

N° d'ordre : 639

50376
1984
265

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

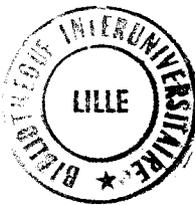
Docteur es Sciences Physiques

par

J.P. RICHARD

INGENIEUR I.D.N.

DOCTEUR - INGENIEUR



DEFINITION D'INVARIANTS POLYNOMIAUX ADAPTES A LA MODELISATION ET A L'ETUDE DES SYSTEMES NON LINEAIRES ET NON STATIONNAIRES

Soutenue le 21 Décembre 1984 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury : Messieurs les Professeurs G. SEGUIER

P. BORNE

Lj. T. GRUJIĆ

M. BENREJEB

M. G. SINGH

J. C. GENTINA

G. GILLES

Président, Rapporteur

Rapporteur

Rapporteur

Rapporteur

Examineur

Examineur

Examineur

à François LAURENT

AVANT-PROPOS

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire d'Automatique et d'Industrie Industrielle de l'Institut Industriel du Nord, sous la Direction de Monsieur le Professeur P. BORNE.

Nous tenons tout d'abord à saluer ici la mémoire du Professeur François LAURENT, Directeur du Laboratoire de Systématique de l'Université de Lille I, qui nous a quittés précocement en Juin 1983. Il avait su nous accueillir au sein de son équipe et, par son amitié et sa très grande compétence, nous faire partager son goût profond pour la recherche. La richesse de l'enseignement qu'il a su nous dispenser, les discussions très fructueuses et son soutien constant furent pour une grande part à l'origine de ce travail. Que cette Thèse lui soit un dernier témoignage d'amitié.

Qu'il nous soit ensuite permis de remercier très vivement Monsieur le Professeur G. SEGUIER, Directeur du Laboratoire d'Application des Redresseurs de Puissance de l'Université de Lille I, pour le double honneur qu'il nous a fait en acceptant d'être d'une part Président de notre Jury de Thèse, et d'autre part Rapporteur sur ce mémoire. Ses conseils éclairés en matière d'Electrotechnique, ainsi que ceux du Professeur J. LÉSENNE du même Laboratoire, nous ont été très précieux dans la réalisation de ce travail.

Nous sommes particulièrement reconnaissants envers Monsieur le Professeur P. BORNE, Directeur du Laboratoire d'Automatique et d'Industrie Industrielle de l'I. N. O. N. et Directeur Scientifique de ce même Etablissement. Que ce soit sur le plan de l'enseignement ou de la recherche, il a su nous faire profiter de sa grande expérience, et ses nombreux conseils et remarques ont largement contribué à la réalisation de ce travail. Le temps et l'intérêt qu'il a bien voulu consacrer à cette recherche, ainsi que l'amitié qu'il nous a témoignée depuis toujours, nous ont profondément touchés. Nous tenons à l'en remercier très chaleureusement.

Nous sommes grandement honoré de l'attention que Monsieur le Professeur Lj.T. GRUJIĆ, de l'Université de Belgrade et Docteur Honoris Causa de l'Université de Lille I, a bien voulu porter à nos travaux, en acceptant de juger notre travail et de participer à notre Jury. La compétence et la bienveillance avec lesquelles il a toujours su nous conseiller nous ont beaucoup aidé. Qu'il reçoive ici nos très sincères et très vifs remerciements.

Monsieur le Professeur M. BENREJEB, de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis, nous a apporté, par ses encouragements et sa grande connaissance de l'Automatique et des problèmes de modélisation, une aide précieuse et amicale. Nous tenons à l'en remercier, et lui exprimons toute notre reconnaissance pour avoir bien voulu juger ce travail.

Que Monsieur le Professeur J.C. GENTINA, Directeur de l'Institut Industriel du Nord, reçoive ici nos très sincères remerciements pour s'être intéressé à ce travail, ainsi que pour la cordialité avec laquelle il nous a toujours considéré.

Nous adressons à Monsieur le Professeur G. GILLES, de l'Université de Lyon I, et Président de la Commission Modélisation de l'A.F.C.E.T., l'expression de notre gratitude pour l'extrême attention avec laquelle il a envisagé nos résultats de recherche, ainsi que pour sa présence à notre Jury de Thèse.

Monsieur le Professeur M.G. SINGH, de l'Université de Manchester, Editeur de la Revue "Large Scale Systems" et de la Première Encyclopédie Mondiale d'Automatique, nous a fait un très grand honneur en acceptant de participer à notre Jury de Thèse. Qu'il trouve ici le témoignage de notre reconnaissance.

Nous tenons également à remercier l'ensemble des membres du Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de l'I. D. N. pour l'aide précieuse qu'ils nous ont apportée, tant du point de vue scientifique que sur le plan humain, et tout particulièrement Mesdames G. DAUPHIN et I. ZAMBETTAKIS, ainsi que Messieurs A. EL MOUDNI, F. ROTELLA et D. MEIZEL.

Nous tenons enfin à rendre hommage à Madame M. F. TRICOT dont la gentillesse et l'extrême compétence ont permis la réalisation et la présentation de ce mémoire, ainsi qu'à Madame FERRAR qui s'est aimablement chargée de son impression.

SOMMAIRE

Avant-Propos

<u>Introduction générale</u>	1
<u>Chapitre I</u>	7
<u>Chapitre II</u>	25
Annexe II.A	105
Annexe II.B	109
<u>Chapitre III</u>	115
Annexe III.A	197
<u>Chapitre IV</u>	207
<u>Conclusion générale</u>	245
<u>Bibliographie</u>	251

CHAPITRE I : Introduction à la notion d'invariance

	page
I - <u>INVARIANCE ET STABILITE</u>	7
Définition de la stabilité	8
Définition de l'attractivité	8
Définition de la stabilité asymptotique	9
II - <u>INVARIANCE ET COMMANDABILITE</u>	11
III - <u>INVARIANCE ET REPRESENTATION / POLYNOMES INVARIANTS</u>	13
IV - <u>INVARIANCE ET SENSIBILITE</u>	17
V - <u>INVARIANTS DES SYSTEMES LINEAIRES A COEFFICIENTS PERIODIQUES</u>	18

CHAPITRE II : Définition d'un invariant de représentation pour les systèmes non linéaires et non stationnaires

	page
<u>INTRODUCTION</u>	25
<u>I - DEFINITION DE LA CLASSE DE PROCESSUS ETUDIEE</u>	27
I.1 - <u>Etat d'un système continu</u>	27
I.2 - <u>Equations d'état, systèmes de type Lurie-Postnikov</u> <u>(mLP et MLP)</u>	28
I.3 - <u>Remarques sur la forme de la matrice d'évolution</u>	31
I.4 - <u>Définition d'une problématique relative à la</u> <u>représentation d'état</u>	34
I.5 - <u>Systèmes à non linéarités de rang k, types L(k) et</u> <u>C(k)</u>	35
<u>II - POLYNÔME SYMBOLIQUE D'UN SYSTEME A NON LINEARITES DE RANG 1 ..</u>	37
II.1 - <u>Décompositions canoniques</u>	37
II.2 - <u>Définition du polynôme symbolique</u>	44
II.2.1 - Définition et propriétés	44
II.2.2 - Calcul informatisé du polynôme symbolique Non linéarités génératrices	48
II.2.3 - Remarque sur l'existence de zéros constants ..	54
II.3 - <u>Condition nécessaire et suffisante de similitude,</u> <u>algorithme de modélisation du régime autonome</u>	54

	page
II.3.1 - Exemple n° 1 : (T1) = 1 (T2) = 1	57
II.3.2 - Exemple n° 2 : (T1) = 1 (T2) = 0 (T3) = 1 ...	59
II.3.3 - Exemple n° 3 : (T1) = 1 (T2) = 0 (T3) = 0 ...	62
II.4 - <u>Modélisation en régime autonome</u>	63
II.4.1 - Systèmes de type L(1)	64
II.4.2 - Systèmes de type C(1) / Détermination de la commande et du changement de base	65
II.4.3 - Remarques sur le choix de la décomposition informatique du polynôme symbolique	67
II.4.4 - Exemple	68
II.5 - <u>Application aux systèmes de type Lurie-Postnikov monovariabiles</u>	69
II.6 - <u>Cas de la forme en flèche mince. Polynôme représentatif</u>	71
III - <u>POLYNÔME SYMBOLIQUE DES SYSTEMES MULTIVARIABLES</u>	
<u>C(k) ET L(k)</u>	73
III.1 - <u>Règles de calcul sur les matrices à blocs commutatifs</u>	74
III.1.1 - Définitions et notations	74
III.1.2 - Propriétés	76
III.2 - <u>Dilatation d'ordre. Définition du polynôme symbolique en multivariable (PSM)</u>	77
III.2.1 - Notations	78
III.2.2 - Première forme dilatée $A_1(.)$	80
III.2.3 - Deuxième forme dilatée $A_2(.)$, matrice contractable	81
III.2.4 - Définition du polynôme symbolique matriciel (PSM)	83
III.2.5 - Forme canonique dilatée	84

III.2.6 - Forme canonique compagnon par blocs et observabilité	88
III.3 - <u>Règles d'utilisation du PSM</u>	92
III.3.1 - Similitude du PSM par rapport à un changement de base affectant les seules variables d'état traitées non linéairement	92
III.3.2 - Invariance du PSM et CNS de similitude pour certains changements de base	94
III.3.3 - Invariance du PSM dans l'espace d'état redondant. Exemple	97
III.3.4 - Diagramme résumé	100
<u>CONCLUSION</u>	102
<u>ANNEXE II.A</u> : Démonstration de l'implication (1) \implies (2)	105
<u>ANNEXE II.B</u> : Similitude de deux formes compagnon par blocs	109

CHAPITRE III

	page
<u>INTRODUCTION</u>	115
<u>I - FONCTIONS CANDIDATES A LIAPOUNOV</u>	117
I.1 - <u>Introduction</u>	117
I.2 - <u>Fonctions quadratiques</u>	119
I.3 - <u>Normes scalaires et vectorielles.</u> <u>Critère pratique de Borne et Gentina</u>	120
I.4 - <u>Fonctions de type quadratique-plus-intégrale</u>	121
<u>II - UTILISATION DE MODELES "EN FLECHE" POUR</u> <u>LES SYSTEMES MONO VARIABLES</u>	122
II.1 - <u>Systèmes "compagnonables". Déconnexion en vue de</u> <u>l'étude de stabilité</u>	123
II.2 - <u>Polynôme représentatif $R(\lambda)$ d'une matrice en</u> <u>flèche épaisse $FE(.)$</u>	125
II.2.1 - Définitions. Polynôme $R(\lambda)$ à zéros constants	125
II.2.2 - Polynôme représentatif à un zéro non constant Coordonateur linéaire	130
II.3 - <u>Application conjointe du critère de Borne et Gentina</u> <u>et des fonctions de Liapounov de type quadratique-</u> <u>plus-intégrale</u>	137
II.3.1 - Modélisation	137
II.3.2 - Théorème du système réduit	141
II.3.3 - Exemple 1	144
II.3.4 - Exemple 2	146

II.3.5 - Vérification de l'hypothèse (H). Choix des termes diagonaux de la forme en flèche	147
II.4 - <u>Méthodologie et aide informatique pour la synthèse d'un système monovariable de type Lurie-Postnikov</u> ...	155
III - <u>SYSTEMES MULTIVARIABLES</u>	159
III.1 - <u>Notations</u>	160
III.2 - <u>Théorème du système simplifié</u>	161
III.3 - <u>Matrices pseudo-antisymétriques et pseudo-symétriques</u>	164
III.4 - <u>Application aux systèmes mLP interconnectés</u>	165
III.5 - <u>Forme en flèche totalement non constante</u>	171
III.6 - <u>Conclusions</u>	172
IV - <u>CONJECTURE DU LINEAIRE</u>	172
IV.1 - <u>Stabilité absolue. Conjecture du linéaire</u>	174
IV.2 - <u>Relation entre la conjecture du linéaire et le polynôme symbolique</u>	176
IV.2.1 - Cas d'un système non linéaire	177
IV.2.2 - Cas d'un système non stationnaire	178
IV.2.3 - Cas d'un changement de variables $P(x,t)$	180
IV.2.4 - Conclusion : polynôme symbolique et classes d'équivalence	182

IV.3 - <u>Définition de classes de systèmes vérifiant la conjecture du linéaire</u>	183
IV.3.1 - Rappel de certains cas de vérification de la conjecture du linéaire	183
IV.3.2 - Systèmes mLP à $q-2$ zéros alternés avec $q-1$ pôles	186
IV.3.3 - Conjecture du linéaire pour les modèles réduits ou simplifiés	188
IV.4 - <u>Systèmes stables sans vérifier les conditions de stabilité des systèmes à coefficients constants</u>	189
IV.4.1 - Système continu à coefficients périodiques ...	189
IV.4.2 - Conclusion	194
V - <u>CONCLUSION</u>	195
<u>ANNEXE III.A</u> : Définitions relatives à la stabilité	197

CHAPITRE IV

	page
<u>INTRODUCTION</u>	207
<u>I - ENCADREMENT DES EXPOSANTS CARACTERISTIQUES PAR</u> <u>SIMULATION ANALOGIQUE</u>	208
I.1 - <u>Translation des exposants caractéristiques</u>	209
I.2 - <u>Majoration</u>	210
I.3 - <u>Minoration</u>	211
I.4 - <u>Application à la simulation</u>	211
I.5 - <u>Exemple : cas particulier d'un système d'ordre 3</u>	212
<u>II - IDENTIFICATION DES EXPOSANTS CARACTERISTIQUES PAR</u> <u>ECHANTILLONNAGE</u>	214
II.1 - <u>Invariance</u>	215
II.1.1 - Enoncé de la propriété de base P	215
II.1.2 - Indétermination sur la partie imaginaire des exposants caractéristiques	217
II.2 - <u>Mesure des multiplieurs caractéristiques</u>	219
II.2.1 - Mesure exacte d'une sortie échantillonnée à période T ; Observabilité	220
II.2.2 - Mesure exacte d'une ou plusieurs sorties échantillonnées à période T/k	226
II.2.3 - Mesures imprécises	228

III - <u>APPLICATION AU MODELE DE PARK DE LA MACHINE SYNCHRONE</u>	229
III.1 - <u>Modèle de Park</u>	230
III.2 - <u>Remarques sur l'originalité de la méthode</u>	233
III.3 - <u>Simulation numérique</u>	235
<u>CONCLUSION</u>	239

AVANT - PROPOS

INTRODUCTION

DEFINITION D'INVARIANTS POLYNOMIAUX
ADAPTES A LA MODELISATION ET A L'ETUDE
DES SYSTEMES NON LINEAIRES ET NON STATIONNAIRES

INTRODUCTION GENERALE

Ce mémoire concerne la définition et l'utilisation d'invariants adaptés à l'étude des systèmes non linéaires et non stationnaires de grande dimension.

Les principaux objectifs envisagés sont la modélisation, la stabilisation et l'identification de systèmes complexes. Ces trois questions sont abordées par le biais de propriétés d'invariance concernant des expressions de type polynomial.

Le premier chapitre donne un aperçu général des travaux antérieurs consacrés à la notion d'invariance appliquée aux systèmes automatiques : ce concept s'est notamment avéré performant dans l'étude de la stabilité, de la commandabilité, de la représentation et de la sensibilité, ainsi que dans l'approche des systèmes linéaires à coefficients périodiques.

La deuxième partie de ce travail concerne la définition d'un invariant de représentation pour les systèmes non linéaires et non stationnaires. Cet invariant, appelé "polynôme symbolique" permet de caractériser toutes les modélisations dans l'espace d'état qui se déduisent les uns des autres par changement de base. Sa définition, initialement proposée pour les systèmes monovariables, est ensuite généralisée au cas multivariable. L'apport principal de cet outil de modélisation consiste en la possibilité de proposer a priori une forme matricielle arbitraire (canonique ou non) pour un système, et d'en identifier ensuite les coefficients.

Ces nouvelles possibilités de modélisation sont utilisées dans un troisième chapitre, et permettent une approche originale de l'étude

de stabilité de systèmes mono ou multivariables non linéaires : des modèles réduits ou simplifiés sont proposés, dont la stabilité entraîne celle du modèle initial. La notion de polynôme symbolique est également envisagée parallèlement à celle de conjecture du linéaire.

Enfin, le quatrième chapitre concerne l'utilisation d'un invariant polynomial dans l'identification des exposants caractéristiques des systèmes linéaires à coefficients périodiques. Une application à l'étude de la machine synchrone permet d'illustrer la mise en œuvre de cette méthode sur un exemple concret.

CHAPITRE I

INTRODUCTION A LA NOTION D'INVARIANCE

De nombreux travaux concernant les processus automatiques font intervenir la notion d'invariance. Il est en effet souvent utile de résumer certaines propriétés d'un système sous la forme de quantités mathématiques indépendantes de transformations pouvant affecter son évolution, sa structure ou sa représentation.

L'objet de ce chapitre est de présenter différents aspects de l'invariance, couramment rencontrés dans la littérature. Certaines définitions, qui seront utilisées par la suite, y sont également rappelées.

I - INVARIANCE ET STABILITE

L'étude de la stabilité /Liapounov, 1892/ tient une place importante dans l'approche des systèmes complexes : il s'agit en effet de pouvoir estimer l'influence de perturbations sur le comportement d'un système, sans pour cela qu'il soit nécessaire de résoudre les équations de son mouvement.

Nous rappellerons ici quelques définitions de base concernant la stabilité d'un équilibre du système décrit par :

$$(I.0) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} x(t; x_0, t_0) = \dot{x} = f(x, t) & x \in \mathbb{R}^q & f : \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q \\ x(t_0; x_0, t_0) = x_0 & t_0 \in]-\infty, +\infty[& t \in [t_0, +\infty[\end{cases}$$

Les propriétés d'existence et d'unicité de la solution $x(t; x_0, t_0)$ de cette équation sont supposées vérifiées. La fonction f définit alors un système physique déterministe d'ordre q , caractérisé par son vecteur état x . Ce système est dit "en régime autonome" car la fonction f ne dépend d'aucune entrée autre que l'état et le temps. Un point x_e de l'espace est une position d'équilibre pour (I.0) si et seulement si il vérifie les deux conditions suivantes /Grujić & al, 1984/ :

- a) $x(t; t_0, x_0)$ est la seule solution du système pour $x_0 = x_e, \forall t_0 \in \mathbb{R}$
 b) $f(x_e, t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Nous supposerons que cette solution x_e est un point singulier. Dans la suite, $\|x\|$ désigne une norme de x , et T_i un ensemble connexe d'instant initial t_0 . T_i peut par exemple être un intervalle de \mathbb{R} , ou \mathbb{R} tout entier.

Définition de la stabilité (au sens de Liapounov) /Hahn, 1963/ /Grujić, 1975-a/

L'équilibre $x = x_e$ est stable par rapport à T_i ssi :

$$\forall \varepsilon \in]0, +\infty[, \forall t_0 \in T_i, \exists \delta(t_0, \varepsilon) \in]0, +\infty[,$$

$$\{ \|x_0 - x_e\| < \delta(t_0, \varepsilon) \Rightarrow \forall t \in [t_0, +\infty[\quad \|x(t; x_0, t_0) - x_e\| < \varepsilon \}$$

Cet équilibre est stable si et seulement si il est stable par rapport à $T_i = \mathbb{R}$.

Le fait que l'équilibre x_e soit stable signifie donc que pour des conditions initiales x_0 suffisamment proches de x_e , la trajectoire reste dans la boule ouverte de centre x_e et de rayon ε fixé arbitrairement.

Définition de l'attractivité /Hahn, 1963/ /Grujić, 1975-a/

L'équilibre $x = x_e$ est attractif par rapport à T_i ssi :

$$\forall \rho \in]0, +\infty[, \forall t_0 \in T_i, \exists \Delta(t_0) > 0$$

$$\forall x_0 \in \{x : \|x - x_e\| < \Delta(t_0)\}, \exists \tau(t_0, x_0, \rho),$$

$$\forall t > t_0 + \tau(t_0, x_0, \rho), \|x(t; t_0, x_0) - x_e\| < \rho$$

Cet équilibre est attractif ssi il est attractif par rapport à $T_i = \mathbb{R}$.

L'attractivité implique la convergence de l'état vers x_e au bout d'un temps infini, lorsque les conditions initiales x_0 se situent dans une boule ouverte de centre x_e et de rayon $\Delta(t_0)$.

Ces définitions font intervenir, à travers l'expression "par rapport à T_i ", l'influence de l'instant initial t_0 . Elles permettent ainsi de compléter la définition originelle de Liapounov : une propriété de stabilité n'est en effet pas invariante par rapport à l'instant initial dans le cas général des systèmes non stationnaires.

Définition de la stabilité asymptotique

L'équilibre $x = x_e$ est asymptotiquement stable s'il est à la fois stable et attractif.

D'autres définitions complémentaires seront données dans le troisième chapitre. Ces définitions peuvent être généralisées dans plusieurs directions :

- soit en considérant la stabilité en tant que propriété d'une famille de systèmes (stabilité absolue /Lurie-Postnikov, 1944/, hyperstabilité /Popov, 1973/),

- soit en s'intéressant à la convergence de l'état vers un voisinage de l'équilibre, et non plus vers l'équilibre exact (stabilité pratique /Lasalle & Lefschetz, 1961/ /Michel & Heinen, 1974/). On peut également distinguer les propriétés des trajectoires avant et après un certain temps "d'établissement" /Grujić, 1975 - b/ ou bien une définition de l'équation (I.0) sur un intervalle de temps fini /Weiss & Infante, 1967/ /Gunderson, 1967/,

- soit en considérant le régime non autonome /Grujić & Porter, 1980/ /Borne & al, 1978/.

Pour étudier de façon plus précise la stabilité des systèmes, différents auteurs ont introduit ou utilisé la notion de sous-ensemble invariant /Zubov, 1957/ /Blinchevskii, 1959/ /Hahn, 1963/ /Yoshizawa, 1966/ /Grujić, 1975 - a/ /Lasalle, 1976/ /Kalitine, 1982/ /.../.

La propriété est alors considérée sous l'aspect topologique, c'est-à-dire pour situer les trajectoires d'un système par rapport à un ensemble de l'espace d'état.

Considérant un système dynamique défini sur un espace métrique X , un sous-ensemble Y de X est dit **invariant** (respectivement "positivement invariant") **par rapport au mouvement** du système si toute trajectoire passant par (respectivement "issue de") un point de Y reste dans Y . L'espace Y peut être, ou non, fonction du temps. Par exemple, si X est l'espace \mathbb{R}^q considéré pour (I.0), Y est positivement invariant si :

$$\forall x_0 \in Y \subset \mathbb{R}^q \quad \forall t_0 \geq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad x(t, x_0, t_0) \in Y$$

Les cycles limites constituent un cas important d'ensembles invariants : on appelle **cycle limite** une trajectoire fermée et isolée (c'est donc la trajectoire d'une solution périodique).

Leur étude, initialisée par Poincaré en 1881, est fondamentale dans la théorie des oscillations limites des systèmes non linéaires stationnaires, et notamment en ce qui concerne leur stabilité.

Lorsque l'analyse est menée dans le plan de phase, l'introduction de l'indice de Poincaré permet de caractériser le nombre et la nature des points singuliers entourés par une courbe fermée, et permet d'affirmer que toute trajectoire fermée (cycle limite) entoure au moins un point singulier. Cet indice présente lui-même certaines propriétés d'invariance par rapport à la forme de la courbe fermée considérée.

De nombreux auteurs ont étudié l'existence et la stabilité des cycles limites /Bendixon, 1901/, /Poincaré, 1928/, /Andronov, 1929/, /Lasalle, 1949/, /Malkin, 1956/, /Lefschetz, 1957/, /Minorsky, 1962/, /Bhatia & Szegő, 1970/. Les concepts qui s'y rattachent, originellement conçus pour des systèmes d'ordre deux, ont été généralisés à des ordres supérieurs (et notamment l'approche par l'analyse dans le plan de phase, ou la notion d'indice) /Ku, 1958/, /Bow & Van Ness, 1958/, /Minorsky, 1962/.

Cependant, ces extensions s'avèrent souvent d'emploi malaisé ; ceci est dû principalement à la difficulté de déterminer et surtout de visualiser des trajectoires dans un espace de phase de dimension supérieure à deux ou trois.

Généralisant la notion d'ensemble invariant, Grujić /Grujić, 1975-a/ a introduit la propriété d'invariance d'un sous-ensemble $Y(t)$ par rapport à une fonction $v(x,t)$ définie positive /Hahn, 1963/. Cette fonction définit alors des domaines $V_{\xi}(t) = \{x : v(x,t) < \xi\}$ qui, sous certaines conditions initiales, doivent rester inclus dans $Y(t)$ à chaque instant.

Enfin, la démonstration de nombreux théorèmes sur la stabilité utilise un principe d'invariance dû à Lasalle /Lasalle, 1976/, et montrant l'égalité des valeurs que peut prendre une fonction $v(x)$ aux différents points limites d'une trajectoire.

II - INVARIANCE ET COMMANDABILITE

Une importante théorie sur les invariants a également été établie dans le domaine de la commande des processus linéaires multivariables, décrits par une équation du type :

$$(I.1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ s(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases}$$

avec :

$$\begin{array}{lll} x \in \mathbb{R}^q & s \in \mathbb{R}^p & u \in \mathbb{R}^n \\ A \in \mathbb{R}^{q \times q} & B \in \mathbb{R}^{q \times n} & C \in \mathbb{R}^{p \times q} \quad D \in \mathbb{R}^{p \times n} \end{array}$$

Dans ce type d'équations, x est appelé vecteur état du système, s la sortie et u la commande. Le système (I.1) est alors noté $S(A,B,C,D)$, ou $S(A,B)$ suivant le nombre d'équations considérées.

La paire (A,B) sera dite complètement commandable si le rang de $C_0 = (B, AB, A^2B, \dots, A^{q-1}B)$ est maximal, c'est-à-dire égal à q . Il existe de nombreuses autres conditions équivalentes /Popov, 1973/. Cette propriété signifie que le système peut être amené, dans un temps fini, de n'importe quel état $x = x_0$ à l'état $x = 0$, pour une commande $u(t)$ appropriée.

Le nombre défini par $\text{rang}(C_0)$ est la dimension du sous-espace commandable de $S(A,B)$.

De même, la paire (C,A) est dite complètement observable si la dimension du sous-espace observable de $S(A,C)$ est égale à q , c'est-à-dire si : $\text{rang} (C^T, A^T C^T, A^{T2} C^T, \dots, A^{T(q-1)} C^T) = q$.

Cette propriété implique que l'observation d'une sortie s identiquement nulle à entrée nulle n'est possible que pour un état identiquement nul.

Lorsque le système est en régime autonome ($u(t) \equiv 0$), on peut vouloir restreindre les évolutions de son état $x(t)$ à un certain sous-espace V de \mathbb{R}^q , ceci pour tout t positif ou nul. Une condition nécessaire et suffisante est alors :

$$A V \subset V$$

$A V$ désigne l'image de V par l'opérateur A .

V est alors un espace vectoriel A -invariant. On retrouve ici le concept d'ensemble positivement invariant, rappelé dans la section précédente.

La définition d'espaces vectoriels A -invariants /Gantmacher, 1959/ a été généralisée en introduisant la (A,B) -invariance /Wonham & Morse, 1970/ /Desnoyers, 1982/. Un sous-espace V de \mathbb{R}^q est dit (A,B) -invariant lorsque :

$$A V \subset V + B$$

où $A V$ est défini comme précédemment, et B désigne le sous-espace engendré par les colonnes de B .

Le fait qu'un espace V soit (A,B) -invariant s'avère être une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une commande $u(t)$ restreignant l'évolution de l'état $x(t)$ au seul sous-espace V . Cette approche du concept de sous-espace commandable est utilisée dans de nombreux travaux, dont on peut notamment trouver un bilan dans /Karkanias & Kouvaritakis, 1978/.

Certaines de ces définitions, valables pour les systèmes linéaires,

ont été transposées dans le cas non linéaire : la (A,B)-invariance d'un espace vectoriel devient alors la (f,g)-invariance d'une distribution /Isidori & al, 1981/, où f est une fonction de x et u, et g une fonction de u.

Parallèlement, des invariants "structurels" ont été mis en évidence pour ce même type de systèmes (I.1) : invariants orbitaux /Brunovsky, 1970/, de Kronecker /Morse, 1973/, de réaction /Wonham & Morse, 1972/, zéros invariants /Mac Farlane & Karkanas, 1976/. Ces définitions sont étroitement liées avec les concepts précédents de commandabilité et de (A,B)-invariance, et reposent sur la notion de polynôme invariant /Gantmacher, 1959/ que nous allons développer.

Les propriétés d'invariance de structure sont alors définies par rapport à un groupe de transformations /Yannakoudakis, 1982/ qui comprend les changements linéaires et réguliers de coordonnées, ainsi que ceux du type réaction d'état (on pose $u = Fx$, $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$, dans les équations (I.1)). Ces transformations sont menées à partir de la matrice-système de $S(A,B,C,D)$ /Rosenbrock, 1970/, que nous allons définir dans la partie suivante.

III - INVARIANCE ET REPRESENTATION / POLYNOMES INVARIANTS

Le système $S(A,B,C,D)$ peut être décrit par une matrice $P(p)$ résumant ses équations, et définie par :

$$(I.2) \quad P(p) = \begin{bmatrix} pI_q - A & B \\ -C & D(p) \end{bmatrix}$$

où p est l'opérateur de Laplace et I_q la matrice identité d'ordre q. Deux matrices polynomiales $P_1(p)$ et $P_2(p)$, de type (I.2) et de même ordre, représentent alors le même système si elles sont "strictement système-équivalentes", c'est-à-dire si il existe deux matrices polynomiales $M(p)$ et $N(p)$ unimodulaires (ce qui signifie de déterminant constant et non nul), et deux matrices polynomiales $X(p)$ et $Y(p)$ telles que :

$$P_1(p) = \begin{bmatrix} M(p) & 0 \\ X(p) & I_p \end{bmatrix} \cdot P_2(p) \cdot \begin{bmatrix} N(p) & 0 \\ Y(p) & I_n \end{bmatrix}$$

Les dimensions de (M, X, I_p) , (N, Y, I_n) et (A, C, D) se correspondent.

Il a été montré /Rosenbrock, 1970/ que deux matrices $P_1(p)$ et $P_2(p)$ du type (I.2) sont "strictement système-équivalentes" si et seulement si elles sont "système-semblables", c'est-à-dire qu'il existe une matrice H inversible vérifiant :

$$P_1(p) = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \cdot P_2(p) \cdot \begin{bmatrix} H^{-1} & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$$

Il est ainsi utile de pouvoir déterminer à quelles conditions deux matrices A_1 et A_2 sont semblables, c'est-à-dire :

$$(I.3) \quad A_1 = H A_2 H^{-1}$$

L'intérêt des polynômes invariants d'une matrice A est qu'ils sont communs à toutes les matrices semblables à A .

Définition 1 : Polynômes invariants d'une matrice polynomiale rectangulaire

Soit $A(\lambda)$ une matrice polynomiale de rang r (au moins un mineur d'ordre r non identiquement nul et tous les mineurs d'ordre supérieur à r identiquement nuls). Soit $D_j(\lambda)$ le plus grand commun diviseur normal de tous les mineurs d'ordre j de $A(\lambda)$ ($j = 1, \dots, r$), et $D_0(\lambda) \equiv 1$. Les polynômes $i_k(\lambda)$ définis par :

$$(I.4) \quad i_k(\lambda) = \frac{D_{r-k+1}(\lambda)}{D_{r-k}(\lambda)} \quad k = 1, 2, \dots, r$$

sont appelés polynômes invariants de $A(\lambda)$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que deux matrices polynomiales $A_1(\lambda)$ et $A_2(\lambda)$ de même dimensions soient équivalentes est qu'elles aient les mêmes polynômes invariants /Gantmacher, 1959/. "Équivalentes" signifie qu'il existe deux matrices unimodulaires $M(\lambda)$ et $N(\lambda)$, de dimensions adéquates, et vérifiant :

$$A_1(\lambda) = M(\lambda) A_2(\lambda) N(\lambda)$$

Ceci justifie le terme "invariant", puisque ces polynômes ne dépendent pas d'une transformation de type équivalence $(M(\lambda), N(\lambda))$.

Définition 2 : Polynômes invariants d'une matrice carrée constante

Les polynômes invariants d'une $(q \times q)$ matrice A sont ceux de sa matrice polynomiale caractéristique $(\lambda I_q - A)$. Cette matrice est de rang q , et A possède donc q polynômes invariants.

Il vient alors le théorème suivant concernant la similitude de deux matrices :

Théorème /Gantmacher, 1959/ :

Deux $(q \times q)$ matrices constantes sont semblables si et seulement si elles ont les mêmes polynômes invariants.

Ici encore, le terme "invariant" se trouve justifié : la propriété d'invariance est ici relative à toute transformation de type changement de base.

Ces polynômes ont certaines propriétés, et notamment, ils peuvent être ordonnées en une suite :

$$i_1(\lambda), i_2(\lambda), \dots, i_t(\lambda), i_{t+1}(\lambda) = 1, \dots, i_q(\lambda) = 1$$

dans laquelle les polynômes $i_1(\lambda)$ à $i_t(\lambda)$ ont des degrés positifs et, à partir du second, chacun d'eux divise le précédent.

Définition 3 :

Si $g(\lambda)$ est un polynôme défini par :

$$g(\lambda) = \lambda^q + \sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i \lambda^i$$

nous définirons la matrice compagnon de type C (colonne) associée à $g(\lambda)$ par :

$$C_C = \begin{bmatrix} 0 & & & & -\alpha_0 \\ & 1 & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & -\alpha_{q-2} \\ & & & 1 & -\alpha_{q-1} \end{bmatrix}$$

Sa transposée $C_L = C_C^T$ sera dite compagnon de type L (ligne) associée à $g(\lambda)$.

Il vient alors le théorème (énoncé dans /Gantmacher, 1959/) suivant :

Théorème :

Toute $(q \times q)$ matrice A est semblable à sa première forme normale naturelle C définie par :

$$(I.5) \quad C = \text{diag} \{C_1, C_2, \dots, C_t\}$$

où les C_i sont les matrices compagnons C_C associées à ses polynômes invariants dans l'ordre $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \dots, i_t(\lambda)$ définis plus haut.

Cette propriété est également valable avec des matrices compagnons de type L.

Le produit de tous les polynômes invariants d'une matrice A forme son polynôme caractéristique, également défini par :

$$(I.6) \quad p(\lambda, A) \equiv \det (\lambda I_q - A)$$

Lorsque ce polynôme est le seul polynôme invariant de A de degré non nul, il caractérise de façon unique toutes les matrices semblables à A.

Cependant, la proposition suivante est en général fausse :

Proposition P : (fausse)

Deux $(q \times q)$ matrices sont semblables si et seulement si elles ont le même polynôme caractéristique.

L'objet du second chapitre de ce mémoire sera de montrer à quelles conditions cette proposition est vérifiée, en considérant cette fois des matrices à coefficients non constants par rapport au temps. Le polynôme invariant qui sera alors défini permettra un symbolisme de calcul analogue à celui utilisé dans les fonctions de transfert des systèmes linéaires. Les applications d'un tel outil de calcul seront envisagées dans le troisième chapitre.

IV - INVARIANCE ET SENSIBILITE

De nombreux auteurs ont étudié les propriétés de sensibilité des sorties d'un système par rapport aux variations possibles de ses coefficients /Guardabassi, Locatelli & Rinaldi, 1973/ /Cruz & Perkins, 1966/ /Gentina, Borne & Laurent, 1973/ /.../. Inversement, la propriété de non sensibilité correspond à la notion de robustesse /Safonov, 1980/.

Le problème se pose en effet de savoir dans quelle mesure la sortie ou l'état d'un système linéaire $S(A, B, C)$ (II.1) sont affectés par une variation d'un certain paramètre $\pi \in \mathbb{R}$ définissant les matrices $A = A(\pi)$, $B = B(\pi)$, $C = C(\pi)$. On définit alors les coefficients de sensibilité d'état et de sortie par :

$$\sigma(t) = \left. \frac{\partial x(t, \pi)}{\partial \pi} \right|_{\pi = \bar{\pi}} \quad \eta(t) = \left. \frac{\partial s(t, \pi)}{\partial \pi} \right|_{\pi = \bar{\pi}}$$

$\bar{\pi}$ désigne ici la valeur nominale des paramètres d'identification π .

Nous noterons également, si $M(\pi)$ est une matrice dépendant de π :

$$M_{\pi} = \left. \frac{\partial M(\pi)}{\partial \pi} \right|_{\pi=\bar{\pi}}$$

Lorsque $\sigma(t)$ ou $\eta(t)$ peuvent être rendus identiquement nuls, on parle alors d'"invariance paramétrique" ou d'"invariance contrôlée".

Ces propriétés ont été étudiées dans différents travaux, dont une intéressante bibliographie est donnée dans /Karlin & al, 1973/ et dans /Bonivento & al, 1973/.

La question est alors d'établir si, étant données cinq matrices parmi $\{A, B, C, A_{\pi}, B_{\pi}, C_{\pi}\}$, la sixième peut être choisie de façon à ce que la sortie s soit insensible à π . En réponse à ce problème, il a été montré /Guardabasi & al, 1973/ /Cruz & Perkins, 1966/ que les propriétés d'invariance paramétrique sont directement en rapport avec la commandabilité et l'observabilité de $S(A,B,C)$.

V - INVARIANTS DES SYSTEMES LINEAIRES A COEFFICIENTS PERIODIQUES

Le terme "invariant" apparaît également dans les travaux de /Liapounov, 1892/ et /Floquet, 1883/ relatifs aux systèmes d'équations à coefficients périodiques.

La propriété d'invariance est alors considérée par rapport au temps : tout système linéaire à coefficients périodiques peut en effet être ramené par un changement de variables adéquat à un système à coefficients constants. Le théorème correspondant peut s'énoncer comme suit :

Soit le système (I.7) :

$$(I.7) \quad \dot{\hat{x}}(t) = A(t).x(t)$$

avec :

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R}^q & \quad A(t) \in \mathbb{R}^{q \times q} \\ \exists T > 0 & \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad A(t+T) = A(t) \end{aligned}$$

Alors il existe une matrice $P(t)$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \det(P(t)) \neq 0 \quad \text{et} \quad P(t+T) = P(t)$$

$$u(t) = P(t).x(t) \implies \dot{u}(t) = M.u(t)$$

$$M \in \mathbb{R}^{q \times q} : \text{matrice constante}$$

Ainsi, les propriétés dynamiques du système défini par la matrice M sont caractéristiques de celles du système (I.7).

A la matrice M peut être associée l'équation caractéristique :

$$\xi^{(q)}(t) + \sum_{i=0}^{q-1} m_i \xi^{(i)}(t) = 0$$

où ξ est une fonction scalaire du temps, $\xi^{(i)}$ sa dérivée $i^{\text{ème}}$ par rapport au temps, et où les m_i sont définis par :

$$\det(\lambda I_q - M) = \lambda^q + \sum_{i=0}^{q-1} m_i \lambda^i \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Les m_i sont des invariants du système (I.7) /Liapounov, 1892 - p. 400/ car ils ne dépendent ni du temps, ni d'un changement de base sur le vecteur $x(t)$. Ils ne dépendent pas non plus d'un éventuel changement de variable périodique sur le vecteur x /Malkin, 1956 - p. 188/.

Les racines λ_i du polynôme défini par les m_i sont les valeurs propres de M , et sont appelées exposants caractéristiques du système (I.7). Leurs exponentielles μ_i définies par :

$$\mu_i = e^{\lambda_i T}$$

sont les multiplieurs caractéristiques de (I.7) /Cesari, 1950 - p. 57/ /Minorsky, 1962 - p. 128/.

Une utilisation de ces propriétés sera proposée dans le quatrième chapitre. La mise en évidence et l'utilisation d'une autre propriété d'invariance seront alors effectuées dans le cadre de l'identification des systèmes.

CONCLUSION

Cette partie montre que la notion d'invariance intervient dans de nombreux domaines, souvent en étroite liaison.

Deux aspects généraux de cette propriété peuvent être cependant différenciés :

- L'invariance de type topologique, c'est-à-dire concernant les trajectoires de l'état ou des sorties : c'est le cas de l'invariance par rapport au mouvement ou à une fonction, ou de la (A-b) invariance, ou encore de l'invariance paramétrique.

- L'invariance par rapport à un groupe de transformations de type changement de coordonnées, ou retour d'état : c'est le cas des invariants structurels, des polynômes invariants ou des multiplieurs caractéristiques des systèmes à coefficients périodiques.

Il s'en dégage notamment la notion d'invariant polynomial, qui sera reprise dans la suite de ce travail.

CHAPITRE II

DEFINITION D'UN INVARIANT DE REPRESENTATION
POUR LES SYSTEMES NON LINEAIRES ET NON STATIONNAIRES

INTRODUCTION

La modélisation d'un système physique se fait en général au moyen d'équations de fonctionnement de type différentiel (systèmes continus), récurrent (systèmes discrets) ou booléen (systèmes séquentiels). Parmi les formulations possibles de ces équations, celle qui est la plus couramment utilisée est la représentation dans l'espace d'état, qui permet d'introduire des notations vectorielles, et donc d'utiliser les résultats usuels de l'algèbre des matrices. Un des principaux avantages d'une telle représentation est d'avoir apporté une unité dans l'étude des systèmes, qu'ils soient continus, discrets ou séquentiels /Bellman, 1971/ /Borne & Gentina, 1974/ /Gentina, 1975/.

Ainsi, la modélisation dans l'espace d'état est utilisée pour résoudre de nombreux problèmes, comme ceux de la commande /Kalman, 1963/ /Rosenbrock, 1970/, de la sensibilité /Kokotović & Rutman, 1965/ /Guardabassi & al, 1973/, de l'optimisation /Bellman, 1957/ /Pontryagin & al, 1962/ /Boudarel & al, 1967/ /Singh & Titli, 1978/, de la stabilité /Liapounov, 1892/ /Liapounov, Pliss & Basov, 1966/, ou de la simulation /Derusson & al, 1965/.

Une propriété fondamentale de la représentation d'état est sa non-unicité : il suffit de changer la base sur laquelle sont repérés les vecteurs pour obtenir une autre modélisation du système. Pour certains systèmes simples, les propriétés mises en évidence à partir d'une représentation donnée sont indépendantes de la base choisie : c'est le cas des propriétés de stabilité pour un système linéaire stationnaire. Cependant, la représentation adoptée a une influence déterminante sur la qualité des résultats obtenus dans l'étude des systèmes plus complexes /Lhote & Laurent, 1966/.

Il est par conséquent intéressant de pouvoir disposer des différentes représentations d'état d'un même système.

Dans cet esprit, les travaux présentés dans cette partie concernent une méthode de mise en équation rapide d'un système sous forme matricielle définie a priori /Richard & Laurent, 1981 - a/ /Richard, 1981 - a/.

En vue de simplifier la présentation, nous ne considérons ici que le cas des systèmes continus : en effet, les définitions et méthodes proposées sont strictement analogues en ce qui concerne les systèmes discrets /Richard & Laurent, 1981 - b/, car l'ensemble repose sur des formulations différentes de mêmes équations, à l'aide de matrices semblables. Ce n'est qu'au niveau du traitement des propriétés qui découlent de la modélisation que la différenciation continu - discret apparaît.

L'étude est basée sur l'introduction d'un invariant de représentation qui, sous certaines conditions, sera caractéristique de la structure du processus : en effet, ce "polynôme symbolique", défini de façon simple, est conservé à travers toute transformation géométrique portant sur la matrice représentative du système.

Cette méthode est valable pour toute une classe de processus non linéaires et non stationnaires, qui est décrite dans la première partie de ce chapitre.

Dans une seconde partie, le polynôme symbolique est défini dans le cas des systèmes à commande non linéaire monovariante. Des règles sont énoncées, permettant de caractériser de façon unique la structure du processus en régime autonome, et ce indépendamment de sa modélisation. Le choix d'une entrée non nulle mène alors aux équations du régime non autonome dans la base d'état choisie.

Ainsi, l'introduction d'un calcul symbolique permettra de traiter la mise en équation par des méthodes pratiques, semblables à celles employées pour les systèmes linéaires stationnaires. L'implantation de ce calcul sur informatique sera également proposée.

La généralisation de ces définitions est ensuite envisagée pour les systèmes multivariants. Elle repose sur la notion de déterminant matriciel /El Moudni, 1981/ /El Moudni, Richard & al, 1981, 1982/ et le passage à des modèles d'ordre supérieur.

I - DEFINITION DE LA CLASSE DE PROCESSUS ETUDIEE

I.1 - Etat d'un système continu

L'évolution d'un processus déterministe, considérée à partir d'un instant t_0 , ne dépend pas uniquement de l'influence immédiate de son environnement, mais aussi de données internes. Il convient donc de décrire son comportement par trois ensembles de variables considérées à un instant t :

- les **entrées**, qui représentent l'action de l'environnement sur le système, et regroupées en un vecteur $u(t)$ de \mathbb{R}^n ,

- les **sorties**, qui sont ses réactions accessibles, formant $s(t) \in \mathbb{R}^p$,

- enfin l'**état**, qui est un ensemble de q informations instantanées dépendant de l'évolution du système antérieurement à l'instant t . Les q fonctions du temps définissent un vecteur $x(t)$ appelé vecteur état du système.

Par définition, la connaissance de l'évolution de $u(t)$, pour t appartenant à $[t_0, t_1[$, et de l'état $x(t_0)$ doit déterminer le comportement du système de t_0 à t_1 (et notamment ses sorties $s(t)$).

Pour simplifier l'étude, on choisit dans la plupart des cas, un nombre q d'informations nécessaire et suffisant. Il est cependant possible d'employer un ensemble redondant.

L'évolution du système est ainsi représentée au moyen des trajectoires décrites par l'extrémité M du vecteur $x = \vec{OM}$, le point O étant l'origine d'un repère $(O, e_1, e_2, \dots, e_q)$ de l'espace d'état \mathbb{R}^q . La représentation dépend donc du repère choisi.

Toute combinaison linéaire des composantes d'un vecteur état est appelée **variable d'état**.

I.2 - Equations d'état, systèmes de type Lurie-Postnikov (mLP et MLP)

Les processus considérés dans ce mémoire sont décrits par des équations du type :

$$(II.1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A(x,u,t).x(t) + B(x,u,t).u(t) \\ s(t) = C(x,u,t).x(t) + D(x,u,t).u(t) \end{cases}$$

$$x = (\xi_i) \in \chi \subset \mathbb{R}^q ; u = (u_i) \in U \subset \mathbb{R}^n ; s = (s_i) \in \mathbb{R}^p$$

χ : ensemble contenant un voisinage du point d'équilibre en x

A : ($q \times q$) matrice, dite d'évolution

B : ($q \times n$) matrice, dite de commande

C : ($p \times q$) matrice, dite d'observation

D : ($p \times n$) matrice, dite de transmission directe

Les fonctions $A(x,u,t)$ et $B(x,u,t)$ doivent vérifier les propriétés requises pour l'existence et l'unicité d'une solution /Bellman & Cooke, 1963/. Si A, B, C et D ne dépendent que de t , le système est linéaire non stationnaire. Si ces matrices ne dépendent pas de t , le système est stationnaire.

Ces équations englobent la classe usuelle de processus linéaires décrits dans le premier chapitre (I.1). Dans le souci d'une écriture simple, nous noterons souvent, lorsqu'aucune ambiguïté ne sera possible :

$$f(x,u,t) = f(.)$$

Lorsque la commande $u(t)$ est identiquement, nulle, l'équation est du type (I.0) rencontré au premier chapitre :

$$(II.2) \quad \dot{x}(t) = A(x,t).x(t) = A(.).x(t)$$

La matrice $A(x,t)$ peut souvent être décomposée de façon à faire apparaître clairement les termes non constants : c'est le cas des systèmes de type Lurie-Postnikov /Lurie & Postnikov, 1944/ multivariables /Grujić, 1977, 1978/ (en abrégé : MLP) décrits par :

$$(II.3) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t).x(t) + B(t).f(s,t) \\ s(t) = C.x(t) + u(t) \end{cases}$$

les dimensions étant les mêmes que précédemment, avec $p = n$, et la fonction f vérifiant les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n \\ f(s,t) = (\phi_i(s,t))_{i=1,\dots,n} ; f_i(0,t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \\ F^*(s,t) = \text{diag} \left\{ \frac{\phi_i(s,t)}{\sigma_i} \right\} = \text{diag} \{ \phi_i^*(s,t) \} \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ \forall (s,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \exists F_m \in \mathbb{R}^{n \times n}, \exists F_M \in \mathbb{R}^{n \times n}, F_m \leq F^*(s,t) \leq F_M \end{array} \right.$$

Les termes $\phi_i^*(.)$ seront appelés "gains équivalents" du système. En régime libre, l'équation (II.3) s'écrit donc :

$$(II.4) \quad \dot{x} = [A(t) + B(t).F^*(Cx,t).C] x$$

La matrice d'évolution est alors :

$$(II.5) \quad A(x,t) = A(t) + B(t).F^*(Cx,t).C$$

Les systèmes linéaires obtenus en fixant arbitrairement le vecteur x en une de ses valeurs de χ sont appelés systèmes linéaires associés, ou tangents, au système (II.2).

La structure correspondant au système (II.3) est décrite Figure II.1 :

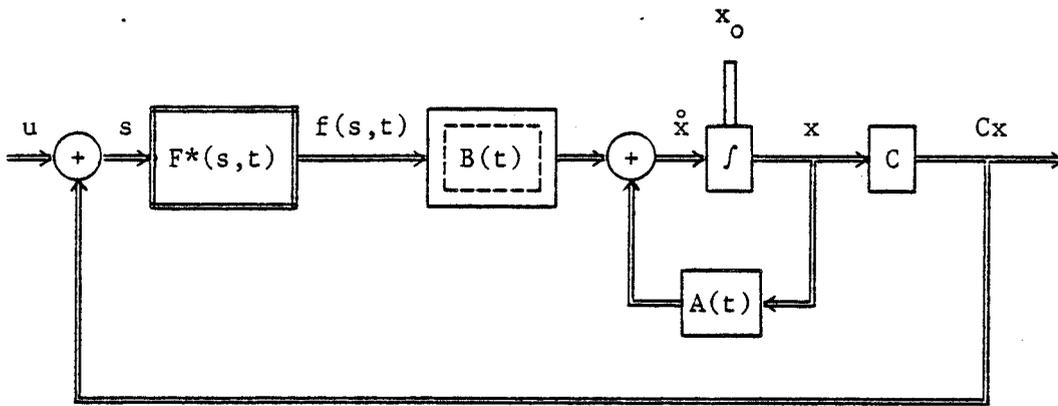


FIGURE II.1 - Système de type Lurie-Postnikov multivariable (MLP)

Un ensemble particulier de cette classe très générale est souvent utilisé pour modéliser les systèmes asservis non linéaires : lorsque la matrice F^* peut se réduire à un scalaire, on obtient un système de type Lurie-Postnikov monovariable (en abrégé : mLP), décrit par (II.6) et schématisé Figure II.2. Les flèches doubles représentent les transferts vectoriels et les flèches simples, des scalaires.

$$(II.6) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t).x(t) + b(t).\phi(\varepsilon, t) \\ \varepsilon(t) = c^T.x(t) + u(t) \end{cases}$$

$$b, c \in \mathbb{R}^q \quad \phi(\varepsilon, t) = \phi^*(\varepsilon, t).\varepsilon$$

$$\varepsilon \in \mathbb{R} \quad u \in \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R}^q$$

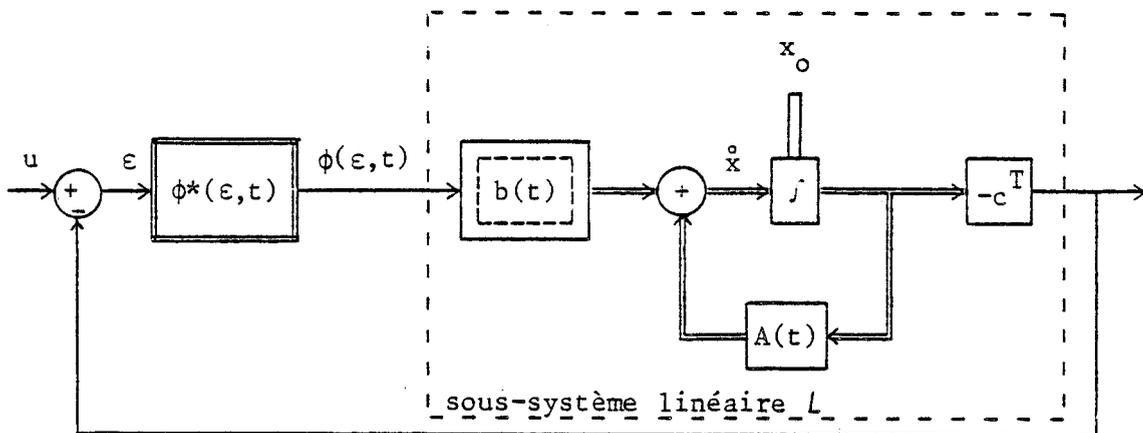


FIGURE II.2 - Système de type Lurie-Postnikov monovariable (mLP)

Le schéma fait alors apparaître un sous-système linéaire L , d'entrée et de sortie scalaire, et bouclé par une rétroaction non linéaire correspondant à la variable de commande .

Une classe particulière de ces représentations est très souvent envisagée, et correspond au cas où $A(t)$ et $b(t)$ sont constants :

$$A(t) = A \quad b(t) = b \quad \forall t \in \mathcal{R}$$

Le sous-système L est alors linéaire et stationnaire.

De nombreux processus physiques peuvent être étudiés au moyen de ce type de modèle, qui est souvent plus abordable que les précédents et correspond à une structure de rétroaction décrite Figure II.3 :

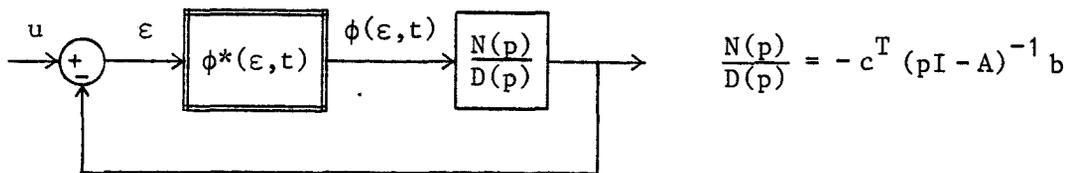


FIGURE II.3

I.3 - Remarques sur la forme de la matrice d'évolution

Comme nous l'avons vu pour les systèmes linéaires au premier chapitre, toute matrice semblable à $A(x,t)$ représente le régime libre de (II.1).

Il suffit en effet de poser :

$$y = P x \quad P \in \mathcal{R}^{q \times q} \quad \det P \neq 0$$

pour obtenir une équation similaire à (II.1) :

$$(II.7) \quad \begin{cases} \dot{y}(t) = P A(P^{-1}y, u, t) P^{-1} y(t) + P B(P^{-1}y, u, t) u(t) \\ s(t) = C(P^{-1}y, u, t) P^{-1} y(t) + D(P^{-1}y, u, t) u(t) \end{cases}$$

Il est également possible de choisir une matrice P qui ne soit pas constante $P(t)$ peut par exemple être une transformation de Liapounov /Liapounov, 1893/ /Markus, 1955/ /Langenhop, 1960/ /Harris & Miles, 1981/ /Shokoohi & al, 1983/. La mise en équations (II.7) n'est alors plus valable, mais le résultat est plus général. Cependant, l'utilisation de matrices de changement de base (P constante) présente plusieurs avantages :

. D'une part, un changement de base P conserve les propriétés d'observabilité et de commandabilité d'un modèle : dans le cas d'un système linéaire et stationnaire, si la paire (A, B) est commandable, la paire (PAP^{-1}, PB) l'est aussi. Si (C, A) est observable, (CP^{-1}, PAP^{-1}) l'est aussi.

. D'autre part, la nature du comportement dynamique d'un modèle est conservée : l'observation de $x(t)$ ou de $Px(t)$ donne le même résultat. Ceci ne serait pas le cas, par exemple, si P était une matrice $P(t)$ à coefficients périodiques, introduisant alors une oscillation supplémentaire dans l'observation de $P(t)x(t)$.

. Enfin, une matrice P constante permet, comme nous le verrons, d'utiliser de nombreux résultats de l'algèbre, comme par exemple les propriétés des matrices semblables.

Le choix de la matrice P est souvent orienté de façon à obtenir une matrice de régime libre $PA(.)P^{-1}$ bien conditionnée, c'est-à-dire permettant une analyse performante des propriétés du système (stabilité, décomposition en sous-systèmes, ...).

Dans ce but, trois objectifs très liés sont souvent à considérer :

- Obtenir un partitionnement de la matrice en blocs matriciels : ce partitionnement peut être simplement utilisé en analyse numérique (formules de Schur /Gantmacher, 1959/, polynômes matriciels /Rissanen, 1973/ /El Moudni, Richard & al, 1981, 1982/, produits de Kronecker /Rosenbrock & Storey, 1970/ /Deif, 1982/) ou bien pour refléter une décomposition du système global en sous-systèmes interconnectés : c'est le cas des travaux effectués sur la hiérarchisation et la commande multivariable /Luenberger, 1967/ /Titli, 1975/ /Fossard, 1972/ /Benrejeb, 1980/ /Singh, 1980/ ou bien sur les processus à perturbations singulières /Fossard, 1982/ /Dauphin-Tanguy, 1983/, ou encore sur l'étude de stabilité à partir de normes vectorielles /Gentina, Borne & Laurent, 1972/ /Grujić & al, 1976/.

- Simplifier l'expression et le traitement de la matrice, en réduisant le nombre de termes non nuls. Dans cet esprit ont été proposées différentes formes canoniques /Gantmacher, 1959/ permettant de résumer une matrice constante d'ordre q par q coefficients, ainsi que la notion de matrice creuse (comportant peu de termes non nuls) ou dense (comportant peu de termes nuls) /Deif, 1982/ /Laurent, 1968/ /Benrejeb, 1980/. Ceci rejoint également le problème du partitionnement, et de l'obtention de matrices bloc-triangulaires /Gantmacher, 1959/ /Fossard, 1982/.

- Réduire le nombre de termes non constants intervenant dans la matrice d'évolution : ceci permet l'application plus aisée de certains critères de stabilité /Rosenbrock, 1963/ /Laurent & al, 1979/ /Borne & al, 1972/ et conduit à des schémas de simulations plus performants /Benrejeb & al, 1980/.

Plusieurs auteurs ont ainsi proposé des représentations canoniques d'une matrice A constante ou non. Le positionnement des termes nuls et des coefficients non constants de A définit alors une **forme matricielle**, dont les coefficients doivent pouvoir être obtenus à partir de toute autre représentation semblable non canonique. Citons par exemple pour les matrices constantes (α_{ij}) :

- la forme diagonale ($\alpha_{ij} \neq 0 \implies i = j$),
- les formes de Jordan (diagonales avec $\alpha_{i,i+1} = 1$ ou 0),
- les formes compagnon (cf Chapitre I),
- les formes de Hankel et de Toeplitz /Rissanen, 1974/ /Faure & al, 1979/,
- les formes tridiagonales de Jacobi /Rosenbrock & Storey, 1970/,
- le forme en flèche (diagonale, dernière ligne et dernière colonne non nulles) /Groumpos & Scott, 1977/.

Dans le cas de systèmes linéaires multivariables, une bibliographie très intéressante (formes canoniques de Kronecker, Hermite, Bosgra, Hessenberg, Brunovsky), associée au problème de continuité des modèles paramétrés, est proposée dans /Hinrichsen, 1984/.

Certaines de ces représentations ont été généralisées et s'avèrent particulièrement intéressantes pour l'étude des systèmes à coefficients non constants : c'est le cas de la forme compagnon et de la forme en flèche /Benrejeb, 1976, 1980/ et des formes de type Jordan /Gentina & Meizel, 1978/.

I.4 - Définition d'une problématique relative à la représentation d'état

Le passage d'une représentation matricielle $A(.)$ à une autre $B(.)$ est en général assez complexe dès que l'une des deux formes $A(.)$ ou $B(.)$ n'est pas canonique. Dans la pratique, le problème est souvent posé en ces termes :

P1 :

- * Soit une matrice $A(.)$ quelconque représentant le système.
- * On choisit une forme matricielle $B(.)$ dont le conditionnement est adopté à l'étude que l'on veut mener (stabilité, simulation, ...). Les coefficients $b_{ij}(.)$ de $B(.)$ sont alors indéterminés, certains d'entre eux pouvant être fixés a priori.
- * Quelles contraintes doivent vérifier les $b_{ij}(.)$ pour garantir la similitude de $A(.)$ et $B(.)$, c'est-à-dire l'existence d'une solution P (constante et régulière) à l'équation $A(.) P - P B(.) = 0$?

Cette question étant souvent insoluble, la problématique $P1$ peut être transformée en :

P2 :

- * Soit une matrice $A(.)$ quelconque représentant le système.
- * On choisit une matrice constante et régulière P de même dimension.
- * La matrice $B(.) = P^{-1} A(.) P$ représente donc le même système.
- * La forme de $B(.)$ convient-elle à l'étude menée ?

Exceptés quelques cas standards, comme le passage d'une forme compagnon à une forme en flèche, le choix porte sur la matrice de passage P et non directement sur le modèle $B(.)$. La forme $B(.)$ résulte alors d'une infinité de choix possibles pour P . La problématique $P1$ est donc beaucoup plus riche lorsqu'elle peut être résolue.

Nous allons présenter une solution pour $P1$ valable pour une classe donnée de système, que nous dirons "à non linéarités de rang k ", et qui englobe le cas des systèmes de type Lurie-Postnikov mono ou multi-variables.

I.5 - Systèmes à non linéarités de rang k, types L(k) et C(k)

L'introduction de la notion de rang de non linéarités /Richard, 1981/ /Rotella, 1983/ permet de réduire le nombre de termes constants intervenant dans la matrice d'évolution $A(x,t)$, conformément aux motivations du § I.3.

Le principe en est simple :

Définition II.1 :

Une matrice $A(.)$ de $\mathbb{R}^{q \times q}$ est à non linéarités de rang k ssi elle est semblable à une matrice $F(x,t)$ dont les termes non constants sont regroupés dans k rangées de même nature (ligne ou colonne).

Si le regroupement est en colonnes, la matrice est dite de **type C(k)** et s'il est en lignes, de **type L(k)**.

Une matrice de type C(k) s'écrira donc :

$$(II.8) \quad A(.) = A + V(.) H^T$$

$$A \in \mathbb{R}^{q \times q} \quad V(.) \in \mathbb{R}^{q \times k} \quad H \in \mathbb{R}^{q \times k}$$

Soit H l'espace vectoriel de dimension k' ($k' \leq k$) engendré par les k colonnes de H , et soit L un espace complémentaire de H dans \mathbb{R}^q : $H \oplus L = \mathbb{R}^q$.

Dans l'écriture (II.8), le vecteur état x correspondant est exprimé dans une base \mathcal{B}_q de l'espace d'état : $\mathcal{B}_q = (e_1, e_2, \dots, e_q)$ $e_i \in \mathbb{R}^q$.

On peut choisir \mathcal{B}_q de façon à ce que ses k' derniers vecteurs engendrent H , et que ses $q-k'$ premiers engendrent L : dans cette base, l'écriture de H (II.8) se simplifie, et ses $q-k'$ premières lignes sont nulles :

$$H = \begin{bmatrix} \boxed{0} \\ \boxed{\text{hatched}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow q-k \\ \updownarrow k \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \longleftrightarrow \\ k \end{matrix}$$

Les k dernières colonnes de $A(\cdot)$ sont alors les seules à contenir des termes non constants (provenant de $V(\cdot)$).

Le terme "rang" employé pour cette définition se trouve alors justifié : le rang de la matrice $V(\cdot) H^T$, correspondant à un regroupement de tous les termes non constants de $A(\cdot)$, est en effet inférieur ou égal à k à chaque instant t , et pour tout état x .

De même, une matrice de type $L(k)$ s'écrit :

$$(II.9) \quad A(\cdot) = A + K V^T(\cdot)$$

$$A \in \mathbb{R}^{q \times q} \quad V(\cdot) \in \mathbb{R}^{q \times k} \quad K \in \mathbb{R}^{q \times k}$$

Cette écriture (II.9) est évidemment analogue à la précédente, puisqu'elle s'obtient par transposition de (II.8) ; les propriétés des colonnes non constantes deviennent alors celles des lignes.

Les définitions suivantes peuvent être proposées :

Définition II.2 :

1) Le système décrit par les équations (II.10) :

$$(II.10) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + V(\cdot) s(t) \\ s(t) = H^T x(t) + u(t) \end{cases}$$

avec A , $V(\cdot)$, H définies en (II.8), $x \in \mathbb{R}^q$, u et $s \in \mathbb{R}^k$, est dit à non linéarités de rang k , de type $C(k)$.

2) Le système décrit par les équations (II.11) :

$$(II.11) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + K s(t) \\ s(t) = V^T(\cdot) x(t) + u(t) \end{cases}$$

avec A , $V(\cdot)$, K définies en (II.9), $x \in \mathbb{R}^q$, u et $s \in \mathbb{R}^k$, est dit à non linéarités de rang k , de type $L(k)$.

Ces définitions sont en accord avec les précédentes : le régime autonome d'un système de type C(k) (resp. L(k)) est représenté par une matrice de type C(k) (resp. L(k)).

Il est à noter que les classes de processus ainsi définies sont très vastes, puisque toute matrice non constante A(.) correspond à un système de rang $k=q$. Cependant, plus k sera faible, plus les méthodes de mise en équations que nous proposons seront pratiques. Ainsi, toute matrice A(.) peut être considérée comme étant de type L(k_1) ou C(k_2), où k_1 et k_2 sont des entiers inférieurs ou égaux à q. Il est alors préférable de considérer la décomposition associée au plus petit des deux rangs, c'est-à-dire L(k_1) si $k_1 < k_2$, et C(k_2) si $k_1 > k_2$.

Le type C(k) constitue une classe importante de systèmes, puisqu'il englobe les Lurie-Postnikov multivariables décrits en (II.3) ; on a alors $k=n$ et $V(s,t) = B(t) F^*(s,t)$.

Le type L(k) correspond à une factorisation en ligne intervenant dans l'étude de la D-stabilité des systèmes à plusieurs échelles de temps /Khalil & Kokotović, 1979/. La matrice K contient alors les éléments définissant les rapports d'échelles de temps.

II - POLYNÔME SYMBOLIQUE D'UN SYSTEME A NON LINEARITES DE RANG 1

II.1 - Décompositions canoniques

Dans cette partie, nous étudierons les systèmes (II.10) et (II.11) dans le cas où le rang k des non linéarités est égal à 1. On a alors, pour le type C(1) :

$$(II.12) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + v(.) \varepsilon(t) \\ \varepsilon(t) = h^T x(t) + u(t) \end{cases}$$

et, pour le type L(1) :

$$(II.13) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + k \varepsilon(t) \\ \varepsilon(t) = v^T(.) x(t) + u(t) \end{cases}$$

$$A \in \mathbb{R}^{q \times q} \quad x, v, h, k \in \mathbb{R}^q \quad u, \varepsilon \in \mathbb{R}$$

Les matrices d'évolution en régime libre sont :

$$(II.14) \quad A(.) = A + v(.) h^T \quad [C(1)]$$

$$(II.15) \quad A(.) = A + k v^T(.) \quad [L(1)]$$

Ce type de matrice présente plusieurs propriétés, que nous allons énoncer, et qui font intervenir la matrice $F(.)$ suivante :

$$(II.16) \quad F(.) = \begin{bmatrix} c_1 & & & & B_1(.) \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & c_i & & B_i(.) \\ & & & \circ & \vdots \\ \circ & & & & B_{n-1}(.) \\ & & & & c_{n-1} \\ & & & & & c_n(.) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q \times q}$$

avec :

$$q_i \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=1}^n q_i = q$$

$$(II.16-a) \quad c_n(.) = \begin{bmatrix} 0 & & & -f_0(.) \\ & \diagdown & & \vdots \\ 1 & & & \vdots \\ & \diagdown & & \vdots \\ & & 0 & \vdots \\ & & & \vdots \\ & & & \vdots \\ & & 1 & -f_{q_n-1}(.) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q_n \times q_n} \quad \text{Forme compagnon non constante}$$

$$(II.16-b) \quad C_i = \begin{bmatrix} 0 & & & -c_{q_i}^i \\ & \diagdown & & \vdots \\ 1 & & 0 & \\ & \diagdown & & \vdots \\ & & 1 & -c_{q_i-1}^i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q_i \times q_i}$$

Forme compagnon
constante, associée
au polynôme $P_i(\lambda)$
(cf Chap. I, § III)
($i = 1, \dots, n-1$)

$$(II.16-c) \quad B_i(.) = \begin{bmatrix} \boxed{} & b_1^i(.) \\ \vdots & \vdots \\ \boxed{} & b_{q_i}^i(.) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q_i \times q_n}$$

Matrice à termes
non constants tous
situés dans la
dernière colonne

$$(II.16-d) \quad \forall i = 2, \dots, n-1 \quad P_i(\lambda) \text{ divise } P_{i-1}(\lambda)$$

Théorème II.1 :

Toute matrice de type $C(1)$ (II.14) est semblable à une matrice bloc-triangulaire du type $F(.)$ décrit en (II.16).

L'ordre q_n de la matrice $C_n(.)$ intervenant dans cette décomposition est égal à la dimension du sous-espace observable de $S(A, h^T)$ (Chap. I, § II) :

$$q_n = \text{Rang} \{ h, A^T h, A^{T^2} h, \dots, A^{T(q-1)} h \}$$

Démonstration :

Considérons le régime libre de (II.12), donc $u(t) \equiv 0$. Le vecteur état x est choisi de façon à ce que sa dernière composante soit ε , et donc :

$$h^T = (0 \text{ --- } 0 \quad 1)$$

Les coefficients non constants de $A(x,t)$ (II.14) sont alors tous situés dans sa dernière colonne :

$$A(x,t) = A + (0 \dots 0 \ v(.))$$

Notons :

$$p_m(\lambda) = \lambda^m + \sum_{i=0}^{m-1} \beta_{m-i} \lambda^i \quad (\beta_i \in \mathbb{R})$$

le polynôme minimal de h par rapport à l'opérateur A^T /Gantmacher, 1959/, c'est-à-dire le polynôme de plus bas degré vérifiant :

$$p_m(A).h = 0$$

Soit I_2 le sous-espace cyclique (de dimension m) engendré par les vecteurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_q = h \\ e_{q-1} = A^T h \\ \vdots \\ e_i = A^{T(q-i)} h \\ \vdots \\ e_{q-m+1} = A^{T(m-1)} h \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} A^T e_{q-m+1} &= - \sum_{i=0}^{m-1} \beta_{m-i} A^{Ti} h \\ &= - \beta_m e_q - \beta_{m-1} e_{q-1} - \dots - \beta_1 e_{q-m+1} \end{aligned}$$

Soit z un vecteur de I_2 et z' son image par A^T .

$$z = \xi_q e_q + \xi_{q-1} e_{q-1} + \dots + \xi_{q-m+1} e_{q-m+1}$$

$$A^T z = \xi'_q e_q + \xi'_{q-1} e_{q-1} + \dots + \xi'_{q-m+1} e_{q-m+1}$$

$$\begin{bmatrix} \xi'_{q-m+1} \\ \xi'_{q-m} \\ \vdots \\ \xi'_{q-1} \\ \xi'_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta_m & 1 & & & \\ -\beta_{m-1} & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ -\beta_2 & 0 & & 0 & 1 \\ -\beta_1 & 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{q-m+1} \\ \xi_{q-m} \\ \vdots \\ \xi_{q-1} \\ \xi_q \end{bmatrix}$$

I_2 est A^T -invariant (Chap. I, § II). Soit I_1 un espace complémentaire de I_2 :

$$I_1 \oplus I_2 = \mathbb{R}^q$$

et soit $\{e_1, \dots, e_{q-m}\}$ une base de I_1 . La matrice A^T_0 de l'opérateur A^T exprimée sur la base $\{e_1, \dots, e_q\}$ vérifie :

$$A^T_0 = \left[\begin{array}{c|c} A^T_1 & 0 \\ \hline (q-m) \times (q-m) & (q-m) \times m \\ \hline A^T_2 & \begin{array}{c} -\beta_m \quad 1 \\ \vdots \\ -\beta_1 \quad 0 \end{array} \\ \hline m \times (q-m) & \begin{array}{c} \quad \quad \quad 1 \\ \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array} \end{array} \right] = Q A^T Q^{-1}$$

La dernière colonne de Q et Q^{-1} est $(0 \text{ --- } 0 \ 1)^T$ car $e_q = h$.

Considérons le changement de base défini par la bloc-diagonale :

$$S = \left[\begin{array}{c|c} S_1 & 0 \\ \hline (q-m) \times (q-m) & (q-m) \times m \\ \hline 0 & S_2 \\ \hline m \times (q-m) & m \times m \end{array} \right]$$

avec :

* S_1 matrice régulière telle que $S_1 A_1 S_1^{-1}$ soit la première forme normale naturelle de A_1 (Chap. I, § III),

$$* S_2 = \begin{bmatrix} 1 & \beta_m & \dots & \beta_i & \dots & \beta_2 \\ & \diagdown & & \diagdown & & \vdots \\ & & \bigcirc & & & \beta_i \\ & & & \diagdown & & \vdots \\ & & & & \diagdown & \beta_m \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

on a alors :

$$S_2 \cdot \begin{bmatrix} -\beta_m & \dots & \dots & -\beta_1 \\ & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \diagdown & & \vdots \\ & & & \diagdown & \vdots \\ & & & & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \cdot S_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -\beta_1 \\ & 1 & & \vdots \\ & & \diagdown & \vdots \\ & & & \diagdown & \vdots \\ & & & & 1 \\ & & & & & -\beta_m \end{bmatrix}$$

Il vient :

$$S Q^{-1T} A Q^T S^{-1} = S A_0 S^{-1}$$

$S A_0 S^{-1}$ est une matrice bloc-triangulaire de même forme que $F(\cdot)$ intervenant dans le théorème (II.1), avec $q_n = m$, mais à termes constants.

Le changement de base défini par :

$$P = S Q^{-1T}$$

ne change pas la dernière composante ε de l'état, car sa dernière ligne est $(0 \text{ --- } 0 \ 1)$. Définissons le vecteur $w(\cdot)$ de \mathbb{R}^q par :

$$P (0 \text{ --- } 0 \ v(\cdot)) P^{-1} = (0 \text{ --- } 0 \ w(\cdot))$$

Il vient :

$$P A(.) P^{-1} = S A_o S^{-1} + (0 \text{ --- } 0 \text{ } w(.))$$

Cette matrice semblable à A(.) est de la forme F(.), et vérifie :

$$q_n = \dim I_2$$

Le théorème II.1 concerne les matrices de type C(1), et peut aisément être transposé au type L(1) :

Théorème II.2 :

Toute matrice de type L(1) (II.15) est semblable à une matrice bloc-triangulaire du type $F^T(.)$, F(.) étant définie en (II.16).

L'ordre q_n de la matrice $C_n^T(.)$ intervenant dans cette décomposition est égal à la dimension du sous-espace commandable de $S(A, k)$:

$$q_n = \text{Rang} \{ k, A k, A^2 k, \dots, A^{(q-1)} k \}$$

La démonstration de ce théorème découle immédiatement de la précédente, puisque (II.15) est la forme transposée de (II.14). Le changement de base à considérer est alors le transposé du précédent P.

Remarque sur la forme de F(.) :

La décomposition F(.) obtenue permet d'isoler deux sous-systèmes interconnectés : l'un, (S_1) , est linéaire et correspond au bloc diagonal $\text{diag} \{ C_1 \dots C_{n-1} \}$; l'autre, (S_2) , est non linéaire (bloc $C_n(.)$) et les interconnexions $B_i(.)$ sont non linéaires. Une schématisation de cette structure est proposée Figure II.4 :

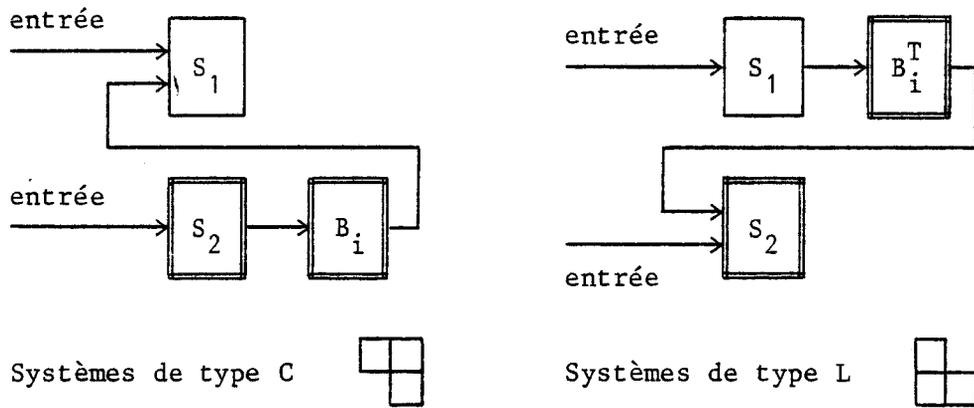


FIGURE II.4

II.2 - Définition du polynôme symbolique

II.2.1 - Définition et propriétés

A chaque matrice C_i ($i = 1$ à $n-1$) est associé un polynôme caractéristique $p(\lambda, C_i)$ défini par :

$$(II.18) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad p(\lambda, C_i) = \det (\lambda I_{q_i} - C_i) = \lambda^{q_i} + \sum_{j=0}^{q_i-1} c_j^i \lambda^j$$

Nous pouvons, de la même façon, associer à la matrice non constante $C(.)$ un polynôme à coefficients variables :

$$(II.19) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \forall (x, t) \quad p(\lambda, C_i(.)) = \lambda^{q_n} + \sum_{j=0}^{q_n-1} f_j(.) \lambda^j$$

Définition II.3 :

Nous appellerons *polynôme symbolique de la matrice $A(.)$ de type $C(1)$ ou $L(1)$, la quantité polynomiale en λ :*

$$p(\lambda, A(.)) = p(\lambda, C_n(.)) \prod_{i=1}^{n-1} p(\lambda, C_i)$$

où les C_i sont les matrices intervenant dans la décomposition canonique

$F(.)$ ou $F(.)^T$ (II.16) de $A(.)$.

Lorsque le système est linéaire stationnaire, ce polynôme est à coefficients constants et s'identifie au polynôme caractéristique du système. Ses coefficients définissent alors l'équation différentielle du régime libre, relativement à une quelconque variable d'état.

Par contre, lorsque le vecteur $v(.)$ n'est plus constant, il n'est pas toujours possible de définir à partir de $p(\lambda, A(.))$ une équation différentielle scalaire. C'est pourquoi nous employons le terme "symbolique" au lieu de "caractéristique".

Il est important de noter que le calcul de $p(\lambda, A(.))$ reste simple si on introduit la convention suivante :

Convention :

Le déterminant de toute matrice $A(.)$ de type $C(1)$ ou $L(1)$ est défini de la même manière que si $A(.)$ était constante, et est noté $\det(A(.))$.

Les calculs de déterminants s'effectueront alors **comme si** les $f_i(.)$ intervenant dans (II.16) étaient des coefficients constants écrits sous forme littérale. Les règles d'addition et de multiplication restent celles du corps des complexes. Ce n'est que lors de leur remplacement par des fonctions numériques que l'état et le temps interviendront comme opérandes. Cette convention permet d'écrire :

$$(II.20) \quad p(\lambda, C_n(.)) = \det (\lambda I_{q_n} - C_n(.))$$

Les règles de calcul de déterminant étant les mêmes que pour des matrices constantes, il vient la propriété suivante :

Propriété II.1 : 2ème définition et invariance du polynôme symbolique

Le polynôme symbolique d'une $(q \times q)$ matrice $A(.)$ de type $C(1)$ ou $L(1)$ est défini par :

$$p(\lambda, A(.)) \equiv \det (\lambda I_q - A(.))$$

Ce polynôme est invariant par tout changement de base constant P effectué sur $A(.)$:

$$p(\lambda, P A(.) P^{-1}) \equiv p(\lambda, A(.))$$

Cette propriété est analogue à celle du polynôme caractéristique d'une matrice linéaire. Pour pousser l'analogie entre le linéaire et le non linéaire, il est possible de comparer la décomposition proposée $F(.)$ (II.16) avec le forme canonique normale C vue au premier chapitre (§ III, (I.5)). Ces deux représentations sont proches, mais deux différences majeures sont à noter :

- La présence des termes $B_i(.)$ dans $F(.)$ provient d'une contrainte supplémentaire sur le choix de la base vectorielle correspondant à la forme canonique $F(.)$: il faut en effet que le vecteur h soit un des éléments de cette base (dans le cas des matrices de type C), comme nous l'avons vu dans la démonstration du Théorème II.1. Les coefficients non constants sont alors regroupés dans une seule colonne. Cette contrainte n'existe pas dans le cas d'une matrice constante, et le dernier vecteur de base e_q peut alors être choisi de telle façon que le polynôme minimal de A par rapport à e_q soit le polynôme minimal de A (c'est-à-dire par rapport à l'espace \mathbb{R}^q entier) /Gantmacher, 1966, p. 188/, ce qui permet d'obtenir la forme C .

- Les matrices de la diagonale de C définissent les polynômes invariants, qui forment une suite dont chaque élément est divisible par le précédent. Si on veut définir par analogie les polynômes invariants d'une matrice non linéaire à partir des polynômes $p(\lambda, C_i)$ ($i = 1, \dots, n-1$) et $p(\lambda, C_n(.))$, cette propriété de divisibilité n'est plus respectée que pour les $n-1$ premiers. De plus, l'inconvénient principal d'une telle définition est que la condition nécessaire et suffisante de similitude de deux matrices n'est plus valable : deux matrices $F_1(.)$ et $F_2(.)$ de type $F(.)$ peuvent présenter la même diagonale par blocs, et donc les mêmes polynômes $\{p(\lambda, C_i), p(\lambda, C_n(.))\}$, sans pour autant être semblables, puisque les $B_i(.)$ peuvent être différents de $F_1(.)$ à $F_2(.)$. Une telle définition des polynômes invariants présente donc peu d'intérêt en modé-

lisation.

Par contre, lorsque les blocs compagnons constants C_i n'existent pas dans la décomposition de $A(\cdot)$ en $F(\cdot)$, le polynôme symbolique est le seul polynôme invariant du système, ce terme présentant la même signification qu'en linéaire. On a alors $n=q$ et $F(\cdot) = C_q(\cdot)$. L'identité des polynômes symboliques de deux matrices non linéaires est dans ce cas une CNS pour leur similitude. C'est ce résultat que nous allons énoncer.

Propriété II.2 : Observabilité

Propriété II.2-a : Si la paire (A, h^T) est observable, c'est-à-dire

$$\text{Rang} \{h, A^T h, \dots, A^{T(q-1)} h\} = q$$

alors la matrice $C(1)$ (II.14) est semblable à la forme compagnon non constante C_C associée à son polynôme symbolique.

Propriété II.2-b : Si la paire (A, k) est commandable, c'est-à-dire

$$\text{Rang} \{k, A k, \dots, A^{(q-1)} k\} = q$$

alors la matrice $L(1)$ (II.15) est semblable à la forme compagnon non constante C_L associée à son polynôme symbolique.

Ces propriétés d'observabilité et de commandabilité se retrouvent dans le polynôme symbolique, ce qui en constitue un autre avantage :

Définition :

Nous dirons qu'un polynôme symbolique est non factorisable si il ne présente aucun zéro indépendant de l'état et du temps, c'est-à-dire :

$$\nexists \lambda_0 \in \mathbb{C} \quad p(\lambda_0, A(x, t)) = 0 \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$$

Propriété II.3 : Non factorisation

Si le polynôme symbolique d'une matrice de type $C(1)$ (II.14) (resp. $L(1)$ (II.15)) est non factorisable, alors cette matrice est semblable à

la forme compagnon C_C (resp. C_L) non constante associée à son polynôme symbolique.

Démonstration de la propriété II.3 :

Nous démontrerons la proposition niée :

Si $A(x,t)$ n'est pas semblable à une forme compagnon C_C , alors son polynôme symbolique a au moins un zéro indépendant de x et t .

Supposons donc que la décomposition canonique (II.16) fasse intervenir des blocs compagnons constants C_i (II.16-b) sur la diagonale, de dimension non nulle. Alors, selon la définition (II.3), $p(\lambda, A(x,t))$ se factorise en :

$$p(\lambda, A(x,t)) = p(\lambda, C_n(x,t)) \prod_{i=1}^{n-1} p(\lambda, C_i)$$

Les zéros (constants) correspondant aux blocs C_i sont des zéros du polynôme symbolique de $A(x,t)$, qui est donc factorisable.

On peut noter que la propriété (II.3) exprime une condition suffisante, mais pas nécessaire, pour que la matrice soit semblable à une forme compagnon. Ceci sera mis en évidence dans un exemple ultérieur (Exemple II.3.2). Si la matrice $A(x,t)$ vérifie la propriété II.2 ou II.3, nous dirons qu'elle est "compagnonnable".

II.2.2 - Calcul informatisé du polynôme symbolique
Non linéarités génératrices

II.2.2.1 - Non linéarités génératrices :

Pour simplifier la présentation, les calculs seront exposés à partir d'une matrice de type C(1), dont tous les éléments non constants sont dans la dernière colonne. Les résultats sont identiques dans le cas général de matrices de type L(1) ou C(1) quelconques. On a donc :

$$A(.) = A + v(.) h^T$$
$$v(.) = \left[v_1(.) \quad \dots \quad v_q(.) \right]^T \quad h = \left[0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \right]^T$$

Le développement de $\det(\lambda I - A(.))$ par rapport à sa dernière colonne donne une expression de la forme :

$$(II.21) \quad p(\lambda, A(.)) \equiv p_0(\lambda) + \sum_{i=1}^q v_i(.) p_i(\lambda)$$

avec : $p_0(\lambda) \equiv \det(\lambda I - A)$, polynôme de degré q
 $p_i(\lambda)$, polynômes de degré $q-1$

Parmi les fonctions $v_i(.)$, certaines peuvent être linéairement dépendantes, c'est-à-dire vérifier des relations du type :

$$\exists \beta_{ij} \in \mathcal{R} \quad j = 1, \dots, q$$

$$v_i(.) = \beta_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q \beta_{ij} v_j(.)$$

Il est ainsi possible de définir une famille $\Phi(.)$ de g fonctions linéairement indépendantes $\phi_i(.)$ ($g \in \mathbb{N}$) qui engendrent les $v_i(.)$ par combinaisons affines (combinaison linéaire plus une constante) :

$$(II.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(.) = \left[\phi_1(.) \dots \phi_g(.) \right]^T \\ \forall a \in \mathcal{R}^g \quad \forall \alpha \in \mathcal{R} \quad a^T \Phi(.) = \alpha \implies a = 0 \\ \forall i \in \{1, \dots, q\} \quad \exists \alpha_i \in \mathcal{R} \quad \exists a_i \in \mathcal{R}^{g-1} \\ v_i(.) = a_i^T \Phi(.) + \alpha_i \end{array} \right.$$

Ces fonctions seront appelées **non linéarités génératrices** de $A(.)$.

Le polynôme symbolique de $A(.)$ s'écrit alors :

$$(II.23) \quad p(\lambda, A(.)) \equiv p_0(\lambda) + \sum_{j=1}^g \phi_j(.) r_j(\lambda)$$

($r_j(\lambda)$ polynômes de degré $q-1$).

Ainsi, dans le cas d'un système non linéaire de type Lurie-Postnikov monovarié (cf Fig. II.3), on a $g = 1$ et $\phi_1(.) = \phi^*(\varepsilon, t)$. Toutes les composantes $v_i(.)$ de $v(.)$ sont alors des fonctions affines de $\phi^*(\varepsilon, t)$ et on a :

$$(II.24) \quad p(\lambda, A(.)) \equiv D(\lambda) + N(\lambda) \phi^*(\varepsilon, t)$$

Le calcul de $p(\lambda, A(.))$ est donc immédiat dans ce cas, $N(\lambda)$ et $D(\lambda)$ étant les polynômes définissant la fonction de transfert de la boucle ouverte.

Les décompositions (II.21) et (II.23) vont permettre d'utiliser dans le cas non linéaire, les algorithmes de calcul de polynômes caractéristiques, proposés pour les matrices constantes.

II.2.2.2 - Calcul informatisé du polynôme symbolique :

Il existe différents algorithmes permettant de déterminer le polynôme caractéristique d'une matrice à coefficients constants. Ces méthodes font intervenir le calcul des traces des puissances successives de la matrice considérée (citons par exemple les algorithmes de Fadeev /Gantmacher, 1966/ ou de Leverrier /Deif, 1982/ Dimster, 1984/). La formule (II.21) nous donne une décomposition du polynôme symbolique sous la forme de $q+1$ polynômes :

$$p(\lambda, A(.)) \equiv p_0(\lambda) + \sum_{i=1}^q v_i(.) p_i(\lambda)$$

La formulation (II.23) ne fait intervenir que $g+1$ polynômes :

$$p(\lambda, A(.)) \equiv p_0(\lambda) + \sum_{j=1}^g \phi_j(.) r_j(\lambda)$$

Nous allons montrer ici que les polynômes $p_0(\lambda)$, $p_i(\lambda)$ et $r_i(\lambda)$ sont décomposables en sommes de polynômes caractéristiques.

Ceci est évident pour $p_0(\lambda)$, puisque :

$$p_0(\lambda) \equiv \det (\lambda I - A) \equiv p(\lambda, A)$$

De plus, en symbolisant les q colonnes de $(\lambda I - A)$ sous la forme :

$$\lambda + \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} 1, \dots, \lambda + \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} i, \dots, \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} q-1, \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} q$$

$\lambda +$

$\lambda +$

on obtient la décomposition suivante de $p_i(\lambda)$:

$$p_i(\lambda) = \det \left[\begin{array}{c} \lambda + \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} 1, \dots, \lambda + \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} i, \dots, \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} q-1 \\ \lambda + \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ | \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ | \\ 0 \\ \lambda \end{array} \right]$$

$$- \det \left[\begin{array}{c} \lambda + \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} 1, \dots, \lambda + \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} i, \dots, \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} q-1 \\ \lambda + \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ | \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ | \\ 0 \\ \lambda \end{array} \right]$$

Chaque polynôme $p_i(\lambda)$ est donc défini comme la différence des deux polynômes caractéristiques de deux matrices :

$$\left[\begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} q-1 \\ \text{premières} \\ \text{colonnes} \\ \text{de } A \end{array} \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ | \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ | \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{c} i\text{ème} \\ \text{ligne} \end{array} \text{ et } \left[\begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} q-1 \\ \text{premières} \\ \text{colonnes} \\ \text{de } A \end{array} \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ | \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ | \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]$$

Le calcul de $p(\lambda, A(\cdot))$ selon la décomposition (II.21) nécessite alors $(q+2)$ calculs de polynômes caractéristiques. De même, on peut montrer que la décomposition (II.23) conduit à seulement $(g+2)$ calculs de polynômes caractéristiques. Les matrices conduisant aux $r_j(\lambda)$ sont alors :

$$\left[\begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} q-1 \\ \text{premières} \\ \text{colonnes} \\ \text{de } A \end{array}} \quad \begin{array}{c} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{ij} \\ \vdots \\ \alpha_{qj} \end{array} \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} q-1 \\ \text{premières} \\ \text{colonnes} \\ \text{de } A \end{array}} \quad \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \end{array} \right] \quad \text{et } A + \left[\begin{array}{c} \boxed{0} \quad \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_q \end{array} \end{array} \right]$$

où les α_{ij} ($i = 1, \dots, q$) ($j = 1, \dots, g$) sont les composantes des vecteurs a_i introduits en (II.22) et liant les $v_i(\cdot)$ aux non linéarités génératrices $\phi_i(\cdot)$. Les α_i sont également définis en (II.22).

Dans le cas d'un système de type Lurie-Postnikov monovariante, $p(\lambda, A(\cdot))$ est obtenu grâce au calcul programmable de 3 polynômes caractéristiques.

II.2.2.3 - Exemple d'application :

Pour illustrer la partie précédente, considérons la matrice $A(\epsilon)$ correspondant au schéma-bloc de la Figure II.5, avec comme vecteur état $(y_1, \overset{\circ}{y}_1, \overset{\circ}{y}_2, \epsilon)^T$, en régime autonome ($e = 0$) :

$$A(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3,5 & 0 & -(1 + f_1^*) \\ -1 & -1 & -5 & -f_2^* \\ -1,5 & -2,75 & -9 & -0,5(1 + f_1^*) - 2 f_2^* \end{bmatrix}$$

Nous choisirons comme non linéarités génératrices :

$$\phi_1(\epsilon) = f_1^*(\epsilon) \quad \phi_2(\epsilon) = f_2^*(\epsilon)$$

(on suppose que $f_1^*(\epsilon)$ n'est pas une fonction affine $\alpha + \beta f_2^*(\epsilon)$ de $f_2^*(\epsilon)$).

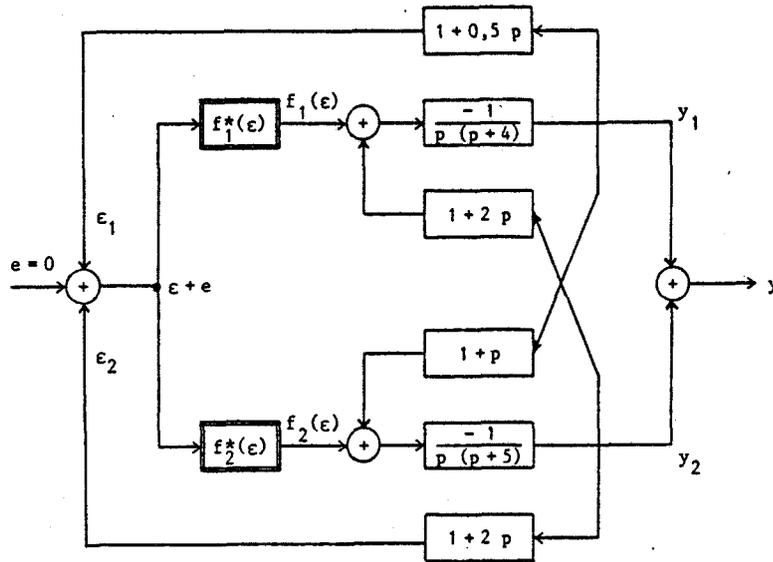


FIGURE II.5

LE SYSTEME EST DEFINI PAR : - Sa matrice d'évolution :
 ORDRE DU SYSTEME Q : 4
 NOMBRE DE NON LINEARITES N : 2

La matrice C (4x4) des coefficients constants est :

0.0000000E+00	1.000000	0.0000000E+00	0.0000000E+00
1.000000	-3.500000	0.0000000E+00	-1.000000
-1.000000	-1.000000	-5.000000	0.0000000E+00
-1.500000	-2.750000	-9.000000	-0.5000000

La matrice DNL (4x2) des coefficients des N-L est :

0.0000000E+00	0.0000000E+00
-1.000000	0.0000000E+00
0.0000000E+00	-1.000000
-0.5000000	-1.000000

L'expression du polynome symbolique est de la forme: E(p)+f1.N1(p)+...+fn.Nn(p)
 où n = 2 et

$$D(p) = p^4 + 0.5000000E+01 * p^3 + 0.1800000E+02 * p^2 + -0.3000000E+01 * p + -0.1000000E+01 * p^0$$

et

$$N 1(p) = 0.5000000E+00 * p^3 + 0.1500000E+01 * p^2 + 0.2000000E+01 * p + -0.1000000E+01 * p^0$$

$$N 2(p) = 0.2000000E+01 * p^3 + 0.8000000E+01 * p^2 + 0.1500000E+01 * p + -0.1000000E+01 * p^0$$

On a alors :

$$p(\lambda, A(\epsilon)) = \lambda^4 + \lambda^3 [9 + 0,5 f_1^* + 2 f_2^*] + \lambda^2 [-18 + 1,5 f_1^* + 8 f_2^*] + \lambda [-3 + 2 f_1^* + 1,5 f_2^*] + 1 [-1 - 1 f_1^* - 1 f_2^*]$$

 TYPE LUR/E POSTNIKOV

 SYSTEME:SY6

II.2.3 - Remarque sur l'existence de zéros constants

La propriété de non factorisation II.3 fait intervenir l'absence de zéros constants (c'est-à-dire indépendants des termes non linéaires) dans le polynôme symbolique d'une matrice A(.).

Il serait fastidieux d'avoir à calculer les zéros d'un polynôme à coefficients non constants pour tester cette propriété. La notion de non linéarité génératrice, présentée dans la partie précédente, permet de lever cette difficulté. On a en effet, d'après (II.22) et (II.23) :

$$p(\lambda, A(.)) \equiv p_0(\lambda) + \sum_{j=1}^g \phi_j(.) r_j(\lambda)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R}^g \quad a^T \Phi(.) = \alpha \implies a = 0$$

Le polynôme $p(\lambda, A(.))$ ne présentera de zéro constant que si $p_0(\lambda)$, $r_j(\lambda)$ ($j = 1, \dots, g$) ont au moins un zéro λ_0 en commun ($p_0(\lambda_0) = r_j(\lambda_0) = 0$; $\forall j = 1, \dots, g$).

Le test de la propriété II.3 nécessite donc le calcul des q zéros de $p_0(\lambda)$ et des $g(q-1)$ zéros des polynômes $r_j(\lambda)$.

Dans le cas d'un système de type Lurie-Postnikov monovariante, le polynôme symbolique ne présente de zéro constant que dans le cas où la fonction de transfert de la boucle ouverte est dégénérée /Popov, 1973/. On retrouve alors le cas classique de non commandabilité ou non observabilité du modèle matriciel adopté.

II.3 - Condition nécessaire et suffisante de similitude, algorithme de modélisation du régime autonome

Nous avons vu que l'égalité des polynômes symboliques de deux matrices était une condition nécessaire à leur similitude. Lorsque l'une des propriétés II.2 ou II.3 est vérifiée pour ces deux matrices, la condition est alors également suffisante.

Théorème II.3 : CNS de similitude de deux matrices C(1) (resp. L(1))

Soient A(.) et B(.), deux matrices du type C(1) décrit en (II.14) (resp. L(1) décrit en (II.15)) et vérifiant chacune les conditions de la propriété II.3 ou bien de II.2-a (resp. II.2-b).

A(.) et B(.) sont semblables (et représentent donc le même régime libre) si et seulement si elles ont même polynôme symbolique :

$$\det (\lambda I_q - A(.)) = \det (\lambda I_q - B(.)) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Ce théorème va permettre de résoudre la problématique P1 (§ I.4) dans le cas de systèmes de type L(1) ou C(1). La démarche à suivre est schématisée Figure II.6. Nous allons l'explicitier à partir de trois exemples simples, correspondant aux trois cas de figure envisageable. Un quatrième exemple sera traité ultérieurement (§ II.6), qui concerne une représentation canonique particulière.

Commentaires de la Figure II.6 :

- * TEST T2 : le PS de A(.) n'a-t-il aucun zéro constant ?
(CS pour que A(.) soit semblable à une forme compagnon)
- * TEST T3 : la paire (A^T,h) est-elle observable ?
(CNS pour que A(.) soit semblable à une forme compagnon)
- * La branche (T3, T'3, T4) est plus complexe que (T2, T4), c'est pourquoi elle est traitée dans le cas T2 FAUX.
- * Si T3 FAUX, réduction d'ordre possible par l'algorithme proposé pour la démonstration du Théorème II.1 (Étape n° 6), on ne conserve alors que le bloc non linéaire, après avoir par exemple testé la stabilité du bloc linéaire.
- * Si T1 FAUX, on peut se ramener à une modélisation admissible par agrégation, ou bien utilisation du PS multivariable.
- * Exemple II.3.1 : T1 VRAI T2 VRAI
- * Exemple II.3.2 : T1 VRAI T2 FAUX T3 VRAI
- * Exemple II.3.3 : T1 VRAI T2 FAUX T3 FAUX

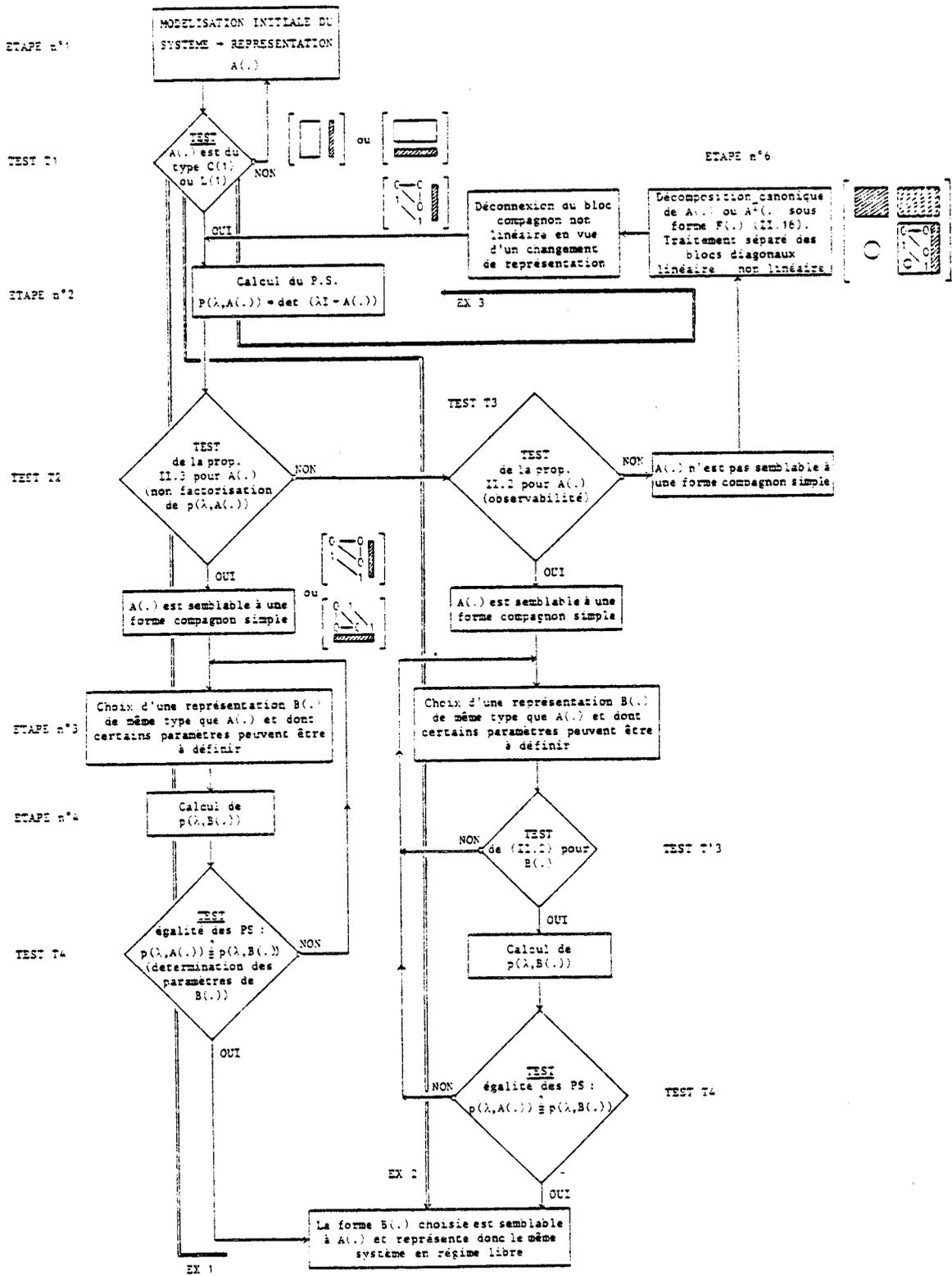


FIGURE II.6

II.3.1 - Exemple n° 1 : $(T1) = 1$ $(T2) = 1$

Ce premier exemple correspond au cas où les deux tests T1 et T2 sont vérifiés. Le système étudié est de type discret et correspond à un moteur commandé par une impulsion modulée en largeur /Laurent & al, 1972/. Le schéma-bloc correspondant est décrit Figure II.7 :

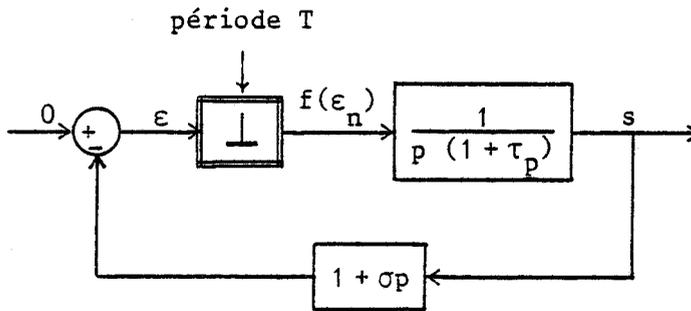


FIGURE II.7

La sortie $f(\epsilon_n)$ de l'échantillonneur non linéaire est décrite Figure II.8, (nous poserons $\epsilon_n = \epsilon(nT)$) :

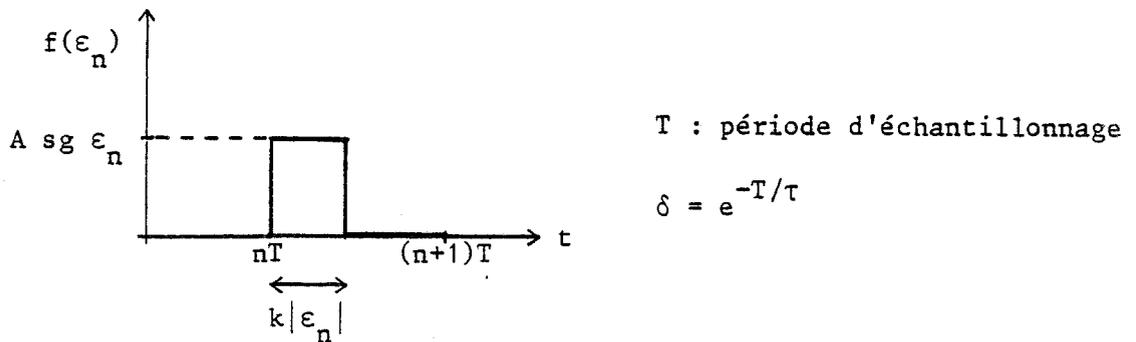


FIGURE II.8

Etape n° 1 :

Une mise en équations par la méthode modale donne :

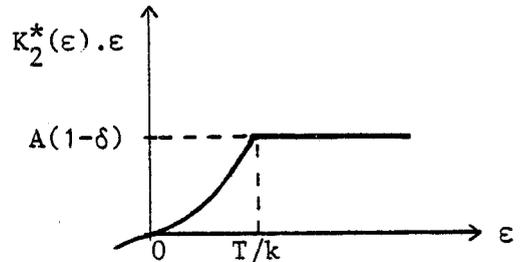
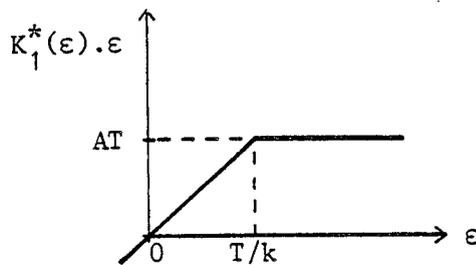
$$x_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} x_n + \begin{bmatrix} k|\epsilon_n| A \operatorname{sgn} \epsilon_n \\ A \operatorname{sgn} \epsilon_n (1 - e^{-k|\epsilon_n|/\tau}) e^{-T/\tau + k|\epsilon_n|/\tau} \end{bmatrix}$$

pour $|\epsilon_n| < T/k$ (commande non saturée)

$$x_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} x_n + \begin{bmatrix} A T \operatorname{sg} \varepsilon_n \\ A \operatorname{sg} \varepsilon_n (1 - e^{-T/\tau}) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{pour } |\varepsilon_n| > T/K \\ \text{(commande saturée)} \end{array}$$

$$\varepsilon_n = (-1, \tau - \alpha) x_n$$

Les deux vecteurs de commande en régime saturé ou non saturé conduisent aux expressions de deux non linéarités $K_1^*(\varepsilon)$ et $K_2^*(\varepsilon)$ décrites ci-dessous :



Il vient alors la mise en équation initiale :

$$x_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 - K_1^*(\varepsilon_n) & \alpha K_1^*(\varepsilon_n) \\ -K_2^*(\varepsilon_n) & \delta + \alpha K_2^*(\varepsilon_n) \end{bmatrix} x_n = A(\varepsilon_n) x_n$$

Test T1 :

Le système est du type C(1), puisque les termes non constants K_1^* et K_2^* peuvent être isolés dans deux colonnes proportionnelles :

$$\det \begin{bmatrix} -K_1^* & \alpha K_1^* \\ -K_2^* & \alpha K_2^* \end{bmatrix} = 0$$

Etape n° 2 :

Le polynôme symbolique est défini par la trace et le déterminant de la matrice $A(\varepsilon_n)$, puisque le système est d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} p(\lambda, A(\varepsilon_n)) &= \lambda^2 - \operatorname{tr} A(\varepsilon_n) \cdot \lambda + \det A(\varepsilon_n) \\ &= \lambda^2 + [K_1^*(\varepsilon_n) - \alpha K_2^*(\varepsilon_n) - \delta - 1] \lambda - \delta K_1^*(\varepsilon_n) + \alpha K_2^*(\varepsilon_n) + \delta \end{aligned}$$

Test T2 :

$p(\lambda, A(\varepsilon_n))$ n'a pas de zéro indépendant de ε_n ; en effet, K_1^* et K_2^* sont des non linéarités génératrices et pour $T \neq 0$ ($\delta \neq 1$), les trois polynômes suivants n'ont pas de zéro commun :

$$\begin{array}{ll} \lambda^2 - (\delta + 1) \lambda + \delta & \text{(termes constants)} \\ \lambda - \delta & \text{(coefficient } K_1^*) \\ -\alpha\lambda + \alpha & \text{(coefficient } K_2^*) \end{array}$$

Etape n° 3 :

On choisit la représentation suivante, dont la trace est a priori la même que celle de $A(\varepsilon_n)$, mais dont les termes β et $g(\varepsilon_n)$ sont à déterminer :

$$B(\varepsilon_n) = \begin{bmatrix} 1 & g(\varepsilon_n) \\ \beta & \delta - K_1^*(\varepsilon_n) + \alpha K_2^*(\varepsilon_n) \end{bmatrix}$$

Le déterminant de $B(\varepsilon_n)$ est égal à : $\delta - K_1^* + \alpha K_2^* - \beta g$

Test T4 :

$A(\varepsilon_n)$ et $B(\varepsilon_n)$ sont semblables si et seulement si elles ont même polynôme symbolique, c'est-à-dire dans ce cas :

$$\beta g(\varepsilon_n) = - (1 - \delta) K_1^*(\varepsilon_n) \quad \text{par exemple} \quad \beta = \delta - 1 \quad g = K_1^*$$

II.3.2 - Exemple n° 2 : (T1) = 1 (T2) = 0 (T3) = 1

Cet exemple montre sur un cas très particulier que la condition intervenant dans la propriété II.3 n'est pas équivalente à celle de la propriété II.2. Considérons le système décrit par :

$$\dot{x} = A(.) x$$

$$A(.) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -f_2(.) \\ 1 & 0 & -f_1(.) - f_2(.) \\ 0 & 1 & -1 - f_1(.) \end{bmatrix}$$

Cette équation correspond à l'étape n° 1.

Test T1 :

Le système est de type C(1) (cf (II.14)) avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad v(.) = \begin{bmatrix} -f_2(.) \\ -f_1(.) - f_2(.) \\ -f_1(.) \end{bmatrix} \quad h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Etape n° 2 :

Son polynôme symbolique est :

$$p(\lambda, A(.)) = \lambda^3 + (1 + f_1(.)) \lambda^2 + (f_1(.) + f_2(.)) \lambda + f_2(.)$$

Test T2 :

Ce polynôme a un zéro constant, le test T2 est donc négatif :

$$p(\lambda, A(.)) = (\lambda + 1) (\lambda^2 + f_1(.)\lambda + f_2(.))$$

Test T3 :

$$h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A^T h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad A^{T2} h = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ces trois vecteurs sont indépendants, les conditions de la propriété II.2-a sont donc vérifiées.

Etape n° 3 :

On choisit pour B(.) une forme en flèche /Benrejeb, 1976/ :

$$B(.) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -\alpha(.) \\ 0 & -\delta & -\beta(.) \\ 1 & 1 & -\gamma(.) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha(.) \\ -\beta(.) \\ -\gamma(.) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Test T'3 :

$$h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B^T h = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B^{T_2} h = \begin{bmatrix} -1 \\ -\delta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ces trois vecteurs sont indépendants si et seulement si δ est différent de 1, ce que nous supposons.

Etape n° 4 :

$$\begin{aligned} \det (\lambda I - B(.)) &= \lambda^3 + \lambda^2 [1 + \delta + \gamma(.)] \\ &+ \lambda [\alpha(.) + \beta(.) + (\delta + 1) \gamma(.) + \delta] \\ &+ \beta(.) + \delta(\alpha(.) + \gamma(.)) \end{aligned}$$

Test T4 :

On identifie α , β et γ pour que $B(.)$ soit semblable à $A(.)$.

Etape n° 5 :

$$B(.) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta & -[\delta^2 - \delta f_1(.) + f_2(.)] \\ 1 & 1 & \delta - f_1(.) \end{bmatrix}$$

est semblable à $A(.)$.

II.3.3 - Exemple n° 3 : (T1) = 1 (T2) = 0 (T3) = 0

Nous considérons ici le cas d'une forme en flèche présentant dans sa diagonale deux termes égaux :

$$A(.) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -f(.) \end{bmatrix}$$

Test T1 :

A(.) est du type L(1) et C(1). Nous considérons par exemple la formulation L(1) (II.15) :

$$A(.) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \quad 1 \quad -f(.)]$$

Etape n° 2 :

Le polynôme symbolique de A(.) est alors :

$$p(\lambda, A(.)) = (\lambda + 1) [(\lambda + 2) (\lambda - 1) + f(.) (\lambda + 1)]$$

Test T2 :

Ce polynôme a une racine constante -1.

Test T3 :

$$k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Ak = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A^2 k = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rang } \{k, Ak, A^2 k\} = 2 < 3$$

Etape n° 6 :

La décomposition $F^T(\cdot)$ est menée sur $A(\cdot)$. La matrice de changement de base est alors définie comme indiqué dans la démonstration du Théorème II.1 :

$$P^{-1T} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad P^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1T} A(\cdot) P^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2-f & -1-f \end{bmatrix} = F^T(\cdot)$$

Le système est alors décomposé en deux sous-systèmes interconnectés, dont l'un est décrit par la matrice réduite :

$$C_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2-f & -1-f \end{bmatrix}$$

II.4 - Modélisation en régime non autonome

La méthode proposée précédemment permet de déterminer différentes mises en équations du régime autonome des systèmes de type C(1), décrits en (II.12), ou de type L(1), décrits en (II.13) :

$$(II.12) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A.x(t) + v(\cdot).\varepsilon(t) \\ \varepsilon(t) = h^T.x(t) + u(t) \end{cases} \quad (\text{rappel})$$

$$(II.13) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A.x(t) + k.\varepsilon(t) \\ \varepsilon(t) = v^T(\cdot).x(t) + u(t) \end{cases} \quad (\text{rappel})$$

Ces deux équations s'écrivent également, en utilisant respectivement les définitions (II.14) et (II.15) des matrices d'évolution $A(\cdot)$:

$$(II.25) \quad \dot{x}(t) = A(\cdot).x(t) + v(\cdot).u(t)$$

$$(II.26) \quad \dot{x}(t) = A(\cdot).x(t) + k.u(t)$$

Le polynôme symbolique est un outil pratique de calcul des matrices $A(\cdot)$ dans différentes bases. Nous allons montrer dans cette partie que le vecteur de commande ($v(\cdot)$ ou k) peut être calculé à partir de la nouvelle matrice $A(\cdot)$ choisie et de la formulation initiale (II.25) ou (II.26).

II.4.1 - Systèmes de type L(1)

Considérons l'équation (II.25) comme formulation originelle d'un système. Après changement de base P , elle devient :

$$(II.27) \quad \dot{y}(t) = B(\cdot).y(t) + \ell.u(t)$$

avec :

$$B(\cdot) = PA(\cdot)P^{-1} \quad \ell = Pk \quad y(t) = Px(t)$$

Nous supposons que la matrice $A(\cdot)$ ne contient de termes non linéaires que dans sa dernière ligne, c'est-à-dire que $k^T = [0 \text{ --- } 0 \ \alpha]$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Le choix de la matrice $B(\cdot)$ est souvent fait de façon à ce qu'elle présente la même propriété, et c'est ce cas que nous considérons.

Le vecteur k doit donc être P -invariant, c'est-à-dire que $Pk = k$. La dernière colonne de P est alors $(0 \text{ --- } 0 \ 1)^T$. Le vecteur de commande reste invariant entre les relations (II.25) et (II.26), c'est-à-dire que l'on a $\ell = k$.

Ce résultat reste valable si k est quelconque, à condition d'être invariant par P . Le module de k peut notamment être non constant, pourvu que sa direction soit constante.

C'est le cas plus général d'un système décrit par (II.28) :

$$(II.28) \quad \begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = A x(t) + k \varepsilon(t) \\ \varepsilon(t) = v^T(.) x(t) + \phi(u(t), t) \\ \phi(u(t), t) = \phi^*(u(t), t) u(t) \\ \phi^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

Ainsi, la détermination du vecteur de commande est immédiate dans le cas d'un système de type L(1).

II.4.2 - Systèmes de type C(1) / Détermination de la commande et du changement de base

Nous envisagerons dans cette partie la détermination du vecteur de commande $w(.)$ associé à une matrice $B(.)$ dont tous les termes non constants sont situés dans la dernière colonne, et ceci à partir d'une représentation initiale (II.25) présentant la même propriété. La nouvelle représentation, après changement de base P , est donc :

$$(II.29) \quad \dot{\bar{y}}(t) = B(.) y(t) + w(.) u(t)$$

avec :

$$B(.) = P A(.) P^{-1} \quad w(.) = P v(.) \quad y(t) = P x(t)$$

De plus, nous noterons à partir de (II.12) :

$$\begin{aligned} A(.) &= A + v(.) h^T \\ v(.) &= (v_1(.) \dots v_q(.))^T \\ h &= (0 \dots 0 \alpha)^T \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ B &= P A P^{-1} \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$B(.) = B + P v(.) h^T = B + w(.) h^T$$

La méthode de détermination de $B(.)$ à l'aide de son polynôme symbolique $P(\lambda, B(.))$ permet de calculer le vecteur de commande $w(.)$ à condition de séparer l'influence de chaque composante de $v(.)$ au niveau du calcul des polynômes, qui se décomposent alors sous la forme déjà envisagée en (II.21) :

$$p(\lambda, A(.)) = \det (\lambda I - A(.)) = p_0(\lambda) + \sum_{i=1}^q v_i(.) p_i(\lambda)$$

avec :

pour $i = 1, \dots, q$ $p_i(\lambda)$ polynômes de degré inférieur ou égal à $q-1$

et $p_0(\lambda)$ polynôme de degré q

La relation $w(.) = P v(.)$ indique que chaque composante de $w(.)$ est une combinaison linéaire des $v_i(.)$:

$$w_i(.) = \sum_{j=1}^q p_{ij} v_j(.)$$

Cette décomposition se retrouve explicitement dans la dernière colonne de la matrice $B(.)$, additionnée à une constante b_{iq} venant de la dernière colonne de B :

$$b_{iq}(\lambda) = b_{iq} + \sum_{j=1}^q p_{ij} v_j(.)$$

Il suffit de retrancher les constantes b_{iq} pour déterminer le nouveau vecteur de commande $w(.)$.

Ce même calcul permet donc de déterminer **a posteriori** le changement de base P permettant de passer de $A(.)$ à $B(.)$.

II.4.3 - Remarques sur le choix de la décomposition informatique du polynôme symbolique

Nous avons vu dans la partie "calcul informatisé" (§ II.2.2.2) que le polynôme symbolique peut être décomposé selon les formules (II.21) (dernière colonne) ou (II.23) (non linéarités génératrices). La première méthode est plus longue que la seconde, mais permet le calcul du vecteur de commande, ainsi que du changement de base. Ceci est résumé dans le tableau présente Figure II.9.

	Développement par rapport à tous les termes $v_i(.)$ de la dernière colonne (II.21)	Développement par rapport aux g non linéarités génératrices (II.23)
Nombre de calculs de polynômes caractéristiques d'ordre q	$q + 2$	$g + 2$ (3 dans le cas Lurie-Postnikov monovariabile)
Test des "zéros constants"	Nécessité de regrouper en fonction des non linéarités génératrices, puis	zéros d'1 polynôme de degré q zéros de g polynômes de degré maxi $q-1$ (2 polynômes $N(\lambda)$ et $D(\lambda)$) dans le cas Lurie-Postnikov monovariabile
Possibilité de calcul du vecteur de commande dans le cas L(1)	oui (immédiat)	oui (immédiat)
Possibilité de calcul du vecteur de commande et du changement de base dans le cas C(1)	oui par lecture de la dernière colonne de la matrice d'évolution	non sauf par application directe de l'algorithme décrit dans la démonstration du théorème II.1, § II.1, Chapitre II

FIGURE II.9 - Etude comparative des deux algorithmes de calcul du polynôme symbolique

II.4.4 - Exemple

Soit le système décrit par $A(\epsilon)$:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1+\epsilon^2 \\ 1 & 0 & -2+2\epsilon^4 \\ 0 & 1 & -1-\epsilon^2+\epsilon^4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \epsilon^2 \\ 2\epsilon^4 \\ -\epsilon^2+\epsilon^4 \end{bmatrix} u(t)$$

$$x^T = (\xi_1, \xi_2, \epsilon)^T$$

Les non linéarités génératrices sont, par exemple :

$$\phi_1(\epsilon) = \epsilon^2$$

$$\phi_2(\epsilon) = \epsilon^4$$

Nous développerons ici le polynôme symbolique par rapport à toutes les non-linéarités v_i du vecteur de commande, de façon à considérer une nouvelle équation du régime forcé :

$$v_1(\epsilon) = \epsilon^2$$

$$v_2(\epsilon) = 2\epsilon^4$$

$$v_3(\epsilon) = -\epsilon^2 + \epsilon^4$$

Il vient :

$$p(\lambda, A(\epsilon)) = [\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 1] - v_1(\epsilon) [1] - v_2(\epsilon) [\lambda] - v_3(\epsilon) [\lambda^2]$$

Soit la matrice $B(\epsilon)$ définie par :

$$B(\varepsilon) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & -2 & \beta \\ 1 & 1 & \gamma \end{bmatrix}$$

Les polynômes symboliques de $A(\varepsilon)$ et $B(\varepsilon)$ sont identiques si :

$$\alpha = 1 + v_1 - v_2 + v_3 = 1 - \varepsilon^4$$

$$\beta = -7 - v_1 + 2v_2 - 4v_3 = -7 + 3\varepsilon^2$$

$$\gamma = 2 + v_3 = 2 - \varepsilon^2 + \varepsilon^4$$

Le changement de base est défini à partir des coefficients des v_i :

$$P = \begin{bmatrix} +1 & -1 & +1 \\ -1 & +2 & -4 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \quad PA(\varepsilon)P^{-1} = B(\varepsilon)$$

Le nouveau vecteur de commande associé à $B(\varepsilon)$ est :

$$\begin{bmatrix} -\varepsilon^4 \\ 3\varepsilon^2 \\ -\varepsilon^2 + \varepsilon^4 \end{bmatrix}$$

II.5 - Application aux systèmes de type Lurie-Postnikov monovariables

Cette partie a pour but de regrouper les résultats précédents concernant la classe de processus décrits par le schéma de la Figure II.3, qui rentre dans la catégorie des systèmes à non linéarités de rang 1. La matrice d'évolution en régime libre s'écrit alors (cf (II.6)) :

$$A(\varepsilon, t) = A + b \phi^*(\varepsilon, t) c^T \quad \phi^*(\varepsilon, t) \in \mathcal{R}$$

Cette matrice est à la fois de type C(1) et L(1), décrit en (II.8) et (II.9) : par changement de base, on peut obtenir un regroupement des termes non constants dans une seule colonne, ou bien dans une seule ligne.

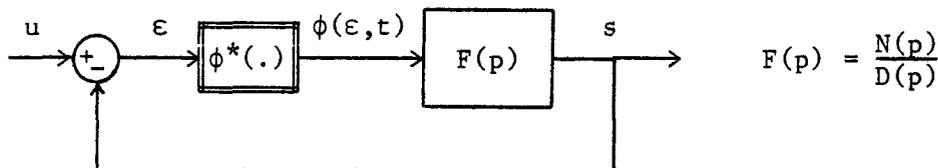


FIGURE II.3

De plus, le calcul du polynôme symbolique $p(\lambda, A(\epsilon, t))$ d'un tel système est particulièrement simple, puisqu'il correspond à celui du polynôme caractéristique du système obtenu pour $\phi^*(\epsilon, t)$ constant :

$$(II.30) \quad p(\lambda, A(\epsilon, t)) \equiv D(\lambda) + \phi^*(\epsilon, t) \cdot N(\lambda)$$

La propriété (II.3) concernant l'absence de zéros constants pour $p(\lambda, A(\epsilon, t))$ est alors facile à tester et correspond au cas où la fonction de transfert $F(p)$ n'est pas dégénérée, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas simplification d'un pôle par un zéro.

La recherche du vecteur de commande et du changement de base associés à une représentation peut être menée comme dans le cas plus général présenté précédemment. Cependant, la détermination de la direction du vecteur de commande à partir de la matrice d'évolution est immédiate, à condition que les termes non constants soient situés dans une seule rangée de la matrice ; on a en effet :

$$(II.31) \quad \dot{x}(t) = (A + b \phi^*(\epsilon, t) c^T) x(t) + b \phi^*(\epsilon, t) u(t)$$

Le cas d'une représentation L(1), avec une seule ligne non constante (la dernière par exemple) correspond à :

$$b = (0 \quad \dots \quad 0 \quad \beta)^T \quad \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$$

qui est la direction du vecteur de commande.

Le cas d'une représentation $C(1)$, avec une seule colonne non constante (la dernière par exemple) correspond à :

$$c = (0 \quad 0 \quad \gamma)^T \quad \gamma \in \mathbb{R} - \{0\}$$

La direction b du vecteur de commande est alors connue en ne considérant dans la dernière colonne de $A(\varepsilon, t)$ que les termes en facteur de $\phi^*(\varepsilon, t)$. Par exemple, pour :

$$\begin{aligned} N(p) &= 8p + 6 \\ D(p) &= p^3 + p^2 - 5p - 3 \end{aligned}$$

on peut définir a priori :

$$A(\varepsilon, t) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1+\phi^*(\varepsilon, t) \\ +1 & +1 & 3-4\phi^*(\varepsilon, t) \\ 0 & +2 & -1+0\phi^*(\varepsilon, t) \end{bmatrix}$$

Le vecteur de commande est alors, à la constante multiplicative γ^{-1} près :

$$b \phi^*(\varepsilon, t) = \gamma^{-1} \begin{bmatrix} \phi^*(\varepsilon, t) \\ -4\phi^*(\varepsilon, t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

γ est connue à condition que la dernière composante de l'état, qui est $-\gamma s$, soit connue en fonction de la sortie s de $F(p)$.

II.6 - Cas de la forme en flèche mince. Polynôme représentatif

Des travaux antérieurs /Benrejeb, 1980/ ont mis en évidence et utilisé la similitude de la forme compagnon $C_q^T(\cdot)$ (cf (II.16-a) et de la forme en flèche mince $FM^T(\cdot)$:

$$C_q^T(.) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ -f_0(.) & \dots & -f_{q-2}(.) & -f_{q-1}(.) & 1 \end{bmatrix}$$

$$FM^T(.) = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & & & & \alpha_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & & & \alpha_i \\ & & & & \vdots \\ & & & & \alpha_{q-1} \\ \beta_1(.) & \dots & \beta_i(.) & \dots & \beta_{q-1}.) & \beta_q(.) \end{bmatrix}$$

avec :

$$R(\lambda) = \prod_{i=1}^{q-1} (\lambda + \lambda_i) \quad , \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall i \neq j$$

et pour $i = 1, \dots, q-1$:

$$\alpha_i = - \left[\frac{\lambda + \lambda_i}{R(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_i}$$

$$\beta_i(.) = \left[\lambda^q + \sum_{k=0}^{q-1} f_k(.) \lambda^k \right]_{\lambda=-\lambda_i}$$

$$\beta_q(.) = - f_{q-1}(.) + \sum_{i=1}^{q-1} \lambda_i$$

De même, la matrice $C_q(.)$ est semblable à $FM(.)$. Les termes $\beta_i(.)$ intervenant dans $FM(.)$ sont alors définis comme les valeurs du polynôme symbolique de $C_q^T(.)$ aux points $(-\lambda_i)$. Dans ces conditions, il y a bien identité des polynômes symboliques de $C_q^T(.)$ et $FM(.)$. Dans cette modélisation, la dernière variable du vecteur état est appelée **coordonateur** /Benrejeb, 1976/.

Les avantages de ce type de modélisation sont nombreux /Benrejeb, 1980/ /Dauphin-Tanguy, 1983/ et reposent sur le fait que les paramètres λ_i peuvent être choisis arbitrairement, à condition d'être distincts. Le choix des λ_i correspond à celui d'un polynôme $R(\lambda)$. Nous appellerons $R(\lambda)$ "**polynôme représentatif** associé à la forme en flèche $FM(.)$ ". Cette notion sera élargie dans un chapitre suivant, en considérant notamment le cas de racines λ_i multiples, complexes ou non constantes. Notons dès à présent que si le polynôme symbolique, invariant de représentation, correspond à la structure du système, le polynôme représentatif correspond, lui, à la modélisation adoptée.

III - POLYNÔME SYMBOLIQUE DES SYSTEMES MULTIVARIABLES C(k) ET L(k)

La partie précédente a montré comment étudier la similitude de deux matrices de type C(1) ou L(1), c'est-à-dire dont les termes non constants peuvent être regroupés dans une seule rangée. Nous abordons ici le problème plus général d'un système représenté par les équations (II.10) ou (II.11), et dont la matrice d'évolution peut présenter k rangées non constantes :

$$A(.) = A + V(.) H^T \quad (II.8) \quad (\text{type C}(k))$$

ou

$$A(.) = A + K V^T(.) \quad (II.9) \quad (\text{type L}(k))$$

avec :

$$A \in \mathbb{R}^{q \times q} \quad K, H, V(.) \in \mathbb{R}^{q \times k}$$

Nous étudierons principalement les matrices de type C(k), les démonstrations proposées étant en général valables pour les deux types.

La notion de polynôme symbolique, proposée précédemment comme outil de modélisation pour les systèmes L(1) et C(1), peut être généralisée en utilisant, non plus des notations scalaires, mais des notations matricielles. Les coefficients du polynôme sont alors des matrices carrées d'ordre k .

Cette présentation nécessite l'introduction de différents outils de calcul sur une classe de matrices décomposées en blocs commutatifs. Ceci sera envisagé dans une première section.

Dans un deuxième temps, il sera montré que les matrices de type C(k) ou L(k) peuvent être conditionnées de façon à entrer dans la classe envisagée ci-dessus, sous réserve d'introduire un degré de redondance suffisant dans l'ordre du modèle.

Ceci nous permettra enfin d'énoncer des règles d'utilisation du polynôme symbolique matriciel.

Les résultats présentés ici ont été initialement destinés à l'étude des systèmes discrets de grande dimension /El Moudni, Richard & Borne, 1981/ /El Moudni, 1981/ /El Moudni, Richard & Dauphin, 1982/. L'application aux systèmes continus a été plus récemment proposée dans /Rotella, 1983/.

III.1 - Règles de calcul sur les matrices à blocs commutatifs

III.1.1 - Définitions et notations

Soit \mathbb{E} un anneau de matrices d'ordre k (par exemple, $\mathbb{E} = \mathbb{K}^{k \times k}$).

Soit \mathbb{E}' un sous-anneau commutatif de \mathbb{E} .

Soit E l'anneau des matrices carrées d'ordre r à éléments dans \mathbb{E}' /Rosenbrock & Storey, 1970/ : $E = \mathbb{E}'^{r \times r}$.

Afin d'insister sur le partitionnement d'une matrice A de E , nous emploierons quelquefois le terme "bloc-matrice". De même, une colonne (resp. ligne) de blocs intervenant dans la partition sera appelée "bloc-colonne" (resp. "bloc-ligne").

E , muni de l'addition, présente alors une structure de module à gauche sur E' /Chenin, 1982/, à condition de lui associer une loi multiplicative externe notée \otimes , et définie par :

$$A \in E \quad A = (A_{ij})_{i,j=1,\dots,r}, \quad A_{ij} \in E'$$

$$B \in E'$$

$$\otimes : E' \times E \rightarrow E$$

$$A \rightarrow B \otimes A$$

$$B \otimes \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \dots & A_{rr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BA_{11} & \dots & BA_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ BA_{r1} & \dots & BA_{rr} \end{bmatrix}$$

L'élément neutre de cette loi est la matrice identité I_k de E' :

$$I_k \otimes A = A \quad \forall A \in E$$

On peut noter que la structure de module rappelle celle d'espace vectoriel ; cependant, le module est défini sur un anneau et non sur un corps.

Définition :

On appelle *déterminant matriciel* de $A \in E$ la matrice carrée de E' notée $DET(A)$ et telle que :

$$DET A = \sum Sg(n_1, \dots, n_k) A_{n_1,1} \cdot A_{n_2,2} \cdot \dots \cdot A_{n_k,k}$$

où la somme est étendue à toutes les permutations (n_1, \dots, n_k) de $\{1, \dots, k\}$ et Sg est la signature de chaque permutation.

Cette définition permet de calculer le déterminant matriciel de A par les règles usuelles des déterminants scalaires.

III.1.2 - Propriétés

Nous rappelons ici les propriétés de la fonction DET, qui sont par ailleurs développées dans /El Moudni, Richard & Borne, 1981/ et /El Moudni, 1981/.

(1) DET est une fonction multilinéaire par rapport aux bloc-colonnes de A.

(2) Si A et A' sont des matrices de E,

$$\text{DET } (A.A') = \text{DET } A . \text{DET } A'$$

(3) DET A peut être calculé par les méthodes scalaires usuelles de développement d'un déterminant par rapport à ses lignes ou à ses colonnes, avec introduction de mineurs matriciels associés à chaque élément A_{ij} de A.

(4) L'inverse A^{-1} de A existe si $(\text{DET } A)^{-1}$ existe et peut être calculée comme par les méthodes usuelles. On est alors amené à définir l'adjointe matricielle de A.

$$(5) \text{DET } (A^T) = (\text{DET } A)^T \quad \text{avec} \quad A^T = (A_{ji}^T)$$

$$(6) \det A = \det (\text{DET } A)$$

(7) On peut définir le polynôme caractéristique matriciel de A par :

$$P(\Lambda, A) \equiv \text{DET } (\Lambda \otimes I - A)$$

I matrice identité de E

A matrice de E'

P(Λ , A) polynôme en Λ

On a alors :

$$P(\Lambda, A) \equiv \Lambda^r + \sum_{i=0}^{r-1} P_i \Lambda^i \quad P_i \in E'$$

(8) La matrice A vérifie son équation caractéristique matricielle :

$$A^r + \sum_{i=0}^{r-1} P_i \otimes A^i = 0$$

Cette propriété correspond à la généralisation du Théorème de Cayley-Hamilton /Gantmacher, 1959/.

La notion de polynôme caractéristique matriciel va nous permettre de généraliser celle de polynôme symbolique.

III.2 - Dilatation d'ordre. Définition du polynôme symbolique en multivariable (PSM)

Le cas envisagé dans la partie précédente est assez particulier, car il suppose que toutes les matrices A_{ij} composant A aient la même décomposition d'espaces propres, de façon à présenter la propriété de commutativité.

Il est cependant possible d'utiliser ces résultats dans le cas général d'un système de type $C(k)$. Deux objections doivent alors être levées :

- d'une part, les coefficients des k dernières colonnes ne sont pas constants,

- d'autre part, la matrice ne présente pas de façon naturelle un partitionnement en blocs commutatifs.

Le premier problème peut être résolu par le même symbolisme que dans le cas scalaire, où l'on est amené à définir un polynôme caractéristique "instantané" comme si la matrice était constante.

La deuxième difficulté peut être tournée en introduisant un degré de redondance suffisant dans le modèle. C'est cette seconde méthode que nous allons tout d'abord présenter.

Remarquons que la notion de redondance, en elle même, a déjà été utilisée par plusieurs auteurs dans le but d'améliorer l'analyse des systèmes complexes /Laurent & al, 1974/ /Siljak, 1980/ /El Moudni, 1981/.

III.2.1 - Notations

Considérons l'équation matricielle de type C(k) :

$$(II.32) \quad \dot{x} = A(.) x$$

où A(.) est décrite en (II.8).

Un choix judicieux des k dernières composantes de x permet d'écrire (en posant $r - 1 + k = q$) :

$$(II.33) \quad A(.) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1,r-1} & \beta_{11}(\cdot) & \dots & \beta_{1k}(\cdot) \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2,r-1} & \beta_{21}(\cdot) & \dots & \beta_{2k}(\cdot) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{q1} & \dots & \alpha_{q,r-1} & \beta_{q1}(\cdot) & \dots & \beta_{qk}(\cdot) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c} A_{11} & B_{12}(\cdot) \\ \hline (r-1) \times (r-1) & (r-1) \times k \end{array} \\ \begin{array}{c|c} A_{21} & B_{22}(\cdot) \\ \hline k \times (r-1) & k \times k \end{array} \end{bmatrix}$$

Les (r-1) premières colonnes sont constantes, les k dernières varient avec l'état et le temps.

Le vecteur état x est alors décomposé en :

$$(II.34) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r-1}, \xi_r, \dots, \xi_q)^T \in \mathbb{R}^q \\ \xi_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, \dots, q) \\ x_o = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r-1})^T \in \mathbb{R}^{r-1} \\ x_r = (\xi_r, \xi_{r+1}, \dots, \xi_q)^T \in \mathbb{R}^k \quad k = q - r + 1 \end{array} \right.$$

Nous noterons de plus :

$$B_{22}(\cdot) = (\sigma_{ij}) \quad i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$$

avec, par conséquent :

$$\sigma_{ij} = \beta_{i+r-1, j}$$

La $i^{\text{ème}}$ ligne de A_{21} sera notée (ligne i A_{21}) :

$$\text{ligne } i \text{ } A_{21} = (\alpha_{i+r-1, 1}, \dots, \alpha_{i+r-1, r-1}) \quad i \in \{1, \dots, k\}$$

La $j^{\text{ème}}$ colonne de $B_{12}(\cdot)$ sera notée (col j $B_{12}(\cdot)$) :

$$\text{col } j \text{ } B_{12}(\cdot) = (\beta_{j, 1}(\cdot), \dots, \beta_{j, r-1}(\cdot))^T \quad j \in \{1, \dots, k\}$$

La dimension de certaines matrices fera intervenir le nombre entier :

$$Q = k \times r \in \mathbb{N}$$

Nous allons, à partir de la représentation (II.33), définir des représentations matricielles spécifiques, correspondant à un vecteur état d'ordre Q (c'est-à-dire $k.r$, en général supérieur à l'ordre initial q). Ces matrices seront dites "dilatées" et constituent des représentations redondantes du système, à partir desquelles un polynôme symbolique matriciel (PSM) pourra être défini simplement.

III.2.2 - Première forme dilatée $A_1(\cdot)$

Il est possible de représenter (II.33) par rapport au vecteur χ_1 défini par :

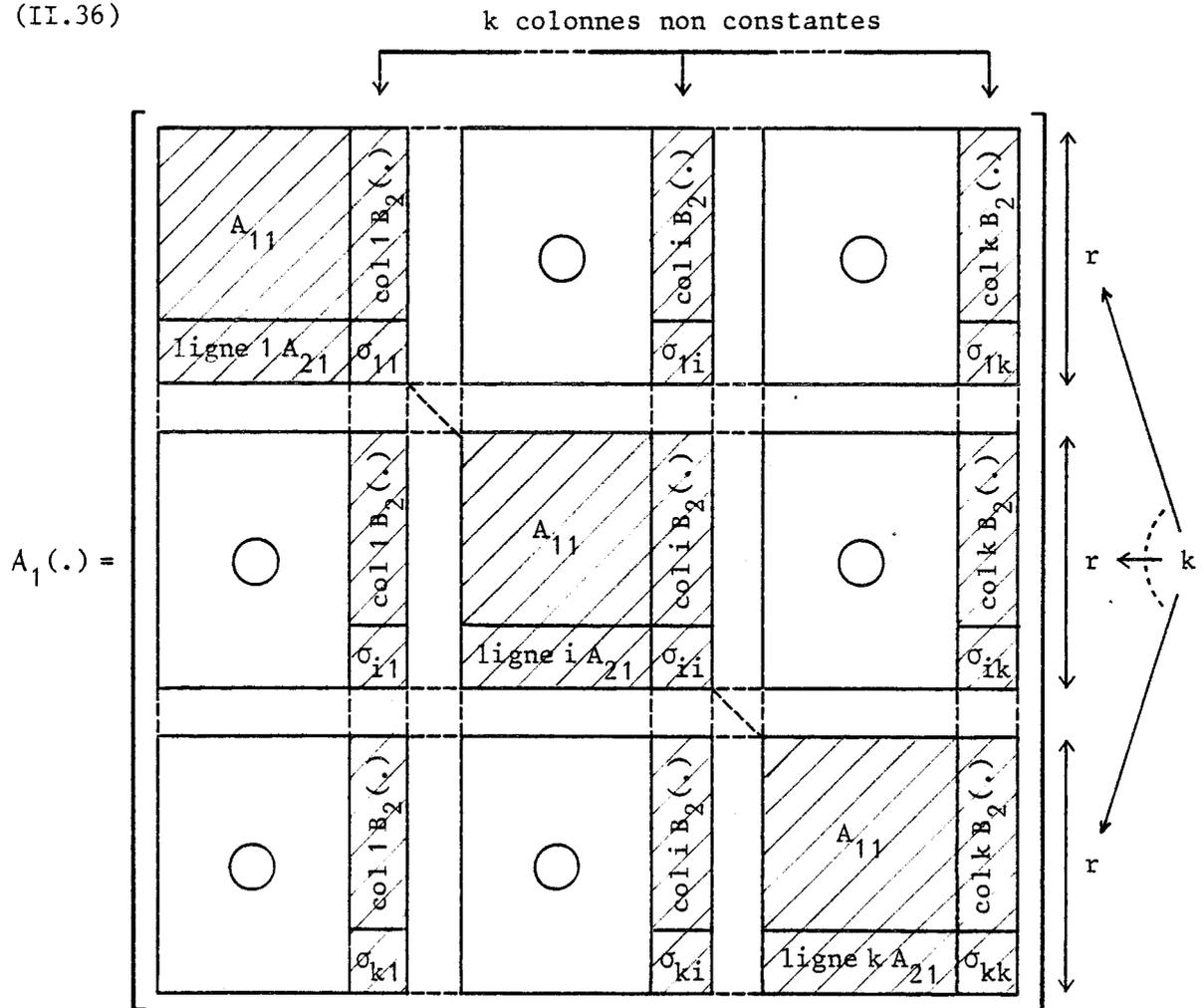
$$(II.35) \quad \chi_1 = \left(\begin{array}{c} \vdots \\ -x_0^T \vdots, \xi_r, \vdots \\ -x_0^T \vdots, \xi_{r+1}, \dots, \vdots \\ -x_0^T \vdots, \xi_q \end{array} \right)^T \in \mathbb{R}^{kr} = \mathbb{R}^Q$$

Plusieurs équations matricielles sont alors envisageables, mais nous retiendrons particulièrement la suivante :

$$(II.36) \quad \dot{\chi}_1 = A_1(\cdot) \chi_1 \quad A_1(\cdot) \in \mathbb{R}^{Q \times Q}$$

avec de façon symbolisée :

$$(II.36)$$



Cette forme comprend k^2 blocs matriciels d'ordre q . Les termes non nuls sont regroupés dans k colonnes et dans les k blocs diagonaux. Elle sera appelée **première forme dilatée à l'ordre k de $A(\cdot)$** . La matrice $A_1(\cdot)$ est à rapprocher de formes canoniques proposées par /Luenberger, 1967/ ou /Brunovski, 1970/ qui présentent la même structure (bloc diagonal et k colonnes). Cependant, la redondance a ici permis de faire apparaître des blocs matriciels carrés et de même dimension.

III.2.3 - Deuxième forme dilatée $A_2(\cdot)$, matrice contractable

Nous pouvons également représenter le système initial (II.26) par rapport à un vecteur χ_2 d'ordre $Q = kr$ et défini par :

$$(II.37) \quad \chi_2 = \left(\leftarrow x_1^T \leftarrow, \leftarrow x_2^T \leftarrow, \dots, \leftarrow x_{r-1}^T \leftarrow, \leftarrow x_r^T \leftarrow \right)^T \in \mathbb{R}^Q$$

avec :

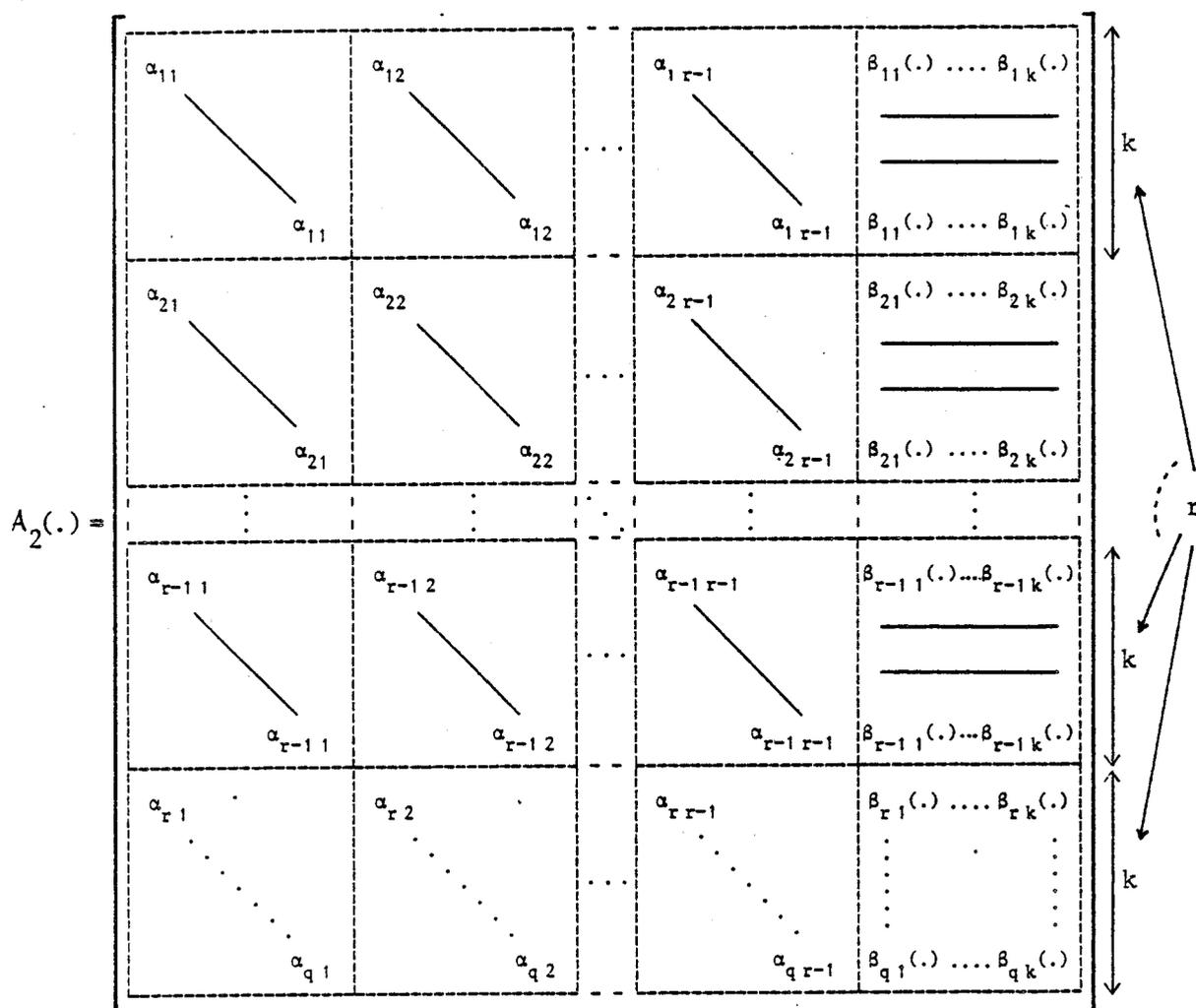
$$\forall i = 1, \dots, r-1 \quad x_i^T = (\xi_i, \xi_i, \dots, \xi_i) = \xi_i \mathbf{1}_k \in \mathbb{R}^k$$

$$\mathbf{1}_k = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^k$$

(II.26) s'écrit alors :

$$(II.38) \quad \overset{\circ}{\chi}_2 = A_2(\cdot) \chi_2 \quad A_2(\cdot) \in \mathbb{R}^{Q \times Q}$$

(II.38)



La matrice ainsi obtenue présente $(r-1)$ bloc-colonnes composées de blocs commutatifs. Seuls les blocs de la dernière colonne sont non commutatifs. Nous dirons que $A_2(\cdot)$ est la "deuxième forme dilatée à l'ordre r " de la matrice $A(\cdot)$. $A_2(\cdot)$ sera dite **contractable**, de forme contractée $A(\cdot)$.

Le vecteur χ_2 est le même que χ_1 à une permutation des composantes près, et la matrice $A_2(\cdot)$ est semblable à $A_1(\cdot)$ par le changement de base correspondant à cette permutation. Cependant, les partitionnements de $A_1(\cdot)$ et $A_2(\cdot)$ sont différents, puisque :

$A_1(\cdot)$ présente k^2 blocs de dimension $r \times r$

et

$A_2(\cdot)$ présente r^2 blocs de dimension $k \times k$.

C'est à partir de cette matrice $A_2(\cdot)$ que nous allons définir le polynôme symbolique matriciel.

III.2.4 - Définition du polynôme symbolique matriciel (PSM)

La forme de la matrice $A_2(\cdot)$ permet le calcul d'un polynôme matriciel défini par :

$$(II.39) \quad \forall \Lambda \in \mathbb{R}^{k \times k} \quad \Lambda \text{ diagonale}$$

$$P(\Lambda, A_2(\cdot)) \equiv \text{DET} (\Lambda \otimes I - A_2(\cdot)) \in \mathbb{R}^{k \times k}$$

Ce polynôme peut être développé sous la forme :

$$(II.40) \quad P(\Lambda, A_2(\cdot)) \equiv \Lambda^r + \sum_{i=0}^{r-1} \Lambda^i P_i(\cdot)$$

Par convention, ce déterminant caractéristique doit être calculé par les règles usuelles de développement par rapport à la dernière colonne, en tenant compte du fait que celle-ci ne commute pas avec les autres. Les blocs non constants ne sont ainsi multipliés que par des blocs constants placés à leur gauche.

Remarque :

Cette règle présente deux avantages :

* Elle assure l'unicité de définition de $P(\Lambda, A_2(\cdot))$ et des $P_i(\cdot)$.

** Elle permet d'adapter la théorie précédente sur les modules à gauche (produit scalaire à gauche). Ainsi, la propriété (8) vue au paragraphe III.1.2, analogue au théorème de Cayley-Hamilton, reste valable après restriction. Elle s'énonce alors :

"les k dernières lignes de la matrice $A_2^r(\cdot) + \sum_{i=0}^{r-1} P_i(\cdot) \otimes A_2^i(\cdot)$ sont nulles".

Enoncée sous une autre forme, cette propriété a été utilisée dans l'étude des systèmes discrets /El Moudni, 1981/.

La matrice $A_2(\cdot)$ présentant la structure décrite en (II.36) est définie de façon unique à partir de $A(\cdot)$ (II.33). La règle de calcul de $P(\Lambda, A_2(\cdot))$ entraîne l'unicité du polynôme (II.40) pour une matrice $A_2(\cdot)$ donnée. Nous pouvons ainsi adopter la définition suivante :

Définition :

Le polynôme symbolique de la matrice $A(\cdot)$ de type $C(k)$ décrite en (II.33) est défini par :

$$(II.41) \quad p(\Lambda, A(\cdot)) \equiv P(\Lambda, A_2(\cdot)) \quad \Lambda = \lambda I_k \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Pour établir le parallèle avec les systèmes $C(1)$, il reste :

- d'une part, à étudier les propriétés d'invariance du PSM,
- d'autre part, de voir à quelles conditions il est utilisable en tant qu'outil de modélisation.

C'est cette deuxième partie que nous allons envisager tout d'abord, en nous inspirant de la démarche suivie en monovariante $C(1)$ et utilisant une forme canonique analogue à (II.16). Ceci devra permettre d'utiliser les propriétés de commandabilité ou d'observabilité du système, ou bien l'existence de zéros constants pour le PS, tout comme dans le cas monovariante.

III.2.5 - Forme canonique dilatée

Cette partie fait appel à des résultats présentés dans /Rotella, 1983/.

Considérant la première forme dilatée $A_1(\cdot)$, il est possible d'appliquer à chacun des k blocs de la diagonale la décomposition canonique (II.16) introduite pour les systèmes de type $C(1)$. Le $i^{\text{ème}}$ bloc diagonal de $A_1(\cdot)$ (cf (II.36)) est noté, de façon analogue à (II.14) :

$$(II.42) \quad A_i(.) = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & \text{col } i B_2(.) \\ \hline \text{ligne } i A_{21} & \sigma_{ii} \end{array} \right] = A_i + v_i(.) h_i^T \in \mathbb{R}^{k \times k}$$

Il peut être décomposé (Théorème II.1) sous la forme :

$$(II.43) \quad F_i(.) = P_i A_i(.) P_i^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} C_i & B_i(.) \\ \hline 0 & F_i^*(.) \end{array} \right] \begin{array}{l} \xleftrightarrow{k - q_i} \xrightarrow{q_i} \\ \updownarrow k - q_i \\ \updownarrow q_i \end{array}$$

où :

C_i est une matrice bloc-diagonale composée de blocs de forme compagnon $C(1)$, et où $F_i^*(.)$ est une matrice compagnon non constante, d'ordre q_i égal à :

$$q_i = \text{Rang} \{h_i, A_i^T h_i, \dots, A_i^{T(k-1)} h_i\}$$

$B_i(.)$ est une matrice dont seule la dernière colonne est non constante.

Le changement de base P défini par :

$$P = \text{diag}_{i=1, \dots, k} \{P_i\} \in \mathbb{R}^{Q \times Q}$$

associé à une permutation adéquate des composantes d'état regroupant celles relatives aux blocs C_i , puis celles relatives aux $F_i^*(.)$, permet de conditionner la matrice $A_1(.)$ sous la forme $F(.)$ définie par :

$$(II.44) \quad F(.) = \begin{bmatrix} \begin{array}{|c|} \hline \text{Diag } \{C_i\} \\ i = 1, \dots, k \\ (Q-N) \times (Q-N) \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline B(.) \\ (Q-N) \times N \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline \bigcirc \\ N \times (Q-N) \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline C(.) \\ N \times N \\ \hline \end{array} \end{bmatrix}$$

avec :

$$N = \sum_{i=1}^k q_i$$

Diag $\{C_i\}$ matrice constante de $\mathbb{R}^{(Q-N) \times (Q-N)}$, composée d'une diagonale de blocs compagnons de type $C(1)$

$B(.)$ matrice non constante de $\mathbb{R}^{(Q-N) \times N}$, dont seules les k dernières colonnes sont non constantes

$C(.)$ matrice non constante de $\mathbb{R}^{N \times N}$, présentant la disposition particulière suivante :

$$(II.45) \quad C(.) = \begin{bmatrix} \begin{array}{|c|} \hline \bigcirc \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \diagdown \\ 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \end{bmatrix}$$

$\begin{array}{c} \updownarrow k \\ \updownarrow N-k \\ \leftarrow N-k \quad \leftarrow k \end{array}$

Ces formes $F(.)$ et $C(.)$ généralisent la décomposition canonique (II.16) présentée dans le cas monovarié.

Une condition suffisante pour que la matrice $A_1(.)$ (II.36) soit

semblable à une matrice de type $C(\cdot)$ (II.45) est qu'il n'existe pas de bloc $\text{Diag} \{C_i\}$ dans la décomposition $F(\cdot)$ (II.44). Cette condition s'écrit :

$$(II.46) \quad N = Q$$

c'est-à-dire :

$$(II.47) \quad \sum_{i=1}^k \text{Rang} \{h_i, A_i^T h_i, \dots, A_i^{T(k-1)} h_i\} = k r$$

Les k matrices A_i sont d'ordre r , donc (II.47) est équivalente à :

$$(II.48) \quad \forall i \in \{1, \dots, k\} \quad \text{Rang} \{h_i, A_i^T h_i, \dots, A_i^{T(k-1)} h_i\} = r$$

Moyennant cette condition, la matrice $C(\cdot)$ s'écrit :

$$(II.49) \quad C(\cdot) = \begin{bmatrix} \boxed{} & \boxed{-F_0(\cdot)} \\ \boxed{I_k} & \boxed{-F_1(\cdot)} \\ \vdots & \vdots \\ \boxed{I_k} & \boxed{-F_{r-1}(\cdot)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{Q \times Q}$$

$\begin{matrix} \longleftrightarrow & \longleftrightarrow \\ k & k \end{matrix}$

 \updownarrow
 k

avec :

$$\forall i \in \{0, \dots, r-1\} \quad F_i(\cdot) \in \mathbb{R}^{k \times k}$$

Cette forme est la généralisation de la forme compagnon $C(1)$. Les scalaires sont remplacés par des blocs matriciels d'ordre k , définissant le polynôme symbolique matriciel de $C(\cdot)$ de la façon suivante :

$$(II.50) \quad P(\Lambda, C(\cdot)) \equiv \Lambda^r + \sum_{i=0}^{r-1} \Lambda^i F_i(\cdot)$$

Propriété III.1 :

Si la matrice $C(.)$ (II.49) déduite (lorsque cela est possible) de la matrice $A(.)$ (II.33) correspond à un vecteur état dont les k dernières composantes sont les mêmes que dans la représentation $A(.)$, alors le polynôme matriciel (II.50) est le polynôme symbolique de $A(.)$ (II.39) (II.41) :

$$P(\Lambda, C(.)) \equiv \text{DET} (\Lambda \otimes I - A_2(.))$$

Cette propriété est démontrée dans /Rotella, 1983/. La matrice $C(.)$ est alors entièrement définie par le PSM de $A(.)$.

III.2.6 - Forme canonique compagnon par blocs et observabilité

Dans la partie précédente, nous avons montré la propriété suivante :

Propriété III.2 :

Soit une matrice $A(.)$ (II.33) et ses formes dilatées $A_1(.)$ (II.36) et $A_2(.)$ (II.38).

Si, dans la matrice $A_1(.)$, chacun des blocs $A_i(.)$ de la diagonale vérifie la propriété d'observabilité (II.2-a) vue en monovariante $C(1)$ (§ II.2.1) à savoir, pour tout i de 1 à k :

$$A_i(.) = A_i + v_i(.) h_i^T$$

$$\text{rang} \{h_i, A_i^T h_i, \dots, A_i^{T(k-1)} h_i\} = r$$

alors les formes dilatées $A_1(.)$ et $A_2(.)$ sont semblables à la forme compagnon par blocs $C(.)$ décrite en (II.43), et entièrement caractérisée par le polynôme symbolique matriciel de $A(.)$.

Comme dans le cas monovariante, on peut également utiliser l'absence de zéros constants dans le polynôme symbolique :

Propriété III.3 :

Soit une matrice $A(.)$ (II.33) et ses formes dilatées $A_1(.)$ (II.36) et $A_2(.)$ (II.38).

Si, dans la matrice $A_1(.)$, chacun des blocs $A_i(.)$ de la diagonale vérifie la propriété II.3 de non factorisation du PS vue en monovariable $C(1)$ (§ II.2.1) à savoir, pour tout i de 1 à k :

$$\nexists \lambda_i \in \mathbb{C} \quad p(\lambda_i, A_i(x, t)) = 0 \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$$

alors les formes dilatées $A_1(.)$ et $A_2(.)$ sont semblables à la forme compagnon par blocs $C(.)$ décrite en (II.49).

Les propriétés III.1, III.2 et III.3, valables en multivariable $C(k)$ sont analogues aux II.1, II.2 et II.3 vues en monovariable $C(1)$.

Propriété III.4 :

Il a été montré /Rotella, 1983/ que le changement de base P qui permet alors de passer de $A_2(.)$ à $C(.)$ est partitionné en r^2 blocs diagonaux de $\mathbb{R}^{k \times k}$ dont certains sont nuls, sous la forme :

$$\text{si } A_2(.) = PC(.)P^{-1}, \quad P = \begin{bmatrix} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \diagdown & & \dots & \diagdown \\ \hline \diagdown & & \dots & \diagdown \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \diagdown & & \dots & \diagdown \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \end{array} & \in \mathbb{R}^{Q \times Q}$$

On peut noter que les conditions intervenant dans la propriété III.2 sont plus contraignantes que la simple observabilité de (A, H^T) dans l'expression de base (II.8) définissant $A(.)$:

$$A(.) = A + V(.) H^T$$

En effet, si la décomposition de $A(.)$ est choisie de sorte que :

(II.51)

$$\begin{aligned}
 A^T &= \left[\begin{array}{c|cccc}
 A_{11}^T & c_1 & c_2 & \dots & c_k \\
 \hline
 \lambda_1^T & \sigma_1 & & & \\
 \lambda_2^T & & \sigma_2 & & \circ \\
 \vdots & & & \ddots & \\
 \lambda_k^T & & \circ & & \sigma_k
 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l}
 A_{11} \in \mathbb{R}^{q-k} \\
 c_i \in \mathbb{R}^{q-k} \\
 \lambda_i \in \mathbb{R}^{q-k} \\
 \sigma_i \in \mathbb{R}
 \end{array} \\
 H &= \left[\begin{array}{c}
 \circ \\
 (q-k) \times k \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 1 \\
 \diagdown \\
 I_k \\
 \diagup \\
 k \times k \\
 1
 \end{array}
 \end{array} \right] = (h_1, h_2, \dots, h_k) \in \mathbb{R}^{q \times k} \\
 h_i &= (0 \text{ --- } 0 \ 1 \ 0 \text{ --- } 0)^T \in \mathbb{R}^q \\
 &\quad \quad \quad \longleftrightarrow \\
 &\quad \quad \quad k-i
 \end{aligned}$$

on a alors l'implication suivante (II.52) \implies (II.53) :

(II.52)

$$\forall i \in \{1, \dots, k\} \quad \text{rang} \{h_i, A_i^T h_i, \dots, A_i^{T(k-1)} h_i\} = r$$

\Downarrow ✱

(II.53)

$$\text{rang} \{H, A^T H, \dots, A^{T(q-1)} H\} = q \quad (\text{observabilité de } (A, H^T))$$

Par contre, l'implication réciproque (II.53) \implies (II.52) est fausse. La démonstration de (II.52) \implies (II.53) est donnée en Annexe II.A à la fin de ce chapitre et nous allons montrer sur un exemple que (II.53) n'implique pas (II.52).

Contre-exemple de (II.53) \Rightarrow (II.52)

Soit :

$$A(.) = A + V(.) H^T$$

avec :

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad V \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$$

Il vient :

$$A^T H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Rang } \{H, A^T H\} = 4 \quad (A, H^T) \text{ observable}$$

$$A_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad h_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A_1^T h_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A_1^{T2} h_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad h_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A_2^T h_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A_2^{T2} h_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(A_1, h_1^T) est observable, mais pas (A_2, h_2^T) .

III.3 - Règles d'utilisation du PSM

L'utilisation du polynôme symbolique matriciel en tant qu'invariant de représentation est à rapprocher de ce qui a été montré en monovari-
ble.

Dans cette partie, sont étudiées les propriétés d'invariance ou les transformations éventuelles du PSM à travers divers changements de bases concernant une représentation $C(k)$ redondante ou non.

Des résultats concernant la similitude de deux matrices à non linéarités de rang k sont également proposés.

III.3.1 - Similitude du PSM par rapport à un changement de base affectant les seules variables d'état traitées non linéairement

La définition précédente du polynôme symbolique d'une matrice de type $C(k)$ repose sur le choix de la dernière composante vectorielle x_r du vecteur état x (expression (II.33)). Cette dernière composante x_r doit, pour conduire à une matrice de type (II.33), être définie par une relation telle que :

$$(II.54) \quad x_r = Q H^T x$$

où Q est une matrice régulière de $\mathbb{R}^{k \times k}$ et $H \in \mathbb{R}^{q \times k}$ est définie en (II.8) par $A(.) = A + V(.) H^T$.

Un tel choix de x_r conduit à une matrice $A(.)$ dont les termes non constants sont effectivement regroupés dans les k dernières colonnes.

Considérons une autre expression de (II.32), sous la forme semblable :

$$(II.55) \quad R \overset{\circ}{x} = R A(.) R^{-1} P x$$

avec :

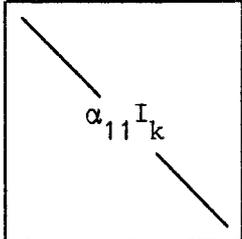
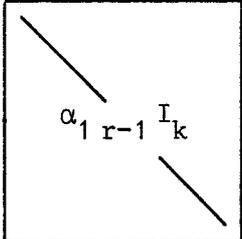
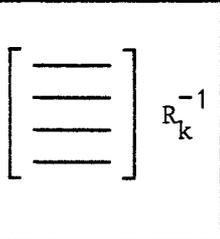
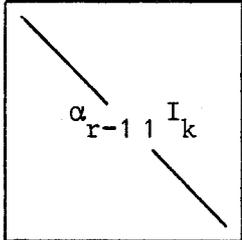
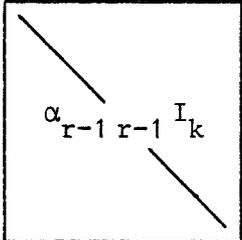
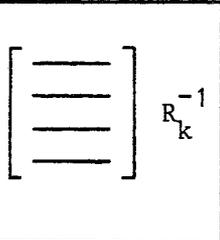
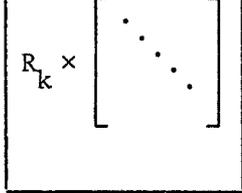
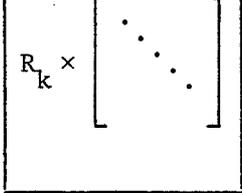
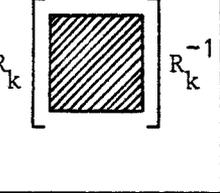
$$R = \begin{bmatrix} I_{r-1} & 0 \\ 0 & R_k \end{bmatrix} \quad R_k \in \mathbb{R}^{k \times k} \quad \det R_k \neq 0$$

On a alors :

$$R A(.) R^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{12}(.) R_k^{-1} \\ R_k A_{21} & R_k B_{22} R_k^{-1} \end{bmatrix} = B(.)$$

La forme dilatée à l'ordre k de B(.) est :

(II.56) $B(.) =$

	\dots		
\vdots	\dots	\vdots	\vdots
	\dots		
$R_k \times$ 	\dots	$R_k \times$ 	R_k 

Le symbolisme de cette notation est à rapprocher de l'équation (II.36). Il est alors aisé de montrer que si Λ vérifie (II.57), on a (II.58) :

$$(II.57) \quad \Lambda = \lambda I_k \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad I_k \text{ matrice identité de } \mathbb{R}^{k \times k}$$

$$(II.58) \quad \text{DET} (\Lambda \otimes I - B(.)) = R_k \cdot \text{DET} (\Lambda \otimes I - A(.)) \cdot R_k^{-1}$$

et ainsi :

$$p(\Lambda, R A(.) R^{-1}) \equiv R_k \cdot p(\Lambda, A(.)) \cdot R_k^{-1}$$

à condition que R ne concerne que les k dernières composantes de l'état

Un changement de base affectant les seules composantes de l'état traitées non linéairement laisse le polynôme symbolique de la matrice invariant à une similitude près.

III.3.2 - Invariance du PSM et CNS de similitude pour certains changements de base

En utilisant les résultats du paragraphe précédent (§ III.3.1), ainsi que ceux de la partie III.2, il est possible d'énoncer le théorème suivant, qui généralise le théorème II.3 (§ II.3) au cas multivariable :

Théorème II.2 :

Soient $A(x,t)$ et $B(y,t)$ deux matrices de type $C(k)$ (II.8) ayant toutes deux leurs éléments non constants regroupés dans les k dernières colonnes, et vérifiant chacune les conditions d'observabilité de la propriété III.2 ou bien celles de la propriété III.3 concernant la non factorisation de polynômes symboliques (cf § III.2.6).

Soient respectivement $A_2(x,t)$ et $B_2(y,t)$ leurs deuxièmes formes dilatées (II.38).

Une condition nécessaire et suffisante pour que $A_2(x,t)$ et $B_2(y,t)$ soient semblables est que leurs polynômes symboliques matriciels soient semblables.

Les formes $A(x,t)$ et $B(y,t)$ sont alors semblables et le changement de base correspondant est diagonal par blocs, sous la forme :

$$P = \begin{bmatrix} \boxed{P_1} & 0 \\ 0 & \boxed{P_2} \end{bmatrix} \quad P_1 \in \mathbb{R}^{(q-k) \times (q-k)} \quad P_2 \in \mathbb{R}^{k \times k} \quad P \in \mathbb{R}^{q \times q}$$

Si, de plus, les états correspondants x et y ont leurs k dernières composantes identiques, une CNS pour que $A_2(x,t)$ et $B_2(y,t)$ soient semblables est que leurs polynômes symboliques matriciels soient égaux. On a alors :

$$P_2 = I_k$$

Démonstration de la CN :

Soient $A_2(x,t)$ et $B_2(y,t)$ semblables, et déduites de $A(x,t)$ et $B(y,t)$.

Soient $F_A(x,t)$ et $F_B(y,t)$ leurs formes canoniques (II.44).

En vertu des propriétés (III.2) ou (III.3), ces formes canoniques se réduisent à deux formes compagnon par bloc (II.49) respectivement $C_A(x,t)$ et $C_B(y,t)$, qui sont semblables.

Il est possible de montrer (cf Annexe II.B) que les seuls changements de base P permettant de passer d'une matrice compagnon par blocs à une autre matrice compagnon par blocs sont du type :

$$P = P \otimes I = \begin{bmatrix} P & & \bigcirc \\ & P & \\ \bigcirc & & P \end{bmatrix} \quad \det P \neq 0$$

On a donc :

$$\text{DET} (\Lambda \otimes I - C_B(\cdot)) = P \text{DET} (\Lambda \otimes I - C_A(\cdot)) P^{-1}$$

Les PSM de $C_B(.)$ et $C_A(.)$ sont semblables.

Si, de plus, x et y ont leurs dernières composantes identiques, on a $P = I_k$. Les PSM sont alors égaux.

Démonstration de la CS :

Si $A_2(.)$ et $B_2(.)$ ont des PSM semblables, leurs formes canoniques $C(.)$ (II.49) sont semblables. $A_2(.)$ et $B_2(.)$ sont donc semblables.

Démonstration de la forme du changement de base :

D'après la propriété III.4 exposée au paragraphe III.2.6, on a :

$$A_2(.) = P B_2(.) P^{-1} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} D_{11} \dots D_{1,r-1} & P_{1,r} \\ \vdots & \\ D_{r-1,1} \dots D_{r-1,r-1} & P_{r-1,r} \\ 0 \dots 0 & P_{r,r} \end{bmatrix}$$

avec :

$$\forall i, j \in \{1, \dots, r-1\} \quad D_{ij} \text{ matrice diagonale de } \mathbb{R}^{k \times k}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, r\} \quad P_{ir} \in \mathbb{R}^{k \times k}$$

$$\forall j \in \{1, \dots, r-1\} \quad D_{rj} = 0 \in \mathbb{R}^{k \times k}$$

D'après (II.37), $A_2(.)$ correspond à l'état :

$$x_2 = (\xi_1 \ 1_k, \xi_2 \ 1_k, \dots, \xi_{r-1} \ 1_k, \xi_r, \dots, \xi_q)^T$$

$B_2(.)$ correspond à l'état :

$$y_2 = (\xi_1 \ 1_k, \xi_2 \ 1_k, \dots, \xi_{r-1} \ 1_k, \xi_r, \dots, \xi_q)^T$$

L'égalité $\chi_2 = P Y_2$ entraîne nécessairement :

$$\forall i, j \in \{1, \dots, r-1\} \quad D_{ij} = d_{ij} I_k \quad d_{ij} \in \mathbb{R}$$

Ceci entraîne à son tour :

$$\forall i \in \{1, \dots, r-1\} \quad P_{ir} = 0$$

La matrice P du théorème est alors définie par :

$$P_1 = (d_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, r-1\}} \in \mathbb{R}^{(q-k) \times (q-k)}$$

$$P_2 = P_{rr} \in \mathbb{R}^{k \times k}$$

Ce théorème permet d'envisager, avec la méthode de mise en équation par PSM, tous les modèles B(.) déduits d'un modèle initial A(.) par des changements de bases affectant séparément les q-k premières composantes (traitées linéairement) et les k dernières composantes (traitées non linéairement) de l'état. Dans le cas particulier où k est égal à 1, on retrouve le théorème II.3 vu en monovariable C(1).

III.3.3 - Invariance du PSM dans l'espace d'état redondant. Exemple

Le paragraphe précédent limite les changements de base envisageables sur une matrice A(.) aux matrices de passage du type :

$$P = \begin{bmatrix} \boxed{P_1} & 0 \\ 0 & \boxed{P_2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q \times q} \quad P_1 \in \mathbb{R}^{(q-k) \times (q-k)} \quad P_2 \in \mathbb{R}^{k \times k}$$

Les possibilités sont donc réduites par rapport au cas monovariable, où les changements de bases pouvaient être quelconques. C'est pourquoi il peut être intéressant de tester l'invariance du PSM relativement à un changement de base entre deux matrices $A_2(.)$ et B(.) de l'espace redondant,

$A_2(.)$ étant la deuxième forme dilatée de $A(.)$, c'est-à-dire contractable, vérifiant les propriétés d'observabilité III.2,

$B(.)$ étant une matrice non contractable, correspondant à un vecteur état dont les k dernières composantes sont les mêmes que dans la formulation $A(.)$.

On a alors la propriété suivante /Rotella, 1983/ :

Si $B(.)$ et $A_2(.)$ ont même PSM, alors elles sont semblables, la matrice de passage étant partitionnée en blocs tous diagonaux.

Exemple :

Soit :

$$A(.) = \begin{bmatrix} 0 & f_0 & g_0 \\ 1 & f_1 & g_1 \\ 1 & f_2 & g_2 \end{bmatrix} \quad f_0, f_1, f_2, g_0, g_1, g_2 \text{ coefficients non constants}$$

Il vient :

$$A_2(.) = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & f_0 & g_0 \\ 0 & 0 & f_0 & g_0 \\ \hline 1 & 0 & f_1 & g_1 \\ 0 & 1 & f_2 & g_2 \end{array} \right]$$

et

$$p(\Lambda, A(.)) = \Lambda^2 - \Lambda \begin{bmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_0 & g_0 \\ f_0 & g_0 \end{bmatrix}$$

Soit :

$$B(.) = \left[\begin{array}{cc|cc} \lambda & 0 & \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & \mu & \beta_3 & \beta_4 \\ \hline 1 & 0 & \theta_1 & \theta_2 \\ 0 & 1 & \theta_3 & \theta_4 \end{array} \right]$$

λ et μ sont des réels arbitraires.

$B(.)$ est semblable à $A_2(.)$ si :

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ \theta_3 & \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{bmatrix} \quad (\text{égalité des traces})$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ \theta_3 & \theta_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_0 & g_0 \\ f_0 & g_0 \end{bmatrix} \quad (\text{égalité des déterminants})$$

On a alors :

$$B(.) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -\lambda^2 + f_1 \lambda + f_0 & \lambda g_1 + g_0 \\ 0 & \mu & \mu f_2 + f_0 & -\mu^2 + g_2 \mu + g_0 \\ 1 & 0 & f_1 - \lambda & g_1 \\ 0 & 1 & f_2 & g_2 - \mu \end{bmatrix}$$

Cette méthode peut être utile dans la mesure où, entre autres, la stabilité de $B(.)$ entraîne celle de $A(.)$. Le traitement du modèle $B(.)$ dilaté peut se révéler plus intéressant que celui de $A(.)$, puisqu'on dispose de deux paramètres arbitraires λ et μ .



Cependant, la matrice $B(\cdot)$ n'est pas ici contractable en une matrice $B(\cdot)$; le changement de base P tel que $B(\cdot) = PA_2(\cdot)P^{-1}$ est donné par :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\mu \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il est toutefois possible de "contracter" la matrice $B(\cdot)$ à l'aide de méthodes d'aggrégation utilisant des normes vectorielles /Grujić & al, 1976/.

III.3.4 - Diagramme résumé

La méthode de mise en équation proposée, utilisant le PSM, peut être résumée par la figure II.10.

Ce diagramme fait apparaître deux espaces principaux, l'un redondant (\mathbb{R}^Q) et l'autre non (\mathbb{R}^q). Le degré de redondance est fixé par le nombre k de colonnes non constantes dans une représentation initiale $A(\cdot)$ du système.

Cette méthode permet d'envisager toutes les matrices $B(\cdot)$ semblables à $A(\cdot)$ et déduites de $A(\cdot)$ par un changement de base affectant séparément les $q-k$ premières composantes de l'état (traitées linéairement) et les k dernières (traitées non linéairement). Le passage de \mathbb{R}^q à \mathbb{R}^Q s'effectue simplement, en remplaçant $A(\cdot)$ par sa deuxième forme dilatée $A_2(\cdot)$ (II.38). Le calcul du PSM se fait alors par les règles usuelles de calculs de déterminants, mais en remplaçant les scalaires par des blocs carrés d'ordre k . On peut alors proposer a priori (comme dans le cas $C(1)$ monovariante) une matrice contractable $B(\cdot)$, et tester l'identité des PSM de $A_2(\cdot)$ et $B(\cdot)$. Si les deux PSM sont égaux, et si la matrice $A(\cdot)$ initiale vérifie les conditions des propriétés III.2 ou III.3, alors la forme contractée $B(\cdot)$ de $B(\cdot)$ est semblable à $A(\cdot)$.

Il est également possible de définir à partir de $A_2(\cdot)$ une forme $B(\cdot)$ qui ne soit pas contractable, c'est-à-dire qui ne soit pas la deuxième forme dilatée d'une matrice $B(\cdot)$. Un traitement direct du modèle redondant peut alors être envisagé. Il est également possible d'utiliser des méthodes classiques d'agrégation par normes vectorielles pour se ramener à un modèle d'ordre q , ou plus généralement $q' < Q$.

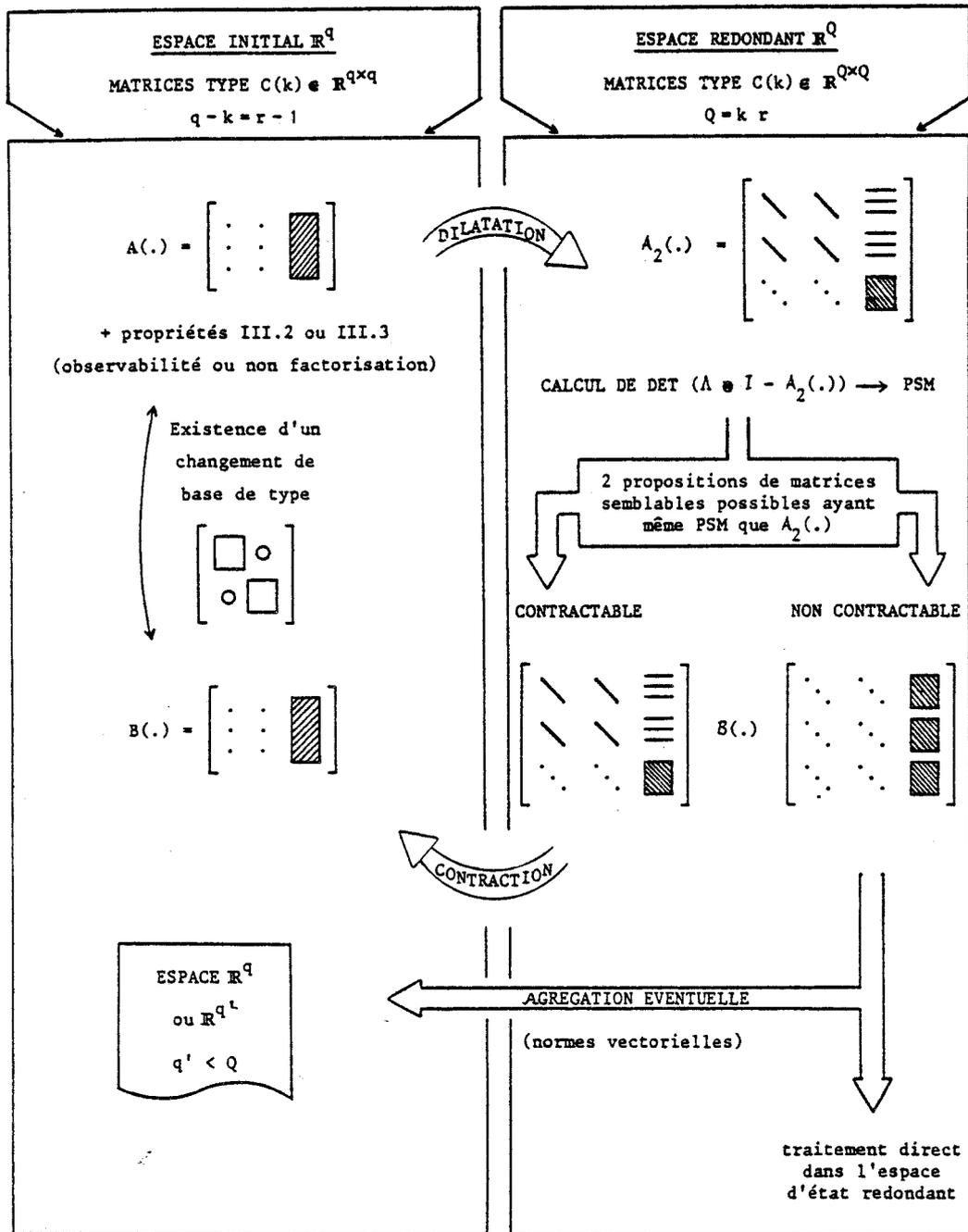


FIGURE II.10

CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons défini un invariant de représentation valable pour les systèmes non linéaires, appelé polynôme symbolique, qui généralise la notion de polynôme caractéristique introduite dans l'étude des systèmes linéaires.

Le polynôme symbolique caractérise la structure du système, car il est invariant à travers toute transformation de représentation de type changement de base. Ainsi, dans le cas d'un système monovarié de type Lurie-Postnikov, il contient dans son expression le dénominateur et le numérateur de la partie linéaire, ainsi que la nature de la non linéarité de commande.

Cette propriété d'invariance est utilisée pour résoudre un problème intéressant de modélisation : il s'agit de pouvoir proposer a priori une forme matricielle présentant un conditionnement spécifique, puis dans un second temps de calculer ses coefficients de façon à ce que la matrice obtenue représente le régime autonome d'un système donné. Il est ensuite possible d'en déduire les équations du régime non autonome.

Les systèmes considérés ici sont de type continu, non linéaires, monovariés ou multivariés. Cependant, la méthode proposée permettrait également d'envisager de façon strictement identique la modélisation des systèmes discrets.

Dans le cas d'un système dit "à non linéarités de rang 1", c'est-à-dire, notamment, d'un système monovarié, la méthode est très facile d'emploi. Une informatisation des calculs permet de traiter des systèmes d'ordre élevé. Cette utilisation informatique fait l'objet de travaux déjà publiés /Dimster, Rotella & Richard, 1984/ ou en cours /Dimster, 1984/.

Le cas de systèmes multivariés, dits "à non linéarités de rang k ", demande l'introduction d'un outil de calcul matriciel par blocs. Ceci permet de généraliser les résultats du monovarié, en conservant la même démarche et les mêmes calculs. Il est à noter que les définitions concernant les calculs de déterminants par blocs ont également permis

une formalisation intéressante du calcul d'intégrales de formes quadratiques dans les systèmes continus linéaires /Richard & al, 1983/, qui n'est pas présentée dans ce mémoire.

ANNEXE II.A

Démonstration de l'implication (II.52) \Rightarrow (II.53)

Par définition de A_i ((II.36) et (II.42)), on a :

$$A_i^T = \begin{bmatrix} A_{11}^T & | & c_i \\ \hline \lambda_i^T & | & \sigma_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times r} \quad h_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \hline 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q-k+1} = \mathbb{R}^r$$

et par hypothèse, pour tout i dans $\{1, \dots, k\}$, l'ensemble de vecteurs :

$$h_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \hline 1 \end{bmatrix} \quad A_i^T h_i = \begin{bmatrix} c_i \\ \hline \sigma_i \end{bmatrix} \quad A_i^{T2} h_i = \begin{bmatrix} A_{11}^T c_i + c_i \sigma_i \\ \hline \lambda_i^T c_i + \sigma_i^2 \end{bmatrix}, \dots$$

est de rang maximal, égal à r . On peut, sans changer ce rang, rajouter $(k-1)$ lignes nulles. On obtient alors k suites de rang r , formées de vecteurs d'ordre q :

* pour $i = 1$, suite n° 1

$$\begin{array}{l} \begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \uparrow \\ \downarrow \end{matrix} \\ \begin{matrix} q-k \\ 1 \\ k-1 \end{matrix} \end{array} \left[\begin{array}{c} 0 \\ | \\ 0 \\ 1 \\ | \\ 0 \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} c_1 \\ | \\ \sigma_1 \\ 0 \\ | \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} A_{11}^T c_1 + \sigma_1 c_1 \\ | \\ \lambda_1^T c_1 + \sigma_1^2 \\ 0 \\ | \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} A_{11}^{T2} c_1 + \sigma_1 A_{11}^T c_1 + c_1 \lambda_1^T c_1 + \sigma_1^2 c_1 \\ | \\ \lambda_1^T A_{11}^T c_1 + 2\lambda_1^T c_1 \sigma_1 + \sigma_1^3 \\ 0 \\ | \\ 0 \end{array} \right], \dots$$

* pour $i \in \{1, \dots, k\}$, suites n° i

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \uparrow \\ \downarrow \end{array} \\
 \begin{array}{c} q-k \\ \\ i-1 \\ \\ 1 \\ \\ k-i \end{array}
 \end{array}
 \left[\begin{array}{c} 0 \\ | \\ 0 \\ | \\ 0 \\ | \\ 1 \\ | \\ 0 \\ | \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} c_i \\ | \\ 0 \\ | \\ 0 \\ | \\ \sigma_i \\ | \\ 0 \\ | \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} A_{11}^T c_i + \sigma_i c_i \\ | \\ 0 \\ | \\ 0 \\ | \\ \lambda_i^T c_i + \sigma_i^2 \\ | \\ 0 \\ | \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} A_{11}^{T2} c_i + \sigma_i A_{11}^T c_i + c_i \lambda_i^T c_i + \sigma_i^2 c_i \\ | \\ 0 \\ | \\ 0 \\ | \\ \lambda_i^T A_{11}^T c_i + 2 \lambda_i^T c_i \sigma_i + \sigma_i^3 \\ | \\ 0 \\ | \\ 0 \end{array} \right], \dots$$

* pour $i=k$, suite n° k

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \uparrow \\ \downarrow \end{array} \\
 \begin{array}{c} q-k \\ \\ k-1 \\ \\ 1 \end{array}
 \end{array}
 \left[\begin{array}{c} 0 \\ | \\ 0 \\ | \\ 0 \\ | \\ 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} C_k \\ | \\ 0 \\ | \\ 0 \\ | \\ \sigma_k \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} A_{11}^T c_k + \sigma_k c_k \\ | \\ 0 \\ | \\ 0 \\ | \\ \lambda_k^T c_k + \sigma_k^2 \end{array} \right], \dots$$

D'autre part, en utilisant les notations (II.45), il vient :

$$\text{rang} \{H, A^T H, \dots, A^{Tq} H, \dots\} = \text{rang} \{h_1, A^T h_1, \dots, A^{Tq} h_1, \dots \\
 h_2, A^T h_2, \dots, A^{Tq} h_2, \dots \\
 \vdots \\
 h_k, A^T h_k, \dots, A^{Tq} h_k, \dots\}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \uparrow \\ q-k \\ \downarrow \end{array} \\
 \begin{array}{c} \uparrow \\ i-1 \\ \downarrow \end{array} \\
 \begin{array}{c} \updownarrow \\ 1 \\ \updownarrow \end{array} \\
 \begin{array}{c} \uparrow \\ k-i \\ \downarrow \end{array}
 \end{array}
 \quad
 h_i =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 | \\
 0 \\
 | \\
 0 \\
 | \\
 1 \\
 | \\
 0 \\
 | \\
 0
 \end{bmatrix},
 \quad
 A^T h_i =
 \begin{bmatrix}
 c_i \\
 | \\
 0 \\
 | \\
 0 \\
 | \\
 \sigma_i \\
 | \\
 0 \\
 | \\
 0
 \end{bmatrix},
 \quad
 A^{T2} h_i =
 \begin{bmatrix}
 A_{11}^T c_i + \sigma_i c_i \\
 | \\
 0 \\
 | \\
 0 \\
 | \\
 \lambda_i^T c_i + \sigma_i^2 \\
 | \\
 0 \\
 | \\
 0
 \end{bmatrix},
 \quad \dots$$

Les vecteurs intervenant dans le calcul du rang de $\{H, A^T H, \dots\}$ sont donc ceux qui figurent dans les k suites de rang r décrites précédemment.

Le rang de l'ensemble de ces vecteurs est aisé à calculer :

* d'une part, il est inférieur ou égal à q ,

* d'autre part, la suite n° 1 est de rang r , et on peut lui adjoindre les $k-1$ vecteurs h_i ($i=2$ à k) des autres suites. On a alors un ensemble de $r+k-1$ vecteurs indépendants. Le rang de $\{H, A^T H, \dots\}$ est donc supérieur ou égal à $r+k-1 = q$.

On a par conséquent :

$$\text{rang } \{H, A^T H, \dots, A^{Tq} H, \dots\} = q$$

ANNEXE II.B

Similitude de deux formes compagnon par blocs

Soient $C_A(.)$ et $C_B(.)$ deux formes compagnon par blocs (II.49) supposées semblables :

(B.1) $\exists P \in \mathbb{R}^{Q \times Q} \quad P C_A(.) = C_B(.) P \quad \det P \neq 0$

(B.2) $C_A(.) = \begin{bmatrix} 0 & \text{---} & 0 & \square \\ & \diagdown & | & \vdots \\ I & & & \square \\ & \circ & I & 0 \\ \text{---} & 0 & I & \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square \\ E & F \\ \square & \square \\ G & H \end{bmatrix}$

$I = I_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$

$G = \begin{bmatrix} 0 & \text{---} & 0 & I \end{bmatrix}$

(B.3) $C_B(.) = \begin{bmatrix} \square & \square \\ E & F' \\ \square & \square \\ G & H' \end{bmatrix}$

$E = \begin{bmatrix} 0 & & \\ I & \diagdown & \\ & & I & 0 \end{bmatrix}$

Nous allons montrer que la matrice P présente nécessairement la forme suivante :

(B.4) $P = P \otimes I = \begin{bmatrix} \square & & & \\ P & & & \circ \\ & \square & & \\ & & & \circ \\ & & & P \end{bmatrix} \quad P \in \mathbb{R}^{k \times k} \quad \det P \neq 0$

Démonstration :

Nous noterons :

$$(B.5) \quad P = \begin{bmatrix} \boxed{Q} & \boxed{R} \\ \boxed{S} & \boxed{P} \end{bmatrix} \quad \boxed{Q} = \begin{array}{c} \boxed{Q_0} \\ \hline \boxed{Q_{r-1} \dots Q_1} \end{array}$$

P conserve la répartition des colonnes constantes et non constantes (k dernières colonnes de C_A et C_B non constantes) et donc :

$$(B.6) \quad S = 0$$

$$(B.7) \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \boxed{Q^{-1}} & \boxed{T} \\ \boxed{0} & \boxed{P^{-1}} \end{bmatrix} \quad T = - Q^{-1} R P^{-1}$$

(B.1), (B.2) et (B.3) conduisent, en respectant la disposition des 4 blocs matriciels, aux quatre équations suivantes :

(B.8) $Q E + R G = E Q$	(B.10) $Q F + R H = E R + F' P$
(B.9) $P G = G Q$	(B.11) $P H = G R + H' P$

$$(B.9) \quad \begin{bmatrix} 0 & P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{r-1} \dots Q_1 \end{bmatrix} \Rightarrow Q_i = 0 \quad \forall i = 2, \dots, r-1, \quad Q_1 = P$$

$$(B.8) \quad \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ I & \diagdown & & \\ & & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_0 \\ \hline 0 & P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_0 \\ \hline 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & & \\ I & \diagdown & & \\ & & I & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Q = \begin{bmatrix} P & & & \\ & \diagdown & & \\ & & P & \\ & & & \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$(B.11) \quad \boxed{P} \boxed{H} = \boxed{H'} \boxed{P}$$

Ainsi (B.4) est démontré et chaque bloc de la dernière colonne de $C_A(.)$ est semblable au bloc correspondant de $C_B(.)$, à travers un changement de base P . On a :

$$(B.12) \quad \text{DET} (\Lambda \otimes I - C_B(.)) = P \cdot \text{DET} (\Lambda \otimes I - C_A(.)) \cdot P^{-1}$$

CHAPITRE III

SUR LE CHOIX DE LA MODELISATION
DANS L'ANALYSE DE LA STABILITE

La conception d'un processus asservi comprend nécessairement une phase d'analyse de ses propriétés de stabilité : outre le simple fait que l'état converge ou diverge par rapport à un équilibre, une étude de stabilité renseignera l'utilisateur sur les qualités du comportement dynamique du système.

Lorsque le processus est complexe, la résolution de son équation différentielle d'état est souvent très délicate. Les méthodes analytiques proposées doivent donc être directement applicables à diverses modélisations d'état, sans nécessiter la détermination de ses trajectoires solutions.

Différentes problématiques sont envisageables :

- Déterminer si un équilibre est stable ou instable. Ce problème de base peut être élargi à un mouvement dont l'équilibre n'est plus un point, mais une trajectoire. On considère alors l'équation aux écarts entre la trajectoire nominale et la trajectoire perturbée /Hahn, 1963/. Le problème de la poursuite d'une entrée a été, plus récemment, relié à celui de la stabilité /Grujić & Porter, 1980/.

- Donner une estimation la plus réaliste possible du domaine de conditions initiales assurant la convergence de l'état. Physiquement, ceci permet de déterminer les perturbations maximales admissibles intervenant sur l'état.

- Donner une estimation la plus réaliste possible des domaines de variation des paramètres du système assurant la stabilité : ceci est effectué aussi bien dans un but d'analyse (quelles sont les conditions de fonctionnement admissibles ?) que de synthèse (quelles valeurs donner aux paramètres de réglage ?), et rejoint également la notion de robustesse /Safonov, 1980/ /Singh & Hassan, 1980/.

- Donner une estimation des trajectoires solutions, et notamment en ce qui concerne la vélocité du système. On peut ainsi chercher à comparer ces trajectoires avec les solutions d'un ou plusieurs systèmes plus simples, tant du point de vue de la dimension (agrégation à un ordre plus faible et réduction de dimensionnalité /Bertrand & al, 1976/ /Grujić & al, 1976/ /Dauphin-Tanguy, 1983/) que du point de vue linéarité (linéarisation de tout ou partie du modèle /Liapounov, 1892/ /Liapounov, Pliss & Basov, 1966/, majoration par un modèle linéaire /Gentina & al, 1972/ /Spiteri, 1974/ /Grujić & al, 1976/ /Richard & al, 1981/).

Les deux méthodes de Liapounov /Liapounov, 1892/, et notamment la seconde (dite également "méthode directe") constituent un outil majeur pour répondre à ces questions.

Excepté dans quelques cas /Zubov, 1957/ /Grujić, 1978/, les résultats obtenus par la méthode directe de Liapounov sont exprimés que sous forme de conditions suffisantes. Ceci explique l'existence de très nombreux travaux sur ce sujet. Une importante bibliographie en est donnée dans /Hahn, 1963/ /Yoshizawa, 1966/ /Narendra & Taylor, 1973/. Il apparaît ainsi que le choix de la représentation d'un système non linéaire est une phase essentielle lors de son analyse : les conditions de stabilité obtenues dépendent à la fois de la modélisation adoptée et du critère de stabilité utilisé. C'est pourquoi certains modèles matriciels spécifiques ont été proposés en relation étroite avec des méthodes et théorèmes sur la stabilité /Laurent & Lhote, 1966/ /Borne & Benrejeb, 1977/ /Meizel & Gentina, 1979/ /Zambettakis, Richard & Rotella, 1984/.

Dans cette partie, nous proposons d'utiliser la méthode de modélisation vue au deuxième chapitre pour déterminer de nouvelles représentations d'état, particulièrement adaptées à une investigation des propriétés de stabilité.

Dans un premier temps sont rappelées des méthodes classiques d'étude de la stabilité, basées sur la méthode directe de Liapounov, et qui seront utilisées par la suite.

Une étude est ensuite menée sur les systèmes de type $C(1)$ (monovariables), utilisant des modélisations de type forme en flèche. Alors que le polynôme symbolique caractérise la structure du système indépendamment

de son modèle d'état, nous définissons inversement un "polynôme représentatif" qui, quant à lui, caractérise la forme en flèche elle-même. Différents cas sont envisagés, selon que ce polynôme possède des zéros réels, complexes, simples ou multiples, constants ou variables dans le temps.

A partir de chacune des formes en flèche ainsi définies, des résultats concernant la stabilité des systèmes modélisés sont démontrés. Un résultat majeur concerne la définition d'un modèle de dimension réduite, dont la stabilité permet de conclure à celle du système initial.

Une étude des systèmes multivariables est ensuite proposée, donnant également lieu à une simplification de modèle dans l'étude de la stabilité /Zambettakis, 1983/.

Enfin, la notion de conjecture du linéaire /Aizerman, 1949/ /Kalman, 1957/ /Krasovskii, 1959/ /Gentina & Borne, 1972/ /Grujić, 1978/ est abordée dans une dernière partie, en relation avec celle de polynôme symbolique. Dans un résumé, diverses classes d'asservissements non linéaires sont proposées, dont la stabilité peut être testée au moyen de méthodes propres aux systèmes linéaires. La notion de système de comparaison linéaire est ensuite discutée à partir d'exemples de systèmes stables sans vérifier les conditions de stabilité des systèmes linéaires.

I - FONCTIONS CANDIDATES A LIAPOUNOV

I.1 - Introduction

Nous considérons ici la solution $x(t; t_0, x_0)$ de l'équation d'un système S :

$$(III.1) \quad \frac{d}{dt} x = \dot{x} = f(x, t)$$

$$(III.2) \quad x(t_0; t_0, x_0) = x_0$$

avec : $x \in \chi \subset \mathbb{R}^q$ $t_0 \in \mathbb{R}$ $t \in T_0 = [t_0, +\infty[$

La fonction f est telle que la solution $x(t; t_0, x_0)$ soit unique : f peut par exemple vérifier la condition de Lipschitz /Hahn, 1963/.

Outre les définitions données au premier chapitre et concernant la stabilité d'un point d'équilibre, il est intéressant de pouvoir étudier certaines autres propriétés du mouvement. Les notions de domaines de stabilité, d'attractivité /Grujić, 1975-a/ ainsi que les théorèmes principaux relatifs à la méthode directe de Liapounov sont rappelées en annexe (Annexe III.A).

La méthode directe de Liapounov repose sur la définition de fonctions $v(x,t)$ ou $v(x)$ positives, dont la convergence vers zéro doit entraîner celle de l'état vers son équilibre. Ces fonctions v jouent ainsi le rôle de distance généralisée de l'extrémité du vecteur état à l'origine (en définissant cette origine $x=0$ comme étant le point d'équilibre de S). De façon schématique, il s'agit donc de trouver une fonction continue $v(x,t)$ telle que :

$$(III.3) \quad v(x,t) = 0 \iff x = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} (III.4) \quad v(x,t) > 0 \\ (III.5) \quad D^+ v(x,t) < 0 \end{array} \right\} \quad \forall x \neq 0 \quad \forall t \in T_0$$

La stabilité de $x=0$ est alors assurée (un exposé plus rigoureux de ce principe est donné dans l'Annexe). La fonction $v(x,t)$ est alors appelée "fonction de Liapounov pour le système S ".

Une difficulté majeure dans l'analyse d'un système est de proposer une fonction $v(x,t)$, dite "candidate", qui permette de conclure, c'est-à-dire qui s'avère être une fonction de Liapounov pour le système.

Le choix d'une telle fonction peut être guidé par différentes considérations :

- soit par l'existence d'une signification physique, comme par exemple l'énergie d'un système mécanique ou électrique /Minorsky, 1962/,

- soit en construisant une fonction à partir de sa dérivée (cas linéaire /Lefschetz, 1965/) ou de son gradient (méthode du gradient variable /Gibson, 1963/),

- soit en choisissant, à partir de représentations d'état spécifiques, parmi un certain nombre de fonctions candidates remarquables.

C'est cette dernière voie que nous allons envisager dans ce chapitre. Il est alors nécessaire de disposer d'un "catalogue" de fonctions candidates. Nous rappelons ici celles qui nous seront utiles par la suite.

I.2 - Fonctions quadratiques /Liapounov, 1892/ /Krasovskii, 1959/

Soit le système décrit par (III.6) (également considéré en (II.2) au 2ème chapitre) :

$$(III.6) \quad \dot{x} = A(x,t) x$$

et la fonction quadratique définie positive $v(x)$:

$$(III.7) \quad v(x) = x^T P x$$

$$P \in \mathbb{R}^{q \times q} \quad P = P^T \quad P = (p_{ij})$$

P vérifiant les inégalités de Kotelianski assurant sa positivité /Gantmacher, 1966, t. 1, p. 308/ :

$$(III.8) \quad \mu_1(P) \triangleq p_{11} > 0 \quad \mu_2(P) \triangleq \det \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad \dots$$
$$\dots \quad \mu_q(P) \triangleq \det P > 0$$

On a alors :

$$(III.9) \quad D^+ v(x) = \dot{v}(x) = x^T [A^T(x,t) P + P A(x,t)] x$$

Si la forme quadratique :

$$(III.10) \quad FQ(x,t) = A^T(x,t) P + P A(x,t)$$

est définie négative pour tout (x,t) dans R_{h,t_0} , alors l'équilibre $x=0$ est asymptotiquement stable.

Un cas particulier intéressant est celui où la matrice P est l'identité I_q , et où la matrice $A(x,t)$ est :

- soit symétrique $\forall (x,t) \in R_{h,t_0} \quad A(x,t) = A^T(x,t)$

la condition est alors que $A(x,t)$ soit définie négative,

- soit pseudo-antisymétrique /Zambettakis, 1983/, c'est-à-dire telle que :

$$(III.11) \quad A(x,t) = D(x,t) + A_-(x,t)$$

$D(x,t)$ matrice diagonale

$$A_-(x,t) = -A_-^T(x,t) \text{ matrice antisymétrique}$$

la condition est alors que $D(x,t)$ soit définie négative.

I.3 - Normes scalaires et vectorielles. Critère pratique de Borne et Gentina

Il est possible de choisir pour $v(x,t)$ une norme scalaire $p_i(x)$ du vecteur état, comme par exemple les normes de Holder /Rosenbrock, 1963/ /Laurent & Lhote, 1966/. On peut aussi généraliser la méthode de Liapounov en introduisant un vecteur $p(x)$ dont les composantes sont des normes $p_i(x)$ /Robert, 1964/ ou des fonctions de Liapounov /Matrosov, 1962/ /Bellman, 1962/. On aboutit ainsi aux techniques d'agrégation ou de majoration, dont une importante bibliographie est donnée dans /Grujić & al, 1976/ /Gentina, 1976/.

Nous utiliserons par la suite le théorème suivant /Gentina & Borne, 1972/ relatif aux systèmes à non linéarités de rang 1 :

Critère :

Soit le système (III.6), décrit par une matrice $A(x,t)$ dont les termes non constants sont regroupés dans une seule rangée (ligne ou colonne), et soit $A^*(x,t)$ une matrice pseudo-majorante déduite de $A(x,t)$ en remplaçant tous les termes hors diagonaux par leur valeur absolue. Une condition suffisante pour que $x=0$ soit asymptotiquement stable est que les mineurs principaux successifs de $-A^*(x,t)$ soient tous supérieurs à une même constante positive, et ce dans un domaine R_{h,t_0} entourant l'origine.

Ce critère est ainsi valable pour tout système de type L(1) ou C(1), et permet d'appliquer le lemme de Kotelianski /Gantmacher, 1966/ à la matrice $A^*(x,t)$.

I.4 - Fonctions de type quadratique-plus-intégrale

Une importante classe de fonctions de Liapounov a été introduite par Lurie /Lurie, 1951/, donnant lieu à de nombreux développements /Yakubovitch, 1962/ /Kalman, 1963-b/ /Lefschetz, 1965/ /Popov, 1973/ /Narendra & Taylor, 1973/ /Grujić, 1978/. Ces fonctions sont en général constituées d'une forme quadratique de l'état et des non linéarités, plus une intégrale des non linéarités. Par exemple, dans le cas d'un système de type Lurie-Postnikov stationnaire (défini au chapitre II, § II.3) décrit par :

$$(III.11) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bf(s) & \in \mathbb{R}^q \\ s = Cx & \in \mathbb{R}^n \\ f(s) = (\phi_i(s))_{i=1, \dots, n} \end{cases}$$

on posera :

$$(III.12) \quad v(x) = [x^T, f(s)] Q \begin{bmatrix} x \\ f(s) \end{bmatrix} + \int_0^s f^T(u) \cdot D \cdot du$$

avec :

$Q \in \mathbb{R}^{(q+n) \times (q+n)}$ symétrique, définie positive

$D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonale

$u \in \mathbb{R}^n$ variable muette

\int_0^s symbolise l'intégration séparée de chaque composante $\Phi_i(s)$ de f par rapport à la composante correspondante σ_i de s

Ce type de fonction a également été utilisé dans l'étude de systèmes sortant de la classe (III.11), en considérant une fonction $g(x) \in \mathbb{R}^q$ et en posant /Zambettakis, 1983/ :

$$(III.13) \quad v(x) = \int_0^x g^T(u) du$$

Des résultats obtenus grâce à ce type de fonction /Zambettakis, Rotella & Richard, 1984/ seront développés ultérieurement. Ils concernent plus particulièrement des modélisations de type $C(1)$ ou $C(k)$.

II - UTILISATION DE MODELES "EN FLECHE" POUR LES SYSTEMES MONOVARIABLES

Nous avons présenté, dans le second chapitre (§ II.6) une forme matricielle en flèche mince $FM(\cdot)$, dont les termes sont définis à partir de deux polynômes :

- la polynôme symbolique du système, invariant pour toutes les matrices d'évolution semblables à $FM(\cdot)$, noté $p(\lambda, FM(\cdot))$,

- le polynôme représentatif $R(\lambda)$ associé à la modélisation $FM(\cdot)$, et dont les zéros λ_i sont les $q-1$ premiers coefficients de la diagonale de $FM(\cdot)$.

Cette notion a été élargie, dans différents travaux, au cas de zéros λ_i constants mais complexes ou multiples /Rotella & Richard, 1983/ /Rotella, 1983/ /Dimster, Rotella & Richard, 1984/, ou bien dans le cas où

un zéro de $R(\lambda)$ dépend de l'état /Richard, Rotella & Zambettakis, 1982/. Toutes ces études reposent sur les propriétés d'invariance du polynôme symbolique présentées dans les deuxième chapitre.

Un choix arbitraire des zéros de $R(\lambda)$, et donc des termes bloc-diagonaux d'une forme en flèche, est alors possible. Plusieurs résultats concernant la stabilité en découlent, et notamment en ce qui concerne la façon d'orienter ce choix /Benrejeb, 1976/ /Richard, 1981/ /Rotella, Zambettakis & Richard, 1982/ /Zambettakis, Richard & Rotella, 1983, 1984/.

C'est l'ensemble de ces résultats que nous proposons de présenter dans cette partie.

II.1 - Systèmes "compagnonables". Déconnexion en vue de l'étude de stabilité

Nous avons envisagé dans le deuxième chapitre le cas général d'un système de type L(1) ou C(1) dont la décomposition canonique (II.16) est une forme triangulaire par blocs, que nous noterons ici :

$$(III.14) \quad F(.) = \begin{bmatrix} C_0 & B(.) \\ 0 & C_n(.) \end{bmatrix} \quad C_n(.) \in \mathbb{R}^{q_n \times q_n} \quad q_n \leq q$$

Nous dirons qu'un tel système est "compagnonable" dans la cas $q_n = q$. Ce cas, où la forme $F(.)$ se réduit à la seule matrice compagnon $C_n(.)$, est le plus avantageux pour la rapidité de la mise en équation du système par la méthode du polynôme symbolique.

Cependant, dans le cas où $B(.)$ est bornée, la stabilité de $F(.)$ est assurée si et seulement si C_0 et $C_n(.)$ sont stables.

C_0 est constante, et sa stabilité est donc parfaitement définie par ses valeurs propres. Celle de $C_n(.)$ est par contre plus complexe à analyser.

Du point de vue stabilité, l'étude de $F(.)$ est donc ramenée à un sous-système déconnecté :

$$(III.15) \quad \dot{x}_2 = C_n(.) x_2 \quad x_2 \in \mathbb{R}^{q_n}$$

dont la matrice est compagnonable.

Dans toute la suite, nous considèrerons directement des systèmes compagnonables. De plus, nous choisirons principalement des modélisations de type colonne $C(1)$ ou $C(k)$, de façon à pouvoir appliquer à la fois le critère pratique de Borne et Gentina et les fonctions de Liapounov de type quadratique-plus-intégrale.

Les systèmes monovariables de type Lurie-Postnikov (mLP) sont particulièrement concernés dans cette étude, nous rappelons donc ici les notations que nous utiliserons (cf. Chapitre II, § II.5).

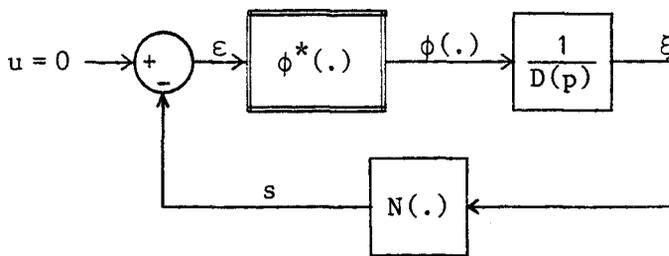


FIGURE III.1

$$(III.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \quad \text{supposée non dégénérée} \\ D(p) = p^q + a_{q-1} p^{q-1} + \dots + a_1 p + a_0 \\ N(p) = b_{q-1} p^{q-1} + \dots + b_1 p + b_0 \\ \phi(.) = \phi^*(.) \cdot \varepsilon \quad \phi^*(.) \text{ dépend de } t \text{ et de l'état } x, \text{ en particulier on peut avoir } \phi^*(x,t) \text{ ou simplement } \phi^*(\varepsilon). \text{ On notera aussi, pour alléger l'écriture, } \phi^*(.) = \phi^* \\ p(\lambda, .) \text{ ou } p(\lambda, \varepsilon) \text{ est le polynôme symbolique du système, défini par :} \\ p(\lambda, .) \equiv D(\lambda) + \phi^*(.) \cdot N(\lambda) \end{array} \right.$$

$F(p)$ étant non dégénérée, $p(\lambda, .)$ n'a pas de zéro constant. Le système est donc compagnonable, sous forme arbitrairement choisie $L(1)$ ou $C(1)$.

II.2 - Polynôme représentatif $R(\lambda)$ d'une matrice en flèche épaisse $FE(.)$

II.2.1 - Définitions. Polynôme $R(\lambda)$ à zéros constants

Nous avons vu dans le deuxième chapitre qu'un des avantages de la forme en flèche mince $FM(.)$ réside dans la multiplicité des choix possibles pour les $(q-1)$ termes $(-\lambda_i)$ figurant sur la diagonale. Cependant, ces termes $(-\lambda_i)$ doivent nécessairement être distincts, et si on désire une matrice FM réelle, les $(-\lambda_i)$ doivent aussi être des réels.

Le polynôme représentatif $R(\lambda)$ associé à une forme en flèche FM a été défini (Chapitre II, § II.6) comme un polynôme de degré $(q-1)$ dont les zéros sont les $(-\lambda_i)$. Les zéros de $R(\lambda)$ sont donc simples, et réels si FM est réelle.

Nous élargissons ici ces notions en considérant d'une part un polynôme $R(\lambda)$ pouvant présenter des racines multiples, d'autre part une formulation en flèche à coefficients réels, mais pouvant correspondre à des zéros imaginaires pour $R(\lambda)$.

La matrice considérée est alors de type en flèche épaisse /Benrejeb, 1980/, ayant une diagonale formée de blocs matriciels Λ_i pouvant appartenir aux types suivants :

- Scalaires réels ou complexes $\Lambda_i = \lambda_i \in \mathbb{C}$ tous distincts. $R(\lambda)$ a alors des zéros simples. Nous envisagerons le cas où un de ces zéros λ_i peut être non constant $\lambda_i(x, t)$.

- Matrice de type Jordan :

$$\Lambda_i = J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i} \quad R(\lambda) \text{ a alors un zéro multiple d'ordre } n_i.$$

- Matrice de type rotation simple :

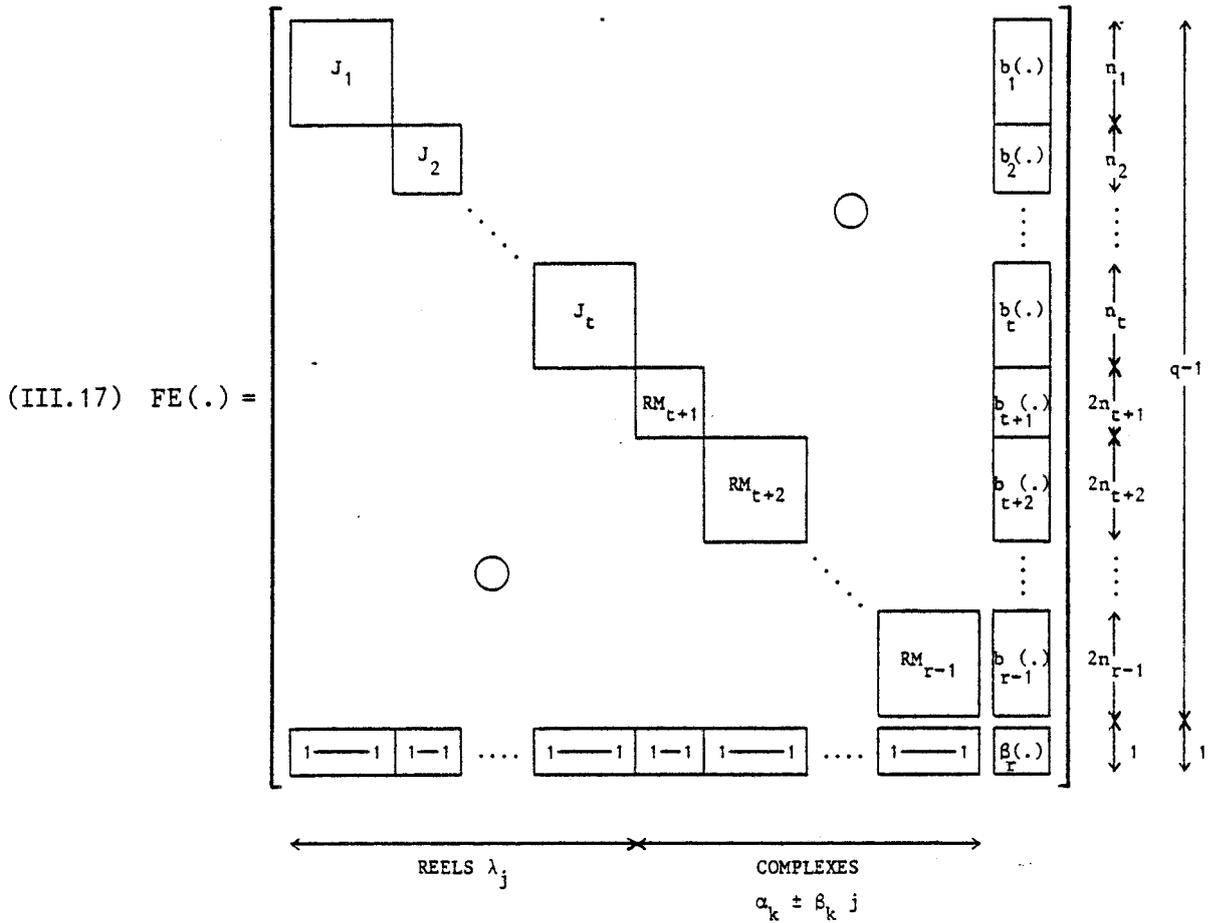
$$\Lambda_i = R_i = \begin{bmatrix} \mu_i & \nu_i \\ -\nu_i & \mu_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \nu_i \neq 0 \quad R(\lambda) \text{ a alors un zéro complexe simple } \mu_i \pm j \nu_i.$$

- Matrice de type rotation multiple :

$$\Lambda_i = RM_i = \begin{bmatrix} R_i & I_2 & & \\ & \diagdown & & \\ & & R_i & \\ & & & I_2 \\ & & & & R_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_i \times 2n_i} \quad R(\lambda) \text{ a alors un zéro complexe multiple d'ordre } n_i.$$

La contrainte "R(λ) n'a pas de zéro multiple" imposée pour la flèche mince FM(.), se retrouve dans le cas de FE(.) sous la forme moins restrictive : "tout zéro multiple de R(λ) est associé à un seul bloc Λ_i ", c'est-à-dire que ne peuvent figurer simultanément dans FE(.) deux blocs diagonaux ayant des valeurs propres égales ; par exemple λ et $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ s'excluent.

Moyennant cette convention, nous proposons la forme FE(.) suivante :



Nous noterons $p(\lambda, .)$ le polynôme symbolique du système représenté par cette matrice, et $R(\lambda)$ le polynôme représentatif associé défini par :

$$(III.18) \quad R(\lambda) = \prod_{j=1}^t (\lambda - \lambda_j)^{n_j} \prod_{j=t+1}^{r-1} \left[(\lambda - \mu_j)^2 + \nu_j^2 \right]^{n_j}$$

Des formules donnant les coefficients b_i et β_r de la dernière colonne sont proposées dans /Rotella, 1983/. Les expressions des b_i sont relativement complexes dans le cas général, néanmoins elles permettent une application informatique intéressante. Un programme réalisant le calcul de $FE(.)$ en fonction des données $p(\lambda, .)$ et $R(\lambda)$ a été réalisé en Fortran /Dimster, Rotella & Richard, 1984/ /Dimster, 1984/. Nous en donnons par la suite un exemple illustratif.

On retrouve une propriété intéressante qui avait été démontrée /Benrejeb, 1976/ pour la forme en flèche mince :

- Si les blocs de la diagonale ont pour valeurs propres les $q-1$ zéros du numérateur $N(p)$, alors les termes hors diagonaux sont tous constants.

- Si ces valeurs propres sont $q-1$ zéros du dénominateur $D(p)$, les termes hors diagonaux de la dernière colonne sont tous proportionnels au coefficient non linéaire $\phi^*(.)$.

Remarquons enfin que la matrice $FE(.)$ représente un système de type $C(1)$, mais qu'il est bien sûr équivalent d'utiliser sa transposée dans le cas $L(1)$, avec également la possibilité de pondérer les coefficients 1 de la dernière ligne de FE .

Exemple d'application informatique

Le programme, dans sa partie modélisation, peut être résumé par l'organigramme suivant :

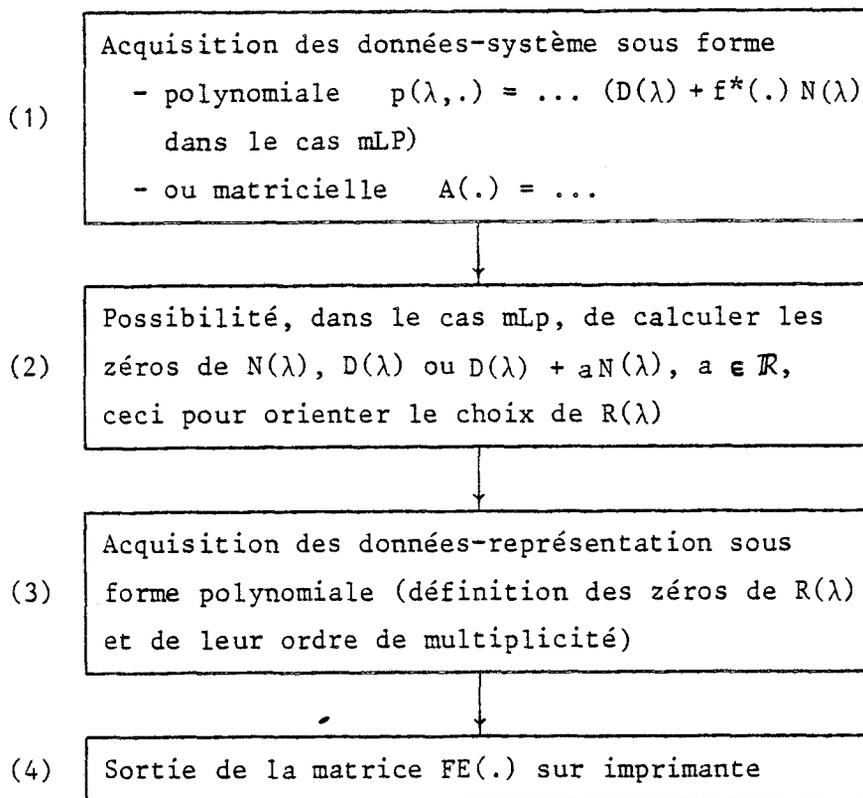


FIGURE III.2

Il a été réalisé en FORTRAN sur VAX 11/750. L'étape (2) sera développée dans la suite de ce chapitre. L'exemple ci-dessous correspond à un système mLP défini par :

$$N(p) = (p + 1)^4$$

$$D(p) = p(p + 2)(p + 3)(p + 4)(p + 5)$$

```

*****
Modélisation et analyse des systèmes monovariabiles de type LUFE' POSTNIKOV
*****
Le système est défini par son schéma bloc.
ORDRE: 5
N(p) et D(p) sont données par :

          COLONNE NUMERATEUR N(p)
+0.000000E+00*VAR*( 0)
+120.000  *VAR*( 1)
+154.000  *VAR*( 2)
+71.0000  *VAR*( 3)
+14.0000  *VAR*( 4)
+1.00000  *VAR*( 5)
*****

          COLONNE DENOMINATEUR D(p)
+1.00000  *VAR*( 0)
+4.00000  *VAR*( 1)
+6.00000  *VAR*( 2)
+4.00000  *VAR*( 3)
+1.00000  *VAR*( 4)
*****

Etape 1 : MODELISATION
          Représentation en FLECHE-NINCE
-----
les paramètres lambda sont les racines de D(p)

          COLONNE DES PARAMETRES
X lambda 1= -2.00000  ; 0.000000E+00
X lambda 2= -3.00000  ; 0.000000E+00
X lambda 3= -4.00000  ; 0.000000E+00
X lambda 4= -5.00000  ; 0.000000E+00
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
*****

          Représentation en FLECHE-EPAISSE
-----
les paramètres lambda sont les racines multiples de N(p)

          COLONNE DES DELTA-1K ET DES GAMMA-1K *
0.000000E+00 + -0.166667 * F(*)
0.000000E+00 + 8.000000 * F(*)
0.000000E+00 + -40.5000 * F(*)
0.000000E+00 + 42.6667 * F(*)
0.000000E+00 + -1.00000 * F(*)
*****

          COLONNE DES DELTA-1K ET DES GAMMA-1K *
-10.0000 + 0.000000E+00 * F(*)
-41.0000 + 0.000000E+00 * F(*)
2.00000 + 0.000000E+00 * F(*)
24.0000 + 0.000000E+00 * F(*)
-10.0000 + -1.00000 * F(*)
*****

```

II.2.2 - Polynôme représentatif à un zéro non constant.
Coordonateur linéaire

Cette partie concerne les systèmes de type Lurie-Postnikov monovari-
riables décrits Figure III.1, avec les notations (III.16).

Nous proposons a priori la matrice en flèche mince suivante, dont
le polynôme représentatif est $R(\lambda) = (\lambda + \lambda_1 + \alpha\phi^*)(\lambda + \lambda_2) \dots (\lambda + \lambda_{q-1})$:

$$(III.19) \quad FCL(.) = \begin{bmatrix} -\lambda_1 - \alpha\phi^* & & & & & 1 \\ & & & & \bigcirc & 1 \\ & & -\lambda_2 & & & \vdots \\ & \bigcirc & & \dots & & 1 \\ & & & & & \vdots \\ \delta_1 + \beta\phi^* & \delta_2 & \dots & \dots & \delta_{q-1} & -\gamma \end{bmatrix}$$

$$\gamma, \lambda_i, \delta_i, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \phi^* = \phi^*(.)$$

Les termes non constants de FCL sont regroupés dans la première
colonne, et par conséquent la première composante du vecteur état cor-
respondant à cette modélisation est proportionnelle à l'erreur ε .

Dans la modélisation FM(.), la variable ε correspondait au système
ordonateur, qui était alors non linéaire. Ici, par contre, le système
ordonateur de FCL(.) est linéaire.

FCL(.) sera appelée forme en flèche mince à coordonateur linéaire.

Le calcul du polynôme symbolique de FCL(.) s'écrit :

$$(III.20) \quad p(\lambda, FCL(.)) = D_1(\lambda) + \phi^*(.) \cdot N_1(\lambda)$$

avec :

$$(III.21) \quad N_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \alpha(\lambda + \gamma) - \beta & & & & & \\ & (\lambda + \lambda_2) & & & & \\ & & (\lambda + \lambda_3) & & & \\ & & & \dots & & \\ & & & & (\lambda + \lambda_{q-1}) & \\ & -\alpha\delta_2 & (1) & & & \\ & & & (\lambda + \lambda_3) & & \\ & & & & \dots & \\ & & & & & (\lambda + \lambda_{q-1}) \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & \\ & -\alpha\delta_{q-1} & (\lambda + \lambda_2) & (\lambda + \lambda_3) & & \dots & (1) \end{bmatrix}$$

$$(III.22) \quad D_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda + \gamma & & & & & \\ & (\lambda + \lambda_1) & & & & \\ & & (\lambda + \lambda_2) & & & \\ & & & (\lambda + \lambda_3) & & \\ & & & & \dots & \\ & & & & & (\lambda + \lambda_{q-1}) \\ & -\delta_1 & (1) & & & \\ & & & (\lambda + \lambda_2) & & \\ & & & & (\lambda + \lambda_3) & \\ & & & & & \dots & \\ & & & & & & (\lambda + \lambda_{q-1}) \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & \\ & -\delta_{q-1} & (\lambda + \lambda_1) & (\lambda + \lambda_2) & (\lambda + \lambda_3) & & \dots & (1) \end{bmatrix}$$

Nous poserons :

$$(III.23) \quad S(\lambda) = (\lambda + \lambda_2)(\lambda + \lambda_3) \dots (\lambda + \lambda_{q-1}) \quad \text{et donc :}$$

$$(III.24) \quad d(S) = q - 2$$

La matrice FCL(.) représente le système (III.16) si et seulement si :

$$(III.25) \quad N_1(p) = N(p) \quad \text{et} \quad D_1(p) = D(p) \quad \forall p \in \mathcal{C}$$

En identifiant ces polynômes, on obtient l'expression des termes α , β , γ et δ_i .

II.2.2.a - Cas où $d(N) = d(D) - 1$ ($b_{q-1} \neq 0$) :

Propriété 1 : Cas où $d(N) = d(D) - 1$

Si il existe un réel λ_1 tel que le polynôme

$$(III.26) \quad P(p) = b_{q-1}.D(p) - (p + \lambda_1).N(p) \quad (d(P) \leq q-1)$$

soit de degré $q-1$ ou $q-2$,

de racines $-\mu_1, -\lambda_2, -\lambda_3, \dots, -\lambda_{q-1}$ (μ_1 peut ne pas exister)
vérifiant $\lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall i \neq j ; i, j = 2, 3, \dots, q-1$

Alors la matrice FCL(.) (III.19) représente le système (III.16) à condition que :

$$(III.27-a) \quad \alpha = b_{q-1}$$

$$(III.27-b) \quad \beta = b_{q-1} (a_{q-1} - \lambda_1) - b_{q-2}$$

$$(III.27-c) \quad \gamma = a_{q-1} - \sum_{i=1}^{q-1} \lambda_i$$

$$(III.27-d) \quad \delta_i = - \left[\frac{(p + \lambda_i) N(p)}{\alpha S(p)} \right]_{p = -\lambda_i} \quad \forall i = 2, 3, \dots, q-1$$

$$(III.27-e) \quad \delta_1 = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \left[b_{q-3} + \lambda_1 b_{q-2} \right] - a_{q-2} & \text{si } \mu_1 \text{ n'existe pas} \\ & (d(P) = q-2) (\beta = 0) \\ \frac{\beta}{\alpha} (\lambda_1 - \mu_1) & \text{si } \mu_1 \text{ existe} \quad (d(P) = q-1) (\beta \neq 0) \end{cases}$$

Démonstration :

L'identification du terme non constant (en ϕ^*) de la trace de FCL(.) donne $\alpha = b_{q-1}$ (III.27-a). D'après (III.21), (III.22) et (III.25), il vient :

$$(III.28) \quad P(p) = \left[\beta (p + \lambda_1) - \alpha \delta_1 \right] S(p)$$

Les λ_i ($i = 2$ à $q-1$) de la diagonale de FCL(.) sont donc $q-2$ zéros de $P(p)$.

De plus, d'après (III.21), (III.22) et (III.25) :

$$N(-\lambda_i) = - \delta_i \alpha \left[\frac{S(\lambda)}{\lambda_i + \lambda} \right]_{\lambda = -\lambda_i} \quad i = 2, \dots, q-1$$

d'où l'expression (III.27-d).

D'après (III.28), β est le coefficient du terme de plus haut degré de $P(p)$, c'est-à-dire de degré $q-1$, d'où l'expression (III.27-b) :

$$\beta = b_{q-1} (a_{q-1} - \lambda_1) - b_{q-2}$$

La trace de $FCL(.)$ est nécessairement :

$$- a_{q-1} - b_{q-1} \phi^* = - \gamma - \alpha \phi^* - \sum_{i=1}^{q-1} \lambda_i$$

d'où γ (III.27-c).

Enfin, on a d'après (III.26) et (III.22) :

$$P(-\lambda_1) = b_{q-1} D(-\lambda_1) = -b_{q-1} \delta_1 S(-\lambda_1) \implies \delta_1 = \frac{-P(-\lambda_1)}{b_{q-1} S(-\lambda_1)}$$

Les λ_i ($i = 2$ à $q-1$) sont racines de $P(p)$ et :

$$P(p) = \beta (p + \mu_1) S(p) \quad \text{si } \mu_1 \text{ existe } (\beta \neq 0)$$

$$P(p) = (b_{q-1} a_{q-2} - \lambda_i b_{q-2} - b_{q-3}) S(p) \quad \text{si } \mu_1 \text{ n'existe pas } (\beta = 0)$$

On en déduit (III.27-e).

Remarque : Choix particuliers de λ_1

- 1) En choisissant $\lambda_1 = a_{q-1} - \frac{b_{q-2}}{b_{q-1}}$, on se trouve dans le cas $\beta = 0$, c'est-à-dire que $P(p)$ est de degré $q-2$. Le terme $\beta \phi^*$ disparaît dans $FCL(.)$, qui prend la forme suivante, avec un seul coefficient non constant noté X :

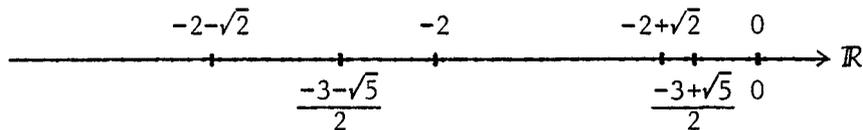
$$\left[\begin{array}{c} X \\ \diagdown \\ \text{---} \end{array} \right]$$

2) En choisissant pour λ_1 un zéro de $D(p)$, avec $\lambda_1 \neq a_{q-1} - \frac{b_{q-2}}{b_{q-1}}$, on obtient un polynôme $P(p)$ de degré $q-1$. Si, de plus, ses racines sont distinctes, on a $\mu_1 = \lambda_1$, et par conséquent $\delta_1 = 0$.

EXEMPLE 1 :

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{p^2 + 3p + 1}{(p+2)(p^2 + 4p + 2)} = \frac{p^2 + 3p + 1}{p^3 + 6p^2 + 10p + 4}$$

Les pôles sont $(-2 - \sqrt{2}, -2, -2 + \sqrt{2})$, et les zéros $((-3 - \sqrt{5})/2, (-3 + \sqrt{5})/2)$, et sont placés dans l'ordre suivant sur l'axe réel :



On a :

$$\begin{aligned} P(p) &= D(p) - (p + \lambda_1) N(p) \\ &= (3 - \lambda_1) p^2 + (9 - 3\lambda_1) p + 4 - \lambda_1 \end{aligned}$$

En choisissant $\lambda_1 = 2$,

$$P(p) = p^2 + 3p + 2 = (p+2)(p+1)$$

Les racines de $P(\lambda)$ sont : soit $-\mu_1 = -2$ $-\lambda_2 = -1$
 soit $-\mu_1 = -1$ $-\lambda_2 = -2$

* Pour $\lambda_2 = 1$ ($\mu_1 = 2$), on a :

$$\alpha = 1 \quad \beta = 1 \quad \gamma = 3 \quad \delta_1 = 0 \quad \delta_2 = -N(-\lambda_2) = -N(-1) = 1$$

$$\text{FCL}(\cdot) = \begin{bmatrix} -2-\phi^* & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ \phi^* & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

On peut noter dès à présent que si $\phi^*(x,t)$ est positif quelquesoit (x,t) , on peut appliquer à $\text{FCL}(\cdot)$ les conditions de stabilité des systèmes linéaires, car FCL est sa propre pseudo-majorante (cf § I.3.2). Ces conditions s'écrivent :

$$D(0) + \phi^*(x,t) N(0) > 0$$

soit :

$$4 + \phi^*(x,t) > 0 \quad \forall (x,t) \in \chi \times T_0$$

La condition d'alternance des pôles et zéros de D et N /Benrejeb, 1976/ n'apparaît plus nécessaire.

* Pour $\lambda_2 = 2$ ($\mu_1 = 1$), on a :

$$\alpha = 1 \quad \beta = 1 \quad \gamma = 2 \quad \delta_1 = 1 \quad \delta_2 = -N(-2) = 1$$

$$\text{FCL}(\cdot) = \begin{bmatrix} -2-\phi^* & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1+\phi^* & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

En choisissant $\lambda_1 = 3$,

on obtient $P(p) = 1$, qui ne convient pas.

EXEMPLE 2 :

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{p^2 + 2p + 2}{p^3 + 3p^2 + 8p + 6}$$

$$\begin{aligned} P(p) &= D(p) - (p + \lambda_1) N(p) \\ &= (1 - \lambda_1) p^2 + (6 - 2\lambda_1) p + 6 - 2\lambda_1 \end{aligned}$$

En choisissant $\lambda_1 = 1$,

le polynôme $P(p)$ n'est plus que de degré 1 ($\beta = 0$) :

$$P(p) = 4(p+1) \quad \text{racine } -\lambda_2 = -1$$

$$\alpha = 1 \quad \beta = 0 \quad \gamma = 1 \quad \delta_1 = 4 \quad \delta_2 = -N(-1) = -1$$

$$\text{FCL}(.) = \begin{bmatrix} -1-\phi^* & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

La stabilité asymptotique exponentielle (en e^{-t}) est assurée s'il existe une constante réelle c telle que :

$$\forall (x,t) \in \chi \times T_0 \quad \phi^*(x,t) \geq c > 0$$

(Cette condition est obtenue en choisissant la fonction de Liapounov $v(x) = (2\xi_1)^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$, $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ étant l'état x associé à $\text{FCL}(.)$).

II.2.2.b - Cas où $d(N) = d(D) - 2$ ($b_{q-1} = 0$) :

La trace de la matrice est constante dans ce cas, et on a $\alpha = 0$. On retrouve les formules de la forme en flèche classique /Benrejeb, 1976/.

Propriété 2 : Cas où $d(N) = d(D) - 2$

Si les $q-2$ zéros de $N(p)$ sont distincts, notés $\{-\lambda_2, -\lambda_3, \dots, -\lambda_{q-1}\}$ alors pour un réel donné λ_1 ($\lambda_1 \neq \lambda_i$; $\forall i \neq 1$), la représentation (III.19) est définie par :

$$\alpha = 0 \quad \gamma = a_{q-1} - \sum_{i=1}^{q-1} \lambda_i \quad \beta = -b_{q-2}$$

$$\delta_i = -b_{q-2} \left[\frac{(\lambda + \lambda_i) D(\lambda)}{(\lambda + \lambda_1) N(\lambda)} \right]_{\lambda = -\lambda_i} \quad \forall i = 1, \dots, q-1$$

Remarque :

Si $-\lambda_1$ est un pôle, $D(-\lambda_1) = 0$ et $\delta_1 = 0$.

Cette propriété sera utilisée dans la dernière partie de ce chapitre, qui concerne l'analyse des systèmes non linéaires à partir de critères relatifs aux systèmes linéaires.

II.3 - Application conjointe du critère de Borne et Gentina et des fonctions de Liapounov de type quadratique-plus-intégrale

Dans cette partie, nous exposons un résultat intéressant /Zambetakis, Richard & Rotella, 1984/ concernant la définition d'un modèle d'ordre réduit dont la stabilité entraîne celle du système initial. Les processus concernés sont de type Lurie-Postnikov, décrits plus haut en (III.16) (Figure III.1) avec de plus une non-linéarité dépendant de l'écart entrée-sortie ε défini sur un intervalle E :

$$(III.28) \quad \left. \begin{array}{l} \phi(.) = \phi(\varepsilon) \\ \phi^*(.) = \phi(\varepsilon) \end{array} \right\} \quad \forall \varepsilon \in E = [\underline{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}] \quad \underline{\varepsilon} < 0 < \bar{\varepsilon}$$

II.3.1 - Modélisation

Le théorème que nous proposons par la suite nécessite une modélisation en flèche dont les $q-1$ termes hors diagonaux de la dernière colonne sont proportionnels à un même coefficient α^* , constant ou non. A cet effet, les termes (λ_i) de la diagonale peuvent être choisis de trois façons différentes :

$$II.3.1.a \quad \lambda_i = z_i \text{ racines de } N(p) = 0 :$$

Si le numérateur présente $(q-1)$ zéros réels négatifs distincts z_i :

$$(III.29) \quad \forall i, j = 1, \dots, q-1 \quad N(z_i) = 0 \quad z_i \neq z_j \iff i \neq j$$

alors le système (III.16) (III.28) peut être représenté par la matrice :

$$(III.30) \quad FM(\epsilon) = \left[\begin{array}{ccc} z_1 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ & z_i & \circ \\ & \vdots & \vdots \\ \circ & & z_{q-1} \\ & & \vdots \\ 1 & \text{-----} & 1 \end{array} \quad - \left[\begin{array}{c} \frac{D(p)}{N(p)} (p - z_i) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{q-1} + \frac{b_{q-2}}{b_{q-1}} - b_{q-1} \phi^* \end{array} \right]_{p=z_i} \right]$$

Les (q-1) premiers termes de la dernière colonne sont proportionnels à $\alpha^* = 1$.

II.3.1.b $\lambda_i = p_i$ racines de $D(p) = 0$:

Si le dénominateur présente (q-1) pôles réels et distincts p_i ($i = 1$ à $q-1$) ainsi qu'un $q^{\text{ème}}$ pôle p_0 (pouvant être égal à un des p_i , ou non) :

$$(III.31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall i, j = 1, \dots, q-1 \quad D(p_i) = 0 \\ D(p_0) = 0 \end{array} \right. \quad p_i \neq p_j \iff i \neq j$$

alors le système (III.16) (III.28) peut être représenté par :

$$(III.32) \quad FM(\epsilon) = \left[\begin{array}{ccc} p_1 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ & p_i & \circ \\ & \vdots & \vdots \\ \circ & & p_{q-1} \\ & & \vdots \\ 1 & \text{-----} & 1 \end{array} \quad - \left[\begin{array}{c} \frac{N(p) (p - p_0) (p - p_i)}{D(p)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ p_0 - b_{q-1} \phi^* \end{array} \right]_{p=p_i} \cdot \phi^* \right]$$

Les (q-1) premiers termes de la dernière colonne sont proportionnels à $\alpha^*(\epsilon) = \phi^*(\epsilon)$.

II.3.1.c $\lambda_i = \mu_i$ racines de $D(p) + aN(p) = 0$, $a \in \mathbb{R}$:

Si il existe un réel a tel que le polynôme $P(p)$ défini par :

(III.33) $P(p) = D(p) + aN(p)$

ait $(q-1)$ zéros réels distincts μ_i ($i = 1$ à $q-1$) ainsi qu'un $q^{\text{ème}}$ zéro μ_0 ,

(III.34) $\forall i, j = 1, \dots, q-1 \quad P(\mu_i) = 0 \quad \mu_i \neq \mu_j \iff i \neq j$

alors le système (III.16) (III.28) peut être représenté par :

(III.35) $FM(\epsilon) = \left[\begin{array}{ccc} \mu_1 & & \vdots \\ \ddots & & \vdots \\ & \circ & \vdots \\ & & \mu_i & \ddots \\ & \circ & & \vdots \\ & & & \mu_{q-1} \\ 1 & \text{-----} & 1 & & \mu_0 - b_{q-1} (\phi^* - a) \end{array} \right] - \left[\frac{N(p) \cdot (p - \mu_0) \cdot (p - \mu_i)}{P(p)} \right]_{p=\mu_i} \cdot (\phi^* - a)$

Les $(q-1)$ premiers termes de la dernière colonne sont proportionnels à $\alpha^*(\epsilon) = \phi^*(\epsilon) - a$.

II.3.1.d - Unification des modélisations :

Les trois modélisations (a , b et c) peuvent être unifiées, en convenant de choisir comme termes de la diagonale $(q-1)$ zéros d'un polynôme $P(p)$ défini par :

(III.36) $P(p) = c D(p) + d N(p) \quad (c, d) \in \mathbb{R}^2$

Pour analyser la stabilité à partir de ces modèles, il est nécessaire de considérer des termes diagonaux négatifs. Le système (III.16) doit donc vérifier l'hypothèse suivante :

(H) Il existe $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ tels que $P(p) = cD(p) + dN(p)$ ait $(q-1)$ zéros réels distincts négatifs $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{q-1}\}$, plus éventuellement un $q^{\text{ème}}$ zéro λ_0 quelconque.

Nous rappellerons par la suite différents moyens de tester si des couples (c,d) vérifiant (H) existent (§ II.3.4).

Lorsque (H) est vérifiée, une unification des trois cas $(a, b$ et $c)$ est possible sous une forme faisant apparaître distinctement les facteurs positifs et négatifs de α^* dans la dernière colonne ; cette séparation s'obtient par une permutation adéquate des termes λ_i de la diagonale :

$$(III.37) \quad \dot{\bar{x}} = C(\varepsilon).x \quad (\text{ystème (S)})$$

avec :

$$C(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & -k_1^+ \alpha^*(\varepsilon) \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \lambda_\ell & & -k_\ell^+ \alpha^*(\varepsilon) \\ & & & \lambda_{\ell+1} & -k_{\ell+1}^- \alpha^*(\varepsilon) \\ & & & & \vdots \\ & & & & \lambda_{q-1} & -k_{q-1}^- \alpha^*(\varepsilon) \\ 1 & \text{---} & & & & -\beta^*(\varepsilon) \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_+ \\ \text{---} \\ x_- \\ \text{---} \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$x^T = (x_+^T, x_-^T, \varepsilon) \quad x_+ \in \mathbb{R}^\ell \quad x_- \in \mathbb{R}^{q-\ell-1} \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

$$\forall i = 1, \dots, \ell ; k_i^+ > 0 \quad \forall i = \ell+1, \dots, q-1 ; k_i^- < 0$$

$$\forall \varepsilon \in E \quad \alpha^*(\varepsilon) \cdot \varepsilon = \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}$$

$$\beta^*(\varepsilon) \cdot \varepsilon = \beta(\varepsilon) \in \mathbb{R}$$

$\alpha^*(\varepsilon)$ peut être constant ou non, selon le choix de c et d .

Nous considérons que le signe de $\alpha^*(\varepsilon)$ reste constant dans un voisinage de $\varepsilon = 0$. Ce signe est, sans que cela soit restrictif, supposé positif :

$$(III.38) \quad] h > 0 \quad \forall \varepsilon \in E \quad |\varepsilon| < h \implies \alpha^*(\varepsilon) > 0$$

De façon à schématiser l'expression de $C(\varepsilon)$, nous posons :

$$(III.39) \quad \begin{cases} \Lambda_+ = \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell \}, \Lambda_+ \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell} \\ \Lambda_- = \text{diag} \{ \lambda_{\ell+1}, \lambda_{\ell+2}, \dots, \lambda_{q-1} \}, \Lambda_- \in \mathbb{R}^{(q-\ell-1) \times (q-\ell-1)} \end{cases}$$

$$(III.40) \quad \begin{cases} k_+ = (k_1^+, k_2^+, \dots, k_\ell^+)^T \quad k_+ \in \mathbb{R}_+^\ell \\ k_- = (k_{\ell+1}^-, k_{\ell+2}^-, \dots, k_{q-1}^-)^T \quad k_- \in \mathbb{R}_-^{q-\ell-1} \end{cases}$$

La matrice $C(\varepsilon)$ du système (S) s'écrit alors :

$$(III.41) \quad C(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \Lambda_+ & 0 & -k_+ \alpha^*(\varepsilon) \\ 0 & \Lambda_- & -k_- \alpha^*(\varepsilon) \\ 1 & 1 & -\beta^*(\varepsilon) \end{bmatrix}$$

C'est à partir de cette modélisation que nous allons étudier la stabilité du système.

II.3.2 - Théorème du système réduit

Enoncé :

Soient les deux sous-systèmes déconnectés définis à partir du système (S) (III.37) (III.38) (III.41) par :

$$(III.42) \quad (S_+) : \dot{z}_+ = \Lambda_+ z_+$$

$$(III.43) \quad (S_-) : \dot{z}_- = S_-(\varepsilon) z_-$$

avec :

$$S_-(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \Lambda_- & -k_- \alpha^*(\varepsilon) \\ 1 & -\beta^*(\varepsilon) \end{bmatrix} \quad \text{matrice en flèche mince}$$

Si (S_+) est asymptotiquement stable ($\Lambda_+ < 0$) et si (S_-) vérifie les conditions de stabilité du linéaire :

$$(III.44) \quad \Lambda_- < 0$$

$$(III.45) \quad \exists h > 0 \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \quad |\varepsilon| < h \implies (-1)^{q-l} \det S_-(\varepsilon) > 0$$

alors l'équilibre $x=0$ du système complet (S) (III.37) est asymptotiquement stable.

Remarque : Les matrices (S_+) et (S_-) sont facilement obtenues à partir de toute forme en flèche dont les coefficients diagonaux sont les zéros de $P(p)$ (l'hypothèse (H) étant supposée vérifiée) : Λ_+ s'obtient en ne conservant que les λ_i correspondant aux facteurs de α^* négatifs ($-k_i^+$). $S_-(\varepsilon)$ s'obtient en conservant les λ_i correspondant aux facteurs de α^* positifs ($-k_i^-$) ainsi que ces termes $-k_i^- \alpha^*$. Cette matrice $S_-(\varepsilon)$ est alors sa propre pseudo-majorante, et le critère de Borne et Gentina peut lui être directement appliqué : ceci conduit alors aux conditions (III.44) et (III.45).

Démonstration :

Considérons la fonction candidate suivante, associée à l'état x (III.37) :

$$(III.46) \quad v(x) = \frac{1}{2} \left[x_+^T D_+ x_+ + x_-^T D_- x_- \right] + \int_0^\varepsilon \alpha(\xi) d\xi$$

avec :

$$(III.47) \quad \begin{cases} D_+ = \text{diag} \left\{ \frac{1}{k_+^1}, \frac{1}{k_+^2}, \dots, \frac{1}{k_+^\ell} \right\}, \quad D_+ \in \mathbb{R}_+^{\ell \times \ell} \\ D_- = \text{diag} \left\{ -\frac{1}{k_-^{\ell+1}}, -\frac{1}{k_-^{\ell+2}}, \dots, -\frac{1}{k_-^{q-1}} \right\}, \quad D_- \in \mathbb{R}_+^{(q-\ell-1) \times (q-\ell-1)} \end{cases}$$

D'après (III.38), $v(x)$ est définie positive dans un voisinage de l'origine $x=0$. Sa dérivée est donnée par (III.48) :

$$(III.48) \quad \dot{v}(x) = x_+^T D_+ \Lambda_+ x_+ + \begin{bmatrix} x_-^T & | & \alpha(\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_- \Lambda_- & | & 1 \\ \hline - & + & - \\ 1 & - & 1 \\ | & & | \\ & & \frac{\beta^*}{\alpha^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_- \\ \hline \alpha(\varepsilon) \end{bmatrix}$$

$\dot{v}(x)$ est définie négative dans ce voisinage de $x=0$ puisque :

- la matrice $D_+ \Lambda_+$ est strictement négative,
- la matrice Δ définie par (III.49)

$$(III.49) \quad \Delta(\varepsilon) = \begin{bmatrix} D_- \Lambda_- & | & 1 \\ \hline - & + & - \\ 1 & - & 1 \\ | & & | \\ & & \frac{\beta^*}{\alpha^*} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(q-\ell) \times (q-\ell)}$$

vérifie les conditions de Kotelianski assurant sa négativité /Gantmacher, 1966/ pour tout ε tel que $|\varepsilon| < h$:

$$(III.50) \quad \Lambda_- < 0$$

$$(III.51) \quad (-1)^{q-\ell} \det \Delta(\varepsilon) = (-1)^{q-\ell} [\alpha^*(\varepsilon)]^{-1} \det(D_-) \det S_-(\varepsilon) < 0$$

Cette dernière égalité est obtenue en multipliant chacune des lignes de $\Delta(\varepsilon)$ (sauf la dernière) par le terme $-k_1^-$ correspondant, et sa dernière colonne par α^* . On doit alors, pour conserver le déterminant, le diviser par le produit des $(-k_1^-)$ et par α^* . Par exemple, à l'ordre $q-\ell=3$, on obtient :

$$\det \Delta(\varepsilon) = \begin{vmatrix} \frac{\lambda_{\ell+1}}{-k_{\ell+1}^-} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\lambda_{\ell+2}}{-k_{\ell+2}^-} & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{\beta^*}{\alpha^*} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(-k_{\ell+1}^-)} \frac{1}{(-k_{\ell+2}^-)} \begin{vmatrix} \lambda_{\ell+1} & 0 & -k_{\ell+1}^- \\ 0 & \lambda_{\ell+2} & -k_{\ell+2}^- \\ 1 & 1 & -\frac{\beta^*}{\alpha^*} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\alpha^*} \begin{vmatrix} -\frac{1}{k_{\ell+1}^-} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{k_{\ell+2}^-} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_{\ell+1} & 0 & -k_{\ell+1}^- \alpha^* \\ 0 & \lambda_{\ell+2} & -k_{\ell+2}^- \alpha^* \\ 1 & 1 & -\beta^* \end{vmatrix}$$

II.3.3 - Exemple 1

Considérons le système mLP défini Figure III.3 :

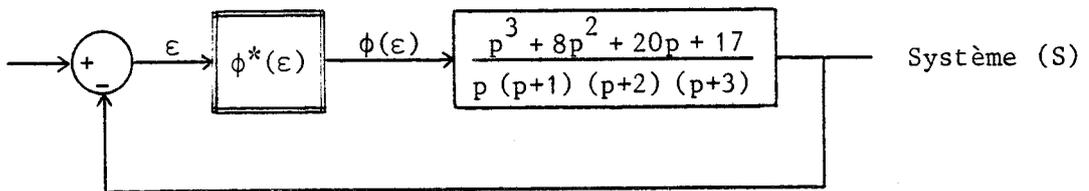


FIGURE III.3

Le numérateur $N(p)$ de la fonction de transfert n'a qu'un zéro réel négatif, par contre, le dénominateur $D(p)$ présente trois pôles stricte-

ment négatifs. Nous choisissons donc ces trois pôles (-1, -2, -3) comme éléments diagonaux λ_i . L'hypothèse (H) est ainsi vérifiée. Il est possible de calculer $C(\varepsilon)$ de façon informatisée :

$$C(\varepsilon) = \begin{bmatrix} -1 & & & -2\phi^* \\ & -2 & & +1\phi^* \\ & & -3 & -1\phi^* \\ 1 & 1 & 1 & -1\phi^* \end{bmatrix}$$

Le système réduit (S_-) est immédiatement défini en ne conservant que les facteurs positifs de ϕ^* dans la dernière colonne :

$$S_-(\varepsilon) = \begin{bmatrix} -2 & 1\phi^* \\ 1 & -1\phi^* \end{bmatrix}$$

(S_-) correspond au système de la Figure III.4 :

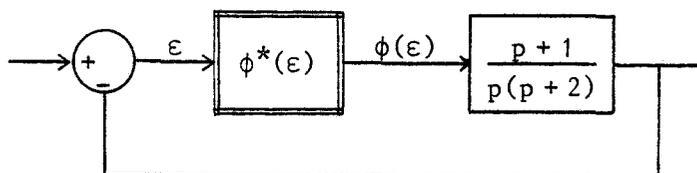


FIGURE III.4

(S_-) vérifie la conjecture du linéaire, et la condition de stabilité asymptotique globale de (S_-) assure la même propriété pour (S) :

$$\exists \gamma > 0 \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \quad \phi^*(\varepsilon) \geq \gamma > 0$$

II.3.4 - Exemple 2

Soit le système mLP décrit Figure III.5 :

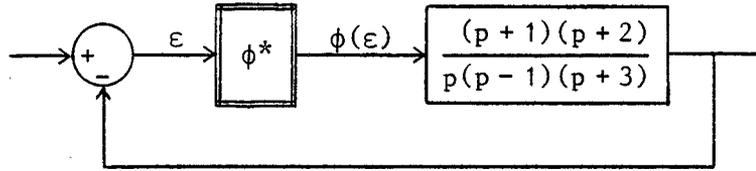


FIGURE III.5

Il n'existe pas deux pôles réels négatifs, par contre le numérateur présente deux zéros (-1 et -2) réels négatifs distincts :

$$C(\varepsilon) = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ & -2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 - \phi^*(\varepsilon) \end{bmatrix}$$

Le système réduit (S_-) a pour matrice :

$$S_-(\varepsilon) = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 1 - \phi^*(\varepsilon) \end{bmatrix}$$

et correspond au schéma de la Figure III.6 :

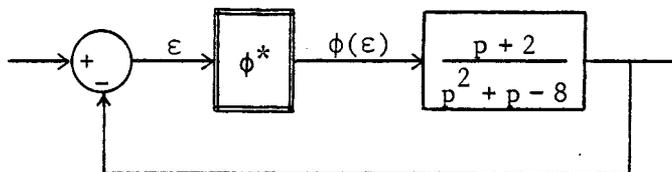


FIGURE III.6

Une condition de stabilité asymptotique globale est alors :

$$\exists \gamma > 0 \quad \forall \varepsilon \in \mathcal{R} \quad \phi^*(\varepsilon) - 4 \geq \gamma > 0$$

II.3.5 - Vérification de l'hypothèse (H). Choix des termes diagonaux de la forme en flèche

La contrainte principale de modélisation sous une forme en flèche adaptée au théorème du système réduit s'exprime sous la forme :

(H)

Il existe $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ tels que $P(p) = cD(p) + dN(p)$ ait $(q-1)$ zéros réels distincts négatifs $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{q-1}\}$, plus éventuellement un $q^{\text{ème}}$ zéro λ_0 quelconque.

Cette contrainte, supposée vérifiée au paragraphe (II.3.1), peut être testée directement sur la fonction de transfert $N(p) / D(p)$ du système, de plusieurs façons :

- A partir d'un critère graphique basé sur le tracé du lieu d'Evans du système linéarisé /Rotella, Zambettakis, Richard, 1982/. En posant $k = d/c$, on est ramené à étudier les zéros de $D(p) + kN(p)$ en fonction de k , ce qui revient à effectuer le tracé du lieu des racines /Gille, Decaulne, Pelegrin, 1971/. Ce tracé peut être effectué de façon informatisée /Paillet, 1981/, mais demande un temps de calcul assez long car il nécessite le calcul de toutes les racines de $D + kN$ pour un grand nombre de valeurs de k .

- A partir d'un critère algébrique /Zambettakis, Richard, Rotella, 1984/ basé sur le calcul (informatisable) d'un tableau de Routh modifié. Les coefficients de ce tableau, calculés par des opérations simples, peuvent être explicités en fonction de k . Le nombre de zéros négatifs distincts de $D + kN$ est fonction des signes de ces coefficients. Ceci permet de déterminer les valeurs de k admissibles, puis de calculer les zéros correspondants.

C'est cette deuxième méthode que nous allons présenter, sans toutefois en rappeler la démonstration.

II.3.5.a - Construction du tableau de Routh modifié
/Zambettakis, Richard, Rotella, 1984/ :

Soit $P(p,k)$ un polynôme en p dont les coefficients dépendent d'un paramètre k .

Soit $P'(p,k)$ sa dérivée par rapport à p :

$$(III.52) \quad P'(p,k) = \frac{\partial P(p,k)}{\partial p}$$

On posera :

$$(III.53) \quad P(p,k) = a_q p^q + a_{q-1} p^{q-1} + \dots + a_1 p + a_0 \quad d(P) = q$$

$$(III.54) \quad P'(p,k) = b_{q-1} p^{q-1} + \dots + b_1 p + b_0 \quad d(P') = q-1$$

$$b_i = (i+1) a_{i+1} \quad \forall i = 0, \dots, q-1$$

Un polynôme noté $Q(P, P')$ est déduit de P et P' de la façon suivante, décomposée en deux étapes :

1°) Définition d'un polynôme intermédiaire \tilde{Q} à partir de P et P' par des formules analogues à celles de la construction du tableau de Routh-Hurwitz :

$$\begin{array}{l}
 P(p,k) \rightarrow a_q \dots a_i \quad a_{i-1} \dots a_1 \quad a_0 \\
 P'(p,k) \rightarrow \boxed{b_{q-1}} \dots b_{i-1} \quad b_{i-2} \dots b_0 \\
 \quad \quad \quad \underbrace{\hspace{10em}} \\
 \quad \quad \quad \downarrow \\
 \tilde{Q}(p,k) \leftarrow \tilde{c}_i = \frac{b_{q-1} a_i - a_q b_{i-1}}{b_q} \quad d(\tilde{Q}) = q-1
 \end{array}$$

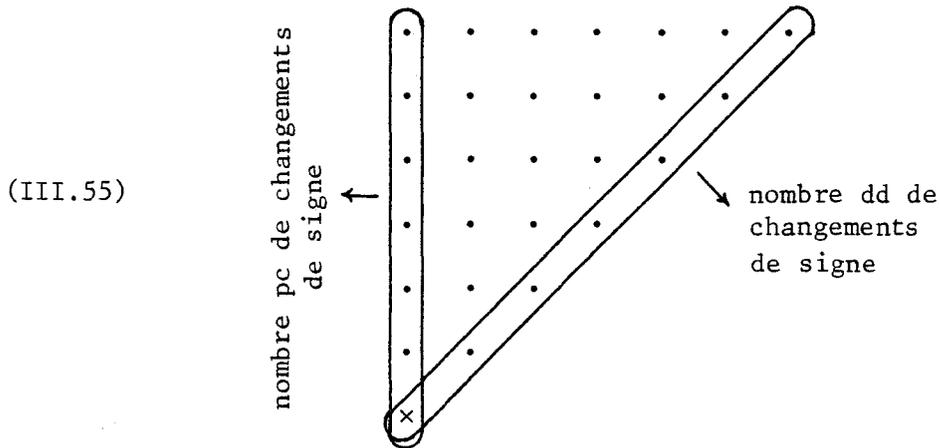
2°) Définition de Q à partir de P' et \tilde{Q} par le même type de formules :

$$\begin{array}{lcl}
 P'(p,k) & \rightarrow & \boxed{b_{q-1}} \dots b_i \quad b_{i-1} \dots b_1 \quad b_0 \\
 \tilde{Q}(p,k) & \rightarrow & \tilde{c}_{q-1} \dots \tilde{c}_i \quad \tilde{c}_{i-1} \dots \tilde{c}_1 \quad \tilde{c}_0 \\
 & & \underbrace{\hspace{10em}} \\
 & & \downarrow \\
 Q(p,k) & \leftarrow & c_i = \frac{\tilde{c}_{q-1} b_i - b_{q-1} \tilde{c}_i}{b_{q-1}} \quad d(Q) = q-2
 \end{array}$$

Le tableau de Routh modifié est alors construit par récurrence :

1 ^{ère} ligne	→ coefficients de P	= L1
2 ^{ème} ligne	→ coefficients de P'	= L2
3 ^{ème} ligne	→ coefficients de Q(P,P') = Q(L1,L2)	= L3
4 ^{ème} ligne	→ coefficients de Q(L2,L3)	= L4
5 ^{ème} ligne	→ coefficients de Q(L3,L4)	= L5
⋮	⋮	⋮	⋮
(q+1) ^e ligne	→ coefficients de Q(Lq-1,Lq)	= Lq+1

Ce tableau est triangulaire, comportant (q+1) lignes et (q+1) colonnes. Nous utiliserons le nombre pc(k) de changements de signes existant dans sa première colonne et le nombre dd(k) de changements de signes dans sa dernière diagonale :



II.3.5.b - Utilisation du tableau de Routh modifié :

Il a été montré /Zambettakis, Richard, Rotella, 1984/ que le nombre $n(k)$ de zéros réels distincts négatifs d'un polynôme $P(p,k)$ de degré q est donné par la formule :

$$(III.56) \quad n(k) = q - pc(k) - dd(k)$$

L'hypothèse (H) est ainsi vérifiée à condition de montrer l'existence d'un réel k tel que $n(k)$ soit égal à q ou $q-1$ pour :

$$(III.57) \quad P(p,k) = N(p)$$

ou bien :

$$(III.58) \quad P(p,k) = k N(p) + D(p)$$

Les valeurs admissibles de $pc(k)$ et $dd(k)$ sont donc :

$$\text{- dans le cas (III.57) :} \quad pc(k) = 0 \quad dd(k) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{- dans le cas (III.58) :} \quad pc(k) &= 0 & dd(k) &= 0 \\ &pc(k) = 1 & dd(k) &= 0 \\ &pc(k) = 0 & dd(k) &= 1 \end{aligned}$$

II.3.5.c - Premier exemple (non informatisé) :

Nous allons dans un premier temps, illustrer la construction du tableau à partir des données de l'exemple 1 (§ II.3.3) :

$$N(p) = p^3 + 8p^2 + 20p + 17$$

$$D(p) = p(p^3 + 6p^2 + 11p + 6)$$

en calculant le nombre de zéros réels distincts négatifs de $N(p)$, puis de $D(p)$.

Calcul de $N(p)$:

$$N'(p) = 3p^2 + 16p + 20$$

Les deux premières lignes du tableau sont donc :

1	8	20	17
3	16	20	

La ligne intermédiaire (\tilde{Q}) est :

8/3	-40/3	17	
-----	-------	----	--

La troisième ligne du tableau est donc :

8/9	7/9		
-----	-----	--	--

Le tableau associé à $N(p)$ est :

1	8	20	17
3	16	20	
8/9	7/9		
-531/64			

$q = 3$ $PC = 1$ $DD = 1 \implies N(p)$ n'a qu'une racine réelle négative.

Calcul sur $D(p)$:

Le calcul portera en fait sur $\frac{1}{p} D(p)$. Le tableau correspondant est :

1	6	11	6
3	12	11	
2/3	4/3		
1			

D(p) a donc une racine nulle et trois racines réelles distinctes négatives.

II.3.5.d - Deuxième exemple (informatisé) :

Cet exemple correspond à l'utilisation informatisée de la méthode du tableau de Routh modifié appliquée à $D(p) + aN(p)$ /Dimster, 1984/ : nous avons conservé les données de l'exemple précédent (§ II.3.5.c), mais cette fois nous obtenons l'ensemble des valeurs admissibles du réel a.

* TABLEAU DE ROUTH MODIFIE *

Numerateur de la fonction de transfert : N(p)

$$N(p) = 0.1000000D+01 * p ** 3 + 0.8000000E+01 * p ** 2 + 0.2000000D+02 * p ** 1 + 0.1700000D+02 * p ** 0$$

Denominateur de la fonction de transfert : D(p)

$$D(p) = 0.1000000D+01 * p ** 4 + 0.6000000D+01 * p ** 3 + 0.1100000D+02 * p ** 2 + 0.6000000D+01 * p ** 1$$

PREMIERE COLONNE DU TABLEAU DE ROUTH MODIFIE

Ligne 1

Le polynome est réduit à une constante

$$P_1(a) = 0.1000000D+01 * a ** 0$$

⋮

Ligne 6

Le degré du polynome est: 4

$$P_6(a) = 0.1280000D+03 * a ** 4 + -0.2046000E+04 * a ** 3 + 0.7328000D+04 * a ** 2 + -0.9472000D+04 * a ** 1 + 0.1280000D+04 * a ** 0$$

⋮

Ligne 8

Le degré du polynome est: 10

$$P_8(a) = -0.1359360D+06 * a ** 10 + 0.4859904D+07 * a ** 9 + -0.6715290D+08 * a ** 8 + 0.4543171D+09 * a ** 7 + -0.1591295D+10 * a ** 6 + 0.2684428D+10 * a ** 5 + -0.2458128D+10 * a ** 4 + 0.6321766D+09 * a ** 3 + 0.3066921D+09 * a ** 2 + -0.1756365D+09 * a ** 1 + 0.1474560E+08 * a ** 0$$

DIAGONALE DU TABLEAU DE ROUTH MODIFIE

=====

Ligne 1

Le degre du polynome est: 1

P 1(a) = 0.1700000D+02* a ** 1 +

.....

Ligne 6

Le degre du polynome est: 4

P 6(a) = 0.1120000D+03* a ** 4 + -0.2144000D+04* a ** 3 + 0.9368000D+04* a ** 2 + -0.1721400D+05* a ** 1 + 0.1920000D+04* a ** 0

.....

Ligne 8

Le degre du polynome est: 10

P 8(a) = -0.1359360D+06* a ** 10 + 0.4857904D+07* a ** 9 + -0.4713290D+08* a ** 8 + 0.4543171D+09* a ** 7 + -0.1591295D+10* a ** 6 + 0.2884428D+10* a ** 5 + -0.2458128D+10* a ** 4 + 0.6321760D+09* a ** 3 + 0.3066921D+09* a ** 2 + -0.1756345D+09* a ** 1 + 0.1474560D+08* a ** 0

Nombre total de racines distinctes:14

Racines trieess :

- A 1=-0.3935732D+00
- A 2=-0.3000000D+00
- A 3= 0.0000000D+00
- A 4= 0.1065361D+00
- A 5= 0.1192128D+00
- A 6= 0.1523303D+00
- A 7= 0.2555192D+00
- A 8= 0.6828175D+00
- A 9= 0.7793654D+00
- A10= 0.7044481D+01
- A11= 0.8553968D+01
- A12= 0.1132462D+02
- A13= 0.1161226D+02
- A14= 0.1372940D+02

TABLEAU DE VARIATION

=====

Nombre de changements de signes dans la premiere colonne

→	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	→	(valeurs de a)
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+		
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+		
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+	+	+	+		
	-	+	+	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	+		
	1	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	

Nombre de changements de signes dans la diagonale

→	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	→	(valeurs de a)
	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+		
	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+		
	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	+	+	+	+		
	-	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-		
	2	1	1	0	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	

=====

CHOIX DU PARAMETRE a
=====

Le nombre N de reels < 0 verifiant $D(p)+a.N(p)=0$
est donne par la formule : $N=m-F-L-1$

Avec: q = m : nombre de lignes du tableau
p = F : nombre de changement de signes dans la premiere colonne
d = L : nombre de changement de signes dans la diagonale

CAS OU F=0, L=1, ET N=0-1

Intervalle possible : $-0.39357320+00 < a < 0.00000000+00$

CAS OU L=F=0 ET N=0

Intervalle possible : $0.00000000+00 < a < 0.10603610+00$

VALEUR DES LAMBDA(I)
=====

Valeur de a choisie : a = 0.100000

Les parametres negatifs verifiant $D(p)+a.N(p)=0$ sont:

lambda 1 = -0.42068910+00

lambda 2 = -0.66508690+00

lambda 3 = -0.20491500+01

lambda 4 = -0.29650740+01

Valeur de a choisie : a = -0.300000

Les parametres negatifs verifiant $D(p)+a.N(p)=0$ sont:

lambda 2 = -0.14301680+01

lambda 3 = -0.18165410+01

lambda 4 = -0.30888320+01

II.4 - Méthodologie et aide informatique pour la synthèse d'un système monovariante de type Lurie-Postnikov

Le choix d'une modélisation parmi l'ensemble présenté précédemment est guidé par les résultats auxquels elle est susceptible de conduire. Il dépend donc à la fois de la spécificité du système considéré et de la nature de l'étude menée. Dans cette étude, nous avons choisi de considérer la stabilisation des systèmes de type mLP, bien que la partie concernant la modélisation puisse être utilisée dans d'autres types d'études.

Les résultats de ce chapitre conduisent à un logiciel interactif d'aide à l'analyse et à la synthèse des systèmes de type mLP /Dimster, Rotella, Richard, 1984/ /Dimster, 1984/. Ceci permet d'évaluer rapidement les effets de paramètres de réglage sur la stabilité et la rapidité de convergence de ces systèmes.

La nature non linéaire des systèmes considérés demande l'interactivité d'un tel logiciel : les propriétés mises en évidence pour le système sont obtenues à partir de conditions suffisantes, il est donc difficile de mener une optimisation dans le cas général.

Nous présentons, dans les pages qui suivent, des diagrammes hiérarchisés correspondant aux fonctions principales d'un tel logiciel. Ceci permet de résumer et de classifier les résultats que nous avons proposés jusqu'à maintenant.

Ce logiciel est en cours d'implantation sur un ordinateur VAX 11/750.

Ses deux fonctions principales sont la modélisation et l'analyse.

- Modélisation :

Les paramètres du système (définissant son polynôme symbolique) sont introduits au niveau de la modélisation (1.1). Les matrices proposées sont en flèche mince ou épaisse (1.3) (1.4), il est cependant envisageable de rajouter des modules correspondant à d'autres formes (1.5).

Les coefficients définissant la diagonale de la matrice en flèche (et donc son polynôme représentatif) peuvent être arbitrairement choisis

(1.4.2) (1.3.1.2). Cependant, des modules d'aide à la décision (1.3.1.1) (1.4.1) peuvent être utilisés pour préciser ce choix. Ces modules font principalement appel à la méthode du tableau de Routh modifié (1.2).

- Analyse :

Le module principal est (2.1) "Stabilité". La nature de la non linéarité y est précisée : ceci permet, lorsque la non-linéarité ne dépend que d'une variable d'état (2.1.1), d'appliquer le théorème du système réduit que nous avons présenté plus haut. Dans l'autre cas (2.1.2), les critères envisagés sont ceux de Borne et Gentina (matrices pseudo-majorantes) et de Krakovskii (fonction de Liapounov quadratique).

Dans tous les cas, des calculs de déterminants sont nécessaires, et peuvent être effectués par le module (2.2). Ce programme calcule le déterminant d'une matrice ayant une colonne non constante, engendrée par g non linéarités génératrices (cf Chapitre II). Dans le cas où les blocs de la diagonale correspondent à des zéros de $cD + dN$, les termes hors diagonaux de la dernière colonne sont proportionnels à une même non linéarité, et de même après majoration par leur valeur absolue : on a alors $g=2$. Dans le cas de termes diagonaux quelconques, g est au maximum égal à q .

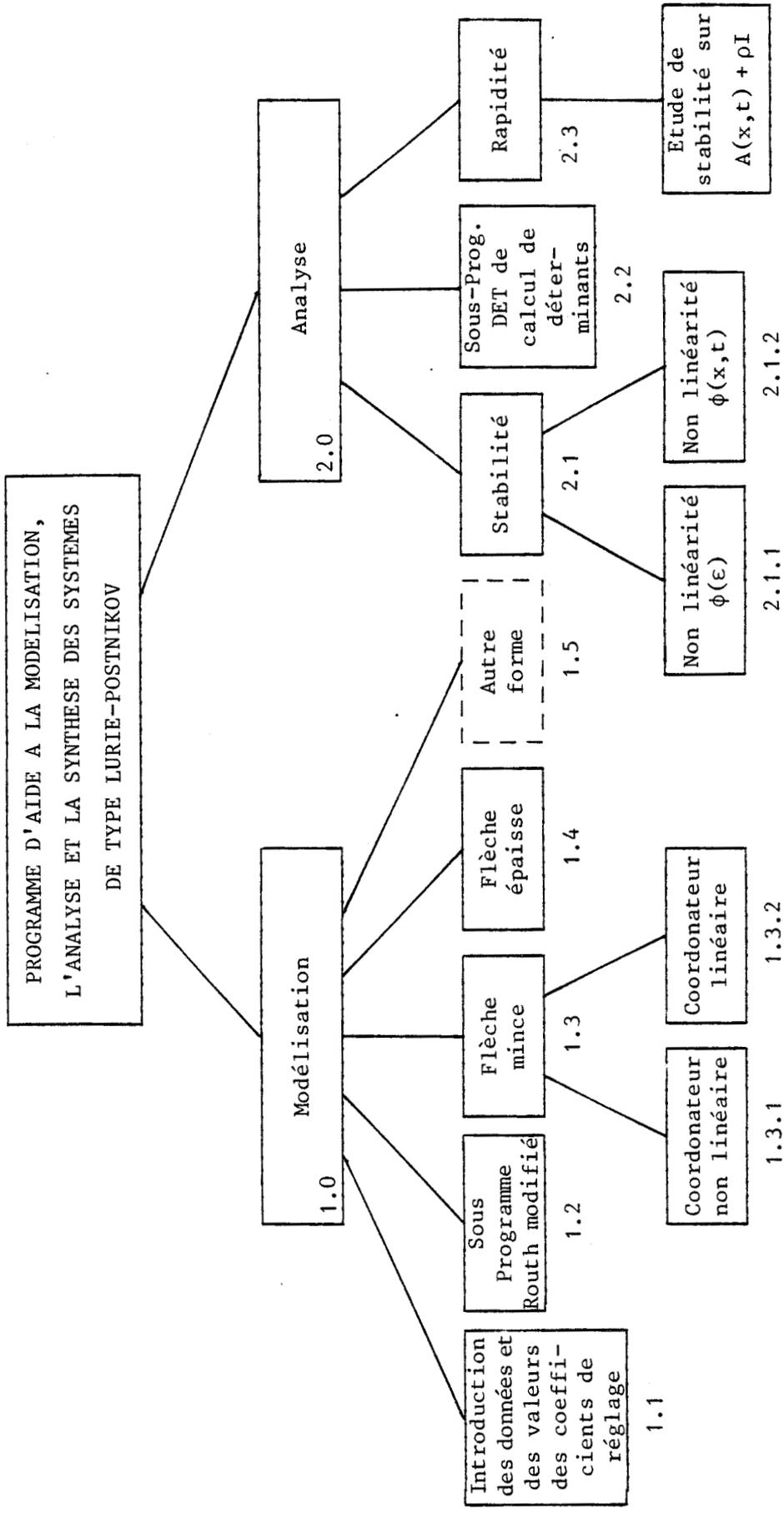


FIGURE III.7



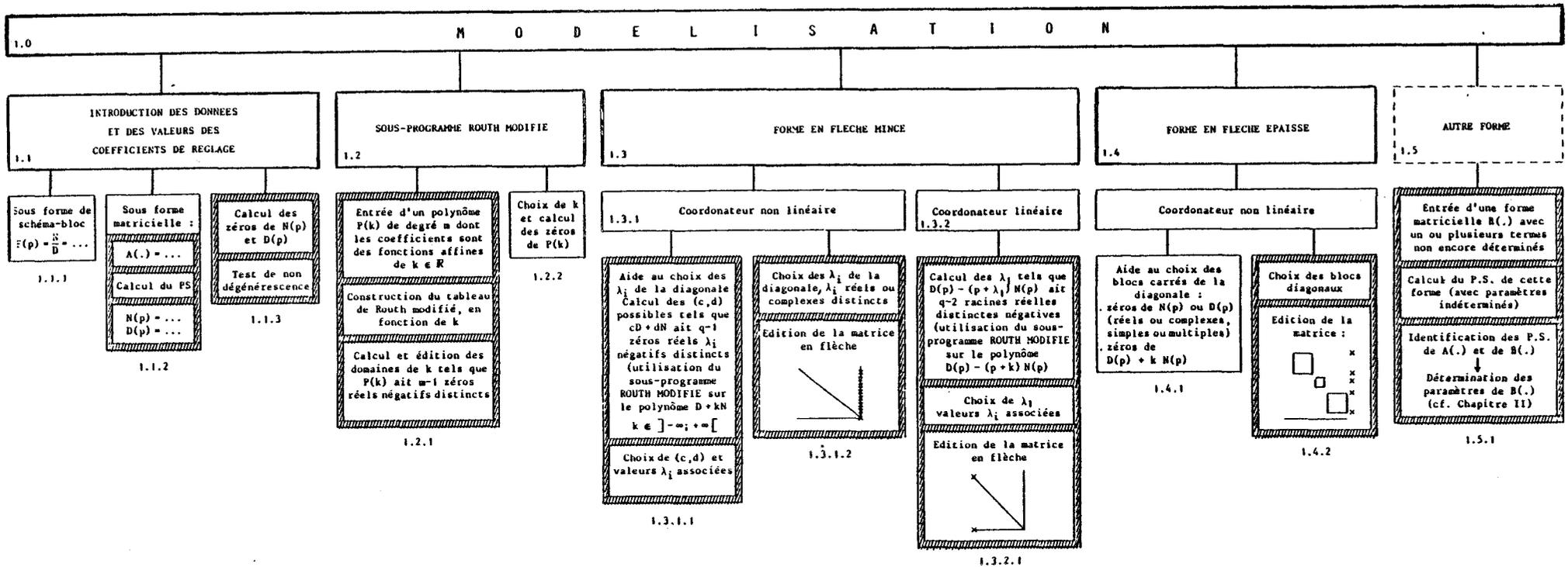


FIGURE III.8

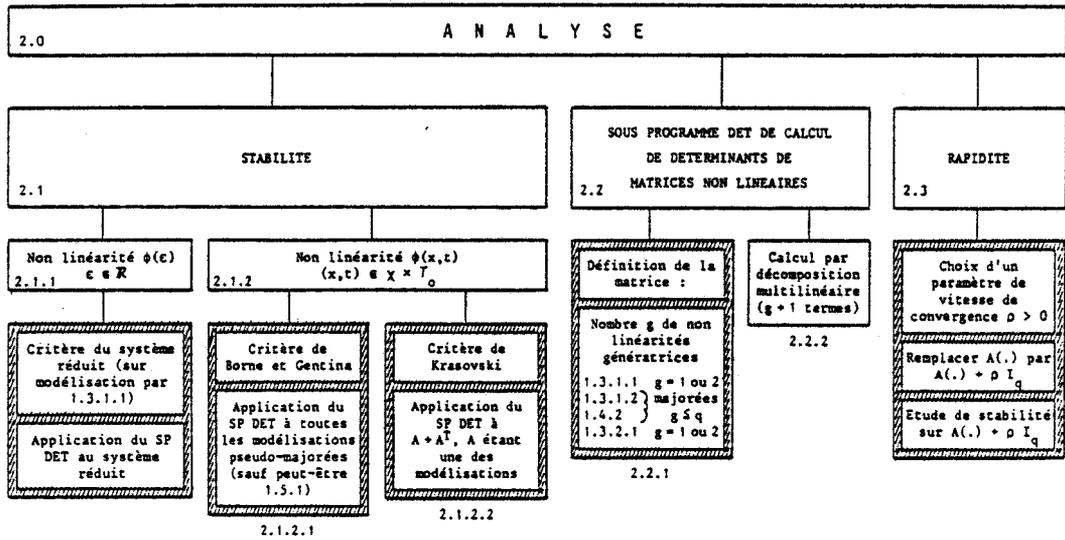


FIGURE III.9

III - SYSTEMES MULTIVARIABLES

Dans la partie précédente, nous avons exposé un critère permettant d'étudier la stabilité d'un système de type mLP à partir d'un modèle de dimension réduite.

Le résultat que nous proposons dans cette partie concerne également une simplification du modèle en vue de l'analyse de sa stabilité. Cependant, cette simplification porte cette fois sur la complexité des termes composant la matrice, et non plus sur sa dimension. La classe de systèmes considérée est plus large que précédemment, et correspond à des processus à non linéarités multiples.

Nous proposons ici une présentation résumée de travaux qui ont par ailleurs été développés plus largement par /Zambettakis, 1983/ /Zambettakis, Richard, Laurent, 1983/ /Rotella, Richard, Zambettakis, 1983/.

III.1 - Notations

Nous considérons dans cette partie le système Σ :

$$(III.59) \quad \dot{x} = A(x,t).x$$

avec $x = (\xi_1, \dots, \xi_q)^T \in \mathbb{R}^q$

en introduisant une décomposition spécifique de la matrice $A(x,t)$, sous la forme :

$$(III.60) \quad A(x,t) = \tilde{A}(x,t).F^*(x) + D(x,t)$$

$$D(x,t) = \text{diag} \{d_i(x,t)\} \text{ matrice diagonale de } \mathbb{R}^{q \times q}$$

$$\tilde{A}(x,t) = [a_{ij}(x,t)]_{i,j} \text{ matrice de } \mathbb{R}^{q \times q}$$

$F^*(x) \in \mathbb{R}^{q \times q}$ matrice diagonale telle que :

$$F^*(x) = \text{diag} \left\{ \frac{\phi_i(\xi_i)}{\xi_i} \right\} = \text{diag} \{ \phi_i^*(\xi_i) \}$$

$\phi_i(\xi_i)$ fonctions intégrables, $i \in \{1, \dots, q\}$, définissant des gains

équivalents $\phi_i^*(\xi_i)$ bornés (ϕ_i^* pouvant éventuellement être constants)

$$F^*(x).x = F(x)$$

La définition de $F^*(x)$ est analogue à celle introduite pour les systèmes de type MLP (Chapitre II, § I.2) à la différence près que chacun de ses coefficients ϕ_i^* ne dépend ici que de la composante d'état correspondante ξ_i .

Nous supposons que \tilde{A} , F^* et D sont des fonctions bornées pour tout x borné de χ et tout t dans T_0 .

Cette décomposition est très générale et peut être effectuée sur toute matrice $A(x,t)$. Elle correspond à une factorisation de chaque colonne de $A(x,t)$ par rapport à un terme non constant ϕ_i^* , excepté pour les termes diagonaux. On a par exemple à l'ordre 3 :

(III.61) $A(x,t) =$

$$\begin{bmatrix} d_1(x,t) + a_{11}(x,t)\phi_1^*(\xi_1) & a_{12}(x,t)\phi_2^*(\xi_2) & a_{13}(x,t)\phi_3^*(\xi_3) \\ a_{21}(x,t)\phi_1^*(\xi_1) & d_2(x,t) + a_{22}(x,t)\phi_2^*(\xi_2) & a_{23}(x,t)\phi_3^*(\xi_3) \\ a_{31}(x,t)\phi_1^*(\xi_1) & a_{32}(x,t)\phi_2^*(\xi_2) & d_3(x,t) + a_{33}(x,t)\phi_3^*(\xi_3) \end{bmatrix}$$

Par la suite, nous utiliserons la fonction W candidate à Liapounov associée à F et définie par :

(III.62) $W(x) = \int_0^x F^T(u) du = \sum_{i=1}^q \int_0^{\xi_i} \phi_i(u_i) du_i$

Dans le cas où ϕ_i est une fonction linéaire de ξ_i , l'intégrale correspondante est une simple forme quadratique de ξ_i .

III.2 - Théorème du système simplifié

Le choix de la fonction W pour le système (III.60) permet de ramener l'étude de $A(x,t)$ à la forme matricielle simplifiée $\tilde{A}(x,t)$:

Premier énoncé :

L'équilibre $x = 0$ du système (Σ) décrit par (III.59) et (III.60) est stable s'il existe un domaine Ω de \mathbb{R}^q contenant un voisinage de l'origine et tel que, pour tout x non nul dans Ω , pour tout t dans T_0 ,

a) $\int_0^x F^T(u) du > 0 \quad (\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, q\}, \xi_i \neq 0, \int_0^{\xi_i} \phi_i(u_i) du_i > 0)$

b) $F^{*T}(x) D(x,t) \leq 0 \quad (\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, q\}, \phi_i^*(\xi_i) d_i(x,t) \leq 0)$

c) $\tilde{A}(x,t)$ est semi-définie négative, c'est-à-dire que les valeurs propres de $\tilde{A}(x,t) + \tilde{A}^T(x,t)$ sont négatives ou nulles.

Si de plus les valeurs propres de $\tilde{A} + \tilde{A}^T$ sont inférieures ou égales à un réel ε strictement négatif, la stabilité est asymptotique.

Démonstration :

D'après (a), $W(x)$ est définie positive dans Ω . De plus,

$$(III.63) \quad \overset{\circ}{W}(x) = F^T(x) \cdot \overset{\circ}{x}$$

$$(III.64) \quad \overset{\circ}{W}(x) = F^T(x) \tilde{A}(x,t) F(x) + x^T F^{*T}(x) D(x,t) x$$

Si (b) et (c) sont vérifiées, $\overset{\circ}{W}(x)$ est semi-définie négative dans Ω . L'équilibre $x = 0$ est donc stable.

Si de plus, les valeurs propres de $A(x,t) + A^T(x,t)$ sont inférieures à un réel $\varepsilon < 0$, $\overset{\circ}{W}(x)$ est définie négative, et $x = 0$ est asymptotiquement stable.

Remarques :

1) Ce théorème apparaît comme une généralisation du critère de Krasovski, conduisant à la stabilité de $A(x,t)$ si $A + A^T$ est semi-définie négative. Dans le cas de la décomposition (III.60), ce critère est appliqué au système simplifié $\tilde{A}(x,t)$.

2) Dans le cas où les colonnes de $A(x,t)$ sont proportionnelles à des non linéarités ϕ_1^* , la matrice $D(x,t)$ est nulle, et la condition (b) disparaît.

3) La condition (a) est notamment vérifiée dans le cas où les gains équivalents ϕ_1^* sont tous positifs. Cependant, les fonctions $\phi_1^*(\xi_1)$ peuvent prendre des valeurs négatives sans que (a) soit mise en défaut.

Second énoncé :

L'équilibre $x = 0$ du système (Σ) décrit par (III.59) et (III.60) est stable s'il existe un domaine Ω de \mathbb{R}^q contenant un voisinage de l'origine et tel que, pour tout x non nul dans Ω , pour tout t dans T_0 , pour tout i de 1 à q :

$$\alpha) \int_0^{\xi_i} \phi_i(u_i) du_i > 0 \quad \forall \xi_i \neq 0$$

$\beta)$ $\alpha_i(x,t)$ étant le $i^{\text{ème}}$ terme diagonal de $A(x,t)$, c'est-à-dire :

$$\alpha_i(x,t) = d_i(x,t) + a_{ii}(x,t) \cdot \phi_i(\xi_i)$$

on a :

$$\eta_i(x,t) = \phi_i^*(\xi_i) \cdot \left[\alpha_i(x,t) + \phi_i^*(\xi_i) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q \frac{|a_{ij}(x,t) + a_{ji}(x,t)|}{2} \right] \leq 0$$

Si de plus l'inégalité $[\leq 0]$ de (β) devient $[\leq \varepsilon < 0]$, la stabilité est asymptotique.

Démonstration :

D'après (α) , $W(x)$ est définie positive dans Ω . De plus :

$$\dot{W}(x,t) \leq \sum_{i=1}^q \eta_i(x,t) \cdot \xi_i^2 \leq 0$$

Remarques :

1) Cet énoncé est plus adapté que le précédent lorsque les termes α_i de la diagonale de $A(x,t)$ ne sont pas explicitement décomposés en fonction des ϕ_i . Il permet de traiter le cas où les $a_{ii}(x,t)$ sont nuls, alors que dans ce cas, la condition (c) ne pouvait être vérifiée.

2) Les conditions (β) correspondent à une généralisation du critère de Rosenbrock /Rosenbrock, 1965/ appliqué à la matrice $A + A^T$.

3) Lorsque tous les gains équivalents ϕ_1^* sont strictement positifs, la condition (α) est vérifiée, et (β) est simplifiée.

III.3 - Matrices pseudo-antisymétriques et pseudo-symétriques

Les conditions obtenues par le critère précédent sont particulièrement simples lorsque la décomposition peut faire apparaître une matrice $\tilde{A}(x,t)$ "pseudo-antisymétrique", c'est-à-dire définie par :

$$(III.65) \quad \forall i \neq j \quad a_{ij}(x,t) = -a_{ji}(x,t)$$

La matrice $\tilde{A}(x,t) + \tilde{A}^T(x,t)$ est alors diagonale, et seule la diagonale de $A(x,t)$ intervient dans l'expression des conditions de stabilité. Dans ce cas, $A(x,t)$ est également dite "pseudo-antisymétrique".

Exemple :

La matrice définie par :

$$(III.66) \quad A(x,t) = \begin{bmatrix} d_1(x,t) & -a_{12}(x,t)\phi_2^*(\xi_2) & -a_{13}(x,t)\phi_3^*(\xi_3) \\ a_{12}(x,t)\phi_1^*(\xi_1) & d_2(x,t) & -a_{23}(x,t)\phi_3^*(\xi_3) \\ a_{13}(x,t)\phi_1^*(\xi_1) & a_{23}(x,t)\phi_2^*(\xi_2) & d_3(x,t) \end{bmatrix}$$

correspond à un équilibre $x = 0$ stable si $\forall (x,t) \in \Omega \times T_0$:

- i) $\phi_1^*, \phi_2^*, \phi_3^*$ sont toutes trois positives (ou toutes trois négatives)
- ii) d_1, d_2, d_3 sont toutes trois négatives.

Certains systèmes électromécaniques /Zambettakis, 1983/ /Zambettakis, Richard, Laurent, 1983/ peuvent être mis en équations sous ce type de forme.

Un autre cas intéressant est celui où la matrice $\tilde{A}(x,t)$ est symétrique. On peut alors, pour tester la condition (c), appliquer les conditions du linéaire directement au système simplifié $\tilde{A}(x,t)$. $A(x,t)$ est alors dite "pseudo-symétrique".

III.4 - Application aux systèmes mLP interconnectés

La classe des systèmes concernés par la décomposition (III.60) est très large, et nous allons montrer qu'elle contient notamment des systèmes composés de n sous-systèmes de type mLP, interconnectés linéairement ou non. Nous allons pour ce faire, utiliser les résultats précédents concernant les modélisations en flèche des systèmes mLP. Les interconnexions considérées sont décrites Figure III.10.

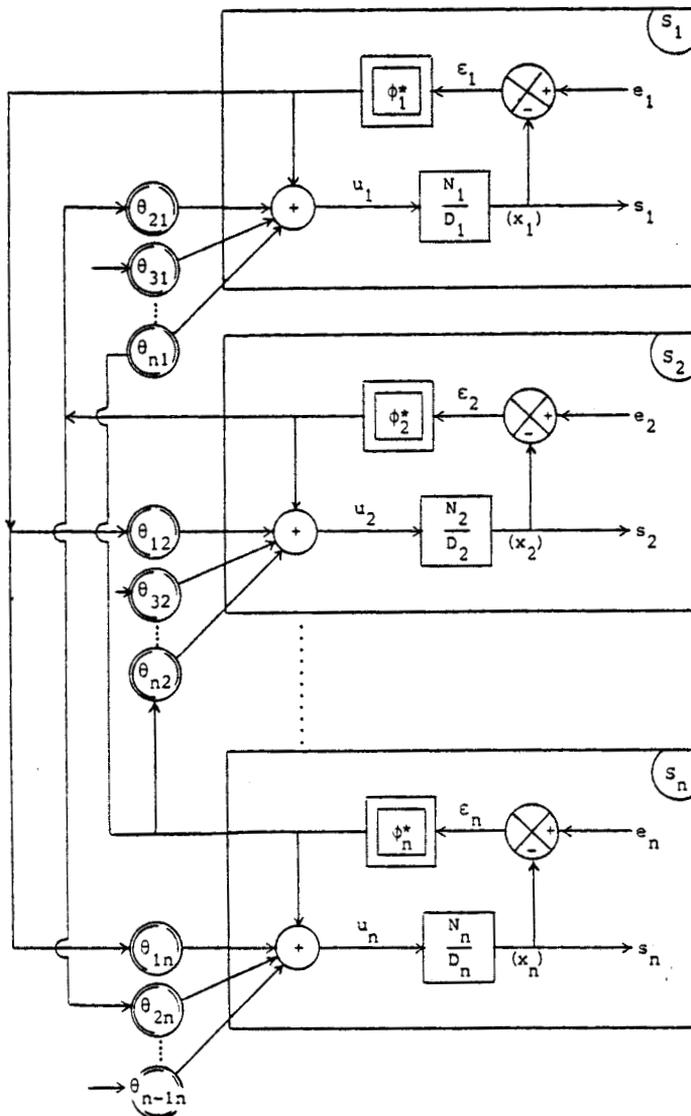


FIGURE III.10

Chaque sous système S_i , d'ordre q_i , est défini par :

- Une partie linéaire, de fonction de transfert $F_i(p) = \frac{N_i(p)}{D_i(p)}$,

avec :

$$(III.67) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_i(p) = \sum_{j=0}^{q_i-1} b_{ij} p^j \\ D_i(p) = p^{q_i} + \sum_{j=1}^{q_i-1} a_{ij} p^j \end{array} \right. \quad (a_{ij}, b_{ij}) \in \mathbb{R}^{2q_i}$$

- Une rétroaction non linéaire $\phi_i(\varepsilon_i)$, de gain équivalent borné $\phi_i^*(\varepsilon_i)$.

Les n systèmes (S_i) sont interconnectés par l'intermédiaire de $n(n-1)$ coefficients θ_{ji} ($i \neq j$), qui peuvent être constants ou non constants. Le système (S) de la Figure III.10 est alors décrit par les équations suivantes :

$$(III.68) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall i = 1, \dots, n \\ \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i \quad A_i \in \mathbb{R}^{q_i \times q_i}; B_i \in \mathbb{R}^{q_i} \\ s_i = C_i^T x_i \in \mathbb{R} \quad C_i \in \mathbb{R}^{q_i} \\ \varepsilon_i = e_i - s_i \in \mathbb{R} \\ u_i = \phi_i^* \varepsilon_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \theta_{ji} \phi_j^* \varepsilon_j \quad \theta_{ji} : \chi \times T_0 \rightarrow \mathbb{R} \\ x_i \in \mathbb{R}^{q_i} \quad \text{vecteur état du sous système } (S_i) \quad \sum_{i=1}^n q_i = q \end{array} \right.$$

En vue d'étudier la stabilité de (S), nous considérons ce système en régime autonome ($e_i \equiv 0$; $i = 1, \dots, n$). Il vient :

$$(III.69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall i = 1, \dots, n \\ \dot{x}_i = M_i x_i - \sum_{j=1}^n T_{ij} x_j \\ M_i = A_i - B_i \phi_i^* C_i^T \\ T_{ij} = B_i \theta_{ji} \phi_j^* C_j^T \\ (j \neq i) \end{array} \right.$$

M_i est la matrice d'évolution du sous-système (S_i). Il est possible de choisir le vecteur état x_i correspondant, de telle sorte que M_i soit une forme en flèche du type (II.17). On choisit alors sa diagonale des scalaires ou des blocs correspondant à des zéros de $D_i(p)$.

D'après les résultats de la partie précédente (II), la matrice M_i est alors telle que les termes hors diagonaux de sa dernière colonne sont tous proportionnels à un même terme non constant que nous noterons $\phi_i^*(\epsilon_i)$, ou ϕ_i^* . Le terme de pointe de M_i , noté γ_i^* , est de la forme $\gamma_i^* = \delta_i + \beta_i \phi_i^*$.

De même, étant données les expressions de T_{ij} (III.69) et de $C_j^T = (0 \quad 0 \quad 1)$ la matrice T_{ij} a alors tous ses termes nuls, sauf ceux de sa dernière colonne qui sont proportionnels à $\theta_{ji} \phi_i^*$. Notons que ces coefficients de proportionnalité sont directement obtenus à partir de la dernière colonne de M_i : ils sont les opposés des coefficients de ϕ_i^* .

Si chaque vecteur x_i est choisi de cette façon, la matrice $M(x,t)$ du système complet s'écrit sous la forme symbolisée (III.70) :

$$\begin{cases} \dot{x} = M(x,t) \cdot x \\ x = \left[x_1^T, x_2^T, \dots, x_n^T \right]^T \in \mathbb{R}^q \end{cases}$$

(III.70)

$$M(x,t) = \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c|c|c} \begin{array}{c} \diagup \quad \circ \\ \circ \quad \diagdown \\ 1 \text{---} 1 \quad \gamma_1^* \end{array} & \begin{array}{c} \circ \\ \vdots \\ \circ \end{array} & \dots & \begin{array}{c} \circ \\ \vdots \\ \circ \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \circ \\ \vdots \\ \circ \end{array} & \begin{array}{c|c|c|c} \begin{array}{c} \diagup \quad \circ \\ \circ \quad \diagdown \\ 1 \text{---} 1 \quad \gamma_2^* \end{array} & \dots & \dots & \begin{array}{c} \circ \\ \vdots \\ \circ \end{array} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \begin{array}{c} \circ \\ \vdots \\ \circ \end{array} & \begin{array}{c} \circ \\ \vdots \\ \circ \end{array} & \dots & \begin{array}{c|c|c|c} \begin{array}{c} \diagup \quad \circ \\ \circ \quad \diagdown \\ 1 \text{---} 1 \quad \gamma_n^* \end{array} & \dots & \dots & \begin{array}{c} \circ \\ \vdots \\ \circ \end{array} \end{array}$$

La décomposition générale (III.60) apparaît, et correspond à :

$$* F^* = \text{diag} \{ \underbrace{1, \dots, 1}_{q_1}, \underbrace{\phi_1^*, 1, \dots, 1}_{q_2}, \underbrace{\phi_2^*, 1, \dots, 1, \phi_n^*}_{q_n} \} \in \mathbb{R}^{q \times q}$$

* $D(x,t) = D$ matrice constante diagonale, composée des termes δ_i (définissant les γ_i^*) (remarquons que $D=0$ si tous les dénominateurs $D_i(p)$ ont un pôle nul).

* $\tilde{A}(x,t)$ matrice constante si les interconnexions θ_{ji} sont constantes, non constantes dans le cas contraire.

Le théorème du système simplifié peut alors être appliqué.

Exemple :

Soit le système décrit Figure III.11, avec $\phi_1^* > 0$ et $\phi_2^* > 0$:

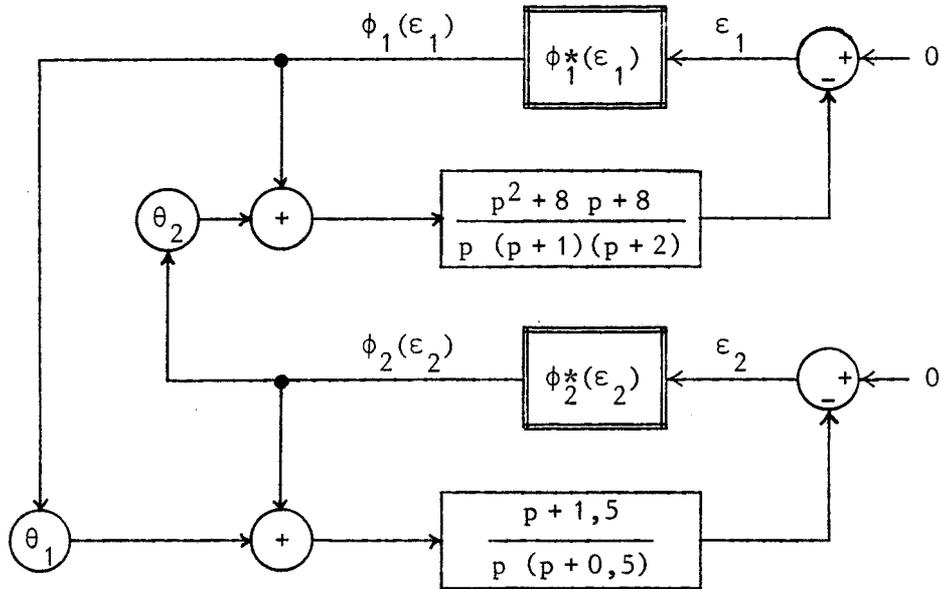


FIGURE III.11

On a :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi_1^*(\epsilon_1) = \phi_1^*$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi_2^*(\epsilon_2) = \phi_2^*$$

$$M(\epsilon_1, \epsilon_2, \theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -\phi_1^* & 0 & \phi_2^* \theta_2 \\ 0 & -2 & -2\phi_1^* & 0 & 2\phi_2^* \theta_2 \\ 1 & 2 & -\phi_1^* & 0 & \phi_2^* \theta_2 \\ 0 & 0 & -\phi_1^* \theta_1 & -1/2 & \phi_2^* \\ 0 & 0 & \phi_1^* \theta_1 & -1 & -\phi_2^* \end{bmatrix} \quad D(x, t) = 0$$

$$\tilde{A}(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & \theta_2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 2\theta_2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & \theta_2 \\ 0 & 0 & -\theta_1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & \theta_1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\tilde{A} + \tilde{A}^T}{2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \theta_2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & \theta_2 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \theta_1 & \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \theta_1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} \theta_2 & \theta_2 & \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2) & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

D'après le théorème du système simplifié, le système de la Figure III.11 est asymptotiquement stable si, pour toutes les valeurs possibles de θ_1 et θ_2 , les valeurs propres de cette dernière matrice sont inférieures à une constantes $\alpha < 0$.

Par exemple, si $\forall (x,t) \in \chi \times T_0$,

$$\theta_1 = -\theta_2 \leq 0$$

alors il est suffisant que $\theta_1^2 \in \left[\frac{4}{3} + \varepsilon, 2 - \varepsilon \right]$, ε constante réelle positive.

On a alors :

$$\det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \theta_1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \theta_1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = 1 - \frac{\theta_1^2}{2} > 0$$

$$\det \frac{\tilde{A} + \tilde{A}^T}{2} = \frac{1}{4} (\theta_1 + \theta_2)^2 + \frac{1}{4} \left[1 - \frac{\theta_1^2}{2} \right] \left[-4 + 3 \theta_2^2 \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[1 - \frac{\theta_1^2}{2} \right] \left[-4 + 3 \theta_1^2 \right] < 0$$

III.5 - Forme en flèche totalement non constante

Le critère proposé convient particulièrement à l'étude des systèmes modélisés par une forme en flèche mince, même lorsque tous les coefficients en sont non constants. Considérons par exemple le système :

$$(III.71) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = F(x,t) \cdot x \\ F(x,t) = \begin{bmatrix} -\lambda_1(x,t) & & & k_1 \phi_q(\xi_q) \\ & -\lambda_2(x,t) & \bigcirc & k_2 \phi_q(\xi_q) \\ & & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & & -\lambda_{q-1}(x,t) & k_{q-1} \phi_q(\xi_q) \\ \phi_1(\xi_1) & \phi_2(\xi_2) & \dots & \phi_{q-1}(\xi_{q-1}) & \lambda_q(x,t) \phi_q(\xi_q) \end{bmatrix} \\ \text{avec } k_i \in \mathbb{R} \quad \text{et} \\ \forall i \in \{1, \dots, q\}, \forall t \in T_0, \forall x \in \chi : \lambda_i(x,t) > 0 ; \phi_i(\xi_i) > 0 \end{array} \right.$$

Le deuxième énoncé, appliqué à $F(x,t)$ après un changement de base diagonal (défini par les coefficients $\sqrt{|k_i|}$), permet de conclure à la stabilité de (III.71) si, **pour tout i correspondant à un k_i positif :**

$$(III.72) \quad k_i \leq \lambda_i(x,t) \quad \forall (x,t) \in \Omega \times T_0$$

Par conséquent, si tous les k_i sont négatifs, (III.71) est stable.

III.6 - Conclusions

Le principal avantage de la méthode de simplification proposée dans cette partie réside dans la généralité des systèmes concernés. La décomposition (III.60) est en effet valable pour de nombreuses classes de processus, comme par exemple les interconnexions non linéaires ou non stationnaires de systèmes mLP. Cependant, la matrice simplifiée $\tilde{A}(x,t)$ doit ensuite être traitée à l'aide d'un critère de stabilité faisant intervenir une fonction de Liapounov quadratique. C'est pourquoi il est intéressant de pouvoir orienter la modélisation de façon à obtenir une matrice $\tilde{A} + \tilde{A}^T$ la plus simple possible ; certains cas sont particulièrement favorables :

- \tilde{A} constante ou symétrique (les conditions du linéaire s'appliquent alors au modèle simplifié)
- \tilde{A} pseudo-antisymétrique ($\tilde{A} + \tilde{A}^T$ est alors diagonale).

Notons enfin que la forme en flèche s'avère ici encore très pratique en tant qu'outil de modélisation.

IV - CONJECTURE DU LINEAIRE

L'analyse et la synthèse des systèmes à coefficients non linéaires ou non stationnaires, mettent en évidence l'importance de la détermination de domaines de stabilité les plus grands possibles. En ce qui concerne les systèmes non linéaires, la première méthode de Liapounov permet d'utiliser les méthodes usuelles d'étude des systèmes linéaires, mais les résultats n'en sont valables qu'au voisinage immédiat d'un point de fonctionnement. On introduit alors un modèle linéarisé autour de ce point. De même, il est possible de définir un modèle linéarisé à chaque instant t et pour chaque état x . Ces modèles seront dits "tangents" aux trajectoires (x,t) .

Cependant, lorsque le système est fortement non linéaire ou non stationnaire, l'étude de la stabilité des modèles tangents considérés séparément, ne peut suffire. On a alors recours à des méthodes plus élaborées, qui permettent de conclure à la stabilité lorsque les coefficients

varient dans un domaine donné mais selon une loi quelconque. La stabilité est alors dite "absolue". Les conditions obtenues sont obligatoirement au moins aussi restrictives que celles des systèmes linéaires et stationnaires, puisque le cas de coefficients constants entre dans la catégorie des lois de variations envisageables.

Dans cet esprit, l'optimum qui peut être atteint en stabilité absolue est défini par les conditions de stabilité des systèmes linéaires stationnaires. Cet optimum, résumé sous l'expression "conjecture du linéaire", a été atteint par plusieurs auteurs et pour certaines classes de processus /Nelepin, 1967/ /Persidskii, 1969/ /Piatnickii, 1970/ /Muhametzianov & Scherbaev, 1970/ /Maygarin, 1970/ /Gentina & Borne, 1972/ /Gayduk, 1976/ /Grujić, 1978/ /Benrejeb & Borne, 1978/ /Benrejeb, 1980/.

Le problème initial, posé par Lurie et Postnikov en 1944, était de trouver des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité absolue pour des systèmes non linéaires. Aizerman /Aizerman, 1979/ proposé d'étudier si, pour un système à une seule non linéarité, la stabilité du modèle linéaire défini à chaque instant par le gain équivalent suffisait à conclure à celle du système. Pliss /Pliss, 1958/ et Krasovskii /Krasovskii, 1959/ ont montré que cela n'était pas le cas. Kalman /Kalman; 1957/ proposa le même type d'étude, le système linéaire associé étant alors défini par la dérivée de la non linéarité. Ceci fut également mis en défaut sur des contre-exemples /Fitts, 1966/.

Dans une première partie, nous proposons de relier la notion de conjecture du linéaire avec celle de polynôme symbolique.

Dans un second temps, nous définissons des classes de systèmes pour lesquels la conjecture du linéaire est validée.

Enfin, nous proposons de montrer sur quelques exemples que le fait de comparer un système non linéaire ou non stationnaire à un modèle dont les coefficients sont constants peut constituer une perte d'information importante : les conditions obtenues sur le système tangent (à chaque instant) peuvent n'être jamais vérifiées, alors que le comportement du système réel reste asymptotiquement stable.

IV.1 - Stabilité absolue. Conjecture du linéaire

Le type de systèmes initialement envisagé par Lurie et Postnikov dans l'étude de la stabilité absolue est de type monovariable stationnaire décrit en régime autonome par :

$$(III.73) \quad \begin{cases} \dot{x} = A x + b \phi(\varepsilon) \\ \varepsilon = c^T x \\ \phi : \text{fonction continue} \end{cases}$$

Les non linéarités $\phi(\varepsilon)$ envisagées doivent présenter une caractéristique statique comprise dans les premier et troisième quadrans (cf Figure III.12), du plan $(\phi(\varepsilon), \varepsilon)$, c'est-à-dire vérifier (C1) :

$$(C1) \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon \neq 0, \phi(\varepsilon) \cdot \varepsilon > 0$$

Cette condition (C1) peut être généralisée en considérant des secteurs admissibles, définis par deux gains limites α et β réels constants :

$$(C2) \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon \neq 0, \alpha \varepsilon^2 < \phi(\varepsilon) \cdot \varepsilon < \beta \varepsilon^2$$

On peut aussi définir des conditions portant non plus sur la caractéristique statique, mais sur la dynamique du bloc non linéaire. La fonction ϕ peut alors dépendre de plusieurs variables d'état et du temps. Les classes sont alors définies par la condition (C3), ou plus généralement sa moyenne (C4) :

$$(C3) \quad \forall t \in T_0, \phi(t) \varepsilon(t) \geq 0$$

$$(C4) \quad \forall t \in T_0, \int_{t_0}^t \phi(\tau) \varepsilon(\tau) d\tau \geq 0$$

Enfin, il est possible de considérer des systèmes de type multivariables (MLP) en généralisant encore ces notions.

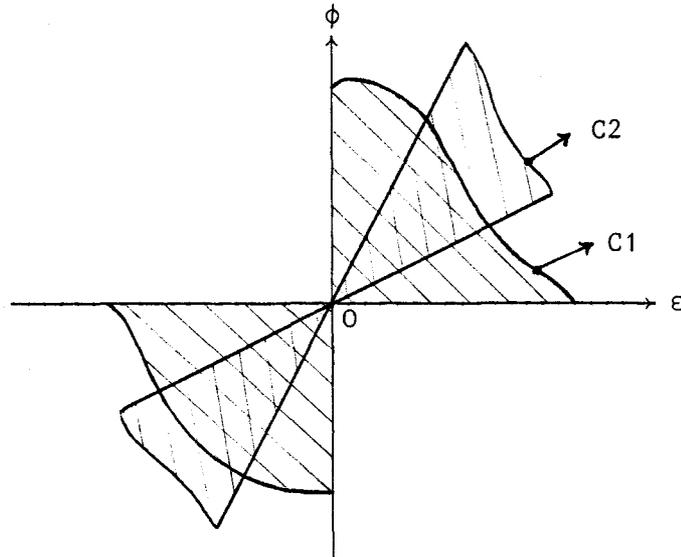


FIGURE III.12

Dans le cas initial (III.73), la stabilité absolue est définie de la façon suivante /Hahn, 1963/ :

Définition :

L'équilibre $x = 0$ du système (III.73) est absolument stable s'il est globalement asymptotiquement stable pour toutes les fonctions ϕ vérifiant la propriété (C1).

Cette définition peut être étendue en remplaçant (C1) par une autre condition (C2), (C3) ou (C4). Dans le cas de (C4), on parlera plutôt d'"hyperstabilité" /Popov, 1973/.

Il est intéressant de comparer les propriétés de stabilité absolue d'un système non linéaire (III.74) avec celles de stabilité asymptotique pour l'ensemble {MLT} des modèles linéaires tangents associés (III.75) :

$$(III.74) \quad \dot{x} = A(x,t) x \quad x_0 = x(t_0) \in \mathbb{R}^q \quad t \in T_0$$

$$(III.75) \quad \{MLT\} = \{\dot{y} = A(x_1, t_1) y \quad x_1 \in \mathbb{R}^q \quad t_1 \in T_0\}$$

Dans cet esprit, nous emploierons par la suite l'expression de "conjecture du linéaire stationnaire", ou plus brièvement "conjecture du

linéaire", dans le sens suivant :

Définition :

Le système (III.74) vérifie la conjecture du linéaire si le fait que tous les systèmes de {MLT} soient asymptotiquement stables entraîne que (III.74) est globalement asymptotiquement stable.

Dans le cas de systèmes MLP, et avec des contraintes du type (C2), le problème d'Aizerman /Aizerman, 1949/ /Grujić, 1978/ peut s'énoncer ainsi : "sous quelles conditions nécessaires et suffisantes un système vérifie-t-il la conjecture du linéaire ?".

Nous donnerons dans cette partie des conditions suffisantes (concernant la structure ou la modélisation du système) assurant la vérification de cette conjecture. Des conditions suffisantes de stabilité sont alors obtenues en appliquant le critère de Routh-Hurwitz (ou un critère équivalent) à tous les systèmes tangents de {MLT}.

IV.2 - Relation entre la conjecture du linéaire et le polynôme symbolique

Dans cette partie, nous proposons de relier la notion de conjecture du linéaire avec celle de polynôme symbolique.

L'étude présentée fait apparaître que le résultat de l'application des conditions du linéaire dépend de la modélisation adoptée pour le système non linéaire ou non stationnaire, et notamment du degré de dérivation de la représentation.

L'"optimum" atteignable pour les domaines de stabilité est donc relatif.

Cependant, lorsque deux modèles dans l'espace d'état peuvent être déduits l'un de l'autre par changement de base à coefficients constants, l'application des critères du linéaire aux deux représentations donne les mêmes conditions. Par contre, des conditions différentes peuvent être ob-

tenues si on effectue des changements de variables faisant, par exemple, intervenir des dérivations ou des intégrations d'équations.

Pour les systèmes considérés dans le deuxième chapitre, il est donc possible de définir des "classes d'équivalence" de modèles vis à vis des conditions du linéaire : chaque classe est caractérisée par son polynôme symbolique. Lorsque la conjecture du linéaire est validée, les conditions de stabilité absolue sont celles de Routh-Hurwitz, appliquées à ce polynôme.

IV.2.1 - Cas d'un système non linéaire

Il est possible, sur un premier exemple, de montrer que les conditions de la conjecture linéaire, lorsqu'elle s'applique, ne sont pas des propriétés intrinsèques d'un système non linéaire.

Considérons le système à non linéarités de rang 1, du troisième ordre, défini par :

$$(III.76) \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & f^*(z) \\ 1 & 0 & g^*(z) \\ 0 & 1 & h^*(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

où x , y et z sont trois variables d'état réelles,

f^* , g^* et h^* sont trois fonctions réelles de z telles que :

$$f^*(z).z = f(z) \quad g^*(z).z = g(z) \quad h^*(z).z = h(z)$$

Nous supposons de plus que :

f est continue par rapport à z ,
 g est dérivable par rapport à z , de dérivée première g_z ,
 h est deux fois dérivable en z , de dérivée première h_z et
de dérivée seconde h_{zz} .

Ces fonctions ne dépendant que de z , nous omettrons de le préciser dans les écritures.

Par dérivation des équations (III.76), on peut obtenir deux autres représentations du même système :

$$(III.77) \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{y} \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & g_z & f^* + g_z \cdot h^* \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{y} \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$(III.78) \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z \\ \overset{\circ}{z} \\ \overset{\circ\circ}{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ f^* & g_z + h_{zz} \cdot \overset{\circ}{z} & h_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \overset{\circ}{z} \\ \overset{\circ\circ}{z} \end{bmatrix}$$

La représentation (III.76) et de type C(1), et (III.75) est de type L(1).

En supposant qu'on puisse appliquer les conditions du linéaire aux représentations (III.76), (III.77) et (III.78), on aurait à appliquer les conditions de Routh-Hurwitz aux trois polynômes respectifs :

$$(III.76-1) \quad p_1(\lambda, z) = \lambda^3 - h^*(z) \cdot \lambda^2 - g^*(z) \cdot \lambda - f^*(z)$$

$$(III.77-1) \quad p_2(\lambda, z) = \lambda^3 - h^*(z) \cdot \lambda^2 - g_z(z) \cdot \lambda - f^*(z)$$

$$(III.78-1) \quad p_3(\lambda, z) = \lambda^3 - h_z(z) \cdot \lambda^2 - \left[g_z(z) + h_{zz}(z) \cdot \overset{\circ}{z} \right] \cdot \lambda - f^*(z)$$

Les conditions obtenues sur p_3 sont plus restrictives que celles obtenues sur p_2 , elles-mêmes plus restrictives que celles obtenues sur p_1 . La dérivation du modèle entraîne donc dans ce cas une perte de précision.

IV.2.2 - Cas d'un système non stationnaire

Une étude similaire peut être menée à partir d'un système non stationnaire, de type C(1) et L(1) :

$$(III.79) \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda(t) & a \\ 1 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\lambda(t) \mu - a \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

avec a et μ réels, $a > 0$ et $\lambda(t)$ fonction dérivable réelle.

On écrira aussi $\lambda = \lambda(t)$. On peut appliquer les conditions du linéaire à (III.79) lorsque a est positif :

$$(III.79-1) \quad a > 0$$

Ces conditions de stabilité asymptotique de $x = y = 0$ sont alors :

$$(III.79-2) \quad] \varepsilon > 0, \forall t \in T_0, \lambda(t) \leq \frac{a}{\mu} - \varepsilon$$

D'autre part, en dérivant (III.79), on obtient :

$$(III.80) \quad \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + \frac{\mu \dot{\lambda}}{\mu \lambda - a} & a - \frac{a \dot{\lambda}}{\mu \lambda - a} \\ 1 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

La conjecture du linéaire est vérifiée si :

$$(III.80-1) \quad \frac{\dot{\lambda}(t)}{\mu \lambda(t) - a} \leq 1 \quad \forall t \in T_0$$

μ étant négatif, les conditions de stabilité asymptotique portent alors sur le signe du déterminant de la matrice (III.80) :

$$(III.80-2) \quad] \varepsilon > 0, \forall t \in T_0,$$

$$\frac{1}{\mu \lambda(t) - a} \left[(\mu \lambda(t) - a)^2 + \dot{\lambda}(t) (a + \mu^2) \right] \geq \varepsilon > 0$$

Les conditions et résultats de la conjecture du linéaire dépendent, ici encore, de la représentation adoptée. Les équations relatives à (III.80)

peuvent ainsi être vérifiées sans que celles de (III.79) le soient. La fonction $\lambda(t)$ peut être, par exemple :

$$(III.81) \quad \begin{cases} \lambda(t) = \frac{a}{\mu} - \frac{a+\mu}{4\mu} e^{\frac{\mu}{2}t} \\ \lambda(0) < 0 \quad (\mu^2 < 3a) \end{cases}$$

(III.79-2) n'est alors pas vérifiée, mais par contre les conditions (III.80-1) et (III.80-2), obtenues sur l'équation dérivée, sont validées. La dérivation du modèle ne diminue donc pas toujours la qualité des résultats.

Notons que dans cet exemple, le terme $[\lambda(t)\mu - a]$ est strictement négatif, et par conséquent $x=y=0$ est le seul équilibre possible pour (III.79). La stabilité asymptotique du modèle dérivé (III.80) entraîne donc la stabilité (simple) du modèle initial (III.79).

IV.2.3 - Cas d'un changement de variables P(x,t)

Considérons un système à non linéarités de rang 1, de polynôme symbolique $p(\lambda, A(x,t))$ et décrit par :

$$(III.82) \quad \dot{x} = A(x,t).x$$

et une matrice de changement de variables $P(x,t)$, dérivable et inversible à chaque instant :

$$P(x,t) : \chi \times T_0 \rightarrow \mathbb{R}^{q \times q}, \det P(x,t) \neq 0 \quad \forall (x,t) \in \chi \times T_0$$

La dérivée $\frac{d}{dt} P(x,t)$ le long des trajectoires de (III.82) dépend de x et t , \dot{x} étant exprimée en fonction de $A(x,t)$ et x . Nous noterons cette dérivée $\dot{P}(x,t)$, ou plus simplement \dot{P} . Soit :

$$(III.83) \quad z = P(x,t).x$$

$$(III.84) \quad \begin{cases} \dot{z} = B(x,t) \cdot z \\ B(x,t) = P(x,t) A(x,t) P^{-1}(x,t) + P(x,t) \dot{P}^{-1}(x,t) \end{cases}$$

Ce modèle (III.84) n'est en général pas de la classe C(1) ou L(1) considérée pour (III.82). Si on lui applique les conditions du linéaire, on fait intervenir le polynôme :

$$(III.85) \quad \begin{aligned} p'(\lambda, B(x,t)) &= \det (\lambda I_q - B(x,t)) \\ &= \det (\lambda I_q - A(x,t) - P^{-1}(x,t) \dot{P}(x,t)) \end{aligned}$$

Ce polynôme est en général différent du polynôme symbolique de A :

$$(III.86) \quad p(\lambda, A(x,t)) = \det (\lambda I_q - A(x,t))$$

Les conditions de Routh-Hurwitz appliquées à (III.82) ou (III.84) sont donc différentes si P varie dans le temps, **sauf dans le cas où A et A + P⁻¹ Ṗ ont même polynôme symbolique**. (Ces deux matrices n'étant pas forcément semblables). Par exemple, A(x,t) et P(x,t) peuvent avoir les formes suivantes :

$$(III.87) \quad \begin{cases} A(x,t) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2(x,t) \\ 0 & A_3(x,t) \end{bmatrix} & P(x,t) = \begin{bmatrix} P_1 & P_2(x,t) \\ 0 & P_3 \end{bmatrix} \\ * A_1 \text{ et } P_1 \text{ matrices carrées constantes de même dimension,} \\ * A_3(x,t) \text{ et } P_3 \text{ carrées de même dimension, } P_3 \text{ constante.} \end{cases}$$

On a alors :

$$(III.88) \quad A(x,t) + P^{-1}(x,t) \dot{P}(x,t) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2(x,t) - P_1^{-1} P_2(x,t) P_3^{-1} \dot{P}_2(x,t) \\ 0 & A_3(x,t) \end{bmatrix}$$

Cette matrice a le même polynôme symbolique que A(x,t). Notons que

(III.87) correspond au cas particulier de non observabilité rencontré au second chapitre.

IV.2.4 - Conclusion : polynôme symbolique et classes d'équivalence

L'application directe des conditions du linéaire sur un système à non linéarités de rang 1, lorsqu'elle est justifiée, se conduit sur son polynôme symbolique, auquel on applique le critère de Routh-Hurwitz pour chaque couple (x,t) possible.

Les autres critères applicables aux systèmes linéaires (de Lyapounov, de Kotelianski, ...) sont équivalents car ils aboutissent à des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité des systèmes linéaires.

Si le système est linéaire stationnaire, une dérivation ou une intégration de son équation différentielle laisse son polynôme caractéristique inchangé. Nous avons vu que cela n'est plus vérifié pour un système à coefficients non constants ; les conditions obtenues sur le modèle dérivé peuvent être, selon le cas, plus restrictives ou moins restrictives que celles liées au modèle initial.

De même, un changement de variable à coefficients non constants change, sauf cas particuliers, le polynôme symbolique.

On peut ainsi définir des classes d'équivalence de représentations vis à vis des conditions du linéaire pour des systèmes non linéaires et non stationnaires du type $L(1)$ ou $C(1)$.

Deux représentations d'un même processus sont équivalentes vis à vis des conditions du linéaire si, linéarisées à chaque instant, elles mènent aux mêmes conditions de stabilité, c'est-à-dire si elles ont même polynôme symbolique.

Chaque classe d'équivalence est alors associée à un polynôme symbolique.

IV.3 - Définition de classes de systèmes vérifiant la conjecture du linéaire

Dans cette partie, nous rappellerons dans un premier temps certains résultats concernant des classes de processus pour lesquels la conjecture du linéaire est vérifiée. Nous proposerons ensuite une extension de ces classes, basée sur l'utilisation des résultats exposés précédemment. Les systèmes concernés sont majoritairement du type mLP.

IV.3.1 - Rappel de certains cas de vérification de la conjecture du linéaire

a) *Cas d'une matrice symétrique :*

Nous avons vu, au début de ce chapitre, qu'un système décrit par (III.74) : $\dot{x} = A(x,t) \cdot x$, est stable si la matrice $\frac{1}{2} [A^T(x,t) + A(x,t)]$ vérifie les conditions de Routh-Hurwitz pour tout x et tout t . Ceci était obtenu en utilisant la fonction candidate à Liapounov suivante :

$$v(x) = \frac{1}{2} x^T x$$

Ainsi, si la matrice $A(x,t)$ est symétrique, la conjecture du linéaire est validée.

b) *Cas d'une matrice de type L(1) ou C(1), à éléments hors diagonaux tous positifs ou nuls :*

D'après le critère pratique de Borne et Gentina, si la matrice $A(x,t)$ a tous ses termes non constants regroupés dans une seule rangée (ligne ou colonne), et si ses termes hors diagonaux sont positifs ou nuls, alors $A(x,t)$ est sa propre pseudo-majorante et la vérification des conditions de Kotelianski implique la stabilité du système. Dans ce cas, les conditions de Kotelianski sont aussi celles de Routh-Hurwitz.

c) *Système mLP à pôles et zéros simples, réels et alternés /Benrejeb, 1976/ :*

Le critère de Benrejeb utilise la propriété vue en (b) :

Critère :

Soit un système de type mLP décrit par une fonction de transfert $W(p)$ à pôles et zéros alternés, et par un gain non constant $\phi^*(x,t)$. Ce système vérifie la conjecture du linéaire, et les conditions de stabilité absolue correspondantes sont :

$$1) \exists \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}^q, \forall t \in T_0, \phi^*(x,t) + \frac{1}{W(0)} \geq \varepsilon > 0$$

2) Les $(q-1)$ zéros de $N(p)$ sont strictement négatifs (et par conséquent $D(p)$ a au moins $(q-1)$ pôles stables).

d) *Système mLP à pôles et/ou zéros multiples /Rotella, 1983/ :*

A partir des modélisations en flèche épaisse vues dans ce chapitre, la classe des systèmes à pôles et zéros simples peut être étendue au cas de zéros ou pôles multiples. Les processus sont ici encore de type mLP, décrits par une fonction de transfert $W(p) = N(p) / D(p)$ et une non linéarité de gain équivalent $\phi^*(x,t)$.

d1) *zéro multiple :*

$$N(p) = (p + \alpha)^{q-1} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

La conjecture du linéaire est vérifiée si :

$$D(p - \alpha) = \sum_{i=0}^q \delta_i p^i$$

a des coefficients décroissants, c'est-à-dire :

$$\delta_0 < 0 \quad \text{et} \quad \forall i = 0, \dots, q-3 \quad \delta_{i+1} - \delta_i \leq 0$$

Les conditions de stabilité absolue correspondantes sont alors :

$$1) \exists \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}^q, \forall t \in T_0, \phi^*(x,t) + \frac{1}{W(0)} \geq \varepsilon > 0$$

$$2) \alpha > 0$$

d2) pôle multiple :

$$D(p) = p (p + \beta)^{q-1} \quad \beta \in \mathbb{R} \quad N(0) > 0$$

La conjecture du linéaire est vérifiée si :

$$N(p - \beta) = \sum_{i=0}^{q-1} v_i p^i$$

a des coefficients décroissants, c'est-à-dire :

$$v_0 < 0 \quad \text{et} \quad \forall i = 0, \dots, q-3 \quad v_{i+1} - v_i \leq 0$$

Les conditions de stabilité absolue sont alors :

$$1) \exists \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}^q, \forall t \in T_0, \phi^*(x,t) \geq \varepsilon > 0$$

$$2) \beta > 0$$

d3) pôle et zéro multiple :

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{(p + \alpha)^n}{p (p + \beta)^n} \quad 0 < \alpha < \beta$$

Ce système à déphasage minimal vérifie la conjecture du linéaire si :

$$* (1 + \alpha) (\beta - \alpha) \leq n$$

$$* \forall i \in \{1, \dots, n-2\}, \frac{(\alpha + 1)(\beta - \alpha)}{i(n-i)} - \frac{\alpha}{i(i+1)} - \frac{(\beta - \alpha)^2}{(n-i)(n-i+1)} \leq 0$$

La condition de stabilité absolue est alors :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}^q, \forall t \in T_0, \phi^*(x,t) \geq \varepsilon > 0$$

Ces trois propositions sont démontrées dans /Rotella, 1983/.

IV.3.2 - Systèmes mLP à q-2 zéros alternés avec q-1 pôles

Nous proposons ici un résultat concernant les systèmes mLP dont la fonction de transfert est du type :

$$\begin{aligned} \text{(III.89)} \quad W(p) = \frac{N(p)}{D(p)} &= \frac{1}{p + \mu_1} \frac{(p + \lambda_2) \dots (p + \lambda_{q-1})}{(p + \mu_2)(p + \mu_3) \dots (p + \mu_q)} = \frac{1}{p + \mu_1} \frac{N(p)}{D_1(p)} \\ &= \frac{1}{p + \mu_1} W_1(p) \end{aligned}$$

$$\text{(III.90)} \quad \mu_1 > 0, \lambda_2 > 0 \text{ et } 0 < \mu_2 < \lambda_2 < \mu_3 < \dots < \lambda_{q-1} < \mu_q$$

La fraction $W_1(p)$ est donc à pôles et zéros alternés, comme dans les hypothèses du critère de Benrejeb. Cependant, $W(p)$ a ici un pôle supplémentaire, supposé asymptotiquement stable.

Le gain équivalent de la non linéarité est $\phi^*(x,t)$, et nous le supposons négatif :

$$\text{(III.91)} \quad \phi^*(x,t) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^q, \forall t \in T_0$$

Le critère suivant utilise la forme en flèche mince avec coordonateur linéaire présentée au paragraphe II.2.2.b de ce chapitre :

Critère :

Le système mLp décrit par (III.89) (III.90) vérifie la conjecture du linéaire si $\phi^*(x,t)$ est négatif pour tout x et tout t . Les conditions de stabilité absolue sont alors :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}^q, \forall t \in T_0, \quad \phi^*(x,t) + \frac{1}{W(0)} \geq \varepsilon > 0$$

Démonstration :

D'après la propriété 2 vue au § II.2.2.b, le système est représentable par la matrice en flèche :

$$FCL(.) = \begin{bmatrix} -\mu_1 & & & & & & 1 \\ & & & & \circ & & 1 \\ & & -\lambda_2 & & \dots & & \vdots \\ & & & & \dots & & \vdots \\ & \circ & & & & & \vdots \\ & & & & & -\lambda_{q-1} & 1 \\ -\phi^* & \delta_2 & \dots & \dots & \dots & \delta_{q-1} & -\gamma \end{bmatrix}$$

avec :

$$\delta_i = - \left[\frac{(\lambda + \lambda_i) D_1(\lambda)}{N(\lambda)} \right]_{\lambda = -\lambda_i} \quad \forall i = 2, \dots, q-1$$

Les δ_i sont tous positifs si N et D_1 forment une paire positive, c'est-à-dire si $W_1(p)$ est à pôles et zéros alternés.

Si de plus ϕ^* est négatif, tous les termes hors diagonaux de $FCL(.)$ sont positifs, et la conjecture linéaire est vérifiée.

Remarques :

- 1) Le pôle μ_1 peut être égal à l'un des autres pôles μ_i de $W_1(p)$. Le système $W(p)$ a alors un pôle double.

2) Nous avons considéré $\mu_2 > 0$, mais la conjecture linéaire serait vérifiée sous les mêmes conditions avec $\mu_2 \leq 0$. Cependant, la condition de stabilité $\phi^* + \frac{1}{W(0)} > 0$ ne peut être validée que dans le cas où $W(0)$ est positif, c'est-à-dire où μ_2 est strictement positif.

3) Le lieu de Bode des phases de $W(p)$ est toujours compris entre 0° et -180° . Celui de $W_1(p)$ est compris entre 0° et -90° .

Exemple :

$$W(p) = \frac{(p+1)(p+3)}{(p+0,5)(p+2)^2(p+4)}$$

$W(p)$ est du type considéré, avec $\mu_1 = 2$. On a :

$$FCL(.) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ -\phi^* & 0,75 & 1,25 & -2,5 \end{bmatrix}$$

Ce système est absolument stable et vérifie la conjecture du linéaire pour :

$$-8/3 < \phi^* < 0$$

IV.3.3 - Conjecture du linéaire pour les modèles réduits ou simplifiés

Dans ce chapitre, nous avons proposé deux méthodes de simplification des modèles en vue de l'étude de stabilité :

- Dans le cas des systèmes mLp, nous avons proposé un théorème "du système réduit" (§ II.3.2) qui permet de diminuer la dimension de la matrice étudiée. Il est remarquable que le système réduit proposé vérifie toujours la conjecture du linéaire.

- Dans le cas de systèmes multivariables, le paragraphe III.2 présente le théorème "du système simplifié" : la dimension du système à étudier ne change pas, mais sa complexité diminue. Un cas particulier a été exposé (§ III.3), concernant les matrices "pseudo-symétriques", c'est-à-dire ayant une matrice simplifiée $\tilde{A}(x,t)$ symétrique. Dans ce cas, la conjecture du linéaire s'applique au modèle simplifié.

IV.4 - Systèmes stables sans vérifier les conditions de stabilité des systèmes à coefficients constants

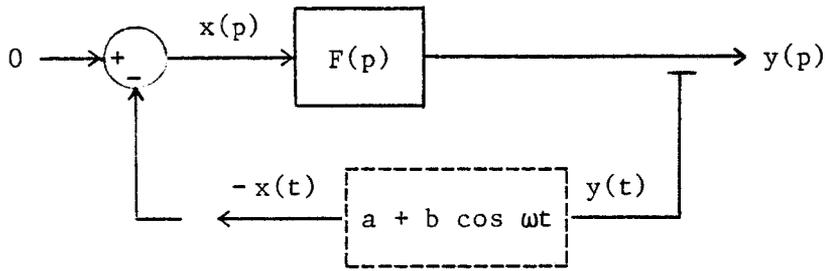
Nous avons jusqu'à présent étudié les propriétés de stabilité absolue des systèmes. Pour cette forme de stabilité, les conditions des systèmes linéaires stationnaires constituent un optimum. La notion de conjecture du linéaire tient alors une place importante.

Cependant, le fait d'étudier les systèmes non linéaires et/ou non stationnaires par le biais des systèmes linéaires stationnaires peut entraîner une perte d'information importante, puisqu'on ne tient alors compte que du domaine de variation des gains non constants, sans envisager la façon dont ils varient dans ce domaine.

Nous allons, dans cette partie, montrer sur quelques exemples, qu'il est parfois préférable (lorsque cela est possible) d'envisager directement la nature non linéaire ou non stationnaire d'un système, sans passer par un système de comparaison linéaire stationnaire. Les méthodes mises en jeu y sont plus particulières, mais conduisent à des résultats plus larges ; les conditions de stabilité du linéaire stationnaire s'avèrent non nécessaires pour des systèmes à coefficients non constants.

IV.4.1 - Système continu à coefficients périodiques

Nous envisagerons dans cette partie les systèmes (S) décrits Figure III.13. Le schéma proposé fait intervenir deux espaces de représentation (temporel et fréquentiel) de façon à simplifier la lecture. En fait, l'asservissement est constitué d'une partie linéaire, de fonction de transfert $F(p)$ sans numérateur, bouclée par un retour de gain périodique $a + b \cos \omega t$.



Système (S) :

$$F(p) = \frac{1}{D(p)} \quad d(D) = q$$

FIGURE III.13

On a ainsi :

$$-x(t) = y(t) (a + b \cos \omega t)$$

$$-x(p) = a y(p) + \frac{1}{2} b (y(p+j\omega) + y(p-j\omega))$$

$$y(p) = F(p) x(p)$$

Nous considèrerons plus généralement les systèmes linéaires à coefficients périodiques dans le quatrième chapitre. Des travaux antérieurs /Pillet, Poloujadoff, Chassande, 1979/ /Pillet, Poloujadoff, 1982/ /Richard, Pillet & al, 1982/ /Richard & Laurent, 1983/ ont considéré le type de systèmes de la Figure III.13, permettant l'application numérique du théorème de Floquet.

$F(p)$, a , b et ω étant donnés, il est possible de calculer les exposants caractéristiques λ_i du système linéaire stationnaire associé à (S), lorsqu'ils sont réels et distincts (dans le cas contraire, nous proposons une autre méthode dans le Chapitre IV). Il est ainsi possible de tracer les évolutions de ces invariants λ_i en fonction de ω , (F , a et b étant fixés). Le système (S) est asymptotiquement stable si et seulement si ces valeurs λ_i sont toutes strictement négatives.

Notamment, lorsque l'on pose $a = 0$ et $b = 2$, avec :

$$F(p) = \frac{1}{(p - 0,4)(p + 0,4)(p + 1,5)}$$

il apparaît que pour un certain intervalle de valeurs de ω [1,3 ; 1,58], les trois racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont négatives. Le système considéré est donc asymptotiquement stable, d'équilibre $y = 0$. Ce résultat est confirmé par une simulation dont les courbes sont présentées Figure III.14.

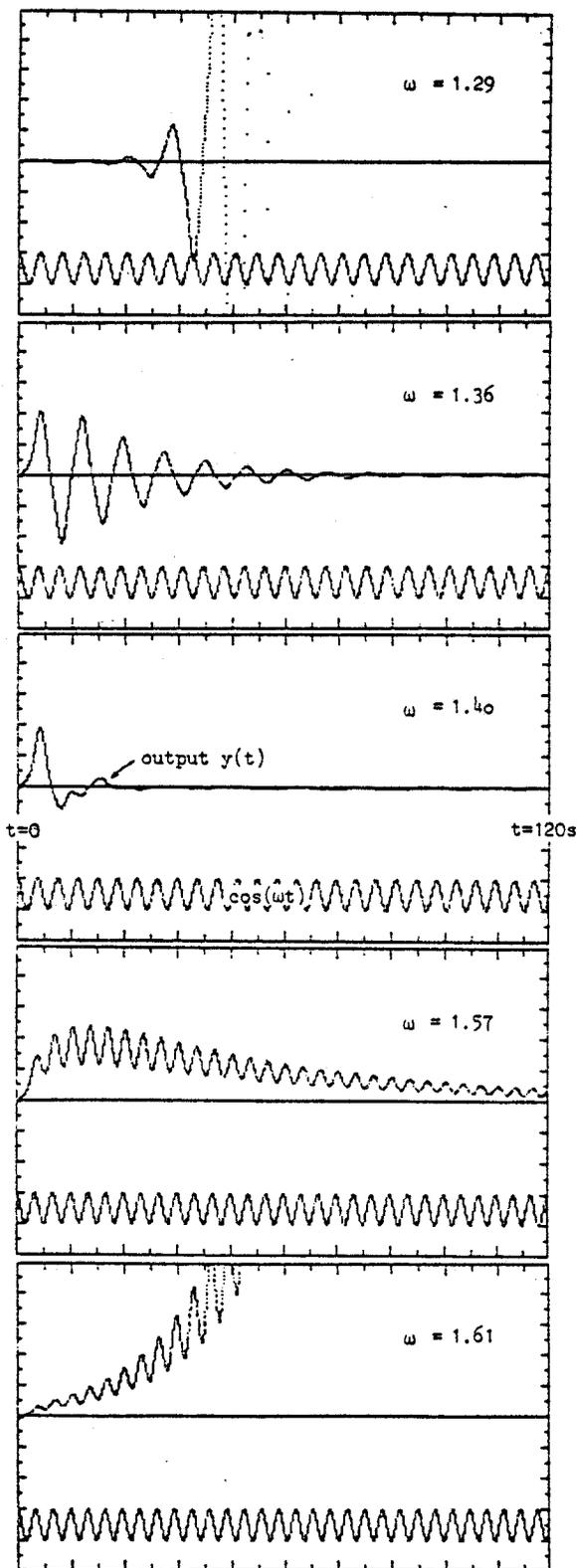


FIGURE III.14

Cette simulation a été réalisée pour des conditions initiales nulles sur la vitesse et l'accélération de la sortie. Pour des valeurs de ω sortant de l'intervalle considéré, on constate l'instabilité de l'équilibre $y = 0$.

Cependant, si l'on considère le système tangent à chaque instant t_0 , on est amené à étudier le cas d'un retour constant $K = a + b \cos \omega t_0$. La construction du tableau de Routh-Hurwitz montre que quel que soit la valeur de K , l'asservissement est instable. Ainsi, l'instabilité de l'ensemble des modèles tangents (à coefficients constants) n'implique pas celle du système réel.

Remarque :

Il est possible d'envisager un parallèle avec le cas continu, en considérant cette fois le calcul d'un asservissement échantillonné à réponse pile, dont le coefficient d'action proportionnelle est périodique. Ce type d'asservissement a été présenté antérieurement /Laurent & al, 1969/ de façon plus générale et permet d'annuler le transitoire en q^2 périodes d'échantillonnage, où q est l'ordre du système. D'autres travaux ont également conduit à un nombre inférieur de périodes $q(q+1) / 2$ /Moyaux, 1976/. Le système est décrit Figure III.15 :

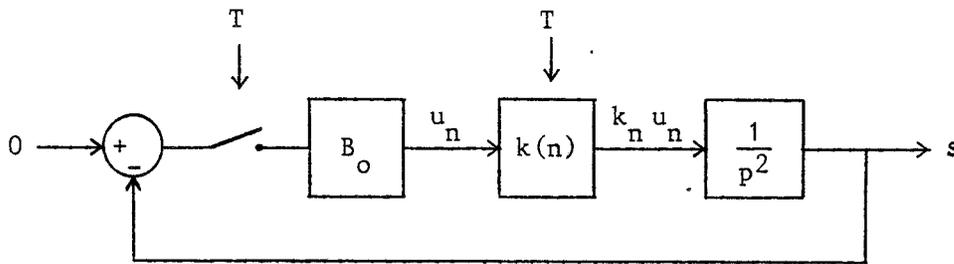
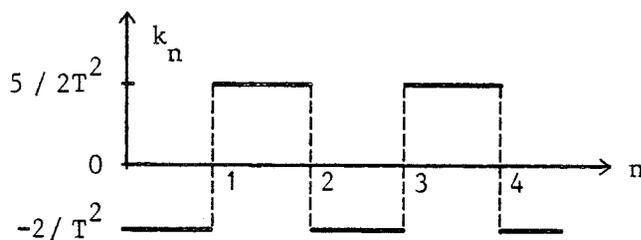


FIGURE III.15



Le système est alors décrit par :

$$y_{n+1} = M(k_n) y_n \in \mathbb{R}^2$$

$$M(k) = \begin{bmatrix} 1 & -T k \\ T & 1 - \frac{T^2}{2} k \end{bmatrix} \quad k_1 = -2 / T^2 \quad k_2 = 5 / 2 T^2$$

$$\left[M(k_1) \ M(k_2) \right]^2 = 0$$

$$y_{n+4} = 0 \quad \forall y_n$$

$$\det M(k) = 1 + \frac{T^2}{2} k$$

$$\text{tr } M(k) = 2 - \frac{T^2}{2} k$$

Une simulation a été effectuée pour $T=1$ s, et les résultats en sont présentés Figure III.16) et correspondent bien à une réponse pile en 4 s. (Les légères oscillations après 4 s sont dûes à l'imperfection des commutations des relais utilisés pour réaliser le gain périodique).

Comme dans le cas continu envisagé précédemment, nous pouvons montrer que si le gain avait été constant, le système aurait divergé, et ce quelle que soit la valeur de ce gain k .

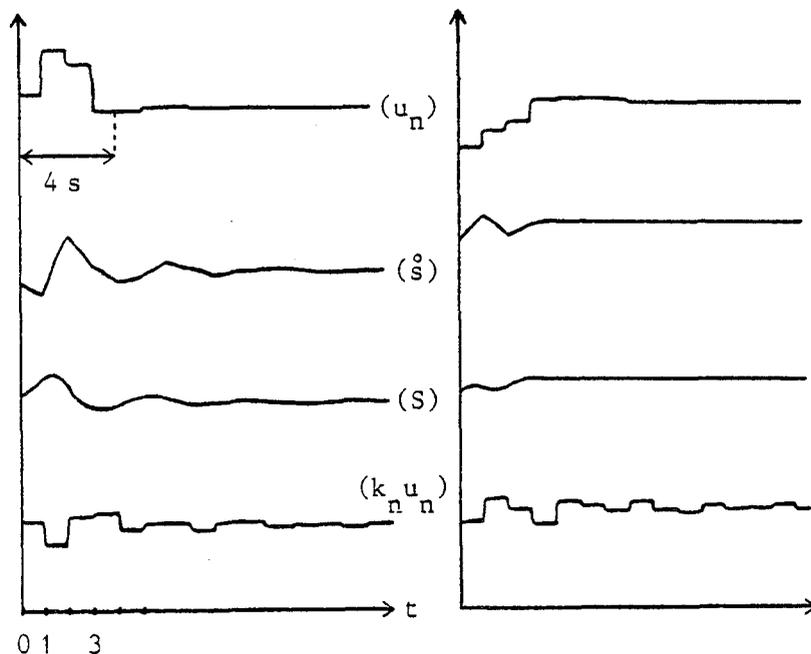


FIGURE III.16

IV.4.2 - Conclusion

La majeure partie des méthodes d'analyse des systèmes à coefficients non constants introduit une comparaison entre le processus et son modèle linéarisé, que ce soit pour étudier son comportement autour d'un point de fonctionnement ou en définissant un "gain équivalent instantané".

Jusqu'à présent, il avait été montré que la stabilité de tous les modèles tangents n'entraînait que dans certains cas celle du système réel.

Nous avons montré ici, qu'en ce qui concerne les systèmes non stationnaires, les conditions de stabilité appliquées sur le modèle tangent peuvent être beaucoup plus restrictives que les conditions de stabilité réelles du processus.

En effet, nous avons pu mettre en évidence certains systèmes à coefficients périodiques qui sont asymptotiquement stables, bien qu'"instables à chaque instant".

V - CONCLUSION

Il est très intéressant d'aborder l'analyse de stabilité sous l'angle de la modélisation. Les principaux résultats présentés dans ce chapitre proviennent d'un choix de fonctions candidates à Liapounov directement adaptées à des modèles spécifiques.

Ces modèles, et notamment les différents types de formes en flèche, peuvent être facilement conditionnés à l'aide des méthodes proposées dans le second chapitre.

Les fonctions de Liapounov utilisées sont ici de type quadratique, quadratique-plus-intégrale, ou norme vectorielle.

Les deux résultats majeurs de ce chapitre concernent la définition de modèles simplifiés, dont la stabilité suffit à conclure à celle du système initial : deux approches sont envisagées, l'une concernant la réduction de l'ordre du modèle (théorème du système réduit), l'autre permettant de réduire la complexité des termes du modèle, sans toutefois en diminuer la dimension (théorème du système simplifié).

Enfin, nous avons envisagé, à travers la notion de "conjecture du linéaire", l'utilisation de critères propres aux systèmes à coefficients constants dans l'étude de stabilité de systèmes plus complexes : l'avantage réside dans la simplicité des critères mis en jeu, et dans l'optimisation des domaines de stabilité absolue calculables. Cependant, cette notion peut s'avérer restrictive lorsque les lois d'évolution des termes non constants du modèle sont déterminées, c'est-à-dire lorsque la propriété étudiée n'est plus la stabilité "absolue".



ANNEXE III.A

Définitions relatives à la stabilité

Les résultats et notations exposés dans cette annexe sont issus de /Grujić, 1975-a/ en ce qui concerne les définitions relatives à la stabilité, et de /Hahn, 1963/ pour la méthode directe de Liapounov.

A.1 - Notations

$x(t ; t_0, x_0)$ trajectoire dans \mathbb{R}^q , partant du point x_0 à l'instant initial t_0

\mathcal{R}_+ ensemble des réels positifs ou nuls

$\|x\|$ norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^q$

$T_0 = \{t : t \in [t_0, +\infty[\}, T_0 = \mathcal{R}$ si $t_0 = -\infty$

$\mathcal{R}_h : \{x : x \in \mathbb{R}^q, \|x\| \leq h\}$ $h > 0$

$\mathcal{R}_{h,t_0} = \{(x,t) : x \in \mathcal{R}_h, t \in T_0\}$

χ ensemble de définition du vecteur état x , inclus dans \mathbb{R}^q et contenant un voisinage \mathcal{R}_h de $x = 0$

$v(x,t)$ fonction continue de \mathcal{R}_{h,t_0} dans \mathcal{R} , définie positive (cf définition III.8)

D^+ symbole de dérivation à droite

$$D^+ v(x,t) = \limsup \left[\frac{v(x(t+\theta) ; t, x), t+\theta) - v(x,t)}{\theta} : \theta \rightarrow 0^+ \right]$$

T_i un ensemble connexe d'instants initiaux t_0

$\mathcal{D}_{(.)}$ domaine de $\mathcal{R} \times \mathbb{R}^q$ relatif à une propriété notée $(.)$ (ex : \mathcal{D}_s)

$\mathcal{D}_{(.)}(t_0)$ domaine de \mathbb{R}^q relatif à une propriété notée $(.)$ (ex : $\mathcal{D}_s(t_0)$)

A.2 - Définitions relatives à la stabilité

Nous considérons ici la solution $x(t; t_0, x_0)$ de l'équation d'un système S :

$$(III.A.1) \quad \frac{d}{dt} x = \dot{x} = f(x, t)$$

$$(III.A.2) \quad x(t_0; t_0, x_0) = x_0$$

avec :

$$x \in \chi \subset \mathbb{R}^q ; t_0 \in T_i ; t \in T_0 = [t_0, +\infty [$$

La fonction f est telle que la solution $x(t; t_0, x_0)$ soit unique : elle peut par exemple vérifier la condition de Lipschitz /Hahn, 1963/.

Définition III.1 : Domaine de stabilité \mathcal{D}_s

Soit $x = 0$ le seul équilibre du système S.

$\mathcal{D}_s(T_i)$ est son domaine de stabilité par rapport à T_i si et seulement si :

$$a) \quad \forall \varepsilon \in]0, +\infty [, \forall t_0 \in T_i$$

$$\mathcal{D}_s(t_0, \varepsilon) = \{x_0 : \forall t \geq t_0, \|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon\}$$

$$b) \quad \mathcal{D}_s(t_0) = \bigcup_{\varepsilon > 0} (\mathcal{D}_s(t_0, \varepsilon))$$

$$c) \quad \mathcal{D}_s(T_i) = \{(t_0, x) : t_0 \in T_i, x \in \mathcal{D}_s(t_0)\}$$

Le domaine de stabilité de $x = 0$ est défini par $\mathcal{D}_s = \mathcal{D}_s(\mathbb{R})$.

$\mathcal{D}_s(t_0)$ est le domaine de stabilité de $x = 0$ pour l'instant initial t_0 .

Propriété : Invariance du domaine de stabilité

Le domaine \mathcal{D}_s est positivement invariant par rapport au mouvement du système, c'est-à-dire que pour tout $t \geq t_0$:

$$(t_0, x_0) \in \mathcal{D}_s \implies (t, x(t; t_0, x_0)) \in \mathcal{D}_s$$

Définition III.2 : Domaine d'attraction \mathcal{D}_a

Soit $x = 0$ le seul équilibre du système S.

$\mathcal{D}_a(T_i)$ est son domaine d'attraction par rapport à T_i si et seulement si :

a) $\forall t_0 \in T_i,$

$$\mathcal{D}_a(t_0) = \{x_0 : \forall \rho > 0, \exists \tau(t_0, x_0, \rho) \geq 0, \forall t > t_0 + \tau(t_0, x_0, \rho) \\ \|x(t; t_0, x_0)\| < \rho\}$$

b) $\mathcal{D}_a(T_i) = \{(t_0, x) : t_0 \in T_i, x \in \mathcal{D}_a(t_0)\}$

Le domaine d'attraction de $x = 0$ est défini par $\mathcal{D}_a = \mathcal{D}_a(\mathbb{R})$.
 $\mathcal{D}_a(t_0)$ est le domaine d'attraction de $x = 0$ pour l'instant initial t_0 .

Propriété : Invariance du domaine d'attraction

Le domaine \mathcal{D}_a est invariant par rapport au mouvement du système :

$$(t, x(t; t_0, x_0)) \in \mathcal{D}_a \iff (t_0, x_0) \in \mathcal{D}_a$$

Définition III.3 : Domaine de stabilité asymptotique \mathcal{D}

Soit $x = 0$ le seul point d'équilibre du système S.

Le domaine de stabilité asymptotique de $x = 0$ est défini par :

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_a \cap \mathcal{D}_s$$



Définition III.4 : Estimation \mathcal{D}' d'un domaine \mathcal{D} .

Le domaine \mathcal{D}' de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^q$ est une estimation du domaine \mathcal{D} ssi :

a) $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$.

b) $\exists t_0 \in [-\infty, +\infty[$, $\mathcal{D}' = T_0 \times V$, V voisinage de $x = 0$

En général, il est difficile -voire impossible- de déterminer exactement le domaine de stabilité ou d'attraction d'un équilibre. On cherche alors à en calculer une estimation \mathcal{D}' qui soit suffisamment proche du domaine effectif \mathcal{D} . Cette estimation permet alors de fixer des conditions admissibles de fonctionnement du système, les conditions les moins contraignantes étant bien sûr celles qui sont liées à \mathcal{D} .

Définition III.5 :

Si $\mathcal{D}_a(t_0)$ est constitué de tout l'espace de définition du vecteur état x , l'**attractivité** est **globale**.

Si $\mathcal{D}_s(t_0)$ est constitué de tout l'espace de définition du vecteur état x , la **stabilité** est **globale**.

Si il y a à la fois stabilité globale et attractivité globale, l'équilibre est **globalement asymptotiquement stable**.

Définition III.6 : Stabilité exponentielle

L'équilibre $x = 0$ est exponentiellement stable si :

(III.A.3) $\exists \alpha > 0, \exists \beta > 0, \forall t_0 \in \mathbb{R}, \forall x_0 \in \mathcal{X}, \forall t \in T_0$

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq \beta e^{-\alpha(t-t_0)} \|x_0\|$$

A.3 - Méthode directe de Liapounov

L'étude des propriétés de stabilité d'un équilibre repose sur la définition de fonctions $v(x,t)$ ou $v(x)$ positives, dont la convergence vers zéro doit entraîner celle de l'état vers son équilibre. Ces fonctions v jouent ainsi le rôle de distance généralisée de l'extrémité du vecteur état à l'origine. Les définition et théorèmes qui suivent sont issus de /Hahn, 1963/.

L'équilibre considéré est $x = 0$. Nous supposons que l'origine est un point singulier isolé pour $f(x,t)$, c'est-à-dire qu'elle est le seul point d'équilibre de S dans un domaine R_h .

Définition III.7 : Fonction de classe K

$\phi(r)$ est une fonction de classe K ssi :

$$\phi : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad h \in \mathbb{R}_+$$

$\phi(r)$ continue, strictement croissante, avec $\phi(0) = 0$

Définition III.8 : Fonction définie positive (ou négative)

Une fonction $v(x,t)$ continue de R_{h,t_0} dans \mathcal{R} est définie positive (resp. négative) ssi il existe une fonction $\phi(r)$ de classe K telle que :

$$(III.A.4) \quad v(0,t) = 0 \quad \forall t \in T_0$$

$$(III.A.5) \quad v(x,t) \geq \phi(\|x\|) \quad (\text{resp. } \leq -\phi(\|x\|)) \quad \forall (x,t) \in R_{h,t_0}$$

Définition III.9 : Fonction non bornée en rayon

$v(x,t)$ est non bornée en rayon ssi l'inégalité (III.A.5) est vérifiée pour des valeurs de h arbitrairement grandes, avec $\lim_{r \rightarrow +\infty} \phi(r) = +\infty$.

Définition III.10 : Fonction décroissante

$v(x,t)$ est décroissante ssi il existe une fonction $\Psi(r)$ de classe K telle que :

$$(III.A.6) \quad |v(x,t)| \leq \Psi(\|x\|) \quad \forall (x,t) \in \mathcal{R}_{h,t_0}$$

Pour que $v(x,t)$ soit décroissante, il suffit qu'elle s'annule en $x = 0$ et que ses dérivées partielles $\partial v / \partial x_i$ soient bornées sur \mathcal{R}_{h,t_0} .

A partir de ces définitions, trois théorèmes importants peuvent être énoncés :

Théorème III.1 /Liapounov, 1892/ :

L'équilibre $x = 0$ du système S est stable s'il existe une fonction $v(x,t)$ définie positive dont la dérivée $D^+ v(x,t)$ pour (III.A.1) ne soit pas positive.

Théorème III.2 /Liapounov, 1892/ :

L'équilibre $x = 0$ du système S est asymptotiquement stable s'il existe une fonction $v(x,t)$ définie positive et décroissante, dont la dérivée $D^+ v(x,t)$ pour (III.A.1) soit définie négative.

Théorème III.3 /Barbašin & Krasovskii, 1954/ :

Soit $x = 0$ l'unique équilibre du système S . Ce point $x = 0$ est globalement asymptotiquement stable s'il existe une fonction $v(x,t)$ qui soit, dans tout l'espace, définie positive, non bornée en rayon, décroissante, et dont la dérivée $D^+ v(x,t)$ pour (III.A.1) soit définie négative.

Définition III.11 : Fonction de Liapounov

Une fonction vérifiant les conditions des théorèmes III.1, III.2 ou III.3 est appelée fonction de Liapounov pour le système S .

Théorème III.4 :

Si $v(x,t)$ est une fonction de Liapounov vérifiant les hypothèses du Théorème III.3 pour le système S_α défini par :

$$(III.A.7) \quad \dot{z} = f(z,t) + \alpha z \quad \alpha > 0 \quad z \in \mathbb{R}^q$$

alors l'équilibre $x = 0$ du système S est globalement exponentiellement stable, i.e. :

$$\exists \beta > 0 \quad \|x(t; t_0, x_0)\| \leq \beta e^{-\alpha(t-t_0)} \|x_0\|$$

CHAPITRE IV

SYSTEMES CONTINUS LINEAIRES
A COEFFICIENTS PERIODIQUES

INTRODUCTION

La modélisation de nombreux systèmes physiques conduit à des équations différentielles à coefficients périodiques ; de plus, les modèles choisis sont souvent de type linéaire, de façon à en simplifier l'étude. C'est le cas, par exemple, de certains systèmes considérés en physique du solide /Ziegler, 1977/, en mécanique céleste /Sigrist, 1976/ /Iswar, 1980/, en optique /Elachi, 1976/, en aéronautique /Borri & Mantegazza, 1973/, en automatique /Meerkov, 1973, 1980/, en électrotechnique /Chassande, 1981/ /Lesenne & al, 1981/, en aérospatiale /Vanlandigham, 1968/ /Likins & Lindh, 1970/ /Calico & Yeake, 1982/ ou en mécanique des fluides /Joseph, 1980/.

De telles équations n'ont jusqu'à présent jamais été résolues dans leur généralité, mais /Liapounov, 1892/ et /Floquet, 1883/ ont proposé un résultat fondamental, que nous avons rappelé dans le premier chapitre : étant donné un système d'équations différentielles linéaires à coefficients périodiques $A(t)$, il existe un changement de variables périodique $P(t)$ conduisant à un système équivalent M dont les coefficients sont constants. Les valeurs propres λ_i associées à ce système sont des invariants, appelés exposants caractéristiques. Leur connaissance est déterminante dans l'évaluation des propriétés dynamiques du système. Malheureusement, la recherche du changement de variable $P(t)$ pose le même problème que la résolution directe du système d'équations à coefficients périodiques $A(t)$.

Les méthodes proposées jusqu'à présent pour calculer une approximation des exposants caractéristiques de $A(t)$ sont essentiellement de type numérique, et la plupart supposent que ce modèle $A(t)$ est connu.

Elles sont basées sur des développements en séries /Malkin, 1956/ /Minorsky, 1962/, ou bien sur des calculs de fractions continues

/Pillet & al, 1979/ /Pillet & Poloujadoff, 1982/, ou encore sur une évaluation des termes périodiques par des fonctions en escalier /Burgat & Mira, 1970/.

D'autres méthodes nécessitent la connaissance analytique de la réponse impulsionnelle du système /Corall, 1979/.

Nous proposons ici de compléter ces résultats par deux approches distinctes : l'une utilisant des moyens non plus numériques mais analogiques ou numériques /Richard, Laurent, 1984/, l'autre considérant le cas d'un système dont le modèle $A(t)$ n'est pas connu mais dont l'état est accessible (ou partiellement accessible) /Richard, Laurent, 1983/. Une application pratique est proposée dans le cas de la machine synchrone /Richard, Lesenne, 1984/.

De même que nous avons montré comment un invariant de type polynomial constitue un outil pratique de modélisation, il s'avère que les propriétés d'invariance que nous proposons dans cette dernière partie présentent un intérêt certain dans l'identification de systèmes à coefficients périodiques. Ces propriétés d'invariance concernent ici encore une expression comparable au polynôme caractéristiques des systèmes à coefficients constants.

Tout au long de ce chapitre, les notations seront compatibles avec celles qui sont proposées au chapitre I, § V.

I - ENCADREMENT DES EXPOSANTS CARACTERISTIQUES PAR SIMULATION ANALOGIQUE

Dans cette partie, nous proposons une méthode de majoration et de minoration des parties réelles des exposants caractéristiques, basée sur une propriété d'invariance. Cette démarche /Richard, Laurent, 1984/ est originale dans le sens où les moyens mis en œuvre sont de type analogique. Ceci permet de dresser un parallèle avec les méthodes numériques.

I.1 - Translation des exposants caractéristiques

Le système considéré est représenté par les équations (I.7) présentées au chapitre I, et que nous rappelons ici (IV.1), ainsi que le résultat du théorème de Floquet (IV.2) :

$$(IV.1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t).x(t) \\ x \in \mathbb{R}^q \quad A(t) \in \mathbb{R}^{q \times q} \\ \exists T > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad A(t+T) = A(t) \end{cases}$$

$$(IV.2) \quad \begin{cases} \exists P(t) \in \mathbb{R}^{q \times q} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad P(t+T) = P(t) \quad \det P(t) \neq 0 \\ u(t) = P(t).x(t) \implies \dot{u}(t) = M.u(t) \\ M \in \mathbb{R}^{q \times q} \quad \text{matrice constante} \\ \lambda_i \quad (i=1, \dots, q) \quad \text{exposants caractéristiques de } A(t), \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{valeurs propres de } M \\ \mu_i = e^{\lambda_i T} \quad \text{multiplieurs caractéristiques de } A(t) \end{cases}$$

De ces équations, il vient :

$$(IV.3) \quad M = \dot{P}(t) P^{-1}(t) + P(t) A(t) P^{-1}(t)$$

Cette matrice ne dépend pas du temps, et donc :

$$(IV.4) \quad M = \dot{P}(-t) P^{-1}(-t) + P(-t) A(-t) P^{-1}(-t)$$

Nous proposons d'étudier l'effet d'une translation de valeur λ sur le spectre de $A(t)$. Dans ce but, considérons le système (IV.5) transformé depuis (IV.1) par translation :

$$(IV.5) \quad \dot{y}(t) = \left[A(t) + \lambda I_q \right] y(t) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Une matrice constante associée à ce système à coefficients périodiques est :

$$(IV.6) \quad \dot{P}(t) P^{-1}(t) + P(t) \left[A(t) + \lambda I_q \right] P^{-1}(t) = M + \lambda I_q$$

Il s'en suit la propriété suivante :

Propriété d'invariance par translation :

Si les exposants caractéristiques de $A(t)$ sont λ_i ($i = 1, \dots, q$), ceux du système translaté $A(t) + \lambda I_q$ sont $\lambda_i + \lambda$.

La correspondance ($P(t)$) entre $A(t)$ et son modèle associé M est donc invariante par rapport à une translation du spectre de $A(t)$.

I.2 - Majoration

Il est possible de considérer les propriétés de stabilité du système translaté (IV.5) lorsque λ varie.

Soit λ_M la plus grande valeur de λ telle que l'équilibre $y = 0$ de (IV.5) soit stable :

$$(IV.7) \quad \lambda_M \in \mathbb{R} : \dot{y} = \left[A(t) + \lambda_M I_q \right] y \quad \text{stable}$$

$$\forall \lambda > \lambda_M, \dot{y} = \left[A(t) + \lambda I_q \right] y \quad \text{instable}$$

Cette propriété de λ_M est également valable pour le système (IV.8) :

$$(IV.8) \quad \dot{v} = (M + \lambda I_q) \cdot v$$

Par conséquent, λ_M est l'opposé de la plus grande partie réelle des valeurs propres de M :

$$(IV.9) \quad \lambda_M = - \operatorname{Max}_{i=1, \dots, q} \{ \operatorname{Réal}(\lambda_i) \}$$

Cette propriété sera utilisée par la suite.

I.3 - Minoration

Nous considérons maintenant le système inversé défini à partir de (IV.1) par :

$$(IV.1') \quad \dot{z}(t) = -A(-t) z(t)$$

Le changement de variable $P(-t)$ vérifie (IV.4) et conduit à :

$$(IV.2') \quad v(t) = P(-t).z(t) \implies \dot{v}(t) = -M.v(t)$$

Par un raisonnement identique à celui du paragraphe précédent (§ I.2), les propriétés de stabilité de (IV.10) :

$$(IV.10) \quad \dot{y}(t) = \left[-A(-t) - \lambda I_q \right] y(t)$$

vont permettre de déterminer la plus petite partie réelle des valeurs propres de M . Ce système est en effet associé à la matrice $-(M + \lambda I_q)$.

Soit λ_m la plus petite valeur de λ telle que l'équilibre $y = 0$ de (IV.10) soit stable :

$$(IV.11) \quad \lambda_m \in \mathbb{R} \quad : \quad \dot{y} = \left[-A(-t) - \lambda_m I_q \right] y \quad \text{stable}$$

$$\forall \lambda < \lambda_m, \dot{y} = \left[-A(-t) - \lambda I_q \right] y \quad \text{instable}$$

Il vient alors :

$$(IV.12) \quad \lambda_m = - \underset{i=1, \dots, q}{\text{Min}} \{ \text{Réal}(\lambda_i) \}$$

I.4 - Application à la simulation

Les simulations analogiques utilisent généralement des opérateurs de base de type intégrateur $1/p$. Il est cependant possible de remplacer ces opérateurs par des modules de premier ordre de type $1/(p-\lambda)$, qui feront ici tous intervenir le même réel λ .

La simulation d'un système à coefficients périodiques fait intervenir deux groupes d'intégrateurs :

- le premier correspond aux q dérivations des composantes de l'état x ,

- le second groupe peut être utilisé pour réaliser les coefficients périodiques de $A(t)$.

Dans ce qui suit, ces coefficients périodiques seront considérés comme de simples potentiomètres variables, et les intégrateurs correspondants (second groupe) n'ont pas à être changés. Par contre, ceux du premier groupe pourront être remplacés par des opérateurs $1 / (p-\lambda)$.

Le diagramme de simulation de (IV.5), utilisant alors des opérateurs $1 / (p-\lambda)$, est identique au diagramme de simulation de (IV.1), utilisant des opérateurs $1/p$.

Par conséquent, la translation du spectre est obtenue en effectuant une rétroaction ($\pm \lambda$) sur chacun des intégrateurs.

Dans le cas étudié en (I.2) (majoration), une translation positive ($\lambda > 0$) correspond à une "déstabilisation" de chaque intégrateur, et dans le cas de la minoration (§ I.3), à une stabilisation.

Du point de vue technique, il suffit de connecter q potentiomètres de même valeur λ en retour sur les intégrateurs concernés. Cependant, la manipulation peut être automatisée par une méthode de sous-routine et exploration paramétrique.

λ_m et λ_M correspondent aux bouclages rendant le système juste stable.

I.5 - Exemple : cas particulier d'un système d'ordre 3

Nous reprendrons ici le cas présenté dans le chapitre III, Figure III.13, correspondant à une fonction de transfert :

$$(IV.13) \quad F(p) = \frac{1}{(p + 0,4)(p - 0,4)(p + 1,5)}$$

bouclée par un gain $- 2 \cos \omega t$.

La manipulation a été effectuée pour un domaine de variations de ω comprises entre 0,7 et 5 rd/s. La majoration et minoration des parties réelles des exposants caractéristiques de ce système a été effectuée pour chaque valeur de ω , et les résultats sont résumés Figure IV.1.

Il apparaît que dans le domaine :

$$(IV.14) \quad \omega \in [1,3 \text{ rd/s} ; 1,56 \text{ rd/s}]$$

les valeurs propres de M ont des parties réelles négatives ou nulles. Le système est donc stable pour ω vérifiant (IV.14). Ce résultat peut être comparé au domaine de stabilité en ω proposé par une méthode numérique /Pillet & Poloujadoff; 1982/ :

$$(IV.15) \quad \omega \in [1,3 \text{ rd/s} ; 1,58 \text{ rd/s}]$$

Les deux résultats sont donc comparables. Il est important de remarquer que dans le cas particulier d'un système d'ordre 3, la troisième partie réelle des valeurs propres peut être également évaluée : on sait en effet que la trace de M est égale à la valeur moyenne de la trace de la matrice A(t), qui est elle-même donnée ici par l'opposé du coefficient de degré 2 du polynôme symbolique du système :

$$(IV.16) \quad \begin{cases} p(\lambda, A(t)) = (\lambda + 0,4)(\lambda - 0,4)(\lambda + 1,5) + 2 \cos \omega t \\ \text{tr } A(t) = \text{tr } M = - 1,5 \end{cases}$$

On remarque ainsi Figure IV.1 que le système considéré ici présente des exposants caractéristiques complexes conjugués ou doubles pour ω compris entre 1,45 et 1,52 rd/s. On a alors deux parties réelles égales.

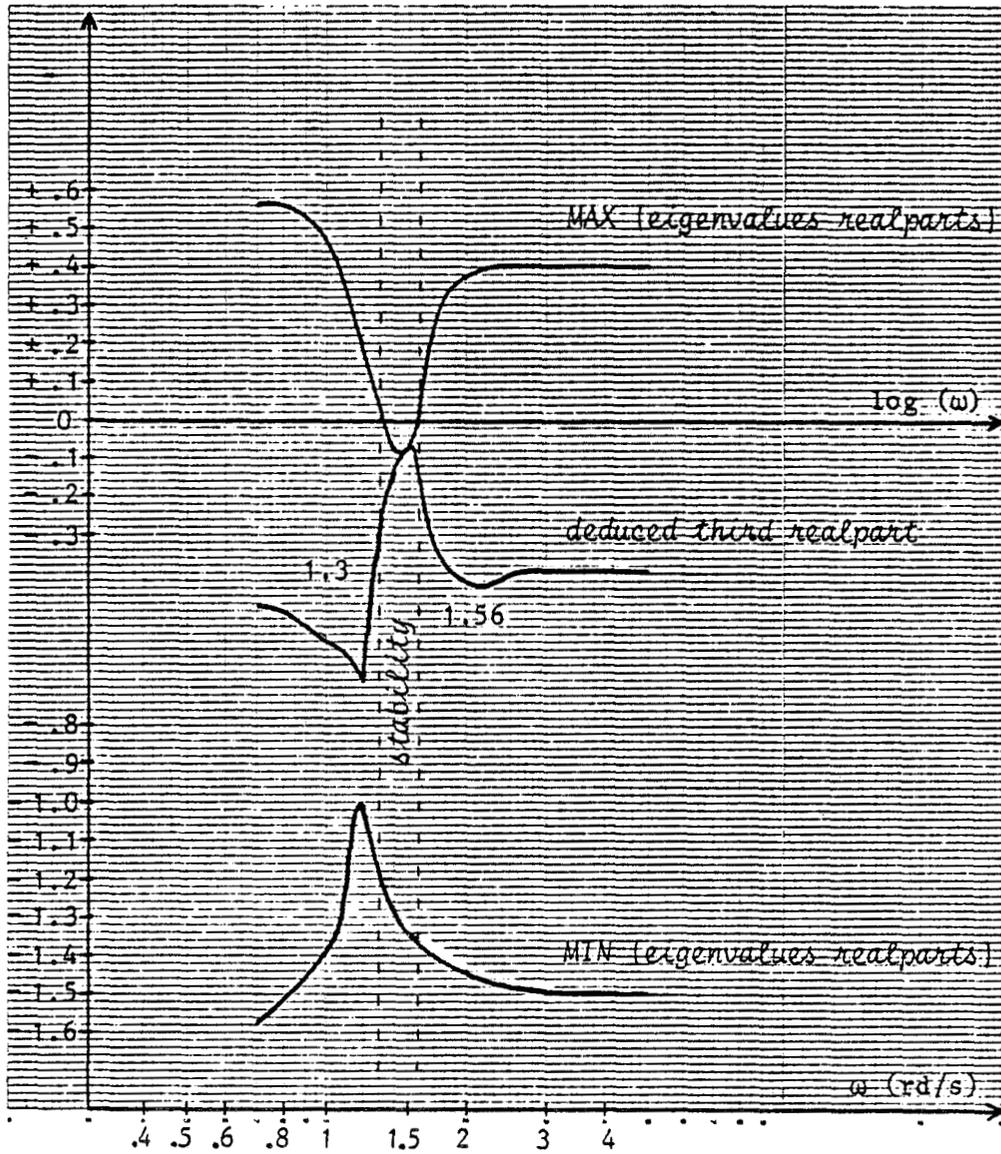


FIGURE IV.1

II - IDENTIFICATION DES EXPOSANTS CARACTERISTIQUES PAR ECHANTILLONNAGE

Dans cette partie, nous proposons une méthode d'identification des exposants λ_i , basée sur la mesure échantillonnée d'un signal de sortie du système. L'existence d'un modèle linéaire à coefficients périodiques $A(t)$ est supposée, mais la détermination de $A(t)$ n'est pas nécessaire. Le problème de l'observabilité est envisagé, ainsi que celui de l'évaluation de l'ordre du modèle $A(t)$.

La propriété de base, présentée dans un premier temps, concerne l'invariance d'un polynôme caractéristique, et sera interprétée d'après des travaux antérieurs /Malkin, 1956/.

Les notations utilisées sont les mêmes que précédemment.

II.1 - Invariance

II.1.1 - Enoncé de la propriété de base P

Considérons le système (IV.1), ainsi que son système linéaire stationnaire associé (IV.2) :

$$(IV.1) \quad \dot{x} = A(t).x \quad (\text{rappel})$$

$$(IV.2) \quad \dot{u} = M.u \quad (\text{rappel})$$

L'idée de base est d'intégrer (IV.2) à partir d'un instant initial $(\tau + nT)$ et pendant une période T :

$$(IV.17) \quad \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \forall \tau \in [0, T[\\ u(\tau + (n+1)T) = e^{MT} u(\tau + nT) \end{cases}$$

De plus, d'après (IV.2), on a :

$$(IV.18) \quad u(\tau + nT) = P(\tau + nT) x(\tau + nT) = P(\tau) x(\tau + nT)$$

Nous poserons de manière évidente :

$$(IV.19) \quad x(\tau + nT) = x_n(\tau)$$

Il vient alors :

$$(IV.20) \quad x_{n+1}(\tau) = \left[P^{-1}(\tau) e^{MT} P(\tau) \right] x_n(\tau)$$

Cette équation (IV.20) est la discrétisation de (IV.1), avec la période d'échantillonnage T et partant d'un instant initial τ . Nous pouvons alors énoncer la propriété suivante :

Propriété P d'invariance du polynôme caractéristique par rapport au premier instant d'échantillonnage τ :

L'équation matricielle de récurrence à l'ordre 1 (IV.20) est équivalente à l'équation scalaire de récurrence à l'ordre q suivante, et portant sur une quelconque variable d'état σ :

$$(IV.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{n+q}(\tau) + a_{q-1} \sigma_{n+q-1}(\tau) + \dots + a_1 \sigma_{n+1}(\tau) + a_0 \sigma_n(\tau) = 0 \\ \sigma(t) = s^T \cdot x(t) \\ \sigma_n(\tau) = s^T \cdot x_n(\tau) \end{array} \right\} \quad \forall s \in \mathbb{R}^q$$

Les coefficients a_i intervenant dans cette équation **ne dépendent pas** de l'instant initial τ , et sont égaux aux coefficients du polynôme caractéristique de e^{MT} :

$$(IV.22) \quad \lambda^q + a_{q-1} \lambda^{q-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = \det(\lambda I_q - e^{MT}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Nous donnerons ici deux démonstrations possibles de cette propriété : la première permettra d'aborder par la suite le problème de l'observabilité du système par la sortie s , la seconde servira à interpréter cette propriété P par rapport à la démonstration du théorème de Floquet.

Démonstration 1 :

Soient les q réels a_i définis par (IV.22). Il vient :

$$(IV.23) \quad \left\{ \begin{array}{lll} a_0 x_n(\tau) & = P^{-1}(\tau) (a_0 I_q) & P(\tau) x_n(\tau) \\ a_1 x_n(\tau+T) & = P^{-1}(\tau) (a_1 e^{MT}) & P(\tau) x_n(\tau) \\ a_2 x_n(\tau+2T) & = P^{-1}(\tau) (a_2 e^{2MT}) & P(\tau) x_n(\tau) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{q-1} x_n(\tau+(q-1)T) & = P^{-1}(\tau) (a_{q-1} e^{(q-1)T}) & P(\tau) x_n(\tau) \\ x_n(\tau+qT) & = P^{-1}(\tau) (e^{qMT}) & P(\tau) x_n(\tau) \end{array} \right.$$

La matrice e^{MT} vérifie son équation caractéristique /Gantmacher, 1959/, et donc :

$$(IV.24) \quad e^{qMT} + a_{q-1} e^{(q-1)MT} + \dots + a_1 e^{MT} + a_0 I_q = 0$$

En additionnant les q lignes de l'équation (IV.23), et en multipliant à gauche par un vecteur quelconque $s \in \mathbb{R}^q$, il vient le résultat (IV.21).

II.1.2 - Indétermination sur la partie imaginaire des exposants caractéristiques

La propriété d'invariance concerne, ici encore, un polynôme de degré q . L'invariance n'est plus considérée par rapport à un changement de base, mais par rapport à un changement d'initialisation de l'échantillonnage, ou bien à un changement de sortie $\sigma(t)$.

Ceci peut être démontré d'une façon différente, faisant plus directement appel à la démonstration du théorème de Floquet.

Démonstration 2 :

Soit $X(t)$ une matrice intégrale /Gantmacher, 1956/ du système (IV.1), c'est-à-dire composée de q colonnes :

$$(IV.25) \quad (x_1(t), x_2(t), \dots, x_q(t))$$

les $x_i(t)$ étant q solutions linéairement indépendantes de (IV.1).

Toute solution $x(t)$ de (IV.1) est alors une combinaison linéaire des $x_i(t)$. Le fait que $X(t+T)$ soit également une matrice intégrale entraîne /Cesari, 1959/ l'existence d'une matrice constante $C = e^{MT}$ telle que :

$$(IV.26) \quad X(t+T) = X(t).C$$

et donc :

$$(IV.27) \quad X(t+nT) = X(t).C^n$$

Posons :

$$(IV.28) \quad \det (\lambda I_q - C) \equiv \lambda^q + \sum_{i=0}^{q-1} a_i \lambda^i$$

Il vient, par un procédé analogue à celui de la démonstration 1 (IV.23) :

$$(IV.29) \quad X(t+qT) + \sum_{i=0}^{q-1} a_i X(t+iT) = 0$$

Cette équation est valable quelquesoit t , et donc pour $t = \tau + nT$. Le résultat (IV.21) se déduit alors de (IV.29), $\sigma(t)$ étant une combinaison linéaire des coefficients de $X(t)$.

Il est important de noter que les valeurs propres μ_i de C , qui sont les multiplieurs caractéristiques de (IV.1), ne dépendent pas du choix de la matrice intégrale $X(t)$ /Malkin, 1956/.

Les valeurs propres λ_i de M , quant à elles, ne sont connues qu'à partir du logarithme de C , c'est-à-dire que seules leurs parties réelles sont déterminées ; leurs parties imaginaires sont calculées avec une indétermination de $2k\pi / T$ ($k \in \mathbb{Z}$).

La démonstration du théorème de Floquet utilise (IV.26) en choisissant $X(t)$ de façon à ce que C soit sous forme de Jordan. Nous pouvons l'envisager pour C diagonale ; on a alors :

$$(IV.30) \quad x_i(t+T) = \mu_i x_i(t) \quad \forall i = 1, \dots, q$$

En posant :

$$(IV.31) \quad x_i(t) = e^{(t \log \mu_i)/T} \cdot p_i(t)$$

il est aisé de montrer que $p_i(t)$ est périodique, de période T . Ces fonctions $p_i(t)$ définiront le changement de base $P(t)$ périodique.

On peut enfin remarquer une propriété intéressante de la trace de M , qui est la moyenne de celle de $A(t)$. En effet, on sait /Malkin, 1956/ que :

$$(IV.32) \quad \det C = e^{\int_0^T \text{trace } A(t) \cdot dt} = e^{T \cdot \text{trace } M}$$

et donc :

$$(IV.33) \quad \text{trace } M = \frac{1}{T} \int_0^T \text{trace } A(t) \cdot dt$$

Cette propriété a été précédemment utilisée (IV.16). Le terme a_0 du polynôme invariant dépend par ailleurs de cette trace :

$$(IV.34) \quad a_0 = (-1)^q e^{T \cdot \text{trace } M}$$

II.2 - Mesure des multiplieurs caractéristiques

Il est possible de connaître les multiplieurs caractéristiques μ_i d'un système $A(t)$ dès l'instant où l'on peut mesurer le polynôme invariant (IV.22). Ceci peut être fait en relevant les valeurs échantillonnées d'une ou plusieurs sorties d'état $\sigma(t)$, et en cherchant l'équation

de récurrence que toutes ces sorties vérifient. Ceci est alors une démarche classique d'analyse du signal.

Nous envisagerons, à titre d'exemple, différentes façons de procéder, selon que les mesures peuvent être considérées comme exacte ou entachées d'erreur.

II.2.1 - Mesure exacte d'une sortie échantillonnée à période T ;
Observabilité

II.2.1/a - Principe :

Une variable d'état σ est mesurée aux instants $\tau, \tau+T, \dots, \tau+2nT$. On obtient les données $\sigma_0(\tau), \sigma_1(\tau), \dots, \sigma_n(\tau), \dots, \sigma_{2n}(\tau)$, qui seront également notées $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n, \dots, \sigma_{2n}$.

Ces données sont regroupées dans un tableau $(n+1) \times (n+1)$ défini par :

$$(IV.35) \quad H_{n+1}(\tau) = \begin{bmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \dots & \sigma_n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & & & \sigma_{n+1} \\ \sigma_2 & \sigma_3 & & & & \sigma_{n+2} \\ \sigma_3 & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \sigma_n & \sigma_{n+1} & \sigma_{n+2} & \dots & \dots & \sigma_{2n} \end{bmatrix}$$

Les matrices $H_n(\tau)$ sont des matrices de Hankel /Gantmacher, 1956/. des algorithmes ont été spécialement étudiés en vue de leur inversion /Trench, 1965/ /Rissanen, 1974/.

La mesure de $H_{n+1}(\tau)$ nécessite un temps de mesure de $2nT$, avec un nombre de mesures $2n+1$.

Si n est supérieur ou égal à l'ordre q du système considéré, le déterminant de $H_{n+1}(\tau)$ est nul, puisque chacune de ses lignes vérifie la même équation de récurrence (IV.21). Soit p le plus petit entier vérifiant (IV.36) :

$$(IV.36) \quad \begin{cases} \det H_p(\tau) \neq 0 \\ \det H_{p+i}(\tau) = 0 \quad \forall i \geq 1 \end{cases}$$

On a alors $p \leq q$.

Ce nombre p est l'ordre de l'équation de récurrence qui gouverne $\sigma_n(\tau)$. Cette équation peut être calculée comme suit :

Soit $A_{p+1}(\tau)$ un vecteur propre associé à la valeur propre 0 de $H_{p+1}(\tau)$:

$$(IV.37) \quad \begin{cases} H_{p+1}(\tau) \cdot A_{p+1}(\tau) = 0 \\ A_{p+1}(\tau) = (\alpha_0(\tau), \dots, \alpha_{p-1}(\tau), \alpha_p(\tau))^T \end{cases}$$

La matrice $H_p(\tau)$ est régulière, et donc la dernière composante $\alpha_p(\tau)$ de $A_{p+1}(\tau)$ n'est pas nulle. On choisit :

$$(IV.38) \quad A_{p+1}(\tau) = (\alpha_0(\tau), \dots, \alpha_{p-1}(\tau), 1)^T$$

Ce vecteur définit l'équation de récurrence vérifiée par $\sigma_n(\tau)$:

$$(IV.39) \quad \sigma_{n+p}(\tau) + \alpha_{p-1}(\tau) \sigma_{n+p-1}(\tau) + \dots + \alpha_0(\tau) \sigma_n(\tau) = 0$$

associée au polynôme

$$(IV.40) \quad \lambda^p + \alpha_{p-1}(\tau) \lambda^{p-1} + \dots + \alpha_0(\tau)$$

Ceci peut être comparé avec (IV.21) : par hypothèse, $\sigma_n(\tau)$ vérifie (IV.21), et les mesures montrent que $\sigma_n(\tau)$ vérifie également (IV.39). Le degré p de (IV.40) est inférieur ou égal à celui q de (IV.22). Par conséquent, les p zéros de (IV.40) sont des zéros de (IV.22). (Les termes α_i peuvent toutefois dépendre de τ , car p peut dépendre de τ).

Ces termes α_i sont calculés à partir des p premières lignes de $H_{p+1}(\tau)$, sous la forme :

$$(IV.41) \quad \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{p-1} \end{bmatrix} = H_p^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_p \\ \sigma_{p+1} \\ \vdots \\ \sigma_{2p-1} \end{bmatrix}$$

Nous proposons de résumer ces résultats par la formulation suivante :

Propriété : Quelquesoit le choix de la sortie d'état σ , et de l'instant initial d'échantillonnage τ , la formule (IV.41) mène à un sous-ensemble de multipliers caractéristiques du système (zéros de (IV.40)). Cependant, dans le cas général, le choix de σ ou de τ peut influencer sur le nombre d'éléments de ce sous-ensemble.

Dans le cas idéal ($p = q$), $2q+1$ mesures sont en théorie suffisantes pour calculer tous les multipliers. Nous allons maintenant étudier le cas ($p < q$) qui présente un problème d'observabilité.

II.2.1/b - Observabilité ($p < q$) :

Il peut advenir que la sortie $\sigma_n(\tau)$ vérifie une équation de récurrence dont le degré p est strictement inférieur à l'ordre q du système global (IV.1). Dans ce cas, nous pouvons affirmer que la paire

$\left[e^{MT}, s^T P^{-1}(\tau) \right]$ n'est pas observable. En effet, à partir de (IV.39) et d'équations analogues à (IV.23), il vient :

$$(IV.42) \quad \det \begin{bmatrix} s^T P^{-1}(\tau) \\ s^T P^{-1}(\tau) e^{MT} \\ \vdots \\ s^T P^{-1}(\tau) e^{pMT} \end{bmatrix} = 0 \quad \text{pour} \quad p < q$$

Ceci peut dépendre à la fois du choix de τ et de s , ou bien de s seulement : considérons par exemple une matrice $A(t)$ qui dans une certaine base soit triangulaire par blocs :

$$(IV.43) \quad A(t) = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ 0 & A_{22}(t) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} A_{11} \in \mathbb{R}^{q_1 \times q_1} \\ A_{22} \in \mathbb{R}^{q_2 \times q_2} \end{array}$$

$$x(t)^T = \begin{bmatrix} x_1^T(t) & x_2^T(t) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} q_1 + q_2 = q \\ q_1 \cdot q_2 \neq 0 \end{array}$$

Dans ce cas particulier, la théorie de Floquet peut être appliquée au sous-système $A_{22}(t)$, conduisant à une matrice constante M_2 . Toute sortie σ_n qui ne dépend que du sous-vecteur x_2 est régie par une équation de récurrence d'ordre $q_2 < q$, correspondant aux valeurs propres de $e^{M_2 T}$, et ceci quelquesoit le choix de τ .

On peut également envisager sur un découplage périodique, c'est-à-dire une matrice $A(t)$ dont le bloc $A_{21}(t)$ s'annule périodiquement. L'observabilité dépendrait alors du choix de τ et de σ .

Le schéma de la figure IV.2 permet de résumer les causes de non observabilité : il représente l'application du théorème de Floquet considérée du point de vue de l'automaticien (première ligne), et l'effet de l'échantillonnage proposé (deuxième ligne).

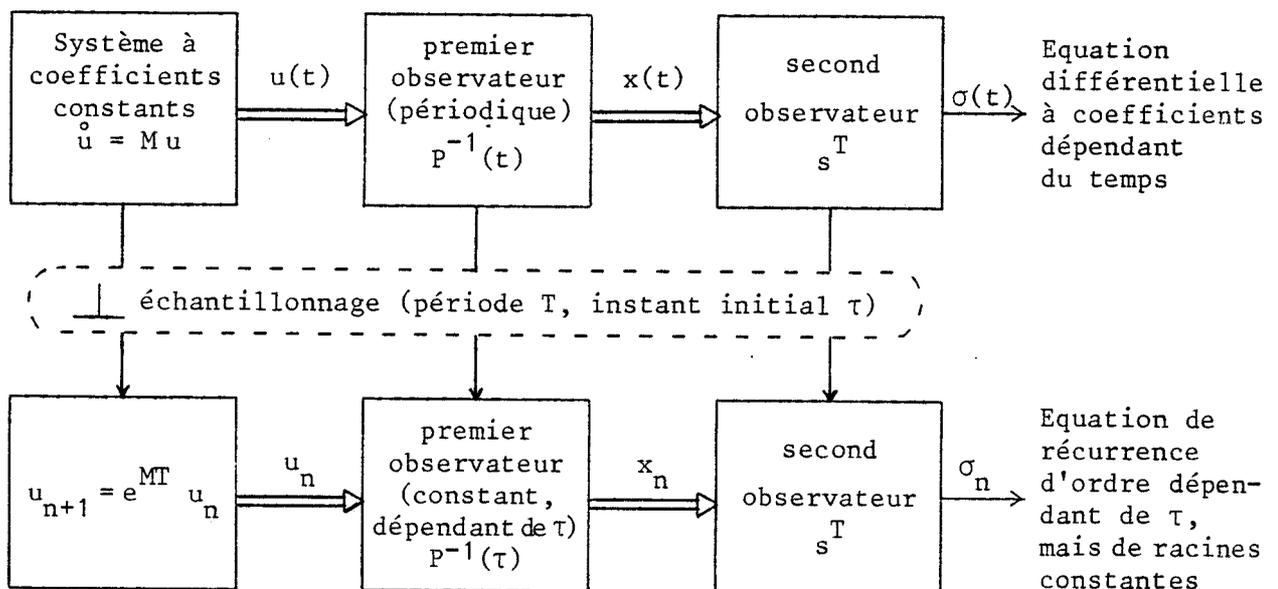


FIGURE IV.2

II.2.1/c - Exemple :

De façon à tester cette méthode, nous avons simulé une équation du second ordre, définie par :

$$(IV.44) \quad \left\{ \begin{array}{l} M = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad u(0) = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ P(t) = \begin{bmatrix} \cos 2\pi t & 2 \\ 2 & \sin 2\pi t \end{bmatrix} \\ \dot{x} = \left[\overset{\circ}{P} P^{-1} + P M P^{-1} \right] x = A(t).x \end{array} \right.$$

La sortie σ considérée est la première composante de $x = P(t).u$:

$$s^T = (1, 0)$$

Pour différentes valeurs de (α, β) , quatre choix d'instant initial ont été proposés : $\tau = 0.2, 0.4, 0.6$ ou 0.8 s.

Sur cet exemple, nous voyons apparaître trois causes possibles d'imprécision :

- . α et $\beta \ll 0$
 - . α et $\beta \gg 0$
- } l'échantillonnage (3 périodes d'une seconde) donne des valeurs nulles ou infinies
- . $\alpha \neq \beta$
- le système tend vers un premier ordre. Le déterminant de H_2 diminue si a tend vers b (voir par exemple $\alpha = \beta = -1$)

Le tableau IV.3 propose :

- . les valeurs de (α, β) choisies,
- . la suite des instants d'échantillonnage (en secondes) et les sorties correspondantes,
- . les valeurs des déterminants de H_2 et H_3 (matrices de Hankel d'ordre 2 et 3),
- . l'évaluation numérique de (α, β) .

EIGENVALUES: 2 : -1

SERIE N°1
 .2 .711771653
 1.2 2.58181858
 2.2 18.89228038
 3.2 133.321944
 4.2 984.939989
 DET2= 6.21173079
 DET3= -1.52289867E-05
 ESTIMATED VALUES:
 1.99999997 -0.999999976

SERIE N°2
 .4 .751539655
 1.4 2.98245868
 2.4 20.3160892
 3.4 149.755294
 4.4 1186.4174
 DET2= 6.9599248
 DET3= 7.27874221E-05
 ESTIMATED VALUES:
 2.00000009 -1.00000011

SERIE N°3
 .6 -.190791421
 1.6 -3.13171179
 2.6 -23.7738599
 3.6 -175.899409
 4.6 -1259.81624
 DET2= -5.27177021
 DET3= 9.77413729E-05
 ESTIMATED VALUES:
 1.99999992 -0.999999722

SERIE N°4
 .8 -.102656056
 1.8 -9.30258553
 2.8 -69.3636626
 3.8 -512.762405
 4.8 -3768.91497
 DET2= -15.193426
 DET3= -5.74277544E-06
 ESTIMATED VALUES:
 2.00000001 -1.00000003

EIGENVALUES: -15 : -16

SERIE N°1
 .2 .0302134946
 1.2 5.50990358E-09
 2.2 1.27234255E-15
 3.2 3.42718655E-22
 4.2 3.96262328E-29
 DET2= 7.82840893E-18
 DET3= 0
 ESTIMATED VALUES:
 -15 -16

SERIE N°2
 .4 1.35625675E-03
 1.4 2.32562243E-10
 2.4 5.86239365E-17
 3.4 1.31774518E-23
 4.4 3.77185535E-30
 DET2= 1.45738587E-20
 DET3= 0
 ESTIMATED VALUES:
 -14.9999999 -16

SERIE N°3
 .6 1.40584553E-05
 1.6 -1.55198458E-12
 2.6 -1.13336758E-18
 3.6 -4.20816749E-25
 4.6 -1.37869592E-31
 DET2= -1.63428536E-23
 DET3= 0
 ESTIMATED VALUES:
 -15.0000001 -16

SERIE N°4
 .8 -8.66696214E-08
 1.8 -3.14661719E-13
 2.8 -1.26675795E-19
 3.8 -4.30166198E-26
 4.8 -1.35676213E-32
 DET2= -3.78339799E-26
 DET3= 0
 ESTIMATED VALUES:
 -15 -16

EIGENVALUES: -1E-03 : -5

SERIE N°1
 .2 .392796315
 1.2 .22379432
 2.2 .221011542
 3.2 .229782915
 4.2 .228562183
 DET2= .0373599875
 DET3= -1.67266201E-11
 ESTIMATED VALUES:
 -1.00002971E-03 -4.99999974

SERIE N°2
 .4 .243583377
 1.4 .167895741
 2.4 .166376329
 3.4 .166246591
 4.4 .16684046
 DET2= .0126852434
 DET3= 2.0218105E-11
 ESTIMATED VALUES:
 -9.99915064E-04 -5.0000017

SERIE N°3
 .6 -.189005796
 1.6 -.130973265
 2.6 -.130991097
 3.6 -.130861163
 4.6 -.139738365
 DET2= -2.87528729E-03
 DET3= 5.56587898E-12
 ESTIMATED VALUES:
 -1.00000360E-03 -4.9999931

SERIE N°4
 .8 -.246529474
 1.8 -.256098623
 2.8 -.255900745
 3.8 -.255645419
 4.8 -.255389906
 DET2= -2.49533099E-03
 DET3= 3.6221165E-12
 ESTIMATED VALUES:
 -9.9998696E-04 -5.00000195

EIGENVALUES: -1 : -1

SERIE N°1
 .2 .562687755
 1.2 .287001246
 2.2 .0761515013
 3.2 .0288145712
 4.2 .0103859846
 DET2= -4.68032689E-11
 DET3= -1.41151973E-13

SERIE N°2
 .4 .492171444
 1.4 .18185976
 2.4 .066608165
 3.4 .0245837751
 4.4 9.81443531E-03
 DET2= 4.32089984E-11
 DET3= -2.73890364E-14

SERIE N°3
 .6 .173172632
 1.6 .0637867272
 2.6 .0234363961
 3.6 8.62176865E-03
 4.6 3.17177154E-03
 DET2= -2.13162821E-12
 DET3= 2.43458033E-15

SERIE N°4
 .8 .127174048
 1.8 .0467847162
 2.8 .0172111348
 3.8 6.33162244E-03
 4.8 2.32927365E-03
 DET2= 9.28324084E-12
 DET3= 4.28751695E-16

EIGENVALUES: -10 : -23

SERIE N°1
 .2 .4369058289
 1.2 1.36890233E-06
 2.2 6.17842781E-13
 3.2 2.82439236E-19
 4.2 1.27346452E-19
 DET2= 5.27833191E-13
 DET3= 0
 ESTIMATED VALUES:
 -10 -23.0028643

SERIE N°2
 .4 3.24494843E-03
 1.4 1.36675981E-07
 2.4 6.29599069E-12
 3.4 2.35833819E-16
 4.4 1.25762603E-20
 DET2= 1.19838917E-15
 DET3= 0
 ESTIMATED VALUES:
 -9.99999992 -23.0012342

SERIE N°3
 .6 -3.23796635E-04
 1.6 -1.47759222E-08
 2.6 -6.70852652E-13
 3.6 -3.04638168E-17
 4.6 -1.38381872E-21
 DET2= -1.84217211E-18
 DET3= 0
 ESTIMATED VALUES:
 -10.0000001 -19.9852109

SERIE N°4
 .8 -8.60252598E-05
 1.8 -3.58329777E-09
 2.8 -1.77436451E-13
 3.8 -8.65560248E-18
 4.8 -3.65723788E-22
 DET2= -1.07746733E-20
 DET3= 0
 ESTIMATED VALUES:
 -10 -23.0594263

TABLEAU IV.3

II.2.2 - Mesure exacte d'une ou plusieurs sorties échantillonnées à période T/k

De façon à réduire le temps de mesure, et éventuellement les problèmes d'observabilité, on peut envisager d'une façon analogue de mesurer plusieurs sorties, échantillonnées à une fréquence k/T , k étant un entier non nul. On dispose alors de matrices de données S_n qui, comme les matrices H_n , permettront de définir l'ordre du système ainsi que ses multiplicateurs caractéristiques. Les instants initiaux d'échantillonnage peuvent prendre les valeurs :

$$\tau, \tau + \frac{T}{k}, \dots, \tau + \frac{(k-1)T}{k}, \tau + T, \dots$$

Par exemple, dans le cas de deux sorties σ_1 et σ_2 échantillonnées à période $T/2$, la matrice S_5 peut être :

$$(IV.45) \quad S_5 = \begin{bmatrix} \sigma_1(0) & \sigma_1(T) & \sigma_1(2T) & \sigma_1(3T) & \sigma_1(4T) \\ \sigma_1(T/2) & \sigma_1(3T/2) & \sigma_1(5T/2) & \sigma_1(7T/2) & \sigma_1(9T/2) \\ \sigma_1(T) & \sigma_1(2T) & \sigma_1(3T) & \sigma_1(4T) & \sigma_1(5T) \\ \sigma_2(0) & \sigma_2(T) & \sigma_2(2T) & \sigma_2(3T) & \sigma_2(4T) \\ \sigma_2(T/2) & \sigma_2(3T/2) & \sigma_2(5T/2) & \sigma_2(7T/2) & \sigma_2(9T/2) \end{bmatrix}$$

En augmentant le nombre de sorties ou la fréquence d'échantillonnage (k), on peut ainsi obtenir une matrice de données S_{n+1} avec un temps de mesure minimum de $(n+1)T$ (pour un nombre maximum de mesures $(n+1)^2$).

Le choix de la matrice S_{n+1} doit être effectué en fonction de son conditionnement à l'inversion : si le temps d'échantillonnage est trop long, les dernières mesures vont être proches de zéro ou de l'infini (selon la convergence ou divergence de la sortie). Si ce temps est trop faible, les coefficients de chaque colonne de S_n seront très voisins.

Dans tous les cas, il est préférable de disposer de plusieurs sorties. L'organigramme de la Figure IV.4 résume la démarche suivie dans le cas où une seule sortie σ est mesurée.

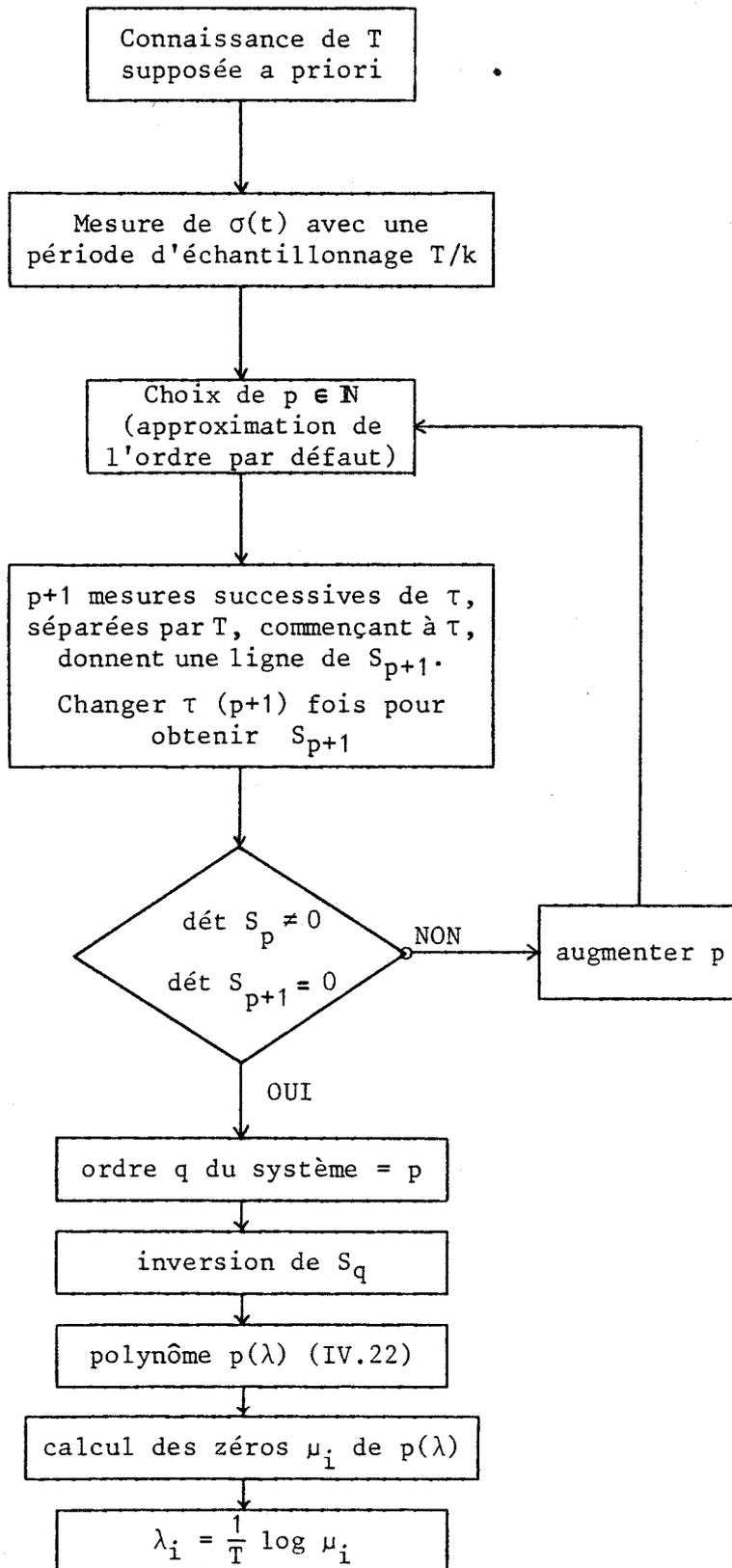


FIGURE IV.4

II.2.3 - Mesures imprécises

Dans tous les cas, la sortie choisie $\sigma(t)$ doit être une variable d'état, et son équilibre est donc zéro. Ceci entraîne qu'un éventuel régime permanent ou des erreurs de mesures doivent être éliminées.

Dans cette partie, nous noterons S_{q+1} les matrices de données mesurées, su'elles soient de type H_n ou S_n .

II.2.3/a - Erreur d'offset :

Si les appareils de mesure présentent des erreurs d'offset inconnues mais constantes, la même méthode reste valable en considérant les différences au premier ordre des signaux. Il est alors nécessaire de mesurer deux matrices S_{q+1} , dont les lignes sont constituées des mêmes sorties mais avec des instants initiaux différents. Leur différence, notée S_{q+1}^1 a alors un déterminant nul. L'algorithme de la figure IV.4 est conservé, en remplaçant S_{q+1} par S_{q+1}^1 .

Ceci demande deux fois plus de mesures que dans le cas où il n'y a pas d'erreur sur les sorties.

II.2.3/b - Erreur de dérive :

Si les erreurs des appareils de mesure sont proportionnelles au temps, il est nécessaire de construire deux matrices de type S_{q+1}^1 , et de calculer leur différence S_{q+1}^2 . L'algorithme est alors appliqué à cette matrice de différences au second ordre.

II.2.3/c - Régime permanent :

Si le régime permanent d'une sortie est non nul, inconnu mais périodique, on peut calculer la différence de deux matrices S_{q+1} construites d'après les mêmes signaux, mais séparées d'une période. On obtient alors une matrice S_{q+1}^T sur laquelle l'algorithme s'applique.

II.2.3/d - Sortie bruitée : deux propositions :

Il est possible que la sortie σ soit entâchée d'un bruit. Deux solutions sont alors envisageables :

- Soit appliquer une méthode d'estimation de la matrice S_{q+1}^e à partir de plusieurs mesures S_{q+1} (estimation aux moindres carrés, par exemple).

- Soit filtrer directement la sortie σ à l'aide d'une fonction de transfert connue $F(p)$. On augmente alors l'ordre global du système différentiel, mais celui-ci reste à coefficients périodiques. L'application de la méthode proposée conduit à deux ensembles de valeurs propres : celles qui correspondent au système initial, et celles venant de $F(p)$.

Des expérimentations sur machine réelle sont actuellement en cours ou prévues, de façon à tester l'efficacité comparée de ces deux solutions.

III - APPLICATION AU MODELE DE PARK DE LA MACHINE SYNCHRONE

Depuis quelques années, un intérêt considérable a été soulevé par des questions concernant la modélisation de la machine synchrone et la détermination de ses paramètres à partir de mesures.

Cet intérêt est dû à l'augmentation de puissance des nouveaux générateurs, ainsi qu'au fait que ces systèmes opèrent plus près des limites de stabilité : les modèles proposés doivent donc être de plus en plus précis.

De nombreux travaux ont ainsi été consacrés à ce sujet /Canay, 1969/ /Takeda & Adkins, 1974/ /Watson & Manchur, 1974/ /Shackshaft, 1974, 1975/ /Umans, Mallick & Wilson, 1978/ /Maun, 1984/.

Nous proposons d'appliquer la méthode d'identification proposée au modèle de Park de la machine synchrone. Ce modèle fait en général intervenir cinq enroulements, mais il est possible d'utiliser un modèle plus complexe, du moment que la linéarité en reste acquise.

Le court-circuit symétrique est généralement utilisé pour déterminer les paramètres d'un tel modèle. L'enregistrement des intensités rotoriques, après en avoir soustrait le régime permanent, donne le signal causé par cette perturbation. Les valeurs numériques sont alors traitées à l'aide de l'algorithme proposé dans la partie précédente, et conduisent à trois racines réelles et deux complexes conjuguées, qui à leur tour donnent les constantes de temps et pseudo-pulsations de la machine.

Cette méthode peut également utiliser la mesure des courants statoriques, dont le régime permanent est périodique.

Une simulation numérique d'une machine à rotor lisse permet d'illustrer cette étude.

III.1 - Modèle de Park

Le modèle de Park de la machine synchrone à l'ordre 5 est schématisé Figure IV.5 : les enroulements amortisseurs sont modélisés par deux enroulements équivalents KD et KQ en court-circuit /Lesenne & al, 1981/.

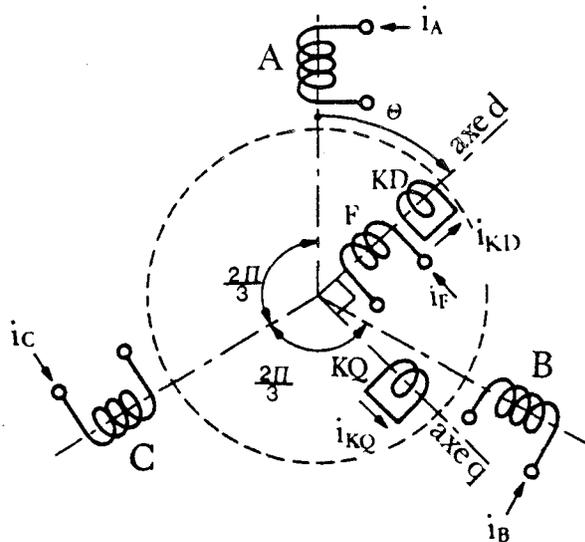


FIGURE IV.5

Ce modèle est supposé linéaire, c'est-à-dire que l'on néglige la saturation du circuit magnétique, les courants de Foucault, l'hystérésis, les couplages capacitifs entre enroulements, l'influence de la température et des pièces massives, ainsi que l'effet de peau sur les impédances.

Moyennant ces hypothèses, les relations liant les variables :

$$\begin{aligned}
 v_S &= (v_A, v_B, v_C)^T && \text{tensions statoriques} \\
 v_R &= (v_F, 0, 0)^T && \text{tensions rotoriques} \\
 i_S &= (i_A, i_B, i_C)^T && \text{intensités statoriques} \\
 i_R &= (i_F, i_{KD}, i_{KQ})^T && \text{intensités rotoriques}
 \end{aligned}$$

sont décrites par le système différentiel :

$$(IV.46) \quad \begin{cases} v_S = R_S i_S + \frac{d}{dt} [L_{SS} i_S + M_{SR} i_R] \\ v_R = R_R i_R + \frac{d}{dt} [M_{RS} i_S + L_{RR} i_R] \end{cases}$$

où R_S , R_R , L_{SS} , M_{SR} , M_{RS} et L_{RR} sont des matrices 3×3 dont les coefficients sont des fonctions trigonométriques de θ . Si la vitesse $\dot{\theta}$ est constante, le système est donc linéaire à coefficients périodiques. Nous poserons conventionnellement :

$$(IV.47) \quad \theta = \omega' t \quad \omega' = \text{constante}$$

La transformation de Park considère un changement de variables noté $P_1(\theta)$, permettant de passer des grandeurs statoriques v_S et i_S à leurs composantes relatives v_{cS} et i_{cS} , sous la forme :

$$\begin{cases} v_{cS} = (v_o, v_d, v_q)^T && \text{indice o = homopolaire} \\ && \text{indice d = direct} \\ i_{cS} = (i_o, i_d, i_q)^T && \text{indice q = en quadrature} \end{cases}$$

$$(IV.48) \quad \begin{cases} v_S = P_1(\theta) v_{cS} \\ i_S = P_1(\theta) i_{cS} \end{cases} \quad P_1(\theta) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos \theta & -\sin \theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

On obtient alors une équation différentielle à coefficients constants :

$$(IV.49) \quad \begin{bmatrix} v_d & v_q & v_F & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = M(p) \begin{bmatrix} I_d & I_q & I_F & I_{KD} & I_{KQ} \end{bmatrix}^T$$

$$M(p) = \begin{bmatrix} R_s + L_d p & -L_q \omega' & M_F p & M_{KD} p & -M_{KQ} \omega' \\ L_d \omega' & R_s + L_q p & R_F \omega' & M_{KD} \omega' & M_{KQ} p \\ M_F p & 0 & R_F + L_F p & M_{FD} p & 0 \\ M_{KD} p & 0 & M_{FD} p & R_{KD} + L_{KD} p & 0 \\ 0 & M_{KQ} p & 0 & 0 & R_{KQ} + L_{KQ} p \end{bmatrix}$$

(les notations sont ici normalisées, p est l'opérateur de Laplace).

Lorsque θ tourne à vitesse constante, $P_1(\theta)$ est périodique. La transformation de Park est alors l'équivalent de l'application du théorème de Floquet au système (IV.46).

A partir de l'équation (IV.49), l'inversion de la matrice impédance $M(p)$ /Lesenne, Segulier, 1982/ conduit à :

$$(IV.50) \quad \begin{cases} I_d(p) = Y_{dd}(p) v_d(p) + Y_{dq}(p) v_q(p) + Y_{dF}(p) v_F(p) \\ I_q(p) = Y_{qd}(p) v_d(p) + Y_{qq}(p) v_q(p) + Y_{qF}(p) v_F(p) \\ I_F(p) = Y_{Fd}(p) v_d(p) + Y_{Fq}(p) v_q(p) + Y_{FF}(p) v_F(p) \end{cases}$$

Les $Y_{ij}(p)$ sont les admittances opérationnelles de la machine synchrone idéalisée. Les expressions de ces admittances sont données dans

/Richard & Lesenne, 1984/ /Lesenne & al, 1981/. Les dénominateurs de ces admittances sont tous égaux à $D(p)$ défini par :

$$(IV.51) \quad D(p) = p^5 + \alpha_4 p^4 + \alpha_3 p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0$$

Les α_i sont donnés dans les mêmes références. Les valeurs de V_d , V_q et $V_F(p)$ dépendent du type de transitoire étudié. Dans le cas, généralement étudié, du court-circuit triphasé symétrique, on a :

$$(IV.52) \quad V_d(p) = V_F(p) = 0$$

et par conséquent :

$$(IV.53) \quad \begin{cases} I_F(p) = Y_{Fq}(p) \cdot V_q(p) \\ I_d(p) = Y_{dq}(p) \cdot V_q(p) \\ I_q(p) = Y_{qq}(p) \cdot V_q(p) \end{cases}$$

La mesure du courant $I_F(t)$, après soustraction du régime permanent, donne le signal $i_F(t)$ causé par la perturbation.

Les autres courants mesurables dans les enroulements A, B et C sont des combinaisons de I_d et I_q à coefficients périodiques, données par (IV.48). Leur régime permanent est sinusoïdal.

La mesure de $i_F(t)$, $i_A(t)$, $i_B(t)$ ou $i_C(t)$ permet donc d'appliquer la méthode que nous avons proposée.

Les exposants caractéristiques sont alors les racines du dénominateur $D(p)$ (IV.51) commun aux admittances $Y_{ij}(p)$: deux racines complexes conjuguées et trois racines réelles.

III.2 - Remarques sur l'originalité de la méthode

Différents travaux /Delhaye, 1979/ insistent sur les nombreuses erreurs introduites par la chaîne de mesure, et proposent des méthodes statistiques pour augmenter la précision. Parmi ces différentes méthodes, il apparaît :

- l'influence des erreurs d'offset des enregistreurs,
- la nécessité de déterminer l'instant exact d'application du court-circuit.

Les erreurs dues à ces deux causes disparaissent avec la méthode que nous proposons.

Il est alors possible d'étudier la validité du modèle de Park de la machine synchrone. Ceci est faisable en testant les valeurs de déterminants successifs des matrices S_n . Si le déterminant de S_6 est nul ou proche de zéro, le modèle usuel d'ordre 5 peut être retenu. Dans le cas contraire, il est nécessaire de passer à un modèle plus complexe mais plus précis, en calculant l'ordre à partir duquel les déterminants peuvent être considérés comme nuls. Ceci mène à une représentation plus poussée des enroulements amortisseurs (cf Figure IV.6) et introduit des sous-sous-transitoires.

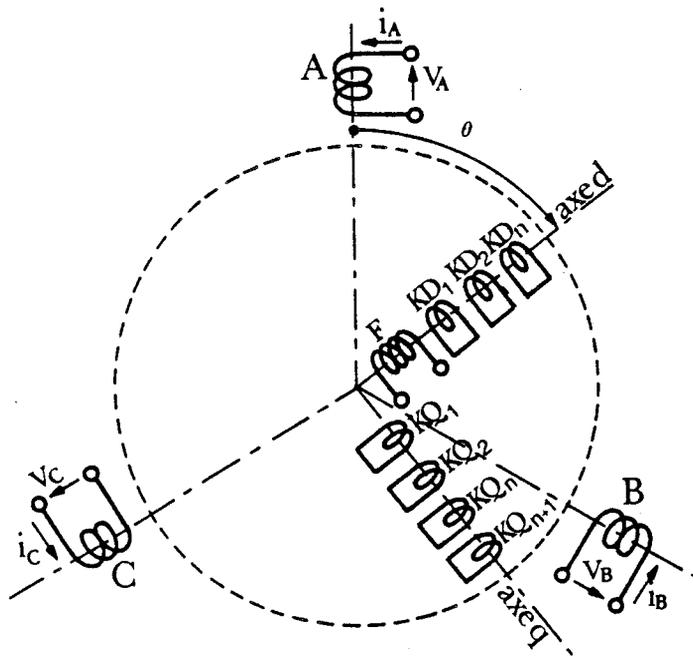


FIGURE IV.6

III.3 - SIMULATION NUMERIQUE

De façon à illustrer l'algorithme proposé, nous avons effectué une simulation des équation d'une machine à pôles lisses, avec les valeurs numériques proposées Figure IV.7, et déjà utilisées dans d'autres travaux /Lesenne, Kotny & Segurier, 1981/ :

$X_d = 2$	$T'_{do} = 10$
$X'_d = 0,275$	$T''_{do} = 0,044$
$X''_d = 0,2$	$T'_d = 1,375$
$X_q = 2$	$T''_d = 0,032$
$X''_q = 0,2$	$T''_{qo} = 0,08$
$\omega' = 100 \pi$	$T''_q = 0,008$
	$T_{KD} = 0,02$

FIGURE IV.7

Les équations des courants sont alors :

$$\begin{aligned}
 I_F(t) &= i_{Fo} \left[1 + 6,247 e^{-0,7181t} - 2,3964817 e^{-31,9105t} + 0,074 e^{-127,6629t} \right. \\
 &\quad \left. - (3,925 \cos 295,5249 t + 1,443 \sin 295,5249 t) e^{-92,7082t} \right] \\
 i_A(t) &= E_M \left[0,015 \sin 100 \pi t - 0,499 \cos 100 \pi t \right] \\
 (IV.54) \quad &+ E_M \left[0,090 \sin 100 \pi t - 3,174 \cos 100 \pi t \right] e^{-0,7181t} \\
 &+ E_M \left[-0,088 \sin 100 \pi t - 1,431 \cos 100 \pi t \right] e^{-31,9105t} \\
 &+ E_M \left[-0,402 \sin 100 \pi t - 0,127 \cos 100 \pi t \right] e^{-127,6629t} \\
 &+ E_M \left[0,384 \sin 100 \pi t + 5,231 \cos 100 \pi t \right] e^{-92,7082t} \cos 295,5249 t \\
 &+ E_M \left[5,253 \sin 100 \pi t + 1,424 \cos 100 \pi t \right] e^{-92,7082t} \sin 295,5249 t
 \end{aligned}$$

Ce modèle est proposé à l'ordre 5 : la prise de mesures doit par conséquent durer au moins 6 périodes de 20 ms.

Nous proposons dans la table IV.9 les valeurs calculées de $I_F(t)$ et $i_A(t)$, ainsi que celles des différences entre I_F et son régime permanent ($1A$). Les allures de ces courants sont données Figure IV.8. Nous noterons :

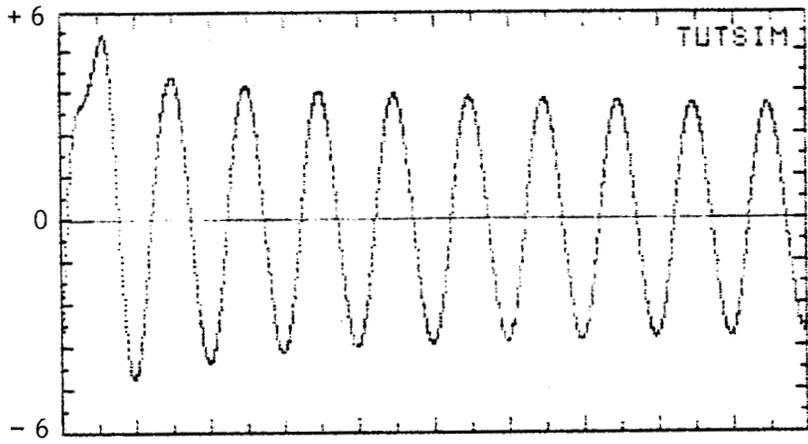
$$\begin{aligned}
 i_F(t) &= I_F(t) - I_F(\infty) = I_F(t) - 1 \\
 \Delta I_F(t) &= I_F(t + \Delta) - I_F(t) \quad \text{différence d'ordre 1 sur } I_F \\
 \Delta I_A(t) &= i_A(t + T) - i_A(t) \quad \text{différence d'une période sur } i_A \\
 \Delta &= 0,004 \text{ s} \quad T = 0,02 \text{ s}
 \end{aligned}$$

Dans un premier temps, la calcul est effectué d'après les données sur $i_F(t)$: la matrice S_6 est présentée, et conduit aux déterminants d'ordre 3, 4, 5 et 6. Le déterminant d'ordre 6 étant proche de zéro (10^{-23}), et on calcule donc le polynôme de degré 5 associé aux cinq premières lignes de S_6 (inversion de S_5). Ceci conduit aux évaluations $\hat{\lambda}_i$ des données de simulation λ_i :

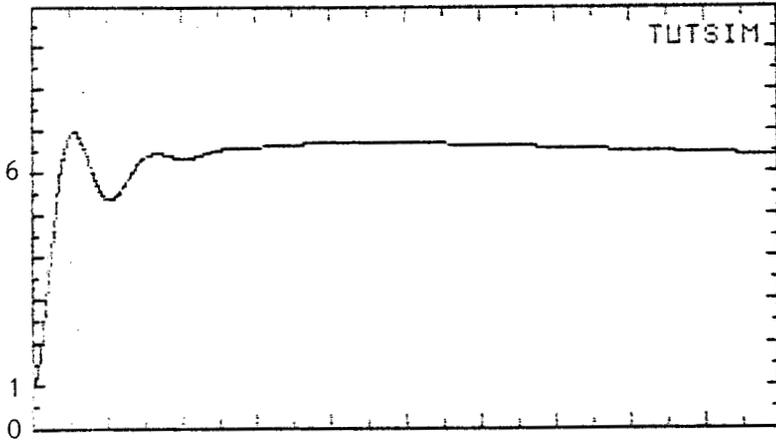
$$\begin{aligned}
 \hat{\lambda}_1 &= - 127,616 & \lambda_1 &= - 127,662 & (0,03 \%) \\
 \hat{\lambda}_2 &= - 31,904 & \lambda_2 &= - 31,910 & (0,6 \%) \\
 \hat{\lambda}_3 &= - 0,715 & \lambda_3 &= - 0,718 & (0,4 \%) \\
 \hat{\lambda}_4 &= - 92,73 \pm 295,51 j & \lambda_4 &= - 92,71 \pm 295,52 j & (0,02 \%)
 \end{aligned}$$

L'erreur maximale est de 0,6 %, ce qui constitue une excellente approximation. On peut noter que, comme prévu (cf § II.1.2) la partie imaginaire (pseudo-pulsation) est déterminée à $k\pi$ près ($k \in \mathbb{N}$).

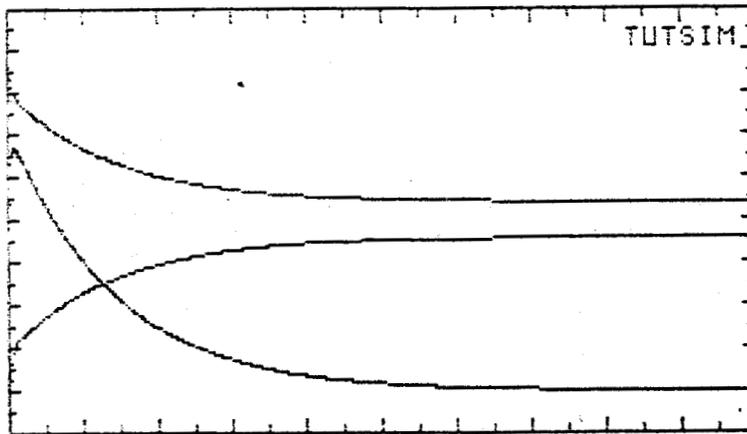
Dans un second temps, le même calcul est conduit à partir des valeurs ΔI_F , puis ΔI_A . Ceci permet l'élimination du régime permanent et d'une éventuelle erreur d'offset (qui bien sûr n'existe pas ici). Les déterminants sont alors plus proches de zéro, car les valeurs de ΔI_F et ΔI_A sont faibles. Cependant, les résultats sur les λ_i sont les mêmes que précédemment.



i_A $t \leq 0,2$ s



i_F $t \leq 0,2$ s



i_F et i_A $t \leq 10$ s

TIME (S):	CURRENT IF:	CURRENT IA:	IF-STEADY STATE:
0	1	0	0
.002	1.67207	.734571	.672068
.004	3.21671	2.24211	2.21671
.006	4.91834	4.07028	3.91834
.008	6.23266	5.83418	5.23266
.01	6.90257	6.65593	5.90257
.012	6.94899	5.68222	5.94899
.02	5.40821	-3.71203	4.40821
.022	5.42737	-2.80458	4.42737
.024	5.62458	-1.710861	4.62458
.026	5.90202	1.74348	4.90202
.028	6.16599	3.68404	5.16599
.03	6.35481	4.38572	5.35481
.032	6.44811	3.53039	5.44811
.04	6.35574	-3.91282	5.35574
.042	6.36051	-3.07685	5.36051
.044	6.39449	-1.04855	5.39449
.046	6.44677	1.32789	5.44677
.048	6.50344	3.20835	5.50344
.05	6.55288	3.87086	5.55288
.052	6.58871	3.07065	5.58871
.06	6.62935	-3.74645	5.62935
.062	6.6357	-2.96219	5.6357
.064	6.64549	-1.05697	5.64549
.066	6.65798	1.23328	5.65798
.068	6.67145	3.03591	5.67145
.07	6.68408	3.67091	5.68408
.072	6.69452	2.90544	5.69452
.08	6.71292	-3.60801	5.71292
.082	6.71466	-2.85463	5.71466
.084	6.71631	-1.01855	5.71631
.086	6.71795	1.19436	5.71795
.088	6.71945	2.93944	5.71945
.09	6.72057	3.55506	5.72057
.092	6.7211	2.81292	5.7211
.1	6.71639	-3.51238	5.71639
.102	6.71392	-2.77908	5.71392
.104	6.71115	-1.989739	5.71115
.106	6.70812	1.16908	5.70812
.108	6.70487	2.87308	5.70487
.11	6.70136	3.47476	5.70136
.112	6.69759	2.74928	5.69759

CALCULUS ON (IF - STEADY STATE) DATA

MATRIX S6 (INCLUDING MATRIX S5) :

.672068	4.42737	5.36051	5.6357	5.71466	5.71392
2.21671	4.62458	5.39449	5.64549	5.71631	5.71115
3.91834	4.90202	5.44677	5.65798	5.71795	5.70812
5.23266	5.16599	5.50344	5.67145	5.71945	5.70487
5.90257	5.35481	5.55288	5.68408	5.72057	5.70136
5.94899	5.44811	5.58871	5.69452	5.7211	5.69759

3TH ORDER DETERMINANT= .397403
 4TH ORDER DETERMINANT=-.110515E-2
 5TH ORDER DETERMINANT=-.168108E-8
 6TH ORDER DETERMINANT= .119824E-22
 5TH DEGREE POLYNOMIAL:
 $-.993618E-3 * .274759E-1A - .265795A^2 + 1.12733A^3 - 1.88347A^4 + 1A^5$
 ROOT= .0779 POLE=-127.616 TIME CONSTANT= .783598E-2
 ROOT= .5283 POLE=-31.9045 TIME CONSTANT= .313435E-1
 ROOT= .9858 POLE=-.715089 TIME CONSTANT= 1.39843
 COMPLEX ROOT=-.147+.057j COMPLEX POLE=-92.73+295.51j

CALCULUS ON (ΔIF) DATA

3TH ORDER DETERMINANT= .219312E-2
 4TH ORDER DETERMINANT=-.366271E-6
 5TH ORDER DETERMINANT= .220249E-12
 6TH ORDER DETERMINANT=-.122467E-27
 5TH DEGREE POLYNOMIAL:
 $-.993618E-3 * .274759E-1A - .265795A^2 + 1.12733A^3 - 1.88347A^4 + 1A^5$
 ROOT= .0779 POLE=-127.616 TIME CONSTANT= .783598E-2
 ROOT= .5283 POLE=-31.9045 TIME CONSTANT= .313435E-1
 ROOT= .9858 POLE=-.715089 TIME CONSTANT= 1.39843
 COMPLEX ROOT=-.147+.057j COMPLEX POLE=-92.73+295.51j

CALCULUS ON (ΔIA) DATA

3TH ORDER DETERMINANT=-.008108
 4TH ORDER DETERMINANT=-.618279E-6
 5TH ORDER DETERMINANT= .208CE-10
 6TH ORDER DETERMINANT=-.988292E-23
 5TH DEGREE POLYNOMIAL:
 $-.993618E-3 * .274759E-1A - .265795A^2 + 1.12733A^3 - 1.88347A^4 + 1A^5$
 ROOT= .0779 POLE=-127.616 TIME CONSTANT= .783598E-2
 ROOT= .5283 POLE=-31.9045 TIME CONSTANT= .313435E-1
 ROOT= .9858 POLE=-.715089 TIME CONSTANT= 1.39843
 COMPLEX ROOT=-.147+.057j COMPLEX POLE=-92.73+295.51j

TABLE IV.9

CONCLUSION

La notion d'invariance permet d'aborder les systèmes linéaires à coefficients périodiques de différentes manières, selon que la matrice d'évolution est connue ou non.

Dans un premier temps, nous avons utilisé l'invariance du changement de variables de Floquet par rapport à une translation du spectre de la matrice d'évolution, supposée connue. Une simulation analogique permet alors de majorer et minorer les parties réelles des exposants caractéristiques du système.

Lorsque le modèle est inconnu, il est possible de calculer directement ses exposants caractéristiques en mesurant ses sorties, échantillonnées avec une période multiple de celle des coefficients du système : ceci requiert l'existence d'un modèle linéaire à coefficients périodiques, et la connaissance de cette période. La propriété d'invariance qui est alors mise en jeu concerne les zéros du polynôme caractéristique mesuré, qui ne dépendent ni de la sortie, ni du premier instant d'échantillonnage. Cependant, le choix de cette sortie ou de cet instant initial peut influencer sur l'observabilité du système, et par conséquent sur le nombre de zéros mesurés.

Cette dernière méthode peut être appliquée avec profit dans l'étude du modèle de Park de la machine synchrone : il est possible, en mesurant les intensités statoriques ou rotoriques d'une machine tournant à vitesse constante, d'évaluer ses constantes de temps et pseudo-pulsations, ainsi que l'ordre du modèle de Park associé.

Ceci a été effectué à partir de la simulation numérique d'une machine à rotor lisse, et donne alors d'excellents résultats. Dans le cas d'une mesure sur machine réelle (actuellement en cours), deux conditions doivent impérativement être vérifiées :

- D'une part, les mesures doivent pouvoir être rendues exactes, c'est-à-dire que les seules erreurs admissibles sont un offset, une dérive ou un bruit filtrable linéairement. La connaissance de l'instant initial d'échantillonnage n'est pas nécessaire.

- D'autre part, la vitesse de rotation doit rester constante et connue, de façon à procéder à un échantillonnage synchrone des intensités. Ceci est, dans la pratique, lié à l'existence d'un volant d'inertie suffisant.

La seule hypothèse qui reste alors est l'existence d'un modèle linéaire à coefficients périodiques. Une étude systématique de la validité du modèle de Park est donc possible, tant du point de vue de la linéarité que de l'ordre.

CONCLUSION

Ce mémoire montre l'intérêt qu'il peut y avoir à caractériser les propriétés d'un système automatique à l'aide de certaines quantités mathématiques indépendantes de transformations pouvant affecter son évolution, sa structure ou sa représentation. Outre les invariants existant déjà dans la littérature et rappelés dans la première partie, la définition d'autres expressions invariantes nous a permis, dans un second temps, de systématiser une approche de la modélisation dans l'espace d'état :

L'outil de base est le polynôme symbolique du système, dont l'intérêt est d'être invariant à travers toute transformation de représentation de type changement de base. Dans le cas d'un système linéaire stationnaire, il correspond au polynôme caractéristique ; cependant, dans le cas plus général d'un système non linéaire multivariable, ses coefficients sont des matrices non constantes.

L'identité des polynômes symboliques de deux modèles matriciels est une condition nécessaire pour qu'ils puissent représenter le même système à un changement de base près : le travail présenté dans le deuxième chapitre a donc consisté à proposer des propriétés assurant que cette condition soit également suffisante. Ces propriétés portent sur l'observabilité du modèle ou la non factorisation de son polynôme symbolique.

Des règles d'emploi simples et informatisables en résultent, permettant d'accéder aisément à différentes formulations matricielles d'un même système.

Le troisième chapitre, consacré à la propriété de stabilité, met en œuvre ces méthodes dans le but d'associer le choix de la modélisation avec le problème de la détermination d'une fonction candidate à Liapounov. Parmi les formes matricielles utilisées, la forme en flèche constitue un outil très performant.

Trois résultats principaux sont à retenir :

- La définition de modèles d'ordre réduit pour les systèmes non linéaires monovariables de type Lurie-Postnikov, dont la stabilité assure celle du système entier (théorème du système réduit).

- La définition de modèles de complexité réduite pour les systèmes non linéaires multivariables, dont la stabilité entraîne également celle du système initial (théorème du système simplifié).

- La définition de nouvelles classes de systèmes non linéaires vérifiant la conjecture du linéaire, c'est-à-dire dont la stabilité peut être traitée directement à l'aide du critère de Routh-Hurwitz appliqué au polynôme symbolique.

Une dernière partie considère les propriétés d'invariance polynomiale sous un autre aspect : celui de l'identification. La mesure échantillonnée des sorties d'un système linéaire à coefficients périodiques permet de construire l'équivalent de son polynôme symbolique, et ceci de façon invariante par rapport au premier instant d'échantillonnage. Ceci permet alors d'utiliser des méthodes d'identification propres aux systèmes à coefficients constants, qui conduisent au calcul des exposants caractéristiques. Dans le cas de la machine synchrone, ces exposants donnent la valeur des constantes de temps et pseudo-pulsations de la machine.

Il résulte de ce travail que l'approche d'un système à l'aide de certains de ses invariants s'avère fructueuse, l'aspect principalement traité ici étant sa modélisation.

La définition de modèles d'ordre ou de complexité réduite a été ici considérée sous l'angle de la stabilité. Il apparaît très intéressant de poursuivre cette voie d'étude en l'associant aux travaux existant sur le découplage de dynamiques, la validation de modèles, ainsi que l'analyse et la détermination de commandes quasi-optimales. C'est avec cette orientation que nous pensons poursuivre nos travaux.

BIBLIOGRAPHIE

AIZERMAN A.M. - 1949

"Problème en relation avec la stabilité "globale" des systèmes dynamiques"
Usp. Mat. Nauk., 4 (1), en Russe.

ANDRONOV A.A. - 1929

"Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues"
Comptes-Rendus, Vol. 189, p. 559.

BAREISS E.H. - 1968

"Numerical solution of linear equations with Toeplitz and vector Toeplitz matrices"
J. Numer. Math., 13, pp. 404-424.

BARNETT S. - 1973

"Matrices, polynomials, and linear time-invariant systems"
IEEE Trans. on Aut. Control, AC-18, n° 1, pp. 1-10.

BELLMAN R. - 1957

"Dynamic programming"
Princeton Univ. Press.

BELLMAN R. - 1962

"Vector Ljapunov functions"
J. SIAM Control, Ser. A, Vol. 1, n° 1.

BELLMAN R. - 1971

"Introduction to the mathematical theory of control processes"
Vol. 2, Non Linear Processes, Academic Press, New York.

BELLMAN R., COOKE K.L. - 1963

"Differential difference equations"
Academic Press, New York.

BENDIXON I. - 1901

"Concernant la non existence de cycles limites"
Acta Mathematicae, n° 24.

BENREJEB M. - 1976

"Sur la synchronisation des systèmes non linéaires en régime forcé"

Thèse de Docteur-Ingénieur, Juin 76, Lille.

BENREJEB M. - 1980

"Sur l'analyse et la synthèse de processus complexes hiérarchisés. Application aux systèmes singulièrement perturbés"

Thèse de Docteur ès Sciences Physiques, Mai 80, n° 479, Lille.

BENREJEB M., BORNE P., LAURENT F. - 1982

"Sur une application de la représentation en flèche à l'analyse des processus"

RAIRO Automatique S.A.C., Vol. 16, n° 2, pp. 133-146.

BENREJEB M., DAUPHIN G., BORNE P. - 1980

"Sur une nouvelle approche de la modélisation et de la simulation des processus non linéaires"

Actes Congrès SIMULATION'80, Interlaken, Juin 80.

BERTRAND P., MICHAILESCO G., SIRET J.M. - 1976

"Sur la synthèse des modèles réduits par agrégation"

RAIRO Automatique S.A.C., Vol. 10, n° 7, pp. 105-112.

BHATIA N.P., SZEGÖ G.P. - 1970

"Stability theory of dynamical systems"

Springer Verlag, Berlin.

BLICHEVSKII - 1959

"Conditions for the absence of uniform and asymptotic stability"

Usp. Mat. Nauk, n° 14, 1 (85), en Russe.

BOGOLIUBOV N., MITROPLOSKY J. - 1958

"Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations"

Moscou, en Russe.

BONIVENTO C., GUIDORZI R., MARRO G. - 1973

"Parametric insensitivity and controlled invariance"

Actes Congrès IFAC, Ischia, Italie, p. 177.

BORNE P., BENREJEB M. - 1977

"On the stability of a class of interconnected systems. Application to the forced working conditions"

Actes 4th IFAC Symposium MTS, Fredericton.

BORNE P., GENTINA J.C. - 1972

"Sur une extension des conditions linéaires de stabilité à certaines classes de systèmes échantillonnés non linéaires"

C.R.A.S. Paris, t. 274, pp. 1275-1277, 17 avril 72.

BORNE P., GENTINA J.C. - 1974

"Definition of a matrical transformation permitting the discretization of a set of differential equations"

Actes Congrès IFIP'74, Information Processing, North Holland Pub. Comp., Stockholm, Vol. 3, pp. 452-455.

BORNE P., GENTINA J.C., LAURENT F. - 1972

"Sur la stabilité des systèmes échantillonnés non linéaires"

RAIRO Automatique S.A.C., mai 72, n° 5.2, pp. 96-105.

BORNE P., LAURENT F., MAIZIERES C. - 1978

"Sur la stabilité dynamique des processus multivariables non linéaires"

ACTA (Automatic Control Theory and Applications), Vol. 6, n° 2, mai 78.

BORRI M., MANTEGAZZA P. - 1974

"Certain forms of stability of twin-blade semirigid rotors"

Actes 2e Congrès Assoc. Ital. di Aeronaut. e Astronaut., Pise, Italie, Septembre 74, pp. 313-322.

BOUDAREL R., DELMAS J., GUICHET P. - 1967

"Commande optimale des processus"

Tome 1, p. 16, Col. Techniques de l'Automatisme, Dunod, Paris.

BRETAUDEAU F., VIDAL O. - 1983

"Sur la stabilité des systèmes quadratiques discrets à coefficients périodiques"

Actes Congrès Applied Informatics (AI'83), Lille, Mars 83, Vol. II, pp. 189-192.

BRUNOVSKY P. - 1970

"A classification of linear controllable systems"

Kybernetica 6, pp. 173-188.

BURGAT C., MIRA C. - 1970

"Sur une méthode de détermination des exposants caractéristiques d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients périodiques"

C.R.A.S. Paris, t. 271, Série A, pp. 965-968, 9 Novembre 70.

CALICO R.A., YEAKEL G.S. - 1982

"Active attitude control of a spinning symmetrical satellite in an elliptic orbit"

Guidance & Control Conf., Actes AIAA, San Diego, Août 82, N.-Y.,

pp. 195-198.

CANAY I.M. - 1969

"Causes of discrepancies on calculation of rotor quantities and exact equivalent diagram of the synchronous machine"

IEEE Trans., PAS-88, p. 1114.

CESARI L. - 1959

"Asymptotic behaviour and stability problems in ordinary differential equations"

p. 55, Springer Verlag, Berlin.

CHASSANDE J.P. - 1981

"Etude analytique complète d'une machine synchrone autopilotée à caractéristiques linéaires et à commutation naturelle de courant"

Thèse Docteur ès Sciences Physiques, Grenoble, 9 Juin 81.

CHENIN P. - 1982

"Modules, factorisation de matrices et systèmes linéaires"

Outils et Modèles Math. pour l'Automatique, Editions du C.N.R.S., Paris,

RCP 567, t. 2, pp. 7-36.

CHOUDHURY D.R. - 1973

"Algorithm for power of companion matrix and its application"

IEEE Trans. Aut. Control., AC-18, n° 2, p. 179, April 73.

CORRALL D.R. - 1979

"On the stability of periodically time varying systems"

Int. J. Control, Vol. 29, n° 3, pp. 497-504.

DAUPHIN-TANGUY G. - 1983

"Sur la représentation multimodèle des systèmes singulièrement perturbés. Application à l'analyse et à la synthèse"

Thèse Docteur ès Sciences Physiques, Lille, n° 600.

DEIF A.S. - 1982

"Advanced matrix theory for Scientists and Engineers"

Abacus Press, Halsted Press, John Wiley & Sons, New-York.

DELHAYE M., DUTRON J.P. - 1979

"Contribution à l'optimisation du dépouillement des oscillogrammes de court-circuit de la machine synchrone"

Revue E., Vol. IX, n° 4-5, pp. 78-95.

DENNIS J.E., TRAUB J.F., WEBER R.P. - 1976

"The algebraic theory of matrix polynomials"

SIAM J. Numer. Anal., Vol. 13, n° 6, December 76.

DERUSSO P.M., ROY R.J., CLOSE C.M. - 1965

"State variables for Engineers"

John Wiley & Sons, New-York.

DESNOYERS H. - 1982

"[A,B]-invariants et méthodes polynomiales"

Outils et Modèles Math. pour l'Automatique, Editions du C.N.R.S., Paris, RCP 567, t. 2, pp. 37-52.

DIMSTER S. - 1984

"Aide informatique à la modélisation de systèmes non linéaires"

Thèse Docteur 3ème Cycle, à paraître.

DIMSTER S., ROTELLA F., RICHARD J.P. - 1984

"Interactive software for analysis of non linear systems"

Actes AI'84, Insbrück, Février 84, pp. 96-103.

ELACHI C. - 1976

"Waves in active and passive periodic structures. A review"

IEEE Proc., Vol. 64, Decembre 76, pp. 1666-1698.

EL MOUDNI A. - 1981

"Introduction de nouveaux outils mathématiques pour la description des systèmes discrets non linéaires de grande dimension"

Thèse Docteur 3ème Cycle, n° 888, Lille.

EL MOUDNI A., RICHARD J.P., BORNE P. - 1981

"On a new vectorial description of discrete nonlinear multivariable Lurie-Postnikov type systems"

Actes Congrès Simulation, Modelling and Development (SMD'81), Le Caire, Septembre 81.

EL MOUDNI A., RICHARD J.P., DAUPHIN-TANGUY G. - 1982

"On the use of matrix polynomials in the description of non-linear discrete systems"

Actes 2nd World Conf. on Math. at Service of Man, Las Palmas, Juillet 82, Résumé dans Zentralblatt für Mathematik, Springer Verlag, Berlin, 1984.

FAURRE P., CLERGET M., GERMAIN F. - 1979

"Opérateurs rationnels positifs"

Collection Méthodes Math. de l'Informatique, Dunod, Paris.

FEL'DBAUM A.A. - 1963

"Optimal control systems"

Ouvrage en Russe, Moscou, traduit et publié par Academic Press, London, 1965.

FESSAS P. - 1979

"An analytic determination of the $[A, B]$ -invariant and controllability subspaces"

Int. J. Control, Vol. 30, n° 3, pp. 491-512.

FITTS R.E. - 1966

"Two counter-examples to Aizerman's conjecture"

IEEE Trans. Aut. Cont., AC-11, n° 3.

FLOQUET - 1883

"*Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques*"
Annales Scient. de l'Ecole Norm. Sup., t. XII.

FOSSARD A. - 1972

"*Commande des systèmes multidimensionnels*"
Collection Dunod Automatique, Paris.

FOSSARD A. - 1982

"*Modélisation et analyse des systèmes à échelles de temps multiples*"
Cours E.N.S.A.E., Dept. Automatique, Toulouse.

FUJII K., SHOJI K. - 1972

"*Vérification of the Aizerman and/or Kalman conjecture*"
IEEE Trans. Aut. Control, AC-17, n° 3, Juin 72, pp. 406-408.

GANTMACHER F.R. - 1959

"*Theory of matrices*"
New-York, Chelsea 59, "Théorie des matrices", Dunod, Paris, 1966, t. 1 et 2.

GAYDUK A.R. - 1976

"*Absolute stability of control systems with multiple nonlinearity*"
Autom. i Telemekl., 6, pp. 5-11, en Russe.

GENTINA J.C. - 1975

"*Sur la notion de modèle dans la description d'un processus*"
Actes Colloque ENSTA / ANRT, "Systèmes : nouvelles approches", Paris,
pp. 125-145.

GENTINA J.C. - 1976

"*Contribution à l'analyse et à la synthèse des systèmes continus non linéaires de grande dimension*"
Thèse Docteur ès Sciences Physiques, Lille, n° 347.

GENTINA J.C., BORNE P. - 1972

"*Sur une condition d'application du critère de stabilité linéaire à certaines classes de systèmes continus non linéaires*"
C.R.A.S., Paris, t. 275, 16 Août 72, Série A, pp. 401-403.

GENTINA J.C., BORNE P., LAURENT F. - 1972

"Stabilité des systèmes continus non linéaires de grande dimension"

RAIRO, Août 72, J-3, pp. 69-77.

GENTINA J.C., BORNE P., LAURENT F. - 1973

"On a study of stability and sensitivity of large scale continuous non-linear systems under uncertainty"

Actes 3e Congrès IFAC, "Sensitivity, adaptativity and optimality", Ischia, Italie, Juin 73, pp. 412-417.

GENTINA J.C., BORNE P., BURGAT C., BERNUSSOU J., GRUJIĆ Lj.T. - 1979

"Sur la stabilité des systèmes de grande dimension. Normes vectorielles"

RAIRO Automatique S.A.C., Vol. 13, n° 1, pp. 57-75.

GENTINA J.C., MEIZEL D. - 1978

"Sur un mode de contrôle adaptatif d'une classe particulière de processus non linéaires continus ou discrets"

ACTA (Automatic Control Theory and Applications), Vol. 6, n° 1, pp. 8-20.

GIBSON J. - 1963

"Non linear automatic control"

Mc Graw-Hill, New-York.

GILLE J.L., DECAULNE P., PELEGRIN M. - 1971

"Théorie et calcul des asservissements linéaires"

Dunod, Paris.

GRIPPO L., LAMPARIELLO F. - 1978

"Practical stability of large scale discrete time systems on product spaces"

Revue Int. J. Syst. Sci., Vol. 9, n° 11, pp. 1235-1246.

GROUMPOS P.P., SCOTT P.D. - 1977

"The nested bordered diagonal method for symmetric eigen problems"

Actes 5th C.C.C., Alberton Conference, Alberton, Illinois, pp. 314-323.

GRUJIĆ Lj.T. - 1975 (a)

"Novel development of Lyapunov stability of motion"

Int. J. Control, Vol. 22, n° 4, pp. 525-549.

GRUJIĆ Lj.T. - 1975 (b)

"Uniform practical and finite-time stability of large scale systems"

Int. J. Control, Vol. 6, n° 2, pp. 181-195.

"Practical stability with the settling time of composite systems"

Teoretski prilog Automatica, Zagreb 75, t. 9, pp. 1-10.

GRUJIĆ Lj.T. - 1978

"Solutions for the Lurie-Postnikov and Aizerman problems"

Int. J. Syst. Sc., Vol. 9, n° 12, pp. 1359-1372.

GRUJIĆ Lj.T. - 1981

"On absolute stability and the Aizerman conjecture"

Automatica, Vol. 17, pp. 335-349.

GRUJIĆ Lj.T., GENTINA J.C., BORNE P. - 1976

"General aggregation of large scale systems by vector Lyapunov functions and vector norms"

Int. J. Control, Vol. 24, n° 4, pp. 529-550.

GRUJIĆ Lj.T., MARTYNUK A.A., RIBBENS-PAVELLA M. - 1984

"Stability of large scale systems under structural and singular perturbations"

Naukova Dumka, Kiev, URSS; (en Russe).

GRUJIĆ Lj.T., PORTER B. - 1980

"Continuous-time tracking systems incorporating Lurie plants with single nonlinearities"

Int. J. Syst. Sc., Vol. 11, n° 2, pp. 177-189.

GUNDERSON R.W. - 1967

"On stability over a finite interval"

IEEE Trans. on Aut. Control, AC-12, n° 5, octobre 67, pp. 634-635.

GUARDABASSI G., LOCATELLI A., RINALDI S. - 1973

"Controlability, observability and sensitivity"

Actes IFAC "Sensitivity, adaptativity and optimality", Ischia, Italie, pp. 91-94.

HAHN W. - 1963

"Theory and application of the Liapunov's direct method"

Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New-Jersey.

HARRIS C.J., MILES J.F. - 1980

"Some aspects of kinematic similarity and the stability of linear systems"

Actes 3e Conférence IMA "On Control Theory", Sheffield, GB, pp. 89-114, 1981 Academic Press, London.

HINRICHSSEN D. - 1984

"Canonical forms and parametrization problems in linear systems theory (preliminary version)"

Actes 4e Conférence IMA, Cambridge, pp. 192-227, Academic Press, London.

ISIDORI A., KRENER A.J., GORI-GIORGI C., MONACO S. - 1981

"Locally (f-g) invariant distributions"

Systems & Control Letters, Vol. 1, n° 1, pp. 12-15.

ISWAR B. - 1980

"The characteristic exponents in the restricted problem of three bodies"

J. Math. and Phys. Sc., Vol. 14, octobre 80, pp. 397-414.

JOSEPH D.D. - 1980

"Bifurcation in fluid mechanics"

Theoretical and Applied Mechanics, 5th Int. Congress, Toronto, North-Holland Pub. Co, pp. 295-305.

KALITINE B. - 1982

"Sur la stabilité des ensembles compacts positivement invariants des systèmes dynamiques"

RAIRO Automatique S.A.C., Vol. 16, n° 3, pp. 275-286.

KALMAN R.E. - 1957

"On physical and mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems"

J. Appl. Mech. Trans., ASM 79.

KALMAN R.E. - 1963 (a)

"Mathematical description of linear dynamical systems"

SIAM J. on Control, ser. A, Vol. 1, n° 2, pp. 152-192.

KALMAN R.E. - 1963 (b)

"Liapounov functions for the problem of Lurie in automatic control"

Rapport Acad. Sc. USA, 49, pp. 201-205.

KARKANIAS N., KOUVARITAKIS B. - 1978

"The use of frequency transmission concepts in linear multivariable systems analysis"

Int. J. Control, Vol. 28, n° 2, pp. 197-240.

KARLIN A., LOCATELLI A., ZANARDINI C. - 1973

"On the synthesis of trajectory insensitive linear systems"

Actes IFAC "Sensitivity, Adaptativity and Optimality", Ischia, Italie, pp. 183-189.

KHALIL H.K., KOKOTOVIĆ P.V. - 1979

"D-Stability and multiparameter singular perturbation"

SIAM J. Control and Optimization, Vol. 17, n° 1, pp. 56-65.

KOKOTOVIĆ P.V., RUTMAN R.S. - 1965

"Sensitivity of automatic control systems (survey)"

Aut. Remote Control, Vol. 26, pp. 727-749.

KOTNY J.L., LESENNE J., SEGUIER G. - 1981

"Transmittance générale de la machine synchrone. Conséquences des simplifications usuelles"

Actes 1st Applied Modelling and Simulation Conf., Vol. II, Lyon, pp. 238-244.

KRASOVSKII N.N. - 1959

"Some problems in the theory of stability of motion"

Moscou 59, (en Russe), Traduction Anglaise Stanford Univ. Press, 1963.

KU Y.H. - 1958

"Analysis and control of nonlinear systems"

The Ronald Press Co, New-York.

LANGENHOP C.E. - 1960

Trans. Annales Math. Society, n° 97, p. 317.

LASALLE J.P. - 1949

"Sur l'existence d'une solution périodique pour l'équation de Van Der Pol"

Quart. Appl. Math., Vol. 7.

LASALLE J.P. - 1976

"Stability theory and invariance principles in dynamical systems"

Actes Symposium Systèmes Dynamiques, Vol. 1, pp. 211-222, Academic Press, New-York.

LASALLE J.P., LEFSCHETZ S. - 1961

"Stability by Lyapunov's direct method with applications"

Academic Press, New York.

LAURENT F. - 1968

"Contribution à l'étude des systèmes échantillonnés non linéaires en régime dynamique"

Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Lille.

LAURENT F., ANGUE J.C., BORNE P., GENTINA J.C. - 1974

"About the use of redundant models in the description of discrete models : analysis of the stability of the nonlinear sampled data processes"

Actes Congrès IFAC, Riga.

LAURENT F., BORNE P., GENTINA J.C. - 1969

"Sur une limitation en durée du régime transitoire d'un système asservi échantillonné à gain périodique"

C.R.A.S. Paris, t. 268, pp. 670-672, 24 mars 69, Série A.

LAURENT F., JANICOT J.P., TOULOTTE J.M. - 1972

"Commande numérique directe par impulsions. Application à un système échantillonné modulé en largeur"

Actes 5e Congrès IFAC, Paris, Part. 4b.

LAURENT F., EL MOUDNI A, RICHARD J.P. - 1979

"On initial stability conditions for nonlinear large scale systems"

Actes 4e Congrès Informatica y Automatica, Madrid.

LAURENT F., LHOTE F. - 1966

"Sur une condition suffisante de stabilité asymptotique pour un système continu non linéaire"

C.R.A.S. Paris, t. 262, pp. 35-37, 3 Janvier 66, Série A.

LEFSCHETZ S. - 1957

"Differential equations : geometric theory"

Seconde Edition, Interscience Publishers, John Wiley & Sons, New-York.

LEFSCHETZ S. - 1965

"Stability of non linear control systems"

Academic Press, New-York.

LESENNE J., KOTNY J.L., SEGUIER G. - 1981

"Influence of the usual simplifying hypothesis on the study of the dynamical behaviour of the synchronous machine"

Actes Congrès MECO'81, Le Caire, pp. 186-189.

LESENNE J., NOTELET F., SEGUIER G. - 1981

"Introduction à l'électrotechnique approfondie"

Collection "Technique et Documentation", Lavoisier Université, Paris.

LESENNE J., SEGUIER G. - 1982

"New simplified theory of Park's model of the synchronous machine"

Actes Congrès ICEM'82, Budapest, Proc. Part 1, pp. 47-50.

LIAPOUNOV A.M. - 1892

"Problème général de la stabilité du mouvement"

Article original (en Russe) dans Comm. Soc. Math., Kharkow ;

Traduit en français en 1907 (Annales Fac. Sc., Toulouse, 9, pp. 203-474) ;

Republié en anglais en 1949 (Vol. 17, Annales Math. Studies, Princeton).

LIAPOUNOV A.M., PLISS V.A., BASOV V.P. - 1966

"Infinite determinant methods for stability analysis of periodic-coefficient differential equations"

AIAA Journal, Vol. 8, pp. 680-686, Avril 70.

LUENBERGER D.G. - 1967

"Canonical forms for linear multivariable systems"

IEEE Trans. on Aut. Control, Juin 67, AC-12, n° 3.

LURIE A.I. - 1951

"On some nonlinear problems in the theory of automatic control"

H.M. Stationery Office, Londres.

LURIE A.I., POSTNIKOV V.N. - 1944

"Concerning the stability of regulating systems"

Prikl. Mat. i Mekh., Moscou, Vol. 8, pp. 246-248 (en Russe).

MAC FARLANE A.G.J., KARKANIAS N. - 1976

"Poles and zeros of linear multivariable systems : a survey of the algebraic, geometric and complex-variable theory"

Int. J. Control, Vol. 24, n° 1, pp. 33-74.

MALKIN I.G. - 1956

"Some problems in the theory of nonlinear oscillations"

Technical and theoretical literature, Moscou 56, (en Russe), traduit dans Translation Series, Physics & Math., A.E.C. tr 3766, U.S..

MALLICK J.A., UMANS S.D., WILSON G.L. - 1978

"Modelling of solid rotor turbogenerators - Parts 1, 2"

IEEE Trans., P.A.S.-97, n° 1, Janvier-Février 78, pp. 269-291.

MANSOUR M., JURY E., CHAPARRO L.F. - 1979

"Estimation of the margin of stability for linear continuous and discrete systems"

Int. J. Control, Vol. 30, n° 1, pp. 49-69.

MAUN J.C. - 1984

"New procedure for the identification of dynamic parameters of the synchronous machine by the 3-phase short-circuit test and extension to other tests"

Actes IMACS TC1, Modelling & Simulation of Elect. Mach. & Converters, Liège, pp. 121-128.

MATROSOV V.M. - 1962

Prikl. Mat. Mekh. 26, 992.

MARKUS - 1955

Mathemat. Zeits, n° 62, p. 310.

MAYGARIN B.Z. - 1970

"Criteria for absolute stability of control systems"

Autom. i Telemekh., Vol. 1, pp. 188-191, (en Russe).

MEERKOV S.M. - 1973

"Averaging of trajectories of slow dynamic systems"

Traduction de *Differentsial'nye Uravneniya*, Vol. 9, n° 9, pp. 1609-1617, Sept. 73, 1975 Plenum Publ. Corp., New-York U.D.C. 517 928 7.

MEERKOV S.M. - 1980

"Principle of variational control : theory and applications"

IEEE Trans. on Aut. Control, AC-25, n° 4, pp. 755-762.

MEIZEL D., GENTINA J.C. - 1979

"New aspects on linear and nonlinear single-input single-output systems"

Int. J. of Control, Vol. 30, n° 6, pp. 1043-1060.

MICHEL A.N., HEINEN J.A. - 1974

"Quantitative and practical stability of systems"

ACTA (Automatic Control Theory and Applications), pp. 9-15.

MINORSKY N. - 1962

"Nonlinear oscillations"

Van Nostrand Comp., Princeton, New-Jersey.

MORSE A.S. - 1973

"Structural invariants of linear multivariable systems"

SIAM J. Control, Vol. 11, n° 3.

MOYAUX J. - 1976

"Sur la détermination de la commande discrète de processus multivariables"

Thèse de Docteur-Ingénieur, n° 193, Lille, Novembre 76.

MUHAMETZIANOV I.A., SCHERBAEV S.S. - 1970

"On necessary and sufficient conditions for absolute stability"

Autom. i Telemekh., Vol. 11, pp. 11-18, (en Russe).

NAREDA K.S. - TAYLOR J.H. - 1973

"Frequency domain criteria for absolute stability"

Academic Press, New-York.

NELEPIN R.A. - 1967

"On the problem of exact boundary of the region of absolute stability of control systems"

Autom. i Telemekh., Vol. 4, pp. 30-37, (en Russe).

PAILLET D. - 1981

"PAAS, Programme d'aide à l'analyse des systèmes"

Actes Congrès Applied Modelling and Simulation (AMS'81), Lyon, Vol. 1, pp. 231-233.

PERSIDSKII S.K. - 1969

"On the problem of absolute stability"

Autom. i Telemekh., Vol. 12, pp. 5-11, (en Russe).

PIATNICKII E.S. - 1970

"Absolute stability of non stationary nonlinear systems"

Autom. i Telemekl., Vol. 3, p. 5, (en Russe).

PILLET E., POLOUJADOFF M., CHASSANDE J.P. - 1979

"Time constants of unsymmetrical short circuits of synchronous machines"

IEEE Trans. PAS-98, n° 6, Nov./Déc. 79, pp. 2172-2180.

PILLET E., POLOUJADOFF M. - 1982

"Méthode de résolution des systèmes différentiels linéaires à coefficients périodiques. Application à un asservissement"

Actes Congrès MECO'82, Tunis, Septembre 82.

PLISS V.A. - 1958

"Certain problem of the theory of the stability of motion in the whole"

Annales Leningrad Univ., (en Russe).

POINCARÉ H. - 1928

"Œuvres"

T. 1, Gauthier-Villars, Paris.

PONTRYAGIN L.S., BOLTYANSKII V.G., GAMKRELIDZE R.V., MISCHENKO E.F. - 1962

"The mathematical theory of optimal processes"

John Wiley & Sons, Inter Publishers, New-York.

POPOV V.M. - 1973

"L'hyperstabilité des systèmes automatiques"

Dunod, Paris, traduit d'un ouvrage publié en 1966.

PORTER B. - 1978

"Invariant zeros and zero directions multivariable systems with slow and fast modes"

Int. J. Control, Vol. 28, n° 1, pp. 81-91.

PRÄTZEL-WOLTERS D. - 1983

"Canonical forms for linear systems"

Linear algebra and its applications, Vol. 50, pp. 437-473, Elsevier Science Publ. Co, New-York.

RICHARD J.P. - 1981

"Sur la mise en équations d'état de systèmes continus non linéaires par une méthode de calcul symbolique : définition d'un invariant de représentation"

Thèse de Docteur-Ingénieur, n° 259, Lille.

RICHARD J.P., EL MOUDNI A., BORNE P. - 1981

"On the determination of a linear model for a locally stable nonlinear process"

Actes Congrès Modelling, Simulation and Development, Davos, pp. 41-44.

RICHARD J.P., LAURENT F. - 1981 (a)

"On a systematic determination of chosen state space description of given nonlinear continuous processes. Application to education"

Actes Congrès MECO'81, Le Caire, pp. 212-217.

RICHARD J.P., LAURENT F. - 1981 (b)

"Sur une méthode simple de conditionnement des représentations d'état de systèmes non linéaires continus ou discrets"

Actes Congrès Applied Modelling and Simulation, (AMS'81), Vol. 1, Lyon.

RICHARD J.P., LAURENT F. - 1983

"Identification of the dynamic properties of a linear process with periodical coefficients"

Actes Congrès Applied Control and Informatics, (ACI'83), Copenhague, Vol. 1, pp. 8/7-8/11.

RICHARD J.P., LAURENT F. - 1984

"On the majoration and minoration of the characteristic multipliers of a periodical coefficient system by analogic simulation"

Int. J. of Modelling and Simulation, Vol. 4, n° 3.

RICHARD J.P., LESENNE J. - 1984

"New algorithm for the determination of the synchronous machine time constants using the sampled outputs"

Actes IMACS TC1, Modelling & Simulation of Electrical Machines and Converters, Liège, pp. 131-137.

RICHARD J.P., PILLET E., POLOUJADOFF M., LAURENT F. - 1982

"Détermination of time varying systems asymptotically stable without verifying the linear stability conditions"

Actes MECO'82, Tunis, pp. 251-254.

RICHARD J.P., ROTELLA F., ZAMBETTAKIS I. - 1982

"Application of a new modelling method to the stability analysis"

2e Congrès Applied Modelling and Simulation (AMS'82), Paris, pp. 96-99.

RICHARD J.P., ROTELLA F., ZAMBETTAKIS I., LAURENT F. - 1983

"Sur la détermination de l'erreur quadratique d'un système continu linéaire"

Int. J. of Control and Computers, Vol. 11, n° 2, p. 46.

RICHARD J.P., ROTELLA F., ZAMBETTAKIS I. - 1984

"Simplification of models for stability analysis of large scale systems"

Chapitre 6 du Livre "Multivariable control, new concepts and tools", Part 1, Edit. Tzafestas, North-Holland.

RICHARD J.P., ROTELLA F., ZAMBETTAKIS I. - 1984

"Stability analysis of strongly nonlinear interconnected systems"

Actes 4e Conférence IMA "Control Theory", Cambridge, pp. 104-112.

RISSANEN J. - 1973

"Algorithm for triangular decomposition of block Hankel and Toeplitz matrices"

J. Math. of Computation, Vol. 27, n° 121, pp. 147-154.

RISSANEN J. - 1974

"Solution of linear equations with Hankel and Toeplitz matrices"

J. Numer. Math., Vol. 22, pp. 361-366.

ROBERT - 1964

"Normes vectorielles de vecteurs et de matrices"

R.F.T.I. Chiffres, Vol. A, n° 4, pp. 261-299.

ROSENBROCK H.H. - 1965

"A method of investigating stability"

Actes IFAC, Bâle, p. 352/1.

ROSENBROCK H.H. - 1970

"State space and multivariable theory"

Studies in Dynamical Systems, Nelson, Londres.

ROSENBROCK H.H., STOREY C. - 1970

"Mathematics of dynamical systems"

Studies in Dynamical Systems, Nelson, Londres.

ROTELLA F. - 1983

"Détermination de nouvelles représentations d'état adaptées à l'analyse et à la synthèse de systèmes continus non linéaires"

Thèse de Docteur-Ingénieur, n° 327, Lille.

ROTELLA F., RICHARD J.P. - 1983

"Modélisation et synthèse des systèmes monovariables de type Lurie-Postnikov"

Actes Congrès Applied Informatics (AI'83), Lille.

ROTELLA F., RICHARD J.P., ZAMBETTAKIS I. - 1983

"Stability of nonlinear continuous systems"

Actes Congrès Robotics and Automation, Lugano.

ROTELLA F., ZAMBETTAKIS I., RICHARD J.P. - 1982

"Application de la méthode du lieu des racines à la synthèse de systèmes non linéaires"

Actes MECO'83, Tunis, pp. 271-275.

SAFONOV M.G. - 1980

"Stability and robustness of multivariable feedback systems"

MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

SHACKSHAFT B. - 1974

"New approach to the determination of synchronous machine parameters from tests"

Actes IEE, n° 11, Novembre 74, pp. 1385-1392.

SHACKSHAFT B. - 1975

"Report on questionnaire on generator parameters for stability studies"
CIGRE Study Committee n° 32, Working Group 03, Avril 75.

SHOKOOHI S., SILVERMAN L.M., VAN DOOREN P.M. - 1983

"Linear time variable systems : balancing and model reduction"
IEEE Trans. on Aut. Control, Vol. AC-18, n° 8.

SIGRIST N. - 1976

"Qualitative investigation of almost separable Hamiltonian systems"
Actes du Advanced Study Institute, Italy, Août 76, pp. 141-150,
D. Reidel Pub. Comp..

SINGH M.G. - 1980

"Dynamical hierarchical control"
North-Holland Pub. Comp..

SINGH M.G., HASSAN M.F. - 1980

"Stability, stabilization and performance of multilevel controllers under structural perturbations"
Actes IEE, Vol. 127, Part D, n° 5, pp.214-219.

SINGH M.G., TITLI A. - 1978

"Systems decomposition, optimization and control"
Pergamon Press.

SPITERI P. - 1974

"Contribution à l'étude de la stabilité au sens de Liapounov de certains systèmes différentiels non linéaires"
Thèse de Docteur en Physique, Mention Mécanique, n° 200, Besançon, Juin 74.

TAKEDA Y., ADKINS B. - 1974

"Determination of synchronous machine parameters allowing for unequal mutual inductances"
Actes IEE, Vol. 121, n° 12, Décembre 74, pp. 1501-1504.

TITLI A. - 1975

"Commande hiérarchisée et optimisation des processus complexes"

Dunod Automatique, Paris.

TRENCH W. - 1965

"An algorithm for the inversion of finite Hankel matrices"

J. Soc. Indust. Appl. Math., Vol. 13, n° 4, pp. 1102-1107.

UMANS S.D., MALLICK S.A., WILSON G.L. - 1978

"Modeling of solid rotor turbogenerators"

IEEE Trans., PAS-97, n° 1, pp. 269-291.

VANLANDINGHAM H.F. - 1968

"On the solutions of periodically-varying systems"

Inst. of Electrical and Electronics engineers, annual region III convention, nov. 68, IEEE Inc., New-York.

WATSON W., MANCHUR G. - 1974

"Synchronous machine operational impedance from low voltage measurements at the stator terminal"

IEEE Trans., PAS-93, pp. 777-784.

WEISS L., INFANTE E.F. - 1967

"Finite time stability under perturbing forces and on product spaces"

IEEE Trans. AC-12.

WONHAM W.M., MORSE A.M. - 1970

"Decoupling and pole assignement in linear multivariable systems : a geometric approach"

SIAM J. Control, Vol. 8, pp. 1-18.

WONHAM W.M., MORSE A.M. - 1972

"Feedback invariants of linear multivariable systems"

Automatica, Vol. 8, pp. 93-100.

YANNAKOUDAKIS A. - 1982

"Invariants des systèmes linéaires multivariables soumis à des commandes stationnaires linéaires"

Editions du C.N.R.S., Paris, RCP 567, t. 2, pp. 97-114.

YAKOUBOVITCH V.A. - 1962

"La solution de quelques inégalités matricielles rencontrées dans la théorie du réglage automatique"

(en Russe), Doklady A.N. SSSR, t. 143, n° 6.

YOSHIZAWA T. - 1966

"Stability theory by Liapounov's second method"

The Math. Society of Japan.

ZAMBETTAKIS I. - 1983

"Contribution à l'étude des systèmes à non linéarités multiples. Application aux systèmes électromécaniques"

Thèse Docteur-Ingénieur, n° 326, Lille.

ZAMBETTAKIS I., RICHARD J.P., LAURENT F. - 1983

"Etude des systèmes électromécaniques non linéaires par la méthode directe de Liapounov"

Actes Congrès "Applied Informatics" (AI'83), Lille, Vol. 3, pp. 169-172.

ZAMBETTAKIS I., RICHARD J.P., ROTELLA F. - 1983

"Reduction of order in the stability analysis of large scale systems"

MECO'83, Athènes.

ZAMBETTAKIS I., RICHARD J.P., ROTELLA F. - 1984

"Simplification of models for stability analysis of large scale systems"

Chapitre 6 du Livre "Multivariable control, new concepts and tools", Part 1, Edit. Tzafestas, North-Holland.

(également cité à RICHARD J.P., ROTELLA F., ZAMBETTAKIS I. - 1984).

ZAMBETTAKIS I., ROTELLA F., RICHARD J.P. - 1984

"Stability analysis of strongly nonlinear interconnected systems"

Actes 4e Conférence IMA "Control Theory", Cambridge, pp. 104-112.

(également cité à RICHARD J.P., ROTELLA F., ZAMBETTAKIS I. - 1984).

ZIEGLER F. - 1977

"Wave propagation in periodic and disordered layered composite materials"

Int. J. of Solids and Structures, Vol. 13, n° 4, pp. 293-305.

ZUBOV V.I. - 1957

"Methods of A.M. Liapounov and their application"

Traduit de Pub. House of Leningrad Univ. 1957, AEC tr 4439, Physics 1961,
U.S..



RESUME

L'étude montre l'intérêt qu'il peut y avoir à caractériser les propriétés d'un système automatique (stabilité, commandabilité, modélisation, sensibilité) à l'aide de quantités mathématiques invariantes par rapport à des transformations pouvant affecter son évolution, sa structure ou sa représentation.

La définition d'expressions polynomiales invariantes conduit à une approche systématique de la modélisation dans l'espace d'état. Des règles d'emploi simples et informatisables en résultent, permettant d'accéder aisément aux différentes formulations matricielles (canoniques ou non) d'un même système.

Cette approche est mise en œuvre dans le but d'associer le choix de la modélisation avec le problème de la stabilité et de la détermination d'une fonction candidate à LIAPOUNOV. Trois résultats principaux sont proposés :

- La définition de modèles d'ordre réduit dont la stabilité assure celle du système entier.
- La définition de modèles de complexité réduite, mais sans réduction de dimension, également représentatifs de la stabilité du système initial.
- La définition de nouvelles classes de systèmes non linéaires vérifiant la conjecture du linéaire, c'est-à-dire pouvant être étudiés à partir du critère de Routh-Hurwitz.

Les propriétés d'invariance polynomiale sont également considérées sous un autre aspect : celui de l'identification des paramètres caractéristiques des systèmes linéaires à coefficients périodiques. La mesure des constantes de temps et pseudo-pulsations d'une machine synchrone illustre cette dernière méthode.

MOTS - CLEFS

COEFFICIENT(S) PERIODIQUE(S)
EQUATION (D') ETAT
ESPACE (D') ETAT
FONCTION (DE) LYAPUNOV
METHODE (DE) LYAPUNOV
INVARIANT(S)

MACHINE SYNCHRONE
MODELISATION
POLYNOME CARACTERISTIQUE
POLYNOME MATRICIEL
STABILITE
SYSTEME NON LINEAIRE
SYSTEME NON STATIONNAIRE