50 376
1 98H
189

50376.
1984.
189.

N° d'ordre : 1210

THESE

présentée à

l'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir le titre de

Docteur de 3ème cycle

Spécialité : Mécanique

BIBLIOTHEQUE INTERUNIVERSITAIRE
SECTION DE SCIENCES
LILLE

par

ENNASSEF M'HAMED

VIBRATIONS DES PLAQUES EXCITEES PAR DES PERCUSSIONS PERIODIQUES.

Soutenue le : 16 Novembre 1984 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

Président : M. SIESTRUNK, Professeur, Université de Paris VI.
Rapporteur : M. FAURE, Professeur, Université de Lille I.
Examinateurs: M. PARSY, Professeur, Université de Lille I.
M. MICHEAU, Professeur, E.U.D.I.L., Université de Lille I.

Monsieur R. FAURE, Professeur, m'a invité aux vibrations et à la Mécanique non linéaire. Par ses conseils et ses remarques judicieuses il m'a guidé dans ce travail. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je remercie vivement Monsieur le Professeur SIESTRUNK qui me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je remercie Monsieur le Professeur PARSY, qui a bien voulu s'intéresser à mon travail et le juger, pour les discussions que nous avons eues et qui m'ont été profitables dans la réalisation de ce travail.

Monsieur le Professeur MICHEAU, trouve ici ma profonde reconnaissance d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Je n'oublie pas Mademoiselle BERQUIER, Maître-Assistant pour son précieux soutien moral et son aide, je l'en remercie vivement.

Enfin mes remerciements vont à Madame Françoise PETIAUX qui avec gentillesse et une grande rapidité a tapé cette thèse, ainsi que Mesdames M. LLORET, F. WDOWCZYK, Messieurs A. GOURNAY et M. PROVOST du Service de l'imprimerie, qui ont participé à sa réalisation matérielle.

A mes Parents.

TABLE DES MATIERES

Pages

INTRODUCTION IV

CHAPITRE 1.- RAPPEL DES EQUATIONS NON LINEAIRES REGISSANT LA FLEXION D'UNE PLAQUE RECTANGULAIRE : EQUATIONS DE VON KÁRMÁN 1

1.1.- Flexion simple des plaques 1

1.2.- Flexion des plaques sous l'action d'une charge répartie latéralement 4

1.3.- Flexion et compression combinées 7

1.4.- Cas de forte flexion (grandes déformations) 10

CHAPITRE 2.- EQUATION DIFFERENTIELLE SATISFAITE PAR LE DEPLACEMENT TRANSVERSAL D'UNE PLAQUE EXCITEE LONGITUDINALEMENT PAR DES PERCUSSIONS PERIODIQUES 17

2.1.- Formulation du problème 17

2.1.1.- Equations de bases 17

2.1.2.- Conditions aux limites 18

2.2.- Méthode de résolution 19

2.2.1.- Expression de F et W 19

2.2.2.- Choix des fonctions d'approximation 20

2.2.3.- Orthogonalité des familles (X_m), (Y_m), (Φ_p), (Ψ_q) , ... 22

2.3.- Détermination de l'équation différentielle vérifiée par $W_{pq}(t)$. 25

CHAPITRE 3.- EXISTENCE DE LA SOLUTION PERIODIQUE DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE VERIFIEE PAR LE DEPLACEMENT TRANSVERSAL DE LA PLAQUE. STABILITE 32

3.1.- Introduction 32

3.2.- Théorème 33

3.3.- Préliminaire 33

3.3.1.- Structure et propriétés de l'espace $B(T)$ . . 33

3.3.2.- Mesure de Dirac - Distributions 36

3.3.3.- Solution de synchronisation 37

3.4.- Preuve du théorème 40

3.4.1.- Suites récurrentes $(V_{1m}) \in B_1(T), (U_{2m}) \in B_2(T)$ 40

3.4.2.- Majoration de $\|V_{1m}\|$ et $\|U_{2m}\|$ 41

3.4.3.- Convergence de (V_{1m}) et (U_{2m}) dans $B_1(T)$ et $B_2(T)$ respectivement 46

A) Majoration de $\|V_{1,m+1} - V_{1m}\|$ 47

B) Majoration de $\|U_{2,m+1} - U_{2m}\|$ 48

C) (V_{1m}) et (U_{2m}) sont des suites de Cauchy 50

3.5.- Conclusion 50

3.6.- Etude de la stabilité 51

3.6.1.- Etude de l'équation (3.30)

$$\ddot{y} + 2\lambda c\dot{y} + \left[\omega^2 + \lambda(\varepsilon\omega^2 + 3\gamma w_0^2)\right] y = 0 \quad \ldots 51$$

A) Théorie de FLOQUET 52

B) Application de la théorie de FLOQUET à l'équation (3.30) 56

3.6.2.- Etude de l'équation complète :

$$\ddot{y} + 2\lambda c\dot{y} + \left[\omega^2 + \lambda(\varepsilon\omega^2 + 3\gamma w_0^2)\right] y = 2\mu\lambda e(t) \quad 57$$

3.6.3.- Développement de R à l'ordre deux en λ . . . 63

A) Simplification de R 63

B) Calcul de R en fonction de $c, \mu, \varepsilon, \gamma, r$ et λ 65

C) Conditions de stabilité 72

CHAPITRE 4.- PLAQUES EXCITEES TRANSVERSALEMENT PAR DES PERCUSSIONS PERIODIQUES MOUVEMENT PERIODIQUE. SYNCHRONISATION 74

4.1.- Introduction - Position du problème 74

4.1.1.- Equations de bases 74

4.1.2.- Conditions aux limites 75

4.2.- Méthodes de résolution 75

4.2.1.- Expression de F et W 75

4.2.2.- Choix de X_m , Y_m , ϕ_p , ψ_q 76

4.3.- Equation différentielle vérifiée par $W_{pq}(t)$ 77

4.4.- Etude de la première approximation : W_{11} 81

4.5.- Existence de la solution périodique de l'équation différentielle (4.26) 82

4.5.1.- Démonstration 83

4.5.2.- Stabilité 87

4.6.- Etude du problème de la synchronisation 87

4.6.1.- Position du problème 87

4.6.2.- Equations de synchronisation 90

4.6.3.- Points de synchronisation - Discussion 92

4.6.4.- Etude de la stabilité au voisinage d'un point de synchronisation 94

4.6.5.- Nature des points de synchronisation sur OP et QR . 97

ANNEXE . . . . . .

BIBLIOGRAPHIE . . . . . .

INTRODUCTION

Les équations différentielles qui régissent les phénomènes physiques sont très souvent non linéaires.

Pendant très longtemps, on s'est contenté de faire des hypothèses simplificatrices pour rendre linéaires et le plus souvent à coefficients constants, les équations régissant la plupart des phénomènes physiques. Mais le besoin pressant de la précision et de la rigueur mathématiques telle que par exemple dans la science de la chronologie exige d'aborder la mécanique non linéaire.

Un pas considérable a été franchi par la théorie des perturbations (à laquelle J. HAAG [1] a apporté une contribution importante) qui forme l'un des chapitres essentiels de ce que l'on appelle la mécanique non linéaire.

On peut séparer l'étude de la mécanique non linéaire en gros en deux branches :

* Méthodes analytiques : recherche de l'existence des solutions particulières. Etude de la stabilité.
* Méthodes qualitatives et quantitatives des solutions :
  a) Méthodes topologiques : la réduction du problème à l'étude des points fixes d'un opérateur dans un espace de fonctions périodiques.
  b) Résolutions à l'aide des méthodes numériques.

Le but de ce travail est d'étudier quelques équations différentielles régissant le mouvement de plaques rectangulaires. Ces plaques sont simplement posées et excitées soit transversalement soit longitudinalement par des percussions périodiques $e(t) = T \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT)$ agissant pour $t = mT$ où $T = \frac{2\pi}{\omega}$; ω est la pulsation excitatrice.

Ce mémoire est une extension aux percussions du problème étudié par OUSTIGY [3] . En effet il a étudié la stabilité dynamique des plaques excitées

paramétriquement par des forces de la forme : $P(t) = P_{y_0} + P_{y_t} \cos\Theta(t)$

La fréquence excitatrice est $\eta = \frac{d\Theta(t)}{dt}$

Le chapitre 1 sera consacré aux rappels des équations de Von-Karman. Le lecteur y trouvera un résumé des chapitres concernant la flexion des plaques traitées par TIMOSHENKO [2].

Le chapitre 2 illustre une application de la méthode de Galerkin pour établir l'équation différentielle vérifiée par le déplacement transversal de la plaque soumise à des percussions longitudinales.

Le chapitre 3 traite d'un point de vue mathématique le problème d'existence de la solution périodique de l'équation différentielle régie par la flèche de la plaque. La solution a été cherchée dans l'espace

$$B(T) = \left\{ x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m e^{im\omega t} \quad , \quad \bar{x}_m = x_{-m} \right.$$

et $\left. \|x(t)\| = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |x_m| < \infty \right\}$ des séries absolument convergentes. La méthode est inspirée d'un travail de M. FAURE [9] .

Un calcul relatif à la stabilité de la solution de synchronisation est fait.

On établit au chapitre 4 l'équation différentielle vérifiée par le déplacement vertical (déformations transversales) des plaques simplement posées et excitées transversalement par des percussions périodiques. L'existence de la solution périodique a été démontré par une méthode de Monsieur FAURE [4]. Le problème de la synchronisation est étudié en détail.

CHAPITRE I

RAPPEL DES EQUATIONS NON LINEAIRES REGISSANT LA FLEXION D'UNE PLAQUE RECTANGULAIRE : EQUATIONS DE VON KARMAN

1.1.- FLEXION SIMPLE DES PLAQUES

Nous considérons un élément découpé dans la plaque par deux paires de plans parallèles aux xz et aux yz comme le montre la figure ci-dessus.

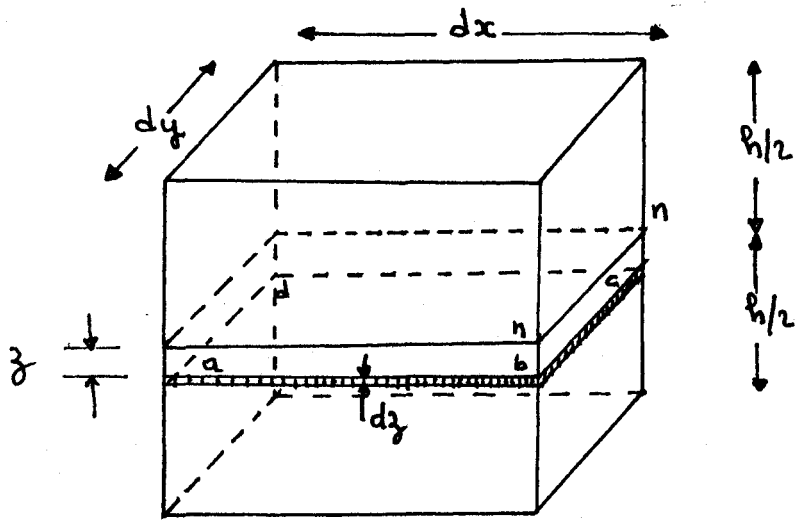


Fig. 1

En supposant que pendant la flexion de la plaque, les faces latérales de cet écoulement restent planes et tournent autour des axes neutres $n-n$ de manière à rester normales à la surface élastique, le plan médian ne subira aucune déformation pendant cette fléxion et sera par suite une surface neutre.

Signalons que cette hypothèse est généralement suffisamment exacte aussi longtemps que les fléxions de la plaque sont faibles en comparaison de

l'épaisseur h . Si cette condition n'est pas satisfaite une déformation de la surface moyenne se produira certainement et il faut tenir compte en étudiant la répartition des tensions dans la plaque (ce cas important qui est notre but sera traité aux paragraphes 1.3 et 1.4 de ce chapitre).

Revenons à la flexion simple :

Soit $\frac{1}{\rho_x}$ et $\frac{1}{\rho_y}$ les courbures de la surface neutre dans les sections parallèles aux plans des xz et des yz . Les allongements unitaires dans le sens des x et des y d'un feuillet élémentaire à une distance z de la surface neutre sont :

$$\varepsilon_x = \frac{z}{\rho_x} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_y = \frac{z}{\rho_y} \tag{a}$$

la loi de Hooke donne :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \tag{b}$$

où ν est le coefficient de Poisson, les tensions correspondantes sont donc :

$$\sigma_x = \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{\rho_x} + \nu\,\frac{1}{\rho_y}\right) \tag{c}$$

$$\sigma_y = \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{\rho_y} + \nu\,\frac{1}{\rho_x}\right)$$

les tensions normales réparties sur les faces latérales de l'élément de la figure (1) peuvent être réduites à des couples qui doivent être égaux aux moments extérieurs, on a :

$$\left[\begin{array}{l} \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \, z \, dy \, dz = M_x \, dy \\ \\ \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \, z \, dx \, dy = M_y \, dx \end{array}\right. \qquad (d)$$

En remplaçant σ_x et σ_y par leur valeur (c), on a :

$$M_x = D\left(\frac{1}{\rho_x} + \nu \frac{1}{\rho_y}\right) \qquad (1.1)$$

$$M_y = D\left(\frac{1}{\rho_y} + \nu \frac{1}{\rho_x}\right) \qquad (1.2)$$

où $$D = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \, dz = \frac{E\,h^3}{12(1-\nu^2)} \qquad (1.3)$$

qui porte le nom de rigidité de la plaque à la flexion.

En appelant w , la flexion (déplacement normal, flèches, ...), les formules approchées qui donnent les courbures de la plaque sont :

$$\frac{1}{\rho_x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad , \quad \frac{1}{\rho_y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

donc les moments fléchissant sont :

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad (1.4)$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \qquad (1.5)$$

1.2.- FLEXION DES PLAQUES SOUS L'ACTION D'UNE CHARGE REPARTIE LATERALEMENT

Considérons le cas de la flexion d'une plaque par une charge répartie, agissant perpendiculairement à son plan médian (on suppose que ce plan est horizontal et contenant les axes des x et des y , l'axe des z étant perpendiculaire à ce plan et dirigé du haut vers le bas). Soit q l'intensité de la charge qui dans le cas général peut varier le long de cette surface et que l'on considère comme une fonction de x et de y .

En raison de cette charge q , il se produira sur les faces latérales de l'élément choisi non seulement des moments de flexion et de torsion, mais aussi des efforts tranchants verticaux dont la valeur par unité de largeur est :

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz}\, dz \quad , \quad Q_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz}\, dz \qquad (a')$$

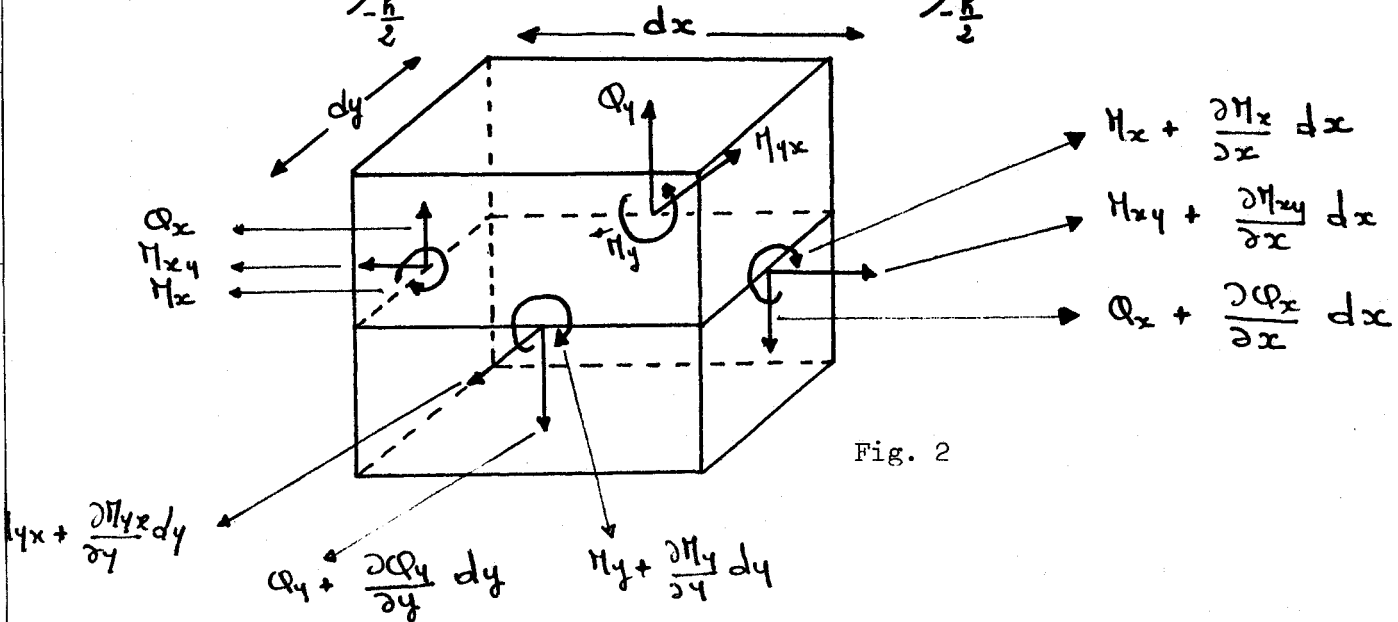


Fig. 2

On suppose que les efforts tranchants $Q_x dy$ et $Q_y dx$, passent par les centres de gravité des faces de l'élément. Pour les moments de flexion et de torsion on fait comme le paragraphe précédent.

Soit

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z \, dz \quad , \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z \, dz \qquad (b')$$

$$M_{xy} = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z \, dz \quad , \quad M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yx} z \, dz \qquad (c')$$

Comme le montre la figure (2), nous adoptons pour la face de gauche les notations Q_x , M_x , M_{xy} ; pour la face de droite on a :

$$Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \; ; \; M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \; ; \; M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx$$

même chose pour les autres faces (faces parallèles au plan xz).

Si l'on considère les conditions d'équilibre de l'élément de la figure (2), on remarque qu'il est soumis à des forces qui sont parallèles à l'axe des z et que les couples sont représentés par des vecteurs perpendiculaires à l'axe des z .

Soit pour les forces :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \, dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \, dx + q \, dx \, dy = 0$$

donc :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \qquad (d')$$

pour les moments : par rapport à l'axe des x

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx\,dy - \frac{\partial M_y}{\partial y} dy\,dx + Q_y\,dx\,dy = 0$$

Le moment de la charge q et le moment dû à la variation de la charge Q_y peuvent être négligés dans cette équation, comme infiniment petit d'ordre supérieur à celui des quantités conservées dans l'équation. Après simplification on a :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \qquad (e')$$

de même par rapport à l'axe des y ; on a :

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \qquad (f')$$

(e'), (f') et (a') donnent :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q$$

Si on remarque que $M_{xy} = -M_{yx}$ parce que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

on arrive finalement à l'équation d'équilibre.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q \qquad (g')$$

1.3.- *FLEXION ET COMPRESSION COMBINEES*

Les tensions qui prennent naissance dans le plan moyen ne sont pas négligeables, leur effet dans la plaque intervient dans les calculs. Considérons à nouveau l'équilibre de l'élément de la figure (2). Aux forces déjà considérées précédemment, il faut ajouter celles qui agissent sur le plan moyen de la plaque (fig. 3).

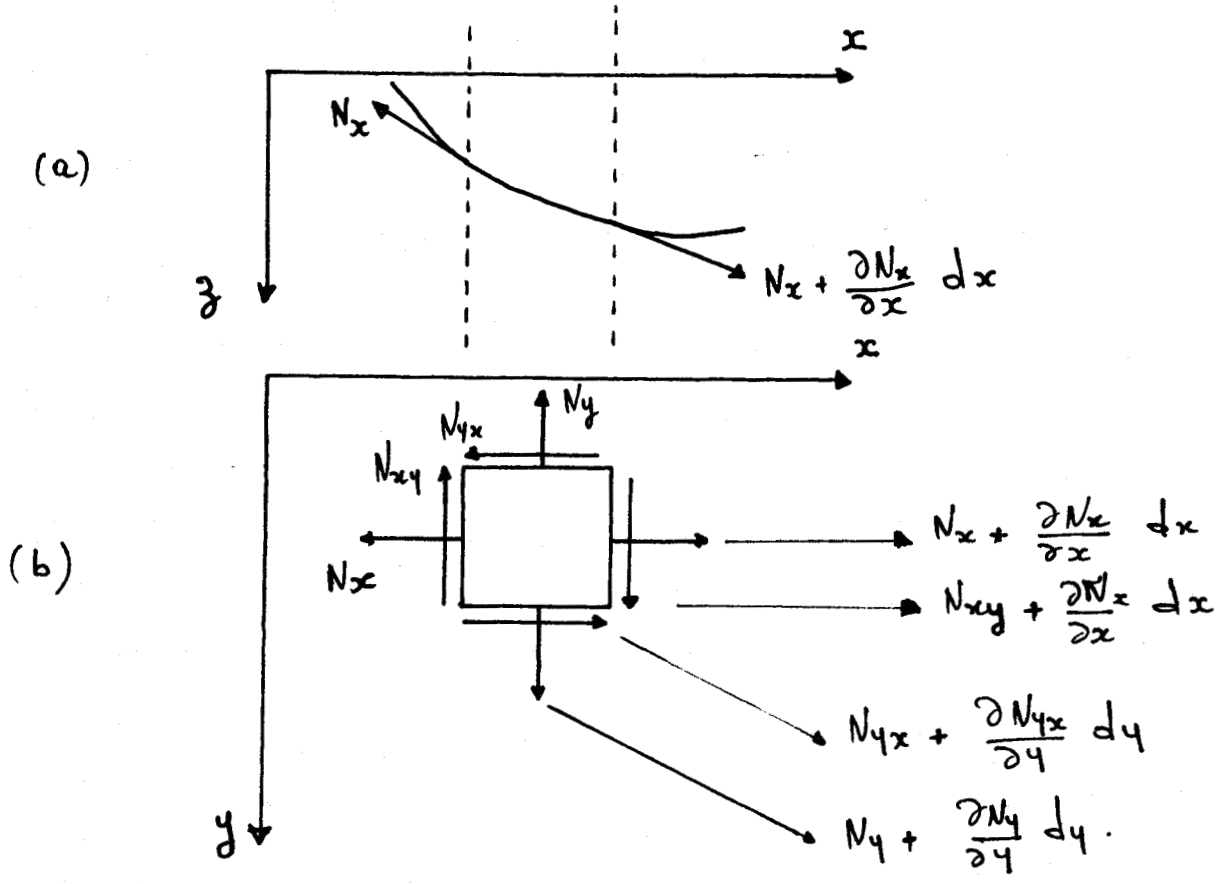


Fig. 3

En projetant ces forces suivant x et y on a :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = 0 \qquad (1.6)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0$$

on remarque que ces équations sont indépendantes des équations d'équilibre déjà trouvées.

Projection des forces sur l'axe des z:

La projection des forces normales N_x sur l'axe des z donne :

$$-N_x\,dy\,\frac{\partial w}{\partial x} + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x}\,dx\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,dx\right)dy$$

après simplification et en négligeant les infiniments petits d'ordre supérieur on a :

$$N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,dx\,dy + \frac{\partial N_x}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial x}\,dx\,dy \qquad (a")$$

De même pour la projection des forces normales N_y sur l'axe des z donne :

$$N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,dx\,dy + \frac{\partial N_y}{\partial y}\,\frac{\partial w}{\partial y}\,dx\,dy \qquad (b")$$

Pour les efforts tranchants N_{xy} :

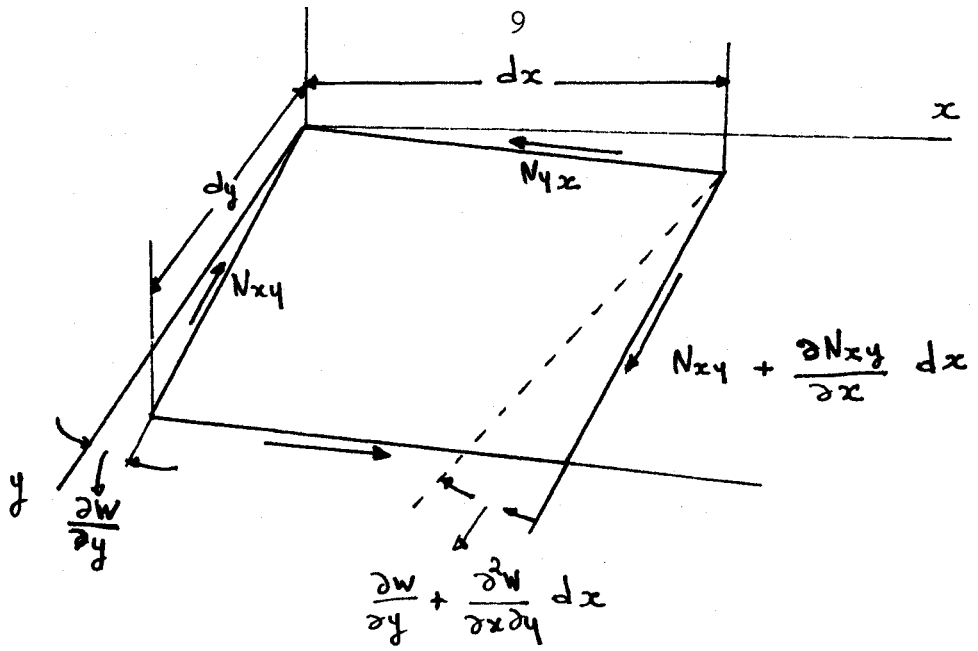


Fig. 4

tenant compte des angles sur cette figure on a : la projection sur l'axe des z :

$$N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}dx\,dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}dx\,dy$$

pour $N_{yx} = N_{xy}$ on a une expression analogue et finalement la projection de tous les efforts tranchants est :

$$2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}dx\,dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}dx\,dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}dx\,dy \qquad (c'')$$

En ajoutant à la charge $q\,dx\,dy$ agissant sur l'élément les expressions (a"), (b"), (c") et en utilisant les équations (1.6) on aura au lieu de l'équation (g') du paragraphe précédent l'équation suivante, pour les conditions d'équilibre :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} =$$

$$-\left(q + N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)$$

En remplaçant M_x, M_y, M_{xy} par leur expressions, soient :

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

on a :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} =$$

$$\frac{1}{D}\left(q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) \quad (1.7)$$

1.4.- CAS DE FORTE FLEXION (GRANDES DEFORMATIONS)

Dans le cas général de grandes déformations d'une plaque sont accompagnées d'une extension du plan moyen. Pour étudier les flèches importantes des plaques, on peut continuer à utiliser l'équation (1.7) mais les forces N_x,

N_y , N_{xy} dépendent ici non seulement des forces extérieures appliquées au plan des xy , mais aussi de l'étirement de la surface moyenne par suite de la flexion. Les équations d'équilibre dans le plan xy sont toujours :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \qquad (a''')$$

on obtiendra la troisième équation pour déterminer N_x , N_y et N_{xy} par la condition de déformation du plan moyen de la plaque pendant la flexion.

Composantes du tenseur de déformation

On désigne par $\vec{u} = (u_x , u_y)$ les déplacements horizontaux des points de la plaque et par w la flèche (déplacement normal, transversal, ...).

Si $dl^2 = dx^2 + dy^2$ désigne le carré de l'élément de longueur de la plaque non déformée, alors après déformation il devient :

$$dl'^2 = (dx + du_x)^2 + (dy + du_y)^2 + dw^2$$

or

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy$$

$$du_y = \frac{\partial u_y}{\partial x} dx + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy \qquad (b''')$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy$$

$$(dx+du_x)^2 = dx^2 + 2\frac{\partial u_x}{\partial x}dx^2 + 2\frac{\partial u_x}{\partial y}dxdy + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}dx\right)^2$$

$$+\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}dy\right)^2 + 2\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial y}dx\,dy$$

$$\text{et } (dy+du_y)^2 = dy^2 + 2\frac{\partial u_y}{\partial x}dy\,dx + 2\frac{\partial u_y}{\partial y}dy^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}dx\right)^2$$

$$+\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}dy\right)^2 + 2\frac{\partial u_y}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial y}dx\,dy$$

on ne garde que les termes linéaires des dérivées $\frac{\partial u_x}{\partial x}$; $\frac{\partial u_x}{\partial y}$ et $\frac{\partial u_y}{\partial x}$, $\frac{\partial u_y}{\partial y}$, quand à dw^2 on le garde sans simplification car il ne présente pas de terme linéaire :

$$dw^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 dy^2 + 2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}dx\,dy$$

Donc :

$$dl'^2 = dl^2 + 2\varepsilon_{\alpha\beta}\,dx_\alpha\,dx_\beta$$

où

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x_\alpha}\frac{\partial w}{\partial x_\beta}$$

$\alpha, \beta = 1, 2$ (1 désigne x, 2 désigne y)

soit

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \qquad (c''')$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

En manipulant les dérivées des déformations afin d'éliminer u_x et u_y entre les expressions (c''') on a :

$$\varepsilon_{x,yy} - 2\,\varepsilon_{xy,xy} + \varepsilon_{y,xx} = \left[W^2_{,xy} - W_{,xx}\,W_{,yy}\right] \quad (1.8)$$

En introduisant la fonction d'Airy F (fonction de contrainte) définie par :

$$F_{,xx} = \sigma_y \qquad F_{,yy} = \sigma_x \qquad -F_{xy} = \tau_{xy} \quad (d''')$$

et d'après les relations contraintes-déformations : (loi de Hooke)

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\,\sigma_y\right] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\,\sigma_x\right] \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E}\,\tau_{xy} \end{aligned} \quad (e''')$$

(d''') et (e''') donnent :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[F_{,yy} - \nu\,F_{,xx}\right] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[F_{,xx} - \nu\,F_{,yy}\right] \\ \varepsilon_{xy} &= -\frac{1+\nu}{E}\,F_{,xy} \end{aligned} \quad (f''')$$

(1.8) et (f''') donnent :

$$\boxed{\Delta^2 F = E\left[W^2_{,xy} - W_{,xx}\,W_{,yy}\right]} \quad (1.9)$$

En posant :

$$\frac{N_x}{h} = \sigma_x = F_{,yy} \quad ; \quad \frac{N_y}{h} = \sigma_y = F_{,xx}$$

$$\frac{N_{xy}}{h} = \sigma_{xy} = -F_{,xy}$$

en utilisant ces expressions et l'équation (1.7)

$$\boxed{\Delta^2 w = \frac{h}{D}\left(\frac{q}{h} + F_{,yy}\, w_{,xx} + F_{,xx}\, w_{,yy} - 2F_{,xy}\, w_{xy}\right)} \quad (1.10)$$

les équations (1.9) et (1.10) associées aux conditions au contour, déterminent les deux fonctions F et w .

Remarque : Puisque notre but dans ce travail est d'étudier les équations différentielles satisfaites par le déplacement w ; nous considérerons la version dynamique des équations (1.9) et (1.10). Pour ceci nous ajoutons au deuxième membre de (1.10) le terme $\frac{h}{D}\left(-\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)$.

Définition des notations

D : rigidité de la plaque à la flexion
E : module de Young
F : fonction d'Airy (fonction de contrainte)
h : épaisseur de la plaque
M_x , M_y , M_{xy} : moments fléchissants et de torsion
N_x , N_y : tensions du plan moyen de la plaque suivant x , y .
q : charge normale au plan de la plaque

Q_x, Q_y : efforts tranchants par unité de longueur, suivant x , y .

U_x, U_y : déplacements de la plaque suivant x , y .

W : déplacement normal.

x, y , z : coordonnées cartésiennes.

ε_x, ε_y : allongements unitaires suivant x , y .

ν : coefficient de Poisson.

ρ : densité volumique de la plaque.

$\frac{1}{\rho_x}$, $\frac{1}{\rho_y}$: courbures de la surface neutre dans les sections parallèles aux plans xz , yz .

σ_x , σ_y : contraintes selon les directions x , y .

τ_{xz}, τ_{yz} : cisaillements selon xz , yz.

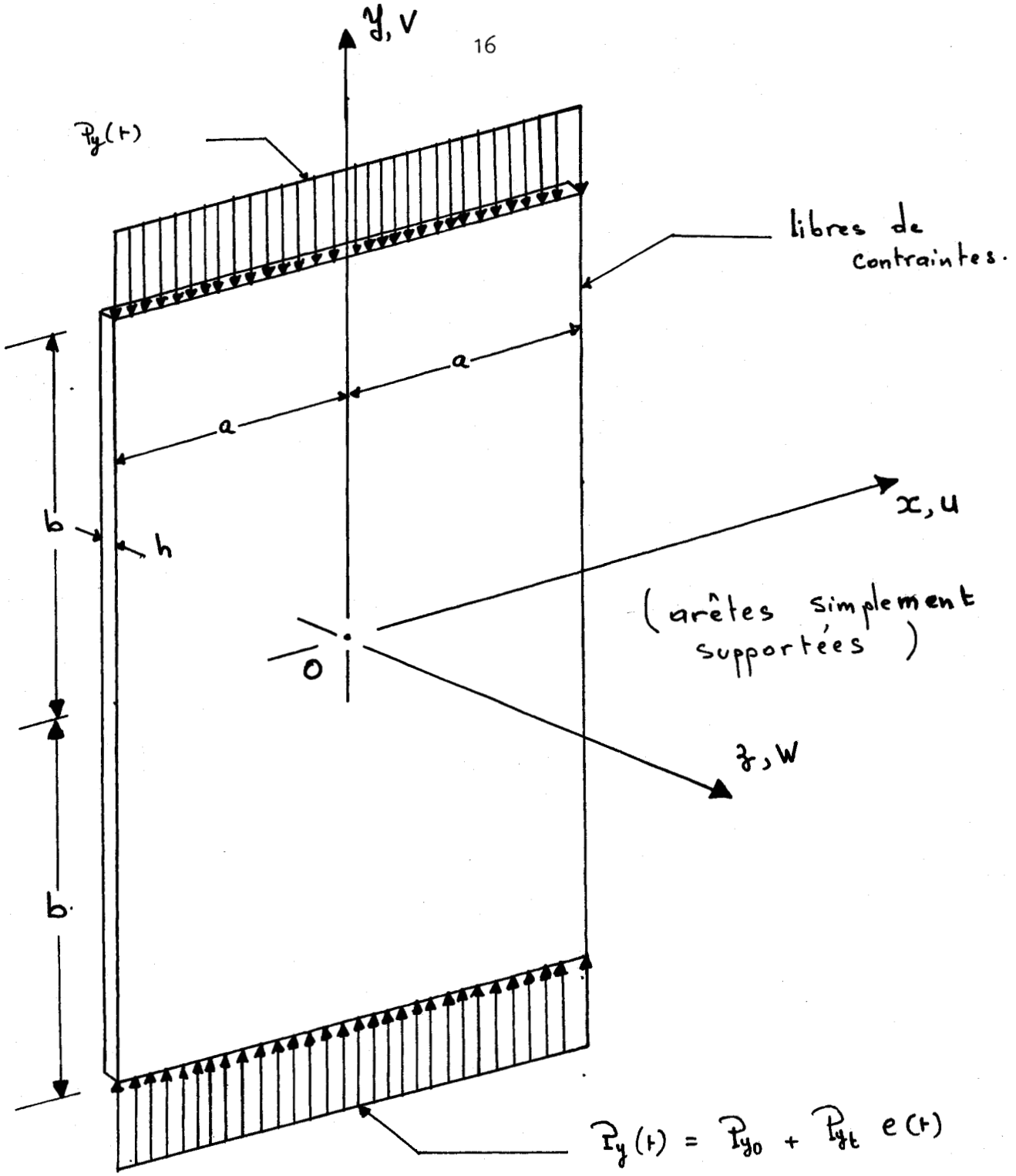


Fig. 5

Plaque excitée longitudinalement (dans son plan) par la charge $P_y(t)$.

CHAPITRE 2

EQUATION DIFFERENTIELLE SATISFAITE PAR LE DEPLACEMENT TRANSVERSAL D'UNE PLAQUE EXCITEE LONGITUDINALEMENT PAR DES PERCUSSIONS PERIODIQUES

2.1.- FORMULATION DU PROBLEME

On considère dans ce chapitre une plaque rectangulaire mince initialement plate, d'épaisseur uniforme, homogène élastique, simplement supportée sur son pourtour et excitée dans son plan par une percussion δ, uniformément distribuée le long de deux arêtes opposées. L'origine du système est choisi au centre de la plaque non déformée (voir figure 5).

2.1.1.- *Equations de base*

Dans cette étude, nous prenons comme point de départ le système complet des équations des plaques minces en flexion forte. Ces équations sont appelées équations de Von Kàrmàn correspondant à la version dynamique (voir chapitre 1).

Soit :

$$\nabla^4 F = E\left[W_{,xy}^2 - W_{,xx}\,W_{,yy}\right]$$

$$\nabla^4 W = \frac{h}{D}\left[F_{,yy}\,W_{,xx} + F_{,xx}\,W_{,yy} - 2F_{,xy}\,W_{,xy} - \rho\,W_{,tt}\right] \qquad (2.1)$$

avec :

F : Fonction d'Airy (fonction de contraintes)

W : le déplacement transversal (flèche) de la plaque.

D : rigidité de la plaque à la flexion.

h : épaisseur de la plaque

E : module de Young.

a, b : longueurs de la plaque suivant x et y respectivement.

F est définie par : $F_{,yy} = \frac{N_x}{h}$, $F_{,xx} = \frac{N_y}{h}$, $-F_{xy} = \frac{N_{xy}}{h}$

N_x, N_y et N_{xy} sont les forces de membranes par unité de longueur reliées aux contraintes de la membrane par :

$$N_x = h\,\sigma_x \quad , \quad N_y = h\,\sigma_y \quad , \quad N_{xy} = + h\,\tau_{xy}$$

2.1.2.- *Conditions aux limites*

- relatives à la fonction d'Airy F : les deux arêtes qui sont dans le plan xoy et perpendiculaires à l'axe oy sont chargées uniformément par la charge $P_y(t) = P_{y_0} + P_{y_t} \times e(t)$; $e(t) = T \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT)$

Soit :

$$\begin{cases} F_{,yy} = 0 \quad ; \quad F_{,xy} = 0 & \text{à} \quad x = \pm a \\ F_{,xx} = -\frac{P_y(t)}{h} \quad ; \quad F_{,xy} = 0 & \text{à} \quad y = \pm b \end{cases} \tag{2.2}$$

- relatives au déplacement vertical W : la plaque est simplement supportée sur son pourtour. Prenons par exemple le bord $x = a$ de la plaque, il est simplement appuyé, la flèche w le long de celui-ci sera nulle. En même temps ce bord sera libre de tourner autour de $x = a$.

Soit :

$$\begin{cases} W = W_{,xx} + \vartheta W_{,yy} = 0 & x = \pm a \\ W = W_{,yy} + \vartheta W_{,xx} = 0 & y = \pm b \end{cases} \tag{2.3}$$

le problème consiste à déterminer les fonctions F et W qui vont satisfaire à la fois les équations du mouvement (2.1) dans le domaine et les conditions aux limites (2.2) et (2.3). Les équations (2.1) sont très complexes et ne peuvent être résolues exactement même dans les cas les plus simples.

Beaucoup de méthodes ont été employées par nombre de chercheurs, nous employons celle qui s'approche le plus des réalités expérimentales.

2.2.- METHODE DE RESOLUTION

2.2.1.- Expression de F et W

La méthode consiste à supposer la solution pour F et W sous la forme de séries doubles (tronquées) de fonctions qui satisfont exactement les conditions aux limites du problème et qui sont solutions du système linéarisé correspondant (Problèmes aux valeurs propres en statique flambage et en dynamique-fréquences naturelles).

Nous chercherons F et W sous la forme :

$$\left[\begin{array}{l} F(x,y,t) = \sum_m \sum_n f_{mn}(t)\, X_m(x)\, Y_n(y) - \frac{x^2}{2h} P_y(t) \\ \\ W(x,y,t) = \sum_p \sum_q W_{pq}(t)\, \phi_p(x)\, \Psi_q(y) \end{array}\right. \qquad (2.4)$$

$f_{mn}(t)$: coefficients généralisés de contraintes dépendant du temps.

$W_{pq}(t)$: coordonnées généralisées du système dépendant du temps.

p et q : nombres de demi-ondes dans les directions x et y respectivement.

Les familles de fonctions $(X_m)_{1 \leq m \leq +\infty}$; $(Y_m)_{1 \leq m \leq +\infty}$; $(\phi_p)_{1 \leq p \leq +\infty}$ et $(\Psi_q)_{1 \leq q \leq +\infty}$ doivent être des familles complètes dans leurs domaines de définition, soient pour $x \in [-a,+a]$ et $y \in [-b,+b]$.

2.2.2.- *Choix des fonctions d'approximation*

Comme OSTIGUY [3], nous choisissons les fonctions suivantes :

$$X_m = \frac{\cosh \alpha_m x}{\cosh \alpha_m a} - \frac{\cos \alpha_m x}{\cos \alpha_m a} \qquad m = 1,2,3 \ldots$$

$$Y_m = \frac{\cosh \beta_m y}{\cosh \beta_m b} - \frac{\cos \beta_m y}{\cos \beta_m b} \qquad m = 1,2,3 \ldots \tag{2.5}$$

$$\Phi_p = \cos \frac{p\pi x}{2a} \qquad p = 1,2 \ldots$$

$$\Psi_q = \cos \frac{q\pi y}{2b} \qquad q = 1,3 \ldots \tag{2.6}$$

ou

$$\Psi_q = \sin \frac{q\pi y}{2b} \qquad q = 2,4 \ldots$$

avec un choix particulier de α_m et β_m ; F et W vérifient les conditions aux limites, en effet : $F_{,yy} = \sum_{m,m} f_{mm} X_m Y''_m$

$F_{,xx} = \sum_{m,m} f_{mm} X''_m Y_m - \frac{P_y(t)}{h}$ et $F_{,xy} = \sum_{m,m} f_{mm} X'_m Y'_m$.

et on a bien : $F_{,yy}(x = \pm a) = 0$ car $X_m(\pm a) = 0$

$$F_{,xx}(y = \pm b) = -\frac{P_y(t)}{b} \quad \text{car} \quad Y_m(\pm b) = 0$$

et pour avoir

$F_{,xy}(\pm a) = 0$ il faut : $\tanh \alpha_m a + \operatorname{tg} \alpha_m a = 0$

et

$F_{,xy}(\pm b) = 0$ il faut : $\tanh \beta_m b + \operatorname{tg} \beta_m b = 0$

soit en posant $\lambda_m = \beta_m b$, $\lambda_m = \alpha_m a$

$$\tanh \lambda_p + \operatorname{tg} \lambda_p = 0$$ que l'on appelle <u>équation transcendante</u> (2.7)

pour la fonction W :

avec le choix de $\phi_p(x)$ et $\psi_q(y)$ on a bien :

$$W(x = \pm a) = 0 \quad , \quad W(y = \pm b) = 0$$

et $$W_{,xx} + \nu W_{,yy} = -\frac{p^2\pi^2}{(2a)^2} W - \nu \frac{q^2\pi^2}{(2b)^2} W$$

$$= \left[-\frac{p^2\pi^2}{(2a)^2} - \nu \frac{q^2\pi^2}{(2b)^2} \right] W$$

donc $W_{,xx} + \nu W_{,yy} = 0$ pour $x = \pm a$

de même pour

$$W_{,yy} + \nu W_{,xx} = \left[-\frac{q^2\pi^2}{(2b)^2} - \nu \frac{p^2\pi^2}{(2a)^2} \right] W$$

et $W_{,yy} + \nu W_{,xx} = 0$ pour $y = \pm b$.

2.2.3.- *Orthogonalité des familles* (X_m) ; (Y_n) , (Φ_p) ; (Ψ_q) .

Prenons par exemple la famille (X_m) : soit $i \neq j$ calculons $\int_{-a}^{+a} X_i X_j \, dx$. En posant $\lambda_p = \alpha_p a$.

$$\int_{-a}^{+a} X_i X_j \, dx = \frac{1}{\cosh \lambda_i \cosh \lambda_j} \int_{-a}^{+a} \cosh \alpha_i x \cosh \alpha_j x \, dx \qquad (I)$$

$$+ \frac{1}{\cos \lambda_i \cos \lambda_j} \int_{-a}^{+a} \cos \alpha_i x \cos \alpha_j x \, dx \qquad (II)$$

$$+ \frac{-1}{\cosh \lambda_i \cos \lambda_j} \int_{-a}^{+a} \cosh \alpha_i x \cos \alpha_j x \, dx \qquad (III)$$

$$+ \frac{-1}{\cosh \lambda_j \cos \lambda_i} \int_{-a}^{+a} \cosh \alpha_j x \cos \alpha_i x \, dx \qquad (IV)$$

soit :

$$(I) = \frac{1}{\cosh \lambda_i \cosh \lambda_j} \left\{ \frac{1}{(\alpha_i + \alpha_j)} \left[\sinh \lambda_i \cosh \lambda_j + \cosh \lambda_i \sinh \lambda_j \right] \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(\alpha_i - \alpha_j)} \left[\sinh \lambda_i \cosh \lambda_j - \cosh \lambda_i \sinh \lambda_j \right] \right\}$$

$$(II) = \frac{1}{\cos \lambda_i \cos \lambda_j} \left\{ \frac{1}{(\alpha_i + \alpha_j)} \left[\sin \lambda_i \cos \lambda_j + \cos \lambda_i \sin \lambda_j \right] \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(\alpha_i - \alpha_j)} \left[\sin \lambda_i \cos \lambda_j - \cos \lambda_i \sin \lambda_j \right] \right\}$$

$$(III) = \frac{-1}{\cosh\lambda_i \cos\lambda_j}\left\{\frac{2\alpha_i}{\alpha_i^2+\alpha_j^2}\ \sinh\lambda_i\cos\lambda_j + \frac{2\alpha_j}{\alpha_i^2+\alpha_j^2}\cosh\lambda_i \sin\lambda_j\right\}$$

$$(IV) = \frac{-1}{\cosh\lambda_j \cos\lambda_i}\left\{\frac{2\alpha_j}{\alpha_i^2+\alpha_j^2}\ \sinh\lambda_j\cos\lambda_i + \frac{2\alpha_i}{\alpha_i^2+\alpha_j^2}\cosh\lambda_j \sin\lambda_i\right\}$$

En considérant **(I)** et **(II)** :

$$(I)+(II) = \frac{1}{(\alpha_i+\alpha_j)}\left[(\tanh\lambda_i + \operatorname{tg}\lambda_i) + (\tanh\lambda_j + \operatorname{tg}\lambda_j)\right]$$

$$+\frac{1}{(\alpha_i-\alpha_j)}\left[(\tanh\lambda_i + \operatorname{tg}\lambda_i) - (\tanh\lambda_j + \operatorname{tg}\lambda_j)\right]$$

En considérant (2.7) on a : $(I)+(II) = 0$

De même pour **(III)** et **(IV)**

$$(III)+(IV) = -\frac{2\alpha_i}{\alpha_i^2+\alpha_j^2}\ (\tanh\lambda_i + \operatorname{tg}\lambda_i) - \frac{2\alpha_j}{\alpha_j^2+\alpha_i^2}(\tanh\lambda_j + \operatorname{tg}\lambda_j)$$

vu (2.7) on a : $(III) + (IV) = 0$

même calcul pour la famille $Y_m(y)$

maintenant calculons : $\int_{-a}^{+a} X_i^2(x)\,dx$

$$\int_{-a}^{+a} X_i^2(x)\,dx = \frac{1}{\cosh^2\lambda_i}\underbrace{\int_{-a}^{+a}\cosh^2\alpha_i x\,dx}_{(1)} + \frac{1}{\cos^2\lambda_i}\underbrace{\int_{-a}^{+a}\cos^2\alpha_i x\,dx}_{(2)}$$

$$-\frac{2}{\cosh\lambda_i\cos\lambda_i}\underbrace{\int_{-a}^{+a}\cos\alpha_i x\,\cosh\alpha_i x\,dx}_{(3)}$$

$$(1) = \frac{1}{\cosh^2\lambda_i}\left(a + \frac{1}{\alpha_i}\sinh\lambda_i\cosh\lambda_i\right)$$

$$(2) = \frac{1}{\cos^2\lambda_i}\left(a + \frac{1}{\alpha_i}\sin\lambda_i\cos\lambda_i\right)$$

$$(3) = \frac{-2}{\cosh\lambda_i\cos\lambda_i}\,\frac{1}{\alpha_i}\left(\sinh\lambda_i\cos\lambda_i + \cosh\lambda_i\sin\lambda_i\right)$$

$$(1)+(2) = \frac{a}{\cosh^2\lambda_i} + \frac{a}{\cos^2\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_i}\left(\tanh\lambda_i + \operatorname{tg}\lambda_i\right)$$

$$= \frac{a}{\cosh^2\lambda_i} + \frac{a}{\cos^2\lambda_i}$$

$$(3) = \frac{-2}{\alpha_i}\left(\tanh\lambda_i + \operatorname{tg}\lambda_i\right) = 0$$

or $$\frac{1}{\cosh^2 \lambda_i} = 1 - \tanh^2 \lambda_i \; ; \frac{1}{\cos^2 \lambda_i} = 1 + tg^2 \lambda_i$$

donc $$(1) + (2) = 2a + a\left(tg^2 \lambda_i - \tanh^2 \lambda_i\right) = 2a$$

même calcul pour la famille $Y_m(y)$. Le calcul pour Φ_q et Ψ_q est élémentaire. Donc

$$\left[\begin{array}{l} \displaystyle\int_{-a}^{+a} X_i^2 \, dx = 2a \quad ; \int_{-b}^{+b} Y_j^2 \, dy = 2b \\ \\ \displaystyle\int_{-a}^{+a} \Phi_p^2(x) \, dx = a \quad ; \int_{-b}^{+b} \Psi_q^2(y) \, dy = b \end{array}\right. \tag{2.8}$$

$$\left[\int_{-a}^{+a} X_i X_j = \int_{-b}^{+b} Y_i Y_j = \int_{-a}^{+a} \Phi_i \Phi_j = \int_{-b}^{+b} \Psi_i \Psi_j = 0 \quad i \neq j \right. \tag{2.9}$$

2.3.- DETERMINATION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE VERIFIEE PAR $W_{pq}(t)$

En substituant les expressions de F et W données par (2.4) dans les équations de départ (2.1), on obtient :

$$\sum_m \sum_n \rho f_{mnm} \left(X_m^{IV} Y_n + 2 X_m'' Y_n'' + X_m Y_m^{IV} \right) = \tag{2.10}$$

$$E \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s W_{pq} W_{rs} \left(\Phi_p' \Phi_r' \Psi_q \Psi_s' - \Phi_p'' \Phi_r \Psi_q \Psi_s'' \right)$$

et $$\sum_p \sum_q W_{pq} \left(\phi_p^{IV} \psi_q + 2 \phi_p'' \psi_q'' + \phi_p \psi_q^{IV} \right) =$$

$$\frac{h}{D} \left[\sum_m \sum_n \sum_p \sum_q f_{mn} W_{pq} \left(X_m \phi_p'' Y_n'' \psi_q + X_m'' \phi_p Y_n \psi_q'' \right.\right.$$

$$\left. - 2 X_m' \phi_p' Y_n' \psi_s' \right) + \sum_p \sum_q \left(-\frac{1}{h} P_y(t) W_{pq} \phi_p \psi_q'' \right.$$

$$\left.\left. - \rho \frac{\partial^2 W_{pq}}{\partial t^2} \phi_p \psi_q \right) \right] \qquad (2.11)$$

Puisque nous travaillons dans un seul mode de vibration et nous ne nous intéressons pas aux termes de couplages, nous prendrons $W_{pq} = W_{rs}$ soit $p = r$ et $q = s$.

Utilisant les propriétés d'orthogonalité des fonctions d'approximations considérées, il est possible d'exprimer les équations (2.10) et (2.11) sous la forme suivante :

$$\left[\sum_m \sum_n A_{mn} X_m Y_n = \sum_m \sum_n B_{mn} X_m Y_n \right.$$

donc $$\left. A_{mn} = B_{mn} \right. \qquad (2.12)$$

et $$\left[\sum_p \sum_q C_{pq} \phi_p \psi_q = \sum_p \sum_q D_{pq} \phi_p \psi_q \right.$$

$$(2.13)$$

donc $$\left. C_{pq} = D_{pq} \right.$$

Pour pouvoir aboutir aux équations (2.12) et (2.13) nous devons exprimer

<u>d'une part</u> les fonctions X''_i ; $\phi'_p \phi'_p$; $\phi''_p \phi_p$ dans la base $(X_m)_{1 \leq m \leq +\infty}$ de même pour Y''_j ; $\Psi'_q \Psi'_q$ et $\Psi_q \Psi''_q$ dans la base $(Y_m)_{1 \leq m \leq +\infty}$

<u>et d'autre part</u> $X'_m \phi'_p$; $X''_m \phi_p$; $X_m \phi''_p$ dans la base $(\phi_p)_{1 \leq p \leq +\infty}$ et $Y'_m \Psi'_q$; $Y''_m \Psi_q$; $Y_m \Psi''_q$ dans la base $(\Psi_q)_{1 \leq q \leq +\infty}$

<u>Commençons par les équations (2.12) et posons</u> :

$$X''_i = \frac{\lambda_i^2}{a^2} \sum_m K_1^{mi} X_m \quad ; \quad Y''_j = \frac{\lambda_j^2}{b^2} \sum_m L_1^{mj} Y_m$$

$$\phi'_p \phi'_p = \frac{p^2\pi^2}{4a^2} \sum_m K_2^{mpp} X_m \quad ; \quad \Psi'_q \Psi'_q = \frac{q^2\pi^2}{4b^2} \sum_m L_2^{mqq} Y_m$$

$$\phi''_p \phi_p = \frac{p^2\pi^2}{4a^2} \sum_m K_3^{mpp} X_m \quad ; \quad \Psi_q \Psi''_q = \frac{q^2\pi^2}{4b^2} \sum_m L_3^{mqq} Y_m$$

En remplaçant dans l'équation (2.10), nous obtenons :

$$\sum_{mm} A_{mm} X_m Y_m = \sum_m \sum_m B_{mm} X_m Y_m$$

avec

$$\left[\begin{array}{l} A_{mm} = \left[\dfrac{r^4 \lambda_m^4 + \lambda_m^4}{r^2} \right] \delta_{mm} + 2 \sum_i \sum_j f_{ij} \lambda_i^2 \lambda_j^2 K_1^{mi} L_1^{mj} \\ \\ B_{mm} = \dfrac{\pi^4 p^2 q^2}{16} \; E \; W_{pq}^2 \left[K_2^{mpp} L_2^{mqq} - K_3^{mpp} L_3^{mqq} \right] \end{array} \right. \qquad (2.14)$$

dans B_{mm} il y a sommation par rapport à p et q. $r = \frac{b}{a}$ est le rapport de forme de la plaque et les quantités K_1^{mi} , K_2^{mpp}, K_3^{mpp} L_1^{mj} , L_2^{mqq} et L_3^{mqq} peuvent être déterminées en utilisant l'orthogonalité des fonctions X_m, Y_m, ϕ_p et Ψ_q :

Soit

$$\begin{cases} K_1^{mi} = \dfrac{a}{2\lambda_i^2} \displaystyle\int_{-a}^{+a} X_i'' X_m \, dx \; ; \; K_2^{mpp} = \dfrac{2a}{p^2\pi^2} \displaystyle\int_{-a}^{+a} \Phi_p' \Phi_p' X_m \, dx \\ K_3^{mpp} = \dfrac{2a}{p^2\pi^2} \displaystyle\int_{-a}^{+a} \Phi_p'' \Phi_p X_m \, dx \end{cases} \qquad (2.15)$$

et

$$\begin{cases} L_1^{mj} = \dfrac{b}{2\lambda_j^2} \displaystyle\int_{-b}^{+b} Y_j'' Y_m \, dy \; ; \; L_2^{mqq} = \dfrac{2b}{q^2\pi^2} \displaystyle\int_{-b}^{+b} \Psi_q' \Psi_q' Y_m \, dy \\ L_3^{mqq} = \dfrac{2b}{q^2\pi^2} \displaystyle\int_{-b}^{+b} \Psi_q \Psi_q'' Y_m \, dy \end{cases} \qquad (2.16)$$

Pour les équations (2.13) nous posons :

$$X_m' \Phi_p' = \frac{p\pi\lambda_m}{2a^2} K_4^{pmp} \Phi_p \; ; \; Y_m' \Psi_q' = \frac{q\pi\lambda_m}{2b^2} L_4^{qmq} \Psi_q$$

$$X_m'' \Phi_p = \frac{\lambda_m^2}{a^2} K_5^{pmp} \Phi_p \; ; \; Y_m'' \Psi_q = \frac{\lambda_m^2}{b^2} L_5^{qmq} \Psi_q$$

$$X_m \Phi_p'' = \frac{p^2\pi^2}{4a^2} K_6^{ppm} \Phi_p \; ; \; Y_m \Psi_q'' = \frac{q^2\pi^2}{4b^2} L_6^{qqm} \Psi_q$$

En remplaçant dans l'équation (2.11) nous obtenons :

$$\sum_p \sum_q C_{pq} \Phi_p \Psi_q = \sum_p \sum_q D_{pq} \Phi_p \Psi_q$$

avec

$$C_{pq} = \frac{\pi^4}{16 a^4 r^2}\left[r^2 p^4 + 2 p^2 q^2 + \frac{q^4}{r^2}\right] W_{pq}$$

$$D_{pq} = \frac{h}{D}\left\{\frac{\pi^2}{4a^4 r^2} W_{pq} \sum_m \sum_m \left[p^2 \lambda_m^2 K_6^{ppm} L_5^{qmq} + q^2 \lambda_m^2 K_5^{pmp} L_6^{qqm}\right.\right. \quad (2.17)$$

$$\left. - 2 p q \lambda_m \lambda_m K_4^{pmp} L_4^{qmq}\right] f_{mm}$$

$$\left. + \frac{q^2 \pi^2}{4 h a^2 r^2} P_y(t) W_{pq} - \rho \frac{\partial^2 W_{pq}}{\partial t^2}\right\}$$

où

$$\left[\begin{array}{l} K_4^{pmp} = \dfrac{2a}{\pi p \lambda_m} \displaystyle\int_{-a}^{+a} X'_m \Phi'_p \Phi_p \, dx \; ; \; K_5^{pmp} = \dfrac{a}{\lambda_m^2} \displaystyle\int_{-a}^{+a} X''_m \Phi_p \Phi_p \, dx \\ \\ K_6^{ppm} = \dfrac{4a}{p^2 \pi^2} \displaystyle\int_{-a}^{+a} X_m \Phi''_p \Phi_p \, dx \end{array}\right. \quad (2.18)$$

et

$$\left[\begin{array}{l} L_4^{qmq} = \dfrac{2b}{\pi q \lambda_m} \displaystyle\int_{-b}^{+b} Y'_m \Psi'_q \Psi_q \, dy \; ; \; L_5^{qmq} = \dfrac{b}{\lambda_m^2} \displaystyle\int_{-b}^{+b} Y''_m \Psi_q \Psi_q \, dy \\ \\ L_6^{ppm} = \dfrac{4b}{q^2 \pi^2} \displaystyle\int_{-b}^{+b} Y_m \Psi''_q \Psi_q \, dy \end{array}\right. \quad (2.19)$$

* l'équation (2.12) et les équations (2.14) donnent une équation reliant des coefficients généralisés f_{mm} de contrainte et les coordonnées généralisées W_{pq} .

$$\boxed{f_{mm} = F_{mm} \, E \, W_{pq}^2} \quad (2.20)$$

où F_{mm} dépend du rapport de forme de la plaque et des λ_m et λ_m .

En considérant (2.20), (2.13) et (2.17) , nous déduisons que :

$$\ddot{W}_{pq} + \frac{\pi^4 D}{16\rho h a^4 r^2}\left[r^2 p^4 + 2p^2q^2 + \frac{q^4}{r^2}\right] W_{pq}$$

$$- \frac{q^2\pi}{4\rho h a^2 r^2} P_y(t) W_{pq} + \frac{\pi^2 E}{4\rho a^4 r^2}\left\{\sum_m \sum_m \left[2pq\lambda_m\lambda_m K_4^{pmp} L_4^{qmq}\right.\right.$$

$$\left.\left. - p^2\lambda_m^2 K_6^{ppm} L_5^{qmq} - q^2\lambda_m^2 K_5^{pmp} L_6^{qqm}\right] F_{mm}\right\} W_{pq}^3 = 0 \quad (2.21)$$

qui représente l'équation temporelle non linéaire d'excitation paramétrique des plaques rectangulaires simplement posées.

Posons par la suite :

$$\omega_{pq} = \frac{\pi^2}{4a^2 r}\left[r p^2 + \frac{q}{r}\right]\sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$: fréquence de vibrations libres.

$$P_{pq} = \frac{\pi^2 D}{4a^2 q^2}\left[r^2 p^4 + 2p^2 q^2 + \frac{q^4}{r^2}\right]$$: charge critique de flambement.

$$\gamma_{pq} = \frac{\pi^2 E}{4\rho a^4 r^2}\left\{\sum_m \sum_m \left[2pq\lambda_m\lambda_m K_4^{pmp} L_4^{qmq} - p^2\lambda_m^2 K_6^{ppm} L_5^{qmq}\right.\right.$$

$$\left.\left. - q^2\lambda_m^2 K_5^{pmp} L_6^{qqm}\right] F_{mm}\right\}$$

γ_{pq} : est le coefficient non linéaire d'élasticité.

Sachant que $P_y(t) = P_{yo} + P_{yt}\, e(t)$, l'équation temporelle du mouvement correspondant à tout mode spatial de vibration est :

$$\ddot{W}_{pq} + \omega_{pq}^2\left[1 - \frac{P_{yo} + P_{yt}\, e(t)}{P_{pq}}\right] W_{pq} + \gamma_{pq} W_{pq}^3 = 0$$

Posons de même :

$$\Omega_{pq} = \omega_{pq}\sqrt{1 - \frac{P_{yo}}{P_{pq}}}$$ qui est la pulsation naturelle de la vibration de la plaque chargée par P_{yo}

et $\mu_{pq} = \dfrac{P_{yt}}{2(P_{pq} - P_{yo})}$ excitation en charge paramétrique.

Avec ces notations nous avons l'équation non linéaire vérifiée par W_{pq} :

$$\ddot{W}_{pq} + \Omega^2_{pq}\left(1 - 2\mu_{pq}\, e(t)\right) W_{pq} + \gamma_{pq} W^3_{pq} = 0 \qquad (2.22)$$

Dans ce qui suit, nous étudierons les mouvements avec viscosité linéaire $2 C_{pq} \dot{W}_{pq}$, et l'équation générale devient :

$$\ddot{W}_{pq} + 2 C_{pq} \dot{W}_{pq} + \Omega^2_{pq}\left(1 - 2\mu_{pq} e(t)\right) W_{pq} + \gamma_{pq} W^3_{pq} = 0 \qquad (2.23)$$

Comme il y a généralement qu'une demi-onde dans la direction perpendiculaire à la compression, on pose $p = 1$ et $q = 1, 2, 3 \cdots$.

En omettant l'indice q , l'équation finale du mouvement de la plaque est :

$$\boxed{\ddot{W} + 2 C \dot{W} + \Omega^2\left(1 - 2\mu\, e(t)\right) W + \gamma W^3 = 0} \qquad (2.24)$$

CHAPITRE 3

EXISTENCE DE LA SOLUTION PERIODIQUE DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE VERIFIEE PAR LE DEPLACEMENT TRANSVERSAL DE LA PLAQUE. STABILITE.

3.1.- INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous allons donner une méthode générale d'existence de solution non nulle de l'équation différentielle régissant le mouvement d'une plaque rectangulaire excitée paramétriquement par des percussions périodiques δ.

Pour montrer l'existence des solutions non nulles de l'équation (2.24) nous devons nous placer dans le cas des deux hypothèses suivantes :

a) la viscosité c, l'excitation paramétrique μ et le coefficient de non linéarité γ sont petits; nous posons pour la commodité de l'écriture :

$$c = \lambda c \qquad \mu = \lambda \mu \qquad \gamma = \lambda \gamma$$

λ étant un petit paramètre (ou infiniment petit du problème).

b) Dans le cas d'excitation paramétrique nous devons envisager le cas de la résonance (pour avoir des vibrations non nulles) soit :

$$\Omega^2 = \omega^2 (1 + \lambda \varepsilon)$$ où ω la pulsation de l'excitation.

ε étant une constante non nulle.

L'équation (2.24) devient :

$$\ddot{w} + \omega^2 w = \lambda \left[2\mu w e(t) - 2c\dot{w} - \varepsilon \omega^2 w - \gamma w^3 \right] \qquad (3.1)$$

Cette équation représente un oscillateur linéaire $(\ddot{w} + \omega^2 w)$ perturbé par $(2\mu w e(t) - \gamma w^3 - 2c\dot{w} - \varepsilon \omega^2 w)$ de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Le dernier paragraphe de ce chapitre sera consacré aux questions de stabilité, nous en donnerons alors les conditions.

3.2.- *THEOREME*

L'équation différentielle (3.1) où ε est une constante non nulle admet en général une solution périodique appartenant à l'espace des séries absolument convergentes.

$$B(T) = \left\{ x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{in\omega t} \;,\; \sum |x_n| < +\infty \right.$$
$$\left. \text{et} \quad \bar{x}_n = x_{-n} \right\}$$

pourvu que λ soit petit.

On définit dans cet espace la norme par : si $x(t) \in B(T)$

alors $\|x(t)\| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|$.

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin d'un certain nombre de propriétés; ce qui fera l'objet du paragraphe suivant .

3.3.- *PRELIMINAIRES*

3.3.1.- *Structure et propriétés de l'espace* $B(T)$

a) $B(T)$ est isomorphe à $l^1(\mathbb{Z}) = \left\{ (x_n)\ n \in \mathbb{Z},\ \sum |x_n| < +\infty \right\}$

soit l'application : $T : l^1(\mathbb{Z}) \longrightarrow B(T)$ telle que $T\left[(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\right] = \sum x_n e^{in\omega t}$

est visiblement bijective et linéaire. En plus si on défini sa norme par :

$$\|T\| = \sup \frac{\|T(x_n)\|_{B(T)}}{\|(x_n)\|_{l^1(\mathbb{Z})}} = 1$$

Donc T est une isométrie.

Puisque $l^1(\mathbb{Z})$ est un espace de Banach alors on peut en déduire que $B(T)$ est aussi un espace de Banach.

b) L'application $\mathcal{B} \longrightarrow C^0(\mathbb{R},T)$ muni de la norme"sup"est injective et de norme 1 . $\mathcal{B}(T)$ est donc un espace fermé de $C^0(\mathbb{R},T)$ et la convergence dans $\mathcal{B}(T)$ implique la convergence uniforme car :

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)| \leq \|x(t)\|_{\mathcal{B}(T)}$$

on a l'égalité pour $x(t) = e^{inwt}$ $\quad n \in \mathbb{Z}$

c) $l^1(\mathbb{Z}) = E_1 \oplus E_2$ avec

$$E_1 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid x_n = 0 \text{ si } |n| \neq 1\}$$

$$E_2 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid x_1 = x_{-1} = 0\}$$

Grâce à l'isomorphisme T nous avons :

$$\mathcal{B}(T) = \mathcal{B}_1(T) \oplus \mathcal{B}_2(T)$$

où

$$\mathcal{B}_1(T) = \{x_{-1}e^{-iwt} + x_1 e^{iwt} \mid |x_{-1}| + |x_1| < +\infty\}$$

$$\mathcal{B}_2(T) = \{\sum_{|p|\neq 1} x_p e^{ipwt} \mid \sum_{|p|\neq 1} |x_p| < +\infty\}$$

nous appellerons P_1 et P_2 deux projecteurs suivant $\mathcal{B}_1(T)$ et $\mathcal{B}_2(T)$ respectivement :

$$P_1 : u \in \mathcal{B}(T) \longmapsto P_1 u = u_1 \in \mathcal{B}_1(T)$$

$$P_2 : u \in \mathcal{B}(T) \longmapsto P_2 u = u_2 \in \mathcal{B}_2(T)$$

$$u = P_1 u + P_2 u = u_1 + u_2$$

d) $B(T)$ a une structure d'algèbre de Banach

Puisque la multiplication est associative dans $l^1(\mathbb{Z})$ et distributive par rapport à l'addition, elle l'est aussi dans $B(T)$.

Montrons que : si $x(t) \in B(T)$, $y(t) \in B(T)$

$$\|x(t) \cdot y(t)\| \leq \|x(t)\| \cdot \|y(t)\|$$

En effet, il suffit de montrer cette propriété dans $l^1(\mathbb{Z})$.

Posons $x = (x_p)$; $y = (y_p)$; $z = (z_p)$

x , y , z sont des éléments de $l^1(\mathbb{Z})$. On définit la convolution des suites de la manière suivante :

$$z = x * y \iff \forall m \in \mathbb{Z} \ , \ z_m = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x_p \, y_{p-m}$$

donc

$$\|z\| = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |z_m| = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |x_p \, y_{p-m}|$$

$$\leq \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |x_p| \, |y_{p-m}| = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |x_p| \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |y_{p-m}|$$

or

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |y_{p-m}| = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} |y_q|$$

$$\Rightarrow \quad \|z\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Soit alors dans $\ell^1(\mathbb{Z})$: $x \in \ell^1(\mathbb{Z})$, $y \in \ell^1(\mathbb{Z})$

$$\|x * y\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$

et puisque

$$T(x * y) = T(x) \times T(y)$$

On a alors pour $x(t) \in B(T)$ et $y(t) \in B(T)$

$$\|x(t) \cdot y(t)\| \leqslant \|x(t)\| \cdot \|y(t)\|$$

et si $m \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\|x(t)^m\| \leqslant \|x(t)\|^m$$

3.3.2.- *Mesure de Dirac-Distributions*

a) Nous définissons la percussion par une mesure de Dirac $\delta(t-mT)$ agissant pour tous les instants $t = mT$. m prenant toutes les valeurs entières négatives et positives ou nulle. La force extérieure est représentée par

$$e(t) = T \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT) \ .$$

On montre (cf. L. SCHWARTZ [7]) que la série $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik\omega t}}{T}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers la distribution périodique $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - mT)$ comportant une masse en chaque point (instant) d'abscisse multiple entier de T.

Soit $$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik\omega x}}{T} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - mT) \ ; \ T = \frac{2\pi}{\omega} \ .$$

b) Soit u une fonction et δ étant la distribution de Dirac, alors :

$$\langle u\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, u\varphi \rangle = u(0)\,\varphi(0)$$

donc $$u\,\delta = u(0)\,\delta$$

nous définissons le produit $u\,\delta(t-mT)$ par :

$$u\,\delta(t-mT) = u(mT)\,\delta(t-mT)$$

$$= u(0)\,\delta(t-mT)$$

car u est périodique.

3.3.3.- *Solution de synchronisation*

Dans ce paragraphe nous nous proposons de chercher une solution particulière w_0 de l'équation (3.1) sous la forme $w_0 = A e^{-i\omega t} + B e^{i\omega t}$ vérifiant la condition

$$\boxed{2\mu w_0 e(t) - 2c\dot{w}_0 - \varepsilon\omega^2 w_0 - \gamma w_0^3 \in B_2(T)} \quad (3.2)$$

(3.2) s'appelle condition de synchronisation.

Nous posons par la suite

$$f(w_0, \dot{w}_0, t) = 2\mu w_0 e(t) - 2c\dot{w}_0 - \varepsilon\omega^2 w_0 - \gamma w_0^3$$

Pour satisfaire la condition (3.2), il suffit d'annuler les coefficients de $e^{i\omega t}$ et $e^{-i\omega t}$ dans le développement en série de Fourier de $f(w_0, \dot{w}_0, t)$.

En effet :

Comme on a vu auparavant, nous remplaçons la distribution périodique $e(t) = T\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta(t-mT)$ par sa série de Fourier $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\omega t}$ au sens des distributions. Ce qui donne :

$$f(w_0, \dot{w}_0, t) = 2\mu(A+B)\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\omega t} - 2c\left(-i\omega A e^{-i\omega t} + i\omega B e^{i\omega t}\right) - \varepsilon\omega^2\left(A e^{-i\omega t} + B e^{i\omega t}\right) - \gamma\left(A e^{-i\omega t} + B e^{i\omega t}\right)^3$$

Rappelons que :

$$W_0\,\delta(t-mT) = W_0(mT)\,\delta(t-mT)$$
$$= W_0(0)\,\delta(t-mT)$$

$$\Rightarrow W_0\,e(t) = W_0(0)\,T\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta(t-mT) = W_0(0)\sum_{m=-\infty}^{+\infty}e^{imwt}$$

Alors

$$f(W_0,\dot{W}_0,t) \in B_2(T) \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} &2\mu(A+B) + 2cwiA - \varepsilon w^2 A - 3\gamma A^2 B = 0 \\ &2\mu(A+B) - 2cwiB - \varepsilon w^2 B - 3\gamma AB^2 = 0 \end{aligned}} \qquad (3.3)$$

Ces équations (3.3) s'appellent équations de synchronisation.

Posons

$$A = re^{i\theta} \qquad B = re^{-i\theta}$$

en remplaçant dans (3.3).

$$2\mu r(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) + 2cwire^{i\theta} - \varepsilon w^2 re^{i\theta} - 3\gamma r^3 e^{i\theta} = 0$$

$$2\mu r(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) - 2cwire^{-i\theta} - \varepsilon w^2 re^{-i\theta} - 3\gamma r^3 e^{-i\theta} = 0$$

Ces deux expressions sont conjuguées, prenons la première et en annulant la partie réelle et la partie imaginaire on trouve :

$r = 0$ solution triviale

et le système donnant r et θ :

$$\begin{cases} 2\mu(\cos 2\theta + 1) - \varepsilon\omega^2 - 3\gamma\pi^2 = 0 & (3.4) \\ -2\mu \sin 2\theta + 2c\omega = 0 & (3.5) \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} \pi = 0 \quad \text{cas trivial} & (a) \\ \pi = \left\{ \frac{2}{3\gamma}\left[\mu - \frac{\varepsilon\omega^2}{2} + \sqrt{\mu^2 - c^2\omega^2}\right] \right\}^{\frac{1}{2}} & (b) \\ \pi = \left\{ \frac{2}{3\gamma}\left[\mu - \frac{\varepsilon\omega^2}{2} - \sqrt{\mu^2 - c^2\omega^2}\right] \right\}^{1/2} & (c) \end{cases}$$

Donc on a 3 solutions dont une est triviale. L'équation (3.5) donne :

$$\sin 2\theta = \frac{c\omega}{\mu} \qquad (3.6)$$

Pour que W_0 existe, il faut que $c \ll \frac{\mu}{\omega}$. Cette condition montre que l'excitation paramétrique doit être grande pour compenser l'effet de la viscosité, sans quoi on n'aurait pas de solution physiquement réalisable. En outre, l'équation (3.6) prouve que si l'on connait 2θ à 2π près, θ est connu à π près. Ce qui entraine que si A et B sont solution de (3.3) alors $-A$ et $-B$ le sont aussi. Autrement dit si W_0 est solution de (3.1) alors $-W_0$ aussi : la plaque flambe de part et d'autre du plan xoy.

Conclusion : Avec la condition $c \ll \frac{\mu}{\omega}$, l'équation (3.1) admet $W_0 = Ae^{-i\omega t} + Be^{i\omega t}$ comme solution, vérifiant la condition (3.2)

3.4.- PREUVE DU THEOREME

3.4.1.- Suite récurrente $(V_{1,m}) \in B_1(T)$ et $(u_{2,m}) \in B_2(T)$

Pour démontrer le théorème, nous allons définir deux suites récurrentes $(V_{1,m})$ et $(u_{2,m})$.

Posons $w = w_0 + u$, où w_0 la solution déjà trouvée et $u \in B(T)$.

L'équation (3.1) devient :

$$\ddot{u} + 2\lambda c\dot{u} + \omega^2(1+\lambda\varepsilon)u = \lambda\left[2\mu(w_0+u)\,e(t) - 2c\dot{w}_0 - \gamma(w_0+u)^3 - \varepsilon\omega^2 w_0\right]$$

et posons :

$$u = u_1 + u_2 \qquad \text{avec} \qquad u_1 \in B_1(T), \quad u_2 \in B_2(T)$$

alors :

$$\ddot{u}_1 + 2\lambda c\dot{u}_1 + \omega^2(1+\lambda\varepsilon)u_1 + \ddot{u}_2 + 2\lambda c\dot{u}_2 + \omega^2(1+\lambda\varepsilon)u_2 = \tag{3.7}$$

$$\lambda\left[2\mu(w_0+u_1+u_2)\,e(t) - \gamma(w_0+u_1+u_2)^3 - 2c\dot{w}_0 - \varepsilon\omega^2 w_0\right]$$

Posons $V_1 = w_0 + u_1 \in B_1(T)$ et projetons les deux membres de (3.7) suivant $B_1(T)$ et $B_2(T)$.

On obtient :

$$\boxed{\begin{aligned}&\ddot{V}_1 + 2\lambda c\dot{V}_1 + \omega^2(1+\lambda\varepsilon)V_1 - \lambda P_1\left[2\mu V_1\,e(t)\right] = \\ &\qquad \lambda P_1\left[2\mu u_2\,e(t) - \gamma(V_1+u_2)^3\right]\end{aligned}} \tag{3.8}$$

$$\ddot{u}_2 + 2\lambda c \dot{u}_2 + \omega^2(1+\lambda\varepsilon)u_2 = \lambda P_2\left[2\mu(V_1+u_2)e(t) - \gamma(V_1+u_2)^3\right] \quad (3.9)$$

Nous définissons les deux suites $(V_{1,m})$ et $(u_{2,m})$ de la manière suivante :

$$\left[\begin{array}{l} \ddot{V}_{1,m} + 2\lambda c \dot{V}_{1,m} + \omega^2(1+\lambda\varepsilon)V_{1,m} - \lambda P_1\left[2\mu V_{1,m} e(t)\right] \\ \qquad = \lambda P_1\left[2\mu u_{2,m-1} e(t) - \gamma(V_{1,m-1}+u_{2,m-1})^3\right] \quad (3.10) \\ \text{et} \quad V_{1,0} = w_0 \end{array}\right.$$

et

$$\left[\begin{array}{l} \ddot{u}_{2,m} + 2\lambda c \dot{u}_{2,m} + \omega^2(1+\lambda\varepsilon)u_{2,m} = \lambda P_2\left[2\mu(V_{1,m-1}+u_{2,m-1})e(t)\right. \\ \qquad \left. - \gamma(V_{1,m-1}+u_{2,m-1})^3\right] \quad (3.11) \\ \text{et} \quad u_{2,0} = 0 \end{array}\right.$$

les équations (3.10) et (3.11) définissent une transformation S telle que

$$(V_{1,m}, u_{2,m}) = S(V_{1,m-1}, u_{2,m-1})$$

où

$$V_{1,m}, u_{2,m}, V_{1,m-1}, u_{2,m-1} \in B(T)$$

3.4.2.- *Majoration de $\|V_{1,m}\|$ et $\|u_{2,m}\|$*

a) *Majoration de $\|V_{1,m}\|$*

Puisque $V_{1,m} \in B_1(T)$, il existe α_{-1m} et α_{1m} tels que

$$V_{1,m} = \alpha_{-1m} e^{-i\omega t} + \alpha_{1m} e^{i\omega t}$$

Posons :

$$P_1\left[u_{2,m-1}\ e(t)\right] = \varphi_{-1,m-1}e^{-i\omega t} + \varphi_{1,m-1}e^{i\omega t}$$

$$= \varphi_{m-1}$$

et

$$P_2\left[(V_{1,m-1} + u_{2,m-1})^3\right] = \psi_{-1,m-1}e^{-i\omega t} + \psi_{1,m-1}e^{i\omega t}$$

$$= \psi_{m-1}$$

Puisque $P_1(V_{1,m}\ e(t)) = (\alpha_{-1m} + \alpha_{1m})(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t})$

on a en remplaçant dans (3.10) :

$$(\varepsilon\omega^2 - 2\mu - i\omega 2c)\alpha_{-1m} - 2\mu\alpha_{1m} = 2\mu\varphi_{-1,m-1} - \gamma\psi_{-1,m-1}$$

(3.12)

$$-2\mu\alpha_{-1m} + (\varepsilon\omega^2 - 2\mu + i\omega 2c)\alpha_{1m} = 2\mu\varphi_{1,m-1} - \gamma\psi_{1,m-1}$$

Posons

$$K = \left|\varepsilon\omega^2 - 2\mu + 2c\omega i\right|^2 - 4\mu^2$$

donc

$$\alpha_{-1m} = \frac{1}{K}\left\{(\varepsilon\omega^2 - 2\mu + 2ic\omega)2\mu\varphi_{-1,m-1} + 4\mu^2\varphi_{1,m-1}\right.$$
$$\left. -\gamma(\varepsilon\omega^2 - 2\mu + 2ic\omega)\psi_{-1,m-1} - 2\mu\gamma\psi_{-1,m-1}\right\}$$

(3.12a)

$$\alpha_{1m} = \frac{1}{K}\left\{4\mu^2\varphi_{-1,m-1} + (\varepsilon\omega^2 - 2\mu - 2ic\omega)2\mu\varphi_{1,m-1}\right.$$
$$\left. -2\mu\gamma\psi_{-1,m-1} - \gamma(\varepsilon\omega^2 - 2\mu - 2ic\omega)\psi_{1,m-1}\right\}$$

$$\|V_{1,m}\| = |\alpha_{1m}| + |\alpha_{-1m}|$$

$$\leqslant \frac{1}{K}\Big\{\Big(|\varepsilon\omega^2 - 2\mu + 2ci\omega| + 2\mu\Big)\Big(|\Psi_{-1,m-1}| + |\Psi_{1,m-1}|\Big)2\mu$$

$$+ \gamma\Big(|\varepsilon\omega^2 - 2\mu - 2ci\omega| + 2\mu\Big)\Big(|\Psi_{-1,m-1}| + |\Psi_{1,m-1}|\Big)\Big\}$$

Posons $$K_1 = \frac{|\varepsilon\omega^2 - 2\mu + 2ci\omega| + 2\mu}{K}$$

Ce qui entraine :

$$\|V_{1,m}\| \leqslant K_1\Big\{2\mu\,\|\Psi_{m-1}\| + \gamma\,\|\Psi_{m-1}\|\Big\} \qquad (3.13)$$

or

$$\|\Psi_{m-1}\| = \|P_1\,(u_{2,m-1}\; e(t))\|$$

$$\leqslant 2\,\|u_{2,m-1}\|$$

et

$$\|\Psi_{m-1}\| = \|P_1\,(V_{1,m-1} + u_{2,m-1})^3\|$$

$$\leqslant \|(V_{1,m-1} + u_{2,m-1})^3\| \leqslant \|V_{1,m-1} + u_{2,m-1}\|^3$$

donc (3.13) devient :

$$\boxed{\|V_{1,m}\| \leqslant K_1\Big\{4\mu\,\|u_{2,m-1}\| + \gamma\,\|V_{1,m-1} + u_{2,m-1}\|^3\Big\}} \qquad (3.14)$$

Soit: si $\|V_{1,m-1}\| < \ell$ et $\|U_{2,m-1}\| < m$

ℓ et m deux nombres positifs alors :

$$\boxed{\|V_{1,m}\| \leq K_1 \left\{ 4\mu m + \gamma(\ell+m)^3 \right\}} \qquad (3.15)$$

b) Majoration de $\|U_{2,m}\|$

Puisque $U_{2,m} \in B_2(T)$, il existe α_{2mp}

$$U_{2,m} = \sum_{\substack{p=-\infty \\ |p|\neq 1}}^{+\infty} \alpha_{2mp}\, e^{ip\omega t}$$

le terme $(V_{1,m-1} + U_{2,m-1})\, e(t) = \left[V_{1,m-1}(0) + U_{2,m-1}(0)\right] \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{ip\omega t}$

donc $P_2\left[(V_{1,m-1} + U_{2,m-1})\, e(t)\right] = \left[V_{1,m-1}(0) + U_{2,m-1}(0)\right] \sum_{|p|\neq 1} e^{ip\omega t}$

$$= Q_{m-1} \sum_{|p|\neq 1} e^{ip\omega t}$$

avec $Q_{m-1} = V_{1,m-1}(0) + U_{2,m-1}(0)$ un nombre complexe et posons aussi

$$P_2\left[(V_{1,m-1} + U_{2,m-1})^3\right] = P_{m-1} = \sum_{|p|\neq 1} P_{m-1,p}\, e^{ip\omega t}$$

donc en remplaçant dans (3.11), nous obtenons les coefficients α_{2mp} de U_{2m} sous la forme :

$$\alpha_{2mp} = \lambda\, r_p \left[2\mu\, Q_{m-1} - \gamma\, P_{m-1,p}\right] \qquad (3.16)$$

où $r_p = \left[\Omega^2 - p^2\omega^2 + 2\lambda c i\omega p\right]^{-1}$, $\Omega^2 = \omega^2(1+\lambda\varepsilon)$

nous avons $\forall \lambda_0 > 0$, pour $|\lambda| < \lambda_0$; $|r_p|$ est équivalent à $\frac{1}{p^2\omega^2}$,

terme d'une série uniformément convergente sur $[-\lambda_0, \lambda_0]$.

Donc il existe S_1 tel que : $S = \sum_{p=0}^{\infty} \left| \Omega^2 - p^2\omega^2 + 2\lambda i c\omega p \right|^{-1} \leq S_1 \,,\ |\lambda| < \lambda_0$

Il est aisé de démontrer que :

$$|r_p| \leq \rho$$

où

$$\begin{cases} \rho = \dfrac{1}{2\lambda c \Omega \sqrt{1 - \frac{\lambda^2 c^2}{\Omega^2}}} & \text{si } c \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \dfrac{\Omega}{\lambda} \\ \rho = \dfrac{1}{\Omega^2} & \text{si } c > \dfrac{\sqrt{2}}{2} \dfrac{\Omega}{\lambda} \end{cases}$$

posons alors $\eta = \sup |r_p|$

Donc de (3.16) on a :

$$\|u_{2m}\| \leq \lambda \left\{ 4\mu S_1 |Q_{m-1}| + \gamma\eta \|P_{m-1}\| \right\} \qquad (3.17)$$

or $|Q_{m-1}| = |V_{1,m-1}(0) + U_{2,m-1}(0)|$

$$\leq \|V_{1,m-1}\| + \|U_{2,m-1}\|$$

et $\|P_{m-1}\| = \|P_2 (V_{1,m-1} + U_{2,m-1})^3\|$

$$\leq \|V_{1,m-1} + U_{2,m-1}\|^3$$

(3.17) devient :

$$\boxed{\|U_{2,m}\| \leq \lambda \left\{ 4\mu S_1 \left(\|V_{1,m-1}\| + \|U_{2,m-1}\| \right) + \gamma\eta \|V_{1,m-1} + U_{2,m-1}\|^3 \right\}} \qquad (3.18)$$

Si $\|V_{1,m-1}\| < \ell$ et $\|U_{2,m-1}\| < m$

ℓ et m deux nombres positifs, alors :

$$\boxed{\|u_{2,m}\| \leq \lambda(\ell+m)\left[4\mu S_1 + \gamma\eta(\ell+m)^2\right]} \quad (3.19)$$

3.4.3.- *Convergence des suites* $(V_{1,m})$ *et* $(u_{2,m})$ *dans* $B_1(T)$ *et* $B_2(T)$ *respectivement.*

En considérant (3.15) et (3.19) nous voulons trouver sous quelles conditions on a :

Si $\|V_{1,m-1}\| < \ell$ et $\|u_{2,m-1}\| < m \Rightarrow \|V_{1,m}\| < \ell$ et $\|u_{2,m}\| < m$

ℓ et m sont deux réels positifs non nuls.

1) Pour rendre $K_1(4\mu m + \gamma(\ell+m)^3) < \ell$, il suffit d'avoir :

$$K_1 4\mu m < \frac{\ell}{2}$$

et

$$K_1 \gamma (\ell+m)^3 < \frac{\ell}{2}$$

donc pour $\ell < \frac{1}{\sqrt{2K_1\gamma}}$, il suffit de choisir $m \leq \min\left[\frac{\ell}{8K_1\mu}, \left(\frac{\ell}{2K_1\gamma}\right)^{\frac{1}{3}} - \ell\right]$.

Donc avec ce choix de ℓ et de m on a montré que :

$$\text{Si } \|V_{1,m-1}\| < \ell \text{ et } \|u_{2,m-1}\| < m \Rightarrow \|V_{1,m}\| < \ell \quad (3.20.a)$$

2) Pour rendre $\lambda(m+\ell)\left[4\mu S_1 + \gamma\mu(\ell+m)^2\right] < m$ il suffit de choisir $\lambda < \lambda_1$ où

$$\lambda_1 < \frac{m}{(\ell+m)\left[4\mu S_1 + \gamma\eta(\ell+m)^2\right]}$$

et alors

$$\text{si } \|V_{1,m-1}\| < \ell \text{ et } \|u_{2,m-1}\| < m \Rightarrow \|u_{2,m}\| < m \quad (3.20.b)$$

A) Majoration de $\|V_{1,m+1} - V_{1,m}\|$

$$\|V_{1,m+1} - V_{1,m}\| = |\alpha_{-1,m+1} - \alpha_{-1,m}| + |\alpha_{1,m+1} - \alpha_{1,m}| \qquad (3.21)$$

D'après (3.12.a) $$\leqslant K_1 \{ 2\mu \|\varphi_m - \varphi_{m-1}\| + \gamma \|\psi_m - \psi_{m-1}\| \}$$

or

$$\|\varphi_m - \varphi_{m-1}\| = \|P_1 (u_{2,m} - u_{2,m-1}) e(t)\| \qquad (3.22)$$
$$\leqslant 2 \|u_{2,m} - u_{2,m-1}\|$$

et
$$\|\psi_m - \psi_{m-1}\| = \|P_1 [(V_{1,m} + u_{2,m})^3 - (V_{1,m-1} + u_{2,m-1})^3]\|$$
$$\leqslant \|(V_{1,m} + u_{2,m})^3 - (V_{1,m-1} + u_{2,m-1})^3\|$$

or
$$(V_{1,m} + u_{2,m})^3 - (V_{1,m-1} + u_{2,m-1})^3 = [(V_{1,m} - V_{1,m-1}) + (u_{2,m} - u_{2,m-1})] \times$$

$$[(V_{1,m} + u_{2,m})^2 + (V_{1,m-1} + u_{2,m-1})^2 + (V_{1,m} + u_{2,m})(V_{1,m-1} + u_{2,m-1})]$$

d'après des propriétés de la norme dans l'espace $\mathcal{B}(T)$ et (3.20.a) et (3.20.b) on a :

$$\|\psi_m - \psi_{m-1}\| \leqslant 3(l+m)^2 \{ \|V_{1,m} - V_{1,m-1}\| + \|u_{2,m} - u_{2,m-1}\| \} \qquad (3.23)$$

donc
$$\|V_{1,m+1} - V_{1,m}\| \leqslant K_1 \{ 4\mu \|u_{2,m} - u_{2,m-1}\| + 3\gamma (l+m)^2 (\|V_{1,m} - V_{1,m-1}\|$$
$$+ \|u_{2,m} - u_{2,m-1}\|) \}$$

donc

$$\left\| V_{1,m+1} - V_{2,m} \right\| \leqslant K_1 \left\{ 3\gamma (\ell+m)^2 \left\| V_{1,m} - V_{1,m-1} \right\| + \left(4\mu + 3\gamma(\ell+m)^2 \right) \times \left\| U_{2,m} - U_{2,m-1} \right\| \right\} \quad (3.24)$$

B) <u>Majoration de $\|U_{2,m+1} - U_{2,m}\|$</u>

D'après (3.16)

$$\alpha_{2(m+1),p} - \alpha_{2m,p} = \lambda r_p \left[(Q_m - Q_{m-1}) 2\mu - \gamma (P_{m,p} - P_{m-1,p}) \right]$$

or $$\left| Q_m - Q_{m-1} \right| \leqslant \left\| V_{1,m} - V_{1,m-1} \right\| + \left\| U_{2,m} - U_{2,m-1} \right\|$$

et $$\left\| P_m - P_{m-1} \right\| = \left\| P_2 \left[(V_{1,m} + U_{2,m})^3 - (V_{1,m-1} - U_{2,m-1})^3 \right] \right\|$$

$$\leqslant \left(\left\| V_{1,m} - V_{1,m-1} \right\| + \left\| U_{2,m} - U_{2,m-1} \right\| \right) \times$$

$$\left(\left\| U_{2,m} + V_{1,m} \right\|^2 + \left\| U_{2,m-1} + V_{1,m-1} \right\|^2 + \left\| U_{2,m} + V_{1,m} \right\| \left\| U_{2,m-1} + V_{1,m-1} \right\| \right)$$

Donc d'après (3.20.a) et (3.20.b).

$$\left\| P_m - P_{m-1} \right\| \leqslant 3(\ell+m)^2 \left(\left\| V_{1,m} - V_{1,m-1} \right\| + \left\| U_{2,m} - U_{2,m-1} \right\| \right)$$

et $$\left\| U_{2,m+1} - U_{2,m} \right\| \leqslant \lambda \left[4\mu S_1 \left| Q_m - Q_{m-1} \right| + \gamma\eta \left\| P_m - P_{m-1} \right\| \right]$$

$$\leqslant \lambda \left[4\mu S_1 \left(\left\| V_{1,m} - V_{1,m-1} \right\| + \left\| U_{2,m} - U_{2,m-1} \right\| \right) \right.$$

$$\left. + \gamma\eta 3(\ell+m)^2 \left(\left\| V_{1,m} - V_{1,m-1} \right\| + \left\| U_{2,m} - U_{2,m-1} \right\| \right) \right]$$

donc finalement :

$$\|u_{2,m+1} - u_{2,m}\| \leqslant \lambda\left[\left(4\mu S_1 + 3\gamma\eta(\ell+m)^2\right)\left(\|v_{1,m} - v_{1,m-1}\| + \|u_{2,m} - u_{2,m-1}\|\right)\right] \quad (3.25)$$

Par la suite on posera : $\Sigma_m = \|v_{1,m} - v_{1,m-1}\|$ et $\gamma_m = \|u_{2,m} - u_{2,m-1}\|$

(3.24) et (3.25) deviennent :

$$\Sigma_{m+1} \leqslant K_1\left(4\mu + 3\gamma(\ell+m)^2\right)(\gamma_m + \Sigma_m)$$

$$\gamma_{m+1} \leqslant \lambda\left[4\mu S_1 + 3\gamma\eta(\ell+m)^2\right](\Sigma_m + \gamma_m) \quad (3.26)$$

Posons : $\alpha_1 = K_1\left(4\mu + 3\gamma(\ell+m)^2\right)$

$$\alpha_2 = \lambda\left[4\mu S_1 + 3\gamma\eta(\ell+m)^2\right]$$

$$S_m = \Sigma_m + \gamma_m$$

donc (3.26) donne :

$$S_{m+1} \leqslant (\alpha_1 + \alpha_2) S_m \quad (3.27)$$

$$\leqslant \alpha^m S_0 \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha)$$

en choisissant $\lambda < \dfrac{1-\alpha_1}{4\mu S_1 + 3\gamma\eta(\ell+m)^2} = \lambda_2$ (3.27.a)

on a $\alpha < 1$ et la somme S_m serait convergente. Donc :

$$\Sigma_{m+1} < \alpha_1 S_0 \alpha^m$$

$$\gamma_{m+1} < \alpha_2 S_0 \alpha^m \quad (3.28)$$

c) $(V_{1,m})$ et $(U_{2,m})$ sont des suites de Cauchy

Montrons alors que $(V_{1,m})$ et $(U_{2,m})$ sont des suites de Cauchy.

$$1)\quad \|V_{1,m+p} - V_{1,m}\| \leqslant \alpha_1 S_0 \left(\alpha^{m+p-1} + \alpha^{m+p-2} \ldots\ldots + \alpha^{m}\right)$$

$$= \alpha_1 S_0 \alpha^m \left(\alpha^{p-1} + \alpha^{p-2} + \ldots\ldots + 1\right)$$

$$= \alpha_1 S_0 \alpha^m \frac{1-\alpha^p}{1-\alpha}$$

$$\leqslant \frac{\alpha_1 S_0}{1-\alpha} \alpha^m \qquad (\alpha < 1)$$

Ce qui montre que $(V_{1,m})$ est une suite de Cauchy, donc convergente dans $B_1(T)$.

$$2)\quad \|U_{2,m+p} - U_{2,m}\| \leqslant \frac{\alpha_2 S_0 \alpha^m}{1-\alpha} \qquad (\alpha < 1)$$

(même calcul que 1)).

Donc $(U_{2,m})$ est une suite de Cauchy donc convergente dans $B_2(T)$.

3.5. CONCLUSION

Pour $|\lambda|$ suffisamment petit soit $\lambda < \min(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ et les conditions (3.20.a) et (3.20.b), les suites $(V_{1,m})$ et $(U_{2,m})$ sont convergentes dans $B_1(T)$ et $B_2(T)$ respectivement. Donc l'équation (3.1) admet une solution périodique $W = \lim_{m \to \infty} (V_{1,m} + U_{2,m})$

On peut aussi dire :

$$V_{1,m} \longrightarrow L_1$$

$$U_{2,m} \longrightarrow L_2$$

donc :

$$V_{1,m} + U_{2,m} \longrightarrow L_1 + L_2$$

et $$W = L_1 + L_2 \quad \text{où} \quad (L_1, L_2) = S(L_1, L_2)$$

Remarques

1) Cette solution n'existe que si la solution de synchronisation W_0 existe.

2) La méthode utilisée est une méthode de la moyenne.

3.6.- *ETUDE DE LA STABILITE*

Dans le paragraphe précédent, nous avons montré que l'équation (3.1) admet une solution particulière $W_0 = r\cos(\omega t + \theta)$ où :

$$r = 0$$

$$r = \left\{\frac{2}{3\gamma}\left(\mu - \frac{\varepsilon\omega^2}{2} + \left(\mu^2 - c^2\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$r = \left\{\frac{2}{3\gamma}\left(\mu - \frac{\varepsilon\omega^2}{2} - \left(\mu^2 - c^2\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

et $$\sin 2\theta = \frac{c\omega}{\mu}$$

Dans ce paragraphe nous nous proposons d'étudier la stabilité de cette solution particulière W_0 .

Posons dans l'équation (3.1) $W = y + w_0$, nous trouvons en tenant compte de (3.2) :

$$\ddot{y} + 2\lambda c\dot{y} + \omega^2 y = \lambda\left[2\mu y\, e(t) - \varepsilon\omega^2 y - 3\gamma w_0^2 y\right] \qquad (3.29)$$

nous supposons que l'on peut négliger les termes en y^2 et y^3 .

3.6.1.- *Etude de l'équation* $\ddot{y} + 2\lambda c\dot{y} + \left[\omega^2 + \lambda\left(\varepsilon\omega^2 + 3\gamma w_0^2\right)\right] y = 0$

Soit l'équation :

$$\ddot{y} + 2\lambda c\dot{y} + \left[\omega^2 + \lambda\left(\varepsilon\omega^2 + 3\gamma w_0^2\right)\right] y = 0 \qquad (3.30)$$

Cette équation est linéaire et à coefficients périodiques de période T.

Pour étudier (3.30), nous ouvrons une parenthèse sur la théorie de Floquet que nous exposerons brièvement :

A) <u>Théorie de FLOQUET</u> : (voir STOKER[5])

Soit l'équation :

$$\ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y = 0 \qquad (3,31)$$

avec $p(t+T) = p(t)$ et $q(t) = q(t+T)$

l'équation (3.31) est linéaire; il existe deux solutions $y_1(t)$ et $y_2(t)$ linéairement indépendantes et non identiquement nulle telles que toute autre solution $y(t)$ s'exprime sous la forme :

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \qquad (3,32)$$

le Wronskien de y_1 et y_2 est $$\Delta(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \qquad (3,33)$$

doit être non identiquement nul pour que (y_1, y_2) forme un système fondamental de solutions.

En dérivant $\Delta(t)$ on trouve l'expression simple :

$$\frac{d\Delta(t)}{dt} = -p(t)\,\Delta(t)$$

soit $$\Delta(t) = \Delta_0 \exp\left[-\int_{t_0}^{t} p(\tau)\,d\tau\right] \qquad (3,34)$$

L'idée de Floquet est d'exploiter le fait que $p(t)$ et $q(t)$ sont périodiques. En effet si $y_1(t)$ et $y_2(t)$ forment un système fondamental de solutions, alors $y_1(t+T)$ et $y_2(t+T)$ aussi, car $p(t+T)=p(t)$ et

$q(t+T) = q(t)$ et $\Delta(t+T) \neq 0$ (car $\Delta(t) \neq 0$)

Posons :

$$Y_1(t) = y_1(t+T) = a_{11}\, y_1(t) + a_{12}\, y_2(t)$$

$$Y_2(t) = y_2(t+T) = a_{21}\, y_1(t) + a_{22}\, y_2(t) \qquad (3.35)$$

le wronskien de $Y_1(t)$ et $Y_2(t)$ est :

$$\Delta(t+T) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \Delta(t) \qquad (3.36)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (3.36a)$$

ce qui prouve que :

Parmi toutes ces solutions, il existe des solutions vérifiant la propriété :

$$\boxed{y(t+T) = \sigma\, y(t)} \qquad (3.37)$$

Toute solution vérifiant (3,37) est appelée <u>solution normale</u> et toute solution normale peut s'exprimer sous la forme :

$$y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \qquad (3.38)$$

y vérifie (3.37) quand y_1 et y_2 vérifient (3,35) donc :

$$\left[\lambda_1 (a_{11} - \sigma) + \lambda_2 a_{21}\right] y_1 + \left[\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 (a_{22} - \sigma)\right] y_2 = 0$$

y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes, donc :

$$\lambda_1 (a_{11} - \sigma) + \lambda_2 a_{21} = 0$$

$$\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 (a_{22} - \sigma) = 0$$

Pour qu'il existe d'autres solutions que la solution nulle, il faut que

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\sigma & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

σ vérifie l'équation :

$$\sigma^2 - (a_{11}+a_{22})\,\sigma + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.39)$$

(3.39) s'appelle équation caractéristique de l'équation de départ (3,31). Elle admet deux racines non nulles σ_1 et σ_2 car le terme constant $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ d'après (3.36.a).

Le produit des racines est d'après (3,34); (3.36) et (3.39) est :

$$P = \sigma_1 \sigma_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \frac{\Delta(t_0+T)}{\Delta(t_0)} = \exp\left[-\int_{t_0}^{t_0+T} p(\tau)\,d\tau\right] \qquad (3.39.a)$$

et la somme des racines : $S = \sigma_1 + \sigma_2$

En dérivant les égalités (3,35) et en éliminant a_{12} et a_{21} on trouve

$S = \sigma_1 + \sigma_2 = a_{11} + a_{12}$ soit :

$$S = \sigma_1 + \sigma_2 = y_1(T)\,y_2'(0) - y_1'(T)\,y_2(0) + y_2'(T)\,y_1(0) - y_1'(0)\,y_2(T) \qquad (3.39b)$$

Puisque le produit $\sigma_1 \sigma_2 = P$ est non nul, nous devons envisager deux cas :

1°) L'équation (3,39) admet deux racines distinctes $\sigma_1 \neq \sigma_2$

Donc il existe deux solutions normales linéairement indépendantes y_i ($i = 1,2$), nous pouvons écrire :

$$e^{-\alpha_i(t+T)} y_i(t+T) = \sigma_i e^{-\alpha_i T} e^{-\alpha_i t} y_i(t)$$

nous introduisons deux solutions périodiques φ_i ($i = 1, 2$) telles que :

$$\varphi_i(t) = e^{-\alpha_i t} y_i(t) \qquad \text{avec} \qquad \sigma_i = e^{\alpha_i T}$$

ce qui nous donne pour solutions normales linéairement indépendantes :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{\alpha_1 t} \varphi_1(t) \\ y_2(t) &= e^{\alpha_2 t} \varphi_2(t) \end{aligned} \qquad (3.40)$$

où $\varphi_{1,2}$ T-périodique et $\sigma_i = e^{\alpha_i T}$.

2°) L'équation (3,39) admet une racine double $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$

Les équations (3.35) deviennent dans ce cas :

$$\begin{aligned} Y_1(t) &= y_1(t+T) = \sigma y_1(t) \\ Y_2(t) &= y_2(t+T) = a y_1(t) + b y_2(t) \end{aligned} \qquad (3.41)$$

on a $\sigma = b$ car l'équation caractéristique (3.49) a une racine double.

(3.41) entraîne : $$\frac{Y_2(t)}{Y_1(t)} = \frac{y_2(t)}{y_1(t)} + \frac{a}{\sigma} \qquad (3.42)$$

considérons la fonction $\Psi(t) = \dfrac{y_2(t)}{y_1(t)} - \dfrac{a}{\sigma}\dfrac{t}{T}$ et vu (3.42)

$$\Psi(t+T) = \frac{y_2(t+T)}{y_1(t+T)} - \frac{a}{\sigma}\frac{t+T}{T} = \frac{y_2(t)}{y_1(t)} + \frac{a}{\sigma} - \frac{a}{\sigma} - \frac{at}{\sigma T} = \Psi(t)$$

on a donc :

$$y_2(t) = y_1(t)\left[\frac{a}{\sigma}\frac{t}{T} + \Psi(t)\right]$$

Comme précédemment on introduit une fonction $\varphi_1(t)$ T-périodique telle que $y_1(t) = e^{\alpha t}\varphi_1(t)$ où $\sigma = e^{\alpha t}$ et le système fondamental de solutions est :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{\alpha t}\varphi_1(t) \\ y_2(t) &= e^{\alpha t}\left[\frac{at}{\sigma T}\varphi_1(t) + \varphi_2(t)\right] \end{aligned} \qquad (3.43)$$

où $\varphi_2(t) = \varphi_1(t)\,\Psi(t)$

φ_1 et φ_2 sont T-périodiques; $\sigma = e^{\alpha T}$.

L'intérêt principal de cette théorie est de voir si les solutions de l'équation (3.31) restent bornées ou non quand $t \longrightarrow +\infty$. Si toutes les solutions de (3.31) sont bornées, on peut dire que l'équation différentielle (3.31) caractérise un mouvement stable. S'il existe une seule solution non bornée on dit que le mouvement est instable.

- Pour les équations (3.40) cette question se traduit par : les solutions sont bornées si et seulement si $\left|e^{\alpha_i t}\right|$ est borné pour $t \longrightarrow +\infty$. Soit $Re(\alpha_i) \leqslant 0$ ou bien $|\sigma_i| \leq 1$.
- Pour les équations (3.43) les solutions sont bornées si et seulement si $\left|e^{\alpha t}\right|$ est borné pour $t \longrightarrow +\infty$. Soit $Re(\alpha) < 0$ ou bien $|\sigma| < 1$; si toutefois $Re(\alpha) = 0$, pour avoir des solutions stables il faut que le coefficient "a" soit nul.

B) <u>Application de la théorie de Floquet à l'équation (3.30)</u>

Revenons à notre cas particulier et commençons par le cas où l'équation (3.39) admet deux solutions $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Donc il existe deux solutions y_1 et y_2 linéairement indépendantes telles que :

$$y = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

α et β sont deux constantes arbitraires. Or d'après la théorie de Floquet, il existe deux fonctions T-périodiques φ_1 et φ_2 :

$$y = \alpha e^{\alpha_1 t} \varphi_1(t) + \beta e^{\alpha_2 t} \varphi_2(t) \qquad (3.44)$$

où $\sigma_1 = e^{\alpha_1 T}$, $\sigma_2 = e^{\alpha_2 T}$ qui ont pour expression :

$$\sigma_1 = \frac{S + \left(S^2 - 4 e^{-2\lambda c T}\right)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$\sigma_2 = \frac{S - \left(S^2 - 4 e^{-2\lambda c T}\right)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

Dans le cas où l'équation (3,39) admet une solution double $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$, il existe alors deux fonctions T-périodiques φ_1 et φ_2 telles que :

$$y = e^{\alpha t}\left[\alpha \varphi_1(t) + \beta\left(\frac{at}{\sigma T}\varphi_1(t) + \varphi_2(t)\right)\right] \qquad (3.45)$$
$$\sigma = e^{\alpha T}$$

Dans ce cas $S^2 = 4 e^{-2\lambda c T}$ soit $S = \pm 2 e^{-\lambda c T}$

et donc $\sigma = e^{-\lambda c T}$ ou $\sigma = - e^{-\lambda c T}$.

3.6.2. *Etude de l'équation complète* :

$$\ddot{y} + 2\lambda c \dot{y} + \left[\omega^2 + \lambda\left(\varepsilon\omega^2 + 3\gamma w_0^2\right)\right] y = 2\mu\lambda y e(t)$$

Soit $h = \frac{2\pi}{\omega} m$; m entier positif,

et $mT = t_0 + mh$, t_0 quelconque et $n = 1, 2, 3 \ldots$

Nous considérons par E l'ensemble des fonctions définies et continues sur la demie droite $[t_0, \infty[$ dérivables sur les intervalles $]mT,(m+1)T[$.
Nous définissons le produit de $z \in E$ par la mesure de Dirac $\delta(t-mT)$ par : $z \cdot \delta(t-mT) = z(mT-0)\,\delta(t-mT)$ au sens des distributions.

Considérons l'équation (3.29) au sens des distributions. Ses solutions seront des fonctions de E . La fonction $y \in E$ définie sur $[t_0, +\infty[$ est une solution de (3.29) elle vérifie sur $[t_0, +\infty[$ l'équation aux impulsions :

$$\ddot{y} + 2\lambda c\dot{y} + \left[\omega^2 + \lambda(\varepsilon\omega^2 + 3\gamma w_0^2)\right] y = 2\mu\lambda \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t-mT)\, y(mT-0) \quad (3.46)$$

la restriction de (3.46) à chaque intervalle $]mT,(m+1)T[$ est l'équation (3.30). Donc la solution a sur chaque intervalle $]mT,(m+1)T[$ la forme (3.44) ou (3.45). Les constantes α et β étant différentes sur les divers intervalles.

$$y = \alpha_m y_1(t) + \beta_m y_2(t) \quad , \quad mT < t < (m+1)T$$

Cas où $\sigma_1 \neq \sigma_2$

$$y = \alpha_m e^{\alpha_1 t}\varphi_1(t) + \beta_m e^{\alpha_2 t}\varphi_2(t)$$

$$mT < t < (m+1)T \qquad \sigma_1 = e^{\alpha_1 T} \quad , \quad \sigma_2 = e^{\alpha_2 T}$$

ou bien :

$$y = a_m e^{-\alpha_1 mh} e^{\alpha_1(t-t_0)}\varphi_1(t) + b_m e^{-\alpha_2 mh} e^{\alpha_2(t-t_0)}\varphi_2(t)$$

$$mT \leqslant t < (m+1)T$$

puisque $mT \leqslant t < (m+1)T \Rightarrow m \leqslant \frac{t-t_0}{h} < m+1$

et $m = \left[\frac{t-t_0}{h}\right]$; $\left(\left[\frac{t-t_0}{h}\right]\right.$ est la partie entière de $\left.\frac{t-t_0}{h}\right)$

Soit la solution dans $[mT,(m+1)T[$

$$y = a_m \exp\left\{\alpha_1\left[t-t_0-\left[\frac{t-t_0}{h}\right]h\right]\right\}\varphi_1(t) + b_m \exp\left\{\alpha_2\left[t-t_0-\left[\frac{t-t_0}{h}\right]h\right]\right\}\varphi_2(t) \qquad (3.47)$$

La fonction définie par (3.47) est continue sur $[t_0,+\infty[$.
Puisqu'elle est continue sur $[t_0,+\infty[$ et dérivable pour $t \neq mT$,
il s'en suit que sa dérivée au sens des distributions est :

$$\{y'\} = y'$$

$$= a_m \exp\left\{\alpha_1\left(t-t_0-\left[\frac{t-t_0}{h}\right]h\right)\right\}\left(\alpha_1\varphi_1(t)+\varphi_1'(t)\right)$$

$$+ b_m \exp\left\{\alpha_2\left(t-t_0-\left[\frac{t-t_0}{h}\right]h\right)\right\}\left(\alpha_2\varphi_2(t)+\varphi_2'(t)\right)$$

pour $mT \leq t < (m+1)T$.

Et

$$\{y''\} = y'' + \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left[y'(mT+0)-y'(mT-0)\right]\delta(t-mT)$$

$$= y'' + \sum_m S_m\,\delta(t-mT)$$

S_n est le saut de la dérivée au point $t = nT$.

Pour établir les conditions de stabilité, nous devons trouver l'équation matricielle $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ reliant les coefficients de la solution dans deux intervalles consécutifs. Nous chercherons alors le polynôme caractéristique de M . La position des modules des racines du polynôme caractéristique de M par rapport à 1 donnera les conditions de stabilité.

En effet pour trouver la relation entre $\begin{pmatrix} a_{m+1} \\ b_{m+1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix}$ nous allons traduire deux conditions :

- la continuité de la solution au point $t=(m+1)T$.
- le saut de la dérivée au point $t=(m+1)T$.

a) Continuité de y en $t=(m+1)T$

$$y((m+1)T-0) = y((m+1)T+0) \quad \text{soit}$$

$$a_{m+1}\varphi_1((m+1)T) + b_{m+1}\varphi_2((m+1)T) =$$

$$\sigma_1 a_m \varphi_1(m+1)T + \sigma_2 b_m \varphi_2(m+1)T \qquad (3.48)$$

b) le saut de y' en $t=(m+1)T$

$$y'((m+1)T+0) = a_{m+1}(\alpha_1\varphi_1(m+1)T + \varphi_1'(m+1)T) +$$

$$b_{m+1}(\alpha_2\varphi_2(m+1)T + \varphi_2'(m+1)T)$$

$$y'((m+1)T-0) = a_m\sigma_1(\alpha_1\varphi_1(m+1)T + \varphi_1'(m+1)T) +$$

$$b_{m+1}\sigma_2(\alpha_2\varphi_2(m+1)T + \varphi_2'(m+1)T)$$

posons par la suite : $\phi_1 = \alpha_1\varphi_1 + \varphi_1'$

$$\phi_2 = \alpha_2\varphi_2 + \varphi_2'$$

donc $b_m = (a_{m+1} - \sigma_1 a_m)\phi_1(m+1)T + (b_{m+1} - \sigma_2 b_m)\phi_2(m+1)T$.

Donc y donnée par (3.47) est solution de (3.46) si et seulement si :

$$(a_{m+1} - \sigma_1 a_m)\phi_1 (m+1)T + (b_{m+1} - \sigma_2 b_m)\phi_2 (m+1)T =$$

$$2\mu\lambda \left[\sigma_1 a_m \varphi_1 (m+1)T + \sigma_2 b_m \varphi_2 (m+1)T\right] \qquad (3.49)$$

Les équations (3.48) et (3.49) déterminent a_{m+1} , b_{m+1} en fonctions de a_m et b_m .

Soit :

$$a_{m+1}\phi_1 + b_{m+1}\phi_2 = \sigma_1 a_m (\phi_1 + 2\mu\lambda\varphi_1) + \sigma_2 b_m (\phi_2 + 2\mu\lambda\varphi_2) \qquad (3.50)$$

$$a_{m+1}\varphi_1 + b_{m+1}\varphi_2 = \sigma_1 a_m \varphi_1 + \sigma_2 b_m \varphi_2$$

posons : $F = \phi_1\varphi_2 - \varphi_1\phi_2$

$\varphi_1 = \varphi_1\left[(m+1)T\right]$

$\varphi_2 = \varphi_2\left[(m+1)T\right]$

En résolvant (3.50) on a :

$$\begin{pmatrix} a_{m+1} \\ b_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1 - 2\mu\lambda \frac{\varphi_1\varphi_2}{F}\right)\sigma_1 & -2\mu\lambda \frac{\varphi_2^2}{F}\sigma_2 \\ 2\mu\lambda \frac{\varphi_1^2}{F}\sigma_1 & \left(1 + 2\mu\lambda \frac{\varphi_1\varphi_2}{F}\right)\sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (3.51)$$

or : $\varphi_1\varphi_2 = \varphi_1(m+1)T\ \varphi_2(m+1)T = \varphi_1(0)\,\varphi_2(0) = y_1(0)\,y_2(0)$

et si on pose $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$, qui est wronskien de y_1 et y_2 :

On a : $W(y_1, y_2) = e^{(d_1+d_2)t}(\varphi_1\phi_2 - \varphi_2\phi_1)$

$$\Rightarrow W(y_1, y_2)(0) = y_1(0)\,y_2'(0) - y_1'(0)\,y_2(0) = -F$$

soit $F = y_1'(0)\, y_2(0) - y_1(0)\, y_2'(0)$.

L'expression (3.51) en termes de $y_1(0)$ et $y_2(0)$ devient :

$$\begin{pmatrix} a_{m+1} \\ b_{m+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix}$$

où

$$M = \begin{pmatrix} \left(1 + 2\mu\lambda \dfrac{y_1(0)\, y_2(0)}{[y_1'(0) y_2(0) - y_1(0) y_2'(0)]}\right)\sigma_1 & 2\mu\lambda \dfrac{y_2^2(0)\, \sigma_2}{[y_1'(0) y_2(0) - y_1(0) y_2'(0)]} \\ -2\mu\lambda \dfrac{y_1^2(0)\, \sigma_1}{[y_1'(0) y_2(0) - y_1(0) y_2'(0)]} & \left(1 - 2\mu\lambda \dfrac{y_1(0) y_2(0)}{[y_1'(0) y_2(0) - y_1(0) y_2'(0)]}\right)\sigma_2 \end{pmatrix}$$

Le polynome caractéristique $P(x)$ de M est :

$$P(x) = x^2 - \left[\sigma_1 + \sigma_2 + 2\mu\lambda \frac{y_1(0)\, y_2(0)}{[y_1'(0) y_2(0) - y_1(0) y_2'(0)]}(\sigma_1 - \sigma_2)\right] x + \sigma_1 \sigma_2 = 0 \qquad (3.52)$$

avec $\sigma_1 \sigma_2 = e^{-2\lambda c T}$.

Soient x_1 et x_2 les deux racines de $P(x) = 0$ et posons

R leur somme et P leur produit :

$$R = x_1 + x_2 = \sigma_1 + \sigma_2 + 2\mu\lambda \frac{y_1(0)\, y_2(0)}{[y_1'(0) y_2(0) - y_1(0) y_2'(0)}(\sigma_1 - \sigma_2) \qquad (3.53)$$

$$P = x_1 x_2 = e^{-2\lambda c T}$$

Dans ce qui suit, nous cherchons un développement de R à l'ordre deux en λ .

3.6.3.- *Développement de R à l'ordre deux en λ* .

A) *Simplification de l'expression de R*

Puisque l'équation caractéristique (3,39) est indépendante du choix des solutions fondamentales, nous choisissons un système de solution (u, v) vérifiant des conditions simples.

Soient :

u et v telles que :

$$u(0) = 1 \qquad v(0) = 0$$

$$u'(0) = 0 \qquad v'(0) = 1 \tag{3.54}$$

le système (u , v) est fondamental car le wronskien est non nul. Toute autre solution de l'équation (3,30) s'écrit dans ce système, sous forme de combinaison linéaire. En particulier les solutions de Floquet y_1 et y_2 :

donc :

$$y_1 = \lambda_1 u + \lambda_2 v$$

$$y_2 = \mu_1 u + \mu_2 v \tag{a}$$

en dérivant, nous avons :

$$y'_1 = \lambda_1 u' + \lambda_2 v'$$

$$y'_2 = \mu_1 u' + \mu_2 v' \tag{b}$$

(3,54) entraîne que :

$$\lambda_1 = y_1(0) \quad , \quad \lambda_2 = y'_1(0) \quad , \quad \mu_1 = y_2(0) \quad , \quad \mu_2 = y'_2(0)$$

Les relations (a) deviennent :

$$y_1 = y_1(0)\,u + y'_1(0)\,v$$

$$y_2 = y_2(0)\,u + y'_2(0)\,v \qquad (c)$$

par définition des solutions de Floquet :

$$y_1(T) = \sigma_1\, y_1(0) \qquad \text{et} \qquad y_2(T) = \sigma_2\, y_2(0)$$

donc en considérant (c) :

$$y_1(0)\,u(T) + y'_1(0)\,v(T) = \sigma_1 \left[y_1(0)\,u(0) + y'_1(0)\,v(0) \right]$$

$$y_2(0)\,u(T) + y'_2(0)\,v(T) = \sigma_2 \left[y_2(0)\,u(0) + y'_2(0)\,v(0) \right]$$

soit :

$$y_1(0)\,u(T) + y'_2(0)\,v(T) = \sigma_1\, y_1(0) \qquad (3,55)$$

$$y_2(0)\,u(T) + y'_2(0)\,v(T) = \sigma_2\, y_2(0)$$

(3,55) entraine :

$$v(T) = \frac{y_2(0)\,y_1(0)\,(\sigma_2 - \sigma_1)}{\left[y_1(0)\,y'_2(0) - y_2(0)\,y'_1(0) \right]}$$

(3,53) devient :

$$R = r_1 + r_2 = \sigma_1 + \sigma_2 + 2\mu\lambda V(T)$$

$$P = r_1 r_2 = e^{-2\lambda c T}$$

D'après (3,39.a) nous avons en fonction de u et V :

$$S = \sigma_1 + \sigma_2 = u(T) + V'(T)$$

Soit finalement (3,53) devient :

$$\boxed{\begin{aligned} R &= r_1 + r_2 = u(T) + V'(T) + 2\mu\lambda V(T) \\ P &= r_1 r_2 = e^{-2\lambda c T} \end{aligned}} \qquad (3.56)$$

B) *Calcul de R en fonction de c, μ, ε, γ, r et λ.*

1) *Recherche de u et V*

Nous nous proposons de chercher u et V selon la méthode de Poincaré, suivant un développement en puissance de λ.

Soit

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 \ldots\ldots$$

$$V = V_0 + \lambda V_1 + \lambda^2 V_2 \ldots\ldots$$

vérifiant :

$$\begin{cases} u_0(0) = 1 \\ \\ u'_0(0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad u_i(0) = u'_i(0) = 0 \qquad i = 1, 2 \qquad (3.57)$$

$$\begin{cases} v_0(0) = 0 \\ \\ \text{et} \quad v_i(0) = v_i'(0) = 0 \qquad i = 1,2 \\ \\ v_0'(0) = 1 \end{cases} \tag{3.58}$$

Nous poserons par la suite $\omega = 1$ (il suffit d'un changement de variable) donc $T = 2\pi$. En remplaçant dans (3.30) les expressions de u et v nous avons :

$$\begin{cases} \ddot{u}_0 + u_0 = 0 \\ \ddot{u}_1 + u_1 = -2c\,\dot{u}_0 - (\varepsilon + 3\gamma w_0^2) u_0 = f_1(t) \\ \ddot{u}_2 + u_2 = -2c\,\dot{u}_1 - (\varepsilon + 3\gamma w_0^2) u_1 = f_2(t) \end{cases} \tag{3.59}$$

(3.59) et (3.57) entrainent

$$\begin{cases} u_0 = \cos t \\ u_1 = \int_0^t \sin(t-\tau) f_1(\tau)\, d\tau \\ u_2 = \int_0^t \sin(t-\tau) f_2(\tau)\, d\tau \end{cases} \tag{3.60}$$

De même pour v :

$$\begin{cases} \ddot{v}_0 + v_0 = 0 \\ \ddot{v}_1 + v_1 = -2c\,\dot{v}_0 - (\varepsilon + 3\gamma w_0^2) v_0 = g_1(t) \\ \ddot{v}_2 + v_2 = -2c\,\dot{v}_1 - (\varepsilon + 3\gamma w_0^2) v_1 = g_2(t) \end{cases} \tag{3.61}$$

(3.58) et (3.61) donnent :

$$\begin{cases} v_0 = \sin t \\ v_1 = \int_0^t \sin(t-\tau)\, g_1(\tau)\, d\tau \\ v_2 = \int_0^t \sin(t-\tau)\, g_2(\tau)\, d\tau \end{cases} \tag{3.62}$$

Par suite

$$u = \cos t + \lambda \int_0^t \sin(t-\tau) f_1(\tau)\, d\tau + \lambda^2 \int_0^t \sin(t-\tau) f_2(\tau)\, d\tau$$

$$v = \sin t + \lambda \int_0^t \sin(t-\tau) g_1(\tau)\, d\tau + \lambda^2 \int_0^t \sin(t-\tau) g_2(\tau)\, d\tau$$

2) *Expression de* R

$$R = u(2\pi) + v'(2\pi) + 2\mu\lambda\, v(2\pi)$$

en négligeant les termes en λ^3, l'expression de R est :

$$\begin{aligned} R = 2 &+ \lambda \int_0^{2\pi} \left[\cos\tau\, g_1(\tau) - \sin\tau\, f_1(\tau) \right] d\tau \\ &+ \lambda^2 \int_0^{2\pi} \left[\cos\tau\, g_2(\tau) - \sin\tau\, f_2(\tau) \right] d\tau \\ &- 2\mu\lambda^2 \int_0^{2\pi} \sin\tau\, g_1(\tau)\, d\tau + O(\lambda^3) \end{aligned} \qquad (3.63)$$

Les expressions de f_1, f_2 et g_1, g_2 sont données par les formules (3.59) et (3.61) respectivement.

Soient :

$$f_1(\tau) = 2c \sin\tau - (\varepsilon + 3\gamma w_0^2) \cos\tau$$

$$f_2(\tau) = -2c \cos\tau - (\varepsilon + 3\gamma w_0^2) \sin\tau$$

$$g_1(\tau) = -2c \int_0^\tau \cos(\tau-\varphi) f_1(\varphi)\, d\varphi - (\varepsilon + 3\gamma w_0^2) \int_0^\tau \sin(\tau-\varphi) f_1(\varphi)\, d\varphi$$

$$g_2(\tau) = -2c\int_0^{\tau}\cos(\tau-\varphi)\,g_1(\varphi)\,d\varphi$$

$$-(\varepsilon+3\gamma w_0^2)\int_0^{\tau}\sin(\tau-\varphi)\,g_1(\varphi)\,d\varphi$$

Dans ce qui suit on se propose de calculer les trois intégrales figurant dans l'expression (3.63).

$$\int_0^{2\pi}\left[\cos\tau\,g_1(\tau)-\sin\tau\,f_1(\tau)\right]d\tau = -4\pi c$$

$$\int_0^{2\pi}\left[\cos\tau\,g_2(\tau)-\sin\tau\,f_2(\tau)\right]d\tau = I$$

$$\int_0^{2\pi}\sin\tau\,g_1(\tau)\,d\tau = J$$

Pour calculer I nous allons procéder par étapes : posons :

$$F'(\tau) = \varepsilon + 3\gamma w_0^2$$

or $\quad w_0 = r\cos(\tau+\theta)$

$$\Rightarrow F'(\tau) = \left(\varepsilon+\frac{3\gamma r^2}{2}\right) + \frac{3\gamma r^2}{2}\cos 2(\tau+\theta)$$

posons par la suite : $\quad \alpha = \varepsilon + \frac{3\gamma r^2}{2}$

$$\beta = \frac{3\gamma r^2}{2}$$

donc $$F(\tau) = \alpha + \beta \cos 2(\tau + \theta)$$

Soit

$$A(\tau) = \cos\tau\, g_2(\tau) - \sin\tau\, f_2(\tau)$$

$$= -2c\left\{\int_0^\tau \left[\cos\tau\cos(\tau-\varphi)g_1(\varphi) - \sin\tau\cos(\tau-\varphi)f_1(\varphi)\right] d\varphi\right\}$$

$$- F'(\tau)\left\{\int_0^\tau \left[\cos\tau\sin(\tau-\varphi)g_1(\varphi) - \sin\tau\sin(\tau-\varphi)f_1(\varphi)\right] d\varphi\right\}$$

Donc

$$A(\tau) = -2c\int_0^\tau B\, d\varphi - F'(\tau)\int_0^\tau C\, d\tau$$

après toute simplification :

$$B = -2c\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\tau-\varphi)\right] + \frac{\alpha}{2}\sin 2(\tau-\varphi)$$

$$+ \frac{\beta}{4}\left[\sin 2(\tau+\theta) + \sin 2(\tau-2\varphi-\theta)\right]$$

et

$$C = -c\sin 2(\tau-\varphi) + \frac{1}{2}\alpha - \frac{\alpha}{2}\cos 2(\tau-\varphi)$$

$$+ \frac{\beta}{2}\cos 2(\varphi+\theta) - \frac{\beta}{4}\left[\cos 2(\tau+\theta) + \cos 2(\tau-2\varphi-\theta)\right]$$

Ce qui entraine que :

$$\int_0^{\tau} B\,d\varphi = -c\tau - \frac{c}{2}\sin 2\tau + \frac{\alpha}{4}(1-\cos 2\tau)$$

$$+ \frac{\beta}{4}\tau\sin 2(\tau+\theta) + \frac{\beta}{16}\left[\cos(\tau+\theta) - \cos 2(\tau-\theta)\right]$$

$$= D$$

et

$$\int_0^{\tau} C\,d\varphi = -\frac{c}{2}(1-\cos 2\tau) + \frac{1}{2}\alpha\tau - \frac{\alpha}{4}\sin 2\tau$$

$$+ \frac{\beta}{4}\left[\sin 2(\tau+\theta) - +\sin 2\theta\right] - \frac{\beta}{4}\tau\cos 2(\tau+\theta)$$

$$+ \frac{\beta}{16}\left[\sin 2(\tau+\theta) + \sin 2(\tau-\theta)\right]$$

$$= E$$

Calcul de $\int_0^{2\pi} A\,d\varphi$

$$-2c\int_0^{2\pi} D\,d\tau = -2c\left[-2c\pi^2 + \frac{\alpha}{2}\pi - \frac{\beta}{4}\pi\cos 2\theta\right]$$

$$F'(\tau)E = -\frac{c}{2}\left[\alpha + \beta\cos 2(\tau+\theta) - \alpha\cos 2\tau - \frac{\beta}{2}\left[\cos(4\tau+2\theta)\right.\right.$$

$$\left.\left. + \cos 2\theta\right]\right] + \frac{1}{2}\alpha^2\tau + \frac{1}{2}\alpha\beta\tau\cos 2(\tau+\theta)$$

$$- \frac{\alpha^2}{4}\sin 2\tau - \frac{\alpha\beta}{8}\left[\sin(4\tau+2\theta) - \sin 2\theta\right]$$

$$+ \frac{\alpha\beta}{4}\sin 2(\tau+\theta) - \frac{\alpha\beta}{4}\sin 2\theta + \frac{\beta^2}{8}\sin 4(\tau+\theta)$$

$$-\frac{\beta^2}{4}\sin 2\theta\cos 2(\theta+\tau)-\frac{\beta\alpha}{4}\tau\cos 2(\tau+\theta)$$

$$-\frac{\beta^2}{8}\tau-\frac{\beta^2}{8}\tau\cos 4(\theta+\tau)$$

$$-\frac{\alpha\beta}{16}\left[\sin 2(\tau+\theta)+\sin 2(\tau-\theta)\right]$$

$$-\frac{\beta^2}{32}\sin 4(\tau+\theta)-\frac{\beta^2}{32}(\sin 4\tau-\sin 4\theta)$$

Donc

$$\int_0^{2\pi} F(\tau)\,E\,d\tau=\pi\left[-c\alpha+\frac{c\beta}{2}\cos 2\theta+\pi\alpha^2-\frac{\beta^2}{4}\pi\right]$$

$$\int_0^{2\pi} A\,d\varphi=\pi\left[-\pi\alpha^2+\frac{\pi}{4}\beta^2+4c^2\pi\right]$$

Calcul de J

$$\sin\tau\,g_1(\tau)=-2c\sin\tau\cos\tau-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\cos 2\tau-\frac{\beta}{2}\cos 2(\tau+\theta)$$
$$+\frac{\beta}{4}\left[\cos 2(\tau+\theta)+\cos 2\theta\right]$$

et

$$J=\int_0^{2\pi}\sin\tau\,g_1(\tau)\,d\tau=-\pi\alpha+\frac{\pi\beta}{2}\cos 2\theta$$

Conclusion

La somme et le produit des racines de l'équation de stabilité au troisième ordre près en λ sont :

$$R=2-4\pi c\lambda+\lambda^2\pi\left[-\frac{3\pi}{4}\beta^2+\beta(2\mu-2\varepsilon\pi-\mu\cos 2\theta)\right.$$
$$\left.+2\mu\varepsilon-\pi\varepsilon^2+4\pi c^2\right]$$

$$P=1-4\pi\lambda c+8\pi^2c^2\lambda^2+O(\lambda^3)\;;\;\beta=\frac{3\gamma}{2}\pi^2\text{ et }\sin 2\theta=\frac{c}{\mu}$$

C) *Conditions de stabilité*

Pour avoir les conditions de stabilité nous chercherons à quelles conditions les racines de l'équation (3.52) :

$$x^2 - Rx + P = 0$$

ont leur module strictement inférieur à 1. En effet :

1) $\Delta = R^2 - 4P > 0$

Dans ce cas l'équation (3.52) a deux racines réelles x_1 et x_2. Leur module est inférieur à 1 si :

$$\begin{cases} |R| < 2 \\ 1 + R + P > 0 \\ 1 - R + P > 0 \end{cases}$$

Si on pose $A = \pi\left[-\frac{3\pi}{4}\beta^2 + \beta(2\mu - 2\varepsilon\pi - \mu\cos 2\theta) + 2\mu\varepsilon - \pi\varepsilon^2 + 4\pi c^2\right]$

On a $\Delta = R^2 - 4P = 4\lambda^2(A - 4\pi^2 c^2)$

Les deux premières conditions sont vérifiées pourvu que $|\lambda|$ soit suffisamment petit. La dernière condition se traduit :

$$1 - R + P = \lambda^2(8\pi^2 c^2 - A) > 0$$

Donc

a) $c \neq 0$

La condition de stabilité est : $4\pi c^2 < A < 8\pi^2 c^2$

b) $c = 0$, $\Delta = R^2 - 4P = 4\lambda^2 A$

Les conditions de stabilité sont : $2 - R > 0$ et $2 + R > 0$

or $2 - R = -\lambda^2 A < 0$ (car $\Delta > 0$)

La première condition n'est pas vérifiée; $c = 0$ est instable.

2) $\Delta = R^2 - 4P < 0$

Dans ce cas les racines de (3.52) sont imaginaires conjugués.

Les conditions de stabilité sont : $R^2 < 4P$ et $P < 1$

a) $c > 0$, $|R| < 2$ et $P < 1$

Ces conditions sont vérifiées pourvu que $|\lambda|$ soit petit.

b) $c \leqslant 0$

Dans ce cas, $P > 1$: le mouvement est instable.

Résumé

	$\Delta = R^2 - 4P > 0$	$\Delta = R^2 - 4P < 0$
conditions de stabilité $c \neq 0$	$4\pi^2 c^2 < A < 8\pi^2 c^2$	$c > 0$ $R < 2$ $P < 1$ stable.
		$c \leqslant 0$ instable.
conditions de stabilité $c = 0$	$P = 1$ et le mouvement est instable.	$P = 1$ et le mouvement est instable.

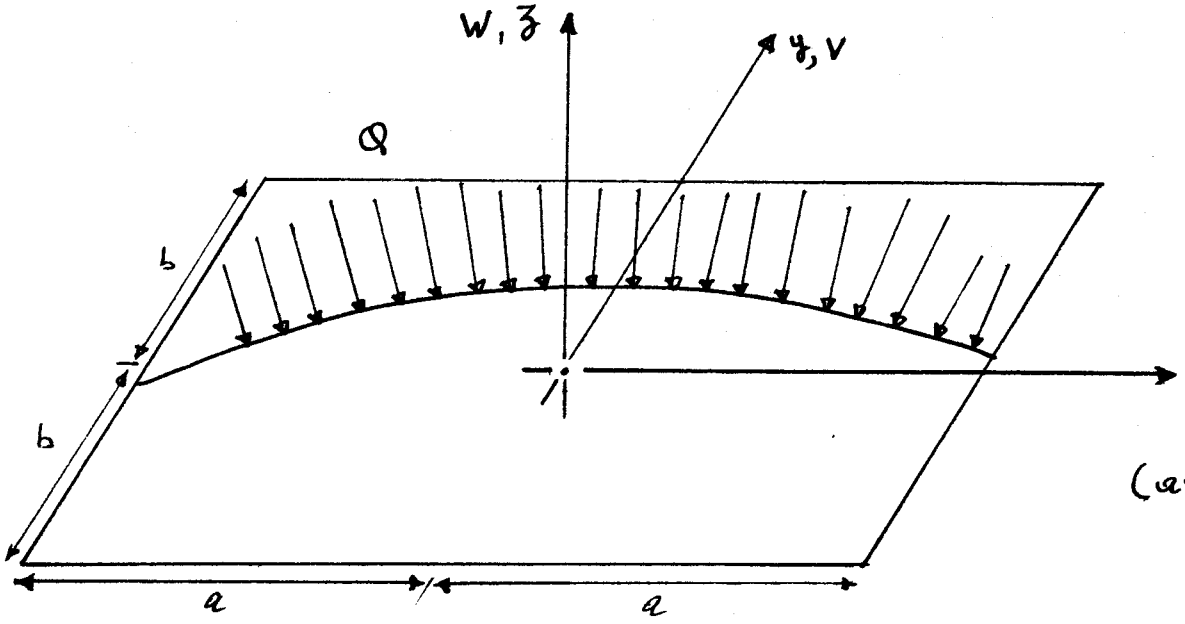
La condition finale de stabilité : $c \neq 0$

$$\begin{cases} \frac{3\pi}{4}\beta^2 - \beta(2\mu - 2\varepsilon\pi - \mu\cos 2\theta) - 2\mu\varepsilon + \varepsilon^2\pi + 4\pi c^2 > 0 \\ -\frac{3\pi}{4}\beta^2 + \beta(2\mu - 2\varepsilon\pi - \mu\cos 2\theta) + 2\mu\varepsilon - \varepsilon^2\pi > 0 \end{cases}$$

où $\beta = \frac{3\gamma}{2}\pi^2$; $\sin 2\theta = \frac{c}{\mu}$

ou bien

$$0 < -\frac{3\pi}{4}\beta^2 + \beta(2\mu - 2\varepsilon\pi - \mu\cos 2\theta) + 2\mu\varepsilon - \varepsilon^2\pi < 4\pi c^2$$



les bords sont libres de contraintes.

(arêtes simplement posées)

Fig. 6

Plaque excitée transversalement par une charge Q .

CHAPITRE 4

PLAQUES EXCITEES TRANSVERSALEMENT PAR DES PERCUSSIONS PERIODIQUES. MOUVEMENT PERIODIQUE. SYNCHRONISATION

4.1.- INTRODUCTION. POSITION DU PROBLEME

On considère dans ce chapitre une plaque rectangulaire initialement plate d'épaisseur uniforme, homogène élastique simplement posée sur son pourtour et excitée transversalement par une force périodique $Q(x,y,t)$. Il en résulte une vibration transversale $W(t)$ que nous nous proposons d'étudier (fig. 6).

4.1.1.- Equations de base

Nous prenons comme équations de base, les équations complètes non linéaires des plaques minces en flexion forte (cf. Chapitre 1).

Soit :

$$\nabla^4 F = E \left[W_{,xy}^2 - W_{,xx} W_{,yy} \right] \tag{4.1}$$

$$\nabla^4 W = \frac{h}{D} \left[\frac{Q}{h} + F_{,yy} W_{,xx} + F_{,xx} W_{,yy} - 2 F_{,xy} W_{,xy} - \rho W_{,tt} \right] \tag{4.2}$$

F : fonction d'Airy.

W : déplacement transversal.

D : rigidité de la plaque à la flexion.

h : épaisseur de la plaque.

E : module de Young.

Q : charge transversale.

a,b : dimensions de la plaque.

4.1.2.- *Conditions aux limites.*

a) *relatives à la fonction d'Airy.*

Les quatre bords de la plaque sont libres de contraintes donc :

$$\begin{cases} F_{,yy} = 0 \quad , \quad F_{,xy} = 0 \quad \text{à} \quad x = \pm a \\ F_{,xx} = 0 \quad , \quad F_{,xy} = 0 \quad \text{à} \quad y = \pm b \end{cases} \tag{4.3}$$

b) *Relatives au déplacement transversal*

La plaque étant simplement posée sur son pourtour, donc :

$$\begin{cases} W = W_{,xx} + \vartheta W_{,yy} = 0 \quad x = \pm a \\ W = W_{,yy} + \vartheta W_{,xx} = 0 \quad y = \pm b \end{cases} \tag{4.4}$$

Le problème consiste à déterminer F et W qui vont satisfaire à la fois les équations du mouvement (4.1) et (4.2) et aussi les équations aux limites (4.3) et (4.4).

4.2.- METHODE DE RESOLUTION

4.2.1.- *Expression de F et W*

Comme au chapitre 2 nous allons supposer F et W sous la forme de séries doubles de fonctions qui satisfont exactement les conditions aux limites du problème et qui sont solutions du problème linéarisé correspondant.

Choisissons :

$$F(x,y,t) = \sum_m \sum_n f_{mn}(t)\, X_m(x)\, Y_n(y) \tag{4.5}$$

$$W(x,y,t) = \sum_p \sum_q W_{pq}(t)\, \phi_p(x)\, \psi_q(y) \qquad (4.6)$$

où

X_m et ϕ_p sont des fonctions de x uniquement.

Y_m et ψ_q sont des fonctions de y uniquement.

Ces fonctions sont choisies de telles façons qu'elles satisfassent les conditions aux limites et soient orthogonales dans leur domaine $[-a, a]$ et $[-b, b]$ respectivement.

4.2.2.- *Choix de* X_m, Y_m, ϕ_p, ψ_q.

Comme au chapitre 2 on choisit :

$$X_m = \frac{\cosh \alpha_m x}{\cosh \alpha_m a} - \frac{\cos \alpha_m x}{\cos \alpha_m a} \qquad m = 1, 2 \ldots$$

$$Y_m = \frac{\cosh \beta_m y}{\cosh \beta_m b} - \frac{\cos \beta_m y}{\cos \beta_m b} \qquad m = 1, 2 \ldots$$

$$\phi_p = \cos \frac{p\pi x}{2a} \qquad p = 1, 2 \ldots$$

$$\psi_q = \cos \frac{q\pi y}{2b} \qquad q = 1, 2 \ldots$$

Ces fonctions vérifient les conditions aux limites si α_p et β_p vérifient :

$$\boxed{\begin{aligned} &\tanh a\alpha_p + \operatorname{tg} a\alpha_p = 0 \\ &\tanh b\beta_p + \operatorname{tg} b\beta_p = 0 \end{aligned}} \qquad (4.8)$$

et

on posera par la suite :

$$\lambda_p = a\alpha_p \qquad \text{ou} \qquad \lambda_q = b\beta_q$$

En outre ces fonctions sont orthogonales dans leur domaine (cf. chapitre 2).

4.3.- *EQUATION DIFFERENTIELLE VERIFIEE PAR* $W_{pq}(t)$

En substituant les expressions de F et W données par (4.5) et (4.6) dans les équations de base (4.1) et (4.2) on obtient :

$$\sum_m \sum_n \rho f_{mn} \left(X_m^{IV} Y_n + 2 X_m'' Y_n'' + X_m Y_n^{IV} \right) =$$

$$E \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s W_{pq} W_{rs} \left(\Phi_p' \Phi_r' \Psi_q' \Psi_s' - \Phi_p'' \Phi_r \Psi_q \Psi_s'' \right) \qquad (4.9)$$

et

$$\sum_p \sum_q W_{pq} \left(\Phi_p^{IV} \Psi_q + 2 \Phi_p'' \Psi_q'' + \Phi_p \Psi_q^{IV} \right) =$$

$$\frac{Q}{D} + \frac{h}{D} \left\{ \sum_m \sum_n \sum_r \sum_s \rho f_{mn} W_{rs} \left(X_m \Phi_r'' Y_n'' \Psi_s + X_m'' \Phi_r Y_n \Psi_s'' \right. \right.$$

$$\left. \left. - 2 X_m' \Phi_p' Y_n \Psi_s' \right) - \rho \sum_p \sum_q \ddot{W}_{pq} \Phi_p \Psi_q \right\} \qquad (4.10)$$

on se propose de transformer ces équations sous les formes suivantes :

pour (4.9) $$\sum_m \sum_m A_{mm} X_m Y_m = \sum_m \sum_n B_{mn} X_m Y_n$$

soit $$A_{mm} = B_{mm} \tag{4.11}$$

pour (4.10) $$\sum_p \sum_q C_{pq} \phi_p \psi_q = \sum_p \sum_q D_{pq} \phi_p \psi_q$$

soit $$C_{pq} = D_{pq} \tag{4.12}$$

Dans l'expression de D_{pq} nous posons la charge Q sous la forme :

$$Q(x,y,t) = \sum_q \sum_p Q_{pq} \phi_p(x) \psi_q(y) \tag{4.12.a}$$

L'équation (4.11) donne

$$A_{mm} = \rho_{mm}\left(\frac{r^4\lambda_m^4 + \lambda_m^4}{r^2}\right) + 2\sum_i \sum_j \lambda_i^2 \lambda_j^2 K_1^{mi} L_1^{nj} f_{ij} \tag{4.13}$$

et

$$B_{mn} = E \sum_p \sum_q \frac{\pi p^2 q^2}{16} W_{pq}^2 \left[K_2^{mpp} L_2^{nqq} - K_3^{mpp} L_3^{nqq} \right] \tag{4.14}$$

où

$$\left[\begin{array}{ll} X_i'' = \frac{\lambda_i^2}{a^2} \sum_m K_1^{mi} X_m & ; \quad Y_j'' = \frac{\lambda_j^2}{b^2} \sum_m L_1^{nj} Y_m \\ \phi_p' \phi_p' = \frac{p^2\pi^2}{4a^2} \sum_m K_2^{mpp} X_m & ; \quad \psi_q' \psi_q' = \frac{q^2\pi^2}{4b^2} \sum_m L_2^{nqq} Y_m \end{array} \right. \tag{4.15}$$

$$\left| \phi_p'' \phi_p = \frac{p^2\pi^2}{4a^2} \sum_m K_3^{mpp} X_m \quad ; \quad \psi_q \psi_q'' = \frac{q^2\pi^2}{4b^2} \sum_m L_3^{mqq} Y_m \right.$$

Les relations (4.15) permettent de déterminer les coefficients K_1 ; K_2 ; K_3 et L_1 ; L_2 ; L_3 en utilisant les propriétés d'orthogonalité des fonctions X_m, Y_m, ϕ_p et ψ_q.

L'équation (4.12) donne

$$C_{pq} = \frac{\pi^4}{16 a^4 r^2} \left[r^2 p^4 + 2 p^2 q^2 + \frac{q^4}{r^2} \right] W_{pq} \qquad (4.16)$$

$$D_{pq} = \frac{Q_{pq}}{D} + \frac{h}{D} \left\{ \frac{\pi^2}{4a^2 r^2} W_{pq} \sum_m \sum_m f_{mm} \left[p^2 \lambda_m^2 K_6^{ppm} L_5^{qmq} \right.\right.$$

$$\left. + q^2 \lambda_m^2 K_5^{pmp} L_6^{qqm} - 2 p_{pq} \lambda_m \lambda_m K_4^{pmp} L_4^{qmq} \right.$$

$$\left.\left. - \rho \frac{\partial^2 W_{pq}}{\partial t^2} \right\} \right. \qquad (4.17)$$

où

$$\text{(i)} \quad X_m' \phi_p' = \frac{p\pi\lambda_m}{2a^2} K_4^{pmp} \phi_p \quad ; \quad Y_m' \psi_q' = \frac{q\pi\lambda_m}{2b^2} L_4^{qmq} \psi_q$$

$$\text{(ii)} \quad X_m'' \phi_p = \frac{\lambda_m^2}{a^2} K_5^{pmp} \phi_p \quad ; \quad Y_m'' \psi_q = \frac{\lambda_m^2}{b^2} L_5^{qmq} \psi_q \qquad (4.18)$$

$$\text{(iii)} \quad X_m \phi_p'' = \frac{p^2\pi^2}{4a^2} K_6^{ppm} \phi_p \quad ; \quad Y_m \psi_q'' = \frac{q^2\pi^2}{4b^2} L_6^{qqm} \psi_q$$

Les relations (4.18) permettent de calculer les coefficients K_4 , K_5 , K_6 et L_4 , L_5 , L_6 en utilisant l'orthogonalité des fonctions X_m , Y_m , ϕ_p et ψ_q .

Les équations (4.11), (4.13) et (4.14) donnent une représentation entre les coefficients généralisés f_{mn} et les coordonnées W_{pq} :

$$f_{mn} = E\, F_{mnm}\, W_{pq}^2 \tag{4.19}$$

où F_{mnm} dépend du rapport de forme de la plaque et de λ_m et λ_n (voir Annexe "B").

En utilisant (4.13); (4.14); (4.16); (4.17) et (4.19) nous avons :

$$\left[\ddot{W}_{pq} + \frac{\pi^4 D}{16 \rho h a^4 r^2} \left[r^2 p^4 + 2 p^2 q^2 + \frac{q^4}{r^2} \right] W_{pq} + \frac{\pi^2 E}{\rho^4 a^4 r^2} \left\{ \sum_m \sum_n \left[2 p q \lambda_m \lambda_n K_4^{pmp} L_4^{qnq} - p^2 \lambda_m^2 K_6^{ppm} L_5^{qnq} - q^2 \lambda_m^2 K_5^{pmp} L_6^{qqn} \right] F_{mnm} \right\} W_{pq}^3 = Q_{pq}(t) \right. \tag{4.20}$$

(4.20) représente l'équation différentielle non linéaire régie par le déplacement d'une plaque rectangulaire excitée transversalement par la charge Q .

Nous poserons par la suite :

$$\Omega_{pq} = \frac{\pi^2}{4 a^2 r} \left[r p^2 + \frac{q^2}{r} \right] \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$

$$\gamma_{pq} = \frac{\pi^2 E}{4 \rho a^4 r^2} \left\{ \sum_m \sum_n \left[2 p q \lambda_m \lambda_n K_4^{pmp} L_4^{qnq} - p^2 \lambda_m^2 K_6^{ppm} L_5^{qnq} - q^2 \lambda_m^2 K_5^{pmp} L_6^{qnq} \right] F_{mnm} \right\}$$

Et pour plus de généralité nous ajoutons le terme de viscosité linéaire $-2c_{pq}\dot{W}_{pq}$ l'équation (4.20) devient :

$$\ddot{W}_{pq} + 2c_{pq}\dot{W}_{pq} + \Omega^2_{pq} W_{pq} + \gamma_{pq} W^3_{pq} = \frac{1}{\rho h} Q_{pq}(t) \qquad (4.21)$$

4.4.- *ETUDE DE LA PREMIERE APPROXIMATION* W_m

Dans toutes les séries précédemment rencontrées nous ne garderons que leur premier terme.

Soit, puisque $A_{11} = B_{11}$ on a :

$$f_{11} = E\ F_{11}\ W_{11}^2 \qquad (4.25)$$

où

$$F_{11} = E\ \frac{\pi}{16\lambda_1^4}\left[K_2'' L_2'' - K_3''' L_3'''\right]\left[r^2 + \frac{1}{r^2} + 2K_1'' L_1''\right]^{-1}$$

De même sachant que $C_{11} = D_{11}$ et en tenant compte de (4.25) nous pouvons établir l'équation différentielle vérifiée par W_{11} que nous poserons égal à W . On a alors :

$$\ddot{W} + \frac{\pi^4 D}{16\rho h a^4}\left[r^2 + 2 + \frac{1}{r^2}\right]W + \frac{\lambda_1^2\pi^2 E}{4\rho a^4 r^2}\left[2K_4''' L_4''' - K_6''' L_5''' - K_5''' L_6'''\right]F_{11} W^3 = \frac{Q_{11}}{\rho h}$$

Posons par la suite :

$$\Omega = \frac{\pi^2}{4a^2 r}\left(r + \frac{1}{r}\right)\sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$

$$\gamma = \frac{\pi^2 E}{4\rho a^4 n^2}\lambda_1^2 \left[2K_4'''L_4''' - K_6'''L_5''' - K_5'''L_6'''\right] F_{11}$$

$$\frac{Q_{11}}{\rho h} = \lambda T \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t-mT) = \lambda\, e(t)$$

λ est un paramètre, $e(t)$ est la percussion périodique de période T.

En ajoutant la viscosité linéaire, W vérifie

$$\boxed{\ddot{W} + 2\rho c\dot{W} + \Omega^2 W + \gamma W^3 = \lambda\, e(t)} \qquad (4.26)$$

Dans les paragraphes qui suivent, nous étudierons l'équation de Duffing (4.26) où l'excitation est une percussion périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

4.5.- *EXISTENCE DE LA SOLUTION PERIODIQUE DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE (4.26)*

M. R. FAURE [4] a étudié dans le cas général les équations du type :

$$\ddot{y} + 2\rho c\dot{y} + \Omega^2 y = P(y) + \lambda\, e(t) \qquad (E)$$

où c et Ω sont des constantes positives. $P(y)$ est un polynome à coefficients constants en y avec $P(0) = P'(0) = 0$, λ un paramètre. La percussion est représentée par la mesure de Dirac δ, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Soit $e(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t-mT)$.

Il a démontré que pour $c \neq 0$ l'équation (E) admet une solution T-périodique pourvu que $|\lambda|$ soit suffisamment petit.

Dans ce qui suit, nous appliquerons la méthode de M. FAURE à notre cas particulier pour démontrer l'existance de la solution T-périodique de l'équation de la plaque (4.26).

4.5.1.- Démonstration

Nous nous placerons dans l'espace de Banach $B(T)$ des séries absolument convergentes et T-périodiques.

Rappels :

$$X(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m e^{im\omega t}$$ est un élément de l'espace $B(T)$.

On pose $$\|X(t)\| = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x_m|$$

et si $Y(t) \in B(T)$ alors

$$\|X(t).Y(t)\| \leq \|X(t)\|.\|Y(t)\|$$

et

$$\|X(t)^m\| \leq \|X(t)\|^m \qquad m \in \mathbb{Z}$$

comme au chapitre 3 nous représentons l'excitation périodique

$$e(t) = T\sum_m \delta(t - mT)$$ par sa série de Fourier, soit :

$$e(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\omega t}$$

Pour démontrer l'existence de la solution W de l'équation (4.26) nous définissons un récurrence W_{m-1} , W_m comme suit :

$$\begin{cases} \ddot{W}_m + \ell c \dot{W}_m + \Omega^2 W_m = -\gamma W_{m-1}^3 + \lambda T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \\ W_0 = 0 \end{cases} \tag{4.27}$$

$W_m, W_{m-1} \in B(T)$ donc

$$W_m = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \alpha_{mp}\, e^{ip\omega t} \qquad \text{et} \qquad W_{m-1} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \alpha_{m-1,p}\, e^{ip\omega t}$$

posons enfin : $$W_{m-1}^3 = \sum_{p=-\infty}^{\infty} P_{m-1,p}\, e^{ip\omega t}$$

En remplaçant ces expressions dans l'équation (4.27) et en égalant les termes de rang p , on trouve que α_{mp} vérifie :

$$\left(\Omega^2 - p^2\omega^2 + 2cp\omega i\right)\alpha_{mp} = -\gamma P_{m-1,p} + \lambda \qquad (4.28)$$

donc $$\alpha_{mp} = r_p\left(-\gamma P_{m-1,p} + \lambda\right) \qquad (4.29)$$

avec $$r_p = \left(\Omega^2 - p^2\omega^2 + 2cp\omega i\right)^{-1} \qquad (4.30)$$

Il est aisé de montrer que $\forall p$:

$$|r_p| \leqslant \varrho \qquad (4.31)$$

où $$\varrho = \frac{1}{2c\sqrt{\Omega^2 - c^2}} \qquad \text{si} \qquad c \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\,\Omega$$

$$\varrho = \frac{1}{\Omega} \qquad \text{si} \qquad c > \frac{\sqrt{2}}{2}\,\Omega$$

(4.29), (4.30) et (4.31) entrainent :

$$\|W_m\| \leqslant |\gamma|\, e \|W_{m-1}^3\| + |\lambda| \|\Sigma\| \qquad (4.32)$$

où Σ est la série absolument convergente de terme général :

$$u_m = (\Omega^2 - m^2\omega^2 + 2mc\omega i)^{-1} e^{im\omega t} .$$

on posera par la suite :

$$\eta = \|\Sigma\| \qquad (4.33)$$

sachant que $\|W_{m-1}^3\| \leqslant \|W_{m-1}\|^3$, (4.32) devient :

$$\|W_m\| \leqslant |\gamma|\, e \|W_{m-1}\|^3 + |\lambda|\eta \qquad (4.34)$$

Commençant par $W_0 = 0$, nous nous proposons de démontrer que la suite (W_m) définie par (4.27) et vérifiant (4.34) converge dans $B(T)$ vers la solution W de l'équation (4.26). En effet posons :

$$\boxed{\alpha_0 = 2|\lambda|\eta} \qquad (4.35)$$

nous nous proposons de démontrer que si $\|W_{m-1}\| < \alpha_0$ alors $\|W_m\| < \alpha_0$.

Soit d'après (4.34) on a :

$$\|W_m\| \leqslant |\gamma|\, e \|W_{m-1}\|^3 + |\lambda|\eta$$

$$< |\gamma|\, e\, \alpha_0^3 + |\lambda|\eta = |\gamma|\, e\, 8|\lambda|^3\eta^3 + |\lambda|\eta$$

choisissons λ tel que :

$$\lambda^2 < \frac{1}{12\eta^2 e|\gamma|} \qquad (4.36)$$

alors

$$\|W_m\| < |\gamma| e \; 8|\lambda| \frac{1}{12\eta^2 e\,\gamma}\eta^3 + |\lambda|\eta$$
$$= \frac{5}{3}|\lambda|\eta$$
$$< 2|\lambda|\eta$$

Il en résulte que :

$$\|W_m\| < \alpha_0 \qquad \text{pour} \qquad m = 0,1,2,3\ldots. \tag{4.37}$$

Montrons maintenant que (W_m) est une suite de Cauchy.

D'après (4.29) on a :

$$\alpha_{m+1,p} - \alpha_{m,p} = r_p\left[-\gamma(P_{m,p} - P_{m-1,p})\right]$$

donc :

$$\|W_{m+1} - W_m\| \leq e|\gamma|\,\|W_m^3 - W_{m-1}^3\| \tag{4.38}$$

or $$W_m^3 - W_{m-1}^3 = (W_m - W_{m-1})(W_m^2 + W_m W_{m-1} + W_{m-1}^2)$$

(4.37) et (4.38) entrainent :

$$\|W_{m+1} - W_m\| < 3\alpha_0^2 e|\gamma|\,\|W_m - W_{m-1}\| \tag{4.39}$$

posons $$k = 3\alpha_0^2 e|\gamma|$$
$$= 12 e|\gamma|\eta^2\lambda^2 < 1 \quad \text{d'après (4.36)}$$

donc $\|W_{m+1} - W_m\| < k\,\|W_m - W_{m-1}\|$

avec $k < 1$.

Conclusion :

Pour λ vérifiant la condition (4.36), l'inégalité (4.39) montre que (W_m) est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $B(T)$. Donc (W_m) converge vers $W(t)$ solution de l'équation (4.26). En outre

$$\| W_m - W(t) \| \longrightarrow 0 \qquad \text{quand} \quad m \longrightarrow \infty$$

Cette solution tend vers zéro avec λ (voir annexe "C").

4.5.2.- *Stabilité*

L'équation de stabilité est :

$$\ddot{u} + 2 c \dot{u} + (\Omega^2 + 3 \gamma w^2) u = 0 \qquad (4.40)$$

où W la solution T-périodique de l'équation (4.26).

Puisque $\|W\| < \alpha_0 = 2 \eta |\lambda|$ alors $\|W\|$ reste petit. Donc il est légitime de prendre comme équation de stabilité :

$$\ddot{u} + 2 c \dot{u} + \Omega^2 u = 0 \qquad (4.41)$$

Il y a stabilité si $c > 0$

Il y a instabilité si $c < 0$

4.6.- *ETUDE DU PROBLEME DE LA SYNCHRONISATION*

4.6.1.- *Position du problème*

Nous supposerons dans ce paragraphe que :

$\Omega^2 = \omega^2 (1 + \lambda \varepsilon)$, $c = \lambda c$, $\gamma = \lambda \gamma$ avec λ un petit paramètre, ε est une constante non nulle et pour plus de généralité, nous appelons K l'amplitude de l'excitation (percussion) $e(t)$. L'équation (4.26) devient :

$$\ddot{W} + \omega^2 W = \lambda \left[Ke(t) - 2c\dot{W} - \gamma W^3 - \varepsilon \omega^2 W \right] = \lambda F(W, \dot{W}, t) \qquad (4.42)$$

Dans le cadre des systèmes non linéaires excités par des percussions, M. FAURE [4] a démontré le résultat suivant :

On considère le système

$$\frac{dx}{dt} = \lambda \Psi_1(x, y, t)$$

$$\frac{dy}{dt} = \lambda \Psi_2(x, y, t) \qquad (\Sigma_1)$$

où

$$\Psi_1(x, y, t) = \Theta_1(x, y, t) + \sum_{i,m} \gamma_{1i}\, \delta(t - mT)$$

$$\Psi_2(x, y, t) = \Theta_2(x, y, t) + \sum_{i,m} \gamma_{2i}\, \delta(t - mT)$$

Les Θ_i sont des fonctions de x , y , t deux fois continument dérivables par rapport à x, y, t pour tout t et pour x, y appartenant à un domaine $\mathcal{D}$.

Les γ_{1i} , γ_{2i} sont des constantes facteurs des percussions $\delta(t - mT)$.

Théorème [4]

Si A et B sont des constantes telles que les intégrales suivantes étant de Rieman,

$$\int_0^T \Theta_1(A,B,s)\,ds + \sum_i \gamma_{1i} = 0$$

$$\int_0^T \Theta_2(A,B,s)\,ds + \sum_i \gamma_{2i} = 0 \qquad (\Sigma_2)$$

les fonctions Θ_1 et Θ_2 étant continument dérivables au voisinage de A de B, alors le système (Σ_1) admet en général un système de solutions périodiques pour $|\lambda|$ suffisamment petit; ces solutions sont pour $|\lambda|$ petit, voisines de A et de B.

En outre si on pose :

$$F_1(x,y) = \frac{1}{T}\int_0^T \Theta_1(x,y,t)\,dt$$

$$F_2(x,y) = \frac{1}{T}\int_0^T \Theta_2(x,y,t)\,dt$$

la stabilité du système (Σ_1) au voisinage de A et de B est donnée en général par la stabilité du système (Σ_3) au voisinage de A et de B pour $|\lambda|$ assez petit.

$$\frac{dx}{dt} = \lambda F_1(x,y)$$

$$\frac{dy}{dt} = \lambda F_2(x,y) \qquad (\Sigma_3)$$

Dans ce qui suit nous nous proposons de chercher les équations de synchronisation, les points de synchronisation et de discuter les conditions de stabilité au voisinage de chacun de ces points.

4.6.2.- *Equations de synchronisation*

Cherchons une solution de l'équation (4.42) sous la forme :

$$\underline{W = a(t)\,\sin\omega t + b(t)\,\cos\omega t}$$

d'après la méthode de la variation des constantes on a le système suivant :

$$\frac{da}{dt} = \frac{\lambda}{\omega} F(w, \dot{w}, t)\,\cos\omega t$$

$$\frac{db}{dt} = -\frac{\lambda}{\omega} F(w, \dot{w}, t)\,\sin\omega t \qquad (4.43)$$

Les fonctions associées à ce système sont définies par *) :

$$X = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(w, \dot{w}, t)\,\frac{\cos\omega t}{\omega}\,dt$$

$$Y = \frac{-1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(w, \dot{w}, t)\,\frac{\sin\omega t}{\omega}\,dt$$

*) On intègre entre $\frac{T}{2}$ et $-\frac{T}{2}$ pour tenir compte de la percussion une fois dans chaque intervalle.

avec

$$\int_{-\frac{I}{2}}^{\frac{I}{2}} F(W,\dot{W},t)\cos\omega t\,dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Big[K\sum_m \delta(t-mT) - 2c\omega(a\cos\omega t - b\sin\omega t)$$

$$- \gamma(a\sin\omega t + b\cos\omega t)^3$$

$$- \varepsilon\omega^2(a\sin\omega t + b\cos\omega t)\Big]\cos\omega t\,dt$$

$$= K - 2\pi c a - T\left[\frac{3\gamma}{8}(a^2+b^2) + \frac{\varepsilon\omega^2}{2}\right]b$$

et

$$\int_{-\frac{I}{2}}^{\frac{I}{2}} F(W,\dot{W},t)\sin\omega t\,dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Big[K\sum_m \delta(t-mT) - 2c\omega(a\cos\omega t - b\sin\omega t)$$

$$- \gamma(a\sin\omega t + b\cos\omega t)^3 - \varepsilon\omega^2(a\sin\omega t + b\cos\omega t)\Big]\sin\omega t\,dt$$

$$= 2\pi c b - T\left[\frac{3\gamma}{8}(a^2+b^2) + \frac{\varepsilon\omega^2}{2}\right]a$$

Le système associé s'écrit alors

$$\frac{da}{dt} = \frac{\lambda}{2\pi}\left\{K - 2\pi c a - T\left[\frac{3\gamma}{8}(a^2+b^2) + \frac{\varepsilon\omega^2}{2}\right]b\right\} \qquad (4.44)$$

$$\frac{db}{dt} = -\frac{\lambda}{2\pi}\left\{2\pi c b - T\left[\frac{3\gamma}{8}(a^2+b^2) + \frac{\varepsilon\omega^2}{2}\right] a\right\}$$

Posons dans (4.44) le changement suivant :

$$a = y\cos x$$

$$b = y\sin x$$

le système (4.44) devient :

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\lambda}{2\pi}\left[-\frac{K\sin x}{y} + T\left(\frac{3\gamma}{8}y^2 + \frac{\varepsilon\omega^2}{2}\right)\right] \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\lambda}{2\pi}\left[K\cos x - 2\pi c y\right]\end{aligned}} \qquad (4.45)$$

Les équations de synchronisation sont :

$$\boxed{X = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{K}{y}\sin x + T\left(\frac{3\gamma}{8}y^2 + \frac{\varepsilon\omega^2}{2}\right)\right] = 0} \qquad (4.46)$$

$$\boxed{Y = \frac{1}{2\pi}\left(K\cos x - 2\pi c y\right) = 0} \qquad (4.47)$$

(4.46) et (4.47) définissent l'amplitude y et le déphasage x des régimes synchronisés possibles.

4.6.3.- *Points de synchronisation - Discussion.*

De (4.47) on tire $K\cos x = 2\pi y c$

de (4.46) on tire $K\sin x = Ty\left(\frac{3\gamma}{8}y^2 + \frac{\varepsilon\omega^2}{2}\right)$.

D'où l'équation aux amplitudes :

$$y^2 \left[\left(\frac{3\gamma}{8\omega} y^2 + \frac{\varepsilon\omega}{2} \right)^2 + c^2 \right] = \left(\frac{K}{2\pi} \right)^2$$

nous posons par la suite :

$$\alpha = \frac{3\gamma}{8\omega} \quad ; \quad \beta = \frac{\varepsilon\omega}{2} \quad ; \quad h = \frac{K}{2\pi}$$

donc l'amplitude y vérifie l'équation

$$y^2 \left[(\alpha y^2 + \beta)^2 + c^2 \right] = h^2 \qquad (4.48)$$

si y_1 est une solution positive de cette équation, le déphasage est donné par :

$$\operatorname{tg} x = \frac{\alpha y_1^2 + \beta}{c} \qquad (4.49)$$

Discussion des racines de l'équation (4.48)

Posons $y^2 = z$ dans l'équation (4.48), on a alors

$$Z(z) = z \left[(\alpha z + \beta)^2 + c^2 \right] = h^2$$

La quantité z étant positive, Z est constamment positive et tend vers l'infini avec z, la fonction Z s'annule avec z.

La dérivée $\frac{dZ}{dz} = 3\alpha^2 z^2 + 4\alpha\beta z + \beta^2 + c^2$

s'annule si $4\alpha^2\beta^2 - 3\alpha^2(\beta^2 + c^2)$ est positif.

Soit $\beta^2 - 3c^2 > 0$. Il en résulte alors les trois éventualités suivantes :

a) $\beta^2 < 3c^2$: $\frac{dZ}{dz}$ est toujours positif.

La courbe représentant les variations de Z en fonction de z a l'allure indiquée par la figure (a) : il n'y a qu'un point de synchronisation.

b) $\beta^2 = 3c^2$: l'équation $\frac{dZ}{dz} = 0$ a une racine double. La courbe représentative de $Z(z)$ possède un point d'inflexion à tangente horizontale; fig. (b). Il n'y a qu'un point de synchronisation.

c) $\beta^2 > 3c^2$: l'équation $\frac{dZ}{dz} = 0$ admet deux racines de même signe. Si $\beta < 0$ les racines sont positives, la courbe représentative de $Z(z)$ a l'allure indiquée par la figure (c). Il y a un ou trois points de synchronisation. Si $\beta > 0$ les racines de $\frac{dZ}{dz} = 0$ sont négatives (fig. d), il y a un point de synchronisation.

4.6.4.- *Etude de la stabilité au voisinage d'un point de synchronisation*

Le système associé au système (4.43) est :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda X \\ \frac{dy}{dt} = \lambda Y \end{cases} \qquad (4.45)$$

cherchons l'équation de stabilité de ce système au voisinage d'un point de synchronisation $M(x_0, y_0)$.

On pose :

$$x = x_0 + \xi$$

$$y = y_0 + \eta$$

donc au second ordre près en ξ et η on a :

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda\left(X(x_0,y_0) + \xi \frac{\partial X}{\partial x}(x_0,y_0) + \eta \frac{\partial X}{\partial y}(x_0,y_0)\right) \qquad (4.50)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \lambda\left(Y(x_0,y_0) + \xi \frac{\partial Y}{\partial x}(x_0,y_0) + \eta \frac{\partial Y}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

nous poserons par la suite :

$$a = \frac{\partial X}{\partial x}(x_0,y_0) \quad , \quad b = \frac{\partial X}{\partial y}(x_0,y_0)$$

$$a' = \frac{\partial Y}{\partial x}(x_0,y_0) \quad , \quad b' = \frac{\partial Y}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Nous chercherons une solution du système (4.50) sous la forme :

$$\xi = A\, e^{r\lambda t} \quad , \quad \eta = B\, e^{r\lambda t}$$

le système donnant A et B est :

$$\begin{cases} (r-a)\,A - b\,B = 0 \\ -a'A + (r-b')\,B = 0 \end{cases} \qquad (4.51)$$

Pour avoir d'autres solutions que la solution triviale $A = 0$, $B = 0$ nous devons poser le déterminant du système (4.51) identiquement nul. D'où l'équation de stabilité :

$$r^2 - (a+b')\,r + ab' - a'b = 0 \qquad (4.52)$$

que l'on appelle aussi équation <u>caractéristique</u>.

Les conditions de stabilité sont :

$$S = a + b' < 0$$
$$P = ab' - a'b > 0$$

Calcul de S et de P

$$\frac{\partial X}{\partial x} = -R\frac{\cos x}{y} \quad , \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{R}{y^2}\sin x + 2\alpha y$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = -R\sin x \quad , \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = -c$$

donc au point de synchronisation $M(x_0, y_0)$:

$$S = -2c < 0 \qquad (c > 0)$$

La première condition de stabilité est toujours satisfaite

Le produit P est donné par :

$$P = \frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\cdot\frac{\partial X}{\partial y}$$
$$= cR\frac{\cos x}{y} + R\sin x\left(\frac{R}{y^2}\sin x + 2\alpha y\right)$$

donc d'après les équations (4.46) et (4.47)

$$P = 3\alpha^2 z^2 + 4\alpha z\beta + \beta^2 + c^2 \qquad (z = y^2)$$

Donc le produit des racines de l'équation de stabilité est du signe de $\frac{dZ}{dz}$

Nous aurons alors les éventualités suivantes :

1) dans les cas où : $\beta^2 < 3c^2$; $\beta^2 = 3c^2$ et $\beta^2 > 3c^2$, $\beta > 0$, nous avons $\frac{dZ}{dz} > 0$ et les points de synchronisation correspondant sont stables.

2) Cas où $\beta^2 > 3c^2$, $\beta < 0$ (fig. c)

Sur les deux parties montantes OP et QR, les deux conditions de stabilités sont vérifiées : les points de synchronisation sont stables.

Sur la partie PQ les points de synchronisation sont des cols $(P<0)$.

4.6.5.- *Nature des points de synchronisation sur OP et QR* : fig. e

Examinons le signe de $\Delta = S^2 - 4P$

$$\Delta = S^2 - 4P = -4(3\alpha^2\gamma^2 + 4\alpha\beta\gamma + \beta^2)$$

* $\Delta > 0$ si $-\frac{\beta}{3\alpha} < \gamma < -\frac{\beta}{\alpha}$. Dans ce cas l'équation de stabilité admet des racines réelles, nous avons alors des noeuds.

* $\Delta < 0$ si $\gamma > -\frac{\beta}{\alpha}$ ou $\gamma < -\frac{\beta}{3\alpha}$

Dans ce cas l'équation de stabilité admet des racines imaginaires, nous avons alors des foyers.

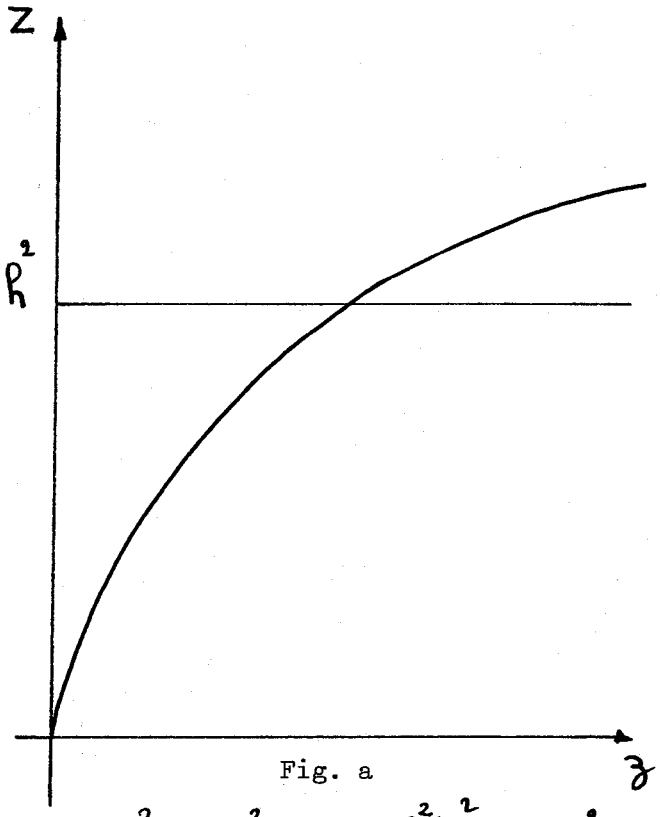


Fig. a

$\beta^2 < 3c^2$ soit $\frac{\varepsilon^2\omega^2}{4} < 3c^2$

(un seul point de synchronisation)

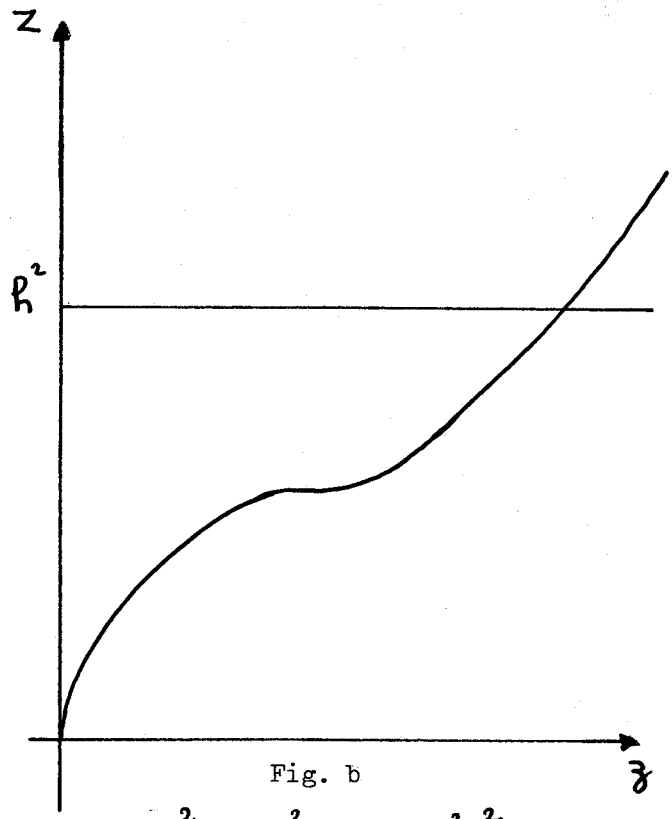


Fig. b

$\beta^2 = 3c^2$ soit $\frac{\varepsilon^2\omega^2}{4} = 3c^2$

(un seul point de synchronisation)

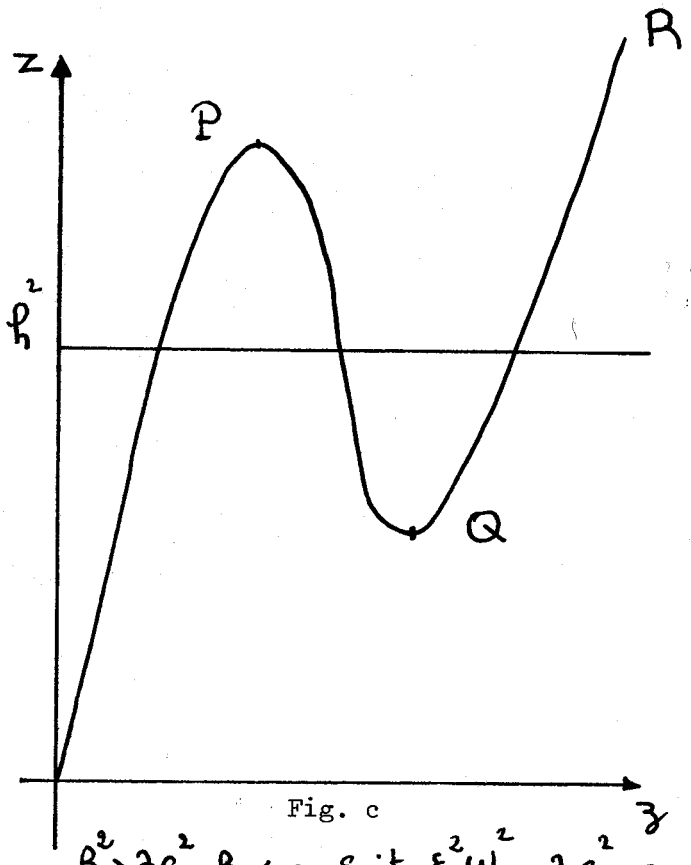


Fig. c

$\beta^2 > 3c^2, \beta < 0$ soit $\frac{\varepsilon^2\omega^2}{4} > 3c^2, \varepsilon < 0$

(un ou trois points de synchronisation)

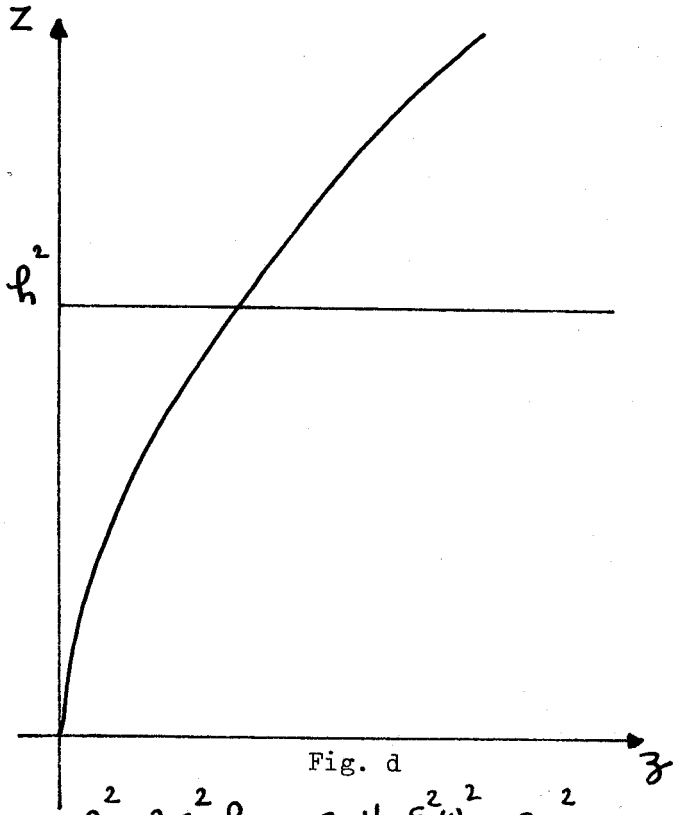


Fig. d

$\beta^2 > 3c^2, \beta > 0$ soit $\frac{\varepsilon^2\omega^2}{4} > 3c^2, \varepsilon > 0$

(un seul point de synchronisation)

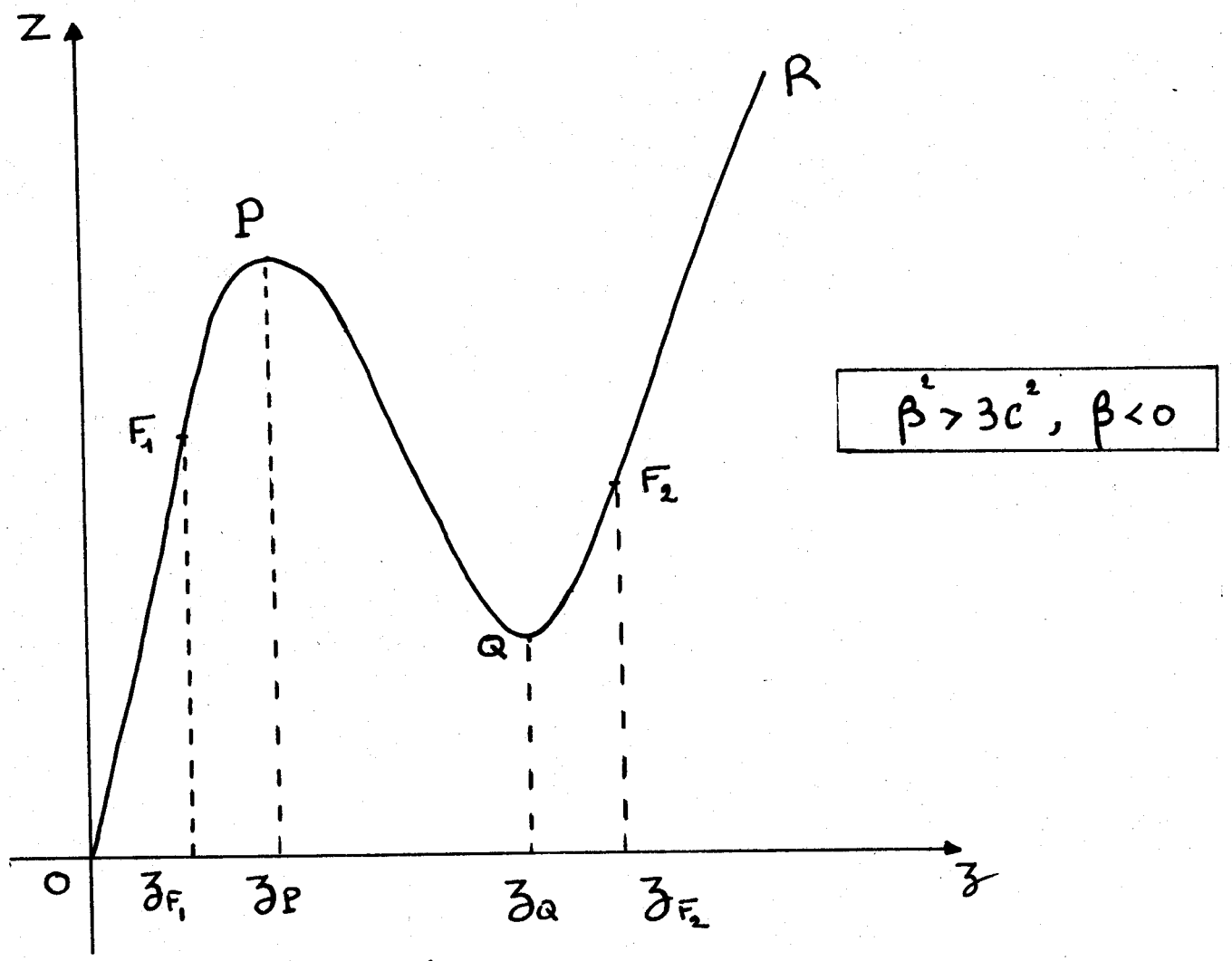


Fig. e

BIU LILLE

$$z_P = -\frac{2}{3}\frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{3\alpha}\sqrt{\beta^2 - 3c^2} \quad ; \quad z_{F_1} = -\frac{\beta}{3\alpha}$$

$$z_Q = -\frac{2}{3}\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{3\alpha}\sqrt{\beta^2 - 3c^2} \quad ; \quad z_{F_2} = -\frac{\beta}{\alpha}$$

Le long de : OF_1 et F_2R on a des foyers

Le long de : F_1P et QF_2 on a des noeuds

Le long de : PQ on a des cols

ANNEXE "A"

Nous avons démontré au chapitre 3 que l'équation :

$$\ddot{W} + \omega^2 W = \lambda\left[2\mu\, W.e(t) - 2c\dot{W} - \varepsilon\omega^2 W - \gamma W^3\right] \qquad (A.1)$$

admet une solution particulière $W_0 = Ae^{-i\omega t} + Be^{i\omega t}$ vérifiant la condition de synchronisation :

$$2\mu W e(t) - 2c\dot{W} - \varepsilon\omega^2 W - \gamma W^3 \in B_2(T)$$

avec $$B_2(T) = \left\{ x(t) = \sum_{|n|\neq 1} x_n\, e^{in\omega t} \right\}$$

En posant :

$$A = re^{i\theta} \quad , \quad B = re^{-i\theta}$$

nous avons deux équations reliant r et θ :

$$2\mu\left(\cos 2\theta + 1\right) - \varepsilon\omega^2 - 3\gamma r^2 = 0 \qquad (A.2)$$

$$-2\mu \sin 2\theta + 2c\omega = 0 \qquad (A.3)$$

(on posera par la suite $\omega = 1$).

La résolution du système (A.2), (A.3) donne :

$r = 0$ solution triviale

$$r^+ = \left\{ \frac{2}{3\gamma}\left[\mu - \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\mu^2 - c^2} \right] \right\}^{1/2}$$

$$r^- = \left\{ \frac{2}{3\gamma}\left[\mu - \frac{\varepsilon}{2} - \sqrt{\mu^2 - c^2} \right] \right\}^{1/2}$$

et $\sin 2\theta = \frac{c}{\mu}$

Au paragraphe 3.6 nous avons exposé une méthode d'étude de la stabilité des solutions dans le cas des systèmes excités par des percussions périodiques. Nous avons alors trouvé que la condition de stabilité de la solution $W_0 = A e^{-i\omega t} + B e^{i\omega t}$ où $A = r e^{i\theta}$ et $B = r e^{-i\theta}$ est :

$$0 < -\frac{3\pi}{4}\beta^2 + \beta\left(2\mu - 2\varepsilon\pi - \mu\cos 2\theta\right) + 2\mu\varepsilon - \pi\varepsilon^2 < 4\pi c^2$$

où $\beta = \frac{3\gamma}{2} r^2$ et $c \neq 0$ (A.4)

Dans cette annexe nous nous proposons de chercher laquelle des solutions et correspond à un mouvement stable ou instable de la plaque.

En tenant compte de (A.2) la condition de stabilité (A.4) devient :

$$0 < -\left(\frac{3\pi}{4} + 1\right)\beta^2 + \beta\left(3\mu - 2\varepsilon\pi - \frac{\varepsilon}{2}\right) + 2\mu\varepsilon - \pi\varepsilon^2 < 4\pi c^2 \qquad (A.5)$$

avec $c \neq 0$

I) Stabilité de la solution nulle

En posant $\beta = 0$ dans (A.5), la condition de stabilité de la solution nulle s'écrit :

$$\begin{cases} -2\mu\varepsilon + \pi\varepsilon^2 + 4\pi c^2 > 0 \\ 2\mu\varepsilon - \pi\varepsilon^2 > 0 \end{cases}$$

soit

a) $\varepsilon > 0$

$$\boxed{\frac{\varepsilon\pi}{2} < |\mu| < 2\pi\frac{c^2}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon\pi}{2}}$$

b) $\varepsilon < 0$

$$\boxed{\frac{\varepsilon\pi}{2} + 2\pi\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} < |\mu| < \frac{\varepsilon\pi}{2}}$$

II) stabilité des solutions $\mathcal{R}^+$ et $\mathcal{R}^-$: $c \neq 0$

Nous nous proposons de donner les conditions de stabilité de $\mathcal{R}^+$ et $\mathcal{R}^-$ dans deux cas particuliers.

1) $|\mu|$ voisin de c

Dans le cas $\beta^+ = \beta^- = c - \frac{\varepsilon}{2} + O(|\mu - c|)$

La condition est :

$$0 < -\left(\frac{3\pi}{16} + \frac{1}{4}\right)\varepsilon^2 - \left(\frac{5\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)\varepsilon c + \left(2 - \frac{3\pi}{4}\right)c^2 < 4\pi c^2$$

ce qui se traduit par :

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon &> -0.88\,c \\ \varepsilon &< -7.37\,c \end{aligned}}$$

ceci prouve que pour avoir stabilité dans le cas $|\mu|$ voisin de c il faut que la pulsation propre du système soit inférieur à la pulsation excitatrice.

2) $|\mu|$ grand

$$\beta^+ = 2|\mu| - \frac{\varepsilon}{2} + O\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

$$\beta^- = -\frac{\varepsilon}{2} + O\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

Pour β^+, la condition de stabilité est :

$$(10 - 3\pi)|\mu|^2 + \frac{3 - 5\pi}{2}\varepsilon|\mu| - \frac{3\pi}{16}\varepsilon^2 > 0$$

Pour β^-, la condition de stabilité est :

a) $\varepsilon > 0$

$$\frac{\varepsilon\mu}{2} - \frac{3\pi}{16}\varepsilon^2 > 0$$

b) $\varepsilon < 0$

$$-\frac{3\pi}{16}\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon\mu}{2} < 4\pi c^2$$

ANNEXE "B"

Dans cette annexe nous nous proposons de donner une représentation matricielle aux équations de Von Kármán :

$$\nabla^4 F = E\left[W_{,xy}^2 - W_{,xx} W_{,yy} \right] \tag{B.1}$$

$$\nabla^4 W = \frac{h}{D}\left[\frac{q}{h} + F_{,yy} W_{,xx} + F_{,xx} W_{,yy} - 2F_{,xy} W_{,xy} - \rho W_{,tt} \right] \tag{B.2}$$

En posant :

$$F(x,y,t) = \sum_m \sum_n f_{mn}(t)\, X_m(x)\, Y_n(y)$$

$$W(x,y,t) = \sum_p \sum_q W_{pq}(t)\, \phi_p(x)\, \psi_q(y)$$

En suivant toutes les démarches prises pages 75-76-77 nous arrivons à :

$$\sum_m \sum_n A_{mn} X_m Y_n = \sum_m \sum_n B_{mn} X_m Y_n$$

qui donne

$$A_{mn} = B_{mn} \tag{B.3}$$

et

$$\sum_p \sum_q C_{pq} \phi_p \psi_q = \sum_p \sum_q D_{pq} \phi_p \psi_q$$

qui donne

$$C_{pq} = D_{pq} \tag{B.4}$$

Et après tout calcul on a :

$$A_{mn} = f_{mn}\left(\frac{\pi^4 \lambda_m^4 + \lambda_n^4}{\pi^2}\right) + 2 \sum_i \sum_j \lambda_i^2 \lambda_j^2 K_1^{mi} L_1^{nj} f_{ij}$$

$$B_{mn} = E \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s W_{pq} W_{rs} \left(pqrs\, K_2^{mpr} L_2^{nqs} - p^2 s^2 K_3^{mpr} L_3^{nqs} \right)$$

et

$$C_{pq} = \frac{\pi^4}{16 a^4 \pi^2} \left[\pi^2 p^4 + 2 p^2 q^2 + \frac{q^2}{\pi^2} \right] W_{pq}$$

$$D_{pq} = \frac{Q_{pq}}{\mathcal{D}} + \frac{h}{\mathcal{D}} \left\{ \frac{\pi^2}{4 a^2 r^2} \sum_u \sum_v \sum_m \sum_n f_{mn} W_{uv} \right.$$

$$\left[u^2 \lambda_n^2 K_6^{upm} L_5^{vnq} + v^2 \lambda_m^2 K_5^{ump} L_6^{vqn} \right.$$

$$\left. \left. - 2uv \lambda_m \lambda_n K_4^{ump} L_4^{vnq} \right] - \rho \frac{\partial^2 W_{pq}}{\partial t^2} \right\}.$$

Les relations (B.3) et (B.4) peuvent s'écrire matriciellement sous la forme :

$$A_{ij}^{mn} f_{mn}(t) = B_{ij}^{uvrs} W_{uv}(t) W_{rs}(t) \qquad \text{(B.5)}$$

$$\ddot{W}_{pq} + \Omega_{pq}^2 W_{pq} + G_{pq}^{mnuv} f_{mn}(t) W_{uv}(t) = \frac{Q_{pq}}{\rho h} \qquad \text{(B.6)}$$

où

$$A_{ij}^{mn} = \delta_i^m \delta_j^n \frac{\pi^4 \lambda_m^4 + \lambda_n^4}{\pi^2} + 2 \lambda_i^2 \lambda_j^2 K_1^{mi} L_1^{nj}$$

où δ : est le symbole de Kronecker.

$$B_{ij}^{uvrs} = \frac{E \pi^4}{16 a^2 b^2} \left[uvrs\, K_2^{mur} L_2^{nvs} - u^2 s^2 K_3^{mur} L_3^{uvr} \right]$$

$$G_{pq}^{mnuv} = \frac{\pi^2}{4 \rho a^4 \pi^2} \left[2 \lambda_m \lambda_n uv\, K_6^{pmu} L_6^{qnv} - \lambda_n^2 u^2 K_4^{pmu} L_5^{qnv} \right.$$

$$\left. - \lambda_m^2 v^2 K_5^{pmu} L_4^{qnv} \right]$$

$$\Omega_{pq}^2 = \frac{\pi^4 D}{16 \rho a^4 h r^2} \left(\pi^2 p^2 + 2 p^2 q^2 + \frac{q^4}{\pi^2} \right)$$

alors :

(B.5) entraine :

$$f_{mn}(t) = R_{mn}^{uvrs} W_{uv}(t) W_{rs}(t) \qquad (B.7)$$

où

$$\left[R_{mn}^{uvrs} \right] = \left[A_{ij}^{mn} \right]^{-1} \left[B_{ij}^{urrs} \right]$$

En remplaçant (B.7) dans (B.6) on a :

$$\ddot{W}_{pq} + \Omega_{pq}^{2} W_{pq} + G_{pq}^{mnkl} R_{mn}^{uvrs} W_{kl} W_{uv} W_{rs} = \frac{Q_{pq}}{\rho h}$$

posons $$\left[H_{pq}^{klmnrs} \right] = \left[G_{pq}^{mnkl} \right] \left[R_{mn}^{uvrs} \right]$$

Donc, l'équation finale en rajoutant l'amortissement linaire $-2 C_{pq} \dot{W}_{pq}$ est :

$$\ddot{W}_{pq} + 2 C_{pq} \dot{W}_{pq} + \Omega_{pq}^{2} W_{pq} + M_{pq}^{klmnrs} W_{kl} W_{uv} W_{rs} = \frac{Q_{pq}}{\rho h} \qquad \text{(B.8)}$$

(B.8) représente l'équation générale vérifiée par tous les modes de vibrations avec tous les termes de couplage. Dans l'étude faite chapitre 2 et chapitre 4, nous nous sommes bornés à étudier l'influence d'une percussion sur un seul mode.

Soit : $k = u = s = p$

$l = v = r = q$

(B.8) devient :

$$\ddot{W}_{pq} + 2 C_{pq} \dot{W}_{pq} + \Omega_{pq}^{2} W_{pq} + \gamma_{pq} W_{pq}^{3} = \frac{Q_{pq}}{\rho h} .$$

ANNEXE "C"

Page 87 nous avons écrit que la solution de l'équation (4.26) tend vers zéro avec λ . Pour justifier ce résultat nous nous proposons de montrer que le coefficient γ de non linéarité est positif. Ainsi pour $\lambda = 0$ l'équation (4.26) devient $\ddot{W} + 2c\dot{W} + \Omega^2 W + \gamma W^3 = 0$ et si γ est positif, la solution nulle est la seule solution périodique de cette équation.

En effet :

Page 82 nous avons :

$$\gamma = \frac{\pi^2 E}{4\rho a^4 \pi^2} \lambda_1^2 \left[2K_4''' L_4''' - K_6''' L_6''' - K_5''' L_5''' \right] F_{11}$$

avec $$F_{11} = \frac{E\pi}{16\lambda_1^4} \left[K_2''' L_2''' - K_3''' L_3''' \right] \left[\pi^2 + \frac{1}{\pi^2} + 2K_1'' L_1'' \right]^{-1}$$

Les équations intégrales (2.15); (2.16) et (2.18), (2.19) donnent :

$$K_1'' = -\frac{a}{2\lambda_1^2} \left(tg^2 \lambda_1 + \frac{tg\lambda_1}{\lambda_1} \right)$$

$$K_2''' = \frac{2a}{\pi^2} tg\lambda_1 \left(-\frac{1}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1^3}{\pi^4 - \lambda_1^4} \right)$$

$$K_3''' = \frac{2a}{\pi^2} tg\lambda_1 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1^3}{\pi^4 - \lambda_1^4} \right)$$

$$K_4''' = - \frac{4\lambda_1 a \, tg\lambda_1}{\pi^4 - \lambda_1^4}$$

$$K_5''' = \frac{2\pi^2 a \, tg\lambda_1}{\lambda_1 (\pi^4 - \lambda_1^4)}$$

$$K_6''' = \frac{8a \, tg\lambda_1}{\pi^2} \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1^3}{\pi^4 - \lambda_1^4} \right)$$

Pour avoir L_1 , L_2 , ... il suffit de remplacer dans K_1 , K_2 ... a par b.

λ_1 est une solution de l'équation transcendante

$$tg\lambda_p + tgh\lambda_p = 0$$

OSTIGY [3] donne dix solutions de cette équation :

p	λ_p	p	λ_p
1		6	
2		7	
3		8	
4		9	
5		10	

alors

$$2 K_4''' L_4''' - K_6''' L_5''' - K_5''' L_6'''$$

$$= \frac{32\, ab\, \lambda_1^2 tg^2\lambda_1}{(\pi^4 - \lambda_1^4)^2} - \frac{32\, ab\, tg^2\lambda_1}{(\pi^4 - \lambda_1^4)} \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1^3}{\pi^4 - \lambda_1^4} \right)$$

$$= \frac{32\, ab\, tg^2\lambda_1}{(\pi^4 - \lambda_1^4)} \left[\frac{\lambda_1^2}{\pi^4 - \lambda_1^4} - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{\lambda_1^3}{\pi^4 - \lambda_1^4} \right]$$

$$= - 4.4433 \times 10^{-4}\ ab$$

et $K_2''' L_2''' - K_3''' L_3'''$

$$= \frac{4\, ab\, tg^2\lambda_1}{\pi^4} \left[\left(-\frac{1}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1^3}{\pi^4 - \lambda_1^4} \right)^2 - \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1^3}{\pi^4 - \lambda_1^4} \right)^2 \right]$$

$$= - 2.3084 \cdot 10^{-3}\ ab$$

Donc

$$\gamma = \frac{\pi^3 \epsilon^2}{16 \times 4 \times \lambda_2^2 \rho\, a^4 \omega^2}\ a^2 b^2 \left[x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 K_1'' L_1'' \right]^{-1}$$

$$\times \left(- 4.4433\ 10^{-4} \right) \left(- 2.3084\ 10^{-3} \right)$$

soit

$$\gamma = \frac{E^2}{\rho}\left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} + 2k_1'' L_1''\right)^{-1} \times 0.888\ 10^{-7}$$

$$2k_1'' L_1'' = \frac{ab}{2\lambda_1^4}\ tg^2\lambda_1 \left(tg\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1}\right)^2$$

$$= 5.872\ 10^{-6}\ ab$$

et $$\gamma = \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} + 5.872\ 10^{-6}\ ab\right)\frac{E^2}{\rho} \times 0.888\ 10^{-7}$$

Donc

γ est positif.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. HAAG : Les mouvements vibratoires, Tome I et II.

[2] S. TIMOSHENKO, S. WOINOWSKY et KRIEGER : Théorie des plaques et coques Edition Librairie Polytechnique CH. BERANGER.

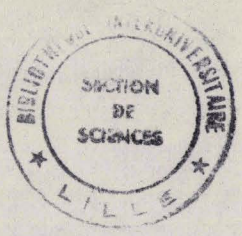
[3] G.L. OSTIGUY, R.M. EVAN et IWANOWSKI : Influence of the aspect Ratio on the dynamic stability and non linear reponse of rectangular states. Journal of Mechanical Design April 1982, vol. 104/417.

[4] R. FAURE : Percussions en mécanique non linéaire. Journal Mécanique matériaux électricité n° 394-395, Oct.-Nov. 1982.

[5] J.J. STOKER : Nonlinear vibrations.

[6] J.J. STOKER : Nonlinear elasticity.

[7] L. SCHWARTZ : Méthodes mathématiques pour les sciences physiques.

[8] LANDAU L. et LIFCHITZ E. : Théorie de l'élasticité, t. VII, Edition MIR Moscou 1967.

[9] R. FAURE : Periodic and almost periodic percussions and nonlinear oscillations. The 9th International Conference on nonlinear oscillations KIEV 1981, édité en 1984.