

50376
1984
239

50376.
4984.
839.

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE 3^{ème} CYCLE

INFORMATIQUE

par

Khalil JAHIDI



MODELE DE CONTROLE ET D'ANIMATION DE SYSTEMES MECANQUES POUR L'INFORMATIQUE GRAPHIQUE

Thèse soutenue le 22 novembre 1984 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

C. CARREZ
V. CORDONNIER
F. PARSY
M. MERIAUX
G. PLATEAU

Président
Rapporteur
Examineur
Examineur
Examineur

P R O F E S S E U R S C L A S S E E X C E P T I O N N E L L E

M. CONSTANT Eugène	I.E.E.A.
M. FOURET René	Physique
M. GABILLARD Robert	I.E.E.A.
M. MONTREUIL Jean	Biologie
M. PARREAU Michel	Mathématiques
M. TRIDOT Gabriel	Chimie
M. VIVIER Emile	Biologie
M. WERTHEIMER Raymond	Physique

P R O F E S S E U R S l è r e c l a s s e

M. BACCHUS Pierre	Mathématiques
M. BEAUFILS Jean-Pierre (dét.)	Chimie
M. BIAYS Pierre	G.A.S.
M. BILLARD Jean (dét.)	Physique
M. BOILLY Bénoni	Biologie
M. BOIS Pierre	Mathématiques
M. BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M. BOUGHON Pierre	Mathématiques
M. BOURIQUET Robert	Biologie
M. BREZINSKI Claude	I.E.E.A.
M. CELET Paul	Sciences de la Terre
M. CHAMLEY Hervé	Biologie
M. COEURE Gérard	Mathématiques
M. CORDONNIER Vincent	I.E.E.A.
M. DEBOURSE Jean-Pierre	S.E.S.
M. DYMENT Arthur	Mathématiques

PROFESSEURS lère classe (suite)

M. ESCAIG Bertrand	Physique
M. FAURE Robert	Mathématiques
M. FOCT Jacques	Chimie
M. GRANELLE Jean-Jacques	S.E.S.
M. GRUSON Laurent	Mathématiques
M. GUILLAUME Jean	Biologie
M. HECTOR Joseph	Mathématiques
M. LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M. LACOSTE Louis	Biologie
M. LAVEINE Jean Pierre	Sciences de la Terre
M. LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique
M. LHOMME Jean	Chimie
M. LOMBARD Jacques	S.E.S.
M. LOUCHEUX Claude	Chimie
M. LUCQUIN Michel	Chimie
M. MIGEON Michel Recteur à Grenoble	E.U.D.I.L.
M. MIGNOT Fulbert (dét.)	Mathématiques
M. PAQUET Jacques	Sciences de la Terre
M. PROUVOST Jean	Sciences de la Terre
M. ROUSSEAU Jean-Paul	Biologie
M. SALMER Georges	I.E.E.A.
M. SEGUIER Guy	I.E.E.A.
M. SIMON Michel	S.E.S.
M. STANKIEWICZ François	S.E.S.
M. TILLIEU Jacques	Physique
M. VIDAL Pierre	I.E.E.A.
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mathématiques

P R O F E S S E U R S 2ème classe

M. ANTOINE Philippe	Mathématiques (Calais)
M. BART André	Biologie
Mme BATTIAU Yvonne	Géographie
M. BEGUIN Paul	Mathématiques
M. BELLET Jean	Physique
M. BERZIN Robert	Mathématiques
M. BKOUCHE Rudolphe	Mathématiques
M. BODARD Marcel	Biologie
M. BOSQ Denis	Mathématiques
M. BRASSELET Jean-Paul	Mathématiques
M. BRUYELLE Pierre	Géographie
M. CAPURON Alfred	Biologie
M. CARREZ Christian	I.E.E.A.
M. CAYATTE Jean-Louis	S.E.S.
M. CHAPOTON Alain	C.U.E.E.P.
M. COQUERY Jean-Marie	Biologie
Mme CORSIN Paule	Sciences de la Terre
M. CORTOIS Jean	Physique
M. COUTURIER Daniel	Chimie
M. CROSNIER Yves	I.E.E.A.
M. CURGY Jean-Jacques	Biologie
Mle DACHARRY Monique	Géographie
M. DAUCHET Max	I.E.E.A.
M. DEBRABANT Pierre	E.U.D.I.L.
M. DEGAUQUE Pierre	I.E.E.A.
M. DELORME Pierre	Biologie
M. DELORME Robert	S.E.S.
M. DE MASSON D'AUTUME Antoine	S.E.S.
M. DEMUNTER Paul	C.U.E.E.P.

PROFESSEURS 2ème classe (Suite 1)

M. DENEL Jacques	I.E.E.A.
M. DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques (Calais)
Mlle DESSAUX Odile	Chimie
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie
M. DHAINAUT André	Biologie
Mme DHAINAUT Nicole	Biologie
M. DORMARD Serge	S.E.S.
M. DOUKHAN Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M. DUBOIS Henri	Physique
M. DUBRULLE Alain	Physique (Calais)
M. DUBUS Jean-Paul	I.E.E.A.
M. FAKIR Sabah	Mathématiques
M. FONTAINE Hubert	Physique
M. FOUQUART Yves	Physique
M. FRONTIER Serge	Biologie
M. GAMBLIN André	G.A.S.
M. GLORIEUX Pierre	Physique
M. GOBLOT Rémi	Mathématiques
M. GOSSELIN Gabriel (dét.)	S.E.S.
M. GOUDMAND Pierre	Chimie
M. GREGORY Pierre	I.P.A.
M. GREMY Jean-Paul	S.E.S.
M. GREVET Patrice	S.E.S.
M. GUILBAULT Pierre	Biologie
M. HENRY Jean-Pierre	E.U.D.I.L.
M. HERMAN Maurice	Physique
M. JACOB Gérard	I.E.E.A.
M. JACOB Pierre	Mathématiques
M. JEAN Raymond	Biologie
M. JOFFRE Patrick	I.P.A.

PROFESSEURS 2ème classe (suite 2)

M. JOURNEL Gérard	E.U.D.I.L.
M. KREMBEL Jean	Biologie
M. LANGRAND Claude	Mathématiques
M. LATTEUX Michel	I.E.E.A.
Mme LECLERCQ Ginette	Chimie
M. LEFEVRE Christian	Sciences de la Terre
Mle LEGRAND Denise	Mathématiques
Mle LEGRAND Solange	Mathématiques (Calais)
Mme LEHMANN Josiane	Mathématiques
M. LEMAIRE Jean	Physique
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique
M. LOSFELD Joseph	C.U.E.E.P.
M. LOUAGE Francis(dét.)	E.U.D.I.L.
M. MACKE Bruno	Physique
M. MAIZIERES Christian	I.E.E.A.
M. MESSELYN Jean	Physique
M. MESSERLIN Patrick	S.E.S.
M. MONTEL Marc	Physique
Mme MOUNIER Yvonne	Biologie
M. PARSY Fernand	Mathématiques
Mle PAUPARDIN Colette	Biologie
M. PERROT Pierre	Chimie
M. PERTUZON Emile	Biologie
M. PONSOLLE Louis	Chimie
M. PORCHET Maurice	Biologie
M. POVY Lucien	E.U.D.I.L.
M. RACZY Ladislas	I.E.E.A.
M. RAOULT Jean François	Sciences de la Terre
M. RICHARD Alain	Biologie

PROFESSEURS 2ème Classe (suite 3)

M. RIETSCH François	E.U.D.I.L.
M. ROBINET Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M. ROGALSKI Marc	Mathématiques
M. ROY Jean-Claude	Biologie
M. SCHAMPS Joël	Physique
Mme SCHWARZBACH Yvette	Mathématiques
M. SLIWA Henri	Chimie
M. SOMME Jean	G.A.S.
Mle SPIK Geneviève	Biologie
M. STAROSWIECKI Marcel	E.U.D.I.L.
M. STERBOUL François	E.U.D.I.L.
M. TAILLIEZ Roger	Institut Agricole
Mme TJOTTA Jacqueline (dét.)	Mathématiques
M. TOULOTTE Jean-Marc	I.E.E.A.
M. TURRELL Georges	Chimie
M. VANDORPE Bernard	E.U.D.I.L.
M. VAST Pierre	Chimie
M. VERBERT André	Biologie
M. VERNET Philippe	Biologie
M. WALLART Francis	Chimie
M. WARTEL Michel	Chimie
M. WATERLOT Michel	Sciences de la Terre
Mme ZINN JUSTIN Nicole	Mathématiques

CHARGES DE COURS

M. ADAM Michel

S.E.S.

CHARGES DE CONFERENCES

M. BAFCOP Joël

I.P.A.

M. DUVEAU Jacques

S.E.S.

M. HOFACK Jean

I.P.A.

M. LATOUCHE Serge

S.E.S.

M. MALAUSSENA DE PERNO Jean-Louis

S.E.S.

M. NAVARRE Christian

I.P.A.

M. OPIGEZ Philippe

S.E.S.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur C. CARREZ, d'abord pour m'avoir fait l'honneur de présider le Jury de cette Thèse, puis pour ses critiques et conseils concernant ce travail.

J'exprime ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur V. CORDONNIER pour m'avoir accueilli au sein de son équipe, proposé ce sujet de Thèse et guidé par ses nombreux conseils et encouragements.

Que Monsieur M. MERTIAUX Chargé de Recherche au C.N.R.S, trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour sa disponibilité et le soutien qu'il a su m'apporter pour l'élaboration et la rédaction de cette Thèse.

Je remercie vivement Monsieur le Professeur F. PARSY et Monsieur G. PLATEAU Maître-Assistant pour l'honneur qu'ils me font en participant à ce Jury.

Je remercie également Madame VANDROEMME qui a assuré avec beaucoup de soin, de gentillesse et de patience la préparation matérielle de ce document, ainsi que Monsieur H. GLANC qui en a assuré le tirage avec compétence.

PLAN

INTRODUCTIONPARTIE I : ETUDES PRELIMINAIRES

- I. INFORMATIQUE GRAPHIQUE ET ANIMATION
- II. ASPECTS MECANIQUES
- III. ASPECTS MATHEMATIQUES

PARTIE II : APPLICATION A L'ANIMATION

- IV. LA SCENE
- V. MOUVEMENT : LES CHOIX STRUCTURELS
- VI. CONSTRUCTION DE LA SCENE ET MISE EN OEUVRE DU MOUVEMENT

CONCLUSION FINALEANNEXES :

- I. LES CONCEPTS DE THEORIE DES GRAPHES UTILISES
- II. UNE METHODE D'ANALYSE ADAPTEE AUX TRONCS SEQUENTIELS

INTRODUCTION

L'image fut de tout temps un intermédiaire de communication idéal entre les hommes. L'avènement de l'ère de la communication vidéo a renforcé cette position. Contrairement à l'écriture, elle favorise l'appréhension d'un message, d'un phénomène ou d'un résultat de manière globale.

L'implication de *l'image* en informatique apparaît à ce stade un phénomène tout-à-fait naturel puisqu'elle favorise le dialogue entre l'homme et la machine. A l'opposé et par voie de conséquence, nous assistons à l'implication croissante de *l'informatique* dans le monde des images et plus particulièrement des images artistiques (dessin animé, cinéma, télévision, publicité,...), permettant ainsi de mettre au service de l'image la puissance des machines.

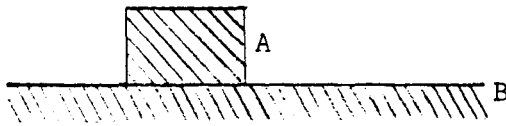
La production d'images dynamiques à l'aide de l'ordinateur (que les images soient une fin en soi ou un intermédiaire de dialogue entre l'homme et la machine) connaît un véritable essort. L'ordinateur utilisé dans le film artistique décharge le concepteur des tâches fastidieuses, mais surtout ouvre d'autres champs à la créativité. L'illustration par l'image animée d'un phénomène dynamique par exemple, est plus expressive que la projection de la séquence de diapositives qui traitent du même phénomène et plus encore que la liste des valeurs qui traduisent son évolution. Cela fait de l'image dynamique un moyen pédagogique privilégié en vue de la compréhension et du transfert du savoir.

Présentation de l'étude

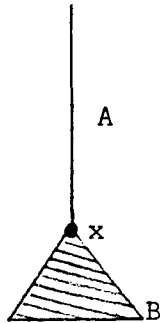
Indépendamment des problèmes liés à la production effective d'un film d'animation par ordinateur, un des problèmes fondamentaux de l'AAO* est celui du *contrôle* du mouvement des *objets animés*. Une des méthodes couramment utilisée hérite des techniques manuelles de fabrication de dessins animés et procède par interpolation entre dessins clé. L'autre technique consiste à agir directement sur les objets que l'on désire animer. Nous parlerons de *contrôle explicite*, et c'est le cadre de l'étude proposée.

* Animation Assistée par Ordinateur.

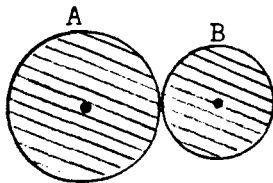
Nous proposons un modèle pour l'animation par le mouvement de "scènes graphiques" composées "d'acteurs mécaniques"* . Ces derniers sont formés d'éléments solides liés entre-eux par des liaisons de type rotation, glissement ou engrenage. En voici quelques exemples simples :



: Acteur formé d'un objet A qui glisse sur un plan B.



: Acteur formé d'un objet A dont le seul mouvement possible est une rotation autour de B, centrée en x.



: Couple de transmission où la rotation d'un des éléments entraîne la rotation de l'autre (les axes sont supposés fixes).

Le système proposé est interactif. L'interaction s'établit d'abord au niveau de la création des objets de la scène, puis dans des limites qu'on définira au niveau de leur animation, laquelle est obtenue en agissant sur un sous-ensemble d'éléments appelés moteurs, le système déduisant la position des éléments restant.

Avant d'aborder la description du système lui-même, nous situons d'abord le contexte de l'étude et tentons de mettre en relief les outils qui l'ont rendue possible.

Il est principalement question dans cette première partie :

* Les mécanismes considérés sont des mécanismes plans.

- 1) Des concepts liés à l'informatique graphique en général et à l'animation assistée par ordinateur en particulier (Chapitre I).
- 2) De présenter ce qui a été pour nous un moyen de contrôle, la théorie des mécanismes et plus particulièrement les aspects structurels et cinématiques liés à cette théorie (Chapitre II et III).

La deuxième partie relative au système proposé comprend essentiellement les trois volets suivants :

- 1) Description et représentation interne d'une scène composée d'acteurs mécaniques (Chapitre IV).
- 2) Description de la structure mécanique des acteurs, où il est question de choix structurels (Chapitre V).
- 3) Construction de la scène et mouvement, où il est question des règles qui régissent l'assemblage des acteurs et d'une méthode d'étude de leur mouvement adaptée à leur structure (Chapitre VI).

Nous faisons enfin en conclusion l'état des faits (recherche et implémentation) et présentons quelques voies de recherche liées au système proposé et à l'animation en général.

CHAPITRE I

```
*****  
*  
* INFORMATIQUE GRAPHIQUE ET ANIMATION *  
*  
*****
```

INFORMATIQUE GRAPHIQUE ET ANIMATION

I.0. INTRODUCTION

I.1. SYNTHESE D'IMAGE ET SYSTEME GRAPHIQUE INTERACTIF

I.1.1. Synthèse d'image

I.1.2. Système graphique interactif

- a) *Architecture logicielle*
- b) *Architecture matérielle*

I.2. L'ANIMATION

I.2.1. Quelles images animer ?

I.2.2. Quelle animation ?

- a) *Les domaines d'utilisation*
- b) *Les différentes phases de l'animation*
- c) *La phase de production*
- d) *Nature des objets manipulés*
- e) *Les techniques du contrôle explicite*
- f) *Possibilités d'interaction pendant la phase de production*
- g) *Les problèmes liés à la restitution*

I.3. CONCLUSION

I.0. INTRODUCTION

Le but de ce chapitre est de situer à travers une littérature fort abondante [NEW 79], [FOL 82], [MOR 76], [MAR 82], [LUC 77], [CEA 82] le contexte graphique de notre étude.

Nous présentons d'abord la notion de synthèse d'image puis celle d'animation ou de synthèse d'images animées.

Le cadre logiciel et matériel d'une application graphique est lui aussi précisé.

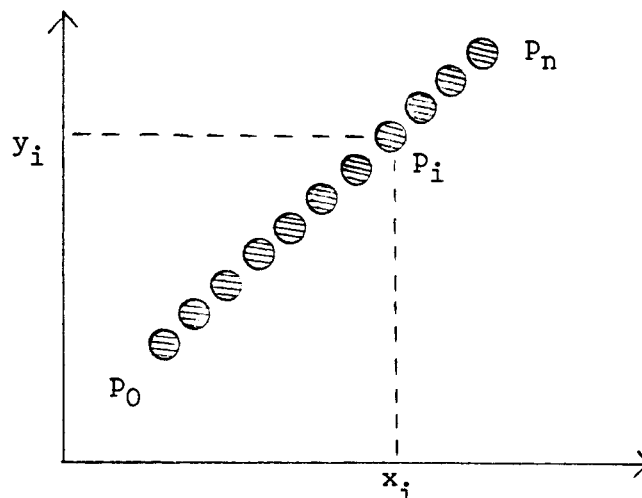
I.1. SYNTHÈSE D'IMAGE ET SYSTEME GRAPHIQUE INTERACTIF

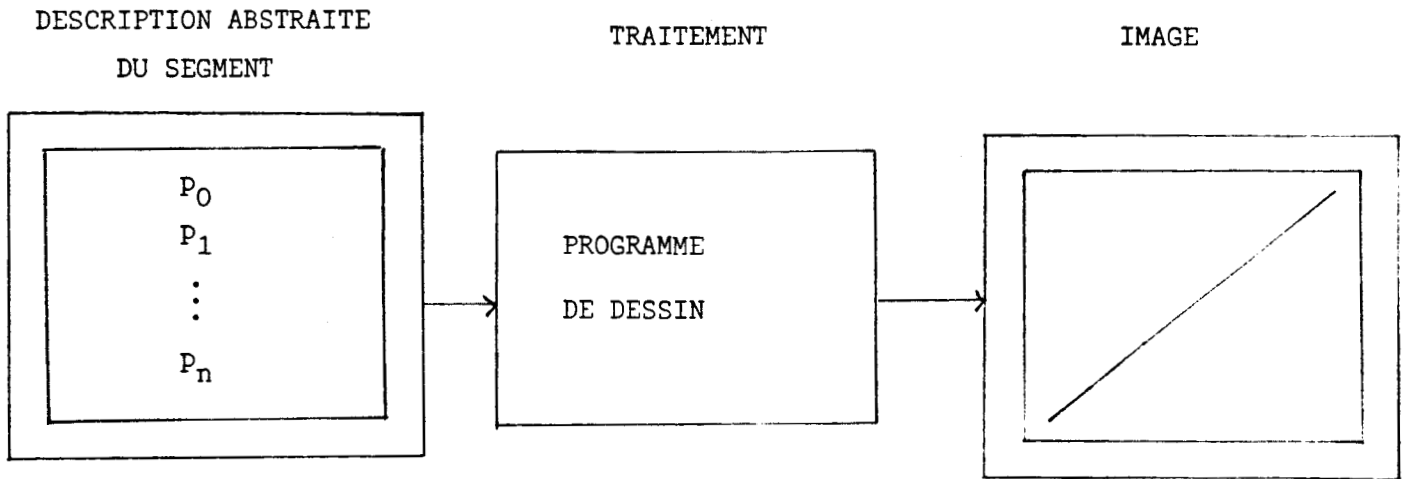
I.1.1. Synthèse d'image

L'image d'un segment de droite dans un plan résulte du dessin d'une suite de points p_0, p_1, \dots, p_n définis entre les extrémités p_0 et p_n .

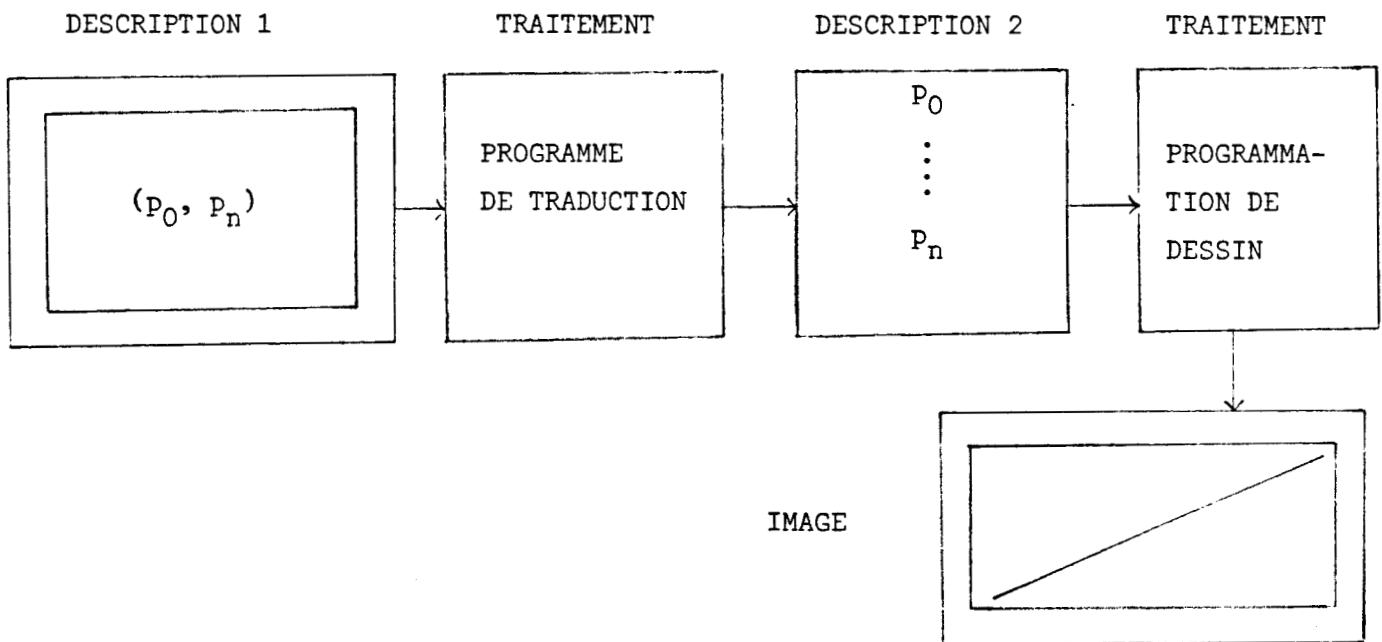
Plaçons-nous dans un référentiel et chaque point p_i pourra être représenté par le couple (x_i, y_i) de ses coordonnées. On est alors en mesure de représenter le segment de droite par la suite $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$. Si on dispose en outre de la primitive élémentaire qui permet de dessiner un point p_i à partir de (x_i, y_i) , le processus de création de l'image du segment obéira au schéma suivant :

- 1) Description abstraite du segment : liste de coordonnées.
- 2) Traitement : dessin successif de tous les points.
- 3) Présentation du résultat.





On représente plus simplement un segment de droite par ses extrémités (p_0, p_n) . On calcule alors la suite p_0, p_1, \dots, p_n à partir de ces extrémités. Le processus de création de l'image est alors le suivant :



Sans prétendre définir la notion de synthèse d'image, les deux exemples précédents en donnent toutefois les grandes lignes.

Ainsi définit-on la synthèse d'image comme le "processus de création d'une image sur un support matériel à partir d'une description abstraite". Ce processus peut être réalisé à travers plusieurs traitements et représentations intermédiaires. Il en découle que le cadre matériel d'un tel processus informatique comprend essentiellement trois composantes :

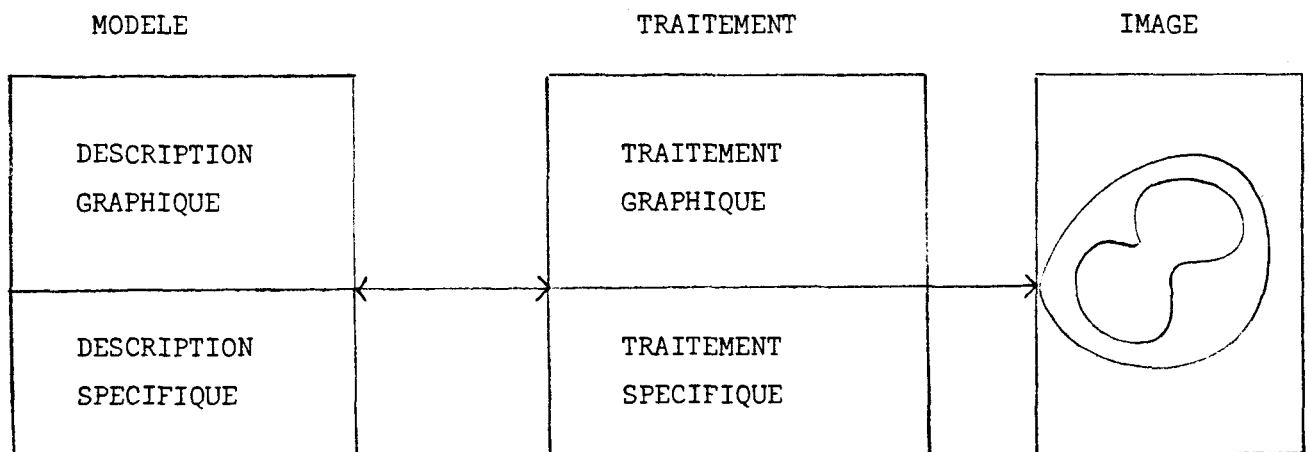
- Une ou plusieurs mémoires destinées à contenir la ou les représentations de l'image.
- Un processeur destiné à l'interprétation des différentes représentations de l'image et à son affichage.
- Un dispositif de visualisation destiné à communiquer l'image au monde extérieur.

I.1.2. Système graphique interactif

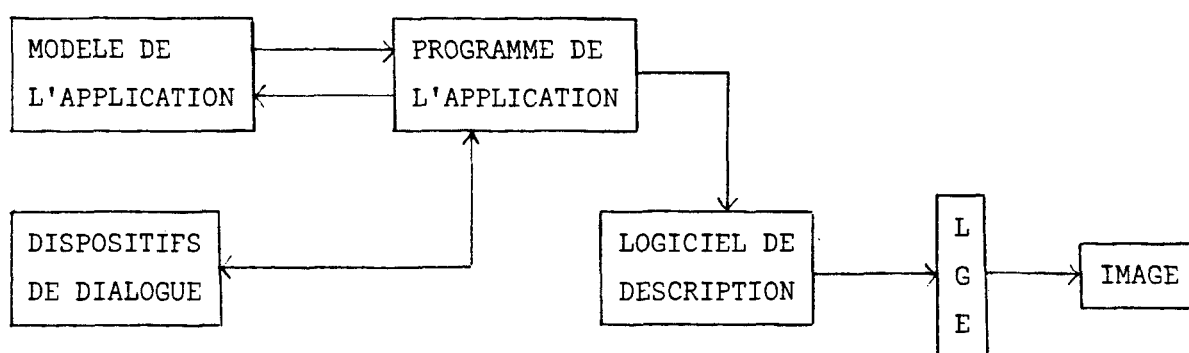
L'utilisation de la synthèse d'image est très fréquente dans le cadre d'applications informatiques où l'image est un support de communication idéal. Citons en exemple les applications liées à la conception assistée par ordinateur, à la simulation, à la production de films d'animation,...

a) Architecture logicielle

Lorsqu'on réunit la synthèse d'image à une application particulière, on parle de système graphique. Le dernier aura une nature purement graphique associée à une nature spécifique à l'application. On retrouve dans la structure logicielle d'un système graphique les trois composantes : Modèle de l'application, traitement et image.



Tel qu'il vient d'être décrit, un système graphique ne présenterait que peu d'intérêt. Aussi l'enrichit-on d'une quatrième composante, *l'interaction*, qui doit permettre à tout utilisateur de dialoguer avec le système, dialogue au cours duquel l'utilisateur peut modifier l'image représentée et/ou manipuler le modèle de l'application via des dispositifs de dialogue logiciels (menus alphanumériques et symboliques) et matériels (clavier, crayon lumineux, souris,...) spécifiques. La structure générale d'un système graphique interactif peut être donnée par le schéma suivant :



Le *modèle* est la description de l'univers de l'application, soit des objets de l'application et des éventuelles relations entre-eux.

Le *Programme de l'application* traite les données de l'application et gère l'interaction.

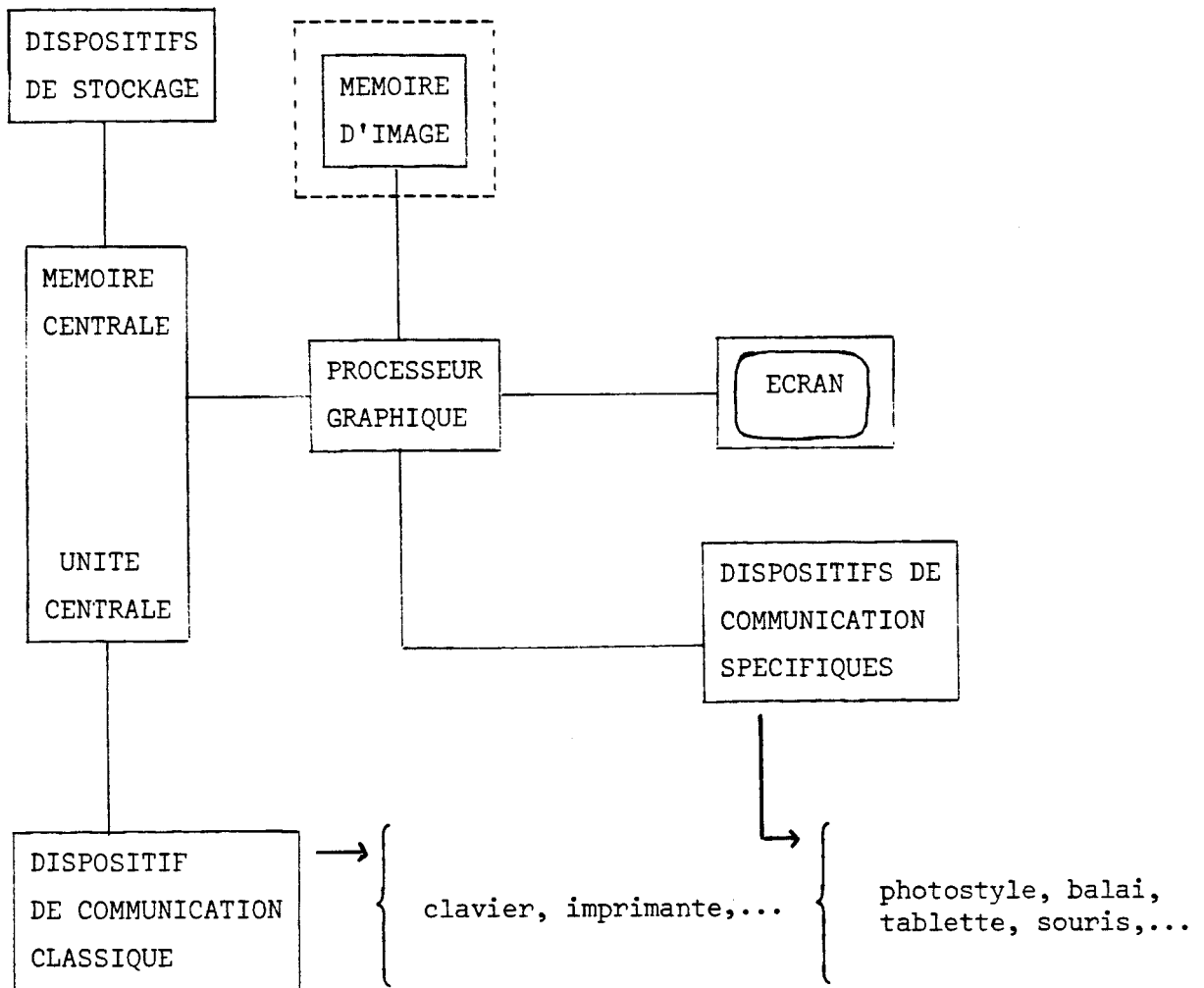
Le *logiciel de description* extrait les données graphiques, les interprète et envoie des commandes graphiques au *logiciel élémentaire (LGE)* qui lui se charge de produire l'image effective sur l'écran de visualisation.

b) Architecture matérielle

Un système graphique comprend essentiellement :

- Un ordinateur hôte, siège des traitements spécifiques à l'application.
- Un processeur spécialisé, le processeur graphique dont le rôle est de gérer l'écran, la mémoire d'image si elle existe, et d'interpréter les ordres graphiques.

- Une éventuelle mémoire d'image (voir plus loin).
- Des dispositifs de stockage de l'image (disque,...).
- Des dispositifs de communication (écran, tablette,...).



I.2. L'ANIMATION

L'image peut être un objet vivant caractérisé par une dynamique propre. Cette dynamique est le résultat de l'altération d'une représentation de l'image, dans le cadre d'une durée. Le temps prend ici toute son importance. On parlera d'animation ou de synthèse d'images animées.

I.2.1. Quelles images animer ?

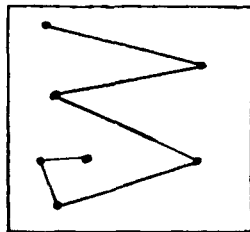
La création d'une image est le résultat du balayage de la surface de visualisation par un faisceau d'électrons. Cette image est fugitive, aussi est-il nécessaire de la régénérer cycliquement pour la maintenir. L'image dépend des caractéristiques propres de l'écran utilisé. On distingue ces derniers, d'une part selon le mode de balayage du faisceau électronique et d'autre part selon le dispositif de maintien de l'image.

a) Selon le mode de balayage

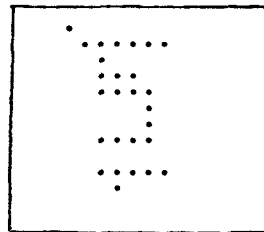
Les principaux modes de balayage utilisés sont le balayage cavalier et le balayage récurrent (ou de trame). Dans le cas du balayage cavalier, le faisceau d'électrons est asservi en x et y, ce qui permet de créer l'image par le déplacement de ce dernier. Le fonctionnement d'un tel écran rappelle celui d'une table traçante. On parle de "*dessin*" [CEA 82] pour désigner le résultat d'une visualisation sur ce type d'écran.

Dans le cas du balayage récurrent, le faisceau balaye successivement toutes les lignes de l'écran. L'image est créée ligne par ligne, une ligne étant elle-même créée point par point (en modifiant l'intensité ou la couleur du faisceau). On parle ici d'images point par point ou encore plus simplement "d'images" [CEA 82].

Balayage cavalier ("*dessin*")



Balayage TV ("*image*")



b) Selon le dispositif de maintien de l'image

On distingue deux types d'écran selon le dispositif de maintien :

- Les écrans à rafraîchissement. Pour maintenir l'image on la régénère cycliquement (30 à 60 f/s) à partir d'une mémoire qui contient un codage de l'image (mémoire d'entretien ou mémoire d'image ou mémoire de rafraîchissement).
- Les écrans à mémoire. Le dispositif de maintien de l'image est cette fois interne à l'écran (il n'existe pas de mémoire d'entretien).

c) Les écrans retenus

Les écrans retenus pour l'animation sont des écrans à rafraîchissement. Les écrans à mémoire sont inadaptés à la création de séquences d'images animées. Ceci est dû au fait que sur ce type d'écran l'image persiste quelques secondes après son effacement.

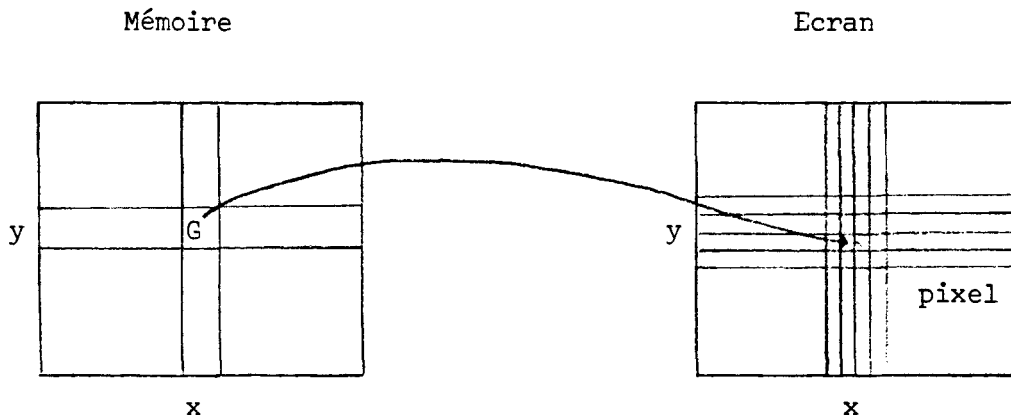
Balayage cavalier ou balayage récurrent ? Il semble que l'avantage aille aux écrans à balayage récurrent en raison essentiellement :

- De leur faible coût, allié à la possibilité d'utiliser des téléviseurs standards.
- De la stabilité des images qu'ils produisent, stabilité indépendante de la complexité de ces images (ce qui n'est pas le cas du balayage cavalier).
- Des grandes possibilités qu'ils offrent dans le domaine de la couleur (plusieurs millions de teintes différentes, ce qui est très au dessus des possibilités des écrans à balayage cavalier).
- De leur capacité à fournir des "images" avec de bonnes définitions* (1024 × 1024). Ceci est une définition moyenne pour le balayage cavalier, mais pour des applications où le volume d'information est faible, le récurrent a l'avantage d'offrir des images plus réalistes.

* Nombre maximum de points physiques de l'écran.

Ajoutons toutefois que pour l'animation d'images peu complexes (dessin ou trait), les écrans à balayage cavalier ont l'avantage d'être plus rapides.

Nous nous plaçons d'emblée dans le cadre de la production d'"images". La surface de visualisation se présente comme une matrice de points. Un point est appelé *pixel* ou élément d'image. Ce dernier est défini par un triplet (x, y, G) où (x, y) sont, grâce à l'existence d'un repère propre à l'écran, ses coordonnées et G un attribut graphique qui est selon le cas une couleur ou une intensité. Notons que dans le cas bien précis des écrans à balayage récurrent, la mémoire d'entretien est tout simplement une matrice dont chaque élément est en bijection avec un pixel de la surface de visualisation et contient l'information graphique relative à ce pixel.



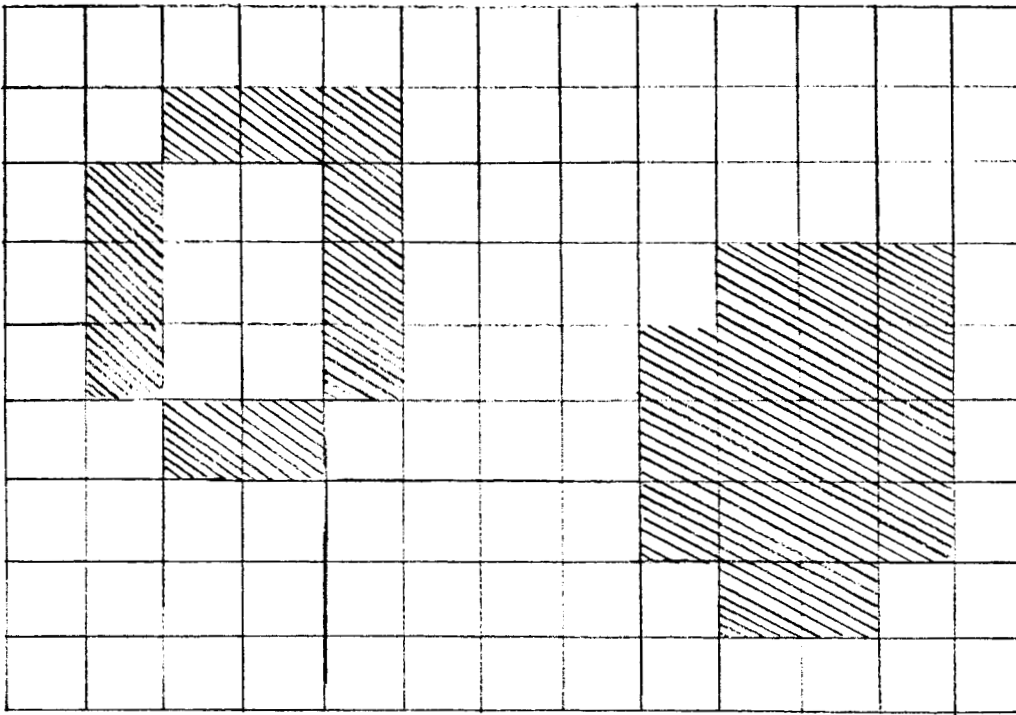
L'autre élément de base de l'image après le pixel est la tache. C'est un ensemble connexe de pixels muni d'attributs tels que forme, position, couleur, texture, ... Plus simplement, on peut considérer une tache comme une aire peinte de l'image définie par un contour et un intérieur.

I.2.2. Quelle animation ?

Nous tentons de cerner dans ce qui suit les différents domaines d'utilisation de l'image animée de synthèse ainsi que les différentes techniques liées à la production de telles images.

CONTOUR

CONTOUR + INTERIEUR



a) Les domaines d'utilisation

On peut les regrouper en cinq grandes familles :

- 1) *Artistique* : Production de films d'animation (dessin animés, films publicitaires, génériques, cinéma, jeux vidéo,...).
- 2) *Simulation* avec essentiellement les simulateurs de conduite.
- 3) *Compréhension* : Il s'agit de la visualisation de phénomènes dynamiques en vue de leur compréhension (films pédagogiques, scientifiques,...).
- 4) *Conception* : Visualisation de phénomènes dynamiques en vue de la conception assistée par ordinateur (conception de bras articulés, de trains d'atterrissage,...).
- 5) *Communication* : Téléécriture, journaux muraux,...

b) Les différentes phases de l'animation

L'animation d'un objet de la "scène graphique" est obtenue grâce à la modification d'un ensemble de paramètres qui le caractérisent d'une image à l'autre. L'animation comprend en général deux phases, une phase de *production* dont le but est le calcul de la séquence d'images à animer, une phase de *restitution* dont le but est de visualiser "à la chaîne" les images de la séquence afin d'obtenir un film d'animation [MAR 82].

c) La phase de production

Deux processus rentrent en jeu pendant cette phase, un processus de *contrôle* (ou de gestion de la dynamique des objets) qui est destiné à calculer l'ensemble des paramètres qui caractérisent l'évolution des objets, un processus de *création* au cours duquel sont calculés les pixels de l'image et est effectuée la mise à jour de la mémoire d'image (avec éventuellement stockage de l'image).

Nous pouvons séparer les techniques de production de l'animation en deux grandes familles en fonction des méthodes de contrôle employées :

- La production à contrôle *implicite* : technique utilisée en animation traditionnelle où les actions de contrôle et de création sont identiques. L'animateur crée des images clé auxquelles il affecte des instants clé, le système interpôle entre ces images clé et produit des images intermédiaires. Les recherches menées dans ce domaine, tendent justement à introduire des possibilités de contrôle au niveau de la production de ces images intermédiaires [BUR 76], [REE 81]

- La production à contrôle *explicite* : cette fois les processus de contrôle et de création sont totalement indépendants. On anime un objet en agissant directement sur ses paramètres par application d'opérateurs spécifiques.

C'est dans le cadre de la production à contrôle explicite que se place notre étude. L'animation d'un objet est dans ce cas étroitement liée à sa nature. C'est d'abord à cette nature que nous nous intéressons.

d) Nature des objets manipulés

1. Nature géométrique. On peut difficilement dissocier la nature géométrique des objets de celle de l'espace où ils évoluent. Ce dernier est un espace à 2, $2^{1/2}$ ou 3 dimensions. On parle d'animation 2D, $2D^{1/2}$ ou 3D. Dans le cas de l'animation $2D^{1/2}$, l'espace est formé de plusieurs plans parallèles à la surface de visualisation, les taches qui composent un objet de la scène sont affectées à un plan et ne peuvent évoluer qu'au sein de ce dernier. Les objets eux-mêmes peuvent enfin être bi ou tri-dimensionnels. Le tableau suivant résume les différents cas d'animation en fonction des natures géométriques des espaces et des objets.

ESPACE \ OBJET	2 D	$2 D^{1/2}$	3 D
2 D	animation 2 D	animation $2 D^{1/2}$	animation 3 D
3 D			animation 3 D

2. Nature mécanique des objets. La nature mécanique d'un objet influe sur le contrôle de cet objet. Ainsi en est-il par exemple, des objets indéformables auxquels on ne peut appliquer que des opérateurs qui conservent les distances. Nous reprenons ici la classification des objets selon leur nature mécanique proposée dans [SCH 84].

Le groupe des objets monolithiques. L'image d'un objet monolithique est faite d'un seul bloc. Il peut être *indéformable*, c'est le cas d'une pièce mécanique, ou d'un morceau de bois... ou *déformable*, c'est le cas d'une feuille de papier, d'une goutte d'eau, d'un ressort...

Le groupe des objets structurés. Ils sont formés d'objets monolithiques liés entre eux par des contraintes mécaniques. Trois cas se présentent selon la nature des objets monolithiques :

1^{er} cas : Ils sont tous indéformables, c'est le cas d'une maison dont les murs, le toit, les fenêtres... sont des blocs séparés rigidement liés les uns aux autres, d'une marionnette, (mais cette fois les objets monolithiques qui la composent possèdent un certain degré de liberté les uns par rapport aux autres), d'un bras articulé, d'une bicyclette, d'un mécanisme,...

2^{ème} cas : Ils sont tous déformables, c'est le cas d'une poupée en chiffon, d'un document dont la couverture est souple,...

3^{ème} cas : Ils sont déformables ou indéformables, c'est le cas d'un ressort auquel est accroché un poids, d'un parapluie dont la structure est formée d'éléments indéformables et dont la toile est un objet déformable, d'un arbre, d'un bateau à voile,...

e) Les techniques du contrôle explicite

Les techniques de contrôle explicite reposent essentiellement sur des lois mathématiques qui régissent l'évolution des objets. Cette évolution se traduit par des déformations, le mouvement ou bien sûr la modification d'attributs graphiques, et dépend de la nature de ces derniers. Dans le cas d'objets déformables, le contrôle de la déformation d'une barre de fer reposera sur les lois de la résistance des matériaux, celui de la propagation d'une onde, de l'écoulement d'un fluide ou du comportement d'un ressort utilisera les équations appropriées. Dans le cas d'objets monolithiques indéformables, les seuls opérateurs qu'on peut appliquer sont des opérateurs de transformations géométriques et notamment des isométries spatiales ou planes, ceci rend le contrôle de ces objets relativement simple. Quant aux objets structurés, leur contrôle n'est plus seulement relatif aux objets monolithiques qui les composent mais aussi aux interactions qui existent entre ces derniers, ainsi la balle qui rebondit lorsqu'elle touche le sol, ou le véhicule qui se déplace lorsqu'on actionne ses roues, ... Le contrôle du mouvement d'un objet structuré formé d'objets monolithiques tous indéformables, s'établit uniquement au niveau des contraintes qui lient ces derniers. On parle de *contrôle par moteurs* [ZEL 82], [BAD 80], cas qui se présentent par exemple en robotique ou en mécanique.

C'est dans le cadre de l'animation par moteurs que se situe notre étude.

f) Les possibilités d'interaction pendant la phase de production

Il est à noter l'importance de l'interaction pendant l'élaboration d'un film d'animation. Celle-ci permet à l'animateur d'avoir une idée rapide de l'évolution des objets qu'il anime. Il peut ainsi améliorer les résultats de son animation à travers des essais successifs avant de produire les images finales. L'interaction n'est rendue possible que par des délais de contrôle et de création "brefs". A cet égard, il est utile ici de préciser quelques notions temporelles :

- Le *temps réel* (TR) : une action est exécutée en temps réel (animation !) si le délai d'exécution de cette action est ≤ 40 ms.
- Le *temps différé bref* (TDB) : délai ≤ 10 s,
- Le *temps différé* (TD) : délai > 10 s.

Le tableau suivant résume les cas où l'interaction est possible pendant la phase de production.

CONTROLE / CREATION	TR	TDB	TD
TR	TR	TDB	TD
TDB	TDB	TDB	TD
TD	TD	TD	TD

La partie hachurée indique les situations où l'interaction est possible.

g) Les problèmes liés à la restitution

Tout films d'animation est la projection à une cadence donnée d'une suite d'images qui varient insensiblement. L'impression de fluidité dans le mouvement est dûe à la persistance rétinienne de l'oeil qui enchaîne les images de façon continue si la cadence est supérieure à 12 images/seconde. Cette cadence détermine la qualité du film produit. La qualité standard se situe autour de 25 images/seconde soit une image toutes les 40 ms, valeur qui détermine le temps réel animation.

Rappelons que c'est pendant la phase de restitution qu'est réalisée la projection. Notons d'abord que si la phase de production *permet le temps réel*, la phase de restitution est confondue avec la phase de création. On parle alors d'animation *directe temps réel* [MAR 82]. Elle est nécessaire dans certaines applications qui exigent et l'interactivité et le réalisme des images. Tel est le cas des simulateurs de pilotage [ALL 84], qui utilisent à cette fin, des systèmes câblés rapides alliés à une base de donnée graphique constituée au préalable. *Dans le cas contraire*, les images sont précalculées et stockées en mémoire auxiliaire. On parle alors d'animation *différée*. Deux cas se présentent, l'animation *différée temps réel* et l'animation *différée vue par vue* [MAR 82].

L'animation différée temps réel. Même en supposant que les images d'une séquence d'animation sont toutes calculées, la restitution du film en temps réel reste une opération difficile. Le passage d'une image à la suivante est une opération longue car elle nécessite la mise à jour dans la mémoire d'image de tous les pixels modifiés. Prenons un exemple. Soit une séquence d'animation d'une minute, à la cadence de 25 images/seconde, d'images $1024 \times 1024 \times 8$, le volume de stockage requis (à l'état brut) est de 1,5 G.octets et la vitesse de transfert 25 M.octets/seconde ! Cet exemple, volontairement exagéré situe bien le problème de la restitution à partir d'un support externe. En réalité, on cherchera à réduire les temps de transfert et les volumes de stockage en utilisant des techniques de compression d'image [MER 79], [HAC 77], [MAR 82], ou en minimisant, grâce à des techniques d'affichage appropriées, le nombre de pixels modifiés entre deux images successives, ou encore en utilisant des architectures spécialisées [ACH 80] [RED 84].

L'animation différée vue par vue

La restitution se résume ici à l'enregistrement des images de la séquence au rythme de leur production, à l'aide d'une caméra ou d'un vidéo-disque.

Cette technique est couramment utilisée car elle nécessite peu de performances du poste graphique.

I.3. CONCLUSION

Le cadre de notre étude est l'animation $2D^{1/2}$ à contrôle par moteur. Malgré les simplifications qu'implique ce type de contrôle (pas de déformations, contraintes entre les éléments), il reste un problème complexe. L'animation "brutale" d'un squelette humain nécessite le contrôle de près de 200 moteurs ! [ZEL 82]. Cet exemple bien que sortant du cadre de l'animation $2D^{1/2}$, situe bien le problème. Pour palier à ces difficultés, les acteurs sont en général pourvus d'un certain "savoir" programmé. On disposera de fonctions qui permettront d'actionner et de guider plusieurs moteurs à la fois ; c'est l'exemple du squelette qui sait marcher, courir, sauter,... [ZEL 82].

L'intérêt des acteurs mécaniques, outre le fait qu'ils représentent beaucoup d'objets du quotidien, réside dans l'automatisme naturel de leur contrôle. Les interactions qui existent entre les éléments d'un acteur mécanique sont telles que son comportement est défini par un sous-ensemble minimum de ces éléments, de sorte que son "savoir" est inhérent à sa structure.

Le chapitre suivant est consacré à l'étude des concepts de théorie des mécanismes nécessaires à la poursuite de ce travail.

CHAPITRE II

*
*
* ASPECTS MECANIKES *
*
*

ASPECTS MECANIQUES

II.0. INTRODUCTION

II.1. DEFINITIONS

II.1.1. Position du problème

II.1.2. Du solide au mécanisme plan

a) Le couple

b) La chaîne

c) Le mécanisme et sa représentation

II.2. ANALYSE STRUCTURELLE

II.2.1. Position du problème

II.2.2. Degré de mobilité d'un mécanisme

a) Degré de liberté

b) Degré de liaison

c) Application à l'analyse de la cohérence

II.3. ANALYSE CINEMATIQUE

II.3.1. Position du problème

II.3.2. Les différentes méthodes d'analyse

a) Méthodes graphiques

b) Méthodes analytiques ou vectorielles

c) Méthodes algébriques

II.3.3. Cas particulier des couples de transmission

II.4. CONCLUSION

II.0. INTRODUCTION

Le but de ce chapitre est de mettre en relief les notions de théorie des mécanismes qui nous semblent nécessaires pour animer une scène $2D^{1/2}$ composée d'acteurs mécaniques (nos sources bibliographiques sont essentiellement constituées de [ART 77] et [SHI 69]). Il existe en effet plusieurs types de mécanismes, dont la complexité est plus ou moins grande, qui sont plus ou moins adaptés à notre application, et plusieurs façons d'étudier leur mouvement. Ceci implique des choix quant à la structure des mécanismes utilisés et la manière dont l'analyse de leur mouvement pourra être entreprise.

II.1. DEFINITIONS

II.1.1. Position du problème

On définit la théorie des mécanismes* comme la science qui étudie la *géométrie* et le *mouvement* des mécanismes. Elle s'intéresse pour être plus précis à la *structure*, la *cinématique* et la *dynamique* des mécanismes par le biais de deux méthodes qui sont *l'analyse* et la *synthèse* des mécanismes.

La structure d'un mécanisme est la manière dont sont assemblés les divers éléments qui le composent. L'étude cinématique, elle, s'intéresse au comportement de ce dernier, lorsqu'on sollicite de l'extérieur un sous-ensemble de ses éléments appelés *moteurs*. Les paramètres qui interviennent dans cette étude sont le temps et les dimensions du mécanisme, alors que ceux qui interviennent dans une étude structurelle sont de nature plus qualitative : nombre d'éléments, nombre et type des assemblages, ... Si nous considérons maintenant les forces qui produisent le mouvement, en regard des masses des éléments, nous faisons une étude dynamique.

L'étude cinématique ou dynamique d'un mécanisme est dans tous les cas liée à sa structure.

* On entend par mécanisme une collection d'objets indéformables liés de manière à ce que l'ensemble produise un mouvement donné.

On regroupe sous le terme *analyse*, l'étude des caractéristiques structurelles, cinématiques ou dynamiques d'un mécanisme existant.

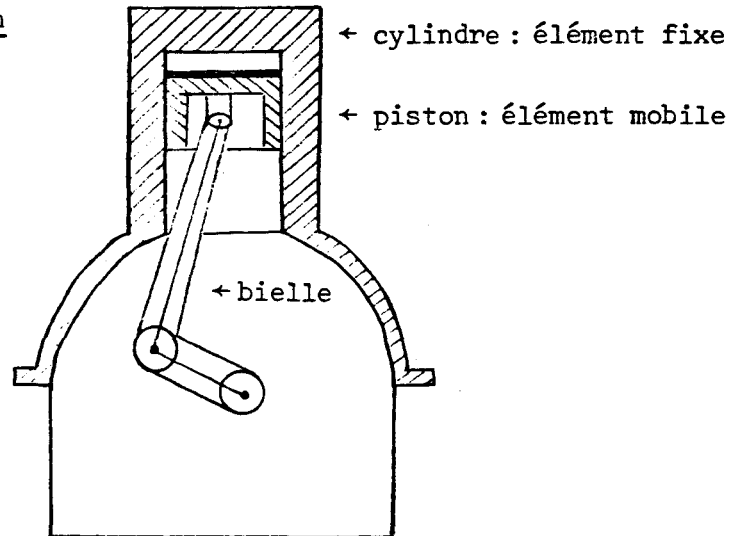
La synthèse des mécanismes s'intéresse à l'opposé, à la conception d'un mécanisme en vue d'une utilisation déterminée, en d'autres termes, quelles caractéristiques doit-on attribuer à un mécanisme pour qu'il ait tel comportement ?

Notre but est la production d'images animées dont les acteurs sont des mécanismes obtenus de manière interactive, sur un écran graphique, par assemblage d'objets élémentaires. Une fois l'acteur complètement construit, donc le mécanisme entièrement défini, nous lui ajoutons le mouvement. Par conséquent seul l'aspect analytique des mécanismes nous préoccupe. Le comportement futur de notre acteur n'est pas défini d'avance de manière précise, ni ne doit répondre à des contraintes sévères, comme cela pourrait être le cas dans le cadre d'un système de CAO mécanique. L'animateur a bien sûr une idée de ce comportement et peut ajuster les caractéristiques structurelles et cinématiques de son acteur afin d'approcher cette idée.

Il est bien entendu que l'aspect dynamique de l'analyse des mécanismes est lui aussi mis à l'écart, puisque seul le mouvement nous intéresse et non les forces qui le produisent. Le cadre de notre étude étant l'animation 2D^{1/2} (cf. Chapitre I), les mécanismes retenus sont les mécanismes plans c'est-à-dire ceux dont les éléments évoluent dans des plans parallèles.

II.1.2. Du solide au mécanisme plan

Un mécanisme est donc un objet composé d'éléments solides et par conséquent indéformables. On partage l'ensemble de ces éléments en deux groupes, le groupe des éléments mobiles (piston dans un moteur) et le groupe des éléments fixes (cylindre). L'ensemble des solides fixes est appelé bâti ; il est comptabilisé comme un seul élément.

Moteur à combustion

L'assemblage de deux éléments se fait toujours à travers un contact entre ceux-ci (exemple : piston/bielle). On appelle liaison un tel contact et couple cinématique un tel couple de solides assemblés. Le couple cinématique est après le solide, la structure de base du mécanisme. Ce dernier rend compte de la manière dont deux solides sont autorisés à se mouvoir l'un par rapport à l'autre. Les liaisons entraînent des contraintes sur les déplacements des éléments d'un solide.

Lorsqu'on assemble plusieurs éléments les uns avec les autres, on crée une chaîne cinématique. Un mécanisme est une chaîne cinématique.

a) Les couples cinématiques

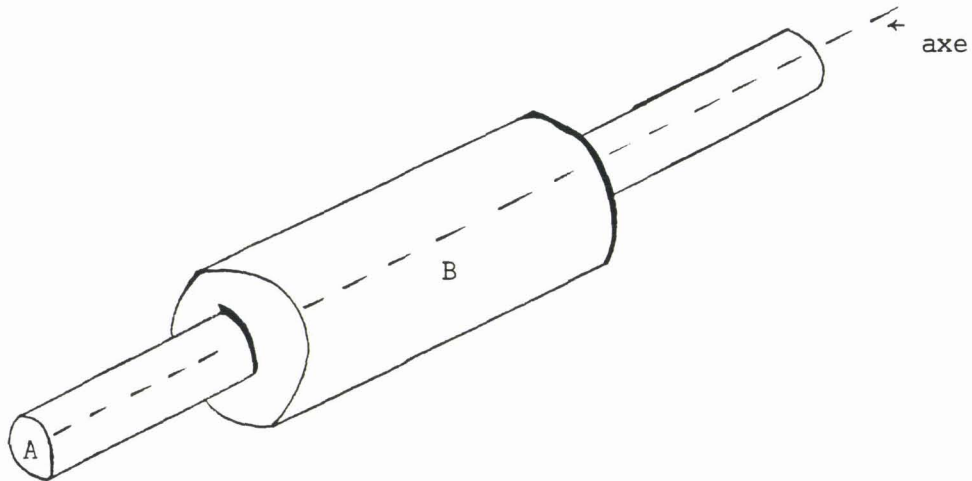
On réalise une première classification des couples cinématiques selon la nature géométrique des contacts entre les éléments du couple. Celle-ci fait apparaître deux classes : les couples inférieurs et les couples supérieurs.

1- Les couples inférieurs

Il y a deux types de couples inférieurs dans le cas des mécanismes plans, le couple rotoïde et le couple prismatique. La liaison entre les éléments du couple rotoïde est du type rotation, celle entre les éléments du couple prismatique est du type glissement.

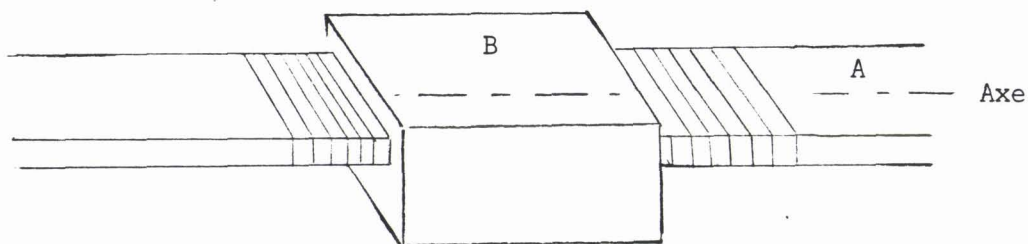
- Le couple rotoïde

Un tel couple est formé par deux cylindres en contact permanent. La géométrie de l'assemblage empêche le glissement d'un élément par rapport à l'autre. Le seul mouvement possible est un mouvement de rotation, autour d'un axe de rotation. Le couple bielle, piston est un exemple du couple rotoïde.



- Le couple prismatique

On peut schématiser un tel couple par le dessin suivant :



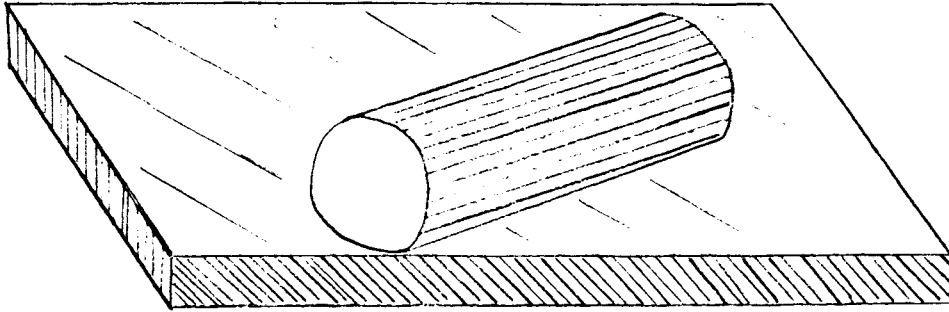
B glisse sur A dans la direction définie par l'axe de glissement. Le seul mouvement de B est un mouvement de translation, le long de cet axe.

2- Les couples supérieurs

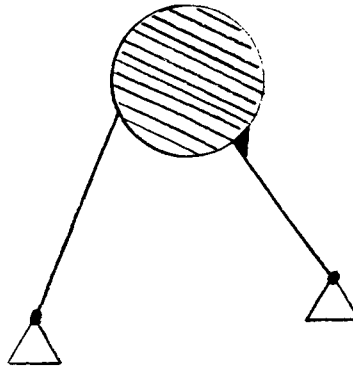
Le contact entre les éléments du couple se fait à travers une ligne ou un point.

En voici quelques exemples :

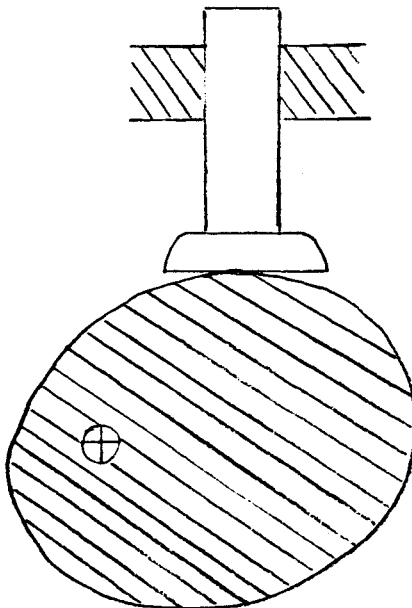
- Roulement sans glissement d'un cylindre sur un plan.



- Contact entre une courbe et un point.



- Mécanismes à cames : Exemple.



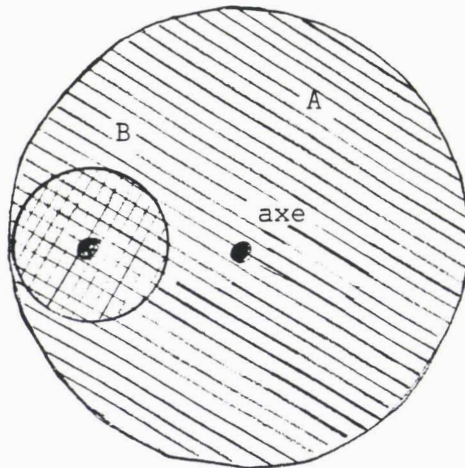
- Couples de transmission

Nous regroupons sous ce vocable les mécanismes de transmission par *engrenage*, *flexible* ou *friction* dont les axes des éléments du couple sont fixes et parallèles. Les éléments de tels couples sont circulaires. Chaque'un d'eux est assemblé par l'intermédiaire de son centre au bâti. L'un des éléments est menant, l'autre est mené. Ce sont les seuls couples supérieurs que nous retenons pour notre étude.

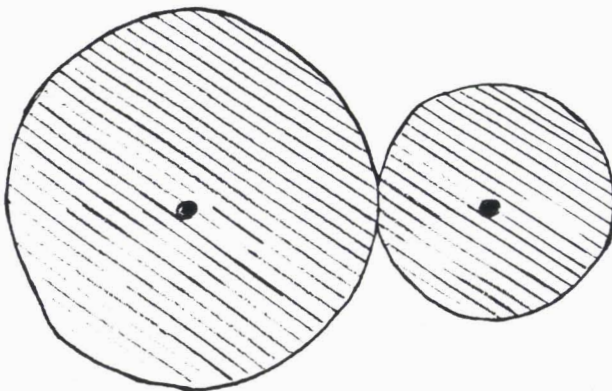
- Transmission par *engrenage* ou *friction* (sans glissement).

Le contact est réalisé par l'intermédiaire de la périphérie des éléments. Nous représentons ces couples de la même manière, l'étude cinématique étant la même pour l'un et pour l'autre.

Contact intérieur :



Contact extérieur :

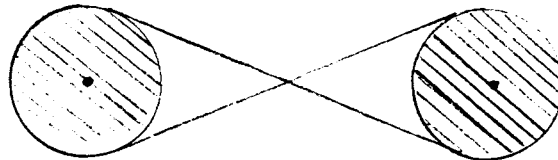


- Transmission par *flexible*.

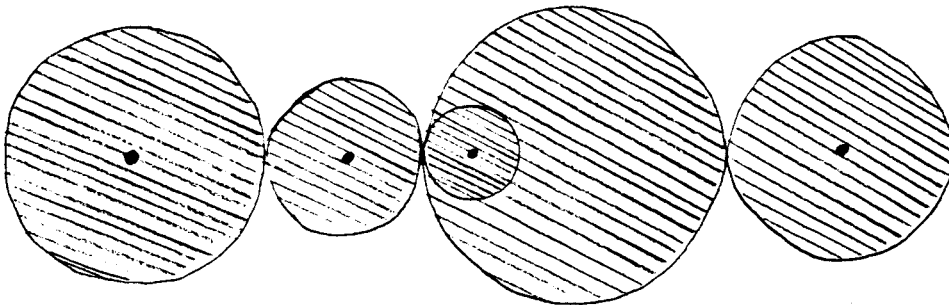
Directe :



Croisée :

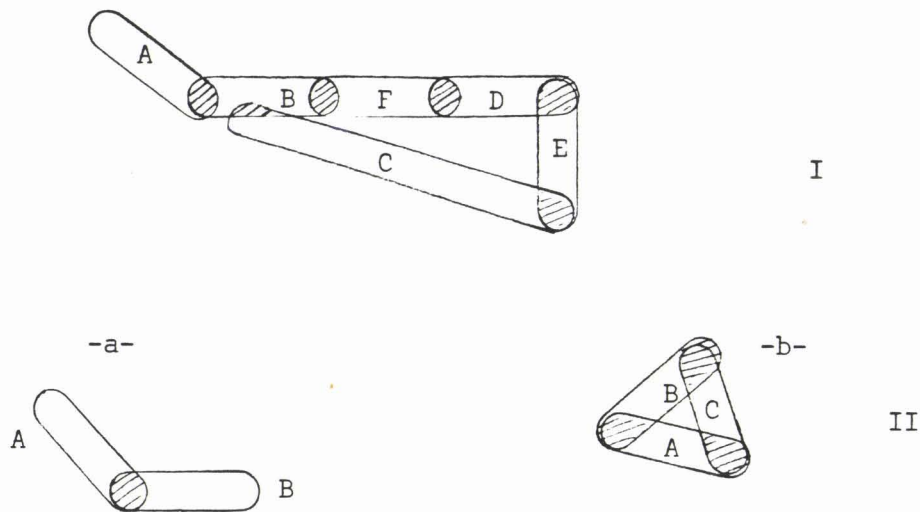


Lorsque plusieurs couples de transmission sont à la suite les uns des autres, on forme un train de transmission. Le mouvement du premier élément du train est transmis au dernier à travers les éléments intermédiaires.



b) La chaîne cinématique

Une chaîne cinématique est un ensemble d'éléments formant entre-eux des couples cinématiques tel que l'ensemble est "connexe".



L'objet I est une chaîne cinématique composée des éléments A, B, C, D, E et F, des couples (A, B), (B, C), (B, F), (F, D), (D, E), (E, C). L'objet II comporte deux chaînes cinématiques.

Une chaîne cinématique peut être ouverte ou fermée, élémentaire ou complexe :

Chaîne ouverte : Une chaîne est ouverte s'il existe au moins un élément qui n'appartient qu'à un seul couple (I et II-a).

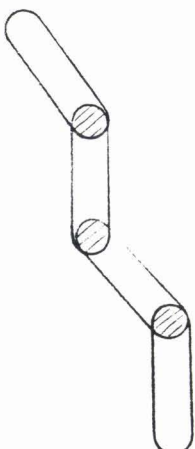
Chaîne fermée : une chaîne est fermée si elle n'est pas ouverte (II-b).

Chaîne élémentaire : Une chaîne est élémentaire si chacun de ses éléments appartient au plus à deux couples cinématiques.

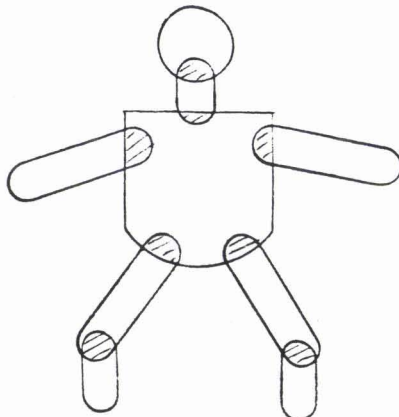
Chaîne complexe : Une chaîne est complexe si elle n'est pas élémentaire.

Nous appelons boucle une chaîne élémentaire fermée.

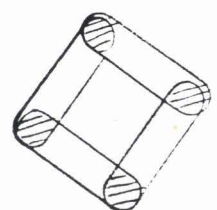
Chaîne élémentaire



Chaîne complexe



Boucle

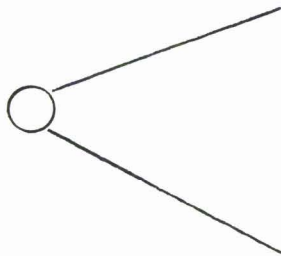


c) Le mécanisme et sa représentation

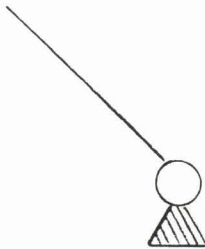
Un mécanisme est une chaîne cinématique particulière qui :

1. Admet un bâti.
2. Est tel que si n est le nombre total de ses éléments, la donnée du mouvement de $k \leq n$ éléments implique un mouvement unique pour les $n-k$ éléments restants. Les éléments dont le mouvement est donné sont appelés éléments moteurs. Ceux-ci forment obligatoirement des couples avec le bâti.

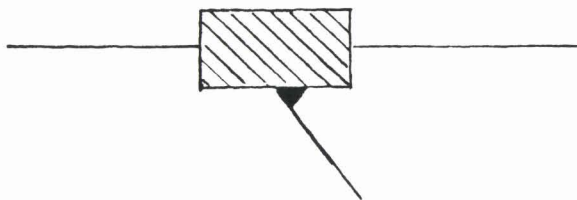
Le dessin de mécanismes réels est en général compliqué, fastidieux et, dans le cadre cinématique et structurel, porteur d'informations superflues. Aussi a-t-on l'habitude d'utiliser les représentations schématiques qui sont décrites ci-après :



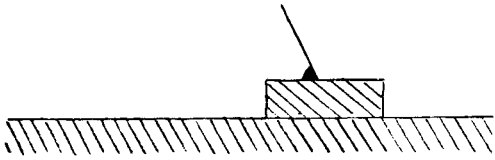
Couple rotoïde.



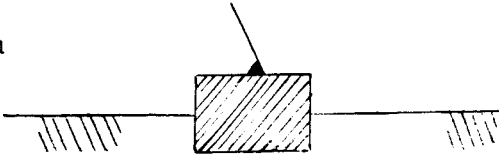
Couple rotoïde avec le bâti.



Couple prismatique



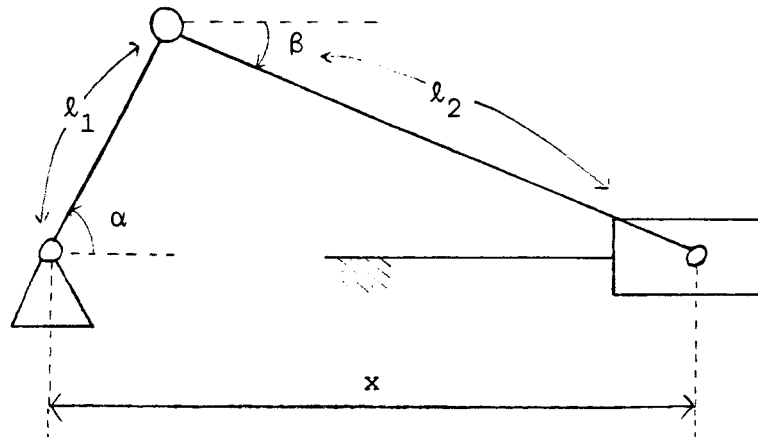
ou



Couple prismatique avec le bâti.

Les couples de transmission sont représentés comme nous l'avons indiqué.

La représentation schématique du mécanisme du moteur à combustion serait :



Cette représentation fait apparaître les caractéristiques géométriques (dimensions,...) des éléments qu'il faut prendre en compte lors de l'analyse du mouvement.

II.2. ANALYSE DE LA STRUCTURE DES MECANISMES PLANS

II.2.1. Position du problème

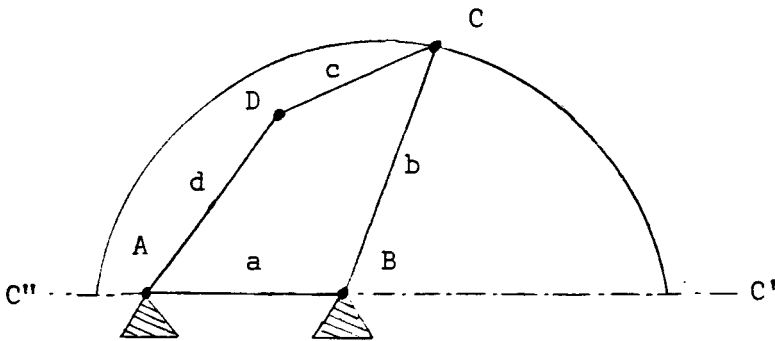
Un comportement non cohérent d'un objet mécanique peut avoir deux types de causes :

- 1) Causes structurelles : assemblages des éléments,...
- 2) Causes cinématiques : dimensions des éléments,...

Ce comportement non cohérent peut se traduire soit par un blocage, soit par une indétermination.

a) Blocage

Un blocage est la conséquence d'un mauvais assemblage (exemple : présence d'éléments admettant plus d'une liaison avec le bâti), ou d'une mauvaise définition des dimensions du mécanisme. Dans ce dernier cas le blocage peut se produire en cours d'évolution. En voici un exemple [BUH 79] :



BC est l'élément moteur.

On suppose $a \leq b$. Pour que C puisse parvenir à C' et C'', les triangles A C' D et A C'' D doivent exister.

C'est-à-dire qu'on doit avoir les relations :

$$a + b \leq c + d \quad (\text{A C' D})$$

$$|d - c| \leq b - a \quad (\text{A C'' D})$$

d'où les relations :

$$\begin{cases} a + b \leq c + d \\ d - c \leq b - a \\ c - d \leq b - a \end{cases}$$

Si ces relations ne sont pas satisfaites, une situation de blocage devient possible en cours d'évolution.

En ce qui nous concerne nous ne chercherons pas à détecter à la création du mécanisme ce type de blocage, ce dernier relève plutôt de la synthèse des mécanismes. Si un tel cas devait se produire, il se traduira par une impossibilité mathématique lors de l'analyse du mouvement du mécanisme. L'impossibilité apparaîtra au concepteur à travers le résultat sur l'image. Rappelons que notre objectif est l'animation graphique.

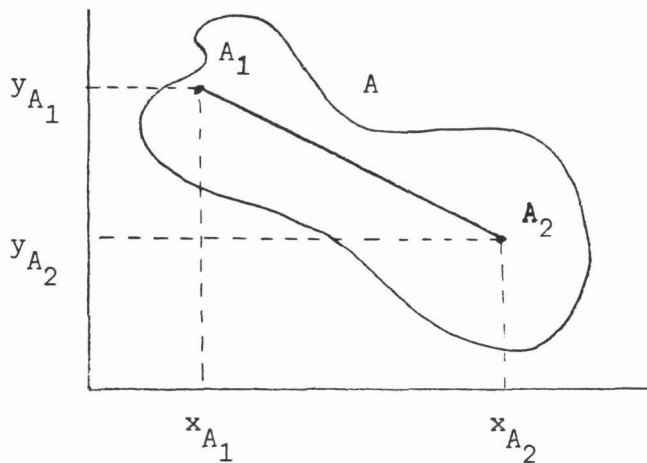
b) Indétermination

Un mécanisme est indéterminé si en figeant ses éléments moteurs, il existe encore des éléments mobiles. Comme le premier type de blocage, ce problème est de nature structurelle. L'analyse structurelle d'un mécanisme permet de déceler à l'assemblage des incohérences tels que le premier type de blocage et l'indétermination. Celle-ci s'avère nécessaire avant toute tentative d'analyse du mouvement.

II.2.2. Degré de mobilité d'un mécanisme

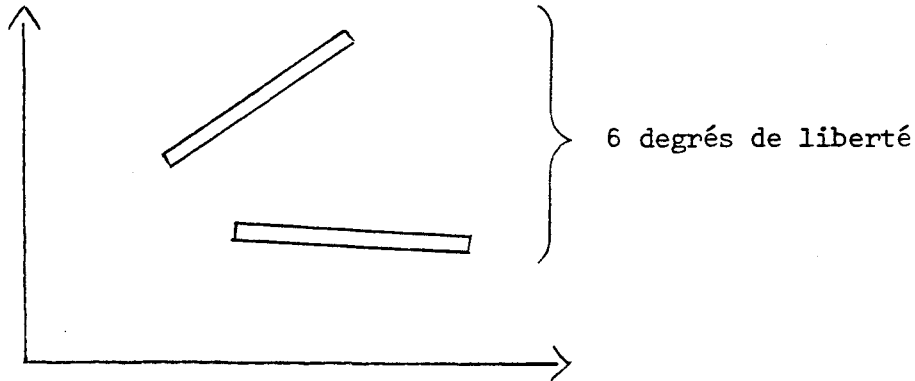
a) Degré de liberté

Un solide qui se déplace dans le plan à trois degrés de liberté.



Le solide A étant indéformable la distance $A_1 A_2$ est constante. Sa position dans le plan est entièrement définie par celles de A_1 et A_2 , soit par la connaissance de x_{A_1} , x_{A_2} , y_{A_1} , y_{A_2} . La distance $A_1 A_2$ étant constante, seuls trois paramètres sont finalement nécessaires pour déterminer la position d'un solide dans le plan. Un solide a donc trois degrés de liberté. On dira encore que sa position est entièrement déterminée par la composée d'une translation (2 paramètres) et d'une rotation (1 paramètre). Un solide fixe tel que le bâti a un degré de liberté nul.

Si l'on considère maintenant un objet composé de n solides totalement libres de se mouvoir les uns par rapport aux autres, le degré de liberté de l'ensemble est $3 \times n$.

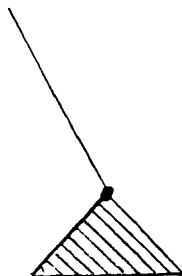


b) Degré de liaison

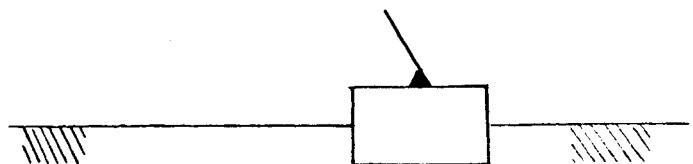
Lorsqu'on crée une liaison entre deux solides, on diminue le degré de liberté de l'ensemble, car la contrainte créée entraîne une limitation du mouvement relatif d'un solide par rapport à l'autre. Cette diminution du degré de liberté se mesure en degrés de liaison. Si on note S une telle quantité, alors le degré de liberté d'un objet composé de n solides est $3 \times n - S$ ($S \geq D$).

1- Cas des couples inférieurs

Les couples inférieurs qu'ils soient rotoïdes ou prismatiques induisent deux degrés de liaison. En effet lorsqu'on assemble un solide au bâti à travers un couple inférieur, on ne dispose plus que d'un seul mouvement relatif (rotation ou glissement). Le solide n'a plus qu'un degré de liberté, en d'autre terme, il suffit d'un seul paramètre pour déterminer sa position.



Bâti



Bâti

$$3n - S = 1$$

$$n = 1 \Rightarrow \underline{S = 2}$$

2- Cas des couples supérieurs

Ils induisent un seul degré de liaison [ARS 77].

c) Application à l'analyse de la cohérence

Considérons à présent un objet composé de n solides mobiles tel qu'il existe p_1 liaisons inférieures et p_2 liaisons supérieures, alors le degré de liberté de l'ensemble est $3 \times n - (2 \times p_1 + p_2)$.

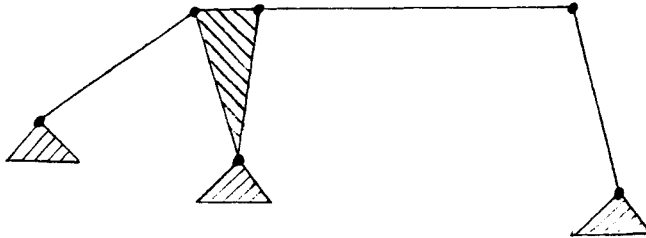
En effet :

- 1) Le degré de liberté de l'objet avant création des liaisons est $3 \times n$.
- 2) Une liaison supérieure induit un degré de liaison, d'où p_2 liaisons supérieures impliquent p_2 degrés de liaison.
- 3) Une liaison inférieure induit deux degrés de liaison, d'où p_1 liaisons inférieures impliquent $2p_1$ degrés de liaison.
- 4) Le degré de liaison total est donc $2p_1 + p_2$ et le degré de liberté de l'objet est $3n - (2p_1 + p_2)$.

Remarques :

- 1) Le degré de liberté indique le nombre de paramètres indépendants d'un objet.
- 2) Sachant qu'un mécanisme comporte obligatoirement un élément fixe (bâti) on utilise plutôt la formule $3(n-1) - (2p_1 + p_2)$ où n désigne tous les éléments du mécanisme bâti compris. Cette formule est connue sous le nom de "formule de Tchebychev".
- 3) Si nous notons d le degré de liberté total d'un mécanisme alors trois cas se présentent selon la valeur de d :

- $d = 0$: Il n'y a pas de paramètres indépendants dans le système. Tous ces derniers sont définis. Le système est dit isostatique. En pratique le mécanisme est bloqué, mais le calcul de la position des différents éléments est possible et le système admet une solution.

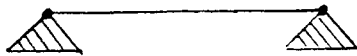


$$n = 5 \quad p_1 = 6 \quad p_2 = 0 \Rightarrow S = 12$$

$$d = 3 \times 4 - S = 0.$$

Bien que cette situation ait une solution mathématique, nous considérons que le mécanisme n'est pas cohérent, car le mouvement n'est pas possible.

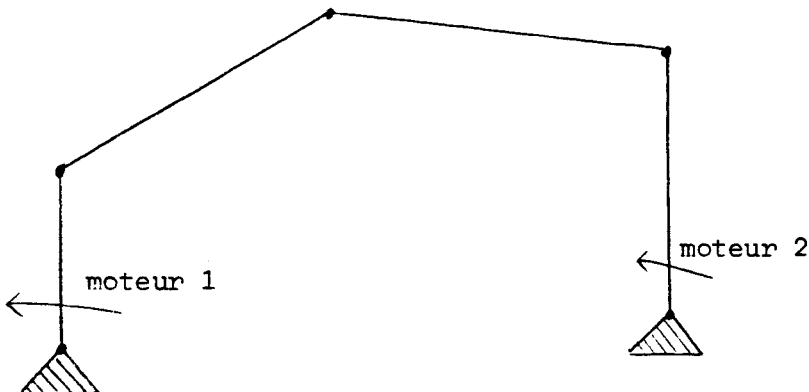
- $d < 0$: Le système est hyperstatique. Il est bloqué, mais il y a impossibilité mathématique.



$$n = 2 \quad p_1 = 2 \quad S = 4$$

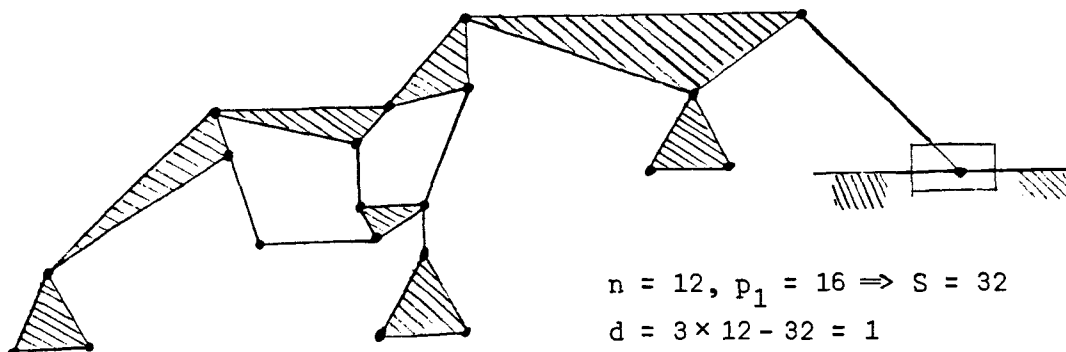
$$\Rightarrow d = -1$$

- $d > 0$: Le système est indéterminé. Pour analyser le mécanisme on se ramène à un système isostatique en fixant d paramètres. Le nombre de moteurs doit dans ce cas être égal à d .



$$n = 5, p_1 = 5, p_2 = 0 \Rightarrow d = 2$$

La formule de structure des mécanismes ne semble pas nécessaire à première vue pour des mécanismes simples, mais elle le devient dès que le mécanisme comporte plusieurs boucles. L'exemple suivant en atteste.



$$n = 12, p_1 = 16 \Rightarrow S = 32$$

$$d = 3 \times 12 - 32 = 1$$

Il ne semble pas à première vue évident que le mécanisme en question, comporte un seul degré de liberté.

Conclusion

Disposant de la formule de structure des mécanismes et des constatations précédentes, on déduit les règles que doit vérifier un ensemble de solides afin qu'il constitue un mécanisme cohérent.

- 1) L'ensemble doit constituer une chaîne cinématique.
- 2) L'ensemble doit comporter l'élément fixe.
- 3) Le degré de liberté 'd' de l'ensemble est strictement positif.
- 4) Le nombre m des moteurs est tel que $m = d$.

L'analyse structurelle consiste à vérifier ses quatre points. Lorsqu'il a été prouvé qu'un mécanisme est cohérent, on peut alors s'intéresser à l'analyse de son mouvement.

II.3. L'ANALYSE CINEMATIQUE

II.3.1. Position du problème

L'analyse cinématique d'un mécanisme est l'étude des mouvements de ses différents éléments sans tenir compte des forces qui les produisent. Les problèmes posés par cette étude sont :

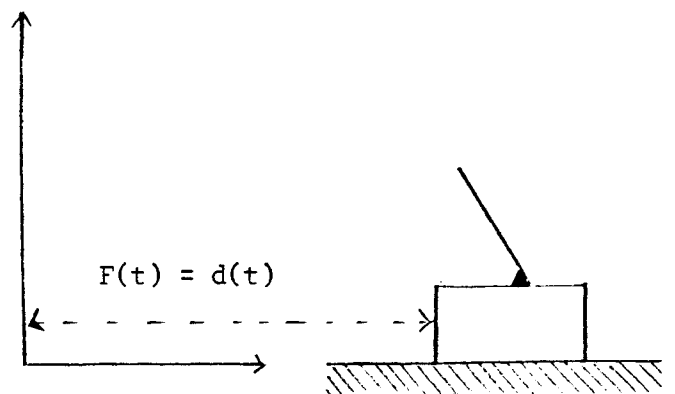
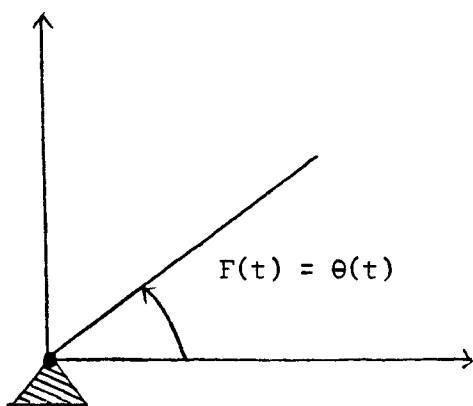
- La recherche des espaces parcourus par les différents éléments, c'est-à-dire le calcul de leur position à chaque étape du mécanisme en mouvement.
- Le problème des vitesses et des accélérations que nous ne retenons pas ici.

La description de la structure du mécanisme est une description qualitative. Cette dernière est insuffisante lors de l'analyse cinématique. Une description qui fait apparaître les dimensions des éléments ainsi que les paramètres qui décrivent leur position est dès lors nécessaire. On réalise alors une paramétrisation de tout le mécanisme. On associe un système invariable lié au bâti dans lequel sont calculées les positions. Les moteurs sont définis par des fonctions qui dépendent d'une variable temporelle t .

$$F : T \rightarrow \mathbb{R} \qquad T = \{t_0, t_1, \dots, t_n, \dots\}$$

$$t \rightarrow F(t)$$

Rappelons qu'un moteur forme nécessairement un couple avec le bâti. Selon le type de ce couple (rotoïde ou prismatique), $F(t)$ mesure l'angle du moteur dans le système de référence, ou la distance de celui-ci à l'origine de ce système.



II.3.2. Les différentes méthodes d'analyse

Il existe diverses méthodes d'analyse cinématique des mécanismes.

On peut les regrouper dans trois catégories :

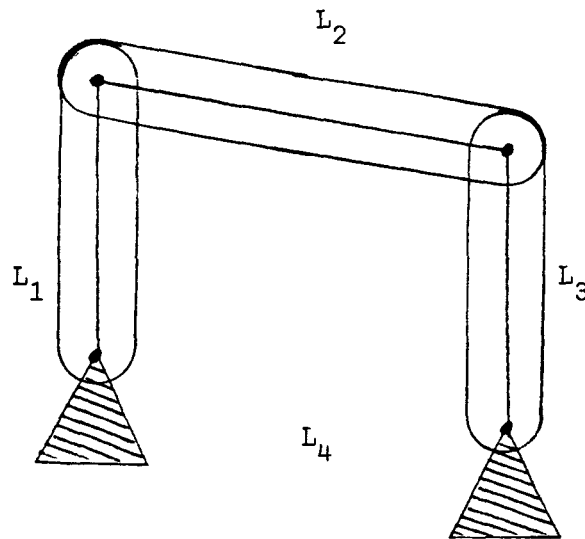
a) Méthodes graphiques [SHI 69]

Elle partent du dessin à l'échelle de la représentation schématique du mécanisme. La résolution d'un problème cinématique est faite par construction géométrique. Une interprétation visuelle est alors nécessaire pour tirer des conclusions. Celle-ci n'est pas immédiate. Il apparaît clairement que ces méthodes ne sont pas adaptées au cas qui nous préoccupe.

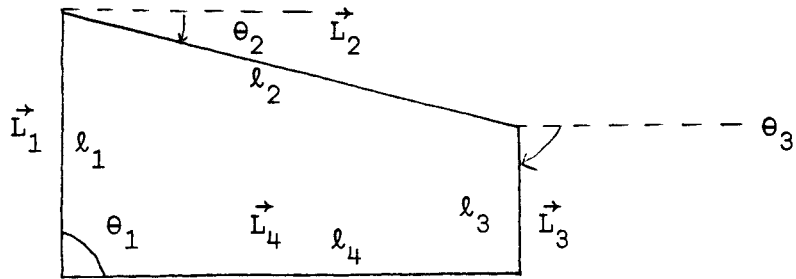
b) Méthodes analytiques ou vectorielles [SHI 69], [CHA 63]

Celles-ci sont caractérisées par une représentation vectorielle des éléments du mécanisme. Chaque élément du mécanisme est pris individuellement et est représenté par un vecteur qu'on exprime en coordonnées polaires par le couple formé de son module et de son argument.

Exemple 1

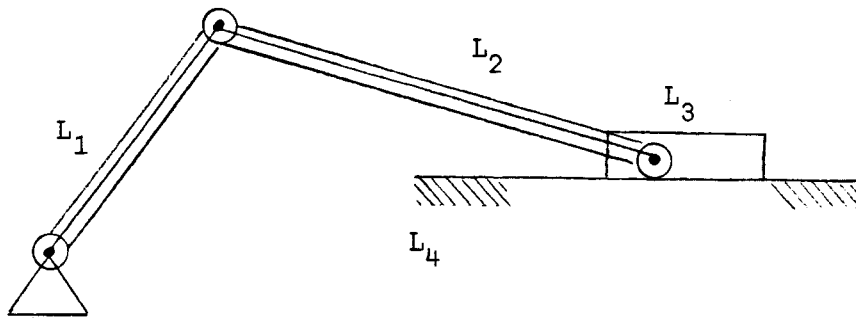


$$L_i \rightarrow \vec{L}_i = (P_i, \theta_i)$$

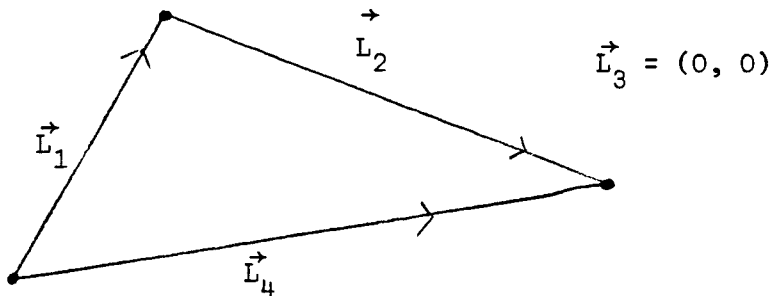


Paramètres du mécanisme : $\begin{cases} l_1, l_2, l_3, l_4, \theta_4 \text{ invariables} \\ \theta_1, \theta_2, \theta_3 \text{ variables} \end{cases}$

Exemple 2 :



$$L_i \rightarrow L_i = (l_i, \theta_i)$$



Les paramètres sont : $\begin{cases} l_1, l_2, l_3, \theta_4 \text{ invariables} \\ \theta_1, \theta_2, l_4 \text{ variables} \end{cases}$

Méthode de résolution

L'analyse cinématique d'un mécanisme, nécessite une décomposition en boucles de ce dernier. On traduit le caractère fermé d'une boucle par la sommation des vecteurs associés à ses éléments. L'analyse de la boucle revient à la résolution de l'équation vectorielle obtenue. Les équations associées aux mécanismes des exemples 1 et 2 sont :

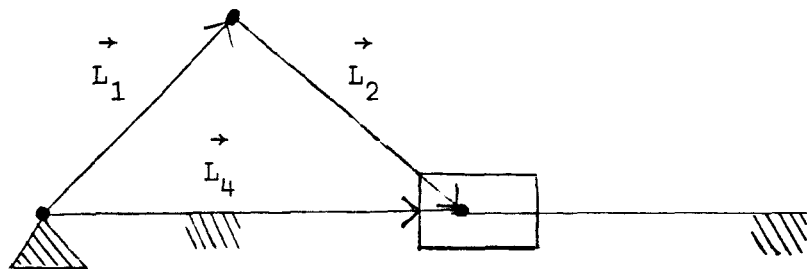
$$1^{\circ} \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 - \vec{L}_4 = 0$$

$$2^{\circ} \vec{L}_1 + \vec{L}_2 - \vec{L}_4 = 0$$

On peut résoudre ce type d'équations par projection sur les deux axes du système de référence. Le système obtenu formé de deux équations scalaires est déterminé s'il y a au plus deux inconnues ; deux arguments, deux modules ou un argument et un module. Dans l'exemple 1, si nous supposons que θ_1 est la variable moteur alors les inconnues du système sont θ_2 et θ_3 . Dans le cas du mécanisme de l'exemple 2, avec toujours comme moteur θ_1 , les inconnues sont θ_2 et l_4 . Si le nombre d'inconnues dépasse deux, il n'y a pas assez de moteurs dans la boucle (mécanisme indéterminé).

Exemple de résolution

Considérons un cas particulier du mécanisme de l'exemple 2, où $\theta_4 = 0$.



$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{L}_4$$

Les projections de l'équation sur l'axe des x et des y donnent :

$$\begin{cases} l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2 = l_4 \\ l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2 = 0 \end{cases}$$

dont la solution est immédiate

$$\theta_2 = - \operatorname{Arcsin} \left(\frac{l_1 \sin \theta_1}{l_2} \right)$$

$$l_4 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \sqrt{1 - \left(\frac{l_1 \sin \theta_1}{l_2} \right)^2}$$

Des méthodes plus générales d'analyse de boucles cinématiques par la méthode vectorielle sont décrites de façon détaillée dans [SHI 69] et [CHA 63].

Dans un mécanisme comportant plus d'une boucle, ces dernières devront être considérées simultanément.

c) Méthodes algébriques [HAR 64][SHE 71]

Nous pouvons remarquer à propos de la paramétrisation précédente qu'elle ne fait pas apparaître la structure du mécanisme. Chaque élément du mécanisme est décrit individuellement, et on ne fait guère référence aux liaisons qui existent entre les éléments. Les méthodes algébriques ont pour base une description paramétrique très précise du mécanisme. Celle-ci traduit aussi bien l'aspect structurel que l'aspect cinématique du mécanisme de sorte qu'elle permet de dégager des méthodes plus générales de résolution. Les différentes contraintes du mécanisme vont se traduire par des transformations géométriques qu'on représente sous forme matricielle. L'analyse du mécanisme revient à la résolution d'une équation matricielle. Nous faisons dans le chapitre suivant une étude détaillée de ce type de méthode.

II.3.3. Cas particulier des couples de transmission

Le couple de transmission apparaît dans des boucles à trois éléments, deux éléments mobiles et le bâti. Les paramètres attachés à ce couple sont les rayons des éléments mobiles qui sont donc des valeurs constantes. Les seuls paramètres variables de tels boucles sont relatifs aux liaisons des éléments mobiles avec le bâti (couples rotoïdes). Les problèmes de transmission sont plutôt traités par le biais de la recherche des vitesses angulaires des éléments mobiles, puisque le but de tels systèmes mécaniques est de transmettre un mouvement de rotation tout en gardant un rapport de vitesse constant entre les

éléments du couple. Mais on peut aussi traiter le problème par le biais de la recherche des espaces. Cette question est abordée au chapitre suivant.

II.4. CONCLUSION

Les caractéristiques de l'animation $2D^{1/2}$ ont conduit au choix de mécanismes plans, au sein desquels les couples supérieurs ont été volontairement limités aux couples de transmission, dont l'analyse est simple [cf. Chapitre suivant]. Nous préservons ainsi une certaine simplicité en limitant la complexité des problèmes posés par l'analyse cinématique, tout en gardant, il nous semble, des machines suffisantes en regard du but de notre application, qui est la production d'images animées et non l'analyse cinématique des mécanismes en elle-même.

Quant aux méthodes d'analyse, notre choix se porte vers les méthodes d'analyses algébriques, dont les modèles sous-jacents proposent une représentation des mécanismes précise et modulaire et se prêtent donc bien à une description informatique. Ce sont les aspects mathématiques de cette représentation que nous abordons dans le chapitre suivant.

CHAPITRE III

*
*
* ASPECTS MATHÉMATIQUES *
*
*

ASPECTS MATHÉMATIQUES

III.0. INTRODUCTION

III.1. LES OUTILS MATHÉMATIQUES UTILISÉS

III.1.1. Angles et repères

III.1.2. Les transformations géométriques

a) Définition

b) Transformation d'une famille de points

c) Transformations particulières

d) Composition des transformations

III.1.3. Les transformations homogènes

III.2. DEPLACEMENT LIBRE ET DEPLACEMENT LIÉ D'UN SOLIDE : L'UTILISATION DES TRANSFORMATIONS HOMOGÈNES

III.2.1. Le solide

a) Déplacement du solide

b) Représentation et déplacement d'un repère

c) Matrice homogène de changement de repère

d) Application au déplacement d'un solide

III.2.2. Le couple : Introduction des contraintes de liaison

a) Le couple rotoïde

b) Le couple prismatique

c) Le couple de transmission

III.2.3. La chaîne

III.3. REPRÉSENTATION INTERNE D'ACTEURS MÉCANIQUES : L'UTILISATION DU MODÈLE CINÉMATIQUE DE SHETH ET UICKER

III.3.1. Les contraintes d'indéformabilité

III.3.2. La "S.U. notation"

III.3.3. Application au calcul de la position d'un solide dans un mécanisme

a) Exemple

b) Généralisation

III.4. APPLICATION A L'ANALYSE DU MOUVEMENT

III.4.1. La configuration d'un mécanisme

III.4.2. Analyse de mécanismes élémentaires

a) Système ouvert

b) Système fermé

III.4.3. Analyse de mécanisme complexe

III.5. CONCLUSION

III.0. INTRODUCTION

Nous abordons dans ce chapitre les aspects mathématiques de notre étude. Il s'agit essentiellement de la présentation des transformations géométriques et de leur utilisation dans une représentation interne des mécanismes.

Après un rapide exposé des outils mathématiques utilisés, nous montrons que tout déplacement d'un solide (libre ou lié) peut être modélisé grâce à une transformation géométrique standard notée $G(A, B, \alpha)$. Cette dernière associée à un repère local attaché au solide, permet encore de déterminer la position de ce dernier à tout moment, par rapport à un système de référence. L'analogie entre plan et espace graphique fait que certains des aspects présentés ici ont une application graphique immédiate, il suffit pour cela de remplacer "solide" par "tache".

Nous présentons ensuite un modèle cinématique qui permet la représentation symbolique des mécanismes, le modèle de Sheth et Uicker [SHE 71]. Ce modèle nous fournira une description précise et modulaire de nos acteurs mécaniques, en rendant compte des relations qui existent entre leurs différentes parties. Nous étudions un exemple d'utilisation de ce symbolisme et décrivons pour finir, la manière dont pourra être réalisée l'analyse du mouvement d'un mécanisme à partir de cette description.

III.1. LES OUTILS MATHÉMATIQUES UTILISÉS

III.1.1. Angles et repères

a- Nous désignons un angle orienté par le couple (OD_1, OD_2) des demi-droites qui le définissent [Fig. 1]. Nous utilisons cette même notation pour sa mesure. Le sens anti-horaire est choisi comme sens positif.

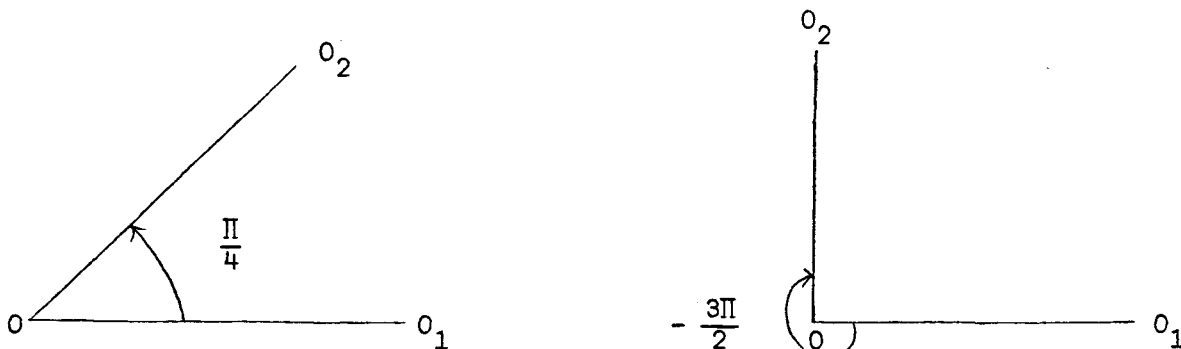


Fig. 1 : Angle et sa mesure.

b- Nous désignons par OXY le repère orthonormé d'origine O d'axe des abscisses OX et d'axe des ordonnées OY tel que $(OX, OY) = +\frac{\pi}{2}$ [Fig. 2].

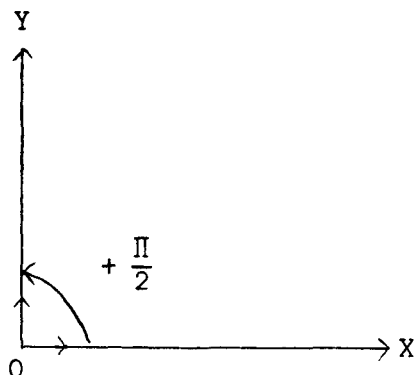


Fig. 2 : Repère.

III.1.2. Les transformations géométriques

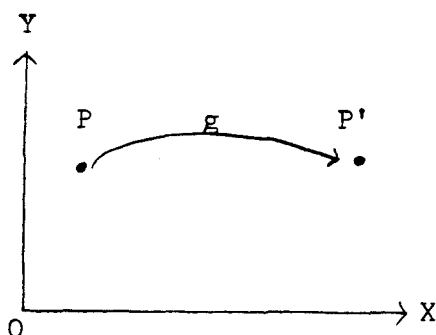
Nous nous plaçons dans le plan affine euclidien.

a) Définition

Une transformation géométrique est une application affine du plan qui transforme un point P en un point P'. Si nous appelons g une telle application, on écrira :

$$P' = g(P) \text{ ou bien}$$

$$P' = g(\lambda_1, \dots, \lambda_n)(P) \text{ où } \lambda_i \text{ sont les paramètres de la transformation.}$$



On décrit l'application en traduisant son effet sur les coordonnées de P.

Notons $p = (p_x, p_y)^t$, $p' = (p'_x, p'_y)^t$ les coordonnées de P et P', alors g est définie par le couple d'applications réelles (g_1, g_2) telles que :

$$P' = g(P) \iff p'_x = g_1(p_x) \quad p'_y = g_2(p_y)$$

b) Transformation d'une famille de points

Si $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ est une famille de points de \mathbb{R}^2 et g une transformation géométrique alors $g(\mathcal{P}) = \{g(p_1), \dots, g(p_n), \dots\}$.

c) Transformations particulières [Fig. 3]

Les transformations géométriques qui nous intéressent sont les rotations, translations, symétries, homothéties et changements d'échelle. Les quatre premières applications affines sont des similitudes c'est-à-dire qu'elles conservent les rapports des distances. Les rotations, translations et symétries conservent de plus les distances. Ce sont des isométries. Les transformations géométriques auront une application aussi bien graphique que purement cinématique.

d) Composition des transformations

On désire souvent effectuer sur un point ou une famille de points une succession de transformations. La transformation résultante est la transformation obtenue par composition des transformations initiales. La composition des transformations est associative mais pas commutative en général.

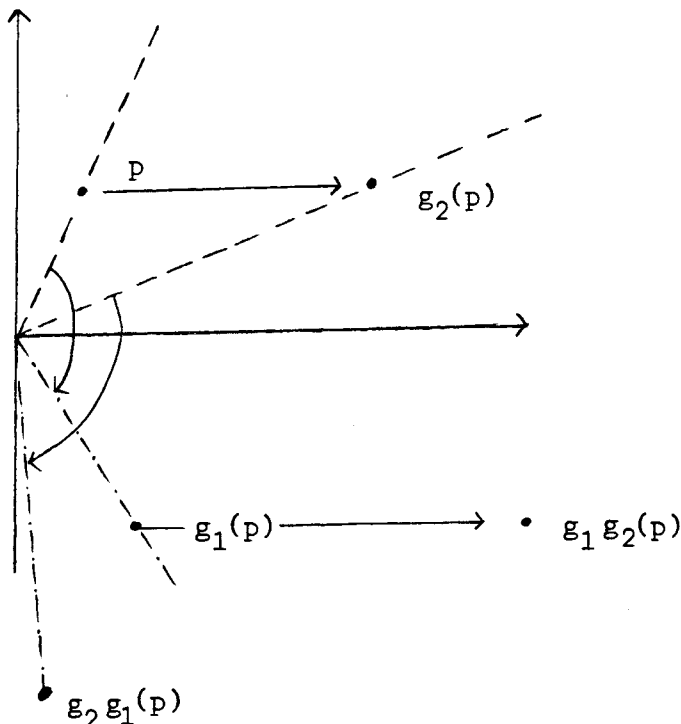
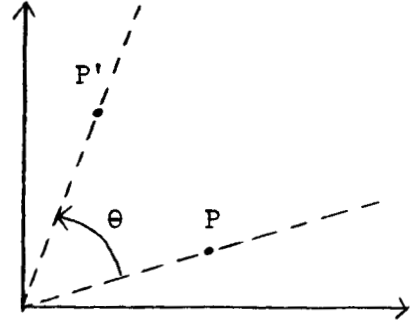


Fig. 3 : Transformations particulières.

Rotation. $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : p \rightarrow r(p) = p'$

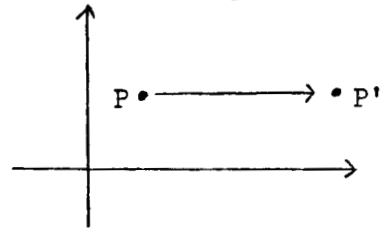
d'angle θ

$$\begin{cases} p'_x = \cos\theta p_x - \sin\theta p_y \\ p'_y = \sin\theta p_x + \cos\theta p_y \end{cases}$$



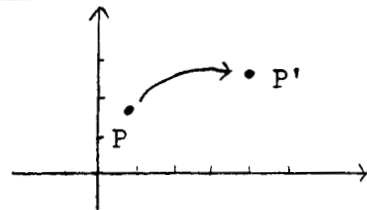
Translation de déplacement t_x t_y . $t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : t(p) = p'$

$$\begin{cases} p'_x = p_x + t_x \\ p'_y = p_y + t_y \end{cases}$$



Changement d'échelle de rapport r_x et r_y . $e : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : e(p) = p'$

$$\begin{cases} p'_x = r_x p_x \\ p'_y = r_y p_y \end{cases}$$



$$\begin{aligned} r_1 &= 4 \\ r_2 &= 2 \end{aligned}$$

Homothétie de rapport r . $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : h(p) = p'$

$$\begin{cases} p'_x = r p_x \\ p'_y = r p_y \end{cases} \quad \text{Cas particulier de l'application } e(r_x = r_y)$$

III.1.3. Les transformations homogènes [FOL 82]

Les transformations homogènes permettent une représentation uniforme des transformations géométriques, sous forme matricielle.

Soit p tel que $p = (p_x, p_y)^t$, on lui associe $\bar{p} = (\bar{p}_x, \bar{p}_y, w)^t$ tel que

$$p_x = \frac{\bar{p}_x}{w} \quad p_y = \frac{\bar{p}_y}{w} \quad (w = 1 \text{ dans notre cas}). \quad \bar{p} \text{ désigne les coordonnées homogènes}$$

de p et les transformations citées appliquées à \bar{p} seront mises sous la forme de matrices 3×3 appelées matrices homogènes. Si u est une transformation géométrique, on note U la matrice homogène associée [Fig. 4]. Notons que la matrice homogène d'une transformation composée, est la composée des matrices homogènes des différentes transformations.

Fig. 4 : Matrices homogènes

$$\underline{\text{Rotation}} : R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R^{-1}(\theta) = R(-\theta),$$

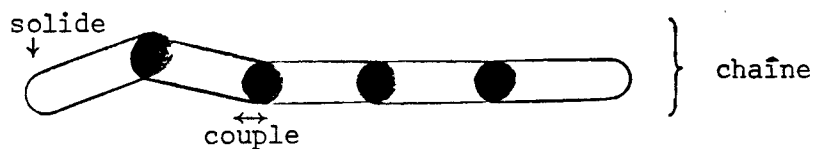
$$\underline{\text{Translation}} : T(t_x, t_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T^{-1}(t_x, t_y) = T(-t_x, -t_y),$$

$$\underline{\text{Changement d'échelle}} : E(r_x, r_y) = \begin{bmatrix} r_x & 0 & 0 \\ 0 & r_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E^{-1}(r_x, r_y) = E\left(\frac{1}{r_x}, \frac{1}{r_y}\right),$$

$$\underline{\text{Homothétie}} : H(r) = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H^{-1}(r) = H\left(\frac{1}{r}\right).$$

III.2. DEPLACEMENT LIBRE ET DEPLACEMENT LIE D'UN SOLIDE : L'UTILISATION DES TRANSFORMATIONS HOMOGENES

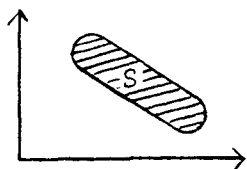
Le composant de base d'un mécanisme est le solide. A l'aide de deux solides on forme un couple. Ces derniers mis bout à bout forment une chaîne.



Solides, couples et chaînes sont les composants de base à des niveaux de complexité différents des mécanismes. Nous mettons en place dans ce qui suit les outils qui permettent de rendre compte de la structure et du déplacement de ces composants.

III.2.1. Le solide

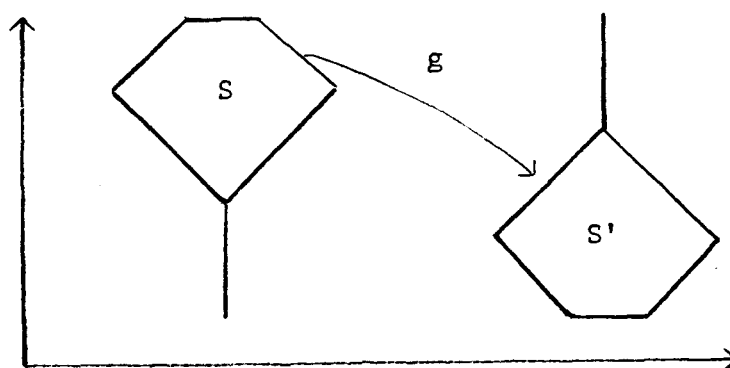
Nous pouvons représenter un solide par une partie S connexe de \mathbb{R}^2 .



Une représentation de ce solide peut être la donnée de la famille de points qui le représente. Plus généralement on le décrira par le couple (f_S, C) où C est un ensemble de points caractéristiques du solide et f_S une fonction intrinsèque qui permet à partir de C d'obtenir la partie S . On écrira $S = f_S(C)^*$. Sachant qu'un solide S pourra toujours être décrit par le couple (identité, S), le couple (f_S, C) existera toujours pour un solide donné. Le caractère indéformable du solide implique que la distance entre deux points quelconque de S est toujours constante. Donc les seules transformations géométriques qu'on peut appliquer à S sont des isométries, c'est-à-dire dans le cas qui nous préoccupe les rotations et translations.

a) Déplacement du solide

Le déplacement d'un solide S est la composée g d'un ensemble de rotations et de translations appliquées à S . g est encore une isométrie et $S' = g(S)$ est isomorphe à S .



* Dans le cas d'une tâche f_S est un algorithme.

Il est intéressant pour faciliter les calculs de définir la forme de la matrice G associée à la transformation g . Nous montrons dans ce qui suit que G peut toujours s'écrire sous la forme $T(A, B) \cdot R(\alpha)$ c'est-à-dire la matrice :

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & A \\ \sin\alpha & \cos\alpha & B \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Remarques : Notons cette matrice $G(A, B, \alpha)$, nous avons les propriétés suivantes :

- 1) $G(A, B, 0) = T(A, B)$
- 2) $G(0, 0, \alpha) = R(\alpha)$
- 3) $G(A, B, \alpha) \cdot G(A', B', \alpha') =$
 $G(A + A' \cos\alpha - B' \sin\alpha, B + A' \sin\alpha + B' \cos\alpha, \alpha + \alpha')$
- 4) $G(A, B, 0) \cdot G(A', B', \alpha') = T(A, B) \cdot G(A', B', \alpha')$
 $= G(A + A', B + B', \alpha')$
- 5) $G(A, B, \alpha) \cdot G(0, 0, \alpha') = G(A, B, \alpha) = R(\alpha')$
 $= G(A, B, \alpha + \alpha')$
- 6) $G(A, B, \alpha) \cdot (0, 0, 1)^t = (A, B, 1)^t$.

Preuve : Posons $g^n = g_n \cdot g_{n-1} \cdot \dots \cdot g_1$ une transformation composée.

Si g_i est une rotation la matrice associée est $G(0, 0, \alpha_i)$,

sinon c'est la matrice $G(A_i, B_i, 0)$. Nous notons G_i cette matrice.

Notons G^n la matrice associée à g^n , et montrons par récurrence sur n que $G^n = G(A^n, B^n, \alpha^n)$

$$\bullet \quad n = 1 \quad G^1 = \begin{cases} G(0, 0, \alpha_1) \\ \text{ou} \\ G(A_1, B_1, 0) \end{cases}$$

• Supposons $G^i = G(A^i, B^i, \alpha^i)$

$$G^{i+1} = G_{i+1} \cdot G^i$$

G_{i+1} et G^i sont des matrices de la forme $G(A, B, \alpha)$ d'après la propriété
(3) le produit est encore de la forme $G(A, B, \alpha)$ d'où $G^{i+1} = G(A^{i+1}, B^{i+1}, \alpha^{i+1})$.

b) Représentation et déplacement d'un repère

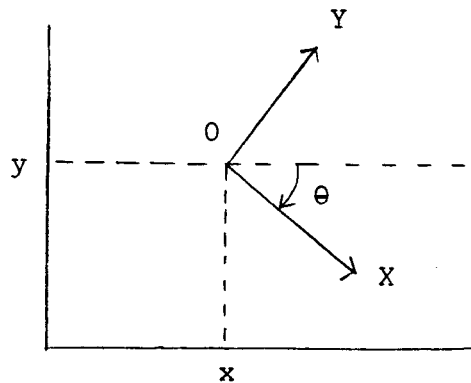
- Représentation d'un repère

Notons $O_o X_o Y_o$ le repère invariable et soit OXY un repère du plan.

Nous représentons OXY par (x, y, θ) (on écrit $OXY = (x, y, \theta)$) où :

$$* \theta = (O_o X_o, O_1 X_1)$$

* x et y sont les coordonnées de O dans $O_o X_o Y_o$.



- Déplacement d'un repère [Fig. 5]

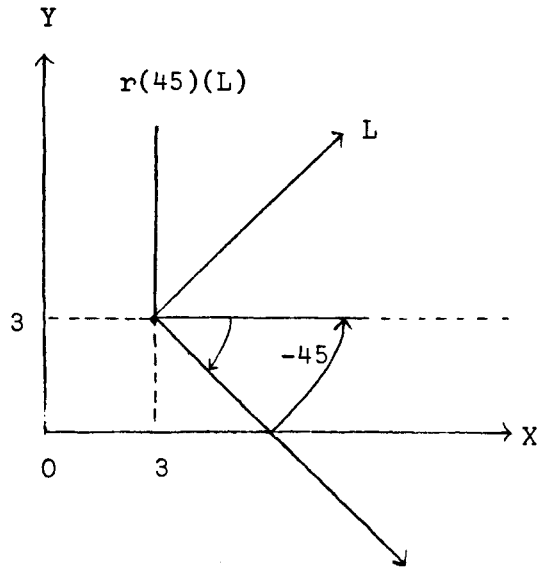
Nous définissons le déplacement d'un repère de la façon suivante.

Soit $OXY = (x, y, \theta)$. La rotation d'angle α appliquée à OXY transforme ce dernier en $G(O, O, \alpha)(OXY) = (x, y, \theta + \alpha)$.

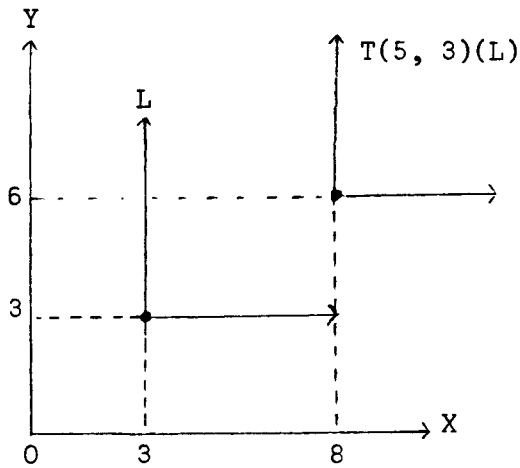
De même la translation de déplacements A et B transforme OXY en $G(A, B, 0)(OXY) = (x+A, y+B, \theta)$:

$$G(A, B, \alpha)(OXY) = (x+A, y+B, \theta+\alpha) \\ = R(\alpha) \cdot T(A, B)$$

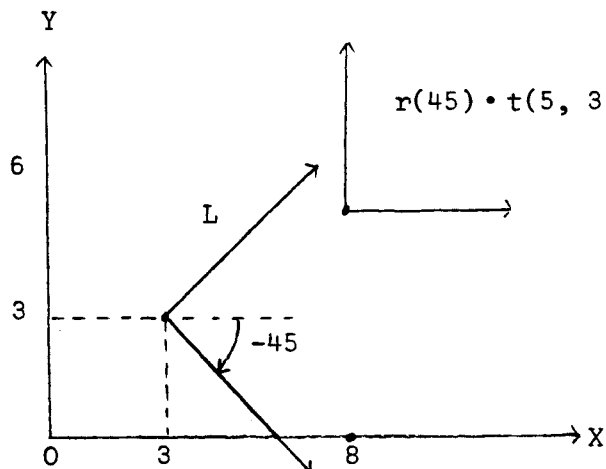
Fig. 5 : Déplacements de repères : Exemples.



$$L = (3, 3, -45) \\ r(45)(L) = (3, 3, 0)$$



$$L = (3, 3, 0) \\ t(5, 3)(L) = (8, 6, 0)$$



$$L = (3, 3, -45) \\ r(45) \cdot t(5, 3)(L) = r(45)(8, 6, -45) \\ = (8, 6, 0) \\ = t(5, 3) \cdot r(45)(L)$$

c) Matrice homogène de changement de repère

- Soit (x, y, θ) un repère, la matrice homogène qui "transforme" (x, y, θ) dans le système invariable est $G(x, y, \theta)$.
- En effet soit P de coordonnées \bar{p} dans (x, y, θ) et \bar{p}_0 dans $0_o X_o Y_o$, on cherche $H : \bar{p}_0 = H \bar{p}$.

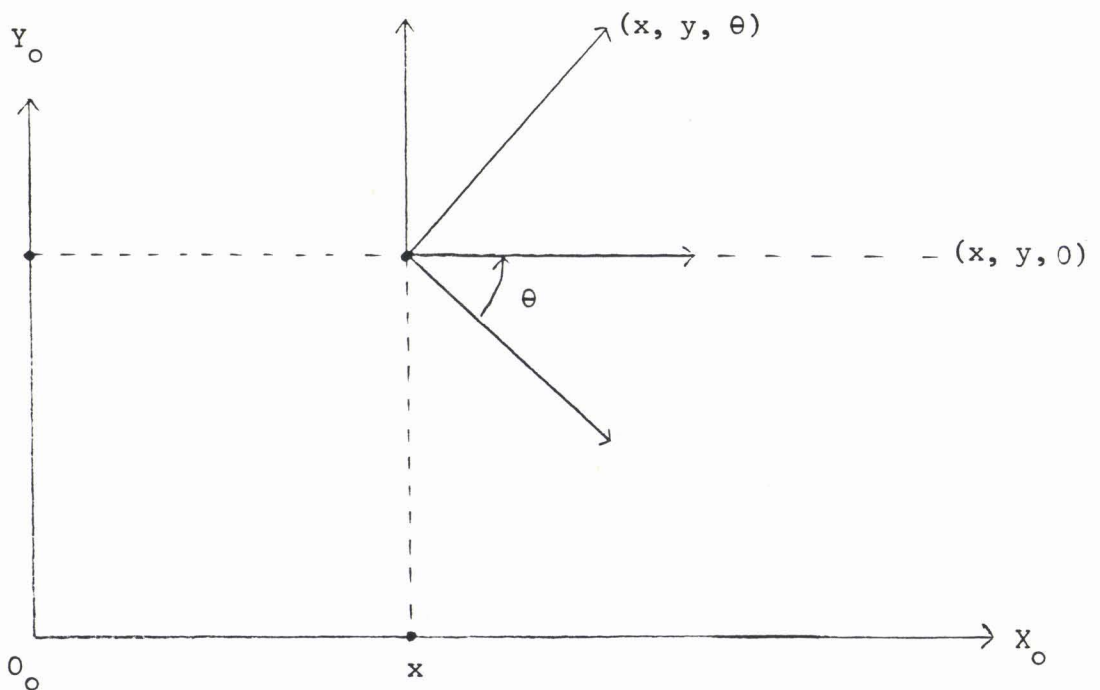
Considérons le repère $(x, y, 0)$ et soit \bar{p}_2 les coordonnées de P dans $(x, y, 0)$ alors :

$$\bar{p}_2 = G(0, 0, \theta) \bar{p}$$

et

$$\bar{p}_0 = G(x, y, 0) \bar{p}_2$$

$$\Rightarrow H = G(x, y, 0) \cdot G(0, 0, \theta) = G(x, y, \theta)$$



d) Application au déplacement d'un solide

On a l'habitude d'associer à un solide S un repère local $L = (x, y, \theta)$ qui lui est rigidement attaché. Si le solide S est connu dans le repère local et que ce dernier l'est dans le système invariable, on peut traduire les déplacements de S par ceux de son repère.

Nous supposons donc S donné par :

- 1) $L = (x, y, \theta)$
- 2) \bar{p}_L les coordonnées de $P \in S$ dans L .

Soit g une transformation géométrique de matrice $G(A, B, \alpha)$.

On associe à $g(S)$ le repère local $g(L) = (A+x, B+y, \alpha+\theta)$. L étant rigidement lié à S les coordonnées de $g(P)$ dans $g(L)$ sont égales à \bar{p}_L .

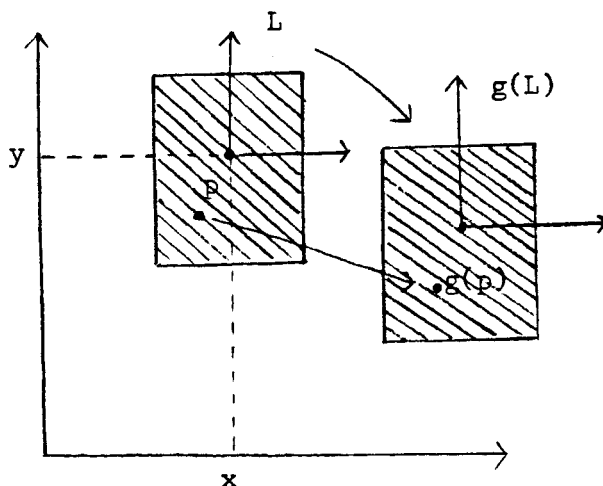
Donc si \bar{p}_L sont les coordonnées de $\begin{cases} g(p) \text{ dans } g(L) \\ p \text{ dans } L \end{cases}$

\bar{p}'_I les coordonnées de $g(p)$ dans le système invariable

alors

$$\bar{p}'_I = G(x+A, y+B, \alpha+\theta) \bar{p}_L$$

Cette relation permet de déterminer $g(p) \forall p \in S$, donc $g(S)$.

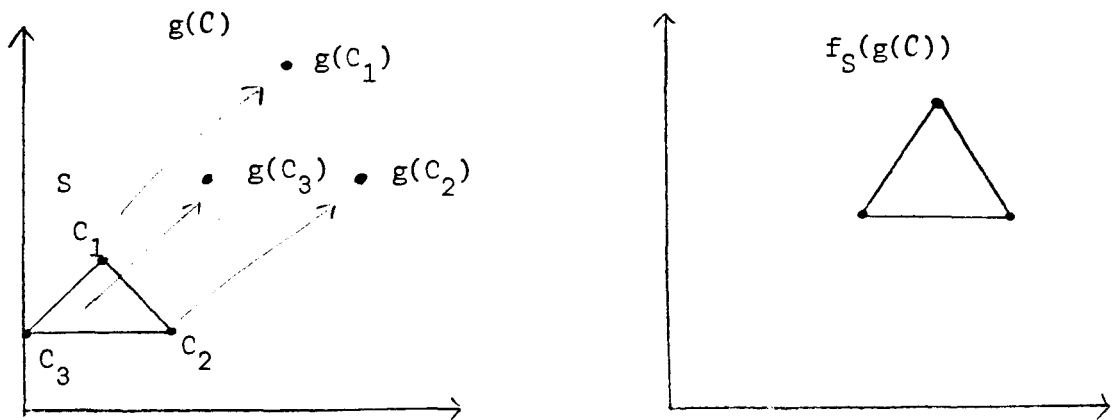


- Si nous considérons maintenant que le solide S est donné par le couple (f_S, C) , il suffit pour transformer S de transformer ses points caractéristiques et de leur appliquer f_S .

C'est-à-dire que :

$$S = f_S(C) \Rightarrow g(S) = f_S(g(C))$$

Il suffit donc de déterminer $g(C)$.



Soit $C = \{C_1, \dots, C_k\}$ l'ensemble des points caractéristiques de S .

- Si on associe à S un repère local, en utilisant la relation

$$\bar{C}'_i = G(x+A, y+B, \alpha+\theta) \bar{C}_L$$

où : \bar{C}'_i sont les coordonnées homogènes de $g(c)$ $c \in C$
dans le système invariable,

\bar{C}_L sont les coordonnées homogènes de C dans L ,

$L = (x, y, \theta)$,

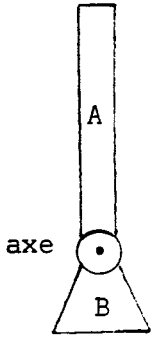
$g \rightarrow G(A, B, \alpha)$,

on peut calculer les coordonnées de tous les points de $g(C)$.

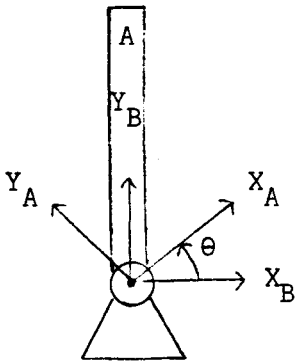
III.2.2. Le couple

Il s'agit à présent d'exprimer les contraintes de liaison entre deux solides à l'aide des transformations homogènes.

a) Le couple rotoïde



Le solide A s'articule sur le solide B à travers l'axe de rotation. Supposons B fixe, le seul mouvement de A est un mouvement de rotation autour de l'axe. La seule transformation qu'on peut appliquer à A est une rotation.



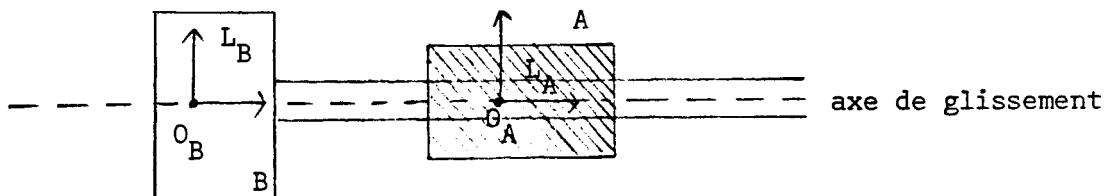
On associe aux solides A et B les repères L_A et L_B dont les origines sont confondues avec l'axe de rotation [SHE 71].

Choisissons L_B comme repère de référence alors $L_A = (0, 0, \theta)$ $\theta = (OX_B, OX_A)$.

On peut alors traduire le déplacement de A par celui de L_A par rapport à L_B . Soit g le déplacement de A, $G(0, 0, \alpha)$ la matrice associée, le déplacement de A par rapport à L_B est donné par $G(0, 0, \theta + \alpha)$.

La position de A est donc à tout instant défini par $G(0, 0, (OX_B, OX_A)) = R((OX_B, OX_A))$ qui traduit la contrainte de liaison entre A et B.

b) Le couple prismatique



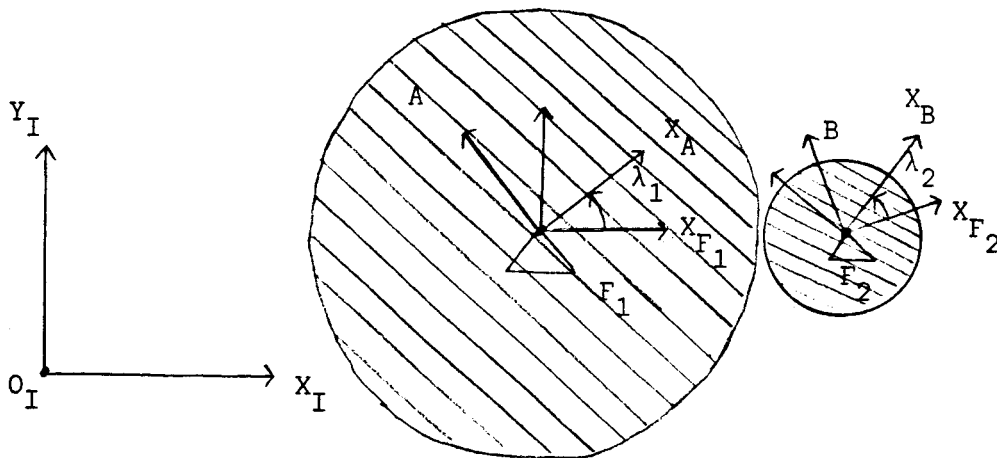
Le solide A glisse sur B à travers l'axe de glissement. B étant fixe, le seul mouvement de A est un mouvement de translation suivant l'axe de glissement.

On associe respectivement aux solides A et B les repères locaux L_A et L_B dont les axes des X ont même direction et sont confondus avec l'axe de glissement [SHE 71]. L_B étant le repère de référence, L_A est déterminé par $(t, 0, 0)$ où t est l'abscisse de O_A dans L_B , x_{OA} .

Tout déplacement de A se traduit par une matrice de la forme $G(x, 0, 0)$. Donc si $L_A = (t, 0, 0)$, la position résultante de A dans L_B est donnée par $G(t+x, 0, 0)$ c'est-à-dire par $G(x_{OA}, 0, 0) = T(x_{OA}, 0)$, qui traduit la contrainte de glissement entre A et B.

c) Le couple de transmission

Le cas du couple de transmission est un cas à part. Rappelons qu'un couple de transmission est formé de deux disques. Chaque disque possède en son centre un axe de rotation qui le lie au bâti, et les deux disques sont en contact par l'intermédiaire d'un point sur leur périmètre. Nous dépassons dans ce paragraphe le cadre de "la représentation des mécanismes" pour faire une étude complète du mouvement d'un couple de transmission.



Trois objets sont donc en présence, les disques A et B et le bâti.

Les couples (A, F_1) et (B, F_2) sont des couples rotoïdes. Il reste à trouver la relation liant A et B. Nommons L_X le repère associé à l'objet X.

Il s'agit de trouver une relation qui lie L_A à L_B . Dans le cas général on aurait cherché une transformation géométrique entre les deux repères. Cela n'est pas nécessaire ici car, L_{F_1} et L_{F_2} étant fixes, (appartiennent au bâti) ils sont à tout moment connus dans le système invariable.

$$\text{Soit } L_{F_1} = (x_1, y_1, \theta_1), \lambda_A = (OX_{F_1}, OX_A),$$

$$L_{F_2} = (x_2, y_2, \theta_2), \lambda_B = (OX_{F_2}, OX_B),$$

r_A le rayon du disque A, r_B le rayon du disque B.

Soit $P \in B$ \bar{p}_B ses coordonnées dans L_B ,

\bar{p}_{F_2} ses coordonnées dans F_2 ,

\bar{p}_I ses coordonnées dans le système invariable.

$$\text{alors } \bar{p}_{F_2} = R(\lambda_B) \bar{p}_B \quad \bar{p}_I = G(x_2, y_2, \theta_2) \bar{p}_{F_2}$$

$$\Rightarrow \bar{p}_I = G(x_2, y_2, \theta_2) \cdot R(\lambda_B) \bar{p}_B$$

Le déplacement du disque B est entièrement défini par la matrice $G(x_2, y_2, \theta_2) \cdot R(\lambda_B) = G(x_2, y_2, \theta_2 + \lambda_B)$, de même que celui de A l'est par $G(x_1, y_1, \theta_1 + \lambda_A)$.

Notons $\lambda_X(t_j)$ la valeur de λ_X à l'instant t_j , $X \in \{A, B\}$, alors $\lambda_X(t_j) = \lambda_X(t_{j-1}) + d\lambda_X$ et $d\lambda_A$ et $d\lambda_B$ vérifie la relation :

$$d\lambda_B \cdot r_B = s d\lambda_A \cdot r_A$$

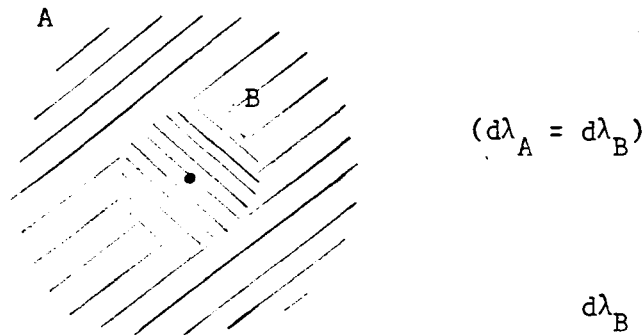
$$\Rightarrow \underline{d\lambda_B = s \ell_{AB} d\lambda_A}, \quad \ell_{AB} = \frac{r_A}{r_B}$$

s peut prendre les valeurs 1, -1 et $1/\ell_{AB}$:

- $s = 1$ dans le cas d'engrenages intérieurs et de transmissions par flexible directe.

- $s = -1$ dans le cas d'engrenages externes et de transmissions par flexible croisé.

- $s = \frac{1}{\ell_{AB}}$. Nous appelons ce cas transmission 'rigide'. Ce cas est très intéressant pour l'animation. Les deux éléments A et B ont obligatoirement des axes confondus et tout se passe comme s'ils étaient soudés l'un à l'autre.



$$d\lambda_A = \lambda_A(t_j) - \lambda_A(t_{j-1}) \text{ et } \lambda_B(t_j) = \lambda_B(t_{j-1}) + \overbrace{s\ell_{AB} d\lambda_A}^{d\lambda_B}$$

$$\Rightarrow \lambda_B(t_j) = \lambda_B(t_{j-1}) + s\ell_{AB}(\lambda_A(t_j) - \lambda_A(t_{j-1})) \quad (1)$$

(2)

Si $\lambda_B(t_0) = s\ell_{AB} \lambda_A(t_0)$, (1) $\Rightarrow \forall j \lambda_B(t_j) = s\ell_{AB} \lambda_A(t_j)$

Supposons que λ_A est moteur et que l'initialisation de λ_B est conforme à (2), le couple de transmission est entièrement défini par :

$$\begin{cases} G(x_1, y_1, \theta_1 + \lambda_A(t_j)) \text{ élément A} \\ G(x_1, y_1, \theta_2 + s\ell_{AB} \lambda_A(t_j)) \text{ élément B} \end{cases}$$

III.2.3. La chaîne

L'étude du mouvement d'un mécanisme consiste à calculer, lorsqu'on sollicite de manière externe ses éléments moteurs, la position de tous les solides qui le constituent. La position absolue d'un solide est déterminée par celle d'un repère local qui lui est rigidement lié.

Les transformations permettent la modélisation des liaisons. Pour calculer la position absolue d'un solide on est amené à extraire du mécanisme une chaîne cinématique qui le lie au bâti (et par conséquent au système de référence), et par composition d'un ensemble de transformations (associées aussi bien aux éléments qu'aux liaisons de la chaîne), on obtient la transformation associée au solide en question.

Nous étudions dans le paragraphe qui suit une notation symbolique des mécanismes (la notation de Sheth et Uicker) qui permet de traduire la structure des mécanismes et certains aspects de sa géométrie qui sont nécessaires au calcul du mouvement. Le modèle est basé sur le fait qu'il y a deux types de contraintes dans un mécanisme, les contraintes "d'indéformabilité" qui traduisent le caractère indéformable du solide et les contraintes "de liaison".

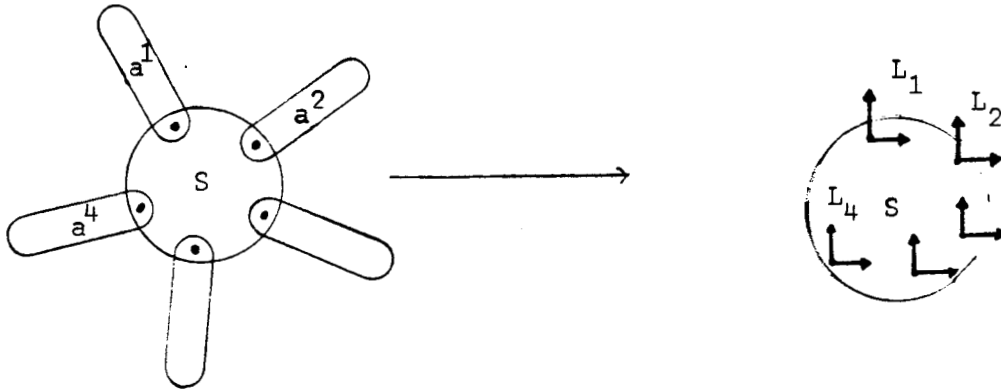
III.3. REPRESENTATION INTERNE D'ACTEURS MECANIQUES : L'UTILISATION DU MODELE CINEMATIQUE DE SHETH ET UICKER

Une approche systématique et rationnelle dans l'analyse des mécanismes est nécessaire dès lors qu'on désire utiliser l'ordinateur. Il faut alors construire un modèle mathématique qui puisse permettre leur représentation de façon précise et complète. Des essais de modélisation des mécanismes ont été amorcés par Reuleaux vers la fin du 19^{ème}, puis poursuivis par Denavit et Hartenberg vers les années 50. Ces derniers donnent jour à une notation symbolique connue sous le nom de "D-H notation", ainsi qu'à une méthode matricielle d'analyse des mécanismes dérivée de la notation. Quoique fort utilisée en robotique (modélisation de bras articulés), le D-H notation est beaucoup plus difficile à mettre en oeuvre dès qu'il s'agit de mécanismes plus complexes. Sheth et Uicker étendent le formalisme proposé par Denavit et Hartenberg à une gamme plus élargie de mécanismes tout en proposant une notation dont l'utilisation est plus simple. Le modèle de Sheth et Uicker traite du cas général des mécanismes tridimensionnels. Nous en abordons ici les aspects bidimensionnels qui nous concernent.

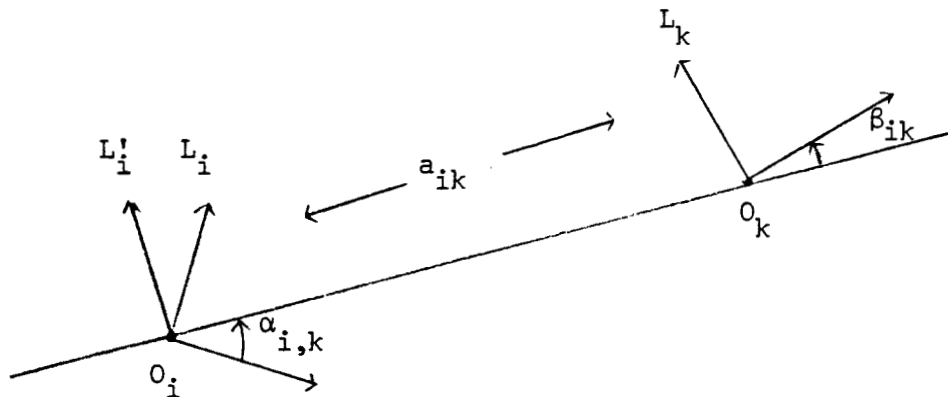
III.3.1. Contraintes d'indéformabilités

Comme nous l'avons évoqué plus haut la "S.U notation" est basée sur le fait qu'il y a deux sortes de contrainte dans un mécanisme, des contraintes "d'indéformabilité" et des contraintes de liaison. Les contraintes d'indéformabilité se modélisent comme les contraintes de liaison à l'aide de transformations géométriques.

Soit S un élément du mécanisme. Notons a_1, \dots, a_n les différents axes de glissement ou de rotation du solide (sièges des liaisons avec les solides voisins). A chaque axe a_j associons le repère $L_j = O_j X_j Y_j$ rigidement attaché à S .



S étant indéformable, $d(O_i, O_k) = \text{constante}$ pour tout $i, k \in \{1, \dots, n\}$. De plus l'orientation des repères par rapport à S est invariable. Ces constatations impliquent l'existence de relations constantes entre les différents repères.



Soit L'_i le repère centré en O_i dont l'axe des X est dans la direction $\overrightarrow{O_i O_k}$. Posons :

$$\beta_{ik} = (0_i 0_k, 0_k X_k)$$

$$\alpha_{ik} = (0_i X_i, 0_i X_i)$$

$$a_{ik} = \text{l'abscisse de } 0_k \text{ dans } L_i.$$

La matrice de passage de L_k à L_i est :

$$G(0, 0, \alpha_{ik}) \cdot G(a_{ik}, 0, \beta_{ik}) =$$

$$G(a_{ik} \cos \alpha_{ik}, a_{ik} \sin \alpha_{ik}, \alpha_{ik} + \beta_{ik}), \text{ dont les paramètres}$$

$$a_{ik}, \alpha_{ik} \text{ et } \beta_{ik} \text{ sont tous constants.}$$

Nous noterons cette matrice $K(a_{ik}, \alpha_{ik}, \beta_{ik}) = K_{ik}$.

A tout couple de repère (L_i, L_k) correspond une matrice K_{ik} traduisant le caractère indéformable du solide.

La transformation associée à (L_k, L_i) s'obtient à partir de K_{ik} ,
 $K_{ki} = K_{ik}^{-1} = K(-a_{ik}, -\beta_{ik}, -\alpha_{ik})$

$$\begin{aligned} K_{ki} &= K_{ik}^{-1} = G^{-1}(a_{ik} \cos \alpha_{ik}, a_{ik} \sin \alpha_{ik}, \alpha_{ik} + \beta_{ik}) \\ &= [R(\alpha_{ik}) \cdot T(a_{ik}) \cdot R(\beta_{ik})]^{-1} \\ &= R^{-1}(\beta_{ik}) \cdot T^{-1}(a_{ik}) \cdot R^{-1}(\alpha_{ik}) \\ &= R(-\beta_{ik}) \cdot T(-a_{ik}) \cdot R(-\alpha_{ik}) \\ &= K(-a_{ik}, -\beta_{ik}, -\alpha_{ik}) \end{aligned}$$

III.3.2. La "S.U notation" [SHE 71]

A l'aide des repères et des transformations on construit un schéma cinématique du mécanisme de la façon suivante :

Soit S_1, S_2, \dots, S_n les différents solides du mécanisme
 et $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$ les différentes liaisons.

r_j^u désigne un repère du solide S_j

$$r_j^u = 0_u X_u Y_u$$

- 1) • A chaque S_j on associe les repères $r_j^1, r_j^2, \dots, r_j^k$ définis aux liaisons de S_j .
- A chaque couple (r_j^u, r_j^v) de repères de S_j on associe la transformation :

$$K(a_{uv}, \alpha_{uv}, \beta_{uv})$$

où :

$$\alpha_{uv} = (O_u X_u, O_u O_v)$$

$$\beta_{uv} = (O_u O_v, O_v X_v)$$

$$a_{uv} = \text{distance de } O_u \text{ à } O_v \text{ mesurée sur l'axe } O_u O_v.$$

- 2) • A chaque couple (r_i^t, r_s^k) associé à la liaison entre S_s et S_t on fait correspondre :

- Cas d'un glissement :

$$T(d_{ik}, 0) = G(d_{ik}, 0, 0)$$

où d_{ik} est la distance entre O_i et O_k .

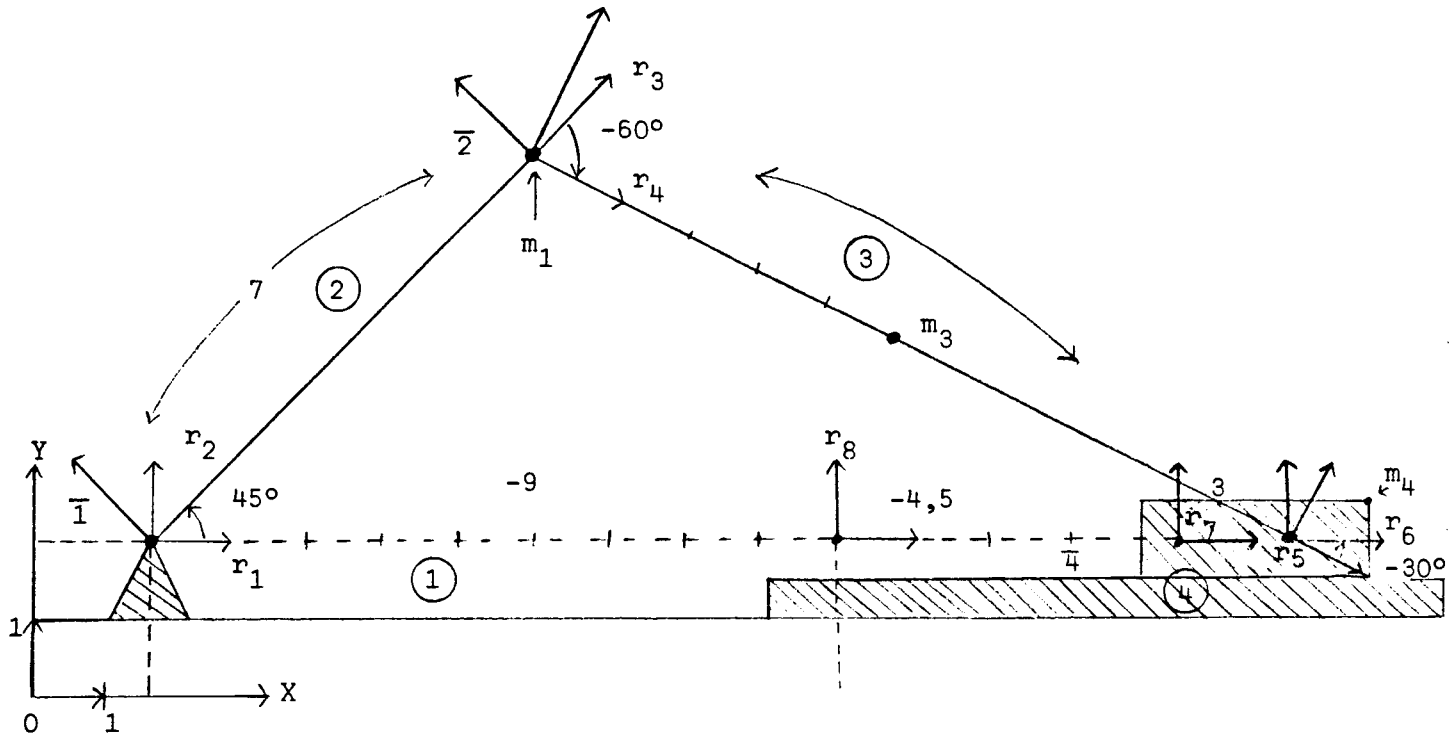
- Cas d'une rotation

$$R(\theta_{ik}) = G(0, 0, \theta_{ik})$$

$$\text{où } \theta_{ik} = (O_i X_i, O_k X_k) \quad O_i = O_k$$

- Cas d'une transmission : la relation de transmission dont les paramètres sont les rayons des éléments de la transmission.

Exemple : Schéma cinématique d'un système piston-bielle manivelle.



Le mécanisme se compose des solides (1) (2) (3) et (4), et des liaisons $\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$ et $\bar{4}$. La liaison $\bar{4}$ est de type glissement, le solide (1) est le bâti.

Les tableaux A et B décrivent les associations (couple de repères)/solide et (couple de repères)/liaison. Le tableau C décrit le schéma cinématique complet du mécanisme. Dans le tableau D on associe à chaque couple de repères la transformation géométrique qui lui correspond.

A

Solide	Couple
(1)	(r_8, r_1)
(2)	(r_2, r_3)
(3)	(r_4, r_5)
(4)	(r_6, r_7)

B

Liaison	couple
$\bar{1}$	(r_1, r_2)
$\bar{2}$	(r_3, r_4)
$\bar{3}$	(r_5, r_6)
$\bar{4}$	(r_7, r_8)

C

	COUPLE	PARAMETRES				
		a	α°	β°	Type	θ° ou d
Contraintes de liaison	(r_1, r_2)	/	/	/	R	45°
	(r_3, r_4)	/	/	/	R	-60°
	(r_5, r_6)	/	/	/	R	30°
	(r_7, r_8)	/	/	/	G	-4,5
Contraintes d'indéformabilité	(r_8, r_1)	-9	0	0	/	/
	(r_2, r_3)	7	0	0	/	/
	(r_4, r_5)	11,2	0	0	/	/
	(r_6, r_7)	-1,5	0	0	/	/

D

COUPLE	TRANSFORMATION
(r_1, r_2)	G(0, 0, 45)
(r_3, r_4)	G(0, 0, -60)
(r_5, r_6)	G(0, 0, 30)
(r_7, r_8)	G(-4.5, 0, 0)
(r_8, r_1)	$M_{81} = G(-9, 0, 0)$
(r_2, r_3)	$M_{23} = G(7, 0, 0)$
(r_4, r_5)	$M_{45} = G(11.2, 0, 0)$
(r_6, r_7)	$M_{67} = G(-1.5, 0, 0)$

III.3.3. Application au calcul de la position d'un solide dans un mécanisme

a) Exemple

Revenons sur le mécanisme de l'exemple précédent. Cherchons à déterminer la position des solides (2), (3) et (4) à travers celle de leur repère local r_2 , r_4 ou r_6 respectivement, en consultant le tableau D.

Les repères fixes r_1 et r_8 sont donnés :

$$r_1 = (1.5, 2, 0)$$

$$r_8 = (10.5, 2, 0)$$

ainsi que les valeurs des variables de liaison.

Position des solides

Solide (2)

Soit G_1 la matrice de passage de r_1 au système invariable S_I

$$G_1 = G(1.5, 2, 0)$$

La position de r_2 (repère local de (2)) est donnée par la matrice de passage de r_2 au système invariable, c'est-à-dire :

$$G_1 \cdot G(0, 0, 45) = G(1.5, 2, 45)$$

$$\Rightarrow \boxed{r_2 = (1.5, 2, 45^\circ)}$$

Pour trouver cette transformation on a extrait du mécanisme un "chemin de repères" qui lie le repère local du solide en question au repère invariable. Dans le cas du solide (2) ce chemin est $(S_I, r_1), (r_1, r_2)$ ce qui donne le produit $G_1 \cdot G(0, 0, 45)$ car $G(0, 0, 45)$ est la transformation associée au couple (r_1, r_2) (cf. Tableau D) et G_1 celle associée à (S_I, r_1) .

Solide ③

En utilisant la même technique que précédemment, un chemin de repères associé à ③ est :

$(S_I, r_1), (r_1, r_2), (r_2, r_3), (r_3, r_4)$ r_4 étant le repère local à ③.

La matrice de passage qui positionne r_4 dans S_I est donc d'après le tableau D :

$$G_1 \cdot G(0, 0, 45) G(7, 0, 0) G(0, 0, -60) = G(6.5, 7, -15)$$

$$\Rightarrow \boxed{r_4 = (6.5, 7, -15^\circ)}$$

Solide ④

Pour le solide ④ de repère local r_6 on trouve $G_1 \cdot G(0, 0, 45) G(7, 0, 0) G(0, 0, -60) G(11.2, 0, 0) G(0, 0, 30)$.

En fait on choisira plutôt le "plus court chemin" qui relie r_6 à S_I c'est-à-dire $(S_I, r_8)(r_8, r_7)(r_7, r_6)$, d'où la matrice :

$$G(10.5, 2, 0) \cdot G^{-1}(-4.5, 0, 0) \\ \cdot G^{-1}(-1.5, 0, 0)$$

c'est-à-dire $G(16.5, 2, 0)$

$$\Rightarrow \boxed{r_6 = (16.5, 2, 0)}$$

Application numérique

$$G(6.5, 7, -15^\circ) = \begin{vmatrix} 0.9 & 0.45 & 6.5 \\ -0.45 & 0.9 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$G(16.5, 2, 0^\circ) = \begin{vmatrix} 0.7 & -0.7 & 1.5 \\ 0.7 & 0.7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$G(16.5, 2, 0^\circ) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 16.5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Prenons un point sur chaque solide, donné par ses coordonnées dans le repère local. Calculons ses coordonnées dans S_I .

Solide 2

$$m_2 = (7, 0, 1)^t$$

$$G(1.5, 2, 45^\circ) \cdot m_2 = (6.5, 7, 1)^t$$

Solide 3

$$m_3 = (5.6, 0, 1)^t$$

$$G(6.5, 7, -15^\circ) \cdot m_3 = (11.5, 4.5, 1)^t$$

Solide 4

$$m_4 = (1, 0.5, 1)^t$$

$$G(16.5, 2, 0^\circ) \cdot m_4 = (17.5, 2.5, 1)^t$$

b) Généralisation

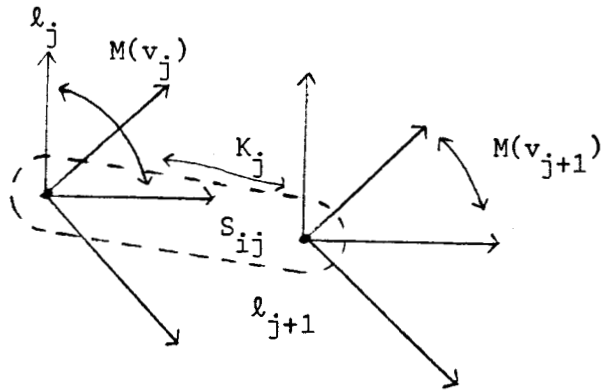
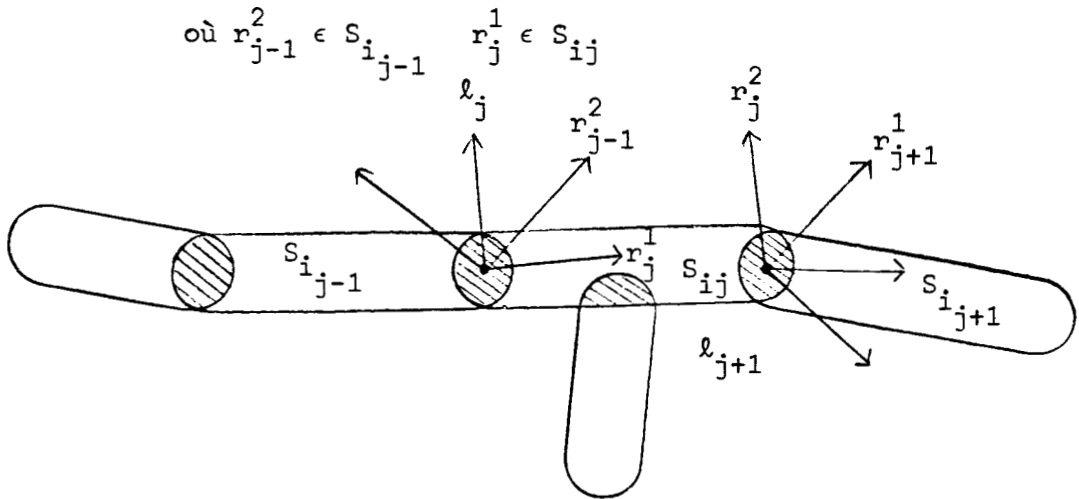
Considérons un mécanisme composé des solides S_0, S_1, \dots, S_n et des liaisons l_1, \dots, l_k , S_0 étant le bâti. On cherche à déterminer la position du solide S_U . On extrait du mécanisme la plus courte chaîne cinématique qui lie S_U à S_0 (chaîne dont le nombre de solides est minimum). Après une renumérotation on note cette chaîne $S_{i0}, S_{i1}, \dots, S_{ip}$ où $S_{i0} = S_0$ et $S_{ip} = S_U$, et ses liaisons

l_1, \dots, l_p , où la liaison l_j unit $S_{i_{j-1}}$ à S_{ij} . Notons :

(r_{j-1}^2, r_j^1) le couple associé à l_j

v_j la variable de la liaison l_j

$M(v_j)$ la transformation associée

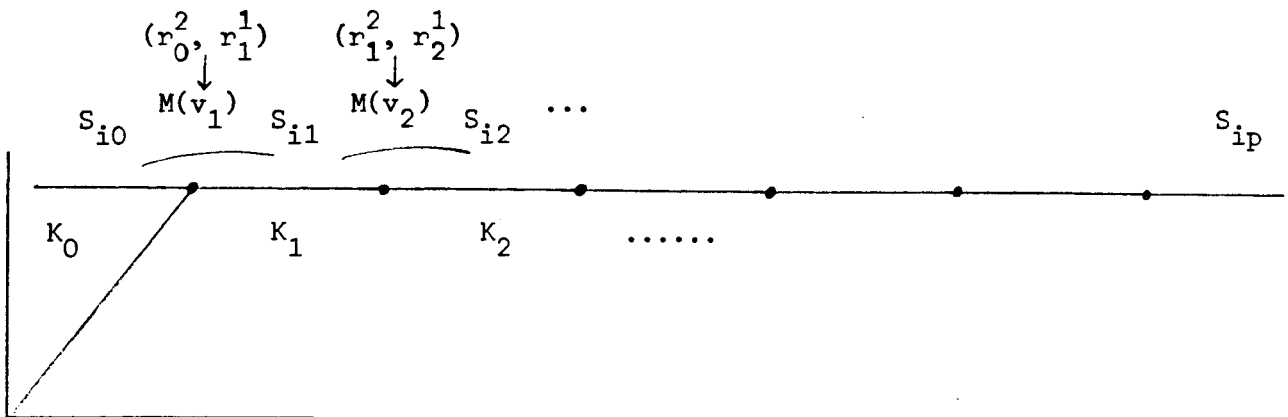


Notons K_j la transformation à paramètres constants associée à S_{ij} qui correspond à (r_j^1, r_{j-1}^2) , et K_0 la matrice de passage de r_0^2 au système invariable.

Dans ces conditions le plus court chemin de repères est :

$$(S_I, r_0^2)(r_0^2, r_1^1) \dots (r_{p-1}^2, r_p^1)(r_p^1, \eta)$$

$$\text{où } \eta = \begin{cases} r_p^1 & \text{si } r_p^1 \text{ est le repère local de } S_u \\ r_p^2 & \text{sinon} \end{cases}$$



La matrice associée à ce chemin est par conséquent

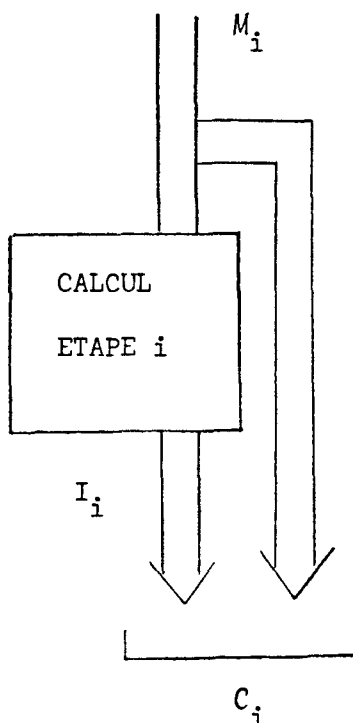
$$\begin{array}{c}
 K_0 \quad M(v_1) \quad K_1 \quad M(v_2) \quad \dots \quad K_{p-1} \quad M(v_p) \quad E \\
 \text{où } E = \begin{cases} \text{identité si } \eta = r_p^1 \\ K_p \quad \text{sinon} \end{cases}
 \end{array}$$

III.4. ANALYSE DU MOUVEMENT

III.4.1. Configuration d'un mécanisme

Appelons configuration l'ensemble formé par toutes les valeurs des variables de liaisons à une étape donnée d'un mécanisme en mouvement. Si il y a n liaisons dans le mécanisme alors la configuration C_i à l'étape i est l'ensemble $\{v_1^i, v_2^i, \dots, v_k^i\}$ où v_j^i est la valeur de la variable de liaison numéro j à l'étape i . Les paramètres autre que les variables de liaison étant par ailleurs constants, "l'état topologique" du mécanisme à un instant donné ne dépend que de sa configuration à ce même instant. L'analyse du mouvement d'un mécanisme revient à déterminer la suite de configuration C_1, \dots, C_t, \dots qui traduit son évolution.

Si nous appelons M l'ensemble des variables qui sont les moteurs du mécanisme et M_i la configuration des moteurs à l'étape i $M_i \subseteq C_i$, alors l'analyse du mouvement consiste à déterminer $I_i = C_i/M_i$ pour toutes les étapes, en fonction de M_i .



Avant d'aborder l'analyse du mouvement des mécanismes dans le cas général, on va d'abord s'intéresser au cas des mécanismes élémentaires.

III.4.2. Analyse des mécanismes élémentaires

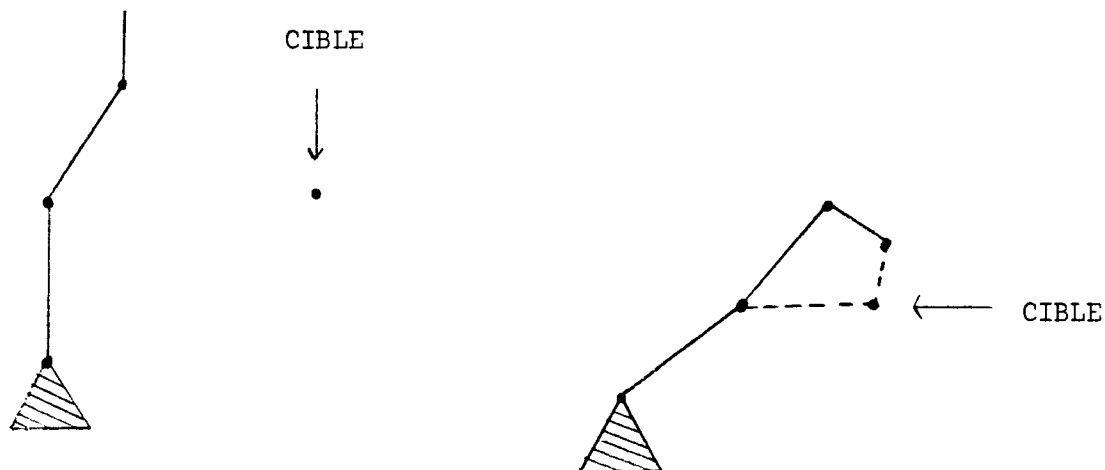
Il s'agit donc de mécanismes qui sont des chaînes élémentaires ouvertes ou fermées.

a) Systèmes ouverts

On rencontre deux types de problèmes pour les systèmes ouverts [LEE 82] [BAD 82].

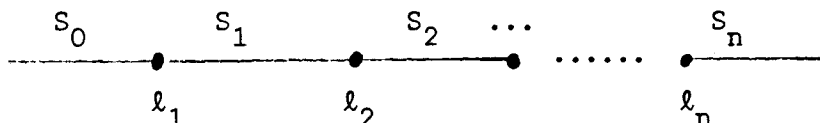
- Le problème direct où il s'agit d'affecter une configuration au mécanisme et de calculer ensuite la position résultante des différents éléments de la chaîne.

- Le problème inverse, problème spécifique à la robotique où il s'agit de calculer pour une chaîne, quelle configuration obéit à une contrainte donnée. Celle-ci pourra être par exemple, la donnée de la position du dernier élément de la chaîne. La solution à ce problème n'est en général pas unique :



Revenons au cas du problème direct.

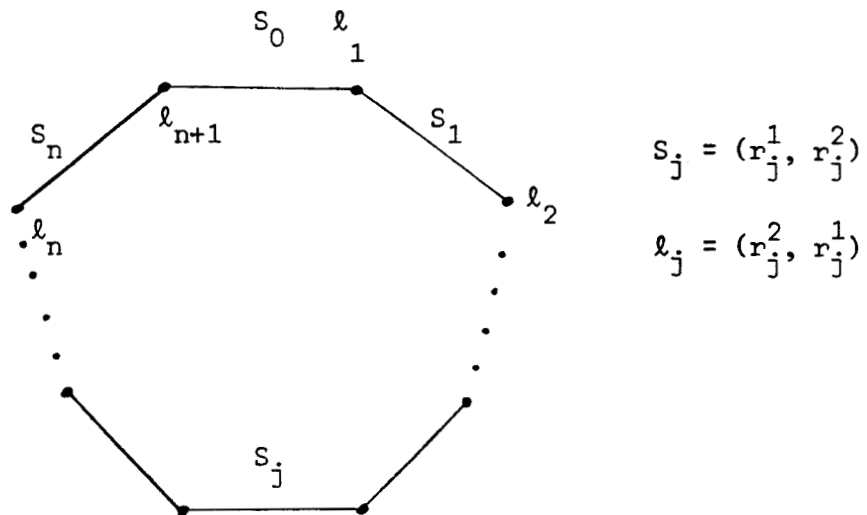
Soit S_0, S_1, \dots, S_n une chaîne élémentaire ouverte telle que S_0 est le bâti et l_1, l_2, \dots, l_n les liaisons entre les éléments de la chaîne.



Dans un tel mécanisme il y a autant de moteurs que de variables de liaisons. On dira que les liaisons sont indépendantes, c'est-à-dire qu'on peut agir sur une liaison sans que cela affecte les autres. Il n'y a pas d'analyse du mouvement proprement dite puisque à n'importe quelle étape $C_i/M_i = \emptyset$.

b) Systèmes fermés

Soit S_0, S_1, \dots, S_n (S_0) une chaîne élémentaire fermée et l_1, l_2, \dots, l_{n+1} ses liaisons.



Dans un système fermé, les liaisons ne sont pas toutes indépendantes. Pour que le système soit cohérent, il doit y avoir autant de moteurs que de variables indépendantes. Pour déterminer I_i on établit une relation qui traduit la dépendance des variables [SHE 71][HAR 64].

Considérons le système à une étape i donnée et supposons que :

- Le repère local à S_u est r_n^1 .
- Le système invariable est r_0^1 .

Soit $P \in S_n$ de coordonnées locales \overline{p}_u^i .

Soit \overline{p}_0^i ses coordonnées dans r_0^1 alors :

$$\overline{p}_0^i = K_0 M(v_1^i) K_1 M(v_2^i) \dots M(v_k^i) \overline{p}_k^i \quad (1)$$

où V_j^i est la valeur de la liaison l_j à l'étape. La chaîne étant fermée

$$\overline{p}_n^i = K_n M(v_{n+1}^i) \overline{p}_0^i \quad (2)$$

(1) et (2) \Rightarrow

$$\overline{p}_0^i = K_0 M(v_1^i) K_1 M(v_2^i) \dots K_{n-1} M(v_n^i) K_n M(v_{n+1}^i) \overline{p}_0^i$$

i.e.

$$K_0 M(v_1^i) K_1 M(v_2^i) \dots K_n M(v_{n+1}^i) - \text{Identité} = 0$$

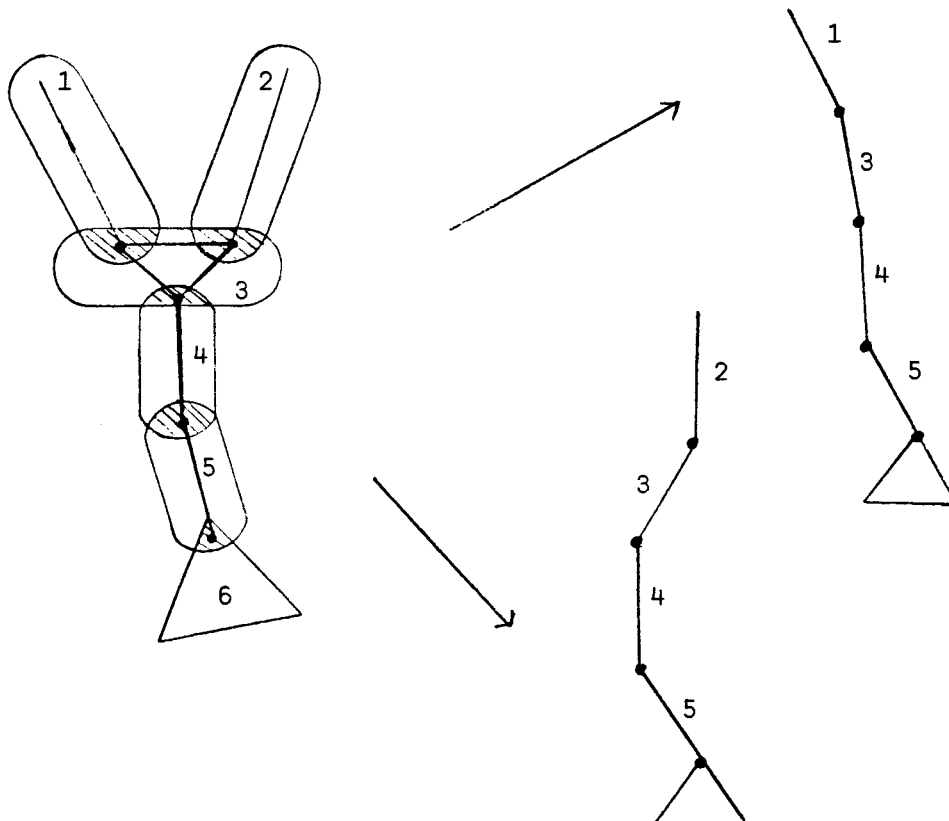
La résolution de cette équation permet de déterminer la configuration du système à l'étape i . Une méthode de résolution d'une telle équation est décrite dans [HAR 64].

Nous ne revenons pas ici sur le cas du couple de transmission. Rappelons que l'équation associée à un tel système fermé est $R_1 V_1 + s R_2 V_2 = 0$, où R_1 et R_2 sont les rayons des éléments du couple et V_1, V_2 ses variables.

III.4.3. Analyse des mécanismes complexes

Un mécanisme complexe n'est réduit ni à une chaîne élémentaire fermée, ni à une chaîne élémentaire ouverte. Il est par contre composé de tels mécanismes élémentaires, de sorte que son évolution est en général étudié à travers celle des mécanismes élémentaires qui le constituent.

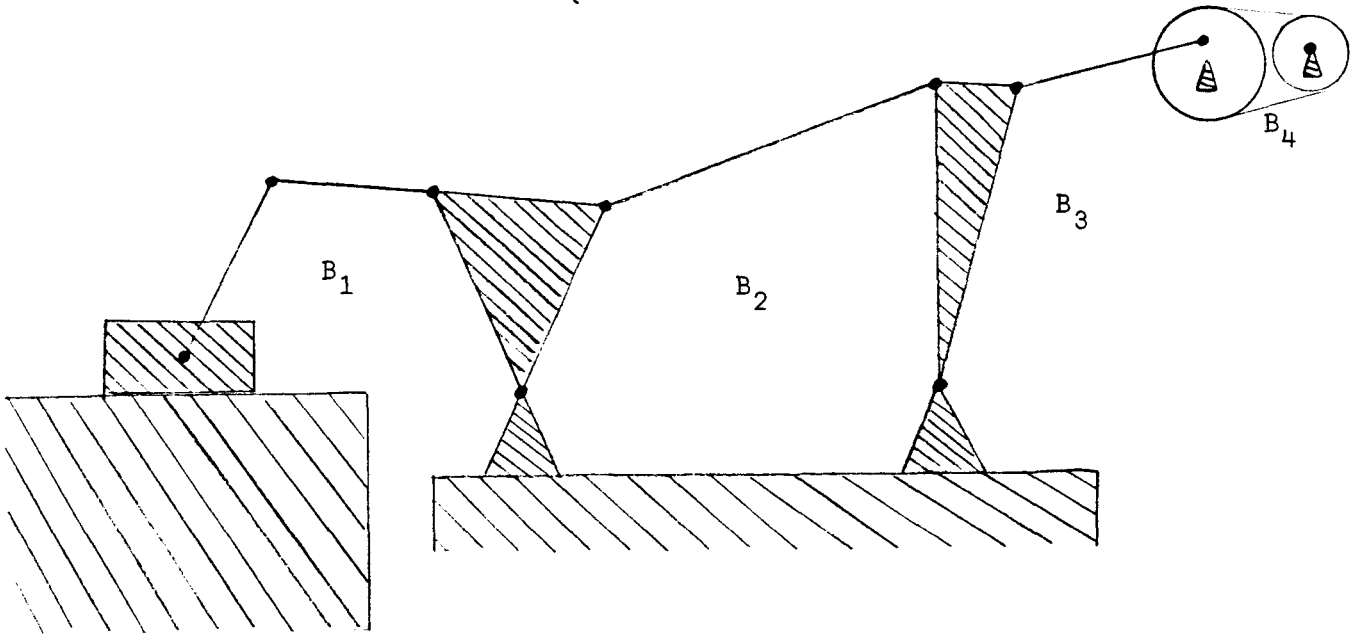
Exemple 1 : Pour étudier le mouvement d'une chaîne non élémentaire, on la décompose en chaînes élémentaires.



Exemple 2 : Pour étudier le mouvement d'un système fermé complexe, on extrait une famille de systèmes fermés élémentaires qui épuisent toutes les liaisons du mécanisme : B_1, B_2, \dots, B_n [SHE 72].

A chaque B_i on associe l'équation ($E_i = 0$) qui modélise son activité.
L'activité résultante du mécanisme est elle modélisée par le système [HAR 64] :

$$\begin{cases} E_1 = 0 \\ E_2 = 0 \\ \vdots \\ E_n = 0 \end{cases}$$



La résolution de ce système n'est en général pas simple. Une méthode d'analyse d'une classe particulière de mécanismes complexes sera présentée dans un chapitre ultérieur.

III.4. CONCLUSION

Les méthodes de description et d'analyse des mécanismes vont nous permettre dans le cadre de l'animation d'objets mécaniques d'avoir une représentation cinématique de la scène que l'on désire animer. L'animation se décompose alors en deux stades, le stade cinématique où l'on travaille sur la représentation symbolique de la scène afin de déterminer la suite de configurations qui traduit son évolution, le stade graphique où à partir de la suite de configurations obtenue, on calcule la suite d'images correspondantes, à visualiser.

2^{ème} PARTIE

*
* APPLICATION A L'ANIMATION *
*

Nous présentons dans cette deuxième partie différents aspects d'un système d'animation graphique fondé sur un contrôle mécanique.

L'étude réalisée est surtout axée sur les aspects contrôle de l'animation, les aspects création et restitution bien qu'abordés ne font pas l'objet d'une étude approfondie.

Le système proposé est un système interactif. Le dialogue s'établit d'abord au niveau de la création des acteurs mécaniques lesquels sont obtenus par assemblage de pièces indépendantes, puis au niveau de la mise en oeuvre de leur mouvement.

La production de l'animation est donc réalisée en deux stades. Chacun d'eux comprend un processus graphique et un processus mécanique :

1) Le stade statique :

- Construction du modèle cinématique des acteurs.
- Création de l'image de la scène.

2) Le stade dynamique :

- Contrôle : analyse structurelle et cinématique.
- Création (en tant que processus de production).

La qualité principale d'un système graphique interactif réside dans sa capacité à réagir immédiatement par l'image à l'effet d'une action. Ceci est facilement réalisable pendant le stade statique. Pendant le stade dynamique, l'interaction devient possible si le contrôle et la création peuvent être réalisés en temps différé bref. Cela suppose donc des images de complexité moyenne alliées à un contrôle facile et peu coûteux, et implique par conséquent un certain nombre de choix structurels que nous présentons tout au long de cette deuxième partie du travail.

CHAPITRE IV

* LA SCENE *

LA SCENE

IV.0. INTRODUCTION

IV.1. IMAGE DE LA SCENE

IV.2. LES DIFFERENTS CONSTITUANTS DE LA SCENE

IV.2.1. Position du problème

IV.2.2. Description des différents constituants

- a) *Les constituants élémentaires*
- b) *Les liens et liaisons*
- c) *Les éléments*
- d) *L'acteur*
- e) *Le décor*

IV.2.3. Quelques exemples de scènes

- a) *Le couple de transmission*
- b) *Le système planétaire*

IV.3. REPRESENTATION DE LA SCENE

IV.3.1. Représentation logique

- a) *La scène*
- b) *Le décor*
- c) *L'acteur*

IV.3.2. Représentation cinématique et graphique

- a) *Description cinématique d'un acteur*
- b) *Description graphique de la scène*

IV.4. CONCLUSION

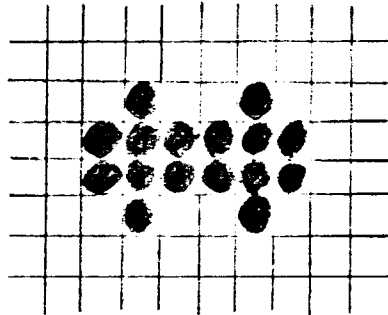
IV.0. INTRODUCTION

Le terme "scène" a plusieurs significations. Dans le théâtre ou le cinéma il peut s'agir du lieu où se déroule une action. Ce lieu comprend un *décor* où évoluent des *acteurs*. C'est la scène en tant qu'objet, sens que nous lui réservons au cours de cette étude. Parallèlement le mot "scène", peut aussi signifier une partie de l'action globale qui se déroule dans la "scène-objet". Nous parlerons plutôt de *mouvement*, en raison de la nature mécanique des acteurs.

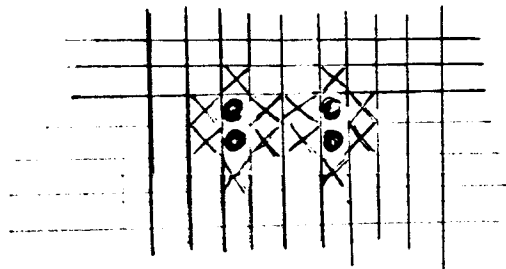
Le présent chapitre consacré à la scène, en décrit les différents aspects en terme de ses *constituants*, avant d'en aborder la *représentation interne*.

IV.1. IMAGE DE LA SCENE

Nous décrivons d'abord la scène en tant qu'image matérialisée sur la surface de visualisation. Rappelons que cette surface est un tableau T quadrillé de façon régulière. Le pixel, élément indivisible de l'image, correspond à un carreau élémentaire de T.



Le *constituant graphique* de base de la "scène-image" est la *tache*. C'est un ensemble de pixels formant une partie connexe de l'image. Une tache comprend un contour qui définit sa géométrie et un intérieur.



TACHE = CONTOUR + INTERIEUR

Tout objet de la scène est constitué par un ensemble de telles taches. Pour construire un objet, il est nécessaire de créer et puis de déplacer les taches sur la surface de visualisation, afin de les amener aux endroits voulus. Il est alors nécessaire de construire l'espace dans lequel sont définis les opérateurs de création et de manipulation des éléments de l'image. Cet espace théorique beaucoup plus grand que la surface de visualisation et souvent de nature différente, est intitulé *espace graphique*.

Quel espace graphique ?

L'espace dans lequel sont définis les objets graphiques de notre application est constitué de n plans parallèles à la surface de visualisation. Cette dernière constitue une fenêtre unique sur les différents plans et est le lieu pour chacun d'eux, d'une image qu'on peut qualifier de partielle. L'image finale est alors le résultat de la "superposition" de toutes les images partielles [Fig. 1].

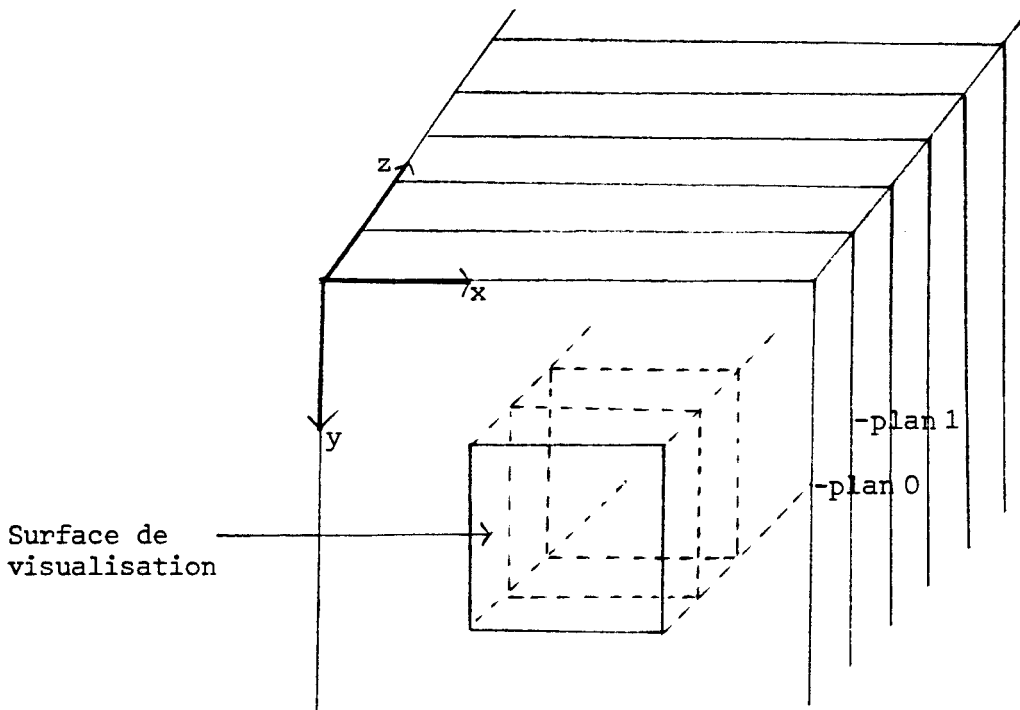


Fig. 1 : a- Espace graphique.

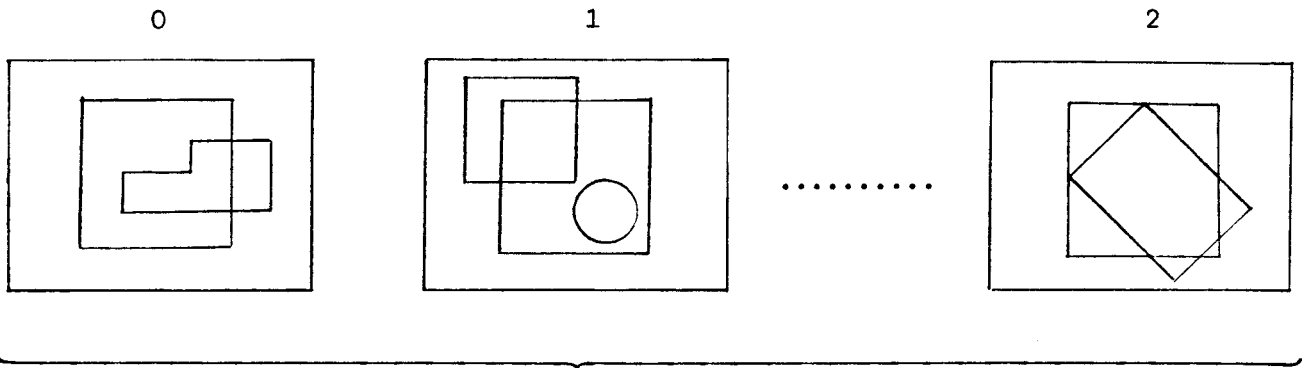
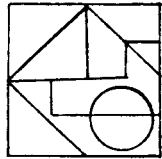


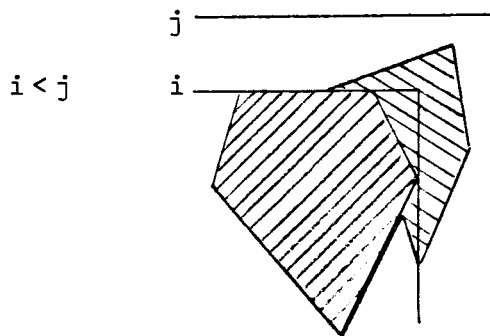
Fig. 1 : b- Image.



IMAGE

Les taches manipulées sont colorées et opaques. Ceci étant, lorsque deux images partielles se présentent, il est nécessaire de déterminer l'ordre de visibilité de ces dernières. Le problème est en général résolu en définissant une relation d'ordre sur les plans de l'espace graphique. Le plan le plus proche de la surface de visualisation est affecté du numéro 0, le suivant de 1, etc... Ainsi une tache du plan i sera "plus visible" qu'une tache du plan j si $i < j$. Cette numérotation est arbitraire et ne résulte de l'affectation d'un numéro d'ordre à chaque tache.

Fig. 2



Nous avons laissé supposer qu'une tache était affectée à un plan, ajoutons que toute transformation géométrique appliquée à une tache, n'est définie que dans le plan auquel elle appartient. Un objet est en général composé de taches qui appartiennent à des plans différents.

Le choix d'un tel espace graphique, a pour raison essentielle la nature même des objets manipulés par l'application, objets mécaniques dont les éléments évoluent dans des plans parallèles. Le solide y est représenté par une tache et le mécanisme par un ensemble de telles taches.

Notons enfin, que les attributs géométriques d'une tache sont définis par rapport à un système invariable lié à l'espace graphique. Une tache étant astreinte à se mouvoir dans un même plan, on considère un repère orthonormé plan unique comme système de référence de l'espace des transformations géométriques.

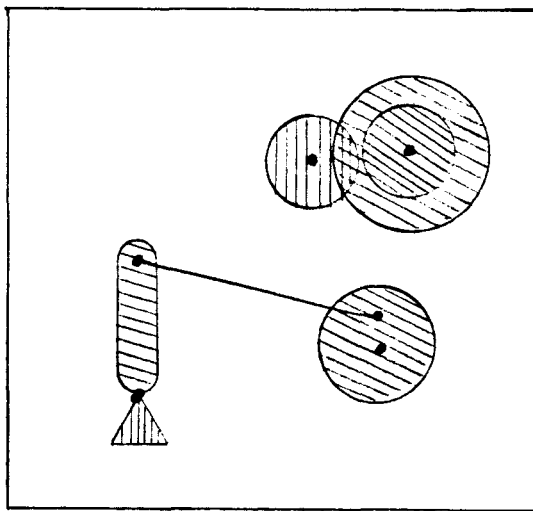


Fig. 3 : Scène.

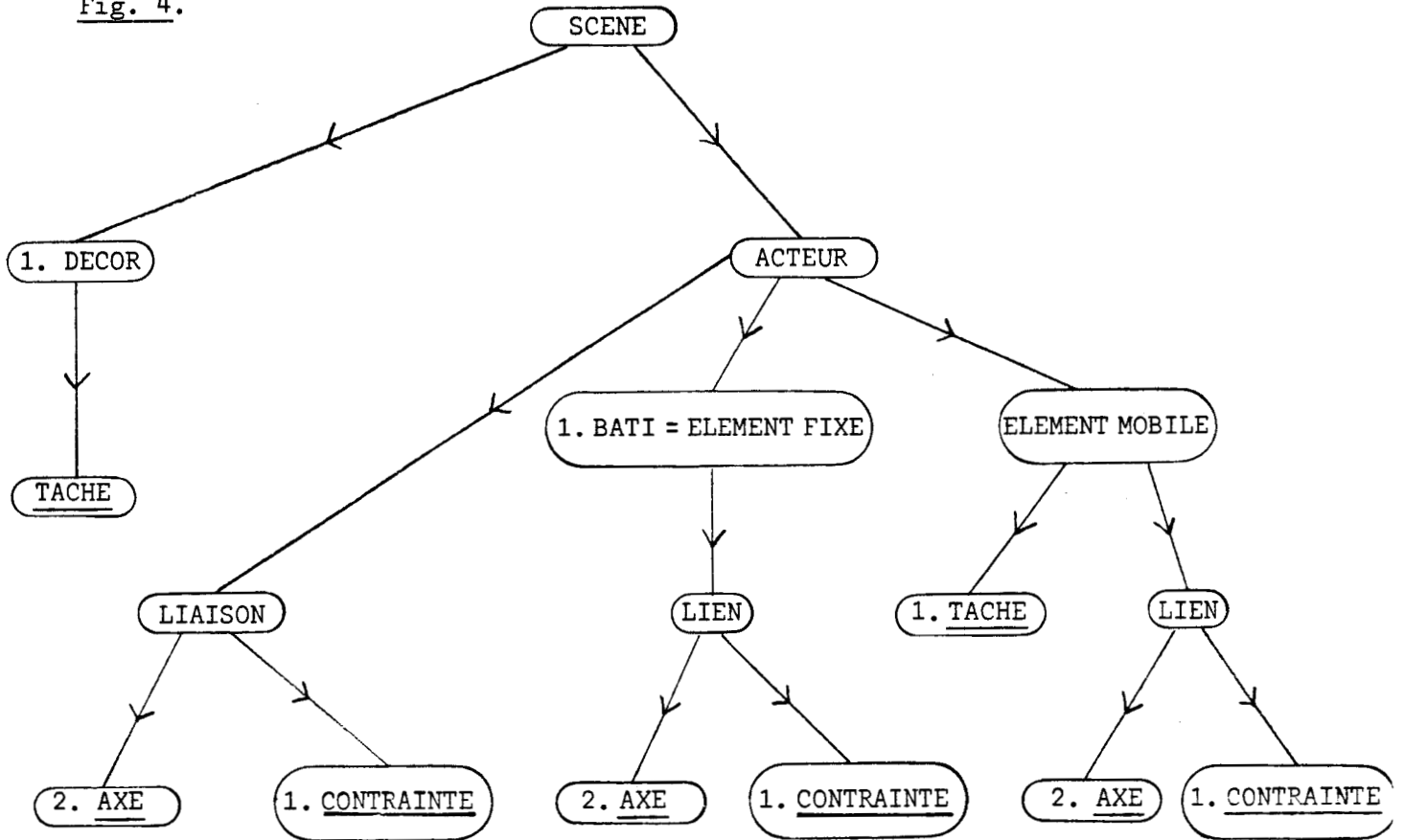
IV.2. LES DIFFERENTS CONSTITUANTS DE LA SCENE

IV.2.1. Position du problème

Nous abordons la description de la scène à travers les différentes classes d'objets susceptibles d'y apparaître, objets que nous nommons *constituants*.

La structure arborescente de la figure 4, met en valeur les différentes classes de constituants, tout en faisant apparaître leur composition. Ainsi l'occurrence de $(X) \rightarrow (Y)$ dans cet arbre orienté signifie que les constituants de la classe X sont formés de constituants de la classe Y , alors que celle de $(X) \rightarrow (hY)$ impose de plus que le constituant de la classe X comporte exactement h constituants de la classe Y .

Fig. 4.



La scène comprend un décor et un certain nombre d'*acteurs*. Le décor est un constituant de nature exclusivement graphique. L'*acteur* comporte un *élément* que nous qualifions de fixe (bâti), qui est un constituant mécanique, et des éléments mobiles, qui contrairement à l'élément fixe ajoutent à leur nature mécanique la composante graphique grâce à laquelle l'*acteur* est visualisé. Les feuilles de l'arbre font apparaître les ingrédients graphiques et mécaniques de base de la scène que sont les *tâches axes* et *contraintes*.

Un constituant de la scène se définit en premier lieu par son appartenance à une classe de constituants (DECOR, ACTEUR,...) et en second lieu par un ensemble d'attributs qui le caractérisent. Ces attributs sont de deux sortes.

1) Les attributs qualitatifs

Ces attributs caractérisent d'abord le type du constituant au sein de la classe à laquelle il appartient :

- Type d'un axe : rotation, glissement,...
- Type d'une liaison : rotation, transmission,...
- Type d'une tache : cercle, polygone, vide ou pleine,...
- ⋮

A ces attributs s'ajoutent un attribut de mobilité qui lui caractérise la qualité d'un constituant, d'être FIXE ou MOBILE pendant l'analyse du mouvement d'un acteur et son animation. Certains constituants pourront enfin avoir l'attribut *moteur*.

2) Les attributs quantitatifs

Ces attributs sont relatifs d'une part aux caractéristiques cinématiques et géométriques des constituants mécaniques, d'autre part à certaines caractéristiques graphiques des taches. Nous citons en exemple :

- Les paramètres des transformations géométriques qui traduisent une contrainte,
- La liste des sommets d'une tache de type polygone,
- Les paramètres d'un repère orthonormé associé à un axe,
- La valeur définissant la couleur d'une tache,...

Notons que ces attributs sont relatifs aux constituants de base de la scène uniquement et que c'est l'altération d'un sous-ensemble de ces attributs qui est à l'origine du mouvement et de l'animation.

IV.2.2. Description des différents constituants

a) Les constituants élémentaires

Les taches. Le constituant graphique de base de la scène est un objet *indéformable*, il peut être *fixe* ou *mobile*. Une tache se caractérise par un type (polygone, cercle,...) mais aussi par son caractère vide ou plein. Une tache est vide si elle est réduite à un contour. Ce sont là les seuls attributs quantitatifs d'une tache. Nous retenons par ailleurs, pour notre application, les attributs quantitatifs suivants :

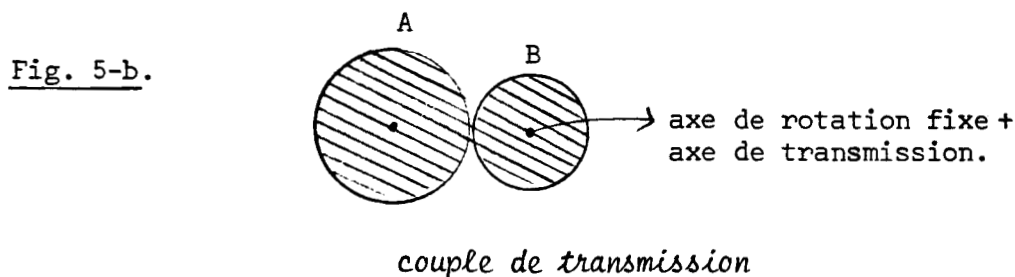
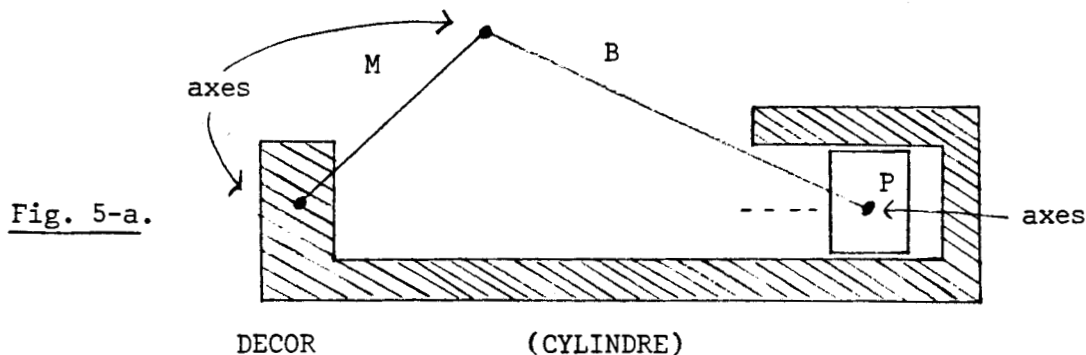
- Les points caractéristiques (absolus et relatifs à un repère local).
- L'emplacement de la tache (position du repère local).
- La couleur.
- L'ordre de visibilité.

L'unique attribut quantitatif qu'on s'autorise à modifier pendant l'animation est l'emplacement de la tache.

Les axes

Ce sont les lieux géométriques, sièges des articulations entre les différents éléments du mécanisme. Ils ont une existence exclusivement géométrique. Ils peuvent être fixes ou mobiles. Ils se caractérisent par leur type rotation, glissement ou transmission. Les axes de type transmission ont obligatoirement l'attribut mobile.

Le mécanisme de la figure 5-a admet deux axes fixes de type rotation et glissement. Le piston P admet deux axes mobiles de rotation et de glissement. Enfin, la bielle B et la manivelle M admettent chacune deux axes de rotation mobiles. Celui de la figure 5-b admet deux axes fixes de type rotation. Les deux éléments du couple de transmission ont chacun un axe de transmission (engrenage externe).



Le modèle cinématique décrit au Chapitre III leur associe un repère ortho-normé que nous notons (x, y, θ) . x , y et θ constituent avec les butées I_x , I_y , et I_θ les attributs quantitatifs d'un axe (auquel il faut ajouter dans le cas d'un axe de transmission le rayon de l'élément), I_x , I_y et I_θ étant des intervalles de valeurs dans lesquels sont définis x , y et θ .

Les axes sont supposés appartenir à tous les plans de l'espace graphique, c'est-à-dire qu'ils traversent tous ces plans ; les axes de rotation et de transmission perpendiculairement et les axes de glissement parallèlement. Ceux-ci n'ont aucune existence matérielle (graphiquement parlant), de sorte qu'une tache en mouvement peut "traverser" un axe.

Les contraintes

Une contrainte est une relation géométrique entre exactement deux axes.

Elle est représentée par le couple d'axes qu'elle unit.

Nous trouvons d'abord les *contraintes d'indéformabilité*. De telles contraintes lient deux axes d'un même élément, ces derniers pouvant être de type différent [fig. 6-a].

Contrainte d'indéformabilité

Fig. 6-a.

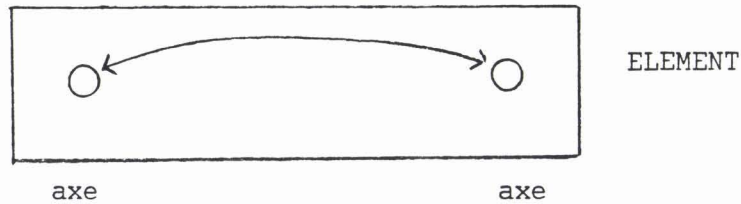
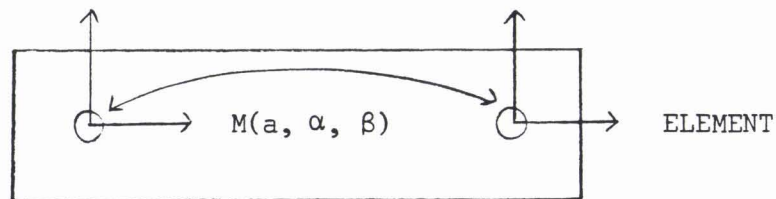


Fig. 6-b.



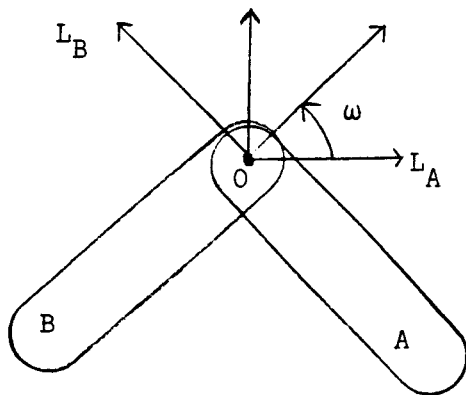
Les attributs quantitatifs d'une contrainte d'indéformabilité sont les paramètres (a, α, β) de la transformation géométrique qui lie les repères des axes associés et que nous avons noté $M(a, \alpha, \beta)$ [Chapitre III]. Ces attributs sont constants.

Nous trouvons ensuite les *contraintes de liaison*. Une contrainte de liaison est une relation géométrique entre deux axes qui appartiennent à deux éléments différents. Elle peut être de type rotation, glissement ou transmission selon le type des axes qu'elle unit. Ces derniers ont le même type sauf dans le cas d'une contrainte de type rotation. Celle-ci peut en effet unir un axe de rotation fixe à un axe de transmission. Notons enfin que les axes qui interviennent dans ce type de contrainte ne peuvent être tous les deux fixes, et qu'un axe ne peut appartenir qu'à une seule contrainte de liaison.

Les attributs quantitatifs d'une contrainte de liaison sont définis par les valeurs des paramètres des transformations géométriques qui la décrivent. Ils dépendent du type de la contrainte.

*) Contrainte de type rotation

- Valeur angulaire ω de la transformation $G(0, 0, \omega)$ qui lie les axes de la contrainte.



$$L_A = (x_A, y_A, \theta_A)$$

$$L_B = (x_B, y_B, \theta_B)$$

$$\omega = (OX_A, OX_B)$$

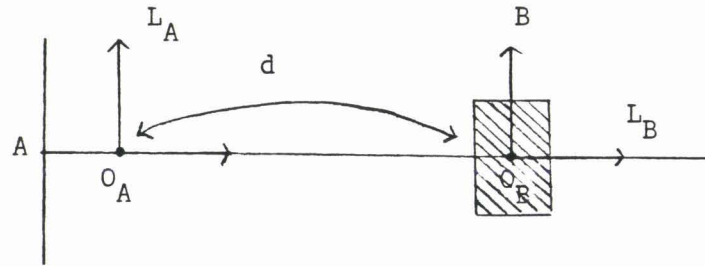
$$x_A = x_B, y_A = y_B$$

- Butée de liaison $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ qui détermine un intervalle de valeurs dans lequel est défini ω .

*) Contrainte de type glissement

- Valeur du déplacement 'd' paramètre de la transformation associée $G(d, 0, 0)$.

Fig. 7.



$$L_A = (x_A, y_A, \theta_A)$$

$$\theta_A = \theta_B$$

$$L_B = (x_B, y_B, \theta_B)$$

$$d = \overline{O_A O_B}$$

- Butée de liaison [d_{\min} , d_{\max}]

*) Contrainte de type transmission

- Couple (s, ρ) où s caractérise le type de la transmission et ρ le rapport de transmission

$$(s_A, \rho_A)$$

$$(s_B, \rho_B)$$

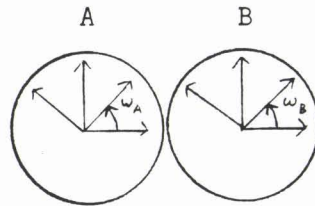


Fig. 8.

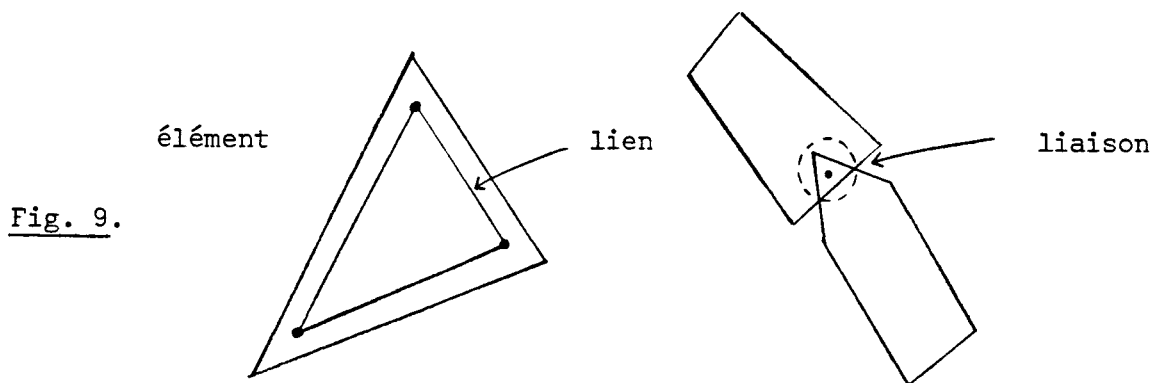
- L'angle ω que forme l'axe de transmission avec l'axe de rotation fixe.

Une contrainte est notée par le couple d'axes qu'elle unit. (A_1, A_2) désigne la contrainte qui lie l'axe A_1 à l'axe A_2 , qui n'est pas la même que (A_2, A_1) . En effet les transformations associées à (A_1, A_2) et (A_2, A_1) sont en général différentes. Le tableau suivant donne pour chaque type de contrainte les paramètres de la transformation associée à un couple et à son opposé.

	(A_1, A_2)	(A_2, A_1)
Indéformabilité	a, α, β	$-a, -\beta, -\alpha$
Rotation	ω	$-\omega$
Glissement	d	$-d$
Transmission	(s, ρ)	$\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{\rho}\right)$

b) Liens et liaisons

Liens et liaisons sont des ensembles qui comprennent deux axes et la contrainte qui les lie : $\{A_1, A_2, (A_1, A_2)\}$. Dans le cas d'un *lien*, A_1 et A_2 appartiennent au même élément. Ils ont donc le même attribut de mobilité et (A_1, A_2) désigne une contrainte d'indéformabilité.



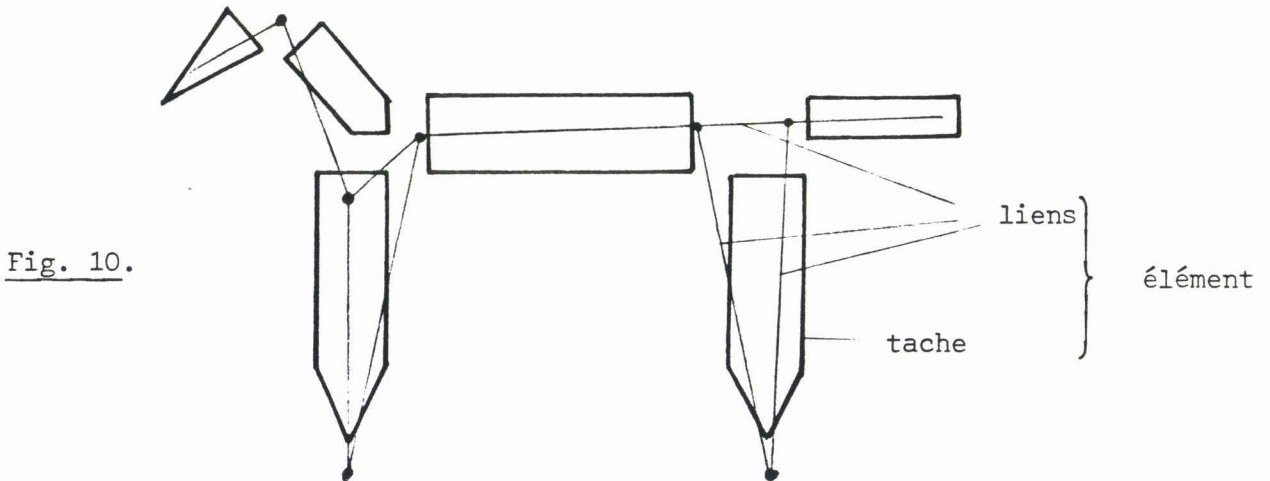
L'attribut de mobilité du lien est identique à celui des axes qui le composent. Un lien peut contenir deux fois le même axe, la contrainte est alors réduite à l'identité.

Dans le cas d'une *liaison*, A_1 et A_2 appartiennent à des éléments différents et (A_1, A_2) désigne une contrainte de liaison. Une liaison admet un type qui est celui de la contrainte qu'elle renferme. Une liaison peut être *motrice*. Cela indique que ses paramètres peuvent être contrôlés de manière externe.

c) Les éléments

*) Les éléments mobiles

Ils constituent des parties mobiles de l'acteur. Un élément mobile comprend une tache (mobile) unique et un ensemble de liens dont les axes sont rigidement liés à la tache et se déplacent avec elle. Contrairement aux mécanismes réels, il n'est pas nécessaire ici que les axes soient géométriquement inclus dans les taches. Il existe ainsi une relative indépendance entre la représentation graphique du mécanisme et son schéma cinématique. Cet artifice permet beaucoup de liberté quant à la réalisation de cette représentation graphique et par conséquent quant à l'animation.



Les constituants de l'élément mobile ont tous l'attribut mobile. Notons enfin qu'un élément mobile aura l'attribut MOTEUR si l'un de ses axes intervient dans une liaison motrice.

*) L'élément fixe (bâti) : C'est l'ensemble des liens fixes.

*) On associe à un élément un repère local. Ce dernier est lié aux axes de l'élément par des contraintes d'indéformabilité. La tache de l'élément est définie dans ce repère local.

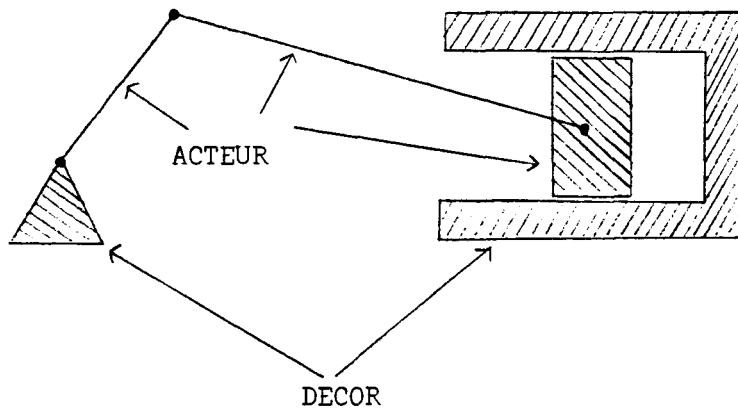
d) L'acteur

Il est formé par un ensemble d'éléments liés entre eux par des liaisons et formant un mécanisme cohérent. L'un des éléments a l'attribut fixe, il représente le bâti du mécanisme, les autres éléments sont tous mobiles.

e) Le décor

Le décor est un objet figé. Il est constitué de taches qui permettent de représenter le cadre dans lequel évoluent les acteurs, ainsi que certaines de leurs parties non destinées à être animées (cylindre, rampe,...).

Fig. 11.

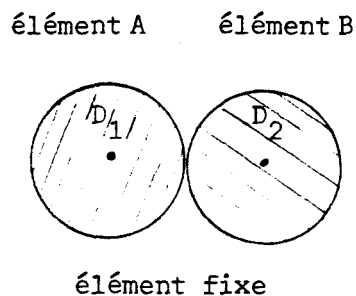


IV.2.3. Quelques exemples de scènes

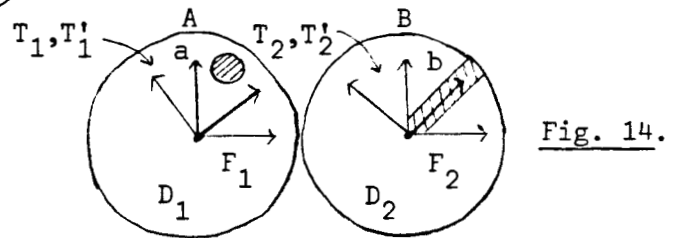
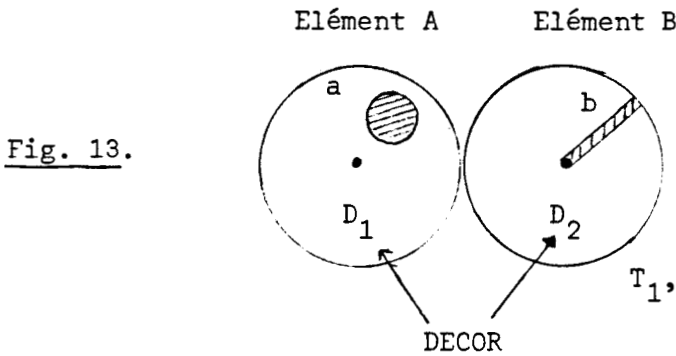
1) Le couple de transmission

Nous pouvons représenter les éléments d'un couple de transmission à l'aide de deux taches circulaires [Fig. 12]. Le seul mouvement possible de ces taches est alors un mouvement de rotation autour de leur centre.

Fig. 12.



Or ce mouvement de rotation fournit une image figée. Cette constatation nous pousse à considérer les taches D_1 et D_2 comme taches du décor, et à affecter aux éléments A et B des taches a et b [Fig. 13] dont le mouvement autour des axes des éléments, et dans le cadre du décor défini par les taches circulaires a pour effet visuel la rotation de celles-ci.



Composition de la scène

Une telle scène est donc formée du décor D_1 et D_2 et d'un acteur. Ce dernier comprend [Fig. 14]:

- 1) L'élément fixe : $\{F_1, F_2, (F_1, F_2)\}$ où F_i , confondu avec le centre de D_i , est un axe de *rotation*.
- 2) L'élément mobile A : - tache 'a', de repère local T_1
 - axes de *transmission* T_1, T'_1
 - lien $\{T_1, T'_1, (T_1, T'_1)\}$
- 3) L'élément mobile B : - tache 'b', de repère local T_2
 - axe de *transmission* T_2, T'_2
 - lien $\{T_2, T'_2, (T_2, T'_2)\}$
- 4) La liaison, liant A à l'élément fixe $\{T_1, F_1, (T_1, F_1)\}$,
La liaison, liant B à l'élément fixe $\{T_2, F_2, (T_2, F_2)\}$,
 ces deux liaisons sont de type *rotation*.
- 5) La liaison $\{T'_1, T'_2, (T'_1, T'_2)\}$ de type *transmission* qui lie les éléments A et B.



2) Système planétaire

Nous pouvons représenter un système planétaire à l'aide d'un ensemble de taches qui correspondent aux différentes planètes. Dans l'exemple de la figure 15, la planète D est supposée fixe. Les planètes A, B et C sont les satellites respectifs de D, A et B. Le mouvement relatif d'une planète par rapport à la planète dont elle est satellite, est un mouvement de rotation autour du centre de cette dernière. La figure 16 met en relief le schéma cinématique du mécanisme associé qui n'est autre que le mécanisme du bras articulé.

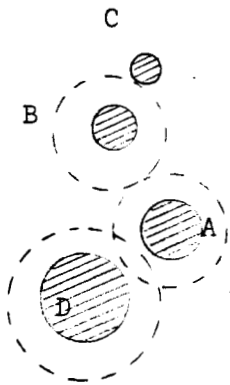


Fig. 15.

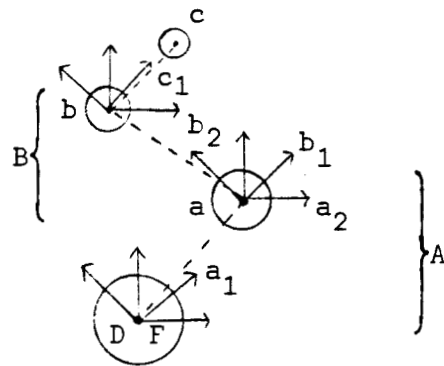


Fig. 16.

Composition de la scène

Le décor est réduit à la tache D. L'acteur comprend :

- L'élément A : - axes de rotation a_1, a_2 ,
- tache a, de repère local a_1 ,
- lien $\{a_1, a_2, (a_1, a_2)\}$.
- L'élément B : - axes de rotation b_1, b_2 ,
- tache b, de repère local b_1 ,
- lien $\{b_1, b_2, (b_1, b_2)\}$.
- L'élément C : - axe de rotation c_1 ,
- tache c, de repère local c_1 ,
- lien $\{c_1, c_1, (c_1, c_1)\}$.

- L'élément fixe : $\{f, f, (f, f)\}$ où f est un axe de rotation fixe.
- Les liaisons de type rotation :
 - $\{f, a_1, (f, a_1)\}$
 - $\{a_1, b_1, (a_2, b_2)\}$
 - $\{b_2, c_1, (b_2, c_1)\}$

Ces liaisons sont toutes *motrices*.

IV.3. REPRESENTATION DE LA SCENE

Il s'agit donc, à présent, de décrire les rouages internes par lesquels l'image de la scène et sa structure coexistent.

Il apparaît principalement trois niveaux de représentation :

- 1) *Le niveau structurel*, dans lequel sont mises en valeur les relations qui existent entre les différents constituants des acteurs et qui traduisent leur structure.
- 2) *Le niveau cinématique*, dans lequel on met l'accent sur le schéma cinématique de l'acteur.
- 3) *Le niveau graphique*, enfin, permet de décrire la scène en tant qu'objet graphique.

Le modèle représentatif de la scène est basé sur le concept de graphe. Les notions de théorie des graphes utilisées dans ce chapitre et les suivants sont présentés en annexe.

IV.3.1. Représentation logique de la scène

a) La scène

La scène dans sa totalité est représentée par une simple liste dont le premier élément est le DECOR, et les éléments suivants les ACTEURS.

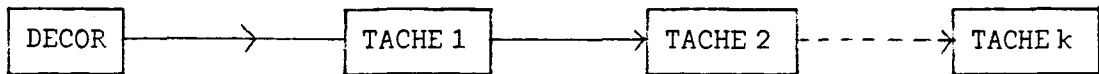
Les flèches n'induisent aucune relation entre les constituants.



DECOR et ACTEURS sont des objets autonomes.

b) Le décor

Le décor est constitué par un ensemble de tâches indépendantes.



c) L'acteur

Les graphes sont adaptés à la représentation des mécanismes [SHE 72].

L'acteur étant un mécanisme, sa structure peut être décrite par la donnée d'un graphe $G = (X, E)$ CONNEXE où X est un ensemble de constituants de même nature (sommets du graphe) et E un ensemble de relations entre ces différents constituants (arêtes du graphe).

Les constituants de l'acteur porteurs d'informations structurelles sont par ordre de complexité décroissante :

- 1) Les éléments,
- 2) Les liens et les liaisons,
- 3) Les axes et les contraintes.

Toutefois la description de la structure de la scène est basée sur les constituants élémentaires axes et contraintes. Le graphe des axes est donc le graphe de base de la description. Il permet l'accès à l'information la plus élémentaire mais aussi aux liaisons et éléments comme nous le verrons.

Voici d'abord quelques principes relatifs à la structure des acteurs.

Notons $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ l'ensemble des axes d'un acteur,
 $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ l'ensemble des contraintes,
 $E = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ l'ensemble des éléments et
 $L = \{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_r\}$ l'ensemble des liaisons.

Nous avons les règles suivantes :

- 1- Un couple d'axes définit une contrainte unique.
- 2- Si $A_p = \{a_{p_1}, \dots, a_{p_q}\}$ représente l'ensemble des axes d'un même élément e_p , alors les a_{p_q} sont deux à deux liés par une contrainte d'indéformabilité.
- 3- Pour tout axe a_{p_q} d'un élément e_p , il existe un axe unique a_{u_v} appartenant à un élément e_u tel que a_{p_q} et a_{u_v} sont liés par une contrainte de liaison.
- 4- Pour tout axe a_{i_j} d'une liaison ℓ_j , il existe un axe unique a_{u_v} d'une liaison ℓ_v tel que a_{i_j} et a_{u_v} sont liés par une contrainte d'indéformabilité.

Une contrainte est représentée par le couple d'axes qu'elle unit. Nous considérons l'ensemble C des contraintes comme une relation binaire sur A . On partitionne C en $C_i \cup C_\ell$ où C_i et C_ℓ représentent respectivement l'ensemble des contraintes d'indéformabilité et de liaison. C_i et C_ℓ sont des relations d'équivalence sur A .

Voici à présent les différentes représentations de l'acteur, que les principes énoncés précédemment permettent de mettre en valeur.

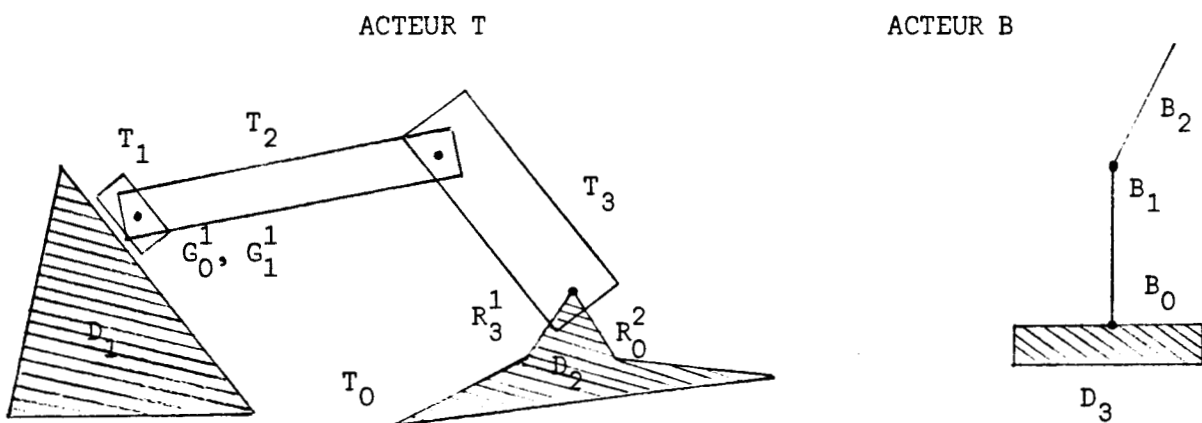
- Le graphe des axes

C'est le graphe $G = (A, C)$. Dans ce graphe, une arête relie deux sommets, si les axes correspondants sont liés par une contrainte. Le graphe des axes est connexe en raison des principes 2 et 3.

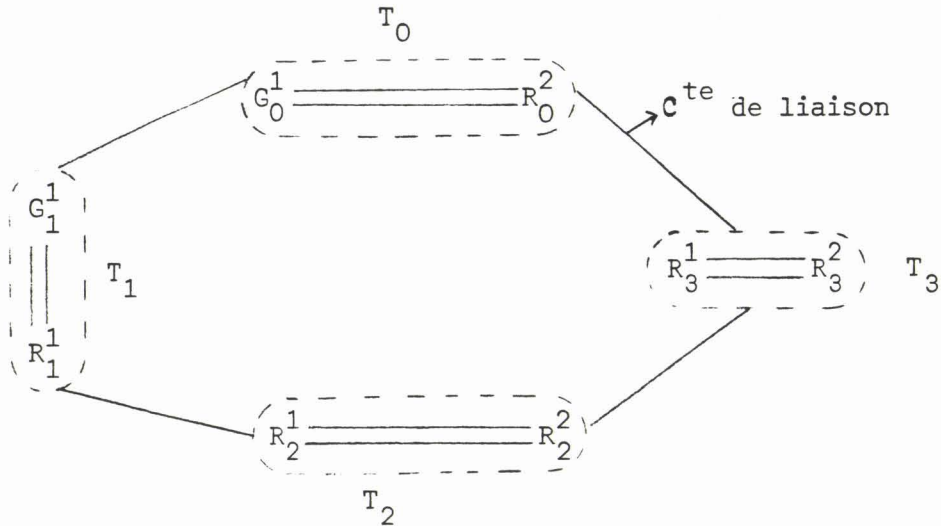
Considérons la scène de la figure 16. Le décor est formé par les tâches D_1 , D_2 et D_3 . La scène comprend deux acteurs, l'acteur T et l'acteur B. Le tableau suivant décrit l'acteur T. Un élément de T est noté T_i , T_0 étant le bâti. Le $j^{\text{ème}}$ axe de T_i est noté X_i^j où $X \in \{R, G\}$, R pour rotation et G pour glissement.

Elément	Axes	lié par une contrainte de liaison à :
T_0	G_0^1	G_1^1
	R_0^2	R_3^1
T_1	G_1^1	G_0^1
	R_1^2	R_3^1
T_2	R_2^1	R_1^2
	R_2^2	R_3^2
T_3	R_3^1	R_0^2
	R_3^2	R_2^2

Fig. 16.



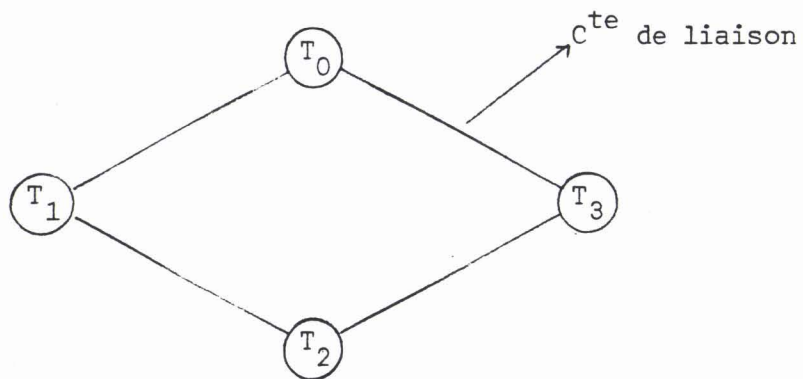
La figure 17 décrit le graphe des axes de l'acteur T, où les contraintes de liaison sont représentées par des arêtes simples, et les contraintes d'indéformabilité par des arêtes doubles.



- Le graphe des éléments

C'est le graphe $G = (E, C_\ell)$ où si $e_1, e_2 \in E$,
 $(e_1, e_2) \in C_\ell \iff \exists a_1 \in e_1, a_2 \in e_2$, tel que $(a_1, a_2) \in C_\ell$

Ce graphe découle du principe 3. Ce même principe en assure la connexité. La figure 18 décrit le graphe des éléments de l'acteur T. Notons que ce graphe est adapté à l'analyse structurale d'un mécanisme.



- Le graphe des liaisons

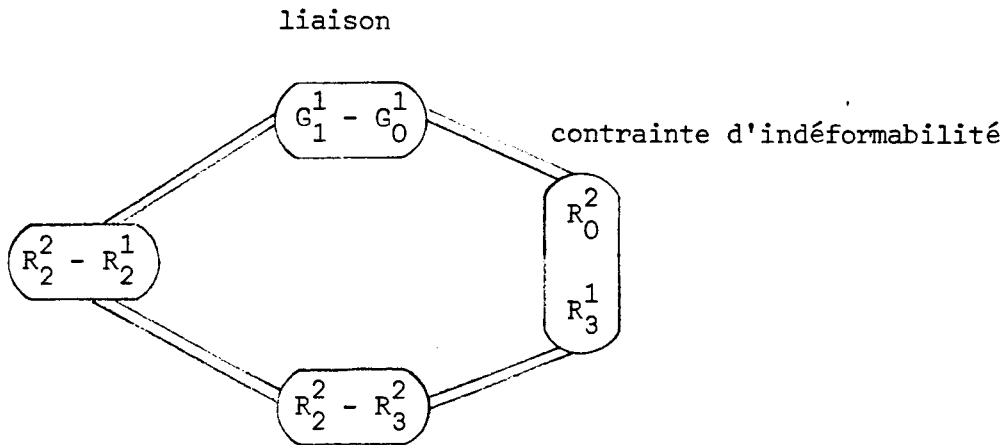
C'est le graphe $G = (L, C_i)$

où $l_1, l_2 \in E$,

$$(l_1, l_2) \in C_i \iff \exists a_1 \in l_1, a_2 \in l_2 : \\ (a_1, a_2) \in C_i$$

Ce graphe est possible grâce à la règle 4. Il est connexe [Fig. 19].

Fig. 19 : Graphe des liaisons de l'acteur T.



L'accès aux liaisons et éléments peut être réalisé à partir du graphe des axes de la façon suivante :

- 1) Pour les éléments, il suffit de considérer la traduction en terme de graphe de la relation d'équivalence C_i . Considérons sur $G = (A, C)$ la relation :

$$x, y \in A \quad x \ C_i \ y \iff x = y \quad \forall \\ \exists \text{ une arête joignant } x \text{ et } y \text{ qui est} \\ \text{une contrainte d'indéformabilité.}$$

Dans ces conditions les éléments de l'acteur dont le graphe est (A, C) ne sont autres que les composantes connexes induites par la relation de connexité C_i [Fig. 20] sur ce graphe.

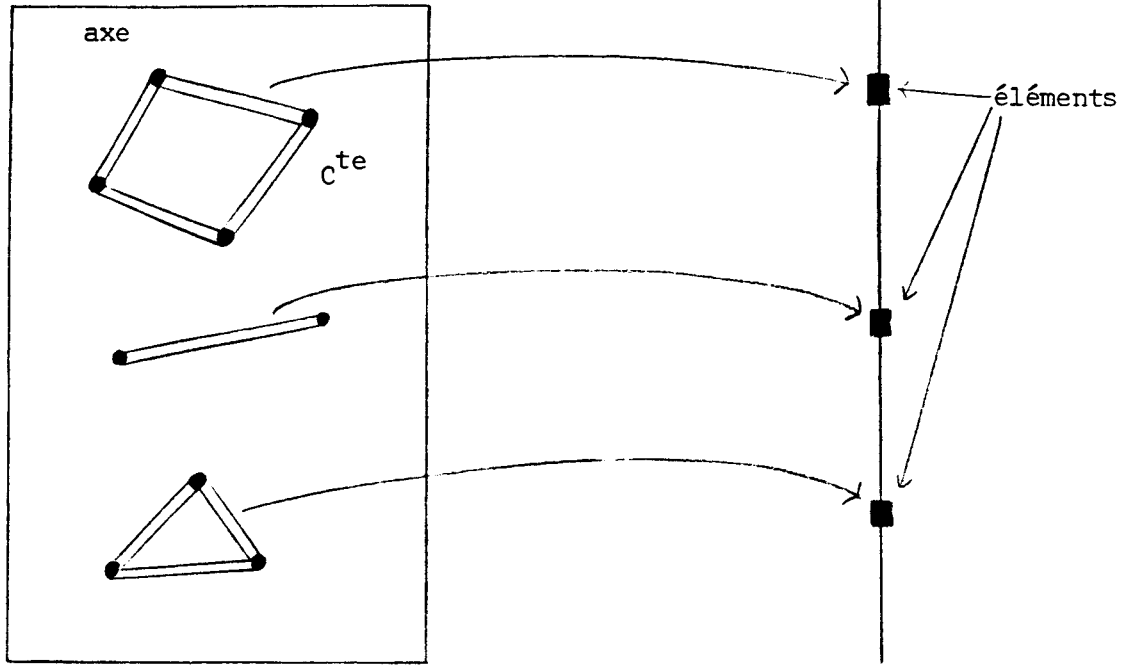


Fig. 20.

2) Pour les liaisons, il suffit de considérer la relation :

$$x, y \in A \quad x C_{\ell} y \Leftrightarrow x = y \quad \forall$$

\exists une arête joignant x et y qui est une contrainte de liaison.

Les liaisons de $G = (A, C)$ sont les composantes connexes de A/C_{ℓ} .

[Fig. 21].

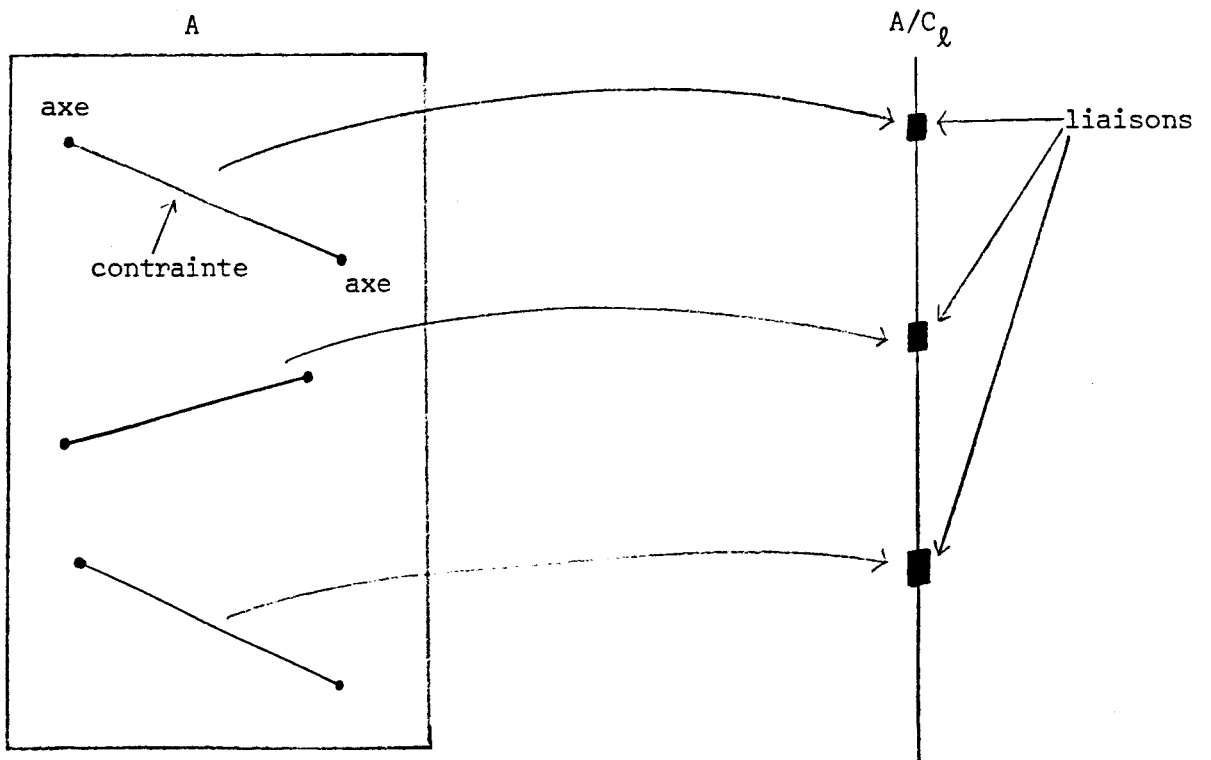


Fig. 21.

IV.3.2. Représentation cinématique et graphique

Nous venons de voir que le concept de graphe permet de décrire la structure logique des acteurs. Plusieurs niveaux de description ont été mis en valeur. Parmi ceux-ci nous retenons deux descriptions essentielles, le graphe des axes et le graphe des éléments. Pour obtenir une représentation graphique et mécanique des acteurs, on associe à chaque sommet d'un graphe de description l'ensemble des valeurs relatives aux attributs du constituant que ce sommet représente.

Le graphe des axes est par nature adapté à la représentation du schéma cinématique du mécanisme d'un acteur. Le constituant graphique TACHE est directement attaché au constituant élément, c'est le graphe des éléments que nous choisissons comme base d'une représentation graphique des acteurs. Quant au décor, sa représentation est obtenue tout simplement en associant à chaque tache qui le compose sa description graphique.

a) Représentation cinématique d'un acteur

Nous nous intéressons ici à la nature mécanique des acteurs. Elle a comme support le modèle cinématique de Uicker tel qu'il a été décrit au Chapitre III. Ce modèle, rappelons le, permet de traduire sous forme mathématique, l'ensemble des caractéristiques cinématiques nécessaires à l'analyse du mouvement.

Nous définissons le graphe des axes, comme le graphe $G = (A, C)$ avec $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ et $C = \{c_1, \dots, c_n\}$. Pour réaliser la description cinématique de l'acteur nous devons ajouter aux attributs qualitatifs qui décrivent la nature des axes et contraintes, les informations relatives à leurs attributs quantitatifs. Nous allons donc associer à chaque axe a_i les valeurs des paramètres (x_i, y_i, θ_i) du repère correspondant ainsi que les butées, et à chaque contrainte C_i entre deux axes a_u et a_v les valeurs des paramètres de la transformation géométrique liant les repères r_u et r_v . Le tableau de la figure 22 résume les attributs des axes et contraintes qu'on trouve dans la description cinématique d'un acteur.

b) Représentation graphique de la scène

Pour le *décor* il suffit d'associer à chaque tâche, l'ensemble des valeurs des attributs qui la définissent. Pour un *acteur* nous associons à chaque sommet du graphe des éléments, l'ensemble des valeurs des attributs de la tâche qui appartient à cet élément [Fig. 22].

IV.4. CONCLUSION

La description globale de la *scène* vient d'être réalisée. Le composant de base de la scène est le constituant. Ce dernier est défini par un type et un ensemble d'attributs qualitatifs et quantitatifs qui le caractérisent. Le concept de graphe, allié au modèle cinématique présenté, nous ont permis une représentation structurelle, cinématique et graphique de la scène. Le chapitre suivant aborde les aspects relatifs au mouvement.

Fig. 22 : Attributs qualitatifs et quantitatifs des différents constituants.

CONSTITUANTS	ATTRIBUTS QUALITATIFS	ATTRIBUTS QUANTITATIFS
Décor	fixe	
Acteur	mobile	
Elément	fixe/mobile/moteur	repère local
Liaison	fixe/mobile/moteur <u>type</u> : rotation/ glissement/transmission	
Lien	fixe/mobile	
Contrainte	<u>d'indéformabilité</u> → de <u>liaison</u> : rotation → glissement → transmission →	a, α , β ω , I_ω d , I_d s , ρ , ω
Axe	fixe/mobile <u>type</u> : rotation → glissement → transmission →	(x, y, θ) , I_x , I_y , I_θ (x, y, θ) , I_x , I_y , I_θ $\{(x, y, \theta), R\}$
Tache	indéformable fixe/mobile vide/pleine	<ul style="list-style-type: none"> • Points caractéristiques absolues • Points caractéristiques locaux • Emplacement : repère local • Couleur • Ordre de visibilité

CHAPITRE V

*
* LES CHOIX STRUCTURELS *
*

MOUVEMENT :
LES CHOIX STRUCTURELS

V.0. INTRODUCTION

V.1. POSITION DU PROBLEME

V.2. LES MECANISMES DE L'ACTEUR

V.2.1. Tronc et bras

a) *Tronc*

b) *Bras*

V.2.2. Structure de l'acteur

V.3. LES ACTEURS "SEQUENTIELS"

V.3.1. Définitions préliminaires

a) *Notations*

b) *Formule de Tchebytchev*

c) *Séquence*

d) *Chaîne adhérente*

e) *Opérateur λ*

f) *L'opérateur μ*

V.3.2. Définition du tronc séquentiel

V.3.3. Propriétés des troncs séquentiels

V.3.4. Coût de l'analyse d'un tronc séquentiel

V.4. CONCLUSION

V.O. INTRODUCTION

Les acteurs considérés jusqu'à présent ont des mécanismes plans composés d'éléments liés par des contraintes de rotation, glissement et transmission. Pour pouvoir animer ces acteurs, nous nous sommes fixés comme seule condition que leur degré de liberté soit égal au nombre de leur moteur.

Nous pouvons cependant faire les remarques suivantes :

1) Les acteurs que l'on risque d'animer ne comporteront que quelques dizaines de pièces en mouvement, s'il en était autrement, l'observation du mouvement deviendrait impossible car la scène serait trop confuse.

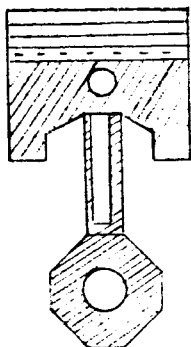
2) Une analyse rapide du mouvement alliée à des images "schématiques" [Fig. 1] permettrait une visualisation immédiate d'un acteur en mouvement (1 image → 10 images/seconde) (production TDB).

Devant ces constatations, il nous est apparu possible de reconsidérer la structure générale d'un acteur afin d'obtenir des mécanismes sous-jacents à complexité moyenne dont le contrôle du mouvement serait simple et peu coûteux.

Nous pouvons considérer que la représentation schématique d'un élément n'excède pas dix segments.

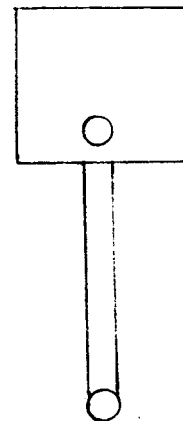
Fig. 1 : Images "schématiques" et possibilités d'animation : exemples.

BIELLE/PISTON REALISTE 2D



2 éléments ≈ 40 segments
+ remplissage

BIELLE/PISTON SCHEMATIQUE



2 éléments ≈ 10 segments

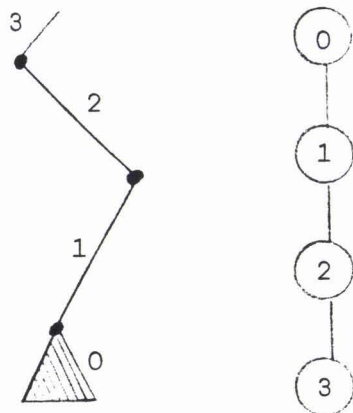
Une scène qui comprendrait 50 éléments au total nécessiterait la visualisation de 500 vecteurs. Une mise-à-jour à une fréquence d'une image par seconde implique une vitesse d'affichage de l'ordre de 500 vecteurs/seconde. A raison de 10 images/seconde ce qui est un rythme d'animation très convenable, cela implique une vitesse de l'ordre de 5000 vecteurs/seconde. Les ordres de grandeur qui restent donc très raisonnables.

V.1. POSITION DU PROBLEME

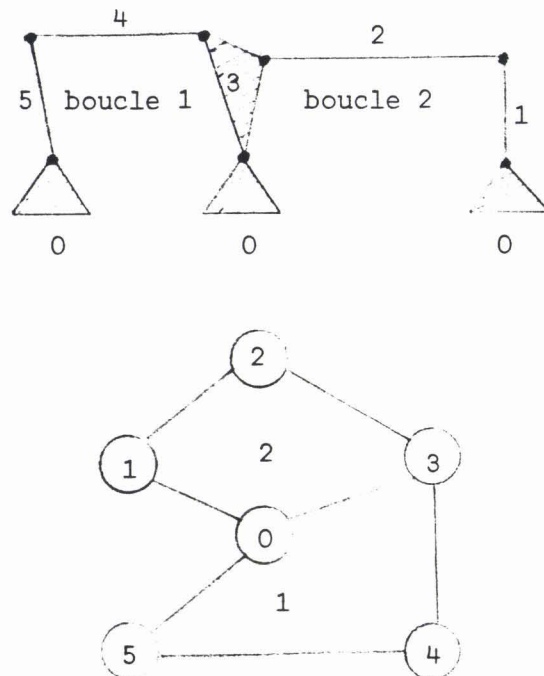
Lorsque nous parlons du mouvement d'un acteur, nous faisons référence au comportement de son mécanisme sous-jacent. C'est l'aspect interne de l'animation. L'étude de ce comportement est réalisée à travers une analyse cinématique. Le calcul d'une étape élémentaire de l'évolution d'un mécanisme est le résultat, en général [HAR 64], de la résolution d'un système $l \times l$ où l est le nombre de liaisons non motrices. Ce calcul, en général complexe, nécessite une *décomposition* préalable du mécanisme en mécanismes élémentaires. Rappelons que ces derniers sont les chaînes cinématiques élémentaires et les boucles dont les graphes des éléments associés sont respectivement les chaînes et les cycles élémentaires [Fig. 2].

Fig. 2.

Chaîne cinématique élémentaire

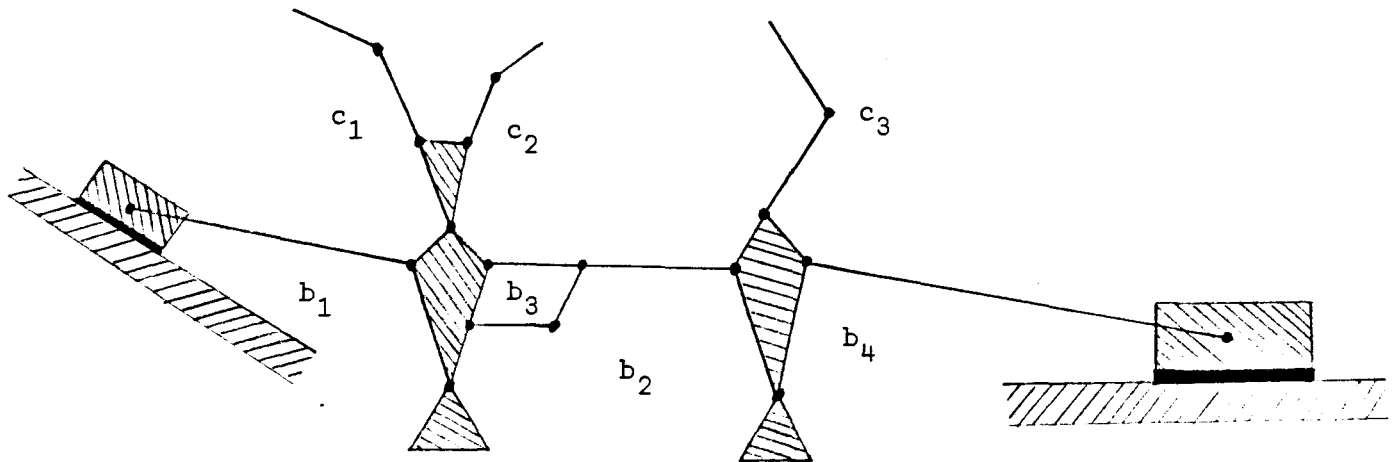


mécanisme qui comporte deux boucles



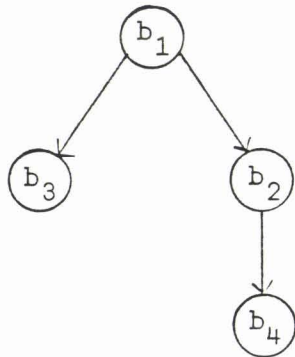
Ainsi le mécanisme de la figure 2 comporte les boucles b_1 , b_2 , b_3 et b_4 et les chaînes c_1 , c_2 et c_3 .

Fig. 3.



Nous nous intéressons ici à la manière dont pourra être réalisée cette décomposition. Celle-ci dépend de l'existence d'interactions entre certaines parties du mécanisme ou de l'absence de ces interactions, le but étant dans ce dernier cas, d'isoler les parties du mécanisme dont l'analyse pourra être réalisée indépendamment de tout autre, comme il est le cas, par exemple, pour les chaînes cinématiques c_1 , c_2 et c_3 [Fig. 3]. L'analyse de la partie "fermée" d'un acteur est précédée de sa séparation en boucles. Son activité peut alors être modélisée en exprimant les interactions entre les différentes boucles. Nous relevons un cas fort intéressant lorsque, comme sur l'exemple de la figure 3, on voit apparaître de façon intuitive certes, la possibilité d'analyser les différentes boucles de façon "séquentielle". Ainsi, sur cet exemple, si on suppose que b_1 est la boucle motrice, il est facile d'imaginer que b_1 transmet le mouvement à b_2 et b_3 et qu'enfin b_2 le transmet à b_4 . On met alors en relief dans ce type de mécanisme, des relations de dépendance à sens unique entre les boucles [Fig. 4].

Fig. 4 : Graphe des boucles



Les flèches indiquent l'ordre dans lequel il faut analyser les boucles. Par ailleurs, l'ordre d'analyse de boucles non liées par un arc est indifférent.

Ce type de mécanisme est étudié de façon détaillée dans les paragraphes qui suivent, mais relevons dès à présent, que l'intérêt de tels mécanismes réside dans le fait que l'analyse de leur mouvement est plus simple et qu'enfin le coût de cette analyse est moindre.

Les constatations précédentes entraînent des choix supplémentaires quant à la structure des acteurs. Ces *choix* sont relatifs d'une part à la nature mécanique des différents composants de l'acteur et d'autre part à la manière dont ils sont mis en présence pour former ce dernier. Ils induisent des méthodes d'analyse spécifiques, comme nous allons le voir.

V.2. LES MECANISMES DE L'ACTEUR

V.2.1. Tronc et bras

Nous définissons deux types de mécanisme dans un acteur, le mécanisme de type tronc et le mécanisme de type bras.

a) Le tronc

Un tronc est un mécanisme, comprenant un élément fixe, dont le graphe des éléments est un cycle, tel que pour tout couple de sommets, il existe une chaîne qui les relie ne passant pas par l'élément fixe. Dans sa forme dégénérée, un tronc est réduit au seul élément fixe.

Le mécanisme de la figure 5-a est un tronc, celui de la figure 5-b n'est pas un tronc car le graphe associé n'est pas un cycle, celui de la figure 5-c ne l'est pas davantage, car il n'existe pas de chaîne qui relie A et A' (par exemple) ne passant pas par l'élément fixe.

Mécanisme

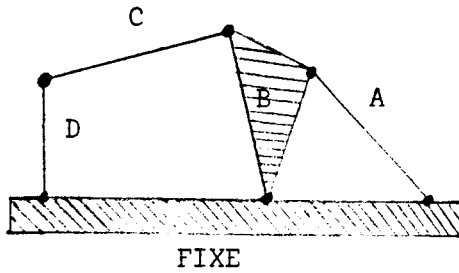
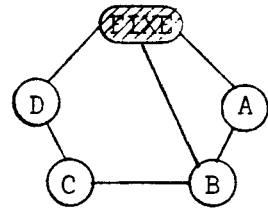
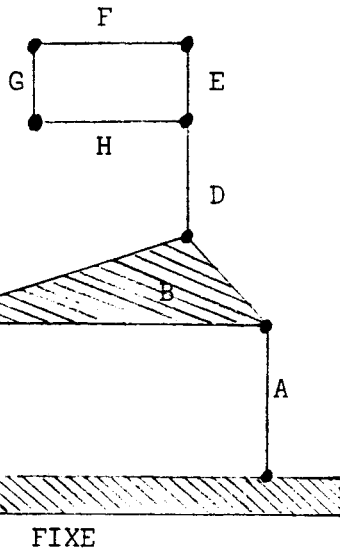


Fig. 5.

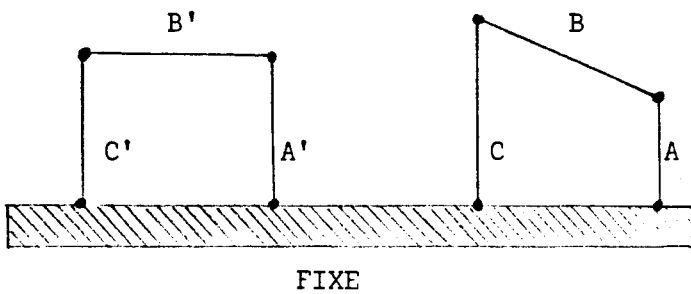
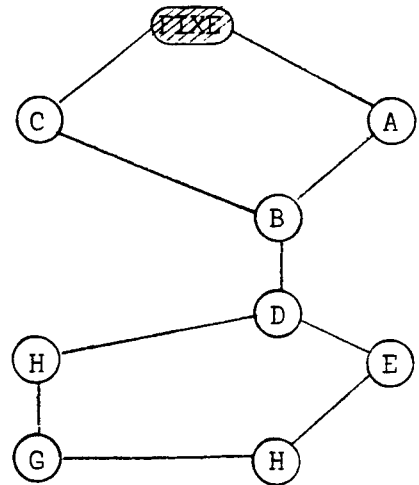
graphe associé



-a-



-b-



-c-

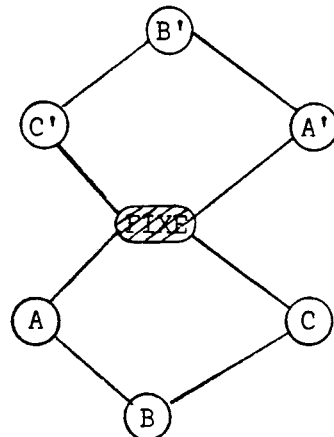
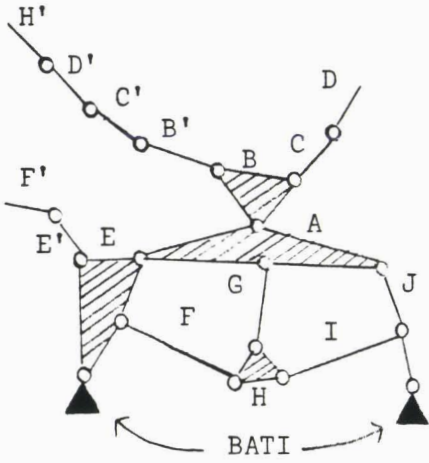
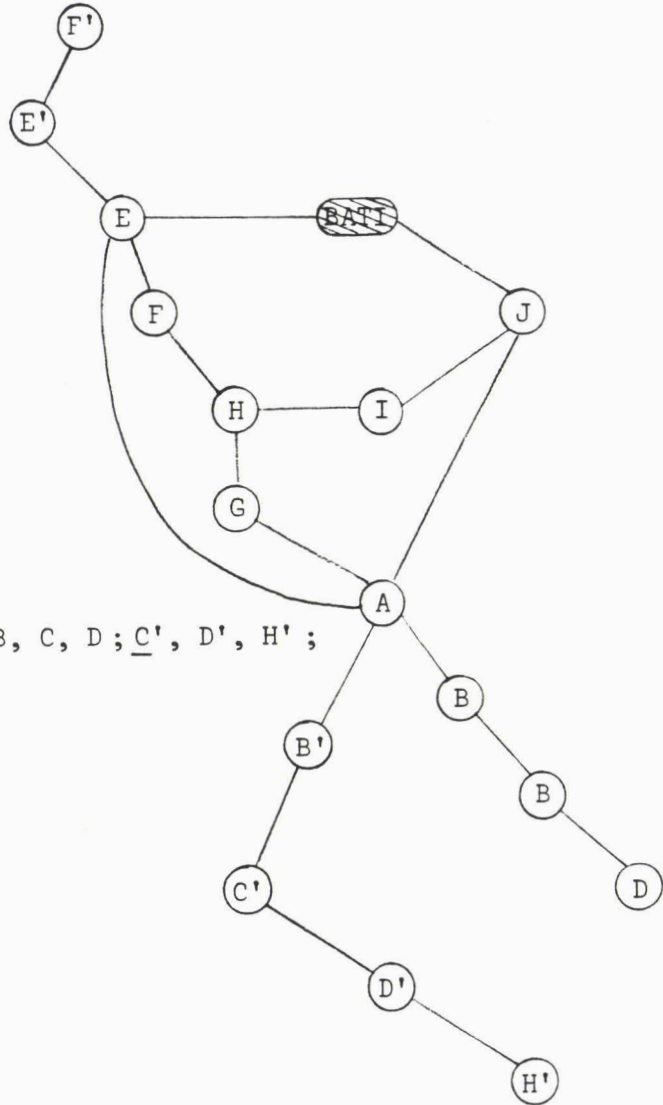


Fig. 6.



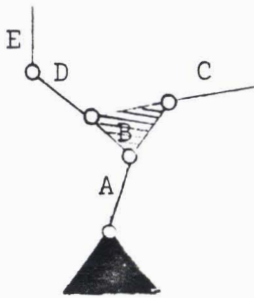
-a-



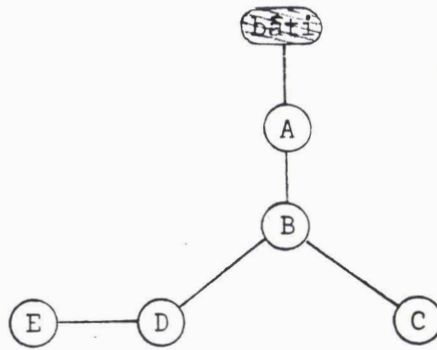
Tronc : BATI, E, F, H, I, G, J, A

Bras : E, E', F' ; A, B, B', C' ; A, B, C, D ; C', D', H' ;

(les bases sont soulignées)



-b-



Tronc : bâti

bras : bâti, A, B, C ; B, D, E ;

b) Le bras

Un bras est une chaîne cinématique élémentaire. Un des sommets du bras (base) appartient soit au tronc soit à un autre bras.

V.2.2. Structure de l'acteur

Un acteur est formé par un tronc unique et un ensemble de bras. Les bras sont fixés soit sur le tronc soit sur un bras existant [Fig. 6].

On décrit aussi et de manière plus précise, la structure de l'acteur, en considérant son graphe des éléments $G = (X, E)$ et en définissant troncs et bras en terme de sous-graphes de G .

Un tronc est alors un sous-graphe de G tel que :

Si G n'admet pas de cycle alors le sous-graphe est réduit à l'élément fixe.

Sinon ce sous-graphe est un cycle qui passe par l'élément fixe, noté C et qui est tel que :

- 1) Pour tout couple de sommet de C , il existe une chaîne qui les relie ne passant pas par l'élément fixe.
- 2) Tout cycle passant par l'élément fixe et qui vérifie la propriété précédente a moins d'arête que C .

Un bras apparaît comme un sous-graphe qui est une chaîne élémentaire dont aucune arête n'appartient à un cycle de G .

L'introduction des troncs et bras nous fait modifier en conséquence la description arborescente de la scène (introduite au § IV.2.) en terme de constituants [Fig. 7].

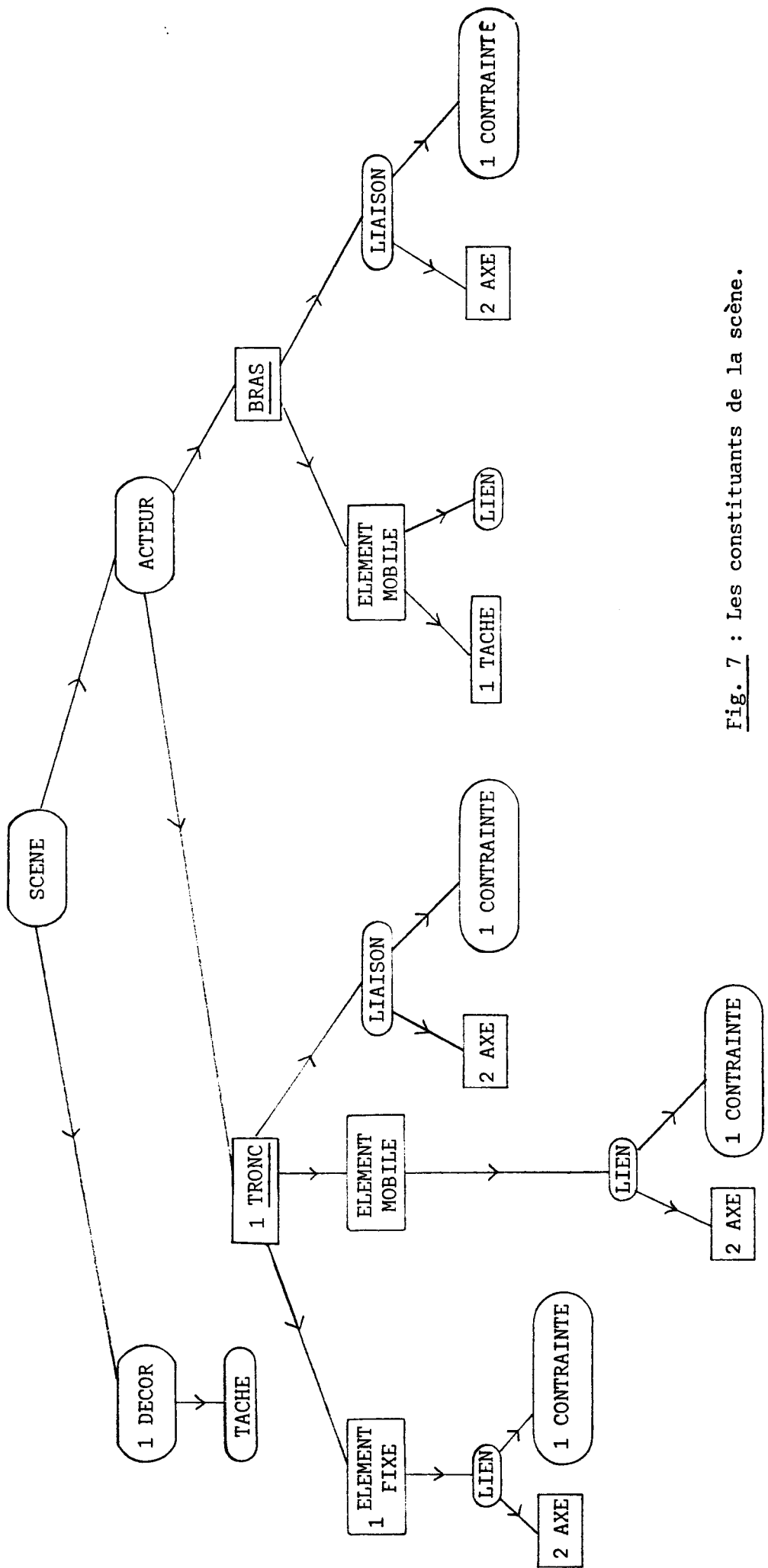


Fig. 7 : Les constituants de la scène.

V.3. LES ACTEURS "SEQUENTIELS"

Nous introduisons ici un ensemble de conditions que doit vérifier un acteur afin qu'on puisse en extraire une suite de boucles (nommée séquence) dont l'analyse pourra être réalisée de manière séquentielle, dans le sens défini plus haut. Ceci concerne uniquement le tronç d'un acteur. Avant de définir le "tronç séquentiel", nous citons d'abord quelques définitions préliminaires.

V.3.1. Définitions préliminaires

a) Notations

Dans tout ce qui suit, nous notons :

- $T = (Y, A)$ le graphe des éléments associé à un tronç.
- $T_i = (Y_i, A_i)$ un sous-graphe connexe de T .
- $H_i = (Z_i, U_i)$ un sous-graphe de T qui est une chaîne élémentaire.
- x_i et y_i les extrémités d'une chaîne H_i .

b) Formule de Tchebychev

Soit $G = (X, E)$ le graphe des éléments d'un mécanisme. On partitionne E en $E^1 \cup E^2$ où E^1 représente l'ensemble des contraintes de type rotation et glissement et E^2 l'ensemble des contraintes de type transmission. La formule de structure du mécanisme de graphe G , qui donne le degré de liberté total de l'ensemble est alors $[3(|X| - 1) - 2|E^1| - |E^2|]$.

c) Séquence

Considérons n boucles B_1, B_2, \dots, B_n dont l'ensemble forme un mécanisme cohérent à un moteur. Notons C_1, C_2, \dots, C_n les cycles élémentaires associés. $C_i = (X_i, E_i)$. Si nous supposons que C_1 est le cycle moteur (cycle contenant l'élément moteur), alors le mécanisme formé par B_1, B_2, \dots, B_n admet une séquence s'il existe un ordre $C_{k_2}, C_{k_3}, \dots, C_{k_n}$ sur C_2, C_3, \dots, C_n tel que :

$$1) \forall j \in \{2, n\} E_{k_j} \cap \left(\bigcup_{i < j} E_{k_i} \right) \neq \emptyset$$

$$C_{k_i} = (X_{k_i}, E_{k_i})$$

i.e. Le cycle C_{k_j} est adjacent (en terme d'arêtes) au sous-graphe formé par l'union des cycles qui le précèdent (d'une façon générale deux sous-graphes sont adjacents s'ils ont au moins une arête commune).

2) Sachant que E_{k_i} désigne l'ensemble des contraintes de liaison du cycle C_{k_i} , et notant \tilde{E}_{k_i} l'ensemble des valeurs correspondantes, on sait déterminer

$$\tilde{E}_{k_j} \setminus (\tilde{E}_{k_1} \cup \dots \cup \tilde{E}_{k_{j-1}}) \text{ connaissant } \tilde{E}_{k_1} \cup \dots \cup \tilde{E}_{k_{j-1}} \text{ pour tout } j \in \{2, n\}.$$

On dira que C_{k_j} est "calculable" dans $C_{k_1} \cup C_{k_2} \cup \dots \cup C_{k_{j-1}}$.

d) Chaîne adhérente

Une chaîne H_i est adhérente à T_i si :

1° $Z_i \cap Y_i = \emptyset$.

2° $\exists u_i, v_i \in Y_i$ tel que $u_i \neq v_i$ et $\alpha_i = (x_i, u_i)$, $\beta_i = (y_i, v_i)$ sont dans A. [Fig. 8].

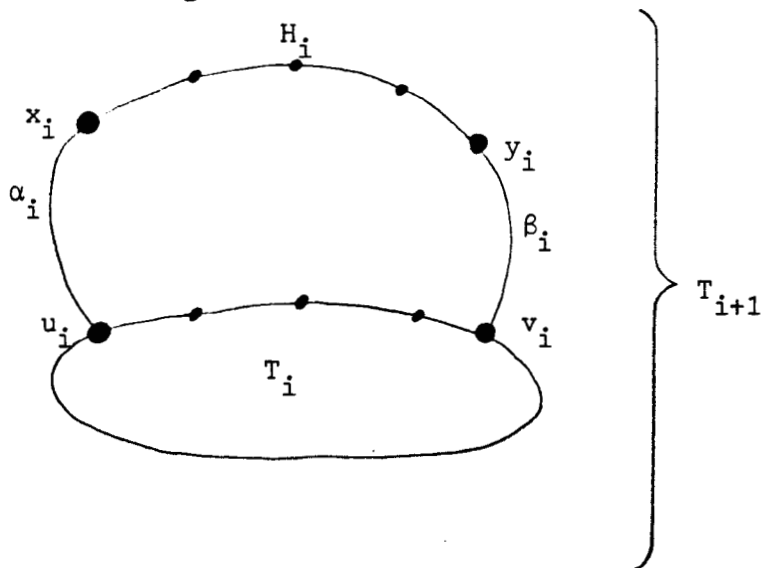


Fig. 8.

e) Opérateur λ

Soit T_i et H_i adhérente à T_i . λ est un opérateur qui admet comme opérande un couple du type (T_i, H_i) . Le résultat de l'opération est le graphe :

$$\lambda(T_i, H_i) = (Y_i \cup Z_i, A_i \cup U_i \cup \{\alpha_i, \beta_i\}) = T_{i+1}. \text{ [Fig. 9].}$$

Nous notons \bar{U}_i l'ensemble $U_i \cup \{\alpha_i, \beta_i\}$.

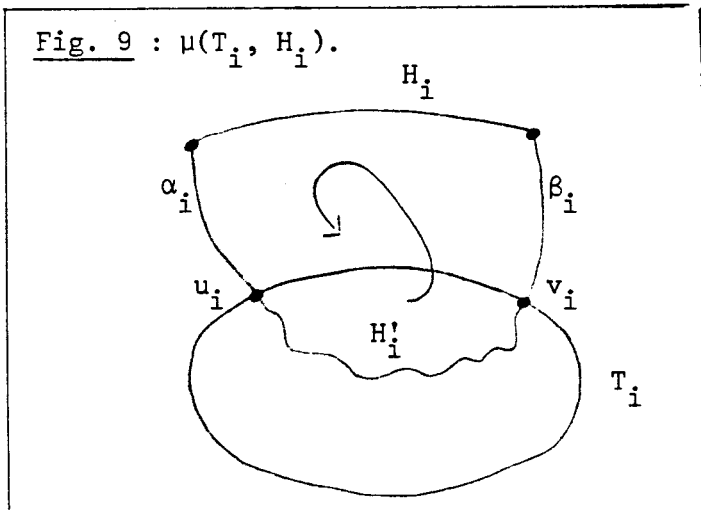
$$\bar{U}_i = \bar{U}_i^1 \cup \bar{U}_i^2$$

f) L'opérateur μ

L'opérateur μ admet comme opérande un couple du type (T_i, H_i) où H_i est adhérente à T_i . Il est défini de la façon suivante :

$$\mu(T_i, H_i) = \{\text{cycles élémentaires passant par } H_i\}.$$

[Fig. 9]. T_i étant connexe, il existe au moins une chaîne notée H'_i entre U_i et V_i , d'où $\mu(T_i, H_i) \neq \emptyset$.

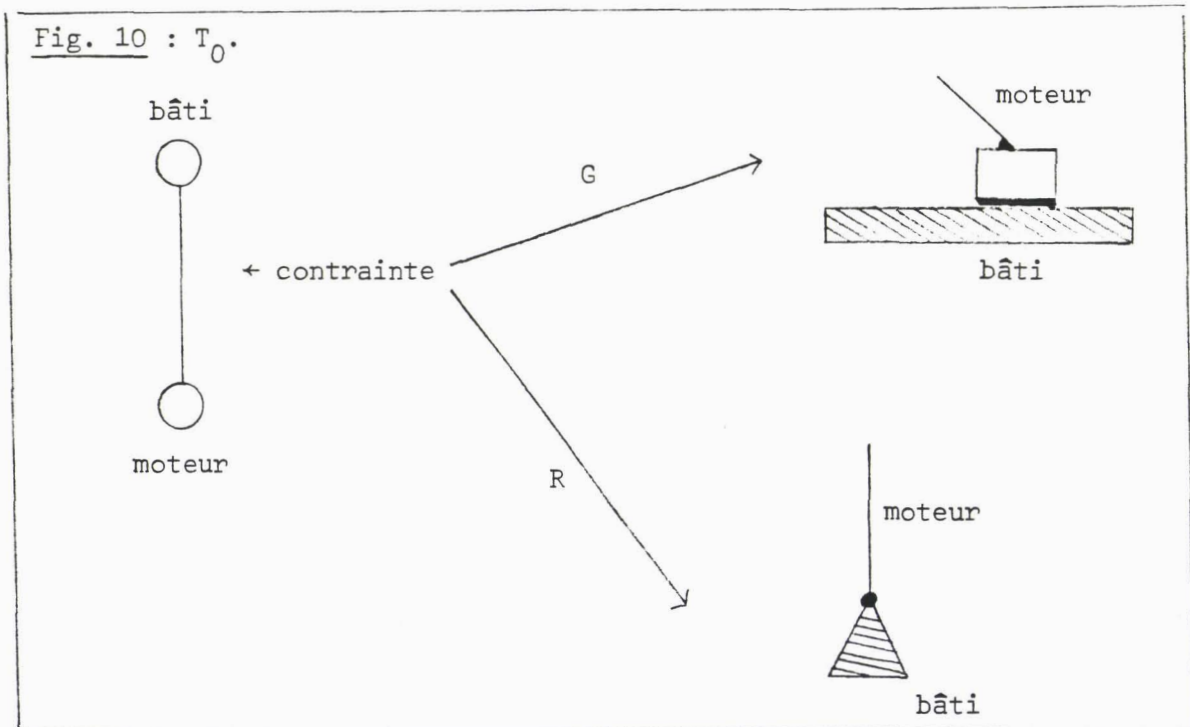


V.3.2. Définition du tronc séquentiel

Nous nous sommes inspirés pour établir cette définition de méthodes de construction utilisées en mécanique [ART 77].

- Un tronc séquentiel si son graphe $T(Y, A)$ admet $(n+1)$ sous-graphes T_0, T_1, \dots, T_n tels que :

- 1- T_0 est la chaîne composée de l'élément fixe et de l'élément moteur [Fig. 10].
- 2- $\forall i \in \{1, n\} \exists$ une chaîne H_{i-1} adhérente à T_{i-1} tel que :
 $3|Z_{i-1}| - 2|\bar{U}_{i-1}^1| - |\bar{U}_{i-1}^2| = 0$ et $T_i = \lambda(T_{i-1}, H_{i-1})$,
- 3- $T_n = T$.



V.3.3. Propriétés des troncs séquentiels

L'intérêt des troncs séquentiels réside dans leurs propriétés, dont voici les énoncés :

- a- $T_n = T$ est un mécanisme cohérent à 1 moteur.
- b- pour tout $i \in \{1, \dots, h-1\}$, tout cycle c de $\mu(T_i, H_i)$ est calculable dans T_i .

- c- L'ensemble $\{C_1, \dots, C_n\}$ où $\forall i \in \{1, n\} C_i \in \mu(T_{i-1}, H_{i-1})$ est une base de l'espace des cycles de $T = (Y, A)$.
- d- C_1, C_2, \dots, C_n est une séquence dont les boucles épuisent toutes les variables du mécanisme.

On déduit ces propriétés de la définition.

Preuve de a

On montre par récurrence sur i que T_i est cohérent à un moteur pour $i = 1, n$.

1) $i=1$ - T_1 est une chaîne cinématique qui contient l'élément fixe.

- Calculons le degré de mobilité x de T_1

$$x = 3(|Y_1| - 1) - 2|A_1^1| - |A_1^2|$$

$$T_1 = \mu(T_0, H_0) = \lambda(T_0, H_0)$$

$$\Rightarrow |Y_1| = |Z_0| + |Y_0|, |A_1^1| = |A_0^1| + |\bar{U}_0^1|, |A_1^2| = |A_0^2| + |\bar{U}_0^2|$$

La liaison entre le bâti et le moteur est de type rotation ou glissement

$$\Rightarrow |A_0^2| = 0 \text{ et } |A_0^1| = 1 \text{ car } |A_0| = 1$$

$$\Rightarrow |A_1^1| = |\bar{U}_0^1| + 1, |A_0^1| = |\bar{U}_0^2|$$

$$\Rightarrow x = \underbrace{3|Z_0| - 2|U_0^1| - |\bar{U}_0^2|}_{= 0} + 3(|Y_0| - 1) - 2 = 1,$$

$$= 0$$

par hypothèse

car $|Y_0| = 2$, d'où T_1 est cohérent à 1 moteur.

2) $i > 1$ - T_i cohérent à 1 moteur $\Rightarrow T_{i+1}$ cohérent à 1 moteur. Hypothèse de

$$\text{récurrence : } 3|Y_i| - 2|A_i^1| - |A_i^2| = 1.$$

- T_{i+1} passe par l'élément fixe. C'est une chaîne cinématique par construction.

- Calculons le degré de mobilité de T_{i+1} .

$$3|Y_{i+1}| - 2|A_{i+1}^1| - |A_{i+1}^2| = 3|Y_i| - 2|A_i^1| - |A_i^2| +$$

$$3|Z_i| - 2|\bar{U}_i^1| - |\bar{U}_i^2| = 1$$

Preuve de b

1) $i = 0$. $\mu(T_0, H_0) = T_1$ et T_1 est une boucle cohérente.

2) Pour $i > 0$, soit c un cycle de $\mu(T_i, H_i)$. On suppose donc ici, connues les valeurs des variables associées aux liaisons du sous-graphe T_i . c est formé des chaînes élémentaires α_i , H_i , β_i et $H_i^!$. Les variables de $H_i^!$ étant fixées, la boucle qui correspond à c est isostatique car par hypothèse $3|Z_i| - 2|\bar{U}_i^1| - |\bar{U}_i^2| = 0$ quantité qui mesure le degré de liberté de H_i par rapport au reste du mécanisme. La boucle étant isostatique on sait calculer les valeurs des variables inconnues de la boucle qui sont celles de α_i , H_i , β_i .

Preuve de c

Notons $C_i = \{C_1, C_2, \dots, C_i\}$ $i = 1, n$.

Montrons par récurrence sur i que C_n est une famille libre.

1 - C_1 est libre car $C_1 = \{c_1\}$.

2 - C_{i-1} libre $\Rightarrow C_i$ libre ?

En effet, notons (C_i) le vecteur représentatif de C_i .

$$C_i \text{ est libre si } \begin{cases} e_1(c_1) + \dots + e_i(C_i) = 0 \\ e_j \in \mathbb{Z} \quad j \in \{1, n\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow e_j = 0 \quad \forall j \in \{1, n\}$$

Par définition C_i contient une arête u de la chaîne H_{i-1} qui n'appartient à aucun C_j $j < i$ (car $Z_i \cap X_i = \emptyset$) par conséquent $e_i = 0$, et $e_1(C_1) + \dots + e_{i-1}(C_{i-1}) = 0 \Rightarrow e_j = 0$ $j \in \{1, i-1\}$ par hypothèse de récurrence.

Montrons que $n = |A| - |Y| + 1$.

Posons $A_n = A$ et $Y_n = Y$ et montrons par récurrence sur i que $n = |A_n| - |Y_n| + 1$ en considérant les $T_i = (Y_i, A_i)$.

$$1) T_0 = (Y_0, A_0) \quad |Y_0| = 2, |A_0| = 1 \Rightarrow |A_0| - |Y_0| + 1 = 0$$

$$2) (i = |A_i| - |Y_i| + 1 \Rightarrow (i+1) = |A_{i+1}| - |Y_{i+1}| + 1)$$

$$|A_{i+1}| = |A_i| + |U_i| + 2$$

$$|Y_{i+1}| = |Y_i| + |Z_i| = |Y_i| + |U_i| + 1 \text{ car } H_i \text{ étant une chaîne élémentaire } |Z_i| = |U_i| + 1 \text{ d'où } (i+1) = |A_{i+1}| - |Y_{i+1}| + 1.$$

$$\text{Conclusion } n = |A_n| - |Y_n| + 1 = |A| - |Y| + 1.$$

$|A| - |Y| + 1$ est le nombre de cycle de la famille libre $\{C_1, \dots, C_n\}$, mais aussi la dimension de l'espace des cycles du graphe connexe $T \cdot \{C_1, \dots, C_n\}$ est par conséquent une base.

Preuve de d

1) $C_1 = T_1$ est un mécanisme cohérent à un moteur.

2) - $\forall j \in \{2, n\}$ $T_j = T_{j-1} \cup C_j$

$$\Rightarrow T_{j-1} = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{j-1},$$

- C_j est adjacent à T_{j-1} puisque $H_j^!$ est dans T_{j-1} et $H_j^!$ a au moins une arête (car $u_j \neq v_j$), donc $\forall j \in \{2, n\}$. C_j est adjacent à $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{j-1}$.

3) $\forall j \in \{2, n\}$ $C_j \in \mu(T_{j-1}, H_{j-1})$ et C_j est calculable dans T_{j-1} qui est $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{j-1}$.

4) Puisque $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ est une base, ses arêtes épuisent toutes les arêtes de T et donc toutes les variables de liaison.

$\Rightarrow C_1, C_2, \dots, C_n$ est donc une séquence qui épuisent toutes les variables du mécanisme.

V.3.4. Coût de l'analyse d'un tronc séquentiel

Pour un mécanisme à un moteur quelconque comportant l liaisons, nous pouvons estimer le coût de l'analyse d'une étape du mouvement à l^2 puisqu'il faut résoudre un système $(l-1) \times (l-1)$ pour déterminer les valeurs des $l-1$ variables inconnues. Nous allons voir que ce coût est considérablement réduit dans le cas du mécanisme séquentiel.

En effet la condition $(3|Z_{i-1}| - 2|\overline{U_{i-1}^1}| - |\overline{U_{i-1}^2}| = 0)$ ^① qui apparaît dans la définition du tronc séquentiel implique la condition :

$$[(|Z_{i-1}| = 1 \text{ et } |\overline{U_{i-1}^1}| = 1 \text{ et } |\overline{U_{i-1}^2}| = 1) \text{ où}$$

$$(|Z_{i-1}| = 2 \text{ et } |\overline{U_{i-1}^1}| = 3 \text{ et } |\overline{U_{i-1}^2}| = 0)]$$
 ^④

En effet, sachant que $|Z_{i-1}| = |\overline{U_{i-1}}| - 1$ ^②

^① et ^② \Rightarrow

$$3(|\overline{U_{i-1}}| - 1) - 2|\overline{U_{i-1}^1}| - |\overline{U_{i-1}^2}| = 0, \text{ comme } |\overline{U_{i-1}}| = |\overline{U_{i-1}^1}| + |\overline{U_{i-1}^2}|$$

$$\text{alors } |\overline{U_{i-1}^1}| + 2|\overline{U_{i-1}^2}| = 3$$
 ^③ $|\overline{U_{i-1}^1}|, |\overline{U_{i-1}^2}| \in \mathbb{N}$

$|\overline{U_{i-1}^1}|$ est impair et peut donc prendre les valeurs 1, 3, 5, ...

L'équation ^③ admet les solutions suivantes :

$$- \overline{|U_{i-1}^1|} = 1 \Rightarrow \overline{|U_{i-1}^2|} = 1$$

$$- \overline{|U_{i-1}^1|} = 3 \Rightarrow \overline{|U_{i-1}^2|} = 0$$

$$- \overline{|U_{i-1}^1|} > 3 \Rightarrow \overline{|U_{i-1}^2|} < 0 \text{ (Solutions impossibles)}$$

d'où la condition (4)

Si nous considérons une séquence C_1, C_2, \dots, C_n , les variables inconnues dans un cycle C_i correspondent aux arêtes de la chaîne $\alpha_{i-1} \quad H_{i-1} \quad \beta_{i-1}$ c'est-à-dire à $\overline{U_{i-1}}$, or

$$\overline{|U_{i-1}|} = \overline{|U_{i-1}^1|} + \overline{|U_{i-1}^2|} \leq 3 \text{ d'après la condition (4).}$$

Le nombre d'inconnues dans une boucle ne peut excéder 3.

Si n est le nombre total des boucles, le coût de l'analyse est de l'ordre de $(3)^2 n$ puisque les boucles sont analysées les unes après les autres. Comme $n = |A| - |Y| + 1$ et que $|Y| \neq 0$, il vient $|A| \geq n$. Or $\ell = |A|$, nous pouvons donc estimer le coût de l'analyse d'un mécanisme *séquentiel* à ℓ , ce qui représente un gain important par rapport au cas général.

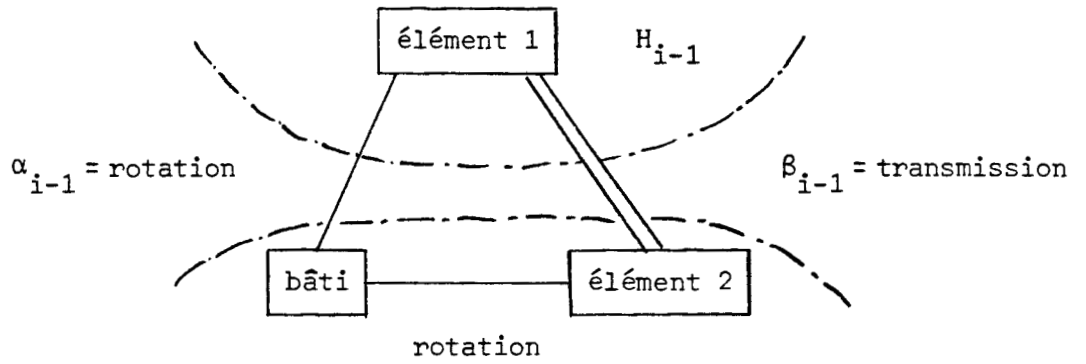
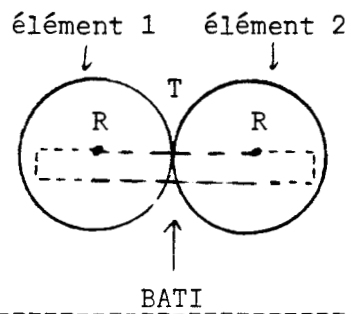
Interprétation des solutions

1° Solution : $\overline{|U_{i-1}|} = 2$.

Nous avons $\overline{|U_{i-1}^1|} = 1$ et $\overline{|U_{i-1}^2|} = 1$, ce qui implique l'existence d'une liaison de type transmission et d'une liaison de type rotation/glissement.

Comme $\overline{U_{i-1}} = U_{i-1} \cup \{\alpha_{i-1}, \beta_{i-1}\}$ et que $\overline{|U_{i-1}|} = 2$ alors $|U_{i-1}| = 0$ et $|Z_{i-1}| = 1$, la chaîne H_{i-1} est par conséquent réduite à un seul sommet. Le cycle c_i correspond alors à un couple de transmission, seul cycle de longueur 3 autorisé dans un mécanisme cohérent [Fig. 11].

Fig. 11.


 T_{i-1}


2° Solution : $|\overline{U}_{i-1}| = 3$.

Nous avons $|\overline{U}_{i-1}^1| = 3$ et $|\overline{U}_{i-1}^2| = 0$. Il n'y a aucune liaison de type transmission.

$|U_{i-1}| = |\overline{U}_{i-1}| - 2 = 1$. La chaîne H_{i-1} est de longueur 1 et $|Z_i| = 2$. H_{i-1} s'articule sur T_{i-1} à l'aide de deux liaisons de type rotation/glissement [Fig. 12].

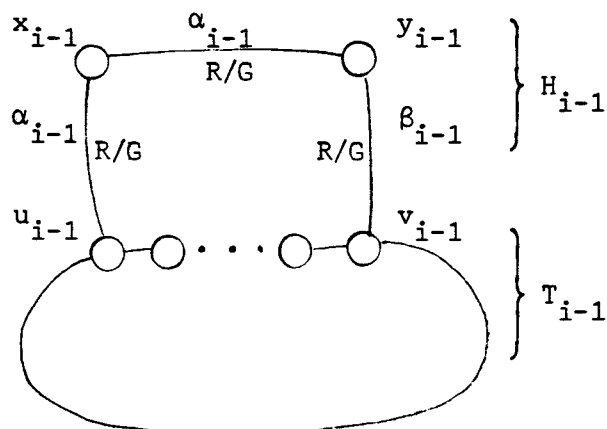


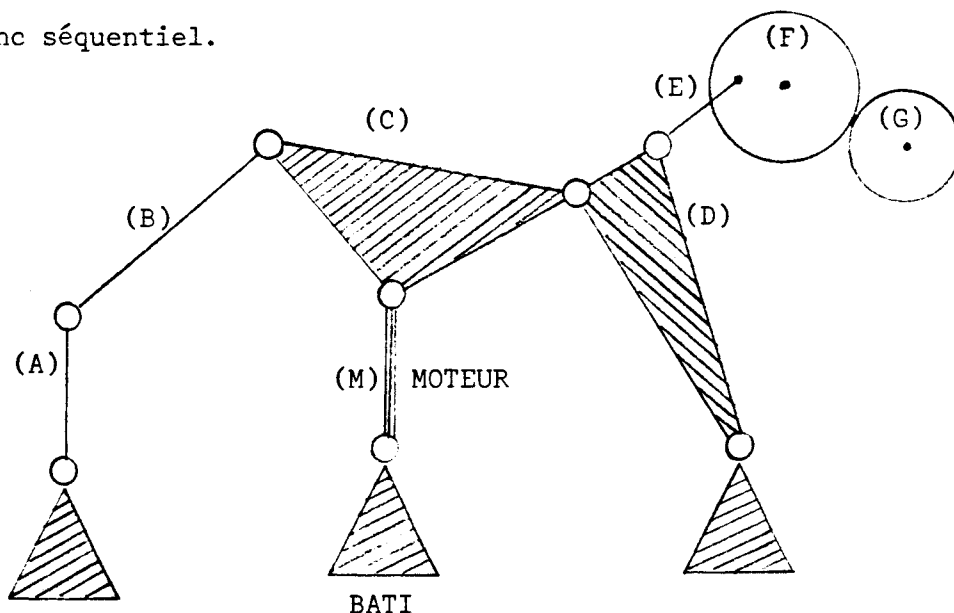
Fig. 12.

V.4. CONCLUSION

Il est clair que les choix structurels qui ont été faits limitent les mécanismes des acteurs à une classe particulière. D'un autre côté ils facilitent leur analyse* et surtout gardent le coût de cette dernière dans des limites raisonnables.

Notons que ces choix n'altèrent que peu la richesse des cas étudiés, et que le caractère de l'application même joue dans une large mesure en faveur de ces choix, le but étant l'animation et non la simulation de mécanismes. Les figures 13, 14 et 15 montrent des exemples de mécanismes séquentiels et non séquentiels. Nous développons dans le chapitre qui suit une méthode de construction de mécanismes séquentiels à travers des règles d'assemblage, ainsi que la méthode qui permet, à partir d'une base de cycles particulière, d'extraire une séquence d'un tronç séquentiel.

Fig. 13 : Tronc séquentiel.

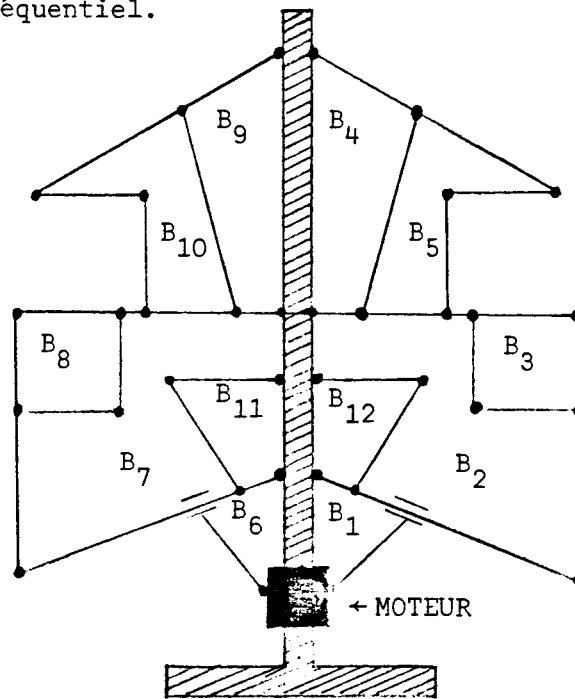


* Une méthode d'analyse adaptée aux troncs séquentiels est présentée en annexe.

Remarque : Ce même tronc, mais avec (A) comme moteur, n'est plus séquentiel car on ne peut pas dans ce cas construire T_1 cohérent à 1 moteur. (Toute chaîne adhérente à (bâti, A) est de longueur > 3).

Le caractère séquentiel d'un tronc dépend de l'emplacement du moteur.

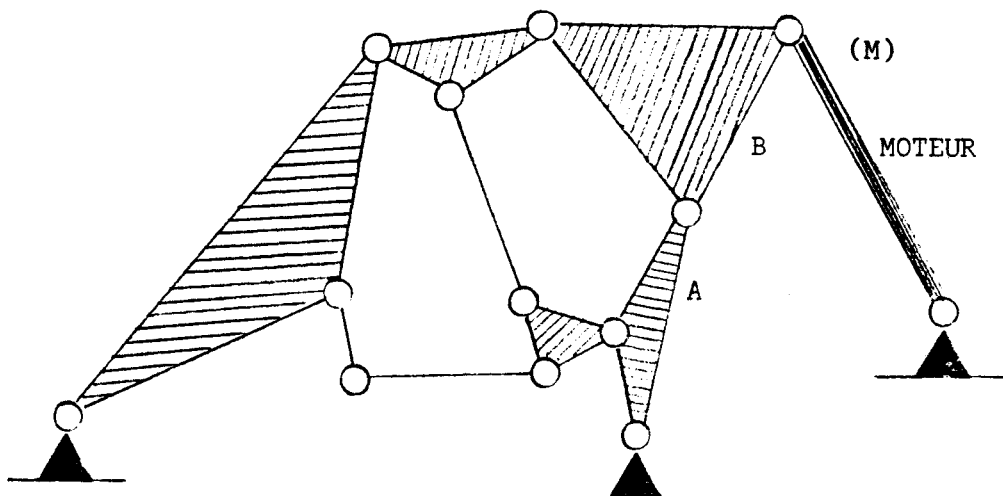
Fig. 14 : Tronc séquentiel.



Une séquence n'est pas forcément unique dans un tronc séquentiel : Voici quelques séquences de ce tronc :

- 1) $B_1 B_2 B_{12} B_3 B_4 B_5 B_6 B_{11} B_7 B_8 B_9 B_{10}$,
- 2) $B_6 B_1 B_{11} B_{12} B_2 B_7 B_8 B_3 B_4 B_9 B_{10} B_5$,
- 3) $B_6 B_{11} B_7 B_8 B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_{12} \dots$

Fig. 15 : Tronc non séquentiel.



Ce tronc n'est pas séquentiel. En effet T_1 est constitué des éléments (M), BATI, A et B et il n'existe pas de chaîne adhérente à T_1 qui vérifie la condition 2 de la définition du tronc séquentiel.

CONSTRUCTION INTERACTIVE DE LA SCENEET MISE EN OEUVRE DU MOUVEMENT

VI.0. INTRODUCTION

IV.1. CONSTRUCTION DE LA SCENE

VI.1.1. Position du problème

- a) *Identification des constituants*
- b) *Affectation des attributs*
- c) *Classification des opérateurs*

VI.1.2. L'opération de création

- a) *c(nom) = décor*
- b) *c(nom) = acteur*
- c) *c(nom) = tronc*
- d) *c(nom) = bras*
- e) *c(nom) = bâti*
- f) *c(nom) = élément mobile*
- g) *c(nom) = axe*
- h) *c(nom) = tache*
- i) *c(nom) = contrainte de liaison*

VI.1.3. Le cas particulier de l'opération d'assemblage

- a) *Position du problème*
 - a.1.) *Assemblage d'un tronc*
 - a.2.) *Assemblage de bras*
- b) *Définitions préliminaires*
 - b.1.) *Le marquage*
 - b.2.) *Emetteur et récepteur*
 - b.3.) *Evolution du marquage*
- c) *Assemblage de troncs séquentiels*
 - c.1.) *Règles générales*
 - c.2.) *Règles de Fermeture de Boucle*
 - c.3.) *Règles d'Assemblage Ouvert*
- d) *Assemblage de bras*
- e) *Règles d'assemblage : niveau des axes*

VI.1.4. L'opérateur de suppression

VI.1.5. Les opérations de transformation

a) *L'opération de transformation graphique*

b) *L'opération de transformation géométrique*

VI.2. MISE EN OEUVRE DU MOUVEMENT

VI.2.1. Position du problème

a) *Affectation de l'attribut moteur*

b) *Fonctions motrices*

VI.2.2. Génération de séquences

VI.2.3. Phase d'analyse du mouvement

VI.3. CONCLUSION

VI.0. INTRODUCTION

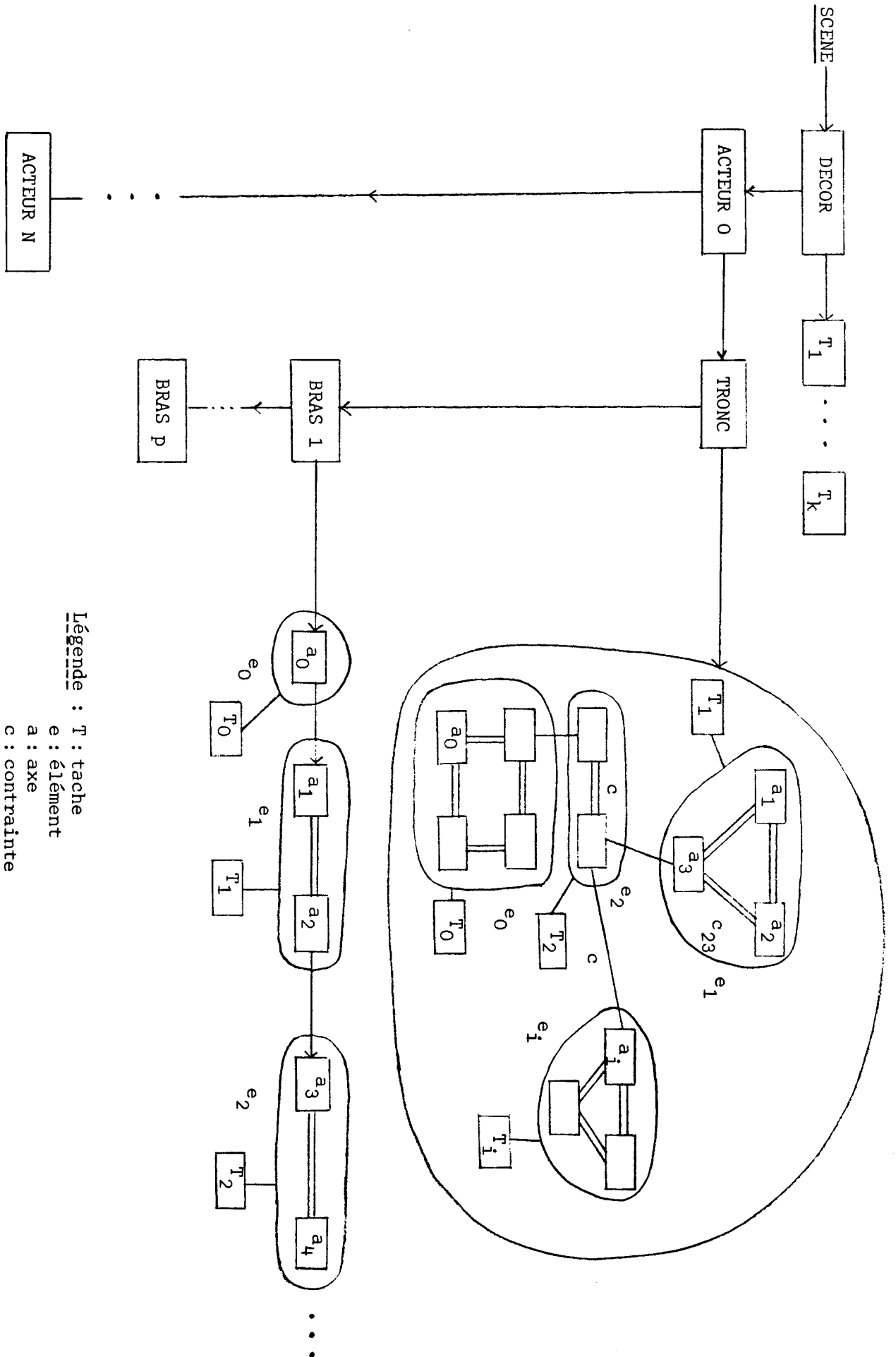
Le chapitre précédent nous a permis d'établir la structure de la scène. Nous avons dégagé différentes classes de constituants et défini leurs attributs qualitatifs et quantitatifs. La scène a bénéficié de choix structurels qui ont débouché sur la notion de mécanisme séquentiel. C'est enfin autour du concept de graphe qu'a été organisée sa représentation. Parmi les différentes représentations possibles du mécanisme, nous avons retenu le graphe des axes, base d'une description cinématique et le graphe des éléments, base d'une description logique. Le schéma de la figure 1 décrit cette représentation dans sa globalité.

Le processus de création de la scène est un *processus interactif*. Il consiste à créer de proche en proche l'image de la scène et parallèlement, la structure de donnée qui la représente. Ce processus obéit en outre, à des règles spécifiques qui assurent la cohérence mécanique et le caractère séquentiel des acteurs.

La construction de la scène s'établit donc autour d'un dialogue homme-machine. C'est des primitives nécessaires à ce dialogue et de leur description conceptuelle et sémantique qu'il sera d'abord question ici. L'aspect mis en oeuvre du mouvement, abordé par la suite, consiste une fois la scène entièrement construite, à fournir au système et pour chaque auteur, les données nécessaires au calcul de son mouvement.

Il est alors principalement question du choix des moteurs et des fonctions motrices. Le système se charge alors à partir des informations fournies de construire une séquence pour chaque tronc. Ces dernières sont ensuite analysées par un module de calcul.

Fig. 1 : Représentation de la scène.



Légende : T : tâche
 e : élément
 a : axe
 c : contrainte

VI.1. CONSTRUCTION DE LA SCENE

VI.1.1. Position du problème

Pour réaliser la construction de la scène, il est donc fourni une famille d'opérateurs qui permettent d'agir sur l'image et sa représentation. Ces opérateurs manipulent en fait des constituants. Avant d'aborder leur description détaillée, apportons quelques précisions.

a) Identification des constituants

En premier lieu, nous supposons que les constituants de la classe des lien, liaison et contrainte d'indéformabilité sont transparents pour l'utilisateur. En effet, il ne nous semble pas nécessaire que ce dernier puisse accéder de façon explicite aux constituants de ces classes. Leur structure étant figée, leur création (ainsi que tout autre manipulation) peut être automatique. Ainsi créer une liaison entre deux éléments, revient à créer un axe dans chaque élément puis une contrainte de liaison entre les deux axes. Quant aux liens et contraintes d'indéformabilité, leur création est automatiquement induite par celles des axes qui les composent.

En second lieu, nous supposons l'existence de fonctions d'accès qui permettent à l'utilisateur du système d'identifier de façon non ambiguë un constituant et appelons *nom d'un constituant*, la représentation interne du résultat de l'identification d'un constituant. Ce nom est fait de trois parties. La première partie décrit la classe du constituant (acteur, axe, bras,...), la deuxième partie est le nom du constituant "père" et la troisième partie, *prénom* du constituant, permet de l'identifier au sein de l'ensemble des "fils" de son père [Fig. 2]. Afin d'avoir accès à ces différentes informations, nous nous munissons des fonctions *c*, *p*, *pr* et *f* suivantes :

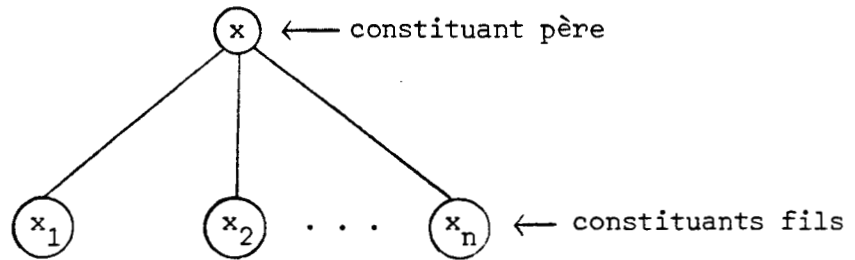
Soit *x* un constituant (*x* désigne le nom du constituant),

- *p*, appliquée à *x*, délivre le nom du père de *x*,
- *pr*, appliquée à *x*, délivre le prénom de *x*,
- *c*, appliquée à *x*, délivre la classe à laquelle appartient *x*.

- f , appliquée à x , délivre l'ensemble des noms des constituants fils de x .

A cela, nous ajoutons la fonction 't' qui appliquée à un constituant a pour résultat le type du constituant au sein de sa classe.

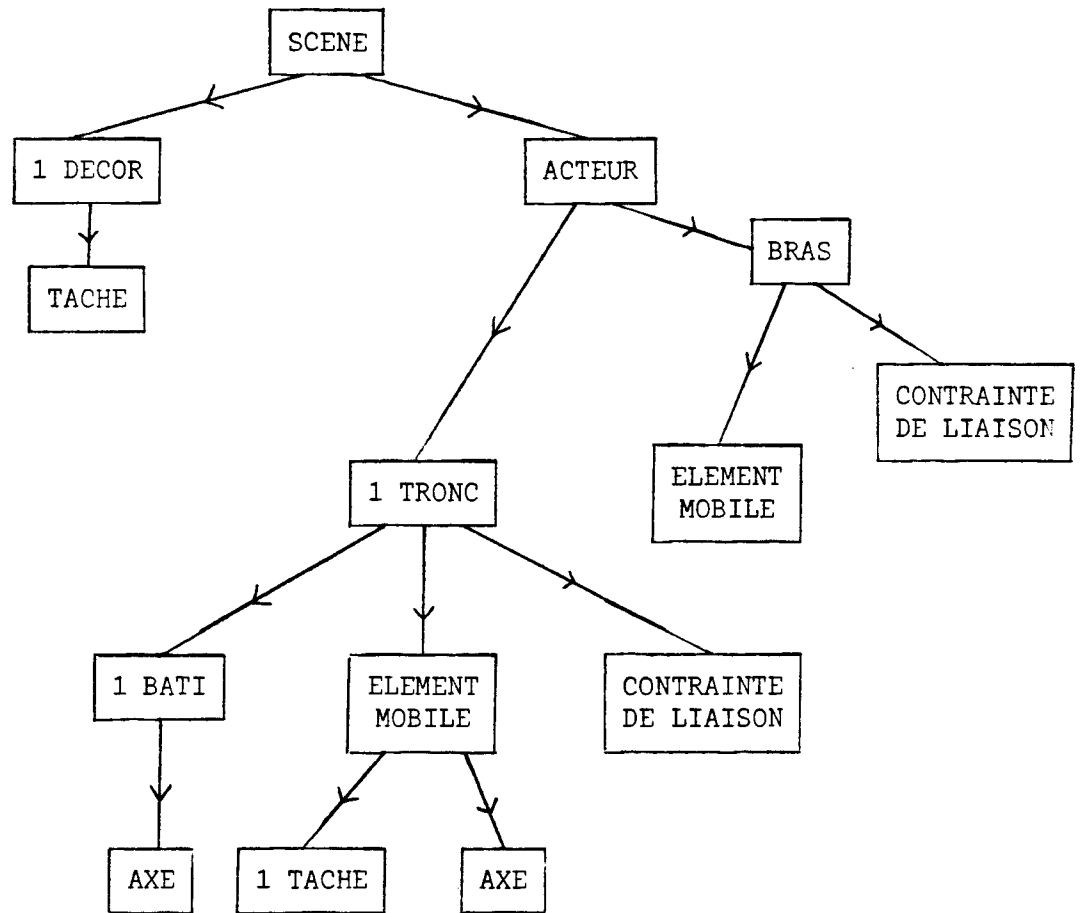
Fig. 2 : Constituants père et fils.



x se compose de x_1, x_2, \dots, x_n .

Les constituants de la scène excepté les liens, liaisons et contraintes d'indéformabilité seront donc tous affectés d'un nom. Notons enfin que le pré-nom d'une contrainte de liaison sera formé des noms des axes qu'elle renferme. La figure 3 décrit la composition de la scène telle qu'elle est perçue par l'utilisateur.

Fig. 3 : La scène vue de l'utilisateur.



b) Affectation des attributs

Lors de la création d'un constituant, nous devons affecter un ensemble de valeurs à ses attributs. Nous appelons *état* d'un constituant cet ensemble. L'affectation d'un attribut est dans certains cas implicite [Fig. 4].

Fig. 4 : Affectation implicite d'attributs.

<u>Constituant</u>	<u>attribut implicite</u>
tache	indéformable
tache du décor	fixe
tache élément	mobile
acteur	mobile
décor	fixe
axe du bâti	fixe
.	.
.	.
.	.

c) Classification des opérateurs

On distingue trois types d'opérateurs :

- L'opérateur de *création*, dont le but est d'ajouter un constituant dans l'univers de la scène, constituant auquel sont affectés un nom et un état
- L'opérateur de *suppression* dont le but est d'ôter un constituant de l'univers de la scène.
- Les opérateurs de *transformation* qui ont pour objet de modifier l'état d'un constituant (transformations géométriques,...).

On note une opération par le triplet (O, N, P) où O désigne un opérateur, N le nom d'un constituant et P l'ensemble des paramètres (éventuellement vide).

VI.1.2. L'opération de création

Dans le cas d'une opération de création, l'ensemble des paramètres est l'état du constituant. La sémantique de cette opération dépend de la classe du constituant.

a) c(nom) = décor

Effet : Création du constituant décor.

Sémantique :

- Le décor est un constituant de la scène. Il existe en un seul exemplaire et l'attribut de mobilité du décor est implicite.

- Règle :

$$(c(\text{nom}) = \underline{\text{décor}}) \Rightarrow (\text{état} = \underline{\text{vide}}) \wedge (c(p(\text{nom})) = \underline{\text{scène}}) \\ \wedge (\forall x \in f(p(\text{nom})), c(x) \neq \underline{\text{décor}})$$
b) c(nom) = acteur

Effet : Création d'un constituant de la classe acteur.

Sémantique :

- Les acteurs ont des prénoms différents. Leur attribut de mobilité est implicite.

- Règle :

$$(c(\text{nom}) = \underline{\text{acteur}}) \Rightarrow (\text{état} = \underline{\text{vide}}) \wedge (c(p(\text{nom})) = \underline{\text{scène}}) \\ \wedge (\forall x \in f(p(\text{nom})), \text{pr}(\text{nom}) \neq \text{pr}(x))$$
c) c(nom) = tronc

Effet : Création d'un constituant de la classe tronc.

Sémantique :

- Un acteur admet un tronc unique.

- Règle :

$$(c(\text{nom}) = \underline{\text{tronc}}) \Rightarrow (\text{état} = \underline{\text{vide}}) \wedge (c(p(\text{nom})) = \underline{\text{acteur}}) \\ \wedge (\forall x \in f(p(\text{nom})), c(x) \neq \underline{\text{tronc}})$$

d) c(nom) = bras

Effet : Création d'un constituant de la classe bras.

Sémantique :

- Un bras appartient à un constituant de type acteur. Les bras d'un même acteur ont des prénoms différents.

- Règle :

$$(c(\text{nom}) = \underline{\text{bras}}) \Rightarrow (c(p(\text{nom})) = \underline{\text{acteur}}) \wedge (\text{état} = \underline{\text{vide}})$$

$$\wedge (\forall x \in f(p(\text{nom})), (c(x) = \underline{\text{bras}}) \Rightarrow (\text{pr}(\text{nom}) \neq \text{pr}(x)))$$
e) c(nom) = bâti

Effet : Création d'un constituant de la classe bâti.

Sémantique :

- Le bâti appartient au tronc. Il existe en un seul exemplaire.

- Règle :

$$(c(\text{nom}) = \underline{\text{bâti}}) \Rightarrow (\text{état} = \{\text{repère local}\}) \wedge (c(p(\text{nom})) = \underline{\text{tronc}})$$

$$\wedge (\forall x \in f(p(\text{nom})), c(x) \neq \underline{\text{bâti}})$$
f) c(nom) = élément mobile

Effet : Création d'un constituant de type élément mobile.

Sémantique :

- Un élément mobile appartient à un constituant de la classe tronc ou bras. Les éléments d'un même constituant ont des prénoms différents.

- Règle :

$$\begin{aligned} & (c(\text{nom}) = \underline{\text{élément mobile}}) \Rightarrow (c(p(\text{nom})) = \underline{\text{bras}}) \vee (c(p(\text{nom})) = \underline{\text{tronc}}) \\ & \wedge (\forall x \in f(p(\text{nom})), \text{pr}(x) \neq \text{pr}(\text{nom})) \\ & \wedge (\text{état} = \{\text{repère local}\}) \end{aligned}$$

g) c(nom) = axe

Effet : Création d'un constituant de la classe axe et des liens et contraintes d'indéformabilité correspondants [Fig. 5].

Sémantique :

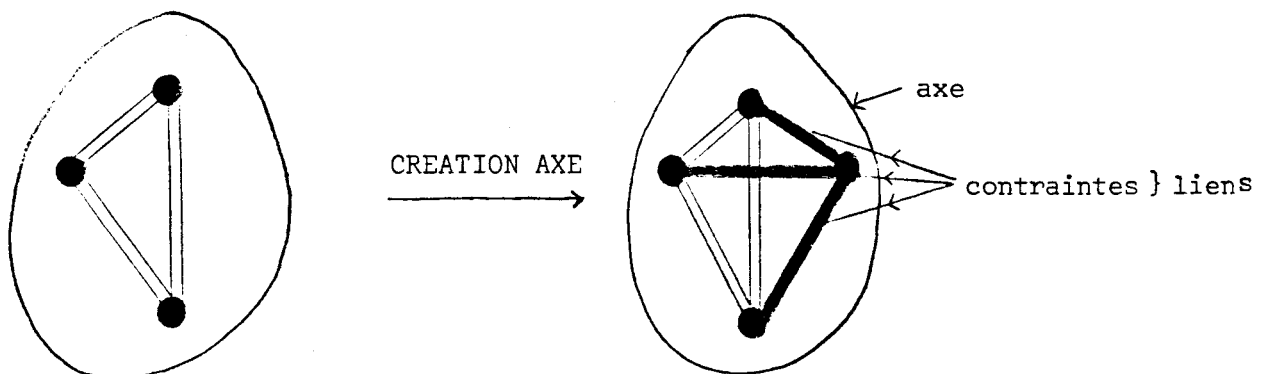
- Un axe appartient soit au bâti soit à un élément mobile. Un axe de transmission appartient obligatoirement à un élément mobile.

- Règle :

$$\begin{aligned} & (c(\text{nom}) = \underline{\text{axe}}) \Rightarrow (\text{état} = \{\text{valeurs des attributs}\}) \wedge (c(p(\text{nom})) = \underline{\text{bâti}}) \\ & \vee (c(p(\text{nom})) = \underline{\text{élément mobile}}) \wedge (\forall x \in f(p(\text{nom})), \text{pr}(x) \neq \text{pr}(\text{nom})) \\ & \wedge (t(\text{nom}) = \underline{\text{transmission}}) \Rightarrow (c(p(\text{nom})) \neq \underline{\text{bâti}}). \end{aligned}$$

Remarque : Notons qu'au niveau cinématique les repères associés aux axes de transmission d'un même élément ont tous la même origine. Pour le calcul des paramètres des contraintes d'indéformabilité se reporter au Chapitre III § 3.2.

Fig. 5 : Création des liens et contraintes d'indéformabilité.



h) c(nom) = tache

Effet : Création d'un constituant de type tache et de l'image correspondante.

Sémantique :

- Une tache appartient soit au décor soit à un élément mobile, auquel cas elle est unique. L'état est constitué par l'ensemble des valeurs des attributs d'un constituant de type tache.

- Règle :

$$(c(\text{nom}) = \text{tache}) \Rightarrow (\text{état} = \{\text{valeurs des attributs}\}) \wedge (c(p(\text{nom})) = \text{décor} \vee c(p(\text{nom})) = \text{élément mobile})$$

$$\wedge [(c(p(\text{nom})) = \text{décor}) \Rightarrow (\forall x \in f(p(\text{nom})), \text{pr}(\text{nom}) \neq \text{pr}(x))]$$

$$\wedge [(c(p(\text{nom})) = \text{élément mobile}) \Rightarrow (\forall x \in f(p(\text{nom})), c(x) \neq \text{tache})]$$
i) c(nom) = contrainte de liaison

Effet : Création d'une contrainte de liaison entre deux axes qui appartiennent à deux éléments différents avec initialisation des variables de liaison et calcul des paramètres s , ρ d'une transmission. Sur le plan graphique, l'effet est dans certain cas le placement automatique, sur la surface de visualisation, d'un des deux éléments (et de la tache correspondante). Des précisions sont données plus loin.

Sémantique :

- Vu l'importance de cet aspect, nous avons préféré lui réserver le paragraphe suivant.

VI.1.3. Le cas particulier de l'opération d'assemblage

a) Position du problème

La construction de la scène nécessite la mise en oeuvre de règles d'assemblage spécifiques. Ces règles apparaissent d'abord au niveau structurel puis dans une moindre mesure au niveau cinématique (conformité de certains paramètres). Au niveau structurel les règles sont d'abord relatives aux éléments [§a, b, c, d] puis aux axes [§e].

Nous considérons que la création d'un acteur se compose de deux phases distinctes. La première permet l'assemblage du tronc. La seconde phase, l'assemblage des bras, ne peut débuter que si la première phase a donné lieu à un tronc considéré comme valide.

a.1.) Assemblage d'un tronc

• L'assemblage d'un tronc est réalisé en une suite d'étapes notées e_0, e_1, \dots, e_n où e_0 consistera toujours à assembler un élément mobile au bâti. L'étape courante e_i permet la création du mécanisme courant noté G_i (nous utilisons une seule et même notation pour le mécanisme et son graphe associé). $G_0 = T_0$ est la chaîne (bâti, moteur) et à l'issue de l'étape e_i ($i > 0$), G_i est, en vertu des règles d'assemblage présentées dans la suite, constitué d'un sous-graphe T_i qui est un tronc et d'un certain nombre (éventuellement nul) de bras [Fig. 6].

Fig. 6 : Mécanisme G_i et G_0 .

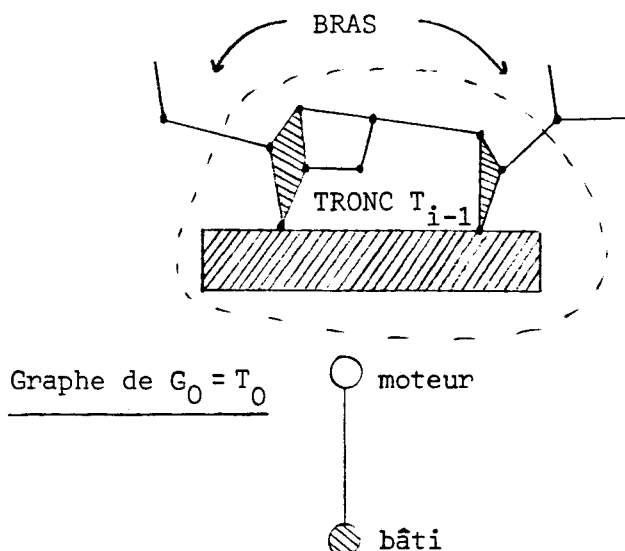
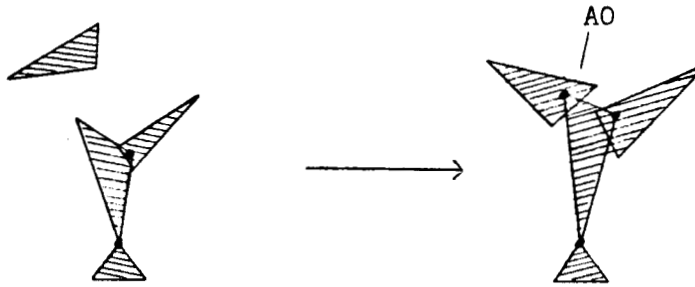
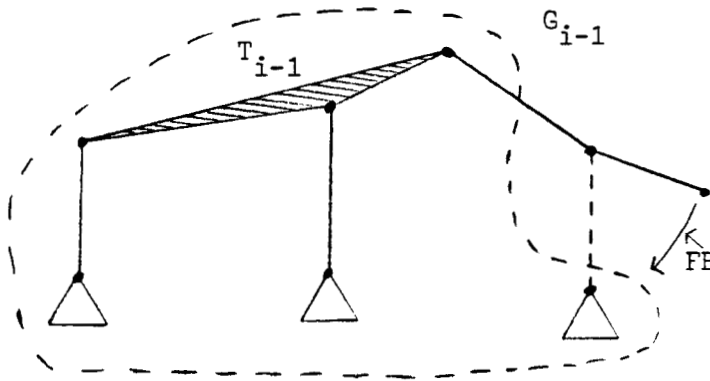


Fig. 7 : Les opérations d'assemblage.

a- Assemblage ouvert AO.b- Fermeture de boucle FB.

Le mécanisme $G_i (i > 0)$ est obtenu à partir de G_{i-1} grâce à deux sortes d'opérations :

1- Assemblage Ouvert (AO)

Il consiste à assembler un élément non encore assemblé avec le bâti ou avec un élément déjà assemblé [Fig. 7.a.].

Dans le cas où la liaison est de type glissement ou rotation, l'élément non assemblé est automatiquement placé afin de mettre en coïncidence les deux axes de la contrainte [Fig. 8.a, 8.b.]. S'il s'agit d'une liaison de type transmission, les deux éléments seront supposés préalablement placés. On vérifiera alors que la distance entre les deux axes est conforme [Fig. 8.c.].

2- Fermeture de Boucle (FB)

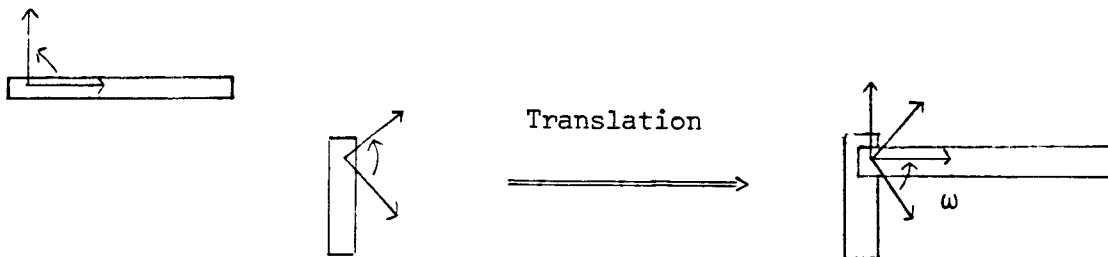
Elle consiste à assembler l'extrémité d'un bras de G_{i-1} à un élément de T_{i-1} avec création d'une boucle [Fig. 7.b.]. Cette opération ne concerne que

les liaisons de type glissement et rotation. Comme il est encore une fois nécessaire de mettre en coïncidence deux axes, nous avons choisi la solution simple qui consiste à créer automatiquement au moment de l'assemblage, l'axe qui appartient au tronc. On affecte alors à son repère les valeurs des attributs de l'axe qui appartient au bras. La variable de liaison est donc initialisée à zéro. Il est là aussi supposé que l'extrémité du bras est préalablement placée.

Fig. 8 : Création d'une contrainte de liaison : les effets cinématiques et graphiques.

a- Assemblage Ouvert : contrainte = rotation

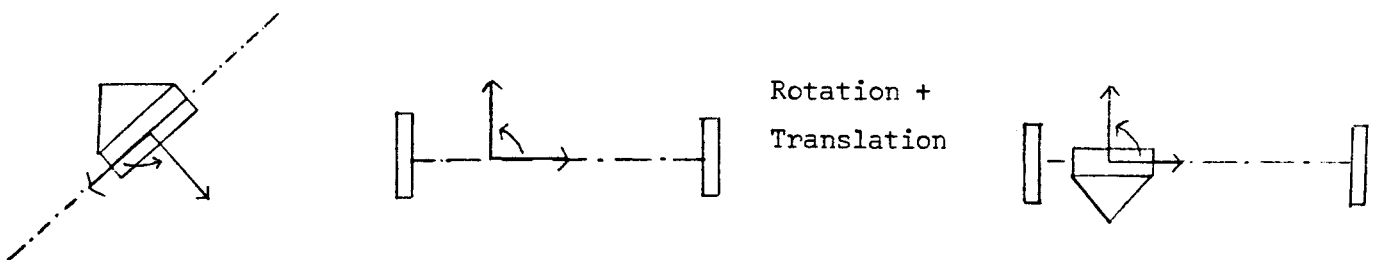
1) Placement automatique



2) Initialisation de ω

b- Assemblage Ouvert : contrainte = glissement

1) Placement automatique



2) Initialisation de d (distance des deux axes) à zéro.

c- Assemblage Ouvert : contrainte = transmission

1) Pas de placement automatique

* Cas valides :

Si r_1 et r_2 sont les rayons des éléments de transmission et d la distance des deux axes de transmission, les cas valides sont $d = 0$, $d = |r_1 - r_2|$ et $d \geq r_1 + r_2$.

* Initialisations :

1° élément déjà assemblé : s_1, ρ_1, ω_1 ,

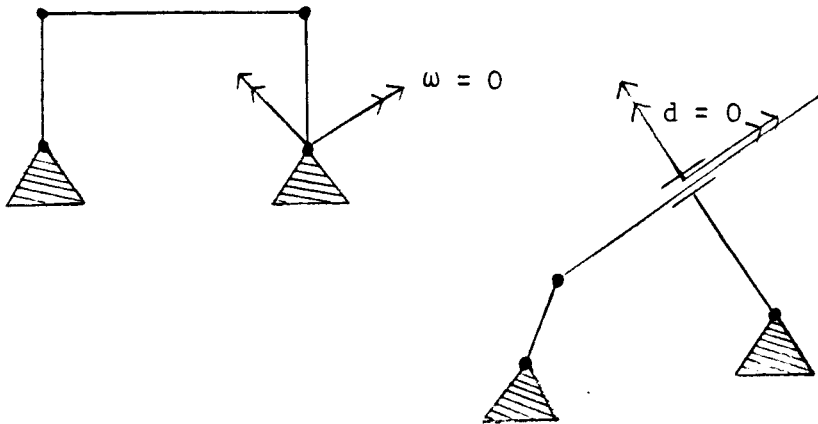
2° élément non assemblé : s_2, ρ_2, ω_2 ,

- Calcul de s_1, s_2, ρ_1, ρ_2 ($s_1 = s_2, \rho_1 = 1/\rho_2$),

- ω_2 initialisé à $s_2 \rho_2 \omega_1$.

d- Fermeture de Boucle

1) Pas de placement automatique. Création d'un axe

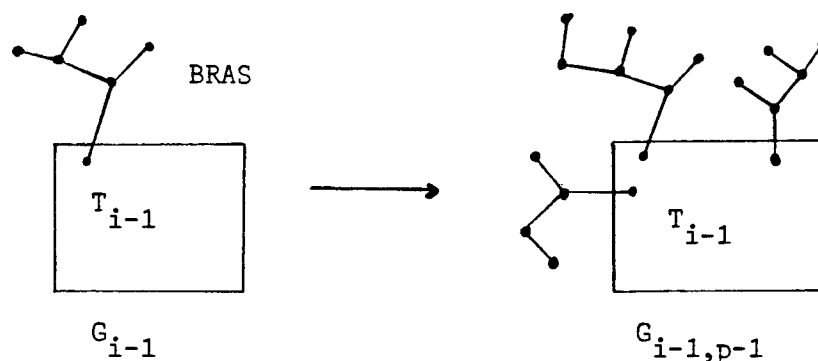


2) Initialisations : $\omega = 0, d = 0$

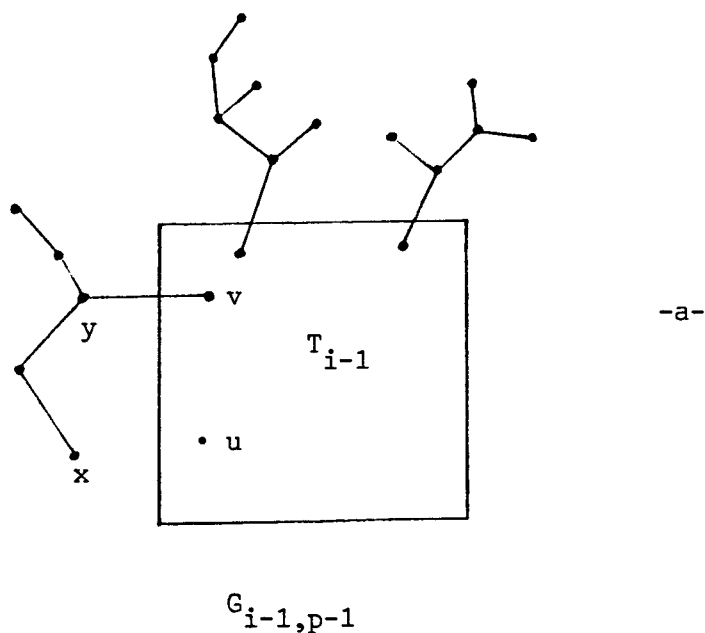
Mise à part l'étape e_0 , l'étape e_i comprend une suite de $p-1$ opérations (AO) suivies d'une ultime opération (FB) qui clôt l'étape courante et engendre G_i .

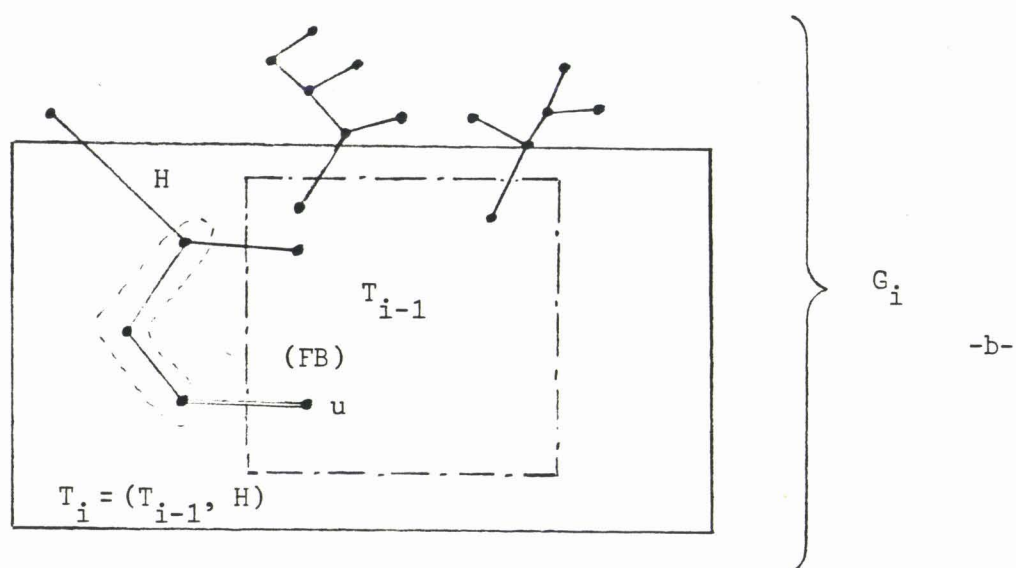
Notons $G_{i-1,k}$ le mécanisme obtenu après l'exécution de la $k^{\text{ième}}$ opération de l'étape e_i ($G_{i-1,0} = G_{i-1}; G_{i-1,p} = G_i$).

Si nous supposons que G_{i-1} est composé d'un tronc T_{i-1} et d'un ensemble de bras [Fig. 9], à l'issue des $(p-1)$ opérations AO, $G_{i-1,p-1}$ a cette même structure.

Fig. 9 : Evolution de l'étape e_i .

La $p^{\text{ième}}$ opération est une FB. Notons x l'extrémité terminale d'un bras [Fig. 10.a.] de $G_{i-1,p-1}$. Notons v l'extrémité terminale de la chaîne élémentaire qui relie x à T_{i-1} ($v \in T_{i-1}$), et considérons sur le bras d'extrémités x et v le sommet y adjacent à v . Choisissons $u \in T_{i-1}$, $u \neq v$ et notons H la chaîne d'extrémités x et y . Après assemblage de x et u [Fig. 10.b.] nous obtenons G_i . H est alors adhérente à T_{i-1} et T_i n'est autre que $\lambda(T_{i-1}, H)$ [λ étant l'opérateur introduit au Chapitre V].

Fig. 10 : Fin de l'étape e_i .



A la fin de l'étape e_n , G_n est alors un tronc séquentiel si les conditions suivantes sont vérifiées :

1) Sachant que $\forall i \in \{1, n\}$, $\exists H : T_i = \lambda(T_{i-1}, H)$ (par construction), posons $H = (Z, U)$, $\alpha = (x, u)$, $\beta = (y, v)$ et (Z, \bar{U}) la chaîne $\alpha H \beta$.

Conformément à la définition du tronc séquentiel, [Chapitre V §2.2] toutes les chaînes H doivent vérifier $(3|Z| - 2|\bar{U}_1| - |\bar{U}_2| = 0)$ (1)

$$2) G_n = T_n \quad (2)$$

La condition (1) est en réalité équivalente à une condition sur la longueur de $\alpha H \beta$. En effet il a été montré [Chapitre V §2.4] que :

$$(1) \Rightarrow [(|Z| = 1 \wedge |\bar{U}^1| = 1 \wedge |\bar{U}^2| = 1) \vee (|Z| = 2 \wedge |\bar{U}^1| = z \wedge |\bar{U}^2| = 0)] \quad (3)$$

Il est immédiat que (3) \Rightarrow (1). C'est la condition (3) associée à la condition (2) que nous utilisons comme base des règles d'assemblage du tronc, et appelons condition de séquentialité ((3) \wedge (2)). On note CS1 la condition (3) et CS2 la condition (2).

a.2.) Assemblage de bras

Pendant cette phase une étape est tout simplement une opération A0.

b) Définitions préliminaires

b.1.) Le marquage

Il sert à l'établissement des règles d'assemblage. Notons E l'ensemble des éléments d'un acteur (assemblés ou non). Soit i et j les applications de $E \rightarrow \mathbb{N}$ qui associent à tout x de E les marques $i(x)$ et $j(x)$ définies de la façon suivante :

(1) $i(x)$ caractérise la classe de l'élément x [Fig. 11] :

- $c(x) = \text{bâti} \Rightarrow i(x) = 1,$
- $t(x) = \text{transmission} \Rightarrow i(x) = 2,$
- $(c(x) \neq \text{bâti}) \wedge (t(x) \neq \text{transmission}) \Rightarrow i(x) = 3.$

(2) $j(x)$ est un indicateur relatif à l'assemblage de x [Fig. 12].

Soit $G_{i-1,k}$ le mécanisme courant, alors :

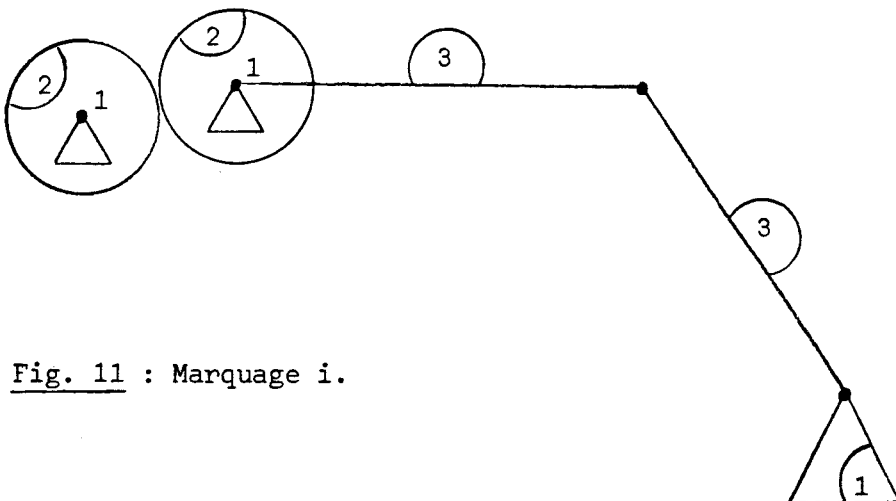
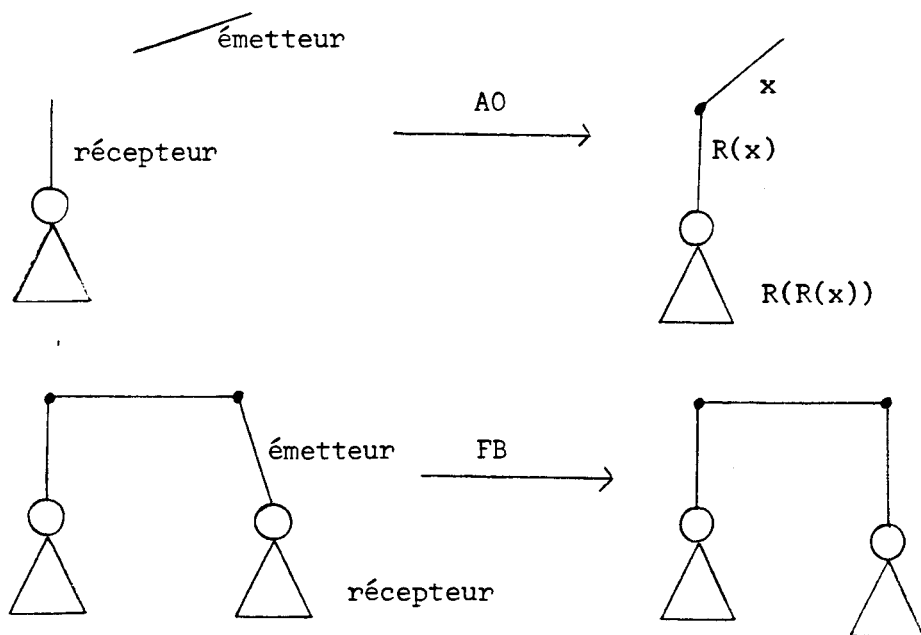


Fig. 11 : Marquage i .

- 1) Dans une opération A0 ($t(\text{nom}) = \text{A0}$), l'émetteur est un élément non assemblé et le récepteur est un élément assemblé ($j(e) = -1 \wedge j(r) \neq -1$).
- 2) Dans une opération FB ($t(\text{nom}) = \text{FB}$), l'émetteur est assemblé mais n'appartient pas au tronc et le récepteur appartient au tronc. ($j(e) > 0 \wedge y(r) = 0$).
- 3) e et r ont le même père (tronc ou bras) ($p(e) = p(r)$).

On définit en outre l'application $R : E \rightarrow E$, qui appliquée à $x \in E$ n'est définie que si $j(x) \neq -1 \wedge i(x) \neq 1$, auquel cas elle associe à x son récepteur lors d'une opération A0. [Fig. 13].

Fig. 13 : Emetteur récepteur et fonction récepteur.

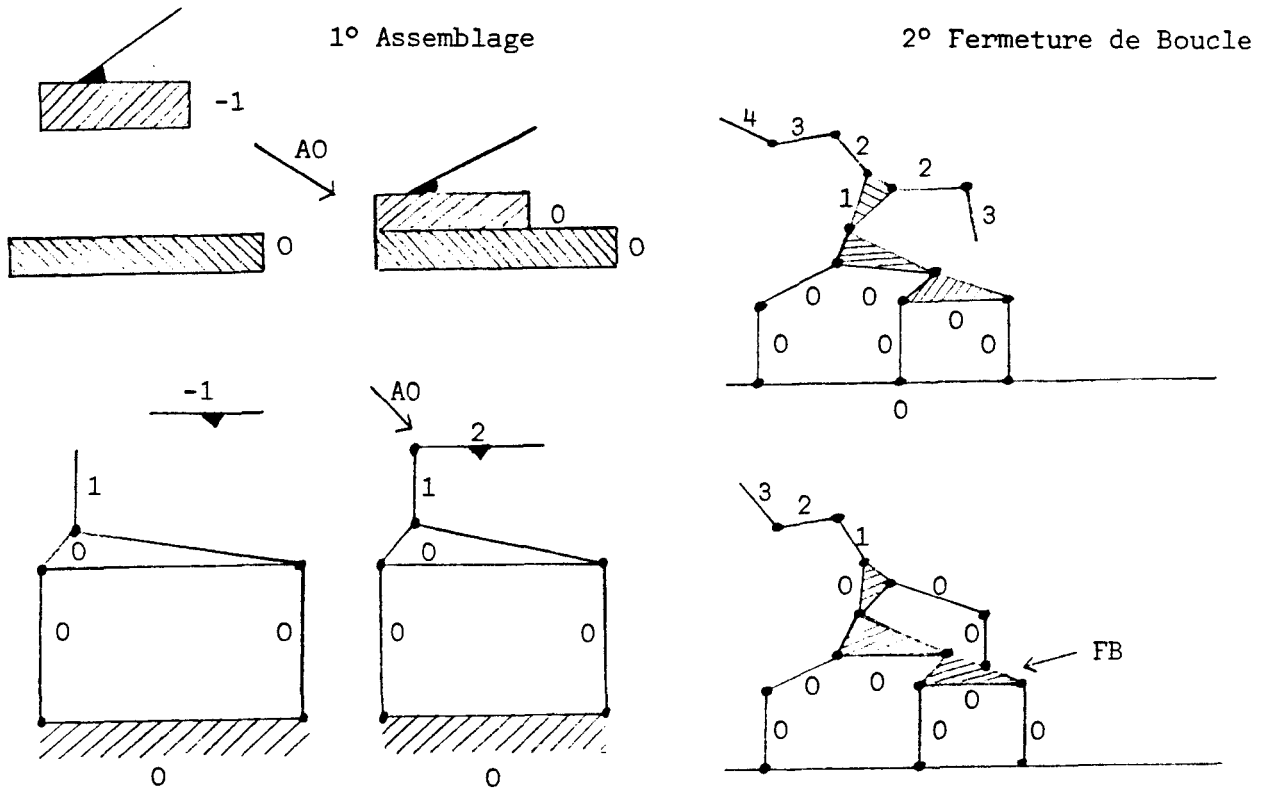


b.3.) Evolution du marquage

Le marquage i , relatif au type d'un élément x est invariable, pour x fixé, au cours de l'assemblage. Le marquage j par contre évolue à chaque exécution d'une opération d'assemblage. A la suite d'une A0, l'émetteur prend la marque du récepteur augmentés de 1 (*). Après une FB, il est nécessaire de mettre à jour la marque dont la distance au tronc (le nouveau) a changé [Fig. 14] et [Fig. 15].

* Sauf dans le cas du 1^{er} assemblage où l'émetteur prend la marque 0.

Fig. 14 : Evolution du marquage : Exemples.



c) Assemblage de troncs séquentiels

c.1.) Règles générales

Précisons d'abord l'ensemble des valeurs que peut prendre la marque j . L'opération FB assemble l'extrémité d'un bras à un élément du tronc. La marque que porte cette extrémité mesure outre la distance au tronc, le nombre de sommets de la chaîne adhérente H . Or la condition de séquentialité implique $|Z| \leq 2$, d'où $\forall x \in E \quad j(x) \leq 2$, (pendant l'assemblage du tronc). Pour obtenir cette condition, nous interdisons lors d'une opération d'assemblage que $j(r)$ soit égal à 2. Notons d'autre part que l'émetteur n'est jamais l'élément fixe et que le récepteur est toujours un élément assemblé. Ajoutons enfin que tout élément de transmission doit être assemblé au bâti et que les noms qui forment le prénom de la contrainte, sont des noms d'axes. ($c(\text{firs}(\text{pr}(\text{nom}))) = c(\text{last}(\text{pr}(\text{nom}))) = \underline{\text{axe}}$)

Fig. 15 : Algorithme d'évolution du marquage.

• Etat initial : $j(b) = 0 \wedge \forall x \neq b \quad j(x) = -1$

• Après une AO :

1^{er} assemblage : $j(e) = 0$;

assemblages suivants : $j(e) = j(r) + 1$;

• Après une FB :

```

x = e ; j(x) = 0 ; x = R(x) ;
tant que (j(x) ≠ 0) faire
    j(x) = 0 ; MAJ(x) ; x = R(x) ;
fait
  
```

```

Maj(t) :
pour tout y tel que (R(y) = t) faire
    ^ (j(y) ≠ 0)
    j(y) = j(t) + 1 ;
    Maj(y) ;
fait
  
```

c.2.) Règles de fermeture de boucle

1^{ère} règle : Le récepteur appartient au tronc et l'émetteur appartient au bras ($j(r) = 0 \wedge j(e) > 0$).

2^{ème} règle : Si l'émetteur est un élément de transmission le récepteur est le bâti ($i(e) = 2 \Rightarrow i(r) = 1$). Cette règle conjuguée avec la règle 2 de l'assemblage ouvert (voir plus loin), permet d'assembler tout élément de transmission au bâti.

3^{ème} règle : La condition de séquentialité implique lors d'une opération FB [Fig. 16] que u soit différent de v . u est le récepteur courant r , et v dépend de la longueur de H :

$$j(e) = 1 \Rightarrow |Z| = 1 \Rightarrow v = R(e)$$

$$j(e) = 2 \Rightarrow |Z| = 2 \Rightarrow v = R(R(e))$$

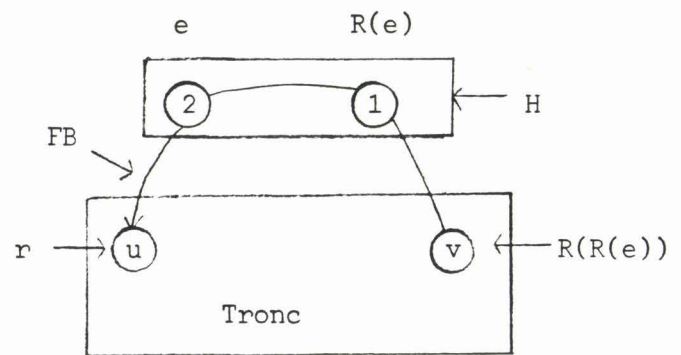
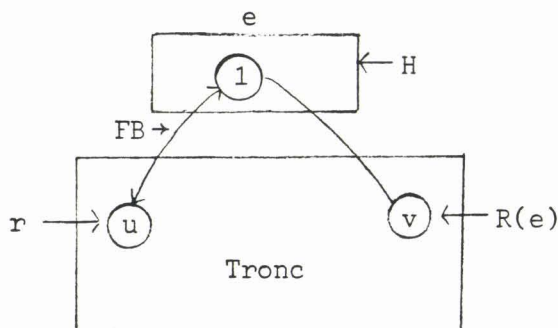
d'où la règle :

$$j(e) = 1 \Rightarrow r \neq R(e) \wedge (j(e) = 2 \Rightarrow r \neq R(R(e))).$$

Nous savons de plus que lorsque $|Z| = 1$, l'unique sommet de H est un élément de transmission [Chapitre V §2.2.c.] d'où :

$$(j(e) = 1 \Rightarrow i(e) = 2)$$

Fig. 16 : Condition ($u \neq v$).



c.3.) Règles d'assemblage ouvert

1^{ère} Règle : L'émetteur doit être un élément non assemblé ($j(e) = -1$).

2^{ème} Règle : Si le récepteur est un élément de transmission, sa marque doit être nulle ($i(r) = 2 \Rightarrow j(r) = 0$). Comme l'élément de transmission (ici récepteur) doit être assemblé au bâti, cette règle interdit tout assemblage sur un élément de transmission, tant que ce dernier n'a pas été assemblé au bâti.

3^{ème} Règle : Si l'émetteur est un élément de transmission et que le récepteur n'est ni un élément de transmission ni le bâti, le récepteur ne doit pas appartenir au tronc ($i(e) = 2 \wedge i(r) = 3 \Rightarrow j(r) \neq 0$). En effet si le récepteur appartient au tronc et après exécution de l'opération, on peut, en vertu des règles de fermeture de boucle, assembler l'élément de transmission au bâti. Il y a dans ce cas formation d'une boucle statique.

Fig. 17 : Règles d'assemblage de troncs séquentiels.

$$\begin{aligned}
 & c(p(e)) = \underline{\text{tronc}} \Rightarrow \\
 & (c(\text{first}(\text{pr}(\text{nom}))) = c(\text{last}(\text{pr}(\text{nom}))) = \underline{\text{axe}}) \wedge (p(e) = p(r)) \wedge (i(e) \neq 1) \\
 & \wedge (j(r) \neq 2) \wedge (j(r) \neq -1) \wedge A \wedge B \\
 \\
 & A \equiv (t(\text{nom}) = \text{FB}) \Rightarrow (j(r) = 0) \wedge (j(e) \neq 0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \\
 & A_1 \equiv (i(e) = 2) \Rightarrow (i(r) = 1) \\
 & A_2 \equiv (j(e) = 1) \Rightarrow (i(e) = 2) \wedge (r \neq R(e)) \\
 & A_3 \equiv (j(e) = 2) \Rightarrow r \neq R(R(e)) \\
 \\
 & B \equiv (t(\text{nom}) = \text{A0}) \Rightarrow (j(e) = -1) \wedge B_1 \wedge B_2 \\
 & B_1 \equiv (i(e) = 2) \wedge (i(r) = 3) \Rightarrow (j(r) \neq 0) \\
 & B_2 \equiv (i(r) = 2) \Rightarrow j(r) = 0
 \end{aligned}$$

d) Assemblage de bras

L'assemblage de bras ne pose pas de problème particulier. L'opération utilisée est toujours de type A0. On note j_{\max} la marque maximum d'un élément d'un bras, T le nom du tronc de l'acteur auquel appartient le bras *courant* b, et enfin 'nom' le nom de la contrainte de liaison créée. Comme pour l'assemblage du tronc il faut d'abord vérifier : $(j(r) \neq -1 \wedge (j(r) \leq j_{\max}))$
 $\wedge (c(\underline{\text{last}(\text{pr}(\text{nom}))}) = c(\underline{\text{first}(\text{pr}(\text{nom}))}) = \underline{\text{axe}}).$

Au delà nous avons les règles suivantes :

1^{ère} Règle : Si le père de l'émetteur n'est pas celui du récepteur, il s'agit obligatoirement de l'assemblage du premier élément du bras. Cet assemblage peut se faire soit avec un élément du tronc soit avec l'élément d'un bras. On vérifie alors que le tronc ou le bras en question appartient au même acteur que b. Dans tous les cas l'assemblage de T est terminé (tous les éléments de T ont la marque 0) [Fig. 18, Proposition A].

2^{ème} Règle : Si le père de l'émetteur et celui du récepteur sont identiques, il s'agit de l'adjonction d'un élément à b. Cet élément est alors celui dont la marque est maximum [Fig. 18, Proposition B].

Fig. 18 : Règles d'assemblage des bras.

$$\begin{aligned}
 & (c(p(e)) = \text{bras}) \Rightarrow \\
 & (t(\text{nom}) = A0) \wedge (e(\text{last}(\text{pr}(\text{nom}))) = c(\text{last}(\text{pr}(\text{nom}))) = \underline{\text{axe}}) \\
 & \wedge (j(r) \neq -1) \wedge (j(r) < j_{\max}) \wedge A \wedge B \\
 \\
 & A \equiv (p(e) \neq p(r)) \Rightarrow \\
 & \quad (\forall x \in p(e), j(x) = -1) \wedge (\forall x \in T \quad j(x) = 0) \\
 & \quad \wedge (p(p(e)) = p(p(r))) \\
 \\
 & B \equiv (p(e) = p(r)) \Rightarrow (\forall x \in p(r) \quad j(x) < j(r))
 \end{aligned}$$

e) Règles d'assemblage : niveau des axes

Il s'agit essentiellement de vérifier ici, qu'il y a compatibilité entre le type de la contrainte de liaison et ceux des axes impliqués dans l'opération d'assemblage. [Fig. 19]. On vérifie en outre qu'un axe n'appartient qu'à une liaison unique et qu'au cours de l'assemblage d'un bras, la contrainte de liaison et ses axes sont soit de type rotation soit de type glissement.

Fig. 19 : Compatibilité des types.

Contrainte	axe-émetteur	axe-récepteur
Rotation	Rotation	Rotation
Rotation	Transmission	Rotation
Glissement	Glissement	Glissement
Transmission	Transmission	Transmission

Fig. 20 : Règles d'assemblage : niveau des axes.

nom = nom de la contrainte de liaison

ax-em = first(pr(nom)), ax-re = last(pr(nom))

1) $c(p(\text{nom})) = \text{bras} \Rightarrow (t(\text{nom}) \neq \text{transmission}) \wedge (t(\text{ax-em}) \neq \text{transmission},$

2) $\forall x \in f(p(\text{nom})), [(x \neq \text{nom}) \Rightarrow [x \neq \text{first}(\text{pr}(\text{nom}))]$
 $\wedge [x \neq \text{last}(\text{pr}(\text{nom}))]]$

3) $[t(\text{nom}) = \text{rotation} \Rightarrow (t(\text{ax-em}) = \text{rotation} \vee t(\text{ax-re}) = \text{transmission})$
 $\wedge t(\text{ax-re}) = \text{rotation}] \wedge$

$[t(\text{nom}) = \text{glissement} \Rightarrow (t(\text{ax-em}) = t(\text{ax-re}) = \text{glissement})] \wedge$

$[t(\text{nom}) = \text{transmission} \Rightarrow (t(\text{ax-em}) = t(\text{ax-re}) = \text{transmission})]$.

VI.1.4. L'opération de suppression (SUPPRESSION, NOM)

L'opération de suppression peut s'appliquer à tous les constituants de la scène. Elle a pour effet d'ôter de l'univers de la scène un constituant ainsi que toute sa descendance. L'opération est toujours valide sauf dans les cas particuliers qui suivent :

- 1) c(nom) = axe : La suppression n'est possible que si l'axe n'appartient pas à une liaison.
- 2) c(nom) = contrainte de liaison : Cette opération pourrait s'appeler "désassemblage". On ne pourra l'appliquer qu'à l'extrémité d'un bras.
- 3) c(nom) = élément : La suppression d'un élément n'est possible que s'il n'est pas assemblé.

A cela, nous pouvons ajouter que la suppression d'un tronc implique la suppression des bras qui y sont accrochés.

V.1.5. L'opération de transformation (TRANSFORMATION, NOM, PARAMETRES)

L'opération de transformation ne peut s'appliquer qu'aux constituants qui possèdent au moins un attribut non implicite (tache, élément, contrainte de liaison, axe). Elle a pour effet de modifier l'état d'un constituant en agissant sur ces attributs quantitatifs.

Il existe deux opérations de transformation, l'opération de transformation graphique et l'opération de transformation géométrique.

a) L'opération de transformation graphique

On ne peut l'appliquer qu'aux constituants de type tache. L'effet de l'opération est selon le cas, la modification d'une couleur, d'une forme ou d'un ordre de visualisation. La liste des paramètres pourrait débiter par le type de la modification (couleur,...) suivie de la liste des nouvelles valeurs des attributs modifiés.

b) L'opération de transformation géométrique

On peut l'appliquer à tous les constituants "transformables" (tache, élément, contrainte de liaison, axe). La sémantique de l'opération dépend du type du constituant auquel elle s'applique.

1) $c(\text{nom}) = \underline{\text{axe}}$

Il peut s'agir soit de la modification des valeurs des butées, soit de la modification des paramètres du repère associé à l'axe. Les paramètres sont dans ce dernier cas les paramètres a , b , α d'une transformation géométrique G [cf. Chapitre III]. Cette dernière opération n'est possible que si l'axe n'appartient pas à une liaison. Après son exécution, il est nécessaire de mettre à jour les contraintes d'indéformabilité.

2) c(nom) = tache

Parmi les attributs d'une tache nous avons le repère local qui lui est associée ainsi que la liste des points caractéristiques. Cette dernière existe en forme absolue et relative. On pourra appliquer à une tache une transformation géométriques en agissant sur son repère local. La forme absolue des points caractéristiques est automatiquement mise à jour (ce qui provoque le déplacement de la tache). Notons qu'on ne peut appliquer une transformation géométrique directement à une tache que si elle appartient au décor (une tache qui appartient à un élément est définie dans le repère local de l'élément).

3) c(nom) = élément

On peut transformer le repère local de l'élément. L'opération a pour effet de transformer globalement les constituants de l'élément (tache et axe). Elle n'est possible que si l'élément n'est pas assemblé.

4) c(nom) = contrainte de liaison

On s'autorise à modifier la valeur d'une contrainte de liaison si l'un des éléments qu'elle lie est l'*extrémité* d'un bras (et qu'il n'est pas un élément de transmission). Cette modification ne peut se faire que dans les limites définies par les butées elle a alors pour effet graphique le déplacement de cette extrémité. (Rotation si contrainte de type rotation, glissement si contrainte de type glissement).

VI.2. MISE EN OEUVRE DU MOUVEMENT

VI.2.1. Position du problème

Afin de donner vie à l'acteur que l'on vient de construire, on fournit au système les données nécessaires au calcul de son mouvement, c'est-à-dire :

- Les éléments moteurs.
- La liste des valeurs que prennent successivement les variables des liaisons motrices et qui sont fournies par des *fonctions motrices*.

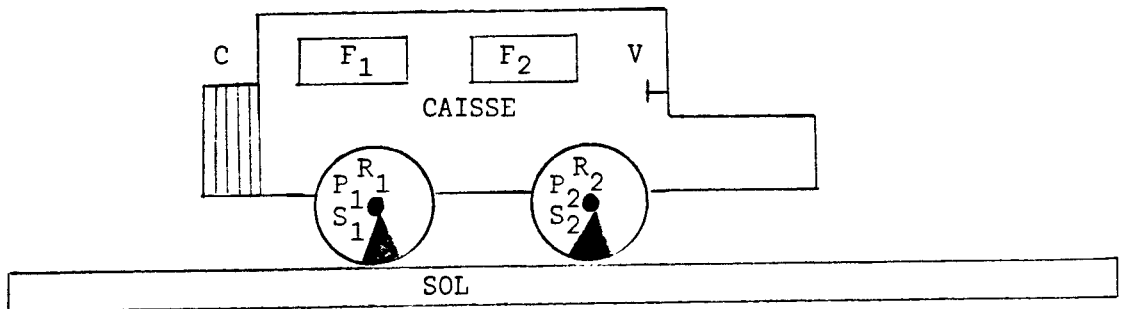
a) Affectation de l'attribut moteur

A l'issue de la phase de construction d'un acteur, le tronc de ce dernier possède implicitement un élément moteur qui est le premier élément assemblé. Mais on peut désirer affecter l'attribut moteur à un autre élément du tronc. On vérifiera dans ce dernier cas que l'élément en question est lié au bâti.

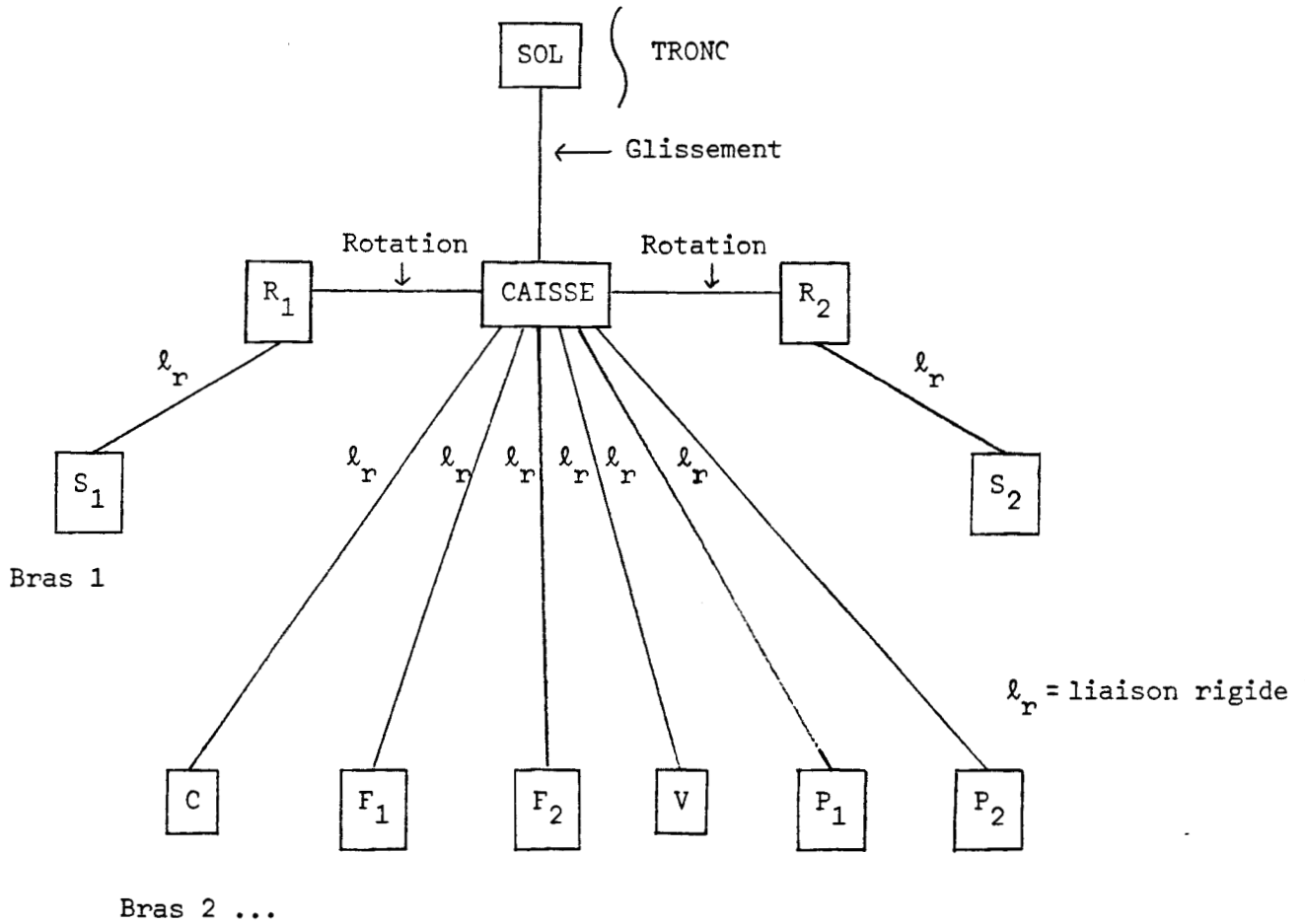
Tous les éléments d'un bras peuvent être moteurs, mais il n'est pas nécessaire qu'ils le soient tous. Les liaisons non motrices gardent alors des valeurs constantes pendant le mouvement. La figure 21 présente un exemple d'utilisation de ses "liaisons rigides".

Fig. 21 : Utilisation des liaisons non motrices dans un bras.

1 - ACTEUR



2 - GRAPHE DES ELEMENTS

b) Fonctions motrices

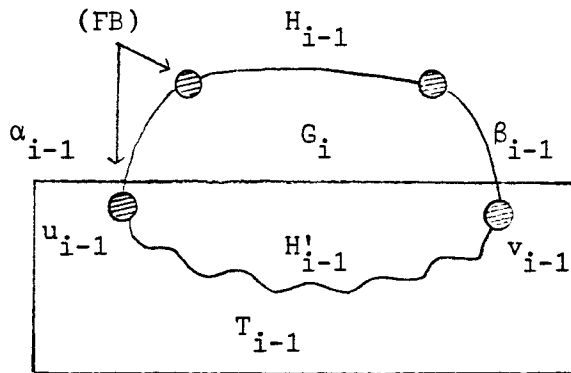
L'évolution d'un acteur se traduit par une suite de configurations [Chapitre III §4.1.]. Notons cette suite $C_0, C_1, \dots, C_t, \dots, C_n$. Chaque configuration C_t définit "l'état topologique" de l'acteur à une étape donnée de son évolution. Elle est formée par toutes les valeurs des variables de liaison à cette étape. La configuration initiale C_0 est léguée par la phase de construction de l'acteur. Pour évoluer de la configuration C_t à la configuration C_{t+1} , on injecte de nouvelles valeurs aux liaisons motrices de l'acteur, puis on calcule C_{t+1} , cela constitue une phase d'analyse de mouvement. Pour cela, on associe à chaque moteur une fonction continue $F_m : \{0, 1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$, appelée fonction motrice, dont le rôle est de délivrer ces nouvelles valeurs.

L'analyse du mouvement se fait séparément pour le tronc et les bras. Celle du tronc est basée sur une séquence qu'on a préalablement élaboré. C'est à l'élaboration de cette dernière qu'on va à présent s'intéresser.

VI.2.2. Génération de séquences

Une *séquence de base* est générée pendant la phase d'assemblage. En effet, l'occurrence de l'opération (FB) $n^o = i$ donne naissance à un cycle C_i [Fig. 22] formé de la chaîne élémentaire $\alpha_{i-1} H_{i-1} \beta_{i-1}$ et d'une chaîne élémentaire (la plus courte) H'_{i-1} qui relie u_{i-1} et v_{i-1} dans T_{i-1} . Comme $C_i \in \mu(T_{i-1}, H_{i-1})$, C_1, C_2, \dots, C_n (n étant le nombre d'occurrences de (FB)) est une séquence.

Fig. 22 : Génération des cycles d'une séquence



La séquence de base peut être utilisée tant que l'emplacement du moteur n'a pas été modifié. Dans ce dernier cas il est nécessaire de définir une nouvelle séquence. On se propose de le faire à partir des cycles de la séquence de base. Notons C_m le nouveau cycle moteur ($m \in \{1, n\}$). Si C_m n'est pas un mécanisme cohérent à un moteur, il est inutile de mener la recherche plus loin, on ne pourra pas trouver de séquence commençant par C_m . Dans le cas contraire, on cherchera à déterminer un *ordre* $C_{k_1}, C_{k_2}, \dots, C_{k_{n-1}}$ sur les cycles restants de sorte que $C_m, C_{k_1}, C_{k_2}, \dots, C_{k_{n-1}}$ forme une séquence. Les conditions que doivent vérifier les cycles de cette séquence sont alors les suivantes :

Supposons que $C_m, C_{k_1}, \dots, C_{k_j}$ ($j < n-1$) forme une séquence, alors

$\forall i = 1, \dots, j \exists T_i$ et H_i adhérente à T_i et vérifiant CS1 : $C_{k_i} \in \mu(T_i, H_i)$.

Posons $T_{j+1} = \lambda(T_j, H_j)$. Soit $C_{k_{j+1}}$ un cycle élémentaire. Pour que $C_m, \dots, C_{k_{j+1}}$

soit une séquence il faut trouver H_{j+1} adhérente à T_{j+1} qui vérifie CS1 et que $C_{k_{j+1}} \in \mu(T_{j+1}, H_{j+1})$. Pour cela, il faut en premier lieu que le sous-graphe

partiel construit sur les arêtes de $C_{k_{j+1}}$ qui ne sont pas dans T_{j+1} soit une

chaîne élémentaire. Si tel est le cas, notons cette chaîne $u\alpha H\beta v$ où u et v sont ses sommets extrémités, α et β deux arêtes et H une chaîne élémentaire.

H est dans ces conditions une chaîne adhérente à T_{j+1} et on pose $H_{j+1} = H$. On s'assurera donc en second lieu que H vérifie CS1.

VI.2.3. Phase d'analyse du mouvement

La phase d'analyse du mouvement d'un acteur peut débuter dès qu'il a été affecté aux différents moteurs leur fonction motrice et que la séquence du tronc est définie. Nous présentons en annexe une méthode d'analyse adaptée aux acteurs séquentiels.

Nous avons associé à chaque élément de l'acteur un repère local dans lequel sont donnés les points caractéristiques de sa tâche. Ce repère local est lié aux axes de l'élément. A chaque nouvelle configuration, la nouvelle topologie de l'acteur est obtenue en calculant les nouvelles positions des repères locaux des différents éléments, dans le système invariable, par application de la composée des transformations géométriques (correspondant aux liaisons et aux liens) qui lient ces repères au système invariable. Notons qu'une configuration est valide si toutes les valeurs des variables de liaison sont conformes aux butées correspondantes.

VI.3. CONCLUSION

C'est avec la description du langage de construction de la scène et des aspects relatifs à la mise en oeuvre du mouvement que se termine notre étude. Cette dernière est en réalité la première phase d'une démarche plus globale dont la *deuxième phase*, relative à l'animation proprement dite, c'est-à-dire à la production de séquences d'images animées à partir de la donnée d'une suite de configurations, doit déboucher sur une implémentation. *Elle* constitue une suite naturelle à ce travail. Nous faisons dans notre conclusion finale une présentation de différents aspects de cette étude future.

CONCLUSION GENERALE

0. ETAT DES FAITS

1. ETUDES EN COURS

2. LES VOIES DE RECHERCHE

0. ETAT DES FAITS

Notre étude nous a permis de mettre en valeur dans le cadre d'un système d'animation 2D^{1/2}, la structure, la représentation et l'animation d'une scène composée d'acteurs mécaniques.

Nous nous sommes munis dans une première phase des outils nécessaires à une représentation structurelle, cinématique et graphique des acteurs.

Devant les spécificités propres à notre application et les difficultés inhérentes aux machines complexes, nous avons été conduits dans une deuxième phase, à définir des acteurs dont les mécanismes sous-jacents sont de complexité moyenne, les acteurs séquentiels.

Nous avons enfin décrit une méthode de construction de tels acteurs et les moyens de mise en oeuvre de leur mouvement.

Nous ne pouvons terminer cet état des faits sans évoquer l'utilité des graphes dans ce domaine, graphes qui nous ont permis de décrire formellement la structure des mécanismes et d'étudier certaines de leurs propriétés.

1. ETUDES EN COURS

- *L'implémentation* : architecture logicielle, réalisation effective.

Un logiciel expérimental de construction et d'animation de scènes mécaniques $2D^{1/2}$ est en cours de réalisation [JAH 84]. Conçu autour d'une structure de donnée qui permet la représentation graphique cinématique et structurelle de la scène, il comprend essentiellement les cinq modules suivants [Fig. 1] :

- Un module de gestion du dialogue.
- Un module de construction de la scène.
- Un module de contrôle.
- Un module d'affichage.
- Un module de test.

Le module de dialogue

Fonction : Outre la gestion de l'interaction ce module effectue la traduction des commandes de l'utilisateur sous une forme intermédiaire directement interprétable par les modules d'animation, de construction et d'affichage.

Forme actuelle : Le langage de commande actuel étant très proche du langage intermédiaire, ce module se compose actuellement de fonctions d'interprétation rudimentaires.

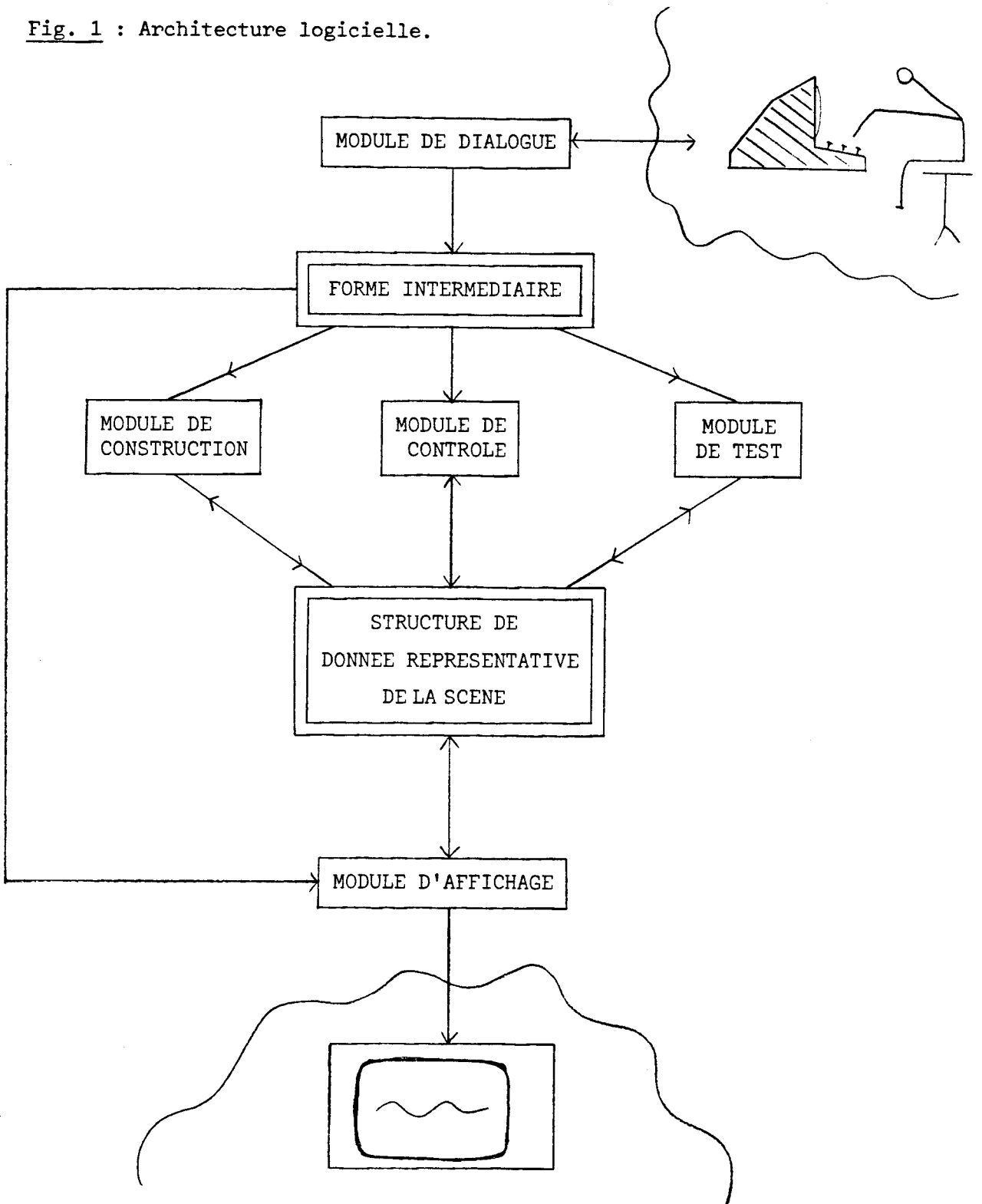
Le module de construction

Fonction : Ce module assure les fonctions de création (+ analyse structurelle) suppression et transformation de constituants.

Forme actuelle : Dans sa forme actuelle il permet :

- De créer, détruire et placer des taches.
- De modifier les attributs graphiques des taches.
- De créer et détruire des axes ; avec en parallèle la création et la destruction des contraintes d'indéformabilité associées.
- De créer et détruire des contraintes de liaison. Seule l'opération (AO) est actuellement opérationnelle.

Fig. 1 : Architecture logicielle.



Certains aspects de l'analyse structurelle ont été implémentés (niveau des axes).

Le module de contrôle

Fonction : Les fonctions essentielles de ce module sont :

- La génération de séquences.
- La génération de fonctions motrices et l'affectation de l'attribut moteur.
- L'analyse du mouvement et la génération des configurations et des états topologiques correspondants (liste des triplets (x, y, θ) correspondant aux repères des éléments de la scène).

Forme actuelle : En cours d'élaboration. L'implémentation nécessite des simulations numériques préalables.

Le module d'affichage

Fonction : Ce module interprète la description abstraite des différentes taches de la scène et en fournit une image sur l'écran. Il doit inclure des fonctions spécifiques à l'animation.

Forme actuelle : Ce module ne comporte actuellement que des fonctions élémentaires d'affichage :

- Affichage d'un pixel.
- Remplissage d'un contour.
- Effacement total de l'écran.

Le passage d'une image à l'image suivante nécessite l'effacement total de l'écran et le redessin de toute l'image. Ce dernier se fait en commençant par les taches du plan le plus éloigné de l'observateur. Les taches du plan i sont "peintes" sur le plan $(i+1)$ selon l'algorithme du peintre [CEA 82].

Le module de test

Ce module nous est très utile pendant cette phase de développement. Il donne l'accès aux valeurs des attributs des différents constituants. Ce qui permet après l'exécution d'une action (que cette dernière ait un effet sur l'image ou non) de vérifier que les résultats obtenus sont conformes à ceux attendus.

Observations

Le logiciel actuel (2500 à 3000 instructions PLM) est implémenté sur une machine qui utilise un 8086 couplé à un co-processeur arithmétique 8087, qui dispose de possibilités de calcul en réel satisfaisantes. La puissance de l'unité centrale est de l'ordre de 1MIPS. Outre cette dernière, le poste de travail se compose d'un moniteur couleur à mémoire de trame $512 \times 512 \times 8$ couplé à une table de fausses couleurs, ainsi que des moyens d'entrée-sortie light pen et clavier.

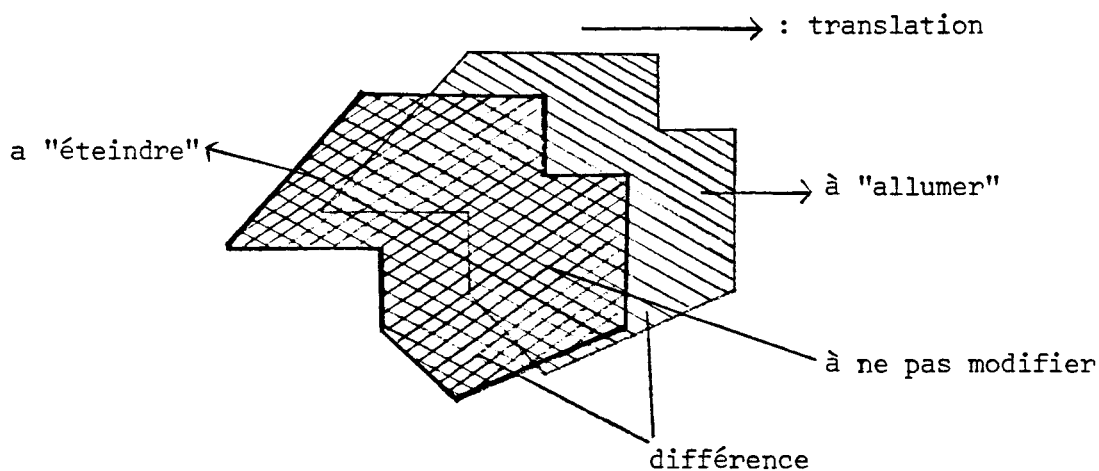
Les temps de calcul et d'affichage observés lors d'opérations de manipulation de taches, nous laissent penser qu'une production d'acteurs "simples" (taches réduites à leur contour, nombre de taches peu élevé), en temps différé bref est possible dans le cadre de cette configuration matérielle et ceci malgré l'utilisation de fonctions d'affichage rudimentaires. Cela permettrait le test interactif de séquences d'animation simples.

La technique utilisée devient par contre très coûteuse en temps de calcul dès qu'il s'agit de taches pleines (temps de mise à jour de la mémoire d'image proportionnel à la surface affichée) et l'affichage d'une image excède plusieurs secondes.

Il est certain que nous n'espérons pas ici produire de l'animation temps réel (cela demanderait des puissances de calcul considérables), néanmoins le problème de la *restitution* est posé. En supposant que les images d'une séquence animée sont toutes précalculées et stockées, la restitution en temps réel n'est pas une opération immédiate, nous l'avons déjà évoqué au cours du premier chapitre. Les techniques de compression permettent de réduire les temps de trans-

fert mais elles n'influencent guère sur les temps d'affichage qui restent proportionnels au nombre de pixels modifiés. Arguant du fait que deux images successives d'une séquence animée sont peu différentes, on peut s'attacher au calcul de la "différence" de ces deux images [Fig. 2]. Le passage d'une image à la suivante consistera à n'afficher que cette "différence", ce qui réduit considérablement le nombre de pixels mis à jour. Cette technique pose des problèmes topologiques non triviaux et mérite une étude approfondie. Nous pensons encore ici que la théorie des graphes sera d'un grand secours, dans certains cas, pour le calcul des différences. Sur l'exemple de la figure 2 les trois régions délimitées par les contours des deux polygones ne sont autres que les faces d'un graphe planaire !

Fig. 2 : Différence de deux images successives.



2. LES VOIES DE RECHERCHE

Nous les résumons comme suit :

- Les axes graphiques :

- Etudes de techniques de compression et de restitution d'images (problèmes évoqués précédemment).
- Animation de mécanismes 2D dans un environnement 3D.

- Les axes contrôle explicite :

- Elargir les concepts introduits aux mécanismes tri-dimensionnels.
- Etudes de différentes techniques de contrôle explicite pour l'animation graphique.

ANNEXE

LES CONCEPTS DE THEORIE DES GRAPHS UTILISES

Nous avons choisi le concept de graphe comme support d'une représentation abstraite de la scène. Nous citons ici les concepts de théorie des graphes que nous avons été amenés à utiliser.

1. NOTION DE GRAPHE

Un graphe est un schéma du plan constitué d'un ensemble fini de points reliés entre-eux par des lignes. Chaque ligne unit exactement deux points. On dit qu'un graphe est simple lorsque deux points liés, le sont par une ligne unique. Les graphes que l'on considère dans notre étude sont tous simples. On utilise le terme général de graphe pour les désigner. Les points sont appelés *sommets*, et les lignes *arêtes*. Le concept de graphe est particulièrement adapté à la représentation d'objets composés d'éléments liés comme il est le cas des mécanismes [Fig. 1].

2. DEFINITION

On définit un graphe G par le couple (X, E) (on écrit $G = (X, E)$) où :

X est l'ensemble des sommets.

E est l'ensemble des arêtes (partie du produit cartésien de X par X)

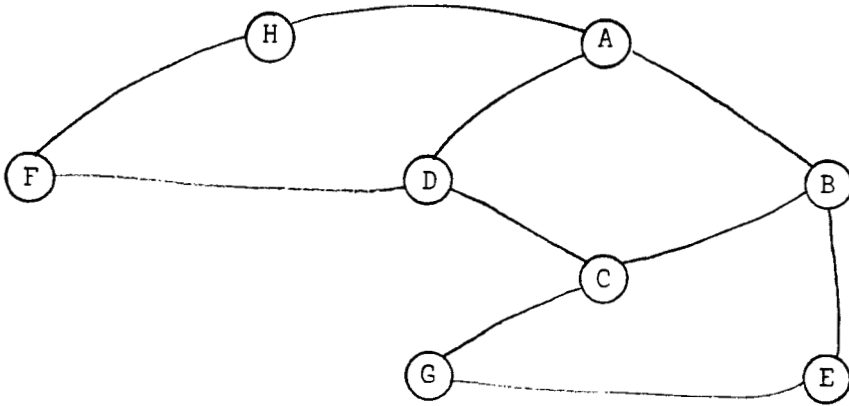
[Fig. 1.c].

3. LE CONCEPT DE GRAPHE ORIENTE

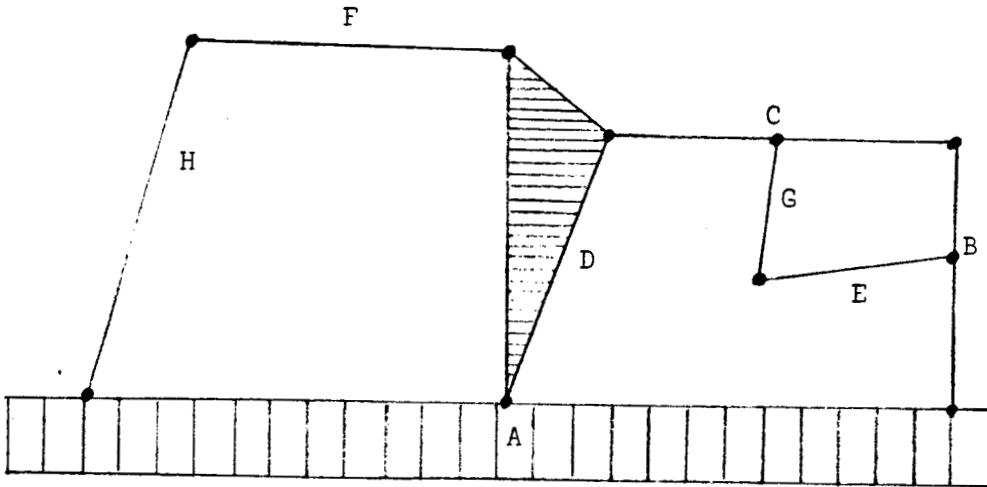
On dira qu'un graphe est orienté si on a donné une orientation aux lignes. Une ligne est représentée par un couple de points et on parlera d'arcs au lieu d'arêtes. On n'utilisera que rarement ce concept [Fig. 2].

Fig. 1 :

a. Graphe G.

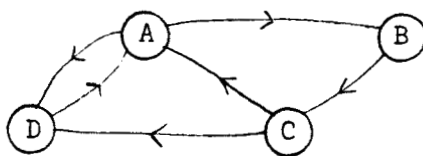


b. Mécanisme dont le graphe est G.



c. $G = ((A, B, \dots, H), ((A, B), (A, D), (D, F), \dots))$

Fig. 2 : Graphe orienté.



4. GRAPHE ET RELATION BINAIRE

Il existe une bijection entre l'ensemble des graphes construits sur un ensemble fini de sommets, et l'ensemble des relations binaires sur cet ensemble. On passe du graphe $G = (X, E)$ à la relation binaire R correspondante sur X grâce à l'équivalence : $(x, y) \in E \Leftrightarrow x R y$.

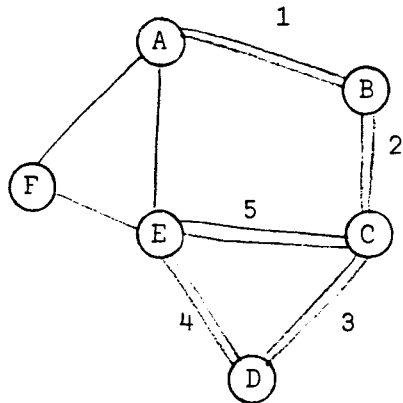
5. CHAÎNE

Soit $G = (X, E)$ un graphe et x_0, x_k des éléments de X . Une chaîne qui joint x_0 à x_k dans G est une séquence de sommets commençant par x_0 et se terminant par x_k , notée x_0, x_1, \dots, x_k telle que pour $i = 0$ à $k-1$ (x_i, x_{i+1}) est dans E .

On peut aussi considérer une chaîne comme une séquence d'arêtes, ou comme une séquence alternée de sommets et d'arêtes. Le nombre d'arêtes de la séquence est la longueur de la chaîne. [Fig. 3].

Fig. 3 :

a. Chaîne.



ABCDEC,
1 2 3 4 5
A1 B2 C3 D4 E5 C
longueur = 5

b. Chaîne élémentaire : ABCDE.

6. CHAÎNE ELEMENTAIRE

Une chaîne est élémentaire si la séquence de sommets qui la compose est constituée de sommets tous différents.

7. CONNEXITE

Soit $G = (X, E)$ un graphe, on définit une relation binaire de connexité C sur l'ensemble X des sommets de la façon suivante :

Soit $x, y \in X$,

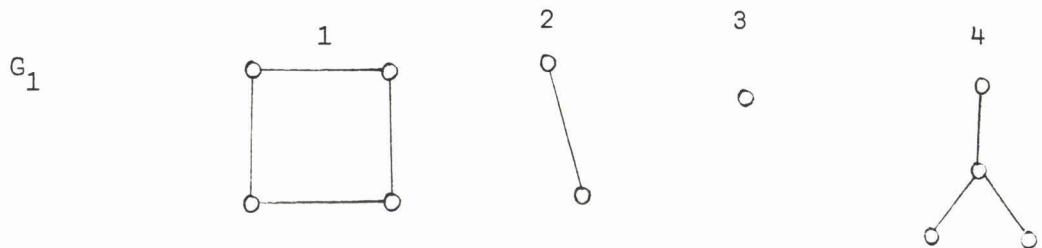
$x C y \iff x = y$ ou

il existe une chaîne qui joint x et y .

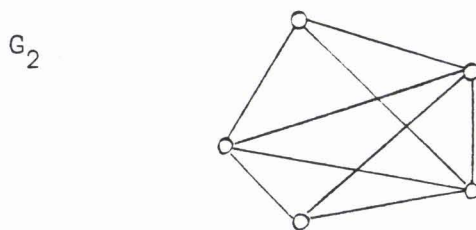
Cette relation est une relation d'équivalence dont les classes s'appellent les composantes connexes de G . Un graphe qui possède une seule composante connexe est dit connexe. [Fig. 4].

Fig. 4 :

a. Composantes connexes du graphe G_1 .



b. Graphe G_2 connexe.

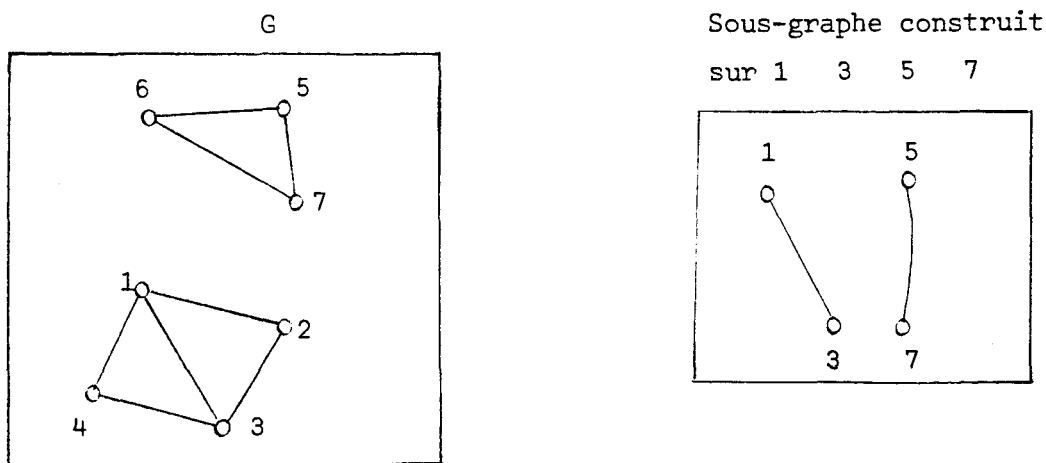


8. SOUS-GRAPHE

Soit $G = (X, E)$ un graphe et X_i un sous-ensemble de X .

Soit E_i l'ensemble des arêtes dont les deux extrémités sont dans X_i .
 $G_i = (X_i, E_i)$ est le sous-graphe de G construit sur X_i . [Fig. 5].

Fig. 5 : Sous-graphe.



9. CYCLE

Soit $G = (X, E)$ un graphe. Un cycle est une séquence non vide de sommets non tous distincts x_1, x_2, \dots, x_k telle que, pour $i = 1$ à $k-1$, (x_i, x_{i+1}) est dans E et (x_k, x_1) est dans E . On note un cycle $x_1, x_2, \dots, x_k (x_1)$. On peut aussi considérer un cycle comme une séquence circulaire non vide d'arêtes, ou comme une séquence alternée de sommets et d'arêtes [Fig. 6]. Un cycle est *élémentaire*, si la séquence de sommets qui le décrit, ne comporte pas deux fois le même sommet.

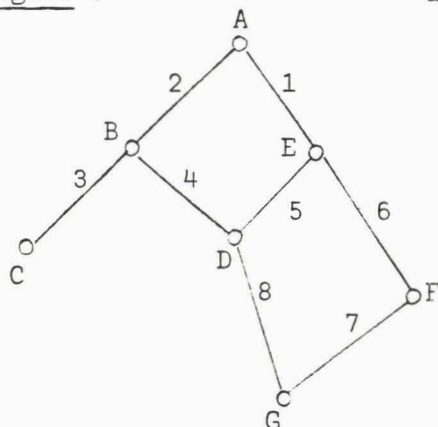
10. ESPACE DES CYCLES D'UN GRAPHE

10.1. Vecteur représentatif de cycle

Soit $G = (X, E)$ un graphe et $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

On effectue une orientation arbitraire des arêtes de G . Soit C un cycle de G en tant que séquence circulaire d'arêtes. On choisit arbitrairement un sens de parcour de C . On partitionne C en deux parties C_1 et C_2 de sorte qu'une arête de C est dans C_1 si en parcourant le cycle, on la traverse dans le sens défini par l'orientation, et appartient à C_2 dans le cas contraire. [Fig. 7].

Fig. 6 :

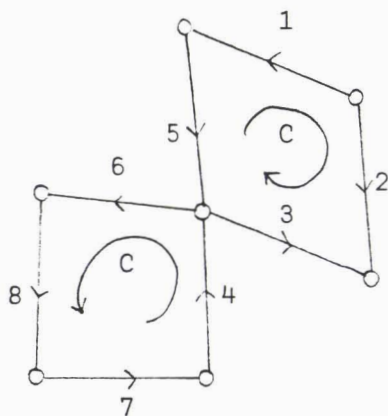


a. Cycle et cycle élémentaire.

cycle : 1 2 4 5 6 7 8 5

cycle élémentaire : 1 2 4 8 7 6

Fig. 7 : Partition d'un cycle et vecteur représentatif.

 $C = 1\ 5\ 3\ 2$ $C_1 = \{2\}$ $C_2 = \{3, 5, 1\}$ vecteur représentatif de C :
 $(-1, 1, -1, 0, -1, 0, 0, 0)^t$

A chaque cycle C de G on associe un vecteur de \mathbb{R}^n qu'on nomme vecteur représentatif de C , $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^t$ obtenu de la façon suivante :

$$z_i = 1 \text{ si } e_i \in C_1,$$

$$z_i = -1 \text{ si } e_i \in C_2,$$

$$z_i = 0 \text{ si } e_i \notin C \text{ [Fig. 8].}$$

10.2. Base de cycles d'un graphe

Soit $G = (X, E)$ un graphe et C_1, C_2, \dots, C_k une famille finie de cycles de G , alors :

a- (C_1, C_2, \dots, C_k) sont indépendants \Leftrightarrow

$a_1(C_1) + \dots + a_k(C_k) = 0 \Rightarrow a_i = 0$ pour $i = 1, 2, \dots, k$
où les a_i sont des entiers positifs, négatifs ou nuls.

b- Un cycle C s'exprime linéairement par rapport aux cycles C_1, C_2, \dots, C_k , si le vecteur associé (C) s'exprime linéairement par rapport aux vecteurs $(C_1), \dots, (C_k)$ c'est-à-dire si :

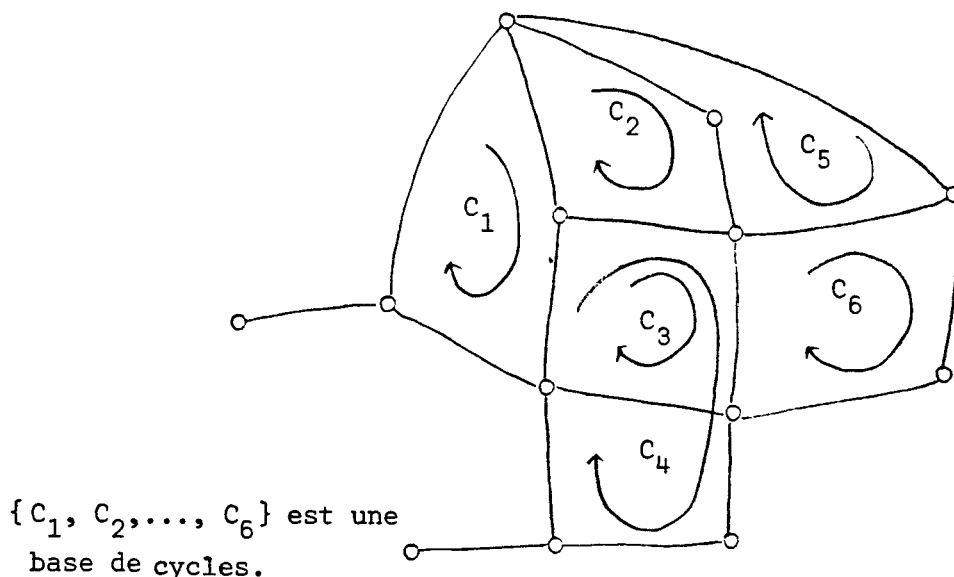
$(C) = a_1(C_1) + a_2(C_2) + \dots + a_k(C_k)$ où les a_i sont des entiers positifs, négatifs ou nuls.

c- La famille finie (C_1, C_2, \dots, C_k) de cycles de G est une base de cycle si :

1) C_1, C_2, \dots, C_k sont linéairement indépendants.

2) Tout cycle de G s'exprime linéairement par rapport aux cycles C_1, C_2, \dots, C_k .

Fig. 8 : Base de cycles.



10.3. Nombre cyclomatique

C'est le cardinal d'une base de cycles de $G = (X, E)$. Celui-ci est égal à $(|E| - |X| + p)$ où $| \cdot |$ désigne le cardinal d'un ensemble et p le nombre de composantes connexes de G .

BIBLIOGRAPHIE

- M. SAKAROVITCH "*Eléments de théorie des graphes*". Université Scientifique et Médicale de Grenoble, Mars 1977.
- B. ROY "*Algèbre moderne et théorie des graphes*". DUNOD, Paris 1969.

ANNEXE

METHODE D'ANALYSE ADAPTEE AUX ACTEURS SEQUENTIELS

Nous appelons configuration [Chapitre III, §4.1.] d'un mécanisme, l'ensemble formé par toutes les valeurs des variables de liaison, à un instant donné. La configuration d'un acteur est formée des configurations de son tronc et de ses bras.

1. CALCUL DE LA CONFIGURATION D'UN BRAS

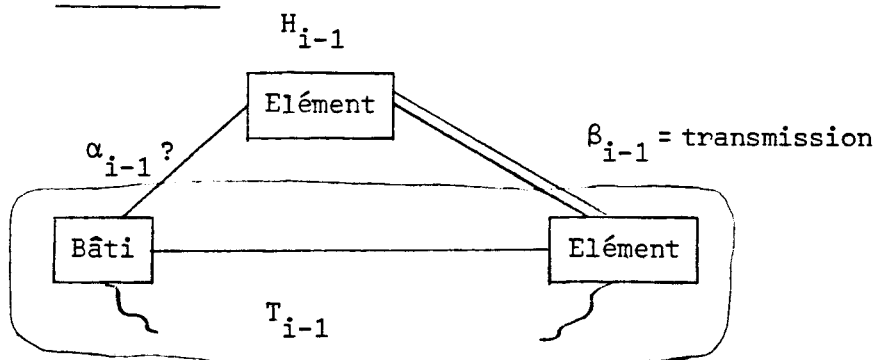
Il consiste en l'affectation de nouvelles valeurs aux liaisons motrices. Notons que toutes les liaisons d'un bras peuvent être motrices et que les valeurs des variables de liaisons non motrices restent constantes pendant le mouvement.

2. CALCUL DE LA CONFIGURATION D'UN TRONC

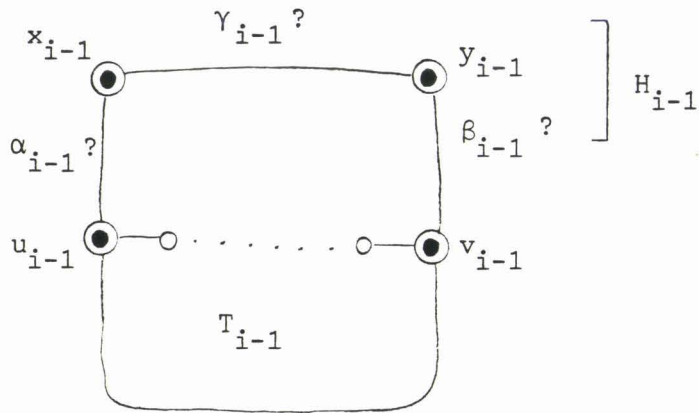
Si n est le nombre de boucles de la séquence d'un tronc, le passage d'une configuration C_k à la configuration C_{k+1} est effectuée en n étapes. L'étape courante i s'attache à déterminer la configuration du mécanisme T_i connaissant par ailleurs celle de T_{i-1} [Fig. 1a.1b] (nous utilisons ici les mêmes notations qu'au Chapitre V). Il s'agit donc de calculer la valeur de α_{i-1} (dans le cas $|Z_{i-1}| = 1$) où les valeurs de α_{i-1} , γ_{i-1} et β_{i-1} (dans le cas $|Z_{i-1}| = 2$). La résolution du premier cas est immédiate. Le second cas nécessite la mise en place d'un système d'équation.

Fig. 1 : Calcul de la configuration courante.

-a- $|Z_{i-1}| = 1$: couple de transmission.



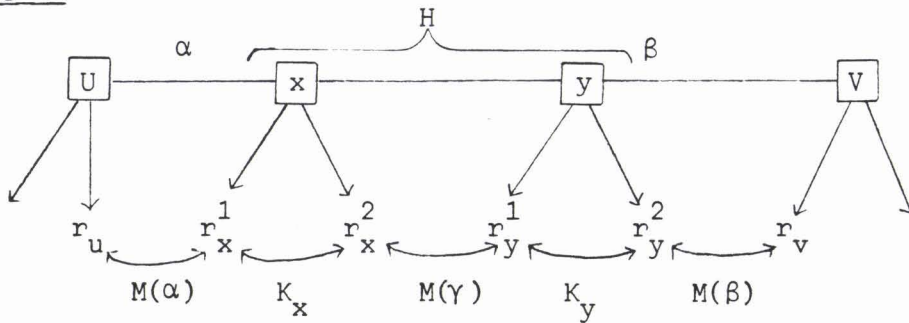
-b- $\underline{|Z_{i-1}| = 2}$



Pour ne pas surcharger le texte nous supprimons dans la suite l'indice i .
 ($T_{i-1} = T$, $H_{i-1} = H, \dots$).

- Notons :
- (r_u, r_x^1) les repères associés à la contrainte α
 - [Fig. 2] (r_x^2, r_y^1) les repères associés à la contrainte γ
 - (r_y^2, r_v) les repères associés à la contrainte β
 - $M(\alpha)$ la transformation associée à la contrainte α
 - $M(\gamma)$ la transformation associée à la contrainte γ
 - $M(\beta)$ la transformation associée à la contrainte β
 - K_x la transformation associée à (r_x^1, r_x^2)
 - K_y la transformation associée à (r_y^1, r_y^2)

Fig. 2 : Paramétrisation de $\alpha H \beta$.



1^{er} Cas : α est une contrainte de type rotation

Soit (x_u, y_u, θ_u) les paramètres de r_u dans r_v . Ces paramètres sont calculés en empruntant un 'chemin' de transformations géométriques dans T .

De même, notons (x_x, y_x, θ_x) les paramètres de r_x^1 calculés dans r_v , $(x_x, y_x, 1)^t$ les coordonnées homogènes de l'origine de r_x^1 dans r_v . Alors :

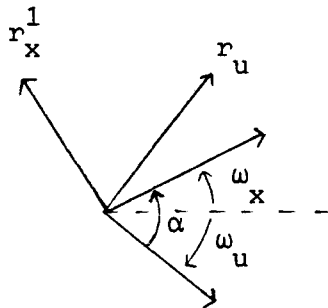
$$\begin{bmatrix} x_x \\ y_x \\ 1 \end{bmatrix} = M(\beta) \cdot K_y \cdot M(\gamma) \cdot K_x \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} f(\gamma, \beta) \\ g(\gamma, \beta) \\ 1 \end{bmatrix}$$

On traduit la contrainte de liaison (rotation) en exprimant que r_u et r_x^1 ont des origines confondues :

$$\begin{cases} x_x = x_u \\ y_x = y_u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\gamma, \beta) = x_u \\ g(\gamma, \beta) = y_u \end{cases} \quad \textcircled{R}$$

La résolution du système $\textcircled{1}$ délivre les valeurs des γ et β .

On peut alors calculer ω_x l'orientation de r_x^1 par rapport au repère absolu, celle de r_u , ω_u étant par ailleurs connue, il vient $\alpha = \omega_x - \omega_u$.

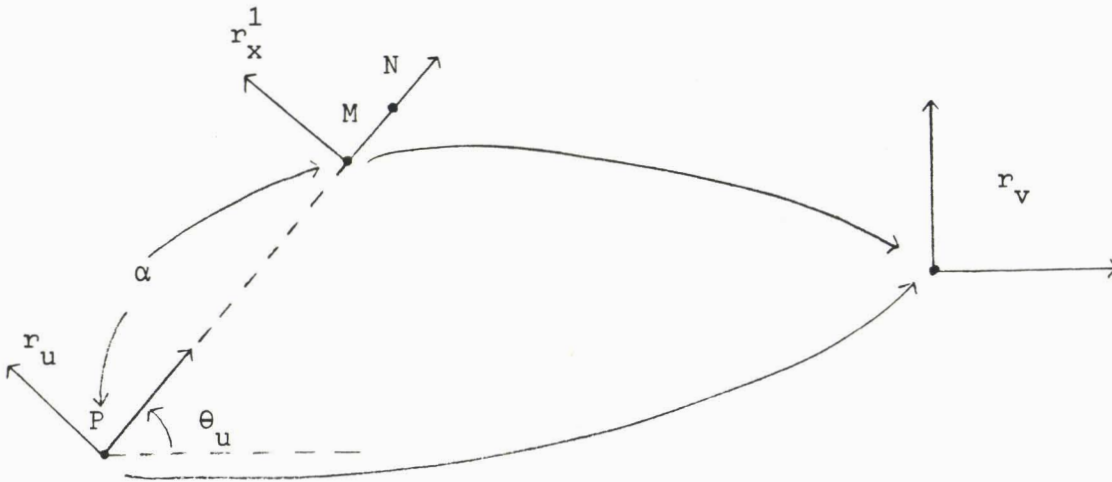


2^{ème} Cas : α est une contrainte de type glissement

Notons P le point $(x_u, y_u, 1)^t$

M le point $(x_x, y_x, 1)^t$

et soit N le point $(x_x, y_x, 1)^t$ coordonnées homogènes du point $(1, 0, 1)$ de r_x^1 , dans r_v .



Pour traduire la contrainte de glissement entre r_u et r_x^1 , exprimons que les points P, M et N sont alignés.

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} (x_x - x_u) \operatorname{tg} \theta_u = y_x - y_u \\ (x_{x'} - x_u) \operatorname{tg} \theta_u = y_{x'} - y_u \end{cases}$$

en posant $x_x = f(\gamma, \beta)$, $x_{x'} = f'(\gamma, \beta)$,

$$y_x = g(\gamma, \beta), y_{x'} = g'(\gamma, \beta)$$

$$\text{où} \begin{bmatrix} f'(\gamma, \beta) \\ g'(\gamma, \beta) \\ 1 \end{bmatrix} = M(\beta) \cdot K_y \cdot M(\beta) \cdot K_x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ on obtient :}$$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \textcircled{2} \quad \begin{cases} f(\gamma, \beta) \operatorname{tg} \theta_u - g(\gamma, \beta) = x_u \operatorname{tg} \theta_u - y_u \\ f'(\gamma, \beta) \operatorname{tg} \theta_u - g'(\gamma, \beta) = x_u \operatorname{tg} \theta_u - y_u \end{cases}$$

Posons - $H(\gamma, \beta) = f(\gamma, \beta) \operatorname{tg} \theta_u - g(\gamma, \beta)$,
 - $H'(\gamma, \beta) = f'(\gamma, \beta) \operatorname{tg} \theta_u - g'(\gamma, \beta)$,
 - $h = x_u \operatorname{tg} \theta_u - y_u$, alors :

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow \begin{cases} H(\gamma, \beta) - h = 0 \\ H'(\alpha, \beta) - h = 0 \end{cases} \quad \textcircled{G}$$

α est dans ce dernier cas un déplacement. Il est donné par

$$\alpha = \pm \sqrt{(x_x - x_u)^2 + (y_x - y_u)^2}$$

Remarque : Arguant du fait que les formes des membres $f(\gamma, \beta)$, $g(\gamma, \beta)$,

$H(\gamma, \beta)$ et $H'(\gamma, \beta)$ des systèmes \textcircled{R} et \textcircled{G} ne dépendent que du type des liaisons β et γ , les formes des solutions γ et β peuvent être définies une fois pour toutes. Quatre cas se présentent :

- β et γ sont toutes les deux de type rotation,
- β et γ sont toutes les deux de type glissement,
- β est de type glissement et γ est de type rotation,
- β est de type rotation et γ est de type glissement.

Ceci implique l'existence de huit cas à étudier séparément. (quatre cas pour le système \textcircled{R} et quatre cas pour le système \textcircled{G}).

BIBLIOGRAPHIE

1. Mécanique et cinématique

- [ART 77] I. ARTOBOLEVSKI
"Théorie des mécanismes et des machines".
 Moscou, 1977.
- [BUH 79] G. BUHOT, P. THUILLER
"Cours de mécanique. Tome 3, cinématique".
 Masson, 1979.
- [CHA 63] M.A. CHACE
"Vector analysis of linkages".
 J. Engineering for industry, Trans. ASME, August 63, pp. 289-297.
- [HAR 64] R.S. HARTENBERG, J. DENAVIT, J.J. UICKER
"An iterative method for the displacement analysis of spatial mechanisms".
 J. Applied Mechanics, Vol. 31, Trans. ASME, Vol. 86, Série E, n° 2,
 June 64, pp. 309-314.
- [LEE 82] C.S.G. LEE
"Robot arm kinematics, dynamics and control".
 Computer, December 1982, pp. 62-79.
- [SHE 71] P.N. SHETH, J.J. UICKER
"A generalized symbolic notation for mechanisms".
 Trans. ASME, Vol. 93, n° 1, Féb. 71, pp. 102-112.
- [SHE 72] P.N. SHETH, J.J. UICKER
"IMP (Integrated Mechanism Program), a computer aided design analysis system for mechanisms and linkage".
 J. Engineering for industry, Trans. ASME, Vol. 94, May 72, pp. 454-464.

- [SHI 69] J.E. SHIGLEY
"Kinematic analysis of mechanisms".
 Mc Graw-Hill, 1969.
- [TIL 83] R.B. TILOVE
"Extending solid modeling system for mechanism design and kinematic simulation".
 IEEE CG & A, Vol. 3, n° 3, May/June 1983, pp. 9-19.
2. Informatique graphique
- [ALL 84] G. ALLAIN
"Image de synthèse pour les simulateurs d'entraînement".
 Biarritz 21-25 mai 1984.
- [GEA 82] CEA-EDF-INRIA
"La réalisation de logiciels graphiques interactifs".
 EYROLLES, 1982.
- [COL 84] J.F. COLONNA, MOWGLI
"De la visualisation de résultats de calcul à la création artistique".
 Biarritz 21-25 mai 1984.
- [DOU 83] M. DOU, T. REGNIER
"Nouvelles images : Dimensions et perspectives des techniques de création".
 COM'7, n° 20, Avril 1983.
- [FOL 82] J.D. FOLEY, A. VANDAM
"Fundamentals of interactive computer graphics".
 Addison-Wesley, 1982.
- [LUC 77] M. LUCAS
"Contribution à l'étude des techniques de communication graphiques avec un ordinateur. Eléments de base des logiciels graphiques interactifs".
 Thèse de Docteur-es-Science, Grenoble, 1977.

- [LUC 84] M. LUCAS
"La synthèse d'image par ordinateur".
 Biarritz 21-25 mai 1984.
- [MAR 82] F. MARTINEZ
"Vers une approche systématique de la synthèse d'images. Aspects logiciel et matériel".
 Thèse de Docteur-es-Science, Grenoble, 1982.
- [MER 79] M. MERIAUX
"Etude et réalisation d'un terminal graphique couleur tridimensionnel fonctionnant par taches".
 Thèse de Docteur-Ingénieur, Lille, 1979.
- [MER 84] M. MERIAUX
"Contribution à l'imagerie informatique : aspects algorithmiques et architecturaux".
 "Thèse de Docteur-es-Sciences, Lille, 1984.
- [MOR 76] L. MORVAN, M. LUCAS
"Images et ordinateur, introduction à l'infographie interactive".
 LAROUSSE, 1976.
- [NEW 79] W. NEWMAN, R.F. SPROULL
"Principles of interactive computer graphics".
 2nd Edition, Mc Graw-Hill, New-York, 1979.
- [RED 84] M. REDJIMI
"Etude et réalisation d'un système parallèle pour le traitement graphique".
 Thèse de 3^{ème} cycle, Lille, 1984.

3. Animation mouvement

- [ACK 80] B. ACKLAND, N. WESTE
"Real time animation playback on a frame store display system".
 Computer Graphics Siggraph'80, Conference proceedings, Vol. 14, n° 3,
 July 80.

- [BAD 80] N.I. BADLER, J.O. ROURKE, B. KAUFMAN
"Special problems in human movement simulation".
 Computer Graphics, Vol. 14, n° 3, July 80, pp. 189-197.
- [BAD 82] N.I. BADLER, J.U. KORIEEN
"Techniques for generating the goal directed motion of articulated structures".
 IEEE, CG & A, Vol. 2, n° 4, Nov. 82, pp. 71-80.
- [BAD 84] N.I. BADLER
"Motion graphics, description and control".
 Computer Graphics, Vol. 18, n° 1, January 84, pp. 22-23.
- [BAE 81] R. BEACKER, D. MILLER, W. REEVES
"Towards a Laboratory Instrument for motion analysis".
 Computer Graphics, Vol. 15, n° 3, August 81, pp. 191-197.
- [COM 80] G. COMPARETTI
"Mouvement, Image et Ordinateur".
 Congrès AFCET, Nancy, Nov. 80.
- [COM 84] G. COMPARETTI
"Outil de production de dessin animé par ordinateur".
 Biarritz 21-25 mai 1984.
- [JAH 84] K. JAHIDI
"Application de la mécanique à l'animation interactive".
 Biarritz 21-25 mai 1984.
- [HAC 77] R.J. HACKATHORN
"Anima II : a 3-D color animation system".
 ACM Computer Graphics, Vol. 11, n° 2, 1977, pp. 54-63.
- [HER 82] D. HERBISON, EVANS
"Real time animation of human figure drawings with hidden lines omitted".
 IEEE, CG & A, Vol. 2, n° 9, Nov. 82, pp. 27-33.

- [LAU 84] C. LAUGIER
"Couplage d'un système de simulation de robot avec un terminal de synthèse d'image".
 Biarritz 21-25 mai 1984.
- [LES 77] M.J. LESTY
"Etude d'un système informatique au service de l'artiste pour la réalisation de film à partir de croquis".
 Thèse de 3^{ème} cycle, Grenoble 1977.
- [MAR 77] F. MARTINEZ
"Etude des problèmes de conception et de réalisation d'animation : le système SAFRAN".
 Thèse de 3^{ème} cycle, Grenoble, 1977.
- [MAR 78] F. MARTINEZ
"Les concepts liés à la description de l'animation assistée par ordinateur".
 AFCET, Nov. 78, Tome 2, pp. 283-292.
- [REE 81] W.T. REEVES
"Inbetweening for computer animation utilising moving points constraints".
 IEEE, CG, Vol. 15, n° 3, August 81, pp. 263-269.
- [SCH 84] M.K. SCHWEPPE
"Le mouvement en graphique".
 Biarritz 21-25 mai 1984.
- [SHO 79] R. SHOUP
"Color table animation".
 Siggraph'79 Proceedings, August 79, pp. 8-13.
- [SLO 79] K.L. SLOAN, J.R., C.M. BROWN
"Color map techniques".
 Computer Graphic and image processing, Vol. 10, pp. 297-317, (1979).

[TAJ 75] E.J. TAJCHMAN

"Computer animation using mapping techniques".

Proceeding IEEE Computer Conference, Feb. 75, San Francisco, pp. 295-297.

[ZEL 82] D. ZELTZER

"Motor control techniques for figure animation".

IEEE, CG & A, Vol. 2, Nov. 82, pp. 58-59.

