

50376
1984
187

50376
1984
487

N° d'ordre : 1200

T H E S E
PRÉSENTÉE À
L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

POUR OBTENIR LE TITRE DE

DOCTEUR DE 3^{EME} CYCLE

EN

MECANIQUE

PAR

OUIGOU MICHEL ZONGO

SUR



ETUDE DES COQUES CONIQUES DE REVOLUTION ELASTIQUES.

SOUTENUE LE 07 Novembre 1984

DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

MEMBRES DU JURY :

- Président : Monsieur FAURE, Professeur, Université de Lille I.
Rapporteurs : Monsieur OUDIN, Professeur, Université de Valenciennes.
Monsieur PARSY, Professeur, Université de Lille I.
Monsieur HARIRI, Professeur à l'E.N.S.T.I.M. de Douai.
Invités : Monsieur LECOINTE, Sous-Directeur de l'E.N.S.T.I.M. de Douai.
Monsieur GRATEPANCHE, Directeur des Recherches
de l'E.N.S.T.I.M. de Douai.

Monsieur le Professeur PARSY m'a initié à l'Etude des plaques et des coques; il a guidé mon travail sans discontinuer, ses conseils et ses remarques sont à la base de ce mémoire. Qu'il accepte tous mes remerciements.

Je remercie également Monsieur le Professeur FAURE d'avoir accepté de présider la soutenance.

Messieurs les Professeurs OUDIN et HARIRI ont consenti à juger mon travail et à participer au jury. Qu'ils trouvent ici l'expression de toute ma gratitude.

Monsieur Y. LECOINTE, Sous Directeur de l'Ecole des Mines de Douai, m'a accueilli au Département de Mécanique de l'Ecole Nationale Supérieure des Techniques Industrielles et des Mines de Douai (E.N.S.T.I.M.D.). Qu'il accepte l'expression de ma sincère reconnaissance.

Je remercie Monsieur GRATEPANCHE, Directeur des Recherches à l'E.N.S.T.I.M.D., pour l'intérêt qu'il porte à mon travail et pour sa participation au jury.

Madame Françoise PÉTIAUX a dactylographié ce travail avec soin, je l'en remercie vivement ainsi que les services de l'Imprimerie de l'U.E.R. Mathématiques de Lille I.

E R R A T A

Page V ligne 8 tenseur linéarisé des déformations en

Page 10 ligne 11

I.2.12 : $dv = [1 - \beta(b_1^1 + b_2^2) + \beta^2(b_1^1 b_2^2 - b_1^2 b_2^1)] dv_0 dz^1 dz^2$

Page 28 ligne 3 $\Omega^h = [0, 2\pi] \times [\frac{\beta_0}{L}, \frac{\beta_0 + \beta_1}{L}] \times [-1, 1]$.

Page 43 ligne 15 dernier termes du

Page 62 Ajouter sous la relation IV.6.2

les indices d_1 et d_2 indiquent respectivement des données
en $\lambda = \lambda_0$ et $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$.

Page 101 ligne 23 espace vectoriel \mathcal{E}_3

INTRODUCTION

CHAPITRE I.- Rappels des équations régissant une coque à courbure totale nulle.

I.1.- Définitions géométriques. Formes quadratiques de la surface.

I.1.1.- Définition du domaine de la coque	1
I.1.2.- Première forme quadratique fondamentale	2
I.1.3.- Seconde forme quadratique	3
I.1.3.2.- Courbures principales	4
I.1.4.- Troisième forme quadratique fondamentale	4
I.1.5.- Relations entre les coefficients des première et seconde formes quadratiques	5
I.1.5.1.- Formules de dérivation de Gauss et de Weintgarten	5
I.1.5.2.- Relations de Gauss-Codazzi	6

I.2.- Eléments de géométrie différentielle dans Ω^h

I.2.1.- Base locale au point $M \in \Omega^h$	7
I.2.2.- Expressions d'opérateurs différentiels dans Ω^h	9
I.2.2.1.- Calcul d'un déplacement élémentaire dans Ω^h	9
I.2.2.2.- Calcul d'un volume élémentaire	10
I.2.2.3.- Calcul du gradient d'une fonction scalaire $F(M)$	11
I.2.2.4.- Dérivation d'un champ de vecteurs de Ω^h	11

I.3.- Equations régissant une coque

I.3.1.- Etude de la déformation	12
I.3.2.- Equations d'équilibre	13

CHAPITRE II.- Application à l'étude de coques coniques.

II.1.- Définitions géométriques	16
II.2.- <u>Cas de coques coniques de révolution</u>	
II.2.1.- Coordonnées curvilignes orthogonales	19
II.2.2.1.- Gradient d'un vecteur	22
II.2.2.2.- Divergence d'un tenseur du second ordre	22
II.3.- <u>Equations d'équilibre d'une coque conique élastique de révolution</u>	
II.3.1.- Relations contraintes-déformations	23
II.3.2.- Equations d'équilibre	24
II.3.3.- Conditions aux limites sur les faces $z = \pm h$	25
II.3.4.- Equations de compatibilité	26
II.4.- <u>Petits paramètres en théorie des coques</u>	
II.4.1.- Introduction de petits paramètres	26
II.4.2.- Variables adimensionnelles	27
II.4.3.- Relation entre différents petits paramètres	28

CHAPITRE III.- Résolution des équations adimensionnelles.

III.1.- Equations adimensionnelles

III.1.1.- Equations d'équilibre 29
 III.1.2.- Relations contraintes-déformations 30
 III.1.3.- Equations de compatibilité 31

III.2.- Problème linéarisé

III.3.- Résolution du problème linéarisé

III.3.1.- Résolution à l'ordre 0 35
 III.3.2.- Résolution à l'ordre 1 en ϵ 36
 III.3.3.- Résolution à l'ordre 2 en ϵ 40
 III.3.4.- Résolution à l'ordre $m \geq 2$ en ϵ 42

III.4.- Retour aux grandeurs dimensionnelles 47

CHAPITRE IV.- Etude de coques coniques minces.

IV.2.- Equations d'équilibre 53

IV.3.- Conditions aux limites 56

IV.4.- Détermination des contraintes 57

IV.4.1.- Contraintes de membrane 57

IV.4.2.- Détermination des coefficients $(g_{001}^{(2)}, g_{301}^{(2)}, g_{331}^{(2)})$. . . 58

IV.5.- Détermination des déplacements

IV.5.1.- Calcul des déplacements de membrane 60

IV.5.2.- Autres déplacements 60

IV.6.1.- Hypothèse sur les données aux limites du problème 62

IV.6.2.- Conditions aux limites sur les bords : 63

CHAPITRE V.- Cas des coques "peu épaisses".

V.1.- <u>Hypothèses sur les sollicitations en $z = \pm h$</u>	67
V.2.- <u>Equations d'équilibre</u>	74
V.3.- <u>Méthode de résolution</u>	78
V.3.1.- Résolution des systèmes V.2 (7-9)	79
V.3.2.- Détermination des déplacements	80
V.4.- <u>Conditions aux limites sur les bords</u>	81

CHAPITRE VI.- Coques chargées symétriquement par rapport à leur axe de révolution.

VI.1.- <u>Coque conique soumise à la pression d'un liquide</u>	
VI.1.1.- Contraintes et déplacements de membrane	83
VI.1.2.- Contraintes et déplacements à l'ordre 1	85
VI.1.3.- Contraintes et déplacements à l'ordre 2	87
VI.2.- <u>Coque cylindrique soumise à la pression d'un liquide</u>	
VI.2.1.- Equations d'une coque cylindrique	91
VI.2.2.- Résolution des équations du cylindre	95
VI.3.- <u>Jonctions de coques minces</u>	
VI.3.2.- Conditions de raccord	100
VI.3.3.- Conditions aux limites	106
CONCLUSION	108

INTRODUCTION

L'objet de ce mémoire est l'étude du comportement d'une coque conique élastique de révolution.

Dans le premier chapitre, on rappelle les équations générales régissant une coque à courbure totale nulle en coordonnées curvilignes non orthogonales; on applique ces résultats, au chapitre II, à l'étude d'une coque conique élastique de révolution.

Le tenseur linéarisé en coordonnées adimensionnelles fait apparaître deux infiniments petits δ et ε liés à la coque :

$$\varepsilon = \frac{\text{demi-épaisseur}}{\text{Longueur caractéristique}}$$

δ = borne supérieure de la norme du gradient du vecteur déplacement.

En posant $\vec{u}(x, \theta, z) = U \vec{\bar{u}}(\bar{x}, \theta, \bar{z}, \varepsilon); u_i(x, \theta, z) = U \bar{u}_i(\bar{x}, \theta, \bar{z}, \varepsilon)$

où U déplacement caractéristique, $\bar{x} = \frac{x}{L}$, $\bar{z} = \frac{z}{h}$, l'élasticité linéaire permet de négliger tous les termes d'ordre 2 au moins en δ et de comparer U , ε et δ ; conduisant aux hypothèses suivantes :

H1 $\frac{U}{L} = \delta \varepsilon$ hypothèse employée par Raillon dans sa thèse (cf. [13]).

H2 $\frac{U}{L} = \varepsilon$ celle employée par Hariri dans sa thèse (cf. [8]).

La seconde hypothèse H2 où ε indépendant de δ sera adoptée dans ce travail et $\frac{U}{L} = o(\varepsilon)$ justifie le fait de prendre un développement polynomial en ε dans l'hypothèse de coques minces en théorie de l'élasticité linéaire.

On écrit alors $\bar{u}_i(\bar{x}, \theta, \bar{z}, \varepsilon) = \frac{u_i(x, \theta, z)}{\square} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \bar{u}_i^{(m)}(\bar{x}, \bar{z}, \theta)$

La loi de Hooke permet de voir que :

$$\bar{\sigma}_{ij}(\bar{x}, \theta, \bar{z}, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \bar{\sigma}_{ij}^{(m)}(\bar{x}, \theta, \bar{z}) \quad i, j = \theta, x, z.$$

Au Chapitre III, on obtient les équations adimensionnelles et par substitution des développements précédents dans celles-ci on trouve par résolution que :

$$\bar{u}_j^{(m)}(\theta, \bar{x}, \bar{z}) = \sum_{\ell=0}^m \frac{\bar{z}^\ell}{\ell!} \bar{c}_{j\ell}^{(m)}(\bar{x}, \theta).$$

$$\bar{\sigma}_{ij}^{(m)}(\theta, \bar{x}, \bar{z}) = \sum_{\ell=0}^m \frac{\bar{z}^\ell}{\ell!} \bar{g}_{ij\ell}^{(m)}(\bar{x}, \theta).$$

avec des relations de récurrence entre les $\bar{g}_{ij\ell}^{(m)}(\bar{x}, \theta)$ et $\bar{c}_{j\ell}^{(m)}(\bar{x}, \theta)$

Dans les Chapitres IV et V, nous étudions les coques coniques minces et peu "épaisses"; pour cela on néglige tous les termes $\left(\frac{h}{L}\right)^\alpha \left(\frac{z}{L}\right)^\beta$ tels que $\alpha + \beta \geq 2$ et $\alpha + \beta \geq 3$ respectivement.

Les conditions aux limites en contraintes sur les faces $z = \pm h$ permettent la détermination des "coefficients" contraintes, $\bar{g}_{ij\ell}^{(m)}(\bar{x}, \theta)$ les relations contraintes-déformations nous permettent d'en déduire les déplacements : c'est-à-dire tous les $\bar{c}_{j\ell}^{(m)}(\bar{x}, \theta)$.

Au chapitre VI, on traite le cas de coques conique et cylindrique toutes deux soumises à une pression interne. On termine par l'examen de la condition de raccord entre les deux coques.

CHAPITRE I

RAPPELS DES EQUATIONS REGISSANT UNE
COQUE A COURBURE TOTALE NULLE

I.1.- DEFINITIONS GEOMETRIQUES. FORMES QUADRATIQUES DE LA SURFACE.I.1.1.- Définition du domaine de la coque.

Soit Ω^h le domaine de l'espace affine Euclidien E_3 occupé par la coque à l'instant considéré. On notera par

w la surface moyenne de la coque, de point générique m

$2h$ l'épaisseur de la coque.

$\vec{N}(m)$ la normale unitaire au point m .

Ainsi le domaine Ω^h occupé par la coque de surface moyenne w est défini par

$$(I.1.1) \quad \Omega^h = \{ M \in E_3 / \vec{OM} = \vec{om} + \beta \vec{N}(m) \text{ avec } m \in w \text{ et } |\beta| \leq h \}$$

Par la suite on supposera que w peut être décrite par une seule carte φ qui est une application d'un ouvert régulier \hat{w} de \mathbb{R}^2 repéré par un système de coordonnées orthogonales (ξ^1, ξ^2) et à valeurs dans \mathbb{R}^3 lui-même rapporté à un système orthogonal (x_1, x_2, x_3) .

On supposera en plus que φ est au moins de classe C^2 ,

Tout point m de w peut être aussi bien repéré par (ξ^1, ξ^2) que par (x_1, x_2, x_3) et on a $\vec{om} = \vec{\varphi}(\xi^1, \xi^2)$

$$= \varphi_i(\xi^1, \xi^2) \vec{e}_i$$

$$\text{où } x_i = \varphi_i(\xi^1, \xi^2) \quad (i=1,2,3)$$

En tout point m , on définit le plan tangent à w qu'on notera $T_m(w)$: plan engendré par les vecteurs $\vec{a}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z^\alpha}$ ($\alpha = 1, 2$) : supposés linéairement indépendants.

Dans ce cas la normale unitaire en tout point m est définie par :

$$(I.1.2) \quad \vec{N}(m) = (\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2) / |\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2|$$

1.1.2.- Première forme quadratique fondamentale

Avec les hypothèses et définitions précédentes, on a $d\vec{m} = \frac{\partial \vec{m}}{\partial z^\alpha} dz^\alpha$
 $d\vec{m} = \vec{a}_\alpha dz^\alpha$ d'où l'expression de la longueur d'un élément d'arc
 d'une courbe de w : $ds = (d\vec{m} \cdot d\vec{m})^{1/2}$.

$$ds^2 = E(dz^1)^2 + 2F dz^1 dz^2 + G(dz^2)^2$$

Nous poserons par la suite : $E = \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1$, $F = \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$, $G = \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2$

ce qui définit la première forme quadratique :

$$(I.1.3) \quad ds = \sqrt{E(dz^1)^2 + 2F dz^1 dz^2 + G(dz^2)^2}$$

Remarques

i) Notons par a le déterminant du tenseur fondamental $a = EG - F^2$;

\sqrt{a} s'interprète comme l'aire du parallélogramme construit à partir des vecteurs \vec{a}_1 et \vec{a}_2 .

ii) A la base (\vec{a}_1, \vec{a}_2) (qui est non orthogonale et non unitaire généralement) on lui associe sa base duale que nous noterons (\vec{a}^1, \vec{a}^2) définie par ;

$$(I.1.4) \quad \vec{a}^\alpha \cdot \vec{a}_\beta = \delta^\alpha_\beta \quad \text{ou } \delta^\alpha_\beta \text{ symbole de Kronecker } (\alpha, \beta) = 1, 2.$$

Pour la suite nous utiliserons les notations suivantes :

$$\vec{a}_\alpha = g^{\alpha\beta} \vec{a}_\beta \quad \text{avec}$$

$$(I.1.5) \quad g^{11} = \frac{E}{EG-F^2}, \quad g^{12} = g^{21} = \frac{-F}{EG-F^2}, \quad g^{22} = \frac{E}{EG-F^2}$$

I.1.3.- Seconde forme quadratique

I.1.3.1 : En tout point m de la surface moyenne w ;
le vecteur normal étant unitaire on a $\vec{N} \cdot \frac{\partial \vec{N}}{\partial \gamma^\alpha} = 0$ ce qui entraîne que $\frac{\partial \vec{N}}{\partial \gamma^\alpha}$
est un vecteur du plan tangent $T_m(w)$.

Posons $\frac{\partial \vec{N}}{\partial \gamma^\alpha} = -b_{\alpha\beta} \vec{a}^\beta$ alors $b_{\alpha\beta} = -\vec{a}_\beta \cdot \frac{\partial \vec{N}}{\partial \gamma^\alpha}$.
En tenant compte du fait que $\vec{N} \cdot \vec{a}_\beta = 0$ (c'est-à-dire $\frac{\partial \vec{N}}{\partial \gamma^\alpha} \cdot \vec{a}_\beta + \vec{N} \cdot \frac{\partial \vec{a}_\beta}{\partial \gamma^\alpha} = 0$)
on a alors

$$(I.1.6) \quad b_{\alpha\beta} = \vec{N} \cdot \frac{\partial \vec{a}_\beta}{\partial \gamma^\alpha}$$

Ceci introduit la seconde forme quadratique fondamentale par ses coefficients $b_{\alpha\beta}$.

Soit une courbe de la surface moyenne et s la longueur d'arc compté positivement à partir d'un point m_0 fixe, nous avons

$$\frac{d^2 m}{ds^2} \cdot \vec{N}(m) = b_{\alpha\beta} \frac{d\gamma^\alpha}{ds} \cdot \frac{d\gamma^\beta}{ds}$$

Par la suite on posera :

$$(I.1.7) \quad L = b_{11}, \quad M = b_{12} = b_{21}, \quad N = b_{22}$$

I.1.3.2.- Courbures principales

D'après ce qui précède on a : $\frac{d^2 \vec{m}}{ds^2} \cdot \vec{N}(m) = \frac{b_{\alpha\beta} dz^\alpha dz^\beta}{g_{\alpha\beta} dz^\alpha dz^\beta}$

La courbure normale K_N de la surface \mathcal{W} au point m est définie à l'aide de la première et de la seconde formes quadratiques par

$$(I.1.8) \quad K_N = \frac{L(dz^1)^2 + 2M dz^1 dz^2 + N(dz^2)^2}{E(dz^1)^2 + 2F dz^1 dz^2 + G(dz^2)^2}$$

La courbure totale K et la courbure moyenne C sont données par :

$$(I.1.9) \quad \begin{aligned} K &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} & C &= \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} \\ K &= \rho_1 \rho_2 & C &= \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2) \end{aligned}$$

où ρ_1, ρ_2 sont les courbures principales de \mathcal{W} .

I.1.4.- Troisième forme quadratique fondamentale

Elle est définie à l'aide du produit scalaire $d\vec{N} \cdot d\vec{N}$ soit

$$\begin{aligned} d\vec{N} \cdot d\vec{N} &= \left(\frac{\partial \vec{N}}{\partial z^\alpha} dz^\alpha \right) \left(\frac{\partial \vec{N}}{\partial z^\beta} dz^\beta \right) \\ &= (b_{\alpha\gamma} \vec{a}_\gamma) (b_{\beta\delta} \vec{a}_\delta) dz^\alpha dz^\beta \\ &= b_{\alpha\beta} b_{\gamma\delta} dz^\alpha dz^\beta \end{aligned}$$

ou encore

$$(I.1.10) \quad (d\vec{N} \cdot d\vec{N})^{1/2} = \sqrt{C_{11} (dz^1)^2 + 2C_{12} dz^1 dz^2 + C_{22} (dz^2)^2}$$

ceci en posant :

$$(I.1.11) \quad \begin{aligned} C_{11} &= b_{11} b_1^1 + b_{12} b_1^2 & , & & C_{22} &= b_{12} b_2^1 + b_{22} b_2^2 \\ C_{12} &= C_{21} &= & & b_{11} b_2^1 &+ b_{12} b_2^2 \end{aligned}$$

I.1.5.- Relations entre les coefficients des première et seconde formes quadratiques.

I.1.5.1.- Formules de dérivation de Gauss et de Weingarten

Ces formules décrivent les variations des vecteurs de la base locale $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{N})$ lorsque le point m se déplace sur la surface moyenne;

on a :

$$(I.1.12) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \vec{a}_\alpha}{\partial z^\beta} &= \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \vec{a}_\gamma + B_{\alpha\beta} \vec{N} \\ \frac{\partial \vec{N}}{\partial z^\beta} &= b_\beta^\alpha \vec{a}_\alpha \end{aligned} \quad \frac{\partial \vec{N}}{\partial q^i} = b_{i\alpha}^m \vec{a}_\alpha^m$$

où les coefficients $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$, $B_{\alpha\beta}$, b_β^α s'expriment à l'aide des coefficients de la première et de la seconde formes quadratiques et de leurs dérivées.

On obtient d'après (I.1.5)

$$(I.1.13) \quad \boxed{b_\beta^\alpha = -b_{\alpha\beta} g^{\alpha\alpha}} \quad |$$

Les coefficients $B_{\alpha\beta}$ coïncident avec ceux de la seconde forme quadratique.

En multipliant scalairement l'égalité (I.1.12) par \vec{a}_δ ; $\delta = 1, 2$ et par différentiation de $g_{\delta\delta} = \vec{a}_\delta \cdot \vec{a}_\delta$ on trouve :

$$(a) \quad \boxed{\frac{\partial \vec{a}_\gamma}{\partial z^\beta} \vec{a}_\delta + \frac{\partial \vec{a}_\delta}{\partial z^\beta} \vec{a}_\gamma = \frac{\partial g_{\delta\delta}}{\partial z^\beta}}$$

Par permutation circulaire des indices (β, γ, δ) dans (a), on obtient deux autres relations :

$$(b) \quad \frac{\partial \vec{a}_\delta}{\partial \zeta^\beta} \vec{a}_\beta + \frac{\partial \vec{a}_\beta}{\partial \zeta^\delta} \vec{a}_\delta = \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial \zeta^\gamma}$$

$$(c) \quad \frac{\partial \vec{a}_\beta}{\partial \zeta^\delta} \vec{a}_\gamma + \frac{\partial \vec{a}_\gamma}{\partial \zeta^\delta} \vec{a}_\beta = \frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial \zeta^\beta}$$

Par des opérations élémentaires entre les relations (a) (b) (c) on tire :

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial \zeta^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial \zeta^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \zeta^k} \right)$$

$$(I.1.14) \quad \Gamma_{\beta\delta\gamma} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial \zeta^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial \zeta^\gamma} - \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial \zeta^\gamma} \right]$$

en posant $\Gamma_{\beta\delta\gamma} = \vec{a}_\gamma \frac{\partial \vec{a}_\beta}{\partial \zeta^\delta}$

Pour la suite on posera :

$$(I.1.15) \quad \Gamma_{\delta\beta}^{\mu} = g^{\mu\gamma} \Gamma_{\beta\delta\gamma}, \quad \Gamma_{\beta\delta\gamma} = g_{\mu\delta} \Gamma_{\beta\delta}^{\mu}$$

où les $\Gamma_{\beta\delta\gamma}$ sont les coefficients de Christoffel de 1ère espèce.

$\Gamma_{\beta\delta}^{\mu}$ sont les coefficients de Christoffel de 2ème espèce.

$\Gamma_{\beta\delta\gamma}$ et $\Gamma_{\beta\delta}^{\mu}$ sont symétriques par rapports aux indices (β, δ).

$$\Gamma_{\beta\delta\gamma} = -\Gamma_{\delta\beta\gamma}$$

1.1.5.2.- Relations de Gauss-Codazzi

Ces relations découlent des dérivées mixtes supérieures des vecteurs \vec{om} et $\vec{N}(m)$ c'est-à-dire :

$$(I.1.16) \quad \frac{\partial}{\partial \zeta^\delta} \left[\frac{\partial \vec{a}_\alpha}{\partial \zeta^\beta} \right] = \frac{\partial}{\partial \zeta^\delta} \left[\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \vec{a}_\gamma + B_{\alpha\beta} \vec{N} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta^\beta} \left[\frac{\partial \vec{a}_\alpha}{\partial \zeta^\delta} \right] = \frac{\partial}{\partial \zeta^\beta} \left[\Gamma_{\alpha\delta}^\gamma \vec{a}_\gamma + B_{\alpha\delta} \vec{N} \right]$$

Comme les vecteurs $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{N})$ sont linéairement indépendants, on aboutit aux formules de Gauss et de Pertesson Codazzi.

$$(I.1.17) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma}{\partial z^\delta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\mu\delta}^\gamma + b_{\alpha\beta} b_{\delta}^\sigma &= \frac{\partial \Gamma_{\mu\delta}^\sigma}{\partial z^\beta} + \Gamma_{\alpha\delta}^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\sigma + b_{\alpha\beta} b_{\delta}^\sigma \\ \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial z^\delta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu b_{\mu\delta} &= \frac{\partial b_{\alpha\delta}}{\partial z^\beta} + \Gamma_{\alpha\delta}^\mu b_{\mu\beta} \end{aligned}$$

I.2.- ELEMENTS DE GEOMETRIE DIFFERENTIELLE DANS Ω^h .

I.2.1.- Base locale au point $M \in \Omega^h$.

D'après la définition de la coque et les notations utilisées en I.1.1 un point $M \in \Omega^h$ est repéré par les coordonnées curvilignes (z^1, z^2, z) .

On définit la base locale au point M par :

$$(I.2.1) \quad \begin{aligned} \vec{g}_\alpha &= \frac{\partial M}{\partial z^\alpha} = \nu(\vec{a}_\alpha) \\ \vec{g}_3 &= \frac{\partial M}{\partial z} = \vec{N} \end{aligned}$$

avec ν un endomorphisme symétrique du plan tangent défini par :

$$(I.2.2) \quad \nu = \mathbb{I}_2 + z \operatorname{Grad}_m \vec{N}$$

où \mathbb{I}_2 est l'identité dans $T_m(\omega)$.

$$\operatorname{Grad}_m \vec{N} = - b_\alpha^\beta \vec{a}_\beta \otimes \vec{a}_\alpha$$

Nous supposons que les vecteurs $(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{N})$ sont linéairement indépendants. Notons (g^β) la base duale de (\vec{g}_α) définie par

$$\vec{g}^\beta \cdot \vec{g}_\alpha = \delta_\alpha^\beta$$

On a aussi $\vec{a}^\beta \cdot \vec{a}_\alpha = \delta_\alpha^\beta$

On tire $\vec{a}^\beta \cdot \vec{a}_\alpha = \vec{g}^\beta \cdot \vec{g}_\alpha = \vec{g}^\beta \nu(\vec{a}_\alpha)$

μ étant un endomorphisme symétrique on obtient aussi :

$$\vec{a}^\beta \vec{a}_\alpha = \mu(g^\beta) \vec{a}_\alpha \quad \text{ce qui entraîne :}$$

$$(I.2.3) \quad \vec{a}^\beta = \mu(\vec{g}^\beta) \iff \vec{g}^\beta = \mu^{-1}(\vec{a}^\beta)$$

μ^{-1} existe dans l'hypothèse de coques minces où on a $\det \mu = 1 - 3\epsilon$ avec ϵ la seule courbure principale non nulle.

La base locale au point M s'écrit donc :

$$(I.2.4) \quad \begin{aligned} \vec{g}_1 &= (1 - 3b_1^2) \vec{a}_1 - 3b_1^2 \vec{a}_2 \\ \vec{g}_2 &= -3b_2^2 \vec{a}_1 + (1 - 3b_2^2) \vec{a}_2 \\ \vec{g}_3 &= \vec{N} \end{aligned}$$

et sa base duale associée est telle que :

$$(I.2.5) \quad \vec{g}^\beta = \mu^{-1}(\vec{a}^\beta) \quad (\beta=1,2) \quad \vec{g}^3 = \vec{N}$$

Remarques

i) Le plan tangent engendré par (\vec{g}_1, \vec{g}_2) au point M étant parallèle à celui engendré au point m de ω par (\vec{a}_1, \vec{a}_2) ; on prendra par la suite comme base d'étude au point m la base $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{N})$. Ainsi tout vecteur du domaine de la coque s'exprime dans une base ou dans l'autre par :

$$(I.2.6) \quad \vec{v}(M) = \vec{g}_\alpha v^\alpha + v_3 \vec{N} \quad \vec{v}(M) = \vec{a}_\alpha u^\alpha + v_3 \vec{N}$$

ii) La matrice associée à μ étant inversible, son inverse est donné par

$$(I.2.7) \quad \mu^{-1} = \mathbb{I}_2 - 3G \widehat{\text{rad}}_m \vec{N} + 3^2 (G \widehat{\text{rad}}_m \vec{N})^2 + \dots + (-1)^n (G \widehat{\text{rad}}_m \vec{N})^n + \dots$$

iii) En tout point $M \in \mathcal{R}^h$ on a l'identité suivante :

$$(I.2.8) \quad \boxed{\mathbb{I}_3 = \vec{\pi} + \vec{N} \otimes \vec{N}}$$

où \mathbb{I}_3 l'application identité dans \mathcal{E}_3 : l'espace vectoriel associé à l'espace affine E_3 .

$\vec{\pi} = \vec{a}_\alpha \otimes \vec{a}^\alpha$ désigne l'opérateur de projection sur le plan tangent : $T_m(\omega)$

$\vec{N} \otimes \vec{N}$ désigne l'opérateur de projection sur la normale $\vec{N}(m)$.

A l'aide de l'identité (I.2.8) tout champ de vecteurs ou d'endomorphismes symétriques $\vec{\sigma}$ de \mathcal{E}_3 (définis tous les deux au point $M \in \mathcal{R}^h$) se mettent sous la forme :

(I.2.10)

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v} &= v_\epsilon \vec{e} + v_3 \vec{N} \\ \vec{\sigma} &= \vec{\sigma}_\epsilon + \vec{\Gamma}_{33} \otimes \vec{N} + \vec{N} \otimes \vec{\Gamma}_3 + \Gamma_{33} \vec{N} \otimes \vec{N} \end{aligned}}$$

avec $\vec{v}_\epsilon = \vec{\pi}(\vec{v})$; $v_3 \vec{N} = \vec{N} \otimes \vec{N}(\vec{v})$.

$\vec{\sigma}_\epsilon = \vec{\pi} \vec{\sigma} \vec{\pi} \in \mathcal{L}[T_m(\omega), T_m(\omega)]$: applications linéaires de $T_m(\omega)$ dans $T_m(\omega)$

$\vec{\Gamma}_3 = \vec{\pi} \vec{\sigma}(\vec{N}) \in T_m(\omega)$: vecteur du plan tangent $T_m(\omega)$.

$\Gamma_{33} = \vec{N} \vec{\sigma} \vec{N}$ un réel.

1.2.2.- Expressions d'opérateurs différentiels dans \mathcal{R}^h .

1.2.2.1.- Calcul d'un déplacement élémentaire.

Soit $M \in \mathcal{R}^h$ on a : $\vec{OM} = \vec{om} + \mathfrak{z} \vec{N}(m)$

alors
$$\begin{aligned} d\vec{M} &= d\vec{om} + d_3 \vec{N} + \mathfrak{z} d\vec{N} \\ &= \frac{\partial m}{\partial \zeta^\alpha} d\zeta^\alpha + \mathfrak{z} \frac{\partial \vec{N}}{\partial \zeta} d\zeta^\alpha + d_3 \vec{N} \\ &= (\vec{a}_\alpha - \mathfrak{z} b_\alpha^\beta \vec{a}_\beta) d\zeta^\alpha + d_3 \vec{N} \\ &= \vec{g}_\alpha d\zeta^\alpha + d_3 \vec{N} \end{aligned}$$

D'après la relation I.2.4 on a

$$(I.2.11) \quad \boxed{d\vec{M} = \begin{bmatrix} (1 - \mathfrak{z} b_1^2) d\zeta^1 \vec{a}_1 \\ -\mathfrak{z} b_2^1 d\zeta^2 \end{bmatrix} \vec{a}_1 + \begin{bmatrix} (d\zeta^2 - \mathfrak{z} b_1^2 d\zeta^1) \vec{a}_2 \\ -\mathfrak{z} b_2^2 d\zeta^2 \end{bmatrix} \vec{a}_2 + d_3 \vec{N}}$$

I.2.2.2.- Calcul d'un volume élémentaire

Par définition on a $dV = (\vec{g}_1 \wedge \vec{g}_2) \cdot \vec{N} d\zeta^1 d\zeta^2 d_3$

D'après les relations (I.2.4)

on a

$$(I.2.12) \quad \boxed{dV = (1 - \mathfrak{z} b_1^2) \sqrt{a} d\zeta^1 d\zeta^2 d_3}$$

Pour une fonction scalaire $F(M)$ définie en tout point $M \in \mathcal{D}^h$ avec $\mathcal{D}^h = w \times [-h, h]$ et \mathcal{Y} la carte définie précédemment faisant passer de (x_1, x_2, x_3) à (ζ^1, ζ^2) et en utilisant (I.6.2.2).

On a :

$$(I.2.13) \quad \boxed{\int_{\mathcal{D}^h} F(M) dV = \int_{\mathcal{D}^h} F \circ \mathcal{Y}(\zeta^1, \zeta^2, \mathfrak{z}) \sqrt{a} d\zeta^1 d\zeta^2 d_3}$$

1.2.2.3.- Calcul du gradient d'une fonction scalaire

Soit $F(M)$ une fonction scalaire différentiable de \mathcal{R}^k .

D'après la définition du gradient, on a :

$$G\vec{\text{rad}}_M F = \frac{\partial F}{\partial z^\alpha} \vec{g}^\alpha + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{N}$$

soit :

$$(I.2.14) \quad \boxed{G\vec{\text{rad}}_M F = \mu^{-1} [G\vec{\text{rad}}_M F] + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{N}}$$

1.2.2.4.- Dérivation d'un champ de vecteurs de \mathcal{R}^k

Soit $\vec{v}(M)$ un champ de vecteur défini et différentiable dans \mathcal{R}^k s'exprimant dans la base $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{N})$ par :

$$\vec{v}(M) = v^\alpha \vec{a}_\alpha + v_3 \vec{N}$$

D'après la définition du gradient d'un vecteur, on a :

$$(I.2.15) \quad \boxed{G\vec{\text{rad}}_M \vec{v} = [v^\alpha |_\gamma - v_3 b_{\alpha\gamma}] \vec{a}_\alpha \otimes \vec{a}^\gamma + \left(\frac{\partial v_3}{\partial z} + v_3 b_{3\gamma} \right) \vec{N} \otimes \vec{a}^\gamma + \frac{\partial v^\alpha}{\partial z} \vec{a}_\alpha \otimes \vec{N} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \vec{N} \otimes \vec{N}}$$

ceci avec la notation suivante :

$$v^\alpha |_\gamma = \frac{\partial v^\alpha}{\partial z^\gamma} + v_3 b_{\alpha\gamma}$$

Le même opérateur s'exprime dans la base duale (en posant dans cette base que $\vec{v}(M) = v_\alpha \vec{a}^\alpha + v_3 \vec{N}$).

$$(I.2.16) \quad \boxed{G\vec{\text{rad}}_M \vec{v} = (v_\alpha |_\gamma - v_3 b_{\alpha\gamma}) \vec{a}^\alpha \otimes \vec{a}^\gamma + \left(\frac{\partial v_3}{\partial z} + v_3 b_{3\gamma} \right) \vec{N} \otimes \vec{a}^\gamma + \frac{\partial v_\alpha}{\partial z} \vec{a}^\alpha \otimes \vec{N} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \vec{N} \otimes \vec{N}}$$

ceci avec la notation suivante :

$$v_\alpha |_\gamma = \frac{\partial v_\alpha}{\partial z^\gamma} - v_3 b_{\alpha\gamma}$$

I.3.- EQUATIONS REGISSANT UNE COQUE

On supposera par la suite que :

la coque est constituée d'un matériau élastique isotrope et homogène et on prendra comme loi de comportement la loi de Hooke.

I.3.1.- Etude de la déformation

Une coque soumise à

- des forces de volume de densité $\vec{f}(M)$, $M \in \Omega^h$.
- des forces de surface de densité $\vec{g}(P)$ agissant partout où sur une partie de $\partial\Omega^h$ (la frontière de Ω^h).
- des "déplacements" imposés partout ou sur une partie de $\partial\Omega^h$ se déforme c'est-à-dire change de forme et de volume.

Pour étudier la déformée dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire, on supposera que les déformations restent très petites et on introduit le tenseur linéarisé des déformations à partir de $\text{Grad}_M \vec{v}$ où $\vec{v}(M)$ est le vecteur déplacement du point considéré.

$$(I.3.1) \quad \vec{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\text{Grad}_M \vec{v} + {}^T \text{Grad}_M \vec{v}]$$

Dans notre base de travail ($\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$) le tenseur des déformations $\vec{\varepsilon}$ a pour composantes :

$$(I.3.2) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \left[\frac{\partial v_1}{\partial \gamma_1} + \nu_\alpha \Gamma_{11}^\alpha - \nu_3 b_{11} \right] & ; & \quad \varepsilon_{22} = \left[\frac{\partial v_2}{\partial \gamma_2} + \nu_\alpha \Gamma_{22}^\alpha - \nu_3 b_{22} \right] \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_1}{\partial \gamma_2} + \frac{\partial v_2}{\partial \gamma_1} + 2 \left(\Gamma_{12}^\delta \nu_\delta - b_{12} \nu_3 \right) \right] & ; & \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_2}{\partial \gamma_3} + \frac{\partial v_3}{\partial \gamma_2} \right] \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_1}{\partial \gamma_3} + \frac{\partial v_3}{\partial \gamma_1} + \nu_\alpha b_{13}^\alpha \right] & ; & \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial v_3}{\partial \gamma_3} \end{aligned}$$

1.3.2.- Equations d'équilibre

Nous les introduirons à partir du Principe des Puissances virtuelles appliquées à un sous ensemble \mathcal{G} du domaine de la coque et qui s'énonce ainsi : "La puissance virtuelle des efforts intérieurs à un système \mathcal{D} est nulle dans tout mouvement virtuel solidifiant le système \mathcal{R}^h à l'instant considéré".

Puisque nous nous limitons au cas de la statique; le principe des puissances virtuelles se traduit par l'égalité :

$$(I.3.3) \quad \mathcal{P}_d + \mathcal{P}_i + \mathcal{P}_c = 0$$

où \mathcal{P}_d est la puissance des efforts volumiques agissant sur \mathcal{G} qui s'exprime sous forme d'intégrale de volume sur \mathcal{G} :

$$\mathcal{P}_d = \int_{\mathcal{G}} f_i u_i \, dv$$

\mathcal{P}_c la puissance virtuelle des efforts superficiels qui s'exprime à l'aide d'une intégrale de surface sur la frontière $\partial\mathcal{D}$.

$$\mathcal{P}_c = \int_{\partial\mathcal{D}} g_i u_i \, d\sigma$$

\mathcal{P}_i la puissance virtuelle des efforts intérieurs qui s'exprime à l'aide d'une intégrale de volume sur \mathcal{D} .

$$\mathcal{P}_i = - \int_{\mathcal{D}} \sigma_{ij} D_{ij} \, dv = - \int_{\mathcal{D}} \text{Tr}[\vec{\sigma} \cdot \vec{G} \vec{n}_n \vec{U}] \, dv$$

(u_i composantes du champ de déplacement virtuel.

σ_{ij} composantes du tenseur des contraintes dans \mathcal{D} .

D_{ij} composantes du tenseur des déformations.

f_i et g_i sont les composantes des forces de volume et de surface agissant sur \mathcal{D} et sur sa frontière $\partial\mathcal{D}$).

On a alors :

$$(I.3.3') \quad \int_{\mathcal{D}} \text{Tr}[\vec{\sigma} \cdot \vec{G} \vec{n}_n \vec{U}] \, dv = \int_{\mathcal{D}} f(\vec{M}) \vec{U} \, dv + \int_{\partial\mathcal{D}} g(\vec{P}) \vec{U} \, d\sigma$$

Compte tenu des expressions de \vec{u} en (I.2.10) et de $\vec{G} = \text{grad}_M \vec{u}$ en

(I.2.11) nous obtenons :

$$(I.3.4) \quad \mathbb{T}[\vec{r} \cdot \vec{G} \text{ grad}_M \vec{u}] = \frac{\partial v_\alpha}{\partial z^\alpha} r^{\alpha\alpha} + v_\alpha [-r^{\alpha\alpha} r^{\alpha\alpha} + r^{\alpha\alpha} b_\alpha^\alpha] + \frac{\partial v_\alpha}{\partial z^\alpha} r^{\alpha\alpha} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial z^\alpha} r^{\alpha\alpha} + r_{33} \frac{\partial v_3}{\partial z^3} - v_3 r^{\alpha\alpha} b_{\alpha\alpha}$$

On calcule le premier membre soit A de la relation (I.3.3')

avec (I.3.4).

$$\begin{aligned} A &= \int_{\mathcal{G}} \left[r^{\alpha\alpha} \frac{\partial v_\alpha}{\partial z^\alpha} + r^{\alpha\alpha} \frac{\partial v_\alpha}{\partial z^\alpha} + v_\alpha [-r^{\alpha\alpha} r^{\alpha\alpha} + b_\alpha^\alpha r^{\alpha\alpha}] \right] \sqrt{g} dz^1 dz^2 dz^3 + \\ &\quad \int_{\mathcal{G}} \left(r^{\alpha\alpha} \frac{\partial v_3}{\partial z^\alpha} + r_{33} \frac{\partial v_3}{\partial z^3} - v_3 b_{\alpha\alpha} r^{\alpha\alpha} \right) \sqrt{g} dz^1 dz^2 dz^3 \\ &= \int_{\mathcal{G}} \left\{ \frac{\partial}{\partial z^\alpha} (v_\alpha \sqrt{g} r^{\alpha\alpha} + v_3 r^{\alpha\alpha} \sqrt{g}) - \left(v_\alpha \frac{\partial (\sqrt{g} r^{\alpha\alpha})}{\partial z^\alpha} + v_3 \frac{\partial (\sqrt{g} r^{\alpha\alpha})}{\partial z^\alpha} \right) \right\} dz^1 dz^2 dz^3 + \\ &\quad \int_{\mathcal{G}} \left\{ \frac{\partial}{\partial z^\alpha} (v_\alpha \sqrt{g} r^{\alpha\alpha} + v_3 \sqrt{g} r^{\alpha\alpha}) - \left(v_\alpha \frac{\partial (\sqrt{g} r^{\alpha\alpha})}{\partial z^\alpha} + v_3 \frac{\partial (\sqrt{g} r^{\alpha\alpha})}{\partial z^\alpha} \right) \right\} dz^1 dz^2 dz^3 + \\ &\quad \int_{\mathcal{G}} \left\{ v_\alpha (-r^{\alpha\alpha} r^{\alpha\alpha} + r^{\alpha\alpha} b_\alpha^\alpha) - v_3 b_{\alpha\alpha} r^{\alpha\alpha} \right\} \sqrt{g} dz^1 dz^2 dz^3. \end{aligned}$$

Par application du théorème de la divergence, on obtient :

$$\begin{aligned} A &= \int_{\partial\mathcal{G}} \left[(v_\alpha r^{\alpha\alpha} + v_3 r^{\alpha\alpha}) n_\alpha + n_3 (r^{\alpha\alpha} v_\alpha + v_3 r^{\alpha\alpha}) \right] d\sigma \\ &\quad - \int_{\mathcal{G}} v_\alpha \left[\frac{\partial (\sqrt{g} r^{\alpha\alpha})}{\partial z^\alpha} + \frac{\partial (\sqrt{g} r^{\alpha\alpha})}{\partial z^\alpha} + r^{\alpha\alpha} r^{\alpha\alpha} - r^{\alpha\alpha} b_\alpha^\alpha \right] dv \\ &\quad - \int_{\mathcal{G}} v_3 \left[\frac{\partial (\sqrt{g} r^{\alpha\alpha})}{\partial z^\alpha} + \frac{\partial (\sqrt{g} r^{\alpha\alpha})}{\partial z^\alpha} + b_{\alpha\alpha} r^{\alpha\alpha} \right] dv \\ A &= \int_{\partial\mathcal{G}} \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot \vec{u}(P) d\sigma - \int_{\mathcal{G}} \vec{u}(M) \cdot \text{Div}_M \vec{\sigma} \end{aligned}$$

En reportant l'expression de A dans (I.3.3') et par application du lemme fondamental nous obtenons les équations d'équilibre et les conditions aux limites en contraintes :

(I.3.5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sqrt{g} \tau^{\alpha\beta})}{\partial x^\beta} + \sigma^{\alpha\gamma} \tau^{\alpha\beta} - b^{\alpha\gamma} \sigma^{\alpha\beta} + f^\alpha &= 0 \\ \frac{\partial(\sqrt{g} \tau^{\alpha\beta})}{\partial x^\beta} + b^{\alpha\gamma} \tau^{\alpha\beta} + f_3 &= 0 \\ g^i &= \eta \cdot \tau^{\alpha\beta} \quad ; \quad \sqrt{g} = (1 - 3b^2) \sqrt{a} \end{aligned}$$

CHAPITRE II

APPLICATION A L'ETUDE DE COQUES CONIQUES

Nous allons appliquer les résultats précédents à l'étude des coques à surface moyenne conique.

II.1.- DEFINITION GEOMETRIQUE

Dans ce chapitre on étudiera le comportement d'une coque tronconique d'épaisseur $2h$ et de surface moyenne \mathcal{W} .

\mathcal{W} de point générique m est considérée comme un tronç de cône de sommet O pris à l'origine du repère cartésien (O, x_1, x_2, x_3) .

On a paramétré \mathcal{W} de la façon suivante :

soit m_2 un point courant de la section droite extrême de rayon R . On pose que :

$$\vec{om}_2 = R \sin \theta \vec{e}_1 + (d_0 - R \cos \theta) \vec{e}_2 + H \vec{e}_3$$

d_0 étant la distance du centre de la section droite circulaire à l'axe Ox_3 ;

on le prendra toujours selon \vec{e}_2 .

Pour un point m de \mathcal{W} , par des considérations géométriques simples

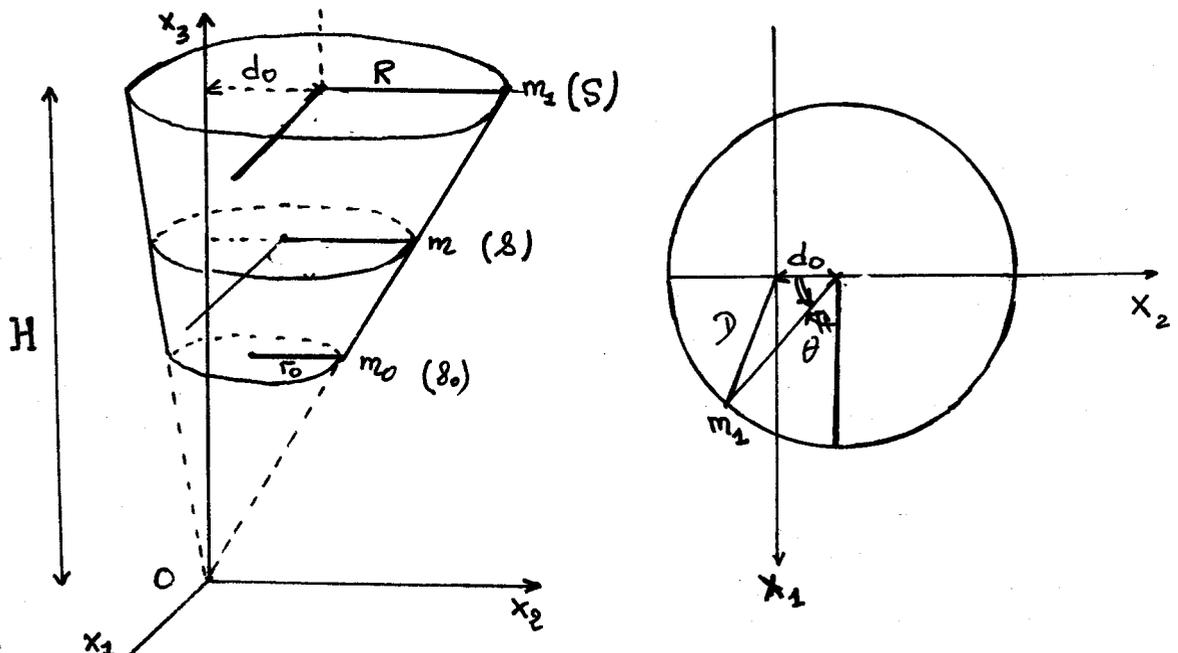
on a :

$$\vec{om} = \frac{R \sin \theta \mathcal{S}}{\sqrt{D^2 + H^2}} \vec{e}_1 + \frac{(d_0 - R \cos \theta) \mathcal{S}}{\sqrt{D^2 + H^2}} \vec{e}_2 + \frac{H \mathcal{S}}{\sqrt{H^2 + D^2}} \vec{e}_3$$

ou θ : angle que fait la projection du vecteur \vec{om} avec l'axe Ox_2 .

\mathcal{S} : abscisse curviligne selon une génératrice de la surface moyenne \mathcal{W} .

$$D = D(\theta) = (R^2 + d_0^2 - 2Rd_0 \cos \theta)^{1/2}.$$



(x_1, x_2, x_3) désignent les coordonnées du point $m \in W$, dans le repère cartésien on a :

(II.1.1)

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{s}{\sqrt{D^2 + H^2}} R \sin \theta, \\ x_2 &= \frac{s}{\sqrt{D^2 + H^2}} (d_0 - R \cos \theta) \\ x_3 &= \frac{s}{\sqrt{D^2 + H^2}} H \end{aligned}$$

La base locale au point m s'écrit alors :

(II.1.2)

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= \frac{R s}{(D^2 + H^2)^{3/2}} \left[(H^2 + d_0^2 + R^2) \cos \theta - R d_0 (1 + \cos^2 \theta); H^2 + R^2 - d_0 R \cos \theta; H \sin \theta; H d \sin \theta \right] \\ \vec{a}_2 &= \frac{1}{(D^2 + H^2)^{1/2}} \left[R \sin \theta; d_0 - R \cos \theta; H \right] \\ \vec{N} &= \frac{1}{(H^2 + (R - d_0 \cos \theta)^2)^{1/2}} \left[H \sin \theta; -H \cos \theta; d_0 \cos \theta - R \right] \end{aligned}$$

Remarques :

i) lorsque $d_0 = 0$ le cône est de révolution d'angle au sommet α défini

par $\sin \alpha = \frac{R}{(R^2 + H^2)^{1/2}}$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$). La base locale est alors orthogonale.

ii) Les trois formes quadratiques fondamentales du cône sont données respectivement à l'aide des relations I.1.5, I.1.7, I.1.11, par leurs coefficients :

(II.1.3)

$$\begin{aligned} E &= \frac{R^2 s^2}{(H^2 + D^2)^2} \left[H^2 + (R - d_0 \cos \theta)^2 \right]; \quad F = 0; \quad G = 1 \\ L &= \frac{H R s}{\sqrt{H^2 + D^2}} \cdot \frac{1}{H^2 + (R - d_0 \cos \theta)^2}; \quad M = N = 0 \\ C_{11} &= \frac{H^2 [H^2 + (R - d_0 \cos \theta)^2 + d_0^2 \sin^2 \theta]}{[H^2 + (R - d_0 \cos \theta)^2]^2}; \quad C_{12} = C_{21} = C_{22} = 0 \end{aligned}$$

iii) La courbure principale non nulle a pour expression :

$$(II.1.4) \quad \rho_1 = \frac{H}{R\delta} \left[\frac{H^2 + D^2}{H^2 + (R - d_0 \cos \theta)^2} \right]^{3/2} = \frac{1}{R_1}$$

ou R_1 le rayon de courbure minimal.

Les coefficients de Christoffel non nuls sont donnés par les formules suivantes:

$$(II.1.5) \quad \begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{-d_0 \sin \theta}{H^2 + (R - d_0 \cos \theta)^2} \left[(R + d_0 \cos \theta) - \frac{2\delta \sin^2 \theta d_0^2 R}{H^2 + D^2} \right] \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{-R^2 \delta [H^2 + (R - d_0 \cos \theta)^2]}{(H^2 + D^2)^2}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{\delta} \\ \Gamma_{11}^3 &= \frac{HR\delta}{\sqrt{H^2 + D^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{H^2 + (R - d_0 \cos \theta)^2}} \end{aligned}$$

. D'après la relation (I.2.4) et avec le système de coordonnées (θ, δ, z) dans le domaine de la coque \mathcal{S}^h ; la base locale au point $M \in \mathcal{S}^h$ s'écrit :

(II.1.6)

$$\vec{g}_1 = (1 - z b_1^2) \vec{a}_1 - z b_1^2 \vec{a}_2, \quad \vec{g}_2 = \vec{a}_2, \quad \vec{g}_3 = \vec{N}$$

. Le tenseur métrique associé à une telle base a pour composantes définies par :

(II.1.7)

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - z b_{\alpha\beta} + z^2 c_{\alpha\beta}.$$

c'est-à-dire que ses composantes s'expriment en fonction de celles des trois formes quadratiques du cône.

. Le déplacement élémentaire dans r, h a pour expression :

$$d\mathbf{s} = \sqrt{(a_{\alpha\beta} - \varepsilon_3 b_{\alpha\beta} + z^2 c_{\alpha\beta}) dz^\alpha dz^\beta + dz^2}$$

. Les composantes géométriques du tenseur de déformation dans la base $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{N})$ s'écrivent d'après la relation : (I.2.16).

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(v) &= \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - d_0 \sin \theta \left[(R + d_0 \cos \theta) - \frac{2 \sin^2 \theta d_0^2 R}{H^2 + D^2} \right] \frac{1}{\sqrt{H^2 + D^2}} - \frac{1}{\sqrt{H^2 + (R - d_0 \cos \theta)^2}} \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{H^2 + D^2}} \frac{H R \sin \theta}{\sqrt{H^2 + (R - d_0 \cos \theta)^2}} \\ \varepsilon_{12}(v) &= \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + 2 \frac{v_\theta}{\theta} \right) \frac{1}{2}, \quad \varepsilon_{22}(v) = \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \\ \varepsilon_{13}(v) &= \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_3}{\partial \theta} + v_\theta \frac{1}{\theta} \right) \frac{1}{2}, \quad \varepsilon_{23}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial \theta} + \frac{\partial v_3}{\partial \theta} \right) \\ \varepsilon_{33}(v) &= \frac{\partial v_3}{\partial \theta} \end{aligned}$$

II.2.- CAS DE COQUES CONIQUES DE REVOLUTION

II.2.1.- Coordonnées curvilignes orthogonales

La relation (II.1.1) devient dans ce cas avec α demi-angle au sommet du cône :

(II.2.1)

$$x_1 = r \sin \alpha \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \alpha \sin \theta, \quad x_3 = r \cos \alpha.$$

Le vecteur \vec{OM} défini dans la relation (I.1.1) a pour composantes dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de l'espace vectoriel E_3

(II.2.2)

$$X_1 = (s \sin \alpha + z \cos \alpha) \cos \theta$$

$$X_2 = (s \sin \alpha + z \cos \alpha) \sin \theta$$

$$X_3 = s \cos \alpha - z \sin \alpha .$$

La base locale au point M de \mathcal{R}^h compte tenu de (II.1.1)

s'écrit :

(II.2.3)

$$\vec{a}_1 = h_\theta \vec{e}_\theta$$

$$\vec{a}_2 = h_s \vec{e}_s$$

$$\vec{a}_3 = h_z \vec{e}_z$$

où $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_s, \vec{e}_z)$ la base locale orthonormée dans \mathcal{R}^h .

$$h_\theta = s \sin \alpha + z \cos \alpha, \quad h_s = h_z = 1.$$

La base locale $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_s, \vec{e}_z)$ est orthogonale. Ainsi en tout point on définit un système de coordonnées rectangulaires où l'axe θ est la direction de la tangente au cercle parallèle, l'axe des s celle de la tangente à la génératrice et l'axe z celle de la normale à la coque. On se placera par la suite dans la base locale orthonormée. On exprimera les coefficients de Christoffel et certains opérateurs dans celle-ci.

Remarques :

i) Dans la base $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_s, \vec{e}_z)$; les variations des vecteurs de base s'expriment par :

(II.2.4)

$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = \Gamma_{112} \vec{e}_3 + \Gamma_{113} \vec{N}, \quad \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial \theta} = \Gamma'_{2e3} \vec{e}_\theta + \Gamma_{123} \vec{N}$$

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial \theta} = -(b_{31} \vec{e}_\theta + b_{12} \vec{e}_3) \quad ; \quad \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial \theta} = \vec{0} \quad j = \theta, 3, \delta$$

où

(II.2.5)

$$\Gamma_{121} = -\Gamma_{112} = \sin \alpha, \quad \Gamma_{212} = 0$$

$$\Gamma_{113} = -b_{31} = \cos \alpha, \quad b_{12} = 0$$

ii) L'étude de l'opérateur de courbure permet de calculer la courbure principale non nulle de la surface moyenne ω . D'après la formule (I.1.4), on trouve à cet effet :

$$\rho = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{s \operatorname{tg} \alpha}$$

Ayant considéré un tronc de cône tel que $s \gg s_0$, $s_0 > 0$;

(on exclut le sommet du cône qui est un point singulier).

On prendra donc par la suite comme rayon de courbure minimal R_0

tel que

$$R_0 = s_0 \operatorname{tg} \alpha$$

Dans la base locale orthonormée $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_3, \vec{N})$; $\vec{OM} = s \vec{e}_3 + \delta \vec{N}$.

On en déduit ainsi le déplacement élémentaire d'un point M de \mathcal{M}^h :

$$d\vec{M} = h_\theta d\theta \vec{e}_\theta + \vec{e}_3 ds + d\delta \vec{N}$$

On obtient le volume élémentaire en \mathcal{M} par l'aide de la relation précédente :

$$dv = (r \sin \alpha + z \cos \alpha) d\theta ds dz$$

II.2.2.1.- Gradient d'un vecteur \vec{v} .

. Le gradient d'un vecteur \vec{v} de composantes (v_θ, v_s, v_z) dans la base $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_s, \vec{N})$ est le tenseur défini en chaque point M qui par définition fait correspondre au déplacement élémentaire $d\vec{M}$ la différentielle de \vec{v} c'est-à-dire la quantité $d\vec{v} = d(v_\theta \vec{e}_\theta + v_s \vec{e}_s + v_z \vec{N})$.
Connaissant les dérivées des vecteurs de la base intervenant dans $d\vec{v}$ (calculées en II.2.4) on obtient:

$$(II.2.6) \quad \begin{aligned} \nabla_{11}(v) &= \frac{1}{r \sin \alpha + z \cos \alpha} \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \sin \alpha v_s + \cos \alpha v_z \right], \quad \nabla_{21}(v) = \frac{\partial v_\theta}{\partial s}, \quad \nabla_{31}(v) = \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \nabla_{22}(v) &= \frac{1}{r \sin \alpha + z \cos \alpha} \left[\frac{\partial v_s}{\partial \theta} - \sin \alpha v_\theta \right]; \quad \nabla_{22}(v) = \frac{\partial v_s}{\partial s}, \quad \nabla_{23}(v) = \frac{\partial v_s}{\partial z} \\ \nabla_{31}(v) &= \frac{1}{r \sin \alpha + z \cos \alpha} \left[\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \cos \alpha v_\theta \right]; \quad \nabla_{32}(v) = \frac{\partial v_z}{\partial s}, \quad \nabla_{33}(v) = \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned}$$

. Connaissant le gradient d'un vecteur \vec{v} de composantes (v_θ, v_s, v_z) ; par contraction sur les deux derniers indices on obtient la divergence de \vec{v} au point M donnée par :

$$(II.2.7) \quad \text{Div}_M \vec{v} = \frac{1}{(r \sin \alpha + z \cos \alpha)} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

II.2.2.2.- Divergence d'un tenseur du second ordre

Par utilisation du théorème classique de la divergence ou de la définition de la divergence d'un tenseur Σ de composantes Σ_{ij} ($i, j = \theta, s, z$) dans la base locale orthonormée $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_s, \vec{N})$, on a :

(II.2.8)

$$\text{Div} \vec{\Sigma} = \frac{1}{h_\theta h_\alpha h_\beta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (h_\alpha h_\beta (\Sigma_{\theta\theta} \vec{e}_\theta + \Sigma_{\theta\alpha} \vec{e}_\alpha + \Sigma_{\theta\beta} \vec{N})) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (h_\theta h_\beta (\Sigma_{\alpha\theta} \vec{e}_\theta + \Sigma_{\alpha\alpha} \vec{e}_\alpha + \Sigma_{\alpha\beta} \vec{N})) + \frac{\partial}{\partial \beta} (h_\theta h_\alpha (\Sigma_{\beta\theta} \vec{e}_\theta + \Sigma_{\beta\alpha} \vec{e}_\alpha + \Sigma_{\beta\beta} \vec{N})) \right].$$

II.3.- EQUATIONS D'EQUILIBRE D'UNE COQUE CONIQUE ELASTIQUE DE REVOLUTION

Sous l'effet des forces volumiques de densité \vec{f} et des forces de pression appliquées à la coque; celle-ci va se déformer. Le problème revient à la détermination de deux champs inconnus : le champ des contraintes et celui des déplacements. Nous disposons pour cela les équations d'équilibre les relations contraintes-déformations et les conditions de compatibilité qui sont les conditions d'intégrabilité des déformations assurant l'existence des déplacements. Ces différentes équations sont complétées par des conditions aux limites appropriées.

II.3.1.- Relations contraintes-déformations

Avec l'hypothèse émise dans le paragraphe I.3, on suppose en plus l'existence d'un état dit "naturel" ou état non déformé pour lesquelles les déformations sont nulles et qui servira de configuration de référence pour mesurer les déplacements.

La loi de Hooke s'écrit avec $\vec{\sigma}$, $\vec{\epsilon}$ tenseurs de contraintes et de déformations :

(II.3.1)

$$\vec{\sigma} = \nu \text{Tr}[\vec{\epsilon}] \vec{1} + 2\mu \vec{\epsilon}$$

ou encore

$$\vec{\epsilon} = \frac{1+\nu}{E} \vec{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}[\vec{\sigma}] \vec{1}$$

ou $E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$ est le module d'Young, ν coefficient de Poisson.

λ et μ étant les coefficients de Lamé.

On a :

$$\frac{1}{h_\theta} \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_2 \sin \alpha + v_3 \cos \alpha \right] = \frac{1}{E} \left[\sigma_{\theta\theta} - \nu (\sigma_{22} + \sigma_{33}) \right].$$

$$\frac{1}{h_\theta} \left[\frac{\partial v_2}{\partial \theta} - \sin \alpha v_\theta \right] + \frac{\partial v_\theta}{\partial s} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{2\theta}.$$

(II.3.2)
$$\frac{1}{h_\theta} \left[\frac{\partial v_3}{\partial \theta} - \cos \alpha v_\theta \right] + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{3\theta}.$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial s} + \frac{\partial v_3}{\partial s} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{23}.$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial s} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{22} - \nu (\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{33}) \right].$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial s} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{33} - \nu (\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{22}) \right].$$

II.3.2.- Equations d'équilibre

Désignons par (f_θ, f_2, f_3) les composantes des forces volumiques sur $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base locale; les équations d'équilibre s'écrivent avec $\rho \vec{f}$ densité volumique de forces.

$$\frac{1}{h_\theta} \left[\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha \sigma_{2\theta} + 2 \cos \alpha \sigma_{3\theta} \right] + \frac{\partial \sigma_{2\theta}}{\partial s} + \frac{\partial \sigma_{3\theta}}{\partial z} + \rho f_\theta = 0.$$

(II.3.3)
$$\frac{1}{h_\theta} \left[\frac{\partial \sigma_{2\theta}}{\partial \theta} + \cos \alpha \sigma_{23} + \sin \alpha (\sigma_{22} - \sigma_{\theta\theta}) \right] + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial s} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial z} + \rho f_2 = 0.$$

$$\frac{1}{h_\theta} \left[\frac{\partial \sigma_{3\theta}}{\partial \theta} + \sin \alpha \sigma_{23} + \cos \alpha (\sigma_{33} - \sigma_{\theta\theta}) \right] + \frac{\partial \sigma_{3\theta}}{\partial s} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} + \rho f_3 = 0.$$

II.3.3.- Conditions aux limites sur les faces $z = \pm h$.

On note par $(P_\theta^+(r, \theta) ; P_r^+(r, \theta) ; P_z^+(r, \theta))$ les composantes du vecteur force de pression appliquée en tout point $M (r, \theta, z=h)$ à la face $z = +h$: la surface extérieure du cône.

Dans la base locale $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_r, \vec{N})$ cette face a pour normale $\vec{n} (0, 0, 1)$; le vecteur contrainte en un point P de cette face est de la forme :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_{\theta z}(r, \theta, h) \vec{e}_\theta + \sigma_{rz}(r, \theta, h) \vec{e}_r + \sigma_{zz}(r, \theta, h) \vec{N}.$$

Les conditions aux limites sur cette face s'écrivent alors :

(II.3.4)

$$\sigma_{\theta z}(r, \theta, z=h) = P_\theta^+(r, \theta).$$

$$\sigma_{rz}(r, \theta, z=h) = P_r^+(r, \theta).$$

$$\sigma_{zz}(r, \theta, z=h) = P_z^+(r, \theta).$$

De même en posant $(P_\theta^-(r, \theta, -h) ; P_r^-(r, \theta, -h) ; P_z^-(r, \theta, -h))$ les composantes du vecteur force de pression appliquée à la face intérieure $z = -h$ de normale $(0, 0, -1)$.

On obtient pour cette face et pour $z = -h$

(II.3.4')

$$\sigma_{\theta z}(r, \theta, z=-h) = -P_\theta^-(r, \theta).$$

$$\sigma_{rz}(r, \theta, z=-h) = -P_r^-(r, \theta).$$

$$\sigma_{zz}(r, \theta, z=-h) = -P_z^-(r, \theta).$$

II.3.4.- Equations de compatibilité

Dans le système de coordonnées curvilignes adopté, les équations de compatibilité s'écrivent :

$$(II.3.5) \quad \begin{aligned} \Delta \sigma_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2} (2(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\theta\theta}) + 4 \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta}) + \frac{1}{(1+\nu)} \left[\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\sin \alpha}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \alpha}{r} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \sigma_I \right] &= 0 \\ \Delta \sigma_{\theta\beta} - \frac{2}{r} (2 \sigma_{\theta\beta} + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\beta\beta})) + \frac{1}{(1+\nu)r} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \beta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \sigma_I \right] &= 0 \\ \Delta \sigma_{\theta\beta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta\beta}}{\partial \theta} + \frac{1}{(1+\nu)r} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \beta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \sigma_I \right] &= 0 \\ \Delta \sigma_{\beta\beta} + \frac{1}{r^2} \left[2(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\beta\beta}) - 4 \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 \sigma_I}{\partial \beta^2} &= 0 \\ \Delta \sigma_{\beta\beta} - \frac{1}{r^2} \left[\sigma_{\beta\beta} + 2 \frac{\partial \sigma_{\theta\beta}}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 \sigma_I}{\partial \beta \partial \theta} &= 0 \\ \Delta \sigma_{\beta\beta} + \frac{1}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 \sigma_I}{\partial \beta^2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\sin \alpha}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \alpha}{r} \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \quad ; \quad r = \beta \sin \alpha + z \cos \alpha .$$

$$\sigma_I = \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\beta\beta} + \sigma_{\beta\beta} .$$

II.4.- PETITS PARAMETRES EN THEORIE DE COQUES

II.4.1.- Introduction de petits paramètres

La coque est définie comme un milieu continu tridimensionnel dont une dimension (l'épaisseur) est petite devant les autres et devant les rayons de courbure de la surface moyenne de la coque. Ceci introduit deux petits paramètres adimensionnels liés à la géométrie de la coque. On les appellera paramètres géométriques de la coque et on les notera :

$$\eta = \frac{h}{R_0} : \text{rapport de la demi-épaisseur sur le plus petit rayon de courbure.}$$

$$\varepsilon = \frac{h}{L} : \text{Rapport de la demi-épaisseur sur une longueur caractéristique.}$$

En plus, l'élasticité linéaire classique introduit un autre petit paramètre par l'introduction d'une norme sur l'espace des tenseurs de second ordre : la borne supérieure de $\|G \vec{\text{grad}}_M \vec{V}\|$.

On pose :

$$S = \sup_{M \in \Sigma^R} \|G \vec{\text{grad}}_M \vec{V}\|$$

Des difficultés sont survenues pour exprimer les erreurs commises sur certaines quantités en fonction de ces paramètres et le rang à partir duquel on doit arrêter la linéarisation pour conserver au problème sa globalité dans les équations d'équilibre et de compatibilité.

Il s'avère aussi indispensable d'étudier les corrélations existantes entre les petits paramètres.

II.4.2.- Variables adimensionnelles

Pour faire apparaître dans les équations d'équilibre, les relations contraintes-déformations et les équations de compatibilité; les infiniments petits géométriques; on introduit les variables sans dimension dans le système de coordonnées $(\theta, \mathfrak{x}, \mathfrak{z})$ de la façon suivante :

Soient L une longueur caractéristique de la coque.

R_0 le rayon de courbure minimal de la surface moyenne

U un déplacement caractéristique dans le domaine de

la coque.

σ une contrainte caractéristique ($\sigma = \frac{E U}{R_0}$).

h la demi-épaisseur de la coque.

On pose les variables adimensionnelles telles que :

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= L \bar{x} & , & & \mathfrak{z} &= h \bar{z} \\ \mathfrak{v}_j &= U \bar{v}_j & , & & \sigma_{ij} &= \sigma \bar{\sigma}_{ij} \end{aligned}$$

11.4.3.- Relation entre différents paramètres

On note :

$$\bar{S} = \sup_{\bar{M} \in \bar{\Omega}^h} |G \bar{\nabla} d_{\bar{M}} \bar{v}| \quad \bar{\Omega}^h = [0, 2\pi] \times [0, 1] \times [-1, 1]$$

On a d'après l'expression des composantes de $|G \bar{\nabla} d_{\bar{M}} \bar{v}|$.

$$\bar{S} = \frac{U}{L} \bar{S} \text{Max}\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{U}{L} \cdot \frac{\bar{S}}{\varepsilon}$$

A ce niveau nous pouvons formuler les deux hypothèses suivantes

sur \bar{S} .

H1 : $\bar{S} = 1$ cela entraîne que $\frac{U}{L} = \delta \varepsilon$: hypothèse employée par RAILLON dans sa thèse (cf. [13]).

H2 : $\bar{S} = S$ ce qui donne $\frac{U}{L} = \varepsilon$: hypothèse utilisée par HARIRI dans sa thèse (cf. [8]).

On retiendra par la suite la second hypothèse H2 : $\frac{U}{L} = o(\varepsilon)$ ce qui peut justifier le fait de prendre un développement polynomial en ε dans l'hypothèse des coques minces en théorie de l'élasticité linéaire.

On écrira par la suite $\bar{u}_j(\bar{x}, \theta, \bar{\delta}, \varepsilon) = \frac{u_j(\bar{x}, \theta, \delta)}{L} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \bar{u}_j^{(m)}(\bar{x}, \theta, \bar{\delta})$

La loi de HOOKE permet d'écrire :

$$\bar{\sigma}_{ij}(\bar{x}, \theta, \bar{\delta}, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \bar{\sigma}_{ij}^{(m)}(\bar{x}, \theta, \bar{\delta}) .$$

CHAPITRE III

RESOLUTION DES EQUATIONS ADIMENSIONNELLES

On se place dans le cadre de l'élasticité linéaire avec l'hypothèse H_2 .

III.1.- EQUATIONS ADIMENSIONNELLESIII.1.1.- Equations d'équilibre

Les équations d'équilibre avec les variables sans dimension (θ , \bar{x} , \bar{z} , $\bar{\sigma}_{ij}$) donnent après transformation et apparition de petits paramètres :

$$\begin{aligned} & \bar{x} \sin \alpha \frac{\partial \bar{\sigma}_{03}}{\partial \bar{z}} + \varepsilon \left[\frac{\partial \bar{\sigma}_{00}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha \bar{\tau}_{20} + 2 \cos \alpha \bar{\tau}_{03} + \bar{x} \sin \alpha \frac{\partial \bar{\sigma}_{20}}{\partial \bar{x}} + \right. \\ & \left. \bar{z} \cos \alpha \frac{\partial \bar{\sigma}_{03}}{\partial \bar{z}} + \bar{x} \sin \alpha \bar{f}_0 \right] + \varepsilon^2 \left[\frac{\partial \bar{\tau}_{20}}{\partial \bar{x}} + \bar{f}_0 \right] \bar{z} \cos \alpha = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bar{x} \sin \alpha \frac{\partial \bar{\sigma}_{23}}{\partial \bar{z}} + \varepsilon \left[\frac{\partial \bar{\tau}_{20}}{\partial \theta} + \sin \alpha (\bar{\sigma}_{22} - \bar{\tau}_{00}) + \cos \alpha \bar{\tau}_{23} + \bar{x} \sin \alpha \frac{\partial \bar{\tau}_{23}}{\partial \bar{x}} + \right. \\ & \left. \bar{z} \cos \alpha \frac{\partial \bar{\sigma}_{23}}{\partial \bar{z}} + \bar{x} \sin \alpha \bar{f}_3 \right] + \varepsilon^2 \left[\frac{\partial \bar{\tau}_{23}}{\partial \bar{x}} + \bar{f}_3 \right] \bar{z} \cos \alpha = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bar{x} \sin \alpha \frac{\partial \bar{\tau}_{33}}{\partial \bar{z}} + \varepsilon \left[\frac{\partial \bar{\sigma}_{03}}{\partial \theta} + \cos \alpha (\bar{\tau}_{33} - \bar{\tau}_{00}) + \bar{x} \sin \alpha \bar{\tau}_{33} + \bar{x} \sin \alpha \frac{\partial \bar{\tau}_{33}}{\partial \bar{x}} + \right. \\ & \left. \bar{z} \cos \alpha \frac{\partial \bar{\tau}_{33}}{\partial \bar{z}} + \bar{x} \sin \alpha \bar{f}_3 \right] + \varepsilon^2 \left[\frac{\partial \bar{\tau}_{33}}{\partial \bar{x}} + \bar{f}_3 \right] \bar{z} \cos \alpha = 0 \end{aligned}$$

III.1.2.- Relations contraintes-déformations

En variables adimensionnelles, elles s'écrivent :

$$\bar{r} \sin \alpha \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\bar{r}} + \varepsilon \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \theta} - \bar{u}_\theta \cos \alpha \right) + \bar{z} \cos \alpha \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\bar{z}} - 2(1+\nu) \bar{r} \sin \alpha \bar{\sigma}_{\theta z} \right]$$

$$- 2 \bar{z} \cos \alpha (1+\nu) \bar{\sigma}_{\theta z} \varepsilon^2 = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \bar{z}} + \varepsilon \left[\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \theta} - 2 \frac{L}{R_0} (1+\nu) \bar{\sigma}_{z z} \right] = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \bar{z}} - \varepsilon \left[\bar{\sigma}_{z z} - \nu (\bar{\sigma}_{\theta \theta} + \bar{\sigma}_{z z}) \right] = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} - \bar{u}_\theta \sin \alpha + \bar{r} \sin \alpha \left(\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} - 2(1+\nu) \bar{\sigma}_{\theta \theta} \frac{L}{R_0} \right) +$$

$$\varepsilon \bar{z} \cos \alpha \left[\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} - 2(1+\nu) \frac{L}{R_0} \bar{\sigma}_{\theta \theta} \right] = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} + \bar{u}_z \sin \alpha + \bar{u}_z \cos \alpha - \bar{r} \sin \alpha \frac{L}{R_0} \left[\bar{\sigma}_{\theta \theta} - \nu (\bar{\sigma}_{\theta \theta} + \bar{\sigma}_{z z}) \right]$$

$$- \varepsilon \bar{z} \cos \alpha \left[\bar{\sigma}_{\theta \theta} - \nu (\bar{\sigma}_{\theta \theta} + \bar{\sigma}_{z z}) \right] = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \theta} - \frac{L}{R_0} \left[\bar{\sigma}_{z z} - \nu (\bar{\sigma}_{\theta \theta} + \bar{\sigma}_{z z}) \right] = 0$$

III.2.- PROBLEME LINEARISE

On substitue dans les équations d'équilibre et dans les relations contraintes-déformations les développements asymptotiques suivants dans le cadre de l'hypothèse H_2 et de ses conséquences :

$$\bar{\sigma}_{ij}(\bar{x}, \theta, \bar{z}, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \bar{\sigma}_{ij}^{(m)}(\bar{x}, \theta, \bar{z}).$$

$$\bar{U}_j(\bar{x}, \theta, \bar{z}, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \bar{U}_j^{(m)}(\bar{x}, \theta, \bar{z}).$$

Par la suite tout indice grec (α, β) vaut (θ, \mathcal{B})
 tout indice latin (i, j) vaut ($\theta, \mathcal{B}, \mathcal{Z}$).

On détaillera le calcul et les transformations successives uniquement pour la première équation d'équilibre et on se contentera de donner les résultats pour les autres équations d'équilibre et les relations contraintes-déformations; la démarche restant la même.

La première équation devient :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \bar{x} \sin \alpha \frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta\mathcal{B}}^{(m)}}{\partial \bar{z}} \varepsilon^m + \varepsilon^{m+1} \left[\frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(m)}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha \bar{r}_{\mathcal{B}\theta}^{(m)} + 2 \cos \alpha \bar{r}_{\theta\mathcal{B}}^{(m)} + \bar{z} \sin \alpha \frac{\partial \bar{r}_{\theta\theta}^{(m)}}{\partial \theta} + \bar{z} \cos \alpha \frac{\partial \bar{r}_{\theta\mathcal{B}}^{(m)}}{\partial \bar{z}} \right] + \varepsilon^{m+2} \bar{z} \cos \alpha \frac{\partial \bar{r}_{\theta\theta}^{(m)}}{\partial \theta} \right\} = 0$$

On transforme cette équation en faisant le changement d'indice $k = l+m$ dans l'expression $\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m+l} \bar{\sigma}_{ij}^{(m)}(\bar{x}, \theta, \bar{z})$ qui devient :

$$\sum_{k=l}^{\infty} \varepsilon^k \bar{\sigma}_{ij}^{(k-l)} \quad \text{qu'on peut encore noter :} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{\sigma}_{ij}^{(k-l)}(\bar{x}, \theta, \bar{z})$$

avec $\bar{\sigma}_{ij}^{(k-l)}(\bar{x}, \theta, \bar{z}) = 0$ pour $k < l$.

La première équation se met donc sous la forme suivante :

a

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \bar{\lambda} \sin \alpha \frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta 3}^{(m)}}{\partial \bar{\theta}} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta \theta}^{(m-1)}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha \bar{\sigma}_{\theta 0}^{(m-1)} + 2 \cos \alpha \bar{\sigma}_{\theta 3}^{(m-1)} + \bar{\lambda} \sin \alpha \frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta 0}^{(m-1)}}{\partial \bar{\theta}} \right. \\ \left. + \bar{\lambda} \cos \alpha \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta 3}^{(m-1)}}{\partial \bar{\theta}} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta 0}^{(m-2)}}{\partial \bar{\theta}} \right) \right\} \varepsilon^m = 0$$

En procédant de la même manière nous obtenons pour les autres équations :

b

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \bar{\lambda} \sin \alpha \frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta 3}^{(m)}}{\partial \bar{\theta}} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta \theta}^{(m-1)}}{\partial \theta} + \cos \alpha \bar{\sigma}_{\theta 3}^{(m-1)} + \sin \alpha (\bar{\sigma}_{\theta \theta}^{(m-1)} - \bar{\sigma}_{\theta 0}^{(m-1)}) + \right. \\ \left. \bar{\lambda} \sin \alpha \frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta 3}^{(m-1)}}{\partial \bar{\theta}} + \bar{\lambda} \cos \alpha \left[\frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta 3}^{(m-1)}}{\partial \bar{\theta}} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta 0}^{(m-2)}}{\partial \bar{\theta}} \right] \right\} \varepsilon^m = 0$$

c

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \bar{\lambda} \sin \alpha \frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta 3}^{(m)}}{\partial \bar{\theta}} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta \theta}^{(m-1)}}{\partial \theta} + \sin \alpha \bar{\sigma}_{\theta 3}^{(m-1)} + \cos \alpha (\bar{\sigma}_{\theta 3}^{(m-1)} - \bar{\sigma}_{\theta \theta}^{(m-1)}) + \right. \\ \left. \bar{\lambda} \sin \alpha \frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta 3}^{(m-1)}}{\partial \bar{\theta}} + \bar{\lambda} \cos \alpha \left[\frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta 3}^{(m-1)}}{\partial \bar{\theta}} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta 0}^{(m-2)}}{\partial \bar{\theta}} \right] \right\} \varepsilon^m = 0$$

Avec la même démarche que précédemment et en ayant posé $\bar{U}_j^{(k)}(\bar{\lambda}, \theta, \bar{\theta}) = 0$ pour $R < 0$ les relations contraintes-déformations donnent :

d

$$\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \left\{ \bar{\lambda} \sin \alpha \frac{\partial \bar{U}_{\theta}^{(m)}}{\partial \bar{\theta}} + \bar{\lambda} \cos \alpha \frac{\partial \bar{U}_{\theta}^{(m-1)}}{\partial \bar{\theta}} + \frac{\partial \bar{U}_{\theta}^{(m-1)}}{\partial \theta} - \cos \alpha \bar{U}_{\theta}^{(m-1)} \right. \\ \left. - \frac{2L}{R_0} (1+\nu) \left[\bar{\lambda} \sin \alpha \bar{\sigma}_{\theta 3}^{(m-1)} + \bar{\lambda} \cos \alpha \bar{\sigma}_{\theta 3}^{(m-2)} \right] \right\} = 0$$

e

$$\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \left\{ \frac{\partial \bar{U}_{\theta}^{(m)}}{\partial \bar{\theta}} + \frac{\partial \bar{U}_{\theta}^{(m-1)}}{\partial \bar{\theta}} - \frac{2L}{R_0} (1+\nu) \bar{\sigma}_{\theta 3}^{(m-1)} \right\} = 0$$

$$f \quad \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \left\{ \frac{\partial \bar{u}_z^{(m)}}{\partial z} - \frac{L}{R_0} \left(\bar{\sigma}_{zz}^{(m-2)} - \nu (\bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(m-2)} + \bar{\sigma}_{zz}^{(m-2)}) \right) \right\} = 0$$

$$g \quad \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \left\{ \frac{\partial \bar{u}_\theta^{(m)}}{\partial \theta} - \sin \alpha \bar{u}_\theta^{(m)} + \bar{\delta} \sin \alpha \left(\frac{\partial \bar{u}_\theta^{(m)}}{\partial \theta} - \frac{2L}{R_0} (1+\nu) \bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(m)} + \bar{\delta} \cos \alpha \left(\frac{\partial \bar{u}_\theta^{(m-2)}}{\partial \theta} - \frac{2(1+\nu)L}{R_0} \bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(m-2)} \right) \right\} = 0$$

$$h \quad \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \left\{ \frac{\partial \bar{u}_\theta^{(m)}}{\partial \theta} + \sin \alpha \bar{u}_z^{(m)} + \bar{u}_z^{(m)} \cos \alpha - \frac{L}{R_0} \bar{\delta} \sin \alpha \left(\bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(m)} - \nu (\bar{\sigma}_{zz}^{(m)} + \bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(m)}) \right) - \bar{\delta} \cos \alpha \left(\bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(m-2)} - \nu (\bar{\sigma}_{zz}^{(m-2)} + \bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(m-2)}) \right) \frac{L}{R_0} \right\} = 0$$

$$i \quad \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{\partial \bar{u}_z^{(m)}}{\partial z} - \frac{L}{R_0} \left(\bar{\sigma}_{zz}^{(m)} - \nu (\bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(m)} + \bar{\sigma}_{zz}^{(m)}) \right) \right\} \varepsilon^m = 0$$

Remarque

Dans les équations d'équilibre et les relations contraintes-déformations m doit être au moins égal à 2 pour garder tous les termes significatifs.

III.3.- Résolution du problème linéarisé

Par identification des termes de même puissance en ε dans les équations d'équilibre et les lois de comportement; nous obtenons la résolution aux différents ordres.

III.3.1.- Résolution de l'ordre 0

Les trois équations d'équilibre nous donnent :

$$\begin{aligned} \bar{s} \sin \alpha \frac{\partial \bar{v}_3^{(0)}}{\partial \bar{z}} &= 0 \\ \bar{s} \sin \alpha \frac{\partial \bar{u}_3^{(0)}}{\partial \bar{z}} &= 0 \\ \bar{s} \sin \alpha \frac{\partial \bar{w}_3^{(0)}}{\partial \bar{z}} &= 0 \end{aligned}$$

Compte tenu que $\bar{s} \sin \alpha \neq 0$, cela entraîne que

$\bar{v}_3^{(0)}(\bar{x}, \theta, \bar{z}) = \bar{v}_3^{(0)}(\bar{x}, \theta)$ que nous noterons $\bar{g}_{j30}^{(0)}(\bar{x}, \theta)$ par la suite.

Les trois premières lois de comportement donnent de même :

$$\bar{s} \sin \alpha \frac{\partial \bar{u}_\theta^{(0)}}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}_\theta^{(0)}}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}_3^{(0)}}{\partial \bar{z}} = 0$$

on en déduit que $\bar{u}_j^{(0)}(\bar{x}, \theta, \bar{z}) = \bar{u}_j^{(0)}(\bar{x}, \theta)$ notées par la suite $\bar{c}_{f0}^{(0)}(\bar{x}, \theta)$.

En résolvant les trois dernières relations contraintes-déformations on trouve compte-tenu de solutions précédentes :

$$\begin{aligned} \bar{v}_{\theta\theta}^{(1)}(\bar{x}, \theta) &= \frac{R_0}{2L(1+\nu)} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_\theta^{(0)}}{\partial \theta} - \bar{u}_\theta^{(0)} \sin \alpha \right) \frac{1}{\bar{x} \sin \alpha} + \frac{\partial \bar{u}_\theta^{(0)}}{\partial \bar{x}} \right]. \\ \bar{v}_{\theta s}^{(1)}(\bar{x}, \theta) &= \frac{R_0}{L(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_\theta^{(0)}}{\partial \theta} + \sin \alpha \bar{u}_s^{(0)} + \cos \alpha \bar{u}_\theta^{(0)} \right) \frac{\nu}{\bar{x} \sin \alpha} + \frac{\partial \bar{u}_s^{(0)}}{\partial \bar{x}} \right]. \\ \bar{v}_{\theta 3}^{(1)}(\bar{x}, \theta) &= \frac{R_0}{L(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_\theta^{(0)}}{\partial \theta} + \sin \alpha \bar{u}_s^{(0)} + \cos \alpha \bar{u}_\theta^{(0)} \right) \frac{1}{\bar{x} \sin \alpha} + \nu \frac{\partial \bar{u}_\theta^{(0)}}{\partial \bar{x}} \right]. \end{aligned}$$

Remarque :

- A l'ordre 0, on prendra $\bar{g}_{j3_0}^{(1)}(\bar{x}, \theta) \equiv 0$.
- On notera $\bar{u}(\bar{x}, \theta)$, $\bar{v}(\bar{x}, \theta)$, $\bar{w}(\bar{x}, \theta)$ les composantes de déplacement de membrane dans la base locale $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_s, \vec{n})$.

III.3.2. - Résolution à l'ordre 1 en ε .

En identifiant les termes de puissance 1 en ε et en tenant compte des résultats obtenus à l'ordre 0, on a :

$$\frac{\partial \bar{v}_{\theta\theta}^{(1)}}{\partial \bar{x}} = - \left[\left(\frac{\partial \bar{v}_{\theta\theta}^{(0)}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha \bar{v}_{\theta\theta}^{(0)} \right) \frac{1}{\bar{x} \sin \alpha} + \frac{\partial \bar{v}_{\theta\theta}^{(0)}}{\partial \bar{x}} \right].$$

$$\frac{\partial \bar{v}_{\theta s}^{(1)}}{\partial \bar{x}} = - \left[\left(\frac{\partial \bar{v}_{\theta s}^{(0)}}{\partial \theta} + \sin \alpha (\bar{v}_{ss}^{(0)} - \bar{v}_{\theta\theta}^{(0)}) \right) \frac{1}{\bar{x} \sin \alpha} + \frac{\partial \bar{v}_{\theta s}^{(0)}}{\partial \bar{x}} \right].$$

$$\frac{\partial \bar{v}_{\theta 3}^{(1)}}{\partial \bar{x}} = \frac{\cos \alpha}{\bar{x} \sin \alpha} \bar{v}_{\theta\theta}^{(0)}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_\theta^{(1)}}{\partial \bar{x}} = - \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_\theta^{(0)}}{\partial \theta} - \cos \alpha \bar{u}_\theta^{(0)} \right) \frac{1}{\bar{x} \sin \alpha} \right].$$

$$\frac{\partial \bar{u}_s^{(1)}}{\partial \bar{x}} = - \left[\frac{\partial \bar{u}_s^{(0)}}{\partial \bar{x}} \right].$$

$$\frac{\partial \bar{u}_3^{(1)}}{\partial \bar{x}} = - \nu (\bar{v}_{\theta\theta}^{(0)} + \bar{v}_{ss}^{(0)}).$$

Par intégration de ces équations on trouve que la solution à l'ordre 1 se met sous la forme :

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{3j}^{(1)}(\bar{x}, \theta, \bar{z}) &= \bar{z} \bar{q}_{3j2}^{(1)}(\bar{x}, \theta) + \bar{q}_{3j0}^{(1)}(\bar{x}, \theta) \\ \bar{\mu}_j^{(1)}(\bar{x}, \theta, \bar{z}) &= \bar{z} \bar{c}_{j2}^{(1)}(\bar{x}, \theta) + \bar{c}_{j0}^{(1)}(\bar{x}, \theta)\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\bar{q}_{\theta 31}^{(1)}(\bar{x}, \theta) &= - \left[\left(\frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(0)}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha \bar{\sigma}_{3\theta}^{(0)} \right) \frac{1}{\bar{x} \sin \alpha} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{3\theta}^{(0)}}{\partial \theta} \right] \\ \bar{q}_{32}^{(1)}(\bar{x}, \theta) &= - \left[\left(\frac{\partial \bar{\sigma}_{3\theta}^{(0)}}{\partial \theta} + \sin \alpha (\bar{\sigma}_{33}^{(0)} - \bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(0)}) \right) \frac{1}{\bar{x} \sin \alpha} + \frac{\partial \bar{\sigma}_3^{(0)}}{\partial \theta} \right] \\ \bar{q}_{331}^{(1)}(\bar{x}, \theta) &= \frac{\bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(0)}}{\bar{x} \tan \alpha}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{c}_{\theta 1}^{(1)}(\bar{x}, \theta) &= - \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_3^{(0)}}{\partial \theta} - \cos \alpha \bar{u}_\theta^{(0)} \right) \frac{1}{\bar{x} \sin \alpha} \right] \\ \bar{c}_{31}^{(1)}(\bar{x}, \theta) &= - \frac{\partial \bar{u}_3^{(0)}}{\partial \theta} \\ \bar{c}_{31}^{(1)}(\bar{x}, \theta) &= - \nu (\bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(0)} + \bar{\sigma}_{33}^{(0)})\end{aligned}$$

$\bar{q}_{3j0}^{(1)}(\bar{x}, \theta)$ et $\bar{c}_{j0}^{(1)}(\bar{x}, \theta)$ sont les constantes d'intégration à l'ordre 1 respectivement sur les contraintes et les déplacements.

Les trois dernières lois de comportement donnent avec les solutions

ci-dessus :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{2\theta}^{(1)}(\bar{r}, \theta, \bar{z}) &= \frac{R_0}{2L(1+\nu)} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_\theta^{(1)}}{\partial \theta} - \sin \alpha \bar{u}_\theta^{(2)} \right) \frac{1}{\bar{r} \sin \alpha} + \frac{\partial \bar{u}_\theta^{(1)}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{z} \cos \alpha}{\bar{r} \sin \alpha} \frac{\partial \bar{u}_\theta^{(1)}}{\partial \bar{z}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\bar{z} \cos \alpha}{\bar{r} \sin \alpha} \bar{\sigma}_{2\theta}^{(0)}(\bar{r}, \theta) \right] \\ \bar{\sigma}_{2z}^{(1)}(\bar{r}, \theta, \bar{z}) &= \frac{R_0}{2L(1+\nu)} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_z^{(1)}}{\partial \theta} + \bar{u}_z^{(2)} \sin \alpha + \cos \alpha \bar{u}_z^{(1)} \right) \frac{\nu}{\bar{r} \sin \alpha} + \frac{\partial \bar{u}_z^{(1)}}{\partial \bar{r}} \right] \\ &\quad - \frac{1}{(1-\nu^2)} \left[\frac{\bar{z} \cos \alpha}{\bar{r} \sin \alpha} (\bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(0)} - \nu \bar{\sigma}_{zz}^{(0)}) \nu + \nu(1+\nu) \bar{\sigma}_{zz}^{(2)} \right] \\ \bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}(\bar{r}, \theta, \bar{z}) &= \frac{R_0}{(1-\nu^2)L} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_\theta^{(1)}}{\partial \theta} + \sin \alpha \bar{u}_z^{(2)} + \cos \alpha \bar{u}_z^{(1)} \right) \frac{1}{\bar{r} \sin \alpha} + \nu \frac{\partial \bar{u}_\theta^{(1)}}{\partial \bar{r}} \right] \\ &\quad - \frac{1}{(1-\nu^2)} \left[\frac{\bar{z} \cos \alpha}{\bar{r} \sin \alpha} (\bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(0)} - \nu \bar{\sigma}_{zz}^{(0)}) + \nu(1+\nu) \bar{\sigma}_{zz}^{(2)} \right] \end{aligned}$$

Ces expressions se mettent sous la forme suivante :

$$\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{(1)}(\bar{r}, \theta, \bar{z}) = \bar{z} \bar{g}_{\alpha\beta}^{(1)}(\bar{r}, \theta) + \bar{g}_{\alpha\beta 0}^{(1)}(\bar{r}, \theta).$$

où

$$\begin{aligned} \bar{g}_{2\theta 1}^{(1)}(\bar{r}, \theta) &= \frac{R_0}{2L(1+\nu)} \left[\frac{1}{\bar{r} \sin \alpha} \left(\frac{\partial \bar{c}_{\theta 1}^{(1)}}{\partial \theta} - \sin \alpha \bar{c}_{\theta 1}^{(1)} + \cos \alpha \frac{\partial \bar{c}_{\theta 1}^{(0)}}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{\partial \bar{c}_{\theta 1}^{(1)}}{\partial \bar{r}} \right] - \frac{1}{\bar{r} \tan \alpha} \frac{\bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(0)}}{\bar{r}} \\ \bar{g}_{2z 1}^{(1)}(\bar{r}, \theta) - \frac{\nu}{1-\nu} \bar{g}_{2z 1}^{(1)}(\bar{r}, \theta) &= \frac{L_0}{L(1-\nu^2)} \left[\frac{\nu}{\bar{r} \sin \alpha} \left(\frac{\partial \bar{c}_{\theta 1}^{(1)}}{\partial \theta} + \sin \alpha \bar{c}_{\theta 1}^{(1)} + \bar{c}_{\theta 1}^{(1)} \cos \alpha \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \bar{c}_{\theta 1}^{(1)}}{\partial \bar{r}} \right] - \frac{\nu}{(1-\nu^2)} \frac{1}{\bar{r} \tan \alpha} (\bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(0)} - \nu \bar{\sigma}_{zz}^{(0)}) \\ \bar{g}_{\theta\theta 1}^{(1)}(\bar{r}, \theta) - \frac{\nu}{(1-\nu)} \bar{g}_{\theta\theta 1}^{(1)}(\bar{r}, \theta) &= \frac{L_0}{L(1-\nu^2)} \left[\frac{1}{\bar{r} \sin \alpha} \left(\frac{\partial \bar{c}_{\theta 1}^{(1)}}{\partial \theta} + \sin \alpha \bar{c}_{\theta 1}^{(1)} + \bar{c}_{\theta 1}^{(1)} \cos \alpha \right) \right. \\ &\quad \left. + \nu \frac{\partial \bar{c}_{\theta 1}^{(1)}}{\partial \bar{r}} \right] - \frac{1}{(1-\nu^2)} \frac{1}{\bar{r} \tan \alpha} (\bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(0)} - \nu \bar{\sigma}_{zz}^{(0)}). \end{aligned}$$

$$\bar{q}_{\theta\theta 0}^{(1)}(\bar{x}, \theta) = \frac{R_0}{2L(1+\nu)} \left[\frac{1}{\bar{x} \sin \alpha} \left(\frac{\partial \bar{c}_{\theta 0}^{(1)}}{\partial \theta} - \sin \alpha \bar{c}_{\theta 1}^{(1)} \right) + \frac{\partial \bar{c}_{\theta 1}^{(1)}}{\partial \bar{x}} \right]$$

$$\bar{q}_{\theta\theta 0}^{(1)}(\bar{x}, \theta) = \frac{R_0}{L(1-\nu^2)} \left[\frac{\nu}{\bar{x} \sin \alpha} \left(\frac{\partial \bar{c}_{\theta 0}^{(1)}}{\partial \theta} + \sin \alpha \bar{c}_{\theta 0}^{(1)} + \cos \alpha \bar{c}_{\theta 0}^{(1)} \right) + \frac{\partial \bar{c}_{\theta 0}^{(1)}}{\partial \bar{x}} \right]$$

$$\bar{q}_{\theta\theta 0}^{(1)}(\bar{x}, \theta) = \frac{R_0}{L(1-\nu^2)} \left[\frac{1}{\bar{x} \sin \alpha} \left(\frac{\partial \bar{c}_{\theta 0}^{(1)}}{\partial \theta} + \sin \alpha \bar{c}_{\theta 0}^{(1)} + \cos \alpha \bar{c}_{\theta 0}^{(1)} \right) + \nu \frac{\partial \bar{c}_{\theta 0}^{(1)}}{\partial \bar{x}} \right]$$

III.3.3.- Résolution à l'ordre 2 en ϵ

Par identification des termes de puissance 2 dans les équations (a - f) et en tenant compte des résultats aux ordres précédents, on aboutit à une solution qui s'écrit sous la forme ci-dessous pour les contraintes et les déplacements :

$$\bar{q}_{ij}^{(2)}(\bar{x}, \theta, \bar{z}) = \frac{\bar{z}^2}{2!} \bar{q}_{ij2}^{(2)}(\bar{x}, \theta) + \bar{z} \bar{q}_{ij1}^{(2)}(\bar{x}, \theta) + \bar{q}_{ij0}^{(2)}(\bar{x}, \theta)$$

$$\bar{u}_j^{(2)}(\bar{x}, \theta, \bar{z}) = \frac{\bar{z}^2}{2!} \bar{c}_{j2}^{(2)}(\bar{x}, \theta) + \bar{z} \bar{c}_{j1}^{(2)}(\bar{x}, \theta) + \bar{c}_{j0}^{(2)}(\bar{x}, \theta)$$

$$\bar{q}_{\theta z^2}^{(2)}(\bar{x}, \theta) = - \left[\frac{1}{\bar{x} \sin \alpha} \left(\frac{\partial \bar{q}_{\theta \theta 1}^{(2)}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha \bar{q}_{\theta \theta 2}^{(2)} + 3 \cos \alpha \bar{q}_{\theta \theta 1}^{(2)} + \cos \alpha \frac{\partial \bar{q}_{\theta \theta 0}^{(2)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{q}_{\theta \theta 1}^{(2)}}{\partial \bar{x}} \right) \right]$$

$$\bar{q}_{\theta z^2}^{(2)}(\bar{x}, \theta) = - \left[\frac{1}{\bar{x} \sin \alpha} \left(\frac{\partial \bar{q}_{\theta \theta 1}^{(2)}}{\partial \theta} + 2 \cos \alpha \bar{q}_{\theta \theta 2}^{(2)} + \sin \alpha (\bar{q}_{\theta \theta 1}^{(2)} - \bar{q}_{\theta \theta 2}^{(2)}) + \cos \alpha \frac{\partial \bar{q}_{\theta \theta 0}^{(2)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{q}_{\theta \theta 1}^{(2)}}{\partial \bar{x}} \right) \right]$$

$$\bar{q}_{\theta z^2}^{(2)}(\bar{x}, \theta) = - \left[\frac{1}{\bar{x} \sin \alpha} \left(\frac{\partial \bar{q}_{\theta \theta 1}^{(2)}}{\partial \theta} + \sin \alpha \bar{q}_{\theta \theta 2}^{(2)} + \cos \alpha (2 \bar{q}_{\theta \theta 1}^{(2)} - \bar{q}_{\theta \theta 2}^{(2)}) + \frac{\partial \bar{q}_{\theta \theta 1}^{(2)}}{\partial \bar{x}} \right) \right]$$

$$\bar{q}_{\theta z^2}^{(2)}(\bar{x}, \theta) = - \left[\frac{1}{\bar{x} \sin \alpha} \left(\frac{\partial \bar{q}_{\theta \theta 0}^{(2)}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha \bar{q}_{\theta \theta 1}^{(2)} + 2 \cos \alpha \bar{q}_{\theta \theta 2}^{(2)} \right) + \frac{\partial \bar{q}_{\theta \theta 0}^{(2)}}{\partial \bar{x}} \right]$$

$$\bar{q}_{\theta z^2}^{(2)}(\bar{x}, \theta) = - \left[\frac{1}{\bar{x} \sin \alpha} \left(\frac{\partial \bar{q}_{\theta \theta 0}^{(2)}}{\partial \theta} + \cos \alpha \bar{q}_{\theta \theta 1}^{(2)} + \sin \alpha (\bar{q}_{\theta \theta 1}^{(2)} - \bar{q}_{\theta \theta 2}^{(2)}) + \frac{\partial \bar{q}_{\theta \theta 0}^{(2)}}{\partial \bar{x}} \right) \right]$$

$$\bar{q}_{\theta z^2}^{(2)}(\bar{x}, \theta) = - \left[\frac{1}{\bar{x} \sin \alpha} \left(\frac{\partial \bar{q}_{\theta \theta 0}^{(2)}}{\partial \theta} + \sin \alpha \bar{q}_{\theta \theta 1}^{(2)} + \cos \alpha (\bar{q}_{\theta \theta 1}^{(2)} - \bar{q}_{\theta \theta 2}^{(2)}) + \frac{\partial \bar{q}_{\theta \theta 0}^{(2)}}{\partial \bar{x}} \right) \right]$$

$$\bar{c}_{\theta 2}^{(2)}(\bar{x}, \theta) = - \left[\left(\frac{\partial \bar{c}_{\theta 1}^{(2)}}{\partial \theta} - \cos \alpha \bar{c}_{\theta 1}^{(2)} \right) \frac{1}{\bar{x} \sin \alpha} + \frac{1}{\bar{x} \tan \alpha} \frac{\partial \bar{c}_{\theta 0}^{(2)}}{\partial \theta} - \right]$$

$$2(1+\nu) (\cos \alpha \bar{q}_{\theta \theta 0}^{(2)} + \bar{q}_{\theta \theta 2}^{(2)})$$

$$\bar{c}_{\theta 2}^{(2)}(\bar{x}, \theta) = - \left[\frac{\partial \bar{c}_{\theta 1}^{(2)}}{\partial \theta} - 2(1+\nu) \bar{q}_{\theta \theta 1}^{(2)} \right]$$

$$\bar{c}_{\theta 2}^{(2)}(\bar{x}, \theta) = \left[\bar{q}_{\theta \theta 1}^{(2)} - \nu (\bar{q}_{\theta \theta 1}^{(2)} + \bar{q}_{\theta \theta 2}^{(2)}) \right]$$

$$\bar{c}_{\theta_1}^{(2)}(\bar{r}, \theta) = - \left[\left(\frac{\partial \bar{c}_{\theta_0}^{(1)}}{\partial \theta} - \cos \alpha \bar{c}_{\theta_0}^{(1)} \right) \frac{1}{\bar{r} \sin \alpha} - 2(1+\nu) \bar{g}_{\theta_0}^{(1)} \right].$$

$$\bar{c}_{\theta_1}^{(2)}(\bar{r}, \theta) = - \left[\frac{\partial \bar{c}_{\theta_0}^{(1)}}{\partial \theta} - 2(1+\nu) \bar{g}_{\theta_0}^{(1)} \right].$$

$$\bar{c}_{\theta_1}^{(2)}(\bar{r}, \theta) = \left[\bar{g}_{\theta_0}^{(1)} - \nu (\bar{g}_{\theta_0}^{(1)} + \bar{g}_{\theta_0}^{(2)}) \right].$$

$$\bar{g}_{\theta_0 \theta_2}^{(2)}(\bar{r}, \theta) = \frac{R_0}{2(1+\nu)} \left[\frac{1}{\bar{r} \sin \alpha} \left(\frac{\partial \bar{c}_{\theta_2}^{(2)}}{\partial \theta} - \sin \alpha \bar{c}_{\theta_2}^{(2)} \right) + \frac{\partial \bar{c}_{\theta_2}^{(2)}}{\partial \theta} + 2 \cos \alpha \frac{\partial \bar{c}_{\theta_1}^{(1)}}{\partial \theta} \right] - 2 \bar{g}_{\theta_0 \theta_1}^{(1)}$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\theta_0 \theta_2}^{(2)}(\bar{r}, \theta) &= \frac{R_0}{(1-\nu)L} \left[\frac{\nu}{\bar{r} \sin \alpha} \left(\frac{\partial \bar{c}_{\theta_2}^{(2)}}{\partial \theta} + \sin \alpha \bar{c}_{\theta_2}^{(2)} + \cos \alpha \bar{c}_{\theta_2}^{(2)} \right) + \nu \frac{\partial \bar{c}_{\theta_2}^{(2)}}{\partial \theta} \right] \\ &\quad - \frac{2\nu}{1-\nu} \left[\bar{g}_{\theta_0 \theta_1}^{(1)} - \nu (\bar{g}_{\theta_0}^{(1)} + \bar{g}_{\theta_0}^{(2)}) \right] + \frac{\nu}{1-\nu} \bar{g}_{\theta_0 \theta_2}^{(2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\theta_0 \theta_2}^{(2)}(\bar{r}, \theta) &= \frac{R_0}{(1-\nu)L} \left[\frac{1}{\bar{r} \sin \alpha} \left(\frac{\partial \bar{c}_{\theta_2}^{(2)}}{\partial \theta} + \sin \alpha \bar{c}_{\theta_2}^{(2)} + \cos \alpha \bar{c}_{\theta_2}^{(2)} \right) + \nu \frac{\partial \bar{c}_{\theta_2}^{(2)}}{\partial \theta} \right] \\ &\quad - \frac{2}{(1-\nu)} \left[\bar{g}_{\theta_0 \theta_1}^{(1)} - \nu (\bar{g}_{\theta_0}^{(1)} + \bar{g}_{\theta_0}^{(2)}) \right] + \frac{\nu}{1-\nu} \bar{g}_{\theta_0 \theta_2}^{(2)}. \end{aligned}$$

$$\bar{g}_{\theta_0 \theta_1}^{(2)}(\bar{r}, \theta) = \frac{R_0}{2(1+\nu)L} \left[\frac{1}{\bar{r} \sin \alpha} \left(\frac{\partial \bar{c}_{\theta_1}^{(2)}}{\partial \theta} - \sin \alpha \bar{c}_{\theta_1}^{(2)} \right) + \frac{\partial \bar{c}_{\theta_1}^{(2)}}{\partial \theta} + \cos \alpha \frac{\partial \bar{c}_{\theta_0}^{(1)}}{\partial \theta} \right] - \bar{g}_{\theta_0 \theta_0}^{(1)}$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\theta_0 \theta_1}^{(2)}(\bar{r}, \theta) &= \frac{R_0}{L(1-\nu)} \left[\frac{\nu}{\bar{r} \sin \alpha} \left(\frac{\partial \bar{c}_{\theta_1}^{(2)}}{\partial \theta} + \sin \alpha \bar{c}_{\theta_1}^{(2)} + \cos \alpha \bar{c}_{\theta_1}^{(2)} \right) + \frac{\partial \bar{c}_{\theta_1}^{(2)}}{\partial \theta} \right] + \frac{\nu}{1-\nu} \bar{g}_{\theta_0 \theta_1}^{(2)} \\ &\quad - \frac{\nu}{(1-\nu)} \left(\bar{g}_{\theta_0 \theta_0}^{(1)} - \nu (\bar{g}_{\theta_0}^{(1)} + \bar{g}_{\theta_0}^{(2)}) \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\theta_0 \theta_1}^{(2)}(\bar{r}, \theta) &= \frac{R_0}{(1-\nu)L} \left[\frac{1}{\bar{r} \sin \alpha} \left(\frac{\partial \bar{c}_{\theta_1}^{(2)}}{\partial \theta} + \sin \alpha \bar{c}_{\theta_1}^{(2)} + \cos \alpha \bar{c}_{\theta_1}^{(2)} \right) + \nu \frac{\partial \bar{c}_{\theta_1}^{(2)}}{\partial \theta} \right] \\ &\quad - \frac{2}{(1-\nu)} \left(\bar{g}_{\theta_0 \theta_0}^{(1)} - \nu (\bar{g}_{\theta_0}^{(1)} + \bar{g}_{\theta_0}^{(2)}) \right) \right] + \frac{\nu}{1-\nu} \bar{g}_{\theta_0 \theta_1}^{(2)} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\theta\theta 0}^{(2)}(\bar{x}, \theta) &= \frac{R_0}{2L(1+\nu)} \left[\frac{1}{\bar{x} \sin \alpha} \left(\frac{\partial \bar{c}_{\theta 0}^{(2)}}{\partial \theta} - \sin \alpha \bar{c}_{\theta 0}^{(2)} \right) + \frac{\partial \bar{c}_{\theta 0}^{(2)}}{\partial \bar{x}} \right] \\ \bar{g}_{\theta \theta_0}^{(2)}(\bar{x}, \theta) &= \frac{R_0}{L(1-\nu^2)} \left[\frac{\nu}{\bar{\theta} \sin \alpha} \left(\frac{\partial \bar{c}_{\theta 0}^{(2)}}{\partial \theta} + \sin \alpha \bar{c}_{\theta 0}^{(2)} + \cos \alpha \bar{c}_{\theta 0}^{(2)} \right) + \frac{\partial \bar{c}_{\theta 0}^{(2)}}{\partial \bar{x}} \right] \\ &\quad + \frac{\nu}{1-\nu} \bar{g}_{\theta \theta 0}^{(2)}(\bar{x}, \theta) \\ \bar{g}_{\theta \theta 0}^{(2)}(\bar{x}, \theta) &= \frac{R_0}{L(1-\nu^2)} \left[\frac{1}{\bar{x} \sin \alpha} \left(\frac{\partial \bar{c}_{\theta 0}^{(2)}}{\partial \theta} + \sin \alpha \bar{c}_{\theta 0}^{(2)} + \cos \alpha \bar{c}_{\theta 0}^{(2)} \right) + \nu \frac{\partial \bar{c}_{\theta 0}^{(2)}}{\partial \bar{x}} \right] \\ &\quad + \frac{\nu}{1-\nu} \bar{g}_{\theta \theta 0}^{(2)}(\bar{x}, \theta) \end{aligned}$$

$\bar{g}_{ij_0}^{(2)}(\bar{x}, \theta)$ $\bar{c}_{j_0}^{(2)}(\bar{x}, \theta)$ constantes d'intégration à l'ordre 2 sur

les composantes des contraintes et des déplacements.

III.3.4.- Résolution à l'ordre $m \geq 2$

Supposons que la solution à l'ordre m se met sous la forme

suivante :

$$(III.3.4) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij}^{(m)}(\bar{x}, \theta, \bar{\xi}) &= \sum_{l=0}^m \frac{\bar{\xi}^l}{l!} \bar{g}_{ijl}^{(m)}(\bar{x}, \theta) \\ \bar{u}_j^{(m)}(\bar{x}, \theta, \bar{\xi}) &= \sum_{l=0}^m \frac{\bar{\xi}^l}{l!} \bar{c}_{jl}^{(m)}(\bar{x}, \theta) \end{aligned}$$

où l'indice m dans $\bar{g}_{ijl}^{(m)}(\bar{x}, \theta)$ et $\bar{c}_{jl}^{(m)}(\bar{x}, \theta)$ correspondant à l'ordre de résolution de $\bar{\sigma}_{ij}(\bar{x}, \theta, \bar{\xi}, \varepsilon)$ et $\bar{u}_j(\bar{x}, \theta, \bar{\xi}, \varepsilon)$ et l'indice l à celui de l'exposant de $\bar{\xi}$ dans le développement polynomial en $\bar{\xi}$.

La relation (III.3.4) est vraie pour les ordres $0, 1, 2$ d'après les résultats précédents.

On la suppose vraie à l'ordre m ($m \geq 2$). On démontre qu'elle est aussi vraie à l'ordre ($m+1$).

On détaillera le calcul pour la première équation d'équilibre.

On donnera les résultats des autres équations et des lois de comportement.

Partons de la première équation d'équilibre, nous obtenons à l'ordre ($m+1$) en supposant que le résultat à l'ordre m est de la forme donnée par les formules (III.3.4).

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} \sin \alpha \frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta 3}^{(m+1)}}{\partial \bar{\theta}}(\bar{x}, \theta, \bar{z}) &= - \left[\frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta \theta}^{(m)}}{\partial \theta}(\bar{x}, \theta, \bar{z}) + 2 \sin \alpha \frac{\partial \bar{\sigma}_{\lambda \theta}^{(m)}}{\partial \theta}(\bar{x}, \theta, \bar{z}) + 2 \cos \alpha \frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta 3}^{(m)}}{\partial \theta}(\bar{x}, \theta, \bar{z}) \right. \\ &\quad \left. + \bar{\lambda} \sin \alpha \frac{\partial \bar{\sigma}_{\lambda \theta}^{(m)}}{\partial \bar{\theta}}(\bar{x}, \theta, \bar{z}) + \bar{z} \cos \alpha \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta 3}^{(m)}}{\partial \bar{z}}(\bar{x}, \theta, \bar{z}) + \frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta \theta}^{(m-1)}}{\partial \bar{\theta}}(\bar{z}, \theta, \bar{z}) \right) \right] \\ &= - \left[\sum_{\ell=0}^m \frac{\bar{z}^{\ell}}{\ell!} \left(\frac{\partial \bar{g}_{\theta \theta}^{(m)}}{\partial \theta}(\bar{x}, \theta) + 2 \sin \alpha \bar{g}_{\lambda \theta}^{(m)}(\bar{x}, \theta) + 2 \cos \alpha \bar{g}_{\theta 3}^{(m)}(\bar{z}, \theta) \right) \right. \\ &\quad \left. + \bar{\lambda} \sin \alpha \frac{\partial \bar{g}_{\lambda \theta}^{(m)}}{\partial \bar{\theta}}(\bar{x}, \theta) + \bar{z} \cos \alpha \left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \sum_{\ell=0}^m \bar{g}_{\theta 3}^{(m)}(\bar{x}, \theta) \frac{\bar{z}^{\ell}}{\ell!} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \sum_{\ell=0}^{m-1} \frac{\bar{z}^{\ell}}{\ell!} \frac{\partial \bar{g}_{\theta \theta}^{(m-1)}}{\partial \bar{\theta}}(\bar{x}, \theta) \right] \right] \end{aligned}$$

On transforme les deux derniers du second membre :

$$\begin{aligned} \bar{z} \cos \alpha \left[\sum_{\ell=0}^{m-1} \frac{\bar{z}^{\ell}}{\ell!} \frac{\partial \bar{g}_{\theta 3}^{(m-1)}}{\partial \bar{\theta}} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\sum_{\ell=0}^m \bar{g}_{\theta 3}^{(m)}(\bar{x}, \theta) \frac{\bar{z}^{\ell}}{\ell!} \right) \right] &= \sum_{\ell=0}^{m-1} \frac{\bar{z}^{\ell}}{\ell!} \left(\frac{\partial \bar{g}_{\theta 3}^{(m-1)}}{\partial \bar{\theta}} + \bar{g}_{\theta 3}^{(m)}(\bar{x}, \theta) \right) \bar{z} \cos \alpha \\ &= \cos \alpha \sum_{\ell=0}^{m-1} \frac{\bar{z}^{\ell+1}}{\ell!} \left(\frac{\partial \bar{g}_{\theta 3}^{(m-1)}}{\partial \bar{\theta}} + \bar{g}_{\theta 3}^{(m)}(\bar{x}, \theta) \right) \\ &= \cos \alpha \sum_{p=0}^m p \left(\bar{g}_{\theta 3}^{(m)} + \frac{\partial \bar{g}_{\theta 3}^{(m-1)}}{\partial \bar{\theta}} \right) \frac{\bar{z}^p}{p!} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{g}^{(m+1)}}{\partial \bar{\theta}}(\bar{r}, \theta, \bar{z}) = - \sum_{l=0}^m \frac{\bar{z}^l}{l!} \left[\left(\frac{\partial \bar{g}^{(m)}}{\partial \theta} \bar{\theta}^{l+1} + 2 \sin \alpha \bar{g}^{(m)}_{\theta \theta} \bar{z}^l + (l+2) \cos \alpha \bar{g}^{(m)}_{\theta z} \bar{z}^l \right) \frac{1}{\bar{r} \sin \alpha} + \frac{\partial \bar{g}^{(m)}}{\partial \bar{z}} \bar{z}^l + l \cos \alpha \frac{\partial \bar{g}^{(m-1)}}{\partial \bar{z}} \bar{z}^{l-1} \right]$$

Par intégration en \bar{z} , on trouve :

$$\bar{g}^{(m+1)}_{\theta \bar{z}}(\bar{r}, \theta, \bar{z}) = - \sum_{l=1}^{m+1} \frac{\bar{z}^l}{l!} \left[\left(\frac{\partial \bar{g}^{(m)}}{\partial \theta} \bar{\theta}^{l-1} + 2 \sin \alpha \bar{g}^{(m)}_{\theta \theta} \bar{z}^{l-2} + (l+2) \cos \alpha \bar{g}^{(m)}_{\theta z} \bar{z}^{l-2} \right) \frac{1}{\bar{r} \sin \alpha} + \frac{\partial \bar{g}^{(m)}}{\partial \bar{z}} \bar{z}^{l-1} + (l-2) \cos \alpha \frac{\partial \bar{g}^{(m-1)}}{\partial \bar{z}} \bar{z}^{l-2} \right] + \bar{g}^{(m+1)}_{\theta \bar{z}0}(\bar{r}, \theta) = \sum_{l=0}^{m+1} \frac{\bar{z}^l}{l!} \bar{g}^{(m+1)}_{\theta \bar{z}l}(\bar{r}, \theta)$$

On pose alors :

$$\bar{g}^{(m+1)}_{\theta \bar{z}l}(\bar{r}, \theta) = - \left[\frac{1}{\bar{r} \sin \alpha} \left(\frac{\partial \bar{g}^{(m)}}{\partial \theta} \bar{\theta}^{l-1} + 2 \sin \alpha \bar{g}^{(m)}_{\theta \theta} \bar{z}^{l-2} + (l+1) \cos \alpha \bar{g}^{(m)}_{\theta z} \bar{z}^{l-2} \right) \frac{1}{\bar{r} \sin \alpha} + \frac{\partial \bar{g}^{(m)}}{\partial \bar{z}} \bar{z}^{l-1} + (l-1) \cos \alpha \frac{\partial \bar{g}^{(m-1)}}{\partial \bar{z}} \bar{z}^{l-2} \right].$$

$\bar{g}^{(m+1)}_{\theta \bar{z}0}(\bar{r}, \theta)$: la constante d'intégration à l'ordre $(m+1)$.

De même on a pour les deux autres équations :

$$\bar{g}^{(m+1)}_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{r}, \theta, \bar{z}) = \sum_{l=0}^{m+1} \frac{\bar{z}^l}{l!} \bar{g}^{(m+1)}_{\bar{z}\bar{z}l}(\bar{r}, \theta).$$

$$\bar{g}^{(m+1)}_{\bar{z}\theta}(\bar{r}, \theta, \bar{z}) = \sum_{l=0}^{m+1} \frac{\bar{z}^l}{l!} \bar{g}^{(m+1)}_{\bar{z}\theta l}(\bar{r}, \theta).$$

où

$$\bar{g}_{\beta\beta}^{(m+1)}(\bar{x}, \theta) = - \left[\frac{1}{\bar{x} \sin \alpha} \left(\frac{\partial \bar{g}^{(m)}}{\partial \theta} \beta \beta^{l-1} + (l+1) \cos \alpha \bar{g}_{\beta\beta}^{(m)} + \sin \alpha (\bar{g}_{\beta\beta}^{(m)} - \bar{g}_{\theta\theta}^{(m)}) \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial \bar{g}^{(m)}}{\partial \theta} \beta \beta^{l-1} + (l-1) \cos \alpha \frac{\partial \bar{g}^{(m-1)}}{\partial \theta} \beta \beta^{l-2} \right].$$

$$\bar{g}_{\theta\theta}^{(m+1)}(\bar{x}, \theta) = - \left[\frac{1}{\bar{x} \sin \alpha} \left(\frac{\partial \bar{g}^{(m)}}{\partial \theta} \beta \beta^{l-1} + \sin \alpha \bar{g}_{\beta\beta}^{(m)} + \cos \alpha (l \bar{g}_{\beta\beta}^{(m)} - \bar{g}_{\theta\theta}^{(m)}) \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial \bar{g}^{(m)}}{\partial \theta} \beta \beta^{l-1} + (l-1) \cos \alpha \frac{\partial \bar{g}^{(m-1)}}{\partial \theta} \beta \beta^{l-2} \right].$$

$\bar{g}_{\beta\beta}^{(m+1)}(\bar{x}, \theta)$, $\bar{g}_{\theta\theta}^{(m+1)}(\bar{x}, \theta)$ constantes d'intégration à l'ordre $(m+1)$.

Par la même démarche, on obtient pour les trois premières relations

contraintes-déformations :

$$\bar{U}_{\theta}^{(m+1)}(\bar{x}, \theta, \bar{\beta}) = \sum_{l=0}^{m+1} \frac{\bar{\beta}^l}{l!} \bar{c}_{\theta l}^{(m+1)}(\bar{x}, \theta)$$

$$\bar{U}_{\beta}^{(m+1)}(\bar{x}, \theta, \bar{\beta}) = \sum_{l=0}^{m+1} \frac{\bar{\beta}^l}{l!} \bar{c}_{\beta l}^{(m+1)}(\bar{x}, \theta)$$

$$\bar{U}_{\beta}^{(m+1)}(\bar{x}, \theta, \bar{\beta}) = \sum_{l=0}^{m+1} \frac{\bar{\beta}^l}{l!} \bar{c}_{\beta l}^{(m+1)}(\bar{x}, \theta)$$

où

$$\bar{c}_{\theta l}^{(m+1)}(\bar{x}, \theta) = - \left[\left(\frac{\partial \bar{c}^{(m)}}{\partial \theta} \beta \beta^{l-1} - \cos \alpha \bar{c}_{\theta l}^{(m)} \right) \frac{1}{\bar{x} \sin \alpha} \right.$$

$$\left. \bar{c}_{\beta l}^{(m+1)}(\bar{x}, \theta) = - \left[\frac{\partial \bar{c}^{(m)}}{\partial \theta} \beta \beta^{l-1} - 2(1+\nu) \bar{g}_{\beta\beta}^{(m)} \right]. \right.$$

$$\bar{c}_{\beta l}^{(m+1)}(\bar{x}, \theta) = \left[\bar{g}_{\beta\beta}^{(m)} \beta \beta^{l-1} - \nu (\bar{g}_{\beta\beta}^{(m)} + \bar{g}_{\theta\theta}^{(m)}) \right].$$

$l = 1, 2, \dots, m+1$.

$$\bar{c}_{\theta\theta}^{(m+1)}(\beta, \theta), \bar{c}_{\beta\theta}^{(m+1)}(\beta, \theta), \bar{c}_{\beta\beta}^{(m+1)}(\beta, \theta) \quad \text{les constantes}$$

d'intégration à l'ordre $(m+1)$ sur les composantes des déplacements.

$$\bar{u}_\theta(\bar{x}, \theta, \bar{\beta}), \bar{u}_\beta(\bar{x}, \theta, \bar{\beta}), \bar{u}_z(\bar{x}, \theta, \bar{\beta}), \quad \text{on en déduit}$$

des trois dernière lois de comportement :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(m+1)}(\bar{x}, \theta, \bar{\beta}) &= \sum_{l=0}^{m+1} \frac{\bar{\beta}^l}{l!} \bar{g}_{\theta\theta l}^{(m+1)}(\bar{x}, \theta, \bar{\beta}) \\ \bar{\sigma}_{\beta\beta}^{(m+1)}(\bar{x}, \theta, \bar{\beta}) &= \sum_{l=0}^{m+1} \frac{\bar{\beta}^l}{l!} \bar{g}_{\beta\beta l}^{(m+1)}(\bar{x}, \theta, \bar{\beta}) \\ \bar{\sigma}_{\theta\beta}^{(m+1)}(\bar{x}, \theta, \bar{\beta}) &= \sum_{l=0}^{m+1} \frac{\bar{\beta}^l}{l!} \bar{g}_{\theta\beta l}^{(m+1)}(\bar{x}, \theta, \bar{\beta}) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\theta\theta l}^{(m+1)}(\bar{x}, \theta) &= \frac{1}{2(1+\nu)} \left[\frac{1}{\beta \sin \alpha} \left(\frac{\partial \bar{c}_{\beta\beta}^{(m+1)}}{\partial \theta} - \sin \alpha \bar{c}_{\theta\theta}^{(m+1)} \right) + \frac{\partial \bar{c}_{\theta\theta}^{(m+1)}}{\partial \beta} + \right. \\ &\quad \left. l \cos \alpha \frac{\partial \bar{c}_{\beta\beta}^{(m)}}{\partial \theta} - \frac{2(1+\nu)}{\beta \sin \alpha} \bar{g}_{\theta\theta l-1}^{(m)} \right] \\ \bar{g}_{\beta\beta l}^{(m+1)}(\bar{x}, \theta) &= \frac{\nu}{1-\nu} \bar{g}_{\beta\beta l}^{(m+1)}(\beta, \theta) = \frac{1}{(1-\nu)} \left[\left(\frac{\partial \bar{c}_{\theta\theta}^{(m+1)}}{\partial \beta} + \sin \alpha \bar{c}_{\beta\beta}^{(m+1)} \right) + \right. \\ &\quad \left. \cos \alpha \bar{c}_{\beta\beta}^{(m+1)} + l \cos \alpha \left(\bar{g}_{\theta\theta l-1}^{(m)} + \nu \left(\bar{g}_{\beta\beta l-1}^{(m)} + \bar{g}_{\beta z l-1}^{(m)} \right) \right) \frac{\nu}{\beta \sin \alpha} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \bar{c}_{\beta\beta}^{(m+1)}}{\partial \theta} \right] \\ \bar{g}_{\theta\beta l}^{(m+1)}(\bar{x}, \theta) &= \frac{\nu}{1-\nu} \bar{g}_{\theta\beta l}^{(m+1)}(\beta, \theta) = \frac{1}{(1-\nu)} \left[\left(\frac{\partial \bar{c}_{\theta\beta}^{(m+1)}}{\partial \beta} + \sin \alpha \bar{c}_{\beta\theta}^{(m+1)} + \cos \alpha \bar{c}_{\beta\theta}^{(m+1)} \right) \right. \\ &\quad \left. - l \cos \alpha \left(\bar{g}_{\theta\theta l-1}^{(m)} - \nu \left(\bar{g}_{\beta\beta l-1}^{(m)} + \bar{g}_{\beta z l-1}^{(m)} \right) \right) \frac{1}{\beta \sin \alpha} + \nu \frac{\partial \bar{c}_{\theta\theta}^{(m+1)}}{\partial \beta} \right] \end{aligned}$$

En conclusion si la solution à l'ordre m qui se met sous la forme III.3.4 entraîne qu'à l'ordre $(m+1)$, elle se met sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ij}^{(m+1)}(\bar{x}, \theta, \bar{z}) &= \sum_{l=0}^{m+1} \frac{\bar{z}^l}{l!} \bar{g}_{ijl}^{(m+1)}(\bar{x}, \theta) \\ \bar{c}_j^{(m+1)}(\bar{x}, \theta, \bar{z}) &= \sum_{l=0}^{m+1} \frac{\bar{z}^l}{l!} \bar{c}_{jl}^{(m+1)}(\bar{x}, \theta) \end{aligned}$$

alors la relation III.3.4 est vraie pour tout $m > 0$.

III.4.- EQUATIONS DE BELTRAMI

Dans les équations de compatibilité 1, m doit être au moins égal à 4 pour garder tous les termes significatifs dans les relations III.2.3.

A l'ordre 0, elles sont automatiquement vérifiées. Cette vérification est assez simple pour l'ordre 0, mais elle s'avère de plus en plus compliquée à établir pour les ordres supérieurs.

III.5.- RETOUR AUX GRANDEURS DIMENSIONNELLES

Pour avoir les résultats précédents en variables dimensionnelles (θ, z, \bar{z}) on pose :

$$g_{ijl}^{(m)}(s, \theta) = \frac{EU}{R_0} \bar{g}_{ijl}^{(m)}\left(\frac{s}{L}, \theta\right).$$

$$C_{jl}^{(m)}(s, \theta) = L \bar{C}_{jl}^{(m)}\left(\frac{s}{L}, \theta\right).$$

Ainsi les composantes du tenseur des contraintes et du vecteur-déplacement dans la base locale $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_s, \vec{N})$ s'écrivent :

$$\sigma_{ij}(s, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m g_{ij}^{(m)}(s, \theta, z).$$

$$U_j(s, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m C_j^{(m)}(s, \theta, z).$$

ou encore :

$$\sigma_{\alpha\beta}(s, \theta, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=0}^m \left(\frac{h}{L}\right)^{m-l} \frac{z^m}{l!} g_{\alpha\beta l}^{(m)}(s, \theta)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}(s, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^m \left(\frac{h}{L}\right)^{m-l} \frac{z^m}{l!} g_{\alpha\beta l}^{(m)}(s, \theta)$$

$$U_j(s, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^m \left(\frac{h}{L}\right)^{m-l} \frac{z^m}{l!} C_{jl}^{(m)}(s, \theta)$$

On transforme ces expressions pour obtenir des polynômes en $\frac{z}{L}$.

$$\begin{aligned} \sigma_j(r, \theta, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{r}{L}\right)^m g_{j\beta 0}^{(m)}(r, \theta) + \left(\frac{z}{L}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{L}\right)^m g_{j\beta 1}^{(m+1)}(r, \theta) + \\ &\quad \frac{1}{2!} \left(\frac{z}{L}\right)^2 \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{L}\right)^m g_{j\beta 2}^{(m+2)}(r, \theta) + \dots + \frac{1}{k!} \left(\frac{z}{L}\right)^k \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{L}\right)^m g_{j\beta k}^{(m+k)}(r, \theta) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}(r, \theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{L}\right)^m g_{\alpha\beta}^{(m)}(r, \theta) + \left(\frac{z}{L}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{L}\right)^m g_{\alpha\beta 1}^{(m+1)}(r, \theta) + \\ &\quad \frac{1}{2!} \left(\frac{z}{L}\right)^2 \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{L}\right)^m g_{\alpha\beta 2}^{(m+2)}(r, \theta) + \dots + \frac{1}{k!} \left(\frac{z}{L}\right)^k \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{L}\right)^m g_{\alpha\beta k}^{(m+k)}(r, \theta) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_j(r, \theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} g_0^{(m)}(r, \theta) \left(\frac{r}{L}\right)^m + \left(\frac{z}{L}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{L}\right)^m c_{j1}^{(m)}(r, \theta) + \\ &\quad \frac{1}{2!} \left(\frac{z}{L}\right)^2 \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{L}\right)^m c_{j2}^{(m+2)}(r, \theta) + \dots + \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{L}\right)^m g_k^{(m)}(r, \theta) + \dots \end{aligned}$$

CHAPITRE IV

ETUDE DE COQUES CONIQUES MINCES

IV.1.- On s'intéresse dans ce chapitre à l'étude des coques minces pour cela, on fait l'hypothèse suivante :

H_3 On négligera tous les termes en $\xi = \left(\frac{z}{L}\right)^\alpha \left(\frac{r}{L}\right)^\beta$ tels que $\alpha + \beta \geq 2$ où α, β sont des entiers naturels.

Dans ce cas :

(IV.1.1)

$$\tau_{ij}^*(z, \theta, z) = g_{ij_0}^{(0)}(z, \theta) + \frac{r}{L} g_{ij_0}^{(1)}(z, \theta) + \frac{z}{L} g_{ij_1}^{(1)}(z, \theta).$$

$$u_j(z, \theta, z) = c_{j_0}^{(0)}(z, \theta) + \frac{r}{L} c_{j_0}^{(1)}(z, \theta) + \frac{z}{L} c_{j_1}^{(1)}(z, \theta).$$

$\tau_{ij}^*(z, \theta, z)$ et $u_j(z, \theta, z)$ sont considérés comme des polynômes de premier degré en z , dont les coefficients dépendant des variables (θ, r) sont définis par :

$$g_{zj_0}^{(0)}(z, \theta) = 0 \quad (\text{hypothèse classique de la théorie de membrane})$$

$$g_{\alpha\beta_0}^{(0)}(z, \theta) = \tau_{\alpha\beta}^{(0)}(\theta) \quad (\text{contraintes de membrane } (\alpha, \beta = 1, 2))$$

$c_{j_0}^{(0)}(z, \theta)$: (déplacements de membrane que nous noterons respectivement par la suite $u(z, \theta)$, $v(z, \theta)$ et $w(z, \theta)$).

(IV.1.2)

$$\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(r, \theta) = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - u \sin \alpha \right) \frac{1}{r \sin \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \right].$$

$$\sigma_{rr}^{(1)}(r, \theta) = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} + v \sin \alpha + w \cos \alpha \right) \frac{\nu}{r \sin \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right].$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(r, \theta) = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} + v \sin \alpha + w \cos \alpha \right) \frac{1}{r \sin \alpha} + \nu \frac{\partial v}{\partial \theta} \right].$$

(IV.1.3)

$$g_{\theta z_1}^{(1)}(r, \theta) = - \left[\left(\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(1)}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha \sigma_{r\theta}^{(1)} \right) \frac{L}{r \sin \alpha} + L \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(1)}}{\partial \theta} \right].$$

$$g_{r z_1}^{(1)}(r, \theta) = - \left[\left(\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(1)}}{\partial r} + \sin \alpha (\sigma_{rr}^{(1)} - \sigma_{\theta\theta}^{(1)}) \right) \frac{L}{r \sin \alpha} + L \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(1)}}{\partial \theta} \right].$$

$$g_{z_1 z_1}^{(1)}(r, \theta) = \frac{L}{r \tan \alpha} \sigma_{\theta\theta}^{(1)}.$$

(IV.1.4)

$$C_{\theta z_1}^{(1)}(r, \theta) = - \frac{L}{r \sin \alpha} \left[\frac{\partial w}{\partial \theta} - u \cos \alpha \right].$$

$$C_{r z_1}^{(1)}(r, \theta) = - L \frac{\partial w}{\partial \theta}.$$

$$C_{z_1 z_1}^{(1)}(r, \theta) = - \frac{\nu}{E} \left[\sigma_{\theta\theta}^{(1)} + \sigma_{rr}^{(1)} \right].$$

(IV.I.5)

$$g_{\theta\theta_1}^{(2)}(r, \theta) = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{1}{r \sin \alpha} \left(\frac{\partial C_{\theta_1}^{(2)}}{\partial \theta} - \sin \alpha C_{\theta_1}^{(2)} \right) + \frac{\partial C_{\theta_1}^{(2)}}{\partial r} + \cos \alpha \frac{\partial u}{\partial \theta} \right]$$

$$g_{r\theta_1}^{(2)}(r, \theta) - \frac{\nu}{1-\nu} g_{\theta_1\theta_1}^{(2)}(r, \theta) = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\frac{\nu}{r \sin \alpha} \left(\frac{\partial C_{\theta_1}^{(2)}}{\partial \theta} + \sin \alpha C_{\theta_1}^{(2)} \right) + \cos \alpha C_{\theta_1}^{(2)} \right. \\ \left. + \frac{\partial C_{\theta_1}^{(2)}}{\partial r} + \frac{\nu \cos \alpha}{E} \left(\sigma_{\theta\theta}^{(0)} - \nu \sigma_{rr}^{(0)} \right) \right].$$

$$g_{\theta\theta_2}^{(2)}(r, \theta) - \frac{\nu}{1-\nu} g_{\theta_1\theta_2}^{(2)}(r, \theta) = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{r \sin \alpha} \left(\frac{\partial C_{\theta_2}^{(2)}}{\partial \theta} + \sin \alpha C_{\theta_2}^{(2)} + \cos \alpha C_{\theta_1}^{(2)} \right) \right. \\ \left. + \nu \frac{\partial C_{\theta_2}^{(2)}}{\partial r} + \frac{\cos \alpha}{E} \left[\sigma_{\theta\theta}^{(0)} - \nu \sigma_{rr}^{(0)} \right] \right].$$

(VI.I.6)

$$g_{r\theta_0}^{(2)}(r, \theta) = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{1}{r \sin \alpha} \left(\frac{\partial C_{\theta_0}^{(2)}}{\partial \theta} - \sin \alpha C_{\theta_0}^{(2)} \right) + \frac{\partial C_{\theta_0}^{(2)}}{\partial r} \right].$$

$$g_{r\theta_0}^{(2)}(r, \theta) - \frac{\nu}{1-\nu} g_{\theta_0\theta_0}^{(2)}(r, \theta) = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\frac{\nu}{r \sin \alpha} \left(\frac{\partial C_{\theta_0}^{(2)}}{\partial \theta} + \sin \alpha C_{\theta_0}^{(2)} + \cos \alpha C_{\theta_0}^{(2)} \right) \right]$$

$$g_{\theta\theta_0}^{(2)}(r, \theta) - \frac{\nu}{1-\nu} g_{\theta_0\theta_0}^{(2)}(r, \theta) = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\frac{1}{r \sin \alpha} \left(\frac{\partial C_{\theta_0}^{(2)}}{\partial \theta} + \sin \alpha C_{\theta_0}^{(2)} + \cos \alpha C_{\theta_0}^{(2)} + \nu \frac{\partial C_{\theta_0}^{(2)}}{\partial r} \right) \right]$$

IV.2.- EQUATIONS D'EQUILIBRE

On porte dans les équations d'équilibre les valeurs des $\sigma_{ij}(s, \theta, z)$ données par les relations IV.1.1 et, en négligeant les termes d'ordre

$\epsilon_2 = \left(\frac{z}{L}\right)^\alpha \left(\frac{h}{L}\right)^\beta$ où $\alpha + \beta \gg 2$, en accord avec l'hypothèse des coques minces; on obtient par équation d'équilibre une expression de la forme $A(s, \theta) + z B(s, \theta) + O(\epsilon_2) = 0$.

On détaillera le calcul pour la première équation d'équilibre qui s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha \sigma_{\theta\theta} + 2 \cos \alpha \sigma_{\theta z} + (s \sin \alpha + z \cos \alpha) \left(\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial s} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} \right) = 0.$$

on a :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial g_{\theta\theta 1}^{(2)}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha g_{\theta\theta 1}^{(2)}(s, \theta) + 2 \cos \alpha g_{\theta z 1}^{(2)}(s, \theta) \right] \frac{z}{L} + \\ & \left[\frac{\partial g_{\theta\theta 0}^{(2)}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha g_{\theta\theta 0}^{(2)}(s, \theta) + 2 \cos \alpha g_{\theta z 0}^{(2)}(s, \theta) \right] \frac{h}{L} + \\ & \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(0)}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha \sigma_{\theta\theta}^{(0)} + (s \sin \alpha + z \cos \alpha) \frac{1}{L} g_{\theta z 1}^{(2)}(s, \theta) + \\ & (s \sin \alpha + z \cos \alpha) \left[\frac{z}{L} \frac{\partial g_{\theta\theta 1}^{(2)}}{\partial s}(s, \theta) + \frac{h}{L} \frac{\partial g_{\theta\theta 0}^{(2)}}{\partial s} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(0)}}{\partial s} \right] = 0 \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial g_{\theta\theta 1}^{(2)}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha g_{\theta\theta 1}^{(2)} + 2 \cos \alpha g_{\theta z 1}^{(2)} + s \sin \alpha \frac{\partial g_{\theta\theta 1}^{(2)}}{\partial s} + z \cos \alpha \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(0)}}{\partial s} \right] \frac{z}{L} + \\ & \left[\frac{\partial g_{\theta\theta 0}^{(2)}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha g_{\theta\theta 0}^{(2)} + 2 \cos \alpha g_{\theta z 0}^{(2)} + s \sin \alpha \frac{\partial g_{\theta\theta 0}^{(2)}}{\partial s} \right] \frac{h}{L} + \\ & \left[\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(0)}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha \sigma_{\theta\theta}^{(0)} + s \sin \alpha \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(0)}}{\partial s} + \frac{z \sin \alpha}{L} g_{\theta z 1}^{(2)} \right] + \\ & \frac{z^2}{L^2} \left(L \cos \alpha \frac{\partial g_{\theta\theta 1}^{(2)}}{\partial s} \right) + \left(\frac{z}{L} \right) \left(\frac{h}{L} \right) \left(L \cos \alpha \frac{\partial g_{\theta\theta 0}^{(2)}}{\partial s} \right) + O(\epsilon_2) = 0 \end{aligned}$$

Les deux premiers termes de la dernière ligne se mettent dans $O(\varepsilon_2)$.
L'avant dernière ligne est identiquement nulle compte tenu de la définition de $g_{\theta 31}^{(2)}(z, \theta)$.

Il nous reste alors à considérer, quel que soit $z \in]-h, h[$
l'équation suivante :

$$\left[\frac{\partial g_{\theta 01}^{(1)}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha g_{\theta 01}^{(2)} + 3 \cos \alpha g_{\theta 31}^{(2)} + \Delta \sin \alpha \frac{\partial g_{\theta 01}^{(1)}}{\partial \theta} + L \cos \alpha \frac{\partial \sigma_{\theta 0}^{(1)}}{\partial \theta} \right] \frac{z}{L}$$

$$\left[\frac{\partial g_{\theta 00}^{(1)}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha g_{\theta 00}^{(2)} + 2 \cos \alpha g_{\theta 30}^{(2)} + \Delta \sin \alpha \frac{\partial g_{\theta 00}^{(1)}}{\partial \theta} \right] \frac{h}{L} = 0$$

En procédant de la même manière avec les deux autres équations d'équilibre, nous obtenons $\forall z \in]-h, h[$.

$$\frac{\partial \sigma_{\theta 0}^{(1)}}{\partial \theta} + \sin \alpha (g_{\theta 31}^{(1)} - g_{\theta 01}^{(1)}) + \Delta \sin \alpha \frac{\partial \sigma_{\theta 31}^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{\Delta \sin \alpha}{L} g_{\theta 31}^{(1)} = 0$$

$$\left[\frac{\partial g_{\theta 01}^{(1)}}{\partial \theta} + 2 \cos \alpha g_{\theta 31}^{(1)} + \sin \alpha (g_{\theta 31}^{(1)} - g_{\theta 01}^{(1)}) + \Delta \sin \alpha \frac{\partial g_{\theta 31}^{(1)}}{\partial \theta} + L \cos \alpha \frac{\partial \sigma_{\theta 31}^{(1)}}{\partial \theta} \right] \frac{z}{L}$$

$$\left[\frac{\partial g_{\theta 00}^{(1)}}{\partial \theta} + \cos \alpha g_{\theta 30}^{(1)} + \sin \alpha (g_{\theta 30}^{(1)} - g_{\theta 00}^{(1)}) + \Delta \sin \alpha \frac{\partial g_{\theta 30}^{(1)}}{\partial \theta} \right] \frac{h}{L} = 0$$

et

$$\sigma_{\theta 0}^{(1)} - \frac{\Delta \tan \alpha}{L} g_{\theta 31}^{(1)} = 0$$

$$\left[\frac{\partial g_{\theta 31}^{(1)}}{\partial \theta} + \sin \alpha g_{\theta 31}^{(2)} + \cos \alpha (2g_{\theta 31}^{(2)} - g_{\theta 01}^{(2)}) + \Delta \sin \alpha \frac{\partial g_{\theta 31}^{(1)}}{\partial \theta} \right] \frac{z}{L} +$$

$$\left[\frac{\partial g_{\theta 30}^{(1)}}{\partial \theta} + \sin \alpha g_{\theta 30}^{(2)} + \cos \alpha (g_{\theta 30}^{(2)} - g_{\theta 00}^{(2)}) + \Delta \sin \alpha \frac{\partial g_{\theta 30}^{(1)}}{\partial \theta} \right] \frac{h}{L} = 0$$

Pour que ces équations qui sont de la forme $A(r, \theta) + 3B(r, \theta) = 0$ puissent être vérifiées $\forall r \in]-h, h[$ il faut que $A(r, \theta) = 0$ et $B(r, \theta) = 0$ ce qui donne les équations suivantes :

(IV.2.1)

$$\frac{\partial g^{(1)}}{\partial \theta} g_{\theta\theta 1}^{(1)} + 2 \sin \alpha g_{r\theta 1}^{(1)} + 3 \cos \alpha g_{\theta z 1}^{(1)} + 3 \sin \alpha \frac{\partial g^{(1)}}{\partial \theta} g_{\theta\theta 1}^{(1)} + 2 \cos \alpha \frac{\partial g_{\theta z 1}^{(1)}}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial g_{\theta\theta 1}^{(1)}}{\partial \theta} + 2 \cos \alpha g_{z z 1}^{(1)} + \sin \alpha (g_{z z 1}^{(1)} - g_{\theta\theta 1}^{(1)}) + 3 \sin \alpha \frac{\partial g_{\theta z 1}^{(1)}}{\partial \theta} + 2 \cos \alpha \frac{\partial g_{\theta z 1}^{(1)}}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial g_{\theta z 1}^{(1)}}{\partial \theta} + \sin \alpha g_{z z 1}^{(1)} + \cos \alpha (2g_{z z 1}^{(1)} - g_{\theta\theta 1}^{(1)}) + 3 \sin \alpha \frac{\partial g_{\theta z 1}^{(1)}}{\partial \theta} = 0$$

(IV.2.2)

$$\frac{\partial g_{\theta\theta 0}^{(1)}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha g_{r\theta 0}^{(1)} + 2 \cos \alpha g_{\theta z 0}^{(1)} + 3 \sin \alpha \frac{\partial g_{\theta\theta 0}^{(1)}}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial g_{\theta\theta 0}^{(1)}}{\partial \theta} + \cos \alpha g_{z z 0}^{(1)} + \sin \alpha (g_{z z 0}^{(1)} - g_{\theta\theta 0}^{(1)}) + 3 \sin \alpha \frac{\partial g_{\theta z 0}^{(1)}}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial g_{\theta z 0}^{(1)}}{\partial \theta} + \sin \alpha g_{z z 0}^{(1)} + \cos \alpha (g_{z z 0}^{(1)} - g_{\theta\theta 0}^{(1)}) + 3 \sin \alpha \frac{\partial g_{\theta z 0}^{(1)}}{\partial \theta} = 0$$

(IV.2.3)

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(0)}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha \sigma_{r\theta}^{(0)} + 2 \sin \alpha \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(0)}}{\partial \theta} + \frac{3 \sin \alpha}{L} g_{\theta z 1}^{(1)} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(0)}}{\partial \theta} + \sin \alpha (\sigma_{z z}^{(0)} - \sigma_{\theta\theta}^{(0)}) + 2 \sin \alpha \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(0)}}{\partial \theta} + \frac{3 \sin \alpha}{L} g_{z z 1}^{(1)} = 0$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(0)} - \frac{3 \sin \alpha}{L} g_{z z 1}^{(1)} = 0$$

Pour résoudre ces équations, il faut tenir compte des :

IV.3.- CONDITIONS AUX LIMITES

D'après les relations II.3.7.8, les conditions aux limites sur les faces $z = \pm h$ s'écrivent :

$$(IV.3.1) \quad \begin{cases} \sigma_{\theta z}(r, \theta, z=h) = P_{\theta}^{+}(r, \theta) \\ \tau_{rz}(r, \theta, z=h) = R^{+}(r, \theta) \\ \tau_{zz}(r, \theta, z=h) = P_z^{+}(r, \theta) \end{cases}$$

$$(IV.3.2.) \quad \begin{cases} \sigma_{\theta z}(r, \theta, z=-h) = -P_{\theta}^{-}(r, \theta) \\ \tau_{rz}(r, \theta, z=-h) = -R^{-}(r, \theta) \\ \tau_{zz}(r, \theta, z=-h) = -P_z^{-}(r, \theta) \end{cases}$$

où les $P_{\theta}^{+}(r, \theta)$ $R^{+}(r, \theta)$ $P_z^{+}(r, \theta)$ sont les composantes des forces de pression dans le repère local (\vec{e}_{θ} , \vec{e}_z , \vec{n}) appliquées sur la face $z = +h$ et les $P_{\theta}^{-}(r, \theta)$, $R^{-}(r, \theta)$, $P_z^{-}(r, \theta)$ celles appliquées sur la face $z = -h$.

Elles constituent des données du problème. D'après les relations III.3.16-18 en variables dimensionnelles; on trouve les coefficients intervenant dans l'expression de $\sigma_{zj}(r, \theta, z)$ c'est-à-dire $g_{zj}^{(z)}(r, \theta)$ et $g_{zj}^{(y)}(r, \theta)$ dans l'hypothèse des coques minces seulement en fonction des pressions intérieure et extérieure appliquées à la coque.

On a ainsi :

$$(IV.3.3) \quad \begin{cases} g_{\theta z}^{(z)}(r, \theta) = \frac{L}{2h} [P_{\theta}^{+}(r, \theta) + P_{\theta}^{-}(r, \theta)] \\ g_{rz}^{(z)}(r, \theta) = \frac{L}{2h} [R^{+}(r, \theta) + R^{-}(r, \theta)] \\ g_{zz}^{(z)}(r, \theta) = \frac{L}{2h} [P_z^{+}(r, \theta) + P_z^{-}(r, \theta)] \end{cases}$$

(IV.3.4)

$$g_{\theta\theta}^{(1)}(r, \theta) = \frac{L}{2h} [P_{\theta}^{+}(r, \theta) - P_{\theta}^{-}(r, \theta)] .$$

$$g_{r\theta}^{(1)}(r, \theta) = \frac{L}{2h} [P_{r}^{+}(r, \theta) - P_{r}^{-}(r, \theta)] .$$

$$g_{rz}^{(1)}(r, \theta) = \frac{L}{2h} [P_{r}^{+}(r, \theta) - P_{r}^{-}(r, \theta)] .$$

IV.4.- DETERMINATION DES CONTRAINTES

IV.4.1.- Contraintes de membrane

On calcule à l'aide des conditions aux limites données et des équations IV.2.2. On a alors les équations suivantes à résoudre :

$$\left(\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(1)}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha \frac{\sigma_{r\theta}^{(1)}}{r} \right) \frac{1}{r \sin \alpha} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(1)}}{\partial r} = - \frac{1}{2h} [P_{\theta}^{+}(r, \theta) + P_{\theta}^{-}(r, \theta)] .$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(1)}}{\partial \theta} + \sin \alpha (\frac{\sigma_{rz}^{(1)}}{r} - \sigma_{\theta\theta}^{(1)}) \right) \frac{1}{r \sin \alpha} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(1)}}{\partial r} = - \frac{1}{2h} [P_{r}^{+}(r, \theta) + P_{r}^{-}(r, \theta)] .$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(r, \theta) = \frac{r \sin \alpha}{2h} [P_{\theta}^{+}(r, \theta) + P_{\theta}^{-}(r, \theta)] .$$

En portant la valeur de $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}$ dans les deux premières équations on obtient un système différentiel de 2 équations à 2 inconnues avec second membre qui s'écrit aussi :

$$\frac{\partial (r^2 \sigma_{\theta\theta}^{(1)})}{\partial r} = - \frac{r^2}{2h} \left[\frac{1}{r \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \theta} (P_{\theta}^{+}(r, \theta) + P_{\theta}^{-}(r, \theta)) + P_{\theta}^{+}(r, \theta) + P_{\theta}^{-}(r, \theta) \right] .$$

$$\frac{\partial (r \sigma_{r\theta}^{(1)})}{\partial r} = - \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(1)}}{\partial \theta} + \sigma_{\theta\theta}^{(1)} - \frac{r}{2h} [P_{r}^{+}(r, \theta) + P_{r}^{-}(r, \theta)] .$$

Par intégration partielle en δ , on trouve :

$$\sigma_{\delta\theta}^{(0)}(\delta, \theta) = -\frac{1}{\delta^2} \left[\int \frac{\delta^2}{2h} \left(\frac{1}{\cos\alpha} \frac{\partial}{\partial\theta} (P_3^+(\delta, \theta) + P_3^-(\delta, \theta)) + P_0^+(\delta, \theta) + P_0^-(\delta, \theta) \right) d\delta + A_{\delta\theta}^{(0)}(\theta) \right].$$

$$\sigma_{\delta\delta}^{(0)}(\delta, \theta) = \frac{1}{\delta} \left[\int \left\{ \frac{1}{\delta^2 \sin\alpha} \int \frac{\delta^2}{2h} \frac{1}{\cos\alpha} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} (P_3^+(\delta, \theta) + P_3^-(\delta, \theta)) + \frac{\partial}{\partial\theta} (P_0^+(\delta, \theta) + P_0^-(\delta, \theta)) \right\} d\delta + \frac{dA_{\delta\theta}^{(0)}}{d\theta} + \frac{3\cos\alpha}{2h} (P_3^+(\delta, \theta) + P_3^-(\delta, \theta)) - \frac{\delta}{2h} [P_0^+(\theta, \delta) + P_0^-(\delta, \theta)] \right] d\delta + A_{\delta\delta}^{(0)}(\theta).$$

où $A_{\delta\theta}^{(0)}(\theta)$ $A_{\delta\delta}^{(0)}(\theta)$ sont des constantes d'intégration que l'on détermine par les conditions aux bords de la coque lorsque le type de chargement est connu.

IV.4.2.- Détermination des coefficients $(g_{\theta\theta 1}^{(1)}, g_{\delta\theta 1}^{(1)}, g_{\delta\delta 1}^{(1)})$.

Ils interviennent dans le système suivant :

$$\frac{\partial g_{\theta\theta 1}^{(1)}}{\partial\theta} + 2\sin\alpha g_{\delta\theta 1}^{(1)} + 3\cos\alpha g_{\theta\delta 1}^{(1)} + \delta\sin\alpha \frac{\partial g_{\delta\theta 1}^{(1)}}{\partial\delta} + L\cos\alpha \frac{\partial g_{\delta\theta 1}^{(1)}}{\partial\theta} = 0,$$

$$\frac{\partial g_{\delta\theta 1}^{(1)}}{\partial\theta} + \sin\alpha (g_{\delta\delta 1}^{(1)} - g_{\theta\theta 1}^{(1)}) + 2\cos\alpha g_{\delta\delta 1}^{(1)} + \delta\sin\alpha \frac{\partial g_{\delta\theta 1}^{(1)}}{\partial\delta} + L\cos\alpha \frac{\partial g_{\delta\theta 1}^{(1)}}{\partial\theta} = 0.$$

$$\frac{\partial g_{\theta\delta 1}^{(1)}}{\partial\theta} + \sin\alpha g_{\delta\delta 1}^{(1)} + \cos\alpha (2g_{\delta\delta 1}^{(1)} - g_{\theta\theta 1}^{(1)}) + \delta\sin\alpha \frac{\partial g_{\theta\delta 1}^{(1)}}{\partial\delta} = 0$$

On obtient alors un système différentiel de trois équations à trois inconnues que l'on résout de la même façon que le système précédent

($g_{\theta\theta}^{(1)}$, $g_{\theta z}^{(1)}$, $g_{zz}^{(1)}$, $\sqrt{z}^{(0)}$, $\sqrt{z}^{(1)}$) sont connues ou déterminées à l'aide des conditions aux limites).

On trouve après résolution :

$$g_{\theta\theta}^{(1)}(z, \theta) = \frac{L}{2h} \left[\frac{1}{\cos \alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (P_{\theta}^{+}(z, \theta) + P_{\theta}^{-}(z, \theta)) + \tan \alpha \frac{\partial}{\partial z} (z (P_{\theta}^{+}(z, \theta) + P_{\theta}^{-}(z, \theta))) + 2 (P_{\theta}^{+}(z, \theta) + P_{\theta}^{-}(z, \theta)) \right) \right].$$

$$g_{\theta z}^{(1)}(z, \theta) = -\frac{1}{z^2} \left[\int \left(\frac{3 \cos \alpha}{2h} (P_{\theta}^{+}(z, \theta) + P_{\theta}^{-}(z, \theta)) + L \cos \alpha \frac{\partial g_{\theta\theta}^{(0)}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{\theta\theta}^{(1)}}{\partial \theta} \right) \frac{dz}{\sin \alpha} + A_{\theta z}^{(1)}(\theta) \right]$$

$$g_{zz}^{(1)}(z, \theta) = \frac{-1}{z} \left[\int \left(\frac{\partial g_{\theta z}^{(1)}}{\partial \theta} + 2 \cos \alpha g_{\theta z}^{(1)} - \sin \alpha g_{\theta\theta}^{(1)} + L \cos \alpha \frac{\partial g_{\theta z}^{(0)}}{\partial \theta} \right) \frac{dz}{\sin \alpha} + A_{zz}^{(1)}(\theta) \right]$$

IV.4.3.- Résolution des équations IV.2.2.

Le système défini par les relations IV.2.2 permet le calcul des constantes d'intégration à l'ordre 1 sur les contraintes et cela grâce aux

conditions aux limites données par les formules IV.3.4. On a un système de trois équations à 3 inconnues identiques aux deux précédents. Par la même démarche de résolution, on obtient :

$$g_{\theta\theta 0}^{(1)}(s, \theta) = \frac{L}{2h} \left[\frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial}{\partial \theta} (P_{\theta}^{+}(s, \theta) - P_{\theta}^{-}(s, \theta)) + \tan \alpha \frac{\partial}{\partial \theta} (s (R_{s}^{+}(s, \theta) - R_{s}^{-}(s, \theta))) \right. \\ \left. + 2 (P_{\theta}^{+}(s, \theta) - P_{\theta}^{-}(s, \theta)) \right].$$

$$g_{s\theta 0}^{(2)}(s, \theta) = -\frac{L}{2h} \frac{1}{s^2} \left[\int \frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (P_{\theta}^{+}(s, \theta) - P_{\theta}^{-}(s, \theta)) + \tan \alpha \frac{\partial^2}{\partial s \partial \theta} (R_{s}^{+}(s, \theta) - R_{s}^{-}(s, \theta)) \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial}{\partial \theta} (P_{\theta}^{+}(s, \theta) - P_{\theta}^{-}(s, \theta)) - 2 \cos \alpha (P_{\theta}^{+}(s, \theta) - P_{\theta}^{-}(s, \theta)) \frac{s ds}{\sin \alpha} + A_{s\theta 0}^{(2)}(\theta) \right]$$

$$g_{ss 0}^{(1)}(s, \theta) = \frac{L}{2hs} \left[\int \left[g_{\theta\theta 0}^{(2)} - \cot \alpha g_{s\theta 0}^{(1)} - \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial g_{s\theta 0}^{(1)}}{\partial \theta} \right] ds + A_{ss 0}^{(1)}(\theta) \right].$$

$A_{s\theta 0}^{(2)}(\theta)$ $A_{ss 0}^{(1)}(\theta)$ des constantes d'intégration que l'on détermine à l'aide des conditions aux bords supérieur et inférieur de la coque ainsi que les constantes d'intégrations précédentes.

IV.5.- DETERMINATION DES DEPLACEMENTS

Une fois les contraintes calculées, on détermine les déplacements à l'aide de ces dernières par l'utilisation des relations IV.1.2. (5-6).

IV.5.1.- Calcul des déplacements de membrane $u(r, \theta)$ $v(r, \theta)$ $w(r, \theta)$

On les détermine à l'aide des équations IV.1.2. Ainsi on a

$$\sigma_{rr}^{(0)} - \nu \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = E \frac{\partial v}{\partial r} \quad \text{ce qui donne par intégration sur } r$$

$$v(r, \theta) = \frac{1}{E} \int (\sigma_{rr}^{(0)} - \nu \sigma_{\theta\theta}^{(0)}) dr + v_0(\theta)$$

En portant la valeur de $v(r, \theta)$ ainsi calculée dans la 3ème équation des relations IV.1.2, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} = -\frac{1}{r^2 \sin \alpha} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{\theta\theta}^{(0)}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) = \frac{-1}{r^2 \sin \alpha} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{2(1+\nu)}{rE} \sigma_{\theta\theta}^{(0)} \quad \text{qui donne}$$

$$u(r, \theta) = \frac{r}{E} \int \left[\frac{-1}{r^2 \sin \alpha} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{2(1+\nu)}{r} \sigma_{\theta\theta}^{(0)} \right] dr + E \frac{dv_0}{d\theta} + \frac{2(1+\nu)}{r} \sigma_{\theta\theta}^{(0)} r + u_0(\theta)$$

Connaissant $u(r, \theta)$ et $v(r, \theta)$, on en déduit $w(r, \theta)$.

$$w(r, \theta) = r \operatorname{tg} \alpha \left[\frac{1-\nu^2}{E} \sigma_{\theta\theta}^{(0)} - \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{1}{r \sin \alpha} + \frac{v}{r} + \nu \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right]$$

IV.5.2.- Autres déplacements

Par intégration des équations fournies par les relations IV.1.5

et IV.1.6, avec la même démarche que celle qui précède nous avons les résultats suivants :

$$g_{rr}^{(1)}(r, \theta) = \frac{1}{E} \int (g_{rrr}^{(1)} - \nu g_{\theta\theta r}^{(1)}) dr + c_r^{(1)}(\theta)$$

$$c_{\theta r}^{(1)}(r, \theta) = \frac{r}{E} \int \left[\frac{-1}{r^2 \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \theta} \int (g_{rrr}^{(1)} - \nu g_{\theta\theta r}^{(1)}) dr + E \frac{dc_r^{(1)}}{d\theta} + \frac{2(1+\nu)}{r} g_{\theta\theta r}^{(1)} \right] dr + \frac{E}{r} c_{\theta}^{(1)}(\theta)$$

$$c_{r\theta}^{(1)}(r, \theta) = r \operatorname{tg} \alpha \left[\frac{1-\nu^2}{E} g_{\theta\theta r}^{(1)} - \left(\frac{\partial c_{\theta r}^{(1)}}{\partial \theta} \frac{1}{r \sin \alpha} + \frac{c_r^{(1)}}{r} + \nu \frac{\partial c_r^{(1)}}{\partial r} \right) \right]$$

IV.6.1.- Hypothèse sur les données aux limites du problème

On cherche dans le domaine $\mathcal{R}^k = [0, 2\pi[\times [s_0, s_0 + s_1] \times [-h, h]$ le tenseur de contraintes $\vec{\sigma}^{(M)}$ de composantes $\sigma_{ij}(s, \theta, z)$ et le vecteur déplacement $\vec{u}^{(M)}$ de composantes $u_j(s, \theta, z)$ au point $M(s, \theta, z)$ dans la base locale $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_s, \vec{N})$ sous la forme :

$$\sigma_{ij}(s, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^m \frac{(h)^{m-l}}{l!} \left(\frac{z}{L}\right)^l g_{ij}^{(m)}(s, \theta).$$

$$u_j(s, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^m \frac{1}{l!} \left(\frac{h}{L}\right)^{m-l} \left(\frac{z}{L}\right)^l g_{ij}^{(m)}(s, \theta).$$

Lorsque $s \rightarrow s_0$ ou $s_0 + s_1$ ou pour $z \rightarrow \pm h$, par continuité on sera amené à prendre les données aux bords ou sur les faces $z = \pm h$ sous la forme :

(IV.6.1.)

$$\sigma_{ij}(s_0, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^m \frac{1}{l!} \left(\frac{h}{L}\right)^{m-l} \left(\frac{z}{L}\right)^l g_{ij}^{(m)}(\theta, s_0).$$

$$u_j(s_0, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^m \frac{1}{l!} \left(\frac{h}{L}\right)^{m-l} \left(\frac{z}{L}\right)^l c_{ij}^{(m)}(\theta, s_0).$$

(IV.6.2)

$$\sigma_{ij}(s_0 + s_1, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^m \frac{1}{l!} \left(\frac{h}{L}\right)^{m-l} \left(\frac{z}{L}\right)^l g_{ij}^{(m)}(\theta, s_0 + s_1).$$

$$u_j(s_0 + s_1, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^m \frac{1}{l!} \left(\frac{h}{L}\right)^{m-l} \left(\frac{z}{L}\right)^l c_{ij}^{(m)}(\theta, s_0 + s_1).$$

$$(IV.6.3) \quad P_j^+(z, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m P_j^{+(m)}(z, \theta) \quad P_j^-(z, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m P_j^{- (m)}(z, \theta)$$

Nous utiliserons ces données sur les bords $z = z_0$ et $z = z_0 + S_1$ pour la détermination des constantes d'intégration sur les contraintes et les déplacements et celles sur les faces $z = \pm h$ pour l'intégration des différents systèmes d'équations.

IV.6.2.- Conditions aux limites sur les bords

Ce sont des données soit en contraintes soit en déplacements soit les deux à la fois.

IV.6.2.1.- Cas où les déplacements et les contraintes sont connus dans deux domaines complémentaires de chaque bord.

On pose :

$$T_2 = \{ M(z, \theta, z) \in z_0 \times]\beta_1, \beta_2[\times [-h, h], \quad 0 \leq \beta_1 < \beta_2 \leq 2\pi \}$$

T_2 le complémentaire de T_2 par rapport à $z_0 \times [0, 2\pi[\times [-h, h]$.

$$T_3 = \{ M(z, \theta, z) \in z_0 + S_1 \times]\gamma_1, \gamma_2[\times [-h, h], \quad 0 \leq \gamma_1 < \gamma_2 \leq 2\pi \}$$

T_4 le complémentaire de T_3 par rapport à $z_0 + S_1 \times [0, 2\pi[\times [-h, h]$.

. Soit $\vec{U}_{d_1} = U_{\theta d_1} \vec{e}_\theta + U_{z d_1} \vec{e}_z + U_{3 d_1} \vec{N}$ le vecteur déplacement imposé dans le domaine T_2 . On doit avoir avec l'hypothèse H_3 et de IV.6.

$$U_{\theta d_1}(\theta, z) = c_{\theta 0 d_1}^{(0)}(\theta) + \frac{h}{L} c_{\theta 0 d_1}^{(2)}(\theta) + \frac{z}{L} c_{\theta 1 d_1}^{(1)}(\theta).$$

$$(IV.6.4) \quad U_{z d_1}(\theta, z) = c_{z 0 d_1}^{(0)}(\theta) + \frac{h}{L} c_{z 0 d_1}^{(2)}(\theta) + \frac{z}{L} c_{z 1 d_1}^{(1)}(\theta).$$

$$U_{3 d_1}(\theta, z) = c_{3 0 d_1}^{(0)}(\theta) + \frac{h}{L} c_{3 0 d_1}^{(1)}(\theta) + \frac{z}{L} c_{3 1 d_1}^{(1)}(\theta).$$

Ces expressions doivent être égales à $u_0(x=x_0, \theta, z)$ $u_2(x=x_0, \theta, z)$ et $u_3(x=x_0, \theta, z)$ données par les relations IV.6.1. Ce qui donne par identification 9 équations permettant le calcul des constantes d'intégration sur les déplacements.

. Données en contraintes aux bords ($x=x_0$ et $x=x_0+s_2$).

On examinera 2 cas de figure de bords rencontrés.

i) La normale au bord est l'un des vecteurs (\vec{e}_i) de la base locale

Désignons que ($R_{\theta d_1}(\theta, z)$, $R_{x d_1}(\theta, z)$, $R_{z d_1}(\theta, z)$) les composantes dans la base (\vec{e}_θ , \vec{e}_x , \vec{N}) des efforts donnés au bord $x=x_0$ dans T_3

. Ce bord admet pour normale \vec{n} de composantes (0, -1, 0)

dans la même base. Le vecteur contrainte le long de ce bord s'écrit

$$\overrightarrow{T(M, \vec{n})} = - [\sigma_{\theta\theta}(x_0, z, \theta) \vec{e}_\theta + \sigma_{x3}(x_0, z, \theta) \vec{e}_x + \sigma_{z3}(x_0, \theta, z) \vec{N}] .$$

nous déduisons que :

$$R_{\theta d_1}(\theta, z) = - \sigma_{\theta\theta}(x_0, \theta, z) ; R_{x d_1}(\theta, z) = - \sigma_{x3}(x_0, \theta, z) ; R_{z d_1}(\theta, z) = - \sigma_{z3}(x_0, z, \theta) .$$

Au bord supérieur où la normale \vec{n}' est l'opposée de celle du bord inférieur le vecteur contrainte s'écrit : $\overrightarrow{T(M, \vec{n}')} = \sigma_{\theta\theta} \vec{e}_\theta + \sigma_{x3} \vec{e}_x + \sigma_{z3} \vec{N}$

En désignant par ($R'_\theta(\theta, z)$, $R'_x(\theta, z)$, $R'_z(\theta, z)$) les composantes des efforts donnés dans le domaine T_4 du bord supérieur, on a :

$$(IV.6.6) \quad R'_\theta(\theta, z) = \sigma_{\theta\theta}(x_0+s_2, \theta, z) , R'_x(\theta, z) = \sigma_{x3}(x_0+s_2, \theta, z) , R'_z(\theta, z) = \sigma_{z3}(x_0+s_2, \theta, z) .$$

On obtient alors avec l'hypothèse H_3 et des relations IV.6.

(IV.6.7)

$$R_\theta(\theta, z) = \sigma_{\theta d_1}^{(0)}(\theta) + \frac{h}{L} g_{\theta \theta d_1}^{(1)}(\theta) + \frac{z}{L} g_{\theta \theta d_1}^{(2)}(\theta).$$

$$R_\beta(\theta, z) = \sigma_{\beta d_1}^{(0)}(\theta) + \frac{h}{L} g_{\beta \theta d_1}^{(1)}(\theta) + \frac{z}{L} g_{\beta \theta d_1}^{(2)}(\theta).$$

$$R_z(\theta, z) = \sigma_{z d_1}^{(0)}(\theta) + \frac{h}{L} g_{z \theta d_1}^{(1)}(\theta) + \frac{z}{L} g_{z \theta d_1}^{(2)}(\theta).$$

(IV.6.8)

$$R'_\theta(\beta, \theta) = \sigma_{\theta d_2}^{(0)}(\theta) + \frac{h}{L} g_{\theta \theta d_2}^{(1)}(\theta) + \frac{z}{L} g_{\theta \theta d_2}^{(2)}(\theta).$$

$$R'_\beta(\beta, \theta) = \sigma_{\beta d_2}^{(0)}(\theta) + \frac{h}{L} g_{\beta \theta d_2}^{(1)}(\theta) + \frac{z}{L} g_{\beta \theta d_2}^{(2)}(\theta).$$

$$R'_z(\beta, \theta) = \sigma_{z d_2}^{(0)}(\theta) + \frac{h}{L} g_{z \theta d_2}^{(1)}(\theta) + \frac{z}{L} g_{z \theta d_2}^{(2)}(\theta).$$

Par identification, on trouve les constantes d'intégration sur σ_θ , σ_β

ii) coque à bords horizontaux

Dans ce cas la normale au bord inférieur s'écrit $(0, -\cos \alpha, \sin \alpha)$

et le vecteur contrainte s'écrit : $T(M, \vec{n}) = \vec{e}_j [-\cos \alpha \sigma_{\beta j}(\beta_0, \theta, z) + \sin \alpha \sigma_{z j}(\beta_0, \theta, z)]$

Soit $S_j(\theta, z)$ les composantes des efforts à ce bord

en $\beta = \beta_0$. Pour $\beta \rightarrow \beta_0$ on aura :

(IV.6.9)

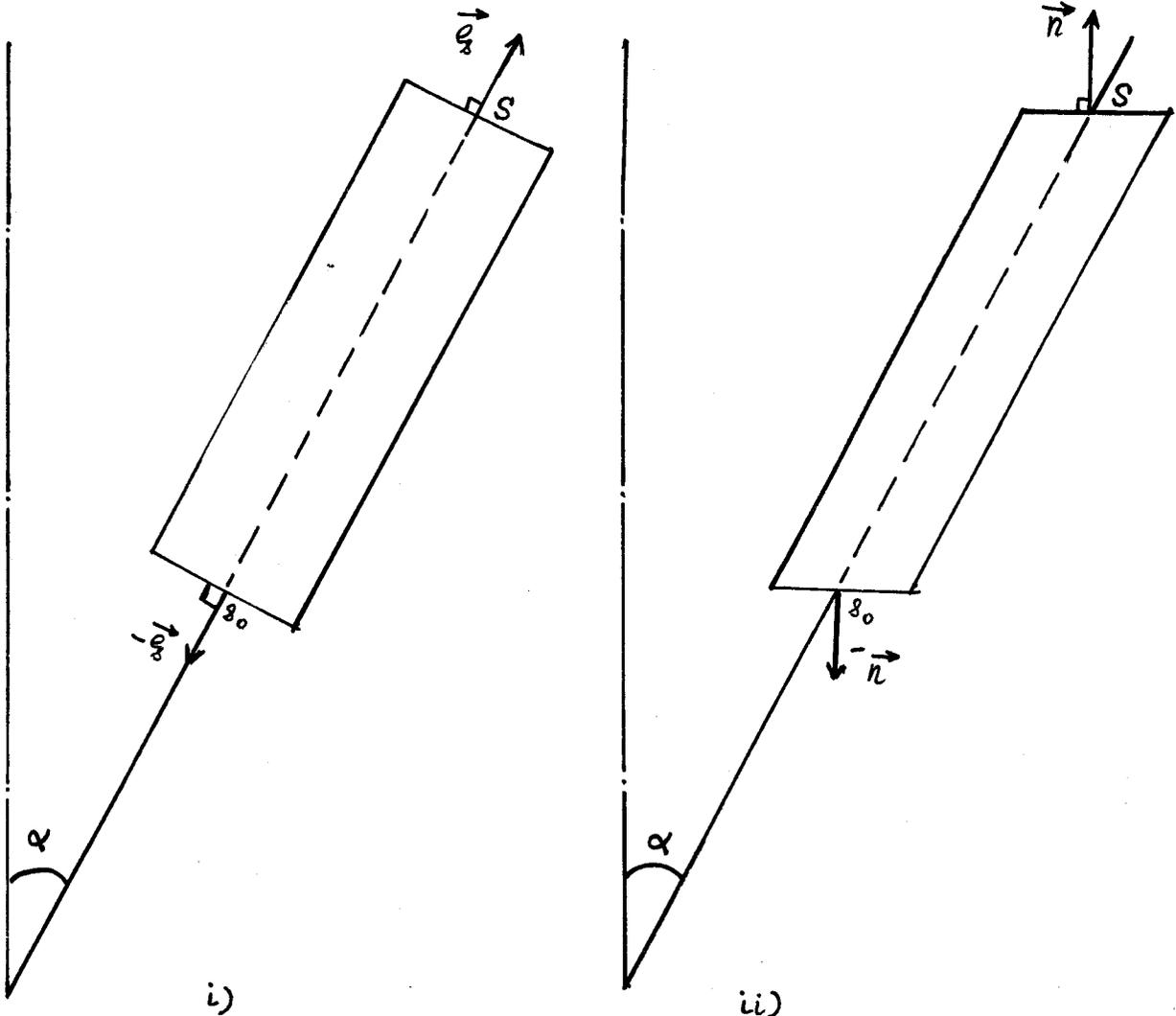
$$S_j(\theta, z) = -\cos \alpha \sigma_{\beta j}(\beta_0, \theta, z) + \sin \alpha \sigma_{z j}(\beta_0, \theta, z).$$

De même dans le domaine T_4 , où la normale vaut $0 \cos \alpha, -\sin \alpha$ on a $T(M, \vec{n}) = [\cos \alpha \sigma_{2j}(x, \theta, z) - \sin \alpha \sigma_{3j}(x, \theta, z)] \vec{e}_j$ et en désignant par $S'_j(\theta, z)$ les composantes des efforts données dans T_4 on aura par passage à la limite

(IV.6.10)

$$S'_j(\theta, z) = \cos \alpha \sigma_{2j}(x_0 + S_2, \theta, z) - \sin \alpha \sigma_{3j}(x_0 + S_2, \theta, z).$$

On met $S_j(\theta, z)$ et $S'_j(x, z)$ sous la forme IV.7 et par identification, on trouve les différents coefficients relatifs aux contraintes.



CHAPITRE V

CAS DES COQUES "PEU EPAISSES"

Dans ce chapitre, on étudie les coques coniques peu épaisses en faisant l'hypothèse suivante :

H 4 : On négligera tous les termes en $\varepsilon_2 = \left(\frac{z}{L}\right)^\alpha \left(\frac{h}{L}\right)^\beta$ tels que $\alpha + \beta \gg 3$.

Ainsi les composantes du tenseur des contraintes et du vecteur déplacement se mettent sous la forme :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(r, \theta, z) &= g_{ij}^{(0)}(r, \theta) + \frac{h}{L} g_{ij}^{(1)}(r, \theta) + \frac{h^2}{L^2} g_{ij}^{(2)}(r, \theta) + \\ &\quad \frac{z}{L} \left(g_{ij1}^{(1)}(r, \theta) + \frac{h}{L} g_{ij1}^{(2)}(r, \theta) \right) + \frac{1}{2} \frac{z^2}{L^2} g_{ije}^{(2)}(r, \theta) \\ U_j(r, \theta, z) &= c_{j0}^{(0)}(r, \theta) + \frac{h}{L} c_{j0}^{(1)}(r, \theta) + \frac{h^2}{L^2} c_{j0}^{(2)}(r, \theta) + \\ &\quad \frac{z}{L} \left(c_{j1}^{(1)}(r, \theta) + \frac{h}{L} c_{j1}^{(2)}(r, \theta) \right) + \frac{1}{2} \frac{z^2}{L^2} c_{je}^{(2)}(r, \theta) \end{aligned}$$

V.1. - HYPOTHESES SUR LES SOLLICITATIONS EN $z = \pm h$.

D'après les conditions aux limites sur les faces intérieure et extérieure définies par les relations II.3.7.8, on obtient :

$\sigma_{\theta z}(r, \theta, h) = P_{\theta}^+(r, \theta)$	$\sigma_{\theta z}(r, \theta, -h) = -P_{\theta}^-(r, \theta)$
$\sigma_{rz}(r, \theta, h) = P_r^+(r, \theta)$	$\sigma_{rz}(r, \theta, -h) = -P_r^-(r, \theta)$
$\sigma_{zz}(r, \theta, h) = P_z^+(r, \theta)$	$\sigma_{zz}(r, \theta, -h) = -P_z^-(r, \theta)$

Ainsi en remplaçant les $\sigma_{ij}(\lambda, \theta, z)$ par leur développement, on a

$$P_0^+(z, \theta) = \frac{\hbar}{L} (g_{030}^{(1)}(z, \theta) + g_{031}^{(1)}) + \frac{\hbar^2}{L^2} [g_{030}^{(2)} + g_{031}^{(2)} + \frac{1}{2} g_{032}^{(2)}]$$

$$P_2^+(z, \theta) = \frac{\hbar}{L} (g_{230}^{(1)} + g_{231}^{(1)}) + \frac{\hbar^2}{L^2} [g_{230}^{(2)} + g_{231}^{(2)} + \frac{1}{2} g_{232}^{(2)}]$$

$$P_3^+(z, \theta) = \frac{\hbar}{L} (g_{330}^{(1)} + g_{331}^{(1)}) + \frac{\hbar^2}{L^2} [g_{330}^{(2)} + g_{331}^{(2)} + \frac{1}{2} g_{332}^{(2)}]$$

$$P_0^-(z, \theta) = \frac{\hbar}{L} (g_{030}^{(1)} - g_{031}^{(1)}) + \frac{\hbar^2}{L^2} [g_{030}^{(2)} - g_{031}^{(2)} + \frac{1}{2} g_{032}^{(2)}]$$

$$P_2^-(z, \theta) = \frac{\hbar}{L} (g_{230}^{(1)} - g_{231}^{(1)}) + \frac{\hbar^2}{L^2} [g_{230}^{(2)} - g_{231}^{(2)} + \frac{1}{2} g_{232}^{(2)}]$$

$$P_3^-(z, \theta) = \frac{\hbar}{L} (g_{330}^{(1)} - g_{331}^{(1)}) + \frac{\hbar^2}{L^2} [g_{330}^{(2)} - g_{331}^{(2)} + \frac{1}{2} g_{332}^{(2)}]$$

A ce niveau, on peut formuler deux hypothèses :

1ère Hypothèse

($P_0^\pm(z, \theta)$, $P_2^\pm(z, \theta)$, $P_3^\pm(z, \theta)$) sont développables en polynômes de degré 2 en $\varepsilon = \frac{\hbar}{L}$ ainsi par exemple : on aura

$$P_j^\pm(z, \theta) = \frac{\hbar}{L} P_j^{\pm(1)}(z, \theta) + \frac{\hbar^2}{L^2} P_j^{\pm(2)}(z, \theta) .$$

Ce qui se justifie mathématiquement d'après la forme de la solution en $\sigma_{ij}(s, \theta, z)$. Mais on ne sait pas déduire les $p_j^{\pm(1)}(s, \theta)$, $p_j^{\pm(2)}(s, \theta)$ (les \vec{p}^{\pm} sont des données physiques du problème) de la connaissance des $\vec{p}^{\pm}(s, \theta)$.

2ème hypothèse

Dans le but d'alléger les calculs on suppose que les $p_j^{\pm(k)}(s, \theta)$ sont d'ordre 1 en $\frac{h}{L}$, on peut éventuellement s'assurer que les \vec{p}^{\pm} sont d'ordre n_0 en $\frac{h}{L}$, ceci revient à prendre $p_j^{\pm(n_0)}$ seuls non nuls ici on prend $n_0 = 1$.

Dans les $\sigma_{j3}(s, \theta, z)$, on se gardera que le premier terme en $\frac{z}{L}$; on posera que $g_{j3\ell}^{(m)}(s, \theta) = 0$ pour $0 \leq \ell \leq m \leq 2$.

Ainsi on a les $g_{j30}^{(m)}(s, \theta)$, $g_{j31}^{(m)}(s, \theta)$ en fonction des pressions intérieure et extérieure entières et on n'est pas obligé de les développer en ε , ce qui conserve au problème toute sa réalité physique, ceci se justifie par

* d'un point de vue mathématique, on garde les termes entiers en fonction des données $p_j^{\pm}(s, \theta)$.

* physiquement, les contraintes $\sigma_{3j}(s, \theta, z)$ sont moins importantes que les autres.

V.2. D'après les résultats obtenus jusqu'ici, on tire les relations suivantes entre les $g_{ij\ell}^{(m)}(s, \theta)$ $c_{j\ell}^{(m)}(s, \theta)$ et les différents ordres de résolution grâce aux formules de récurrence III.3.4 et avec les notations déjà utilisées au chapitre précédent.

$$g_{\theta\theta}^{(1)}(s, \theta) = \frac{LE}{2(1+\nu)} \left[\left(\frac{\partial C_{\theta\theta}^{(1)}}{\partial \theta} - \sin \alpha C_{\theta\theta}^{(1)} \right) \frac{1}{s \sin \alpha} + \frac{\partial C_{\theta\theta}^{(1)}}{\partial s} \right]$$

(V.1.2)

$$g_{\theta\theta}^{(1)}(s, \theta) - \frac{1}{1-\nu} g_{\theta\theta}^{(1)}(s, \theta) = \frac{LE}{(1-\nu^2)} \left[\frac{\nu}{s \sin \alpha} \left(\frac{\partial C_{\theta\theta}^{(1)}}{\partial \theta} + \sin \alpha C_{\theta\theta}^{(1)} + \cos \alpha C_{\theta\theta}^{(1)} \right) + \frac{\partial C_{\theta\theta}^{(1)}}{\partial s} \right]$$

$$g_{\theta\theta}^{(1)}(s, \theta) - \frac{1}{1-\nu} g_{\theta\theta}^{(1)}(s, \theta) = \frac{LE}{(1-\nu^2)} \left[\frac{1}{s \sin \alpha} \left(\frac{\partial C_{\theta\theta}^{(1)}}{\partial \theta} + \sin \alpha C_{\theta\theta}^{(1)} + \cos \alpha C_{\theta\theta}^{(1)} \right) + \nu \frac{\partial C_{\theta\theta}^{(1)}}{\partial s} \right]$$

$$g_{\theta\theta}^{(2)}(s, \theta) = \frac{LE}{2(1+\nu)} \left[\frac{1}{s \sin \alpha} \left(\frac{\partial C_{\theta\theta}^{(2)}}{\partial \theta} - \sin \alpha C_{\theta\theta}^{(2)} \right) + \frac{\partial C_{\theta\theta}^{(2)}}{\partial s} + \cos \alpha \frac{\partial C_{\theta\theta}^{(1)}}{\partial s} \right] - g_{\theta\theta}^{(1)}$$

(V.1.3)

$$g_{\theta\theta}^{(2)}(s, \theta) = \frac{LE}{(1-\nu^2)} \left[\frac{\nu}{s \sin \alpha} \left(\frac{\partial C_{\theta\theta}^{(2)}}{\partial \theta} + \sin \alpha C_{\theta\theta}^{(2)} + \cos \alpha C_{\theta\theta}^{(2)} \right) + \frac{\partial C_{\theta\theta}^{(2)}}{\partial s} \right]$$

$$- \frac{2\nu}{(1-\nu^2)} \left[g_{\theta\theta}^{(1)} - \nu (g_{\theta\theta}^{(1)} + g_{\theta\theta}^{(1)}) \right].$$

$$g_{\theta\theta}^{(2)}(s, \theta) = \frac{LE}{(1-\nu^2)} \left[\frac{1}{s \sin \alpha} \left(\frac{\partial C_{\theta\theta}^{(2)}}{\partial \theta} + \sin \alpha C_{\theta\theta}^{(2)} + \cos \alpha C_{\theta\theta}^{(2)} \right) + \nu \frac{\partial C_{\theta\theta}^{(2)}}{\partial s} \right]$$

$$- \frac{2}{(1-\nu^2)} \left[g_{\theta\theta}^{(1)} - \nu (g_{\theta\theta}^{(1)} + g_{\theta\theta}^{(1)}) \right].$$

$$g_{\theta\theta_2}^{(2)}(s, \theta) = \frac{LE}{2(1+\nu)} \left[\frac{1}{2\sin\alpha} \left(\frac{\partial c^{(2)}}{\partial \theta} - \sin\alpha c_{\theta_2}^{(2)} \right) + \frac{\partial c^{(2)}}{\partial s} + 2\cos\alpha \frac{\partial c^{(1)}}{\partial s} \right] - 2g_{\theta\theta_1}^{(2)}$$

$$g_{\theta\theta_2}^{(2)}(s, \theta) = \frac{LE}{(1-\nu^2)} \left[\frac{\nu}{2\sin\alpha} \left(\frac{\partial c^{(2)}}{\partial \theta} + \sin\alpha c_{\theta_2}^{(2)} + \cos\alpha c_{\theta_2}^{(2)} \right) + \frac{\partial c^{(2)}}{\partial s} \right]$$

(V.1.4)

$$- \frac{2\nu}{(1-\nu^2)} \left[g_{\theta\theta_1}^{(1)} - \nu (g_{\theta\theta_1}^{(1)} + g_{\theta\theta_1}^{(1)}) \right].$$

$$g_{\theta\theta_2}^{(2)}(s, \theta) = \frac{LE}{(1-\nu^2)} \left[\frac{1}{2\sin\alpha} \left(\frac{\partial c^{(2)}}{\partial \theta} + \sin\alpha c_{\theta_2}^{(2)} + \cos\alpha c_{\theta_2}^{(2)} \right) + \nu \frac{\partial c^{(2)}}{\partial s} \right]$$

$$- \frac{2\nu}{(1-\nu^2)} \left[g_{\theta\theta_1}^{(1)} - \nu (g_{\theta\theta_1}^{(1)} + g_{\theta\theta_1}^{(1)}) \right].$$

$$g_{\theta\theta_0}^{(2)}(s, \theta) = \frac{LE}{2(1+\nu)} \left[\frac{1}{2\sin\alpha} \left(\frac{\partial c^{(2)}}{\partial \theta} - \sin\alpha c_{\theta_0}^{(2)} \right) + \frac{\partial c^{(2)}}{\partial s} \right]$$

(V.1.5)

$$g_{\theta\theta_0}^{(2)}(s, \theta) = \frac{LE}{(1-\nu^2)} \left[\frac{\nu}{2\sin\alpha} \left(\frac{\partial c^{(2)}}{\partial \theta} + \sin\alpha c_{\theta_0}^{(2)} + \cos\alpha c_{\theta_0}^{(2)} \right) + \frac{\partial c^{(2)}}{\partial s} \right].$$

$$g_{\theta\theta_0}^{(2)}(s, \theta) = \frac{LE}{(1-\nu^2)} \left[\frac{1}{2\sin\alpha} \left(\frac{\partial c^{(2)}}{\partial \theta} + \sin\alpha c_{\theta_0}^{(2)} + \cos\alpha c_{\theta_0}^{(2)} \right) + \nu \frac{\partial c^{(2)}}{\partial s} \right].$$

(V.1.6)

$$C_{\theta 1}^{(1)}(r, \theta) = -\frac{L}{2r \sin \alpha} \left[\frac{\partial W}{\partial \theta} - u \cos \alpha \right].$$

$$C_{r 1}^{(1)}(0, \theta) = -L \frac{\partial W}{\partial \theta}.$$

$$C_{z 1}^{(1)}(0, \theta) = \frac{L\nu}{(1-\nu)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \nu \sin \alpha + \cos \alpha W \right) \frac{1}{2r \sin \alpha} + \frac{\partial \nu}{\partial \theta} \right]$$

(V.1.7)

$$C_{\theta 2}^{(2)}(r, \theta) = -L \left[\left(\frac{\partial C_{z 1}^{(1)}}{\partial \theta} - \cos \alpha C_{\theta 1}^{(1)} \right) \frac{1}{2r \sin \alpha} + \frac{1}{2r \sin \alpha} \frac{\partial C_{z 0}^{(1)}}{\partial \theta} - \frac{2(1+\nu)}{E} \left(\cos \alpha g_{\theta z 0}^{(1)} + g_{\theta z 1}^{(1)} \right) \right]$$

$$C_{z 2}^{(2)}(r, \theta) = -L \left[\frac{\partial C_{z 0}^{(1)}}{\partial \theta} - \frac{2(1+\nu)}{E} g_{z 0}^{(1)} \right]$$

$$C_{z 2}^{(2)}(r, \theta) = \frac{L}{E} \left[g_{z z 1}^{(1)} - \nu (g_{z z 1}^{(1)} + g_{\theta \theta 1}^{(1)}) \right]$$

(V.1.8)

$$C_{\theta 1}^{(2)}(r, \theta) = -L \left[\left(\frac{\partial C_{z 0}^{(1)}}{\partial \theta} - \cos \alpha C_{\theta 0}^{(1)} \right) \frac{1}{2r \sin \alpha} + \frac{2(1+\nu)}{E} g_{\theta z 0}^{(1)} \right]$$

$$C_{z 1}^{(2)}(r, \theta) = -L \left[\frac{\partial C_{z 0}^{(1)}}{\partial \theta} - \frac{2(1+\nu)}{E} g_{z 0}^{(1)} \right]$$

$$C_{z 3 1}^{(2)}(r, \theta) = -\frac{L}{E} \left[g_{z z 0}^{(1)} - \nu (g_{\theta \theta 0}^{(1)} + g_{z z 0}^{(1)}) \right]$$

(V.1.9)

$$\sigma_{\theta\theta}^{(v)}(r, \theta) = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - u \sin \alpha \right) \frac{1}{r \sin \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \right]$$

$$\sigma_{r\theta}^{(v)}(r, \theta) = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \nu \sin \alpha + w \cos \alpha \right) \frac{\nu}{r \sin \alpha} + \frac{\partial v}{\partial r} \right]$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(v)}(r, \theta) = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \nu \sin \alpha + w \cos \alpha \right) \frac{1}{r \sin \alpha} + \nu \frac{\partial v}{\partial \theta} \right]$$

(V.1.10)

$$g_{\theta\theta_1}^{(1)}(r, \theta) = \frac{LE}{2(1+\nu)} \left[\frac{1}{r \sin \alpha} \left(\frac{\partial C_{\theta_1}^{(1)}}{\partial \theta} - \sin \alpha C_{\theta_1}^{(1)} \right) + \frac{\partial C_{\theta_1}^{(1)}}{\partial \theta} + \cos \alpha \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] - \sigma_{\theta\theta}^{(v)}$$

$$g_{\theta\theta_1}^{(1)}(r, \theta) = \frac{LE}{(1-\nu^2)} \left[\frac{\nu}{r \sin \alpha} \left(\frac{\partial C_{\theta_1}^{(1)}}{\partial \theta} + \sin \alpha C_{\theta_1}^{(1)} + \cos \alpha C_{\theta_1}^{(1)} \right) + \frac{\partial C_{\theta_1}^{(1)}}{\partial \theta} \right]$$

$$+ \frac{\nu}{1-\nu} g_{\theta\theta_1}^{(1)} + \frac{\nu}{1-\nu^2} \left(\sigma_{\theta\theta}^{(v)} - \nu \sigma_{\theta\theta}^{(v)} \right)$$

$$g_{\theta\theta_1}^{(1)}(r, \theta) = \frac{LE}{(1-\nu^2)} \left[\frac{1}{r \sin \alpha} \left(\frac{\partial C_{\theta_1}^{(1)}}{\partial \theta} + \sin \alpha C_{\theta_1}^{(1)} + \cos \alpha C_{\theta_1}^{(1)} \right) + \nu \frac{\partial C_{\theta_1}^{(1)}}{\partial \theta} \right]$$

$$+ \frac{\nu}{(1-\nu)} g_{\theta\theta_1}^{(1)} + \frac{1}{(1-\nu^2)} \left(\sigma_{\theta\theta}^{(v)} - \nu \sigma_{\theta\theta}^{(v)} \right)$$

V.2.- EQUATIONS D'EQUILIBRE

En portant les $\sigma_{ij}(x, \theta, z)$ données par les relations V.1.1 dans les équations d'équilibre, on obtient une expression qui se met sous la forme :

$$A(x, \theta) + z B(x, \theta) + z^2 C(x, \theta) + O(\epsilon_2) = 0 \quad \forall z \in]-h, h[$$

d'où on tire les équations $A(x, \theta) = B(x, \theta) = C(x, \theta) = 0$ par équation d'équilibre.

On donnera les résultats pour les trois équations d'équilibre avec la même démarche que celle utilisée dans le paragraphe IV.2 du chapitre précédent.

La première équation d'équilibre donne les relations suivantes :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(1)}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha \sigma_{s\theta}^{(1)} + 2 \sin \alpha \frac{\partial \sigma_{s\theta}^{(1)}}{\partial s} + \frac{5 \sin \alpha}{L} g_{\theta s_1}^{(1)} = \\ & \left(\frac{\partial g_{\theta\theta}^{(1)}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha g_{s\theta}^{(1)} + 2 \cos \alpha g_{\theta s_0}^{(1)} + 2 \sin \alpha \frac{\partial g_{s\theta}^{(1)}}{\partial s} \right) \frac{h}{L} \\ & \left(\frac{\partial g_{\theta\theta}^{(2)}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha g_{s\theta}^{(2)} + 2 \sin \alpha \frac{\partial g_{s\theta}^{(2)}}{\partial s} \right) \frac{h^2}{L^2} = 0 \\ & \frac{\partial g_{\theta\theta}^{(1)}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha g_{s\theta}^{(1)} + 3 \cos \alpha g_{\theta s_1}^{(1)} + 2 \sin \alpha \frac{\partial g_{s\theta}^{(1)}}{\partial s} + L \cos \alpha \frac{\partial \sigma_{s\theta}^{(1)}}{\partial s} \\ & \left(\frac{\partial g_{\theta\theta}^{(2)}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha g_{s\theta}^{(2)} + 2 \sin \alpha \frac{\partial g_{s\theta}^{(2)}}{\partial s} + L \cos \alpha \frac{\partial g_{s\theta}^{(2)}}{\partial s} \right) \frac{h}{L} = 0 \\ & \frac{\partial g_{\theta\theta}^{(2)}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha g_{s\theta}^{(2)} + 2 \sin \alpha \frac{\partial g_{s\theta}^{(2)}}{\partial s} + 2 L \cos \alpha \frac{\partial g_{s\theta}^{(1)}}{\partial s} = 0 \end{aligned}$$

Compte tenu des définitions des $g^{(m)}$ en V.1.2 à V.1.5
et de leur nullité pour $m > 2$, on obtient alors les 6 équations suivantes :

(V.2.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(0)}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha \sigma_{\theta\theta}^{(0)} + 2 \sin \alpha \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(0)}}{\partial \theta} + \frac{2 \sin \alpha}{L} g_{\theta z_1}^{(1)} &= 0 \\ \frac{\partial g_{\theta\theta 0}^{(1)}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha g_{\theta\theta 0}^{(1)} + 2 \cos \alpha g_{\theta z_0}^{(1)} + 2 \sin \alpha \frac{\partial g_{\theta\theta 0}^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{2 \sin \alpha}{L} g_{\theta z_0}^{(1)} &= 0 \\ \frac{\partial g_{\theta\theta 0}^{(2)}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha g_{\theta\theta 0}^{(2)} + 2 \sin \alpha \frac{\partial g_{\theta\theta 0}^{(2)}}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial g_{\theta\theta 1}^{(1)}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha g_{\theta\theta 1}^{(1)} + 2 \cos \alpha g_{\theta z_1}^{(1)} + 2 \sin \alpha \frac{\partial g_{\theta\theta 1}^{(1)}}{\partial \theta} + 2 \cos \alpha \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(0)}}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial g_{\theta\theta 1}^{(2)}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha g_{\theta\theta 1}^{(2)} + 2 \sin \alpha \frac{\partial g_{\theta\theta 1}^{(2)}}{\partial \theta} + 2 \cos \alpha \frac{\partial g_{\theta\theta 1}^{(1)}}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial g_{\theta\theta 2}^{(2)}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha g_{\theta\theta 2}^{(2)} + 2 \sin \alpha \frac{\partial g_{\theta\theta 2}^{(2)}}{\partial \theta} + 2 \cos \alpha \frac{\partial g_{\theta\theta 1}^{(1)}}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned}$$

De même les autres équations d'équilibre donnent :

(V.2.2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(0)}}{\partial \theta} + \sin \alpha (\sigma_{\theta z}^{(0)} - \sigma_{z\theta}^{(0)}) + 2 \sin \alpha \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(0)}}{\partial \theta} + \frac{2 \sin \alpha}{L} g_{\theta z_1}^{(1)} &= 0 \\ \frac{\partial g_{\theta\theta 0}^{(1)}}{\partial \theta} + \cos \alpha g_{\theta z_0}^{(1)} + \sin \alpha (g_{\theta z_0}^{(1)} - g_{z\theta 0}^{(1)}) + 2 \sin \alpha \frac{\partial g_{\theta\theta 0}^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{2 \sin \alpha}{L} g_{\theta z_0}^{(1)} &= 0 \\ \frac{\partial g_{\theta\theta 0}^{(2)}}{\partial \theta} + \sin \alpha (g_{\theta z_0}^{(2)} - g_{z\theta 0}^{(2)}) + 2 \sin \alpha \frac{\partial g_{\theta\theta 0}^{(2)}}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial g^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial g^{(1)}}{\partial z_1} + 2 \cos \alpha g^{(1)} + \sin \alpha (g_{z_1 z_1}^{(1)} - g_{\theta \theta}^{(1)}) + 2 \sin \alpha \frac{\partial g_{z_1 z_1}^{(1)}}{\partial z} + 2 \cos \alpha \frac{\partial \sigma_{\theta \theta}^{(0)}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial g^{(2)}}{\partial \theta} \frac{\partial g^{(2)}}{\partial z_1} + \sin \alpha (g_{z_1 z_1}^{(2)} - g_{\theta \theta}^{(2)}) + 2 \sin \alpha \frac{\partial g_{z_1 z_1}^{(2)}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial g^{(2)}}{\partial \theta} \frac{\partial g^{(2)}}{\partial z_2} + 2 \sin \alpha (g_{z_2 z_2}^{(2)} - g_{\theta \theta}^{(2)}) + 2 \sin \alpha \frac{\partial g_{z_2 z_2}^{(2)}}{\partial z} + 2 \cos \alpha \frac{\partial g_{z_1 z_1}^{(1)}}{\partial z} = 0.$$

$$\sigma_{\theta \theta}^{(0)} - 2 \operatorname{tg} \alpha g_{z_1 z_1}^{(1)} = 0$$

$$\frac{\partial g^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial g^{(1)}}{\partial z_0} + \sin \alpha g_{z_0 z_0}^{(1)} + \cos \alpha (g_{z_0 z_0}^{(2)} - g_{\theta \theta}^{(2)}) + 2 \sin \alpha \frac{\partial g_{z_0 z_0}^{(1)}}{\partial z} = 0$$

$$g_{\theta \theta}^{(2)} = 0$$

(V.2.3)

$$\frac{\partial g^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial g^{(1)}}{\partial z_1} + \sin \alpha g_{z_1 z_1}^{(1)} + \cos \alpha (2g_{z_1 z_1}^{(1)} - g_{\theta \theta}^{(1)}) + 2 \sin \alpha \frac{\partial g_{z_1 z_1}^{(1)}}{\partial z} = 0$$

$$-g_{\theta \theta}^{(2)} + 2 \frac{\partial g_{z_1 z_1}^{(1)}}{\partial z} = 0;$$

$$-g_{\theta \theta}^{(2)} + 2 \frac{\partial g_{z_1 z_1}^{(1)}}{\partial z} = 0$$

On regroupe ces équations de la manière ci-dessous :

(V.2.4)

$$\frac{\partial \sigma_{\theta \theta}^{(0)}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha \sigma_{\theta \theta}^{(0)} + 2 \sin \alpha \frac{\partial \sigma_{\theta \theta}^{(0)}}{\partial z} + \frac{2 \sin \alpha}{L} g_{z_1 z_1}^{(1)} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta \theta}^{(0)}}{\partial \theta} + \sin \alpha (\sigma_{z_1 z_1}^{(0)} - \sigma_{\theta \theta}^{(0)}) + 2 \sin \alpha \frac{\partial \sigma_{z_1 z_1}^{(0)}}{\partial z} + \frac{2 \sin \alpha}{L} g_{z_1 z_1}^{(1)} = 0$$

$$\sigma_{\theta \theta}^{(0)} - \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{L} g_{z_1 z_1}^{(1)} = 0$$

(V.2.5)

$$\frac{\partial g^{(2)}}{\partial \theta} \theta_{00} + 2 \sin \alpha g^{(1)}_{\theta_{00}} + 2 \cos \alpha g^{(1)}_{\theta_{30}} + 2 \sin \alpha \frac{\partial g^{(2)}}{\partial \theta} \theta_{00} = 0$$

$$\frac{\partial g^{(2)}}{\partial \theta} \theta_{30} + \cos \alpha g^{(2)}_{\theta_{30}} + \sin \alpha (g^{(2)}_{\theta_{30}} - g^{(1)}_{\theta_{00}}) + 2 \sin \alpha \frac{\partial g^{(2)}}{\partial \theta} \theta_{30} = 0$$

$$\frac{\partial g^{(2)}}{\partial \theta} \theta_{30} + \sin \alpha g^{(2)}_{\theta_{30}} + \cos \alpha (g^{(2)}_{\theta_{30}} - g^{(1)}_{\theta_{00}}) + 2 \sin \alpha \frac{\partial g^{(2)}}{\partial \theta} \theta_{30} = 0$$

(V.2.6)

$$\frac{\partial g^{(1)}}{\partial \theta} \theta_{01} + 2 \sin \alpha g^{(1)}_{\theta_{01}} + 3 \cos \alpha g^{(1)}_{\theta_{31}} + 4 \cos \alpha \frac{\partial g^{(1)}}{\partial \theta} \theta_{01} = 0$$

$$\frac{\partial g^{(2)}}{\partial \theta} \theta_{01} + 2 \cos \alpha g^{(2)}_{\theta_{31}} + \sin \alpha (g^{(2)}_{\theta_{31}} - g^{(1)}_{\theta_{01}}) + 2 \sin \alpha \frac{\partial g^{(2)}}{\partial \theta} \theta_{01} + 4 \cos \alpha \frac{\partial g^{(2)}}{\partial \theta} \theta_{01} = 0$$

$$\frac{\partial g^{(2)}}{\partial \theta} \theta_{01} + \sin \alpha g^{(2)}_{\theta_{31}} + \cos \alpha (g^{(2)}_{\theta_{31}} - g^{(1)}_{\theta_{01}}) + 2 \sin \alpha \frac{\partial g^{(2)}}{\partial \theta} \theta_{01} = 0$$

(V.2.7)

$$\frac{\partial g^{(2)}}{\partial \theta} \theta_{00} + 2 \sin \alpha g^{(2)}_{\theta_{00}} + 2 \sin \alpha \frac{\partial g^{(2)}}{\partial \theta} \theta_{00} = 0$$

$$\frac{\partial g^{(2)}}{\partial \theta} \theta_{00} + \sin \alpha (g^{(2)}_{\theta_{00}} - g^{(2)}_{\theta_{00}}) + 2 \sin \alpha \frac{\partial g^{(2)}}{\partial \theta} \theta_{00} = 0$$

$$g^{(2)}_{\theta_{00}}(9,0) = 0$$

(V.2.8)

$$\frac{\partial g^{(2)}}{\partial \theta} \theta_{\theta 1} + 2 \sin \alpha \frac{g^{(2)}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha \frac{\partial g^{(2)}}{\partial \theta} \theta_{\theta 1} + 2 \cos \alpha \frac{\partial g^{(1)}}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial g^{(2)}}{\partial \theta} \theta_{\theta 1} + \sin \alpha (g_{\theta \theta 1}^{(2)} - g_{\theta \theta 1}^{(1)}) + 2 \sin \alpha \frac{\partial g^{(2)}}{\partial \theta} \theta_{\theta 1} + 2 \cos \alpha \frac{\partial g^{(1)}}{\partial \theta} = 0$$

$$g_{\theta \theta 1}^{(2)} - 2 \frac{\partial g^{(2)}}{\partial \theta} \theta_{\theta 1} = 0$$

(V.2.9)

$$\frac{\partial g^{(2)}}{\partial \theta} \theta_{\theta 2} + 2 \sin \alpha \frac{g^{(2)}}{\partial \theta} + 2 \sin \alpha \frac{\partial g^{(2)}}{\partial \theta} \theta_{\theta 2} + 2 \cos \alpha \frac{\partial g^{(1)}}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial g^{(2)}}{\partial \theta} \theta_{\theta 2} + \sin \alpha (g_{\theta \theta 2}^{(2)} - g_{\theta \theta 2}^{(1)}) + 2 \sin \alpha \frac{\partial g^{(2)}}{\partial \theta} \theta_{\theta 2} + 2 \cos \alpha \frac{\partial g^{(1)}}{\partial \theta} = 0$$

$$g_{\theta \theta 2}^{(2)} - 2 \frac{\partial g^{(2)}}{\partial \theta} \theta_{\theta 2} = 0$$

V.3.- METHODE DE RESOLUTION

On cherche d'abord les contraintes et après on calcule les déplacements.

Les conditions aux limites sur les faces $z = \pm h$ restant inchangées avec l'hypothèse H_4 , les équations V.2 4-5-6 et V.1. 2-6 sont celles utilisées dans l'hypothèse des coques minces du chapitre précédent. Nous aurons donc les résultats du chapitre précédent en compte.

V.3.1.- Résolution des systèmes V.2. (7-8-9)

De la dernière équation de ces relations, on tire la valeur de

$g_{\theta\theta l}^{(2)}(r, \theta)$ $l = 0, 1, 2$ qu'on porte dans la première et seconde équation des mêmes relations. On obtient alors des équations différentielles dont l'intégration est analogue à celles traitées dans le chapitre précédent.

Après résolution on obtient les résultats suivants :

$$g_{\theta\theta 0}^{(2)}(r, \theta) = \frac{G_0(\theta)}{r^2}, \quad g_{\theta\theta 0}^{(1)}(r, \theta) = 0$$

$$g_{\theta\theta 1}^{(2)}(r, \theta) = \frac{-1}{r \sin \alpha} \int r \times \frac{dG_1(\theta)}{d\theta} + G_1(\theta).$$

$$g_{\theta\theta 1}^{(1)}(r, \theta) = L^2 \frac{L^2}{2h} \frac{\partial}{\partial r} [P_1^+(r, \theta) - P_1^-(r, \theta)].$$

$$g_{\theta\theta 1}^{(2)}(r, \theta) = \frac{-1}{r^2 \sin \alpha} \frac{L^2}{2h} \left[\int \frac{\partial^2}{\partial r^2} (P_1^+(r, \theta) - P_1^-(r, \theta)) + \cos \alpha L g_{\theta\theta 0}^{(1)} + H_1(\theta) \right].$$

$$g_{\theta\theta 1}^{(1)}(r, \theta) = \frac{-1}{r} \frac{L^2}{2h} [P_1^+(r, \theta) - P_1^-(r, \theta)] + \frac{L}{L \sin \alpha} g_{\theta\theta 0}^{(1)} - \frac{1}{r \sin \alpha} \frac{\partial g_{\theta\theta 1}^{(2)}}{\partial r} + H_1(\theta).$$

$$g_{\theta\theta 2}^{(2)}(r, \theta) = 2L \frac{\partial}{\partial r} [P_2^+(r, \theta) + P_2^-(r, \theta)].$$

$$g_{\theta\theta 2}^{(1)}(r, \theta) = \frac{-1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \alpha} \int \frac{\partial^2}{\partial r^2} (P_2^+(r, \theta) + P_2^-(r, \theta)) dr + \frac{2L}{r \sin \alpha} g_{\theta\theta 1}^{(1)} \right] + H_2(\theta)$$

V.3.2.- Détermination des déplacements

A l'aide des solutions précédentes pour les contraintes, on trouve par intégration des relations V.1.5, V.1.7 et V.1.8 les résultats suivants sur les déplacements

$$c_{30}^{(2)}(s, \theta) = \frac{2}{E} \int (g_{230}^{(2)} - \nu g_{\theta\theta 0}^{(2)}) ds + c_0(\theta).$$

$$c_{\theta 0}^{(2)}(s, \theta) = \frac{2}{E} \int \left[-\frac{1}{2 \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \theta} \int (g_{230}^{(2)} - \nu g_{\theta\theta 0}^{(2)}) ds + \frac{dc_0(\theta)}{d\theta} \frac{E}{2} + \frac{2(1+\nu)}{L} g_{2\theta 0}^{(2)} \right] ds + c_1(\theta).$$

$$c_{3\theta}^{(2)}(s, \theta) = 2 \operatorname{tg} \alpha \left[\frac{1-\nu^2}{E} g_{\theta\theta 0}^{(2)} \left[\frac{\partial c_{\theta 0}^{(2)}}{\partial \theta} \frac{1}{2 \sin \alpha} + \frac{c_{\theta 0}^{(2)}}{2} + \nu \frac{\partial c_{30}^{(2)}}{\partial \theta} \right] \right]$$

$$c_{31}^{(2)}(s, \theta) = \frac{2}{E} \int (g_{231}^{(2)} - \nu g_{\theta\theta 1}^{(2)}) ds + D_0(\theta)$$

$$c_{\theta 1}^{(2)}(s, \theta) = \frac{2}{E} \int \left(-\frac{1}{2 \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \theta} \int (g_{231}^{(2)} - \nu g_{\theta\theta 1}^{(2)}) ds + \frac{E}{2} \frac{dD_0(\theta)}{d\theta} + \frac{2(1+\nu)}{E} g_{2\theta 1}^{(2)} \right) ds + D_1(\theta).$$

$$c_{3\theta}^{(2)}(s, \theta) = 2 \operatorname{tg} \alpha \left[\frac{1-\nu^2}{E} g_{\theta\theta 1}^{(2)} \left(\frac{1}{2 \sin \alpha} \frac{\partial c_{\theta 1}^{(2)}}{\partial \theta} + \frac{D_0(\theta)}{2} + \nu \frac{\partial c_{31}^{(2)}}{\partial \theta} \right) \right]$$

$$c_{32}^{(2)}(s, \theta) = \frac{2}{E} \int (g_{232}^{(2)} - \nu g_{\theta\theta 2}^{(2)}) ds + E_0(\theta)$$

$$c_{\theta 2}^{(2)}(s, \theta) = \frac{2}{E} \int \left(-\frac{1}{2 \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \theta} \int (g_{232}^{(2)} - \nu g_{\theta\theta 2}^{(2)}) ds + E \frac{dE_0}{d\theta} + \frac{2(1+\nu)}{E} g_{2\theta 2}^{(2)} \right) ds + E_1(\theta).$$

$$c_{3\theta}^{(2)}(s, \theta) = 2 \operatorname{tg} \alpha \left[\frac{1-\nu^2}{E} g_{\theta\theta 2}^{(2)} \left(\frac{1}{2 \sin \alpha} \frac{\partial c_{\theta 2}^{(2)}}{\partial \theta} + \frac{E_0(\theta)}{2} + \nu \frac{\partial c_{32}^{(2)}}{\partial \theta} \right) \right]$$

V.4.- CONDITIONS AUX LIMITES SUR LES BORDS

Sous l'hypothèse H^4 , les conditions aux bords $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0$ et $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0 + \mathfrak{z}_1$ s'écrivent respectivement avec les relations IV.6.5-6 et IV.6.9-10.

$$R_{\theta d_1}(\theta, \mathfrak{z}) = \overline{\mathfrak{r}}_{\theta d_1}^{(0)}(\theta) + \frac{h}{L} \overline{\mathfrak{r}}_{\theta \theta d_1}^{(1)}(\theta) + \frac{h^2}{L^2} \overline{\mathfrak{r}}_{\theta \theta \theta d_1}^{(2)}(\theta) + \\ \frac{\mathfrak{z}}{L} \left(\overline{\mathfrak{r}}_{\theta \theta d_1}^{(1)}(\theta) + \frac{h}{L} \overline{\mathfrak{r}}_{\theta \theta d_1}^{(2)}(\theta) \right) + \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{z}^2}{L^2} \overline{\mathfrak{r}}_{\theta \theta d_1}^{(2)}(\theta).$$

$$R_{\mathfrak{z} d_1}(\theta, \mathfrak{z}) = \overline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{z} d_1}^{(0)} + \frac{h}{L} \overline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{z} \theta d_1}^{(1)} + \frac{h^2}{L^2} \overline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{z} \theta \theta d_1}^{(2)} + \\ \frac{\mathfrak{z}}{L} \left(\overline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{z} \theta d_1}^{(1)} + \frac{h}{L} \overline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{z} \theta d_1}^{(2)} \right) + \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{z}^2}{L^2} \overline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{z} \theta d_1}^{(2)}.$$

$$R'_{\theta d_2}(\theta, \mathfrak{z}) = \overline{\mathfrak{r}}_{\theta d_2}^{(0)}(\theta) + \frac{h}{L} \overline{\mathfrak{r}}_{\theta \theta d_2}^{(1)}(\theta) + \frac{h^2}{L^2} \overline{\mathfrak{r}}_{\theta \theta \theta d_2}^{(2)}(\theta) + \\ \frac{\mathfrak{z}}{L} \left(\overline{\mathfrak{r}}_{\theta \theta d_2}^{(1)}(\theta) + \frac{h}{L} \overline{\mathfrak{r}}_{\theta \theta d_2}^{(2)}(\theta) \right) + \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{z}^2}{L^2} \overline{\mathfrak{r}}_{\theta \theta d_2}^{(2)}(\theta)$$

$$R'_{\mathfrak{z} d_2}(\theta, \mathfrak{z}) = \overline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{z} d_2}^{(0)}(\theta) + \frac{h}{L} \overline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{z} \theta d_2}^{(1)}(\theta) + \frac{h^2}{L^2} \overline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{z} \theta \theta d_2}^{(2)}(\theta) + \\ \frac{\mathfrak{z}}{L} \left(\overline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{z} \theta d_2}^{(1)}(\theta) + \frac{h}{L} \overline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{z} \theta d_2}^{(2)}(\theta) \right) + \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{z}^2}{L^2} \overline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{z} \theta d_2}^{(2)}(\theta).$$

$$S_{\theta d_1}(\theta, \mathfrak{z}) = -\overline{\mathfrak{r}}_{\theta}(\theta, \mathfrak{z}) \cos \alpha + \sin \alpha \overline{\mathfrak{r}}_{\theta \mathfrak{z}}(\theta, \mathfrak{z}).$$

$$S_{\mathfrak{z} d_1}(\theta, \mathfrak{z}) = -\cos \alpha \overline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{z} \theta}(\theta, \mathfrak{z}) + \sin \alpha \overline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{z} \mathfrak{z}}(\theta, \mathfrak{z})$$

$$S'_{\theta d_2}(\theta, \mathfrak{z}) = \cos \alpha \overline{\mathfrak{r}}_{\theta}(\theta, \mathfrak{z}) - \sin \alpha \overline{\mathfrak{r}}_{\theta \mathfrak{z}}(\theta, \mathfrak{z})$$

$$S'_{\mathfrak{z} d_2}(\theta, \mathfrak{z}) = \cos \alpha \overline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{z} \theta}(\theta, \mathfrak{z}) - \sin \alpha \overline{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{z} \mathfrak{z}}(\theta, \mathfrak{z})$$

Par identification de chaque coefficient, on trouve les différentes constantes d'intégrations issues des contraintes.

Remarques

De manière générale, pour avoir la solution à l'ordre m ;

i) a) On dispose respectivement de

* $3(m+1)(m+2) - 3$ et $\frac{3}{2}(m+1)(m+2)$ inconnues de contraintes et de déplacements et

* $\frac{3}{2}(m+1)(m+2)$ et $3(m+1)^2$ relations issues des équations d'équilibre et de la loi de Hooke; soit $3m$ inconnues surabondantes.

b) On supposera que tous les coefficients relatifs aux contraintes

($\sigma_{\theta z}$, σ_{rz} , σ_{zz}) peuvent être complètement déterminées par la linéarisation des conditions aux limites en $z = \pm h$. On obtient alors un système de $\frac{3}{2}(m+1)(m+2)$ équations avec autant d'inconnues. On en déduit les déplacements une fois les contraintes déterminées.

ii) On peut aussi chercher les déplacements de membrane à l'ordre m à partir des équations de Navier correspondantes au prix d'un calcul complexe des racines du déterminant caractéristique qui est un polynôme de degré $4(m+1)$. On en déduit ensuite les contraintes.

CHAPITRE VI

COQUES CHARGÉES SYMÉTRIQUEMENT PAR
RAPPORT A LEUR AXE DE RÉVOLUTION.

En pratique on rencontre des problèmes où une coque conique se prolonge par une coque cylindrique et est soumise à l'action de forces réparties symétriquement par rapport à leur axe de révolution commun. La distribution de contraintes dans un réservoir formé d'une coque conique et d'une coque cylindrique, soumis à la pression interne d'un liquide ou d'un gaz en constitue un exemple.

Si l'on traite à part le problème de fluide pesant (ce qui est possible dans le cadre de l'élasticité linéaire) le problème admet une symétrie de révolution. Il est classique de rechercher une solution indépendante de l'angle polaire θ .

On examinera les conditions à la jonction cône-cylindre une fois faite l'analyse des contraintes et les déplacements correspondants calculés pour la partie conique et la partie cylindrique respectivement.

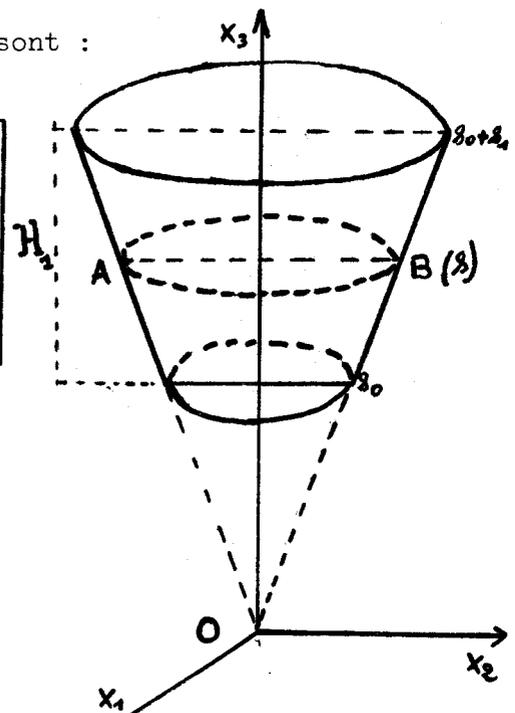
VI.1.- COQUE CONIQUE SOUMISE A LA PRESSION D'UN LIQUIDE

Considérons un réservoir tronconique de révolution rempli de liquide de poids spécifique γ sur une hauteur $H_1 = S_1 \cos \alpha$. Les composantes non nulles des forces de pression au niveau du parallèle AB sont :

(VI.1.1)

$$P_\theta(r) = P_\phi(r) = 0$$

$$P_z(r) = \gamma \cos \alpha (S_1 + S_0 - r^2)$$



VI.1.1.- CONTRAINTES ET DEPLACEMENTS DE MEMBRANE

On en déduit à l'aide des données sur le chargement les contraintes usuelles de membrane

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^{(0)}(s) &= \frac{\gamma s \sin \alpha}{2h} [s_1 + s_0 - s] \\ \sigma_{ss}^{(0)}(s) &= \frac{\gamma s \sin \alpha}{2h} \left[\frac{s_1 + s_0}{2} - \frac{s}{3} \right] + \frac{A_0}{s} \end{aligned}$$

$\sigma_{\theta\theta}^{(0)}(0)$ et $\sigma_{ss}^{(0)}(A)$ représenteront les contraintes réelles dans le réservoir si les appuis sont tels que les réactions sont tangentes au méridien. Habituellement les supports sont tels que les réactions appliquées au réservoir sont verticales; les composantes horizontales des contraintes dans la direction $\vec{e}_s (\sigma_{ss}^{(0)}(A))$ sont alors absorbées par un anneau de renforcement. Il se produit une flexion locale de la coque sur l'anneau de renforcement.

Une fois les contraintes de membrane déterminées (elles vérifient automatiquement les équations de BELTRAMI; ce qui assure l'existence de déplacements correspondants), nous en déduisons les composantes de déplacements de membrane.

$$\begin{aligned} v(s) &= \frac{\gamma s^2 \sin \alpha}{2h E} \left[(s_1 + s_0) \left(\frac{1}{2} - \nu \right) + \frac{2}{3} \left(\nu - \frac{1}{3} \right) \right] + \frac{A_0}{E} \log s + V_0 \\ w(s) &= \frac{\gamma s^2 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha}{2h E} (\nu + 1) \left[\frac{s_1 + s_0}{2} - \frac{2}{3} s \right] - \operatorname{tg} \alpha \left[\frac{A_0}{E} (1 + \log s) \right] \\ &\quad - \operatorname{tg} \alpha V_0. \end{aligned}$$

VI.1.2.- CONTRAINTES ET DEPLACEMENTS A L'ORDRE 1

De même avec les données VI.1.1 et à l'aide des formules des paragraphes IV.4.2 et IV.4.3 on trouve :

$$(VI.1.4) \quad \begin{aligned} q_{\theta\theta_1}^{(1)}(s) &= \frac{\gamma L \cos \alpha}{h} [s_1 + s_0 - s] \\ q_{ss_1}^{(1)}(s) &= \frac{\gamma L \cos \alpha}{2h} \left[\frac{3}{2} (s_1 + s_0) - \frac{2}{3} s \right] - \frac{L \cos \alpha}{s \sin \alpha} \frac{A_0}{s} + \frac{A_1^{(1)}}{s} \end{aligned}$$

Pour avoir les constantes d'intégration à l'ordre 1 sur les contraintes il suffit de changer la pression interne en son opposée, ce qui donne :

$$(VI.1.5) \quad \begin{aligned} q_{\theta\theta_0}^{(1)}(s) &= - \frac{\gamma L \cos \alpha}{2h} [s_1 + s_0 - s] \\ q_{ss_0}^{(1)}(s) &= - \frac{\gamma L \cos \alpha}{2h} \left[s_1 + s_0 - \frac{s}{2} \right] + \frac{A_0^{(1)}}{s} \end{aligned}$$

Les déplacements correspondants aux contraintes $q_{\theta\theta_1}^{(1)}$, $q_{ss_1}^{(1)}$, $q_{ss_0}^{(1)}$ s'écrivent grâce aux formules (V.1.3) :

$$(VI.1.6) \quad \begin{aligned} c_{s_1}^{(1)}(s) &= \frac{\gamma L \Delta \cos \alpha}{2h E} \left[\frac{s_1 + s_0}{2} \left(\frac{3}{2} - 2\nu \right) - s \left(\frac{1}{3} - \nu \right) \right] + \frac{L \cos \alpha}{s \sin \alpha} \frac{A_0}{E} \\ &\quad + \frac{A_1^{(1)}}{E} \log s + C_1^{(1)} \\ c_{s_0}^{(1)}(s) &= \frac{\gamma L s \sin \alpha}{2h E} \left[\frac{s_1 + s_0}{2} (1 + \nu) - \frac{s}{3} (\nu + 5) \right] - \frac{(1 + \nu) A_0}{E} \frac{L}{s} \\ &\quad - \operatorname{tg} \alpha \left[\frac{A_1^{(1)}}{E} (\nu + \log s) + C_1^{(1)} \right] \end{aligned}$$

Dans l'hypothèse de coques minces on a les résultats suivants pour :

→ les contraintes

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\theta\theta}(r, z) &= \frac{\gamma (s_1 + s_0 - s)}{2h} \left[s \sin \alpha - \cos \alpha (h - z) \right] \\
 \sigma_{zz}(r, z) &= \frac{\gamma s \sin \alpha}{2h} \left(\frac{s_1 + s_0}{2} - \frac{z}{3} \right) - \frac{\gamma \cos \alpha}{2} (s_1 + s_0 - \frac{z}{2}) \\
 &\quad + \frac{1}{s} \left(\frac{h}{L} A_0^{(1)} + \frac{z}{L} A_1^{(2)} \right) - \frac{z \cos \alpha}{s} \frac{A_0}{s} + \\
 &\quad \frac{\gamma z \cos \alpha}{2h} \left[\frac{z}{2} (s_1 + s_0) - \frac{z}{3} s \right]. \\
 \sigma_{zz}(r, z) &= \frac{\gamma \cos \alpha}{2h} [z - h] \times [s_1 + s_0 - z]. \\
 \sigma_{\theta z}(r, z) &= \sigma_{z\theta}(r, z) = \sigma_{rz}(r, z) = 0
 \end{aligned}$$

(VI.1.7)

→ les déplacements

$$\begin{aligned}
 u_{\theta}(r, z) &= 0 \\
 u_z(r, z) &= \frac{\gamma s^2 \sin \alpha}{2h E} \left[(s_1 + s_0) \left(\frac{z}{2} - \nu \right) + \frac{s}{3} \left(\nu - \frac{z}{3} \right) \right] + \frac{z}{s} \frac{A_0}{E} \cos \alpha \\
 &\quad - \frac{\gamma s \cos \alpha}{E} \left[(s_1 + s_0) (1 - \nu) - \frac{s}{3} \left(\frac{z}{2} - \nu \right) \right] + \frac{\gamma s z \cos \alpha}{2h E} \times \\
 &\quad \left[(s_1 + s_0) \left(\frac{z}{2} - 2\nu \right) - s \left(\frac{z}{3} - \nu \right) \right] + \nu_0 + \frac{h}{L} \frac{A_0^{(1)}}{E} + \frac{z}{L} \frac{A_1^{(2)}}{E} \\
 &\quad + \log s \left[\frac{A_0}{E} + \frac{h}{L} \frac{A_0^{(1)}}{E} + \frac{z}{L} \frac{A_1^{(2)}}{E} \right].
 \end{aligned}$$

(VI.1.8)

$$\begin{aligned}
 u_3(s, z) &= \frac{\gamma s^2 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha (1+\nu)}{2h E} \left[\frac{s_1 + s_0}{2} - \frac{2}{3} s \right] + \frac{\gamma s \sin \alpha}{E} x \\
 &\quad \left[2(s_1 + s_0)(1-\nu) - \frac{2}{4} s \right] - \frac{(1+\nu) A_0}{E s} \frac{3}{h} + \frac{\gamma s \sin \alpha}{2h E} x \\
 &\quad \left[(s_1 + s_0) \left(\frac{1+\nu}{2} \right) - \frac{2}{3} (\nu + 5) \right] = \left(\frac{A_0}{E} + \nu \left(\frac{s}{L} C_0^{(2)} + \frac{2}{L} C_1^{(1)} \right) \operatorname{tg} \alpha \right. \\
 &\quad \left. - \operatorname{tg} \alpha \left[\left(\nu_0 + \frac{h}{L} C_0^1 + \frac{3}{L} C_1^1 \right) + \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{A_0}{E} + \frac{h}{L} \frac{A_0^{(1)}}{E} \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + \frac{3}{L} \frac{A_1^{(1)}}{E} \right) \right] \right].
 \end{aligned}$$

VI.1.3.- CONTRAINTES ET DEPLACEMENTS A L'ORDRE 2

A l'aide des expressions V.3.1-3 et de VI.1.1 les contraintes s'écrivent après résolution :

$$q_{002}^{(2)}(s) = q_{001}^{(2)}(s) = q_{000}^{(2)}(s) = 0; \quad q_{880}^{(2)}(s) = \frac{A_0^{(2)}}{s}$$

$$\begin{aligned}
 q_{882}^{(2)}(s) &= - \frac{\gamma L^2 \omega^2 \alpha}{2h s} \left[3(s_1 + s_0) - \frac{4}{3} s \right] + \frac{\gamma L^2 \omega^2 \alpha}{s^2 \sin^2 \alpha} \frac{A_0}{s} \\
 &\quad - \frac{L \cos \alpha}{s \sin \alpha} \frac{A_1^{(1)}}{s} + \frac{A_2^{(2)}}{s}.
 \end{aligned}$$

$$q_{881}^{(2)}(s) = \frac{\gamma L^2 \omega^2 \alpha}{2h s \sin \alpha} \left[s_1 + s_0 - \frac{s}{2} \right] - \frac{L \cos \alpha}{s \sin \alpha} \frac{A_0^{(1)}}{s} + \frac{A_2^{(2)}}{s}.$$

(VI.1.9)

Les déplacements correspondants en vertu de la loi de Hooke sont

alors :

$$C_{\Delta_1}^{(2)}(\Delta) = \log(\Delta) \left[\frac{\gamma L^2 \cos^2 \alpha}{2R E \sin \alpha} (\Delta_1 + \Delta_0) + \frac{A_1^{(2)}}{E} \right] + C_1^{(2)} + \frac{L}{s \operatorname{tg} \alpha} \frac{A_0^{(1)}}{E} - \frac{\gamma L^2 \cos^2 \alpha}{4R E \sin \alpha} \delta$$

$$C_{\delta_1}^{(2)}(\Delta) = \frac{\gamma L^2 \cos \alpha}{2R E} \left[-\nu (\Delta_1 + \Delta_0) - \frac{\Delta}{2} (\nu - 1) \right] - \frac{A_0^{(1)}}{E} \frac{L}{\Delta} (1 - \nu)$$

$$- \operatorname{tg} \alpha \left\{ \log \Delta \left[\frac{\gamma L^2 \cos^2 \alpha}{2R E \sin \alpha} (\Delta_1 + \Delta_0) \right] + (1 + \nu) \frac{A_1^{(2)}}{E} + C_1^{(2)} \right\}$$

$$(IV.1.10) \quad C_{\Delta_2}^{(2)}(\Delta) = - \frac{\gamma L^2 \cos \alpha}{E R \sin \alpha} \left[\frac{3}{2} (\Delta_1 + \Delta_0) \log \Delta - \frac{2}{3} \Delta \right] + \frac{A_2^{(2)}}{E} \log(\Delta)$$

$$+ \frac{L}{\Delta E} \operatorname{tg} \alpha \left[A_0 \frac{L}{\Delta} + A_1^{(1)} \right] + C_2^{(2)}$$

$$C_{\delta_2}^{(2)}(\Delta) = \frac{\gamma L^2 \cos \alpha (1 + \nu)}{E R} \left[(\Delta_0 + \Delta_1) - \frac{2}{3} \Delta \right] - \frac{L^2 A_0}{E \Delta^2} (1 + \nu \cdot \operatorname{tg} \alpha)$$

$$- \frac{1 + \nu}{E} \cdot \left[A_1^{(1)} - A_2^{(2)} \log \Delta \operatorname{tg} \alpha \right] - C_2^{(2)} \operatorname{tg} \alpha.$$

Pour les coques peu "épaisses" les contraintes et les déplacements en vertu des formules V.1.1 s'écrivent :

$$\sigma_{\theta\theta}(\Delta, z) = \frac{\gamma (\Delta_1 + \Delta_0 - \Delta)}{2h} \left[s \sin \alpha - (h - 2z) \cos \alpha \right].$$

$$\sigma_{zz}(\Delta, z) = \frac{\gamma (z - h)}{2h} (\Delta_1 + \Delta_0 - \Delta) \cdot \cos \alpha.$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{s}(0, \beta) &= \frac{\gamma \cos \alpha (s_1 + s_0)}{2} \left[-1 + \frac{3}{h} \left(\frac{3}{2} + \frac{2h \cot \alpha}{s} \right) - \frac{3}{2} \frac{s^2}{h s} \right] \\
 &+ \frac{\gamma \Delta s \sin \alpha}{12h} [3(s_1 + s_0) - 2s] + \frac{h}{L} \left(\frac{A_0^{(1)}}{s} + \frac{h}{L} \frac{A_0^{(2)}}{s} \right) \\
 &+ \frac{3}{L} \left[\frac{h}{L} \left(\frac{A_1^{(2)}}{s} - \frac{A_0^{(1)}}{s} \cdot \frac{L}{s \sin \alpha} \right) - \frac{L \cos \alpha}{s} \cdot \frac{A_0 + A_1^{(1)}}{s} \right] \\
 &+ \frac{3^2}{2L^2} \left[\frac{A_2^{(2)}}{s} - \cot \alpha \cdot \frac{A_0}{s} \left(1 - \frac{L}{s} \cot \alpha \right) \right] + \frac{h^2}{L^2} \frac{A_0^{(2)}}{s}.
 \end{aligned}$$

$$\sqrt{s}_0(0, \beta) = \sqrt{s}_1(0, \beta) = \sqrt{s}_2(0, \beta) = 0$$

$$\begin{aligned}
 U_2(s, \beta) &= \frac{\gamma s^2 \sin \alpha}{2hE} \left[(s_0 + s_1) \left(\frac{1}{2} - \nu \right) + \frac{s}{3} \left(\nu - \frac{1}{3} \right) \right] + \frac{3}{s} \frac{A_0}{E} \cos \alpha \\
 &- \frac{\gamma s \cos \alpha}{E} \left[(s_1 + s_0) \left\{ (1 - \nu) + \frac{3}{2h} \left(\frac{3}{2} - 2\nu \right) + \operatorname{tg} \alpha \left(\log s - \frac{3}{4} \frac{3h}{h s} \right) \right\} \right. \\
 &\quad \left. - s \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \nu \right) + \frac{3}{2h} \left(\frac{1}{3} - \nu \right) - \frac{3^2}{2hs} \right\} + \frac{3 \cot \alpha}{4} \right] \\
 &+ V_0 + \frac{h}{L} C_0^{(1)} + \frac{3}{L} C_1^{(1)} + \log s \left[\frac{A_0}{E} + \frac{h}{L} \cdot \frac{A_0^{(1)}}{E} + \frac{3}{L} \frac{A_1^{(1)}}{E} \right] \\
 &+ \frac{3^2}{2L^2} \left[\log s \cdot \frac{A_2^{(2)}}{E} + C_2^{(2)} + \frac{L}{s} \cot \alpha \left(\frac{A_0}{E} \cdot \frac{L}{s} + \frac{A_1^{(1)}}{E} \right) \right] + \frac{h^2}{L^2} \frac{A_0^{(2)}}{E} \log s.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_3(0, \beta) &= \frac{\gamma \Delta s \sin \alpha}{E} \left[(s_1 + s_0) \left\{ 2(1 - \nu) + \frac{3}{2h} \operatorname{tg} \alpha + \frac{3}{2h} \left(\frac{\nu + 1}{2} \right) \right\} - s \left\{ \frac{3}{4} + \frac{3}{2h} \left(\frac{\nu + 5}{3} \right) - \frac{2s}{3h} \operatorname{tg} \alpha \right\} \right] \\
 &+ \frac{\gamma \cos \alpha}{E} \left[(s_1 + s_0) \left\{ -3(\nu + \log s \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha) + (1 + \nu) \frac{3^2}{2h} \right\} - s \left\{ 3 \left(\frac{\nu - 1}{2} \right) - \frac{3^2}{2h} (1 + \nu) \right\} \right] \\
 &- \frac{3^2}{2L^2} \left[\frac{A_0}{E} \cdot \frac{L^2}{s^2} \operatorname{tg} \alpha \cdot (1 + \nu) - \frac{A_1^{(1)}}{E} - \left(\frac{A_2^{(2)}}{E} \log s + C_2^{(2)} \right) \operatorname{tg} \alpha \right] - \operatorname{tg} \alpha \frac{h^2}{L^2} \frac{A_0^{(2)}}{E} \log s \\
 &- \operatorname{tg} \alpha \left[\frac{A_0}{E} + V_0 + \frac{h}{L} \left[(1 + \nu) \log s + \log s \cdot \frac{A_0^{(1)}}{E} \right] + \frac{3}{L} \left[(1 + \nu) C_1^{(1)} + \log s \cdot \frac{A_1^{(1)}}{E} \right] \right]
 \end{aligned}$$

ou $(A_0, A_0^{(1)}, A_1^{(1)}, A_0^{(2)}, A_1^{(2)}, A_2^{(2)})$ et $(V_0, C_0^{(1)}, C_1^{(1)}, C_0^{(2)}, C_1^{(2)}, C_2^{(2)})$ désignent respectivement les nouvelles constantes d'intégration sur les contraintes et les déplacements.

VI.1.11

VI.1.12

. A l'ordre m de résolution, on dispose de $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ constantes d'intégration sur les contraintes et les déplacements.

. A l'aide des données en $s = s_0$ (linéarisées) écrites sous la forme de la solution, on obtient pour identification les différentes constantes d'intégration sur les contraintes et les déplacements.

. La même démarche sera suivie pour la détermination des différentes constantes d'intégration issues de la résolution des équations du cylindre du paragraphe suivant.

VI.2.- COQUE CYLINDRIQUE SOUMISE A LA PRESSION D'UN LIQUIDE

VI.2.1.- Equations d'une coque cylindrique

On obtient les équations d'une coque cylindrique en partant de celles de la coque conique en remplaçant dans ces dernières, le rayon du parallèle de la surface moyenne $R \sin \alpha$ par $R \cos \alpha$ et de prendre la limite pour $\alpha = 0$. Ainsi on a respectivement dans la base locale ($\vec{e}_\theta, \vec{e}_x, \vec{e}_r$).

→ les équations d'équilibre

(VI.2.1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2 \sigma_{r\theta} \right] + \frac{\partial \sigma_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \sigma_{\theta x}}{\partial \theta} + \sigma_{rx} \right] + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_{rz} - \sigma_{\theta\theta} \right] + \frac{\partial \sigma_{rx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

→ les relations contraintes-déformations

(VI.2.2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right] &= \frac{1}{E} \left[\sigma_{\theta\theta} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \right] \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial u_x}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial u_\theta}{\partial x} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{x\theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{rz} \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) \right] \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{xz} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_{rz} - \nu (\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) \right] \end{aligned}$$

→ les conditions aux limites sur les faces $z = \pm e$.

(VI.2.3a)

$$\begin{aligned} g_{\theta z_1}^{(1)}(x, \theta) &= \frac{L'}{2e} [P_{\theta}^+(x, \theta) + P_{\theta}^-(x, \theta)] \\ g_{x z_1}^{(1)}(x, \theta) &= \frac{L'}{2e} [P_x^+(x, \theta) + P_x^-(x, \theta)] \\ g_{z z_1}^{(1)}(x, \theta) &= \frac{L'}{2e} [P_z^+(x, \theta) + P_z^-(x, \theta)] \end{aligned}$$

(VI.2.3b)

$$\begin{aligned} g_{\theta z_0}^{(1)}(x, \theta) &= \frac{L'}{2e} [P_{\theta}^+(x, \theta) - P_{\theta}^-(x, \theta)] \\ g_{x z_0}^{(1)}(x, \theta) &= \frac{L'}{2e} [P_x^+(x, \theta) - P_x^-(x, \theta)] \\ g_{z z_0}^{(1)}(x, \theta) &= \frac{L'}{2e} [P_z^+(x, \theta) - P_z^-(x, \theta)] \end{aligned}$$

où $r = R + z$ et l'indice z devient r .

\vec{e}_{θ} vecteur unitaire tangent au cercle parallèle.

\vec{e}_x vecteur unitaire tangent à la génératrice du cylindre.

\vec{e}_z la normale unitaire au cylindre.

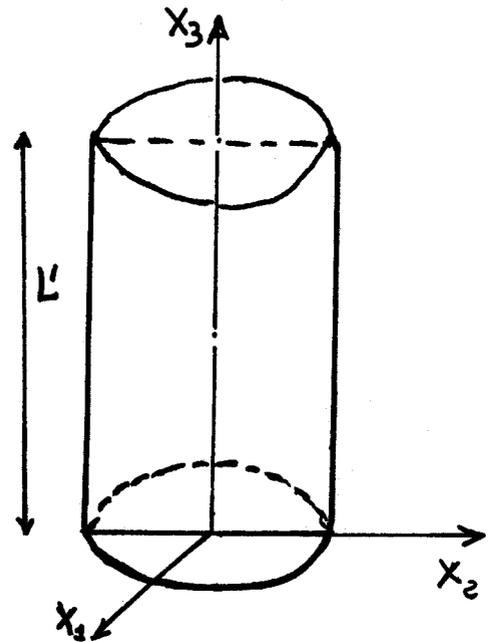
e et L' désignent respectivement la demi-épaisseur et une longueur caractéristique du cylindre (la hauteur totale).

Dans le cas de chargement symétrique par rapport à l'axe vertical du cylindre les composantes radiales de forces de pression dues au liquide de poids spécifique γ sont :

(VI.2.4)

$$P_0(x) = P_x(x) = 0$$

$$P_2(x) = -\gamma(H-x)$$



où $L' = H$ hauteur remplie de liquide du cylindre.

Les équations correspondantes aux différents ordres de résolution deviennent alors respectivement :

à l'ordre 0

(VI.2.5)

$$\frac{R}{dx} \nabla_{xx}^{(0)} + \frac{R}{L'} \frac{g^{(1)}}{r_{x_1}}(x) = 0$$

$$\nabla_{\theta\theta}^{(0)}(x) - \frac{R}{L'} \frac{g^{(1)}}{r_{r_1}}(x) = 0$$

à l'ordre 1

(VI.2.6)

$$R \frac{dg^{(1)}}{dx} r_{x_1} + L' \frac{d\nabla_{x\theta}^{(0)}}{dx} + 3 \frac{g^{(1)}}{r_{\theta_1}}(x) = 0$$

$$R \frac{dg^{(1)}}{dx} r_{x_1} + L' \frac{d\nabla_{xx}^{(0)}}{dx} + 2 \frac{g^{(1)}}{r_{x_1}}(x) = 0$$

$$2 \frac{g^{(1)}}{r_{r_1}} - \frac{g^{(1)}}{r_{\theta_1}}(x) + R \frac{dg^{(1)}}{dx} r_{x_1} = 0$$

(VI.2.7)

$$R \frac{dg^{(2)}}{dx} x_{\theta 0} + 2g^{(1)}(x) = 0$$

$$R \frac{dg^{(1)}}{dx} x_{x 0} + g^{(2)}(x) = 0$$

$$R \frac{dg^{(2)}}{dx} x_{x 2 0} + g^{(2)} - g^{(1)}(x) = 0$$

à l'ordre 2

(VI.2.8)

$$R \frac{dg^{(2)}}{dx} x_{\theta 0} = 0$$

$$R \frac{dg^{(2)}}{dx} x_{x 0} = 0$$

$$g^{(2)}_{\theta \theta 0}(x) = 0$$

(VI.2.9)

$$R \frac{dg^{(2)}}{dx} x_{\theta 1} + L' \frac{dg^{(1)}}{dx} x_{\theta 0} = 0$$

$$R \frac{dg^{(2)}}{dx} x_{x 1} + L' \frac{dg^{(1)}}{dx} x_{x 0} = 0$$

$$g^{(2)}_{\theta \theta 1} - L' \frac{dg^{(2)}}{dx} x_{x 2 0} = 0$$

(VI.2.10)

$$R \frac{dg^{(2)}}{dx} x_{\theta 2} + 2L' \frac{dg^{(1)}}{dx} x_{\theta 1} = 0$$

$$R \frac{dg^{(2)}}{dx} x_{x 2} + 2L' \frac{dg^{(1)}}{dx} x_{x 1} = 0$$

$$-g^{(2)}_{\theta \theta 2} + 2L' \frac{dg^{(1)}}{dx} x = 0$$

VI.2.2.- Résolution des équations du cylindre

A l'aide du chargement donné en VI.2.4 on obtient avec les expressions

VI.2.3.

$$\begin{aligned}
 g_{r\theta r}^{(1)}(x) &= g_{r\theta\theta}^{(1)}(x) = 0 \\
 g_{\theta x r}^{(1)}(x) &= g_{\theta x\theta}^{(1)}(x) = 0 \\
 g_{r r r}^{(1)}(x) &= -g_{r r\theta}^{(1)}(x) = -\frac{\gamma L'(H-x)}{2e}
 \end{aligned}$$

(VI.2.11)

Portant ces valeurs dans les équations VI.2.5.10, nous obtenons les résultats suivants aux différents ordres pour les contraintes. On prendra nulles les constantes d'intégration issues de ces équations.

à l'ordre 0

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\theta\theta}^{(0)}(x) &= -\frac{\gamma H}{2e}(H-x) = \frac{H}{2e} P_2(x). \\
 \sigma_{\theta\theta}^{(1)}(x) &= 0, \quad \sigma_{xx}(x) = B_0 = \text{cte}
 \end{aligned}$$

(VI.2.12)

Remarque

La contrainte normale $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}(x)$ est directement liée à la pression du liquide qui règne dans la coque.

à l'ordre 1

(VI.2.13)

$$\begin{aligned}
 g_{\theta\theta_1}^{(1)}(x) &= -g_{\theta\theta_0}^{(1)}(x) = -\frac{\partial H}{\partial e}(H-x) \\
 g_{x\theta_1}^{(1)}(x) &= g_{x\theta_0}^{(1)}(x) = 0 \\
 g_{xx_1}^{(1)}(x) &= B_1^{(1)} \quad ; \quad g_{xx_0}^{(1)}(x) = B_0^{(1)}
 \end{aligned}$$

à l'ordre 2

On a après résolution des équations correspondantes :

(VI.2.14)

$$\begin{aligned}
 g_{\theta\theta_0}^{(2)}(x) &= g_{\theta\theta_1}^{(2)}(x) = g_{\theta\theta_2}^{(2)}(x) = 0 \\
 g_{x\theta_0}^{(2)}(x) &= g_{x\theta_1}^{(2)}(x) = g_{x\theta_2}^{(2)}(x) = 0 \\
 g_{\theta\theta_0}^{(2)}(x) &= B_0^{(2)} \quad , \quad g_{\theta\theta_1}^{(2)}(x) = B_1^{(2)} \quad , \quad g_{\theta\theta_2}^{(2)}(x) = B_2^{(2)}
 \end{aligned}$$

Une fois les contraintes connues, nous en déduisons à l'aide des lois de comportement les déplacements correspondants.

à l'ordre 0

(VI.2.15)

$$v(x) = \frac{x}{E} \left[B_0 + \nu \frac{\sigma H}{2e} \left(H - \frac{x}{2} \right) \right] + V_0$$

$$w(x) = -\frac{R}{E} \left[\nu B_0 + \frac{\sigma H}{2e} (H - x) \right]$$

à l'ordre 1

(VI.2.16)

$$C_{x_1}^{(1)}(x) = \frac{x}{E} \left[B_1^{(1)} + 3\nu \frac{\sigma H}{2e} \left(H - \frac{x}{2} \right) \right] + V_1^{(1)}$$

$$C_{x_1}^{(1)}(x) = -\frac{R}{E} \left[\nu B_1^{(1)} + (2 - \nu) \frac{\sigma H}{e} (H - x) \right]$$

(VI.2.17)

$$C_{x_0}^{(1)}(x) = \frac{x}{E} \left[B_0^1 - \nu \frac{\sigma H}{e} \left(H - \frac{x}{2} \right) \right] + V_0^{(1)}$$

$$C_{x_0}^{(1)}(x) = -\frac{R}{E} \left[\nu B_0^1 + (1 + \nu) \frac{\sigma H}{2e} (H - x) \right]$$

En définitif nous avons les résultats pour les coques cylindriques peu épaisses.

(VI.2.18)

$$\sigma_{\theta\theta}(x, z) = - \frac{\alpha(H-x)}{2e} [H+e - 2z].$$

$$\sigma_{zz}(x, z) = \frac{\alpha(H-x)}{2e} [e - z].$$

$$\sigma_{xx}(x, z) = B_0 + \frac{e}{H} B_0^{(1)} + \frac{z}{H} B_1^{(1)} + \frac{e^2}{H^2} B_0^{(2)} + \frac{e\alpha z}{H^2} + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{H^2} B_2^{(2)}.$$

(VI.2.19)

$$U_x(x, z) = \frac{x}{E} \left[\nu \left(1 + 2 \frac{z}{H} + \frac{e}{H} \right) \frac{\alpha H}{2e} (H - \frac{x}{2}) + B_0 + \frac{e}{H} B_0^{(1)} + \frac{z}{H} B_1^{(1)} + \frac{e^2}{H^2} B_0^{(2)} + \frac{e\alpha z}{H^2} B_1^{(2)} + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{H^2} B_2^{(2)} \right] + V_0 + \frac{e}{H} V_0^{(1)} + \frac{z}{H} V_1^{(1)}.$$

$$U_z(x, z) = - \frac{R}{E} \left[\frac{\alpha H}{2e} (H-x) \left(1 + 2 \frac{z}{H} + \frac{e}{H} \right) + \nu \left(B_0 + \frac{e}{H} B_0^{(1)} + \frac{z}{H} B_1^{(1)} + \frac{e^2}{H^2} B_0^{(2)} + \frac{e\alpha z}{H^2} B_1^{(2)} + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{H^2} B_2^{(2)} \right) \right].$$

VI.3.- JONCTIONS DE COQUES MINCES

VI.3.1.- L'analyse des contraintes à la jonction de deux coques de géométries différentes constitue l'un des problèmes communs dans l'étude des appareils à pression. Il s'agit de faire l'inventaire des contraintes et des moments de flexion à introduire pour assurer la continuité des déplacements et des rotations des différents points situés de part et d'autre de la jonction.

On ramènera tous les calculs qui vont suivre après le changement de variables (ρ, z) en (x, r) à la base locale orthonormée associée à la coque cylindrique (à la jonction). Ainsi on a :

$$\rho = r \sin \alpha + x \cos \alpha, \quad z = r \cos \alpha - x \sin \alpha. \quad \vec{e}_\rho(\rho, z) = \vec{e}_\theta(x, r)$$

$$\vec{e}_\rho = \cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_z, \quad \vec{n} = -\sin \alpha \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_z.$$

A l'aide de ce changement de base, les composantes du vecteur-déplacement et du tenseur des contraintes relatifs à la coque conique deviennent respectivement :

$$U_\theta(x, \theta, r); \quad \cos \alpha U_\rho(x, \theta, r) - \sin \alpha U_z(x, \theta, r); \quad \sin \alpha U_\rho(x, \theta, r) + \cos \alpha U_z(x, \theta, r)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(x, \theta, r); \quad \cos \alpha \sigma_{\rho\rho}(x, \theta, r) - \sin \alpha \sigma_{\rho z}(x, \theta, r);$$

$$\sin \alpha \sigma_{\rho\rho}(x, \theta, r) + \cos \alpha \sigma_{\rho z}(x, \theta, r);$$

$$\cos^2 \alpha \sigma_{\rho\rho}(x, \theta, r) - 2 \sin \alpha \cos \alpha \sigma_{\rho z}(x, \theta, r) + \sin^2 \alpha \sigma_{zz}(x, \theta, r);$$

$$\sin^2 \alpha \sigma_{\rho\rho}(x, \theta, r) + 2 \sin \alpha \cos \alpha \sigma_{\rho z}(x, \theta, r) + \cos^2 \alpha \sigma_{zz}(x, \theta, r);$$

$$(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sigma_{\rho z}(x, \theta, r) + \sin \alpha \cos \alpha (\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{zz}).$$

D'après les formules IV.6.9-10, les conditions aux bords deviennent :

$$S_{\theta}(x, \theta) = -\cos \alpha \sigma_{\theta\theta}(x, \theta) + \sin \alpha \sigma_{\theta z}(x, \theta)$$

$$S_x(x, \theta) = -[\cos^2 \alpha \sigma_{\theta\theta}(x, \theta) + \sin^2 \alpha \sigma_{zz}(x, \theta) - 2 \sin \alpha \cos \alpha \sigma_{\theta z}(x, \theta)]$$

$$S_z(x, \theta) = -[\sin^2 \alpha \sigma_{\theta\theta}(x, \theta) + \cos^2 \alpha \sigma_{zz}(x, \theta) + 2 \sin \alpha \cos \alpha \sigma_{\theta z}(x, \theta)].$$

De même le vecteur contrainte au bord inférieur de la coque cylindrique s'écrit :

$$\vec{T}(M, -\vec{e}_x) = -[\sigma_{x\theta} \vec{e}_{\theta} + \sigma_{xx} \vec{e}_x + \sigma_{zx} \vec{e}_z]$$

et le vecteur déplacement le long de ce même bord a pour expression :

$$\vec{U}'(M) = U_{\theta} \vec{e}_{\theta} + U_x \vec{e}_x + U_z \vec{e}_z$$

Les vecteurs rotations correspondants aux différents déplacements des points de la jonction des deux coques s'écrivent :

$$\vec{\omega}(M) = \left(\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_{\theta}}{\partial z} \right) \vec{e}_{\theta} ; \quad \vec{\omega}'(M) = \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \vec{e}_{\theta}$$

VI.3.2.- Condition de raccord

La condition naturelle de raccord imposerait l'égalité des déplacements et des rotations respectivement aux différents points situés aux bords des deux coques afin d'éviter toute déchirure de la coque complète à cet endroit. On devrait donc avoir :

$$\lim_{z \rightarrow z_1 + z_0} \vec{U}(z, z) = \lim_{x \rightarrow 0} \vec{U}'(x, z)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_1 + z_0} \vec{\omega}(z, z) = \lim_{x \rightarrow 0} \vec{\omega}'(x, z)$$

Ces conditions ne sont pas naturellement réalisées, pour y parvenir on peut introduire des contraintes et des moments de flexion pour éliminer les différences respectives observées.

Dans la pratique la surface moyenne d'une coque cylindro-conique de révolution est engendrée par la méridienne suivante :

- une génératrice du cône.
- un arc de cercle centré sur Ox_3 de rayon $\frac{r}{2}$ et
- une génératrice du cylindre d'axe Ox_3 .

(Car deux lignes se raccordent si elles admettent à leur point de jonction la même tangente).

La zone de raccord est une portion de coque torique où sont connus les contraintes et les déplacements en $\Psi = 0$ et $\Psi = -\alpha$.

On est alors ramené à l'étude de l'équilibre de cette portion de coque, à surface moyenne torique, sous les données ci-dessus.

Soit a le rayon de l'"axe" du tore

r le rayon de la section circulaire.

Soit M un point quelconque du tore de révolution d'axe Ox_3 il est repéré par :

θ angle des axes Ox et OT .

Ψ angle entre O_1T et O_1P (P projection de M sur la surface moyenne).

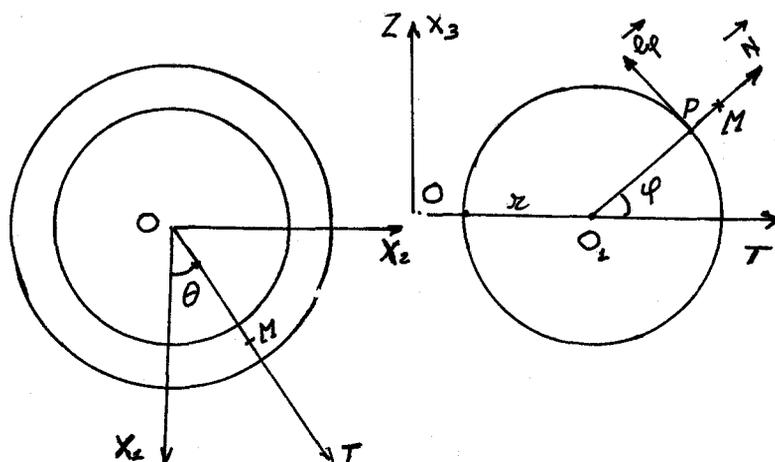
z côte du point M par rapport à la surface moyenne.

Dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de l'Espace affine E_3 , le vecteur \vec{OM} aura pour composantes :

$$x_1 = [a + (z+r) \cos \Psi] \cos \theta$$

$$x_2 = [a + (z+r) \cos \Psi] \sin \theta$$

$$x_3 = (z+r) \sin \Psi$$



La base locale orthonormée associée s'écrit :

$$\vec{e}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

$$\vec{e}_\psi = [-\sin\psi (\cos\theta, \sin\theta), \cos\psi] = -\sin\psi \vec{e}_2 + \cos\psi \vec{e}_x$$

$$\vec{e}_\beta = [\cos\psi (\cos\theta, \sin\theta), \sin\psi] = \cos\psi \vec{e}_2 + \sin\psi \vec{e}_x$$

Par application du théorème de la divergence : on trouve les équations d'équilibre d'une coque torique élastique exprimées dans la base locale orthonormée associée aux coordonnées "toriques".

$$\frac{1}{a+(b+r)\cos\psi} \left[\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} - 2\sin\psi \sigma_{\psi\theta} + \frac{a+3\cos\psi(r+z)}{b+r} \sigma_{\theta\beta} \right] + \frac{1}{b+r} \frac{\partial \sigma_{\psi\theta}}{\partial \psi} + \frac{\partial \sigma_{\theta\beta}}{\partial \beta} = 0.$$

$$\frac{1}{a+(b+r)\cos\psi} \left[\frac{\partial \sigma_{\psi\psi}}{\partial \theta} + \sin\psi (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\psi\psi}) + \frac{2a+3\cos\psi(b+r)}{b+r} \sigma_{\psi\beta} \right] + \frac{1}{b+r} \frac{\partial \sigma_{\psi\psi}}{\partial \psi} + \frac{\partial \sigma_{\psi\beta}}{\partial \beta} = 0.$$

$$\frac{1}{a+(b+r)\cos\psi} \left[\frac{\partial \sigma_{\theta\beta}}{\partial \theta} - (\sin\psi \sigma_{\psi\beta} + \cos\psi \sigma_{\theta\theta}) + \frac{a+2\cos\psi(b+r)}{b+r} \sigma_{\beta\beta} \right] + \frac{1}{b+r} \left(\frac{\partial \sigma_{\psi\beta}}{\partial \psi} - \sigma_{\psi\psi} \right) + \frac{\partial \sigma_{\beta\beta}}{\partial \beta} = 0$$

A l'aide d'un changement de base , on exprime les composantes du tenseur des contraintes de la coque torique en fonction de celles d'une coque cylindrique et d'une coque conique respectivement pour $\Psi = 0$ et $\Psi = -\alpha$.
Compte tenu de la symétrie du problème on obtient :

$$\sigma'_{\theta\theta}(\Psi, \beta) = \sigma_{\theta\theta}(\Psi, \beta).$$

$$\sigma'_{\theta\Psi}(\Psi, \beta) = \cos\Psi \sigma_{x\theta}(\Psi, \beta) - \sin\Psi \sigma_{r\theta}(\Psi, \beta).$$

$$\sigma'_{\theta\beta}(\Psi, \beta) = \sin\Psi \sigma_{x\theta}(\Psi, \beta) + \cos\Psi \sigma_{r\theta}(\Psi, \beta).$$

$$\sigma'_{\Psi\Psi}(\Psi, \beta) = \cos^2\Psi \sigma_{xx}(\Psi, \beta) + \sin^2\Psi \sigma_{zz}(\Psi, \beta) - 2 \sin\alpha \cos\alpha \sigma_{rx}(\Psi, \beta).$$

$$\sigma'_{\beta\beta}(\Psi, \beta) = \sin^2\Psi \sigma_{xx}(\Psi, \beta) + \cos^2\Psi \sigma_{zz}(\Psi, \beta) + 2 \sin\alpha \cos\alpha \sigma_{rx}(\Psi, \beta).$$

$$\sigma'_{\Psi\beta}(\Psi, \beta) = \sin\Psi \cos\Psi (\sigma_{xx} - \sigma_{zz}) + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \sigma_{rx}$$

$$\sigma'_{\theta\theta}(\Psi, \beta) = \sigma_{\theta\theta}(\Psi, \beta).$$

$$\sigma'_{\Psi\theta}(\Psi, \beta) = (\cos\alpha \cos\Psi - \sin\alpha \sin\Psi) \sigma_{\theta\theta}(\Psi, \beta) + (\sin\alpha \cos\Psi + \cos\alpha \sin\Psi) \sigma_{\theta\beta}(\beta, \Psi)$$

$$\sigma'_{\theta\beta}(\Psi, \beta) = (\sin\alpha \cos\Psi + \cos\alpha \sin\Psi) \sigma_{\theta\theta}(\Psi, \beta) + (\cos\alpha \cos\Psi - \sin\alpha \sin\Psi) \sigma_{\theta\beta}(\beta, \Psi)$$

$$\begin{aligned} \sigma'_{\Psi\Psi}(\Psi, \beta) &= (\cos\alpha \cos\Psi - \sin\alpha \sin\Psi)^2 \sigma_{\theta\theta} + (\sin\alpha \cos\Psi + \cos\alpha \sin\Psi) \sigma_{\theta\beta}(\beta, \Psi) \\ &\quad - 2 (\cos\alpha \cos\Psi - \sin\alpha \sin\Psi) (\sin\alpha \cos\Psi + \cos\alpha \sin\Psi) \sigma_{\theta\beta}(\Psi, \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma'_{\beta\beta}(\Psi, \beta) &= (\sin\alpha \cos\Psi + \cos\alpha \sin\Psi)^2 \sigma_{\theta\theta}(\beta, \Psi) + (\cos\alpha \cos\Psi - \sin\alpha \sin\Psi)^2 \sigma_{\theta\theta}(\Psi, \beta) \\ &\quad + 2 (\cos\alpha \cos\Psi - \sin\alpha \sin\Psi) (\sin\alpha \cos\Psi + \cos\alpha \sin\Psi) \sigma_{\theta\beta}(\Psi, \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma'_{\psi\psi}(\psi, \beta) &= (\cos\alpha \cos\psi - \sin\alpha \sin\psi) (\sin\alpha \cos\psi + \sin\psi \cos\alpha) (\sigma_{\xi\xi} - \sigma_{\beta\beta})(\psi, \beta) \\ &\quad + [(\cos\alpha \cos\psi - \sin\alpha \sin\psi)^2 (\sin\alpha \cos\psi + \sin\psi \cos\alpha)^2] \sigma_{\beta\beta}(\beta, \psi). \end{aligned}$$

Pour $\psi = 0$ et $\psi = -\alpha$, on a respectivement :

$$\sigma'_{\theta\theta}(\beta) = \sigma_{\theta\theta}(\beta).$$

$$\sigma'_{\theta\psi}(\beta) = \sigma_{\theta x}(\beta)$$

$$\sigma'_{\theta\beta}(\beta) = \sigma_{\theta\theta}(\beta)$$

$$\sigma'_{\psi\psi}(\beta) = \sigma_{xx}(\beta)$$

$$\sigma'_{\psi\beta}(\beta) = \sigma_{\theta x}(\beta)$$

$$\sigma'_{\beta\beta}(\beta) = \sigma_{\theta\theta}(\beta)$$

$$\sigma'_{\theta\theta}(\beta, \lambda = \lambda_1 + \lambda_0) = \sigma_{\theta\theta}(\beta)$$

$$\sigma'_{\theta\lambda}(\beta, \lambda = \lambda_1 + \lambda_0) = \sigma'_{\psi\theta}(\beta)$$

$$\sigma'_{\theta\beta}(\beta) = \sigma_{\theta\beta}(\beta, \lambda = \lambda_1 + \lambda_0)$$

$$\sigma'_{\psi\psi}(\beta) = \sigma_{\lambda\lambda}(\beta, \lambda = \lambda_1 + \lambda_0)$$

$$\sigma'_{\psi\beta}(\beta) = \sigma_{\beta\beta}(\beta, \lambda = \lambda_1 + \lambda_0).$$

$$\sigma'_{\beta\beta}(\beta) = \sigma_{\beta\beta}(\beta, \lambda = \lambda_1 + \lambda_0).$$

D'après les résultats précédents, les contraintes non nulles s'écrivent respectivement pour les coques cylindrique et conique :

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta}(x, z) &= -\frac{\sigma H}{2e} L [H + e - 2z]; \\ \sigma_{zz}(x, z) &= \frac{\sigma H}{2e} [e - z]; \\ \sigma_{xz}(x, z) &= B_0 + \frac{e}{H} B_0^{(1)} + \frac{z}{H} B_1^{(1)}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma'_{zz}(z) &= \frac{\sigma (\delta_1 + \delta_0)^2 \sin \alpha}{12h} - \frac{\sigma \cos \alpha}{4} (\delta_1 + \delta_0) \left[1 - \frac{5}{3} \frac{z}{h} \right] \\ &+ \frac{1}{(\delta_0 + \delta_1)} \left[\frac{h}{L} A_0^{(1)} + \frac{z}{L} A_1^{(1)} - \frac{z \cos \alpha}{(\delta_1 + \delta_0)} A_0 \right]\end{aligned}$$

Ce qui entraîne que :

$$\begin{aligned}\sigma'_{\theta\theta}(z) &= -\frac{\sigma H}{2e} [e + H - 2z] \\ \sigma'_{zz}(z) &= \frac{\sigma H}{2e} [e - z] \\ \sigma'_{\varphi\varphi}(z) &= \frac{\sigma (\delta_1 + \delta_0)^2 \sin \alpha}{12h} - \frac{\sigma \cos \alpha}{4} (\delta_1 + \delta_0) \left[1 - \frac{5}{3} \frac{z}{h} \right] \\ &+ \frac{1}{(\delta_0 + \delta_1)} \left[\frac{h}{L} A_0^{(1)} + \frac{z}{L} A_1^{(1)} - \frac{z \cos \alpha}{(\delta_1 + \delta_0)} A_0 \right].\end{aligned}$$

De même on aura pour les déplacements à la jonction :

+ pour la coque cylindrique en $x = 0$.

$$u_x(z) = V_0 + \frac{e}{H} V_0^{(1)} + \frac{3}{H} V_1^{(1)}$$

$$u_r(z) = -\frac{R}{E} \left[\frac{\gamma H^2}{2e} \left(1 + 2\frac{3}{H} + \frac{e}{H} \right) + \nu \left(B_0 + \frac{e}{H} B_0^{(1)} + \frac{3}{H} B_1^{(1)} \right) \right]$$

+ pour la coque conique en $s = s_1 + s_2$.

$$u_2(z) = \frac{\gamma (s_1 + s_2)^3 \sin \alpha}{6 R E} \left(\frac{7}{6} - 2\nu \right) + \frac{\gamma (s_1 + s_2)^2 \cos \alpha}{3 E} \left[\frac{5}{2} - 2\nu + \frac{3}{2} \left(\frac{7}{3} - 2\nu \right) \right]$$

$$+ \frac{3}{(s_1 + s_2)} \frac{A_0}{E} \cos \alpha + V_0 + \frac{h}{L} C_0^{(1)} + \frac{3}{L} C_1^{(1)} +$$

$$\text{Log}(s_1 + s_2) \left[\frac{A_0}{E} + \frac{h}{L} A_0^{(1)} + \frac{3}{L} A_1^{(1)} \right]$$

$$u_3(z) = -\frac{\gamma (1 + \nu) (s_1 + s_2)^3}{12 h E} + \frac{\gamma (s_1 + s_2)^2}{E} \left[\frac{5}{4} - 2\nu + \frac{3}{12 h} (-7 + \nu) \right]$$

$$- \frac{(1 + \nu)}{E} \frac{A_0}{s_1 + s_2} - \text{tg} \alpha \left[\frac{A_0}{E} + (\nu + 1) \left(\frac{h}{L} C_0^{(1)} + \frac{3}{L} C_1^{(1)} \right) + V_0 \right]$$

$$- \text{Log}(s_1 + s_2) \left(\frac{A_0}{E} + \frac{h}{L} \frac{A_0^{(1)}}{E} + \frac{3}{L} \frac{A_1^{(1)}}{E} \right)$$

Afin d'assurer la continuité des déplacements au lieu de la fonction;
on considèrera les

VI.3.2.- Conditions aux limites de la coque torique

A l'aide de l'application du Théorème de divergence qui nous a fourni les équations d'équilibre d'une coque torique, il en résulte des conditions aux limites soit en contraintes soit en déplacements sur deux domaines complémentaires du tore. Ces conditions sont des données du problème. Dans le cas présent on les prendra en déplacements. (on n'écrit que les composantes non nulles) : (u'_2, u'_3)

alors

$$U_{\varphi}(z) = V_0 + \frac{e}{H} V_0^{(1)} + \frac{z}{H} V_1^{(1)}$$

$$U'_z(z) = -\frac{R}{E} \left[\frac{\partial H}{\partial e} (H + 2z + e) + \nu (B_0 + \frac{e}{H} B_0^{(1)} + \frac{z}{H} B_0^{(1)}) \right]$$

pour $\varphi = 0$

et

$$U_{\varphi}(z) = \frac{\gamma \sin \alpha (s_1 + s_0)^3 [7 - 12\nu]}{36 h E} + \frac{z \cos \alpha}{(s_0 + s_1)} \frac{A_0}{E}$$

$$+ V_0 + \frac{h}{L} C_0^{(1)} + \frac{z}{L} C_1^{(1)} + \log(s_1 + s_0) \left[\frac{A_0}{E} + \frac{h}{L} A_0^{(1)} + \frac{z}{L} A_1^{(1)} \right] + \frac{\gamma \cos \alpha (s_1 + s_0)^2 [5 - 4\nu] + \frac{z}{h} (7 - 12\nu)}{6 E} \quad \varphi = -\alpha$$

$$U'_z(z) = (1 + \nu) \left[\frac{\gamma \tan \alpha \sin \alpha (s_0 + s_1)^3}{12 h E} - \frac{A_0}{E} \frac{z}{(s_0 + s_1)} \right]$$

$$- \tan \alpha \left\{ V_0 + \frac{A_0}{E} + (1 + \nu) \left(\frac{h}{L} C_0^{(1)} + \frac{z}{L} C_1^{(1)} \right) + \log(s_1 + s_0) \left[\frac{A_0}{E} + \frac{h}{L} \frac{A_0^{(1)}}{E} + \frac{z}{L} \frac{A_1^{(1)}}{E} \right] \right\}$$

On est donc en présence du problème de l'équilibre d'une portion de coque torique ($-\alpha \leq \varphi \leq 0$) soumise sur $\{ \varphi = 0 \text{ et } \varphi = -\alpha ; |z| < h \}$ aux déplacements ci-dessus et sur $\{ -\alpha < \varphi < 0 ; z = \pm h \}$ à des efforts de densité surfacique \vec{F} connue ($z = h, \vec{F} = \vec{0}$ et $z = -h, \vec{F} = p \vec{n}$).

Le matériau étant supposé élastique linéaire homogène et isotrope on sait que ce problème admet en général une solution et une seule.

CONCLUSION GENERALE

La solution du problème de l'équilibre d'une coque conique élastique de révolution se met donc sous forme polynomiale en $\frac{r}{L}$ et $\frac{z}{L}$ comme dans le cas d'une coque cylindrique (cf. [8]).

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij}(r, \theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{L}\right)^m g_{ij0}^{(m)}(r, \theta) + \frac{z}{L} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{L}\right)^m g_{ij1}^{(m+1)}(r, \theta) + \dots \\
 (a) \quad & \frac{1}{k!} \left(\frac{z}{L}\right)^k \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{L}\right)^m g_{ij k}^{(m+k)}(r, \theta) + \dots \\
 u_j(r, \theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{L}\right)^m g_j^{(m)}(r, \theta) + \frac{z}{L} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{L}\right)^m c_j^{(m+1)} + \dots \\
 & + \frac{1}{k!} \left(\frac{z}{L}\right)^k \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{L}\right)^m g_j^{(m+k)}(r, \theta) + \dots
 \end{aligned}$$

Elle diffère de celle de la théorie de coque généralement basée sur les hypothèses de Kirchhoff-Love valables pour des coques d'épaisseur quelconque.

$$\begin{aligned}
 (b) \quad \sigma_{ij}(r, \theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} z^m g_{ij}^{(m)}(r, \theta). \\
 u_j(r, \theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} z^m g_j^{(m)}(r, \theta). \\
 (c) \quad \sigma_{ij}(r, \theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} h^m \sigma_{ij}^{(m)}(r, \theta, z). \\
 u_j(r, \theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} h^m u_j^{(m)}(r, \theta, z).
 \end{aligned}$$

- La solution (a) n'assimile pas le déplacement de la surface moyenne ($z=0$) (qui est un polynôme en $\frac{r}{L}$) au déplacement de membrane comme dans (b).

- La surface moyenne ne se déforme pas de la même manière quelle que soit l'épaisseur de la coque comme dans (b).
- La solution (a) est déterminée sans faire intervenir de condition de type "couche limite".

Le problème de raccord entre une coque conique et une coque cylindrique mince d'axe commun revient à celui de l'équilibre d'une portion de coque torique élastique soumise sur $\{ \varphi = 0 \text{ et } \varphi = -\alpha \mid z \mid < h \}$ à des déplacements imposées et sur $\{ -\alpha < \varphi < 0 \text{ et } z = \pm h \}$ et a des efforts de densité surfaciques \vec{p} . En élasticité linéaire, un tel problème admet une et une seule solution qui peut être déterminée, analytiquement dans des cas particuliers de chargement et, à coup sûr, approchées numériquement par des méthodes d'éléments finis isoparamétriques (problème que l'on étudiera ultérieurement).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CHILOV G. "Analyse mathématique". Fonctions de plusieurs variables réelles 1ère et 2ème partie. Edition de Moscou.
- [2] DESTUYNDER Ph. "Sur une justification des modèles de plaques et de coques par les méthodes asymptotiques".
Thèse d'Etat 1980, Paris VI.
- [3] DUVAUT-LIONS J.L. "Les inéquations en Mécanique et Physique".
Dunod, Paris 1973.
- [4] GERMAIN P. "Cours de Mécanique des Milieux Continus".
Editeur Masson.
- [5] "La Méthode des Puissances virtuelles en Mécanique des Milieux Continus (1ère partie : Théorie du second gradient)". Journal de Mécanique, vol. 12, N° 2, Juin 1973.
- [6] GOL'DENVEIZER Theory of elastic thin shells, vol. 2, Pergamon Press 1961.
International series of Monographs on Aeronautics and astronautics.
- [7] GONTIER G. "Mécanique des Milieux Déformables".
Dunod 1969.



- [8] HARIRI S. "Sur la détermination de la solution du problème de l'équilibre d'une coque cylindrique élastique".
Thèse 3ème cycle, Lille I, 1982.
- [9] HENRY J.P.-PARSY F. "Cours d'élasticité".
Dunod Université 1982.
- [10] I.N.R.A. 25-27 Nov. 1982.
"Analyse Numérique de Problèmes de coques minces".
Description de résultats et exemples (Cours et séminaires)
(Institut National de Recherche en Informatique et en
Automatique I.N.R.A.).
- [11] KOITER "On the foundations of the linear theory of thin elastic shells".
- [12] NOVOZHLLOV V.V. "Thin shell theory".
- [13] RAILLON Y. "Sur la théorie des coques cylindriques élastiques".
Thèse 3ème cycle, Lille I, 1981.
- [14] TIMOSHENKO S. "Théorie des plaques et coques".
Dunod 1961.
- [15] VALID R. "La Mécanique des Milieux Continus et le Calcul des Structures".
Eyrolles, Paris 1977.

MOTS CLEFS :

COQUE CONIQUE ELASTIQUE
DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE
RACCORDEMENT.

L'objet de cette thèse est l'étude du comportement d'une coque conique élastique avec des conditions aux limites sur les faces $z = \pm h$ par la méthode des développements asymptotiques.

Dans les hypothèses de coques élastiques minces et peu "épaisses", on peut déterminer la solution du problème en contraintes grâce aux conditions aux limites sur les faces $z = \pm h$. On en déduit les déplacements correspondants.

On applique ces résultats aux coques élastiques soumises à une pression interne. On examine à la fin la condition de raccord entre une coque conique et une coque cylindrique élastiques de même axe de révolution.