

N° d'ordre 1170

50376
1984
271

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

Spécialité : MATHEMATIQUES PURES

par

GMIRA Bouchra



**UNE GENERALISATION D'UN RESULTAT DE
C. CAMACHO ET P. SAD RELATIF
AUX FEUILLETAGES HOLOMORPHES SINGULIERS**

Membres du Jury : KOSMANN-SCHWARZBACH Y., Présidente
BRASSELET J.P., Rapporteur
HECTOR G., Examineur

Soutenue le 22 juin 1984

A mes parents,

à Wassane.

Ce travail a été réalisé sous la direction de Monsieur Jean-Paul BRASSELET. Je lui suis très reconnaissante pour le temps qu'il m'a consacré et les conseils qu'il m'a prodigués.

Je voudrais exprimer ici toute ma gratitude à Madame Yvette SCHWARZBACH-KOSMANN pour l'honneur qu'elle me fait en présidant le jury de cette thèse.

Je remercie vivement Monsieur Gilbert HECTOR d'avoir accepté de juger ce travail.

Messieurs Etienne GHYS et Daniel LEHMANN m'ont beaucoup aidée grâce aux discussions que j'ai eues avec chacun d'eux et aux suggestions intéressantes qu'ils m'ont faites. Qu'ils trouvent ici tous mes remerciements.

Enfin, je tiens à remercier Madame Raymonde BÉRAT pour la réalisation dactylographique de cet ouvrage.

S O M M A I R E

=====

INTRODUCTION.

PREMIERE PARTIE : RESULTAT DE C. CAMACHO et P. SAD
UNE NOUVELLE DEMONSTRATION - EXEMPLES.

CHAPITRE 1.- RAPPEL DU RESULTAT DE C. CAMACHO et P. SAD	1
1.- Indices pour des sous-variétés intégrales.	1
2.- Théorème de C. Camacho et P. Sad.	4
CHAPITRE 2.- NOUVELLE DEMONSTRATION DU THEOREME DE C. CAMACHO ET P. SAD	7
1.- Rappels et Notations.	7
2.- Existence d'une connexion à singularités sur le fibré normal.	12
3.- Démonstration du théorème de C. Camacho et P. Sad.	15
CHAPITRE 3.- EXEMPLES.	18
1.- Notion d'éclatement.	18
2.- Premier exemple.	21
3.- Deuxième exemple.	23
4.- Cas des feuilletages holomorphes définis au voisinage des singularités par une 1-forme qui possède une intégrale première.	27

.../...

DEUXIEME PARTIE : GENERALISATION DU RESULTAT DE C. CAMACHO ET P. SAD
AU CAS DES FEUILLETAGES HOLOMORPHES DEFINIS AU
VOISINAGE DES SINGULARITES PAR UNE 1-FORME QUI
POSSEDE UNE INTEGRALE PREMIERE.

CHAPITRE 1.- FEUILLETAGES HOLOMORPHES DE CODIMENSION 1, ADMETTANT UN ENSEMBLE SINGULIER DE CODIMENSION 2.	32
1.- Définition de l'indice.	32
2.- Définition du cycle $\sigma = \sum_{\alpha} n_{\alpha} \cdot \sigma_{\alpha}$, de s .	39
3.- Le théorème dans le cas où le feuilletage est de dimension strictement supérieure à 2.	40
4.- Le théorème dans le cas où le feuilletage est de dimen- sion 2.	45
5.- Corollaire.	49
CHAPITRE 2.- EXEMPLES DE CALCUL D'INDICES DANS C^3 POUR DES FEUILLETAGES HOLOMORPHES DE CODIMENSION 1.	51
1.- Cas d'un feuilletage défini par une 1-forme linéaire fermée.	51
2.- Cas d'un feuilletage défini par une 1-forme linéaire non fermée.	55

P R E M I E R E P A R T I E

RESULTAT DE C. CAMACHO ET P. SAD
UNE NOUVELLE DEMONSTRATION DE CE RESULTAT -
EXEMPLES

INTRODUCTION

Dans tout ce travail, toutes les dimensions sont des dimensions complexes sauf mention explicite du contraire.

Soient M une variété analytique complexe de dimension 2, S une surface de Riemann compacte plongée dans M et F un feuilletage holomorphe de codimension 1, défini dans un voisinage de S , avec des singularités isolées $\Sigma = \{q_1, \dots, q_r\}$ telles que :

- (i) $\Sigma \subset S$
- (ii) $S - \Sigma$ est une feuille de F .

C. CAMACHO et P. SAD [C et S] ont défini l'indice, en un point $q \in \Sigma$, de F relativement à S , $i_q(F;S)$, et ont démontré la formule $\sum_{\alpha=1}^r i_q(F;S) = c_1(E)$, où $c_1(E)$ est la classe de Chern du fibré normal E à S dans M .

Dans la première partie, nous rappelons la définition de l'indice et nous donnons une nouvelle démonstration du théorème de C. CAMACHO et P. SAD, à l'aide des résidus des connexions à singularités [L].

Nous illustrons ce théorème par deux exemples au chapitre 3. Nous montrons, en particulier, que pour les feuilletages définis au voisinage des singularités par une 1-forme ω qui possède une intégrale première f ($\omega = gdf$), l'indice ne dépend que de l'intégrale première f , et que l'indice est un entier.

(ii)

Dans la seconde partie, nous généralisons les résultats précédents au cas de dimension supérieure. De façon plus précise, nous considérons une variété complexe M de dimension m , une sous-variété compacte S de M de dimension $m-1$, et un feuilletage complexe F de codimension 1, défini dans un voisinage de S , admettant un ensemble singulier Σ tel que :

(i) Σ est de codimension 1 dans S (stratifié en variétés analytiques complexes $\{\Sigma_k\}$).

(ii) $S - \Sigma$ est une feuille de F .

(iii) F est défini au voisinage des singularités par une 1-forme holomorphe ω admettant une intégrale première f ($\omega = gdf$).

En notant Σ_α les strates de dimension maximale de Σ (i.e. de dimension complexe $m-2$), nous définissons :

a) l'indice le long de chaque strate Σ_α , qui est un entier n_α .

b) un $(2m-4)$ -cycle de S ; $\sigma = \sum_\alpha n_\alpha \cdot \sigma_\alpha$.

Nous démontrons, sous certaines hypothèses, le résultat suivant :

$$c_1(E) = [\sigma^*]$$

où $c_1(E)$ est la classe de Chern du fibré normal E à S et $[\sigma^*]$ est la classe de cohomologie du cocycle dual σ^* de σ (i.e. $\sigma^* \cap \underline{S} = \sigma$, où \underline{S} désigne le cycle fondamental de la variété S).

Au dernier chapitre, nous donnons des calculs explicites d'indices de feuilletages avec singularités dans \mathbb{C}^3 , en particulier, un exemple où l'indice n'est pas un entier.

CHAPITRE 1

RAPPEL DU RESULTAT DE C. CAMACHO ET P. SAD

1.1.- Indices pour des sous-variétés intégrales [C et S].

Soient M une variété analytique complexe de dimension 2, S une surface de Riemann compacte plongée dans M et F un feuilletage complexe de codimension 1 défini dans un voisinage de S avec des singularités isolées $\Sigma = \{q_1, \dots, q_r\}$ telles que :

- (i) $\Sigma \subset S$
- (ii) $S - \Sigma$ est une feuille de F .

Soit $q \in \Sigma$, on peut supposer le feuilletage F défini au voisinage de q par une 1-forme holomorphe η telle que si $\Phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (M, q)$ est une carte locale vérifiant $\Phi(0) = q$ et $\{\Phi(z, 0) \mid z \in \mathbb{C}\} \subset S$, alors

$$(\Phi^* \eta)(z, w) = A(z, w)dz + B(z, w)dw$$

avec $A(0, 0) = B(0, 0) = 0$ et $A(z, 0) = 0$.

1.1.1.- Définition.

L'indice de F , relativement à S , au point $q \in S$ est

$$i_q(F; S) = - \operatorname{Rés}_{z=0} \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{A}{B} \right) (z, 0) dz.$$

Il est facile de voir que cet indice est invariant par changement de coordonnées.

1.1.2.- Remarque : A priori, l'indice est un nombre complexe.

1.1.3.- Exemple :

Soit $(\Phi^*\eta)(z,w) = awdz + bzd w$; où $(a,b) \in (\mathbb{C}^*)^2$

alors : $A(z,w) = aw$ et $B(z,w) = bz$.

$V_1 = \{(z,0) | z \in \mathbb{C}\}$ et $V_2 = \{(0,w) | w \in \mathbb{C}\}$ sont deux sous-variétés intégrales de $\Phi^*\eta$ qui passent par l'origine de \mathbb{C}^2 . Si on note S_1 et S_2 les sous-variétés intégrales de η , passant par q , qui correspondent respectivement à V_1 et V_2 , alors

$$i_q(F;S_1) = -\text{Rés}_{z=0} \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{aw}{bz} \right) (z,0) = -\frac{a}{b},$$

et

$$i_q(F;S_2) = -\text{Rés}_{w=0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{bz}{aw} \right) (z,w) = -\frac{b}{a}.$$

Remarquons que $i_q(F;S_1) \cdot i_q(F;S_2) = 1$.

1.1.4.- Singularité irréductible $[\mathbb{C} \text{ et } \mathbb{S}]$.

Une singularité $m \in M$ d'un feuilletage holomorphe est dite irréductible si le feuilletage est induit, au voisinage de m , par une 1-forme η écrite en coordonnées locales comme

$$\eta(x,y) = A(x,y)dx + B(x,y)dy$$

où $x(m) = y(m) = 0$, et la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial B}{\partial x}(0) & \frac{\partial B}{\partial y}(0) \\ -\frac{\partial A}{\partial x}(0) & -\frac{\partial A}{\partial y}(0) \end{pmatrix}$$

a des valeurs propres λ_1, λ_2 satisfaisant l'une des conditions ci-dessous :

$$(*) \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1/\lambda_2, \lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{N}$$

$$(**) \quad \lambda_1 \neq 0 \text{ et } \lambda_2 = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda_1 = 0 \text{ et } \lambda_2 \neq 0.$$

1.1.5.- Proposition.- Si m est une singularité irréductible du type $(*)$, il existe deux sous-variétés intégrales S_1, S_2 passant par m , admettant pour espaces tangents en m , les sous-espaces propres associés à λ_1 et λ_2 . Et l'on a :

$$i_m(F; S_1) \cdot i_m(F; S_2) = 1.$$

Démonstration :

Pour l'existence de S_1 et S_2 voir $[\overline{M.M}]$.

On peut trouver $[\overline{M.M}]$ un système de coordonnées dans lequel le jet d'ordre 1 de η s'écrit

$$J^1(u, v) = -\lambda_2 v du + \lambda_1 u dv,$$

et S_1 et S_2 s'écrivent respectivement $v = 0$ et $u = 0$. Ainsi,

$$i_m(F; S_1) = \lambda_1^{-1} \cdot \lambda_2$$

$$i_m(F; S_2) = \lambda_1 \cdot \lambda_2^{-1}$$

$$\text{et} \quad i_m(F; S_2) = \lambda_1 \cdot \lambda_2^{-1}$$

d'où la proposition.

1.2.- Théorème de C. Camacho et P. Sad.

1.2.1.- Classe de Chern d'un fibré de rang 1.

Soit \mathcal{O} le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur S ,
et \mathcal{O}^* le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur S qui ne
s'annulent en aucun point.

La suite de faisceaux sur S ,

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O} \xrightarrow{e} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0$$

où $e(f) = \exp(2\pi i f)$,

est exacte et induit un homomorphisme

$$H^1(S; \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta^*} H^2(S; \mathbb{Z}).$$

On sait [H] qu'il existe une bijection naturelle entre $H^1(S; \mathcal{O}^*)$
et les classes d'isomorphismes de fibrés vectoriels complexes au-dessus de
 S , de groupe structural $GL(1; \mathbb{C})$ (et fibre \mathbb{C}).

1.2.1.1.- Définition.- Etant donné $\xi \in H^1(S; \mathcal{O}^*)$, sa classe de
Chern, $c(\xi)$, se définit comme : $c(\xi) = \delta^*(\xi)$.

Nous allons expliciter la définition de l'homomorphisme δ^* .

Pour cela, considérons un bon recouvrement $U = (U_\alpha)$ de S ,
c'est-à-dire un recouvrement ouvert tel que les intersections $U_\alpha \cap U_\beta$
soient simplement connexes quand elles sont non vides. Nous avons alors
la suite exacte

$$H^1(U; \mathcal{O}) \xrightarrow{e^*} H^1(U; \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta^*} H^2(U; \mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

Ainsi, si $(\xi_{\alpha\beta})$ désigne un 1-cocycle représentant ξ et si

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2i\pi} \text{Log } \xi_{\alpha\beta}.$$

Alors,

$$c_{\alpha\beta\gamma} = \sigma_{\beta\gamma} - \sigma_{\alpha\gamma} + \sigma_{\alpha\beta} \quad \text{représente } \delta^*(\xi).$$

1.2.1.2.- Autre définition de la classe de Chern $c(\xi)$.

On note E^r le faisceau des germes de formes différentielles C^∞ , à valeurs complexes, de degré r sur S . La dérivation extérieure des formes induit la suite exacte de de Rham,

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d} E^1 \xrightarrow{d} E^2 \longrightarrow 0$$

qui est une résolution fine du faisceau constant \mathbb{C} . Elle induit l'isomorphisme de de Rham,

$$H^2(S; \mathbb{C}) \simeq \Gamma(S; E^2) / d\Gamma(S; E^1)$$

où $\Gamma(S; E^r)$ désigne le groupe des sections de E^r .

Choisissons des éléments $(\tau_\alpha) \in \Gamma(U; E^1)$ tels que, dans $U_\alpha \cap U_\beta$, $\tau_\beta - \tau_\alpha = d(\sigma_{\alpha\beta})$. On définit une 2-forme Φ sur S , en posant, dans U_α , $\Phi = d\tau_\alpha$. Φ n'est pas exacte car les éléments τ_α ne se recollent pas pour définir une 1-forme sur S .

La classe de Chern de ξ , $c(\xi) \in H^2(S; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, peut aussi être définie (dans $H^2(S; \mathbb{C})$) par :

$$c(\xi) = \int_S \Phi.$$

1.2.2.- Énoncé du théorème.

Soit S une surface de Riemann compacte plongée dans une variété complexe M de dimension 2. Soit F un feuilletage complexe, de codimension 1, défini dans un voisinage de S avec des singularités isolées $\Sigma = \{q_1, \dots, q_r\}$ telles que

- (i) $\Sigma \subset S$
- (ii) $S - \Sigma$ est une feuille de F .

On note E le fibré normal à S et $c_1(E)$ sa classe de Chern.

Alors,

$$\sum_{j=1}^r i_{q_j} (F; S) = c_1(E).$$

CHAPITRE II

NOUVELLE DEMONSTRATION DU THEOREME DE C. CAMACHO ET P. SAD.

Nous nous placerons dans la situation du théorème 1.2.2. Notons encore E le $GL(1; \mathbb{C})$ fibré principal associé au fibré normal à S et $p : E \rightarrow S$ la projection de E sur S . Le but de ce chapitre est d'exprimer l'indice $i_q(F; S)$, en un point singulier $q \in \Sigma$, comme le résidu d'une connexion à singularités définie sur E . Ensuite, nous démontrerons le théorème 1.2.2 à partir du théorème des résidus, en utilisant les méthodes de [L].

2.1.- Rappels et notations.

Pour toute variété différentiable S , on notera $A_{DR}^*(S)$ l'algèbre de de Rham des formes différentielles définies sur S . Soit un groupe de Lie G et \mathfrak{g} son algèbre de Lie. On note $I^k(G)$ l'espace vectoriel des polynômes homogènes P de degré k sur \mathfrak{g} (ou applications k -linéaires symétriques $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \dots \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$) qui sont invariantes par la représentation adjointe de G sur \mathfrak{g} .

Pour tout G -fibré principal différentiable $p : E \rightarrow S$ et toute connexion ω sur S , on notera $\lambda_\omega : I^k(G) \rightarrow A_{DR}^{2k}(S)$ l'application de Chern-Weil, à valeurs dans les $2k$ -formes fermées et $\Delta_{\omega_0, \dots, \omega_r} : I^k(G) \rightarrow A_{DR}^{2k-r}(S)$ l'application linéaire définie en [Bo] telle que :

$$d.\Delta_{\omega_0, \dots, \omega_r} = \sum_{i=0}^r (-1)^i \Delta_{\omega_0, \dots, \hat{\omega}_i, \dots, \omega_r}$$

pour toute famille $\omega_0, \dots, \omega_r$ de $(r+1)$ connexions sur E .

Rappelons comment sont définies les applications λ_ω et $\Delta_{\omega_0, \dots, \omega_r}$ dans le cas où $k = 1$ et $r = 1$ $[K]$

2.1.1.- Définition de $\lambda_\omega : I^1(G) \rightarrow A_{DR}^2(S)$.

Si $\Omega = d\omega + \frac{1}{2} \omega \wedge \omega$ désigne la 2-forme de courbure de la connexion définie par la 1-forme ω et si $P \in I^1(G)$, on définit une 2-forme sur E à valeurs complexes $P(\Omega)$ en posant :

$$P(\Omega)(X_1, X_2) = \frac{1}{2} [P(\Omega(X_1, X_2)) - P(\Omega(X_2, X_1))].$$

Soit $\bar{P}(\Omega)$ l'unique 2-forme fermée sur S telle que

$$p^*(\bar{P}(\Omega)) = P(\Omega)$$

on pose $\lambda_\omega(P) = \bar{P}(\Omega)$.

L'application induite en cohomologie par λ_ω est l'homomorphisme caractéristique de Chern-Weil, noté $\lambda : I^1(G) \rightarrow H_{DR}^2(S)$. Il est indépendant de la connexion choisie.

2.1.2.- Définition de $\Delta_{\omega_0, \omega_1} : I^1(G) \rightarrow A_{DR}^1(S)$.

Notons I le segment $[0, 1]$. Soient ω_0 et ω_1 deux connexions définies sur E par des 1-formes encore notées ω_0 et ω_1 . On leur associe une 1-forme $\tilde{\omega}$ définie sur le fibré $E \times I$ et à valeurs dans \mathfrak{g} , en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\omega}|_{E \times \{t\}} = t\omega_0 + (1-t)\omega_1 \quad ; \quad t \in I \\ \tilde{\omega}|_{\{x\} \times I} = 0 \quad ; \quad x \in E. \end{array} \right.$$

Pour tout polynôme $P \in I^1(G)$, on pose alors :

$$\Delta_{\omega_0, \omega_1}(P) = \int_I \lambda_{\omega}^{\sim}(P).$$

L'intégrale $\int_I : A_{DR}^2(E \times I) \rightarrow A_{DR}^1(E)$ désigne l'intégration

"le long de la fibre" I ; c'est-à-dire, $\int_I \lambda_{\omega}(P) = \int_0^1 \bar{P}(t\Omega_0 + (1-t)\Omega_1) dt$,

où Ω_0 et Ω_1 sont les 2-formes de courbure correspondant aux connexions ω_0 et ω_1 respectivement.

2.1.3.- Résidus des connexions avec singularités [L].

Donnons-nous

- une variété différentiable S ;
- une triangulation différentiable K de S ;
- un ensemble fini Σ de points de S tel que $\Sigma \cap Sk^1K = \emptyset$ (Sk^1K désigne le 1-squelette de K) ;
- un groupe de Lie G ;
- un G -fibré principal différentiable $p : E \rightarrow S$;
- une connexion ω sur la restriction $E|_{S-\Sigma}$ du fibré E à l'ouvert $S-\Sigma$ (une telle connexion sera appelée "connexion à singularités" sur E , d'ensemble singulier Σ).

On note c un 2-simplexe de K et s une section différentiable de E , définie au-dessus d'un voisinage \tilde{w}_c de c dans S .

D'autre part, on désigne par ω_s la connexion plate sur $E|_{\tilde{w}_c}$ associée à la trivialisation définie par s , et caractérisée par la relation $s^*(\omega_s) = 0$.

La 1-forme $\Delta_{\omega_s, \omega}$ n'est évidemment définie que sur l'intersection $\tilde{w}_c \cap (S-\Sigma)$ des domaines de définition de ω_s et ω (on remarquera, puisque $\Sigma \cap \text{sk}^1 K = \emptyset$, que ∂c a son support dans $\tilde{w}_c \cap (S-\Sigma)$).

2.1.3.- Définition.- A tout polynôme $P \in I^1(G)$, on associe le nombre,

$$\text{Rés}_c(\omega, P) = \int_{\partial c} \Delta_{\omega_s, \omega}(P)$$

que l'on appelle résidu sur c de ω , relativement à P .

Remarque : Cette définition ne dépend pas du choix de la section s .

2.1.4.- Théorie de Chern-Weil pour les connexions à singularités [L].

Avec les notations précédentes, on associe à tout G -fibré principal différentiable $p : E \rightarrow V$, à toute connexion ω à singularités sur E d'ensemble singulier Σ inclus dans $(V - \text{sk}^1 K)$, et à tout polynôme $P \in I^1(G)$ une 2-cochaîne simpliciale $\text{Rés}(\omega, P) \in C^2(K; \mathbb{C})$ en posant, pour tout 2-simplexe c de K :

$$\langle \text{Rés}(\omega, P), c \rangle = \text{Rés}_c(\omega, P).$$

Notons $\text{Rés}(\omega) : I^1(G) \rightarrow C^2(K; \mathbb{C})$ l'application linéaire $P \rightarrow \text{Rés}(\omega, P)$, et $J : A_{\text{DR}}^*(V) \rightarrow C^*(K; \mathbb{C})$ l'intégration des formes différentielles :

$$\langle J(\alpha), c \rangle = \int_c \alpha.$$

Rappelons que J induit en cohomologie un isomorphisme d'algèbres gradués,

$$[J] : H_{DR}^*(V) \xrightarrow{\cong} H^*(K; \mathbb{C}).$$

2.1.4.- Théorème (théorème des résidus) [L]

(i) L'application Rés(ω) prend ses valeurs dans l'espace $Z^2(K; \mathbb{C})$ des cocycles de $C^2(K; \mathbb{C})$.

(ii) Notant $[\overline{\text{Rés}}(\omega)] : I^1(G) \rightarrow H^2(K; \mathbb{C})$, l'application induite par Rés(ω) en cohomologie, la composée $[J]^{-1} \circ [\overline{\text{Rés}}(\omega)]$ coïncide avec l'homomorphisme caractéristique de Chern-Weil, $\lambda : I^1(G) \rightarrow H_{DR}^2(V)$, et est donc, en particulier, indépendante des choix de K , Σ et ω .

(iii) Si $\bar{\omega}$ est une connexion sans singularités sur $E(\Sigma = \emptyset)$, Rés(ω) = $J \circ \lambda_{\bar{\omega}}$.

2.1.5.- Connexions basiques [Bo].

Soient M une variété muni d'un feuilletage F , TM son fibré tangent, τ le sous-fibré tangent à F et ν le fibré normal à F .

Nous avons la suite exacte de fibrés au-dessus de M ,

$$(*) \quad 0 \longrightarrow \tau \longrightarrow TM \xrightarrow{q} \nu \longrightarrow 0.$$

Notons $\mathcal{O}(M)$ l'algèbre des fonctions holomorphes sur M , $\Gamma(\tau)$, $\Gamma(\nu)$ et $X = \Gamma(TM)$ les $\mathcal{O}(M)$ -modules des sections holomorphes de τ , ν et TM respectivement.

On sait que la donnée d'une connexion sur ν est la donnée d'une application \mathbb{C} -bilinéaire

$$\nabla : X \times \Gamma(\nu) \rightarrow \Gamma(\nu)$$

écrite $\nabla(X,s) = \nabla_X(s)$, telle que

$$(1) \quad \nabla_X(fs) = X(f)s + f\nabla_X(s)$$

$$(2) \quad \nabla_{fX}(s) = f \nabla_X s$$

pour tous $X \in \mathcal{X}$, $s \in \Gamma(\nu)$ et $f \in \mathcal{O}(M)$.

2.1.5.2.- Définition.- Une connexion basique ∇ sur ν est une connexion telle que :

$$\nabla_X(s) = q[X, \tilde{s}] \quad ; \quad \forall X \in \Gamma(\tau), \quad \forall s \in \Gamma(\nu)$$

avec $\tilde{s} \in \mathcal{X}$ telle que $q(\tilde{s}) = s$.

2.1.5.3.- Proposition.- Si ∇ est une connexion basique sur ν , alors sa 2-forme de courbure Ω est nulle, pour la partie intrinsèque de ∇ ,

$$\Omega(X, X') = 0 \quad \forall X, X' \in \Gamma(\tau).$$

2.1.5.4.- Remarque : Si ∇ est une connexion basique sur ν , alors $\nabla_X(s) = q[X, \tilde{s}]$ est indépendante du choix de \tilde{s} dans \mathcal{X} telle que $q(\tilde{s}) = s$. On peut donc poser :

$$\nabla_X(x) = q[X, s].$$

2.2.- Existence d'une connexion à singularités sur E.

On revient à la situation du paragraphe 1.2.2 (situation de Camacho).

Soient $(V_\alpha)_{\alpha=1, \dots, r}$ et $(U_\alpha)_{\alpha=1, \dots, r}$ des ouverts de la surface S tels que :

- 1) les V_α sont des ouverts de S , disjoints, contenant chacun un point $q_\alpha \in \Sigma$.

2) les U_α sont des ouverts de S , disjoints, ouverts de trivialisation pour le fibré E et contenant chacun un V_α .

Le feuilletage F défini au voisinage de S induit un feuilletage au voisinage de la section nulle de E . Nous noterons encore, F , ce feuilletage, S , la section nulle de E et $p : E \rightarrow S$ la projection du fibré.

Avec des coordonnées locales appropriées, F est défini dans chaque $p^{-1}(U_\alpha)$ par une 1-forme η_α telle que :

$$\eta_\alpha(z, w) = A_\alpha(z, w)dz + B_\alpha(z, w)dw \quad ; \quad (z, w) \in U_\alpha \times \mathbb{C}^*,$$

avec $A_\alpha(0, 0) = B_\alpha(0, 0) = 0$ et $A_\alpha(z, 0) = 0$.

Si θ_α est la 1-forme définie sur U_α par :

$$\theta_\alpha(z) = \frac{\frac{\partial A_\alpha}{\partial w}}{B_\alpha}(z, 0).dz$$

alors l'indice, défini en 1.1.1, s'écrit :

$$i_{q_\alpha}(F; S) = -\text{Rés } \theta_\alpha = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \bar{V}_\alpha} \theta_\alpha.$$

2.2.1.- Lemme.- Il existe une connexion ∇ sur $E|_{S-\Sigma}$ dont la 1-forme de connexion ω vérifie :

$$\omega|_{U_\alpha} = \theta_\alpha \quad \text{sur } U_\alpha - \{q_\alpha\}.$$

Remarque : Notons L la feuille $S-\Sigma$. La suite exacte (*) du 2.1.5. induit la suite exacte de fibrés au-dessus de L ,

$$(**) \quad 0 \longrightarrow \tau|_L \longrightarrow (TM)|_L \longrightarrow \nu|_L \longrightarrow 0.$$

Mais, $\tau|_L$ est le fibré tangent à la feuille L ; noté TL ,
 et $\nu|_L$ est le fibré vectoriel normal à L dans M et associé au
 $GL(1, \mathbb{C})$ -fibré principal $E|_L$.

Notons $\mathcal{O}(S)$ l'algèbre des fonctions holomorphes sur S , $\Gamma(TL)$
 et $\Gamma(E|_L)$ les $\mathcal{O}(S)$ -modules des sections respectives de TL et $E|_L$.
 On définit une connexion ∇ sur $E|_L$ en posant :

$$\nabla_X(z) = q[X, Z] \quad ; \quad \forall X \in \Gamma(TL) \quad \text{et} \quad \forall Z \in \Gamma(E|_L).$$

Avant de montrer que ∇ est la connexion cherchée, noter que :

1) une base de $\Gamma(\tau|_{p^{-1}(U_\alpha)})$ est donnée par :

$$X = -B_\alpha(z, w) \frac{\partial}{\partial z} + A_\alpha(z, w) \frac{\partial}{\partial w} \quad ; \quad (z, w) \in U_\alpha \times \mathbb{C}$$

2) une base de $\Gamma(TL|_{U_\alpha})$ est donnée par :

$$X_L = -B_\alpha(z, 0) \frac{\partial}{\partial z} \quad ; \quad z \in U_\alpha.$$

3) une base de $\Gamma(E|_{U_\alpha})$ est le champ de vecteurs, $\frac{\partial}{\partial w}$.

Par définition de la connexion ∇ , on a :

$$\nabla_{X_L} \left(\frac{\partial}{\partial w} \right) = \omega(X_L) \cdot \frac{\partial}{\partial w}.$$

Or,

$$\nabla_X \left(\frac{\partial}{\partial w} \right) = q \left(\frac{\partial B_\alpha}{\partial w} \cdot \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial w} \cdot \frac{\partial}{\partial w} \right) = - \frac{\partial A_\alpha}{\partial w} \cdot \frac{\partial}{\partial w},$$

et

$$\nabla_{X_L} \left(\frac{\partial}{\partial w} \right) = - \frac{\partial A_\alpha}{\partial w} (z, 0) \cdot \frac{\partial}{\partial w}.$$

Par conséquent,

$$\omega|_{U_\alpha - \{q_\alpha\}} = \frac{1}{B_\alpha(z,0)} \cdot \frac{\partial A_\alpha}{\partial w}(z,0) \cdot dz, \text{ d'où le lemme.}$$

2.3.- Démonstration du théorème 1.2.2.-

Soit K une triangulation différentiable de S telle que :

- (i) $Sk^1 K \cap \Sigma = \emptyset$
- (ii) Chaque 2-simplexe C_α de K , contenant un point $q_\alpha \in \Sigma$, est entièrement contenu dans un ouvert de trivialisatation U_α .

On note $s_\alpha : w_{c_\alpha} \rightarrow E$ une section de $E|_{w_{c_\alpha}}$ défini au-dessus d'un voisinage w_{c_α} de c_α dans S [s_α existe puisque c_α est contractile !].

D'autre part, $P_1 \in I^1(GL(1; \mathbb{C}))$ désigne le polynôme caractéristique $[K]$ (définit par $P_1(z) = \frac{1}{2i\pi} z$), associé à la classe de Chern, $C_1(E)$,

par l'inverse de l'homomorphisme de Chern-Weil

$$\lambda : I^1(GL(1, \mathbb{C})) \rightarrow H_{DR}^2(S).$$

Notons ω_{s_α} la 1-forme de connexion plate sur $E|_{w_{c_\alpha}}$ définie au 2.1.3 (on a $d\omega_{s_\alpha} = 0$ et $s_\alpha^*(\omega_{s_\alpha}) = 0$) et ω la connexion définie dans le lemme 2.2.1.

Lemme.- $\text{Rés}_{c_\alpha}(\omega, P_1) = i_{q_\alpha}(F; S).$

Preuve :

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} &= d\tilde{\omega} = d(t\omega_{s_\alpha} + (1-t)\omega) \\ &= -td\omega + \omega \wedge dt - \omega_{s_\alpha} \wedge dt. \end{aligned}$$

Si on note $\pi : E \times I \rightarrow S \times I$, la projection du fibré $E \times I$ alors $\sigma_\alpha = (s_\alpha, \text{id}_I) : w_{c_\alpha} \times I \rightarrow E \times I$ est une section de $E \times I|_{w_{c_\alpha} \times I}$

et $\lambda_{\omega}^{(P_1)} = \sigma_\alpha^* P_1(\tilde{\Omega})$.

D'où :

$$\Delta_{\omega_{s_\alpha}, \omega}^{(P_1)} = \int_I \sigma_\alpha^* P_1(\tilde{\Omega}) = -\frac{1}{2i\pi} \int_0^1 s_\alpha^*(\omega) \wedge dt - ts_\alpha^*(d\omega)$$

Mais, $\int_I ts_\alpha^*(d\omega) = 0$, par définition de l'intégration le "le long de la fibre" I. Ainsi

$$\Delta_{\omega_{s_\alpha}, \omega}^{(P_1)} = -\frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \theta_\alpha \wedge dt = -\frac{1}{2i\pi} \theta_\alpha$$

et,

$$\text{Rés}_{c_\alpha}(\omega, P_1) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial C_\alpha} \theta_\alpha = i_{q_\alpha}(F; S).$$

c.q.f.d.

Notons maintenant γ_1 l'unique 2-forme fermée $[\bar{K}]$ sur S satisfaisant à : $p^*(\gamma_1) = P_1(\Omega)$, où Ω est la 2-forme de courbure de la connexion ∇ .

Si $[\gamma_1]$ est la classe de γ_1 dans $H_{DR}^2(S)$, on a aussi $\lambda(P_1) = [\gamma_1]$ où $\lambda : I^1(\text{GL}(1; \mathbb{C})) \rightarrow H_{DR}^2(S; \mathbb{C})$ a été défini dans 2.1.1.

Remarquons que, la surface S étant compacte, on peut supposer K finie. Soient c_1, \dots, c_n ses 2-simplexes munis de leur orientation canonique et soit $[S]$ la classe fondamentale de la variété S. C'est la classe du cycle fondamental, $\sum_{k=1}^n c_k$, dans $H_2(S)$.

On obtient, en faisant la somme de tous les indices

$$\sum_{\alpha=1}^r i_{q_\alpha} (F; S) = \sum_{k=1}^n \langle \text{Rés}(\omega, P_1), c_k \rangle.$$

Remarque : Si c_k ne contient pas de point singulier alors

$$\langle \text{Rés}(\omega, P_1), c_k \rangle = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Mais, } \sum_{k=1}^n \langle \text{Rés}(\omega, P_1), c_k \rangle &= \langle \text{Rés}(\omega)(P_1), \sum_{k=1}^n c_k \rangle \\ &= \langle [\text{Rés}(\omega)](P_1), [S] \rangle. \end{aligned}$$

Comme $[J]$ est un isomorphisme entre $H_{DR}^2(S)$ et $H^2(K; \mathbb{C})$,

il vient :

$$\langle [\text{Rés}(\omega)](P_1), [S] \rangle = \langle [J]^{-1} \circ [\text{Rés}(\omega)](P_1), [S] \rangle.$$

Par le théorème 2.1.4., il vient

$$\sum_{\alpha=1}^r i_{q_\alpha} (F; S) = \langle \lambda(P_1), [S] \rangle = \int_S \gamma_1 = c_1(E).$$

c.q.f.d.

CHAPITRE III

EXEMPLES

3.1.- Notion d'éclatement [MM].

3.1.1.- Eclatement d'un point.

Eclater un point m d'une variété analytique complexe M de dimension n , consiste à remplacer le point m par l'espace projectif $\mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)$ considéré comme l'espace des directions limites au point m .

Plus précisément, soit A un atlas sur M tel que toute carte Ψ , définie sur un voisinage ouvert U de m , soit un isomorphisme sur \mathbb{C}^n , avec $\Psi(m) = 0$.

Notons $\mathbb{P}_m M$ l'espace projectif associé à l'espace tangent $T_m M$ et $v \rightarrow [v]$ la projection canonique $T_m M - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_m M$.

Définition.- Le transformé de M par l'éclatement du point m est l'ensemble

$$\tilde{M}_m = (M - \{m\}) \cup \mathbb{P}_m M,$$

muni de la structure analytique complexe obtenue de la manière suivante ; soit (U, Ψ) une carte de M définie au voisinage de m par

$$\Psi = (x_1, \dots, x_n) : U \rightarrow \mathbb{C}^n \text{ avec } \Psi(m) = 0.$$

(U, Ψ) est remplacée par les n cartes $(U_i, \Psi_i)_{i=1, \dots, n}$

définies comme suit :

1) $U_i = (U - x_i^{-1}(0)) \cup (\mathbb{P}_m M - P_i)$, où P_i est l'ensemble des droites de $T_m M$ contenues dans le noyau de l'application linéaire tangente de

$$x_i : U \rightarrow \mathbb{C}.$$

2) $\Psi_i = U_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n$ est définie par :

$$\Psi_i = \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, x_i, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) ; \text{ sur } U - x_i^{-1}(0)$$

$$\Psi_i \left(\left[\sum \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \right) = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_i}, \dots, \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}, 0, \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}, \dots, \frac{\alpha_n}{\alpha_i} \right).$$

On note π_m l'application analytique canonique :

$$\pi_m : \tilde{M}_m \rightarrow M$$

$$\pi_m(z) = z \text{ si } z \notin \mathbb{P}_m(M), \quad \pi_m(z) = m \text{ si } z \in \mathbb{P}_m M.$$

La restriction de π_m à $(\tilde{M}_m - \mathbb{P}_m M)$ est un difféomorphisme sur $M - \{m\}$.

3.1.2.- Eclatement d'une 1-forme [MM].

Supposons que F soit un feuilletage complexe de codimension 1, d'un ouvert de M admettant une singularité isolée en $m \in M$, induit par une 1-forme η . On se propose d'étudier le feuilletage induit $\pi_m^* F$ au voisinage de $\pi_m^{-1}(m) = \mathbb{P}_m M$.

Dans le cas où $\dim_{\mathbb{C}} M = 2$, et l'étude étant locale, on peut supposer $M = \mathbb{C}^2$ et $m = 0$. Soit,

$$\eta(x,y) = A(x,y)dx + B(x,y)dy.$$

On note $\eta_v = J_0^v(\eta)$, le premier jet non nul de η en $0 \in \mathbb{C}^2$,

Alors,

$$n_{\nu} = A_{\nu}(x,y)dx + B_{\nu}(x,y)dy,$$

où A_{ν} et B_{ν} sont deux polynômes homogènes de degré ν , non simultanément nuls. Dans la carte (x,t) , où $y = tx$, nous avons

$$(\pi_0^* \eta)(x,t) = x^{\nu} [(P_{\nu}(1,t) + xQ(x,t))dx + x(B_{\nu}(1,t) + xR(x,t))dt],$$

où $P_{\nu}(x,y) = xA_{\nu} + yB_{\nu}$, et Q, R des fonctions holomorphes.

Deux cas se présentent,

Cas dégénéré : $P_{\nu}(x,y) \equiv 0$. Dans ce cas $\pi_0^* \eta$ est divisible par $x^{\nu+1}$, d'où

$$\eta_1 = \frac{\pi_0^* \eta}{x^{\nu+1}} = Q(x,t)dx + (B_{\nu}(1,t) + xR(x,t))dt$$

Il est clair que B_{ν} n'est pas identiquement nul, par conséquent, en tout point où $B_{\nu}(1,t) \neq 0$ les feuilles de η_1 sont transverses à $\pi_0^{-1}(0) = \mathbb{P}\mathbb{C}(1)$.

Cas non dégénéré : $P(x,y) \neq 0$. Alors $\pi_0^* \eta$ est divisible par x^{ν} , d'où

$$\eta_1 = \frac{\pi_0^* \eta}{x^{\nu}} = [P(1,t) + xQ(x,t)]dx + x[B_{\nu}(1,t) + xR(x,t)]dt.$$

Et, les points singuliers de η_1 sont isolés et se trouvent dans $\pi_0^{-1}(0)$.

Pour recouvrir $\pi_0^{-1}(0)$ en entier, on utilise la deuxième carte (\bar{t}, y) , où $x = \bar{t}y$, ($\bar{t}\bar{t} = 1$). Dans ce système de coordonnées, $\pi_0^* \eta$ peut

aussi être remplacée par une 1-forme $\eta_2 = \frac{\pi_0^* \eta}{x^{v+1}}$ ou $\frac{\pi_0^* \eta}{x^v}$, avec un nombre fini de singularités.

Dans l'intersection de ces deux cartes, η_1 et η_2 induisent le même feuilletage : par conséquent, elles définissent un feuilletage global $F(\eta)$ dans un voisinage de $\pi_0^{-1}(0)$. Celui-ci coïncide avec $\pi_0^* F$ en dehors de $\pi_0^{-1}(0)$.

Définition : Le feuilletage $F(\eta)$ est appelé éclatement de F en $0 \in \mathbb{C}^2$, et est indépendant du choix de η .

3.2.- Premier exemple.

Soit η une 1-forme sur \mathbb{C}^2 admettant une singularité isolée en $0 \in \mathbb{C}^2$, induisant un feuilletage F . Après éclatement de la singularité, nous obtenons pour $\pi_0^{-1}(0)$ un espace projectif complexe $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ et un feuilletage $F' = F(\eta)$ défini au voisinage de \mathbb{P} avec des singularités isolées q_1, \dots, q_r .

3.2.1.- Proposition.

$$\sum_{j=1}^r i_{q_j} (F'; \mathbb{P}) = -1.$$

Démonstration :

Soit $\eta_v = A_v(x,y)dx + B_v(x,y)dy$, le premier jet non nul de η en zéro.

Dans la carte (x,t) , $y = tx$, le feuilletage F' est donné par la 1-forme

$$\tilde{\eta} = [P(1,t) + xQ(x,t)] dx + x[B_V(1,t) + xR(x,t)] dt$$

où $P(1,t) = A_V(1,t) + tB_V(1,t)$.

On peut supposer que l'ensemble singulier de F' est contenu dans cette carte. Par suite, les coordonnées $\{t_1, \dots, t_r\}$ de $\{q_1, \dots, q_r\}$ sont les racines de $P(1,t)$. Par le théorème des résidus, on a :

$$\sum_{j=1}^r \text{Rés}_{t=t_j} \frac{B_V(1,t)}{P(1,t)} = 1$$

et comme

$$i_{q_j}(F';P) = - \text{Rés}_{t=t_j} \frac{B_V(1,t)}{P(1,t)},$$

la proposition est démontrée.

3.2.2.- Proposition.- La classe de Chern du fibré normal à \mathbb{P} dans $\tilde{M}_0 = \mathbb{C}_0^2$ est -1 .

Démonstration :

Notons $E \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}$ ce fibré, on se propose de montrer que E est isomorphe au fibré canonique au-dessus de $\mathbb{P} = \mathbb{P}\mathbb{C}(1)$, d'où le résultat, (puisque la classe de Chern de ce fibré est -1 [H]).

La variété \mathbb{C}_0^2 peut être regardée comme un sous-espace de $\mathbb{C}^2 \times G(1,2;\mathbb{C})$, où $G(1,2;\mathbb{C})$ est la grassmannienne des 1-plans de \mathbb{C}^2 , de la manière suivante :

$$\mathbb{C}_0^2 = \{(x,\Delta) \in \mathbb{C}^2 \times G(1,2;\mathbb{C}) / x \in \Delta \text{ et } 0 \in \Delta\}.$$

La projection canonique $\pi_0 : \mathbb{C}_0^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ est alors donnée par :

$$\pi_0(x, \Delta) = x,$$

et $\pi_0^{-1}(0) = \{(0, \Delta) / 0 \in \Delta\}$ n'est autre que $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$.

Notons $\pi_1 : \mathbb{C}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ la projection canonique ; π_1 est aussi la projection du fibré canonique Γ au-dessus de $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ [H].

Soient E_q et Γ_q les fibres respectives de E et Γ au-dessus d'un point $q \in \mathbb{P}\mathbb{C}(1)$, alors l'application

$$\beta : E \longrightarrow \Gamma$$

qui envoie la fibre E_q sur la fibre Γ_q pour tout point $q \in \mathbb{P}\mathbb{C}(1)$, est un isomorphisme de fibrés.

3.3.- Deuxième exemple.

L'espace projectif $\mathbb{P}\mathbb{C}(2)$ peut être regardé comme la réunion disjointe de \mathbb{C}^2 et $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$. En effet, l'application :

$$f : \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{P}\mathbb{C}(1) \longrightarrow \mathbb{P}\mathbb{C}(2)$$

définie sur chacun des facteurs par :

$$\begin{cases} f(z_1, z_2) = [z_1, z_2, 1] & \text{où } (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \\ f([z_1, z_2]) = [z_1, z_2, 0] & \text{où } [z_1, z_2] \in \mathbb{P}\mathbb{C}(1) \end{cases}$$

est un homéomorphisme.

Remarquons que $f|_{\mathbb{P}\mathbb{C}(1)} = j : \mathbb{P}\mathbb{C}(1) \longrightarrow \mathbb{P}\mathbb{C}(2)$ est le plongement d'un hyperplan et $f|_{\mathbb{C}^2}$ est un difféomorphisme de \mathbb{C}^2 sur l'ouvert dense $U = \mathbb{P}\mathbb{C}(2) - \mathbb{P}\mathbb{C}(1)$.

Soit X le champ de vecteurs défini sur \mathbb{C}^2 par :

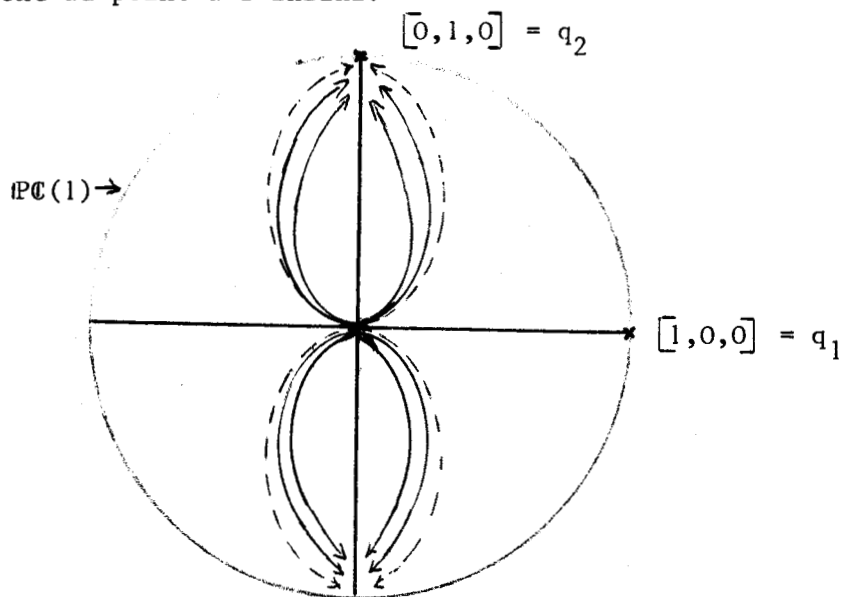
$$X = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + 2z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} .$$

f_*X est un champ de vecteurs sur U , notons $F(f_*X)$ le feuilletage défini par ce champ sur U . Alors le feuilletage $F = F(f_*X) \cup \mathbb{P}\mathbb{C}(1)$, $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ étant une feuille de F , est un feuilletage sur $\mathbb{P}\mathbb{C}(2)$.

Le feuilletage $F(f_*X)$ est défini par la 1-forme

$$\omega = -2z_2 dz_1 + z_1 dz_2$$

ses feuilles sont données par $z_2 = Kz_1^2$ ($K \in \mathbb{C}$) ; ce sont des paraboles qui se referment au point à l'infini.



On restreint le feuilletage F à un voisinage de $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ qui ne contient pas l'origine ($0 \in \mathbb{C}^2$). Notons encore F ce feuilletage ; les singularités de F sont les points $q_1 = [1, 0, 0]$ et $q_2 = [0, 1, 0]$ qui sont situés dans la feuille compacte $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$. Nous sommes donc dans la situation du théorème 1.2.2. Nous allons calculer les indices

$i_{q_j}(F; \mathbb{P}\mathbb{C}(1))$ et vérifier que leur somme est égale à la classe de Chern du fibré normal à $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ dans $\mathbb{P}\mathbb{C}(2)$.

3.3.1.- Calcul des indices $i_{q_j}(F; \mathbb{P}\mathbb{C}(1))$ pour $j = 1, 2$.

a) L'application

$$\begin{aligned} \psi_1 : \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{P}\mathbb{C}(2) \\ (u, v) &\rightarrow [1, u, v] \end{aligned}$$

est une carte locale au voisinage du point q_1 . F est défini au voisinage de q_1 par la forme $g_1^* \omega$, où g_1 est l'application $f|_{\mathbb{C}^2}^{-1} \circ \psi_1$

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{P}\mathbb{C}(2) \cap U \longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (u, v) &\longrightarrow [1, u, v] \\ &\quad [z_1, z_2, 1] \longrightarrow (z_1, z_2) \\ g_1(u, v) &= \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) \end{aligned}$$

et

$$g_1^* \omega(u, v) = \omega\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^3} (v \, du + u \, dv).$$

La 1-forme, $v \, du + u \, dv$, définit aussi F au voisinage de q_1 . La feuille $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ s'écrit $v = 0$ dans la carte ψ_1 . Par conséquent

$$i_{q_1}(F; \mathbb{P}\mathbb{C}(1)) = - \operatorname{Res}_{u=0} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{v}{u} \right) (u, 0) = -1.$$

b) L'application

$$\begin{aligned} \psi_2 : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{P}\mathbb{C}(2) \\ (u, v) &\longrightarrow [u, 1, v] \end{aligned}$$

est une carte locale au voisinage du point q_2 et F est défini dans cette carte par la forme g_2^* , où $g_2 = f|_{\mathbb{C}^2}^{-1} \circ \psi_2$, donc $g_2(u,v) = (\frac{u}{v}, \frac{1}{v})$.

$$\text{Et, } g_2^*\omega = -\frac{1}{v^3} (2v du - u dv).$$

F est encore défini au voisinage de q_2 par la 1-forme, $2v du - u dv$, et $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ s'écrit toujours $v = 0$ dans la carte ψ_2 . Par conséquent,

$$i_{q_2} (F; \mathbb{P}\mathbb{C}(1)) = - \text{Rés}_{u=0} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{2v}{-u} \right) (u, 0) = + 2.$$

$$\text{D'où } \sum_{j=1}^2 i_{q_j} (F; \mathbb{P}\mathbb{C}(1)) = +1.$$

3.3.2.- Calcul de la classe de Chern du fibré normal à $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ dans $\mathbb{P}\mathbb{C}(2)$.

Notons τ_2 le fibré tangent à $\mathbb{P}\mathbb{C}(2)$, τ_1 le fibré tangent à $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ et ν le fibré normal à $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ dans $\mathbb{P}\mathbb{C}(2)$. On a

$$j^*\tau_2 = \tau_1 \oplus \nu$$

où $j : \mathbb{P}\mathbb{C}(1) \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{C}(2)$ a été défini au début du paragraphe.

Ainsi,

$$c_1(j^*\tau_2) = c_1(\tau_1) + c_1(\nu)$$

or $c(\tau_1) = (1+h_1)^2 / \sim$; où h_1 est le générateur canonique de $H^2(\mathbb{P}\mathbb{C}(1); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, et le quotient désigne la troncature par les éléments de degré plus grand que 4. Par suite,

$$c_1(\tau_1) = 2h_1.$$

De même, $c(\tau_2) = (1+h_2)^2 / \nu = 1 + 3h_2 + 3h_2^2$ où h_2 désigne le générateur de $H^2(\mathbb{P}\mathbb{C}(2); \mathbb{Z})$.

Notons $j^* : H^2(\mathbb{P}\mathbb{C}(2); \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\mathbb{P}\mathbb{C}(1); \mathbb{Z})$ l'homomorphisme induit par le plongement j . On a :

$$j^* h_2 = h_1$$

d'où $j^* c_1(\tau_2) = j^*(3h_2) = 3h_1$

mais par naturalité des classes de Chern, on a :

$$j^* c_1(\tau_2) = c_1(j^* \tau_2)$$

ou encore

$$3h_1 = 2h_1 + c_1(\nu)$$

donc

$$c_1(\nu) = h_1.$$

c.q.f.d.

3.4.- Cas des feuilletages holomorphes définis au voisinage des singularités par une 1-forme qui possède une intégrale première.

Soit ω une 1-forme holomorphe sur un voisinage de 0 dans \mathbb{C}^n . On dit que ω est intégrable si la 3-forme $\omega \wedge d\omega$ est nulle.

Une fonction holomorphe f , définie au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^n$, est une intégrale première de ω s'il existe une fonction holomorphe g au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^n$ telle que :

$$\omega = g.df \text{ et } g(0) \neq 0.$$

Soit alors M une variété analytique complexe de dimension 2. On suppose que le feuilletage F admet une singularité isolée en $m \in M$

et est défini au voisinage de m par une 1-forme holomorphe ω possédant une intégrale première. Enfin, on note S une sous-variété intégrale de ω passant par m .

Théorème. - Soit F un feuilletage singulier, défini au voisinage d'une singularité isolée $m \in S$ par une 1-forme possédant une intégrale première, alors l'indice $i_m(F;S)$ est un entier.

Démonstration :

1 - Nous allons d'abord montrer que l'indice $i_m(F;S)$ ne dépend que de l'intégrale première f de ω .

Soit $\Phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (M, m)$, $\Phi(0) = m$, une carte locale définie au voisinage de $m \in M$ et telle que $\{\Phi(x,0) \mid x \in \mathbb{C}\} \subset S$, alors :

$$(\Phi^* \omega)(x,y) = g(x,y) \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) dy \right]$$

où f et g sont deux fonctions holomorphes définies dans un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$, telles que

$$g(0) \neq 0$$

$$(H.1) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

$$(H.2) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) \equiv 0.$$

Calculons alors l'indice de F relatif à S au point m .

On a :

$$i_m(F;S) = - \operatorname{Rés}_{x=0} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{g \cdot \frac{\partial f}{\partial x}}{g \cdot \frac{\partial f}{\partial y}} \right) (x,0)$$

$$= - \operatorname{Rés}_{x=0} \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, 0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)}$$

d'où le résultat.

2 - Calcul de l'indice.

La fonction analytique complexe f se développe au voisinage de l'origine en série entière :

$$f(x, y) = \sum_{\substack{k \geq 0 \\ l \geq 0}} a_{kl} x^k y^l$$

avec a_{kl} des coefficients complexes.

Les fonctions dérivées partielles de f s'écrivent, aussi, au voisinage de l'origine,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sum_{\substack{k \geq 1 \\ l \geq 0}} k a_{kl} x^{k-1} y^l$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sum_{\substack{k \geq 0 \\ l \geq 1}} l a_{kl} x^k y^{l-1}.$$

Les hypothèses (H.1) et (H.2) deviennent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(H.1)'} \\ \text{(H.2)'} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} a_{10} = a_{01} = 0 \\ a_{k0} = 0 \end{array} \quad \text{pour tout } k \geq 1.$$

Ainsi,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \sum_{k \geq 1} a_{kl} x^k, \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,0) = \sum_{k \geq 1} k a_{kl} x^{k-1}.$$

Puisque $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ ne doit pas être identiquement nulle, il existe un entier k supérieur ou égal à 1 tel que le coefficient a_{kl} soit non nul. Il vient alors :

$$i_m(F;S) = - \operatorname{Rés}_{x=0} \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{\sum_{k \geq 1} k a_{kl} x^{k-1}}{\sum_{k \geq 1} a_{kl} x^{k-1}} \right].$$

Ce résidu est égal au terme constant de la fraction $R(x)$, où

$$R(x) = \frac{\sum_{k \geq 1} k a_{kl} x^{k-1}}{\sum_{k \geq 1} a_{kl} x^{k-1}}.$$

Par conséquent,

$$i_m(F;S) = - k_0$$

où k_0 est le plus petit entier, $k \geq 1$ tel que le coefficient a_{kl} soit non nul.

c.q.f.d.

Remarque :

Ce théorème reste vrai en dimension supérieure, la notion d'indice étant généralisée au cas des feuilletages de dimension supérieure ou égale à 2.

L'objet de la deuxième partie est de généraliser la notion d'indice au cas des feuilletages de dimension supérieure ou égale à 2, définis par une 1-forme holomorphe possédant une intégrale première, et d'énoncer, dans ce cas, une généralisation du théorème de C. CAMACHO et P. SAD.

DEUXIEME PARTIE

GENERALISATION DU RESULTAT DE C. CAMACHO ET P. SAD
AU CAS DES FEUILLETAGES HOLOMORPHES DEFINIS AU
VOISINAGE DES SINGULARITES PAR UNE 1-FORME QUI POSSEDE UNE INTEGRALE PREMIERE.

CHAPITRE 1

FEUILLETAGES HOLOMORPHES DE CODIMENSION 1, ADMETTANT UN ENSEMBLE SINGULIER DE CODIMENSION 2.

Soient S une variété analytique complexe de dimension $m-1$, plongée dans une variété complexe M de dimension m , et F un feuilletage holomorphe de codimension 1 défini dans un voisinage de S dans M tel que :

(i) les singularités de F forment un sous-ensemble analytique complexe Σ de S , de codimension 1 dans S , stratifié en variétés analytiques complexes $\{\Sigma_k\}$.

(ii) $S-\Sigma$ est une feuille de F .

(iii) F est défini au voisinage des singularités par une 1-forme possédant une intégrale première.

On rappelle qu'une stratification $\{\Sigma_k\}$ d'un ensemble analytique complexe Σ consiste en la donnée d'un recouvrement localement fini de Σ par des variétés analytiques complexes disjointes Σ_k (appelées strates) telles que chaque $\bar{\Sigma}_k$ et chaque $\bar{\Sigma}_k - \Sigma_k$ est union de strates de dimension inférieure ou égale à celle de Σ_k .

1.1.- Définition de l'indice.

Soit q un point de Σ , situé dans une strate Σ_α de dimension maximale (i.e. de dimension $m-2$), et soit $\phi : (\mathbb{C}^m, 0) \rightarrow (M, q)$, $\phi(0) = q$, une carte locale telle que :

$$\{\Phi(x_1, \dots, x_{m-1}, 0) / (x_1, \dots, x_{m-1}) \in \mathbb{C}^{m-1}\} \subset S$$

et $\{\Phi(x_1, \dots, x_{m-2}, 0, 0) / (x_1, \dots, x_{m-2}) \in \mathbb{C}^{m-2}\} \subset \Sigma_\alpha$,

alors

$$(\Phi^* \omega)(x) = g(x) \cdot \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i \quad , \quad \text{où } x = (x_1, \dots, x_m)$$

où ω est la 1-forme holomorphe qui définit F , f et g étant deux fonctions holomorphes définies dans un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^m$, telles que

$$(H.0) \quad g(0) \neq 0$$

$$(H.1) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{m-2}, 0, 0) \equiv 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, m$$

$$(H.2) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{m-2}, x_{m-1}, 0) \equiv 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, m-1.$$

1.1.1.- Définition.- Un plan de \mathbb{C}^m sera dit générique s'il est donné par des équations du type :

$$x_j = \lambda_j x_1 + \mu_j x_2 \quad ; \quad (\lambda_j, \mu_j) \in (\mathbb{C}^*)^2 \quad \text{pour } j = 3, 4, \dots, m$$

avec $\lambda_j \mu_k - \lambda_k \mu_j \neq 0 \quad ; \quad 3 \leq j, k \leq m.$

Il est clair qu'un tel plan est transverse à $\Phi^{-1}(\Sigma_\alpha)$.

1.1.2.- Calcul de l'indice induit sur un plan générique P .

Notons F^P le feuilletage induit par F sur le plan P . Ce feuilletage est induit au voisinage de q par la 1-forme holomorphe ω^P définie par :

$$\omega^P(x_1, x_2) = g^P(x_1, x_2) \left[\frac{\partial f^P}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f^P}{\partial x_2} dx_2 \right]$$

où,

$$g^P(x_1, x_2) = g(x_1, x_2, \lambda_3 x_1 + \mu_3 x_2, \dots, \lambda_m x_1 + \mu_m x_2)$$

$$f^P(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, \lambda_3 x_1 + \mu_3 x_2, \dots, \lambda_m x_1 + \mu_m x_2)$$

Faisant le changement de coordonnées suivant :

$$\begin{cases} u = x_1 \\ v = \lambda_m x_1 + \mu_m x_2 \end{cases},$$

on obtient,

$$\omega^P(u, v) = G(u, v) \cdot \left[\frac{\partial h}{\partial u}(u, v) du + \frac{\partial h}{\partial v}(u, v) dv \right]$$

avec

$$G(u, v) = g^P(x_1, x_2)$$

$$h(u, v) = f^P(x_1, x_2).$$

Les hypothèses (H.0), (H.1) et (H.2) deviennent :

$$(H.0)' \quad G(0) \neq 0$$

$$(H.1)' \quad \frac{\partial h}{\partial u}(0, 0) = \frac{\partial h}{\partial v}(0, 0) = 0$$

$$(H.2)' \quad \frac{\partial h}{\partial u}(u, 0) \equiv 0.$$

Notons S^P la trace de la variété S sur le plan P , on a :

$$S^P = \{(u, 0) \mid u \in \mathbb{C}\}.$$

Par conséquent, l'indice induit sur le plan P est :

$$i_0(F^P; S^P) = - \operatorname{Rés}_{u=0} \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v}(u, 0)}{\frac{\partial h}{\partial v}(u, 0)}.$$

D'où le :

1.1.3.- Lemme.- L'indice $i_0(F^P; S^P)$ ne dépend que de l'intégrale première f de ω .

1.1.4.- Proposition.- L'indice $i_0(F^P; S^P)$ ne dépend pas du plan générique P .

Démonstration :

La fonction analytique complexe f se développe, au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^m$, en série entière,

$$f(x) = \sum_{k_1, \dots, k_m \geq 0} a_{k_1 \dots k_m} x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m} ; \text{ où } a_{k_1 \dots k_m} \in \mathbb{C}.$$

D'autre part, on a

$$\begin{cases} \frac{\partial f^P}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{j=3}^m \lambda_j \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \\ \frac{\partial f^P}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} + \sum_{j=3}^m \mu_j \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial f^P}{\partial x_1} - \frac{\lambda_m}{\mu_m} \cdot \frac{\partial f^P}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h}{\partial v} = \frac{1}{\mu_m} \frac{\partial f^P}{\partial x_2} \end{cases}$$

Il vient, alors :

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u, 0) = \left(\frac{1}{\mu_m} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \sum_{j=3}^m \frac{\mu_j}{\mu_m} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (x_1, -\frac{\lambda_m}{\mu_m} x_1, \beta_3 x_1, \dots, \beta_{m-1} x_1, 0)$$

avec $\beta_j = \lambda_j - \mu_j \frac{\lambda_m}{\mu_m} \quad j = 3, 4, \dots, m.$

On obtient donc, vu la condition (H.2),

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u,0) = \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_1, -\frac{\lambda_m}{\mu_m} x_1, \beta_3 x_1, \dots, \beta_{m-1} x_1, 0).$$

Et,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} &= \frac{1}{\mu_m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\lambda_m}{\mu_m^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \sum_{j=3}^m \left[\frac{1}{\mu_m} \beta_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_2} + \frac{\mu_j}{\mu_m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_j} - \frac{\mu_j \lambda_m}{\mu_m^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_j} \right] \\ &+ \sum_{3 \leq j, k \leq m} \frac{\mu_j}{\mu_k} \beta_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \end{aligned}$$

d'où, vues les conditions (H.1) et (H.2), et remarquant que $\beta_m = 0$:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v}(u,0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} - \frac{\lambda_m}{\mu_m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m} + \sum_{k=3}^{m-1} \beta_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_m} \right) (x_1, -\frac{\lambda_m}{\mu_m} x_1, \beta_3 x_1, \dots, \beta_{m-1} x_1, 0)$$

Ainsi, l'indice $i_0(F^P; S^P)$ s'exprime à l'aide de f , comme

$$i_0(F^P; S^P) = -\text{Rés}_{x_1=0} \frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} - \frac{\lambda_m}{\mu_m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m} + \sum_{k=3}^{m-1} \beta_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_m} \right) (x_1, -\frac{\lambda_m}{\mu_m} x_1, \beta_3 x_1, \dots, \beta_{m-1} x_1, 0)}{\frac{\partial f}{\partial x_m}(x_1, -\frac{\lambda_m}{\mu_m} x_1, \beta_3 x_1, \dots, \beta_{m-1} x_1, 0)}$$

En posant, $b_{k_2 \dots k_{m-1}} = \left(-\frac{\lambda_m}{\mu_m}\right)^{k_2} \prod_{3 \leq j \leq m-1} (\beta_j)^{k_j}$,

on obtient :

$$i_o(F^P; S^P) = - \text{Rés}_{x_1=0} \left\{ \frac{1}{x_1} \cdot \frac{\sum_{\substack{k_1, \dots, k_{m-2} \geq 0 \\ k_{m-1} \geq 1}} (k_1 + \dots + k_{m-1}) a_{k_1 \dots k_{m-1}} b_{k_2 \dots k_{m-1}} x_1^{k_1 + \dots + k_{m-1} - 1}}{\sum_{\substack{k_1, \dots, k_{m-2} \geq 0 \\ k_{m-1} \geq 1}} a_{k_1 \dots k_{m-1}} b_{k_2 \dots k_{m-1}} x_1^{k_1 + \dots + k_{m-1} - 1}} \right\}$$

d'où,

$$i_o(F^P; S^P) = -(k_1^o + \dots + k_{m-1}^o)$$

avec k_1^o, \dots, k_{m-1}^o les plus petits entiers k_1, \dots, k_{m-1} ($k_{m-1} \neq 0$) tels que le coefficient $a_{k_1 \dots k_{m-1}} b_{k_2 \dots k_{m-1}}$ soit non nul. De tels entiers existent puisque la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_m}(x_1, \dots, x_{m-1}, 0)$ n'est pas identiquement nulle.

c.q.f.d.

1.1.5.- Théorème et définition.-

Soit q un point de Σ , situé dans une strate Σ_α de dimension $m-2$. L'indice du feuilletage F , relatif à S , au point singulier q est un entier égal à :

$$i_q(F; S) = -(k_1^o + \dots + k_{m-1}^o)$$

où k_1^o, \dots, k_{m-1}^o sont les plus petits entiers k_1, \dots, k_{m-1} ($k_{m-1} \neq 0$) tels que le coefficient $a_{k_1 \dots k_{m-1}} b_{k_2 \dots k_{m-1}}$, dans le développement en série entière de l'intégrale première f de ω , soit non nul.

1.1.6.- Proposition.- Soit Σ_α une strate connexe de Σ , de dimension $(m-2)$. L'application $i(F; S) : \Sigma_\alpha \rightarrow \mathbb{Z}$, qui à un point

$q \in \Sigma_\alpha$ associe l'indice $i_q(F;S)$, est localement constante.

Démonstration :

Soit $q \in \Sigma_\alpha$, et $\Phi : (\mathbb{C}^m, 0) \rightarrow (U, q)$ une carte locale de M définie au voisinage de q et telle que $\Phi(0) = q$, $\Phi(\mathbb{C}^m) = U$,

$$\Phi^{-1}(S \cap U) = \{(x_1, \dots, x_{m-1}, 0) / (x_1, \dots, x_{m-1}) \in \mathbb{C}^{m-1}\}$$

$$\Phi^{-1}(\Sigma_\alpha \cap U) = \{(x_1, \dots, x_{m-2}, 0, 0) / (x_1, \dots, x_{m-2}) \in \mathbb{C}^{m-2}\}.$$

Prenons un point q_1 de $U \cap \Sigma_\alpha$, alors $\Phi^{-1}(q_1) = (x_1^0, \dots, x_{m-2}^0, 0, 0)$.

Nous avons toujours

$$f(x) = \sum_{k_1, \dots, k_m} a_{k_1 \dots k_m} x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m} \dots$$

Faisons un changement de coordonnées pour amener le point q_1 à l'origine de la carte (Φ, U) , soient :

$$\begin{cases} X_j = x_j - x_j^0 & j = 1, 2, \dots, m-2 \\ X_j = x_j & j = m-1, m. \end{cases}$$

Par un calcul analogue à celui fait dans 1.1.4., on obtient

$$i_{q_1}(F;S) = -\text{Rés}_{x_1=x_1^0} \left[\frac{\sum_{\substack{k_1, \dots, k_{m-2} \geq 0 \\ k_{m-1} \geq 1}} (k_1 + \dots + k_{m-1}) a_{k_1 \dots k_{m-1}} b_{k_2 \dots k_{m-1}} (x_1 - x_1^0)^{k_1 + \dots + k_{m-1} - 1}}{\sum_{\substack{k_1, \dots, k_{m-1} \geq 0 \\ k_{m-1} \geq 1}} (x_1 - x_1^0)^{k_1 + \dots + k_{m-1} - 1} a_{k_1 \dots k_{m-1}} b_{k_2 \dots k_{m-1}} (x_1 - x_1^0)^{k_1 + \dots + k_{m-1} - 1}} \right]$$

ou encore,

$$i_{q_1}(F;S) = - (k_1^1 + \dots + k_{m-1}^1)$$

où k_1^1, \dots, k_{m-1}^1 sont les plus petits entiers k_1, \dots, k_{m-1} ($k_{m-1} \neq 0$) tels que $a_{k_1^1 \dots k_{m-1}^1}$ soit non nul. Mais, puisque $i_q(F;S) = -(k_1^0 + \dots + k_{m-1}^0)$, le coefficient $a_{k_1^0 \dots k_{m-1}^0}$ est non nul. Et, comme c'est une fonction continue du point (x_1, x_2, \dots, x_m) , $a_{k_1^0 \dots k_{m-1}^0}$ reste non nul sur un voisinage V de l'origine dans \mathbb{C}^m . D'autre part, puisque k_1^0, \dots, k_{m-1}^0 sont les plus petits entiers tels que $a_{k_1^0 \dots k_{m-1}^0}$ soit non nul, alors $k_1^1 = k_1^0, \dots, k_{m-1}^1 = k_{m-1}^0$. Par conséquent, $i_{q_1}(F;S) = i_{q_0}(F;S)$ pour tout point q_1 appartenant au voisinage ouvert $W = \Sigma_\alpha \cap \Phi(V)$ de q dans Σ_α .

1.1.7.- Théorème.- L'indice du feuilletage F , relatif à S , est constant le long de chaque strate Σ_α , de dimension maximum, de Σ .

Démonstration :

En effet, puisque toute strate Σ_α est connexe et que l'application, $i(F;S) : \Sigma_\alpha \rightarrow \mathbb{Z}$, est localement constante, il s'ensuit immédiatement que cette fonction est constante sur Σ_α toute entière.

1.2.- Définition du cycle σ .

Soit n_α la valeur de l'indice le long de la strate Σ_α de Σ . Soit (K) une triangulation finie de S (qui est compacte). Notons $K_{j\alpha}$ les simplexes situés dans la strate Σ_α , et $K_{j\alpha}^{2m-4}$ ceux de dimension $2m-4$. Ils sont orientés canoniquement (puisqu'ils sont en complexe) et la somme $\sum K_{j\alpha}^{2m-4}$ sur tous ces simplexes dans Σ_α définit un cycle fondamental σ_α de $\bar{\Sigma}_\alpha$.

Alors $\sigma = \sum n_{\alpha} \sigma_{\alpha}$ est un cycle. En effet, le bord, $\partial\sigma$, de σ est de dimension réelle $2m-5$ et la partie singulière de Σ est de dimension réelle inférieure ou égale à $2m-6$. Par conséquent, $\partial\sigma = 0$.

1.3.- Le théorème dans le cas où le feuilletage est de dimension strictement supérieure à 2.

Soit S une variété analytique complexe compacte de dimension $m-1$, plongée dans une variété complexe M de dimension m , et F un feuilletage de M holomorphe, de codimension 1, défini dans un voisinage U de S , admettant un ensemble singulier Σ tel que :

- (i) Σ est un ensemble analytique complexe de codimension 1 dans S ,
- (ii) $S - \Sigma$ est une feuille de F ,
- (iii) F est défini au voisinage de Σ par une 1-forme holomorphe possédant une intégrale première.

Soit $\{\Sigma_k\}$ une stratification de Σ en variétés analytiques complexes, on note S la stratification de la variété S définie de la manière suivante :

$S^{m-1} = S - \Sigma$ est la strate de dimension $m-1$,

S_{α}^{m-2} désignent les strates Σ_{α} de Σ de dimension $m-2$, et

$S_{\beta_k}^{m-k}$ désignent les strates de Σ de dimension $m-k$ ($3 \leq k \leq m$).

Soit E le fibré normal à S dans M et $c_1(E)$ sa classe de Chern. On désigne par σ^* le 2-cocycle dual du $(2m-4)$ -cycle σ , défini dans le paragraphe précédent : par dualité de Poincaré, on a $\sigma^* \cap \underline{S} = \sigma$, où \underline{S} désigne le $(2m-2)$ -cycle fondamental de la variété S . Enfin, la classe de σ^* dans $H^2(S)$ est notée $[\sigma^*]$.

1.3.1.- Théorème.- On suppose qu'il existe une sous-variété analytique complexe V de dimension 2 de M , telle que :

- (1) V est transverse à la stratification S (c'est-à-dire V est transverse à toutes les strates de S).
- (2) $S - S \cap V$ est une variété de Stein ou une variété algébrique dans un espace complexe \mathbb{C}^N .

Alors, on a :

$$c_1(E) = [\sigma^*] .$$

Avant de donner la démonstration du théorème, nous faisons quelques remarques sur les hypothèses et énonçons le résultat utilisé.

1.3.2.- Remarques.

- 1) Les hypothèses du théorème ne sont pas très restrictives.

En effet, dans le cas C^∞ , il existe toujours une variété V qui vérifie la condition (1).

Si la variété S peut être considérée comme sous-variété algébrique d'un espace projectif $\mathbb{P}_N(\mathbb{C})$, la condition (2) peut être supprimée. La démonstration se fait alors par récurrence en utilisant le théorème des sections hyperplanes de Lefschetz [A.F].

- 2) La variété V , étant transverse à la stratification S , intersecte S en une variété $V \cap S$, notée V_S , de dimension 1. Elle rencontre toutes les strates Σ_α , de dimension $m-2$, en des points isolés et ne rencontre pas les strates de dimension inférieure à $m-2$. D'autre part, on peut supposer qu'il y a un seul point q_α dans chaque intersection $V \cap \Sigma_\alpha$. Dans le cas contraire, il suffit de considérer une sous-stratifi-

cation de S de manière à ce que chaque nouvelle strate, Σ_α , n'admette qu'un seul point d'intersection avec V ; ceci est possible puisque les points q_α sont des points isolés.

3) Une variété de Stein est une variété complexe qui peut être biholomorphiquement plongée comme sous-espace fermé d'un espace \mathbb{C}^N .

Il a été démontré [R] que cette propriété est équivalente à la définition usuelle [H.C] d'une variété de Stein. Seule la propriété de plongement est nécessaire à la démonstration du résultat ci-dessous [A.F].

1.3.3.- Résultat utilisé.

On rappelle que si,

X_n est une variété de Stein de dimension n [A.F], ou si $X_n \subset \mathbb{C}^N$ est une variété affine algébrique de dimension n [M], alors

$$H_i(X_n; \mathbb{Z}) = 0 \text{ pour } i > n.$$

Démonstration du théorème :

Notons $\phi : V \rightarrow M$ l'inclusion de V dans M . Par image réciproque par ϕ , la situation sur M se transporte sur la variété V comme suit :

$\phi^{-1}S = V_S$ est une variété complexe compacte de dimension 1, plongée dans la variété V . Soit $\psi : V_S \rightarrow S$ la restriction de ϕ à V_S .

La variété S est supposée compacte, d'autre part V est transverse à toute strate de la stratification S . Le feuilletage F est défini dans un voisinage U de S dans M . Il existe donc un voisinage de V_S dans V , noté $W \subset \phi^{-1}(U)$, tel que F induise sur W un feuilletage noté ϕ^*F .

Le feuilletage Φ^*F admet des singularités isolées $\{q_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,r}$ qui sont les points d'intersection $V \cap \Sigma_\alpha$. (Cf. remarque 1.3.2. (2)).

Par transversalité, le fibré normal à V_S dans V , noté N , est isomorphe à la restriction à V_S du fibré E (fibré normal à S dans M), noté Ψ^*E .

En résumé, dans un voisinage de V_S dans V on a un feuilletage complexe de codimension 1, noté Φ^*F , admettant des singularités isolées $\{q_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,r}$ situées dans V_S qui est compacte. On est donc dans la situation du théorème de C. Camacho et P. Sad. Il vient :

$$(*) \quad \sum_{\alpha=1}^r i_{q_\alpha}(\Phi^*F; V_S) = \langle c_1(N), [V_S] \rangle$$

où $[V_S]$ désigne la classe fondamentale de la variété V_S dans $H_2(V_S; \mathbb{Z})$.

D'autre part, le point q_α étant dans Σ_α , l'indice $i_{q_\alpha}(\Phi^*F; V_S)$ est égal à l'entier n_α défini dans le paragraphe précédent. On appelle alors σ_0 , le 0-cycle de V_S défini par $\sigma_0 = \sum_{\alpha=1}^r n_\alpha \cdot q_\alpha$, et σ_0^* le 2-cocycle dual : si $\underline{V_S}$ désigne le 2-cycle fondamental de V_S , on a $\sigma_0^* \cap \underline{V_S} = \sigma_0$.

La relation (*) s'écrit donc,

$$c_1(N) = [\sigma_0^*] \quad \text{dans } H^2(V_S; \mathbb{Z}).$$

Par naturalité des classes de Chern, il vient

$$c_1(N) = c_1(\Psi^*E) = \Psi^*(c_1(E)).$$

Et, par définition de Ψ , σ étant le $(2m-4)$ -cycle de S ,

$$\sigma = \sum_{\alpha} n_\alpha \cdot \sigma_\alpha, \quad \text{on a}$$

$$[\sigma_0^*] = \Psi^*[\sigma^*].$$

Ainsi, pour démontrer le résultat, il suffit de prouver que l'homomorphisme, induit en cohomologie par Ψ ,

$$\Psi^* : H^2(S; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(V_S; \mathbb{Z}),$$

est injectif.

Etant donnée la suite exacte de cohomologie associée à la paire (S, V_S) ;

$$\dots \longrightarrow H^1(V_S) \longrightarrow H^2(S, V_S) \longrightarrow H^2(S) \xrightarrow{\Psi^*} H^2(V_S) \longrightarrow \dots$$

cela revient à montrer que :

$$H^2(S, V_S) = 0.$$

Or, on a :

$$H^2(S, V_S) = H_c^2(S - V_S) \quad (\text{voir par exemple } [G])$$

où l'indice c désigne la cohomologie à support compact.

Par dualité de Poincaré, ce groupe est égal au groupe d'homologie,

$$H_{2m-4}(S - V_S).$$

D'après le résultat 1.3.3. appliqué à la variété $S - V_S$, celui-ci est nul pour $2m-4 > m-1$; autrement dit pour $m > 3$, d'où le théorème.

c.q.f.d.

1.4.- Le théorème dans le cas où le feuilletage est de dimension 2.

Soit S une variété analytique complexe, compacte, simplement connexe, de dimension 2, plongée dans une variété analytique complexe M de dimension 3, et soit F un feuilletage holomorphe de codimension 1, défini dans un voisinage de S dans M , admettant un ensemble singulier Σ tel que :

- (i) Σ est un ensemble analytique complexe de codimension 1 dans S .
- (ii) $S - \Sigma$ est une feuille de F .
- (iii) F est défini au voisinage des singularités par une 1-forme holomorphe possédant une intégrale première.

Soit E le fibré normal à S dans M et $c_1(E)$ sa classe de Chern.

On note $\{\Sigma_k\}$ une stratification de Σ en variétés analytiques complexes, Σ_α les strates de dimension 2 et σ le 2-cycle de S , défini par $\sigma = \sum_{\alpha} n_{\alpha} \cdot \sigma_{\alpha}$.

Soit σ^* le 2-cocycle dual (par Poincaré) de σ et $[\sigma^*]$ sa classe de cohomologie.

1.4.1.- Théorème.- On suppose que tout 2-cycle de S est réalisable par une sous-variété analytique complexe de S , transverse à Σ .

Alors, on a :

$$c_1(E) = [\sigma^*].$$

Avant de donner la démonstration du théorème, faisons quelques remarques sur les hypothèses du théorème.

1.4.2.- Remarques :

1) Si S est une variété différentiable orientable, tout 2-cycle de S est réalisable par une sous-variété différentiable de S [T].

2) Si S est une variété complexe sans torsion, alors tout 2-cycle de S peut être réalisé par une sous-variété complexe normale [R.T].
[Une sous-variété différentiable X de S est complexe normale s'il existe un fibré vectoriel complexe au-dessus de X tel que le fibré réel sous-jacent soit le fibré normal à X dans S].

3) L'ensemble des applications, $\Psi : X \rightarrow S$ transverses à Σ , est partout dense dans l'ensemble des applications $\Psi : X \rightarrow S$. Si l'image du plongement, $\Psi : X \rightarrow S$, n'est pas transverse à Σ , on peut la déformer en un cycle homologue qui soit transverse à Σ .

Démonstration du théorème :

Nous allons montrer que les deux classes de cohomologie $c_1(E)$ et $[\sigma^*]$ prennent la même valeur sur tout 2-cycle λ de S .

Soit λ un 2-cycle de S , et X la sous-variété analytique complexe de dimension 1 qui le réalise dans S . Le plongement de X dans S , noté $\Psi : X \rightarrow S$, est transverse à Σ par hypothèse. X s'identifie à son image $\Psi(X)$. La variété X ne rencontre donc que les strates Σ_α , de dimension 1 de Σ , en des points isolés et on peut supposer que chaque intersection, $X \cap \Sigma_\alpha$, contient au plus un point q_α . Soit J l'ensemble d'indices suivant, $J = \{\alpha : X \cap \Sigma_\alpha \neq \emptyset\}$.

Notons U un voisinage tubulaire de S dans M , qui est feuilleté par F , et fibré en fibres transverses à F . On restreint ce voisinage U , en tant que fibré sur S , à la sous-variété X . Notons

V cette restriction, $U|_X$, et $\Phi : V \hookrightarrow M$ son plongement dans M . Le feuilletage F induit sur la variété V , qui est de dimension 2, un feuilletage complexe de codimension 1, noté Φ^*F , défini dans un voisinage, suffisamment petit, de X dans V avec des singularités isolées $\{q_\alpha\}_{\alpha \in J}$ qui sont les intersections $X \cap \Sigma_\alpha$, et qui sont toutes contenues dans la feuille compacte X . On est donc dans la situation du théorème de C. Camacho et P. Sad. Il vient,

$$\sum_{\alpha \in J} i_{q_\alpha}(\Phi^*F; X) = c_1(\Psi^*E).$$

Le point q_α étant situé dans la strate Σ_α , l'indice $i_{q_\alpha}(\Phi^*F; X)$ est (d'après le paragraphe 1.2) un entier que nous désignerons par n_α .

D'autre part, par naturalité des classes de Chern, il vient :

$$c_1(\Psi^*E) = \Psi^*(c_1(E))$$

donc

$$\sum_{\alpha \in J} n_\alpha = \langle \Psi^*(c_1(E)), [\bar{X}] \rangle$$

où $[\bar{X}]$ désigne la classe fondamentale de X dans $H_2(X; \mathbb{Z})$.

Or, on a :

$$\begin{aligned} \langle \Psi^*(c_1(E)), [\bar{X}] \rangle &= \langle c_1(E), \Psi_*[\bar{X}] \rangle \\ &= \langle c_1(E), [\bar{\lambda}] \rangle \end{aligned}$$

où $[\bar{\lambda}]$ est la classe d'homologie du cycle λ dans $H_2(S, \mathbb{Z})$.

Par conséquent,

$$\langle c_1(E), [\bar{\lambda}] \rangle = \sum_{\alpha \in J} n_\alpha.$$

Il reste, maintenant, à montrer que :

$$\langle [\sigma^*], [\lambda] \rangle = \sum_{\alpha \in J} n_\alpha.$$

Pour cela, on considère une triangulation finie (K) de S, compatible avec la stratification de Σ (tout simplexe ouvert est situé dans une seule strate), telle que :

(i) les points q_α (intersections de X avec les Σ_α) soient barycentres des 2-simplexes de (K).

(ii) la subdivision barycentrique (Δ) de (K) triangule X (ce qui est possible puisque X est transverse à Σ).

On notera K_j^2 les 2-simplexes de (K) et Δ_i^2 les 2-simplexes (Δ). Soit (D) $[\text{Bra}]$ la triangulation cellulaire duale de (K), construite à l'aide de (Δ). On notera D_j^2 la 2-cellule duale du simplexe K_j^2 , et $\gamma(D_j^2)$ la (D)-cochaîne duale de la (D)-chaîne élémentaire D_j^2 , on a :

$$\langle \gamma(D_j^2), D_i^2 \rangle = \delta_{ij}.$$

Remarque : Notant $|K_j^2|$ (resp. $|D_j^2|$) le support de K_j^2 (resp. D_j^2), et ${}^{02}K_j^2$ l'intérieur du simplexe K_j^2 , on a :

si $|K_j^2| \subset \Sigma$, ${}^{02}K_j^2$ est dans la partie régulière de Σ , alors la 2-cellule duale, D_j^2 , de K_j^2 est bien définie. Et si $|K_j^2| \subset \Sigma_\alpha$, le point q_α est le barycentre de K_j^2 , donc $|D_j^2| \subset X$.

D'autre part, notant $K_{j\alpha}^2$ les 2-simplexes de (K), munis de leur orientation canonique, situés dans la strate Σ_α , le cycle fondamental de la variété (compacte) $\bar{\Sigma}_\alpha$ s'écrit $\sigma_\alpha = \sum_{j\alpha} K_{j\alpha}^2$.

Alors, on a :

$$\sigma = \sum_{\alpha} n_{\alpha} \cdot \sigma_{\alpha} ,$$

et,
$$\sigma^* = \sum_{\alpha} n_{\alpha} \cdot \sum_{j_{\alpha}} \gamma(D_{j_{\alpha}}^2)$$

où la sommation, $\sum_{j_{\alpha}} \gamma(D_{j_{\alpha}}^2)$, porte sur les cellules $D_{j_{\alpha}}^2$ duales des 2-simplexes $K_{j_{\alpha}}^2$ tels que $|K_{j_{\alpha}}^2| \subset \Sigma_{\alpha}$.

D'autre part,

$$\langle \gamma(D_j^2), X \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } |D_j^2| \subset X \\ 0 & \text{si } |D_j^2| \not\subset X \end{cases} .$$

Il vient alors, puisque X rencontre chaque strate Σ_{α} , $\alpha \in J$, en un unique point q_{α} ,

$$\langle [\sigma^*], [\lambda] \rangle = \sum_{\alpha \in J} n_{\alpha} ,$$

d'où le théorème.

1.5.- Corollaire.

Soient S, M, F, E et Σ définis comme dans 1.3. (resp. dans 1.4.) Si l'ensemble singulier Σ est vide et si S vérifie les hypothèses du théorème 1.3.1. (resp. 1.4.1.), alors la classe de Chern $c_1(E)$ du fibré normal à S dans M est nulle.

Remarquons que le corollaire 1.5. peut aussi se démontrer directement de la façon suivante :

Le feuilletage F étant sans singularités, on peut construire une connexion plate sur le fibré E , comme celle construite, dans le paragraphe 2.2. de la première partie, sur $E|_{S-\Sigma}$. Le fibré $E \rightarrow S$ est alors un fibré complexe dont la base est compacte et dont le groupe structural peut être réduit à un groupe discret. Par conséquent, il devient trivial $[D$ et $S]$ sur un revêtement fini de la base et sa classe de Chern est donc nulle.

CHAPITRE II

EXEMPLES DE CALCUL D'INDICES DANS \mathbb{C}^3 POUR DES FEUILLETAGES HOLOMORPHES DE
CODIMENSION 1.

2.1.- Cas d'un feuilletage défini par une 1-forme linéaire fermée.

2.1.1.- Exemple.

Soit ω la 1-forme linéaire fermée sur \mathbb{C}^3 définie par :

$$\omega(z) = z_3(dz_1 + dz_2) + (z_1 + z_2)dz_3 ; \text{ où } z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$$

ω définit un feuilletage holomorphe F sur \mathbb{C}^3 admettant un ensemble singulier Σ de dimension 1, donné par :

$$\Sigma = \{(z_1; -z_1; 0) / z_1 \in \mathbb{C}\}.$$

Notons S_1 et S_2 les deux sous-variétés intégrales de ω contenant Σ . On a :

$$S_1 = \{(z_1; z_2; 0) / (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2\}$$

$$S_2 = \{(z_1; -z_1; z_3) / (z_1; z_3) \in \mathbb{C}^2\}.$$

Calcul des indices en $0 \in \mathbb{C}^3$, relatifs à S_1 et S_2 .

Soit P un plan de \mathbb{C}^3 transverse à Σ et passant par $0 \in \mathbb{C}^3$,
de la forme :

$$z_3 = \lambda z_1 + \mu z_2 \quad ; \quad (\lambda, \mu) \in (\mathbb{C}^*)^2 \text{ et } \lambda \neq \mu .$$

Les traces respectives de S_1 et S_2 sur le plan P sont :

$$S_1^P = \{(z_1 ; -\frac{\lambda}{\mu} z_1 ; 0) / z_1 \in \mathbb{C}\} \quad \text{et}$$

$$S_2^P = \{(z_1 ; -z_1 ; (\lambda - \mu)z_1) / z_1 \in \mathbb{C}\}.$$

Notons F^P , le feuilletage induit par F , sur le plan P .

Avec le changement de coordonnées suivant :

$$\begin{cases} u = z_1 + z_2 \\ v = \lambda z_1 + \mu z_2 \end{cases} ,$$

on obtient

$$\omega_{\lambda, \mu}(u, v) = v du + u dv$$

et

$$S_1^P = \{(u, 0) / u \in \mathbb{C}\}, \quad S_2^P = \{(0, v) / v \in \mathbb{C}\}.$$

D'où

$$i_0(F^P; S_j^P) = -1 \text{ pour } j = 1, 2.$$

Remarque : Soit $q = (z_0, -z_0, 0)$ un point quelconque de Σ , et P un plan transverse passant par q . Alors, effectuons le changement de variables : $Z_1 = z_1 - z_0$; $Z_2 = z_2 + z_0$; $Z_3 = z_3$.

Nous sommes ramenés au même calcul que précédemment et nous obtenons encore des indices $i_q(F^P; S_j^P) = -1$ pour $j = 1, 2$.

2.1.2.- Généralisation de cet exemple à toute forme linéaire fermée.

$$\text{Soit } \omega = \sum_{i=1}^3 A_i(z) dz_i$$

$$\text{avec } A_i(z) = \sum_{j=1}^3 a_{ij} z_j, \quad a_{ij} \in \mathbb{C}$$

et $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ une matrice symétrique (i.e. ω est fermée).

L'ensemble singulier Σ , du feuilletage F défini sur \mathbb{C}^3 par ω , est de codimension 2 si et seulement si la matrice (a_{ij}) est de rang 2.

Supposons donc $\det.(a_{ij}) = 0$, on peut supposer que le déterminant

$$\text{d'ordre 2, } \alpha = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \text{ est non nul.}$$

$$\text{Notons } \beta = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \text{ et } \gamma = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Alors l'ensemble singulier Σ est la droite complexe

$$\{(\beta t; \gamma t; \alpha t) / t \in \mathbb{C}\}.$$

Soit P un plan de \mathbb{C}^3 , et $i : P \rightarrow \mathbb{C}^3$ le plongement de ce plan dans \mathbb{C}^3 .

Le plan P est transverse à ω si et seulement si :

$$\begin{cases} \Sigma(i^* \omega) = i^{-1}(\Sigma(\omega)) \\ \text{codim. } \Sigma(i^* \omega) = \inf(\dim P ; \text{codim. } \Sigma(\omega)) \end{cases}$$

où la notation $\Sigma(\omega)$ désigne l'ensemble singulier de ω .

Soit P un plan de \mathbb{C}^3 de la forme : $z_3 = \lambda z_1 + \mu z_2$; $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{C}^*)^2$.

P est transverse si et seulement si l'ensemble singulier $\Sigma_{\lambda\mu}$ du feuilletage F^P , induit sur P, est réduit à l'origine. Or, ce feuilletage F^P est défini par la 1-forme ω^P :

$$\omega^P(z_1, z_2) = [a(\lambda)z_1 + c(\lambda, \mu)z_2]dz_1 + [c(\lambda, \mu)z_1 + b(\mu)z_2]dz_2$$

où

$$\begin{cases} a(\lambda) = a_{11} + 2a_{13}\lambda + a_{33}\lambda^2 \\ b(\mu) = a_{22} + 2a_{23}\mu + a_{33}\mu^2 \\ c(\lambda, \mu) = a_{12} + a_{23}\lambda + a_{13}\mu + a_{33}\lambda\mu. \end{cases}$$

Ainsi, $\Sigma_{\lambda\mu} = \{0\}$ si et seulement si $\Gamma(\lambda, \mu) \neq 0$,
où $\Gamma(\lambda, \mu) = [c(\lambda, \mu)]^2 - a(\lambda)b(\mu)$.

$\Gamma(\lambda, \mu)$ s'exprime aussi en fonction de α , β et γ comme

$$\Gamma(\lambda, \mu) = \alpha - \beta\lambda - \gamma\mu.$$

Les sous-variétés intégrales de ω^P qui passent par $0 \in P$ sont données par :

$$a(\lambda)z_1^2 + b(\mu)z_2^2 + 2c(\lambda, \mu)z_1z_2 = 0.$$

Supposons $a(\lambda) \neq 0$, et soit $\delta_{\lambda\mu}$ une racine carrée fixée du nombre complexe $\Gamma(\lambda, \mu)$. Alors, dans le système de coordonnées suivant :

$$\begin{cases} u = z_1 + \frac{c(\lambda, \mu) + \delta_{\lambda\mu}}{a(\lambda)} z_2 \\ v = \frac{a(\lambda)}{2} z_1 + \frac{a(\lambda)b(\mu)}{2[c(\lambda, \mu) + \delta_{\lambda\mu}]} z_2 \end{cases}$$

nous avons

$$\omega^P(u,v) = vdu + udv$$

et les sous-variétés intégrales passant par $0 \in P$, sont

$$S_1^P = \{(u,0)/u \in \mathbb{C}\} \quad \text{et} \quad S_2^P = \{(0,v)/v \in \mathbb{C}\}.$$

D'où les indices

$$i_0(F^P; S_j^P) = -1 \quad \text{pour} \quad j = 1, 2.$$

Nous calculerions de même les indices $i_q(F^P; S_j^P)$ en un point quelconque $q \in \Sigma$. Le résultat serait identique

$$i_q(F^P; S_j^P) = -1 \quad \text{pour} \quad j = 1, 2.$$

2.2.- Cas d'un feuilletage défini par une 1-forme intégrable linéaire non fermée.

$$\text{Soit } \omega = \sum_{i=1}^3 A_i(z) dz_i \quad \text{avec} \quad A_i(z) = \sum_{j=1}^3 a_{ij} z_j \quad ; \quad a_{ij} \in \mathbb{C}.$$

La matrice (a_{ij}) n'est plus symétrique. On suppose toujours que Σ est de codimension 2. Avec les notations du paragraphe précédent, on a toujours

$$\Sigma = \{(\beta t; \gamma t; \alpha t)/t \in \mathbb{C}\}.$$

Soit P un plan transverse passant par $0 \in \mathbb{C}^3$, donné par :

$$\begin{cases} z_3 = \lambda z_1 + \mu z_2 & ; \quad (\lambda, \mu) \in (\mathbb{C}^*)^2 \\ \Gamma(\lambda, \mu) \neq 0 & ; \quad \text{avec} \quad \Gamma(\lambda, \mu) = \alpha - \beta\lambda - \gamma\mu. \end{cases}$$

Posons :

$$a(\lambda) = a_{11} + \lambda(a_{13} + a_{31}) + \lambda^2 a_{33}$$

$$b(\mu) = a_{22} + \mu(a_{23} + a_{32}) + \mu^2 a_{33}$$

$$c(\lambda, \mu) = a_{12} + \lambda a_{32} + \mu a_{13} + \lambda \mu a_{33}$$

$$d(\lambda, \mu) = a_{21} + \lambda a_{23} + \mu a_{31} + \lambda \mu a_{33} ,$$

alors le feuilletage F^P , induit sur P , est défini par la 1-forme :

$$\omega^P = [a(\lambda)z_1 + c(\lambda, \mu)z_2]dz_1 + [d(\lambda, \mu)z_1 + b(\mu)z_2]dz_2 .$$

2.2.1.- Remarque :

$$[\Gamma(\lambda, \mu)]^2 = \alpha [a(\lambda)b(\mu) - c(\lambda, \mu)d(\lambda, \mu)]$$

$$\text{et } d(\lambda, \mu) - c(\lambda, \mu) = \frac{a_{21} - a_{12}}{\alpha} \Gamma(\lambda, \mu).$$

2.2.2.- Calcul des indices à l'origine.

Posons :

$$A(z_1, z_2) = a(\lambda)z_1 + c(\lambda, \mu)z_2$$

$$B(z_1, z_2) = d(\lambda, \mu)z_1 + b(\mu)z_2$$

et, soit M la matrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial B}{\partial z_1}(0) & \frac{\partial B}{\partial z_2}(0) \\ -\frac{\partial A}{\partial z_1}(0) & -\frac{\partial A}{\partial z_2}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d(\lambda, \mu) & b(\mu) \\ -a(\lambda) & -c(\lambda, \mu) \end{pmatrix}$$

J.F. Mattei et R. Moussu ont montré [M.M] que cette matrice est transformée par changement de coordonnées, en une matrice semblable [i.e. de la forme $A^{-1}.M.A$].

On peut donc définir les valeurs propres de la forme ω^P comme étant les valeurs propres v_1 et v_2 de cette matrice. Ils ont aussi démontré qu'on peut trouver un système de coordonnées (u,v) dans \mathbb{C}^2 , tel que

$$\omega^P \wedge (v_1 v du - v_2 u dv) = 0.$$

Autrement dit, la 1-forme $(v_1 v du - v_2 u dv)$ induit le même feuilletage F^P que ω^P (Lemme de division de de Rham).

Ainsi, les sous-variétés intégrales passant par $0 \in P$ sont

$$S_1^P = \{(u,0)/u \in \mathbb{C}\} \quad \text{et} \quad S_2^P = \{(0,v)/v \in \mathbb{C}\},$$

d'où

$$i_{0}(F^P; S_1^P) = - \operatorname{Rés}_{u=0} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{v_1 u}{-v_2 u} \right) = \frac{v_1}{v_2}$$

et

$$i_{0}(F^P; S_2^P) = - \operatorname{Rés}_{v=0} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{-v_2 u}{v_1 v} \right) = \frac{v_2}{v_1}$$

(si $v_1 \cdot v_2 \neq 0$).

Cherchons ces 2 valeurs propres :

$$\det(M - v \cdot \text{Id}) = v^2 - v[d(\lambda, \mu) - c(\lambda, \mu)] + \det. M.$$

D'après la remarque 2.2.1., les valeurs propres v_1 et v_2 sont toutes les deux non nulles.

Soit

$$\Delta(\lambda, \mu) = [d(\lambda, \mu) - c(\lambda, \mu)]^2 - 4[a(\lambda)b(\mu) - c(\lambda, \mu)d(\lambda, \mu)].$$

Notons $\delta_{\lambda\mu}$ une racine carrée fixée de ce nombre complexe. Alors,

$$v_1 = \frac{d(\lambda, \mu) - c(\lambda, \mu) + \delta_{\lambda\mu}}{2} \quad \text{et} \quad v_2 = \frac{d(\lambda, \mu) - c(\lambda, \mu) - \delta_{\lambda\mu}}{2}$$

D'après la remarque 2.2.1., nous avons

$$\Delta(\lambda, \mu) = \left(\frac{\Gamma(\lambda, \mu)}{\alpha}\right)^2 [(a_{21} - a_{12})^2 - 4\alpha],$$

notons alors $\delta_{\lambda\mu}^1$ une racine carrée fixée du nombre complexe $[(a_{21} - a_{12})^2 - 4\alpha]$,
les valeurs propres s'écrivent :

$$v_1 = \frac{\Gamma(\lambda, \mu)}{2\alpha} (a_{21} - a_{12} + \delta_{\lambda\mu}^1)$$

$$\text{et} \quad v_2 = \frac{\Gamma(\lambda, \mu)}{2\alpha} (a_{21} - a_{12} - \delta_{\lambda\mu}^1).$$

Par conséquent, les indices en $0 \in P$, deviennent :

$$i_0(F^P; S_1^P) = \frac{a_{21} - a_{12} + \delta_{\lambda\mu}^1}{a_{21} - a_{12} - \delta_{\lambda\mu}^1}$$

$$i_0(F^P; S_2^P) = \frac{a_{21} - a_{12} - \delta_{\lambda\mu}^1}{a_{21} - a_{12} + \delta_{\lambda\mu}^1}$$

Remarque : Ces indices ne dépendent que des coefficients qui interviennent dans α .

2.2.3.- Exemples explicites.

1) $\omega = (z_1 + 2z_2)dz_1 + (z_1 + z_2 - z_3)dz_2 - (z_1 + 3z_2 + z_3)dz_3$

la matrice $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ associée à ω est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

La condition d'intégrabilité (i.e. $\omega \wedge d\omega = 0$), équivaut à

$$A \begin{pmatrix} a_{32} - a_{23} \\ a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui est vérifié ici.

On a aussi :

$$\det A = 0 \quad ; \quad \alpha = -1, \quad \beta = -2 \quad \text{et} \quad \gamma = 1$$

d'où

$$\Sigma = \{(-2t, t, -t) / t \in \mathbb{C}\} \quad \text{et} \quad \Gamma(\lambda, \mu) = -1 + 2\lambda - \mu.$$

Nous obtenons les indices :

$$i_0^{(1)} = -\frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad i_0^{(2)} = -\frac{3-\sqrt{5}}{2} .$$

2) Soit $\omega = (iz_1 + z_2 + (1+i)z_3)dz_1 + (iz_1 - z_2 + (i-1)z_3)dz_2 + (2iz_1 + 2iz_3)dz_3$

la matrice associée à ω est

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 & 1+i \\ i & -1 & i-1 \\ 2i & 0 & 2i \end{pmatrix}$$

ω est intégrable et on a :

$$\det A = 0, \quad \alpha = -2i, \quad \beta = 2i \quad \text{et} \quad \gamma = -2$$

d'où

$$\Sigma = \{(2it, -2t, 2it)/t \in \mathbb{C}\} \quad \text{et} \quad \Gamma(\lambda, \mu) = -2i - 2i\lambda + 2\mu.$$

Nous obtenons les indices :

$$i_o^{(1)} = \frac{1 + \sqrt{3} - i(3+\sqrt{3})}{4} \quad \text{et} \quad i_o^{(2)} = \frac{\sqrt{3} - 1 + i(3-\sqrt{3})}{2} .$$

B I B L I O G R A P H I E

- [A.F] - A. ANDRETTI et T. FRANKEL, The Lefschetz theorem on hyperplane sections, Ann. Math. 69 (1959), 713-717.
- [Bo] R. BOTT, Lectures on characteristic classes and foliations, Lecture Notes in Mathematics 279, Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1972.
- [Bra] - J.P. BRASSELET, Sur les morphismes de dualité, Pub. IRMA, Lille, vol. 2, n° 3 (1980).
- [C et S] - C. CAMACHO et P. SAD, Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields, Ann. Math. 115 (1982), 579-595.
- [D et S] - P. DELIGNE et D. SULLIVAN, Fibrés vectoriels complexes à groupe structural discret, C.R. Acad. Sc. Paris, 281 (1975), 1081-1083.
- [G] M. GREENBERG, Lectures on algebraic topology, W.A. Benjamin, Inc., 1967.
- [H] F. HIRZEBRUCH, Topological methods in algebraic geometry, 3rd edition Springer-Verlag, New-York, 1966.
- [K] S. KOBAYASHI and K. NOMIZU, Foundations of differential geometry, vol. II, Intersciences, 1969.
- [L] D. LEHMANN, Résidus des connexions à singularités et classes caractéristiques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 31, (1981), 83-98.
- [M.M] J.F. MATTEI et R. MOUSSU, Holonomie et intégrales premières, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t. 13, (1980), 469-523.
- [M] J. MILNOR, Morse theory, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963.
- [R.T.] E. REES et E. THOMAS, Realizing homology classes by almost-complex submanifolds, Zeitschrift. 172, (1980), 195-201.
- [R.] R. REMMERT, C.R. Acad. Sc. Paris, 243, (1956), 118-121.
- [T.] R. THOM, Quelques propriétés globales des variétés différentiables, Comment. Math. Helv. 28, (1954), 17-86.

