N° d'ordre : 1202

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE 3ème CYCLE

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Adelhak FDIL

CHOIX AUTOMATIQUES ENTRE TRANSFORMATIONS DE SUITES

Thèse soutenue le 4 octobre 1984 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :	**C.**	**BREZINSKI**	**Président**
	B.	**GERMAIN BONNE**	**Examinateur**
	J.P.	**DELAHAYE**	**Rapporteur**

PROFESSEURS CLASSE EXCEPTIONNELLE

M.	CONSTANT Eugène	I.E.E.A.
M.	FOURET René	Physique
M.	GABILLARD Robert	I.E.E.A.
M.	MONTREUIL Jean	Biologie
M.	PARREAU Michel	Mathématiques
M.	TRIDOT Gabriel	Chimie
M.	VIVIER Emile	Biologie
M.	WERTHEIMER Raymond	Physique

PROFESSEURS 1ère classe

M.	BACCHUS Pierre	Mathématiques
M.	BEAUFILS Jean-Pierre (dét.)	Chimie
M.	BIAYS Pierre	G.A.S.
M.	BILLARD Jean (dét.)	Physique
M.	BOILLY Bénoni	Biologie
M.	BOIS Pierre	Mathématiques
M.	BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M.	BOUGHON Pierre	Mathématiques
M.	BOURIQUET Robert	Biologie
M.	BREZINSKI Claude	I.E.E.A.
M.	CELET Paul	Sciences de la Terre
M.	CHAMLEY Hervé	Biologie
M.	COEURE Gérard	Mathématiques
M.	CORDONNIER Vincent	I.E.E.A.
M.	DEBOURSE Jean-Pierre	S.E.S.
M.	DYMENT Arthur	Mathématiques

PROFESSEURS 1ère classe (suite)

M. ESCAIG Bertrand	Physique
M. FAURE Robert	Mathématiques
M. FOCT Jacques	Chimie
M. GRANELLE Jean-Jacques	S.E.S.
M. GRUSON Laurent	Mathématiques
M. GUILLAUME Jean	Biologie
M. HECTOR Joseph	Mathématiques
M. LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M. LACOSTE Louis	Biologie
M. LAVEINE Jean Pierre	Sciences de la Terre
M. LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique
M. LHOMME Jean	Chimie
M. LOMBARD Jacques	S.E.S.
M. LOUCHEUX Claude	Chimie
M. LUCQUIN Michel	Chimie
M. MIGEON Michel Recteur à Grenoble	E.U.D.I.L.
M. MIGNOT Fulbert (dét.)	Mathématiques
M. PAQUET Jacques	Sciences de la Terre
M. PROUVOST Jean	Sciences de la Terre
M. ROUSSEAU Jean-Paul	Biologie
M. SALMER Georges	I.E.E.A.
M. SEGUIER Guy	I.E.E.A.
M. SIMON Michel	S.E.S.
M. STANKIEWICZ François	S.E.S.
M. TILLIEU Jacques	Physique
M. VIDAL Pierre	I.E.E.A.
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mathématiques

P R O F E S S E U R S 2ème classe

M. ANTOINE Philippe	Mathématiques (Calais)
M. BART André	Biologie
Mme BATTIAU Yvonne	Géographie
M. BEGUIN Paul	Mathématiques
M. BELLET Jean	Physique
M. BERZIN Robert	Mathématiques
M. BKOUCHE Rudolphe	Mathématiques
M. BODARD Marcel	Biologie
M. BOSQ Denis	Mathématiques
M. BRASSELET Jean-Paul	Mathématiques
M. BRUYELLE Pierre	Géographie
M. CAPURON Alfred	Biologie
M. CARREZ Christian	I.E.E.A.
M. CAYATTE Jean-Louis	S.E.S.
M. CHAPOTON Alain	C.U.E.E.P.
M. COQUERY Jean-Marie	Biologie
Mme CORSIN Paule	Sciences de la Terre
M. CORTOIS Jean	Physique
M. COUTURIER Daniel	Chimie
M. CROSNIER Yves	I.E.E.A.
M. CURGY Jean-Jacques	Biologie
Mle DACHARRY Monique	Géographie
M. DAUCHET Max	I.E.E.A.
M. DEBRABANT Pierre	E.U.D.I.L.
M. DEGAUQUE Pierre	I.E.E.A.
M. DELORME Pierre	Biologie
M. DELORME Robert	S.E.S.
M. DE MASSON D'AUTUME Antoine	S.E.S.
M. DEMUNTER Paul	C.U.E.E.P.

PROFESSEURS 2ème classe (Suite 1)

M.	DENEL Jacques	I.E.E.A.
M.	DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques (Calais)
Mle	DESSAUX Odile	Chimie
M.	DEVRAINNE Pierre	Chimie
M.	DHAINAUT André	Biologie
Mme	DHAINAUT Nicole	Biologie
M.	DORMARD Serge	S.E.S.
M.	DOUKHAN Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M.	DUBOIS Henri	Physique
M.	DUBRULLE Alain	Physique (Calais)
M.	DUBUS Jean-Paul	I.E.E.A.
M.	FAKIR Sabah	Mathématiques
M.	FONTAINE Hubert	Physique
M.	FOUQUART Yves	Physique
M.	FRONTIER Serge	Biologie
M.	GAMBLIN André	G.A.S.
M.	GLORIEUX Pierre	Physique
M.	GOBLOT Rémi	Mathématiques
M.	GOSSELIN Gabriel (dét.)	S.E.S.
M.	GOUDMAND Pierre	Chimie
M.	GREGORY Pierre	I.P.A.
M.	GREMY Jean-Paul	S.E.S.
M.	GREVET Patrice	S.E.S.
M.	GUILBAULT Pierre	Biologie
M.	HENRY Jean-Pierre	E.U.D.I.L.
M.	HERMAN Maurice	Physique
M.	JACOB Gérard	I.E.E.A.
M.	JACOB Pierre	Mathématiques
M.	JEAN Raymond	Biologie
M.	JOFFRE Patrick	I.P.A.

PROFESSEURS 2ème classe (suite 2)

M. JOURNEL Gérard	E.U.D.I.L.
M. KREMBEL Jean	Biologie
M. LANGRAND Claude	Mathématiques
M. LATTEUX Michel	I.E.E.A.
Mme LECLERCQ Ginette	Chimie
M. LEFEVRE Christian	Sciences de la Terre
Mle LEGRAND Denise	Mathématiques
Mle LEGRAND Solange	Mathématiques (Calais)
Mme LEHMANN Josiane	Mathématiques
M. LEMAIRE Jean	Physique
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique
M. LOSFELD Joseph	C.U.E.E.P.
M. LOUAGE Francis(dét.)	E.U.D.I.L.
M. MACKE Bruno	Physique
M. MAIZIERES Christian	I.E.E.A.
M. MESSELYN Jean	Physique
M. MESSERLIN Patrick	S.E.S.
M. MONTEL Marc	Physique
Mme MOUNIER Yvonne	Biologie
M. PARSY Fernand	Mathématiques
Mle PAUPARDIN Colette	Biologie
M. PERROT Pierre	Chimie
M. PERTUZON Emile	Biologie
M. PONSOLLE Louis	Chimie
M. PORCHET Maurice	Biologie
M. POVY Lucien	E.U.D.I.L.
M. RACZY Ladislas	I.E.E.A.
M. RAOULT Jean François	Sciences de la Terre
M. RICHARD Alain	Biologie

PROFESSEURS 2ème Classe (suite 3)

M. RIETSCH François	E.U.D.I.L.
M. ROBINET Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M. ROGALSKI Marc	Mathématiques
M. ROY Jean-Claude	Biologie
M. SCHAMPS Joël	Physique
Mme SCHWARZBACH Yvette	Mathématiques
M. SLIWA Henri	Chimie
M. SOMME Jean	G.A.S.
Mle SPIK Geneviève	Biologie
M. STAROSWIECKI Marcel	E.U.D.I.L.
M. STERBOUL François	E.U.D.I.L.
M. TAILLIEZ Roger	Institut Agricole
Mme TJOTTA Jacqueline (dét.)	Mathématiques
M. TOULOTTE Jean-Marc	I.E.E.A.
M. TURRELL Georges	Chimie
M. VANDORPE Bernard	E.U.D.I.L.
M. VAST Pierre	Chimie
M. VERBERT André	Biologie
M. VERNET Philippe	Biologie
M. WALLART Francis	Chimie
M. WARTEL Michel	Chimie
M. WATERLOT Michel	Sciences de la Terre
Mme ZINN JUSTIN Nicole	Mathématiques

CHARGES DE COURS

M. ADAM Michel	S.E.S.

CHARGES DE CONFERENCES

M. BAFCOP Joël	I.P.A.
M. DUVEAU Jacques	S.E.S.
M. HOFLACK Jean	I.P.A.
M. LATOUCHE Serge	S.E.S.
M. MALAUSSENA DE PERNO Jean-Louis	S.E.S.
M. NAVARRE Christian	I.P.A.
M. OPIGEZ Philippe	S.E.S.

Je remercie vivement Monsieur C. BREZINSKI, Professeur à l'Université de Lille I, qui me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je suis très reconnaissant à Monsieur J.P. DELAHAYE, qui a dirigé mes travaux avec une grande efficacité. Ses conseils, ses encouragements et sa grande disponibilité m'ont permis de faire progresser rapidement et aboutir ce travail.

Je tiens à remercier Monsieur B. GERMAIN-BONNE, qui a accepté de juger ce travail.

Mes remerciements vont à Madame Patricia CARON, qui avec gentillesse, rapidité et patience a mis en forme et a dactylographié ces pages, et à Monsieur GLANC et Madame DEBOCK, qui ont assuré l'impression et la reliure de cette thèse.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Lorsqu'on veut accélérer une suite, on se trouve confronté au problème du choix d'un procédé d'accélération de la convergence ([1], [2], [4], [5], [6], [7],[18],[19]) ayant le plus de chance d'être efficace ; pour s'affranchir de cette difficulté, J.P. DELAHAYE ([7], [9]) a proposé l'idée de mettre en compétition plusieurs méthodes d'accélération de la convergence et de choisir algorithmiquement à chaque étape l'une des réponses des transformations en compétition, en d'autres termes, l'idée consiste à construire une nouvelle transformation plus efficace à partir des transformations en compétition. Le but principal de ce travail est de développer l'idée de la sélection en transformations de suites.

Au chapitre 1, nous rappelons le formalisme général de la notion de transformation de suites et d'algorithmes pour suites ([7], [8]) et nous nous intéressons à 2 types de transformations de suites (Transformations à k réponses ; Transformations de k suites) et à 2 types d'algorithmes pour suites (algorithmes pour suites à k réponses, algorithmes pour k suites).

Au chapitre 2, nous introduisons deux notions d'accélération de la convergence pour les transformations de k suites, ensuite nous donnons une condition suffisante de la non-accélérabilité à l'aide d'une transformation de k suites et nous terminons ce chapitre par l'étude de 2 transformations de 2 suites.

Au chapitre 3, nous étudions des transformations particulières de k suites (méthodes de sélection entre k suites), nous étudions des méthodes concrètes de choix automatique entre un nombre fini de transformations de suites, permettant sous certaines conditions, l'accélération d'une réunion finie de familles de suites accélérables.

Au chapitre 4, nous comparons numériquement les méthodes de sélection présentées au chapitre précédent, les résultats numériques de ce chapitre montrent bien l'intérêt du choix automatique entre les transformations de suites.

Au chapitre 5, nous envisageons des méthodes de sélection entre une infinité dénombrable de transformations de suites, nous étudions des méthodes particulières de choix automatique entre une infinité de transformations de suites associées à une infinité dénombrable de suites auxiliaires dans l'extrapolation de Richardson ; nous introduisons des sélections répétées entre les réponses du tableau d'une transformation de suites, enfin nous proposons deux techniques permettant de localiser les points d'instabilité numérique dans le tableau d'une transformation de suites.

Au chapitre 6, nous proposons une généralisation en un certain sens des méthodes de controle des erreurs [3] et nous en déduisons des méthodes de sélection entre transformations de suites à 2 réponses de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$, enfin nous étudions des méthodes générales de sélection entre transformations de suites à 2 réponses.

NOTATIONS GENERALES

$\mathbb{N}$: ensemble des entiers naturels.

$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

$\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ - \{0\}$

$\emptyset$: l'ensemble vide ou la suite vide.

Soit E un ensemble, nous désignons par :

(x^n) : la suite de terme général $x^n \in E$.

$E^{\mathbb{N}}$: ensemble des suites infinies d'éléments de E.

$E^{(\mathbb{N})}$: ensemble des suites finies d'éléments de E.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, nous notons par :

E^K : le produit cartésien $\underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{k \text{ fois}}$

Lorsque E est muni d'une distance, nous noterons par :

Conv(E) : ensemble des suites convergentes de E.

Quand une suite $(x^n) \in E^{\mathbb{N}}$, est convergente, nous noterons x sa limite et nous écrirons $\lim x^n = x$ ou encore $x^n \underset{n \to \infty}{\to} x$ ou plus simplement $x^n \to x$.

Soient E, F 2 ensembles, nous désignons par :

$f : E \to F$: fonction de E vers F.

dom f : le domaine de définition de f.

Chapitre I

TRANSFORMATIONS DE K SUITES
ET
TRANSFORMATIONS A K REPONSES

INTRODUCTION

Après un rappel des définitions générales de transformations de suites et d'algorithmes pour suites introduites dans [7], [8] nous nous intéressons à 2 types de transformations de suites et d'algorithmes pour suites.

1 - RAPPELS

Pour plus de détail en ce qui concerne les définitions que nous allons présenter dans cette section, consulter [7], [8].

Soient E, F 2 ensembles.

Définition 1

On appelle transformation de suites de $E^{\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* $F^{\mathbb{N}}$, *toute fonction de* $E^{\mathbb{N}}$ *dans* $F^{\mathbb{N}}$.

Dans toute la suite, nous notons Trans(E, F) l'ensemble des transformations de suites de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $F^{\mathbb{N}}$.

Soit $T \in$ Trans(E, F) nous notons dom T le domaine de définition de T.

Définition 2

On appelle algorithme pour suites de $E^{\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* $F^{\mathbb{N}}$ *la donnée :*

i) d'une fonction $R : \mathbb{N} \times E^{(\mathbb{N})} \times F^{(\mathbb{N})} \to F$

ii) d'une fonction $C = (\alpha, \beta) : \mathbb{N} \times E^{(\mathbb{N})} \times F^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Appliqué à une suite $(x^n) \in E^{\mathbb{N}}$, l'algorithme A = (R, C) fonctionne de la manière suivante :

Etape 0

a) Calculer $C(0, \emptyset, \emptyset) = (\alpha(o), \beta(o)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

b) Calculer $t^o = R(0, (x^{\alpha(o)}, \ldots, x^{\beta(o)}), \emptyset) \in F$.

....

<u>Etape i</u>

a) Calculer $C(i, (x^{\alpha(i-1)}, \ldots, x^{\beta(i-1)}), (t^o, \ldots, t^{i-1})) = (\alpha(i), \beta(i)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

b) Calculer $t^i = R(i, (x^{\alpha(i)}, \ldots, x^{\beta(i)}), (t^o, \ldots, t^{i-1})) \in F$.

(t^i *est le* (i+1)-ème *terme de la suite transformée*).

L'ensemble des suites $(x^n) \in E^{\mathbb{N}}$ pour lesquelles le calcul des réponses t^i se poursuit indéfiniment (c'est à dire sans jamais sortir du domaine de définition des fonctions C et R) sera appelé domaine de définition de l'algorithme $A = (R, C)$ et sera noté dom A.

On note par Alg(E, F) l'ensemble des algorithmes pour suites de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $F^{\mathbb{N}}$.

Soit $A \in$ Alg(E, F).

On note par $^{\tau}A$ la transformation de suites ayant pour domaine dom A et qui à $(x^n) \in$ dom A fait correspondre la suite (t^n) obtenue en appliquant A à (x^n).

Soit $T \in$ Trans (E, F), s'il existe un algorithme $A \in$ Alg(E, F) tel que $^{\tau}A = T$, on dira que T est une *transformation algorithmique*.

On note par $^{\tau}$Alg(E, F) l'ensemble des transformations algorithmiques de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $F^{\mathbb{N}}$.

<u>*Définition 3*</u>

Soit $k \in \mathbb{N}$.

On appelle algorithme k-*normal de* $E^{\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* $F^{\mathbb{N}}$ *la donnée d'une suite de fonctions* (f_n) *telle que :* $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : E^{n+k+1} \to F$.

Appliqué à une suite $(x^n) \in E^{\mathbb{N}}$, *l'algorithme* k-*normal* $A = (f_n)$ *fonctionne de la façon suivante :*

$$t^o = f_o(x^o, \ldots, x^k)$$
$$t^1 = f_1(x^o, \ldots, x^{1+k})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$t^n = f_n(x^o, \ldots, x^{n+k}).$$

Lorsque $k = 0$, l'algorithme est dit normal.

L'ensemble des suites $(x^n) \in E^{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N} : (x^o, \ldots, x^{n+k}) \in \text{dom } f_n$ est appelé domaine de définition de l'algorithme $A = (f_n)$.

On note par $\text{Norm}_k(E, F)$ l'ensemble des algorithmes k-normaux de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $F^{\mathbb{N}}$.

Soit $A = (f_n)$ un algorithme k-normal, on note ${}^{T}A$ la transformation de suites dont le domaine de définition est celui de l'algorithme A et qui à $(x^n) \in$ dom A fait correspondre la suite (t^n) obtenue en appliquant A à (x^n).

Soit $T \in \text{Trans}(E, F)$, s'il existe un algorithme $A \in \text{Norm}_k(E, F)$ tel que $T = {}^{T}A$, on dira que T est une transformation k-normale.

L'ensemble des transformations k-normales de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $F^{\mathbb{N}}$ sera noté : ${}^{T}\text{Norm}_k(E, F)$.

Définition 4

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

On appelle algorithme à k *mémoires de* $E^{\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* $F^{\mathbb{N}}$ *la donnée : d'une suite de fonctions* (f_n) *avec :*

$f_n : E^{n+1} \to F$ *si* $n < k$.

$f_n : E^k \to F$ *si* $n \geq k-1$.

Appliqué à une suite $(x^n) \in E^{\mathbb{N}}$, *l'algorithme à* k *mémoires* $M = (f_n)$ *fonctionne de la façon suivante :*

$t^n = f_n(x^o, x^1, \ldots, x^n)$ *si* $n < k$.

$t^n = f_n(x^{n-k+1}, \ldots, x^n)$ *si* $n \geq k-1$.

L'ensemble des suites $(x^n) \in E^{\mathbb{N}}$ telles que :

$\forall n < k : (x^o, x^1, \ldots, x^n) \in \text{dom } f_n$.

$\forall n \geq k-1 : (x^{n-k+1}, \ldots, x^n) \in \text{dom } f_n$

est appelé domaine de définition de l'algorithme $M = (f_n)$, et sera noté dom M.

On note par $\text{Mém}_k(E, F)$ l'ensemble des algorithmes à k mémoires de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $F^{\mathbb{N}}$.

A tout algorithme à k mémoires $M \in \text{Mém}_k(E, F)$, on associe la transformation ${}^{\tau}M \in \text{Trans}(E, F)$ dont le domaine de définition est dom M et qui, à $(x^n) \in$ dom M, fait correspondre la suite (t^n) définie plus haut.

Soit $T \in \text{Trans}(E, F)$, s'il existe $M \in \text{Mém}_k(E, F)$ tel que ${}^{\tau}M = T$ on dira que T est une transformation à k mémoires.
On note ${}^{\tau}\text{Mém}_k(E, F)$ l'ensemble des transformations à k mémoires de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $F^{\mathbb{N}}$.

2 - TRANSFORMATIONS DE SUITES A K REPONSES

Soient E un ensemble ; $k \in \mathbb{N}^*$.

Définition
On appelle transformation de suites à k réponses de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $(E^k)^{\mathbb{N}}$, toute transformation de suites de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $(E^k)^{\mathbb{N}}$.

Soient T une transformation à k réponses de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $(E^k)^{\mathbb{N}}$; $(x^n) \in$ dom T, on note par $T^n = (A_1^n, \ldots, A_k^n)$ le terme général de $T(x^n)$.

Remarque
La donnée d'une transformation de suites à k réponses est équivalente à la donnée de k transformations de suites dont l'intersection des domaines est non vide.

3 - ALGORITHMES POUR SUITES A K REPONSES

Soient E un ensemble ; $k \in \mathbb{N}^*$.

Définition
On appelle algorithme pour suites à K réponses de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $(E^k)^{\mathbb{N}}$ tout algorithme pour suites de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $(E^k)^{\mathbb{N}}$.

La transformation de suites associée à un algorithme à k réponses est dite transformation algorithmique à k réponses.

Remarque

La donnée d'une transformation algorithmique à k réponses est équivalente à la donnée de k transformations algorithmiques dont l'intersection des domaines est non vide.

Soit $A_1, \ldots, A_k \in \mathrm{Trans}(E, E)$, $\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{dom}\, A_i \neq \emptyset$; T la transformation de suites qui à $(x^n) \in \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{dom}\, A_i$ fait correspondre $(A_1^n, \ldots, A_k^n)$.

Propriété 1

1) *Soit* $p \in \mathbb{N}$.

T *est une transformation* p-*normale* $\Leftrightarrow \forall\, i \in \{1, \ldots, k\}$, A_i *est une transformation* p-*normale*.

2) *Soit* $p \in \mathbb{N}^*$.

T *est une transformation à* p *mémoires* $\Leftrightarrow \forall\, i \in \{1, \ldots, k\}$: A_i *est une transformation à* p *mémoires*.

4 - TRANSFORMATIONS A K REPONSES RATIONNELLES

Soit $\mathbb{K}$ un corps.

Soient $p \in \mathbb{N}$, T une transformation à k réponses de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $(\mathbb{K}^k)^{\mathbb{N}}$, associée à un algorithme p-normal (f_n).

$\forall\, (x^n) \in \mathrm{dom}\, T : f_n(x^o,\ldots,x^{n+p}) = (f_n^1(x^o,\ldots,x^{n+p}),\ldots,f_n^k(x^o,\ldots,x^{n+p}))$.

Où $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, i \in \{1, \ldots, k\}$: f_n^i est une fonction de $\mathbb{K}^{n+p+1}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que T est une transformation p-normale à k réponses rationnelles ssi $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, i \in \{1, \ldots, k\}$, f_n^i est une fraction rationnelle des variables $x^o, \ldots, x^{n+p}$.

On note par $Norm_p^r(\mathbb{K}, \mathbb{K}^k)$ l'ensemble des transformations p-normales à k réponses rationnelles.

On définit de la même façon : les transformations à p mémoires, à k réponses rationnelles et on note par ${}^{T}Mém_p^r(\mathbb{K}, \mathbb{K}^k)$ leur ensemble.

5 - TRANSFORMATIONS A K REPONSES LINEAIRES

Soit E un espace vectoriel.

Soient $p \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$; T une transformation à k réponses associée à un algorithme p-normal (f_n).

On dit que T est une transformation p-normale à k réponses linéaires ssi $\forall n \in \mathbb{N}$: f_n est une application linéaire de E^{n+p+1} dans E^k.

On note ${}^{T}Norm_p^{\ell}(E, E^k)$ l'ensemble des transformations p-normales à k réponses linéaires.

De façon analogue, on définit les transformations à p mémoires, à k réponses linéaires et on note ${}^{T}Mém_p^{\ell}(E, E^k)$ leur ensemble.

6 - TRANSFORMATIONS DE K SUITES ET ALGORITHMES POUR K SUITES

Soient $k \in \mathbb{N}^*$; E un ensemble.

- On appelle transformation de k suites de $(E^k)^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E^{\mathbb{N}}$ toute transformation de suites de $(E^k)^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E^{\mathbb{N}}$.

- On appelle algorithme pour k suites de $(E^k)^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E^{\mathbb{N}}$ tout algorithme pour suites de $(E^k)^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E^{\mathbb{N}}$.

- Quand une transformation de k suites est p-normale ($p \in \mathbb{N}$) (resp. à p mémoires ($p \in \mathbb{N}^*$)) on dira que c'est une transformation de k suites p-normale (resp. à p mémoires).

7 - TRANSFORMATIONS RATIONNELLES DE K SUITES

Soient $k \in \mathbb{N}^*$; $\mathbb{K}$ un corps.

Soient $p \in \mathbb{N}$; T une transformation de k suites de $(\mathbb{K}^k)^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ associée à un algorithme (f_n) p-normal de $(\mathbb{K}^k)^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Si $\forall\ (A_1^n, \ldots, A_k^n) \in \mathrm{dom}\ T$: $f_n((A_1^o,\ldots,A_k^o), \ldots, (A_1^{n+p},\ldots,A_k^{n+p}))$ est une fraction rationnelle des variables $A_1^o, \ldots, A_k^o, A_1^1, \ldots, A_k^1, \ldots, A_1^{n+p},\ldots,A_k^{n+p}$.

Alors on dira que T est une transformation rationnelle, p-normale de k suites.

On note par ${}^{\tau}\mathrm{Norm}_p^r(\mathbb{K}^k, \mathbb{K})$ l'ensemble des transformations rationnelles p-normales de k suites de $(\mathbb{K}^k)^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

On définit de façon analogue, les transformations rationnelles à p mémoires de k suites, et on note par ${}^{\tau}\mathrm{Mém}_p^r(\mathbb{K}^k, \mathbb{K})$ leur ensemble.

8 - TRANSFORMATIONS LINEAIRES DE K SUITES

Soient $k \in \mathbb{N}^*$; E un espace vectoriel.

Soient $p \in \mathbb{N}$; T une transformation de k suites de $(E^k)^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E^{\mathbb{N}}$, associée à un algorithme (f_n) p-normal de $(E^k)^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E^{\mathbb{N}}$.

Si $\forall\ n \in \mathbb{N}$: f_n est une application linéaire de $(E^k)^{n+p+1}$ dans E alors, on dira que T est une transformation linéaire, p-normale de k suites.

On note par ${}^{\tau}\mathrm{Norm}_p^{\ell}(E^k, E)$ l'ensemble des transformations linéaires p-normales de k suites de $(E^k)^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E^{\mathbb{N}}$.

De la même façon, on définit les transformations linéaires à p mémoires de k suites et on note ${}^{\tau}\mathrm{Mém}_p^{\ell}(E^k, E)$ leur ensemble.

9 - COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS A K REPONSES ET DE TRANSFORMATIONS DE K SUITES

Soient $T_1 \in \mathrm{Trans}(E, E^k)$, $T_2 \in \mathrm{Trans}(E^k, E)$ avec $\mathrm{Im}\ T_1 \subset \mathrm{dom}\ T_2$ où $\mathrm{Im}\ T_1 = \{T_1(x^n) \mid (x^n) \in \mathrm{dom}\ T_1\}$.

Définition

On appelle transformation composée de T_1 et T_2, la transformation de suites notée $T_2 \circ T_1$ ayant pour domaine dom T_1, définie par $\forall\ (x^n) \in \text{dom}\ T_1$:
$T_2 \circ T_1\ (x^n) = T_2(T_1(x^n))$.

Propriété 2

1) Si $T_1 \in \text{Alg}(E, E^k)$, $T_2 \in \text{Alg}(E^k, E)$ *alors* $T_2 \circ T_1 \in \text{Alg}(E, E)$.

2) Soient $p, q \in \mathbb{N}$.

. *Si* $T_1 \in {}^{\tau}\text{Norm}_p(E,E^k)$, $T_2 \in {}^{\tau}\text{Norm}_q(E^k,E)$ *alors* $T_2 \circ T_1 \in {}^{\tau}\text{Norm}_{p+q}(E,E)$.
. *Si* $T_1 \in {}^{\tau}\text{Norm}_p^r(E,E^k)$, $T_2 \in {}^{\tau}\text{Norm}_q^r(E^k,E)$ *alors* $T_2 \circ T_1 \in {}^{\tau}\text{Norm}_{p+q}^r(E,E)$.
. *Si* $T_1 \in {}^{\tau}\text{Norm}_p^\ell(E,E^k)$, $T_2 \in {}^{\tau}\text{Norm}_q^\ell(E^k,E)$ *alors* $T_2 \circ T_1 \in {}^{\tau}\text{Norm}_{p+q}^\ell(E,E)$.

3) Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$.

. *Si* $T_1 \in {}^{\tau}\text{Mém}_p(E,E^k)$, $T_2 \in {}^{\tau}\text{Mém}_q(E^k,E)$ *alors* $T_2 \circ T_1 \in {}^{\tau}\text{Mém}_{p+q-1}(E,E)$.
. *Si* $T_1 \in {}^{\tau}\text{Mém}_p^r(E,E^k)$, $T_2 \in {}^{\tau}\text{Mém}_q^r(E^k,E)$ *alors* $T_2 \circ T_1 \in {}^{\tau}\text{Mém}_{p+q-1}^r(E,E)$.
. *Si* $T_1 \in {}^{\tau}\text{Mém}_p^\ell(E,E^k)$, $T_2 \in {}^{\tau}\text{Mém}_q^\ell(E^k,E)$ *alors* $T_2 \circ T_1 \in {}^{\tau}\text{Mém}_{p+q-1}^\ell(E,E)$.

Vérifions le premier point de 3).

Soient $T_1 \in {}^{\tau}\text{Mém}_p(E,E^k)$, $T_2 \in {}^{\tau}\text{Mém}_q(E^k, E)$ telles que Im $T_1 \subset$ dom T_2.

Il existe $M = (f_n) \in \text{Mém}_p(E, E^k)$, $N = (g_n) \in \text{Mém}_q(E^k, E)$ tels que $T_1 = {}^{\tau}M$, $T_2 = {}^{\tau}N$.

Soit $(x^n) \in$ dom T_1.

$T_1(x^n) = (A_1^n, \ldots, A_k^n)$ avec :

$(A_1^n, \ldots, A_k^n) = f_n(x^o, \ldots, x^n)$ si $n < p$.

$(A_1^n, \ldots, A_k^n) = f_n(x^{n-p+1}, \ldots, x^n)$ si $n \geq p-1$.

Posons : $t^n = g_n((A_1^o, \ldots, A_k^o), \ldots, (A_1^n, \ldots, A_k^n))$ si $n < q$.

$t^n = g_n((A_1^{n-q+1}, \ldots, A_k^{n-q+1}), \ldots, (A_1^n, \ldots, A_k^n))$ si $n \geq q-1$.

Supposons $p < q$.

On considère l'algorithme $H = (h_n) \in \text{Mém}_{p+q-1}(E, E)$ ayant pour domaine dom T_1 ; H appliqué à une suite $(x^n) \in$ dom T_1 fonctionne de la manière suivante :

$$h_n(x^o,..,x^n)=\begin{cases} g_n(f_o(x^o),..,f_n(x^o,..,x^n)) & \text{si } n < p \\ g_n(f_o(x^o),..,f_{p-1}(x^o,..,x^{p-1}),f_p(x^1,..,x^p),..,f_n(x^{n-p+1},..,x^n)) & \\ & \text{si } p \le n < q-1 \\ g_n(f_{n-q+1}(x^o,..,x^{n-q+1}),..,f_{p-1}(x^o,..,x^{p-1}),f_p(x^1,..,x^p),..,f_n(x^{n-p+1},..,x^n)) & \\ & \text{si } q-1 \le n \le p+q-2 \end{cases}$$

$$h_n(x^{n-(p+q-1)+1},..,x^n)=g_n(f_{n-q+1}(x^{n-(p+q-1)+1},..,x^{n-q+1}),..,f_n(x^{n-p+1},..,x^n))$$

$$\text{si } n \ge p+q-1$$

En remplaçant $f_n(x^o, \ldots, x^n)$ par $(A_1^n, \ldots, A_k^n)$ si $n < p$ et $f_n(x^{n-p+1}, \ldots, x^n)$ par $(A_1^n, \ldots, A_k^n)$ si $n \ge p-1$, nous obtiendrons $h_n(x^o, \ldots, x^n) = t^n$ si $n < p+q-1$ et $h_n(x^{n-(p+q-1)+1},..,x^n) = t^n$ si $n \ge p+q-1$.

Soit ${}^{\tau}H$ la transformation de suites associée à l'algorithme H.

Nous avons dom ${}^{\tau}H$ = dom$(T_2 \circ T_1)$ et $\forall\ (x^n) \in$ dom ${}^{\tau}H$: ${}^{\tau}H(x^n) = T_2 \circ T_1(x^n) = (t^n)$ par conséquent ${}^{\tau}H = T_2 \circ T_1 \in {}^{\tau}\text{Mém}_{p+q-1}(E, E)$.

Pour le cas $p \ge q$, la démonstration est analogue à la démonstration précédente.

1), 2) sont évidentes.

□

Remarque

Soient T_1, $T_2 \in$ Trans(E, E) telles que Im $T_1 \subset$ dom T_2.

Il se peut que $T_2 \circ T_1$ soit p-normale ($p \in \mathbb{N}$) sans qu'il existe $r \in \{0, \ldots, p\}$ tel que T_1 est r-normale, T_2 est (p-r)-normale.

Exemple

Soient $T_1 : E^{\mathbb{N}} \to E^{\mathbb{N}}$, $T_2 : E^{\mathbb{N}} \to E^{\mathbb{N}}$

$(x^n) \to (x^{2n})$ $\qquad (x^n) \to (y^n)$ avec $y^n = x^{[n/2]}$

[n/2] : partie entière de n/2.

$T_2 \circ T_1\ (x^n) = (x^n)$, par conséquent $T_2 \circ T_1$ est normale, nous avons $T_2 \in {}^{\tau}\text{Norm}(E,E)$, T_1 n'est pas normale.

CHAPITRE II

ACCELERATION DE LA CONVERGENCE DE K SUITES

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous introduisons au paragraphe 1 deux définitions d'accélération de la convergence pour les transformations de k suites "accélération totale", "accélération partielle".

Au paragraphe 2, nous donnons une condition suffisante de la non accélérabilité d'une famille de suites par une transformation de k suites.
La condition présentée ici est moins forte que la condition de rémanence restreinte et plus forte que la condition de rémanence [7], [14], [15].

Aux paragraphes 3, 4 nous étudions deux transformations de 2 suites.

NOTATIONS

E : espace métrique dont la distance sera notée d.

$E^{\mathbb{N}}$: ensemble des suites infinies d'éléments de E.

$\mathrm{Conv}(E)$: ensemble des suites convergentes de E.

$\mathrm{Conv}^*(E) = \{(x^n) \in \mathrm{Conv}(E) \mid \exists\, n_o,\ \forall\, n \geq n_o : x^n \neq \lim x^n\}$.

Soit $(x^n) \in \mathrm{Conv}^*(E)$, nous notons :

$$\mathrm{EtiA}(x^n) = \{(x^{i(n)}) \in \mathrm{Conv}(E) \mid \forall\, n : i(n+1) = i(n) \text{ ou } i(n+1) = i(n)+1 \text{ et } i(n) \underset{n\to\infty}{\to} \infty\}$$

$$\mathrm{EtiB}(x^n) = \{(x^{i(n)}) \in \mathrm{Conv}(E) \mid \forall\, n : i(n+1) = i(n) \text{ ou } i(n+1) = i(n)+1 \text{ et } \exists\, N,\ \forall\, n \geq N : i(n) \leq N\}.$$

$\mathrm{Eti}(x^n) = \mathrm{EtiA}(x^n) \cup \mathrm{EtiB}(x^n)$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, nous notons :

$\mathrm{Conv}_k^*(E) = \{(x_1^n,\dots,x_k^n) \in \mathrm{Conv}(E^k) \mid \exists\, n_o,\ \forall\, n\geq n_o,\ \exists\, i\in\{1,\dots,k\} : x_i^n \neq \lim x_i^n\}$.

$\overline{\mathrm{Conv}}_k(E) = \{(x_1^n,\dots,x_k^n) \in \mathrm{Conv}(E^k) \mid \lim x_1^n = \dots = \lim x_k^n\}$

$\overline{\mathrm{Conv}}_k^*(E) = \overline{\mathrm{Conv}}_k(E) \cap \mathrm{Conv}_k^*(E)$.

Soient $S_1, \ldots, S_k \subset \mathrm{Conv}(E)$, nous notons :

$$S_1 : \ldots : S_k = \{(x_1^n, \ldots, x_k^n) \in \bar{\mathrm{Conv}}_k(E) \mid \forall\, i \in \{1, \ldots, k\} : (x_i^n) \in S_i\}$$

1 - ACCELERATION TOTALE, ACCELERATION PARTIELLE, DEVINATION

Soient $(x^n) \in \mathrm{Conv}(E)$, $(A_1^n, \ldots, A_k^n) \in \bar{\mathrm{Conv}}_k(E)$, $\lim x^n = \lim A_1^n = \ldots = \lim A_k^n = x$.

- Nous dirons que (x^n) accélére totalement $(A_1^n, \ldots, A_k^n)$ ssi

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_o,\ \forall\, n \geq n_o : d(x^n, x) \leq \varepsilon \min_{1 \leq j \leq k} d(A_j^n, x).$$

- Nous dirons que (x^n) accélére partiellement $(A_1^n, \ldots, A_k^n)$ ssi

$$\exists\, i_o \in \{1, \ldots, k\} \text{ tel que } \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_o,\ \forall\, n \geq n_o : d(x^n, x) \leq \varepsilon d(A_{i_o}^n, x).$$

- Nous dirons que (x^n) devine $(A_1^n, \ldots, A_k^n)$ ssi $\exists\, n_o$, $\forall\, n \geq n_o : x^n = x$.

Soit $S \subset \bar{\mathrm{Conv}}_k(E)$.

- Nous dirons que S est totalement (resp. partiellement) accélérable ssi il existe une transformation normale T de k suites telle que : $\forall\, (A_1^n, \ldots, A_k^n) \in S : T(A_1^n, \ldots, A_k^n)$ accélére totalement (resp. partiellement) $(A_1^n, \ldots, A_k^n)$.

- Nous dirons que S est devinable ssi il existe une transformation normale T de k suites telle que $\forall\, (A_1^n, \ldots, A_k^n) \in S : T(A_1^n, \ldots, A_k^n)$ devine $(A_1^n, \ldots, A_k^n)$.

Notations

Dans toute la suite, on désigne par $\mathbb{P}_{i_o}$, $i_o \in \{1, \ldots, k\}$ la transformation de k suites qui à $(A_1^n, \ldots, A_k^n) \in (E^k)^{\mathbb{N}}$ fait correspondre $(A_{i_o}^n)$.

Soit $S \subset (E^k)^{\mathbb{N}}$, nous notons par

$$\mathbb{P}_{i_o}(S) = \{(B^n) \in E^{\mathbb{N}} \mid \exists\, (A_1^n, \ldots, A_k^n) \in S,\ \forall\, n : B^n = A_{i_o}^n\}$$

1.1 - Propriétés des familles devinables

Propriété 1

Soient $S_1, \ldots, S_k \subset \mathrm{Conv}(E)$, $S_1 : \ldots : S_k \neq \emptyset$.

Si $\exists\, i_o \in \{1, \ldots, k\}$ *tel que* S_{i_o} *est devinable alors* $S_1 : \ldots\ldots\ldots : S_k$ *est devinable.*

Propriété 2

Soit $S \subset \overline{\mathrm{Conv}}_k(E)$.

1) Si $\exists\, i_o \in \{1, \ldots, k\}$ *tel que* $\mathbb{P}_{i_o}(S)$ *est devinable alors* S *est devinable.*

2) Lorsque $K \geq 2$, *il se peut que* S *soit devinable et qu'il existe* $i_o \in \{1, \ldots, k\}$ *tel que* $\mathbb{P}_{i_o}(S)$ *soit non devinable.*

Preuve

1) Résulte du fait que $S \subset \mathbb{P}_1(S) : \ldots : \mathbb{P}_k(S)$ et de la propriété 1.

2) Prenons $E = \mathbb{R}$, $k = 2$.

Soit $A \subset \mathbb{R}$, nous notons $\mathrm{Conv}_A(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites convergentes dont les limites appartiennent à A.

Soiten $B_o = \{(o)\} \times \mathrm{Conv}_{\{o\}}(\mathbb{R})$, $B_i = \{(\frac{1}{i})\} \times \mathrm{Conv}_{\{\frac{1}{i}\}}(\mathbb{R})$, $i \in \mathbb{N}^*$.

Nous avons :

$S = \bigcup_{i=o}^{\infty} B_i$ est devinable par $\mathbb{P}_1$.

$\mathbb{P}_2(S) = \mathrm{Conv}_{\{o,\ldots,\frac{1}{n},\ldots\}}(\mathbb{R})$ est non devinable, car est une famille rémanente.

□

Propriété 3

Soient $S \subset \overline{\mathrm{Conv}}_k(E)$; $i_o \in \{1, \ldots, k\}$

Si :

i) S *est devinable*

ii) pour toute suite $(B^n) \in \mathbb{P}_{i_o}(S)$, *il existe une et une seule suite* $(A_1^n, \ldots, A_k^n) \in S$ *vérifiant :* $A_{i_o}^n = B^n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Alors $\mathbb{P}_{i_o}(S)$ *est devinable.*

Preuve

D'après i), il existe un algorithme normal (f_n) de k suites tel que

$\forall (A_1^n, \ldots, A_k^n) \in S : f_n((A_1^o,\ldots,A_k^o),\ldots,(A_1^n,\ldots,A_k^n))$ devine $(A_1^n,\ldots,A_k^n)$.

Considérons l'algorithme normal (g_n) pour suites, défini de la façon suivante :

$\forall (B^n) \in \mathbb{P}_{i_o}(S) : g_n(B^o,\ldots,B^n) = f_n((A_1^o,\ldots,B^o,\ldots,A_k^o),\ldots,(A_1^n,\ldots,B^n,\ldots,A_k^n))$

où $(A_1^n), \ldots, (A_k^n)$ sont données par ii).

Les fonctions g_n ne sont pas définies ailleurs.

D'après ii) l'algorithme (g_n) est bien défini.

La transformation T associée à (g_n) vérifie bien : $\forall (B^n) \in \mathbb{P}_{i_o}(S)$, $T(B^n)$ devine (B^n).

Notation

Soit $S \subset \mathrm{Conv}(E)$, dans toute la suite nous désignons par $\bar{S}$ l'ensemble des suites $(x^n, \ldots, x^n) \in \mathrm{Conv}(E^k)$ avec $(x^n) \in S$.

Propriété 4

Soit $S \subset \mathrm{Conv}(E)$.

S *est devinable* <=> $\bar{S}$ *est devinable.*

Propriété 5

1) $\overline{\mathrm{Conv}}_k(E)$ *est devinable* <=> Conv(E) *est devinable.*

2) $\overline{\mathrm{Conv}}_k^*(E)$ *est devinable* <=> $\mathrm{Conv}^*(E)$ *est devinable.*

Preuve

1) =>]

Supposons $\overline{\mathrm{Conv}}_k(E)$ est devinable.

Comme $\overline{\mathrm{Conv}(E)} \subset \overline{\mathrm{Conv}}_k(E)$, il en résulte que $\overline{\mathrm{Conv}(E)}$ est devinable par suite d'après la propriété 4, Conv(E) est devinable.

<=]

Supposons Conv(E) est devinable.

Comme $\bar{\mathrm{Conv}}_k(E) = \mathrm{Conv}(E) : \dots : \mathrm{Conv}(E)$, il en résulte d'après la propriété 1 que $\bar{\mathrm{Conv}}_k(E)$ est devinable.

2) Le raisonnement est analogue au raisonnement précédent.

□

1.2 - Propriétés des familles accélérables

Proposition 1

Soient $S_1, \dots, S_k \subset \mathrm{Conv}(E)$, $S = S_1 : \dots : S_k \neq \emptyset$.

i) Si $\exists\, i_o \in \{1, \dots, k\}$ *tel que* S_{i_o} *est accélérable alors* S *est partiellement accélérable.*

ii) Lorsque $k \geq 2$, *il se peut que* S *soit totalement accélérable sans qu'il existe* $i_o \in \{1, \dots, k\}$ *tel que* S_{i_o} *soit accélérable.*

Preuve

1) Evidente.

2) $E = \mathbb{R}$, $k = 2$.

Soient $S_1 = \{(x^n) \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}) \mid \forall\, n,\ 0 \leq x^{n+1} \leq x^n \leq 1\}$;

$S_2 = \{(x^n) \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}) \mid \forall\, n\ \ -1 \leq x^n \leq x^{n+1} \leq 0\}$.

S_1, S_2 sont rémanentes [7], cependant $S_1 : S_2$ est totalement accélérable par la transformation de 2 suites qui à $(A_1^n, A_2^n) \in S_1 : S_2$ fait correspondre la suite $(\hat{o})$.

Propriété 6

Soit $S \subset \mathrm{Conv}(E)$.

S *est accélérable* <=> $\bar{S}$ *est totalement accélérable* <=> $\bar{S}$ *est partiellement accélérable.*

Proposition 2

Soit $S \subset \bar{\mathrm{Conv}}_k(E)$

i) Si $\exists\ i_o \in \{1, \ldots, k\}$ *tel que* $\mathbb{P}_{i_o}(S)$ *est accélérable alors* S *est partiellement accélérable.*

ii) Lorsque $k \geq 2$, *il se peut que* S *soit totalement accélérable sans qu'il existe* $i_o \in \{1, \ldots, k\}$ *tel que* $\mathbb{P}_{i_o}(S)$ *soit accélérable.*

iii) Si S *est partiellement accélérable alors* $\bigcap_{i=1}^{k} \mathbb{P}_i(S)$ *est accélérable.*

Preuve

i) Résulte de la partie i) de la proposition 1 et du fait que

$S \subset \mathbb{P}_1 : \ldots : \mathbb{P}_k(S)$.

ii) $E = \mathbb{R}$, $k = 2$.

Soit $S = \mathrm{EtiA}(\frac{1}{n+1}, -\frac{1}{n+1}) \cup (\mathrm{EtiB}(\frac{1}{n+1}):\mathrm{EtiB}(\frac{1}{n+1})) \cup (\mathrm{EtiB}(-\frac{1}{n+1}):\mathrm{EtiB}(-\frac{1}{n+1}))$.

S est totalement accélérable par la transformation de 2 suites qui à $(A_1^n, A_2^n) \in S$ fait correspondre $(\frac{A_1^n + A_2^n}{2})$

$\mathbb{P}_1(S)$ (resp. $\mathbb{P}_2(S)$) contient $\mathrm{Eti}(\frac{1}{n+1})$ (resp. $\mathrm{Eti}(-\frac{1}{n+1})$) par conséquent $\mathbb{P}_1(S)$, $\mathbb{P}_2(S)$ ne sont pas accélérables.

iii) évidente.

□

2 - k-REMANENCE

Soient $k \in \mathbb{N}^*$; $S \subset \overline{\mathrm{Conv}}_k(E)$.

Nous dirons que S est k-rémanente ssi S vérifie la condition suivante (appelée k-rémanence).

a) Il existe une suite $(A^n) \in \mathrm{Conv}^*(E)$.

b) Il exste $(A_1^{n,o}, \ldots, A_k^{n,o}), \ldots, (A_1^{n,i}, \ldots, A_k^{n,i}), \ldots$ *telles que :*

b$_1$) $\forall\ i \in \mathbb{N} : (A_1^{n,i}, \ldots, A_k^{n,i}) \underset{n\to\infty}{\to} (A^i, \ldots, A^i)$.

b$_2$) $(A_1^{n,o}, \ldots, A_k^{n,o}) \in S$.

c) *Pour toute suite strictement croissante d'entiers* (m_i) *on a :*

0) *Pour l'entier* m_o, *il existe* $i_1(m_o), \dots, i_k(m_o) \in \{1, \dots, k\}$ *tels que* $(y_1^{n,o}, \dots, y_k^{n,o}) \in S$ *où*

$$\left[\begin{array}{l}
(y_1^{n,o}) = (A_1^{o,o}, \dots, A_1^{m_o,o},\ A_{i_1(m_o)}^{m_o+1,1}, \dots, A_{i_1(m_o)}^{m,1}, \dots) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(y_k^{n,o}) = (A_k^{o,o}, \dots, A_k^{m_o,o},\ A_{i_k(m_o)}^{m_o+1,1}, \dots, A_{i_k(m_o)}^{m,1}, \dots)
\end{array}\right.$$

1) *Pour l'entier* m_1, *il existe* $i_1(m_1), \dots, i_k(m_1) \in \{1, \dots, k\}$ *tels que* $(y_1^{n,1}, \dots, y_k^{n,1}) \in S$ *où*

$$\left[\begin{array}{l}
(y_1^{n,1}) = (A_1^{o,o}, \dots, A_1^{m_o,o}, A_{i_1(m_o)}^{m_o+1,1}, \dots, A_{i_1(m_o)}^{m_1,1}, A_{i_1(m_1)}^{m_1+1,2}, \dots, A_{i_1(m_1)}^{m,2}, \dots) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(y_k^{n,1}) = (A_k^{o,o}, \dots, A_k^{m_o,o}, A_{i_k(m_o)}^{m_o+1,1}, \dots, A_{i_k(m_o)}^{m_1,1}, A_{i_k(m_1)}^{m_1+1,2}, \dots, A_{i_k(m_1)}^{m,2}, \dots)
\end{array}\right.$$

....

....

i) *Pour l'entier* m_i, *il existe* $i_1(m_i), \dots, i_k(m_i) \in \{1, \dots, k\}$ *tels que* $(y_1^{n,i}, \dots, y_k^{n,i}) \in S$ *où*

$$\left[\begin{array}{l}
(y_1^{n,i}) = (A_1^{o,o}, \dots, A_1^{m_o,o}, A_{i_1(m_o)}^{m_o+1,1}, \dots, A_{i_1(m_o)}^{m_1,1}, A_{i_1(m_1)}^{m_1+1,2}, \dots, A_{i_1(m_1)}^{m_2,2}, \dots \\
\qquad\qquad \dots, A_{i_1(m_i)}^{m_i+1,i+1}, \dots, A_{i_1(m_i)}^{m,i+1}, \dots) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(y_k^{n,i}) = (A_k^{o,o}, \dots, A_k^{m_o,o}, A_{i_k(m_o)}^{m_o+1,1}, \dots, A_{i_k(m_o)}^{m_1,1}, A_{i_k(m_1)}^{m_1+1,2}, \dots, A_{i_k(m_1)}^{m_2,2}, \dots \\
\qquad\qquad \dots, A_{i_k(m_i)}^{m_i+1,i+1}, \dots, A_{i_k(m_i)}^{m,i+1}, \dots)
\end{array}\right.$$

....

d) *La suite* $(z_1^n, \dots, z_k^n)$ *appartient à* S *où*

$$\left[\begin{array}{l}
(z_1^n) = (A_1^{o,o}, \dots, A_1^{m_o,o}, A_{i_1(m_o)}^{m_o+1,1}, \dots, A_{i_1(m_o)}^{m_1,1}, \dots, A_{i_1(m_{i-1})}^{m_{i-1}+1,i}, \dots, A_{i_1(m_{i-1})}^{m_i,i}, \\
\qquad\qquad A_{i_1(m_i)}^{m_i+1,i+1}, \dots, A_{i_1(m_i)}^{m_{i+1},i+1}, \dots) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(z_k^n) = (A_k^{o,o}, \dots, A_k^{m_o,o}, A_{i_k(m_o)}^{m_o+1,1}, \dots, A_{i_k(m_o)}^{m_1,1}, \dots, A_{i_k(m_{i-1})}^{m_{i-1}+1,i}, \dots, A_{i_k(m_{i-1})}^{m_i,i}, \\
\qquad\qquad A_{i_k(m_i)}^{m_i+1,i+1}, \dots, A_{i_k(m_i)}^{m_{i+1},i+1}, \dots)
\end{array}\right.$$

Remarque

S est 1-rémanente <=> S est rémanente au sens restreint.

Théorème 1

Soit $S \subset \overline{\mathrm{Conv}}_k(E)$.

1) Si S *est rémanente au sens restreint alors* S *est* k-*rémanente.*

2) Si S *est* k-*rémanente alors* S *est rémanente.*

3) Si S *est rémanente au sens général alors* $\forall\, i \in \{1, \ldots, k\}$, $\mathbb{P}_i(S)$ *est rémanente au sens général.*

4) Si S *est rémanente au sens général alors* S *n'est pas partiellement accélérable.*

Pour les notions de : rémanence, rémanence restreinte, rémanence généralisée consulter [7], [14], [15].

Preuve du théorème 1

.1), 2), 3) sont évidentes.

.4) soit $S \subset \overline{\mathrm{Conv}}_k(E)$, S rémanente au sens général.

Supposons que S est partiellement accélérable, il existe un algorithme normal (f_n) pour k suites tel que $\forall\ (A_1^n, \ldots, A_k^n) \in S$:

$f_n((A_1^o, \ldots, A_k^o), \ldots, (A_1^n, \ldots, A_k^n))$ accélère $(A_1^n, \ldots, A_k^n)$.

Considérons l'algorithme (g_n) pour suites de $(E^k)^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $(E^k)^{\mathbb{N}}$ défini de la façon suivante : $\forall\ (A_1^n, \ldots, A_k^n) \in S$:

$g_n((A_1^o, \ldots, A_k^o), \ldots, (A_1^n, \ldots, A_k^n)) = (t^n, \ldots, t^n)$ avec

$t^n = f_n((A_1^o, \ldots, A_k^o), \ldots, (A_1^n, \ldots, A_k^n))$.

Munissons E^k de la distance D_o définie par :

$\forall\ x = (x_1, \ldots, x_k),\ y = (y_1, \ldots, y_k) \in E^k : D_o(x, y) = \max\limits_{1\leq j\leq k} d(x_j, y_j)$.

Comme (t^n) accélère partiellement $(A_1^n, \ldots, A_k^n)$, il est bien évident que $(t^n, \ldots, t^n)$ converge plus vite que $(A_1^n, \ldots, A_k^n)$ par conséquent S est accélérable, contradiction.

□

Remarques

1) Dans la preuve de 4), nous avons utilisé la distance D_o, nous pouvons également prendre une distance quelconque équivalente à D_o.

2) La réciproque de 3) n'est pas vraie en général, en effet l'exemple pris dans la démonstration de la partie ii) de la proposition 2, vérifie : S est non rémanente au sens général, cependant $\mathbb{P}_1(S)$, $\mathbb{P}_2(S)$ sont rémanentes au sens général.

3 - PROCEDE $\varepsilon_{2,2}$

Le terme général $\varepsilon^n_{2,2}$ de la suite obtenue, en appliquant $\varepsilon_{2,2}$ à $(A^n_1, A^n_2) \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ est donné par :

$$\varepsilon^n_{2,2} = \begin{cases} \dfrac{(\Delta A^n_2)A^n_1 - (\Delta A^n_1)A^n_2}{(\Delta A^n_2) - (\Delta A^n_1)} & \text{si } \Delta A^n_1 \neq \Delta A^n_2 \\[2ex] A^{n+1}_1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce procédé a été en même temps obtenu par C. BREZINSKI [4] comme transformation composite de 2 transformations de suites.

Remarques

1) $\varepsilon_{2,2}$ est une transformation 1-normale de 2 suites.

2) Soit $(A^n_1, A^n_2) \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ avec $\Delta A^n_1 \neq \Delta A^n_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$\varepsilon_{2,2}(A^n_1, A^n_2) = \varepsilon_{2,2}(A^n_2, A^n_1)$$

3) les quantités obtenues en appliquant $\varepsilon_{2,2}$ à une suite (A^n, A^{n+1}) vérifiant $\forall\ n : \Delta^2 A^n \neq 0$, sont les quantités obtenues en appliquant le Δ^2 d'aitken à (A^n).

4) Lorsque $\Delta A^n_1 \neq \Delta A^n_2$, $\varepsilon^n_{2,2}$ est la valeur en o de la droite passant par $((A^n_2 - A^n_1), A^n_1)$, $((A^{n+1}_2 - A^{n+1}_1), A^{n+1}_1)$, par conséquent il est possible d'introduire plusieurs généralisations du procédé $\varepsilon_{2,2}$.

En prenant $(A_2^n - A_1^n)$ comme suite auxiliaire (resp. (A_2^n) comme suite initiale) dans l'extrapolation de Richardson [1] nous obtiendrons d'autres transformations de 2 suites.

Théorème 2

Soit $(A_1^n, A_2^n) \in \bar{C}onv_2(\mathbb{R})$, $\lim A_1^n = \lim A_2^n = a$.

Si $\exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < 1 < \beta$, $\exists\ n_o$, $\forall\ n \geq n_o$: $\dfrac{\Delta A_2^n}{\Delta A_1^n} \notin [\alpha, \beta]$ alors $\varepsilon_{2,2}^n \underset{n\to\infty}{\to} a$.

La démonstration découle immédiatement de l'expression suivante :

$$\varepsilon_{2,2}^n = A_1^n - \frac{A_2^n - A_1^n}{\dfrac{\Delta A_2^n}{\Delta A_1^n} - 1} \quad \text{pour } n \geq n_o.$$

$\square$

Théorème 3

Soit $(A_1^n, A_2^n) \in \bar{C}onv_2(\mathbb{R})$, $\lim A_1^n = \lim A_2^n = a$.

Si $\lim \dfrac{A_2^n - a}{A_1^n - a} = \lim \dfrac{\Delta A_2^n}{\Delta A_1^n} = \lambda \neq 1$ *alors* $\varepsilon_{2,2}^n - a = o(A_1^n - a)$.

Preuve

$$\frac{\varepsilon_{2,2}^n - a}{A_1^n - a} = 1 - \frac{\dfrac{A_2^n - a}{A_1^n - a} - 1}{\dfrac{\Delta A_2^n}{\Delta A_1^n} - 1}$$

Comme $\lim \dfrac{A_2^n - a}{A_1^n - a} = \lim \dfrac{\Delta A_2^n}{\Delta A_1^n} = \lambda \neq 1$, il en résulte $\dfrac{\varepsilon_{2,2}^n - a}{A_1^n - a} \underset{n\to\infty}{\to} 0$

$\square$

Remarque

Si $\lambda \neq 0$ alors $\varepsilon_{2,2}^n$ accélère totalement (A_1^n, A_2^n).

Théorème 4

Soient a $\in \mathbb{R}$, $(A_1^n, A_2^n) \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$.

Si $\exists\ n_o,\ \forall\ n \geq n_o\ :\ A_1^n \neq A_2^n,\ \Delta A_1^n \neq \Delta A_2^n$ *alors* $(\exists\ n_1 \geq n_o,\ \forall\ n \geq n_1\ :\ \varepsilon_{2,2}^n = a) \iff$ $(\exists\ n_1 \geq n_o,\ \exists\ \alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R},\ \alpha_1 + \alpha_2 \neq 0,\ \forall\ n \geq n_1\ :\ \alpha_1(A_1^n - a) + \alpha_2(A_2^n - a) = 0)$.

La démonstration découle immédiatement de l'expression suivante :

$$\varepsilon_{2,2}^n = \frac{\begin{vmatrix} A_1^n & A_2^n \\ \Delta A_1^n & \Delta A_2^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \Delta A_1^n & \Delta A_2^n \end{vmatrix}} \qquad (n \geq n_o)$$

Les résultats des théorèmes 2, 3, 4 ont été également trouvés par C. BREZINSKI [4].

3.1 - Calcul de la racine carrée d'un nombre réel a > 0 à l'aide du procédé $\varepsilon_{2,2}$

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$

Considérons la suite (A_1^n, A_2^n) définie par :

$$(1) \quad \left| \begin{array}{l} A_1^o \text{ point de départ} \\ A_1^{n+1} = \frac{1}{2}\left(A_1^n + \frac{a}{A_1^n}\right) \\ A_2^n = \frac{a}{A_1^n} \end{array} \right.$$

A_1^o est tel que $A_1^o \in \mathbb{R}_+^*$, $(A_1^o)^2 > a$.

On vérifie que $\forall\ n \in \mathbb{N}\ :\ A_2^n < A_2^{n+1} < \sqrt{a} < A_1^{n+1} < A_1^n$

. La suite (A_1^n, A_2^n) est convergente vers $(\sqrt{a}, \sqrt{a})$.

. $\dfrac{\Delta A_2^n}{\Delta A_1^n} \underset{n\to\infty}{\to} -1 \qquad (*)$

Comme (A_1^n) est strictement décroissante, il en résulte $\dfrac{A_2^n - \sqrt{a}}{A_1^n - \sqrt{a}} \underset{n\to\infty}{\to} -1 \qquad (**)$

D'après le théorème 2 et la relation (*), on a $\varepsilon_{2,2}^{n} \to \sqrt{a}$ et d'après le théorème 3 et les relations (*), (**) on a $\varepsilon_{2,2}^{n} - \sqrt{a} = o(A_1^n - \sqrt{a})$, $\varepsilon_{2,2}^{n} - \sqrt{a} = o(A_2^n - \sqrt{a})$.

a) *Expression de $\varepsilon_{2,2}^{n}$ en fonction de a et A_1^n*

$$\varepsilon_{2,2}^{n} = \frac{a}{A_1^n} \frac{3(A_1^n)^2+a}{(A_1^n)^2+3a}$$

la suite $\varepsilon_{2,2}^{n}$ est strictement croissante

b) *Essai numérique*

Calcul de $\sqrt{13} = 3.60555127546399$

En prenant $A_1^o = 9$ dans (1), nous obtenons les résultats suivants :

A_1^n		$\varepsilon_{2,2}^{n}$
.90000000000000000D+01	*	.30814814814814 8D+01
.52222222222222222D+01	*	.35615309002124 5D+01
.38557919621749 4D+01	*	.36052792509761 0D+01
.36136715788802 4D+01	*	.36055512652016 3D+01
.36055603990556 2D+01	*	.36055512754639 9D+01

3.2 - <u>Résolution de f(x) = 0</u>

Soit f(x) = 0, une équation non linéaire où f est une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Etant donnée une suite (x^n) générée par un procédé itératif $\emptyset$, $(x^o,\ x^{n+1} = \phi(x^n))$ telle que :

1) $x^n \to x^*$ avec $f(x^*) = 0$

2) ϕ est de classe C^1 dans un voisinage de x^*.

3) $\phi'(x^*) \neq 1$, $|\phi'(x\ )| \leq 1$.

Considérons la suite $(A_1^n, A_2^n) \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ définie par :

$A_1^n = x^n, \forall\ n$

$$\begin{cases} A_2^o = x^o \\ A_2^n = \dfrac{\Delta x^n}{\Delta x^{n-1}}\, x^n + \left(1 - \dfrac{\Delta x^n}{\Delta x^{n-1}}\right) x^{n+1} \qquad n \geq 1 \end{cases}$$

La suite (A_1^n, A_2^n) vérifie les conditions des théorèmes 2, 3 par conséquent $\varepsilon_{2,2}^n - x^* = o(A_1^n - x^*)$.

3.3 - Accélération des suites à convergence periodico-linéaire

Définition

Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $(x^n) \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R})$, $\lim x^n = x$.

On dit que (x^n) *est à convergence périodico-linéaire de période* k *ssi il existe* $(\beta^o, \ldots, \beta^{k-1}) \in \mathbb{R}^k$, $\beta^o, \ldots, \beta^{k-1} \notin \{0, 1\}$ *tel que :*

i) $|\beta^o \beta^1 \ldots \beta^{k-1}| < 1$

ii) $\lim \dfrac{x^{nk+1} - x}{x^{nk} - x} = \beta^o$, $\lim \dfrac{x^{nk+2} - x}{x^{nk+1} - x} = \beta^1$, $\ldots$, $\lim \dfrac{x^{nk+k} - x}{x^{nk+k-1} - x} = \beta^{k-1}$.

Les nombres réels $\beta^o, \ldots, \beta^{k-1}$ sont appelés les rapports de (x^n).

Pour plus de détail sur les suites à convergence périodico-linéaire consulter [7], [13].

Proposition 3

$$\lim \frac{x^n - x}{x^{n-k} - x} = \beta^o \ldots \beta^{k-1}.$$

Pour la démonstration de la proposition 3, voir [7].

Soit $(x^n) \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R})$ de limite x, à convergence périodico-linéaire de période k et de rapports $\beta^o, \beta^1, \ldots, \beta^{k-1}$.

Considérons la suite (A_1^n, A_2^n) définie par :

$A_1^n = x^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

$$A_2^n = \begin{cases} x^n & \text{si } n < k \\ x^{n-k} & \text{si } n \geq k \end{cases}$$

Le terme général $\varepsilon_{2,2}^n$ de la suite $\varepsilon_{2,2}(A_1^n, A_2^n)$ est donné par :

$$\varepsilon_{2,2}^n = \begin{cases} \dfrac{(\Delta x^{n-k})x^n - (\Delta x^n)x^{n-k}}{\Delta x^{n-k} - \Delta x^n} & \text{si } \Delta x^n \neq \Delta x^{n-k},\ n \geq k \\ x^{n+1} & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $n \geq k$

$$\frac{\Delta A_2^n}{\Delta A_1^n} = \frac{\Delta x^{n-k}}{\Delta x^n} = \frac{\dfrac{x^{n-k+1} - x}{x^{n-k} - x} - 1}{\dfrac{x^{n+1} - x}{x^n - x} - 1} \cdot \frac{x^{n-k} - x}{x^n - x}$$

La suite $\left(\dfrac{x^{n+1}-x}{x^n-x}\right)$ étant pseudo-périodique de période k, par conséquent

$\lim \dfrac{\Delta A_2^n}{\Delta A_2^n} = \lim \dfrac{A_2^n-x}{A_1^n-x}$, par suite d'après la proposition 3, on a

$\lim \dfrac{\Delta A_2^n}{\Delta A_1^n} = \lim \dfrac{A_2^n-x}{A_1^n-x} = (\beta^o \ldots\ldots \beta^{k-1})^{-1} \neq 1$, par conséquent d'après le théorème 3, $\varepsilon_{2,2}^n - x = o(x^n-x)$.

Remarque

L'accélération d'une suite à convergence périodico-linéaire à l'aide du procédé $\varepsilon_{2,2}$, nécessite la connaissance de sa période, ce qui rend difficile l'utilisation de $\varepsilon_{2,2}$, cependant en utilisant la technique [7] qui consiste à combiner les transformations de suites accélérant les suites à convergence périodico-linéaire et les algorithmes de détermination de la période [7], on construit des algorithmes permettant l'accélération des suites à convergence périodico-linéaire à l'aide du procédé $\varepsilon_{2,2}$.

4 - PROCEDE $T_{1,2}$

Le terme général $T^n_{1,2}$ de la suite obtenue, en appliquant $T_{1,2}$ à une suite $(A^n_1, A^n_2) \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ est donné par :

$$T^n_{1,2} = \begin{cases} A^n_2 - \dfrac{\Delta A^n_1 \, \Delta A^n_2}{\Delta^2 A^n_1} & \text{si } \Delta^2 A^n_1 \neq 0 \\ A^{n+1}_1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarques

1) $T_{1,2}(A^n, A^n) = T_{1,2}(A^n, A^{n+1}) = (\varepsilon^n_2)$ où (ε^n_2) est la suite obtenue en appliquant le Δ^2 d'aitken à (A^n).

2) Lorsque $\Delta^2 A^n_1 \neq 0$, la quantité $T^n_{1,2}$ est la valeur en o de la droite passant par $(\Delta A^n_1, A^n_2)$, $(\Delta A^{n+1}_1, A^{n+1}_2)$, par conséquent il est possible d'intoduire plusieurs généralisations du procédé $T_{1,2}$.
En prenant (ΔA^n_1) (resp. (A^n_2)) comme suite auxiliaire (resp. comme suite initiale) dans l'extrapolation de richardson, nous obtiendrons d'autres transformations de 2 suites.

Soit $(A^n_1, A^n_2) \in \bar{C}onv_2(\mathbb{R})$, $\lim A^n_1 = \lim A^n_2 = a$.

Théorème 5

Si $\exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < 1 < \beta, \exists\ n_o, \forall\ n \geq n_o : \dfrac{\Delta A^{n+1}_1}{\Delta A^n_1} \notin [\alpha, \beta]$ *alors* $T^n_{1,2} - a = o(1)$.

Théorème 6

Si $\lim \dfrac{A^{n+1}_2 - a}{A^n_2 - a} = \lim \dfrac{\Delta A^{n+1}_1}{\Delta A^n_1} = \lambda \neq 1$ *alors* $T^n_{1,2} - a = o(A^n_2 - a)$.

Une conséquence immédiate des théorèmes 5, 6 est la proposition suivante :

Proposition 4

Si $\lim \dfrac{A^{n+1}_1 - a}{A^n_1 - a} = \lim \dfrac{A^{n+1}_2 - a}{A^n_2 - a} = \lambda \neq 1$ *alors* *i)* $T_{1,2}(A_1^n, A_2^n)$ *converge vers* a *plus vite que* (A_2^n).

ii) $T_{1,2}(A_2^n, A_1^n)$ *converge vers* a *plus vite que* (A_1^n).

Les résultats de la proposition 4, s'appliquent à de nombreuses *méthodes de résolution de l'équation non linéaire* $f(x) = 0$ où f est une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. [1], [5], [18], [19].

Essai numérique

Soit à résoudre l'équation $x - e^{-x} = 0$ à l'aide de la méthode de Newton.

On pose :

$$\begin{cases} A_1^o = 0 \\ A_1^{n+1} = \dfrac{(1+A_1^n)e^{-A_1^n}}{(1+e^{-A_1^n})} \end{cases} ; \qquad \begin{cases} A_2^o = 0.3 \\ A_2^{n+1} = \dfrac{(1+A_2^n)e^{-A_2^n}}{(1+e^{-A_2^n})} \end{cases}$$

$\lim A_1^n = \lim A_2^n = 0.567143290409784$

Soit $(T_{1,2}^n) = T_{1,2}(A_1^n, A_2^n)$, nous avons les résultats suivants

A_1^n	A_2^n	$T_{1,2}^n$
.000000000000000D+00	.300000000000000D+00	.591942763145541D+00
.500000000000000D+00	.553224726144843D+00	.567288529326470D+00
.566311003197218D+00	.567108087508334D+00	.567143295490029D+00
.567143165034862D+00	.567143290165543D+00	.567143290409784D+00

Théorème 7

Soient $a \in \mathbb{R}$, $(A_1^n, A_2^n) \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$

Si $\exists\, n_o, \forall\, n \geq n_o : \Delta A_1^n \neq 0, \Delta^2 A_1^n \neq 0$ *alors* $(\exists\, n_1, \forall\, n \geq n_1 : T_{1,2}^n = a \Leftrightarrow$
$\exists\, n_1 \in \mathbb{N}, \exists\, C \in \mathbb{R}, \forall\, n \geq n_1 : A_2^n = a + c\,\Delta A_1^n$

Pour la preuve de "<=", la condition $\Delta A_1^n \neq 0$ n'est pas nécessaire.

CHAPITRE III

CHOIX AUTOMATIQUE ENTRE UN NOMBRE FINI DE TRANSFORMATIONS DE SUITES

INTRODUCTION

On suppose données $S_1, \ldots, S_k$ (resp. $A_1, \ldots, A_k$) k familles de suites (resp. k transformations de suites) telles que chaque famille de suites S_i est accélérée par la transformation de suites A_i.

Une question se pose : Est-il possible d'accélérer $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$?

La réponse à cette question est négative en général [7], cependant il est parfois possible d'accélérer $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ en utilisant la technique de sélection automatique entre $A_1, \ldots, A_k$, proposée par J.P. DELAHAYE [9].

Au paragraphe 1, nous étudions des transformations particulières de k suites dites méthodes de sélection entre k suites, qui vont nous servir pour la construction des transformations de suites destinées à l'accélération de $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

Au paragraphe 2, nous rappelons les coefficients de décompte introduits dans [9] et nous proposons de nouveaux coefficients de décompte.

Au paragraphe 3, nous étudions des méthodes de sélection basées sur les coefficients de décompte du paragraphe 2.

Le paragraphe 4 est consacré à des définitions que nous utiliserons ensuite.

Au paragraphe 5, nous étudions des méthodes de choix automatique entre transformations de suites basées sur le calcul du diamètre de l'ensemble constitué par les q ($q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$) dernières réponses de chacune des transformations en compétition et nous présentons de nouveaux résultats pour les méthodes de sélection introduites dans [9].

Au paragraphe 6, nous étudions des méthodes de sélection entre transformations de suites, utilisant les termes de la suite à transformer.

Pour certaines d'entre ces méthodes, les conditions d'accélération de $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ sont faciles à vérifier que les conditions d'accélération de $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ par les méthodes de sélection proposées au paragraphe 5.

Au paragraphe 7, nous étudions des méthodes de sélection basées sur la pondération des distances entre les réponses consécutives des transformations en compétition.

Ces méthodes de sélection, généralisent en un sens certaines méthodes de sélection du paragraphe 5.

Au paragraphe 8, nous étudions des méthodes de sélection entre transformations de suites, basées sur la pondération des distances entre les réponses consécutives de la suite à transformer et des transformations en compétition.

Pour certaines d'entre ces méthodes, les conditions d'accélération de $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ sont faciles à satisfaire que les conditions d'accélération de $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ par les méthodes de sélection du paragraphe 7.

Nous terminons ce chapitre par l'étude, au paragraphe 9, des méthodes de sélection, basées sur la génération d'une suite d'ensembles de réponses privilégiées.

NOTATIONS

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Soient $K \in \mathbb{N}^*$; E, F 2 ensembles. On note par :

Card E : le cardinal de E

$E^{\mathbb{N}}$: l'ensemble des suites infinies délééments de E

Conv(E) : l'ensemble des suites convergentes de E

$\mathrm{Conv}^{**}(E) = \{(x_n) \in \mathrm{Conv}(E) \mid \exists\, n_o, \forall\, n \geq n_o : x_n \neq x_{n+1}\}$.

E^k : le produit cartésien $\underbrace{E \times \ldots \times E}_{k \text{ fois}}$.

$\bar{\mathrm{C}}\mathrm{onv}_k(E) = \{(A_1^n, \ldots, A_k^n) \in \mathrm{Conv}(E^k) \mid \lim A_1^n = \ldots = \lim A_k^n\}$.

$f : E \to F$: fonction de E dans F.

dom f : le domaine de définition de f

Lorsque E est muni d'une distance d. On désigne par :

E' : l'ensemble des points d'accumulation de E ;

$$E' = \{x \in E \mid \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, y \in E : 0 < d(x, y) \leq \varepsilon\}.$$

Soient $A \subset E$, $x \in E$, on note par :

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$$

1 - METHODES DE SELECTION ENTRE K SUITES

Soit E un ensemble non vide, $k \in \mathbb{N}^*$.

1.0 - Définition

Une transformation S *de* k *suites*, $(S \in \text{Trans}(E^k, E))$ *est dite méthode de sélection entre* k *suites ssi* $\forall (A_1^n, \ldots, A_k^n) \in \text{dom } S$:

$S(A_1^n, \ldots, A_k^n) = (A^n)$ *avec* $A^n \in \{A_1^n, \ldots, A_k^n\}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

On note par ${}^{T}\text{Sélec}(K, E)$ l'ensemble des méthodes de sélection entre k suites de $(E^k)^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E^{\mathbb{N}}$.

1.1 - Exemples de méthodes de sélection entre k *suites*

Exemple 1

$$(E^k)^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbb{P}_i} E^{\mathbb{N}} \quad ; \; i \in \{1, \ldots, k\}.$$

$$(A_1^n, \ldots, A_k^n) \longrightarrow (A_i^n).$$

Les méthodes de sélection $\mathbb{P}_i$, $i \in \{1, \ldots, k\}$ ont pour domaine $(E^k)^{\mathbb{N}}$.

Exemple 2

Soient (E, d) espace métrique ; $q \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_q \in \mathbb{R}_+$ avec $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i = 1$.
La transformation de k suites qui à $(A_1^n, \ldots, A_k^n) \in (E^k)^{\mathbb{N}}$, fait correspondre la suite $(A_{i(n)}^n)$ où $i(n) = 1$ si $n \leq q-1$ et $i(n)$ est le plus petit indice de $\{1, \ldots, k\}$ vérifiant :

$$\sum_{j=1}^{q} \alpha_j \, d(A_{i(n)}^{n-j}, A_{i(n)}^{n-j+1}) = \min_{1 \leq \ell \leq k} \left(\sum_{j=1}^{q} \alpha_j \, d(A_\ell^{n-j}, A_\ell^{n-j+1}) \right) \; ; \text{ si } n \geq q, \text{ est}$$

une méthode de sélection entre k suites ayant pour domaine $(E^k)^{\mathbb{N}}$.

1.2 - Algorithmes de sélection entre k *suites*

Définitions

. Un algorithme A pour k suites, $(A \in \text{Alg}(E^k, E))$ est dit algorithme de sélection entre k suites ssi la transformation de k suites associée est une méthode de sélection entre K suites.

. La transformation de K suites associée à un algorithme de sélection entre K suites est dite méthode algorithmique de sélection entre K suites.

On note par :

$ALG_{sélec}(K, E)$: l'ensemble des algorithmes de sélection entre K suites de $(E^K)^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E^{\mathbb{N}}$.

${}^{T}ALG_{sélec}(K, E)$: l'ensemble des méthodes algorithmiques de sélection entre K suites de $(E^K)^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E^{\mathbb{N}}$.

1.2.0 - Algorithmes normaux de sélection entre K suites

. Un algorithme de sélection entre K suites est dit normal ssi la transformation de K suites associée est une transformation normale de K suites.

. La transformation de K suites associée à un algorithme normal de sélection entre K suites est dite méthode normale de sélection entre K suites.

On note par :

$Norm_{sélec}(K, E)$: l'ensemble des algorithmes normaux de sélection entre K suites de $(E^K)^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E^{\mathbb{N}}$.

${}^{T}Norm_{sélec}(K, E)$: l'ensemble des méthodes normales de sélection entre K suites de $(E^K)^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E^{\mathbb{N}}$.

Proposition 1

Soit $S \subset (E^K)^{\mathbb{N}}$, $S \neq \emptyset$.

$[\exists\ T \in {}^{T}Norm_{sélec}(K, E) : \text{dom } T = S] \Leftrightarrow [\forall\ (x_n) \in (E^K)^{\mathbb{N}}, (\forall\ i \in \mathbb{N}, \exists\ (x_n^i) \in S)$ $(x_o^i, \dots, x_i^i) = (x_o, \dots, x_i)) \Rightarrow (x_n) \in S]$.

Lemme 1

Soit $S \subset (E^K)^{\mathbb{N}}$, $S \neq \emptyset$

$[\exists\ T \in {}^{T}Alg(E^K, E) : \text{dom } T = S] \Leftrightarrow [\forall\ (x_n) \in (E^k)^{\mathbb{N}}, (\forall\ i \in \mathbb{N}, \exists\ (x_n^i) \in S :$ $(x_o^i, \dots, x_i^i) = (x_o, \dots, x_i)) \Rightarrow (x_n) \in S]$.

Pour la démonstration du lemme 1 consulter ([7], page 17) où la démonstration a été faite dans un cadre plus général.

Preuve de la proposition 1

=>] résulte du fait que ${}^{\tau}\mathrm{Norm}_{\text{sélec}}(K, E) \subset {}^{\tau}\mathrm{Alg}(E^K, E)$ et du lemme 1.

<=]

Considérons la transformation $T \in \mathrm{Trans}\ (E^K, E)$, associée à l'algorithme normal (f_n) pour K suites défini de la façon suivante :

$\forall\ (A_1^n, \dots, A_k^n) \in S : f_n((A_1^o, \dots, A_k^o), \dots, (A_1^n, \dots, A_k^n)) = A_1^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; les fonctions f_n, $n \in \mathbb{N}$ ne sont pas définies ailleurs.

Montrons que dom T = S.

Par définition du domaine de T, nous avons : $S \subset \mathrm{dom}\ T$.

Soit $(A_1^n, \dots, A_k^n) \in \mathrm{dom}\ T$.

Soit $n_o \in \mathbb{N}$, nous avons $((A_1^o, \dots, A_k^o), \dots, (A_1^{n_o}, \dots, A_k^{n_o})) \in \mathrm{dom}\ f_{n_o}$, par suite il existe une suite $(A_1^{n,n_o}, \dots, A_k^{n,n_o}) \in S$ telle que $((A_1^o, \dots, A_k^o), \dots, (A_1^{n_o}, \dots, A_k^{n_o})) = ((A_1^{o,n_o}, \dots, A_k^{o,n_o}), \dots, (A_1^{n_o,n_o}, \dots, A_k^{n_o,n_o}))$. La suite $(A_1^n, \dots, A_k^n)$ vérifie : $\forall\ i \in \mathbb{N}$, $\exists\ (A_1^{n,i}, \dots, A_k^{n,i}) \in S$ telle que $((A_1^o, \dots, A_k^o), \dots, (A_1^i, \dots, A_k^i)) = ((A_1^{o,i}, \dots, A_k^{o,i}), \dots, (A_1^{i,i}, \dots, A_k^{i,i}))$ par conséquent, $(A_1^n, \dots, A_k^n) \in S$.

□

Une conséquence immédiate de la proposition 1 et du lemme 1 est la proposition suivante :

Proposition 2

Soit $S \subset (E^K)^{\mathbb{N}}$, $S \neq \emptyset$.

$[\exists\ T \in {}^{\tau}\mathrm{Norm}_{\text{sélec}}(K, E) : \mathrm{dom}\ T = S] \Leftrightarrow [\exists\ T \in {}^{\tau}\mathrm{Alg}\ (E^K, E) : \mathrm{dom}\ T = S]$

1.2.1 - Algorithmes à q mémoires de sélection entre k suites

Soit $q \in \mathbb{N}^*$.

. Un algorithme $A \in ALG_{\text{sélec}}(K, E)$ dont la transformation associée est une transformation à q mémoires de K suites est dit algorithme à q mémoires de sélection entre K suites.

. La transormation de K suites associée à un algorithme à q mémoires de sélection entre K suites est dite méthode à q mémoires de sélection entre K suites.

On note par :

${}_{\text{sélec}}{}^{\tau}\text{Mém}_q(K, E)$: l'ensemble des méthodes à q mémoires de sélection entre K suites de $(E^K)^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E^{\mathbb{N}}$.

Proposition 3

Soit $S \subset (E^K)^{\mathbb{N}}$, $S \neq \emptyset$.

$$[\exists\, T \in {}_{\text{sélec}}{}^{\tau}\text{Mém}_q(K, E) : \text{dom } T = S] \Longleftrightarrow [\forall\, (x_n) \in (E^K)^{\mathbb{N}},\ (\forall\, i \in \mathbb{N}\ \ \exists\, (x_n^i) \in S : (x_i^i, \ldots, x_{i+q-1}^i) = (x_i, \ldots, x_{i+q-1})) \Rightarrow (x_n) \in S]$$

Lemme 2

Soit $S \subset (E^K)^{\mathbb{N}}$, $S \neq \emptyset$

$$[\exists\, T \in {}^{\tau}\text{Mém}_q(E^K, E) : \text{dom } T = S] \Longleftrightarrow [\forall\, (x_n) \in (E^K)^{\mathbb{N}},\ (\forall\, i \in \mathbb{N},\ \exists\, (x_n^i) \in S : (x_i^i, \ldots, x_{i+q-1}^i) = (x_i, \ldots, x_{i+q-1})) \Rightarrow (x_n) \in S].$$

Pour la démonstration du lemme 2 voir ([7], page 31).

Preuve de la proposition 3

=>] résulte du fait que ${}_{\text{sélec}}{}^{\tau}\text{Mém}_q(K, E) \subset {}^{\tau}\text{Mém}_q(E^K, E)$.

<=] Considérons l'algorithme (f_n) à q mémoires de sélection entre K suites défini de la manière suivante :

$$\forall\ (A_1^n, \ldots, A_K^n) \in S : f_n((A_1^o, \ldots, A_K^o), \ldots, (A_1^n, \ldots, A_K^n)) = A_1^n \text{ si } n<q$$

$$f_n((A_1^{n-q+1}, \ldots, A_K^{n-q+1}), \ldots, (A_1^n, \ldots, A_K^n)) = A_1^n \text{ si } n \geq q-1$$

Les fonctions f_n, $n \in \mathbb{N}$ ne sont pas définies ailleurs.

Soit T la méthode de sélection entre K suites associée à (f_n).

On vérifie aisément que dom T = S.

□

Une conséquence de la proposition 3 et du lemme 2 est la proposition suivante :

Proposition 4

Soit $S \subset (E^K)^{\mathbb{N}}$, $S \neq \emptyset$.

$[\exists\ T \in {}_{\text{sélec}}{}^{\tau}\text{Mém}_q(K, E) : \text{dom } T = S] \Longleftrightarrow [\exists\ T \in {}^{\tau}\text{Mém}_q(E^K, E) : \text{dom } T = S]$.

Proposition 5

Soient $K, q \in \mathbb{N}^*$, $K \geq 2$.

1) ${}_{\text{sélec}}{}^{\tau}\text{Mém}_q(K, E) \subset {}_{\text{sélec}}{}^{\tau}\text{Mém}_{q+1} \subset {}^{\tau}\text{Norm}_{\text{sélec}}(K, E) \subset {}^{\tau}\text{sélec}(K, E)$.

2) ${}^{\tau}\text{Norm}_{\text{sélec}}(K, E) \subset {}^{\tau}\text{Norm}(E^K, E)$.

3) ${}^{\tau}\text{Norm}_{\text{sélec}}(K, E) = {}^{\tau}\text{Norm}(E^K, E) \Longleftrightarrow \text{card } E = 1$.

4) ${}_{\text{sélec}}{}^{\tau}\text{Mém}_q(K, E) = {}^{\tau}\text{sélec}(K, E) \Longleftrightarrow \text{card } E = 1$.

Preuve

. 1) et 2) sont évidentes.

. 3) =>]. Supposons card E > 1. Soient $a_1, a_2 \in E$, $a_1 \neq a_2$.

Considérons l'algorithme normal (f_n) pour K suites, défini par :

$\forall\ (A_1^n, \ldots, A_K^n) \in (E^K)^{\mathbb{N}}$, $f_n((A_1^o, \ldots, A_k^o), \ldots, (A_1^n, \ldots, A_k^n)) = a_2$.

En prenant $(A_1^n, \ldots, A_k^n) \in (E^K)^{\mathbb{N}}$, vérifiant : $\forall\ i \in \{1, \ldots, K\}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$,

$A_i^n = a_1$ nous aurons $f_n((A_1^o,\ldots,A_k^o),\ldots,(A_1^n,\ldots,A_k^n)) \neq a_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, par conséquen

(f_n) n'est pas un algorithme normal de sélection entre K suites).

<=] évidente

4) <=] évidente

=>] supposons card E > 1.

Soient $a_1, a_2 \in E$, $a_1 \neq a_2$.

Soit $T : (E^K)^{\mathbb{N}} \to E^{\mathbb{N}}$

$$(A_1^n, \ldots, A_K^n) \to (A_{i(n)}^n) \text{ où } i(n) \text{ est tel que :}$$

$$i(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq q-1 \\ j_n & \text{si } n \geq q, \text{ avec } j_n \text{ est le plus petit indice de } \{1, \ldots, k\} \text{ vérifiant :} \end{cases}$$

$$A_{j_n}^{n-q} = A_{j_n}^{n-q+1} = \ldots = A_{j_n}^{n}.$$

. Nous avons $T \in {}_{\text{sélec}}^{\tau}\text{Mém}_{q+1}(K, E)$ et a pour domaine S donné par :

$$S = \{(A_1^n, \ldots, A_K^n) \in (E^K)^{\mathbb{N}} \;/\; \forall\, n \geq q,\ \exists\, j_n \in \{1, \ldots, K\} : A_{j_n}^{n-q} = \ldots = A_{j_n}^{n}\}.$$

Nous allons montrer que $T \notin {}_{\text{sélec}}^{\tau}\text{Mém}_q(K, E)$.

Supposons que $T \in {}_{\text{sélec}}^{\tau}\text{Mém}_q(K, E)$.

Soit $S' = \{(A_1^n, \ldots, A_K^n) \in (E^K)^{\mathbb{N}} \;/\; \forall\, n \geq q,\ \exists\, j_n \in \{1, \ldots, k\} : A_{j_n}^{n-q+1} = \ldots = A_{j_n}^{n}\}$.

$S' \neq \emptyset$ car $S \subset S'$.

Soient $(A_1^n, \ldots, A_K^n) \in S'$, $n_o \in \mathbb{N}$. Considérons la suite $(A_1^{n,n_o}, \ldots, A_K^{n,n_o}) \in (E^K)^{\mathbb{N}}$ définie par :

pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$

$$A_i^{n,n_o} = \begin{cases} A_i^{n_o} & \text{si } n \leq n_o \\ A_i^{n} & \text{si } n_o < n \leq n_o+q-1 \\ A_i^{n_o+q-1} & \text{si } n > n_o+q-1 \end{cases}$$

La suite $(A_1^{n,n_o}, \ldots, A_K^{n,n_o}) \in S$ car $\exists\, K_o \in \{1, \ldots, K\}$ tel que : $A_{K_o}^{n,n_o} = A_{K_o}^{n+1,n_o}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, par suite d'après la proposition 3

on a $(A_1^n, \ldots, A_K^n) \in S$, par conséquent $S' \subset S$.(*)

Considérons la suite $(A_1^n, \ldots, A_K^n) \in (E^K)^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$(A_1^n) = (\underbrace{a_1, \ldots, a_1}_{2q \text{ fois}}, \underbrace{a_2, \ldots, a_2}_{q \text{ fois}}, \underbrace{a_1, \ldots, a_1}_{2q \text{ fois}}, \ldots\ldots\ldots)$$

$$(A_2^n) = \ldots = (A_K^n) = (\underbrace{a_1, \ldots, a_1}_{(q+1)\text{ fois}}, \underbrace{a_2, \ldots, a_2}_{(3q-1)\text{ fois}}, \underbrace{a_1, \ldots, a_1}_{3q\text{ fois}}, \underbrace{a_2, \ldots, a_2}_{3q\text{ fois}}, \ldots)$$

La suite $(A_1^n, \ldots, A_k^n) \in S'$ mais $(A_1^n, \ldots, A_K^n) \notin S$ ce qui contredit (*).

Par conséquent ${}_{\text{sélec}}^{\tau}\text{Mém}_{q+1}(K, E) \not\subset {}_{\text{sélec}}^{\tau}\text{Mém}_q(K, E)$ et d'après 1) on a ${}^{\tau}\text{sélec}(K, E) \not\subset {}_{\text{sélec}}^{\tau}\text{Mém}_q(K, E)$.

□

1.3 - Algorithmes de décompte-sélection entre K suites

On appelle algorithme de décompte-sélection entre K suites la donnée :

1) de K suites de fonctions $(f_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $i \in \{1, \ldots, K\}$ où

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, \ldots, K\} : f_i^n : E^{n+1} \to \mathbb{R}_+$.

2) de K suites d'applications $(C_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $i \in \{1, \ldots, K\}$ où

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, \ldots, k\} : C_i^n : \{0, 1\}^{n+1} \to \mathbb{N}$.

On note par $A = ((f_i^n)_{i=1,K}, (C_i^n)_{i=1,K})$ l'algorithme de décompte-sélection donné par 1), 2).

L'algorithme $A = ((f_i^n)_{i=1,K}, (C_i^n)_{i=1,K})$ appliqué à une suite $(A_1^n, \ldots, A_K^n) \in (E^K)^{\mathbb{N}}$ fonctionne de la façon suivante :

étape n

1) *Calculer pour tout* $i \in \{1, \ldots, K\}$: $t_i^n = f_i^n(A_i^o, \ldots, A_i^n)$.

2) *Pour tout* $i \in \{1, \ldots, K\}$, *poser* :

$$m(t_i^n) \begin{cases} 1 & si\ t_i^n = \min\limits_{1 \le j \le K} t_j^n \\ 0 & sinon \end{cases}$$

3) *Calculer* $\beta_i^n = C_i^n(m(t_i^o), \ldots, m(t_i^n))$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots, K\}$.

4) *Poser* $A^n = A_{i(n)}^n$ *avec* $i(n)$ *est le plus petit indice de* $\{1, 2, \ldots, K\}$ *vérifiant* : $\beta_{i(n)}^n = \max\limits_{1 \le j \le K} \beta_j^n$.

Le domaine de l'algorithme $A = ((f_i^n)_{i=1,K}, (C_i^n)_{i=1,K})$ est l'ensemble des suites $(A_1^n, \ldots, A_K^n) \in (E^K)^{\mathbb{N}}$ telles que : $\forall\, i \in \{1, \ldots, K\}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $(A_i^o, \ldots, A_i^n) \in \text{dom } f_i^n$. Nous notons par dom A : le domaine de l'algorithme A, et nous notons par ${}^{\tau}A$, la transformation de K suites qui à $(A_1^n, \ldots, A_K^n) \in \text{dom } A$, associe la suite $(A_{i(n)}^n)$.

. Une transformation T de K suites de $(E^K)^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E^{\mathbb{N}}$ pour laquelle, il existe un algorithme A de décompte-sélection tel que $T = {}^{\tau}A$ est dite méthode de décompte-sélection entre K suites.

On note par ${}^{\tau}D\text{-}S(K, E)$: l'ensemble des méthodes de décompte-sélection entre K suites.

Remarque

. ${}^{\tau}D\text{-}S(K, E) \subset {}^{\tau}\text{Norm}_{\text{sélec}}(K, E)$

Proposition 6

Soit $S \subset (E^K)^{\mathbb{N}}$, $S \neq \emptyset$

$[\exists\, T \in {}^{\tau}D\text{-}S(K, E) : \text{dom } T = S] \Longleftrightarrow$

$[\forall\, (A_1^n, \ldots, A_k^n) \in (E^K)^{\mathbb{N}}$, $(\forall\, i \in \mathbb{N}, \exists : (A_{1,1}^{n,i}, \ldots, A_{K,1}^{n,i}), \ldots,$ $(A_{1,K}^{n,i}, \ldots, A_{K,K}^{n,i}) \in S$ *telles que* : $\forall\, j \in \{1, \ldots, K\}$, $(A_j^o, \ldots, A_j^i) = (A_{j,j}^{o,i}, \ldots, A_{j,j}^{i,i})) \Rightarrow (A_1^n, \ldots, A_K^n) \in S]$

Preuve

=>]

Soit $T \in {}^{\tau}D\text{-}S(K, E)$: dom $T = S$. Il existe un algorithme $A = ((f_i^n)_{i=1,K}, (C_i^n)_{i=1,K})$ de décompte-sélection entre K suites tel que $\tau_A = T$.

Soit $(A_1^n, \ldots, A_K^n) \in (E^K)^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe K suites $(A_{1,1}^{n,i}, \ldots, A_{K,1}^{n,i}), \ldots, (A_{1,K}^{n,i}, \ldots, A_{K,K}^{n,i}) \in S$ telles que $(A_j^o, \ldots, A_j^i) = (A_{j,j}^{o,i}, \ldots, A_{j,j}^{i,i})$ pour tout $j \in \{1, \ldots, K\}$.

Comme S = dom T, il en résulte que $(A_j^o, \ldots, A_j^i) \in \text{dom } f_j^i$ pour tout $j \in \{1, \ldots, K\}$, par suite $(A_1^n, \ldots, A_K^n) \in \text{dom } T = S$.

<=]

Considérons l'algorithme $A = ((f_i^n)_{i=1,K}, (C_i^n)_{i=1,K})$ défini par :

. $\forall\ (A_1^n, \ldots, A_K^n) \in S$, $\forall\ i \in \{1, \ldots, k\}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $f_i^n(A_i^o, \ldots, A_i^n) = 0$.

les fonctions f_i^n ne sont pas définies ailleurs.

. $\forall\ (x^o, \ldots, x^n) \in \{0, 1\}^{n+1}$, $C_i^n(x^o, \ldots, x^n) = x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Sous l'hypothèse de la condition nécessaire, on vérifie aisément que dom A = S.

$\square$

Exemple d'algorithme de décompte-sélection entre K suites

Soit (E, d) espace métrique

Considérons les familles d'applications $(f_i^n)_{i=1,K}$, $(C_i^n)_{i=1,K}$ définies de la manière suivante :

$$\text{pour tout } i \in \{1, \ldots, k\} \begin{cases} f_i^n : E^{n+1} \to \mathbb{R}_+ & \text{si } n \geq 1 \\ \quad (x^o, \ldots, x^n) \to d(x^n, x^{n-1}) & \\ f_i^o(x^o) = 0 \text{ pour tout } x^o \in E. & \\ C_i^n : \{0, 1\}^{n+1} \to \mathbb{N} & \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \\ \quad (y^o, \ldots, y^n) \to y^n & \end{cases}$$

La méthode de décompte-sélection associée à $A = ((f_i^n)_{i=1,K}, (C_i^n)_{i=1,K})$ est définie par : $\forall\ (A_1^n, \ldots, A_K^n) \in (E^K)^{\mathbb{N}}$, $T_A(A_1^n, \ldots, A_K^n) = (A_{i(n)}^n)$ avec $i(o) = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $i(n)$ est le plus petit indice de $\{1, \ldots, K\}$ vérifiant : $d(A_{i(n)}^{n-1}, A_{i(n)}^n) = \min_{1 \leq j \leq K} d(A_j^{n-1}, A_j^n)$.

2 - COEFFICIENTS DE DECOMPTE

Dans ce paragraphe nous rappelons les coefficients de décompte introduits dans [7] et nous proposons de nouveaux coefficients de décompte.

2.0 - Rappels

Soient $n_o \in \mathbb{N}$, $K \in \mathbb{N}^*$, $(R_i^{(n)})$, $i \in \{1, \ldots, K\}$, $n \geq n_o$ une famille de relations, $R_i^{(n)}$ est vraie ou fausse selon i et n.

On pose pour tout $i \in \{1, \ldots, K\}$:

$$ {}^0r_i(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n < n_o \text{ ou si } R_i^{(n)} \text{ est fausse} \\ \\ 1 \text{ si } n \geq n_o \text{ et si } R_i^{(n)} \text{ est vraie} \end{cases} $$

$$ {}^1r_i(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n < n_o \\ \\ \text{Card } \{q \in \{n_o, \ldots, n\} \mid R_i^{(q)} \text{ est vraie}\} \text{ sinon} \end{cases} $$

$$ {}^2r_i(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n < n_o \text{ ou si } R_i^{(n)} \text{ est fausse} \\ \\ \max \{q \in \{1, \ldots, n-n_c+1\} \mid R_i^{(n)}, \ldots, R_i^{(n-q+1)} \text{ sont vraies}\} \\ \qquad \text{si } n \geq n_o \text{ et si } R_i^{(n)} \text{ est vraie} \end{cases} $$

${}^0r_i(n)$, ${}^1r_i(n)$, ${}^2r_i(n)$ sont appelées coefficients de décompte associés aux relations $R_i^{(n)}$.

2.1 - *Autres coefficients de décompte*

Soient R, R' 2 relations quelconques.

Dans toute la suite nous notons par :

$\bar{R}$ (resp. R et R') (resp. R ou R'), la relation contraire de R (resp. la relation obtenue par conjonction de la relation R et de la relation R') (resp. la relation obtenue par disjonction de R et R').

Remarque

R est vraie (resp. (R et R') est vraie) (resp. (R ou R') est vraie) ssi $\bar{R}$ est fausse (resp. R, R' sont vraies) (resp. au moins l'une des 2 relations R, R' est vraie).

On pose pour tout $i \in \{1, \ldots, K\}$:

$$ {}^{3}r_i(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n < n_o \\ {}^{3}r_i(n-1) \text{ si } n \geq n_o \text{ et si } R_i^{(n)} \text{ est fausse} \\ \max \{q \in \{1, \ldots, n-n_o+1\} \mid R_i^{(n)}, \ldots, R_i^{(n-q+1)} \text{ sont vraies}\} \\ \qquad\qquad \text{si } n \geq n_o \text{ et si } R_i^{(n)} \text{ est vraie.} \end{cases} $$

$$ {}^{4}r_i(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \leq n_o+1 \text{ ou si } (\bar{R}_i^{(n)} \text{ ou } (\bar{R}_i^{(n-1)} \text{ et } \bar{R}_i^{(n-2)})) \text{ est vraie} \\ 1 \text{ si } n \geq n_o+2 \text{ et si } (R_i^{(n)} \text{ et } (R_i^{(n-1)} \text{ ou } R_i^{(n-2)})) \text{ est vraie} \end{cases} $$

. Soit $p \in \mathbb{N}^*$

$$ {}^{p}{}^{5}r_i(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n < p+n_o \\ \operatorname{card} \{q \in \{n-p, \ldots, n\} \mid R_i^{(q)} \text{ est vraie}\} \text{ si } n \geq p+n_o \end{cases} $$

$$ {}^{6}r_i(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n < n_o \text{ ou si } R_i^{(n)} \text{ est fausse} \\ \operatorname{card} \{p \in \{n_o, \ldots, n\} \mid R_i^{(p)} \text{ est vraie}\} \text{ si } n \geq n_o \text{ et si } R_i^{(n)} \text{ est vraie} \end{cases} $$

$$ {}^{7}r_i(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \leq n_o+1 \text{ ou si } R_i^{(n)} \text{ est fausse} \\ 1 \text{ si } n \geq n_o+2 \text{ et si } (R_i^{(n)} \text{ et } \bar{R}_i^{(n-1)} \text{ et } \bar{R}_i^{(n-2)}) \text{ est vraie} \\ 2 \text{ si } n \geq n_o+2 \text{ et si } (R_i^{(n)} \text{ et } \bar{R}_i^{(n-1)} \text{ et } R_i^{(n-2)}) \text{ est vraie} \\ 3 \text{ si } n \geq n_o+2 \text{ et si } (R_i^{(n)} \text{ et } R_i^{(n-1)} \text{ et } \bar{R}_i^{(n-2)}) \text{ est vraie} \\ 4 \text{ si } n \geq n_o+2 \text{ et si } (R_i^{(n)} \text{ et } R_i^{(n-1)} \text{ et } R_i^{(n-2)}) \text{ est vraie} \end{cases} $$

. Soient $r, s \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq s+1$.

$$ {}^{(r,s)}{}^{8}r_i(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n < n_o+s \text{ ou si } R_i^{(n)} \text{ est fausse} \\ 1 \text{ si } n \geq n_o+s \text{ et si } R_i^{(n)} \text{ est vraie et si} \\ \qquad \operatorname{card} \{q \in \{n-s, \ldots, n\} \mid R_i^{(q)} \text{ est vraie}\} < r. \\ 2 \text{ si } n \geq n_o+s \text{ et si } R_i^{(n)} \text{ est vraie et si} \\ \qquad \operatorname{card} \{q \in \{n-s, \ldots, n\} \mid R_i^{(q)} \text{ est vraie}\} \geq r \end{cases} $$

$$ {}^{9}r_i(n) \begin{cases} 0 \text{ si } n < n_o+1 \text{ ou si } (\bar{R}_i^{(n)} \text{ et } \bar{R}_i^{(n-1)}) \text{ est vraie} \\ 1 \text{ si } n \geq n_o+1 \text{ et si } (\bar{R}_i^{(n)} \text{ et } R_i^{(n-1)}) \text{ est vraie} \\ 2 \text{ si } n \geq n_o+1 \text{ et si } (R_i^{(n)} \text{ et } \bar{R}_i^{(n-1)}) \text{ est vraie} \\ 3 \text{ si } n \geq n_o+1 \text{ et si } (R_i^{(n)} \text{ et } R_i^{(n-1)}) \text{ est vraie} \end{cases} $$

. Plus généralement, considérons K suites d'applications (C_i^n), $i \in \{1, \ldots, K\}$

avec $C_i^n : \{0, 1\}^{n+1} \to \mathbb{N}$

$$(x^o, \ldots, x^n) \to C_i^n(x^o, \ldots, x^n).$$

avec la définition des coefficients de décompte $0_{r_i}(n)$, nous définissons des coefficients de décompte que nous noterons $C_{r_i}(n)$ de la façon suivante :

$$C_{r_i}(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n < n_o \\ C_i^n(0_{r_i}(0), \ldots, 0_{r_i}(n)) \quad \text{sinon} \end{cases}$$

Dans toute la suite nous n'allons utiliser que les coefficients de décompte $0_{r_i}(n), \ldots, 9_{r_i}(n)$.

on note par : $\mathbb{K}_o = \{1,2,3,4,6,7,9\} \cup \{{}^p5 \ / \ p \in \mathbb{N}^*\} \cup \{{}^{(r,s)}8 \ / \ r,s \in \mathbb{N},\ 1 \leq r \leq s+1\}$

2.2 - *Exemples de relations $(R_i^{(n)})$ et coefficients de décompte associés*

Soient E un ensemble non vide, $K \in \mathbb{N}^*$.

2.2.0 - *Relations $(C_i^{(n)})$*

Soient $(A_1^n, \ldots, A_k^n) \in (E^K)^{\mathbb{N}}$.

Considérons les relations suivantes :

$$(C_i^{(n)}) \ : \ A_i^n = A_i^{n-1}$$

définies pour $n \geq 1$, $i \in \{1, \ldots, K\}$.

nous notons par $0_{c_i}(n), \ldots, 9_{c_i}(n)$ les coefficients de décompte associés aux relations $(C_i^{(n)})$.

2.2.1 - *Relations $({}_\ell D_i^{(n)})$*

Soient (E, d) espace métrique, $(A_1^n, \ldots, A_K^n) \in (E^K)^{\mathbb{N}}$, $\ell \in \mathbb{N}$.

On définit les relations $({}_\ell D_i^{(n)})$ par :

$$({}_\ell D_i^{(n)}) \ : \ \max_{o \leq p \leq \ell} d(A_i^{n-p}, A_i^{n-p-1}) = \min_{1 \leq j \leq k} \left(\max_{o \leq p \leq \ell} d(A_j^{n-p}, A_j^{n-p-1}) \right)$$

définies pour $n \geq \ell+1$, $i \in \{1, \ldots, K\}$.

Les coefficients de décompte associés seront notés ${}^{o}_{\ell}d_i(n)$, ${}^{1}_{\ell}d_i(n)$, ..., ${}^{2}_{\ell}d_i(n)$, ..., ${}^{9}_{\ell}d_i(n)$.

Pour $\ell = 0$, on note par $D_i^{(n)}$ la relation ${}_{o}D_i^{(n)}$ et par ${}^{o}d_i(n)$, ${}^{1}d_i(n)$, ${}^{2}d_i(n)$, ..., ${}^{9}d_i(n)$ les coefficients de décompte associés aux relations $D_i^{(n)}$.

2.2.2 - Relations $({}_{q}E_i^{(n)})$

Soit $q \in \mathbb{N}^*$.

Avec les notations précédentes, on définit les relations $({}_{q}E_i^{(n)})$ par :

$$({}_{q}E_i^{(n)}) : \max_{n-q\leq\ell,\ell'\leq n} d(A_i^{\ell}, A_i^{\ell'}) = \operatorname{Min}_{1\leq j\leq k} \left(\max_{n-q\leq\ell,\ell'\leq n} d(A_j^{\ell}, A_j^{\ell'}) \right).$$

définies pour $n \geq q$, $i \in \{1, ..., K\}$.

On note par ${}^{o}_{q}E_i(n)$, ${}^{1}_{q}E_i(n)$, ..., etc les coefficients de décompte associés.

. Une étude complète pour les relations de 2.2.0 ; 2.2.1 a été faite dans [7].

3 - SELECTION ENTRE K SUITES A L'AIDE DES COEFFICIENTS DE DECOMPTE D'INDICES $f \in \mathbb{K}_o$

Soient E un ensemble non vide, $K \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(A_1^n, ..., A_k^n) \in (E^K)^{\mathbb{N}}$, on note par :

$$\hat{J}_{(A_1^n,...,A_k^n)} = \{i \in \{1, ..., K\} \mid \exists\, n_i, \forall\, n \geq n_i : A_i^n = A_i^{n+1}\}$$

$$\hat{\hat{J}}_{(A_1^n,...,A_k^n)} = \{i \in \{1, ..., K\} \mid \exists\, n_i, \forall\, n \geq n_i : A_i^n \neq A_i^{n+1}\}$$

$$\hat{S} = \{(A_1^n, ..., A_K^n) \in \overline{\mathrm{conv}}_k(E) \mid \hat{J}_{(A_1^n,...,A_k^n)} \neq \emptyset\}$$

$$\hat{\hat{S}} = \{(A_1^n, ..., A_k^n) \in \hat{S} \mid \hat{J}_{(A_1^n,...,A_k^n)} \cup \hat{\hat{J}}_{(A_1^n,...,A_k^n)} = \{1, ..., K\}\}.$$

3.0 - Méthodes ${}^{f}C$, $f \in \mathbb{K}_o$ de sélection entre K suites

Soit $f \in \mathbb{K}_o$. La méthode $T = {}^{f}C$ de sélection entre K suites appliquée à une suite $(A_1^n, \ldots, A_k^n) \in (E^K)^{\mathbb{N}}$ fonctionne de la manière suivante :

étape 0

$$T^o = A_1^o$$

Etape $n \geq 1$

1) *On considère les relations* $(C_i^{(n)})$, $i \in \{1, \ldots, K\}$ *définies par*

$$(C_i^{(n)}) \; : \; A_i^n = A_i^{n-1}$$

2) *On calcule les coefficients de décompte* $f_{c_i}(n)$, $i \in \{1, \ldots, K\}$

3) *On pose* $T^n = A^n_{i(n)}$ *avec* $i(n)$ *est le plus petit indice de* $\{1, 2, \ldots, k\}$ *vérifiant :* $f_{c_{i(n)}}(n) = \max\limits_{1 \leq j \leq k} f_{c_j}(n)$.

La transformation de K suites $T = {}^{f}C$ est dite méthode de sélection entre K suites associée aux coefficients de décompte $f_{c_i}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1,\ldots,K\}$.

Proposition 7

1) $\hat{\hat{S}}$ *est devinable par* ${}^{f}C$ *pour tout* $f \in \mathbb{K}_o$

2) $\hat{S}$ *est devinable par* f_C *pour tout* $f \in \{1, 2, 3, 6\}$.

Pour la définition de famille de K suites devinable voir chapitre 2.

Preuve

1) évidente.

2) Vérifions que $T = {}^{1}C$ devine $\hat{S}$.

Soit $(A_1^n, \ldots, A_K^n) \in \hat{S}$.

$\hat{J}_{(A_1^n,\ldots,A_k^n)}$ étant non vide, par conséquent $\exists\, n_o$, $\forall\, n \geq n_o$, $\forall\, i \in \hat{J}_{(A_1^n,\ldots,A_k^n)}$: $A_i^n = A_i^{n-1}$, par suite $\forall\, n \geq n_o$, $\forall\, i \in \hat{J}_{(A_1^n,\ldots,A_k^n)}$: ${}^{1}{}_{C_i}(n) \geq n-n_o+1$. (*)

Si $\bigcap\limits_{\{1,2,\ldots,k\}} \hat{J}(A_1^n, \ldots, A_k^n) = \emptyset$ alors T devine $(A_1^n, \ldots, A_k^n)$.

Sinon.

Soit $j \notin \hat{J}_{(A_1^n,\ldots,A_k^n)}$. Il existe une infinité d'entiers n pour lesquels $A_j^n \neq A_j^{n-1}$, par suite $\exists\, n_j \geq n_o$, $\forall\, n \geq n_j$: $1_{c_j}(n) < n-n_o+1$.

Soit $m_o = \max\limits_{j \notin \hat{J}_{(A_1^n,\ldots,A_k^n)}} n_j$.

$\forall\, n \geq m_o$, $\forall\, j \notin \hat{J}_{(A_1^n, \ldots, A_k^n)}$: $1_{c_j}(n) < n-n_o+1$. (**)

D'après (*), (**) on a $\forall\, n \geq m_o$, $i(n) \in \hat{J}_{(A_1^n,\ldots,A_k^n)}$ par suite T devine $(A_1^n, \ldots, A_k^n)$.

Pour les autres transformations, les démonstrations sont analogues à celle de $T = {}^1C$.

$\square$

<u>Remarque</u>

. $\hat{S}$ n'est pas devinable par les transformations ${}^fC$ avec $f \in \mathbb{K}_o - \{1,2,3,6\}$.

3.1 - <u>Méthodes ${}^f_\ell D$, $f \in \mathbb{K}_o$ de sélection entre K suites</u>

Soient (E, d) espace métrique, $K \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{K}_o$, $\ell \in \mathbb{N}$.

La transformation de K suites $T = {}^f_\ell D$ appliquée à une suite $(A_1^n,\ldots,A_k^n) \in (E^K)^{\mathbb{N}}$ fonctionne comme suit :

<u>*étape*</u> <u>$n \leq \ell$</u>

$$T^n = A_1^n$$

<u>*étape*</u> <u>$n \geq \ell+1$</u>

1) On considère les relations $({}_\ell D_i^{(n)})$, $i \in \{1, \ldots, K\}$ *définies par :*

$$({}_\ell D_i^{(n)}) : \max_{0 \leq p \leq \ell} d(A_i^{n-p}, A_i^{n-p-1}) = \min_{1 \leq j \leq k} \left(\max_{0 \leq p \leq \ell} d(A_j^{n-p}, A_j^{n-p-1}) \right)$$

2) On calcule les coefficients de décompte ${}^f_\ell d_i(n)$, $i \in \{1, \ldots, K\}$.

3) *On pose* $T^n = A^n_{i(n)}$ *où* i(n) *est le plus petit indice de* $\{1, \ldots, K\}$ *vérifiant* $f_{\ell^{d}i(n)}(n) = \max_{1 \le j \le k} f_{\ell^{d}j}(n)$.

Pour $\ell = 0$, on note par ${}^{f}D$, la transformation ${}^{f}_{o}D$.

La transformation ${}^{f}_{\ell}D$ de K suites est dite méthode de sélection associée aux coefficients de décompte $f_{d_i}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \ldots, K\}$.

Remarque

Les transformations de K suites ${}^{f}_{\ell}D$, $f \in \mathbb{K}_o$ sont des méthodes de décompte-sélection entre K suites.

Définitions et notations

Soit $(A_1^n, \ldots, A_K^n) \in (E^K)^{\mathbb{N}}$ on pose :

$$\hat{\hat{J}}^{\ell}_{(A_1^n,\ldots,A_K^n)} = \{i \in \{1,\ldots,K\} \ / \ \exists\, n_i,\ \forall\, n \ge n_i,\ \exists\, j_n \in \{n-\ell,\ldots,n\} : A_i^{j_n} \ne A_i^{j_n - 1}\}$$

$$\hat{\hat{S}}^{\ell} = \{(A_1^n, \ldots, A_K^n) \in \hat{S} \mid \hat{J}_{(A_1^n,\ldots,A_k^n)} \cup \hat{\hat{J}}^{\ell}_{(A_1^n,\ldots,A_k^n)} = \{1, \ldots, K\}\}.$$

Une conséquence de ces définitions est la proposition suivante :

Proposition 8

1) $\hat{\hat{S}}^o = \hat{\hat{S}}$

2) $\forall\, \ell, \ell' \in \mathbb{N},\ \ell < \ell' :\ \hat{\hat{S}}^{\ell} \subset \hat{\hat{S}}^{\ell'} \subset \hat{S}$.

Proposition 9

Soit $\ell \in \mathbb{N}$

1) $\hat{\hat{S}}^{\ell}$ *est devinable par* ${}^{f}_{\ell}D$ *pour tout* $f \in \mathbb{K}_o$.

2) $\hat{S}$ *est devinable par* ${}^{f}_{\ell}D$ *pour tout* $f \in \{1,2,3,6\}$

La démonstration est semblable à celle de la proposition 7.

Proposition 10

Soient $\ell \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{K}_o - \{1, 2, 3, 6\}$

$\hat{S}$ *est devinable par* ${}^f_\ell D \Leftrightarrow \hat{\hat{S}}^{\ell+1}$ *est devinable par* ${}^f_\ell D \Leftrightarrow E' = \emptyset$.

Preuve

. Si $\hat{S}$ est devinable par ${}^f_\ell D$ alors, d'après la proposition 8 on a $\hat{\hat{S}}^{\ell+1}$ est devinable par ${}^f_\ell D$.

. Etablissons l'implication suivante :

$\hat{\hat{S}}^{\ell+1}$ est devinable par ${}^f_\ell D \Rightarrow E' = \emptyset$.

Supposons que $E' \neq \emptyset$.

Soit $x \in E'$. Il existe $(x_n) \in \text{conv}(E)$ telle que $x_n \to x$ et $\forall\, n \in \mathbb{N} : x_n \neq x$.

Pour simplifier la démonstration, prenons $f = 0$.

Considérons la suite $(A_1^n, \ldots, A_k^n) \in (E^K)^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$(A_1^n) = (\underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{\ell+2 \text{ fois}}, \underbrace{x_2, x_2, \ldots, x_2}_{(\ell+2) \text{ fois}}, \underbrace{x_3, \ldots, x_3}_{(\ell+2) \text{ fois}}, x_4, \ldots, x_4, \ldots, \underbrace{x_n, \ldots, x_n}_{(\ell+2) \text{ fois}}, \ldots).$$

$(A_2^n) = \ldots = (A_k^n) = (x, x, \ldots x, \ldots)$.

La suite $(A_1^n, \ldots, A_k^n) \in \hat{\hat{S}}^{\ell+1}$ cependant ${}^o_\ell D$ ne devine pas $(A_1^n, \ldots, A_k^n)$, par conséquent $\hat{\hat{S}}^{\ell+1}$ n'est pas devinable par ${}^o_\ell D$.

. si $E' = \emptyset$ alors $\hat{S} = \{(A_1^n, \ldots, A_k^n) \in (E^K)^{\mathbb{N}} / \exists n_o, \forall\, n \geq n_o : A_1^n = \ldots = A_k^n = A_1^{n+1} = \ldots A_k^{n+1}\}$;

par suite $\hat{S}$ est devinable par ${}^f_\ell D$ pour tout $f \in \mathbb{K}_o$.

□

3.2 - Méthodes ${}^f_q E$, $f \in \mathbb{K}_o$ de sélection entre K suites

Soit $q \in \mathbb{N}$.

Avec les notations précédentes, la transformation $T = {}^f_q E$ appliquée à une suite $(A_1^n, \ldots, A_k^n) \in (E^K)^{\mathbb{N}}$ fonctionne de la manière suivante :

étape $n \leq q-1$

$$T^n = A_1^n$$

Etape $n \geq q$

1) On considère les relations $({}_qE_i^{(n)})$, $i \in \{1, \ldots, K\}$ *définies par :*

$$({}_qE_i^{(n)}) : \max_{n-q\leq \ell,\ell'\leq n} d(A_i^{\ell}, A_i^{\ell'}) = \min_{1\leq j\leq k} \left(\max_{n-q\leq \ell,\ell'\leq n} d(A_j^{\ell}, A_j^{\ell'})\right).$$

2) On calcule les coefficients de décompte $f_{{}_qE_i}(n)$, $i \in \{1, \ldots, K\}$.

3) On pose $T^n = A^n_{i(n)}$ *où* $i(n)$ *est le plus petit indice de* $\{1, \ldots, K\}$ *vérifiant* $f_{{}_qE_{i(n)}}(n) = \max_{1\leq j\leq k} f_{{}_qE_j}(n)$.

La transformation ${}^f_qE$ $f \in \mathbb{K}_o$ est dite méthode de sélection entre K suites associée aux coefficients de décompte $f_{{}_qE_i}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \ldots, K\}$.

Remarques

1) ${}^f_qE$, $f \in \mathbb{K}_o$ est une méthode de décompte-sélection entre K suites.

2) ${}^f_1E = {}^fD$ pour tout $f \in \mathbb{K}_o$

Proposition 11

Soit $q \in \mathbb{N}^*$.

1) $\hat{S}^{q-1}$ *est devinable par* ${}^f_qE$ pour tout $f \in \mathbb{K}_o$.

2) $\hat{S}$ *est devinable par* ${}^f_qE$ pour tout $f \in \{1, 2, 3, 6\}$.

La démonstration est semblable à celle de la proposition 7.

Proposition 12

Soit $q \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{K}_o - \{1, 2, 3, 6\}$

$\hat{S}$ *est devinable par* ${}^f_qE \iff \hat{S}^q$ *est devinable par* ${}^f_qE \iff E' = \emptyset$.

La preuve est analogue à celle de la proposition 10.

4 - METHODES DE SELECTION ENTRE K TRANSFORMATIONS DE SUITES

Soient E un ensemble non vide, $k \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \ldots, A_k \in \text{Trans}(E, E)$.

Dans toute la suite on suppose $\bigcap_{i=1}^{k} \text{dom } A_i \neq \emptyset$.

Soit $(x^n) \in \text{dom } A_i$, $i \in \{1, \ldots, k\}$. On note par $(A_i^n) = A_i(x^n)$, la suite obtenue en appliquant A_i à (x^n).

On note par $T_{k(A_1, \ldots, A_k)}$, la transformation à k réponses qui à $(x^n) \in \bigcap_{i=1}^{k} \text{dom } A_i$, fait correspondre la suite $(A_1^n, \ldots, A_k^n)$.

Définition

Une transformation $T \in \text{Trans}(E, E)$ *est dite méthode de sélection entre* $A_1, \ldots, A_k$ ssi $\forall\ (x^n) \in \bigcap_{i=1}^{k} \text{dom } A_i$, $T(x^n) = (T^n)$ *avec* $T^n \in \{A_1^n, \ldots, A_k^n\}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Remarque

La donnée d'une méthode de sélection entre $A_1, \ldots, A_k$ est équivalente à la donnée d'une méthode de sélection entre (K+1) suites, ayant pour domaine $S = \{(x^n, A_1^n, \ldots, A_k^n) \in (E^{k+1})^{\mathbb{N}} / (x^n) \in \bigcap_{i=1}^{k} \text{dom } A_i,\ \forall\ j \in \{1, \ldots, k\} : (A_j^n) = A_j(x^n)\}$ et qui à $(x^n, A_1^n, \ldots, A_k^n) \in S$ fait correspondre une suite $(A_{i(n)}^n)$.

4.0 - Composition des méthodes de sélection entre K suites et des transformations $T_{(A_1, \ldots, A_k)}$

On note par $\text{Im } T_{k(A_1, \ldots, A_k)} = \{T_{(A_1, \ldots, A_k)}(x^n) / (x^n) \in \bigcap_{i=1}^{k} \text{dom } A_i\}$ appelé ensemble image de $\bigcap_{i=1}^{k} \text{dom } A_i$ par la transformation à k réponses $T_{(A_1, \ldots, A_k)}$.

Définition

Soient $A_1, \ldots, A_k \in$ Trans (E, E), $R \in {}^T$Sélec (K, E) *telles que*

$\mathrm{Im}\ T_{(A_1, \ldots, A_k)} \subset \mathrm{dom}\ R$.

La transformation de suites qui à $(x^n) \in \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{dom}\ A_i$, *associe la suite* $R(A_1^n, \ldots, A_k^n) = R(T_{(A_1, \ldots, A_k)}(x^n))$ *est dite Transformation composée de* R *et* $T_{(A_1, \ldots, A_k)}$.

Remarque

$R \circ T_{(A_1, \ldots, A_k)}$ est une méthode de sélection entre $A_1, \ldots, A_k$.

Soient $\ell \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathbb{K}_o$ (§ 2).

Dans toute la suite on désigne par :

${}^fC(A_1, \ldots, A_k)$: la composée ${}^fC \circ T_{(A_1, \ldots, A_k)}$.

${}^f_\ell D(A_1, \ldots, A_k)$: la composée ${}^f_\ell D \circ T_{(A_1, \ldots, A_k)}$.

${}^f_q E(A_1, \ldots, A_k)$: la composée ${}^f_q E \circ T_{(A_1, \ldots, A_k)}$.

4.1 - Définitions

Soit A une transformation de suites de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E^{\mathbb{N}}$.

Soit $S \subset \mathrm{Conv}(E) \cap \mathrm{dom}\ A$.

- On dit que A est semi-régulière sur S ssi

  $\forall (x^n) \in S, [\exists n_o, \forall n \geq n_o : A^n = A^{n+1}] \Rightarrow [\exists m_o, \forall m \geq m_o : A^m = \lim x^n]$.
- On dit que A est régulière sur S ssi $\forall (x^n) \in S : (A^n) \in \mathrm{Conv}\ (E)$ et $\lim A^n = \lim x^n$.
- On dit que A est exacte sur S ssi $\forall (x^n) \in S, \exists n_o, \forall n \geq n_o : A^n = \lim x^n$.
- On dit que A est pseudo-régulière d'ordre q ($q \in \mathbb{N}^*$) sur S ssi $\forall (x^n) \in S$,

  $[\forall n, \exists m_n \geq n : A^{m_n} = A^{m_n+1} = \ldots = A^{m_n+q}] \Rightarrow [\exists n_o, \forall n \geq n_o : A^n = \lim x^n]$.

  Si A est pseudo-régulière d'ordre 1 sur S, on dira que A est pseudo-régulière sur S.

Une conséquence de ces définitions est la proposition suivante :

Proposition 13

Soient $q, q' \in \mathbb{N}^*$, $q' \leq q$.

Nous avons le schéma d'implications suivant :

$$\begin{array}{ccc}
A \text{ est pseudo-régulière d'ordre } q' \text{ sur } S & \Rightarrow & A \text{ est pseudo-régulière d'ordre } q \text{ sur } S \\
\Uparrow & & \Downarrow \\
A \text{ est exacte sur } S \Rightarrow A \text{ est régulière sur } S & \Rightarrow & A \text{ est semi-régulière sur}
\end{array}$$

4.2 - Accélération et Δ-accélération de la convergence

Soit (E, d) espace métrique.

Soient (x^n), $(t^n) \in \text{Conv}(E)$, $\lim x^n = \lim t^n = x$.

- On dit que (t^n) converge plus vite que (x^n) ssi

  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_o, \forall n \geq n_o : d(t^n, x) \leq \varepsilon\, d(x^n, x)$.

- On dit que (t^n) Δ-accélère (x^n) ssi

  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_o, \forall n \geq n_o : d(t^n, t^{n-1}) \leq \varepsilon\, d(x^n, x^{n-1})$.

  Soient $A \in \text{Trans}(E, E)$, $S \subset \text{Conv}(E)$.

- On dit que A accélère resp(Δ-accélère) S ssi $\forall (x^n) \in S : A(x^n)$ converge plus vite que (x^n) resp (Δ-accélère (x^n)).

- Soient $h \in \mathbb{N}$, $S \subset \text{Conv}^{**}(E)$.

  On dit que A est h-nette sur S ssi pour toute suite $(x^n) \in S$ on a

  ou bien A accélère et Δ-accélère (x^n)

  ou bien

  $$\exists \varepsilon > 0, \exists n_o, \forall n \geq n_o : \max_{0 \leq r \leq h} \frac{d(A^{n-r}, A^{n-r+1})}{d(x^n, x^{n+1})} \geq \varepsilon.$$

Lorsque A est 0-nette sur S, on dira que A est nette sur S.

Remarque

Soient $h, h' \in \mathbb{N}$, $h' \leq h$.

Si A est h'-nette sur S alors A est h-nette sur S.

5 - TRANSFORMATIONS ${}^f_qE(A_1,\dots,A_k)$, ${}^fC(A_1,\dots,A_k)$, ${}^f_\ell D(A_1,\dots,A_k)$, $f \in \mathbb{K}_o$

Soient (E, d) espace métrique, $q \in \mathbb{N}^*$, $\ell \in \mathbb{N}$.

Théorème 1

Soient $S_1, \dots, S_k \subset \mathrm{Conv}(E)$, $A_1, \dots, A_k \in \mathrm{Trans}\ (E, E)$.

Si pour tout $i \in \{1, \dots, K\}$, A_i *est exacte sur* S_i *et pseuso-régulière sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ *alors pour tout* $f \in \mathbb{K}_o$, *les transformations de suites* ${}^fC(A_1, \dots, A_k)$, ${}^f_\ell D(A_1, \dots, A_k)$, ${}^f_qE(A_1, \dots, A_k)$ *sont exactes sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

La preuve est immédiate à partir des propositions 7, 9, 11 (§ 3).

Remarque

Si on remplace dans le théorème 1, l'hypothèse de pseudo-régularité des transformations A_i sur $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ par la semi-régularité de chaque transformation A_i sur $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ alors on ne peut rien dire en ce qui concerne ${}^fC(A_1, \dots, A_k)$, ${}^f_qE(A_1, \dots, A_k)$, ${}^f_\ell D(A_1, \dots, A_k)$, $f \in \mathbb{K}_o - \{1, 2, 3, 6\}$. En fait il est possible de montrer à l'aide de contre-exemples qu'elles ne sont pas exactes sur $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$, nous ne donnons ici qu'un contre exemple.

$$E = \mathbb{R},\ K = 2,\ S_1 = \{(\tfrac{1}{n+1})\},\ S_2 = \{(1 + \tfrac{1}{n+1})\},\ f = 0.$$

On considère les transformations de suites A_1, A_2 définies par :

$$\forall (x^n) \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}) : A_1(x^n) = \begin{cases} (\underbrace{2, 2, \dots, 2}_{(\ell+2)\text{ fois}}, \dots, \underbrace{\tfrac{n+2}{n+1}, \dots, \tfrac{n+2}{n+1}}_{(\ell+2)\text{ fois}}, \dots) & \text{si } \lim x^n \neq 0 \\ (0) & \text{si } \lim x^n = 0 \end{cases}$$

$$A_2(x^n) = \begin{cases} (1) & \text{si } \lim x^n = 1 \\ (0) & \text{sinon} \end{cases}$$

A_1 est exacte sur S_1, semi-régulière sur S_2, A_2 est exacte sur $S_1 \cup S_2$

cependant les transformations ${}^{o}C(A_1, \ldots, A_k)$, ${}^{o}_{\ell}E(A_1, \ldots, A_k)$, ${}^{o}_{\ell}D(A_1,\ldots,A_k)$ ne sont pas exactes sur S_2.

Théorème 2

Soient $p, q, \ell \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, $\ell \geq p-1$, $q \geq p$.

Soient $S_1, \ldots, S_k \subset \mathrm{Conv}\ (E)$; $A_1, \ldots, A_k \in \mathrm{Trans}\ (E, E)$.

Si pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, A_i *est exacte sur* S_i, *pseudo-régulière d'ordre* p *sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ *alors pour tout* $f \in \mathbb{K}_o$, *les transformations de suites* ${}^{f}_{\ell}D(A_1,\ldots,A_k)$, ${}^{f}_{q}E(A_1, \ldots, A_k)$ *sont exactes sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$

La démonstration est immédiate à partir des propositions 9, 11.

Remarque

Pour tout $f \in \mathbb{K}_o - \{1, 2, 3, 6\}$, $\ell < p-1$, $q < p$, on ne peut rien affirmer pour les transformations de suites ${}^{f}_{\ell}D(A_1, \ldots, A_k)$, ${}^{f}_{q}E(A_1, \ldots, A_k)$ en fait il est possible de montrer à l'aide de contre-exemples qu'elles ne sont pas exactes sur $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

Théorème 3

Soient $S_1, \ldots, S_k$ k *familles de suites convergentes* ; $A_1, \ldots, A_k$, k *transformations de suites.*

Si pour tout $i \in \{1, \ldots, K\}$, A_i *est exacte sur* S_i *et semi-régulière sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ *alors pour tout* $f \in \{1, 2, 3, 6\}$, *les transformations de suites* ${}^{f}C(A_1, \ldots, A_k)$, ${}^{f}_{q}E(A_1, \ldots, A_k)$, ${}^{f}_{\ell}D(A_1, \ldots, A_k)$ *sont exactes sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

La démonstration découle immédiatement des propositions 7, 9, 11.

Nous signalons que des démonstrations directes pour ${}^{1}C(A_1, \ldots, A_k)$, ${}^{2}C(A_1, \ldots, A_k)$, ${}^{1}_{\ell}D(A_1, \ldots, A_k)$, ${}^{2}_{\ell}D(A_1, \ldots, A_k)$ se trouvent dans [7].

Théorème 4

Soient $S_1, \ldots, S_k \subset \mathrm{Conv}^{**}(E)$; $A_1, \ldots, A_k \in \mathrm{Trans}\,(E, E)$, $\ell \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$.
Si pour tout $i \in \{1, \ldots, K\}$. A_i *accélère et* Δ*-accélère* S_i *et* A_i *est nette sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ *alors pour tout* $f \in \mathbb{K}_o$, *les transformations de suites* ${}^{f}_{\ell}D(A_1,\ldots,A_k)$, ${}^{f}_{q}E(A_1, \ldots, A_k)$ *accélèrent* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

Lemme 3

Soient (x^n), (A_1^n), $\ldots$, $(A_k^n) \in \mathrm{Conv}(E)$.
Si $\forall\, i \in \{1, \ldots, k\}$, (A_i^n) *accélère la convergence de* (x^n) *alors pour toute appli.* $i : \mathbb{N} \to \{1, 2, \ldots, k\}$, *la suite* $(A^n_{i(n)})$ *accélère la convergence de* (x^n).

Le lemme 3 a été démontré dans [7].

Démonstration du théorème 4

Pour les transformations de suites ${}^{o}_{\ell}(D(A_1, \ldots, A_k)$, ${}^{1}_{\ell}D(A_1, \ldots, A_k)$, ${}^{2}_{\ell}D(A_1, \ldots, A_k)$, les démonstrations se trouvent dans [7].
Montrons que ${}^{3}_{\ell}D(A_1, \ldots, A_k)$ accélère $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.
Soit $(x^n) \in \bigcup_{i=1}^{k} S_i$, $\exists\, i_o \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $(x^n) \in S_{i_o}$.
Soit I l'ensemble des indices des transformations qui accélèrent et Δ-accélèrent (x^n).

$I \neq \emptyset$ car $i_o \in I$.

Si $\bar{I} = \complement_{\{1,\ldots,k\}} I = \emptyset$ alors d'après le lemme 3, ${}^{3}_{\ell}D(A_1, \ldots, A_k)$ accélère (x^n).
Sinon.

Soit $j \in \bar{I}$. A_j étant nette sur (x^n) par conséquent $\exists\, \varepsilon_j > 0$, $\exists\, n_j$, $\forall\, n \geq n_j$: $d(A_j^n, A_j^{n-1}) \geq \varepsilon_j\, d(x^n, x^{n-1})$.

Soit $\varepsilon = \min_{j \in \bar{I}} \varepsilon_j$, $m_o = \max_{j \in \bar{I}} n_j$.

Nous avons $\forall\, n \geq m_o$, $\forall\, j \in \bar{I}$: $d(A_j^n, A_j^{n-1}) \geq \varepsilon\, d(x^n, x^{n-1})$, par suite

$$\forall\, n \geq m_o+\ell,\ \forall\, j \in \bar{I} : \max_{o \leq p \leq \ell} d(A_j^{n-p}, A_j^{n-p-1}) \geq \varepsilon \max_{o \leq p \leq \ell} d(x^{n-p}, x^{n-p-1}). \quad (*)$$

Comme pour tout $i \in I$, A_i Δ-accélère (x^n), il en résulte que :

$$\exists\, m_1 \geq m_o+\ell,\ \forall\, n \geq m_1,\ \forall\, i \in I :\ \max_{o\leq p\leq \ell} d(A_i^{(n-p)}, A_i^{n-p-1}) < \varepsilon \max_{o\leq p\leq \ell} d(x^{n-p}, x^{n-p-1}). \qquad (**)$$

D'après $(*)$, $(**)$ on a $\forall\, n \geq m_1$, $\forall\, i \in I$, $\forall\, j \in \bar{I}$: $(D_i^{(n)})$ est vraie, $({}_\ell D_j^{(n)})$ est fausse, par conséquent $\exists\, m_2 \geq m_1$, $\forall\, n \geq m_2$: $i(n) \in I$ et on en déduit à l'aide du lemme 3 que ${}_\ell^3 D(A_1, \ldots, A_k)$ accélère (x^n). Pour les autres transformations, les démonstrations en découlent facilement.

□

Théorème 5

Soient h, ℓ, $q \in \mathbb{N}^*$, $\ell \geq h$, $q \geq h+1$; $S_1, \ldots, S_k \subset \mathrm{Conv}^{**}(E)$, $A_1, \ldots, A_k \in$ Trans (E, E).

Si :

a) $\forall\, (x^n) \in \bigcup_{i=1}^{k} S_i$, $\exists\, \alpha \in\,]0, 1[$, $\exists\, m_o$, $\forall\, n \geq m_o$: $d(x^n, x^{n+1}) \geq \alpha d(x^{n-1}, x^n)$.

b) pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, A_i *accélère et* Δ*-accélère* S_i *et* A_i *est* h*-nette sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

Alors pour tout $f \in \mathbb{K}_o$, *les transformations de suites* ${}_q^f E(A_1, \ldots, A_k)$, ${}_\ell^f D(A_1,\ldots,A_k)$ *accélèrent* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$

Preuve

Nous ne démontrons le théorème que pour ${}_\ell^o D(A_1, \ldots, A_k)$, pour les autres transformations les démonstrations en découlent facilement.

Soit $(x^n) \in \bigcup_{i=1}^{k} S_i$. $\exists\, i_o \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $(x^n) \in S_{i_o}$.

Soit I l'ensemble des indices des transformations qui accélèrent et Δ-accélèrent (x^n). $I \neq \emptyset$ car $i_o \in I$.

Si $\bar{I} = \complement_{\{1,\ldots,k\}} I = \emptyset$ alors d'après le lemme 3 : ${}_\ell^o D(A_1,\ldots,A_k)$ accélère (x^n).

sinon.

Comme pour tout $j \in \bar{I}$, A_j est h-nette sur (x^n), il en résulte que :

$$\exists\, \varepsilon > 0,\ \exists\, m_o,\ \forall\, n \geq m_o,\ \forall\, j \in \bar{I} :\ \max_{o\leq r\leq \ell} d(A_j^{n-r}, A_j^{n-r-1}) \geq \varepsilon\, d(x^n, x^{n-1}). \qquad (.)$$

Comme pour tout $i \in I$, A_i Δ-accélère (x^n), il en résulte que :

$\exists\, m_1 \geq m_o$, $\forall\, n \geq m_1$, $\forall\, i \in I$: $\max\limits_{o \leq r \leq \ell} d(A_i^{n-r}, A_i^{n-r-1}) < \varepsilon . \alpha^{\ell} \max\limits_{o \leq r \leq \ell} d(x^{n-r}, x^{n-r-1})$.

d'autre part $\max\limits_{o \leq r \leq \ell} d(x^{n-r}, x^{n-r-1}) \leq \alpha^{-\ell} d(x^n, x^{n-1})$, par conséquent

$\forall\, n \geq m_1$, $\forall\, i \in I$: $\max\limits_{o \leq r \leq \ell} d(A_i^{n-r}, A_i^{n-r-1}) < \varepsilon\, d(x^n, x^{n-1})$. (..)

D'après (.), (..) : $\forall\, n \geq m_1$, $i(n) \in I$ et on en déduit à l'aide du lemme 3 que ${}_{\ell}^{o}D(A_1, \ldots, A_k)$ accélère (x^n).

$\square$

6 - TRANSFORMATIONS ${}_{q}^{f}M(A_1,\ldots,A_k)$, ${}_{q}^{f}ER(A_1,\ldots,A_k)$, $f \in \mathbb{K}_o$

Soient $q \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \ldots, A_k \in \mathrm{Trans}(E, E)$.

6.0 - Transformations ${}_{q}^{f}M(A_1,\ldots,A_k)$, $f \in \mathbb{K}_o$

Soit $f \in \mathbb{K}_o$

La transformation $A = {}_{q}^{f}M(A_1, \ldots, A_k)$ appliquée à une suite $(x^n) \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} \mathrm{dom}\, A_i$ fonctionne de la manière suivante :

étape $n < q$.

$A^n = A_1^n$

étape $n \geq q$

a) *On considère les relations* $({}_{q}M_i^{(n)})$, $i \in \{1,\ldots,k\}$ *définies par* :

si $\forall\, r \in \{n-q, \ldots, n-1\}$: $x^r \neq x^{r+1}$ on pose :

$$({}_{q}M_i^{(n)}) : \max_{1 \leq j \leq q} \left(\frac{d(A_i^{n-j}, A_i^{n-j+1})}{d(x^{n-j}, x^{n-j+1})}\right) = \min_{1 \leq \ell \leq k} \left(\max_{1 \leq j \leq q} \left(\frac{d(A_{\ell}^{n-j}, A_{\ell}^{n-j+1})}{d(x^{n-j}, x^{n-j+1})}\right)\right).$$

sinon on pose :

$$({}_{q}M_i^{(n)}) : \max_{1 \leq j \leq q} d(A_i^{n-j}, A_i^{n-j+1}) = \min_{1 \leq \ell \leq k} \left(\max_{1 \leq j \leq q} d(A_{\ell}^{n-j}, A_{\ell}^{n-j+1})\right)$$

b) *On calcule les coefficients de décompte* ${}_{q}^{f}m_i(n)$, $i \in \{1, \ldots, k\}$.

c) *On pose* $A^n = A^n_{i(n)}$ *avec* $i(n)$ *est le plus petit indice de* $\{1, \ldots, k\}$ *tel que* $f_{q^m i(n)}(n) = \max\limits_{1\le j\le k} f_{q^m j}(n)$.

Remarque

Pour tout $f \in \mathbb{K}_0$, la transformation de suites ${}^f_qM(A_1, \ldots, A_k)$ est une méthode de sélection entre $A_1, \ldots, A_k$ qui coincide avec la transformation ${}^f_{q-1}D(A_1,\ldots,A_k)$ dans l'ensemble des suites $(x^n) \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} \mathrm{dom}\, A_i$ telles que $\forall\, n \ge q,\ \exists\, r_n \in \{n-q, \ldots, n-1\} : x^{r_n} = x^{r_n+1}$.

6.1 - Transformations ${}^f_qER(A_1, \ldots, A_k)$, $f \in \mathbb{K}_0$

La transformation $A = {}^f_qER(A_1,\ldots,A_k)$ appliquée à une suite $(x^n) \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} \mathrm{dom}\, A_i$ fonctionne comme suite :

étape $n \le q$

$$A^n = A^n_1$$

étape $n \ge q+1$

a) *Pour tout* $i \in \{1,\ldots,k\}$, *on considère la relation* $({}_qER_i^{(n)})$ *définie par :*

Si $\forall\, r \in \{n-q-1, \ldots, n-1\} : x^r \ne x^{r+1}$, *on pose :*

$$({}_qER_i^{(n)}) : \max_{n-q\le \ell,\ell'\le n} \left(\frac{d(A_i^{\ell},A_i^{\ell'})}{\min(d(x^{\ell},x^{\ell-1}),d(x^{\ell'},x^{\ell'-1}))}\right) = \min_{1\le j\le k}\left(\max_{n-q\le \ell,\ell'\le n}\left(\frac{d(A_j^{\ell},A_j^{\ell'})}{\min(d(x^{\ell},x^{\ell-1}),d(x^{\ell'},x^{\ell'-1}))}\right)\right)$$

Sinon

on pose :

$$({}_qER_i^{(n)}) : \max_{n-q\le \ell,\ell'\le n} (d(A_i^{\ell},A_i^{\ell'})) = \mathrm{Min}_{1\le j\le k}\left(\max_{n-q\le \ell,\ell'\le n}(d(A_j^{\ell},A_j^{\ell'}))\right).$$

b) *On calcule les coefficients de décompte* $f_{{}_qEr_i}(n)$, $i \in \{1, \ldots, k\}$.

c) *On pose* $A^n = A^n_{i(n)}$ *où* $i(n)$ *est le plus petit indice de* $\{1, \ldots, k\}$ *vérifiant :*

$$f_{q^{Er}i(n)}(n) = \max_{1 \le j \le k} f_{q^{Er}j}(n).$$

Remarque

Pour tout $f \in \mathbb{K}_o$, la transformation de suites ${}^f_q ER(A_1, \ldots, A_k)$ est une méthode de sélection entre $A_1, \ldots, A_k$, qui coincide avec ${}^f_q E(A_1, \ldots, A_k)$ dans l'ensemble des suites $(x^n) \in \bigcap_{i=1}^{k}$ dom A_i telles que $\forall\, n \ge q+1$, $\exists\, r_n \in \{n-q-1, \ldots, n-1\}$ tel que $x^{r_n} = x^{r_n+1}$.

Théorème 6

Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, $q \ge p$, $S_1, \ldots, S_k \subset \mathrm{Conv}(E)$, $A_1, \ldots, A_k \in \mathrm{Trans}\,(E,E)$.
Si pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, A_i *est exacte sur* S_i *et pseudo-régulière d'ordre* p *sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ *alors les transformations de suites* ${}^f_q ER(A_1,\ldots,A_k)$, ${}^f_q M(A_1, \ldots, A_k)$, $f \in \mathbb{K}_o$ *sont exactes sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

Remarque

Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p \ge 2$, $q < p$, $f \in \mathbb{K}_o - \{1, 2, 3, 6\}$.
Il est possible de montrer à l'aide de contre-exemples que le théorème n'est pas vrai en général pour ${}^f_q M(A_1, \ldots, A_k)$, ${}^f_q ER(A_1, \ldots, A_k)$.

Théorème 7

Soient $f \in \{1, 2, 3, 6\}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $S_1, \ldots, S_k \subset \mathrm{Conv}(E)$, $A_1, \ldots, A_k \in \mathrm{Trans}(E,E)$.
Si pour tout $i \in \{1,\ldots,k\}$, A_i *est exacte sur* S_i *et semi-régulière sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ *alors les transformations de suites* ${}^f_q M(A_1,\ldots,A_k)$, ${}^f_q ER(A_1,\ldots,A_k)$ *sont exactes sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

Définition

Soient $q \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathrm{Trans}\,(E, E)$, $S \subset \mathrm{Conv}^{**}(E)$.

on dit que A *est* [q]*-nette sur* S *ssi pour toute suite* $(x^n) \in S$,

ou bien A *accélère et* Δ*-accélère* (x^n).

ou bien $\exists\ \varepsilon > 0,\ \exists\ n_o,\ \forall\ n \geq n_o\ :\ \max\limits_{1 \leq r \leq q} \left(\dfrac{d(A^{n-r}, A^{n-r+1})}{d(x^{n-r}, x^{n-r+1})}\right) \geq \varepsilon.$

Proposition 14

Soient $q \in \mathbb{N}^*$, $A \in$ Trans (E, E), $S \subset \mathrm{Conv}^{**}(E)$.

1) A *est nette sur* S <=> A *est* [1]*-nette sur* S.

2) *Soit* $q' \in \mathbb{N}^*$, $q' \leq q$.

si A *est* [q']*-nette sur* S *alors* A *est* [q]*-nette sur* S.

3) *Si* $\forall\ (x^n) \in S,\ \exists\ b \in \mathbb{R},\ 0 < b < 1,\ \exists\ n_o,\ \forall\ n \geq n_o\ :\ \dfrac{d(x^n, x^{n+1})}{d(x^{n-1}, x^n)} \geq b$ *alors*

A *est* (q-1)*-nette sur* S => A *est* [q]*-nette sur* S.

4) *Si* $\forall\ (x^n) \in S,\ \exists\ b \in \mathbb{R}^*_+,\ \exists\ n_o,\ \forall\ n \geq n_o\ :\ \dfrac{d(x^n, x^{n+1})}{d(x^{n-1}, x^n)} \leq b$ *alors* :

A *est* [q]*-nette sur* S => A *est* (q-1)*-nette sur* S.

Théorème 8

Soient $q, p \in \mathbb{N}^*$, $q \geq p$, $f \in \mathbb{K}_o$; $S_1, \ldots, S_k \subset \mathrm{Conv}^{**}(E)$; $A_1, \ldots, A_k \in$ Trans(E, E).

Si pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, A_i *accélère et* Δ*-accélère* S_i *et* A_i *est* [p]*-nette sur* $\bigcup\limits_{i=1}^{k} S_i$ *alors* ${}^f_q M(A_1, \ldots, A_k)$ *accélère* $\bigcup\limits_{i=1}^{k} S_i$.

Preuve

Nous ne faisons la démonstration que pour ${}^o_q M(A_1, \ldots, A_k)$, pour les autres cas, les démonstrations en découlent facilement.

D'après 2) de la proposition 14 il suffit de le montrer pour q = p.

Montrons que ${}^o_p M(A_1, \ldots, A_k)$ accélère $\bigcup\limits_{i=1}^{k} S_i$.

Soit $(x^n) \in \bigcup\limits_{i=1}^{k} S_i$, il existe $i_o \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $(x^n) \in S_{i_o}$.

Soit I l'ensemble des indices des transformations qui accélèrent et Δ-accélèrent (x^n).

$I \neq \emptyset$ car $i_o \in I$.

Si $\bar{I} = \complement^{I}_{\{1,\dots,k\}} = \emptyset$ alors d'après le lemme 3, ${}^{o}_{p}M(A_1, \dots, A_k)$ accélère (x^n).

Sinon.

Soit $j \in \bar{I}$. A_j étant [p]-nette sur (x^n) par conséquent $\exists\, \varepsilon_j > 0$, $\exists\, n_j$,

$$\forall\, n \geq n_j : \max_{1\leq r\leq p} \left(\frac{d(A_j^{n-r}, A_j^{n-r+1})}{d(x^{n-r}, x^{n-r+1})}\right) \geq \varepsilon_j.$$

Posons $\varepsilon = \min_{j\in\bar{I}} \varepsilon_j$, $m_o = \max_{j\in\bar{I}} n_j$.

$$\forall\, n \geq m_o,\ \forall\, j \in \bar{I} : \max_{1\leq r\leq p} \left(\frac{d(A_j^{n-r}, A_j^{n-r+1})}{d(x^{n-r}, x^{n-r+1})}\right) \geq \varepsilon. \qquad (*)$$

Comme pour tout $i \in I$, A_i Δ-accélère (x^n), il en résulte que :

$$\exists\, m_1 \geq m_o,\ \forall\, n \geq m_1,\ \forall\, i \in I : \max_{1\leq r\leq p} \left(\frac{d(A_i^{n-r}, A_i^{n-r+1})}{d(x^{n-r}, x^{n-r+1})}\right) < \varepsilon. \qquad (**)$$

D'après $(*)$, $(**)$: $\forall\, n \geq m_1$, $i(n) \in I$ par suite d'après le lemme 3 ${}^{o}_{p}M(A_1, \dots, A_k)$ accélère (x^n).

□

Théorème 9

Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, $q \geq p$, $f \in \mathbb{K}_o$, $S_1, \dots, S_k \subset \mathrm{Conv}^{**}(E)$, $A_1, \dots, A_K \in \mathrm{Trans}(E,E)$ *si*

a) $\forall\, (x^n) \in \bigcup_{i=1}^{k} S_i$, $\exists\, \lambda \in]0, 1[$, $\exists\, \mu \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists\, n_o$, $\forall\, n \geq n_o$:

$$\lambda \leq \frac{d(x^n, x^{n+1})}{d(x^{n-1}, x^n)} \leq \mu.$$

b) Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, A_i *accélère et* Δ*-accélère* S_i *et* A_i *est* [p]-*nette sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

alors

la transformation de suites ${}^{f}_{q}ER(A_1,\dots,A_k)$ *accélère* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

La démonstration est semblable à celle du théorème 8.

Remarque

Pour $q < p$, les théorèmes 8, 9 ne peuvent rien affirmer pour les transformations ${}^{f}_{q}ER(A_1,\dots,A_k)$, ${}^{f}_{q}M(A_1,\dots,A_k)$, $f \in \mathbb{K}_o$, en fait voici un contre-exemple.

$E = \mathbb{R}$, $k = 2$, $p = 2$, $q = 1$.

Soient $S_1 = \{(1+(\frac{1}{2})^n)\}$, $S_2 = \{(\frac{1}{2} + (\frac{1}{4})^n)\}$.

Soient A_1, A_2 2 transformations de suites définies par :

$\forall\ (x^n) \in \mathrm{conv}(\mathbb{R})$:

$$A_1(x^n) = \left|\begin{array}{l} (1) \quad \text{si } \lim x^n = 1 \\ \\ (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{1}{2} + (\frac{1}{4})^{2n}, \frac{1}{2} + (\frac{1}{4})^{2n}, \dots) \text{ si } \lim x^n \neq 1 \end{array}\right.$$

$$A_2(x^n) = \left|\begin{array}{l} (\frac{1}{2} + (\frac{1}{8})^n) \text{ si } \lim x^n = \frac{1}{2} \\ \\ (1) \quad \text{si } \lim x^n \neq \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Les conditions des théorèmes 8, 9 sont vérifiées, cependant les transformations de suites ${}^{f}_{1}ER(A_1, \dots, A_k)$, ${}^{f}_{1}M(A_1, \dots, A_k)$ n'accélèrent pas $(\frac{1}{2} + (\frac{1}{4})^n)$.

7 - TRANSFORMATIONS ${}^{f}_{((U_n),p,q)}GV(A_1,\dots,A_k)$, $f \in \mathbb{K}_o$

Soient $p \in \mathbb{R}^*_+$; $k, q \in \mathbb{N}^*$; $(\alpha_1^{n,i}, \dots, \alpha_q^{n,i}) \in ((\mathbb{R}^*_+)^q)^{\mathbb{N}}$, $i \in \{1, \dots, k\}$ telles que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ i \in \{1, \dots, k\}$: $\sum_{j=1}^{q} \alpha_j^{n,i} = 1$.

On note par (U_n) la suite de terme général $U_n = ((\alpha_1^{n,1},\dots,\alpha_q^{n,1}),\dots,(\alpha_1^{n,k},\dots,\alpha_q^{n,k}))$

Soient $A_1, \dots, A_k$, k transformations de suites de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E^{\mathbb{N}}$, $\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{dom}\, A_i \neq \emptyset$; $f \in \mathbb{K}_o$ (§ 2).

La transformation de suites $A = {}^{f}_{((U_n),p,q)}GV(A_1,\dots,A_k)$ appliquée à une suite $(x^n) \in \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{dom}\, A_i$, fonctionne de la manière suivante :

<u>étape $n < q$</u>

$A^n = A_1^n$

<u>*étape $n \geq q$*</u>

a) On considère les relations $({}_{(U_n,p,q)}GV_i^{(n)})$, $i \in \{1, \ldots, k\}$ *définies par :*

$$({}_{(U_n,p,q)}GV_i^{(n)}) : [\sum_{j=1}^{q} \alpha_j^{n,i}(d(A_i^{n-j},A_i^{n-j+1}))^p] = \min_{1\leq \ell \leq k} [\sum_{j=1}^{q} \alpha_j^{n,\ell}(d(A_\ell^{n-j},A_\ell^{n-j+1}))^p]$$

(*) *b) On calcule les coefficients de décompte* ${}_{(U_n,p,q)}^{\;f}gV_i(n)$, $i \in \{1, \ldots, k\}$.

c) On pose $A^n = A_{i(n)}^n$ *avec* $i(n)$ *est le plus petit indice de* $\{1, \ldots, k\}$

vérifiant $\quad {}_{(U_n,p,q)}^{\;f}gV_{i(n)} = \max_{1\leq j\leq k} {}_{(U_n,p,q)}^{\;f}gV_j(n)$.

<u>Remarque</u>

La transformation $A = {}_{((U_n),p,q)}^{\;f}GV(A_1, \ldots, A_k)$ est la composée de la transformation $T_{(A_1, \ldots, A_k)}$ (§ 4) et de la méthode de sélection entre k suites qui appliquée à une suite $(A_1^n, \ldots, A_k^n) \in (E^k)^{\mathbb{N}}$ associe la suite $(A_{i(n)}^n)$ suivant le schéma (*).

<u>*Théorème 10*</u>

Soient $S_1,\ldots,S_k \subset \mathrm{Conv}(E)$; $A_1,\ldots,A_k \in \mathrm{Trans}(E,E)$

Si pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, A_i *est exacte sur* S_i *et pseudo-régulière d'ordre* q *sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ *alors pour tout* $f \in \mathbb{K}_{k^o}$, *la transformation de suites* ${}_{((U_n),p,q)}^{\;f}GV(A_1, \ldots, A_k)$ est exacte sur $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

<u>Preuve</u>

Nous n'indiquons la démonstration que pour $A = {}_{((U_n),p,q)}^{\;o}GV(A_1,\ldots,A_k)$, pour les autres cas, les démonstrations en découlent facilement.

Soit $(x^n) \in \bigcup_{i=1}^{k} S_i$, $\exists\, i_o \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $(x^n) \in S_{i_o}$.

Soit I l'ensemble des indices des transformations exactes sur (x^n).

$I \neq 0$ car $i_o \in I$, par suite $\exists\, m_o, \forall\, n \geq m_o, \forall\, i \in I : \sum_{j=1}^{q} \alpha_j^{n,i}(d(A_i^{n-j},A_i^{n-j+1}))^p = 0$.(

Si $\bar{I} = \complement_{\{1,\ldots,k\}}^{I} = \emptyset$ alors A est exacte sur (x^n).

Sinon

soit $j \in \bar{I}$, A_j étant pseudo-régulière d'ordre q sur (x^n), par conséquent

$\exists\, m_j \geq m_o, \forall\, n \geq m_j : \sum_{\ell=1}^{q} \alpha_\ell^{n,j}(d(A_j^{n-\ell},A_j^{n-\ell+1}))^p > 0.$

Soit $n_o = \max_{j \in \bar{I}} m_j$; $\forall\, n \geq n_o, \forall\, j \in \bar{I} : \sum_{\ell=1}^{q} \alpha_\ell^{n,j}(d(A_j^{n-\ell},A_j^{n-\ell+1}))^p > 0$. (**)

D'après (*), (**) : $\forall\, n \geq n_o$, $i(n) \in I$, par conséquent A est exacte sur (x^n).

□

Remarque

Si on suppose que chaque transformation A_i est exacte sur S_i, pseudo-régulière d'ordre $\ell > q$ alors on ne peut rien affirmer pour les transformations $^{f}_{((U_n),p,q)}GV(A_1,\ldots,A_k)$, $f \in \mathbb{K}_o - \{1,2,3,6\}$, en fait on montre à l'aide de contre-exemples qu'elles ne sont pas exactes sur $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

Théorème 11

Soient $S_1, \ldots, S_k \subset$ Conv(E) ; $A_1, \ldots, A_k \in$ Trans (E,E) ; $f \in \{1,2,3,6\}$.

Si pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, A_i *est exacte sur* S_i, *semi-régulière sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ *alors* $^{f}_{((U_n),p,q)}GV(A_1,\ldots,A_k)$ *est exacte sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

Nous dirons que la suite (U_n) vérifie la condition (m) ssi

$\exists\, \lambda > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, i \in \{1, \ldots, k\}, \forall\, j \in \{1, \ldots, q\}\ \alpha_j^{n,i} \geq \lambda.$

Théorème 12

Soient $S_1, \ldots, S_k \subset \mathrm{Conv}^{**}(E)$; $A_1, \ldots, A_k \in$ Trans (E,E).

si

a) *la suite* (U_n) *vérifie la condition*(m).

b) *Pour tout* $i \in \{1, \ldots, k\}$, A_i *accélère et* Δ-*accélère* S_i, A_i *est nette sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$

alors pour tout $f \in \mathbb{K}_o$, *la transformation de suites* ${}_{((U_n),p,q)}^{\;f}GV(A_1,\ldots,A_k)$ *accélère* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

Démonstration

Nous ne démontrons le théorème que pour $A = {}_{((U_n),p,q)}^{\;o}GV(A_1, \ldots, A_k)$.

Pour les autres cas, les démonstrations en découlent facilement.

Soit $(x^n) \in \bigcup_{i=1}^{k} S_i$. $\exists\, i_o \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $(x^n) \in S_{i_o}$.

Soit I l'ensemble des indices des transformations qui accélèrent et Δ-accélèrent (x^n). $I \neq \emptyset$, car $i_o \in I$.

si $\bar{I} = \complement_{\{1,\ldots,k\}}^{I} = \emptyset$ alors, on en déduit à l'aide du lemme 3 que la transformation A accélère (x^n).

Sinon

soit $j \in \bar{I}$, A_j étant nette sur (x^n), par conséquent : $\exists\, \varepsilon_j > 0$, $\exists\, n_j$, $\forall\, n \geq n_j$: $d(A_j^n, A_j^{n+1}) \geq \varepsilon_j\, d(x^n, x^{n+1})$, par suite pour tout $n \geq n_j+q$:

$\sum_{r=1}^{q} \alpha_r^{n,j}(d(A_j^{n-r}, A_j^{n-r+1}))^p \geq \varepsilon_j^p \sum_{r=1}^{q} \alpha_r^{n,j}(d(x^{n-r},x^{n-r+1}))^p$. D'après a) du théorème 12, $\exists\, \lambda > 0$ tel que $\forall\, i \in \{1, \ldots, k\}$, $\forall\, r \in \{1, \ldots, q\}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $\alpha_r^{n,i} \geq \lambda$; par suite $\forall\, n \geq n_j+q$: $\sum_{r=1}^{q} \alpha_r^{n,j}(d(A_j^{n-r},A_j^{n-r+1}))^p \geq \lambda\varepsilon_j^p \sum_{r=1}^{q} (d(x^{n-r}, x^{n-r+1}))^p$.

Soit $\varepsilon = \min_{j\in\bar{I}} \varepsilon_j$, $m_o = q+\max_{j\in\bar{I}} n_j$.

$$\forall\, n \geq m_o,\ \forall\, j \in \bar{I} : \sum_{r=1}^{q} \alpha_r^{n,j}(d(A_j^{n-r}, A_j^{n-r+1}))^p \geq \lambda\varepsilon^p \sum_{r=1}^{q} (d(x^{n-r},x^{n-r+1}))^p \quad (*)$$

soit $\varepsilon' \in \left]0, \lambda^{\frac{1}{p}}\varepsilon\right[$.

Comme pour tout $i \in I$, A_i Δ-accélère (x^n), il en résulte que :

$$\exists\, m_1 \geq m_o,\ \forall\, n \geq m_1.\ \forall\, i \in I,\ \sum_{r=1}^{q} \alpha_r^{n,i}(d(A_i^{n-r},A_i^{n-r+1})^p \leq \varepsilon'^p \sum_{r=1}^{q} (d(x^{n-r},x^{n-r+1}))^p < \beta^n \quad (**)$$

avec $\beta^n = \lambda\varepsilon^p \sum_{r=1}^{q} (d(x^{n-r},x^{n-r+1}))^p$.

D'après (*), (**), $\forall\, n \geq m_1$; $i(n) \in I$, par conséquent d'après le lemme 3, A accélère (x^n).

$\square$

Remarque

Si la suite $U_n = ((\alpha_1^{n,1},\ldots,\alpha_q^{n,1}), \ldots, (\alpha_1^{n,k},\ldots,\alpha_q^{n,k}))$ est telle que :

$\exists\ n_o,\ \forall\ n \geq n_o,\ \forall\ i,\ j \in \{1, \ldots, k\},\ \forall\ r \in \{1, \ldots, q\}\ ;\ \alpha_r^{n,i} = \alpha_r^{n,j}$ alors le théorème 12 est encore vrai sans que la condition a) soit satisfaite.

Théorème 13

Soient $S_1, \ldots, S_k \subset \mathrm{Conv}^{**}(E)$; $A_1, \ldots, A_k \in \mathrm{Trans}\ (E, E)$.

Si :

a) la suite (U_n) *vérifie la condition* (m).

b) $\forall\ (x^n) \in \bigcup_{i=1}^{k^n} S_i,\ \exists\ \gamma \in]0, 1[,\ \exists\ \mu \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ n_o,\ \forall\ n \geq n_o\ :\ \gamma \leq \dfrac{d(x^n,x^{n+1})}{d(x^{n-1},x^n)} \leq \mu$

c) Pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, A_i *accélère et* Δ*-accélère* S_i *et* A_i *est* $[q]$*-nette sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

alors :

Pour tout $f \in \mathbb{K}_o$, *la transformation de suites* ${}_{((U_n),p,q)}^{\ f}GV(A_1,\ldots,A_k)$ *accélère* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

Remarque

Dans la définition de la suite (U_n) présentée au début du paragraphe, nous avons supposé que : $\forall\ i \in \{1, \ldots, k\},\ \forall\ r \in \{1, \ldots, q\},\ \forall\ n \in \mathbb{N}$:

$\alpha_r^{n,i} > 0,\ \sum_{r=1}^{q} \alpha_r^{n,i} = 1$; on peut remplacer ces dernières conditions par :

$\exists\ b > 0,\ \exists\ n_o,\ \forall\ n \geq n_o,\ \forall\ i \in \{1, \ldots, k\},\ \forall\ r \in \{1, \ldots, q\}\ :\ \alpha_r^{n,i} > 0$,

$\sum_{r=1}^{q} \alpha_r^{n,i} \leq b$, en préservant les résultats des théorèmes 10, 11, 12, 13.

8 - TRANSFORMATIONS ${}_{((U_n),q)}^{\ f}RV(A_1,\ldots,A_k)$, ${}_{((U_n),q)}^{\ f}RC(A_1,\ldots,A_k)$, $f \in \mathbb{K}_o$

Soient $f \in \mathbb{K}_o$, $q \in \mathbb{N}^*$; $(\alpha_1^{n,i}, \ldots, \alpha_q^{n,i}) \in ((\mathbb{R}_+^*)^q)^{\mathbb{N}}$, $i \in \{1,\ldots,k\}$ avec $\sum_{r=1}^{q} \alpha_r^{n,i} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \ldots, k\}$.

On pose $U_n = ((\alpha_1^{n,1}, \ldots, \alpha_q^{n,1}), \ldots_k, (\alpha_1^{n,k}, \ldots, \alpha_q^{n,k}))$.

Soient $A_1, \ldots, A_k \in$ Trans (E, E) $\bigcap_{i=1}^{k}$ dom $A_i \neq \emptyset$.

8.0 - Transformation $_{((U_n),q)}^{\;f}RV(A_1, \ldots, A_k)$

La transformation $A = {}_{((U_n),q)}^{\;f}RV(A_1,\ldots,A_k)$ appliquée à une suite $(x^n) \in \bigcap_{i=1}$ dom A_i fonctionne de la façon suivante :

étape $n < q$

$A^n = A_1^n$

étape $n \geq q$

a) *On considère les relations* $({}_{(U_n,q)}RV_i^{(n)})$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, *définies par :*

Si $\forall\, r \in \{n-q, \ldots, n-1\} : x^r \neq x^{r+1}$ *on pose :*

$$({}_{(U_n,q)}RV_i^{(n)}) : \left(\sum_{r=1}^{q} \alpha_r^{n,i} \frac{d(A_i^{n-r}, A_i^{n-r+1})}{d(x^{n-r}, x^{n-r+1})}\right) = \min_{1\leq j\leq k} \left(\sum_{r=1}^{q} \alpha_r^{n,j} \frac{d(A_j^{n-r}, A_j^{n-r+1})}{d(x^{n-r}, x^{n-r+1})}\right).$$

Sinon

on pose

$$({}_{(U_n,q)}RV_i^{(n)}) : \left(\sum_{r=1}^{q} \alpha_r^{n,i} d(A_i^{n-r}, A_i^{n-r+1})\right) = \min_{1\leq j\leq k} \left(\sum_{r=1}^{q} \alpha_r^{n,j} d(A_j^{n-r}, A_j^{n-r+1})\right).$$

b) *on calcule les coefficients de décompte* ${}_{(U_n,q)}^{\;f}rv_i(n)$, $i \in \{1, \ldots, k\}$.

c) *on pose* $A^n = A_{i(n)}^n$ *avec* $i(n)$ *est le plus petit indice de* $\{1, \ldots, k\}$ *vérifiant* ${}_{(U_n,q)}^{\;f}rv_{i(n)}(n) = \max_{1\leq j\leq k} {}_{(U_n,q)}^{\;f}rv_j(n)$.

Remarque

${}_{((U_n),q)}^{\;f}RV(A_1,\ldots,A_k)$ est une méthode de sélection entre $A_1, \ldots, A_k$ qui coincide avec ${}_{((U_n),1,q)}^{\;f}GV(A_1, \ldots, A_k)$ dans l'ensemble des suites $(x^n) \in \bigcap_{i=1}^{k}$ dom A_i telles que $\forall\, n \geq q$, $\exists\, r_n \in \{n-q, \ldots, n-1\} : x^{r_n} = x^{r_n+1}$.

8.1 - Transformation $_{((U_n),q)}^{f}RC(A_1, \ldots, A_k)$

$A = {}_{((U_n),q)}^{f}RC(A_1, \ldots, A_k)$ appliquée à une suite $(x^n) \in \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{dom}\, A_i$ fonctionne comme suit :

étape $n < q$

$$A^n = A_1^n$$

étape $n \geq q$

a) *On considère les relations* $({}_{(U_n,q)}RC_i^{(n)})$, $i \in \{1, \ldots, k\}$ *définies par, s'il existe* $r \in \{n-q, \ldots, n-1\}$ *tel que* $x^r \neq x^{r+1}$, on pose :

$$({}_{(U_n,q)}RC_i^{(n)}) : \left(\frac{\sum_{r=1}^{q} \alpha_r^{n,i} d(A_i^{n-r}, A_i^{n-r+1})}{\sum_{r=1}^{q} \alpha_r^{n,i} d(x^{n-r}, x^{n-r+1})}\right) = \min_{1 \leq j \leq k} \left(\frac{\sum_{r=1}^{q} \alpha_r^{n,j} d(A_j^{n-r}, A_j^{n-r+1})}{\sum_{r=1}^{q} \alpha_r^{n,j} d(x^{n-r}, x^{n-r+1})}\right)$$

Sinon

on pose :

$$({}_{(U_n,q)}RC_i^{(n)}) : \left(\sum_{r=1}^{q} \alpha_r^{n,i} d(A_i^{n-r}, A_i^{n-r+1})\right) = \min_{1 \leq j \leq k} \left(\sum_{r=1}^{q} \alpha_r^{n,j} d(A_j^{n-r}, A_j^{n-r+1})\right)$$

b) *On calcule les coefficients de décompte* ${}_{(U_n,q)}^{f}rc_i(n)$, $i \in \{1, \ldots, k\}$.

c) *On pose* $A^n = A_{i(n)}^n$ *avec* $i(n)$ *est le plus petit indice de* $\{1, \ldots, k\}$ *vérifiant* ${}_{(U_n,q)}^{f}rc_{i(n)}(n) = \max_{1 \leq j \leq k} {}_{(U_n,q)}^{f}rc_j(n)$.

La transformation de suite $A = {}_{((U_n),q)}^{f}RC(A_1, \ldots, A_k)$ est une méthode de sélection entre $A_1, \ldots, A_k$.

On démontre facilement les théorèmes suivants :

Théorème 14

Soient $S_1, \ldots, S_k \subset \mathrm{Conv}(E)$; $A_1, \ldots, A_k \in \mathrm{Trans}\ (E, E)$; $f \in \mathbb{K}_0$.

Si pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, A_i *est exacte sur* S_i, *pseudo-régulière d'ordre* q *sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ *alors les transformations de suites* ${}_{((U_n),q)}^{f}RV(A_1, \ldots, A_k)$,

${}^{f}_{((U_n),q)}RC(A_1, \dots, A_k)$ *sont exactes sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

<u>*Théorème 15*</u>

Soient $S_1, \dots, S_k \subset \text{Conv}(E)$; $A_1, \dots, A_k \in \text{Trans}(E, E)$, $f \in \{1,2,3,6\}$.
Si pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, A_i *est exacte sur* S_i, *semi-régulière sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$
alors ${}^{f}_{((U_n),q)}RV(A_1, \dots, A_k)$, ${}^{f}_{((U_n),q)}RC(A_1, \dots, A_k)$ *sont exactes sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

<u>*Théorème 16*</u>

Soient $S_1, \dots, S_k \subset \text{Conv}^{**}(E)$, $A_1, \dots, A_k \in \text{Trans}(E, E)$.
Si pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, A_i *accélère et* Δ*-accélère* S_i *et* A_i *est nette sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ *alors pour tout* $f \in \mathbb{K}_o$, *les transformations de suites* ${}^{f}_{((U_n),q)}RV(A_1, \dots, A_k)$, ${}^{f}_{((U_n),q)}RC(A_1, \dots, A_k)$ *accélèrent* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

<u>Remarques</u>

1) Dans le théorème 16 nous n'avons pas besoin de la condition (m).

2) Les résultats des théorèmes 14, 15, 16 restent vrais pour les transformations ${}^{f}_{((U_n),q)}RC(A_1, \dots, A_k)$ pour lesquelles la suite $U_n = ((\alpha_1^{n,1}, \dots, \alpha_q^{n,1}), \dots, (\alpha_1^{n,k}, \dots, \alpha_q^{n,k}))$ vérifie :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $\forall r \in \{1, \dots, q\}$, $\alpha_r^{n,i} > 0$.

<u>*Théorème 17*</u>

Soient $S_1, \dots, S_k \subset \text{Conv}^{**}(E)$; $A_1, \dots, A_k \in \text{Trans}(E, E)$.

Si :

a) $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, A_i *accélère et* Δ*-accélère* S_i *et* A_i *est* $[q]$*-nette sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$

b) (U_n) *vérifie la condition* (m)

alors la transformation de suites ${}^{f}_{((U_n),q)}RV(A_1, \dots, A_k)$, $f \in \mathbb{K}_o$ *accélèrent* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

et si de plus :

c) $\forall\ (x^n) \in \bigcup_{i=1}^{k} S_i,\ \exists\ c \in]0,1[,\ \exists\ d \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ n_o,\ \forall\ n \geq n_o\ :\ c \leq \dfrac{d(x^n,x^{n+1})}{d(x^{n-1},x^n)} \leq d$

alors la transformation de suites $\overset{f}{((U_n),q)}RC(A_1,\ldots,A_k)$, $f \in \mathbb{K}_o$ *accélèrent* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

9 - ALGORITHMES D'ECHANGE AUTOMATIQUE

Dans ce paragraphe nous proposons des méthodes de sélection entre k suites dont les algorithmes (appelés algorithmes d'échange automatique) qui consistent à associer à toute suite $(A_1^n, \ldots, A_k^n) \in (E^k)^{\mathbb{N}}$, une suite $(A_{i(n)}^n)$ telle que à chaque étape n le choix de la réponse $A_{i(n)}^n$ parmi $A_1^n, \ldots, A_k^n$ s'effectue à l'aide de tests sur un ensemble de points défini antérieurement.

Soient $f \in \mathbb{K}_o$ (§ 2) ; $a \in]0, 1]$; $(\alpha_1^n, \ldots, \alpha_k^n) \in (\mathbb{R}^k)^{\mathbb{N}}$ avec $a \leq \alpha_i^n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \ldots, k\}$.

. Algorithme E C $(f, a, (\alpha_1^n, \ldots, \alpha_k^n))$.

L'algorithme E C $(f, a, (\alpha_1^n, \ldots, \alpha_k^n))$ appliqué à une suite $(A_1^n, \ldots, A_k^n) \in (E^k)^{\mathbb{N}}$ fonctionne de la manière suivante :

étape 0

i) $B^o = C^o = \{B_1^o, \ldots, B_k^o\}$ avec $B_i^o = A_i^o$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$.

ii) $T^o = A_1^o$

étape $n \geq 1$

1) *On considère les relations* $(EC_i^{(n)})$, $i \in \{1. \ldots, k\}$ *définies par :*

$(EC_i^{(n)}) : (\alpha_i^n d(A_i^n, A_i^{n-1}) + (1-\alpha_i^n) d(A_i^n, C^{n-1})) = \min\limits_{1 \leq j \leq k} (\alpha_j^n d(A_j^n, A_j^{n-1}) + (1-\alpha_j^n) d(A_j^n, C^{n-1}))$

2) *On calcule les coefficients de décompte* $f_{EC_i^{(n)}}, i \in \{1,\ldots,k\}$.

3) *On pose* $T^n = A_{i(n)}^n$ *avec* $i(n)$ *est le plus petit indice de* $\{1,\ldots, k\}$

vérifiant $f_{EC_{i(n)}}(n) = \max_{1 \le j \le k} f_{EC_j}(n)$.

4) *Pour tout* $i \in \{1, \ldots, k\}$ *on pose :*

$$B_i^n = \begin{cases} B_i^{n-1} & \textit{si } d(B_i^{n-1}, T^n) < d(A_i^n, T^n) \\ \\ A_i^n & \textit{sinon} \end{cases}$$

5) *On pose :*

i) $B^n = \{B_1^n, \ldots, B_k^n\}$

ii) $C^n = B^n \cup \{A_1^n, \ldots, A_k^n\}$

On note par ${}_{(a,(\alpha_1^n,\ldots,\alpha_k^n))}{}^{f}EC$ la transformation de k suites qui à $(A_1^n,\ldots,A_k^n) \in (E^k)^{\mathbb{N}}$ fait correspondre la suite (T^n).

Remarques

1) Si $\alpha_i^n = 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $n \in \mathbb{N}$ alors les relations $(EC_i^{(n)})$ se réduisent aux relations $(D_i^{(n)})$.

2) L'algorithme $EC(f, a(\alpha_1^n, \ldots, \alpha_k^n))$ nécessite à chaque étape au plus $2K^2+K$ calculs de distance entre 2 points.

On démontre facilement le résultat suivant :

Proposition 15

1) $\hat{\hat{S}}$ *est devinable par* ${}_{(a,(\alpha_1^n,\ldots,\alpha_k^n))}{}^{f}EC$ *pour tout* $f \in \mathbb{K}_o$.

2) $\hat{S}$ *est devinable par* ${}_{(a,(\alpha_1^n,\ldots,\alpha_k^n))}{}^{f}EC$ *pour tout* $f \in \{1,2,3,6\}$

Soient $A_1, \ldots, A_k \in \mathrm{Trans}(E, E)$ avec $\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{dom}\, A_i \neq \emptyset$.

On note par ${}_{(a,(\alpha_1^n,\ldots,\alpha_k^n))}{}^{f}EC(A_1,\ldots,A_k)$, la transformation composée de la transformation à k réponses $T_{(A_1,\ldots,A_k)}$ et de la méthode de sélection entre k suites ${}^{f}_{(a,(\alpha_1^n,\ldots,\alpha_k^n))}EC$.

Théorème 18

Soient $S_1, \ldots, S_k \subset \mathrm{Conv}(E)$, $A_1, \ldots, A_k \in \mathrm{Trans}\ (E, E)$.

Si pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, A_i *est exacte sur* S_i, *pseudo-régulière sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ *alors pour tout* $f \in \mathbb{K}_o$, *la transformation de suites* ${}^{f}_{(a,(\alpha_1^n,\ldots,\alpha_k^n))}EC(A_1,\ldots,A_k)$ *est exacte sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

Théorème 19

Soient $S_1, \ldots, S_k \subset \mathrm{Conv}(E)$, $A_1, \ldots, A_k \in \mathrm{Trans}(E, E)$.

Si pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, A_i *est exacte sur* S_i, *semi-régulière sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ *alors pour tout* $f \in \{1, 2, 3, 6\}$, *la transformation de suites* ${}^{f}_{(a,(\alpha_1^n,\ldots,\alpha_k^n))}EC(A_1,\ldots,A_k)$ *est exacte sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$

Les théorèmes 18, 19 en découlent facilement de la proposition 17.

Théorème 20

Soient $S_1, \ldots, S_k \subset \mathrm{Conv}^{**}(E)$; $A_1, \ldots, A_k \in \mathrm{Trans}\ (E, E)$

Si pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, A_i *accélère et* Δ*-accélère* S_i *et* A_i *est nette sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ *alors pour tout* $f \in \mathbb{K}_o$, *la transformation de suites* ${}^{f}_{(a,(\alpha_1^n,\ldots,\alpha_k^n))}EC(A_1,\ldots,A_k)$ *accélère* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

Preuve

Nous n'indiquons la démonstration que pour $T = {}^{o}_{(a,(\alpha_1^n,\ldots,\alpha_k^n))}EC(A_1,\ldots,A_k)$

pour les autres cas, les démonstrations en découlent facilement.

Soit $(x^n) \in \bigcup_{i=1}^{k} S_i$, $\exists\ i_o \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $(x^n) \in S_{i_o}$.

Soit I l'ensemble des indices des transformations qui accélèrent et Δ-accélèrent (x^n). $I \neq \emptyset$ car $i_o \in I$.

Si $\bar{I} = \complement^{I}_{\{1,2,\dots,k\}} = \emptyset$ alors, d'après le lemme 3, on en déduit que T accélère (x^n).

Sinon.

Comme pour tout $j \in \bar{I}$, A_j est nette sur (x^n), il en résulte que :

$$\exists\ \varepsilon > 0,\ \exists\ m_o,\ \forall\ n \geq m_o,\ \forall\ j \in \bar{I} :\ \alpha_j^n d(A_j^n, A_j^{n-1}) + (1-\alpha_j^n) d(A_j^n, C^{n-1}) \geq a.\varepsilon d(x^{n-1}, x^n). \quad (*)$$

Comme pour tout $i \in I$, A_i Δ-accélère (x^n), il en résulte que :

$$\exists\ m_1 \geq m_o,\ \forall\ n \geq m_1,\ \forall\ i \in I :\ \alpha_i^n d(A_i^n, A_i^{n-1}) + (1-\alpha_i^n) d(A_i^n, C^{n-1}) < a.\varepsilon d(x^{n-1}, x^n). \quad (**)$$

D'après $(*)$, $(**)$: $\forall\ n \geq m_1$, $i(n) \in I$ par suite d'après le lemme 3 T accélère (x^n).

$\square$

CHAPITRE IV

COMPARAISON NUMERIQUE DES METHODES DE SELECTION DU CHAPITRE III

INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous testons les méthodes de sélection vues au chapitre 3 sur 6 transformations normales déduites de 6 procédés d'accélération de la convergence : procédé de richardson, ε-algorithme . ρ-algorithme, procédé d'overholt, θ-algorithme, Δ^2 itérée.

Nous allons prendre des suites dans les 5 familles de suites suivantes :

- suites monotones d'ordres supérieures à 1
- suites monotones à comportement logarithmique
- suites à convergence linéaire
- séries alternées
- séries divergentes.

Dans les expériences numériques nous indiquons la suite des rangs(*) des réponses choisies par les différentes méthodes de sélection.

La comparaison de 2 méthodes de sélection est basée sur la comparaison des suites de rangs associées.

Nous concluons cette partie par des remarques qui donnent une idée sur l'ensemble des méthodes de sélection et les transformations en compétition.

(*) *Les distances des 6 réponses à la limite supposée connue de la suite transformée, sont classées par ordre croissant, nous appelons rang d'une réponse, le numéro du classement de la distance de cette réponse à la limite.*

DEFINITIONS ET NOTATIONS

A partir des 6 procédés d'accélération de la convergence θ-algorithme, ε-algorithme, ρ-algorithme, procédé d'overholt, procédé de richardson, Δ^2 itérée, on définit les transformations de suites $A_1, \ldots, A_6$ par :

A_1 : la transformation de suites qui à $(x^n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ fait correspondre la suite $(T_o^o, T_1^o, \ldots, T_{10}^o, T_{10}^1, \ldots, T_{10}^n, \ldots)$, obtenue en appliquant le procédé de richardson à (x^n). [1], [2], [5]

A_2 : $(x^n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow (\varepsilon_o^o, \varepsilon_o^1, \varepsilon_2^o, \varepsilon_2^1, \ldots, \varepsilon_{10}^o, \varepsilon_{10}^1, \ldots, \varepsilon_{10}^n, \ldots)$

(ε_k^n) est obtenue en appliquant l'ε-algorithme à (x^n).[1], [5], [6]

A_3 : $(x^n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow (\rho_o^o, \rho_o^1, \rho_2^o, \rho_2^1, \ldots, \rho_{10}^o, \rho_{10}^1, \ldots, \rho_{10}^n, \ldots)$

(ρ_k^n) est obtenue en appliquant le ρ-algorithme à (x^n). [1], [5], [6]

A_4 : $(x^n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow (V_o^o, V_o^1, V_1^o, V_2^o, \ldots, V_{10}^o, V_{10}^1, \ldots, V_{10}^n, \ldots)$

(V_k^n) est obtenue en appliquant le procédé d'overholt à (x^n). [1]

A_5 : $(x^n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow (\theta_o^o, \theta_o^1, \theta_o^2, \theta_2^o, \theta_2^1, \theta_2^2, \ldots, \theta_{10}^o, \theta_{10}^1, \ldots, \theta_{10}^n, \ldots)$

(θ_k^n) est obtenue en appliquant le θ-algorithme à (x^n). [1], [5]

$A_6 = \Delta^2$ itérée. [1]

Soit $q \in \mathbb{N}^*$, on note par :

$C_q = \{0,1,2,3,4,{}^{q}5,6,7,{}^{([q/2]+1,q)}8,9\}$. $[q/2]$ est la partie entière de $q/2$.

EXPERIENCES NUMERIQUES

Dans les expériences numériques, nous allons tester les différentes méthodes de sélection vues au chapitre 3 sur les 6 transformations $A_1, A_2, \ldots, A_6$ dont les réponses sont calculées par les programmes de C. BREZINSKI. Nous prenons $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ resp. $((n)_{n\geq 1})$ comme suite auxiliaire dans richardson resp. (dans le ρ-algorithme).

1 - Suites monotones

1.0 - Suites monotones d'ordres plus grand que 1

1.0.0 - Exemple 1

$$\begin{cases} S_1 = 8 \\ S_{n+1} = 1 + 0.9\ (S_n - 1)^{1,01} \end{cases}$$

$\lim S_n = 1$; (S_n) est accélérée par A_5, A_6.

a) Résultats de $_{(1/2,(1/2,\ldots,1/2))}\overset{o}{E}C(A_1,\ldots,A_6)$

. notation

Dans tous les résultats numériques de la méthode $_{(1/2,(1/2,\ldots,1/2))}\overset{o}{E}C(A_1,\ldots,A_6)$ on note par :

TS(N) : la réponse sélectionnée parmi $A_1^n, \ldots, A_6^n$.

I_1 : l'indice i de la réponse choisie, $i \in \{1, \ldots, 6\}$.

RANG : le rang de la réponse sélectionnée

. Au tableau 1 nous indiquons les 23 étapes de la méthode de sélection $_{(1/2,(1/2,\ldots,1/2))}\overset{o}{E}C(A_1,\ldots,A_6)$.

N	S(N)	I1	TS(N)	Rang
1	.80000000000000D+01	1	.80000000000000D+01	1
2	.742379288229569D+01	2	.742379288229569D+01	2
3	.688995469968707D+01	5	.688995469968707D+01	5
4	.639579676694913D+01	2	.241801686683635D+00	4
5	.593876826513951D+01	5	.108084398312252D+01	2
6	.551645143620734D+01	5	.107250045581265D+01	2
7	.512655680316449D+01	4	.919062024173632D+00	4
8	.476691842499437D+01	5	.100012865874423D+01	1
9	.443548919501550D+01	5	.100011695672366D+01	2
10	.413033619094588D+01	6	.100030566433678D+01	2
11	.384963608443178D+01	6	.100024082179662D+01	2
12	.359167061731307D+01	6	.100037726725993D+01	2
13	.335482215139934D+01	6	.100029509552717D+01	2
14	.313756929802853D+01	5	.100001805057420D+01	1
15	.293848263317498D+01	5	.100000265343631D+01	1
16	.275622050336901D+01	5	.100000783462463D+01	1
17	.258952492718721D+01	5	.100000366718976D+01	1
18	.243721759657378D+01	5	.100000158780312D+01	1
19	.229819598175986D+01	5	.100000996162903D+01	1
20	.217142954306311D+01	5	.100000426249839D+01	1
21	.205595605237342D+01	5	.100000258560063D+01	1
22	.195087802606633D+01	5	.100000254410071D+01	1
23	.185535927543380D+01	5	.100000254700018D+01	1

Tableau 1

Nous voyons sur le tableau ci-dessus qu'à partir de l'étape N=8, la méthode $(1/2,(1/2,\dots,1/2))^{o}EC(A_1,\dots,A_6)$ propose les réponses des transformations A_5, A_6 et à partir de N=14, les réponses choisies sont les meilleures réponses possibles.

b) Dans toute la suite nous n'allons donner les résultats que pour les méthodes de sélection associées aux coefficients de décompte d'indices $f \in \{0, 1, 2, 3, 4, {}^{q}5, 6\}$ car pour $f \in \{7, {}^{([q/2]+1,q)}8, 9\}$ les résultats sont souvent identiques aux résultats de la méthode de sélection associée aux coefficients de décompte d'indice 6.

Aux tableaux 2, 3 nous indiquons les rangs des réponses choisies par les méthodes de sélection ${}^{f}_{q}D(A_1,\dots,A_6)$, $f \in \{0, 1, 2, 3, 4, {}^{q}5, 6\}$.

$q = 1$

f \ N	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	23	23
0	4	2	1	4	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	4	2	2	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	2	2	4	1	1	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	4	4	4	4	1	1	1	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1
4	4	2	5	5	5	1	5	2	2	2	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$^{1}5$	4	4	2	4	4	1	1	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	4	2	1	4	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tableau 2

Les résultats ci-dessus montrent qu'à partir de l'étape N=17 les 7 méthodes de sélection, proposent la meilleure réponse.

$q = 2$

f \ N	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
0	5	3	2	4	4	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	5	5	2	4	4	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	5	3	2	4	4	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	5	5	5	5	4	4	4	4	6	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1
4		5	5	4	4	5	1	2	2	2	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$^{2}5$		5	4	4	4	4	1	1	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	5	3	2	4	4	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tableau 3

Les résultats du tableau 3 montrent que :

a) La transformation des suites ${}^{1}_{2}D(A_1,\ldots,A_6)$ propose la meilleure réponse à partir de N = 10.

b) Par comparaison avec les résultats du tableau 2, les rangs à partir desquels, les méthodes ${}^{f}_{q}D(A_1,\ldots,A_6)$, $f \in \{0,2,3,{}^{2}5,6\}$ proposent la meilleure réponse, sont augmentés avec q.

c) <u>Résultats des méthodes ${}_{2}^{f}E(A_1,\dots,A_6)$, $f \in C_2$</u>

Les résultats des méthodes ${}_{2}^{f}E(A_1, \dots, A_6)$ $f \in C_2$ sont identiques aux résultats des méthodes ${}_{2}^{f}D(A_1, \dots, A_6)$.

d) <u>Résultats des méthodes ${}_{2}^{f}M(A_1,\dots,A_6)$, $f \in C_2$</u>

Les résultats des méthodes ${}_{2}^{f}M(A_1, \dots, A_6)$, $f \in C_2$ sont meilleurs que les résultats des transformations ${}_{2}^{f}D(A_1, \dots, A_6)$, $f \in C_2$.
Les transformations de suites ${}_{2}^{7}M(A_1, \dots, A_6)$, ${}^{(2,2)8}M(A_1, \dots, A_6)$, ${}_{2}^{9}M(A_1, \dots, A_6)$ ont proposées des réponses identiques aux réponses de ${}_{2}^{6}M(A_1, \dots, A_6)$.

e) <u>Méthodes ${}_{2}^{f}ER(A_1, \dots, A_6)$, $f \in C_2$</u>

Les résultats des méthodes ${}_{2}^{f}ER(A_1,\dots,A_6)$, $f \in C_2$ sont meilleurs que les résultats des transformations ${}_{2}^{f}M(A_1, \dots, A_6)$.

f) Les transformations de suites ${}_{((1/2),1,2)}^{f}GV(A_1,\dots,A_6)$, ${}_{((1/2),2)}^{f}RV(A_1,\dots,A_6)$, ${}_{((1/2),2)}^{f}RC(A_1,\dots,A_6)$, $f \in C_2$ ont données les résultats que nous résumons dans le tableau ci-dessous.

f \ N	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
0	2	3	2	2	4	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	5	5	2	1	4	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	5	3	2	2	4	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	5	5	5	5	5	5	1	1	1	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1
4		5	5	5	5	5	1	5	2	2	2	4	1	1	1	1	1	1	1	1
2_5		5	3	1	4	4	1	1	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	5	3	1	2	3	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1

<u>Tableau 4</u>

1.0.1 - <u>Exemple 2</u>

$$S_n = 1 + 3\, e^{-1,4.(1,1)^{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$\lim_{n \to \infty} S_n = 1$

(S_n) est accélérée par A_5, A_6.

a) Résultats de la méthode de sélection $_{(1/2,(1/2,\ldots,1/2))}\overset{o}{EC}(A_1, \ldots, A_6)$

N	S(N)	I1	TS(N)	Rang
1	.173979089182482D+01	1	.173979089182482D+01	1
2	.164314330428093D+01	2	.164314330428093D+01	2
3	.155134876026090D+01	5	.155134876026090D+01	3
4	.140543272658097D+01	5	.129319558444661D+01	2
5	.138630513704306D+01	5	.121247937154176D+01	2
6	.131471062557797D+01	6	.979812339506984D+00	1
7	.125118310311203D+01	1	.510272506511499D+00	3
8	.119600959804527D+01	6	.101779380280738D+01	2
9	.114920826767556D+01	5	.999703255932714D+00	1
10	.111052489616601D+01	5	.999328144438272D+00	1
11	.107945001831541D+01	5	.999394185554604D+00	1
12	.105525750559785D+01	5	.999358618483164D+00	1
13	.103706109771061D+01	5	.999376513729161D+00	1
14	.102388356056248D+01	5	.999379412003125D+00	1
15	.101472975941703D+01	6	.101411190419115D+01	2
16	.100865571769140D+01	5	.999372837841194D+00	2
17	.100482304459204D+01	6	.100000661191935D+01	2
18	.100253478658169D+01	6	.100000656114130D+01	2
19	.100124917499418D+01	6	.100000661010636D+01	2
20	.100057355290626D+01	5	.100000015487443D+01	1
21	.100024362323610D+01	5	.100000015510402D+01	1
22	.100009499012366D+01	5	.100000015590792D+01	1
23	.100003370809218D+01	5	.100000011952478D+01	1

A partir de l'étape N = 8, $_{(1/2,(1/2,\ldots,1/2))}\overset{o}{EC}(A_1,\ldots,A_6)$ propose les réponses des transformations qui accélèrent (S_n).

b) Méthodes $^{f}_{q}D(A_1, \ldots, A_6)$, $q \in \{1, 2, 3\}$, $f \in C_q$.

Pour q = 1 nous avons les résultats suivants :

f \ N	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
0	2	2	1	3	2	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	1	1	1	1
1	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	1	3	2	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	1	1	1	1
3	2	2	2	1	3	1	1	1	1	1	1	1	6	6	2	2	2	2	1	1
4	2	2	3	3	5	1	1	1	1	1	1	6	2	2	2	2	6	1	1	1
$^{1}5$	2	2	2	3	3	1	1	1	1	1	1	1	2	1	2	2	1	1	1	1
6	2	2	1	3	2	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	1	1	1	1

Tableau 5

Pour q = 2, les résultats sont légèrement plus bons que pour q = 1.

Résultats pour q = 3

f \ N	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
0	2	2	2	1	2	2	1	1	1	1	1	2	2	1	1	2	1	1	1	1
1	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	1	2	2	1	1	1	1	1	2	2	1	1	2	1	1	1	1
3	2	2	2	1	1	1	2	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1
4			2	1	3	2	5	1	1	1	1	6	2	1	1	6	1	1	1	1
$^{3}5$				1	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1
6	2	2	2	1	2	2	1	1	1	1	1	2	2	1	1	2	1	1	1	1

Tableau 6

Les résultats des tableaux 5, 6 montrent que l'augmentation de la valeur de q a améliorée le comportement des méthodes de sélection ${}_{q}^{f}D(A_1,\ldots,A_6), f\in C_q$.
Avant de quitter cet exemple nous signalons que les méthodes de sélection ${}_{3}^{f}E(A_1, \ldots, A_6)$, ${}_{3}^{f}M(A_1, \ldots, A_6)$, ${}_{((1/3),3)}^{f}ER(A_1,\ldots,A_6)$, ${}_{((1/3),3)}^{f}RV(A_1,\ldots,A_6)$ $f \in C_3$, ont données des résultats identiques aux résultats des transformations ${}_{3}^{f}D(A_1, \ldots, A_6)$, ainsi que les résultats des méthodes ${}_{((1/3),1,3)}^{f}GV(A_1,\ldots,A_6)$, ${}_{((1/3),3)}^{f}RC(A_1,\ldots,A_6)$, $f \in C_3$ sont identiques.

Remarques

1) Les résultats des méthodes de sélection associées aux coefficients de décompte d'indice f = 1 sont souvent meilleurs que les résultats des méthodes de sélection associées aux coefficients de décompte d'indices $f \in C_q - \{1\}$.

2) Seules les transformations de suites A_5, A_6 sont capables d'accélérer les suites des 2 exemples précédents.

1.1 - Suites monotones à comportement logarithmique

1.1.0 - Exemple 1

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \text{Log}\left(\frac{k+1}{k}\right) . \text{Log}\left(\frac{k+2}{k+1}\right) . \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$\lim S_n = 0.684724788564$

(S_n) est accélérée par A_1, A_5.

a) Résultats de la méthode de sélection $(1/2,(1/2,\ldots,1/2)\overset{\circ}{EC}(A_1,\ldots,A_6)$

N	S(N)	I1	TS(N)	Rang
1	.281046996500608D+00	1	.281046996500608D+00	1
2	.397692039108050D+00	2	.397692039108050D+00	2
3	.461886438404372D+00	5	.461886438404372D+00	6
4	.502570318068510D+00	3	.684057386298529D+00	1
5	.530675309995463D+00	3	.684720304831597D+00	1
6	.551259264946813D+00	3	.684723115290582D+00	1
7	.566986499772554D+00	3	.684724799680932D+00	1
8	.579396679098055D+00	3	.684724793176554D+00	1
9	.589438608789678D+00	3	.684724767793067D+00	1
10	.597731678775582D+00	3	.684724788467298D+00	1
11	.604696304988235D+00	3	.684724788561028D+00	1
12	.610628107739014D+00	3	.684724768450570D+00	1
13	.615741029538574D+00	5	.684724785120976D+00	2
14	.620193727433376D+00	1	.684724787465410D+00	1
15	.624106350869933D+00	1	.684724768190338D+00	1
16	.627571558092608D+00	5	.684724788111190D+00	2
17	.630661954701150D+00	5	.684724788197639D+00	2
18	.633435240598483D+00	5	.684724788139852D+00	2
19	.635937848852443D+00	5	.684724788237502D+00	2
20	.638207568052434D+00	5	.684724788456861D+00	1
21	.640275464742227D+00	5	.684724788582970D+00	1
22	.642167314617478D+00	1	.684724789692822D+00	1
23	.643904682960466D+00	1	.684724786577573D+00	1
24	.645505750701490D+00	5	.684724777657912D+00	2
25	.646985953279616D+00	1	.684724787590266D+00	1
26	.648359480098586D+00	1	.684724787435335D+00	1
27	.649634666730971D+00	5	.684724783335514D+00	2
28	.650824318922920D+00	5	.684724783381020D+00	1
29	.651935944795790D+00	5	.684724783590735D+00	1
30	.652976978968386D+00	5	.684724766320263D+00	1

Dés l'étape N = 13, $_{(1/2,(1/2,\ldots,1/2))}\overset{o}{EC}(A_1,\ldots,A_6)$ choisit les réponses des transformations qui accélèrent (S_n).

b) <u>Résultats des méthodes ${}_2^fD$, $f \in C_2$</u>

Au tableau 7 nous résumons, les résultats des méthodes de sélection ${}_2^fD$, $f \in C_2$.

N \ f	0	1	2	3	4	$^{2}5$	6
4	3	3	3	3			3
5	1	3	1	3	3	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1
14	2	3	2	3	1	3	2
15	1	4	1	4	1	1	1
16	1	5	1	5	1	1	1
17	2	5	2	5	1	1	1
18	2	6	2	6	2	2	2
19	2	4	2	4	2	2	2
20	1	5	1	5	1	1	1
21	1	5	1	5	1	1	1
22	1	5	1	5	1	1	1
23	1	5	1	1	1	1	1
24	1	5	1	5	1	1	1
25	2	5	2	5	1	1	2
26	1	5	1	5	1	1	1
27	1	5	1	5	1	1	1
28	1	5	1	5	2	2	1
29	1	1	1	5	1	1	1
30	1	1	1	5	1	1	1

Tableau 7

Pour tout $f \in C_2$, les résultats des transformations de suites ${}_2^fE(A_1, \ldots, A_6)$, ${}_2^fM(A_1, \ldots, A_6)$, ${}_2^fER(A_1, \ldots, A_6)$, ${}_{((1/2),1,2)}^{f}GV(A_1,\ldots,A_6)$ ${}_{((1/2),2)}^{f}RV(A_1,\ldots,A_6)$, ${}_{((1/2),2)}^{f}RC(A_1,\ldots,A_6)$, ${}_2^fD(A_1,\ldots,A_6)$ sont souvent identiques.

1.1.1 - Exemple 2

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{K^2}, \quad \lim S_n = \frac{\pi^2}{6} = 1.644934066848226$$

(S_n) est accélérée par A_1, A_5.

a) Résultats de ${}_{(1/2,(1/2,\ldots,1/2))}^{o}EC(A_1, \ldots, A_6)$

Nous indiquons au tableau 8 la suite des rangs des réponses sélectionnées par ${}_{(1/2,(1/2,\ldots,1/2))}^{o}EC(A_1, \ldots, A_6)$.

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Rang	1	2	6	2	1	2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	1	1
N	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
Rang	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tableau 8

Le tableau ci-dessus montre qu'à partir de l'étape N = 4, $(1/2,(1/2,\dots,1/2))^{\overset{o}{EC}(A_1,\dots,A_o)}$ propose les réponses des transformations qui accélèrent (S_n) et à partir de N = 22, propose la mailleure réponse possible.

b) Résultats des méthodes ${}_2^f D(A_1,\dots,A_6), f \in C_2$

N \ f	0	1	2	3	4	${}^{2}5$	6	N \ f	0	1	2	3	4	${}^{2}5$	6
5	2	1	2	1	1	1	2	21	1	2	1	2	1	1	1
6	2	2	2	2	2	2	2	22	1	1	1	5	2	2	2
7	3	3	3	3	3	3	3	23	1	1	1	5	1	1	1
8	1	2	1	2	2	2	1	24	1	1	1	5	1	1	1
9	1	2	1	2	1	1	1	25	1	1	1	5	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	26	1	1	1	5	1	1	1
11	1	1	1	2	1	1	1	27	1	1	1	1	1	1	1
12	2	2	2	1	2	2	2	28	1	1	1	1	1	1	1
13	1	3	1	3	1	1	1	29	1	1	1	1	1	1	1
14	2	3	2	3	1	1	2	30	1	1	1	1	1	1	1
15	2	3	2	3	2	2	2	31	1	1	1	1	1	1	1
16	2	4	2	4	2	2	2	32	1	1	1	1	1	1	1
17	1	4	1	4	1	1	1	33	1	1	1	1	1	1	1
18	1	5	1	6	1	1	1	34	1	1	1	1	1	1	1
19	1	1	1	1	1	1	1	35	1	1	1	1	1	1	1
20	1	2	1	2	1	1	1	36	1	1	1	1	1	1	1

Tableau 9

Pour les autres méthodes de sélection nous avons les résultats suivants :

1) Les méthodes ${}_{2}^{f}E(A_1,\dots,A_6)$, ${}_{2}^{f}M(A_1,\dots,A_6)$, ${}_{2}^{f}ER(A_1,\dots,A_6)$, $f \in C_2$, ont donné des résultats identiques aux résultats des méthodes ${}_{2}^{f}D(A_1,\dots, A_6)$.

2) Les résultats des méthodes ${}_{((1/2),1,2)}^{f}GV(A_1,\dots,A_6)$,${}_{((1/2),2)}^{f}RV(A_1,\dots,A_6)$, ${}_{((1/2),2)}^{f}RC(A_1,\dots,A_6)$, $f \in C_2$ sont identiques et sont meilleurs que les résultats des méthodes ${}_{2}^{f}D(A_1,\dots,A_6)$.

1.1.2 - Exemple 3

$S_n = (n+1) \sin \frac{1}{n+1}$ $n = 0, 1, 2, \dots$. $\lim S_n = 1$.

(S_n) est accélérée par A_1, A_5, A_3.

a) Résultats de ${}_{(1/2,(1/2,\dots,1/2))}^{o}EC(A_1,\dots,A_6)$

N	S(N)	I1	TS(N)	Rang
1	.958851077208406D+00	1	.958851077208406D+00	1
2	.981584090388457D+00	2	.981584090386457D+00	2
3	.989615837018092D+00	1	.100636044363179D+01	4
4	.993346653975306D+00	6	.996582929903622D+00	3
5	.995376796160490D+00	5	.999957114629970D+00	2
6	.996602108545846D+00	3	.100000009521136D+01	1
7	.997397867061821D+00	3	.999999996862965D+00	1
8	.997943656589577D+00	3	.999999999097493D+00	1
9	.998334166468281D+00	3	.999999999999383D+00	1
10	.998623158597574D+00	3	.100000000000265D+01	1

Toutes les transformations ${}_{2}^{f}D(A_1, \dots, A_6)$, ${}_{2}^{f}E(A_1, \dots, A_6)$, ${}_{2}^{f}M(A_1,\dots,A_6)$, ${}_{2}^{f}ER(A_1,\dots,A_6)$, ${}_{((1/2),1,2)}^{f}GV(A_1,\dots,A_6)$, ${}_{((1/2),2)}^{f}RV(A_1,\dots,A_6)$ ${}_{((1/2),2)}^{f}RC(A_1,\dots,A_6)$, $f \in C_2$ ont proposé les réponses de la transformation A_3 à partir de l'étape 6.

1.1.3 - Exemple 4

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \text{Log } n, \; n = 1, 2, \dots$$

(S_n) a pour limite $S = 0.577215664901532$

(S_n) est accélérée par A_1, A_5, A_6.

a) Résultats de $\overset{o}{(1/2,(1/2,\ldots,1/2)}EC(A_1,\ldots,A_6)$

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Rang	1	2	2	2	3	1	2	1	2	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
N	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Rang	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tableau 10

Les résultats ci-dessus montrent que $\overset{o}{(1/2,(1/2,\ldots,1/2))}EC(A_1,\ldots,A_6)$ propose souvent la meilleure réponse possible.

b) Les méthodes de sélection ${}^{f}_{2}M(A_1,\ldots,A_6)$, ${}^{f}_{2}E(A_1,\ldots,A_6)$, ${}^{f}_{2}ER(A_1,\ldots,A_6)$, $\overset{f}{((1/2),1,2)}GV(A_1,\ldots,A_6)$, $\overset{f}{((1/2),2)}RV(A_1,\ldots,A_6)$, $\overset{f}{((1/2),2)}RC(A_1,\ldots,A_6)$, $f \in C_2$ ont proposé des résultats souvent identiques aux résultats des méthodes ${}^{f}_{2}D(A_1,\ldots,A_6)$, $f \in C_2$ que nous résumons dans le tableau 11 suivant :

N \ f	0	1	2	3	4	$^{2}5$	6	N \ f	0	1	2	3	4	$^{2}5$	6
5	2	1	2	1	1	1	2	23	1	1	1	2	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	24	2	2	2	2	2	2	2
7	2	2	2	2	2	2	2	25	2	1	2	2	1	1	2
8	2	2	2	2	2	2	2	26	1	2	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	27	1	2	1	1	1	1	1
10	2	1	2	1	2	2	2	28	1	2	1	1	1	1	1
11	1	2	1	2	2	2	1	29	1	2	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1	30	1	2	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	31	1	2	1	1	1	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1	32	1	2	1	1	1	1	1
15	1	1	1	1	1	1	1	33	1	2	1	1	1	1	1
16	1	1	1	1	1	1	1	34	1	2	1	1	1	1	1
17	1	1	1	1	1	1	1	35	1	2	1	1	1	1	1
18	2	2	2	2	2	2	2	36	1	1	1	1	1	1	1
19	1	2	1	2	2	2	1	37	1	1	1	1	1	1	1
20	1	2	1	2	1	1	1	38	1	1	1	1	1	1	1
21	1	2	1	1	1	1	1	39	1	1	1	1	1	1	1
22	1	1	1	2	1	1	1	40	1	1	1	1	1	1	1

Tableau 11

Remarques

1) La transformation A_5 est plus performante sur les 4 suites monotones à comportement logarithmique.

2) Les méthodes de sélection associées aux coefficients de décompte d'indices $f \in \{1, 3\}$ sont moins bons que les méthodes de sélection associées aux coefficients de décompte d'indices $f \in \{0, 2, 4, {}^{2}5, 6\}$.

2 - Sommation des séries alternées

2.0 - *Exemple 1*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \quad . \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

$\lim S_n = 0.60489864342162$

(S_n) est accélérée par A_2, A_5, A_6.

a) Résultats de la méthode de sélection $_{(1/2,(1/2,\ldots,1/2))}\overset{o}{E}C(A_1,\ldots,A_6)$

N	S(N)	I1	IS(N)	Rang
1	.100000000000000D+01	1	.100000000000000D+01	1
2	.292893218813452D+00	2	.292893218813453D+00	1
3	.870243488003078D+00	2	.610730464009235D+00	1
4	.370243488003078D+00	2	.602294295571956D+00	2
5	.817457083503036D+00	5	.604429932070599D+00	3
6	.409208793039173D+00	6	.604658548043787D+00	1
7	.787173266048400D+00	6	.604900322574847D+00	1
8	.433619875455127D+00	6	.604898131460844D+00	1
9	.766953208788460D+00	6	.604898660720758D+00	1
10	.450725442771622D+00	6	.604898639385859D+00	2
11	.752236787349386D+00	5	.604898642991819D+00	2
12	.463561652754573D+00	6	.604898643393099D+00	1
13	.740911750867187D+00	6	.604898643422481D+00	2
14	.473650508954763D+00	5	.604898643421519D+00	1
15	.731849398701924D+00	5	.604898643421666D+00	2
16	.481849398701924D+00	6	.604898643421629D+00	1
17	.724385023738257D+00	5	.604898643421630D+00	1
18	.488682763342741D+00	6	.604898643421630D+00	1
19	.718098497213303D+00	6	.604898643421630D+00	1
20	.494491699463324D+00	6	.604898643421630D+00	1

b) Résultats des méthodes $^{f}_{2}D(A_1, \ldots, A_6)$, $f \in C_2$

Au tableau 12 nous résumons les résultats des méthodes de sélection $^{f}_{2}D(A_1, \ldots, A_6)$, $f \in C_2$.

f \ N	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	2	2	3	1	1	1	2	1	2	2	2	2	2	2	2	1	1
1	2	2	2	1	1	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	1	1
2	2	2	3	1	1	1	2	1	2	2	2	2	2	2	2	1	1
3	2	2	2	3	3	2	2	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3
4		2	6	1	1	1	1	1	6	1	1	6	1	6	2	1	1
5		2	2	2	1	1	2	1	2	1	2	2	2	1	2	1	1
6	2	2	3	1	1	1	2	1	2	2	2	2	2	1	2	1	1

Tableau 12

Nous signalons que les transformations de suites ${}_2^fD(A_1,\dots,A_6)$, ${}_2^fE(A_1,\dots,A_6)$, ${}_2^fM(A_1,\dots,A_6)$, ${}_2^fER(A_1,\dots,A_6)$, ${}_{((1/2),1,2)}^{f}GV(A_1,\dots,A_6)$, ${}_{((1/2),2)}^{f}RV(A_1,\dots,A_6)$, ${}_{((1/2),2)}^{f}RC(A_1,\dots,A_6)$, $f \in C_2$ ont proposé des résultats souvent identiques.

2.1 - *Exemple 2*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \log 2 = 0.693147180559945$$

(S_n) est accélérée par A_2, A_3, A_5, A_6.

a) Résultats de ${}_{(1/2,(1/2,\dots,1/2))}^{\circ}EC(A_1,\dots,A_6)$

N	S(N)	I1	TS(N)	Rang
1	.100000000000000D+01	1	.100000000000000D+01	1
2	.500000000000000D+00	2	.500000000000000D+00	1
3	.833333333333333D+00	2	.700000000000000D+00	1
4	.583333333333333D+00	2	.690476190476190D+00	3
5	.783333333333333D+00	5	.692708333333333D+00	3
6	.616666666666667D+00	6	.693105756358768D+00	1
7	.759523809523810D+00	6	.693148869332925D+00	1
8	.634523809523810D+00	6	.693146681972110D+00	1
9	.745634920634921D+00	6	.693147196073549D+00	1
10	.645634920634921D+00	6	.693147176038401D+00	2
11	.736544011544012D+00	5	.693147180283579D+00	2
12	.653210678210678D+00	6	.693147180528748D+00	1
13	.730133755133755D+00	6	.693147180560404D+00	2
14	.658705183705184D+00	5	.693147180559928D+00	1
15	.725371850371850D+00	5	.693147180559958D+00	2
16	.662871850371850D+00	6	.693147180559945D+00	1
17	.721695379783615D+00	5	.693147180559946D+00	1
18	.666139824228060D+00	5	.693147180559945D+00	1

Les réponses de la transformation A_3 n'ont pas été choisies car A_3 n'accélère pas beaucoup la convergence de S_n.

b) Dans le tableau 13 nous résumons les résultats des méthodes ${}_2^fD(A_1,\dots,A_6)$, $f \in C_2$, pour les autres méthodes de sélection utilisées précédemment, les résultats sont souvent identiques aux résultats des méthodes ${}_2^fD(A_1,\dots,A_6)$.

f \ N	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	2	2	3	1	1	1	2	1	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	2	3	3	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1
2	2	2	3	1	1	1	2	1	2	2	2	2	2	2	2
3	2	2	2	3	3	1	2	1	1	3	3	3	3	3	3
4		2	6	6	1	1	2	1	6	2	2	6	2	6	1
$^{2}5$		2	2	2	1	1	2	1	2	1	2	2	2	1	1
6	2	2	3	1	1	1	2	1	2	2	2	2	2	1	1

Tableau 13

2.2 - *Exemple 3*

$$S_n = \sum_{k=o}^{n} (-1)^k \frac{2^k}{k!}, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

$$\lim S_n = e^{-2} = 0.1353352$$

(S_n) est accélérée par A_2, A_3, A_5, A_6

a) Résultats de $_{(1/2,(1/2,\ldots,1/2))}^{\;o}EC(A_1,\ldots,A_6)$

N	S(N)	I1	TS(N)	Rang
1	-.1000000000000000D+01	1	-.1000000000000000D+01	1
2	.1000000000000000D+01	2	.1000000000000000D+01	1
3	-.3333333333333333D+00	2	.2000000000000000D+00	3
4	.3333333333333333D+00	6	.1111111111111111D+00	2
5	.6666666666666667D-01	5	.1333333333333333D+00	3
6	.1555555555555556D+00	6	.135531135531136D+00	1
7	.130158730158730D+00	6	.135338518666872D+00	1
8	.136507936507937D+00	5	.135335592320115D+00	1
9	.135097001763668D+00	5	.135335241797935D+00	2
10	.135379188712522D+00	6	.135335284130768D+00	2
11	.135327881994549D+00	5	.135335283238143D+00	1
12	.135336433114211D+00	5	.135335283236654D+00	1
13	.135332193066002D+00	5	.135335283237413D+00	1
14	.135345003621900D+00	5	.135335283237991D+00	1
15	.135328654853026D+00	6	.135335283241832D+00	1
16	.135361354361498D+00	5	.135335283236492D+00	1
17	.135815641698239D+00	6	.135335283193534D+00	1
18	.1355238662575035D+00	6	.135335284419261D+00	1
19	.130742033525424D+00	6	.135335283923305D+00	1
20	.130243218211794D+00	6	.135335284416749D+00	1

La méthode de sélection $_{(1/2,(1/2,\ldots,1/2))}^{\;o}EC(A_1,\ldots,A_6)$ n'a pas proposé les réponses de A_3, car il n'y a pas une accélération assez remarquable de (S_n) par A_3.

b) Les méthodes de sélection $_2^fD(A_1,\ldots,A_6)$, $_2^fE(A_1,\ldots,A_6)$, $_2^fM(A_1,\ldots,A_6)$, $_2^fER(A_1,\ldots,A_6)$, $_{((1/2),1,2)}^{\;f}GV(A_1,\ldots,A_6)$, $_{((1/2),2)}^{\;f}RC(A_1,\ldots,A_6)$, ont proposé les mêmes réponses.

Pour $f \in \{1, 3\}$, les résultats des méthodes $_{((1/2),2)}^{\;f}RV(A_1,\ldots,A_6)$ sont meilleurs que les résultats des autres méthodes de sélection d'indices f.

Résultats des méthodes ${}_{((1/2),2)}^{\,f}RV(A_1, \ldots, A_6)$, $f \in C_2$.

f \ N	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	3	2	2	2	2	2	1	2	1	1	1	1	2	1	1	1	1
1	2	2	3	3	2	1	1	2	1	1	1	2	1	1	1	1	1
2	3	2	2	2	2	2	1	2	1	1	1	1	2	1	1	1	1
3	2	2	3	3	2	1	1	1	3	1	1	2	1	2	1	1	1
4		2	6	6	2	6	1	6	1	1	1	6	2	1	1	1	1
5		2	3	1	2	2	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1
6	3	2	2	2	2	2	1	2	1	1	1	1	2	1	1	1	1

Tableau 14

2.3 - *Exemple 4*

$$\begin{cases} S_1 = 1 \\ S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k^2} \quad . \; n = 2, 3, \ldots \quad . \; \lim S_n = 1.17753296657 \end{cases}$$

(S_n) est accélérée par A_2, A_5, A_6.

a) Résultats de ${}_{(1/2,(1/2,\ldots,1/2))}\overset{o}{EC}(A_1,\ldots,A_6)$

N	S(N)	I1	TS(N)	Rang
1	.1000000000000000D+01	1	.1000000000000000D+01	1
2	.1250000000000000D+01	2	.1250000000000000D+01	1
3	.1138686868686889D+01	2	.1173076923076920D+01	1
4	.1201388888888889D+01	2	.1178888888888889D+01	1
5	.1161388888888889D+01	5	.1177714646464650D+01	3
6	.1189166666666667D+01	6	.1177552645442340D+01	1
7	.1168758503401360D+01	6	.1177532231507200D+01	2
8	.1184383503401360D+01	5	.1177533132301700D+01	1
9	.1172037824389020D+01	6	.1177532961386550D+01	1
10	.1182037824389020D+01	6	.1177532968146000D+01	2
11	.1173773361579100D+01	5	.1177532966604650D+01	2
12	.1180717806023540D+01	5	.1177532966561050D+01	1
13	.1174800646260230D+01	5	.1177532966562900D+01	2
14	.1179902687076560D+01	6	.1177532966575890D+01	1
15	.1175458242632110D+01	6	.1177532966575880D+01	1
16	.1179364492632110D+01	6	.1177532966575880D+01	1

Dés l'étape N = 2, la méthode de sélection ${}^{o}_{(1/2,(1/2,\ldots,1/2))}EC(A_1,\ldots,A_6)$ ne propose que les réponses des transformations qui accélérent (S_n).

b) Les méthodes de sélection ${}^{f}_{2}E(A_1,\ldots,A_6)$, ${}^{f}_{2}M(A_1,\ldots,A_6)$, ${}^{f}_{2}ER(A_1,\ldots,A_6)$, ${}^{f}_{((1/2),1,2)}GV(A_1,\ldots,A_6)$, ${}^{f}_{((1/2),2)}RV(A_1,\ldots, A_6)$, ${}^{f}_{((1/2),2)}RC(A_1,\ldots,A_6)$, $f \in C_2$ ont donné des résultats souvent identiques aux résultats de la méthode ${}^{f}_{2}D(A_1,\ldots,A_6)$.

Nous donnons ici les résultats des méthodes ${}^{f}_{2}D(A_1,\ldots,A_6)$, $f \in C_2$.

f \ N	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	2	2	3	2	2	2	2	1	1	1	2	1	1
1	2	2	2	3	3	3	2	1	2	1	2	1	1
2	2	2	3	2	2	2	2	1	1	1	2	1	1
3	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1
4		2	6	6	2	6	2	1	6	1	2	1	1
5		2	2	1	2	2	1	1	1	2	2	1	1
6	2	2	3	2	2	2	2	1	1	1	2	1	1

Tableau 15

Remarque

Pour les 4 examples de séries alternées, les résultats de ${}^{o}_{(1/2,(1/2,\ldots,1/2))}EC(A_1,\ldots,A_6)$ sont meilleurs que les résultats des différentes méthodes de sélection associées aux coefficients de décompte d'indices $f \in C_2$.

3 - Suites à convergence linéaire

3.0 - *Exemple 1*

$$\begin{cases} S_1 = 0 \\ S_{n+1} = e^{-S_n}, \ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

(S_n) a pour limite 0.5671432904097

(S_n) est accélérée par A_2, A_4, A_5, A_6.

a) Résultats de $_{(1/2,(1/2,\ldots,1/2))}\overset{o}{EC}(A_1, A_2, \ldots, A_6)$

N	S(N)	I1	TS(N)	Rang
1	.0000000000000000D+00	1	.0000000000000000D+00	1
2	.1000000000000000D+01	2	.1000000000000000D+01	1
3	.3678794411714420D+00	2	.6126998367802620D+00	1
4	.6922006275553460D+00	6	.5872260969956230D+00	3
5	.5004735005636370D+00	4	.5669587750474470D+00	1
6	.6062435350855970D+00	4	.5671346575349190D+00	1
7	.5453957859750270D+00	4	.5671434736422710D+00	1
8	.5796123355033790D+00	4	.5671432933616080D+00	1
9	.5601154613610890D+00	4	.5671432903858140D+00	1
10	.5711431150601770D+00	4	.5671432904096580D+00	1
11	.5648793473910500D+00	4	.5671432904097840D+00	1
12	.5684287250290610D+00	4	.5671432904097840D+00	1

b) Résultats des méthodes $^{f}_{2}E(A_1, \ldots, A_6)$, $f \in C_2$

f \ N	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	3	1	1	1	1	1	1	1	1
1	3	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	1	1	1	1	1	1	1	1
3	3	2	1	1	1	1	1	1	1
4		1	1	1	1	1	1	1	1
$^{2}5$		1	1	1	1	1	1	1	1
6	3	1	1	1	1	1	1	1	1

Tableau 16

Les méthodes $^{f}_{2}D(A_1, \ldots, A_6)$, $^{f}_{2}M(A_1,\ldots,A_6)$, $^{f}_{((1/2),1,2)}GV(A_1,\ldots,A_6)$, $^{f}_{((1/2),2)}RV(A_1,\ldots,A_6)$, $^{f}_{((1/2),2)}RC(A_1,\ldots,A_6)$, $^{f}_{2}ER(A_1,\ldots,A_6)$, $f \in C_2$ ont proposé à partir de l'étape N=8, les réponses de la transformation A_4 qui sont les meilleures réponses possibles.

3.1 - *Exemple 2*

$$\begin{cases} S_1 = 4 \\ S_{n+1} = 1 + 0.9\ (S_n - 1)(n \sin \frac{1}{n}). \end{cases}$$

(S_n) a pour limite $S = 1$

(S_n) est accélérée par A_2, A_5, A_6

a) Résultats de $\overset{\circ}{(1/2,(1/2,\dots,1/2))} EC(A_1,\dots,A_6)$

N	S(N)	I1	TS(N)	Rang
1	.400000000000000D+01	1	.400000000000000D+01	1
2	.358889790846270D+01	2	.358889790846270D+01	2
3	.328709889872824D+01	5	.328709889672824D+01	5
4	.303701436190729D+01	1	.170790969469733D+01	3
5	.282111526045023D+01	4	.229253834153595D+00	4
6	.263142628604733D+01	6	.102708292075027D+01	1
7	.246329458895070D+01	6	.102897037306671D+01	1
8	.231353621173862D+01	6	.102740670620235D+01	2
9	.217975341348331D+01	6	.102902747704177D+01	2
10	.206000932661917D+01	2	.100340384906191D+01	1
11	.195269487570219D+01	2	.100142987700149D+01	2
12	.185643334215952D+01	5	.100127961785197D+01	3
13	.177003008487089D+01	6	.100045296338984D+01	2
14	.169243791796098D+01	6	.100045357455852D+01	2
15	.162273260345878D+01	6	.100045326836923D+01	3
16	.156009453198753D+01	5	.100003183832145D+01	1
17	.150379442257538D+01	5	.100003185534261D+01	1
18	.145318177815014D+01	5	.100003177292608D+01	3
19	.140767532373621D+01	6	.100000329484485D+01	1
20	.136675493222483D+01	6	.100000353496234D+01	1
21	.132995470656960D+01	5	.100004429842176D+01	3
22	.129685698778598D+01	5	.100004459097155D+01	3
23	.126708712201379D+01	5	.100004437889181D+01	3
24	.124030886191181D+01	5	.100004438948916D+01	3
25	.121622030620752D+01	6	.100000402268694D+01	2
26	.119455030125671D+01	2	.100000089276665D+01	3
27	.117505524295037D+01	5	.999999992237621D+00	1
28	.115751622807898D+01	5	.999999054214420D+00	2
29	.114173651248924D+01	6	.999999997291556D+00	1
30	.112753923980058D+01	6	.100000000571844D+01	1
31	.111476540958677D+01	6	.100000002620264D+01	1
32	.110327205810965D+01	6	.100000002303660D+01	1
33	.109293062815039D+01	6	.100000000974506D+01	1
34	.108362550738439D+01	6	.100000000956546D+01	1

A partir de l'étape N = 6 $\underset{(1/2,(1/2,\ldots,1/2))}{\overset{o}{}}EC(A_1,\ldots, A_6)$ propose les réponses des transformations qui accélèrent (S_n) et à partir de N = 29, les réponses choisies sont les meilleures réponses possibles.

b) Résultats des méthodes ${}_2^fD(A_1,\ldots,A_6)$, $f \in C_2$

N \ f	0	1	2	3	4	$^{2}5$	6
4	6	6	6	6			6
5	3	6	3	6	1	3	3
6	2	2	2	2	2	2	2
7	1	2	1	2	4	2	1
8	2	1	2	1	2	2	2
9	2	2	2	2	2	2	2
10	1	1	1	2	4	1	1
11	2	2	2	1	2	2	2
12	2	2	2	2	2	2	2
13	2	1	2	1	4	1	2
14	2	1	2	1	2	2	2
15	3	3	3	2	3	3	3
16	3	3	3	3	3	3	3
17	1	3	1	3	5	1	1
18	3	1	3	1	3	3	3
19	3	1	3	1	3	3	3
20	1	1	1	2	6	3	1
21	1	1	1	2	1	1	1
22	3	3	3	1	5	3	3
23	3	3	3	1	3	3	3
24	3	3	3	1	3	3	3
25	2	2	2	1	6	3	2
26	3	3	3	1	6	3	3
27	3	3	3	1	3	3	3
28	2	2	2	3	6	3	2
29	2	2	2	3	2	2	2
30	1	1	1	2	6	3	1
31	1	1	1	2	1	1	1
32	1	1	1	1	1	1	1
33	1	1	1	1	1	1	1
34	1	1	1	1	1	1	1

Tableau 17

Pour tout $f \in C_2$, les transformations de suites ${}_2^fE(A_1,\ldots,A_6)$, ${}_2^fM(A_1,\ldots,A_6)$, ${}_2^fER(A_1,\ldots,A_6)$, ${}_{((1/2),1,2)}^{f}GV(A_1,\ldots,A_6)$, ${}_{((1/2),2)}^{f}RV(A_1,\ldots, A_6)$ ${}_{((1/2),2)}^{f}RC(A_1, \ldots, A_6)$, ${}_2^fD(A_1, \ldots, A_6)$ ont donné des résultats identiques à partir de l'étape N = 6.

3.2 - *Exemple 3*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(0.8)^k}{k}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

(S_n) a pour limite $S = 1.6094379124341$

(S_n) est accélérée par A_2, A_3, A_5, A_6.

a) Résultats de $(1/2,(1/2,\ldots,1/2))\overset{o}{}EC(A_1,\ldots,A_6)$

N	S(N)	I1	TS(N)	Rang
1	.800000000000000D+00	1	.800000000000000D+00	1
2	.112000000000000D+01	2	.112000000000000D+01	2
3	.129066666666667D+01	5	.129066666666667D+01	6
4	.139306666666667D+01	3	.180266666666666D+01	6
5	.145860266666667D+01	4	.159978064185242D+01	2
6	.150229333333333D+01	6	.160495446265938D+01	2
7	.153225264761905D+01	4	.160720345761608D+01	3
8	.155322416761905D+01	6	.160919650144187D+01	2
9	.156813724850794D+01	5	.160947234218901D+01	2
10	.157887466674794D+01	6	.160942744115946D+01	2
11	.158668369819521D+01	5	.160943321516662D+01	2
12	.159241032125654D+01	6	.160943755977294D+01	1
13	.159663921213260D+01	5	.160943440903775D+01	2
14	.159978067392625D+01	6	.160943790335216D+01	1
15	.160212629873217D+01	6	.160943791091125D+01	1
16	.160388551733661D+01	5	.160943435097509D+01	3
17	.160521010546231D+01	6	.160943791267415D+01	1
18	.160621090537950D+01	6	.160943790993834D+01	1
19	.160696940636937D+01	6	.160943791066850D+01	1
20	.160754586712168D+01	6	.160943790489755D+01	2
21	.160798507531391D+01	6	.160943790807078D+01	2
22	.160832047066070D+01	6	.160943791206885D+01	2
23	.160857712101303D+01	6	.160943791189547D+01	2
24	.160877388628315D+01	6	.160943791244772D+01	2
25	.160892500201060D+01	5	.160943791236769D+01	1
26	.160904124487788D+01	6	.160943791244505D+01	1
27	.160913079493859D+01	5	.160943791224291D+01	2
28	.160919987641399D+01	5	.160943791237816D+01	2
29	.160925323589845D+01	6	.160943791238238D+01	2
30	.160929450056642D+01	5	.160943791240857D+01	1
31	.160932644740615D+01	5	.160943791239622D+01	1
32	.160935120620693D+01	5	.160943791239555D+01	1
33	.160937041303421D+01	6	.160943791233970D+01	2
34	.160938532657068D+01	5	.160943791244053D+01	1
35	.160939691651902D+01	5	.160943791244013D+01	1

b) Résultats des méthodes ${}_{2}^{f}D(A_1, \ldots, A_6)$, $f \in C_2$

N \ f	0	1	2	3	4	$^{2}5$	6	N \ f	0	1	2	3	4	$^{2}5$	6
4	5	5	5	5			5	20	2	2	2	2	2	2	2
5	5	5	5	5	5	5	5	21	2	2	2	2	2	2	2
6	1	5	1	5	5	5	1	22	2	2	2	2	2	2	2
7	1	5	1	5	5	3	1	23	2	2	2	2	2	2	2
8	4	6	4	6	4	4	4	24	2	1	2	1	6	2	2
9	1	6	1	6	1	4	1	25	1	2	1	2	1	1	1
10	1	5	1	5	5	1	1	26	1	1	1	6	6	2	1
11	1	1	1	5	1	2	1	27	2	1	2	6	2	2	2
12	2	2	2	5	2	2	2	28	2	1	2	6	2	2	2
13	1	1	1	6	1	2	1	29	1	2	1	1	1	1	1
14	2	2	2	5	2	2	2	30	1	2	1	1	1	1	1
15	1	1	1	5	1	3	1	31	1	2	1	1	1	1	1
16	1	1	1	6	1	1	1	32	1	2	1	1	1	1	1
17	1	1	1	1	1	1	1	33	2	2	2	1	6	1	2
18	1	1	1	1	1	1	1	34	2	2	2	1	2	2	2
19	1	1	1	1	1	1	1	35	1	2	1	6	6	1	1

Tableau 18

Pour les méthodes de sélection ${}_{2}^{f}D(A_1, \ldots, A_6)$, ${}_{2}^{f}M(A_1, \ldots, A_6)$, ${}_{2}^{f}ER(A_1, \ldots, A_6)$, ${}_{((1/2),1,2)}^{f}GV(A_1,\ldots,A_6)$, ${}_{((1/2),2)}^{f}RV(A_1,\ldots,A_6)$, ${}_{((1/2),2)}^{f}RC(A_1, \ldots, A_6)$, $f \in C_2$, les résultats sont tout à fait analogues aux résultats du tableau 17.

Remarque

Pour les exemples 2, 3, les résultats obtenus par les méthodes de sélection associées aux coefficients de décompte d'indices $f \in C_2 - \{3, 4\}$ sont meilleurs que les résultats des méthodes de sélection associées aux coefficients de décompte d'indices 4.

4 - Transformation des séries divergentes

4.0 - Exemple 1

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{2^k}{k}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Seules les suites (A_2^n), (A_5^n), (A_6^n) convergent vers log 3 = 1.0986122886681l.

a) Résultats de $_{(1/2,(1/2,\ldots,1/2))}{}^{o}EC(A_1,\ldots,A_6)$

N	S(N)	I1	TS(N)
1	.2000000000000000D+01	1	.2000000000000000D+01
~~2~~	~~.0000000000000000D+00~~	~~2~~	~~.0000000000000000D+00~~
~~3~~	~~.2666666666666667D+01~~	~~2~~	~~.1142857142857714D+01~~
4	-.1333333333333333D+01	4	.1203809523809520D+01
5	.5066666666666667D+01	5	.1090909090909090D+01
~~6~~	~~-.5600000000000000D+01~~	~~6~~	~~.1097435897435900D+01~~
~~7~~	~~.1268571428571430D+02~~	~~6~~	~~.1098684142091850D+01~~
8	-.1931428571428570D+02	6	.1098576090893940D+01
9	.3757460317460320D+02	6	.1098614054091600D+01
~~10~~	~~-.6482539682539680D+02~~	~~6~~	~~.1098611422743150D+01~~
~~11~~	~~.1213564213564210D+03~~	~~5~~	~~.1098612188203560D+01~~
12	-.2199769119769120D+03	6	.1098612272774740D+01
13	.4101769341769340D+03	6	.1098612289047820D+01
~~14~~	~~-.7601087801087800D+03~~	~~5~~	~~.1098612288602060D+01~~
~~15~~	~~.1424424553224550D+04~~	~~5~~	~~.1098612288717180D+01~~
16	-.2671575446775450D+04	6	.1098612288666290D+01
17	.5038542200283380D+04	6	.1098612288667530D+01
~~18~~	~~-.9525013355272180D+04~~	~~5~~	~~.1098612288668020D+01~~
~~19~~	~~.1806909190788570D+05~~	~~6~~	~~.1098612288668090D+01~~
20	-.3435970809211430D+05	6	.1098612288668080D+01
21	.6550467286026670D+05	6	.1098612288668080D+01
~~22~~	~~-.1251455089579150D+06~~	~~5~~	~~.1098612288668080D+01~~
~~23~~	~~.2395765779986070D+06~~	~~5~~	~~.1098612288668080D+01~~
24	-.4594740886680600D+06	5	.1098612288668130D+01
25	.8827031913319400D+06	6	.1098612288668090D+01

b) A partir de N = 20, les méthodes ${}^{f}_{2}D(A_1,\dots,A_6)$, ${}^{f}_{2}E(A_1,\dots,A_6)$, ${}^{f}_{2}M(A_1,\dots,A_6)$, ${}^{f}_{2}ER(A_1,\dots,A_6)$, ${}^{f}_{((1/2),1,2)}GV(A_1,\dots,A_6)$, ${}^{f}_{((1/2),2)}RV(A_1,\dots,A_6)$, ${}^{f}_{((1/2),2)}RC(A_1,\dots,A_6)$, $f \in C_2$ ne proposent que les réponses des transformations A_2, A_5, A_6.

4.1 - *Exemple 2*

$$S_n = \sum_{k=o}^{n} (k+1)\, 5^k, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Seule la suite (A_2^n) est convergente $\lim A_2^n = 0.0625$.

Toutes les méthodes de sélection que nous venons de tester sur les exemples précédents sont exactes sur (S_n). Nous ne présentons ici que les résultats de ${}^{o}_{(1/2,(1/2,\dots,1/2))}EC(A_1,\dots,A_6)$.

N	S(N)	I1	TS(N)
1	.1000000000000000D+01	1	.1000000000000000D+01
2	.1100000000000000D+02	2	.1100000000000000D+02
3	.8600000000000000D+02	4	-.5384615384615290D+00
4	.5860000000000000D+03	4	-.4994040110634000D+00
5	.3711000000000000D+04	4	-.4930212501901350D+00
6	2246100000000000D+05	2	.6249999999998760D-01

CONCLUSION

a) Dans le cadre des exemples tests nous remarquons que :

1) Les méthodes de sélection les plus performantes sur les suites monotones à comportement logarithmique sont les méthodes de sélection associées aux coefficients de décompte qui ne tiennent pas compte de l'historique du choix automatique.

2) La méthode de sélection associée à l'algorithme EC, d'échange automatique est la plus puissante des méthodes de sélection pour la sommation des séries alternées.

3) Les résultats des méthodes de sélection associées aux coefficients de décompte d'indices 0, 2, 6 sont souvent identiques.

4) Il est possible de prolonger analytiquement une fonction à l'aide des méthodes de choix automatique.

5) L'augmentation du paramétre q intervenant dans quelques méthodes de sélection peut améliorer l'efficacité de ces dernières.

6) La transformation A_5 a donné de bons résultats dans l'ensemble des exemples tests de suites convergentes.

7) Les transformations de suites A_5, A_6 sont plus performantes sur les séries alternées et les suites à convergence linéaire.

b) Il est possible que pour certaines transformations candidates, la propagation des erreurs est catastrophique, pour celà, on peut utiliser des procédures d'estimation de la grandeur des erreurs accumulées pour les transformations en compétition et ne plus considérer en compétition les transformations pour lesquelles les accumulations des erreurs sont trop grandes.

c) Il se peut que l'une des transformations en compétition soit bloquée (à cause d'une division par 0, par exemple), dans tels cas, on peut utiliser l'une des 2 techniques proposées par J.P. DELAHAYE [7].

CHAPITRE V

SELECTION ENTRE UNE INFINITE DENOMBRABLE DE TRANSFORMATIONS DE SUITES

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous étudions au paragraphe 1, des méthodes de sélection entre une infinité dénombrable de transformations de suites, permettant sous certaines conditions d'accélérer une réunion dénombrable de familles accélérables.

Au paragraphe 2, nous étudions des méthodes particulières de sélection entre des transformations de suites, associées à une infinité dénombrable de suites auxiliaires dans l'extrapolation de richardson ; l'avantage de ces méthodes de sélection par rapport aux méthodes générales, proposées au paragraphe 1 est que dans les résultats obtenus, nous n'avons pas besoin de la condition de semi-régularité des transformations en compétition.

Les résultats de ce paragraphe, généralisent en un certain sens les résultats obtenus par J.P. DELAHAYE [7], dans l'étude du problème de choix automatique entre un nombre fini de suites auxiliaires dans l'extrapolation de richardson.

Le paragraphe 3 vise le problème suivant :
Quand on veut accélérer une suite à l'aide d'un procédé d'accélération de la convergence, dont les réponses peuvent être disposées dans un tableau à double entrée, on se trouve confronté au problème du choix d'une suite de réponses parmi les quantités du tableau, permettant d'accélérer la suite donnée.

Il se peut qu'on a parfois de bonnes raisons à choisir telle suite de réponses, cependant le plus souvent on fait un choix arbitraire ; pour surmonter cette difficulté, nous proposons d'appliquer les méthodes de sélection entre une infinité de transformations, à la sélection entre les réponses du tableau associé à la transformations considérée, en interprétant le tableau comme la donnée d'une infinité de transformations de suites.
Dans ce paragraphe, nous donnons une définition générale des méthodes de sélections répétées dans le tableau d'une transformation de suites et nous

proposons dans la section 3.1 (resp. dans la section 3.2) une méthode de sélections répétées entre les colonnes d'indices $k \in \mathbb{N}^*$, k est pair (resp. une méthode de sélections répétées entre les diagonales descendantes) de l'ε-algorithme.

La section 3.3 est réservée à des essais numériques.

Le paragraphe 4 vise le problème d'instabilité numérique qui affecte les procédés d'accélération de la convergence dont les réponses peuvent être disposées dans un tableau à double entrée.

Dans les sections 4.1, 4.2 nous proposons deux méthodes permettant de détecter l'instabilité numérique dans le tableau associé à une transformation de suites.

Dans la section 4.3, nous appliquons les méthodes proposées dans 4.1, 4.2 à la détection de l'instabilité numérique dans le tableau de l'ε-algorithme.

1 - SELECTION ENTRE UNE INFINITE DENOMBRABLE DE TRANSFORMATIONS DE SUITES

Soient (E, d) espace métrique ; $(A_n)_{n\geq 1}$, une famille de transformation de suites d'éléments de E ; $(S_n)_{n\geq 1}$, $S_n \subset E^{\mathbb{N}}$ pour tout $n \geq 1$ telles que $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} \operatorname{dom} A_i$.

Dans ce paragraphe, nous étudions des transformations de suites dites méthodes de sélection entre $A_1, \ldots, A_n, \ldots$, qui sous certaines conditions accélèrent $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. Ces transformations appliquées à $(x^n) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, fonctionnent selon le schéma suivant :

A chaque étape n, on choisit à l'aide de tests, une réponse parmi $A_1^n, \ldots, A_n^n$ avec A_i^n est la réponse à l'étape n de la transformation A_i appliquée à (x^n).

1.0 - Semi-coefficients de décompte

Soit $n_o \in \mathbb{N}$.

Etant données des relations $R_i^{(n)}$ définies pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq n_o$, ($R_i^{(n)}$ est vraie ou fausse selon i et n) ; pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}^*$.

On pose :

$$\hat{0}_{r_i}(n) = \left| \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } n < \max(n_o, i) \text{ ou si } R_i^{(n)} \text{ est fausse.} \\ \\ 1 \quad \text{si } n \geq \max(n_o, i) \text{ et si } R_i^{(n)} \text{ est vraie.} \end{array} \right.$$

$$\hat{1}_{r_i}(n) = \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si } n < \max(n_o, i). \\ \\ \operatorname{card}\{q \in \{i, \ldots, n\} \mid R_i^{(q)} \text{ est vraie}\}. & \text{sinon} \end{array} \right.$$

Les coefficients $\hat{0}_{r_i}(n)$, $\hat{1}_{r_i}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}^*$ sont appelés semi-coefficients de décompte associés aux relations $R_i^{(n)}$, $i \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_o$.

Il est possible de définir d'autres semi-coefficients de décompte en utilisant les coefficients de décompte présentés au chapitre 3.

1.1. - Transformations $_q^{\hat{0}}M(A_1,\dots,A_n,\dots)$, $_q^{\hat{1}}M(A_1,\dots,A_n,\dots)$

Soient $f \in \{\hat{0}, \hat{1}\}$, $q \in \mathbb{N}^*$; $(A_i)_{i\geq 1}$, $A_i \in \mathrm{Trans}(E, E)$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ avec $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{dom}\, A_i \neq \emptyset$.

La transformation de suites $A = {}_q^fM(A_1, \dots, A_n, \dots)$ appliquée à une suite $(x^n) \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{dom}\, A_i$, fonctionne de la manière suivante :

<u>étape $n < q$</u>

$$A^n = A_1^n$$

<u>étape $n \geq q$</u>

a) *On considère les relations* $({}_qM_i^{(n)})$, $i \in \{1, \dots, n\}$ *définies par :*

Si $\forall\, r \in \{n-q, \dots, n-1\}$: $x^r \neq x^{r+1}$ *alors on pose :*

$$({}_qM_i^{(n)}) : \max_{n-q\leq r\leq n-1} \left(\frac{d(A_i^r, A_i^{r+1})}{d(x^r, x^{r+1})}\right) = \mathrm{Min}\left(\max_{1\leq j\leq n}\ \max_{n-q\leq r\leq n-1} \left(\frac{d(A_j^r, A_j^{r+1})}{d(x^r, x^{r+1})}\right)\right)$$

Sinon

On pose

$$({}_qM_i^{(n)}) : \max_{n-q\leq r\leq n-1} (d(A_i^r, A_i^{r+1})) = \mathrm{Min}\left(\max_{1\leq j\leq n}\ \max_{n-q\leq r\leq n-1} (d(A_j^r, A_j^{r+1}))\right).$$

b) *On calcule les semi-coefficients de décompte* ${}^f_q m_i(n)$, $i \in \{1,\dots,n\}$

c) *On pose* $A^n = A_{i(n)}^n$ *avec* $i(n)$ *est le plus petit indice de* $\{1,\dots,n\}$ *vérifiant* ${}^f_q m_{i(n)}(n) = \max_{1\leq j\leq n} {}^f_q m_j(n)$.

La transformation de suites ${}_q^fM(A_1,\dots,A_n,\dots)$ est dite méthode de sélection en $A_1, \dots, A_n, \dots$ etc, associée au semi-coefficients de décompte ${}^f_q m_i(n)$.

Théorème 1

Soient $q \in \mathbb{N}^*$; $S_1, \ldots, S_n \ldots \subset \mathrm{Conv}(E)$; $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathrm{Trans}(E, E)$.
Si pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, A_i *est exacte sur* S_i, *pseudo-régulière d'ordre* q *sur* $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ *alors* ${}_q^{\hat{0}}M(A_1, \ldots, A_i, \ldots)$, ${}_q^{\hat{1}}M(A_1, \ldots, A_i, \ldots)$ *sont exactes sur* $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$.

Preuve

Nous ne démontrons le théorème 1 que pour $A = {}_q^{\hat{0}}M(A_1, \ldots, A_i, \ldots)$, pour ${}_q^{\hat{1}}M(A_1, \ldots, A_i, \ldots)$ la démonstration en découle facilement.

Soit $(x^n) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$. Il existe $i_o \in \mathbb{N}^*$ tel que $(x^n) \in S_{i_o}$.
Soit I l'ensemble des indices $i \in \{1, \ldots, i_o\}$ tel que A_i est exacte sur (x^n).

$I \neq \emptyset$ car $i_o \in I$.

Si $\bar{I} = \complement^{I}_{\{1,\ldots,i_o\}} = \emptyset$ alors $\exists\, m_o$, $\forall\, n \geq m_o$: $A^n = A_1^n = \lim x^n$.

Sinon.

Comme pour tout $j \in \bar{I}$, A_j est pseudo-régulière d'ordre q sur (x^n), il en résulte que : $\exists\, m_1$, $\forall\, n \geq m_1$, $\forall\, j \in \bar{I}$, $\hat{0}_{q^{m_i}}(n) = 0$, par conséquent $\forall\, n \geq m_1$: $i(n) \in I$; par suite A est exacte sur (x^n).

□

Remarque

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $p > q$.

Si on remplace dans le théorème 1, l'hypothèse de pseudo-régularité d'ordre q sur $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ par la pseudo-régularité d'ordre p alors le théorème 1 n'est pas vrai en général pour la transformation ${}_q^{\hat{0}}M(A_1, \ldots, A_i, \ldots)$ en fait il est possible de montrer à l'aide de contre-exemple que ${}_q^{\hat{0}}M(A_1, \ldots, A_i, \ldots)$ n'est pas exacte sur $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$.

On démontre facilement le théorème suivant :

Théorème 2

Soient $q \in \mathbb{N}^*$; $S_1, \ldots, S_i, \ldots \subset \mathrm{Conv}(E)$; $A_1, \ldots, A_i, \ldots \in \mathrm{Trans}(E, E)$.
Si pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, A_i *est exacte sur* S_i, *semi-régulière sur* $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$
alors ${}_q^{\hat{1}}M(A_1, \ldots, A_i, \ldots)$ *est exacte sur* $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$.

Théorème 3

Soient $q \in \mathbb{N}^*$, $S_1, \ldots, S_i, \ldots \subset \mathrm{Conv}^{**}(E)$; $A_1, \ldots, A_i, \ldots \in \mathrm{Trans}(E, E)$
Si $\forall (x^n) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$: *l'ensemble* I *des indices* $i \in \mathbb{N}^*$, *tel que* A_i *accélère et* Δ*-accélère* (x^n) *est non vide, fini et si :* $\exists\, \varepsilon > 0$, $\exists\, m_o$, $\forall n \geq m_o$,

$$\forall i \notin I : \max_{n-q \leq r \leq n-1} \left(\frac{d(A_i^r, A_i^{r+1})}{d(x^r, x^{r+1})}\right) \geq \varepsilon. \quad \textit{alors}$$

${}_q^{\hat{0}}M(A_1, \ldots, A_i, \ldots)$, ${}_q^{\hat{1}}M(A_1, \ldots, A_i, \ldots)$ *accélèrent* $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$.

Preuve

Nous ne démontrons le théorème 2 que pour $A = {}_q^{\hat{0}}M(A_1, \ldots, A_i, \ldots)$ pour ${}_q^{\hat{1}}M(A_1, \ldots, A_i, \ldots)$, la démonstration en découle facilement.
Soit $(x^n) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$.

Soit I l'ensemble des indices $i \in \mathbb{N}^*$, tel que A_i accélère et Δ-accélère (x^n).

$$\text{par hypothèse, } \exists\, \varepsilon > 0,\ \exists\, m_o,\ \forall n \geq m_o,\ \forall i \notin I : \max_{n-q \leq r \leq n-1} \left(\frac{d(A_i^r, A_i^{r+1})}{d(x^r, x^{r+1})}\right) \geq \varepsilon. \quad (*)$$

Comme pour tout $i \in I$, A_i Δ-accélère (x^n) et I est fini, il en résulte :

$$\exists\, m_1 \geq m_o,\ \forall n \geq m_1,\ \forall j \in I : \max_{n-q \leq r \leq n-1} \left(\frac{d(A_j^r, A_j^{r+1})}{d(x^r, x^{r+1})}\right) \leq \varepsilon. \quad (**)$$

D'après (*), (**) on a $i(n) \in I$ pour tout $n \geq m_1$, par conséquent d'après le lemme 3 du chapitre 3, A accélère (x^n).

□

Remarque

Si une suite $(x^n) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$, est accélérée et Δ-accélérée par une infinité de transformations de suites alors, il se peut que les transformations de suites ${}^{f}_{q}M(A_1, \ldots, A_i, \ldots)$, $f \in \{\hat{0}, \hat{1}\}$ n'accélèrent pas (x^n) en fait.

Prenons $E = \mathbb{R}$, $S_i = \{(\frac{1}{n+1})\}$, $i \in \mathbb{N}^*$, $q = 1$, $f = \hat{0}$.

Considérons les transformations de suites $(A_i)_{i\geq 1}$ définies par :

pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $A_i(\frac{1}{n+1}) = (A_i^n)$ avec

$$A_i^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n < i \\ \dfrac{1}{(n+1)^2} & \text{si } n \geq i \end{cases}$$

La suite $(\frac{1}{n+1})$ est accélérée et Δ-accélérée par A_i, $i \in \mathbb{N}^*$, cependant ${}^{\hat{0}}_{1}M(A_1, \ldots, A_i, \ldots)$ n'accélère pas $(\frac{1}{n+1})$

Pour terminer ce paragraphe, nous signalons qu'il est possible de définir d'autres méthodes de sélection entre $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ etc, à l'aide des relations $(R_i^{(n)})(({}_qE_i^{(n)}), ({}_qD_i^{(n)}), \ldots$ etc) présentées au chapitre 3, en préservant les résultats des théorèmes 1, 2, 3.

2 - SELECTION ENTRE UNE INFINITE DENOMBRABLE DE SUITES AUXILIAIRES DANS L'EXTRAP. DE RICHARDSON

Il arrive souvent qu'on ne sache pas comment choisir les suites auxiliaires dans certaines applications du procédé de Richardson ; le problème de choix automatique entre un nombre fini de suites auxiliaires a été étudié par J.P. DELAHAYE [7];dans ce paragraphe, nous étudions des méthodes de sélection, entre des transformations de suites, associées à une infinité dénombrable de suites auxiliaires. L'avantage des méthodes de sélection que nous allons présenter ici, est que, dans les résultats que nous allons obtenir, nous n'avons pas besoin de la condition de semi-régularité des transformations en compétition.

La section 2.0 est réservée à des définitions que nous utiliserons ensuite.

La section 2.1 est consacrée à l'étude d'un procédé de choix automatique entre les transformations "k-ièmes colonnes" (k fixé).

Dans la section 2.2, nous étudions une méthode de sélection entre les transformations "diagonales rapides".

Dans la section 2.3, nous étudions un procédé de sélection entre les transformations "k-ièmes diagonales descendantes" (k fixé).

La section 2.4, est réservée à l'étude d'une méthode de sélection entre les transformations "T_α^β" où (α, β sont 2 applications de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, fixées).

2.0 - Définitions et notations

Dans ce paragraphe, les suites que nous considérons sont des suites de nombres réels ou complexes.

Soient $({}^1a_n)$, ..., $({}^ia_n)$, ... etc, une infinité de suites telles que

$\forall\ i \in \mathbb{N}^* : \lim\ {}^ia_n = 0$, $\forall\ n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m : {}^ia_n \neq {}^ia_m$.

La suite $({}^ia_n)$, $i \in \mathbb{N}^*$ est dite suite auxiliaire.

Soient k, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}^*$.

Etant donnée une suite (x_n), nous notons par ${}^i\mathbb{P}_k^n(x)$ le polynome d'interpolation de degré $\leq k$, vérifiant : ${}^i\mathbb{P}_k^n({}^ia_n) = x_n, \ldots, {}^i\mathbb{P}_k^n({}^ia_{n+k}) = x_{n+k}$.

On pose ${}^iT_k^n = {}^i\mathbb{P}_k^n(0)$.

Les quantités ${}^iT_k^n$ peuvent être disposées dans un tableau à double entrée comme ci-dessous

$$
\begin{array}{ccccccc}
{}^{i}T_{o}^{o} & & & & & & \\
& {}^{i}T_{1}^{o} & & & & & \\
{}^{i}T_{o}^{1} & & {}^{i}T_{2}^{o} & & & & \\
& {}^{i}T_{1}^{1} & & {}^{i}T_{3}^{o} & & & \\
{}^{i}T_{o}^{2} & & {}^{i}T_{2}^{1} & & {}^{i}T_{4}^{o} & & \\
& {}^{i}T_{1}^{2} & & {}^{i}T_{3}^{1} & & \cdot & \\
{}^{i}T_{o}^{3} & & {}^{i}T_{2}^{2} & & \cdot & & \cdot \\
& {}^{i}T_{1}^{3} & & \cdot & & \cdot & \\
{}^{i}T_{o}^{4} & & \cdot & & \cdot & & \\
& \cdot & & \cdot & & & \\
\cdot & & \cdot & & & & \\
& \cdot & & & & & \\
\cdot & & & & & &
\end{array}
$$

Les quantités ${}^{i}T_{k}^{n}$ sont liées entre elles par les relations suivantes :

$$
\left[
\begin{array}{ll}
{}^{i}T_{o}^{n} = x_n & , \quad n = 0, 1, \ldots. \\[2ex]
{}^{i}T_{k+1}^{n} = \dfrac{{}^{i}a_n \; {}^{i}T_{k}^{n+1} - {}^{i}a_{n+k+1} \; {}^{i}T_{k}^{n}}{{}^{i}a_n - {}^{i}a_{n+k+1}} & , \quad n = 0, 1, \ldots. \\
& k = 0, 1, \ldots.
\end{array}
\right.
$$

L'indice inférieur k (resp. supérieur n) de la quantité ${}^{i}T_{k}^{n}$ désigne la k-ième colonne (resp. la n-ième diagonale descendante).

Soient $k \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}^{*}$.

- La transformation de suites notée ${}^{i}T_{k}$ qui à (x_n) fait correspondre la suite $({}^{i}T_{k}^{n})_{n\in\mathbb{N}}$ est dite transformation k-ième colonne associée à la suite auxiliaire $({}^{i}a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- La transformation de suites notée ${}^{i}T^{k}$ qui à (x_n) fait correspondre $({}^{i}T_{n}^{k})_{n\in\mathbb{N}}$ est dite transformation k-ième diagonale descendante associée à la suite $({}^{i}a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- La transformation de suites notée ${}^{i}T^{(\ )}$ qui à (x_n) fait correspondre $({}^{i}T_n^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite transformation diagonale rapide associée à la suite $({}^{i}a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Soient α, β, 2 applications de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note par ${}^{i}T_{\alpha}^{\beta}$

  La transformation de suites qui a (x_n) fait correspondre la suite $({}^{i}T_{\alpha(n)}^{\beta(n)})_{n\in\mathbb{N}}$

Dans toute la suite, on désigne par :

$${}^{i}C_k = \{(x_n) \mid \exists\ \alpha_o, \dots, \alpha_k,\ \exists\ n_o,\ \forall\ n \geq n_o : x_n = \sum_{j=o}^{k} \alpha_j ({}^{i}a_n)^j\}$$

$${}^{i}C = \bigcup_{k=o}^{\infty} {}^{i}C_k$$

$${}^{i}S_k = \{(x_n) \mid \exists\ \alpha_o, \dots, \alpha_k,\ \forall\ n : x_n = \sum_{j=o}^{k} \alpha_j ({}^{i}a_n)^j\}$$

$${}^{i}S = \bigcup_{k=o}^{\infty} {}^{i}S_k.$$

2.1 - Choix automatique entre k-ièmes colonnes

Soit $k \in \mathbb{N}$.

avec les notations de la section 2.0, nous allons définir à partir des transformations ${}^{i}T_k$, $i \in \mathbb{N}^*$. Une nouvelle transformation que nous notons $A = {}^{\hat{1}}P({}^{1}T_k, {}^{2}T_k. \dots, {}^{i}T_k, \dots)$, qui appliquée à une suite (x_n) fonctionne comme suit :

Etape 0

$$A^o = {}^{1}T_k^o$$

Etape $n \geq 1$

a) *On considère les relations* $(P_i^{(n)})$, $i \in \{1, \dots, n\}$ *définies par :*

$$(P_i^{(n)}) : \max(|{}^{i}\mathbb{P}_k^n({}^{i}a_{n-1}) - x_{n-1}|, |{}^{i}\mathbb{P}_k^{n-1}({}^{i}a_{n+k}) - x_{n+k}|) = \min_{1\leq j\leq n} (\max(|{}^{j}\mathbb{P}_k^n({}^{j}a_{n-1}) - x_{n-1}|, |{}^{j}\mathbb{P}_k^{n-1}({}^{j}a_{n+k}) - x_{n+k}|))$$

b) *On calcule les semi-coefficients de décompte* $\hat{1}_{P_i}(n)$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

c) *On pose* $A^n = {}^{i(n)}T_k^n$ *avec* $i(n)$ *est le plus petit indice de* $\{1,\dots,n\}$ *vérifiant* $\hat{l}_{P_{i(n)}}(n) = \max_{1\le j\le n} \hat{l}_{P_j}(n)$.

La transformation de suites $\hat{l}P({}^1T_k, \dots, {}^iT_k, \dots)$ est dite méthode de sélection entre k-ièmes colonnes, associée aux semi-coefficients de décompte $\hat{l}_{P_i}(n)$, $i \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 4

La transformation de suites $\hat{l}P({}^1T_k, \dots, {}^iT_k, \dots)$ *est exacte sur* $\bigcup_{i=1}^{\infty} {}^iC_k$.

Preuve

Soit $(x_n) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} {}^iC_k$. Il existe $i_o \in \mathbb{N}^*$ tel que $(x_n) \in {}^{i_o}C_k$, par suite, il existe un polynome ${}^{i_o}\mathbb{P}_k(x)$ de degré $\le k$, un rang $n_o \ge i_o$ tels que :

$\forall\, n \ge n_o$: ${}^{i_o}\mathbb{P}_k({}^{i_o}a_n) = x_n$.

Les termes de la suite auxiliaire $({}^{i_o}a_n)$ sont deux à deux distincts, par conséquent $\forall\, n \ge n_o$, $\forall\, x$: ${}^{i_o}\mathbb{P}_k^n(x) = {}^{i_o}\mathbb{P}_k(x)$.

Soit $m_o = n_o+1$. Nous avons pour tout $n \ge m_o$:

${}^{i_o}\mathbb{P}_k^n({}^{i_o}a_{n-1}) = {}^{i_o}\mathbb{P}_k({}^{i_o}a_{n-1}) = x_{n-1}$ et ${}^{i_o}P_k^{n-1}({}^{i_o}a_{n+k}) = {}^{i_o}\mathbb{P}_k({}^{i_o}a_{n+k}) = x_{n+k}$

par conséquent $\hat{l}_{P_{i_o}}(n) \ge n-m_o+1$ pour tout $n \ge m_o$.

D'après la définition des semi-coefficients de décompte $\hat{l}_{P_i}(n)$, $i \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$, nous avons : $\forall\, i \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, n \ge i$: $\hat{l}_{P_i}(n) \le n-i+1$ par conséquent $\forall\, n \ge m_o$:

$$i(n) \in \{1, \dots, m_o\}. \qquad (1)$$

Soit I l'ensemble des indices $i \in \{1, \dots, m_o\}$ tels que :

$$\exists\, m_i \ge i,\ \forall\, n \ge m_i :\ {}^i\mathbb{P}_k^n({}^ia_{n-1}) = x_{n-1} \text{ et } {}^i\mathbb{P}_k^{n-1}({}^ia_{n+k}) = x_{n+k}. \qquad (2)$$

$I \ne \emptyset$ car $i_o \in I$.

Soit $i \in I$.

Pour tout $n > m_i$, les polynomes ${}^i\mathbb{P}_k^n(x)$, ${}^i\mathbb{P}_k^{n-1}(x)$ se coincident sur (k+2) points $({}^ia_{n-1}, {}^ia_n, \dots, {}^ia_{n+k})$, par conséquent $\forall\, n \ge m_i$: ${}^i\mathbb{P}_k^n(x) = {}^i\mathbb{P}_k(x)$

(polynome de degré $\leq k$, indépendant de n), nous avons :

$\forall\, n \geq m_i : x_n = {}^i\mathbb{P}_k({}^ia_n)$; par passage à la limite ; $\lim x_n = {}^i\mathbb{P}_k(0)$

par suite $\forall\, n \geq m_i : \lim x_n = {}^i\mathbb{P}_k^n(0) = {}^iT_k^n$.

Posons $n_1 = \max\limits_{i \in I} m_i$.

$\forall\, n \geq n_1,\ \forall\, i \in I : {}^iT_k^n = \lim x_n$ (3)

D'après (2), nous avons $\forall\, i \in I,\ \forall\, n \geq n_1 : \hat{l}_{P_i}(n) \geq n-n_1+1$ (4)

Si $\bar{I} = \complement^{I}_{\{1,\ldots,m_o\}} = \emptyset$ alors d'après (1), (3), la transformation A est exacte sur (x_n).

Sinon.

Soit $j \in \bar{I}$. Il existe une infinité d'entiers n pour lesquels, les relations $(P_j^{(n)})$ sont fausses, par conséquent, $\exists\, \ell_j \geq n_1$ tel que $\forall\, n \geq \ell_j : \hat{l}_{P_j}(n) < n-n_1+1$

posons $\ell = \max\limits_{j \in \bar{I}} \ell_j$.

$\forall\, n \geq \ell,\ \forall\, j \in \bar{I} : \hat{l}_{P_j}(n) < n-n_1+1$ (5)

D'après (4), (5) nous avons $\forall\, n \geq \ell : i(n) \in I$ et d'après (3), la transformation A est exacte sur x_n.

$\square$

Remarque

Il est possible d'introduire plusieurs généralisations de la méthode de sélection entre k-ièmes colonnes que nous venons de présenter, en utilisant à chaque étape $n \geq p$ (p fixé), les polynomes d'interpolation ${}^i\mathbb{P}_k^{n-p}(x), \ldots, {}^i\mathbb{P}_k^n(x)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

2.2 - Sélection entre diagonales rapides

Proposition 1

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, *la transformation de suites* ${}^iT(\ )$ *est exacte sur* ${}^iC = \bigcup\limits_{k=o}^{\infty} {}^iC_k$.

Pour la démonstration voir ([7], p. 265).

A partir des transformations ${}^{i}T(\ )$, $i \in \mathbb{N}^*$ nous allons définir une transformation que nous notons $A = {}^{\hat{1}}S({}^{1}T(\ ), \ldots, {}^{i}T(\ ), \ldots)$ et qui appliquée à une suite (x_n) fonctionne de la manière suivante :

Etape 0

$A^o = {}^{1}T^o_o$

Etape $n \geq 1$

a) On considère les relations $(S_i^{(n)})$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ *définies par :*

$$(S_i^{(n)}) : \max\left(|{}^{i}\mathbb{P}^n_n({}^{i}a_{n-1}) - x_{n-1}|,\ |{}^{i}\mathbb{P}^{n-1}_{n-1}({}^{i}a_{2n-1}) - x_{2n-1}|\right) = \underset{1 \leq j \leq n}{\text{Min}}\left(\max(|{}^{j}\mathbb{P}^n_n({}^{j}a_{n-1}) - x_{n-1}|,\ |{}^{j}\mathbb{P}^{n-1}_{n-1}({}^{j}a_{2n-1}) - x_{2n-1}|)\right)$$

b) On calcule les semi-coefficients de décompte $\hat{1}_{s_i}(n)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

c) On pose $A^n = {}^{i(n)}T^n_n$ *avec* $i(n)$ *est le plus petit indice de* $\{1, \ldots, n\}$ *vérifiant :* $\hat{1}_{s_{i(n)}}(n) = \underset{1 \leq j \leq n}{\max}\ \hat{1}_{s_j}(n)$.

La transformation de suites $A = {}^{\hat{1}}S({}^{1}T(\ ), \ldots, {}^{i}T(\ ), \ldots)$ est dite méthode de sélection entre diagonales rapides, associée aux semi-coefficients de décompte $\hat{1}_{s_i}(n)$, $i \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 5

La transformation de suites $A = {}^{\hat{1}}S({}^{1}T(\ ), \ldots, {}^{i}T(\ ), \ldots)$ *est exacte sur* $\bigcup_{i=1}^{\infty} {}^{i}C$.

Preuve

Soit $(x_n) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} {}^{i}C$.

Il existe $i_o \in \mathbb{N}^*$ tel que $(x_n) \in {}^{i_o}C$, par conséquent, $\exists\ k_o \geq i_o$ tel que $(x_n) \in {}^{i_o}C_{k_o}$.

Comme $(x_n) \in {}^{i_o}C_{k_o}$, il en résulte que :

$\exists\ {}^{i_o}\mathbb{P}_{k_o}(x)$(polynome de degré $\le k_o$), $\exists\ m_o \ge k_o$, $\forall\ n \ge m_o : x_{n-1} = {}^{i_o}\mathbb{P}_{k_o}({}^{i_o}a_{n-1})$
les termes de la suite $({}^{i_o}a_n)$ étant deux à deux distincts, par conséquent
$\forall\ n \ge m_o$, $\forall\ x : {}^{i_o}\mathbb{P}^{n-1}_{n-1}(x) = {}^{i_o}\mathbb{P}_{k_o}(x)$

Nous avons pour tout $n \ge m_o$: ${}^{i_o}\mathbb{P}^n_n({}^{i_o}a_{n-1}) = {}^{i_o}\mathbb{P}_{k_o}({}^{i_o}a_{n-1}) = x_{n-1}$,
${}^{i_o}\mathbb{P}^{n-1}_{n-1}({}^{i_o}a_{2n-1}) = {}^{i_o}\mathbb{P}_{k_o}({}^{i_o}a_{2n-1}) = x_{2n-1}$, par suite $\forall\ n \ge m_o$: $\hat{l}_{s_{i_o}}(n) \ge n-m_o+1$

D'après la définition des semi-coefficients de décompte $\hat{l}_{s_i}(n)$, nous avons :
$\forall\ i \in \mathbb{N}^*$, $\forall\ n \ge i : \hat{l}_{s_i}(n) \le n-i+1$, par conséquent $\forall\ n \ge m_o$: $i(n) \in \{1,\dots,m_o\}$.(1)

Soit I l'ensemble des indices $i \in \{1, \dots, m_o\}$ tels que :

$\exists\ m_i \ge i$, $\forall\ n \ge m_i$: ${}^{i}\mathbb{P}^n_n({}^{i}a_{n-1}) = x_{n-1}$ et ${}^{i}\mathbb{P}^{n-1}_{n-1}({}^{i}a_{2n-1}) = x_{2n-1}$). (2)

$I \ne \emptyset$ car $i_o \in I$.

Soit $i \in I$. Pour tout $n \ge m_i$, les polynomes ${}^{i}\mathbb{P}^n_n(x)$ (de degré $\le n$), ${}^{i}\mathbb{P}^{n-1}_{n-1}(x)$ (de degré $\le n-1$) se coincident sur ${}^{i}a_{n-1}, \dots, {}^{i}a_{2n-1}$, par conséquent ${}^{i}\mathbb{P}^n_n(x) = {}^{i}\mathbb{P}^{n-1}_{n-1}(x) = {}^{i}\mathbb{P}(x)$ (polynome indépendant de n) vérifiant $\forall\ n \ge m_i$:
$x_n = {}^{i}\mathbb{P}({}^{i}a_n)$.

Nous avons $\lim x_n = {}^{i}\mathbb{P}(o) = {}^{i}\mathbb{P}^n_n(o) = {}^{i}T^n_n$ pour tout $n \ge m_i$.

Soit $n_1 = \max\limits_{i \in I} m_i$.

$\forall\ n \ge n_1$, $\forall\ i \in I : {}^{i}T^n_n = \lim x_n$ (3)

D'après (2) : $\forall\ i \in I$, $\forall\ n \ge n_1$: $\hat{l}_{s_i}(n) \ge n-n_1+1$ (4)

Si $\bar{I} = \complement^{I}_{\{1,\dots,m_o\}} = \emptyset$ alors d'après (1), (3) la transformation A est exacte sur (x_n).

Sinon.

Soit $j \in \bar{I}$. Il existe une infinité d'entiers n pour lesquels $(S^{(n)}_j)$ est fausse, par conséquent $\exists\ \ell_j \ge n_1$, $\forall\ n \ge \ell_j$: $\hat{l}_{s_j}(n) < n-n_1+1$.

Soit $\ell = \max\limits_{j \in \bar{I}} \ell_j$.

$\forall\ n \ge \ell$, $\forall\ j \in \bar{I} : \hat{l}_{s_j}(n) < n-n_1+1$. (5)

D'après (4), (5), nous avons $\forall\ n \ge \ell$, $i(n) \in I$ et d'après (3), la transformation A est exacte sur (x_n).

□

Remarque

Il est possible de définir plusieurs généralisations de la méthode de sélection $A = {}^{\hat{1}}S({}^{1}T(\ ),\ \dots,\ {}^{i}T(\ ),\ \dots\ )$, en utilisant à chaque étape $n \geq p$ (p fixé), les polynomes d'interpolation ${}^{i}\mathbb{P}_n^{n-p}(x), \dots, {}^{i}\mathbb{P}_n^{n}(x)$ $i \in \{1, \dots, n\}$.

2.3 - Choix automatique entre k-ièmes diagonales descendantes

Soit $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 2

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, *la transformation* ${}^{i}T^{k}$ *est exacte sur* ${}^{i}S$.

Pour la démonstration voir : ([7], p. 265).

A partir des transformations ${}^{i}T^{k}$, $i \in \mathbb{N}^*$, nous allons définir une transformation de suites que nous notons $A = {}^{\hat{1}}DE({}^{1}T^{k},\ \dots,\ {}^{i}T^{k},\ \dots\ )$ qui appliquée à une suite (x_n) fonctionne comme suit :

Etape 0

$A^{o} = {}^{1}T^{k}_{o}$.

Etape $n \geq 1$

a) *On considère les relations* $(DE_i^{(n)})$, $i \in \{1, \dots, n\}$ *définies par :*

$$(DE_i^{(n)}) \ : \ |{}^{i}\mathbb{P}_n^{k}({}^{i}a_{n+k+1}) - x_{n+k+1}| = \underset{1\leq j\leq n}{\mathrm{Min}} \ (|{}^{j}\mathbb{P}_n^{k}({}^{j}a_{n+k+1}) - x_{n+k+1}|).$$

b) *On calcule les semi-coefficients de décompte* $\hat{1}_{de_i}(n)$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

c) *On pose* $A^{n} = {}^{i(n)}T^{k}_{n}$ *avec* $i(n)$ *est le plus petit indice de* $\{1, \dots, n\}$ *vérifiant :* $\hat{1}_{de_{i(n)}}(n) = \underset{1\leq j\leq n}{\max}\ \hat{1}_{de_j}(n)$.

La transformation $A = {}^{\hat{1}}DE({}^{1}T^{k},\ \dots,\ {}^{i}T^{k},\ \dots\ )$ est dite méthode de sélection entre k-ièmes diagonales descendantes, associée aux semi-coefficients de décompte $\hat{1}_{de_j}(n)$, $j \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 6

La transformation de suites $A = \hat{1}_{DE}({}^1T^k, \ldots, {}^iT^k, \ldots)$ *est exacte sur* $\bigcup_{i=1}^{\infty} {}^iS$.

La démonstration est semblable à celle du théorème 4.

2.4 - Sélection entre les transformations $({}^1T_\alpha^\beta, \ldots, {}^iT_\alpha^\beta, \ldots)$

Soient α, β 2 applications de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

A partir des transformations ${}^iT_\alpha^\beta$, $i \in \mathbb{N}^*$, nous allons définir une transformation $A = \hat{1}_{CH}({}^1T_\alpha^\beta, \ldots, {}^iT_\alpha^\beta, \ldots)$ qui appliquée à une suite (x_n), fonctionne de la manière suivante :

Etape 0

$$A^o = {}^1T_{\alpha(o)}^{\beta(o)}$$

Etape $n \geq 1$

a) *Pour tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *on considère la relation* $(CH_i^{(n)})$ *définie par :*

$$(CH_i^{(n)}) : \max\left(\sum_{j=\beta(n-1)}^{\alpha(n-1)+\beta(n-1)} |{}^i\mathbb{P}_{\alpha(n)}^{\beta(n)}({}^ia_j)-x_j|, \sum_{j=\beta(n)}^{\alpha(n)+\beta(n)} |{}^i\mathbb{P}_{\alpha(n-1)}^{\beta(n-1)}({}^ia_j)-x_j|\right) =$$

$$\min_{1\leq \ell\leq n}\{\max\left(\sum_{j=\beta(n-1)}^{\alpha(n-1)+\beta(n-1)} |{}^\ell\mathbb{P}_{\alpha(n)}^{\beta(n)}({}^\ell a_j)-x_j|, \sum_{j=\beta(n)}^{\alpha(n)+\beta(n)} |{}^\ell\mathbb{P}_{\alpha(n-1)}^{\beta(n-1)}({}^\ell a_j)-x_j|\right)\}$$

b) *On calcule les semi-coefficients de décompte* $\hat{1}_{ch_i}(n)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

c) *On pose* $A^n = {}^{i(n)}T_{\alpha(n)}^{\beta(n)}$ *avec* $i(n)$ *est le plus petit indice de* $\{1. \ldots, n\}$

vérifiant : $\hat{1}_{ch_{i(n)}}(n) = \max_{1\leq j\leq n} \hat{1}_{ch_j}(n)$

La transformation de suites $A = \hat{1}_{CH}({}^1T_\alpha^\beta, \ldots, {}^iT_\alpha^\beta, \ldots)$ est dite méthode de sélection entre $({}^1T_\alpha^\beta, \ldots, {}^iT_\alpha^\beta, \ldots)$, associée aux semi-coefficients de décompte $\hat{1}_{ch_j}(n)$, $j \in \mathbb{N}^*$. $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 7

1) Si

i) $\lim \beta(n) = \infty$

ii) $\exists\ k \in \mathbb{N}$ *tel que* $\liminf \alpha(n) \geq k$

alors A *est exacte sur* $\bigcup_{i=1}^{\infty} {}^{i}C_k$.

2) *Si* $\lim \alpha(n) = \infty$ *alors* A *est exacte sur* $\bigcup_{i=1}^{\infty} {}^{i}S$.

3) *Si* $\lim\alpha(n) = \infty$, $\lim \beta(n) = \infty$ *alors* A *est exacte sur* $\bigcup_{i=1}^{\infty} {}^{i}C$

Preuve

Nous ne démontrons que la partie 1) du théorème 7, pour les parties 2) 3) les démonstrations sont semblables à celle de 1).

Supposons les conditions i), ii) de 1) sont satisfaites.

Soit $(x_n) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} {}^{i}C_k$. Il existe $i_o \in \mathbb{N}^*$ tel que $(x_n) \in {}^{i_o}C_k$, par suite $\exists\ {}^{i_o}\mathbb{P}_k(x)$ (polynome de degré $\leq k$), $\exists\ n_o \geq i_o$ tels que :

$$\forall\ n \geq n_o : x_n = {}^{i_o}\mathbb{P}_k({}^{i_o}a_n). \quad (1)$$

Comme $\liminf \alpha(n) \geq k$ et $\lim \beta(n) = \infty$, il en résulte que :

$\exists\ n_1 \geq n_o$, $\forall\ n \geq n_1 : \alpha(n) \geq k,\ \beta(n) \geq n_o$. D'autre part les termes de la suite $({}^{i_o}a_n)$, sont deux à deux distincts, par conséquent $\forall\ n \geq n_1$, $\forall\ x$:

$${}^{i_o}\mathbb{P}_{\alpha(n)}^{\beta(n)}(x) = {}^{i_o}\mathbb{P}_k(x). \quad (2).$$

Soit $m_{i_o} = n_1 + 1$.

D'après (1), (2) nous avons $\forall\ n \geq m_{i_o} : \hat{1}_{ch_{i_o}}(n) \geq n-m_{i_o}+1$. (3)

Les semi-coefficients de décompte $\hat{1}_{ch_i}(n)$ vérifient :

$$\forall\ i \in \mathbb{N}^*, \forall\ n \geq i : \hat{1}_{ch_i}(n) \leq n-i+1 \quad (4)$$

D'après (3), (4), nous avons $\forall\ n \geq m_{i_o} : i(n) \in \{1,\dots,m_{i_o}\}$ (5)

Soit I l'ensemble des indices $i \in \{1, \dots, m_{i_o}\}$ tels que :

$\exists\ m_i \geq i$, $\forall\ n \geq m_i$, $\forall\ j \in \{\beta(n-1),\dots,\beta(n-1)+\alpha(n-1)\}$, $\forall\ \ell \in \{\beta(n),\dots,\beta(n)+\alpha(n)\}$:

$${}^{i}\mathbb{P}_{\alpha(n)}^{\beta(n)}({}^{i}a_j) = x_j,\ {}^{i}\mathbb{P}_{\alpha(n-1)}^{\beta(n-1)}({}^{i}a_\ell) = x_\ell. \quad (6)$$

$I \neq \emptyset$ car $i_o \in I$.

Soit $i \in I$. D'après (6) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m_i$, les polynomes ${}^{i}\mathbb{P}_{\alpha(n)}^{\beta(n)}$ (de degré $\leq\alpha(n)$), ${}^{i}\mathbb{P}_{\alpha(n-1)}^{\beta(n-1)}$ (de degré $\leq\alpha(n-1)$) se coincident sur

$1 + \max(\alpha(n), \alpha(n-1))$ points, par conséquent $\forall\, n \geq m_i$: ${}^i\mathbb{P}^{\beta(n-1)}_{\alpha(n-1)}(x) = {}^i\mathbb{P}(x)$ polynome indépendant de n, vérifiant : $\forall \geq m_i$, $x_{\beta(n)} = {}^i\mathbb{P}({}^i a_{\beta(n)})$, par suite, $\lim x_{\beta(n)} = {}^i\mathbb{P}(0)$; comme ${}^i\mathbb{P}(o) = {}^i\mathbb{P}^{\beta(n)}_{\alpha(n)}(0)$ pour tout $n \geq m_i$ il en résulte que : $\forall\, n \geq m_i$, ${}^iT^{\beta(n)}_{\alpha(n)} = \lim x_n$. (7)

Soit $h_o = \max\limits_{i\in I} m_i$.

D'après (7), (6) nous avons.

$\forall\, n \geq h_o$, $\forall\, i \in I$: ${}^iT^{\beta(n)}_{\alpha(n)} = \lim x_n$. (8)

$\forall\, n \geq h_o$, $\forall\, i \in I$: $\hat{1}_{ch_i}(n) \geq n-h_o+1$ (9)

Si $\bar{I} = \complement^{I}_{\{1,\ldots,m_{i_o}\}} = \emptyset$, alors d'après (5), (8) la transformation de suites A est exacte sur (x_n).

Sinon.

Soit $j \in \bar{I}$. Il existe une infinité d'entiers n tels que $(CH_j^{(n)})$ est fausse, par conséquent $\exists\, \ell_j \geq h_o$ tel que $\forall\, n \geq \ell_j$: $\hat{1}_{ch}(n) < n-h_o+1$.

Soit $\ell = \max\limits_{j\in\bar{I}} \ell_j$.

Nous avons :

$\forall\, n \geq \ell$, $\forall\, j \in \bar{I}$: $\hat{1}_{ch_j}(n) < n-h_o+1$ (10)

D'après (9), (10) nous avons $\forall\, n \geq \ell$: $i(n) \in I$ et d'après (8)

$\forall\, n \geq \ell$: ${}^{i(n)}T^{\beta(n)}_{\alpha(n)} = \lim x_n$.

□

Remarques

a) La partie 3) du théorème 7 montre que la méthode de sélection $\hat{1}_{CH}({}^1T^{\beta}_{\alpha}, \ldots, {}^iT^{\beta}_{\alpha}, \ldots)$ avec $\lim \alpha(n) = \lim \beta(n) = \infty$, est plus efficace.

b) Il est possible d'introduire plusieurs généralisations de la méthode de sélection entre les transformations ${}^iT^{\beta}_{\alpha}$, $i \in \mathbb{N}^*$, que nous venons de présenter, en utilisant à chaque étape $n \geq p$ (p fixé), les polynomes d'interpolation ${}^i\mathbb{P}^{\beta(n-p)}_{\alpha(n-p)}, \ldots, {}^i\mathbb{P}^{\beta(n)}_{\alpha(n)}$ $i \in \{1, \ldots, n\}$.

3 - SELECTION REPETEES DANS LE TABLEAU D'UNE TRANSFORMATION DE SUITES

Soit (E, d) espace métrique.

Soit A une transformation de suites de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E^{\mathbb{N}}$, telle que en appliquant A à une suite $(s_n) \in$ dom A, nous obtenons un tableau de quantités A_k^n, $k = 0, 1, \ldots$, $n = 0, 1, \ldots$ disposées comme ci-dessous

$$\begin{array}{llllll}
A_o^o = S_o & & & & & \\
& A_1^o & & & & \\
A_o^1 = S_1 & & A_2^o & & & \\
& A_1^1 & & A_3^o & & \\
A_o^2 = S_2 & & A_2^1 & & A_4^o & \\
& A_1^2 & & A_3^1 & & . \\
A_o^3 = S_3 & & A_2^2 & & . & & . \\
& A_1^3 & & . & & . \\
A_o^4 = S_4 & & . & & . & \\
& . & & . & & \\
. & & & & &
\end{array}$$

Tableau 1

A l'aide d'une méthode de sélection T entre une infinité de transformations de suites (§ 1), (par exemple en prenant en compétition les colonnes du tableau 1), nous sélectionnons une suite de réponses, que nous notons $({}_1A_{i_1(n)}^{j_1(n)})$ où $(i_1(n))$, $(j_1(n))$ sont 2 suites d'entiers.

En appliquant A à $({}_1A_{i_1(n)}^{j_1(n)})$, (on suppose $({}_1A_{i_1(n)}^{j_1(n)}) \in$ dom A) nous obtenons un tableau de quantités, analogue au tableau 1 et par application à nouveau de la méthode de sélection T nous obtenons une nouvelle suite que nous notons $({}_2A_{i_2(n)}^{j_2(n)})$, et ainsi de suite. La transformation de suites qui à (s_n) fait correspondre la suite $({}_pA_{i_p(n)}^{j_p(n)})$ (p fixé, $(i_p(n))$, $(j_p(n))$ sont deux suites d'entiers) est dite p-ième sélection répétée associée à T.

Dans la section 3.1, nous présentons une méthode de sélections répétées entre les colonnes d'indices $k \in \mathbb{N}^*$, k pair du tableau de l'ε-algorithme. Dans la section 3.2, nous proposons un procédé de sélections répétées entre les diagonales descendantes de l'ε-algorithme. La section 3.3 est consacrée à des essais numériques.

3.1 - Sélections répétées entre les colonnes d'indices $k \in \mathbb{N}^*$, k pair de l'ε-algorithme

Quand on applique l'ε-algorithme à une suite (S_n), on obtient le tableau ci-dessous.

$$
\begin{array}{ccccccc}
\varepsilon_0^0 = S_0 & & & & & & \\
 & \varepsilon_1^0 & & & & & \\
\varepsilon_0^1 = S_1 & & \varepsilon_2^0 & & & & \\
 & \varepsilon_1^1 & & \varepsilon_3^0 & & & \\
\varepsilon_0^2 = S_2 & & \varepsilon_2^1 & & \varepsilon_4^0 & & \\
 & \varepsilon_1^2 & & \varepsilon_3^1 & & \cdot & \\
\varepsilon_0^3 = S_3 & & \varepsilon_2^2 & & \cdot & & \cdot \\
 & \varepsilon_1^3 & & \cdot & & \cdot & \\
\varepsilon_0^4 = S_4 & & \cdot & & \cdot & & \\
 & \cdot & & \cdot & & & \\
\cdot & & \cdot & & & & \\
 & \cdot & & & & & \\
\cdot & & & & & &
\end{array}
$$

L'indice inférieur k (resp. supérieur n) de la quantité ε_k^n, désigne la k-ième colonne (resp. la n-ième diagonale descendante). A chaque étape n, on choisit une réponse qu'on note ${}_1\varepsilon_0^n$ parmi les réponses d'indices inférieurs, pairs de la n-ième diagonale montante, de la manière suivante :

0) ${}_1\varepsilon_o^o = \varepsilon_o^o$, ${}_1\varepsilon_o^1 = \varepsilon_o^1$, ${}_1\varepsilon_o^2 = \varepsilon_2^o$.

1) étape $n \geq 3$

(.)

a) On considère les relations $(SC_i^{(n)})$, $i \in \{2,\ldots,n-1\}$, i *est pair, définies de la manière suivante :*

$$(SC_i^{(n)}) : |\varepsilon_i^{n-i} - \varepsilon_i^{n-i-1}| = \underset{\substack{j\in\{2,\ldots,n-1\}\\ j \text{ est pair}}}{\text{Min}} (|\varepsilon_j^{n-j} - \varepsilon_j^{n-j-1}|)$$

b) On calcule les semi-coefficients de décompte $\hat{O}_{SC_i}(n)$, $i \in \{2, \ldots, n-1\}$, i *est pair.*

c) On pose ${}_1\varepsilon_o^n = \varepsilon_{i(n)}^{n-i(n)}$ *avec* i(n) *est le plus petit indice pair de* $\{2, \ldots, n-1\}$ *vérifiant* $\hat{O}_{SC_{i(n)}}(n) = \underset{\substack{j\in\{2,\ldots,n-1\}\\ j \text{ est pair}}}{\max} (\hat{O}_{SC_j}(n))$.

En prenant la suite $({}_1\varepsilon_o^n)$ comme suite initiale et en appliquant l'ε-algorithme et la sélection suivant le schéma (.) entre les quantité du nouveau tableau obtenu, nous obtiendrons une nouvelle suite qu'on note $({}_2\varepsilon_o^n)$, et ainsi de suite. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

La transformation de suites qui à (S_n) fait correspondre la suite $({}_p\varepsilon_o^n)$ est dite p-ième sélection répétée entre les colonnes d'indices $k \in \mathbb{N}^*$, k est pair de l'ε-algorithme, associée aux semi-coefficients de décompte $\hat{O}_{SC_i}(n)$, $i \in \mathbb{N}^*$, i est pair, $n \in \mathbb{N}$.

3.2 - Sélections répétées entre les diagonales descendantes de l'ε-algorithme

Avec les notations utilisées précédemment, nous allons définir une méthode de sélections répétées entre les diagonales descendantes de l'ε-algorithme ; de la façon suivante :

A chaque étape n, on choisit une réponse qu'on note ${}^1\varepsilon_o^n$, parmi les réponses d'indices pair de la n-ième diagonale montante, comme suit :

Etape $n \leq 1$

$${}^{1}\varepsilon_o^n = \varepsilon_o^n$$

Etape $n \geq 2$

(*)

a) *On considère les relations* $(SD_i^{(n)})$, $i \in \{2, \ldots, n\}$, *i est pair, définies de la manière suivante :*

$$(SD_i^{(n)}) : |\varepsilon_i^{n-i} - \varepsilon_{i-2}^{n-i}| = \underset{\substack{j\in\{2,\ldots,n\} \\ j \text{ est pair}}}{\text{Min}} (|\varepsilon_j^{n-j} - \varepsilon_{j-2}^{n-j}|)$$

b) *On calcule les semi-coefficients de décompte* $\hat{O}_{Sd_i}(n)$, $i \in \{2,\ldots,n\}$, *i est pair.*

c) *On pose* ${}^{1}\varepsilon_o^n = \varepsilon_{i(n)}^{n-i(n)}$ *avec* $i(n)$ *est le plus petit indice pair de* $\{2,\ldots,n\}$ *vérifiant :* $\hat{O}_{Sd_{i(n)}}(n) = \underset{\substack{j\in\{2,\ldots,n\} \\ j \text{ est pair}}}{\max} \hat{O}_{Sd_j}(n)$.

En prenant la suite $({}^{1}\varepsilon_o^n)$ comme suite initiale, et en appliquant l'ε-algorithme et la sélection suivant le schéma (*), entre les quantités du nouveau tableau obtenu, nous obtiendrons une nouvelle suite que nous notons $({}^{2}\varepsilon_o^n)$, et ainsi de suite.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

La transformation de suites qui à (S_n) fait correspondre la suite $({}^{p}\varepsilon_o^n)$ est dite p-ième sélection répétées entre les diagonales descendantes de l'ε algorithme, associée aux semi-coefficients de décompte $\hat{O}_{Sd_i}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}^*$, i est pair.

3.3 - Essais numériques

Exemple 1

$$S_n = \frac{1}{\text{Log } 2} \sum_{i=o}^{n} \frac{(-1)^i}{i+1}, \; n = 0, 1, \ldots \; ; \lim S_n = 1.$$

a) *Résultats des sélections répétées entre les colonnes d'indices* $k \in \mathbb{N}^*$, *k pair*

Dans toute la suite, TS(N) désigne la réponse sélectionnée à l'étape N.

La première sélection répétée a donnée les résultats suivants :

N	S(N)	TS(N)
1	.1442695040888960D+01	.1442695040888960D+01
2	.7213475204444810D+00	.7213475204444810D+00
3	.1202245867407470D+01	.1009886528622270D+01
4	.8415721071852280D+00	.9961465758519030D+00
5	.1136111111536302D+01	.1001871556172890D+01
6	.8896619418815270D+00	.9999166848437730D+00
7	.1095761233437090D+01	.1000032054299260D+01
8	.9154243533259730D+00	.9999979262496590D+00
9	.1075723602313640D+01	.1000000687272240D+01
10	.9314542482247390D+00	.9999999450733840D+00
11	.1062608392851010D+01	.1000000016421370D+01
12	.9423838061102610D+00	.9999999984964660D+00
13	.1053360347717100D+01	.1000000000416920D+01
14	.9503107019343220D+00	.9999999999580290D+00
15	.1046490371331920D+01	.1000000000001099D+01
16	.9563219312703590D+00	.9999999999998130D+00
17	.1041186345446300D+01	.1000000000000030D+01
18	.9610366209524670D+00	.9999999999999960D+00

En prenant comme suite initiale, la suite TS(N), la deuxième sélection répétée a donné les résultats ci-dessous.

N	S(N)	TS(N)
1	.1442695040888960D+01	.1442695040888960D+01
2	.7213475204444810D+00	.7213475204444810D+00
3	.1009886528622270D+01	.9274468120000480D+00
4	.9961465758519030D+00	.9907711191596470D+00
5	.1001871556172890D+01	.1000187738431420D+01
6	.9999166848437730D+00	.1000414268454820D+01
7	.1000032054299260D+01	.1000283964258980D+01
8	.9999979262496590D+00	.1000010196930440D+01
9	.1000000687272240D+01	.1000000121299000D+01
10	.9999999450733840D+00	.1000000023128100D+01
11	.1000000016421370D+01	.1000000001051260D+01
12	.9999999984964680D+00	.1000000000312450D+01
13	.1000000000416920D+01	.1000000000000696D+01
14	.9999999999580290D+00	.9999999999999736D+00
15	.1000000000001099D+01	.1000000000000007D+01

b) *Résultats des sélections répétées entre les diagonales descendantes*

- Résultats de la première sélection répétée.

N	S(N)	TS(N)
1	.144269504088896D+01	.144269504088896D+01
2	.721347520444481D+00	.721347520444481D+00
3	.120224586740747D+01	.100988652862227D+01
4	.841572107185228D+00	.996146575851903D+00
5	.113011111530302D+01	.100026856168301D+01
6	.889061941881527D+00	.999916684843773D+00
7	.109576123343709D+01	.100000760909164D+01
8	.915424353325973D+00	.999997926249659D+00
9	.107572380231364D+01	.100000021899308D+01
10	.931454298224739D+00	.999999945073384D+00
11	.106260839285101D+01	.100000000635101D+01
12	.942383806110261D+00	.999999998496468D+00
13	.105336034771710D+01	.100000000018498D+01
14	.950310701939322D+00	.999999999958029D+00
15	.104649037133192D+01	.100000000000540D+01
16	.956321931276359D+00	.999999999998613D+00
17	.104118634544630D+01	.100000000000016D+01
18	.961030620952467D+00	.999999999999960D+00

- Résultats de la deuxième sélection répétée

N	S(N)	TS(N)
1	.144269504088896D+01	.144269504088896D+01
2	.721347520444481D+00	.721347520444481D+00
3	.100988652862227D+01	.927446812000048D+00
4	.996146575851903D+00	.996771119159647D+00
5	.100026856168301D+01	.999317334183527D+00
6	.999916684843773D+00	.999976325175849D+00
7	.100000760909164D+01	.999995534075251D+00
8	.999997926249659D+00	.999999801108482D+00
9	.100000021899308D+01	.100000000399567D+01
10	.999999945073384D+00	.999999998680899D+00
11	.100000000635101D+01	.999999999727764D+00
12	.999999998496468D+00	.999999999989495D+00
13	.100000000018498D+01	.100000000000018D+01
14	.999999999958029D+00	.999999999999929D+00

A titre de comparaison des résultats obtenus dans a), b) nous avons :

- Les résultats de la deuxième sélection répétée entre les colonnes paires (resp. entre les diagonales descendantes) sont meilleurs que les résultats de la première sélection répétée entre les colonnes paires (resp. entre les diagonales descendantes).

- Les résultats de la première sélection répétée entre les diagonales descendantes sont meilleurs que les résultats de la première sélection entre les colonnes paires.

Exemple 2

$S_n = 1 + 3e^{-1,4.x_n}$, $x_n = (1,1)^{n-1}$; $n = 1, 2, \ldots$

a) *Résultats de la première sélection répétée entre les colonnes d'indices $k \in \mathbb{N}^*$, k pair*

N	S(N)	TS(N)
24	.10000107843870 1D+01	.99999820419522 2D+00
25	.100000307866820D+01	.100000073003421D+01
26	.100000077533082D+01	.100000017604586D+01
27	.100000017010756D+01	.100000003822180D+01
28	.100000003206889D+01	.100000000738192D+01
29	.100000000511658D+01	.100000000125127D+01
30	.100000000067946D+01	.100000000018336D+01
31	.100000000007373D+01	.100000000002284D+01
32	.100000000000641D+01	.999999999998501D+00
33	.100000000000044D+01	.999999999999879D+00
34	.100000000000002D+01	.999999999999992D+00

b) *Résultats de la première sélection répétée entre les diagonales descendantes*

N	S(N)	TS(N)
24	.100001078438701D+01	.100001784955405D+01
25	.100000307866820D+01	.100000442193144D+01
26	.100000077533082D+01	.100000101060093D+01
27	.100000017010756D+01	.100000021106363D+01
28	.100000003206889D+01	.100000003985776D+01
29	.100000000511658D+01	.100000000672454D+01
30	.100000000067946D+01	.100000000100008D+01
31	.100000000007373D+01	.100000000012910D+01
32	.100000000000641D+01	.100000000001423D+01
33	.100000000000044D+01	.100000000000131D+01
34	.100000000000002D+01	.100000000000010D+01

c) *Résultats de l'escalier* ($\varepsilon_0^0, \varepsilon_0^1, \varepsilon_2^0, \varepsilon_2^1, \varepsilon_4^0, \varepsilon_4^1, \ldots, \varepsilon_{2n}^0, \varepsilon_{2n}^1, \ldots$)

24	*	.457178866453469D+00
25	*	.680257098726744D+00
26	*	.107830878063214D+01
27	*	.973379209983058D+00
28	*	.100010063543513D+01
29	*	.985696888293598D+00
30	*	.989122237449297D+00
31	*	.984879116621693D+00
32	*	.100073030453456D+01
33	*	.999213961695572D+00
34	*	.999824745906531D+00

Nous voyons sur cet exemple que les résultats obtenus à l'aide des sélections entre les réponses de l'ε-algorithme, sont meilleurs que les résultats de l'escalier ($\varepsilon_0^0, \varepsilon_0^1, \ldots, \varepsilon_{2n}^0, \varepsilon_{2n}^1, \ldots$).

Nous terminons ce paragraphe par les remarques suivantes :

1) Il est possible d'envisager d'autres méthodes de sélections répétées dans le tableau de l'ε-algorithme, en utilisant les critères de sélection, vus au paragraphe 1

2) Les méthodes de sélection présentées, utilisent le même critère de sélection dans les sélections successives ; il est possible de définir d'autres méthodes de sélections, en utilisant des critères différents dans les sélections successives.

3) Il est possible d'adapter les méthodes de sélections répétées présentées dans 3.1, 3.2, à d'autres procédés d'accélération de la convergence.

4) L'utilisation simultanée d'un procédé d'accélération de la convergence dont les réponses peuvent être disposées dans un tableau à double entrée et d'une méthode de sélection entre les réponses du tableau, peut donner des résultats intéressants en pratique.

5) A l'aide de petites modifications, de la méthode de sélection proposée dans la section 3.1, on peut mettre en compétition, la colonne d'indice 0 avec les autres colonnes d'indices pairs de l'ε-algorithme ; car il semble intéressant de mettre en compétition la colonne d'indice 0 avec les colonnes d'indices $k \in \mathbb{N}^*$, k pair.

4 - DETECTION DE L'INSTABILITE NUMERIQUE DANS LE TABLEAU D'UNE TRANSFORMATION DE SUITES

Soit E un espace vectoriel normé, dont la norme est notée $||.||$.
Soit A une transformation de suites de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E^{\mathbb{N}}$, telle que en appliquant A à une suite $(s_n) \in$ dom A, nous obtenons un tableau de quantités A_k^n, $\begin{matrix} n = 0, 1, \ldots, \\ k = 0, 1, \ldots \end{matrix}$ disposées comme ci-dessous

$$
\begin{array}{ccccccccc}
A_o^o = s_o & & & & & & & & \\
 & A_1^o & & & & & & & \\
A_o^1 = s_1 & & A_2^o & & & & & & \\
 & A_1^1 & & A_3^o & & & & & \\
A_o^2 = s_2 & & A_2^1 & & A_4^o & & & & \\
 & A_1^2 & & A_3^1 & & \cdot & & & \\
A_o^3 = s_3 & & A_2^2 & & \cdot & & \cdot & & \\
 & A_1^3 & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\
A_o^4 = s_4 & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
 & A_1^4 & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\
A_o^5 = s_5 & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \\
 & \cdot & & & & & & & \\
\cdot & & & & & & & &
\end{array}
$$

L'indice inférieur k (resp. supérieur n) de la quantité A_k^n, désigne la k-ième colonne (resp. la n-ième diagonale descendante).

Dans toute la suite, on suppose que le calcul des quantités A_k^n se fait diagonale montante par diagonale montante.

Il arrive souvent que le critère permettant l'arrêt du calcul des quantités A_k^n, n'est pas vérifié quand on progresse du haut vers le bas du tableau ci-dessus, cependant il y a apparition d'une instabilité numérique et certaines valeurs des quantités A_k^n seront totalement fausses.

Dans ce paragraphe, nous proposons deux méthodes, permettant de détecter les points d'instabilité numérique dans le tableau de la transformation A et dès qu'il y a apparition d'une instabilité numérique sur une colonne, seules les quantités des colonnes précédentes seront calculées ultérieurement.

4.1 - Algorithme $C_1(q, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$

Soient $q \in \mathbb{N}^*$, ε_1, $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}_+^*$.

Le paramètre ε_1 (resp. ε_2) (resp. q) de l'algorithme $C_1(q, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, nous permet de déterminer l'étape à partir de laquelle on commence à tester sur une colonne du tableau s'il y a une instabilité numérique ou non (resp. nous permet de localiser les points d'instabilité numérique) (resp. nous permet d'utiliser, à chaque étape n, les points $A_k^{n-q}, \ldots, A_k^n$, pour détecter l'instabilité numérique dans la k-ième colonne).

L'algorithme $C_1(q, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ fonctionne de la manière suivante :

0) *Initialisation*

   0.1 - Calculer les q+1 *premières diagonales montantes*

   0.2 - i_1 := q+1, n := q+1.

1) *Calcul de* $A_o^n, A_1^{n-1}, \ldots, A_{i_1}^{n-i_1}$ *et détection de l'instabilité numérique*

i) $A_o^n := S_n$

ii) Si $i_1 < n$ *alors aller en iii)*

Sinon poser ind(n-q) = 0

iii) $k := 1$

1.0 *Calculer* A_k^{n-k}

1.0.0 - Si $k > n-q$ *alors aller en 1.0.1*

Sinon aller en 1.1

1.0.1 - $k := k+1$

1.0.2 - Si $k \leq i_1$ *alors aller en 1.0*

Sinon aller en 2)

1.1 - Détection de l'instabilité numérique sur la k-ième colonne

1.1.0 - Si ind(k) = 0 *alors aller en 1.1.1*

Sinon aller en 1.1.2

1.1.1 - Si $\exists\, j \in \{1, \ldots, q\}$ *tel que* $||A_k^{n-k-j+1} - A_k^{n-k-j}|| > \varepsilon_1 ||A_k^{n-k-j+1}||$

alors aller en 1.0.1

Sinon poser ind(k) = 1 *et aller en 1.0.1*

1.1.2 - Si $||A_k^{n-k} - A_k^{n-k-1}|| \leq \varepsilon_2 ||A_k^{n-k}||$ *alors aller en 1.0.1*

Sinon

i) $i_1 := k-1$

ii) Si $i_1 > 0$ *alors aller en 2)*

Sinon aller en 3)

2)

2.0 - $n := n+1$

2.1 - Si $i_1 < n-1$ *alors aller en 1)*

Sinon poser $i_1 = n$ *et aller en 1)*

3)

3.0 - n := n+1

3.1 - $A_o^n := S_n$

3.2 - *aller en 3.0.*

4.2 - Algorithme $C_2(q, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$

L'algorithme $C_2(q, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ fonctionne comme $C_1(q, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, seule l'étape 1.1.1. est remplacée par :

1.1.1' - Si $\exists\ \ell, \ell' \in \{n-k-q,\ldots,n-k\}$ tel que $||A_k^{\ell}-A_k^{\ell'}||>\varepsilon_1||A_k^{\ell}||$

alors aller en 1.0.1

Sinon poser ind(k) = 1 et aller en 1.0.1.

Remarques

1) Il est possible de définir des méthodes de détection de l'instabilité numérique, en utilisant des tests sur les colonnes et les diagonales descendantes.

2) L'algorithme $C_2(q, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ a été obtenu, par modification de l'étape 1.1.1 dans $C_1(q, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$; on peut également définir d'autres variantes de l'algorithme $C_1(q, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ en modifiant l'étape 1.1.2 dans $C_1(q, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$

3) Les méthodes que nous venons de présenter, détectent l'instabilité numérique dans toutes les colonnes, mais si seules certaines colonnes sont intéressantes (par exemple, les colonnes paires) alors on peut facilement adapter les 2 algorithmes à ces types de transformations en ne faisant des tests que sur les colonnes intéressantes.

4) Les paramètres ε_1, ε_2 doivent être choisis en fonction du nombre de chiffres avec lesquels travaille l'ordinateur et de la précision souhaitée sur le résultat.

4.3 - Essais numériques

Dans les essais numériques, nous allons appliquer les algorithmes $C_1(q, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $C_2(q, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ à la détection de l'instabilité numérique dans le tableau de l'ε-algorithme.

Exemple 1

Soit à transformer par l'ε-algorithme la suite (x_n) donnée par :

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_{n+1} = 1 + (x_n - 1)(n.\sin \frac{1}{n}), \; n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Jusqu'au rang N = 80, seules les colonnes 44, 26 ou l'instabilité numérique a été localisée par $C_1(q, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $C_2(q, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ avec $q = 2$, $\varepsilon_1 = 10^{-11}$, $\varepsilon_2 = 10^{-9}$.

- Résultats de la colonne 44

N	COLONNE INSTABLE
45	.100000000301091D+01
46	.100000000041160D+01
47	.100000000133488D+01
48	.100000000042590D+01
49	.100000000005941D+01
50	.100000000056439D+01
51	.100000000047291D+01
52	.100000000006035D+01
53	.999999999700368D+00
54	.100000000048405D+01
55	.100000000080095D+01
56	.100000000017725D+01
57	.100000000015071D+01
58	.999999999807791D+00
59	.100000000004017D+01
60	.100000000039613D+01
61	.100000000009244D+01
62	.100000000008104D+01
63	.100000000008901D+01
64	.100000000005107D+01
65	.100000000005691D+01
66	.100000000005849D+01
67	.100000000010813D+01
68	.100000000001223D+01
69	.100000000114360D+01

- Résultats de la colonne 26

```
* 69 *   .100000000006758D+01*
* 70 *   .100000000006982D+01*
* 71 *   .100000000007484D+01*
* 72 *   .100000000008447D+01*
* 73 *   .100000000013111D+01*
* 74 *   .999999999904075D+00*
* 75 *   .999999999936138D+00*
* 76 *   .999999990493572D+00*
```

Les 6 derniers résultats de la colonne 24 sont les suivants :

```
* 75 *   .999999999970259D+00*
* 76 *   .100000000003742D+01*
* 77 *   .100000000004064D+01*
* 78 *   .999999999993122D+00*
* 79 *   .100000000004610D+01*
* 80 *   .100000000009185D+01*
```


Exemple 2

Soit à calculer la racine double x=-3 du polynome $f(x)=x^6+6x^5+6x^4-18x^3-31x^2-24x-36$

à l'aide de la méthode de Newton

$$\begin{cases} x_o = -3.5 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

Jusqu'au rang N = 80, seule la colonne 8 ou l'instabilité numérique a été localisée par $C_1(q, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $C_2(q, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ avec $q = 2$, $\varepsilon_1 = 10^{-11}$, $\varepsilon_2 = 10^{-10}$.

Résultats de la colonne 8

N	COLONNE INSTABLE
9	-.300005261751622D+01
10	-.300000243736946D+01
11	-.300000009760079D+01
12	-.300000000354497D+01
13	-.300000000012614D+01
14	-.299999999998174D+01
15	-.300000000001160D+01
16	-.299999999946896D+01
17	-.299999999996074D+01
18	-.299999999997233D+01
19	-.300000000001035D+01
20	-.300000000029023D+01
21	-.299999999967280D+01
22	-.299999999994401D+01
23	-.300000000667952D+01
24	-.299999999133546D+01
25	-.300000000154706D+01
26	-.300000000294728D+01
27	-.299999999850445D+01
28	-.299999998640143D+01
29	-.299999999230573D+01
30	-.300000000904246D+01
31	-.299999998540645D+01
32	-.300000015189129D+01
33	-.299999965308863D+01
34	-.300000005097594D+01
35	-.300000015537162D+01
36	-.300000001146251D+01
37	-.300000002481088D+01
38	-.300000001217883D+01
39	-.299999998496515D+01
40	-.299999997758667D+01

Chapitre VI

CHOIX AUTOMATIQUE ENTRE UN NOMBRE FINI DE TRANSFORMATIONS DE SUITES A 2 REPONSES

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous proposons au paragraphe 1, une généralisation du procédé général pour le contrôle des erreurs, introduit par C. BREZINSKI [3].

Au paragraphe 2, nous étudions des méthodes de sélection entre un nombre fini de transformations de suites à 2 réponses .

Certaines méthodes de sélection entre transformations à 2 réponses de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$, sont basées sur la généralisation du procédé général pour le contrôle des erreurs.

1 - CONTROLE DES ERREURS

Dans ce paragraphe, nous ne considérons que des suites réelles.

Les méthodes de contrôle des erreurs, introduites par C. BREZINSKI [3], consistent à transformer une suite $(S_n) \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R})$ de limite S, en une suite $(T_n, V_n) \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^2)$ telle que :

1) $\mathrm{Lim}\, T_n = \lim V_n = S$, $T_n - S = o(S_n - S)$, $V_n - S = o(S_n - S)$.

2) $\exists\, n_o, \forall\, n \geq n_o : S \in [\min(T_n, V_n), \max(T_n, V_n)]$.

1.1 - Contrôle des erreurs à l'aide d'une transformation de suites

Soit $(S_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Dans toute la suite, la notation $S_n \to S$, signifie que S_n converge vers S.

Soient $b, c \in \mathbb{R}$, $b < c$; $T \in \mathrm{Trans}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $(S_n) \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{dom}\, T$.

Nous notons par : $(T_n) = T(S_n)$, $S = \lim S_n$, $D_n = T_n - S_n$.

Dans toute la suite, on suppose que $D_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

On pose :

$$T_n(b) = T_n - b\, D_n,\quad T_n(c) = T_n - c\, D_n.$$

$$I_n(b, c) = [\min(T_n(b), T_n(c)), \max(T_n(b), T_n(c))]$$

$$e_n = \frac{T_n - S}{D_n} \quad (\mathrm{Si}\ D_n \neq 0).$$

<u>*Théorème 1*</u>

$\exists\, N_o, \forall\, n \geq N_o : S \in I_n(b, c) \iff \exists\, N_1, \forall\, n \geq N_1 : e_n \in [b, c]$

<u>*Théorème 2*</u>

Si $T_n - S = o(S_n - S)$ *alors* $\forall\, b, c \in \mathbb{R}$, $b\, c < 0$, $\exists\, N_o, \forall\, n \geq N_o : S \in I_n(b, c)$.

<u>Remarque</u>

Si $T_n - S = o(S_n - S)$, $b\, c \neq 0$ alors $T_n(b)$, $T_n(c)$ n'accélèrent pas la convergence de S_n.

Soient $(b_n), (c_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec $b_n < c_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En remplaçant b (resp. c) par b_n (resp. c_n) dans ce qui précède, nous obtiendrons le résultat suivant :

Théorème 3

1) $\exists N_o, \forall n \geq N_o : S \in I_n(b_n, c_n) \iff \exists N_1, \forall n \geq N_1 : e_n \in [b_n, c_n]$.

2) Si : i) $T_n - S = o(S_n - S)$

ii) $b_n \to b$, $c_n \to c$, $bc < 0$

alors $\exists N_o, \forall n \geq N_o : S \in I_n(b_n, c_n)$

3) Si $T_n - S = o(S_n - S)$ *alors*

. $T_n(b_n) - S = o(S_n - S) \iff b_n \to 0$

. $T_n(c_n) - S = o(S_n - S) \iff c_n \to 0$

4) . $T_n(b_n) - S = o(T_n - S) \iff \dfrac{b_n}{e_n} \to 1$

. $T_n(c_n) - S = o(T_n - S) \iff \dfrac{c_n}{e_n} \to 1$

Soit $(\varepsilon_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$, $\varepsilon_n \to 0$

On pose

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{\Delta T_n}{\Delta D_n} - \varepsilon_n & \text{si } \Delta D_n \neq 0 \\ \varepsilon_o & \text{sinon} \end{cases} \quad ; \quad c_n = \begin{cases} \dfrac{\Delta T_n}{\Delta D_n} + \varepsilon_n & \text{si } \Delta D_n \neq 0 \\ \varepsilon_o & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 1

Si : i) $\dfrac{T_n - S}{S_n - S} \to \lambda \notin \{0, 1\}$

ii) $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < 1 < \beta, \exists N_o, \forall n \geq N_o : \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \notin [\alpha, \beta]$.

alors

$$T_n(b_n) - S = o(T_n - S) \text{ et } T_n(c_n) - S = o(T_n - S).$$

. Résulte immédiatement de la partie 4) du théorème 3.

1.2 - Contrôle des erreurs à l'aide de 2 transformations de suites

Soient T_1, $T_2 \in$ Trans $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; $(S_n) \in$ dom $T_1 \cap$ dom T_2 ; $b, c \in \mathbb{R}$, $b < c$.

Nous notons par : $(T_1^n) = T_1(S_n)$, $(T_2^n) = T_2(S_n)$, $S = \lim T_1^n = \lim T_2^n = \lim S_n$.

On pose :

$$(*) \quad \left| \begin{array}{l} D_n = T_1^n - T_2^n \\ T_n(b) = T_1^n - b\, D_n \\ T_n(c) = T_1^n - c\, D_n \\ I_n(b, c) = [\min(T_n(b), T_n(c)), \max\,(T_n(b), T_n(c))]. \\ e_n = \dfrac{T_1^n - S}{D_n} \text{ (on suppose } \exists\, N_o,\ \forall\, n \geq N_o : D_n \neq 0). \end{array} \right.$$

Dans toute cette section on suppose que $\dfrac{T_1^n - S}{T_2^n - S} \to \ell \neq 1$.

Théorème 4

$\forall\, b, c \in \mathbb{R}$, $b < \dfrac{\ell}{\ell-1} < c$, $\exists\, N_o$, $\forall\, n \geq N_o$: $S \in I_n(b, c)$

résulte du fait que $e_n \to \dfrac{\ell}{\ell-1}$ et du théorème 1.

Théorème 5

1) *Si* $T_1^n - S = o(S_n - S)$ *et si* $\ell \neq 0$ *alors* $T_n(b) - S = o(S_n - S)$ *et* $T_n(c) - S = o(S_n - S)$.

2) *Si* $T_1^n - S = o(S_n - S)$ *et si* $T_2^n - S = o(S_n - S)$ *alors* $T_n(b) - S = o(S_n - S)$ *et* $T_n(c) - S = o(S_n - S)$.

Soient (b_n), $(c_n) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ avec $b_n < c_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En remplaçant dans $(*)$ le paramètre b (resp. c) par b_n (resp. c_n) nous obtiendrons le résultat suivant :

Théorème 6

1) $\exists\, N_o$, $\forall\, n \geq N_o$: $S \in I_n(b_n, c_n) \iff \exists\, N_1$, $\forall\, n \geq N_1$: $e_n \in [b_n, c_n]$.

2) *Si* :

i) $T_1^n - S = o(S_n - S)$

ii) $\dfrac{T_2^n - S}{S_n - S} \to \ell' \neq 0$

alors

a) $T_n(b_n) - S = o(S_n - S) \iff b_n \to 0$

b) $T_n(c_n) - S = o(S_n - S) \iff c_n \to 0$

3) *Si* $T_1^n - S = o(T_2^n - S)$ *alors*

c) $T_n(b_n) - S = o(T_2^n - S) \iff b_n \to 0$

d) $T_n(c_n) - S = o(T_2^n - S) \iff c_n \to 0$

Preuve

1) La démonstration est analogue à celle du théorème 1.

2)

$$\frac{T_n(b_n)-S}{S_n-S} = \frac{T_1^n-S}{S_n-S} - b_n \frac{D_n}{S_n-S}$$

$\dfrac{T_1^n-S}{S_n-S} \to 0$, $\dfrac{D_n}{S_n-S} \to -\ell' \neq 0$, par conséquent $T_n(b_n)-S = o(S_n-S)$ $\iff b_n \to 0$.

1.2.0 - Choix particuliers des suites (b_n), (c_n)

Le meilleur choix de (b_n), (c_n), consiste à prendre $b_n = e_n$, $c_n = e_n$ car $T_n(e_n) = S$, cependant ce choix, est impossible en pratique, car la connaissance de e_n dépend de la connaissance de $S = \lim S_n$.

Dans toute la suite, on suppose :

$$\exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha < 1 < \beta,\ \exists\ N_o,\ \forall\ n \geq N_o : \frac{\Delta T_2^{n+1}}{\Delta T_2^n} \notin [\alpha, \beta].$$

a) Soient $b, c \in \mathbb{R}$, $b < c$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{\Delta T_1^n}{\Delta D_n} & \text{si } \Delta D_n \neq 0 \\ b & \text{sinon} \end{cases} \quad ; \quad c_n = \begin{cases} \dfrac{\Delta T_1^n}{\Delta T_2^n} & \text{si } \Delta T_2^n \neq 0 \\ c & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 2

1) $c_n \to \ell$, $b_n \to \dfrac{\ell}{\ell-1}$

2) Si $\ell \neq 0$ *alors*

i) $T_n(b_n) - S = o(T_1^n - S)$

ii) $\dfrac{T_n(c_n) - S}{T_1^n - S} \to 2-\ell$

3) $T_n(b_n) - S = o(T_2^n - S)$

4) $\dfrac{T_n(c_n) - S}{T_2^n - S} \to \ell(2-\ell)$

Remarque

Si nous prenons $T_2^n = T_1^{n-1}$ nous aurons $T_n(b_n) = T_1^n - \dfrac{\Delta T_1^n \, \Delta T_1^{n-1}}{\Delta^2 T_1^{n-1}}$ qui n'est autre que le Δ^2 d'Aitken appliqué à (T_1^{n-1}).

b) Soient $b, c \in \mathbb{R}$, $b < c$, $\alpha \in]0, 1[$.

Pour tout n, on pose

$$b_n = \begin{cases} \alpha\left(\dfrac{\Delta T_1^n}{\Delta T_2^n}\right) + (1-\alpha)\left(\dfrac{\Delta T_1^n}{\Delta D_n}\right) & \text{si } \Delta T_2^n \neq 0, \ \Delta D_n \neq 0 \\ b & \text{sinon} \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} -\alpha\left(\dfrac{\Delta T_1^n}{\Delta T_2^n}\right) + (1+\alpha)\left(\dfrac{\Delta T_1^n}{\Delta D_n}\right) & \text{si } \Delta T_2^n \neq 0, \ \Delta D_n \neq 0 \\ c & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème 7

Si : *i)* $\dfrac{T_2^{n+1}-S}{T_2^n-S} \to \ell',\ \ell' \neq 1$

ii) $\dfrac{e_{n+1}}{e_n} \to a$

alors

$$. \ \frac{b_n}{e_n} \to \left(1 + (a-1)\ \frac{\ell'}{\ell'-1}\right)(\alpha(\ell-1)+(1-\alpha))$$

$$. \ \frac{c_n}{e_n} \to \left(1 + (a-1)\ \frac{\ell'}{\ell-1}\right)(-\alpha(\ell-1)+(1+\alpha))$$

Preuve

$T_1^n - S = e_n D_n \Rightarrow \Delta T_1^n = e_n . \Delta D_n + \Delta e_n . D_{n+1}$

pour n assez grand nous avons :

$$b_n = \frac{\alpha(e_n \Delta D_n + \Delta e_n . D_{n+1})}{(e_n-1)\Delta D_n + \Delta e_n D_{n+1}} + (1-\alpha)\ \left(e_n + \Delta e_n\ .\ \frac{D_{n+1}}{\Delta D_n}\right)$$

$$= \frac{\alpha\left(e_n + \Delta e_n\ .\ \frac{D_{n+1}}{\Delta D_n}\right)}{(e_n-1)+\Delta e_n\ .\ \frac{D_{n+1}}{\Delta D_n}} + (1-\alpha)\ \left(e_n + \Delta e_n\ .\ \frac{D_{n+1}}{\Delta D_n}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{b_n}{e_n} = \frac{\alpha\left(1 + \frac{\Delta e_n}{e_n}\ .\ \frac{D_{n+1}}{\Delta D_n}\right)}{(e_n-1)+\Delta e_n\ .\ \frac{D_{n+1}}{\Delta D_n}} + (1-\alpha)\left(1 + \frac{\Delta e_n}{e_n}\ .\ \frac{D_{n+1}}{\Delta D_n}\right) \qquad (*)$$

$$\frac{D_{n+1}}{D_n} = \frac{T_1^{n+1}-T_2^{n+1}}{T_1^n-T_2^n} = \frac{\dfrac{T_1^{n+1}-S}{T_2^{n+1}-S} - 1}{\dfrac{T_1^n-S}{T_2^n-S} - 1}\ .\ \frac{T_2^{n+1}-S}{T_2^n-S} \to \ell', \text{ par suite}$$

$$\frac{D_{n+1}}{\Delta D_n} \to \frac{\ell'}{\ell'-1} \qquad (**)$$

$$\frac{\Delta e_n}{e_n} = \left(\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1\right) \to a-1 \qquad (***)$$

d'après (*), (**), (***), $\frac{b_n}{e_n} \to (1 + (a-1)\frac{\ell'}{\ell'-1})(\alpha(\ell-1)+(1-\alpha))$.

Pour $\frac{c_n}{e_n}$, il suffit de remplacer α par $-\alpha$ dans la limite de $\frac{b_n}{e_n}$.

Remarques

1) Si $\ell \neq 0$ alors $\frac{b_n}{e_n} \to (1-\alpha)+\alpha(\ell-1)$ et $\frac{c_n}{e_n} \to (1+\alpha)-\alpha(\ell-1)$ sans que

$$\frac{T_2^{n+1}-S}{T_2^n-S} \to \ell' \neq 1.$$

2) Si ($a = 1$ ou $\ell' = 0$) alors $\frac{b_n}{e_n} \to (1-\alpha)+\alpha(\ell-1)$ et $\frac{c_n}{e_n} \to (1+\alpha)-\alpha(\ell-1)$ et plus α est voisin de 0, plus que b_n, c_n sont de bonnes approximations de e_n.

Proposition 3

1) Si ($\ell \neq 0$ *et* $\ell \neq 2$) *alors* $\exists\, N_o, \forall\, n \geq N_o : S \in I_n(b_n, c_n)$.

2) Si ($\ell \neq 0$ *et* $T_1^n-S = o(S_n-S)$) *alors* $T_n(b_n)-S = o(S_n-S)$ *et* $T_n(c_n)-S = o(S_n-S)$

3) Si ($\ell \neq 0$ *ou* $a = 1$ *ou* $\ell' = 0$) *alors*

i) $\frac{T_n(b_n)-S}{T_1^n-S} \to \alpha(2-\ell)$.

ii) $\frac{T_n(c_n)-S}{T_1^n-S} \to \alpha(\ell-2)$.

iii) $\frac{T_n(b_n)-S}{T_2^n-S} \to \alpha\,\ell(2-\ell)$, $\frac{T_n(c_n)-S}{T_2^n-S} \to \alpha\,\ell(\ell-2)$

Preuve

1) résulte du fait que $b_n \to \alpha\,\ell + (1-\alpha)\frac{\ell}{\ell-1}$, $c_n \to -\alpha\,\ell + (1+\alpha)\frac{\ell}{\ell-1}$.

2) évidente

3) résulte des remarques 1), 2).

Remarque

La partie 3) de la proposition 3 montre que : plus α est voisin de 0, plus

les rapports $\frac{T_n(b_n)-S}{T_1^n-S}$, $\frac{T_n(c_n)-S}{T_1^n-S}$, $\frac{T_n(b_n)-S}{T_2^n-S}$, $\frac{T_n(c_n)-S}{T_2^n-S}$ sont voisins de 0.

Soit $(\alpha_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ avec $\lim \alpha_n = 0$ et $\forall$ n, $\alpha_n < 1$.

En remplaçant le paramètre α dans les expressions de b_n, c_n par α_n, nous obtiendrons le résultat suivant :

Proposition 4

1) $b_n \to \frac{\ell}{\ell-1}$, $c_n \to \frac{\ell}{\ell-1}$.

2) Si $\ell \neq 0$ *alors* $T_n(b_n)-S = o(T_1^n-S)$; $T_n(c_n)-S = o(T_1^n-S)$

Preuve

1) évidente

2) résulte du fait que $\frac{b_n}{e_n} \to 1$, $\frac{c_n}{e_n} \to 1$.

Remarque

On n'a pas nécessairement $e_n \in [\min(b_n, c_n), \max(b_n, c_n)]$ à partir d'un certain rang, ce qui ne nous garantit pas l'appartenance de S à l'intervalle $[\min(T_n(b_n), T_n(c_n)), \max(T_n(b_n), T_n(c_n))]$.

Soit $\varepsilon > 0$ remplaçons b_n (resp. c_n) par $b'_n = b_n(1+\varepsilon)$ (resp. $c'_n = c_n(1-\varepsilon)$).

Si $\ell \neq 0$ alors $\frac{b'_n}{e_n} \to 1+\varepsilon$, $\frac{c'_n}{e_n} \to 1-\varepsilon$, ce qui montre que, plus ε est petit plus b'_n, c'_n sont de bonnes approximations de e_n.

Théorème 8

Si $\ell \neq 0$ *alors*

1) $\exists\, N_o$, $\forall\, n \geq N_o$: $S \in I_n(b'_n, c'_n)$.

2) $\dfrac{T_n(b'_n)-S}{T_1^n-S} \to -\varepsilon$, $\dfrac{T_n(c'_n)-S}{T_1^n-S} \to \varepsilon$,

$\dfrac{T_n(b'_n)-S}{T_2^n-S} \to -\ell\varepsilon$; $\dfrac{T_n(c'_n)-S}{T_2^n-S} \to \ell\varepsilon$.

Preuve

1) résulte du fait que $e_n \to \frac{\ell}{\ell-1}$, $b'_n \to \frac{\ell}{\ell-1}(1+\varepsilon)$, $c'_n \to \frac{\ell}{\ell-1}(1-\varepsilon)$.

2) résulte du fait que $\dfrac{b'_n}{e_n} \to 1+\varepsilon$, $\dfrac{c'_n}{e_n} \to 1-\varepsilon$.

Remarques

1) La partie 2) du théorème 8 montre que, plus ε est petit, plus il y a amélioration de la convergence de T_1^n, T_2^n par $T_n(b'_n)$, $T_n(c'_n)$.

2) Les résultats du théorème 8 et de la proposition 4 montrent qu'une petite modification de (b_n), (c_n) nous assure le contrôle de S mais nous fait perdre l'accélération de (T_1^n), (T_2^n) par $T_n(b_n)$, $T_n(c_n)$.

3) Si nous prenons $b'_n = b_n(1-\varepsilon)$, $c'_n = c_n(1+\varepsilon)$, nous obtiendrons des résultats analogues aux résultats du théorème 8.

2 - SELECTION ENTRE UN NOMBRE FINI DE TRANSFORMATIONS DE SUITES A 2 REPONSES

Soit (E, d) espace métrique.

Etant données, $S_1, \ldots, S_k \subset \mathrm{Conv}(E)$; $(T_1, V_1), \ldots, (T_k, V_k)$ (k fixé).
k couples de transformations de suites, dites transformations à 2 réponses telles que pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, S_i est accélérée par T_i, V_i.
Dans ce paragraphe, nous étudions le problème d'accélération de $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$, en utilisant la technique de sélection entre les transformations à 2 réponses

$(T_1, V_1), \dots, (T_k, V_k)$.

Les méthodes de sélection présentées au chapitre 3,peuvent s'adapter facilement au problème du choix automatique entre transformations de suites à 2 réponses ie (de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $(E^2)^{\mathbb{N}}$), en interprétant ces dernières, comme des transformations de $(E^2)^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $(E^2)^{\mathbb{N}}$.

La section 2.0 est consacrée à des définitions que nous utiliserons ensuite. Dans la section 2.1, nous étudions des méthodes de sélection entre transformations de suites à 2 réponses de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$.

La section 2.2 est réservée à des méthodes de sélection entre transformations à 2 réponses de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $(E^2)^{\mathbb{N}}$.

2.0 - Définitions et notations

Soient $A_1, A_2 \in$ Trans (E, E), dom $A_1 \cap$ dom $A_2 \neq \emptyset$.

Dans toute la suite, nous notons $T = (A_1, A_2)$, la transformation de suites à 2 réponses, qui à $(x^n) \in \bigcap_{i=1}^{2} \text{dom } A_i$, fait correspondre la suite (A_1^n, A_2^n) où $(A_1^n) = A_1(x^n)$, $(A_2^n) = A_2(x^n)$; T a pour domaine $\bigcap_{i=1}^{2} \text{dom } A_i$.

Lorsque une suite $(x^n) \in \text{conv}(E)$, nous notons par x sa limite.

Soient $q \in \mathbb{N}^*$, $S \subset \text{Conv}(E)$.

- On dit que $T = (A_1, A_2)$ est régulière sur S (resp. exacte sur S) ssi A_1, A_2 sont régulières sur S (resp. exactes sur S).
- On dit que T est semi-régulière sur S ssi $\forall\ (x^n) \in S$:
$[\exists\ n_o, \forall\ n \geq n_o : T^n = T^{n+1}] \Rightarrow [\exists\ m_o, \forall\ n \geq m_o : T^n = (x, x)]$.
- On dit que T est pseudo-régulière d'ordre q sur S ssi
$\forall\ (x^n) \in S : [\forall\ n, \exists\ m_n \geq n : T^{m_n} = T^{m_n+1} = \dots = T^{m_n+q}] \Rightarrow [\exists\ n_o, \forall\ n \geq n_o : T^n = (x,x)]$.

Lorsque T est pseudo-régulière d'ordre 1 sur S, on dira que T est pseudo-régulière sur S.

- On dit que T vérifie la condition (A) sur S ssi
$\forall\ (x^n) \in S : [\exists\ n_o, \forall\ n \geq n_o : A_1^n = A_2^n] \Rightarrow [\exists\ m_o, \forall\ n \geq m_o : A_1^n = A_2^n = x]$.

pour plus de détails en ce qui concerne cette définition, consulter [3].

- On dit que T est q- (A) sur S ssi

$$\forall\ (x^n) \in S : [\forall\ n,\ \exists\ m_n \geq n,\ \forall\ i \in \{m_n, \ldots, m_n + q-1\} : A_1^i = A_2^i] \Rightarrow$$
$$[\exists\ n_o,\ \forall\ n \geq n_o : A_1^n = A_2^n = x].$$

<u>Remarques</u>

1) Si A_1, A_2 sont semi-régulières sur S alors $T = (A_1, A_2)$ est semi-régulière sur S.

2) Si A_1, A_2 sont pseudo-régulières d'ordre q sur S alors $T = (A_1, A_2)$ est pseudo-régulière d'ordre q sur S.

3) Soit $q' \in \mathbb{N}^*$, $q' \leq q$. Nous avons le schéma d'implications suivant :

T est q'-(A) sur S <=	T est exacte sur S =>	T est pseudo-régulière d'ordre q' sur S
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
T est q-(A) sur S		T est pseudo-régulière d'ordre q sur S
$\Downarrow$		$\Downarrow$
T vérifie la condition (A) sur S	T est régulière sur S =>	T est semi-régulière sur S

4) Soit $A \in Trans(E, E)$, $S \subset Conv(E)$.

La transformation T à 2 réponses, définie par $\forall\ (x^n) \in dom\ A$:

$T(x^n) = (A^n, A^{n+1})$ où $(A^n) = A(x^n)$, vérifie

T est q-(A) sur S <=> A est pseudo-régulière d'ordre q sur S.

Supposons maintenant que (E, d) est un espace métrique.

Dans toute la suite, nous notons D_o, la distance sur E^2, définie par :

$\forall\ (x^1, y^1), (x^2, y^2) \in E^2 : D_o((x^1, y^1), (x^2, y^2)) = \max(d(x^1, x^2), d(y^1, y^2))$.

Soient (x^n), (t_1^n), $(t_2^n) \in Conv(E)$ telles que $\lim x^n = \lim t_1^n = \lim t_2^n = x$.

- On dit que (t_1^n, t_2^n) converge plus vite que (x^n) ssi

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ n_o,\ \forall\ n \geq n_o : D_o((t_1^n, t_2^n), (x, x)) \leq \varepsilon\ d(x^n, x).$$

- On dit que (t_1^n, t_2^n) Δ-accélère (x^n) ssi

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ n_o,\ \forall\ n \geq n_o : D_o((t_1^n, t_2^n), (t_1^{n-1}, t_2^{n-1})) \leq \varepsilon\ d(x^n, x^{n-1}).$$

Remarque

(t_1^n, t_2^n) converge plus vite que (x^n) (resp. Δ-accélère (x^n)) $\iff$ (t_1^n), (t_2^n) convergent plus vite que (x^n) (resp. (t_1^n), (t_2^n) Δ-accélèrent (x^n)) .

- Soient A_1, $A_2 \in$ Trans(E, E), $S \subset$ Conv(E).

On dit que $T = (A_1, A_2)$ accélère (resp. Δ-accélère) S ssi $\forall$ $(x^n) \in S$: $T(x^n) = (A_1^n, A_2^n)$ converge plus vite que (x^n) (resp. Δ-accélère (x^n)).

Remarque

$T = (A_1, A_2)$ accélère (resp. Δ-accélère) S ssi A_1, A_2 accélèrent (resp. Δ-accélèrent) S.

Soit $q \in \mathbb{N}^*$.

- On dit que $T = (A_1, A_2)$ est [q]-(D) sur $S \subset \text{Conv}^*(E)$ ssi $\forall$ $(x^n) \in S$:

ou bien T accélère (x^n)

ou bien $\exists\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_o$, $\forall\ n \geq n_o$: $\displaystyle\max_{1\leq r\leq q} \left(\frac{d(A_1^{n-r+1}, A_2^{n-r+1})}{d(x^{n-r+1}, x)}\right) \geq \varepsilon.$

- On dit que $T = (A_1, A_2)$ est semi-([q] -nette) sur $S \subset \text{Conv}^{**}(E)$ ssi $\forall$ $(x^n) \in S$: ou bien T accélère et Δ-accélère (x^n).

ou bien $\exists\ \varepsilon>0$, $\exists\ n_o$, $\forall\ n\geq n_o$: $\displaystyle\max_{1\leq r\leq q} \left(\frac{D_o(T^{n-r}, T^{n-r+1})}{d(x^{n-r}, x^{n-r+1})}\right) \geq \varepsilon.$

Remarques

Soient $q, q' \in \mathbb{N}^*$, $q \geq q'$.

1) Soit $S \subset \text{Conv}^*(E)$.

Si T est [q']-(D) sur S alors T est [q]-(D) sur S.

2) Soit $S \subset \text{Conv}^{**}(E)$.

Si T est semi-([q']-nette) sur S alors T est semi-([q]-nette) sur S.

3) Si A_1 et A_2 sont [q]-nette sur S alors T est semi-([q]-nette) sur S.

Définition

- Soient $A_1 = (T_1, V_1), \ldots, A_k = (T_k, V_k)$, k transformations à 2 réponses de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $(E^2)^{\mathbb{N}}$ avec $\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{dom}\, A_i \neq \emptyset$.

Une transformation à 2 réponses T de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $(E^2)^{\mathbb{N}}$ est dite méthode de sélection entre $A_1, \ldots, A_k$ ssi $\forall\, (x^n) \in \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{dom}\, A_i$: $T(x^n) = (T^n)$ avec $T^n \in \{A_1^n, \ldots, A_k^n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Rappel de quelques notations

$\mathbb{K}_o = \{0,1,2,3,4,6,7,9\} \cup \{{}^q5 \mid q \in \mathbb{N}^*\} \cup \{{}^{(r,p)}8 \mid r, p \in \mathbb{N}, 1 \leq r \leq p+1\}$.

$\mathbb{K}_o$ est appelé ensemble des indices des coefficients de décompte.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Etant données des relations $R_i^{(n)}$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, $n \geq n_o$;

$R_i^{(n)}$ est vraie ou fausse selon i et n.

Les quantités $f_{r_i}(n)$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{K}_o$, désignent les coefficients de décompte d'indices f, associés aux relations $R_i^{(n)}$, $i \in \{1, \ldots, k\}$.

2.1 - Sélection entre k transformations à 2 réponses de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Soient $A_1 = (T_1, V_1), \ldots, A_k = (T_k, V_k)$, k transformations à 2 réponses de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$, $\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{dom}\, A_i \neq \emptyset$; $(b_1^n, c_1^n), \ldots, (b_k^n, c_k^n)$ k suites de $\mathbb{R}^2$ avec $b_i^n < c_i^n$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Dans toute la suite nous notons par (V^n) la suite de terme général

$V^n = ((b_1^n, c_1^n), \ldots, (b_k^n, c_k^n))$.

Soit $(x^n) \in \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{dom}\, A_i$.

On pose :

pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $n \in \mathbb{N}$:

$D_i^n = T_i^n - V_i^n$

${}^{i}T_n(b_i^n) = T_i^n - b_i^n D_i^n$

${}^{i}T_n(c_i^n) = T_i^n - c_i^n D_i^n$

${}^{i}I_n(b_i^n, c_i^n) = [\min({}^{i}T_n(b_i^n), {}^{i}T_n(c_i^n)), \max({}^{i}T_n(b_i^n), {}^{i}T_n(c_i^n))].$

${}^{i}L_n(b_i^n, c_i^n) = |b_i^n - c_i^n| \, |D_i^n|$ la longueur de l'intervalle ${}^{i}I_n(b_i^n, c_i^n)$.

2.1.1 - Transformations à 2 réponses $_{((V^n),q)}{}^{f}L(A_1, \ldots, A_k)$, $f \in \mathbb{K}_o$

Soit $f \in \mathbb{K}_o$.

La transformation à 2 réponses $T = {}_{((V^n),q)}{}^{f}L(A_1, \ldots, A_k)$ appliquée à une suite $(x^n) \in \bigcap_{i=1}^{k} \text{dom } A_i$, fonctionne de la manière suivante :

<u>étape $n < q-1$</u>

$T^n = A_1^n = (T_1^n, V_1^n)$

<u>étape $n \geq q-1$</u>

a) *On considère les relations* $({}_{(V^n,q)}L_i^{(n)})$, $i \in \{1, \ldots, k\}$ *définies par :*

$$({}_{(V^n,q)}L_i^{(n)}) : \max_{1\leq r\leq q} ({}^{i}L_{n-r+1}(b_i^{n-r+1}, c_i^{n-r+1})) = \text{Min}_{1\leq j\leq k} (\max_{1\leq r\leq q} ({}^{j}L_{n-r+1}(b_j^{n-r+1}, c_j^{n-r+1}))$$

b) *On calcule les coefficients de décompte* ${}_{(V^n,q)}{}^{f}\ell_i(n)$, $i \in \{1, \ldots, k\}$.

c) *On pose* $T^n = A_{i(n)}^n = (T_{i(n)}^n, V_{i(n)}^n)$ *avec* $i(n)$ *est le plus petit indice de* $\{1, \ldots, k\}$ *vérifiant* ${}_{(V^n,q)}{}^{f}\ell_{i(n)}(n) = \max_{1\leq j\leq k} {}_{(V^n,q)}{}^{f}\ell_j(n)$.

La transformation à 2 réponses $T = {}_{((V^n),q)}{}^{f}L(A_1, \ldots, A_k)$ est dite méthode de sélection entre $A_1, \ldots, A_k$, associée aux coefficients de décompte ${}_{(V^n,q)}{}^{f}\ell_i(n)$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Pour $q = 1$, $b_i^n = -c_i^n = b \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $n \in \mathbb{N}$, $f = 1$, la méthode de sélection ${}_{((V^n),q)}{}^{f}L(A_1, \ldots, A_k)$ a été étudiée par C. BREZINSKI dans [3].

Théorème 9

Soient $S_1, \ldots, S_k \subset \mathrm{Conv}(E)$; $A_1 = (T_1, V_1), \ldots, A_k = (T_k, V_k)$ k *transformations à 2 réponses de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$. *Si pour tout* $i \in \{1, \ldots, k\}$, A_i *est exacte sur* S_i, q-(A) *sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ *alors pour tout* $f \in \mathbb{K}_o$, *la transformation à 2 réponses* ${}^{f}_{((V^n),q)}L(A_1, \ldots, A_k)$ *est exacte sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

Preuve

Nous ne démontrons le théorème que pour $T = {}^{o}_{((V^n),q)}L(A_1, \ldots, A_k)$, pour les autres cas, les démonstrations en découlent facilement.

Soit $(x^n) \in \bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

Il existe $i_o \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $(x^n) \in S_{i_o}$, par conséquent A_{i_o} est exacte sur (x^n).

Soit I l'ensemble des indices $i \in \{1, \ldots, k\}$ tels que A_i est exacte sur (x^n).

$I \neq \emptyset$ car $i_o \in I$.

$\exists\, m_o \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq m_o$, $\forall\, i \in I$: ${}_{(V^n,q)}{}^{o}\ell_i(n) = 1$. (*)

Si $\bar{I} = \complement^{I}_{\{1,\ldots,k\}} = \emptyset$ alors T est exacte sur (x^n).

Sinon.

Soit $j \in \bar{I}$. $A_j = (T_j, V_j)$ étant q-(A) sur (x^n), par conséquent $\exists\, m_j \geq m_o$ tel que $\forall\, n \geq m_j$ ${}_{(V^n,q)}{}^{o}\ell_j(n) = 0$.

Soit $n_o = \max\limits_{j \in \bar{I}} m_j$.

$\forall\, n \geq n_o$, $\forall\, j \in \bar{I}$: ${}_{(V^n,q)}{}^{o}\ell_j(n) = 0$ (**)

D'après (*), (**) on a $\forall\, n \geq n_o$, $i(n) \in I$, par conséquent T est exacte sur (x^n).

$\square$

Remarque

Soit $p \in \mathbb{N}$, $p > q$.

Si pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, A_i est exacte sur S_i et A_i est p-(A) sur $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ alors on ne peut rien affirmer en ce qui concerne les transforamtions

${}_{((V^n),q)}^{\ f}L(A_1, \ldots, A_k)$, $f \in \mathbb{K}_o - \{1,2,3,6\}$, en fait il est possible de montrer à l'aide de contre-exemples qu'elles ne sont pas exactes sur $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

Théorème 10

Soient $S_1, \ldots, S_k \subset \mathrm{Conv}(E)$; $A_1 = (T_1, V_1), \ldots, A_k = (T_k, V_k)$ k *transformations à 2 réponses de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$. *Si pour tout* $i \in \{1, \ldots, k\}$, A_i *est exacte sur* S_i *et* A_i *vérifie la condition* (A) *sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ *alors pour tout* $f \in \{1, 2, 3, 6\}$, *la transformation* ${}_{((V^n),q)}^{\ f}L(A_1,\ldots,A_k)$ *est exacte sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

Preuve

Nous ne démontrons le théorème que pour $T = {}_{((V^n),q)}^{\ 1}L(A_1, \ldots, A_k)$, pour les autres cas , les démonstrations en découlent facilement.

Soit $(x^n) \in \bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

Il existe $i_o \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $(x^n) \in S_{i_o}$.

Soit I l'ensemble des indices des transformations exactes sur (x^n).

$I \neq \emptyset$ car $i_o \in I$.

$\exists\, m_o \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq m_o$, $\forall\, i \in I$: $\quad {}_{(V^n,q)}^{\ 1}\ell_i(n) \geq n-m_o+1 \qquad (*)$

Si $\bar{I} = \complement_{\{1,\ldots,k\}}^{I} = \emptyset$ alors T est exacte sur (x^n).

Sinon.

Soit $j \in \bar{I}$. $A_j = (T_j, V_j)$ vérifie la condition (A) sur (x^n) par conséquent, il existe une infinité d'entiers n tels que $\quad {}_{(V^n,q)}^{\ o}\ell_j(n) = 0$

par suite, $\exists\, m_j \geq m_o$ tel que $\forall\, n \geq m_j$: $\quad {}_{(V^n,q)}^{\ 1}\ell_j(n) < n-m_o$.

Soit $n_o = \max_{j \in \bar{I}} m_j$.

$\forall\, n \geq n_o$, $\forall\, j \in \bar{I}$: $\quad {}_{(V^n,q)}^{\ 1}\ell_j(n) < n-m_o \qquad (**)$

D'après $(*)$, $(**)$, nous avons $i(n) \in I$ pour tout $n \geq n_o$, par suite T est exacte sur (x^n).

$\square$

Lemme 1

Soit (E, d) *espace métrique.*

Soient $A_1, \ldots, A_k$ k *transformations à 2 réponses de* $E^{\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* $(E^2)^{\mathbb{N}}$, $(x^n) \in \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{dom} A_i$.

Si $(A_1^n), \ldots, (A_k^n)$ *convergent plus vite que* (x^n) *alors pour toute application* $i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *la suite* $(A_{i(n)}^n)$ *converge plus vite que* (x^n).

Théorème 11

Soient $S_1, \ldots, S_k \subset \mathrm{Conv}^*(\mathbb{R})$; $A_1 = (T_1, V_1), \ldots, A_k = (T_k, V_k)$ k *transformations à 2 réponses de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$.

Si

1) *Pour tout* $i \in \{1, \ldots, k\}$, A_i *accélère* S_i *et* A_i *est* [1]-(D) *sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

2) $\exists\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+^*$ *tels que* $\forall\ i \in \{1, \ldots, k\}$, $\forall\ n : \lambda_1 \geq |b_i^n - c_i^n| \geq \lambda_2$.

alors pour tout $f \in \mathbb{K}_o$, *la transformation à 2 réponses* ${}_{((V_n),q)}^{\ f}L(A_1, \ldots, A_k)$ *accélère* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

Preuve

Montrons que $T = {}_{((V^n),q)}^{\ o}L(A_1, \ldots, A_k)$ accélère $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

Soit $(x^n) \in \bigcup_{i=1}^{k} S_i$. $\exists\ i_o \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $(x^n) \in S_{i_o}$, par conséquent l'ensemble I des indices $i \in \{1, \ldots, k\}$ tel que A_i accélère (x^n) est non vide.

Si $\bar{I} = C_{\{1, \ldots, k\}}^{I} = \emptyset$ alors d'après le lemme 1, T accélère (x^n).

Sinon.

Soit $j \in \bar{I}$. A_j étant [1]-(D) sur (x^n), par conséquent $\exists\ \varepsilon_j > 0$, $\exists\ n_j$,

$$\forall\ n \geq n_j \quad : \quad \left|\frac{T_j^n - V_j^n}{x^n - x}\right| \geq \varepsilon_j .$$

Comme la suite (b_j^n, c_j^n) vérifie la condition 2) du théorème 11.

Il en résulte que : $\forall\, n \geq n_j+q$: $\max\limits_{1\leq r\leq q} {}^{j}L_{n-r+1}(b_j^{n-r+1}, c_j^{n-r+1}) \geq \theta_n$

avec $\theta_n = \lambda_2 \times \varepsilon_j \max\limits_{1\leq r\leq q} (|x^{n-r+1}-x|)$.

Posons $\varepsilon = \lambda_2 \min\limits_{j\in\bar{I}} \varepsilon_j$, $m_o = \max\limits_{j\in\bar{I}} n_j+q$.

$$\forall\, n \geq m_o,\ \forall\, j \in \bar{I} : \max_{1\leq r\leq q} {}^{j}L_{n-r+1} (b_j^{n-r+1}, c_j^{n-r+1}) \geq \varepsilon \max_{1\leq r\leq q} |x^{n-r+1}-x|. \qquad (*)$$

Soit $\varepsilon' \in]0, \frac{\varepsilon}{\lambda_1}[$. (**)

Comme pour tout $i \in I$, A_i accélère (x^n) et la suite (b_i^n, c_i^n) est telle que $|b_i^n-c_i^n| \leq \lambda_1$ pour tout n, il en résulte que :

$$\exists\, m_1 \geq m_o \text{ tel que } \forall\, n\geq m_1,\ \forall\, i\in I : \max_{1\leq r\leq q} {}^{i}L_{n-r+1}(b_i^{n-r+1}, c_i^{n-r+1}) \leq \lambda_1\, \varepsilon' \max_{1\leq r\leq q} |x^{n-r+1}-x|. \qquad (***)$$

D'après (*), (**), (***) on a $i(n) \in I$ pour tout $n \geq m_1$, par conséquent d'après le lemme 1, T accélère (x^n).

Pour les autres transformations, les démonstrations découlent facilement de la démonstration ci-dessus.

□

<u>*Proposition 5*</u>

Soient $S_1, \ldots, S_k \subset \mathrm{Conv}^*(\mathbb{R})$; $A_1 = (T_1, V_1), \ldots, A_k = (T_k, V_k)$ k *transformations à 2 réponses de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$.

Si

1) $\forall\, (x^n) \in \bigcup\limits_{i=1}^{k} S_i$, $\exists\, a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+^*$, $a_1 < 1$, $\exists\, n_o$, $\forall\, n \geq n_o$: $a_1 \leq \left|\dfrac{x^{n+1}-x}{x^n-x}\right| \leq a_2$

2) *Pour tout* $i \in \{1, \ldots, k\}$, A_i *accélère* S_i *et* A_i *est* [q]-(D) *sur* $\bigcup\limits_{i=1}^{k} S_i$.

3) $\exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+^*$ *tels que* $\forall\, i \in \{1, \ldots, k\}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $\lambda_1 \geq |b_i^n-c_i^n| \geq \lambda_2$.

alors pour tout $f \in \mathbb{K}_o$, *la transformation de suites à 2 réponses* ${}^{f}_{((V_n),q)}L(A_1, \ldots, A_k)$ *accélère* $\bigcup\limits_{i=1}^{k} S_i$

Pour terminer cette section, nous signalons qu'il est possible de définir d'autres méthodes de sélection, en utilisant à chaque étape $n \geq q-1$, les réponses $A_i^{n-q+1}, \ldots, A_i^n$, $i \in \{1, \ldots, k\}$ et en préservant les résultats des théorèmes 9, 10, 11 et les résultats de la proposition 5.

2.1.2 - *Transformations à 2 réponses* $_{((\beta^n),q)}{}^{f}RD(A_1, \ldots, A_k)$, $f \in \mathbb{K}_o$

Soient $(\beta_1^n), \ldots, (\beta_k^n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ avec $\beta_i^n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \ldots, k\}$ dans cette section, nous notons (β^n) la suite de terme général $\beta^n = (\beta_1^n, \ldots, \beta_k^n)$

Soit $f \in \mathbb{K}_o$.

La méthode de sélection $T = {}_{((\beta^n),q)}{}^{f}RD(A_1, \ldots, A_k)$ appliquée à une suite $(x^n) \in \bigcap_{i=1}^{k} \text{dom } A_i$, fonctionne comme suit :

<u>étape $n < q$</u>

$T^n = A_1^n = (T_1^n, V_1^n)$

<u>étape $n \geq q$</u>

a) *On considère les relations* $({}_{(\beta^n,q)}RD_i^{(n)})$, $i \in \{1, \ldots, k\}$ *définies par :*

Si $\forall\, i \in \{n-q, \ldots, n-1\}$: $x^i \neq x^{i+1}$ *alors on pose :*

$$({}_{(\beta^n,q)}RD_i^{(n)}) : \max_{1 \leq r \leq q} \left(\frac{\beta_i^{n-r+1}|T_i^{n-r+1}-T_i^{n-r}|+(1-\beta_i^{n-r+1})|V_i^{n-r+1}-V_i^{n-r}|}{|x^{n-r+1}-x^{n-r}|}\right) =$$

$$\underset{1 \leq j \leq k}{\text{Min}} \left[\max_{1 \leq r \leq q} \left(\frac{\beta_j^{n-r+1}|T_j^{n-r+1}-T_j^{n-r}|+(1-\beta_j^{n-r+1})|V_j^{n-r+1}-V_j^{n-r}|}{|x^{n-r+1}-x^{n-r}|}\right)\right]$$

Sinon

On pose :

$$({}_{(\beta^n,q)}RD_i^{(n)}) : \max_{1 \leq r \leq q} \left(\beta_i^{n-r+1}|T_i^{n-r+1}-T_i^{n-r}|+(1-\beta_i^{n-r+1})|V_i^{n-r+1}-V_i^{n-r}|\right) =$$

$$\underset{1 \leq j \leq k}{\text{Min}} \left[\max_{1 \leq r \leq q} \left(\beta_j^{n-r+1}|T_j^{n-r+1}-T_j^{n-r}|+(1-\beta_j^{n-r+1})|V_j^{n-r+1}-V_j^{n-r}|\right)\right]$$

b) *On calcule les coefficients de décompte* ${}_{(\beta^n,q)}{}^{f}rd_i(n)$, $i \in \{1,\ldots,k\}$.

c) *On pose* $T^n = A_{i(n)}^n = (T_{i(n)}^n, V_{i(n)}^n)$ *avec* $i(n)$ *est le plus petit indice de*

$\{1, \ldots, k\}$ *vérifiant* ${}_{(\beta^n,\, q)}f_{rd_{i(n)}}(n) = \max\limits_{1\leq j\leq k} {}_{(\beta^n, q)}f_{rd_j}(n)$.

<u>*Théorème 12*</u>

Soient $S_1, \ldots, S_k \subset \mathrm{Conv}(\mathbb{R})$; $A_1 = (T_1, V_1), \ldots, A_k = (T_k, V_k)$ k *transformations à 2 réponses de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$.

Si pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, A_i *est exacte sur* S_i *et* A_i *est pseudo-régulière d'ordre* q *sur* $\bigcup\limits_{i=1}^{k} S_i$ *alors pour tout* $f \in \mathbb{K}_o$, *la transformation à 2 réponses* ${}_{((\beta^n),q)}f_{RD}(A_1, \ldots, A_k)$ *est exacte sur* $\bigcup\limits_{i=1}^{k} S_i$.

<u>Preuve</u>

Nous ne démonstrons le théorème que pour la transformation $T = {}_{((\beta^n),q)}{}^{o}RD(A_1, \ldots, A_k)$, pour les autres cas, les démonstrations en découlent facilement.

Soit $(x^n) \in \bigcup\limits_{i=1}^{k} S_i$. $\exists\, i_o \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $(x^n) \in S_{i_o}$, par conséquent l'ensemble I des indices $i \in \{1, \ldots, k\}$ tel que A_i est exacte sur (x^n) est non vide, par suite $\exists\, m_o \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall\, n \geq m_o$, $\forall\, i \in I$: ${}_{(\beta^n,q)}{}^{o}rd_i(n) = 1$. (*)

Si $\bar{I} = C^{I}_{\{1,\ldots,k\}} = \emptyset$ alors T est exacte sur (x^n).

Sinon.

Soit $j \in \bar{I}$. La transformation $A_j = (T_j, V_j)$ étant pseudo-régulière d'ordre q sur (x^n), par conséquent : $\exists\, n_j \geq m_o$ tel que :

$$\forall\, n \geq n_j : \max_{1\leq r\leq q} |T_j^{n-r+1} - T_j^{n-r}| > 0 \text{ ou } \max_{1\leq r\leq q} |V_j^{n-r+1} - V_j^{n-r}| > 0.$$

Soit $m_1 = \max\limits_{j\in\bar{I}} n_j$.

Nous avons : $\forall\, n \geq m_1$, $\forall\, j \in \bar{I}$: ${}_{(\beta^n,q)}{}^{o}rd_j(n) = 0$ (**)

D'après (*), (**) : $\forall\, n \geq m_1$, $i(n) \in I$, par conséquent T est exacte sur (x^n).

□

Remarque

Soit $p \in \mathbb{N}$, $p > q$.

Si pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, A_i est exacte sur S_i et A_i est pseudo-régulière d'ordre p sur $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ alors on ne peut rien dire en ce qui concerne les méthodes de sélection $^{f}_{((\beta^n),q)}RD(A_1, \ldots, A_k)$, $f \in \mathbb{K}_o - \{1,2,3,6\}$; en fait il est possible de montrer à l'aide de contre-exemples qu'elles ne sont pas exactes sur $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

Proposition 6

Soient $S_1, \ldots, S_k \subset \mathrm{Conv}(\mathbb{R})$; $A_1 = (T_1, V_1), \ldots, A_k = (T_k, V_k)$ k *transformations à 2 réponses de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$.

Si pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, A_i *est exacte sur* S_i, *semi-régulière sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ *alors pour tout* $f \in \{1,2,3,6\}$, *la transformation à 2 réponses* $^{f}_{((\beta^n,q)}RD(A_1, \ldots, A_k)$ *est exacte sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

Théorème 13

Soient $S_1, \ldots, S_k \subset \mathrm{Conv}^{**}(\mathbb{R})$; $A_1 = (T_1, V_1), \ldots, A_k = (T_k, V_k)$ k *transformations à 2 réponses de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$.

Si :

1) *Pour tout* $i \in \{1, \ldots, k\}$, A_i *accélère et* Δ-*accélère* S_i *et* A_i *est semi-([q]-nette) sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

2) $\exists\, \theta_1, \theta_2 \in]0, 1[$, $\exists\, m_o$, $\forall n \geq m_o$, $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$: $\theta_1 \leq \beta_i^n \leq \theta_2$.

alors pour tout $f \in \mathbb{K}_o$, *la méthode de sélection* $^{f}_{((\beta^n),q)}RD(A_1, \ldots, A_k)$ *accélère* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

Preuve

Montrons que $T = {}^{o}_{((\beta^n),q)}RD(A_1, \ldots, A_k$ accélère $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.
Soit $(x^n) \in \bigcup_{i=1}^{k} S_i$. Il existe $i_o \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $(x^n) \in S_{i_o}$, par conséquent l'ensemble des indices $i \in \{1, \ldots, k\}$ tel que A_i accélère et

Δ-accélère (x^n) est non vide.

Si $\bar{I} = \complement^I_{\{1,\ldots,k\}} = \emptyset$ alors d'après le lemme 1, T accélère (x^n).

Sinon.

Soit $j \in \bar{I}$. A_j étant semi-([q]-nette) sur (x^n), par conséquent

$\exists\ \varepsilon_j > 0$, $\exists\ n_j \geq m_o$ (m_o est donné par la condition 2 du théorème 13),

$$\forall\ n \geq n_j : \max_{1\leq r\leq q} \left[\frac{\max(|T_j^{n-r+1}-T_j^{n-r}|,\ |V_j^{n-r+1}-V_j^{n-r}|)}{|x^{n-r+1}-x^{n-r}|}\right] \geq \varepsilon_j .$$

Soient $\varepsilon = \min\limits_{j\in\bar{I}} \varepsilon_j$; $m_1 = \max\limits_{j\in\bar{I}} n_j$.

$$\forall\ n \geq m_1,\ \forall\ j \in \bar{I} : \max_{1\leq r\leq q} \left(\frac{\beta_j^{n-r+1}|T_j^{n-r+1}-T_j^{n-r}|+(1-\beta_j^{n-r+1})|V_j^{n-r+1}-V_j^{n-r}|}{|x^{n-r+1}-x^{n-r}|}\right) \geq \gamma \qquad (*)$$

avec $\gamma = \varepsilon\times\min(\theta_1,\ 1-\theta_2)$

Soit $\varepsilon' \in\ ]0,\ \gamma[$. (**)

Comme pour tout $i \in I$, A_i Δ-accélère (x^n), il en résulte que :

$$\exists\ m_2 \geq m_1,\ \forall\ n \geq m_2,\ \forall\ i \in I : \max_{1\leq r\leq q} \left(\frac{\beta_i^{n-r+1}|T_i^{n-r+1}-T_i^{n-r}|+(1-\beta_i^{n-r+1})|V_i^{n-r+1}-V_i^{n-r}|}{|x^{n-r+1}-x^{n-r}|}\right) < \varepsilon' \qquad (***)$$

D'après (*), (**), (***) on a $\forall\ n \geq m_2$, $i(n) \in I$, par conséquent d'après le lemme 1, T accélère (x^n).

Pour les autres transformations, les démonstrations en découlent facilement.

□

2.1.3 - *Transformations* $_{(q,(b,c),(\alpha_1,\ldots,\alpha_k))}{}^{f}CE(A_1,\ldots,A_k)$, $f \in \mathbb{K}_o$

Soient $(b,\ c) \in \mathbb{R}^2$, $b < c$; $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_k \in\ ]0,\ 1[$, $f \in \mathbb{K}_o$.

La méthode de sélection $T = {}_{(q,(b,c),(\alpha_1,\ldots,\alpha_k))}{}^{f}CE(A_1,\ldots,\ A_k)$ appliquée à une suite $(x^n) \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} \mathrm{dom}\ A_i$, fonctionne de la manière suivante :

<u>étape $n < q-1$</u>

On pose :

i) $b_i^n = b$, $c_i^n = c$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots, k\}$.

ii) $T^n = A_1^n = (T_1^n, V_1^n)$

<u>étape $n \geq q-1$</u>

a) On calcule (b_i^n, c_i^n), $i \in \{1, \ldots, k\}$ *de la façon suivante :*

Si $\Delta V_i^n \neq 0$, $\Delta D_i^n \neq 0$ $(D_i^n = T_i^n - V_i^n)$ *alors on pose :*

$$b_i^n = \alpha_i \frac{\Delta T_i^n}{\Delta V_i^n} + (1-\alpha_i) \frac{\Delta T_i^n}{\Delta D_i^n}$$

$$c_i^n = -\alpha_i \frac{\Delta T_i^n}{\Delta V_i^n} + (1+\alpha_i) \frac{\Delta T_i^n}{\Delta D_i^n}$$

Sinon.

On pose $b_i^n = b$, $c_i^n = c$.

b) On considère les relations $(CE_i^{(n)})$, $i \in \{1, \ldots, k\}$ *définies par :*

$$(CE_i^{(n)}) : \max_{1 \leq r \leq q} {}^{i}L_{n-r+1}(b_i^{n-r+1}, c_i^{n-r+1}) = \mathrm{Min}_{1 \leq j \leq k} \left(\max_{1 \leq r \leq q} {}^{j}L_{n-r+1}(b_j^{n-r+1}, c_j^{n-r+1}) \right)$$

c) On calcule les coefficients de décompte $f_{ce_i}(n)$, $i \in \{1, \ldots, k\}$.

d) On pose $T^n = A_{i(n)}^n = (T_{i(n)}^n, V_{i(n)}^n)$ *avec* $i(n)$ *est le plus petit indice de* $\{1, \ldots, k\}$, *vérifiant* $f_{ce_{i(n)}}(n) = \max_{1 \leq j \leq k} f_{ce_j}(n)$.

<u>*Théorème 14*</u>

Soient $S_1, \ldots, S_k \subset \mathrm{Conv}(\mathbb{R})$; $A_1 = (T_1, V_1), \ldots, A_k = (T_k, V_k)$ k *transformations à 2 réponses de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$.

Si pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$:

a) A_i *est exacte sur* S_i *et* A_i *est* q-(A) *sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

b) $\forall\ (x^n) \in \bigcup_{i=1}^{k} S_i,\ \exists\ n_o,\ \forall\ n \geq n_o : (\Delta T_i^n = 0 \Rightarrow \Delta V_i^n = 0)$.

alors pour tout $f \in \mathbb{K}_o$, *la transformation* ${}_{(q,(b,c),(\alpha_1,\ldots,\alpha_k))}{}^{f}CE(A_1,\ldots,A_k)$ *est exacte sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

<u>Preuve</u>

Nous ne démontrons le théorème que pour $T = {}_{(q,(b,c),(\alpha_1,\ldots,\alpha_k))}{}^{o}CE(A_1,\ldots,A_k)$ pour les autres cas, les démonstrations en découlent facilement.

Soit $(x^n) \in \bigcup_{i=1}^{k} S_i$. $\exists\ i_o \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $(x^n) \in S_{i_o}$, par conséquent l'ensemble I des indices $i \in \{1, \ldots, k\}$ tel que A_i est exacte sur (x^n) est non vide, par suite : $\exists\ n_o,\ \forall\ n \geq n_o,\ \forall\ i \in I : o_{ce_i}(n) = 1$ (*)

Si $\bar{I} = \complement^{I}_{\{1,\ldots,k\}} = \emptyset$ alors T est exacte sur (x^n).

Sinon.

Soit $j \in \bar{I}$. A_j étant q-(A) sur (x^n), par conséquent :

$\exists\ n_j \geq n_o,\ \forall\ n \geq n_j : \max_{1 \leq r \leq q} |T_j^{n-r+1} - V_j^{n-r+1}| > 0$.

Soit $m_o = \max_{j \in \bar{I}} n_j$.

$\forall\ n \geq m_o,\ \forall\ j \in \bar{I} : \max_{1 \leq r \leq q} |T_j^{n-r+1} - V_j^{n-r+1}| > 0$.

d'autre part, pour tout $j \in \bar{I}$, A_j vérifie la condition b) du théorème 14, par conséquent $\exists\ m_1 \geq m_o$ tel que $\forall\ n \geq m_1,\ \forall\ j \in \bar{I} : o_{ce_j}(n) = 0$ (**)

D'après (*), (**) on a $i(n) \in I$ pour tout $n \geq m_1$, par conséquent T est exacte sur (x^n).

□

<u>*Proposition 7*</u>

Soient $S_1, \ldots, S_k \subset \mathrm{Conv}(\mathbb{R})$; $A_1 = (T_1, V_1), \ldots, A_k = (T_k, V_k)$ k *transformations de suites, de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$.

Si pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$:

a) A_i *est exacte sur* S_i *et* A_i *vérifie la condition* (A) *sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

b) $\forall\ (x^n) \in \bigcup_{i=1}^{k} S_i,\ \exists\ n_o,\ \forall\ n \geq n_o\ :\ (\Delta T_i^n = 0 \Rightarrow \Delta V_i^n = 0).$

alors pour tout $f \in \{1, 2, 3, 6\}$, *la transformation de suites à 2 réponses* $_{(q,(b,c),(\alpha_1,\ldots,\alpha_k))}^{\ f}CE(A_1,\ldots,A_k)$ *est exacte sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

Définitions

Soient $S \subset Conv^*(\mathbb{R})$; $A = (T, V)$ une transformation à 2 réponses de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$.

- On dit que A vérifie la condition (F) sur S ssi $\forall\ (x^n) \in S$:

1) (T^n, V^n) converge plus vite que (x^n)

2) $\dfrac{T^n-x}{V^n-x} \to \ell \notin \{0,1,2\}$. $(x = \lim x^n)$.

3) $\exists\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 < 1 < \lambda_2,\ \exists\ n_o,\ \forall\ n \geq n_o\ :\ \dfrac{\Delta V^{n+1}}{\Delta V^n} \notin [\lambda_1, \lambda_2]$.

- On dit que A vérifie la condition (G) sur S ssi $\forall\ (x^n) \in S$:

ou bien A vérifie la condition (F) sur (x^n).

ou bien $\exists\ \varepsilon > 0,\ \exists\ n_o,\ \forall\ n \geq n_o\ :\ \left|\dfrac{T^n-V^n}{x^n-x}\right| \geq \varepsilon,\ \left|\dfrac{\Delta T^n}{\Delta V^n}\left(1 - \dfrac{1}{\dfrac{\Delta T^n}{\Delta V^n} - 1}\right)\right| \geq \varepsilon.$

Remarque

Si A vérifie la condition (G) sur S alors A est 1-(D) sur S.

Théorème 15

Soient $S_1, \ldots, S_k \subset Conv^*(\mathbb{R})$; $A_1 = (T_1, V_1), \ldots, A_k = (T_k, V_k)$ k *transformations de suites, de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$.

Si pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, A_i *vérifie la condition* (F) *sur* S_i *et* A_i *vérifie la condition* (G) *sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ *alors pour tout* $f \in \mathbb{K}_o$, *on a* :

1) La transformation $T = {}_{(q,(b,c),(\alpha_1,\ldots,\alpha_k))}^{\ f}CE(A_1,\ldots,A_k)$ *accélère* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

2) $\forall\ (x^n) \in \bigcup_{i=1}^{k} S_i,\ \exists\ n_o,\ \forall\ n \geq n_o\ :\ x \in {}^{i(n)}I_n(b_{i(n)}^n, c_{i(n)}^n)$ *où* $i(n)$ *est tel que* $T^n = A_{i(n)}^n$.

<u>Preuve</u>

Nous ne démontrons le théorème que pour la transformation

$T = {}_{(q,(b,c),(\alpha_1,\ldots,\alpha_k))}{}^{o}CE(A_1,\ldots,A_k)$, pour les autres cas, les démonstrations en découlent facilement.

Soit $(x^n) \in \bigcup_{i=1}^{k} S_i$. $\exists\, i_o \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $(x^n) \in S_{i_o}$, par conséquent l'ensemble I des indices $i \in \{1, \ldots, k\}$ tel que A_i vérifie la condition (F) sur (x^n) est non vide.

D'après la proposition 3, pour tout $i \in I$, $\exists\, n_i \in \mathbb{N}$ tel que :

$\forall\, n \geq n_i,\ x \in {}^{i}I_n(b_i^n,\ c_i^n)$.

Soit $m_o = \max\limits_{i\in I} n_i$.

$$\forall\, n \geq m_o,\ \forall\, i \in I,\ x \in {}^{i}I_n(b_i^n,\ c_i^n). \tag{*}$$

Si $\bar{I} = \complement^{I}_{\{1,\ldots,k\}} = \emptyset$ alors d'après le lemme 1, T accélère (x^n) et d'aprés (*) pour tout $n \geq m_o$, $x \in {}^{i(n)}I_n(b^n_{i(n)},\ c^n_{i(n)})$.

Sinon.

Soit $j \in \bar{I}$. A_j vérifie la condition (G) sur (x^n), par conséquent

$$\exists\, \varepsilon_j > 0,\ \exists\, n_j \geq m_o,\ \forall\, n \geq n_j :\ \left|\frac{T_j^n - V_j^n}{x^n - x}\right| \geq \varepsilon_j,\ \left|\frac{\Delta T_j^n}{\Delta V_j^n}\left(1 - \frac{1}{\dfrac{\Delta T_j^n}{\Delta V_j^n} - 1}\right)\right| \geq \varepsilon_j$$

Il en résulte : $\forall\, n \geq n_j,\ {}^{j}L_n(b_j^n,\ c_j^n) \geq 2\alpha_j\, \varepsilon_j^2\, |x^n - x|$

Soit $\varepsilon = 2\min\limits_{j\in\bar{I}} (\alpha_j\, \varepsilon_j^2)$, $m_1 = q + \max\limits_{j\in\bar{I}} n_j$.

$$\text{Nous avons : } \forall\, n \geq m_1,\ \forall\, j \in \bar{I} :\ \max_{1\leq r\leq q}\ {}^{j}L_{n-r+1}(b_j^{n-r+1}, c_j^{n-r+1}) \geq \varepsilon \max_{1\leq r\leq q} |x^{n-r+1} - x|. \tag{**}$$

Comme, pour tout $i \in I$: $|b_i^n - c_i^n|\ \left|\dfrac{T_i^n - V_i^n}{x^n - x}\right| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, il en résulte :

$$\exists\, m_2 \geq m_1,\ \forall\, n \geq m_2,\ \forall\, i \in I :\ \max_{1\leq r\leq q}\ {}^{i}L_{n-r+1}(b_i^{n-r+1}, c_i^{n-r+1}) < \varepsilon \max_{1\leq r\leq q} |x^{n-r+1} - x|. \tag{***}$$

D'après (**),(***), on a $i(n) \in I$ pour tout $n \geq m_2$, par conséquent, d'après le lemme 1, T accélère (x^n) et d'après (*), $x \in {}^{i(n)}I_n(b^n_{i(n)}, c^n_{i(n)})$ pour tout $n \geq m_2$.

□

Remarque

La partie 1) du théorème 15, reste encore vraie, même si on supprime l'hypothèse $\ell \notin \{0, 2\}$ dans la définition de la condition (F).

Exemple d'application du théorème 15

Soient E_1 (resp. E_2) l'ensemble des suites $(\varepsilon^n) \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R})$ telle que

$\varepsilon^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ et $\exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < 1 < \beta, \exists\ n_o, \forall\ n \geq n_o$: $\dfrac{(1+\varepsilon^n)\varepsilon^{n+1}}{2\varepsilon^n}$ (resp. $\dfrac{(1+\varepsilon^n)\varepsilon^{n+1}}{3\varepsilon^n}$) $\notin [\alpha, \beta]$.

On pose :

$$S_1 = \{(x^n)\in\mathrm{Conv}(\mathbb{R}) \mid \exists(\varepsilon^n)\in E_1, \exists n_1, \forall\ n\geq n_1 : x^{n+1} = \frac{1}{2}x^n(1+\varepsilon^n)\}$$

$$S_2 = \{(x^n)\in\mathrm{Conv}(\mathbb{R}) \mid \exists(\varepsilon^n)\in E_2, \exists n_1, \forall\ n\geq n_1 : x^{n+1} = \frac{1}{3}x^n(1+\varepsilon^n)\}.$$

Soient $T_1 : (x^n) \to (T_1^n)$ avec $T_1^n = x^n - 2x^{n+1}$.

$T_2 : (x^n) \to (T_2^n)$ avec $T_2^n = x^n - 3x^{n+1}$.

On pose : $V_1 = 2T_1((x^n) \to (2T_1^n))$, $V_2 = 2T_2((x^n) \to (2T_2^n))$.

Les transformations de suites à 2 réponses $A_1 = (T_1, V_1)$, $A_2 = (T_2, V_2)$ et les familles de suites S_1, S_2 vérifient les conditions du théorème 15

2.2 - Sélection entre transformations à 2 réponses de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $(E^2)^{\mathbb{N}}$

Soit (E, d) espace métrique.

Soient $q \in \mathbb{N}^*$, $A_1 = (T_1, V_1), \ldots, A_k = (T_k, V_k)$, k transformations à 2 réponses de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $(E^2)^{\mathbb{N}}$, $\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{dom}\, A_i \neq \emptyset$.

Dans cette section, nous proposons des méthodes de sélection entre $A_1, \ldots, A_k$.

2.2.1 - *Transformations* ${}_q^fH(A_1, \dots, A_k)$, $f \in \mathbb{K}_o$

Soit $f \in \mathbb{K}_o$.

La méthode de sélection $T = {}_q^fH(A_1, \dots, A_k)$, appliquée à une suite $(x^n) \in \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{dom} A_i$, fonctionne de la manière suivante :

Etape $n < q-1$

$T^n = A_1^n = (T_1^n, V_1^n)$.

Etape $n \geq q-1$

a) *On considère les relations* $({}_qH_i^{(n)})$, $i \in \{1, \dots, k\}$ *définies par* :

$$({}_qH_i^{(n)}) : \max_{1\leq r\leq q} d(T_i^{n-r+1}, V_i^{n-r+1}) = \operatorname{Min}_{1\leq j\leq k} \left(\max_{1\leq r\leq q} (d(T_j^{n-r+1}, V_j^{n-r+1}))\right)$$

b) *On calcule les coefficients de décompte* $f_{{}_qh_i}(n)$, $i \in \{1, \dots, k\}$.

c) *On pose* $T^n = A_{i(n)}^n = (T_{i(n)}^n, V_{i(n)}^n)$ *avec* $i(n)$ *est le plus petit indice de* $\{1, \dots, k\}$ *vérifiant* : $f_{{}_qh_{i(n)}}(n) = \max_{1\leq j\leq k} f_{{}_qh_j}(n)$.

La transformation à 2 réponses ${}_q^fH(A_1, \dots, A_k)$ est dite méthode de sélection entre $A_1, \dots, A_k$, associée aux coefficients de décompte $f_{{}_qh_i}(n)$, $i \in \{1,\dots,k\}$ $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 16

Soient $S_1, \dots, S_k \subset \operatorname{Conv}(E)$; $A_1 = (T_1, V_1), \dots, A_k = (T_k, V_k)$ k *transformations à 2 réponses de* $E^{\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* $(E^2)^{\mathbb{N}}$.
Si pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, A_i *est exacte sur* S_i *et* A_i *est* q-(A) *sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ *alors pour tout* $f \in \mathbb{K}_o$, *la transformation* ${}_q^fH(A_1, \dots, A_k)$ *est exacte sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

La démonstration du théorème, résulte immédiatement du fait que si une transformation A_i n'est pas exacte sur $(x^n) \in \bigcup_{i=1}^{k} S_i$, alors $\exists\, n_i$, $\forall\, n \geq n_i$, $o_{{}_qh_i}(n) = 0$.

Remarque

Soit $p \in \mathbb{N}$, $p > q$.

Si pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, A_i est exacte sur S_i et A_i est p-(A) sur $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ alors on ne peut rien affirmer en ce qui concerne les transformations ${}^{f}_{q}H(A_1, \ldots, A_k)$, $f \in \mathbb{K}_o - \{1,2,3,6\}$, en fait il est possible de montrer à l'aide de contre-exemples qu'elles ne sont pas exactes sur $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

Proposition 8

Soient $S_1, \ldots, S_k \subset \mathrm{Conv}(E)$; $A_1 = (T_1, V_1), \ldots, A_k = (T_k, V_k)$ k *transformations à 2 réponses de* $E^{\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* $(E^2)^{\mathbb{N}}$.

Si pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, A_i *est exacte sur* S_i *et* A_i *vérifie la condition* (A) *sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ *alors pour tout* $f \in \{1,2,3,6\}$, *la transformation* ${}^{f}_{q}H(A_1,\ldots,A_k)$ *est exacte sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

Théorème 17

Soient $S_1, \ldots, S_k \subset \mathrm{Conv}^*(E)$; $A_1 = (T_1, V_1), \ldots, A_k = (T_k, V_k)$ k *transformations de* $E^{\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* $(E^2)^{\mathbb{N}}$.

Si pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, A_i *accélère* S_i *et* A_i *est* [1]-(D) *sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ *alors pour tout* $f \in \mathbb{K}_o$, *la transformation* ${}^{f}_{q}H(A_1, \ldots, A_k)$ *accélère* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

Preuve

Montrons que $T = {}^{o}_{q}H(A_1, \ldots, A_k)$ accélère $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

Soit $(x^n) \in \bigcup_{i=1}^{k} S_i$. $\exists\, i_o \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $(x^n) \in S_{i_o}$, par conséquent l'ensemble I des indices $i \in \{1, \ldots, k\}$ tel que A_i accélère (x^n), est non vide.

Si $\bar{I} = C^{I}_{\{1,\ldots,k\}} = \emptyset$, alors d'après le lemme 1, T accélère (x^n).

Sinon.

Soit $j \in \bar{I}$. A_j étant [1]-(D) sur (x^n), par conséquent $\exists\, \varepsilon_j > 0$,

$$\exists\, n_j,\ \forall\, n \geq n_j : \frac{d(T_j^n\ V_j^n)}{d(x^n, x)} \geq \varepsilon_j .$$

Soit $\varepsilon = \min_{j \in \bar{I}} \varepsilon_j$; $m_o = \max_{j \in I} n_j + q$

$$\forall\ n \geq m_o,\ \forall\ j \in \bar{I} :\ \max_{1 \leq r \leq q} d(T_j^{n-r+1}, V_j^{n-r+1}) \geq \varepsilon \max_{1 \leq r \leq q} d(x^{n-r+1}, x). \qquad (*)$$

Comme pour tout $i \in I$, $A_i = (T_i, V_i)$ accélère (x^n), il en résulte :

$$\exists\ m_1 \geq m_o,\ \forall\ n \geq m_1,\ \forall\ i \in I :\ \max_{1 \leq r \leq q} d(T_i^{n-r+1}, V_i^{n-r+1}) < \varepsilon \max_{1 \leq r \leq q} d(x^{n-r+1}, x) \qquad (**)$$

d'après (*), (**) on a $i(n) \in I$ pour tout $n \geq m_1$, par conséquent d'après le lemme 1, T accélère (x^n).

Pour les autres transformations, les démonstrations en découlent facilement.

□

Proposition 9

Soient $S_1, \ldots, S_k \subset \mathrm{Conv}^*(E)$; $A_1 = (T_1, V_1), \ldots, A_k = (T_k, V_k)$ k *transformations à 2 réponses de* $E^{\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* $(E^2)^{\mathbb{N}}$.

Si

1) *Pour tout* $i \in \{1, \ldots, k\}$, A_i *accélère* S_i *et* A_i *est* [q]-(D) *sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

2) $\forall\ (x^n) \in \bigcup_{i=1}^{k} S_i$, $\exists\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+^*$, $\lambda_1 < 1$, $\exists\ n_o$, $\forall\ n \geq n_o$: $\lambda_1 \leq \dfrac{d(x^{n+1}, x)}{d(x^n, x)} \leq \lambda_2$.

alors pour tout $f \in \mathbb{K}_o$, *la transformation à 2 réponses* ${}^f_qH(A_1, \ldots, A_k)$ *accélère* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

Avant de quitter cette section, nous signalons, qu'il est possible d'introduire d'autres méthodes de sélection, en utilisant à chaque étape $n \geq q$, les réponses $A_i^{n-q}, \ldots, A_i^n$, $i \in \{1, \ldots, k\}$ et en préservant les résultats des théorèmes 16, 17, et les résultats de la proposition 9.

2.2.2 - *Transformations* ${}^f_qRH(A_1, \ldots, A_k)$, $f \in \mathbb{K}_o$

Soient $f \in \mathbb{K}_o$; D_1 une distance sur E^2 équivalente à D_o.

La méthode de sélection $T = {}^f_qRH(A_1, \ldots, A_k)$ appliquée à une suite

$(x^n) \in \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{dom} A_i$, fonctionne de la manière suivante :

<u>Etape $n \leq q-1$</u>

$T^n = A_1^n$.

<u>Etape $n \geq q$</u>

a) *On considère les relations* $({}_qRH_i^{(n)})$, $i \in \{1, \ldots, k\}$ *définies de la manière suivante :*

Si $\forall\, r \in \{1, \ldots, q\} : d(x^{n-r}, x^{n-r+1}) \neq 0$, *alors on pose :*

$$({}_qRH_i^{(n)}) : \max_{1\leq r\leq q} \left(\frac{D_1(A_i^{n-r+1}, A_i^{n-r})}{d(x^{n-r+1}, x^{n-r})}\right) = \operatorname{Min}_{1\leq j\leq k} \left(\max_{1\leq r\leq q} \left(\frac{D_1(A_j^{n-r+1}, A_j^{n-r})}{d(x^{n-r+1}, x^{n-r})}\right)\right)$$

Sinon

On pose

$$({}_qRH_i^{(n)}) : \max_{1\leq r\leq q} D_1(A_i^{n-r+1}, A_i^{n-r}) = \operatorname{Min}_{1\leq j\leq k} \left(\max_{1\leq r\leq q} D_1(A_j^{n-r+1}, A_j^{n-r})\right)$$

b) *On calcule les coefficients de décompte* $f_{{}_qr_{h_i}}(n)$, $i \in \{1, \ldots, k\}$.

c) *On pose* $T^n = A_{i(n)}^n$ *avec* $i(n)$ *est le plus petit indice de* $\{1, \ldots, k\}$ *vérifiant* $f_{{}_qrh_{i(n)}}(n) = \max_{1\leq j\leq k} f_{{}_qrh_j}(n)$.

La transformation à 2 réponses ${}_q^fRH(A_1, \ldots, A_k)$ est dite méthode de sélection entre $A_1, \ldots, A_k$, associée aux coefficients de décompte $f_{{}_qrh_i}(n)$, $i \in \{1,..,k\}$ $n \in \mathbb{N}$.

<u>*Théorème 18*</u>

Soient $S_1, \ldots, S_k \subset \operatorname{Conv}(E)$; $A_1, \ldots, A_k$, k *transformations de suites de* $E^{\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* $(E^2)^{\mathbb{N}}$.

Si pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, A_i *est pseudo-régulière d'ordre* q *sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ *et* A_i *est exacte sur* S_i *alors pour tout* $f \in \mathbb{K}_o$, *la transformation* ${}_q^fRH(A_1, \ldots, A_k)$ *est exacte sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

La démonstration résulte du fait que , si une transformation A_i n'est pas exacte sur $(x^n) \in \bigcup_{i=1}^{k} S_i$, alors $\exists\, n_o$, $\forall\, n \geq n_o$: $\max_{1\leq r\leq q} D_1(A_i^{n-r+1}, A_i^{n-r}) > 0$.

Remarque

Soit $p \in \mathbb{N}$, $p > q$.

Si pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, A_i est exacte sur S_i et A_i est pseudo-régulière d'ordre p sur $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ alors on ne peut rien dire en ce qui concerne les transformations ${}_q^f RH(A_1, \ldots, A_k)$, $f \in \mathbb{K}_o - \{1,2,3,6\}$, en fait on montre à l'aide de contre-exemples qu'elles ne sont pas exactes sur $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$

Proposition 10

Soient $S_1, \ldots, S_k \subset \mathrm{Conv}(E)$; $A_1, \ldots, A_k$, k *transformations de* $E^{\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* $(E^2)^{\mathbb{N}}$.

Si pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, A_i *est exacte sur* S_i *et* A_i *est semi-régulière sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ *alors pour tout* $f \in \{1,2,3,6\}$, *la transformation de suites* ${}_q^f RH(A_1, \ldots, A_k)$ *est exacte sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

Théorème 19

Soient $S_1, \ldots, S_k \subset \mathrm{Conv}^{**}(E)$; $A_1, \ldots, A_k$, k *transformations à 2 réponses de* $E^{\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* $(E^2)^{\mathbb{N}}$.

Si pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, A_i *accélère et* Δ*-accélère* S_i *et* A_i *est semi-([q]-nette) sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ *alors les transformations de suites* ${}_q^f RH(A_1,\ldots,A_k)$, $f \in \mathbb{K}_o$ *accélèrent* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$.

Preuve

Nous ne démontrons le théorème que pour $T = {}_q^o RH(A_1, \ldots, A_k)$ pour les autres cas, les démonstrations en découlent facilement.

Soit $(x^n) \in \bigcup_{i=1}^{k} S_i$. $\exists\, i_o \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $(x^n) \in S_{i_o}$, par conséquent l'ensemble I des indices $i \in \{1, \ldots, k\}$ tel que A_i accélère et Δ-accélère (x^n)

est non vide.

Si $\bar{I} = \complement^{I}_{\{1,\ \ldots,\ k\}} = \emptyset$ alors, d'après le lemme 1, T accélère (x^n).

Sinon.

Comme pour tout $j \in \bar{I}$, A_j est semi-([q]-nette) sur (x^n), il en résulte que :

$$\exists\ \varepsilon > 0,\ \exists\ m_o,\ \forall\ n \geq m_o,\ \forall\ j \in \bar{I} :\ \max_{1\leq r\leq q} \left(\frac{D_1(A_j^{n-r+1}, A_j^{n-r})}{d(x^{n-r+1}, x^{n-r})}\right) \geq \varepsilon. \qquad (*)$$

D'autre part, pour tout $i \in I$, A_i Δ-accélère (x^n), par conséquent :

$$\exists\ m_1 \geq m_o,\ \forall\ n \geq m_1,\ \forall\ i \in I :\ \max_{1\leq r\leq q} \left(\frac{D_1(A_i^{n-r+1}, A_i^{n-r})}{d(x^{n-r+1}, x^{n-r})}\right) < \varepsilon. \qquad (**)$$

D'après (*), (**) on a $i(n) \in I$ pour tout $n \geq m_1$, par conséquent d'après le lemme 1, T accélère (x^n).

$\square$

Nous terminons ce paragraphe, en signalant qu'on peut facilement généraliser les méthodes de sélection, présentées ici, de la façon suivante :

- en envisageant des méthodes de sélection entre une infinité de transformations à 2 réponses.
- en envisageant des méthodes de sélection entre transformations à k réponses (k-uplets de transformations).

ANNEXE

SOUS-PROGRAMME FORTRAN DE SELECTION ENTRE UN NOMBRE FINI DE TRANSFORMATIONS DE SUITES

Nous présentons ici le listing d'un sous-programme appelé SELEC qui utilise les différentes méthodes de sélection associées aux relations $({}_qD_i^{(n)})$, $({}_qE_i^{(n)})$, $({}_qM_i^{(n)})$, $({}_qER_i^{(n)})$, $({}_{(u_n,1,q)}GV_i^{(n)})$, $({}_{(u_n,q)}RV_i^{(n)})$, $({}_{(u_n,q)}RC_i^{(n)})$, $i \in \{1,..,k\}$ vues au chapitre 3.

1 - ARGUMENTS DU SOUS-PROGRAMME SELEC

N : correspond à l'étape de sélection

S : Tableau d'éléments S(n) (S(n) est le n-ième terme de la suite à transformer).

Q : Paramètre utilisé dans les relations de sélection du chapitre 3 $(({}_qE_i^{(n)}), ({}_qM_i^{(n)}), \dots)$.

ko : Paramètre correspondant au nombre de transformations en compétition.

MS : Paramètre qui permet au sous-programme SELEC d'utiliser l'une des relations de sélection plus haut de la manière suivante :

Si MS = 1 (resp. MS = 2) (resp. MS = 3) (resp. MS = 4) (resp. MS = 5) resp. MS = 6) (resp. MS = 7) alors la sélection entre les transformations en compétition s'effectue à l'aide des relations $({}_qD_i^{(n)})$ (resp. $({}_qE_i^{(n)})$) (resp. $({}_qM_i^{(n)})$) (resp. $({}_qER_i^{(n)})$) (resp. $({}_{(u_n,1,q)}GV_i^{(n)})$) (resp. $({}_{(u_n,q)}RV_i^{(n)})$) (resp. $({}_{(u_n,q)}RC_i^{(n)})$).

Les listings des sous-programmes de ces relations seront présentés au paragraphe 3.

La valeur de MS doit rester inchangée durant le traitement d'une suite.

P_1, P_2 : Les arguments P_1, P_2 correspondent aux paramètres P_1, P_2 intervenant dans les coefficients de décompte d'indices ${}^{(P_1,P_2)}8$ avec P_1, $P_2 \in \mathbb{N}^*$, $P_1 \leq P_2+1$ (chapitre 3, §.2).

PON : Tableau d'éléments $\alpha_j^{n,i} = PON((i-1)q+j)$, $j \in \{1, \ldots, q\}$, $i \in \{1,\ldots,k_o\}$ $\alpha_j^{n,i}$ est la j-ième pondération correspondant à la i-ème Transformation en compétition, ces pondérations sont utilisées dans les relations $({}_{(u_n,1,q)}GV_i^{(n)})$, $({}_{(u_n,q)}RV_i^{(n)})$, $({}_{(u_n,q)}RC_i^{(n)})$ $i \in \{1, \ldots, k_o\}$, $u_n = ((\alpha_1^{n,1}, \ldots, \alpha_q^{n,1}), \ldots, (\alpha_1^{n,k_o}, \ldots, \alpha_q^{n,k_o}))$.

T : Tableau d'éléments T_i^n, $i \in \{1, \ldots, k_o\}$ où T_i^n est la n-ième réponse de la transformation en compétition d'indice i.

I1 : Tableau d'éléments I1(j+1, n), $j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ où I1(j+1, n) est l'indice de la transformation dont la réponse a été choisie à l'étape n à l'aide des coefficients de décompte d'indices j.

TS : Tableau d'éléments TS(j+1, n), $j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ où TS(j+1, n) est la réponse sélectionnée à l'étape n, à l'aide des coefficients de décompte d'indices j.

ITE : Tableau d'éléments ITE(i), $i \in \{1, \ldots, k_o\}$, à chaque appel du sous-programme SELEC, les quantités ITE(i) vérifient :

$$ITE(i) = \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si la réponse de la i-ème transformation ne peut pas être} \\ & \text{en compétition (à cause d'une division par 0, par exemple).} \\ 1 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

Il faut bien noter que :

a) SELEC ne fonctionne qu'à partir de l'étape $N_o = q+1$.

b) A l'étape N_o, il faut que ITE(j) = 1 pour tout $j \in \{1, \ldots, k_o\}$, et si une transformation d'indice $i \in \{1, \ldots, k_o\}$ est bloquée (ITE(i) = 0) à une étape $N_1 > N_o$ alors pour $n \geq N_1$, SELEC prendra $(R_i^{(N_i-1)})$ comme relation de sélection $(R_i^{(n)})$.

c) Pour une valeur choisie de MS (qui correspond au choix d'une famille de relations (voir l'argument MS)), SELEC calcule automatiquement les réponses des 10 méthodes de sélection associées aux 10 coefficients de décompte dont les listings des sous-programmes seront présentés au paragraphe 4).

2 - SOUS-PROGRAMME SELEC

```
      SUBROUTINE SELEC(N,S,Q,MS,P1,P2,ITE,K0,PON,T,I1,TS)
      DOUBLE PRECISION TS(10,60),T(6,60),PON(24),AM,S(60),D(6)
      INTEGER I1(10,60),ITE(6),Q,P1,CARD(6),I2,X(6,60),IC(6),P2
      IF(N.LT.(Q+1))RETURN
      GO TO (1,2,3,4,5,6,7)MS
    1 CONTINUE
      CALL ECAMAX(N,Q,K0,ITE,T,AM,D)
      GO TO 20
    2 CALL DIAMET(N,Q,K0,ITE,T,AM,D)
      GO TO 20
    3 CALL RM(N,Q,K0,ITE,T,S,AM,D)
      GO TO 20
    4 CALL ER(N,Q,K0,ITE,T,S,AM,D)
      GO TO 20
    5 CALL GV(N,Q,K0,ITE,T,PON,AM,D)
      GO TO 20
    6 CALL RV(N,Q,K0,ITE,T,PON,S,AM,D)
      GO TO 20
    7 CALL RC(N,Q,K0,ITE,T,PON,S,AM,D)
   20 CONTINUE
C   CHOIX A'L'AIDE DES METHODES ASSOCIEES AUX COEFFICIENTS
C                  DE DECOMPTE
```

```
C            TRAITEMENT PAR LA METHODE D'INDICE 0
C            ************************************
C   CALCUL DU PLUS PETIT INDICE POUR LEQUEL LA RELATION
C               DE SELECTION EST VRAIE
      J=1
    8 CONTINUE
      IF(AM.EQ.D(J))GO TO 9
      J=J+1
      IF(J.LE.K0) GO TO 8
    9 CONTINUE
      I1(1,N)=J
      TS(1,N)=T(J,N)
C            ************************************
C            TRAITEMENT PAR LA METHODE D'INDICE 1
C            ************************************
      IF(N.GT.(Q+1))GO TO 10
      DO 11 I=1,K0
      IF(AM.EQ.D(I))GO TO 12
      CARD(I)=0
      GO TO 11
   12 CARD(I)=1
   11 CONTINUE
      GO TO 13
   10 CONTINUE
      DO 14 I=1,K0
      IF(AM.EQ.D(I)) GO TO 15
      GO TO 14
   15 CARD(I)=CARD(I)+1
   14 CONTINUE
   13 CONTINUE
      CALL INM(K0,CARD,I2)
      I1(2,N)=I2
      TS(2,N)=T(I2,N)
C            ************************************
C            TRAITEMENT PAR LA METHODE D'INDICE 2
C            ************************************
      DO 16 I=1,K0
      IF(AM.EQ.D(I))GO TO 17
      X(I,N)=0
      GO TO 16
   17 X(I,N)=1
   16 CONTINUE
C   CALCUL DES COEFFICIENTS DE DECOMPTE IC(I)
      DO 18 I=1,K0
      K=1
      IC(I)=0
   19 CONTINUE
      IF(X(I,(N-K+1)).EQ.0)GO TO 18
      IC(I)=K
      K=K+1
      IF(K.LE.(N-Q))GO TO 19
   18 CONTINUE
      CALL INM(K0,IC,I2)
      I1(3,N)=I2
      TS(3,N)=T(I2,N)
C            ************************************
C            TRAITEMENT PAR LA METHODE D'INDICE 3
```

```
C          ***********************************
      CALL METHO3(N,Q,K0,AM,D,IC)
      CALL INM(K0,IC,I2)
      I1(4,N)=I2
      TS(4,N)=T(I2,N)
C          ***********************************
C          TRAITEMENT PAR LA METHODE D'INDICE 4
C          ***********************************
      CALL METHO4(N,Q,K0,AM,D,IC)
      IF(N.LT.(Q+3))GO TO 21
      CALL INM(K0,IC,I2)
      I1(5,N)=I2
      TS(5,N)=T(I2,N)
   21 CONTINUE
C          ***********************************
C          TRAITEMENT PAR LA METHODE D'INDICE 5
C          ***********************************
      CALL METHO5(N,Q,K0,AM,D,IC)
      IF(N.LE.(2*Q))GO TO 22
      CALL INM(K0,IC,I2)
      I1(6,N)=I2
      TS(6,N)=T(I2,N)
   22 CONTINUE
C          ***********************************
C          TRAITEMENT PAR LA METHODE D'INDICE 6
C          ***********************************
      CALL METHO6(N,Q,K0,AM,D,IC)
      CALL INM(K0,IC,I2)
      I1(7,N)=I2
      TS(7,N)=T(I2,N)
C          ***********************************
C          TRAITEMENT PAR LA METHODE D'INDICE 7
C          ***********************************
      CALL METHO7(N,Q,K0,AM,D,IC)
      IF(N.LT.(Q+3))GO TO 23
      CALL INM(K0,IC,I2)
      I1(8,N)=I2
      TS(8,N)=T(I2,N)
   23  CONTINUE
C          ***********************************
C          TRAITEMENT PAR LA METHODE D'INDICE 8
C          ***********************************
      CALL METHO8(N,Q,K0,P1,P2,AM,D,IC)
      IF(N.LT.(Q+P2+1))GO TO 24
      CALL INM(K0,IC,I2)
      I1(9,N)=I2
      TS(9,N)=T(I2,N)
   24 CONTINUE
C          ***********************************
C          TRAITEMENT PAR LA METHODE D'INDICE 9
C          ***********************************
      CALL METHO9(N,Q,K0,AM,D,IC)
      IF(N.LT.(Q+2))GO TO 25
      CALL INM(K0,IC,I2)
      I1(10,N)=I2
      TS(10,N)=T(I2,N)
   25 CONTINUE
      RETURN
      END
```

3 - SOUS-PROGRAMMES DES RELATIONS $(R_i^{(n)})$ $i \in \{1, \ldots, k_o\}$

Avant de présenter les listings des sous-programmes, nous précisons les significations des arguments qui leur sont communes.

Pour les arguments N, Q, ko, ITE, T voir le paragraphe 1 ;

D : Tableau d'éléments D(i), $i \in \{1, \ldots, k_o\}$ avec D(i) est la valeur du membre de gauche dans les relations $(R_i^{(n)})$ (si nous prenons $({}_qE_i^{(n)})$ comme relations $(R_i^{(n)})$ alors $D(i) = \max\limits_{n-q \le \ell, \ell' \le n} d(A_i^{\ell}, A_i^{\ell'})$).

AM : Paramètre correspondant au $\min\limits_{i \in \{1,..,k_o\}} D(i)$

Il faut bien noter que les sous-programmes associés aux relations $({}_qM_i^{(n)})$, $({}_qER_i^{(n)})$, $({}_{(u_n,q)}RV_i^{(n)})$, $({}_{(u_n,q)}RC_i^{(n)})$, ne fonctionnent que si $q \ge 2$.

3.1 - Sous-programme des relations $({}_qD_i^{(n)})$, $i \in \{1, \ldots, k_o\}$.

```
      SUBROUTINE ECAMAX(N,Q,KO,ITE,T,AM,D)
      DOUBLE PRECISION AM,D(6),T(6,60),V,DO(6)
      INTEGER Q,ITE(6)
C CALCUL DES D(I) ECARTS MAXIMUMS ENTRE DEUX TERMES
C CONSECUTIFS DE (T(I,N-Q),.............,T(I,N))
      N1=N-Q
      N2=N1+1
      N3=N-1
      IF(Q.EQ.1)GO TO 5
      DO 2 I=1,KO
      IF(ITE(I).EQ.0)GO TO 4
       D(I)=DABS(T(I,N1)-T(I,N2))
      DO 3 J=N2,N3
      V=DABS(T(I,J)-T(I,(J+1)))
      IF(V.LE.D(I))GO TO 3
      D(I)=V
    3 CONTINUE
      DO(I)=D(I)
      GO TO 2
    4 D(I)=DO(I)
    2 CONTINUE
      GO TO 7
    5 CONTINUE
      DO 6 I=1,KO
      IF(ITE(I).EQ.0)GO TO 8
      D(I)=DABS(T(I,N1)-T(I,N2))
      DO(I)=D(I)
      GO TO 6
    8 D(I)=DO(I)
    6 CONTINUE
    7 CONTINUE
C     CALCUL DU MINIMUM DES  D(I)
      AM=D(1)
      DO 9 J=2,KO
      IF(D(J).GE.AM)GO TO 9
      AM=D(J)
    9 CONTINUE
      RETURN
      END
```

3.2 - Sous-programme des relations $({}_qE_i^{(n)})$, $i \in \{1, \ldots, k_o\}$

```
      SUBROUTINE DIAMET(N,Q,KO,ITE,T,AM,D)
      DOUBLE PRECISION T(6,60),AM,D(6),V1(6),V2(6),D0(6)
      INTEGER Q,ITE(6)
C     CALCUL DU DIAMETRE DE (T(I,N-Q),........,T(I.N))POUR I=1,KO
      N1=N-Q
      N2=N1+1
      DO 1 I=1,KO
      IF(ITE(I).EQ.0)GO TO 4
      V1(I)=T(I,N1)
       V2(I)=T(I,N1)
      DO 2 J=N2,N
      IF(T(I,J).GE.V1(I))GOTO 3
      V1(I)=T(I,J)
      GO TO 2
    3 IF(T(I,J).LE.V2(I))GOTO 2
       V2(I)=T(I,J)
    2 CONTINUE
      D(I)=V2(I)-V1(I)
      D0(I)=D(I)
      GO TO 1
    4 D(I)=D0(I)
    1 CONTINUE
C     CALCUL DU MINIMUM DES D(I)
      AM=D(1)
      DO 5 J=2,KO
      IF(D(J).GE.AM)GO TO 5
      AM=D(J)
    5 CONTINUE
      RETURN
      END
```

3.3 - Sous-programme des relations $({}_qM_i^{(n)})$, $i \in \{1, \ldots, k_o\}$

```
      SUBROUTINE RM(N,Q,K0,ITE,T,S,AM,D)
      DOUBLE PRECISION T(6,60),S(60),AM,D(6),V1(6),ZE,V2(6),E1,E2,D0(
      INTEGER Q,Q1,ITE(6)
      ZE=0.1D-60
      IF(N.GT.(Q+1))GO TO 1
      DO 2 J=1,Q
      V1(J)=S(J)
    2 CONTINUE
      Q1=Q-1
      J1=0
      DO 3 J=1,Q1
      V2(J)=DABS(V1(J)-V1(J+1))
       IF(V2(J).LT.ZE)GOTO 3
      J1=J1+1
    3 CONTINUE
    1 V2(Q)=DABS(V1(Q)-S(N))
      IF(V2(Q).LT.ZE)GOTO 4
      IF(J1.EQ.(Q-1))GO TO 5
      GO TO 4
    5 DO 6 I=1,K0
      IF(ITE(I).EQ.0)GO TO 11
      E1=DABS(T(I,(N-Q))-T(I,(N-Q+1)))/V2(1)
      DO 7 J=2,Q
      E2=DABS(T(I,(N-Q+J-1))-T(I,(N-Q+J)))/V2(J)
      IF(E2.LE.E1)GOTO 7
      E1=E2
    7 CONTINUE
      D(I)=E1
      D0(I)=D(I)
      GO TO 6
   11 D(I)=D0(I)
    6 CONTINUE
   14 CONTINUE
C     CALCUL DU MINIMUM DES D(I)
      AM=D(1)
      DO 8 I=1,K0
      IF(D(I).GE.AM)GOTO 8
      AM=D(I)
    8 CONTINUE
      GO TO 9
    4 CALL ECAMAX(N,Q,K0,ITE,T,AM,D)
      DO 12 I=1,K0
      IF(ITE(I).EQ.0)GO TO 13
      D0(I)=D(I)
      GO TO 12
   13 D(I)=D0(I)
   12 CONTINUE
      GO TO 14
    9 V1(Q)=S(N)
      J1=0
      DO 10 I=1,Q1

      V2(I)=V2(I+1)
      IF(V2(I).LT.ZE)GO TO 10
      J1=J1+1
   10 CONTINUE
      RETURN
      END
```

3.4 - Sous-programme des relations $({}_qER_i^{(n)})$, $i \in \{1, \ldots, k_o\}$

```
      SUBROUTINE ER(N,Q,K0,ITE,T,S,AM,D)
      DOUBLE PRECISION T(6,60),S(60),AM,D(6),V1(7),ZE,V2(7),E1(6),E2
      DOUBLE PRECISION D0(6)
      INTEGER Q,Q1,ITE(6)
      ZE=0.1D-60
      IF(N.GT.(Q+2))GOTO 1
      IF(N.EQ.(Q+1))GOTO 4
      Q1=Q+1
      DO 2 J=1,Q1
      V1(J)=S(J)
    2 CONTINUE
      J1=0
      DO 3 J=1,Q
      V2(J)=DABS(V1(J)-V1(1+J))
      IF(V2(J).LT.ZE)GOTO 3
      J1=J1+1
    3 CONTINUE
    1 V2(Q+1)=DABS(V1(Q+1)-S(N))
      IF(V2(Q+1).LT.ZE)GOTO 4
      IF(J1.EQ.Q)GOTO 5
      GO TO 4
    5 DO 6 I=1,K0
      IF(ITE(I).EQ.0)GO TO 17
      DO 7 J=1,Q
      N1=N-Q+J-1
      IF(V2(J).LE.V2(1+J))GOTO 8
      E1(J)=DABS(T(I,N1)-T(I,(N1+1)))/V2(1+J)
      GOTO 9
    8 E1(J)=DABS(T(I,N1)-T(I,(N1+1)))/V2(J)
    9  IF(J.EQ.Q)GOTO 7
      N2=N-N1
      DO 10 K=2,N2
      IF(V2(J).LE.V2(K+J))GOTO 11
      E2=DABS(T(I,N1)-T(I,(N1+K)))/V2(K+J)
      GOTO 12
   11 E2=DABS(T(I,N1)-T(I,(N1+K)))/V2(J)
   12 IF(E2.LE.E1(J))GOTO 10
      E1(J)=E2
   10 CONTINUE
    7 CONTINUE
C      CALCUL DU MAXIMIM DES E1(J),J=1,......,Q
      D(I)=E1(1)
      DO 13 J=2,Q
      IF(E1(J).LE.D(I))GO TO 13
      D(I)=E1(J)
   13 CONTINUE
      D0(I)=D(I)
      GO TO 6
   17 D(I)=D0(I)
    6 CONTINUE
   20 CONTINUE
```

```
C     CALCUL DU MINIMUM DES D(I),I=1,........,K0
      AM=D(1)
      DO 14 J=2,K0
      IF(D(J).GE.AM)GO TO 14
      AM=D(J)
   14 CONTINUE
      GO TO 15
    4 CALL DIAMET(N,Q,K0,ITE,T,AM,D)
      DO 18 I=1,K0
      IF(ITE(I).EQ.0)GO TO 19
      D0(I)=D(I)
      GO TO 18
   19  D(I)=D0(I)
   18 CONTINUE
      GO TO 20
   15 V1(Q+1)=S(N)
      J1=0
       DO 16 I=1,Q
      V2(I)=V2(I+1)
      IF(V2(I).LE.ZE)GOTO 16
      J1=J1+1
   16 CONTINUE
      RETURN
       END
```

3.5 - Sous programme des relations $({}_{(u_n,1,q)}GV_i^{(n)})$, $i \in \{1, \ldots, k_o\}$

```
      SUBROUTINE GV(N,Q,KO,ITE,T,PON,AM,D)
       DOUBLE PRECISION PON(24),AM,D(6),T(6,60),V(6,4),DO(6)
      INTEGER Q,ITE(6)
      IF(N.GT.(Q+1))GOTO 1
      DO 2 I=1,KO
      DO 3 J=2,Q
      V(I,J)=DABS(T(I,(N-J))-T(I,(N-J+1)))
    3 CONTINUE
    2 CONTINUE
    1 DO 4 I=1,KO
      V(I,1)=DABS(T(I,N)-T(I,(N-1)))
    4 CONTINUE
C      CALCUL DES D(I)
       DO 5 I=1,KO
      IF(ITE(I).EQ.0)GO TO 10
      D(I)=0
      DO 6 J=1,Q
      I1=(I-1)*Q+J
      D(I)=D(I)+PON(I1)*V(I,J)
    6 CONTINUE
      DO(I)=D(I)
      GO TO 5
   10 D(I)=DO(I)
    5 CONTINUE
C     CALCUL DU MINIMUM DES D(I)
      AM=D(1)
      DO 7 I=2,KO
      IF(AM.LE.D(I))GOTO 7
      AM=D(I)
    7 CONTINUE
      DO 8 I=1,KO
      I1=Q-1
      DO 9 J=1,I1
      I2=Q-J+1
      V(I,I2)=V(I,(I2-1))
    9 CONTINUE
    8 CONTINUE
      RETURN
      END
```

Pour la signification de l'argument PON voir le paragraphe 1.

3.6 - Sous-programme des relations $({}_{(u_n,q)}RV_i^{(n)})$, $i \in \{1, \dots, k_o\}$

```
      SUBROUTINE RV(N,Q,K0,ITE,T,PON,S,AM,D)
      DOUBLE PRECISION PON(24),AM,D(6),T(6,60),R,V2(4),V1,V(6,4),S(60
      DOUBLE PRECISION D0(6),ZE
      INTEGER Q,Q1,ITE(6)
      ZE=0.1D-60
      IF(N.GT.(Q+1))GO TO 1
      Q1=Q-1
      J1=0
      DO 2 J=1,Q1
      V2(J)=DABS(S(J)-S(J+1))
      IF(V2(J).LT.ZE)GO TO 2
      J1=J1+1
    2 CONTINUE
      V1=S(Q)
      DO 3 I=1,K0
      DO 4 J=2,Q
      V(I,J)=DABS(T(I,(N-J))-T(I,(N-J+1)))
    4 CONTINUE
    3 CONTINUE
    1 CONTINUE
      DO 5 I=1,K0
      V(I,1)=DABS(T(I,(N-1))-T(I,N))
    5 CONTINUE
      V2(Q)=DABS(V1-S(N))
      IF(V2(Q).LT.ZE)GO TO 7
      IF(J1.EQ.(Q-1))GO TO 6
      GO TO 7
    6 DO 8 I=1,K0
      IF(ITE(I).EQ.0)GO TO 15
      D(I)=0.D0
      DO 9 J=1,Q
      R=V(I,J)/V2(Q-J+1)
      D(I)=D(I)+PON((I-1)*Q+J)*R
    9 CONTINUE
      D0(I)=D(I)
      GO TO 8
   15 D(I)=D0(I)
    8 CONTINUE
   18 CONTINUE
C     CALCUL DU MINIMUM DES D(I)
      AM=D(1)
      DO 10 I=2,K0
      IF(AM.LE.D(I))GO TO 10
      AM=D(I)
   10 CONTINUE
      GO TO 11
    7 CALL GV(N,Q,K0,ITE,T,PON,AM,D)
      DO 16 I=1,K0
      IF(ITE(I).EQ.0)GO TO 17
      D0(I)=D(I)
      GO TO 16
```

```
17   D(I)=D0(I)
 16   CONTINUE
     GO TO 18
 11  CONTINUE
     DO 12 I=1,K0
     DO 13 J=1,Q1
     I2=Q-J+1
     V(I,I2)=V(I,(I2-1))
13   CONTINUE
12   CONTINUE
     V1=S(N)
     J1=0
     DO 14 I=1,Q1
     V2(I)=V2(I+1)
     IF(V2(I).LT.ZE)GOTO 14
     J1=J1+1
14   CONTINUE
     RETURN
     END
```

3.7 - Sous-programme des relations $({}_{(u_n,q)}RC_i^{(n)})$, $i \in \{1, \ldots, k_o\}$.

```
     SUBROUTINE RC(N,Q,K0,ITE,T,PON,S,AM,D)
     DOUBLE PRECISION PON(24),AM,D(6),T(6,60),D1(6),V2(4),V1,V(6,4)
     DOUBLE PRECISION D0(6),S(60),ZE
     INTEGER Q,Q1,ITE(6)
     ZE=0.1D-60
     IF(N.GT.(Q+1))GO TO 1
     Q1=Q-1
     J1=0
     DO 2 J=1,Q1
     V2(J)=DABS(S(J)-S(J+1))
     IF(V2(J).LT.ZE)GO TO 2
     J1=J1+1
 2   CONTINUE
     V1=S(Q)
     DO 3 I=1,K0
     DO 4 J=2,Q
     V(I,J)=DABS(T(I,(N-J))-T(I,(N-J+1)))
 4   CONTINUE
 3   CONTINUE
 1   CONTINUE
     DO 5 I=1,K0
     V(I,1)=DABS(T(I,(N-1))-T(I,N))
 5   CONTINUE
     V2(Q)=DABS(V1-S(N))
     IF(V2(Q).GT.ZE)GOTO 6
     IF(J1.GE.1)GO TO 6
     GO TO 7
 6   CONTINUE
C     CALCUL DES D(I)
     DO 8 I=1,K0
     IF(ITE(I).EQ.0)GO TO 15
     D(I)=0
     D1(I)=0
     DO 9 J=1,Q
      I1=(I-1)*Q+J
     D(I)=D(I)+PON(I1)*V(I,J)
     D1(I)=D1(I)+PON(I1)*V2(Q-J+1)
```

```
    9 CONTINUE
      D(I)=D(I)/D1(I)
      D0(I)=D(I)
      GO TO 8
   15 D(I)=D0(I)
    8 CONTINUE
   18 CONTINUE
C     CALCUL DU MINIMUM DES D(I)
      AM=D(1)
      DO 10 I=2,K0
      IF(AM.LE.D(I))GO TO 10
      AM=D(I)
   10 CONTINUE
      GO TO 11
    7 CALL GV(N,Q,K0,ITE,T,PON,AM,D)
      DO 16 I=1,K0
      IF(ITE(I).EQ.0)GO TO 17
      D0(I)=D(I)
      GO TO 16
   17 D(I)=D0(I)
   16 CONTINUE
      GO TO 18
   11 CONTINUE
      DO 12 I=1,K0
      DO 13 J=1,Q1
      I2=Q-J+1
      V(I,I2)=V(I,(I2-1))
   13 CONTINUE
   12 CONTINUE
      V1=S(N)
      J1=0
      DO 14 I=1,Q1
      V2(I)=V2(I+1)
      IF(V2(I).LT.ZE)GOTO 14
      J1=J1+1
   14 CONTINUE
      RETURN
      END
```

4 - SOUS-PROGRAMMES CALCULANT LES COEFFICIENTS DE DECOMPTE

Les coefficients de décompte d'indices 0, 1, 2 sont calculés dans le sous-programme SELEC ; nous présentons ici les sous-programmes de calcul des coefficients de décompte d'indices 3, 4, ${}^{q}5$ ($q \in \mathbb{N}^*$), 6, 7, ${}^{(P_1,P_2)}8$, 9. Avant de présenter les listings des sous-programmes, nous précisons les significations des arguments communes.

Pour les arguments N, Q, Ko, D, AM voir le paragraphe 3.

IC : Tableau d'éléments IC(j), j $\in$ {1, ..., k_o} où IC(j) est la valeur du coefficient de décompte associé à la j-ème transformation en compétition.

4.1 - Sous-programme calculant les coefficients de décompte d'indices 3

```
      SUBROUTINE METHO3(N,Q,K0,AM,D,IC)
      DOUBLE PRECISION D(8),AM
      INTEGER IC(6),ICV(6),X(6,60),Q
       IF(N.GT.(Q+1)) GO TO 1
      DO 2 I=1,K0
      IF(AM.EQ.D(I)) GO TO 3
      ICV(I)=0
      X(I,N)=0
      GO TO 2
    3 ICV(I)=1
      X(I,N)=1
    2 CONTINUE
      GO TO 9
    1 CONTINUE
      DO 4 I=1,K0
      IF(AM.EQ.D(I)) GO TO 5
      X(I,N)=0
      GO TO 4
    5 X(I,N)=1
    4 CONTINUE
C     COEFFICIENTS DE DECOMPTE
      DO 6 I=1,K0
       K=1
    7 CONTINUE
      IF(X(I,(N-K+1)).EQ.0) GO TO 6
      ICV(I)=K
       K=K+1
      IF(K.LE.(N-Q)) GO TO 7
    6 CONTINUE
    9 CONTINUE
      DO 8 I=1,K0
      IC(I)=ICV(I)
    8 CONTINUE
      RETURN
      END
```

4.2 - Sous-programme calculant les coefficients de décompte d'indices 4

```
      SUBROUTINE METHO4(N,Q,K0,AM,D,IC)
      DOUBLE PRECISION D(6),AM
      INTEGER IC(6),Q,A1(6),A2(6)
      IF(N.GT.(Q+2))GOTO 1
      IF(N.EQ.(Q+2))GOTO 2
      DO 3 I=1,K0
      IF(AM.EQ.D(I))GOTO 4
      A1(I)=0
      GO TO 3
    4 A1(I)=1
    3 CONTINUE
      RETURN
    2 CONTINUE
      DO 5 I=1,K0
      IF(AM.EQ.D(I))GOTO 6
      A2(I)=0
      GO TO 5
    6 A2(I)=1
    5 CONTINUE
      RETURN
    1 DO 7 I=1,K0
      IF((AM.EQ.D(I)).AND.((A1(I).EQ.1).OR.(A2(I).EQ.1)))GO TO 8
      IF(AM.EQ.D(I))GOTO 9
      A1(I)=A2(I)
      A2(I)=0
      GO TO 10
    9  A1(I)=A2(I)
      A2(I)=1
   10 IC(I)=0
      GO TO 7
    8 A1(I)=A2(I)
      A2(I)=1
      IC(I)=1
    7 CONTINUE
      RETURN
      END
```

4.3 - Sous-programme calculant les coefficients de décompte d'indices $^{q}_{5}$

```
      SUBROUTINE METHOS(N,Q,K0,AM,D,IC)
      DOUBLE PRECISION D(6),AM
      INTEGER CARD(6),A1(6,6),Q1,IC(6)
      N1=N-Q
      Q1=Q-1
      IF(N1.GT.Q)GOTO 1
      IF(N1.GT.1)GO TO 2
      DO 3 I=1,K0
      IF(AM.EQ.D(I))GO TO 4
      A1(I,N1)=0
      CARD(I)=0
      GO TO 3
    4 A1(I,N1)=1
      CARD(I)=1
    3 CONTINUE
      RETURN
    2 DO 5 I=1,K0
      IF(AM.LT.D(I))GO TO 6
      A1(I,N1)=1
      CARD(I)=CARD(I)+1
      GO TO 5
    6 A1(I,N1)=0
    5 CONTINUE
      RETURN
    1 DO 7 I=1,K0
      IF(AM.EQ.D(I))GO TO 8
      IF(A1(I,1).EQ.1)GO TO 9
      IC(I)=CARD(I)
      GO TO 10
    9 IC(I)=CARD(I)-1
      CARD(I)=IC(I)
   10 IF(Q1.EQ.0)GO TO 12
      DO 11 J=1,Q1
      A1(I,J)=A1(I,(J+1))
   11 CONTINUE
   12 A1(I,Q)=0
      GO TO 7
    8 IF(A1(I,1).EQ.1)GO TO 13
      IC(I)=CARD(I)+1
      CARD(I)=IC(I)
      GO TO 14
   13 IC(I)=CARD(I)
   14 IF(Q1.EQ.0)GO TO 15
      DO 16 J=1,Q1
      A1(I,J)=A1(I,(J+1))
   16 CONTINUE
   15 A1(I,Q)=1
    7 CONTINUE
      RETURN
      END
```

4.4 - Sous-programme calculant les coefficients de décompte d'indices 6

```
      SUBROUTINE METHO6(N,Q,K0,AM,D,IC)
      DOUBLE PRECISION D(6),AM
      INTEGER Q,IC(6),CARD(6)
      IF(N.GT.(Q+1))GOTO 1
      DO 2 I=1,K0
      IF(AM.EQ.D(I))GOTO 3
      CARD(I)=0
      IC(I)=0
      GO TO 2
    3 CARD(I)=1
      IC(I)=1
    2 CONTINUE
      RETURN
    1 CONTINUE
      DO 4 I=1,K0
      IF(AM.EQ.D(I))GOTO 5
      IC(I)=0
      GO TO 4
    5 CARD(I)=CARD(I)+1
      IC(I)=CARD(I)
    4 CONTINUE
      RETURN
      END
```

4.5 - Sous-programme calculant les coefficients de décompte d'indices 7

```
      SUBROUTINE METHO7(N,Q,K0,AM,D,IC)
      DOUBLE PRECISION D(6),AM
      INTEGER Q,IC(6),A1(6),A2(6)
      IF(N.GT.(Q+2))GOTO 1
      IF(N.EQ.(Q+2))GOTO 2
      DO 3 I=1,K0
      IF(AM.EQ.D(I))GOTO 4
      A1(I)=0
      GOTO 3
    4 A1(I)=1
    3 CONTINUE
      RETURN
    2 DO 5 I=1,K0
      IF(AM.EQ.D(I))GOTO 6
      A2(I)=0
      GOTO 5
    6 A2(I)=1
    5 CONTINUE
      RETURN
    1 CONTINUE
      DO 7 I=1,K0
      IF(AM.EQ.D(I))GOTO 8
      IC(I)=0
      A1(I)=A2(I)
      A2(I)=0
      GO TO 7
    8 IF((A1(I).EQ.0).AND.(A2(I).EQ.0))GOTO 9
      IF((A1(I).EQ.1).AND.(A2(I).EQ.1))GOTO 10
      IF(A2(I).EQ.1)GOTO 11
      IC(I)=2
      GOTO 12
    9 IC(I)=1
      GOTO 12
   10 IC(I)=4
      GOTO12
   11 IC(I)=3
   12 A1(I)=A2(I)
      A2(I)=1
    7 CONTINUE
      RETURN
      END
```

4.6 - Sous-programme calculant les coefficients de décompte d'indices $(P_1,P_2)_8$ $(P_1, P_2 \in \mathbb{N}^*,\ P_1 \leq P_2+1)$

```
      SUBROUTINE METHO8(N,Q,K0,P1,P2,AM,D,IC)
      DOUBLE PRECISION AM,D(6)
      INTEGER Q,P1,P2,IC(6),X(6,60),CARD(6)
C     LES ARGUMENTS P1 ET P2 VERIFIENT (1.LE.P1.LE.P2+1)
      IF(N.LT.(Q+P2+1))GOTO 5
      DO 1 I=1,K0
      IF(AM.EQ.D(I))GOTO 2
      X(I,N)=0
      IC(I)=0
      GOTO 1
    2 N1=N-P2
      N2=N-1
      X(I,N)=1
      CARD(I)=1
      DO 3 K=N1,N2
      IF(X(I,K).EQ.0)GOTO 3
      CARD(I)=CARD(I)+1
    3 CONTINUE
      IF(CARD(I).LT.P1)GOTO4
      IC(I)=2
      GOTO 1
    4 IC(I)=1
    1 CONTINUE
      GO TO 6
    5 DO 7 I=1,K0
      IF(AM.EQ.D(I))GO TO 8
      X(I,N)=0
      GO TO 7
    8 X(I,N)=1
    7 CONTINUE
    6 CONTINUE
      RETURN
      END
```

4.7 - Sous-programme calculant les coefficients de décompte d'indices 9

```
      SUBROUTINE METHO9(N,Q,K0,AH,D,IC)
      DOUBLE PRECISION AH,D(6)
      INTEGER IC(6),Q,A1(6)
      IF(N.GT.(Q+1))GOTO 1
      DO 2 I=1,K0
      IF(AH.EQ.D(I))GOTO 3
      A1(I)=0
      GOTO 2
    3 A1(I)=1
    2 CONTINUE
      RETURN
    1 CONTINUE
      DO4 I=1,K0
      IF(AH.EQ.D(I))GO TO 5
      IF(A1(I).EQ.0) GOTO 6
      IC(I)=1
      A1(I)=0
      GOTO 4
    6 IC(I)=0
      A1(I)=0
      GOTO 4
    5 IF(A1(I).EQ.0)GOTO 7
      IC(I)=3
      GOTO 8
    7 IC(I)=2
    8 A1(I)=1
    4 CONTINUE
      RETURN
      END
```

5 - SOUS-PROGRAMME INM

Le sous-programme SELEC utilise le sous-programme INM qui calcule le plus petit indice $i \in \{1, \ldots, k_o\}$ vérifiant $IC(i) = \max_{1 \leq j \leq k} IC(j)$.

Arguments du sous-programmes INM :

KO, IC, ont mêmes significations que dans le paragraphe 4.

I_2 : Argument correspondant au plus petit indice $i \in \{1, \ldots, k_o\}$ vérifiant

$IC(i) = \max_{1 \leq j \leq k_o} IC(j)$.

```
      SUBROUTINE INM(K0,IC,I2)
      INTEGER IC(6)
      I2=1
      MAX=IC(1)
      DO 1J=2,K0
      IF(IC(J).LE.MAX)GO TO1
      I2=J
      MAX=IC(J)
    1 CONTINUE
      RETURN
      END
```

Pour terminer, nous signalons que l'utilisateur doit adapter les dimensions des programmes à ses besoins.

REFERENCES

[1] C. BREZINSKI
Algorithmes d'accélération de la convergence. Etude numérique.
Technip, Paris 1978.

[2] C. BREZINSKI
A general extrapolation algorithm
Numer. Math. 35, pp. 175-187 (1980)

[3] C. BREZINSKI
Error Control in convergence processes.
Publication ANO n° 64, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1982.

[4] C. BREZINSKI
Composite sequence transformations.
Publication ANO n° 124, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1984.

[5] C. BREZINSKI
Accélération de la convergence en analyse numérique.
Cours D.E.A., 1973.

[6] C. BREZINSKI
Etudes sur les ε- et ρ-algorithmes
Numer. Math. 17, 1971, pp. 153-162.

[7] J.P. DELAHAHE
Théorie des transformations de suites en analyse numérique. Applications.
Thèse d'Etat, Lille, 1982.

[8] J.P. DELAHAHE
Les divers types de transformations algorithmiques de suites.
Publication ANO n° 69, Université des Sciences de Techniques de Lille, 1982.

[9] J.P. DELAHAYE
Automatic selection of sequence transformation.
Math. of computation 37, 1981, pp. 197-204.

[10] J.P. DELAHAYE
Choix automatique entre suites de paramètres dans l'extrapolation de Richardson.
Padé approximation and its application, Lecture Notes in Mathematics 888, Springer-Verlag, Heidelberg, 1981, pp. 158-172.

[11] J.P. DELAHAYE
Sur quelques limitations des algorithmes dans le traitement des suites.
Publication ANO n° 108, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1983.

[12] J.P. DELAHAYE
Optimalité du procédé Δ^2 d'aitken pour l'accélération de la convergence linéaire.
R.A.I.R.O. Analyse numérique, 15, 1981, pp. 321-330.

[13] J.P. DELAHAYE
Accélération de la convergence des suites dont le rapport des erreurs est borné.
Calcolo, 81, 1981, pp. 103-116.

[14] J.P. DELAHAYE et B. GERMAIN-BONNE
Résultats négatifs en accélération de la convergence.
Numer. Math. 35, 1980, pp. 443-457.

[15] J.P. DELAHAYE et B. GERMAIN-BONNE
The set of logarithmically convergent sequences cannot be accelerated.
SIAM J. Numer. Anal. 19, 1982, pp. 840-844.

[16] DAVID A. SMITH and WILLIAM F. FORD
Acceleration of linear and logarithmic convergence
SIAM J. Numer. Anal. 16, 1979, pp. 223-240.

[17] DAVID A. SMITH and WILLIAM F. FORD
Numerical comparison of non linear convergence accelerators.
Math. of Computation, 38, 1982, pp. 481-499.

[18] B. GERMAIN-BONNE
Estimation de la limite de suites et formalisation de procédés d'accélération de convergence
Thèse d'Etat, Lille 1978.

[19] A. SLIMAN
Connexion entre les méthodes de point fixe et d'accélération de la convergence
Thèse de 3e cycle, Lille 1982.

[20] P. WYNN
On the propagation of error in certain non-linear algorithms.
Numer. Math. 1, 1959, pp. 142-149.

[21] P. WYNN
On the convergence and stability of the epsilon algorithm.
Siam J. Numer. Anal. 3, 1966, pp. 91-122.

[22] P. WYNN
On repeated application of the ε-algorithm
Chiffres, Vol. 4, 1961, pp. 19-22.

[23] P. WYNN
A comparison between the numerical performances of the Euler transformation and the epsilon algorithm.
Chiffres, Vol. 4, 1961, pp. 23-29.

[24] A. ZIV
Relative distance-an error measure in round-off error analysis.
Math. of computation, 39, 1982, pp. 563-569.