

N° d'ordre : 643

50376
1984
263

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

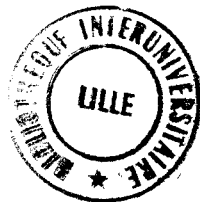
Docteur es Sciences Physiques

par

D. MEIZEL

Ingénieur I.D.N.

Docteur Ingénieur



SUR LA SYNTHÈSE PARAMÉTRIQUE D'ASSERVISSEMENTS DE PROCESSUS NON-LINEAIRES

Soutenue le 21 Décembre 1984 devant la Commission d'Examen

P.	BORNE	Président
P.	BERTRAND	Rapporteur
J.C.	GENTINA	Rapporteur
Lj.T.	GRUJIĆ	Rapporteur
A.	FOSSARD	Examineur
G.	GILLES	Examineur
L.	POVY	Examineur
M.G.	SINGH	Examineur

AVERTISSEMENT au LECTEUR (1e 29/01/1985)

L'organisation de l'exposé de ce mémoire, issu d'un choix a priori de linéarité du discours, a conduit au présent découpage en chapitres.

Le premier chapitre situe le travail proposé dans son contexte et, en dehors de la définition formelle des asservissements étudiés, sa lecture n'est pas immédiatement indispensable pour la suite.

De manière à accélérer la lecture de ce mémoire, ce chapitre peut ainsi être utilisé comme un ensemble d'annexes que l'on pourra consulter, si besoin est, en commençant la lecture au deuxième chapitre.

Ce dernier dont le volume constitue l'essentiel de la Thèse, est organisé en sous-ensembles ayant chacun la structure d'un chapitre.

*Du moment que je poursuis une énigme,
qui m'apparaît déjà comme un manque
dans ma propre continuité signifiante,
comment serait-il envisageable
d'en faire le récit plein,
sans faille ?*

A. ROBBE-GRILLET

AVANT-PROPOS

Le travail que nous présentons dans ce mémoire a été effectué dans le cadre du Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de l'INSTITUT INDUSTRIEL DU NORD (I. D. N.) sous la direction de Monsieur le Professeur GENTINA.

En premier lieu, nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à Monsieur le Professeur P. BORNE pour nous avoir fait l'honneur de présider notre Jury et surtout pour l'intérêt qu'il a porté à notre travail et les conseils qu'il nous a prodigués au cours de l'élaboration de ce mémoire.

Nous tenons tout particulièrement à remercier Monsieur le Professeur J.C. GENTINA pour le soutien qu'il a su nous donner tout au long de notre travail de recherche au sein de son équipe. Malgré ses charges administratives très lourdes, il a toujours su accorder une place privilégiée à ses chercheurs en les soutenant constamment avec beaucoup de compétence et d'amitié.

Monsieur le Professeur Lj.T. GRUJIĆ nous a régulièrement écouté et conseillé durant l'élaboration de ce travail. L'intérêt qu'il nous a témoigné, joint avec la notoriété de son jugement, nous ont beaucoup aidé, tant scientifiquement que moralement. Qu'il reçoive ici l'expression de toute notre gratitude.

Monsieur BERTRAND, Maître de Recherche au C.N.R.S., nous a aussi fait le grand honneur de suivre avec intérêt l'évolution de notre travail et d'y apporter son jugement. Qu'il soit ici remercié du temps, denrée rare, qu'il nous a consacré.

Monsieur le Professeur FOSSARD nous a grandement honoré en s'intéressant à nos travaux. Ses remarques, basées sur une connaissance à la fois profonde et encyclopédique des choses de l'Automatique, nous ont beaucoup aidé à resituer notre travail dans son contexte général.

La participation de Monsieur le Professeur GILLES à notre Jury nous a causé un grand plaisir. Qu'il soit ici remercié du temps qu'il nous a consacré, de ses conseils et de ses remarques.

Nous adressons à Monsieur le Professeur POVY, l'expression de notre gratitude pour l'intérêt qu'il porte à nos travaux.

Nous sommes enfin très honoré que Monsieur le Professeur M.G. SINGH ait accepté de participer à ce Jury et nous l'en remercions vivement.

Enfin, nous tenons à remercier particulièrement Madame TRICOT dont le dactylographie virtuose enlumine ce texte parfois austère, ainsi que Madame FERRAR pour sa compétence et sa gentillesse.

En dernier lieu, nous exprimons à tous les membres du Laboratoire nos remerciements pour l'aide et l'amitié qu'ils nous ont prodiguées.

SOMMAIRE

CHAPITRE I

page

<u>INTRODUCTION</u>	3
<u>I.1 - SYSTEMES DYNAMIQUES / PROCESSUS : GENERALITES</u>	5
I.1.1 - Temps continu / Temps discret	5
I.1.2 - Causalité Entrée / Etat / Sortie : systèmes déterministes	6
<u>I.2 - DESCRIPTION DES SYSTEMES DYNAMIQUES ENVISAGES</u>	7
I.2.1 - Définition générale	7
I.2.2 - Systèmes linéaires stationnaires rationnels	8
I.2.3 - Modèles de processus non linéaires / Introduction	9
I.2.4 - Systèmes de Lur'e Postnikov	9
I.2.5 - Systèmes bilinéaires / à état affine	11
I.2.5.1 - Exemple de représentation d'un système "linéaire à coefficients variables"	13
<u>I.3 - CONTROLE DES PROCESSUS</u>	15
I.3.1 - Sorties contrôlées, sorties accessibles, entrées de commande, entrées de perturbations / Définitions	15
I.3.2 - Rétro-action / Dualité des problèmes statiques et dynamiques	17
<u>I.4 - NOTIONS DE STABILITE / DEFINITIONS</u>	21
<u>I.5 - METHODOLOGIES D'ETUDE DE LA STABILITE</u>	24
I.5.1 - Théorèmes de Lyapunov	25
I.5.2 - Systèmes de comparaison	27
I.5.3 - Notion de norme vectorielle	29
I.5.4 - Définition des systèmes de comparaison	29

I.5.5 - Critères pratiques de stabilité	31
I.5.6 - Analyse des méthodes d'études de la stabilité à partir de l'utilisation des normes vectorielles	31
I.5.7 - Hyperstabilité	32
I.5.7.1 - Définition 1 : Bloc linéaire hyperstable	35
I.5.7.2 - Critères de stricte-positivité d'un système linéaire	36
I.5.7.3 - Propriétés fondamentales des systèmes hyperstables	36
 I.6 - <u>SYNTHESE DE SYSTEMES ASSERVIS : METHODES ET PRINCIPES</u>	 38
I.6.1 - Méthodes de synthèse relatives à un comportement Entrée/Sortie. Structure d'une loi de commande	40
I.6.2 - Méthodes de synthèse relatives aux comportements dynamiques de l'asservissement	43
I.6.2.1 - Méthodes fréquentielles de synthèse	44
I.6.3 - Méthodes de synthèse relatives à des spécifications complémentaires	51
I.6.3.1 - Localisation de pôles d'un système linéaire	52
I.6.3.2 - Critères de types fonctionnels	53
I.6.4 - Quelques réflexions méthodologiques concernant la synthèse de systèmes asservis	55
I.6.4.1 - Structure et gains ajustables	55
I.6.4.2 - Expression d'un ou plusieurs critères de synthèse	56
I.6.4.3 - Analyse, synthèse, conception	56
I.6.4.4 - Schéma général d'une étude de synthèse / Spécificités d'un critère d'analyse utilisable dans une méthode de synthèse	57
I.6.4.5 - Spécificités inhérentes au caractère non linéaire des processus à contrôler	59
 <u>CONCLUSION</u>	 61
 <u>ANNEXE I.1</u>	 63
 <u>ANNEXE I.2</u>	 69

CHAPITRE II

	page
<u>INTRODUCTION</u>	79
<u>II.1 - SYNTHESE D'UN REGULATEUR POUR UN PROCESSUS DE TYPE</u> <u>LUR'E POSTNIKOV</u>	80
II.1.1 - Position du problème	81
<u>II.2 - DEFINITION D'UNE METHODE DE SYNTHESE A PARTIR DES</u> <u>TECHNIQUES D'AGREGATION PAR UTILISATION DE NORMES</u> <u>VECTORIELLES</u>	89
II.2.1 - Systèmes de comparaison linéaires stationnaires	92
II.2.1.1 - Définition de $\varepsilon(q,p)$	93
II.2.1.2 - Calcul de $\varepsilon(q,p)$ et de sa sensibilité	93
II.2.1.3 - Exemple d'application	97
II.2.1.4 - Discussion de la méthode proposée	102
II.2.2 - Système de comparaison à non linéarité uniligne ou unicolonne	105
II.2.2.1 - Définition d'un critère numérique de stabilité à partir du théorème de Borne et Gentina	107
II.2.3 - Choix des normes vectorielles permettant une utilisation méthodique du théorème de Borne et Gentina à des fins de synthèse	113
II.2.3.1 - Normes vectorielles et/ou représentations remarquables des systèmes étudiés	119
II.2.4 - Calcul de la tendance d'évolution $\delta(V,p)$ du critère $\varepsilon(V,p)$	123
II.2.5 - Conclusion de ce paragraphe II.2	127
<u>II.3 - SYSTEMES A NON LINEARITE DE RANG $n_c \geq 1$</u>	129
II.3.1 - Systèmes non linéaires à non linéarité de rang 1 / Définition	129

II.3.2 - Exemple	131
II.3.3 - Formes canoniques : définition et calcul	133
II.3.4 - Systèmes à non linéarité de rang $n_c \geq 1$ / Définition et formes canoniques associées	137
 II.4 - <u>METHODE DE SYNTHESE ASSOCIEE A LA FORME SERIE</u>	 141
II.4.1 - Définition de la forme série à partir des formes canoniques	143
II.4.2 - Définition de la forme série d'un élément arbitraire de la classe des systèmes à non linéarités de rang 1 .	155
II.4.3 - Algorithme de calcul de $\varepsilon(c,p)$ et de sa sensibilité par rapport aux gains ajustables p et aux paramètres de représentation c	156
II.4.3.1 - Tendance d'évolution de $\varepsilon(c,p)$	159
II.4.4 - Conclusion	163
 II.5 - <u>EXTENSION DE LA METHODE PRECEDENTE AUX SYSTEMES A NON LINEARITES DE RANG $n_c \geq 1$</u>	 164
II.5.1 - Généralisation de la représentation série	165
II.5.1.1 - Exemple d'illustration	171
II.5.2 - Formation du système de comparaison issu de la forme série généralisée	174
II.5.3 - Conclusion des paragraphes II.4 et II.5	177
 II.6 - <u>UNE AUTRE FORME REMARQUABLE DE REPRESENTATION :</u> <u>LA FORME EN FLECHE</u>	 178
II.6.1 - Introduction	178
II.6.2 - Définition de la forme en flèche dans le cas des systèmes à non linéarités de rang 1	180
II.6.3 - Algorithme du calcul de $\varepsilon(c,p)$ et de sa sensibilité .	184
II.6.4 - Conclusion	187

II.7 - <u>SYNTHESE D'ASSERVISSEMENTS DE PROCESSUS EN TEMPS DISCRET</u>	188
II.7.1 - Théorème d'analyse de la stabilité des systèmes en temps discret	189
II.8 - <u>CONCLUSION RELATIVE A L'UTILISATION DES NORMES VECTORIELLES ET DU THEOREME DE BORNE & GENTINA DANS UNE ETUDE DE SYNTHESE</u>	192
<u>ANNEXE II.1</u>	197
<u>ANNEXE II.2</u>	201
<u>ANNEXE II.3</u>	207
<u>ANNEXE II.4</u>	211
<u>ANNEXE II.5</u>	213
<u>ANNEXE II.6</u>	221
<u>ANNEXE II.7</u>	227
<u>ANNEXE II.8</u>	233
<u>ANNEXE II.9</u>	237
<u>ANNEXE II.10</u>	245

CHAPITRE III

	page
<u>INTRODUCTION</u>	251
III.1 - <u>DEFINITION DU PROBLEME D'ASSERVISSEMENT</u>	252
III.2 - <u>SYNTHESE A PARTIR DE LA FORME SERIE</u>	255
III.2.1 - Programme de calcul de $\varepsilon(c,p)$	257
III.2.2 - Programme de calcul de la sensibilité de $\varepsilon(c,p)$..	259
III.2.3 - Programme de synthèse paramétrique	262
III.2.4 - Stratégie de recherche d'une solution	264
III.3 - <u>SYNTHESE MENEES A PARTIR DE LA FORME EN FLECHE</u>	270
<u>CONCLUSION</u>	273

CHAPITRE IV

	page
IV.1 - <u>DEFINITION DES PROCESSUS ETUDIES ET DE LA</u> <u>METHODE DE SYNTHESE</u>	279
IV.2 - <u>REPRESENTATION EQUIVALENTE DU SYSTEME ETUDIE</u>	280
IV.3 - <u>ANALYSE DE LA STABILITE</u>	282
IV.4 - <u>DEFINITION D'UNE METHODE DE SYNTHESE</u>	287
IV.5 - <u>CONCLUSION</u>	288

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les travaux présentés dans ce mémoire constituent une contribution à l'étude des propriétés de stabilité des systèmes dynamiques.

L'esprit dans lequel le problème est abordé est celui de la synthèse d'asservissement.

Il s'agit alors de définir une loi de commande physiquement réalisable par bouclage du processus étudié, telle que l'asservissement ainsi constitué ait un comportement stable autour d'une trajectoire nominale choisie a priori.

La technique de synthèse utilisée est celle de la synthèse paramétrique : la structure de la loi de commande étant définie par un choix a priori répondant à des spécifications concernant la trajectoire nominale souhaitée ainsi que les couplages entrée-sortie réalisables, il s'agit alors de déterminer la valeur des gains ajustables à l'intérieur de cette structure de manière à stabiliser la dynamique nominale choisie pour cet asservissement.

La partie essentiellement originale de ce travail est présentée à partir du deuxième chapitre.

Le premier chapitre quant à lui, regroupe les définitions relatives aux processus et au problème abordés ainsi que des rappels concernant à la fois la propriété de stabilité ainsi que les techniques (hyperstabilité et agrégation par normes vectorielles) utilisées dans la suite, pour la mettre en évidence.

Une étude bibliographique des méthodes de synthèse cloture ce premier chapitre en dégageant des outils conceptuels qui définissent la trame de la présentation des chapitres suivants.

Le deuxième chapitre constitue le corps de ce mémoire et développe une méthode de synthèse construite à partir de l'analyse de la stabilité par les techniques d'agrégation par normes vectorielles. Dans le souci d'alléger les notations, on y considère essentiellement les processus en temps continu.

Les processus envisagés étant non linéaires, nous nous heurtons à la difficulté de mettre en évidence leurs propriétés de stabilité par des méthodes qui conduisent à des conditions suffisantes qui peuvent se révéler, par là-même, restrictives en regard des propriétés intrinsèques (mais non connues) du processus.

La technique adoptée dans ce mémoire pour obvier à cet inconvénient consiste à considérer un outil d'analyse de la stabilité choisi a priori puis à "ajuster" le mode de représentation dans l'espace d'état de l'asservissement étudié, de manière à obtenir des conditions de stabilité les moins restrictives possible. Cette recherche peut alors s'effectuer simultanément à celle des gains ajustables de la loi de commande ; elle est mise en œuvre en minimisant un critère numérique par une technique d'optimisation de fonctions non différentiables voisine de l'habituelle méthode du gradient.

On y présente d'abord la spécification d'un critère numérique dont l'optimisation constitue l'objet de la méthode de synthèse paramétrique proposée ainsi que la méthode de calcul de sa direction de plus grande pente. Parallèlement, on définit des formes canoniques homologues de celles usuellement envisagées pour les systèmes linéaires mono ou multivariables pour caractériser les processus étudiés en les classant par le "rang" de leur non linéarités.

On peut alors définir un mode de représentation original des systèmes étudiés qui permet de développer complètement la méthode de synthèse paramétrique.

La représentation proposée est construite sur l'idée de la description des systèmes monovariables linéaires par la mise en série de systèmes élémentaires du premier ordre (ce qui justifie le néologisme "forme série").

Dans un souci de généralité, la méthode de synthèse proposée est développée à partir d'une autre représentation désormais classique, des processus non linéaires : la forme "en flèche".

Enfin, ce deuxième chapitre s'achève sur la mise en évidence de son applicabilité aux systèmes en temps discret.

Le troisième chapitre est une extension du précédent. On y développe une application de la méthode proposée qui est alors présentée sous forme condensée dans la logique de son utilisation.

La quatrième partie, très brève, étend l'application de la technique consistant à mettre en parallèle un mode de représentation des systèmes dynamiques avec une méthodologie d'analyse de la stabilité en vue de la synthèse des propriétés d'hyperstabilité des processus en temps continu à non linéarités de rang 1.

CHAPITRE I

INTRODUCTION

Cette première partie constitue une introduction aux méthodes originales développées dans ce mémoire. Nous proposons ainsi d'y effectuer un rappel des concepts et des méthodes auxquels nous nous référons par la suite.

La synthèse d'asservissement d'un processus qui constitue le thème du travail présenté est naturellement introduit en définissant la classe des processus étudiés (§ I.1 et § I.2). Ce choix à priori est validé en montrant qu'un grand nombre de modèles de systèmes appartient à la classe envisagée (§ I.2).

Nous proposons ensuite (§ I.3) d'explicitier le problème de la synthèse d'asservissement d'un point de vue externe, puis de l'aborder sous l'angle d'une étude de stabilité.

Nous sommes ainsi naturellement amenés à préciser (§ I.4) les définitions et les propriétés relatives au concept de stabilité puis à rappeler (§ I.5) certaines méthodes qui permettent d'analyser ces propriétés.

A partir des théorèmes de Lyapunov, nous introduisons la notion de système de comparaison. La formation de systèmes de comparaison à partir de normes vectorielles est ensuite rappelée et la mise en œuvre pratique de cette méthodologie est abordée. D'un point de vue distinct, les principes fondamentaux de la théorie de l'hyperstabilité sont également rappelés.

Enfin, dans un dernier volet (§ I.6), une analyse bibliographique des différentes méthodes de synthèse d'asservissement connues nous permet de dégager des concepts méthodologiques utilisables de manière générale dans les méthodes de synthèse d'asservissement.

I.1 - SYSTEMES DYNAMIQUES / PROCESSUS : GENERALITES

Par définition, un système dynamique caractérise l'évolution, dans le temps, d'un ensemble de variables.

I.1.1 - Temps continu / Temps discret

Dans ce contexte, il est nécessaire de distinguer les systèmes pour lesquels le temps est une variable continue des systèmes pour lesquels cette variable est discrète.

Le **temps continu** est le temps de la Physique et constitue ainsi une dimension de la réalité. Par contre, un algorithme itératif de calcul fonctionnant sur un ordinateur (machine séquentielle) constitue par exemple un cas typique de **système en temps discret** par nature : on ne peut en effet, définir la quantité calculée par l'algorithme entre deux pas successifs de calcul.

Un système en temps discret peut d'autre part résulter de l'observation et de la commande par un calculateur d'un système en temps continu. Dans ce cas, du fait de la nature séquentielle de la machine qui contrôle le processus, ce dernier lui apparaît comme un système évoluant en temps discret.

De manière formelle, le **temps t** appartient à un ensemble T .

$$T = [t_0, +\infty[\quad (I.1)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} T \subset \mathbb{Z} \text{ dans le cas des systèmes en temps discret} \\ \text{ou} \\ T \subset \mathbb{R} \text{ dans le cas des systèmes en temps continu} \end{array} \right.$$

Dans ce mémoire, nous considérons toujours l'instant initial t_0 comme fixé, afin de ne pas alourdir le formalisme. Cette hypothèse n'est par ailleurs généralement pas nécessaire.

I.1.2 - Causalité \nearrow état \searrow
entrée \rightarrow sortie : systèmes déterministes

L'évolution d'un processus se caractérise par l'analyse de grandeurs mesurables sur le système. Ces mesures à l'instant t constituent les composantes d'un vecteur $y(t) \in \mathbb{R}^m$ noté **sortie du processus**.

Dans ce mémoire, nous envisageons l'étude des systèmes pour lesquels l'évolution de la sortie est essentiellement causée par des actions extérieures à celui-ci. Nous supposons donc qu'il existe un vecteur d'entrée $u(t) \in \mathbb{R}^e$ dont les composantes représentent les différentes actions exercées sur la sortie $y(t)$.

La relation Entrée \rightarrow Sortie étant de type fonctionnel, on préfère substituer à celle-ci une relation faisant intervenir la notion d'état.

L'état $x(t) \in \mathbb{R}^n$ /Faure & Depeyrot, 1974/ peut être défini comme un vecteur tel que :

- la sortie à l'instant t ne dépend que de l'état et de l'entrée à l'instant t ,

- la valeur de l'état à l'instant $t + \delta t$ immédiatement postérieur à l'instant t ne dépend que de l'état et de l'entrée à l'instant t .

Nous envisageons dans ce mémoire les systèmes **déterministes** pour lesquels les valeurs des composantes de l'état et de la sortie ne sont pas associées à une distribution probabiliste.

L'évolution du processus peut ainsi être représentée par une équation d'état (I.2) où g et f sont des applications.

$$\begin{cases} x(t + \delta t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \\ x \in \mathbb{R}^n \quad u \in \mathbb{R}^e \quad y \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

Ces concepts généraux nous ont permis de cerner les modèles de processus étudiés dans ce mémoire. Nous proposons maintenant de les définir en particulierisant la classe d'équations d'état (I.2) qui définit la dynamique des processus envisagés.

I.2 - DESCRIPTION DES SYSTEMES DYNAMIQUES ENVISAGES

Dans cette section, nous définissons la classe des processus pour laquelle nous définissons une méthodologie de synthèse d'asservissements. Après avoir précisé la classe d'équations d'état considérée, nous proposons de justifier l'intérêt pratique de ce choix en montrant qu'un nombre significatif de modèles classiques appartient à la classe envisagée.

I.2.1 - Définition générale

Les notations employées sont les suivantes :

* t désigne le temps $t \in T$

* $x(t) \in \mathbb{R}^n$ $y(t) \in \mathbb{R}^m$ $u(t) \in \mathbb{R}^e$ désignent respectivement l'état, la sortie et la commande du processus.

L'équation de progression des systèmes étudiés est alors la suivante :

$$\begin{cases} D(x(t)) = A(t, x(t), u(t)) \cdot x(t) + b(t, x(t), u(t)) \\ y(t) = g(t, x(t), u(t)) \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

* Les composantes des matrices fonctionnelles $A(.) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b(.) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ et $g(t, x(t), u(t)) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ sont des fonctions de $(t, x(t), u(t))$. Il convient de noter que, en regard des méthodes de synthèse développées dans la suite, il n'est pas nécessaire de connaître **exactement** les fonctions composant $A(.)$, $b(.)$, $g(.)$ mais qu'il suffira généralement de connaître leur plage de variations dans des bornes connues avec certitude.

* L'opérateur D est l'opérateur dérivée à droite par rapport au temps :

$$D(x(t)) = \frac{d}{dt}_+ (x(t)) \quad (\text{I.4})$$

(respectivement l'opérateur de translation temporelle $D(x(t)) = x(t+1)$)

dans le cas des systèmes en temps continu (respectivement discret).

Nous proposons maintenant de montrer que les systèmes linéaires ainsi qu'une classe importante de modèles non linéaires de processus appartiennent à la classe envisagée (I.3) de modèles.

I.2.2 - Systèmes linéaires stationnaires rationnels

Ces modèles sont décrits par l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} D(x(t)) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases} \quad (I.5)$$

A, B, C et D sont des matrices à coefficients constants de dimensions appropriées.

Le comportement Entrée \rightarrow Sortie du système peut être décrit par une fonction de transfert $F(\xi)$: gain opérationnel défini par rapport à la variable de Laplace $\xi = p$ (resp $\xi = z$) dans le cas d'un système en temps continu (resp discret) :

$$F(\xi) = D + C (\xi I - A)^{-1} B \quad (I.6)$$

(A, B, C, D) est une réalisation de la fonction de transfert F. Cette réalisation est d'ordre (n) minimal si la paire [A, B] est complètement contrôlable* et si la paire [A, C] est complètement observable**.

* La paire [A, B] est complètement contrôlable si le rang de l'espace engendré par le système générateur $\{B, AB, \dots, A^i B, \dots\}$ est égal à la dimension n du vecteur état x (c.à.d. de la taille de la matrice A).

** [A, C] est complètement observable si et seulement si la paire $[A^T, C^T]$ est complètement contrôlable.

Systèmes linéaires non stationnaires :

Ces systèmes satisfont comme les précédents, au principe de superposition, mais on ne peut leur associer une fonction de transfert.

L'équation d'état suivante permet de les définir formellement :

$$\begin{cases} D(x(t)) = A(t) x(t) + B(t) u(t) \\ y(t) = C(t) x(t) + D(t) u(t) \end{cases} \quad (I.7)$$

I.2.3 - Modèles de processus non linéaires / Introduction

Parmi les modèles linéaires, les systèmes linéaires stationnaires ont d'abord retenu l'attention des automaticiens, du fait du cadre mathématique bien connu dans lequel il est situé : celui de l'algèbre linéaire.

Dans la plupart des cas concrets, le choix d'un tel modèle est justifié dans la mesure où il traduit relativement bien une dynamique définie pour de faibles variations autour d'un point de fonctionnement moyen /Landau, 1979/.

Cette hypothèse se justifie aisément dans le cas où on régule bien les sorties d'un processus donné autour de valeurs de consignes fixées. Dans ce cas, la validation du modèle s'opère en fonction du but fixé : on calcule un "bon" régulateur à partir du modèle linéaire. Le système asservi ainsi constitué maintient les composantes de la sortie du processus autour de leurs consignes fixes, le choix d'un modèle linéaire est ainsi généralement validé /Foulard & al, 1978/.

La justification précédente ne peut néanmoins pas toujours être retenue. Des situations pour lesquelles les entrées du processus admettent des variations de grande amplitude conduisent à rejeter l'hypothèse de linéarité autour d'un "point de fonctionnement".

Le caractère non linéaire du processus modélisé doit alors apparaître explicitement dans le modèle.

I.2.4 - Systèmes de Lur'e Postnikov

Dans une première approche, un système de Lur'e Postnikov peut être défini comme un système linéaire bouclé pour lequel les actionneurs et les capteurs sont décrits par des caractéristiques non linéaires.

Les premières études de ce type de modèle /Aizerman, 1949/ /Lur'e, 1951/ envisagent des systèmes décomposables sous la forme du schéma-bloc suivant (Figure I.1) :

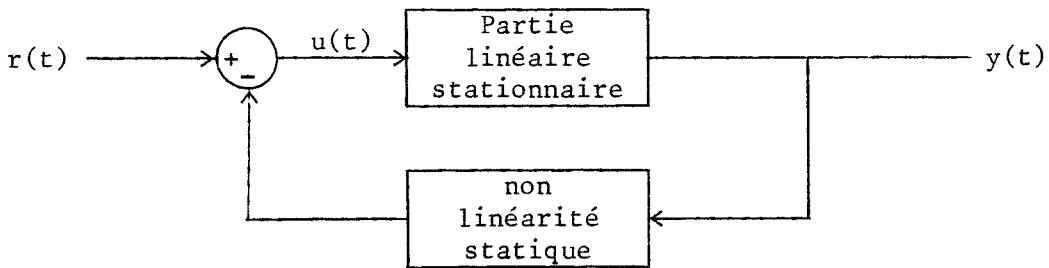


FIGURE I.1

pour lequel le capteur est supposé non linéaire.

Il convient de remarquer que, dans le cadre des études de stabilité en régime libre ($r(t) \equiv 0$) de ce système, il n'est pas utile de distinguer quelle partie (capteur ou actionneur) induit le comportement non linéaire du système comme le montre l'équivalence des schémas-blocs suivants (Figure I.2) :

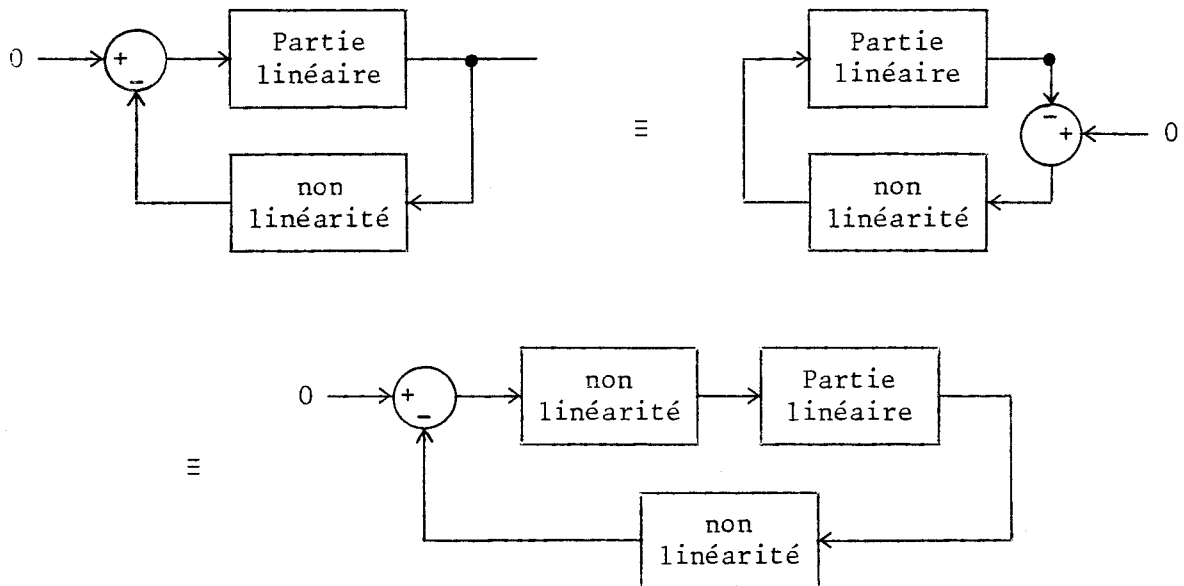


FIGURE I.2

En généralisant, une forme générique des systèmes de Lur'e Postnikov peut être donnée sous la forme de l'équation d'état suivante /Grujić, 1978/ /Borne, 1976/ :

$$\begin{cases} D(x(t)) = A(t).x(t) + B(t).u(t) \\ u(t) = f(t,x,\sigma) \\ \sigma = r(t) - C(t,x,u).x(t) \end{cases} \quad (I.8)$$

avec $\dim(r) = \dim(C(.).x) = \dim(f) = m$.

Envisageons le cas où la fonction f est telle qu'on puisse toujours définir le gain statique équivalent ϕ de la manière suivante (I.9) :

$$\begin{cases} \forall (t,x,\sigma) \text{ admissible :} \\ \dim(\phi(t,x,\sigma)) = \dim(f(t,x,\sigma)) = m \\ \forall i = 1, \dots, m \quad \phi_i(t,x,\sigma) = \frac{f_i(t,x,\sigma)}{\sigma_i} \\ |\phi_i(t,x,\sigma)| < +\infty \end{cases} \quad (I.9)$$

Une nouvelle description du processus en régime libre peut alors être proposée (I.10) :

$$D(x(t)) = [A(t) - B(t).Diag(\phi(t,x,\sigma).C(t,x,u))] . x(t) \quad (I.10)$$

Cette dernière forme appartient bien à la classe des systèmes envisagés (I.3) dans un fonctionnement en régime libre.

I.2.5 - Systèmes bilinéaires / à état affine /Levine, 1983/ /Bourdon, 1982/

L'équation d'état définissant les systèmes bilinéaires est la suivante /Fliess, 1978, 1981/ :

$$\begin{cases} D(x(t)) = (A_0 + \sum_{i=1}^e u_i(t).A_i) x(t) \\ y(t) = C.x(t) \end{cases} \quad (I.11)$$

Dans cette définition, les matrices A_0, A_1, \dots, A_e, C sont à coefficients constants.

Les systèmes à état affine /Fliess, 1980/ constituent, dans le cadre des systèmes en temps discret, une généralisation des systèmes bilinéaires. Ils sont définis par l'équation (I.12) :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t+1) = (A_0 + \sum_{i=1}^m p_i (u_1(t), \dots, u_e(t)) \cdot A_i) \cdot x(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) \end{array} \right. \quad (I.12)$$

Les matrices A_0, A_1, \dots, A_m sont également à coefficients constants, les p_i sont des monômes en les indéterminées u_1, u_2, \dots, u_e .

Les systèmes à état affine présentent une spécificité remarquable ; en effet, le produit de deux systèmes à état affine est à état affine (cette propriété n'est par contre pas vérifiée dans le cadre des systèmes bilinéaires).

Il est important de souligner la validité de ces modèles vis à vis de dynamiques non linéaires à partir de deux points de vue complémentaires. En premier lieu, un théorème d'indiscernabilité dû à Fliess /Fliess, 1981/ assure la cohérence théorique de ce choix de modèle.

Par ailleurs, une classe de méthode d'identification de tels processus à partir d'expériences telles que des réponses à des échelons est disponible /Bourdon, 1982/.

La validité des modèles obtenus par ces procédés a pu être montrée sur de nombreux cas concrets. De plus, ils recouvrent les modèles "linéaires à coefficients variables" déjà utilisés dans la pratique sans une aussi solide justification théorique (ex : /Lecouturier, 1971/).

Nous proposons d'explicitier en conclusion de ce paragraphe un exemple illustrant le lien entre la classe des modèles étudiés (I.3) avec les systèmes à état affine (cet exemple est issu de la référence /Dang-Van-Mien, 1980/).

I.2.5.1 - Exemple de représentation d'un système "linéaire à coefficients variables"

Considérons un système monovarié pour lequel la sortie évolue sous l'effet de deux entrées $e(t)$ et $\xi(t)$.

$e(t)$ est une entrée permettant le contrôle du processus ; $\xi(t)$ influence la sortie mais nous supposons qu'il n'est pas possible d'agir sur elle.

Lorsque $\xi(t)$ est constante, le processus peut être modélisé par un modèle de Strejč :

$$G(p) = \frac{G_o}{(1 + T_p)^3} = \frac{Y(p)}{E(p)} \quad (I.13)$$

Il vient, après échantillonnage :

$$G(z) = \frac{a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}} = \frac{Y(z)}{E(z)} \quad (I.14)$$

Sous l'effet de l'entrée $\xi(t)$ ($\xi(t) \in [\underline{\xi}, \bar{\xi}] \in \mathbb{R}$) le gain statique G_o et la constante de temps T varient suivant les lois suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{T} = \frac{\xi}{C_o} + C_1 \\ G_o = g_o \xi + g_1 \end{array} \right. \quad (I.15)$$

Les expressions correspondantes des coefficients a_i , b_i de $G(z)$ (I.14) dépendent ainsi de ξ et leurs variations peuvent être suffisamment bien approximées par des polynômes en vertu du théorème de Stone-Weierstraß.

Les auteurs proposent alors une modélisation du système sous la forme suivante (I.16) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} x(t+1) \\ \hline 1 \end{array} \right] = \\ \left[\begin{array}{l} A_0 \\ + A_1 \xi(t) + A_2 \xi^2(t) + A_3 \xi^3(t) \\ + A_4 e(t) + A_5 e(t) \xi(t) + A_6 e(t) \xi^2(t) + A_7 e(t) \xi^3(t) + A_8 e(t) \xi^4(t) \end{array} \right] x \\ \left[\begin{array}{c} x(t) \\ \hline 1 \end{array} \right] \end{array} \right. \quad (I.16)$$

$$y(t) = [1, 0, 0, 0] \left[\begin{array}{c} x(t) \\ \hline 1 \end{array} \right]$$

Dans cette expression, les matrices A_0, \dots, A_8 à coefficients constants ont les structures suivantes :

$$A_0 = \left[\begin{array}{ccc|c} \times & 1 & 0 & 0 \\ \times & 0 & 1 & 0 \\ \times & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$A_i = \left[\begin{array}{ccc|c} \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad i = 1, 2, 3$$

$$A_i = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad i = 4, 5, 6, 7, 8$$

La dernière composante du vecteur état augmenté $\left[\begin{array}{c} x(t) \\ \hline 1 \end{array} \right]$ est introduite à des fins de cohérence formelle (dimension), on peut de ce fait décrire le système par un modèle "linéaire à coefficients variables" tel que le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t+1) = \begin{bmatrix} -a_1(\xi) & 1 & 0 \\ -a_2(\xi) & 0 & 1 \\ -a_3(\xi) & 0 & 0 \end{bmatrix} .x(t) + \begin{bmatrix} b_1(\xi) \\ b_2(\xi) \\ b_3(\xi) \end{bmatrix} .e(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .x(t) \end{array} \right. \quad (I.17)$$

Les $a_i(\xi)$ et les $b_i(\xi)$ sont des polynômes en ξ d'ordres respectifs 3 et 4.

Ce dernier modèle appartient à la classe des processus étudiés (I.3).

La classe des processus envisagée étant définie (I.3), il convient maintenant de préciser des notions supplémentaires indispensables à la formulation du problème de commande (ou contrôle) des processus.

I.3 - CONTROLE DES PROCESSUS

Dans cette section, nous définissons d'un point de vue général, les notions essentielles qui permettent de formaliser les problèmes pratiques de contrôle de processus. Nous serons ainsi amenés à préciser l'effet des entrées d'un processus et à dégager la notion d'information disponible sur un processus.

Nous proposons ensuite de formuler le problème général du contrôle des processus du point de vue dynamique de la stabilité d'une trajectoire nominale.

I.3.1 - Sorties contrôlées, sorties accessibles, entrées de commande, entrées de perturbations / Définitions

Soit un processus décrit par une équation d'état de la classe envisagée en (I.3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} D(x(t)) = A(x, t, u).x(t) + B(x, t, u).u(t) \\ y(t) = g(x, t, u) \end{array} \right. \quad (I.3)$$

Nous appellerons **sortie contrôlée** l'ensemble des composantes de $y(t)$ auxquelles le concepteur souhaite assigner un comportement (par exemple, celui de tendre vers une constante donnée dans un problème de régulation ou celui d'être insensible à une entrée donnée dans un problème de découplage).

Par définition, la sortie du système est un vecteur dont les composantes sont constituées de l'ensemble des grandeurs mesurables (contrôlées ou non).

La sortie du processus peut être pilotée par l'**entrée de commande** constituée par l'ensemble des composantes de $u(t)$ qui sont affectables (sur lesquelles on peut agir).

Les autres composantes de $u(t)$ qui agissent sur le comportement du système et donc à priori sur la sortie contrôlée sans que l'on puisse agir sur elles, définissent une **entrée de perturbation** du système.

Ces concepts étant posés, nous proposons de regrouper les notations qui découlent des remarques précédentes :

$$\text{Processus } \left\{ \begin{array}{l} D(x(t)) = A(t, x, u) \cdot x(t) + B(t, x, u) \cdot u(t) \\ y(t) = C(t, x, u) \cdot x(t) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in S \subset \mathbb{R}^n \\ u \in \mathbb{R}^e \\ y \in \mathbb{R}^m \end{array} \right. \quad (\text{I.18})$$

$y^c \in \mathbb{R}^{mc}$: vecteur des sorties à contrôler

$y^d \in \mathbb{R}^{md}$: vecteur des sorties non contrôlées

$u^c \in \mathbb{R}^{ec}$: vecteur des entrées de commande

$u^p \in P \subset \mathbb{R}^{ep}$: vecteur des entrées de perturbations

$$u = \begin{bmatrix} u^c \\ u^p \end{bmatrix} \quad e = ec + ep \quad y = \begin{bmatrix} y^c \\ y^d \end{bmatrix} \quad m = mc + md$$

I.3.2 - Rétro-action / Dualité des problèmes statiques et dynamiques

La commande d'un processus consiste, après avoir précisé les sorties contrôlées et les critères qui leur sont associés, à définir les lois de commande à appliquer sur les entrées de commande de manière à satisfaire les critères imposés malgré l'action des entrées de perturbations.

La structure de commande par rétro-action est directement issue de cette dernière formulation puisque les lois de commande, pour contrebalancer l'effet des entrées de perturbations, doivent disposer des informations relatives à celles-ci. Ces informations n'étant par définition disponibles que dans les sorties mesurables du processus, elles sont donc injectées dans le bloc définissant la loi de commande du procédé à partir des critères imposés (cf Figure I.3).

Il convient de remarquer que l'état $x(t)$ n'est généralement pas accessible à la mesure dans sa totalité. En conséquence, une commande par retour d'état ne peut être implémentée que si on place, dans la loi de commande de la Figure I.3, un observateur d'état.

Le schéma prend ainsi en compte les difficultés liées à ce type de commande lorsque le processus est mal connu.

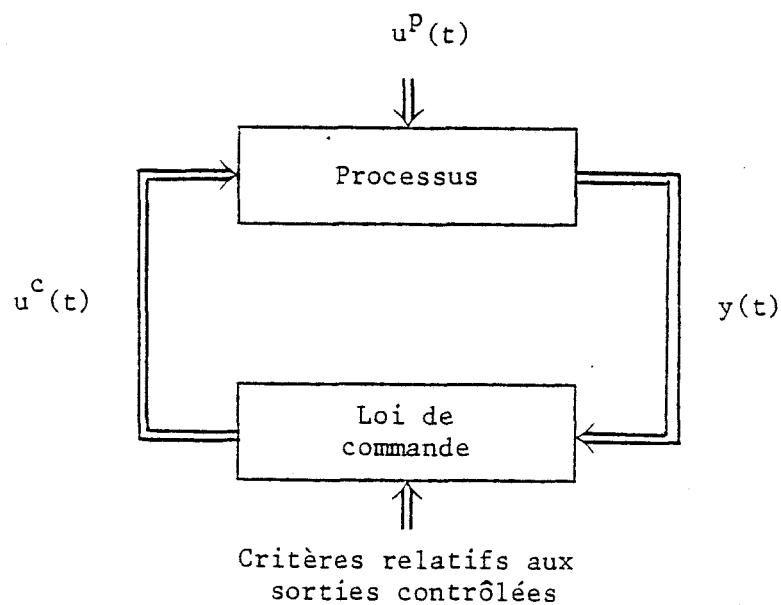


FIGURE I.3

Cette représentation du problème de contrôle est conforme à celle définie dans la référence /Savonov, 1980/ pour introduire l'étude de la stabilité par la méthode des sections coniques de Zames /Zames, 1966-a,b/. Il met donc en évidence le lien existant entre les problèmes de contrôle et ceux relatifs à la stabilité.

Le schéma conceptuel de la Figure I.3 peut être explicité dans le cas envisagé usuellement de perturbations et de consignes additives appliquées en entrée. Il vient alors le diagramme représenté ci-dessous :

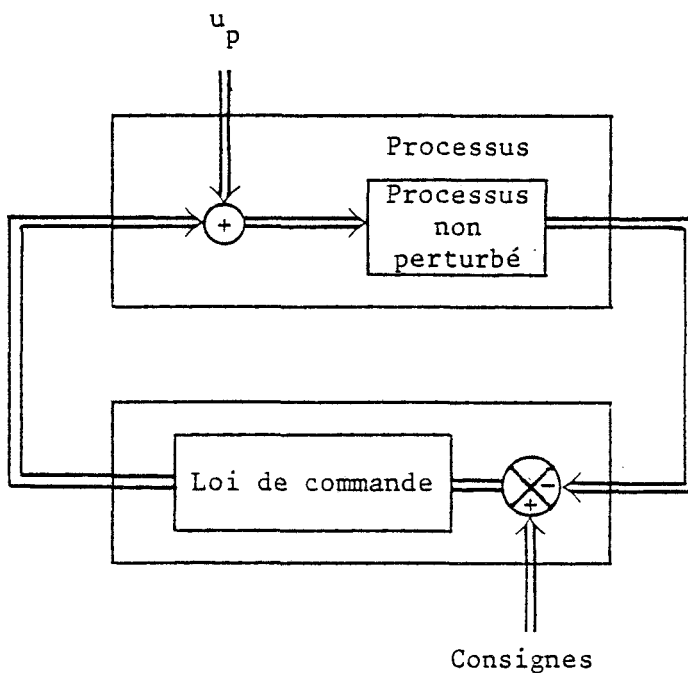
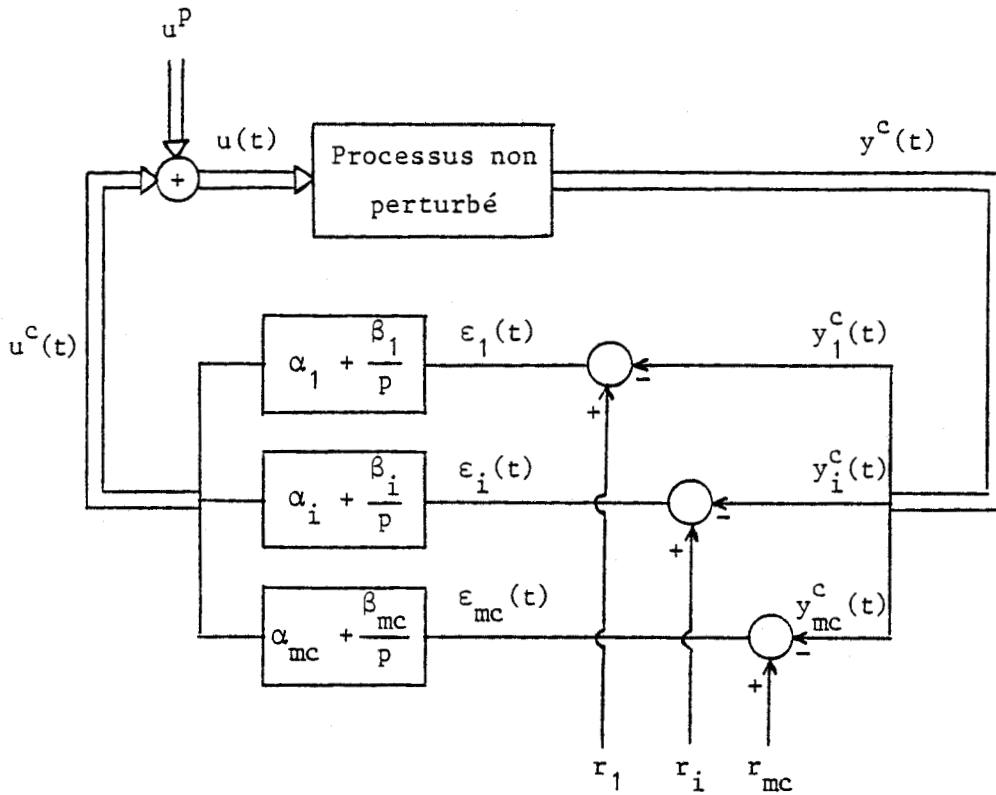


FIGURE I.4

Dualité des problèmes statiques et dynamiques dans la commande des processus

Ayant formalisé le problème de commande de processus dans le même cadre (Figure I.3) que celui envisagé dans l'étude de la stabilité des systèmes, le lien existant entre les deux questions peut être mis en évidence dans le cas de la régulation correspondant à l'exemple d'illustration suivant (Figure I.5) :



$$\dim(y^c) = \dim(u^c) = \dim(u^p) = \dim(r) = mc$$

FIGURE I.5

Dans cette structure, on envisage le fonctionnement en régulateur du processus soumis à une entrée de perturbation additive u^p **constante** et à une entrée de référence r également **constante**.

La pratique de la régulation des systèmes linéaires nous conduit à mettre en place des régulateurs de type proportionnel et intégral dans l'optique de réguler $y^c(t)$ autour de la valeur constante r .

Supposons qu'on puisse définir un vecteur état du processus tel que les sorties contrôlées ($y_i^c(t)$; $i=1, \dots, mc$) soient des composantes de ce vecteur.

Les variables $-\epsilon_i(t)$ sont alors les mêmes composantes du vecteur état du processus avec un état initial translaté de $-r_i$. De même, la perturbation additive constante u_1^p peut être interprétée comme la condition initiale de l'intégrateur situé en aval de $\epsilon_1(t)$ (cf Figure I.6) :

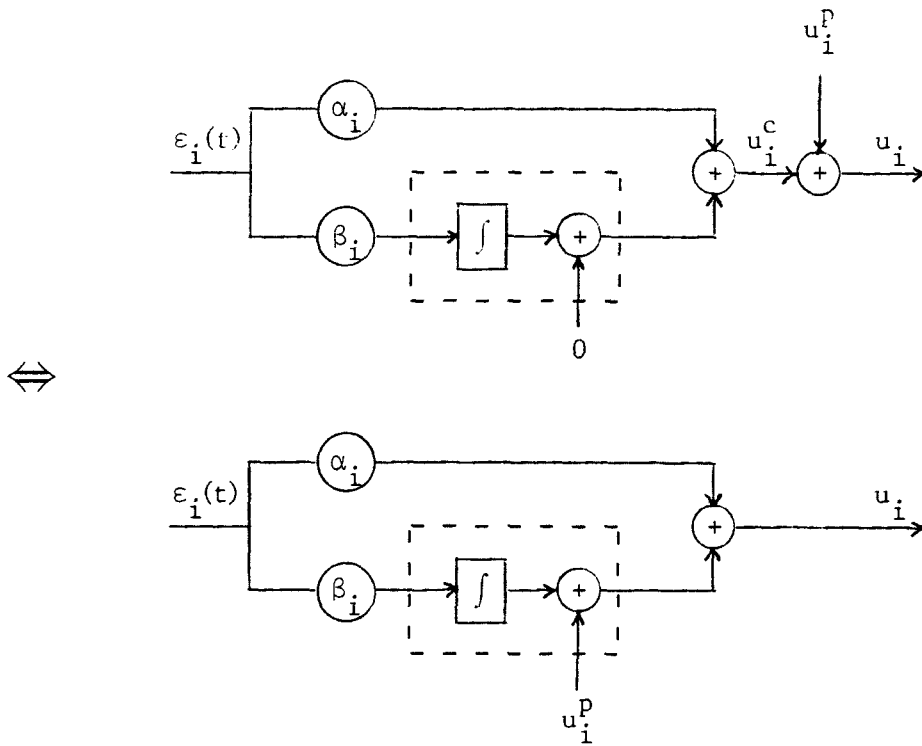


FIGURE I.6

Par une translation des variables d'état apparaissant dans le processus et dans le régulateur, l'asservissement proposé sur la Fig. I.5 peut être ainsi ramené à la structure en contre-réaction suivante (Fig. I.7) pour laquelle les seules perturbations envisagées sont des modifications des conditions initiales dans le processus et/ou dans la loi de commande.

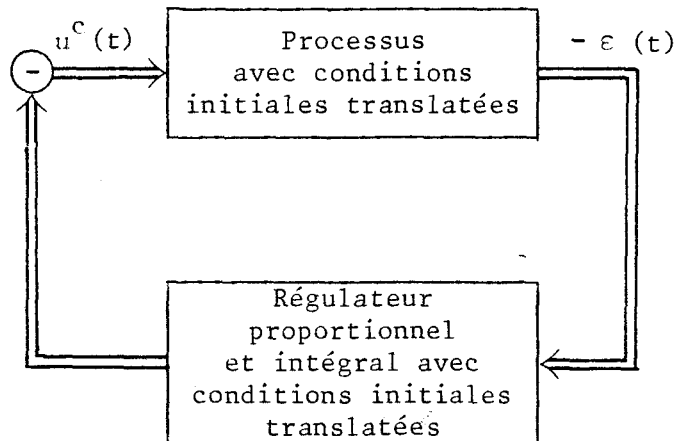


FIGURE I.7

L'objectif de la régulation étant décrit par :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = 0$$

celui-ci est atteint si le point d'équilibre à l'origine du vecteur état de l'asservissement (processus + régulateur) est asymptotiquement stable, c'est-à-dire si le vecteur d'état tend vers zéro en restant borné au cours de son évolution.

La démarche de synthèse proposée dans notre travail s'apparente à l'esprit de l'exemple précédent. Nous proposons maintenant d'aborder les notions utiles à la compréhension de la notion de stabilité puis la définition des grandes classes de méthodes d'analyse sur lesquelles reposent les méthodes que nous expliciterons dans ce mémoire.

I.4 - NOTIONS DE STABILITE / DEFINITIONS

Dans cette section, nous proposons de rappeler les notions essentielles relatives à la propriété de stabilité d'une trajectoire. Afin d'alléger l'exposé, nous nous limiterons dans le corps du chapitre, à l'énoncé des principes fondamentaux en renvoyant les définitions formelles en annexe.

Considérons les trajectoires possibles dans l'espace d'état d'un asservissement tel que celui représenté dans la Figure I.3.

Notons $r(t) \in \mathbb{R}^{mc}$, l'entrée de référence caractérisée comme un vecteur dont les composantes définissent les consignes des sorties contrôlées. $x(t)$ désigne l'état du processus, son évolution est alors caractérisée par la relation suivante :

$$\{x(t) = x(t, r(\tau; \tau \in \mathcal{T}, \tau \leq t), u^p(\tau; \tau \in \mathcal{T}, \tau \leq t), x(t_0))\} \quad (I.20)$$

Considérons $x(t)$ comme une trajectoire nominale vis à vis de l'entrée $r(t)$, c'est à dire comme une trajectoire possible matérialisant le comportement souhaité de l'asservissement en réponse à $r(t)$.

En remarquant que l'état initial $x(t_0)$ agit sur la trajectoire comme une entrée de perturbation particulière, la **stabilité de la trajectoire nominale** (I.20) se définit par rapport aux trajectoires (I.21) du système soumises à d'autres entrées de perturbation et à la même entrée de référence $r(t)$.

$$x^*(t) = x^*(t, r(\tau; \tau \in T; \tau \leq t), u^{*P}(\tau; \tau \in T; \tau \leq t), x^*(t_0)) \quad (I.21)$$

La **stabilité** de la trajectoire nominale $x(t)$ exprime qu'il existe deux ensembles S_0 et P_0 :

- un sous-ensemble S_0 de l'espace d'état S tel que :

$$x^*(t_0) \in S_0 \quad S_0 - \{x(t_0)\} \neq \emptyset$$

- un sous-ensemble P_0 de l'ensemble P des entrées de perturbation $u^P(t; t \in T)$ tel que :

$$u^{*P}(\cdot) \in P_0 \quad P_0 - \{u^P(\cdot)\} \neq \emptyset$$

tels que l'écart entre la trajectoire nominale et toute trajectoire $x^*(t)$ obtenue pour $u^{*P}(\cdot) \in P_0$ et $x^*(t_0) \in S_0$ soit bornée uniformément par rapport au temps.

La notion de **stabilité asymptotique** conduit à assurer, en plus des propriétés citées précédemment, que les trajectoires perturbées $x^*(t)$ convergent vers la trajectoire nominale $x(t)$ lorsque t augmente indéfiniment.

Dans de nombreux cas, les propriétés asymptotiques du système ne sont pas suffisantes. Par exemple, un dispositif de contrôle latéral de la trajectoire d'un avion à l'atterrissage doit permettre de recaler cette trajectoire dans l'axe de la piste au bout d'un temps fini, en particulier avant la fin de la piste d'atterrissage.

En fonction de ce besoin, la **stabilité pratique** introduite par Lj.T. Grujić /Grujić, 1975/ permet de spécifier un temps t_s (temps de réponse / settling time) à partir duquel toutes les trajectoires $x(\tau; \tau \in [t_s, +\infty[)$ appartiennent à un domaine défini a priori autour de la trajectoire nominale.

La **stabilité exponentielle** constitue un cas particulier de stabilité asymptotique qui permet de définir une majoration du temps de réponse. Dans ce cas, on caractérise la décroissance exponentielle d'une mesure de l'écart entre les trajectoires.

Il est intéressant d'introduire à ce niveau la notion de **robustesse** de la stabilité.

La stabilité d'un système ne peut être étudiée que sur des modèles formels de processus. Or, en général, un processus donné admet un grand nombre de modèles dont les comportements dynamiques sont voisins. Il est donc indispensable qu'une propriété telle que la stabilité (asymptotique) soit établie pour toute la classe des modèles prétendant décrire le système.

L'indissociabilité des notions de stabilité et de robustesse est par ailleurs mise en exergue par les démarches de précurseurs tels que Nyquist, Bode et Black dans des études de circuits électroniques à tubes /Bellman, 1964/ /Mayr, 1970/ /Faure, 1974/.

La notion de **stabilité absolue** est à rapprocher de la robustesse dans le sens où cette propriété décrit la stabilité d'un point d'équilibre pour l'ensemble des trajectoires de systèmes non linéaires dont les termes intrinsèquement non linéaires satisfont à une propriété donnée (par exemple, dans le cas de caractéristiques statiques non linéaires de dimension 1, le fait d'appartenir à un secteur donné du plan /Aizerman, 1963/ /Grujić & al, 1979/). La généralisation de cette notion de stabilité absolue a conduit Popov à formuler le concept d'**hyperstabilité** /Popov, 1973/.

Il convient de remarquer que les propriétés précédentes ont été introduites pour une entrée de référence $r(t)$ (I.20) donnée. La prise en compte d'une classe \mathcal{R} d'entrées de référence possibles ne modifie en rien les concepts introduits. Il suffit alors de considérer $r(t)$ comme une perturbation supplémentaire de l'asservissement.

Les principales définitions formelles relatives aux propriétés énoncées sont reportées en Annexe I.2, il convient maintenant d'aborder

les méthodologies qui permettent de caractériser la stabilité d'une trajectoire nominale d'un processus donné.

I.5 - METHODOLOGIES D'ETUDE DE LA STABILITE

Les méthodes d'étude de la stabilité des trajectoires d'un système dynamique sont essentiellement liées au type de modèle utilisé pour décrire le processus.

Les propriétés des systèmes linéaires stationnaires rationnels élémentaires ont permis de dégager des **conditions nécessaires et suffisantes** de stabilité [exponentielle] relatives aux descriptions fréquentielles et temporelles (dans l'espace d'état) de ces modèles.

La transformation homographique permet par ailleurs de mener à bien l'étude des systèmes en temps continu ou discret en utilisant indifféremment les outils de stabilité définis dans l'un ou l'autre cadre.

L'analyse des propriétés de stabilité de ces systèmes est ainsi rendue aisée puisqu'on dispose d'une **condition nécessaire et suffisante**. Dans cet esprit, les premiers travaux menés dans le cadre des systèmes asservis et relatifs à la stabilité des modèles non linéaires se sont fixés pour objectif de montrer l'existence de conditions de stabilité aussi fortes dans le cadre des systèmes non linéaires.

Cette démarche a conduit Aizerman /Aizerman, 1949/ a formuler une conjecture exprimant que les propriétés de stabilité d'un modèle non linéaire peuvent être induites à partir des propriétés de stabilité de ses modèles linéaires tangents.

Cette conjecture n'a jamais pu être prouvée d'une manière générale et elle s'est parfois révélée restrictive /Richard, 1981 - c/. L'ambition des automaticiens s'est alors limitée à définir des **conditions suffisantes** de stabilité à partir d'outils propres à l'analyse mathématique au lieu des conditions nécessaires et suffisantes que permettait d'exhiber la manipulation d'outils algébriques.

La redécouverte des travaux de Lyapunov /Lyapunov, 1892, 1949/ généralisant la notion de distance, a permis de fixer un cadre rigoureux à l'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires.

Dans cette section, nous proposons d'abord de rappeler les théorèmes de Lyapunov. L'application de ces théorèmes n'étant pas, en général, aisée, voire possible d'un point de vue pratique, nous présentons ensuite les techniques d'agrégation par utilisation de normes vectorielles ainsi que les résultats relatifs à l'hyperstabilité qui constituent le support des méthodologies de synthèse que nous présentons dans ce mémoire (§ II à IV).

I.5.1 - Théorèmes de Lyapunov

La méthode directe de Lyapunov envisage de caractériser la stabilité du point stationnaire $x=0$ du système en temps continu suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = f(x(t), t) \\ t \in T ; x \in S \subset \mathbb{R}^n \end{array} \right. \quad (\text{I.22})$$

On est amené à définir une fonction $v(x,t)$ vérifiant les propriétés suivantes lui conférant le rôle de "norme généralisée" de $x(t)$.

- a) $v(x,t)$ est une application de $T \times S \rightarrow \mathbb{R}_+$
- b) $\forall t \in T : \{v(x,t) = 0\} \iff \{x = 0\}$
- c) $v(x,t)$ est continue par rapport à t et à x .
- d) $v(x,t)$ est minorée par une fonction $\phi(\|x\|)$ de classe K au sens de Hahn de $\|x\|$ (cf Annexe I.2) ; on dit alors qu'elle est définie positive.

Ces définitions étant posées, il vient les résultats suivants :

Théorème 1

S'il existe une fonction $v(x,t)$ satisfaisant aux propriétés a, b, c, d et non croissante par rapport au temps le long des mouvements $x(t, x(t_0))$ du système (I.22), **alors** le point d'équilibre $x=0$ (la trajectoire nominale $x(t) \equiv 0$) est stable.

Théorème 2

S'il existe une fonction $v(x,t)$ satisfaisant aux propriétés a, b, c, d et dont la dérivée par rapport au temps est définie négative (I.23) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} (v(x(t))) = -\chi(v(x(t)), t) \\ \chi(v(x(t)), t) \geq \Psi(\|x(t)\|) \end{array} \right. \quad (I.23)$$

Ψ : fonction de classe K au sens de Hahn (cf Annexe I.2) le long des mouvements du système (.) **alors** le point d'équilibre $x=0$ est asymptotiquement stable.

Les théorèmes de Lyapunov peuvent être envisagés comme la définition, à partir du système initial d'un **système de comparaison** d'ordre 1 (I.24) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} (z(t)) = -\chi(z(t), t) \quad z \in \mathbb{R} \\ z(t_0) = v(x(t_0), t_0) \end{array} \right. \quad (I.24)$$

déduit de l'inégalité caractérisant l'évolution dans le temps de $v(x(t))$ (I.23).

La stabilité (asymptotique) du système de comparaison (I.24) induit le même type de propriété sur le système initial (I.22).

Un cas particulier de stabilité asymptotique : la stabilité exponentielle

S'il est possible d'établir un système de comparaison (I.24) linéaire défini par l'équation (I.25) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} (z(t)) = \varepsilon \cdot z(t) \\ z(t_0) = v(x(t_0), t_0) \\ \varepsilon < 0 \end{array} \right. \quad (I.25)$$

Si de plus $\{v(.,t); t \geq t_0\}$ est uniformément équivalente à la norme euclidienne, **alors** la trajectoire $x(t) \equiv 0$ du système (I.22) est exponentiellement stable dans le sens de la définition suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \gamma > 0 ; \forall t \in T ; \forall x(t_0) \text{ tq } \|x(t_0)\| \leq \gamma ; \\ \exists \alpha(\gamma) > 0 ; \beta(\gamma) > 0 \\ \|x(t, x(t_0))\| \leq \alpha \|x(t_0)\| \cdot \exp(-\beta(t-t_0)) \end{array} \right. \quad (I.26)$$

Cette propriété permet ainsi de caractériser un majorant du temps de réponse d'un système non linéaire. L'utilisation pratique des théorèmes 1 et 2 ne peut en général être envisagée directement. On a ainsi été conduit à introduire le concept de système de comparaison, intermédiaire entre la donnée initiale du modèle de processus à étudier et la définition d'une fonction de Lyapunov permettant de mettre en évidence les propriétés de stabilité de ce système.

Cette définition permet de mieux dominer le processus d'agrégation qui consiste à proposer, à partir de la donnée du système initial (I.22), une fonction de Lyapunov $v(x(t), t)$ caractérisant ses propriétés de stabilité de la manière la moins restrictive possible.

I.5.2 - Systemes de comparaison

La seconde méthode de Lyapunov conduit à reporter l'étude de la stabilité d'un système d'ordre supérieur à l'unité à celle d'un système de comparaison du premier ordre.

L'étude de stabilité de systèmes de grande dimension composés de l'interconnection de systèmes élémentaires a nécessité l'introduction de la notion de systèmes de comparaison d'ordre supérieur à l'unité.

En particulier, la définition de **fonctions vectorielles de Lyapunov** /Bellman, 1962/ /Matrazov, 1962/ /Grujić et al, 1976/ dont les composantes sont des fonctions de Lyapunov des sous-systèmes (supposés stables isolément) permet de définir un système de comparaison d'ordre égal au nombre de sous-systèmes considérés.

Les propriétés de stabilité du système de comparaison (introduisant les mêmes propriétés sur le système initial) sont alors étudiées en appliquant la méthode de Lyapunov, c'est à dire en définissant un système de comparaison d'ordre 1 pour le système de comparaison intermédiaire.

Les conditions de stabilité de ce dernier conduisent le plus souvent à définir des contraintes que doivent satisfaire les interactions entre les sous-systèmes.

L'introduction des normes vectorielles par Borne et Gentina /Borne et al, 1973, 1974/ /Gentina et al, 1979/ /Borne et al, 1976/ /Gentina, 1976/ /Borne, 1976/ permettent de définir systématiquement des systèmes de comparaison non linéaires d'un ordre quelconque indépendamment de la structure du système. Les propriétés de stabilité du système initial étant induites par celles du système de comparaison, il est important de noter que la définition par Borne & Gentina de systèmes majorants non linéaires d'ordre supérieur à 1 s'accompagne de la définition de théorèmes permettant l'étude de la stabilité d'une grande classe de processus majorants.

Ces derniers outils permettent pour un système donné, de guider le choix des normes vectorielles qui induisent un système majorant appartenant à la classe de ceux pour lesquels existe un critère de stabilité.

Nous proposons à ce niveau d'effectuer un rappel des définitions formelles liées à la méthode d'étude de la stabilité des systèmes à partir de l'utilisation des normes vectorielles.

I.5.3 - Notion de norme vectorielle

Soit E , un espace vectoriel de dimension n , défini sur le corps des complexes, on définit une norme vectorielle $p(\cdot)$, application de E dans \mathbb{R}_+^k ($k \leq n$) à partir de ses composantes $p_i(\cdot)$ définies de la manière suivante :

* On note $\{E_1, E_2, \dots, E_k\}$ un recouvrement de E :

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k$$

* $p_i(x)$ ($E \rightarrow \mathbb{R}_+$) désigne une norme de la projection de x dans E_i ($i = 1, \dots, k$)

$p_i(\cdot)$ satisfait aux axiomes de norme suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (x, y) \in E_i^2 ; \forall \lambda \in \mathbb{C} ; \forall i = 1, \dots, k \\ p_i(\lambda x) = |\lambda| p_i(x) \\ p_i(x+y) \leq p_i(x) + p_i(y) \\ \{p_i(x) = 0\} \iff \{x = 0\} \end{array} \right. \quad (I.27)$$

I.5.4 - Définition des systèmes de comparaison (cf Annexe I.1)

Considérons simultanément :

* Le système défini par l'équation d'état suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} D(x(t)) = A(t, x(t), u^p(t)) \cdot x(t) \\ t \in T \\ u_p(\cdot) \in P \\ x(t) \in \mathbb{R}^n \end{array} \right. \quad (I.28)$$

* Une norme vectorielle $p(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ introduite précédemment (I.27).

Il vient, le long des trajectoires du système (I.28) le système d'inégalités suivantes :

$$D(p(x(t))) \leq [M(t, x(t), u_p(t))] \cdot p(x(t)) \quad (I.29)$$

La définition des matrices fonctionnelles $M(t, x, u_p) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ est explicitée en Annexe I.1.

Leurs éléments hors-diagonaux sont non négatifs par construction. De plus, les éléments diagonaux des matrices $M(\cdot)$ relatives aux systèmes en temps discret sont aussi non négatifs.

Considérons alors la trajectoire générée par le système suivant :

$$\begin{cases} D(z(t)) = M(t, x(t), u^p(t)) \cdot z(t) \\ z(t_0) = p(x(t_0)) \in \mathbb{R}_+^k \end{cases} \quad (I.30)$$

Les propriétés de non négativité des éléments de $M(\cdot)$ permettent d'assurer l'inégalité suivante (I.31) le long des trajectoires du système (I.28) /Borne, 1976/ /Gentina, 1976/.

$$\forall t \in T : z(t) \geq p(x(t)) \quad (I.31)$$

Cette dernière inégalité permet de définir le système (I.30) comme étant un **système de comparaison** du système initial (I.28) au sens des remarques suivantes :

* Si $\|z(t)\|$ est borné par une fonction de classe K de $\|z(t_0)\|$ alors $\|x(t)\|$ est borné par une autre fonction de classe K de $\|x(t_0)\|$ puisque les normes définies sur \mathbb{C}^n sont uniformément équivalentes.

* Si $\|z(t)\|$ tend vers zéro lorsque t augmente indéfiniment, il en est de même pour $\|x(t)\|$ d'après (I.31).

I.5.5 - Critères pratiques de stabilité

L'intérêt porté au système de comparaison (I.30) pour lequel la matrice de régime libre a ses éléments hors-diagonaux non négatifs a permis de construire des critères de stabilité à partir de théorèmes relatifs aux matrices (à coefficients constants) à éléments non négatifs, en particulier du théorème de Péron-Frobenius et du lemme de Kotelyanskii /Gantmacher, 1966/.

En particulier, il existe /Grujić & al, 1976/ /Gentina & al, 1979/ des théorèmes de stabilité relatifs aux systèmes de comparaison (I.30) dont la matrice de régime libre $M(t, x(t), u^P(t))$

- possède ses éléments non linéaires isolés dans une seule rangée,
- ou bien, lorsque celle-ci peut être factorisée sous la forme du produit d'une matrice constante avec une matrice diagonale non constante.

I.5.6 - Analyse des méthodes d'études de la stabilité à partir de l'utilisation des normes vectorielles

L'avantage majeur de cette méthode par rapport à la méthode directe de Lyapunov (§ V.1) réside essentiellement dans l'existence de résultats concernant la stabilité du système majorant intermédiaire.

Ces résultats de stabilité peuvent d'ailleurs s'appliquer à des systèmes de comparaison définis à partir de fonctions vectorielles de Lyapunov /Grujić & al, 1978/.

Le choix d'une norme vectorielle peut ainsi être conduit de manière à identifier le système de comparaison obtenu à la classe des systèmes pour lesquels on peut établir des conditions (suffisantes) de stabilité.

Cette démarche a motivé d'importants travaux qui ont abouti à proposer des structures particulières /Meizel, 1979/ /Benrejeb, 1976, 1978/ de systèmes non linéaires pour lesquels les outils d'analyse précédents étaient particulièrement bien conditionnés.

Une démarche complémentaire visant à élargir la classe des processus étudiables à partir des outils déduits de l'utilisation des normes vectorielles consiste à transformer un système initialement donné en un système possédant l'une de ces formes particulières.

Dans cet esprit, des théorèmes d'appartenance à l'une ou l'autre classe de systèmes remarquables ont été établis /Richard, 1981-a,b/.

D'un point de vue distinct, des algorithmes constructifs des transformations permettant de ramener un système étudié sous une des formes remarquables ont été mis en évidence /Meizel et al, 1980/ /Meizel, 1981/ /Meizel & Gentina, 1981, 1982/ pour une grande classe de processus non linéaires en temps continu ou discret.

L'ensemble de ces méthodes liées aux normes vectorielles est développé dans la deuxième partie de ce mémoire.

Nous proposons de terminer ce rappel des méthodologies d'analyse de la stabilité par la théorie de l'hyperstabilité, restreinte aux systèmes en temps continu, pour laquelle nous développerons de même une méthode de synthèse dans la suite (§ IV) de ce mémoire.

I.5.7 - Hyperstabilité /Popov, 1973/ /Faure & al, 1979/ /Landau, 1980/

Dans cette sous-section, nous envisageons les processus dont le nombre d'entrées égale le nombre de sorties.

Cette théorie généralise les travaux concernant la stabilité des systèmes non linéaires à non linéarités séparables décrits par le schéma-bloc suivant (Fig. I.8 - a) :

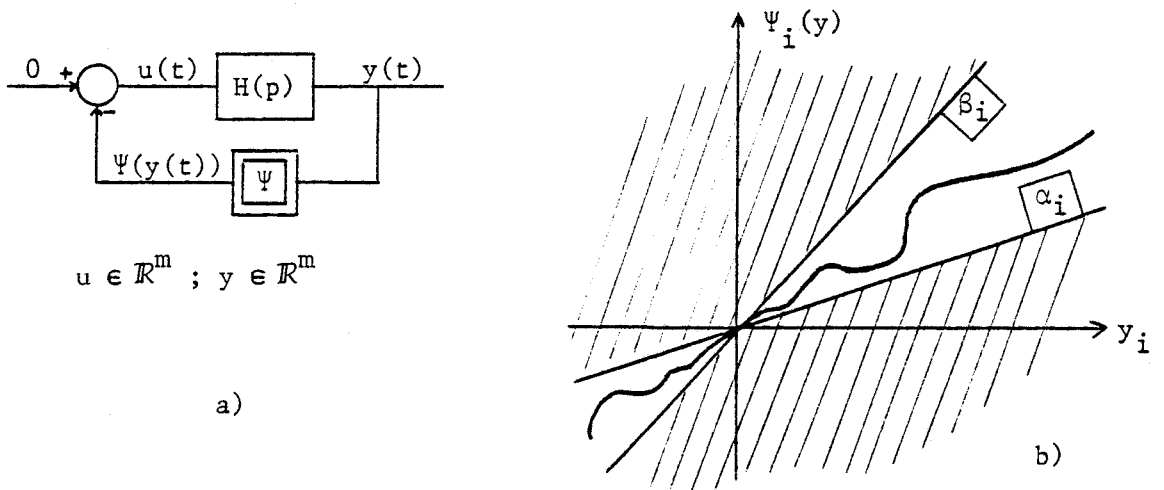


FIGURE I.8

Sachant que la non linéarité satisfait une condition de type secteur, composante par composante, on aboutit ainsi au concept de stabilité absolue (cf § I.4) permettant d'établir quelles conditions doit satisfaire la partie linéaire $H(p)$ pour que l'asservissement représenté (Fig. I.8 - a) soit stable pour toutes les contre-réactions satisfaisant les conditions de type secteur décrites sur la figure I.8 - b.

Un changement de variable :

$$\begin{cases} \tilde{u}(t) = u(t) + A.y(t) \\ \tilde{y}(t) = u(t) + B.y(t) \end{cases} \quad (I.32)$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times m}, B \in \mathbb{R}^{m \times m}; A = \text{Diag}(\alpha_i), B = \text{Diag}(\beta_i)$

transforme l'asservissement initial (Fig. I.8 - a & b) sous la forme équivalente suivante :

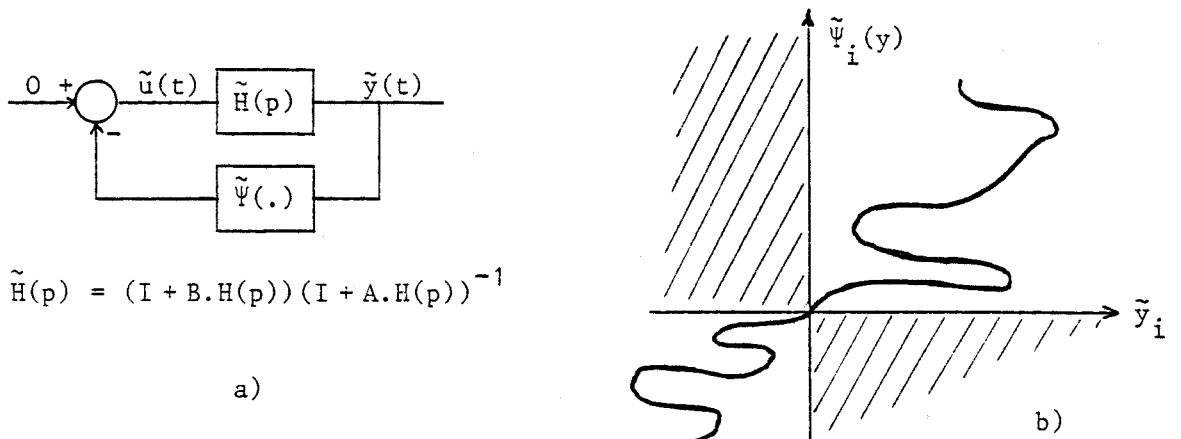


FIGURE I.9

La non linéarité transformée $\tilde{\Psi}(\cdot)$ doit alors satisfaire une condition standard de positivité composante à composante :

$$\tilde{y}_i \cdot \tilde{\Psi}_i(\tilde{y}) \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (\text{I.33})$$

permettant ainsi d'établir des conditions standard sur la partie linéaire $\tilde{H}(p)$ assurant la stabilité absolue de l'asservissement représenté ci-dessus (Fig. 9). Il s'agit alors du critère du cercle /Faure & al, 1979/.

En généralisant ce problème de stabilité absolue, Popov /Popov, 1973/ /Faure & al, 1979/ a introduit le concept d'hyperstabilité de la manière suivante :

Etant donné un système dynamique d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ ($y(t) \in \mathbb{R}^m$; $u(t) \in \mathbb{R}^m$), on dit que c'est un **bloc (asymptotiquement) hyperstable** s'il est (asymptotiquement) stable pour toute commande $u(t)$ satisfaisant la relation suivante (I.34) dite "inégalité de Popov" :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t) = -w(t) \\ \exists \gamma_0 \in \mathbb{R}^+ ; \forall t \in \mathcal{T} ; \eta(t_0, t) \geq -\gamma_0^2 \\ \eta(t_0, t) \triangleq \int_{t_0}^t (w^T(\alpha) y(\alpha) + y^T(\alpha) w(\alpha)) d\alpha \end{array} \right. \quad (\text{I.34})$$

On peut interpréter l'inégalité de Popov dans le cas monovarié (m=1) en constatant que l'intégrale :

$$\int_{t_0}^t w(\alpha) \cdot y(\alpha) \cdot d\alpha \quad (\text{I.35})$$

ne peut être bornée inférieurement que si la condition :

$$w(t) \cdot y(t) \geq 0 \quad t \in [t_0, +\infty[\quad (\text{I.36})$$

est "dominante" le long des mouvements du système.

Nous retrouvons ainsi, en moyenne, la condition de positivité (I.33) envisagée pour les rétro-actions par non linéarités statiques.

Il convient à ce niveau de préciser les définitions et les principaux résultats de cette approche de stabilité des systèmes non linéaires.

I.5.7.1 - Définition 1 : Bloc linéaire hyperstable

Le système représenté par l'équation d'état suivante d'ordre minimal (I.37) :

$$\left\{ \begin{array}{l} D(x(t)) = A.x(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.x(t) + D.u(t) \\ x(t) \in \mathbb{R}^n ; u(t) \in \mathbb{R}^m ; y(t) \in \mathbb{R}^m \end{array} \right. \quad (\text{I.37})$$

a) est hyperstable :

si il existe $\delta > 0$ telle que :

pour toute constante $\gamma_0 > 0$ et pour toute entrée $u(t)$ satisfaisant l'inégalité de Popov (I.34)

$$\forall t \in T : \eta(t_0, t) \geq -\gamma_0^2$$

les trajectoires du système (I.37) satisfont l'inégalité suivante :

$$\forall t \in T : \|x(t)\| \leq \delta.(\|x(t_0)\| + \gamma_0) \quad (\text{I.38})$$

b) est asymptotiquement hyperstable :

si il est hyperstable et si :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

L'intérêt de cette définition réside dans le fait que l'on peut caractériser aisément les blocs linéaires hyperstables et asymptotiquement hyperstables décrits sous forme opérationnelle ou d'état.

Nous restreignant à l'hyperstabilité asymptotique, un **système linéaire** stationnaire est **asymptotiquement hyperstable si et seulement si** il est **strictement réel positif** au sens des définitions suivantes :

I.5.7.2 - Critères de stricte-positivité d'un système linéaire

Le système décrit par la fonction de transfert $H(p)$ ou par la représentation d'état minimale :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^n ; u \in \mathbb{R}^m ; y \in \mathbb{R}^m \quad (I.39)$$

est strictement réel positif si et seulement si l'une des deux conditions suivantes (I.40 - a) et/ou (I.40 - b) est satisfaite :

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} - \text{Les parties réelles des pôles de } H(p) \text{ sont strictement négatives.} \\ - \forall \omega \in \mathbb{R} ; H(j\omega) + H^T(-j\omega) \text{ est une matrice hermitienne définie positive.} \end{array} \right. \quad (I.40)$$

$$(b) \left\{ \begin{array}{l} - \text{Les parties réelles des valeurs propres de } A \text{ sont inférieures à une valeur } \mu < 0. \\ - \exists P \in \mathbb{R}^{n \times n} ; P = P^T ; P > 0 \\ \text{tq } \begin{bmatrix} -P(A - \mu I) - (A - \mu I)^T \cdot P & ; & C^T - PB \\ C - B^T P & ; & D + D^T \end{bmatrix} \geq 0 \end{array} \right. \quad (I.40)$$

I.5.7.3 - Propriétés fondamentales des systèmes hyperstables

Les définitions et théorèmes précédents ne confèrent pas, à première vue, un caractère très pragmatique à la théorie de l'hyperstabilité.

La puissance de cette méthodologie provient de la proposition suivante d'expression très simple.

Propriété fondamentale des blocs hyperstables :

TOUTE COMBINAISON EN PARALLELE (cf. Fig. I.10 - a) OU EN CONTRE-REACTION (cf. Fig. I.10-b) DE BLOCS HYPERSTABLES EST HYPERSTABLE.

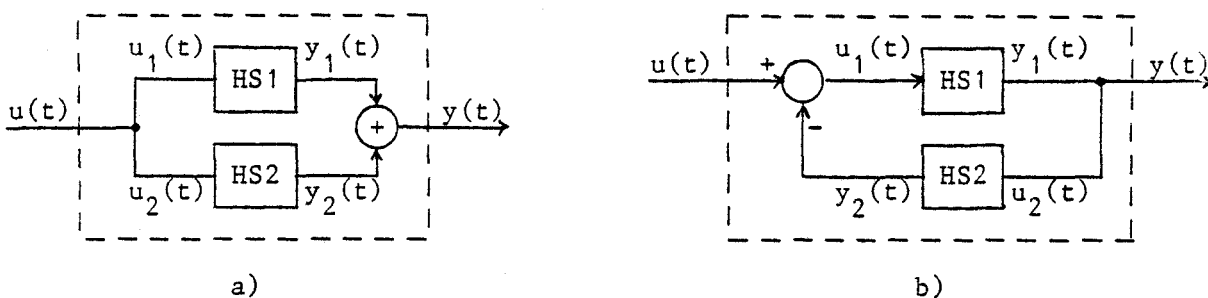


FIGURE I.10

L'analyse de la stabilité d'un système non linéaire provient alors directement de ces propriétés en suivant la démarche suivante :

- 1) On décompose le système étudié en blocs élémentaires arrangés en parallèle ou en contre-réaction.
- 2) On caractérise l'hyperstabilité (asymptotique) des blocs linéaires.
- 3) On vérifie que les blocs non linéaires satisfont l'inégalité de Popov.

Les propriétés de stabilité du système global sont alors issues de ses propriétés d'hyperstabilité.

Comme dans le cas des méthodes issues du théorème de Lyapunov et de l'utilisation de normes vectorielles, cette dernière démarche doit être envisagée de manière critique quant à sa mise en œuvre.

En effet, la démarche précédente donne des conditions suffisantes de stabilité issues en dernière analyse du choix de la décomposition d'un système à étudier en blocs élémentaires.

Dans le quatrième chapitre de ce mémoire, nous proposons de préciser cette heuristique de décomposition à partir des structures remarquables de systèmes non linéaires définies dans le second chapitre.

De cette manière, l'utilisation de la méthodologie précédente en trois points peut être abordée dans une optique de synthèse pour une grande classe de processus en temps continu.

Après avoir établi (§ I.3) un lien entre la synthèse d'asservissement et la propriété de stabilité, nous avons défini (§ I.4) cette propriété et rappelé (§ I.5) les principales méthodologies d'étude de la stabilité.

Nous proposons maintenant de dégager les lignes directrices d'une méthodologie de synthèse à partir d'une revue bibliographique.

I.6 - SYNTHÈSE DE SYSTÈMES ASSERVIS : MÉTHODES ET PRINCIPES

La conception d'asservissements est une opération créative dont la base de connaissances devrait, en toute rigueur, intégrer tout le savoir faire élaboré dans la modélisation et l'analyse des processus.

Dans cette section, nous proposons de passer en revue un ensemble significatif de méthodes liées au problème de la conception de lois de commande de systèmes dynamiques.

Les spécifications sous jacentes à un problème de synthèse sont aussi proches que possible de la réalité et on peut les résumer par la liste suivante (S1), (S2), (S3) :

- (S1) Le modèle mathématique associé au processus pour l'étude de synthèse ne donne qu'une approximation du comportement de celui-ci. Il conviendra donc de valider la loi de commande obtenue par utilisation d'un modèle pour une large classe de modèles dont le comportement entrée/sortie est voisin du modèle qui a présidé à la synthèse.

(S2) On spécifie (cf Notations (I.18)) :

- les vecteurs d'entrées de commande ($u^c(t)$) et de perturbation ($u^p(t)$) ainsi que les domaines auxquels ils appartiennent respectivement (spécifications des saturations, par exemple).
- un vecteur de sortie $y(t)$ comprenant les sorties contrôlées $y^c(t)$ et les sorties non contrôlées.

En particulier, l'application d'une loi de commande par retour d'état nécessite en général un estimateur d'état dynamique chargé de reconstruire l'état du processus à partir de ses sorties. On est ainsi amené à considérer cet estimateur comme partie de la loi de commande.

(S3) La structure d'un processus définie comme l'interconnection d'un ensemble de sous-processus peut être telle que l'échange d'informations entre les sous-processus soit difficile (songeons par exemple au réseau européen d'énergie électrique).

Dans ce cas, on sera amené à imposer une **structure** de commande **décentralisée**. Cette structure correspond à définir, pour chaque sous-système, une loi de commande élaborée à partir des seules informations disponibles sur ce sous-système.

A l'inverse, quand on peut élaborer les lois de commande de tous les sous-systèmes à partir de la totalité des mesures disponibles sur le processus, on parlera de **commande centralisée**.

Les spécifications qui définissent l'objectif de l'asservissement peuvent être scindées en deux niveaux (N1), (N2) :

(N1) Un premier problème consiste à assigner des trajectoires nominales aux sorties de l'asservissement comme par exemple dans le problème de régulation.

La trajectoire nominale est généralement explicitée sous la forme d'une entrée de référence $r(t)$ ($\dim(r(t)) = \dim(y^c(t))$) ou d'une classe d'entrées de références.

(N2) Lorsqu'une classe de solutions a pu être dégagée pour le premier niveau, un deuxième problème consiste alors à préciser la solution cherchée par des spécifications de type dynamique.

La stabilité [asymptotique] de la trajectoire nominale constitue alors une exigence minimale.

Par ailleurs, on peut souhaiter minimiser des critères tels que le temps de réponse (dûment spécifié) ou contraindre le taux de dépassement transitoire en dessous d'une valeur donnée ou bien même juger la courbe résultant de la simulation de l'écart entre la trajectoire nominale et la trajectoire dans des conditions données.

Notre exposé envisage successivement les références qui traitent de ces deux questions (N1) (N2).

Ces références concernent essentiellement les modèles linéaires stationnaires de processus et nous concluerons chaque partie en notant l'extension de ces méthodes au cas des processus non linéaires.

Enfin, nous dégagerons les grands traits communs aux méthodes de synthèse en conclusion.

I.6.1 - Méthodes de synthèse relatives à un comportement entrée → sortie Structure d'une loi de commande

Dans cette étape, la loi de commande doit être telle que la sortie $y(t)$ d'un processus poursuive sans erreur permanente une classe spécifiée d'entrées de référence $r(t)$ et ceci indépendamment de l'action d'entrées de perturbation précisées par ailleurs.

Dans la cadre des modèles linéaires de procédé, le schéma unificateur de cette classe de méthode est le principe du modèle interne /Francis & Wonham, 1976/.

Ce principe est applicable dans la configuration suivante (Fig. I.11) :

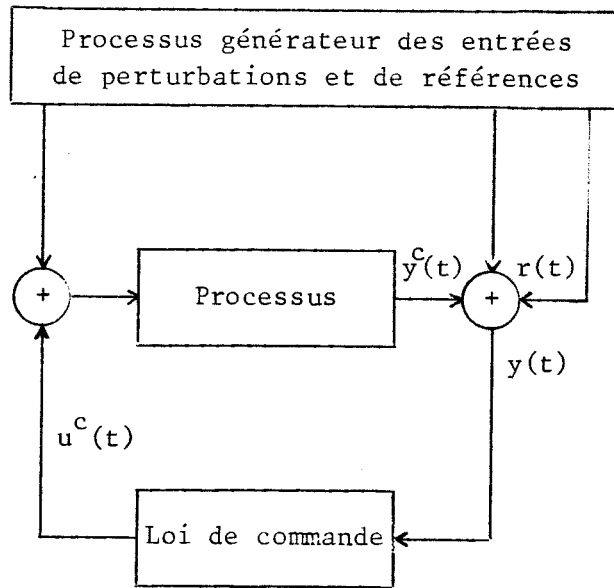


FIGURE I.11

Les équations d'état correspondantes sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^p = A^p x^p(t) + B_1^p x^r(t) + B_2^p u^c(t) \\ \dot{x}^r = A^r x^r(t) \\ y^c(t) = C_1^p x^p(t) + C_2^p x^r(t) \\ y(t) = C_3^p x^p(t) + C_4^p x^r(t) \\ \dot{x}^c = A^c x^c(t) + B^c y(t) \\ u^c(t) = C^c x^c(t) + D^c y(t) \end{array} \right. \quad (I.41)$$

$x^r(t)$ est l'état d'un processus générateur des entrées de référence ($r(t)$) et de perturbation

$y^c(t)$ est le vecteur composé de l'ensemble des variables à contrôler

$y(t)$ est le vecteur de sortie du processus perturbé par les entrées (cf Fig. I.11)

$u^c(t)$ est l'entrée de commande générée à partir de $y(t)$ par un compensateur linéaire (A^c, B^c, C^c, D^c).

Le résultat essentiel est le suivant :

- Poursuite :

Le correcteur (A^C, B^C, C^C, D^C) assure l'objectif de poursuite :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y^C(t) - r(t)) = 0$$

si : - $\exists Q \quad t_q \quad y^C(t) = Q.y(t)$

- le correcteur contient un modèle du processus générateur de $x^r(t)$ qui est contrôlable par $y(t)$ et observable par $u^C(t)$.

- Robustesse :

Si le correcteur a été calculé pour des matrices (A^P, B_2^P) du processus, il existe un voisinage V de (A^P, B_2^P) tel que tout processus décrit par $(A^{P'}, B_2^{P'}) \in V$ et contrôlé par la même loi de commande satisfait l'objectif de régulation.

△△△

Ce principe est à priori peu contraignant. En particulier, il a permis de mettre en évidence des méthodes de synthèse de commande décentralisée /Corfmat & Morse, 1976/ /Davison, 1976-a,b/ /Ramakrishna & Viswanadham, 1982/.

La généralisation de cette méthode au cas non linéaire est en germe dans les travaux de Francis et Wonham /Francis & al, 1976/ où la robustesse de l'asservissement vis à vis de la transformation du processus initial (I.41) en un processus non linéaire (I.42) est abordée de manière locale par la premier théorème de Lyapunov.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^P = A^P x^P + f^P(x^P) + B_1^P x^r(t) + B_2^P u^C(t) \\ \lim_{\|x^P\| \rightarrow 0} (\|f^P(x^P)\| / \|x^P\|) = 0 \\ \|x^P\| \rightarrow 0 \end{array} \right. \quad (I.42)$$

Une généralisation plus globale peut être trouvée dans /Doraiswami, 1981/. Le processus envisagé est de type Lur'e Postnikov avec des non linéarités stationnaires. Cet auteur propose une méthode de synthèse de commande décentralisée sous réserve que les signaux définis comme la sortie des non linéarités soumises aux entrées de référence et/ou de perturbation soient rationnels.

Dans le cas des systèmes de Lur'e Postnikov soumis à des entrées de référence et de perturbations constantes, l'étude de Grujić et Porter /Porter & Grujić, 1980/ /Grujić, 1982, 1983 (a à d)/ étend très largement les travaux du linéaire en utilisant la notion de stabilité absolue. On trouvera aussi dans la deuxième partie de ce mémoire (§ II.1.1) une autre interprétation de ce problème.

I.6.2 - Méthodes de synthèse relatives aux comportements dynamiques de l'asservissement

Dans cette classe de méthodes, on suppose que le problème de commande a pu être ramené à un problème de stabilité d'une famille de trajectoires nominales. On étudie ainsi la convergence vers l'origine de l'espace d'état de l'écart entre les trajectoires possibles de l'asservissement et l'une des trajectoires nominales.

La structure de la loi de commande étant supposée choisie de manière à répondre au premier niveau de spécification, on est amené à préciser numériquement les éléments laissés libres à l'intérieur de celle-ci de manière à stabiliser l'asservissement.

Les méthodes de synthèse du premier niveau (I.6.1) ont été développées de manière à définir une solution satisfaisant cette contrainte minimale de stabilité /Sébakhy & Wonham, 1976/ /Davison & Özgüner, 1982/.

Dans le cas multivariable, on doit noter qu'on introduit souvent le découplage ou le quasi-découplage comme une spécification du système asservi. Cette condition précise qu'une entrée de référence affecte une sortie contrôlée et n'affecte que peu ou pas du tout les autres sorties contrôlées.

L'introduction du découplage dans une étude de synthèse d'asservissement consiste à ramener le problème global à celui de la synthèse de tous les sous-systèmes non connectés puis de vérifier à posteriori que les interconnexions sont suffisamment faibles pour que la stabilité de tous les sous-systèmes implique celle de l'asservissement entier qui est qualifié alors de diagonalement dominant.

/Šiljak & Vukčević, 1976/ proposent une méthode de ce type dans le cas linéaire. La notion de système diagonalement dominant est détaillée dans /Araki, 1978/ dans le cadre des systèmes linéaires ou non, décrits par des représentations d'état et/ou des relations entrée/sortie.

La notion de système diagonalement dominant permet également une synthèse fréquentielle des systèmes multivariables /Rosenbrock, 1974/.

Nous proposons à ce niveau, de présenter les méthodes fréquentielles qui tiennent une place particulière dans les méthodologies de synthèse. Nous aborderons ensuite le traitement de spécifications plus précises que celles que nous avons considérées jusqu'à présent (stabilité asymptotique & découplage).

1.6.2.1 - Méthodes fréquentielles de synthèse

Ces méthodes ne prennent en compte que l'aspect dynamique de la synthèse, en considérant que la structure de la loi de commande a été définie en amont de l'étude.

Le champ typique d'application de ces méthodes est naturellement la classe des systèmes linéaires stationnaires en temps continu, mais elle peut être étendue à la classe des systèmes non linéaires de type Lur'e Postnikov. La transformation homographique permet d'étendre l'application de ces méthodes à des systèmes en temps discret.

Le théorème central de stabilité sous jacent à ce type de synthèse est le critère de Nyquist auquel on ajoute des marges de stabilité telles que la marge de gain, la marge de phase et une limitation du facteur de résonance (nous laissons de côté les notions de fréquences de résonance et de coupure qui ne sont pas fondamentales dans cet exposé).

Afin de montrer l'originalité de la méthodologie employée par rapport à la simple connaissance du critère de Nyquist, nous proposons d'abord de détailler la méthode de l'abaque de Black usuellement appliquée aux systèmes monovariabiles linéaires stationnaires.

I.6.2.1.1 - Méthode de synthèse par utilisation de l'abaque de Black :

La configuration typique envisagée pour la loi de commande est la suivante :

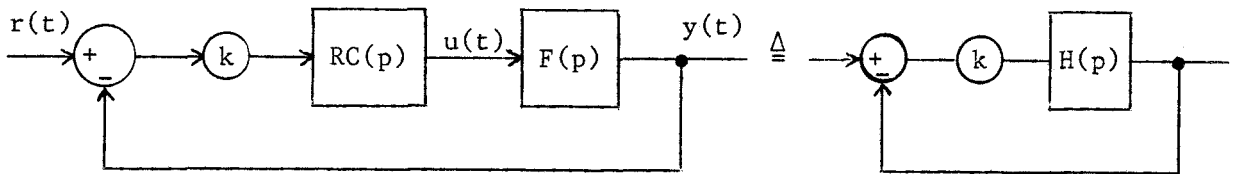


FIGURE I.12

$F(p)$ représente le processus connu par son lieu de transfert, $k.RC(p)$ est la fonction de transfert de la loi de commande à spécifier, $RC(p)$ est construit à partir d'une base de réseaux correcteurs classiques dont les fonctions de transfert sont normalisées, k permet d'ajuster le gain scalaire de la chaîne d'action.

L'abaque de Black permet, à partir de la donnée d'un nombre complexe z décrit dans les coordonnées de Black, de lire le gain et la phase de $z / (1+z)$ dans un système de coordonnées curvilignes (cf Fig. I.13).

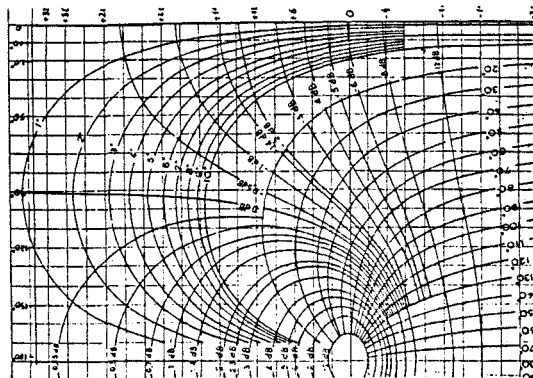


FIGURE I.13

Ainsi, le tracé du lieu de Black de $H(p)$ permet en surimposant une abaque en papier calque, d'estimer d'un coup d'œil la valeur du facteur de résonance, la marge de gain et la marge de phase.

Nous proposons maintenant de montrer que l'utilisation de cette technique comme outil de synthèse est essentiellement liée à l'usage des coordonnées de Black.

Considérons en effet l'introduction d'un réseau correcteur $RC(p)$. Le lieu de Black de $RC(p).F(p)$ est aisément construit à partir des lieux de Bode de $RC(p)$ et de $F(p)$:

$$\begin{aligned} & \{\text{Lieu de Black de } RC(p).F(p)\} \\ & \quad \uparrow \\ & \{\text{Lieux de Bode de } RC(p).F(p)\} = \qquad \qquad \qquad (I.43) \\ & = \{\text{Lieux de Bode de } RC(p)\} + \{\text{Lieux de Bode de } F(p)\} \end{aligned}$$

A l'inverse, à partir d'une base de connaissance contenant les différents réseaux correcteurs classiques, leurs propriétés qualitatives et leurs lieux asymptotiques de Bode, il est relativement aisé d'imaginer la forme du lieu de Bode du réseau correcteur $RC(p)$ à implanter pour transformer le lieu de Black initial (celui de $F(p)$) en un lieu de Black souhaité (celui de $k.RC(p).F(p)$) : il suffit en effet d'effectuer mentalement une soustraction de lieux de Bode et de rapprocher la forme obtenue de celles des réseaux correcteurs connus. On a ainsi un guide qui permet de proposer des réseaux correcteurs réalistes.

En conclusion, l'efficacité de la méthode de synthèse utilisant l'abaque de Black provient d'une bonne définition graphique des contraintes de stabilité et de la simplicité de la transformation (I.43) qui permet de passer du système "initial" au système corrigé.

On notera de même que la synthèse du gain k de la chaîne d'action est immédiate. Cette méthode, comme l'ensemble des méthodes fréquentielles, donne une intuition graphique des transformations à apporter à un processus. La version plus britannique de cette méthode est celle du lieu de Nyquist inverse qui donne aussi une base graphique à l'intuition du concepteur.

I.6.2.1.2 - Méthode du lieu de Nyquist inverse :

Considérons la configuration classique d'asservissements :

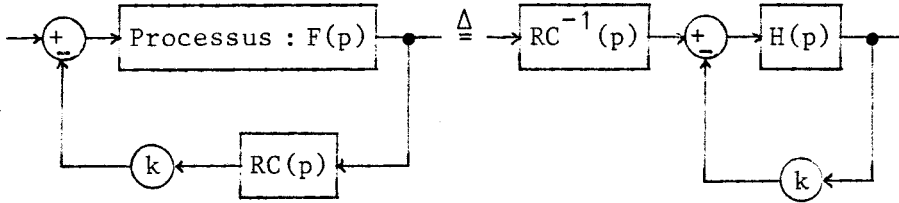


FIGURE I.14

Définissons :

$$H(p) = F(p) \cdot RC(p)$$

$$G(p) = (1 + k F(p) \cdot RC(p))^{-1} \cdot F(p) \cdot RC(p)$$

$$\hat{F}(p) = F^{-1}(p)$$

$$\hat{G}(p) = G^{-1}(p)$$

$$\hat{H}(p) = H^{-1}(p)$$

on a :

$$\hat{G}(p) = \hat{F}(p) + k \cdot RC(p) \quad (I.44)$$

La simplicité de la relation (I.44) reliant les fonctions de transfert inverse en boucle ouverte et en boucle fermée permet la synthèse du réseau correcteur $k \cdot RC(p)$.

Ainsi, lorsque le seul gain k fait l'objet de la synthèse, il doit être choisi tel que le nombre d'encerclements du point $(-k)$ par le lieu de Nyquist inverse de $H(p)$ (i.e. le lieu de Nyquist de $\hat{H}(p)$) assure la stabilité du système (I.44) par le théorème de Nyquist.

Une base de connaissance similaire à celle nécessaire à la synthèse par abaque de Black permet l'implémentation de réseaux correcteurs classiques.

L'essence de cette méthode repose, encore une fois, sur la simplicité de la transformation {boucle ouverte \rightarrow boucle fermée} (I.44). A l'inverse de la méthode de Black, la définition de critères concernant le facteur de résonance (lié au caractère oscillatoire des trajectoires

du processus) et la pulsation de coupure (liée au temps de réponse) est mal-aisée.

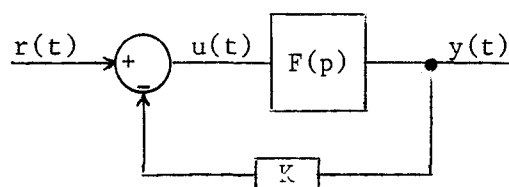
Par contre, on peut généraliser dans le cadre des systèmes multivariables, l'utilisation des lieux de Nyquist inverses

I.6.2.1.3 - Généralisation de la méthode du lieu de Nyquist inverse aux systèmes multivariables
/Rosenbrock, 1974/ /Edmunds, 1979/
/Mac Farlane, 1979/ :

Cette méthode s'appuie sur la connaissance de la méthode correspondante aux systèmes monovariables. Le principe de la synthèse consiste alors à remarquer que l'on sait faire la synthèse d'un système diagonal composé de la mise en parallèle de systèmes monovariables.

D'un point de vue pratique, on peut étendre cette interprétation aux systèmes diagonalement dominants. La synthèse consiste alors à définir un pré-compensateur et un post-compensateur qui transforment le système initial en système diagonalement dominant /Rosenbrock, 1974/ puis de faire la synthèse de chaque boucle du système diagonal associé.

La configuration typique d'asservissements étudiée par cette méthode est la suivante :



$$\dim(r(t)) = \dim(y(t)) \quad K = \text{Diag}(k_i)$$

FIGURE I.15

Dans cette configuration, toutes les parties dynamiques sont représentées dans la chaîne directe (en particulier les compensateurs qui rendent $F(p)$ diagonalement dominant).

La robustesse de la commande est définie par la plage de variation admissible des gains k_i (on peut en particulier s'assurer de la stabilité de l'asservissement lorsqu'une des boucles est ouverte par accident).

Une matrice de transfert $F(p)$ de dimension $m \times m$ est diagonalement dominante si l'une ou l'autre des relations suivantes (I.45) est satisfaite :

Soit \mathcal{D} un contour de Nyquist pour la fonction $\hat{F}(p) \triangleq F^{-1}(p)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall p \in \mathcal{D} \\ \forall i = 1, \dots, m \quad |\hat{F}_{ii}(p)| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |\hat{F}_{ij}(p)| > 0 \\ \text{ou} \\ \forall i = 1, \dots, m \quad |\hat{F}_{ii}(p)| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |\hat{F}_{ji}(p)| > 0 \end{array} \right. \quad (\text{I.45})$$

On peut tester cette propriété graphiquement à partir des bandes de Gershgorin définies comme l'enveloppe de la famille de cercles de centre $\hat{F}_{ii}(p)$ et de rayon $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |\hat{F}_{ij}(p)|$ (ou $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |\hat{F}_{ji}(p)|$) lorsque p balaye le contour \mathcal{D} (cf Fig. I.16, /Rosenbrock, 1974/).

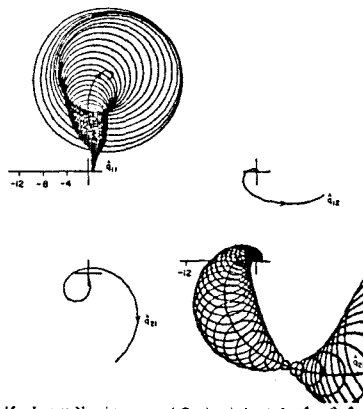


FIG. 3.15. Inverse Nyquist array and Gershgorin bands for $\hat{Q} = K_s G$, where G is given by Fig. 3.14 and K_s by equation (7.8).

FIGURE I.16

Si, pour tout i , ces bandes excluent l'origine du plan complexe, alors le système est diagonalement dominant.

L'utilisation des bandes de Gershgorin, de la même manière que les lieux de Nyquist inverse dans le cas monovarié, constitue le support graphique de mise en œuvre de cette méthode de synthèse. Il convient toutefois de remarquer que les conditions de stabilité obtenues de cette manière sont seulement **suffisantes** et peuvent donc être restrictives vis à vis des propriétés intrinsèques de stabilité du processus. Par contre, ces conditions suffisantes sont explicites graphiquement et constituent un guide pour la synthèse.

Pour compléter ce résumé, on doit citer la notion de bandes d'Ostrowski /Rosenbrock, 1974/ permettant, dans le cas des systèmes diagonalement dominants, de mieux apprécier les propriétés intrinsèques de l'asservissement.

Dans le paragraphe suivant, nous proposons d'explicitier les généralisations des méthodes précédentes permettant de les appliquer aux processus non linéaires.

I.6.2.1.4 - Extension au cas non linéaire des méthodes fréquentielles :

Les techniques précédentes ont été développées en prenant en compte la structure suivante :

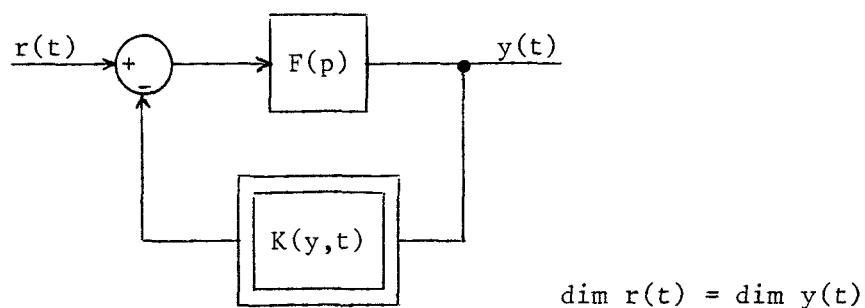


FIGURE I.17

$K(y,t)$ est une matrice d'applications non linéaires.

Dans le cas de non linéarités stationnaires, des extensions de la méthode du premier harmonique ont été proposées /Gray & Taylor, 1979/ /Gray & Janabi, 1976/.

En dehors du fait que les résultats issus de la méthode du premier harmonique n'ont qu'une valeur qualitative, un inconvénient majeur de ces méthodes réside dans la complexité des diagrammes qui servent de support à la synthèse. Cette complexité laisse planer un doute quant à l'utilisation de ces diagrammes comme support à l'intuition.

Enfin, en présence de non linéarités quelconques $K(y,t)$, l'utilisation du critère de cercle permet /Rosenbrock, 1973/ une généralisation aisée des méthodes fréquentielles multivariables. Le critère du cercle généralise alors le critère de Nyquist utilisé dans la synthèse de systèmes multivariables linéaires par une approche fréquentielle.

I.6.2.1.5 - Conclusion relative aux méthodes fréquentielles de synthèse :

Dans ces techniques, les spécifications et les caractéristiques du système sont décrites sous forme graphique. Ceci permet de donner une base concrète à l'intuition du concepteur. Un problème multivariable est ramené à un ensemble de problèmes monovariables en utilisant la notion de système diagonalement dominant.

Enfin, la synthèse monovariable est facilitée par la simplicité des relations permettant de tracer les caractéristiques d'un asservissement proposé à partir de celles du système initial.

I.6.3 - Méthodes de synthèse relatives à des spécifications complémentaires

Le critère essentiel considéré jusqu'à présent est celui de la stabilité asymptotique des trajectoires nominales de l'asservissement. Le critère constitue à l'évidence une exigence minimale.

La notion de découplage introduite dans le cas multivariable est un artifice pratique pour mener à bien cette étude de stabilité.

Les spécifications d'une synthèse d'asservissement sont en général plus nombreuses. Celles ci peuvent être d'ordre graphique (propriétés des réponses temporelles ou fréquentielles de l'asservissement) ou numérique (minimisation d'une fonctionnelle, localisation de pôles), ou même concerner la structure de l'asservissement (décentralisation d'un ensemble de sous-systèmes).

Le choix des critères de spécification est un point essentiel dans la conception. Néanmoins, nous ne développerons pas ce point dans la mesure où il est intrinsèque à chaque étude pratique.

Nous proposons plus modestement de passer en revue quelques critères fréquemment rencontrés dans les problèmes de synthèse.

I.6.3.1 - Localisation de pôles d'un système linéaire

Cette démarche diffère de la détermination analytique d'une loi de commande par placement de pôles, dans la mesure où on restreint la recherche des lois de commande à des structures plus simples que celles conduisant au placement de pôles (estimateur + retour d'état).

Dans ce cas, la structure de loi de commande étant proposée à priori, la synthèse consiste à déterminer une valeur \hat{p} du vecteur $p \in \mathbb{R}^{np}$ de gains ajustables dans la structure, telle que les pôles de l'asservissement appartiennent à un domaine \mathcal{D} fixé du plan complexe.

Dans ce cadre, on peut citer /Sirisena & Choi, 1975/. Ces auteurs spécifient un domaine admissible du plan complexe gauche sous la forme analytique suivante :

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} ; \sigma + j\omega \stackrel{\Delta}{=} z ; h(\sigma, \omega) \leq 0 ; h \text{ de classe } C_1\}$$

Pour une valeur donnée p_i des gains ajustables, ils calculent le critère suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(p_i) = \sum h(\sigma_{ij}, \omega_{ij} ; \lambda_{ij} \stackrel{\Delta}{=} \sigma_{ij} + j\omega_{ij}) \\ \text{la sommation s'effectue sur les pôles } \lambda_{ij} \text{ de l'asservissement} \\ \text{qui n'appartiennent pas à } \mathcal{D} \end{array} \right.$$

Par utilisation de la sensibilité des valeurs propres d'une matrice par rapport à ses coefficients, ils proposent alors de définir une direction de plus grande pente dans l'espace \mathbb{R}^{np} des paramètres ajustables de manière à minimiser le critère $J(p)$ par un algorithme de type gradient.

Cette méthode ne fournit pas obligatoirement une solution pour un choix quelconque de structure mais elle est avantageuse lorsque le vecteur p de gains ajustables est de grande dimension.

Dans un esprit différent, la localisation des pôles d'un asservissement linéaire en temps discret a été proposée par /Ackermann, 1981/. L'auteur propose alors de définir une approximation sous forme polyédrique des domaines dans l'espace des paramètres correspondants à des localisations judicieuses des pôles.

I.6.3.2 - Critères de types fonctionnels

Ces critères sont issus de la théorie de la commande optimale et le plus usuel est le critère quadratique suivant :

$$J = \int_{t_0}^{\infty} x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) dt \quad Q \geq 0 ; R > 0 \quad (I.46)$$

On sait qu'il existe une solution centralisée de type retour d'état au problème de commande optimale associée à J . Par contre :

- cette solution n'est pas toujours acceptable et on est parfois conduit à contraindre la complexité de la structure de la loi de commande,

- les matrices Q et R intervenant dans le critère n'ont pas toujours de signification physique précise et constituent elles-mêmes des paramètres ajustables dans la loi de commande.

/Geromel & Bernussou, 1979/ envisagent une commande optimale relative à un critère quadratique (I.46) pour un système composé de l'interconnexion de sous-systèmes où les seules rétro-actions autorisées le sont au niveau de chacun des sous-systèmes.

Avec cette contrainte, il n'existe pas de solution analytique au problème posé et les auteurs proposent de résoudre le problème par une méthode itérative de type gradient. Cette approche est reprise et généralisée dans /Guardabasi & al, 1981, 1982/ /Locatelli & al, 1981/ /Maffezzoni & Parigi, 1979/.

Le critère proposé par ces auteurs est de type quadratique et incorpore un terme contenant l'erreur (sortie contrôlée - entrée de référence) ainsi qu'un autre dépendant de la dérivée de la loi de commande qui concernent tous deux des spécifications pratiques.

La structure de la loi de commande peut être choisie arbitrairement. Les auteurs proposent un système complet de C.A.O. permettant une optimisation du critère dans l'espace des paramètres ajustables en explicitant, encore une fois, le calcul du gradient du critère. Ce logiciel permet à priori de traiter tous les problèmes linéaires correspondant au choix à priori d'une fonctionnelle quadratique ainsi que d'une structure arbitraire de la loi de commande.

L'utilisation fréquente, dans un processus de synthèse, de minimisations basées sur l'utilisation de gradients a, par ailleurs, motivé des travaux concernant la structure d'un logiciel suffisamment souple pour traiter par ce biais de nombreux problèmes de synthèse /Höffler, 1981/.

Dans une optique distincte, la commande optimale avec critère quadratique a été abordée du point de vue de la robustesse de l'asservissement constitué vis à vis de perturbations dans les paramètres des matrices qui décrivent le processus linéaire envisagé et/ou de perturbations intervenant dans les rétro-actions /Wong & Athans, 1977/ /Savonov & Athans, 1977/ /Bourles & Mercier, 1982/.

En dehors de la mise en parallèle des propriétés de robustesse de la commande linéaire quadratique, avec les notions classiques de marges de gain et de phase, on a pu mettre en évidence le lien existant entre les domaines de stabilité dans l'espace des perturbations admissibles et le choix des matrices de pondérations Q et R (I.46) /Wong & al, 1978/.

Cette dernière caractérisation permet, en conséquence, à partir de la donnée d'un ensemble admissible de perturbations, de fixer des matrices Q et R (I.46) fixant la loi de commande optimale.

Dans la même lignée, la commande optimale à critère quadratique a pu être utilisée /Moreigne, 1982/ comme un outil permettant la localisation de pôles d'un système multivariable en utilisant les matrices de pondération Q et R (I.46) comme des paramètres et en utilisant une technique de gradient voisine de celle développée dans /Sirisena & Choi, 1975/.

Dans le cas des systèmes non linéaires, /Savonov & Athans, 1977/ ont envisagé les systèmes de Lur'e Postnikov comme des systèmes linéaires soumis à des perturbations dans leurs organes de commande. Les résultats de robustesse obtenus valident ainsi la commande optimale avec critère quadratique pour ce type de processus.

D'un point de vue moins général, /Taniguchi & Yamashita, 1980/ valident la commande optimale à critère quadratique dans le cas d'une équation d'état non linéaire du second ordre en exprimant la stabilité de la trajectoire nominale du processus étudié par une fonction de Lyapunov de type quadratique plus intégrale /Lur'e, 1951/ construite à partir des équations d'optimalité et des caractéristiques non linéaires du processus.

I.6.4 - Quelques réflexions méthodologiques concernant la synthèse de systèmes asservis

I.6.4.1 - Structure et gains ajustables

Les données initiales d'un problème de synthèse d'asservissement spécifient généralement les trajectoires nominales souhaitées pour la sortie du système ainsi que la liste des entrées de commande et des sorties mesurables sur le processus.

Ce cahier des charges permet alors de chercher une partie de la structure de la loi de commande qui permette d'obtenir la trajectoire nominale souhaitée (en appliquant le principe du modèle interne par exemple).

Un autre élément fixant la structure de la loi de commande est constitué par les informations disponibles sur le processus ainsi que la spécification du réseau d'informations (les sorties d'un sous-système peuvent-elles être raisonnablement transmises à un autre sous-système ?).

A la fin de cette phase de synthèse, le problème initial de commande est ramené à un problème dynamique de stabilité d'une trajectoire nominale.

Dans la structure à contre-réaction envisagée alors sont explicitées les entrées et les sorties accessibles sur le processus ainsi que certains éléments de la structure de la loi de commande. La deuxième phase de synthèse consiste à expliciter numériquement les gains (scalaires ou opérationnels) qui ne sont pas encore spécifiés à ce niveau.

I.6.4.2 - Expression d'un ou plusieurs critères de synthèse

Cette étape permet de spécifier finement le comportement attendu de l'asservissement au-delà de l'exigence minimale de stabilité asymptotique de la trajectoire nominale.

Le choix d'un critère doit s'établir selon un compromis entre les spécificités pratiques du problème traité et la base de connaissance du concepteur qui lui permet d'exprimer concrètement le critère choisi en fonction du modèle mathématique retenu pour décrire le processus.

I.6.4.3 - Analyse, synthèse, conception

En reprenant les définitions de /Rosenbrock, 1974/, l'**analyse** d'un asservissement correspond à l'évaluation d'un critère donné lorsque l'asservissement est complètement spécifié.

La **synthèse** et/ou la **conception** d'asservissements est alors l'opération inverse où il s'agit de constituer un asservissement de manière à ce qu'un ou plusieurs critères satisfassent des propriétés données.

Notons qu'il existe des problèmes suffisamment bien définis pour n'admettre qu'une solution comme dans le cas de la commande optimale à critère quadratique sans contraintes sur la structure de la loi de

commande. Mais, en général, les problèmes d'asservissement sont spécifiés de manière assez floue. Dans ce cas, la prise en compte de contraintes supplémentaires à celles exprimées dans le cahier des charges initial est un moyen pour obtenir **une** solution au problème. La modification des contraintes supplémentaires permet ainsi de balayer différents types de solutions.

Après avoir marqué la distinction entre l'analyse et la synthèse d'un asservissement, nous proposons de mettre en évidence le lien qui les unit. Il convient en effet de remarquer qu'une loi de commande issue d'un processus de synthèse doit, en dernière instance, être validée par un théorème d'analyse. Cette remarque nous permet dans la suite, de proposer un schéma général pour les études de synthèse.

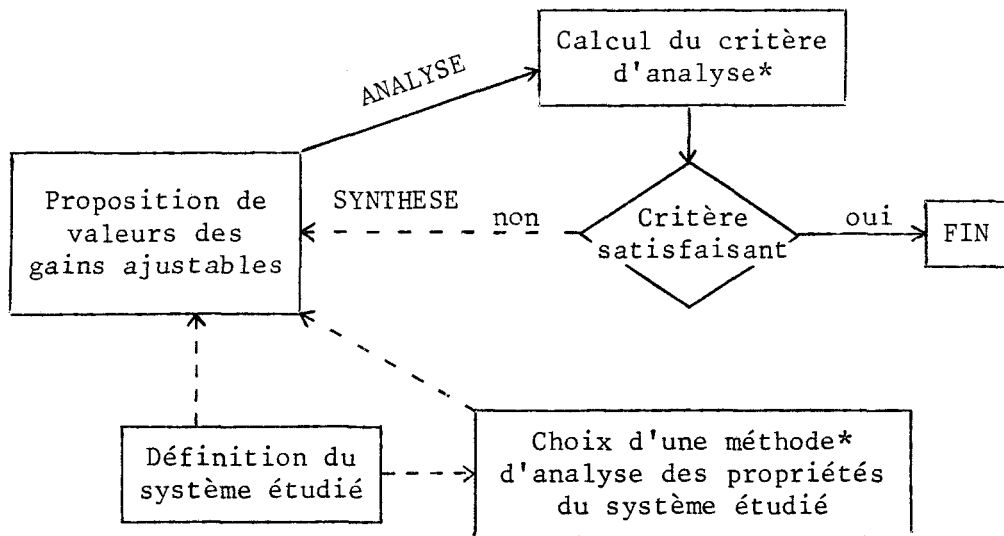
I.6.4.4 - Schéma général d'une étude de synthèse /
Spécificités d'un critère d'analyse utilisable dans
une méthode de synthèse

Considérons un asservissement $A(p)$ où p est un descripteur des paramètres de la loi de commande qui fait l'objet de la synthèse. On suppose à priori que $A(p)$ est représenté par un processus évoluant en régime libre, la synthèse consiste alors à affecter une valeur \hat{p} au descripteur p , de manière à garantir la stabilité asymptotique de l'origine des trajectoires de $A(\hat{p})$ et à satisfaire des critères additionnels tels que la localisation des pôles de l'asservissement où la minimisation d'une fonctionnelle donnée. L'évaluation de ces paramètres pour l'asservissement $A(\hat{p})$ est essentiellement une étude d'analyse.

On peut donc énoncer la règle suivante :

La synthèse d'asservissement est, de manière intrinsèque, itérative et/ou interactive.

et le processus de synthèse peut être représenté par le synoptique suivant (Fig. I.8) :



* D'un point de vue terminologique, on distingue la **méthode d'analyse** (généralement un théorème) du **critère d'analyse** qui est un résultat évalué en appliquant la méthode d'analyse au système. Par exemple, le couple (marge de gain, marge de phase) est un critère déduit de l'application de la méthode de Nyquist à un système linéaire monovariante.

FIGURE I.18

Dans ce schéma, les flèches en trait plein correspondent aux phases d'analyse que l'on peut facilement mettre en œuvre. Par contre, les flèches en trait discontinu correspondent à une prise de décision qui consiste à proposer, en fonction des résultats déduits lors d'analyses précédentes, une nouvelle valeur des gains ajustables qui tend à améliorer la valeur du critère calculé lors de la phase d'analyse ultérieure.

Cette dernière opération est difficilement automatisable et doit, en général, faire intervenir un concepteur dont la base de **connaissance** est plus étendue que celle des systèmes numériques actuels.

Pour autoriser cette interactivité, toute méthode d'analyse doit fournir les résultats suivants :

- un critère graphique ou numérique caractérisant les propriétés du système,
- un guide permettant de proposer un nouveau réglage des paramètres ajustables allant dans le sens d'une amélioration du critère graphique ou numérique calculé au pas précédent.

Pour bien marquer ce point, considérons le cas trivial des processus linéaires stationnaires rationnels monovariabiles.

Les méthodes de Nyquist et de Routh sont complètement équivalentes dans leurs résultats d'analyse de la stabilité asymptotique d'un système. Néanmoins, le critère issu de la méthode de Nyquist est fréquemment utilisé en synthèse et celui de la méthode de Routh l'est très rarement. /Fortman, 1973/ constitue en ce sens une exception.

En effet, l'analyse des changements de signe des éléments de la première colonne du tableau de Routh ne donne aucune indication pour améliorer les propriétés de l'asservissement, c'est-à-dire pour que les éléments de cette première colonne soient tous de même signe.

A l'inverse, l'examen des lieux de transfert dans le cas des méthodes fréquentielles donne un support concret pour améliorer les caractéristiques du système étudié. De même, le calcul des sensibilités des pôles d'un asservissement permet d'améliorer la localisation des pôles d'un asservissement.

Cette remarque essentielle étant faite, nous proposons maintenant d'envisager le problème de synthèse des systèmes non linéaires pour en dégager les spécificités qui le rendent à priori beaucoup plus délicat que dans le cas généralement envisagé des systèmes linéaires stationnaires.

I.6.4.5 - Spécificités inhérentes au caractère non linéaire des processus à contrôler

Si l'on s'intéresse au problème de la synthèse d'une loi de commande stabilisante, une difficulté majeure apparaît dans l'application de la

procédure précédente (Fig. I.18) à des processus non linéaires. Celle-ci réside essentiellement dans la non unicité des outils d'analyse de la stabilité mais surtout dans la non équivalence de leurs résultats.

A l'inverse des systèmes linéaires stationnaires pour lesquels on dispose à priori d'une condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique, l'analyse d'un même processus non linéaire par un outil ou par un autre, peut conduire à des résultats divers étant donné que les conditions de stabilité obtenues ne sont en général que suffisantes.

Il convient donc, à ce niveau, d'intégrer dans la recherche itérative des paramètres d'une loi de commande, une procédure d'optimisation de la méthode d'analyse de la stabilité conjointement à la procédure d'optimisation des paramètres ajustables de la loi de commande.

Cette "optimisation" du choix de la méthode d'analyse de la stabilité n'a évidemment de sens que dans le cas des systèmes non linéaires et/ou non stationnaires.

D'un point de vue pratique, ce choix ne peut s'opérer qu'à l'intérieur d'un ensemble cohérent de méthodes d'analyse de la stabilité. Dans la suite de ce mémoire, nous proposons la définition de méthodes de synthèse basée sur la théorie de l'hyperstabilité et les méthodes d'analyse de la stabilité déduites des techniques d'agrégation par normes vectorielles.

CONCLUSION

Cette première partie nous a permis de préciser l'optique dans laquelle nous envisageons la synthèse d'asservissement ainsi que la classe de modèles de processus que nous proposons d'étudier.

Nous avons de même rappelé les méthodes d'analyse de stabilité auxquelles nous nous référons dans la suite.

Après avoir défini, à partir d'une revue bibliographique, les principales caractéristiques d'une méthode de synthèse d'asservissement, nous proposons, dans la suite de l'exposé, de développer des méthodes originales de synthèse applicables aux processus étudiés.

ANNEXE I.1

FORMATION D'UN SYSTEME DE COMPARAISON
CALCUL EXPLICITE DE MATRICES PSEUDO-MAJORANTES

Nous rappelons dans cette annexe, les formules qui permettent d'associer, à partir d'un processus non linéaire en régime libre d'équation (A-1.1) et du choix d'une norme vectorielle (A-1.2), un système de comparaison (A-1.3) satisfaisant l'inégalité (A-1.4) le long des trajectoires du système (A-1.1).

Processus :

$$D(x(t)) = A(t, x(t), u^p(t)) \cdot x(t) \quad (A-1.1)$$

$$t \in T = [t_0, +\infty[$$

$$x \in S \subset \mathbb{R}^n$$

$$u^p(t) \subset P \subset \mathbb{R}^e$$

$$x(t_0) = x_0$$

La norme vectorielle :

$$p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^k \quad k \leq n \quad (A-1.2)$$

est définie à partir des règles de constructions suivantes :

- $\{S_i ; i = 1, \dots, k\}$ note un recouvrement de S .
- $\forall x \in S, P_{S_i}(x) \in S_i$ désigne la projection dans S_i de x .
- $\forall i = 1, \dots, k \quad \forall x \in S$
 $p_i(x) = n_i(P_{S_i}(x))$ où n_i note une norme de S_i .

Le système :

$$D(z(t)) = M(p, t, x(t), u^P(t)) \cdot z(t) \quad (A-1.3)$$

$$z(t) \in \mathbb{R}_+^k$$

$$z(t_0) = p(x(t_0))$$

est un système de comparaison du processus (A-1.1) dans le sens où l'inégalité suivante (A-1.4) est satisfaite :

$$\forall t \geq t_0 \quad z(t) \geq p(x(t)) \quad (A-1.4)$$

Nous proposons à ce niveau de distinguer les systèmes en temps continu des systèmes en temps discret pour expliciter la formation des matrices de régime libre du système de comparaison.

Pour chacun des cas, nous rappellerons l'expression des matrices pseudo-majorantes déduites des normes vectorielles usuelles.

1 - Systèmes en temps continu

Dans ce cas, la matrice $M(p, t, x, u^P)$ (A-1.2) est dite **pseudo majorante** et est définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} M(p, t, x, u^P) = \{m_{ij}(t, x, u^P)\} \\ \forall i = 1, \dots, k \\ m_{ii}(t, x, u^P) = \sup_{y \in S} \left\{ \frac{\text{grad}^T (p(P_{S_i}(y))) \cdot P_{S_i}(A(t, x, u^P)) \cdot P_{S_i}(y))}{p_i(y)} \right\} \\ \forall j = 1, \dots, k ; j \neq i \\ m_{ij}(t, x, u^P) = \text{Max} \left\{ 0, \sup_{y \in S} \left\{ \frac{\text{grad}^T (p(P_{S_i}(y))) \cdot P_{S_i}(A(t, x, u^P)) \cdot P_{S_j}(y))}{p_j(y)} \right\} \right\} \end{array} \right. \quad (A-1.5)$$

On peut naturellement définir des matrices pseudo-majorantes M constantes en les définissant à partir des précédentes (A-1.5) par :

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \{m_{ij}\} \\ \forall i = 1, \dots, k \quad \forall j = 1, \dots, k \\ m_{ij} = \sup_{\substack{x \in S \\ t \in T \\ u^p \in P}} \{m_{ij}(t, x, u^p)\} \end{array} \right. \quad (A-1.6)$$

Afin d'illustrer ces définitions, nous proposons maintenant d'expliciter les matrices pseudo-majorantes (A-1.5) dans le cas des normes vectorielles issues des normes usuelles.

Afin d'introduire les méthodes que nous développons, nous considérons dans ces définitions un vecteur état $y(t) \in \mathbb{C}^n$ équivalent à un vecteur état $x(t) \in \mathbb{R}^n$.

Nous considérons un partitionnement du vecteur état $y(t)$ sous la forme suivante (A-1.7)

$$\left\{ \begin{array}{l} y^T(t) = [y_1^T(t) ; y_2^T ; \dots ; y_k^T] \in \mathbb{C}^n \\ \dim(y_i(t)) = k(i) \\ K_i \text{ désigne l'ensemble d'indice associé à } y_i : \\ K_1 = \{1, \dots, k(1)\} \\ K_i = \{1 + \sum_{j=1}^{i-1} (k(j)) ; \dots ; \sum_{j=1}^i (k(j))\} \end{array} \right. \quad (A-1.7)$$

Norme vectorielle déduite de la norme du max :

Elle est définie à partir du partitionnement (A-1.7) par les relations :

$$\forall i = 1, \dots, k \quad p_i(y) = \max_{j \in K_i} \{|y_j| = (y_j \cdot \bar{y}_j)^{1/2}\} \quad (A-1.8)$$

La matrice pseudo-majorante s'exprime alors sous la forme suivante, directement à partir de la matrice de régime libre initiale (A-1.1) :

$$A(t, x, u^P) = \{a_{ij}(t, x, u^P)\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{ii}(t, x, u^P) = \text{Max}_{e \in K_i} \{ \mathcal{R}(a_{ee}(\cdot) + \sum_{\substack{m \in K_i \\ m \neq e}} |a_{em}(\cdot)|) \} \\ m_{ij}(t, x, u^P) = \text{Max}_{e \in K_i} \{ \sum_{m \in K_j} |a_{em}(\cdot)| \} \end{array} \right. \quad (\text{A-1.9})$$

Norme vectorielle déduite de la norme duale de la norme du Max :

Celle-ci est définie par :

$$\forall i = 1, \dots, k \quad p_i(y) = \sum_{j \in K_i} |y_j| \quad (\text{A-1.10})$$

La matrice pseudo-majorante associée à A(.) (A-1.1) possède alors une expression (A-1.11) voisine de la précédente (A-1.9).

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{ii}(t, x, u^P) = \text{Max}_{e \in K_i} \{ \mathcal{R}(a_{ee}(\cdot) + \sum_{\substack{m \in K_i \\ m \neq e}} |a_{em}(\cdot)|) \} \\ m_{ij}(t, x, u^P) = \text{Max}_{\substack{m \in K_j \\ i \neq j}} \{ \sum_{e \in K_i} |a_{em}(\cdot)| \} \end{array} \right. \quad (\text{A-1.11})$$

Norme vectorielle déduite de la norme euclidienne :

Son expression est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i = 1, \dots, k \\ p_i(y) = (y_i^T \bar{y}_i)^{1/2} \end{array} \right. \quad (\text{A-1.12})$$

La matrice pseudo-majorante associée s'exprime alors par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{ii}(t, x, u^P) = \text{Max}_{e \in K_i} \{ \mathcal{R}(a_{ee}(\cdot)) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{m \in K_i \\ m \neq e}} |a_{me}(\cdot) + a_{em}(\cdot)| \} \\ m_{ij}(t, x, u^P) = \frac{1}{2} \{ \text{Max}_{m \in K_j} \{ \sum_{e \in K_i} |a_{em}(\cdot)| \} + \text{Max}_{e \in K_i} \sum_{m \in K_j} |a_{em}(\cdot)| \} \end{array} \right. \quad (A-1.13)$$

2 - Systemes en temps discret

Dans ce cas, la matrice de régime libre $M(t, x, u^P)$ du système de comparaison est à éléments positifs.

Son expression, à partir de la norme vectorielle p (A-1.2) est donnée par les identités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i = 1, \dots, k \quad \forall j = 1, \dots, k \\ m_{ij}(t, x, u^P) = \text{Sup}_{y \in S} \frac{p_i(P_{S_i}(F.(t, x, u^P)).P_{S_j}(y))}{p_j(y)} \end{array} \right. \quad (A-1.14)$$

Cette définition formelle peut, comme dans le cas des systèmes en temps continu, être illustrée dans le cas des normes vectorielles usuelles (A-1.7) (A-1.8) (A-1.10) (A-1.12).

Nous ne rappellerons que celle associée à la norme vectorielle déduite de la norme du Max (A-1.7) (A-1.8).

La matrice $M(q, t, x, u^P)$ s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i = 1, \dots, k \quad \forall j = 1, \dots, k \\ m_{ij}(\cdot) = \text{Max}_{e \in K_i} \{ \sum_{m \in K_j} |a_{em}(t, x, u^P)| \} \end{array} \right. \quad (A-1.15)$$

En conclusion, il convient de noter que les expressions (A-1.5)... (A-1.14) correspondent aux matrices de régime libre minimales du système de comparaison.

En effet, on peut obtenir un autre système de comparaison en rajoutant aux matrices définies par (A-1.5) (A-1.14) une matrice (éventuellement non constante) à éléments non négatifs.

On aboutit alors à une majoration plus dure qui peut toutefois être utile.

ANNEXE I.2

DEFINITIONS FORMELLES RELATIVES A LA STABILITE

Les notions classiques de stabilité /Hahn, 1967/ /Lasalle & Lefschetz, 1961/ ont été introduites relativement à des systèmes d'équation d'état :

$$D(x(t)) = f(x(t), t) \quad (A-2.1)$$

pour lesquels la trajectoire nominale envisagée est : $x(t) \equiv 0$.

Seules des variations de conditions initiales $(t_0, x(t_0))$ sont alors cause de perturbations des trajectoires du système (A-2.1).

Les définitions originales relatives à la stabilité n'envisagent donc que ces éléments de perturbation des trajectoires d'un système non linéaire.

Nous proposons d'abord de les rappeler (Définitions 1, 2, 3 et 4) puis de les étendre, de manière naturelle pour prendre en compte les entrées de perturbations (Définitions 2', 3' et 4').

Il convient de remarquer que nous restreignons ces définitions au cas où l'instant de départ t_0 est fixé.

Définition 1 : Fonction de classe K au sens de Hahn

La fonction scalaire $\phi(r)$ de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ est de classe K au sens de Hahn ($\phi \in KH$) /Hahn, 1967/ si et seulement si elle satisfait les relations suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \phi \text{ est une application de } \mathbb{R}^+ \text{ dans } \mathbb{R}^+ \\ \phi(0) = 0 \\ \phi \text{ est continue et strictement croissante} \end{array} \right\} : \phi \in KH \quad (\text{A-2.2})$$

Définition 1' : Fonction de classe L au sens de Hahn

D'une manière analogue, une fonction σ de classe L ($\sigma \in LH$) /Hahn, 1967/ est caractérisée par les relations suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma \text{ est une application de } \mathbb{R}^+ \text{ dans } \mathbb{R}^+ \\ \sigma \text{ est continue strictement décroissante} \\ \lim_{s \rightarrow +\infty} \sigma(s) = 0 \end{array} \right\} : \sigma \in LH \quad (\text{A-2.3})$$

Définition 2 : stabilité /Hahn, 1967/

Le mouvement $x(t, x_0)$ (I.25) solution du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} D(x(t)) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) \in S \subset \mathbb{R}^n \\ \forall t \geq t_0 \quad x(t) \in S \end{array} \right. \quad (\text{A-2.4})$$

est stable s'il existe une fonction ϕ de classe K au sens de Hahn par rapport à l'écart des conditions initiales et telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe un voisinage } S_0 \text{ de } 0 \text{ inclus dans } S \text{ tel que :} \\ \forall x_0 \in S_0 ; \forall t \in T ; \\ \|x(t, x_0)\| \leq \phi(\|x_0\|) \end{array} \right. \quad (\text{A-2.5})$$

Définition 3 : Attractivité /Hahn, 1967/

Le mouvement $x(t, x_0)$ solution du système (A-2.1) est attractif s'il existe une fonction de classe L au sens de Hahn par rapport à $t - t_0$ et telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe un voisinage } S_0 \text{ de } 0 \text{ inclus dans } S \text{ tel que :} \\ \forall x_0 \in S_0 ; \forall t \in T ; \\ \|x(t, x_0)\| \leq \sigma(t - t_0 ; x_0) \end{array} \right. \quad (\text{A-2.6})$$

Définition 4 : Stabilité asymptotique (vis à vis des conditions initiales)

Le mouvement $x(t, x_0)$ solution du système (A-2.4) est asymptotiquement stable si et seulement si il est stable (Définition 2) et attractif (Définition 3).

Considérons maintenant un système en régime libre décrit par l'équation suivante (A-2.7) où l'évolution de l'état du système est perturbée par des modifications des conditions initiales et par des entrées de perturbations $u^P(t) \in P \subset (T \rightarrow \mathbb{R}^{eP})$:

$$\left\{ \begin{array}{l} D(x(t)) = A(t, x(t), u^P(t)) \cdot x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right. \quad (\text{A-2.7})$$

La trajectoire de ce système est notée $x(t, x_0, u^P(\tau ; \tau \leq t))$ et on considère une trajectoire nominale ramenée à l'origine ($x(t) \equiv 0$).

Nous proposons d'étendre les définitions précédentes (2, 3 et 4) de manière à prendre en compte l'effet des entrées de perturbations.

Définition 2' : Stabilité

Le point d'équilibre ($x \equiv 0$) du système en régime libre suivant :

$$D(x(t)) = A(t, x(t), u^P(t)) \cdot x(t) \quad (A-2.8)$$

est stable, s'il existe :

- une fonction ϕ de classe K au sens de Hahn,
- un voisinage S_0 de 0 inclus dans S,
- un ouvert P_0 non vide inclus dans P.

tels que :

$$\begin{aligned} \forall x_0 \in S_0 ; \forall u^P(.) \in P_0 \\ \forall t \in T \quad \|x(t, x_0, u^P(\tau \leq t))\| \leq \phi (\|x_0\|) \end{aligned}$$

Définition 3' : Attractivité

Le point d'équilibre ($x \equiv 0$) du système (A-2.8) est attractif s'il existe :

- une fonction σ de classe L au sens de Hahn,
- un voisinage S_0 de 0 inclus dans S,
- un ouvert P_0 non vide inclus dans P.

tels que :

$$\begin{aligned} \forall x_0 \in S_0 \\ \forall u^P \in P_0 \\ \forall t \in T \quad \|x(t, x_0, u^P(\tau \leq t))\| < \sigma ((t - t_0) ; x_0) \end{aligned}$$

Définition 4' : Stabilité asymptotique

Le point d'équilibre $x=0$ du système (A-2.8) est asymptotiquement stable s'il est stable et attractif.

Définition 5 : Stabilité globale, stabilité asymptotique globale

Le caractère global des propriétés de stabilité introduites dans les définitions 2, 3 et 4 caractérise le fait que le domaine d'attraction S_0 de la trajectoire nominale dans l'espace des conditions initiales est l'espace d'état tout entier ($S \subset \mathbb{R}^n$).

La notion de globalité étendue aux définitions 2', 3' et 4' dénote alors la **robustesse** des propriétés globales définies ci-dessus vis à vis d'un ensemble admissible $P_0 \subset P$ d'entrées de perturbations.

Stabilité des systèmes forcés :

Les définitions précédentes (2', 3' et 4') s'étendent sans aucun problème aux cas des trajectoires forcées pour lesquels la trajectoire nominale n'est pas réduite à un point fixe ($x=0$). Il suffit alors de caractériser l'évolution dans le temps de la distance entre les vecteurs états de la trajectoire nominale et de la trajectoire perturbée.

En marge du propos de cette annexe, il convient néanmoins de remarquer que, si le concept de stabilité est inchangé, les méthodes d'analyse correspondantes ne s'appliquent pas nécessairement de manière directe.

Des notions telles que la stabilité entrée-bornée/sortie-bornée /Zames, 1966/ ou bien la stabilité dynamique /Maizières et al, 1977/ et/ou la stabilité de mouvement sont donc apparues de manière à établir un lien entre les méthodes usuelles d'analyse de la stabilité et les particularités des trajectoires forcées.

Le concept de **stabilité entrée-bornée/sortie-bornée** exprime que l'on peut définir, pour un système d'entrée u ($t \in T$) et de sortie y ($t \in T$), une relation de majoration de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \alpha > 0, \exists \beta(\alpha) > 0 ; \forall t \in T, \\ \{ \|u(t)\| < \alpha \} \implies \{ \|y(t, x_0, u(\tau \leq t))\| < \beta \} \end{array} \right.$$

Cette notion est essentiellement destinée aux opérateurs décrivant des comportements entrée → sortie /Zames, 1966 a-b/ /Lamnabi, 1980/.

Le concept de **stabilité dynamique** introduit dans la référence /Maizières et al, 1977/ conduit à définir une majoration de l'écart entre trajectoires forcées uniformément par rapport à un ensemble admissible d'entrées de commande.

CHAPITRE II

PROPOSITION D'UNE METHODOLOGIE DE SYNTHÈSE D'ASSERVISSEMENT
DE PROCESSUS NON LINEAIRES LIEE A L'ANALYSE DE LA STABILITE
PAR UTILISATION DE NORMES VECTORIELLES

Dans cette section, nous abordons la synthèse d'asservissement sous l'angle de la stabilisation de l'origine de l'espace d'état d'un système dynamique. Ce dernier représente à priori l'évolution dans l'espace d'état de l'écart entre une trajectoire banale de l'asservissement et une trajectoire nominale satisfaisant à un premier niveau des spécifications de synthèse.

Nous sommes d'abord amenés à justifier cette approche, non triviale dans le cas des processus non linéaires, à partir de l'étude d'un problème de régulation appliqué à un processus de Lur'e Postnikov.

Cet exemple permet d'illustrer comment un problème initial de commande peut être assimilé à un problème de stabilité.

Nous abordons ensuite l'adaptation des méthodes d'analyse de la stabilité par utilisation de normes vectorielles du point de vue de la synthèse d'asservissement. A ce niveau, nous sommes contraints de particulariser l'exposé de la méthode aux processus en temps continu à la seule fin de ne pas obscurcir les notations. L'adaptation aux processus en temps discret de la méthodologie définie dans cette section, peut s'effectuer d'une manière directe explicitée en fin de chapitre (§ II.7).

La méthode proposée est d'abord introduite à partir de la définition de systèmes de comparaison linéaires stationnaires.

Nous définissons dans ce cas, à partir des travaux de Borne et Gentina, un critère numérique d'analyse de la stabilité ainsi que la tendance d'évolution de ce dernier sous la forme d'une direction de plus grande pente dans l'espace des paramètres ajustables.

Ces définitions sont ensuite généralisées dans le cadre des systèmes de comparaison non linéaires à partir de l'adaptation d'un théorème d'analyse de la stabilité /Gentina & al, 1979/.

Dans ce cadre, nous sommes amenés à étudier la formation, pour un processus quelconque, d'une norme vectorielle qui conduise à un système de comparaison pour lequel les conditions de stabilité sont les plus larges possible.

Ce choix d'une norme vectorielle est abordé sous l'angle du choix d'une représentation du processus non linéaire étudié. On est ainsi conduit à introduire une classe de représentations originales des systèmes étudiés. Celles ci permettent de faciliter l'étude de stabilité, en simplifiant la procédure de calcul du critère numérique de stabilité.

La transformation d'un processus sous une forme remarquable est explicitée en s'appuyant sur des structures de représentation analogues à celles définies par /Luenberger, 1967/ dans le cadre des systèmes linéaires stationnaires.

La méthode de synthèse est alors explicitée à partir de deux formes remarquables de représentation. La première, dite "forme série" est due à l'auteur et la seconde, dite "forme en flèche" est extraite des travaux de Benrejeb et Borne.

II.1 - SYNTHÈSE D'UN REGULATEUR POUR UN PROCESSUS DE TYPE LUR'E POSTNIKOV

Dans ce paragraphe, nous justifions notre approche de la synthèse d'asservissement sous l'angle de la stabilité. Cette dernière démarche est d'un usage général dans le cas de processus linéaires pour lesquels l'évolution d'une trajectoire quelconque et celle de l'écart entre cette trajectoire et une trajectoire nominale sont régies par les mêmes équations.

Dans le cadre des processus non linéaires, cette transformation d'un problème de commande en un problème de stabilité d'un point d'équilibre ramené à l'origine n'est pas aussi triviale.

L'objet de cette partie n'est pas d'apporter une solution générale à cette transformation, mais de l'illustrer par un cas concret : la synthèse d'un régulateur pour un processus de Lur'e Postnikov.

Après avoir posé le problème de régulation et précisé les notations relatives aux processus envisagés, nous introduisons une structure de loi de commande analogue à celles définies dans le cadre des processus linéaires. Nous sommes alors amenés à chercher des trajectoires nominales stationnaires. Lorsque celles ci existent, on pourra montrer que le problème de régulation se ramène à un problème de stabilité absolue.

II.1.1 - Position du problème

Considérons un processus non linéaire en temps continu. Soient :

$$\begin{aligned} y^P(t) &\in \mathbb{R}^e \text{ la sortie} \\ u^C(t) &\in \mathbb{R}^e \text{ l'entrée de commande} \\ u^P(t) &\in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{mP} \text{ l'entrée de perturbations} \end{aligned} \quad (\text{II.1.1})$$

L'objectif de synthèse envisagé consiste à faire tendre le vecteur sortie $y^P(t)$ vers un vecteur **constant** r_0 choisi arbitrairement à l'intérieur d'un ensemble $R \subset \mathbb{R}^e$, et ceci indépendamment d'une **entrée de perturbation constante** u_0^P choisie arbitrairement dans \mathcal{P} .

L'équation d'état du processus est la suivante (II.1.2) :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (x^P(t)) = A^P x^P(t) + B_C^P f(u^C(t)) + B_P^P u_0^P \\ y^P(t) = g (C^P x^P(t)) \end{cases} \quad (\text{II.1.2})$$

En plus des notations précédentes (II.1.1), on pose :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 t \in T \\
 x^p \in \mathbb{R}^{np} \text{ désigne l'état du processus} \\
 f : \mathbb{R}^e \rightarrow \mathbb{R}^e \\
 \quad \forall i = 1, \dots, e \quad f_i(u^c) = f_i(u_i^c) \\
 g : \mathbb{R}^e \rightarrow \mathbb{R}^e \\
 \quad \forall i = 1, \dots, e \quad g_i(y) = g_i(y_i) \qquad \qquad \qquad (II.1.3) \\
 A^p, B_c^p, B_p^p, C^p \text{ sont des matrices de dimensions} \\
 \qquad \qquad \qquad \text{appropriées} \\
 \text{Le système linéaire décrit par le triplet } (A^p, B_c^p, C^p) \\
 \qquad \qquad \qquad \text{est supposé d'ordre minimal} \\
 r_o \in \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^e \text{ désigne l'objectif de poursuite de la sortie } y^p(t)
 \end{array} \right.$$

En étendant les résultats obtenus dans le cadre des systèmes linéaires par le principe du modèle interne /Wonham, 1976/ /Davison, 1976/, on est conduit à proposer une loi de commande dont la structure est la suivante (II.1.4) :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l}
 u^c(t) = K_1 z(t) + u'(t) + K_2 e(t) \\
 \frac{d}{dt} (z(t)) \triangleq e(t) \triangleq r_o - y_p(t) \\
 z(t_o) = 0
 \end{array} \right. \qquad \qquad \qquad (II.1.4) \\
 u'(t) \text{ est la sortie d'un compensateur linéaire défini par :} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{d}{dt} (x^c(t)) = A^c x^c(t) + B^c e(t) \\
 u'(t) = C^c x^c(t) \\
 x^c(t_o) = 0
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.$$

L'asservissement ainsi constitué est alors représenté par le schéma bloc suivant (Fig. II.1) :

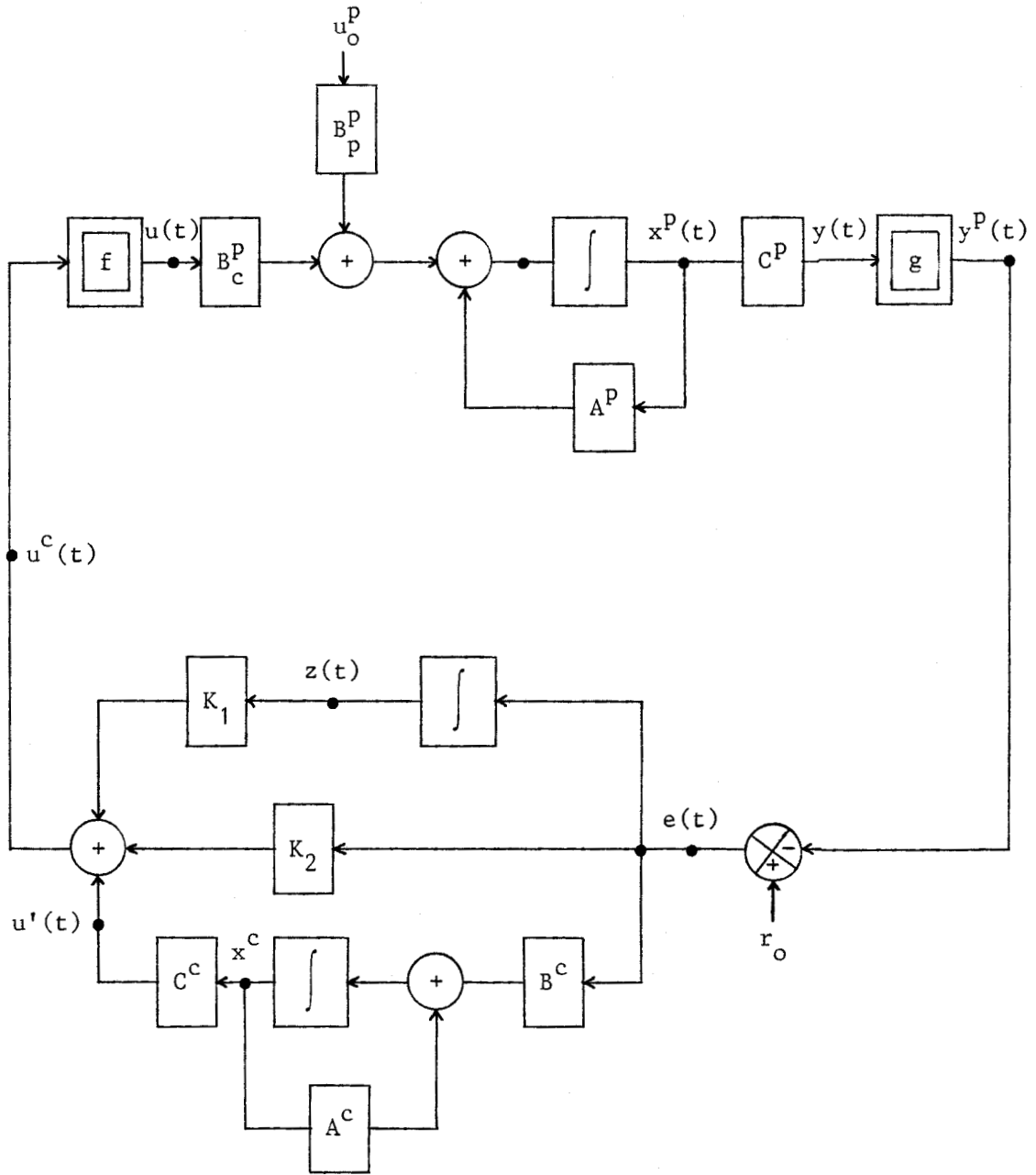


FIGURE II.1

Une première tâche consiste à caractériser une trajectoire nominale de l'asservissement qui satisfasse l'objectif de régulation :

$$\forall r_o \in R, \forall u_o^P \in P, \forall t \in T ; y^P(t) - r_o = 0$$

La sortie $y^P(t)$ correspondante étant constante, nous sommes amenés à chercher une trajectoire nominale correspondante x_s qui soit stationnaire. La détermination de celle-ci est, pour l'essentiel, inspirée de la référence /Grujić & Porter, 1980/. Elle est caractérisée par les égalités suivantes :

$$\begin{cases} x_s \stackrel{\Delta}{=} (x_s^p, x_s^c, z_s)^T \\ \frac{d}{dt} (x_s) \equiv 0 \\ e_s(t) \stackrel{\Delta}{=} r_o - g(C^p x_s^p) \equiv 0 \end{cases} \quad (\text{II.1.5})$$

Notons $u_s' = C^c x_s^c$ la sortie stationnaire du compensateur linéaire (A^c, B^c, C^c) (cf Fig. II.1). L'entrée $e_s(t)$ est dans le cas de cette solution identiquement nulle. L'état initial du compensateur étant supposé nul, il vient alors :

$$x_s^c = 0 \quad \text{et par conséquent} \quad u_s' = 0$$

L'état stationnaire x_s (II.1.5) étant régi par la dynamique (II.1.2) (II.1.4) de l'asservissement, il vient :

$$\begin{aligned} 0 &= A^p x_s^p + B_c^p f(u_s^c) + B_p^p u_o^p \\ u_s^c &= K_1 z_s \end{aligned}$$

Notons $u_s = f(u_s^c) \in \mathbb{R}^e$. x_s^p est alors, s'il existe, défini par le système d'équations suivantes :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} A^p & B_c^p \\ C^p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s^p \\ u_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B_p^p \cdot u_o^p \\ r_e \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{II.1.7})$$

$$\begin{cases} u_s = f(u_s^c) \\ r_e \text{ est une solution de l'équation } r_o = g(r_e) \\ u_s^c = K_1 z_s \end{cases} \quad (\text{II.1.8})$$

Etant donné un ensemble R de consignes de référence et P d'entrées de perturbations, constantes, l'existence de points stationnaires pour toute valeur (r_o, u_o^p) dans $R \times P$ requiert la condition nécessaire suivante :

$$R \subset g(\mathbb{R}^e)$$

Cette condition étant supposée remplie, on sait que le système linéaire d'équations (II.1.7) est inversible étant donné le caractère minimal de la représentation (A^P, B_C^P, C^P) .

La condition suffisante d'existence d'un point stationnaire peut alors s'exprimer sous la forme suivante (II.1.9) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall r_o \in R, \exists r_e ; g(r_e) = r_o \\ \forall u_o^P \in P, \text{ la solution } u_s \text{ du système suivant :} \\ \left[\begin{array}{cc} A^P & B^P \\ C^P & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x_s^P \\ u_s \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} -B_p^P \cdot u_o^P \\ r_e \end{array} \right] \\ \text{satisfait } u_s \in f(\mathbb{R}^e) \end{array} \right. \quad (\text{II.1.9})$$

Remarques :

- L'existence d'un point stationnaire est en particulier assurée si l'image des fonctions non linéaires f et g est l'espace \mathbb{R}^e tout entier : $f(\mathbb{R}^e) = g(\mathbb{R}^e) = \mathbb{R}^e$

- A l'inverse des systèmes linéaires ($f = g = \text{Id}$) où il existe un et un seul point stationnaire x_s pour un couple $(r_o, u_o^P) \in R \times P$ il peut en exister plusieurs dans le cas où les fonctions non linéaires f et g ne sont pas monotones.

Envisageons maintenant l'évolution de l'écart entre une trajectoire de l'asservissement proposé (Fig. II.1) et un point stationnaire $(x_s^P, u_s^C, x_s^C = 0)$ caractérisé à l'étape précédente (II.1.7) (II.1.8). Soient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}^P(t) = x^P(t) - x_s^P \\ \hat{u}^C(t) = u^C(t) - u_s^C \\ \hat{z}(t) = z(t) - z_s \end{array} \right. \quad (\text{II.1.10})$$

ces écarts.

Par soustraction des équations définissant l'état stationnaire (II.1.7) aux équations de progression initiales (II.1.2) (II.1.4), nous déduisons l'équation d'état caractérisant l'évolution de l'erreur (II.1.11) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} (\hat{x}^p(t)) = A^p \hat{x}^p(t) + B_c^p (f(u^c(t)) - f(u_s^c)) \\ \quad = A^p \hat{x}^p(t) + B_c^p (f(\hat{u}^c(t) + u_s^c) - f(u_s^c)) \\ \frac{d}{dt} (\hat{z}(t)) = e(t) \\ \hat{u}^c(t) = K_1 \hat{z}(t) + K_2 \cdot e(t) + u'(t) \\ \\ e(t) = r_o - y^p(t) \\ \quad = g(C^p x_s^p) - g(C^p \hat{x}^p(t) + C^p x_s^p) \\ \quad = r_o - g(C^p \hat{x}^p(t) + C^p x_s^p) \\ \quad = g(r_e) - g(C^p \hat{x}^p(t) + C^p x_s^p) \end{array} \right. \quad (II.1.11)$$

L'expression des non linéarités apparaissant dans ces équations nous permet de définir les non linéarités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(u_s^c, \hat{u}^c) = f(\hat{u}^c + u_s^c) - f(u_s^c) \\ \Psi(r_e, \hat{y}_e^p) = g(C^p \hat{x}^p(t) + r_e) - g(r_e) \end{array} \right. \quad (II.1.12)$$

Remarque : $\forall u_s^c \in \mathcal{R}^e \quad \phi(u_s^c, 0) = 0$

$\forall r_e ; (r_e \in \mathcal{R}^e ; \exists r_o \in \mathcal{R}, g(r_e) = r_o) ; \Psi(r_e, 0) = 0$

Les expressions des non linéarités $\phi(u_s^c, \hat{u}^c)$ et $\Psi(r_e, \hat{y}_e^p)$ (II.1.12) permettent d'interpréter celles-ci comme les non linéarités $f(u^c)$ et $g(y_e)$ centrées autour d'un point de fonctionnement stationnaire défini par u_s^c et r_e (cf Fig. II.2).

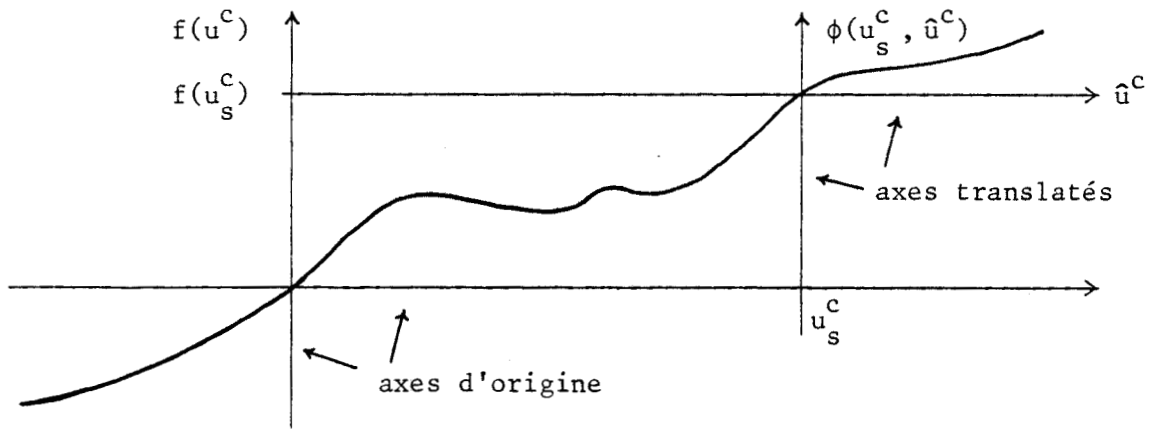


FIGURE II.2

L'asservissement initial (Fig. II.1) peut alors être représenté de manière équivalente par le schéma-bloc suivant (Fig. II.3) :

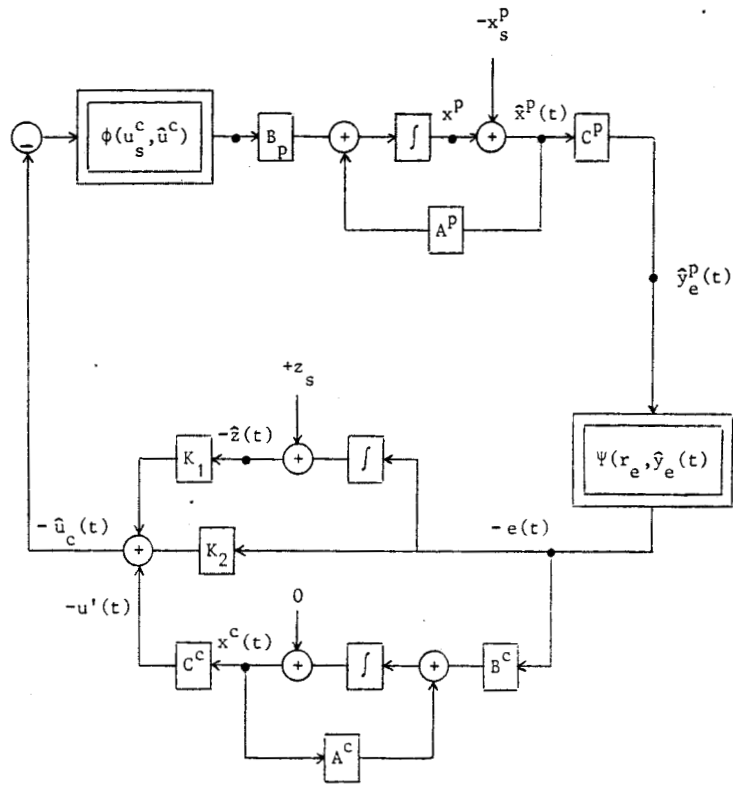
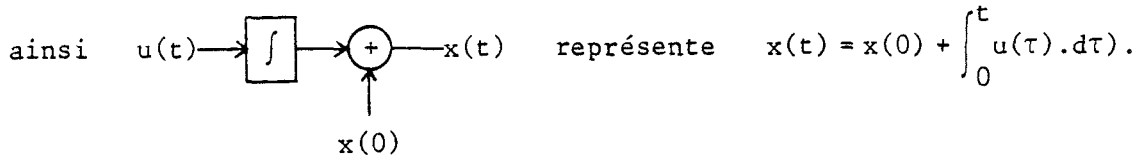


FIGURE II.3

(dans ce schéma (Fig. II.3), on a représenté les intégrateurs en explicitant les conditions initiales :



Cette dernière représentation (Fig. II.3) est obtenue en transformant les entrées (r_o, u_o^P) de commande et de perturbation sous la forme de conditions initiales (x_s^P, z_s) sur l'état (\hat{x}^P, \hat{z}^P) de l'asservissement.

L'objectif de commande $\lim_{t \rightarrow \infty} (e(t)) = 0$ est alors atteint si l'asservissement (Fig. II.3) est asymptotiquement stable.

Si on considère des classes $R \times P$ d'entrées, on est confronté à un problème de **stabilité absolue** (cf § I) puisque la stabilité asymptotique de l'asservissement doit être caractérisée pour toutes les non linéarités $\phi(u_s^C, \hat{u}^C)$ et $\Psi(r_e, y^P)$ (II.1.12) engendrées par translation à partir de l'ensemble des états stationnaires (x_s^P, z_s) (II.1.5) \rightarrow (II.1.9) définis pour tous les couples $(r_o, u_o^P) \in R \times P$ d'entrées de commande et de perturbation.

En conclusion, le problème de régulation initial a été transformé en une étude de stabilité absolue de l'origine pour une classe de systèmes de Lur'e Postnikov déduite du processus initialement considéré et des ensembles $R \times P$ admissibles des entrées.

Les références /Doraiswami, 1981/ et /Grujić, 1980, 1982, 1983,a-d/ mettent en œuvre cette approche consistant à reporter l'étude d'un problème de poursuite d'entrées de références sur celle de la stabilité asymptotique de l'origine pour un système en régime libre associé.

En particulier, /Doraiswami, 1981/ **analyse** le problème de stabilité associé en définissant des conditions suffisantes en termes de contraintes sur les non-linéarités (statiques) du processus.

Les autres références citées /Grujić, .../ s'attachent à caractériser les comportements dans l'espace d'état correspondant au comportement de poursuite d'une entrée de référence et proposent une méthode pour définir le système en régime libre associé. La stabilité de ce dernier est généralement **analysée** par le critère de Popov /Faure & al, 1979/.

Dans ce mémoire, nous envisagerons plutôt la synthèse comme la détermination numérique des matrices (K_1 , K_2 , A^c , B^c , C^c) assurant la stabilité absolue de la classe de processus (Fig.II.3) définie pour un ensemble $R \times P$ d'entrées données.

II.2 - DEFINITION D'UNE METHODE DE SYNTHESE A PARTIR DES TECHNIQUES D'AGREGATION PAR UTILISATION DE NORMES VECTORIELLES

Dans cette section, nous proposons de spécifier un critère d'analyse conduisant à une méthodologie de synthèse à partir de travaux antérieurs portant sur la stabilité des systèmes à partir de l'utilisation des normes vectorielles /Borne & Gentina/.

La classe des processus étudiée est celle dont les éléments sont représentés par une équation d'état du type suivant :

$$\frac{d}{dt}(x(t)) = F(t, x(t), u^p(t), r(t), p) \cdot x(t) \quad (\text{II.2.1})$$

avec l'hypothèse (h) et les notations (a), (b), (c) suivantes :

$$\begin{array}{l}
 \text{(a)} \left\{ \begin{array}{l}
 t \in T = [t_0, +\infty[\\
 x(t) \in S \subset \mathbb{R}^n \\
 u^p(t) \in P \subset \mathbb{R}^{p_a} : \text{entrée de perturbation} \\
 r(t) \in R \subset \mathbb{R}^e : \text{entrée de consigne}
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l}
 p \in \mathbb{R}^{np} \text{ désigne un vecteur de gains ajustables à l'inté-} \\
 \text{rieur du système. (Dans l'exemple du régulateur envisagé} \\
 \text{précédemment (II.1.11), } p \text{ contient les composantes des matri-} \\
 \text{ces } K_1, K_2, A^c, B^c, C^c \text{ ainsi que la dimension de la matrice} \\
 A^c).
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{(c)} \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Afin d'alléger les notations dans la suite de l'exposé, nous} \\
 \text{définissons une variable synthétique } x \text{ regroupant l'ensemble} \\
 \text{des arguments des composantes de } F(.) \text{ non nécessairement} \\
 \text{constantes pour l'ensemble des trajectoires du système} \\
 \text{(II.2.1). On écrit :} \\
 x \in \chi \\
 x \stackrel{\Delta}{=} (t, x(t), u^p(t), r(t)) \quad (\text{II.2.2}) \\
 \chi = T \times S \times P \times R
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{(h)} \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Les composantes de } F(x, p) \text{ sont supposées bornées par rapport} \\
 \text{à } x \in \chi \\
 \forall p \in \mathbb{R}^{np} ; \sup_{x \in \chi} (\|F(x, p)\|) < +\infty \quad (\text{II.2.3})
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Dans le premier chapitre (§ I.5), on a rappelé que l'utilisation de normes vectorielles conduit à définir un système de comparaison (II.2.4) d'ordre inférieur ou égal à celui du système initial (II.2.1) :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 z(t) \in \mathbb{R}_+^k \\
 \frac{d}{dt}(z(t)) = M_{qq}(x, p) \cdot z(t)
 \end{array} \right. \quad (\text{II.2.4})$$

Ce dernier système peut être choisi linéaire ou non linéaire et la caractérisation de sa stabilité constitue une condition suffisante de stabilité du système initial.

Il apparaît ainsi naturel d'envisager d'abord d'adapter les critères relatifs à cette technique d'agrégation dans le cas des systèmes de comparaison linéaires stationnaires pour lesquels on peut immédiatement établir des conditions de stabilité.

Cette première approche nous permet d'introduire le critère d'analyse cherché comme étant la valeur propre réelle maximale ε d'une Matrice /Fielder & Ptak, 1962/ construite à partir de la donnée (II.2.1) du système étudié et d'une norme vectorielle (§ I.5) choisie à priori.

L'interprétation de ce critère numérique de stabilité à partir d'un ensemble de valeurs propres de multiplicité égale à 1 nous permet alors de définir sa tendance d'évolution par rapport aux gains ajustables de la loi de commande par le calcul simple du gradient de ε dans l'espace des gains ajustables.

Cette expression permet dans ce cas de proposer des nouvelles valeurs des gains ajustables déplaçant ε dans un sens souhaité (vers le domaine des ε négatifs).

Cette approche est ensuite généralisée par l'utilisation d'une classe de systèmes de comparaison non linéaires dans laquelle nous discutons du choix d'une norme vectorielle conduisant à des conditions de stabilité aussi peu restrictives que possible.

Ce dernier problème n'ayant naturellement pas de solution analytique, nous proposons d'assimiler ce problème formel (le choix d'une norme vectorielle) à un problème de type numérique (le choix d'une base de représentation de l'asservissement étudié).

Cette restriction dans le choix d'une norme vectorielle nous permet ainsi d'utiliser les outils numériques de minimisation pour le choix itératif d'une "bonne" norme vectorielle (conduisant à des conditions de stabilité aussi peu restrictives que possible).

Dans ce paragraphe comme dans les suivants, nous supposons les calculs des différentes expressions exécutées sur une machine numérique, ce qui constitue en fait une hypothèse réaliste étant données ces expressions. Nous nous attarderons donc sur la solution de problèmes numériques délicats qui pourront apparaître.

Enfin, nous avons été obligés de restreindre la formulation de ce paragraphe au cas des systèmes en temps continu à la seule fin de ne pas introduire des notations qui soient trop complexes.

II.2.1 - Systèmes de comparaison linéaires stationnaires

Dans ce cas, la stabilité asymptotique du système étudié (II.2.1) est induite par celle d'un système de comparaison (II.2.4) construit tel que sa matrice de régime libre ne soit fonction que des gains ajustables :

$$\begin{cases} \dot{z} = M_{qq}(p).z(t) \\ z(t) \in \mathbb{R}_+^k ; z(t_0) = q(x(t_0)) \end{cases} \quad (\text{II.2.5})$$

En définissant l'utilisation des normes vectorielles, /Gentina, 1976/ a proposé le théorème suivant de stabilité :

Le point d'équilibre $x=0$ du système non linéaire (II.2.1) est globalement exponentiellement stable s'il existe une norme vectorielle q telle que la matrice $M_{qq}(p)$ (II.2.5) soit l'opposée d'une M matrice.

Ce théorème définit des conditions suffisantes de stabilité du système étudié (II.2.1) pour une valeur donnée des gains ajustables composant p . Ces conditions s'expriment concrètement par l'application du Lemme de Kotelyanskii /Gantmacher, 1966/ à la matrice $M_{qq}(p)$ et permettent l'**analyse** des propriétés de stabilité.

D'un point de vue inverse, le problème de **synthèse** consiste à déterminer une valeur de p telle que le théorème précédent s'applique. Dans cet esprit, nous proposons de reformuler ce théorème sous la forme équivalente suivante (§ II.2.2.1) où nous introduisons un critère numérique de stabilité $\varepsilon(q,p) \in \mathbb{R}$ optimisable par rapport à p .

II.2.1.1 - Définition de $\varepsilon(q,p)$

Le point d'équilibre $x=0$ du système non linéaire (II.2.1) est globalement exponentiellement stable s'il existe une norme vectorielle q telle que la valeur propre réelle maximale $\varepsilon(q,p)$ de la matrice $M_{qq}(p)$ (II.2.5) soit négative.

Remarques : * $(-1 / \varepsilon(q,p))$ peut être interprété comme un majorant du temps de réponse du système en regard de la propriété de stabilité exponentielle.

* $M_{qq}(p)$ étant une matrice à éléments hors diagonaux non négatifs, la valeur propre réelle maximale $\varepsilon(q,p)$ majore les parties réelles des valeurs propres de $M_{qq}(p)$. Sa négativité implique ainsi la stabilité exponentielle du système de comparaison (II.2.5).

En pratique, $\varepsilon(q,p)$ est une fonction que l'on va chercher à minimiser (par rapport aux valeurs des composantes de p et à l'expression de la norme vectorielle q) en vue de la rendre négative. On retrouve ainsi la spécificité d'une étude de synthèse de processus non linéaire (§ I.6.4.5) qui consiste à déterminer un réglage des éléments ajustables (choix de p) permettant d'établir la stabilité des trajectoires du système par une méthode (choix de q) qui donne des conditions suffisantes de stabilité les moins restrictives possible.

Vis à vis de la technique proposée, $\varepsilon(q,p)$ est donc un **critère** d'analyse de la stabilité propre à une étude de synthèse (§ I.6.4.4). Le calcul pratique de ce critère et de sa tendance d'évolution constituent l'objet du paragraphe suivant.

II.2.1.2 - Calcul de $\varepsilon(q,p)$ et de sa sensibilité

$\varepsilon(q,p)$ est la valeur propre réelle maximale de $M_{qq}(p)$ (II.2.5). La formation de la matrice pseudo-majorante $M_{qq}(p)$ (cf Annexe I.1) à partir de la donnée du système initial détermine la relation entre $\varepsilon(q,p)$ et ses arguments. Nous envisagerons le choix judicieux d'une norme vectorielle ultérieurement, et nous attachons ici principalement à la relation entre $\varepsilon(q,p)$ et p .

a) Calcul de $\varepsilon(q,p)$:

Etant donné $M_{qq}(p)$ (II.1.8), ce calcul peut être établi par des algorithmes généraux de calcul des valeurs propres (et de vecteurs propres) d'une matrice (Méthodes de Krilov, Souriau, Danilevskii, ...).

Néanmoins, dans tous les cas /Wilkinson, 1965/ /Fadeev & Fadeeva, 1963/ recommandent de s'appuyer sur les propriétés caractéristiques des matrices étudiées pour faciliter cette détermination.

Dans le cas des matrices pseudo-majorantes $M_{qq}(p)$ à éléments hors diagonaux non négatifs $M_{qq}(p)$, la recherche de sa valeur propre réelle maximale $\varepsilon(q,p)$ peut être obtenue par application du Lemme de Kotelyanskii de la manière suivante (II.2.6) :

μ désigne le terme général /Gantmacher, 1966/ d'une suite convergent vers ε .

On initialise μ avec le maximum des éléments diagonaux de $M_{qq}(p) \in \mathbb{R}^{k \times k}$.

On calcule le minimum (λ) des k mineurs principaux de $(\mu I_k - M_{qq}(p))$.

(II.2.6)

- . Si λ est nul alors $\varepsilon \triangleq \mu$
- . Si λ est négatif il faut augmenter μ
- . Si λ est positif, il faut diminuer μ

$\varepsilon(q,p)$ étant calculé, nous proposons maintenant d'expliciter le calcul de sa tendance d'évolution par un (des) calcul(s) de gradient(s).

b) Calcul de la sensibilité de $\varepsilon(q,p)$:

Nous considérons en premier lieu les matrices $M_{qq}(p)$ irréductibles. Ce cas permet d'établir un calcul simple généralisé par la suite au cas des matrices $M_{qq}(p)$ réductibles.

Si $M_{qq}(p)$ est irréductible, le théorème de Perron-Frobenius /Gantmacher, 1966/ montre que l'ordre de multiplicité de $\varepsilon(q,p)$ est égal à 1.

Dans le cas d'une valeur propre simple de matrice, la variation de cette valeur propre par rapport à des perturbations des coefficients de la matrice est donnée par utilisation de la relation suivante /Deif, 1981 a-b/ /Deif, 1982/ :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{A et B sont des matrices carrées de même dimension} \\
 \mu \in \mathbb{R}, \mu \ll 1 \\
 \varepsilon(A) \text{ désigne une valeur propre simple de A} \\
 u(\varepsilon) \text{ désigne le vecteur propre de A relatif à la valeur} \\
 \text{propre } \varepsilon(A) \\
 v(\varepsilon) \text{ désigne le vecteur propre de } A^T \text{ relatif à la valeur} \\
 \text{propre } \varepsilon(A) \text{ et tel que } u^T(\varepsilon) \cdot v(\varepsilon) = 1 \\
 \text{Avec ces notations :} \\
 \varepsilon(A + \mu B) - \varepsilon(A) = \mu v^T(\varepsilon) \cdot B \cdot u(\varepsilon) + O(\mu)
 \end{array} \right. \quad (\text{II.2.7})$$

Considérons maintenant les éléments de $M_{qq}(p)$ dérivables presque partout par rapport aux composantes de p (cette hypothèse est justifiée dans les exemples d'illustration développés dans les paragraphes suivants (§ II.2.1.3 - II.3.2 - III)).

Dans ce cas, on peut (presque partout) exprimer la tendance d'évolution de $\varepsilon(q,p)$ par rapport à la variable p sous forme d'un gradient (II.2.8) :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \forall i = 1, \dots, np \quad \frac{\partial \varepsilon(q,p)}{\partial p_i} = v^T(\varepsilon) \frac{\partial M_{qq}(p)}{\partial p_i} u(\varepsilon) \quad (\text{II.2.8}) \\
 v(\varepsilon) : \text{vecteur propre de } M_{qq}^T(p) \text{ relatif à } \varepsilon(q,p) \\
 u(\varepsilon) : \text{vecteur propre de } M_{qq}(p) \text{ relatif à } \varepsilon(q,p) \\
 v^T(\varepsilon) \cdot u(\varepsilon) = 1
 \end{array} \right.$$

Cette étape fait appel à un algorithme de calcul de vecteurs propres dans la détermination de $u(\varepsilon)$ et $v(\varepsilon)$.

Il est important de noter qu'un grand nombre d'algorithmes de détermination des valeurs propres de matrices effectuent le calcul des vecteurs

On obtient ainsi un ensemble de γ gradients $\nabla^i \varepsilon(q,p) \in \mathbb{R}^{n_p}$ par rapport à $p \in \mathbb{R}^{n_p}$ définis par :

$$\nabla_j^i \varepsilon(q,p) = \frac{\partial \varepsilon^i(q,p)}{\partial p_j} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, \gamma \\ j = 1, \dots, n_p \end{array} \quad (\text{II.2.13})$$

Dans ce cas, on définit la direction de plus grande pente $\delta \hat{p}$ du critère $\varepsilon(q,p)$ à partir des γ gradients $\nabla^i \varepsilon(q,p)$ en résolvant le problème d'optimisation suivant :

$$\delta \hat{p} \in \mathbb{R}^{n_p} \quad (\text{II.2.14})$$

$$\text{Min}_{i=1, \dots, \gamma} (\delta \hat{p}^T \cdot \nabla^i \varepsilon(q,p)) = \text{Max}_{\substack{x \in \mathbb{R}^{n_p} \\ \|x\| \leq 1}} \{ \text{Min}_{i=1, \dots, \gamma} (x^T \cdot \nabla^i \varepsilon(q,p)) \}$$

Le calcul de cette direction de plus grande pente à partir d'un ensemble de gradients (II.2.13) est abordé dans un cadre plus général lors de l'étude des systèmes de comparaison non linéaires (§ II.2.2.3) et explicité en Annexe II.3.

Nous proposons maintenant d'illustrer l'utilisation du critère d'analyse proposé et de sa sensibilité à partir d'un exemple de synthèse paramétrique d'asservissement non linéaire.

II.2.1.3 - Exemple d'application

Considérons le système non linéaire décrit par le schéma-bloc suivant (Fig. II.5) :

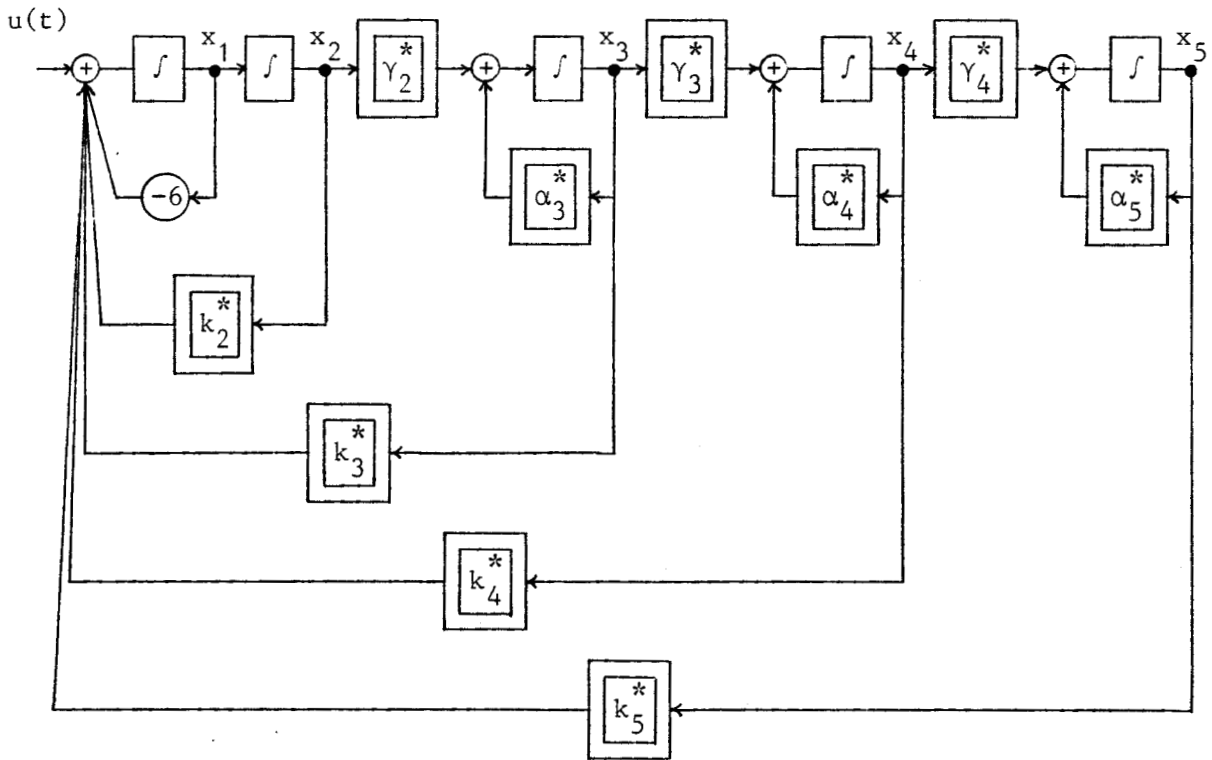


FIGURE II.5

Les variables étoilées sont des gains variants de manière non prévisible dans les intervalles suivants :

$$\begin{aligned}
 \alpha_3^* &\in [-4, -2] \\
 \alpha_4^*, \alpha_5^* &\in [-2, -1] \\
 k_2^* &\in [-20, -16] \\
 k_3^* &\in [5.8, 9.4] \\
 k_4^* &\in [8.0, 15.2] \\
 k_5^* &\in [20, 35.2] \\
 \gamma_2^* &\in]0, 1] \\
 \gamma_3^*, \gamma_4^* &\in]0, 0.5]
 \end{aligned}
 \tag{II.2.15}$$

L'entrée de commande du système est $u(t)$ et les composantes accessibles de l'état sont x_3, x_4, x_5 .

Proposons un schéma simple d'asservissement sous la forme suivante :

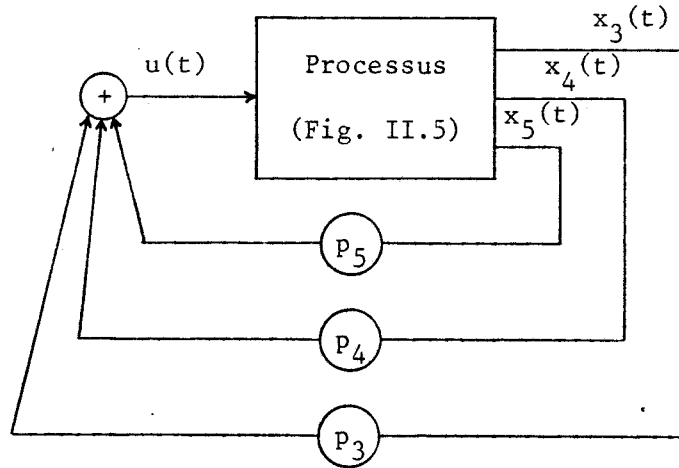


FIGURE II.6

L'équation d'état de l'asservissement est alors :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & k_2^* & k_3^*+p_3 & k_4^*+p_4 & k_5^*+p_5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2^* & \alpha_3^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3^* & \alpha_4^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_4^* & \alpha_5^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad (\text{II.2.16})$$

Considérons maintenant la norme vectorielle définie à priori par les expressions suivantes :

$$q(x) : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}_+^5 ; q(x) = \begin{bmatrix} |x_1 - x_2 (3 + 3j)| \\ |x_2| \\ |x_3| \\ |x_4| \\ |x_5| \end{bmatrix} \quad (\text{II.2.17})$$



Le choix de cette norme vectorielle particulière est justifié à postériori dans la section relative à la représentation série (§ II.4). La matrice pseudo-majorante constante induite par l'utilisation de cette norme est alors définie par (II.2.18) (cf Annexe I.1) :

$$M_{qq}(p_3, p_4, p_5) = \begin{bmatrix} -3 & 2 & \mu_{13}(p_3) & \mu_{14}(p_4) & \mu_{15}(p_5) \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \{\mu_{ij}\} \quad (\text{II.2.18})$$

La définition des éléments de la matrice pseudo-majorante $M_{qq}(\cdot)$ est explicitée par les expressions suivantes (II.2.19) (II.2.20) où le signe := désigne l'affectation ($(x := y) \iff x$ est affecté par y). Les termes diagonaux sont donnés par :

$$\begin{aligned} \mu_{11} &:= -3 := -6 - \mathcal{R}(-3 - 3j) \\ \mu_{22} &:= -3 := \mathcal{R}(-3 - 3j)^\dagger \\ i = 3, 4, 5 \quad \mu_{ii} &:= \text{Max}(\alpha_i^*) \end{aligned} \quad (\text{II.2.19})$$

$$^\dagger \forall x \in \mathbb{C}, \mathcal{R}(x) \in \mathbb{R} \quad \text{note la partie réelle de } x.$$

Les éléments hors diagonaux sont calculés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mu_{32} &:= 1 := \text{Max}(|\gamma_2^*|) \\ \mu_{43} &:= 0.5 := \text{Max}(|\gamma_3^*|) \\ \mu_{54} &:= 0.5 := \text{Max}(|\gamma_4^*|) \\ \mu_{12} &:= 2 := \text{Max}(|-(3+3j)^2 + 6(3+3j) + k_2^*|) \\ \mu_{13}(p_3) &:= \text{Max}(|p_3 + k_3^*|) \\ \mu_{14}(p_4) &:= \text{Max}(|p_4 + k_4^*|) \\ \mu_{15}(p_5) &:= \text{Max}(|p_5 + k_5^*|) \end{aligned} \quad (\text{II.2.20})$$

Considérons le processus non corrigé ($p_3 = p_4 = p_5 = 0$), la matrice pseudo-majorante est donnée dans ce cas par :

$$M_{qq}(0,0,0) = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 9.4 & 15.2 & 35.2 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.2.21})$$

Le calcul de la valeur propre réelle maximale de cette matrice donne sensiblement $\varepsilon(q,0,0,0) \cong 0.3$. Dans ce cas, on ne peut pas conclure quant à la stabilité du processus initial. La matrice $M_{qq}(p)$ est irréductible, on peut donc exprimer le gradient de $\varepsilon(q,0,0,0) = 0.3$ (II.2.6). Cette détermination nous amène à calculer les vecteur propres correspondants de $M_{qq}(0,0,0)$ et $M_{qq}^T(0,0,0)$ notés respectivement $u(0.3)$ et $v(0.3)$. Il vient :

$$u(0.3) = \begin{bmatrix} 51.31 \\ 15.55 \\ 6.76 \\ 2.60 \\ 1.00 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad v(0.3) = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 3.30 \\ 8.89 \\ 22.09 \\ 27.04 \end{bmatrix}$$

Les fonctions $\mu_{13}(p_3)$, $\mu_{14}(p_4)$, $\mu_{15}(p_5)$ (II.2.20) sont dérivables au voisinage de $p^T = (p_3, p_4, p_5) = (0,0,0)$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial M_{qq}(p_3, p_4, p_5)}{\partial p_3} \right)_{p=0} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & \bigcirc & & & \end{bmatrix} \\ \left(\frac{\partial M_{qq}(p_3, p_4, p_5)}{\partial p_4} \right)_{p=0} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \bigcirc & & & \end{bmatrix} \\ \left(\frac{\partial M_{qq}(p_3, p_4, p_5)}{\partial p_5} \right)_{p=0} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & \bigcirc & & & \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.2.22})$$

Par application de l'expression :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_i} = \frac{1}{v^T(0.3).u(0.3)} v^T(0.3) \frac{\partial M_{qq}(0,0,0)}{\partial p_i} v(0.3)$$

il vient :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_3} = + 0.2431$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_4} = + 0.2324 \quad (\text{II.2.23})$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_5} = + 0.1094$$

Par application de la méthode du gradient, il conviendra donc de diminuer les valeurs des p_i dans les rapports des dérivées partielles (II.2.23) pour diminuer la valeur de $\varepsilon(q, p_3, p_4, p_5)$. Au bout de plusieurs itérations, on trouve un réglage correct :

$$p_3 = - 5.6$$

$$p_4 = - 11$$

$$p_5 = - 24.7$$

(II.2.24)

Pour ce réglage, $\varepsilon(q, p_3, p_4, p_5)$ est sensiblement égal à -0.2, et permet donc de conclure quant à la stabilité asymptotique du système étudié ainsi corrigé.

II.2.1.4 - Discussion de la méthode proposée

La démarche précédente s'apparente à la localisation itérative des pôles du système de comparaison à l'intérieur du demi-plan complexe gauche. Etant donnée la non négativité des éléments hors diagonaux de la matrice de régime libre $M_{qq}(p)$ du système de comparaison, cette procédure est facilitée dans la mesure où il suffit de déplacer la valeur propre réelle maximale $\varepsilon(q, p)$ qui majore les parties réelles des valeurs propres de $M_{qq}(p)$.

Cette technique s'apparente ainsi à la classe de méthodes de synthèse d'asservissements linéaires construites autour de l'optimisation par une technique de type gradient d'un critère numérique caractérisant l'objectif de synthèse /Guardabasi & al, 1979, 1981, 1982/ /Davison & Ferguson, 1981/ /Höfler, 1981/.

Il convient toutefois de noter que le choix de la norme vectorielle définissant le système de comparaison n'a pas encore été abordé alors que ce choix est fondamental dans la mesure où le théorème d'analyse de la stabilité (§ II.2.1.1) sur lequel s'appuie la méthode de synthèse donne des conditions suffisantes de stabilité qui peuvent être plus ou moins restrictives selon la norme vectorielle choisie.

En reprenant l'exemple d'illustration (Fig. II.5, II.6) précédent pour lequel l'expression de la norme vectorielle envisagée (II.2.17) n'est pas réellement immédiate, nous proposons de montrer qu'un choix apparemment plus naturel conduit à un système de comparaison nécessairement instable.

Considérons l'équation d'état examinée dans l'exemple (II.2.14). L'utilisation de la norme vectorielle usuelle suivante :

$$q'(x) : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}_+^5 \quad q'_1(x) = |x_1| \quad (\text{II.2.25})$$

conduit à l'étude de la matrice pseudo-majorante suivante :

$$M_{q',q'}(p_3, p_4, p_5) = \begin{bmatrix} -6 & 20 & \mu_{13}(p_3) & \mu_{14}(p_4) & \mu_{15}(p_5) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.2.26})$$

avec les notations déjà introduites (II.2.18).

Cherchons maintenant à caractériser la valeur propre réelle maximale de cette matrice à partir du lemme suivant /Gantmacher, 1966/ :

Lemme :

La valeur propre réelle maximale $\varepsilon(q', p_3, p_4, p_5)$ de $M_{q', q'}(p_3, p_4, p_5)$ majore l'ensemble des valeurs propres réelles maximales des sous matrices dont les déterminants sont les mineurs principaux.

Δ

Considérons alors les matrices correspondantes aux deux premiers mineurs principaux :

$$M_{q', q'}^{11}(p_3, p_4, p_5) = [-6]$$
$$M_{q', q'}^{22}(p_3, p_4, p_5) = \begin{bmatrix} -6 & 20 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres réelles maximales de ces deux matrices sont respectivement :

$$-6 \quad \text{et} \quad (-3 + \sqrt{29})$$

En conséquence :

$$\forall (p_3, p_4, p_5) \in \mathbb{R}^3, \varepsilon(q', p_3, p_4, p_5) \geq (-3 + \sqrt{29})$$

Le système de comparaison induit par q' (II.2.26) est donc non stable de manière intrinsèque et toute étude de synthèse paramétrique menée à partir de cette norme vectorielle conduit nécessairement à un échec.

Cet exemple illustre bien la nécessité de l'optimisation du choix d'une norme vectorielle dans la méthode de synthèse proposée initialement en fonction des seuls gains ajustables.

Nous proposons d'aborder cette intégration du choix de la norme vectorielle à l'intérieur de la procédure de synthèse par minimisation d'un critère numérique dans le prochain paragraphe qui généralise l'étude précédente aux systèmes de comparaison non linéaires.

II.2.2 - Système de comparaison à non linéarité uniligne ou unicolonne

Dans ce paragraphe, nous proposons d'étendre les résultats de l'étude précédente au cas des systèmes de comparaison non linéaires dont on peut analyser les propriétés de stabilité au moyen d'un théorème dû à Borne et Gentina /Gentina & al, 1979/. Après avoir rappelé l'énoncé de ce théorème, nous en déduisons une formulation équivalente mieux adaptée aux spécificités d'une étude de synthèse /Meizel & Gentina, 1982 a/. En particulier, nous spécifions un critère numérique de stabilité défini, par extension du cas précédent, comme la limite supérieure des valeurs propres réelles maximales de l'ensemble des matrices pseudo-majorantes du système de comparaison.

Considérons un élément de la classe des processus étudiés (II.2.1) :

$$\dot{x}(t) = F(x,p).x(t) \quad (\text{II.2.29})$$

A titre de rappel : $x(t) \in S \subset \mathbb{R}^n$

$x \in \chi$ regroupe l'ensemble des arguments des composantes non constantes de $F(.,p)$

$p \in \mathbb{R}^{n_p}$ est un vecteur de gains ajustables dont on cherche une valeur qui stabilise le système (II.2.29)

Afin d'analyser la stabilité de l'origine ($x=0$) du système étudié, définissons un système de comparaison non linéaire (cf Annexe I.1) à partir d'une norme vectorielle q :

$$q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^k \quad (\text{II.2.31})$$

Il vient :

$$\dot{z} = M_{qq}(x,p).z \quad (\text{II.2.32})$$

$$\begin{aligned} x &\in \chi \\ z &\in \mathbb{R}_+^k \end{aligned}$$

Si la matrice pseudo-majorante non linéaire $M_{qq}(x,p)$ est construite telle qu'une seule de ses rangées (ligne ou colonne) comporte des élé-

ments non constants, nous pouvons analyser la stabilité du système de comparaison (II.2.32) (donc du système initial (II.2.29)) par utilisation du théorème suivant dû à Borne et Gentina /Gentina & al, 1979/.

Théorème B-G 1 :

Considérons le système non linéaire (T.1) :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x).x(t) \\ x(t) &\in S \subset \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (T.1)$$

$x \in \chi$: argument des composantes de $F(x)$ non constantes le long des trajectoires possibles du système

S'il existe une norme vectorielle q qui permet la définition d'une matrice pseudo-majorante $M_{qq}(x)$ satisfaisant aux propriétés suivantes :

i) $\forall x \in \bar{\chi}$ ($\bar{\chi}$ note la fermeture de χ) $M_{qq}(x)$ est irréductible.

ii) Les éléments non constants de $M_{qq}(x)$ sont isolés dans une seule ligne ou une seule colonne.

iii) $\exists \varepsilon < 0, \forall x \in \chi, (\varepsilon I - M_{qq}(x))$ est une M-matrice.

Alors, le point d'équilibre $x=0$ de (T.1) est globalement exponentiellement stable : il existe $v(x)$ fonction définie positive telle que l'inégalité suivante (T.2) soit satisfaite le long des mouvements du système :

$$\frac{d}{dt^+} (v(x(t))) \leq \varepsilon.v(x(t)) \quad (T.2)$$

Dans cette formulation, la condition (iii) d'application du critère dépend d'un paramètre $\varepsilon < 0$. D'un point de vue pratique, la satisfaction de l'hypothèse (iii) avec $\varepsilon = 0$ constitue une condition nécessaire de satisfaction de cette hypothèse avec $\varepsilon < 0$.

Considérons maintenant un processus (II.2.29) dont la dynamique dépend du choix de la valeur de gains ajustables composant le vecteur p ,

nous sommes amenés à rechercher des valeurs de p telles que les conditions d'application du théorème B-G 1 soient satisfaites vis à vis d'une matrice pseudo-majorante $M_{qq}(x,p)$.

La formulation du théorème B-G 1 étant plutôt envisagée dans un but d'analyse, nous proposons ainsi de transformer son expression de manière à pouvoir l'utiliser dans cette optique de synthèse.

II.2.2.1 - Définition d'un critère numérique de stabilité à partir du théorème de Borne et Gentina

Nous proposons ici de reformuler le théorème B-G 1 sous une forme équivalente plus appropriée à la synthèse. Cette reformulation intègre la définition d'un critère numérique de stabilité $\epsilon(q,p)$ exprimant la condition (iii). Nous serons ensuite amenés à montrer que la condition (i) d'application n'est pas restrictive mais peut au contraire être intéressante dans une optique de réduction d'ordre du problème traité.

Considérons la condition (iii) d'application du théorème B-G 1. Celle-ci est équivalente à la formulation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon(q,x,p) \triangleq \text{valeur propre réelle maximale de } M_{qq}(x,p) \\ \text{B-G 1 (iii)} \iff \{\exists \epsilon < 0, \forall x \in \chi \quad \epsilon(q,x,p) \leq \epsilon\} \end{array} \right. \quad (\text{II.2.33})$$

L'équivalence entre les deux formulations est une conséquence directe du lemme de Kotelyanskii /Gantmacher, 1966/.

En définissant $\epsilon(q,p)$ comme la borne supérieure des valeurs propres réelles maximales $\{\epsilon(q,x,p) ; x \in \chi\}$ des matrices $M_{qq}(x,p)$ à éléments hors diagonaux non négatifs

$$\epsilon(q,p) \triangleq \sup_{x \in \chi} \{\epsilon(q,x,p)\} \quad (\text{II.2.34})$$

la condition (iii) d'application du théorème B-G 1 est donc équivalente à la négativité de $\epsilon(q,p)$.

$$\text{B-G 1 (iii)} \iff \{\epsilon(q,p) < 0\} \quad (\text{II.2.35})$$

Sous réserve de la satisfaction des hypothèses (i) et (ii) du théorème B-G 1, $\varepsilon(q,p)$ apparaît ainsi comme un critère numérique des propriétés de stabilité du système étudié (II.2.29). On peut en donner une interprétation "physique" en regard de la propriété de stabilité exponentielle (T.2) analysée par le théorème B-G 1. $\varepsilon(q,p)$ constitue un majorant de l'ensemble des valeurs de ε satisfaisant l'hypothèse (iii). Si $\varepsilon(q,p)$ est négatif ($-1 / \varepsilon(q,p)$) apparaît ainsi comme un minorant du majorant du temps de réponse au sens de l'inégalité satisfaite par la fonction de Lyapunov $v(x(t))$ (T.2) spécifiée dans le théorème B-G 1.

Il apparaît de plus, que dans le cas des systèmes linéaires appartenant à la classe de processus étudiés (II.2.29), $-\varepsilon(q,p)$ constitue une estimation par valeurs inférieures de l'indice de Lyapunov /Lyapunov, 1949/ caractérisant les propriétés de stabilité exponentielle caractéristique de cette classe de processus.

Cette interprétation justifie à posteriori le choix de $\varepsilon(q,p)$ comme critère de synthèse, à condition naturellement que l'évaluation numérique de $\varepsilon(q,p)$ soit possible. Bien que primordiale, cette question est développée en Annexe II.6 afin de ne pas alourdir la présentation générale.

Nous proposons maintenant de simplifier encore l'utilisation du théorème B-G 1 en montrant que sa première condition d'application (i) n'est pas restrictive et que l'on peut s'en affranchir dans la mesure où les composantes de la matrice $F(x,p)$ de régime libre caractérisant la dynamique du système (II.2.29) sont bornées (II.2.1).

Discussion de l'hypothèse (i) d'application du théorème B-G 1 :

Nous proposons de montrer successivement que cette hypothèse n'est pas restrictive et qu'à l'inverse, la considération de matrices pseudo-majorantes réductibles peut simplifier l'étude de synthèse dans la mesure où on peut réduire la dimension du système de comparaison non linéaire dont on souhaite caractériser les propriétés de stabilité.

Dans cette partie, nous considérons un système de comparaison construit à partir d'une norme vectorielle (II.2.31) et d'un processus (II.2.29) de telle manière que les éléments non constants de la matrice pseudo-majorante $M_{qq}(x,p)$ soient isolés dans une seule ligne ou une seule colonne.

Supposons par ailleurs que les parties réelles de valeurs propres de $M_{qq}(x,p)$ ($x \in \chi$) sont bornées supérieurement par une valeur $\varepsilon(q,p)$ (II.2.34) négative.

S'il existe $x \in \chi$ tel que $M_{qq}(x,p)$ soit réductible, on peut proposer un nouveau système de comparaison dont la matrice de régime libre $M'_{qq}(x,p)$ est obtenue par perturbation de la matrice $M_{qq}(x,p)$ de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \mu \ll 1 \\ M'_{qq}(x,p) \triangleq M_{qq}(x,p) + \mu \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{II.2.37})$$

Les éléments hors diagonaux de $M_{qq}(x,p)$ étant non négatifs, ceux de $M'_{qq}(x,p)$ sont positifs, ce qui entraîne l'irréductibilité de cette matrice quelquesoit $x \in \bar{\chi}$. Or, la borne supérieure $\varepsilon'(q,p)$ de l'ensemble des valeurs propres $\varepsilon'(q,x,p)$ des matrices $M'_{qq}(x,p)$ peut être rendue arbitrairement proche de la valeur négative $\varepsilon(q,p)$.

L'hypothèse (i) du théorème B-G 1 peut ainsi être relaxée dans la mesure où les conditions (ii) et (iii) de ce théorème prouvent l'existence d'un système de comparaison satisfaisant toutes les conditions d'application du théorème B-G 1.

Dans un second volet, nous proposons de montrer comment la mise en évidence d'une propriété d'irréductibilité peut au contraire faciliter l'application du théorème B-G 1.

Considérons un ensemble $M_{qq}(x,p)$ ($x \in \chi$) de matrices pseudo majorantes dont les éléments non constants sont isolés dans une seule ligne ou une seule colonne. Sans perte de généralité, on peut considérer que cette ligne (colonne) d'éléments non constants est la première. Les matrices pseudo-majorantes étudiées ont alors la structure suivante (II.2.38) (II.2.39) :

$$M_{qq}(\chi, p) = \begin{bmatrix} * & * & * & & * & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (\text{II.2.38})$$

ou bien :

$$M_{qq}(\chi, p) = \begin{bmatrix} * & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ * & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ * & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ & & & & & \\ * & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (\text{II.2.39})$$

Les * désignent des éléments non nécessairement constants par rapport à $x \in \chi$.

Les · notent des éléments constants par rapport à $x \in \chi$.

Sous forme abrégée, on peut noter ces matrices par :

$$v_1 \in \mathbb{R}^k ; v_1^T \triangleq [1, 0 \dots 0] ; M_o(p) \in \mathbb{R}^{k \times k} ; g_o(\cdot, x) : x \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$M_{qq}(\chi, p) = M_o(p) + v_1 g_o^T(\chi, p) \quad (\text{II.2.40}) \iff (\text{II.2.38})$$

ou bien :

$$M_{qq}(\chi, p) = M_o(p) + g_o(\chi, p) v_1^T \quad (\text{II.2.41}) \iff (\text{II.2.39})$$

Envisageons le cas des matrices :

$$M_{qq}(\chi, p) = M_o(p) + v_1 g_o^T(\chi, p) \quad (\text{II.2.42})$$

pour lesquelles $M_o(p)$ est réductible.

On peut toujours choisir la matrice $M_o(p)$ (II.2.42) telle que les composantes de sa première ligne soient non nulles. La réductibilité de $M_o(p)$ est alors abordée dans ce cas comme la mise en évidence d'un sous espace de coordonnées de \mathbb{R}^k ne contenant pas la première coordonnée et invariant dans la transformation ($z \rightarrow M_o(p) z$). Par une permutation d'indices laissant invariant l'indice 1, $M_o(p)$ peut alors être transformée sous la forme $M'_o(p)$ suivante (II.2.43) :

$$M'_o(p) = \left[\begin{array}{c|c} M'_{01}(p) & M'_{02}(p) \\ \hline 0 & M'_{03}(p) \end{array} \right] \quad (\text{II.2.43})$$

avec :

$$M'_{01}(p) \in \mathbb{R}^{k_1 \times k_1}$$

$$M'_{03}(p) \in \mathbb{R}^{k_2 \times k_2}$$

$$k = k_1 + k_2$$

Le système de comparaison ainsi obtenu peut alors être représenté sous la forme partitionnée suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}'_1 \\ \dot{z}'_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} M'_{01}(p) + v'_1 g'_{01}{}^T(x,p) & M'_{03}(p) + v'_1 g'_{02}{}^T(x,p) \\ \hline 0 & M'_{02}(p) \end{array} \right] \begin{bmatrix} z'_1(t) \\ z'_2(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II.2.44})$$

$$g'_{01}(\cdot) \in \mathbb{R}^{k_1}$$

$$g'_{02}(\cdot) \in \mathbb{R}^{k_2} \quad k_1 + k_2 = k$$

$$g'_0{}^T(\cdot) = [g'_{01}{}^T(\cdot) ; g'_{02}{}^T(\cdot)]$$

$$v'_1 \in \mathbb{R}^{k_1} ; v'_1{}^T = [1, 0 \dots 0]$$

Cette représentation fait apparaître le système de comparaison (II.2.44) comme la mise en série du système linéaire stationnaire de vecteur état z_2 avec un système non linéaire d'ordre $k_1 < k$ et dont la matrice de régime libre est $M'_{01}(p) + v'_1 g'_{01}{}^T(x,p)$ (cf Fig. II.7) :

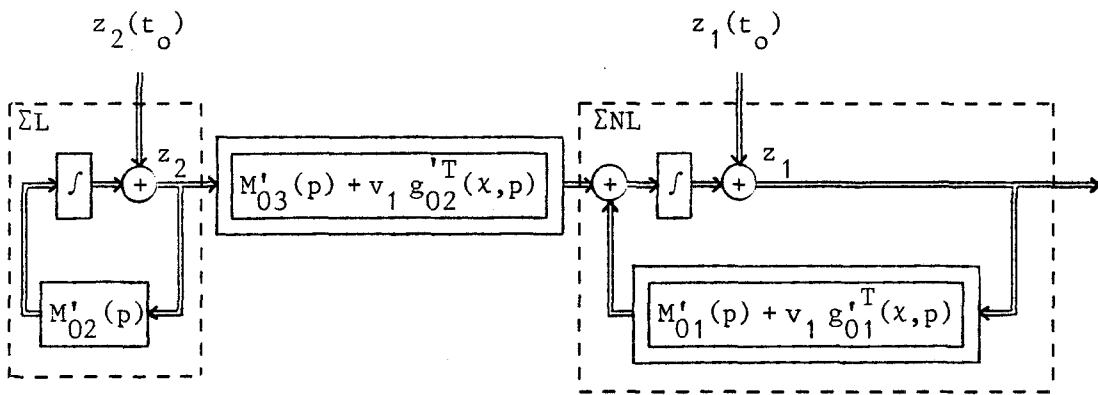


FIGURE II.7

Les éléments de la matrice d'interconnexion $M'_{03} + v_1 g'_{02}(\cdot)$ étant par hypothèse bornés (II.2.1), le système complet (Fig. II.7) est asymptotiquement stable si et seulement si les deux sous systèmes ΣL et ΣNL le sont séparément (Théorème de Malkin) /Grujić, 1984/.

La stabilité exponentielle du système linéaire ΣL est caractérisée par la négativité de la valeur propre réelle maximale $\varepsilon_2(p)$ de la matrice $M'_{02}(p)$.

La stabilité exponentielle du système non linéaire ΣNL d'ordre $k_1 \leq k$ peut être caractérisée par application des conditions du théorème B-G 1 à ce système.

Ces remarques sont intéressantes à deux titres :

- D'une part, l'application du théorème B-G 1 peut être considérée en relaxant l'hypothèse (i) concernant l'irréductibilité de la matrice pseudo-majorante. Dans le cas où les hypothèses (ii) et (iii) sont satisfaites, on sait qu'il existe une décomposition série (Fig. II.7) à l'intérieur de laquelle le système non linéaire satisfait aux trois hypothèses (i), (ii), (iii).

- D'autre part, on peut chercher à définir systématiquement une décomposition série (cf Fig. II.7) de manière à réduire l'ordre du problème non linéaire posé tout en introduisant un problème linéaire plus facile à résoudre. Cet aspect est repris de manière constructive lors de prochains paragraphes concernant l'étude des systèmes à non linéarités de rang 1 et de rang $n_c \geq 1$.

Dans cette section, nous avons exprimé sous forme numérique le théorème B-G 1 /Gentina & al, 1979/. La valeur du critère $\varepsilon(q,p)$ (II.2.34) introduit dépend à la fois des paramètres ajustables dans le système asservi et du choix d'une norme vectorielle permettant de définir un système de comparaison du système initial. Nous proposons maintenant d'aborder la question du choix de cette norme vectorielle.

II.2.3 - Choix des normes vectorielles permettant une utilisation méthodique du théorème de Borne & Gentina à des fins de synthèse

Dans cette section, nous proposons d'assimiler la recherche d'une norme vectorielle permettant de caractériser la stabilité d'un système non linéaire à celle d'une base de représentation du système étudié.

Dans un premier temps, nous explicitons, à partir de l'équation d'état du processus étudié, la formation d'une classe de normes vectorielles conduisant naturellement à un système de comparaison dont la matrice de régime libre possède des éléments non constants isolés dans une seule ligne ou une seule colonne. Nous sommes ensuite amenés à justifier ce choix.

Enfin, dans un dernier volet, nous proposons la définition de **formes remarquables** de représentation d'état des systèmes étudiés facilitant la mise en œuvre du théorème B-G 1 et la définition du critère numérique de stabilité défini dans la section précédente (§ II.2.2.1).

Considérons les expressions suivantes de l'équation d'état des processus étudiés :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = \left[F(p) + \sum_{i=1}^{n_c} u_i(p) \cdot g_i^T(x,p) \right] \cdot x(t) \quad (\text{II.2.45-a}) \\ \text{ou} \\ \dot{x}(t) = \left[F(p) + \sum_{i=1}^{n_c} g_i(x,p) \cdot u_i^T(p) \right] \cdot x(t) \quad (\text{II.2.45-b}) \end{array} \right.$$

avec :

$$x(t) \in S \subset \mathbb{R}^n$$

$$n_c \leq n$$

$x \in \chi$: argument des non linéarités

$p \in \mathbb{R}^{n_p}$: paramètres ajustables

$\forall i = 1, \dots, n_c ; u_i(p) \in \mathbb{R}^n ; \text{Rang} (\{u^i(p) ; i = 1, \dots, n_c\}) = n_c$

$$g_i(\cdot, p) : x \rightarrow \mathbb{R}^n$$

En considérant les vecteurs $u^i(p)$ intervenant dans les expressions précédentes comme des vecteurs de base, on peut sans perte de généralité considérer les équations d'état suivantes (II.2.46-a) (II.2.46-b) où on substitue les vecteurs v_i de la base naturelle de \mathbb{R}^n aux vecteurs $u_i(p)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = [F_0(p) + \sum_{i=1}^{n_c} v_i \cdot f_i^T(x, p)] \cdot x(t) \quad (\text{II.2.46-a}) \\ \dot{x} = [F_0(p) + \sum_{i=1}^{n_c} f_i(x, p) \cdot v_i^T] \cdot x(t) \quad (\text{II.2.46-b}) \end{array} \right.$$

avec :

$$\forall i = 1, \dots, n_c ; v_i \in \mathbb{R}^n ; (v_i)_j \triangleq \delta_{ij}$$

Simultanément à ces équations d'état, considérons la norme vectorielle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} q^I(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^{n-n_c+1} \\ q_1^I(x) = \text{Max}_{i=1, \dots, n_c} \{|x_i|\} \\ q_j^I(x) = |x_{n_c+j-1}| \quad j = 2, \dots, n-n_c+1 \end{array} \right. \quad (\text{II.2.47})$$

La matrice pseudo-majorante relative au processus d'équation d'état (II.2.46-a) (resp (II.2.46-b)) possède alors (cf Annexe I.1) ses éléments non constants isolés dans la première ligne (resp la première colonne).

Mais, comme on l'a vu dans le cas des systèmes de comparaison linéaires, le choix à priori de cette norme vectorielle particulière (II.2.47) dans l'application du théorème de Borne et Gentina, ne permet pas systématiquement de conclure quant aux propriétés de stabilité du système étudié **même lorsque ce dernier est linéaire stationnaire.**

Nous proposons ainsi de définir une classe de normes vectorielles déduites de la précédente (II.2.47) par changement de base en conservant la propriété de la matrice pseudo-majorante associée d'avoir des éléments non constants isolés dans la première ligne ou la première colonne. Cette classe est définie de la manière suivante (II.2.48-a) (II.2.48-b) (II.2.49) :

$$\left\{ \begin{array}{l} V \in \mathbb{C}^{n \times n} ; \det V \neq 0 ; V \triangleq \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ 0 & V_3 \end{bmatrix} \\ \text{avec } V_1 \in \mathbb{C}^{n_c \times n_c} \end{array} \right. \quad (\text{II.2.48-a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V \in \mathbb{C}^{n \times n} ; \det V \neq 0 ; V \triangleq \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ V_2 & V_3 \end{bmatrix} \\ \text{avec } V_1 \in \mathbb{C}^{n_c \times n_c} \end{array} \right. \quad (\text{II.2.48-b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y \triangleq V^{-1} \cdot x \\ q^V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^{n-n_c+1} \end{array} \right. \quad (\text{II.2.49})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i = 2, \dots, n-n_c+1 : q_i^V(x) = |y_{n_c+i-1}| \\ = (y_{n_c+i-1} \cdot \bar{y}_{n_c+i-1})^{1/2} \\ q_1^V(x) = \text{Max}_{i=1, \dots, n_c} (|y_i|) \end{array} \right.$$

La matrice pseudo-majorante du système (II.2.46-a) (resp (II.2.46-b)) relatif à une norme vectorielle q^V définie avec la structure de changement de base explicitée en (II.2.48-a) (resp (II.2.48-b)) possède alors

des éléments non constants isolés dans sa première ligne (resp sa première colonne).

Cette définition amène les remarques suivantes :

- a) Si on considère le système initial (II.2.46) comme un système non linéaire d'ordre n_c couplé à un système linéaire d'ordre $n-n_c$; nous envisageons ainsi des normes vectorielles qui amènent des systèmes de comparaison où seule la partie non linéaire est soumise à un processus d'agrégation et où la dimension de la partie linéaire n'est pas réduite.
- b) Il convient aussi de noter que le choix de la norme vectorielle proposée (II.2.48) s'effectue à partir de la considération de l'équation d'état (II.2.46) du processus étudié. Ce dernier point permet à priori de mieux adapter l'utilisation du théorème B-G 1 aux spécificités intrinsèques du processus de manière à obtenir des conditions suffisantes de stabilité aussi peu restrictives que possible.
- c) Vis à vis de ce choix de norme vectorielle (II.2.49), on peut noter le critère numérique $\varepsilon(q,p)$ défini dans le théorème B-G 2 sous la forme suivante :

$$\varepsilon(V,p) \stackrel{\Delta}{=} \varepsilon(q^V,p) \quad (\text{II.2.50})$$

Les arguments de ce critère étant numériques, la minimisation de $\varepsilon(V,p)$ en vue d'obtenir une valeur négative de ce critère est ainsi définie comme un problème classique d'optimisation.

- d) La prise en compte des matrices V de changements de base définies dans le corps des complexes se justifie à posteriori par la définition des formes remarquables "série" dans la suite du mémoire. On peut cependant valider cette complexification de l'espace d'état en montrant de quelle manière on peut caractériser la stabilité d'un système linéaire stationnaire par le théorème de Borne et Gentina. Considérons à cet effet le système suivant :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(p).x(t) \quad , \quad (\text{II.2.51})$$

Soit $U(p)$ la matrice de changement de coordonnées qui amène $A(p)$ sous sa forme de Jordan :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(p) = U(p) A(p) U^{-1}(p) \\ J(p) = \begin{bmatrix} \alpha_1(p) & & & \\ \delta_2(p) & \alpha_2(p) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \delta_n(p) & \alpha_n(p) \end{bmatrix} \\ \delta_i(p) = 0 \quad \text{ou} \quad 1 \quad i = 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (\text{II.2.52})$$

L'expression de la matrice pseudo-majorante $M(p)$ de $A(p)$ (II.2.51) définie par la norme vectorielle q^U (II.2.49) associée au changement de base $U(p)$ (II.2.52) est la suivante (II.2.53) :

$$M(p) = \begin{bmatrix} \mathcal{R}(\alpha_1(p)) & & & \\ \delta_2(p) & \mathcal{R}(\alpha_2(p)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \delta_n(p) & \mathcal{R}(\alpha_n(p)) \end{bmatrix} \quad (\text{II.2.53})$$

Il est alors manifeste que cette dernière matrice est une matrice de régime libre d'un système asymptotiquement stable si et seulement si les valeurs propres $\{\alpha_i ; i = 1, \dots, n\}$ de $A(p)$ sont à partie réelle négative. Cette définition systématique de la norme vectorielle qui associe la matrice de régime libre $M(p)$ (II.2.53) à n'importe quel système linéaire (II.2.51) amène en général un changement de base $U(p)$ complexe.

- e) Une justification de la non agrégation des sous-systèmes linéaires composant les systèmes étudiés peut être donnée en poursuivant l'application du théorème de Borne et Gentina au cas limite des systèmes linéaires stationnaires.

Considérons par exemple un système linéaire (II.2.52) d'ordre 4 asymptotiquement stable. Soient $\{\alpha_i(p) ; i = 1, 2, 3, 4\}$ ses valeurs propres. Conformément à la remarque précédente (d), le système majorant (II.2.53) déduit d'une norme vectorielle de taille égale à l'ordre du système est asymptotiquement stable si et seulement si le système étudié possède cette propriété. A l'inverse, considérons la matrice pseudo-majorante (II.2.55) associée à la norme vectorielle q' suivante (II.2.54) :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 J(p) \text{ note la forme de Jordan de } A(p) \\
 J(p) = \begin{bmatrix} \alpha_1(p) & & & \\ \delta_2(p) & \alpha_2(p) & \bigcirc & \\ & \delta_3(p) & \alpha_3(p) & \\ \bigcirc & & \delta_4(p) & \alpha_4(p) \end{bmatrix} \\
 \delta_i(p) = 0 \text{ ou } 1 ; i = 2, 3, 4 \\
 J(p) \triangleq U(p) A(p) U^{-1}(p) \\
 q' : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}_+^2 \\
 y \triangleq U(p) x \\
 q'_1(x) = \text{Max} (|y_1|, |y_2|) \\
 q'_2(x) = \text{Max} (|y_3|, |y_4|)
 \end{array} \right. \quad (\text{II.2.54})$$

L'expression de la matrice pseudo-majorante associée est alors :

$$M_{q'q'}(p) = \begin{bmatrix} \text{Max}\{\mathcal{R}(\alpha_1(p)), \delta_2(p) + \mathcal{R}(\alpha_2(p))\} ; & \bigcirc \\ & \delta_3(p) ; \text{Max}\{\mathcal{R}(\alpha_3(p)), \delta_4(p) + \mathcal{R}(\alpha_4(p))\} \end{bmatrix} \quad (\text{II.2.55})$$

Etant donnée l'expression des termes diagonaux, les valeurs propres de $M_{q'q'}(p)$ seront positives dans le cas où les valeurs propres $\alpha_i(p)$ sont concentrées au point (-0.5) (par exemple), alors que dans le cas voisin où ces valeurs propres sont distinctes mais restent dans

le voisinage de (-0.5) , les valeurs propres de $M_{\text{qq}}(p)$ sont négatives. Cet exemple justifie ainsi le choix d'une norme vectorielle (II.2.48) (II.2.49) qui ne contracte pas la partie linéaire des systèmes étudiés de manière à obtenir systématiquement des systèmes de comparaison dont les propriétés de stabilité soient aussi peu restrictives que possible vis à vis de celles du système initial.

II.2.3.1 - Normes vectorielles et/ou représentations remarquables des systèmes étudiés

Considérons sans perte de généralité, le système non linéaire suivant, où les éléments non constants sont isolés dans les premières lignes de la matrice de régime libre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = F(x,p) \cdot x(t) \\ x \in S \subset \mathbb{R}^n \\ F(x,p) = F_0(p) + \sum_{i=1}^{n_c} v_i f_i^T(x,p) \\ \forall i = 1, \dots, n_c ; v_i \in \mathbb{R}^n \\ \forall j = 1, \dots, n ; (v_i)_j = \delta_{ij} \end{array} \right. \quad (\text{II.2.56})$$

Définissons un système de comparaison à partir d'une norme vectorielle appartenant à la classe envisagée (II.2.49) (II.2.57) :

$$\begin{aligned} & \mathcal{V} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^{n-n_c+1} \\ & V(p) \in \mathcal{L}^{n \times n} \\ & V(p) = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ 0 & V_3 \end{bmatrix} ; V_1 \in \mathcal{L}^{n_c \times n_c} \end{aligned} \quad (\text{II.2.57})$$

$$y = V(p) \cdot x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1(x) = \text{Max}_{i=1, \dots, n_c} |y_i| \\ q_2(x) = |y_{n_c+1}| \\ \vdots \\ q_{n-n_c+1}(x) = |y_n| \end{array} \right.$$

Soit $M(V(p), \chi, p)$ la matrice pseudo-majorante issue du système étudié (II.2.56) et de la norme q^V (II.2.57).

Le critère d'analyse que nous avons retenu pour mener une étude de synthèse paramétrique est la borne supérieure $\varepsilon(q, p)$ des valeurs propres réelles maximales de l'ensemble de matrices $\{M(V(p), \chi, p) ; \chi \in \chi\}$.

Le calcul de cette valeur (Annexe II.6, § II.1.4) est initialisé par la valeur maximale de toutes les valeurs propres réelles maximales des sous matrices d'ordre k ($k = 1, \dots, n-n_c$) construites en retenant les éléments des k dernières lignes et k dernières colonnes de la matrice $M(V(p), \chi, p)$.

Ces matrices sont à éléments constants et sont donc à priori que peu représentatives du caractère non linéaire de la dynamique des systèmes étudiés. On a donc intérêt à conditionner ces sous matrices de manière à simplifier le calcul de cette minoration de $\varepsilon(q, p)$.

Ceci est possible si $M(V(p), \chi, p)$ est sous l'une des deux formes remarquables suivantes (II.2.58) :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} * & * & * & * & * & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & \\ \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \end{array} \right] \quad \text{ou} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} * & * & * & * & * & * \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right]$$

(1) (2) (II.2.58)

Les • désignent des éléments constants non nécessairement nuls.

Les * désignent des éléments non nécessairement constants.

Dans ce cas $\varepsilon(q,p)$ est défini comme la racine supérieure ou égale à :

$$\text{Max}_{i=2, \dots, n-n_c+1} \{\mu_{ii}(x,p)\} \quad \text{avec} \quad \{\mu_{ij}(x,p)\} \triangleq M(V(p), x, p)$$

de l'équation suivante en l'indéterminée ($\mu \in \mathbb{R}$) :

$$\text{Inf}_{x \in \chi} (\mu I - M_{qq}(x,p)) = 0 \quad (\text{II.2.59})$$

Si on considère la matrice V de changement de base (II.2.57) sous jacente à la norme vectorielle q^V choisie, il convient de noter que seule la structure de la matrice bloc diagonale V_3 conduit à définir une forme remarquable (II.2.58).

Les matrices transformées par un tel changement de base et correspondant aux matrices pseudo-majorantes remarquables (II.2.58) ont la structure suivante (cf Fig. II.10) :

$$V^{-1}(p) F(x,p) V(p) = \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix} * & \dots & * \\ * & & \\ \vdots & & \\ * & & * \end{matrix}}^{n_c} & \dots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & & * \\ \hline \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \dots & \bullet \\ \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \dots & \bullet \\ \vdots & & \vdots & \bullet & \dots & \bullet \\ \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \dots & \bullet \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} n_c$$

$$\left. \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} n - n_c$$

ou

$$V^{-1}(p) F(x,p) V(p) = \begin{bmatrix} * & \dots & * & \dots & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ * & & * & \dots & \dots & * \\ \hline \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \dots & \bullet \\ \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \dots & \bullet \\ \vdots & & \vdots & \bullet & \dots & \bullet \\ \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \dots & \bullet \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} n - n_c$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{n - n_c}$$

Les \bullet désignent des éléments constants non nécessairement nuls.
 Les $*$ notent des éléments non nécessairement constants.

FIGURE II.10

La matrice V_3 (II.2.57) doit, à priori, être choisie telle que les éléments diagonaux de la matrice bloc diagonale inférieure d'ordre $n-n_c$ de ces matrices (Fig. II.10) soient à partie réelle négative de manière à ce que les éléments $\mu_{ii}(x,p)$ ($i = 2, \dots, n-n_c+1$) de la matrice pseudo-majorante (II.2.60) soient négatifs. Cette propriété est en effet une condition nécessaire de négativité de $\varepsilon(q,p)$ (II.2.59).

Deux types de formes remarquables ont été proposés /Benrejeb & al, 1976 à 1982/ /Meizel, 1979 - a et b/, essentiellement dans un but d'analyse des propriétés de stabilité.

Dans les paragraphes suivants, nous proposons de les utiliser à des fins de synthèse. Il convient de noter, à la lumière de ce paragraphe, que celles-ci ne sont que deux éléments d'une classe plus générale de représentations intéressantes.

En particulier, on a récemment proposé /Rotella, 1983/ une généralisation de la forme en flèche de Benrejeb /Benrejeb, 1980/.

En conclusion des deux paragraphes précédents (§ II.2.2 et § II.2.3), nous avons reformulé l'expression du théorème B-G 1 en caractérisant la stabilité asymptotique d'un asservissement par la négativité d'un critère numérique $\varepsilon(V,p)$ dépendant à la fois :

- des gains ajustables (p) sur le processus,

- d'un mode de représentation (caractérisé par une matrice de changement de base V) du système laissant invariant la structure de sa partie non linéaire.

L'effort de synthèse doit alors porter sur la minimisation du critère $\varepsilon(V,p)$ par rapport à ses paramètres. Dans cet esprit, nous proposons maintenant d'explicitier le calcul de la tendance d'évolution $\varepsilon(V,p)$ dans l'espace de ses paramètres.

II.2.4 - Calcul de la tendance d'évolution $\delta(V,p)$ du critère $\varepsilon(V,p)$

En suivant les résultats des paragraphes précédents (§ II.2.2 et § II.2.3), le processus de synthèse associé à l'utilisation du théorème de Borne & Gentina peut être envisagé comme la minimisation d'un critère $\varepsilon(V,p)$ qui est une fonction :

- des paramètres ajustables p dont on cherche la valeur,

- d'une base de représentation définie par $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (§ II.2.3).

Afin de bien poser le problème d'optimisation, définissons d'abord un espace E réel des arguments de $\varepsilon(V,p)$:

$$E \in \mathbb{R}^{n_e} \quad n_e = n_p + 2((n - n_c)^2 + n n_c) \quad (\text{II.2.60})$$

E est composé de l'union de :

- l'ensemble des composantes de $p \in \mathbb{R}^{n_p}$,
- l'ensemble des parties réelles des composantes de $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ non nécessairement nulles,
- l'ensemble des parties imaginaires des composantes de $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ non nécessairement nulles.

On a vu (§ II.2.2) que $\varepsilon(V,p)$ est défini à partir des valeurs propres des matrices pseudo-majorantes $M(V,x,p)$.

Comme dans le cas des systèmes de comparaison linéaires, on peut alors chercher à exploiter la définition de la sensibilité des valeurs propres simples d'une matrice par rapport à ses coefficients pour mener à bien cette minimisation.

Mais $\varepsilon(V,p)$ est lui-même défini (II.2.34) comme le maximum des valeurs propres réelles maximales $\varepsilon(V,x,p)$ de l'ensemble des matrices $M(V,x,p)$ ($x \in \chi$) pseudo-majorantes déduites du système initial et de la norme vectorielle associée à V (II.2.48) (II.2.49).

$$\varepsilon(V,p) = \text{Sup}_{x \in \chi} \{ \varepsilon(V,x,p) \} \quad (\text{II.2.61})$$

La minimisation de $\varepsilon(V,p)$ est alors apparentée au problème de type "Minimax" /Hald & Madsen, 1979/ /Madsen, 1975/. Une difficulté surgit alors dans la mesure où ce type de problème est généralement envisagé comme une optimisation de fonctions non différentiables /Nurminski, 1979/.

Dans la suite de ce paragraphe, nous proposons néanmoins d'apporter une solution pratique à ce problème en définissant une direction de plus grande pente $\delta(V,p) \in \mathbb{R}^e$ du critère $\varepsilon(V,p)$ dans l'espace E des paramètres dans le cas où il n'existe qu'un nombre fini de matrices $M(V,\hat{x},p)$ ($\hat{x} \in \bar{\chi}$) pour lesquelles $\varepsilon(V,p)$ est la valeur propre réelle maximale.

Cette "direction de plus grande pente" est construite à partir des différents "gradients" de $\varepsilon(V,p)$ considérés successivement comme valeur propre des matrices $M(V,\bar{x},p)$.

Envisageons le cas où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) il n'existe qu'un nombre } \gamma \text{ fini de valeurs } \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_\gamma \text{ de} \\ \quad x \in \bar{X} \text{ telles que :} \\ \\ \quad \forall i = 1, \dots, \gamma ; \varepsilon(V,p) = \varepsilon(V,\bar{x}_i,p) \\ \\ \text{b) } \forall i = 1, \dots, \gamma ; M(V,\bar{x}_i,p) \text{ est irréductible} \\ \\ \text{c) } \forall i = 1, \dots, \gamma ; M(V,\bar{x}_i,p) \text{ est dérivable partiellement} \\ \quad \text{par rapport aux éléments de } E. \end{array} \right. \quad (\text{II.2.62})$$

Dans ce cas, $\forall i = 1, \dots, \gamma ; \varepsilon(V,\bar{x}_i,p)$ est une valeur propre simple de $M(V,\bar{x}_i,p)$. On peut alors définir un gradient $\nabla^i(V,p) \in \mathbb{R}^{ne}$ de $\varepsilon(V,\bar{x}_i,p)$ dans l'espace E (II.2.60). Les composantes de ce gradient sont calculées d'après les relations suivantes /Deif, 1981 - a et b/ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \beta \in E \\ \\ \frac{\partial \varepsilon(V,\bar{x}_i,p)}{\partial \beta} = v^T \frac{\partial M(V,\bar{x}_i,p)}{\partial \beta} u \\ \\ u \text{ et } v \text{ sont les vecteurs propres conjugués de } M(V,\bar{x}_i,p) \text{ re-} \\ \text{latifs à } \varepsilon(V,\bar{x}_i,p). \end{array} \right. \quad (\text{II.2.63})$$

La direction de plus grande pente $\delta(V,p)$ du critère $\varepsilon(V,p)$ est alors explicitée comme dans le cas linéaire stationnaire (II.2.1.2) par la définition suivante (II.2.64) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(V,p) \in \mathbb{R}^{ne} \\ \\ \text{Min}_{i=1,\dots,\gamma} (\delta^T(V,p) \cdot \nabla^i \varepsilon(V,p)) = \text{Min}_{i=1,\dots,\gamma} \{ \text{Max}_{\substack{x \in \mathbb{R}^{ne} \\ \|x\| \leq 1}} (x^T \cdot \nabla^i \varepsilon(V,p)) \} \end{array} \right. \quad (\text{II.2.64})$$

Le calcul de $\delta(V,p)$ à partir de l'ensemble des gradients $\{\nabla^i(V,p) ; i = 1, \dots, \gamma\}$ est explicité en Annexe II.3.

Le principe du calcul de la direction de plus grande pente $\delta(V,p)$ (II.2.64) du critère $\varepsilon(V,p)$ étant posé, on peut facilement étendre le champ d'application de cette méthode en relaxant deux hypothèses (II.2.62 - b) et (II.2.62 - c) préalables à l'évaluation de $\delta(V,p)$.

b) Dans le cas où l'une des matrices $M(V, \bar{x}_i, p)$ ($i \in [1, \dots, \gamma]$) est réductible, on peut la représenter par permutation d'indices sous la forme partitionnée suivante où les matrices bloc diagonales $M'_{jj}(V, \bar{x}_i, p)$ sont irréductibles :

$$\left. \begin{array}{l}
 P : \text{matrice de permutation} \\
 M'(V, \bar{x}_i, p) \triangleq P^{-1} \cdot M(V, \bar{x}_i, p) \cdot P \qquad \qquad \qquad (II.2.65)
 \end{array} \right\}$$

$$M'(\cdot) = \begin{bmatrix}
 M'_{11}(\cdot) & M'_{12}(\cdot) & \dots & M'_{1j}(\cdot) & \dots & M'_{1\gamma}(\cdot) \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \vdots & M'_{22}(\cdot) & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \ddots & M'_{jj}(\cdot) & \dots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & M'_{\gamma\gamma}(\cdot)
 \end{bmatrix}$$

Comme on l'a vu dans le cadre des systèmes de comparaison linéaires stationnaires, le gradient $\nabla^i(V,p)$ de la valeur propre $\varepsilon(V, \bar{x}_i, p) = \varepsilon(V,p)$ de $M(V, \bar{x}_i, p)$ peut être défini à partir des gradients de $\varepsilon(V, \bar{x}_i, p)$ calculés pour toutes les matrices bloc-diagonales $M'_{jj}(V, \bar{x}_i, p)$ pour lesquelles $\varepsilon(V, \bar{x}_i, p)$ est une valeur propre.

c) Si on suppose les composantes de la matrice $F(x,p)$ (II.2.56) dérivables partiellement par rapport aux composantes de p , alors la matrice $V^{-1} \cdot F(x,p) \cdot V$ est dérivable partiellement par rapport à tout élément de E . La matrice pseudo-majorante $M(V, x, p)$ est construite (cf Annexe I.1) à partir des modules des éléments hors diagonaux de $V^{-1} \cdot F(x,p) \cdot V$ et des parties réelles des éléments diagonaux.

Or, on peut toujours différencier la fonction module sauf à l'origine où on est amené à définir des dérivées directionnelles (à droite ou à gauche). Ce dernier point complique le calcul de la direction de plus grande pente $\delta(V,p)$ mais ne le rend pas impossible.

En conclusion de ce paragraphe, on peut donc expliciter la décroissance du critère $\varepsilon(V,p)$ (II.2.61) dans l'espace \bar{E} (II.2.60) des paramètres dans le cas où il n'existe qu'un nombre fini de valeurs $M(V,\hat{\chi},p)$ ($\hat{\chi} \in \chi$) de la matrice pseudo-majorante pour lesquelles $\varepsilon(V,p)$ est valeur propre.

Cette évolution peut être caractérisée :

- par le calcul d'une direction de plus grande pente $\delta(V,p)$ dans l'espace \bar{E} des paramètres,
- ou bien par la mise en évidence d'un point stationnaire caractérisé par $\delta(V,p) = 0$.

II.2.5 - Conclusion de ce paragraphe II.2

L'ensemble de ce sous chapitre (§ II.2.1 à II.2.4) nous a permis de définir une méthodologie de synthèse paramétrique basée sur l'utilisation d'un théorème d'analyse de la stabilité (Théorème B-G 1) /Gentina & al, 1979/ déduit des techniques d'agrégation par normes vectorielles.

Une transformation de l'expression de ce théorème nous a permis d'exprimer ces conditions suffisantes de stabilité asymptotique par la négativité d'un critère scalaire $\varepsilon(V,p)$ qui dépend à la fois :

- des gains ($p \in \mathbb{R}^{np}$) dont l'ajustement est l'objet de la synthèse,
- d'une base de représentation (V) du système.

La structure de cette matrice de changement de base est issue de la structure des sous systèmes linéaires que l'on peut mettre en évidence dans l'équation d'état du système étudié.

Les composantes non nécessairement nulles de cette matrice sont à priori laissées au libre choix du concepteur.

Leur "réglage" vise à obtenir, pour une valeur donnée \hat{p} des gains ajustables, les conditions de stabilité les moins dures (i.e. la valeur de $\varepsilon(V,p)$ minimum au sens du théorème B-G 1), pour l'analyse de la stabilité du système.

La minimisation du critère $\varepsilon(V,p)$ par rapport à ses arguments constitue ainsi une méthode de synthèse répondant aux spécificités des méthodes liées aux systèmes non linéaires.

La pratique de cette minimisation est facilitée dans la mesure où l'on peut dans la plupart des cas, calculer une direction de descente $\delta(V,p)$ (§ II.2.64) du critère $\varepsilon(V,p)$ dans l'espace de ses paramètres, ou bien constater l'existence d'un minimum local.

Enfin, la mise en œuvre de la méthode étant largement basée sur le mode de représentation des systèmes étudiés, nous avons mis en exergue certaines formes dites "formes remarquables" facilitant le calcul du critère $\varepsilon(V,p)$ et par conséquent la mise en œuvre pratique de la méthode de synthèse proposée.

Dans la suite de l'exposé, après une caractérisation de la structure des systèmes étudiés par la mise en évidence de formes canoniques, nous illustrerons la méthode de synthèse proposée en particularisant deux "formes remarquables", la première dite "forme série" due à l'auteur et la seconde notée "forme en flèche" issue des travaux de M. BenRejeb.

II.3 - SYSTEMES A NON LINEARITE DE RANG $n_c \geq 1$

Dans cette partie de l'étude, nous proposons de préciser la définition des systèmes étudiés (II.2.1) dans l'optique de leur traitement par la procédure de synthèse définie précédemment en définissant un rang de non linéarité.

Outre les définitions de tels systèmes, nous précisons des formes canoniques qui leurs sont applicables et à partir desquelles, en toute généralité, on pourra définir les transformations remarquables explicitées dans la suite de l'étude. Les structures de ces formes canoniques sont celles définies usuellement pour les systèmes linéaires stationnaires rationnels /Luenberger, 1967/. Dans tous les cas, nous nous attacherons à préciser les transformations permettant de passer d'un système particulier à sa forme canonique.

Dans un premier volet, nous proposons d'aborder la classe des systèmes à non linéarité de rang 1, pour ensuite généraliser à un rang $n_c \geq 1$.

II.3.1 - Systèmes non linéaires à non linéarité de rang 1 / Définition

La terminologie de "non linéarité de rang 1" appliquée à un système dynamique s'applique à sa représentation dans l'espace d'état sous la forme suivante :

$$\dot{x} = F(x).x(t) \quad (\text{II.3.1})$$

avec $x \in \chi$: argument des non linéarités
 $x \in \mathbb{R}^n$
 $\text{Sup}_{x \in \chi} \{ \|F(x)\| \} < +\infty$

Le système précédent est dit à non linéarité de rang 1 si et seulement si la matrice $F(.)$ prend l'une des deux formes suivantes :

$$F(.) = F_0 + u.f^T(.)$$

ou

$$F(.) = F_0^T + f(.) \cdot u^T$$
(II.3.2)

avec $F_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$
 $u \in \mathbb{R}^n$
 $f(.) \in \mathbb{R}^n$ note un vecteur dont les composantes peuvent varier le long des trajectoires du système (II.3.1)

D'une manière équivalente, on peut caractériser cette classe de systèmes par la formulation suivante :

Le système (II.3.1) est à non linéarité de rang 1 si et seulement si il existe un changement de base décrit par une matrice $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tel que les éléments non constants soient isolés dans la première ligne ou la première colonne de la matrice de régime libre transformée.

$$V^{-1} F(.) V = F'_0 + v_1.f'^T(.)$$

ou

$$V^{-1} F(.) V = F'_0{}^T + f'(.) \cdot v_1^T$$
(II.3.3)

avec $v_1 \in \mathbb{R}^n$
 $v_1 = [1, 0, \dots, 0]$

L'équivalence des deux définitions est immédiate, la matrice

$$F'_0 + v_1.g'^T(x)$$

est en effet l'expression de la matrice

$$F_0 + u.g^T(x)$$
(II.3.4)

dans la base

$$\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

avec $u_1 = u$

L'utilisation judicieuse de la technique d'agrégation par normes vectorielles conduit naturellement, vis à vis de cette classe de processus, à définir des systèmes de comparaison dont les éléments non constants peuvent être isolés dans la première ligne ou la première colonne de la matrice pseudo-majorante. On peut ainsi leur appliquer directement le théorème d'analyse de Borne & Gentina (§ II.2.2).

Considérons en effet un processus décrit par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = (F_o + v_1 \cdot f^T(x)) \cdot x(t) \quad (\text{II.3.5})$$

En associant à ce système une norme vectorielle dont seule la première composante dépend de la première composante x_1 du vecteur état (§ II.2.3.3), on obtient un système de comparaison sous la forme d'une équation d'état où les termes non constants sont isolés dans la première ligne (II.3.6)

$$\dot{z} = (M_o + v_1 \cdot g_o^T(x)) \cdot z \quad (\text{II.3.6})$$

△△

II.3.2 - Exemple

Afin de mettre en évidence la structure des systèmes étudiés, considérons l'asservissement suivant (Fig. II.11), composé d'un processus à une entrée de commande et plusieurs sorties en contre-réaction avec un correcteur de type linéaire.

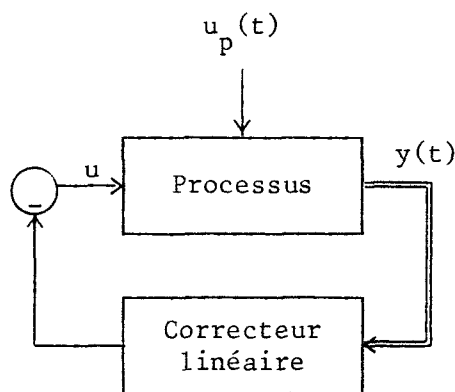


FIGURE II.11

Le processus est décrit par l'équation d'état suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^P = A^P(t, x^P, u^P) \cdot x^P + v_1 \cdot f(u^P, u^C) \\ y = C^P \cdot x^P \\ \left\{ \begin{array}{l} y \in \mathbb{R}^m \\ x^P \in \mathbb{R}^{n_1} \\ u^P \in P \subset \mathbb{R}^{eP} \\ u^C \in \mathbb{R} \\ f(u^P, u^C) : P \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \end{array} \right. \\ \text{avec } A^P(.) = \begin{bmatrix} -a_1(.) & -a_2(.) & \dots & -a_{n_1-1}(.) & -a_{n_1}(.) \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{II.3.7})$$

Le correcteur étant linéaire stationnaire, on peut le représenter par l'équation d'état suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^C = A^C x^C + B^C y^P \\ -u^C = C^C x^C + D^C y^P \end{array} \right. \quad (\text{II.3.8})$$

avec $x^C \in \mathbb{R}^{n_2}$
 $u^C \in \mathbb{R}$
 $y \in \mathbb{R}^m$

L'équation d'état de l'asservissement est alors décrite sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}^P(t) \\ \dot{x}^C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^P(.) & 0 \\ C^P & A^C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^P(t) \\ x^C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdot f(u^P, u^C) \\ u^C = -(D^C \cdot C^P \cdot x^P(t) + C^C \cdot x^C(t)) \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (\text{II.3.9})$$

Dans le cas où, quelquesoit u^P , la fonction $f(u_p, \dots)$ est Lipschitzienne, on peut l'écrire sous la forme d'un produit :

$$f(u^P, u^C) = f^*(u^P, u^C) \cdot (-D^C C^P x^P(t) + C^C x^C(t)) \quad (\text{II.3.10})$$

En notant :

$$\Delta \in \mathbb{R}^{n_1} : \Delta = D^C C^P$$

il vient :

$$\dot{x} = \left[\begin{array}{ccc|cc} -a_1(\cdot) - f^*(\cdot)\Delta_1, \dots, -a_{n_1} - f^*(\cdot)\Delta_{n_1} & -f^*(\cdot)C_1^C & \dots & -f^*(\cdot)C_{n_2}^C \\ 1 & & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ \hline & C^P & & & A^C \end{array} \right] x \quad (\text{II.3.11})$$

Les termes non constants de cet asservissement restent ainsi isolés dans la première ligne de l'équation d'état précédente (II.3.11).

Nous proposons à ce niveau de montrer que l'étude de la stabilité d'un système à non linéarité de rang 1 peut toujours être ramenée à celle du système mis sous des formes canoniques homologues des structures Compagnon ou Frobenius définies pour les matrices à éléments constants.

II.3.3 - Formes canoniques : définition et calcul /Meizel, 1979 - b/
/Richard, 1981/

Par analogie avec les systèmes linéaires, nous proposons les formes C1 et L1 comme formes canoniques respectives des équations d'état en régime libre pour lesquelles la matrice de régime libre a ses éléments non constants isolés dans une seule colonne (Forme C1) et une seule ligne (Forme L1) :

Forme C1 :

$$\dot{x}_c = \begin{bmatrix} -a_1(.) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2(.) & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n(.) & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} x_c(t) \quad (\text{II.3.12})$$

Forme L1 :

$$\dot{x}_l = \begin{bmatrix} -a_1(.) & -a_2(.) & \dots & -a_n(.) \\ 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} x_l(t) \quad (\text{II.3.13})$$

En définissant les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} a(.) \in \mathbb{R}^n & \quad a^T(.) = \begin{bmatrix} a_1(.) & \dots & a_n(.) \end{bmatrix} \\ v_1 \in \mathbb{R}^n & \quad v_1^T = \begin{bmatrix} 1, 0, \dots, 0 \end{bmatrix} \\ H \in \mathbb{R}^{n \times n} & \quad H = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \circ & & \\ & & \diagdown & \\ & & & \circ \\ & \circ & & & \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.3.14})$$

on peut définir ces formes canoniques sous forme synthétique :

$$\text{Forme C1 :} \quad \dot{x}_c = (-a(.) v_1^T + H^T) \cdot x_c \quad (\text{II.3.15})$$

$$\text{Forme L1 :} \quad \dot{x}_l = (-v_1 a^T(.) + H) \cdot x_l \quad (\text{II.3.16})$$

Considérons maintenant un système quelconque à non linéarité de rang 1 :

$$\dot{x}_1 = (A_1 + u_1 \cdot b_1^T(\cdot)) \cdot x_1 \quad (\text{II.3.16})$$

La représentation de ce système dans une base dont le premier vecteur est u_1 , est la suivante :

$$\dot{x}_2 = (A_2 + v_1 \cdot b_2^T(\cdot)) \cdot x_2 \quad (\text{II.3.17})$$

Nous proposons maintenant de le représenter en utilisant la forme canonique L1. En s'appuyant sur les travaux relatifs à la commande des systèmes linéaires /Fossard, 1972/, on peut représenter le système précédent en isolant le sous-système contrôlable par le vecteur v_1 du système linéaire représenté par la paire (A_2, v_1) . Il vient alors :

$$\exists V, \det(V) \neq 0$$

$$x = V^{-1} \cdot x_2$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \text{---} \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{bmatrix} A_3 & | & A_4 \\ \text{---} & | & \text{---} \\ 0 & | & A_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_3^T(\cdot) & | & +b_4^T(\cdot) \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ \text{---} \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.18})$$

avec $n_1 \triangleq \text{rang}([A_2, v_1])$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -a_1 & \dots & -a_{n_1} \\ 1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad b_3(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_1}$$

$$\begin{bmatrix} b_3^T(\cdot) & | & b_4^T(\cdot) \end{bmatrix} = b_2^T \cdot V$$

Le système précédent apparaît ainsi comme la mise en série d'un système linéaire stationnaire avec un système à non linéarité de rang 1 décrit sous la forme canonique L1 (II.3.16) (cf Fig. II.12).

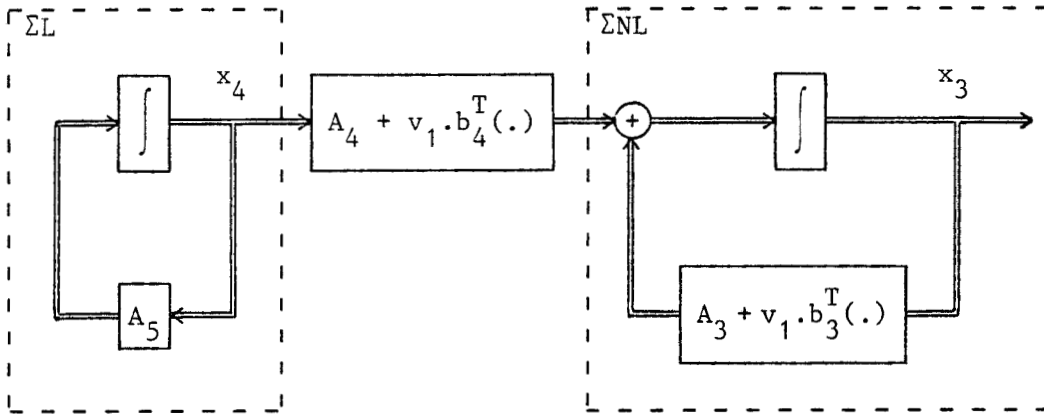


FIGURE II.12

Les composantes de $b_2(x)$ étant bornées par hypothèse, les éléments de la matrice de connexion $(A_4 + v_1 \cdot b_4^T(x))$ sont bornés et le système global (Fig. II.12) est asymptotiquement stable si les deux sous systèmes ΣL et ΣNL le sont indépendamment (Théorème de Malkin, /Grujić, 1984/).

D'un point de vue pratique, nous proposons d'effectuer la détermination :

- des matrices de changement de base V & V^{-1} ,
- du rang n_1 de l'espace commandable par (A_2, v_1) ,
- des matrices A_3, A_4, A_5 (II.3.18)

en deux passes du schéma de l'algorithme de Danilevskii /Fadeev & Fadeeva, 1963/ (cf Annexes II.1 et II.2).

Par une extension aisée des résultats précédents, on peut énoncer le lemme suivant :

Lemme II.3 :

Un système à non linéarité de rang 1 décrit sous la forme (II.3.22) (resp (II.3.23)) :

$$\dot{x}_1 = (F_0 + v_1 \cdot f^T(\cdot)) \cdot x_1 \tag{II.3.22}$$

$$\dot{x}_1 = (F_0^T + f(\cdot) \cdot v_1^T) \cdot x_1 \tag{II.3.23}$$

$$v_1^T = [1, 0, \dots, 0]$$

peut se représenter comme la mise en cascade d'un système sous la forme canonique L1 (II.3.24) (resp (II.3.25)) avec un système linéaire stationnaire :

$$\dot{\bar{x}}_2 = (H + v_1 \cdot g^T(\cdot)) \cdot x \quad (\text{II.3.24})$$

$$\dot{\bar{x}}_2 = (H^T + g(\cdot) \cdot v_1^T) \cdot x \quad (\text{II.3.25})$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & & C \\ 1 & \ddots & \\ & \ddots & 1 \\ C & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tous les termes de la décomposition ainsi que la matrice de changement de base et son inverse sont calculables par l'application de l'algorithme de l'Annexe II.2.

L'importance de ce lemme réside dans le fait que nous pouvons ramener (théoriquement aussi bien que pratiquement) toute étude portant sur les systèmes à non linéarités de rang 1 à une étude portant sur une des formes canoniques C1 ou L1.

Nous proposons maintenant d'étendre la démarche précédente aux systèmes à non linéarités de rang $n_c \geq 1$.

II.3.4 - Systèmes à non linéarité de rang $n_c \geq 1$ / Définition et formes canoniques associées

Un système est dit à non linéarité de rang n_c si la matrice de régime libre de son équation d'état (II.3.26)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(x) \cdot x(t) \\ x(t) \in S \subset \mathbb{R}^n \\ x \in \chi \end{cases} \quad (\text{II.3.26})$$

s'écrit sous l'une des deux formes suivantes :

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{n_c} u_i \cdot f_i^T(x) \quad (\text{II.3.27})$$

ou

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{n_c} f_i(x) \cdot u_i^T \quad (\text{II.3.28})$$

avec $\{u_i ; i = 1, \dots, n_c\}$: famille de vecteurs indépendants de \mathbb{R}^n
 $\{\forall i = 1, \dots, n ; f_i(.) : \chi \rightarrow \mathbb{R}^n\}$

L'étude de la stabilité de ce système peut d'abord être décomposée en deux sous-études, une intrinsèquement non linéaire et l'autre relative à un sous-système linéaire stationnaire.

Considérons en effet la matrice :

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{n_c} u_i \cdot f_i^T(x) \quad (\text{II.3.27})$$

Son expression dans une base construite en partitionnant l'espace d'état S en deux sous-espaces respectivement contrôlable et non contrôlable par la paire matricielle $[F_0, [u_1 | u_2 | \dots | u_{n_c}]]$ est alors partitionnée de la manière suivante :

$$\exists U \in \mathbb{R}^{n \times n} ; \det(U) \neq 0$$

$$U^{-1} \cdot F(x) \cdot U = \begin{bmatrix} F'_{11}(x) & | & F'_{12}(x) \\ \hline 0 & | & F_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.29})$$

De même, l'expression de :

$$F(x) = F_0^T + \sum_{i=1}^{n_c} f_i(x) \cdot u_i^T$$

peut être transformée sous la forme :

$$U^T \cdot F(x) (U^{-1})^T = \begin{bmatrix} F'_{11}(x) & | & 0 \\ \hline & & \\ F'_{12}(x) & | & F'_{22}(x) \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.30})$$

L'étude de la stabilité asymptotique de ces systèmes (II.3.29) (II.3.30) peut donc être ramenée comme dans le cas des systèmes à non linéarités de rang 1 (cf Fig. II.12) à la caractérisation de :

- la stabilité asymptotique du système en régime libre :

$$\dot{x}_1(t) = F'_{11}(x) \cdot x_1(t) \quad (\text{II.3.31})$$

- la stabilité exponentielle du système linéaire :

$$\dot{x}_2(t) = F'_{22} \cdot x_2(t) \quad (\text{II.3.32})$$

L'étude qui nous importe étant celle de la partie non linéaire, nous proposons deux formes canoniques aux matrices de régime libre $F'_{11}(x)$.

a) Forme canonique L_{n_c} associée à la classe de matrices $\{F_0 + \sum_{i=1}^{n_c} u_i^T \cdot f_i(x)\}$

Celle-ci est définie par la structure suivante :

$$FL_{n_c}(x) = \begin{bmatrix} F_{11}(x) & F_{12}(x) & \dots & F_{1,n_c}(x) \\ F_{21}(x) & F_{22}(x) & & F_{2,n_c}(x) \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ F_{n_c,1}(x) & F_{n_c,2}(x) & \dots & F_{n_c,n_c}(x) \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.31})$$

$$n_c = \text{rang} (F_0, (u_1 | u_2 | \dots | u_{n_c}))$$

$$\forall i = 1, \dots, n_c ; n_i \in \mathbb{N} ; \sum_{i=1}^{n_c} n_i = N_c$$

$$F_{ij}(\lambda, p) \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j} \quad \forall i = 1, \dots, n_c \quad (\text{II.3.32})$$

$$F_{ii}(\lambda) = \begin{bmatrix} -a_{1,i}^i(\lambda) & \dots & -a_{n_i-1,i}^i(\lambda) & -a_{n_i,i}^i(\lambda) \\ & 1 & & \\ & & \dots & \\ & & & 1 & & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{ij}(\lambda) = \begin{bmatrix} -a_{1,j}^i(\lambda) & \dots & -a_{n_j,j}^i(\lambda) \\ & & & & & \\ & & \bigcirc & & & \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \forall j = 1, \dots, n_c \\ i \neq j \end{array}$$

b) Forme canonique C_{n_c} associée à la classe de matrices $\{F_0^T + \sum_{i=1}^{n_c} f_i(\lambda) u_i^T\}$

C'est naturellement la transposée de la forme précédente :

$$FC_{n_c}(\lambda) = \begin{bmatrix} F_{11}^T(\lambda) & F_{21}^T(\lambda) & \dots & F_{n_c,1}^T(\lambda) \\ F_{12}^T(\lambda) & F_{22}^T(\lambda) & & F_{n_c,2}^T(\lambda) \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ F_{1,n_c}^T(\lambda) & F_{2,n_c}^T(\lambda) & & F_{n_c,n_c}^T(\lambda) \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.33})$$

La structure de ces formes canoniques est manifestement celle des formes usuelles /Luenberger, 1967/ de représentation des systèmes linéaires stationnaires multivariables. Les transformations correspondant à l'obtention de ces dernières sont issues de changements de base explicites à l'Annexe II.5.

En particulier, on peut expliciter :

$$U \in \mathbb{R}^{n \times N_c} \quad U^+ \in \mathbb{R}^{N_c \times n} \quad U^+ U = I_{N_c}$$

$$U^+ (F_o + \sum_{i=1}^{n_c} U_i \cdot f_i^T(x)) \cdot U = FL_{n_c}(x) \quad \text{et évidemment}$$

$$U^T (F_o^T + \sum_{i=1}^{n_c} f_i(x) \cdot U_i^T) \cdot U^{+T} = FC_{n_c}(x)$$

Les différentes formes canoniques introduites nous permettent d'unifier la représentation des systèmes étudiés et donc leur étude.

Nous envisageons maintenant une étude de synthèse qui illustre la méthodologie introduite au § II.2 et portant sur la classe d'asservissements à non linéarité de rang 1.

II.4 - METHODE DE SYNTHESE ASSOCIEE A LA FORME SERIE

Dans ce paragraphe, nous proposons d'expliciter la méthodologie de synthèse paramétrique développée précédemment (§ II.2) en nous appuyant sur une classe particulière de représentations remarquables (§ II.2.3.1) des systèmes étudiés qui facilite son application.

Ce mode de description est d'abord introduit à propos des systèmes à non linéarité de rang 1 et la méthode de synthèse est développée dans ce cadre. Un exemple numérique illustre sa mise en œuvre dans le chapitre suivant.

Enfin, la méthode est étendue au cas des systèmes à non linéarité de rang $n_c \geq 1$.

La procédure de choix systématique (§ II.2 et II.3) d'une norme vectorielle permettant de caractériser la stabilité asymptotique d'un système à non linéarité de rang 1 conduit à définir des représentations équivalentes du système étudié puis à utiliser une norme vectorielle q de taille maximale.

$$q : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n ; q_i(y) = |y_i| = (y_i \bar{y}_i)^{1/2} \quad (\text{II.4.1})$$

Considérons un système décrit sous la forme L1 (II.3.24) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = FL_1(x,p) \cdot x(t) \\ FL_1(x,p) = \begin{bmatrix} -g_1(x,p) & -g_2(x,p) & \dots & \dots & -g_{n_1}(x,p) \\ & 1 & \dots & & \bigcirc \\ & & \dots & & \dots \\ & \bigcirc & & \dots & \dots \\ & & & \dots & \dots \\ & & & & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{II.4.2})$$

La matrice de changement de base $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ doit être telle que sa première colonne soit :

$$\alpha v_1 : v_1^T = [1, 0, \dots, 0] \quad \alpha \neq 0$$

$$V = \left[\begin{array}{c|c} \alpha & v_{12} \\ \hline 0 & \\ \vdots & \\ \vdots & v_{22} \\ 0 & \end{array} \right] \quad (\text{II.4.3})$$

D'autre part, on souhaite (§ II.2.3.4) obtenir une représentation remarquable, en ce sens que le bloc-diagonal inférieur d'ordre $n-1$ de la matrice transformée :

$$V^{-1} F(x,p) V \quad (\text{II.4.4})$$

soit triangulaire.

Enfin, dans le cas d'un système linéaire stationnaire stable, il convient de s'assurer que l'on peut toujours définir une matrice V (II.4.4) telle que le système majorant du système étudié (II.4.2) déduit de la norme vectorielle $(x \rightarrow q(V^{-1} \cdot x))$ (II.4.2) (II.4.3) ait les mêmes propriétés que le système initial.

Nous proposons d'introduire de manière heuristique une forme particulière de représentation des systèmes étudiés qui satisfasse aux spécifications précédentes.

II.4.1 - Définition de la forme série à partir des formes canoniques

Considérons une matrice de régime libre de type L1 (II.4.5) :

$$H - v_1 a^T(x,p) = \begin{bmatrix} -a_1(.) & -a_2(.) & \dots & -a_{n-1}(.) & -a_n(.) \\ 1 & & 0 & & \bigcirc \\ & & \dots & \dots & \dots \\ \bigcirc & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.4.5})$$

Nous pouvons associer à ce système un polynôme formel (II.2.46) (noté polynôme symbolique /Richard, 1981/ ou polynôme caractéristique instantané /Benrejeb, 1981 - a/) en l'indéterminée α :

$$P(\alpha, x, p) = \alpha^n + a_1(x,p) \alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x,p) \alpha + a_n(x,p) \quad (\text{II.4.6})$$

Considérons maintenant un vecteur de paramètres : $c \in \mathbb{C}^{n-1}$:

$$c^T = [\alpha_2, \dots, \alpha_n] \quad (\text{II.4.7})$$

Définissons alors une matrice de changement de base $V(c)$ à partir de ses colonnes v_i :

$$V(c) = [v_1 | v_2 | \dots | v_n]$$

$V(c)$ est définie de manière récurrente à partir de la notion de différence divisée dont nous proposons de rappeler la définition.

Différence divisée - Définition :

Soit f une application de classe c^∞ de \mathbb{C} dans \mathbb{C}^k .

Soit $c \in \mathbb{C}^e$; $c^T \triangleq [\alpha_e, \alpha_{e-1}, \dots, \alpha_2, \alpha_1]$

On définit les différences divisées de f suivant le "réseau" c de manière récurrente par :

$$\left\{ \begin{array}{l} D(\alpha_1 ; f) = f(\alpha_1) \\ \\ D(\alpha_2, \alpha_1 ; f) = \begin{cases} \left(\frac{df(\alpha)}{d\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_1} & \text{si } \alpha_2 = \alpha_1 \\ \frac{f(\alpha_2) - f(\alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_1} & \text{sinon} \end{cases} \\ \\ \forall i = 1, e-1 \\ \\ D(\alpha_{i+1}, \alpha_i, \alpha_{i-1}, \dots, \alpha_1 ; f) = \begin{cases} \frac{D(\alpha_{i+1}, \alpha_{i-1}, \dots, \alpha_1 ; f) - D(\alpha_i, \alpha_{i-1}, \dots, \alpha_1 ; f)}{\alpha_{i+1} - \alpha_i} & \text{si } \alpha_{i+1} \neq \alpha_i \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (D(\alpha_i, \alpha_{i-1}, \dots, \alpha_1 ; f)) & \text{si } \alpha_{i+1} = \alpha_i \end{cases} \end{array} \right. \quad (\text{II.4.8})$$

$\Delta\Delta$

Notons maintenant :

$$\begin{aligned} v(\alpha) : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ \alpha &\rightarrow v^T(\alpha) = [\alpha^{n-1}, \alpha^{n-2}, \dots, \alpha, 1] \end{aligned} \quad (\text{II.4.9})$$

Définissons une matrice de changement de base $V(c) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ à partir des définitions précédentes (II.4.8) (II.4.9) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i = 1, \dots, n ; v_i(c) \text{ note la même colonne de } V(c) \\ v_n(c) = v(\alpha_n) = D(\alpha_n ; v(\cdot)) \\ \forall i = 2, \dots, n-1 : v_i(c) = D(\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n ; v(\cdot)) \\ v_1(c) = v_1 \quad v_1^T = [1, 0, 0 \dots 0] \end{array} \right. \quad (\text{II.4.10})$$

Remarque : Il convient de remarquer que la définition de $v_1(c)$ est homogène par rapport à celle des autres colonnes de V en adjoignant une valeur α_1 à l'ensemble $\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}$

$$\forall \alpha_1 ; v_1(c) = v_1 = D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n ; v)$$

Il est alors inutile de faire apparaître α_1 dans c (II.4.7).

L'expression formelle de $V(c)$ permet d'explicitier formellement $V^{-1}(c)$ de la manière suivante :

Formation de $V^{-1}(c)$:

Notons $\bar{v}_i(c)$ la $i^{\text{ème}}$ ligne de $V^{-1}(c)$. Considérons d'abord la 1ère ligne $\bar{v}_1(c)$, elle est orthogonale aux vecteurs $v_2(c), v_3(c), \dots, v_n(c)$. Ces vecteurs sont constitués de combinaisons linéaires des vecteurs suivants :

$$v(\alpha_2) = \left[\alpha_2^{n-1}, \alpha_2^{n-2}, \dots, \alpha_2, 1 \right]^T$$

$$v(\alpha_3) = \left[\alpha_3^{n-1}, \alpha_3^{n-2}, \dots, \alpha_3, 1 \right]^T$$

⋮

$$v(\alpha_n) = \left[\alpha_n^{n-1}, \alpha_n^{n-2}, \dots, \alpha_n, 1 \right]^T$$

Alors les composantes de $\bar{v}_1(c)$ sont les coefficients du polynôme normalisé d'ordre $n-1$ dont les racines sont $(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$.

$$\bar{v}_1(c) = \left[1, \sigma_{1,2}, \sigma_{1,3}, \dots, \sigma_{1,n} \right] \quad (\text{II.4.11})$$

avec :

$$\forall i = 2, \dots, n \quad \alpha_i^{n-1} + \sum_{j=2}^n \sigma_{1,j} \cdot \alpha_i^{n-j} = 0 \quad (\text{II.4.12})$$

Par un raisonnement analogue, la $i^{\text{ème}}$ ligne de V^{-1} est définie par :

$$\bar{v}_i(c) = \left[0, \dots, 0, 1 ; \sigma_{i,i+1} ; \dots ; \sigma_{i,n} \right] \quad (\text{II.4.13})$$

$$(V(c))^T \cdot (H^T - a(x,p)v_1^T) (V^{-1}(c))^T = \begin{bmatrix} -b_1(.) & 1 & \dots & & & & \circ \\ -b_2(.) & \alpha_2 & \dots & \dots & & & \\ \vdots & & \dots & \dots & \dots & & \\ \vdots & & & & & \dots & \\ \vdots & & & & & & 1 \\ -b_n(.) & \circ & & & & & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} \quad (\text{II.4.18})$$

Nous proposons maintenant d'illustrer le mode de représentation proposé à partir de quelques exemples.

Expressions du changement de représentation (n=3) (n=4) :

Considérons la matrice de régime libre :

$$A_3(x,p) = \begin{bmatrix} -a_1(.) & -a_2(.) & -a_3(.) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.4.19})$$

Définissons un vecteur $c = [\alpha_2, \alpha_3]^T \in \mathcal{C}^2$ de paramètres de représentations. $V_3(c)$ s'exprime à partir de la définition (II.4.10) (II.4.11) sous la forme suivante :

$$V_3(c) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_3^2 \\ 0 & 1 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.4.20})$$

$$V_3^{-1}(c) = \begin{bmatrix} 1 & -(\alpha_2 + \alpha_3) & \alpha_2 \alpha_3 \\ 0 & 1 & -\alpha_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.4.21})$$

La représentation équivalente de $A(x,p)$ est alors :

$$V_3^{-1}(c) \cdot A_3(x,p) \cdot V_3(c) = \begin{bmatrix} -b_1(.) & -b_2(.) & -b_3(.) \\ 1 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (\text{II.4.22})$$

avec :

$$P(\alpha, x, p) \triangleq \alpha^3 + a_1(c, x, p)\alpha^2 + a_2(c, x, p)\alpha + a_3(c, x, p)$$

$$\begin{aligned} b_3(c, x, p) &= P(\alpha_3, x, p) \\ &= \alpha_3^3 + a_1(x, p)\alpha_3^2 + a_2(x, p)\alpha_3 + a_3(x, p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2(c, x, p) &= D(\alpha_3, \alpha_2, P(., x, p)) \\ &= (\alpha_3^2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2^2) + a_1(x, p) \cdot (\alpha_3 + \alpha_2) + a_2(x, p) \end{aligned}$$

$$b_1(c, x, p) = a_1(x, p) + \alpha_2 + \alpha_3$$

Pour mettre en exergue la simplicité des expressions en rapport avec la récursivité de la définition de $V(c)$ (II.4.10), considérons maintenant la cas $n=4$. Soit :

$$A_4(x,p) = \begin{bmatrix} -a_1(.) & -a_2(.) & -a_3(.) & -a_4(.) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.4.23})$$

et $c = [\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]^T \in \mathbb{C}^3$

$V_4(c)$ et $V_4^{-1}(c)$ sont définis par :

$$V_4(c) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 & \alpha_3^2 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_4^2 & \alpha_4^3 \\ 0 & 1 & \alpha_3 + \alpha_4 & \alpha_4^2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.4.24})$$

$$V_4^{-1}(c) = \begin{bmatrix} 1 & -(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) & (\alpha_2(\alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_3\alpha_4) & -(\alpha_2\alpha_3\alpha_4) \\ 0 & 1 & -(\alpha_3 + \alpha_4) & +\alpha_3\alpha_4 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.4.25})$$

Alors :

$$V_4^{-1}(c) \cdot A_4(x, p) \cdot V_4(c) = \begin{bmatrix} -b_1(.) & -b_2(.) & -b_3(.) & -b_4(.) \\ 1 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (\text{II.4.26})$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} b_4(c, x, p) &= \alpha_4^4 + a_1(x, p)\alpha_4^3 + a_2(x, p)\alpha_4^2 + a_3(x, p)\alpha_4 + a_4(x, p) \\ b_3(c, x, p) &= (\alpha_4^3 + \alpha_4^2\alpha_3 + \alpha_4\alpha_3^2 + \alpha_3^3) + \\ &\quad + a_1(x, p) \cdot (\alpha_4^2 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_3^2) + \\ &\quad + a_2(x, p) \cdot (\alpha_4 + \alpha_3) + \\ &\quad + a_3(x, p) \\ b_2(c, x, p) &= (\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3^2 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_4^2) + \\ &\quad + a_1(x, p) \cdot (\alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_2) + \\ &\quad + a_2(x, p) \\ b_1(c, x, p) &= a_1(x, p) + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \end{aligned} \right\}$$

Ces expressions (II.4.24) (II.4.25) (II.4.26) incorporent celles définies dans le cas $n=3$ (II.4.20) (II.4.21) (II.4.22) en y substituant α_4 à α_3 α_3 à α_2 a_3 à a_4 a_2 à a_3 et a_1 à a_2 .

Il convient maintenant de vérifier que le changement de base ainsi défini satisfait aux spécifications définies dans l'introduction.

* Première spécification :

$\forall c \in \mathbb{C}^{n-1}$, les éléments non constants de $F(x,p)$ restent isolés dans la première rangée (ligne ou colonne) et le bloc-diagonal inférieur d'ordre $n-1$ est triangulaire.

** Deuxième spécification :

Considérons un système linéaire stationnaire décrit par la matrice de régime libre suivante :

$$\left[H - v_1 \cdot a^T(p) \right] \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (\text{II.4.27})$$

Choisissons pour composantes de $c \in \mathbb{C}^{n-1}$ $(n-1)$ racines du polynôme caractéristique :

$$P(\alpha, p) = \alpha^n + \sum_{i=1}^n a_i(p) \cdot \alpha^{n-i} = \prod_{i=1}^n (\alpha - \alpha_i(p)) \quad (\text{II.4.28})$$

$$c^T = (\alpha_2(p) ; \dots ; \alpha_n(p))$$

La matrice transformée s'écrit alors de la manière suivante indépendamment du spectre de $(H - v_1 \cdot a^T(p))$:

$$V^{-1}(c) \cdot (H - v_1 \cdot a^T(p)) \cdot V(c) = \begin{bmatrix} \alpha_1(p) & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \alpha_2(p) & & \bigcirc \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bigcirc & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 1 & \\ & & & & \alpha_n(p) \end{bmatrix} \quad (\text{II.4.29})$$

La pseudo-majorante issue de $H-v_1 \cdot a^T(p)$ par utilisation de la norme vectorielle induite par $V(c)$:

$$q(V^{-1}(c) \cdot x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$$

$$y = V^{-1}(c) \cdot x$$

$$q_i(V^{-1}(c) \cdot x) = |y_i|$$

s'écrit :

$$M(c,p) = \left[\begin{array}{cccc} \mathcal{R}(\alpha_1) & & & \\ 1 & \cdot & & \bigcirc \\ & \cdot & \mathcal{R}(\alpha_2) & \\ & & \cdot & \cdot \\ \bigcirc & & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & 1 \\ & & & \cdot \\ & & & \mathcal{R}(\alpha_n) \end{array} \right] \quad (\text{II.4.30})$$

Cette matrice définit un système de comparaison stable si les mineurs principaux de $-M(c,p)$ sont tous positifs.

Ces conditions s'expriment simplement par :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mathcal{R}(\alpha_n) > 0 \\ (-\mathcal{R}(\alpha_n))(-\mathcal{R}(\alpha_{n-1})) > 0 \\ \vdots \\ \prod_{i=1}^n (-\mathcal{R}(\alpha_i)) > 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.4.31})$$

ou tout simplement de la manière suivante :

$$\{\forall i = 1, \dots, n ; \mathcal{R}(\alpha_i) < 0\} \quad (\text{II.4.32})$$

qui constitue la condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique de la matrice initiale (II.4.27).

La deuxième spécification de la classe de changement de base $\{V(c) ; c \in \mathbb{C}^{n-1}\}$ est donc satisfaite.

Cette dernière étude met par ailleurs en exergue une interprétation de la forme série justifiant sa dénomination /Meizel & Gentina, 1979/ /Merviel, 1982/.

Considérons en effet le système linéaire stationnaire monovarié de fonction de transfert :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{i=1}^n b_i s^{n-i}}{s^n + \sum_{i=1}^n a_i s^{n-i}} = \frac{\sum_{i=1}^n b_i s^{n-i}}{\prod_{i=1}^n (s - \alpha_i)} \quad (\text{II.4.33})$$

On peut le représenter dans l'espace d'état sous l'une des deux formes suivantes :

$$\dot{x}_\ell = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ 1 & & & \\ & \circ & & \\ & & \ddots & \\ \circ & & & 1 & 0 \end{bmatrix} x_\ell(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{II.4.34})$$

$$y = [b_1, b_2, \dots, b_n] x_\ell(t)$$

ou :

$$\dot{x}_c = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & & \circ \\ & \circ & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & \\ -a_n & & & & 0 \end{bmatrix} x_c(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{II.4.35})$$

$$y(t) = [1, 0, \dots, 0] x_c(t)$$

Si on applique la transformation précédente (II.4.8) (II.4.11) avec comme paramètre $c \in \mathbb{C}^{n-1}$, un vecteur composé de (n-1) pôles α_i du processus (II.4.30), les représentations d'état (II.4.34) (II.4.35) deviennent alors respectivement (II.4.36) (II.4.37) :

$$\dot{x}'_{\ell} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \alpha_n \end{bmatrix} x'_{\ell}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{II.4.36})$$

$$y(t) = [b'_1, \dots, b'_n] x'_{\ell}(t)$$

et

$$\dot{x}'_c = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \alpha_n \end{bmatrix} x'_c(t) + \begin{bmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b'_n \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{II.4.37})$$

$$y(t) = [1, 0, \dots, 0] x'_c(t)$$

avec :

$$N(\alpha) \triangleq \sum_{i=1}^n b_i \alpha^{n-i}$$

$$b'_n = N(\alpha_n) = D(\alpha_n ; N(.))$$

$$b'_{n-1} = D(\alpha_{n-1}, \alpha_n ; N(.))$$

⋮

$$b'_2 = D(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n ; N(.))$$

$$b'_1 = b_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i$$

Les représentations d'état précédentes sont alors représentatives des graphes suivants dans lesquels le processus est construit à partir de la mise en série de systèmes élémentaires du 1^o ordre. Le graphe suivant (Fig. II.13) représente l'équation d'état (II.4.36).

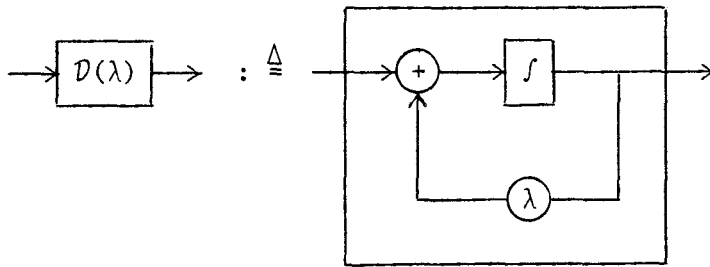
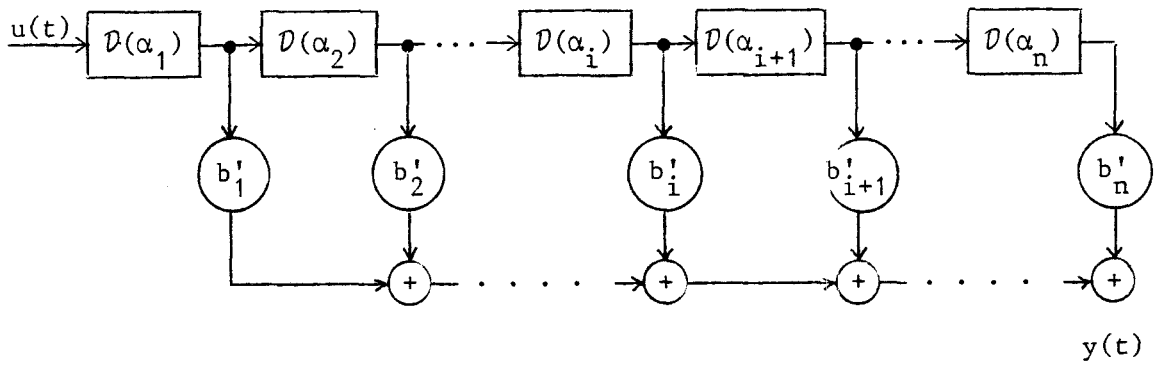


FIGURE II.13

et la forme duale (Fig. II.14) représente le système (II.4.37).

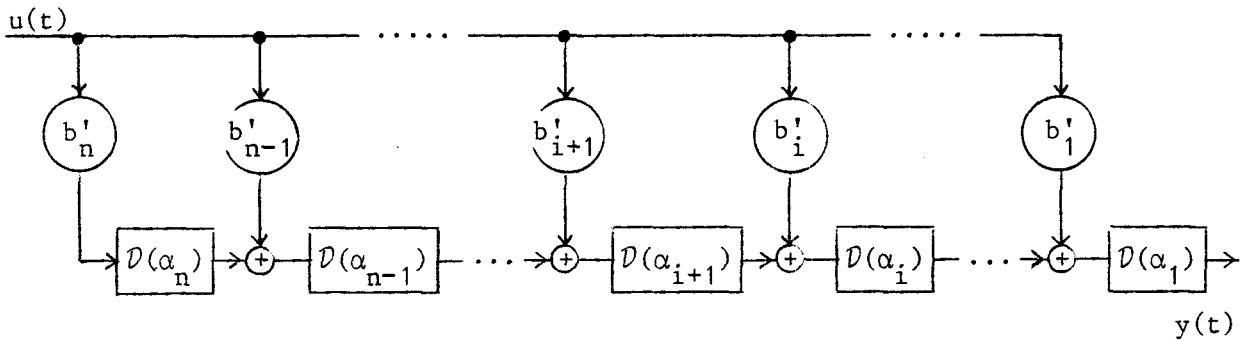


FIGURE II.14

Ces graphes s'étendent aisément au cas non linéaire pour des processus décrits par des équations différentielles scalaires (II.4.38) non linéaires homologues de la fonction de transfert (II.4.33) /Meizel, 1979 - b/.

$$\left\{ \left(\frac{d}{dt} \right)^n + \sum_{i=1}^n a_i(x) \left(\frac{d}{dt} \right)^{n-i} \right\} . y(t) = \left\{ \sum_{i=1}^n b_i(x) \left(\frac{d}{dt} \right)^{n-i} \right\} . u(t) \quad (\text{II.4.38})$$

II.4.2 - Définition de la forme série d'un élément arbitraire de la classe des systèmes à non linéarité de rang 1

Considérons un processus dont l'équation d'état est la suivante :

$$\dot{x}(t) = (F(p) + u(p).f(x,p)).x(t) \quad (\text{II.4.39})$$

avec : $x(t) \in \mathbb{R}^n$
 $u(p) \in \mathbb{R}^n$
 $f(.,.) \in \mathbb{R}^n$

En suivant la démarche du paragraphe (§ II.3.3), on peut expliciter une base de représentation du système (II.4.39) dans laquelle ce dernier peut être représenté comme la mise en série d'un système linéaire stationnaire avec un système non linéaire décrit sous la forme canonique FL_1 (II.4.40) :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= FL_1(x,p).x_1(t) \\ n_1 &= \text{rang} ((F(p) ; u(p))) \\ x_1(t) &\in \mathbb{R}^{n_1} \end{aligned} \quad (\text{II.4.40})$$

$$FL_1(x,p) = \begin{bmatrix} -g_1(x,p) & \dots & \dots & -g_{n_1}(x,p) \\ & 1 & & \\ & & \dots & \\ & & & \dots & \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La forme série $S(c, x, p)$ ($c \in \mathbb{C}^{n_1-1}$) peut ainsi être définie à partir de cette forme canonique, à partir des résultats du précédent paragraphe (§ II.4.1). Il convient toutefois de noter que l'ordre du système étudié est égal au rang n_1 de l'espace contrôlable de la paire $(F(p) ; u(p))$.

Nous montrons en Annexe II.7 que les conditions de stabilité déduites de l'application du théorème B-G 1 à la forme série du système étudié sont, quant à elles, continues et localement indépendantes de $n_1(p)$. Cette précaution étant prise, nous pouvons maintenant utiliser la méthodologie de synthèse définie précédemment (§ II.2) à la classe des systèmes à non linéarités de rang 1 en utilisant la forme remarquable série définie précédemment (§ II.4.1).

La synthèse étant ramenée à une procédure de minimisation d'un critère, nous nous attacherons essentiellement à définir les calculs de la valeur et de la tendance d'évolution de ce critère.

II.4.3 - Algorithme de calcul de $\varepsilon(c, p)$ et de sa sensibilité par rapport aux gains ajustables p et aux paramètres de représentation c

Considérons un élément courant de la classe des systèmes à non linéarités de rang 1 (II.4.39), la mise en œuvre d'un changement de base $U(p)$ dans l'espace d'état reporte l'étude de stabilité de processus non linéaire sur un système décrit sous la forme canonique $L1$ (II.4.40). Enfin, par une nouvelle représentation (II.4.10), de ce dernier processus, nous sommes amenés à étudier le système suivant (II.4.41) où $p \in \mathbb{R}^{n_p}$ et $c \in \mathbb{C}^{n_1-1}$ sont des paramètres à ajuster de manière à obtenir les conditions de stabilité les moins restrictives possibles.

$$c \in \mathbb{C}^{n_1-1} = [\alpha_2, \dots, \alpha_{n_1}]^T$$

$$\overset{\circ}{x}'_1 = S_L(c, x, p) \cdot x_1(t) \tag{II.4.41}$$

$$S_L(c, x, p) = \begin{bmatrix} -b_1(\cdot) & -b_2(\cdot) & \dots & -b_{n_1-1}(\cdot) & -b_{n_1}(\cdot) \\ & 1 & & & \\ & & \alpha_2 & & \\ & & & \circ & \\ & & & & \alpha_{n_1-1} \\ \circ & & & & 1 & \\ & & & & & \alpha_{n_1} \end{bmatrix}$$

Soit $V(c)$ (II.4.10) le changement de base correspondant. Le système majorant du système initial (II.4.39) relativement à la norme vectorielle (II.4.42) est caractérisé par la matrice de régime libre (II.4.43) suivante :

Définition de la norme vectorielle :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{n_1}^+(p) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n} \text{ est constituée des } n_1 \text{ premières lignes de } U^{-1}(p) \\ V(c) \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1} \\ q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^{n_1} ; \forall x \in \mathbb{R}^n \quad y \triangleq V^{-1}(c) \cdot U_{n_1}^+(p) \cdot x \\ \forall i = 1, \dots, n_1 \quad q_i(x) = |y_i| \end{array} \right. \tag{II.4.42}$$

Matrice pseudo-majorante :

(II.4.43)

$$M(c, x, p) = \begin{bmatrix} -\mathcal{R}(b_1(\cdot)) ; |b_2(\cdot)| ; \dots ; |b_{n_1-1}(\cdot)| ; |b_{n_1}(\cdot)| \\ & 1 & & & \\ & & \mathcal{R}(\alpha_2) & & \\ & & & \circ & \\ & & & & \mathcal{R}(\alpha_{n_1-1}) \\ \circ & & & & 1 & \\ & & & & & \mathcal{R}(\alpha_{n_1}) \end{bmatrix}$$

L'application du théorème B-G 1 (§ II.2.2) nous conduit à calculer (§ II.2.2.1) la quantité $\varepsilon(c,p) \in \mathbb{R}$ définie par les relations suivantes (II.4.44) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_e = \text{Max}_{i=2, \dots, n_1} (\mathcal{R}(\alpha_i)) \\ \varepsilon(c,p) \geq \varepsilon_e \\ \text{Inf}_{x \in \chi} (\text{CKS}(\varepsilon(c,p), c, x, p)) \\ \text{CKS}(\varepsilon, c, x, p) \triangleq -b_{n_1}(x, p) + (\varepsilon - \mathcal{R}(\alpha_{n_1}))(-|b_{n_1-1}(x, p)| + \\ (\varepsilon - \mathcal{R}(\alpha_{n_1-1}))(\dots) + (\varepsilon - \mathcal{R}(\alpha_3))(-|b_2(x, p)| + \\ (\varepsilon - \mathcal{R}(\alpha_2))(\varepsilon + \mathcal{R}(b_1(x, p)))) \dots) \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{n_1 \text{ fois}} \end{array} \right. \quad (\text{II.4.44})$$

On peut alors énoncer le résultat d'analyse suivant concernant la stabilité du système initial (II.4.39) /Meizel, 1979 - a, b/ /Meizel, 1982 - a/.

- i) S'il existe $p \in \mathbb{R}^{n_p}$ tel que les modes non contrôlables de la paire $(F(p), u(p))$ soient à partie réelle négative
- ii) De plus, s'il existe $c \in \mathbb{C}^{n_1-1}$, n_1 représentant le rang de l'espace engendré par $(A(p), v_1)$ tel que la quantité $\varepsilon(c,p)$ définie par les relations (II.4.44) soit négative

alors l'origine de l'espace d'état du système initial (II.4.39) est globalement exponentiellement stable.

Le problème de synthèse associé à cette méthode d'analyse consiste naturellement à rechercher les valeurs de $p \in \mathbb{R}^{n_p}$ et $c \in \mathbb{C}^{n_1-1}$ telles que les conditions précédentes (i) (ii) soient satisfaites.

Nous n'envisageons que la condition (ii) objet du problème non linéaire. Le calcul de $\varepsilon(c,p)$ ayant déjà été traité (Annexe II.6), nous nous attachons essentiellement à expliciter sa tendance d'évolution.

II.4.3.1 - Tendance d'évolution de $\varepsilon(c,p)$

$\varepsilon(c,p)$ est la borne supérieure des valeurs propres réelles maximales de $\varepsilon(c,x,p)$ des matrices $M(c,x,p)$ ($x \in \bar{\chi}$) décrites sous la forme suivante (II.4.45) :

$$M(c,x,p) = \begin{bmatrix} -\mathcal{R}(b_1(\cdot)) & |b_2(\cdot)| & \dots & |b_{n_1}(\cdot)| \\ & 1 & \mathcal{R}(\alpha_2) & \circ \\ & & \dots & \dots \\ \circ & & & 1 & \mathcal{R}(\alpha_{n_1}) \end{bmatrix} \quad (\text{II.4.45})$$

Considérons l'ensemble des matrices $\{M(c,\hat{x},p) ; \hat{x} \in \bar{\chi}\}$ dont $\varepsilon(c,p)$ est valeur propre. Nous supposons dans ce paragraphe que cet ensemble est fini.

$$\text{i.e. : } \{ \exists \gamma ; \forall i = 1, \dots, \gamma ; \hat{x}_i \in \bar{\chi} ;$$

$$\{ \forall x \in \bar{\chi} ; \forall i = 1, \dots, \gamma ; x \neq \hat{x}_i \}$$

$$\Rightarrow \{ \det (\varepsilon(c,p) - M(c,x,p)) \neq 0 \}$$

Nous envisageons en premier lieu le cas où les éléments hors diagonaux de la première ligne des γ matrices $M(c,\hat{x}_i,p)$ sont non nuls. Dans ce cas, nous explicitons la formation du gradient de $\varepsilon(c,p)$.

Nous aborderons ensuite le cas où au moins une matrice $M(c,\hat{x}_i,p)$ possède un élément hors diagonal de sa première ligne qui soit nul. Dans ce cas, nous explicitons, non pas un gradient, mais une direction de plus grande pente du critère $\varepsilon(c,p)$.

Précisons enfin l'espace E des paramètres du critère $\varepsilon(c,p)$:

$$p \in \mathbb{R}^{n_p} \quad c \in \mathbb{C}^{n_1-1}$$

$$\text{On définit } E \subset \mathbb{R}^{n_p} \times \mathbb{R}^{n_1-1} \times \mathbb{R}^{n_1-1} : \quad (\text{II.4.46})$$

$$E = \{p_i ; i = 1, \dots, n_p\} \cup \{\mathcal{R}(\alpha_i) ; i = 2, \dots, n_1\} \cup \{\text{Im}(\alpha_i) ; i = 2, \dots, n_1\}$$

II.4.3.1.1 - Calcul du gradient de $\varepsilon(c,p)$ dans le cas où les γ matrices $M(c, \hat{x}_i, p)$ dont $\varepsilon(c,p)$ est valeur propre possèdent des éléments hors diagonaux non nuls dans leur première ligne :

La forme des matrices (II.4.45) $M(c, \hat{x}_i, p)$ ($i = 1, \dots, \gamma$) montre que ces matrices sont alors irréductibles. Dans ce cas, les valeurs propres réelles maximales $\varepsilon(c, \hat{x}_i, p) = \varepsilon(c,p)$ de ces matrices sont simples /Gantmacher, 1966/.

Il est ainsi possible de calculer les gradients (§ II.2.4) des valeurs propres $\varepsilon(c, \hat{x}_i, p)$ par rapport aux éléments de E (II.4.46).

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \beta \in E \quad (\text{II.2.46}) \\ \frac{\partial}{\partial \beta} (\varepsilon(c, \hat{x}_i, p)) = v^T(c, \hat{x}_i, p) \left(\frac{\partial}{\partial \beta} M(c, \hat{x}_i, p) \right) \cdot u(c, p) \quad (\text{II.4.47}) \\ u(c, p) \text{ est un vecteur propre de } M(c, \hat{x}_i, p) \text{ relatif à } \varepsilon(c, p) \\ v(c, \hat{x}_i, p) \text{ est un vecteur propre de } M^T(c, \hat{x}_i, p) \text{ relatif à } \varepsilon(c, p) \\ u^T(c, p) \cdot v(c, \hat{x}_i, p) \stackrel{\Delta}{=} 1 \end{array} \right.$$

La détermination du gradient de $\varepsilon(c,p)$ à partir des γ gradients calculés précédemment est alors possible par application des résultats de l'Annexe II.3.

Le problème est alors complètement résolu en explicitant :

- le calcul des dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial \beta} (M(c, \hat{x}_i, p))$; $\beta \in E$ ce point est traité dans l'Annexe II.9.

- le calcul de $u(c,p)$ et de $v(c, \hat{x}_i, p)$ (II.4.47).

La forme particulière de $M(c, x, p)$ (II.4.46) nous permet d'écrire leurs composantes de manière littérale. Il vient :

$$\left. \begin{array}{l}
 u(c,p) // u^*(c,p) : \begin{cases} u_{n_1}^* = 1 \\ u_{i-1}^* = (\varepsilon(c,p) - \mathbb{R}(\alpha_i)) u_i^* \quad \forall i=2, \dots, n_1 \end{cases} \quad (\text{II.4.48}) \\
 \text{Cette expression est indépendante de } \hat{\chi}_i \in \chi. \\
 \text{L'expression de } v \text{ est aussi aisément donnée par :} \\
 v(c, \hat{\chi}_i, p) // v^*(c, \hat{\chi}_i, p) : \begin{cases} v_1^* = 1 \\ v_2^* = (\varepsilon + \mathbb{R}(b_1(c, \hat{\chi}, p))) \\ v_{i+1}^* = - |b_i(c, \chi, p)| + \\ \quad (\varepsilon(c,p) - \mathbb{R}(\alpha_i)) \cdot v_i^* \\ i = 2, \dots, n-1 \end{cases} \quad (\text{II.4.49}) \\
 u(c,p) \cdot v(c, \hat{\chi}_i, p) \stackrel{\Delta}{=} 1
 \end{array} \right\}$$

Nous proposons maintenant l'extension de ce résultat simple dans un cas plus général.

II.4.3.1.2 - Calcul de la direction de plus grande pente dans le cas où il existe une matrice $M(c, \hat{\chi}_i, p)$ dont $\varepsilon(c,p)$ est valeur propre et dont un élément hors diagonal de la 1ère ligne est nul :

Considérons d'abord le cas où le dernier élément $\mu_{1n}(\cdot)$ de la première ligne des γ matrices $M(c, \hat{\chi}_i, p)$ est non nul. Dans ce cas, ces matrices sont irréductibles, leurs valeurs propres réelles maximales $\varepsilon(c, \hat{\chi}_i, p)$ sont simples.

Les résultats du cas précédent sont alors directement applicables en observant (cf Annexe II.9) que le calcul des dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial \beta} (M(c, \hat{\chi}_i, p))$ ($\beta \in E$) (II.4.47) n'est pas possible mais qu'à l'inverse, on peut exprimer les dérivées partielles à gauche et à droite :

$$\frac{\partial}{\partial \beta^+} (M(c, \hat{\chi}_i, p)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \beta^-} (M(c, \hat{\chi}_i, p)) \quad (\text{II.4.50})$$

A partir de ces $(2^{\binom{n_p+2n_1-2}{n_p}} \cdot \gamma)$ gradients directionnels et par application de la méthode de l'Annexe II.3, il est possible de définir une

direction de plus grande pente du critère $\varepsilon(c,p)$ dans E (II.4.46) ou bien de constater l'existence d'un point stationnaire.

Dans le cas où les derniers éléments de la première ligne d'une matrice $M(c, \hat{x}_i, p)$ sont nuls (II.4.51) alors cette matrice est réductible.

$$M(c, \hat{x}, p) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} -\mathcal{R}(b_1(\cdot)) & |b_2(\cdot)| & \dots & |b_m(\cdot)| & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \dots & \mathcal{R}(\alpha_2) & \dots & \bigcirc & \dots & \dots & \bigcirc \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \mathcal{R}(\alpha_m) & \dots & \dots & \bigcirc \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \mathcal{R}(\alpha_{m+1}) & \dots & \bigcirc \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \mathcal{R}(\alpha_{n_1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right]$$

(II.4.51)

On est alors amené à considérer séparément le bloc diagonal supérieur d'ordre m de $M(c, \hat{x}, p)$ (celui-ci est irréductible) et l'ensemble des α_i satisfaisant à l'égalité :

$$\left\{ \exists i \in [m+1, \dots, n_1]; \mathcal{R}(\alpha_i) = \varepsilon(c, p) \right\} \quad (II.4.52)$$

Si la borne supérieure des valeurs propres réelles maximales du bloc diagonal supérieur de $M(c, \hat{x}, p)$ est inférieure à $\varepsilon(c, p)$, le(s) gradient(s) de $\varepsilon(c, \hat{x}, p)$ se déduisent aisément de l'égalité (II.4.52).

Dans le cas contraire, la direction de plus grande pente de $\varepsilon(c, \hat{x}, p)$ est construite par application des méthodes précédentes relatives aux matrices $M(c, \hat{x}, p)$ et en prenant en compte des gradients additionnels issus de l'égalité (II.4.52).

Dans ce paragraphe, nous avons défini les éléments permettant de mener la minimisation du critère $\varepsilon(c, p)$.

Cette définition n'a pas et ne peut pas avoir un caractère à la fois analytique et général, aussi avons nous préféré l'explicitier sous la forme d'une succession d'éléments programmables.

Cet a priori est d'ailleurs largement justifié dans la mesure où la minimisation devra être menée de manière numérique.

II.4.4 - Conclusion

L'utilisation de la forme série permet une synthèse par minimisation d'un critère $\varepsilon(c,p)$ dans l'espace E des paramètres dans la mesure où, pour toute valeur $(c,p) \in \mathbb{C}^{n_1-1} \times \mathbb{R}^n$, on définit :

- la valeur du critère,
- sa direction de plus grande pente dans l'espace des paramètres.

La valeur du critère est un taux de décroissance exponentiel d'une fonction de Lyapunov $v(x(t))$ de l'état du système étudié. $(-1 / \varepsilon(c,p))$ peut ainsi être interprété comme un temps de réponse.

On peut, d'autre part, exprimer un majorant du dépassement transitoire de l'asservissement obtenu (cf Annexe II.8).

Il convient de faire deux remarques importantes concernant la forme série.

Remarque 1 : La définition des directions de plus grande pente du critère $\varepsilon(c,p)$ à partir de la donnée d'un système quelconque à non linéarité de rang 1 (Annexe II.9) est possible du fait que l'on explicite les matrices de changement de base transformant le problème initial (II.4.39) sous une forme série (II.4.41). Ceci distingue nettement le problème de synthèse du problème d'analyse du fait que le seul calcul de la valeur du critère $\varepsilon(c,p)$ ne nécessite pas d'explicitier ces changements de base /Richard, 1981/.

Remarque 2 : Lors du processus de minimisation de $\varepsilon(c,p)$, la trajectoire suivie par les paramètres c et p dans $\mathbb{C}^{n_1-1} \times \mathbb{R}^n$ n'est pratiquement pas prévisible. Il est alors essentiel de pouvoir définir la forme

série pour toutes les valeurs possibles de $c \in \mathbb{C}^{n_1-1}$. Ce point constitue un avantage de la représentation "série" vis à vis de la représentation "en flèche" discutée plus loin.

Remarque 3 : L'utilisation de normes vectorielles de taille égale à celle du système peut sembler contraignante lorsque cet ordre est grand.

Nous proposons dans ce cas de traiter séparément :

- la réduction d'ordre du processus étudié, dans un premier temps,
- le problème de synthèse à partir du modèle d'ordre réduit du processus.

La méthode de synthèse liée à l'utilisation de la forme série est illustrée par un exemple développé dans le chapitre suivant (Ch. III).

Nous proposons maintenant d'étendre la classe des processus concernés par la méthode proposée.

II.5 - EXTENSION DE LA METHODE PRECEDENTE AUX SYSTEMES A NON LINEARITES DE RANG $n_c \geq 1$

Dans ce paragraphe, nous proposons d'explicitier les transformations permettant de mener la synthèse et l'analyse d'un système à non linéarité de rang $n_c > 1$ par l'utilisation conjointe du théorème de Borne et Gentina (§ II.2.2.1) et d'une utilisation de la forme série (II.4.15) introduite dans le cas des systèmes à non linéarité de rang 1.

Cette étude est menée suivant le schéma utilisé dans le paragraphe précédent (§ II.4) en utilisant les formes canoniques (§ II.3.4) de ces systèmes puis en ramenant l'étude de la stabilité d'un système non linéaire appartenant à cette classe à celle d'un système de comparaison décrit sous la forme remarquable série (II.4.45) par la définition d'une norme vectorielle de taille $n - n_c + 1$ associée à cette représentation (§ II.2.3).

Les formes canoniques que nous proposons d'utiliser sont les représentations de type L_{n_c} (II.3.31) et C_{n_c} (II.3.33) homologues des représentations correspondant à la décomposition d'un système linéaire stationnaire en autant de sous-systèmes contrôlables que le système possède

d'entrées de commande /Luenberger, 1967/ /Fossard, 1972/.

II.5.1 - Généralisation de la représentation série

Rappelons d'abord qu'un système est dit à non linéarité de rang n_c si son équation d'état peut être mise sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = F(x,p).x(t) \quad (\text{II.5.1})$$

avec : $p \in P \subset \mathbb{R}^{p_a}$

$x \in \chi$: arguments des composantes de $F(\cdot)$ non constantes le long des mouvements du système (II.5.1)

$x \in S \subset \mathbb{R}^n$

$\{u_1, \dots, u_{n_c}\}$ désignant un ensemble de n_c vecteurs de \mathbb{R}^n linéairement indépendants

$$F(x,p) = F_o(p) + \sum_{i=1}^{n_c} u_i \cdot f_i^T(x,p) \quad (\text{II.5.2})$$

ou

$$F(x,p) = F_o(p) + \sum_{i=1}^{n_c} f_i(x,p) \cdot u_i^T \quad (\text{II.5.3})$$

Par changement de base, on peut exprimer ces matrices de régime libre de sorte que les éléments non constants soient isolés dans les n_c premières lignes ou colonnes (II.5.4) (II.5.5) :

$$F(x,p) = F_o(p) + \sum_{i=1}^{n_c} v_i \cdot f_i^T(x,p) \quad (\text{II.5.4})$$

ou

$$F(x,p) = F_o(p) + \sum_{i=1}^{n_c} f_i(x,p) \cdot v_i^T \quad (\text{II.5.5})$$

avec : $v_i \in \mathbb{R}^n$

$$v_i^T = [0 \dots 0 \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1} 0 \dots 0]$$

La représentation du système (II.5.1) (II.5.2) (II.5.4) en utilisant la forme canonique L_{n_c} (II.3.31) nous permet (Annexe II.5) de le représenter sous la forme de l'équation d'état suivante :

$$\dot{x}'(t) = U^{-1}(p).x(t)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} FL_{n_c}(x,p) & F'_{12}(x,p) \\ \text{---} & \text{---} \\ \bigcirc & F'_{22}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II.5.6})$$

Dans cette équation, la dimension N_c de $x'_1(t)$ est égale à la dimension de l'espace engendré par la paire matricielle $\{F(p); (v_1 | v_2 | \dots | v_{n_c})\}$.

Le système (II.5.6) est ainsi représenté sous la forme du schéma bloc suivant :

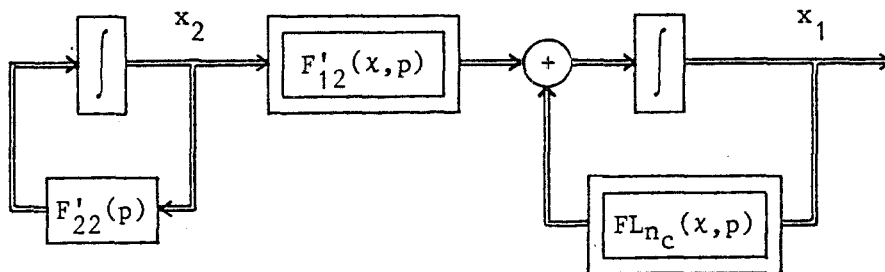


FIGURE II.15

Les éléments de la matrice $F(x,p)$ (II.5.4) étant par hypothèse bornés, le problème non linéaire de stabilité se résume à l'étude en régime libre du système de vecteur état $x_1(t)$ dont la matrice de régime libre est décrite sous forme canonique FL_{n_c} (II.3.31) (II.5.7).

De même, la matrice de régime libre d'un système initial décrit sous la forme (II.5.3) (II.5.5) peut être représentée de manière équivalente sous la forme transposée de (II.5.6).

Cette représentation correspond au schéma-bloc suivant (Fig. II.16) où, encore une fois, l'étude de stabilité asymptotique du système global (II.5.3) envisage successivement et indépendamment un processus linéaire et un système non linéaire décrit sous la forme canonique C_{n_c} (II.3.33).

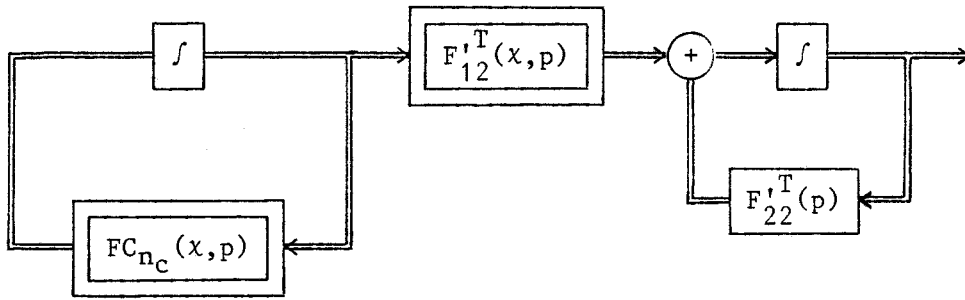


FIGURE II.16

Nous proposons dans la suite de nous attacher à l'étude de la stabilité de la partie non linéaire d'un système (II.5.6).

Soit $N_c = \text{rang} (F(p) ; (u_1 | u_2 | \dots | u_{n_c}))$. Le processus étudié est décrit par :

$$x'_1(t) = FL_{n_c}(x,p) \cdot x'_1(t) \quad x'_1(t) \in \mathbb{R}^{N_c}$$

avec :

$$FL_{n_c}(x,p) = \begin{bmatrix} F_{11}(x,p) & F_{12}(x,p) & \dots & F_{1,n_c}(x,p) \\ F_{21}(x,p) & F_{22}(x,p) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ F_{n_c,1}(x,p) & \dots & \dots & F_{n_c,n_c}(x,p) \end{bmatrix}$$

$$\forall i = 1, \dots, n_c \quad \forall j = 1, \dots, n_c \tag{II.5.7}$$

$$F_{ij}(x,p) \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j} \tag{II.5.8}$$

$$F_{ii}(\lambda, p) = \begin{bmatrix} -a_{1,i}^i(\cdot) & \dots & -a_{n_i-1,i}^i(\cdot) & -a_{n_i,i}^i(\cdot) \\ & 1 & & \\ & & \circ & \\ & & & \ddots \\ \circ & & & & 1 & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{ij}(\lambda, p) = \begin{bmatrix} -a_{1,j}^i(\cdot) & \dots & -a_{n_j,j}^i \\ & & \circ \end{bmatrix}$$

A chacune des sous-matrices F_{ij} , nous proposons d'associer un polynôme symbolique $P_{ij}(\lambda, p, \alpha)$ d'ordre n_j en l'indéterminée α défini par :

$$P_{ij}(\alpha) = \alpha^{n_j} + \sum_{k=1}^{n_j} a_{k,j}^i \alpha^{n_j-k} \tag{II.5.10}$$

On propose de transformer cette représentation canonique en amenant les blocs diagonaux $F_{ii}(\lambda, p)$ sous la forme série (§ II.5.12) explicitée ci-dessous (II.5.12). Pour cela, on est amené à définir des vecteurs c_i de paramètres de représentation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i = 1, \dots, n_c \quad c_i \in \mathbb{C}^{n_i-1} \\ c_i^T = [\alpha_2^i, \alpha_3^i, \dots, \alpha_{n_i}^i] \end{array} \right\} \tag{II.5.11}$$

Soient $V_{ii}(c_i)$ (II.4.10) et $V_{ii}^{-1}(c_i)$ (II.4.13) $\in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$ les matrices de changement de base sous forme série associées aux vecteurs c_i (II.5.11) de paramètres de représentation. Il vient :

$$S_{L_i}(c_i, \chi, p) \stackrel{\Delta}{=} V_{ii}^{-1}(c_i) \cdot F_{ii}(\chi, p) \cdot V_{ii}(c_i) = \tag{II.5.12}$$

$$\begin{bmatrix} -b_1^i(c_i, \chi, p) & -b_2^i(c, \chi, p) & \dots & \dots & -b_{n_i}^i(c, \chi, p) \\ & 1 & & & \\ & & \alpha_2^i & & \\ & & & \dots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \alpha_{n_i}^i \end{bmatrix}$$

On peut alors constituer une matrice de changement de représentation par la définition suivante :

$$c \in \mathbb{C}^{N_c - n_c} \quad c^T = [c_1^T, c_2^T, \dots, c_{n_c}^T]$$

$$c^T = [\alpha_2, \dots, \alpha_{N_c - n_c}]$$

$$V(c) \in \mathbb{C}^{N_c \times N_c} \quad V(c) = \text{Diag} \{V_{ii}(c_i)\} \tag{II.5.13}$$

Notons que la première colonne des matrices bloc diagonales $V_{ii}(c)$ du changement de base (II.5.13) est $[1, 0, \dots, 0]^T$. Il apparaît ainsi que la matrice transformée :

$$FS_{n_c}(c, \chi, p) = V^{-1}(c) \cdot FL_{n_c}(\chi, p) \cdot V(c) \tag{II.5.14}$$

possède la même structure (II.5.15) que la matrice initiale (II.5.7) à ceci près que les blocs diagonaux compagnons sont transformés en blocs diagonaux sous forme série.

$$FS_{n_c}(c, x, p) = \begin{bmatrix} F'_{11}(c, x, p) & F'_{12}(c, x, p) & \dots & F'_{1, n_c}(c, x, p) \\ F'_{21}(c, x, p) & F'_{22}(c, x, p) & & F'_{2, n_c}(c, x, p) \\ \vdots & & & \\ F'_{n_c, 1}(c, x, p) & & & F'_{n_c, n_c}(c, x, p) \end{bmatrix}$$

(II.5.15)

avec :

$$F'_{ii}(c, x, p) = \begin{bmatrix} -b_{1,i}^i(\cdot) & \dots & -b_{n_i-1,i}^i(\cdot) & -b_{n_i,i}^i(\cdot) \\ & 1 & \alpha_2^i & \circ \\ & & \dots & \circ \\ \circ & & & \alpha_{n_i-1}^i \\ & & & 1 \\ & & & \alpha_{n_i}^i \end{bmatrix}$$

$$F'_{ij}(c, x, p) = \begin{bmatrix} -b_{1,j}^i(\cdot) & \dots & -b_{n_j,j}^i(\cdot) \\ & & \circ \end{bmatrix}$$

L'expression des termes :

$$b_{k,j}^i(\cdot) \in \mathcal{C} \quad (i = 1, \dots, n_c ; j = 1, \dots, n_c ; k = 1, \dots, n_j)$$

se déduit aisément des relations établies dans le cas $n_c = 1$ (§ II.4.1) en considérant les différences divisées le long de c_i (II.5.11) des polynômes symboliques $P_{ij}(x, p, \lambda)$ (II.5.10). Ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i = 1, \dots, n_c \quad \forall k = 1, \dots, n_i \\ b_{k,i}^i(c, x, p) = D((\alpha_k^i, \dots, \alpha_{n_i}^i) ; P_{ii}(x, p, \lambda)) \\ \forall j \neq i \quad \forall k = 1, \dots, n_j \\ b_{k,j}^i(c, x, p) = D((\alpha_k^j, \dots, \alpha_{n_j}^j) ; (P_{ij}(x, p, \lambda) - \lambda^{n_j})) \end{array} \right. \quad (\text{II.5.16})$$

Avant d'aller plus avant, il convient d'illustrer cette dernière transformation par un exemple simple.

II.5.1.1 - Exemple d'illustration

Considérons une matrice sous forme L_{n_c} caractérisée par :

$$n_c = 2 \quad n_1 = 3 \quad n_2 = 2$$

$$FL_2 = \left[\begin{array}{ccc|cc} -a_{1,1}^1 & -a_{2,1}^1 & -a_{3,1}^1 & -a_{1,2}^1 & -a_{2,2}^1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -a_{1,1}^2 & -a_{2,1}^2 & -a_{3,1}^2 & -a_{1,2}^2 & -a_{2,2}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{II.5.17})$$

Les polynômes symboliques associés aux différents blocs sont :

$$\begin{aligned} P_{11}(\alpha) &= \alpha^3 + a_{1,1}^1 \alpha^2 + a_{2,1}^1 \alpha + a_{3,1}^1 \\ P_{21}(\alpha) &= \alpha^3 + a_{1,1}^2 \alpha^2 + a_{2,1}^2 \alpha + a_{3,1}^2 \\ P_{12}(\alpha) &= \alpha^2 + a_{1,2}^1 \alpha + a_{2,2}^1 \\ P_{22}(\alpha) &= \alpha^2 + a_{1,2}^2 \alpha + a_{2,2}^2 \end{aligned} \quad (\text{II.5.18})$$

Soit :

$$c_1^T = \begin{bmatrix} \alpha_2^1 & \alpha_3^1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

$$c_2^T = \begin{bmatrix} \alpha_2^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} c_1^T & c_2^T \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

il vient (II.5.13) :

$$V(c) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & (\alpha_2^1 + \alpha_3^1) & (\alpha_3^1)^2 & & \\ 0 & 1 & \alpha_3^1 & \bigcirc & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \hline & \bigcirc & & 1 & \alpha_2^2 \\ & & & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (\text{II.5.19})$$

et conjointement :

$$V^{-1}(c) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -(\alpha_2^1 + \alpha_3^1) & \alpha_2^1 \alpha_3^1 & & \\ 0 & 1 & -(\alpha_3^1) & \bigcirc & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \hline & \bigcirc & & 1 & -\alpha_2^2 \\ & & & 0 & 1 \end{array} \right]$$

alors :

$$V^{-1}(c) F.V(c) = \begin{bmatrix} -b_{1,1}^1(c) & -b_{2,1}^1(c) & -b_{3,1}^1(c) & | & -b_{1,2}^1(c) & -b_{2,2}^1(c) \\ 1 & \alpha_2^1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_3^1 & | & 0 & 0 \\ \hline -b_{1,1}^2(c) & -b_{2,1}^2(c) & -b_{3,1}^2(c) & | & -b_{1,2}^2(c) & -b_{2,2}^2(c) \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 & \alpha_2^2 \end{bmatrix}$$

avec :

(II.5.20)

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{3,1}^1(c) = P_{11}(\alpha_3^1) \\ b_{2,1}^2(c) = D(\alpha_2^1 ; \alpha_3^1 ; P_{11}(\cdot)) \\ \quad = ((\alpha_2^1)^2 + \alpha_2^1 \alpha_3^1 + (\alpha_3^1)^2) + a_{1,1}^1 (\alpha_2^1 + \alpha_3^1) + a_{2,1}^1 \\ b_{1,1}^1(c) = a_{1,1}^1 + \alpha_2^1 + \alpha_3^1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{3,1}^2(c) = P_{21}(\alpha_3^1) - (\alpha_3^1)^3 \\ b_{2,1}^2(c) = D(\alpha_2^1 ; \alpha_3^1 ; (P_{21}(\alpha) - \alpha^3)) \\ \quad = a_{1,1}^2 (\alpha_3^1 + \alpha_3^2) + a_{2,1}^2 \\ b_{1,1}^2(c) = a_{1,1}^2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{1,2}^1(c) = a_{1,2}^1 \\ b_{2,2}^1(c) = a_{1,2}^1 (\alpha_2^2) + a_{2,2}^1 = (P_{12}(\alpha_2^2) - (\alpha_2^2)^2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{1,2}^2(c) = a_{2,2}^2 + \alpha_2^2 \\ b_{2,2}^2(c) = (\alpha_2^2)^2 + a_{1,2}^1 (\alpha_2^2) + a_{2,2}^2 = P_{22}(\alpha_2^2) \end{array} \right.$$

Après avoir défini (II.5.13) à (II.5.15) et illustré (II.5.20), la représentation originale proposée, nous envisageons maintenant son utilisation dans l'étude de la stabilité du système initial (II.5.1) (II.5.2) (II.5.4) par le théorème de Borne et Gentina (§ II.2.2).

II.5.2 - Formation du système de comparaison issu de la forme série généralisée

La démarche suivie (§ II.2) dans l'application du théorème de Borne et Gentina à l'intérieur d'une méthode de synthèse paramétrique d'asservissement nous conduit à définir une norme vectorielle de taille $N_c - n_c + 1$.

Etant donnée la matrice de régime libre transformée (II.5.15) (II.5.16), on propose la norme vectorielle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 q(x) : \mathbb{R}^c \rightarrow \mathbb{R}_+^{N_c - n_c + 1} \\
 I \triangleq \{1, n_1+1, n_1+n_2+1, \dots, 1 + \sum_{i=1}^j n_i, \dots, 1 + \sum_{i=1}^{n_c-1} n_i\} \\
 x' \triangleq V^{-1}(c).x \\
 q_1(x) = \text{Max}_{i \in I} (|x'_i|) \\
 q_2(x) = |x'_2| \quad \text{si} \quad 2 \neq n_1+1 \\
 \vdots \\
 \forall j = 2, \dots, N_c - n_c + 1 \\
 q_j(x) = |x'_k| \quad k \notin I ; k \triangleq j + \{\text{nombre des } n_i \text{ (} i = 1, \dots, n_c \text{)} \\
 \text{tels que} \quad \begin{array}{c} i \\ \{k > \sum_{i=1} n_i\} \end{array}
 \end{array} \right. \quad (\text{II.5.21})$$

L'utilisation de cette norme vectorielle conduit à définir la matrice pseudo-majorante suivante (II.5.22)

$$q(x) : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$q_1(x) = \text{Max} (|x_1|, |x_4|)$$

$$q_2(x) = |x_2|$$

$$q_3(x) = |x_3|$$

$$q_4(x) = |x_5|$$

(II.5.24)

$$M_5(x) = \begin{bmatrix} p_1(x) & p_2(x) & p_3(x) & p_4(x) \\ 1 & \mathcal{R}(\alpha_2^1) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathcal{R}(\alpha_3^1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathcal{R}(\alpha_2^2) \end{bmatrix}$$

(II.5.25)

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1(x) = \text{Max} \{ (-\mathcal{R}(b_{1,1}^1(x)) + |b_{2,1}^1(x)|) ; (-\mathcal{R}(b_{1,2}^2(x)) + |b_{1,1}^2(x)|) \} \\ p_2(x) = \text{Max} \{ |b_{2,1}^1(x)|, |b_{2,1}^2(x)| \} \\ p_3(x) = \text{Max} \{ |b_{3,1}^1(x)|, |b_{3,1}^2(x)| \} \\ p_4(x) = \text{Max} \{ |b_{2,2}^1(x)|, |b_{2,2}^2(x)| \} \end{array} \right.$$

En revenant au cas général, l'expression de la matrice pseudo-majorante (II.5.22) est identique à celle définie dans le cas $n_c = 1$ (II.4.51). Une synthèse paramétrique peut ainsi être menée en suivant les points développés dans ce cas (§ II.4).

On est ainsi amené à minimiser la borne supérieure $\varepsilon(c,p)$ des valeurs propres réelles maximales $\varepsilon(c,p,x)$ de la matrice pseudo-majorante $M(c,p,x)$ en utilisant les directions de plus grande pente du critère $\varepsilon(c,p)$.

II.5.3 - Conclusion des paragraphes II.4 et II.5

L'introduction de la représentation série permet la définition systématique d'une classe de normes vectorielles conduisant à des matrices pseudo-majorantes bien conditionnées pour l'utilisation du théorème de stabilité de Borne et Gentina (§ II.2.3.1).

Ce mode de description des systèmes dynamiques conduit à définir une généralisation de la forme Compagnon des matrices carrées en utilisant des paramètres de représentation a priori arbitraires.

La spécificité essentielle d'une méthode de synthèse applicable aux systèmes non linéaires (§ I.6.4.5) consiste à déterminer une condition suffisante de stabilité qui soit le moins restrictive possible.

Ce dernier trait est pris en compte dans la minimisation par rapport aux paramètres définissant la forme série (généralisée) de la valeur du critère numérique caractérisant la stabilité du système étudié.

L'évolution des paramètres de représentation définissant la forme série à partir de la forme Compagnon étant régie par un algorithme d'optimisation, le fait de pouvoir définir ce mode de représentation pour n'importe quelle valeur de ces paramètres simplifie la procédure d'optimisation pour laquelle aucun point de passage dans l'espace E des paramètres n'est interdit.

Nous proposons maintenant d'envisager la procédure de synthèse paramétrique en utilisant une autre généralisation des matrices Compagnon : la forme en flèche introduite par BenRejeb.

II.6 - UNE AUTRE FORME REMARQUABLE DE REPRESENTATION : LA FORME EN FLECHE

II.6.1 - Introduction

Dans les précédents paragraphes (§ II.2.3) nous avons proposé de ramener le problème d'un choix de norme vectorielle en vue de l'étude des propriétés de stabilité d'un système non linéaire par application du théorème de stabilité de Borne et Gentina à celui du choix d'une représentation particulière du système étudié.

Dans les paragraphes (§ II.4 et § II.5), nous avons proposé un mode de représentation original satisfaisant aux contraintes du problème de synthèse.

Nous envisageons maintenant d'intégrer dans notre méthodologie, l'utilisation de la représentation "en flèche" des matrices carrées. Ce mode de représentation des systèmes a en effet permis de définir de nombreux résultats quant à l'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires /BenRejeb, 1979, 1980, 1982/ /Borne & BenRejeb, 1977/ ainsi qu'à leur modélisation /BenRejeb, 1980/ /Dauphin & al, 1982/.

Dans ce paragraphe, comme dans les précédents, nous serons amenés à utiliser les formes canoniques des systèmes non linéaires étudiés.

Ainsi, un processus à non linéarité de rang 1 :

$$\dot{x}(t) = (F(p) + u.f^T(x,p)).x(t) \quad (II.6.1)$$

est représenté de manière équivalente sous la forme du schéma suivant :

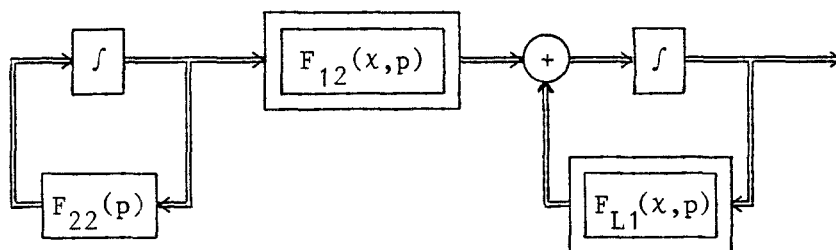


FIGURE II.17

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{L1}(x,p) = \begin{bmatrix} -a_1(x,p) & -a_2(x,p) & \dots & -a_{n_1}(x,p) \\ & 1 & \dots & \\ & & \dots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ n_1 = \text{rang} ((F(p) ; u)) \end{array} \right. \quad (\text{II.6.2})$$

Le changement de base amenant cette représentation a été explicité dans le paragraphe (§ II.3.3). De même, le système non linéaire décrit par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x} = F(p) + \sum_{i=1}^{n_c} f_i(x,p) \cdot u_i^T \quad (\text{II.6.3})$$

peut être représenté sous la forme du schéma suivant (Fig. II.18). Le changement de base correspondant est explicité dans l'annexe II.5.

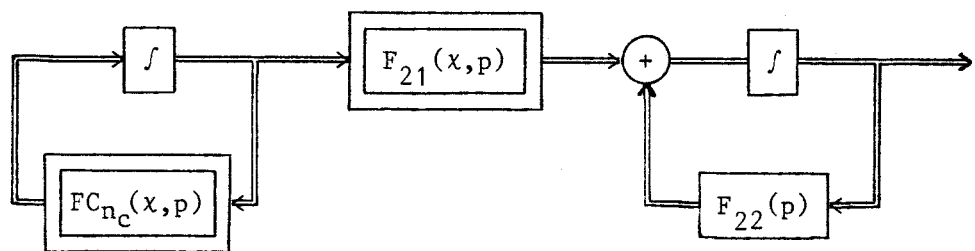


FIGURE II.18

avec : $1 \leq n_c \leq n$ $N_c = \text{rang} ((F(p) ; (u_1 | \dots | u_{n_c})))$

$$FC_{n_c}(\cdot) = \begin{bmatrix} F_{11}(\cdot) & F_{12}(\cdot) & \dots & F_{1,n_c}(\cdot) \\ F_{21}(\cdot) & F_{22}(\cdot) & \dots & F_{2,n_c}(\cdot) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{n_c,1}(\cdot) & F_{n_c,2}(\cdot) & \dots & F_{n_c,n_c}(\cdot) \end{bmatrix} \quad (\text{II.6.4})$$

$$F_{ij}(x,p) \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j} \quad \sum_{i=1}^{n_c} n_i = N_c$$

Définissons un changement de base $VF(c)$ dépendant de paramètres de représentation composant le vecteur $c \in \mathbb{C}^{n-1}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} c^T \triangleq [\alpha_2, \dots, \alpha_n] \\ \forall i = 2, \dots, n \quad \forall j = 2, \dots, n \quad \alpha_i \neq \alpha_j \end{array} \right. \quad (\text{II.6.6})$$

Posons /BenRejeb, 1977/ :

$$\left\{ \begin{array}{l} VF(c) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_2^{n-1} & & & \alpha_n^{n-1} \\ 0 & \alpha_2^{n-2} & \alpha_j^{n-1} & & \alpha_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \alpha_j^{n-2} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \alpha_2 & \vdots & & \alpha_n \\ 0 & 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix} \\ \end{array} \right. \quad (\text{II.6.7})$$

et

$$VF^{-1}(c) = \begin{bmatrix} 1 & \sigma_{1,1}(c) & \dots & \sigma_{1,j}(c) & \dots & \sigma_{1,n-1}(c) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \sigma_{2,1}(c) & \dots & \sigma_{2,j}(c) & \dots & \sigma_{2,n-1}(c) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \sigma_{i,1}(c) & \dots & \sigma_{i,j}(c) & \dots & \sigma_{i,n-1}(c) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \sigma_{n,1}(c) & \dots & \sigma_{i,j}(c) & \dots & \sigma_{i,n-1}(c) \end{bmatrix}$$

Les coefficients $\sigma_{i,j}$ sont définis par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} i = 1 \quad \lambda^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_{1,j} \cdot \lambda^{n-1-j} \triangleq \prod_{j=2}^n (\lambda - \alpha_j) \\ i = 2, \dots, n \quad \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_{ij} \cdot \lambda^{n-1-j} \triangleq \frac{\prod_{j=2}^n (\lambda - \alpha_j)}{\prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j)} \end{array} \right.$$

L'expression de VF(c) (II.6.7) montre clairement la nécessité de la contrainte inégalité ($\forall i \neq j ; \alpha_i \neq \alpha_j$) portant sur les composantes de c (II.6.6).

Cette contrainte est en effet une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité de VF(c).

Sous cette hypothèse, la matrice de régime libre du système précédent est transformée sous la forme suivante (II.6.9) :

$$VF^{-1}(c) \cdot F(x,p) \cdot VF(c) = \tag{II.6.9}$$

$$\begin{bmatrix} -b_1(c,x,p) & -b_2(c,x,p) & \dots & \dots & -b_n(c,x,p) \\ 1 & \alpha_2 & \dots & \dots & \bigcirc \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \bigcirc & \dots & \dots & \alpha_n \end{bmatrix}$$

P(x,p,λ) notant le polynôme symbolique de F(x,p) en l'indéterminée λ

$$P(x,p,\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=1}^n a_k(x,p) \cdot \lambda^{n-k} \tag{II.6.10}$$

les composantes $b_i(c,x,p)$ s'expriment simplement par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1(c,x,p) = a_1(x,p) + \sum_{k=2}^n \alpha_k \\ i \neq 1 \quad b_i(c,x,p) = \frac{P(x,p,\alpha_i)}{\prod_{\substack{k=2 \\ k \neq i}}^n (\alpha_i - \alpha_k)} \end{array} \right. \tag{II.6.11}$$

La matrice pseudo-majorante de $F(x,p)$ relative à la norme vectorielle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = VF^{-1}(c).x \\ q(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n \\ q_i(x) = |x_i| \end{array} \right. \quad (\text{II.6.12})$$

est alors :

$$MF(c,x,p) = M_{qq}(F(x,p)) \quad (\text{II.6.13})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} MF(c,x,p) = \begin{bmatrix} m_1(c,x,p) & m_2(c,x,p) & & m_n(c,x,p) \\ & 1 & \mathcal{R}(\alpha_2) & & \bigcirc \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & & \cdot & \cdot \\ & \cdot & & \cdot & \cdot \\ & 1 & \bigcirc & & \cdot \\ & & & & \mathcal{R}(\alpha_n) \end{bmatrix} \\ \text{avec :} \\ m_1(c,x,p) = -\mathcal{R}(b_1(c,x,p)) = -\left(a_1(x,p) + \sum_{i=2}^n \mathcal{R}(\alpha_i)\right) \\ i = 2, \dots, n \quad m_i(c,x,p) = |b_i(c,x,p)| \end{array} \right.$$

La synthèse paramétrique consiste alors à déterminer les valeurs de $c \in \mathbb{C}^{n-1}$ et de $p \in \mathbb{R}^{pa}$ telles que la borne supérieure $\varepsilon(c,p)$ des valeurs propres réelles maximales $\varepsilon(c,x,p)$ des matrices $MF(c,x,p)$ ($x \in \chi$) soit négative.

Nous proposons de montrer que le calcul de $\varepsilon(c,p)$ et de sa tendance d'évolution est, comme dans le cas de la forme série, facilité par l'expression particulière des matrices étudiées (II.6.13).

II.6.3 - Algorithmique du calcul de $\varepsilon(c,p)$ et de sa sensibilité

$\varepsilon(c,p)$ est défini par la racine supérieure ou égale à ε_e (II.6.14) de l'équation en ε suivante (II.6.15) :

$$\varepsilon_e = \text{Max}_{i=2, \dots, n} \{ \mathcal{R}(\alpha_i) \} \quad (\text{II.6.14})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_{x \in \chi} (\text{CKF}(c, x, p, \varepsilon)) = 0 \\ \text{CKF}(c, x, p, \varepsilon) \stackrel{\Delta}{=} -m_n(c, x, p) \cdot \prod_{j=2}^{n-1} (\varepsilon - \mathcal{R}(\alpha_j)) - \dots - \\ -m_i(c, x, p) \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n (\varepsilon - \mathcal{R}(\alpha_j)) - m_2(c, x, p) \cdot \prod_{j=3}^n (\varepsilon - \mathcal{R}(\alpha_j)) + \\ + (\varepsilon - m_1(c, x, p)) \prod_{j=2}^n (\varepsilon - \mathcal{R}(\alpha_j)) \end{array} \right. \quad (\text{II.6.15})$$

Considérons maintenant la solution $\varepsilon(c,p)$ de l'équation précédente (II.6.15). Supposons que cette solution ne soit la valeur propre que d'un nombre fini γ de matrices $\text{MF}(c, \hat{x}, p)$ ($\hat{x} \in \{\text{Fermeture de } \chi\}$).

On est amené, pour chaque valeur de \hat{x} à calculer le gradient de $\varepsilon(c,p)$ considéré comme valeur propre de $\text{MF}(c, \hat{x}, p)$ afin de déterminer la direction de plus grande pente du critère (cf Annexe II.3) dans l'espace $(\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}^{pa})$ des paramètres.

Soit β un paramètre de $\varepsilon(c,p)$:

$$\beta \in E \stackrel{\Delta}{=} \{ \{ \mathcal{R}(\alpha_2), \dots, \mathcal{R}(\alpha_n) \} \cup \{ \text{Im}(\alpha_2), \dots, \text{Im}(\alpha_n) \} \cup \{ p_1, \dots, p_{pa} \} \} \quad (\text{II.6.16})$$

Notons $\delta \text{MF}(c, x, p) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la variation infinitésimale de la matrice $\text{MF}(c, x, p)$ due à un accroissement infinitésimal $\delta\beta$ de l'un des paramètres.

On définit :

$$\delta \text{MF}(c, \hat{x}, p) \stackrel{\Delta}{=} \Delta_{\delta\beta} \text{MF}(c, \hat{x}, p) \cdot \delta\beta \quad (\text{II.6.17})$$

La variation $\delta\varepsilon(c, \lambda, p)$ dûe à une variation $\delta\beta$ est alors exprimée par (II.6.18) :

$$\delta\varepsilon(c, \lambda, p) = (v^T(\varepsilon, c, p) \cdot \Delta_{\delta\beta} MF(c, \hat{\lambda}, p) \cdot u(\varepsilon, c, p)) \cdot \delta\beta \quad (\text{II.6.18})$$

où $u(\varepsilon, c, p)$ et $v(\varepsilon, c, p)$ sont respectivement les vecteurs propres à droite et à gauche de $MF(c, \hat{\lambda}, p)$ relativement à $\varepsilon(c, p)$ normalisés par l'égalité :

$$u^T(\varepsilon, c, p) \cdot v(\varepsilon, c, p) = 1 \quad (\text{II.6.19})$$

Etant donnée la forme de $MF(c, \hat{\lambda}, p)$ (II.6.13) :

✕ $u(\varepsilon, c, p)$ est colinéaire au vecteur u^* :

$$u^* = \begin{bmatrix} n \\ \prod_{i=2} (\varepsilon - \mathcal{R}(\alpha_i)) \\ n \\ \prod_{i=3} (\varepsilon - \mathcal{R}(\alpha_i)) \\ n \\ \prod_{\substack{i=2 \\ i \neq j}} (\varepsilon - \mathcal{R}(\alpha_i)) \\ \vdots \\ n-1 \\ \prod_{i=2} (\varepsilon - \mathcal{R}(\alpha_i)) \end{bmatrix} \quad (\text{II.6.20})$$

L'expression de ce vecteur est indépendante de la valeur $\hat{\lambda}$ de l'argument de la non linéarité.

✕ $v(\varepsilon, c, p)$ est colinéaire au vecteur suivant :

$$\begin{bmatrix} u_1^*(\varepsilon, c, p) \\ m_2(c, \hat{\lambda}, p) \cdot u_2^*(\varepsilon, c, p) \\ \vdots \\ m_n(c, \hat{\lambda}, p) \cdot u_n^*(\varepsilon, c, p) \end{bmatrix} \quad (\text{II.6.21})$$

Ces vecteurs étant définis, il convient d'expliciter la matrice $\Delta_{\delta\beta}^{MF}(c, \lambda, p)$ (II.6.17). Ce dernier point est en tout point, analogue au calcul, développé dans l'annexe II.9, des dérivées partielles des matrices pseudo-majorantes associées à la forme série.

L'Annexe (II.10) précise les différences de formulation des expressions entre les deux types de formes remarquables.

Les expressions précédentes permettent de définir :

- la valeur numérique d'un critère $\varepsilon(c, p)$ (II.6.14) (II.6.15) dont la négativité est une conditions suffisante de stabilité asymptotique du système étudié (II.6.5),

- l'expression d'une direction de plus grande pente de ce critère dans l'espace des paramètres à partir d'un ou plusieurs vecteurs gradients, éventuellement à droite et à gauche (II.6.17) (II.6.21) (Annexes II.9 et II.10).

Comme dans le cas de la forme série (§ II.4), la procédure de synthèse paramétrique consiste à utiliser ces deux informations à l'intérieur d'une méthode de minimisation du critère $\varepsilon(c, p)$ conduisant à une valeur négative de celui-ci.

Par rapport à la méthode issue de la forme série (§ II.4), une difficulté supplémentaire apparaît à cause de la contrainte (II.6.6) imposant à toutes les composantes α_i du vecteur c d'être distinctes.

L'existence de singularités dans l'espace des paramètres peut se révéler gênante lors de la procédure d'optimisation.

L'utilisation d'une extension /Rotella, 1983/ de la forme en flèche définie pour tout $c \in \mathbb{C}^{n-1}$ peut, dans cette optique, se révéler fructueuse.

Enfin, on peut étendre l'utilisation de la forme en flèche de la même manière qu'avec la forme série (§ II.5) dans le cas de systèmes à non linéarités de rang multiple.

II.6.4 - Conclusion

La représentation des processus à partir de la forme "en flèche" met en évidence une classe de généralisations possibles pour la méthode de synthèse paramétrique exposée dans les paragraphes précédents à partir de la forme "série".

De même, les difficultés inhérentes au choix d'une norme vectorielle de taille maximum correspondant à la forme en flèche peuvent être abordées en initialisant le processus de synthèse à partir d'un modèle d'ordre réduit du processus et/ou de l'asservissement.

En particulier, l'utilisation conjointe de la méthode des perturbations singulières, de la notion de système réciproque, et de la représentation en flèche, a permis d'exhiber des résultats d'une grande souplesse d'utilisation /Dauphin & al, 1982/ /Dauphin, 1983/ dans le problème de la réduction de dimensionalité des systèmes non linéaires.

Concrètement, ces deux formes remarquables (série et flèche) peuvent être considérées comme des modes de représentation alternatifs de la forme Compagnon (les formes remarquables duales constituent aussi naturellement des extensions de la forme de Frobenius /Gantmacher, 1966/.

Leur intérêt pratique dans l'étude (analyse ou synthèse) des propriétés de stabilité d'un processus non linéaire réside dans leur caractère paramétré. Les paramètres de représentation introduits permettent un choix numérique relativement simple d'une norme vectorielle telle que sa prise en compte à l'intérieur du Théorème de Borne & Gentina /Gentina & al, 1979/ conduise à des conditions suffisantes de stabilité aussi peu restrictives que possible vis à vis des propriétés intrinsèques (mais à priori inconnues) du système étudié.

Cette remarque concernant l'analyse des propriétés d'un système non linéaire par un ensemble de conditions suffisantes est essentielle dans un processus de synthèse (cf § I.6.4.5). La possibilité, comme dans le cas de la forme série, de caractériser les propriétés de stabilité par un critère numérique dont on peut calculer en tout point la direction de plus grande pente, permet pratiquement de définir une méthode de conception assistée de synthèse d'asservissement.

Néanmoins, il convient à ce niveau de noter que l'on aura alors intérêt à utiliser une généralisation de la forme en flèche originale qui puisse être définie partout dans l'espace des paramètres de représentation.

II.7 - SYNTHESE D'ASSERVISSEMENTS DE PROCESSUS EN TEMPS DISCRET

Nous proposons dans cette section, de montrer comment la démarche définie précédemment dans le cas du temps continu, s'applique à la synthèse d'asservissements en temps discret, au prix d'adaptations minimales.

L'essentiel de la méthodologie de synthèse développée jusqu'à présent, peut en effet se résumer en un ensemble de manipulations de matrices à éléments non constants conjointement avec l'utilisation d'un théorème d'analyse de la stabilité. Le premier point est tout à fait indépendant de la nature physique du problème traité. Quant au second, nous proposons dans un premier temps, de rappeler, dans le cas du temps discret, un théorème de stabilité /Borne, 1976/ analogue de celui considéré dans le cas du temps continu /Gentina, 1976/. Nous serons alors à même de définir un critère numérique de stabilité dont la valeur, si elle est inférieure à 1, constitue une condition suffisante de stabilité asymptotique du système étudié.

Les développements ultérieurs concernant la structure des processus envisagés et leur mode de représentation sont, en tous points, identiques à ceux du temps continu.

Nous ne soulignerons qu'une légère différence dans la formation des matrices de régime libre des systèmes de comparaison associés aux formes remarquables série et en flèche.

II.7.1 - Théorème d'analyse de la stabilité des systèmes en temps discret /Borne, 1976/

Considérons le système non linéaire décrit par l'équation d'état suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t+1) = F(x).x(t) \\ x(t) \in S \subset \mathbb{R}^n \\ x \in \chi : \text{argument des composantes de } F(.) \text{ non nécessairement} \\ \text{constantes le long des trajectoires possibles du} \\ \text{système} \\ \text{Sup}_{x \in \chi} (\|F(x)\|) < +\infty \end{array} \right. \quad (\text{II.7.1})$$

S'il existe une norme vectorielle q qui conduit à un système de comparaison :

$$\left\{ \begin{array}{l} z(t+1) = M_{qq}(x).z(t) \\ z(t_0) = q(x(t_0)) \end{array} \right. \quad (\text{II.7.2})$$

dont la matrice de régime libre $M_{qq}(x)$ possède les propriétés suivantes :

i) les éléments non constants de $M_{qq}(x)$ sont isolés dans une seule rangée de cette matrice,

ii) $\varepsilon(q, x)$ désignant la valeur propre réelle maximale de la matrice $M_{qq}(x)$:

$$\varepsilon(q) \triangleq \text{Sup}_{x \in \chi} (\varepsilon(q, x)) < 1 \quad (\text{II.7.3})$$

alors le point d'équilibre $x=0$ de (II.7.1) est globalement exponentiellement stable : il existe $V(x)$ fonction définie positive telle que l'inégalité suivante (II.7.4) est vérifiée le long des trajectoires du système

$$V(x(t+1)) \leq \varepsilon(q).V(x(t)) \quad (\text{II.7.4})$$

Etant donnée l'expression de ce théorème, la quantité $\varepsilon(q)$ apparaît comme un critère numérique de stabilité. En particulier, lorsque le système étudié (II.7.5) comporte des gains ajustables représentés par le vecteur $p \in \mathbb{R}^{n_p}$

$$x(t+1) = F(x,p).x(t) \tag{II.7.5}$$

la synthèse s'apparente à trouver une norme vectorielle q et une valeur du vecteur p conduisant à un critère $\varepsilon(q,p)$ strictement inférieur à 1.

Le calcul pratique de $\varepsilon(q,p)$ est identique à celui exposé dans le cas continu.

De même, on peut toujours définir des structures de représentation homologues de celles de Luenberger pour des systèmes décrits sous l'une des deux expressions suivantes (II.7.6 a - b) :

$$x(t+1) = (F(p) + \sum_{i=1}^{n_c} u_i(p).f_i^T(x,p)).x(t) \tag{II.7.6-a}$$

$$x(t+1) = (F(p) + \sum_{i=1}^{n_c} f_i^T(x,p).u_i(p)).x(t) \tag{II.7.6-b}$$

De manière à optimiser l'utilisation du théorème précédent, nous sommes conduits à proposer des représentations "série" ou "en flèche" des matrices Compagnons introduites dans ces formes canoniques.

A titre d'exemple, le système suivant (II.7.7) :

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} -a_1(x,p) & \dots & \dots & -a_n(x,p) \\ & 1 & & \bigcirc \\ & & \dots & \\ \bigcirc & & & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} .x(t) \tag{II.7.7}$$

peut être transformé par changement de base, sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} c \in \mathbb{C}^{n-1} \quad c^T = [\alpha_2, \dots, \alpha_n] \\ y = V^{-1}(c) \cdot x \\ y(t+1) = \begin{bmatrix} -b_1(c, x, p) & -b_2(c, x, p) & \dots & -b_n(c, x, p) \\ & 1 & & & \\ & & \alpha_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & \\ \circ & & & & & & \alpha_n \\ & & & & & & & 1 & & \end{bmatrix} y(t) \end{array} \right. \quad (\text{II.7.8})$$

L'utilisation de la norme vectorielle $q(x)$ (II.7.9) :

$$\begin{aligned} q(x) &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n \\ y &= V^{-1}(c) \cdot x \\ q_i(x) &= |y_i| \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

amène le système majorant suivant, dont l'expression diffère légèrement de celui défini en temps continu (II.4.43) :

$$\left\{ \begin{array}{l} M(c, x, p) = \begin{bmatrix} |b_1(\cdot)| & |b_2(\cdot)| & \dots & |b_n| \\ & 1 & & & \\ & & |\alpha_2| & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & \\ \circ & & & & & & |\alpha_n| \\ & & & & & & & 1 & & \end{bmatrix} \\ z(t+1) = M(c, x, p) \cdot z(t) \end{array} \right. \quad (\text{II.7.9})$$

En particulier, il convient de noter que le critère $\varepsilon(c, p)$, borne supérieure des valeurs propres réelles maximales $\varepsilon(c, x, p)$ de $M(c, x, p)$ (II.7.9), est nécessairement supérieur au maximum des valeurs absolues des paramètres α_i ($i = 2, \dots, n$). Ceux-ci devront donc à priori être initialisés à des valeurs inférieures à 1 en module. Ce choix correspond

par homographie, à choisir des paramètres α_i à partie réelle négative dans un problème en temps continu.

La définition des directions de plus grande pente du critère $\varepsilon(c,p)$ s'effectue comme dans le cas continu. On peut ainsi conclure que la méthodologie de synthèse définie dans le cas des systèmes en temps continu s'applique presque directement aux problèmes en temps discret.

II.8 - CONCLUSION RELATIVE A L'UTILISATION DES NORMES VECTORIELLES ET DU THEOREME DE BORNE & GENTINA, DANS UNE ETUDE DE SYNTHESE

La position du problème de synthèse paramétrique d'asservissement nous a conduit à l'étude de la stabilité d'un système dynamique en régime libre. Le problème de synthèse consiste alors à définir la valeur des gains ajustables dans l'asservissement tels que l'on puisse garantir la stabilité asymptotique de l'origine de son espace d'état.

Nous avons proposé l'utilisation des techniques d'agrégation par normes vectorielles pour mener à bien cette étude et, à l'intérieur de cette méthodologie, envisagé un théorème d'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires /Gentina & al, 1979/.

La complexité intrinsèque au problème de synthèse nous a conduit à redéfinir la formulation de ce théorème sous une forme numérique à priori plus adaptée à la définition d'une méthode de conception assistée par ordinateur.

Dans cet esprit, nous avons ramené le choix, d'ordre formel, d'une norme vectorielle bien adaptée à l'étude d'un système donné à celui, d'ordre numérique, d'une représentation particulière du système dans l'espace d'état. Nous avons alors défini une classe de "formes remarquables" de représentations des systèmes étudiés bien conditionnées vis à vis de leur étude par utilisation du théorème de Borne & Gentina.

Le problème de synthèse paramétrique initialement posé consiste alors à déterminer des valeurs des gains ajustables (problème initial) et des paramètres de représentation tels que la valeur du critère numé-

rique de stabilité soit négative dans le cas d'un processus en temps continu (resp inférieure à 1 en temps discret).

Une solution réaliste à ce problème consiste à mener de manière itérative la minimisation de la valeur du critère. Ceci nous a conduit à poser les bases du calcul d'une direction de plus grande pente du critère dans l'espace de ses paramètres de manière à faire appel aux méthodes d'optimisation de type gradient.

Nous avons alors proposé l'utilisation de deux formes remarquables particulières notées "série" ou "flèche". Ces formes matricielles pouvant être considérées comme des alternatives paramétrées de la forme Compagnon. Leur intérêt dans l'analyse et la synthèse des propriétés de stabilité de systèmes non linéaires par utilisation des techniques d'agrégation réside dans leur caractère paramétrable conjointement avec leur spécificité de forme remarquable (§ II.2.3.1).

Ces paramètres de représentation sont des artifices de calcul sans grande signification concrète vis à vis des propriétés intrinsèques du processus étudié ; par contre, ils permettent d'optimiser le critère de stabilité dans le sens de conditions suffisantes les moins restrictives possibles.

La pratique de la décomposition d'un système donné sous forme remarquable est menée en deux phases successives :

a) Détermination d'une représentation canonique du système. Les représentations canoniques envisagées sont homologues de celles définies pour les systèmes linéaires stationnaires.

b) Détermination d'une forme remarquable à partir de la représentation canonique.

Concrètement, cette décomposition de la transformation permet d'adapter /Höfler, 1981/ aisément un logiciel construit en fonction d'un type donné de représentation remarquable en vue de l'utilisation d'une autre classe de représentations remarquables. Les cas particuliers développés "série" et "flèche" ne sont ainsi pas limitatifs.

Enfin, il convient de remarquer que dans chacun des points (a) et (b), on définit la matrice transformée ainsi que les matrices de changement de base correspondantes.

Ce point est essentiel dans la définition de la direction de plus grande pente du critère numérique de stabilité dont la synthèse consiste à minimiser la valeur.

En conclusion, la démarche de synthèse paramétrique que nous avons présentée est réaliste car elle ne nécessite pas d'hypothèses fortes sur le processus à contrôler (comme par exemple, l'accessibilité à la mesure de l'intégralité du vecteur d'état) et elle est cohérente puisque l'on définit partout le critère et son gradient.

Par contre, elle peut être limitative en raison du fait que l'on cherche à caractériser une propriété de stabilité exponentielle. Or, on sait /Levine, 1984/ que ce type de stabilité ne décrit pas toutes les propriétés possibles de stabilité asymptotique des systèmes non linéaires.

Cette limitation est due au choix à priori de la méthode d'analyse de la stabilité (le théorème de Borne & Gentina) sous jacente à la méthode de synthèse.

Ce choix n'est naturellement pas exclusif et nous proposons dans la quatrième partie de ce mémoire, de définir une méthode de synthèse paramétrique applicable aux systèmes en temps continu à non linéarité de rang 1 et basée sur la théorie de l'hyperstabilité.

ANNEXE II.1

ALGORITHME DE DANILEVSKII

Cette méthode permet de déterminer les caractéristiques spectrales d'une matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ en la transformant sous une forme bloc triangulaire où les matrices bloc diagonales sont des matrices de type Frobenius.

Les matrices de changement de base (directe et inverse) sont simultanément calculées ainsi que le rang d'un espace contrôlable pour toute paire matricielle $[A, u]$ ($\forall u \in \mathbb{R}^n$).

Le principe de cette méthode consiste à considérer une matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ comme la représentation dans la base canonique :

$$B_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \quad (e_i \in \mathbb{R}^n ; (e_i)_j = \delta_{ij})$$

d'une application linéaire A .

On calcule alors successivement les matrices $A^{(k)}$ représentation de A dans la base

$$B_{k-1} = \{e_1, A e_1, \dots, A^{k-1} e_1, e_{k+1}, \dots, e_n\}.$$

Le passage de $A^{(k)}$ à $A^{(k+1)}$ s'effectue simplement en remarquant que la $k^{\text{ième}}$ colonne de $A^{(k)}$ représente $A^k e_1$ dans la base B_{k-1} et constitue ainsi le $(k+1)^{\text{ième}}$ vecteur de la base B_k .

$$B_k = \{e_1, A e_1, \dots, A^k e_1, e_{i+1}, \dots, e_n\}$$

Dans ces conditions $a_{i,k}^{(k)}$ désignant l'élément (i, k) de $A^{(k)}$, il vient :

* Dans le cas où la transformation (A.1.1) est possible jusqu'au rang $k=n$, alors $A^{(n)}$ est la matrice de Frobenius (A.1.4) associée à A :

$$A^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & & & & -d_n \\ 1 & & & & \\ & \dots & & & \\ & & \dots & & \\ & & & 1 & -d_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.4})$$

Dans ce cas, la suite de vecteurs $\{e_1, A e_1, \dots, A^{n-1} e_1\}$ forme une base de \mathbb{R}^n (en d'autres termes, la paire $[A, e_1]$ est complètement commandable).

** Dans le cas contraire :

$$\exists n_1 < n \quad \{ \forall i > n_1 ; a_{i,n_1}^{(n_1)} = 0 \}$$

le rang de l'espace engendré par la paire $[A, e_1]$ est égal à n_1 .

Le dernier terme de la transformation est alors la suivante :

$$A^{(n_1)} = \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & \dots & 0 & -d_{n_1} & \\ 1 & 0 & & 0 & -d_{n_1-1} & \\ & \dots & & & & \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & & 1 & -d_1 & \\ \hline & & & \bigcirc & & \end{array} \right] \quad (\text{A.1.5})$$

Dans ce cas, la forme Frobenius du bloc diagonal supérieur est équivalente à l'égalité suivante :



$$(A^{n_1} + d_1 A^{n_1-1} + d_2 A^{n_1-2} + \dots + d_{n_1-1} A + d_{n_1}) e_1 = 0 \quad (\text{A.1.6})$$

On a ainsi déterminé le polynôme minimal de la restriction de la matrice A au sous espace contrôlable de la paire $[A, e_1]$.

La transformation de A en l'une des formes $A^{(n)}$ (A.1.4) ou $A^{(n_1)}$ (A.1.5) est explicitée en itérant la transformation (A.1.1).

Remarques : L'algorithme de Danilevskii nous permet de calculer la transformée de la matrice A en même temps que la matrice de changement de base S assurant cette transformation ainsi que son inverse S^{-1} par multiplication des matrices S_k (A.1.2) et S_k^{-1} (A.1.3).

Dans le développement précédent, on a arbitrairement considéré la paire matricielle $[A, e_1]$ composée de la matrice A et du premier vecteur de la base naturelle. Si l'on souhaite particulariser une paire $[A, u]$ ($u \in \mathbb{R}$) plus générale, il suffit de prendre u comme premier vecteur d'une nouvelle base. Cette dernière opération revient à changer la première colonne de A.

Les valeurs propres de A peuvent être déterminées en calculant les racines des polynômes associées aux matrices bloc diagonales sous forme de Frobenius (A.1.5).

ANNEXE II.2

TRANSFORMATION D'UN SYSTEME A NON LINEARITE DE RANG 1
SOUS FORME CANONIQUE L1 OU C1

Considérons un système non linéaire décrit sous la forme suivante :

$$\dot{x} = (F_0 + v_1 f^T(x)) \cdot x(t) \quad (\text{A.2.1})$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$v_1^T = [1, 0, \dots, 0]$$

Nous proposons d'expliciter la formation des matrices V et V^{-1} permettant de représenter ce processus (A.2.1) sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = V \cdot x \\ \dot{x}' = \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{cccc} -g_1(x) & -g_2(x) & \dots & -g_{n_1}(x) \\ 1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & 1 & 0 \end{array} & \begin{array}{c} -g_{n_1+1}(x) \dots -g_n(x) \\ \hline \text{diagonal hatched} \end{array} \end{array} \right] x(t) \end{array} \right. \quad (\text{A.2.2})$$

Mise en œuvre pratique de la décomposition :

1) On applique l'algorithme de Danilevskii à la matrice F_0 (cf Annexe II.1). Celle-ci prend alors la forme suivante :

$$D(F_0) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & & & -d_{n_1} & \\ 1 & & \bigcirc & -d_{n_1-1} & \\ & \dots & & & \\ & & \bigcirc & & \\ & & & 1 & -d_1 \\ \hline & & & & \\ & & \bigcirc & & \\ \hline & & & & \end{array} \right] \quad (A.2.3)$$

D4
D5

Cette matrice est la représentation de F_0 dans la base $\{v_1, F_0 v_1, \dots, F_0^{n_1-1} v_1, e_{n_1+1}, \dots, e_n\}$ (les e_i sont les vecteurs de base naturels de \mathbb{R}^n).

L'algorithme fournit ainsi :

- la valeur de $n_1 = \text{rang}([F_0, v_1])$,
- les valeurs de d_1, d_2, \dots, d_{n_1} .

2- Représentons alors la matrice F_0 dans la base $\{v_1, v_2, \dots, v_{n_1}, e_{n_1+1}, \dots, e_n\}$ définie par la récurrence suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1^T = e_1^T = [1, 0, 0, \dots, 0] \\ v_2 = F_0 v_1 + d_1 v_1 \\ \vdots \\ v_{i+1} = F_0 v_i + d_i v_1 \\ \vdots \\ v_{n_1} = F_0 v_{n_1-1} + d_{n_1-1} v_1 \end{array} \right. \quad (\text{A.2.4})$$

Par un schéma adapté de celui de Danilevskii, F_0 est transformée en forme souhaitée (A.2.2) et les matrices V et V^{-1} opérant la transformation sont calculées explicitement sans inversion de matrice à partir de la forme transitoire (A.2.3) obtenue après application de l'algorithme de Danilevskii.

L'obtention du vecteur fonction $g(x) = [g_1(x), \dots, g_n(x)]$ apparaissant dans la représentation cherchée (A.2.2) est alors donnée par :

$$g^T(x) = f^T(x) \cdot V \quad (\text{A.2.5})$$

De même, en transposant la méthode précédente, un système non linéaire dont les non linéarités sont isolées dans la 1ère colonne (A.2.6) peut être transformé sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = (F_0^T + f(x) \cdot v_1^T) \cdot x(t) \quad (\text{A.2.6})$$

$$x'(t) = (V^{-1})^T \cdot x(t)$$

$$\dot{x}'(t) = \left[\begin{array}{ccc} -g_1(x) & 1 & \circ \\ -g_2(x) & \dots & \circ \\ & \circ & \dots \\ -g_{n_1}(x) & 0 & \circ \end{array} \right] x'(t) \quad (\text{A.2.7})$$

Détermination des matrices de changement de base V et V^{-1}

La matrice F_0 (A.2.1) de départ représente une application linéaire F dans la base canonique

$$B_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \quad e_i \in \mathbb{R}^n \quad (e_i)_j = \delta_{ij}$$

La matrice transformée (A.2.2) représente F dans la base B_{n_1}

$$B_{n_1} = \{v_1, v_2, \dots, v_{n_1}, e_{n_1+1}, \dots, e_n\}$$

déterminée par :

$$\begin{cases} v_1 = e_1 \\ v_2 = F_0 v_1 + d_1 v_1 \\ \vdots \\ v_{i+1} = F_0 v_i + d_i v_1 \\ \vdots \\ 0 = F_0 v_{n_1} + d_{n_1} v_1 \end{cases} \quad (\text{A.2.8})$$

Comme dans le cas de l'algorithme de Danilevskii, on note $F_0^{(k)}$ la représentation de F dans la base :

$$B_{k-1} = \{v_1, v_2, \dots, v_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$$

Il vient alors :

$$F_0^{(k+1)} = V_k^{-1} F_0^{(k)} V_k \quad (\text{A.2.9})$$

avec :

ANNEXE II.3

CALCUL DE LA DIRECTION DE PLUS GRANDE PENTE D'UN CRITERE $\varepsilon(p)$
DEFINI COMME LE MINIMUM DE LA VALEUR D'UNE FONCTION DIFFERENTIABLE

Définissons $\varepsilon(p)$:

$$\varepsilon(p) = \inf_{x \in \chi} (\varepsilon(p, x)) \quad (\text{A.3.1})$$

$$p \in \mathbb{R}^n$$

$$\varepsilon \in \mathbb{R}$$

$$x \in \mathbb{R}^m$$

Envisageons le cas où il n'existe que γ valeurs $\hat{x}_i \in \bar{\chi}$ telles que $\varepsilon(p) = \varepsilon(p, \hat{x}_i)$ et où, pour chacune de ces valeurs, on peut définir un gradient :

$$\text{gr}_i(p) = \nabla_p \cdot \varepsilon(p, \hat{x}_i) \quad (\text{A.3.2})$$

Dans le cas trivial $\gamma = 1$, la direction de plus grande pente $\delta p \in \mathbb{R}^m$ est bien connue.

$$\gamma = 1 \quad \delta p = - \frac{\text{gr}_1(p)}{\|\text{gr}_1(p)\|} \quad (\text{A.3.3})$$

Lorsque $\gamma > 1$, la direction de plus grande pente δp doit être construite à partir des γ gradients comme l'illustrent les figures suivantes, correspondant au cas $\gamma = 2$ (Fig. A.3.1).

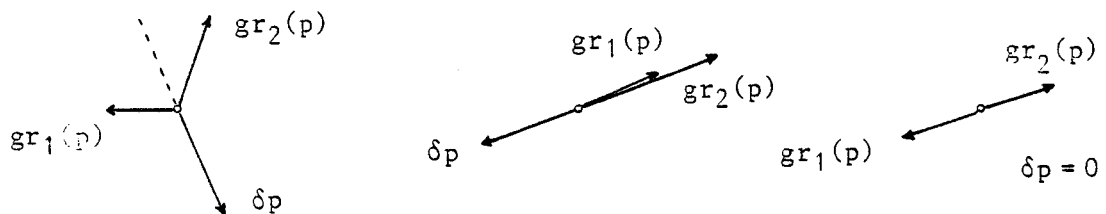


FIGURE A.3.1 ($n = 2$)

D'un point de vue général, la direction de plus grande pente $\delta\hat{p} \in \mathbb{R}^n$ peut être construite à la suite de la procédure suivante :

Initialiser la solution $\delta\hat{p} = 0$

POUR tous les $k \in \mathbb{N}$ de 1 à γ

POUR toutes les combinaisons $\{i(1), \dots, i(k)\}$ de α indices parmi $\{1, \dots, \gamma\}$

$$(A.3.4) \left\{ \begin{array}{l} \text{Définir la direction } \delta p \in \mathbb{R}^n \text{ qui minimise la fonction} \\ \text{suyante :} \\ \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = \text{Max}_{j=1, \dots, k} (x^T \cdot gr_{i(j)}(p)) \\ \text{en présence des contraintes égalité } \|x\| = 1 \text{ et } \forall j = 2, \dots, k \\ x^T \cdot (gr_{i(1)}(p) - gr_{i(j)}(p)) = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{Calculer } \phi(\delta p) &= \delta p^T \cdot gr_{i(1)}(p) \\ &\vdots \\ &= \delta p^T \cdot gr_{i(k)}(p) \end{aligned}$$

Si $\exists j ; j \in \{1, \dots, \gamma\} - \{i(1), \dots, i(k)\}$

$$\text{tq } \phi(\delta p) < \delta p^T \cdot gr_j(p)$$

alors la solution $\delta p \in \mathbb{R}^n$ est à rejeter.

Fin POUR

Conserver le vecteur δp ou $\delta\hat{p}$ qui minimise la fonction $\Psi(x)$

$$\Psi(x) = \text{Max}_{i=1, \dots, \gamma} \{x^T \cdot gr_i(p)\}$$

Fin POUR

La solution au problème d'optimisation partiel (A.3.4) contenu dans la procédure précédente est obtenue de la façon suivante :

Définir $G \in \mathbb{R}^{n \times (k-1)}$ dont les colonnes sont des vecteurs $gr_{i(1)}(p) - gr_{i(j)}(p)$ ($j = 2, \dots, k$).

Si $G^T G \in \mathbb{R}^{(k-1) \times (k-1)}$ est de rang maximal,

alors $\hat{x} = + (I_n - G(G^T G)^{-1} G^T) \cdot gr_{i(1)}(p)$

$$\delta p = - \hat{x} / \|\hat{x}\|$$

sinon on ne calcule pas la solution δp de ce problème puisque certaines composantes de G sont linéairement dépendantes.

ANNEXE II.4

CALCUL DES DERIVEES PARTIELLES DES MATRICES DE CHANGEMENT DE BASE
AMENANT UN SYSTEME A NON LINEARITE DE RANG 1 SOUS LA FORME L1

Considérons une matrice $A(p) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Soit β l'une des composantes de $p \in \mathbb{R}^n$. L'expression de $A(p)$ constituant une donnée du problème, les composantes de $\delta A(p) / \delta \beta$ sont aussi connues.

L'expresssion du changement de base (Annexe II.2) amenant une matrice $A(p)$ sous une forme partitionnée utilisant la forme L1 fait apparaître les coefficients $d_1(p), d_2(p), \dots, d_{n_1}(p)$ et l'ordre n_1 du polynôme annulateur de A dans l'espace contrôlable de la paire $[A(p), v_1]$ (A.2.3).

Nous sommes donc amenés à calculer les dérivées partielles de ces coefficients par rapport à β dans un premier temps.

Ce calcul peut s'effectuer à partir des étapes de l'algorithme de Danilevskii (A.1.1) (A.1.2) (A.1.3).

Connaissant à cette étape l'ensemble des dérivées $\{\partial d_i(\beta) / \partial \beta ; i = 1, \dots, n_1\}$, on peut alors calculer les dérivées par rapport à β des matrices de changement de base $V(p)$ et $V^{-1}(p)$ définies par le produit des matrices V_k et V_k^{-1} explicitées dans l'Annexe II.2 (A.2.10) (A.2.11).

ANNEXE II.5

CALCUL EXPLICITE D'UN CHANGEMENT DE REPRESENTATION
 SOUS UNE FORME CANONIQUE L_r /Luenberger, 1967/ /Fossard, 1972/

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\dot{x} = (F + \sum_{i=1}^{n_c} v_i \cdot f_i^T(x)) \cdot x(t) \quad (A.5.1)$$

$$x \in \chi$$

$$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\forall i = 1, \dots, r \leq n \quad v_i \in \mathbb{R}^n \quad (v_i)_j = \delta_{ij}$$

$$f_i(x) : \chi \in \mathbb{R}^n$$

L'expression du système (A.5.1) étant définie sur la base naturelle $\beta = \{e_1 = v_1 ; e_2 = v_2 ; \dots ; e_n\}$ de \mathbb{R}^n , on propose de déterminer une nouvelle base $\beta' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ dans laquelle :

* la matrice F est représentée sous la forme canonique /Luenberger, 1966/ suivante :

$$F' = \begin{bmatrix} \overbrace{A_{11} \quad A_{12} \quad \dots \quad A_{1,n_c}}^n & A_{1,n_c+1} \\ A_{21} & A_{22} & & A_{2,n_c} & A_{2,n_c+1} \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ A_{n_c,1} & A_{n_c,2} & & A_{n_c,n_c} & A_{n_c,n_c+1} \\ 0 & & & 0 & A_{n_c+1,n_c+1} \end{bmatrix} \quad (A.5.2)$$

avec :

$$* \forall i = 1, \dots, n_c \quad A_{ii} \in \mathbb{R}^{n(i) \times n(i)}$$

$$\sum_{i=1}^{n_c} n(i) \leq n$$

$$A_{ii} = \begin{bmatrix} x & \dots & x \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\forall j \neq i \quad A_{ij} = \begin{bmatrix} x & \dots & x \\ & \bigcirc & \\ & & \ddots \\ & & & \bigcirc & \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n(i) \times n(j)}$$

* Les vecteurs de rang 1, $n(1)+1, \dots, 1 + \sum_{i=1}^{j < n_c} n(i), \dots, 1 + \sum_{i=1}^{n_c-1} n(i)$ de β' sont choisis parmi $\{v_1, v_2, \dots, v_{n_c}\}$.

En injectant la "commande" $u_i(t) = f_i^T(x) \cdot x$ au système linéaire :

$$\dot{x}_e = F \cdot x_e(t) + \sum_{i=1}^{n_c} v_i \cdot u_i(t) \tag{A.5.3}$$

et en représentant ce dernier système dans la base β' , le système non linéaire résultant est décrit par une équation d'état :

$$\dot{x} = F'(x) \cdot x \tag{A.5.4}$$

dans laquelle la matrice de régime libre $F'(x)$ a la même structure que la matrice F' (A.5.2), les coefficients constants étant remplacés par des coefficients variables.

Construction de la base β'

On construit cette base en deux étapes :

- la première consiste essentiellement à déterminer les indices $n(1), \dots, n(n_c)$ apparaissant dans la forme canonique cherchée (A.5.2),

- la seconde explicitant les nouveaux vecteurs de base $\beta' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ à partir des résultats partiels de l'étape précédente.

Première étape :

Notons $I_0 = \{1, \dots, n_c\}$ et considérons la famille de vecteurs $V_0 = \{v_1, \dots, v_{n_c}\}$ et l'espace engendré par $\{V_0, F.V_0, \dots, F^i V_0, \dots\}$.

Soit $n(1)$ le plus petit indice tel qu'il existe un vecteur v_i de V_0 satisfaisant la relation de dépendance linéaire suivante :

$$F^{n(1)}.v_i = - \sum_{j=1}^{n_c} \sum_{k=1}^{n(1)} a_{k,j}^i . F^{k-1}.v_j \quad (A.5.5)$$

On note $I(1) = \{i(1), i(2), \dots, i(h(1))\}$ l'ensemble des indices i tel que $F^{n(1)}.v_i$ ($v_i \in V_0$) satisfasse une relation de dépendance linéaire du type précédent (A.5.5).

Considérons maintenant la famille de vecteurs $V_1 = \{v_i : i \in I_0 - I(1)\}$ et l'espace engendré par $\{V_0, FV_0, \dots, F^{n(1)}V_0, F^{n(1)}V_1, F^{n(1)+1}V_1, \dots, F^kV_1, \dots\}$.

Soit alors $n(2)$, le plus petit indice ($> n(1)$) tel qu'il existe un vecteur v_i de V_1 satisfaisant à une relation linéaire du type suivant :

$$F^{n(2)}.v_i = - \sum_{j=1}^{n_c} \sum_{k=1}^{n(2)} a_{k,j}^i . F^{k-1}.v_j \quad (A.5.6)$$

N.B. : Etant donnée la relation de dépendance linéaire établie au pas précédent (A.5.5), les coefficients $a_{j,k}^i$ sont choisis de manière à satisfaire la relation suivante :

$$i \in I(2) \quad \forall j \in I(1) \quad \forall k \geq n_1 \quad a_{k,j}^i = 0$$

De même, on note $I(2)$ l'ensemble des indices i de $I_0 - I(1)$ tel que $F^{n(2)} \cdot v_i$ satisfasse une relation de dépendance linéaire (A.5.6).

Pour homogénéiser les notations, on note :

$$\begin{aligned} \text{Card } (I(2)) &= h(2) \\ I(2) &= \{i(h(1)+1), i(h(1)+2), \dots, i(h(1)+h(2))\} \end{aligned} \quad (\text{A.5.7})$$

On itère ainsi cette construction en définissant $n(3), \dots, n(k)$ jusqu'à ce que l'ensemble d'indices $I(k+1) = I_0 - \{I(1) + I(2) + \dots + I(k-1) + I(k)\}$ soit vide.

$$\forall i \in I(e) \quad F^{n(e)} \cdot v_i = - \sum_{j=1}^{n_c} \sum_{k=1}^{n(e)} a_{k,j}^i \cdot F^{k-1} \cdot v_j \quad (\text{A.5.8})$$

Reclassons alors les indices $\{1, 2, \dots, n\}$ de manière à ce que :

- les $h(1)$ premiers indices soient ceux de $I(1)$,
- les $h(2)$ indices suivants appartiennent à $I(2)$,
- ⋮
- les $h(i+1)$ indices suivants ceux de $I(i)$ soient ceux de $I(i+1)$.

Il vient alors la relation suivante (A.5.9) :

$$n(1) \leq n(2) \leq \dots \leq n(n_c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F^{n(i)} \cdot v_i = - \sum_{j=1}^{n_c} \sum_{k=1}^{n(i)} a_{k,j}^i \cdot F^{k-1} \cdot v_j \\ \forall j \leq i \quad \forall k \geq n(j) \quad a_{k,j}^i = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.5.9})$$

et l'ensemble des vecteurs suivants :

$$F = \{v_1, \dots, F^{n(1)-1} v_1, v_2, \dots, v_j, \dots, F^{n(j)-1} v_j, \dots, v_{n_c}, \dots, F^{n(n_c)-1} v_{n_c}\} \quad (\text{A.5.10})$$

est de rang maximal.

Deuxième étape :

Ecrivons les relations de dépendance linéaire (A.5.9) sous la forme suivante, en schéma de Horner (A.5.11) :

$$\begin{aligned} & \underbrace{((\dots (F + a_{n(i),i}^i) F + a_{n(i)-1,i}^i) \dots) F + a_{2,i}^i) F + a_{1,i}^i)}_{n(i) \text{ fois}} v_i \\ & + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_c} \{ \underbrace{((\dots (a_{n(i),j}^i) F + a_{n(i)-1,j}^i) \dots)}_{n(i) \text{ fois}} \end{aligned} \quad (\text{A.5.11})$$

$$F + a_{2,j}^i) F + a_{1,j}^i) v_j\} = 0$$

Définissons alors la famille de vecteurs W à partir de la famille F (A.5.10) par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1 = v_1 \\ w_2 = F \cdot v_1 + \sum_{j=1}^{n_c} a_{n(1),j}^1 \cdot v_j \\ w_3 = F \cdot w_2 + \sum_{j=1}^{n_c} a_{n(1)-1,j}^1 \cdot v_j \\ \vdots \\ w_{n(1)} = F \cdot w_{n(1)-1} + \sum_{j=1}^{n_c} a_{2,j}^1 \cdot v_j \end{array} \right. \quad (\text{A.5.12})$$

et, en posant $N(i) = \sum_{i=1}^{i-1} n(i)$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{N(i)+1} = v_i \\ \vdots \\ w_{N(i)+k+2} = F \cdot w_{N(i)+k+1} + \sum_{j=1}^{n_c} a_{n(i)-k,j}^i \cdot v_j \\ \vdots \\ w_{N(i)+n(i)} = F \cdot w_{N(i)+n(i)-1} + \sum_{j=1}^{n_c} a_{2,j}^i \cdot v_j \end{array} \right. \quad (\text{A.5.13})$$

Soit $w = \{w_1, w_2, \dots, w_{N(n_c+1)}\}$ (A.5.14)

L'indépendance linéaire des vecteurs de w est issue de celle des vecteurs de F (A.5.10).

L'expression de F dans la base w est alors la suivante (A.5.15) compte tenu des égalités (A.5.9) (A.5.11).

$$F' = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} & \dots & A'_{1,n_c} & A'_{1,n_c+1} \\ A'_{12} & A'_{22} & & A'_{2,n_c} & A'_{2,n_c+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A'_{1,n_c} & A'_{2,n_c} & \dots & A'_{n_c,n_c} & A'_{n_c,n_c+1} \\ 0 & \text{-----} & 0 & & A'_{n_c+1,n_c+1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5.15})$$

avec :

$$\forall i = 1, \dots, n_c \quad \forall j = 1, \dots, n_c$$

$$A'_{ii} \in \mathbb{R}^{n(i) \times n(i)}$$

$$A'_{ii} = \begin{bmatrix} -a_{n(i),i}^i & \dots & -a_{2,i}^i & -a_{1,i}^i \\ 1 & & \bigcirc & \\ & \dots & & \\ \bigcirc & & \dots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A'_{ij} \in \mathbb{R}^{n(i) \times n(j)}$$

$$A'_{ij} = \begin{bmatrix} -a_{n(j),j}^i & \dots & -a_{1,j}^i \\ & & \bigcirc \end{bmatrix}$$

ANNEXE II.6

CALCUL PRATIQUE DE $\varepsilon(q,p)$

On a défini $\varepsilon(q,p)$ (II.2.34) comme la borne supérieure de l'ensemble des valeurs propres réelles maximales $\varepsilon(q,x,p)$ des matrices pseudo-majorantes $M_{qq}(x,p) \in \mathbb{R}^{k \times k}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon(q,p) \triangleq \sup_{x \in \chi} \varepsilon(q,x,p) \\ \varepsilon(q,x,p) = \text{valeur propre réelle maximale de } M_{qq}(x,p) \end{array} \right. \quad (\text{A.6.1})$$

Rappelons que $M_{qq}(x,p) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ est la matrice de régime libre d'un système de comparaison formé par application d'une norme vectorielle $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^k$ à un système dynamique décrit par l'équation d'état (A.6.2) :

$$\dot{x}(t) = F(x,p) \cdot x(t) \quad (\text{A.6.2})$$

avec : $x(t) \in S \subset \mathbb{R}^n$
 $p \in \mathbb{R}^{n_p}$ est un vecteur de gains ajustables

$x \in \chi$ dénote l'ensemble des arguments des composantes de $F(x,p)$ non constantes le long des trajectoires possibles du système

De manière à satisfaire l'une des conditions (ii) d'application du théorème B-G 1, on suppose que :

- les éléments non constants de $M_{qq}(x,p)$ sont isolés dans une seule de ses lignes ou de ses colonnes.

Les caractéristiques spectrales des matrices étant invariantes pour la permutation des indices et la transposition, on peut restreindre l'étude à la classe des matrices $M_{qq}(x,p)$ dont les éléments non constants sont isolés dans la première ligne.

Nous proposons d'expliciter le calcul de $\varepsilon(q,p)$ comme celui de la limite d'une suite croissante d'estimations obtenues par :

i) le calcul des valeurs propres réelles maximales de matrices à éléments hors diagonaux non négatifs et à coefficients constants,

ii) le calcul de racines réelles simples de polynômes sur un intervalle où l'on sait que cette racine existe et est unique,

iii) un algorithme d'optimisation statique dont la complexité dépend essentiellement du système (A.6.2) étudié.

a) Détermination d'une borne inférieure de $\varepsilon(q,p)$

$\forall x \in X$, $\varepsilon(q,p,x)$: valeur propre réelle maximale de $M_{qq}(p,x)$ est minorée par les valeurs propres réelles maximales des sous matrices de $M_{qq}(p,x)$ dont les déterminants sont les mineurs principaux.

Construisons un tel ensemble de sous matrices comme les matrices emboîtées, selon le schéma suivant :

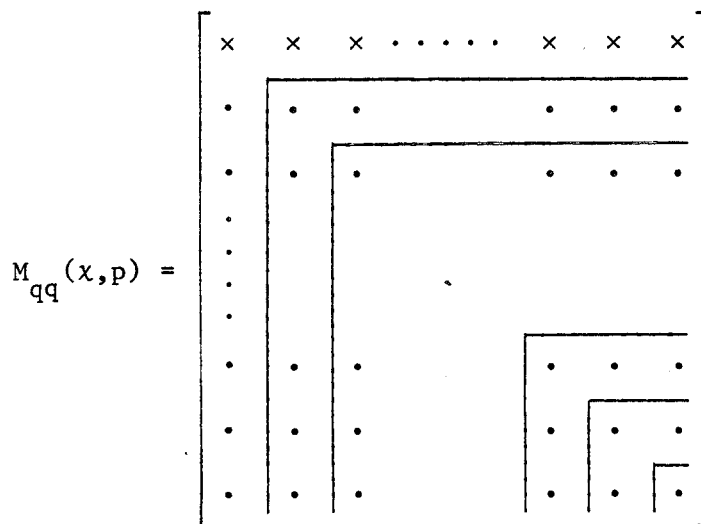


FIGURE A.6.1

Ces sous matrices sont notées $\{M^{ii}(\chi, p) ; i = 1, \dots, k\}$ et définies de la manière suivante (A.6.3) (A.6.4) :

$$M_{qq}^{k,k}(\chi, p) \triangleq M_{qq}(\chi, p) \in \mathbb{R}^{k \times k} \quad (\text{A.6.3})$$

$$\forall m = 1, \dots, k-1 \quad M_{qq}^{m,m}(p) \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (\text{A.6.4})$$

$$\forall i = 1, \dots, m$$

$$\forall j = 1, \dots, m \quad \{M_{qq}^{m,m}(p)\}_{i,j} = \{M_{qq}(\chi, p)\}_{k-m+i, k-m+j}$$

Il est alors remarquable que seule la sous matrice de taille maximum $M_{qq}^{k,k}(\cdot)$ (A.6.3) possède des termes non nécessairement constants (ceux de sa première ligne).

Notons $\varepsilon(q, p, m)$, $m = 1, \dots, k-1$, la valeur propre réelle maximale de la matrice $M_{qq}^{m,m}(p)$ (A.6.4) à coefficients constants. La suite de valeurs $\{\varepsilon(q, p, 1), \varepsilon(q, p, 2), \dots, \varepsilon(q, p, k-1)\}$ est non décroissante et $\varepsilon(q, p, k-1)$ constitue une borne inférieure de l'ensemble $\{\varepsilon(q, p, x) \text{ (A.6.1)} ; x \in \chi\}$.

Il vient donc :

$$\forall x \in \chi ; \varepsilon(q, p) \geq \varepsilon(q, x, p) \geq \varepsilon(q, p, k-1) \geq \varepsilon(q, p, k-2) \geq \dots$$

$$\dots \geq \varepsilon(q, p, 2) \geq \varepsilon(q, p, 1) \quad (\text{A.6.5})$$

En appliquant alors le Lemme de Kotelyanskii à la matrice $M_{qq}(\chi, p)$, $\varepsilon(q, p)$ apparaît alors comme la racine réelle supérieure à $\varepsilon(q, p, k-1)$ de l'équation suivante en l'indéterminée λ :

$$0 = \inf_{x \in \chi} (\det(\lambda I_k - M_{qq}(\chi, p))) \quad (\text{A.6.6})$$

On peut aisément montrer par l'absurde que cette racine est unique sur l'intervalle $[\varepsilon(q, p, k-1), +\infty[$.

Nous proposons maintenant d'explicitier le calcul de cette racine $\varepsilon(q, p)$ de l'équation (A.6.6) à partir de primitives usuelles de calcul numérique.

b) Détermination de la racine $\varepsilon(q,p) \geq \varepsilon(q,p,k-1)$ de l'équation

$$\inf_{x \in \chi} \frac{(\det(\mu I_k - M_{qq}(x,p)))}{k}$$

Cette détermination est encore basée sur l'utilisation du lemme de Kotelyanskii selon la technique suivante :

(b1) $\hat{\varepsilon}_i$ désigne une estimation par valeurs inférieures de $\varepsilon(q,p)$
 ($\hat{\varepsilon}_0 = \varepsilon(q,p,k-1)$) (A.6.5).

(b2) On calcule $CK(\hat{\varepsilon}_i) \triangleq \inf_{x \in \chi} (\det(\hat{\varepsilon}_i I_k - M_{qq}(x,p)))$ (simultanément,
 on détermine une valeur $\hat{x}_i \in \bar{\chi}$ telle que :

$$CK(\hat{\varepsilon}_i) = \det(\hat{\varepsilon}_i I_k - M_{qq}(\hat{x}_i, p))$$

(b21) si $CK(\hat{\varepsilon}_i) = 0$ alors le résultat ($\varepsilon(q,p) \triangleq \hat{\varepsilon}$) est trouvé
 sinon :

(b22) $CK(\hat{\varepsilon}_i) < 0$, ce qui entraîne $\varepsilon(q,p) > \hat{\varepsilon}_i$. Dans ce cas
 $\varepsilon(q,p)$ est nécessairement supérieure ou égale à la racine
 $\hat{\mu}_i$ de l'équation polynomiale suivante en l'indéterminée μ :

$$\det(\mu I_k - M_{qq}(\hat{x}_i, p)) = 0 \quad (A.6.7)$$

Cette racine est strictement supérieure à $\hat{\varepsilon}_i$

$$\hat{\mu}_i > \hat{\varepsilon}_i \quad (A.6.8)$$

Le calcul de $\hat{\mu}_i$ est aisé dans la mesure où cette valeur est une racine unique de l'équation (A.6.7) dans l'intervalle $[\hat{\varepsilon}_i, +\infty[$.

(b3) On calcule $\hat{\mu}_i$ et on itère la procédure au point (b1) avec
 $\hat{\varepsilon}_{i+1} \triangleq \hat{\mu}_i$. Le fonctionnement de ces itérations peut être visualisé sur le schéma suivant (Fig. A.6.2) où on a symbolisé les graphes des différents polynômes $\det(\mu I_k - M_{qq}(x,p))$ ($x \in \chi$) :

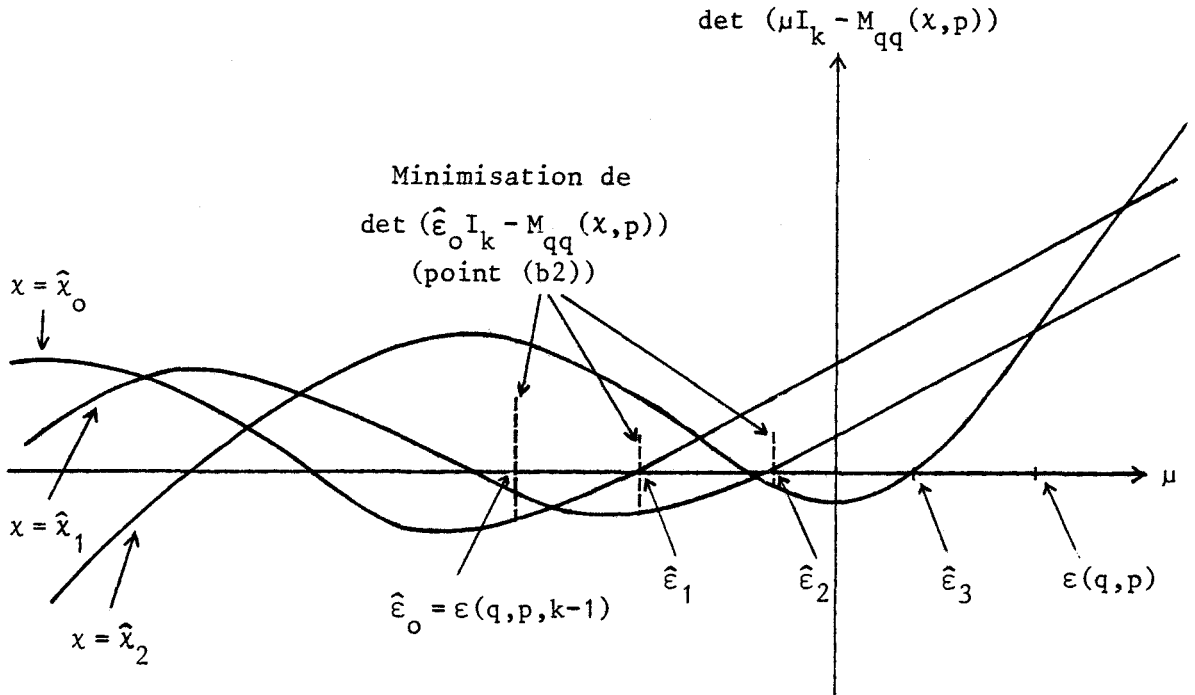


FIGURE A.6.2

On construit ainsi une suite $(\hat{\epsilon}_i)$ monotone croissante (A.6.7) et bornée convergent vers $\epsilon(q,p)$.

En conclusion, le calcul de $\epsilon(q,p)$ s'effectue en deux étapes (a) et (b) :

(a) Calcul de la valeur propre réelle maximale $\epsilon(q,p,k-1)$ de la plus grande sous matrice diagonale ne contenant pas d'éléments non constants.

(b) Calcul de la limite d'une suite $(\hat{\epsilon}_i)$ monotone croissante initialisée avec $\hat{\epsilon}_0 = \epsilon(q,p,k-1)$. $\epsilon(q,p)$ est la limite de cette suite.

Enfin, il convient de remarquer que la seule opération "compliquée" dans l'algorithme précédent est la détermination du minimum (b2) :

$$CK(\hat{\epsilon}_i) = \inf_{x \in \chi} (\det(\hat{\epsilon}_i I_k - M_{qq}(x,p)))$$

Or, quoiqu'il arrive, une telle minimisation doit être effectuée si on applique les conditions du théorème énoncé par Borne et Gentina /Gentina & al, 1979/.

Le calcul de $\varepsilon(q,p)$ n'entraîne donc pas plus de difficultés d'ordre numérique que la mise en œuvre du théorème initial.

ANNEXE II.7

TRANSFORMATION SOUS FORME SERIE D'UN SYSTEME A NON LINEARITE
 DE RANG 1. ROBUSTESSE DU CRITERE NUMERIQUE DE STABILITE $\varepsilon(c,p)$
 VIS A VIS DES VARIATIONS DE L'ORDRE
 DE LA FORME CANONIQUE ASSOCIEE AU SYSTEME

Considérons un système initialement décrit par une matrice de régime libre :

$$F(x,p) = F_0(p) + v_1 \cdot f_0^T(x,p) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (\text{A.7.1})$$

Par application des résultats précédents (§ II.3.4) (Annexe II.2), on peut définir un changement de base $U(p) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tel que $F_0(p)$ soit décomposable en deux sous espaces respectivement contrôlable et non contrôlable par le vecteur $v_1 = [1, 0, \dots, 0]^T$. Il vient :

$$U^{-1}(p) \cdot F_0 \cdot U(p) = \left[\begin{array}{c|c} FL_1(x,p) & L_{21}(x,p) \\ \hline 0 & L_{22}(p) \end{array} \right] \quad (\text{A.7.2})$$

avec :

$$n_1 = \text{rang} ([F_0(p), v_1])$$

$$FL_1(x,p) = \begin{bmatrix} -a_1(.) & \dots & -a_{n_1}(.) \\ 1 & & \\ & \cdot & \\ & & \cdot & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Notons :

$U_{n_1}(p) \in \mathbb{R}^{n \times n_1}$ la matrice composée des n_1 premières colonnes de $U(p)$,

$U_{n_1}^+(p) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n}$ la matrice composée des n_1 premières lignes de $U^{-1}(p)$.

La forme canonique $FL_1(x,p)$ est alors déduite du système initial par :

$$FL_1(x,p) = U_{n_1}^+(p) \cdot (F_o(p) + v_1 \cdot f_o^T(x,p)) \cdot U_{n_1}(p) \quad (A.7.3)$$

Le passage à une forme série s'effectue alors par utilisation de matrices $V^{-1}(c) \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1}$ et $V(c)$ définies au paragraphe (§ II.4.1) (II.4.8) (II.4.11).

$$\left\{ \begin{array}{l} S(c,x,p) = (V^{-1}(c) \cdot U_{n_1}^+(p)) \cdot (F_o(p) + v_1 \cdot f_o^T(x,p)) \cdot U_{n_1}(p) \cdot V(c) \\ c \in \mathbb{C}^{n_1-1} : c^T = [\alpha_2, \dots, \alpha_{n_1}] \end{array} \right. \quad (A.7.4)$$

$$S(.) = \begin{bmatrix} -b_1(.) & -b_2(.) & \dots & \dots & \dots & -b_{n_1}(.) \\ & 1 & & & & & \bigcirc \\ & & \alpha_2 & & & & \\ & & & \dots & & & \\ & & & & \dots & & \\ & & & & & \dots & \\ & & & & & & \dots & \bigcirc \\ & & & & & & & & \dots & 1 & \dots & \alpha_{n_1} \end{bmatrix}$$

Les matrices intervenant dans cette expression sont complètement définies, néanmoins, il apparaît que le rang n_1 est une fonction des paramètres ajustables $p \in \mathbb{R}^{n_p}$. Cette relations pose, à priori, un problème dans la mesure où l'application $\{p \rightarrow n_1(p)\}$ n'est pas continue. Il convient alors de s'assurer que le critère de stabilité $\epsilon(c,p)$ associé à la forme série est continu pour des variations continues de $p \in \mathbb{R}^{n_p}$ indépendamment des variations de $n_1(p)$.

Ce problème peut d'ailleurs être interprété comme une question d'ordre numérique relative à la détermination de la décomposition (A.7.2) du système initial.

L'ordre n_1 de la partie non linéaire correspondant à la nullité d'un vecteur construit lors de l'algorithme de calcul des matrices $U(p)$ et $U^{-1}(p)$ (A.7.3) (cf Annexes II.1, II.2).

Nous proposons de montrer que les résultats concernant la stabilité du système initial ne sont pas sensibles au test pratique de la nullité de ce vecteur.

Preuve :

Considérons la matrice de régime libre :

$$F(p) + v_1 \cdot f^T(x, p) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (\text{A.7.5})$$

Considérons un vecteur $c \in \mathbb{C}^{n-1}$, $c^T = [\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n]$ associé à un vecteur $f_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que les composantes de c ($c \in \mathbb{C}^{n-1}$; $c^T = [\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n]$) soient valeurs propres de $(F(p) + v_1 \cdot f_0^T) = F_0(p)$. Soit alors :

$$\begin{aligned} - f_0(x, p) &= f(x, p) - f_0 \in \mathbb{R}^n \\ - \alpha_1 \cup \{\alpha_2, \dots, \alpha_n\} &\text{ le spectre de } F_0(p) \end{aligned} \quad (\text{A.7.6})$$

On a proposé /Meizel, 1980/ /Meizel, 1982 - b/ /Meizel, 1983/ un algorithme permettant d'obtenir directement la forme série de la partie intrinsèquement non linéaire du système étudié (A.7.5).

Soit $W(c, p)$ la matrice engendrée par la suite de vecteur $\{w_1, w_2, \dots, w_i \in \mathbb{C}^n\}$:

$$\begin{cases} w_1 = v_1 = [1, 0, \dots, 0] \\ w_2 = (F_0(p) - \alpha_1 I) \cdot w_1 \\ \vdots \\ w_{i+1} = (F_0(p) - \alpha_i I) \cdot w_i \\ \vdots \end{cases} \quad (\text{A.7.7})$$

L'égalité :

$$0 = (F_o(p) - \alpha_{n_1} I) \cdot w_{n_1} \tag{A.7.8}$$

caractérise n_1 et marque la fin de l'itération. Concrètement, cette condition (A.7.8) est testée sous la forme suivante :

$$\| (A_o(p) - \alpha_{n_1} I) \cdot w_{n_1} \| \leq \mu \ll 1 \tag{A.7.9}$$

Si on continue les itérations (A.7.7) jusqu'à l'ordre n (on considère alors que l'obtention stricte de l'égalité (A.7.8) est improbable d'un point de vue numérique), on obtient la matrice transformée suivante :

$$W^{-1} (A_o(p) + v_1 b_o(x,p)) \cdot W =$$

$-b_1(\cdot) \dots \dots -b_{n_1}(\cdot)$ 	$-b_{n_1+1}(\cdot) \dots \dots -b_n(\cdot)$
---	---

(A.7.10)

Les termes de la première ligne sont obtenus par les égalités suivantes :

$$\{ \forall i = 1, \dots, n ; b_i(x,p) = W_i^T \cdot (f_o(x,p))_i \} \tag{A.7.11}$$

Or, à partir de l'ordre n_1 déterminé par la condition (A.7.9), les vecteurs w_i ($i > n_1$) sont des infiniment petits (cf (A.7.7) (A.7.9)).

Le vecteur non linéaire $b_o(x,p)$ étant par hypothèse borné, les composantes $(b_i(x,p) ; i > n_1)$ de la forme série (A.7.10) sont donc aussi des infiniment petits.

La matrice pseudo-majorante de :

$$W^{-1}(c,p) \cdot (A_o(p) + v_1 \cdot b_o^T(x,p)) \cdot W(c,p)$$

au sens de la norme vectorielle q déduite de la norme du max q ($q_i(x) : |x_i| ; \forall i = 1, \dots, n$) est explicitée par :

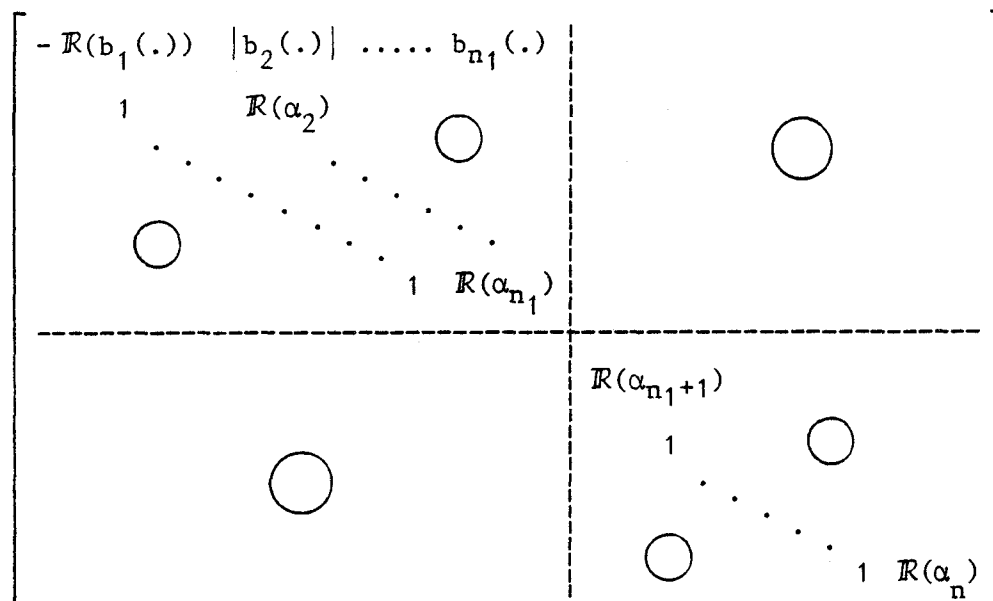
$$M_W(c,x,p) = \tag{A.7.12}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} -\mathcal{R}(b_1(\cdot)) & |b_2(\cdot)| \dots \dots |b_{n_1}(\cdot)| \\ \mathcal{R}(\alpha_2) & |b_{n_1+1}(\cdot)| \dots \dots |b_n(\cdot)| \\ \vdots & \vdots \\ \mathcal{R}(\alpha_{n_1}) & \vdots \\ \hline & 1 \\ \mathcal{R}(\alpha_{n_1+1}) & \vdots \\ 1 & \vdots \\ \mathcal{R}(\alpha_n) & \vdots \end{array} \right]$$

La stabilité du système initial est analysée (§ II.2.2) par la valeur de la borne supérieure $\epsilon_W(c,p)$ des valeurs propres réelles maximales de $M_W(c,x,p)$ ($x \in \chi$) (A.7.12).

Etant donnée la petitesse des éléments $(b_i(c,x,p) ; i > n_1)$, pour chaque valeur de x , le spectre de $M_W(c,x,p)$ est dans le voisinage de celui de $M_o(c,x,p)$:

$$M_0(c, \lambda, p) = \tag{A.7.13}$$



La borne supérieure $\varepsilon(c, p)$ des valeurs propres maximales $M_0(c, \lambda, p)$ est donc dans le voisinage de $\varepsilon_W(c, p)$.

Or, $\varepsilon(c, p)$ est le critère associé à la décomposition théorique du système initial sous la forme de la mise en série (A.7.2) (A.7.4) :

- d'un système linéaire dont les valeurs propres de la matrice de régime libre sont $(\alpha_{n_1+1}, \dots, \alpha_n)$,
- d'un système non linéaire sous forme série (A.7.4).

La détermination de n_1 peut donc être effectuée sous la forme pratique (A.7.9). De même, les critères $\varepsilon(c, p)$ et $\varepsilon(c, p+\delta p)$ associés à des matrices de régime libre

$$(F(p) + v_1 \cdot b^T(x, p)) \quad \text{et} \quad (F(p+\delta p) + v_1 \cdot b^T(x, p+\delta p))$$

voisines au sens de l'inégalité suivante :

$$\text{Max}_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}} \{ |(F(p+\delta p) - F(p) + v_1 \cdot (b(x, p+\delta p) - b(x, p)))^T_{ij}| \} \leq \mu \ll 1$$

sont voisins indépendamment des rangs des espaces engendrés par $(F(p) ; v_1)$ et $(F(p+\delta p) ; v_1)$.

ANNEXE II.8

DEPASSEMENT TRANSITOIRE DES TRAJECTOIRES
DES ASSERVISSEMENTS DECRITS SOUS FORME SERIE

Considérons un système décrit sous une forme série de paramètre c :

$$\dot{x}(t) = S(c, x, p) \cdot x(t) \tag{A.8.1}$$

avec :

$$c \in \mathbb{C}^{n-1} \quad c^T = [\alpha_2, \dots, \alpha_n]$$

$$S(c, x, p) = SL(c, x, p) \tag{A.8.1 - a}$$

ou

$$S(c, x, p) = (SL(c, x, p))^T \tag{A.8.1 - b}$$

$$SL(c, x, p) = \begin{bmatrix} -b_1(.) & -b_2(.) & \dots & -b_n(.) \\ & 1 & & \\ & & \alpha_2 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & (\alpha_n) \end{bmatrix}$$

Supposons que la synthèse paramétrique ait permis d'évaluer des paramètres c et p tels que la borne supérieure des valeurs propres réelles maximales des matrices pseudo-majorantes (A.8.2) soit inférieure à une valeur $\epsilon(c, p)$ négative.

$$M(c, \lambda, p) = \begin{bmatrix} -\mathcal{R}(b_1(\cdot)) & |b_2(\cdot)| & \dots & |b_n(\cdot)| \\ 1 & \mathcal{R}(\alpha_2) & & \bigcirc \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bigcirc & & & \cdot \\ & & & 1 & \mathcal{R}(\alpha_n) \end{bmatrix} \quad (\text{A.8.2})$$

Soit $u(\epsilon, c)$ un vecteur propre de $M(c, \hat{\lambda}, p)$ ($\hat{\lambda} \in \bar{\chi}$) associé à la valeur propre limite $\epsilon(c, p)$. D'après la forme de la matrice $M(c, \lambda, p)$, il vient :

$$u(\epsilon, c) = \begin{bmatrix} \prod_{k=2}^n (\epsilon - \mathcal{R}(\alpha_k)) \\ \vdots \\ \prod_{k=i+1}^n (\epsilon - \mathcal{R}(\alpha_k)) \\ \vdots \\ \epsilon - \mathcal{R}(\alpha_n) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8.3})$$

Supposons, sans perte de généralité, qu'il existe une matrice $M(c, \hat{\lambda}, p)$ ($\hat{\lambda} \in \bar{\chi}$) dont $\epsilon(c, p)$ est valeur propre, qui soit irréductible (l'irréductibilité se traduit ici par le fait que le terme $b_n(c, \hat{\lambda}, p)$ est non nul). Dans ce cas, on sait /Gantmacher, 1966/ que les composantes de $u(\epsilon, c)$ (A.8.3) sont strictement positives (i.e. : $\forall i = 2, \dots, n ; \epsilon(c, p) > \mathcal{R}(\alpha_i)$).

La stabilité exponentielle du système (A.8.1-a) (resp (A.8.1-b)) peut alors être mise en évidence en remarquant que la fonction définie positive :

$$v_a(x(t)) = \text{Max}_{i=1, \dots, n} \{|x_i(t)| / u_i\} \quad (\text{A.8.4-a})$$

$$\text{resp } v_b(x(t)) = \sum_{i=1}^n |x_i(t)| \cdot u_i \quad (\text{A.8.4-b})$$

satisfait l'inégalité suivante :

$$\alpha = a, b : d/dt^+ (v_\alpha(x(t))) \leq \varepsilon(c,p) \cdot v_\alpha(x(t)) \quad (\text{A.8.5})$$

le long des trajectoires possibles du système.

La notion de dépassement transitoire peut être abordée en évaluant la borne supérieure du rapport :

$$\gamma = \frac{\sup_{t \in [t_0, +\infty[} (\|x(t)\|)}{\|x(t_0)\|}$$

($\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne), pour toutes les trajectoires $x(t, t_0, x(\tau \leq t); x(t_0))$ possibles du système (A.8.1).

Cette quantité peut être aisément calculée dans notre cas, en notant que $v_a(x)$ (A.8.4 - a) et $v_b(x)$ (A.8.4 - b) sont des normes de \mathbb{C}^n du même ordre que la norme euclidienne.

Notons :

$$\begin{aligned} \underline{u} &= \min_{i=1, \dots, n} \{u_i\} \\ \bar{u} &= \max_{i=1, \dots, n} \{u_i\} \end{aligned} \quad (\text{A.8.6})$$

L'équivalence uniforme de la norme $v_a(x)$ et de la norme euclidienne est mise en évidence par les inégalités suivantes :

$$\underline{u} \cdot v_a(x) \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \cdot \bar{u} \cdot v_a(x) \quad (\text{A.8.7})$$

D'après la propriété de stabilité exponentielle (A.8.5), il vient :

$$v_a(x(t)) \leq v_a(x(t_0)) \cdot e^{+\varepsilon(c,p) \cdot (t-t_0)} \quad (\text{A.8.8})$$

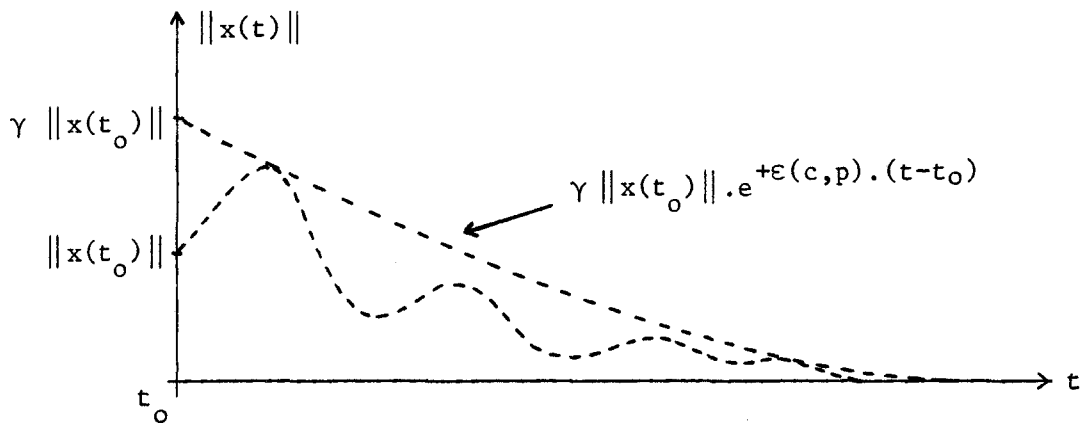
et d'après (A.8.7), l'inégalité suivante est satisfaite le long des mouvements du système (A.8.1 - a) :

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{n} (\bar{u} / \underline{u}) \cdot \|x(t_0)\| \cdot e^{+\varepsilon(c,p) \cdot (t-t_0)} \quad (\text{A.8.9})$$

L'estimation cherchée du dépassement transitoire est alors :

$$\gamma = \sqrt{n} (\bar{u} / \underline{u}) \quad (\text{A.8.10})$$

L'évolution de la norme euclidienne du vecteur état du système (A.8.10) peut être visualisée sur la figure suivante :



Il convient de remarquer que γ dépend explicitement des paramètres α_i ($\alpha_i \in \mathbb{C}$; $i = 2, \dots, n$) de la forme série mais ne dépend de p que par la quantité $\varepsilon(c,p)$.

Dans le cas des systèmes décrits par (A.8.1-b), l'équivalence uniforme des normes $v_b(x)$ et de la norme euclidienne s'exprime par :

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \quad \underline{u} \cdot \|x\| \leq v_b(x) \leq \sqrt{n} \cdot \|x\| \cdot \bar{u} \quad (\text{A.8.11})$$

Sachant que $v_b(x(t))$ décroît exponentiellement :

$$v_b(x(t)) \leq v_b(x(t_0)) \cdot e^{+\varepsilon(c,p) \cdot (t-t_0)} \quad (\text{A.8.12})$$

il vient alors, d'après (A.8.11) :

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{n} (\bar{u} / \underline{u}) \cdot \|x(t_0)\| \cdot e^{+\varepsilon(c,p) \cdot (t-t_0)}$$

et il vient encore l'estimation $\gamma = \sqrt{n} (\bar{u} / \underline{u})$ du dépassement transitoire.

ANNEXE II.9

DERIVEES PARTIELLES DES COMPOSANTES DE LA MATRICE
PSEUDO-MAJORANTE ASSOCIEE A LA FORME SERIE

Considérons d'abord le processus de formation de la forme série.
Considérons un système à non linéarités de rang 1 :

$$\dot{x} = (F_0(p) + v_1 \cdot f^T(x,p)) \cdot x(t) \quad (A.9.1)$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$v_1^T = [1, 0, \dots, 0]$$

Par un changement de base (Annexe II.2), on lui associe une représentation canonique L1 définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} n_1 = \text{rang} ([F_0(p) ; v_1]) \\ \dot{x}' = \begin{bmatrix} -g_1(x,p) & \dots & \dots & -g_{n_1}(x,p) \\ & 1 & & \\ & & \dots & \bigcirc \\ \bigcirc & & & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot x'(t) \\ U_{n_1}^+(p) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n} \\ x' = U_{n_1}^+(p) \cdot x \end{array} \right. \quad (A.9.2)$$

La forme série associée à ce dernier système est alors introduite par un changement de base (II.4.10)

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i = 2, \dots, n \\ \forall j = 1, \dots, n \end{array} \right. \frac{\partial}{\partial \beta} (M(c, \lambda, p))_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{si } \beta = \mathcal{R}(\alpha_i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.9.6})$$

Nous proposons d'abord de montrer comment on peut calculer les accroissements de $M(c, \lambda, p)$ (A.9.4) par rapport à une variable $\beta \in E$ connaissant celui de $SL(c, \lambda, p)$ (A.9.3).

Les accroissements des éléments de la première ligne s'expriment par :

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (\mathcal{R}(b_1(c, \lambda, p))) = \mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial \beta} (b_1(c, \lambda, p))\right) \quad (\text{A.9.7})$$

$$\forall i = 2, \dots, n$$

$$b_i(c, \lambda, p) \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{R}(b_i(c, \lambda, p)) + j \operatorname{Im}(b_i(c, \lambda, p))$$

* si $b_i(c, \lambda, p) \neq 0$ alors :

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (|b_i(\cdot)|) = \frac{\mathcal{R}(b_i(\cdot)) \cdot \mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial \beta} (b_i(\cdot))\right) + \operatorname{Im}(b_i(\cdot)) \cdot \operatorname{Im}\left(\frac{\partial}{\partial \beta} (b_i(\cdot))\right)}{|b_i(\cdot)|} \quad (\text{A.9.8})$$

* si $b_i(c, \lambda, p) = 0$ on ne peut définir $\frac{\partial}{\partial \beta} (|b_i(\cdot)|)$, par contre on peut exprimer :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \beta^+} (|b_i(\cdot)|) = \left| \frac{\partial}{\partial \beta} (b_i(\cdot)) \right| \\ \text{et} \\ \frac{\partial}{\partial \beta^-} (|b_i(\cdot)|) = - \left| \frac{\partial}{\partial \beta} (b_i(\cdot)) \right| \end{array} \right. \quad (\text{A.9.9})$$

Nous sommes ainsi amenés à calculer les dérivées partielles de $SL(c, \lambda, p)$ (A.9.3) par rapport aux éléments de E (A.9.5).

On a :

$$SL(c, \chi, p) = V^{-1}(c) \cdot U_{n_1}^+(p) \cdot (F_0(p) + v_1 \cdot f(\chi, p)) \cdot U_{n_1}(p) \cdot V(c) \quad (A.9.10)$$

1) Dérivation par rapport aux composantes de p :

Les matrices $U_{n_1}(p)$ et $U_{n_1}^+(p)$ sont données par l'algorithme de l'Annexe II.2, $V(c)$ et $V^{-1}(c)$ sont explicitées par (II.4.8) (II.4.11). La dérivation de $U_{n_1}(p)$ et $U_{n_1}^+(p)$ par rapport aux composantes de p est possible à partir de leur algorithme de calcul (cf Annexe II.4). Il vient alors, d'après (A.9.10) :

$$\forall \beta = p_1, p_2, \dots, p_{n_p} \quad (A.9.11)$$

$$\frac{\partial SL(\cdot)}{\partial \beta} = V^{-1}(c) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial U_{n_1}^+(p)}{\partial \beta} (F_0(p) + v_1 \cdot f(\chi, p)) \cdot U_{n_1}(p) + \\ & + U_{n_1}^+(p) \left(\frac{\partial}{\partial \beta} (F_0(p) + v_1 \cdot f(\chi, p)) \right) \cdot U_{n_1}(p) + \\ & + U_{n_1}^+(p) (F_0(p) + v_1 \cdot f(\chi, p)) \frac{\partial}{\partial \beta} (U_{n_1}(p)) \end{aligned} \right\} \cdot V(c)$$

2) Dérivation par rapport aux paramètres $\Re(\alpha_i)$ ou $\Im(\alpha_i)$ ($i = 2, \dots, n_1$) :

Considérons les termes $g_i(c, \chi, p)$ de la forme canonique L1 (A.9.2). Les termes de la première ligne de la forme série SL (A.9.3) sont les différences divisées (II.4.16) du polynôme symbolique $P(\alpha, c, \chi, p)$ (A.9.12) :

$$P(\alpha, c, \chi, p) = \alpha^{n_1} + \sum_{i=1}^{n_1} g_i(\chi, p) \cdot \alpha^{n_1-1} \quad (A.9.12)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & b_1(c, \chi, p) = f_1(c, \chi, p) + \sum_{i=2}^{n_1} \alpha_i \\ & \forall i = 2, \dots, n_1 \\ & b_i(c, \chi, p) = D(\alpha_i, \dots, \alpha_{n_1} ; P(\alpha, c, \chi, p)) \end{aligned} \right. \quad (A.9.13)$$

La fonction différence divisée étant linéaire, on peut expliciter la première ligne de la forme série (A.9.13) à partir des différences divisées de la fonction puissance. Notons :

$$DD(i,j) \triangleq D(\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{n_1}, \alpha^j) \quad (A.9.14)$$

Par exemple, pour $n_1 = 4$, les valeurs de la fonctions $DD(.,.)$ sont contenues dans le tableau suivant (Fig. A.9.1) :

i \ j	0	1	2	3	4
2	0	0	1	$\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$	$\frac{\alpha_4^3 - \alpha_3^3}{\alpha_4 - \alpha_3} + \alpha_2(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$
3	0	1	$\alpha_4 + \alpha_3$	$\frac{\alpha_4^3 - \alpha_3^3}{\alpha_4 - \alpha_3}$	$\frac{\alpha_4^4 - \alpha_3^4}{\alpha_4 - \alpha_3}$
4	1	α_4	α_4^2	α_4^3	α_4^4

Valeurs de la fonction $DD(i,j)$ pour $n_1 = 4$

FIGURE A.9.1

Il vient alors :

$$\forall i = 2, \dots, n_1$$

$$b_i(c, x, p) = DD(i, n_1) + \sum_{j=1}^{n_1} DD(i, n_1 - j) \cdot g_j(x, p) \quad (A.9.15)$$

On peut alors dériver formellement la fonction $DD(i,j)$ (A.9.14) par rapport à un paramètre α_i ($i \in [2, \dots, n_1]$). Notons :

$$DDD(i,j,k) \triangleq \frac{\partial}{\partial \alpha_k} (DD(i,j)) \triangleq \frac{\partial}{\partial \alpha_k} (D(\alpha_i, \dots, \alpha_{n_1}; \alpha^i))$$

Il vient alors, d'après (A.9.15) :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_k} (b_i(c, x, p)) = \text{DDD}(i, n_1, k) + \sum_{j=1}^{n_1} \text{DDD}(i, n_1 - j, k) \cdot g_j(x, p)$$

Le tableau en fin d'Annexe donne la valeur de la fonction $\text{DDD}(\dots)$ dans le cas $n_1 = 4$ (Fig. A.9.2).

Etant ainsi capable d'exprimer les dérivées formelles

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_k} (b_i(c, x, p)) \quad \forall k = 2, \dots, n_1 \quad \forall i = 2, \dots, n_1$$

on peut alors exprimer :

$$\frac{\partial}{\partial \Re(\alpha_k)} (b_i(c, x, p)) = \frac{\partial}{\partial \alpha_k} (b_i(c, x, p))$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \text{Im}(\alpha_k)} (b_i(c, x, p)) = j \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_k} (b_i(c, x, p))$$

Enfin, bien évidemment, il vient :

$$\forall k = 2, \dots, n_1 \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_k} (b_1(c, x, p)) = 1$$

J	K		4	3	2
	I				
0	4		0	0	0
	3		0	0	0
	2		0	0	0
1	4		1	0	0
	3		0	0	0
	2		0	0	0
2	4		$2\alpha_4$	0	0
	3		1	1	0
	2		0	0	0
3	4		$3\alpha_4^2$	0	0
	3		$2\alpha_4 + \alpha_3$	$2\alpha_3 + \alpha_4$	0
	2		1	1	1
4	4		$4\alpha_4^3$	0	0
	3		$3\alpha_4^2 + 2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_3^2$	$3\alpha_3^2 + 2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_4^2$	0
	2		$2\alpha_4 + \alpha_2 + \alpha_3$	$2\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_4$	$2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$

Tableau des valeurs de la fonction DDD(i,j,k) dans le cas $n_1 = 4$

FIGURE A.9.2

ANNEXE II.10

EXPRESSIONS DES DERIVEES PARTIELLES
DES COEFFICIENTS DES MATRICES EN FLECHE

Cette annexe se limite à la définition des dérivées partielles des coefficients d'une représentation en flèche d'un système décrit sous la forme canonique L1.

Le traitement complet permettant, en utilisant ces expressions, de déterminer la direction de plus grande pente du critère de stabilité $\epsilon(c,p)$ est celui de l'Annexe II.9 à laquelle nous prions le lecteur de se référer.

Nous supposons ainsi que le système initial est décrit par l'équation d'état suivante (A.10.1), où toutes les dérivées partielles par rapport aux gains ajustables p_i ($i = 1, \dots, n_p$) sont connues.

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} -a_1(x,p) & -a_2(x,p) & \dots & -a_n(x,p) \\ & 1 & & \bigcirc \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \\ \bigcirc & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10.1})$$

La forme en flèche mince résultante est alors définie par (A.10.2)
(II.6.10) (II.6.11) :

$$\left\{ \begin{array}{l} c \in \mathbb{C}^{n-1} \quad c^T = [\alpha_2, \dots, \alpha_n] \\ \ddot{x}_j = \begin{bmatrix} -b_1(c, \lambda, p) & -b_2(c, \lambda, p) & \dots & -b_n(c, \lambda, p) \\ 1 & & & \\ \vdots & \alpha_2 & & \circ \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & \alpha_n \\ 1 & \circ & & \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{A.10.2})$$

Nous envisagerons successivement l'expression des dérivées partielles de la première ligne de la matrice (A.10.2) par rapport aux composantes de p et de c.

a) En ce qui concerne les gains ajustables composant p, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall j = 1, \dots, n_p \quad i \neq 1 \\ \frac{\partial b_i(c, \lambda, p)}{\partial p_j} = \frac{1}{\prod_{\substack{k=2 \\ k \neq i}}^n (\alpha_i - \alpha_k)} \cdot \sum_{k=1}^n \alpha_i^{n-k} \left(\frac{\partial a_k(\lambda, p)}{\partial p_j} \right) \\ \frac{\partial b_1(c, \lambda, p)}{\partial p_j} = \frac{\partial a_1(\lambda, p)}{\partial p_j} \end{array} \right. \quad (\text{A.10.3})$$

b) La dérivation formelle des coefficients $b_j(c, \lambda, p)$ de la première ligne de la matrice en flèche par rapport aux α_i est aisée étant donné le caractère polynomial des expressions de ces coefficients (II.6.11).

Ainsi :

$$j = 2, \dots, n \quad \frac{\partial b_1(c, \lambda, p)}{\partial \alpha_j} = 1$$

et :

$$\left. \begin{aligned}
 & i = 2, \dots, n \\
 & \frac{\partial b_i(c, x, p)}{\partial \alpha_i} = \frac{1}{\prod_{\substack{k=2 \\ k \neq i}}^n (\alpha_i - \alpha_k)} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (P(x, p, \alpha_i)) + \\
 & \qquad \qquad \qquad - \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{(\alpha_i - \alpha_k)} \cdot b_i(c, x, p) \\
 & \forall j = 2, \dots, n \quad i \neq j \\
 & \frac{\partial b_i(c, x, p)}{\partial \alpha_j} = \frac{1}{(\alpha_i - \alpha_j)} \cdot b_i(c, x, p)
 \end{aligned} \right\} \quad (A.10.4)$$

CHAPITRE III

EXEMPLE D'APPLICATION

Ce chapitre permet d'illustrer la méthode de synthèse paramétrique développée dans le deuxième chapitre, du point de vue de sa mise en œuvre.

La méthode proposée est appliquée à la recherche d'une loi de commande élémentaire applicable à un modèle de processus non linéaire étudié dans la référence /Gentina, 1976/.

Après avoir défini le processus et la structure de loi de commande envisagée, nous rappelons les principaux points de la méthode de synthèse relative à la forme série (§ II.4).

Ce rappel a pour but de préciser la constitution des différents modules du logiciel qui permet de mener à bien la synthèse.

Nous aborderons ensuite l'utilisation de ce programme en présentant des heuristiques de recherche de solution et en discutant les résultats obtenus.

Enfin, nous proposons de présenter la méthode de synthèse basée sur l'utilisation de la forme en flèche (§ II.6), mettant ainsi en exergue la modularité et la souplesse du logiciel de synthèse.

III.1 - DEFINITION DU PROBLEME D'ASSERVISSEMENT

Nous proposons de considérer le modèle d'une installation de surchauffe de la Centrale Thermique de Loire-sur-Rhône /Lecouturier & Dupuy, 1971/ /Gentina, 1976/.

Le caractère non linéaire de ce processus provient essentiellement de la variation de son comportement dynamique en fonction de la puissance fournie par la centrale. Cette puissance (notée x') peut varier entre 120 et 250 MW.

La modélisation du processus a été effectuée en relevant les comportements dynamiques de l'installation de surchauffe de la centrale fonctionnant pour différentes valeurs constantes de la puissance fournie x' . Les différents modèles retenus à ce niveau sont du type linéaire stationnaire.

Dans une seconde phase, on a proposé un modèle de ce processus variable pour toutes les puissances dispensées, en interpolant les modèles linéaires stationnaires obtenus dans la première phase d'identification.

Le modèle global proposé est alors le suivant :

$$\dot{x}^p = \begin{bmatrix} -a_1^p(x) & -a_2^p(x) & -a_3^p(x) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x^p(t) + \begin{bmatrix} l_1^p(x) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u^c(t)$$

(III.1)

$$\theta(t) = [0 \quad 0 \quad 1] x^p(t)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x' - 120 \text{ MW}}{100 \text{ MW}} \quad x \in [0 ; 1.3] \\ \cdot \theta(t) \text{ est la température de sortie (mesurable) qu'on souhaite contrôler} \\ \cdot u^c(t) \text{ désigne l'ouverture d'une vanne de désurchauffe} \\ \vdots \end{array} \right.$$

Les expressions des paramètres dynamiques sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 a_1^P(x) &= 1.705 x^3 + 0.083 x + 1.716 \\
 a_2^P(x) &= 2.726 x^{5/2} + 0.029 x + 1.084 \\
 a_3^P(x) &= 3.073 x^{5/2} + 0.118 x + 0.228 \\
 \ell_1^P(x) &= 0.4475 x^3 - 0.1145 x + 0.1278
 \end{aligned}
 \tag{III.2}$$

Le correcteur envisagé dans cette installation est du type PID pour les raisons suivantes :

- On souhaite réguler la température de contrôle $\theta(t)$ autour d'une température de consigne θ_c constante. L'intégrateur du PID est ainsi nécessaire lors d'un fonctionnement à puissance constante.

- La technologie choisie pour l'implémentation du réseau correcteur est pneumatique. Ce choix limite beaucoup la complexité du régulateur.

Considérons le processus régulé avec la loi de commande PID suivante :

$$u^c(t) = -p_1 \dot{\theta}(t) + p_2 (\theta_c - \theta(t)) + p_3 \int_0^t (\theta_c - \theta(\tau)) . d\tau \tag{III.3}$$

$$p^T = [p_1, p_2, p_3]$$

En adoptant $\int_0^t (\theta(\tau) - \theta_c) . d\tau$ comme une variable d'état, l'équation l'équation d'état de l'asservissement est alors la suivante :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \begin{bmatrix} -a_1(x,p) & -a_2(x,p) & -a_3(x,p) & -a_4(x,p) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} p_2 \ell_1(x) \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \theta_c$$

(III.4)

avec : $\theta(t) = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \cdot x(t)$

et :

$$\begin{aligned}
 a_1(x,p) &= a_1^P(x) \\
 a_2(x,p) &= a_2^P(x) + p_1 \ell_1^P(x) \\
 a_3(x,p) &= a_3^P(x) + p_2 \ell_1^P(x) \\
 a_4(x,p) &= p_3 \ell_1^P(x)
 \end{aligned}
 \tag{III.5}$$

Pour chaque valeur constante x_0 , l'objectif de régulation est atteint si $x(t)$ tend asymptotiquement vers l'état stationnaire $x^S(x_0)$:

$$x^S(x_0) = \left[\begin{array}{cccc} & & & \\ 0 & 0 & 1 & ; - \frac{a_3^P(x_0)}{a_4(x_0)} \\ & & & \\ & & & \end{array} \right]^T \cdot \theta_c
 \tag{III.6}$$

Envisageons maintenant le cas où x varie de manière imprévisible dans ses bornes prescrites ($x \in \chi \subset [0 ; 1.3]$).

Nous proposons de déterminer des valeurs des gains ajustables p_1 , p_2 , p_3 tels que l'équation d'état précédente (III.4) fonctionnant en régime libre, soit exponentiellement stable.

Dans ce cas, on peut aisément prouver /Maizières & al, 1977/ que l'évolution de l'écart entre le vecteur état $x(t)$ de l'asservissement et d'un point quelconque de l'ensemble (borné) des états stationnaires (III.6) $\{x^S(x) ; x \in [0 ; 1.3]\}$ est borné.

Considérons l'équation d'état :

$$\dot{x}^l = F(x,p) \cdot x^l(t)
 \tag{III.7}$$

avec :

$$F(.) = \begin{bmatrix} -a_1(.) & -a_2(.) & -a_3(.) & -a_4(.) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ce processus est décrit sous la forme canonique L1 (II.3.13) de manière immédiate.

Nous proposons de déterminer des valeurs des gains ajustables p_1 , p_2 , p_3 (III.3) de manière à assurer la stabilité asymptotique globale du point d'équilibre $x^{\ell} = 0$ du système (III.7),

- Quelquesoient les variations de l'entrée de perturbation x dans le domaine global $[0 ; 1.3]$ (III.1).

- Si cette tentative conduit à un échec, nous proposerons alors de définir un partitionnement de l'intervalle $[0 ; 1.3]$ de variation de x en un nombre minimum de sous intervalles pour lesquels on peut définir des valeurs des gains ajustables p_1 , p_2 , p_3 garantissant la stabilité asymptotique globale du point d'équilibre du système (III.7) quelquesoient les variations de x dans chaque sous intervalle.

La synthèse paramétrique de cet asservissement est envisagée par la minimisation d'un critère numérique défini à partir d'une représentation équivalente du processus (III.7). Nous proposons d'abord de développer la synthèse construite à partir de la forme série (§ II.4) pour ensuite décrire les quelques modifications qui permettent d'utiliser la forme en flèche (§ II.6).

III.2 - SYNTHESE A PARTIR DE LA FORME SERIE

Considérons l'équation d'état (III.7) du processus. On peut définir une forme "série" de la matrice de régime libre (II.4.15) (II.4.16). Cette représentation est paramétrée par :

$$c = \left[\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \right]^T \in \mathbb{C}^3 \quad (\text{III.8})$$

$$S(c, x, p) = \begin{bmatrix} -b_1(.) & -b_2(.) & -b_3(.) & -b_4(.) \\ 1 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

avec :

$$\left\{ \begin{aligned} b_4(c, x, p) &= \alpha_4^4 + a_1^P(x) \alpha_4^3 + (a_2^P(x) + p_1 \ell_1(x)) \alpha_4^2 \\ &\quad + (a_3^P(x) + p_2 \ell_1(x)) \alpha_4 + p_3 \ell_1(x) \\ b_3(c, x, p) &= (\alpha_4^3 + \alpha_3 \alpha_4^2 + \alpha_3^2 \alpha_4 + \alpha_3^3) + a_1^P(x) (\alpha_4^2 + \alpha_3 \alpha_4 + \alpha_3^2) \\ &\quad + (a_2^P(x) + \ell_1(x) p_1) (\alpha_4 + \alpha_3) \\ &\quad + (a_3^P(x) + \ell_1(x) p_2) \\ b_2(c, x, p) &= (\alpha_4 (\alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_2) + \alpha_3 (\alpha_3 + \alpha_2) + \alpha_2^2) \\ &\quad + a_1^P(x) (\alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_2) + (a_2^P(x) + \ell_1(x) p_1) \\ b_1(c, x, p) &= a_1^P(x) + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \end{aligned} \right.$$

Le critère de stabilité $\varepsilon(c, p)$ associé à ces choix d'un régulateur (III.3) et d'une représentation série équivalente (III.8) est (§ II.2.2.1) la borne supérieure des valeurs propres réelles de la matrice pseudo-majorante suivante (III.10). La négativité de ce critère est une condition suffisante de stabilité asymptotique de l'asservissement envisagé.

$$M(c, x, p) = \begin{bmatrix} -\mathcal{R}(b_1(.)) & |b_2(.)| & |b_3(.)| & |b_4(.)| \\ 1 & \mathcal{R}(\alpha_2) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathcal{R}(\alpha_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathcal{R}(\alpha_4) \end{bmatrix} \quad (\text{III.10})$$

III.2.1 - Programme de calcul de $\varepsilon(c,p)$

La définition de ce critère (II.4.44) est dans ce cas particulier, donnée par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_e = \text{Max}_{i=2,3,4} (\mathcal{R}(\alpha_i)) \\ \varepsilon(c,p) \geq \varepsilon_e \quad \text{(III.11-a)} \\ \varepsilon(c,p) \text{ est la racine en } \varepsilon \text{ de :} \\ \quad \text{CK}(\varepsilon,c,p) = 0 \quad \text{(III.11-b)} \\ \text{(pratiquement cette condition s'exprime par :} \\ \quad \text{CK}(\varepsilon,c,p) \in]0 ; \text{ précision[)} \\ \text{CK}(\varepsilon,c,p) \stackrel{\Delta}{=} \text{Inf}_{x \in \chi} \{ \text{CKS}(\varepsilon,c,x,p) \} \quad \text{(III.11-c)} \\ \text{et :} \\ \text{CKS}(\varepsilon,c,x,p) \stackrel{\Delta}{=} - |b_4(c,x,p)| \\ \quad + (\varepsilon - \mathcal{R}(\alpha_4)) (- |b_3(c,x,p)| \\ \quad + (\varepsilon - \mathcal{R}(\alpha_3)) (- |b_2(c,x,p)| \\ \quad + (\varepsilon - \mathcal{R}(\alpha_2)) (\varepsilon + \mathcal{R}(b_1(c,x,p)))) \quad \text{(III.11-d)} \end{array} \right.$$

La recherche de la solution de l'équation (III.11-b) s'effectue en utilisant la procédure définie en annexe (II.6).

La structure du programme de calcul de $\varepsilon(c,p)$ est alors la suivante (Fig. III.1) :

Structure du programme de calcul du critère $\epsilon(c,p)$

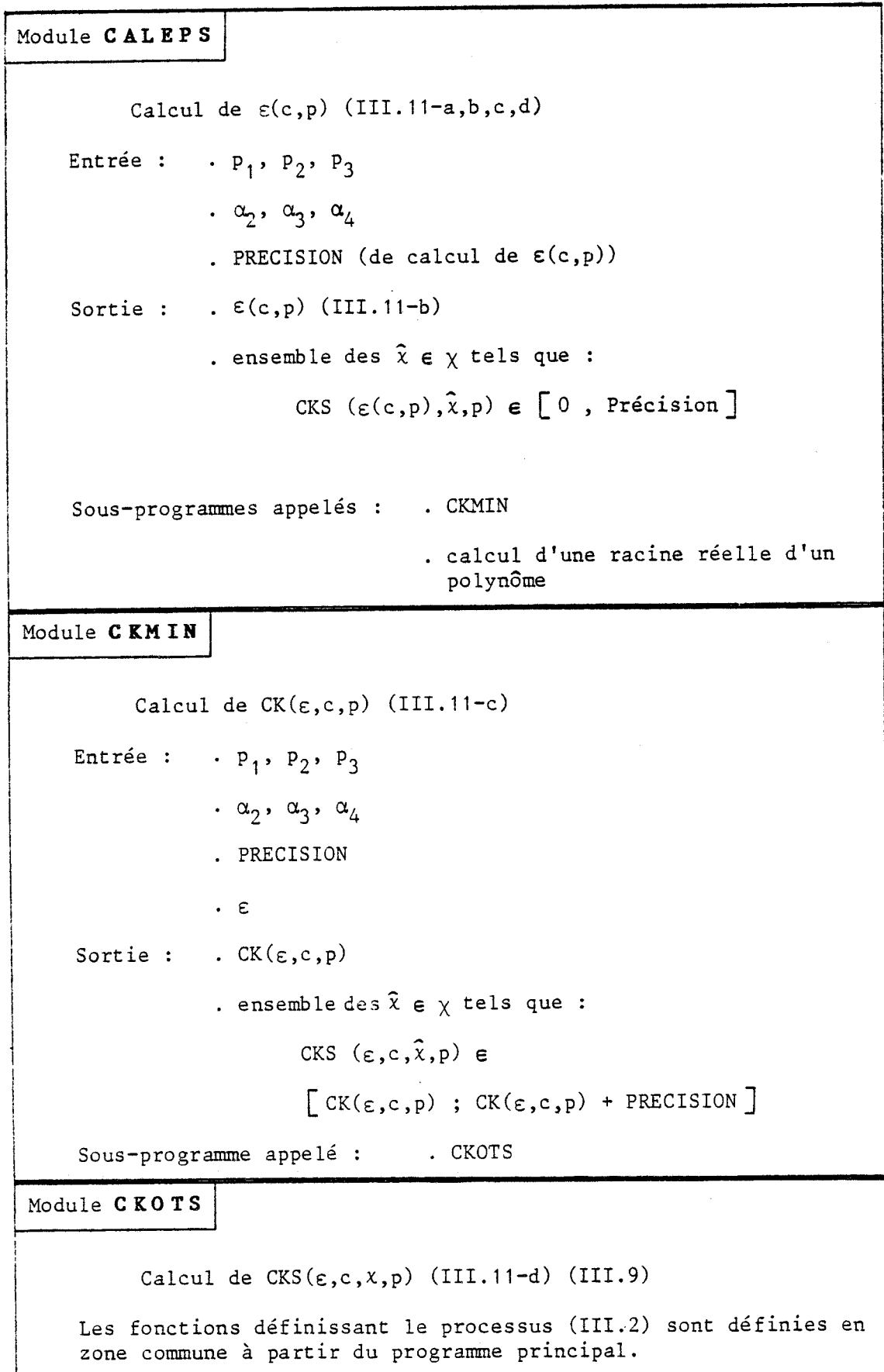


FIGURE III.1

III.2.2 - Programme de calcul de la sensibilité de $\varepsilon(c,p)$

L'optimisation du critère $\varepsilon(c,p)$ s'opère en définissant sa direction de plus grande pente dans l'espace E (II.4.46) des paramètres :

$$E = \{p_1, p_2, p_3, \mathcal{R}(\alpha_2), \mathcal{R}(\alpha_3), \mathcal{R}(\alpha_4), \text{Im}(\alpha_2), \text{Im}(\alpha_3), \text{Im}(\alpha_4)\} \quad (\text{III.12})$$

Le calcul de cette ligne de plus grande pente est réalisé par la méthode de l'annexe II.3, à partir de l'ensemble des gradients $\text{gr}(\varepsilon(c,p), c, p, \hat{\chi}) \in \mathbb{R}^9$ des valeurs propres réelles maximales $\varepsilon(c, \hat{\chi}, p)$ des matrices $M(c, \hat{\chi}, p)$ (III.10) pour l'ensemble des valeurs de $\hat{\chi} \in \chi$ définies dans le Module CALEPS (Fig. III.1).

La détermination de $\text{gr}(\varepsilon(c,p), c, p, \hat{\chi})$ comporte la définition :

- du vecteur propre $u(c,p,\varepsilon(c,p))$ (II.4.48) de $M(c, \hat{\chi}, p)$ relatif à $\varepsilon(c,p)$; il vient :

$$u(c,p,\varepsilon) = \begin{bmatrix} (\varepsilon - \mathcal{R}(\alpha_4)) (\varepsilon - \mathcal{R}(\alpha_3)) (\varepsilon - \mathcal{R}(\alpha_2)) \\ (\varepsilon - \mathcal{R}(\alpha_4)) (\varepsilon - \mathcal{R}(\alpha_3)) \\ (\varepsilon - \mathcal{R}(\alpha_4)) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.13})$$

- du vecteur propre $v(c,p,\varepsilon(c,p), \hat{\chi})$ (II.4.49) de $M^T(c, \hat{\chi}, p)$ relatif à $\varepsilon(c,p)$:

$$v(c,p,\varepsilon, \hat{\chi}) = \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon + \mathcal{R}(b_1(c, \hat{\chi}, p)) \\ - |b_2(c, \hat{\chi}, p)| + (\varepsilon - \mathcal{R}(\alpha_2)) \cdot v_2(c,p,\varepsilon, \hat{\chi}) \\ - |b_3(c, \hat{\chi}, p)| + (\varepsilon - \mathcal{R}(\alpha_3)) \cdot v_3(c,p,\varepsilon, \hat{\chi}) \end{bmatrix} \quad (\text{III.14})$$

- des dérivées partielles par rapport :

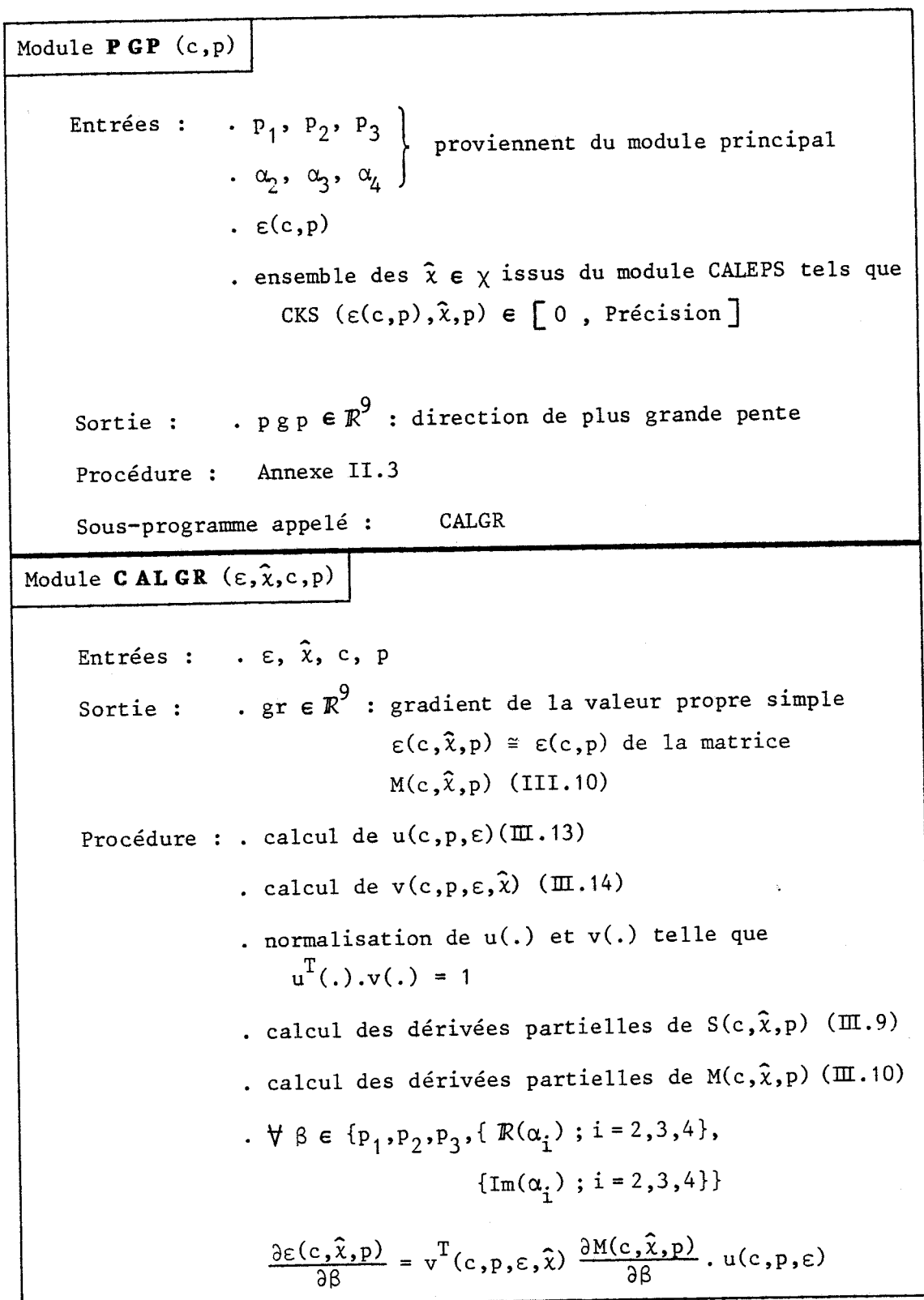
- . aux gains ajustables $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}$.
- . aux paramètres de représentation $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathcal{C}$.

Ce point est traité (et illustré) en annexe II.9 en utilisant les fonctions différences divisées du polynôme caractéristique instantané :

$$P(\alpha, x, p) = \alpha^4 + a_1(x, p)\alpha^3 + a_2(x, p)\alpha^2 + a_3(x, p)\alpha + a_4(x, p)$$

(III.15)

La structure du module de calcul de la direction de plus grande pente est représentée Figure III.2 :



Structure du programme de calcul de la direction de plus grande pente du critère $\varepsilon(c,p)$

FIGURE III.2

III.2.3 - Programme de synthèse paramétrique

Les modules des programmes définissant le critère (§ II.4.3) et sa direction de plus grande pente (§ II.4.3.1) étant définis, la structure du programme de synthèse paramétrique est alors la suivante (Fig. III.3) :

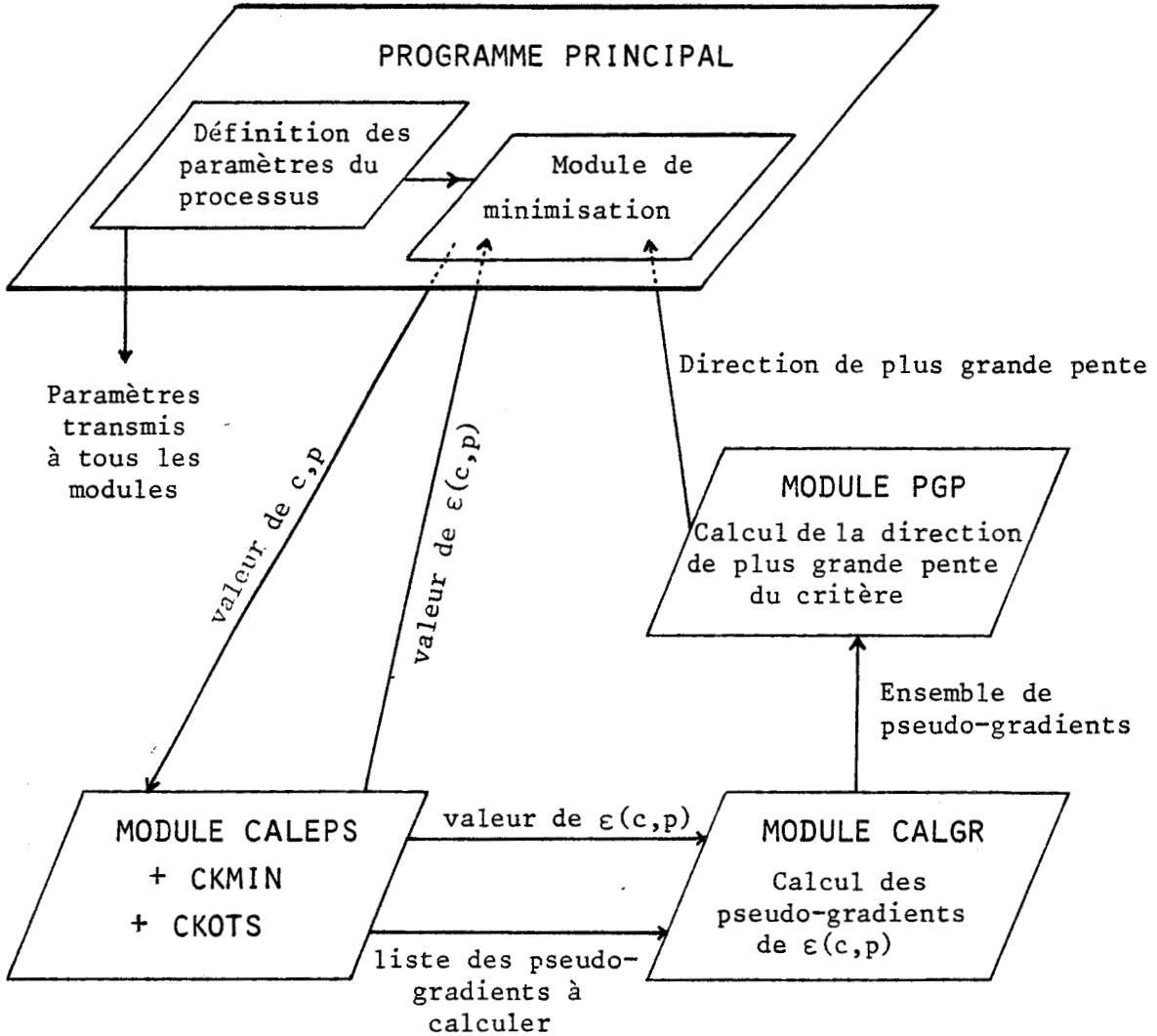


FIGURE III.3

Les données définissant le problème sont :

- les paramètres des fonctions non linéaires du processus (III.2),
- l'intervalle χ de variation de l'entrée de perturbation x (III.1),
- la précision avec laquelle on calcule $\varepsilon(c,p)$,
- les valeurs initiales
 - . des gains ajustables p_1, p_2, p_3
 - . des paramètres de représentation $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ choisis a priori avec une partie réelle négative.

Le module d'optimisation comporte un algorithme de type gradient. Cette méthode se justifie dans la mesure où on cherche essentiellement à minimiser le critère $\varepsilon(c,p)$ sans chercher à définir le point précis pour lequel le minimum est atteint.

Ainsi, l'arrêt de l'algorithme sur une ligne de faible pente -qui constitue le défaut majeur des méthodes de type gradient- n'est pas gênant dans la présente synthèse.

D'un point de vue plus technique, nous avons implanté :

- 1) Des algorithmes simples consistant :
 - a) à se déplacer dans la direction de plus grande pente jusqu'à ce que le critère diminue d'au moins le paramètre de précision puis à recommencer avec la plus grande pente calculée au point atteint (on essaie ici de suivre au plus près le chemin de plus grande pente),
 - b) à se déplacer dans la direction de plus grande pente jusqu'à minimiser le critère puis à recommencer en calculant la direction de plus grande pente au point atteint.

2) Nous avons pu également mettre en œuvre de nombreuses variantes d'algorithmes de gradients conjugués.

On peut noter à ce niveau que dans tous les essais, la méthode (1-a) s'est révélée la plus performante et que les algorithmes de gradients conjugués (2) n'ont pas donné de meilleurs résultats que la méthode (1-b).

III.2.4 - Stratégie de recherche d'une solution

On a d'abord cherché à obtenir un réglage p_1, p_2, p_3 (et des paramètres $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$) permettant d'assurer la stabilité exponentielle du processus sur le domaine global $\chi = [0 ; 1.3]$ de variation de x .

Cette tentative a toujours conduit à un échec quelquesoient les initialisations des paramètres.

Ainsi, en partant de :

$$\begin{aligned} p_1 &= - 1.2977 & \alpha_2 &= - 0.932577 + j (0.100) \\ p_2 &= - 3.4487 & \alpha_3 &= - 0.186515 + j (- 4.663 \cdot 10^{-2}) \\ p_3 &= 0.2082 & \alpha_4 &= - 0.373031 + j (4.663 \cdot 10^{-2}) \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

qui donne une valeur de critère :

$$\varepsilon(p_1, p_2, p_3, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 0.477268$$

on parvient à :

$$\varepsilon(p_1, p_2, p_3, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 0.193093$$

correspondant aux valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} p_1 &= - 1.29830 & \alpha_2 &= - 0.846796 + j (4.7414 \cdot 10^{-3}) \\ p_2 &= - 3.4081 & \alpha_3 &= - 0.3552 + j (- 7.576 \cdot 10^{-3}) \\ p_3 &= 3.0115 \cdot 10^{-2} & \alpha_4 &= - 5.78 \cdot 10^{-3} + j (- 4.904 \cdot 10^{-5}) \end{aligned}$$

Nous avons alors été amenés à rechercher un partitionnement de l'intervalle total $[0 ; 1.3]$ en un nombre minimum de sous-intervalles tels que l'on puisse définir un réglage assurant la stabilité asymptotique du processus quelquesoient les variations de x dans ce domaine.

Pour ce faire, nous itérons le traitement suivant en initialisant $\underline{x} = \bar{x} = 0$ ($x \in [\underline{x}, \bar{x}]$).

On calcule alors les paramètres p_1, p_2, p_3 tels que le système linéaire correspondant (III.7) à $x \in [\underline{x}, \bar{x}]$ ($\underline{x} = \bar{x}$) soit stable.

On est alors sûr d'obtenir une valeur de $\varepsilon(c,p)$ négative.

On itère ensuite la séquence de traitements suivants :

- augmentation de \bar{x} tant que $\varepsilon(c,p) < 0$

- minimisation de $\varepsilon(c,p)$ avec l'intervalle $[\underline{x}, \bar{x}]$

jusqu'à ce qu'on ne puisse plus augmenter la borne supérieure \bar{x} .

On recommence alors le traitement en prenant \underline{x} égal à la borne supérieure \bar{x} au pas précédent.

Cette démarche a permis d'aboutir aux résultats suivants (Fig. III.4).

Domaine de variation de x	Réglage $\vec{p} = [p_1, p_2, p_3]$			Paramètres de représentation $\vec{c} = [\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$			$\epsilon (c, p)$
	p_1	p_2	p_3	α_2	α_3	α_4	
$[0 ; 0,3103]$	0.2508	0.5441	0.26751	- .5647 + j .028665	- .53028 + j 0.29317	- 0.096 + j $\epsilon (10^{-4})$	- 2.6 10^{-4}
$[0,3103 ; 0.473]$	- 0.1827	- 0.6685	0.3517	- .5682 + j (- .01918)	- .5496 + j (0.2888)	- 0.1271 + j $\epsilon (10^{-7})$	- 4 10^{-4}
$[0.473 ; 0.6731]$	- 0.5563	- 1.9095	0.30128	- .65839 + j (- 0.0447)	- .59367 + j (0.36)	- 0.1003 + j $\epsilon (10^{-4})$	- 1.5 10^{-4}
$[0.6731 ; 1.1505]$	- 0.26639	- 2.903	0.24086	- .70531 + j (- 0.4805)	- .71484 + j (.5291)	- 0.0625 + j $\epsilon (10^{-5})$	- 4.3 10^{-5}
$[1.1505 ; 2.1199]$	3.79607	0.92651	2.8273	- 1.28 + j (0.01768)	- .614 + j (0.7189)	- .591 + j (- 0.72679)	- 2.1 10^{-5}

FIGURE III.4

On peut valider a posteriori ces résultats en analysant la stabilité de chaque système par le théorème B-G 1 (§ II.2.2.1) qui est sous-jacent à la méthode.

Pour ce faire, on calcule dans chacun des cas, la quantité $CK = \inf_{x \in \chi} \{ \det (\varepsilon(c,p) - M(c,x,p)) \}$ en s'assurant que les parties réelles des paramètres $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ et la valeurs de $\varepsilon(c,p)$ sont négatives.

Il vient, par exemple :

$$CK = 4.1 \cdot 10^{-5}$$

pour la situation suivante (III.17) :

$$\begin{aligned} x &\in [0 ; 0.3032] \\ p_1 &= 0.2508 & \alpha_2 &= - 0.5646 + j (2.8318 \cdot 10^{-2}) \\ p_2 &= 0.5445 & \alpha_3 &= - 0.5303 + j (2.92435 \cdot 10^{-1}) \\ p_3 &= 0.2649 & \alpha_4 &= - 0.1001 + j (7.306 \cdot 10^{-3}) \end{aligned} \quad \text{(III.17)}$$

La positivité de CK permet ainsi de s'assurer de la stabilité exponentielle de l'asservissement dans chaque intervalle trouvé de variation de x .

Pour évaluer ces résultats, on peut les comparer à ceux obtenus, d'une manière plus heuristique, dans la référence /Gentina, 1976/.

Les domaines de stabilité suivants (Fig. III.5) ont été déterminés par cet auteur, dans la même problématique d'un réglage fixe des gains p_1, p_2, p_3 du régulateur PID (III.3).

Nous avons reporté sur les figures III.6 a & b les domaines de stabilité obtenus par les deux méthodes. On peut y constater que, par notre méthode, nous recouvrons le domaine de fonctionnement $x \in [0 ; 1.3]$ par 5 intervalles (Fig. III.6-a), alors qu'il en fallait 11 auparavant (Fig. III.6-b).

Domaine de variation de x	$u(t) = - \left[p_1 x_2^{\ell}(t) + p_2 x_3^{\ell}(t) + p_3 \int_0^t x_3^{\ell}(\tau) d\tau \right]$		
	P_1	P_2	P_3
[0.000 ; 0.152]	- 0.26828	+ 0.2725	0.16280
[0.018 ; 0.226]	- 0.32841	- 0.0178	0.17992
[0.152 ; 0.283]	- 0.47079	- 0.3879	0.18219
[0.225 ; 0.333]	- 0.61334	- 0.7162	0.18277
[0.282 ; 0.380]	- 0.74545	- 1.1289	0.18349
[0.333 ; 0.426]	- 0.86312	- 1.4894	0.18514
[0.380 ; 0.473]	- 0.96235	- 1.8404	0.18833
[0.426 ; 0.523]	- 1.03926	- 2.1835	0.19386
[0.474 ; 0.578]	- 1.08654	- 2.1589	0.20306
[0.525 ; 0.640]	- 1.09023	- 2.8404	0.21815
[0.583 ; 0.711]	- 1.0259	- 3.1302	0.24333
[0.649 ; 0.797]	- 0.85354	- 3.3514	0.28614
[0.728 ; 0.908]	- 0.48863	- 3.4347	0.36626
[0.830 ; 1.065]	+ 0.26774	- 3.1766	0.541045
[0.984 ; 1.285]	+ 1.98696	- 1.8504	1.04173
[1.211 ; 1.385]	+ 6.02318	+ 3.1180	2.92100

FIGURE III.5



↑ Domaines de variations admissibles (Données de la Figure III.4)

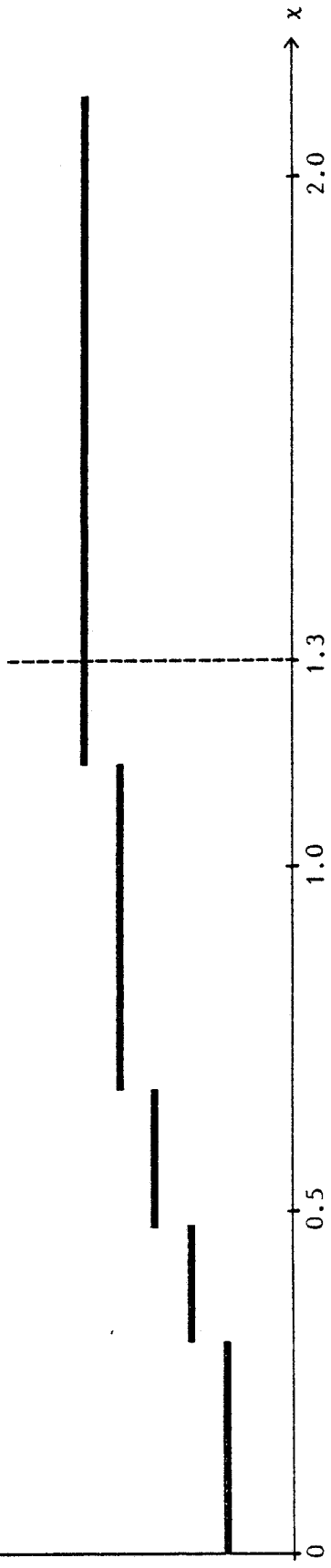


FIGURE III.6-a

↑ Domaines de variations admissibles (Données de la Figure III.5 /Gentina, 1976/)

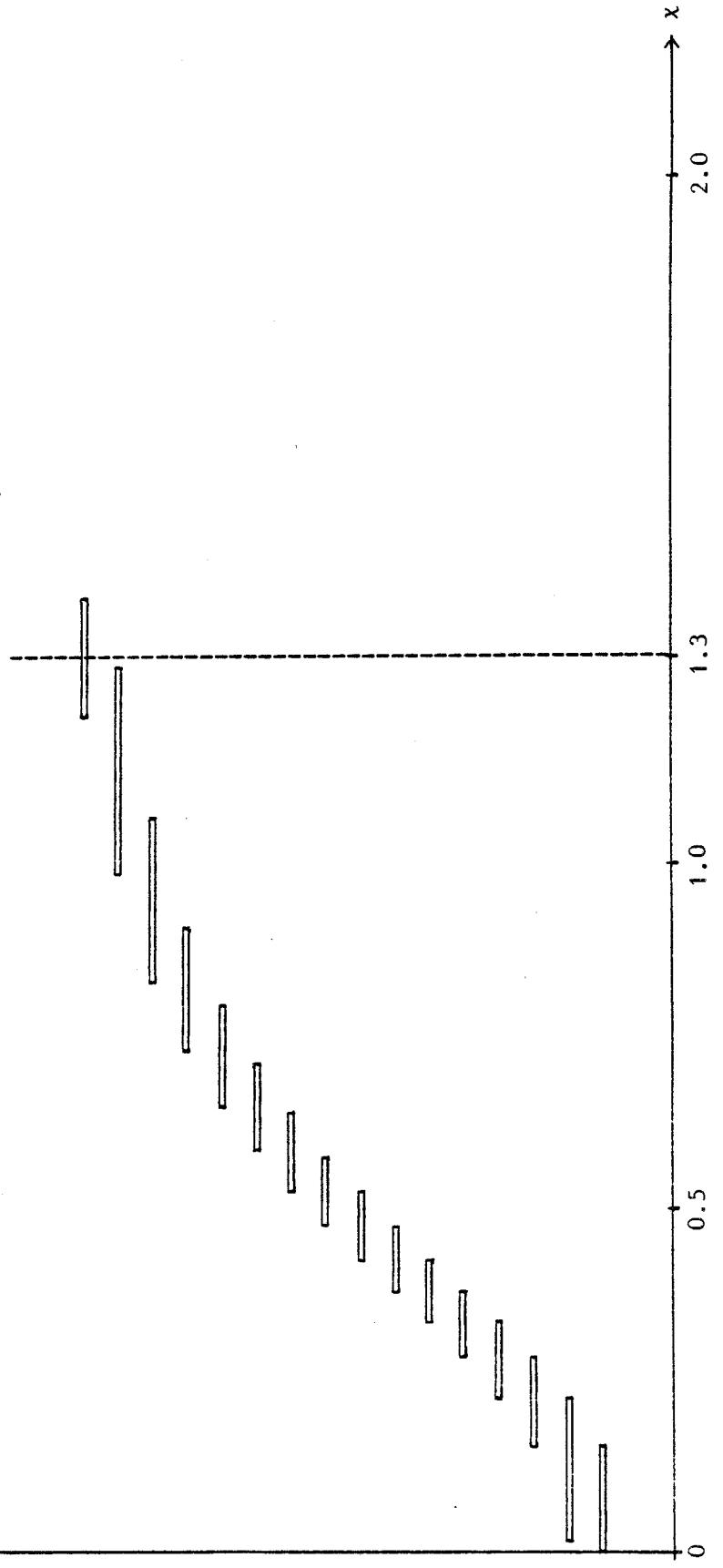


FIGURE III.6-b



Ces résultats étant acquis, nous proposons maintenant d'insister sur la modularité de la méthode en présentant l'adaptation du logiciel de synthèse paramétrique en vue de l'utilisation de la représentation en flèche (§ II.6) du processus.

III.3 - SYNTHESE MENEES A PARTIR DE LA FORME EN FLECHE

Soit $c = [\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] \in \mathbb{C}^3$, le vecteur composé des paramètres de représentation deux à deux distincts.

La matrice de régime libre du système étudié (III.4) (III.5) est transformée de la manière suivante :

$$F(c, x, p) = \begin{bmatrix} -b_1(.) & -b_2(.) & -b_3(.) & -b_4(.) \\ 1 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (\text{III.18})$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\alpha, c, x, p) \triangleq \alpha^4 + a_1(x, p) \alpha^3 + a_2(x, p) \alpha^2 \\ \quad + a_3(x, p) \alpha + a_4(x, p) \\ b_1(c, x, p) = a_1(x, p) + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ b_i(c, x, p) = \frac{P(\alpha_i, c, x, p)}{4 \prod_{\substack{j=2 \\ i \neq j}} (\alpha_i - \alpha_j)} \quad i = 2, 3, 4 \end{array} \right.$$

Etant donnés des paramètres de représentation $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}$ choisis distincts, le critère de stabilité $\varepsilon(c,p)$ est la borne supérieure des valeurs propres réelles des matrices $MF(c,x,p)$ (III.19) déduites de $F(c,x,p)$ (III.18) lorsque x varie dans χ .

$$MF(c,x,p) = \begin{bmatrix} -\mathcal{R}(b_1(\cdot)) & |b_2(\cdot)| & |b_3(\cdot)| & |b_4(\cdot)| \\ 1 & \mathcal{R}(\alpha_2) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \mathcal{R}(\alpha_3) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \mathcal{R}(\alpha_4) \end{bmatrix} \quad (\text{III.19})$$

avec :

$$p = \begin{bmatrix} p_1, p_2, p_3 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$$
$$c = \begin{bmatrix} \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^3$$

Cette quantité peut être calculée (§ II.6.3) en remplaçant le module CKOTS par le module CKOTF dans le programme CALEPS (Fig. III.1).

Ce module effectue le calcul de :

$$\begin{aligned}
 \text{CKF}(\varepsilon, c, x, p) \stackrel{\Delta}{=} & - |b_4(c, x, p)| \cdot (\varepsilon - \mathcal{R}(\alpha_2)) (\varepsilon - \mathcal{R}(\alpha_3)) \\
 & - |b_3(c, x, p)| \cdot (\varepsilon - \mathcal{R}(\alpha_2)) (\varepsilon - \mathcal{R}(\alpha_4)) \\
 & - |b_4(c, x, p)| \cdot (\varepsilon - \mathcal{R}(\alpha_3)) (\varepsilon - \mathcal{R}(\alpha_4)) \\
 & + (\varepsilon + \mathcal{R}(b_1(c, x, p))) (\varepsilon - \mathcal{R}(\alpha_2)) (\varepsilon - \mathcal{R}(\alpha_3)) (\varepsilon - \mathcal{R}(\alpha_4))
 \end{aligned} \tag{III.20}$$

De même, la direction de plus grande pente du critère peut être calculée de la même manière que dans le cas de la forme série en remplaçant le module CALGR (Fig. III.2) par un module CALGRF intégrant :

- le calcul des vecteurs propres à droite et à gauche de MF(c, x, p) (III.19) (II.6.20) (II.6.21),
- le calcul des dérivées partielles des composantes de la matrice MF(c, x, p) par rapport aux paramètres (p_i ; $i = 1, 2, 3$; $\{\mathcal{R}(\alpha_i) ; \text{Im}(\alpha_i) ; i = 2, 3, 4\}$) (Annexe II.10).

Avec ces deux seules modifications, le programme de synthèse paramétrique (Fig. III.3) permet d'effectuer une synthèse basée sur le mode de représentation en flèche.

L'adoption de la stratégie de recherche de solution précédente (§ III.2.4) donne alors les résultats suivants (Fig. III.7) :

Domaine des variations de x	
[0 ; 5.89 10 ⁻²]	$p_1 = -0.552$ $\alpha_2 = -0.287068 + j(9.96 \cdot 10^{-2})$
	$p_2 = 0.1017$ $\alpha_3 = -0.51457 + j(-3.6 \cdot 10^{-2})$
	$p_3 = 0.1728$ $\alpha_4 = -0.63475 + j(4 \cdot 10^{-2})$
	$\varepsilon(c, p) = -4.08 \cdot 10^{-4}$
[0.5484 ; 0.56]	$p_1 = -1.377$ $\alpha_2 = -0.34195 + j(9.96 \cdot 10^{-2})$
	$p_2 = -2.892$ $\alpha_3 = -0.61082 + j(-4.263 \cdot 10^{-2})$
	$p_3 = 0.2088$ $\alpha_4 = -0.75185 + j(4.66 \cdot 10^{-2})$
	$\varepsilon(c, p) = -0.25 \cdot 10^{-2}$

Echantillon de domaines de stabilité obtenus en utilisant la forme en flèche

FIGURE III.7

Les domaines de stabilité obtenus par cette méthode apparaissent moins larges que ceux obtenus avec la forme série (Fig. III.4 & III.6-a).

Il serait néanmoins hasardeux d'avancer, à partir de cet exemple, des considérations générales concernant les efficacités relatives de l'une ou l'autre représentation dans la méthode de synthèse paramétrique.

Par contre, la dissemblance des résultats place en exergue la nécessité, dans le cas des systèmes non linéaires, d'optimiser la méthode d'analyse de la stabilité du système dans le sens de conditions les moins restrictives possibles.

Nous avons proposé l'optimisation des conditions de stabilité dans une classe de représentation (série ou flèche). Une optimisation effectuée sur d'autres ensembles paramétrables de représentations conservant la caractéristique "non-linéarités de rang 1" du système, pourrait naturellement conduire à des résultats plus généraux.

CONCLUSION

La mise en œuvre de la méthode proposée dans le deuxième chapitre (Chapitre II) a permis d'en illustrer le caractère pratique.

La structure modulaire du programme va dans le sens d'une souplesse d'utilisation et d'adaptation permettant ainsi un large domaine d'utilisation du logiciel construit.

D'un point de vue matériel, étant donnée l'abondante utilisation de modules d'optimisation, il apparaît raisonnable d'implanter ce programme sur un ordinateur suffisamment rapide (dans notre cas, un DEC VAX 11.750 sans accélérateur flottant).

La programmation en Fortran 77 a permis d'assurer une réalisation modulaire et structurée du logiciel (le Fortran permet en particulier un maniement aisé des variables complexes).

Par contre, la création ex-nihilo du programme en Fortran s'est révélée longue et pénible. L'utilisation d'un langage de haut niveau tel que DELIGHT-MIMO /Polak & Quayne, 1984/ aurait certainement permis un gain de temps considérable dans cette réalisation, donnant ainsi un caractère pratique plus marqué pour la méthode de synthèse que nous proposons.

CHAPITRE IV

ANALYSE ET SYNTHÈSE D'UNE CLASSE DE PROCESSUS
A NON LINEARITE DE RANG 1 PAR LA THEORIE DE L'HYPERSTABILITE

Dans ce chapitre, nous proposons d'effectuer l'analyse et la synthèse d'une large classe de systèmes à non linéarités de rang 1 en associant la théorie de l'hyperstabilité (§ I.5.7) avec le mode de représentation "en flèche" (§ II.6) des systèmes étudiés.

Nous définissons ainsi un critère numérique d'analyse de la stabilité asymptotique de l'asservissement étudié à partir duquel on peut aisément déduire une méthode de synthèse paramétrique dans le même esprit que celles définies dans le second chapitre.

IV.1 - DEFINITION DES PROCESSUS ETUDIÉS ET DE LA METHODE DE SYNTHÈSE

Nous limitons la méthode introduite dans ce chapitre, aux processus décrits par une équation d'état du type suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = (F_0(p) + u(p).f^T(x,p)).x(t) \quad (IV.1) \\ \text{avec : } x(t) \in \mathbb{R}^n \\ p \in \mathbb{R}^{n_p} \text{ note l'ensemble des gains ajustables} \\ x \in \chi \text{ désigne l'ensemble des arguments des composantes} \\ \text{de } f(x,p) \text{ non constantes le long des trajec-} \\ \text{toires du système (IV.1)} \\ \text{Sup } (\|f(x,p)\|) < + \infty \\ x \in \chi \end{array} \right.$$

L'étude des propriétés de stabilité de ce système est d'abord envisagée suivant la démarche introduite au chapitre II.6 conduisant à l'analyse des propriétés de stabilité de deux systèmes distincts respectivement linéaire stationnaire et non linéaire représenté sous forme en flèche.

A partir du mode de représentation de ce dernier système, nous proposons de définir un critère numérique de stabilité déduit de la théorie de l'hyperstabilité (à l'inverse du chapitre II où ce critère est déduit du théorème de Borne et Gentina).

La définition d'une direction de plus grande pente du critère numérique dans l'espace de ses paramètres nous permet d'effectuer la synthèse paramétrique de l'asservissement étudié (IV.1) par utilisation d'un algorithme d'optimisation du critère numérique de stabilité.

Nous proposons maintenant d'aborder en détail tous ces points, en nous appuyant sur les résultats obtenus dans le chapitre II.

IV.2 - REPRESENTATION EQUIVALENTE DU SYSTEME ETUDIE

Soit :

$$n_1 = \text{rang} ([F_0(p), u(p)]) \quad (\text{IV.2})$$

En suivant la démarche du chapitre (II.3.1), on peut construire un changement de base $U(p) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tel que le système étudié (IV.1) soit représenté sous la forme équivalente suivante (IV.3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1} \quad \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \triangleq U(p).x(t) \\ \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} FL_1(x,p) & | & F_{12}(x,p) \\ \hline \bigcirc & | & F_{22}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ \\ \text{avec :} \\ \\ FL_1(x,p) = \begin{bmatrix} -a_1(x,p) & \dots & -a_{n_1}(x,p) \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{IV.3})$$

Etant donné le caractère borné des composantes de $f(x,p)$ (IV.1), la stabilité asymptotique de l'origine de l'espace d'état du système (IV.3) se déduit de celle des deux systèmes de vecteurs état $x_1(t)$ et $x_2(t)$ découplés (IV.4 - a & b) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = FL_1(x,p) \cdot x_1(t) & \text{(IV.4 - a)} \\ x_2(t) = F_{22}(p) \cdot x_2(t) & \text{(IV.4 - b)} \end{cases}$$

On peut expliciter numériquement les matrices $U_{n_1}(p)$ et $U_{n_1}^+(p)$ (IV.5) qui définissent le sous système non linéaire (IV.4 - a) en utilisant la procédure de l'Annexe (A.2.2).

$$\begin{cases} U_{n_1}(p) \in \mathbb{R}^{n \times n_1} \\ U_{n_1}^+(p) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n} \\ FL_1(x,p) = U_{n_1}^+(p) \cdot (F_0 + U(p) \cdot f(x,p)) \cdot U_{n_1}(p) \end{cases} \quad \text{(IV.5)}$$

En focalisant notre attention sur le système non linéaire (IV.4 - a), on peut le représenter sous forme en flèche par application des résultats du paragraphe II.6.

Soient :

$c \in \mathbb{R}^{n_1-1}$ désigne un vecteur de paramètres de représentation

$$c^T \triangleq [\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n_1}] ; \forall i \neq j ; \alpha_i \neq \alpha_j$$

$V(c)$ et $V^{-1}(c) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ des matrices définies par les expressions (II.6.7)

il vient :

$$x'(t) = V^{-1}(c) \cdot x_1(t)$$

$$\frac{d}{dt} (x'(t)) = \begin{bmatrix} -b_1(c, x, p) & -b_2(c, x, p) & \dots & -b_{n_1}(c, x, p) \\ 1 & \alpha_2 & & \bigcirc \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & & & \cdot \\ 1 & \bigcirc & & \alpha_{n_1} \end{bmatrix} \cdot x'(t) \quad (\text{IV.6})$$

L'expression des termes de la première ligne s'exprime aisément à partir de ceux du système canonique (IV.3) (IV.4 - a) en définissant le polynôme symbolique $P(\cdot, x, p)$ (IV.7) associé à la matrice $FL_1(x, p)$:

$$P(\alpha, x, p) = \alpha^n + \sum_{i=1}^{n_1} a_i(x, p) \cdot \alpha^{n_1-i} \quad (\text{IV.7})$$

Il vient alors :

$$b_1(c, x, p) = a_1(x, p) + \sum_{i=2}^{n_1} \alpha_i$$

$$\forall i = 2, \dots, n_1 \quad b_i(c, x, p) = \frac{P(\alpha_i, x, p)}{\prod_{\substack{k=2 \\ k \neq i}}^{n_1} (\alpha_i - \alpha_k)} \quad (\text{IV.8})$$

IV.3 - ANALYSE DE LA STABILITE

La représentation par schéma-bloc de l'équation d'état précédente (IV.6) est donnée sous la forme en contre-réaction suivante (Fig. IV.1) en introduisant un paramètre $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ satisfaisant à l'inégalité suivante (IV.9) :

$$\forall x \in \chi \quad b_1(c, x, p) \leq \alpha_1 \quad (\text{IV.9})$$

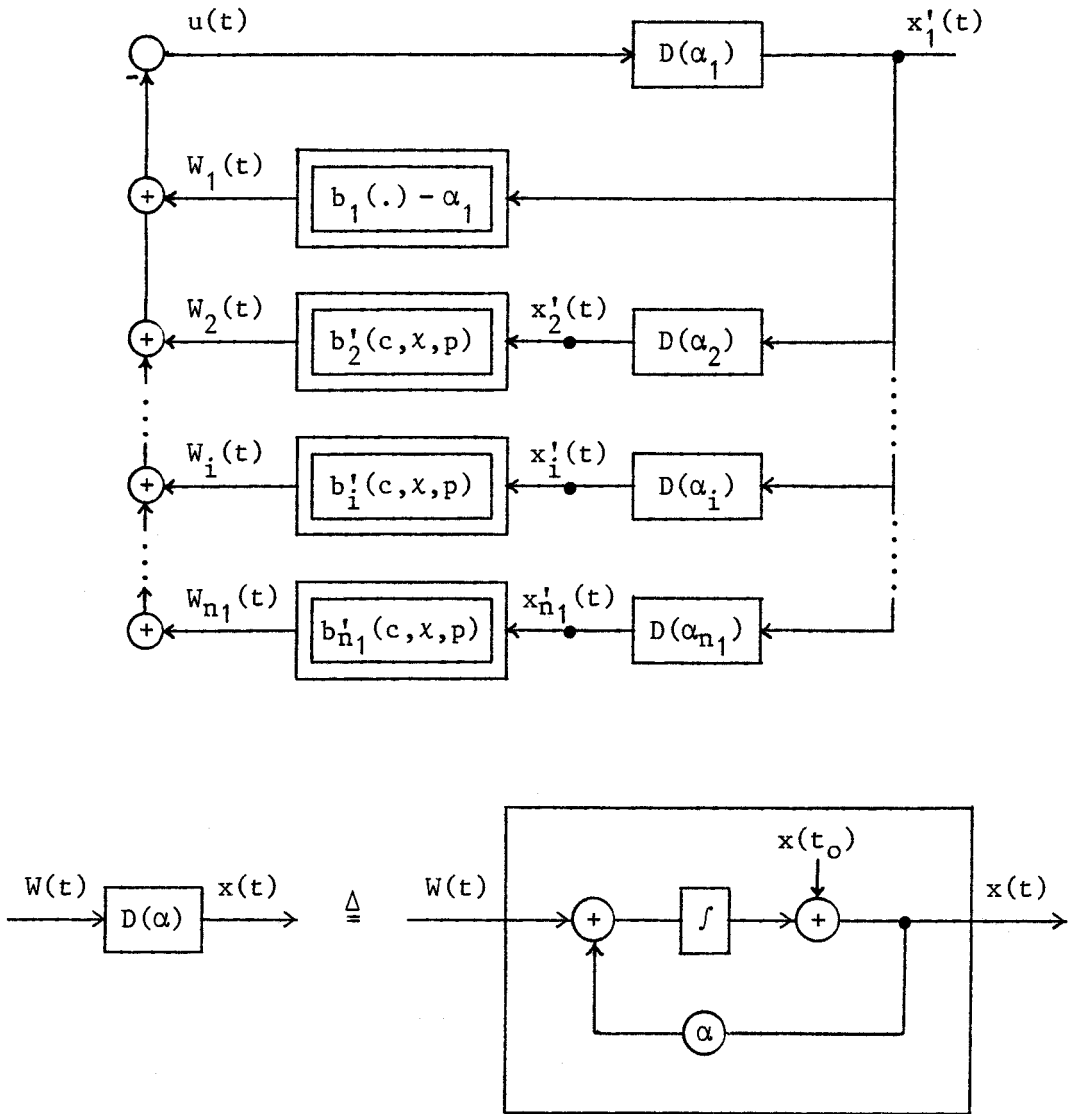


FIGURE IV.1

Ce système (Fig. IV.1) est asymptotiquement hyperstable si le système linéaire représenté par $D(\alpha_1)$ est strictement réel positif et si toutes les contre-réactions $(x_1(t) \rightarrow W_i(t); i = 1, \dots, n_1)$ satisfont l'inégalité de Popov (IV.10) :

$$\forall x'(t_0) \quad \forall i = 1, \dots, n_1 \quad \exists \gamma_i^2 \quad \forall t \geq t_0 \quad (IV.10)$$

$$\eta_i(t_0, t) = \int_{t_0}^t x_1(\tau) \cdot w_i(\tau) \cdot d\tau \geq -\gamma_i^2$$

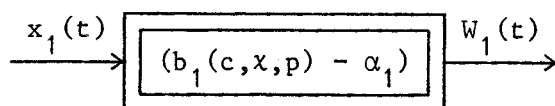
Nous proposons de montrer que les conditions suivantes (IV.11) constituent des conditions suffisantes d'hyperstabilité asymptotique du système (IV.6) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists b_1(c,p) > 0 \quad \forall x \in \chi \quad b_1(c,x,p) \geq b_1(c,p) > 0 \\ \forall i = 2, \dots, n_1 \quad \forall x \in \chi \quad b_i(c,x,p) \geq 0 \quad (\text{IV.11}) \\ \forall i = 2, \dots, n_1 \quad \alpha_i < 0 \end{array} \right.$$

Preuve :

a) Posons $\alpha_1 = -b_1(c,p) < 0$, le bloc linéaire $(u(t) \rightarrow x_1'(t))$ (Fig. IV.1) est strictement réel positif de manière évidente.

b) Considérons la contre-réaction statique constituée du gain non linéaire $(b_1(c,x,p) - \alpha_1)$. Sa non négativité (IV.9) implique à l'évidence que ce bloc satisfait l'inégalité de Popov (IV.11).



$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x_1(.) \in ([t_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}) \\ \forall x \in \chi \\ \eta_1(t_0, T) = \int_{t_0}^T W_1(t) \cdot x_1(t) dt = \int_{t_0}^T (b_1(c,x,p) - \alpha_1) \cdot x_1^2(t) dt \geq 0 \end{array} \right.$$

c) Considérons maintenant une contre-réaction dynamique décrite par le schéma-bloc suivant :

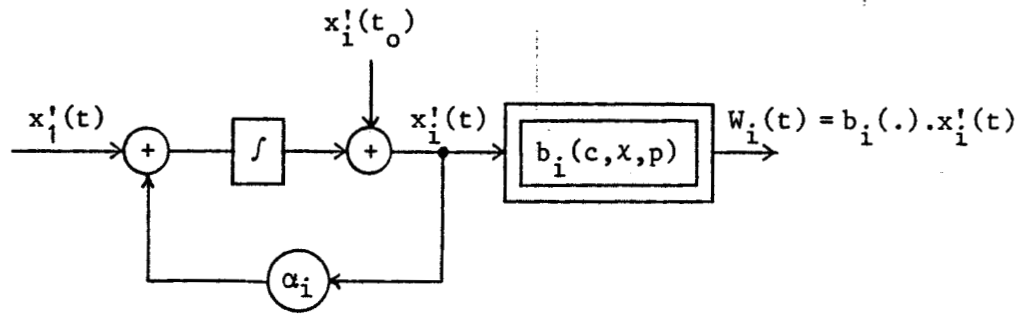


FIGURE IV.2

La fonctionnelle entrée-sortie $\eta_i(t_0, t)$ relative à ce bloc peut être décomposée de la manière suivante :

$$\forall T \in [t_0, +\infty [$$

$$\begin{aligned} \eta_i(t_0, T) &= \int_{t_0}^T b_i(c, x, p) \cdot x_1'(t) \cdot x_1'(t) \cdot dt \\ &= \int_{t_0}^T b_i(.) \cdot x_1'(t) \cdot (\dot{x}_1'(t) - \alpha_i \cdot x_1'(t)) \cdot dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^T b_i(.) \cdot d(x_1'(t))^2 - \alpha_i \int_{t_0}^T b_i(.) \cdot x_1'^2(t) \cdot dt \end{aligned} \tag{IV.12}$$

D'après les inégalités (IV.11), les quantités sous le signe \int du second membre de l'expression (IV.12) sont non négatives.

Il vient donc :

$$\forall T \in [t_0, +\infty [\quad \eta_i(t_0, T) \geq 0 \tag{IV.13}$$

La contre-réaction envisagée (Fig. IV.2) satisfait l'inégalité de Popov (IV.10).

Or, la mise en parallèle de systèmes satisfait à l'inégalité de Popov. Le système étudié (Fig. IV.1) apparaît ainsi comme la mise en contre-réaction d'un système linéaire strictement réel positif avec un bloc non linéaire satisfaisant à l'inégalité de Popov.

Sous réserve des inégalités (IV.11), il est donc asymptotiquement hyperstable donc asymptotiquement stable.

C Q F D

L'énoncé suivant résume ces résultats.

Considérons un système d'équation d'état (IV.1) :

$$\dot{x}(t) = (F(p) + u(p) \cdot f^T(x,p)) \cdot x(t) \tag{IV.14}$$

Si :

- i) les modes de $F(p)$ non contrôlables par le vecteur $u(p)$ sont à partie réelle négative,
- ii) il existe une représentation en flèche (IV.15) du sous-système du processus (IV.14) composé des composantes de l'état $x(t)$ commandables par la paire $[F(p), u(p)]$

$$\dot{x}'(t) = \begin{bmatrix} -b_1(c,x,p) & -b_2(c,x,p) & \dots & -b_{n_1}(c,x,p) \\ & 1 & & & & \\ & & \alpha_2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \alpha_{n_1} \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \cdot x'(t) \tag{IV.15}$$

telle que :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 < 0 \quad \forall x \in \chi \quad b_1(c,x,p) \geq -\alpha_1 > 0 \\ \forall i = 2, \dots, n_1 \quad \alpha_i \leq 0 \\ b_i(c,x,p) \geq 0 \end{aligned} \right\}$$

alors le système (IV.14) est asymptotiquement stable.

IV.4 - DEFINITION D'UNE METHODE DE SYNTHESE

Considérons les conditions (ii) du lemme précédent et définissons le critère $H_F(c,p)$ par :

$$H_F(c,p) = \min_{i=1, \dots, n_1} \left\{ \inf_{x \in X} (b_i(c,x,p)) \right\} \quad (IV.16)$$

Les inégalités suivantes (IV.17) constituent alors un cas particulier des conditions (ii) :

$$\begin{cases} H_F(c,p) > 0 \\ \forall i = 2, \dots, n_1 \quad \alpha_i \leq 0 \end{cases} \quad (IV.17)$$

$H_F(c,p)$ apparaît ainsi comme un critère numérique de stabilité que l'on peut rendre positif en le maximisant dans l'espace E défini par :

$$E = \{p_i \in \mathbb{R} ; i = 1, \dots, n_p\} \cup \{\alpha_j \in \mathbb{R}_- ; j = 2, \dots, n_1\} \quad (IV.18)$$

De manière à faciliter cette optimisation, on propose, comme dans le chapitre II, de définir une ligne de plus grande pente du critère $H_F(c,p)$ (IV.16) dans E (IV.18) en supposant, comme ailleurs, que les composantes de $F(p)$ et de $f(x,p)$ sont dérivables partiellement par rapport aux composantes de p .

En utilisant les résultats du chapitre II (Annexe II.10), on peut expliciter les dérivées partielles des termes $b_i(c,x,p)$ intervenant dans la première ligne de la forme en flèche (IV.6) par rapport aux paramètres α_i ($i = 2, \dots, n_1$ et p_j ($j = 1, \dots, n_p$)).

Soit $gr_i(c,x,p) \in \mathbb{R}^{n_p + n_1 - 1}$ le vecteur gradient composé de l'ensemble de ces dérivées partielles.

Supposons maintenant que le calcul de $H_F(c,p)$ (IV.16) aboutisse à un extremum atteint en un nombre fini de points, i.e. :

$$\begin{aligned} & \exists I \subset \{1, 2, \dots, n_1\} \quad \text{Card}(I) = e \\ & \forall i \in I ; \exists j(i) ; \forall k = 1, \dots, j(i) ; \exists \hat{x}_k^i \in \bar{X} ; \end{aligned} \quad (\text{IV.17})$$

$$H_F(c, p) = b_i(c, \hat{x}_k^i, p)$$

$$\forall x \in \bar{X} ; x \neq \hat{x}_k^i$$

$$(i \in I, k = 1, \dots, j(i)) ; h_F(c, p) < b_i(c, x, p)$$

Les gradients $gr_i(c, \hat{x}_k^i, p)$ de la fonction $b_i(c, \hat{x}_k^i, p)$ étant définis pour tous les couples (i, \hat{x}_k^i) (IV.17) déterminant le critère $H_F(c, p)$, le calcul de la direction de plus grande pente $g(c, p) \in \mathbb{R}^{np+n_1-1}$ du critère $h_F(c, p)$ (IV.16) peut alors s'effectuer à partir de l'ensemble de ces gradients $gr_i(c, \hat{x}_k^i, p)$ en utilisant les résultats du chapitre II (Annexe II.3).

IV.5 - CONCLUSION

Ce chapitre illustre la flexibilité de la méthode de synthèse paramétrique qui permet de fixer à la fois les spécificités de base d'un problème de commande telles que l'ensemble des sorties accessibles ou la structure des relations possibles entre actionneurs et capteurs mais aussi l'une ou l'autre des méthodes d'analyse qui permette de mettre en évidence les performances désirées du système asservi (ici, la stabilité asymptotique).

Ce dernier point est essentiel dans l'étude de processus non linéaires où les outils d'analyse ne sont pas équivalents, ni dans leur forme, ni dans leurs résultats.

Par ailleurs, la définition du critère numérique d'analyse de stabilité exposé dans ce chapitre appelle quelques remarques.

La méthode est, en effet, issue de la structure de la forme en flèche qui peut être interprétée comme un système linéaire bouclé par un ensemble de sous-systèmes disposés en parallèle et de la propriété d'hyperstabilité, invariante pour la mise en parallèle et la mise en contre-réaction de blocs hyperstables.

Il semble dès lors possible de généraliser cette méthode d'analyse à des systèmes à non linéarités de rang multiple et/ou à des systèmes dont les non linéarités peuvent être isolées dans plusieurs colonnes de la matrice de régime libre définissant l'asservissement.

A l'inverse, la structure de la forme série apparaît mal adaptée à la mise en évidence de propriétés d'hyperstabilité puisqu'elle représente les processus sous la forme de blocs linéaires placés en série et reliés par des contre-réactions non linéaires.

Comme dans le cas de l'utilisation du théorème de Borne & Gentina (§ II), on a ainsi pu exprimer un critère pratique d'analyse de la stabilité en effectuant la synthèse d'une méthode générale d'analyse de la stabilité et d'un mode de représentation des processus bien adapté à l'application de celle-ci.

CONCLUSION GÉNÉRALE

La synthèse d'asservissement est une opération complexe, particulièrement dans le cas des processus non linéaires pour lesquels la grande diversité des méthodes d'études constitue un obstacle à une approche globale du problème.

En distinguant le problème "logique" concernant le choix d'une technique d'analyse de la stabilité, du problème "numérique" consistant à mener cette analyse le plus finement possible, nous avons essentiellement développé le dernier point.

La technique de synthèse paramétrique, issue des travaux concernant la synthèse d'asservissements linéaires, a pu être reprise avec profit en associant sur le même plan la recherche des paramètres ajustables de la loi de commande, avec celle d'une représentation d'état bien adaptée à une méthode d'analyse de la stabilité choisie a priori.

Deux formes remarquables de représentation d'état ont été successivement envisagées. La modularité du logiciel qui met en œuvre la méthode proposée devrait permettre la prise en compte de nouvelles formes remarquables ainsi que de méthodes d'analyse de la stabilité distinctes de celles envisagées dans ce mémoire.

BIBLIOGRAPHIE

ACKERMANN J. (1981)

"Parameter space design of robust control systems"

IEEE Trans on Aut. Cont., Vol. AC-25, pp. 1058-1073.

AIZERMAN M.A. (1949)

Usp. Mat. Nauk, Vol. 4.

AIZERMAN M.A., GANTMACHER F.R. (1963)

"Absolute stability of non linear regulation systems"

Ed. ANSSSR Moscou (Trad. Anglaise 1964 ; Ed. Holden Day, San Fransisco).

ARAKI M. (1978)

"Stability of large-scale non-linear systems quadratic-order theory of composite-system method using M-Matrices"

IEEE Trans on Aut. Cont, Vol. AC-23, pp. 129-142.

BELLMAN R. (1962)

"Vector Lyapunov functions"

J. SIAM Control, Série A, Vol. 1.

BELLMAN R., KALABA R. (1964)

"Selected papers on mathematical trends in control theory"

Dover.

BENREJEB M. (1976)

"Sur la synchronisation des systèmes continus non linéaires en régime forcé"

Thèse de Docteur-Ingénieur, Université de Lille I.

BENREJEB M. (1978)

"On an algebraic stability criterion for non linear processes. Interpretation in the frequency domain"

Proceedings of MECO 78 Congress, Vol. 2, Athènes.

BENREJEB M., BORNE P. (1979)

"Sur la synthèse d'un processus continu non linéaire"

Proceedings of MECO 79 Congress, p. 122, Grenoble.

BENREJEB M. (1980)

"Sur l'analyse et la synthèse de processus complexes hiérarchisés. Application aux systèmes singulièrement perturbés"

Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, n° 479, Université de Lille I.

BENREJEB M., BORNE P., LAURENT F. (1982)

"Sur une application de la représentation en flèche à l'analyse des processus"

RAIRO Automatique, Vol. 16, n° 2, p. 133.

BORNE P., GENTINA J.C., LAURENT F. (1973)

"On a study of stability and sensitivity of large continuous non-linear systems under uncertainty"

Proceed of the 3rd IFAC Symp. on Sensitivity, Adaptativity & Optimization, Ischia, Italy, pp. 412 - 417.

BORNE P., GENTINA J.C. (1974)

"On the stability of large non linear systems"

Proceed of J.A.C.C., Austin, Texas, U. S. A..

BORNE P. (1976)

"Contribution à l'étude des systèmes discrets non linéaires de grande dimension. Application aux systèmes interconnectés"

Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, n° 346, Université de Lille I.

BORNE P., GENTINA J.C., LAURENT F. (1976)

"Stability study of large scale non linear discrete systems by the use of vectorial norms"

IFAC Symp. on Large Scale Systems Theory and Applications, Udine, Italy.

BORNE P., BENREJEB M. (1977)

"On the stability of a class of interconnected systems. Applications to the forced working conditions"

MTVS Symp. IFAC, Fredericton, Canada.

BOURDON P. (1982)

"Techniques non linéaires en temps discret d'identification et de réalisation minimale pour modèles à état affine"

Thèse D.D.I., Université de Paris-Sud, Centre Orsay.

BOURLES H., MERCIER O.L. (1982)

"Marge de stabilité et robustesse structurelles généralisées des régulateurs linéaires quadratiques multivariables"

RAIRO, Vol. 16, n° 1, pp. 49-70.

CORFMAT J.P., MORSE A.S. (1976)

"Decentralized control of linear multivariable systems"

Automatica, Vol. 12, pp. 479-495.

DANG-VAN-MIEN H., NORMAND-CYROT D. (1980)

"Non linear state-affine identification methods. Applications to electrical power-plants"

Proc. of IFAC Symp. on Aut. Control in power generation, distribution and protection, Pretoria.

DAUPHIN-TANGUY G., BORNE P., MEIZEL D. (1982)

"On order reduction of multi-time scales systems by singular perturbations and frequency like methods"

IEEE Int. LSS Symposium, Virginia Beach, U. S. A..

DAUPHIN-TANGUY G. (1983)

"Sur la représentation multi-modèle des systèmes singulièrement perturbés. Application à l'analyse et à la synthèse"

Thèse d'Etat Sciences Physiques, n° 600, Université de Lille I.

DAVISON E.J. (1976 - a)

"The robust decentralized control of a general servomechanism problem"

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-21, pp. 16-24.

DAVISON E.J. (1976 - b)

"The robust control of a servomechanism problem for linear time-invariant multivariable systems"

IEEE Trans on Aut. Cont., Vol. AC-21, n° 1, pp. 25-34.

DAVISON E.J., FERGUSON I. (1981)

"The design of controllers for the robust servomechanism problem using parameter optimization methods"

IEEE Trans on Aut. Cont., Vol. AC-26, pp. 93-100.

DAVISON E.J., ÖZGÜNER Ü (1982)

"Synthesis of the decentralized robust servomechanism problem using local models"

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-27, pp. 583-599.

DEIF A.S. (1981 - a)

"Sensitivity analysis from the state equations by perturbations techniques"

AMSE Congress AMS 81, Lyon.

DEIF A.S. (1981 - b)

"Non diagonalizable systems under small order perturbations"

AMSE Congress AMS 81, Lyon.

DEIF A.S. (1982)

"Advanced matrix theory for scientists and engineers"

Abacus Press, Halsted Press.

DORAISWAMI R. (1981)

"Robust decentralized control of a servomechanism problem for a class of non-linear systems"

IEEE Proc., Vol. 128, Pt D, n° 2, pp. 33-40.

EDMUNDS J.M. (1979)

"Control system design and analysis using closed-loop Nyquist and Bode arrays"

I.J.C., Vol. 30, n° 5, pp. 773-802.

FADEEV D.K., FADEEVA V.N. (1963)

"Computational methods of linear algebra"

Freeman, San Fransisco.

FAURE P., DEPEYROT M. (1974)

"Eléments d'Automatique"

Dunod, Paris.

FAURE P., CLERGET M., GERMAIN F. (1979)

"Opérateurs rationnels positifs"

Ed. Dunod, Paris.

FIELDER M., PTAK V. (1962)

"On matrices with non positives off diagonal elements and positive principal minors"

Czech Math. J., Vol. 12-87, pp. 382.

FLIESS M. (1978)

"Un codage non commutatif pour certains systèmes échantillonnés non linéaires"

Info. and Control, Vol. 38.

FLIESS M., NORMAND-CYROT D. (1980)

"Vers une approche algébrique des systèmes non linéaires en temps discret"

FLIESS M., NORMAND-CYROT D. (1981)

"La propriété d'approximation des systèmes réguliers (ou bilinéaires)"

Outils et Modèles Mathématiques pour l'Automatique, l'Analyse des Systèmes et le Traitement du Signal, t. 1, Ed. du C.N.R.S., Paris.

FORTMAN T.E. (1973)

"Stabilization of multivariable systems with constant-gain output feedback"

Proc. of J.A.C.C., pp. 294-301.

FOSSARD A. (1972)

"Commande des systèmes multidimensionnels"

Dunod, Paris.

FOULARD C., GENTIL S., SANDRAZ (1978)

"Commande et régulation par calculateur numérique"

Ed. Eyrolles, Paris.

FRANCIS B.A., WONHAM W.M. (1976)

"The internal model principle of control theory"

Automatica, Vol. 12, pp. 457-465.

GANTMACHER F.R. (1966)
"Théorie des matrices"
t. 2, Ed. Dunod, Paris.

GENTINA J.C., BORNE P., LAURENT F. (1972)
"Stabilité des systèmes continus non linéaires de grande dimension"
RAIRO Automatique, Vol. 3, pp. 69-77.

GENTINA J.C. (1976)
"Contribution à l'analyse et à la synthèse des systèmes continus non linéaires de grande dimension"
Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Université de Lille I.

GENTINA J.C., BORNE P., BURGAT C., BERNUSSOU J., GRUJIĆ Lj.T. (1979)
"Sur la stabilité des systèmes de grande dimension. Normes vectorielles"
RAIRO, Vol. 13, n° 1.

GEROMEL J.C., BERNUSSOU J. (1979)
"An algorithm for optimal decentralized regulation of linear quadratic interconnected systems"
Automatica, Vol. 15, pp. 489-491.

GRAY J.O., AL JANABI T.H. (1976)
"Toward the numerical design of non-linear feedback systems by Zakian's method of inequalities"
Proc. of IFAC Symposium, Udine, Italie, pp. 327-334.

GRAY J.O., TAYLOR P.M. (1979)
"Computer aided design of multivariable non-linear control system using frequency domain techniques"
Automatica, Vol. 15, pp. 281-297.

GRUJIĆ Lj.T. (1975)
"Non Lyapunov stability of large scale systems in time-varying sets"
Int. J. of Control, Vol. 21, n° 3.

GRUJIĆ Lj.T., GENTINA J.C., BORNE P. (1976)

"General aggregation of large scale systems by vector Lyapunov functions and vector norms"

Int. J. Control, Vol. 24, n° 4.

GRUJIĆ Lj.T. (1978)

"Solutions for Lur'e Postnikov and Aizerman problems"

Int. J. of System Science, Vol. 9, n° 12.

GRUJIĆ Lj.T., GENTINA J.C., BORNE P., BURGAT C., BERNUSSOU J. (1978 - b)

"Sur la stabilité des systèmes de grande dimension. Fonctions de Lyapunov vectorielles"

RAIRO Automatique, Vol. 12, n° 4, pp. 319-348.

GRUJIĆ Lj.T., BORNE P., GENTINA J.C. (1979)

"Matrix approaches of the absolute stability of time varying Lurie-Postnikov systems"

Int. J. of Control, Vol. 30, n° 6.

GRUJIĆ Lj.T., PORTER B. (1980)

"Continuous time tracking systems incorporating Lur'e plants with single non-linearities"

Int. J. Systems Science, Vol. 11, n° 2, pp. 177-179.

GRUJIĆ Lj.T. (1982)

"On tracking domains of continuous-time non-linear control systems"

RAIRO Automatique, Vol. 16, n° 4, pp.311.

GRUJIĆ Lj.T. (1983 - a)

"On non-linear tracking phenomena and problems"

Congrès IASTED AI-83, Lille, Vol. 1, pp. 45.

GRUJIĆ Lj.T. (1983 - b)

"On non-linear tracking domains estimates : continuous time systems"

Congrès IASTED AI-83, Lille, Vol. 1, pp. 65.

GRUJIĆ Lj.T. (1983 - c)

"On general solutions of non-linear tracking for stationary systems"

Congrès IASTED AI-83, Lille, Vol. 1, pp. 49.

GRUJIĆ Lj.T. (1983 - d)

"On tracking domain estimates of large scale systems"

Congrès IASTED AI-83, Lille, Vol. 1, pp. 55.

GRUJIĆ Lj.T., MARTYNUK A.A., RIBBENS-PAVELLA M. (1984)

"Stability of large-scale systems under structural and singular perturbations"

(en Russe), Naukova Dumka, KIEV.

GUARDABASI G., LOCATELLI A., SCHIAVONI N. (1981)

"On the initialization problem in the parameter optimization of structurally constrained industrial regulators"

Proc. IEEE Conf. on Decision and Control, pp. 1495-1496.

GUARDABASI G., LOCATELLI A., MAFFEZZONI C., SCHIAVONI N. (1982)

"A parameter optimization approach to the computer aided design of structurally constrained multivariable regulators"

Congrès IASTED "Modelling, Identification, Control & Robotics", Davos, Suisse.

HAHN W. (1967)

"Stability of motion"

Springer Verlag, New-York.

HALD J., MADSEN K. (1979)

"A 2-stage algorithm for minimax optimization"

Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 14, pp. 225, Springer Verlag.

HÖFLER A.B. (1981)

"A software-segmentation technique with high control structure flexibility for optimization by gradients"

8th World Congress IFAC, Kyoto, pp. 1611.

LAMNABHI M. (1980)

"Séries de Volterra et séries formelles non commutatives"

Thèse D.D.I., n° 432, Université Paris-Sud, Centre d'Orsay.

LANDAU I.D. (1980)

"Adaptative systems : the model reference approach"

Ed. M.D.I., New-York.

LASALLE J.P., LEFSHETZ S. (1961)

"Stability by Lyapunov's direct method with applications"

Academic Press, New-York.

LAURENT F. (1960)

"Contribution à l'étude des systèmes échantillonnés non linéaires en régime dynamique"

Thèse ès Sciences Physiques, Université de Lille I.

LECOUTURIER J., DUPUY M. (1971)

"Centrale de Loire/Rhône Tranche 3, identification des installations de température et de pression du générateur de vapeur"

EDF - DER, Dép^l Automatique et Moyens de production, Rapport AMP 84.

LEVINE J. (1983)

"Un aperçu élémentaire de la théorie moderne des systèmes non linéaires"

RAIRO Automatique, Vol. 17, n° 4; pp. 277-321.

LOCATELLI A., PENG Y.J., ROMEO F., SCATTOLINI R., SCHIAVONI N.,

XIAO J. (1981)

"A computer aided design technique for decentralized process controllers"

Proc. of 8th IFAC Triennial Congress, Kyoto, pp. 7-12.

LUENBERGER D.G. (1967)

"Canonical forms for linear multivariable systems"

IEEE Trans on Aut. Control, Vol. AC-12, n° 3, pp. 290.

LUR'E A.I. (1951)

"On some non linear problems in the theory of automatic control"

H.M. Stationery Office, London.

LYAPUNOV A.M. (1892)

"The general problem of stability of motion"

(Har'kov : the Har'kov Mathematics Society).

LYAPUNOV A.M. (1949)

"Problème général de la stabilité du mouvement"

Ed. University Press, Princeton.

MAC FARLANE A.G.J. (1979)

"Frequency methods in control system synthesis"

IEEE Trans. on Aut. Control, pp. 303-317.

MADSEN K. (1975)

"An algorithm for minimax solution of overdetermined systems of non-linear equations"

Journal of the Institute of Mathematics and its applications, Vol. 16, pp. 321.

MAFFEZONI M., PARIGI F. (1979)

"Parameter optimization in decentralized process control : a program package for multivariable industrial regulator design"

Proc. IFAC Symp. on C. A. D. of Control Systems, pp. 579-586.

MAIZIERES C., LAURENT F., BORNE P. (1977)

"Sur la stabilité dynamique des processus multivariables non linéaires"

Actes du Congrès MECO 77, Zurich, pp. 205.

MATROZOV (1962)

"Sur la stabilité du mouvement"

Prikl. Mat. Mech., pp. 885-895, pp. 992-1002.

MAYR O. (1970)

"The origins of feedback control"

Scientific American, Vol. 223, n° 4.

MEIZEL D., GENTINA J.C. (1979)

"New aspect on linear and non-linear S.I.S.O. systems"

Int. J. of Control, Vol. 30, n° 6.

MEIZEL D. (1979 - b)

"Sur l'étude et la synthèse de systèmes électromécaniques à charge variable"

Thèse D.D.I., n° 230, Université de Lille I.

MEIZEL D., GENTINA J.C., RICHARD J.P. (1980)

"A systematic approach of the stability for a large class of non-linear processes"

3rd IMA Conference on Control Theory, Sheffield.

MEIZEL D., GENTINA J.C. (1981)

"C.A.D. method of output feedback control laws for a class of non-linear processes"

Congrès MECO 82, Le Caire, Egypte.

MEIZEL D. (1981-b)

"Synthèse automatisée et une classe de processus non linéaires"

Actes du Congrès AMS 81, Vol. 1, Lyon.

MEIZEL D., GENTINA J.C. (1982 - a)

"An algorithmic tool in stability-robustness analysis of non-linear systems"

IATED International Symposium Modelling, Identification and Control, Davos.

MEIZEL D. (1982 - b)

"Fast computation of the eigenvectors of matrices frequently used in automatic control theory"

IATED International Symposium Modelling, Identification and Control, Davos.

MEIZEL D., GENTINA J.C., DAUPHIN-TANGUY G. (1982 - c)

"A parameter optimization design method of robust controllers for large scale non linear processes"

IEEE Int. Large Scale Systems Symposium, Virginia Beach, U. S. A..

MEIZEL D., GENTINA J.C. (1984)

"Définition d'une méthodologie de conception assistée d'asservissements non-linéaires par l'utilisation de techniques d'agrégation par normes vectorielles"

Actes de la 6ème Conf. INRIA sur l'Analyse & l'Optimisation des Systèmes in "Lecture Notes in Control & Information Sciences", Vol. 63, t. 1, pp. 245-258.

MERVIEL-LELEU S. (1982)

"Application des méthodes de simulation analogiques à la représentation d'état des systèmes continus non-linéaires"

Thèse D.D.I., n° 306, Université de Lille I.

MOREIGNE O. (1982)

"Contribution à la mise au point automatique de la chaîne de régulation d'un processus dynamique continu"

Rapport de D. E. A., Université de Lille I.

NURMINSKI E.A. (1979)

"On ε -subgradient methods of non differentiable optimization"

Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 14, n° 187,

Ed. Springer Verlag.

PINGUET P. (1981)

"Sur une classe de méthodes de réduction de l'ordre des systèmes dans l'espace d'état"

Thèse de D.I., Université de Lille I.

POLAK E., QUAYNE D.Q. (1984)

"Theoretical and software aspects of optimization-based control system design"

Actes de la 6ème Conf. INRIA sur l'Analyse et l'Optimisation des Systèmes in "Lecture Notes in Control & Information Sciences", Vol. 63, t. 2, pp. 175-190.

POPOV V.M. (1973)

"L'hyperstabilité des systèmes automatiques"

Dunod, Paris.

RAMAKRISHNA A., VISWANADHAM N. (1982)

"Decentralized control of interconnected dynamical systems"

IEEE Trans. on Aut. Control, Vol. AC-27, pp. 159-164.

RICHARD J.P. (1981 - a)

"Sur la mise en équation d'état des systèmes continus non linéaires par une méthode de calcul symbolique : définition d'un invariant de représentation"

Thèse de Docteur-Ingénieur, n° 259, Université de Lille I.

RICHARD J.P., LAURENT F. (1981 - b)

"On a systematic determination of choosen state-space description of given non linear continuous processes. Application to education"

Congrès MECO 81, Le Caire, Egypte.

RICHARD J.P. (1981 - c)

"Sur les limitations de la conjecture linéaire dans l'étude de la stabilité"

Congrès AMS 81, Lyon, Vol. 1, pp. 91-94.

ROSENBROCK H.H. (1974)

"Computer-aided control system design"

Academic Press, London.

ROTELLA F. (1983)

"Détermination de nouvelles représentations d'état adaptées à l'analyse et à la synthèse des systèmes continus non linéaires"

Thèse D.I., Université de Lille I.

SAVONOV M., ATHANS M. (1977)

"Gain and phase margin for multiloop LQG regulators"

IEEE Trans. on Aut. Control, Vol. AC-22, pp. 173-179.

SAVONOV M.G. (1980)

"Stability and robustness of multivariable feedback systems"

M. I. T. Press, London.

SEBAKHY O.A., WONHAM W.M. (1976)

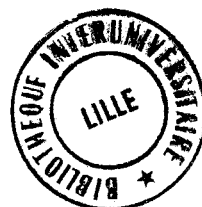
"A design procedure for multivariable regulators"

Automatica, Vol. 12, pp. 467-478.

ŠILJAK D.D., VUKČEVIĆ M.B. (1976)

"Decentralization, stabilization and estimation of large scale linear systems"

IEEE Trans. on Aut. Control, Vol. AC-21, pp. 363-366.



SIRISENA H.R., CHOI S.S. (1975)

"Pole placement in prescribed regions of the complex plane using output feedback"

IEEE Trans. on Aut. Control, Vol. AC-20, pp. 810.

TANIGUCHI T., YAMASHITA K. (1980)

"A method of power system optimization taking into account the power system non linearity"

Electrical Engineering in Japan, Vol. 100, n° 1, pp. 92-99.

WILKINSON J.H. (1965)

"The algebraic eigenvalue problem"

Claridon Press, Oxford.

WONG P.K., ATHANS M. (1977)

"Closed-loop structural stability for linear quadratic optimal systems"

IEEE Trans. on Aut. Control, Vol. AC- , pp. 94-99.

WONG P.K., STEIN G., ATHANS M. (1978)

"Structural reliability and robustness properties of optimal linear quadratic multivariable regulators"

7th IFAC Congress, Helsinki, pp. 1797.

ZAMES (1966 - a)

"On the input-output stability of time varying non linear feedback systems. PART I : Conditions using concepts of loop gains, conicity and positivity"

IEEE Trans. on Aut. Control, Vol. AC-11, n° 2.

ZAMES (1966 - b)

"On the input-output stability of time varying non linear feedback systems. PART II : Conditions involving circles in the frequency plane and sector non linearities"

IEEE Trans. on Aut. Control, Vol. AC-11, n° 3.

RESUME

Les travaux présentés constituent une contribution à la synthèse paramétrique d'asservissements non-linéaires, considérée du point de vue de la stabilité. Cette propriété est principalement analysée par la méthode d'agrégation utilisant les normes vectorielles.

Après avoir rappelé l'essentiel de l'utilisation des normes vectorielles, les caractères communs aux méthodes de synthèse d'asservissement sont dégagés ainsi que les difficultés inhérentes à l'utilisation de conditions **suffisantes** de stabilité dans le cas de systèmes non linéaires.

Un théorème général d'analyse de la stabilité est transformé de manière à faire apparaître un critère numérique optimisable par rapport aux gains ajustables dans la loi de commande et/ou à la norme vectorielle.

Le choix de cette dernière est effectué par celui d'une représentation dans l'espace d'état à l'intérieur d'une classe explicitant des invariants structurels du système étudié.

Après avoir paramétrisé la classe de changements de base correspondante, on peut alors exprimer la synthèse comme la minimisation du maximum d'une fonction dont on peut expliciter le gradient.

Deux formes paramétrisées particulières de représentation sont envisagées pour mener à bien la synthèse et utilisées dans un exemple.

La méthode est ensuite reprise en utilisant la théorie de l'hyperstabilité comme outil d'analyse.

MOTS-CLEFS

AUTOMATIQUE

STABILITE

SYNTHESE D'ASSERVISSEMENTS

CRITERE DE STABILITE

SYSTEME NON-LINEAIRE

OPTIMISATION NON-DIFFERENTIABLE

NORMES VECTORIELLES