{>n}(V), \partial) \xrightarrow{j} (\mathbb{L}(V), \partial) \xrightarrow{\pi} (\mathbb{L}(V) / \mathbb{L}^{>n}(V), \bar{\partial})$ représente la fibration $F_f \xrightarrow{i} S \xrightarrow{f} S[n]$ et $(\mathbb{L}^{>n}(V), \partial)$ est un modèle de Quillen de l'espace F_f .

Supposons $\varepsilon_0(S) \leq n$ d'après le 2) de II.1.3. $H(\pi)$ est injectif d'où $H(j)$ est nul ; comme j est un modèle de Quillen de l'application i , nous obtenons que i induit l'homomorphisme nul en homotopie le 1) du lemme II.3.1. permet de conclure ■

II.4. $\varepsilon_0(S)$ et l'invariant de Hilton $h_0(S)$.

Mimons la construction faite par Hilton $[Hi]_2$ de l'invariant "class G " pour les groupes de chaînes.

Soit S un espace topologique pointé 1-connexe de Q -type fini et son modèle minimal de Quillen $(\mathbb{L}(V), \partial)$.

On définit par récurrence les algèbres de Lie suivantes :

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}(V)$$

$$\mathbb{L}^p = \mathbb{L}^{p-1} \amalg \mathbb{L}(V) \quad \text{et} \quad i_{p-1} : \mathbb{L}^{p-1} \rightarrow \mathbb{L}^p$$

l'inclusion canonique. Ce qui permet de définir $L_{(p)} = [i_{(p-1)} \mathbb{L}^{p-1}, \mathbb{L}(V)]$ en posant $L_{(1)} = \mathbb{L}(V)$.

Notons $j_p : L_{(p)} \rightarrow L^P$ l'inclusion naturelle et $n_p : L^P \rightarrow L(V)$ défini par adjonction :

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \longrightarrow [\dots [\alpha_1, \alpha_2], \alpha_3] \dots, \alpha_p]$$

$L_{(p)}$ est la sous-algèbre de Lie de L^P formée des contributions effectives de chacune des composantes du produit libre L^P .

Le composé $m_p \circ j_p : L_{(p)} \rightarrow L(V)$ est donc l'inclusion canonique $k_p : L^{>p}(V) \hookrightarrow L(V)$.

On pose alors

II.4.1. Définition. $h_o(S)$ est le plus petit entier positif ou nul tel que k_{p+1} soit homotope à zéro.

II.4.2. Proposition : $h_o(S) = \varepsilon_o(S)$.

Preuve : - Supposons $h_o(S) = p$ par définition $k_{p+1} \sim 0$ donc $H(k_{p+1}) = 0$ ceci entraîne que la projection canonique $L(V) \rightarrow L(V) / L^{>p}(V)$ induit une injection en homologie d'où $\varepsilon_o(S) \leq p$ d'après (II.1.3. (2))

- Supposons $\varepsilon_o(S) = p$ alors la suite exacte d'a.l.d.g $(L^{>p+1}(V), \partial) \xrightarrow{k_{p+1}} (L(V), \partial) \xrightarrow{\pi} (L(V) / L^{>n}(V), \bar{\partial})$ est telle que $H(k_{p+1}) = 0$.

Cette suite exacte représente une fibration entre espaces 1-connexes où l'inclusion de la fibre dans l'espace total induit l'homomorphisme nul en homotopie. D'après le 2) du lemme II.3.1. cette inclusion est homotope à l'application constante ; comme k_{p+1} est un modèle de Quillen de l'inclusion de la fibre on a $k_{p+1} \sim 0$ d'où $h_o(S) \leq p$ ■

II.5. Théorème.

Soit S un espace topologique pointé 1-connexe et de Q -type fini alors :

- a) $\text{Nil } \pi_* (\Omega S) \otimes \mathbb{Q} \leq \varepsilon_0(S) \leq \text{Cocat}_0(S)$
- b) si S est coformal, on a l'égalité des trois invariants du a).
- c) si S est formel $\varepsilon_0(S) = \text{Cocat}_0(S)$.

II.5.1. Conséquences.

1) on a vu que $\varepsilon_0(\mathbb{C}P^n) = 2$, comme $\mathbb{C}P^n$ est formel on a $\text{cocat}_0 \mathbb{C}P^n = 2$, $\forall n \geq 1$.

2) si $\text{cocat}_0(S) = 2$ alors $\varepsilon_0(S) = 2$. En effet d'après le (a) du théorème ci-dessus $\varepsilon_0(S) \leq 2$. Or $\varepsilon_0(S) = 1$ caractérise les produits d'espaces d'Eilenberg-MacLane (II.1.4. 1)) qui sont de cocatégorie rationnelle égale à 1.

II.5.2. Remarque. $\text{Nil}(\pi_* (\Omega \mathbb{C}P^2) \otimes \mathbb{Q}) = 1$ et $\varepsilon_0(\mathbb{C}P^2) = 2$ (on sait que $\mathbb{C}P^2$ n'est pas coformal).

Démonstration du théorème.

Soit $(\mathbb{L}(V), \partial)$ un modèle minimal de Quillen de l'espace S

(a) - comme $H(\mathbb{L}(V), \partial) \cong \pi_* (\Omega S) \otimes \mathbb{Q}$, [B-L], on obtient la première inégalité.

- si $\text{cocat}_0(S) \leq n$ la projection canonique $(\mathbb{L}(V), \partial) \rightarrow (\mathbb{L}(V) / \mathbb{L}^{>n}(V), \bar{\partial})$ induit une injection en homologie et d'après la remarque (2) du II.1.3. $\varepsilon_0(S) \leq n$. Ce qui démontre (a).

(b) D'après (I.4.3.) $\text{cocat}_0(S) = \text{Nil}(\pi_* (\Omega S) \otimes \mathbb{Q})$.

(c) Supposons $\varepsilon_0(S) = n$. Comme S est formel il possède un modèle de Quillen $(\mathbb{L}(V), \partial)$ avec ∂ purement quadratique.

Soit C_n un supplémentaire des cycles dans $\mathbb{L}^n(V)$ i.e.

$\mathbb{L}^n(V) = (\ker \partial \cap \mathbb{L}^n(V)) \oplus C_n$. Puisque tout cycle dans $\mathbb{L}^n(V)$ est homologue

à zéro (II.1.2.) c'est nécessairement le bord d'un élément dans $\mathbb{L}^{n-1}(V)$

(∂ est quadratique) il s'en suit que $\mathbb{L}^n(V) \oplus C_n$ est un idéal acyclique

et que la projection canonique $(\mathbb{L}(V), \partial) \rightarrow (\mathbb{L}(V) / \mathbb{L}^{>n}(V) \oplus C_n, \bar{\partial})$ est un

quasi-isomorphisme. Comme $\text{Nil}(\mathbb{L}(V) / \mathbb{L}^{>n}(V) \oplus C_n) \leq n$ le a) du théorème I.4.2

permet de conclure ■

II.6. Démonstration du lemme II.3.1.

On considère la fibration $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} M$. Soit $(\Lambda X, d)$ un modèle minimal de Sullivan de l'espace M , d'après [Ha, Chap 20] il existe un espace vectoriel gradué Y et une différentielle D tels que dans

$$(\Lambda X, d) \xrightarrow{i} (\Lambda X \otimes \Lambda Y, D) \xrightarrow{p} (\Lambda Y, \bar{D}) \quad (*)$$

1) i et p sont les modèles de Sullivan respectivement de F et de M .

2) $(\Lambda Y, \bar{D})$ est un modèle minimal de Sullivan de la fibre F .

D'autre part, on calcule un modèle de ΩM et de l'application δ , donnés par la suite de Puppe $\Omega M \xrightarrow{\delta} F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} M$, à l'aide de la construction suivante [Th-2].

$$\begin{array}{ccccc}
 (\Lambda X, d) & \xrightarrow{i} & (\Lambda X \otimes \Lambda Y, D) & \xrightarrow{p} & (\Lambda Y, \bar{D}) \\
 & & \searrow & & \uparrow \eta \approx \\
 & & & & (\Lambda X \otimes \Lambda \bar{X} \otimes \Lambda Y, D') \xrightarrow{\pi} (\Lambda \bar{X}, 0).
 \end{array}$$

où :

- on pose $\bar{X} = sX$. s dérivation de degré -1 , $(\Omega\bar{X}, 0)$ est un modèle de Sullivan de ΩM

- la différentielle D est définie par $D'|_X = d$, $D'|_Y = D$ et $D'\bar{x} = x - sdx$ si $\bar{x} = sx \in \bar{X}$

- π est tel que $\pi(X) = 0$; $\pi(Y) = 0$, $\pi(\bar{X}) = \bar{X}$

- η est l'homomorphisme surjectif d'a.d.g.c défini par $\eta(X) = 0$, $\eta(\bar{X}) = 0$, $\eta(Y) = Y$

η est un quasi-isomorphisme et pour tout choix d'homomorphisme $r : (\Lambda Y, \bar{D}) \rightarrow (\Lambda X \otimes \Lambda X \otimes \Lambda Y, D')$ tel que $\eta \circ r = \text{Id}$, $\pi \circ r$ est un modèle de Sullivan de l'application $\Omega M \xrightarrow{\delta} F$. On a donc $\pi \circ r \circ \rho \sim 0$ (puisque $i \circ \delta \sim 0$).

La condition "i induit l'homomorphisme nul en homotopie" se traduit sur la K-S extension $(*)$, [Ha], par $\pi_\psi(\rho) = 0$ et si l'on écrit la suite exacte longue de π_ψ -homotopie [Ha, Chap. 8]

$$\rightarrow X^n \xrightarrow{\pi_\psi(1)} H^n(X \otimes Y, D_\ell) \xrightarrow{0} Y^n \xrightarrow{\partial} X^{n+1}$$

(où D_ℓ désigne la partie linéaire de la différentielle D). On obtient que l'homomorphisme de connexion ∂ est injectif. Posons $T = \partial Y$ et soit S un supplémentaire de T i.e. $X = T \oplus S$ d'où $\bar{X} = \bar{T} \oplus \bar{S}$. On considère la projection $\pi' : \Lambda(\bar{T} \oplus \bar{S}) \rightarrow \Lambda\bar{T}$

• alors $\pi' \circ \pi$ est un quasi-isomorphisme. En effet, les filtrations en longueur des mots sur les deux algèbres $F_p = \Lambda^{\geq p}(X \otimes \bar{X} \otimes Y)$ et $F'_p = \Lambda^{\geq p} \bar{T}$ sont telles que $\pi' \circ \pi(F_p) \subset F'_p$ et engendrent chacune une suite spectrale convergente avec

$$E_1 = \Lambda H^*(S \otimes T \otimes S \otimes T \otimes Y, D'_\ell)$$

D'_ℓ est la partie linéaire de la différentielle D' . Comme $D'_\ell \bar{S} = S$ et $D'_\ell Y = T$ on obtient que E_1 est isomorphe à \bar{T} .

D'autre part $E'_1 = \Lambda \bar{T}$ et $\pi' \circ \pi$ induit un isomorphisme au niveau 1. C'est donc un quasi-isomorphisme et $(\Lambda Y, \bar{D})$ est quasi-isomorphe à $(\Lambda \bar{T}, 0)$, ce qui démontre la partie 1) du lemme.

- Partie 2.

η possède une section, notons la r ; on a : $\eta \circ r = \text{Id}$
et $\eta \circ r \circ \eta = \eta$. Comme η est un quasi-isomorphisme on obtient $r \circ \eta \sim \text{Id}$;
on en déduit que r est un quasi-isomorphisme, de même que :

$$\pi' \circ \pi \circ r : (\Lambda Y, \bar{D}) \rightarrow (\Lambda \bar{T}, 0).$$

D'après le lemme de relèvement [Ta, Chap. II], il existe un homomorphisme d'a.d.g.c $\psi : (\Lambda \bar{T}, 0) \rightarrow (\Lambda Y, \bar{D})$ tel que $\psi \circ \pi' \circ \pi \circ r \sim \text{Id}$, d'où $\psi \circ \pi' \circ \pi \circ r \circ \rho \sim \rho$ et puisque $\pi \circ r \circ \rho \sim 0$ on a $\rho \sim 0$ ce qui exprime que $i : F \rightarrow E$ est homotope à une constante ■

CHAPITRE III

CO-CATÉGORIE D'UNE ALGÈBRE DIFFÉRENTIELLE
GRADUÉE COMMUTATIVE

Nous définissons maintenant la cocatégorie d'une a.d.g.c à partir de son modèle filtré de Halperin-Stasheff [H-S].

Si S est un espace topologique nous montrons que la cocatégorie de S définie en terme d'algèbre de Lie ($\text{cocat}_0 S$), coïncide avec celle de l'algèbre des formes de Sullivan $A_{PL}(S)$. Nous en déduisons que lorsque S est formel, $\text{cocat}_0 S$ est soit inférieur à 2, soit infini.

Rappelons le principal résultat de Félix-Halperin [F-H] sur la catégorie rationnelle

Théorème : Soit $f : S \rightarrow T$ une application continue entre espaces 1-connexes et supposons que $f_{\#} : \pi_{\#}(S) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \pi_{\#}(T) \otimes \mathbb{Q}$ est injectif, alors

$$\text{cat}_0(S) \leq \text{cat}_0(T) "$$

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous exhibons un contre-exemple à toute dualisation au sens Eckmann-Hilton de ce théorème.

III.1. Cocatégorie d'une a.d.g.c.

III.1.1. a.d.g.c-modèle filtré.

Soit (A, d_A) une a.d.g.c (algèbre différentielle graduée commutative) telle que $H^0(A, d_A) = 0$, $H^1(A, d_A) = 0$ et pour tout $i \geq 2$, $\dim H^i(A, d_A)$ est finie. On considère $((\Lambda Z, d), \mu)$ un modèle minimal de Sullivan ([Su], [Ha]) de $(H^*(A, d_A), 0)$.

Halperin et Stasheff [H-S] définissent une graduation supplémentaire sur l'espace vectoriel Z , $Z = \bigoplus_{p>0} Z_p$, elle s'étend en graduation d'algèbre à ΛZ tout entier et vérifie $dZ_p \subset (\Lambda Z)_{p-1}$, μ est bihomogène de degré $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$H(\mu) : H_0(\Lambda Z, d) \rightarrow H_*(A, d_A)$ est un isomorphisme et $H_+(Z, d) = 0$
 $((\Lambda Z, d), \mu)$ est appelé le modèle bigradué de l'a.d.g.c. (A, d_A) . La différentielle d et le morphisme μ pouvant être déformés en D et η ([H-S]), pour fournir un modèle de (A, d_A)

$$\eta : (\Lambda Z, D) \xrightarrow{\cong} (A, d_A)$$

vérifie

$$(D-d)Z_p \subset \bigoplus_{m \leq p-2} (\Lambda Z)_m \quad \text{pour } p \geq 2$$

et la classe de cohomologie de $\eta(z_0)$ est égale à $\mu(z_0)$ lorsque z_0 est dans Z_0 . Ce modèle est unique à isomorphisme près. C'est le modèle filtré de (A, d_A) .

Rappelons que lorsque (A, d_A) a même modèle de Sullivan que $(H^*(A, d_A), 0)$ elle est dite formelle [Su].

Notons $Z_{<n} = \bigoplus_{p < n-1} Z_p$. Pour tout $n \geq 0$ l'injection naturelle $i_n : (\Lambda Z_{<n}, D) \hookrightarrow (\Lambda Z, D)$ est un homomorphisme d'a.d.g.c.

III.1.2. Définition.

$\text{ocat}(A, d_A)$ est le plus petit entier n , positif ou nul, tel qu'il existe un homomorphisme d'a.d.g.c. $r_n : (\Lambda Z, D) \rightarrow (\Lambda Z_{<n}, D)$ vérifiant $i_n \circ r_n \sim \text{Id}_{\Lambda Z}$. Si un tel entier n'existe pas, on pose

$$\text{ocat}(A, d_A) = \infty.$$

Remarque. L'unicité à isomorphisme près du modèle filtré montre que cette définition a bien un sens.

III.1.3. Exemple. Supposons $H^*(A, d_A) = H^{\text{paire}}$, et $\dim Z_2 = 0$, d'après [G-L] ceci équivaut à $\dim Z_q = 0$ pour $q \geq 2$, d'où $\text{cocat}(A, d_A) = 2$.

III.1.4. Remarque. S'il existe un quasi-isomorphisme entre deux a.d.g.c, elles ont même cocatégorie. En particulier, si (A, d_A) est une a.d.g.c formelle et si $(\Lambda Z, d)$ désigne le modèle bigradué

$$\text{cocat}(A, d_A) = \text{cocat}(H^*(A, d_A), 0) = \text{cocat}(\Lambda Z, d)$$

III.1.5. L'invariant $\text{cocat}_0 S$ et $\text{cocat}(A_{\text{PL}}(S), d_S)$.

Le foncteur PL-forme [Su], noté A_{PL} , associe à chaque espace topologique S une a.d.g.c. $(A_{\text{PL}}(S), d_S)$ d'algèbre de cohomologie isomorphe à $H^*(S, \mathbb{Q})$. Un modèle filtré associé à $(A_{\text{PL}}(S), d_S)$ est par définition un modèle filtré de S [H-S].

III.1.6. Théorème. Soit S un espace topologique pointé 1-connexe de 0-type fini. Alors

$$\text{cocat}_0 S = \text{cocat}(A_{\text{PL}}(S), d_S).$$

La démonstration est reportée en fin de la première partie.

III.1.6.1. Exemples.

1) On vérifie sans difficultés que $\text{cocat}_0(S) = 1$ si et seulement si $H^*(S, \mathbb{Q})$ est une algèbre libre (on retrouve ainsi $\text{cocat}_0 S = 1$ si et seulement si S a le type d'homotopie rationnelle d'un produit d'espaces d'Eilenbert-MacLane).

2) D'après (I.3.4) $\text{cocat}_0 S^{2n} = 2$, $\forall n \geq 1$ et d'après (II.1.4) $\text{cocat}_0 \mathbb{C}P^n = 2$, $\forall n \geq 1$, ces deux résultats se généralisent de la manière suivante :

III.1.6.2. Proposition. Soit S un espace formel les conditions suivantes sont équivalentes

a) $\text{cocat}_0(S) = 2$

b) $\dim Z_i = 0$, $\forall i \geq 2$.

Preuve : Supposons $\text{ocat}_0 S = 2$, soit $r_2: (\Lambda Z, d) \rightarrow (\Lambda Z_{<2}, d)$ tel que $i_2 \circ r_2 \sim \text{Id}$; puisque la différentielle d est décomposable, on peut modifier r_2 tel que $i_2 \circ r_2 = \text{Id}$.

Soit z un élément de Z_2 , $dz \in (\Lambda Z)_1$ et comme $r_2(z) \in \Lambda(Z_0 \oplus Z_1)$, $d(r_2(z)) = r_2(dz)$ appartient à ΛZ_0 , d'où

$$i_2 d(r_2(z)) = d(r_2(z)) = dz \in \Lambda(Z_0)$$

Or le seul élément de Z_2 à différentielle dans ΛZ_0 est l'élément 0 ■

III.1.6.3. Remarque. Dans la proposition précédente, l'hypothèse "S formel" est nécessaire. En effet considérons l'espace coformel S d'algèbre de Lie d'homotopie définie par $\pi_*(\Omega S) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{L}(x,y) / \mathbb{L}^{\geq 3}(x,y)$ avec $|x| = |y| = 2$ cette algèbre est de nilpotence égale à 2 ; d'après (II.5) $\text{ocat}_0(S) = 2$.

Nous allons montrer que

- 1) $\dim Z_2 \neq 0$
- 2) S n'est pas formel

1) S a pour modèle minimal de Sullivan :

$$C^*(\pi_*(\Omega S) \otimes \mathbb{Q}, 0) = (\Lambda(a,b,c), d) \quad |a| = |b| = 3, \quad |c| = 5.$$

$$da = db = 0, \quad dc = a.b$$

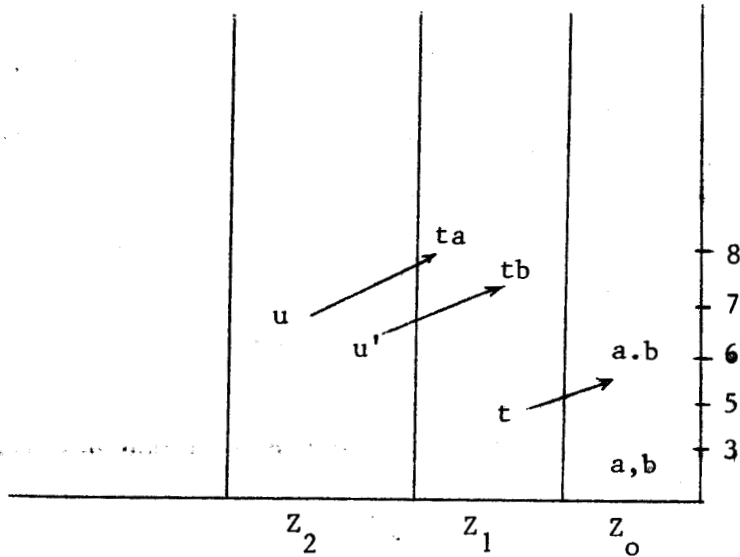
Son algèbre de cohomologie s'en déduit directement :

$$H^0(S, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}, \quad H^3(S, \mathbb{Q}) = a.\mathbb{Q} \oplus b.\mathbb{Q}$$

$$H^8(S, \mathbb{Q}) = a.c.\mathbb{Q} \oplus bc.\mathbb{Q}, \quad H^{11}(S, \mathbb{Q}) = abc.\mathbb{Q}$$

Dans le calcul de son modèle bigradué, apparaît à la colonne 1 un générateur t tel que $t \in Z_1$ et $dt = ab$.

On a alors deux cocycles $t.a$ et $t.b$ en colonne 1 d'où nécessité d'introduire deux générateurs, en colonne 2, u et u' tels que u et u' appartiennent à Z_2 et $du = ta$, $du' = tb$



2) S a pour modèle minimal de Quillen

$$\mathbb{L}(x, y, z, z', w), \partial) \quad \text{où} \quad |x| = |y| = 2.$$

$$|z| = |z'| = 7 \quad |w| = 10$$

$$\partial x = \partial y = 0$$

$$\partial z = [x, [x, y]] \quad \partial z' = [y, [x, y]]$$

$$\partial w = [x, z'] - [y, z]$$

∂ n'est pas purement quadratique, S n'est donc pas formel.

Décomposition cellulaire de S :

$$S = s_x^3 \vee s_y^3 \cup_{[x, [x, y]]} e^8 \cup_{[y, [x, y]]} e^8 \cup_{\alpha} e^{11}$$

où α est la calsse d'homotopie, du huitième squelette de $S^{(8)}$ de S ($\alpha \in \pi_{10}(S^{(8)})$) qui a pour représentant le cycle $[x, z'] - [y, z]$ ■

III.1.7. Corollaire.

Soit S un espace formel tel que $\text{cocat}_0(S) < \infty$, alors
 $\dim Z_i = 0$ pour $i \geq 2$.

III.1.8. Corollaire. Pour tout espace topologique S , si S_f

désigne l'espace formel associé à S

$$\text{cocat}_0 S \leq \text{cocat}_0 S_f$$

La preuve de ces deux corollaires est reportée en fin de paragraphe.

III.1.9. Remarque. Tout espace S est dans l'une des situations

suivantes :

- 1) $\text{cocat}_0 S_f = \infty$
- 2) $\text{cocat}_0 S_f \leq 2$ et $\text{cocat}_0(S) = \text{cocat}_0 S_f$.

En effet, d'après III.1.7. $\text{cocat}_0 S_f$ est soit infini, soit inférieur à 2 et dans ce dernier cas, $\text{cocat}_0 S \leq 2$, d'après III.1.8.

- Si $\text{cocat}_0 S = 0$, S est contractile et S_f l'est aussi
- Si $\text{cocat}_0 S = 1$, S est un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane d'où $S_f = S$.
- Si $\text{cocat}_0 S = 2$, nécessairement $\text{cocat}_0 S_f = 2$. ■

Commençons la démonstration du théorème III.1.5, elle repose sur trois lemmes.

III.1.10. Premier lemme. Notons $(L(U), \partial)$ un modèle minimal de

Quillen de l'espace S , la différentielle se décompose en $\partial = \bigoplus_{i \geq 2} \partial_i$ avec $\partial_i V \subset L^i(V)$. Pour tout entier $n \geq 1$, désignons par :

- C_n un supplémentaire des ∂_2 -cycles dans l'espace vectoriel

$$L^n(U) : L^n(U) = \ker \partial_2 \subset L^n(U) \oplus C_n$$

- T_{n+1} un supplémentaire de $\partial_2 C_n$ dans $\mathbb{L}^{n+1}(U)$

$$\mathbb{L}^{n+1}(U) = \partial_2 C_n \oplus T_{n+1}$$

Remarquons que $\mathbb{L}^{>n}(U) \oplus C_n$ et $\mathbb{L}^{>n+1}(U) \oplus T_{n+1}$ sont des idéaux différentiels.

Lemme 1. cocat $S \leq n$ si et seulement si la projection canonique $(\mathbb{L}(U), \partial) \rightarrow (\mathbb{L}(U) / \mathbb{L}^{>n}(U) \oplus C_n, \bar{\partial})$ admet une rétraction homotopique.

Preuve : 1ère étape.

De $\mathbb{L}^{>n+1}(U) \oplus T_{n+1} \subset \mathbb{L}^{>n}(U) \subset \mathbb{L}^{>n}(U) \oplus C_n$ on déduit les projections canoniques

$$\mathbb{L}(U) / \mathbb{L}^{>n+1}(U) \oplus T_{n+1}, \bar{\partial} \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{L}(U) / \mathbb{L}^{>n}(U), \bar{\partial} \xrightarrow{\pi_2} (\mathbb{L}(U) / \mathbb{L}^{>n}(U) \oplus C_n, \bar{\partial})$$

le noyau de $\pi_2 \circ \pi_1$ est l'idéal de $\mathbb{L}(U) / \mathbb{L}^{>n+1}(U) \oplus T_{n+1}$ engendré par

$C_n \oplus \partial_2 C_n$. Cet idéal est acyclique. En effet on a :

$$\mathbb{L}(U) / \mathbb{L}^{>n+1}(U) \oplus T_{n+1} \cong \mathbb{L}^{<n}(U) \oplus \ker \partial_2 \cap \mathbb{L}^n(U) \oplus C_n \oplus \partial_2 C_n$$

et

$$\mathbb{L}(U) / \mathbb{L}^{>n}(U) \oplus C_n \cong \mathbb{L}^{<n}(U) \oplus \ker \partial_2 \cap \mathbb{L}^n(U)$$

un élément quelconque de l'idéal $(C_n \oplus \partial_2 C_n)$ s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de la forme :

$$x = c \oplus [u, c'] \oplus \partial_2 c'' \quad \text{mod } \mathbb{L}^{>n+1}(U) \oplus T_{n+1}$$

c, c', c'' dans C_n et u dans U .

Puisque $\bar{\partial}$ augmente la longueur du crochet d'au moins une unité on a $[\bar{\partial}u, c'] = [u, \partial c'] = \bar{\partial}(\partial_2 c'') = 0$ et par suite $\bar{\partial}x = \bar{\partial}c$.

. Si x est un $\bar{\partial}$ -cycle, on a $\bar{\partial}c = 0$ d'où $\partial_2 c = 0$ ($\bar{\partial}c = \partial_2 c$) ce qui par définition des éléments de C_n entraîne que $c = 0$. x est donc de la forme $x = [u, c'] + \partial_2 c''$. C'est un élément de longueur de crochet $n+1$, il est nécessairement dans $\partial_2 C_n$ et donc dans $\text{Im } \bar{\partial}$. Ainsi, le noyau de $\pi_2 \circ \pi_1$ est acyclique. De la suite exacte longue d'homologie associée, on déduit que $\pi_2 \circ \pi_1$ est un quasi-isomorphisme

2ème étape.

Introduisons les notations suivantes :

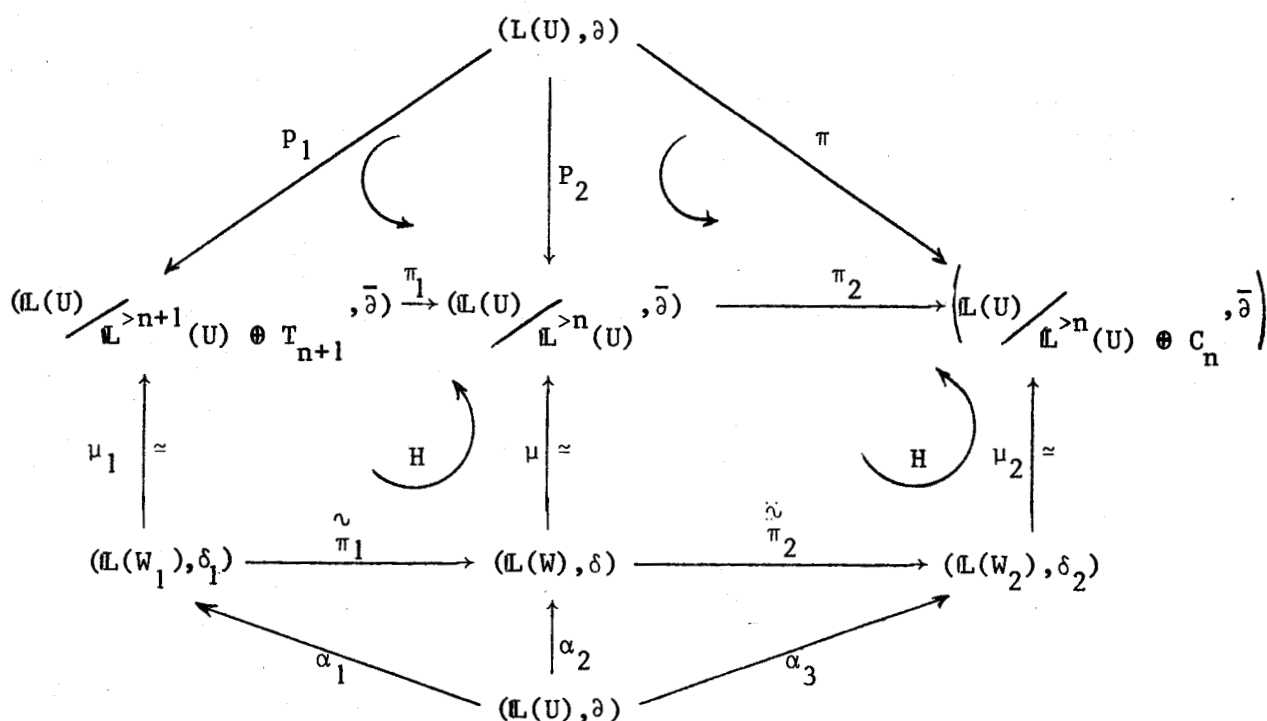
- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ homomorphismes d'a.l.d.g, modèles de Quillen respectivement des projections canoniques

$$P_1 : \mathbb{L}(U) \rightarrow \mathbb{L}(U) / \mathbb{L}^{>n+1}(U) \oplus T_{n+1}, \quad P_2 : \mathbb{L}(U) \rightarrow \mathbb{L}(U) / \mathbb{L}^{>n}(U)$$

et $\pi : \mathbb{L}(U) \rightarrow \mathbb{L}(U) / \mathbb{L}^{>n}(U) \oplus C_n$

- $((\mathbb{L}(W), \delta), \mu)$ un modèle minimal de Quillen de $(\mathbb{L}(U) / \mathbb{L}^{>n}(U), \bar{\partial})$
- $(\mathbb{L}(W_1, \delta_1), \mu_1)$ (respectivement $(\mathbb{L}(W_2, \delta_2), \mu_2)$) un modèle de Quillen de $\mathbb{L}(U) / \mathbb{L}^{>n+1}(U) \oplus T_{n+1}$ (resp. $\mathbb{L}(U) / \mathbb{L}^{>n}(U) \oplus C_n$)
- $\tilde{\pi}_1$ et $\tilde{\pi}_2$ les modèles de Quillen de π_1 et de π_2 ,

on considère le diagramme suivant :



a) Supposons $\text{cocat}_0(S) \leq n$; par définition, il existe β homomorphisme d'a.l.d.g. $(L(W), \delta) \rightarrow (L(U), \partial)$ tel que $\beta \circ \alpha_2 \sim \text{Id}$ de $\pi_2 \circ \pi_1 \circ P_1 = \pi$ on déduit que $\tilde{\pi}_2 \circ \tilde{\pi}_1 \circ \alpha_1 \sim \alpha_3$, $\tilde{\pi}_2 \circ \tilde{\pi}_1$ est un quasi-isomorphisme, d'où, d'après le lemme de relèvement [Ta, Chap. II], il existe ψ homomorphisme d'a.l.d.g. tel que $\psi \circ \tilde{\pi}_2 \circ \tilde{\pi}_1 \sim \text{Id}$, nous avons alors $\alpha_1 \sim \psi \circ \alpha_3$, notons $\beta' = \beta \circ \tilde{\pi}_1 \circ \psi$, il vérifie $\beta' \circ \alpha_3 \sim \text{Id}$.

b) Supposons qu'il existe β' homomorphisme d'a.l.d.g. $(L(W_2), \delta_2) \rightarrow (L(U), \partial)$ tel que $\beta' \circ \alpha_3 \sim \text{Id}$; posons $\beta = \beta' \circ \tilde{\pi}_2$ on a $\beta \circ \alpha_2 \sim \text{Id}$ i.e. $\text{Cocat}_0 S \leq n$

III.1.11. Deuxième et troisième lemmes.

Soit S un espace topologique 1-connexe de \mathbb{Q} -type fini et $(L(V), \partial)$ son modèle minimal de Quillen.

C^* désigne le foncteur cochaîne de Kozsul. Posons

$$(s L(V))_p = (L(V))_{p+1}$$

$$C^*(L(V), \partial) = \Lambda(\text{Hom}(s L(V), \mathbb{Q}), d_\ell + d_q), \text{ avec } d_\ell \text{ et } d_q.$$

différentielles linéaire et quadratique respectivement.

d_ℓ s'écrit $d_\ell = \bigoplus_{i \geq 1} d_{\ell,i}$ avec $d_{\ell,i} = {}^t \partial_{i+1}$. Posons

$\text{Hom}_p(\mathbb{L}(V), Q) = \text{Hom}(s \mathbb{L}^{p+1}(V), Q)$ pour $p \geq 0$ alors $d_{\ell,1} \text{Hom}_p(\mathbb{L}(V), Q) \subset \text{Hom}_{p-1}(\mathbb{L}(V), Q)$; s'induit ainsi la graduation par colonne (ou inférieure ou TJ-graduation) sur $H^*(\text{Hom}(s \mathbb{L}(V), Q), d_{\ell,1})$.

Notons pour tout entier $p, p \geq 0, Z_p = H_p(\text{Hom}(s \mathbb{L}(V), Q), d_{\ell,1})$ et $Z = \bigoplus_{p=0}^{\infty} Z_p$.

On considère le modèle minimal $(\Lambda Z, d)$ de

$(\Lambda \text{Hom}(s \mathbb{L}(V), Q), d_{\ell,1} + d_Q)$ obtenu à partir de la cohomologie induite par $d_{\ell,1}$ sur $\text{Hom}(s \mathbb{L}(V), Q)$ ([Ta, chap. II]). La projection canonique $C^*(\mathbb{L}(V), \partial) \rightarrow (\Lambda Z, d)$ induit un isomorphisme en cohomologie compatible avec la bigraduation. On note d' la différentielle induite par $(d_\ell - d_{\ell,1})$. Rappelons le résultat suivant ([Fe], [Ta]).

III.1.11.1. Lemme 2. $(\Lambda Z, d+d')$ est le modèle filtré de l'espace topologique S .

Soit π la projection canonique $(\mathbb{L}(V), \partial) \rightarrow (\mathbb{L}(V) / \mathbb{L}^{>n}(V) \oplus C_n, \bar{\partial})$ on a $\pi \circ \partial_2 = \bar{\partial}_2 \circ \pi$ avec ∂_2 et $\bar{\partial}_2$ parties quadratiques des différentielles ∂ et $\bar{\partial}$ respectivement. Notons π' la projection canonique

$$(\mathbb{L}(V), \partial_2) \xrightarrow{\pi'} (\mathbb{L}(V) / \mathbb{L}^{>n}(V) \oplus C_n, \bar{\partial}_2)$$

${}^t \pi'$, le transposé de π' , est un homomorphisme injectif d'a.d.g.c.

III.1.11.2. Lemme 3.

1) $H^*({}^t \pi')$ est injectif

2) $H^*(\text{Hom}(s(\mathbb{L}(V) / \mathbb{L}^{>n}(V) \oplus C_n), Q), d_{\ell,1}) = \bigoplus_{i \leq n-1} Z_i$

Preuve : 1) il est équivalent de montrer que $H_*(\pi')$ est surjectif qui est plus simple à écrire. Soit $[c]$ une classe dans $H_*(\mathbb{L}(V)/\mathbb{L}^{>n}(V) \oplus C_n, \bar{\partial}_2)$ de représentant le cycle c .

Comme $\mathbb{L}(V)/\mathbb{L}^{>n}(V) \oplus C_n$ est isomorphe en tant qu'espace vectoriel à $\bigoplus_{i \leq n-1} \mathbb{L}^i(V) \oplus \ker \partial_2 \cap \mathbb{L}^n(V)$ et que ∂_2 et $\bar{\partial}_2$ sont homogènes de degré $+1$ en longueur de crochet, il suffit d'étudier les trois cas suivants :

(•) $c \in \mathbb{L}^i(V)$ avec $i < n-1$, π' est surjectif, il existe $c_1 \in \mathbb{L}^i(V)$ et $c_2 \in C_n \oplus \mathbb{L}^n(V)$ tels que $c = \pi'(c_1 \oplus c_2)$

$$\partial_2(c_1 \oplus c_2) = \partial_2 c_1 \oplus \partial_2 c_2 \in \mathbb{L}^{i+1}(V) \oplus \mathbb{L}^{>n}(V)$$

comme $i+1 \leq n-1$ et que $\bar{\partial}_2 c = 0$ on a nécessairement $\partial_2 c_1 = 0$, de $\pi'(c_1) = c$ on déduit que c_1 ne peut être dans $\text{Im } \partial_2$. $H_*(\pi')[c_1] = [c]$

(••) $c \in \mathbb{L}^{n-1}(V)$. On a dans ce cas $c = \pi'(c_1 \oplus c_2)$ avec $c_1 \in \mathbb{L}^{n-1}(V)$ et $c_2 \in C_n \oplus \mathbb{L}^{>n}(V)$.

$$\partial_2 c_1 \in \ker \partial_2 \cap \mathbb{L}^1(V) \quad \partial_2 c_2 \in \mathbb{L}^{>n}(V).$$

Comme $\pi'(\partial_2 c_1) = \partial_2 c_1$ et que $\bar{\partial}_2 c = 0$ on obtient $\partial_2 c_1 = 0$. Pour la même raison que dans (•) c_1 ne peut appartenir à $\text{Im } \partial_2$.

(•••) Supposons que $c \in H$ ou H est le supplémentaire de $\partial_2 \mathbb{L}^{n-1}(V)$ dans la décomposition suivante

$$\ker \partial_2 \cap \mathbb{L}^n(V) = \partial_2 \mathbb{L}^{n-1}(V) \oplus H$$

on a alors $c = \pi'(c_1 \oplus c_2)$, $c_1 \in H$, $c_2 \in C_n \oplus \mathbb{L}^{>n}(V)$, $\partial_2 c_1 = 0$ et $\partial_2 c_2 \in \mathbb{L}^{>n}(V)$ on a donc

$$H_*(\pi')[c_1] = [c] \quad \blacksquare$$

2) $(\mathbb{L}(V) / \mathbb{L}^{>n}(V) \oplus \mathbb{C}_n, \bar{\partial}_2)$ est isomorphe en tant qu'espace vectoriel différentiel à $\left[\left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{L}^i(V) \oplus \ker \partial_2 \cap \mathbb{L}^n(V) \right), \partial_2 \right]$ il a donc même algèbre d'homologie que celui-ci, d'après les notations du début du paragraphe on a :

$$\begin{aligned}
 H^* \left(\text{Hom} \left(\left(\mathbb{L}(V) / \mathbb{L}^{>n}(V) \oplus \mathbb{C}_n \right), \mathbb{Q} \right), \bar{\partial}_2 \right) &= \bigoplus_{j=0}^{n-1} H_j(\text{Hom}(s \mathbb{L}(V), \mathbb{Q}), d_{\ell, 1}) \\
 &= \bigoplus_{j=0}^{n-1} Z_j \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

III.1.11.3. Conséquence.

Rappelons que le quasi-isomorphisme ψ , $\psi : C^*(\mathbb{L}(V), \partial) \rightarrow (\Lambda Z, d+d')$ du lemme 2 est compatible avec la graduation inférieure de $C^*(\mathbb{L}(V), \partial)$ et de ΛZ . D'autre part

$$C^*(\pi) : C^* \left(\mathbb{L}(V) / \mathbb{L}^{>n}(V) \oplus \mathbb{C}_n, \bar{\partial} \right) \rightarrow C^*(\mathbb{L}(V), \partial)$$

est un homomorphisme injectif d'a.d.g.c.

Notons $\psi' = \psi \circ C^*(\pi)$ et $Z_{<n} = \bigoplus_{i=1}^{n-1} Z_i$. D'après le lemme 3 :

$$\psi' : C^* \left(\mathbb{L}(V) / \mathbb{L}^{>n}(V) \oplus \mathbb{C}_n, \bar{\partial} \right) \rightarrow (\Lambda Z_{<n}, d+d')$$

est un quasi-isomorphisme. Si l'on note i_n , l'injection canonique $(\Lambda Z_{<n}, d+d') \rightarrow (\Lambda Z, d+d')$, nous obtenons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 (\Lambda Z, d+d') & \xleftarrow{i_n} & (\Lambda Z_{<n}, d+d') \\
 \uparrow \psi \simeq & & \uparrow \psi' \simeq \\
 C^*(\mathbb{L}(V), \partial) & \xleftarrow{C^*(\pi)} & C^* \left(\mathbb{L}(V) / \mathbb{L}^{>n}(V) \oplus \mathbb{C}_n, \bar{\partial} \right)
 \end{array}$$

Remarque. Tout quasi-isomorphisme $\psi : (\Lambda X, d) \xrightarrow{\cong} (\Lambda S, d')$ entre a.d.g.c. libres admet un inverse homotopique.

En effet d'après le lemme de relèvement [Ha, Chap 5], il existe ψ' quasi-isomorphisme tel que $\psi \circ \psi' \sim \text{Id}$

$$\begin{array}{ccc}
 & & (\Lambda X, d) \\
 & \nearrow \psi' & \downarrow \psi \cong \\
 (\Lambda X', d') & \xlongequal{\quad} & (\Lambda X', d')
 \end{array}$$

notons alors ψ et ψ' les homomorphismes d'a.d.g.d. inverses homotopiques des quasi-isomorphismes ψ et $\psi' = \psi \circ C^*(\pi)$ respectivement

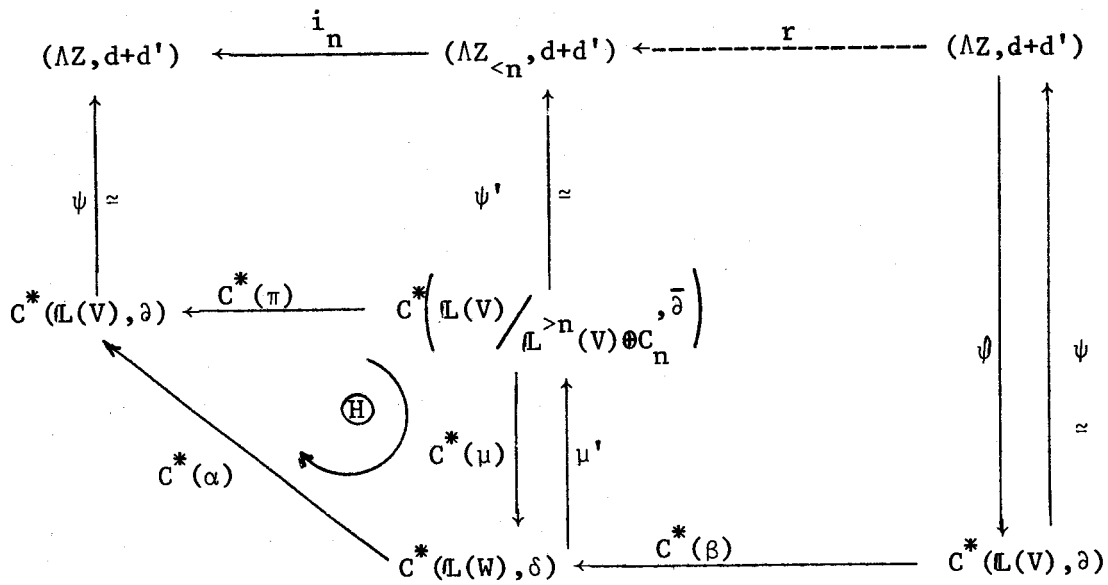
III.1.12. Démonstration du théorème III.

a) Supposons $\text{cocat}_0(S) \leq n$, d'après le lemme 1 (III.1.10.), si α est un modèle de Quillen de la projection canonique π , il existe β homomorphisme d'a.l.d.g. tel que

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbb{L}(V), \partial) & \xrightarrow{\pi} & \left(\mathbb{L}(V) / \mathbb{L}^{>n}(V) \oplus C_n, \bar{\partial} \right) \\
 & \searrow \alpha & \uparrow \mu \cong \\
 & & (\mathbb{L}(W), \delta) \xrightarrow{\beta} (\mathbb{L}(V), \partial)
 \end{array}$$

$$\beta \circ \alpha \sim \text{Id}.$$

Appliquons le foncteur C^* à ce diagramme, les quasi-isomorphismes et les homotopies sont conservés. Notons μ' un inverse homotopique de $C^*(\mu)$.



Posons $r = \psi' \circ \mu' \circ C^*(\beta) \circ \psi$, on a

$$i_n \circ r \sim \psi \circ C^*(\pi) \circ \mu' \circ C^*(\beta) \circ \psi$$

comme $C^*(\alpha) \circ C^*(\mu) \sim C^*(\pi)$, on obtient

$$C^*(\alpha) \sim C^*(\pi) \circ \mu'$$

donc $i_n \circ r \sim \psi \circ C^*(\alpha) \circ C^*(\beta) \circ \psi \sim \psi \circ \psi \sim \text{Id}$.

Ceci démontre que $\text{cocat}(A_{PL}(S), d_S) \leq n$.

b) Supposons que $\text{cocat}(A_{PL}(S), d_S) \leq n$, si $(\Lambda Z, d+d')$ désigne un modèle filtré de $(A_{PL}(S), d_S)$. Par définition il existe $r_n : (\Lambda Z, d+d') \rightarrow (\Lambda Z_{<n}, d+d')$ tel que $i_n \circ r_n \sim \text{Id}_{\Lambda Z}$ on considère alors le diagramme suivant, commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccccc}
 C^*(\mathbb{L}(V), \partial) & \xrightarrow{\tilde{r}_n} & C^*(\mathbb{L}(V) / \mathbb{L}^{>n}(V) \oplus C_n, \bar{\partial}) & \xrightarrow{\tilde{i}_n} & C^*(\mathbb{L}(V), \partial) \\
 \downarrow \psi \simeq & & \downarrow \psi' \simeq & & \downarrow \psi \simeq \\
 (\Lambda Z, d+d') & \xrightarrow{r_n} & (\Lambda Z_{<n}, d+d') & \xrightarrow{i_n} & (\Lambda Z, d+d')
 \end{array}$$

\tilde{r}_n et \tilde{i}_n homomorphisme d'a.d.g.c. modèles respectifs de r_n et de i_n .
 Nous avons la relation $\psi \circ \tilde{i}_n \circ \tilde{r}_n \sim i_n \circ r_n \circ \psi$, i.e. $\psi \circ \tilde{i}_n \circ \tilde{r}_n \sim \psi$
 ceci équivaut à $\tilde{i}_n \circ \tilde{r}_n \sim \text{Id}$ puisque ψ est un quasi-isomorphisme.

D'autre part $L_* = (L \circ \#)$ désigne le foncteur adjoint à gauche de C^* , si (L, ∂) est une a.l.d.g. le morphisme d'adjonction $\gamma : L_* C^*(L, \partial) \rightarrow (L, \partial)$ est un quasi-isomorphisme. Appliquons L_* à la première ligne du diagramme (*) ci-dessus. On obtient

$$L_* C^*(\mathbb{L}(V), \partial) \xrightarrow{L_*(\tilde{r}_n)} L_* C^*(\mathbb{L}(V) / \mathbb{L}^{>n}(V) \oplus C_n, \bar{\partial}) \xrightarrow{L_*(\tilde{i}_n)} L_* C^*(\mathbb{L}(V), \partial)$$

avec $L_*(\tilde{i}_n) \circ L_*(\tilde{r}_n) \sim \text{Id}$. Le morphisme d'adjonction γ , appliqué à la ligne ci-dessus montre que $(\mathbb{L}(V), \partial)$ est rétracte de $(\mathbb{L}(V) / \mathbb{L}^{>n}(V) \oplus C_n, \bar{\partial})$
 cette dernière algèbre de Lie est de nilpotence inférieur à n , on obtient d'après le (a) puis le (b) du théoème (I.4.2) que $\text{cocat}_0 S = \text{cocat}(\mathbb{L}(V), \partial) \leq n$
 ce qui achève la démonstration du théorème ■

III.1.13. Démonstration du corollaire III.1.7.

L'espace formel S possède un modèle de Quillen à différentielle quadratique $(\mathbb{L}(V), \partial_2)$.

Supposons que $\text{cocat}_0 S = p$, $p > 2$, comme S est formel $\text{cocat}_0 S = \varepsilon_0(S)$ et comme ∂_2 est homogène en longueur de crochet, nous obtenons $\forall q \geq p+1, \mathbb{L}^q(V) \cap \ker \partial_2 = \partial_2 \mathbb{L}^{q-1}(V)$.

Avec les notations du lemme 2 (III.1.10),

$Z_i = H_i(\text{Hom}(s \mathbb{L}(V), \mathbb{Q}), \partial_2) = 0$ pour tout $i \geq p$ ceci entraîne que
 $Z_i = 0, \forall i \geq 2$ ([F,T-2], th.IV.5) ■

III.1.14. Démonstration du corollaire III.1.8.

Si $(\mathbb{L}(V), \partial)$ désigne un modèle minimal de Quillen de S ,
 $(\mathbb{L}(V), \partial_2)$ est un modèle de l'espace formel S_f associé

- $\text{cocat}_0 S \leq \text{cocat}_0 S_f$ est vérifié si $\text{cocat}_0 S_f = \infty$

- Si $\text{cocat}_0 S_f < \infty$ d'après (III.1.7.) $\text{cocat}_0 S_f \leq 2$ d'où

$\dim Z_i = 0$ pour $i \geq 2$, lorsque $(\bigwedge_{i \geq 0} (\bigoplus Z_i), d)$ désigne le modèle bigradué
 associé à l'espace S .

On en déduit que $\text{cocat}_0 S \leq 2$ ■

III.2. Défaut de dualité entre $\text{cocat}_0(S)$ et la catégorie rationnelle.

Le "Mapping theorem" rappelé en début de chapitre ne se transpose pas dans la dualité de Eckmann-Hilton.

En effet l'énoncé dual serait "Soit $f : S \rightarrow S'$ une application continue telle que $H^*(f) : H^*(S', \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(S, \mathbb{Q})$ soit injectif alors $\text{cocat}_0(S) \leq \text{cocat}_0 S'$ ".

Cette proposition n'est pas vérifiée : la projection $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^3$ induit une injection en cohomologie alors que

$$\text{cocat}_0(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^2) = 2 \quad \text{et} \quad \text{cocat}_0 \mathbb{S}^3 = 1.$$

III.3. Autres énoncés.

1) Remarquons à ce propos que tout autre énoncé dual est aussi faux.

Énoncé 1. " $f : S \rightarrow S'$ telle que $H^*(f) : H^*(S', \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(S, \mathbb{Q})$

injectif alors

$$\text{cocat}_0 S \geq \text{cocat}_0 S' "$$

Enoncé 2. "f : S → S' telle que H*(f) : H*(S', Q) → H*(S, Q) surjectif alors cocat₀ S ≤ cocat₀ S' ".

Enoncé 3. "f : S → S' telle que H*(f) : H*(S', Q) → H*(S, Q) surjectif alors cocat₀ S ≥ cocat₀ S' ".

2) Contre-exemples aux trois énoncés précédents respectivement

$$1) S = \mathbb{S}_x^3 \times \mathbb{S}_y^3 \times \mathbb{S}_z^3 \xrightarrow{f} \mathbb{S}_a^6 \vee \mathbb{S}_b^6 = S'$$

$$\begin{array}{ccc} \Lambda(x, y, z) & \xleftarrow{H^*(f)} & Q \otimes a \cdot Q \otimes b \cdot Q \\ & & x \cdot y \leftarrow a \\ & & y \cdot z \leftarrow b \end{array}$$

$$\text{cocat}_0 S = 1$$

(I.4.2)

$$\text{cocat}_0 S' = \infty$$

(a) du II.5)

$$2) S = \mathbb{S}^3 \vee \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 = S'$$

$$\text{cocat}_0 S = \infty$$

$$\text{cocat}_0 S' = 1$$

$$3) S = \mathbb{S}^5 \longrightarrow (\mathbb{S}^3 \vee \mathbb{S}^3) \times \mathbb{S}_x^5 = S' \quad \text{avec } [f] = x$$

$$\text{cocat}_0 S = 1$$

$$\text{cocat}_0 S' = \infty$$

c) de I.4.2 puis a) de II.5.

CHAPITRE IV

UN MODELE DE LA FIBRE HOMOTOPIQUE

D'UNE APPLICATION

Afin de calculer un modèle de Quillen des espaces de Ganéa $G_n(S)$ d'un espace S (Nous en rappelons la définition en (V.1)), nous sommes amenés à construire des modèles adaptés pour les fibrations et les cofibrations dans la catégorie L.D.G. C'est à quoi nous employons ce chapitre.

Tout d'abord nous étudions un problème purement algébrique concernant les suites exactes courtes d'algèbres de Lie libres. A partir de ce résultat et de ceux de Tanré [Ta, chap. VI], nous explicitons un modèle pour une fibration (en particulier nous calculons la différentielles sur le modèle de Quillen de la fibre). Finalement nous rappelons la notion de K-Q-modèle d'une cofibration et traitons les cas particuliers que nous utilisons dans la suite.

IV.1. Suite exacte d'algèbres de Lie libres.

IV.1.1. Lemme [C-M-N]. Toute suite exacte d'algèbres de Lie libres $0 \rightarrow \mathbb{L}(W) \xrightarrow{j} \mathbb{L}(U) \xrightarrow{\Pi} \mathbb{L}(V) \rightarrow 0$ est scindée. De plus il existe des sections σ de Π telles que $\sigma(V) \subset U$.

Etant donnée une telle section σ de Π , posons $U = K \oplus \sigma(V)$; alors W admet une structure de $T(V)$ -module et il existe un isomorphisme de $T(V)$ -modules $\phi : T(V) \otimes K \xrightarrow{\cong} W$.

Preuve : 1) Définition de la structure de module :

L'homomorphisme d'a.l.g est surjectif, il induit une surjection

$$\Pi : \mathbb{L}(U) / \mathbb{L}^{\geq 2}(U) \longrightarrow \mathbb{L}(V) / \mathbb{L}^{\geq 2}(V)$$

On définit π_ℓ application linéaire surjective à partir du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}(U) / \mathbb{L}^{\geq 2}(U) & \longrightarrow & \mathbb{L}(V) / \mathbb{L}^{\geq 2}(V) \\ \parallel \S & & \parallel \S \\ U & \xrightarrow{\pi_\ell} & V \end{array}$$

$\sigma : V \rightarrow U$ section de π_ℓ se prolonge de manière unique en homomorphisme d'a.l.g (noté encore σ), tel que $\pi\sigma = \text{Id}$.

Notons $U = \sigma(V) \oplus K$. Définissons une structure de $T(V)$ -module sur W de la manière suivante :

- soit α un élément de $\mathbb{L}(V)$ et ω un élément de W alors $[\sigma(\alpha), j(\omega)] \in \ker \pi$, soit ω' dans $\mathbb{L}(W)$ tel que

$$j(\omega') = [\sigma(\alpha), j(\omega)]$$

- Notons $p : \mathbb{L}(W) \rightarrow \mathbb{L}(W) / \mathbb{L}^{\geq 2}(W)$ la projection canonique, on définit $\rho : \mathbb{L}(V) \times W \rightarrow W$ par $\rho(\alpha, \omega) = p(\omega')$, ρ est bilinéaire, d'où $\bar{\rho} : \mathbb{L}(V) \otimes W \rightarrow W$ application linéaire qui définit $\hat{\rho} : \mathbb{L}(V) \rightarrow \text{End}(W)$ par

$$\hat{\rho}(\alpha)(\omega) = \bar{\rho}(\alpha \otimes \omega).$$

D'après la propriété universelle de l'algèbre enveloppante, il existe un unique homomorphisme d'algèbres associatives :

$$\bar{\psi} : U \mathcal{L}(V) \cong T(V) \rightarrow \text{End}(W)$$

d'où l'homomorphisme linéaire $\psi : T(V) \otimes W \rightarrow W$ qui définit une structure de $T(V)$ module sur W .

2) Construction de l'homomorphisme ϕ :

Tout élément u de K est dans $\ker \Pi$, comme u est indécomposable, il est nécessairement dans W : $K \subset W$. ϕ est l'homomorphisme de $T(V)$ module défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(u) = u, \quad u \in K \\ \\ \phi(v_1 \otimes v_2 \dots \otimes v_1 \otimes u) = p[\sigma(v_1, j\phi(v_2 \otimes v_3 \dots \otimes v_1 \otimes u))] \\ \\ \forall u \in K \text{ et } (v_i) \in V. \end{array} \right.$$

3) Pour montrer que ϕ est un isomorphisme, nous allons montrer que W est un $T(V)$ -module libre engendré par K .

L'image par le foncteur C^* de la suite exacte d'algèbres de Lie libres, donnée dans le lemme IV.1, est une K -S extension [Ta, Chap.VI] ;

Notons la :

$$(\Lambda X, d) \longrightarrow (\Lambda X \otimes \Lambda Y, d) \longrightarrow (\Lambda Y, \bar{d})$$

où les différentielles d et \bar{d} sont quadratiques. On considère sur $\Lambda X \otimes \Lambda Y$ la filtration définie par :

$$F_p = \Lambda^{>P} X \otimes \Lambda Y, \quad \forall p \geq 0.$$

Elle vérifie $F_p \subset F_{p-1}$ et $dF_p \subset F_p$, et engendre une suite spectrale, de premier quadrant, convergente :

$$E_2^{p,q} = \text{Tor}_p^{T(V)}(\mathbb{Q}, \text{Tor}_q^{T(W)}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})) \Rightarrow H^*(\Lambda X \otimes \Lambda Y, d) = \text{Tor}_{p+q}^{T(K \otimes V)}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) .$$

- puisque $T(W)$ est une algèbre libre $\text{Tor}_q^{T(W)}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) = 0$ pour $q \geq 2$, [Ma], d'où $E_2^{p,q} = 0$ pour $q \geq 2$.

- puisque $T(V)$ est une algèbre libre $E_2^{p,*} = 0$ pour $p \geq 2$, d'autre part on a

$$\text{Tor}_0^{T(W)}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad \text{Tor}_1^{T(W)}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) = W .$$

La suite spectrale a donc son support réduit, a priori, à quatre points :

$$\cdot E_2^{0,0} = \mathbb{Q}$$

$$\cdot E_2^{1,0} = \text{Tor}_1^{T(V)}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) = V$$

$$\cdot E_2^{0,1} = \text{Tor}_0^{T(V)}(\mathbb{Q}, W) = \mathbb{Q}_{T(V)} \otimes W$$

$$\text{et} \cdot E_2^{1,1} .$$

Un argument "de coin" montre que $E_2^{1,1} = E_3^{1,1} = \dots = E_\infty^{1,1}$. Comme $T(V \otimes K)$ est une algèbre libre $\text{Tor}_2^{T(V \otimes K)}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) = 0$, donc $E_\infty^{1,1}$ et par la suite $E_2^{1,1}$ sont nuls. Puisque $E_2^{1,1} = \text{Tor}_1^{T(V)}(\mathbb{Q}, W)$, $E_2^{1,1} = 0$ équivaut à :
 W est un $T(V)$ module libre ([Ma]). Soit M un espace vectoriel tel que $W = T(V) \otimes M$, nous obtenons :

$$E_2^{0,1} = \mathbb{Q}_{T(V)} \otimes W \cong \mathbb{Q} \otimes M \quad \text{d'où} \quad E_2 = \mathbb{Q} \oplus V \oplus M .$$

D'autre part, E_∞ est isomorphe à $H_*^*(C^*(L(K \otimes V)))$ et puisque

$$\text{Tor}_{p+q}^{T(K \otimes V)}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) = \begin{cases} 0 & \text{si seulement si } p = q = 0 \\ K \otimes V & \text{si } p+q = 1 \\ 0 & \text{si } p+q \geq 2 \end{cases}$$

Nous obtenons $H_*(C^* \mathbb{L}(V \otimes K)) = 0 \otimes V \otimes K \stackrel{\sim}{=} E_\infty$. Comme $E_2 = E_\infty$, M est isomorphe à K et par la suite W est un $T(V)$ module libre engendré par K . ■

IV.1.2. Lemme. Notons k l'application linéaire injective $j \circ \Phi$, elle vérifie : 1) $k(u) = u$ si $u \in K$

$$2) k(v_1 \otimes v_2 \dots \otimes u_n \otimes u) = [v_1, [v_2, \dots, [v_n, u] \dots]]$$

$$\forall v_i \in V, \forall u \in K.$$

Preuve : $[\mathbb{L}(\sigma(V) \otimes K)]_1$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{L}(\sigma(V) \otimes K)$, formé des crochets contenant un seul élément de K :

Notons τ l'inclusion canonique

$$\mathbb{L}(\sigma(V) \otimes K) \hookrightarrow U \mathbb{L}(\sigma(V) \otimes K) \stackrel{\sim}{=} T(\sigma(V) \otimes K)$$

On a

$$[\mathbb{L}(\sigma(V) \otimes K)]_1 = \tau^{-1} \left(\bigoplus_{\ell \geq 1} \bigoplus_{i_1 + i_2 + \dots + i_\ell = 1} T(\sigma(V)) \otimes T^{i_1}(K) \otimes T(\sigma(V)) \otimes \dots \otimes T(\sigma(V)) \otimes T^{i_\ell}(K) \otimes T(\sigma(V)) \right).$$

Comme le $T(V)$ module W est isomorphe à $T(V) \otimes K$, on a $j(W) \subset [\mathbb{L}(\sigma(V) \otimes K)]_1$, il s'en déduit que pour tout élément β dans $\mathbb{L}^{\geq 2}(W)$, $j(\beta)$ contient au moins deux éléments de K . D'où :

$$\forall v_1, \dots, v_n \text{ éléments de } V \text{ et } \forall u \in K$$

$$j^{-1}([v_1, [v_2, \dots, [v_n, u] \dots]]) \in W.$$

Compte tenu de la définition de l'isomorphisme Φ et de l'abus de notation qui consiste à remplacer $\sigma(v)$ par v pour tout élément v de V , on a :

$$\cdot j\phi(u) = j(u) = u$$

$$\cdot \forall v \in V, \forall u \in K$$

$$j\phi(v \otimes u) = j\phi(j^{-1}[v,u]) = [v,u]$$

Supposons la deuxième relation du lemme vérifiée pour tout ensemble de n éléments de V et tout élément de K , et considérons v_1, \dots, v_{n+1} $(n+1)$ -éléments de V et $u \in K$

$$\begin{aligned} j\phi(v_1 \otimes \dots \otimes v_{n+1} \otimes u) &= j\phi(j^{-1}[v_1, j(v_2 \otimes v_3 \otimes \dots \otimes v_{n+1} \otimes u)]) \\ &= j\phi(j^{-1}[v_1, [v_2 \dots [v_{n+1}, u] \dots]]) \\ &= [v_1, [v_2, \dots, [v_{n+1}, u] \dots]] \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Notons encore k l'homomorphisme d'a.l.g. $\mathbb{L}(T(V) \otimes K) \rightarrow \mathbb{L}(V \otimes K)$ qui prolonge $j \circ \phi$.

IV.2. Remarque.

Dans [Ta], Tanré donne une construction, pour toute fibration de Serre $F \rightarrow E \rightarrow B$ entre espaces 1-connexes de \mathbb{Q} -type fini, d'un modèle de Quillen surjectif : $\Pi : (\mathbb{L}(U), \partial) \rightarrow (\mathbb{L}(V), \bar{\partial})$, où $(\mathbb{L}(U), \partial)$ est un modèle de E , $(\mathbb{L}(V), \bar{\partial})$ un modèle de B et $\ker \Pi$ muni de la différentielle induite est un modèle de Quillen de la fibre F .

$\ker \Pi$ sous algèbre de Lie d'une algèbre de Lie libre est libre i.e. il existe un espace vectoriel gradué W tel que $\ker \Pi = L(W)$; le lemme IV.1.1. permet d'expliciter W .

IV.3. Une différentielle sur le modèle de la fibre.

Soit $\Pi : (\mathbb{L}(U \otimes V), \partial) \rightarrow \mathbb{L}(V), \bar{\partial})$ un homomorphisme surjectif d'a.l.d.g. avec $\Pi(U) = 0$ et $\Pi(V) = V$ d'après (IV.1.1) et (IV.1.2) nous avons la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{L}(T(V) \otimes U) \xrightarrow{k} \mathbb{L}(U \otimes V) \xrightarrow{\Pi} \mathbb{L}(V) \rightarrow 0$$

puisque k est injectif, définissons sur $\mathbb{L}(T(V) \otimes U)$ une différentielle δ par $k \circ \delta = \partial \circ k$. Afin d'explicitier δ introduisons une représentation de l'algèbre de Lie $\mathbb{L}(U \otimes V)$ dans $\mathbb{L}(T(V) \otimes U)$, notée \hat{ad} .

Rappelons que $\text{Der } \mathbb{L}(T(V) \otimes U)$ désigne l'algèbre de Lie des dérivations d'algèbre de Lie de $\mathbb{L}(T(V) \otimes U)$.

IV.3.1. Définition. Considérons l'application linéaire notée \hat{ad} et définie par

$$\begin{aligned} \hat{ad} : U &\longrightarrow \text{Der } \mathbb{L}(T(V) \otimes U) \\ u &\longrightarrow \hat{ad}_u \text{ tel que} \end{aligned}$$

$$\hat{ad}_u(\psi) = [u, \psi], \quad \forall \psi \text{ dans } \mathbb{L}(T(V) \otimes U)$$

$\hat{ad} : V \rightarrow \text{Der } \mathbb{L}(T(V) \otimes U)$, pour tout v dans V , \hat{ad}_v désigne l'unique dérivation prolongeant l'application linéaire $\hat{ad}_v : T(V) \otimes U \rightarrow T(V) \otimes U$ définie par

$$\hat{ad}_v(\alpha) = v \otimes \alpha \quad \forall \alpha \in T(V) \otimes U.$$

On définit $\hat{ad} : \mathbb{L}(U \otimes V) \rightarrow \text{Der } \mathbb{L}(T(V) \otimes U)$ comme l'unique dérivation prolongeant l'application linéaire $U \otimes V \rightarrow \text{Der } \mathbb{L}(T(V) \otimes U)$ précédemment définie.

IV.3.2. Remarque. Soit α un élément de $\mathbb{L}(U) \subset \mathbb{L}(U \otimes V)$ et ψ un élément de $\mathbb{L}(T(V) \otimes U)$, il est clair que $\hat{ad}_\alpha(\psi) = [\alpha, \psi]$. En utilisant l'homomorphisme d'a.l.g, k , cette relation se généralise de la manière suivante :

IV.3.3. Lemme.

$$1) \forall \alpha \in \mathbb{L}(U \otimes V), \quad \forall \psi \in \mathbb{L}(T(V) \otimes U).$$

$$k \hat{ad}_\alpha(\psi) = [\alpha, k(\psi)]$$

$$2) \quad \forall \varphi \in \mathbb{L}(T(V) \otimes U), \quad \forall \psi \in T(V) \otimes U$$

$$\hat{\text{ad}}_{k(\varphi)}(\psi) \in \mathbb{L}^{\geq 2}(T(V) \otimes U)$$

Preuve : 1) Soit v un élément de V et ψ un élément de $T(V) \otimes U$, $k \hat{\text{ad}}_v(\psi) = k(v \otimes \psi) = [v, k(\psi)]$, fixons v dans V , pour étendre cette relation à tous les éléments de $\mathbb{L}(T(V) \otimes U)$, nous faisons une récurrence sur la longueur du crochet : supposons que pour tout élément ψ de $\mathbb{L}^{\leq n}(T(V) \otimes U)$, $k \hat{\text{ad}}_v(\psi) = [v, k(\psi)]$, et soit $\varphi = [\psi, \psi']$ un élément de $\mathbb{L}^{n+1}(T(V) \otimes U)$.

Comme $\hat{\text{ad}}_v$ est une dérivation d'algèbre de Lie de degré $|v|$, on a :

$$\begin{aligned} \hat{\text{ad}}_v(\varphi) &= [\text{ad}_v(\psi), \psi'] + (-1)^{|v||\psi|} [\varphi, \text{ad}_v(\psi')] \\ &= (-1)^{|\alpha||\psi|} ([\alpha, [\alpha', k(\varphi)]] - (-1)^{|\alpha||\alpha'|} [\alpha', [\alpha, k(\varphi)]] \\ &\quad - [[\alpha, \alpha'], k(\varphi)]) = 0 \end{aligned}$$

2) D'après 1) du lemme

$$k \hat{\text{ad}}_{k(\varphi)}(\psi) = [k(\varphi), k(\psi)] = k[\varphi, \psi].$$

comme k est injectif, on a $\hat{\text{ad}}_{k(\varphi)}(\psi) = [\varphi, \psi] \in \mathbb{L}^{\geq 2}(T(U) \otimes U)$ ■

IV.3.4. Calcul de la différentielle δ .

Nous allons calculer δ sur $T(V) \otimes U$ l'espace vectoriel des générateurs du modèle de Quillen de la fibre $T(V) \otimes U = U \otimes T^+(V) \otimes U$.

Comme $k(U) = U$ on obtient $\delta u = \partial u$, $\forall u \in U$, pour les éléments de $T^+(V) \otimes U$ le 1) du lemme précédent permet d'explicitier la différentielle par la formule suivante :

IV.3.4.1. Lemme.

$$\forall v \in V, \quad \forall \psi \in T(V) \otimes U$$

$$\delta \hat{\text{ad}}_v(\psi) = \hat{\text{ad}}_{\partial v}(\psi) + (-1)^{|v|} \hat{\text{ad}}_v(\delta \psi)$$

Preuve : Nous faisons une récurrence sur la longueur du produit tensoriel $T^n(V) \otimes U$. Lorsque $n = 1$, $v \in V$ et $u \in U$

$$k \delta \hat{\text{ad}}_v(u) = \partial k(v \otimes u) = \partial [v, u] = [\partial v, u] + (-1)^{|v|} [v, \partial u]$$

d'après (IV.3.3)

$$[\partial v, u] = [\partial v, k(u)] = k \hat{\text{ad}}_{\partial v}(u)$$

et

$$[v, \partial u] = [v, k(\partial u)] = k \hat{\text{ad}}_v(\partial u).$$

Comme k est injectif, nous obtenons :

$$\delta \hat{\text{ad}}_v(u) = \hat{\text{ad}}_{\partial v}(u) + (-1)^{|v|} \hat{\text{ad}}_v(\partial u).$$

Supposons la formule du lemme vérifiée pour tout élément de $T^j(V) \otimes U$, $1 \leq j \leq n$ et soit $\alpha' = v \otimes \alpha$ avec d'où

$$\begin{aligned} k \hat{\text{ad}}_v(\psi) &= [[v, k(\psi)], \psi'] + (-1)^{|\psi|} [k(\psi), [v, k(\psi')]] = \\ &= [v, [k(\psi), k(\psi')]] = [v, k(\psi)]. \end{aligned}$$

la relation 1) du lemme est donc vérifiée pour tout α dans $U \otimes V$ et tout élément de $\mathbb{L}(T(V) \otimes U)$. Pour étendre ce résultat à tout élément de $\mathbb{L}(U \otimes V)$; il suffit de démontrer que si la relation 1) est vérifiée pour un couple

(α, α') d'éléments de $L(U \otimes V)$, elle l'est pour le crochet $[\alpha, \alpha']$.

Soit ψ un élément de $L(T(V) \otimes U)$

$$k \hat{\text{ad}}_{[\alpha, \alpha']}(\psi) = [\alpha, [\alpha', k(\psi)]] - (-1)^{|\alpha| |\alpha'|} [\alpha', [\alpha, k(\psi)]] = [[\alpha, \alpha'], k(\psi)]$$

en effet, d'après l'identité de Jacobi

$$\begin{aligned} & (-1)^{|\alpha| |\psi|} [\alpha, [\alpha', k(\psi)]] + (-1)^{|\psi| |\alpha'|} [k(\psi), [\alpha, \alpha']] + (-1)^{|\alpha| |\alpha'|} [\alpha', [k(\psi), \alpha]] \\ &= (-1)^{|\alpha| |\psi|} [\alpha, [\alpha', k(\psi)]] + (-1)^{|\alpha'| |\psi| + |\alpha| |\psi| + 1} [[\alpha, \alpha'], k(\psi)] \\ & \quad + (-1)^{|\alpha| |\alpha'| + |\alpha| |\psi| + 1} [\alpha', [\alpha, k(\psi)]] , \end{aligned}$$

$v \in V$ et $\alpha \in T^n(V) \otimes U$, on a :

$$\begin{aligned} k(\delta\alpha') &= \partial k(\alpha') = \partial [v, k(\alpha)] \\ &= [\partial v, k(\alpha)] + (-1)^{|v|} [v, \partial k(\alpha)] \\ &= [\partial v, k(\alpha)] + (-1)^{|v|} [v, k(\delta\alpha)] \end{aligned}$$

d'après (IV.3.3) cette dernière expression est égale à

$k(\hat{\text{ad}}_{\partial v}(\alpha) + (-1)^{|v|} \hat{\text{ad}}_v(\delta\alpha))$ l'injectivité de l'homomorphisme k permet de conclure ■

δ se prolonge de manière unique en dérivation d'algèbre de Lie sur $L(T(V) \otimes U)$, on munit l'algèbre de Lie $\text{Der } L(T(V) \otimes U)$ de la différentielle $[\delta, -]$, $[Ta]$. Nous avons alors

IV.3.4.2. Corollaire.

$$\hat{\text{ad}}: (L(U \otimes V), \partial) \longrightarrow (\text{Der } L(T(V) \otimes U), [\delta, -])$$

est un homomorphisme d'algèbres de Lie différentielles graduées.

Preuve : Soit $\alpha \in \mathbb{L}(U \otimes V)$ et $\psi \in \mathbb{L}(T(V) \otimes U)$ d'après IV.3.3 $k \hat{\text{ad}}_{\alpha}(\psi) = [\alpha, k(\psi)]$ d'où :

$$\begin{aligned} k(\delta \hat{\text{ad}}_{\alpha}(\psi)) &= \partial k \hat{\text{ad}}_{\alpha}(\psi) \\ &= [\partial \alpha, k(\psi)] + (-1)^{|\alpha|} [\alpha, k(\delta \psi)] \\ &= k(\hat{\text{ad}}_{\partial \alpha}(\psi)) + (-1)^{|\alpha|} \hat{\text{ad}}_{\alpha}(\delta \psi) \end{aligned}$$

comme k est injectif nous obtenons

$$\delta \hat{\text{ad}}_{\alpha}(\psi) = \hat{\text{ad}}_{\partial \alpha}(\psi) + (-1)^{|\alpha|} \hat{\text{ad}}_{\alpha}(\delta \psi).$$

Comme δ est une dérivation de degré -1 , la formule précédente s'écrit

$$\hat{\text{ad}}_{\partial \alpha}(\psi) = \delta \hat{\text{ad}}_{\alpha}(\psi) - (-1)^{|\alpha|} |\delta| \hat{\text{ad}}_{\alpha}(\delta \psi) = [\delta, \hat{\text{ad}}_{\alpha}](\psi) \blacksquare$$

IV.3.5. Minimalité de la différentielle δ .

Notons δ_{ℓ} la partie linéaire de δ et $\text{End } \mathbb{L}(T(V) \otimes U)$ l'algèbre de Lie des endomorphismes de l'espace vectoriel $T(V) \otimes U$. Elle est munie de la différentielle d'algèbre de Lie notée $[\delta_{\ell}, -]$.

Rappelons que par définition de $\hat{\text{ad}}$:

$$\hat{\text{ad}}_{\nu}(T(V) \otimes U) \subset T(V) \otimes U, \quad \forall \nu \in V.$$

d'où l'homomorphisme d'algèbres de Lie

$$\hat{\text{ad}} : \mathbb{L}(V) \rightarrow \text{End}(T(V) \otimes U)$$

si l'on munit $\mathbb{L}(V)$ de la différentielle $\bar{\partial} = \Pi \circ \partial$ nous avons :

IV.3.5.1. Lemme.

$$\hat{\text{ad}} : (\mathbb{L}(V), \bar{\partial}) \longrightarrow (\text{End}(T(V) \otimes U), [\delta_{\ell}, -])$$

est un homomorphisme d'algèbres de Lie différentielles.

Preuve : Soit $\alpha \in \mathbb{L}(V)$ et $\psi \in T(V) \otimes U$ d'après IV.3.4.2

$$\delta \hat{\text{ad}}_{\alpha}(\psi) = \hat{\text{ad}}_{\partial\alpha}(\psi) + (-1)^{|\alpha|} \hat{\text{ad}}_{\alpha}(\delta\psi)$$

on considère les deux de compositions suivantes :

$$\partial\alpha = k(\gamma) \otimes \bar{\partial}\alpha \quad , \quad \gamma \in \mathbb{L}(T(V) \otimes U)$$

$$\partial\psi = \partial_{\ell}\psi \otimes (\partial\psi)^{\geq 2} \quad , \quad (\partial\psi)^{\geq 2} \in \mathbb{L}^{\geq 2}(T(V) \otimes U).$$

Nous obtenons d'après (IV.3.3)

$$\delta \hat{\text{ad}}_{\alpha}(\psi) = [\gamma, \psi] + \hat{\text{ad}}_{\bar{\partial}\alpha}(\psi) + (-1)^{|\alpha|} \hat{\text{ad}}_{\alpha}(\delta_{\ell}\psi + (\delta\psi)^{\geq 2})$$

Comme $\hat{\text{ad}}_{\alpha}$ est une dérivation $\hat{\text{ad}}_{\alpha} : \mathbb{L}^{\geq 2}(T(V) \otimes U) \subset \mathbb{L}^{\geq 2}(T(V) \otimes U)$, d'où

$$\hat{\text{ad}}_{\ell}(\psi) = \hat{\text{ad}}_{\bar{\partial}\alpha}(\psi) + (-1)^{|\alpha|} \hat{\text{ad}}_{\alpha}(\delta_{\ell}\psi), \text{ que l'on peut écrire sous la forme}$$

$$\hat{\text{ad}}_{\bar{\partial}\alpha}(\psi) = [\delta_{\ell}, \hat{\text{ad}}_{\alpha}](\psi) \quad \blacksquare$$

IV.4. Remarques.

1) Supposons que la suite exacte

$$0 \rightarrow (\mathbb{L}(T(V) \otimes U), \delta) \xrightarrow{k} (\mathbb{L}(U \otimes V), \partial) \xrightarrow{\Pi} (\mathbb{L}(V), \bar{\partial}) \rightarrow 0$$

soit le modèle de Quillen d'une fibration, par ce dernier lemme, on définit une action de l'algèbre de Lie d'homotopie de la base sur l'homologie de la fibre

$$\rho : H_{*}(\mathbb{L}(V), \bar{\partial}) \times H_{*}(\mathbb{L}(T(V) \otimes U), \delta_{\ell}) \rightarrow H_{*}(\mathbb{L}(T(V) \otimes U), \delta_{\ell})$$

$$\rho([\alpha], [\psi]) = [\hat{\text{ad}}_{\alpha}(\psi)]$$

Cette action coïncide avec l'action d'holonomie de la fibration [F-T-3].

2) D'après (IV.3.5.1) si $\bar{\delta}$ est nulle et $\partial_\rho(U) = 0$, alors δ_ρ est nulle, nous donnons un exemple où la différentielle du modèle de la fibre est minimale alors que celle du modèle de l'espace total ne l'est pas.

Considérons le modèle de Quillen surjectif de la fibration canonique $\Omega S \rightarrow PS \rightarrow S$ lorsque S est un bouquet fini de sphères.

Notons $(\mathbb{L}(V), 0)$ un modèle minimal de S d'après [Ta, Chap VI] un tel modèle s'écrit :

$$\Pi \mathbb{L}(V \oplus s^{-1}V, \partial) \rightarrow (\mathbb{L}(V), 0)$$

où $s^{-1}: V \rightarrow s^{-1}V$ isomorphisme tel que $|s^{-1}v| = |v|-1$

$$\Pi(v) = v \quad \text{et} \quad \Pi(s^{-1}v) = 0 \quad ; \quad \partial v = s^{-1}v, \quad \forall v \in V$$

∂ n'est donc pas minimale. D'après (IV.2) un modèle de la fibre est donné par $(\mathbb{L}(T(V) \oplus s^{-1}V), \delta)$, ce modèle est minimal puisque $\bar{\delta} = 0$ et que $\partial_\rho(s^{-1}V) = 0$.

D'après [B-L] l'homologie réduite de la fibre est telle que $s^{-1} \tilde{H}_*(\Omega S, \mathbb{Q}) \cong T(V) \oplus s^{-1}V$, on retrouve ainsi le résultat :

$$\tilde{H}_*(\Omega S, \mathbb{Q}) \cong T(V) \cong U \mathbb{L}(V) \cong U(\Pi_*(\Omega S) \oplus \mathbb{Q})$$

3) Si $k: \mathbb{L}(T(V) \oplus U), \delta \rightarrow \mathbb{L}(U \oplus V), \partial$ induit l'homomorphisme nul en homologie, l'algèbre de Lie d'homotopie de la fibre est abélienne, en effet : le crochet de deux classes dans l'algèbre d'homologie $H_*(\mathbb{L}(T(V) \oplus U), \delta)$ est représenté par $[\psi, \psi']$, crochet de cycles représentant les deux classes choisies. $[\psi, \psi'] \in \mathbb{L}(T(V) \oplus U)$.

Comme $H_*(k) = 0$, $k(\psi)$ est un bord dans $(\mathbb{L}(U \oplus V), \partial)$:

$\exists \alpha \in \mathbb{L}(U \oplus V)$ tel que $k(\psi) = \partial \alpha$, alors

$$k[\psi, \psi'] = [k(\psi), k(\psi')] = [\partial\alpha, k(\psi')] = k \hat{\text{ad}}_{\partial\alpha}(\psi') \quad \text{d'après (IV.3.3)}$$

comme k est injectif, nous obtenons $[\psi, \psi'] = \hat{\text{ad}}_{\partial\alpha}(\psi')$, et puisque ψ' est un cycle (IV.3.4.2) entraîne $[\alpha, \alpha'] = \delta \hat{\text{ad}}_{\alpha}(\psi')$, ainsi tout crochet de deux classes dans $H_*(\mathbb{L}(T(V) \otimes U), \delta)$ est nul ; ceci n'entraîne pas que la fibre a le type d'homotopie rationnelle d'un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane (II.5.2).

Une démonstration du résultat (II.3.1) qui utilise l'homomorphisme k n'est donc pas immédiate, cependant le résultat suivant sur les fibrations est une conséquence directe de la comptabilité de k et de $\hat{\text{ad}}$ signalée en (IV.3.3).

IV.5. Proposition.

Soit $F \rightarrow E \rightarrow B$ une fibration de Serre entre espace 1-connexes, de \mathbb{Q} -type fini. Alors

$$\text{Nil } \Pi_* (\Omega F) \otimes \mathbb{Q} \leq \text{Nil } \Pi_* (\Omega E) \otimes \mathbb{Q} + 1$$

Preuve : Ecrivons un modèle de Quillen surjectif de cette fibration :

$$0 \rightarrow \mathbb{L}(T(V) \otimes U), \delta \xrightarrow{k} \mathbb{L}(U \otimes V), \partial \xrightarrow{\Pi} (\mathbb{L}(V), \bar{\partial}) \rightarrow 0$$

et supposons $\text{Nil } \Pi_* (\Omega E) \otimes \mathbb{Q} \leq n$; on considère le crochet de $n+2$ classes dans $\Pi_* (\Omega F) \otimes \mathbb{Q}$, il est représenté par un crochet de $(n+2)$ cycles dans $\mathbb{L}(T(V) \otimes U)$. De l'identité de Jacobi, ce dernier crochet s'écrit comme somme d'éléments de la forme $[\psi, \psi']$ où ψ est le crochet de $(n+1)$ cycles. Par hypothèse il existe α , élément de $L(U \otimes V)$ tel que $k(\psi) = \partial\alpha$; nous en déduisons :

$$k[\psi, \psi'] = [h(\psi), k(\psi')] = [\partial_\alpha, k(\psi')] = k \hat{\text{ad}}_{\partial_\alpha}(\psi') = k \delta \hat{\text{ad}}_\alpha(\psi')$$

et puisque l'homomorphisme k est injectif, $[\psi, \psi']$ est homologue à zéro ■

IV.6. K-Q modèle et cofibration.

Rappel : Si $h: (L, \partial) \rightarrow (L', \partial')$ est un homomorphisme d'a.l.d.g, il existe un espace vectoriel gradué C et un quasi-isomorphisme μ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (L, \partial) & \xrightarrow{h} & (L', \partial') \\ & \searrow & \uparrow \mu \simeq \\ & & (L \amalg \mathbb{L}(C), \partial) \longrightarrow (\mathbb{L}(C), \bar{\partial}) \end{array}$$

tel que $(\mathbb{L}(C), \bar{\partial})$ soit minimal si h est le modèle de Quillen d'une cofibration entre espace 1-connexe, $(\mathbb{L}(C), \bar{\partial})$ est le modèle minimal de la cofibre.

Examinons un exemple que nous utiliserons ultérieurement .

IV.6.1. Exemple. Modèle de la suspension d'un espace topologique S pointé et 1-connexe.

Soit $(\mathbb{L}(U), \partial)$ un modèle minimal de Quillen de S , la cofibration canonique $S \rightarrow CS \rightarrow \Sigma S$ à pour K-Q modèle

$$(\mathbb{L}(U), \partial) \rightarrow \mathbb{L}(U \oplus s U), D \xrightarrow{\Pi} (\mathbb{L}(s U), 0)$$

où $\Pi(u) = 0$, $\Pi(su) = su$ et $s : U \xrightarrow{\simeq} U$ isomorphisme tel que $|su| = |u| + 1$ que l'on prolonge en dérivation d'algèbre de Lie sur $\mathbb{L}(V)$.

D est définie par $Du = \partial u$

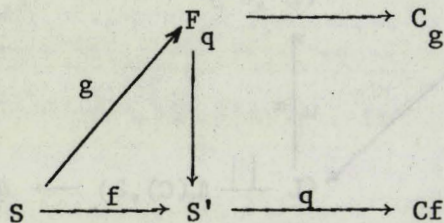
$$Dsu = u - s \partial u \quad \forall u \in U$$

Comme ∂ est décomposable et que s est une dérivation, on obtient

$$\bar{D} su = \Pi(Dsu) = 0 ; \mathbb{L}(sU, 0) \text{ est le modèle de } \Sigma S.$$

IV.7. La construction fibre-cofibre.

Considérons le K-Q modèle $(\mathbb{L}(U), \partial) \rightarrow \mathbb{L}(U \otimes V), D) \xrightarrow{\Pi} (\mathbb{L}(V), \bar{D})$
 d'une cofibration $S \xrightarrow{f} S' \xrightarrow{q} C_f$. Notons F_q la fibre homotopique de q , comme $q \circ f \sim 0$, f se relève en $g : S \rightarrow F_q$; notons C_g la cofibre homotopique de g :



IV.7.1. Proposition. La suite exacte d'homologie rationnelle réduite de la cofibration $S \xrightarrow{g} F_q \rightarrow C_g$ se réduit à la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \tilde{H}_*(S, \mathbb{Q}) \rightarrow \tilde{H}_*(F_q, \mathbb{Q}) \rightarrow \tilde{H}_*(C_g, \mathbb{Q}) \rightarrow 0$$

Preuve : D'après (IV.3) la fibre F_q a pour modèle de Quillen $(\mathbb{L}(T(V) \otimes U), \delta)$.

Rappelons que $\delta_\lambda : T(V) \otimes U \rightarrow T(V) \otimes U$ désigne la partie linéaire de δ (IV.3.5)

Lemme. $\delta_\lambda(T^+(V) \otimes U) \subset T^+(V) \otimes U$

Ce lemme se démontre par récurrence sur $n \geq 1$. i.e.

$$\delta_\lambda(T^n(V) \otimes U) \subset T^+(V) \otimes U$$

pour $n = 1$: d'après (IV.3.5.1)

$$\delta_\ell(V \otimes U) = \hat{\text{ad}}_{\bar{D}V}(U) + (-1)^{|V|} \hat{\text{ad}}_V(D_\ell U)$$

$\hat{\text{ad}}_V(D_\ell u) \in V \otimes U$ et puisque $\bar{D}V \in \mathbb{L}(V)$ et que $\hat{\text{ad}}$ est homomorphisme d'algèbre de Lie $\hat{\text{ad}} : \mathbb{L}(V) \rightarrow \text{End}(T(V) \otimes U)$, $\hat{\text{ad}}_{\bar{D}V}(u)$ est un élément de $T^+(V) \otimes U$.

Supposons que $\delta_\ell(T^j(V) \otimes U) \subset T^+(V) \otimes U$ pour $1 \leq j \leq n$, soit $v \otimes \psi$ dans $T^{n+1}(V) \otimes U$, $v \in V$, $\psi \in T^n(V) \otimes U$, on a :

$$\delta_\ell v \otimes \psi = \hat{\text{ad}}_{\bar{D}V}(\psi) + (-1)^{|V|} \hat{\text{ad}}_V(\delta_\ell \psi).$$

Pour les mêmes raisons que dans le cas $n = 1$, ceci est une somme de deux éléments de $T^+(V) \otimes U$, ce qui démontre le lemme.

$T(V) \otimes U$ se décompose sous la forme : $U \oplus T^+(V) \otimes U$ et d'après les propriétés de la différentielle δ (IV.3.5), l'injection $\mathbb{L}(U) \rightarrow \mathbb{L}(U \oplus T^+(V) \otimes U)$ est un homomorphisme d'a.l.d.g ; un K-Q modèle de la cofibration $S \xrightarrow{g} F_q \longrightarrow C_g$ est donné par

$$\mathbb{L}(U, \partial) \rightarrow \mathbb{L}(U \oplus T^+(V) \otimes U, \delta) \xrightarrow{p} \mathbb{L}(T^+(V) \otimes U, \bar{\delta})$$

$$p(u) = 0 \quad \text{si } u \in U$$

$$p(\psi) = \psi \quad \text{si } \psi \in T^+(V) \otimes U$$

et $\mathbb{L}(T^+(V) \otimes U, \bar{\delta})$ est un modèle de Quillen de C_g . D'après [B-L] l'homologie rationnelle réduite de S de F_q et celle de C_g sont données par

$$1) s^{-1} \tilde{H}_*(S, Q) \cong H_*(U, \partial_\ell)$$

$$2) s^{-1} \tilde{H}_*(F_q, Q) \cong H_*(U \oplus T^+(V) \otimes U, \partial_\ell)$$

$$3) s^{-1} \tilde{H}_*(C_g, Q) \cong H_*(T^+(V) \otimes U, \bar{\delta}_\ell)$$

Par construction de δ , $\delta_\ell(U) = \partial_\ell(U)$ et d'après le lemme démontré plus haut : $\bar{\delta}_\ell = \delta_\ell$ et

$$H_* (U \oplus T^+(V) \otimes U, \delta_\ell) = H_* (U, \partial_\ell) \oplus H_* (T^+(V) \otimes U, \delta_\ell)$$

d'où

$$\tilde{H}_*(F_q, \mathbb{Q}) \cong \tilde{H}_*(S, \mathbb{Q}) \oplus \tilde{H}_*(C_g, \mathbb{Q}) \quad \blacksquare$$

CHAPITRE V

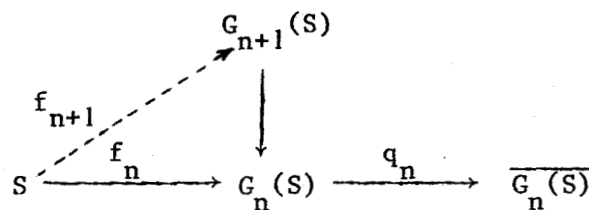
TYPE D'HOMOTOPIE RATIONNELLE DES ESPACES DE GANEA

La définition topologique de la cocatégorie rationnelle d'un espace S , $[To]_2$ s'exprime à l'aide des espaces de Ganéa $G_n(S)$, $[Ga]_2$. Aussi dans ce chapitre nous en calculons le type d'homotopie rationnelle.

Ceci nous permettra d'une part, de faire quelques remarques sur l'homologie rationnelle des espaces de Ganéa et de calculer $\text{cocat}_0 G_1(S)$ et d'autre part d'établir la relation $\text{ocat } S_0 \leq \text{cocat}_0 S$ (chapitre VI).

V.1. Espaces de Ganéa.

Soit $(S, *)$ un espace topologique pointé dans $[Ga]_2$, Ganéa construit une suite d'espaces topologiques $G_n(S)$ et d'application continues $f_n : S \rightarrow G_n(S)$ de la manière suivante. On pose $G_0(S) = *$ et $f_0 : S \rightarrow *$ l'application constante, supposons $G_n(S)$ et f_n définis, si $\overline{G_n(S)}$ désigne le cône de f_n et q_n l'inclusion de $G_n(S)$ dans $\overline{G_n(S)}$ alors $G_{n+1}(S)$ est la fibre homotopique de q_n :



comme $q_n \circ f_n$ est homotope à une constante, f_n se relève en f_{n+1} , $G_n(S)$ est appelé le n-ième espace de Ganéa de S .

V.2. Modèle de Quillen de $G_n(S)$.

Notons $(\mathbb{L}(U), \partial)$ un modèle minimal de Quillen de l'espace topologique 1 connexe, de \mathbb{Q} -type fini S , et soit s un isomorphisme d'espace vectoriel $s : U \xrightarrow{\cong} s U$ tel que $|su| = |u| + 1$.

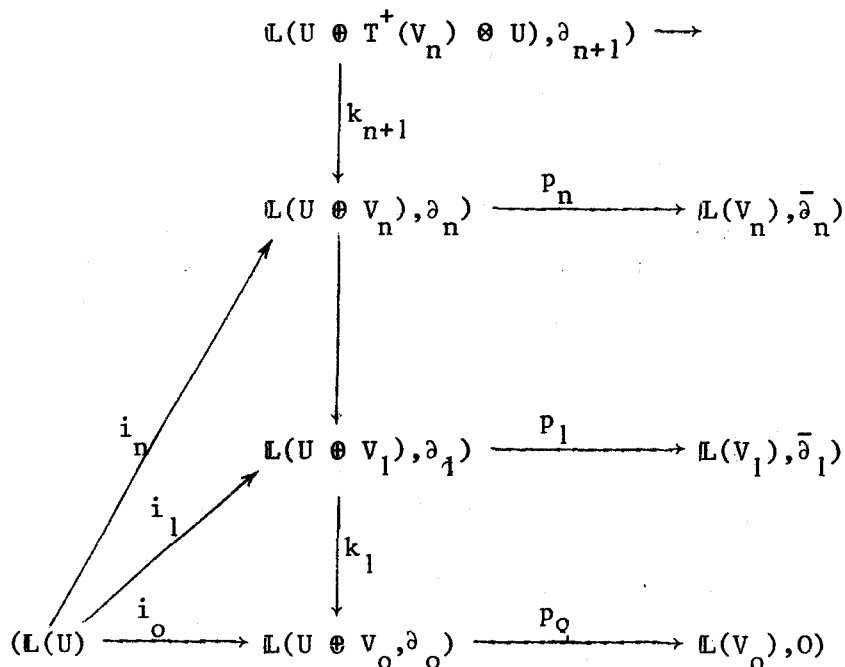
Posons :

$$\begin{cases} V_0 = s U \\ V_n = T^+(V_{n-1}) \otimes U \quad \text{pour } n \geq 1. \end{cases}$$

V.2.1. Proposition.

Pour tout entier $n \geq 0$, il existe une différentielle ∂_n telle que $(\mathbb{L}(U \otimes V_n), \partial_n)$ soit un modèle de Quillen de $G_n(S)$.

Preuve : Nous procédons par récurrence sur n , pour établir le diagramme suivant qui mime la construction topologique



La construction de Ganéa a pour point de départ la cofibration $S \rightarrow CS \rightarrow \Sigma S$, qui a pour K - \mathbb{Q} modèle (IV.5.1) :

$$(\mathbb{L}(U), \partial) \xrightarrow{i_0} \mathbb{L}(U \otimes sU), \partial_0 \xrightarrow{p_0} (\mathbb{L}(sU), 0)$$

l'algèbre acyclique $(\mathbb{L}(U \otimes V_0), \partial_0)$ est un modèle de Quillen de CS qui a le même type d'homotopie que $G_0(S)$.

Supposons avoir construit une différentielle ∂_n telle que $\partial_n(U) = \partial(U)$ et que $(\mathbb{L}(U \otimes V_n), \partial_n)$ soit un modèle de Quillen de l'espace $G_n(S)$.

D'après (IV.5) un K-Q modèle de la cofibration $S \xrightarrow{f_n} G_n(S) \xrightarrow{q_n} \overline{G_n(S)}$ est donné par :

$$(\mathbb{L}(U), \partial) \xrightarrow{i_n} \mathbb{L}(U \otimes V_n), \partial_n \xrightarrow{p_n} \mathbb{L}(V_n), \bar{\partial}_n$$

où i_n est l'injection canonique et p_n homomorphisme d'a.l.d.g. défini par $p_n(U) = 0$, $p_n(V_n) = V_n$.

Comme $G_{n+1}(S)$ est la fibre homotopique de q_n , un modèle de Quillen de $G_{n+1}(S)$ est donné par (IV.2 et IV.3) : $(\mathbb{L}(U \otimes T^+(V_n) \otimes U), \partial_{n+1})$ où

$$\partial_{n+1}(u) = 0 \quad \text{si } u \in U$$

$$\partial_{n+1}(v \otimes \psi) = \text{ad}_{\partial_n(v)}(\psi) + (-1)^{|v|} \hat{\text{ad}}_v(\partial_{n+1}\psi)$$

lorsque $v \in V_n$ et $\psi \in T(V_n) \otimes U$ ■

V.3. Une description de $H_*(G_n(S), Q)$.

V.3.1. Proposition.

$$\tilde{H}_*(G_1(S), Q) \cong T(sU) \otimes U$$

Preuve : Comme la différentielle du modèle $(\mathbb{L}(U), \partial)$ de l'espace S est minimale, nous obtenons $\bar{\partial}_0 = p_0 \circ \partial_0 = 0$. D'après le critère de

minimalité de la différentielle sur le modèle de la fibre (IV.3.5.1), $(L(U \otimes V_1), \partial_1)$ est un modèle minimal de $G_1(S)$; l'isomorphisme entre l'espace vectoriel des générateurs d'un modèle minimal de Quillen d'un espace S , et l'homologie réduite $\tilde{H}_*(S, \mathbb{Q})$, $[B, L]$, permet de conclure ■

V.3.2. Remarque :

Lorsque $n \geq 2$, le modèle $(L(U \otimes V_n), \partial_n)$ de $G_n(S)$ n'est pas minimal : d'après (IV.7.1) $\bar{\partial}_n = p_n \circ \partial_n$ n'est pas nulle, la partie linéaire $(\partial_{n+1})_\ell$ de ∂_{n+1} n'est donc pas nulle (IV.3.5.1).

D'après $[B, L]$: $s^{-1} \tilde{H}_*(G_n(S), \mathbb{Q}) \cong \tilde{H}_*(T(V_{n-1}) \otimes U, (\partial_n)_\ell)$.

Le résultat suivant est une conséquence directe de (IV.7.1).

V.3.3. Corollaire

$$\tilde{H}_*(G_n(S), \mathbb{Q}) \cong \tilde{H}_*(S, \mathbb{Q}) \oplus \tilde{H}_*(G_n(S), \mathbb{Q}) \quad \blacksquare$$

Le lemme suivant permet :

- de calculer explicitement $(\partial_n)_\ell$ pour tout $n \geq 2$
- de retrouver un résultat de $[F-T,]_3$ sur l'homologie rationnelle des espaces de Ganéa.

V.3.4. Lemme. Pour tout $n \geq 2$ et tout $p \geq 1$

$$(\partial_n) (v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_p) \otimes u = \left[\sum_{i=1}^p (-1)^{|v_1| \dots |v_{i-1}|} \hat{a}d_{v_1} \circ \dots \circ \hat{a}d_{\bar{\partial}_{n-1}(v_i)} \circ \dots \circ \hat{a}d_{v_p} \right] (u)$$

lorsque $v_i \in V_{n-1}$, $1 \leq i \leq p$ et $u \in U$

Preuve : Nous faisons une récurrence sur l'entier p .

Lorsque $p = 1$, $\forall v \in V_{n-1}$, $\forall u \in U$ d'après (IV.3.5.1)

$$(\partial_n) v \otimes u = \hat{a}d_{\bar{\partial}_{n-1}(v)} (u).$$

Supposons la formule vérifiée pour tout élément de $T^j(V_{n-1}) \otimes U$
 $1 \leq j \leq p$ et soit $\psi = v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_{p+1} \otimes u$ un élément de $T^{p+1}(V_{n-1}) \otimes U$

$$\begin{aligned} (\partial_n)_\ell(\psi) &= \hat{\text{ad}}_{\partial_{n-1} v_1} (v_2 \otimes v_3 \otimes \dots \otimes v_{p+1} \otimes u) + (-1)^{|v_1|} \hat{\text{ad}}_{v_1} ((\partial_n)_\ell(v_2 \otimes \dots \otimes v_{p+1} \otimes u)) \\ &= \hat{\text{ad}}_{\partial_{n-1} v_1} (v_2 \otimes v_3 \otimes \dots \otimes v_{p+1} \otimes u) \\ &\quad + (-1)^{|v_1|} \hat{\text{ad}}_{v_1} \left[\sum_{i=2}^{p+1} (-1)^{|v_2| \dots |v_{i-1}|} \hat{\text{ad}}_{v_2} \circ \dots \circ \hat{\text{ad}}_{\partial_{n-1} v_{i-1}} \circ \dots \circ \hat{\text{ad}}_{v_{p+1}} \right] (u) \\ &= \left[\sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{|v_1| \dots |v_{i-1}|} \hat{\text{ad}}_{v_1} \circ \dots \circ \hat{\text{ad}}_{\partial_{n-1} v_i} \circ \dots \circ \hat{\text{ad}}_{v_{p+1}} \right] (u) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

V.3.5. Corollaire. $[F-T]_3$: pour tout $n \geq 1$, $\tilde{H}_*(G_{n+1}(S), \mathbb{Q})$
 est un $H_*(\Omega \overline{G}_n(S), \mathbb{Q})$ module libre engendré par $\tilde{H}_*(S, \mathbb{Q})$.

Preuve : Pour tout $n \geq 1$, munissons l'algèbre tensorielle
 $T(V_n)$ de la différentielle, notée d_n , induite par la différentielle
 $\bar{\partial}_n$ de $\mathbb{L}(V_n)$. D'après le lemme précédent $\forall \psi \in T^+(V_n), \forall u \in U$:

$$(\partial_{n+1})_\ell \psi \otimes u = d_n(\psi) \otimes u$$

d'où $s^{-1} \tilde{H}_*(G_{n+1}(S), \mathbb{Q})$, qui est isomorphe à $H_*(T(V_n) \otimes U, (\partial_{n+1})_\ell)$, ($[B-L]$),
 est un $H_*(T(V_n), d_n)$ module libre sur l'espace vectoriel U lui-même iso-
 morphes à $s^{-1} \tilde{H}_*(S, \mathbb{Q})$.

$$\text{Or } H_*(T(V_n), d_n) \cong H_*(U \mathbb{L}(V_n), d_n) \cong U H_*(\mathbb{L}(V_n), \bar{\partial}_n)$$

et comme $H_*(\mathbb{L}(V_n), \bar{\partial}_n)$ est isomorphe à $H_*(\Omega \overline{G}_n(S)) \otimes \mathbb{Q}$, ($[B-L]$), nous
 obtenons

$$H_*(T(V_n), d_n) \cong H_*(\Omega \overline{G}_n(S), \mathbb{Q}) \quad \blacksquare$$

V.4. Calcul de $\text{cocat}_0 G_1(S)$.

V.4.1. Proposition $\text{cocat}_0 G_1(S) = 1$.

Pour les besoins de la démonstration de ce résultat, nous introduisons une graduation sur le modèle $(\mathbb{L}(U \oplus V_0), \partial_0)$ de $G_0(S)$, de la manière suivante : pour tout $j \geq 1$

$$[\mathbb{L}(U \oplus V_0)]_j = k_1(L^j(U \oplus V_1)).$$

Comme k_1 est injectif, nous obtenons une graduation sur $\text{Im } k_1$. Par définition de l'homomorphisme d'a.l.g. k_1 d'un élément de $[\mathbb{L}(U \oplus V_0)]_j$ est une somme de crochets contenant chacun j éléments de U . Nous avons donc $[\mathbb{L}(U \oplus V_0)]_0 = \mathbb{L}(V_0)$ et puisque $\mathbb{L}(U \oplus V_0) \cong \text{Im } k_1 \oplus \mathbb{L}(V_0)$, la graduation est entièrement définie.

V.4.2. Remarque. Il est clair que la graduation définie ci-dessus possède la propriété suivante : si $\psi \in [\mathbb{L}(U \oplus V_0)]_i$ et $\varphi \in [\mathbb{L}(U \oplus V_0)]_j$ alors $[\psi, \varphi] \in [\mathbb{L}(U \oplus V_0)]_{i+j}$.

On établit alors :

V.4.3. Lemme :

- a) $\forall \gamma \in \mathbb{L}(V_0), (\partial_0)_\ell(\gamma) \in [\mathbb{L}(U \oplus V_0)]_1$
- b) $\forall \psi \in \mathbb{L}(U \oplus V_1), k_1 \partial_1(\psi) \in [\mathbb{L}(U \oplus V_0)]_{\geq 2}$

Preuve : a) Par définition de ∂_0 , $(\partial_0)_\ell$ est telle que $(\partial_0)_\ell(v) = u$ lorsque $v = su$ et $(\partial_0)_\ell U = 0$. i.e.

$$(\partial_0)_\ell : V_0 \rightarrow U \subset [\mathbb{L}(U \oplus V_0)]_1.$$

$(\partial_0)_\ell$ se prolonge en dérivation de Lie sur $\mathbb{L}(V_0)$ et transforme un élément de $\mathbb{L}^{\geq 2}(V_0)$ en une somme de crochets constitués d'une part

d'éléments de $\mathbb{L}(V_0) = [\mathbb{L}(U \oplus V_0)]_0$ et d'autre part d'élément de $U \subset [\mathbb{L}(U \oplus V_0)]_1$, d'après le (V.4.2), de tels crochets appartiennent à $[\mathbb{L}(U \oplus V_0)]_1$.

b) d'après (V.3.2) ∂_1 est minimale : $\forall \psi \in \mathbb{L}(U \oplus V_0)$, $\partial_1 \psi \in \mathbb{L}^{>2}(U \oplus V_0)$, d'où $k_1(\partial_1 \psi) \in \bigoplus_{j \geq 2} [\mathbb{L}(U \oplus V_0)]_j$ ■

V.4.4. Démonstration de la proposition.

Il suffit d'après (II.1.4) d'établir que $\varepsilon_0 G_1(S) = 1$. Soit $\psi \in \mathbb{L}^{>2}(U \oplus V_1) \cap \ker \partial_1$, $k_1(\psi) \in \mathbb{L}(U \oplus V_0)$. Puisque $(\mathbb{L}(U \oplus V_0), \partial_0)$ est acyclique, il existe α élément de $\mathbb{L}(U \oplus V_0)$ tel que $k_1(\psi) = \partial_0 \alpha$. Ecrivons α sous la forme $\alpha = k_1(\psi) \oplus \beta$ avec $\psi \in \mathbb{L}(U \oplus V_1)$ et $\beta \in \mathbb{L}(V_0)$. Posons $\beta = \sum_{i \geq i_0} \beta^i$, $\beta^i \in \mathbb{L}^i(V_0)$ et $\partial_0(\beta) = \sum_{j \geq 1} (\partial_0 \beta)_j$ avec $(\partial_0 \beta)_j \in [\mathbb{L}(U \oplus V_0)]_j$.

D'après (V.4.3 a)), nous obtenons la relation :

$$(*) \quad (\partial_0 \beta)_1 = (\partial_0)_\ell \beta^{i_0} \oplus \gamma, \quad \gamma \in [\mathbb{L}(U \oplus V_0)]_1 \cap \mathbb{L}^{>i_0}(U \oplus V_0).$$

Comme $k_1(\psi) = \partial_0 \alpha = k_1(\partial_1 \psi) + \partial_0 \beta$ et que $k_1(\partial_1 \psi) \in [\mathbb{L}(U \oplus V_0)]_{\geq 2}$ (V.4.3. b)), on a nécessairement $(\partial_0 \beta)_1 = 0$ et en particulier d'après (*) $(\partial_0)_\ell \beta^{i_0} = 0$.

β^{i_0} élément de $\mathbb{L}(V_0) = [\mathbb{L}(U \oplus V_0)]_0$, ne peut être dans $\text{Im}(\partial_0)_\ell$ qui est un sous-espace vectoriel de $[\mathbb{L}(U \oplus V_0)]_1$ (V.4.3. a)).

Puisque $(\mathbb{L}(U \oplus V_0), \partial_0)$ est acyclique, β^{i_0} est nul et cela pour toute décomposition de β , i.e. $\beta = 0$, d'où

$$k_1(\psi) = \partial_0 \alpha = \partial_0 k_1(\psi) = k_1(\partial_1 \psi)$$

comme k_1 est injectif, nous obtenons $\psi = \partial_1 \psi$ ■

CHAPITRE VI

LA CO-CATÉGORIE RATIONNELLE D'UN ESPACE

TOPOLOGIQUE ET L'INVARIANT COCAT S_0

Dans ce chapitre, après avoir rappelé la définition et quelques propriétés de la cocatégorie d'un espace (notée $\text{cocat } S$) et $\text{cocat } S_0$, définie comme la cocatégorie de son rationalisé, nous établissons le théorème principal :

$$\text{cocat } S_0 \leq \text{cocat } S.$$

Nous ne disposons d'aucun exemple où cette inégalité est stricte. La démonstration du théorème (VI) repose sur les propriétés d'une nouvelle filtration du modèle de Quillen de $G_n(S)$ que nous établissons au paragraphe (2).

Dans le dernier paragraphe, nous utilisons encore cette filtration pour montrer que $\text{cocat } G_n(S) = n$, lorsque S est un bouquet d'au moins deux sphères.

VI.1. La cocatégorie d'un espace au sens de Ganãa.

Soit S un espace topologique pointé, pour tout $n \geq 0$, f_n et $G_n(S)$ désignent les applications et espaces définis en (V.1).

VI.1.1. Définition : $[Ga]_2$. $\text{cocat } S$ est le plus petit entier positif ou nul tel qu'il existe une application continue $r_n : G_n(S) \rightarrow S$ telle que $r_n \circ f_n \sim I d_S$. Si un tel entier n'existe pas, on pose

$$\text{cocat } S = \infty.$$

Etant donné un espace 1-connexe S , désignons par S_0 son rationalisé, d'après $[To]_2$ Toomer définit $\text{cocat } S_0$ et montre la relation $\text{cocat } S_0 \leq \text{cocat } S$.

VI.1.2. Remarques.

1) D'après $[Ga]_2$, $\text{cocat } S = 1$ si et seulement si S est un H-espace. Par suites les seules sphères de cocatérورية 1 sont S^1, S^3 et S^7 , alors que pour tout entier impair n , S_0^n a le type d'homotopie d'un espace d'Eilenberg-MacLane i.e. $\text{cocat } S_0^n = 1$.

2) Dans le cas où S est 1-connexe Toomer, $[To]_2$, démontre que tous les espaces de Ganéa $G_n(S)$ sont 1-connexes et construit une équivalence d'homotopie entre $G_n(S_0)$ et $(G_n(S))_0$. Ces deux espaces ont donc même modèle de Quillen ; l'a.l.d.g. $\mathbb{L}(U \oplus V_n, \partial_n)$ définie précédemment comme modèle de $G_n(S_0)$ est aussi un modèle de Quillen de $G_n(S)_0$, d'où la proposition suivante :

VI.1.3. Proposition. Avec les notations de (V.2.1) $\text{cocat } S_0 \leq n$ si et seulement si il existe un homomorphisme d'a.l.d.g. r_n

$$r_n : \mathbb{L}(U \oplus V_n, \partial_n) \rightarrow (\mathbb{L}(U), \partial)$$

tel que $r_n \circ i_n \sim \text{Id}_{\mathbb{L}(U)}$.

VI.1.4. Corollaire.

$$\text{Nil } \Pi_* (\Omega S) \otimes Q \leq \text{cocat } S_0$$

Preuve : Il résulte de la proposition (IV.5) que

$$\text{Nil}(\Pi_* \Omega G_n(S)) \otimes Q \leq n \quad \forall n \geq 0.$$

Supposons $\text{cocat } S_0 \leq n$, l'homomorphisme i_n induit alors une injection :

$$\begin{array}{ccc}
 H(i_n) : H_*(\mathbb{L}(U), \partial) & \longrightarrow & H_*(\mathbb{L}(U \otimes V_n), \partial_n) \\
 \parallel \mathcal{S} & & \parallel \mathcal{S} \\
 \Pi_*(\Omega S) \otimes \mathbb{Q} & \longrightarrow & \Pi_*(\Omega G_n(S)) \otimes \mathbb{Q}
 \end{array}$$

D'où $\text{Nil } \Pi_*(\Omega S) \otimes \mathbb{Q} \leq n$ ■

VI. Théorème. Soit S un espace topologique pointé, 1-connexe et de 0-type fini alors $\text{cocat } S_0 \leq \text{cocat } S$.

VI.1.5. Corollaire.

- 1) $\text{cocat } S = 1$ équivaut à $\text{cocat } S_0 = 1$
- 2) si $\text{cocat } S = 2$, $\text{cocat } S_0 = 2$
- 3) si S est un espace coformel $\text{cocat } S_0 = \text{cocat } S$

Preuve : 1) D'après $[\text{Ga}]_2$ et (I.3.4), $\text{cocat } S_0 = 1$ ou $\text{cocat } S = 1$ équivaut à : S a le type d'homotopie rationnelle d'un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane.

2) D'après (VI), $\text{cocat } S_0 \leq 2$ et d'après le 1) $\text{cocat } S_0 \neq 1$.

3) D'après (I.3.3) et (VI.1.4)

$$\text{cocat } S = \text{Nil } \Pi_*(\Omega S) \otimes \mathbb{Q} \leq \text{cocat } S_0 \quad \blacksquare$$

VI.2. Une graduation sur $\mathbb{L}(U \otimes V_n)$.

On définit sur le modèle $\mathbb{L}(U \otimes V_n)$ de $G_n(S)$ une graduation suivant la longueur totale en U : on compte les éléments de U qui apparaissent dans l'écriture en crochet ainsi que ceux qui proviennent de V_n :

VI.2.1. Définition. Notons τ l'inclusion canonique

$$\mathbb{L}(U \otimes V_0) \hookrightarrow U \mathbb{L}(U \otimes V_0) \stackrel{\sim}{=} T(U \otimes V_0).$$

Pour tout $j \geq 0$, on pose :

$$F_j T(U \otimes V_0) = \bigoplus_{\ell \geq 1} \bigoplus_{i_1 \otimes \dots \otimes i_\ell = j} T(V_0) \otimes T^{i_1}(U) \otimes \dots \otimes T(V_0) \otimes T^{i_\ell}(U) \otimes T(V_0)$$

et $F_j \mathbb{L}(U \otimes V_0) = \tau^{-1} F_j T(U \otimes V_0)$.

Notons $K_n = k_1 \circ \dots \circ k_n : \mathbb{L}(U \otimes V_n) \rightarrow \mathbb{L}(U \otimes V_0)$ où k_i désigne l'homomorphisme injectif d'a.l.d.g. défini en (V.2.1).

On pose alors : $F_j \mathbb{L}(U \otimes V_n) = K_n^{-1} F_j \mathbb{L}(U \otimes V_0)$

$$F_{\geq j} \mathbb{L}(U \otimes V_n) = \bigoplus_{i \geq j} F_i \mathbb{L}(U \otimes V_n).$$

Si ψ est un élément de $F_j \mathbb{L}(U \otimes V_n)$. On note $\ell(\psi) = j$.

Remarque.

- $F_0 \mathbb{L}(U \otimes V_0) = \mathbb{L}(V_0)$, sur $\mathbb{L}(U \otimes V_0)$ cette graduation coïncide avec celle introduite en (IV.1.2).

- pour tout $n \geq 1$, $F_0 \mathbb{L}(U \otimes V_n) = 0$.

On vérifie directement les propriétés suivantes :

VI.2.2. Propriétés.

1) pour tout $n \geq 1$, si $\alpha \in V_n$, $\ell(\alpha) \geq n$

2) soit $\alpha \in F_i \mathbb{L}(U \otimes V_n)$ et $\beta \in F_j \mathbb{L}(U \otimes V_n)$ alors

$$\ell[\alpha, \beta] = i+j$$

3) Soit $v \in V_{n-1}$ tel que $\ell(v) = i$ et $\alpha \in V_n$ tel que $\ell(\alpha) = j$ alors $v \otimes \alpha \in V_n$ et $\ell(v \otimes \alpha) = i+j$

4) Si $\alpha \in F_i \mathbb{L}(U \otimes V_{n-1})$ et $\psi \in F_j \mathbb{L}(U \otimes V_n)$

$$\ell(\hat{\text{ad}}_\alpha(\psi)) = i+j$$

5) Pour tout $n \geq 1$ et tout $j \geq 1$

$$k F_j \mathbb{L}(U \otimes V_n) \subset F_j \mathbb{L}(U \otimes V_{n-1}).$$

VI.2.3. Lemme. Pour tout $n \geq 0$

$$\partial_n F_j \mathbb{L}(U \otimes V_n) \subset F_{\geq j+1} \mathbb{L}(U \otimes V_n), \quad \forall j \geq 0$$

Preuve : Posons l'hypothèse de récurrence suivante :

$$H_{n,q} : \forall \psi \in T^{\leq q}(V_{n-1}) \otimes U \quad \ell(\partial_n \psi) \geq \ell(\psi) + 1$$

$n \geq 1$ et $q \geq 1$.

1) $H_{1,q}$ est vraie pour tout $q \geq 1$:

. Soit $v \in V_0$ et $u \in U$ $\ell(v \otimes u) = 1$ et

$$\partial_1 v \otimes u = \hat{\text{ad}}_{\partial_0 v}(u) + (-1)^{|v|} \hat{\text{ad}}_v(\partial u)$$

- $\partial_0 v \in (\mathbb{L}(U))$ l'idéal de $\mathbb{L}(U \otimes V_0)$ engendré par $\mathbb{L}(U)$. Cet idéal correspond à $F_{\geq 1} \mathbb{L}(U \otimes V_0)$.

- puisque ∂ est décomposable $\partial u \in \mathbb{L}^{\geq 2}(U)$ d'où, d'après (VI.2.2.4))

$$\ell(\partial_1(v \otimes u)) \geq 2.$$

Ceci démontre que $H_{1,1}$ est vraie.

. Montrons que $H_{1,q}$ entraîne $H_{1,q+1}$, soient $v \in V_0$ et $\psi \in T^q(V_0) \otimes U$, $\ell(v \otimes \psi) = \ell(\psi) + 1$ et $\partial_1 v \otimes \psi = \hat{\text{ad}}_{\partial_0 v}(\psi) + (-1)^{|v|} \hat{\text{ad}}_v(\partial_1 \psi)$.

On a vu que $\ell(\partial_0 v) \geq 1$, de plus $H_{1,q}$ fait que $\ell(\partial_1 \psi) \geq 2$,

la remarque 4) du (VI.2.2) permet de conclure.

2) $H_{n-1,*}$ entraîne $H_{n,1}$:

Soit $v \in V_{n-1}$ et $u \in U$, $\ell(v \otimes u) = \ell(v) + 1$ et

$$\partial_n v \otimes u = \hat{\text{ad}}_{\partial_{n-1} v}(u) + (-1)^{|v|} \hat{\text{ad}}_v(\partial u)$$

d'après $H_{n-1,*}$, $\ell(\partial_{n-1} v) \geq \ell(v)+1$, d'autre part $\ell(\partial u) \geq 2$. Nous obtenons d'après (VI.2.2.4))

$$\ell(\partial_n (v \otimes u)) \geq \ell(v)+2 \quad \blacksquare$$

3) si $H_{n-1,*}$ est vraie alors $H_{n,q}$ entraîne $H_{n,q+1}$:

Soient $v \in V_{n-1}$ et $\psi \in T^q(V_{n-1}) \otimes U$, d'après (VI.2.2.3))

$$\ell(v \otimes \psi) = \ell(v)+\ell(\psi). \text{ On a } \partial_n v \otimes \psi = \hat{\text{ad}}_{\partial_{n-1} v}(\psi) + (-1)^{|v|} \hat{\text{ad}}_v(\psi)$$

d'après $H_{n-1,*}$, $\ell(\partial_{n-1} v) \geq \ell(v)+1$, d'après $H_{n,q}$, $\ell(\partial_n \psi) \geq \ell(\psi)+1$ d'où $\ell(\partial_n (v \otimes \psi)) \geq \ell(v)+\ell(\psi)+1$ (VI.2.2.4)) \blacksquare

La récurrence précédente permet d'établir la relation du lemme pour tout élément de V_n et ceci pour tout $n \geq 1$; pour étendre cette relation à tous les éléments de $L(U \otimes V_n)$, nous utilisons le (2) de (VI.2.2). Ce qui achève la démonstration du lemme.

VI.2.4. Corollaire. Lorsque l'espace S est formel, pour tout $n \geq 0$, il existe une graduation sur l'algèbre de Lie d'homotopie de $G_n(S)$:

$$H_*^j(L(U \otimes V_n), \partial_n) = \bigoplus_{j \geq 1} H^j(L(U \otimes V_n), \partial_n)$$

Preuve : Nous montrons que ∂_n est homogène de degré +1 par rapport à la graduation F introduite précédemment :

$$\forall n \geq 0 \quad \ell(\partial_n \psi) = \ell(\psi)+1, \quad \forall \psi \in L(U \otimes V_n).$$

S possède un modèle minimal de Quillen à différentielle purement quadratique d'où :

$$\forall u \in U \quad \partial_0 u \in \mathbb{L}^2(U) \text{ et } \partial_0 s u \in [L(U \otimes V_0)]_1$$

Ceci permet d'entamer une double récurrence à partir de l'hypothèse :

$$H_{n,q} : \forall \psi \in T^q(V_{n-1}) \otimes U, \ell(\partial_n \psi) = \ell(\psi) + 1 \quad n \geq 1 \text{ et } q \geq 1.$$

La démonstration est en tout point identique à celle du lemme VI.2.3. ■

VI.2.5. Démonstration du théorème VI.

Pour tout $n \geq 0$, $i_n : (\mathbb{L}(U), \partial) \rightarrow (\mathbb{L}(U \oplus V_n), \partial_n)$ désigne l'inclusion canonique.

Considérons g_n homomorphisme d'algèbres de Lie graduées défini par : $g_n : \mathbb{L}(U \oplus V_n) \rightarrow \mathbb{L}(U)$ tel que $g_n(U) = U$ et $g_n(V_n) = 0$.

Remarquons que g_n ne commute pas aux différentielles. Notons Π_n la projection canonique $(\mathbb{L}(U), \partial) \rightarrow \left(\mathbb{L}(U) / \mathbb{L}^{\geq n}(U), \bar{\partial} \right)$, et h_n l'homomorphisme d'algèbres de Lie graduées $\Pi_n \circ g_n$.

$$A - \text{Lemme} : h_n : (\mathbb{L}(U \oplus V_n), \partial_n) \longrightarrow \left(\mathbb{L}(U) / \mathbb{L}^{\geq n}(U), \bar{\partial} \right) \text{ est un}$$

homomorphisme d'algèbres de Lie différentielles graduées.

Preuve : Soit v un élément de V_n , d'après (1) de (VI.2.2) $\ell(v) \geq n$ et d'après (VI.2.3) $\partial_n v \in F_{\geq n+1} \mathbb{L}(U \oplus V_n)$.

Notons $(\mathbb{L}(V_n))$ l'idéal de $\mathbb{L}(U \oplus V_n)$ engendré par $\mathbb{L}(V_n)$ alors :

$$F_{\geq n+1} \mathbb{L}(U \oplus V_n) = \mathbb{L}^{\geq n+1}(U) \otimes (\mathbb{L}(V_n)) \cap F_{\geq n+1} \mathbb{L}(U \oplus V_n).$$

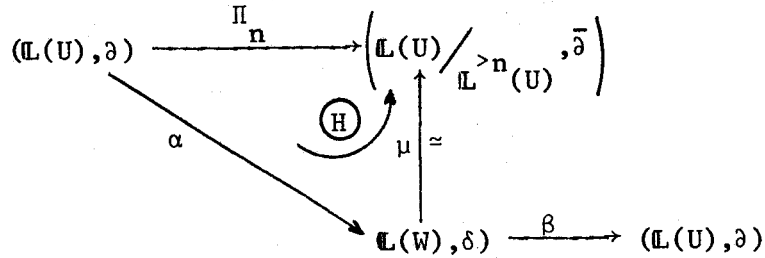
Soient $\alpha \in \mathbb{L}^{\geq n+1}(U)$ et $\psi \in (\mathbb{L}(V_n)) \cap F_{\geq n+1} \mathbb{L}(U \oplus V_n)$ tels que $\partial_n v = \alpha \otimes \psi$, nous obtenons

$$\Pi_n \circ g_n(\partial_n v) = \Pi_n(g_n(\alpha \otimes \psi)) = \Pi_n(g_n(\alpha)) = \Pi_n(\alpha) = 0.$$

Puisque $\bar{\partial} \circ h_n(v) = 0$, h_n commute aux différentielles.

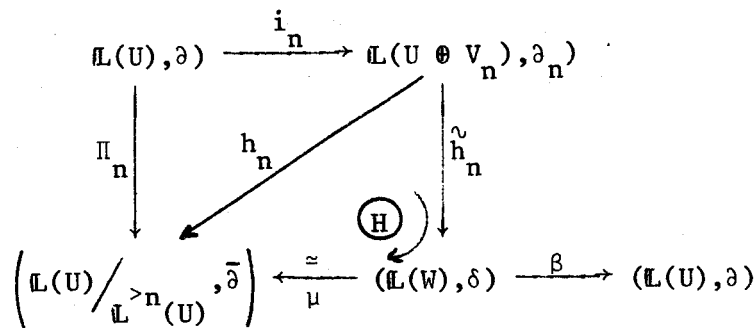
B - Suite de la démonstration du théorème.

Supposons $\text{cocat}_0 S \leq n$ et notons $(\mathbb{L}(W), \delta), \mu$ un modèle de Quillen de $(\mathbb{L}(U) / \mathbb{L}^{>n}(U), \bar{\partial})$. D'après (I.3.2), il existe α et β homomorphismes d'a.l.d.g. tels que le diagramme suivant commute à homotopie près :



et $\beta \circ \alpha \sim \text{Id}$.

Notons $\tilde{h}_n : (\mathbb{L}(U \oplus V_n), \partial_n) \rightarrow (\mathbb{L}(W), \delta)$ un modèle de Quillen de l'homomorphisme d'a.l.d.g., h_n , il est tel que $\mu \circ \tilde{h}_n \sim h_n$, d'où le diagramme suivant :



Par construction de l'homomorphisme h_n , nous avons $h_n \circ i_n = \Pi_n$. Nous obtenons $\mu \circ \tilde{h}_n \circ i_n \sim h_n \circ i_n = \Pi_n$.

D'après le diagramme donnant la définition de $\text{cocat}_0 S \leq n$, nous avons $\mu \circ \alpha \sim \Pi_n$ donc $\mu \circ \tilde{h}_n \circ i_n \sim \mu \circ \alpha$. Puisque μ est un quasi-isomorphisme, nous déduisons : $\tilde{h}_n \circ i_n \sim \alpha$.

Posons $r_n = \beta \circ \tilde{h}_n : (\mathbb{L}(U \oplus V_n), \partial_n) \rightarrow (\mathbb{L}(U), \partial)$. Il vérifie $r_n \circ i_n \sim \text{Id}$ d'où $\text{cocat}_0 S \leq n$. ■

VI.3. Espaces de Ganěa d'un bouquet de sphères.

VI.3.1. Cas où S est réduit à une sphère impaire.

[Proposition. $\text{cocat}_0 G_n(S^{2p+1}) = 1$ pour tout $n \geq 1$.

S^{2p+1} a pour modèle de Quillen $(\mathbb{L}(u), 0)$ $|u| = 2p$. Nous utilisons le lemme suivant : pour tout $n \geq 0$, considérons sur $\mathbb{L}(u \oplus V_n)$ la graduation introduite en (IV.1.2).

Lemme. Pour tout $n \geq 1$ et $\forall \psi \in \mathbb{L}(V_n)$

$$\partial_n \psi \in [\mathbb{L}(u \oplus V_n)]_{\leq 1}$$

Preuve du lemme. Comme la graduation considérée est compatible avec la structure d'algèbre de Lie, il suffit de montrer le lemme pour ψ élément de V_n .

Pour tout $n \geq 1$ et tout $q \geq 1$, posons l'hypothèse de récurrence suivante :

$$H_{n,q} : \forall \psi \in T^{\leq q}(V_{n-1}) \otimes u \cdot \partial_n \psi \in [\mathbb{L}(u \oplus V_n)]_{\leq 1}$$

1) $H_{1,q}$ est vrai pour tout q .

- lorsque $q = 1$. $\partial_1 su \otimes u = [u, u] = 0$

- $H_{1,q}$ entraîne $H_{1,q+1}$: soit $\psi \in T^q(V_0) \otimes u$ $su \otimes \psi \in [\mathbb{L}(u \oplus V_1)]_0$

et $\partial_1 su \otimes \psi = [u, \psi] + (-1)^{|su|} \hat{\text{ad}}_{su}(\partial, \psi)$, $[u, \psi] \in [\mathbb{L}(u \oplus V_0)]_1$ et puisque

$\partial_1 \psi \in [\mathbb{L}(U \oplus V_1)]_{\leq 1}$, $\hat{\text{ad}}_{su}(\partial_1 \psi)$ et par suite $\partial_1(su \otimes \psi)$ sont dans

$$[\mathbb{L}(U \oplus V_1)]_{\leq 1}.$$

2) $H_{n-1,*}$ entraîne $H_{n,1}$

Soit $v \in V_{n-1}$, $v \otimes u \in [\mathbb{L}(U \otimes V_n)]_0 = \mathbb{L}(V_n)$,

$\partial_n v \otimes u = \hat{\text{ad}}_{\partial_{n-1} v}(u)$. Par hypothèse, il existe $x \in V_n$ et $y \in \mathbb{L}(V_{n-1})$

tels que $\partial_{n-1} v = k_n(x) \otimes y$, d'où

$$\partial_n v \otimes u = \hat{\text{ad}}_{k_n(x)}(u) + \hat{\text{ad}}_y(u).$$

D'après (IV.3.3), $\hat{\text{ad}}_{k_n(x)}(u) = [x, u]$. C'est donc un élément de $[\mathbb{L}(u \otimes V_n)]_1$.

D'autre part, $y \in \mathbb{L}(V_{n-1}) = [\mathbb{L}(u \otimes V_{n-1})]_0$, donc $\hat{\text{ad}}_y(u)$ appartient à $[\mathbb{L}(u \otimes V_n)]_0 = \mathbb{L}(V_n)$ d'où

$$\partial_n(v \otimes u) \in [\mathbb{L}(u \otimes V_n)]_{\leq 1}$$

3) si $H_{n-1,*}$ est vrai $H_{n,q}$ entraîne $H_{n,q+1}$

Soient $v \in V_{n-1}$ et $\psi \in T^q(V_{n-1}) \otimes u$, $v \otimes \psi \in V_n \subset [\mathbb{L}(U \otimes V_n)]_0$

et $\partial_n v \otimes \psi = \hat{\text{ad}}_{\partial_{n-1} v}(\psi) + (-1)^{|v|} \hat{\text{ad}}_v(\partial_{n-1} \psi)$. D'après $H_{n-1,*}$,

$\partial_{n-1} v \in [\mathbb{L}(u \otimes V_{n-1})]_{\leq 1}$ d'où

$$\hat{\text{ad}}_{\partial_{n-1} v}(\psi) \in [\mathbb{L}(u \otimes V_n)]_{\leq 1}.$$

D'autre part, comme $\hat{\text{ad}}_v$ est une dérivation

$\hat{\text{ad}}_v [\mathbb{L}(u \otimes V_n)]_{\leq 1} \subset [\mathbb{L}(u \otimes V_n)]_{\leq 1}$, $H_{n,q+1}$ est donc vérifiée.

Ceci achève la démonstration du lemme.

Démonstration de la proposition.

D'après (II.1.4), il suffit de montrer que $\epsilon_{0n} G_n(\mathbb{S}^{2p+1}) = 1$

pour tout $n \geq 1$.

Nous avons vu (V.4) que $\varepsilon_{G_1}(\mathbb{S}^{2p+1}) = 1$. Supposons $\text{Cocat}_0 G_{n-1}(\mathbb{S}^{2p+1}) = 1$ et considérons un élément ψ de $\mathbb{L}^{\geq 2}(u \oplus V_n) \cap \ker \partial_n$. $k_n(\psi) \in \mathbb{L}^{\geq 2}(u \oplus V_{n-1}) \cap \ker \partial_{n-1}$; par hypothèse il existe ψ élément de $\mathbb{L}(u \oplus V_n)$ et γ élément de $\mathbb{L}(V_{n-1})$ tels que $k_n(\psi) = \partial_{n-1}(k_n(\psi) \oplus \gamma)$, ce qui nécessite $\bar{\partial}_{n-1}\gamma = 0$, i.e. $\partial_{n-1}\gamma \in \text{Im } k_n$. D'après le lemme ci-dessus, $\exists \alpha \in V_n \cap \ker \partial_n$ tel que $\partial_{n-1}\gamma = k_n(\alpha)$, d'où la relation $k_n(\psi) = k_n(\partial_n \psi) + k_n(\alpha)$ et par suite, puisque k_n est injectif, $\psi = \partial_n \psi + \alpha$. Comme ψ est dans $\mathbb{L}^{\geq 2}(u \oplus V_n)$, $\alpha = -(\partial_n)_\# \psi$. Ainsi α est homologue à zéro et ψ l'est aussi. ■

VI.3.2. Cas où S est réduit à une sphère paire.

Proposition. $\text{cocat}_0 G_2(\mathbb{S}^{2p}) = 2$.

Preuve : Notons $(\mathbb{L}(u), 0)$, $|u| = 2p-1$, un modèle de Quillen de \mathbb{S}^{2p} . On considère la décomposition (VI.2.1)

$$\mathbb{L}(u \oplus V_2) = \mathbb{L}^{\leq 2}(u) \oplus (F_{\geq 2} \mathbb{L}(u \oplus V_2)) \cap (\mathbb{L}(V_2)),$$

d'après (VI.2.3) $F_{\geq 2} \mathbb{L}(u \oplus V_2) \cap (\mathbb{L}(V_2))$ est un idéal différentiel.

D'où $(\mathbb{L}(u \oplus V_2), \partial_2)$ est isomorphe à l'algèbre de Lie produit

$$\left(\mathbb{L}(u) / \mathbb{L}^{\geq 3}(u), 0 \right) \times \left(F_{\geq 2} \mathbb{L}(u \oplus V_2) \cap (\mathbb{L}(V_2)), \partial_2 \right).$$

Comme $\text{Cocat}_0 G_1(\mathbb{S}^{2p}) = 1$, l'homomorphisme k_2 :

$$k_2 : (F_{\geq 2} \mathbb{L}(u \oplus V_2) \cap (\mathbb{L}(V_2)), \partial_2) \longrightarrow (\mathbb{L}^{\geq 2}(u \oplus V_1), \partial_1)$$

induit l'homomorphisme nul en homologie. D'après [F-T], $F_{\geq 2} \mathbb{L}(u \oplus V_2) \cap (\mathbb{L}(V_2))$ est modèle d'un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane. Il est donc de cocat_0 égale à 1.

d'autre part, $\text{cocat}_o \left(\mathbb{L}(u) / \mathbb{L}^{\geq 3}(u), 0 \right) = 2$. Il résulte du (c) de (I.4.2) que

$$\text{cocat}_o G_2(S^{2p}) = \text{cocat}(\mathbb{L}(u \oplus V_2), \partial_2) = 2 \blacksquare$$

VI.3.3. Proposition. Soit S un bouquet de deux sphères au moins, alors $\forall n \geq 0$, $\text{cocat } G_n(S)_o = \text{cocat } G_n(S) = n$.

Preuve : D'après (VI.2.4), $\forall n \geq 0$, ∂_n est homogène de degré +1 par rapport à la graduation $F_j \mathbb{L}(U \oplus V_n)$ définie en (VI.2.1). Comme $\partial_n U = 0$ et que $V_n \subset F_{\geq n} \mathbb{L}(U \oplus V_n)$ nous obtenons :

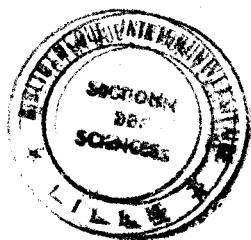
$$H_*^n(\mathbb{L}(U \oplus V_n), \partial_n) = \mathbb{L}^n(U) \oplus \ker \partial_n \cap V_n \cap F_n \mathbb{L}(U \oplus V_n)$$

d'où $\text{Nil } \Pi_* (\Omega G_n(S)) \otimes \mathbb{Q} \geq n$. D'autre part, pour tout espace pointé, S , Ganéa démontre : $[Ga]_2$, $\text{cocat } G_n(S) \leq n$. Le corollaire (VI.1.4) permet de conclure \blacksquare

B I B L I O G R A P H I E

- [B,L] H. BAUES, J.M. LEMAIRE - *Minimal models on homotopy theory.*
Math. Ann. 225, n°3, (1977), 219-242.
- [C,M,N] F.R. COHEN, J.C. MOORE, J.A. NEISENDORFER - *Torsion in homotopy groups.*
Ann. of Math. 109, (1979) 121-168.
- [F,H] Y. FÉLIX, S. HALPERIN - *Rational L.S. category and its application.*
Trans. of A.M.S, Vol. 273, n°1 (1982), 1-37.
- [F,H,T]₁ Y. FÉLIX, S. HALPERIN, J.C. THOMAS - *Sur certaines algèbres de Lie de dérivation.* Ann. Inst. Fourier 32, n°4, (1982) 143-150.
- [F,H,T]₂ Y. FÉLIX, S. HALPERIN, J.C. THOMAS - *The homotopy Lie algebra for finite complexes.* Publ. I.H.E.S. 56, (1983), 387-410.
- [F,H,T]₃ Y. FÉLIX, S. HALPERIN, J.C. THOMAS - *L.S. catégorie et suite spectrale de Milnor-Moore.* Bull. S.M.F. 111, n°1, (1983).
- [F,H,T]₄ Y. FÉLIX, S. HALPERIN, J.C. THOMAS - *Sur l'homotopie des espaces de catégorie 2.* A paraître au Math. Scand.
- [F,L] Y. FÉLIX, J.M. LEMAIRE - *Mapping theorem in Tame homotopy.*
A paraître in Topology.
- [F,T]₁ Y. FÉLIX, J.C. THOMAS - *Dualité et complémentarité des modèles.*
Bull. Société Math. de Belgique, Vol 33 (1981), 7-19.
- [F,T]₂ Y. FÉLIX, J.C. THOMAS - *The radius of convergence of Poincaré series of loop spaces.* Invent. Math 68 (1982) 257-274.
- [F,T]₃ Y. FÉLIX, J.C. THOMAS - *Représentation d'holonomie rationnelle.*
A paraître.
- [Ga]₁ T. GANEA - *Lusternik-Schnireleemann categorie and string category.*
Illinois J. Math. 11, (1967) 417-427.
- [Ga]₂ T. GANEA - *A generalisation of the homology and homotopy suspension.*
Comment. Math. Helvet. 39 (1965) 295-322.
- [G,L] GULLIKSEN-LEVIN - *Homotopy of local rings.* Queen 8 paper in pur and appl. Math., n°20, Queen's univ. Kingston ont (1969).
- [Ha] S. HALPERIN - *Lectures on minimal models.* Memoire de la S.M.F. (1983) n°10.
- [Hi]₁ P.J. HILTON - *Homotopy theory and duality.* New-York Gordon and Breach (1965).
- [Hi]₂ P.J. HILTON - *On a generalisation of nilpotency to semi-simplicial complexe.*
Proc. London. Math. Soc. (3) Vol (10) (1960) 604-622.
- [Ho] M.J. HOPKINS - *Formulation of cocategory and the iterated suspension.*
Asterique 113-114 (1984).

- [H,M,R] HILTON, MILSON, ROITBERG - Localization of nilpotent groups and spaces. Math. Studies n°15 North Holland (1975).
- [H,S] S. HALPERIN, J. STASHEFF - Obstruction to homotopy equivalences. Adv. in Math. 32 (1979) 233-279.
- [L,S] J.M. LEMAIRE, F. SIGRIST - Sur les invariants d'homotopie liés à la L.S catégorie. Comment. Math. Helvet. 56, (1981), 103-122.
- [Ma] S. MACLANE - Homology. Springer-Verlag, (1967).
- [Qu] D. QUILLEN - Rational homotopy theory. Ann. of Math. (2) 90, (1969), 205-295.
- [Su] D. SULLIVAN - Infinitesimal computation in topology. Publ. I.H.E.S. 47 (1977) 269-331.
- [Ta] D. TANRÉ - Homotopie rationnelle : modèles de Chen, Quillen, Sullivan. Springer Lec. Notes n°1025
- [Th]₁ J.C. THOMAS - Homotopie rationnelle des fibrés de Serre. Ann de l'Institut Fourier 31-3 (1981), 71-90.
- [Th]₂ J.C. THOMAS - Quelques questions commentées sur la fibre d'Eilenberg-Moore d'une fibration de Serre. Pub. IRMA - Lille - Vol. 3 n°6 (1981).
- [To]₁ G.H. TOOMER - Lusternik-Schnirelmann category and the Moore spectral sequence. Math. Z. 138 (1974), 123-143.
- [To]₂ G.H. TOOMER - Topological localization, category and cocategory. Can. J. Math. Vol. XXVII, n°2 (1975) 319-322.
- [Wh] G. WHITEHEAD - The homology suspension. Coll. top. Alg. Louvain (1956), 65-89.



RESUME

La catégorie de Lusternik-Schnirelmann d'un espace topologique S est définie comme le nombre minimum, moins un, d'ouverts contractiles dans S constituant un recouvrement de S . C'est un invariant homotopique lié à la structure multiplicative de la cohomologie. En 1960, Ganéa donne une définition de la catégorie qui se dualise au sens d'Eckmann-Hilton, définissant ainsi un invariant homotopique appelé cocatégorie de l'espace S .

Cet invariant est lié à la structure de l'algèbre de Lie d'homotopie de l'espace et par suite très difficilement calculable.

L'objet de ce travail est la construction d'une approximation notée $\text{cocat}_0 S$, de la cocatégorie d'un espace simplement connexe S .

Nous démontrons que $\text{cocat}_0 S$ est un invariant du type d'homotopie rationnelle qui est calculable à partir du modèle de Quillen de S aussi bien qu'à partir du modèle filtré de S .

Nous établissons des inégalités entre $\text{cocat}_0 S$, la nilpotence de l'algèbre de Lie d'homotopie rationnelle de S , un invariant lié à la suite spectrale d'Eilenberg-Moore de S , et la cocatégorie de l'espace rationalisé.

Mots clés : Homotopie, Fibration, Homotopie rationnelle, Cocatégorie.
