THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

SPÉCIALITÉ : MATHEMATIQUES PURES

PAR

LATSOUCABÉ FALL

INTERACTIONS ENTRE LA THEORIE DES CORPS ET LA THEORIE DES MODELES

Membres du Jury : Président : COSTE Michel,
Professeur à l'UNIVERSITE DE RENNES 1
Rapporteur : FAKIR Sabah,
Professeur à l'UNIVERSITE DE LILLE 1
Examinateurs : ZINN-JUSTIN Nicole,
Professeur à l'Université DE LILLE 1
SACRÉ Carlos,
Maître-Assistant à l'UNIVERSITE DE LILLE 1

Soutenue le 20 décembre 1984

A la mémoire de mon père,
Meïssa Mbar FALL

R E M E R C I E M E N T S

Je voudrais exprimer mes remerciements les plus sincères à :

Monsieur Sabah FAKIR, il m'a intéressé à la théorie des modèles. C'est grâce à lui que j'ai entrepris et poursuivi ce travail, tout le long duquel, sa sollicitude, sa compétence et son amitié ont été toujours constantes et désintéressées ;

Monsieur Michel COSTE, pour avoir accepté de présider le jury de cette thèse ; je le remercie également pour les bons conseils, les critiques constructives et l'aide constante qu'il m'a apportés dans ce travail ;

Madame Nicole ZINN-JUSTIN et Monsieur Carlos SACRE, pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour ce travail et pour avoir bien voulu accepter de participer au jury de cette thèse.

Je tiens également à remercier :

Monsieur Hamet SEYDI, pour son amitié et sa compétence ; l'aide qu'il m'a apportée dans le cadre du Département de Mathématiques de l'Université de DAKAR, m'a permis de continuer mes recherches ;

Madame Raymonde BERAT et le service de reproduction de l'U.E.R. de Mathématiques de Lille 1, pour le soin apporté à la réalisation de ce travail et,

l'Université des Sciences et Techniques de Lille 1, pour l'accueil et l'aide matérielle qu'elle m'a apportée pour la finalisation de ce travail.

TABLE DES MATIERES

	Pages
Introduction.	1
Tableau des abréviations.	6
Définitions et Notations.	7
CHAPITRE I : INTRODUCTION A LA GEOMETRIE ALGEBRIQUE.	14
1.1.- Quelques concepts de géométrie algébrique.	14
1.2.- Formalisation du théorème des zéros en théorie des modèles.	16
CHAPITRE II : UN PRINCIPE DE LEFSCHETZ GÉNÉRALISÉ.	21
2.1.- Modèles e.c et un théorème de Lindström.	21
2.2.- La théorie des corps a.c est modèle complète.	24
2.3.- Exemples d'autres théories.	27
CHAPITRE III : CORPS DIFFERENTIELS.	34
3.1.- Corps différentiels, généralités.	34
3.2.- Corps différentiellement clos de caractéristique zéro.	41
3.3.- Corps différentiels de caractéristique $p \neq 0$.	52
CHAPITRE IV : PROLEGOMENES A LA THEORIE DES MODELES.	55
4.1.- Domaines universels.	55
4.2.- Types et modèles saturés.	56
4.3.- Théories ω-stables	58
4.4.- Modèles génériques.	59
4.5.- Modèles universels homogènes.	63

.../...

CHAPITRE V : UN THEOREME DE CARACTERISATION DES MODELES ω_1-e.c 66

5.1.- *Introduction aux corps ω_1-e.c.* 66

5.2.- *Caractérisation des modèles ω_1-e.c.* 70

5.3.- *Retour à la théorie des corps.* 73

5.4.- *Théorème de caractérisation des corps infinis ω-stables.* 77

CHAPITRE VI : GROUPES e.c ET ω_1-e.c. 80

6.1.- *Quelques résultats sur les groupes e.c.* 80

6.2.- *Groupes e.c. dans $L_{\omega_1,\omega}$.* 85

6.3.- *Groupes ω_1-e.c dans $L_{\omega_1,\omega}$* 88

BIBLIOGRAPHIE. 91

INTERATIONS ENTRE LA THEORIE DES CORPS

ET

LA THEORIE DES MODELES

INTRODUCTION :

L'idée centrale de cette thèse est de trouver des interactions entre la théorie des corps et la théorie des modèles. La démarche suivie a été la suivante :

. Expliquer comment la théorie des corps a donné naissance à certains concepts de la théorie des modèles, et en retour, comment la théorie des modèles peut servir à l'étude des corps.

Plus explicitement, de certaines notions spécifiques, anciennement connue en théorie des corps (corps algébriquement clos, domaines universels, théorème des zéros, principe de Lefschetz, etc...), on introduit des concepts plus généraux en théorie des modèles. Et, de certains résultats démontrés dans le cadre de la théorie des modèles, on trouve des interprétations et des applications en théorie des corps, qui s'étendent aux groupes et à d'autres structures algébriques.

CHAPITRE I : INTRODUCTION A LA GEOMETRIE ALGEBRIQUE.

L'étude des solutions d'équations polynomiales sur un corps K est un point de départ de la géométrie algébrique. Les outils nécessaires sont la notion de domaine universel et le théorème des zéros de Hilbert. Ces outils nous permettent de faire le lien avec la théorie des modèles.

Cependant, la formalisation originelle du théorème des zéros, n'est pas adéquate en théorie des modèles. On l'étudiera sous forme d'un théorème de transfert, l'objectif étant de faire descendre un point d'une structure K', à une sous-structure K de K'.

Subséquemment, ce principe de transfert s'avère être un cas particulier du principe de Lefschetz et permet d'introduire la notion de modèle existentiellement clos qui se révèle être pour les corps commutatifs, l'analogue de corps algébriquement clos.

CHAPITRE II : UN PRINCIPE DE LEFSCHETZ GENERALISE.

L'étude du principe de Lefschetz est poursuivi et on introduit la notion de modèle existentiellement clos et celles de théorie modèle-complète, de théorie modèle-complétion et de théorie modèle-compagnon. On donne deux preuves du fait que la théorie des corps algébriquement clos est modèle-complète, dont l'une résulte de la catégoricité et l'autre est inspirée par la preuve algébrique du chapitre précédent. On donne d'autres exemples de ces notions.

CHAPITRE III : CORPS DIFFERENTIELS.

L'étude des corps différentiels sera le champ d'application privilégié des notions vues précédemment et nous permet de préciser les résultats de Wood [30]. En particulier, on prouve en toute caractéristique que les notions de corps différentiellement clos, de corps contraintement clos et de corps existentiellement clos sont équivalentes.

CHAPITRE IV : PROLEGOMENES A LA THEORIE DES MODELES.

Ce chapitre est essentiellement consacré à l'étude de certaines notions de théorie des modèles ; les motivations apparaîtront par la suite.

On montre à partir de certaines analogies comment les domaines universels ont donné naissance aux modèles saturés et on étudie ensuite les théories ω-stables, les modèles génériques et les modèles universel-homogènes.

On démontre que tout modèle universel-homogène non dénombrable d'une théorie inductive complète est générique au sens du forcing infini de Robinson ; ce résultat généralise celui de H. SIMMONS qui dans [29] a montré que ces modèles sont existentiellement clos.

CHAPITRE V : UN THEOREME DE CARACTERISATION DES MODELES ω_1-EXISTENTIELLEMENT CLOS.

On introduit la notion de modèle ω_1-existentiellement clos, étudiéepar A. Macintyre dans [16], dans le cadre de la théorie des groupes. On fait le lien entre les notions de corps ω_1-existentiellement clos, de domaine universel et de corps ω_1-saturé et on trouve une généralisation de ces résultats à la théorie des modèles.

Ainsi, on prouve que pour une théorie T et un modèle non dénombrable M de T :

. si T admet l'élimination des quantificateurs, alors M ω_1-existentiellement clos implique M ω_1-saturé ;

. si T est complète, alors M ω_1-universel-homogène (qui équivaut à M ω_1-saturé), implique M ω_1-existentiellement clos.

Comme application, on trouve une généralisation du théorème de P. Lindström, énoncé au chapitre II, qui nous permet de donner des exemples de modèle ω_1-existentiellement clos d'autres théories. On démontre ensuite les résultats suivants :

1) si T est la théorie des corps ordonnés et M un modèle non dénombrable de T, on a équivalence entre :

(i) M est réel clos et ω_1-dense ;
(ii) M est ω_1-saturé ;
(iii) M est ω_1-existentiellement clos ;
(iv) M est ω_1-universel-homogène.

(la première implication est un résultat de Erdös-Gillman-Henriksen [8]).

2) si T est la théorie des corps différentiels de caractéristique zéro et M un modèle non-dénombrable de T, on a équivalence entre :

(i) M est un domaine universel différentiel ;
(ii) M est ω_1-saturé ;
(iii) M est ω_1-existentiellement clos ;
(iv) M est ω_1-universel-homogène.

Ces résultats nous permettent de démontrer aisément un théorème de caractérisation des corps infinis ω-stables, dû à A. Macintyre [15] : soit K un corps infini de caractéristique fixée. Alors Th K est ω-stable ssi K est algèbriquement clos.

La démonstration de Macintyre utilise la théorie de Galois, mais bien que très constructive, elle est notablement plus longue que la nôtre. On généralise ce dernier résultat aux corps différentiels de caractéristique zéro et aux corps réels clos ω_1-denses.

CHAPITRE VI : GROUPES EXISTENTIELLEMENT CLOS ET ω_1-EXISTENTIELLEMENT CLOS.

Après quelques rappels et résultats généraux sur les groupes existentiellement clos, on démontre les résultats suivants, dus à Fisher, dans une lettre non publiée à Macintyre (page 82, [16]).

. si G est un groupe ω_1-existentiellement clos et si H est un groupe de type fini, alors H se plonge dans G, dans $L_{\omega_1,\omega}$;

. un groupe G est générique ssi G est une sous-structure élémentaire d'un groupe ω_1-existentiellement clos, dans $L_{\omega_1,\omega}$;

. deux groupes ω_1-existentiellement clos sont élémentairement équivalents dans $L_{\omega_1,\omega}$;

. le forcing-compagnon de la théorie des groupes (non abéliens), via le forcing infini de Robinson est la théorie des groupes ω_1-existentiellement clos.

TABLEAU DES ABREVIATIONS

---

a.c. = algébriquement clos

v.c. = variété complète

e.c. = existentiellement clos

ω_1 - e.c. = ω_1-existentiellement clos

u-h = universel-homogène

ω_1-u.h = ω_1-universel-homogène

mono = monomorphisme

rad I = radical de l'idéal I

P.A. = propriété d'amalgamation

P.I. = propriété d'immersion

ssi = si et seulement si

tq = tel que

resp. = respectivement

DEFINITIONS, NOTATIONS ET RESULTATS ELEMENTAIRES DE LA THEORIE DES MODELES.

Les notions et résultats suivants de la théorie des modèles sont décrits dans [3], [12] , [27].

Langage finitaire : L désigne un langage finitaire du premier ordre dont les variables libres sont v_n, $n < \omega$ et les constantes sont les éléments d'un ensemble $\underline{C}$.

Langage expansion : Soit M une structure d'un langage L et soit A un sous-ensemble de M, $L(A)$ désigne le langage expansion de L, dont l'ensemble des constantes est $A \cup \underline{C}$.

On note aussi souvent L_A pour $L(A)$.

$(M,a)_{a \in A}$ désigne la structure M du langage $L(A)$.

Langage infinitaire : $L_{\omega_1,\omega}$ est le langage infinitaire extension de L, obtenu en adjoignant à L, un nouveau connecteur V, disjonction dénombrable. Pour tout ensemble dénombrable Φ de formules de $L_{\omega_1,\omega}$, on a $V\Phi = \bigvee_{\psi \in \Phi} \psi$ est une formule de $L_{\omega_1,\omega}$.

$L_{\infty,\omega}$ est défini de la même façon que $L_{\omega_1,\omega}$, seulement dans ce cas Φ désigne un ensemble arbitraire quelconque de formules de $L_{\infty,\omega}$.

Cardinaux et Ordinaux : les lettres α, β, γ,..., λ,... désignent des cardinaux.

ω est le type d'ordre des entiers naturels ;

ω_1 est le plus petit ordinal non dénombrable.

Les cardinaux correspondants à ω et ω_1 sont $\aleph_0$ et $\aleph_1$ respectivement.

A l'aide de l'axiome du choix, on démontre que la relation d'ordre sur les cardinaux est un bon ordre.

On a $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$ par définition de $\aleph_1$.

L'hypothèse du continu est $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$.

En 1963, COHEN a démontré que cet énoncé est indépendant des axiomes de la théorie des ensembles (ZF + AC). On peut donc l'accepter ou le rejeter.

Cardinal d'un langage L : c'est le cardinal de l'ensemble des formules de L.

Cardinal régulier : un cardinal α est régulier si toute union d'une famille de cardinal strictement inférieur à α, d'ensembles de cardinaux strictement inférieurs à α, est de cardinal strictement inférieur à 2.

Si α est un cardinal, α^+ désigne le cardinal régulier successeur de α.

Enoncé : C'est une formule fermée (sans variable libre).

Formule consistante avec une théorie : une formule $\varphi(x)$ est consistante avec une théorie T, s'il existe un modèle M de T qui réalise φ .

Un ensemble de formules S est consistant avec T, si pour tout $s_1,\dots,s_n \in S$, la formule $s_1 \wedge \dots \wedge s_n$ est consistante avec T.

Structure consistante avec une théorie : soit T une théorie et soit M une structure du langage de T, on dit que M est consistante avec T, si M est une sous-structure d'un modèle de T.

La classe des structures consistantes avec T sera notée Σ_T.

Partie universelle d'une théorie T : c'est l'ensemble des énoncés universels définis dans T et déductibles de T ; elle sera notée $T_\forall$.

Théorie universelle (resp. universelle-existentielle) : une théorie T est universelle (resp. universelle-existentielle) si T est axiomatisable par des énoncés universels (resp. universel-existentiels).

Une théorie est universelle ssi chaque sous-structure d'un modèle de T est un modèle de T (Lös-Tarski).

Une structure est consistante avec une théorie T ssi elle est consistante avec sa partie universelle $T_\forall$ i.e. $\Sigma_T = \Sigma_{T_\forall}$ (Lös-Tarski).

Equivalence élémentaire : Soient M_1 et M_2 deux structures d'un langage L. On dit que M_1 et M_2 sont élémentairement équivalentes, si tout énoncé qui est vrai dans M_1 est vrai dans M_2 et vice-versa.

On note $M_1 \equiv_L M_2$, ou s'il n'y a pas de confusion possible, $M_1 \equiv M_2$.

Plongement élémentaire : soient M_1 et M_2 deux structures d'un langage L, on dit que :

$$f : M_1 \rightarrowtail M_2$$

est un plongement élémentaire, si pour toute formule $\psi(v_1,\dots,v_n)$ de L et pour tous $a_1,\dots,a_n \in M_1$ $M_1 \models \psi(a_1,\dots,a_n)$ ssi $M_2 \models \psi(f(a_1),\dots,f(a_n))$.

Si $M_1 \subset M_2$ et si l'injection canonique est un plongement élémentaire, on note $M_1 < M_2$ et on dit que M_1 est une sous-structure élémentaire de M_2, ou que M_2 est une extension élémentaire de M_1.

Diagramme : Le diagramme $D(M)$ d'une structure M pour le langage L, est l'ensemble des énoncés basiques de $L(M)$ qui sont vrais dans M.

Théorie complète d'une structure M *de* L, est l'ensemble des énoncés de L qui sont vrais dans M. On la note Th M.

Théorie modèle-consistante : une théorie T_1 est modèle-consistante relative à une théorie T_2, si tout modèle de T_2 peut se plonger dans un modèle de T_1.

Théories mutuellement modèle-consistantes : soient T_1 et T_2 deux théories d'un même langage L. On dit que T_1 et T_2 sont mutuellement modèle-consistantes (en abrégé m.m.c.), si T_1 est modèle-consistante relative à T_2 et vice-versa.

<u>*Théorie complète*</u> : une théorie T d'un langage L est complète, si pour tous modèles M_1 et M_2 de T, on a $M_1 \equiv M_2$.

<u>*Propriété d'immersion*</u> (*P.I.*) : une théorie T possède la propriété d'immersion (P.I.), si deux modèles quelconques M_1 et M_2 de T, peuvent être plongés par des homomorphismes injectifs dans un modèle M de T.

<u>*Propriété d'Amalgamation*</u> (*P.A.*) : une théorie T possède la propriété d'amalgamation, si pour tous modèles M_1 et M_2 de T qui sont extensions d'un modèle M de T, il existe des plongements de M_1 et M_2 dans un modèle M' de T tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 \arrow[dr] & \\
M \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\circlearrowright"] & & M' \\
 & M_2 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

<u>*Produit réduit d'ensembles suivant un filtre*</u> : soit I un ensemble et soit F un filtre sur I. Soit A_i, $i \in I$ une famille de structures de L.

On définit une relation d'équivalence sur

$\prod_{i \in I} A_i$: $(a_i) \sim (b_i)$ ssi $\{i \in I \mid a_i = b_i\} \in F$.

$\prod_{i\in I} A_{i/\sim}$ sera le produit réduit, on le notera $\prod_{i\in I} A_{i/F}$. C'est une structure du langage L.

Ultraproduit : si F est un ultrafiltre sur I, le produit réduit $\prod_{i\in I} A_{i/F}$ sera appelé ultraproduit.

Si tous les A_i, $i \in I$ sont égaux, $A_i = A$ pour tout $i \in I$, l'ultraproduit $\prod_{i\in I} A_{i/F}$ sera appelé ultrapuissance et noté tout simplement A^F.

L'application canonique : Δ : $A \longrightarrow A^F$

$$a \longmapsto cl(a,a,\dots)$$

est un plongement élémentaire.

Relation définissable : soient A une structure et R une relation n-aire sur A. On dit que R est une relation définissable sur A, s'il existe une formule $\varphi(v_1,\dots,v_n)$ dans le langage de Th A telle que pour tout $a_1,\dots,a_n \in A$, on a :

$$R(a_1,\dots,a_n) \quad \text{ssi} \quad A \models \varphi(a_1,\dots,a_n).$$

Relation connexe (resp. asymétrique) : soit M une structure et soit X un sous-ensemble de M. Une relation n-aire R définie sur M est connexe (resp. asymétrique) sur X, si pour tout $x_1,\dots,x_n \in X$, il il existe une permutation π de $\{1,2,\dots,n\}$ telle que $R(x_{\pi(1)},\dots,x_{\pi(n)})$ soit vraie (resp. ne soit pas vraie) dans M.

Modèle premier : un modèle M d'une théorie T est un modèle premier, si M se plonge dans tout modèle de T.

Théorie α-catégorique : une théorie du premier ordre T est α-catégorique, où α est un cardinal infini, si T a exactement un type d'isomorphisme de modèles de cardinal α.

Classe élémentaire (de structures) : soit $\mathfrak{M}$ une classe de structures d'un langage L. On dit que $\mathfrak{M}$ est élémentaire au sens large, s'il existe un ensemble d'énoncés Σ de L, tel que, pour toute structure M de L : $M \models \Sigma$ ssi $M \in \mathfrak{M}$.

. $\mathfrak{M}$ est élémentaire au sens large ssi $\mathfrak{M}$ est close par ultra-produits et équivalences élémentaires.

Théorème descendant de Löwenheim-Skolem-Tarski : soient M un modèle d'une théorie T dans un langage L , $X \subset M$ un sous-ensemble de M et α un cardinal infini tq $\alpha \geqslant \text{card } L$ et $\text{card } X \leqslant \alpha \leqslant \text{card } M$. Alors M a un sous-modèle N tq $X \subset N \prec M$ et $\text{card } N = \alpha$.

Théorème ascendant de Löwenheim-Skolem-Tarski : soit M une structure infinie d'un langage L. Alors pour tout cardinal λ tq $\lambda \geqslant \text{Sup}(\text{card } L, \text{card } M)$, M a une extension élémentaire M^* tq $\text{card } M^* = \lambda$.

CHAPITRE I

INTRODUCTION A LA GEOMETRIE ALGEBRIQUE

PRELIMINAIRES

(1.1) - *Quelques concepts de géométrie algébrique.*

(1.1.1).- Remarque : La géométrie algébrique classique étudie les solutions d'équations polynomiales sur un corps K :

$$* \qquad S : f_i(x_1,\dots,x_n) = 0, \qquad i = 1,\dots,p.$$

L'exemple de l'équation $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$ sur $\mathbb{R}$, montre la nécessité de rechercher les solutions pas seulement dans K, mais dans les corps extensions de K (et même les K-algèbres, d'après Cartier et Grothendieck).

Il ne paraît pas suffisant, au premier abord, de considérer une clôture algébrique de K, puisque si $(x_1,\dots,x_n)$ est une solution, les x_i peuvent ne pas être algébriques sur K. Par contre, si K^* est un domaine universel sur K, c'est-à-dire un corps algébriquement clos de degré de transcendance infini sur K, alors on est assuré de l'existence de tous les types de solutions dans K^*. On a, en effet, la proposition suivante.

(*1.1.2*).- *Proposition* : Pour toute extension, $E = K(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ de type fini sur K, il existe un K-plongement : $E \rightarrowtail K^*$.

Démonstration : voir Artin [1].

(*1.1.3*).- *Remarque* : Il est bien connu (théorème de la base finie de Hilbert), qu'il est équivalent de considérer les systèmes finis d'équations polynomiales (du type *) et les idéaux de $K[X_1,\ldots,X_n]$.

(*1.1.4.*).- *Définitions* :

Soit $K \hookrightarrow L$ une extension de corps. On note :

$V_L(f_1,\ldots,f_p) = \{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in L^n / f_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = 0, \quad i = 1,\ldots,p\}$.

Et si $I = (f_1,\ldots,f_p)$ est l'idéal engendré par les f_i, on notera $V_L(I) = V_L(f_1,\ldots,f_p)$. Et si aucune confusion n'est à craindre, on notera tout simplement V_L ; et on dit que V_L est un sous-ensemble algébrique de L^n défini sur K.

. Un élément de V_L est dit rationnel (resp. algébrique) si les α_i, $i = 1,\ldots,n$ sont dans K (resp. dans $\bar{K}$, où $\bar{K}$ désigne une clôture algébrique de K).

(*1.1.5*).- *Résultat* [1] : Soit V_L^o l'ensemble des éléments algébriques de V_L. On montre que : V_L^o détermine V_L de la manière suivante :

Soit $f \in K[X_1,\ldots,X_n]$ tel que $f(V_L^o) = \{0\}$, alors $f(V_L) = \{0\}$, et, par suite, (théorème des zéros), $f \in \text{rad } I$, avec $I = (f_1,\ldots,f_p)$.

Ce théorème des zéros joue un rôle majeur en Géométrie algébrique, mais il a été aussi un outil puissant dans le développement de la théorie des modèles.

(1.2) - *Formulation du théorème des zéros en théorie des modèles.*

(1.2.1).- *Théorème des zéros de Hilbert ou Nullstellensatz (1er énoncé).*

Soit K un corps commutatif a.c. et soient $f, f_1, \ldots, f_p \in K[X_1, \ldots, X_n]$. Soit $I = (f_1, \ldots, f_p)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f s'annule sur $V_K(I)$.

(ii) $f \in \operatorname{rad} I$.

Démonstration : *voir* [2] (page 66, Prop. 2 (iv)).

(1.2.2).- *Remarques* [23].

Le premier énoncé (i) s'exprime :

$$(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\left[(f_1(x_1,\ldots,x_n) = 0) \wedge \ldots \wedge (f_p(x_1,\ldots,x_n) = 0) \longrightarrow f(x_1,\ldots,x_n) = 0\right].$$

Le deuxième énoncé (ii), dit qu'il existe un entier $\ell \in \mathbb{N}$ et des polynômes $g_1, \ldots, g_p \in K[X_1, \ldots, X_n]$ tq $f^{\ell} = \sum_{i=1}^{p} g_i f_i$.

On voit que (i) peut être formulé dans le langage du premier ordre des corps. Cependant, il n'est pas possible de le faire pour (ii), puisqu'on ne peut pas quantitifer sur les entiers. Mais Robinson a montré que l'on peut fixer des majorants à ℓ et aux degrés des polynômes g_i, $i = 1, \ldots, p$ et qu'alors (ii) peut être formulé dans le langage du premier ordre des corps.

On va étudier dans ce qui sait des variantes du théorème des zéros et voir leurs généralisations à la théorie des modèles.

(1.2.3).- *Lemme* : Soit K un corps commutatif et soient $f_1,\dots,f_p \in K[X_1,\dots,X_n]$ et $I = (f_1,\dots,f_p)$.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe des polynômes $g_1,\dots,g_p \in K[X_1,\dots,X_n]$ tq $1 = g_1 f_1 + \dots + g_p f_p$ (ce qui revient à dire que $1 \in I$) ;

(ii) le système d'équations suivant :

$$S \begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_p(x_1,\dots,x_n) = 0 \end{cases}$$

ne possède aucune solution dans aucune extension K' de K.

Démonstration :

. non (ii) $\rightarrow$ non (i) : en effet, supposons :

$K \rightarrowtail K'$ et soit $\bar{\alpha} \in K'^n$ une solution de S. Alors tout polynôme de I s'annule en $\bar{\alpha}$, donc $1 \notin I$.

. non (i) $\rightarrow$ non (ii) : supposons que $1 \notin I$; soit M un idéal propre maximal contenant I. $K[X_1,\dots,X_n]/_M$ est un corps extension de K. Soit x_i l'image de X_i dans $K[X_1,\dots,X_n]/_M$, $i = 1,\dots,n$. On a alors $f_j(x_1,\dots,x_n) = 0$ dans $K' = K[X_1,\dots,X_n]_{/M}$, pour $j = 1,\dots,p$; $(x_1,\dots,x_n) \in K'^n$ est alors une solution de S.

c.q.f.d.

(1.2.4).- *Théorème* (*Nullstellensatz faible*).

Soient K un corps commutatif a.c., $f_1,\dots,f_p$ des éléments de $K[X_1,\dots,X_n]$ et $I = (f_1,\dots,f_p)$.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $1 \notin I$;

(ii) il existe un corps K' extension de K et une solution de S dans K' ;

(iii) il existe une solution de S dans K.

Démonstration :

(i) $\leftrightarrow$ (ii) d'après (1 - 2 - 3) ;

(i) $\leftrightarrow$ (iii) : il suffit de prendre $f = 1$ dans le théorème (1 - 2 - 1).

(1.2.5).- Remarque : L'équivalence (ii) $\leftrightarrow$ (iii) montre que les corps a.c. vérifient une propriété de transfert.

Ce principe de transfert est un cas particulier du "Principe de Lefschetz", bien connu en Géométrie algébrique : "tout ce qu'on peut faire pour le corps $\mathbb{C}$ des complexes, peut être fait pour tout corps a.c. de caractéristique zéro".

Il est clair qu'on peut envisager des énoncés plus généraux que des systèmes d'équations et étendre ce principe dans des langages multi-sortes (cf. Eklof, [5]). On peut aussi bien préciser ce principe si on travaille dans un langage du premier ordre à une sorte.

(1.2.6).- Définitions : Soit L un langage du premier ordre et soit φ une formule de L :

- *formule basique* : On dit que φ est une formule basique, si elle s'exprime sous la forme de conjonctions et disjonctions de formules atomiques et de négations de formules atomiques ;

- *formule existentielle positive* : on dit que φ est existentielle positive, si elle est de la forme : $\varphi = (\exists x_1)\ldots(\exists x_n)\Psi(x_1,\ldots,x_n)$, où Ψ est une conjonction ou disjonction de formules atomiques.

- *formule existentielle* : on dit que φ est une formule existentielle, si elle est de la forme :
$\varphi = (\exists x_1)\ldots(\exists x_n)\Psi(x_1,\ldots,x_n)$, où Ψ est une formule basique.

(1.2.7).- *Définitions* : Soit T une théorie du premier ordre et soit Σ_T la classe des sous-structures de modèles de T. Soit $M \subset N$ un plongement entre éléments de Σ_T.

On dit que M est variété complète dans N et on note $M <_1^+ N$ (resp. M est existentiellement close dans N, et on note $M <_1 N$), si toute formule existentielle positive (resp. toute formule existentielle), à paramètres dans M, vraie dans N, est vraie dans M.

On dit que M est variété complète (resp. existentiellement close), si tout plongement, $M \subset N$ est $<_1^+$ (resp. $<_1$).

On utilisera les abréviations v.c. pour variété complète et e.c. pour existentiellement clos.

(1.2.8).- *Remarques* :

a) Les deux notions e.c. et v.c. coïncident dans la théorie des corps, car une inéquation $(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)P(x_1,\ldots,x_n) \neq 0$ est équivalente à une équation : $(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)(\exists y)$: $yP(x_1,\ldots,x_n) - 1 = 0$.

b) De même dans la théorie des corps, on a : v.c. ssi a.c. C'est ce qui est exprimé par le théorème des zéros ; nous allons en donner une démonstration algébrique (cf. Artin, [1]) :

Soit $K \hookrightarrow K'$ un plongement de corps a.c. et soit $\bar{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ une solution de S dans K', où S est un système d'équations polynomiales à coefficients dans K. On extrait de $\bar{x}$ une base de transcendance $x_1,\ldots,x_r$ (avec $r < n$) de $K(\bar{x})$ sur K. Chaque x_i, $i = r+1,\ldots,n$ satifait une équation du type :

$$g_m(x_1,\ldots,x_r)x_i^m + \ldots + g_o(x_1,\ldots,x_r) = 0$$

car les x_i, $i = r+1,\ldots,n$ sont algébriques sur $K(x_1,\ldots,x_r)$. On choisit $x'_1,\ldots,x'_r$ dans K tq les coefficients $g_m(x'_1,\ldots,x'_r) \neq 0$ (c'est possible car K a.c. est infini). On considère le K-homomorphisme :

$$\psi : K[x_1,\ldots,x_r] \longrightarrow K[x'_1,\ldots,x'_r]$$

défini par $\psi(x_i) = x'_i$, $i = 1,\ldots,r$; et on l'étend à une place $\bar{\psi}$ de $K(\bar{x}) \to \bar{K}$, (en utilisant le lemme de Zorn).

Alors $\bar{\psi}$ n'envoie aucun élément x_i à l'infini. On pose $x'_i = \bar{\psi}(x_i)$, $i = 1,\ldots,n$. $(x'_1,\ldots,x'_n)$ est alors une solution de S dans K.

CHAPITRE II

UN PRINCIPE DE LEFSCHETZ GENERALISE

On étend à d'autres théories les résultats établis pour les corps dans le chapitre I.

(2.1) - *Modèles existentiellement clos. Un théorème de P. Lindström.*

L sera un langage finitaire du premier ordre.

(2.1.1) - *Définition* (*théorie inductive*).

Soit T une théorie de L. On dira que T est inductive si toute union d'une chaîne croissante de modèles de T est un modèle de T (i.e. la classe des modèles de T est close par limite inductive filtrante).

(2.1.2) - *Proposition* : Soit T une théorie inductive. Alors pour chaque modèle M de T, il existe un plongement $M \hookrightarrow M^*$, où M^* est un modèle e.c. de T de cardinal égal à Sup(card L, card M).

Démonstration : Elle est très classique ; elle procède en deux étapes :

• <u>1ère étape</u> : on bien ordonne l'ensemble $(\psi_\beta)_\beta$ des formules existentielles définies sur M avec un ordre de type α, où $\alpha = \mathrm{Sup}(\mathrm{card}\ M, \mathrm{card}\ L)$.

On construit une chaîne de structures de L :

$$M \rightarrowtail M_o \rightarrowtail M_1 \rightarrowtail M_2 \rightarrowtail \dots \rightarrowtail M_\beta \rightarrowtail \dots$$

pour $\beta < \alpha$, de la manière suivante :

1) Si ψ_o a une solution $\bar{m}$ dans une extension de M, on pose $M_o = M(\bar{m})$ = la structure engendrée par $M \cup \{\bar{m}\}$ dans cette extension ; sinon on pose $M_o = M$.

2) Si β a un prédécesseur $(\beta - 1)$ et si on a construit $M_{\beta-1}$, on considère la formule ψ_β et on utilise le procédé précédent pour définir M_β.

3) Si β est un ordinal limite, on pose $M'_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} M_\gamma$, on considère γ la formule ψ_β et on utilise le même procédé pour définir M_β.

Finalement, on considère la limite inductive $K(M) = \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$. Elle a la propriété que pour toute formule ψ existentielle définie dans M, il existe $\beta < \alpha$ tel que $\psi = \psi_\beta$ et alors si ψ a une solution dans une extension de M, alors ψ a une solution dans $K(M)$.

• <u>2ème étape</u> : on itère la construction de $K(M)$:

$$M \rightarrowtail K(M) \rightarrowtail \dots \rightarrowtail K^n(M) \rightarrowtail \dots$$

où $K^n(M) = K(K^{n-1}(M))$ et on pose $M^* = \bigcup_{n\geq 0} K^n(M)$.

Alors M^* a la propriété voulue.

(2.1.3) - *Exemples.*

La théorie des groupes, la théorie des corps ordonnés, la théorie des corps différentiels de caractéristique zéro, possèdent suffisamment de modèles e.c. On étudiera quelques unes de leurs propriétés dans les chapitres suivants.

(2.1.4) - *Remarque* :

On sait que la théorie des corps a.c. de même caractéristique est ω_1-catégorique, c'est-à-dire deux modèles de même cardinal $\aleph_1$ sont isomorphes :

(2.1.5) - *Théorème de P. Lindström* (cf. [3], page 114).

Soit T une théorie inductive, qui n'a que des modèles infinis. Si T est α-catégorique, avec $\alpha \geqslant \text{card } L$, alors tout modèle de T est e.c.

Nous allons en donner une preuve assez simple.

Démonstration :

Soit M un modèle infini de T. Par le théorème ascendant de Löwenheïm-Skolem-Tarski, M peut être plongé élémentairement dans un modèle N de T, de cardinal $\geqslant \alpha$. On peut alors se restreindre au cas où $\text{Card } M \geqslant \alpha$, car toute sous-structure élémentaire d'un modèle e.c. est e.c.

Soit alors $\text{card } M \geqslant \alpha$ et soit φ une formule existentielle définie dans M et vraie dans une extension M_1 de M. Par le théorème descendant de Löwenheim-Skolem-Tarski, il existe une sous-structure élémentaire M' de M de cardinal α tq φ soit définie dans M'. M' est alors e.c. : en effet, M' peut être plongé dans un modèle e.c. M'' de cardinal α ; d'après la catégoricité on a alors $M' \simeq M''$, et donc M' est e.c.

Par suite, on a $M' \models \psi$ (car $M' \subset M_1$ et M' est e.c.). D'où $M \models \psi$, car ψ existentielle est préservée par extension. M est donc e.c.

(2.1.6) - *Exemples de théories vérifiant le théorème de Lindström* (cf. [3], page 113).

• la théorie des corps a.c. de caractéristique fixée (elle est ω_1-catégorique) ;

• la théorie des corps différentiellement clos de caractéristique zéro (elle est ω_1-catégorique nous le verrons par la suite) ;

• la théorie des groupes abéliens, divisibles, sans torsion (elle est α-catégorique pour tout $\alpha > \aleph_0$) ;

• la théorie des groupes abéliens infinis, dont tout élément est d'ordre p, avec p premier (elle est α-catégorique pour tout $\alpha \geqslant \aleph_0$) ;

• la théorie des espaces vectoriels sur un corps fini, (elle est α-catégorique pour tout $\alpha \geqslant \aleph_0$) ;

• la théorie de l'ordre total dense, sans éléments extrêmes (elle est ω-catégorique).

(2.2) - *La théorie des corps a.c. est modèle-complète.*

(2.2.1) - *Remarque* :

Le principe de Lefschetz devrait au moins donner que tout mono : $K \rightarrowtail L$ où K et L sont des corps a.c. est élémentaire.

(2.2.2) - *Théorème (Test de Robinson)* [23].

Soit T une théorie de L. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tous modèles M, $M' \models T$, si $M \subset M'$, alors $M <_1 M'$;

(ii) pour tous modèles M, $M' \models T$, si $M \subset M'$, alors $M < M'$.

Démonstration :

Elle est très générale et s'applique dans le cadre du calcul des prédicats ; nous renvoyons à l'auteur ([23], page 92).

(2.2.3) - *Définition* : Une théorie T est modèle-complète, si elle satisfait à la condition (ii) du Test de Robinson, c'est-à-dire si chaque monomorphisme entre deux modèles de T est élémentaire.

D'après le test de Robinson, il est équivalent de dire que T est modèle-complète si chaque modèle de T est e.c.

(2.2.4) - *Théorème* : La théorie des corps a.c. de caractéristique fixée est modèle-complète.

D'après ce qui précède, il suffit de prouver que tout modèle est e.c.

- *1ère preuve* : C'est un corollaire de (2.1.5) et du fait que cette théorie est ω_1-catégorique.

- *2ème preuve* : *Preuve directe* [23] : elle est inspirée par celle d'Artin au chapitre précédent (1.2.8,b). Elle démontre en fait que la théorie des corps a.c. est modèle-complète.

Démonstration :

Soient T la théorie des corps a.c. et $K \subset K'$ un mono de corps a.c. Si ψ est une formule existentielle définie dans K et tq $K' \models \psi(\bar{a})$, avec $\bar{a}$ dans K, il faut montrer que $K \models \psi(\bar{a})$ (d'après le test de Robinson).

Cependant, comme ψ est existentielle, elle s'écrit :
$\psi = (\exists x_1) \ldots (\exists x_n)\psi_o$, où ψ_o est sans quantificateurs. Alors si $K' \models (\exists x_1) \ldots (\exists x_n)\psi_o(\bar{a})$, il existe $\bar{b}$ dans K' tq $K' \models \psi_o(\bar{b},\bar{a})$.

Par ailleurs, on a : $K \subset K(\bar{b}) \subset \overline{K(\bar{b})} \subset K'$.
On a alors $\overline{K(\bar{b})} \models \psi_o(\bar{b},\bar{a})$, car ψ_o sans quantificateur est préservée par sous-structure. On peut alors construire la chaîne de corps suivante :

$$K \subset K(b_1) \subset \overline{K(b_1)} \subset \overline{K(b_1)}(b_2) \subset \overline{K(b_1,b_2)} \subset \ldots$$
$$\ldots \subset \overline{K(b_1,\ldots,b_{n-1})} \subset \overline{K(b_1,\ldots,b_{n-1})}(b_n) \subset \overline{K(b_1,\ldots,b_n)}$$

et se limiter à considérer le cas particulier suivant :

$$K \subset K(b) \subset \overline{K(b)}, \quad \text{avec } b \notin K \text{ et } b \text{ transcendant sur } K \ ;$$

et montrer que si $\overline{K(b)} \models \psi(\bar{a})$, avec $\bar{a}$ dans K et ψ existentielle, alors $K \models \psi(\bar{a})$. Supposons donc que $\overline{K(b)} \models \psi(\bar{a})$.

Tout corps a.c. K'' qui est une extension propre de K, contient un sous-corps K-isomorphe à $\overline{K(b)}$; en effet, si $\alpha \in K'' - K$, on a :

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[dr, hook] & K(b) \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, "\wr"] & \overline{K(b)} \arrow[d, "\wr"] & \\
 & K(\alpha) \arrow[r, phantom, "\subset"] & \overline{K(\alpha)} \arrow[r, phantom, "\subset"] & K''.
\end{tikzcd}$$

Et par suite $\overline{K(\alpha)} \models \psi(\bar{a})$, car tout isomorphisme est élémentaire. D'où $K'' \models \psi(\bar{a})$, car toute formule existentielle est préservée par extension.

A présent, soit c une nouvelle constante qu'on adjoint au langage L. On considère un ensemble de formules H, défini de la manière suivante :

$$H = \{P(c) \neq 0 \mid P \text{ non nul}, \ P \in K[X]\}.$$

Posons $T'' = T \cup D(K) \cup H$, où $D(K)$ est le diagramme de K. T'' est consistante car $K(\alpha)$ est un modèle de T''. On a alors : $T'' \vdash \varphi(\bar{a})$.

Par le théorème de compacité, il existe alors $H_o \subset H$, H_o fini tq $T \cup D(K) \cup H_o \vdash \varphi(\bar{a})$. $H_o(c) = \{P_i(c) \neq 0, \quad i = 1,\dots,\ell\}$; H_o dépend de c (car tous les éléments autres que c qui interviennent dans H_o sont dans K). On pose :

$$\Psi_o(x) = (P_1(x) \neq 0) \wedge \dots \wedge (P_\ell(x) \neq 0).$$

On a alors : $T \cup D(K) \vdash \Psi_o(c) \to \varphi(\bar{a})$, et par suite : $T \cup D(K) \vdash ((\exists x)\Psi_o(x)) \to \varphi(\bar{a})$. Or K est modèle de T et de $D(K)$. Mais comme K a.c. est infini, on a aussi $K \models \exists x \Psi_o(x)$. D'où il existe $d \in K$ tq $K \models \varphi(d,\bar{a})$.

c.q.f.d.

(2.3) - <u>*Exemples d'autres théories.*</u>

(2.3.1) - <u>*Définition*</u> (<u>*théorie modèle-complétion*</u>).

Soient T et T^* deux théories d'un langage L. On dit que T^* est une théorie-modèle-complétion de T, ou tout simplement T^* est modèle-complétion de T, si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) T et T^* sont mutuellement modèle-consistantes ;

(ii) T^* est modèle-complète ;

(iii) T^* est modèle-complète relative à T, i.e. pour tout modèle M de T, $T^* \cup D(M)$ est complète dans $L(M)$.

(2.3.2) - <u>*Définition*</u> (<u>*théorie modèle-compagnon d'une théorie donnée*</u>).

Soient T et T^* deux théories d'un même langage L. On dit que

que T^* est une théorie modèle-compagnon de T, ou tout simplement T^* est modèle-compagnon de T, si les conditions (i) et (ii) de (2.3.1) sont satisfaites.

(2.3.3) - *Remarques* :

a) Robinson montre en 1963, qu'une théorie T a au plus un modèle-compagnon ;

b) la modèle-complètion d'une théorie T, si elle existe, est le modèle-compagnon de T [23] ;

c) Réciproquement, Eli-Bers a montré que (cf. [7]) :

• si T^* est le modèle-compagnon de T, où T est une théorie universelle ; alors T^* est la modèle-complétion de T ssi T^* admet l'élimination des quantificateurs ;

• si T^* est le modèle-compagnon de T ; alors T^* est la modèle-complétion de T ssi T possède la propriété d'amalgamation.

(2.3.4) - *Théorème* [7].- Si une théorie T a un modèle-compagnon T^*, alors les modèles de T^* sont exactement les modèles e.c. de T.

Démonstration :

Soit $M \models T^*$. On le plonge dans un modèle M' e.c. de T et on plonge M' dans un modèle N de T^* ; on a :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail] \arrow[dr, tail, "\wedge"'] & M' \models T \arrow[d, tail, "\wedge"] \\ & N \models T^* . \end{tikzcd}$$

Le plongement $M \rightarrowtail M'$ est alors élémentaire ; d'où M est un modèle e.c. de T.

Réciproque : Soit M un modèle e.c. de T. Comme T^* est modèle-complète, elle est inductive ; il suffit alors de prouver que M est un modèle des théorèmes $\forall\exists$ de T^*. Soit alors φ un théorème $\forall\exists$ de T^*, il s'écrit :

$$\varphi = (\exists x_1)\ldots(\exists x_m)(\exists y_1)\ldots(\exists y_n)\Psi(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)$$

où Ψ est sans quantificateur.

Puisque T^* est modèle-consistante relativement à T, on peut plonger M dans un modèle N de T^*. Alors, pour tout $a_1,\ldots,a_m \in M$, l'énoncé existentiel : $\theta = (\exists y_1)\ldots(\exists y_n)\Psi(a_1,\ldots,a_m,y_1,\ldots,y_n)$ est défini dans M et est vrai dans N ; θ est donc vrai dans M, d'où $M \models \varphi$.

c.q.f.d.

(2.3.5) - *Remarque historique* [12], [11].

On fait ainsi la jonction entre la logique de l'Est et la logique de l'Ouest. Alors que la logique de l'Est fait référence à une théorie de Jónsson (c'est-à-dire une théorie inductive T qui possède la propriété d'immersion et tq $T_\forall$ possède la propriété d'amalgamation) et où les morphismes sont les plongements, la logique de l'Ouest considère à la place une théorie complète et les morphismes sont des plongements élémentaires.

(2.3.6) - *Remarques*.

Nous allons à présent donner plusieurs exemples de théories dont on connait déjà la théorie modèle-complétion ou la théorie modèle-compagnon.

On généralise ainsi les concepts précédents de la théorie des corps à la théorie des modèles. Et, en retour, les exemples déjà développés sur les corps apparaîtront comme des cas particuliers de ces derniers résultats. Les exemples relatifs aux corps différentiels seront traités au chapitre suivant.

On désignera par :

T = la théorie donné ;

T^* = la modèle-complétion ou le modèle-compagnon de T ; et

$\mathcal{E}_T$ = la classe des modèles e.c. de T ;

(2.3.7) - *Exemple 1* :

T = la théorie des corps ;

T^* = la théorie des corps a.c. T^* est modèle-complétion de T, car T^* est modèle-complète et admet l'élimination des quantificateurs (2.3.3,c) ;

$\mathcal{E}_T$ = la classe des corps a.c. (2.3.4).

(2.3.8) - *Définition* : Dans le langage des corps ordonnés, on dira qu'un corps K est réel clos, si K satisfait les axiomes de corps, les axiomes de l'ordre total compatible et les axiomes suivants :

- $(\forall x)(\exists y)\quad (0 < x \rightarrow x = y.y)$
- pour tout $n \in N^*$ impair : $(\forall x_1) \ldots (\forall x_n)(\exists y)$:

$$y^n + x_1 y^{n-1} + \ldots + x_n = 0.$$

(2.3.9) - *Définition* : Dans le langage de la théorie des corps, on dit qu'un corps K est un corps réel formel, si K satisfait les axiomes de corps et les axiomes suivants, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_n)(x_1^2 + \ldots + x_n^2 + 1 \neq 0).$$

(2.3.10) - *Exemple 2* [27] :

T = la théorie des corps ordonnés ;

T^* = la théorie des corps réels clos. T^* est modèle complétion de T, car T est une théorie universelle, T^* est modèle-complète et T^* admet l'élimination des quantificateurs ;

$\mathcal{E}_T$ = la classe des corps réels clos.

(2.3.11) - *Exemple 3* :

T = la théorie des corps réels formels ;

T^* = la théorie des corps réels formels clos. T^* est le modèle-compagnon de T, mais n'est pas modèle-complétion car T^* n'admet pas l'élimination des quantificateurs (cf. [7]) ;

C'est un exemple de théorie modèle-complète qui n'admet pas l'élimination des quantificateurs ;

$\mathcal{E}_T$ = la classe des corps réels formels clos.

(2.3.12) - *Exemple 4* [6], [7] :

T = la théorie des groupes abéliens ;

T^* = la théorie des groupes abéliens, divisibles, admettant pour chaque entier premier p, une infinité d'éléments d'ordre p ;

$\mathcal{E}_T$ = la classe des groupes abéliens, divisibles, admettant pour chaque entier premier p, une infinité d'éléments d'ordre p.

$$G \in \mathcal{E}_T \text{ ssi } G \simeq \left(\bigoplus_p Z(p^\infty)^{(k_p)} \right) \oplus \mathbb{Q}^{(k)}$$

où $k_p \geqslant \aleph_0$, $k \geqslant 0$ et $Z(p^\infty)$ est le groupe multiplicatif de toutes les racines p^n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$, où p est premier fixé et $n \in \mathbb{N}$ (page 256, § 2, [7]).

(2.3.13) - *Exemple* 5 [26] :

T = la théorie des modules sur un anneau cohérent fixé A ;

T^* = la théorie complète des gros modules absolument purs ;

E_T = la classe des gros modules absolument purs.

(2.3.14) - *Exemple* 6 :

T = la théorie de l'ordre total ;

T^* = la théorie de l'ordre total dense, sans éléments extrêmes [27] ;

E_T = la classe des ensembles totalement ordonnés denses, sans éléments extrêmes.

(2.3.15) - *Remarques* :

a) les théories suivantes n'ont pas de modèle-compagnon (la classe de leurs modèles e.c. n'étant pas close par ultraproduit, n'est pas élémentaire au sens large) [4], [7] :

- la théorie des groupes non abéliens ;
- la théorie des anneaux commutatifs avec élément unité ;
- la théorie des monoïdes (i.e. demi-groupes avec élément neutre spécifié e.).

b) la théorie suivante ne possède pas de modèle e.c. :

T = la théorie des demi-groupes avec élément neutre non spécifié, dont les axiomes sont :

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z) \qquad (xy)z = x(yz)$$

$$(\exists x)(\forall y) \qquad xy = yx = y.$$

En effet, puisque tout demi-groupe G peut être plongé dans un demi-groupe G', dont l'élément neutre est différent de celui de G alors T n'a pas de modèle e.c.

CHAPITRE III

CORPS DIFFERENTIEL

La théorie des corps différentiels est due en grande partie aux travaux de Ritt, Seidenberg, Kolchin et Robinson.

Après avoir donné quelques notions élémentaires sur les corps différentiels, pour une lecture plus aisée, nous démontrerons un théorème de caractérisation des types d'isomorphisme qui précise les travaux de Wood et qui permet de comparer les notions de corps contraintement clos, différentiellement clos et existentiellement clos.

(3.1) - *Corps différentiels* - *Généralités.*

(3.1.1) - *Définitions.*- Un anneau commutatif unitaire A est un anneau différentiel, s'il est muni d'une dérivation, c'est-à-dire une application $D : A \to A$, telle que :

$$(\forall x)(\forall y) \quad D(x+y) = Dx + Dy$$

$$(\forall x)(\forall y) \quad D(x.y) = (Dx).y + x.(Dy).$$

Un corps différentiel K est un corps muni d'une dérivation D, on le note (K,D).

(3.1.2) - *Définition.*- Si (K,D) est un corps différentiel, on définit l'ensemble des constantes :

$C = \{x \in K/Dx=0\}$.

(C,D) est un sous-corps différentiel de (K,D).

(3.1.3) - *<u>Définition</u>* : Un homomorphisme d'anneaux différentiels $(A,D) \to (B,D')$ est un homomorphisme d'anneaux ψ tq le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "D"'] & B \arrow[d, "D'"] \\ A \arrow[r, "\psi"] & B \end{tikzcd} \qquad D' \circ \psi = \psi \circ D$$

On le note encore $\psi : (A,D) \to (B,D')$.

(3.1.4) - *<u>Exemples</u>* :

a) $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$ pour p premier, sont des corps différentiels, munis de la dérivation nulle. Ce sont les corps différentiels premiers.

b) Si K est un corps, l'anneau $K[X]$ est un anneau différentiel, muni de la dérivation : $K[X] \to K[X]$: $P \mapsto P'$

c) le corps des fonctions méromorphes sur un domaine fixé $\mathbb{C}$ est un corps différentiel.

(3.1.5) - *<u>Définitions</u>* :

• Soit K un corps différentiel (muni de la dérivation D) ; on lui adjoint des indéterminées en nombre dénombrable $K[X_o, X_1, \ldots]$.
On prolonge D, en posant :

$$DX_o = X_1, \quad DX_1 = X_2, \ldots, DX_n = X_{n+1}, \ldots$$

On note $K\{X\} = (K[X,DX,D^2X,\ldots],D)$ et $K<X> = (K(X,DX,D^2X,\ldots),D)$. $K<X>$ est le corps des fractions de $K\{X\}$.

• Un polynôme différentiel est un élément de $K\{X\}$.

• Soit $f \in K\{X\}$ un polynôme différentiel ; le plus grand entier r tq D^rX intervienne dans f est appelé l'ordre de f.

On définit l'ordre des constantes comme étant $-\infty$.

Le degré de f est le degré en D^rX, on le note d.

Le biordre de f est le couple (r,d) ; on note biordre $f = (r,d)$.

Si biordre $f_1 = (r_1,d_1)$ et biordre $f_2 = (r_2,d_2)$ avec $f_1,f_2 \in K\{X\}$, on convient que :

$(r_1,d_1) < (r_2,d_2)$ ssi $r_1 < r_2$ ou $r_1 = r_2$ et $d_1 < d_2$. On note alors $f_1 < f_2$.

• Un idéal différentiel est un idéal stable par dérivation.

• Soit K un corps différentiel et soit $P \in K\{X\}$ de biordre (r,d). On peut écrire P sous la forme :

$P = B(D^rX)^d + C$, où $B, C \in K\{X\}$, avec ordre $B < r$ et biordre $C < (r,d)$; B est le coefficient dominant de P.

On définit le séparant de P : $S = \dfrac{\partial P}{\partial(D^rX)}$ (dérivée formelle de P, par rapport à D^rX).

• Division dans $K\{X\}$: soit $f \in K\{X\}$, $f \neq 0$, de séparant S et de coefficient dominant B.

Soit $[f]$ l'idéal différentiel engendré par f et soit $g \in K\{X\}$. Alors il existe des entiers m, n et un polynôme différentiel $h \in K\{X\}$ tq : $B^mS^ng - h \in [f]$ et $h < f$.

• Soit K un corps différentiel. Une équation différentielle est une équation de la forme : $f(x) = 0$, avec $f \varepsilon K\{X\}$. En trouver une solution dans une extension L de K, c'est trouver un élément b de L tq $f(b) = 0$.

• Soit K un corps différentiel, soit $K \subset L$ une extension et soit $b \in L$:

$K\{b\}$ est le plus petit sous-anneau différentiel de L, contenant $K \cup \{b\}$.

$K\langle b\rangle$ est le plus petit sous-corps différentiel de L, contenant $K \cup \{b\}$; c'est le corps des fractions de $K\{b\}$, et on a $K\langle b\rangle = K(b, Db, D^2b, \ldots)$.

• On dit que b est différentiel algébrique sur K, s'il existe $f(X) \in K\{X\}$, $f(X) \neq 0$ tq $f(b) = 0$.

Si b n'est pas différentiel algébrique sur K, on dit qu'il est différentiel transcendant sur K.

(3.1.6) - *Proposition* : Soit K un corps différentiel. b est différentiel algébrique sur K ssi $K\langle b\rangle$ est de degré de transcendance fini sur K.

Démonstration : voir [28], page 175.

(3.1.7) - *Corollaire* : Si b et c sont différentiels algébriques sur K, alors $b+c$, bc et $\frac{1}{b}$ avec $b \neq 0$, sont différentiels algébriques sur K.

(3.1.8) - *Définition* : Soient $K \subset L$, $f \varepsilon K\{X\}$ et $b \in L$.

On dit que b est solution générique de $f(x) = 0$ si $f(b) = 0$ et si pour tout $g \in K\{X\}$ tq ordre $g <$ ordre f, on a $g(b) \neq 0$.

(3.1.9) - *Proposition 1* (*caractéristique zéro*).

Soit K un corps différentiel. Supposons b différentiel algébrique sur K.

Il existe un polynôme différentiel $f(X) \in K\{X\}$ tq b soit solution générique de $f(x) = 0$.

Démonstration :

Il suffit de prendre f = le polynôme de biordre minimal de b.

(3.1.10) - *Proposition 2* (*caractéristique zéro*).

Soit K un corps différentiel et soit $f \in K\{X\}$ d'ordre ≥ 1. Il existe une extension différentielle de K, qui contient une solution générique u de $f(x) = 0$. Et, en plus, si f est irréductible, on a $S(u) \neq 0$, où S est le séparant de f.

Démonstration :

Soit r = ordre f et soit g un facteur irréductible de f, de même ordre et de plus bas degré en r.

On pose $L_1 = K[X_o,\ldots,X_r]/_{(g)} = K[u_o,\ldots,u_r]$

et on étend la dérivation D de K à $K(u_o,\ldots,u_r)$ en posant :

$Du_o = u_1$, $Du_1 = u_2,\ldots,Du_{r-1} = u_r$ et

Du_r = l'unique racine de :

$$g^D(u_o,\ldots,u_r) + \frac{\partial g}{\partial X_o}(u_o,\ldots,u_r)u_1 + \ldots + \frac{\partial g}{\partial X_r}(u_o,\ldots,u_r)Du_r = 0$$

$S = \dfrac{\partial g}{\partial X_r} \neq 0$ car $\deg S < \deg g$.

Alors $u = u_o$ est solution de $f(X,DX,\dots,D^rX) = 0$ et u est solution générique, car pour tout $h \in K\{X\}$ tq ordre $h <$ ordre f, on a $h(u_o) \neq 0$ car $h \notin (g)$.

Si f est irréductible, alors $g = \lambda f$, avec λ inversible, donc $S(u) \neq 0$.

c.q.f.d.

(3.1.11) - *Définition* : Soit $K \subset L$ une extension de corps différentiels et soient $\eta_1,\dots,\eta_n \in L$.

$$I_{(\eta_1,\dots,\eta_n)} = \{P \in K\{x_1,\dots,x_n\}/P(\eta_1,\dots,\eta_n) = 0\}$$

est appelé idéal de définition de $\eta_1,\dots,\eta_n$ sur K.

(3.1.12) - *Définition* : Soient deux extensions de K :

$$\begin{array}{ccccc} & & L & & \eta_1,\dots,\eta_n \in L \\ & \nearrow & & & \\ K & & & & \\ & \searrow & & & \\ & & M & & S_1,\dots,S_n \in M \end{array}$$

On dit que $(S_1,\dots,S_n)$ est une spécialisation de $(\eta_1,\dots,\eta_n)$ si $I_{(S_1,\dots,S_n)} \supset I_{(\eta_1,\dots,\eta_n)}$.

On dit que la spécialisation est générique si on a égalité :

$$I_{(S_1,\dots,S_n)} = I_{(\eta_1,\dots,\eta_n)} .$$

Il existe alors un K-isomorphisme canonique

$$K\langle S_1,\dots,S_n\rangle \longrightarrow K\langle \eta_1,\dots,\eta_n\rangle .$$

(3.1.13) - *Définition* : Soit K un corps différentiel. Une famille $(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ d'éléments d'une extension L de K est contrainte sur K, s'il existe C, $C \in K\{x_1,\ldots,x_n\}$ tq $C(\eta_1,\ldots,\eta_n) \neq 0$ et tq pour toute spécialisation $(S_1,\ldots,S_n)$ de $(\eta_1,\ldots,\eta_n)$, si $C(S_1,\ldots,S_n) \neq 0$, alors la spécialisation est générique.

C s'appelle la contrainte.

(3.1.14) - *Exemples* [14] :

a) Si η est algébrique sur K, alors η est contraint sur K, de contrainte $C = 1$.

b) e^x est contraint sur $\mathbb{C}$, de contrainte $C(x) = x \neq 0$.

(3.1.15) - *Résultats classiques* (*Kolchin* [14]).

a) Si η est contraint sur K, alors η est différentiel algébrique sur K ;

b) Si $K\langle\eta_1,\ldots,\eta_n\rangle = K\langle S_1,\ldots,S_m\rangle$ et si $(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ est contrainte sur K, alors $(S_1,\ldots,S_m)$ est contrainte sur K ;

c) Soit $K \rightarrowtail L$ une extension de corps différentiels et soit $(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ une famille d'éléments de L. Soit $C \in K\{x_1,\ldots,x_n\}$ un polynôme différentiel tq $C(\eta_1,\ldots,\eta_n) \neq 0$. Alors il existe une spécialisation $(S_1,\ldots,S_n)$ de $(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ qui est contrainte de contrainte C.

(3.1.16) - *Proposition* : Soit K un corps différentiel et soit C son corps de constantes. S'il existe un élément a non constant dans K, alors K est de dimension linéaire infinie sur C.

Démonstration :

En effet, s'il existe $a \in K - C$, a est transcendant sur C ; car sinon il vérifie une équation différentielle $f(x) = 0$, ordre $f = 0$

et $f \in C\{x\}$. On prend f = le polynôme minimal de a et on pose :

$$f(x) = x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_o \ , \quad c_i \in C, \quad i = 0,\ldots,n-1 \ .$$

On a : $0 = f(a) = a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \ldots + c_o$;

en dérivant, il vient :

$$a'\left[n\ a^{n-1} + (n-1)c_{n-1}a^{n-2} + \ldots + c_1\right] = 0.$$

Or $a' \neq 0$, car $a \in K - C$, on a donc

$$n\ a^{n-1} + (n-1)c_{n-1}a^{n-2} + \ldots + c_1 = 0,$$

équation de degré inférieur au degré de f, ce qui est faux.

(3.2) - *Corps différentiellement clos en caractéristique zéro.*

(3.2.1) - *Théorème de l'élément primitif.*

Soit K un corps différentiel. Si K contient des éléments non constants. Quels que soient $\eta_1,\ldots,\eta_n$ différentiels algébriques sur K, il existe η différentiel algébrique tel que $K<\eta_1,\ldots,\eta_n> = K<\eta>$.

Démonstration : voir [28], page 176.

(3.2.2) - *Théorème*.- Soit K un corps différentiel. Soit $\mathcal{S}$ un système défini sur K de la forme :

$$\mathcal{S} \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

avec ordre g < ordre f.

Alors il existe une extension différentielle de K, contenant une solution de ce système.

Démonstration :

On construit l'extension différentielle définie par la solution générique b de $f(x) = 0$ (d'après la proposition (3.1.10)) ; b satisfait alors le système S.

c.q.f.d.

(3.2.3) - *Définition*.- On dit qu'un corps différentiel K est différentiellement clos si tout système à coefficients dans K, de la forme :

$$S \quad \begin{cases} f(x) = 0, & \text{avec ordre } f \geq 0 \\ g(x) \neq 0 & \end{cases}$$

$$\text{avec ordre } g < \text{ordre } f$$

possède une solution dans K.

(3.2.4) - *Propriétés* :

(i) tout corps différentiellement clos est algébriquement clos ;

(ii) si K est un corps différentiellement clos, son corps de constantes C est algébriquement clos.

Démonstration :

(i) résulte de la définition en prenant $g = 1$;

(ii) il suffit de montrer que C est algébriquement clos dans K i.e. si $x \in K$ est algébrique sur C, alors $x \in C$.

Comme x est algébrique sur C, on peut considérer son polynôme minimal :

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_o = 0, \quad \text{avec} \quad a_i \in C.$$

On a alors, en dérivant :

$Dx(nx^{n-1} + \ldots + a_1) + 0 = 0.$

Or $n\,x^{n-1} + \ldots + a_1 \neq 0$, car x est de degré n, donc $Dx = 0$ et $x \in C$.

c.q.f.d.

(3.2.5) - *Proposition* : Soit K un corps différentiellement clos. Il existe $a \in K$ tq a ne soit pas une constante.

Démonstration :

On considère le système S suivant :

$$S \begin{cases} x'' = 0 \\ x' \neq 0. \end{cases}$$

S a une solution dans K.

(3.2.6) - *Théorème* : Tout corps différentiel K se plonge dans un corps différentiellement clos K^*.

Démonstration :

On considère un bon ordre sur l'ensemble des systèmes S à coefficients dans K :

$$S \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

avec ordre g < ordre f

et on procède comme pour les corps algébriquement clos [20].

(3.2.7) - *Définition* : Un corps différentiel K est contraintement clos (en abrégé c.c), si pour toute famille $(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ contrainte sur K, on a $\eta_i \in K$, $i = 1,\ldots,n$.

(3.2.8) - *Théorème* : Soit K un corps différentiel, de dimension linéaire infinie sur son corps de constantes C. Alors K est contraintement clos ssi pour tout η, η contraint sur K implique $\eta \in K$.

Démonstration :

découle de (3.2.1) et (3.1.15, b).

(3.2.9) - *Théorème* : Soit $K \longrightarrow K\langle\eta\rangle$ une extension de corps différentiels, avec η contraint sur K et soit f le polynôme non nul de biordre minimal tq $f(\eta) = 0$.

(i) Il existe une contrainte g de η tq ordre $g <$ ordre f ;

(ii) Le type d'isomorphisme sur K de $K\langle\eta\rangle$ est déterminé par le système suivant :

$$S \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \\ S(x) \neq 0 \\ B(x) \neq 0 \end{cases}$$

où S est le séparant de f, B le coefficient dominant de f et g défini comme au (i).

Autrement dit : η satisfait le système S et si ξ satisfait au système S, il existe un K-isomorphisme ψ qui envoie η sur ξ :

$$\begin{tikzcd} & K\langle\eta\rangle \arrow[dd, "\wr"', "\psi"] & \eta \arrow[dd, mapsto] \\ K \arrow[ur, tail] \arrow[dr, tail] & & \\ & K\langle\xi\rangle & \xi = \psi(\eta) \end{tikzcd}$$

Démonstration :

(i) : η est contraint sur K, donc il existe une contrainte C de η tq $C(\eta) \neq 0$.

On va réduire l'ordre de C, jusqu'à ce qu'on trouve un polynôme différentiel g tel que ordre $g <$ ordre f.

Il existe des entiers n, m et un polynôme différentiel h tel que $B^n S^m C - h \in [f]$, avec $h < f$. On va montrer que h est une contrainte de η. En effet, soit S une spécialisation de η telle que $h(S) \neq 0$, il faut montrer qu'elle est générique. Or puisque $f(\eta) = 0$, on a alors $f(S) = 0$, (car S est une spécialisation de η). Il vient ensuite :

$$(B^n S^m C)(S) - h(S) = 0$$

$$(B^n S^m C)(S) = h(S) \neq 0, \quad \text{donc} \quad C(S) \neq 0.$$

Or C est une contrainte de η, donc S est une spécialisation générique.

On considère maintenant deux cas :

- ordre $h <$ ordre f, alors c'est fini car on a trouvé une contrainte h de η tq ordre $h <$ ordre f ;
- ordre h = ordre $f = r$ et $\deg h < \deg f$; comme $f, h \in K\{x_o, \ldots, x_r\}$, on divise f par h. Alors il existe un entier n et un polynôme différentiel P tq $B_1^n f = hQ + P$, avec $\deg P < \deg h$ et B_1 = coefficient dominant de h.

On montre que P est une contrainte de η.

On a ainsi construit une contrainte P de η tq $\deg P < \deg h$. On poursuit ce procédé jusqu'à ce qu'on trouve une contrainte de degré 0 en $D^r x$, c'est-à-dire d'ordre $\leqslant r-1 <$ ordre f ; la construction est alors terminée.

(ii)

• η satisfait le système : en effet, g est la contrainte de η, donc $g(\eta) \neq 0$; f est le polynôme de biordre minimal de η, donc $f(\eta) = 0$; S étant le séparant de f, on a $\deg S < \deg f$ et ordre $S \leqslant$ ordre f, donc $S(\eta) \neq 0$; de même on a ordre $B <$ ordre f et donc $B(\eta) \neq 0$.

Et η est bien une solution du système $\mathcal{S}$.

• si $\mathcal{S}$ est une autre solution du système $\mathcal{S}$, il suffit de montrer que $\mathcal{S}$ est une spécialisation générique de η.

•• $\mathcal{S}$ est une spécialisation de η : en effet, si $P(\eta) = 0$, on sait qu'il existe des entiers n, m et un polynôme différentiel Q tq $S^n B^m P - Q \in [f]$, avec $Q < f$ et où S = séparant de f et B = coefficient dominant de f.

$P(\eta) = 0$ et $f(\eta) = 0$ impliquent $Q(\eta) = 0$; donc $Q = 0$ car $Q < f$. On a alors : $S^n B^m P \in [f]$. Mais puisque $f(\mathcal{S}) = 0$, on a donc $(S^n B^m P)(\mathcal{S}) = 0$; or $S(\mathcal{S}) \neq 0$ et $B(\mathcal{S}) \neq 0$, donc $P(\mathcal{S}) = 0$.

•• La spécialisation est générique puisque $g(\mathcal{S}) \neq 0$.

c.q.f.d.

(3.2.10) - *Théorème* : Soit K un corps différentiel, K est différentiellement clos ssi K est contraintement clos.

Démonstration :

Si K est différentiellement clos, il contient des éléments non constants (3.2.5) ; d'après le théorème de l'élément primitif, il suffit de montrer que si η est contraint sur K, alors $\eta \in K$.

Soit alors η contraint sur K et soit f le polynôme de biordre minimal de η sur K, $f(\eta) = 0$. D'après le théorème (3.2.9,i), il existe une contrainte g de η tq ordre $g <$ ordre f.

On considère ensuite le système suivant :

$$\mathcal{S} \quad \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \\ S(x) \neq 0 \\ B(x) \neq 0 \end{cases}$$

où S est le séparant de f et B le coefficient dominant de f. η est alors une solution du système $\mathcal{S}$, d'après (3.2.9, ii).

Par ailleurs comme K est différentiellement clos, le système :

$$\mathcal{S}' \quad \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

avec ordre $g <$ ordre f

possède une solution dans K et, en plus, comme f est irréductible, il existe une solution $\xi \in K$ (la solution générique de $f(x) = 0$) qui n'annule pas le séparant et le coefficient dominant de f.

D'après (3.2.9, ii), on a alors :

$$\begin{tikzcd}
 & K\langle\eta\rangle \arrow[dd, "\wr"', "\psi"] & & \eta \arrow[dd, mapsto] \\
K \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & & \\
 & K\langle\xi\rangle & & \psi(\eta) = \xi
\end{tikzcd}$$

$\eta = \psi^{-1}\psi(\eta) = \psi^{-1}(\xi)$. Or $\xi \in K$, donc $\psi^{-1}(\xi) \in K$, (car ψ^{-1} est un K-isomorphisme). D'où $\eta \in K$.

Supposons que K soit contraintement clos. On considère alors le système suivant :

$$S \quad \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

avec ordre g < ordre f

Soit η la solution générique de $f(x) = 0$ (elle existe toujours), alors $g(\eta) \neq 0$ (car ordre g < ordre f). Soit ξ une spécialisation de η, contrainte sur K, de contrainte g (d'après (3.1.15, c)) ; on a alors $g(\xi) \neq 0$. Or ξ est une spécialisation de η donc $f(\eta) = 0$ implique $f(\eta) = 0$. ξ est contrainte sur K, donc $\xi \in K$ (car K est contraintement clos).

On a donc trouvé une solution ξ du système S tq $\xi \in K$, d'où K est différentiellement clos.

c.q.f.d.

(3.2.11) - <u>Théorème</u> <u>(Nullstellensatz pour les corps différentiellement clos)</u>.-

Soit K un corps différentiellement clos et soit le système suivant :

$$S \left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1,\dots,x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_r(x_1,\dots,x_n) = 0 \\ g_1(x_1,\dots,x_n) \neq 0 \\ \vdots \\ g_s(x_1,\dots,x_n) \neq 0 \end{array} \right.$$

système fini d'équations et d'inéquations polynomiales différentielles à coefficients dans K.

Si S possède une solution dans un corps différentiel extension de K, alors S possède une solution dans K.

Démonstration :

Soit L une extension différentielle de K et soit $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ une solution de S dans L ; on a alors : $f_\ell(\xi_1,\dots,\xi_n) = 0$, $\ell = 1,\dots,r$ et $g_j(\xi_1,\dots,\xi_n) \neq 0$, $j = 1,\dots,s$.

On pose $g = g_1 \dots g_s$. On a alors :

$$g(\xi_1,\dots,\xi_n) = g_1(\xi_1,\dots,\xi_n) \dots g_s(\xi_1,\dots,\xi_n).$$

Et donc $g(\xi_1,\dots,\xi_n) \neq 0$ (car $K\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$ est intègre).

D'après le théorème (3.1.15, c), il existe alors une spécialisation $(\eta_1,\dots,\eta_n)$ de $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ qui est contrainte sur K, de contrainte g. On a donc $g(\eta_1,\dots,\eta_n) \neq 0$ et par suite $g_j(\eta_1,\dots,\eta_n) \neq 0$, $j = 1,\dots,s$. De plus, comme $(\eta_1,\dots,\eta_n)$ est contrainte sur K, on a alors $\eta_i \in K$, $i = 1,\dots,n$ (car K est contraintement clos (3.2.10)). On a aussi :

$I_{(\eta_1,\ldots,\eta_n)} \supset I_{(\xi_1,\ldots,\xi_n)}$ (car $(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ est une spécialisation de $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$). Et comme $f_\ell(\xi_1,\ldots,\xi_n) = 0$, $\ell = 1,\ldots,r$, on a $f_\ell(\eta_1,\ldots,\eta_n) = 0$, $\ell = 1,\ldots,r$. D'où :

$$f_\ell(\eta_1,\ldots,\eta_n) = 0, \quad \ell = 1,\ldots,r$$
$$g_j(\eta_1,\ldots,\eta_n) \neq 0, \quad j = 1,\ldots,s$$

et $\eta_i \in K$, $i = 1,\ldots,n$.

On a ainsi trouvé une solution $(\eta_1,\ldots,\eta_n) \in K^n$ au système S.

c.q.f.d.

(3.2.12) - <u>*Corollaire*</u> : Pour un corps différentiel K, de caractéristique zéro, on a équivalence entre :

(i) K est contraintement clos ;

(ii) K est différentiellement clos ;

(iii) K est existentiellement clos.

<u>*Démonstration*</u> :

(i) $\longleftrightarrow$ (ii) (3.2.10)

(ii) $\longleftrightarrow$ (iii) (3.2.11)

(iii) $\longleftrightarrow$ (ii) : trivial.

(3.2.13) - <u>*Corollaire*</u> :

T = la théorie des corps différentiels de caractéristique zéro ;

T^* = la théorie des corps différentiellement clos de caractéristique zéro.
T^* est modèle-complétion de T, car T est universelle, T^* est modèle-complète et T^* admet l'élimination des quantificateurs (2.3.3, c).

E_T = la classe des corps différentiellement clos de caractéristique zéro (2.3.4).

(3.2.14) - *Définition* (*extension modèle-premier*).

Soient T une théorie et M une sous-structure de Σ_T.
On dit que N est une extension modèle-premier de M, si $M \subset N$, $N \models T$ et le diagramme suivant peut être complété, pour tout modèle L de T et tout monomorphisme $M \rightarrowtail L$:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[rr, tail, dashed] & & L \\
 & \circlearrowright & \\
M \arrow[uu, phantom, "\cup" description] \arrow[uurr, tail] & &
\end{tikzcd}$$

(3.2.15) - *Théorème* : Soit T une théorie ω-stable (4.3.1) :

i) existence (Morley) : pour toute sous-structure M de Σ_T, il existe une extension modèle-premier de M, qui est un modèle de T (cf. [27], page 202, cor. 32.4).

ii) unicité (Shelah) : deux extensions modèles-premiers quelconques d'une sous-structure $M \in \Sigma_T$ sont M-isomorphes (cf. [27], page 249).

(3.2.16) - *Application* :

Soit T la théorie des corps différentiellement clos de caractéristique zéro. T est ω-stable (5.4.4), donc pour tout corps différentiel de caractéristique zéro, il existe un corps différentiellement clos de caractéristique zéro $\bar{K}$ qui est une extension modèle-premier de K.

$\bar{K}$ est unique à isomorphisme près et sera appelé tout naturellement la clôture différentielle de K. Cependant $\bar{K}$ n'est pas une extension minimale au sens algébrique du terme.

(3.3) - *Corps différentiels de caractéristique* $p \neq 0$.

(3.3.1) - *Remarque* : Le travail de Wood peut être précisé de la manière suivante [9].

(3.3.2) - *Définition* (*corps différentiel parfait*) :

La théorie des corps différentiels parfaits est la théorie des corps différentiels de caractéristique p, plus l'axiome :

$$(\forall x)\ (Dx = 0 \longrightarrow (\exists y)(y^p = x)).$$

(3.3.3) - *Remarque* : Soit K un corps différentiel et soit $P \in K\{x\}$ tq ordre $P \geqslant 0$. Le séparant de P peut être nul.

(3.3.4) - *Définition* (*corps différentiellement clos*) :

On dit qu'un corps différentiel K est différentiellement clos si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) K est parfait ;

(ii) chaque système S défini sur K de la forme :

$$S \begin{cases} f(x) = 0, & \text{ordre } f \geqslant 1 \\ g(x) \neq 0 & \end{cases}$$

avec ordre g < ordre f

et tq le séparant S de f, ne soit pas nul, possède une solution u dans K tq $S(u) \neq 0$.

(3.3.5) - *Proposition* : Chaque corps différentiel parfait se plonge dans un corps différentiellement clos.

Démonstration :

La preuve est pratiquement similaire à celle de (3.2.6).

(3.3.6) - *Théorème* : Soit K un corps différentiel parfait et soit η un élément contraint sur K. Alors :

(i) il existe un polynôme de biordre minimal $f \in K\{x\}$ tq $f(\eta) = 0$; et tq le séparant S de f ne soit pas nul ,

(ii) il existe une contrainte g de η telle que ordre $g <$ ordre f ;

(iii) le type d'isomorphisme de $K<\eta>$ sur K est déterminé par le système $\mathcal{S}$ suivant :

$$\mathcal{S} \quad \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \\ S(x) \neq 0 \\ B(x) \neq 0 \end{cases}$$

où B est le coefficient dominant de f, et f, g, S définis comme aux énoncés (i) et (ii).

Démonstration :

(i) est un résultat de Seidenberg [28], page 188 ;

(ii) et (iii) : la preuve est identique à celle de (3.2.9) car $S \neq 0$.

(3.3.7) - *Théorème* : Soit K un corps différentiel parfait. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) K est différentiellement clos ;

(ii) K est contraintement clos ;

(iii) K est existentiellement clos.

Démonstration : Elle est identique à celle de (3.2.12), en utilisant (3.3.6) (cf. [9]).

(3.3.8) - *Corollaire* :

Soit T = la théorie des corps différentiels pafaits de caractéristique $p \neq 0$;

T^* = la théorie des corps différentiellement clos de caractéristique $p \neq 0$. T^* est modèle-complétion de T (T^* est modèle-compagnon et T possède la propriété d'amalgamation) ;

$\mathcal{E}_T$ = la classe des corps différentiellement clos de caractéristique $p \neq 0$.

CHAPITRE IV

PROLOGOMENES A LA THEORIE DES MODELES

A partir de certaines analogies, on introduit les modèles saturés comme une généralisation des domaines universels. On étudie ensuite les notions de théorie ω-stable, de modèles génériques et de modèles universels et homogènes. Les connexions entre ces notions apparaîtront par la suite.

(4.1) - *Domaines universels.*

(4.1.1) - *Rappel* : Soient K un corps commutatif et I un idéal de $K[X_1,\ldots,X_n]$. Au chapitre 1, on a vu que les domaines universels K^* sur K sont assez "gros" pour être susceptibles de contenir tous les "types" de zéro des idéaux I de $K[X_1,\ldots,X_n]$.

(4.1.2) - *Proposition* : Soient X un corps commutatif

(i) K se plonge dans un domaine universel K^* ;

(ii) Si L et L' sont deux domaines universels sur K tq :

(H) : L et L' aient même degré de transcendance sur K.

Alors, on a un K-isomorphisme de L sur L'

Démonstration :

(i) c'est trivial ;

(ii) L n'est pas algébrique sur K, à cause des degrés de trans-

cendance. On considère alors une base de transcendance U de L sur K.
On a alors :

$$K \xhookrightarrow[\text{trans.pure}]{} K(U) \xhookrightarrow[\text{algeb.}]{} L, \quad \text{et} \quad \text{card } U = \text{card } L = \lambda \ .$$

De même, soit V une base de transcendance de L' sur K, on a aussi :

$$K \hookrightarrow K(V) \hookrightarrow L', \quad \text{et} \quad \text{card } V = \text{card } L' = \lambda$$

card U = card V, donc il existe une bijection, $\sigma : U \to V$ qui s'étend en l'isomorphisme $\bar{\sigma} : K(U) \xrightarrow{\sim} K(V)$.

Or L est algébrique sur $K(U)$ et L est a.c, donc L est la clôture algébrique de $K(U)$. De même L' est la clôture algébrique de $K(V)$. Donc $\bar{\sigma}$ se prolonge en un K-isomorphisme μ : $L \xrightarrow{\sim} L'$.

c.q.f.d.

On peut remarquer que l'hypothèse (H) de (ii) est vérifiée

$$\text{si} \begin{cases} K \text{ est dénombrable} \\ \qquad \text{ou} \\ \text{car } L = \text{card } L' > \text{card } K. \end{cases}$$

Ces résultats se généralisent à la théorie des modèles.

(4.2) - *Types et modèles saturés* [3], [18], [27].

(4.2.1) - *Définitions* (*types de formules dans* L).

Soit T une théorie complète d'un langage dénombrable L.

- Un n-type sur T est un ensemble de formules $p(v_1,\dots,v_n)$ (à variables libres $v_1,\dots,v_n$), maximal et consistant avec T.

• $S_n(T)$ désigne l'ensemble des n-types sur T.

• Les 1-types seront tout simplement appelés types et $S_1(T)$ sera souvent noté $S(T)$.

• Un n-type $p(v_1,\ldots,v_n)$ sur T est réalisé dans un modèle M de T, s'il existe un n-uple $(m_1,\ldots,m_n)$ d'éléments de M tq $M \models \psi(m_1,\ldots,m_n)$ pour tout $\psi \in p$. On dit aussi que $(m_1,\ldots,m_n)$ réalise p dans M.

On étend ces définitions au langage expansion.

(4.2.2) - *Définitions (type de formule dans* $L(X)$*).*

Soit M une structure d'un langage du premier ordre L et soit $X \subset M$ un sous-ensemble du domaine de M :

• On dit qu'un ensemble de formules $p(v)$ de L_X (avec v comme seule variable libre) est un type de L_X sur $Th(M,x)_{x\in X}$ si $p(v)$ est maximal et consistant avec $Th(M,x)_{x\in X}$.

• On dit qu'un type $p(v)$ de L_X est réalisé dans $(M,x)_{x\in X}$, s'il existe $m \in M$ tq $(M,x)_{x\in X} \models \psi(m)$, pour tout $\psi(v) \in p(v)$.

• $S_n Th(M,x)_{x\in X}$ = l'ensemble des n-types de L_X sur $Th(M,x)_{x\in X}$.

(4.2.3) - *Définition (Modèle saturé).*

Soit M une structure de L et soit α un cardinal infini. On dit que M est α-saturé si pour tout ensemble $X \subset M$ tq card $X < \alpha$, chaque type $p \in S_1 Th(M,x)_{x\in X}$ est réalisé dans $(M,x)_{x\in X}$.

On dit que M est saturé si M est card M-saturé.

(4.2.4) - *Théorèmes :*

a) Soit M une structure infinie. Pour chaque cardinal infini α, il existe une structure M^*, α^+-saturé tq $M < M^*$ et card $M^* \leq (\text{card } M)^\alpha$;

b) Si M et N sont deux structures saturées de même cardinal et tq $M \equiv N$, alors $M \simeq N$ (c'est le théorème d'unicité des modèles saturés).

Démonstration : (voir [27], pages 79 et 81 ou [3], page 216).

On verra au chapitre suivant que les corps saturés sont exactement les domaines universels.

(4.3) - *Théorie ω-stable* [3] , [18] , [27].

(4.3.1) - *Définition* : Soit T une théorie sans modèles finis. On dit que T est λ-stable, avec λ un cardinal infini, si pour tout modèle M de T et tout sous-ensemble $X \subset M$ tq $\operatorname{card} X = \lambda$, la structure $(M,x)_{x\in X}$ réalise λ types de $S_1 Th(M,x)_{x\in X}$.

(4.3.2) - *Proposition* : Toute théorie ω_1-catégorique est ω-stable.

Démonstration : voir [3], (page 405 (7.1.4))

(4.3.3) - *Remarque* : Dans le contexte des structures algébriques le théorème suivant, dû à Shelah et à Ehrenfencht est souvent plus commode que la définition pour prouver qu'une théorie n'est pas ω-stable, nous en donnerons une illustration au chapitre suivant.

(4.3.4) - *Théorème* : Soit M un modèle d'une théorie T. Si l'une des conditions suivantes est satisfaite, alors T n'est pas ω-stable :

(i) il existe une relation binaire R définissable qui ordonne totalement un sous-ensemble infini S de M (c'est la condition de Shelah, cf. [27], page 228) ;

(ii) il existe un sous-ensemble infini S de M et une relation n-aire R sur S tq R soit à la fois connexe et asymétrique sur S (c'est la condition de Ehrenfencht, cf. [27], p.227).

(4.3.5) - *Remarque* : Au chapitre V, nous verrons que les corps infinis dont la théorie complète est ω-stable sont exactement les corps algébriquement clos.

(4.4) - *Modèles génériques au sens du forcing infini de Robinson* (cf. [13], [17], [24].

(4.4.1) - *Remarque* : Le concept de forcing a été formalisé de plusieurs manières en théorie des modèles. Nous l'introduisons ici comme une généralisation de la notion de satisfaction (forcing infini au sens de Robinson). Et, à partir du forcing, nous définirons la notion subséquente de modèle générique, plus forte que celle de modèle existentiellement clos et nous montrerons que la classe des modèles génériques d'une théorie donnée T, est incluse dans la classe des modèles e.c. de T.

Le langage L sera celui du calcul des prédicats avec égalité ; les symboles de connecteurs seront $\neg, \wedge, \vee, \exists$.

(4.4.2) - *Définition* : Si φ est une formule de L, on définit son rang comme suit :

- si φ est atomique, $r(\varphi) = 1$;
- $r(\varphi \wedge \Psi) = r(\varphi \vee \Psi) = r(\varphi) + r(\Psi)$;
- $r(\neg\varphi) = r(\exists x\varphi) = r(\varphi) + 1$.

(4.4.3) - *Définition* : Soit T une théorie dans L, nous la supposerons inductive par la suite.

On définit une relation binaire, $M \models \varphi$, (M force φ), entre les structures M de Σ_T et les énoncés φ définis dans M, par récurrence sur le rang de φ :

. si ψ est atomique, $M \Vdash \psi$ ssi $M \models \psi$

. si $\psi = \Psi \wedge \theta$, $M \Vdash \psi$ ssi $M \Vdash \Psi$ et $M \Vdash \theta$

. si $\psi = \Psi \vee \theta$, $M \Vdash \psi$ ssi $M \Vdash \Psi$ ou $M \Vdash \theta$

. si $\psi = (\exists x)(\Psi(x))$, $M \Vdash \psi$ ssi il existe $a \in \underline{C}$ tq $M \Vdash \Psi(a)$

. si $\psi = \neg \Psi$, $M \Vdash \psi$ ssi il n'existe pas $M' \in \Sigma_T$ $M \subset M'$ tq $M' \Vdash \Psi$.

(4.4.4) - *Définition* : Une structure non vide M de Σ_T est T-générique au sens du forcing infini de Robinson, si tous les énoncés de T sont définis dans M et si pour tout énoncé ψ défini dans M, alors $M \Vdash \psi$ ssi $M \models \psi$.

Le plus souvent, on dira tout simplement générique au lieu de T-générique, si aucune confusion n'est à craindre.

(4.4.5) - *Définition* : Soit T une théorie de L.

On définit T^F comme l'ensemble des énoncés définis dans T et qui sont vrais, dans toute structure T-générique.

On appelle T^F le forcing-compagnon de la théorie T et F l'opérateur forcing $F : T \to T^F$.

Dans [25], Robinson trouve la caractérisation suivante de la classe G_T des structures T-génériques, T étant une théorie inductive donnée.

(4.4.6) - *Théorème* : La classe G_T des structures T-génériques est une classe inductive. C'est la plus petite classe de Σ_T qui soit caractérisée par les trois propriétés suivantes :

(i) si $M \in \Sigma_T$, alors il existe $M^* \in G_T$ tq M se plonge dans M^* ;

(ii) si $M, M' \in G_T$; $M \subset M'$ alors $M < M'$;

(iii) si $M \in \Sigma_T$, $M' \in G_T$ et $M < M'$, alors $M \in G_T$.

i.e. ces trois propriétés déterminent G_T de manière unique.

(4.4.7) - <u>*Corollaire*</u> *1*.- Soit $M \in \Sigma_T$. Si M est T-générique, alors M est e.c.

<u>*Démonstration*</u> :

Soit ψ une formule existentielle, définie dans M tq $M' \models \psi$, avec $M \subset M'$.

Soit M'' T-générique tq $M'' \supset M'$ (4.4.6, i) ; $M'' \models \psi$, car ψ est existentielle. Mais comme M et M'' sont T-génériques, avec $M \subset M''$, on a alors $M < M''$ (4.4.6, ii) ; d'où $M \models \psi$.

c.q.f.d.

(4.4.8) - <u>*Corollaire*</u> *2*.- Soit T une théorie inductive. Alors tout modèle M de T de cardinal infini λ, peut être plongé dans un modèle T-générique M^* de cardinal λ.

<u>*Démonstration*</u> :

En effet, on peut plonger M dans un modèle T-générique M' et d'après le théorème descendant de Löwenheïm-Skolem-Tarski, il existe un modèle M^* tq $M \subset M^* < M'$ et card $M^* = \lambda$. Or M' étant T-générique, alors M^* est T-générique.

(4.4.9) - <u>*Théorème*</u> [24].- Soit T une théorie inductive. Si T possède un modèle-compagnon T^*, les modèles de T^* sont alors exactement les structures T-génériques.

<u>*Démonstration*</u> :

Supposons que T possède un modèle-compagnon T^*. On considère la classe Σ_T des sous-structures de modèles de T. On rappelle que

$\Sigma_T = \Sigma_{T_\forall}$ = la classe des modèles de $T_\forall$.

Soit $\mathcal{G}$ la classe des modèles de T^*.

. $\mathcal{G}$ est une sous-classe de $\Sigma_{T_\forall}$; en effet, T et T^* sont mutuellement modèle-constantes, donc $(T^*)_\forall = T_\forall$; or tout modèle M de T^* est modèle de $(T^*)_\forall = T_\forall$.

. $\mathcal{G}$ satisfait les propriétés (i), (ii) et (iii) du théorème (4.4.6). En effet :

.. (i) : si $M \in \Sigma_T$, alors M est une sous-structure d'un modèle N de T et N est lui-même une sous-structure d'un modèle de T^*, donc M se plonge dans un modèle de T^*.

.. (ii) : est vraie car T^* est modèle-complète.

.. (iii) : si $M \in \Sigma_T$, $M' \in \mathcal{G}$ et si $M < M'$, alors $M \in \mathcal{G}$: en effet, si $M \in \Sigma_T$ comme on vient de le voir $M \in \Sigma_{T^*}$. Par ailleurs, $M' \models T^*$ et $M < M'$, donc $M \models T^*$.

On conclut d'après (4.4.6) que $\mathcal{G} = \mathcal{G}_T$.

c.q.f.d.

(4.4.10) - *<u>Corollaire</u>*.- Si T est une théorie inductive donnée, $\mathcal{G}_T$ est une sous-classe de Σ_T et si T a un modèle-compagnon T^*, on a équivalence entre :

(i) M est un modèle de T^* ;

(ii) M est un modèle e.c. de T ;

(iii) M est un modèle générique de T.

(résulte immédiatement des théorèmes (2.3.4) et (4.4.9)).

(4.5) - *Modèles universels et Modèles homogènes* [3] , [27].

(4.5.1) - *Remarque* : Nous verrons ici une connexion entre les modèles universel-homogènes et les modèles génériques, mais l'utilité des modèles universel-homogènes apparaîtra surtout au chapitre suivant

(4.5.2) - *Définition* (*Modèle universel*).

Un modèle M d'une théorie T est α-universel, avec α un cardinal infini, si pour tout modèle N de T tq $M \equiv N$ et $\operatorname{card} N < \alpha$, alors N se plonge élémentairement dans M.

On dit que M est universel si M est card M-universel.

(4.5.3) - *Définitions*.

Soit M une structure infinie ; soient X, $Y \subset M$ deus sous-ensembles de M et $f : X \to Y$ une surjection.

On dit que f est un automorphisme partiel élémentaire de M, si on a : $(M,x)_{x\in X} \equiv (M,f(x))_{x\in X}$.

On définit $\operatorname{card} f = \operatorname{card} X$.

Et on dit que f est immédiatement prolongeable, si pour tout $m \in M$, il existe $m' \in M$ tq $(M,x,m)_{x\in X} \equiv (M,f(x),m')_{x\in X}$.

(4.5.4) - *Définition* (*Modèle homogène*).

Un modèle M d'une théorie T est α-homogène, si tout automorphisme partiel élémentaire f de M tq $\operatorname{card} f < \alpha$, peut être prolongeable immédiatement.

On dit que M est homogène si M est card M-homogène.

(4.5.5) - *Définition* (*Modèle u-h*).

On dit qu'un modèle M d'une théorie T est α-universel-homogène (en abrégé α-u-h), si M est à la fois α-universel et α-homogène.

On dit que M est universel-homogène (en abrégé u-h), si M est universel et homogène à la fois.

(4.5.6) - *Lemme 1*.- Un modèle M d'une théorie T est homogène ssi tout automorphisme partiel élémentaire f de M tq card f < card M, peut être prolongé en un automorphisme de M.

Démonstration : Voir [27], page 111, Lem. 20.1.

(4.5.7) - *Lemme 2*.- Un modèle M d'une théorie T est ω_1-u-h ssi M est ω_1-saturé.

Démonstration : Voir [3], page 221, théor. 5.1.14.

(4.5.7) - *Théorème*.- Soit T une théorie inductive complète. Alors tout modèle u-h non dénombrable de T est T-générique (donc e.c).

Démonstration : Soit M un modèle u.h de T tq card M > $\aleph_0$. Il faut montrer que pour tout énoncé φ de $L(M)$, $M \Vdash \varphi$ ou $M \Vdash \neg\varphi$.

Or, d'après le théorème descendant de Löwenheïm-Skolem-Tarski, si M est un modèle de T tq card M > $\aleph_0$ et $\varphi \in L(M)$, il existe une sous-structure élémentaire N de M de cardinal $\aleph_0$ tq $\varphi \in L(N)$. N peut s'étendre en une structure T-générique N^* de cardinal $\aleph_0$, d'après le corollaire 2 (4.4.8). Comme T est inductive et que N^* est T-générique, alors N^* est modèle de T. Par suite comme T est complète, on a $N^* \equiv M$ et alors $N^* < M$, car M est universel. Soit

$i : N^* \underset{<}{\rightarrowtail} M$, et soit j la restriction de i à N ; j est alors un isomorphisme élémentaire de N dans M et peut s'étendre en un automorphisme k de M car M est homogène.

Soit $f = k^{-1} \circ i$, on a alors le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
N^* \arrow[r, tail, "i", "<"'] \arrow[dd, bend right=60, "f"'] & M \\
N \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[ur, tail, "j"] & \\
M \arrow[u, phantom, "\cap"] \arrow[uur, tail, "k"'] &
\end{tikzcd}$$

f est un isomorphisme de N^* dans M, qui fixe N, car :
$f(N) = k^{-1} \circ i(N) = k^{-1} \circ j(N) = k^{-1} \circ k(N) = N$. On pose $N^{**} = f(N^*)$.
N^{**} est isomorphe à N^*, donc N^{**} est T-générique. Comme $\psi \in L(N)$, on a alors $\psi \in L(N^{**})$ et N^{**} étant T-générique, $N^{**} \Vdash \psi$ ou $N^{**} \Vdash \neg\psi$. Par suite comme M est une extension de N^{**}, par la propriété ascendante du forcing, on a alors, $\psi \in L(M)$ et $M \Vdash \psi$ ou $M \Vdash \neg\psi$.

c.q.f.d.

CHAPITRE V

UN THEOREME DE CARACTERISATION DES MODELES ω_1-EXISTENTIELLEMENT CLOS.

On fait ici le lien entre la notion de modèles ω_1-e.c (introduite par Macintyre dans le cadre de la théorie des groupes [16]) et celle de domaine universel. On étend ensuite ces résultats à d'autres théories, en démontrant un théorème de caractérisation des modèles ω_1 e.c.

Comme application, on démontre un théorème de caractérisation des corps ω-stables, résultat que Macintyre a démontré de manière fort laborieuse.

(5.1) - *Introduction aux corps* ω_1-e.c.

(5.1.1) - *Définitions et Notations.*

Soit T une théorie. On dira qu'un modèle M de T est ω_1-existentiellement clos (en abrégé ω_1-e.c) si pour tout modèle N de T, extension de M, tout système Φ dénombrable de formules existentielles à paramètres dans M, vrai dans N est vrai dans M.

. Un tel système à paramètres a_i, $i < \omega$ dans M et à variables libres v_j, $j < \omega$, sera noté :

$$\Phi(a_i,v_j) = \begin{cases} S_\ell(a_i,v_j) = S'_\ell(a_i,v_j) \\ \\ T_u(a_i,v_j) \neq T'_u(a_i,v_j) \ . \end{cases}$$

. On notera, par ailleurs $M \models \Phi(a_i,m_j)$, pour exprimer que le système $\Phi(a_i,v_j)$, à coefficients a_i , $i < \omega$, a pour solution m_j , $j < \omega$ dans M.

(5.1.2) - *Théorème*.- Soit K un corps tq card $K > \aleph_0$. Alors K est un domaine universel ssi K est ω_1-e.c.

Démonstration :

Soit K' un corps extension de K tq $K' \models \Phi(a_i,k'_j)$; $i < \omega$, $j < \omega$. Soit F le sous-corps de K, engendré par les a_i, $i < \omega$.

Nous allons distinguer trois cas :

a) Pour tout $j < \omega$, k'_j est algébrique sur F ; alors k'_j est algébrique sur K et comme K est a.c, alors $k'_j \in K$, $j < \omega$ et Φ a une solution dans K.

b) Pour tout $j < \omega$, k'_j est transcendant sur F ; on choisit $k_j \in K$, $j < \omega$ tq k_j soit transcendant sur F et $k_j \neq k_i$ si $j \neq i$ (k_j existe car card $F <$ card K et card K = le degré de transcendance de K).

Soit $\overline{F(k_j)}_{j<\omega}$, la clôture algébrique de $F(k_j)_{j<\omega}$ dans K ; on peut supposer K' a.c (quitte à le plonger dans un corps a.c K'').

On a alors :

$$\begin{array}{ccccccc} F & \subset & F(k_j) & \subset & \overline{F(k_j)} & \subset & K \\ & & & & & \searrow & \cap \\ & & & & & & K' \end{array}.$$

Soit $f : \overline{F(k_j)} \to K'$ un mono tq f soit l'identité sur F et $f(k_j) = k'_j$.

f est alors un plongement élémentaire, car la théorie des corps a.c est modèle-complète. f est donc un F-isomorphisme de $\overline{F(k_j)}$ dans K' et on a alors : $f^{-1}(k'_j) = k_j$, $j < \omega$ et $f^{-1}(a_i) = a_i$, $i < \omega$.

On a alors $K' \models \Phi(a_i, k'_j)$ ssi $K \models \Phi(a_i, k_j)$. Donc les k_j, $j < \omega$ sont une solution de Φ dans K.

c) Il existe $m, n < \omega$ tq k'_m soit transcendant sur F et k'_n algébrique sur F. On fait une partition de l'ensemble des solutions k'_j, $j < \omega$ dans K', en deux sous-ensembles :

. l'ensemble des k'_n tq k'_n soit algébrique sur F (k'_n appartient alors à K).

. l'ensemble des k'_m tq k'_m soit transcendant sur F et pour lesquels on construit les $k_m \in K$ tq k_m transcendant sur F, pour chaque m (comme au cas b).

Cette fois-ci, on construit f tq f soit l'identité sur F et tq : $f(k'_n) = k'_n$ et $f(k_m) = k'_m$. Comme au cas b) ; f est alors un F-isomorphisme de $\overline{F(k_m)}$ dans K', et on a alors :

$f^{-1}(k'_n) = k'_n$; $f^{-1}(k'_m) = k_m$; $f^{-1}(a_i) = a_i$. Alors $K' \models \Phi(a_i, k'_j)$ ssi $K' \models \Phi(a_i, k'_n, k'_m)$ ssi $K \models \Phi(a_i, k'_n, k_m)$. Donc les k'_n , k_m sont une solution de Φ dans K.

$\Longleftarrow$ trivial.

(5.1.3) - *Théorème* [27].- Soit K un corps. Alors K est un corps saturé ssi K est un domaine universel.

Démonstration :

$\Longleftarrow$ En effet, soit $Y \subset K$, card $Y <$ card K et soit $p \in S_1Th(K,y)_{y \in Y}$. Alors p est réalisé par un élément $k' \in K'$ où $K' > K$ ([27], page 73). On considère alors F, le plus petit sous-corps de K, contenant Y.

La démonstration est alors similaire à la preuve des cas a) et b) du théorème précédent, en distinguant le cas où k' est algébrique sur F et celui où k' est transcendant sur F.

$\Longrightarrow$ trivial : il suffit de considérer les types du genre "$P(x) = 0$", où $P \in K[X]$ fixé ; ou pour tout n, les types du genre exprimant "$x_1, \ldots, x_n$ algébriquement indépendants sur le corps premier de K".

(5.1.4) - *Corollaire*.- Tout corps a.c non dénombrable est ω_1-saturé.

(5.1.5) - *En résumé* : Si T est la théorie des corps et si K est un corps non dénombrable, on a équivalence entre :

(i) K est un domaine universel ;

(ii) K est un corps ω_1-saturé ;

(iii) K est un corps ω_1-e.c.

Nous allons à présent généraliser ces résultats à d'autres structures.

(5.2) - *Caractérisation des modèles* ω_1-*e.c.*

(5.2.1) - *Théorème*.- Soit T une théorie inductive. Alors tout modèle de T se plonge dans un modèle ω_1-e.c.

Démonstration :

Elle est similaire à celle de la proposition (2.1.2), où l'on omet la cardinalité et dans la deuxième étape on remplace la chaîne $\{K^n(M)\}$ par une chaîne bien ordonnée $\{K^\gamma(M)\}$ où $\gamma \in \omega_1$.

(5.2.2) - *Proposition*.- Soit T une théorie. Si M est une structure ω_1-e.c de Σ_T, alors card $M \geqslant \aleph_1$.

Démonstration :

Comme M est e.c, on a card $M \geqslant \aleph_0$. On considère alors un sous-ensemble dénombrable $(m_0, m_1, m_2, \ldots)$ de M et le système d'inéquations suivant :

$$\Phi_1 \quad : \quad x \neq m_i, \qquad i < \omega.$$

Φ_1 a une solution dans une extension de M, d'après le théorème ascendant de Löwenheïm-Skolem-Tarski, il a donc une solution dans M.

(5.2.3) - *Proposition*.- Soit T une théorie admettant l'élimination des quantificateurs et soit M un modèle non dénombrable de T. Si M est ω_1-e.c alors M est ω_1-saturé.

Démonstration :

En effet, soit $Y \subset M$ tq card $Y < \aleph_1$ et soit $p(v) \in S_1 Th(M,y)_{y \in Y}$ $p(v)$ est réalisé par un élément b dans une extension $M^* > M$ ([27] page 73). On écrit $p(v)$ sous la forme d'un ensemble dénombrable de formules sans quantificateurs :

$$p(v) = \{\psi_j(y_i,v), \quad i < \omega, \quad j < \omega\}$$

où les y_i sont des éléments de Y. On considère alors le système existentiel :

$$\Phi(y_i,v) = (\exists v)\,\psi_j(y_i,v), \quad i < \omega, \quad j < \omega.$$

Φ a une solution dans M^*, mais comme M est ω_1-e.c et $M \subset M^*$, Φ a alors une solution m dans M ; d'où m réalise $p(v)$ dans M.

(5.2.4) - *Corollaire*.- Si T est l'une des théories suivantes, tout modèle ω_1-e.c de T est ω_1-saturé :

. la théorie des corps a.c ;

. la théorie des corps réels clos ;

. la théorie des corps différentiellement clos de caractéristique zéro

(car ces théories admettent l'élimination des quantificateurs (2.3.7), (2.3.10), (3.2.13)).

(5.2.5) - *Conjecture* : La proposition (5.2.3) reste vraie pour une théorie inductive quelconque.

(5.2.6) - *Proposition*.- Soit T une théorie complète. Si M est un modèle u-h non dénombrable de T, alors M est ω_1-e.c.

Démonstration :

Soit $\Phi(a_i,v_j)$, $i < \omega$, $j < \omega$, un système comme au (5.1.1) et soit M' un modèle de T, extension de M tq $M' \models \Phi(a_i,m'_j)$, $i < \omega$, $j < \omega$, avec $m'_j \in M'$, $j < \omega$.

Soit $A = (a_i)_{i<\omega}$, l'ensemble des paramètres du système Φ et soit N' un sous-modèle élémentaire dénombrable de M' contenant les a_i,

$i < \omega$ et les m'_j, $j < \omega$. On a $N' \equiv M$, car T est complète. Comme M est universel et que $\text{card } N' < \text{card } M$, il existe un plongement élémentaire f de N' dans M : $f : N' \underset{<}{\rightarrowtail} M$.

Comme $A \subset N'$, on a :

$$(M,a_i)_{i<\omega} \equiv (M,f(a_i))_{i<\omega} .$$

Et puisque M est homogène, l'automorphisme partiel élémentaire : $a_i \longmapsto f(a_i)$ définie sur A, se prolonge en un automorphisme g de M (4.5.6). Par suite, on a : $N' \models \Phi(a_i,m'_j)$, $i < \omega$, $j < \omega$; d'où $M \models \Phi(f(a_i),f(m'_j))$, $i < \omega$, $j < \omega$, car f est élémentaire. Il vient ensuite $M \models \Phi(g(a_i),g \circ g^{-1}(f(m'_j)))$, $i < \omega$, $j < \omega$.

Et comme g est un automorphisme :

$M \models \Phi(a_i,g^{-1}(f(m'_j)))$, $i < \omega$, $j < \omega$;

$g^{-1}(f(m'_j))$ est donc une solution de Φ dans M.

(5.2.7) - *Corollaire 1*.- Soit M un modèle non-dénombrable d'une théorie complète T. Alors

(i) si M est ω_1-u.h, alors M est ω_1-e.c ;

(ii) si M est ω_1-saturé, alors M est ω_1-e.c.

Démonstration :

(i) est immédiat.

(ii) résulte de (4.5.7) et de (5.2.7, i).

(5.2.8) - *Corollaire 2*.- Soit T une théorie qui n'a que des modèles infinis. Si T est ω_1-catégorique, alors le modèle de T, de cardinal $\aleph_1$ (à isomorphisme près) est ω_1-e.c.

Démonstration :

T est complète, d'après le test de Lös et Vaught (page 113, $\boxed{3}$).

Par ailleurs, le modèle de cardinal $\aleph_1$ (à isomorphisme près) est ω_1-saturé (cor. 7.1.8, page 407, $\boxed{3}$), il est donc ω_1-e.c.

(5.2.9) - *Exemples de modèles* ω_1-e.c.

. Tout groupe abélien, divisible, sans torsion, de cardinal $\aleph_1$ est ω_1-e.c ;

. Tout groupe abélien dont tout élément est d'ordre p, avec p premier et de cardinal $\aleph_1$ est ω_1-e.c ;

. Tout espace vectoriel de cardinal $\aleph_1$ sur un corps fini est ω_1-e.c.

(5.3) - *Retour à la théorie des corps.*

(5.3.1) - *Lemme*.- Soit T une théorie. Si T est modèle-complète et possède un modèle-premier (i.e un modèle qui se plonge dans tout modèle de T), alors T est complète.

Démonstration :

Soit P le modèle-premier de T et soient M, N deux modèles quelconques de T ; on a alors :

$$\begin{tikzcd} & M \\ P \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & N \end{tikzcd}$$

d'où $M \equiv N$.

(5.3.2) - *Exemples* : Les théories suivantes sont complètes :

. La théorie des corps a.c de caractéristique fixée ; en caractéristique zéro, $\bar{\mathbb{Q}}$ est modèle-premier ; en caractéristique p, $\overline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$ est modèle-premier ;

. La théorie des corps réels clos est complète, $\bar{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$ est modèle-premier ;

. La théorie des corps différentiellement clos de caractéristique zéro est complète ($\bar{\mathbb{Q}}$ muni de la dérivation nulle est modèle-premier).

(5.3.3) - *Définition*.- Soit $(M,\leq)$ un ensemble totalement ordonné et soit α un cardinal infini. On dit que M est un $\eta_{\alpha'}$-ensemble (avec $\alpha = \omega_{\alpha'}$) de Hausdorff (ou que M est α-dense), si pour tous sous-ensembles $X, Y \subset M$, de cardinal $< \alpha$ tq $X < Y$, il existe $z \in M$ tq $X < z < Y$,

i.e : si $M \models (\forall x)(\forall y)\left[(x \in X) \wedge (y \in Y) \rightarrow x < y\right]$, alors

$$M \models (\exists z)(\forall x)(\forall y)\left[(x \in X) \wedge (y \in Y) \rightarrow x < z < y\right].$$

On dit que M est un η_0-ensemble (ou que M est dense) si M est ω-dense.

(5.3.4) - *Exemples*.

. les η_0-ensembles ou ordres ω-denses sont les ordres denses sans éléments extrêmes.

. $(\mathbb{R},\leq)$ n'est pas ω_1-dense dans les ensembles ordonnés : on prend $X = \{1 - \frac{1}{n}, 1\}_{n\geq 1}$ et $Y = \{1 + \frac{1}{n}\}_{n\geq 1}$.

(5.3.5) - *Lemme*.- Soit M un ordre dense. Alors M est ω_1-saturé ssi M est ω_1-dense.

Démonstration :

$\Longrightarrow$ Supposons que $(M,\leqslant)$ soit ω_1-saturé. Soient M_1 et M_2 deux sous-ensembles dénombrables de M tq $M_1 < M_2$. On pose $X = M_1 \cup M_2$; et on considère l'ensemble $p(v)$ des formules de L_X, de la forme : $m_1 < v < m_2$, avec $m_1 \in M_1$ et $m_2 \in M_2$. Comme M est un ordre dense, $p(v)$ est un type dans L_X et comme M est ω_1-saturé, $p(v)$ est alors réalisé dans $(M,x)_{x\in X}$ par un élément $m \in M$. D'où $M_1 < m < M_2$.

$\Longleftarrow$ Supposons que $(M,\leqslant)$ soit ω_1-dense et soit $Y \subset M$ tq card $Y < \aleph_1$. On considère un type $p \in S_1 Th(M,y)_{y\in Y}$. Comme la théorie des ensembles totalement ordonnés denses admet l'élimination des quantificateurs ([27], pages 60, 67) ; on peut supposer que toute formule $\phi(x_o) \in p$ est sans quantificateur. Les formules de p définissent donc une coupure par x_o dans l'ordre de Y. Il existe alors M_1 et M_2 tq $Y = M_1 \cup M_2$ et p est équivalent à l'ensemble des formules :

$$\{m_1 < x_o \;/\; m_1 \in M_1\} \cup \{x_o < m_2 / m_2 \in M_2\}.$$

Et par suite, puisque M est ω_1-dense, p est réalisé dans M.

c.q.f.d.

(5.3.6) - *Corollaire*.- Soit T la théorie des corps ordonnés et soit K un modèle non dénombrable de T. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) K est un corps réel clos ω_1-dense ;

(ii) K est ω_1-saturé ;

(iii) K est ω_1-e.c ;

(iv) K est ω_1-u.h.

Démonstration :

La seule implication non prouvée (i) → (ii) est un résultat de Erdös, Gillman et Henricksen (cf. [8]).

(5.3.7) - *Définition*.- On dit qu'un corps différentiel K est un domaine universel différentiel, si K est un corps différentiellement clos de degré de transcendance différentielle infini sur son corps premier.

(5.3.8) - *Lemme*.- Soit K un corps différentiel de caractéristique zéro. Alors K est saturé ssi K est un domaine universel différentiel.

Démonstration :

Elle est tout à fait similaire à celle du théorème (5.1.3) relatif au corps.

(5.3.9) - *Corollaire*.- Tout corps différentiellement clos (de caractéristique zéro) non dénombrable est ω_1-saturé.

(5.3.10) - *Corollaire*.- Soit T la théorie des corps différentiels de caractéristique zéro et soit K un modèle non dénombrable de T. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) K est un domaine universel différentiel ;

(ii) K est ω_1-saturé ;

(iii) K est ω_1-e.c ;

(iv) K est ω_1-u.h.

(5.4) - *Théorème de caractérisation des corps infinis ω-stables.*

(5.4.1) - *Remarques* :

a) La théorie des corps a.c de caractéristique fixée est ω_1-catégorique ; elle est donc ω-stable (c'est aussi une théorie complète).

b) Soit K un corps a.c de caractéristique fixée, on peut formaliser le résultat ci-dessus, en disant que Th K est ω_1-catégorique (donc ω-stable).

On va montrer la réciproque :

(5.4.2) - *Théorème*.- Soit K un corps infini de caractéristique fixée. Alors Th K est ω-stable ssi K est a.c.

Démonstration :

En effet, si Th K est ω-stable, il existe un modèle K^* de Th K qui est ω_1-saturé et tq card $K^* = \aleph_1$ (d'après le lemme 7.1.6, page 406, [3]). Comme Th K est complète, il résulte de (5.2.7, ii) que K^* est ω_1-e.c. Donc K^* est a.c et comme on a $K \equiv K^*$, il en résute alors que K est a.c.

c.q.f.d.

(5.4.3) - *Remarque* : Ce résultat a été obtenu par A. Macintyre dans [15], en utilisant la théorie de Galois. Sa démonstration est très longue et fort laborieuse. En voici les grandes lignes :

a) On prouve que si K est un corps tq Th K soit ω-stable, si K_1 est une extension algébrique de degré fini de K, alors Th K_1 est ω-stable ;

b) On prouve que si Th K est ω-stable, alors K^* (le groupe multiplicatif des éléments non nuls de K) est somme directe d'un groupe divisible et d'un groupe fini ;

c) En utilisant la condition de Ehrenfeucht, on raffine b), en prouvant que si K est infini et si $Th\ K$ est ω-stable, alors K^* est divisible et l'équation $x^p - a = 0$, avec $a \in K$ et p premier, possède une racine dans K ;

d) <u>En caractéristique zéro</u> : en utilisant a) et c) on prouve par la théorie de Galois que si K est un corps infini et si $Th\ K$ est ω-stable, alors K est a.c.

e) En caractéristique p : on définit une filtration du groupe additif de K, en utilisant l'endomorphisme $\tau : x \longrightarrow x^p - x$.

On prouve alors que si $a \in K$, l'équation $x^p - x - a = 0$, possède une solution dans K ;

f) En utilisant a), c) et e), on prouve par la théorie de Galois que si K est un corps infini de caractéristique p et si $Th\ K$ est ω-stable, alors K est a.c.

(5.4.4) - <u>*Théorème*</u> *(en caractéristique zéro)*.-

Les seules théories complètes de corps différentiels infinis ω-stables sont les théories complètes de corps différentiellement clos de caractéristique zéro.

<u>*Démonstration*</u> :

. La théorie T des corps différentiellement clos de caractéristique zéro est ω_1-catégorique (elle est donc ω-stable) : en effet, si K et $K' \models T$, et tq card K = card $K' = \aleph_1$, comme K et K' sont saturés (5.3.7) et que T est complète alors $K \simeq K'$, d'après le théorème d'unicité des modèles saturés.

Donc si K est un corps différentiellement clos de caractéristique zéro, alors $\mathrm{Th}\, K$ est ω-stable.

. On démontre la réciproque de façon analogue à (5.4.2), en utilisant les résultats précédents nécessaires.

(5.4.5) - *Remarque* : La théorie des corps réels clos n'est pas ω-stable : en effet, $\mathbb{R}$ est un modèle infini et on peut définir sur R, une relation binaire d'ordre total définissable :

$$x \geqslant y \quad \text{ssi} \quad (\exists z) \quad (x = y+z^2).$$

Ce qui est interdit par la condition de Shelah (4.3.4).

Cependant, Erdös, Gillman et Henricksen ont montré que la théorie des corps réels clos ω_1-denses est ω_1-catégorique (cf. [8]), donc elle est ω-stable, et, par suite, le théorème de caractérisation des théories ω-stables de corps réels clos ω_1-denses reste valable.

CHAPITRE VI

GROUPES EXISTENTIELLEMENT CLOS
ET
ω_1-EXISTENTIELLEMENT CLOS

Nous étudierons quelques propriétés des groupes e.c et ω_1-e.c dans le langage infinitaire $L_{\omega_1,\omega}$ et nous démontrerons les résultats énoncés dans [16], (page 82), qui sont dus à E. Fisher, dans une lettre non publiée à A. Macintyre.

(6.1) - *Quelques résultats sur les groupes e.c.* (dans le langage L de la théorie des groupes) [16].

(6.1.1) - *Définitions*.- Soit L le langage de la théorie des groupes et soit G un groupe.

(i) Un mot $W(x_j,g_k)$ en les indéterminées x_j, $j = 1,\dots,n$, défini sur G, est un terme de $L(G)$, dont les variables libres sont les $x_j = j = 1,\dots,n$ et qui fait intervenir les constantes g_k, $k = 1,\dots,m$.

(ii) Si G est un groupe avec élément neutre 1, une relation $W(x_j,g_k) = 1$, (resp. $W(x_j,g_k) \neq 1$) sur les mots définis sur G, en les indéterminées x_j, $j = 1,\dots,n$, est une équation (resp. une inéquation) à coefficients dans G.

(6.1.2) - *Rappel* (*Théorèmes d'adjonction de B.H. Neumann sur les groupes*, [10]).

(i) Soient G un groupe et A, B deux sous-groupes de G. Si $\mu : A \to B$ est un isomorphisme de A sur B, alors il existe un groupe H, contenant G comme sous-groupe et un élément $t \in H$ tq :

$$t^{-1}\ a\ t = \mu(a), \quad \text{pour tout} \quad a \in A$$

(i.e tq A et B soient conjugués dans H).

(ii) Soient X et Y deux ensembles dénombrables d'un groupe G et $\mu : X \to Y$ une application, alors une solution t du système d'équations suivant :

$$S : t^{-1}xt = \mu(x), \qquad x \in X$$

peut être adjointe au groupe G ssi l'application μ se prolonge en un isomorphisme du groupe A engendré par X, sur le groupe B, engendré par Y.

Et un corollaire de ce théorème exprime que :

(iii) Tout groupe de type fini peut être plongé dans un groupe engendré par deux éléments.

(6.1.3) - *Définition*.- Soit G un groupe avec élément neutre 1. On dira que G est e.c (resp. v.c) s'il est e.c (resp. v.c) au sens de la théorie des modèles.

On dira a.c au lieu de v.c.

(6.1.4) - *Proposition.*-

(i) le groupe trivial, $\{1\}$ est a.c ;

(ii) tout groupe e.c est infini ;

(iii) tout groupe a.c qui n'est pas trivial est e.c.

Démonstration :

(i) et (ii) sont évidentes ;

(iii) est un résultat de Neumann, [19].

(6.1.5) - *Proposition.*- Soit G un groupe e.c et soit $x_1,\dots,x_n \in G$. Si $f : \langle x_1,\dots,x_n\rangle \rightarrowtail G$ est un mono, alors il existe $t \in G$ tq : $f(x_i) = t^{-1}x_i t$, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$.

Démonstration :

C'est un corollaire du théorème d'adjonction. En effet, f est un isomorphisme de $\langle x_1,\dots,x_n\rangle$ sur $\langle f(x_1),\dots,f(x_n)\rangle$; d'après le théorème (6.1.2, (i)), il existe alors un groupe H contenant G comme sous-groupe et un élément $t_1 \in H$ tq : $t_1^{-1}x_i t_1 = f(x_i)$, $i = 1,\dots,n$. Mais puisque $G <_1 H$ (car G est e.c), alors toute formule existentielle est préservée par sous-structure. Donc il existe $t \in G$ tq $f(x_i) = t^{-1}x_i t$, pour tout $i = 1,\dots,n$.

(6.1.6) - *Définition.*- Soit G un groupe et soit $n \in \mathbb{N}^*$. $Sub_n(G)$ est la classe des groupes de type fini n qui sont plongeables dans G.

(6.1.7) - *Proposition.*- Soit G un groupe e.c et soit H un sous-groupe de type fini de G. Alors il existe un sous-groupe $H_{(2)}$ de G, à deux générateurs tq H se plonge dans $H_{(2)}$.

Démonstration :

Soit $H = \langle h_1,\dots,h_n\rangle$. On plonge H dans un groupe à deux générateurs : $H'_{(2)} = \langle h'_1, h'_2\rangle$ (6.1.2, iii). On forme ensuite le produit libre suivant en amalgamant sur H :

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dr] & \\ H \arrow[ur, tail] \arrow[dr] & & G \underset{H}{*} H'_{(2)} \\ & H'_{(2)} \arrow[ur, tail] & \end{tikzcd}$$

On a $h_i = W_i(h'_1,h'_2)$ dans $H'_{(2)}$, $i = 1,\dots,n$ donc aussi dans $G \underset{H}{*} H'_{(2)}$. L'énoncé existentiel :

$$\psi = (\exists v_1)(\exists v_2)\left[\bigwedge_{i\in[1,n]} (h_i = W_i(v_1,v_2))\right]$$

est vrai dans $G \underset{H}{*} H'_{(2)}$, donc il est vrai dans G. Il existe alors $g_1,\ g_2 \in G$ tq : $h_i = W_i(g_1,g_2)$, pour tout i tq $i = 1,\dots,n$.
D'où $H = \langle h_1,\dots,h_n\rangle$ se plonge dans $H_{(2)} = \langle g_1,g_2\rangle \subset G$.

c.q.f.d.

(6.1.8) - <u>*Corollaire*</u>.- Soient G_1 et G_2 deux groupes e.c.
Si $\mathrm{Sub}_2(G_1) \subset \mathrm{Sub}_2(G_2)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{Sub}_n(G_1) \subset \mathrm{Sub}_n(G_2)$.

Démonstration :

Soit n fixé, $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $H = \langle h_1,\dots,h_n\rangle$ tq $H \in \mathrm{Sub}_n(G_1)$.
H est alors isomorphe à un sous-groupe H^1 de G_1 ; or H^1 se plonge

dans un sous-groupe $H^1_{(2)}$ à deux générateurs de G_1. $H^1_{(2)} \in Sub_2(G_1) \subset Sub_2(G_2)$ donc $H^1_{(2)}$ se plonge dans G_2. On a alors :

$$H \simeq H^1 \rightarrowtail H^1_{(2)} \rightarrowtail G_2.$$

D'où $H \in Sub_n(G_2)$.

(6.1.9) - *Proposition*.- Soient G_1 et G_2 deux groupes e.c. Supposons que $Sub_2(G_1) \subset Sub_2(G_2)$. Si H et Γ sont deux sous-groupes de type fini de G_1 tq $H \subset \Gamma$ et si $f_H : H \rightarrowtail G_2$ est un mono, alors f_H s'étend en un mono $f_\Gamma : \Gamma \rightarrowtail G_2$.

Démonstration :

Puisque $Sub_2(G_1) \subset Sub_2(G_2)$, on a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $Sub_n(G_1) \subset Sub_n(G_2)$ (d'après (6.1.8)). Γ est donc plongeable dans G_2. Soit alors $g : \Gamma \rightarrowtail G_2$ un mono de Γ dans G_2 ; on définit l'application :

$$\psi : g(H) \rightarrowtail f_H(H) : x \longmapsto \psi(x) = f_H(g^{-1}(x)).$$

ψ est un isomorphisme. D'après la proposition (6.1.5), comme G_2 est e.c, il existe $t \in G_2$ tq $\psi(x) = t^{-1}xt$, pour tout $x \in g(H)$.

$$\text{On définit } f_\Gamma : \Gamma \longrightarrow G_2$$
$$x \longmapsto f_\Gamma(x) = t^{-1}g(x)t$$

f_Γ est un mono et on a :

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[rr, tail, "f_H"] \arrow[dr, tail] \arrow[ddr, hook] & & f_H(H) \arrow[r, hook] & G_2 \\
& g(H) \arrow[ur, "\wr\,\psi"'] & & \\
& \Gamma \arrow[uurr, tail, "f_\Gamma"'] & &
\end{tikzcd}$$

f_Γ prolonge f_H, car pour tout $x \in H$, on a :

$$f_\Gamma(x) = t^{-1}g(x)t = \emptyset(g(x)) = f_H(g^{-1}(g(x))) = f_H(x).$$

(6.2) - *Groupes e.c dans* $L_{\omega_1\omega}$.

(6.2.1) - *Théorème*.- Soit L le langage de la théorie des groupes et soient G_1 et G_2 deux groupes e.c. Alors :

(i) $G_1 \equiv_{\omega_1,\omega} G_2$ (dans $L_{\omega_1\omega}$) ssi $\mathrm{Sub}_2(G_1) = \mathrm{Sub}_2(G_2)$;

(ii) si $G_1 \subset G_2$, alors $G_1 <_{\omega_1,\omega} G_2$ ssi $\mathrm{Sub}_2(G_1) = \mathrm{Sub}_2(G_2)$.

Démonstration :

(i) ==> par contraposition : supposons que $\mathrm{Sub}_2(G_1) \neq \mathrm{Sub}_2(G_2)$. Supposons sans perdre de généralité qu'il existe H, $H \in \mathrm{Sub}_2(G_1)$ et $H \notin \mathrm{Sub}_2(G_2)$. On pose $H = \langle x,y \rangle$ et on considère les mots $W_n(x,y)$, $n < \omega$, à variables libres x, y tq : $H \models (W_n(x,y) = 1)$ et les mots $V_m(x,y)$, $m < \omega$ tq $H \models (V_m(x,y) \neq 1)$.

Soit alors Φ, l'énoncé de $L_{\omega_1,\omega}$ suivant :

$$\Phi : (\exists v_1)(\exists v_2)\left[(\bigwedge_{n<\omega} W_n(v_1,v_2) = 1) \wedge (\bigwedge_{m<\omega} V_m(v_1,v_2) \neq 1)\right].$$

On voit que pour tout groupe G, $G \models \Phi$ ssi H est plongeable dans G.

Il en résulte alors que :

$G_1 \models \Phi$ (car $H \in \mathrm{Sub}_2(G_1)$)

$G_2 \models \neg\Phi$ (car $H \notin \mathrm{Sub}_2(G_2)$).

D'où $G_1 \not\equiv_{\omega_1,\omega} G_2$ (dans $L_{\omega_1,\omega}$).

$\Longleftarrow$ Réciproquement, supposons que $Sub_2(G_1) = Sub_2(G_2)$. Pour tout $n < \omega$, on a alors : $Sub_n(G_1) = Sub_n(G_2)$ d'après (6.1.8).

On utilise la construction dite "va et vient" de Ehrenfeucht-Cantor-Fraissé (cf. [27]).

On ordonne bien G_1 et G_2.

. Soit a_1 le premier élément de G_1 ; $\langle a_1\rangle \in Sub_1(G_1)$ or $Sub_1(G_1) = Sub_1(G_2)$, donc $\langle a_1\rangle \in Sub_1(G_2)$ et $\langle a_1\rangle$ est alors plongeable dans G_2. On choisit un élément b_1 de G_2 tq : $f_1 : \langle a_1\rangle \xrightarrow{\sim} \langle b_1\rangle$ et on considère le premier élément de $G_2 - \{b_1\}$; soit b_2 cet élément $\langle b_1,b_2\rangle \in Sub_2(G_2) = Sub_2(G_1)$; $\langle b_1,b_2\rangle$ est donc plongeable dans G_1. Or $\langle b_1\rangle \subset \langle b_1,b_2\rangle$ et $f_1 : \langle b_1\rangle \rightarrowtail G_1$; f_1 s'étend donc en un monomorphisme $f_2 : \langle b_1,b_2\rangle \rightarrowtail G_1$ d'après (6.1.9). On peut donc choisir un élément noté $a_2 \in G_1$ tq $f_2 : \langle b_1,b_2\rangle \xrightarrow{\sim} \langle a_1,a_2\rangle$ et f_2 prolonge f_1.

. Soit a_3 le premier élément de $G_1 - \{a_1,a_2\}$, ainsi de suite, on obtient deux séquences $(a_n)_{n<\omega}$ et $(b_n)_{n<\omega}$ tq pour tout $n < \omega$: $(G_1,a_1,\dots,a_n) \equiv_{\omega_1,\omega} (G_2,b_1,\dots,b_n)$. Cela implique alors $G_1 \equiv_{\omega_1,\omega} G_2$.

(ii) $\Longrightarrow$ comme pour (i)

$\Longleftarrow$ supposons $G_1 \subset G_2$ et $Sub_2(G_1) = Sub_2(G_2)$.

Soient $a_1,\dots,a_n \in G_1$. Alors la proposition (6.1.8) permet d'utiliser la même construction de Ehrenfeucht-Cantor-Fraissé, pour montrer que : $(G_1,a_1,\dots,a_n) \equiv_{\omega_1,\omega} (G_2,a_1,\dots,a_n)$. Comme cela est vrai pour tout $a_1,\dots,a_n$, on en déduit alors que $G_1 <_{\omega_1\omega} G_2$.

(6.2.2) - *Théorème*.- Soient G_1 et G_2 deux groupes e.c (dans *L*).

(i) si G_1 et G_2 sont dénombrables, alors $G_1 \simeq G_2$ ssi $Sub_2(G_1) = Sub_2(G_2)$.

(ii) si G_1 est dénombrable, alors G_1 se plonge dans G_2 ssi $Sub_2(G_1) \subset Sub_2(G_2)$.

Démonstration :

(i) nécessité : trivial ;

suffisance : $Sub_2(G_1) = Sub_2(G_2)$ implique $G_1 \equiv_{\omega_1,\omega} G_2$.
On applique alors le lemme de Scott ([12], p. 98) G_1 et G_2 sont dénombrables, élémentairement équivalents, ils sont donc isomorphes i.e $G_1 \simeq G_2$.

(ii) nécessité : trivial ;

suffisance : supposons que $Sub_2(G_1) \subset Sub_2(G_2)$; on va alors montrer que G_1 se plonge dans G_2.

On énumère les éléments de G_1 : $g_o, g_1, g_2, \dots$
Utilisant alors la proposition (6.1.9) et l'hypothèse $Sub_2(G_1) \subset Sub_2(G_2)$, on obtient les monomorphismes $f_n : \langle g_o, g_1, \dots, g_n \rangle \rightarrowtail G_2$ tq :
$f_o \subset f_1 \subset f_2 \subset \dots \subset f_n \subset f_{n+1} \subset \dots$

On pose $f = \bigcup_n f_n$; alors $f : G_1 \rightarrowtail G_2$ est un monomorphisme.

(6.2.3) - *Corollaire*.- Soient G_1 et G_2 deux groupes e.c dénombrables. Alors $G_1 \simeq G_2$ ssi G_1 se plonge dans G_2 et vice versa.

Démonstration :

Si G_1 se plonge dans G_2, alors $Sub_2(G_1) \subset Sub_2(G_2)$. Si G_2 se plonge dans G_1, alors $Sub_2(G_2) \subset Sub_2(G_1)$, donc on a $Sub_2(G_1) = Sub_2(G_2)$; d'où d'après (6.2.2, i), on a $G_1 \simeq G_2$.

(6.3) - *Groupes* ω_1. *e.c.*

(6.3.1) - *Proposition*.- Soit G un groupe ω_1-e.c. Si H est un groupe de type fini, alors H est isomorphe à un sous-groupe de G.

Démonstration :

Soit $H = \langle h_1,\dots,h_m\rangle$. On considère les mots $W_n(h_1,\dots,h_m)$, $n < \omega$, à variables libres $h_1,\dots,h_m$ tq $H \models (W_n(h_1,\dots,h_m) = 1)$; et les mots $V_p(h_1,\dots,h_m)$, $p < \omega$, à variables libres $h_1,\dots,h_m$ tq $H \models (V_p(h_1,\dots,h_m) \neq 1)$, où 1 est l'élément neutre de H. On considère alors le système Φ suivant :

$$\Phi \quad \begin{cases} W_n(v_1,\dots,v_m) = 1, & n < \omega \\ V_p(v_1,\dots,v_m) \neq 1, & p < \omega \end{cases}$$

Il existe une solution de Φ dans le produit libre $G * \bar{H}$, où $\bar{H}$ est une copie de H, disjointe de G :

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dr] & \\ \{1\} \arrow[ur] \arrow[dr, tail] & & G * \bar{H} \\ & \bar{H} \arrow[ur, tail] & \end{tikzcd}$$

Considérant G comme sous-groupe de $G * \bar{H}$, comme G est ω_1 e.c, il existe alors une solution de Φ dans G. Soit $g_1,\dots,g_m$ cette solution on a alors $\langle h_1,\dots,h_m\rangle$ isomorphe à $\langle g_1,\dots,g_m\rangle$ par l'isomorphisme $h_i \longmapsto g_i$, $i = 1,\dots,m$.

(6.3.2) - *Proposition*.- Soit G un groupe. Si G est ω_1-e.c, alors G est générique (dans $L_{\omega_1,\omega}$).

Démonstration :

Soit G un groupe ω_1 e.c. On sait qu'il existe un groupe générique G^* tq G se plonge dans G^*. On va alors montrer que $G <_{\omega_1,\omega} G^*$.

Or, G est e.c, G^* générique est aussi e.c, comme G se plonge dans G^* (dans L), il faut alors montrer que $\mathrm{Sub}_2(G) = \mathrm{Sub}_2(G^*)$, d'après le théorème (6.2.1, ii). Ce qui est facile car si $\langle a,b\rangle \in \mathrm{Sub}_2(G^*)$, comme G est ω_1-e.c, alors $\langle a,b\rangle$ se plonge dans G (6.3.1) et donc $\langle a,b\rangle \in \mathrm{Sub}_2(G)$. Par suite, on a $\mathrm{Sub}_2(G) = \mathrm{Sub}_2(G^*)$, d'où $G <_{\omega_1,\omega} G^*$ (6.2.1, ii).

Comme G^* est générique, alors G est générique, car la classe des modèles génériques est axiomatisable par un énoncé de $L_{\omega_1,\omega}$ (lemme 3, page 517, [17]).

(6.3.3) - *Théorème*.- Soit G un groupe. Alors G est générique ssi G est une sous-structure élémentaire d'un groupe ω_1-e.c (dans $L_{\omega_1,\omega}$).

Démonstration :

Soit G un groupe générique ; on sait qu'il existe un groupe G^* ω_1-e.c tq G se plonge dans G^*. Or G est générique dans $L_{\omega_1,\omega}$, de même que G^*, car G^* est ω_1-e.c, on a donc $G <_{\omega_1,\omega} G^*$ [25].

Réciproquement : Si G est une sous-structure élémentaire dans $L_{\omega_1,\omega}$, d'un groupe ω_1-e.c G^*, comme G^* est générique, alors G est générique.

(6.3.4) - <u>*Corollaire*</u>.- Le forcing-compagnon de la théorie des groupes via le forcing infini de Robinson est la théorie des groupes ω_1-e.c.

<u>*Démonstration*</u> :

Soit T la théorie des groupes et soit $T^F = \{\psi,\ \psi$ énoncé de $L_{\omega_1,\omega}$, défini dans T et vrai dans tout groupe générique $\}$; et soit T_1 la théorie des groupes ω_1-e.c. On a $T^F = T_1$.

(6.3.5) - <u>*Remarque*</u> : Le corollaire précédent fournit un contre-exemple d'une théorie T (la théorie des groupes), tq T^F le forcing-compagnon de T, ne soit pas le modèle-compagnon de T (car la théorie des groupes n'a pas de modèle-compagnon (2.3.15, a)).

(6.3.6) - <u>*Proposition*</u>.- Soit L le langage de la théorie des groupes et soient G_1, G_2 deux groupes ω_1-e.c. Alors G_1 et G_2 sont élémentairement équivalents dans $L_{\omega_1,\omega}$.

<u>*Démonstration*</u> :

Résulte de (6.2.1) et de (6.3.1).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN E. - *"Elements of Algebraic Geometry"*, New York University (1955).

[2] BOURBAKI N. - *"Algèbre commutative"*, Chap. 4, 5, 6, Hermann-Paris (1964).

[3] CHANG C.C. & KEISLER J. - *"Model theory"*, North-Holland (1973).

[4] CHERLIN G.L. - *"Algebraically closed commutative rings"*, The Journal of Symbolic Logic Vol. (38), n° 3 (1973) pages 493-499.

[5] EKLOF P.C. - *"Lefschetz's principle and local functors"*, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. (37), n° 2 (1973), pages 333-339.

[6] EKLOF P.C. & FISCHER E.R. - *"The elementary theory of abelian groups"*, Ann. Math. Logic Vol. (4), n° 2 (1972), pages 115-171.

[7] EKLOF P.C. & SABBAGH G. - *"Model completions and modules"*, Ann. Math. Logic Vol. (2) (1971), pages 251-288.

[8] ERDÖS P., GILLMAN L. & HENRIKSEN - *"An isomorphism theorem for real closed fields"*, Ann. Math. Ser., Vol. (2) (1961), pages 542-554.

[9] FAKIR S. - *"On differential closed fields"*, Publ. Int. U.E.R. de Math. Lille I (1976).

[10] HIGMAN G., NEUMANN B.H. & NEUMANN H. - *"Embedding theorems for groups"*, Journal of London Math. Soc. Vol. (24) (1949), pages 247-254.

[11] JONSSON B. - *"Homogeneous universal relational systems"*, Math. Scand. Vol. (8) (1960), pages 137-142.

[12] KEISLER H.J. - *"Fundamentals of model theory"*, North-Holland (1977).

[13] KEISLER H.J. - *"Forcing and the omitting types theorem"*, Studies in Math. 8, BUFFALO, N.Y. (1973).

[14] KOLCHIN E.R. - *"Differential Algebra and Algebraic groups"*, Academic Press New-York (1973).

[15] MACINTYRE A. - *"On ω_1-categorical theories of fiels"*, Fund. Math. Vol. 71 (1971), page 1-25.

[16] MACINTYRE A. - *"On algebraically closed groups"*, Ann. of Math. Vol. (96) (1972), pages 53-97.

[17] MACINTYRE A. - *"Omitting quantifier-free types in generic structures"*, Journal of Symbolic Logic Vol. (37), n° 3 (1972), pages 512-520.

[18] MORLEY M. - *"Categoricity in Power"*, Trans. Amer. Math. Soc. n° 114 (1965), pages 514-538.

[19] NEUMANN B.H. - *"A note on algebraically closed groups"*, Journal of London Math. Soc. Vol. (27) (1952), pages 247-249.

[20] RIBENBOIM P. - *"L'arithmētique des corps"*, Hermann-Paris (1972).

[21] RITT J.F. - *"Differential Algebra"* Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Vol. (33), New York (1950).

[22] ROBINSON A. & BARWISE J. - *"Completing theories by forcing"*, Ann. Math. Logic Vol. (2) (1970), pages 119-142.

[23] ROBINSON A. - *"Introduction to model theory..."* North-Holland-Amsterdam (1963).

[24] ROBINSON A. - *"Infinite forcing in model theory"*, Proc. of the second Scand. Symp. in logic Oslo (june 1970), pages 317-340.

[25] ROBINSON A. - *"Forcing in model theory"*, Actes, Congrès, Intern. Math. (1970), tome 1, pages 245-250.

[26] SABBAGH G. - *"Sous-modules purs, existentiellement clos et ēlēmentaires"*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 272 (1971), Série A, pages 1289-1292.

[27] SACKS G.E. - *"Saturated model theory"*,
Benjamin, Reading, Massachusetts (1972).

[28] SEIDENBERG A. - *"Some basis theorems in differential algebra"*,
Trans. Amer. Math. Soc.
Vol. (73) (1972), pages 174-190.

[29] SIMMONS H. - *"Existentially closed structures"*,
Journal of Symbolic Logic
Vol. (37) (1972), pages 293-330.

[30] WOOD C. - *"The model theory of differential fields of characteristic* $p \neq 0$",
Proc. Amer. Math. Soc.
Vol. (40), n° 2 (1973), pages 577-584.

RÉSUMÉ

On montre comment certains concepts de la théorie des modèles (modèles existentiellement clos, théories modèle-complètes, modèles saturés, etc...) sont nés de généralisation de notions étudiées en géométrie algébrique.

On étudie la théorie générale des modèles et on trouve des connexions entre plusieurs notions (modèles ω_1-existentiellement clos, modèles ω_1-saturés, modèles ω_1-universel-homogènes) à partir de certains résultats spécifiques à la théorie des corps. Inversement, on trouve des interprétations et des applications en théorie des corps qui s'étendent aux groupes et à d'autres structures algébriques.

Ainsi, on donne des applications aux corps différentiels (caractérisation des corps différentiellement clos), aux corps (caractérisation des (théories ω-stables), aux groupes (groupes génériques et groupes ω_1-existentiellement clos).

MOTS CLES : *Logique du premier ordre, stabilité, catégoricité, théorie modèle-complète, modèles à propriétés spéciales (saturés, homogènes, universels, existentiellement clos, génériques), forcing, corps, groupes, algèbre différentielle.*