

N° d'ordre : 1149

50376
1984
231

50376.
1984.
231.

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

par

Jean - Luc KOTNY

**CONTRIBUTION A LA MODELISATION
DES MACHINES SYNCHRONES
A SIMPLE ET DOUBLE ETOILE**



030 04-10-1

Soutenue le 28 septembre 1984 devant la Commission d'Examen

MM.	G.	SEQUIER	Président
	J.	LESENNE	Rapporteur
	M.	CRAPPE	Examinateur
	M.	LECLERCQ	Examinateur
	F.	NOTELET	Examinateur
	J.P.	PASCAL	Examinateur

A V A N T - P R O P O S

Les recherches dont les résultats sont résumés dans ce mémoire ont été effectuées dans le cadre du Laboratoire "Applications des redresseurs de puissance" de l'Université des Sciences et Techniques de Lille, sous la direction de Monsieur le Professeur J. LESENNE, en étroite liaison avec Monsieur J.P. PASCAL, Chef de la Division Technologies Nouvelles de l'Institut de Recherche des Transports. Nous avons d'ailleurs bénéficié d'une bourse de l'I.R.T. pour effectuer cette étude.

Nous tenons à témoigner à Monsieur J. LESENNE notre très profonde reconnaissance pour l'attention bienveillante avec laquelle il nous a guidé tout au long de ce travail.

Nous remercions très vivement Monsieur le Professeur G. SEGUIER d'avoir accepté de présider le jury auquel nous soumettons ce mémoire. Grâce à lui nous avons toujours trouvé auprès de tous les membres du Laboratoire l'aide que nous sollicitons.

La présence dans ce jury de Monsieur le Professeur M. CRAPPE de la Faculté Polytechnique de Mons nous honore beaucoup.

Nous avons bénéficié des liens étroits unissant notre laboratoire à la Société Jeumont Schneider où nous avons effectué un long stage. Monsieur M. LECLERCQ, Chef du Département Production d'Energie section Etude nous a accueilli dans son Service et a beaucoup aidé notre travail sur le calcul des réactances. Nous lui redisons notre profonde gratitude.

Nous sommes heureux que Monsieur le Professeur F. NOTELET de l'IUT de Béthune, ait bien voulu examiner notre travail et faire partie de ce jury.

Nous remercions beaucoup Monsieur J.P. PASCAL et à travers lui l'Institut de Recherche des Transports de nous avoir permis d'effectuer cette étude et d'en avoir suivi attentivement le déroulement. Nous sommes heureux qu'il soit là au moment où nous exposons les résultats obtenus.

Nous exprimons notre vive gratitude à Madame DERACHE, à Madame LEMAIRE et à Monsieur HOUZE qui ont assuré la réalisation pratique de ce mémoire.

CONTRIBUTION A LA MODELISATION
DES MACHINES SYNCHRONES
A SIMPLE ET DOUBLE ETOILE

PREMIERE PARTIE

MODELISATION DE LA MACHINE SYNCHRONE

SIMPLE ETOILE

I N T R O D U C T I O N

Les études sur la modélisation et l'identification des paramètres de la machine synchrone connaissent, actuellement, un regain d'intérêt. Cela tient à l'importance que prend la connaissance du comportement de ces machines en régime dynamique compte tenu de leur mode de régulation, de l'accroissement des puissances unitaires des groupes, du fonctionnement des réseaux au voisinage de leur limite de stabilité.

Il est nécessaire pour mener à bien les études tant théoriques qu'expérimentales de se bâtir un modèle. Un modèle est un mode de représentation d'un système réel permettant :

- de donner une image des phénomènes observés expérimentalement
- de prévoir le comportement du système étudié lors de diverses conditions de fonctionnement.

Pour L. PIERRAT [1] il existe deux types de modèles :

- Les modèles d'action auxquels on demande de rendre compte du comportement du système défini comme étant une boîte noire. Il n'est pas alors nécessaire de s'intéresser à une description physique interne. Ces modèles "mathématiques" ne cherchent qu'à rendre compte de la réalité observée sans essayer de suivre la réalité physique sous-jacente.
- Les modèles de connaissance dont l'élaboration est basée sur l'interprétation des phénomènes internes au moyen des lois physiques. Ils permettent de caractériser le système à partir de considérations physiques ; ils définissent des paramètres significatifs.

Les modèles du premier type sont utilisés par l'automaticien pour l'étude des problèmes de stabilité.

Les seconds sont utilisés par l'électrotechnicien qui désire toujours avoir une image physique du dispositif étudié.

En ce qui concerne la machine synchrone le modèle usuel est celui établi par R.H.PARK [2] [3]. C'est un modèle de connaissance qui constitue une extension aux régimes variables de la méthode de A. BLONDEL pour l'étude du fonctionnement en régime permanent des machines synchrones à entrefer variable. Cette méthode a été développée ensuite par R.E. DOHERTY et C.A.NICKLE [4] et elle est largement utilisée pour l'enseignement de l'électrotechnique dans les pays anglo-saxons grâce aux livres de C. CONCORDIA [5] et de B. ADKINS et R.G HARLEY [6]

Cette façon de présenter l'électrotechnique gagne du terrain en France grâce aux ouvrages de J. LESENNE, F. NOTELET, G. SEGUIER [7] et de Ph. BARRET [8]

La terminologie et les essais relatifs à ce modèle ont d'ailleurs été codifiés par le Comité Electrotechnique International [9] [10]

Notons l'existence d'un modèle plus général dû à Y.H. KU [11].

Ce modèle, compte tenu de l'interprétation physique plus délicate n'est guère utilisé par la communauté électrotechnique internationale.

L'étude analytique classique conduit à des résultats présentant avec les relevés expérimentaux des différences parfois notables.

Ces différences peuvent avoir plusieurs causes :

a) La première est due à la simplification extrême du modèle utilisé. En effet de manière à observer des résultats analytiques on est amené à considérer un modèle linéaire pour représenter une machine aux caractéristiques non linéaires dues aux effets magnétiques. On ne tient en particulier pas compte de la saturation. En général on étudie la machine "autour d'un point de fonctionnement", c'est l'hypothèse des petites variations, c'est à dire pour un état magnétique donné. De très nombreux travaux ont été consacrés à ce problème en particulier par G. SHACKSHAFT et P.B. HENSER[12]. Si l'on désire tenir compte de la saturation il faut alors résoudre numériquement les équations de PARK en y introduisant la caractéristique magnétique de la machine. Si l'hystérésis ne conduit pas à de grandes erreurs compte tenu de l'étroitesse des cycles d'hystérésis des tôles utilisées dans les machines normales, il n'en est pas de même des hypothèses effectuées pour représenter le fer massif du rotor. Les amortisseurs sont en effet représentés dans le modèle de PARK par des circuits à constantes localisées. Or pour les turbo-alternateurs de grande puissance l'effet d'amortissement dû aux courants de Foucault induits dans le fer massif ne peut être modélisé par de tels circuits. La représentation exacte est complexe et peut être traitée par les équations de MAXWELL. De nombreuses études ont été consacrées à ce problème [13] [14] [15].

Ces différentes remarques ont amené M. CANAY [16] [17] [18] à proposer un modèle quelque peu plus complexe pour essayer d'améliorer la corrélation entre résultats théoriques et résultats expérimentaux.

b) La seconde est due aux méthodes et aux techniques de mesures utilisées pour déterminer les paramètres du modèle de PARK.

A la Faculté Polytechnique de MONS l'équipe du Professeur CRAPPE s'est attachée à l'étude des procédés de mesures et des erreurs sur la détermination des paramètres dues à la chaîne de mesure. L'amélioration des relevés réduit fortement certains écarts entre résultats théoriques et expérimentaux. La synthèse de ces travaux a été publiée dans la thèse de M. DELHAYE [19].

D'autres auteurs tels que D. PETROVIC [20], B. SCHAKSHAFT [21] ont proposé des méthodes de mesure améliorées.

Dans la première partie de ce travail nous évaluons les erreurs dues aux hypothèses simplificatrices. Les calculs menés sans avoir recours à celles-ci, inévitablement plus complexes, mettent en évidence les termes correctifs des expressions analytiques. On peut ainsi chiffrer les erreurs commises et évaluer les conditions de validité des hypothèses [22] [23], et présenter une théorie simplifiée du modèle de PARK de la machine synchrone [24]

La deuxième partie de ce mémoire traitera du modèle de PARK de la machine synchrone double étoile. L'expérimentation d'un tel moteur synchrone autopiloté est en cours en traction ferroviaire sur les locomotives de la série B.B. dans le but de remplacer les moteurs à collecteur mécanique équipant les bogies "monomoteur". Cette suppression est sans doute le progrès le plus important attendu en matière de moteurs de traction. Dans une telle application la génération du couple et celle de la force contre électromotrice du moteur sont analogues à celle du moteur à courant continu, mais dans ce cas l'induit est fixe et l'inducteur tournant.

Les enroulements du stator sont alimentés par un ensemble de thyristors onduleurs qui jouent le rôle du collecteur du moteur à courant continu et constituent ainsi un collecteur statique. Il est bien connu que l'utilisation d'un moteur synchrone simple étoile autopiloté se comporte comme un moteur à courant continu qui aurait seulement trois lames de collecteur. Il engendre des pulsations de couple non négligeables dans la ligne d'arbre qui peuvent dans bien des cas se révéler intolérables. Par ailleurs le champ magnétique de réaction d'induit, se déplaçant dans l'entrefer à la vitesse de synchronisme non plus par un mouvement uniforme mais par bonds successifs, crée des pertes supplémentaires en surface du rotor. Celles-ci nécessitent un surdimensionnement général de la machine pour éviter des contraintes thermiques trop élevées. Pour atténuer ces phénomènes indésirables il suffit d'augmenter le nombre de lames du collecteur fictif ; c'est ce que permet l'enroulement double étoile [25]

Il s'agit en fait de remplacer l'enroulement triphasé de la machine par deux enroulements triphasés dont les phases respectives décalées de 30° électrique sont connectées en deux étoiles indépendantes, chacune d'elles étant alimentée par son convertisseur propre. Le schéma équivalent classique de la machine synchrone triphasé n'est pas utilisable pour l'étude du comportement de la machine double étoile : couple et courant de court-circuit, commutations

En partant de la théorie des deux axes de R.H. PARK nous allons proposer des équations opérationnelles régissant le fonctionnement de cette machine et essayer de la ramener à la théorie classique de la machine simple étoile. On pourra ainsi déterminer la valeur des principales réactances et constantes de temps en double étoile et les comparer à celles établies en simple étoile notamment par P.L. ALGER [26] et LA.KILGORE [27] On étudiera également quelques applications de la machine double étoile en régime permanent et en court-circuit triphasé brusque symétrique.

CHAPITRE I

EQUATIONS DE LA MACHINE SYNCHROME SIMPLE ETOILE
--

I. MODÈLE DE PARK DE LA MACHINE SYNCHROMEI.1. MACHINE SYNCHROME IDEALISEEI.1.1. Description.

Une machine synchrone se compose

- . de l'inducteur alimenté en continu
- . de l'induit généralement triphasé

D'ordinaire l'induit est fixe et l'inducteur tournant. Le bobinage de l'inducteur peut-être concentré autour de noyaux, c'est le cas des machines à pôles saillants. Il peut être réparti dans des encoches fraisées dans la masse du rotor cylindrique, la machine est dite alors à rotor lisse ou à pôles lisses.

Les machines à pôles saillants ont leur rotor muni d'amortisseurs constitués de barres de cuivre logées dans des encoches pratiquées dans les pièces polaires ; ces barres sont reliées entre elles à leurs extrémités par des anneaux conducteurs.

Les amortisseurs s'opposent à toute variation rapide du flux à travers le rotor.

Dans les machines à pôles lisses, c'est la partie massive du fer rotorique qui joue le rôle d'amortisseurs.

- Le haut de la figure 1.1 représente le développement frontal des pièces polaires et des amortisseurs à sept barres par pôle d'une machine bipolaire.

Au dessous, on a schématisé la façon dont on tient compte des amortisseurs

- . par un groupe de circuits reliant deux à deux les barres symétriques par rapport à l'axe polaire
- . et par un groupe de circuits reliant les barres symétriques par rapport à l'axe interpolaire.

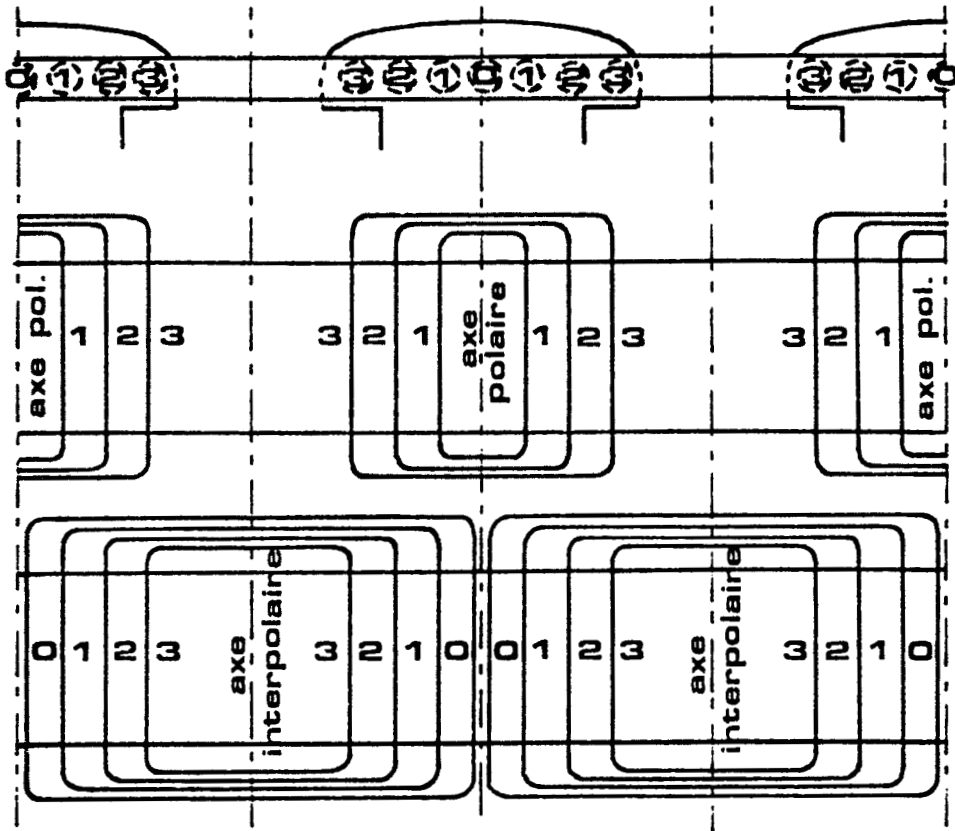


Figure 1.1.

- S'il y a $2n$ ou $2n+1$ barres par pièce polaire, suivant l'axe polaire, on a n cadres en court-circuit. Chacun de ces n circuits est couplé magnétiquement aux $(n-1)$ autres, à l'enroulement inducteur et aux trois enroulements statoriques.

De plus ces n cadres présentent des impédances communes car des parties des trajets de leurs courants sont confondues.

- De même, suivant l'axe interpolaire, suivant qu'il y a $2n$ ou $2n+1$ barres par pôle, les amortisseurs équivalent à n ou $(n+1)$ cadres en court-circuit. Ces cadres sont couplés électriquement et magnétiquement entre eux, magnétiquement aux phases statoriques.

- Les cadres de la première famille ne présentent pas d'inductance mutuelle avec ceux de la seconde, leurs axes étant perpendiculaires.

Les effets des chutes de tension mutuelles entre cadres des deux familles ont une résultante nulle à cause de la symétrie des amortisseurs par rapport aux axes polaire et interpolaire. Toute chute de tension apparaissant dans une barre ou portion d'anneau situé d'un côté d'un pôle est égale et opposée à celle produite dans la barre ou portion d'anneau symétrique par rapport à l'axe du pôle.

- En négligeant les couplages résistifs le schéma équivalent à la machine synchrone munie d'amortisseurs est donc celui de la figure 1.2.

Au stator, on retrouve les 3 enroulements A, B, C.

Au rotor, suivant l'axe polaire ou direct, l'enroulement inducteur F et n enroulements en court-circuit KD_1, KD_2, \dots, KD_n qui rendent compte des effets des amortisseurs suivant cet axe.

Au rotor, suivant l'axe interpolaire ou en quadrature, n ou (n+1) enroulements en court-circuit KQ_1, KQ_2, \dots, KQ_n ou KQ_{n+1} traduisent les effets des amortisseurs suivant cet axe.

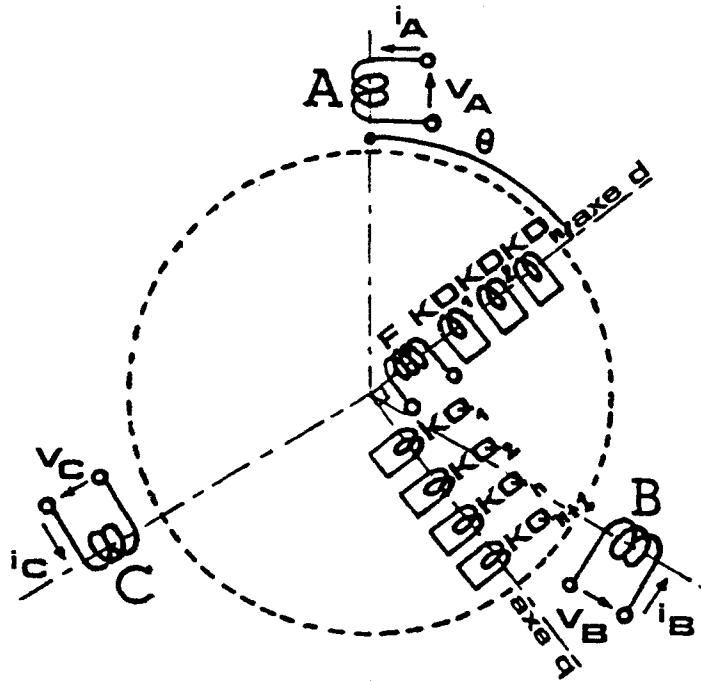


Figure 1.2.

I.1.2. Modèle simplifié considéré

Le schéma de la figure 1.2. conduit à des équations beaucoup trop complexes pour permettre de mener à bien des études analytiques.

On utilise un modèle simplifié qui constitue la machine synchrone "idéalisée".

On tient compte par un seul enroulement suivant l'axe direct et un seul enroulement suivant l'axe en quadrature des effets des amortisseurs.

La machine idéalisée comporte donc :

- . au stator, les bobinages A, B, C des trois phases décalés deux à deux de 120° électriques ;
- . au rotor suivant l'axe direct, le bobinage inducteur F et l'amortisseur direct KD ;
- . au rotor suivant l'axe en quadrature, l'amortisseur KQ

Le schéma de la machine idéalisée est alors celui de la figure 1.3.

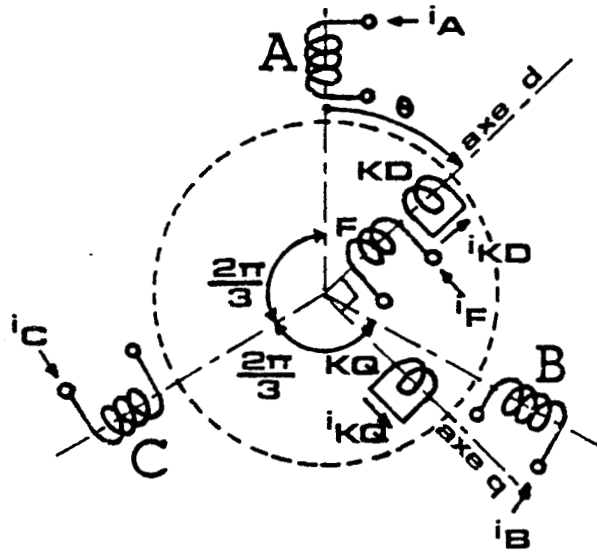


Figure 1.3.

I.2. MISE EN EQUATION DU MODELE IDEALISE

On adopte les hypothèses nécessaires à l'obtention d'un modèle linéaire et on suppose que les f.m.m. créés par les enroulements sont à répartition sinusoïdale.

Les équations générales des tensions du moteur synchrone s'écrivent sous forme matricielle

$$(1.1) \left\{ \begin{array}{l} [v_S] = [R_S] \cdot [i_S] + \frac{d}{dt} ([L_{SS}] \cdot [i_S] + [M_{SR}] \cdot [i_R]) \\ [v_R] = [R_R] \cdot [i_R] + \frac{d}{dt} ([M_{RS}] \cdot [i_S] + [L_{RR}] \cdot [i_R]) \end{array} \right.$$

avec

$$[v_S] = \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \end{bmatrix} ; [v_R] = \begin{bmatrix} v_F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; [i_S] = \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} ; [i_R] = \begin{bmatrix} i_F \\ i_{KD} \\ i_{KQ} \end{bmatrix} ;$$

$$[R_S] = R_S [1] ; [R_R] = \begin{bmatrix} R_F & 0 & 0 \\ 0 & R_{KD} & 0 \\ 0 & 0 & R_{KQ} \end{bmatrix}$$

$$[L_{SS}] = \begin{bmatrix} L_A & M_{AB} & M_{AC} \\ M_{AB} & L_B & M_{BC} \\ M_{AC} & M_{BC} & L_C \end{bmatrix} ; [L_{RR}] = \begin{bmatrix} L_F & M_{F,KD} & 0 \\ M_{F,KD} & L_{KD} & 0 \\ 0 & 0 & L_{KQ} \end{bmatrix}$$

$$[M_{SR}] = \begin{bmatrix} M_{AF} & M_{A,KD} & M_{A,KQ} \\ M_{BF} & M_{B,KD} & M_{B,KQ} \\ M_{CF} & M_{C,KD} & M_{C,KQ} \end{bmatrix} ; [M_{RS}] = [M_{SR}]_t$$

Où R_S et R_F , R_{KD} , R_{KQ} désignent les résistances des trois circuits statoriques et des enroulements F, KD, KQ du rotor.

Les inductances des enroulements statoriques et leurs mutuelles inductances sont, pour les machines à pôles saillants, fonction de la position relative caractérisée par θ :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_A = L_{S0} + L_{SV} \cos 2\theta \\ L_B = L_{S0} + L_{SV} \cos 2(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ L_C = L_{S0} + L_{SV} \cos 2(\theta - \frac{4\pi}{3}) \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} M_{AB} = M_{S0} + L_{SV} \cos 2(\theta - \frac{4\pi}{3}) \\ M_{BC} = M_{S0} + L_{SV} \cos 2\theta \\ M_{AC} = M_{S0} + L_{SV} \cos 2(\theta - \frac{2\pi}{3}) \end{array} \right.$$

Pour les machines à rotor lisse, L_{SV} est nul. Mais les mutuelles inductances entre enroulements du stator et du rotor sont fonctions de θ pour les deux types de machines :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{AF} = M_{FS} \cos \theta \\ M_{BF} = M_{FS} \cos (\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ M_{CF} = M_{FS} \cos (\theta - \frac{4\pi}{3}) \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} M_{A,KD} = M_{KD,S} \cos \theta \\ M_{B,KD} = M_{KD,S} \cos (\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ M_{C,KD} = M_{KD,S} \cos (\theta - \frac{4\pi}{3}) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{A,KQ} = - M_{KQ,S} \sin \theta \\ M_{B,KQ} = - M_{KQ,S} \sin (\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ M_{C,KQ} = - M_{KQ,S} \sin (\theta - \frac{4\pi}{3}) \end{array} \right.$$

Les grandeurs L_{S0} , L_{SV} , M_{S0} , M_{FS} , $M_{KD,S}$, $M_{KQ,S}$ sont définies dans [7]

II. TRANSFORMATION DE PARK ET EQUATIONS TRANSFORMÉES

II.1. MATRICE DE TRANSFORMATION DE PARK

On peut simplifier le système d'équations(11) en effectuant le changement de les chiffres entre crochets renvoie à la bibliographie amenée en fin de mémoire.

de variables suivant :

$$[v_S] = [P_1(\theta)] [v_{CS}] \quad ; \quad [i_S] = [P_1(\theta)] [i_{CS}]$$

$[P_1(\theta)]$ étant la matrice de transformation de PARK modifiée pour laisser invariante la puissance instantanée.

$[P_1(\theta)]$ est une matrice orthogonale ayant pour expression

$$[P_1(\theta)] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \cos \theta & -\sin \theta \\ 1/\sqrt{2} \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ 1/\sqrt{2} \cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

La transformation ainsi écrite conduit à des schémas où les inductances mutuelles sont réciproques en faisant passer des tensions et courants statoriques réels à leurs composantes homopolaire, d'axe direct et d'axe en quadrature liées au rotor.

$$[v_{CS}] = \begin{bmatrix} v_o \\ v_d \\ v_q \end{bmatrix} \quad ; \quad [i_{CS}] = \begin{bmatrix} i_o \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix}$$

En reportant ce changement de variables dans le système d'équations (1.1) on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} [P_1(\theta)] \cdot [v_{CS}] = [R_S] \cdot [P_1(\theta)] \cdot [i_{CS}] + \frac{d}{dt} ([L_{SS}] \cdot [P_1(\theta)] \cdot [i_{CS}] + [M_{SR}] \cdot [i_R]) \\ [v_R] = [R_R] \cdot [i_R] + \frac{d}{dt} ([M_{RS}] \cdot [P_1(\theta)] \cdot [i_{CS}] + [L_{RR}] \cdot [i_R]) \end{array} \right.$$

Soit en prémultipliant par $[P_1(\theta)]^{-1}$ la première équation

$$(1.2) \left\{ \begin{array}{l} [v_{CS}] = [R_S] \cdot [i_{CS}] + [P_1(\theta)]^{-1} \cdot \frac{d}{dt} ([L_{SS}] \cdot [P_1(\theta)] \cdot [i_{CS}] + [M_{SR}] \cdot [i_R]) \\ [v_R] = [R_R] \cdot [i_R] + \frac{d}{dt} ([M_{RS}] \cdot [P_1(\theta)] \cdot [i_{CS}] + [L_{RR}] \cdot [i_R]) \end{array} \right.$$

II.2. EQUATIONS SIMPLIFIEES

En posant :

$$L_d = L_{SO} - M_{SO} + \frac{3}{2} L_{SV}$$

$$L_q = L_{SO} - M_{SO} - \frac{3}{2} L_{SV}$$

$$L_0 = L_{SO} + 2 M_{SO}$$

$$M_F = \sqrt{\frac{3}{2}} M_{FS}$$

$$M_{KD} = \sqrt{\frac{3}{2}} M_{KD,S}$$

$$M_{KQ} = \sqrt{\frac{3}{2}} M_{KQ,S}$$

$$M_{FD} = M_{F,KD}$$

$$\omega' = \frac{d\theta}{dt} \text{ la vitesse angulaire du rotor}$$

On obtient après simplification des équations matricielles(1.2) l'équation matricielle suivante.

$$(1.3) \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} v_d & R_S + L_d \frac{d}{dt} & -L_q \omega' & M_F \frac{d}{dt} & M_{KD} \frac{d}{dt} & -M_{KQ} \omega' & i_d \\ \hline v_q & L_d \omega' & R_S + L_q \frac{d}{dt} & M_F \omega' & M_{KD} \omega' & M_{KQ} \frac{d}{dt} & i_q \\ \hline v_F & M_F \frac{d}{dt} & 0 & R_F + L_F \frac{d}{dt} & M_{FD} \frac{d}{dt} & 0 & i_F \\ \hline 0 & M_{KD} \frac{d}{dt} & 0 & M_{FD} \frac{d}{dt} & R_{KD} + L_{KD} \frac{d}{dt} & 0 & i_{KD} \\ \hline 0 & 0 & M_{KQ} \frac{d}{dt} & 0 & 0 & R_{KQ} + L_{KQ} \frac{d}{dt} & i_{KQ} \end{array}$$

- On n'a pas reproduit dans les équations(1.3) l'équation liant v_0 et i_0 car cette composante homopolaire est totalement découplée des autres.

- On remarque que dans ces équations différentielles tous les coefficients sont maintenant indépendants de θ .

- La plupart des coefficients de cette matrice ne sont pas directement mesurables.

- On peut à partir d'essais mesurer quelques constantes de temps et quelques réactances.

- Le tableau 1.1 présente les principaux paramètres utilisés lors de l'étude d'une machine synchrone.

TABLEAU DES PARAMETRES CARACTERISTIQUES DE LA MACHINE SYNCHROME

$$\begin{aligned}
 X_d &= \omega' L_d \\
 X'_d &= \omega' \left(L_d - \frac{M_F^2}{L_F} \right) \\
 X''_d &= \omega' \left(L_d - \frac{L_{KD} M_F^2 + L_F M_{KD}^2 - 2M_F M_{FD} M_{KD}}{L_F L_{KD} - M_{FD}^2} \right) \\
 X_q &= \omega' L_q \\
 X''_q &= \omega' \left(L_q - \frac{M_{KQ}^2}{L_{KQ}} \right) \\
 T'_{do} &= \frac{L_F}{R_F} \\
 T''_{do} &= \frac{L_{KD}}{R_{KD}} \left(1 - \frac{M_{FD}^2}{L_F L_{KD}} \right) \\
 T'_d &= \frac{L_F}{R_F} \left(1 - \frac{M_F^2}{L_d L_F} \right) \\
 T''_d &= \frac{L_{KD}}{R_{KD}} \left(1 - \frac{L_d M_{FD}^2 + L_F M_{KD}^2 - 2M_F M_{FD} M_{KD}}{L_{KD} (L_d L_F - M_F^2)} \right) \\
 T''_{q0} &= \frac{L_{KQ}}{R_{KQ}} \\
 T''_q &= \frac{L_{KQ}}{R_{KQ}} \left(1 - \frac{M_{KQ}^2}{L_q L_{KQ}} \right) \\
 T_{KD} &= \frac{L_{KD}}{R_{KD}} \left(1 - \frac{M_{FD} M_{KD}}{M_F L_{KD}} \right)
 \end{aligned}$$

TABLEAU 1.1

L'annexe I présente le détail des différentes impédances et admittances intervenant dans l'étude de la machine synchrone.

De manière à alléger l'écriture de certaines expressions, on est amené à définir deux nouvelles constantes de temps

$$\begin{aligned} \cdot T_{KDO} &= \frac{L_{KD}}{R_{KD}} \\ \cdot T''_{dd} &= \frac{L_{KD}}{R_{KD}} \left(1 - \frac{M_{KD}^2}{L_{KD} L_d} \right) \end{aligned}$$

La signification de ces constantes de temps est la suivante :

· T_{KDO} étant la constante de temps de l'amortisseur KD avec l'enroulement induit d et l'enroulement inducteur F en circuit ouvert.

· T''_{dd} étant la constante de temps de l'amortisseur KD, avec l'enroulement induit den court-circuit et l'enroulement inducteur F ouvert.

Ces deux nouvelles constantes de temps peuvent être également exprimées à partir des constantes de temps et réactances classiques par les relations :

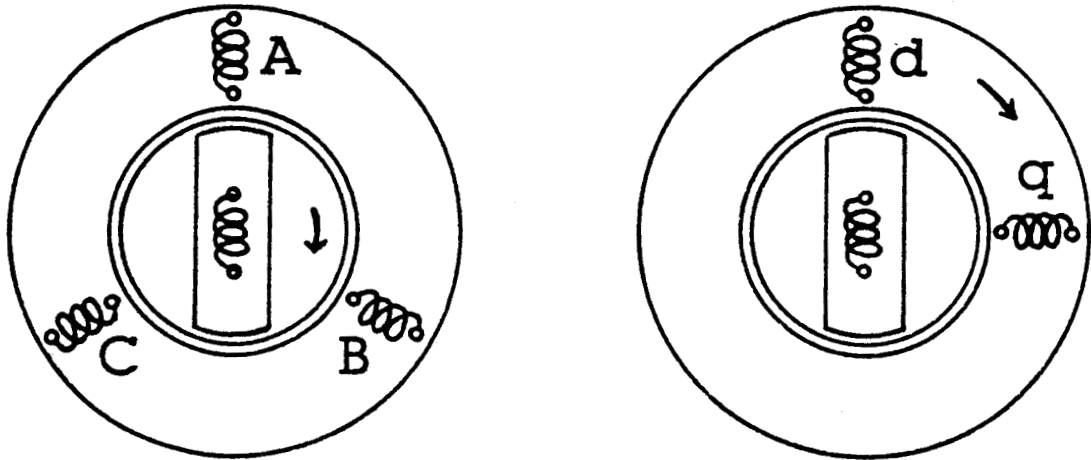
$$\begin{aligned} T''_{dd} &= T''_d \cdot B \\ T_{KDO} &= T''_{do} \cdot D \end{aligned}$$

B et D constantes sans dimensions supérieures à l'unité

$$\begin{aligned} \text{avec } B &= 1 + \frac{(X_d - X'_d) X''_d}{(X'_d - X''_d) X_d} \left[1 - \frac{T_{KD}}{T''_d} \right]^2 \\ D &= 1 + \frac{(X_d - X'_d)}{(X'_d - X''_d)} \left[1 - \frac{T_{KD}}{T''_{do}} \right]^2 \end{aligned}$$

II.3. INTERPRETATION PHYSIQUE DE LA TRANSFORMATION DE PARK

La transformation de PARK permet de passer d'une machine synchrone réelle triphasée à rotor tournant à une machine fictive diphasée équivalente à rotor fixe par rapport au stator.



machine réelle, structure triphasée au stator, mouvement relatif entre stator et rotor.

machine équivalente avec les composantes de PARK, structure diphasée au stator, pas de mouvement relatif entre stator et rotor.

Figure 1.4.

III. FONCTION DE TRANSFERT D'UNE MACHINE SYNCHRONE

III.1. PRESENTATION

On peut considérer la machine synchrone comme un tripôle pour lequel six grandeurs sont observables et mesurables v_d , i_d , v_q , i_q , v_F , i_F alors que deux ne le sont pas i_{KD} , i_{KQ}

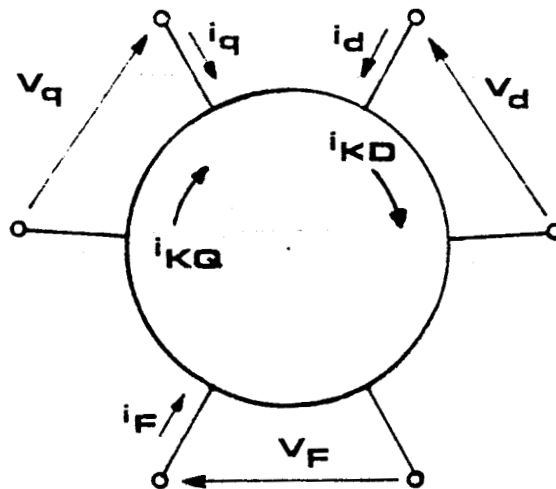


Figure 1.5.

On peut alors écrire en éliminant les grandeurs non mesurables, le système précédent sous la forme :

$$(1.4) \begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{dd} & Z_{dq} & Z_{dF} \\ Z_{qd} & Z_{qq} & Z_{qF} \\ Z_{Fd} & Z_{Fq} & Z_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_d \\ I_q \\ I_F \end{bmatrix}$$

Les Z_{ij} étant les impédances opérationnelles caractérisant la machine synchrone.

Généralement on cherche la forme des courants i_d , i_q , i_F connaissant la forme des tensions appliquées v_d , v_q , v_F .

3 cas sont à distinguer.

a) Une seule source v_d , v_q ou v_F est connectée au système, les deux autres paires de bornes étant en circuit ouvert. On désire alors établir l'expression du courant débité par l'unique générateur ainsi que les tensions apparaissant aux deux paires de bornes non connectées. Notons que l'enregistrement de ces grandeurs permet, dans certains cas, la détermination de certaines grandeurs caractéristiques de la machine synchrone. Cette étude conduit à la mise en évidence d'une première famille de fonctions de transfert.

b) Deux sources (v_d , v_q) ; (v_d , v_F) ou (v_q , v_F) sont connectées au système, la dernière paire de bornes restant en circuit ouvert. On désire dans ce cas établir les expressions des courants débités par les deux sources ainsi que celle de la tension apparaissant aux bornes du seul dipôle non connecté. Cette étude conduit à l'établissement d'une deuxième famille de fonctions de transfert.

c) Les trois paires de bornes sont réunies à des générateurs.
On désire ici encore déterminer l'expression littérale des trois courants transients dans chaque paire de bornes, ce qui conduit à l'établissement d'une troisième famille de fonctions de transfert.

Mais avant d'étudier chacune de ces familles, il convient au préalable d'établir les expressions des impédances opérationnelles Z_{ij} de l'équation matricielle (1.4)

III.2. EQUATIONS DU TRIPOLE

Pour obtenir les neuf impédances recherchées il suffit de résoudre le système(1.3) partiellement, en utilisant la technique des sous matrices et en éliminant les grandeurs non mesurables soit :

$$\begin{bmatrix} [V] \\ [0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [C] & [D] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [I] \\ [I'] \end{bmatrix}$$

d'où $[V] = ([A] - [B] \cdot [D]^{-1} \cdot [C]) [I]$, ce qui est une autre façon d'écrire l'équation matricielle(1.4)

On obtient ainsi après calculs :

$$a) \underline{Z_{dd}(p)} = \frac{(pL_d + R_S)(R_{KD} + L_{KD}p) - M_{KD}^2 p^2}{pL_{KD} + R_{KD}}$$

C'est à dire compte tenu des relations établies à l'annexe 1 :

$$Z_{dd}(p) = \frac{T''_{dd} X_d}{T_{KDO} w'} \cdot \frac{p^2 + p \left(\frac{R_S w' T_{KDO}}{T''_{dd} X_d} + \frac{1}{T''_{dd}} \right) + \frac{R_S w'}{T''_{dd} X_d}}{p + \frac{1}{T_{KDC}}}$$

$$b) \underline{Z_{dq}(p)} = -w' \frac{(L_q L_{KQ} - M_{KQ}^2)}{L_{KQ}} \cdot \frac{p + R_{KQ} L_q / (L_q L_{KQ} - M_{KQ}^2)}{p + R_{KQ} / L_{KQ}}$$

soit :

$$Z_{dq}(p) = -X''_q \cdot \frac{p + \frac{1}{T''_q}}{p + \frac{1}{T''_{q0}}}$$

$$c) \underline{Z_{dF}(p)} = p \frac{(L_{KD} M_F - M_{KD} M_{FD})}{L_{KD}} \cdot \frac{p + M_F R_{KD} / (L_{KD} M_F - M_{KD} M_{FD})}{p + R_{KD} / L_{KD}}$$

soit :

$$Z_{dF}(p) = p M_F \frac{T_{KD}}{T_{KDO}} \cdot \frac{p + \frac{1}{T_{KD}}}{p + \frac{1}{T_{KDO}}}$$

$$d) \underline{Z_{qd}(p)} = w' \frac{(L_d L_{KD} - M_{KD}^2)}{L_{KD}} \cdot \frac{p + L_d R_{KD} / (L_d L_{KD} - M_{KD}^2)}{p + R_{KD} / L_{KD}}$$

soit :

$$Z_{qd}(p) = \frac{T''_{dd} X_d}{T_{KDO}} \cdot \frac{p + \frac{1}{T''_{dd}}}{p + \frac{1}{T_{KDO}}}$$

soit :

$$e) \underline{Z_{qq}(p)} = \frac{p^2(L_q L_{KQ} - M_{KQ}^2) + p(R_S L_{KQ} + R_{KQ} L_q) + R_S R_{KQ}}{p L_{KQ} + R_{KQ}}$$

$$Z_{qq}(p) = \frac{X_q''}{w'} \cdot \frac{p^2 + p\left(\frac{R_S w'}{X_q''} + \frac{1}{T_q''}\right) + \frac{R_S w'}{X_q T_q''}}{p + \frac{1}{T_{q0}''}}$$

f) $\underline{Z_{qF}(p)}$ est déduit immédiatement de $Z_{dF}(p)$ soit :

$$Z_{qF}(p) = M_F w' \cdot \frac{T_{KD}}{T_{KDO}} \cdot \frac{p + \frac{1}{T_{KD}}}{p + \frac{1}{T_{KDO}}}$$

g) $\underline{Z_{Fd}(p)} = Z_{dF}(p)$ soit :

$$Z_{Fd}(p) = p M_F \cdot \frac{T_{KD}}{T_{KDO}} \cdot \frac{p + \frac{1}{T_{KD}}}{p + \frac{1}{T_{KDO}}}$$

h) $\underline{Z_{Fq}(p)} = 0$

$$i) \underline{Z_{FF}(p)} = \frac{L_F L_{KD} - M_{FD}^2}{L_{KD}} \cdot \frac{p^2 + p\left(\frac{L_F R_{KD} + L_{KD} R_F}{L_F L_{KD} - M_{FD}^2}\right) + \frac{R_F R_{KD}}{L_F L_{KD} - M_{FD}^2}}{p + \frac{R_{KD}}{L_{KD}}}$$

soit :

$$Z_{FF}(p) = \frac{L_F T_{do}''}{T_{KDO}} \cdot \frac{p^2 + p\left(\frac{1}{T_{do}''} + \frac{D}{T_{do}'}\right) + \frac{1}{T_{do}' T_{do}''}}{p + \frac{1}{T_{KDO}}}$$

III.3. FONCTIONS DE TRANSFERT LORSQUE SEULE UNE SOURCE EST RELIEE

III.3.1. Notations utilisées

Nous avons noté par Z_{ij} les impédances opérationnelles de la machine synchrone. Nous utiliserons dans ce qui suit les notations suivantes :

- Y_{KK}^K = admittance lorsque seule la source K est connectée

- $\overline{Y_{ij}^K}$ = admittance lorsque seule la source K n'est pas connectée.
Elle permet de connaître la contribution au courant $I_i(p)$ due à la source $V_j(p)$
- $\overline{Y_{ij}^0}$ = admittance lorsque toutes les sources sont connectées.
Elle permet de connaître la contribution au courant $I_i(p)$ due à la source $V_j(p)$

III.3.2. Cas où seule la source $V_d(p)$ est connectée

Les équations régissant la machine synchrone sont alors les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_d = Y_{dd}^d V_d \\ V_q = Z_{qd} Y_{dd}^d V_d \\ V_F = Z_{Fd} Y_{dd}^d V_d \end{array} \right.$$

Il est évident que $Y_{dd}^d(p) = \frac{1}{Z_{dd}^d(p)}$ de sorte que

$$Y_{dd}^d(p) = \frac{w' T_{KDO}}{X_d T_{dd}''} \cdot \frac{p + \frac{1}{T_{KDO}}}{p^2 + p \left(\frac{1}{T_{dd}''} + \frac{R_S w' T_{KDO}}{X_d T_{dd}''} \right) + \frac{R_S w'}{X_d T_{dd}''}}$$

et puisque

$$Z_{qd}(p) \cdot Y_{dd}^d(p) = \frac{X_d T_{dd}''}{T_{KDO}} \cdot \frac{p + \frac{1}{T_{dd}''}}{p + \frac{1}{T_{KDO}}} \cdot \frac{w' T_{KDO}}{X_d T_{dd}''} \cdot \frac{p + \frac{1}{T_{KDO}}}{p^2 + p \left(\frac{1}{T_{dd}''} + \frac{R_S w' T_{KDO}}{X_d T_{dd}''} \right) + \frac{R_S w'}{X_d T_{dd}''}}$$

$$V_q(p) = w' \frac{p + \frac{1}{T_{dd}''}}{p^2 + p \frac{1}{T_{dd}''} \left(1 + \frac{R_S w' T_{KDO}}{X_d} \right) + \frac{R_S w'}{X_d T_{dd}''}} V_d(p)$$

de même

$$Z_{Fd}(p) \cdot Y_{dd}^d(p) = p \frac{M_{FKD}}{T_{KDO}} \cdot \frac{p + \frac{1}{T_{KD}}}{p + \frac{1}{T_{KDO}}} \cdot \frac{w' T_{KDO}}{X_d T_{dd}''} \cdot \frac{p + \frac{1}{T_{KDO}}}{p^2 + p \left(\frac{1}{T_{dd}''} + \frac{R_S w' T_{KDO}}{X_d T_{dd}''} \right) + \frac{R_S w'}{X_d T_{dd}''}}$$

soit

$$V_F(p) = p \frac{M_F w' T_{KD}}{X_d T_{dd}''} \cdot \frac{p + \frac{1}{T_{KD}}}{p^2 + p \frac{1}{T_{dd}''} \left(1 + \frac{R_S w' T_{KD0}}{X_d} \right) + \frac{R_S w'}{X_d T_{dd}''}} V_d(p)$$

III.3.3. Cas où seule la source $V_q(p)$ est connectée.

Les équations régissant la machine synchrone sont alors les suivantes :

$$\begin{cases} I_q = Y_{qq}^q V_q \\ V_d = Z_{dq} Y_{qq}^q V_q \\ V_F = 0 \end{cases} \quad \text{car } Z_{Fq}(p) = 0$$

avec

$$Y_{qq}^q(p) = \frac{w'}{X_q''} \cdot \frac{p + \frac{1}{T_{q0}''}}{p^2 + p \left(\frac{R_S w'}{X_q''} + \frac{1}{T_q''} \right) + \frac{R_S w'}{X_q T_q''}}$$

et

$$V_d(p) = - X_q'' \frac{p + \frac{1}{T_q''}}{p + \frac{1}{T_{q0}''}} \cdot \frac{w'}{X_q''} \cdot \frac{p + \frac{1}{T_{q0}''}}{p^2 + p \left(\frac{R_S w'}{X_q''} + \frac{1}{T_q''} \right) + \frac{R_S w'}{X_q T_q''}} V_q(p)$$

soit

$$V_d(p) = - w' \frac{p + \frac{1}{T_q''}}{p^2 + p \left(\frac{R_S w'}{X_q''} + \frac{1}{T_q''} \right) + \frac{R_S w'}{X_q T_q''}} V_q(p)$$

et $V_F(p) = 0$

III.3.4. Cas où seule la source $V_F(p)$ est connectée

Les équations régissant la machine synchrone sont alors les suivantes :

$$\begin{cases} I_F = Y_{FF}^F V_F \\ V_d = Z_{dF} Y_{FF}^F V_F \\ V_q = Z_{qF} Y_{FF}^F V_F \end{cases}$$

On en déduit immédiatement

$$Y_{FF}^F(p) = \frac{T_{KDO}}{L_F T_{do}''} \cdot \frac{p + \frac{1}{T_{KDO}}}{p^2 + p \left(\frac{1}{T_{do}''} + \frac{D}{T_{do}'} \right) + \frac{1}{T_{do}' T_{do}''}}$$

et

$$V_d(p) = p M_F \frac{T_{KD}}{T_{KDO}} \cdot \frac{p + \frac{1}{T_{KD}}}{p + \frac{1}{T_{KDO}}} \cdot \frac{T_{KDO}}{L_F T_{do}''} \cdot \frac{p + \frac{1}{T_{KDO}}}{p^2 + p \left(\frac{1}{T_{do}''} + \frac{D}{T_{do}'} \right) + \frac{1}{T_{do}' T_{do}''}} V_F(p)$$

soit

$$V_d(p) = p \frac{M_F T_{KD}}{L_F T_{do}''} \cdot \frac{p + \frac{1}{T_{KD}}}{p^2 + p \left(\frac{1}{T_{do}''} + \frac{D}{T_{do}'} \right) + \frac{1}{T_{do}' T_{do}''}} V_F(p)$$

de même

$$V_q(p) = w' M_F \frac{T_{KD}}{T_{KDO}} \cdot \frac{p + \frac{1}{T_{KD}}}{p + \frac{1}{T_{KDO}}} \cdot \frac{T_{KDO}}{L_F T_{do}''} \cdot \frac{p + \frac{1}{T_{KDO}}}{p^2 + p \left(\frac{1}{T_{do}''} + \frac{D}{T_{do}'} \right) + \frac{1}{T_{do}' T_{do}''}} V_F(p)$$

soit :

$$V_q(p) = w' M_F \frac{T_{KD}}{L_F T_{do}''} \cdot \frac{p + \frac{1}{T_{KD}}}{p^2 + p \left(\frac{1}{T_{do}''} + \frac{D}{T_{do}'} \right) + \frac{1}{T_{do}' T_{do}''}} V_F(p)$$

III.3.5. Remarques

Ces diverses fonctions de transfert peuvent permettre la détermination expérimentale de certaines constantes de temps.

Ainsi lorsque l'on connecte uniquement la source $V_d(p)$ (en créant un échelon de tension par exemple) ; l'enregistrement de la réponse $V_F(p)$ peut permettre la détermination des constantes de temps de l'équation $p^2 + p \frac{1}{T_{dd}''} \left(1 + \frac{R_{Sw} T_{KDO}}{X_d} \right) + \frac{R_{Sw}}{T_{dd}'' X_d}$

Lorsque seule la source $V_F(p)$ est reliée il est possible à partir de l'enregistrement de $V_d(p)$ ou $V_q(p)$ donc $v_A(t)$ de déterminer expérimentalement les constantes de temps T_{do}' et T_{do}'' (en fait pratiquement uniquement T_{do}').

De même l'enregistrement des courants $i_d(t)$, $i_q(t)$, $i_f(t)$ lorsque sont

uniquement connectées, respectivement les sources v_d , v_q , v_F , permettent de confirmer les mesures des constantes de temps d'une part, de mesurer les racines de $p^2 + p \left(\frac{R_{S\omega}}{X_q} + \frac{1}{T''_q} \right) + \frac{R_{S\omega}}{X_q}$ d'autre part et enfin de confirmer les mesures de T'_{do} , T''_{do} .

Les méthodes de détermination des constantes de temps par séparation à l'aide d'échelle logarithmique sont néanmoins d'un emploi délicat et d'une précision [20] contestable.

III.4. FONCTIONS DE TRANSFERT LORSQUE SEULE UNE SOURCE N'EST PAS RELIÉE

III.4.1. Cas où seule la source V_F n'est pas reliée.

Les équations régissant la machine synchrone sont alors les suivantes :

$$\begin{cases} I_d = \bar{Y}_{dd}^F V_d + \bar{Y}_{dq}^F V_q \\ I_q = \bar{Y}_{qd}^F V_d + \bar{Y}_{qq}^F V_q \\ V_F = Z_{Fd} \bar{Y}_{dd}^F V_d + Z_{Fd} \bar{Y}_{dq}^F V_q \quad \text{car } Z_{Fq} = 0 \end{cases}$$

Il est facile de montrer que

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{dd}^F &= \frac{Z_{qq}}{Z_{dd} Z_{qq} - Z_{dq} Z_{qd}} & \bar{Y}_{dq}^F &= \frac{-Z_{dq}}{Z_{dd} Z_{qq} - Z_{dq} Z_{qd}} \\ \bar{Y}_{qd}^F &= \frac{-Z_{qd}}{Z_{dd} Z_{qq} - Z_{dq} Z_{qd}} & \bar{Y}_{qq}^F &= \frac{Z_{dd}}{Z_{dd} Z_{qq} - Z_{dq} Z_{qd}} \end{aligned}$$

Les constantes de temps de ces admittances sont obtenues à partir de l'étude du dénominateur $Z_{dd} Z_{qq} - Z_{dq} Z_{qd}$ qui est relativement complexe.

a) étude du dénominateur

$$\begin{aligned} Z_{dd} Z_{qq} - Z_{dq} Z_{qd} &= \frac{(p^2(L_d L_{KD} - M_{KD}^2) + p(R_S L_{KD} + R_{KD} L_d) + R_S R_{KD})(p^2(L_q L_{KQ} - M_{KQ}^2) + p(R_S L_{KQ} + R_{KQ} L_q) + R_S R_{KQ})}{(p L_{KD} + R_{KD})(p L_{KQ} + R_{KQ})} \\ &+ \omega^2 \frac{(p(L_q L_{KQ} - M_{KQ}^2) + R_{KQ} L_q)(p(L_d L_{KD} - M_{KD}^2) + R_{KD} L_d)}{(p L_{KD} + R_{KD})(p L_{KQ} + R_{KQ})} \end{aligned}$$

$$\text{ou } Z_{dd}Z_{qq} - Z_{dq}Z_{qd} = \frac{X_d X_q'' T_{dd}''}{T_{KDO} w'^2} \cdot \frac{p^4 + \delta_3 p^3 + \delta_2 p^2 + \delta_1 p + \delta_0}{\left(p + \frac{1}{T_{KDO}}\right) \left(p + \frac{1}{T_{qo}''}\right)}$$

avec

$$\delta_3 = \frac{1}{T_{dd}''} + \frac{R_S w' T_{KDO}}{X_d T_{dd}''} + \frac{1}{T_q''} + \frac{R_S w'}{X_q''}$$

$$\delta_2 = w'^2 + \left(\frac{1}{T_{dd}''} + \frac{R_S w' T_{KDO}}{X_d T_{dd}''}\right) \left(\frac{1}{T_q''} + \frac{R_S w'}{X_q''}\right) + \frac{R_S w'}{X_q T_q''} + \frac{R_S w'}{X_d T_{dd}''}$$

$$\delta_1 = \frac{R_S w'}{X_d T_{dd}''} \left(\frac{1}{T_q''} + \frac{R_S w'}{X_q''}\right) + \frac{R_S w'}{X_q T_q''} \left(\frac{1}{T_{dd}''} + \frac{R_S w' T_{KDO}}{X_d T_{dd}''}\right) + w'^2 \left(\frac{1}{T_{dd}''} + \frac{1}{T_q''}\right)$$

$$\delta_0 = \frac{1}{T_{dd}'' T_q''} w'^2 \left(1 + \frac{R_S^2}{X_d X_q}\right)$$

b) admittance $\bar{Y}_{dd}^F(p)$

$$\bar{Y}_{dd}^F(p) = \frac{X_q''}{w'} \cdot \frac{p^2 + p \left(\frac{1}{T_q''} + \frac{R_S w'}{X_q''}\right) + \frac{R_S w'}{X_q T_q''}}{p + 1/T_{qo}''} \cdot \frac{T_{KDO} w'^2}{X_d X_q'' T_{dd}''} \cdot \frac{\left(p + \frac{1}{T_{KDO}}\right) \left(p + \frac{1}{T_{qo}''}\right)}{p^4 + \delta_3 p^3 + \delta_2 p^2 + \delta_1 p + \delta_0}$$

$$\text{soit } \bar{Y}_{dd}^F(p) = \frac{T_{KDO} w'}{X_d T_{dd}''} \cdot \frac{p^2 + p \left(\frac{1}{T_q''} + \frac{R_S w'}{X_q''}\right) + \frac{R_S w'}{X_q T_q''}}{p^4 + \delta_3 p^3 + \delta_2 p^2 + \delta_1 p + \delta_0} \left(p + \frac{1}{T_{KDO}}\right)$$

c) admittance $\bar{Y}_{dq}^F(p)$

$$\bar{Y}_{dq}^F(p) = X_q'' \frac{p + \frac{1}{T_q''}}{p + \frac{1}{T_{qo}''}} \cdot \frac{T_{KDO} w'^2}{X_d X_q'' T_{dd}''} \cdot \frac{\left(p + \frac{1}{T_{KDO}}\right) \left(p + \frac{1}{T_{qo}''}\right)}{p^4 + \delta_3 p^3 + \delta_2 p^2 + \delta_1 p + \delta_0}$$

$$\text{soit } \bar{Y}_{dq}^F(p) = \frac{T_{KDO} w'^2}{X_d T_{dd}''} \cdot \frac{\left(p + \frac{1}{T_q''}\right) \left(p + \frac{1}{T_{KDO}}\right)}{p^4 + \delta_3 p^3 + \delta_2 p^2 + \delta_1 p + \delta_0}$$

d) admittance $\bar{Y}_{qd}^F(p)$

$$\bar{Y}_{qd}^F(p) = - \frac{X_d T_{dd}''}{T_{KDO}} \cdot \frac{p + \frac{1}{T_{dd}''}}{p + \frac{1}{T_{KDO}}} \cdot \frac{T_{KDO} w'^2}{X_d X_q'' T_{dd}''} \cdot \frac{\left(p + \frac{1}{T_{KDO}}\right) \left(p + \frac{1}{T_{qo}''}\right)}{p^4 + \delta_3 p^3 + \delta_2 p^2 + \delta_1 p + \delta_0}$$

$$\text{soit } \bar{Y}_{qd}^F(p) = - \frac{w'^2}{X_q''} \cdot \frac{\left(p + \frac{1}{T_{dd}''}\right) \left(p + \frac{1}{T_{qo}''}\right)}{p^4 + \delta_3 p^3 + \delta_2 p^2 + \delta_1 p + \delta_0}$$

e) admittance $\bar{Y}_{qq}^F(p)$

$$\bar{Y}_{qq}^F(p) = \frac{X_d T_{dd}''}{T_{KDO} w'} \cdot \frac{p^2 + p \frac{1}{T_{dd}''} \left(1 + \frac{R_S w' T_{KDO}}{X_d}\right) + \frac{R_S w'}{X_d T_{dd}''}}{p + \frac{1}{T_{KDO}}} \cdot \frac{T_{KDO} w'^2}{X_d X_q'' T_{dd}''} \cdot \frac{\left(p + \frac{1}{T_{KDO}}\right) \left(p + \frac{1}{T_{qo}''}\right)}{p^4 + \delta_3 p^3 + \delta_2 p^2 + \delta_1 p + \delta_0}$$

soit
$$\bar{Y}_{qq}^F(p) = \frac{w'}{X_q''} \cdot \frac{p^2 + p \frac{1}{T_{dd}''} \left(1 + \frac{R_S w' T_{KDO}}{X_d}\right) + \frac{R_S w'}{X_d T_{dd}''}}{p^4 + \delta_3 p^3 + \delta_2 p^2 + \delta_1 p + \delta_0} \left(p + \frac{1}{T_{qo}''}\right)$$

f) Expression de la tension $V_F(p)$

$$V_F(p) = Z_{Fd} \cdot \bar{Y}_{dd}^F \cdot V_d(p) + Z_{Fq} \cdot \bar{Y}_{dq}^F \cdot V_q(p)$$

d'où
$$V_F(p) = p M_F \frac{T_{KD}}{T_{KDO}} \cdot \frac{p + \frac{1}{T_{KD}}}{p + \frac{1}{T_{KDO}}} \cdot \frac{T_{KDO} w'}{X_d T_{dd}''} \cdot \frac{p^2 + p \left(\frac{1}{T_q''} + \frac{R_S w'}{X_q''}\right) + \frac{R_S w'}{X_q T_q''}}{p^4 + \delta_3 p^3 + \delta_2 p^2 + \delta_1 p + \delta_0} \left(p + \frac{1}{T_{KDO}}\right) V_d(p)$$

$$+ p M_F \frac{T_{KD}}{T_{KDO}} \cdot \frac{p + \frac{1}{T_{KD}}}{\frac{1}{T_{KDO}}} \cdot \frac{T_{KDO} w'^2}{X_d T_{dd}''} \cdot \frac{\left(p + \frac{1}{T_q''}\right) \left(p + \frac{1}{T_{KDO}}\right)}{p^4 + \delta_3 p^3 + \delta_2 p^2 + \delta_1 p + \delta_0} V_q(p)$$

ou encore

$$V_F(p) = \frac{M_F w' T_{KD}}{X_d T_{dd}''} \left[p \left(p + \frac{1}{T_{KD}}\right) \frac{p^2 + p \left(\frac{1}{T_q''} + \frac{R_S w'}{X_q''}\right) + \frac{R_S w'}{X_q T_q''}}{p^4 + \delta_3 p^3 + \delta_2 p^2 + \delta_1 p + \delta_0} \cdot V_d(p) \right. \\ \left. + p w' \left(p + \frac{1}{T_{KD}}\right) \frac{p + \frac{1}{T_q''}}{p^4 + \delta_3 p^3 + \delta_2 p^2 + \delta_1 p + \delta_0} \cdot V_q(p) \right]$$

g) Remarques

Ces transmittances ne permettent pas la détermination de certaines constantes de temps. En effet il n'est pas possible, physiquement de contrôler séparément $V_d(p)$ et $V_q(p)$. Les bobinages d et q sont des bobinages "fictifs" équivalents certes aux bobinages des 3 phases statoriques A, B et C mais ils ne peuvent être isolés physiquement.

III.4.2. Cas où seule la source V_q n'est pas reliée.

Les équations régissant le fonctionnement de la machine synchrone sont alors les suivantes :

$$\begin{cases} I_d = Y_{dd}^{\bar{q}} V_d + Y_{dF}^{\bar{q}} V_F \\ I_F = Y_{Fd}^{\bar{q}} V_d + Y_{FF}^{\bar{q}} V_F \\ V_q = \{Z_{qd} Y_{dd}^{\bar{q}} + Z_{qF} Y_{Fd}^{\bar{q}}\} V_d + \{Z_{qd} Y_{dF}^{\bar{q}} + Z_{qF} Y_{FF}^{\bar{q}}\} V_F \end{cases}$$

Il est facile de montrer que :

$$Y_{dd}^{\bar{q}} = \frac{Z_{FF}}{Z_{dd} Z_{FF} - Z_{dF} Z_{Fd}} \quad Y_{dF}^{\bar{q}} = \frac{-Z_{dF}}{Z_{dd} Z_{FF} - Z_{dF} Z_{Fd}}$$

$$Y_{Fd}^{\bar{q}} = \frac{-Z_{Fd}}{Z_{dd} Z_{FF} - Z_{dF} Z_{Fd}} \quad Y_{FF}^{\bar{q}} = \frac{Z_{dd}}{Z_{dd} Z_{FF} - Z_{dF} Z_{Fd}}$$

Les constantes de temps de ces admittances sont obtenues à partir de l'étude du dénominateur $Z_{dd} Z_{FF} - Z_{dF} Z_{Fd}$

a) Etude du dénominateur

$$Z_{dd} Z_{FF} - Z_{dF} Z_{Fd} = \frac{(p^2(L_d L_{KD} - M_{KD}^2) + p(R_S L_{KD} + R_{KD} L_d) + R_S R_{KD})(p^2(L_F L_{KD} - M_{FD}^2) + p(L_F R_{KD} + R_F L_{KD}) + R_F R_{KD})}{(p L_{KD} + R_{KD})(p L_{KD} + R_{KD})} - \frac{p^2 (p L_{KD} M_F - M_{FD} M_{KD}) + M_F R_{KD}}{(p L_{KD} + R_{KD})^2}$$

on obtient après simplification

$$Z_{dd} Z_{FF} - Z_{dF} Z_{Fd} = \frac{X_d R_F T_d' T_d''}{T_{KDO} w'} \cdot \frac{\left(p^3 + \left[\frac{1}{T_d'} + \frac{B}{T_d} + \frac{R_S w'}{X_d'} \right] p^2 + \left[\frac{1}{T_d' T_d''} + R_S w' \left(\frac{1}{X_d' T_d'} + \frac{T_{KDO}}{X_d T_d' T_d''} \right) \right] p + \frac{R_S w'}{T_d' T_d' X_d}}{p + \frac{1}{T_{KDO}}}$$

b) admittance $\bar{Y}_{dd}^q(p)$

$$\text{on obtient } \bar{Y}_{dd}^q(p) = \frac{L_F T_{do}'''}{T_{KDO}} \cdot \frac{p^2 + p\left(\frac{1}{T_{do}'''} + \frac{D}{T_{do}'''}\right) + \frac{1}{T_{do}''' T_{do}'''}}{p + \frac{1}{T_{KDO}}} \cdot \frac{w' T_{KDO}}{X_d R_F T_d' T_d'''} \left(p + \frac{1}{T_{KDO}}\right)$$

$$\cdot \frac{1}{p^3 + \left[\frac{1}{T_d'''} + \frac{B}{T_d'} + \frac{R_S w'}{X_d'}\right] p^2 + \left[\frac{1}{T_d' T_d'''} + R_S w' \left(\frac{1}{X_d' T_d'} + \frac{T_{KDO}}{X_d T_d' T_d'''}\right)\right] p + \frac{R_S w'}{X_d T_d' T_d'''}}$$

$$\text{soit } \bar{Y}_{dd}^q(p) = \frac{w'}{X_d'} \cdot \frac{p^2 + p\left(\frac{1}{T_{do}'''} + \frac{D}{T_{do}'''}\right) + \frac{1}{T_{do}''' T_{do}'''}}{p^3 + \left[\frac{1}{T_d'''} + \frac{B}{T_d'} + \frac{R_S w'}{X_d'}\right] p^2 + \left[\frac{1}{T_d' T_d'''} + R_S w' \left(\frac{1}{X_d' T_d'} + \frac{T_{KDO}}{X_d T_d' T_d'''}\right)\right] p + \frac{R_S w'}{X_d T_d' T_d'''}}$$

c) admittance $\bar{Y}_{dF}^q(p)$

$$\text{on obtient } \bar{Y}_{dF}^q(p) = -p M_F \frac{T_{KD}}{T_{KDO}} \cdot \frac{p + \frac{1}{T_{KD}}}{p + \frac{1}{T_{KDO}}} \cdot \frac{w' T_{KDO}}{X_d R_F T_d' T_d'''} \left(p + \frac{1}{T_{KDO}}\right)$$

$$\cdot \frac{1}{p^3 + \left[\frac{1}{T_d'''} + \frac{B}{T_d'} + \frac{R_S w'}{X_d'}\right] p^2 + \left[\frac{1}{T_d' T_d'''} + R_S w' \left(\frac{1}{X_d' T_d'} + \frac{T_{KDO}}{X_d T_d' T_d'''}\right)\right] p + \frac{R_S w'}{X_d T_d' T_d'''}}$$

$$\text{soit } \bar{Y}_{dF}^q(p) = -\frac{M_F w' T_{KD}}{R_F X_d T_d' T_d'''} \cdot \frac{p \left(p + \frac{1}{T_{KD}}\right)}{p^3 + \left[\frac{1}{T_d'''} + \frac{B}{T_d'} + \frac{R_S w'}{X_d'}\right] p^2 + \left[\frac{1}{T_d' T_d'''} + R_S w' \left(\frac{1}{X_d' T_d'} + \frac{T_{KDO}}{X_d T_d' T_d'''}\right)\right] p + \frac{R_S w'}{X_d T_d' T_d'''}}$$

d) admittance $\bar{Y}_{Fd}^q(p)$

Elle est égale à l'admittance $\bar{Y}_{dF}^q(p)$ car $Z_{dF} = Z_{Fd}$

e) admittance $\bar{Y}_{FF}^q(p)$

$$\text{on obtient } \bar{Y}_{FF}^q(p) = \frac{X_d T_{dd}'''}{T_{KDO} w'} \cdot \frac{p^2 + p\left(\frac{1}{T_{dd}'''} + \frac{R_S w' T_{KDO}}{X_d}\right) + \frac{R_S w'}{X_d T_{dd}'''}}{p + \frac{1}{T_{KDO}}} \cdot \frac{w' T_{KDO}}{X_d R_F T_d' T_d'''} \left(p + \frac{1}{T_{KDO}}\right)$$

$$\cdot \frac{1}{p^3 + \left[\frac{1}{T_d'''} + \frac{B}{T_d'} + \frac{R_S w'}{X_d'}\right] p^2 + \left[\frac{1}{T_d' T_d'''} + R_S w' \left(\frac{1}{X_d' T_d'} + \frac{T_{KDO}}{X_d T_d' T_d'''}\right)\right] p + \frac{R_S w'}{X_d T_d' T_d'''}}$$

$$\text{soit } \bar{Y}_{FF}^q(p) = \frac{B}{R_F T_d'} \cdot \frac{p^2 + p \left(\frac{1}{T_d'} + \frac{R_S w' T_{KDO}}{X_d'} \right) + \frac{R_S w'}{X_d' T_d'}}{p^3 + p^2 \left[\frac{1}{T_d'} + \frac{B}{T_d'} + \frac{R_S w'}{X_d'} \right] + p \left[\frac{1}{T_d' T_d'} + R_S w' \left(\frac{1}{X_d' T_d'} + \frac{T_{KDO}}{X_d' T_d' T_d'} \right) \right] + \frac{R_S w'}{X_d' T_d' T_d'}}$$

f) expression de la tension $V_q(p)$

$$\text{Celle-ci vaut : } V_q(p) = (Z_{qd} \bar{Y}_{dd}^q + Z_{qF} \bar{Y}_{Fd}^q) V_d + (Z_{qd} \bar{Y}_{dF}^q + Z_{qF} \bar{Y}_{FF}^q) V_F$$

$$\text{C'est à dire : } V_q(p) = \frac{Z_{qd} Z_{FF} - Z_{qF} Z_{Fd}}{Z_{dd} Z_{FF} - Z_{dF} Z_{Fd}} V_d + \frac{Z_{qF} Z_{dd} - Z_{qd} Z_{dF}}{Z_{dd} Z_{FF} - Z_{dF} Z_{Fd}} V_F$$

La quantité $\frac{Z_{qd} Z_{FF} - Z_{qF} Z_{Fd}}{Z_{dd} Z_{FF} - Z_{dF} Z_{Fd}}$ vaut :

$$\frac{w' \left(p^2 + p \left(\frac{B}{T_d'} + \frac{1}{T_d'} \right) + \frac{1}{T_d' T_d'} \right)}{p^3 + p^2 \left[\frac{1}{T_d'} + \frac{B}{T_d'} + \frac{R_S w'}{X_d'} \right] + p \left[\frac{1}{T_d' T_d'} + R_S w' \left(\frac{1}{X_d' T_d'} + \frac{T_{KDO}}{X_d' T_d' T_d'} \right) \right] + \frac{R_S w'}{X_d' T_d' T_d'}}$$

La quantité $\frac{Z_{qF} Z_{dd} - Z_{qd} Z_{dF}}{Z_{dd} Z_{FF} - Z_{dF} Z_{Fd}}$ vaut :

$$\frac{R_S w'^2 M_F T_{KD}}{X_d R_F T_d' T_d'} \cdot \frac{p + \frac{1}{T_{KD}}}{p^3 + p^2 \left[\frac{1}{T_d'} + \frac{B}{T_d'} + \frac{R_S w'}{X_d'} \right] + p \left[\frac{1}{T_d' T_d'} + R_S w' \left(\frac{1}{X_d' T_d'} + \frac{T_{KDO}}{X_d' T_d' T_d'} \right) \right] + \frac{R_S w'}{X_d' T_d' T_d'}}$$

de sorte que

$$V_q(p) = \frac{w' \left[p^2 + p \left(\frac{B}{T_d'} + \frac{1}{T_d'} \right) + \frac{1}{T_d' T_d'} \right] V_d(p) + \frac{R_S w'^2 M_F T_{KD}}{X_d R_F T_d' T_d'} \left(p + \frac{1}{T_{KD}} \right) V_F(p)}{p^3 + p^2 \left[\frac{1}{T_d'} + \frac{B}{T_d'} + \frac{R_S w'}{X_d'} \right] + p \left[\frac{1}{T_d' T_d'} + R_S w' \left(\frac{1}{X_d' T_d'} + \frac{T_{KDO}}{X_d' T_d' T_d'} \right) \right] + \frac{R_S w'}{X_d' T_d' T_d'}}$$

g) Remarques

Il n'est pas possible d'obtenir de renseignements sur la machine à partir de l'enregistrement de $V_q(p)$ à cause de l'impossibilité physique d'isoler les enroulements d et q.

Par contre l'enregistrement de i_d ou de i_F avec $V_F = 0$ (c'est-à-dire avec enroulement inducteur en court-circuit), permet théoriquement l'identification des racines de l'équation d'ordre 3

$$p^3 + p^2 \left[\frac{1}{T_d''} + \frac{B}{T_d'} + \frac{R_S w'}{X_d''} \right] + p \left[\frac{1}{T_d T_d''} + R_S w' \left(\frac{1}{X_d' T_d''} + \frac{T_{KDO}}{X_d T_d' T_d''} \right) \right] + \frac{R_S w'}{X_d T_d' T_d''}$$

Celui de i_F avec $V_d = 0$ permet la mesure, normalement plus précise des racines d'ordre 3.

III.4.3. Cas où seule la source V_d n'est pas reliée

Les équations régissant la machine synchrone sont alors les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_q = \bar{Y}_{qq}^d V_q + \bar{Y}_{qF}^d V_F \\ I_F = \bar{Y}_{FF}^d V_F \quad \text{car } Z_{Fq} = 0 \\ V_d = Z_{dq} \bar{Y}_{qq}^d V_q + \{Z_{dq} \bar{Y}_{qF}^d + Z_{dF} \bar{Y}_{FF}^d\} V_F \end{array} \right.$$

On en déduit immédiatement

$$\bar{Y}_{qq}^d = \frac{1}{Z_{qq}} \quad ; \quad \bar{Y}_{qF}^d = -\frac{Z_{qF}}{Z_{qq} Z_{FF}} \quad ; \quad \bar{Y}_{FF}^d = \frac{1}{Z_{FF}}$$

a) admittance \bar{Y}_{qq}^d ,

$$\text{on obtient } \bar{Y}_{qq}^d = \frac{w'}{X_q'} \cdot \frac{p + \frac{1}{T_{q0}'}}{p^2 + p \left(\frac{R_S w'}{X_q''} + \frac{1}{T_q''} \right) + \frac{R_S w'}{X_q T_q'}}$$

b) admittance \bar{Y}_{qF}^d

$$\text{on obtient } \bar{Y}_{qF}^d = - \left(M_F \frac{T_{KD} w'}{T_{KDO}} \cdot \frac{p + \frac{1}{T_{KD}}}{p + \frac{1}{T_{KDO}}} \right) \left(\frac{w'}{X_q'} \cdot \frac{p + \frac{1}{T_{q0}'}}{p^2 + p \left(\frac{R_S w'}{X_q''} + \frac{1}{T_q''} \right) + \frac{R_S w'}{X_q T_q'}} \right) \\ \cdot \frac{T_{KDO}}{L_F T_{do}''} \cdot \frac{p + 1/T_{KDO}}{p^2 + p \left(\frac{1}{T_{do}''} + \frac{D}{T_{do}'} \right) + \frac{1}{T_{do} T_{do}'}}$$

$$\text{soit } \bar{Y}_{qF}^d = - \frac{M_F w'^2 T_{KD}}{L_F T_{do}'' X_q'} \cdot \frac{\left(p + \frac{1}{T_{q0}'} \right) \left(p + \frac{1}{T_{KD}} \right)}{\left(p^2 + p \left(\frac{R_S w'}{X_q''} + \frac{1}{T_q''} \right) + \frac{R_S w'}{X_q T_q'} \right) \left(p^2 + p \left(\frac{1}{T_{do}''} + \frac{D}{T_{do}'} \right) + \frac{1}{T_{do} T_{do}'} \right)}$$

c) admittance \bar{Y}_{FF}^d

on obtient
$$Y_{FF}^{\bar{d}} = \frac{T_{KDO}}{L_F T_{do}''} \cdot \frac{p + \frac{1}{T_{KDO}}}{p^2 + p \left(\frac{1}{T_{do}''} + \frac{D}{T_{do}'} \right) + \frac{1}{T_{do}' T_{do}''}}$$

d) Expression de la tension $V_d(p)$

Celle-ci vaut :
$$V_d = Z_{dq} Y_{qq}^{\bar{d}} V_q + (Z_{dq} Y_{qF}^{\bar{d}} + Z_{dF} Y_{FF}^{\bar{d}}) V_F$$

ou encore
$$V_d = \frac{Z_{dq}}{Z_{qq}} V_q + \frac{Z_{dF} Z_{qq} - Z_{dq} Z_{qF}}{Z_{qq} Z_{FF}} V_F$$

en remplaçant on a :

$$V_d = -X_q'' \frac{p + \frac{1}{T_q''}}{p + \frac{1}{T_{q0}''}} \cdot \frac{w'}{X_q''} \cdot \frac{p + \frac{1}{T_{q0}''}}{p^2 + p \left(\frac{R_S w'}{X_q''} + \frac{1}{T_q''} \right) + \frac{R_S w'}{X_q T_q''}} V_q +$$

$$\left[-X_q'' \frac{p + \frac{1}{T_q''}}{p + \frac{1}{T_{q0}''}} \cdot \frac{-M_F w'^2 T_{KD}}{L_F X_q'' T_{do}''} \cdot \frac{\left(p + \frac{1}{T_{q0}''} \right) \left(p + \frac{1}{T_{KD}} \right)}{\left[p^2 + p \left(\frac{R_S w'}{X_q''} + \frac{1}{T_q''} \right) + \frac{R_S w'}{X_q T_q''} \right] \left[p^2 + p \left(\frac{1}{T_{do}''} + \frac{D}{T_{do}'} \right) + \frac{1}{T_{do}' T_{do}''} \right]} \right. \\ \left. + p M_F \frac{T_{KD}}{T_{KDO}} \cdot \frac{p + \frac{1}{T_{KD}}}{p + \frac{1}{T_{KDO}}} \cdot \frac{T_{KDO}}{L_F T_{do}''} \cdot \frac{p + \frac{1}{T_{KDO}}}{p^2 + p \left(\frac{1}{T_{do}''} + \frac{D}{T_{do}'} \right) + \frac{1}{T_{do}' T_{do}''}} \right] V_F$$

ou encore

$$V_d(p) = -w' \frac{p + \frac{1}{T_q''}}{p^2 + p \left(\frac{R_S w'}{X_q''} + \frac{1}{T_q''} \right) + \frac{R_S w'}{X_q T_q''}} V_q(p) +$$

$$\frac{M_F T_{KD}}{L_F T_{do}''} \cdot \frac{\left(p + \frac{1}{T_{KD}} \right) \left(p^3 + p^2 \left(\frac{1}{T_q''} + \frac{R_S w'}{X_q''} \right) + p \left(w'^2 + \frac{R_S w'}{X_q T_q''} \right) + \frac{w'^2}{T_q''} \right)}{\left[p^2 + p \left(\frac{R_S w'}{X_q''} + \frac{1}{T_q''} \right) + \frac{R_S w'}{X_q T_q''} \right] \left[p^2 + p \left(\frac{1}{T_{do}''} + \frac{D}{T_{do}'} \right) + \frac{1}{T_{do}' T_{do}''} \right]} V_F(p)$$

e) Remarques

Ici encore il n'est pas possible d'obtenir de renseignements sur la machine à partir de l'enregistrement $V_d(p)$ à cause de l'impossibilité physique d'isoler les enroulements d et q.

Par contre l'enregistrement de i_F permet de confirmer la mesure de

T'_{d0} (et théoriquement de T''_{d0}). Celui de i_q à $V_F = 0$ permet de confirmer la détermination des racines de l'équation du second ordre

$$p^2 + p \left(\frac{R_S \omega'}{X''_q} + \frac{1}{T''_q} \right) + \frac{\omega' R_S}{X_q T''_q}$$

III.5. FONCTIONS DE TRANSFERT LORSQUE TOUTES LES SOURCES SONT RELIEES

L'équation matricielle (1.4) mise sous forme opérationnelle peut s'écrire

$$[V] = [Z] [I]$$

$$\text{soit } [I] = [Z]^{-1} [V]$$

ou en développant

$$\left\{ \begin{array}{l} I_d = Y_{dd}^{\bar{0}} V_d + Y_{dq}^{\bar{0}} V_q + Y_{dF}^{\bar{0}} V_F \\ I_q = Y_{qd}^{\bar{0}} V_d + Y_{qq}^{\bar{0}} V_q + Y_{qF}^{\bar{0}} V_F \\ I_F = Y_{Fd}^{\bar{0}} V_d + Y_{Fq}^{\bar{0}} V_q + Y_{FF}^{\bar{0}} V_F \end{array} \right.$$

$I_d, I_q, I_F, V_d, V_q, V_F$ sont les transformées de $i_d, i_q, i_F, v_d, v_q, v_F$.

Les admittances opérationnelles Y constituent la transmittance générale de la machine synchrone idéalisée et se mettent sous la forme :

$$Y_{ij} = \frac{\Gamma_{ij}}{\det [Z]}$$

Les divers Y_{ij} sont présentés dans le tableau 1.II

TABLEAU 1.II

$$Y_{11} = \frac{w'}{X_d''} \cdot \frac{1}{D(p)} \left[p^2 + p \left(\frac{1}{T_{do}''} + \frac{D}{T_{do}'} \right) + \frac{1}{T_{do}' T_{do}''} \right] \left[p^2 + \left(\frac{1}{T_q''} + \frac{R_S w'}{X_q''} \right) p + \frac{R_S w'}{X_q' T_q''} \right]$$

$$Y_{12} = \frac{w'^2}{X_d''} \cdot \frac{1}{D(p)} \left[p^2 + p \left(\frac{1}{T_{do}''} + \frac{D}{T_{do}'} \right) + \frac{1}{T_{do}' T_{do}''} \right] \left[p + \frac{1}{T_q''} \right]$$

$$Y_{13} = - \frac{M_F w' T_{KD}}{R_F X_d' T_d' T_d''} \cdot \frac{1}{D(p)} \left(p + \frac{1}{T_{KD}} \right) \left[p^3 + \left(\frac{1}{T_q''} + \frac{R_S w'}{X_q''} \right) p^2 + \left(w'^2 + \frac{R_S w'}{X_q' T_q''} \right) p + \frac{w'^2}{T_q''} \right]$$

$$Y_{21} = - \frac{w'^2}{X_q''} \cdot \frac{1}{D(p)} \left(p + \frac{1}{T_{qo}''} \right) \left[p^2 + \left(\frac{1}{T_d''} + \frac{B}{T_d'} \right) p + \frac{1}{T_d' T_d''} \right]$$

$$Y_{22} = \frac{w'}{X_q''} \cdot \frac{1}{D(p)} \left(p + \frac{1}{T_{qo}''} \right) \left[p^3 + \left(\frac{1}{T_d''} + \frac{B}{T_d'} + \frac{R_S w'}{X_d''} \right) p^2 + \left(\frac{1}{T_d' T_d''} + \frac{R_S w'}{X_d' T_d''} \left[\frac{1}{T_{do}''} + \frac{D}{T_{do}'} \right] \right) p + \frac{R_S w'}{X_d' T_d' T_d''} \right]$$

$$Y_{23} = - \frac{R_S M_F w'^3 T_{KD}}{R_F X_d' T_d' T_d'' X_q''} \cdot \frac{1}{D(p)} \left(p + \frac{1}{T_{KD}} \right) \left(p + \frac{1}{T_{qo}''} \right)$$

$$Y_{31} = - \frac{M_F w' T_{KD}}{R_F X_d' T_d' T_d''} \cdot \frac{1}{D(p)} p \left(p + \frac{1}{T_{KD}} \right) \left[p^2 + p \left(\frac{1}{T_q''} + \frac{R_S w'}{X_q''} \right) p + \frac{R_S w'}{X_q' T_q''} \right]$$

$$Y_{32} = - \frac{M_F w'^2 T_{KD}}{R_F X_d' T_d' T_d''} \cdot \frac{1}{D(p)} p \left(p + \frac{1}{T_{KD}} \right) \left(p + \frac{1}{T_q''} \right)$$

$$Y_{33} = \frac{B}{R_F T_d'} \cdot \frac{1}{D(p)} \cdot \left\{ p^4 + \left[\left(\frac{1}{B T_d''} + \frac{R_S w' D T_d'}{B X_d'' T_{do}'} \right) + \left(\frac{1}{T_q''} + \frac{R_S w'}{X_q''} \right) \right] p^3 + \left[w'^2 + \left(\frac{1}{B T_d''} + \frac{R_S w' D T_d'}{B X_d'' T_{do}'} \right) \left(\frac{1}{T_q''} + \frac{R_S w'}{X_q''} \right) + \frac{R_S w'}{B T_d'' X_d'} + \frac{R_S w'}{X_q' T_q''} \right] p^2 + \left[w'^2 \left(\frac{1}{T_q''} + \frac{1}{B T_d''} \right) + \frac{R_S w'}{B T_d'' X_d'} \left(\frac{1}{T_q''} + \frac{R_S w'}{X_q''} \right) + \frac{R_S w'}{X_q' T_q''} \left(\frac{1}{B T_d''} + \frac{R_S w' D T_d'}{B X_d'' T_{do}'} \right) \right] p + \frac{w'^2}{B T_d'' T_q''} \left(1 + \frac{R_S^2}{X_d' X_q} \right) \right\}$$

Dans les Y_{ij} du tableau 1.II $D(p)$ a pour expression :

$$\begin{aligned}
 D(p) = & \left\{ p^5 + p^4 \left[\frac{1}{T'_q} + \frac{1}{T'_d} + \frac{B}{T'_d} + R_S w' \left(\frac{1}{X'_q} + \frac{1}{X'_d} \right) \right] + p^3 \left[\frac{1}{T'_d T'_q} + \frac{1}{T'_d T'_d} + \frac{B}{T'_d T'_q} \right. \right. \\
 & \left. \left. + R_S w' \left(\frac{1}{T'_q} \left(\frac{1}{X'_q} + \frac{1}{X'_d} \right) + \frac{1}{X'_q} \left(\frac{1}{T'_d} + \frac{B}{T'_d} \right) + \frac{1}{X'_d} \left(\frac{1}{T'_{do}} + \frac{D}{T'_{do}} \right) \right) + w'^2 \left(1 + \frac{R_S^2}{X'_d X'_q} \right) \right] \right. \\
 & \left. + p^2 \left[w'^2 \left(\frac{1}{T'_q} + \frac{1}{T'_d} + \frac{B}{T'_d} \right) + R_S w' \left(\frac{1}{T'_d T'_d} \left(\frac{1}{X'_q} + \frac{1}{X'_d} \right) + \frac{1}{X'_q T'_q} \left(\frac{1}{T'_d} + \frac{B}{T'_d} \right) + \frac{1}{X'_d T'_q} \left(\frac{1}{T'_{do}} + \frac{D}{T'_{do}} \right) \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + R_S w'^2 \left(\frac{1}{X'_d T'_q X'_q} + \frac{1}{X'_d X'_q T'_{do}} + \frac{D}{X'_d X'_q T'_{do}} \right) + \frac{1}{T'_d T'_d T'_q} \right] + p \left[w'^2 \left(\frac{1}{T'_d T'_q} + \frac{1}{T'_d T'_d} + \frac{B}{T'_d T'_q} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{R_S w'}{T'_d T'_d T'_q} \left(\frac{1}{X'_d} + \frac{1}{X'_q} \right) + R_S w'^2 \left(\frac{D}{X'_q X'_d T'_{do} T'_q} + \frac{1}{X'_q X'_d T'_{do} T'_q} + \frac{1}{X'_q X'_d T'_d T'_d} \right) \right] \right. \\
 & \left. + \frac{w'^2}{T'_d T'_d T'_q} \left(1 + \frac{R_S^2}{X'_d X'_q} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

On peut écrire les admittances opérationnelles sous la forme

$$Y_{11} = \frac{\omega'}{X_d''} \cdot \frac{1}{D(p)} (p + n_{1d})(p + n_{2d})(p + n_{3d})(p + n_{4d})$$

$$Y_{12} = \frac{\omega'^2}{X_d''} \cdot \frac{1}{D(p)} (p + n_{1d})(p + n_{2d})(p + n_{5d})$$

$$Y_{13} = - \frac{M_F \omega' T_{KD}}{R_F X_d T_d' T_d''} \cdot \frac{1}{D(p)} (p + n_{6d})(p + n_{6d}^*)(p + n_{7d})(p + n_{8d})$$

$$Y_{21} = - \frac{\omega'^2}{X_q''} \cdot \frac{1}{D(p)} (p + n_{1q})(p + n_{2q})(p + n_{3q})$$

$$Y_{22} = \frac{\omega'}{X_q''} \cdot \frac{1}{D(p)} (p + n_{3q})(p + n_{4q})(p + n_{5q})(p + n_{6q})$$

$$Y_{23} = - \frac{\omega'^3 R_S M_F T_{KD}}{X_q'' R_F X_d T_d' T_d''} \cdot \frac{1}{D(p)} (p + n_{3q})(p + n_{8d})$$

$$Y_{31} = - \frac{M_F \omega' T_{KD}}{R_F X_d T_d' T_d''} \cdot \frac{1}{D(p)} p (p + n_{8d})(p + n_{3d})(p + n_{4d})$$

$$Y_{32} = - \frac{M_F \omega'^2 T_{KD}}{R_F X_d T_d' T_d''} \cdot \frac{1}{D(p)} p (p + n_{5d})(p + n_{8d})$$

$$Y_{33} = \frac{B}{R_F T_d'} \cdot \frac{1}{D(p)} (p + n_{1F})(p + n_{2F})(p + n_{3F})(p + n_{3F}^*)$$

$$\text{avec } D(p) = (p + p_1)(p + p_2)(p + p_3)(p + p_3^*)(p + p_5)$$

CHAPITRE II

 COMPARAISON ET PROPOSITIONS
DE SIMPLIFICATION
I. COMPARAISONI.1. TRANSMITTANCE USUELLE DU MODELE CLASSIQUE

Dans la théorie habituelle de la machine synchrone [7], les hypothèses usuelles conduisent à l'équation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} I_d \\ I_q \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta'} \begin{bmatrix} p + \frac{\omega' R_S}{X''_q} L_q & \omega' L_q \\ \omega' L_d & p + \frac{\omega' R_S}{X''_d} L_d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_d - pG V_F \\ V_q - \omega' G V_F \end{bmatrix}$$

avec

$$\Delta' = L_d L_q \left(p + i\omega' + \frac{R_S \omega'}{2} \left(\frac{1}{X''_q} + \frac{1}{X''_d} \right) \right) \left(p - i\omega' + \frac{R_S \omega'}{2} \left(\frac{1}{X''_q} + \frac{1}{X''_d} \right) \right)$$

$$L_d = L_d \cdot \frac{(1 + pT'_d)(1 + pT''_d)}{(1 + pT'_{do})(1 + pT''_{do})}$$

$$L_q = L_q \cdot \frac{1 + T''_q p}{1 + T''_{qo} p}$$

$$G = \frac{M_F}{R_F} \cdot \frac{1 + pT_{KD}}{(1 + pT'_{do})(1 + pT''_{do})}$$

Quant à la transformée I_F du courant inducteur elle est donnée par :

$$I_F = \frac{(R_{KD} + pL_{KD}) V_F - [pM_F(R_{KD} + pL_{KD}) - p^2M_{FD}M_{KD}] I_d}{(R_F + pL_F)(R_{KD} + pL_{KD}) - p^2M_{FD}^2}$$

On peut encore mettre ces trois équations sous la forme

$$\begin{cases} I_d = Y'_{11} V_d + Y'_{12} V_q + Y'_{13} V_F \\ I_q = Y'_{21} V_d + Y'_{22} V_q + Y'_{23} V_F \\ I_F = Y'_{31} V_d + Y'_{32} V_q + Y'_{33} V_F \end{cases}$$

en désignant par Y' les admittances opérationnelles de la théorie simplifiée classique

Le calcul de ces neuf admittances donne :

$$Y'_{11} = \frac{w'}{X'_d} \cdot \frac{1}{D'_1} \left(p + \frac{1}{T'_{do}}\right) \left(p + \frac{1}{T'_{do}}\right) \left(p + \frac{R_S w'}{X'_q}\right)$$

$$Y'_{12} = \frac{w'^2}{X'_d} \cdot \frac{1}{D'_1} \left(p + \frac{1}{T'_{do}}\right) \left(p + \frac{1}{T'_{do}}\right)$$

$$Y'_{13} = -\frac{w' M_F T_{KD}}{R_F X_d T'_d T''_d} \cdot \frac{1}{D'_1} \left(p + \frac{1}{T_{KD}}\right) \left(p^2 + p \frac{R_S w'}{X'_q} + w'^2\right)$$

$$Y'_{21} = -\frac{w'^2}{X'_q} \cdot \frac{1}{D'_2} \left(p + \frac{1}{T'_{qo}}\right)$$

$$Y'_{22} = \frac{w'}{X'_q} \cdot \frac{1}{D'_2} \left(p + \frac{1}{T'_{qo}}\right) \left(p + \frac{R_S w'}{X'_d}\right)$$

$$Y'_{23} = -\frac{w'^3 R_S M_F T_{KD}}{X'_q R_F X_d T'_d T''_d} \cdot \frac{1}{D'_2} \cdot \frac{\left(p + \frac{1}{T_{KD}}\right) \left(p + \frac{1}{T'_{qo}}\right)}{\left(p + \frac{1}{T'_{do}}\right) \left(p + \frac{1}{T'_{do}}\right)}$$

$$Y'_{31} = -\frac{M_F w' T_{KD}}{R_F X_d T'_d T''_d} \cdot \frac{1}{D'_1} \cdot p \left(p + \frac{1}{T_{KD}}\right) \left(p + \frac{R_S w'}{X'_q}\right)$$

$$Y'_{32} = -\frac{w'^2 M_F T_{KD}}{R_F X_d T'_d T''_d} \cdot \frac{1}{D'_1} \cdot p \left(p + \frac{1}{T_{KD}}\right)$$

$$Y'_{33} = \frac{B}{R_F T'_d} \cdot \frac{1}{D'_1} \cdot \frac{p^5 + \epsilon_4 p^4 + \epsilon_3 p^3 + \epsilon_2 p^2 + \epsilon_1 p + \epsilon_0}{\left(p + \frac{1}{T'_{do}}\right) \left(p + \frac{1}{T'_{do}}\right)}$$

où

$$\epsilon_4 = \frac{1}{B T'_d T'_{do} T''_{do}} \left[T'_d T''_d + T_{KDO} (T'_d + T''_d) + R_S w' \left(\frac{1}{X'_d} + \frac{1}{X'_q} \right) T'_d T''_d T_{KDO} + (2 T_{KD} + R_S w' \frac{T_{KD}}{X'_q}) (T'_{do} - T'_d) \right]$$

$$\epsilon_3 = \frac{1}{B T'_d T'_{do} T''_{do}} \left[T'_d + T''_d + T_{KDO} + R_S w' \left(\frac{1}{X'_d} + \frac{1}{X'_q} \right) \left[(T'_d + T''_d) T_{KDO} + T'_d T''_d \right] + (2 R_S w' \frac{T_{KD}}{X'_q} + 1) (T'_{do} - T'_d) \right] + w'^2$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{B T'_d T'_{do} T''_{do}} \left[w'^2 (T'_d T''_d + T_{KDO} [T'_d + T''_d]) + R_S w' \left(\frac{1}{X'_d} + \frac{1}{X'_q} \right) (T'_d + T''_d + T_{KDO}) + 1 + (2 w'^2 T_{KD} + \frac{R_S w'}{X'_q}) (T'_{do} - T'_d) \right]$$

$$\epsilon_1 = \frac{1}{B T'_d T'_{do} T''_{do}} \left[w'^2 (T'_d + T_{KDO} + T'_{do}) + R_S w' \left(\frac{1}{X'_d} + \frac{1}{X'_q} \right) \right]$$

$$\epsilon_0 = \frac{w'^2}{B T'_d T'_{do} T''_{do}}$$

$$\text{avec } D'_1 = \left(p + \frac{1}{T'_d} \right) \left(p + \frac{1}{T''_d} \right) \left(p + i w' + \frac{R_S w'}{2} \left(\frac{1}{X'_d} + \frac{1}{X'_q} \right) \right) \left(p - i w' + \frac{R_S w'}{2} \left(\frac{1}{X'_d} + \frac{1}{X'_q} \right) \right)$$

$$\text{et } D'_2 = \left(p + \frac{1}{T'_q} \right) \left(p + i w' + \frac{R_S w'}{2} \left(\frac{1}{X'_d} + \frac{1}{X'_q} \right) \right) \left(p - i w' + \frac{R_S w'}{2} \left(\frac{1}{X'_d} + \frac{1}{X'_q} \right) \right)$$

On écrit les admittances opérationnelles sous la forme

$$Y'_{11} = \frac{w'}{X'_d} \cdot \frac{1}{D'_1} (p + n'_{1d}) (p + n'_{2d}) (p + n'_{3d})$$

$$Y'_{12} = \frac{w'^2}{X'_d} \cdot \frac{1}{D'_1} (p + n'_{1d}) (p + n'_{2d})$$

$$Y'_{13} = - \frac{M_F T_{KD} w'}{R_F X_d T'_d T''_d} \cdot \frac{1}{D'_1} (p + n'_{6d}) (p + n'_{6d}^*) (p + n'_{8d})$$

$$Y'_{21} = - \frac{w'^2}{X'_q} \cdot \frac{1}{D'_2} (p + n_{3q})$$

$$Y'_{22} = \frac{w'}{X'_q} \cdot \frac{1}{D'_2} (p + n_{3q}) (p + n'_{4q})$$

$$Y'_{23} = - \frac{w'^3 R_S M_F T_{KD}}{X'_q R_F X_d T'_d T''_d} \cdot \frac{1}{D'_2} \cdot \frac{(p+n_{8d})(p+n_{3q})}{(p+n'_{1d})(p+n'_{2d})}$$

$$Y'_{31} = - \frac{w' M_F T_{KD}}{R_F X_d T'_d T''_d} \cdot \frac{1}{D'_1} p (p+n_{8d})(p+n'_{3d})$$

$$Y'_{32} = - \frac{w'^2 M_F T_{KD}}{R_F X_d T'_d T''_d} \cdot \frac{1}{D'_1} p (p+n_{8d})$$

$$Y'_{33} = \frac{B}{R_F T'_d} \cdot \frac{1}{D'_1} \cdot \frac{N'_{33}}{(p+n'_{1d})(p+n'_{2d})}$$

avec, suivant la nature des racines de N'_{33} ,

$$N'_{33} = (p+n'_{1F})(p+n'_{2F})(p+n'_{2F}^*)(p+n'_{3F})(p+n'_{3F}^*)$$

ou $N'_{33} = (p+n'_{1F})(p+n'_{2F})(p+n'_{4F})(p+n'_{3F})(p+n'_{3F}^*)$

et $D'_1 = (p+p_1)(p+p_2)(p+p_3)(p+p_3^*)$

$$D'_2 = (p+p_3)(p+p_3^*)(p+p_5)$$

On peut dès à présent remarquer que si les simplifications usuelles simplifient effectivement les expressions des admittances liant I_d et I_q à V_d et V_q et V_F ; il en est autrement de celle, Y'_{33} , liant I_F à V_F .

I.2. MISE EN EVIDENCE DE L'INFLUENCE DE R_S SUR LES POLES ET LES RACINES DES TRANSMITTANCES

Pour analyser l'influence de la résistance statorique R_S sur les admittances réelles Y_{ij} de la machine synchrone. On va comparer ces admittances avec celle Y_{ij} utilisées par la théorie classique. On pourra ainsi voir les limites de la théorie classique et les erreurs qu'elle peut engendrer. Pour cela on va se donner un jeu de paramètres pour deux machines différentes.

a) La machine à pôles lisses

b) La machine à pôles saillants

et on va comparer les Y_{ij} avec les Y'_{ij} , on fera ensuite un exemple de comparaison

des courbes de courants par les deux théories dans le cas d'un court-circuit triphasé brusque.

Le tableau 1.III ci dessous donne des valeurs usuelles de réactances à la vitesse nominale, exprimées en valeurs réduites, et de constantes de temps, exprimées en secondes. La première série est relative à une machine à rotor lisse, la seconde à une machine à pôles saillants.

d	X'_d	X''_d	X_q	X''_q	T'_{do}	T''_{do}	T'_d	T''_d	T''_{qo}	T''_q	T_{KD}
	0,275	0,2	2	0,2	10	0,044	1,375	0,032	0,08	0,008	0,02
2	0,4	0,32	0,66	0,33	5,1	0,045	1,7	0,036	0,055	0,0275	0,02

TABLEAU 1. III

Chacun de ces jeux de paramètres vérifie les relations

$$\frac{T'_{do}}{T'_d} = \frac{X_d}{X'_d} ; \quad \frac{T''_{do}}{T''_d} = \frac{X'_d}{X''_d} ; \quad \frac{T''_q}{T''_{qo}} = \frac{X''_q}{X_q}$$

qui découlent des définitions rappelées au tableau 1.I

Tous ces calculs ont été effectués pour $\omega' = 100 \pi$

Constantes de temps

Le tableau 1.IV montre, pour la machine à rotor lisse comment évoluent les pôles des admittances, donc les constantes de temps et les pseudo-pulsations lorsque la résistance statorique croît.

On a fait varier le rapport R_S/X_d de 0 (machine théorique) à 8% (machine de faible puissance).

Le tableau 1.VIII est relatif à la machine à pôles saillants

On remarque :

- que p_1 est peu différent de $1/T'_d$ (ou p'_1) mais qu'il y a un petit écart même pour $R_S = 0$ sauf si $T_{KD} = T''_d$ car alors $B = 1$
- que p_2 est peu différent de $1/T''_d$ (ou p'_2) mais qu'il y a un petit écart même pour $R_S = 0$ sauf si $T_{KD} = T''_d$ car alors $B = 1$

- que p_5 diffère peu de $1/T''_q$ (ou p'_5) ; toutefois l'écart croît avec R_S plus nettement pour la machine à rotor lisse
- que la partie réelle de p_3 et p_3^* reste toujours très voisine de $\frac{\omega' R_S}{2} \left(\frac{1}{X''_d} + \frac{1}{X''_q} \right)$ qui donne la partie réelle de p'_3 et p'_3^*
- que la partie imaginaire de p_3 et p_3^* ne diffère sensiblement de ω' quand R_S croît que pour la machine à rotor lisse.

Amplitudes

Pour les mêmes jeux de paramètres, nous avons calculé les zéros des numérateurs des admittances Y exactes et des admittances Y' telles qu'elles découlent des simplifications usuelles.

Pour la machine à rotor lisse, le tableau 1.V est relatif à l'expression de I_d , le tableau 1.VI à celle de I_q et le tableau 1.VII à celle de I_F

Pour la machine à pôles saillants, les zéros relatifs à I_d , I_q et I_F sont donnés par les tableaux 1.IX, 1.X et 1.XI

L'examen de ces tableaux montre, pour R_S nul, quelles sont les admittances Y et Y' qui sont égales ou très voisines. Puis quand R_S croît, quels sont les écarts qui apparaissent.

- pour R_S nul, puisque $p'_1 \neq p_1$; $p'_2 \neq p_2$; $(p'_3, p'_3^*) = (p_3, p_3^*)$
 $p'_5 = p_5$; $n'_{1d} \neq n_{1d}$; $n'_{2d} \neq n_{2d}$; $n'_{3d} = n_{3d}$; $n_{4d} = n_{5d} = n_{7d} = p_5$,
 $(n'_{6d}, n'_{6d}^*) = (n_{6d}, n_{6d}^*)$; $n_{1q} = n_{5q} = p_1$; $n_{2q} = n_{6q} = p_2$; $n'_{4q} = n_{4q}$;
 $n_{2F} = p_5$; $(n'_{3F}, n'_{3F}^*) = (n_{3F}, n_{3F}^*)$

Les admittances $Y'_{11}, Y'_{12}, Y'_{13}, Y'_{21}, Y'_{22}, Y'_{31}, Y'_{32}, Y'_{33}, Y'_{23}$ diffèrent peu ou pas de $Y_{11}, Y_{12}, Y_{13}, Y_{21}, Y_{22}, Y_{31}, Y_{32}, Y_{33}, Y_{23}$

Dès que R_S cesse d'être nul, à cause des écarts apparaissant entre n'_{3d} et n_{3d} ; n'_{4q} et n_{4q} ; n_{5q} et p_1 ; n_{4d} et p_5 ; n_{6q} et p_2 les admittances $Y'_{11}, Y'_{22}, Y'_{23}$ et Y'_{31} diffèrent notablement de Y_{11}, Y_{22}, Y_{23} et Y_{31} .

On voit que les hypothèses simplificatrices ne peuvent conduire à des écarts notables

Dès que R_S prend une valeur notable il apparaît des erreurs sur les termes

$$Y'_{11}, Y'_{22}, Y'_{23}, Y'_{31}$$

Pour le montrer il suffit d'examiner l'expression Y_{11} et Y'_{11} pour une machine à pôles lisses avec $R_S = 3\%$ de X_d . Cette expression fait intervenir un terme de la forme $\exp(-128t)$. Il s'amortit très rapidement mais son amplitude initiale $0,13 V_d(-128)$ est grande devant celle des termes en $\exp(-31,9t)$ ou $\exp(-0,718t)$ qui ont pour amplitude $0,00477 V_d(-31,9)$ ou $0,0000377 V_d(-0,718)$.

MACHINE A ROTOR LISSE

TABLEAU 1. IV

$\frac{100 R_S}{X_d}$	P_1	P_2	$P_3 \cdot P_3^*$	P_5	P'_1	P'_2	$P'_3 \cdot P_3^*$	P'_5
0	0,722	31,5	0 \pm i 314	125	0,727	31,25	0 \pm i 314	125
1	0,721	31,6	29,8 \pm i 309	128	31,4 \pm i
2	0,720	31,7	60,6 \pm i 302	129	62,8 \pm i
3	0,718	31,9	92,7 \pm i 296	128	94,2 \pm i
4	0,715	32,1	126 \pm i 289	123	126 \pm i
5	0,711	32,4	161 \pm i 283	115	157 \pm i
6	0,707	32,8	198 \pm i 278	104	188 \pm i
7	0,702	33,3	236 \pm i 275	92	220 \pm i
8	0,696	34,0	273 \pm i 274	80	251 \pm i

TABLEAU 1. V

$\frac{100 R_S}{X_d}$	n_{1d}	n_{2d}	n_{3d}	n_{4d}	n_{5d}	$n_{6d} \cdot n_{6d}^*$	n_{7d}	n_{8d}	n'_{1d}	n'_{2d}	n'_{3d}	$n'_{6d} \cdot n_{6d}^*$
0	0,0971	23,4	0	125	125	0 \pm i 314	125	50	0,100	22,7	0	0 \pm i 314
1	2,55	154	..	13,7 \pm i 309	129	31,4	15,7 \pm i 314
2	4,28	182	..	27,0 \pm i 303	134	62,8	31,4 \pm i 313
3	5,51	214	..	40,1 \pm i 295	139	94,2	47,1 \pm i 311
4	6,43	244	..	52,7 \pm i 287	145	126	62,8 \pm i 308
5	7,14	275	..	64,8 \pm i 277	152	157	78,5 \pm i 304
6	7,71	306	..	76,1 \pm i 266	161	188	94,2 \pm i 300
7	8,16	337	..	86,4 \pm i 253	172	220	110 \pm i 294
8	8,54	368	..	95,3 \pm i 239	186	251	126 \pm i 288

MACHINE A ROTOR LISSE

TABLEAU 1. VI

$\frac{100R_S}{X_d}$	n_{1q}	n_{2q}	n_{3q}	n_{4q}	n_{5q}	n_{6q}	n'_{4q}
0	0,722	31,5	12,5	0	0,722	31,5	0
1	0,0945	15,8	47,7	31,4
2	0,0958	19,8	75,1	62,8
3	0,0962	21,2	105	94,2
4	0,0964	21,8	136	126
5	0,0965	22,1	167	157
6	0,0966	22,4	198	188
7	0,0967	22,5	230	220
8	0,0967	22,6	261	251

TABLEAU 1. VII

$\frac{100R_S}{X_d}$	n_{1F}	n_{2F}	n_{3F} , n_{3F}^*	n'_{1F}	n'_{2F} , n'_{2F}	n'_{3F} , n'_{3F}^*
0	23,6	125	0 ± i 314	0,0972	23,4 ± i 1,99	0 ± i 314
1	23,8	128	26,8 ± i 308	0,0972	23,4 ± i 2,22	28,5 ± i 312
2	24,0	130	54,5 ± i 301	0,0971	23,5 ± i 2,44	57,0 ± i 308
3	24,2	129	83,3 ± i 294	0,0972	23,5 ± i 2,65	85,5 ± i 301
4	24,6	125	113 ± i 287	0,0972	23,5 ± i 2,85	114 ± i 291
5	24,9	118	145 ± i 280	0,0972	23,5 ± i 3,05	142 ± i 277
6	25,3	108	179 ± i 273	0,0971	23,5 ± i 3,24	171 ± i 260
7	25,9	96,2	213 ± i 269	0,0971	23,5 ± i 3,42	199 ± i 238
8	26,7	83,5	247 ± i 266	0,0971	23,5 ± i 3,60	228 ± i 210

MACHINE A POLES SAILLANTS

TABLEAU 1. VIII

$\frac{100 R_S}{X_d}$	P_1	P_2	$P_3 \cdot P_3^*$	P_5	P'_1	P'_2	$P'_3 \cdot P_3^*$	P'_5
0	0,582	28,1	0 $\pm i 314$	36,4	0,588	27,8	0 $\pm i 314$	36,4
1	0,581	28,1	11,6 $\pm i 314$	36,4	11,6 $\pm i$
2	0,581	28,2	23,2 $\pm i 313$	36,4	23,2 $\pm i$
3	0,580	28,2	34,8 $\pm i 313$	36,2	34,8 $\pm i$
4	0,578	28,3	46,5 $\pm i 312$	36,0	46,4 $\pm i$
5	0,576	28,4	58,2 $\pm i 312$	35,7	58,0 $\pm i$
6	0,574	28,6	69,9 $\pm i 312$	35,3	69,6 $\pm i$
7	0,572	28,8	81,7 $\pm i 311$	34,8	81,2 $\pm i$
8	0,569	29,0	93,5 $\pm i 311$	34,1	92,8 $\pm i$

TABLEAU 1. IX

$\frac{100 R_S}{X_d}$	n_{1d}	n_{2d}	n_{3d}	n_{4d}	n_{5d}	$n_{6d} \cdot n_{6d}^*$	n_{7d}	n_{8d}	n'_{1d}	n'_{2d}	n'_{3d}	$n'_{6d} \cdot n_{6d}^*$
0	0,191	22,8	0	36,4	36,4	0 $\pm i 314$	36,4	50	0,196	22,2	0	0 $\pm i 314$
1	4,84	43,0	..	5,67 $\pm i 314$	36,4	11,4	5,71 $\pm i 314$
2	8,13	51,1	..	11,3 $\pm i 313$	36,5	22,8	11,4 $\pm i 314$
3	10,3	60,3	..	17,0 $\pm i 313$	36,6	34,3	17,1 $\pm i 314$
4	11,8	70,2	..	22,7 $\pm i 312$	36,7	45,7	22,8 $\pm i 313$
5	12,9	80,6	..	28,4 $\pm i 311$	36,8	57,1	28,6 $\pm i 313$
6	13,7	91,2	..	34,0 $\pm i 310$	36,8	68,5	34,3 $\pm i 312$
7	14,2	102	..	39,7 $\pm i 309$	36,9	80,0	40,0 $\pm i 312$
8	14,7	113	..	45,4 $\pm i 308$	37	91,4	45,7 $\pm i 311$

MACHINE A POLES SAILLANTS

TABLEAU 1. X

$\frac{100 R_S}{X_d}$	n_{1q}	n_{2q}	n_{3q}	n_{4q}	n_{5q}	n_{6q}	n'_{4q}
0	0,582	28,1	18,18	0	0,582	28,1	0
1	0,183	8,94	31,3	11,8
2	0,187	14,7	37,3	23,6
3	0,18	17,8	46,1	35,3
4	0,189	19,3	56,3	47,1
5	0,190	20,2	67,2	58,9
6	0,190	20,7	78,5	70,7
7	0,190	21,1	89,9	82,5
8	0,190	21,3	101	94,8

TABLEAU 1. XI

$\frac{100 R_S}{X_d}$	n_{1F}	n_{2F}	n_{3F} , n_{3F}^*	n'_{1F}	n'_{2F} , n_{2F}^* ou n'_{2F}	n'_{3F} , n_{3F}^*
0	18,2	36,4	0 ± i 314	0,192	21,5 19,3	0 ± i 314
1	18,2	36,4	10,9 ± i 314	0,192	21,4 19,4	11,0 ± i 314
2	18,2	36,4	21,9 ± i 313	0,192	21,2 19,5	21,9 ± i 313
3	18,3	36,3	32,9 ± i 313	0,192	21,1 19,7	32,9 ± i 312
4	18,3	36,1	44,0 ± i 312	0,192	20,9 19,9	43,9 ± i 311
5	18,3	35,8	55,1 ± i 311	0,191	20,5 20,3	54,8 ± i 309
6	18,4	35,4	66,2 ± i 311	0,192	20,4 ± i 0,487	65,8 ± i 306
7	18,4	35,0	77,3 ± i 310	0,192	20,4 ± i 0,696	76,8 ± i 304
8	18,4	34,5	88,5 ± i 310	0,192	20,4 ± i 0,857	87,7 ± i 301

Forme Générale	Forme Usuelle
$I_d(p) = 1571 \frac{p(p+0,0971)(p+23,4)}{(p+0,722)(p+31,5)(p+i314)(p-i314)} \cdot \frac{(p+125)}{(p+125)}$ $+ 493480 \frac{(p+0,0971)(p+23,4)}{(p+0,722)(p+31,5)(p+i314)(p-i314)} \cdot \frac{(p+125)}{(p+125)}$ $- 71,4 \frac{M_F}{R_F} \cdot \frac{(p+50)}{(p+0,722)(p+31,5)} \cdot \frac{(p+i314)(p-i314)(p+125)}{(p+i314)(p-i314)(p+125)}$	$I'_d(p) = 1571 \frac{p(p+0,1)(p+22,7)}{(p+0,727)(p+31,25)(p+i314)(p-i314)}$ $+ 493480 \frac{(p+0,1)(p+22,7)}{(p+0,727)(p+31,25)(p+i314)(p-i314)}$ $- 71,4 \frac{M_F}{R_F} \cdot \frac{(p+50)}{(p+0,727)(p+31,25)} \cdot \frac{(p+i314)(p-i314)}{(p+i314)(p-i314)}$
$I_q(p) = -493480 \frac{(p+0,722)(p+31,5)}{(p+0,722)(p+31,5)} \cdot \frac{(p+12,5)}{(p+i314)(p-i314)(p+125)}$ $+ 1571 \frac{(p+0,722)(p+31,5)}{(p+0,722)(p+31,5)} \cdot \frac{(p+12,5)p}{(p+i314)(p-i314)(p+125)}$ $- 35234,405R_S \frac{M_F}{R_F} \cdot \frac{(p+50)(p+12,5)}{(p+0,722)(p+31,5)(p+i314)(p-i314)(p+125)}$	$I'_q(p) = -493480 \frac{(p+12,5)}{(p+i314)(p-i314)(p+125)}$ $+ 1571 \frac{(p+12,5)p}{(p+i314)(p-i314)(p+125)}$ $- 35234,405R_S \frac{M_F}{R_F} \cdot \frac{(p+50)(p+12,5)}{(p+0,1)(p+22,7)(p+i314)(p-i314)(p+125)}$
$I_F(p) = -71,4 \frac{M_F}{R_F} \cdot \frac{p^2(p+50)}{(p+0,722)(p+31,5)(p+i314)(p-i314)} \cdot \frac{(p+125)}{(p+125)}$ $- 22431 \frac{M_F}{R_F} \cdot \frac{p(p+50)}{(p+0,722)(p+31,5)(p+i314)(p-i314)} \cdot \frac{(p+125)}{(p+125)}$ $+ 0,9625 \frac{(p+23,6)}{(p+0,1722)(p+31,5)} \cdot \frac{(p+i314)(p-i314)(p+125)}{(p+i314)(p-i314)(p+125)}$	$I'_F(p) = -71,4 \frac{M_F}{R_F} \cdot \frac{p^2(p+50)}{(p+0,727)(p+31,25)(p+i314)(p-i314)}$ $- 22431 \frac{M_F}{R_F} \cdot \frac{p(p+50)}{(p+0,727)(p+31,25)(p+i314)(p-i314)}$ $+ 0,9625 \frac{(p+0,0972)(p+23,4+i,99)(p+23,4-i,99)(p+i314)(p-i314)}{(p+0,1)(p+22,7)(p+31,25)(p+i314)(p-i314)}$

$Y'_{11} \# Y_{11}$ $Y'_{21} = Y_{21}$ $Y'_{31} \# Y_{31}$
 $Y'_{12} \# Y_{12}$ $Y'_{22} = Y_{22}$ $Y'_{32} \# Y_{32}$
 $Y'_{13} \# Y_{13}$ $Y'_{23} = Y_{23} = 0$ $Y'_{33} \# Y_{33}$

Forme Générale		Forme Usuelle	
$I_d(p) = 982 \frac{p(p+0,191)(p+22,8)}{(p+0,582)(p+28,1)(p+i314)(p-i314)} \cdot \frac{(p+36,4)}{(p+36,4)}$	$V_d(p)$	$I'_d(p) = 982 \frac{p(p+0,196)(p+22,2)}{(p+0,588)(p+27,8)(p+i314)(p-i314)}$	$V_d(p)$
$+ 308425 \frac{(p+0,191)(p+22,8)}{(p+0,582)(p+28,1)(p+i314)(p-i314)} \cdot \frac{(p+36,4)}{(p+36,4)}$	$V_q(p)$	$+ 308425 \frac{(p+0,196)(p+22,2)}{(p+0,588)(p+27,8)(p+i314)(p-i314)}$	$V_q(p)$
$- 85,5 \frac{M_F}{R_F} \frac{(p+50)}{(p+0,582)(p+28,1)} \cdot \frac{(p+i314)(p-i314)(p+36,4)}{(p+i314)(p-i314)(p+36,4)}$	$V_F(p)$	$- 85,5 \frac{M_F}{R_F} \frac{(p+50)}{(p+0,588)(p+27,8)} \cdot \frac{(p+i314)(p-i314)}{(p+i314)(p-i314)}$	$V_F(p)$
$I_q(p) = -299079 \frac{(p+0,582)(p+28,1)}{(p+0,582)(p+28,1)} \cdot \frac{(p+18,18)}{(p+i314)(p-i314)(p+36,4)}$	$V_d(p)$	$I'_q(p) = -299079 \frac{(p+18,18)}{(p+i314)(p-i314)(p+36,4)}$	$V_d(p)$
$+ 952 \frac{(p+0,582)(p+28,1)}{(p+0,582)(p+28,1)} \cdot \frac{(p+18,18)}{(p+i314)(p-i314)(p+36,4)}$	$V_q(p)$	$+ 952 \frac{(p+18,18)p}{(p+i314)(p-i314)(p+36,4)}$	$V_q(p)$
$- 25587803R_S \frac{M_F}{R_F} \frac{(p+50)(p+18,18)}{(p+0,582)(p+28,1)(p+i314)(p-i314)(p+36,4)}$	$V_F(p)$	$- 25587803R_S \frac{M_F}{R_F} \frac{(p+50)(p+18,18)}{(p+0,196)(p+22,2)(p+i314)(p-i314)(p+36,4)}$	$V_F(p)$
$I_F(p) = -85,5 \frac{M_F}{R_F} \frac{p^2(p+50)}{(p+0,582)(p+28,1)(p+i314)(p-i314)} \cdot \frac{(p+36,4)}{(p+36,4)}$	$V_d(p)$	$I'_F(p) = -85,5 \frac{M_F}{R_F} \frac{p^2(p+50)}{(p+0,588)(p+27,8)(p+i314)(p-i314)}$	$V_d(p)$
$- 26878 \frac{M_F}{R_F} \frac{p(p+50)}{(p+0,582)(p+28,1)(p+i314)(p-i314)} \cdot \frac{(p+36,4)}{(p+36,4)}$	$V_q(p)$	$- 26878 \frac{M_F}{R_F} \frac{p(p+50)}{(p+0,588)(p+27,8)(p+i314)(p-i314)}$	$V_q(p)$
$+ 0,9 \frac{(p+18,8)}{(p+0,582)(p+28,1)} \cdot \frac{(p+i314)(p-i314)(p+36,4)}{(p+i314)(p-i314)(p+36,4)}$	$V_F(p)$	$+ 0,9 \frac{(p+0,192)(p+21,5)}{(p+0,192)(p+22,2)} \cdot \frac{(p+19,3)}{(p+0,588)(p+27,8)} \cdot \frac{(p+i314)(p-i314)}{(p+i314)(p-i314)}$	$V_F(p)$

$Y'_{11} \# Y_{11}$	$Y'_{21} = Y_{21}$	$Y'_{31} \# Y_{31}$
$Y'_{12} \# Y_{12}$	$Y'_{22} = Y_{22}$	$Y'_{32} \# Y_{32}$
$Y'_{13} \# Y_{13}$	$Y'_{23} = Y_{23} = 0$	$Y'_{33} \# Y_{33}$

Forme Générale	Forme Usuelle
$I_d(p) = 1571 \frac{\frac{(p+5,51)}{(p+0,718)}(p+31,9)(p+0,0971)(p+23,4)}{(p+0,718)(p+31,9)(p+92,7+i296)(p+92,7-i296)} \cdot \frac{(p+214)}{(p+128)} V_d(p)$ $+493480 \frac{(p+0,0971)(p+23,4)}{(p+0,718)(p+31,9)(p+92,7+i296)(p+92,7-i296)} \cdot \frac{(p+125)}{(p+128)} V_q(p)$ $-71,4 \frac{M_F}{R_F} \frac{(p+50)(p+40,1+i295)(p+40,1-i295)(p+139)}{(p+0,718)(p+31,9)(p+92,7+i296)(p+92,7-i296)} \cdot \frac{(p+128)}{(p+128)} V_F(p)$	$I'_d(p) = 1571 \frac{(p+94,2)(p+0,1)(p+22,7)}{(p+0,727)(p+31,25)(p+94,2+i314)(p+94,2-i314)} V_d(p)$ $+493480 \frac{(p+0,1)(p+22,7)}{(p+0,727)(p+31,25)(p+94,2+i314)(p+94,2-i314)} V_q(p)$ $-71,4 \frac{M_F}{R_F} \frac{(p+50)(p+47,1+i311)(p+47,1-i311)}{(p+0,727)(p+31,25)(p+94,2+i314)(p+94,2-i314)} V_F(p)$
$I_q(p) = -493480 \frac{(p+0,722)(p+31,5)(p+12,5)}{(p+0,718)(p+31,9)(p+92,7+i296)(p+92,7-i296)(p+128)} V_d(p)$ $+1571 \frac{(p+0,0962)(p+21,2)}{(p+0,718)(p+31,9)(p+92,7+i296)(p+92,7-i296)(p+128)} \cdot \frac{(p+105)}{(p+12,5)(p+105)} V_q(p)$ $-2114,064 \frac{M_F}{R_F} \frac{(p+0,718)(p+31,9)(p+50)(p+12,5)}{(p+0,718)(p+31,9)(p+92,7+i296)(p+92,7-i296)(p+128)} V_F(p)$	$I'_q(p) = -493480 \frac{(p+12,5)}{(p+94,2+i314)(p+94,2-i314)(p+125)} V_d(p)$ $+1571 \frac{(p+12,5)(p+94,2)}{(p+94,2+i314)(p+94,2-i314)(p+125)} V_q(p)$ $-2114,064 \frac{M_F}{R_F} \frac{(p+50)(p+12,5)}{(p+0,1)(p+22,7)(p+94,2+i314)(p+94,2-i314)(p+125)} V_F(p)$
$I_F(p) = -71,4 \frac{M_F}{R_F} \frac{(p+5,51)p(p+50)}{(p+0,718)(p+31,9)(p+92,7+i296)(p+92,7-i296)} \cdot \frac{(p+214)}{(p+128)} V_d(p)$ $-22431 \frac{M_F}{R_F} \frac{p(p+50)}{(p+0,718)(p+31,9)(p+92,7+i296)(p+92,7-i296)} \cdot \frac{(p+125)}{(p+128)} V_q(p)$ $+0,9625 \frac{(p+24,2)}{R_F} \frac{(p+83,3+i294)(p+83,3-i294)(p+129)}{(p+0,718)(p+31,9)(p+92,7+i296)(p+92,7-i296)} \cdot \frac{(p+128)}{(p+128)} V_F(p)$	$I'_F(p) = -71,4 \frac{M_F}{R_F} \frac{(p+94,2)p(p+50)}{(p+0,727)(p+31,25)(p+94,2+i314)(p+94,2-i314)} V_d(p)$ $-22431 \frac{M_F}{R_F} \frac{p(p+50)}{(p+0,727)(p+31,25)(p+94,2+i314)(p+94,2-i314)} V_q(p)$ $+0,9625 \frac{(p+0,0971)(p+23,5+i2,65)(p+23,5-i2,65)(p+85,5+i301)(p+85,5-i301)}{R_F} \frac{(p+22,7)(p+0,727)(p+31,25)(p+94,2+i314)(p+94,2-i314)}{(p+0,1)(p+22,7)(p+0,727)(p+31,25)(p+94,2+i314)(p+94,2-i314)} V_F(p)$

$Y'_{12} \# Y_{12}$ $Y'_{21} \# Y_{21}$ $Y'_{32} \# Y_{32}$
 $Y'_{13} \# Y_{13}$ $Y'_{33} \# Y_{33}$

Forme Générale	Forme Usuelle
$I_d(p) = 982 \frac{(p+10,3)(p+0,191)(p+22,8)}{(p+0,58)(p+28,2)(p+34,8+i313)(p+34,8-i313)} \cdot \frac{(p+60,3)}{(p+36,2)} V_d(p)$ $+ 308425 \frac{(p+0,191)(p+22,8)}{(p+0,58)(p+28,2)(p+34,8+i313)(p+34,8-i313)} \cdot \frac{(p+36,6)}{(p+36,2)} V_q(p)$ $- 85,5 \frac{M_F}{R_F} \frac{(p+50)(p+17+i313)(p+17-i313)}{(p+0,58)(p+28,2)(p+34,8+i313)(p+34,8-i313)} \cdot \frac{(p+36,6)}{(p+36,2)} V_F(p)$	$I_d(p) = 982 \frac{(p+34,3)(p+0,196)(p+22,2)}{(p+0,588)(p+27,8)(p+34,8+i314)(p+34,8-i314)} V_d(p)$ $+ 308425 \frac{(p+0,196)(p+22,2)}{(p+0,588)(p+27,8)(p+34,8+i314)(p+34,8-i314)} V_q(p)$ $- 85,5 \frac{M_F}{R_F} \frac{(p+50)(p+17,1+i314)(p+17,1-i314)}{(p+0,588)(p+27,8)(p+34,8+i314)(p+34,8-i314)} V_F(p)$
$I_q(p) = -299079 \frac{(p+0,582)(p+28,1)(p+18,18)}{(p+0,58)(p+28,2)(p+34,8+i313)(p+34,8-i313)(p+36,2)} V_d(p)$ $+ 952 \frac{(p+0,188)(p+17,8)(p+18,18)}{(p+0,58)(p+28,2)(p+34,8+i313)(p+34,8-i313)(p+36,2)} \cdot \frac{(p+46,1)}{(p+36,2)} V_q(p)$ $- 921161 \frac{M_F}{R_F} \frac{(p+0,58)(p+28,2)(p+18,18)}{(p+0,58)(p+28,2)(p+34,8+i313)(p+34,8-i313)(p+36,2)} V_F(p)$	$I_q(p) = -299079 \frac{(p+18,18)}{(p+34,8+i314)(p+34,8-i314)(p+36,4)} V_d(p)$ $+ 952 \frac{(p+18,18)(p+35,3)}{(p+34,8+i314)(p+34,8-i314)(p+36,4)} V_q(p)$ $- 921161 \frac{M_F}{R_F} \frac{(p+50)(p+18,18)}{(p+0,196)(p+22,2)(p+34,8+i314)(p+34,8-i314)(p+36,4)} V_F(p)$
$I_F(p) = -85,5 \frac{M_F}{R_F} \frac{(p+10,3)(p+0,58)(p+28,2)(p+34,8+i313)(p+34,8-i313)}{(p+0,58)(p+28,2)(p+34,8+i313)(p+34,8-i313)} \cdot \frac{(p+60,3)}{(p+36,2)} V_d(p)$ $- 26878 \frac{M_F}{R_F} \frac{(p+0,58)(p+28,2)(p+18,18)}{(p+0,58)(p+28,2)(p+34,8+i313)(p+34,8-i313)} \cdot \frac{(p+36,4)}{(p+36,2)} V_q(p)$ $+ 0,898 \frac{(p+18,3)(p+32,9+i313)(p+32,9-i313)}{(p+0,58)(p+28,2)(p+34,8+i313)(p+34,8-i313)} \cdot \frac{(p+36,3)}{(p+36,2)} V_F(p)$	$I_F(p) = -85,5 \frac{M_F}{R_F} \frac{(p+34,3)(p+50)}{(p+0,588)(p+27,8)(p+34,8+i314)(p+34,8-i314)} V_d(p)$ $- 26878 \frac{M_F}{R_F} \frac{p(p+50)}{(p+0,588)(p+27,8)(p+34,8+i314)(p+34,8-i314)} V_q(p)$ $+ 0,898 \frac{(p+0,192)(p+21,1)(p+19,7)(p+32,9+i312)(p+32,9-i312)}{(p+0,196)(p+22,2)(p+0,588)(p+27,8)(p+34,8+i314)(p+34,8-i314)} V_F(p)$

$Y_{12} \# Y_{12}$ $Y_{21} \# Y_{21}$ $Y_{32} \# Y_{32}$
 $Y_{13} \# Y_{13}$ $Y_{33} \# Y_{33}$

I.3. MISE EN EVIDENCE DE L'INFLUENCE DE R_S DANS LE CAS D'UN COURT-CIRCUIT TRIPHASE SYMETRIQUE

Dans le cas du court-circuit triphasé, cela équivaut à appliquer les tensions suivantes $V_d = 0$, $V_q = -\frac{E\sqrt{3}}{p}$, $V_F = 0$

$$\begin{array}{l} \text{régime antérieur} \quad + \quad \text{application du court-circuit} \quad = \quad \text{régime obtenu} \\ \left\{ \begin{array}{l} V_d = 0 \\ V_q = M_F \omega i_{F0} = E\sqrt{3} \\ V_F = V_{F0} \end{array} \right. + \begin{array}{l} V_d = 0 \\ V_q = -E\sqrt{3} \\ V_F = 0 \end{array} = \begin{array}{l} V_d = 0 \\ V_q = 0 \\ V_F = V_{F0} \end{array} \end{array}$$

Il est ainsi possible de comparer Y_{12}, Y_{22}, Y_{32} avec $Y'_{12}, Y'_{22}, Y'_{32}$

Il est possible grâce aux simplifications et approximations habituellement effectuées de connaître I_d, I_q et I_F en fonction du temps sous sa forme littérale (car pour $Y'_{12}, Y'_{22}, Y'_{32}$ les termes de plus haut degré sont du second ordre).

On a donc :

$$I_d(t) = -E\sqrt{3} \left[\frac{1}{X_d} + \left(\frac{1}{X'_d} - \frac{1}{X_d} \right) e^{-\frac{t}{T'_d}} + \left(\frac{1}{X''_d} - \frac{1}{X'_d} \right) e^{-\frac{t}{T''_d}} - \frac{1}{X''_d} \cos \omega't e^{-\frac{t}{T_a}} \right]$$

$$I_q(t) = -\frac{E\sqrt{3}}{X''_q} \sin \omega't e^{-\frac{t}{T_a}}$$

$$I_F(t) = i_{F0} \left\{ 1 + \frac{X_d - X'_d}{X'_d} \left[e^{-\frac{t}{T'_d}} - \left(1 - \frac{T_{KD}}{T''_d} \right) e^{-\frac{t}{T''_d}} - \frac{T_{KD}}{T''_d} e^{-\frac{t}{T_a}} \cos \omega't \right] \right\}$$

$$\text{avec } \frac{1}{T_a} = \frac{\omega' R_S}{2} \left(\frac{1}{X''_d} + \frac{1}{X''_q} \right)$$

Connaissant I_d et I_q on peut connaître $I_A(t)$ (courant réel dans la phase A) par la transformation inverse de PARK

$$I_A(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ i_d(t) \cos(\omega't + \varphi) - i_q(t) \sin(\omega't + \varphi) \right\}$$

avec φ l'écart angulaire, au moment du court-circuit, entre l'axe de la phase A et l'axe polaire (ici on prend $\varphi = 0$)

MACHINE A POLES SAILLANTS : $R_S = 3\%$ de X_d

Forme Générale

Forme Usuelle

$$I_d(t) = -E\sqrt{3} \begin{bmatrix} +0,832 \\ +1,688 \cdot e^{-0,58t} \\ +0,622 \cdot e^{-28,2t} \\ + \begin{bmatrix} -3,12 \cos 312,8t \\ -0,29 \sin 312,8t \end{bmatrix} \cdot e^{-34,8t} \\ -0,02 \cdot e^{-36,2t} \end{bmatrix}$$

$$I_d(t) = -E\sqrt{3} \begin{bmatrix} +0,833 \\ +1,666 \cdot e^{-0,588t} \\ +0,625 \cdot e^{-27,8t} \\ -3,12 \cos 314,1t \cdot e^{-34,8t} \end{bmatrix}$$

$$I_q(t) = -E\sqrt{3} \begin{bmatrix} +0,04 \\ +0,09 \cdot e^{-0,58t} \\ -0,08 \cdot e^{-28,2t} \\ + \begin{bmatrix} -0,165 \cos 312,8t \\ +3,03 \sin 312,8t \end{bmatrix} \cdot e^{-34,8t} \\ +0,11 \cdot e^{-36,2t} \end{bmatrix}$$

$$I_q(t) = -E\sqrt{3} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ +3,03 \sin 314,1t \cdot e^{-34,8t} \end{bmatrix}$$

$$i_A(t) = E_M \begin{bmatrix} +0,04 \sin 314,1t \\ -0,832 \cos 314,1t \\ -1,688 \cdot e^{-0,58t} \cos 314,1t \\ +0,09 \cdot e^{-0,58t} \sin 314,1t \\ -0,622 \cdot e^{-28,2t} \cos 314,1t \\ -0,08 \cdot e^{-28,2t} \sin 314,1t \\ + \begin{bmatrix} +3,12 \cos 312,8t \\ +0,29 \sin 312,8t \end{bmatrix} \cdot e^{-34,8t} \cos 314,1t \\ + \begin{bmatrix} -0,165 \cos 312,8t \\ +3,03 \sin 312,8t \end{bmatrix} \cdot e^{-34,8t} \sin 314,1t \\ +0,11 \cdot e^{-36,4t} \sin 314,1t \\ +0,02 \cdot e^{-36,4t} \cos 314,1t \end{bmatrix}$$

$$i_A(t) = E_M \begin{bmatrix} -0,833 \cos 314,1t \\ -1,666 \cdot e^{-0,588t} \cos 314,1t \\ -0,625 \cdot e^{-27,8t} \cos 314,1t \\ +3,1 \cdot e^{-34,8t} \\ +0,05 \cos 628,2t \cdot e^{-34,8t} \end{bmatrix}$$

$$i_F(t) = I_{F0} \begin{bmatrix} +1 \\ +1,98 \cdot e^{-0,58t} \\ -0,89 \cdot e^{-28,2t} \\ - \begin{bmatrix} +1,1 \cos 312,8t \\ +0,2 \sin 312,8t \end{bmatrix} \cdot e^{-34,8t} \\ +0,008 \cdot e^{-36,2t} \end{bmatrix}$$

$$i_F(t) = I_{F0} \begin{bmatrix} +1 \\ +2 \cdot e^{-0,588t} \\ -0,88 \cdot e^{-27,8t} \\ -1,1 \cos 314,1t \cdot e^{-34,8t} \end{bmatrix}$$

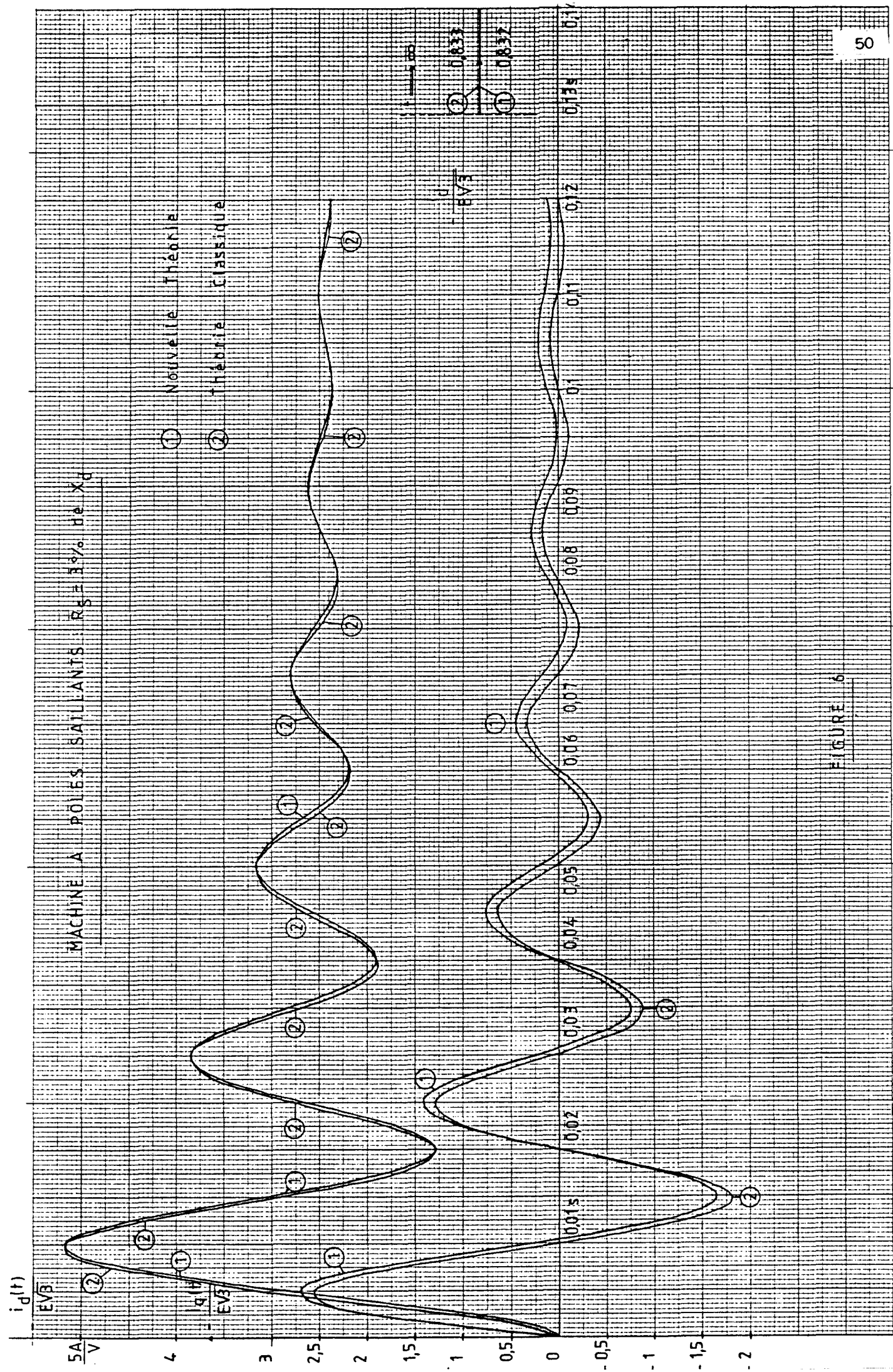


FIGURE 6

MACHINE A POLES SAILLANTS $R_S = 80\% \text{ DE } X_D$

① Nouvelle Théorie
② Théorie Classique

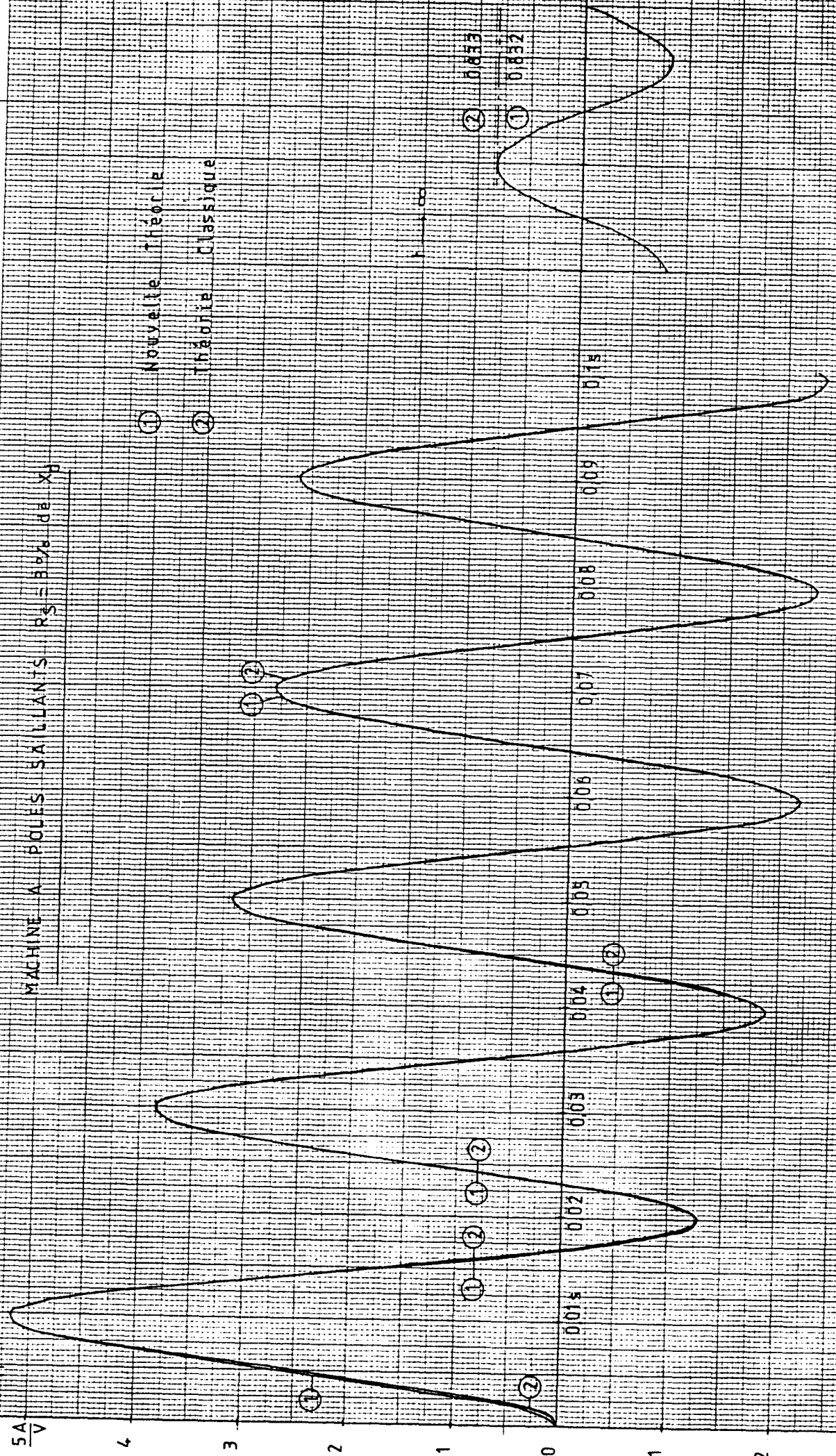


FIGURE 7

MACHINE A POLES SAILLANTS $R_S = 3\%$ de X_d

① Nouvelle Théorie
② Théorie Classique

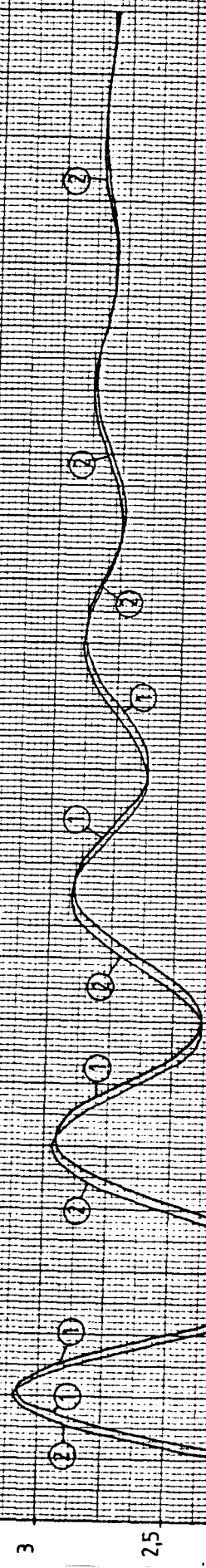


FIGURE 8

MACHINE A ROTOR LISSE : $R_S = 3\%$ de X_d

Forme Générale	Forme Usuelle
$I_d(t) = -E\sqrt{3} \begin{bmatrix} +0,499 \\ +3,17 \cdot e^{-0,718t} \\ +1,43 \cdot e^{-31,9t} \\ - \begin{bmatrix} 5,23 \cos 295,5t \\ 1,42 \sin 295,5t \end{bmatrix} \cdot e^{-92,7t} \\ +0,127 \cdot e^{-127,6t} \end{bmatrix}$	$I_d(t) = -E\sqrt{3} \begin{bmatrix} +0,5 \\ +3,13 \cdot e^{-0,727t} \\ +1,36 \cdot e^{-31,25t} \\ -5 \cos 314,1t \cdot e^{-94,24t} \end{bmatrix}$
$I_q(t) = -E\sqrt{3} \begin{bmatrix} +0,015 \\ +0,09 \cdot e^{-0,718t} \\ -0,088 \cdot e^{-31,9t} \\ + \begin{bmatrix} 0,384 \cos 295,5t \\ 5,253 \sin 295,5t \end{bmatrix} \cdot e^{-92,7t} \\ -0,4 \cdot e^{-127,6t} \end{bmatrix}$	$I_q(t) = -E\sqrt{3} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ +5 \sin 314,1t \cdot e^{-94,24t} \end{bmatrix}$
$i_A(t) = E_M \begin{bmatrix} +0,015 \sin 314,1t \\ -0,499 \cos 314,1t \\ -3,17 \cdot e^{-0,718t} \cos 314,1t \\ +0,09 \cdot e^{-0,718t} \sin 314,1t \\ -1,43 \cdot e^{-31,9t} \cos 314,1t \\ -0,088 \cdot e^{-31,9t} \sin 314,1t \\ + \begin{bmatrix} 5,23 \cos 295,5t \\ 1,42 \sin 295,5t \end{bmatrix} \cdot e^{-92,7t} \cos 314,1t \\ + \begin{bmatrix} 0,384 \cos 295,5t \\ 5,253 \sin 295,5t \end{bmatrix} \cdot e^{-92,7t} \sin 314,1t \\ -0,4 \cdot e^{-127,6t} \sin 314,1t \\ -0,127 \cdot e^{-127,6t} \cos 314,1t \end{bmatrix}$	$i_A(t) = E_M \begin{bmatrix} -0,5 \cos 314,1t \\ -3,13 \cdot e^{-0,727t} \cos 314,1t \\ -1,36 \cdot e^{-31,25t} \cos 314,1t \\ \\ +5 \cdot e^{-94,24t} \end{bmatrix}$
$i_F(t) = I_{FO} \begin{bmatrix} +1 \\ +6,247 \cdot e^{-0,718t} \\ -2,396 \cdot e^{-31,9t} \\ - \begin{bmatrix} 3,925 \cos 295,5t \\ 1,443 \sin 295,5t \end{bmatrix} \cdot e^{-92,7t} \\ +0,074 \cdot e^{-127,6t} \end{bmatrix}$	$i_F(t) = I_{FO} \begin{bmatrix} +1 \\ +6,27 \cdot e^{-0,727t} \\ -2,35 \cdot e^{-31,25t} \\ -3,920 \cos 314,1t \cdot e^{-94,24t} \end{bmatrix}$

MACHINE A ROTOR LISSE R_S = 3 3/4 DE X_D

① Nouvelle Théorie
 ② Théorie Classique

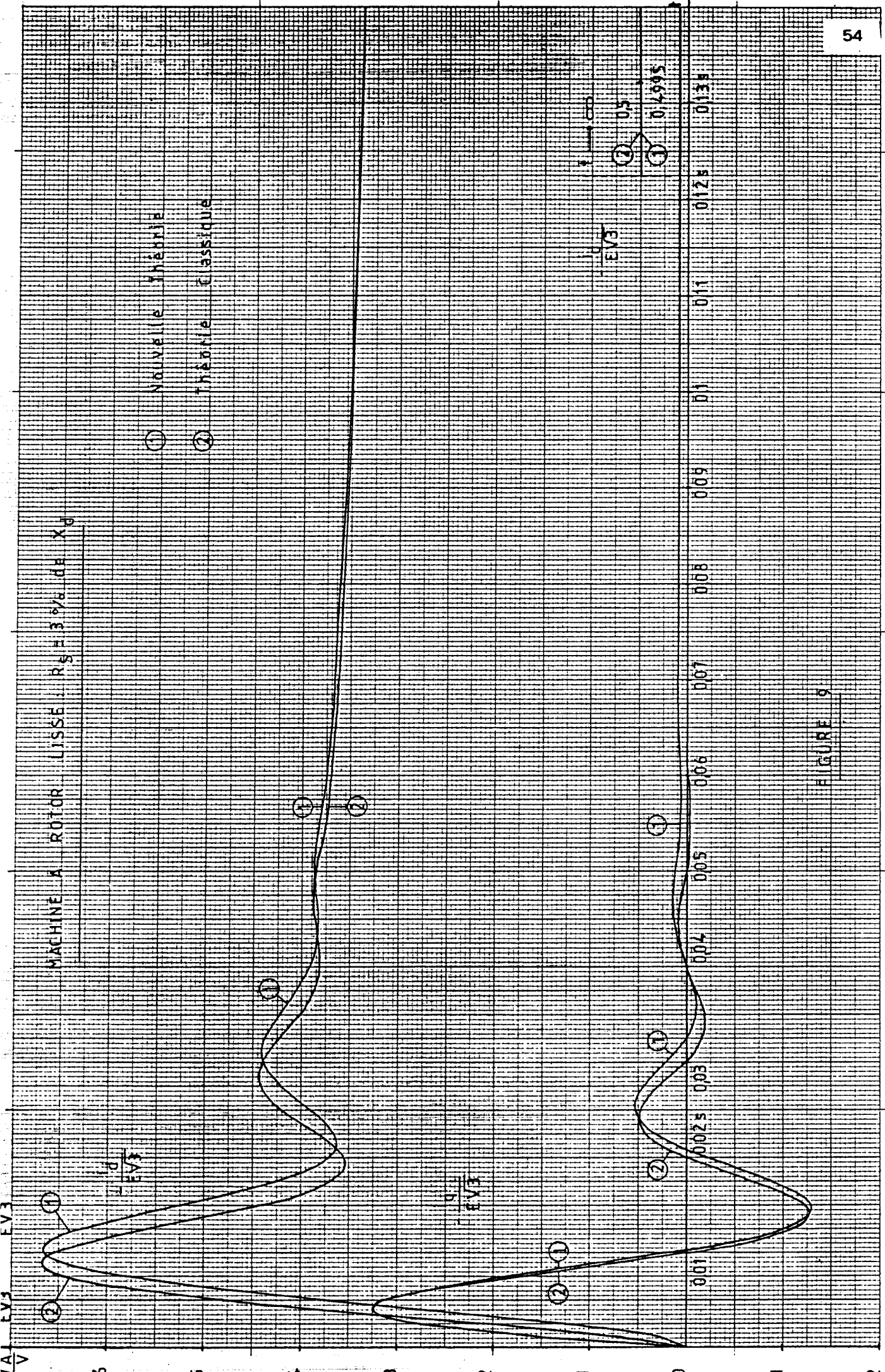
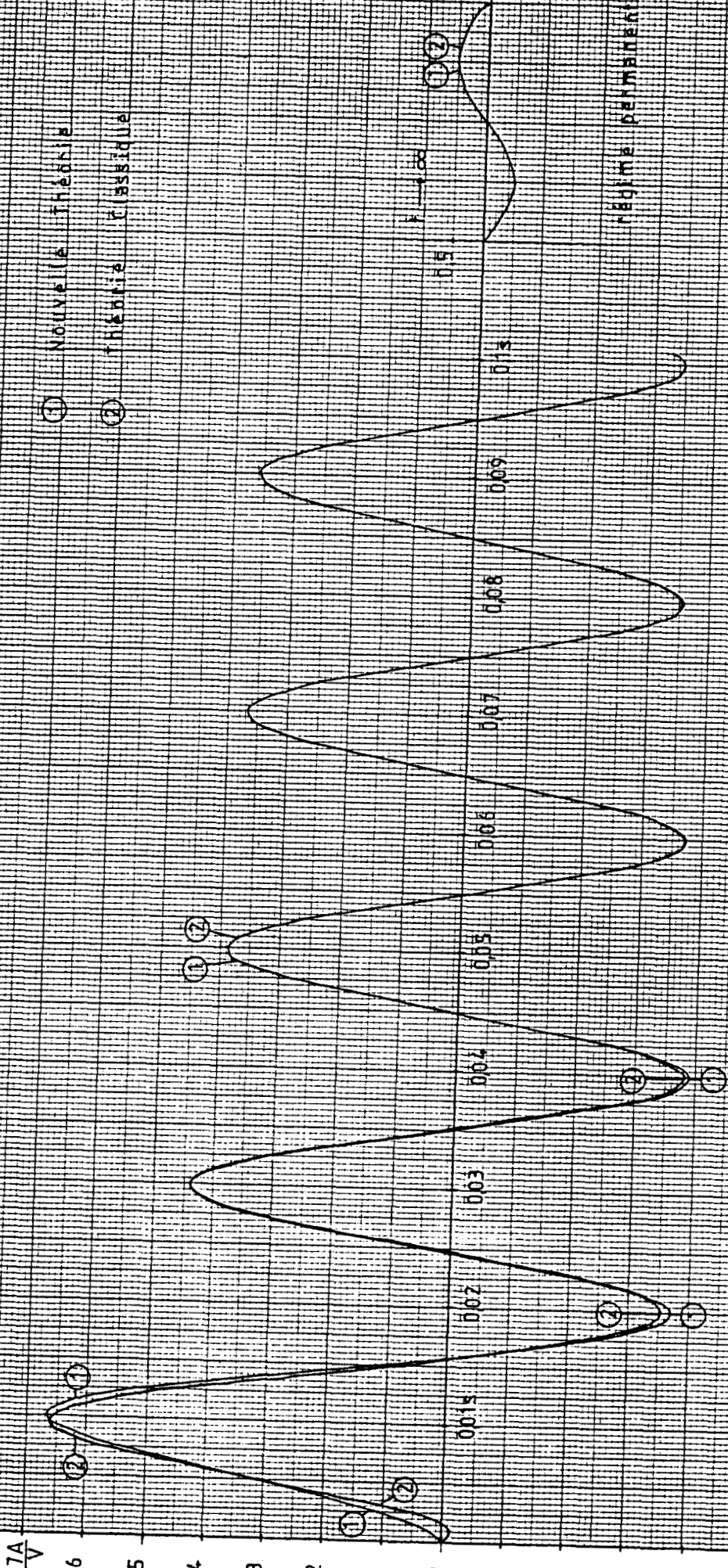


FIGURE 9

MACHINE A ROTOR LISSE $R_s = 3 \frac{1}{2} \%$ DE X_s



(1) Nouvelle Théorie
 (2) Théorie Classique

régime permanent

FIGURE 10

MACHINE A ROTOR LISSE : $R_s = 3\%$ de X_d

① Nouvelle Théorie
② Théorie Classique

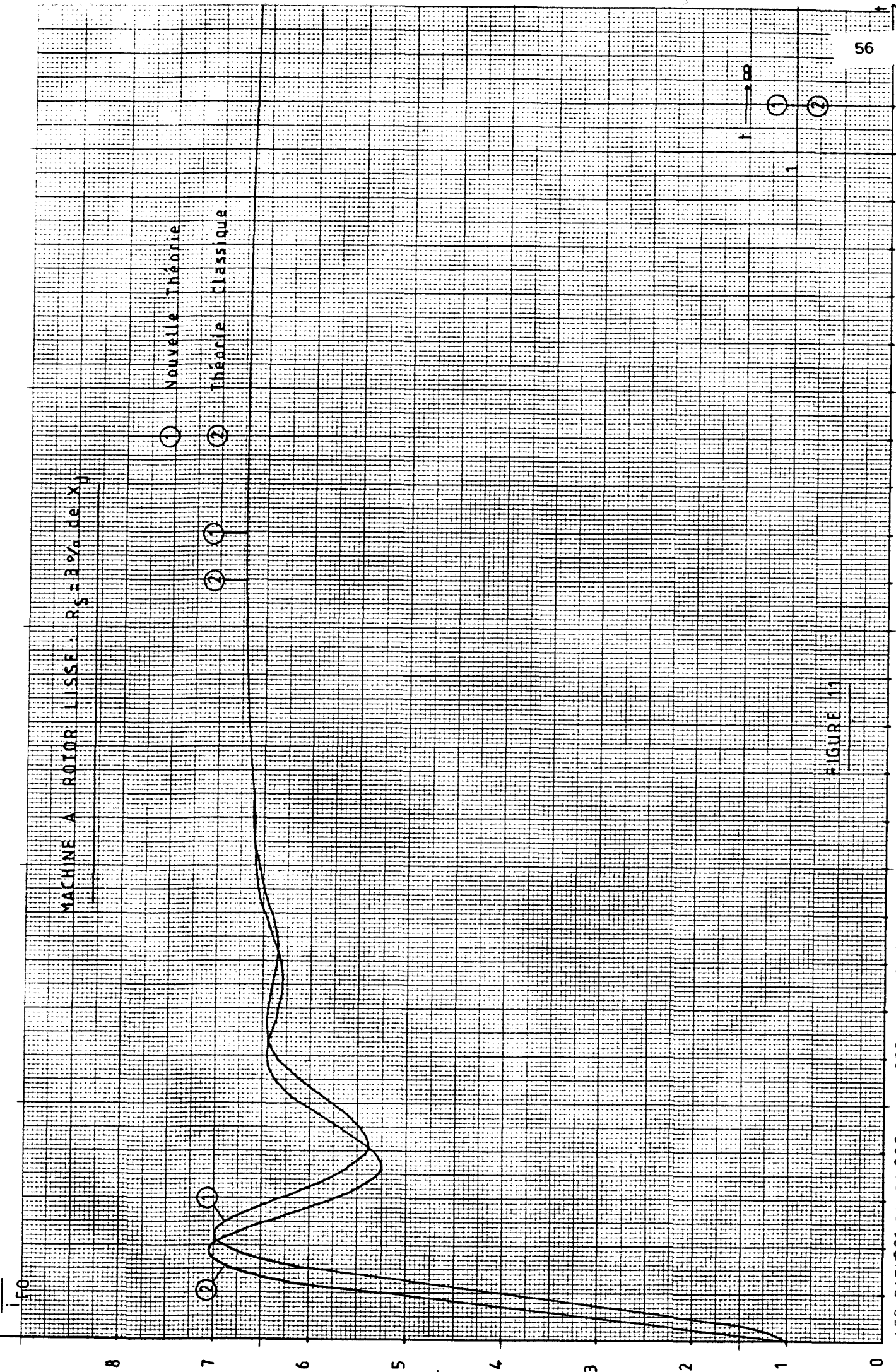


FIGURE 11

Remarques sur les courbes des courants de court-circuit

On vérifie ici une partie des résultats précédents, à savoir que le terme Y'_{22} est différent de Y_{22} pour les deux types de machine.

Mais cette erreur se répercute très peu sur le courant réel I_A car l'amplitude I_q est faible par rapport à celle de I_d .

On remarque un décalage des formes d'onde des courants I_d et I_q (décalage plus marqué pour les machines à pôles lisses). Mais ce décalage se répercute fort peu sur le courant réel I_A , et ce décalage n'est visible que sur le tout début de la caractéristique fonction du temps. Par contre, pour le courant I_F on note un décalage visible de la courbe ; ceci est dû à la pulsation différente des termes p_3 et p'_3 .

Si on travaille avec des petites machines $R_S > 3\%$ de X_d , dans ce cas le terme p_5 diffère beaucoup de p'_5 et les courbes diffèrent totalement au début du court-circuit.

I .4. Conclusion

L'étude théorique qui précède permet de tester la validité des hypothèses simplificatrices usuellement adoptées pour traiter les équations de PARK de la machine synchrone idéalisée.

Pour les machines de forte puissance, dont la résistance des enroulements statoriques est relativement faible, ces hypothèses affectent peu la valeur des courants transitoires nés de l'application d'une tension au stator. C'est le cas du court-circuit triphasé symétrique qui équivaut à l'application d'une tension V_q et qui est assez bien analysé par la théorie classique. Même pour les machines puissantes, cette théorie rend mal compte des courants créés par une variation de la tension d'excitation. Dès que la résistance du stator devient notable, les simplifications usuelles, pour certains régimes transitoires, introduisent des écarts notables. Cela doit rendre très prudent dans l'application aux grosses machines des résultats obtenus sur les machines expérimentales de faible puissance.

II. PROPOSITION D'ADMITTANCES SIMPLIFIEES

On se propose maintenant de simplifier l'expression Y_{ij} de la nouvelle théorie, mais on désire quand même obtenir pour cette expression simplifiée des transmittances relativement justes pour R_S compris entre 0 et 3% de X_d , c'est à dire la plupart des machines synchrones. Il est évident que lorsque $R_S > 3\%$ de X_d (cas de machines spéciales ou de faible puissance), ces admittances simplifiées seront complètement erronées et il faudra utiliser les expressions complètes des admittances Y_{ij} .

Afin d'établir une expression simplifiée des Y_{ij} , il convient d'examiner d'abord le dénominateur des Y_{ij} , car celui-ci nous donne les constantes de temps de la machine.

On remarque que seule diffère notablement la pseudo-pulsation, c'est à dire la partie imaginaire de p_3 et p'_3 . On calculera donc dans un premier temps cette pseudo-pulsation p_3 qui pour la machine à pôle lisse diffère de p'_3 (on peut le remarquer nettement sur la courbe $i_F = f(t)$).

Pour les numérateurs des Y_{ij} , ils diffèrent sensiblement de ceux des Y'_{ij} pour Y_{11} , Y_{22} et Y_{31} et Y_{33} . Afin d'améliorer ces numérateurs, on calculera donc pour ceux-ci des racines littérales plus approchées mais évidemment elles seront alors aussi plus complexes.

II.1. Factorisation approchée du dénominateur

Il faut pour cela trouver des racines plus proches pour le dénominateur des Y_{ij} .

Pour les Y'_{ij} , on emploie le dénominateur suivant :

$$D'(p) = \left[p^2 + \left(\frac{1}{T'_d} + \frac{1}{T''_d} \right) p + \frac{1}{T'_d T''_d} \right] \left[p + \frac{1}{T'_q} \right] \left[p^2 + R_S \omega' \left(\frac{1}{X''_d} + \frac{1}{X''_q} \right) p + \omega'^2 \left(1 + \frac{R_S^2}{4} \left(\frac{1}{X''_d} + \frac{1}{X''_q} \right)^2 \right) \right]$$

alors qu'en réalité

$$D(p) = p^5 + \alpha_4 p^4 + \alpha_3 p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0$$

pour obtenir en régime dynamique des admittances simplifiées plus proches de la réalité. Il faut que les premiers termes α_4 , α_3 et α_2 soient plus proches de ceux obtenus avec $D'(p)$, même si c'est au détriment du comportement en régime statique.

On adoptera ici le terme :

$$D'^*(p) = \left[p^2 + \left(\frac{1}{T'_d} + \frac{1}{T''_d} \right) p + \frac{1}{T'_d T''_d} \right] \left[p + \frac{1}{T'_q} \right] \left[p^2 + R_S \omega' \left(\frac{1}{X''_d} + \frac{1}{X''_q} \right) p + \omega'^2 - \frac{R_S \omega'}{T'_q} \left(\frac{1}{X''_q} - \frac{1}{X'_q} \right) - \frac{R_S \omega'}{T'_d} \left(\frac{1}{X''_d} - \frac{1}{X'_d} \right) + \frac{R_S^2 \omega'^2}{X''_d X''_q} \right]$$

On améliore ainsi sensiblement le terme α_3 et la pseudo-pulsation dans ce cas vaut :

$$\omega'^*{}^2 = \omega'^2 - \frac{R_S \omega'}{T'_q} \left(\frac{1}{X''_q} - \frac{1}{X'_q} \right) - \frac{R_S \omega'}{T'_d} \left(\frac{1}{X''_d} - \frac{1}{X'_d} \right) + \frac{R_S^2 \omega'^2}{X''_d X''_q} - \frac{R_S^2 \omega'^2}{4} \left(\frac{1}{X''_d} + \frac{1}{X''_q} \right)^2$$

où

$$\omega'^* \neq \omega' - \frac{R_S}{2T''_q} \left(\frac{1}{X''_q} - \frac{1}{X_q} \right) - \frac{R_S}{2T''_d} \left(\frac{1}{X''_d} - \frac{1}{X'_d} \right) - \frac{R_S \omega'}{8} \underbrace{\left(\frac{1}{X''_d} - \frac{1}{X''_q} \right)^2}_{\text{faible car } X''_d \neq X''_q}$$

d'où la valeur de $\omega'^* = \omega' - \frac{R_S}{2} \left\{ \frac{1}{T''_q} \left(\frac{1}{X''_q} - \frac{1}{X_q} \right) + \frac{1}{T''_d} \left(\frac{1}{X''_d} - \frac{1}{X'_d} \right) \right\}$

Le terme qui amène l'erreur la plus importante est $\frac{R_S}{2T''_q} \left(\frac{1}{X''_q} - \frac{1}{X_q} \right)$

surtout quand $X''_q \ll X_q$ et T''_q très faible. C'est le cas des valeurs de la machine à pôles lisses adoptées précédemment.

II.2. Factorisation approchée des numérateurs des Y_{ij}

Pour améliorer les numérateurs des Y'_{ij} , il convient d'examiner les racines approximatives des Y_{ij} .

Certaines sont évidentes tel

$$p^2 + \left(\frac{B}{T''_d} + \frac{1}{T''_d} \right) p + \frac{1}{T''_d T''_d} \neq \left(p + \frac{1}{T''_d} \right) \left(p + \frac{1}{T''_d} \right)$$

où

$$p^2 + \left(\frac{D}{T''_{do}} + \frac{1}{T''_{do}} \right) p + \frac{1}{T''_{do} T''_{do}} \neq \left(p + \frac{1}{T''_{do}} \right) \left(p + \frac{1}{T''_{do}} \right)$$

Détermination des racines approximatives de :

$$p^2 + p \left(\frac{R_S \omega'}{X''_d} + \frac{1}{T''_q} \right) + \frac{\omega' R_S}{X_q T''_q}$$

$$\text{soit } \Delta = \left(\frac{R_S \omega'}{X''_d} + \frac{1}{T''_q} \right)^2 - \frac{4 \omega' R_S}{X_q T''_q}$$

$$\text{où } \sqrt{\Delta} \neq \frac{R_S \omega'}{X''_d} + \frac{1}{T''_q} - \frac{2 \omega' R_S}{X_q T''_q \left(\frac{R_S \omega'}{X''_d} + \frac{1}{T''_q} \right)}$$

$$\text{d'où } \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix} = -\frac{1}{2} \left(\frac{R_S \omega'}{X''_d} + \frac{1}{T''_q} \right) \pm \frac{1}{2} \left\{ \frac{R_S \omega'}{X''_d} + \frac{1}{T''_q} - \frac{2 \omega' R_S}{X_q T''_q \left(\frac{R_S \omega'}{X''_d} + \frac{1}{T''_q} \right)} \right\}$$

$$\text{Soit } p_1 = -\frac{\omega' R_S}{X_q} \cdot \frac{X''_q}{X''_q + R_S \omega' T''_q} = -\frac{\omega' R_S}{X_q + R_S \omega' T''_{q0}}$$

$$\text{et } p_2 = -\frac{R_S \omega'}{X''_q} - \frac{1}{T''_q} + \frac{\omega' R_S}{X_q + R_S \omega' T''_{q0}}$$

De la même manière les racines approximatives de

$$p^2 + p \left(\frac{1}{B T''_d} + \frac{R_S \omega' T_{KDO}}{B X_d T''_d} \right) + \frac{R_S \omega'}{B X_d T''_d} \text{ sont :}$$

$$p_1 = \frac{-R_S \omega'}{X_d + T_{KDO} R_S \omega'}$$

$$p_2 = -\frac{1}{B T''_d} - \frac{R_S \omega' T_{KDO}}{B X_d T''_d} + \frac{R_S \omega'}{X_d + T_{KDO} R_S \omega'}$$

On essaie ensuite de déterminer des racines approchées de l'expression :

$$p^3 + p^2 \left\{ \frac{R_S \omega'}{X''_d} + \frac{B}{T'_d} + \frac{1}{T''_d} \right\} + p \left\{ \frac{1}{T'_d T''_d} + \frac{R_S \omega'}{X''_d} \left(\frac{D}{T'_d} + \frac{1}{T''_d} \right) \right\} + \frac{R_S \omega'}{X_d T'_d T''_d}$$

On obtient les racines approchées suivantes :

$$- \left(\frac{1}{T'_d} + \frac{R_S \omega'}{R_S \omega' T''_{d0} + X'_d} \right)$$

$$- \left(\frac{1}{T''_d} + \frac{R_S \omega'}{X''_d} - \frac{R_S \omega'}{R_S \omega' T''_{d0} + X'_d} \right)$$

$$- \left(\frac{R_S \omega'}{R_S \omega' T'_d + X_d} \right)$$

Grace aux comparaisons entre les Y'_{ij} et les Y_{ij} , on est donc maintenant en mesure de déterminer les nouvelles admittances simplifiées valables $0 < R_S < 3\%$ de X_d que l'on peut utiliser à la place des formules usuelles des Y'_{ij} .

Les nouvelles formules simplifiées sont données par le tableau 1.XII

Les formules usuelles sont rappelées au tableau 1.XIII

TABLEAU 1.XII : Formules simplifiées pour $R_S < 3\%$ de X_d

$$Y_{dd}^{\bar{o}}(p) = \frac{w'}{X_d''} \cdot \frac{\left(p + \frac{1}{T_{do}}\right) \left(p + \frac{1}{T_{do}''}\right) \left(p + \frac{R_S w'}{X_q + R_S w' T_{qo}''}\right) \left(p + \frac{R_S w'}{X_q''} + \frac{1}{T_q''} - \frac{R_S w'}{X_q + R_S w' T_{qo}''}\right)}{D_1^*(p) \left(p + \frac{1}{T_q}\right)}$$

$$Y_{dq}^{\bar{o}}(p) = \frac{w'^2}{X_d''} \cdot \frac{\left(p + \frac{1}{T_{do}}\right) \left(p + \frac{1}{T_{do}''}\right)}{D_1^*(p)}$$

$$Y_{dF}^{\bar{o}}(p) = - \frac{M_F w' T_{KD}}{R_F X_d T_d' T_d''} \cdot \frac{\left(p + \frac{1}{T_{KD}}\right)}{\left(p + \frac{1}{T_d'}\right) \left(p + \frac{1}{T_d''}\right)}$$

$$Y_{qd}^{\bar{o}}(p) = - \frac{w'^2}{X_q''} \cdot \frac{\left(p + \frac{1}{T_{qo}''}\right)}{D_2^*(p)}$$

$$Y_{qq}^{\bar{o}}(p) = \frac{w'}{X_q''} \cdot \frac{\left(p + \frac{1}{T_{qo}''}\right) \left(p + \frac{1}{T_d'} + \frac{R_S w'}{R_S w' T_{do}'' + X_d'}\right) \left(p + \frac{1}{T_d'} + \frac{R_S w'}{X_d''} - \frac{R_S w'}{R_S w' T_{do}'' + X_d'}\right) \left(p + \frac{R_S w'}{R_S w' T_{do}'' + X_d'}\right)}{D_2^*(p) \left(p + \frac{1}{T_d'}\right) \left(p + \frac{1}{T_d''}\right)}$$

$$Y_{qF}^{\bar{o}}(p) = - \frac{w'^3 R_S M_F T_{KD}}{R_F X_d X_q' T_d' T_d''} \cdot \frac{\left(p + \frac{1}{T_{KD}}\right) \left(p + \frac{1}{T_{qo}''}\right)}{D_1^*(p) \left(p + \frac{1}{T_q''}\right)}$$

$$Y_{Fd}^{\bar{o}}(p) = - \frac{M_F w' T_{KD}}{R_F X_d T_d' T_d''} \cdot \frac{p \left(p + \frac{1}{T_{KD}}\right) \left(p + \frac{R_S w'}{X_q + R_S w' T_{qo}''}\right) \left(p + \frac{R_S w'}{X_q''} + \frac{1}{T_q''} - \frac{R_S w'}{X_q + R_S w' T_{qo}''}\right)}{D_1^*(p) \left(p + \frac{1}{T_q}\right)}$$

$$Y_{Fq}^{\bar{o}}(p) = - \frac{M_F w'^2 T_{KD}}{R_F X_d T_d' T_d''} \cdot \frac{p \left(p + \frac{1}{T_{KD}}\right)}{D_1^*(p)}$$

$$Y_{FF}^{\bar{o}}(p) = \frac{1}{R_F T_d'} \cdot \frac{1}{\left(p + \frac{1}{T_d'}\right)}$$

$$\text{avec : } D_1^*(p) = \left(p + \frac{1}{T_d'}\right) \left(p + \frac{1}{T_d''}\right) \left(p + \frac{R_S w'}{2} \left(\frac{1}{X_d''} + \frac{1}{X_q''}\right) + i w'^*\right) \left(p + \frac{R_S w'}{2} \left(\frac{1}{X_d''} + \frac{1}{X_q''}\right) - i w'^*\right)$$

$$D_2^*(p) = \left(p + \frac{1}{T_q}\right) \left(p + \frac{R_S w'}{2} \left(\frac{1}{X_d''} + \frac{1}{X_q''}\right) + i w'^*\right) \left(p + \frac{R_S w'}{2} \left(\frac{1}{X_d''} + \frac{1}{X_q''}\right) - i w'^*\right)$$

$$\text{et } w'^* = w' - \frac{R_S}{2} \left(\frac{1}{T_q''} \left(\frac{1}{X_q''} - \frac{1}{X_q}\right) + \frac{1}{T_d''} \left(\frac{1}{X_d''} - \frac{1}{X_d}\right)\right)$$

TABLEAU 1.XIII : Formules Usuelles pour R_S faible

$$Y_{dd}^{\bar{0}}(p) = \frac{w'}{X_d''} \cdot \frac{\left(p + \frac{1}{T_{do}'}\right) \left(p + \frac{1}{T_{do}''}\right) \left(p + \frac{R_S w'}{X_q''}\right)}{D_1'(p)}$$

$$Y_{dq}^{\bar{0}}(p) = \frac{w'^2}{X_d''} \cdot \frac{\left(p + \frac{1}{T_{do}'}\right) \left(p + \frac{1}{T_{do}''}\right)}{D_1'(p)}$$

$$Y_{dF}^{\bar{0}}(p) = - \frac{M_F w' T_{KD}}{R_F X_d T_d' T_d''} \cdot \frac{\left(p + \frac{1}{T_{KD}}\right)}{\left(p + \frac{1}{T_d'}\right) \left(p + \frac{1}{T_d''}\right)}$$

$$Y_{qd}^{\bar{0}}(p) = - \frac{w'^2}{X_q''} \cdot \frac{\left(p + \frac{1}{T_{qo}''}\right)}{D_2'(p)}$$

$$Y_{qq}^{\bar{0}}(p) = \frac{w'}{X_q''} \cdot \frac{\left(p + \frac{1}{T_{qo}''}\right) \left(p + \frac{R_S w'}{X_d''}\right)}{D_2'(p)}$$

$$Y_{qF}^{\bar{0}}(p) = - \frac{w'^3 R_S M_F T_{KD}}{R_F X_d X_q'' T_d' T_d''} \cdot \frac{\left(p + \frac{1}{T_{KD}}\right) \left(p + \frac{1}{T_{qo}''}\right)}{D_2'(p) \left(p + \frac{1}{T_{do}'}\right) \left(p + \frac{1}{T_{do}''}\right)}$$

$$Y_{Fd}^{\bar{0}}(p) = - \frac{M_F w' T_{KD}}{R_F X_d T_d' T_d''} \cdot \frac{p \left(p + \frac{1}{T_{KD}}\right) \left(p + \frac{R_S w'}{X_q''}\right)}{D_1'(p)}$$

$$Y_{Fq}^{\bar{0}}(p) = - \frac{M_F w'^2 T_{KD}}{R_F X_d T_d' T_d''} \cdot \frac{p \left(p + \frac{1}{T_{KD}}\right)}{D_1'(p)}$$

$$Y_{FF}^{\bar{0}}(p) = \frac{1}{R_F T_d'} \cdot \frac{p^5 + \epsilon_4 p^4 + \epsilon_3 p^3 + \epsilon_2 p^2 + \epsilon_1 p + \epsilon_0}{\left(p + \frac{1}{T_{do}'}\right) \left(p + \frac{1}{T_{do}''}\right) D_1'(p)}$$

avec : $D_1'(p) = \left(p + \frac{1}{T_d'}\right) \left(p + \frac{1}{T_d''}\right) \left(p + \frac{R_S w'}{2} \left(\frac{1}{X_d''} + \frac{1}{X_q''}\right) + i w'\right) \left(p + \frac{R_S w'}{2} \left(\frac{1}{X_d''} + \frac{1}{X_q''}\right) - i w'\right)$

et $D_2'(p) = \left(p + \frac{1}{T_q''}\right) \left(p + \frac{R_S w'}{2} \left(\frac{1}{X_d''} + \frac{1}{X_q''}\right) + i w'\right) \left(p + \frac{R_S w'}{2} \left(\frac{1}{X_d''} + \frac{1}{X_q''}\right) - i w'\right)$

II.3. Remarques

Dans notre théorie simplifiée, on a pris pour la pseudo-pulsation une valeur différente de ω' , mais en fait cela n'est utile que pour certains types de machines (exemple pôles lisses car alors T''_q très faible $X''_q \ll X_q$). Pour les autres types de machines ou lorsque les conditions sur X''_q , X_q et T''_q ne sont pas remplies, on peut encore utiliser ω' pour la pseudo-pulsation. De même pour Y_{dd}^σ ou Y_{Fd}^σ le terme :

$$\frac{\left(p + \frac{\omega' R_S}{X_q + R_S \omega' T''_q}\right) \left(p + \frac{R_S \omega'}{X''_q} + \frac{1}{T''_q} - \frac{\omega' R_S}{X_q + R_S \omega' T''_q}\right)}{\left(p + \frac{1}{T''_q}\right)}$$

peut facilement être remplacé par $\left(p + \frac{\omega' R_S}{X''_q}\right)$ pour le régime rapide (subtransitoire et transitoire) et par $\left(p + \frac{\omega' R_S}{X_q}\right)$ pour les régimes plus lents (transitoire lent et régime statique)

Pour le terme Y_{qq}^σ la partie :

$$\frac{\left(p + \frac{1}{T'_d} + \frac{R_S \omega'}{R_S \omega' T''_{do} + X'_d}\right) \left(p + \frac{1}{T''_d} + \frac{R_S \omega'}{X''_d} - \frac{R_S \omega'}{R_S \omega' T''_{do} + X'_d}\right) \left(p + \frac{R_S \omega'}{R_S \omega' T'_d + X_d}\right)}{\left(p + \frac{1}{T'_d}\right) \left(p + \frac{1}{T''_d}\right)}$$

peut aisément être remplacée par $\left(\frac{p + \omega' R_S}{X''_d}\right)$ pour le régime dynamique rapide et par $\left(\frac{p + \omega' R_S}{X_d}\right)$ pour le régime très lent ou en statique.

L'amélioration de ces termes Y_{dd}^σ , Y_{qq}^σ , Y_{Fd}^σ n'est donc obtenue pour $R_S < 3\%$ de X_d que par une expression littérale beaucoup plus lourde et pour R_S faible les expressions usuelles donnaient entière satisfaction pour le régime dynamique rapide. Par contre pour Y_{FF}^σ l'expression de la théorie simplifiée amène une amélioration sensible aussi bien au niveau complexité que précision.

III. COMPARAISON DES RESULTATS SUR DES EXEMPLES

Nous allons comparer les différentes théories : générale, classique et la théorie simplifiée afin de percevoir l'amélioration apportée par la théorie simplifiée et cela dans les admittances où l'erreur était la plus importante soit :

\bar{Y}_{dd}° , \bar{Y}_{qq}° , \bar{Y}_{Fd}° et dans le cas d'une machine à pôles lisses avec $R_S = 3\%$ de X_d (cas où l'erreur se révèle la plus forte).

III.1. Comparaison de \bar{Y}_{dd}°

Pour une machine à pôles lisses $R_S = 3\%$ de X_d on a :

théorie générale	théorie simplifiée	théorie classique
$\bar{Y}_{dd}^{\circ}(t) =$ $+ 0,015$ $+ 0,083 e^{-0,718 t}$ $- 0,235 e^{-31,91 t}$ $+ 1,60 e^{-127,6 t}$ $\left\{ \begin{array}{l} - 1,46 \cos 295,5 t \\ + 5,52 \sin 295,5 t \end{array} \right\} e^{-92,7t}$	$\bar{Y}_{dd}^{\circ}(t) =$ $+ 0,015$ $+ 0,081 e^{-0,727 t}$ $- 0,240 e^{-31,25 t}$ $+ 1,65 e^{-125 t}$ $\left\{ \begin{array}{l} - 1,51 \cos 296 t \\ + 5,5 \sin 296 t \end{array} \right\} e^{-94,2t}$	$Y'^{\circ}_{dd}(t) =$ $+ 0,137$ $+ 0,85 e^{-0,727 t}$ $+ 0,268 e^{-31,25 t}$ $\left\{ \begin{array}{l} - 1,25 \cos 314 t \\ + 4,65 \sin 314 t \end{array} \right\} e^{-94,2t}$

On voit tout de suite l'amélioration apportée par la formule simplifiée sur l'exemple précédent ainsi que sur la courbe de la figure 1.12 Cette amélioration sera tout aussi effective sur le terme \bar{Y}_{Fd}° puisqu'il a le même dénominateur que \bar{Y}_{dd}° et possède deux racines identiques à \bar{Y}_{dd}° au numérateur.

MACHINE A ROTOR LISSE R₁ H 3 % de X₀

$y_{00}(t)$ réponse a un échelon de tension (E) (P)

- ① Nouvelle Théorie
- ② Théorie Classique
- ③ Théorie Simplifiée

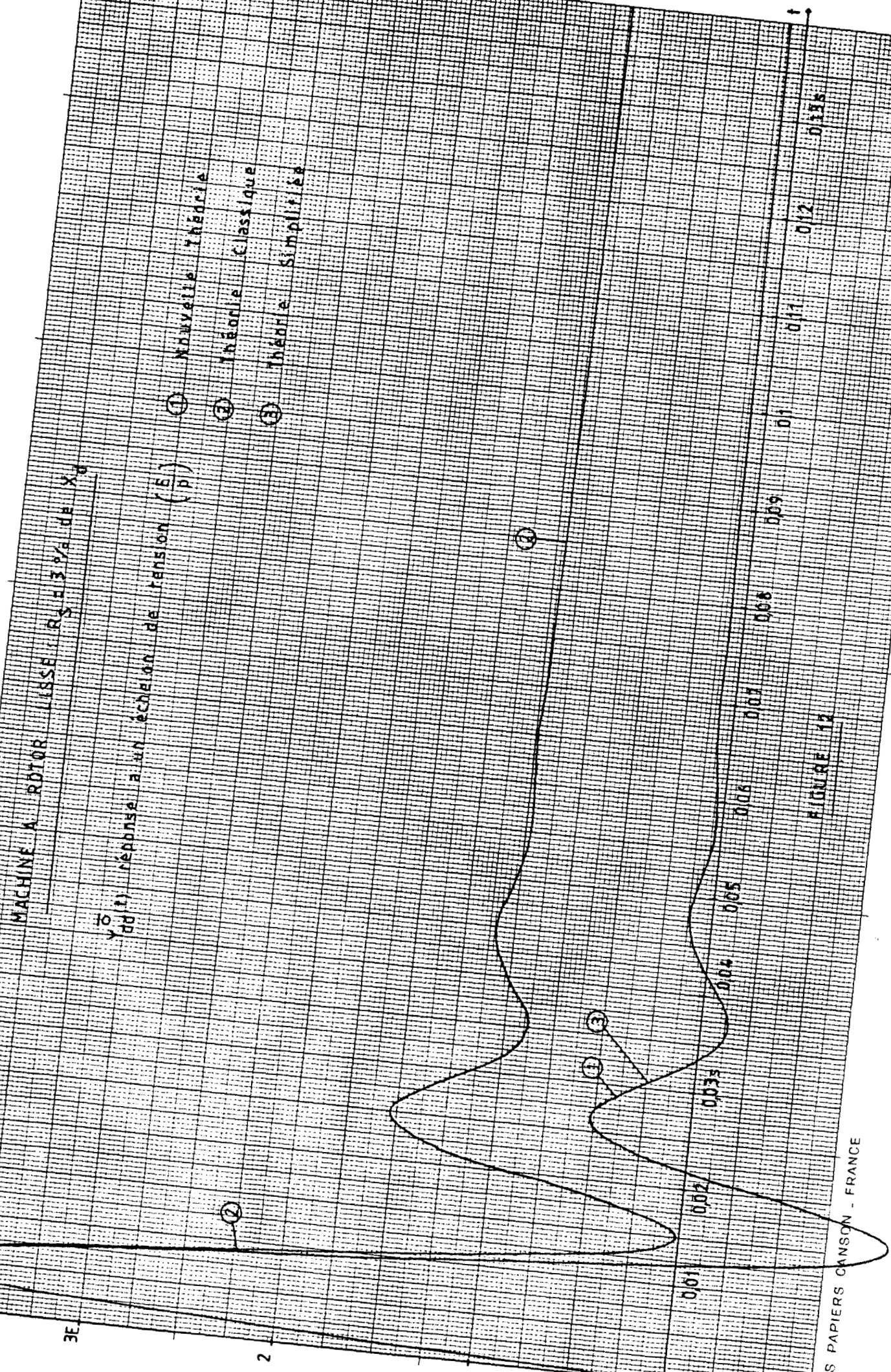


FIGURE 12

III.2. Comparaison de \bar{Y}_{qq}° par les trois théories pour une machine synchrone à pôles lisses avec $R_S = 3\%$ de X_d

théorie générale	théorie simplifiée	théorie classique
$\bar{Y}_{qq}^{\circ}(t) =$ $+ 0,015$ $+ 0,09 e^{-0,718 t}$ $- 0,088 e^{-31,91 t}$ $- 0,40 e^{-127,6 t}$ $+ \left\{ \begin{array}{l} 0,384 \cos 295,5 t \\ 5,25 \sin 295,5 t \end{array} \right\} e^{-92,7t}$	$\bar{Y}_{qq}^{\circ}(t) =$ $+ 0,0137$ $+ 0,08 e^{-0,727t}$ $- 0,116 e^{-31,25t}$ $- 0,30 e^{-125 t}$ $+ \left\{ \begin{array}{l} 0,326 \cos 296 t \\ 5,27 \sin 296 t \end{array} \right\} e^{-94,2t}$	$\bar{Y}_{qq}^{\circ}(t) =$ $+ 0,137$ $- 0,436 e^{-125 t}$ $+ \left\{ \begin{array}{l} 0,298 \cos 314t \\ 4,92 \sin 314t \end{array} \right\} e^{-94,2t}$

Les courbes sont données par la figure 1.13

On remarque sur la courbe \bar{Y}_{qq}° de la page suivante une amélioration de la théorie classique avec la théorie simplifiée, mais cette amélioration n'est obtenue que par une expression plus complexe de l'admittance \bar{Y}_{qq}° .

MACHINE A ROTOR LISSE $R_s = 3\%$ de X_d

$Y_{qq}^0(t)$ réponse à un échelon de tension (E)

- ① Nouvelle Théorie
- ② Théorie Classique
- ③ Théorie Simplifiée

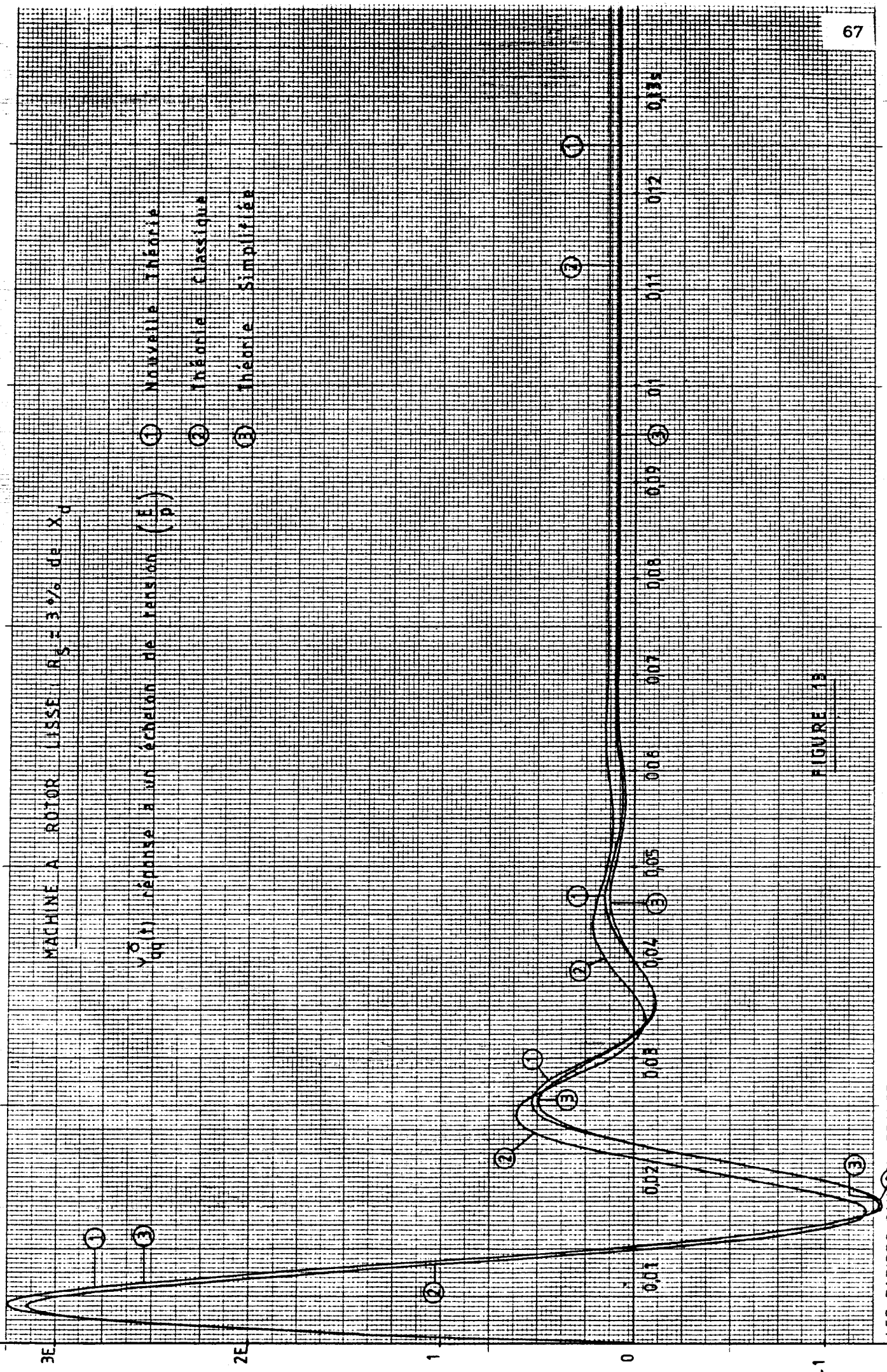


FIGURE 19

III .3. Applications

Comparaison entre théorie classique, théorie simplifiée et théorie générale pour une machine à pôles lisses dont $R_S = 3\%$ de X_d

III .3.1. Cas de l'application au court-circuit triphasé brusque

On peut aisément améliorer l'expression littérale de $I_d(t)$, $I_q(t)$, $I_F(t)$ donnée par la théorie classique. En effet comparons $I_F(t)$ donnée par la théorie générale et la théorie classique.

théorie générale	théorie classique
$I_F(t) = I_{F0} \cdot$	$I_F(t) = I_{F0} \cdot$
$\left[\begin{array}{l} + 1. \\ + 6,247 e^{-0,718 t} \\ - 2,396 e^{-31,9 t} \\ + 0,074 e^{-127,6 t} \\ - [3,92 \cos 295,5 t \\ + 1,44 \sin 295,5 t] e^{-92,7 t} \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{l} + 1 \\ + 6,272 e^{-0,727 t} \\ - 2,352 e^{-31,25 t} \\ - 3,92 \cos 314 t e^{-94,2 t} \end{array} \right]$

Pour améliorer la théorie classique il faudra tenir compte de la pseudo-pulsation différente 295,5 au lieu de 314 et du déphasage donné par $1,44 \sin 295,5 t$. Donc on remplacera ω' par ω'^* et le déphasage sera donné par les règles classiques de trigonométrie.

$$\text{Puisque } t_g (a - [b+c] + 90^\circ) = - \cot (a - [b+c])$$

on a $1,44 \neq - 3,92 \cot [\bar{a} - [b+c]]$ ce qui donnera en valeur littérale

$$\frac{X_d - X'_d}{X'_d} \frac{T_{KD}}{T''_d} \left\{ \frac{-\frac{1}{T''_d} + \frac{1}{T_{KD}} + \frac{\omega' R_S}{2} \left(\frac{1}{X''_q} + \frac{1}{X''_d} \right)}{\omega'} \right\}$$

De sorte que $I_F(t)$ par la théorie classique se mettra sous la forme :

$$I_F(t) = i_{F0} \left[1 + \frac{X_d - X'_d}{X'_d} \left[e^{-\frac{t}{T'_d}} - \left(1 - \frac{T_{KD}}{T''_d}\right) e^{-\frac{t}{T''_d}} - \frac{T_{KD}}{T''_d} e^{-\frac{t}{T_a}} \right] \cos \omega'^* t \right. \\ \left. + \frac{1}{\omega'} \left(\frac{1}{T_{KD}} - \frac{1}{T''_d} + \frac{1}{T_a} \right) \sin \omega'^* t \right]$$

$$\text{avec } \frac{1}{T_a} = \frac{\omega' R_S}{2} \left(\frac{1}{X''_d} + \frac{1}{X''_q} \right)$$

Alors que la théorie classique donnait :

$$I_F(t) = I'_{F0} \left[1 + \frac{X_d - X'_d}{X'_d} \left[e^{-\frac{t}{T'_d}} - \left(1 - \frac{T_{KD}}{T''_d}\right) e^{-\frac{t}{T''_d}} - \frac{T_{KD}}{T''_d} e^{-\frac{t}{T_a}} \right] \cos \omega t \right]$$

Il est également possible d'améliorer $I_d(t)$ et $I_q(t)$ soit

$$I_d(t) = -EV\sqrt{3} \left[\frac{1}{X'_d} + \left(\frac{1}{X'_d} - \frac{1}{X_d} \right) e^{-\frac{t}{T'_d}} + \left(\frac{1}{X''_d} - \frac{1}{X'_d} \right) e^{-\frac{t}{T''_d}} - \frac{1}{X''_d} e^{-\frac{t}{T_a}} \right] \cos \omega'^* t \\ + \frac{1}{\omega'} \left(\frac{1}{T''_d} - \frac{1}{T'_d} + \frac{1}{T_a} \right) \sin \omega'^* t \left. \right]$$

$$\text{et } I_q(t) = -\frac{EV\sqrt{3}}{X''_q} \left[e^{-\frac{t}{T_a}} \sin \omega'^* t + \frac{\left(\frac{1}{T''_q} - \frac{1}{T''_q0} - \frac{\omega' R_S}{X''_d} \right)}{\omega'} \left\{ e^{-\frac{t}{T_a}} \cos \omega'^* t - e^{-\frac{t}{T''_q}} \right\} \right]$$

exemple de théorie simplifiée pour machine à pôles lisses ($R_S = 3\%$ de X_d)

$$\text{on a } I_F(t) = I_{F0} \{ 1 + 6,272e^{-0,727t} - 2,352e^{-31,25t} - [3,92 \cos 296t + 1,41 \sin 296t] e^{-94,2t} \}$$

$$I_d(t) = -EV\sqrt{3} \{ 0,5 + 3,14e^{-0,727t} + 1,36e^{-31,25t} - [5 \cos 296t + 1,364 \sin 296t] e^{-94,2t} \}$$

$$I_q(t) = -EV\sqrt{3} \{ 5 \sin 296t + 0,29 [\cos 296t e^{-94,2t} - e^{-125t}] \}$$

Ces courbes sont comparées dans les pages qui suivent avec les courbes des figures 14 et 15 relatives à la théorie classique et générale

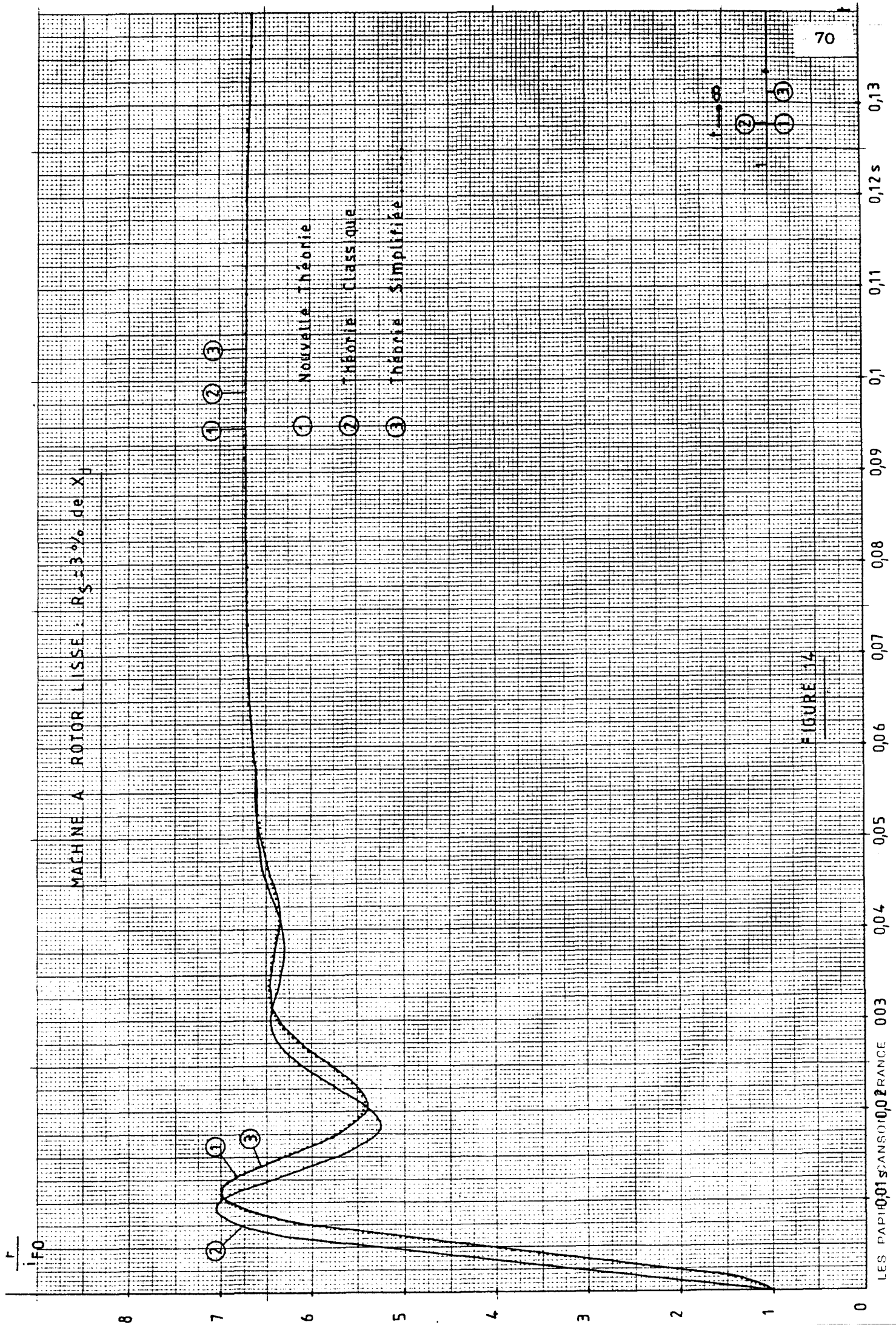


FIGURE 14

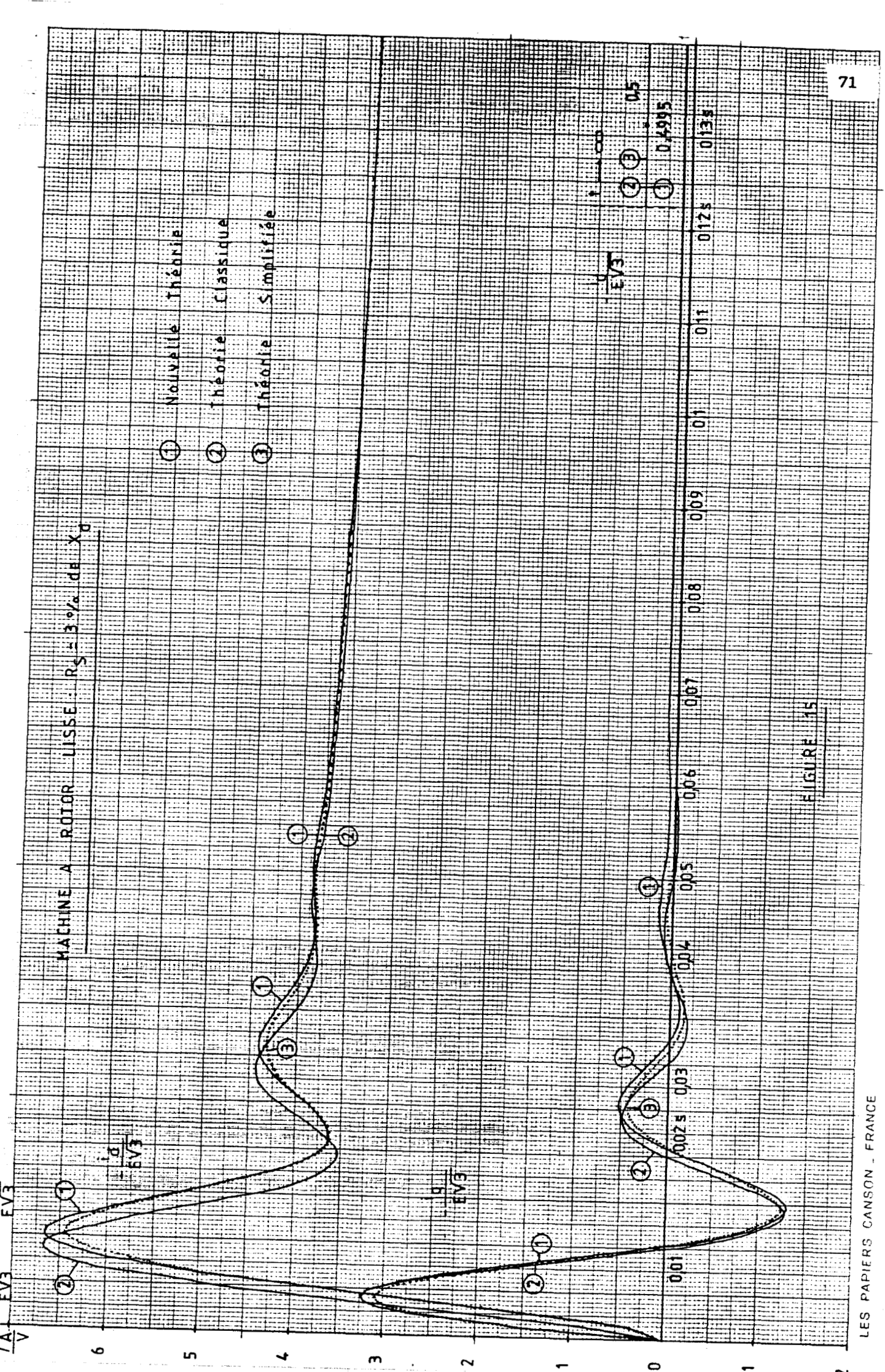


FIGURE 15

On constate une amélioration sensible pour la courbe $i_F(t)$ pour la théorie simplifiée, par contre la courbe $i_d(t)$ et $i_q(t)$ n'est que peu améliorée et il persiste une erreur sur les constantes $\frac{1}{\chi''_d}$ et $\frac{1}{\chi''_q}$ mises sous forme littérale puisqu'elles valent 5,25 pour la théorie globale et 5 dans la théorie classique. Donc les termes valant $\frac{1}{\chi''_d}$ et $\frac{1}{\chi''_q}$ dans la théorie classique semblent en réalité être eux aussi dépendants de la pulsation ω'^* puisque $\frac{1}{\chi''_d} \frac{\omega'}{\omega'^*} = 5,3$ pour la machine étudiée ici. Pour tenir compte efficacement de ces constantes il faut repartir de la théorie simplifiée $Y_{dq}^{\circ}(p)$, $Y_{qq}^{\circ}(p)$ et $Y_{Fq}^{\circ}(p)$ et recalculer la valeur des constantes.

Dans ce cas une expression littérale est plus difficile à obtenir pour $i_d(t)$, $i_q(t)$ et $i_F(t)$ si l'on désire des valeurs plus précises que par la théorie classique. La méthode donnant le résultat le plus correct étant encore de partir de l'équation globale et de recalculer tous les termes, mais ce n'est pas réalisable sous forme littérale.

III.3.2. Cas de l'établissement du courant inducteur dans un alternateur au préalable en court-circuit.

Pour obtenir cette fois encore un résultat plus précis que par la théorie classique on va comparer les deux théories pour $R_S = 3\%$ de X_d avec une machine à pôles lisses.

	théorie générale		théorie classique
$I_d(t) = \frac{M_F}{R_F}$	$\left[\begin{array}{l} - 156,9 \\ + 158,4 e^{-0,718t} \\ - 1,4 e^{-31,9t} \\ - 0,04 e^{-127,6t} \\ - \left[+ 0,06 \cos 295,5t \right] e^{-92,7t} \\ \quad \left[+ 0,045 \sin 295,5t \right] \end{array} \right]$	$I_d(t) = \frac{M_F}{R_F}$	$\left[\begin{array}{l} - 144,1 \\ + 145,5 e^{-0,727t} \\ - 1,3 e^{-31,25t} \\ - \left[+ 0,05 \cos 314t \right] e^{-94,2t} \\ \quad \left[+ 0,04 \sin 314t \right] \end{array} \right]$
$I_q(t) = \frac{M_F}{R_F}$	$\left[\begin{array}{l} - 4,71 \\ + 4,5 e^{-0,718t} \\ + 0,09 e^{-31,9t} \\ + 0,14 e^{-127,6t} \\ + \left[- 0,02 \cos 295,5t \right] e^{-92,7t} \\ \quad \left[+ 0,07 \sin 295,5t \right] \end{array} \right]$	$I_q(t) = \frac{M_F}{R_F}$	$\left[\begin{array}{l} - 43,23 \\ + 43,03 e^{-0,1t} \\ + 0,108 e^{-22,7t} \\ + 0,11 e^{-125t} \\ + \left[- 0,02 \cos 214t \right] e^{-94,2t} \\ \quad \left[+ 0,06 \sin 314t \right] \end{array} \right]$
$I_F(t) = \frac{1}{R_F}$	$\left[\begin{array}{l} + 1 \\ - 0,993 e^{-0,718t} \\ - 7,4 \cdot 10^{-3} e^{-31,9t} \\ + 8 \cdot 10^{-5} e^{-127,6t} \\ + \left[+ 1,46 \cdot 10^{-4} \cos 295,5t \right] e^{-92,7t} \\ \quad \left[+ 1,24 \cdot 10^{-4} \sin 295,5t \right] \end{array} \right]$	$I_F(t) = \frac{1}{R_F}$	$\left[\begin{array}{l} + 0,917 \\ + 0,03 e^{-0,1t} \\ - 0,943 e^{-0,727t} \\ + 1,58 \cdot 10^{-3} e^{-22,7t} \\ - 7,28 \cdot 10^{-3} e^{-31,25t} \\ + \left[+ 9,6 \cdot 10^{-6} \cos 314t \right] e^{-94,2t} \\ \quad \left[+ 2,8 \cdot 10^{-4} \sin 314t \right] \end{array} \right]$

On observe une erreur importante pour le terme $I_q(t)$ par la théorie classique. De plus étant donné que seul les deux premiers termes sont à considérer, les autres étant négligeables. On peut donc donner avec une approximation très bonne les formules de la théorie simplifiée soit :

$$I_d(t) = \frac{M_F \omega'}{R_F X_d} \{1 - e^{-\frac{t}{T'_d}}\}$$

$$I_q(t) = -\frac{M_F \omega' R_S}{R_F X_d X_q} \{1 - e^{-\frac{t}{T'_d}}\}$$

$$\text{d'où } I_A(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{M_F \omega'}{R_F X_d} (e^{-\frac{t}{T'_d}} - 1) \left\{ \cos \omega't - \frac{R_S}{X_d X_q} \sin \omega't \right\}$$

de même le courant $I_F(t)$ s'écrira :

$$I_F(t) = \frac{1}{R_F} \{1 - e^{-\frac{t}{T'_d}}\}$$

Ce qui donne pour la machine à pôles lisses dont $R_S = 3\%$ de X_d

$$I_d(t) = -\frac{M_F}{R_F} \cdot 157 (1 - e^{-0,727t})$$

$$I_q(t) = -\frac{M_F}{R_F} 4,71 (1 - e^{-0,727t})$$

$$I_F(t) = \frac{1}{R_F} (1 - e^{-0,727t})$$

pour la théorie simplifiée.

On peut remarquer sur les courbes correspondantes figures 16, 17, 18 que cette théorie simplifiée est relativement juste.

C'est le seul cas où l'on est parvenu à améliorer la théorie classique tout en simplifiant l'expression littérale.

MF 4 8 12 16 20 24 28 32 36 40S 44 48S

MACHINE A ROTOR LISSE R 5 1/2 % de X₀

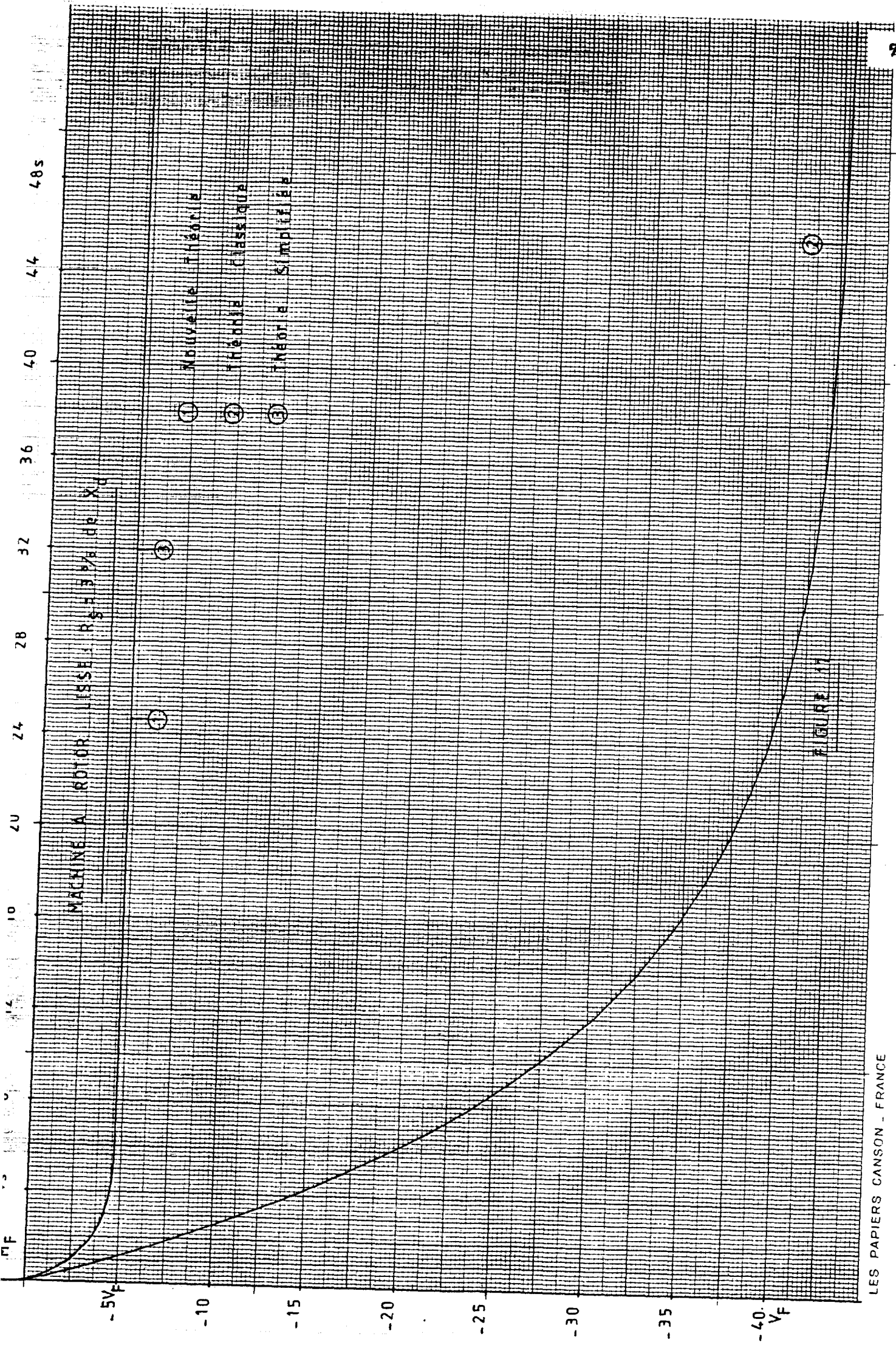
- ① Nouvelle Théorie
- ② Théorie Classique
- ③ Théorie Simplifiée

-50
V_F

-100
V_F

-150
V_F

FIGURE 1A



MACHINE A ROTOR LISSE : $R_s = 3,1\%$ de X_d

- ① Nouvelle Théorie
- ② Théorie Classique
- ③ Théorie Simplifiée

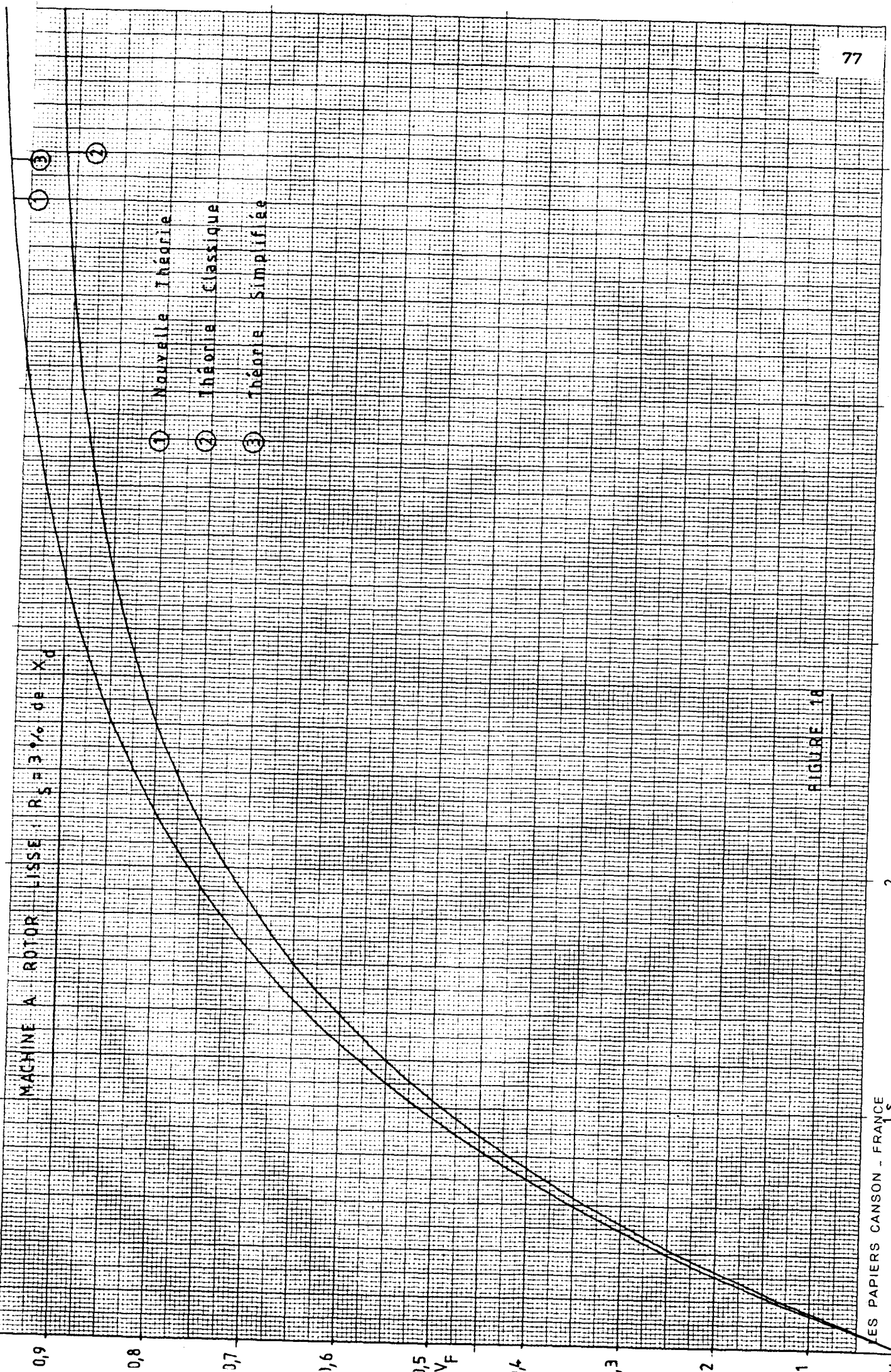


FIGURE 18

Conclusion

La théorie simplifiée améliore sensiblement les résultats de la théorie classique en utilisant les admittances simplifiées, mais elle n'est valable que pour une résistance statorique faible inférieure à 3% de X_d .

Il est possible d'obtenir une expression littérale fort simplifiée et beaucoup plus précise pour le courant $i_F(t)$ et $i_A(t)$ lorsqu'on soumet la machine à un échelon de tension ($\frac{V_F}{p}$), la machine étant au préalable en court-circuit. Ce qui permet de calculer la constante $\frac{1}{T_d}$ avec une bonne précision.

Une expression littérale plus précise, bien que plus complexe est proposée pour $i_F(t)$ dans le cas d'un court-circuit triphasé brusque. Cette expression plus complexe met en évidence la pseudo-pulsation et le déphasage intervenant dans la courbe $i_F(t)$. Il est alors possible d'améliorer certaines constantes subtransitoires obtenues par analyse des courbes de court-circuit et notamment pour les machines telle que la pseudo-pulsation ω'^* diffère sensiblement de ω' (cas de la machine à pôles lisses étudiée).

DEUXIEME PARTIE

MODELISATION DE LA MACHINE SYNCHRONE

DOUBLE ETOILE

CHAPITRE I

EQUATION DE LA MACHINE
 SYNCHROME DOUBLE ETOILE

I. MODÈLE DE PARK DE LA MACHINE SYNCHROME DOUBLE ÉTOILE
I.1. DESCRIPTION DE LA MACHINE DOUBLE ETOILE IDEALISEE

La machine compte, voir figure 2.1,

- . au stator deux enroulements triphasés (A, B, C), (A', B', C') décalés les uns par rapport aux autres de $\frac{\pi}{6}$
- . au rotor - le bobinage inducteur F suivant l'axe direct.
 - l'enroulement KD en court-circuit tenant compte de l'effet de l'amortisseur suivant l'axe direct.
 - l'enroulement KQ en court-circuit tenant compte de l'effet de l'amortisseur suivant l'axe en quadrature.

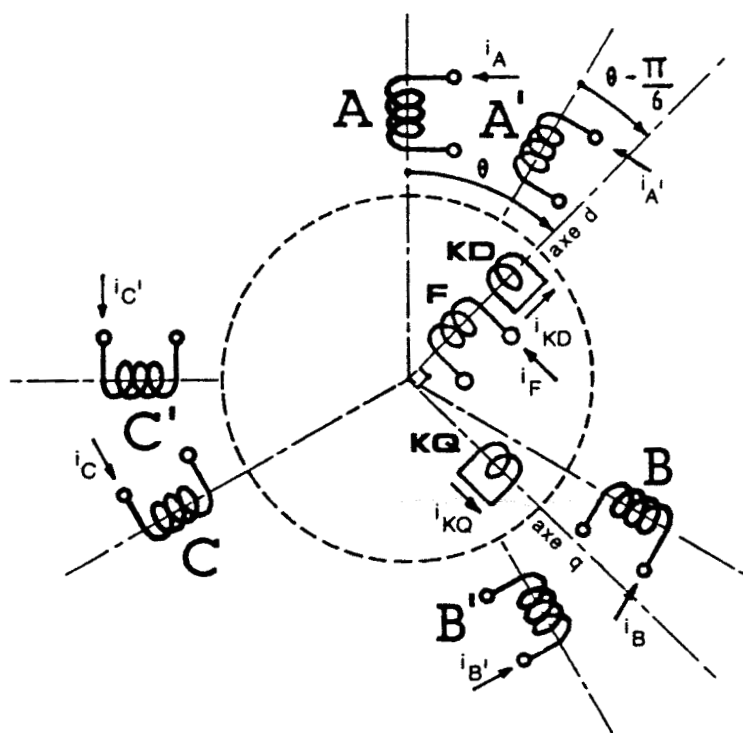


Figure 2.1

I.2. DETERMINATION DES INDUCTANCES

De manière à mettre en équation la machine synchrone double étoile on va d'abord déterminer les inductances.

Pour cela on utilise [7] la formule

$$(2.1) \quad \phi_{ab} = M_{ab} i_b = \frac{N_a N_b i_b L D}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{K_{2n+1}^b}{2n+1} \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \cdot P_{2h} \cdot \frac{K_{2h+2n+1}^a}{2h+2n+1} \cos[(2h+2n+1)\theta_a - (2n+1)\theta_b]$$

expression dans laquelle

D = diamètre de l'armature lisse

L = longueur utile de l'armature lisse

K_{2n+1}^b = coefficient de bobinage pour l'harmonique de rang $2n+1$ relatif au bobinage b

Les angles θ_a et θ_b étant définis sur la figure 2.2.

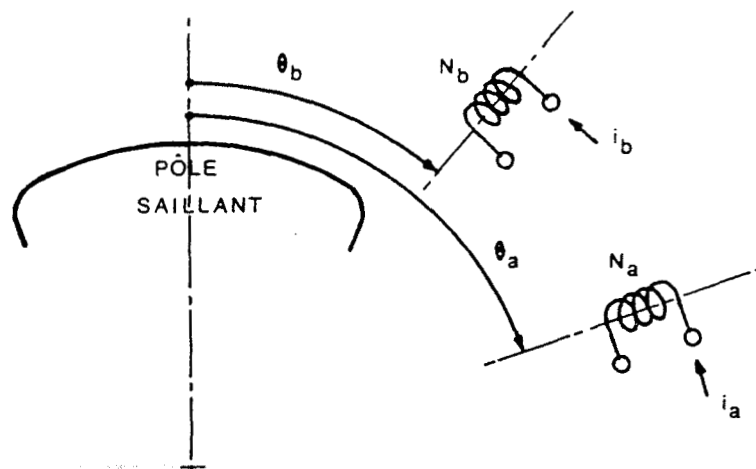


FIGURE 2.2

En donnant à θ_a et θ_b les valeurs appropriées, on peut ainsi déterminer les inductances connaissant les coefficients de bobinage.

Ces calculs sont détaillés à l'annexe II.

Pour les enroulements statoriques on a effectué les hypothèses suivantes :

- répartition sinusoïdale des f.m.m.
- on ne considère que les deux premiers termes du développement en série

de Fourier de la perméance $P(x)$ de l'entrefer.
Ces résultats sont regroupés dans le tableau 2.I.

I.3. MISE EN EQUATION DE LA MACHINE SYNCHROME DOUBLE ETOILE

Les équations régissant le fonctionnement de la machine synchrone double étoile sont :

. au stator

$$V_A = R_S i_A + \frac{d}{dt} \phi_A$$

$$V_{A'} = R_S i_{A'} + \frac{d}{dt} \phi_{A'}$$

$$V_B = R_S i_B + \frac{d}{dt} \phi_B$$

$$V_{B'} = R_S i_{B'} + \frac{d}{dt} \phi_{B'}$$

$$V_C = R_S i_C + \frac{d}{dt} \phi_C$$

$$V_{C'} = R_S i_{C'} + \frac{d}{dt} \phi_{C'}$$

. au rotor

$$V_F = R_F i_F + \frac{d}{dt} \phi_F$$

$$0 = R_{KD} i_{KD} + \frac{d}{dt} \phi_{KD}$$

$$0 = R_{KQ} i_{KQ} + \frac{d}{dt} \phi_{KQ}$$

$\phi_A, \phi_B, \phi_C, \phi_{A'}, \phi_{B'}, \phi_{C'}, \phi_F, \phi_{KD}, \phi_{KQ}$, étant les flux totaux traversant les enroulements A, B, C, A', B', C', F, KD, KQ.

Ces équations peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$(2.2) \quad \begin{cases} [V_S] = [R_S] \cdot [i_S] + \frac{d}{dt} \{ [L_{SS}] \cdot [i_S] \} + \frac{d}{dt} \{ [M_{SS}'] \cdot [i_S'] \} + \frac{d}{dt} \{ [M_{SR}] \cdot [i_R] \} \\ [V_S'] = [R_S] \cdot [i_S] + \frac{d}{dt} \{ [M_{SS}'] \cdot [i_S] \} + \frac{d}{dt} \{ [L_{SS}'] \cdot [i_S'] \} + \frac{d}{dt} \{ [M_{SR}'] \cdot [i_R] \} \\ [V_R] = [R_S] \cdot [i_R] + \frac{d}{dt} \{ [M_{RS}] \cdot [i_S] \} + \frac{d}{dt} \{ [M_{RS}'] \cdot [i_S'] \} + \frac{d}{dt} \{ [L_{RR}] \cdot [i_R] \} \end{cases}$$

Les diverses matrices étant définies dans le tableau 2.II

TABLEAU 2.I

Inductances propres et inductances mutuelles des enroulements statoriques.

$$\left[\begin{array}{l} L_A = L_{S0} + L_{SV} \cos 2\theta \\ L_{A'} = L_{S0} + L_{SV} \cos 2\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \\ L_B = L_{S0} + L_{SV} \cos 2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ L_{B'} = L_{S0} + L_{SV} \cos 2\left(\theta - \frac{5\pi}{6}\right) \\ L_C = L_{S0} + L_{SV} \cos 2\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \\ L_{C'} = L_{S0} + L_{SV} \cos 2\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} M_{AA'} = M'_{S0} + L_{SV} \cos 2\left(\theta - \frac{13\pi}{12}\right) \\ M_{AB} = M_{S0} + L_{SV} \cos 2\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \\ M_{AB'} = M'_{S0} + L_{SV} \cos 2\left(\theta - \frac{17\pi}{12}\right) \\ M_{AC} = M_{S0} + L_{SV} \cos 2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ M_{AC'} = 0 + L_{SV} \cos 2\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right) \\ M_{A'B} = 0 + L_{SV} \cos 2\left(\theta - \frac{17\pi}{12}\right) \\ M_{A'B'} = M_{S0} + L_{SV} \cos 2\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) \\ M_{A'C} = M'_{S0} + L_{SV} \cos 2\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right) \\ M_{A'C'} = M_{S0} + L_{SV} \cos 2\left(\theta - \frac{5\pi}{6}\right) \\ M_{BB'} = M''_{S0} + L_{SV} \cos 2\left(\theta - \frac{7\pi}{4}\right) \\ M_{BC} = M_{S0} + L_{SV} \cos 2\theta \\ M_{BC'} = M'_{S0} + L_{SV} \cos 2\left(\theta - \frac{\pi}{12}\right) \\ M_{B'C} = 0 + L_{SV} \cos 2\left(\theta - \frac{\pi}{12}\right) \\ M_{B'C'} = M_{S0} + L_{SV} \cos 2\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \\ M_{C'C} = M''_{S0} + L_{SV} \cos 2\left(\theta - \frac{5\pi}{12}\right) \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{avec } M''_{S0} = -M_{S0} \sqrt{3} \\ M'_{S0} = M_{S0} \sqrt{3} \\ M_{S0} = -\frac{1}{2} L_{S0} \end{array}$$

TABLEAU 2.I (suite)

Inductances mutuelles entre enroulements du stator et du rotor.

$$\begin{aligned}
 M_{AF} &= M_{FS} \cos \theta \\
 M_{A'F} &= M_{FS} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \\
 M_{BF} &= M_{FS} \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \\
 M_{B'F} &= M_{FS} \cos \left(\theta - \frac{5\pi}{6} \right) \\
 M_{CF} &= M_{FS} \cos \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right) \\
 M_{C'F} &= M_{FS} \cos \left(\theta - \frac{3\pi}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{A,KD} &= M_{KD,S} \cos \theta \\
 M_{A',KD} &= M_{KD,S} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \\
 M_{B,KD} &= M_{KD,S} \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \\
 M_{B',KD} &= M_{KD,S} \cos \left(\theta - \frac{5\pi}{6} \right) \\
 M_{C,KD} &= M_{KD,S} \cos \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right) \\
 M_{C',KD} &= M_{KD,S} \cos \left(\theta - \frac{3\pi}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{A,KQ} &= - M_{KQ,S} \sin \theta \\
 M_{A',KQ} &= - M_{KQ,S} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \\
 M_{B,KQ} &= - M_{KQ,S} \sin \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \\
 M_{B',KQ} &= - M_{KQ,S} \sin \left(\theta - \frac{5\pi}{6} \right) \\
 M_{C,KQ} &= - M_{KQ,S} \sin \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right) \\
 M_{C',KQ} &= - M_{KQ,S} \sin \left(\theta - \frac{3\pi}{2} \right)
 \end{aligned}$$

TABLEAU 2. II

$$\begin{bmatrix} v_S \\ v_A \\ v_B \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{A'} \\ v_{B'} \\ v_{C'} \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} v_S' \\ v_A' \\ v_B' \\ v_C' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{A'} \\ v_{B'} \\ v_{C'} \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} v_R \\ v_F \\ v_{KD} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{A'} \\ v_{B'} \\ v_{C'} \end{bmatrix} ;$$

$$\begin{bmatrix} i_S \\ i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{A'} \\ i_{B'} \\ i_{C'} \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} i_S' \\ i_A' \\ i_B' \\ i_C' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{A'} \\ i_{B'} \\ i_{C'} \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} i_R \\ i_F \\ i_{KD} \\ i_{KQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{A'} \\ i_{B'} \\ i_{C'} \end{bmatrix} ;$$

$$\begin{bmatrix} R_S \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ R_S \\ 0 \\ R_S \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} R_R \\ R_F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R_{KD} \\ R_{KQ} \end{bmatrix} ;$$

$$\begin{bmatrix} L_{SS} \\ L_A \\ M_{BA} \\ M_{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{AB} \\ L_B \\ M_{CB} \\ L_C \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} L_{SS}' \\ L_{A'} \\ M_{B'A'} \\ M_{C'A'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{A'B'} \\ L_{B'} \\ M_{C'B'} \\ L_{C'} \end{bmatrix} ;$$

$$\begin{bmatrix} M_{SS'} \\ M_{AA'} \\ M_{BA'} \\ M_{CA'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{AB'} \\ M_{BB'} \\ M_{CB'} \\ M_{CC'} \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} M_{SS} \\ M_{AA} \\ M_{BA} \\ M_{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{A'B} \\ M_{B'B} \\ M_{C'B} \\ M_{C'C} \end{bmatrix} ;$$

$$\begin{bmatrix} M_{SR} \\ M_{AF} \\ M_{BF} \\ M_{CF} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{AKD} \\ M_{B,KD} \\ M_{C,KD} \\ M_{C,KQ} \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} M_{SR}' \\ M_{A'F} \\ M_{B'F} \\ M_{C'F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{A',KD} \\ M_{B',KD} \\ M_{C',KD} \\ M_{C',KQ} \end{bmatrix} ;$$

$$\begin{bmatrix} M_{RS} \\ M_{FA} \\ M_{KD,A} \\ M_{KQ,B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{FB} \\ M_{KD,B} \\ M_{KQ,B} \\ M_{KQ,C} \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} M_{RS}' \\ M_{FA'} \\ M_{KD,A'} \\ M_{KQ,A'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{FB'} \\ M_{KD,B'} \\ M_{KQ,B'} \\ M_{KQ,C'} \end{bmatrix} ;$$

$$\begin{bmatrix} L_{RR} \\ L_F \\ M_{KD,F} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{FKD} \\ L_{KD} \\ 0 \\ L_{KQ} \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{bmatrix} M_{RS} \\ M_{RS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{SR} \\ M_{SR} \end{bmatrix} ;$$

$$\begin{bmatrix} M_{RS}' \\ M_{RS}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{SR}' \\ M_{SR}' \end{bmatrix} ;$$

$$\begin{bmatrix} M_{SS}' \\ M_{SS}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{S'S} \\ M_{S'S} \end{bmatrix} ;$$

II. TRANSFORMATIONS DE PARK UTILISÉES

II.1. MATRICES DES TRANSFORMATIONS UTILISÉES

On utilise pour les grandeurs liées aux enroulements (A, B, C) la matrice usuelle de PARK laissant invariante la puissance instantanée soit :

$$[P_1(\theta)] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \cos \theta & -\sin \theta \\ 1/\sqrt{2} \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ 1/\sqrt{2} \cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

Elle permet le passage des trois grandeurs v_A, v_B, v_C , par exemple, à leurs composantes v_o, v_d, v_q .

Pour les grandeurs liées aux enroulements (A', B', C') on utilise la matrice de transformation suivante

$$[P_1(\theta')] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \cos(\theta - \frac{\pi}{6}) & -\sin(\theta - \frac{\pi}{6}) \\ 1/\sqrt{2} \cos(\theta - \frac{5\pi}{6}) & -\sin(\theta - \frac{5\pi}{6}) \\ 1/\sqrt{2} \cos(\theta - \frac{3\pi}{2}) & -\sin(\theta - \frac{3\pi}{2}) \end{bmatrix}$$

En effet ainsi que le montre la figure 2.3, $\theta' = \theta - \frac{\pi}{6}$.

$[P_1(\theta')]$ permet alors le passage des trois grandeurs statoriques v'_A, v'_B, v'_C , par exemple, à leurs composantes v'_o, v'_d, v'_q .

$[P_1(\theta')]$ est également une matrice orthogonale laissant invariante la puissance instantanée.

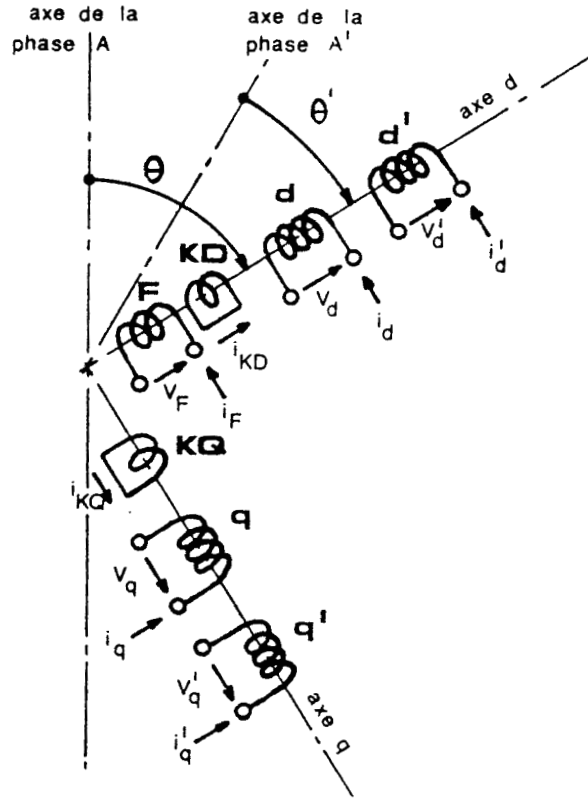


FIGURE 2.3.

II.2. EQUATIONS TRANSFORMEES

On peut réécrire les équations précédentes sous la forme :

$$[v_S] = [R_S] [i_S] + \frac{d}{dt} \{ [L_{SS}] [i_S] \} + \frac{d}{dt} \{ [M_{SS}'] [i_S'] \} + \frac{d}{dt} \{ [M_{SR}] [i_R] \}$$

$$[v_S'] = [R_S] [i_S'] + \frac{d}{dt} \{ [M_{SS}'] [i_S] \} + \frac{d}{dt} \{ [L_{SS}'] [i_S'] \} + \frac{d}{dt} \{ [M_{SR}'] [i_R] \}$$

$$[v_R] = [R_R] [i_R] + \frac{d}{dt} \{ [M_{RS}] [i_S] \} + \frac{d}{dt} \{ [M_{RS}'] [i_S'] \} + \frac{d}{dt} \{ [L_{RR}] [i_R] \}$$

Effectuons dans ces équations le changement de variables suivant :

$$[v_S] = [P_1(\theta)] [v_{CS}] \quad [i_S] = [P_1(\theta)] [i_{CS}]$$

$$[v_S'] = [P_1(\theta')] [v_{CS}'] \quad [i_S'] = [P_1(\theta')] [i_{CS}']$$

On obtient après simplifications les équations matricielles suivantes :

$$[v_{CS}] = [R_S] [i_{CS}] + [P_1(\theta)]^{-1} \left[\frac{d}{dt} \{ [L_{SS}] [P_1(\theta)] [i_{CS}] \} + \frac{d}{dt} \{ [M_{SS}'] [P_1(\theta')] [i_{CS}'] \} + \frac{d}{dt} \{ [M_{SR}] [i_R] \} \right]$$

$$[v_{CS}'] = [R_S] [i_{CS}'] + [P_1(\theta')]^{-1} \left[\frac{d}{dt} \{ [M_{SS}'] [P_1(\theta)] [i_{CS}] \} + \frac{d}{dt} \{ [L_{SS}'] [P_1(\theta')] [i_{CS}'] \} + \frac{d}{dt} \{ [M_{SR}'] [i_R] \} \right]$$

$$[v_R] = [R_R] [i_R] + \frac{d}{dt} \{ [M_{RS}] [P_1(\theta)] [i_{CS}] \} + \frac{d}{dt} \{ [M_{RS}'] [P_1(\theta')] [i_{CS}'] \} + \frac{d}{dt} \{ [L_{RR}] [i_R] \}$$

Les diverses matrices d'inductances sont détaillées dans le tableau 2.III, les autres matrices étant définies au tableau 2.II

On peut encore décomposer les produits du système matriciel précédent en produits plus simples :

$$\begin{aligned}
 (2.3) \quad [v_{CS}] &= [R_S] [i_{CS}] + [P_1(\theta)]^{-1} \cdot \left[\frac{d}{d\theta} ([L_{SS}] [P_1(\theta)]) \right] \frac{d\theta}{dt} [i_{CS}] + [P_1(\theta)]^{-1} \cdot ([L_{SS}] [P_1(\theta)]) \left(\frac{d}{dt} [i_{CS}] \right) \\
 &\quad + [P_1(\theta)]^{-1} \cdot \left[\frac{d}{d\theta} ([M_{SS'}] [P_1(\theta')]) \right] \frac{d\theta}{dt} [i_{CS'}] + [P_1(\theta)]^{-1} \cdot ([M_{SS'}] [P_1(\theta')]) \left(\frac{d}{dt} [i_{CS'}] \right) \\
 &\quad + [P_1(\theta)]^{-1} \cdot \left(\frac{d}{d\theta} [M_{SR}] \right) \frac{d\theta}{dt} [i_R] + [P_1(\theta)]^{-1} [M_{SR}] \left(\frac{d}{dt} [i_R] \right) \\
 [v_{CS'}] &= [R_S] [i_{CS'}] + [P_1(\theta')]^{-1} \cdot \left[\frac{d}{d\theta} ([M_{S'S}] [P_1(\theta)]) \right] \frac{d\theta}{dt} [i_{CS}] + [P_1(\theta')]^{-1} \cdot ([M_{S'S}] [P_1(\theta)]) \left(\frac{d}{dt} [i_{CS}] \right) \\
 &\quad + [P_1(\theta')]^{-1} \cdot \left[\frac{d}{d\theta} ([L_{S'S'}] [P_1(\theta')]) \right] \frac{d\theta}{dt} [i_{CS'}] + [P_1(\theta')]^{-1} \cdot ([L_{S'S'}] [P_1(\theta')]) \left(\frac{d}{dt} [i_{CS'}] \right) \\
 &\quad + [P_1(\theta')]^{-1} \cdot \left(\frac{d}{d\theta} [M_{S'R}] \right) \frac{d\theta}{dt} [i_R] + [P_1(\theta')]^{-1} [M_{S'R}] \left(\frac{d}{dt} [i_R] \right) \\
 [v_R] &= [R_R] [i_R] + \left[\frac{d}{d\theta} ([M_{RS}] [P_1(\theta)]) \right] \frac{d\theta}{dt} [i_{CS}] + [M_{RS}] [P_1(\theta)] \left(\frac{d}{dt} [i_{CS}] \right) \\
 &\quad + \left[\frac{d}{d\theta} ([M_{RS}] [P_1(\theta')]) \right] \frac{d\theta}{dt} [i_{CS'}] + [M_{RS}] [P_1(\theta')] \left(\frac{d}{dt} [i_{CS'}] \right) \\
 &\quad + [L_{RR}] \left(\frac{d}{dt} [i_R] \right)
 \end{aligned}$$

- Le calcul des produits matriciels qui, dans le système d'équation (2.3) multiplient $[i_{CS}]$, $[i_{CS'}]$, $[i_R]$ ou leurs dérivées donne

$$[P_1(\theta)]^{-1} ([L_{SS}] [P_1(\theta)]) = \begin{bmatrix} L_{S0} + 2M_{S0} & 0 & 0 \\ 0 & L_{S0} - M_{S0} + \frac{3}{2} L_{SV} & 0 \\ 0 & 0 & L_{S0} - M_{S0} - \frac{3}{2} L_{SV} \end{bmatrix}$$

$$[P_1(\theta)]^{-1} \cdot \left[\frac{d}{d\theta} ([L_{SS}] [P_1(\theta)]) \right] \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(L_{SO} - M_{SO} - \frac{3}{2}L_{SV}) \\ 0 & L_{SO} - M_{SO} + \frac{3}{2}L_{SV} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[P_1(\theta)]^{-1} \cdot ([M_{SS'}] [P_1(\theta')]) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3M_{SO} + \frac{3}{2}L_{SV} & 0 \\ 0 & 0 & -3M_{SO} - \frac{3}{2}L_{SV} \end{bmatrix}$$

$$[P_1(\theta)]^{-1} \cdot \left[\frac{d}{d\theta} ([M_{SS'}] [P_1(\theta')]) \right] \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(-3M_{SO} - \frac{3}{2}L_{SV}) \\ 0 & -3M_{SO} + \frac{3}{2}L_{SV} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[P_1(\theta)]^{-1} \cdot [M_{SR}] = \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ M_{FS} & M_{KD,S} & 0 \\ 0 & 0 & M_{KQ,S} \end{bmatrix}$$

$$[P_1(\theta)]^{-1} \cdot \left(\frac{d}{d\theta} [M_{SR}] \right) \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{d\theta}{dt} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M_{KQ,S} \\ M_{FS} & M_{KD,S} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[P_1(\theta')]^{-1} \cdot ([M_{S'S}] [P_1(\theta)]) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3M_{SO} + \frac{3}{2}L_{SV} & 0 \\ 0 & 0 & -3M_{SO} - \frac{3}{2}L_{SV} \end{bmatrix}$$

$$[P_1(\theta')]^{-1} \cdot \left[\frac{d}{d\theta} ([M_{S'S}] [P_1(\theta)]) \right] \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(-3M_{SO} - \frac{3}{2}L_{SV}) \\ 0 & -3M_{SO} + \frac{3}{2}L_{SV} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[P_1(\theta')]^{-1} \cdot ([L_{S'S'}] [P_1(\theta')]) = \begin{bmatrix} L_{SO} + 2M_{SO} & 0 & 0 \\ 0 & L_{SO} - M_{SO} + \frac{3}{2}L_{SV} & 0 \\ 0 & 0 & L_{SO} - M_{SO} - \frac{3}{2}L_{SV} \end{bmatrix}$$

$$[P_1(\theta')]^{-1} \cdot \left[\frac{d}{d\theta} ([L_{S'S'}] [P_1(\theta')]) \right] \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(-L_{SO} - M_{SO} - \frac{3}{2}L_{SV}) \\ 0 & L_{SO} - M_{SO} + \frac{3}{2}L_{SV} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[P_1(\theta')]^{-1} \cdot [M_{S'R}] = \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ M_{FS} & M_{KD,S} & 0 \\ 0 & 0 & M_{KQ,S} \end{bmatrix}$$

$$[P_1(\theta')]^{-1} \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} [M_{SR}] \right) \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{d\theta}{dt} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M_{KQ,S} \\ M_{FS} & M_{KD,S} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[M_{RS}] [P_1(\theta)] = \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} 0 & M_{FS} & 0 \\ 0 & M_{KD,S} & 0 \\ 0 & 0 & M_{KQ,S} \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{d\theta} ([M_{RS}] [P_1(\theta)]) \frac{d\theta}{dt} = 0$$

$$[M_{RS}] [P_1(\theta)] = \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} 0 & M_{FS} & 0 \\ 0 & M_{KD,S} & 0 \\ 0 & 0 & M_{KQ,S} \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{d\theta} ([M_{RS}] [P_1(\theta')]) \frac{d\theta}{dt} = 0$$

- On reporte ces expressions dans les relations (2.3).

En désignant par p l'opérateur différentiel,

en remarquant que $\frac{d\theta}{dt}$ est la vitesse angulaire w' du rotor,

et en posant:

$$\begin{aligned} L_0 &= L_{S0} + 2 M_{S0} \\ L_d &= L_{S0} - M_{S0} + \frac{3}{2} L_{SV} = -3 M_{S0} + \frac{3}{2} L_{SV} \\ L_q &= L_{S0} - M_{S0} - \frac{3}{2} L_{SV} = -3 M_{S0} - \frac{3}{2} L_{SV} \\ M_F &= \sqrt{\frac{3}{2}} M_{FS} \\ M_{KD} &= \sqrt{\frac{3}{2}} M_{KD,S} \\ M_{KQ} &= \sqrt{\frac{3}{2}} M_{KQ,S} \\ M_{FD} &= M_{F,KD} \end{aligned}$$

on obtient en négligeant les composantes homopolaires qui sont totalement découplées du système, l'équation matricielle donnée par le tableau 2.IV

TABLEAU 2.III

$$\left[L_{SS} \right] \begin{bmatrix} L_{SO} + L_{SV} \cos 2\theta & M_{SO} + L_{SV} \cos(2\theta - \frac{2\pi}{3}) & M_{SO} + L_{SV} \cos(2\theta - \frac{4\pi}{3}) \\ M_{SO} + L_{SV} \cos(2\theta - \frac{2\pi}{3}) & L_{SO} + L_{SV} \cos(2\theta - \frac{4\pi}{3}) & M_{SO} + L_{SV} \cos 2\theta \\ M_{SO} + L_{SV} \cos(2\theta - \frac{4\pi}{3}) & M_{SO} + L_{SV} \cos 2\theta & L_{SO} + L_{SV} \cos(2\theta - \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

$$\left[L_{S'S'} \right] \begin{bmatrix} L_{SO} + L_{SV} \cos(2\theta - \frac{\pi}{3}) & M_{SO} + L_{SV} \cos(2\theta - \pi) & M_{SO} + L_{SV} \cos(2\theta + \frac{\pi}{3}) \\ M_{SO} + L_{SV} \cos(2\theta - \pi) & L_{SO} + L_{SV} \cos(2\theta + \frac{\pi}{3}) & M_{SO} + L_{SV} \cos(2\theta - \frac{\pi}{3}) \\ M_{SO} + L_{SV} \cos(2\theta + \frac{\pi}{3}) & M_{SO} + L_{SV} \cos(2\theta - \frac{\pi}{3}) & L_{SO} + L_{SV} \cos(2\theta - \pi) \end{bmatrix}$$

$$\left[M_{SS'} \right] \begin{bmatrix} M'_{SO} + L_{SV} \cos(2\theta - \frac{\pi}{6}) & M'_{SO} + L_{SV} \cos(2\theta - \frac{5\pi}{6}) & 0 + L_{SV} \cos(2\theta - \frac{3\pi}{2}) \\ 0 + L_{SV} \cos(2\theta - \frac{5\pi}{6}) & M'_{SO} + L_{SV} \cos(2\theta - \frac{3\pi}{2}) & M'_{SO} + L_{SV} \cos(2\theta - \frac{\pi}{6}) \\ M'_{SO} + L_{SV} \cos(2\theta - \frac{3\pi}{2}) & 0 + L_{SV} \cos(2\theta - \frac{\pi}{6}) & M'_{SO} + L_{SV} \cos(2\theta - \frac{5\pi}{6}) \end{bmatrix}$$

$$\left[M_{S'S'} \right] \begin{bmatrix} M'_{SO} + L_{SV} \cos(2\theta - \frac{\pi}{6}) & 0 + L_{SV} \cos(2\theta - \frac{5\pi}{6}) & M'_{SO} + L_{SV} \cos(2\theta - \frac{3\pi}{2}) \\ M'_{SO} + L_{SV} \cos(2\theta - \frac{5\pi}{6}) & M'_{SO} + L_{SV} \cos(2\theta - \frac{3\pi}{2}) & 0 + L_{SV} \cos(2\theta - \frac{\pi}{6}) \\ 0 + L_{SV} \cos(2\theta - \frac{3\pi}{2}) & M'_{SO} + L_{SV} \cos(2\theta - \frac{\pi}{6}) & M'_{SO} + L_{SV} \cos(2\theta - \frac{5\pi}{6}) \end{bmatrix}$$

$$\left[M_{SR} \right] \begin{bmatrix} M_{FS} \cos \theta & M_{KD,S} \cos \theta & -M_{KQ,S} \sin \theta \\ M_{FS} \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & M_{KD,S} \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -M_{KQ,S} \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ M_{FS} \cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) & M_{KD,S} \cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) & -M_{KQ,S} \sin(\theta - \frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

$$\left[M_{S'R} \right] \begin{bmatrix} M_{FS} \cos(\theta - \frac{\pi}{6}) & M_{KD,S} \cos(\theta - \frac{\pi}{6}) & -M_{KQ,S} \sin(\theta - \frac{\pi}{6}) \\ M_{FS} \cos(\theta - \frac{5\pi}{6}) & M_{KD,S} \cos(\theta - \frac{5\pi}{6}) & -M_{KQ,S} \sin(\theta - \frac{5\pi}{6}) \\ M_{FS} \cos(\theta - \frac{3\pi}{2}) & M_{KD,S} \cos(\theta - \frac{3\pi}{2}) & -M_{KQ,S} \sin(\theta - \frac{3\pi}{2}) \end{bmatrix}$$

TABLEAU 2.IV

v_d	$R_S + L_d P$	$-L_q w'$	$L_d P$	$-L_q w'$	M_{FP}	M_{KDP}	$-M_{KQ} w'$	i_d
v_q	$L_d w'$	$R_S + L_q P$	$L_d w'$	$L_q P$	$M_{Fw'}$	$M_{KDw'}$	M_{KQP}	i_q
v'_d	$L_d P$	$-L_q w'$	$R_S + L_d P$	$-L_q w'$	M_{FP}	M_{KDP}	$-M_{KQ} w'$	i'_d
v'_q	$L_d w'$	$L_q P$	$L_d w'$	$R_S + L_q P$	$M_{Fw'}$	$M_{KDw'}$	M_{KQP}	i'_q
v_F	M_{FP}	0	M_{FP}	0	$R_F + L_{FP}$	M_{FDP}	0	i_F
0	M_{KDP}	0	M_{KDP}	0	M_{FDP}	$R_{KD} + L_{KDP}$	0	i_{KD}
0	0	M_{KQP}	0	M_{KQP}	0	0	$R_{KQ} + L_{KQP}$	i_{KQ}

III. MISE EN ÉVIDENCE DES FLUX ET EXPRESSION SIMPLIFIÉE DU COUPLE

III.1. EXPRESSION DES DIFFÉRENTS FLUX

Si on désigne par

ϕ_d , le flux total à travers la bobine équivalente à la première étoile du stator placée sur l'axe direct.

ϕ'_d , le flux total à travers la bobine équivalente à la deuxième étoile du stator placée sur l'axe direct.

ϕ_q , le flux total à travers la bobine équivalente à la première étoile du stator placée sur l'axe en quadrature.

ϕ'_q , le flux total à travers la bobine équivalente à la deuxième étoile du stator placée sur l'axe en quadrature.

$\phi_F, \phi_{KD}, \phi_{KQ}$, les flux totaux à travers les enroulements F, KD et KQ.

Ces flux ont pour expression :

$$\phi_d = L_d(i_d + i'_d) + M_F i_F + M_{KD} i_{KD} = \phi'_d$$

$$\phi_q = L_q(i_q + i'_q) + M_{KQ} i_{KQ} = \phi'_q$$

$$\phi_F = L_F i_F + M_F(i_d + i'_d) + M_{FD} i_{KD}$$

$$\phi_{KD} = L_{KD} i_{KD} + M_{KD}(i_d + i'_d) + M_{FD} i_{KD}$$

$$\phi_{KQ} = L_{KQ} i_{KQ} + M_{KQ}(i_q + i'_q)$$

Les équations des tensions du tableau 2.IV peuvent s'écrire :

$v_d = R_S i_d + p\phi_d - \omega' \phi_q,$
$v'_d = R_S i'_d + p\phi'_d - \omega' \phi'_q,$
$v_q = R_S i_q + p\phi_q + \omega' \phi_d,$
$v'_q = R_S i'_q + p\phi'_q + \omega' \phi'_d,$
$0 = R_{KD} i_{KD} + p\phi_{KD},$
$0 = R_{KQ} i_{KQ} + p\phi_{KQ}.$

Dans les expressions de v_d et v_q on voit apparaître les f.e.m. statiques ($p\phi_d, p\phi_q$) dues aux variations des flux et les f.e.m. dynamiques ($-\omega' \phi_q, \omega' \phi_d$) dues à la rotation.

III.2. EXPRESSION SIMPLIFIEE DU COUPLE

- L'expression générale du couple électromagnétique [7] pour un système en rotation à n excitations est :

$$\Gamma_e = \frac{1}{2} [i]_t \left\{ \frac{\delta}{\delta \theta} [L] \right\} [i]$$

avec

$$[i] = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} ; \quad [L] = \begin{bmatrix} L_1 & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & L_2 & \cdots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & L_n \end{bmatrix}$$

et dans le cas particulier du système double étoile on a donc :

$$\Gamma_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [i_S]_t & [i'_S]_t & [i_R]_t \end{bmatrix} \left\{ \frac{\delta}{\delta \theta} \begin{bmatrix} [L_{SS}] & [M_{SS}'] & [M_{SR}] \\ [M'_{SS}] & [L'_{SS}] & [M'_{SR}] \\ [M_{RS}] & [M'_{RS}] & [L_{RR}] \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} [i_S] \\ [i'_S] \\ [i_R] \end{bmatrix}$$

Compte tenu du fait que la matrice $[L_{RR}]$ ne comporte que des termes constants, en développant cette expression, il vient :

$$\begin{aligned} \Gamma_e = & \frac{1}{2} \left\{ [i_S]_t \left\{ \frac{\delta}{\delta \theta} [L_{SS}] \right\} [i_S] + [i_S]_t \left\{ \frac{\delta}{\delta \theta} [M_{SS}'] \right\} [i'_S] + [i_S]_t \left\{ \frac{\delta}{\delta \theta} [M_{SR}] \right\} [i_R] \right. \\ & + [i'_S]_t \left\{ \frac{\delta}{\delta \theta} [M'_{SS}] \right\} [i_S] + [i'_S]_t \left\{ \frac{\delta}{\delta \theta} [L'_{SS}] \right\} [i'_S] + [i'_S]_t \left\{ \frac{\delta}{\delta \theta} [M'_{SR}] \right\} [i_R] \\ & \left. + [i_R]_t \left\{ \frac{\delta}{\delta \theta} [M_{RS}] \right\} [i_S] + [i_R]_t \left\{ \frac{\delta}{\delta \theta} [M'_{RS}] \right\} [i'_S] \right\} \end{aligned}$$

Avec les hypothèses adoptées, $[L_{SS}]$, $[M_{SR}]$, $[M_{RS}]$, $[L'_{SS}]$, $[M'_{RS}]$, $[M'_{SR}]$, $[M'_{SS}]$, $[M_{SS}']$ ne sont fonctions que de θ .

De plus on a les égalités

$$[i_S]_t \left\{ \frac{d}{d\theta} [M_{SR}] \right\} [i_R] = [i_R]_t \left\{ \frac{d}{d\theta} [M_{RS}] \right\} [i_S]$$

$$[i'_S]_t \left\{ \frac{d}{d\theta} [M'_{SR}] \right\} [i_R] = [i_R]_t \left\{ \frac{d}{d\theta} [M'_{RS}] \right\} [i'_S]$$

De sorte que l'expression du couple peut s'écrire :

$$\Gamma_e = \frac{1}{2} \left\{ [i_S]_t \left\{ \frac{d}{d\theta} [L_{SS}] \right\} [i_S] + [i_S]_t \left\{ \frac{d}{d\theta} [M_{SS}'] \right\} [i'_S] \right\} + [i_S]_t \left\{ \frac{d}{d\theta} [M_{SR}] \right\} [i_R]$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ [i'_S]_t \left\{ \frac{d}{d\theta} [M'_{SS}] \right\} [i_S] + [i'_S]_t \left\{ \frac{d}{d\theta} [L'_{SS}] \right\} [i'_S] \right\} + [i'_S]_t \left\{ \frac{d}{d\theta} [M'_{SR}] \right\} [i_R]$$

- Effectuons le changement de variable $[i_S] = [P_1(\theta)] [i_{CS}]$

$$[i'_S] = [P_1(\theta')] [i_{CS}']$$

$$\Gamma_e = \frac{1}{2} \left\{ [i_{CS}]_t [P_1(\theta)]_t \left\{ \frac{d}{d\theta} [L_{SS}] \right\} [P_1(\theta)] [i_{CS}] + [i_{CS}]_t [P_1(\theta)]_t \left\{ \frac{d}{d\theta} [M_{SS}'] \right\} [P_1(\theta')] [i_{CS}'] \right\}$$

$$+ [i_{CS}]_t [P_1(\theta)]_t \left\{ \frac{d}{d\theta} [M_{SR}] \right\} [i_R] + \frac{1}{2} \left\{ [i_{CS}']_t [P_1(\theta')]_t \left\{ \frac{d}{d\theta} [M'_{SS}] \right\} [P_1(\theta)] [i_{CS}] \right\}$$

$$+ [i_{CS}']_t [P_1(\theta')]_t \left\{ \frac{d}{d\theta} [L'_{SS}] \right\} [P_1(\theta')] [i_{CS}'] + [i_{CS}']_t [P_1(\theta')]_t \left\{ \frac{d}{d\theta} [M'_{SR}] \right\} [i_R]$$

or,

$$[P_1(\theta)]_t \left\{ \frac{d}{d\theta} [L_{SS}] \right\} [P_1(\theta)] = 3 L_{SV} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[P_1(\theta)]_t \left\{ \frac{d}{d\theta} [M_{SS}'] \right\} [P_1(\theta')] = 3 L_{SV} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[P_1(\theta)]_t \left\{ \frac{d}{d\theta} [M_{SR}] \right\} = \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M_{KQ,S} \\ M_{FS} & M_{KD,S} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 [P_1(\theta')]_t \left\{ \frac{d}{d\theta} [M'_{SS}] \right\} [P_1(\theta)] &= 3 L_{SV} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 [P_1(\theta')]_t \left\{ \frac{d}{d\theta} [L'_{SS}] \right\} [P_1(\theta')] &= 3 L_{SV} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 [P_1(\theta')] \left\{ \frac{d}{d\theta} [M'_{SR}] \right\} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M_{KQ,S} \\ M_{FS} & M_{KD,S} & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

D'où l'expression de r_e :

$$\begin{aligned}
 r_e &= (i_d + i'_d) (i_q + i'_q) 3 L_{SV} + \sqrt{\frac{3}{2}} (i_q + i'_q) \{ M_{FS} i_F + M_{KD,S} i_{KD} \} \\
 &\quad - (i_d + i'_d) \sqrt{\frac{3}{2}} M_{KQ,S} i_{KQ}
 \end{aligned}$$

que l'on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 r_e &= (i_q + i'_q) \left[(L_{S0} - M_{S0} + \frac{3}{2} L_{SV}) (i_d + i'_d) + \sqrt{\frac{3}{2}} M_{KD,S} i_{KD} + \sqrt{\frac{3}{2}} M_{FS} i_F \right] \\
 &\quad - (i_d + i'_d) \left[(L_{S0} - M_{S0} - \frac{3}{2} L_{SV}) (i_q + i'_q) + \sqrt{\frac{3}{2}} M_{KQ,S} i_{KQ} \right]
 \end{aligned}$$

ou encore

$$r_e = (i_q + i'_q) \{ L_d (i_d + i'_d) + M_{KD} i_{KD} + M_F i_F \} - (i_d + i'_d) \{ L_q (i_q + i'_q) + M_{KQ} i_{KQ} \}$$

$$\boxed{r_e = (i_q + i'_q) \phi_d - (i_d + i'_d) \phi_q} \quad (2.4)$$

CHAPITRE II

 MACHINE SIMPLE ETOILE
EQUIVALENTE

Nous allons dans ce chapitre par une simple transformation montrer que l'on peut ramener les équations de la machine synchrone double étoile à celle de la machine synchrone simple étoile en considérant ce qui se passe globalement sur chaque axe.

I. TRANSFORMATION UTILISÉE

On réécrit les équations du tableau 2.IV sous la forme :

$$[V_d] = [A] [I_d] + [B] [I_q] + [C] [I_R]$$

$$[V_q] = [D] [I_d] + [E] [I_q] + [F] [I_R]$$

$$[V_R] = [G] [I_d] + [H] [I_q] + [I] [I_R]$$

Les matrices sont définies dans le tableau 2.V issu du tableau 2.IV en réorganisant les termes et en effectuant les partitions.

Effectuons le changement de variables suivant.

$$[I_d] = [T] [Y_d] \quad [I_q] = [T] [Y_q]$$

$$[V_d] = [T] [W_d] \quad [V_q] = [T] [W_q]$$

$$\text{avec } [T] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} ; \quad [T]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} ;$$

$$[Y_d] = \begin{bmatrix} y_d \\ y'_d \end{bmatrix} ; \quad [Y_q] = \begin{bmatrix} y_q \\ y'_q \end{bmatrix} ; \quad [W_d] = \begin{bmatrix} w_d \\ w'_d \end{bmatrix} ; \quad [W_q] = \begin{bmatrix} w_q \\ w'_q \end{bmatrix}$$

$[T]^{-1} = [T]_t$, la matrice est donc orthogonale.

TABLEAU 2.V

v_d	$R_S + L_d P$	$-L_q w'$	$L_d P$	$-L_q w'$	M_{FP}	M_{KDP}	$-M_{KQ} w'$	i_d
v_d	A		B		C			I_d
v'_d	$L_d P$	$-L_q w'$	$R_S + L_d P$	$-L_q w'$	M_{FP}	M_{KDP}	$-M_{KQ} w'$	i'_d
v_q	$L_d w'$	$R_S + L_q P$	$L_d w'$	$L_q P$	$M_{Fw'}$	$M_{KDW'}$	M_{KQP}	i_q
v_q	D		E		F			I_q
v'_q	$L_d w'$	$L_q P$	$L_d w'$	$R_S + L_q P$	$M_{Fw'}$	$M_{KDW'}$	M_{KQP}	i'_q
V_F	M_{FP}	0	M_{FP}	0	$R_F + L_{FP}$	M_{FDP}	0	i_F
V_R	G		H		I			I_F
0	M_{KDP}	0	M_{KDP}	0	M_{FDP}	$R_{KD} + L_{KDP}$	0	i_{KD}
0	0	M_{KQP}	0	M_{KQP}	0	0	$R_{KQ} + L_{KQP}$	i_{KQ}

II EQUATIONS TRANSFORMEES

$$\begin{aligned} [T] [W_d] &= [A] [T] [Y_d] + [B] [T] [Y_q] + [C] [I_R] \\ [T] [W_q] &= [D] [T] [Y_d] + [E] [T] [Y_q] + [F] [I_R] \\ [v_R] &= [G] [T] [Y_d] + [H] [T] [Y_q] + [I] [I_R] \end{aligned}$$

En multipliant la première et la deuxième ligne par $[T]^{-1}$ il vient :

$$\begin{aligned} [W_d] &= [T]^{-1} [A] [T] [Y_d] + [T]^{-1} [B] [T] [Y_q] + [T]^{-1} [C] [I_R] \\ [W_q] &= [T]^{-1} [D] [T] [Y_d] + [T]^{-1} [E] [T] [Y_q] + [T]^{-1} [F] [I_R] \\ [v_R] &= [G] [T] [Y_d] + [H] [T] [Y_q] + [I] [I_R] \end{aligned}$$

On obtient après calculs l'équation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} w_d \\ w'_d \\ w_q \\ w'_q \\ v_F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S + 2L_d p & 0 & -2L_q \omega' & 0 & \sqrt{2} M_{FP} & \sqrt{2} M_{KD} p & -\sqrt{2} M_{KQ} \omega' \\ 0 & R_S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2L_d \omega' & 0 & R_S + 2L_q p & 0 & \sqrt{2} M_F \omega' & \sqrt{2} M_{KD} \omega' & \sqrt{2} M_{KQ} p \\ 0 & 0 & 0 & R_S & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} M_{FP} & 0 & 0 & 0 & R_F + L_F p & M_{FD} p & 0 \\ \sqrt{2} M_{KD} p & 0 & 0 & 0 & M_{FD} p & R_{KD} + L_{KD} p & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} M_{KQ} p & 0 & 0 & 0 & R_{KQ} + L_{KQ} p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_d \\ y'_d \\ y_q \\ y'_q \\ i_F \\ i_{KD} \\ i_{KQ} \end{bmatrix}$$

On peut encore découpler la matrice en deux systèmes étant donné que les termes w'_d et w'_q ne dépendent que de y'_d et y'_q

Le premier système matriciel s'écrit donc

$$(2.5) \quad \begin{bmatrix} w_d \\ w_q \\ v_F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S + 2L_d p & -2L_q \omega' & \sqrt{2} M_{FP} & \sqrt{2} M_{KD} p & -\sqrt{2} M_{KQ} \omega' \\ 2L_d \omega' & R_S + 2L_q p & \sqrt{2} M_F \omega' & \sqrt{2} M_{KD} \omega' & \sqrt{2} M_{KQ} p \\ \sqrt{2} M_{FP} & 0 & R_F + L_F p & M_{FD} p & 0 \\ \sqrt{2} M_{KD} p & 0 & M_{FD} p & R_{KD} + L_{KD} p & 0 \\ 0 & \sqrt{2} M_{KQ} p & 0 & 0 & R_{KQ} + L_{KQ} p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_d \\ y_q \\ i_F \\ i_{KD} \\ i_{KQ} \end{bmatrix}$$

Le second système donne

$$(2.6) \begin{bmatrix} w'_d \\ w'_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S & 0 \\ 0 & R_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'_d \\ y'_q \end{bmatrix} = R_S \begin{bmatrix} y'_d \\ y'_q \end{bmatrix}$$

On remarque donc immédiatement que le premier système matriciel est semblable à celui que l'on utilise en triphasé classique. Tous les résultats formulés en triphasé classique seront valables il suffira de modifier les termes comme suit

simple étoile v_d, v_q, i_d, i_q	double étoile w_d, w_q, y_d, y_q
L_d	$2L_d$
L_q	$2L_q$
M_F	$\sqrt{2}M_F$
M_{KD}	$\sqrt{2}M_{KD}$
M_{KQ}	$\sqrt{2}M_{KQ}$
Les autres grandeurs restent inchangées	



TABLEAU 2.VI

III. MISE EN EVIDENCE DES FLUX ET EXPRESSION SIMPLIFIÉE DU COUPLE DE LA MACHINE SIMPLE ÉTOILE ÉQUIVALENTE

III.1. EXPRESSION DES DIFFERENTS FLUX

Si on désigne par

- ϕ_d , le flux total à travers la bobine équivalente au stator placée sur l'axe direct de la machine simple étoile équivalente
- ϕ_q , le flux total à travers la bobine équivalente au stator placée sur l'axe en quadrature de la machine simple étoile équivalente

$\phi_F, \phi_{KD}, \phi_{KQ}$, les flux totaux à travers les enroulements F, KD et KQ.

Ces flux ont pour expressions :

$$\phi_d = 2L_d y_d + \sqrt{2} M_F i_F + \sqrt{2} M_{KD} i_{KD} = \sqrt{2} \phi_d = \sqrt{2} \phi'_d$$

$$\phi_q = 2L_q y_q + \sqrt{2} M_{KQ} i_{KQ} = \sqrt{2} \phi_q = \sqrt{2} \phi'_q$$

$$\phi_F = L_F i_F + \sqrt{2} M_F y_d + M_{FD} i_{KD}$$

$$\phi_{KD} = L_{KD} i_{KD} + \sqrt{2} M_{KD} y_d + M_{FD} i_F$$

$$\phi_{KQ} = L_{KQ} i_{KQ} + \sqrt{2} M_{KQ} y_q$$

Les équations des tensions (2.5) peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} w_d &= R_S y_d + p \phi_d - \omega' \phi_q \\ w_q &= R_S y_q + p \phi_q + \omega' \phi_d \\ v_F &= R_F i_F + p \phi_F \\ 0 &= R_{KD} i_{KD} + p \phi_{KD} \\ 0 &= R_{KQ} i_{KQ} + p \phi_{KQ} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Dans les expressions de w_d et w_q on voit apparaître les f.e.m statiques ($p \phi_d, p \phi_q$) dues aux variations des flux et les f.e.m dynamiques ($-\omega' \phi_q, \omega' \phi_d$) dues à la rotation.

III.2. EXPRESSION SIMPLIFIEE DU COUPLE

On sait que le couple d'une machine double étoile peut se mettre sous la forme (2.4)

$$\Gamma_e = (i_q + i'_q) \phi_d - (i_d + i'_d) \phi_q$$

$$\Gamma_e = \left(\frac{i_q + i'_q}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{2} \phi_d - \left(\frac{i_d + i'_d}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{2} \phi_q$$

$$\Gamma_e = y_q \phi_d - y_d \phi_q \quad (2.8)$$

Ce qui est bien l'expression du couple d'une machine simple étoile équivalente à la machine double étoile.

IV. EQUATIONS OPERATIONNELLES DE LA MACHINE DOUBLE ETOILE

Les transformations utilisées ayant conduit à un système d'équations différentielles à coefficients constants (2.5) et un deuxième système complètement découplé du premier (2.6), dans ces équations p peut représenter l'opérateur symbolique de Heaviside, à condition que les valeurs initiales des variables soient nulles.

Des équations écrites sous forme opérationnelle on déduit les impédances opérationnelles suivant les deux axes direct et en quadrature. Ces impédances permettent de déterminer les constantes de temps et les réactances qui interviennent dans tous les régimes transitoires.

IV.1. IMPEDANCES OPERATIONNELLES SUIVANT LES DEUX AXES

- Le système (2.5) mis sous forme opérationnelle s'écrit :

$$(2.9) \begin{bmatrix} W_d \\ W_q \\ V_F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S + 2L_d p & -2L_q \omega' & \sqrt{2} M_{Fp} & \sqrt{2} M_{KDp} & -\sqrt{2} M_{KQ\omega'} \\ 2L_d \omega' & R_S + 2L_q p & \sqrt{2} M_{F\omega'} & \sqrt{2} M_{KD\omega'} & \sqrt{2} M_{KQp} \\ \sqrt{2} M_{Fp} & 0 & R_F + L_F p & M_{FDp} & 0 \\ \sqrt{2} M_{KDp} & 0 & M_{FDp} & R_{KD} + L_{KD} p & 0 \\ 0 & \sqrt{2} M_{KQp} & 0 & 0 & R_{KQ} + L_{KQ} p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_d \\ Y_q \\ I_F \\ I_{KD} \\ I_{KQ} \end{bmatrix}$$

et le système (2.6) :

$$\begin{bmatrix} W'_d \\ W'_q \end{bmatrix} = R_S \begin{bmatrix} Y'_d \\ Y'_q \end{bmatrix}$$

en désignant par

V_F la transformée de la tension réelle v_F

W_d, W_q et Y_d, Y_q les transformées des composantes relatives w_d, w_q et y_d, y_q des tensions et courants statoriques réels $v_A, v_B, v_C, v'_A, v'_B, v'_C$ et $i_A, i_B, i_C, i'_A, i'_B, i'_C$.

I_{KD}, I_{KQ}, I_F les transformées des courants dans les amortisseurs d'axe direct, en quadrature et du courant dans l'inducteur.

- On peut décomposer le système matriciel (2.9) en 15 sous matrices grâce au découpage indiqué en traits interrompus :

$$(2.9') \begin{bmatrix} [V_1] \\ [V_2] \\ [0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [C] \\ [D] & [F] & [0] \\ [H] & [0] & [J] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I_1] \\ [I_2] \\ [I_3] \end{bmatrix}$$

ou

$$[A] [I_1] + [B] [I_2] + [C] [I_3] = [V_1]$$

$$[D] [I_1] + [F] [I_2] = [V_2]$$

$$[H] [I_1] + [J] [I_3] = [0]$$

De la seconde relation on déduit :

$$[I_2] = -[F]^{-1}[D] [I_1] + [F]^{-1}[V_2]$$

De la troisième

$$[I_3] = -[J]^{-1}[H] [I_1]$$

En reportant dans la première il vient

$$[A] [I_1] - [B] [F]^{-1} [D] [I_1] + [B] [F]^{-1}[V_2] - [C] [J]^{-1}[H] [I_1] = [V_1]$$

ou, en classant les termes,

$$(2.10) \{ [A] - [B] [F]^{-1}[D] - [C] [J]^{-1}[H] \} [I_1] = [V_1] - [B] [F]^{-1}[V_2]$$

- Développons le calcul des termes liant $[I_1]$ à $[V_1]$ et $[V_2]$ dans l'équation précédente (2.10)

Pour cela, posons :

$$\begin{cases} Z_F = R_F + L_F p \\ Z_{KD} = R_{KD} + L_{KD} p \\ Z_{KQ} = R_{KQ} + L_{KQ} p \end{cases}$$

$$[F]^{-1} = \begin{bmatrix} Z_F & M_{FD} p \\ M_{FD} p & Z_{KD} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{Z_F Z_{KD} - M_{FD}^2 p^2} \begin{bmatrix} Z_{KD} & -M_{FD} p \\ -M_{FD} p & Z_F \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 [B][F]^{-1}[D] &= \frac{2}{Z_F Z_{KD} - M_{FD}^2 p^2} \begin{bmatrix} M_{FP} & M_{KD} p \\ M_{F\omega'} & M_{KD\omega'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{KD} & -M_{FD} p \\ -M_{FD} p & Z_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{FP} & 0 \\ M_{KD} p & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{2}{Z_F Z_{KD} - M_{FD}^2 p^2} \begin{bmatrix} Z_{KD} M_F^2 p^2 + Z_F M_{KD}^2 p^2 - 2M_F M_{FD} M_{KD} p^3 & 0 \\ Z_{KD} M_F^2 p \omega' + Z_F M_{KD}^2 p \omega' - 2M_F M_{FD} M_{KD} p^2 \omega' & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$[C][J]^{-1}[H] = \frac{2}{Z_{KQ}} \begin{bmatrix} -M_{KQ} \omega' \\ M_{KQ} p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & M_{KQ} p \end{bmatrix} = \frac{2}{Z_{KQ}} \begin{bmatrix} 0 & -M_{KQ}^2 p \omega' \\ 0 & M_{KQ}^2 p^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 [B][F]^{-1} &= \frac{\sqrt{2}}{Z_F Z_{KD} - M_{FD}^2 p^2} \begin{bmatrix} M_{FP} & M_{KD} p \\ M_{F\omega'} & M_{KD\omega'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{KD} & -M_{FD} p \\ -M_{FD} p & Z_F \end{bmatrix} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{Z_F Z_{KD} - M_{FD}^2 p^2} \begin{bmatrix} Z_{KD} M_F p - M_{FD} M_{KD} p^2, & -M_F M_{FD} p^2 + Z_F M_{KD} p \\ Z_{KD} M_F \omega' - M_{FD} M_{KD} p \omega' & -M_F M_{FD} p \omega' + Z_F M_{KD\omega'} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

En reportant dans (2.10), il vient :

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} R_S + 2p\{L_d - p \frac{(Z_{KD} M_F^2 + Z_F M_{KD}^2 - 2M_F M_{FD} M_{KD} p)}{Z_F Z_{KD} - M_{FD}^2 p^2}\} - 2\omega' \{L_q - \frac{M_{KQ}^2 p}{Z_{KQ}}\} \\ 2\omega' \{L_d - p \frac{(Z_{KD} M_F^2 + Z_F M_{KD}^2 - 2M_F M_{FD} M_{KD} p)}{Z_F Z_{KD} - M_{FD}^2 p^2}\} \quad R_S + 2p\{L_q - \frac{M_{KQ}^2 p}{Z_{KQ}}\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_d \\ Y_q \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} W_d - \sqrt{2} p \frac{Z_{KD} M_F - M_{FD} M_{KD} p}{Z_F Z_{KD} - M_{FD}^2 p^2} V_F \\ W_q - \sqrt{2} \omega' \frac{Z_{KD} M_F - M_{FD} M_{KD} p}{Z_F Z_{KD} - M_{FD}^2 p^2} V_F \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

IV.2. EQUATIONS ET IMPEDANCES OPERATIONNELLES

On peut alors écrire les équations opérationnelles régissant le fonctionnement

de la machine synchrone double étoile idéalisée sous la forme :

$$(2.11) \quad \begin{bmatrix} W_d - p \sqrt{2} G(p) V_F \\ W_q - \omega' \sqrt{2} G(p) V_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S + 2p L_d(p) & -2\omega' L_q(p) \\ 2\omega' L_d(p) & R_S + 2p L_q(p) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_d \\ Y_q \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} W'_d = R_S Y'_d \\ W'_q = R_S Y'_q \end{bmatrix}$$

en désignant par :

$L_{d2}(p) = 2 L_d(p)$ et $L_{q2}(p) = 2L_q(p)$ les inductances opérationnelles suivant l'axe direct et l'axe quadrature.

$G(p)$ la quantité opérationnelle.

$$G(p) = \frac{Z_{KD} M_F - p M_{FD} M_{KD}}{Z_F Z_{KD} - p^2 M_{FD}^2}$$

Les impédances opérationnelles sont, suivant les deux axes,

$$Z_d(p) = R_S + 2p L_d(p) ; Z_q(p) = R_S + 2p L_q(p)$$

En remplaçant les termes Z_F , Z_{KD} , Z_{KQ} , les inductances opérationnelles ont pour expressions :

$$L_{d2}(p) = 2 \left\{ L_d - \frac{p^2 (L_{KD} M_F^2 + L_F M_{KD}^2) + p (R_{KD} M_F^2 + R_F M_{KD}^2) - 2p^2 M_F M_{FD} M_{KD}}{p^2 (L_F L_{KD} - M_{FD}^2) + p (R_F L_{KD} + R_{KD} L_F) + R_F R_{KD}} \right\}$$

$$= 2 L_d(p)$$

$$L_{q2}(p) = 2 \left\{ L_q - \frac{p M_{KQ}^2}{p L_{KQ} + R_{KQ}} \right\} = 2 L_q(p)$$

IV.3. MISE EN EVIDENCE DES FLUX

Exprimer W_d et W_q en fonction des seuls courants Y_d et Y_q et de la tension v_F revient à exprimer les flux totaux à travers les enroulements d et q en fonction du seul courant qui traverse chacun d'eux et de la tension v_F :

Mises sous forme opérationnelle la première et la seconde des relations (2.7) s'écrivent :

$$\begin{cases} W_d = R_S Y_d + p \phi_d(p) - \omega' \phi_q(p) \\ W_q = R_S Y_q + p \phi_q(p) + \omega' \phi_d(p) \end{cases}$$

Si on les compare aux équations (2.11), soit

$$\begin{cases} W_d = R_S Y_d + p[2L_d(p) Y_d + \sqrt{2} G(p) v_F] - \omega' 2L_q(p) Y_q \\ W_q = R_S Y_q + p 2L_q(p) Y_q + \omega'[2L_d(p) Y_d + \sqrt{2} G(p) v_F] \end{cases}$$

On voit que

$$\begin{cases} \phi_d(p) = 2L_d(p) Y_d + \sqrt{2} G(p) v_F \\ \phi_q(p) = 2L_q(p) Y_q \end{cases}$$

Le couple électromagnétique Γ_e étant égal à $y_q \phi_d - y_d \phi_q$, sa transformée s'écrit :

$$\Gamma_e(p) = \phi_d(p) Y_q(p) - \phi_q(p) Y_d(p)$$

IV.4. CONSTANTES DE TEMPS

IV.4.1. axe direct.

L'inductance opérationnelle sur l'axe direct $L_{d2}(p)$ s'écrit en classant les termes,

$$L_{d2}(p) = 2 \frac{p^2 [L_F L_{KD} L_d - L_d M_{FD}^2 - L_{KD} M_F^2 - L_F M_{KD}^2 + 2M_F M_{KD} M_{FD}] + p [R_F (L_{KD} L_d - M_{KD}^2) + R_{KD} (L_F L_d - M_F^2)] + R_F R_{KD}}{p^2 (L_F L_{KD} - M_{FD}^2) + p (R_F L_{KD} + R_{KD} L_F) + R_F R_{KD}}$$

On peut encore mettre $L_{d2}(p)$ sous la forme :

$$L_{d2}(p) \neq 2 L_d \frac{(1+T'_d p)(1+T''_d p)}{(1+T'_{do} p)(1+T''_{do} p)} \neq 2L_d(p)$$

L'erreur sur le numérateur et le dénominateur de $L_{d2}(p)$ commise en écrivant $L_{d2}(p)$ sous la forme qui précède est faible et porte uniquement sur le terme en p .

Les différentes constantes de temps sont définies dans le tableau 1.I de la première partie de ce mémoire.

IV.4.2. axe en quadrature

L'impédance opérationnelle de l'induit $L_{q2}(p)$ suivant l'axe en quadrature a pour valeur :

$$L_{q2}(p) = 2 \cdot \frac{(R_{KQ} + L_{KQ} p) L_q - M_{KQ}^2 p}{R_{KQ} + L_{KQ} p}$$

ou

$$L_{q2}(p) = 2L_q \frac{1 + T_q'' p}{1 + T_{q0}'' p} = 2 L_q(p)$$

avec T_q'' et T_{q0}'' définies dans le tableau 1.I.

IV.4.3. valeur de G(p)

$G(p)$ est défini par

$$G(p) = \frac{R_{KD} M_F + p(M_F L_{KD} - M_{FD} M_{KD})}{R_F R_{KD} + p(R_F L_{KD} + R_{KD} L_F) + p^2(L_F L_{KD} - M_{FD}^2)}$$

On peut encore mettre $G(p)$ sous la forme

$$G(p) \neq \frac{M_F}{R_F} \frac{1 + T_{KD} p}{(1 + T_{d0}' p)(1 + T_{d0}'' p)}$$

T_{KD} étant défini dans le tableau 1.I.

IV.5. REACTANCES

- Si on néglige toutes les résistances, les expressions de $L_{d2}(p)$ et $L_{q2}(p)$ se simplifient et deviennent :

$$L_{d2}(p) = 2 \left\{ L_d - \frac{L_{KD} M_F^2 + L_F M_{KD}^2 - 2M_F M_{FD} M_{KD}}{L_F L_{KD} - M_{FD}^2} \right\}$$

$$L_{q2}(p) = 2 \left\{ L_q - \frac{M_{KQ}^2}{L_{KQ}} \right\}$$

les inductances opérationnelles sont indépendantes de p.

- On appelle

. réactance subtransitoire d'axe direct X''_{d2} la réactance.

$$X''_{d2} = 2X''_d = 2 \omega' \left(L_d - \frac{L_{KD} M_F^2 + L_F M_{KD}^2 - 2M_F M_{FD} M_{KD}}{L_F L_{KD} - M_{FD}^2} \right)$$

. réactance transitoire d'axe direct X'_{d2} la valeur de X''_{d2} quand on peut négliger l'influence de l'amortisseur KD :

$$X'_{d2} = 2X'_d = 2 \omega' \left(L_d - \frac{M_F^2}{L_F} \right)$$

. réactance synchrone d'axe direct X_{d2} la valeur de X''_{d2} quand on néglige l'influence des circuits F et KD :

$$X_{d2} = 2 \omega' L_d = 2X_d$$

. réactance subtransitoire transversale X''_{q2} la réactance

$$X''_{q2} = 2X''_q = 2 \omega' \left(L_q - \frac{M_{KQ}^2}{L_{KQ}} \right)$$

. réactance synchrone transversale X_{q2} la valeur de X''_{q2} quand on néglige l'influence de l'amortisseur KQ :

$$X_{q2} = 2 \omega' L_q$$

Toutes ces réactances vérifient de plus avec les constantes de temps les relations suivantes :

$$\frac{T'_{do}}{T'_d} = \frac{X_{d2}}{X'_{d2}} \quad , \quad \frac{T''_{do}}{T''_d} = \frac{X'_{d2}}{X''_{d2}} \quad , \quad \frac{T''_q}{T''_{q0}} = \frac{X''_{q2}}{X_{q2}}$$

$$d'où \quad \frac{X_{d2}}{X''_{d2}} = \frac{T'_{do}}{T'_d} \frac{T''_{do}}{T''_d}$$

IV.6. SCHEMAS EQUIVALENTS

On peut représenter par des schémas les impédances opérationnelles suivant les deux axes :

. L'impédance opérationnelle suivant l'axe direct $R_S + p L_{d2}(p)$, soit :

$$Z_d(p) = R_S + 2p \left\{ L_d - \frac{p^2(L_{KD} M_F^2 + L_F M_{KD}^2) + p(R_{KD} M_F^2 + R_F M_{KD}^2) - 2p^2 M_F M_{FD} M_{KD}}{p^2(L_F L_{KD} - M_{FD}^2) + p(R_F L_{KD} + R_{KD} L_F) + R_F R_{KD}} \right\}$$

peut s'écrire :

$$Z_d(p) = R_S + 2p \left(L_d - \frac{M_F M_{KD}}{M_{FD}} \right) + Z'_d(p)$$

avec

$$Z'_d(p) = 2p \frac{[R_F M_{KD}^2 + p(L_F M_{KD}^2 - M_F M_{FD} M_{KD})][R_{KD} M_F^2 + p(L_{KD} M_F^2 - M_F M_{FD} M_{KD})]}{M_F M_{FD} M_{KD} [R_F R_{KD} + p(R_F L_{KD} + R_{KD} L_F) + p^2(L_F L_{KD} - M_{FD}^2)]}$$

L'impédance $Z'_d(p)$ est de la forme

$$Z'_d(p) = \frac{Z_1 Z_2 Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3}$$

si on prend

$$Z_1 = 2p \frac{M_F M_{KD}}{M_{FD}}$$

$$Z_2 = 2R_F \frac{M_{KD}^2}{M_{FD}^2} + 2p \left(L_F \frac{M_{KD}^2}{M_{FD}^2} - \frac{M_F M_{KD}}{M_{FD}} \right)$$

$$Z_3 = 2R_{KD} \frac{M_F^2}{M_{FD}^2} + 2p \left(L_{KD} \frac{M_F^2}{M_{FD}^2} - \frac{M_F M_{KD}}{M_{FD}} \right)$$

On peut donc représenter l'impédance $Z_d(p)$ à l'aide du schéma équivalent de la figure (2.4), où en série avec $R_S + 2p \left(L_d - \frac{M_F M_{KD}}{M_{FD}} \right)$, on a placé les trois impédances Z_1 , Z_2 et Z_3 en parallèle.

Pour simplifier les écritures on a posé $\alpha = \frac{M_{KD}}{M_{FD}}$ et $\beta = \frac{M_F}{M_{FD}}$.

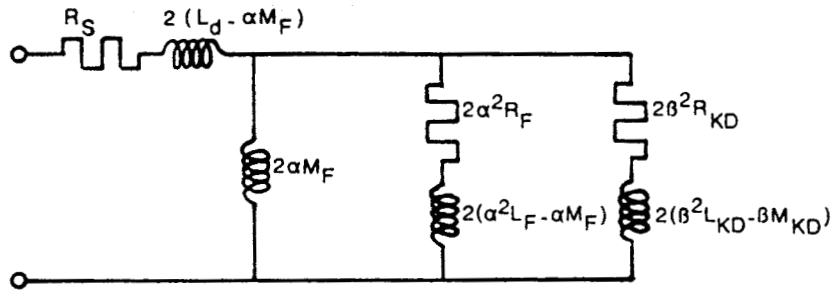


Figure 2.4

. L'impédance opérationnelle d'axe en quadrature $R_S + 2p L_q(p)$,

soit

$$Z_q(p) = R_S + 2p L_q - 2 \frac{p^2 M_{KQ}^2}{R_{KQ} + L_{KQ}p}$$

peut s'écrire

$$Z_q(p) = R_S + 2p(L_q - M_{KQ}) + 2 \frac{p M_{KQ} [R_{KQ} + p(L_{KQ} - M_{KQ})]}{p M_{KQ} + [R_{KQ} + p(L_{KQ} - M_{KQ})]}$$

Cette impédance est représentable par le schéma de la figure 2.5 où, en série avec $R_S + 2p(L_q - M_{KQ})$, on a placé en parallèle $2p M_{KQ}$ et $2\{R_{KQ} + p(L_{KQ} - M_{KQ})\}$

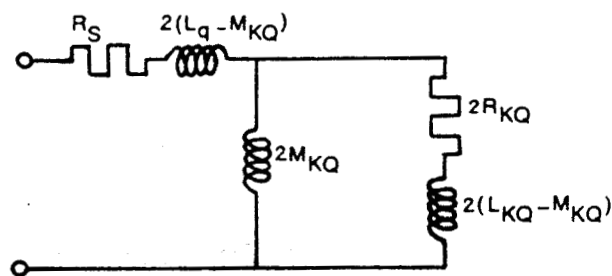


Figure 2.5

Les schémas 2.4 et 2.5 permettent de retrouver les différentes constantes de temps et les différentes réactances en double étoile.

CHAPITRE III

EXEMPLES

I. REGIME PERMANENT SINUSOÏDAL EQUILIBRÉI.1. LES DEUX ETOILES SONT ALIMENTÉES

. Si v est la valeur efficace des tensions simples $v_A, v_B, v_C, v'_A, v'_B, v'_C$, aux bornes d'un alternateur, I la valeur efficace des courants $i_A, i_B, i_C, i'_A, i'_B, i'_C$ débités par les six phases, φ leur déphasage par rapport aux tensions, les grandeurs statoriques réelles sont :

$$\begin{aligned} v_A &= v\sqrt{2} \sin \omega t & i_A &= I \sqrt{2} \sin (\omega t - \varphi) \\ v_B &= v\sqrt{2} \sin (\omega t - \frac{2\pi}{3}) & i_B &= I \sqrt{2} \sin (\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}) \\ v_C &= v\sqrt{2} \sin (\omega t - \frac{4\pi}{3}) & i_C &= I \sqrt{2} \sin (\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3}) \\ v'_A &= v\sqrt{2} \sin (\omega t - \frac{\pi}{6}) & i'_A &= I \sqrt{2} \sin (\omega t - \varphi - \frac{\pi}{6}) \\ v'_B &= v\sqrt{2} \sin (\omega t - \frac{5\pi}{6}) & i'_B &= I \sqrt{2} \sin (\omega t - \varphi - \frac{5\pi}{6}) \\ v'_C &= v\sqrt{2} \sin (\omega t - \frac{3\pi}{2}) & i'_C &= I \sqrt{2} \sin (\omega t - \varphi - \frac{3\pi}{2}) \end{aligned}$$

On applique la transformation de PARK, en désignant par δ l'angle que fait l'axe polaire avec l'axe de la phase A à l'instant $t = 0$ où la tension v_A croissante passe par zéro.

Donc

$$\theta = \omega t + \delta$$

Les composantes relatives des tensions de la machine simple étoile équivalente, calculées par

$$\begin{aligned} w_d &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} \left[v_A \cos(\omega t + \delta) + v_B \cos(\omega t + \delta - \frac{2\pi}{3}) + v_C \cos(\omega t + \delta - \frac{4\pi}{3}) \right] \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{2}{3}} \left[v'_A \cos(\omega t + \delta - \frac{\pi}{6}) + v'_B \cos(\omega t + \delta - \frac{5\pi}{6}) + v'_C \cos(\omega t + \delta - \frac{3\pi}{2}) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$w_q = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ -\sqrt{\frac{2}{3}} \left[v_A \sin(\omega t + \delta) + v_B \sin\left(\omega t + \delta - \frac{2\pi}{3}\right) + v_C \sin\left(\omega t + \delta - \frac{4\pi}{3}\right) \right] \right. \\ \left. -\sqrt{\frac{2}{3}} \left[v'_A \sin\left(\omega t + \delta - \frac{\pi}{6}\right) + v'_B \sin\left(\omega t + \delta - \frac{5\pi}{6}\right) + v'_C \sin\left(\omega t + \delta - \frac{3\pi}{2}\right) \right] \right\}$$

et celles des courants calculés de la même façon, ont pour valeurs :

$$(2.12) \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} w_d = -\sqrt{6} v \sin \delta \\ w_q = -\sqrt{6} v \cos \delta \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} y_d = -\sqrt{6} I \sin(\varphi + \delta) \\ y_q = -\sqrt{6} I \cos(\varphi + \delta) \end{array} \right. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} w'_d = 0 \\ w'_q = 0 \\ y'_d = 0 \\ y'_q = 0 \end{array} \right.$$

w_d, w_q, y_d, y_q sont des grandeurs continues, constantes pour un régime donné.

Puisque ω' égale ω , que $\frac{d y_d}{dt}$, $\frac{d y_q}{dt}$ et $\frac{d i_F}{dt}$ sont nuls, les équations simplifiées de PARK (2.5) dans lesquelles on remplace w_d par $-w_d$ et w_q par $-w_q$ (fonctionnement en alternateur) deviennent :

$$-w_d = R_S y_d - 2L_q \omega y_q + \sqrt{2} M_{KD} \frac{d i_{KD}}{dt} - M_{KQ} \omega' i_{KQ} \sqrt{2}$$

$$-w_q = 2L_d \omega y_d + R_S y_q + \sqrt{2} M_F \omega i_F + \sqrt{2} M_{KD} \omega i_{KD} + \sqrt{2} M_{KQ} \frac{d i_{KQ}}{dt}$$

$$v_F = R_F i_F + M_{FD} \frac{d i_{KD}}{dt}$$

$$0 = R_{KD} i_{KD} + L_{KD} \frac{d i_{KD}}{dt}$$

$$0 = R_{KQ} i_{KQ} + L_{KQ} \frac{d i_{KQ}}{dt}$$

Les deux dernières équations admettent comme solution

$$i_{KD} = i_{KQ} = 0 ;$$

en régime permanent synchrone aucun courant n'est induit dans les amortisseurs.

L'équation de l'inducteur se réduit à $v_F = R_F i_F$ et les équations du stator à :

$$-w_d = R_S y_d - 2 L_q \omega y_q ; \quad -w_q = R_S y_q + 2 L_d \omega y_d + \sqrt{2} M_F \omega i_F$$

ou en désignant par X_{d2} et X_{q2} les réactances synchrones à la vitesse ω

$$-w_d = R_S y_d - X_{q2} y_q$$

$$-w_q = R_S y_q + X_{d2} y_d + \sqrt{2} M_F \omega i_F$$

En remplaçant w_d , w_q , y_d et y_q par leurs expressions en fonction de v , I , δ et φ données par les relations (2.12), il vient :

$$\begin{cases} \sqrt{6} V \sin \delta = -R_S \sqrt{6} I \sin(\delta + \varphi) + X_{q2} \sqrt{6} I \cos(\delta + \varphi) \\ \sqrt{6} V \cos \delta = -R_S \sqrt{6} I \cos(\delta + \varphi) - X_{d2} \sqrt{6} I \sin(\delta + \varphi) + \sqrt{2} M_F \omega i_F \end{cases}$$

$$\text{avec } X_{d2} = 2L_d \omega \quad \text{et} \quad X_{q2} = 2L_q \omega$$

$$\text{ou encore } X_{d2} = (L_{S0} - 4M_{S0} + 3L_{SV}), \quad X_{q2} = (L_{S0} - 4M_{S0} - 3L_{SV})$$

Si le courant I tend vers zéro, l'angle δ tend également vers zéro et la tension v tend vers $\frac{\sqrt{2} M_F \omega i_F}{\sqrt{6}}$. Aussi désigne-t-on par E cette tension $\frac{M_F \omega i_F}{\sqrt{3}}$ car elle représente la f.e.m. induite, à vide, dans les phases statoriques par l'inducteur.

D'où les équations des tensions lors du fonctionnement en alternateur :

$$(2.13) \quad \begin{cases} V \cos \delta = E - R_S I \cos(\delta + \varphi) - X_{d2} I \sin(\delta + \varphi) \\ V \sin \delta = -R_S I \sin(\delta + \varphi) + X_{q2} I \cos(\delta + \varphi) \end{cases}$$

On peut ainsi en déduire le diagramme à deux réactances synchrones usuellement employé pour l'étude du fonctionnement en régime permanent équilibré de l'alternateur à pôles saillants.

Ce diagramme est valable ici lorsque les deux étoiles sont alimentées voir figure 2.6

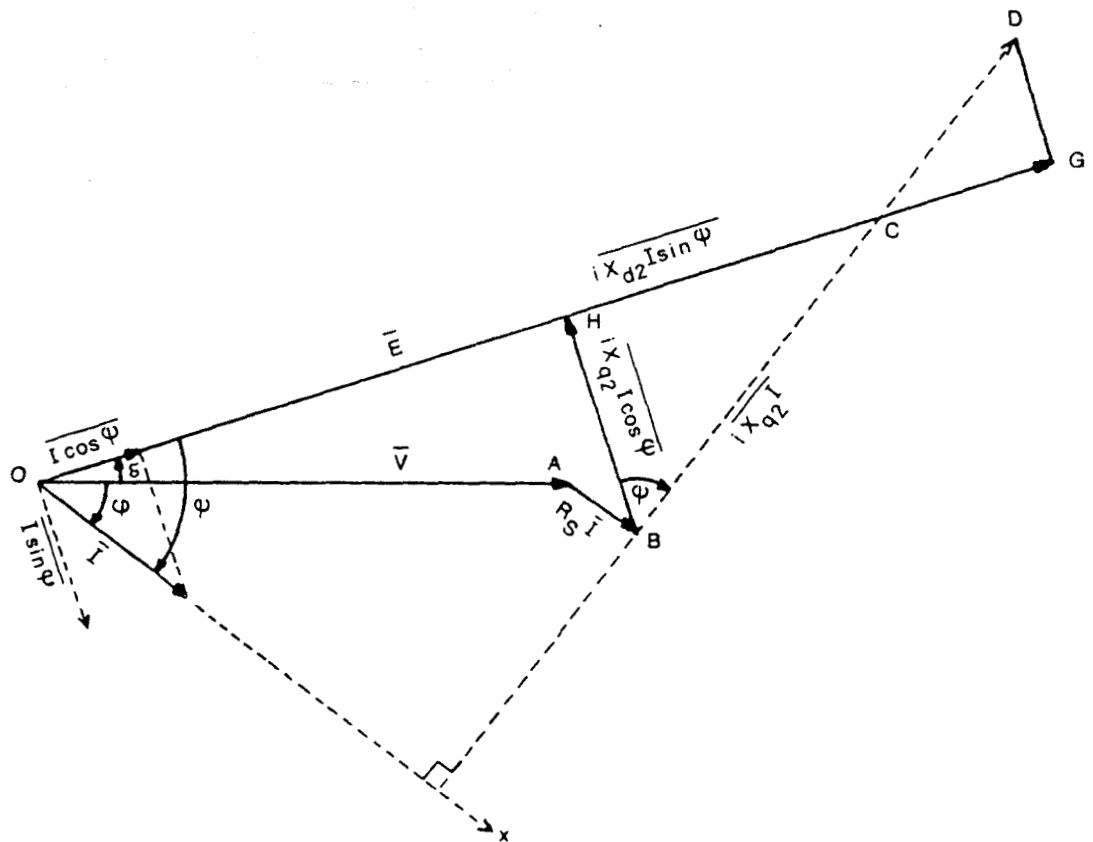


Figure 2.6

Pour tracer ce diagramme on pose $\psi = \varphi + \delta$
avec φ déphasage du courant \bar{I} en arrière de la tension \bar{V}
 δ déphasage de la f.e.m. \bar{E} en avant de la tension \bar{V}

Le diagramme reproduit la relation vectorielle suivante tirée des égalités (2.13)

$$\bar{E} = \bar{V} + R_S \bar{I} + i X_{q2} \bar{I} \cos \psi + i X_{d2} \bar{I} \sin \psi$$

X_{q2} désignant la réactance synchrone transversale, c'est-à-dire celle présentée par une phase de la machine réelle à la composante $\bar{I} \cos \psi$ du courant \bar{I} qui crée la réaction transversale d'induit,

X_{d2} désignant la réactance synchrone longitudinale, c'est-à-dire celle présentée par une phase de la machine réelle à la composante $\bar{I} \sin \psi$ de \bar{I} créant la réaction longitudinale d'induit.

Le tracé du diagramme figure 2.6 s'effectue de la manière suivante :

On porte \overline{OA} égal à \bar{V} et, décalé d'un angle φ la direction Ox du courant, puis \overline{AB} égal à $R_S \bar{I}$, puis \overline{BC} égal à $i X_{q2} \bar{I}$ qui donne par \overline{OC} la direction de \bar{E} .

Puisque \overline{BH} égal $i X_{q2} \bar{I} \cos \psi$, en portant $i X_{d2} \bar{I} \sin \psi$ en \overline{HG} on obtient \bar{E} en \overline{OG}

On peut aussi porter $i X_{d2} \bar{I}$ en \overline{BD} et en projetant D sur \overline{OC} obtenir l'extrémité G de \bar{E} .

I.2. UNE SEULE ETOILE Y₁ EST ALIMENTEE

Dans ce cas $i_A' = i_B' = i_C' = 0$ et les autres grandeurs statoriques réelles sont :

$$\begin{aligned}
 v_A &= v_1 \sqrt{2} \sin \omega t & i_A &= I_1 \sqrt{2} \sin (\omega t - \varphi) \\
 v_B &= v_1 \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) & i_B &= I_1 \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3} \right) \\
 v_C &= v_1 \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right) & i_C &= I_1 \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3} \right) \\
 \\
 v_A' &= v_2 \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{6} - \alpha \right) \\
 v_B' &= v_2 \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{5\pi}{6} - \alpha \right) \\
 v_C' &= v_2 \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{3\pi}{2} - \alpha \right)
 \end{aligned}$$

avec v_1 et v_2 valeur efficace des tensions simples apparaissant sur Y_1 et Y_2 et $\frac{\pi}{6} + \alpha$ déphasage de la tension simple v_A' sur la tension simple v_A

En appliquant la transformation de PARK, les composantes relatives des tensions de la machine simple étoile équivalente sont :

$$(2.14) \left\{ \begin{aligned}
 w_d &= -\sqrt{\frac{3}{2}} (v_1 \sin \delta_1 + v_2 \sin (\delta_1 + \alpha)) \\
 w_d' &= -\sqrt{\frac{3}{2}} (v_1 \sin \delta_1 - v_2 \sin (\delta_1 + \alpha)) \\
 w_q &= -\sqrt{\frac{3}{2}} (v_1 \cos \delta_1 + v_2 \cos (\delta_1 + \alpha)) \\
 w_q' &= -\sqrt{\frac{3}{2}} (v_1 \cos \delta_1 - v_2 \cos (\delta_1 + \alpha))
 \end{aligned} \right.$$

et celles des courants calculés de la même façon ont pour valeurs

$$(2.15) \left\{ \begin{aligned}
 y_d &= y_d' = -\sqrt{\frac{3}{2}} I_1 \sin (\varphi + \delta_1) \\
 y_q &= y_q' = -\sqrt{\frac{3}{2}} I_1 \cos (\varphi + \delta_1)
 \end{aligned} \right.$$

En régime permanent établi étant donné que les courants induits dans les amortisseurs sont nuls les équations (2.5) et (2.6) se réduisent pour un fonctionnement en alternateur à :

$$\begin{aligned}
- w_d &= R_S y_d - 2 L_q \omega y_q \\
- w_q &= R_S y_q + 2 L_d \omega y_d + \sqrt{2} M_F \omega i_F \\
- w'_d &= R_S y'_d \\
- w'_q &= R_S y'_q \\
v_F &= R_F i_F
\end{aligned}$$

En remplaçant w_d , w_q , y_d et y_q par leurs expressions en fonction de v , I , δ et données par les relations (2.14) et (2.15), il vient :

$$(2.16) \quad \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{2}} (v_1 \sin \delta_1 + v_2 \sin(\delta_1 + \alpha)) = -R_S \sqrt{\frac{3}{2}} I_1 \sin(\varphi + \delta_1) + 2 L_q \omega \sqrt{\frac{3}{2}} I_1 \cos(\varphi + \delta_1) \\ \sqrt{\frac{3}{2}} (v_1 \cos \delta_1 + v_2 \cos(\delta_1 + \alpha)) = -R_S \sqrt{\frac{3}{2}} I_1 \cos(\varphi + \delta_1) - 2 L_d \omega \sqrt{\frac{3}{2}} I_1 \sin(\varphi + \delta_1) + \sqrt{2} M_F \omega i_F \\ \sqrt{\frac{3}{2}} (v_1 \sin \delta_1 - v_2 \sin(\delta_1 + \alpha)) = -R_S \sqrt{\frac{3}{2}} I_1 \sin(\varphi + \delta_1) \\ \sqrt{\frac{3}{2}} (v_1 \cos \delta_1 - v_2 \cos(\delta_1 + \alpha)) = -R_S \sqrt{\frac{3}{2}} I_1 \cos(\varphi + \delta_1) \end{cases}$$

En faisant la somme et la différence de la première et de la troisième des relations (2.16) et en divisant par $\sqrt{2}$ on obtient les deux relations suivantes. (utilisation du changement de variables $[V_d] = [T] [W_d]$)

$$(2.17) \quad \begin{cases} \sqrt{3} v_1 \sin \delta_1 = -\sqrt{3} R_S I_1 \sin(\varphi + \delta_1) + \sqrt{3} L_q \omega I_1 \cos(\varphi + \delta_1) = -\left(\frac{w_d + w'_d}{\sqrt{2}}\right) \\ \sqrt{3} v_2 \sin(\delta_1 + \alpha) = \sqrt{3} L_q \omega I_1 \cos(\varphi + \delta_1) = -\left(\frac{w_d - w'_d}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

En faisant la somme et la différence de la seconde et de la quatrième des relations (2.16) et en divisant par $\sqrt{2}$ on obtient deux autres relations. (utilisation du changement de variables $[V_q] = [T] [W_q]$)

$$(2.18) \quad \begin{cases} \sqrt{3} v_1 \cos \delta_1 = -\sqrt{3} R_S I_1 \cos(\varphi + \delta_1) - \sqrt{3} L_d \omega I_1 \sin(\varphi + \delta_1) + \sqrt{3} E = -\left(\frac{w_q + w'_q}{\sqrt{2}}\right) \\ \sqrt{3} v_2 \cos(\delta_1 + \alpha) = -\sqrt{3} L_d \omega I_1 \sin(\varphi + \delta_1) + \sqrt{3} E = -\left(\frac{w_q - w'_q}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

$$\text{avec } E = \frac{M_F \omega i_F}{\sqrt{3}} \text{ la f.e.m. induite à vide.}$$

Des relations (2.17) et (2.18) on peut tirer les équations des tensions apparaissant sur la première étoile Y_1 débitant par phase un courant efficace I_1 en divisant par $\sqrt{3}$ dans les deux membres.

$$(2.19) \begin{cases} v_1 \sin \delta_1 = -R_S I_1 \sin (\varphi + \delta_1) + L_q \omega I_1 \cos (\varphi + \delta_1) \\ v_1 \cos \delta_1 = -R_S I_1 \cos (\varphi + \delta_1) - L_d \omega I_1 \sin (\varphi + \delta_1) + E \end{cases}$$

ainsi que les équations des tensions apparaissant sur la deuxième étoile Y_2 dont les bornes sont en circuit ouvert

$$(2.20) \begin{cases} v_2 \sin (\delta_1 + \alpha) = L_q \omega I_1 \cos (\varphi + \delta_1) \\ v_2 \cos (\delta_1 + \alpha) = -L_d \omega I_1 \sin (\varphi + \delta_1) + E \end{cases}$$

On posera $L_d \omega = X_d = X_{d1}$ la réactance synchrone suivant l'axe direct lorsque seule une étoile est alimentée

et $L_q \omega = X_q = X_{q1}$ la réactance synchrone suivant l'axe en quadrature lorsque seule une étoile est alimentée.

On peut ainsi en déduire le diagramme à deux réactances synchrones à employer pour l'étude du fonctionnement en régime permanent équilibré de l'alternateur à pôles saillants avec une seule des deux étoiles alimentées. figure 2.7

Pour tracer le diagramme on pose $\psi_1 = \varphi + \delta_1$

avec : δ_1 l'angle que fait l'axe polaire avec l'axe de la phase A à l'instant $t = 0$ où la tension v_A croissante passe par zéro.

φ le déphasage du courant \bar{I}_1 en arrière de la tension \bar{v}_1

Le diagramme reproduit les tensions vectorielles suivantes tirées des égalités (2.19) et (2.20)

$$\text{sur } Y_1 \text{ on a } \bar{E} = \bar{v}_1 + R_S \bar{I}_1 + i X_{q1} \bar{I}_1 \cos \psi_1 + i X_{d1} \bar{I}_1 \sin \psi_1$$

avec $X_{q1} = \frac{X_{q2}}{2}$ et $X_{d1} = \frac{X_{d2}}{2}$, les réactances synchrones transversale et longitudinale sont deux fois plus petites lorsque seule une étoile est alimentée. La f.e.m à vide restant la même par phase.

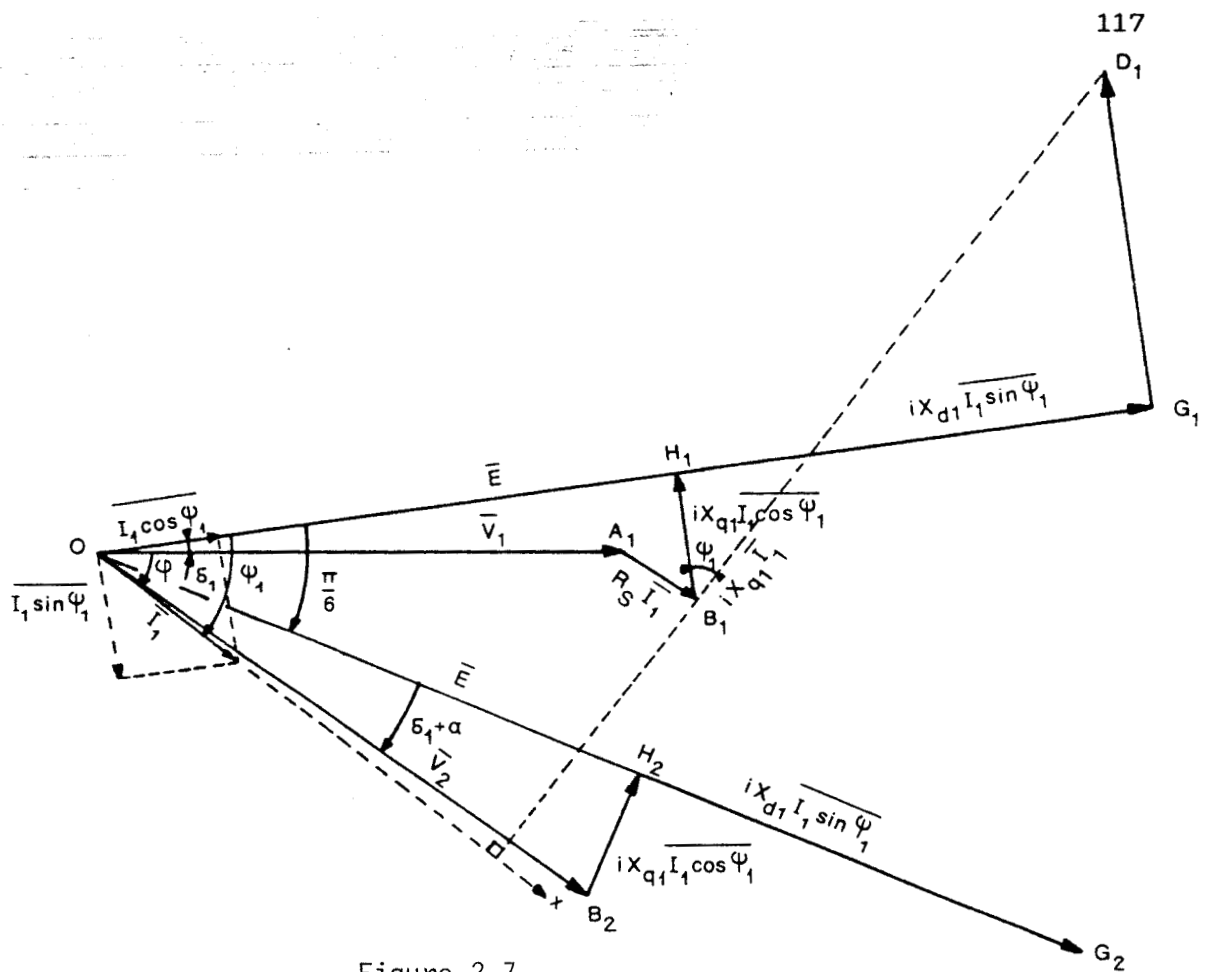


Figure 2.7

sur Y_2 on a $\bar{E} = \bar{v}_2 + iX_{q1} \overline{I_1 \cos \psi_1} + iX_{d1} \overline{I_1 \sin \psi_1}$

On retrouve donc une relation semblable sur la deuxième étoile à part qu'il n'y a pas ici chute de tension dans la résistance statorique. En régime normal avec R_S faible on aurait donc $v_1 \neq v_2$ et $\alpha \neq 0$ pour un fonctionnement avec une seule étoile alimentée.

Le diagramme vectoriel utilisé pour la première étoile Y_1 est semblable à celui déterminé avec les deux étoiles alimentées :

La f.e.m à vide E est la même avec un même courant i_F

Le courant I_1 en valeur efficace est différent ainsi que la tension v_1 en valeur efficace étant donné que les réactances synchrones sont deux fois plus faibles avec une seule étoile alimentée.

On voit apparaître dans ce diagramme l'influence de la première étoile Y_1 sur la seconde Y_2 puisque la réaction d'induit amenée par les courants de Y_1 diminue fortement la tension à vide de la seconde étoile. Ceci à cause du couplage important existant entre les deux étoiles.

II. COURTS-CIRCUITS TRIPASES D'UN ALTERNATEUR DOUBLE ETOILE

Un alternateur bipolaire à vide, tournant à la vitesse ω , ayant son inducteur alimenté par une tension constante v_F origine d'une f.e.m E égale à $\frac{M_F \omega v_F}{R_F \sqrt{3}}$, a ses six bornes statoriques brusquement réunies à l'instant $t = 0$

Nous déterminerons les courants à partir de la relation matricielle

$$[W(p)] = [Z(p)] [Y(p)]$$

ce qui suppose successivement la détermination du vecteur tension, l'inversion de la matrice impédance, l'établissement des expressions des composantes des courants d'induit puis de ces courants eux-mêmes.

II.1. DETERMINATION DU VECTEUR TENSION

La mise en court-circuit étant la brusque annulation des tensions aux bornes de l'induit, on considère ce régime transitoire comme la superposition

- . du régime permanent antérieur
- . et du régime transitoire né de l'application à l'induit de tensions d'une valeur égale et opposée à leur valeur antérieure.

- Avant le court-circuit, le seul courant non nul est i_F égal à $\frac{v_F}{R_F}$ et constant. Les relations (2.5) montrent que dans ces conditions les seules tensions non nulles sont

$$w_q = \sqrt{2} M_F \omega i_F = \sqrt{6} E \text{ et } v_F$$

- La mise en court-circuit correspond à l'application, pour $t = 0$, de

$$w_d = w'_d = w'_q = 0 ; w_q = -\sqrt{6} E , v_F = + v_F$$

On étudie donc ce court-circuit au stator en portant dans les équations de la machine

$$\left\{ \begin{array}{l} w_d = w'_d = w'_q = 0 \\ w_q = -\sqrt{6} E \\ v_F = 0 \end{array} \right.$$

II.2. INVERSION DE LA MATRICE IMPEDANCE

. L'équation matricielle reliant les transformées des composantes des courants et des tensions statoriques (relation (2.11)) pour un alternateur double étoile tournant à la vitesse angulaire ω s'écrit

$$\begin{bmatrix} W_d - p \sqrt{2} G(p) v_F \\ W_q - \omega \sqrt{2} G(p) v_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S + 2p L_d(p) & - 2 \omega L_q(p) \\ 2 \omega L_d(p) & R_S + 2p L_q(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_d \\ Y_q \end{bmatrix}$$

$$\text{soit } [W(p)] = [Z(p)] [Y(p)]$$

Pour passer des tensions aux courants par $[Y(p)] = [Z(p)]^{-1} [W(p)]$ il faut inverser $[Z(p)]$

$$[Z(p)]^{-1} = \frac{1}{\Delta(p)} \begin{bmatrix} R_S + 2p L_q(p) & 2 \omega L_q(p) \\ - 2 \omega L_d(p) & R_S + 2p L_d(p) \end{bmatrix}$$

Le déterminant, égal à

$$\Delta(p) = [R_S + 2p L_d(p)] [R_S + 2p L_q(p)] + 4 \omega^2 L_d(p) L_q(p)$$

peut s'écrire :

$$\Delta(p) = 4 L_d(p) L_q(p) \left[p^2 + \omega^2 + \frac{1}{2} p \left\{ \frac{R_S}{L_d(p)} + \frac{R_S}{L_q(p)} \right\} + \frac{R_S^2}{4 L_d(p) L_q(p)} \right]$$

- Si dans les expressions des inductances opérationnelles on néglige les résistances on fait apparaître les réactances subtransitoires à la vitesse ω . C'est donc ainsi que sont définies ces réactances soit :

$$L_{q2}(p) = 2 L_q(p) = \frac{2X''_q}{\omega} \quad \text{et} \quad 2L_{d2}(p) = \frac{2X''_d}{\omega} = L_{d2}(p)$$

On peut ainsi remplacer dans l'expression du déterminant $\frac{R_S}{2 L_d(p)}$ et $\frac{R_S}{2 L_q(p)}$ par leurs valeurs approchées $\frac{\omega R_S}{2X''_d}$ et $\frac{\omega R_S}{2X''_q}$

- Si de plus on néglige $\frac{R_S^2}{4 L_d(p) L_q(p)}$ devant ω^2 , le déterminant devient :

$$\Delta(p) = 4 L_d(p) L_q(p) \left[p^2 + \omega^2 + p \cdot \frac{R_S \omega}{2} \left\{ \frac{1}{X_d''} + \frac{1}{X_q''} \right\} \right]$$

On peut également remplacer $L_d(p)$ et $L_q(p)$ par leurs valeurs approchées dans $[Z(p)]^{-1}$ soit :

$$[Z(p)]^{-1} = \frac{1}{\Delta(p)} \begin{bmatrix} \left(\frac{\omega R_S}{X_q''} + 2p \right) L_q(p) & 2 \omega L_q(p) \\ - 2 \omega L_d(p) & \left(\frac{\omega R_S}{X_d''} + 2p \right) L_d(p) \end{bmatrix}$$

. Il ne reste plus qu'à mettre $\Delta(p)$ sous la forme d'un produit de deux polynomes du premier degré en p

en posant $\frac{1}{X_H''} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X_d''} + \frac{1}{X_q''} \right)$ on a :

$$\Delta(p) = 4 L_d(p) L_q(p) \left[p^2 + \frac{\omega R_S}{X_H''} p + \omega^2 \right]$$

On peut encore écrire

$$\Delta(p) = 4 L_d(p) L_q(p) [(p - p_1)(p - p_2)]$$

$$\text{avec } \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix} = - \frac{\omega R_S}{2 X_H''} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega R_S}{2 X_H''} \right)^2 - \omega^2}$$

étant donné que $\frac{R_S}{X_H''}$ est faible devant ω

$$\begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix} = - \frac{\omega R_S}{2 X_H''} \pm i \omega$$

Finalement on adoptera donc pour expression simplifiée de $[Z]^{-1}$

$$[Z]^{-1} = \frac{1}{\Delta(p)} \begin{bmatrix} \left(2p + \frac{\omega R_S}{X_q''} \right) L_q(p) & 2 \omega L_q(p) \\ - 2 \omega L_d(p) & \left(2p + \frac{\omega R_S}{X_d''} \right) L_d(p) \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } \Delta(p) = 4 L_d(p) L_q(p) \left(p + \frac{\omega R_S}{2 X_H''} + i \omega \right) \left(p + \frac{\omega R_S}{2 X_H''} - i \omega \right)$$

Cette expression est valable pour le passage de $[W(p)]$ à $[Y(p)]$ lors de tous les régimes transitoires à vitesse constante et suffisamment élevée pour que les approximations faites soient simplifiées.

L'inversion du second système $[W'(p)] = R_S [Y'(p)]$ est évidente soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y'_d(p) = \frac{1}{R_S} W'_d(p) \\ Y'_q(p) = \frac{1}{R_S} W'_q(p) \end{array} \right.$$

II.3. DETERMINATION DES COURANTS DE L'INDUIT

Dans le cas considéré, $w_d = w'_d = w'_q = 0$, $w_q = -\sqrt{6} E$, $V_F = 0$,

les transformées des composantes des courants statoriques sont donc données par

$$\begin{bmatrix} Y_d \\ Y_q \end{bmatrix} = [Z]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{6} \frac{E}{p} \end{bmatrix}$$

ou en développant

$$Y_d = -\frac{E \sqrt{6}}{p} \frac{\omega}{2 L_d(p) \left(p + \frac{\omega R_S}{2X''_H} + i \omega \right) \left(p + \frac{\omega R_S}{2X''_H} - i \omega \right)}$$

$$Y_q = -\frac{E \sqrt{6}}{p} \frac{p + \frac{\omega R_S}{2X''_d}}{2 L_q(p) \left(p + \frac{\omega R_S}{2X''_H} + i \omega \right) \left(p + \frac{\omega R_S}{2X''_H} - i \omega \right)}$$

En décomposant les termes $L_d(p)$ et $L_q(p)$ en fonction de L_d

L_q et des constantes de temps (voir chapitre II paragraphe IV 4) on obtient les relations suivantes :

$$(2.21) \quad Y_d(p) = -\frac{E \sqrt{6} \omega}{2 L_d p} \frac{(1 + T'_{do} p) (1 + T''_{do} p)}{(1 + T'_d p) (1 + T''_d p) \left(p + \frac{\omega R_S}{2X''_H} + i \omega \right) \left(p + \frac{\omega R_S}{2X''_H} - i \omega \right)}$$

$$(2.22) \quad Y_q(p) = -\frac{E \sqrt{6}}{2 L_q p} \frac{(1 + T''_{qo} p) \left(p + \frac{\omega R_S}{2X''_d} \right)}{(1 + T''_q p) \left(p + \frac{\omega R_S}{2X''_H} + i \omega \right) \left(p + \frac{\omega R_S}{2X''_H} - i \omega \right)}$$

En décomposant $Y_d(p)$ et $Y_q(p)$ en fractions simples on peut alors déterminer les expressions approximatives de $Y_d(p)$ et $Y_q(p)$ permettant de passer à l'original ;

$$Y_d(p) = -\frac{E\sqrt{6}}{2X_d''} \left[\frac{X_d''}{pX_d} - \left(\frac{X_d''}{X_d} - \frac{X_d''}{X_d'} \right) \frac{1}{p + 1/T_d'} + \left(1 - \frac{X_d''}{X_d'} \right) \frac{1}{p + 1/T_d''} - \frac{1}{2} \frac{1}{p + i\omega + \frac{1}{2T_a}} - \frac{1}{2} \frac{1}{p - i\omega + \frac{1}{2T_a}} \right]$$

$$Y_q(p) = -\frac{E\sqrt{6}\omega}{2X_q''} \left[-\frac{1}{2} \frac{i\omega}{(p+i\omega + \frac{1}{2T_a})} - \frac{1}{2} \frac{i\omega}{(p-i\omega + \frac{1}{2T_a})} \right]$$

avec
$$T_a = \frac{X''}{\omega R_S}$$

D'où,

$$y_d(t) = -\frac{E\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{X_d} + \left(\frac{1}{X_d'} - \frac{1}{X_d} \right) e^{-\frac{t}{T_d'}} + \left(\frac{1}{X_d''} - \frac{1}{X_d'} \right) e^{-\frac{t}{T_d''}} - \frac{1}{X_d''} \cos \omega t e^{-\frac{t}{2T_a}} \right]$$

$$y_q(t) = -\frac{E\sqrt{3}}{\sqrt{2}X_q''} \sin \omega t e^{-\frac{t}{2T_a}}$$

Pour $y'_d(t)$ et $y'_q(t)$ on a zéro puisque $W'_d(p) = W'_q(p) = 0$

et puisque $[I_d] = [T] [Y_d]$ et $[I_q] = [T] [Y_q]$

$$\text{donc } i_d = \frac{y_d + y'_d}{\sqrt{2}} = \frac{y_d}{\sqrt{2}}, \quad i'_d = \frac{y_d - y'_d}{\sqrt{2}} = \frac{y_d}{\sqrt{2}}$$

$$\text{et } i_q = \frac{y_q + y'_q}{\sqrt{2}} = \frac{y_q}{\sqrt{2}}, \quad i'_q = \frac{y_q - y'_q}{\sqrt{2}} = \frac{y_q}{\sqrt{2}}$$

en remplaçant on obtient

$$i_d = i'_d = \frac{-E\sqrt{3}}{2} \left[\frac{1}{X_d} + \left(\frac{1}{X_d'} - \frac{1}{X_d} \right) e^{-\frac{t}{T_d'}} + \left(\frac{1}{X_d''} - \frac{1}{X_d'} \right) e^{-\frac{t}{T_d''}} - \frac{1}{X_d''} \cos \omega t e^{-\frac{t}{2T_a}} \right]$$

$$i_q = i'_q = -\frac{E\sqrt{3}}{2X_q''} \sin \omega t e^{-\frac{t}{2T_a}}$$

Pour déterminer l'expression des courants réels $i_A(t)$, $i_B(t)$, $i_C(t)$ de la première étoile il faut utiliser la transformation modifiée de PARK

$$i_A = \sqrt{\frac{2}{3}} (i_d \cos \theta - i_q \sin \theta)$$

avec $\theta = \omega t + \psi$, ψ écart angulaire entre l'axe polaire et l'axe de la phase A à l'instant du court-circuit.

et en posant $E_m = E \sqrt{2}$ le courant dans la phase A a donc pour expression :

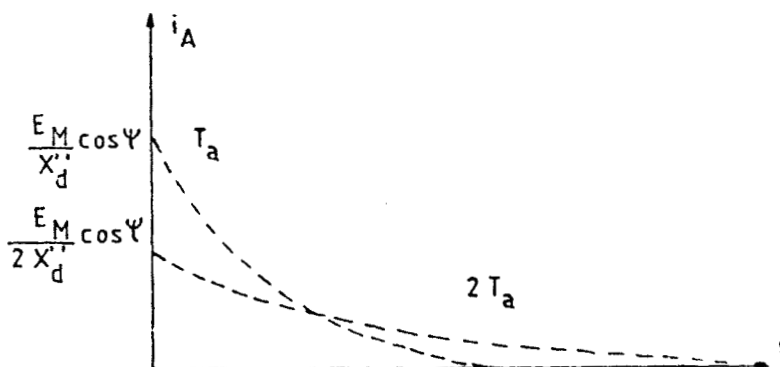
$$i_A = -\frac{E_m}{2} \left[\frac{1}{X_d} + \left(\frac{1}{X'_d} - \frac{1}{X_d} \right) e^{-t/T'_d} + \left(\frac{1}{X''_d} - \frac{1}{X'_d} \right) e^{-t/T''_d} \right] \cos(\omega t + \psi) \\ + \frac{E_m}{2} e^{-t/2T_a} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{X''_d} - \frac{1}{X'_d} \right) \cos \psi + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X''_d} - \frac{1}{X'_d} \right) \cos(2\omega t + \psi) \right]$$

Les courants $i_B(t)$ et $i_C(t)$ se déduisent de $i_A(t)$ en remplaçant ψ par $\psi - \frac{2\pi}{3}$ et $\psi - \frac{4\pi}{3}$

De même pour $i'_A(t)$, $i'_B(t)$ et $i'_C(t)$ on emploie la même méthode en remplaçant i_d et i_q par i'_d et i'_q et θ par θ'

Pour un court-circuit symétrique brusque sur les trois phases statoriques A, B, C de la machine double étoiles avec A', B', C' non connectées on aurait retrouvé la même expression pour $i_A(t)$ sauf que $\frac{E_m}{2}$ serait remplacé par E_m et $2T_a$ par T_a .

On peut donc en conclure que l'intensité du courant de court-circuit par phase est deux fois plus faible pour un court-circuit entre six phases qu'avec un court-circuit avec trois phases uniquement. Par contre, la constante de temps en court-circuit de l'induit est alors deux fois plus forte avec une amplitude deux fois plus faible au départ.



II.4. DETERMINATION DU COURANT DANS L'INDUCTEUR.

Le courant d'excitation i_F est la somme de i_{F0} , égal à $\frac{V_F}{R_F}$, et du courant i'_F dû à l'application à la machine, pour $t = 0$, du système des tensions $w_d = w'_d = w'_q = 0$, $w_q = -E\sqrt{6}$, $v_F = 0$

Pour calculer i'_F il faut repartir de la deuxième des équations matricielles du système (2.9') décomposé en sous matrices grâce au découpage en traits interrompus du système(2.9)

$$[D] [I_1] + [F] [I_2] = [V_2]$$

$$\text{avec } [D] = \begin{bmatrix} \sqrt{2} M_{Fp} & 0 \\ \sqrt{2} M_{KDp} & 0 \end{bmatrix}; [F] = \begin{bmatrix} R_F + L_{Fp} & M_{FDp} \\ M_{FDp} & R_{KD} + L_{KDp} \end{bmatrix}$$

$$[I_1] = \begin{bmatrix} Y_d \\ Y_q \end{bmatrix}; [I_2] = \begin{bmatrix} I'_F \\ I_{KD} \end{bmatrix}; [V_2] = \begin{bmatrix} V_F \\ 0 \end{bmatrix}$$

puisque ici $V_F = 0$, $[I_2] = -[F]^{-1} [D] [I_1]$

$$[F]^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} R_{KD} + L_{KDp} & -M_{FDp} \\ -M_{FDp} & R_F + L_{Fp} \end{bmatrix}$$

avec $\Delta = (R_F + L_{Fp})(R_{KD} + L_{KDp}) - M_{FD}^2 p^2$

$$[F]^{-1} [D] = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \sqrt{2} M_{Fp}(R_{KD} + L_{KDp}) & -\sqrt{2} M_{FD} M_{KD} p^2 & 0 \\ -\sqrt{2} M_F M_{FD} p^2 + \sqrt{2} M_{KD} p (R_F + L_{Fp}) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d'où $I'_F = -\frac{\sqrt{2}}{\Delta} [(L_{KD} M_F - M_{FD} M_{KD}) p^2 + M_F R_{KD} p] Y_d$

qu'on peut mettre sous la forme :

$$I'_F = - \frac{\sqrt{2} M_F R_{KD}}{R_F R_{KD}} \cdot \frac{p \left[1 + \frac{L_{KD}}{R_{KD}} \left(1 - \frac{M_{FD} M_{KD}}{M_F L_{KD}} \right) p \right]}{1 + p \left(\frac{L_F}{R_F} + \frac{L_{KD}}{R_{KD}} \right) + p^2 \frac{L_F L_{KD}}{R_F R_{KD}} \left(1 - \frac{M_{FD}^2}{L_F L_{KD}} \right)} Y_d$$

ou, en faisant apparaître les constantes de temps T'_{do} , T''_{do} et T_{KD} ,

$$I'_F = - \frac{\sqrt{2} M_F}{R_F} \cdot \frac{p(1 + T_{KD}p)}{(1 + T'_{do}p)(1 + T''_{do}p)} Y_d$$

- On remplace Y_d par son expression (2.21) en remarquant que $E\sqrt{3} = M_F \omega i_{FO}$

Il vient :

$$I'_F = \frac{M_F^2 i_{FO}}{R_F L_d} \omega^2 \frac{(1 + T_{KD}p)}{(1+T'_d p)(1+T''_d p) \left(p + \frac{\omega R_S}{2X''_H} + i\omega \right) \left(p + \frac{\omega R_S}{2X''_H} - i\omega \right)}$$

comme $\frac{M_F^2}{R_F L_d}$ peut s'écrire : $\frac{X_d - X'_d}{X'_d} T'_d$

De sorte que I'_F devient :

$$I'_F = i_{FO} \frac{X_d - X'_d}{X'_d} T'_d \frac{T_{KD}}{T'_d T''_d} \omega^2 \frac{p + \frac{1}{T_{KD}}}{\left(p + \frac{1}{T'_d} \right) \left(p + \frac{1}{T''_d} \right) \left(p + \frac{1}{2T_a} + i\omega \right) \left(p + \frac{1}{2T_a} - i\omega \right)}$$

En décomposant en éléments simples on obtient :

$$I'_F \neq i_{FO} \frac{X_d - X'_d}{X'_d} \left[\frac{1}{p + \frac{1}{T'_d}} - \frac{\left(1 - \frac{T_{KD}}{T''_d} \right)}{p + \frac{1}{T''_d}} - \frac{\frac{T_{KD}}{2T''_d}}{p + \frac{1}{2T_a} + i\omega} - \frac{\frac{T_{KD}}{2T''_d}}{p + \frac{1}{2T_a} - i\omega} \right]$$

D'où l'original de I'_F et en ajoutant i_{FO} l'expression du courant dans l'enroulement inducteur

$$i_F = i_{FO} \left\{ 1 + \frac{X_d - X'_d}{X'_d} \left[e^{-t/T'_d} - \left(1 - \frac{T_{KD}}{T''_d} \right) e^{-t/T''_d} - \frac{T_{KD}}{T''_d} e^{-t/2T_a} \cos \omega t \right] \right\}$$

On remarque que pour un court-circuit triphasé brusque sur une ou deux étoiles simultanément, l'expression du courant $i_F(t)$ est la même sauf pour la constante de temps en court-circuit de l'induit qui est deux fois plus forte lorsque le court-circuit s'effectue simultanément sur les deux étoiles.

ANNEXE 1

CALCUL DES ADMITTANCES
DE LA MACHINE SYNCHROME EN FONCTION
DES REACTANCES, DES CONSTANTES ET DES
CONSTANTES DE TEMPS

Il est pour cela nécessaire de déterminer les relations entre les constantes de temps et les réactances définies au tableau 1.I avec les termes fonctions des caractéristiques électriques de la machine synchrone.

Si certains termes se déduisent immédiatement du tableau 1.I d'autres nécessitent des calculs plus approfondis.

Détermination de M_{KD}

$$\frac{T_{KD}}{T''_{do}} = \frac{L_{KD}}{R_{KD}} \left(1 - \frac{M_{FD} M_{KD}}{M_F \cdot L_{KD}}\right) \cdot \frac{R_{KD}}{L_{KD}} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{M_{FD}^2}{L_F L_{KD}}\right)}$$

$$\frac{T_{KD}}{T''_{do}} = \frac{M_F L_{KD} - M_{FD} M_{KD}}{M_F L_{KD}} \cdot \frac{L_F L_{KD}}{L_F L_{KD} - M_{FD}^2}$$

$$T_{KD} M_F (L_F L_{KD} - M_{FD}^2) = L_F T''_{do} (M_F L_{KD} - M_{FD} M_{KD})$$

$$M_{KD} M_{FD} L_F T''_{do} = L_F T''_{do} M_F L_{KD} - T_{KD} M_F L_F L_{KD} + T_{KD} M_F M_{FD}^2$$

$$M_{KD} = \frac{L_F T''_{do} M_F L_{KD}}{M_{FD} L_F T''_{do}} - \frac{T_{KD} M_F L_F L_{KD}}{M_{FD} L_F T''_{do}} + \frac{T_{KD} M_F M_{FD}^2}{M_{FD} L_F T''_{do}}$$

$$\text{soit } M_{KD} = \frac{L_{KD} M_F}{M_{FD}} \left(1 - \frac{T_{KD}}{T''_{do}}\right) + \frac{M_F M_{FD}}{L_F} \frac{T_{KD}}{T''_{do}}$$

Détermination de M_F^2

$$X'_d - X_d = \omega'(L_d - \frac{M_F^2}{L_F}) - \omega' L_d = -\omega' \frac{M_F^2}{L_F} \quad \text{d'où :}$$

$$M_F^2 = L_F \left(\frac{X_d - X'_d}{\omega'} \right)$$

Détermination de M_{KQ}^2

$$X''_q - X_q = \omega'(L_q - \frac{M_{KQ}^2}{L_{KQ}}) - \omega' L_q$$

$$\text{soit } M_{KQ}^2 = L_{KQ} \left(\frac{X_q - X''_q}{\omega'} \right)$$

Relation entre T''_d , T''_{do} et X''_d , X'_d

$$\frac{X''_d}{X'_d} = \omega' \left(\frac{L_d(L_F L_{KD} - M_{FD}^2) - (L_{KD} M_F^2 + L_F M_{KD}^2 - 2M_F M_{FD} M_{KD})}{(L_F L_{KD} - M_{FD}^2)} \cdot \omega' \left(\frac{L_d L_F - M_F^2}{L_F} \right) \right)$$

on peut encore mettre sous la forme :

$$\frac{X''_d}{X'_d} = \frac{L_{KD}}{R_{KD}} \cdot \frac{L_d(L_F L_{KD} - M_{FD}^2) - (L_{KD} M_F^2 + L_F M_{KD}^2 - 2M_F M_{FD} M_{KD})}{L_{KD}(L_d L_F - M_F^2)} \cdot \frac{R_{KD}}{L_{KD}} \cdot \frac{L_F L_{KD}}{(L_F L_{KD} - M_{FD}^2)}$$

$$\text{soit } \frac{X''_d}{X'_d} = \frac{T''_d}{T''_{do}} \cdot \frac{1}{T''_{do}}$$

$$\text{et } T''_{do} = T''_d \frac{X'_d}{X''_d}$$

Relation entre T'_d , T'_{do} et X'_d , X_d

$$\frac{X'_d}{X_d} = \frac{\omega'(L_d L_F - M_F^2)}{L_F \cdot \omega' L_d} = 1 - \frac{M_F^2}{L_d L_F} = \frac{L_F (L_d L_F - M_F^2)}{R_F L_d L_F} \cdot \frac{R_F}{L_F}$$

$$\text{soit } T'_{do} = T'_d \frac{X_d}{X'_d} \cdot \frac{1}{T'_{do}}$$

de sorte qu'en combinant les égalités précédentes on en déduit la valeur du rapport $\frac{X_d}{X''_d}$

$$\frac{X_d}{X''_d} = \frac{X_d}{X'_d} \cdot \frac{X'_d}{X''_d} = \frac{T'_{do}}{T'_d} \cdot \frac{T''_{do}}{T''_d}$$

Relation entre X''_q , X_q et T''_q , T''_{qo}

$$\frac{T''_q}{T''_{qo}} = \frac{L_{KQ}}{R_{KQ}} \left(1 - \frac{M_{KQ}^2}{L_q L_{KQ}}\right) \frac{R_{KQ}}{L_{KQ}} = \frac{X''_q}{X_q}$$

$$\text{d'où } T''_q \frac{X_q}{X''_q} = T''_{qo}$$

Calcul de M_{FD}^2

$$X_d - X''_d = \omega' \left(\frac{L_{KD} M_F^2 + L_F M_{KD}^2 - 2M_F M_{FD} M_{KD}}{L_F L_{KD} - M_{FD}^2} \right)$$

$$\text{et } (L_F L_{KD} - M_{FD}^2)(X_d - X''_d) = \omega' (L_{KD} M_F^2 + L_F M_{KD}^2 - 2M_F M_{FD} M_{KD})$$

on remplace M_F^2 par $L_F \left(\frac{X_d - X''_d}{\omega'}\right)$ dans l'égalité précédente

$$\text{soit } (L_F L_{KD} - M_{FD}^2)(X_d - X''_d) = L_{KD} L_F (X_d - X''_d) + \omega' (L_F M_{KD}^2 - 2M_F M_{FD} M_{KD})$$

$$\text{ou } L_F L_{KD} (X'_d - X''_d) - M_{FD}^2 (X_d - X''_d) = \omega' (L_F M_{KD}^2 - 2M_F M_{FD} M_{KD})$$

On veut remplacer M_{KD}^2 dans le second membre ainsi que M_{KD}

$$\text{on sait que } M_{KD} = \frac{L_{KD} M_F}{M_{FD}} (1 - a) + \frac{M_F M_{FD}}{L_F} \text{ a en posant } a = \frac{T_{KD}}{T''_{do}}$$

$$\text{d'où } M_{KD}^2 = \frac{L_{KD}^2 M_F^2}{M_{FD}^2} (1 - a)^2 + \frac{M_F^2 M_{FD}^2}{L_F^2} a^2 + 2 \frac{L_{KD} M_F^2}{L_F} (1 - a) a$$

En remplaçant M_{KD} et M_{KD}^2 dans la relation établie précédemment il vient :

$$L_F L_{KD} (X'_d - X''_d) - M_{FD}^2 (X_d - X''_d) = \omega' \left(\frac{L_F L_{KD}^2 M_F^2}{M_{FD}^2} (1-a)^2 + \frac{M_F^2 M_{FD}^2}{L_F} a^2 \right. \\ \left. + 2 L_{KD} M_F^2 (1-a) a - 2 M_F^2 L_{KD} (1-a) - 2 \frac{M_F^2 M_{FD}^2}{L_F} a \right)$$

En mettant M_F^2 en facteur on obtient dans le second membre :

$$\omega' M_F^2 \left(\frac{L_{KD}^2 L_F}{M_{FD}^2} (1-a)^2 + \frac{M_{FD}^2}{L_F} (a-2)a + 2 L_{KD} (1-a)(a-1) \right)$$

soit en remplaçant M_F^2 par $L_F \left(\frac{X_d - X'_d}{\omega'} \right)$ et en faisant réapparaître le premier membre de l'égalité on obtient :

$$L_F L_{KD} (X'_d - X''_d) - M_{FD}^2 (X_d - X''_d) = L_F (X_d - X'_d) \left[\frac{L_{KD}^2 L_F}{M_{FD}^2} (1-a)^2 + \frac{M_{FD}^2}{L_F} (a-2) a \right. \\ \left. - 2 L_{KD} (1-a)^2 \right]$$

En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par M_{FD}^2 et en rangeant les termes par ordre décroissant de M_{FD} on obtient :

$$M_{FD}^4 \left[(X_d - X'_d)(a-2) a + (X_d - X''_d) \right] - M_{FD}^2 \left[(X_d - X'_d)^2 (1-a)^2 + (X'_d - X''_d) \right] L_F L_{KD} \\ + (X_d - X'_d)(1-a)^2 L_F^2 L_{KD}^2 = 0$$

Recherche des solutions de l'équation d'ordre 4 : Calcul du déterminant.

$$\Delta = \left[4(1-a)^4 (X_d - X'_d)^2 + (X'_d - X''_d)^2 + 4(1-a)^2 (X_d - X'_d)(X'_d - X''_d) \right] L_F^2 L_{KD}^2 \\ - 4(X_d - X'_d)(1-a)^2 L_F^2 L_{KD}^2 \left[(X_d - X'_d)(a-2) a + (X_d - X''_d) \right]$$

ou encore $\Delta = 4(1-a)^2 L_F^2 L_{KD}^2 \left[(X_d - X'_d)^2 \{ (1-a)^2 - (a-2) a \} \right. \\ \left. + (X_d - X'_d) \{ (X'_d - X''_d) - (X_d - X''_d) \} + (X'_d - X''_d)^2 L_F^2 L_{KD}^2 \right]$

$$\text{soit } \Delta = L_F^2 L_{KD}^2 \left[(X'_d - X''_d)^2 + 4(1-a)^2 (X_d - X'_d) \{X'_d - X_d + X_d - X'_d\} \right]$$

$$\text{de sorte que } \Delta \text{ se réduit à } L_F^2 L_{KD}^2 (X'_d - X''_d)^2$$

$$\text{et } \sqrt{\Delta} = L_F L_{KD} (X'_d - X''_d)$$

On peut donc calculer les valeurs de M_{FD}^2 à adopter soit :

$$M_{FD}^2 = \frac{2(1-a)^2 (X_d - X'_d) + (X'_d - X''_d) \pm (X'_d - X''_d)}{2\{(X_d - X''_d) + (X_d - X'_d)(a-2)a\}} L_F L_{KD}$$

La première solution vaut :

$$M_{FD1}^2 = \frac{2(1-a)^2 (X_d - X'_d) + 2(X'_d - X''_d)}{2\{(X_d - X''_d) + (X_d - X'_d)(a-2)a\}} L_F L_{KD} = L_K L_{KD} \text{ ce qui n'est pas}$$

envisageable en pratique.

La deuxième racine s'écrit :

$$M_{FD2}^2 = \frac{(1-a)^2 (X_d - X'_d)}{(X_d - X''_d) + (X_d - X'_d)(a-2)a} L_F L_{KD}$$

La solution à retenir sera donc M_{FD2}^2 car elle n'annule pas T''_{do}

Calcul de T''_{do}

$$T''_{do} = \frac{L_{KD}}{R_{KD}} \left(1 - \frac{M_{FD}^2}{L_F L_{KD}} \right)$$

en remplaçant M_{FD}^2 par $\frac{(1-a)^2 (X_d - X'_d) L_F L_{KD}}{(X_d - X''_d) + (X_d - X'_d)(a-2)a}$ on a :

$$T''_{do} = \frac{L_{KD}}{R_{KD}} \left[\frac{(X_d - X''_d) + (X_d - X'_d)(a-2)a - (1-a)^2 (X_d - X'_d)}{(X_d - X''_d) + (X_d - X'_d)(a-2)a} \right]$$

$$\text{soit } T''_{do} = \frac{L_{KD}}{R_{KD}} \cdot \frac{(X_d - X''_d) - (X_d - X'_d)}{(X_d - X''_d) + (X_d - X'_d)(a-2)a}$$

$$\text{d'où } T''_{do} = \frac{L_{KD}}{R_{KD}} \cdot \frac{X'_d - X''_d}{(X_d - X''_d) + (X_d - X'_d) (a-2) a}$$

Calcul de $L_F L_{KD} - M_{FD}^2$

Ce calcul se déduit directement de la valeur T''_{do} calculée précédemment.
En effet $L_F L_{KD} - M_{FD}^2 = R_{KD} T''_{do} L_F$

$$\text{soit } L_F L_{KD} - M_{FD}^2 = L_F L_{KD} \frac{X'_d - X''_d}{(X_d - X''_d) + (X_d - X'_d) (a-2) a}$$

Calcul de L_{KD}

On peut également déduire L_{KD} de la valeur T''_{do} calculée précédemment

$$L_{KD} = T''_{do} R_{KD} \frac{(X_d - X''_d) + (X_d - X'_d) (a-2) a}{X'_d - X''_d} \text{ et comme } T''_{do} = T''_d \frac{X'_d}{X''_d}$$

$$\text{on a : } L_{KD} = T''_d \frac{X'_d}{X''_d} R_{KD} \frac{(X_d - X''_d) + (X_d - X'_d) (a-2) a}{X'_d - X''_d}$$

Calcul de L_F

$$L_F = R_F T'_{do} \text{ ou avec } T'_{do} = T'_d \frac{X_d}{X'_d} \text{ on a } L_F = R_F \frac{X_d}{X'_d} T'_d$$

Calcul de L_{KQ}

$$L_{KQ} = R_{KQ} T''_{qo} \text{ ou avec } T''_{qo} = T''_q \frac{X_q}{X''_q} \text{ on a } L_{KQ} = R_{KQ} \frac{X_q}{X''_q} T''_q$$

Autre calcul de $L_{KD} L_F - M_{FD}^2$

$$\text{on a } X''_d = \omega' \left\{ \frac{L_d L_F L_{KD} - L_d M_{FD}^2 - L_{KD} M_F^2 - L_F M_{KD}^2 + 2 M_F M_{FD} M_{KD}}{L_F L_{KD} - M_{FD}^2} \right\}$$

$$\text{et } T''_d = \frac{L_{KD}}{R_{KD}} \left\{ \frac{L_{KD} L_d L_F - L_{KD} M_F^2 - L_d M_{FD}^2 - L_F M_{KD}^2 + 2 M_F M_{KD} M_{FD}}{L_{KD} (L_d L_F - M_F^2)} \right\}$$

on en déduit donc

$$\frac{X''_d}{\omega'} (L_F L_{KD} - M_{FD}^2) = T''_d R_{KD} (L_d L_F - M_F^2)$$

Ce qui nous fait apparaître le terme $L_{KD} L_F - M_{FD}^2$ recherché

$$\text{soit } L_F L_{KD} - M_{FD}^2 = \frac{T''_d}{X''_d} R_{KD} L_F \underbrace{\omega' (L_d - \frac{M_F^2}{L_F})}$$

$$\text{où } L_F L_{KD} - M_{FD}^2 = \frac{T''_d}{X''_d} R_{KD} L_F \cdot X'_d$$

et comme $L_F = R_F \frac{X_d}{X'_d} T'_d$ on obtient

$$L_F L_{KD} - M_{FD}^2 = \frac{T''_d}{X''_d} R_{KD} R_F X_d T'_d$$

Calcul de M_{KD}^2

$$M_{KD}^2 = \frac{L_{KD}^2 M_F^2}{M_{FD}^2} (1-a)^2 + \frac{M_F^2 M_{FD}^2}{L_F^2} a^2 + \frac{2 L_{KD} M_F^2}{L_F} (1-a) a$$

en remplaçant dans cette expression

$$M_F^2 \text{ par } L_F \frac{(X_d - X'_d)}{\omega'}$$

$$\text{et } M_{FD}^2 \text{ par } L_F L_{KD} \frac{(1-a)^2 (X_d - X'_d)}{(X_d - X''_d) + (X_d - X'_d) (a-2) a}$$

$$\begin{aligned} \text{on obtient : } M_{KD}^2 &= \frac{L_{KD}}{\omega'} \left[(X_d - X''_d) + (X_d - X'_d) (a-2) a \right] \\ &+ \frac{(X_d - X'_d)}{\omega'} \cdot \frac{(1-a)^2 (X_d - X'_d) a^2}{(X_d - X''_d) + (X_d - X'_d) (a-2) a} L_{KD} \\ &+ \frac{2}{\omega'} L_{KD} (X_d - X'_d) (1-a) a \end{aligned}$$

$$\text{soit } M_{KD}^2 = \frac{L_{KD}}{\omega'} \left[(X_d - X''_d) - (X_d - X'_d) a^2 + \frac{(X_d - X'_d)^2 (1-a)^2 a^2}{(X_d - X''_d) + (X_d - X'_d) (a-2) a} \right]$$

ou encore en réduisant au même dénominateur

$$M_{KD}^2 = \frac{L_{KD}}{\omega'} \left[\frac{(X_d - X''_d)^2 + (X_d - X''_d)(X_d - X'_d)((a-2)a - a^2) + (X_d - X'_d)^2((1-a)^2 - a(a-2))a^2}{(X_d - X''_d) + (X_d - X'_d) (a-2) a} \right]$$

$$\text{Donc } M_{KD}^2 = \frac{L_{KD}}{\omega'} \cdot \frac{(X_d - X''_d)^2 - (X_d - X''_d)(X_d - X'_d)2a + (X_d - X'_d)^2 a^2}{(X_d - X''_d) + (X_d - X'_d) (a-2) a}$$

ce qui fait apparaître un carré au numérateur et donc

$$M_{KD}^2 = \frac{L_{KD}}{\omega'} \cdot \frac{[(X_d - X''_d) - (X_d - X'_d) a]^2}{[X_d - X''_d + X_d - X'_d (a-2)a]}$$

Calcul de $L_{KD} L_d - M_{KD}^2$

$$\text{en remplaçant } L_d \text{ par } \frac{X_d}{\omega'} \text{ et } M_{KD}^2 \text{ par } \frac{L_{KD}}{\omega'} \frac{[(X_d - X''_d) - (X_d - X'_d) a]^2}{[(X_d - X''_d) + (X_d - X'_d)(a-2)a]}$$

on obtient

$$L_{KD} L_d - M_{KD}^2 = L_{KD} \frac{\{X_d(X_d - X''_d) + (X_d - X'_d)(a-2) a X_d - [(X_d - X''_d) - (X_d - X'_d) a]^2\}}{\omega' [(X_d - X''_d) + (X_d - X'_d) (a-2)a]}$$

$$L_{KD} L_d - M_{KD}^2 = \frac{L_{KD}}{\omega'} \cdot \frac{(X_d - X''_d) X''_d + (X_d - X'_d) \{X_d(a^2 - 2a) + 2a(X_d - X''_d) - (X_d - X'_d)a^2\}}{[(X_d - X''_d) + (X_d - X'_d) (a-2) a]}$$

$$\text{soit } L_{KD} L_d - M_{KD}^2 = \frac{L_{KD}}{\omega'} \cdot \frac{X''_d(X_d - X''_d) + (X_d - X'_d) (-2a X''_d + a^2 X'_d)}{[(X_d - X''_d) + (X_d - X'_d) (a-2) a]}$$

$$\text{et en remplaçant } L_{KD} \text{ par } R_{KD} \frac{X'_d}{X''_d} T''_d \left\{ \frac{(X_d - X''_d) + (X_d - X'_d) (a-2) a}{(X'_d - X''_d)} \right\}$$

$$\text{il vient : } L_{KD} L_d - M_{KD}^2 = \frac{R_{KD}}{\omega'} \cdot \frac{X'_d}{X''_d} T''_d \left\{ \frac{X''_d(X_d - X''_d) + (X_d - X'_d) (-2a X''_d + a^2 X'_d)}{(X'_d - X''_d)} \right\}$$

Calcul de $L_F L_q - M_F^2$

$$L_F L_q - M_F^2 = L_F L_d - M_F^2 - L_F L_d + L_F L_q$$

$$\text{on a } L_F L_d - M_F^2 = R_F L_d T'_d \text{ et } L_F (L_q - L_d) = R_F \frac{X_d}{X''_d} T'_d (L_q - L_d)$$

$$\text{d'où } L_F L_q - M_F^2 = R_F T'_d \left\{ L_d + \frac{X_d}{X''_d} (L_q - L_d) \right\}$$

Calcul de $L_d(L_F L_{KD} - M_{FD}^2) - L_F M_{KD}^2 - M_F^2 L_{KD} + 2 M_F M_{FD} M_{KD}$

$$L_d(L_F L_{KD} - M_{FD}^2) - L_F M_{KD}^2 - M_F^2 L_{KD} + 2 M_F M_{FD} M_{KD} = R_{KD} T''_d L_F \left(L_d - \frac{M_F^2}{L_F} \right)$$

ou encore :

$$L_d(L_F L_{KD} - M_{FD}^2) - L_F M_{KD}^2 - M_F^2 L_{KD} + 2 M_F M_{FD} M_{KD} = R_{KD} T''_d R_F T'_d L_d$$

Afin d'alléger les calculs ultérieurs on définit par B et D les deux quantités suivantes.

$$\left\{ \begin{aligned} B &= \frac{X'_d}{X''_d} \frac{\{X''_d(X_d - X''_d) + (X_d - X'_d)(-2a X''_d + a^2 X'_d)\}}{X_d (X'_d - X''_d)} \\ D &= \frac{(X_d - X''_d) + (X_d - X'_d)(a-2)a}{X'_d - X''_d} \end{aligned} \right.$$

Ces deux termes peuvent encore s'écrire comme suit, compte tenu que

$$a = \frac{T_{KD}}{T''_{do}}$$

$$D = \frac{(X_d - X''_d) - (X_d - X'_d) + (X_d - X'_d)(a^2 - 2a + 1)}{X'_d - X''_d}$$

$$\text{soit } D = 1 + \frac{(X_d - X'_d)}{(X'_d - X''_d)} \left[1 - \frac{T_{KD}}{T''_{do}} \right]^2$$

et si on remplace a par $\frac{T_{KD}}{T''_{do}}$ ou $\frac{T_{KD} X''_d}{T''_d X'_d}$ dans B il vient,

$$B = \frac{X'_d X''_d (X_d - X''_d) + (X_d - X'_d) X'_d \left(-2 \frac{T_{KD} X''_d{}^2}{T''_d X'_d} + \frac{T_{KD}^2 X''_d{}^2}{T''_d{}^2 X'_d{}^2} \cdot X'_d \right)}{X''_d (X'_d - X''_d) X_d}$$

soit

$$B = \frac{X'_d (X_d - X''_d) + (X_d - X'_d) X''_d \left\{ -2 \frac{T_{KD}}{T''_d} + \left(\frac{T_{KD}}{T''_d} \right)^2 \right\}}{(X'_d - X''_d) X_d}$$

ou encore

$$B = \frac{X'_d (X_d - X''_d) - (X_d - X'_d) X''_d + (X_d - X'_d) X''_d \left(1 - \frac{T_{KD}}{T''_d} \right)^2}{(X'_d - X''_d) X_d}$$

soit

$$B = 1 + \frac{(X_d - X'_d) X''_d}{(X'_d - X''_d) X_d} \left(1 - \frac{T_{KD}}{T''_d} \right)^2$$

Ces constantes sont telles qu'elles vérifient de plus les égalités suivantes.

$$\frac{L_{KD}}{R_{KD}} = T''_{doD} = T_{KDo}$$

$$\frac{L_{KD}}{R_{KD}} \left(1 - \frac{M_{KD}^2}{L_{KD} L_d} \right) = T''_d{}^B = T''_{dd}$$

et elles définissent donc deux nouvelles constantes de temps

$$\frac{L_{KD}}{R_{KD}} \quad \text{et} \quad \frac{L_{KD}}{R_{KD}} \left(1 - \frac{M_{KD}^2}{L_{KD} L_d} \right)$$

ANNEXE II

 CALCUL DES INDUCTANCES DE LA
 MACHINE SYNCHRONNE DOUBLE ETOILE
I. INDUCTANCES DES CIRCUITS ROTORIQUESI.1. INDUCTANCE PROPRE L_F DE L'ENROULEMENT INDUCTEUR

Si N_F est le nombre de spires de l'enroulement d'excitation, i_F le courant qui le traverse, dans la relation (2.1) nous avons

$$N_a = N_b = N_F ; i_b = i_F ; K_{2n+1}^b = K_{2n+1}^F ; K_{2h+2n+1}^b = K_{2h+2n+1}^F ;$$

$$\theta_a = \theta_b = 0$$

De sorte que l'inductance propre L_F s'écrit :

$$(A.1) \quad L_F = \frac{\phi_{FF}}{i_F} = \frac{N_F^2 L D}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{K_{2n+1}^F}{2n+1} \sum_{h=0}^{\infty} P_{2h} (-1)^h \frac{K_{2h+2n+1}^F}{2h+2n+1}$$

I.2. INDUCTANCE PROPRE L_{KD} DE L'ENROULEMENT AMORTISSEUR KD

On obtient de même :

$$(A.2) \quad L_{KD} = \frac{N_{KD}^2 L D}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{K_{2n+1}^{KD}}{2n+1} \sum_{h=0}^{\infty} P_{2h} (-1)^h \frac{K_{2h+2n+1}^{KD}}{2h+2n+1}$$

I.3. INDUCTANCE PROPRE L_{KQ} DE L'ENROULEMENT AMORTISSEUR KQ

Dans ce cas, $\theta_a = \theta_b = \frac{\pi}{2}$, $\cos [(2h+2n+1)\theta_a - (2n+1)\theta_b] = \cos h\pi = (-1)^h$;

$$(A.3) \quad \text{d'où : } L_{KQ} = \frac{N_{KQ}^2 L D}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{K_{2n+1}^{KQ}}{2n+1} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{K_{2h+2n+1}^{KQ}}{2h+2n+1} \cdot P_{2h}$$

I.4. INDUCTANCE MUTUELLE $M_{F,KD}$ ENTRE LES ENROULEMENTS F et KD

Si on remplace a par F, b par KD, θ_a et θ_b par 0, il vient :

$$(A.4) \quad M_{F,KD} = M_{KD,F} = \frac{N_F N_{KD} L.D}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{K_{2n+1}^{KD}}{2n+1} \sum_{h=0}^{\infty} P_{2h}(-1)^h \frac{K_{2h+2n+1}^F}{2h+2n+1}$$

Entre le bobinage de l'axe direct (F ou KD) et le bobinage de l'axe en quadrature, l'inductance mutuelle est nulle. En effet, dans la relation générale θ_a est alors égal à 0, θ_b à $\frac{\pi}{2}$; l'angle $(2h+2n+1)\theta_a - (2n+1)\theta_b$ est un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$ et son cosinus est donc nul.

Donc,

$$(A.5) \quad M_{F,KQ} = M_{KQ,F} = M_{KD,KQ} = M_{KQ,KD} = 0$$

On remarque que toutes les inductances du rotor sont constantes et indépendantes de l'écart angulaire θ entre rotor et stator.

II. INDUCTANCES DES CIRCUITS STATORIQUES

Nous indiquerons par N_S les nombres de spires des enroulements des six phases A, A', B, B', C, C' et par K_r^S le coefficient de bobinage de celles-ci pour l'harmonique de rang r.

II.1. INDUCTANCES PROPRES $L_A, L_{A'}, L_B, L_{B'}, L_C, L_{C'}$ DES ENROULEMENTS STATORIQUES

Pour la phase A, si dans la relation (2.1) on fait

$$N_a = N_b = N_S ; K_{2h+2n+1}^a = K_{2h+2n+1}^S ; K_{2n+1}^b = K_{2n+1}^S ;$$

$$\theta_a = \theta_b = -\theta ;$$

il vient :

$$L_A = \frac{N_S^2 LD}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{K_{2n+1}^S}{2n+1} \sum_{h=0}^{\infty} P_{2h}(-1)^h \frac{K_{2h+2n+1}^S}{2h+2n+1} \cos 2h \theta$$

Pour la phase A', les substitutions à effectuer sont les mêmes que pour la phase A ; mais $\theta_a = \theta_b = \frac{\pi}{6} - \theta$ ce qui entraîne le remplacement de $\cos 2h \theta$ par $\cos 2h (\theta - \frac{\pi}{6})$.

On obtient donc :

$$(A.6) \quad \left[\begin{array}{l} L_A = \sum_{h=0}^{\infty} L_{2h} \cos 2h\theta \\ L_{A'} = \sum_{h=0}^{\infty} L_{2h} \cos 2h(\theta - \frac{\pi}{6}) \\ L_B = \sum_{h=0}^{\infty} L_{2h} \cos 2h(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ L_{B'} = \sum_{h=0}^{\infty} L_{2h} \cos 2h(\theta - \frac{5\pi}{6}) \\ L_C = \sum_{h=0}^{\infty} L_{2h} \cos 2h(\theta - \frac{4\pi}{3}) \\ L_{C'} = \sum_{h=0}^{\infty} L_{2h} \cos 2h(\theta - \frac{3\pi}{2}) \end{array} \right.$$

avec

$$L_{2h} = \frac{N_S^2 LD}{\pi} P_{2h}(-1)^h \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{K^S_{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{K^S_{2h+2n+1}}{2h+2n+1}$$

II.2. INDUCTANCES MUTUELLES M_{AB} , M_{BC} , M_{CA} , $M_{A'B'}$, $M_{B'C'}$, $M_{C'A'}$, ENTRE ENROULEMENTS STATORIQUES DE LA MEME ETOILE

- L'inductance mutuelle M_{AB} s'obtient en faisant $\theta_a = -\theta$, $\theta_b = -\theta + \frac{2\pi}{3}$ dans la relation générale.

$$M_{AB} = \frac{N_S^2 LD}{\pi} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{2h}(-1)^h \frac{K^S_{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{K^S_{2h+2n+1}}{2h+2n+1} \cdot \cos[2h\theta + (2n+1) \frac{2\pi}{3}]$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} \cos [2h\theta + (2n+1) \frac{2\pi}{3}] &= \cos [2h(\theta - \frac{4\pi}{3}) + (2n+1+h) \frac{2\pi}{3}] \\ &= \cos 2h(\theta - \frac{4\pi}{3}) \cos (2n+1+h) \frac{2\pi}{3} \\ &\quad - \sin 2h(\theta - \frac{4\pi}{3}) \sin (2n+1+h) \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

et mettre M_{AB} sous la forme

$$M_{AB} = \frac{N_S^2 LD}{\pi} \sum_{h=0}^{\infty} P_{2h} (-1)^h \left[\cos 2h\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \Sigma^1 - \sin 2h\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \Sigma^2 \right]$$

avec $\Sigma^1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{K^S_{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{K^S_{2h+2n+1}}{2h+2n+1} \cos (2n+1+h) \frac{2\pi}{3}$

$$\Sigma^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{K^S_{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{K^S_{2h+2n+1}}{2h+2n+1} \sin (2n+1+h) \frac{2\pi}{3}$$

Que h soit pair ou impair, la somme Σ^2 est nulle.

- L'inductance mutuelle M_{BC} s'obtient en remplaçant θ_a par $-\theta + \frac{2\pi}{3}$

et θ_b par $-\theta + \frac{4\pi}{3}$ dans l'expression générale ; ce qui conduit à la même expression que M_{AB} à ceci près que $\cos 2h\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right)$ est remplacé par $\cos 2h\theta$

Le cosinus figurant dans l'expression de M_{CA} est celui de l'angle $2h\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$

Les inductances mutuelles entre enroulements statoriques de la première étoile s'écrivent donc :

$$M_{AB} = M_{BA} = \sum_{h=0}^{\infty} M_{2h} \cos 2h\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$M_{BC} = M_{CB} = \sum_{h=0}^{\infty} M_{2h} \cos 2h\theta$$

$$M_{CA} = M_{AC} = \sum_{h=0}^{\infty} M_{2h} \cos 2h\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

avec $M_{2h} = \frac{N_S^2 LD}{\pi} P_{2h} (-1)^h \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{K^S_{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{K^S_{2h+2n+1}}{2h+2n+1} \cos (2n+1+h) \frac{2\pi}{3}$

- L'inductance mutuelle $M_{A'B'}$ s'obtient en remplaçant θ_a par $\frac{\pi}{6} - \theta$ et θ_b par $\frac{5\pi}{6} - \theta$ dans l'expression générale ; ce qui conduit à la même expression que M_{AB} à ceci près que $\cos 2h\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right)$ est remplacé par $\cos 2h\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right)$. En effet en remplaçant θ_a et θ_b par leur valeur le cosinus de l'expression générale devient :

$$\cos \left[2h\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) + (2n+1) \frac{2\pi}{3} \right] ; \text{ ou encore } \cos \left[2h\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) + (2n+1+h) \frac{2\pi}{3} \right]$$

- Pour l'inductance mutuelle $M_{B'C'}$, on prend $\theta_a = \frac{5\pi}{6} - \theta$ et $\theta_b = \frac{3\pi}{2} - \theta$

Ce qui conduit pour le cosinus de l'expression générale à la valeur :

$$\cos \left[2h\left(\theta - \frac{5\pi}{6}\right) + (2n+1) \frac{2\pi}{3} \right] ; \text{ ou encore } \cos \left[2h\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) + (2n+1+h) \frac{2\pi}{3} \right]$$

- Pour l'inductance mutuelle $M_{C'A'}$, on utilise $\theta_a = \frac{3\pi}{2} - \theta$ et $\theta_b = \frac{\pi}{6} - \theta$

Ce qui conduit pour le cosinus de l'expression générale à la valeur :

$$\cos \left[2h\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) + (2n+1) \frac{2\pi}{3} \right] ; \text{ ou encore } \cos \left[2h\left(\theta - \frac{5\pi}{6}\right) + (2n+1+h) \frac{2\pi}{3} \right]$$

Les inductances mutuelles entre enroulements statoriques de la deuxième étoile s'écrivent donc :

$$M_{A'B'} = M_{B'A'} = \sum_{h=0}^{\infty} M_{2h} \cos 2h\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$M_{B'C'} = M_{C'B'} = \sum_{h=0}^{\infty} M_{2h} \cos 2h\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$M_{A'C'} = M_{C'A'} = \sum_{h=0}^{\infty} M_{2h} \cos 2h\left(\theta - \frac{5\pi}{6}\right)$$

(A.8)

avec

$$M_{2h} = \frac{N_S^2 LD}{\pi} P_{2h} (-1)^h \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{K^S_{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{K^S_{2h+2n+1}}{2h+2n+1} \cos (2n+1+h) \frac{2\pi}{3}$$

II.3. INDUCTANCES MUTUELLES $M_{AB'}$, $M_{A'C}$, $M_{BC'}$ ENTRE ENROULEMENTS STATORIQUES DECALES DE $\frac{5\pi}{6}$

- L'inductance $M_{AB'}$ s'obtient en faisant $\theta_a = -\theta$, $\theta_b = -\theta + \frac{5\pi}{6}$ dans la relation générale

$$M_{AB'} = \frac{N_S^2 LD}{\pi} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{2h} (-1)^h \frac{K^S_{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{K^S_{2h+2n+1}}{2h+2n+1} \cos \left[2h\theta + (2n+1) \frac{5\pi}{6} \right]$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} \cos \left[2h\theta + (2n+1) \frac{5\pi}{6} \right] &= \cos \left[2h\left(\theta - \frac{17\pi}{12}\right) + (2n+1+h) \frac{5\pi}{6} \right] \\ &= \cos 2h\left(\theta - \frac{17\pi}{12}\right) \cos (2n+1+h) \frac{5\pi}{6} \\ &\quad - \sin 2h\left(\theta - \frac{17\pi}{12}\right) \sin (2n+1+h) \frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

et mettre $M_{AB'}$ sous la forme

$$M_{AB'} = \frac{N_S^2 LD}{\pi} \sum_{h=0}^{\infty} P_{2h} (-1)^h \left[\cos 2h\left(\theta - \frac{17\pi}{12}\right) \Sigma^3 - \sin 2h\left(\theta - \frac{17\pi}{12}\right) \Sigma^4 \right]$$

avec $\Sigma^3 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{K^S_{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{K^S_{2h+2n+1}}{2h+2n+1} \cos (2n+1+h) \frac{5\pi}{6}$

$$\Sigma^4 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{K^S_{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{K^S_{2h+2n+1}}{2h+2n+1} \sin (2n+1+h) \frac{5\pi}{6}$$

Que h soit pair ou impair, la somme Σ^4 est nulle.

-L'inductance mutuelle $M_{A'C}$ s'obtient en remplaçant θ_a par $\frac{\pi}{6} - \theta$ et θ_b par $\frac{4\pi}{3} - \theta$ dans l'expression générale ; ce qui conduit à la même expression que $M_{AB'}$ sauf pour le cosinus qui vaut :

$$\cos \left[2h\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) + (2n+1) \frac{7\pi}{6} \right] \text{ ou encore } \cos \left[2h\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right) + (2n+1+h) \frac{7\pi}{6} \right]$$

-L'inductance mutuelle $M_{BC'}$ s'obtient en remplaçant θ_a par $\frac{2\pi}{3} - \theta$ et θ_b par $\frac{3\pi}{2} - \theta$ dans l'expression générale ; ce qui conduit à la même expression que $M_{AB'}$ sauf pour le cosinus qui vaut :

$$\cos \left[2h\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + (2n+1) \frac{5\pi}{6} \right] \text{ ou encore } \cos \left[2h\left(\theta - \frac{\pi}{12}\right) + (2n+1+h) \frac{5\pi}{6} \right]$$

Les inductances mutuelles entre enroulements statoriques décalés de $\frac{5\pi}{6}$ s'écrivent donc :

$$M_{AB'} = M_{B'A} = \sum_{h=0}^{\infty} M'_{2h} \cos 2h\left(\theta - \frac{17\pi}{12}\right)$$

$$M_{A'C} = M_{C'A} = \sum_{h=0}^{\infty} M'_{2h} \cos 2h\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$M_{BC'} = M_{C'B} = \sum_{h=0}^{\infty} M'_{2h} \cos 2h\left(\theta - \frac{\pi}{12}\right)$$

avec $M'_{2h} = \frac{N_S^2 LD}{\pi} P_{2h} (-1)^h \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{K^S_{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{K^S_{2h+2n+1}}{2h+2n+1} \cos (2n+1+h) \frac{5\pi}{6}$

(A.9)

II.4. INDUCTANCES MUTUELLES $M_{AA'}$, $M_{BB'}$, $M_{CC'}$ ENTRE ENROULEMENTS STATORIQUES DECALES de $\frac{\pi}{6}$

- L'inductance mutuelle $M_{AA'}$ s'obtient en faisant $\theta_a = -\theta$, $\theta_b = -\theta + \frac{\pi}{6}$ dans la relation générale (2.1)

$$M_{AA'} = \frac{N_S^2 LD}{\pi} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{2h} (-1)^h \frac{K^S_{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{K^S_{2h+2n+1}}{2h+2n+1} \cos [2h\theta + (2n+1) \frac{\pi}{6}]$$

On peut écrire le cosinus sous la forme

$$\begin{aligned} \cos [2h\theta + (2n+1) \frac{\pi}{6}] &= \cos [2h(\theta - \frac{13\pi}{12}) + (2n+1+h) \frac{\pi}{6}] \\ &= \cos 2h(\theta - \frac{13\pi}{12}) \cos (2n+1+h) \frac{\pi}{6} \\ &\quad - \sin 2h(\theta - \frac{13\pi}{12}) \sin (2n+1+h) \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

et mettre $M_{AA'}$ sous la forme

$$M_{AA'} = \frac{N_S^2 LD}{\pi} \sum_{h=0}^{\infty} P_{2h} (-1)^h [\cos 2h(\theta - \frac{13\pi}{12}) \Sigma^5 - \sin 2h(\theta - \frac{13\pi}{12}) \Sigma^6]$$

avec $\Sigma^5 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{K^S_{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{K^S_{2h+2n+1}}{2h+2n+1} \cos (2n+1+h) \frac{\pi}{6}$

$$\Sigma^6 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{K^S_{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{K^S_{2h+2n+1}}{2h+2n+1} \sin (2n+1+h) \frac{\pi}{6}$$

Que h soit pair ou impair, la somme Σ^6 est nulle.

- L'inductance mutuelle $M_{BB'}$ s'obtient en remplaçant θ_a par $-\theta + \frac{2\pi}{3}$ et θ_b par $-\theta + \frac{5\pi}{6}$ dans la relation générale ; ce qui conduit à la même expression que $M_{AA'}$ sauf pour le cosinus qui vaut :

$$\cos [2h(\theta - \frac{2\pi}{3}) + (2n+1) \frac{\pi}{6}] \text{ ou encore } \cos [2h(\theta - \frac{7\pi}{4}) + (2n+1+h) \frac{\pi}{6}]$$

- L'inductance mutuelle $M_{CC'}$ s'obtient en remplaçant θ_a par $-\theta + \frac{4\pi}{3}$ et θ_b par $-\theta + \frac{3\pi}{2}$ dans la relation générale ; ce qui conduit à la même expression que $M_{AA'}$ sauf pour le cosinus qui vaut :

$$\cos [2h(\theta - \frac{4\pi}{3}) + (2n+1) \frac{\pi}{6}] \text{ ou encore } \cos [2h(\theta - \frac{5\pi}{12}) + (2n+1+h) \frac{\pi}{6}]$$

Les inductances mutuelles entre enroulements statoriques décalés de $\frac{\pi}{6}$ s'écrivent donc :

$$\begin{aligned}
 M_{AA'} &= M_{A'A} = \sum_{h=0}^{\infty} M''_{2h} \cos 2h \left(\theta - \frac{13\pi}{12} \right) \\
 M_{BB'} &= M_{B'B} = \sum_{h=0}^{\infty} M''_{2h} \cos 2h \left(\theta - \frac{7\pi}{4} \right) \\
 M_{CC'} &= M_{C'C} = \sum_{h=0}^{\infty} M''_{2h} \cos 2h \left(\theta - \frac{5\pi}{12} \right)
 \end{aligned}$$

A.10)

avec

$$M''_{2h} = \frac{N_S^2 LD}{\pi} P_{2h} (-1)^h \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{K^S_{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{K^S_{2h+2n+1}}{2h+2n+1} \cos (2n+1+h) \frac{\pi}{6}$$

II.5. INDUCTANCES MUTUELLES $M_{AC'}$, $M_{B'C}$, $M_{A'B}$, ENTRE ENROULEMENTS STATORIQUES DECALES DE $\frac{\pi}{2}$

- L'inductance mutuelle $M_{AC'}$ s'obtient en faisant $\theta_a = -\theta$ et $\theta_b = -\theta + \frac{3\pi}{2}$ dans la relation générale (2.1)

$$M_{AC'} = \frac{N_S^2 LD}{\pi} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{2h} (-1)^h \frac{K^S_{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{K^S_{2h+2n+1}}{2h+2n+1} \cdot \cos [2h\theta + (2n+1) \frac{3\pi}{2}]$$

On peut encore écrire le cosinus sous la forme

$$\begin{aligned}
 \cos [2h\theta + (2n+1) \frac{3\pi}{2}] &= \cos [2h(\theta - \frac{3\pi}{4}) + (2n+1+h) \frac{3\pi}{2}] \\
 &= \cos 2h(\theta - \frac{3\pi}{4}) \cdot \cos (2n+1+h) \frac{3\pi}{2} \\
 &\quad - \sin 2h(\theta - \frac{3\pi}{4}) \cdot \sin (2n+1+h) \frac{3\pi}{2}
 \end{aligned}$$

et mettre $M_{AC'}$ sous la forme

$$M_{AC'} = \frac{N_S^2 LD}{\pi} \sum_{h=0}^{\infty} P_{2h} (-1)^h \left[\cos 2h(\theta - \frac{3\pi}{4}) \Sigma^7 - \sin 2h(\theta - \frac{3\pi}{4}) \Sigma^8 \right]$$

avec

$$\Sigma^7 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{K^S_{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{K^S_{2h+2n+1}}{2h+2n+1} \cos (2n+1+h) \frac{3\pi}{2}$$

$$\Sigma^8 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{K^S_{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{K^S_{2h+2n+1}}{2h+2n+1} \sin (2n+1+h) \frac{3\pi}{2}$$

Que h soit pair ou impair, la somme Σ^8 est nulle.

- L'inductance mutuelle $M_{B'C}$ s'obtient en remplaçant θ_a par $-\theta + \frac{5\pi}{6}$ et θ_b par $-\theta + \frac{4\pi}{3}$ dans la relation générale ; ce qui conduit à la même expression que M_{AC} , sauf pour le cosinus qui vaut :

$$\cos \left[2h\left(\theta - \frac{5\pi}{6}\right) + (2n+1) \frac{\pi}{2} \right] \text{ ou encore } \cos \left[2h\left(\theta - \frac{\pi}{12}\right) + (2n+1+h) \frac{\pi}{2} \right]$$

- L'inductance mutuelle $M_{A'B}$ s'obtient en remplaçant θ_a par $-\theta + \frac{\pi}{6}$ et θ_b par $-\theta + \frac{2\pi}{3}$ dans la relation générale ; ce qui conduit à la même expression que M_{AC} , sauf pour le cosinus qui vaut :

$$\cos \left[2h\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) + (2n+1) \frac{\pi}{2} \right] \text{ ou encore } \cos \left[2h\left(\theta - \frac{17\pi}{12}\right) + (2n+1+h) \frac{\pi}{2} \right]$$

Les inductances mutuelles entre enroulements statoriques décalés de $\frac{\pi}{2}$ s'inscrivent donc :

$$M_{AC'} = M_{C'A} = \sum_{h=0}^{\infty} M'''_{2h} \cos 2h\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$M_{B'C} = M_{CB'} = \sum_{h=0}^{\infty} M'''_{2h} \cos 2h\left(\theta - \frac{\pi}{12}\right)$$

$$M_{A'B} = M_{BA'} = \sum_{h=0}^{\infty} M'''_{2h} \cos 2h\left(\theta - \frac{17\pi}{12}\right)$$

avec

$$M'''_{2h} = \frac{N_S^2 LD}{\pi} P_{2h} (-1)^h \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{K^S_{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{K^S_{2h+2n+1}}{2h+2n+1} \cos (2n+1+h) \frac{3\pi}{2}$$

III. INDUCTANCES MUTUELLES ENTRE CIRCUITS STATORIQUES ET ROTORIQUES

III.1. MUTUELLES INDUCTANCES M_{FA} , $M_{FA'}$, M_{FB} , $M_{FB'}$, M_{FC} , $M_{FC'}$ ENTRE LES PHASES DU STATOR ET L'ENROULEMENT INDUCTEUR

- L'inductance mutuelle entre la phase A et l'enroulement inducteur s'obtient en remplaçant dans la relation (2.1) N_a par N_F , N_b par N_S , θ_a par 0 et θ_b par $-\theta$.

$$M_{FA} = \frac{N_F N_S LD}{\pi} \sum_{h=0}^{\infty} P_{2h} (-1)^h \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{K^S_{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{K^F_{2h+2n+1}}{2h+2n+1} \cos (2n+1)\theta$$

On peut décomposer $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ en $\sum_{n=0}^{\infty} + \sum_{n=-1}^{-\infty}$

Le terme correspondant à $-n-1$ étant

$$\frac{K^S_{-2n-1}}{-(2n+1)} \cdot \frac{K^F_{-2n-1+2h}}{-2n-1+2h} \cos [-(2n+1)\theta] = \frac{K^S_{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{K^F_{2n+1-2h}}{2n+1-2h} \cos (2n+1)\theta$$

on peut regrouper avec celui correspondant à n , à condition de tenir compte de la différence du facteur multipliant $\cos (2n+1)\theta$

$$M_{FA} = \frac{N_F N_S LD}{\pi} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_{2h} (-1)^h \cos(2n+1)\theta \frac{K^S_{2n+1}}{2n+1} \left[\frac{K^F_{2n+1+2h}}{2n+1+2h} + \frac{K^F_{2n+1-2h}}{2n+1-2h} \right]$$

Dans la relation générale, en faisant $\theta_a = 2\pi$ et $\theta_b = -\theta + \frac{2\pi}{3}$ on obtient M_{FB} , en faisant $\theta_a = 0$ et $\theta_b = -\theta + \frac{4\pi}{3}$ on obtient M_{FC}

et avec $\theta_a = 0$ et $\theta_b = \frac{\pi}{6} - \theta$ on obtient $M_{FA'}$,

$\theta_a = 0$ et $\theta_b = \frac{5\pi}{6} - \theta$ on obtient $M_{FB'}$,

$\theta_a = 0$ et $\theta_b = \frac{3\pi}{2} - \theta$ on obtient $M_{FC'}$,

soit :

$$(A.12) \left\{ \begin{array}{l} M_{FA} = \sum_{n=0}^{\infty} M_{FS(2n+1)} \cos (2n+1)\theta \\ M_{FA'} = \sum_{n=0}^{\infty} M_{FS(2n+1)} \cos (2n+1)\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \\ M_{FB} = \sum_{n=0}^{\infty} M_{FS(2n+1)} \cos (2n+1)\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ M_{FB'} = \sum_{n=0}^{\infty} M_{FS(2n+1)} \cos (2n+1)\left(\theta - \frac{5\pi}{6}\right) \\ M_{FC} = \sum_{n=0}^{\infty} M_{FS(2n+1)} \cos (2n+1)\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \\ M_{FC'} = \sum_{n=0}^{\infty} M_{FS(2n+1)} \cos (2n+1)\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) \end{array} \right.$$

A.12)

avec

$$M_{FS(2n+1)} = \frac{N_F N_S LD}{\pi} \sum_{h=0}^{\infty} P_{2h} (-1)^h \frac{k^S_{2n+1}}{2n+1} \left[\frac{k^F_{2n+1+2h}}{2n+1+2h} + \frac{k^F_{2n+1-2h}}{2n-1-2h} \right]$$

III.2. MUTUELLES INDUCTANCES $M_{KD,A}$, $M_{KD,A'}$, $M_{KD,B}$, $M_{KD,B'}$, $M_{KD,C}$, $M_{KD,C'}$ ENTRE LES PHASES DU STATOR ET L'ENROULEMENT AMORTISSEUR KD

Les inductances mutuelles entre les six phases du stator et l'enroulement amortisseur d'axe direct sont données par des expressions analogues aux précédentes. Il suffit de remplacer le nombre de spires et les coefficients de bobinages de l'inducteur par ceux du circuit KD

A.13)

$$M_{KD,A} = \sum_{n=0}^{\infty} M_{KD,S(2n+1)} \cos (2n+1)\theta$$

$$M_{KD,A'} = \sum_{n=0}^{\infty} M_{KD,S(2n+1)} \cos (2n+1) \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$M_{KD,B} = \sum_{n=0}^{\infty} M_{KD,S(2n+1)} \cos (2n+1) \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$M_{KD,B'} = \sum_{n=0}^{\infty} M_{KD,S(2n+1)} \cos (2n+1) \left(\theta - \frac{5\pi}{6} \right)$$

$$M_{KD,C} = \sum_{n=0}^{\infty} M_{KD,S(2n+1)} \cos (2n+1) \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right)$$

$$M_{KD,C'} = \sum_{n=0}^{\infty} M_{KD,S(2n+1)} \cos (2n+1) \left(\theta - \frac{3\pi}{2} \right)$$

avec

$$M_{KD,S(2n+1)} = \frac{N_{KD} \cdot N_S LD}{\pi} \sum_{h=0}^{\infty} P_{2h} (-1)^h \frac{k^S_{2n+1}}{2n+1} \left[\frac{k^{KD}_{2n+1+2h}}{2n+1+2h} + \frac{k^{KD}_{2n+1-2h}}{2n+1-2h} \right]$$

III.3. MUTUELLES INDUCTANCES $M_{KQ,A}$, $M_{KQ,A'}$, $M_{KQ,B}$, $M_{KQ,B'}$, $M_{KQ,C}$, $M_{KQ,C'}$ ENTRE LES PHASES DU STATOR ET L'ENROULEMENT AMORTISSEUR KQ

- La mutuelle inductance entre l'amortisseur en quadrature KQ et la phase A s'obtient en remplaçant dans la relation générale θ_a par $\frac{\pi}{2}$, θ_b par $-\theta$, en donnant aux nombres de spires et aux coefficients de bobinages les indices convenables.

$$M_{KQ,A} = \frac{N_{KQ} N_S LD}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} P_{2h} (-1)^h \frac{K^S_{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{K^{KQ}_{2h+2n+1}}{2h+2n+1} \cos \left[(2h+2n+1) \frac{\pi}{2} + (2n+1)\theta \right]$$

$$= - \frac{N_{KQ} N_S LD}{\pi} \sum_{h=0}^{\infty} P_{2h} (-1)^h \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{K^S_{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{K^{KQ}_{2h+2n+1}}{2h+2n+1} \sin(2h+2n+1) \frac{\pi}{2} \sin(2n+1)\theta$$

- On peut écrire $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ sous la forme $\sum_{n=0}^{\infty} + \sum_{n=-1}^{-\infty}$ et remarquer que le terme en $-n-1$, soit

$$\frac{K^S_{-2n-1}}{-2n-1} \cdot \frac{K^{KQ}_{2h-2n-1}}{2h-2n-1} \sin(-2n-1)\theta \sin(2h-2n-1) \frac{\pi}{2}$$

est le même que celui correspondant à n à condition de remplacer celui-ci

$$\frac{K^{KQ}_{2n+1+2h}}{2n+1+2h} \sin(2n+1+2h) \frac{\pi}{2} \text{ par } \frac{K^{KQ}_{2n+1-2h}}{2n+1-2h} \sin(2n+1-2h) \frac{\pi}{2}$$

- Les inductances $M_{KQ,A'}$, $M_{KQ,B}$, $M_{KQ,B'}$, $M_{KQ,C}$, $M_{KQ,C'}$ se déduisent de l'inductance $M_{KQ,A}$ en remplaçant dans l'expression de celle-ci $\sin(2n+1)\theta$ par $\sin(2n+1)(\theta - \frac{\pi}{6})$, $\sin(2n+1)(\theta - \frac{2\pi}{3})$, $\sin(2n+1)(\theta - \frac{5\pi}{6})$, $\sin(2n+1)(\theta - \frac{4\pi}{3})$, $\sin(2n+1)(\theta - \frac{3\pi}{2})$

D'où les expressions des six inductances mutuelles stator-amortisseur KQ :

$$M_{KQ,A} = \frac{- \sum_{n=0}^{\infty} M_{KQ,S(2n+1)} \sin(2n+1)\theta}{}$$

$$M_{KQ,A'} = \frac{- \sum_{n=0}^{\infty} M_{KQ,S(2n+1)} \sin(2n+1)(\theta - \frac{\pi}{6})}{}$$

$$M_{KQ,B} = \frac{- \sum_{n=0}^{\infty} M_{KQ,S(2n+1)} \sin(2n+1)(\theta - \frac{2\pi}{3})}{}$$

$$M_{KQ,B'} = \frac{- \sum_{n=0}^{\infty} M_{KQ,S(2n+1)} \sin(2n+1)(\theta - \frac{5\pi}{6})}{}$$

$$M_{KQ,C} = \frac{- \sum_{n=0}^{\infty} M_{KQ,S(2n+1)} \sin(2n+1)(\theta - \frac{4\pi}{3})}{}$$

$$M_{KQ,C'} = \frac{- \sum_{n=0}^{\infty} M_{KQ,S(2n+1)} \sin(2n+1)(\theta - \frac{3\pi}{2})}{}$$

(A.14)

A.14) avec

$$M_{KQ,S(2n+1)} = \frac{N_{KQ} N_S LD}{\pi} \sum_{h=0}^{\infty} P_{2h} (-1)^h \frac{k_{2n+1}^S}{2n+1} \cdot \left[\frac{k_{2n+1+2h}^{KQ}}{2n+1+2h} \sin (2n+1+2h) \frac{\pi}{2} + \frac{k_{2n+1-2h}^{KQ}}{2n+1-2h} \sin (2n+1-2h) \frac{\pi}{2} \right]$$

IV. LES HARMONIQUES DES INDUCTANCES

Les expressions des inductances sont très compliquées et sans hypothèse simplificatrice il serait difficile, même par le calcul numérique, d'étudier le comportement de la machine synchrone.

L'examen de la valeur des harmoniques des inductances montre l'importance des simplifications effectuées pour arriver aux expressions utilisées.

IV.1. INDUCTANCES DES ENROULEMENTS STATORIQUES

. Inductances propres

L'inductance propre d'une phase du stator (voir relation A6) est la somme du terme moyen L_0 correspondant à la valeur moyenne P_0 de la perméance par unité de surface et des harmoniques qui correspondent aux harmoniques de cette perméance.

Pour la première phase par exemple

$$L_A = L_0 + \sum_{h=1}^{\infty} L_{2h} \cos 2h\theta$$

- Fondamental L_0

Si on fait $h = 0$, la dernière relation (A6) donne

$$L_0 = \frac{N_S^2 LD}{\pi} P_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{k_{2n+1}^S}{2n+1} \right)^2 \quad \text{ou} \quad \frac{2N_S^2 LD}{\pi} P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{k_{2n+1}^S}{2n+1} \right)^2$$

- premiers harmoniques.

pour $h = 1$, L_2 égal à

$$L_2 = - \frac{N_S^2 LD}{\pi} P_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{k_{2n+1}^S}{2n+1} \frac{k_{2n+3}^S}{2n+3}$$

peut après décomposition de la somme et regroupement des termes égaux s'écrire :

$$L_2 = - \frac{N_S^2 LD}{\pi} P_2 \left\{ 2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_{2n+1}^S}{2n+1} \frac{K_{2n+3}^S}{2n+3} \right] - (K_1^S)^2 \right\}$$

De même, à $h = 2$ correspond L_4 tel que

$$L_4 = \frac{N_S^2 LD}{\pi} P_4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{K_{2n+1}^S}{2n+1} \frac{K_{2n+5}^S}{2n+5}$$

$$L_4 = 2 \frac{N_S^2 LD}{\pi} P_4 \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{K_{2n+1}^S}{2n+1} \frac{K_{2n+5}^S}{2n+5}$$

- D'une façon générale,

on peut mettre h sous la forme $h = 2h'$ ou $h = 2h'+1$

. Pour $h = 2h'$

$$L_{4h'} = \frac{N_S^2 LD}{\pi} P_{4h'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{K_{2n+1}^S}{2n+1} \frac{K_{4h'+2n+1}^S}{4h'+2n+1}$$

On peut décomposer $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ en $\sum_{n=-h'}^{\infty} + \sum_{n=-h'-1}^{-\infty}$, ce qui fait apparaître des

termes égaux deux à deux. En les regroupant, on obtient :

$$(A.15) \quad L_{4h'} = \frac{2N_S^2 LD}{\pi} P_{4h'} \sum_{n=-h'}^{\infty} \frac{K_{2n+1}^S}{2n+1} \frac{K_{4h'+2n+1}^S}{4h'+2n+1}$$

. Pour $h = 2h'+1$

$$L_{4h'+2} = - \frac{N_S^2 LD}{\pi} P_{4h'+2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{K_{2n+1}^S}{2n+1} \frac{K_{4h'+2n+3}^S}{4h'+2n+3}$$

si l'on met $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ sous la forme

$$\sum_{n=-h'}^{\infty} + \sum_{n=-h'-2}^{-\infty} + \left(\frac{K_{2n+1}^S}{2n+1} \frac{K_{4h'+2n+3}^S}{4h'+2n+3} \right)_{n=-h'-1}$$

les termes de la seconde somme égalent ceux de la première, ce qui permet d'écrire

$$(A.16) \quad L_{4h'+2} = - \frac{N_S^2 LD}{\pi} P_{4h'+2} \left\{ 2 \left[\sum_{n=-h'}^{\infty} \frac{K_{2n+1}^S}{2n+1} \frac{K_{4h'+2n+3}^S}{4h'+2n+3} \right] - \left[\frac{K_{2h'+1}^S}{2h'+1} \right]^2 \right\}$$

- L'examen des relations (A.15) et (A.16) montre que les harmoniques des inductances ont une importance relative moins grande que ceux de la perméance et cela d'autant plus que leur rang est plus élevé.

L'harmonique des inductances est proportionnel à l'harmonique de même rang de la perméance mais la sommation des termes correspondant aux valeurs successives de n commence par des termes d'autant plus faibles que h est plus grand.

$$\text{si } L_0 = \frac{2N_S^2 LD}{\pi} P_0 \left[(K_1^S)^2 + \left(\frac{K_3^S}{3}\right)^2 + \left(\frac{K_5^S}{5}\right)^2 + \dots \right]$$

$$L_2 = - \frac{N_S^2 LD}{\pi} P_2 \left[2 K_1^S \frac{K_3^S}{3} + 2 \frac{K_3^S}{3} \frac{K_5^S}{5} + \dots - (K_1^S)^2 \right]$$

$$L_4 = \frac{2N_S^2 LD}{\pi} P_4 \left[-K_1^S \frac{K_3^S}{3} + K_1^S \frac{K_5^S}{5} + \frac{K_3^S}{3} \frac{K_7^S}{7} + \frac{K_5^S}{5} \frac{K_9^S}{9} + \dots \right]$$

$$L_6 = - \frac{N_S^2 LD}{\pi} P_6 \left[-2 K_1^S \frac{K_5^S}{5} + 2 K_1^S \frac{K_7^S}{7} + 2 \frac{K_3^S}{3} \frac{K_9^S}{9} + \dots - \left(\frac{K_3^S}{3}\right)^2 \right]$$

$$L_8 = \frac{2N_S^2 LD}{\pi} P_8 \left[-\frac{K_3^S}{3} \frac{K_5^S}{5} - K_1^S \frac{K_7^S}{7} + K_1^S \frac{K_9^S}{9} + \frac{K_3^S}{3} \frac{K_{11}^S}{11} + \dots \right]$$

. Inductances mutuelles

Les inductances mutuelles entre enroulements statoriques (relations A.7 à A.11) comportent aussi un terme moyen M_0 (pour la relation A.7) et tous les harmoniques pairs.

M_0 peut s'écrire, en regroupant les termes deux à deux,

$$M_0 = \frac{2N_S^2 LD}{\pi} P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{K_{2n+1}^S}{2n+1} \right)^2 \cos(2n+1) \frac{2\pi}{3}$$

Toutes les valeurs de 2h peuvent se mettre sous la forme $h=2h'$ ou $h=2h'+1$. En effectuant les mêmes décompositions et les mêmes regroupements que ceux qu'on vient d'indiquer pour les inductances propres, on obtient :

. Pour $h = 2h'$

$$(A.17) \quad M_{4h'} = \frac{2N_S^2 LD}{\pi} P_{4h'} \sum_{n=-h'}^{\infty} \frac{K_{2n+1}^S}{2n+1} \frac{K_{4h'+2n+1}^S}{4h'+2n+1} \cos(2n+2h'+1) \frac{2\pi}{3}$$

. Pour $h = 2h' + 1$

$$(A.18) \quad M_{4h'+2} = - \frac{N_S^2 LD}{\pi} P_{4h'+2} \left\{ 2 \left[\sum_{n=-h}^{\infty} \frac{K_{2n+1}^S}{2n+1} \cdot \frac{K_{4h'+2n+3}^S}{4h'+2n+3} \cos(2n+2h'+2) \frac{2\pi}{3} \right] - \frac{\left(\frac{K_{2h'+1}^S}{2h'+1} \right)^2}{2} \right\}$$

On peut faire la même remarque sur la décroissance des harmoniques des mutuelles inductances de la relation A.7 quand leur rang croît.

Les inductances mutuelles entre enroulements statoriques données par les relations A.8 à A.11 aboutissent aux mêmes relations que A.17 et A.18 sauf pour l'angle $\frac{2\pi}{3}$ qui est successivement remplacé par

$$\frac{2\pi}{3} \text{ relation (A.8)}$$

$$\frac{5\pi}{6} \text{ relation (A.9)}$$

$$\frac{\pi}{6} \text{ relation (A.10)}$$

$$\frac{3\pi}{2} \text{ relation (A.11)}$$

d'où les valeurs prises par les différentes inductances mutuelles

$$M_0 = \frac{2 N_S^2 LD}{\pi} P_0 \left[(K_1^S)^2 \cos \frac{2\pi}{3} + \left(\frac{K_3^S}{3} \right)^2 \cos 2\pi + \left(\frac{K_5^S}{5} \right)^2 \cos \frac{10\pi}{3} + \dots \right]$$

$$M'_0 = \frac{2 N_S^2 LD}{\pi} P_0 \left[(K_1^S)^2 \cos \frac{5\pi}{6} + \left(\frac{K_3^S}{3} \right)^2 \cos \frac{5\pi}{2} + \left(\frac{K_5^S}{5} \right)^2 \cos \frac{25\pi}{6} + \dots \right]$$

$$M''_0 = \frac{2 N_S^2 LD}{\pi} P_0 \left[(K_1^S)^2 \cos \frac{\pi}{6} + \left(\frac{K_3^S}{3} \right)^2 \cos \frac{\pi}{2} + \left(\frac{K_5^S}{5} \right)^2 \cos \frac{5\pi}{6} + \dots \right]$$

$$M'''_0 = \frac{2 N_S^2 LD}{\pi} P_0 \left[(K_1^S)^2 \cos \frac{3\pi}{2} + \left(\frac{K_3^S}{3} \right)^2 \cos \frac{9\pi}{2} + \left(\frac{K_5^S}{5} \right)^2 \cos \frac{15\pi}{2} + \dots \right] = 0$$

$$M_2 = \frac{- N_S^2 LD}{\pi} P_2 \left[-(K_1^S) + 2 K_1^S \frac{K_3^S}{3} \cos 2 \cdot \frac{2\pi}{3} + 2 \frac{K_3^S}{3} \cdot \frac{K_5^S}{5} \cos 4 \cdot \frac{2\pi}{3} + \dots \right]$$

$$M'_2 = \frac{- N_S^2 LD}{\pi} P_2 \left[-(K_1^S) + 2 K_1^S \frac{K_3^S}{3} \cos 2 \cdot \frac{5\pi}{6} + 2 \frac{K_3^S}{3} \cdot \frac{K_5^S}{5} \cos 4 \cdot \frac{5\pi}{6} + \dots \right]$$

$$M''_2 = \frac{- N_S^2 LD}{\pi} P_2 \left[-(K_1^S) + 2 K_1^S \frac{K_3^S}{3} \cos 2 \cdot \frac{\pi}{6} + 2 \frac{K_3^S}{3} \cdot \frac{K_5^S}{5} \cos 4 \cdot \frac{\pi}{6} + \dots \right]$$

$$\begin{aligned}
 M_2''' &= \frac{-N_S^2 LD}{\pi} P_2 \left[-(K_1^S)^2 + 2K_1^S \frac{K_3^S}{3} \cos 2 \frac{3\pi}{2} + 2 \frac{K_3^S}{3} \frac{K_5^S}{5} \cos 4 \frac{3\pi}{2} + \dots \right] \\
 M_4 &= \frac{2N_S^2 LD}{\pi} P_4 \left[-K_1^S \frac{K_3^S}{3} \cos \frac{2\pi}{3} + K_1^S \frac{K_5^S}{5} \cos 3 \frac{2\pi}{3} + \frac{K_3^S}{3} \frac{K_7^S}{7} \cos 5 \frac{2\pi}{3} + \dots \right] \\
 M_4' &= \frac{2N_S^2 LD}{\pi} P_4 \left[-K_1^S \frac{K_3^S}{3} \cos \frac{5\pi}{6} + K_1^S \frac{K_5^S}{5} \cos 3 \frac{5\pi}{6} + \frac{K_3^S}{3} \frac{K_7^S}{7} \cos 5 \frac{5\pi}{6} + \dots \right] \\
 M_4'' &= \frac{2N_S^2 LD}{\pi} P_4 \left[-K_1^S \frac{K_3^S}{3} \cos \frac{\pi}{6} + K_1^S \frac{K_5^S}{5} \cos 3 \frac{\pi}{6} + \frac{K_3^S}{3} \frac{K_7^S}{7} \cos 5 \frac{\pi}{6} + \dots \right] \\
 M_4''' &= \frac{2N_S^2 LD}{\pi} P_4 \left[-K_1^S \frac{K_3^S}{3} \cos \frac{3\pi}{2} + K_1^S \frac{K_5^S}{5} \cos 3 \frac{3\pi}{2} + \frac{K_3^S}{3} \frac{K_7^S}{7} \cos 5 \frac{3\pi}{2} + \dots \right] = 0
 \end{aligned}$$

On déduit de ces différentes inductances les égalités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_0' = -M_0'' \\ M_4' = -M_4'' \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} M_0''' = M_4''' = 0 \\ M_2' = M_2'' \end{array} \right.$$

IV.2. AUTRES INDUCTANCES

. Les inductances propres des enroulements rotoriques et les inductances mutuelles entre ces enroulements sont constantes.

. Les mutuelles inductances entre enroulements statoriques et rotoriques, données par les relations (A.12), (A.13) et (A.14) sont des sommes de termes sinusoïdaux en θ , 3θ , 5θ ... ou, d'une façon plus générale, en $(2n+1)\theta$

Dans l'amplitude de chacun de ces termes, tous les harmoniques de la perméance interviennent mais avec des coefficients qui décroissent quand $2n+1$ augmente.

Ainsi, pour les mutuelles inductances entre l'enroulement inducteur et les bobinages statoriques,

$$(A.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{FS,1} = \frac{N_F N_S LD}{\pi} K_1^S \left[P_0 2K_1^F - P_2 \left(\frac{K_3^F}{3} - K_1^F \right) + P_4 \left(\frac{K_5^S}{5} - \frac{K_3^S}{3} \right) - \dots \right] \\ M_{FS,3} = \frac{N_F N_S LD}{\pi} \frac{K_3^S}{3} \left[P_0 2 \frac{K_3^F}{3} - P_2 \left(\frac{K_5^F}{5} + K_1^F \right) + P_4 \left(\frac{K_7^F}{7} - K_1^F \right) - \dots \right] \end{array} \right.$$

$$(A.19) \quad \left[M_{FS,5} = \frac{N_F N_S LD}{\pi} \frac{K_5^S}{5} \left[P_0 2 \frac{K_5^F}{5} - P_2 \left(\frac{K_7^F}{7} + \frac{K_3^F}{3} \right) + P_4 \left(\frac{K_9^F}{9} + K_1^F \right) - \dots \right] \right]$$

V. SIMPLIFICATIONS.

Hypothèses :

- On ne considère que les deux premiers termes du développement en série de la perméance $P(x)$
- On suppose une répartition sinusoïdale des f.m.m. des enroulements statoriques. ($K_{2n+1}^S = 0$ sauf pour $n = 0$)

Les inductances statoriques s'écrivent alors :

$$L_0 = \frac{2N_S^2 LD}{\pi} P_0 (K_1^S)^2$$

$$L_2 = \frac{N_S^2 LD}{\pi} P_2 (K_1^S)^2$$

$$L_4 = 0$$

et les mutuelles inductances du stator

$$M_0 = - \frac{N_S^2 LD}{\pi} P_0 (K_1^S)^2$$

$$M'_0 = - \frac{\sqrt{3} N_S^2 LD}{\pi} P_0 (K_1^S)^2$$

$$M''_0 = \sqrt{3} \frac{N_S^2 LD}{\pi} P_0 (K_1^S)^2$$

$$M_2 = + \frac{N_S^2 LD}{\pi} P_2 (K_1^S)^2 = M'_2 = M''_2 = M'''_2$$

$$M_4 = M'_4 = M''_4 = M'''_4 = 0$$

Dans les inductances statoriques, les termes dus à P_4 et aux harmoniques de rang plus élevé de la perméance disparaissent.

Il ne reste que L_0 , L_2 , M_0 , M'_0 , M''_0 , M_2 , M'_2 , M''_2 et M'''_2 qui sont d'ailleurs liées par les relations.

$$\begin{aligned}
 M_0 &= -\frac{1}{2} L_0 \\
 M'_0 &= \sqrt{3} M_0 \\
 M''_0 &= -\sqrt{3} M_0 \\
 \text{et } M_2 &= M'_2 = M''_2 = M'''_2 = L_2 = \frac{N_S^2 LD}{\pi} P_2 (K_1^S)^2
 \end{aligned}$$

- Dans les mutuelles inductances entre stator et rotor données par la relation (A.19) seuls les termes correspondant à $2n+1 = 1$ subsistent.

Le tableau 2.1 regroupe les expressions adoptées pour les inductances fonction de θ de la machine synchrone double étoile à pôles saillants.

Pour bien distinguer les termes constants et l'amplitude des termes variables, on indique par

L_{S0} le terme constant L_0

M_{S0} le terme constant M_0 égal à $-\frac{L_0}{2}$

L_{SV} l'amplitude $L_2 = M_2 = M'_2 = M''_2$ des inductances statoriques fonction de θ .

M_{FS} , $M_{KD,S}$, $M_{KQ,S}$, les amplitudes des seuls termes retenus des inductances mutuelles stator-rotor.

CONCLUSIONS

a) Modélisation de la machine simple étoile

A partir du modèle de PARK de la machine synchrone, nous avons établi directement et sans approximation sur la résistance statorique les expressions des admittances opérationnelles ; ce qui conduit à une extension de la validité du modèle mathématique aux machines de moyenne et faible puissance. Cette théorie générale nous fait apparaître par rapport à la théorie classique deux termes correctifs B et D qui définissent par ailleurs deux nouvelles constantes de temps T_{KDO} et T''_{dd} .

En examinant sur un exemple les différentes admittances calculées par les deux théories, nous nous apercevons de la divergence des résultats lorsque la résistance statorique croît et plus nettement encore à R_s/X_d donné pour la machine à pôles lisses. Afin d'améliorer la théorie classique et de l'étendre aux machines telles que $R_s/X_d < 3\%$, nous allons partir de la théorie générale et proposer les simplifications nécessaires à factoriser les admittances. Nous obtenons alors les formules des admittances simplifiées du tableau 1 XII page 61 qui remplacent les admittances usuelles du tableau 1 XIII page 62. Sur les neuf admittances, trois sont ainsi corrigées (Y_{dd}^o , Y_{qq}^o , Y_{Fd}^o) et celle propre à l'inducteur est fortement simplifiée Y_{FF}^o .

L'exemple du court-circuit triphasé symétrique montre l'avantage de l'expression littérale proposée pour le courant inducteur i_F . Cette expression bien que plus complexe met en évidence la pseudopulsation et le déphasage intervenant dans la courbe $i_F(t)$. Il est alors possible d'améliorer le relevé de certaines constantes subtransitoires.

Le cas de l'établissement du courant inducteur dans un alternateur au préalable en court-circuit nous permet de juger de la simplicité et de la précision obtenue ici par rapport à la théorie classique. Il est alors possible de déterminer la constante de temps T'_d avec une meilleure approximation.

b) Modélisation de la machine double étoile

A partir du modèle de PARK, nous avons établi l'équation matricielle du tableau 2 IV page 91 régissant le fonctionnement de la machine synchrone double étoile. Grâce à une simple transformation nous pouvons alors ramener ces équations à celles de la machine simple étoile (équation (2.5) page 98). Il suffit donc pour étudier la machine double étoile de reprendre les formules établies en simple étoile et de modifier les paramètres conformément au tableau 2 VI page 99. Nous pouvons alors en déduire la valeur des réactances et des différentes constantes de temps ainsi que le schéma équivalent suivant les deux axes, direct et transversal.

Nous précisons de plus les diagrammes vectoriels obtenus lors d'un régime permanent sinusoïdal équilibré sur les deux étoiles puis sur une seule étoile. Le cas des courts-circuits triphasés d'un alternateur double étoile est également étudié (expression des courants de l'induit et de l'inducteur) en fonction des réactances et constantes de temps de la machine.

Ce modèle mathématique permet le calcul de la plupart des régimes équilibrés permanents et transitoires de la machine synchrone double étoile qui est de plus en plus utilisée en moteur de traction étant donné la faible pulsation de couple enregistré par rapport au moteur classique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. PIERRAT : Les groupes convertisseur statique, machine électrique et leur modélisation.
Conférence à la S.R.B.E., 1980, "Méthodes mathématiques appliquées à la conception et à la mise en oeuvre pratique des systèmes électriques", 29 pages.
- [2] R.H. PARK : Definition of an ideal synchronous machine
General Electric Review, 1928, Vol 31, pp 332-334
- [3] R.H. PARK : Two reaction theory of synchronous machines
Part I : AIEE Trans, 1929, Vol. 48, pp 716-730
Part II : AIEE Trans, 1933, Vol. 52, pp 352-355
- [4] R.E. DOHERTY, C.A. NICKLE : Synchronous machines I to V
AIEE Trans, 1926, 27, 28, 30, pp 716-727, 927-942, 1-18, 457-492, 700-714
- [5] C. CONCORDIA. Synchronous machines
J. Wiley, New York, 1951
- [6] B. ADKINS et R.G. HARLEY : The general theory of alternating current machine.
Application to practical problems.
Chapman et Hall, Londres, 1975
- [7] J. LESENNE, F. NOTELET, G. SEQUIER : Introduction à l'électrotechnique approfondie.
Technique et Documentation, Paris 1981
- [8] P. BARRET : Régimes transitoires des machines tournantes électriques
Eyrolles édition, Paris, 1982
- [9] Commission Electrotechnique Internationale : Recommandations pour les machines électriques tournantes. Quatrième partie : Méthodes pour la détermination à partir d'essais des grandeurs des machines synchrones.
Publication 34-4A, 1967, Publication du C.E.I.
- [10] Commission Electrotechnique Internationale : Recommandations pour les machines électriques tournantes. Quatrième partie : Méthodes non confirmées pour la détermination à partir d'essais des grandeurs des machines synchrones.
Premier complément à la Publication 34-4A, 1972, Publication de la C.E.I.
- [11] Y.H. KU : Rotating field theory and general analysis of synchronous and induction machines
I.E.E. Monograph, 1952, Vol. 99, Pt IV pp 410-428
- [12] G. SHACKSHAFT et P.B. HENSER : Model of generator saturation for use in power System studies
Proc I.E.E., Vol. 126, N° 8, Août 1979
- [13] P. BHARALY, B. ADKINS : Operational Impedances of turbogenerators with solid rotors.
Proc I.E.E., Vol. 110, N° 12, 1963, p 2185-2193

- [14] R.P. SCHULZ, W.D. JONES, D.N. EWART : Dynamic models of turbine generators derived from rotor equivalent circuits
I.E.E. PAS Vol. 92, 1973, pp 926-933
- [15] S.D. UMANS, J.A. MALLICK, G.L. WILSON, Modeling of solid rotor turbogenerators
Part I : Theory and Techniques
Part II : Example of model definition and use in digital simulation
I.E.E.E Trans, Vol. PAS 97, N° 1, pp 269-291
- [16] M. CANAY: Causes of discrepancies on calculation of rotor quantities and exact equivalent diagrams of the synchronous machine.
I.E.E. Trans on PAS, Vol. PAS 88, N° 7, 1969, pp 1114-1120
- [17] M. CANAY: Schémas équivalents de la machine synchrone pour le calcul des constantes de la roue polaire dans le cas de phénomènes non stationnaires et de la marche asynchrone
Première partie : Turbogénérateurs
Revue B.B.C., N° 2, 1969, pp 60-71
- [18] M. CANAY : Schémas équivalents de la machine synchrone pour le calcul des constantes de la roue polaire en régime transitoire et lors du démarrage asynchrone.
Deuxième partie : Machines à pôles saillants
Revue B.B.C., N° 3, 1970, pp 135-145
- [19] M. DELHAYE : Etude, Traitement et Analyse de signaux pour la modélisation de PARK des alternateurs de petites, moyennes et grandes puissances.
Thèse de Docteur en Sciences Appliquées, Juin 1982, Mons
- [20] D. PETROVIC : Détermination des paramètres des machines tournantes
Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches de l'E.D.F, Série B, 1975, N° 1, pp 19-28
- [21] B. SHACKSHAFT : New approach to the determination of synchronous machine parameters from tests
Proc I.E.E., N° 11, 1974, pp 1385-1392
- [22] J.L. KOTNY, J. LESENNE, G. SEQUIER : Influence of the usual simplifying hypothesis on the study of the dynamical behaviour of the synchronous machine
Measurement and control, MECO 1981, Le Caire, pp 186-189
- [23] J.L. KOTNY, J. LESENNE, G. SEQUIER : Transmittance générale de la machine synchrone. Conséquence des simplifications usuelles.
Proceedings of the 1st International Conference on Applied Modelling and Simulation, Lyon, 7-11 Sept. 1981, Vol. II, pp 238-244
- [24] J. LESENNE, G. SEQUIER : New simplified theory of PARK'S model of the synchronous machine.
I.C.E.M., Budapest, 6-8 Sept. 1982, Part 1, pp 47-50
- [25] J. HAMEL, H. MAY : Locomotives à moteurs synchrones
Revue Jeumont Schneider, N° 34, 1982, pp 7-20
- [26] P.L. ALGER : The calculation of the armature reactance of synchronous machines,
A.I.E.E. Trans, Vol. 17, 1928, pp 493-512
- [27] L.A. KILGORE ; Calculation of synchronous machine constants
A.I.E.E. Tans, Vol. 50, 1931, pp 1201-1214

TABLE DES MATIERES

AVANT-PROPOS

INTRODUCTION

1

PREMIERE PARTIE

MODELISATION DE LA MACHINE SYNCHRONE SIMPLE ETOILE

CHAPITRE I - EQUATION DE LA MACHINE SYNCHRONE SIMPLE ETOILE	5
I. Modèle de PARK de la machine synchrone	5
I.1. Machine synchrone idéalisée	5
I.1.1. Description	5
I.1.2. Modèle simplifié considéré	7
I.2. Mise en équation du modèle idéalisé	8
II. Transformation de PARK et équations transformées	9
II.1. Matrice de transformation de PARK	9
II.2. Equations simplifiées	10
II.3. Interprétation physique de la transformation de Park	13
III. Fonction de transfert d'une machine synchrone	14
III.1. Présentation	14
III.2. Equation du tripole	15
III.3. Fonctions de transfert lorsque seule une source est reliée	17
III.3.1. Notations utilisées	17
III.3.2. Cas où seule la source $V_d(p)$ est connectée	18
III.3.2. Cas où seule la source $V_q(p)$ est connectée	19
III.3.3. Cas où seule la source $V_F(p)$ est connectée	19
III.3.5. Remarques	20
III.4. Fonctions de transfert lorsque seule une source n'est pas reliée	21
III.4.1. Cas où seule la source V_F n'est pas reliée	21

III.4.2. Cas où seule la source V_q n'est pas reliée	23
III.4.3. Cas où seule V_d n'est pas reliée	27
III.5. Fonctions de transfert lorsque toutes les sources sont reliées	29
CHAPITRE II - COMPARAISON ET PROPOSITIONS DE SIMPLIFICATION	33
I. Comparaison	33
I.1. Transmittance usuelle du modèle classique	33
I.2. Mise en évidence de l'influence de R_s sur les pôles et les racines des transmittances	36
I.3. Mise en évidence de l'influence de R_s dans le cas d'un court-circuit triphasé symétrique	48
I.4. Conclusion	57
II. Proposition d'admittances simplifiées	57
II.1. Factorisation approchée du dénominateur	58
II.2. Factorisation approchée des numérateurs des Y_{ij}	59
II.3. Remarques	63
III. Comparaison des résultats sur des exemples	63
III.1. Comparaison de $Y_{dd}^{\bar{0}}$	64
III.2. Comparaison de $Y_{qq}^{\bar{0}}$ par les trois théories pour une machine synchrone à pôles lisses avec $R_s = 3\%$ de X_d	66
III.3. Applications	68
III.3.1. Cas de l'application au court- circuit triphasé brusque	68
III.3.2. Cas de l'établissement du courant inducteur dans un alternateur au préalable en court-circuit	73
Conclusion	78

DEUXIEME PARTIE

MODELISATION DE LA MACHINE SYNCHRONE DOUBLE ETOILE

CHAPITRE I - EQUATION DE LA MACHINE SYNCHRONE DOUBLE ETOILE	79
I. Modèle de PARK de la machine synchrone double étoile	79
I.1. Description de la machine double étoile idéalisée	79
I.2. Détermination des inductances	80
I.3. Mise en équation de la machine synchrone double étoile	81

II. Transformations de PARK utilisées	85
II.1. Matrice des transformations utilisées	85
II.2. Equations transformées	86
III. Mise en évidence des flux et expression simplifiée du couple	92
III.1. Expression des différents flux	92
III.2. Expression simplifiée du couple	93
 CHAPITRE II - MACHINE SIMPLE ETOILE EQUIVALENTE	96
I. Transformation utilisée	96
II. Equations transformées	98
III. Mise en évidence des flux et expression simplifiée du couple de la machine simple étoile équivalente	99
III.1. Expression des différents flux	99
III.2. Expression simplifiée du couple	100
IV. Equations opérationnelles de la machine double étoile	101
IV.1. Impédances opérationnelles suivant les deux axes	101
IV.2. Equations et impédances opérationnelles	103
IV.3. Mise en évidence des flux	104
IV.4. Constantes de temps	105
IV.4.1. axe direct	105
IV.4.2. axe en quadrature	106
IV.4.3. valeur de $G(p)$	106
IV.5. Réactances	106
IV.6. Schémas équivalents	108
 CHAPITRE III - EXEMPLES	110
I. Régime permanent sinusoïdal équilibré	110
I.1. Les deux étoiles sont alimentées	110
I.2. Une seule étoile Y_1 est alimentée	114
II. Courts-circuits triphasés d'un alternateur double étoile	118
II.1. Détermination du vecteur tension	118
II.2. Inversion de la matrice de impédance	119
II.3. Détermination des courants de l'induit	121
II.4. Détermination du courant dans l'inducteur	124

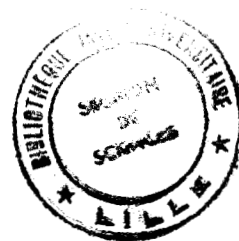
ANNEXE I - CALCUL DES ADMITTANCES DE LA MACHINE SYNCHRONE EN FONCTION DES REACTANCES, DES CONSTANTES ET DES CONSTANTES DE TEMPS	126
---	-----

ANNEXE II - CALCUL DES INDUCTANCES DE LA MACHINE SYNCHRONE DOUBLE ETOILE	136
I. Inductances des circuits rotoriques	136
II. Inductances des circuits statoriques	137
III. Inductances mutuelles entre circuits statoriques et rotoriques	144
IV. Les harmoniques des inductances	148
V. Simplifications	153

CONCLUSIONS

BIBLIOGRAPHIE

TABLE DES MATIERES



RESUME

A partir du modèle de Park de la machine synchrone, l'auteur établit directement et sans approximation les expressions des admittances opérationnelles. Il propose ensuite les simplifications nécessaires pour les factoriser.

Il montre la supériorité des résultats obtenus par rapport à la théorie classique où on procède par approximations successives. Des neuf admittances, trois sont ainsi corrigées ; celle propre à l'inducteur est fortement simplifiée.

Quelques exemples montrent les avantages de cette nouvelle théorie simplifiée.

L'emploi de la machine synchrone autopilotée dans les entraînements à vitesse variable conduit pour les équipements de forte puissance à utiliser deux enroulements statoriques couplés en double étoile.

L'auteur montre comment modéliser cette machine et en calculer les réactances et constantes de temps. Il permet ainsi de raccrocher la théorie de la machine double étoile à celle qu'il a établie pour la machine simple étoile.

Il utilise son modèle pour l'étude du régime permanent et de divers régimes transitoires.

Mots clé :

Machine synchrone, Modèle mathématique, Régime équilibré, Admittances, Réactances, Machine double étoile.