N° d'ordre 1228

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

Spécialité : Mathématiques Pures

par

Benmiloud MEBKHOUT

PROBLÈME DE GOURSAT RELATIF A L'ÉQUATION

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\, \partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y^2} = c\,(x, y, u)$$

Membres du Jury : CŒURÉ Gérard, Président
HECQUET Gérard, Rapporteur
PARREAU Michel, Examinateur

Soutenue le 30 novembre 1984

A mes parents,

Je suis très honoré que Monsieur le Professeur Gérard COEURÉ ait bien voulu présider le jury de cette thèse. Je l'en remercie très vivement.

Que Monsieur Gérard HECQUET trouve ici ma grande reconnaissance. C'est, en effet, lui qui m'a confié le sujet de cette étude et ce sont ses précieux conseils, sa disponibilité et nos fructueuses discussions qui ont permis la réalisation de ce travail.

Je voudrais exprimer ma gratitude à Monsieur le Professeur Michel PARREAU et je tiens à le remercier de sa participation au jury de cette thèse.

Je n'aurais garde d'oublier tous mes enseignants de l'Institut de Mathématiques d'ORAN, particulièrement Monsieur Daniel BOICHU.

Je tiens à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, m'ont apporté leur concours, notamment mes amis Mademoiselle Fatiha ABI AYAD et Monsieur Mohammed BOUCHEKIF pour nos fréquentes discussions.

Je remercie Madame Raymonde BÉRAT pour avoir, avec patience et efficacité, assuré la frappe de cette thèse, Madame Ginette DOCLOT, la bibliothécaire, pour son aide précieuse, Madame Monique LLORET, Messieurs Albert GOURNAY et Michel PROVOST qui se sont occupés de l'impression et de la reliure, ainsi que Madame Françoise WDOWCZYK qui a toujours accepté avec gentillesse de photocopier mes documents.

P L A N

=======

INTRODUCTION

Le problème de Goursat pour les équations aux dérivées partielles du second ordre ou de l'ordre supérieur a été étudié par plusieurs auteurs O. Sjöstrand [8], M.N. Oguztöreli [7], A. Bielecki et J. Kisynski [2]. Les conditions de bord sont en général données sur les caractéristiques de l'équation considérée.

Nous nous intéresserons au problème de Goursat relatif à l'équation hyperbolique du 3ème ordre

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = C(x,y,u)$$

avec des conditions initiales données sur trois demi-droites concourantes en O.

$$\begin{aligned} u(x,\alpha x) &= M(x) \\ u(\beta y,y) &= N(y) \qquad 0 \leqslant \alpha,\beta \leqslant 1 \\ u(x,x) &= P(x). \end{aligned}$$

Cette équation a été déjà étudiée par O. Sjöstrand [8], M. Winants [9], [10], [11], [12] et G. Hecquet [5], [6]. On s'est inspiré de la méthode utilisée par A. Borzymowski [3], [4] dans la résolution de ce problème pour une équation polyvibrante de D. Mangeron, cette méthode est basée essentiellement sur le théorème du point fixe de Schaüder.

Ce travail est divisé en deux chapitres :

Dans le premier chapitre, nous étudions le problème

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 0$$

$$u(x,\alpha x) = M(x), \quad u(\beta y,y) = N(y), \quad u(x,x) = P(x).$$

Nous aurons un système d'équations fonctionnelles à résoudre, d'abord dans le cadre analytique, ce qui nous permettra avant tout d'avoir une forme des solutions de ce système quand on se place dans le cadre général. Nous montrerons l'existence de telles solutions en se basant sur le théorème de Schaüder, la procédure peut se résumer ainsi

- Existence d'un convexe fermé d'un espace de Banach ;
- Définition d'une application complètement continue ;
- Enoncé du théorème d'existence.

Dans la suite, un raisonnement analogue à celui du chapitre I nous permet d'étudier l'équation non linéaire $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = C(x,y,u)$ soumises aux mêmes conditions initiales et où u est holdérienne par rapport à x et y, lipschitzienne par rapport à u.

CHAPITRE I

ETUDE DE L'EQUATION $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 0$

1. *Introduction.*

a) *Préliminaires.*

Considérons l'équation

(I.1) $$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 0$$

et supposons qu'elle admette une solution v, elle admettra la solution u obtenue à partir de v et des constantes a, b, c, d par la relation

$$u(x,y) = v(x,y) + ax + by + cxy + d.$$

On peut imposer à la solution u de satisfaire les conditions initiales :

(I.2) $$\begin{cases} u(0,0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(0,0) = 0. \end{cases}$$

Il suffit pour cela de déterminer les différentes constantes a, b, c, d à savoir

$$d = - v(0,0)$$

$$a = - \frac{\partial v}{\partial x} (0,0)$$

$$b = - \frac{\partial v}{\partial y} (0,0)$$

$$c = - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} (0,0).$$

b) *Solution générale de* (I.1).

L'équation (I.1) peut s'écrire

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Il en résulte

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x) + g(y)$$

où f et g sont deux fonctions arbitraires, ainsi nous obtenons une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre et nous l'intégrons par la méthode habituelle. Nous aurons à résoudre d'abord le système d'équations différentielles ordinaires.

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1} = \frac{du}{f(x)+g(y)} \quad ;$$

la première équation donne :

$$x+y = \ell$$

et l'autre devient

$$du = f(x)dx + g(\ell-x)dx$$

d'où l'on tire

$$u(x,y) = \int f(x)\,dx + \int g(\ell - x)\,dx + p(\ell)$$

$$u(x,y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(\ell - x) + \Psi(\ell)$$

c'est-à-dire enfin

$$\text{(I.3)} \qquad u(x,y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) + \Psi(x+y)$$

où φ_1, φ_2, Ψ sont trois fonctions arbitraires, φ_1, φ_2 sont de classe C^1 et Ψ est de classe C^2.

Les conditions (I.2) nous donnent

$$\text{(I.4)} \qquad \begin{cases} \varphi_1(0) + \varphi_2(0) + \Psi(0) = 0 \\ \varphi_1'(0) + \psi'(0) = 0 \\ \varphi_2'(0) + \Psi'(0) = 0 \\ \Psi''(0) = 0 \end{cases}$$

En fait, on peut choisir dans l'expression $\varphi_1(x) + \varphi_2(y) + \Psi(x+y)$ des fonctions φ_1, φ_2, Ψ telles que

$$\text{(I.5)} \qquad \begin{cases} \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \Psi(0) = 0 \\ \varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = \Psi'(0) = 0 \\ \Psi''(0) = 0 \, . \end{cases}$$

En effet, posons

$$\tilde{\Psi}(x) = \Psi(x) - \Psi(0) - \Psi'(0)x$$

d'où

$$\psi(x) = \psi(0) + \psi'(0)x + \tilde{\psi}(x).$$

On aura alors

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) + \varphi_2(y) + \Psi(x+y) &= \varphi_1(x) + \varphi_2(y) + \psi(0) + \psi'(0)(x+y) + \tilde{\psi}(x+y) \\ &= \varphi_1(x) + \psi'(0)x - \varphi_1(0) + \varphi_2(y) + \Psi'(0)y + \varphi_1(0) \\ &\qquad + \psi(0) + \tilde{\psi}(x+y) \\ &= \tilde{\varphi}_1(x) + \tilde{\varphi}_2(y) + \tilde{\Psi}(x+y)\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_1(x) &= \varphi_1(x) + \Psi'(0)x - \varphi_1(0) \\ \tilde{\varphi}_2(y) &= \varphi_2(y) + \Psi'(0)y + \varphi_1(0) + \Psi(0) \\ \tilde{\Psi}(x) &= \Psi(x) - \Psi'(0)x - \Psi(0).\end{aligned}$$

En utilisant (I.4), on vérifie qu'on a bien

$$\begin{aligned}&\tilde{\varphi}_1(0) = \tilde{\varphi}_2(0) = \tilde{\Psi}(0) = 0 \\ &\tilde{\varphi}_1'(0) = \tilde{\varphi}_2'(0) = \tilde{\Psi}'(0) = 0 \\ &\tilde{\Psi}''(0) = 0.\end{aligned}$$

c) *Position du problème.*

Nous voulons résoudre le problème de Goursat dans le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leqslant x \leqslant A,\ 0 \leqslant y \leqslant A\}$. (A désignant une constante positive).

Nous montrerons l'existence d'une solution u de l'équation

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 0 \qquad \text{soumise aux conditions de bord.}$$

$$(1.6) \quad \begin{cases} u(x,\alpha x) = M(x) \\ u(\beta y,y) = N(y) \\ u(x,x) = P(x) \end{cases}$$

où α et β sont deux constantes comprises strictement entre 0 et 1

$$0 < \alpha,\beta < 1.$$

La première condition relative à $u(0,0)$ donne

$$M(0) = N(0) = P(0) = 0.$$

De plus, on a les relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) + \alpha \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) &= M'(0) \\ \beta \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) &= N'(0) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) &= P'(0) \end{aligned}$$

qui ne sont compatibles que si

$$(\alpha\beta-1)P'(0) + (1-\alpha)N'(0) + (1-\beta)M'(0) = 0$$

et qui de plus donnent

$$M'(0) = N'(0) = P'(0) = 0$$

puisque $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0.$

Si la solution du problème de Goursat est de classe C^2, on peut écrire pour M, N, P de classe C^2 les relations

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(0,0) + 2\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(0,0) + \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,0) = M''(0)$$

$$\beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,0) + 2\beta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(0,0) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,0) = N''(0)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,0) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,0) = P''(0)$$

qui ne sont compatibles que si

$$(\beta^2-1)M''(0) + (\alpha^2-1)N''(0) = (\alpha^2\beta^2-1)P''(0).$$

En fait, il est possible de supposer $P''(0) = 0$, en effet, posons

$$w(x,y) = u(x,y) - kx^2.$$

On vérifie qu'on a bien

$$w(0,0) = \frac{\partial w}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial w}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$$

On a aussi

$$w(x,\alpha x) = M(x) - kx^2$$

$$w(\beta y,y) = N(y) - k\beta^2 y^2$$

$$w(x,x) = P(x) - kx^2.$$

Et en posant

$$M(x) - kx^2 = \mathcal{M}(x)$$

$$N(y) - k\,{}^2y^2 = \mathcal{N}(y)$$

$$P(x) - kx^2 = \mathcal{P}(x)$$

On voit bien que pour avoir $\mathcal{P}''(0) = 0$ il suffit de prendre

$$k = \frac{P''(0)}{2} \quad .$$

Nous remarquons qu'on a toujours

$$\mathcal{M}(0) = \mathcal{N}(0) = \mathcal{P}(0)$$
$$\mathcal{M}'(0) = \mathcal{N}'(0) = \mathcal{P}'(0).$$

En conclusion, nous pouvons dire qu'une solution u correspondant au triplet (M,N,P) telle que

$$(\beta^2-1)M''(0) + (\alpha^2-1)N''(0) = (\alpha^2\beta^2-1)P''(0) \tag{I.7}$$

donnera une solution w pour le triplet $(\mathcal{M},\mathcal{N},\mathcal{P})$ pourvu que

$$\text{(I.8)} \qquad \begin{cases} (\mathcal{M}''(0)(\beta^2-1) - \mathcal{N}''(0)(\alpha^2-1) = 0 \\ \mathcal{P}''(0) = 0. \end{cases}$$

Réciproquement, une solution w satisfaisant (I.8) donnera une solution u satisfaisant (I.7) pourvu que l'on ait

$$P(x) - P''(0)\,\frac{x^2}{2} = \mathcal{P}(x).$$

Enfin, la relation (I.8) est la traduction de l'existence d'une dérivée seconde nulle de la fonction T :

$$T(x) = M(\beta x) - M(x) + N(\alpha x) - N(x).$$

d) *Formalisation du problème.*

Nous étudierons alors le problème de Goursat suivant

$$
(P)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 0 \\[2ex] u(x,\alpha x) = M(x) \\ u(\beta y,y) = N(y) \qquad\qquad \text{où} \quad 0 < \alpha, \ \ \beta < 1 \\ u(x,x) = P(x) \end{cases}
$$

et M, N, P satisfont les hypothèses suivantes

(H.1) $M \in C^1([0,A],\mathbb{R}) \quad M(0) = M^{(1)}(0) = 0$

(H.2) $N \in C^1([0,A],\mathbb{R}) \quad N(0) = N^{(1)}(0) = 0$

(H.3) $P \in C^2([0,A],\mathbb{R}) \quad P(0) = P^{(1)}(0) = P^{(2)}(0) = 0$

(H.4) $T \in C^2([0,A],\mathbb{R}) \quad T(x) = M(\beta x)-M(x)+N(\alpha x)-N(x), \quad T^{(2)}(0) = 0$

(H.5) $|M^{(1)}(\bar{x}) - M^{(1)}(x)| \leqslant K(\bar{x}-x)^h$

(H.6) $|N^{(1)}(\bar{x}) - N^{(1)}(x)| \leqslant K(\bar{x}-x)^h$

(H.7) $|P^{(2)}(\bar{x}) - P^{(2)}(x)| \leqslant K(\bar{x}-x)^h$

(H.8) $|T^{(2)}(\bar{x}) - T^{(2)}(x)| \leqslant K(\bar{x}-x)^h$

$$0 \leqslant x \leqslant \bar{x} \leqslant A \quad ; \quad h \in \,]0,1], \quad K > 0$$

2. *Résolution de l'équation dans le cadre analytique.*

a) *Recherche du système vérifie par* φ_1, φ_2, Ψ.

Nous avons vu que la solution générale s'écrivait

$$u(x,y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) + \Psi(x+y)$$

avec φ_1, φ_2 et Ψ trois fonctions arbitraires,

φ_1, φ_2 appartenant à $C^1([0,A],\mathbb{R})$ et Ψ à $C^2[0,2A],\mathbb{R})$.

Nous supposons pour le moment que les fonctions M, N et P sont analytiques. Elles peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} M(x) = \sum\limits_n A_n x^n \\ N(x) = \sum\limits_n B_n x^n \\ P(x) = \sum\limits_n C_n x^n \end{cases}$$

Nous supposons alors φ_1, φ_2 et Ψ analytiques de sorte que :

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \sum\limits_n a_n x^n \\ \varphi_2(x) = \sum\limits_n b_n x^n \\ \Psi_3(x) = \sum\limits_n c_n x^n \quad . \end{cases}$$

En utilisant les conditions initiales, nous obtenons le système d'équations fonctionnelles

$$\text{(I.9)} \quad \begin{cases} \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \Psi((1+\alpha)x) = M(x) \\ \varphi_2(\beta x) + \varphi_2(x) + \Psi((1+\beta)x) = N(x) \\ \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \Psi(2x) = P(x) \end{cases}$$

qui est équivalent au système

$$\begin{cases} a_n + \alpha^n b_n + (1+\alpha)^n c_n = A_n \\ \beta^n a_n + b_n + (1+\beta)^n c_n = B_n \qquad\qquad n \geqslant 0. \\ a_n + b_n + 2^n \; c_n = C_n \end{cases}$$

et ceci pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

Le déterminant principal D_n est :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \alpha^n & (1+\alpha)^n \\ \beta^n & 1 & (1+\beta)^n \\ 1 & 1 & 2^n \end{vmatrix}$$

ou

$$D_n = 2^n + (1+\alpha)^n\beta^n + \alpha^n(1+\beta)^n - (1+\alpha)^n - (1+\beta)^n - 2^n\alpha^n\beta^n \qquad (n \geqslant 0).$$

b) *Etude de* D_n.

$D_o = 0$ mais $M(0) = N(0) = P(0) = 0$ c'est-à-dire $A_o = B_o = C_o = 0$; le système sera alors compatible avec $a_o = b_o = c_o = 0$, soit

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) = \Psi(0) = 0.$$

De même $D_1 = 2 + (1+\alpha) + \alpha(1+\beta) - (1+\beta) - 2\alpha\beta = 0$ la compatibilité du système sera assurée si on prend $a_1 = b_1 = c_1 = 0$ soit

$$\psi_1'(0) = \psi_2'(0) = \Psi'(0) = 0.$$

Etudions maintenant D_n pour $n \geqslant 2$

D_n peut s'écrire sous forme de $A_1(n) + A_2(n)$ avec

$$A_1(n) = 2^n - (1+\alpha)^n - (1+\beta)^n$$

$$A_2(n) = (1+\alpha)^n\beta^n - (1+\beta)^n\alpha^n - 2\alpha^n\beta^n.$$

En prenant $\alpha \leqslant \frac{1}{3}$, $\beta \leqslant \frac{1}{3}$ $A_1(n)$ sera strictement positif : en effet $\alpha \leqslant \frac{1}{3}$, $\beta \leqslant \frac{1}{3}$ entraîne que $(1+\alpha)^n + (1+\beta)^n \leqslant 2(\frac{4}{3})^n$ or $2(\frac{4}{3})^n < 2^n$ pour $n \geqslant 2$ et ceci donne $(1+\alpha)^n + (1+\beta)^n < 2^n$ soit $A_1(n) > 0$.

$$A_2(n) = (1+\alpha)^n\beta^n + (1+\beta)^n\alpha^n - 2^n\alpha^n\beta^n$$

$$A_2(n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\alpha^k.\beta^n + \sum_{k=0}^{n} C_n^k\beta^k.\alpha^n - 2^n\alpha^n\beta^n$$

comme $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ et $n \geqslant k$ on a $\alpha^k > \alpha^n$, $\beta^k > \beta^n$ ce qui donne

$$A_2(n) > \alpha^n\beta^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k + \alpha^n\beta^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k - 2^n\alpha^n\beta^n$$

$$A_2(n) > 2^n\alpha^n\beta^n + 2^n\alpha^n\beta^n - 2^n\alpha^n\beta^n \quad \text{car} \quad 2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$$

donc $\quad A_2(n) > 2^n\alpha^n\beta^n$.

Par conséquent, pour $\alpha \leqslant \frac{1}{3}$, $\beta \leqslant \frac{1}{3}$, D_n est strictement positif pour tout $n \geqslant 2$.

c) *Calcul de* a_n, b_n, c_n *pour* $n \geqslant 2$.

$$a_n = \frac{1}{D_n} \begin{vmatrix} A_n & \alpha^n & (1+\alpha)^n \\ B_n & 1 & (1+\beta)^n \\ C_n & 1 & 2^n \end{vmatrix}$$

$$a_n = \left[2^n - (1+\beta)^n\right] \frac{A_n}{D_n} + \left[(1+\alpha)^n - 2^n\alpha^n\beta^n\right] \frac{B_n}{D_n} + \left[\alpha^n(1+\beta)^n - (1+\alpha)^n\right] \frac{C_n}{D_n}$$

$$b_n = \frac{1}{D_n} \begin{vmatrix} 1 & A_n & (1+\alpha)^n \\ \beta^n & B_n & (1+\beta)^n \\ 1 & C_n & 2^n \end{vmatrix}$$

$$b_n = \left[(1+\beta)^n - 2^n\beta^n\right] \frac{A_n}{D_n} + \left[2^n - (1+\alpha)^n\right] \frac{B_n}{D_n} + \left[\beta^n(1+\alpha)^n - (1+\beta)^n\right] \frac{C_n}{D_n}$$

$$c_n = \frac{1}{D_n} \begin{vmatrix} 1 & \alpha^n & A_n \\ \beta^n & 1 & B^n \\ 1 & 1 & C_n \end{vmatrix}$$

$$c_n = (\beta^n - 1) \frac{A_n}{D_n} + (\alpha^n - 1) \frac{B_n}{D_n} + (1 - \alpha^n\beta^n) \frac{C_n}{D_n} \; .$$

Introduisons trois fonctions analytiques $\lambda(x)$, $\mu(x)$ et $\nu(x)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda(x) = \sum\limits_n \lambda_n x^n \\ \mu(x) = \sum\limits_n \mu_n x^n \\ \nu(x) = \sum\limits_n \nu_n x^n. \end{array} \right.$$

Tenant compte de D_n supposons que les fonctions M, N, P s'écrivent

$$M(x) = \lambda(2x) + \lambda((1+\alpha)\beta x) + \lambda((1+\beta)\alpha x) - \lambda((1+\alpha)x) - \lambda((1+\beta)x) - \lambda(2\alpha\beta x)$$

$$N(x) = \mu(2x) + \mu((1+\alpha)\beta x) + \mu((1+\beta)\alpha x) - \mu((1+\alpha)x) - \mu((1+\beta)x) - \mu(2\alpha\beta x)$$

$$P(x) = \nu(2x) + \nu((1+\alpha)\beta x) + \nu((1+\beta)\alpha x) - \nu((1+\alpha)x) - \nu((1+\beta)x) - \nu(2\alpha\beta x)$$

Ce qui nous donnera

$$\begin{cases} A_n = D_n\lambda_n \\ B_n = D_n\mu_n \\ C_n = D_n\nu_n \quad . \end{cases}$$

Il en résulte que :

$$a_n = \left[2^n - (1+\beta)^n\right]\lambda_n + \left[(1+\alpha)^n - 2^n\alpha^n\right]\mu_n + \left[\alpha^n(1+\beta)^n - (1+\alpha)^n\right]\nu_n$$

$$b_n = \left[(1+\beta)^n - 2^n\beta^n\right]\lambda_n + \left[2^n - (1+\alpha)^n\right]\mu_n + \left[\beta^n(1+\alpha)^n - (1+\beta)^n\right]\nu_n$$

$$c_n = \left[\beta^n-1\right]\lambda_n + \left[\alpha^n-1\right]\mu_n + \left[1-\alpha^n\beta^n\right]\nu_n \quad .$$

Par conséquent, les fonctions cherchées ψ_1, ψ_2 et Ψ s'écrivent :

$$(\mathrm{I}.10)\begin{cases} \psi_1(x) = \lambda(2x) - \lambda((1+\beta)x) + \mu((1+\alpha)x) - \mu(2x) + \nu(\alpha(1+\beta)x) - \nu((1+\alpha)x) \\ \psi_2(x) = \lambda((1+\beta)x) - \lambda(2\beta x) + \mu(2x) - \mu((1+\alpha)x) + \nu(\beta(1+\alpha)x) - \nu((1+\beta)x) \\ \Psi(x) = \lambda(\beta x) - \lambda(x) + \mu(\alpha x) - \mu(x) + \nu(x) - \nu((\alpha\beta)x). \end{cases}$$

Il est bien entendu que ce qui précède est formel nous n'avons pas recherché la convergence des différentes séries entières introduites.

Les conditions $C_2 = 0$ et $c_2 = 0$ $(P''(0) = \Psi''(0) = 0)$ imposent la relation :

$$(\beta^2 - 1)A_2 + (\alpha^2 - 1)B_2 = 0$$

qui n'est autre que l'existence d'une dérivée seconde nulle de la fonction T au point 0.

d) Conclusion.

On vient de montrer l'existence d'une solution de notre équation dans le cadre analytique, cela nous permet surtout d'avoir une forme des fonctions φ_1, φ_2, Ψ solutions du système (I.9) quand on se place dans le cadre non analytique.

En prenant maintenant M et N appartenant à $C^1([0,A],\mathbb{R})$. P à $C^2([0,A],\mathbb{R})$, nous devons montrer l'existence des fonctions $\lambda(x)$ et $\mu(x)$ appartenant à $C^1([0,2A],\mathbb{R})$, d'une fonction $\nu(x)$ appartenant à $C^2([0,2A],\mathbb{R})$ telles que

(I.11) $M(x) = \lambda(2x) + \lambda((1+\alpha)\beta x) + \lambda((1+\beta)\alpha x) - \lambda((1+\alpha)x) - \lambda((1+\beta)x) - \lambda(2\alpha\beta x)$

(I.12) $N(x) = \mu(2x) + \mu((1+\alpha)\beta x) + \mu((1+\beta)\alpha x) - \mu((1+\alpha)x) - \mu((1+\beta)x) - \mu(2\alpha\beta x)$

(I.13) $P(x) = \nu(2x) + \nu((1+\alpha)\beta x) + \nu((1+\beta)\alpha x) - \nu((1+\alpha)x) - \nu((1+\beta)x) - \nu(2\alpha\beta x)$.

3. *Résolution dans le cadre général.*

a) Existence de λ.

1°) Introduction.

L'équation (I.11) peut s'écrire sous la forme de

$$\lambda(2x) - \lambda(2\alpha\beta x) = M(x) - \lambda((1+\alpha)\beta x) - \lambda((1+\beta)\alpha x) + \lambda((1+\alpha)x) + \lambda((1+\beta)x)$$

c'est-à-dire (1.14) $\lambda(x) - \lambda(\alpha\beta x) = F_1(x)$ avec

$$F_1(x) = M(\frac{x}{2}) + \lambda((\frac{\alpha+1}{2})x) - \lambda((\frac{\alpha+1}{2})\beta x) + \lambda(\frac{\beta+1}{2}\ x) - \lambda((\frac{\beta+1}{2})\alpha x)$$

et considérons la relation (I.14) comme une équation fonctionnelle où la fonction inconnue est λ (on suppose pour l'instant que F_1 est connue). Pour la résoudre, on utilise le lemme :

Lemme I.1. (Borzymowski [3]).-

Si F_1 est définie dans $J = \left]0,A\right]$ et satisfait

$$|F_1(x)| \leqslant C\ x^{1+\gamma}$$

($x \in J$, C et γ constantes positives), alors la fonction

$$\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_1((\alpha\beta)^k x)$$

satisfait l'équation (I.14) pour tout x de J. Elle est l'unique solution de (I.14) dans la classe S des fonctions λ vérifiant la condition $\lim_{x\to 0_+} \lambda(x) = 0$.

Preuve :

On vérifie que si $\sum_{k=0}^{\infty} F_1((\alpha\beta))^k x)$ converge dans J, sa somme $\lambda(x)$ satisfait l'équation (I.14).

En effet :

$$\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_1((\alpha\beta)^k x) = F_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} F_1((\alpha\beta)^k x)$$

$$\lambda((\alpha\beta)x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_1((\alpha\beta)^{k+1} x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_1((\alpha\beta)^k x)$$

d'où $\lambda(x) = F_1(x) + \lambda((\alpha\beta)x)$

soit $\lambda(x) - \lambda((\alpha\beta)x) = F_1(x)$.

Il reste à montrer la convergence de la série $\sum_{k=0}^{\infty} F_1((\alpha\beta)^k x)$, soit $u_k(x)$ son terme général, la condition $|F_1(x)| \leqslant C\, x^{1+\gamma}$ entraîne

$$|u_k(x)| \leqslant C\, A'^{1+\gamma}\left[(\alpha\beta)^{\gamma+1}\right]^k$$

et comme $(\alpha\beta)^{\gamma+1} < 1$ on peut conclure que la série converge dans J.
Pour montrer l'unicité, il suffit de voir que toute fonction $\lambda(x)$ satisfaisant (I.14) vérifie l'équation

$$\lambda(x) - \lambda((\alpha\beta)^{n+1}x) = \sum_{k=0}^{n} F_1((\alpha\beta)^k x).$$

En utilisant le fait que $\lambda \in S$ en faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient $\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_1((\alpha\beta)^k x)$.

On remarque que $|\lambda(x)| \leqslant C \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha\beta)^{k(1+\gamma)} x^{1+\gamma}$.

Soit $|\lambda(x)| \leqslant C \dfrac{1}{1-(\alpha\beta)^{1+\gamma}}\, x^{1+\gamma}$.

Donc toute fonction satisfaisant (I.14) s'écrit $\sum_{k=0}^{\infty} F_1((\alpha\beta)^k x)$, d'où l'unicité.

Nous supposons pour l'instant que $F_1(x)$ vérifie la condition du lemme (I.1), (nous le montrerons par la suite). On a donc

$$\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_1((\alpha\beta)^k x)$$

avec

$$F_1(x) = M(\tfrac{x}{2}) + \lambda((\tfrac{\alpha+1}{2})x) - \lambda((\tfrac{\alpha+1}{2})\beta x) + \lambda((\tfrac{\beta+1}{2})x) - \lambda((\tfrac{\beta+1}{2})\alpha x).$$

On montre l'existence de λ en se servant du théorème de Schaüder, il faudra situer λ dans un convexe fermé d'un espace de Banach et étudier son image par la transformation $\lambda \to \tilde{\lambda}$:

$$\text{(I.15)} \qquad \begin{aligned} &\tilde{\lambda}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_1((\alpha\beta)^k x) \quad \text{pour} \quad 0 < x \leqslant A \\ &\tilde{\lambda}(0) = 0 \end{aligned}$$

En supposant que les assertions du théorème de Schaüder vérifiées, notre application admettra un point fixe qui coïncide exactement avec la solution λ cherchée.

2°) *Existence d'un convexe.*

Considérons l'espace Λ des fonctions λ définies et de classe C^1 dans $[0,A']$ et à valeurs dans R, on introduit la norme $|| \quad ||$ définie par

$$||\lambda|| = |\lambda(0)| + \sup_{x\in[0,A']} |\lambda'(x)| .$$

Λ muni de cette norme est un espace de Banach. On considère maintenant dans Λ l'ensemble Z des fonctions λ satisfaisant les conditions

$$\text{(I.16)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\lambda(0) = \lambda'(0) = 0 \\ &|\lambda'(\bar{x}) - \lambda'(x)| \leqslant L(\bar{x}-x)^{\theta} \\ &(0 \leqslant x \leqslant \bar{x} \leqslant A', \quad 0 < \theta < h, \quad L \text{ constante positive}). \end{aligned} \right.$$

Il est clair que Z est un convexe fermé, notons aussi que pour $\lambda \in Z$, on a

$$\text{(I.17)} \qquad \begin{aligned} &|\lambda'(x)| \leqslant L\, x^{\theta} \\ &|\lambda(x)| \leqslant \frac{L}{\theta+1} x^{\theta+1} \leqslant L\, x^{\theta+1} \end{aligned}$$

et enfin d'après les hypothèses (H.1) et (H.5), on a :

$$|M'(x)| \leqslant K\, x^{h}$$

(I.18) $$|M(x)| \leqslant K\, x^{h+1} .$$

Nous devons trouver les conditions pour lesquelles l'application (I.15) transforme Z en lui-même, tout d'abord d'après les relations (I.16) et (I.18), on a :

$$|F_1(x)| \leqslant \left[\frac{KA'^{h-\theta}}{2^{h+1}} + \frac{L}{2^{\theta+1}}\left[(\alpha+1)^{\theta+1}(1-\beta)^{\theta} + (\beta+1)^{\theta+1}(1-\alpha)^{\theta}\right]\right] x^{\theta+1}$$

et

$$|F_1'(x)| \leqslant \left[\frac{KA'^{h-\theta}}{2^{h+1}} + \frac{L}{2^{\theta}}\left[(\alpha+1)^{\theta}(1-\beta)^{\theta} + (\beta+1)^{\theta+1}(1-\alpha)^{\theta}\right]\right] x^{\theta} .$$

Soit

$$|F_1^{(m)}(x)| \leqslant C\, x^{\theta+1-m}$$

$(m = 0,1,$ C constante positive).

(On remarque que F_1 satisfait la condition du lemme I.1).

Il en résulte que

$$|\tilde{\lambda}^{(m)}(x)| \leqslant \tilde{L}\, x^{\theta+1-m}$$

$$(m = 0,\ 1 \quad ; \quad \tilde{L} = \frac{C}{1-\alpha\beta}) .$$

On en déduit que $\tilde{\lambda}(x)$ et $\tilde{\lambda}'(x)$ convergent vers 0 quand x tend vers 0, soit

$$\tilde{\lambda}^{(m)}(0) = 0 \qquad m = 0,1$$

et que $\tilde{\lambda} \in C^1([0,A'],\mathbb{R})$ car $\tilde{\lambda}$ se présente comme limite uniforme d'une suite de fonctions dérivables.

On doit maintenant trouver sous quelles conditions $\tilde{\lambda}$ satisfait la relation (I.16).

En utilisant l'hypothèse (H.5), la relation (I.16) on obtient :

$$|F'(\bar{x})-F'(x)| \leqslant \left[\frac{KA'^{h-\theta}}{2^{h+1}} + \frac{L}{2^{\theta+1}}\left[(\alpha+1)^{\theta+1}\beta^{\theta+1}+(\beta+1)^{\theta+1}\alpha^{\theta+1}+(\alpha+1)^{\theta+1}+(\beta+1)^{\theta+1}\right]\right](\bar{x}-x)^{\theta}.$$

pour $0 \leqslant x \leqslant \bar{x} \leqslant A'$.

Il en résulte que

$$|\tilde{\lambda}'(\bar{x}) - \tilde{\lambda}'(x)| \leqslant \left[\frac{KA'^{h-\theta}}{2^{h+1}} + \frac{L}{2^{\theta+1}}\left[(\alpha+1)^{\theta+1}\beta^{\theta+1}+(\beta+1)^{\theta+1}\alpha^{\theta+1}+(\alpha+1)^{\theta+1}+(\beta+1)^{\theta+1}\right]\right] \sum_{k=0}^{\infty}\left[(\alpha\beta)^{\theta+1}\right]^k(\bar{x}-x)^{\theta}$$

ce qui donne

$$|\tilde{\lambda}'(\bar{x}) - \tilde{\lambda}'(x)| \leqslant \left[\frac{\dfrac{KA'^{h-\theta}}{2^{h+1}} + \dfrac{L}{2^{\theta+1}}\left[(\alpha+1)^{\theta+1}\beta^{\theta+1}+(\beta+1)^{\theta+1}\alpha^{\theta+1}+(\alpha+1)^{\theta+1}+(\beta+1)^{\theta+1}\right]}{1-(\alpha\beta)^{\theta+1}}\right](\bar{x}-x)^{\theta}$$

$\tilde{\lambda}$ satisfera alors la relation (I.16) si

$$\frac{\dfrac{KA'^{h-\theta}}{2^{h+1}} + \dfrac{L}{2^{\theta+1}}\left[(\alpha+1)^{\theta+1}\beta^{\theta+1}+(\beta+1)^{\theta+1}\alpha^{\theta+1}+(\alpha+1)^{\theta+1}+(\beta+1)^{\theta+1}\right]}{1-(\alpha\beta)^{\theta+1}} \leqslant L.$$

Pour que cette dernière inégalité se réalise, il suffit de prendre

(I.19)

$\underline{\alpha}$ et β $\underline{\text{suffisamment}}$ petits :

$0 < \alpha,\beta \leqslant \bar{\alpha}$ tel que

$$(\bar{\alpha}+1)^{\theta+1}\bar{\alpha}^{\theta+1}+(\bar{\alpha}+1)^{\theta+1}+2^{\theta}\bar{\alpha}^{2\theta+2} \leqslant 2^{\theta} \quad (*)$$

K et L tels que

$$L \geqslant \frac{KA'^{h-\theta}}{2^{h-1}}\left[1-\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^{\theta+1}\beta^{\theta+1}-\left(\frac{\beta+1}{2}\right)^{\theta+1}\alpha^{\theta+1}-\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^{\theta+1}-\left(\frac{\beta+1}{2}\right)^{\theta+1}\right]^{-1}$$

Nous pouvons conclure que l'application (I.15) transforme Z en lui-même pourvu que soit réalisée (I.19).

3°) *Compacité de l'image de* Z.

Soit $\tilde{Z}$ l'image de Z par l'application (I.15)

$$\tilde{Z} = \{\tilde{\lambda} \in C[[0,A'],\mathbb{R}] \;:\; |\tilde{\lambda}(x)| \leqslant L\, x^{\theta+1}\}$$

on a $\tilde{Z} \subset Z$.

Nous allons prouver la compacité de $\tilde{Z}$ en nous basant sur le théorème d'Ascoli-Arzela.

Théorème d'Ascoli-Arzela.

Pour qu'un ensemble E de fonctions continues soit relativement compact dans C(K), K compact métrique il faut et il suffit que soient réalisées les conditions suivantes :

(*) La fonction $t \to (t+1)^{\theta+1}t^{\theta+1}+(t+1)^{\theta+1}+2^{\theta}t^{2\theta+2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et tend vers 1 lorsque t tend vers 0.

1) Les fonctions de E sont bornées dans leur ensemble i.e. il existe une constante M telle que

$$|x(t)| \leqslant M \qquad (x \in E,\ t \in K).$$

2) Les fonctions de E sont équicontinues.

x étant compris entre 0 et A', $\tilde{\lambda}(x)$ est borné dans $\mathbb{R}$, de plus les $\tilde{\lambda}$ appartenant à $\tilde{Z}$ vérifient

$$|\tilde{\lambda}(\bar{x}) - \tilde{\lambda}(x)| \leqslant L\ \bar{x}(\bar{x}-x)^{\theta} \qquad (0 \leqslant x \leqslant \bar{x} \leqslant A)$$

et ceci montre clairement leur équicontinuité.

On remarque aussi que $\tilde{Z}$ est évidemment fermé et d'après le théorème d'Ascoli-Arzela, on a alors la compacité de $\tilde{Z}$.

4°) *Continuité de l'application.*

Soit λ_n une suite de fonctions de Z convergeant vers une fonction λ de Z, soient $\tilde{\lambda}_n$ et $\tilde{\lambda}$ les images de λ_n et λ par notre transformation, nous devrons montrer que $\tilde{\lambda}_n$ converge vers $\tilde{\lambda}$ c'est-à-dire

$$\text{(I.20)} \qquad \lim_{n\to\infty} \|\tilde{\lambda}_n - \tilde{\lambda}\| = \lim_{n\to\infty} \sup_{[0,A']} |\tilde{\lambda}'_n(x) - \tilde{\lambda}'(x)| = 0.$$

Tout d'abord, on prouvera que pour $m = 0,1$

$$|\tilde{\lambda}_n^{(m)}(x) - \tilde{\lambda}^{(m)}(x)| \leqslant H\omega_n^{1-\delta} x^{(\theta+1-m)\delta}$$

$$(x \in [0,A'] \quad ;\quad H \text{ constante positive})$$

où

$$\omega_n = \max_{m=0,1} \{ \sup_{[0,A']} \lambda_n^{(m)}(x) - \lambda^{(m)}(x)|\}$$

et δ un nombre arbitraire tel que

$$0 < \delta < 1.$$

Soit $x \in [0,A']$

$$\tilde{\lambda}_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_n((\alpha\beta)^k x)$$

$$\tilde{\lambda}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F((\alpha\beta)^k x).$$

On a

$$F_n(x) - F(x) = \left[\lambda_n((\frac{\alpha+1}{2})\beta x) - \lambda((\frac{\alpha+1}{2})\beta x)\right] + \left[\lambda_n((\frac{\beta+1}{2})\alpha x) - \lambda((\frac{\beta+1}{2})\alpha x)\right]$$

$$- \left[\lambda_n(\frac{\alpha+1}{2} x) - \lambda(\frac{\alpha+1}{2} x)\right] + \left[\lambda_n(\frac{\beta+1}{2} x) - \lambda(\frac{\beta+1}{2} x)\right].$$

Il en résulte que pour $m = 0,1$

$$\tilde{\lambda}_m^{(m)}(x) - \tilde{\lambda}^{(m)}(x) = - \sum_{k=0}^{\infty} \left[(\frac{\alpha+1}{2})\beta(\alpha\beta)^k\right]^m \left[\lambda_n^{(m)}((\frac{\alpha+1}{2})\beta(\alpha\beta)^k x) - \lambda^{(m)}((\frac{\alpha+1}{2})\beta(\alpha\beta)^k x)\right]$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \left[(\frac{\beta+1}{2})\alpha(\alpha\beta)^k\right]^m \left[\lambda_n^{(m)}((\frac{\beta+1}{2})\alpha(\alpha\beta)^k x) - \lambda^{(m)}((\frac{\alpha+1}{2})\beta(\alpha\beta)^k x)\right]$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \left[(\frac{\alpha+1}{2})(\alpha\beta)^k\right]^m \left[\lambda_n^{(m)}((\frac{\alpha+1}{2})(\alpha\beta)^k x) - \lambda^{(m)}((\frac{\alpha+1}{2})(\alpha\beta)^k x)\right]$$

$$+ \sum \left[(\frac{\beta+1}{2})(\alpha\beta)^k\right]^m \left[\lambda_n^{(m)}((\frac{\beta+1}{2})(\alpha\beta)^k x) - \lambda^{(m)}((\frac{\beta+1}{2} (\alpha\beta)^k x)\right].$$

On se donne δ un réel tel que

$$0 < \delta < 1.$$

On en déduit que

$$\left|\tilde{\lambda}_n^{(m)}(x)-\tilde{\lambda}^{(m)}(x)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \left[(\tfrac{\alpha+1}{2})\beta(\alpha\beta)^k\right]^m \left|\lambda_n^{(m)}((\tfrac{\alpha+1}{2})\beta(\alpha\beta)^k x)-\lambda^{(m)}((\tfrac{\alpha+1}{2})\beta(\alpha\beta)^k x)\right|^{1-\delta}$$

$$\left|\lambda_n^{(m)}((\tfrac{\alpha+1}{2})\beta(\alpha\beta)^k x)-\lambda^{(m)}((\tfrac{\alpha+1}{2})\beta(\alpha\beta)^k x)\right|^{\delta}$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \left[(\tfrac{\beta+1}{2})\alpha(\alpha\beta)^k\right]^m \left|\lambda_n^{(m)}((\tfrac{\beta+1}{2})\alpha(\alpha\beta)^k x)-\lambda^{(m)}((\tfrac{\beta+1}{2})\alpha(\alpha\beta)^k x)\right|^{1-\delta}$$

$$\left|\lambda_n^{(m)}((\tfrac{\beta+1}{2})\alpha(\alpha\beta)^k x) - \lambda^{(m)}((\tfrac{\alpha+1}{2})\beta(\alpha\beta)^k x)\right|^{\delta}$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \left[(\tfrac{\alpha+1}{2})(\alpha\beta)^k\right]^m \left|\lambda_n^{(m)}((\tfrac{\alpha+1}{2})(\alpha\beta)^k x)-\lambda^{(m)}((\tfrac{\alpha+1}{2})(\alpha\beta)^k x)\right|^{1-\delta}$$

$$\left|\lambda_n^{(m)}((\tfrac{\alpha+1}{2})(\alpha\beta)^k x - \lambda^{(m)}((\tfrac{\alpha+1}{2})(\alpha\beta)^k x)\right|^{\delta}$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \left[(\tfrac{\beta+1}{2})(\alpha\beta)^k\right]^m \left|\lambda_n^{(m)}((\tfrac{\beta+1}{2})(\alpha\beta)^k x)-\lambda^{(m)}((\tfrac{\beta+1}{2})(\alpha\beta)^k x)\right|^{1-\delta}$$

$$\left|\lambda_n^{(m)}((\tfrac{\beta+1}{2})(\alpha\beta)^k x) - \lambda^{(m)}((\tfrac{\beta+1}{2})(\alpha\beta)^k x)\right|^{\delta} .$$

En majorant $|\lambda_n^{(m)}((\frac{\alpha+1}{2})\beta(\alpha\beta)^k x) - \lambda^{(m)}((\frac{\alpha+1}{2})\beta(\alpha\beta)^k x)|^{1-\delta}$ par

$$\left\{ \underset{m=0,1}{Max} \{ \sup_{[0,A']} |\lambda_n^{(m)}(x) - \lambda^{(m)}(x)| \} \right\}^{1-\delta}$$

on aura :

$$|\tilde{\lambda}_n^{(m)}(x)-\tilde{\lambda}^{(m)}(x)| \leqslant \left[\underset{m=0,1}{Max}\ \{\ \sup_{[0,A']}|\lambda_n^{(m)}(x) - \lambda^{(m)}(x)|\}\right]^{1-\delta}$$

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty}\{\left[(\tfrac{\alpha+1}{2})\beta(\alpha\beta)^k\right]^m\left[|\lambda^{(m)}(\tfrac{\alpha+1}{2}\ \beta(\alpha\beta)^k x)| + |\lambda(\tfrac{\alpha+1}{2})\beta(\alpha\beta)^k x|\right]^\delta\right.$$

$$+ \left[\tfrac{\beta+1}{2}\ \alpha(\alpha\beta)^k\right]^m\left[|\lambda_m^{(m)}(\tfrac{\beta+1}{2}\ \alpha(\alpha\beta)^k x)| + |\lambda^{(m)}(\tfrac{\beta+1}{2}\ \alpha(\alpha\beta)^k x)|\right]^\delta$$

$$+ \left[\tfrac{\alpha+1}{2}\ (\alpha\beta)^k\right]^m\left[|\lambda_n^{(m)}(\tfrac{\alpha+1}{2}\ (\alpha\beta)^k x)| + |\lambda^{(m)}(\tfrac{\alpha+1}{2}\ (\alpha\beta)^k x)|\right]^\delta$$

$$+ \left[\tfrac{\beta+1}{2}\ (\alpha\beta)^k\right]^m\left[|\lambda_n^{(m)}(\tfrac{\beta+1}{2}\ (\alpha\beta)^k x)| + |\lambda^{(m)}(\tfrac{\beta+1}{2}\ (\alpha\beta)^k x)|\right]^\delta .$$

En utilisant le fait que λ_n et λ appartiennent à Z, on obtient

$$|\tilde{\lambda}_n^{(m)}(x)-\tilde{\lambda}^{(m)}(x)| \leqslant \omega_n^{1-\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\ \{\left[\tfrac{\alpha+1}{2}\ \beta(\alpha\beta)^k\right]^m\left[2L(\tfrac{\alpha+1}{2}\ \beta(\alpha\beta)^k x)^{\theta+1-m}\right]^\delta$$

$$+ \left[\tfrac{\beta+1}{2}\ \alpha(\alpha\beta)^k\right]^m\left[2L(\tfrac{\alpha+1}{2}\ \ (\alpha\beta)^k x)^{\theta+1-m}\right]^\delta$$

$$+ \left[\tfrac{\alpha+1}{2}\ \ (\alpha\beta)^k\right]^m\left[2L(\tfrac{\alpha+1}{2}\ (\alpha\beta)^k x)^{\theta+1-m}\right]^\delta$$

$$+ \left[\tfrac{\beta+1}{2}\ \ (\alpha\beta)^k\right]^m\left[2L(\tfrac{\beta+1}{2}\ (\alpha\beta)^k x)^{\theta+1-m}\right]^\delta$$

soit

$$|\tilde{\lambda}_n^{(m)}(x) - \tilde{\lambda}^{(m)}(x)| \leqslant H\omega_n^{1-\delta}x^{\delta(\theta+1-m)} .$$

Utilisant le fait que λ_n converge vers λ, on peut conclure que $\tilde{\lambda}_n^{(m)}$ $(m = 0,1)$ tend uniformément pour $x \in [0,A]$ vers $\lambda^{(m)}(x)$ et cela est équivalent à la relation (I.20).

Nous sommes à présent en mesure d'appliquer le théorème de Schaüder, en se basant sur celui-ci on peut affirmer qu'il existe un point fixe de l'application (I.15), c'est-à-dire une fonction λ appartenant à $C^1([0,A],\mathbb{R})$, satisfaisant pour $x \in [0,A]$ la relation

$$\lambda(2x) - \lambda(2\alpha\beta x) = M(x) + \lambda((\alpha+1)x) - \lambda((\alpha+1)\ x) + \lambda((\beta+1)x) - \lambda((\beta+1)\alpha x).$$

Nous pouvons à présent formuler le lemme suivant :

Lemme I.2.-

Sous les hypothèses

$$M \in C^1([0,A],\mathbb{R}) \qquad M(0) = M'(0) = 0$$

$$|M'(\bar{x}) - M'(x)| \leq K(\bar{x}-x)^h \qquad 0 \leq x \leq \bar{x} \leq A$$

$0 < \alpha,\beta \lesssim \bar{\alpha}$ suffisamment petit pour satisfaire (1.19).

L'équation

$$\lambda(2x) - \lambda(2\alpha\beta x) = M(x) + \lambda((\alpha+1)x) - \lambda((\alpha+1)\beta x) + \lambda((\beta+1)x) - \lambda((\beta+1)\alpha x)$$

admet une solution appartenant à $C^1([0,2A],\mathbb{R})$.

b) *Existence de* μ, ν *et* σ.

1°) *Existence de* μ.

L'énoncé du lemme suivant dont la démonstration se fait exactement de la même manière que celle du lemme I.2 assure l'existence de μ.

Lemme I.3.-

Sous les hypothèses

$$N \in C^1([0,A],\mathbb{R}) \quad N(0) = N'(0) = 0$$

$$|N'(\bar{x}) - N'(x)| \leqslant K(\bar{x}-x)^h \qquad 0 \leqslant x \leqslant \bar{x} \leqslant A.$$

$0 < \alpha,\beta \leqslant \bar{\alpha}$ suffisamment petit pour satisfaire (1.19)

L'équation

$$\mu(2x) - \mu(2\alpha\beta x) = N(x) + \mu((\alpha+1)x) - \mu((\alpha+1)\beta x) + \mu((\beta+1)x) - \mu((\beta+1)\alpha x)$$

admet une solution appartenant à $C^1([0,2A],\mathbb{R})$.

2°) Existence de ν.

- *Existence de* ν *en fonction de* F_2.

Ecrivons l'équation (I.13) sous la forme :

$$\nu(2x) - \nu(2\alpha\beta x) = P(x)-\nu((1+\alpha)\beta x)-\nu((1+\beta)\alpha x)+\nu((1+\alpha)x)+\nu((1+\beta)x)$$

c'est-à-dire

$$\nu(x) - \nu((\alpha\beta)x) = F_2(x)$$

avec $F_2(x) = P(\frac{x}{2}) + \nu(\frac{\alpha+1}{2}\, x) - \nu(\frac{\alpha+1}{2}\,\beta x) + \nu(\frac{\beta+1}{2}\, x) - \nu(\frac{\beta+1}{2}\,\alpha x)$.

On suppose pour l'instant que $F_2(x)$ est connue et satisfait la condition du lemme (I.1) en utilisant ce dernier, on obtient

$$\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_2((\alpha\beta)^k x).$$

- *Existence d'un convexe.*

Considérons W l'espace des fonctions de classe C^2 dans $[0,A]$

à valeurs dans R, on introduit la norme $||\quad||$ défini pour

$$||\nu|| = |\nu(0)| + |\nu'(0)| + \sup_{x\in[0,A']} |\nu''(x)|.$$

W muni de cette norme est un espace de Banach, on considère dans W l'ensemble B des fonctions ν satisfaisant les conditions

$$\nu^{(m)}(0) = 0 \quad \text{pour} \quad m = 0,1,2$$

(I.21)
$$|\nu^{(2)}(\bar{x}) - \nu^{(2)}(x)| \leqslant L(\bar{x}-x)^{\theta}$$

$$(0 \leqslant x \leqslant \bar{x} \leqslant A').$$

Il est clair que B est un convexe fermé, notons aussi que pour $\nu \in B$, on a :

$$|\nu^{(m)}(x)| \leqslant \frac{L}{(2-m)!} x^{\theta+2-m} \qquad m = 0,1,2$$

et, enfin, d'après les hypothèses (H.3) et (H.7), on a

$$|P^{(m)}(x)| \leqslant \frac{K}{(2-m)!} x^{h+2-m} \qquad m = 0,1,2.$$

On transforme B par l'opération suivante $\nu \to \tilde{\nu}$:

$$\tilde{\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_2((\alpha\beta)^k x) \qquad 0 < x \leqslant A'$$

(I.22)
$$\tilde{\nu}(0) = 0$$

$$F_2(x) = P(\tfrac{x}{2}) + \nu(\tfrac{\alpha+1}{2}x) - \nu(\tfrac{\alpha+1}{2}\beta x) + \nu(\tfrac{\beta+1}{2}x) - \nu(\tfrac{\beta+1}{2}\alpha x).$$

Nous devons trouver les conditions pour lesquelles l'application (I.22) transforme B en lui-même, tout d'abord d'après les relations (I.21), on a

$$|F_2(x)| \leqslant \left[\frac{KA'^{h-\theta}}{2^{h+3}} + \frac{L}{2^{\theta+2}}\left[(\alpha+1)^{\theta+2}(1-\beta)^{\theta} + (\beta+1)^{\theta+2}(1-\alpha)^{\theta}\right]\right] x^{\theta+2}$$

$$|F_2^{(1)}(x)| \leqslant \left[\frac{KA'^{h-\theta}}{2^{h+2}} + \frac{L}{2^{\theta+1}}\left[(\alpha+1)^{\theta+1}(1-\beta)^{\theta} + (\beta+1)^{\theta+1}(1-\alpha)^{\theta}\right]\right] x^{\theta+1}$$

$$|F_2^{(2)}(x)| \leqslant \left[\frac{KA'^{h-\theta}}{2^{h+1}} + \frac{L}{2^{\theta}}\left[(\alpha+1)^{\theta}(1-\beta)^{\theta} + (\beta+1)^{\theta}(1-\alpha)^{\theta}\right]\right] x^{\theta}$$

soit

$$|F_2^{(m)}(x)| \leqslant C\, x^{\theta+2-m}$$

$$(m = 0,1,2).$$

(on remarque que F_2 satisfait la condition du lemme I.1).

Il en résulte que :

$$|\tilde{\nu}^{(m)}(x)| \leqslant \tilde{L}\, x^{\theta+2-m}$$

$$(m = 0,1,2).$$

On en déduit que $\tilde{\nu}(x)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre 2 convergent vers 0 quand x tend vers 0 soit

$$\tilde{\nu}^{(m)}(0) = 0 \quad m = 0,1,2$$

et que $\tilde{\nu} \in C^2([0,A'],\mathbb{R})$.

On doit maintenant trouver sous quelles conditions $\tilde{\nu}$ satisfait la relation (I.21).

En utilisant l'hypothèse (H.3) et la relation (I.21), on obtient

$$|F_2^{(2)}(\bar{x})-F_2^{(2)}(x)| \leqslant \left[\frac{KA'^{h-\theta}}{2^{h+2}} + \frac{L}{2^{\theta+2}}\left[(\alpha+1)^{\theta+2}\beta^{\theta+2}+(\beta+1)^{\theta+2}\alpha^{\theta+2}+(\alpha+1)^{\theta+2}+(\beta+1)^{\theta+2}\right]\right](\bar{x}-x)^{\theta}.$$

Il en résulte que

$$|(\tilde{\nu}^{(2)}(\bar{x})-\tilde{\nu}^{(2)}(x)| \leqslant \left[\frac{\frac{KA'^{h-\theta}}{2^{h+2}} + \frac{L}{2^{\theta+2}}\left[(\alpha+1)^{\theta+2}\beta^{\theta+2}+(\beta+1)^{\theta+2}\alpha^{\theta+2}+(\alpha+1)^{\theta+2}+(\beta+1)^{\theta+2}\right]}{1-(\alpha\beta)^{\theta+2}}\right](\bar{x}-x)^{\theta}$$

$\tilde{\nu}$ satisfera la relation (I.21) si

$$\frac{\frac{KA'^{h-\theta}}{2^{h+2}} + \frac{L}{2^{\theta+2}}\left[(\alpha+1)^{\theta+2}\beta^{\theta+2}+(\beta+1)^{\theta+2}\alpha^{\theta+2}+(\alpha+1)^{\theta+2}+(\beta+1)^{\theta+2}\right]}{1-(\alpha\beta)^{\theta+2}} \leqslant L$$

Mais le choix déjà fait de α,β,K et L (voir (I.19)) assure également la réalisation de cette dernière inégalité.

On prouve facilement en se servant du théorème d'Ascoli-Arzela la compacité de $\tilde{B}$ image de B par l'application (I.22).

Un raisonnement analogue à celui du lemme I.1 donne la continuité de l'application (I.22).

Lemme I.4.-

Sous les hypothèses

$P \in C^2([0,A],\mathbb{R})$, $P(0) = P^{(1)}(0) = P^{(2)}(0) = 0$

$|P^{(2)}(\bar{x}) - P^{(2)}(x)| \leqslant K(\bar{x}-x)^h$

$0 < \alpha,\beta \leqslant \bar{\alpha}$ suffisamment petit pour satisfaire 1.19.

L'équation

$$\nu(2x) - \nu(2\alpha\beta x) = P(x) + \nu((1+\alpha)x) - \nu((1+\alpha)\beta x) + \nu((1+\beta)x) - \nu((1+\beta)\alpha x)$$

admet une solution appartenant à $C^2\{[0,2A],\mathbb{R}\}$.

3°) *Existence de* σ.

Nous venons de montrer l'existence des fonctions de $C^1([0,2A],\mathbb{R})$ λ et μ satisfaisant (I.11) et (I.12).

En remplaçant dans (I.11) x par βx et dans (I.12) x par αx on obtient

$$\text{(I.24)} \quad \lambda(2\beta x)-\lambda(2\alpha\beta^2 x) = M(\beta x)+\lambda((\alpha+1)\beta x)-\lambda((\alpha+1)\beta^2 x)+ \lambda((\beta+1)\beta x)-\lambda((\beta+1)\alpha\beta x)$$

$$\text{(I.25)} \quad \mu(2\alpha x)-\mu(2\alpha^2\beta x) = N(\alpha x)+\mu((\alpha+1)\alpha x)-\mu((\alpha+1)\alpha\beta x)+\mu((\beta+1)\alpha x)-\mu((\beta+1)\alpha^2 x)$$

et en écrivant (I.24) + (I.25) - (I.11).(I.12) nous aurons

$$[\lambda(2\beta x)-\lambda(2x)+\mu(2\alpha x)-\mu(2x)]-[\lambda(2\alpha\beta^2 x)-\lambda(2\alpha\beta x)+\mu(2\alpha^2\beta x)-\mu(2\alpha\beta x)] = [M(\beta x)-M(x)+N(\alpha x)-N(x)]$$

$$+ [\lambda((\alpha+1)\beta x)-\lambda((\alpha+1)x)+\mu((\alpha+1)\alpha x)-\mu((\alpha+1)x)]+[\lambda((\alpha+1)\beta^2 x)-\lambda((\alpha+1)\beta x)+\mu((\alpha+1)\alpha\beta x-\mu((\alpha+1)\beta x)]$$

$$+ [\lambda((\beta+1)\beta x)-\lambda((\beta+1)x)+\mu((\beta+1)\alpha x)-\mu((\beta+1)x]+[\lambda((\beta+1)\alpha\beta x)-\lambda((\beta+1)\alpha x)+\mu((\beta+1)\alpha^2 x)-\mu((\beta+1)\alpha x)] .$$

Nous remarquons alors que la fonction $\sigma(x) = \lambda(\beta x)-\lambda(x)+\mu(\alpha x)-\mu(x)$ vérifie l'équation

$$\sigma(2x) - \sigma(2\alpha\beta x) = T(x)+\sigma((\alpha+1)x)-\sigma((\alpha+1)\beta x)+\sigma((\beta+1)x)-\sigma((\beta+1)\alpha x)$$

avec

$$T(x) = M(\beta x) - M(x) + N(\alpha x) - N(x).$$

Avec les hypothèses (H.4), (H.8) et par un raisonnement similaire à celui qui est fait dans la démonstration du lemme I.4 nous prouvons l'existence d'une telle fonction σ de classe C^2 dans $[0,2A]$.

d) Théorème d'existence.

Nous sommes maintenant en mesure de formuler le théorème d'existence.

Théorème I.

Avec les hypothèses

$$M \in C^1([0,A],\mathbb{R}) \quad M(0) = M^{(1)}(0) = 0$$
$$N \in C^1([0,A],\mathbb{R}) \quad N(0) = N^{(1)}(0) = 0$$
$$P \in C^2([0,A],\mathbb{R}) \quad P(0) = P^{(1)}(0) = P^{(2)}(0) = 0$$
$$T \in C^2([0,A],\mathbb{R}) \ , \ T(x) = M(\beta x)-M(x)+N(\alpha x)-N(x) \ , \ T^{(2)}(0) = 0$$
$$|M^{(1)}(\bar{x})-M^{(1)}(x)| \leqslant K(\bar{x}-x)^h$$
$$|N^{(1)}(\bar{x})-N^{(1)}(x)| \leqslant K(\bar{x}-x)^h$$
$$|P^{(2)}(\bar{x})-P^{(2)}(x)| \leqslant K(\bar{x}-x)^h$$
$$|T^{(2)}(\bar{x})-T^{(2)}(x)| \leqslant K(\bar{x}-x)^h$$

$0 < \alpha,\beta \leqslant \bar{\alpha}$ suffisamment petit pour satisfaire (1.19).

Le problème de Goursat

$$
(P) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 0 \\ \\ u(x,\alpha x) = M(x), \quad u(\beta y,y) = N(y), \quad u(x,x) = P(x) \end{cases}
$$

admet une solution dans $D = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant A, \quad 0 \leqslant y \leqslant A\}$.

CHAPITRE II

PROBLEME DE GOURSAT RELATIF A L'EQUATION

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = C(x,y,u).$$

(A) CAS LINEAIRE.

1°) *Formulation du problème.*

Considérons maintenant l'équation

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = c(x,y)$$

soumise aux conditions initiales

$$\text{(II.7)} \qquad \begin{cases} u(x,\alpha x) = M(x) \\ u(\beta y,y) = N(y) \\ u(x,x) \;\; = P(x) \end{cases} \qquad 0 \leqslant \alpha, \quad \beta \leqslant 1$$

Définissons la fonction T par

$$T(x) = M(\beta x)-M(x)+N(\alpha x)-N(x)$$

et supposons que les fonctions M, N et T satisfont les hypothèses :

(H.1) $M \in C^1([0,A],\mathbb{R})$ $M(0) = M^{(1)}(0) = 0$

(H.2) $N \in C^1([0,A],\mathbb{R})$ $N(0) = N^{(1)}(0) = 0$

(H.3) $P \in C^2([0,A],\mathbb{R})$ $P(0) = P^{(1)}(0) = P^{(2)} = 0$

(H.4) $T \in C^2([0,A],\mathbb{R})$, $T(x) = M(\beta x)-M(x)+N(\alpha x)-N(x)$, $T^{(2)}(0) = 0$

(H.5) $|M^{(1)}(\bar{x}) - M^{(1)}(x)| \leqslant K(\bar{x}-x)^h$

(H.6) $|N^{(1)}(\bar{x}) - N^{(1)}(x)| \leqslant K(\bar{x}-x)^h$

(H.7) $|P^{(2)}(\bar{x}) - P^{(2)}(x)| \leqslant K(\bar{x}-x)^h$ $\quad 0 \leqslant x \leqslant \bar{x} \leqslant A$, $h \in]0,1]$, $K > 0$

(H.8) $|T^{(2)}(\bar{x}) - T^{(2)}(x)| \leqslant K(\bar{x}-x)^h$

Supposons, en outre, que la fonction c satisfait l'hypothèse suivante :

Hypothèse H.9 :

La fonction c est continue au sens de Hölder dans le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; 0 \leqslant x \leqslant A, \; 0 \leqslant y \leqslant A, \; x+y \leqslant A\}$

$$|c(\bar{x},\bar{y}) - c(x,y)| \leqslant K(|\bar{x}-x)|^{h_o} + |\bar{y}-y|^{h_o})$$

- $h_o \in]h,1]$.

2°) *Solution du problème.*

a) *Solution générale.*

Suivant la procédure du chapitre précédent, nous écrirons une solution générale de l'équation sous la forme :

(II.2) $$u(x,y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) + \Psi(x+y) + R(x,y)$$

où

$$R(x,y) = \int_0^x ds \int_0^y dt \int_0^s c(r,s+t-r)dr$$

et φ_1, φ_2, Ψ sont des fonctions arbitraires, φ_1, φ_2 appartenant à $C^1([0,A],\mathbb{R})$ et Ψ à $C^2([0,2A],\mathbb{R})$.

b) *Propriétés de* $R(x,y)$.

$R(x,y)$ possède les propriétés suivantes :

(II.3) $$\left|\frac{d}{dx} R(e_1\bar{x},e_2\bar{x}) - \frac{d}{dx} R(e_1x,e_2x)\right| \leqslant \ell \; e_1^2 e_2 \bar{x}^{2-h}(\bar{x}-x)^h$$

(II.4) $$\left|\frac{d^2}{dx^2} R(e_1\bar{x},e_2\bar{x}) - \frac{d^2}{dx^2} R(e_1x,e_2x)\right| \leqslant \ell(e_1e_2)^2\bar{x}^{1-h}(\bar{x}-x)^h$$

$e_1 \in]0,1[$, $e_2 \in]0,1[$ ℓ constante positive

$0 \leqslant x \leqslant \bar{x} \leqslant A$, $x+\bar{x} \leqslant A$.

En effet, nous pouvons écrire

$$\frac{d}{dx} R(e_1x,e_2x) = \frac{d}{dx}\left\{\int_0^{e_1x} \{\int_0^{e_2x} m(s,t)\, dt\}ds\right\}$$

avec

$$m(s,t) = \int_0^s c(r,s+t-r)\,dr$$

Il en résulte que

$$\frac{d}{dx} R(e_1x,e_2x) = \int_0^{e_1x} \frac{d}{dx}\{\int_0^{e_2x} m(s,t)dt\}ds + e_1\int_0^{e_2x} m(e_1x,t)dt$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{dx} R(e_1x,e_2x) = e_2 \int_0^{e_1x} m(s,e_2x)ds + e_1\int_0^{e_2x} m(e_1x,s)ds$$

nous en déduisons

$$\frac{d}{dx} R(e_1\bar{x},e_2\bar{x}) - \frac{d}{dx} R(e_1x,e_2x) = e_2\left[\int_0^{e_1\bar{x}} m(s,e_2\bar{x})ds-\int_0^{e_1x} m(s,e_2x)ds\right]+e_1\left[\int_0^{e_2\bar{x}} m(e_1\bar{x},s)ds\right.$$

$$\left. - \int_0^{e_2x} m(e_1x,s)ds\right].$$

Et en utilisant l'hypothèse (H.9), on obtient l'inégalité (II.3).

De même $\dfrac{d^2}{dx^2} R(x,x) = 2m(x,x) + \displaystyle\int_0^x \frac{\partial}{\partial x} \{m(x,s) + m(s,x)\}ds$

mais $\dfrac{\partial}{\partial x} m(x,y) - \dfrac{\partial}{\partial y} m(x,y) = c(x,y)$ de sorte que

$$\frac{d^2}{dx^2} R(x,x) = \int_0^x \{\frac{\partial}{\partial s} \left[m(x,s)+m(s,x)\right] - c(s,x) + c(x,s)\}ds + 2m(x,x)$$

$$= 4m(x,x) - m(x,0) - m(0,x) + \int_0^x\left[c(x,s) - c(s,x)\right]ds$$

$$= 4 \int_0^x c(s,2x-s)ds + \int_0^x\{c(x,s) - c(s,x) - c(s,x-s)\}ds$$

et toujours en utilisant l'hypothèse (H.9), on obtient l'inégalité (II.4).

c) *Existence de la solution.*

Comme dans le chapitre I, nous aurons à résoudre le système d'équations fonctionnelles obtenu à partir de la relation (II.2) et les conditions de bord, à savoir :

$$(II.5) \quad \begin{cases} \varphi_1(x) + \varphi_2(\ x) + \Psi((1+\alpha)x) = M(x) - R(x,\alpha x) \\ \varphi_1(\beta x) + \varphi_2(x) + \Psi((1+\beta)x) = N(x) - R(\beta x,x) \\ \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \Psi(2x) = P(x) - R(x,x). \end{cases}$$

Ce système peut s'écrire sous la forme

$$(II.6) \quad \begin{cases} \varphi_1(x) + \varphi_2(\alpha x) + \Psi((1+\alpha)x) = \tilde{M}(x) \\ \varphi_2(\beta x) + \varphi_2(x) + \Psi((1+\beta)x) = \tilde{N}(x) \\ \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \Psi(2x) = \tilde{P}(x) \end{cases}$$

avec

$$\tilde{M}(x) = M(x) - R(x,\alpha x)$$
$$\tilde{N}(x) = N(x) - R(\beta x,x)$$
$$\tilde{P}(x) = P(x) - R(x,x).$$

On posera aussi

$$\tilde{T}(x) = \tilde{M}(\beta x) - \tilde{M}(x) + \tilde{N}(\alpha x) - \tilde{N}(x).$$

D'après le chapitre I, le système (II.6) sera résolu si les fonctions $\tilde{M}$, $\tilde{N}$, $\tilde{P}$, $\tilde{T}$ vérifient les hypothèses du théorème I. C'est ce que nous allons montrer.

Tout d'abord, nous déduisons facilement des hypothèses (H.1) —— (H.8) les conditions :

$$\tilde{M}(0) = \tilde{N}(0) = \tilde{P}(0) = 0$$
$$\tilde{M}^{(1)}(0) = \tilde{N}^{(1)}(0) = \tilde{P}^{(1)}(0) = 0$$
$$\tilde{P}^{(2)}(0) = \tilde{T}^{(2)}(0) = 0.$$

Et en servant des propriétés de $R(x,y)$, (II.3) et (II.4) nous obtenons les inégalités suivantes :

$$|\tilde{M}^{(1)}(\bar{x}) - \tilde{M}^{(1)}(x)| \leqslant (K + \ell\, A^{2-h})(\bar{x}-x)^h$$

$$|\tilde{N}^{(1)}(\bar{x}) - \tilde{N}^{(1)}(x)| \leqslant (K + \ell\, A^{2-h})(\bar{x}-x)^h$$

$$|\tilde{P}^{(2)}(\bar{x}) - \tilde{P}^{(2)}(x)| \leqslant (K + \ell\, A^{1-h})(\bar{x}-x)^h$$

$$|\tilde{T}^{(2)}(\bar{x}) - \tilde{T}^{(2)}(x)| \leqslant (K + 4\ell A^{1-h})(\bar{x}-x)^h$$

soit

$$|\tilde{M}^{(1)}(\bar{x}) - \tilde{M}^{(1)}(x)| \leqslant \tilde{K}(\bar{x}-x)^h$$

$$|\tilde{N}^{(1)}(\bar{x}) - \tilde{N}^{(1)}(x)| \leqslant \tilde{K}(\bar{x}-x)^h$$

$$|\tilde{P}^{(2)}(\bar{x}) - \tilde{P}^{(2)}(x)| \leqslant \tilde{K}(\bar{x}-x)^h$$

$$|\tilde{T}^{(2)}(\bar{x}) - \tilde{T}^{(2)}(x)| \leqslant \tilde{K}(\bar{x}-x)^h.$$

d) *Théorème d'existence.*

Ainsi les fonctions $\tilde{M}, \tilde{N}, \tilde{P}, \tilde{T}$ vérifient les hypothèses du théorème I et nous pouvons donc formuler le théorème d'existence suivant :

Théorème II.1.-

Avec les hypothèses

$M \in C^1([0,A],\mathbb{R}) \quad M(0) = M^{(1)}(0) = 0$

$N \in C^1([0,A],\mathbb{R}) \quad N(0) = N^{(1)}(0) = 0$

$P \in C^2([0,A],\mathbb{R}) \quad P(0) = P^{(1)}(0) = P^{(2)}(0) = 0$

$T \in C^2([0,A],\mathbb{R})$, $T(x) = M(\beta x)-M(x)+N(\alpha x)-N(x)$, $T^{(2)}(0) = 0$

$|M^{(1)}(\bar{x}) - M^{(1)}(x)| \leqslant K(\bar{x}-x)^h$

$|N^{(1)}(\bar{x}) - N^{(1)}(x)| \leqslant K(\bar{x}-x)^h$

$|P^{(2)}(\bar{x}) - P^{(2)}(x)| \leqslant K(\bar{x}-x)^h$

$|T^{(2)}(\bar{x}) - T^{(2)}(x)| \leqslant K(\bar{x}-x)^h$

$c(x,y)$ continue au sens de Hölder dans D.

$0 < \alpha,\beta \leqslant \bar{\alpha}$ suffisamment petit pour satisfaire (I.19).

Le problème de Goursat suivant :

$$(P') \begin{cases} \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = c(x,y) \\ \\ u(x,\alpha x) = M(x), \ u(\beta y,y) = N(y), \quad u(x,x) = P(x) \end{cases}$$

admet une solution dans le domaine

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad 0 \leqslant x \leqslant A, \ \ 0 \leqslant y \leqslant A, \quad x+y \leqslant A\}.$$

(B) CAS NON LINEAIRE.

1°) *Formulation du problème.*

Considérons maintenant l'équation non linéaire

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = C(x,y,u)$$

soumise aux conditions initiales :

$$\begin{cases} u(x,\alpha x) = M(x) \\ u(\beta y,y) = N(y) \qquad\qquad 0 < \alpha,\beta < 1. \\ u(x,x) \ \ = P(x) \end{cases}$$

Définissons la fonction T par :

$$T(x) = M(\beta x)-M(x)+N(\alpha x)-N(x)$$

et supposons que nous ayons les hypothèses

(H.1) $M \in C^1([0,A],\mathbb{R})$ $M(0) = M^{(1)}(0) = 0$

(H.2) $N \in C^1([0,A],\mathbb{R})$ $N(0) = N^{(1)}(0) = 0$

(H.3) $P \in C^2([0,A],\mathbb{R})$ $P(0) = P^{(1)}(0) = P^{(2)}(0) = 0$

(H.4) $T \in C^2([0,A],\mathbb{R})$, $T(x) = M(\beta x)-M(x)+N(\alpha x)-N(x)$, $T^{(2)}(0) = 0$

(H. 5) $|M^{(1)}(\bar{x}) - M^{(1)}(x)| \leqslant K(\bar{x}-x)^h$

(H.6) $|N^{(1)}(\bar{y}) - N^{(1)}(y)| \leqslant K(\bar{y}-y)^h$

(H.7) $|P^{(2)}(\bar{x}) - P^{(2)}(x)| \leqslant K(\bar{x}-x)^h$

(H.8) $|T^{(2)}(\bar{x}) - T^{(2)}(x)| \leqslant K(\bar{x}-x)^h$

$$0 \leqslant x \leqslant \bar{x} \leqslant A \quad ; \quad 0 < y < \bar{y} < A \quad ; \quad h \in]0,1] \quad ; \quad K > 0$$

et dans laquelle $c(x,y,z)$ vérifie l'hypothèse suivante :

Hypothèse H.10 :

La fonction $c(x,y,z)$ est continue dans $D \times \mathbb{R}$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad 0 \leqslant x \leqslant A, \quad 0 \leqslant y \leqslant A, \quad x+y \leqslant A\}$$

et vérifie les conditions :

- $|c(x,y,z| \leqslant M(1 + |z|)$
- $|c(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) - c(x,y,z)| \leqslant K\left[|\bar{x}-x|^{h_o} + |\bar{y}-y|^{h_o} + |\bar{z}-z|\right]$
- $M > 0$, $h_o \in]0,1]$

2°) *Solution du problème.*

a) *Solution générale.*

Toujours suivant la même procédure, nous écrirons une solution générale de l'équation (II.7) sous la forme :

(II.8) $$u(x,y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) + \Psi(x+y) + R(x,y,u)$$

où

$$R(x,y,u) = \int_0^x ds \int_0^y dt \int_0^s c(r,s+t-r,u(r+st-r))dr$$

et φ_1, φ_2, Ψ sont des fonctions arbitraires, φ_1 et φ_2 appartenant à $C^1([0,A],\mathbb{R})$ et Ψ à $C^2([0,2A],\mathbb{R})$.

b) Position du problème.

A partir de la relation (II.8) et les conditions de bord, nous obtenons le système suivant :

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(\alpha x) + \Psi((1+\alpha)x) = M(x) - R(x,\alpha x,u(x,\alpha x))$$
$$\varphi_1(\beta x) + \varphi_2(x) + \Psi((1+\beta)x) = N(x) - R(\beta x,x,u(\beta x,x))$$
$$\varphi_1(2) + \varphi_2(x) + \Psi(2x) = P(x) - R(x,x,u(x,x)).$$

Pour résoudre notre problème, il suffit de trouver des fonctions φ_1, φ_2, Ψ et u suffisamment régulières et satisfaisant la relation (II.8) et le système précédent ; la preuve de l'existence de telles fonctions est basée sur le théorème du point fixe de Schaüder. Nous suivrons la procédure du chapitre I, c'est-à-dire nous montrerons d'abord l'existence des fonctions λ et μ appartenant à $C^1([0,2A],\mathbb{R})$ de deux fonctions ν et σ appartenant à $C^2([0,2A],\mathbb{R})$ telles que :

(II.10) $$\begin{cases} M(x) = R(x,\alpha x,u(x,\alpha x))+\lambda(2x)+\lambda((1+\alpha)\beta x)+\lambda((1+\beta)\alpha x)-\lambda((1+\alpha)x-\lambda((1+\beta)x)-\lambda(2\alpha\beta x) \\ N(x) = R(\beta x,x,u(\beta x,x))+\mu(2x)+\mu((1+\alpha)\beta x)+\mu((1+\beta)\alpha x)-\mu((1+\alpha)x)-\mu((1+\beta)x)-\mu(2\alpha\beta x) \\ P(x) = R(x,x,u(x,x))+\nu(2x)+\nu((1+\alpha)\beta x)+\nu((1+\beta)\alpha x)-\nu((1+\alpha)x)-\nu((1+\beta)x)-\nu(2\alpha\beta x). \end{cases}$$

$$\sigma(x) = \lambda(\beta x) - \lambda(x) + \mu(\alpha x) - \mu(x).$$

Ainsi les fonctions φ_1, φ_2 Ψ définies par

$$\varphi_1(x) = \lambda(2x) - \lambda((1+\beta)x) + \mu((1+\alpha)x) - \mu(2\alpha x) + \nu(\alpha(1+\beta)x) - \nu((1+\alpha)x)$$

$$\varphi_2(x) = \lambda((1+\beta)x) - \lambda(2\beta x) + \mu(2x) - \mu((1+\alpha)x) + \nu(\beta(1+\alpha)x) - \nu((1+\beta)x)$$

$$\Psi_2(x) = \lambda(\beta x) - \lambda(x) + \mu(\alpha x) - \mu(x) + \nu(x) - \nu(\alpha\beta x)$$

vérifieront le système (II.9) et

$$u(x,y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) + \Psi(x+y) + \int_0^x ds \int_0^y dt \int_0^s c(r,s+t-r,u(r,s+t-r))dr$$

sera solution de notre problème.

3°) *Existence de la solution.*

a) *Préliminaires.*

Le système (II.10) peut s'écrire sous la forme de

$$\text{(II.12)} \qquad \begin{cases} \lambda(x) - \lambda(\alpha\beta x) = G_1(x) \\ \mu(y) - \mu(\alpha\beta y) = G_2(y) \\ \nu(x) - \nu(\alpha\beta x) = G_3(x) \end{cases}$$

avec

$$G_1(x) = M(\tfrac{x}{2}) - R(\tfrac{x}{2}, \tfrac{\alpha}{2} x, u(\tfrac{x}{2}, \tfrac{\alpha}{2} x)) + \lambda(\tfrac{\alpha+1}{2} x) - \lambda(\tfrac{\alpha+1}{2} \beta x) + \lambda(\tfrac{\beta+1}{2} x) - \lambda((\tfrac{\beta+1}{2})\alpha x)$$

$$G_2(y) = N(\tfrac{y}{2}) - R(\tfrac{\beta}{2} y, \tfrac{y}{2}, u(\tfrac{\beta}{2} y, \tfrac{y}{2})) + \mu(\tfrac{\alpha+1}{2} y) - \mu((\tfrac{\alpha+1}{2})\beta y) + \mu(\tfrac{\beta+1}{2} y) - \mu((\tfrac{\beta+1}{2})\alpha y)$$

$$G_3(x) = P(\tfrac{x}{2}) - R(\tfrac{x}{2}, \tfrac{x}{2}, u(\tfrac{x}{2}, \tfrac{x}{2})) + \nu(\tfrac{\alpha+1}{2} x) - \nu((\tfrac{\alpha+1}{2})\beta x) + \nu(\tfrac{\beta+1}{2} x) - \nu((\tfrac{\beta+1}{x})\alpha x).$$

A partir de ces dernières relations nous obtenons la relation suivante :

$$\sigma(x) - \sigma(\alpha\beta x) = G_1(\beta x) + G_2(\alpha x) - G_1(x) - G_2(x)$$

c'est-à-dire

$$\sigma(x)-\sigma(\alpha\beta x) = T(x) - \left[R(\frac{\beta}{2}x, \frac{\alpha\beta}{2}x,u)-R(\frac{x}{2},\frac{\alpha}{2}x,u)+R(\frac{\alpha\beta}{2}x,\frac{\alpha}{2}x,u)-R(\frac{\beta}{2}x,\frac{x}{2}u)\right]$$

$$+ \sigma(\frac{\alpha+1}{2}x)-\sigma((\frac{\alpha+1}{2})\beta x)+\sigma(\frac{\beta+1}{2}x)-\sigma((\frac{\beta+1}{2})\alpha x)$$

soit

(II.12) $$\sigma(x) - \sigma(\alpha\beta x) = G_4(x)$$

avec

$$G_4(x) = T(x) - \left[R(\frac{\beta}{2}x, \frac{\alpha\beta}{2}x,u)-R(\frac{x}{2}, \frac{\alpha}{2}x,u)+R(\frac{\alpha\beta}{2}x,\frac{\alpha}{2}x,u)-R(\frac{\beta}{2}x, \frac{x}{2},u)\right]$$

$$+ \sigma(\frac{\alpha+1}{2}x)-\sigma((\frac{\alpha+1}{2})\beta x)+\sigma(\frac{\beta+1}{2}x)-\sigma((\frac{\beta+1}{2})\alpha x).$$

Considérons les relations du système (II.11) et la relation (II.12) comme équations fonctionnelles où les fonctions inconnues sont λ, μ, ν et σ. (Nous supposons pour l'instant que $G_1(x)$, $G_2(y)$, $G_3(x)$ et $G_4(x)$ sont connues et vérifient la condition du lemme (I.1), nous le montrerons par la suite). En l'utilisant nous aurons donc

(II.13)
$$\begin{cases} \lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} G_1((\alpha\beta)^k x) \\ \mu(y) = \sum_{k=0}^{\infty} G_2((\alpha\beta)^k y) \\ \nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} G_3((\alpha\beta)^k x) \\ \sigma(x) = \sum_{k=0}^{\infty} G_4((\alpha\beta)^k x). \end{cases}$$

b) Existence d'un convexe.

Dans le but d'appliquer le théorème de Schaüder, considérons l'espace Λ des systèmes U

$$U = [\lambda(x), \mu(y), \nu(x), \sigma(x), u(x,y)]$$

où

- $\lambda \in C^1([0,2A], \mathbb{R})$, $\mu \in C^1([0,2A], \mathbb{R})$
- $\nu \in C^2([0,2A], \mathbb{R})$, $\sigma \in C^2([0,2A], \mathbb{R})$
- $u \in C(D, \mathbb{R})$.

On introduit la norme $\|\ \|$ définie par

$$\|U\| = \max\Big[|\lambda(0)| + \sup_{[0,2A]} |\lambda^{(1)}(x)|, |\mu(0)| + \sup_{[0,2A]} |\mu^{(1)}(y)|,$$

$$\sum_{m=0}^{1} |\nu^{(m)}(0)| + \sup_{[0,2A]} |\nu^{(2)}(x)|, \sum_{m=0}^{1} |\sigma^{(m)}(0)| + \sup_{[0,2A]} |\sigma^{(2)}(x)|,$$

$$\sup_{D} |u(x,y| \Big]$$

et Λ muni de cette norme est un espace de Banach.

On considère maintenant dans Λ l'ensemble Z des points $U \in \Lambda$ satisfaisant les conditions :

$$(\text{II}.14) \left\{ \begin{array}{ll} \lambda^{(m)}(0) = \mu^{(m)}(0) = 0 & m = 0,1 \\ |\lambda^{(1)}(\bar{x}) - \lambda^{(1)}(x)| \leq L(\bar{x}-x)^{\theta} & \\ |\mu^{(1)}(\bar{y}) - \mu^{(1)}(y)| \leq L(\bar{y}-y)^{\theta} & \\ \nu^{(m)}(0) = \sigma^{(m)}(0) = 0 & m = 0,1,2 \\ |\nu^{(2)}(\bar{x}) - \nu^{(2)}(x)| \leq L(\bar{x}-x)^{\theta} & \\ |\sigma^{(2)}(\bar{x}) - \sigma^{(2)}(x)| \leq L(\bar{x}-x)^{\theta} & \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \bar{x} \leqslant 2A, \quad 0 \leqslant y \leqslant \bar{y} \leqslant 2A \\ u(0,0) = 0 \\ |u(\bar{x},\bar{y})-u(x,y)| \leqslant \rho((\bar{x}-x)^\theta + (\bar{y}-y)^\theta) \end{cases}$$

$$(0 \leqslant x \leqslant \bar{x} \leqslant A, \quad 0 \leqslant y \leqslant \bar{y} \leqslant A, \quad x+y \leqslant A, \quad \bar{x}+\bar{y} \leqslant A)$$

$\theta \in \left]0,\min(h,h_o)\right[$, L et ρ constantes positives.

Il est clair que Z est un convexe fermé, notons aussi que pour U Z on a les inégalités suivantes

$$\text{(II.15)} \quad \begin{cases} |\lambda^{(m)}(x)| \leqslant L\, x^{\theta+1-m} & \\ |\mu^{(m)}(y)| \leqslant L\, y^{\theta+1-m} & m = 0,1 \\ |\nu^{(m)}(x)| \leqslant \dfrac{L}{(2-m)!}\, x^{\theta+2-m} & \\ |\sigma^{(m)}(x)| \leqslant \dfrac{L}{(2-m)!}\, x^{\theta+2-m} & m = 0,1,2 \\ |u(x,y)| \leqslant \rho(x+y)^\theta. & \end{cases}$$

En tenant compte des relations (II.13), on étudie l'image de Z par la transformation :

$$\text{(II.16)} \quad \begin{cases} (\lambda,\mu,\nu,\sigma,u) \longrightarrow (\tilde{\lambda},\tilde{\mu},\tilde{\nu},\tilde{\sigma},\tilde{u}) \quad ; \\ \tilde{\lambda}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} G_1((\alpha\beta)^k x) \\ \tilde{\mu}(y) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} G_2((\alpha\beta)^k y) \\ \tilde{\nu}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} G_3((\alpha\beta)^k x) \\ \tilde{\sigma}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} G_4((\alpha\beta)^k x) \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{pour} \quad 0 < x \leqslant 2A, \quad 0 < y \leqslant 2A \\ \text{et} \quad \tilde{\lambda}(0) = \tilde{\mu}(0) = \tilde{\nu}(0) = \tilde{\sigma}(0) = 0 \\ \\ \tilde{u}(x,y) = R(x,y,u)+\lambda(2x)-\lambda((1+\beta)x)+\mu((1+\alpha)x)-\mu(2\alpha x)+\nu(\alpha(1+\beta)x) \\ \qquad -\nu((1+\alpha)x)+\lambda((1+\beta)y)-\lambda(2\beta y)+\mu(2y)-\mu((1+\alpha)y)+\nu(\beta(1+\alpha)y) \\ \qquad -\nu((1+\beta)y)+\sigma(x+y)+\nu(x+y)-\nu(\alpha\beta(x+y)) \\ \\ \text{pour} \quad (x,y) \in D.\end{array}\right.$$

Nous devons trouver les conditions suffisantes pour l'inclusion $\tilde{Z} \subset Z$ où $\tilde{Z}$ désigne l'image de Z par la transformation (II.16). Tout d'abord nous avons besoin de quelques relations :

$$\text{(II.17)} \qquad \left|\frac{d}{dx} R(\bar{x},\alpha\bar{x}) - \frac{d}{dx} R(x,\alpha x)\right| \leqslant \text{const}(1+\rho)\bar{x}(\bar{x}-x)^{\theta}$$

$$\text{(II.18)} \qquad \left|\frac{d}{dy} R(\beta\bar{y},\bar{y}) - \frac{d}{dy} R(\beta y,y)\right| \leqslant \text{const}(1+\rho)\bar{y}(\bar{y}-y)^{\theta}$$

$$\text{(II.19)} \qquad \left|\frac{d^2}{dx^2} R(e_1\bar{x},e_2\bar{x}) - \frac{d^2}{dx^2} R(e_1x,e_2x)\right| \leqslant \text{const}(1+\rho)(\bar{x}-x)^{\theta}$$

$(0 \leqslant x \leqslant \bar{x} \leqslant A,\ \bar{x}+x \leqslant A \ ;\ 0 \leqslant y \leqslant \bar{y} \leqslant A,\ \ y+\bar{y} \leqslant A),\ \ 0 < e_1 < 1,\ \ 0 < e_2 < 1$

$$\text{(II.20)} \qquad |R(\bar{x},\bar{y}) - R(x,y)| \leqslant \text{const}(1+\rho)A^{3-\theta}\left[(\bar{x}-x)^{\theta} + (\bar{y}-y)^{\theta}\right]$$

$$(0 \leqslant x \leqslant \bar{x} \leqslant A,\ \ 0 \leqslant y \leqslant \bar{y} \leqslant A \ ;\ x+y \leqslant A,\ \ \bar{x}+\bar{y} \leqslant A)$$

La notation const signifie une constante positive.

En effet, nous pouvons écrire

$$\frac{d}{dx} R(x,\alpha x) = \frac{d}{dx}\left\{\int_0^x \{\int_0^{\alpha x} m(s,t)dt\}ds\right\}$$

avec

$$m(s,t) = \int_0^s c(r,s+t-r,u(r,s+t-r)dr.$$

Il en résulte que

$$\frac{d}{dx} R(x,\alpha x) = \alpha \int_0^x m(s,\alpha x)ds + \int_0^{\alpha x} m(x,s)ds$$

nous en déduisons

$$\frac{d}{dx} R(\bar{x},\alpha\bar{x}) - \frac{d}{dx} R(x,\alpha x) = \alpha\left[\int_0^x \left[m(s,\alpha\bar{x})-m(s,\alpha x)\right]ds + \int_x^{\bar{x}} m(s,\alpha\bar{x})ds\right]$$

$$+ \left[\int_0^{\alpha x} \left[m(\bar{x},s)-m(x,s)\right]ds + \int_{\alpha x}^{\alpha\bar{x}} m(\bar{x},s)ds\right].$$

En utilisant l'hypothèse (H.10) et les relations (II.14) nous obtenons :

$$\left|\int_0^x \left[m(s,\alpha\bar{x}) - m(s,\alpha x)\right]ds\right| \leqslant K(1+\rho)\alpha^{\theta}\bar{x}(\bar{x}-x)^{\theta}$$

et

$$\left|\int_x^{\bar{x}} m(s,\alpha\bar{x})ds\right| \leqslant M\left[\frac{1}{2}(\bar{x}^2-x^2) + \rho\left[\frac{1}{(\theta+1)(\theta+2)}(\bar{x}^{\theta+2}-x^{\theta+2}) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{(\theta+1)(\theta+2)}\left[(\bar{x}+\alpha\bar{x})^{\theta+2}-(x+\alpha\bar{x})^{\theta+2}\right] + \frac{1}{\theta+1}(\alpha\bar{x})^{\theta+1}\left[\bar{x}-x\right]\right]\right]$$

$$\leqslant M\left[\bar{x}^{2-\theta}(\bar{x}-x)^{\theta} + \rho\left[\bar{x}^2(\bar{x}-x)^{\theta} + \alpha^{\theta+1}\bar{x}^2(\bar{x}-x)^{\theta}\right]\right]$$

$$\left|\int_x^{\bar{x}} m(s,\alpha\bar{x})ds\right| \leqslant M(1+\alpha^{\theta+1})(1+\rho)\bar{x}^{2-\theta}(\bar{x}-x)^{\theta}.$$

Nous aurons aussi

$$\left|\int_0^{\alpha x}\left[m(\bar{x},s)-m(x,s)\right]ds\right| \leqslant K\alpha(1+\rho)\bar{x}^{2}(\bar{x}-x)^{\theta} + M\left[\alpha x(\bar{x}-x) + \right.$$

$$\left. + \rho\left[\alpha(\bar{x}^{\theta+1}-x^{\theta+1}) - \frac{(\bar{x}-x+\alpha x)^{\theta+2}}{(\theta+1)(\theta+2)} + \frac{(\bar{x}-x)^{\theta+2}}{(\theta+1)(\theta+2)} + \frac{\alpha^{\theta+2}x^{\theta+2}}{(\theta+1)(\theta+2)}\right]\right]$$

et

$$\left|\int_{\alpha}^{\alpha\bar{x}} m(\bar{x},s)ds\right| \leqslant M\left[\alpha\bar{x}(\bar{x}-x)+\rho\left[\frac{\alpha}{\theta+1}\,\bar{x}^{\theta+1}(\bar{x}-x) - \frac{(\bar{x}+\alpha\bar{x})^{\theta+1}}{(\theta+1)(\theta+2)} + \frac{(\alpha\bar{x}+\alpha x)^{\theta+2}}{(\theta+1)(\theta+2)} + \frac{\alpha^{\theta+2}(\bar{x}^{\theta+2}-x^{\theta+2})}{(\theta+1)(\theta+2)}\right]\right]$$

Finalement, nous aurons l'inégalité (II.17)

$$\left|\frac{d}{dx}R(\bar{x},\alpha\bar{x}) - \frac{d}{dx}R(x,\alpha x)\right| \leqslant \mathrm{Const}(1+\rho)\bar{x}(\bar{x}-x) \ .$$

Un raisonnement similaire au précédent permet d'avoir les autres inégalités.

En utilisant les hypothèses (H.1) — (H.8) les relations (II.15) et les inégalités précédentes, on a

$$|G_1^{(m)}(x)| \leqslant \mathrm{Const}\ x^{\theta+1-m}$$
$$|G_2^{(m)}(y)| \leqslant \mathrm{Const}\ y^{\theta+1-m} \qquad m = 0,1$$
$$|G_3^{(m)}(x)| \leqslant \mathrm{Const}\ x^{\theta+2-m}$$
$$|G_4^{(m)}(x)| \leqslant \mathrm{Const}\ x^{\theta+2-m} \qquad m = 0,1,2$$

(on remarque que les fonctions G_1, G_2, G_3 et G_4 vérifient la condition du lemme I.1).

Il en résulte que

$$\begin{aligned} |\tilde{\lambda}^{(m)}(x)| &\leqslant \text{Const } x^{\theta+1-m} \\ |\tilde{\mu}^{(m)}(y)| &\leqslant \text{Const } y^{\theta+1-m} \end{aligned} \qquad m = 0,1$$

$$\begin{aligned} |\tilde{\nu}^{(m)}(x)| &\leqslant \text{Const } x^{\theta+2-m} \\ |\sigma^{(m)}(x)| &\leqslant \text{Const } x^{\theta+2-m} \end{aligned} \qquad m = 0,1,2$$

Nous en déduisons que $\tilde{\lambda}(x)$ et $\tilde{\lambda}^{(1)}(x)$ convergent vers 0 quand x tend vers 0, $\tilde{\mu}(y)$ et $\tilde{\mu}^{(1)}(y)$ convergent vers 0 quand y tend vers 0, $\tilde{\nu}(x)$, $\tilde{\sigma}(x)$ et leurs dérivées jusqu'à l'ordre 2 convergent vers 0 quand x tend vers 0 soit

$$\tilde{\lambda}^{(m)}(0) = \tilde{\mu}^{(m)}(0) = 0 \qquad m = 0,1$$
$$\tilde{\nu}^{(m)}(0) = \tilde{\sigma}^{(m)}(0) = 0 \qquad m = 0,1,2$$

et que $\tilde{\lambda} \in C^1([0,2A],\mathbb{R}), \tilde{\mu} \in C^1([0,2A],\mathbb{R}), \tilde{\nu} \in C^2([0,2A],\mathbb{R}), \tilde{\sigma} \in C^2([0,2A],\mathbb{R})$.

Enfin, u est continue et vérifie $u(0,0) = 0$.

On doit maintenant trouver sous quelles conditions les fonctions $\tilde{\lambda},\tilde{\mu},\tilde{\nu},\tilde{\sigma}$ et $\tilde{u}$ satisfont les conditions (II.13).

D'après les inégalités (II.17) — (II.20) les hypothèses H.5 — H.8 les relations (II.4), nous avons

$$\frac{|\tilde{\lambda}^{(1)}(\bar{x})-\tilde{\lambda}^{(1)}(x)|}{(\bar{x}-x)^{\theta}} \leqslant \frac{\left[C_1(2A)^{h-\theta}(1+\rho)+\dfrac{L}{2^{\theta+1}}\left[(\alpha+1)^{1+\theta}\beta^{\theta+1}+(\beta+1)^{1+\theta}\alpha^{1+\theta}+(\alpha+1)^{1+\theta}+(\beta+1)^{1+\theta}\right]\right]}{1-(\alpha\beta)^{\theta+1}}$$

$$\frac{|\tilde{\mu}^{(1)}(\bar{y})-\tilde{\mu}^{(1)}(y)|}{(\bar{y}-y)^{\theta}} \leqslant \frac{C_1(2A)^{h-\theta}(1+\rho)+\frac{L}{2^{\theta+1}}\left[(\alpha+1)^{1+\theta}\beta^{1+\theta}+(\beta+1)^{1+\theta}\alpha^{1+\theta}+(\alpha+1)^{1+\theta}+(\beta+1)^{1+\theta}\right]}{1-(\alpha\beta)^{\theta+1}}$$

$$\frac{|\tilde{\nu}^{(2)}(\bar{x})-\tilde{\nu}^{(2)}(x)|}{(\bar{x}-x)^{\theta}} \leqslant \frac{C_1(2A)^{h-\theta}(1+\rho)+\frac{L}{2^{\theta+1}}\left[(\alpha+1)^{\theta+2}\beta^{\theta+2}+(\beta+1)^{\theta+2}\alpha^{\theta+2}+(\alpha+1)^{\theta+2}+(\beta+1)^{\theta+2}\right]}{1-(\alpha\beta)^{\theta+2}}$$

$$\frac{|\tilde{\sigma}^{(2)}(\bar{x})-\tilde{\sigma}^{(2)}(x)|}{(\bar{x}-x)^{\theta}} \leqslant \frac{C_1(2A)^{h-\theta}(1+\rho)+\frac{L}{2^{\theta+1}}\left[(\alpha+1)^{\theta+2}\beta^{\theta+2}+(\beta+1)^{\theta+2}\alpha^{\theta+2}+(\alpha+1)^{\theta+2}+(\beta+1)^{\theta+2}\right]}{1-(\alpha\beta)^{\theta+2}}$$

$$\frac{|\tilde{u}(x,z)-\tilde{u}(x,y)|}{(\bar{x}-x)^{\theta}+(\bar{y}-y)^{\theta}} \leqslant C_2(1+\rho+L)2A\left[2^{\theta+1}+2(1+\alpha)^{\theta+1}+(2\alpha)^{\theta+1}+(\alpha(\alpha+1))^{\theta+2}+(1+\alpha)^{\theta+2}+2\alpha^{\theta+1}+\alpha^{4}+3\right]$$

(C_1 , C_2 étant des constantes positives).

Les fonctions $\tilde{\lambda},\tilde{\mu},\tilde{\nu}$, $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\mu}$ satisferont les conditions (II.13) si

$$\frac{C_1(2A)^{h-\theta}(1+\rho)+\frac{L}{2^{\theta+1}}\left[(\alpha+1)^{1+\theta}\beta^{1+\theta}+(\beta+1)^{1+\theta}\alpha^{1+\theta}+(\alpha+1)^{1+\theta}+(\beta+1)^{1+\theta}\right]}{1-(\alpha\beta)^{\theta+1}} \leqslant L$$

$$C_2(1+\rho+L)2A\left[2^{\theta+1}+2(1+\alpha)^{\theta+1}+(2\alpha)^{\theta+1}+(\alpha(1+\alpha))^{\theta+2}+(1+\alpha)^{\theta+2}+2\alpha^{\theta+1}+\alpha^4+3\right]\leqslant\rho.$$

Pour que ces dernières inégalités se réalisent, il suffit de prendre

$$\text{(II.21)}\quad\left[\begin{array}{l} A\ \text{ suffisamment petit} \\ \alpha,\beta\leqslant\bar{\alpha}\ \text{ suffisamment petit pour satisfaire} \\ \quad(\bar{\alpha}+1)^{\theta+1}\bar{\alpha}^{\theta+1}+(\bar{\alpha}+1)^{\theta+1}+2^{\theta}\bar{\alpha}^{2\theta+2}\leqslant 2^{\theta} \\ \quad L\geqslant C_1A^{h-\theta}(1+\rho)\left[1-(\frac{\alpha+1}{2})^{\theta+1}\beta^{\theta+1}-(\frac{\beta+1}{2})^{\theta+1}\alpha^{\theta+1}-(\frac{\alpha+1}{2})^{\theta+1}-(\frac{\beta+1}{2})^{\theta+1}\right]^{-1}. \end{array}\right.$$

On prouve facilement en se servant du théorème d'Ascoli-Arzela la compacité de $\tilde{Z}$ image de Z par notre transformation.

c) *Continuité de l'application.*

Considérons $U_1=[\lambda_1(x),\mu_1(y),\nu_1(x),\sigma_1(x),u_1(x,y)]$ et $U_2=[\lambda_2(x),\mu_2(y),\nu_2(x),\sigma_2(x),u_2(x,y)]$ deux points de Z. Soient $\tilde{U}_1=[\tilde{\lambda}_1(x),\tilde{\mu}_1(y),\tilde{\nu}_1(x),\tilde{\sigma}_1(x),\tilde{u}_1(x,y)]$ et $\tilde{U}_2=[\tilde{\lambda}_2(x),\tilde{\mu}_2(y),\tilde{\nu}_2(x),\tilde{\sigma}_2(x),\tilde{u}_2(x,y)]$ les images de U_1, U_2 par la transformation (II.16), nous allons montrer l'inégalité suivante :

$$\max\Bigg[\max_{m=0,1}\left\{\sup_{[0,2A]}|\tilde{\lambda}_1^{(m)}(x)-\tilde{\lambda}_2^{(m)}(x)|,\ \sup_{[0,2A]}|\tilde{\mu}_1^{(m)}(y)-\tilde{\mu}_2^{(m)}(y)|\right\},$$

$$\max_{m=0,1,2}\left\{\sup_{[0,2A]}|\tilde{\nu}_1^{(m)}(x)-\tilde{\nu}_2^{(m)}(x)|,\ \sup_{[0,2A]}|\tilde{\sigma}_1^{(m)}(x)-\tilde{\sigma}_2^{(m)}(x)|\right\},$$

$$\sup_D|\tilde{u}_1(x,y)-\tilde{u}_2(x,y)|\Bigg]$$

$$\leqslant \text{Const}\ \max \left[\max_{m=0,1} \left[\sup_{[0,2A]} |\lambda_1^{(m)}(x)-\lambda_2^{(m)}(x)| \right]^\delta , \left[\sup_{[0,2A]} |\mu_1^{(m)}(y)-\mu_2^{(m)}(y)| \right]^\delta \right.$$

$$\max_{m=0,1,2} \left[\sup_{[0,2A]} |\nu_1^{(m)}(x)-\nu_2^{(m)}(x)| \right]^\delta , \left[\sup_{[0,2A]} |\sigma_1^{(m)}(x)-\sigma_2^{(m)}(x)| \right]^\delta$$

$$\left. \left[\sup_{D} |u_1(x,y)-u_2(x,y)| \right]^\delta \right]$$

où δ est un nombre positif arbitraire tel que $0 < \delta < 1$

En effet, soit $x \in [0,2A]$,

$$\tilde{\lambda}_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} G_{11}((\alpha\beta)^k x)$$

$$\tilde{\lambda}_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} G_{12}((\alpha\beta)^k x).$$

On a :

$$G_{11}(x)-G_{12}(x) = - \left[R(\tfrac{x}{2},\tfrac{\alpha}{2}\,x,u_1(\tfrac{x}{2},\tfrac{\alpha}{2}\,x)) - R(\tfrac{x}{2},\tfrac{\alpha}{2}\,x,u_2(\tfrac{x}{2},\tfrac{\alpha}{2}\,x)) \right]$$

$$+ \left[\lambda_1(\tfrac{\alpha+1}{2}\,x) - \lambda_2(\tfrac{\alpha+1}{2}\,x) \right] + \left[\lambda_1(\tfrac{\beta+1}{2}\,x) - \lambda_2(\tfrac{\beta+1}{2}\,x) \right]$$

$$- \left[\lambda_1((\tfrac{\alpha+1}{2})\beta x) - \lambda_2((\tfrac{\alpha+1}{2})\beta x) \right] + \left[\lambda_1((\tfrac{\beta+1}{2})\alpha x) - \lambda_2((\tfrac{\beta+1}{2})\alpha x \right]$$

en utilisant les relations (II.15), il en résulte que pour $m = 0,1$

$$|\tilde{\lambda}_1^{(m)}(x)-\tilde{\lambda}_2^{(m)}(x)| \leqslant k_1 \max_{m=0,1} \left[\sup_{[0,2A]} |\lambda_1^{(m)}(x)-\lambda_2^{(m)}(x)| \right]^\delta +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{d^m}{dx^m} R(\frac{(\alpha\beta)^k}{2}\,x,\ \frac{\alpha(\alpha\beta)^k}{2}\,x,u_1) - \frac{d^m}{dx^m} R(\frac{(\alpha\beta)^k}{2}\,x,\ \frac{\alpha(\alpha\beta)^k}{2}\,x,u_2) \right\}$$

où $k_1 > 0$.

En se servant de l'hypothèse (H.10), nous obtenons

$$|\tilde{\lambda}_1^{(m)}(x)-\tilde{\lambda}_2^{(m)}(x)| \leqslant k_1 \max_{m=0,1} \left[\sup_{[0,2A]} |\lambda_1^{(m)}(x)-\lambda_2^{(m)}(x)|\right]^{\delta} + k_2\left[\sup_{D} |u_1(x,y)-u_2(x,y)|\right]^{\delta}$$

k_2 étant une constante positive.

De même, on a pour $m = 0,1$, $y \in [0,2A]$

$$|\tilde{\mu}_1^{(m)}(y)-\tilde{\mu}_2^{(m)}(y)| \leqslant k_1 \max_{m=0,1} \left[\sup_{[0,2A]} |\nu_1^{(m)}(x)-\nu_2^{(m)}(x)|\right]^{\delta} + k_2\left[\sup_{D} |u_1(x,y)-u_2(x,y)|\right]^{\delta} \quad ;$$

pour $m = 0,1,2$, $x \in [0,2A]$

$$|\tilde{\nu}_1^{(m)}(x)-\tilde{\nu}_2^{(m)}(x)| \leqslant k_1 \max_{m=0,1,2} \left[\sup_{[0,2A]} |\nu_1^{(m)}(x)-\nu_2^{(m)}(x)|\right]^{\delta} + k_2\left[\sup_{D} |u_1(x,y)-u_2(x,y)|\right]^{\delta}$$

$$|\tilde{\sigma}_1^{(m)}(x)-\tilde{\sigma}_2^{(m)}(x)| \leqslant k_1 \max_{m=0,1,2} \left[\sup_{[0,2A]} |\sigma_1^{(m)}(x)-\sigma_2^{(m)}(x)|\right]^{\delta} + k_2\left[\sup_{D} |u_1(x,y)-u_2(x,y)|\right]^{\delta}$$

Enfin, pour $(x,y) \in D$ et toujours d'après les relations (II.15), l'hypothèse (H.10), on a l'inégalité suivante :

$$|\tilde{u}_1(x,y)-\tilde{u}_2(x,y)| \leqslant d_1\left[\sup_{D}|u_1(x,y)-u_2(x,y)|\right]^{\delta} + d_2 \max_{m=0,1}\left[\sup_{[0,2A]} |\lambda_1^{(m)}(x)-\lambda_2^{(m)}(x)|\right]^{\delta}$$

$$+ d_3 \max_{m=0,1} \left[\sup_{[0,2A]} |\mu^{(m)}(y)-\mu_2^{(m)}(y)|\right]^{\delta} + d_4 \max_{m=0,1,2}\left[\sup_{[0,2A]} |\nu_1^{(m)}(x)- {}^{(m)}(x)|\right]^{\delta}$$

$$+ d_5 \max_{m=0,1,2}\left[\sup_{[0,2A]} |\sigma_1^{(m)}(x) - \sigma_2^{(m)}(x)|\right]^{\delta}$$

d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 désignent toutes des constantes positives.

En utilisant les relations précédentes, nous aurons la relation (II.22) qui nous donne immédiatement la continuité de la transformation (II.16). Toutes les assertions du théorèmes du point fixe de Schaüder sont à présent vérifiées. En se basant sur ce théorème, on peut affirmer qu'il existe un point fixe $U = [\lambda^o(x), \mu^o(y), \nu^o(x), \sigma^o(x), u^o(x,y)]$ de la transformation (II.16), c'est-à-dire des fonctions φ_1^o, φ_2^o, Ψ^o, u^o satisfaisant le système (II.9) et la relation (II.8).

Conclusion :

Nous sommes en mesure maintenant de formuler le théorème d'existence locale suivant :

Théorème II.1.-

Avec les hypothèses

$$M \in C^1([0,A], \mathbb{R}) \qquad M(0) = M^{(1)}(0) = 0$$

$$N \in C^1([0,A], \mathbb{R}) \qquad N(0) = N^{(1)}(0) = 0$$

$$P \in C^2([0,A], \mathbb{R}) \qquad P(0) = P^{(1)}(0) = P^{(2)}(0) = 0$$

$$T \in C^2([0,A], \mathbb{R}) \quad T(x) = M(\beta x) - M(x) + N(\alpha x) - N(x), \quad T^{(2)}(0) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} |M^{(1)}(\bar{x}) - M^{(1)}(x)| &\leq K(\bar{x}-x)^h \\ |N^{(1)}(\bar{y}) - N^{(1)}(y)| &\leq K(\bar{y}-y)^h \\ |P^{(2)}(\bar{x}) - P^{(2)}(x)| &\leq K(\bar{x}-x)^h \\ |T^{(2)}(\bar{x}) - T^{(2)}(x)| &\leq K(\bar{x}-x)^h \end{aligned}\right. \qquad h > 0$$

$c(x,y,z)$ continue dans $D \times \mathbb{R}$ et vérifiant les conditions

$$|c(x,y,z)| \leq M(1+|z|)$$

$$|c(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) - c(x,y,z)| \leq K\left[|\bar{x}-x|^{h_o} + |\bar{y}-y|^{h_o} + |\bar{z}-z|\right], \quad h_o \in]h,1]$$

$\alpha, \beta \leqslant \bar{\alpha}$

A et $\bar{\alpha}$ suffisamment petit pour satisfaire (II.21).

Alors le problème de Goursat suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = C(x,y,u) \\ \\ u(x,\alpha x) = M(x), \quad u(\beta y, y) = N(y), \quad u(x,x) = P(x) \end{cases}$$

admet une solution dans le domaine

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 \leqslant x \leqslant A, \ 0 \leqslant y \leqslant A, \ x+y \leqslant A\}.$

B I B L I O G R A P H I E

[1] J.P. AZIZ, A.K. MALONEY - *An application of Tychonof's fixed point theorem to hyperbolic partial differential equations.* Math. Ann. 162, 77-82 (1965-66).

[2] A. BIELECKI et J. KISYNSKI - *Sur le problème de E. Goursat relatif à l'équation* $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x,y)$. Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska. Sect. A, 10 (1956), 99-126.

[3] A. BORZYMOWSKI - *A Goursat problem for a polyvibratingequation of D. Mangeron.* Funkcialaj Ekvacioj, 23 (1980), 1-16.

[4] A. BORZYMOWSKI - *A non linear Goursat problem for a 4th order polyvibrating equation.* Proceeding of the Royal Society of Edinburg, 92A, 153-164, 1982.

[5] G. HECQUET - *Sur l'existence globale ou la périodicité des solutions de problèmes différentiels de type hyperbolique.* Thèse de Doctorat d'Etat (1976), Université de Lille I.

[6] G. HECQUET - *Etude de quelques problèmes d'existence globale concernant l'équation*
$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = f(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}).$$
Appl. Anal. (1977), Vol. 7, p. 29-41.

[7] M.N. OGUZTORELI - *Sur le problème de Goursat pour une équation de Mongeron de l'ordre supérieur I, II.* Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. (5) 58, (1972).

[8] O. SJOSTRAND - *Sur le problème de M. Goursat pour les équations aux dérivées partielles du second ordre ou de l'ordre supérieur* (Göteborg, Thèse 1929).

[9] M. WINANTS - *Quelques équations linéaires aux dérivées partielles possédant trois familles distinctes de caractéristiques réelles,* Bull. de l'Acad. Roy. de Belgique, Cl. des Sci. XVI, N° 6 (775-793), (1930).

[10] M. WINANTS - *Résolution du problème* (a_o,IV,1°). Bull. de l'Acad. Roy. de Belgique, Cl. des Sci. XXI, (376-384), (1935).

[11] M. WINANTS - *Résolution du problème* (a_o,IV,2°). Bull. de l'Acad. Roy. de Belgique, Cl. des Sci. XXI (495-503), (1935).

[12] M. WINANTS - *Chacun des deux problèmes* (a_o,III,3") *et* (a_o,III,2') *peut être résolu par le moyen d'une équation intégrale ayant un nombre infini de termes.* Bull. de l'Acad. Roy. de Belgique, Cl. des Sci. XXII (8-25), (1936).

RÉSUMÉ

L'objet de ce travail est l'étude du problème de Goursat relatif à l'équation :

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = c(x,y,u)$$

et aux conditions initiales :

$$u(x,\alpha x) = M(x),\ u(\beta x,x) = N(x),\quad u(x,x) = P(x)$$

avec α, β, des constantes positives inférieures à 1.

Dans le premier chapitre, on recherche tout d'abord les conditions satisfaites par les fonctions M, N, P et à l'aide d'un système auxiliaire on détermine une solution de l'équation de Winants :

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 0.$$

$$u(x,\alpha x) = M(x),\ u(\beta y,y) = N(y),\quad u(x,x) = P(x).$$

Dans la suite, on étudie principalement le cas non linéaire et on établit l'existence d'une solution du problème de Goursat suivant la technique de A. Borzymowski.

MOTS CLES : *Equation aux dérivées partielles,*
Equation hyperbolique,
Equation non linéaire.