N° d'ordre : 1147

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

Spécialité : MATHEMATIQUES PURES

par

CHAIBI MOHAMED



# SUR LES THEORIES BIVARIANTES ET LES CLASSES DE CHERN DES ESPACES LINEAIRES REDUITS

JURY : R. BKOUCHE, Président
J.P. BRASSELET, Rapporteur
S. FAKIR
A. EL KACIMI-ALAOUI
R. GERGONDEY
Examinateurs

Soutenue le 22 Juin 1984

*J.P. BRASSELET a guidé mes premiers pas dans la recherche mathématique. Ses enseignements et ses conseils m'ont été très précieux. Ma gratitude envers lui est profonde.*

*Je remercie vivement A. EL KACIMI-ALAOUI qui, parallèlement à son travail, n'a cessé de suivre le développement de ce travail avec attention et bienveillance.*

*Je remercie également R. GERGONDEY dont la disponibilité et les conseils m'ont été très utiles, ainsi que R. BKOUCHE et S. FAKIR qui ont accepté de participer au jury de cette thèse.*

# PLAN


| | pages |
|---|---|
| *Introduction* | - i - |
| *Chapitre I : Quelques résultats sur les classes de Chern en théorie bivariante.* | 1 |
| 1) Rappel du théorème d'existence | |
| 2) Formule de Riemann-Roch | 5 |
| 3) Théorème de Riemann-Roch-Verdier | 8 |
| 4) Théorème de spécialisation | 10 |
| *Chapitre II : Exemples de calcul de caractère de Chern d'un espace linéaire réduit.* | 16 |
| 1) Rappel de la définition de $C_M$ et $ch_*$ au sens de M.H. Schwartz | |
| 2) Exemples de calcul | 17 |
| *Chapitre III : Caractère de Chern relatif.* | 23 |
| 1) Construction de $L(X)$ | 23 |
| 2) Définition de $ch_* : L(X) \to H_*(X)$ | |
| 3) Définition de $ch_* : L(X,A) \to H_*(X)$ | 30 |
| 4) Présentation du théorème A | |
| 5) Démonstration du théorème A | 34 |
| *Bibliographie* | 38 |

# INTRODUCTION

Les notions de théorie bivariante et d'orientation bivariante, ont été introduites par W. Fulton et M. Pherson.

W. Fulton et M. Pherson démontrent l'existence et l'unicité des classes de Stiefel-Whitney en théorie bivariante. Ils conjecturent l'existence et l'unicité des classes de Chern. L'existence a été démontrée par J.P. Brasselet, puis par C. Sabbah. En supposant vérifiée la conjecture, on établit dans le premier chapitre une formule de Riemann-Roch, un théorème de Riemann-Roch Verdier et un théorème de spécialisation. M.H. Schwartz a étudié les espaces à fibres linéaires variables. Elle a défini la classe de Chern-Mather $C_M$ et le caractère de Chern $ch_*$ d'un espace linéaire réduit.

Au deuxième chapitre, nous en rappelons la définition et explicitons quelques exemples de calcul.

Au troisième chapitre, nous généralisons la notion de K-théorie à la catégorie des espaces linéaires réduits. Nous démontrons enfin le théorème suivant pour les espaces linéaires réduits (équivalent d'un résultat d'Atiyah pour les espaces fibrés).

*Théorème*. Soit X un espace analytique réduit, $(w,p,X)$ un fibré vectoriel réel orientable de rang $2q$ de base X et $(B(w),\Pi,X)$ (resp. $(S(w),\Pi_{|S(w)},X)$) le fibré en boules (resp. en sphères) associé à $(w,p,X)$. Si $L'$ et $L''$ sont deux espaces linéaires réduits sur X, on suppose que : $\Pi^*L'_{|S(w)} \xrightarrow{\alpha} \Pi^*L''_{|S(w)}$ est un isomorphisme, alors on a :

$$e(B) \cap \emptyset_* \, ch_* d(\Pi^*L',\Pi^*L'' \,;\, \alpha) = ch_*(L') - ch_*(L'')$$

où $\psi_*$ est l'isomorphisme de Thom $H_*(B(w),S(w)) \to H_*(X)$ et $e(B)$ est la classe d'Euler du fibré en boules $B(w)$.

# CHAPITRE I

## QUELQUES RESULTATS SUR LES CLASSES DE CHERN EN THEORIE BIVARIANTE

W. Fulton et M. Pherson ont montré dans [6] l'existence et l'unicité des classes de Stiefel-Whitney en théorie bivariante modulo 2 en conjecturant l'existence et l'unicité des classes Chern en théorie bivariante à coefficients entiers. J.P. Brasselet a montré dans [3] l'existence des classes de Chern dans cette théorie. C. Sabbah a par la suite, également montré ce résultat dans [12]. L'unicité reste un problème ouvert. Nous étudions ici, les conséquences du théorème de J.P. Brasselet, en supposant vérifiée l'unicité :

Formule de Riemann-Roch

Formule de Riemann-Roch-Verdier

Théorème de spécialisation.

Ces résultats ont été démontrés par W. Fulton et M. Pherson dans le cas des classes de Stiefel-Whitney.

### 1.1. *Hypothèses* :

Les espaces considérés ici sont des ensembles analytiques complexes irréductibles et les applications $f : X \to Y$ sont analytiques propres.

### 1.2. *Théorie d'homologie bivariante* ([6], §.4) :

Soient $f : X \to Y$ une application et $\phi : X \to M$ un plongement fermé de $X$ dans une variété analytique complexe $M$, de dimension réelle $2m$. L'application $f$ se factorise à travers le plongement fermé $(f,\phi)$ ; suivi de la projection canonique sur $Y$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "(f,\phi)"] \arrow[dr, "f"'] & Y\times M \arrow[d] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Alors, pour tout $i$, on pose $H^i(X \xrightarrow{f} Y) = H^{i+2m}(Y\times M, Y\times M - X_\phi)$ où $X_\phi = (f,\phi)(X)$. Cette définition est indépendante de la factorisation $(f,\phi)$. (cf. [6], §.4). W. Fulton et M. Pherson ont montré que l'on construit bien ainsi une théorie bivariante $H^*(X \xrightarrow{f} Y)$ avec les trois opérations (produit, image directe et image réciproque).

### 1.3. *Théorie bivariante* $\mathbb{F}$ ([3]).

Un sous ensemble constructible d'un ensemble $X$ est obtenu à partir des sous-ensembles analytiques de $X$ par un nombre fini de réunions, intersections et complémentaires.

On dit qu'une fonction $\alpha : X \to \mathbb{Z}$ est constructible, si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha^{-1}(n)$ est un ensemble constructible.

Il existe alors une triangulation cellulaire $(K)$ de $X$ telle que $\alpha$ soit constante sur l'intérieur des cellules de $(K)$. On dit qu'une telle triangulation est $\alpha$-adaptée.

Si $\alpha : X \to \mathbb{Z}$ est une fonction constructible et $A$ une partie de $X$, on définit $\chi(A ; \alpha)$ comme l'entier

$$\chi(A ; \alpha) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n\, \chi(A \cap \alpha^{-1}(n))$$

Soit $(K)$ une triangulation $\alpha$-adaptée et $A$ un sous-complexe de $(K)$ ; $\chi(A ; \alpha) = \sum_i (-1)^i \sum_{\sigma\in sk^i(A)} \alpha(\sigma)$, où $sk^i(A)$ désigne l'ensemble des cellules de dimension $i$ de $A$ et $\alpha(\sigma)$ la valeur de $\alpha$ à l'intérieur d'une telle cellule.

Si $f : X \to Y$ est une application et $(K)$ et $(L)$ deux triangulations de $X$ et $Y$ respectivement. On dit que $f$ est cellulaire si l'image par $f$ de toute cellule de $(K)$ est une cellule de $(L)$ et si la restriction de $f$ à l'intérieur de toute cellule de $(K)$ est de rang constant.

*Condition d'Euler locale.*

On dit qu'une fonction constructible $\alpha : X \to \mathbb{Z}$ satisfait la condition d'Euler locale en $x \in X$, si, pour des triangulations $(K)$ et $(L)$ de $X$ et $Y$ (respectivement) telles que $(K)$ soit $\alpha$-adaptée et $f$ cellulaire et, si $X$ est dans l'intérieur de $\Delta_o$, cellule de $(K)$,

$$(1) \qquad \alpha(x) = \chi(st^o(\Delta_o) \cap f^{-1}(y)\ ;\ \alpha)$$

pour tout $y$ de l'étoile ouverte $st^o(f(\Delta_o))$.
$st^o(\Delta_o)$ désigne la réunion des intérieurs de toutes les cellules qui rencontrent l'intérieur de $\Delta_o$.
Soit $\sigma$ une cellule de $(L)$ telle que $f(\Delta_o) \subset \sigma$. Alors :

$$\alpha(x) = \sum_{\substack{\Delta_o < \Delta \\ \text{et } f(\Delta)=\sigma}} (-1)^{\dim(\Delta \cap f^{-1}(y))}\, \alpha(\overset{o}{\Delta})$$

pour tout $y$ dans $st^o(f(\Delta_o))$, où $\Delta_o < \Delta$ signifie que $\Delta_o$ est face de $\Delta$.

*Lemme.* (cf. M. ELHAOUARI: Sur les classes de Stiefel-Whitney en théorie bivariante. Thèse soutenue le 8 décembre 1983 à l'Université des Sciences et Techniques de Lille I).

Soit $f : X \to Y$ une application et $\alpha : X \to \mathbb{Z}$ une fonction constructible. On munit $X$ et $Y$ de la métrique induite par l'une des $\mathbb{R}^n$. On a : $\alpha$ vérifie la condition d'Euler locale en $x$ si et seulement si il existe une boule fermée $B(x,\varepsilon)$ de centre $x$, de rayon suffisamment petit $\varepsilon > 0$, et une boule fermée $B(f(x)\,;\,\eta)$ de centre $f(x)$, de rayon suffisamment petit $\eta > 0$, tel que :

$$\alpha(x) = (\overset{\circ}{B}(x,\varepsilon) \cap f^{-1}(y)\ ;\ \alpha)$$

pour tout $y$ de $\overset{\circ}{B}(f(x),\eta)$.

*Définition de* $\mathbb{F}(X \xrightarrow{f} Y)$ [6]. Pour toute application $f : X \to Y$ ; $\mathbb{F}(X \xrightarrow{f} Y) = \mathbb{F}^{o}(X \xrightarrow{f} Y)$ est l'ensemble des fonctions constructibles, $\alpha : X \to \mathbb{Z}$ satisfaisant la condition d'Euler locale en tout point $x \in X$. On note $\alpha$ les éléments de $\mathbb{F}(X \xrightarrow{f} Y)$. On obtient une théorie bivariante avec les 3 opérations (produit, image directe et image réciproque). (cf. [3]).

### 1.4. *Application d'Euler.*

Une application d'Euler est une application pour laquelle la fonction constante 1 sur $X$ satisfait la condition d'Euler locale pour tout $x \in X$. On la note $1_f$.

### 1.5. *Théorème.*

Une transformation de Grothendieck $\mathbb{F} \to H$ est une collection d'homomorphismes $\mathbb{F}(X \to Y) \to H(X \to Y)$ qui préserve les trois opérations (produit, image directe et image réciproque).

*Théorème* [3]. Il existe une transformation de Grothendieck $\gamma$ de $\mathbb{F}$ dans $H$ telle que, si $X$ est une variété lisse, $\gamma(1_f) = C(TX)\cdot[X]$.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dr, "{[X]}"] & \\
X \arrow[ur, "C(TX)"] \arrow[rr, "\gamma(1_f)"'] & & pt
\end{tikzcd}$$

où $C(TX)$ désigne la classe de Chern du fibré tangent à $X$ et $[X]$ la classe fondamentale de la variété $X$.

L'unicité des classes de Chern est conjecturée par R. Mac Pherson et J.P. Brasselet.

1.6. *Conséquences du théorème 1.5 en admettant vérifiée la conjecture.*

On établit ici, une formule de Riemann-Roch, un théorème de Riemann-Roch Verdier et un théorème de spécialisation, en s'inspirant des démonstrations de R. Mac Pherson pour le cas des classes de Stiefel-Whitney.

1.6.1. Formule de Riemann-Roch. Soit $E$ l'ensemble des applications d'Euler. $E$ est stable pour la composition des applications et contient les identités. Les applications $1_f$ déterminent une orientation canonique de $E$ dans $\mathbb{F}$ où $f \in E$. La composition de deux applications normalement non-singulières est une application normalement non-singulière et les identités sont normalement non-singulières. Une application $f$, normalement non-singulière détermine une orientation canonique notée $[f]$.

*Applications "lisses"* [6].

Les applications qui sont des applications d'Euler et normalement non-singulières sont appelées, applications lisses.

De manière équivalente, $f : X \to Y$ est lisse si $X$ possède un recouvrement ouvert $\{U\}$ tel que $U \cong f(U)\times\mathbb{R}^n$ et $f_{|U}$ est la projection $p_1 : f(U)\times\mathbb{R}^n \to f(U)$.

*Exemples.*

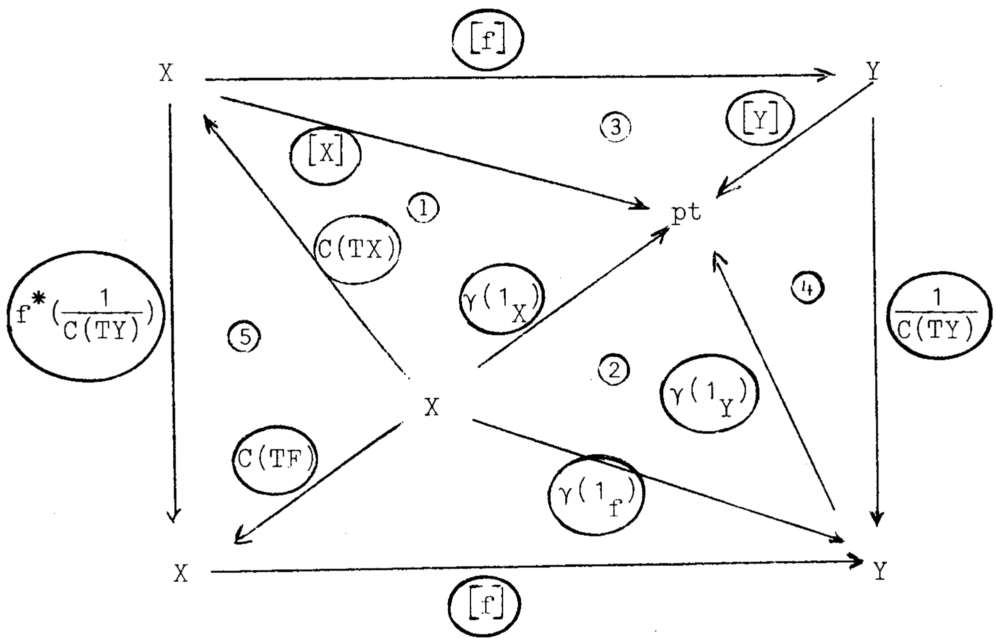
1 Une fibration dont les fibres sont non-singulières est une application lisse.

② Soit l'application lisse $f : X \to Y$, alors $X$ admet un "micro-fibré" noté $TF = (X \underset{Y}{\times} X, P_1, X)$ où $X \underset{Y}{\times} X$ est le produit fibré de $X \xrightarrow{f} Y$ et $X \xrightarrow{f} Y$ sur $Y$.

*Proposition.* Si $f : X \to Y$ est une application lisse, alors $\gamma(1_f) = C(TF)\cdot[f]$, où $C(TF) \in H^*(X)$, $[f] \in H^*(X \xrightarrow{f} Y)$ et $\gamma(1_f) \in H^*(X \xrightarrow{f} Y)$.

Démonstration :

① Cas où $Y$ est une variété. D'après le théorème 2.5. on a : $\gamma(1_f) = C(TX)\cdot[X]$. Considérons le diagramme suivant :




Dans le triangle ① on a $\gamma(1_X) = C(TX)\cdot[X]$ en appliquant le théorème 2.5 à l'application $X \to pt$.

Dans le triangle ② on a : $\gamma(1_X) = \gamma(1_f)\cdot\gamma(1_Y)$, car $1_X = 1_f\cdot 1_Y$ et $\gamma$ commute avec le produit bivariant.

Dans le triangle ③ on a : $[X] = [f]\cdot[Y]$. C'est la définition de $[f]$.

Dans le triangle ④ on a : $\frac{1}{C(TX)}\cdot\gamma(1_X) = [Y]$ car $C(TX)$ est inversible et $\gamma(1_X) = C(TX)\cdot[Y]$.

Dans le triangle 5 on a : $C(TX) = C(TF) \cdot f^* C(TY)$. En effet, $f : X \to Y$ est lisse et $TX = TF \oplus f^*(TY)$. Donc, $C(TX) = C(TF) \cdot f^* C(TY)$, on a également $f^*(C(TY)) \cdot f^*(\frac{1}{C(TY)}) = 1$. D'où : $C(TF) = C(TX) \cdot f^*(\frac{1}{C(TY)})$.

Considérons maintenant le carré fibré :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"', "{[f]}"] \arrow[d, "f^*(\frac{1}{C(TX)})"', "id"] & Y \arrow[d, "\frac{1}{C(TY)}"', "id"] \\ X \arrow[r, "f", "{[f]}"'] & Y \end{tikzcd}$$

On sait que la théorie homologique est anti-commutative (cf. [6]). Cela veut dire :

Pour tous carrés fibrés $\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$ et $\begin{tikzcd} W \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$ ,

pour tout $\alpha \in H^i(X \xrightarrow{f} Z)$ et $\beta \in H^j(Y \xrightarrow{g} Z)$, on a :

$$g^*(\alpha) \cdot \beta = (-1)^{i \times j} f^*(\beta) \cdot \alpha .$$

Donc puisque $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id"] & Y \arrow[d, "id"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$ est fibré et $\frac{1}{C(TY)} \in H^{2i}(Y)$, on a :

$$f^*(\frac{1}{C(TY)}) \cdot [f] = [f] \cdot \frac{1}{C(TY)} .$$

De ces 5 égalités, on déduit que $\gamma(1_f) \cdot \gamma(1_Y) = C(TF) \cdot [f] \cdot \gamma(1_Y)$. Puisque $\cdot \gamma(1_Y)$ est un isomorphisme, on a : $\gamma(1_f) = C(TF) \cdot [f]$.

*CAS GENERAL* :

*Lemme.* [6]. Tout espace $Y$ admet un plongement $i : Y \hookrightarrow N$ où $N$ est une variété, tel qu'il existe une rétraction $r : N \to Y$ avec $r \circ i = id_Y$.

Soit $N$ une variété telle que $N \xrightarrow{r} Y$ est une rétraction et $Y \xhookrightarrow{i} N$ est un plongement. On forme le produit fibré de $X \xrightarrow{f} Y$ et de $N \xrightarrow{r} Y$. Soit $M = X \times_Y N$. Alors le carré

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[d, "f'=p_2"] \\ Y \arrow[r] & N \end{tikzcd}$$

est fibré.

Puisque $M \xrightarrow{f'} X$ est lisse et $N$ est une variété on a : $\gamma(1_{f'}) = C(TF')\cdot[f']$. L'image réciproque de cette égalité est :

$$i^*(\gamma(1_{f'})) = i^*(CT(F'))\cdot i^*([f'])$$

Comme

$$i^*(\gamma(1_{f'})) = \gamma(i^*(1_{f'})) = \gamma(1_f),$$

$$i^*(C(TF')) = C(TF) \quad \text{et} \quad i^*[f'] = [f],$$

on a la proposition.

1.6.2. Théorème de Riemann-Roch-Verdier.

Soit $f : X \to Y$ une application lisse. Alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}_*(Y) \arrow[r] \arrow[d, "f^!"] & H_*(Y) \arrow[d, "C(TF) \cap f^!"] \\ \mathbb{F}_*(X) \arrow[r] & H_*(X) \end{tikzcd}$$

est commutatif où $f^!(\alpha) = \alpha \circ f$ pour tout $\alpha \in \mathbb{F}_*(Y)$.

<u>Démonstration</u> : On sait que tout élément $\theta \in \mathbb{F}(X \xrightarrow{f} Y)$ détermine une application $\theta^* : \mathbb{F}_*(Y) \to \mathbb{F}_*(X)$ définie par $\theta^*(a) = \theta \cdot a$ pour tout a dans $\mathbb{F}_*(Y)$. Par fonctorialité, on a : si $\phi \in \mathbb{F}(X \xrightarrow{f} Y)$ et $\psi \in \mathbb{F}(Y \xrightarrow{g} Z)$, alors : $(\phi \cdot \psi)^*(a) = \phi^*(\psi^*(a))$ pour tout $a \in \mathbb{F}_*(Z)$.

On veut démontrer que quel que soit $\alpha \in \mathbb{F}_*(Y)$,

$$C(TF) \cap f^!(\gamma(\alpha)) = \alpha(f^!(\alpha))$$

or, $C(TF) \cap f^!(\gamma(\alpha)) = (C(TF) \cdot [f])^*(\gamma(\alpha)) = \gamma(1_f) \cdot \gamma(\alpha) = \gamma(1_f \cdot \alpha) = \gamma(\alpha o f)$ car $\gamma$ commute avec le produit bivariant. D'autre part, $\gamma(f^!(\alpha)) = \gamma(\alpha o f)$. D'où le théorème de Riemann-Roch-Verdier.

1.6.3. <u>Spécialisation</u>. Soit $f : X \to Y$ une application et soit $y_0$ un point fixé dans $Y$. On considère $\alpha \in \mathbb{F}(X - f^{-1}(y_0) \to Y - \{y_0\})$ telle que $\alpha$ soit constructible sur $X$. Soit $h : [0,1] \to Y$ un chemin dans $Y$ tel que $h(0) = y_0$ et $h(]0,1[) \subset Y - \{y_0\}$. Le diagramme suivant est à carrés fibrés.

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \times_Y [0,1] \arrow[d, "p_1"] & X \times_Y ]0,1[ \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "p_2"] & X - X_0 \arrow[d, "f"] \\
\{y_0\} \arrow[r, hook, "j"] & {[0,1]} & ]0,1[ \arrow[l, hook', "k"'] \arrow[r, "h"] & Y - \{y_0\}
\end{tikzcd}$$

où $X_0 = f^{-1}(y_0)$.

*Proposition* A. Il existe un élément unique $\beta \in \mathbb{F}(X \times_Y [0,1] \xrightarrow{p_1} [0,1])$ tel que $k^*(\beta) = h^*(\alpha)$.

*Définition*. On définit $\rho_h(\alpha)$, spécialisation de $\alpha$, comme étant la restriction de $\beta$ à $\mathbb{F}(X_0 \to \{y_0\})$. Autrement dit : $\rho_h(\alpha) = j^*(\beta)$.

*Proposition B*. Sous les hypothèses de 1.6.3 et si $X \underset{Y}{\times} [0,1] \xrightarrow{p_1} [0,1]$ est une fibration au-dessus de $]0,1]$. C'est-à-dire :

$X \underset{Y}{\times} ]0,1] \approx ]0,1] \times X_1$ où $X_1 = f^{-1}(h(1))$ alors on a :

$$H(X \underset{Y}{\times} [0,1] \to [0,1]) \overset{\sim}{=} H(X_1 \to pt).$$

*Définition de* $\sigma_h$. Soit $i_o^* : H(X \underset{Y}{\times} [0,1] \to [0,1]) \to H(X_1 \to pt)$ l'isomorphisme de la proposition B et

$$j_o^* : H(X \underset{Y}{\times} [0,1] \to [0,1]) \to H(X_o \to pt)$$

l'homomorphisme restriction. On définit $\sigma_h$ par $\sigma_h = j_o^* \, i_o^{*-1}$ .

*Théorème de spécialisation*. Les spécialisations $\sigma_h$ (en homologie) et $\rho_h$ (sur les fonctions constructibles) commutent. Plus précisément, si $\alpha$ est un élément de $F(X-X_o \to Y-\{y_o\})$, on a : $\sigma_h(\gamma(i^*(\alpha)) = \gamma(\rho_h(\alpha))$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F}_*(X_1) \arrow[d, "\gamma"'] & \mathbb{F}(X-X_o \to Y-\{y_o\}) \arrow[l, "i^*"'] \arrow[r, "\rho_h"] & \mathbb{F}_*(X_o) \arrow[d, "\gamma"] \\
H_*(X_1) \arrow[rr, "\sigma_h"] & & H_*(X_o)
\end{tikzcd}$$

Démonstration de la proposition A :

a) Unicité. Supposons qu'il existe $\beta$ et $\beta'$ appartenant à $\mathbb{F}(X \underset{Y}{\times} [0,1] \xrightarrow{p_1} [0,1])$ telles que $k^*\beta = k^*\beta' = h^*(\alpha)$. Il est évident que $\beta = \beta'$ sur $X \underset{Y}{\times} ]0,1]$. D'autre part, on note $(x,0)$ un élément de $X_o$. Soit $\Delta_o$ une cellule de $(K)$, triangulation de $X \underset{Y}{\times} [0,1]$ qui est à la fois $\beta$-adaptée et $\beta'$-adaptée (cf. [6], §.6). Soit $(L)$ une triangulation de $[0,1]$ telle que $p_1$ soit cellulaire.

Supposons que $(x,0) \in \overset{\circ}{\Delta}_o$ ($\overset{\circ}{\Delta}_o$ signifie intérieur de $\Delta_o$) et soit $\sigma$ une cellule de (L) telle que $p_1(\Delta_o) \subset \sigma$, alors on a :

$$\beta(x,0) = \sum_{\substack{\Delta | \Delta_o < \Delta \\ p_1(\Delta)=\sigma}} (-1)^{\dim(\Delta \cap p_1^{-1}(y))} \beta(\overset{\circ}{\Delta}) \quad \text{pour tout } y \in st^o p_1(\Delta_o), \text{ et}$$

$$\beta'(x,0) = \sum_{\substack{\Delta | \Delta_o < \Delta \\ p_1(\Delta)=\sigma}} (-1)^{\dim(\Delta \cap p_1^{-1}(y))} \beta'(\Delta^o) \quad \text{pour tout } y \in st^o p_1(\Delta_o).$$

Quel que soit $\Delta$ tel que $p_1(\Delta) = \sigma$ et $\Delta_o < \Delta$, $\overset{\circ}{\Delta}$ est dans $X \times_Y ]0,1]$. Donc $\beta(\overset{\circ}{\Delta}) = \beta'(\overset{\circ}{\Delta})$. D'où l'unicité.

b) <u>Existence</u>. Soient (K) une triangulation de $X \times_Y [0,1]$ et (L) une triangulation de $[0,1]$ telles que $p_1$ soit cellulaire. On définit $\beta$ par :

i) si $(x,t) \in X \times_Y [0,1]$, $\beta(x,t) = h^*(\alpha)(x,t) = \alpha(x)$

ii) si $(x,0) \in X_1$, soient $\Delta_o \in (K)$ tel que $(x,0) \in \overset{\circ}{\Delta}_o$ et $\sigma$ une cellule de L tel que $p_1(\Delta_o) < \sigma$, $\sigma \neq 0$, on pose :

$$\beta(x,0) = \sum_{\substack{\Delta | \Delta_o < \Delta \\ p_1(\Delta)=\sigma}} (-1)^{\dim(\Delta \cap p_1^{-1}(y))} \beta(\overset{\circ}{\Delta})$$

pour tout $y$ de $st^o(p_1(\Delta_o))$.

La fonction $\beta$ est bien définie, car, si $\Delta \in A$, alors $p_1(\Delta) = \sigma \neq$ <0>. Donc, il existe $t \neq 0$ tel que $(x,t) \in \overset{\circ}{\Delta}$ et $\beta(\overset{\circ}{\Delta}) = \alpha(x)$.

1 <u>La fonction $\beta$ est constructible</u> :

Pour tout $\Delta$ tel que $\overset{\circ}{\Delta} \subset X \times_Y ]0,1]$, on a $\beta(x,t) = \alpha(x)$ quel que soit $(x,t) \in \overset{\circ}{\Delta}$. Donc $\beta|_{X \times_Y ]0,1]}$ est constructible.

Soit $\beta' = \beta_{|X_o}$. Pour toute triangulation $K_o$ de $X_o$ telle que $(K)$ soit compatible avec une sous triangulation $(K'_o)$ de $(K_o)$ ; $\beta'$ est constante à l'intérieur de chaque simplexe.

② $\beta$ <u>satisfait la condition d'Euler locale</u> :

i) $\beta$ satisfait la condition d'Euler locale <u>au point</u> $(x,0)$. Soit $\Delta_o \in (K)$ tel que $(x,0) \in \overset{o}{\Delta}_o$. On a $p_1(\Delta_o) = <0>$. Soit $\sigma$ tel que $p_1(\Delta_o) < \sigma$. On a :

$$\beta(x,0) = \sum_{\substack{\Delta \mid \Delta_o \subset \Delta \\ p_1(\Delta)=\sigma}} (-1)^{\dim(\Delta \cap p_1^{-1}(t))} \alpha(\overset{o}{\Delta})$$

pour tout $t \in st^o p_1(\Delta_o)$.

ii) $\beta$ satisfait la condition d'Euler locale en $(x,t) \in X \underset{Y}{\times} ]0,1]$. Puisque $h^*(\alpha)$ satisfait la condition d'Euler locale, il existe une boule fermée $B((x,t),\varepsilon)$ de $X \underset{Y}{\times} ]0,1]$ et une boule fermée $B(t,\eta)$ de $]0,1]$ telle que : (cf. Lemme de 1.3)

$$h^*(\alpha)(x,t) = \chi(\overset{o}{B}((x,t),\varepsilon) \cap p_1^{-1}(t') \; ; \; h^*(\alpha))$$

quel que soit $t' \in \overset{o}{B}(t,\eta)$. Or, $t \neq 0$ et $h^*(\alpha)(x,t) = \beta(x,t)$ et

$$\chi(\overset{o}{B}((x,t) \; ; \; \varepsilon) \cap p_1^{-1}(t') \; ; \; h^*(\alpha)) = \chi(B((x,t),\varepsilon) \cap p_1^{-1}(t') \; ; \; \beta)$$

Donc $\beta$ satisfait la condition d'Euler locale pour tout point $(x,t) \in X \underset{Y}{\times} [0,1]$.

<u>Démonstration de la proposition</u> B :

Soit $\phi : X \underset{Y}{\times} [0,1] \to \mathbb{R}^n$ un plongement fermé tel que $(p_1,\phi)$ soit un plongement fermé et que le diagramme suivant factorise $p_1$ :

$$\begin{tikzcd}
X\times[0,1] \arrow[rr, "(p_1,\phi)"] \arrow[drr, "p_1"'] & & {[0,1]\times\mathbb{R}^n} \arrow[d] \\
& & {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

Posons $X' = X\underset{Y}{\times}[0,1] - X_o$ et $A = [0,1]\times\mathbb{R}^n - X\underset{Y}{\times}[0,1]$. On a par définition de la théorie bivariante $H$ et en tenant compte du fait que $A$ est un ouvert de $[0,1]\times\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} H(X\underset{Y}{\times}[0,1] \to [0,1]) &= H(]0,1]\times\mathbb{R}^n,\ A \cap (]0,1]\times\mathbb{R}^n)) \\ &= H(]0,1]\times R^n,\ ]0,1]\times R^n - ]0,1]\times X_1) \\ &= H(]0,1]\times R^n, ]0,1]\times(R^n-X_1)). \end{aligned}$$

Posons $X' = X\underset{Y}{\times}[0,1] - X_o$ et $A = [0,1]\times\mathbb{R}^n - X\underset{Y}{\times}[0,1]$. On a par définition de la théorie bivariante $H$ et en tenant compte du fait que $A$ est un ouvert de $[0,1]\times\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} H(X\underset{Y}{\times}[0,1] \to [0,1]) &= H(]0,1]\times\mathbb{R}^n,\ A \cap (]0,1]\times\mathbb{R}^n)) \\ &= H(]0,1]\times\mathbb{R}^n, ]0,1]\times\mathbb{R}^n - ]0,1]\times X_1) \\ &= H(]0,1]\times\mathbb{R}^n, ]0,1]\times(\mathbb{R}^n-X_1)). \end{aligned}$$

Enfin, puisque $(]0,1]\times\mathbb{R}^n,\ ]0,1]\times(\mathbb{R}^n-X_1))$ se rétracte par déformation sur $(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-X_1)$ on a :

$$H(X\underset{Y}{\times}[0,1] \to [0,1]) \approx H(X_1 \to \{y_1\}).$$

On peut donc définir $\sigma_h$ par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
H(X\underset{Y}{\times}[0,1] \to [0,1]) \arrow[r, shift right, "i_o^*"'] \arrow[drr, bend right=0, "p_1"'] & & H_*(X_1) \arrow[ll, shift right, "i_o^{*-1}"'] \arrow[d, "\sigma_h"] \\
& & H_*(X_o)
\end{tikzcd}$$

où $j_o^*$ est l'application induite par le carré fibré :

$$\begin{tikzcd}
X_o \arrow[r, hook] \arrow[d] & X\underset{Y}{\times}[0,1] \arrow[d] \\
\{y_o\} \arrow[r, hook, "j_o"] & {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

Démonstration du théorème de spécialisation :

Les notations étant celles définies précédemment, on considère les carrés fibrés :

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, hook] \arrow[d] & X\underset{Y}{\times}]0,1] \arrow[r] \arrow[d] & X-X_o \arrow[d, "\alpha"] \\
\{y_1\} \arrow[r, hook, "i_o"] & ]0,1] \arrow[r, "h"] & Y-\{y_o\}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r] \arrow[d] & X\underset{Y}{\times}[0,1] \arrow[d] \\
\{y_1\} \arrow[r, hook, "i_o"] & {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X_o \arrow[r] \arrow[d, "\rho_\gamma(\alpha)"'] & X\underset{Y}{\times}[0,1] \arrow[d, "\beta"] \\
\{y_o\} \arrow[r, "j_o"] & {[0,1]}
\end{tikzcd}
\quad \text{et} \quad
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r] \arrow[d] & X\underset{Y}{\times}]0,1] \arrow[r] \arrow[d, "h^*(\alpha)"] & X\underset{Y}{\times}[0,1] \arrow[d, "\beta"] \\
\{y_1\} \arrow[r, hook, "i'_o"] & ]0,1] \arrow[r] & {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

On a : $k \circ i'_o = i_o$ et :

$$\sigma_h(\gamma(i^*(\alpha))) = j_o^*\, i_o^{*^{-1}}\, i^*\gamma(\alpha) = j_o^*(i_o^{*^{-1}}\, i^*(\gamma(\alpha)))$$

$\gamma(\rho_h(\alpha)) = \gamma(j_o^*\beta) = j_o^*(\gamma(\beta))$. Il suffit de montrer que $i_o^{*-1}\, i^*(\gamma(\alpha)) = \gamma(\beta)$ ou $i^*(\gamma(\alpha)) = i_o^*\, \gamma(\beta)$ or,

$$\begin{aligned} i_o^*\, \gamma(\beta) = i_o^*\cdot k^*(\gamma(\beta)) &= i_o'^{*}\, \gamma(k^*(\beta)) \\ &= i_o'^{*}\, \gamma(h^*(\alpha)) \\ &= i_o'^{*}\, h^*\gamma(\alpha) \\ &= i^*(\gamma(\alpha)). \end{aligned}$$

D'où le théorème.

*Corollaire*. Si $f : X \to Y$ est une application d'Euler, alors $\sigma_h(C(TX_1)\cdot[X_1]) = C(TX_o)\cdot[X_o]$.

Démonstration : Il suffit d'appliquer le théorème précédent à l'élément $1_X$ qui appartient bien à $\mathbb{F}(X \xrightarrow{f} Y)$ puisque $f$ est une application d'Euler.

# CHAPITRE II

## EXEMPLES DE CALCUL DE CARACTERE DE CHERN D'UN ESPACE LINEAIRE

On rappelle la définition d'un espace linéaire réduit, de classe et caractère de chern des espaces linéaires réduits (cf [9]). On explicite aussi quelques exemples de calcul de $C_M$ et $ch_*$.

### 2.1. *Rappels* [9] :

Soient $L$ et $X$ deux espaces analytiques et $\Pi$ une application holomorphe de $L$ sur $X$ telles que soient définis sur $L$ une structure vectorielle, conservant les fibres, et une section nulle par :

$$L \times_X L \xrightarrow{+} L \quad ; \quad \mathbb{C}\times L \xrightarrow{\cdot} L \quad ; \quad X \hookrightarrow L$$

On appelle espace <u>linéaire réduit</u> le réduit d'un tel espace $L$. La catégorie de ces espaces se définit de façon naturelle.

*Proposition* [cf. [9] page 10]. Un sous-espace linéaire réduit $L_o$ de $X\times\mathbb{C}^N$ est un sous-espace analytique réduit dont le faisceau d'idéaux $I_o$ vérifie la condition suivante : si $I_1$ est le sous-faisceau engendré par les formes linéaires appartenant à $I_o$, on a : $\mathrm{rad}(I_1) = I_o$.

### 2.2. *Transformé* $\hat{X}$ *de* $X$ *par rapport à* $L$ :

Soit $(L,\Pi,X)$ un espace linéaire réduit de rang presque partout égal à d. Soit $\hat{Y}$ l'espace des d-plans des fibres de $L$. Il est muni d'une application canonique $\nu_1$ sur $X$. L'espace $\hat{Y}$ est analytique. <u>Le transformé de</u> $\hat{X}$ <u>de</u> $X$ <u>par rapport à</u> $L$ est défini par :

$\hat{X}$ = adhérence dans $\hat{Y}$ de $\nu_1^{-1}(\Omega)$ où $\Omega$ est l'ouvert dense où $L$ est de rang $d$. L'espace $\hat{X}$ est analytique. On désigne par $\nu$ la restriction de $\nu_1$ à $\hat{X}$.

## 2.3. *Fibré canonique associé à* L :

Ce fibré est noté $(\hat{E},\hat{\Pi},\hat{X})$ avec $\hat{E} = \{(v,\hat{x}) \in \nu^*L \mid v$ appartient au d-plan $\hat{x}\}$ et $\Pi : \hat{E} \to \hat{X}$ la projection sur $\hat{X}$.

## 2.4. *Définitions* :

La classe de Chern totale d'un fibré est notée $C^*(\ )$ et le caractère de chern est noté $ch^*(\ )$. Ces deux classes sont dans la cohomologie à valeurs rationnelles. La classe de chern Mather $C_M$ et le caractère de Chern en homologie $ch_*$ sont définis par :

$$C_M(L) = \nu_*(C^*(\hat{E}) \cap [\hat{X}]) \in H_{**}(X)$$

$$ch_*(L) = \nu_*(ch^*(\hat{E}) \cap [\hat{X}]) \in H_{**}(X).$$

## 2.5. *Exemples de calcul* :

Premier exemple : Soit $X = \mathbb{C}^2$. On considère l'espace analytique

$$L = \left\{ (y,z,v,\omega) \in X\times\mathbb{C}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} yv = 0 \\ (y-z^2)\omega = 0 \end{array} \right\}$$

Soit $\Pi : L \to X$ la projection sur $X$. Alors $(L,\Pi,X)$ est un espace linéaire sur $X$. Le réduit de $L$ est l'espace :

$$L_o = \left\{ (y,z,v,\omega) \in X\times\mathbb{C}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} yv = 0 \\ (y-z^2)\omega = 0 \\ zv\omega = 0 \end{array} \right\}$$

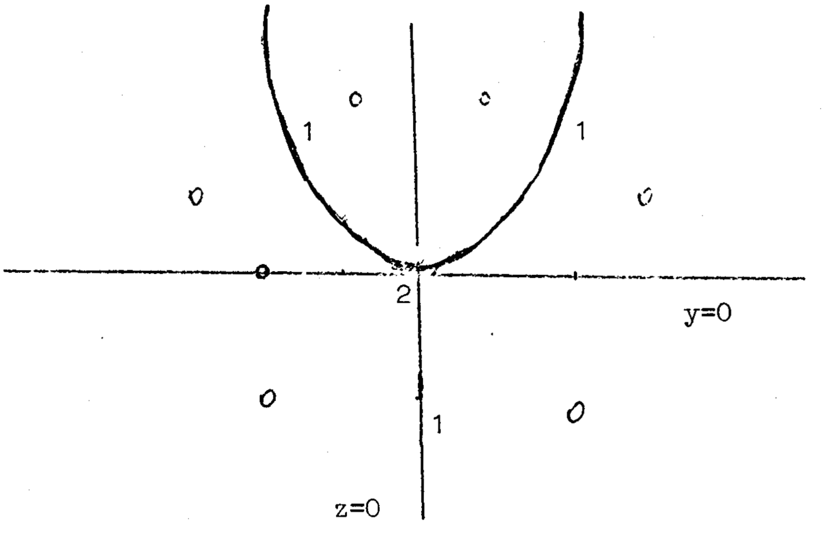
*Fibres de* L :

a) si $y = z^2$ et $z \neq 0$ $\qquad \dim(L_{z^2,z}) = 1$

b) si $Y = 0$ et $Z \neq 0$ $\qquad \dim(L_{y_o}) = 1$

c) $\dim(L_{0,0}) = 2$

d) Dans les autres cas $\qquad \dim(L_{Yz}) = 0$




*Détermination de* $\hat{Y}$ :

L'espace $\hat{Y}$ est l'ensemble des 0-plans des fibres de L. On a : $\hat{Y} \approx \mathbb{C}^2$. On en déduit que $\hat{X} \cong \mathbb{C}^2$. Soit $\nu : \hat{X} \to \mathbb{C}^2$ l'application canonique.

*Fibré canonique* $\hat{E}$ *associé à* L :

Le fibré canonique est $\hat{E} = \{(v,\hat{x}) \mid v \in \hat{x}$ et $\hat{x}$ est un 0-plan$\}$. Alors $C^*(\hat{E}) = 1$ et $ch^*(\hat{E}) = 1$. D'où :

$$C_M(L_o) = \nu_*(1 \cap [\hat{X}]) = [\mathbb{C}^2]$$

$$ch_*(L_o) = \nu_*(1 \cap [\hat{X}]) = [\mathbb{C}^2]$$

<u>Deuxième exemple</u> : Soient $X = \{(y,Z) \in \mathbb{C}^2 \mid yz = 0\}$ et

$$L = \left\{ (y,z,v,\omega) \in X \times \mathbb{C}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} zv+y\omega = 0 \\ zv = 0 \end{array} \right\}$$

Si $\Pi : L \to X$ est la projection canonique sur $X$, $(L,\Pi,X)$ est un espace linéaire réduit sur $X$.

*Fibres de* $L$ :

a) si $(y,z) = (0,0)$ $\dim(L_{(y,z)}) = 2$

b) si $(y,z) \neq (0,0)$ $\dim(L_{yz}) = 1$

*Détermination de* $\hat{X}$ :

Soit $\hat{Y}$ l'espace des 1-plans des fibres de $L$. $\hat{Y}$ s'identifie à $(X - \{(0,0)\}) \cup P_1(\mathbb{C})$. On note $\nu_1 : \hat{Y} \to X$ l'application canonique sur $X$. Soit $\Omega = \{(y,z) \in X \mid \dim(L_{(y,z)}) = 1\} = X - \{(0,0)\}$. Alors $\nu^{-1}(\Omega) \cong X - \{(0,0)\}$ et son adhérence dans $\hat{Y}$ est $\hat{X} = (X - \{(0,0)\}) \cup \ell_1 \cup \ell_2$ où $\ell_1$ et $\ell_2$ sont des éléments de $P_1(\mathbb{C})$. Donc on peut identifier $\hat{X}$ à deux copies de $\mathbb{C}$.

*Fibré canonique associé à* $L$ :

Soit $\hat{E} = \{(v,\hat{x}) \mid v \in \hat{x}$ et $\hat{x} \in \mathbb{C} \coprod \mathbb{C}\}$. Il est clair que $\hat{E}_{|\mathbb{C}} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Par recollement de $\hat{E}_{|\mathbb{C}}$ et $\hat{E}_{|\mathbb{C}}$. On voit que $\hat{E}$ est un fibré trivial sur $\mathbb{C} \coprod \mathbb{C}$. On en déduit :

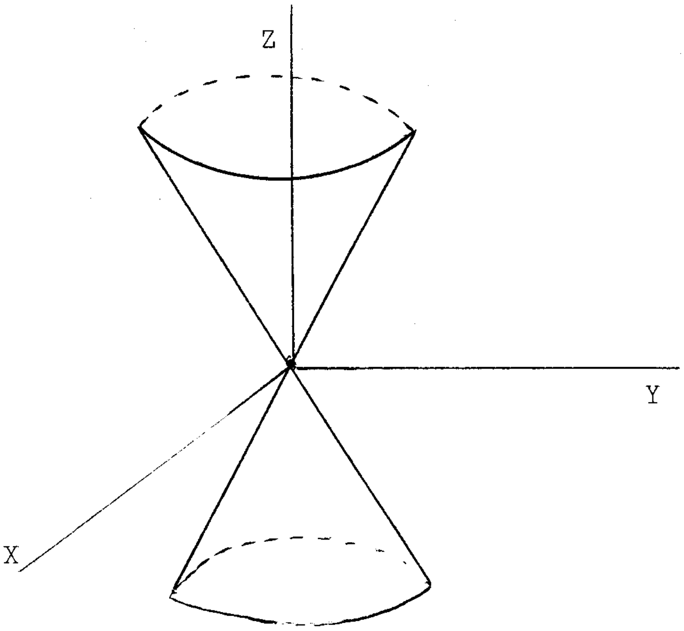
$$C_M(L) = \nu_*(1 \cap [\hat{X}]) = \nu_*[\hat{X}] = [X]$$

$$ch_*(L) = \nu_*(1 \cap [\hat{X}]) = \nu_*[\hat{X}] = [X]$$

<u>Troisième exemple</u> : Soient $X = \{(X,Y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid X^2+y^2-z^2 = 0\}$ et soit

$$L = \left\{ ((X,y,z),(u,v,\omega)) \in X \times \mathbb{C}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} y\omega - zv = 0 \\ zu - X\omega = 0 \\ Xv - yu = 0 \end{array} \right\}$$

Alors $X$ est le cône :




L'espace analytique $L$ a une structure d'espace linéaire sur $X$ avec $\Pi$ la projection canonique sur $X$.

*Fibres de* $L$ :

a) $\dim(L_{(0,0,0)}) = 3$

b) $\dim(L_{XYz}) = 1$ si $(X,y,z) \neq (0,0,0)$

*Détermination de* $\hat{X}$ :

On a $Y \cong (X-\{(0,0,0)\}) \cup P_2(\mathbb{C})$. Soit $\nu_1 : \hat{Y} \to X$ l'application canonique. Alors $\nu^{-1}(\Omega) = \Omega = X - \{(0,0,0)\}$. Puisque toutes les fibres sont des droites complexes portées par les génératrices du cône, $\hat{X}$ est le cylindre $\Sigma$ obtenu en ajoutant à chaque génératrice du **demi-cône privé** de $(0,0,0)$ une droite de $P_2(\mathbb{C})$ portée par cette génératrice.

*Définition de* $\hat{E}$ :

On pose $\hat{E} = \{(v,\hat{x}) \mid v \in \hat{x}$ et $\hat{x} \in \Sigma\}$. Soit $\hat{\Pi} : \hat{E} \to \hat{X} = \Sigma$ la projection canonique. Alors $(\hat{E},\hat{\Pi},\Sigma)$ est un fibré trivial. D'où

$$c_M(L) = \nu_*[\Sigma] = [X]$$

$$ch_*(L) = \nu_*[\Sigma] = [X]$$

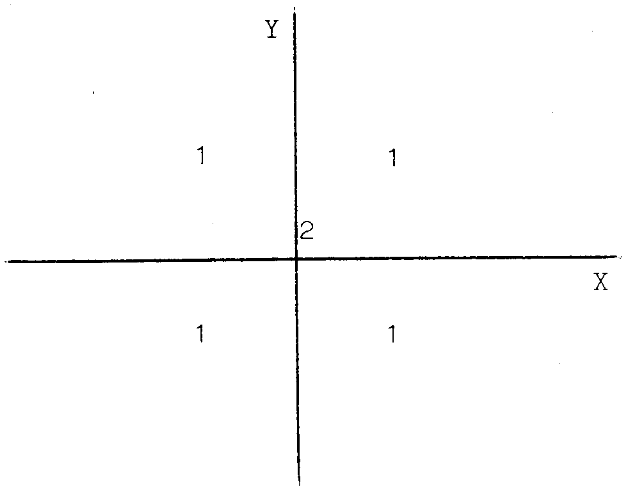
où $\nu : \Sigma \to X$ est l'application canonique induite par $\nu_1$.

Quatrième exemple : Soit $X = \mathbb{C}^2$. On considère $L = \{(y,z,v,\omega) \in X\times\mathbb{C}^2 \mid Zv + y\omega = 0\}$ et $\Pi$ la projection canonique de $L$ sur $X$. Alors $(L,\Pi,X)$ est un espace linéaire réduit.

*Fibres de* $L$ :

a) $\dim(L_{(0,0)}) = 2$

b) $\dim(L_{Yz}) = 1$ si $(y,z) \neq (0,0)$.




Soit $\Omega = \{(y,z) \in \mathbb{C}^2 \mid \dim(L_{Yz}) = 1\}$. Alors $\Omega = \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$.

*Détermination de* $\hat{X}$ :

Soit $\hat{Y}$ l'espace des 1-plans des fibres de $L$.
$Y \cong (\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}) \cup P_1(\mathbb{C})$. Si $\nu : \hat{Y} \to X$ est l'application canonique, $\nu^{-1}(\Omega) \cong \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$. Puisque toutes les droites de $P_1(\mathbb{C})$ sont limites d'une suite de 1-plans des fibres $L_{Yz}$ avec $(y,z) \neq (0,0)$. On a :

$$\hat{X} = (\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}) \cup P_1(\mathbb{C}).$$

*Fibré canonique associé à* L :

Soit $\hat{E} = \{(v,\hat{x}) \mid v \in \hat{x}$ et $\hat{x} \in (\mathbb{C}^2-\{(0,0)\}) \cup P_1(\mathbb{C})\}$. La projection $\hat{\Pi} : \hat{E} \to \hat{X}$ confère à $\hat{E}$ une structure de fibré sur $\hat{X}$. Comme $\hat{X}$ se rétracte par déformation sur $P_1(\mathbb{C})$, alors $\hat{E}$ a la même classe de Chern que $(\hat{E}|_{P_1(\mathbb{C})}, \hat{\Pi}|_{P_1(\mathbb{C})}, P_1(\mathbb{C}))$. Ce dernier n'est rien d'autre que le fibré canonique sur $P_1(\mathbb{C})$. Soit $x$ un générateur de $H^2(P_1(\mathbb{C}))$, alors $\mathbb{C}^*(\hat{E}) = 1+x$. Comme $x \in H^2(P_1(\mathbb{C}))$, $ch^*(E) = 1+r^*(x)$. Donc :

$$
\begin{aligned}
C_M(L) &= \nu_*((1+x) \cap [\hat{X}]) \\
&= \nu_*(1 \cap \hat{X}) + \nu_*(r^*x \cap [\hat{X}]) \\
&= [\mathbb{C}^2] + \nu_*(r^*x \cap [\hat{X}]).
\end{aligned}
$$

Par fonctorialité du cup-produit, on a :

$$r_*(r^*(x) \cap [\hat{X}]) = x \cap [P_1(C)] = 1.$$

D'où $r^*x \cap [\hat{X}] = 1$ et $C_M(L) = [\mathbb{C}^2] + \nu_*(1)$.

# CHAPITRE III

## CARACTERE DE CHERN RELATIF

On définit les groupes $L(X)$ et $L(X,A)$ qui généralisent la notion de K-théorie à la catégorie des espaces linéaires réduits. On définit les caractères de chern $ch_* : L(X) \to H_*(X)$ et $ch_* : L(X,A) \to H_*(X)$ et on montre le théorème suivant :

*Théorème.* Soient $X$ un espace analytique réduit, $(w,p,X)$ un fibré vectoriel réel orientable et de rang $2q$ de base $X$ et $(B(w),\Pi,X)$ (resp. $(S(w),\Pi_{|S(w)},X))$ le fibré en boules (resp. en sphères) associé à $(w,p,X)$. Si $L'$ et $L''$ sont deux espaces linéaires réduits sur $X$. On note $\hat{X}$ le transformé de M.H. Schwartz de $X$ par rapport à $L' \oplus L''$. On suppose que $\Pi^*(L')_{|S(w)} \xrightarrow{\alpha} \Pi^*(L'')_{|S(w)}$ est un isomorphisme, alors on a :

$$e(B) \cap \varphi_* \, ch_* \, d(\Pi^* L', \Pi^* L'' \; ; \alpha) = ch_*(L') - ch_*(L'')$$

où $\varphi_*$ est l'isomorphisme de Thom $H_*(B(w),S(w)) \to H_*(X)$ et $e(B)$ est la classe d'Euler du fibré en boules $B(w)$.

### 3.1. *Construction de* $L(X)$.

Soit $X$ un espace analytique réduit. On note $F(X)$ le groupe abélien libre engendré par l'ensemble des classes d'isomorphismes d'espaces linéaires réduits sur $X$. A chaque triplet $t = (L,L',L'')$ d'espaces linéaires réduits sur $X$, tels que $L$ soit isomorphe à $L' \oplus L''$, on associe l'élément $[t] = [L]-[L']-[L'']$, où $[L]$ désigne la classe d'isomorphisme de $L$. Soit $G(X)$ le sous-groupe de $F(X)$, engendré par les éléments $[t]$. On pose $L(X) = F(X)/_{G(X)}$ .

Dans la suite $[L]$ désignera la classe de $L$ modulo $G(X)$.

*Remarques.*

① Si $X$ est réduit à un point, on vérifie facilement que $L(X)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

② Puisque, tout fibré sur un espace analytique réduit $X$ est un espace linéaire réduit, on a une injection canonique $K(X) \xhookrightarrow{\phi} L(X)$. Cette injection $\phi$ n'est pas surjective, car la somme directe de deux espaces linéaires réduits qui ne sont pas des fibrés n'est pas un fibré. Donc ne peut être isomorphe à un fibré. Ce qui justifiera la définition de $L(X)$.

*Définition de* $f^!$. Soit $f : X' \to X$ une application holomorphe. On suppose que $X'$ est analytique réduit irréductible. Soit $L$ un espace linéaire réduit sur $X$. Alors $f^*(L)$ est un espace linéaire réduit sur $X'$. On définit $f^! : L(X) \to L(X')$ par

$$f^![L] = [f^*(L)].$$

3.3. *Construction de* $L(X,A)$.

Soient $X$ un espace analytique réduit compact et $A$ un sous espace analytique réduit fermé de $X$. On note $\Gamma(X,A)$ l'ensemble des triplets de la forme $(L',L'' ; \alpha)$ tels que : $L'_{|A} \xrightarrow{\alpha} L''_{|A}$ soit un isomorphisme d'espaces linéaires réduits.

a) On définit la <u>somme</u> de deux triplets de $\Gamma(X,A)$ comme suit :

$$(L',L'' ; \alpha) + (M',M'' ; \beta) = (L' \oplus M', L'' \oplus M'' ; \alpha \oplus \beta)$$

b) On dit que deux triplets de $\Gamma(X,A)$, $(L',L'' ; \alpha)$ et $(M', M'' ; \beta)$ sont isomorphes s'il existe deux isomorphismes d'espaces linéaires réduits $f' : L' \to M'$ et $f'' : L'' \to M''$ tels que le diagramme,

$$\begin{array}{ccc} L'_{|A} & \xrightarrow{\alpha} & L''_{|A} \\ {\scriptstyle f'_{|A}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f''_{|A}} \\ M'_{|A} & \xrightarrow{\beta} & M''_{|A} \end{array}$$ commute.

c) On appelle triplet <u>élémentaire</u> tout triplet de $\Gamma(X,A)$ de la forme $(L, L ; \alpha)$ où $\alpha : L \to L$ est homotope à l'identité sur $L$.

d) On dit que deux triplets de $\Gamma(X,A)$, $(L',L'' ; \alpha)$ et $(M',M'' ; \beta)$ sont <u>équivalents</u> s'il existe deux triplets élémentaires $(H,H ; \gamma)$ et $(G,G ; \lambda)$ tels que : $(L',L'' ; \alpha) + (H,H ; \gamma)$ soit isomorphe à $(M',M'' ; \beta) + (G,G ; \lambda)$. On définit ainsi une relation d'équivalence sur $\Gamma(X,A)$.

<u>*Définition*</u>. L'ensemble des classes d'équivalence de $\Gamma(X,A)$ est noté $L(X,A)$. On note également $d(L',L'' ; \alpha)$ la classe d'équivalence de $(L',L'' ; \alpha)$.

### 3.4. <u>*Définition de*</u> $f^!$.

Soit $f:(X,A) \to (X',A')$ un homomorphisme de paires d'espaces analytiques réduits avec $A$ un fermé de $X$ et $A'$ un fermé de $X'$. $X'$ et $X$ sont supposés compacts et $X'$ est irréductible. On définit :

$$f^! : L(X',A') \to L(X,A)$$

comme suit :

$$f^! d(L',L'' ; \alpha) = d(f^*L',f^*L'' ; f^*(\alpha)).$$

Ceci a un sens car l'image réciproque d'un espace linéaire réduit est un espace linéaire réduit et $f^*\alpha$ est un isomorphisme de $f^*L'_{|A}$ dans $f^*L''_{|A}$ .

3.5. *Proposition.*

On a :

i) $d(L',L'' ; \alpha)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de $\alpha$.

ii) si $Y = \emptyset$ on a :

$$d(L',L'' ; \alpha) = [L'] - [L'']$$

iii) si $j : (X,\phi) \to (X,A)$ est un plongement, l'application $j^! : L(X,A) \to L(X)$ est telle que $j^! d(L',L'' ; \alpha) = [L'] - [L'']$

iv) $d(L',L'' ; \alpha) = 0$, si et seulement si, il existe un espace linéaire réduit $G$ sur $X$ tel que $\alpha \oplus 1$ se prolonge en un isomorphisme $L' \oplus G \to L'' \oplus G$ sur $X$

v) $d(L',L'' ; \alpha) + d(L'',L' ; \alpha^{-1}) = 0$

vi) si $\beta : L''_{|A} \to L'''_{|A}$ et $\alpha : L'_{|A} \to L''_{|A}$ sont des isomorphismes alors $d(L',L'' ; \alpha) + d(L'',L''' ; \beta) = d(L',L''' ; \beta\alpha)$.

Démonstration : v) on a :

$$d(L',L'' ; \alpha) + d(L'',L' ; \alpha^{-1}) = d(L' \oplus L'', L'' \oplus L' ; \alpha \oplus \alpha^{-1}).$$

Or, $d(L' \oplus L'', L'' \oplus L' ; \alpha \oplus \alpha^{-1})$ est isomorphe à $d(L' \oplus L'', L' \oplus L'' ; \beta)$ où $\beta$ est l'automorphisme donné par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -\alpha^{-1} \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} L' \oplus L''_{|A} \arrow[r, "\alpha \oplus \alpha^{-1}"] \arrow[d, "id"'] & L'' \oplus L'_{|A} \arrow[d, "g"] & (x,y) \arrow[d] \\ L' \oplus L''_{|A} \arrow[r, "\beta"] & L' \oplus L''_{|A} & g(x,y) = (-y,x) \end{tikzcd}$$

Pour que $d(L' \oplus L'', L'' \oplus L' ; \alpha \oplus \alpha^{-1}) = 0$, il suffit de montrer que $\beta$ est homotope à l'identité. Or, $\beta$ peut s'écrire sous la forme :

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $\sigma_t = \begin{pmatrix} 1 & -t\alpha^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -t\alpha^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Il est clair que $\sigma_o = 1$ et $\sigma_1 = \beta$ ce qui achève la démonstration.

i) Soient $\alpha$ et $\alpha'$ deux isomorphismes de $L'_{|A}$ dans $L''_{|A}$ tels que $\alpha$ est homotope à $\alpha'$. D'après v) on a :

$$\begin{aligned} d(L',L'' ; \alpha) - d(L',L'' ; \alpha') &= d(L' \oplus L'', L'' \oplus L' ; \alpha \oplus \alpha'^{-1}) \\ &= d(L' \oplus L'', L' \oplus L'' ; \beta') \end{aligned}$$

où $\beta'$ est l'automorphisme de $L' \oplus L''_{|A}$ défini par la matrice

$\beta' = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha'^{-1} \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$. Puisque $\alpha$ est homotope à $\alpha'$, $\beta'$ est homotope à

$\beta = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha^{-1} \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$. Or, $\beta$ est homotope à l'identité, d'où

$d(L',L'' ; \alpha) = d(L',L'' ; \alpha')$.

ii) si $Y = \emptyset$, $d(L',L'' ; \alpha)$ est essentiellement déterminé par $L'$ et $L''$, de la forme $[L] - [L']$

iii) $j^! \, d(L',L'' ; \alpha) = d(j^*L',j^*L'' ; j^*(\alpha)) \in L(X)$. D'après ii) on a : $j^! \, d(L',L'' ; \alpha) = [j^*L'] - [j^*L''] = [L'] - [L'']$.

iv) Soit $u : (X,A) \to (X,X)$ une application holomorphe. Elle induit l'application $u^! : L(X,X) \to L(X,A)$

a) Supposons qu'il existe $G$ et un isomorphisme $\sigma : L'\oplus G \to L''\oplus G$ qui prolonge $\alpha \oplus 1$, alors

$$d(L' \oplus G, L'' \oplus G ; \alpha \oplus 1_G) = u^! d(L' \oplus G, L'' \oplus G ; \sigma) = 0,$$

puisque $L(X,X) = 0$. Comme

$$d(L' \oplus G, L'' \oplus G ; \alpha \oplus 1_G) = d(L',L'' ; \alpha) + d(G,G,1_{G|A}) \quad ;$$

on a $d(G,G ; 1_{G|A}) = u^! d(G,G ; 1_G) = 0$. D'où $d(L',L'' ; \alpha) = 0$.

b) Réciproquement, si $d(L',L'' ; \alpha) = 0$, il existe $(H,H ; id_H)$, et il existe $(G,G ; id_G)$ tels que $(L' \oplus H, L'' \oplus H ; \alpha \oplus 1_H)$ soit isomorphe à $(G,G ; 1_G)$. Si $f : L' \oplus H \to G$ et $g : L'' \oplus H \to G$ sont des isomorphismes tels que le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
(L' \oplus H)_{|A} \arrow[r, "\alpha\oplus 1"] \arrow[d, "f_{|A}"'] & (L' \oplus H)_{|A} \arrow[d, "g_{|A}"] \\
G_{|A} \arrow[r, "1_G/A"] & G_{|A}
\end{tikzcd}$$

commute, on prend $\sigma = g^{-1} \circ f$.

vi) se démontre de la même façon que v).

3.6. *Rappels* : *Propriétés sur les espaces linéaires réduits* (cf. [9] §8)

(1) Soient $A$ un sous-espace analytique réduit d'un espace analytique réduit $X$ et $L$ un espace linéaire réduit sur $X$. Notons $i : A \hookrightarrow X$ l'injection canonique et $L' = L_{|A}$. On définit les transformés

de $X$ (resp. $A$) par rapport à $L$ (resp. $L'$). Soient $\hat{X}$ et $\hat{A}$ ces transformés. Par continuité, il existe une inclusion canonique $\hat{i}$ de $\hat{A}$ dans $\hat{X}$ telle que au-dessus de $A$, $\hat{X}$ coïncide avec $\hat{i}(\hat{A})$ et si $\hat{E}$ est le fibré canonique associé à $L$ et $\hat{E}'$ est le fibré canonique associé à $L'$, alors $\hat{E}' = \hat{E}_{|A}$.

② Somme directe de deux espaces linéaires réduits :

Soient $L'$ et $L''$ deux espaces linéaires réduits de même base $X$ et de rang presque partout égal à $d'$ et $d''$ respectivement. On note $d = d'+d''$ et $L = L' \oplus L''$ (somme directe de $L'$ et $L''$). Alors $L$ est un espace linéaire réduit sur $X$ de rang presque partout égal à $d$. On désigne par $\hat{Y}$ l'ensemble des plans $\hat{x}$ des fibres de $L$, et $\tilde{Y}$ l'ensemble des $\hat{x} \in \hat{Y}$ tels que le $d$-plan $\ell$ correspondant à $\hat{x}$ vérifie : $\dim(\ell \cap L'_x) = d'$ et $\dim(\ell \cap L''_x) = d''$ avec $x = \nu(\hat{x})$. Alors $\ell' = \ell \cap L'_x$ et $\ell'' = \ell \cap L''_x$ correspondent à $\hat{x}' \in \hat{Y}'$ et $\hat{x}'' \in \hat{Y}''$ respectivement. On notera :

$$\hat{x}' = \mu'(\hat{x}), \quad \hat{x}'' = \mu''(\hat{x}) \quad \text{et} \quad \hat{x} = (\mu',\mu'')^{-1}(\hat{x}',\hat{x}'') \text{ où}$$

$$(\hat{x}',\hat{x}'') \in \hat{Y}' \times_X \hat{Y}''.$$

Dans ([9] §8) on a montré que $\mu'$ et $\mu''$ sont analytiques et que le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} \hat{X}' \arrow[dr, "\nu'"'] & \hat{X} \arrow[l, "\mu'"'] \arrow[r, "\mu''"] \arrow[d, "\nu"] & \hat{X}'' \arrow[dl, "\nu''"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

3.7. *Définition.*

Soit $[L]$ la classe dans $L(X)$ représentée par $L$. On définit $ch_*([L]) = ch_*(L)$. Moyennant le théorème ci-dessous $ch_*[L]$ ne dépend pas du représentant de $[L]$ choisi.

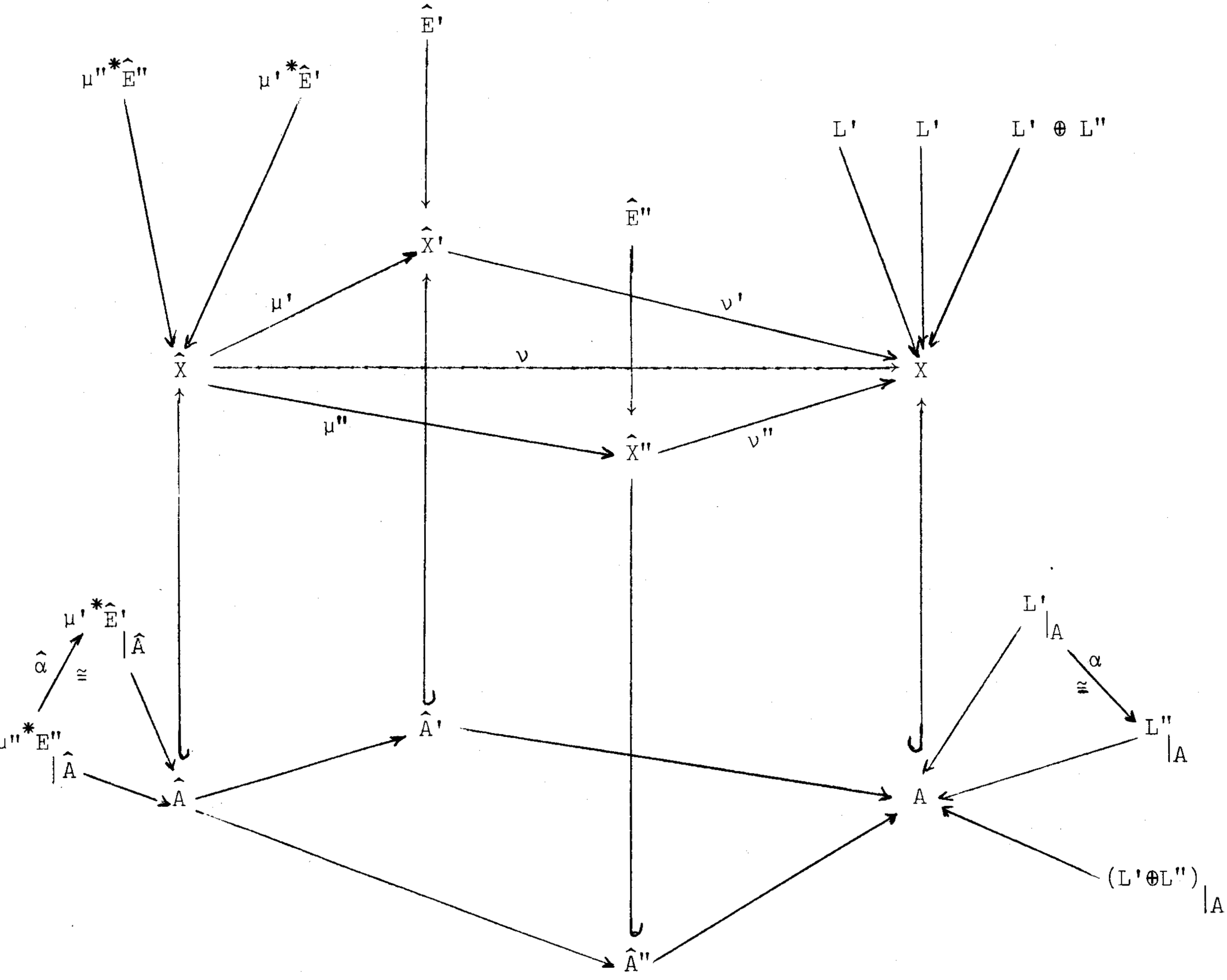
*Théorème* [9]. Soient $L'$ et $L''$ deux espaces linéaires réduits de rang presque partout égaux à $d'$ et $d''$ respectivement, on a :

$$ch_*(L' \oplus L'') = ch_*(L') + ch_*(L').$$

*3.8. Définition de* $ch_* : L(X,A) \to H_*(X)$.

On va généraliser la définition de $ch_*$ à $L(X,A)$. Soient $d(L',L'' \, ; \alpha)$ un élément de $L(X,A)$, $\hat{X}'$ (resp. $\hat{X}''$, $\hat{X}$) le transformé de $X$ par rapport à $L'$ (resp. $L''$, $L' \oplus L''$). On note $\hat{E}'$ (resp. $\hat{E}''$) le fibré canonique associé à $L'$ (resp. $L''$). Alors les applications $\hat{X} \xrightarrow{\mu'} \hat{X}'$ et $\hat{X} \xrightarrow{\mu''} \hat{X}''$ sont les applications analytiques de (4.4 2 ).

On a le diagrammme suivant :



*Définition.* On pose :

$$ch_*(L',L'' ; \alpha) = \nu_*(ch^* d(\mu'^*\hat{E}', \mu''^*\hat{E}'' ; \hat{\alpha})) \cap [\hat{X},\hat{A}]$$

où $[\hat{X},\hat{A}]$ est l'image par $\hat{w}$ de la classe fondamentale $[\hat{X}]$ de $\hat{X}$ dans la suite exacte longue :

$$\ldots H_n(\hat{A}) \to H_n(\hat{X}) \xrightarrow{\hat{\omega}} H_n(\hat{X},\hat{A}) \to \ldots .$$

Il est clair que $ch_*(L',L'' ; \alpha) \in H_*(X)$ et qu'on a :

i) $ch_*(L,L ; \alpha) = 0$ pour tout triplet élémentaire $(L,L ; \alpha)$

ii) $ch_*(L' \oplus M', L'' \oplus M'' ; \alpha \oplus \beta) = ch_*(L',L'' ; \alpha) + ch_*(M',M'' ; \beta)$

iii) $ch_*(L',L'' ; \alpha) = ch_*(M',M'' ; \beta)$ si $d(L',L'' ; \alpha) = d(M',M'' ; \beta)$

D'où la définition de $ch_* : L(X,A) \to H_*(X)$, en posant :

$$ch_* d(L',L'' ; \alpha) = ch_*(L',L'' ; \alpha).$$

3.9. *Hypothèses.*

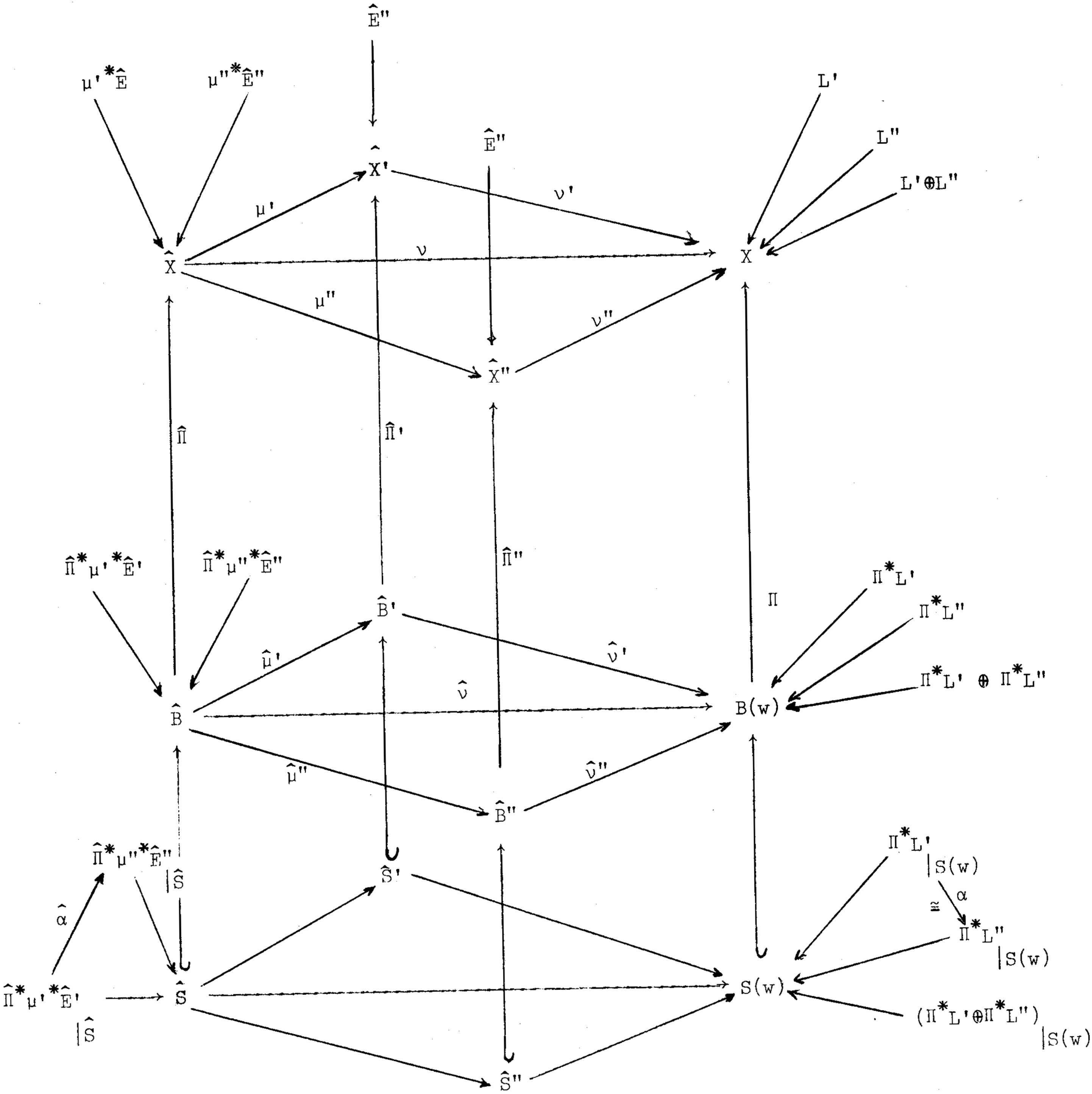
Soient $(w,p,X)$ un fibré vectoriel orienté, de rang $2q$ sur $X$, $(B(w),\Pi,X)$ (resp. $(S(w),\Pi_{|S(w)},X)$) le fibré en boules (resp. en sphères) associé à $(w,p,X)$. Soit $U$ un générateur de $H^{2q}(B(w),S(w))$ en tant que $H^{2q}(X)$-module. Soient $L'$ et $L''$ deux espaces linéaires réduits sur $X$ tels que $\Pi^*L'_{|S(w)} \xrightarrow{\alpha} \Pi^*L''_{|S(w)}$ est un isomorphisme d'espaces linéaires réduits. On note $\hat{X}$ le transformé de M.H. Schwartz de $X$ par rapport à $L' \oplus L''$. Soient $\hat{B}'$ (resp. $\hat{B}'',\hat{B}$) le transformé au sens de M.H. Schwartz de $B$ par rapport à $\Pi^*L'$ (resp. $\Pi^*L''$, $\Pi^*L' \oplus \Pi^*L''$) et $\hat{S}'$ (resp. $\hat{S}'',\hat{S}$) le transformé au sens de M.H. Schwartz de $S(w)$ par rapport à $\Pi^*L'_{|S(w)}$ (resp. $\Pi^*L''_{|S(w)}$, $(\Pi^*L' \oplus \Pi^*L'')_{|S(w)}$). Si $X$ et $\hat{X}$ sont des variétés homologiques, les isomorphismes de Thom pour $(w,p,X)$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \varphi^* : H^i(X) &\longrightarrow H^{i+2q}(B(w),S(w)) \\ x &\longrightarrow \Pi^*(x) \cup U \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_* : H_i(B(w),S(w)) &\longrightarrow H_{i-2q}(X) \\ x &\longrightarrow \Pi_*(U \cap x) \end{aligned}$$

Puisque $\Pi^* : H^*(X) \to H^*(B(w),S(w))$ est un isomorphisme, on peut définir la classe d'Euler $e(B)$ du fibré $(B(w),\Pi,X)$ par la relation $\Pi^*(e(B)) = j^*U$ où $j : (B(w),\phi) \hookrightarrow (B(w),S(w))$ est l'inclusion canonique. On forme le diagramme suivant :




L'isomorphisme $\alpha$ induit un isomorphisme $\hat{\alpha} : \hat{\Pi}^{*}\mu'^{*}\hat{E}'_{|\hat{S}} \xrightarrow{\simeq} \Pi^{*}\mu''^{*}\hat{E}''_{|\hat{S}}$

et $\hat{E}'$ (resp. $\hat{E}''$) est le fibré canonique associé à $L'$ (resp. $L''$).

### 3.10. *Démonstration du théorème A.*

La démonstration du théorème A va résulter des résultats suivants :

*Théorème B.* (cf. [5]). Soient $E$ et $F$ deux fibrés vectoriels sur $X$ tels que $\Pi^{*}E_{|S(w)} \xrightarrow{\alpha} \Pi^{*}F_{|S(w)}$ soit un isomorphisme e. Alors

$e(B) \cup \varphi^{*-1}\, ch^{*}\, d(\Pi^{*}E, \Pi^{*}F \; ; \alpha) = ch^{*}E - ch^{*}(F)$.

*Lemme 1.* Sous les hypothèses du théorème A et (3.9), on a :

i) Le transformé $\hat{B}$ de $X$ par rapport à $\Pi^{*}L' \oplus \Pi^{*}L''$ est un fibré en boules sur $\hat{X}$. C'est le fibré image réciproque par $\nu$ du fibré en boules $B$ sur $X$.

ii) Le transformé $\hat{S}$ de $X$ par rapport à $(\Pi^{*}L' \oplus \Pi^{*}L'')_{|S(w)}$ est un fibré en sphères sur $\hat{X}$. C'est l'image réciproque par $\nu$ du fibré en sphères $S$ sur $X$.

Démonstration : Evidente par définition des fibrés images réciproques (produits fibrés).

Soient $\hat{\varphi}_{*} : H_{p}(\hat{B},\hat{S};Q) \to H_{p-2q}(\hat{X};Q)$ et $\hat{\varphi}^{*} : H^{p}(\hat{X};Q) \to H^{p+2q}(\hat{B},\hat{S};Q)$ les isomorphismes de Thom en homologie et en cohomologie respectivement [cf. Remarque 3.6]. Soit $\hat{U}$ un générateur de $H^{2q}(\hat{B},\hat{S},Q)$ sur $H^{2q}(\hat{X},Q)$.

*Proposition.* ([4] ou [1]). On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^{p}(\hat{X},Q) & \xrightarrow{\hat{\varphi}^{*}} & H^{p+2q}(\hat{B},\hat{S};Q) \\ \downarrow{\scriptstyle \cdot\,\cap\,[\hat{X}]} & & \downarrow{\scriptstyle \cdot\,\cap\,[\hat{B},\hat{S}]} \\ H_{n-2q-p}(\hat{X}\;;\;Q) & \xrightarrow{\hat{\Pi}_{*}} & H_{n-2q-p}(\hat{B};Q) \end{array}$$

où $\dim(\hat{X}) = n-k$ et $\dim(\hat{B}) = n$.

On en déduit que :

$$\hat{\Pi}_*(\hat{\varphi}^*(1) \cap [\hat{B},\hat{S}]) = 1 \cap [\hat{X}]$$

D'où : $[\hat{X}] = \hat{\Pi}_*(\hat{U} \cap [\hat{B},\hat{S}])$.

*Lemme* 2. Soit $\hat{j} : (\hat{B},\emptyset) \to (\hat{B},\hat{S})$ le plongement naturel. Alors les deux diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd}
H_*(B) \arrow[r, "j_*"] & H_*(B,S) \arrow[r, "\varphi_*"] & H_*(X) \\
H_*(\hat{B}) \arrow[u, "\nu_*"] \arrow[r, "\hat{j}_*"] & H_*(\hat{B},\hat{S}) \arrow[u, "\mu_*"] \arrow[r, "\hat{\varphi}_*"] & H_*(\hat{X}) \arrow[u, "\nu_*"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
H_*(\hat{B}) \arrow[r, "\hat{U} \cap \cdot"] \arrow[dd, "\hat{j}_*"'] \arrow[ddr] & H_*(\hat{B},\hat{S}) \arrow[d, "\hat{j}_*"] \\
 & H_*(\hat{B}) \arrow[d, "\hat{\Pi}_\star"] \\
H_*(\hat{B},\hat{S}) \arrow[r, "\hat{\varphi}_*"] & H_*(\hat{X})
\end{tikzcd}$$

<u>Démonstration du théorème</u> A. : Par le théorème précédant, on a :

$$(1) \qquad e(\hat{B}) \cap \hat{\varphi}^{*-1}\, ch^* d(\hat{\Pi}^*\mu'^*\hat{E}', \hat{\Pi}^*\mu''^*\hat{E}'' \,;\, \hat{\alpha}) = ch^*\mu'^*\hat{E}' - ch^*\mu''^*\hat{E}'' .$$

En appliquant l'isomorphisme de Poincaré à (1), on aura :

$$(2) \qquad [e(\hat{B}) \cup \hat{\varphi}^{*-1}\, ch^* d(\hat{\Pi}^*\mu'^*\hat{E}',\ \hat{\Pi}^*\mu''^*\hat{E}''\ ;\ \hat{\alpha})] \cap [\hat{X}]$$

$$\|$$

$$ch^*\, \mu'^*\hat{E}' \cap [\hat{X}] - ch^*\mu''^*\hat{E}'' \cap [\hat{X}].$$

qui devient par application de la proposition précédente :

$$(3) \qquad [e(\hat{B}) \cup \hat{\varphi}^{*-1}\, ch^*\, d(\Pi^*\mu'^*\hat{E}',\ \Pi^*\mu''^*\hat{E}''\ ;\ \hat{\alpha})] \cap \hat{\Pi}_*(\hat{U} \cap [\hat{B},\hat{S}])$$

$$\|$$

$$ch^*\, \mu'^*\hat{E}' \cap [\hat{X}] - ch^*\, \mu''^*\hat{E}'' \cap [\hat{X}].$$

Par fonctiorialité du cap-produit, le premier membre de (3) devient :

$$\hat{\Pi}_*\left\{\hat{\Pi}^*[\hat{\varphi}^{*-1}(\hat{\varphi}^*(e(\hat{B})) \cup ch^*d(\hat{\Pi}^*\mu'^*\hat{E}',\ \hat{\Pi}^*\mu''^*\hat{E}''\ ;\ \hat{\alpha}))] \cap (\hat{U} \cap [\hat{B},\hat{S}]\right\}$$

$$\|$$

$$\hat{\Pi}_*\left\{(\hat{\Pi}^*[\hat{\varphi}^{*-1}(\hat{\varphi}^*e(\hat{B}) \cup ch^*d(\hat{\Pi}^*\mu'^*\hat{E}',\ \hat{\Pi}^*\mu''^*\hat{E}''\ ;\ \hat{\alpha}))] \cup \hat{U}) \cap [\hat{B},\hat{S}]\right\}$$

et par définition de l'isomorphisme de Thom :

$$\hat{\Pi}_*\left\{(\varphi^*e(\hat{B}) \cup ch^*d(\hat{\Pi}^*\mu'^*\hat{E}',\ \hat{\Pi}^*\mu''^*\hat{E}''\ ;\ \hat{\alpha}) \cap [\hat{B},\hat{S}]\right\}$$

$$\|$$

$$\hat{\Pi}_*\left\{\hat{\varphi}^*e(\hat{B}) \cap \hat{j}_*(ch^*d(\hat{\Pi}^*\mu'^*\hat{E}',\ \hat{\Pi}^*\mu''^*\hat{E}''\ ;\ \hat{\alpha}) \cap [\hat{B},\hat{S}]\right\}$$

de nouveau, par isomorphisme de Thom :

$$\hat{\Pi}_*\left\{(\hat{\Pi}^*(e(\hat{B})) \cup \hat{U}) \cap \hat{j}_*(ch^*d(\hat{\Pi}^*\mu'^*\hat{E}',\ \hat{\Pi}^*\mu''^*\hat{E}''\ ;\ \hat{\alpha}) \cap [\hat{B},\hat{S}])\right\}$$

$$\|$$

$$\hat{\Pi}_*\left\{\hat{\Pi}^*e(\hat{B}) \cap [\hat{U} \cap \hat{j}_*(ch^*d(\hat{\Pi}^*\mu'^*\hat{E}',\ \hat{\Pi}^*\mu''^*\hat{E}''\ ;\ \hat{\alpha}) \cap [\hat{B},\hat{S}])]\right\}$$

$$\|$$

$$e(\hat{B}) \cap \hat{\Pi}_*(\hat{U} \cap \hat{j}_*(ch^*d(\hat{\Pi}^*\mu'^*\hat{E}',\ \hat{\Pi}^*\mu''^*\hat{E}''\ ;\ \hat{\alpha}) \cap [\hat{B},\hat{S}])$$

$$\|$$

$$e(\hat{B}) \cap \hat{\varphi}_*\hat{j}_*(ch^*d(\hat{\Pi}^*\mu'^*\hat{E}',\ \hat{\Pi}^*\mu''^*\hat{E}''\ ;\ \hat{\alpha}) \cap [\hat{B},\hat{S}])$$

D'où :

$$e(\hat{B}) \cap \hat{\varphi}_* \hat{j}_* (ch^* d(\hat{\Pi}^* \mu'^* \hat{E}', \hat{\Pi}^* \mu''^* \hat{E}'' ; \hat{\alpha}) \cap [\hat{B},\hat{S}])$$
$$\|$$
$$ch^* \mu'^* \hat{E} \cap [\hat{X}] - ch^* \mu''^* \hat{E}'' \cap [\hat{X}].$$

Appliquons $\nu_*$ aux deux membres de (4) et utilisons le fait que $\nu = \nu' \circ \mu' = \nu'' \circ \mu''$ et $e(\hat{B}) = \nu^* e(B)$ et le lemme 2. On a :

(5) $$\nu_* [\nu^* e(B) \cap \hat{\varphi}_* \hat{j}_* (ch^* d(\hat{\Pi}^* \mu'^* \hat{E}', \hat{\Pi}^* \mu''^* \hat{E}'' ; \hat{\alpha}) \cap [\hat{B},\hat{S}])]$$
$$\|$$
$$e(B) \cap \nu_* \hat{\varphi}_* \hat{j}_* (ch^* d(\hat{\Pi}^* \mu'^* \hat{E}', \hat{\Pi}^* \mu''^* \hat{E}'' ; \hat{\alpha}) \cap [\hat{B},\hat{S}])$$
$$\|$$
$$e(B) \cap j_* \varphi_* \, ch_* (\Pi^* L', \Pi^* L'' ; \alpha)$$
$$\|$$
$$e(B) \cap \varphi_* \, ch_* (\Pi^* L', \Pi^* L'' ; \alpha)$$
$$\|$$
$$ch_*(L') - ch_*(L'')$$

C.Q.F.D.

# BIBLIOGRAPHIE

[1] ANTOINE P. - *Notes sur les isomorphismes de Thom*, d'après un cours de H. Cartan. Multigraphié, Lille 1965-64.

[2] M.F. ATIYAH and F. HIRZEBRUCH. - *Riemann-Roch theorem for differentiable manifolds*. Bull. Amer. Math. Soc. Vol 65 (1959).

[3] J.P. BRASSELET. - *Existence des classes de Chern en théorie bivariante*. Astérisque 101-102.

[4] J.P. BRASSELET. - *Définition combinatoire des homomorphismes de Poincaré, Alexander et Thom pour une pseudo-variété*. Séminaire E.N.S (1978-1979) Exposé 5.

[5] F. HIRZEBRUCH. - *Topological methods in Algebraic geometry*.

[6] W. FULTON and R.M. PHERSON. - *Categorical frame work for the study of Singular Spaces*. Memoirs of the A.M.S. May 1981, vol. 33, n°243.

[7] W. FULTON, P. BAUM, and R.M. PHERSON. - *Riemann-Roch and K-theorie for singular varieties*. Acta Math. 143 (1979).

[8] MAX Karoubi. - *Algèbre de Clifford et K-théorie* (anales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure).

[9] M.H. SCHWARTZ. - *Espaces à fibres linéaires variables et classes de Chern*. Publ. de l'U.E.R. mathématiques pures et appliquées, année 1982. Vol. IV Fascicule IV.

[10] M.H. SCHWARTZ et J.P. BRASSELET. - *Sur les classes de Chern d'un ensemble analytique complexe*. Séminaire E.N.S. 1978-1979, Exposé 6, Astérisques 82-83.

[11] E. SPANIER. - *Algebraic Topology*. Mac Graw Hill (impress).

[12] C. SABBAH. - *Quelques remarques sur la théorie des classes de Chern des espaces analytiques singuliers*. Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, plateau de Palaiseau 91128 Cedex (France)

## RÉSUMÉ

Dans la première partie de ce travail, on étudie les conséquences d'un résultat de J.P. Brasselet qui montre l'existence des classes de Chern en théorie bivariante (et conjecture leur unicité). On établit ainsi une formule de Riemann-Roch, un théorème de Riemann-Roch-Verdier et un théorème de spécialisation.

Dans la seconde partie, on explicite quelques exemples de calcul des classes de Chern et caractères de Chern (définitions de M.H. Schwartz) des espaces linéaires réduits. On généralise la notion de K-théorie à la catégorie des espaces linéaires réduits et on démontre le théorème suivant pour les espaces linéaires réduits (équivalent d'un résultat d'Atiyah).

<u>Théorème</u> : Si $L'$ et $L''$ sont deux espaces linéaires réduits sur $X$ et $W$ est un fibré orientable sur $X$, on note $(B(W),\pi,X)$ resp. $(S(W),\pi|_{S(W)},X))$ le fibré en boules (resp. en sphères) associé à $W$. Si on a un isomorphisme $\pi^* L'|_{S(W)} \xrightarrow[\approx]{\alpha} \pi^*(L'')|_{S(W)}$, alors on a :

$$e(W) \cap \hat{\psi}_*(ch_*(\pi^* L', \pi^* L'', \alpha)) = ch_*(L') - ch_*(L'')$$

où $\hat{\psi}_*$ est l'isomorphisme de Thom : $H_*(B(W),S(W)) \to H_*(X)$ et $e(W)$ la classe d'Euler du fibré $W$.

<u>MOTS CLÉS</u> : Théories bivariantes - Classes de Chern - Caractère de Chern - Espaces linéaires.