

N° d'ordre: 351

50376.
1984
312

Exclu du Prêt

50376
1984
312

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE des SCIENCES et TECHNIQUES de LILLE I

pour obtenir

le **GRADE de DOCTEUR-INGENIEUR**

Spécialité : **MECANIQUE des SOLIDES**



Hassane OWAIDAT

Ingénieur Civil des Mines

**ETUDE ANALYTIQUE et NUMERIQUE des PLAQUES
ELASTIQUES D'EPAISSEUR QUELCONQUE**

Membres du Jury

MM. ROBINET
PARSY
BOIS

Professeurs, Université LILLE I

BASSAL Professeur, I.S.B.A. MARSEILLE

MARTIN-SIEGFRIED, Ingénieur, Avion Marcel Dassaut,
Bréguet Aviation

soutenu le 25 Juillet 1984

S O M M A I R E

Pages

- INTRODUCTION

- CHAPITRE I : PRESENTATION DE LA THEORIE DE REISSNER

I.1. Hypothèses.....	4
I.2. Relations générales.....	4
I.2.1. Equations d'équilibre.....	4
I.2.2. Relations contraintes - déformations.....	5
I.2.3. Relations déformations - déplacements....	5
I.2.4. Définitions.....	5
I.2.5. Relations cinématiques.....	6
I.2.6. Composantes du tenseur des contraintes...	7
I.3. Equations de base du problème.....	9
I.4. Conditions aux limites.....	10
I.4.1. Expression du travail des forces linéi- ques de contact.....	12
I.4.2. Conditions aux limites dans les cas usuels.....	14
I.5. Solutions analytiques.....	17
I.5.1. Obtention de l'équation vérifiée par la flèche.....	17
I.5.2. Applications.....	18
I.5.3. Plaque simplement appuyée sur ses quatre bords et reposant sur une fondation élas- tique.....	31

- CHAPITRE II : RESOLUTION PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

II.1. Expression de l'énergie potentielle totale.....	34
II.1.1. Energie potentielle de déformation.....	34
II.1.2. L'énergie due aux forces extérieures....	37
II.2. Convergence.....	38

II.3. Eléments de plaques obtenus suivant la théorie de MINDLIN.....	43
II.4. Présentation des éléments utilisés.....	51
II.4.1. Choix de l'élément.....	51
II.4.2. Obtention de la matrice de rigidité élémentaire.....	53
II.4.3. Cas de l'élément rectangulaire.....	58
II.4.4. Elément rectangulaire avec intégration sélective.....	61
II.4.5. Elément quadrilatère général.....	63
II.5. Plaque reposant sur le sol.....	69
II.5.1. Hypothèse des matrices cohérentes.....	69
II.5.2. Hypothèse des rigidités concentrées....	70
II.5.3. Hypothèse des rigidités concentrées aux noeuds.....	71
II.6. Conclusion.....	72

- CHAPITRE III : ESTIMATION DES ERREURS

III.1. Principe d'HELLINGER-REISSNER pour les plaques en flexion.....	75
III.2. Estimation d'erreurs.....	85

- ANNEXES

I N T R O D U C T I O N

Ce travail a pour objectif une contribution à l'étude des fondations machines-outils lourdes.

Rappelons que le rôle des fondations pour machines-outils est de réaliser une répartition adéquate des charges statiques et dynamiques sur le sol et d'assurer l'isolement antivibratile actif ou passif.

Les sollicitations appliquées à la fondation sont statiques et dynamiques, ces dernières sont généralement amorties par les différents organes de la machine, et les recommandations [2] pour le dimensionnement des fondations prévoient des massifs assez "lourds" pour que leurs fréquences propres soient suffisamment éloignées de celles de la machine ; ainsi, les centres d'usinage nécessitent des fondations de dimensions importantes (≈ 50 m de long) ; [2] recommande d'adopter une épaisseur allant jusqu'à 15 % de la longueur.

L'étude des fondations pour machines-outils nécessite la prise en compte de tous les phénomènes mis en jeu : à part ceux qui interviennent au niveau des organes de la machine, nous pouvons noter le problème des déformations locales dues aux charges élevées et localisées en des endroits déterminés ; le comportement du massif et du sol sous un chargement cyclique, les contraintes thermiques dans la fondation...

Etablir une méthode générale de calcul est quasiment impossible, vu la diversité des types de machines (taille, caractéristiques...) et de

l'intervention du sol ainsi que son interaction avec le massif ; néanmoins, nous pensons qu'au prix d'un effort raisonnable, des adaptations des modèles de calcul traditionnels pourraient être réalisées dans le cadre d'une étude globale faisant intervenir tous les paramètres du problème.

C'est dans cet esprit que nous avons effectué cette étude, qui porte sur le comportement des plaques épaisses chargées transversalement, seules les charges statiques ont été envisagées.

Cette étude a été menée suivant la théorie de REISSNER qui est une théorie des plaques relativement épaisses ; elle permet de ramener le problème étudié qui est tridimensionnel, à un problème bidimensionnel au moyen d'hypothèses supplémentaires qui ne sont pas prises en compte dans la théorie usuelle.

Notre travail sera divisé en trois chapitres principaux :

Dans le premier chapitre, nous présenterons la théorie de REISSNER en utilisant une approche classique basée sur la théorie d'élasticité linéaire ; ceci nous permettra d'obtenir des solutions pour quelques cas usuels.

Le second chapitre portera sur la modélisation par la méthode des éléments finis. Trois éléments ont été étudiés :

- élément rectangulaire avec intégration normale
- élément rectangulaire avec intégration réduite
- élément quadrilatère général

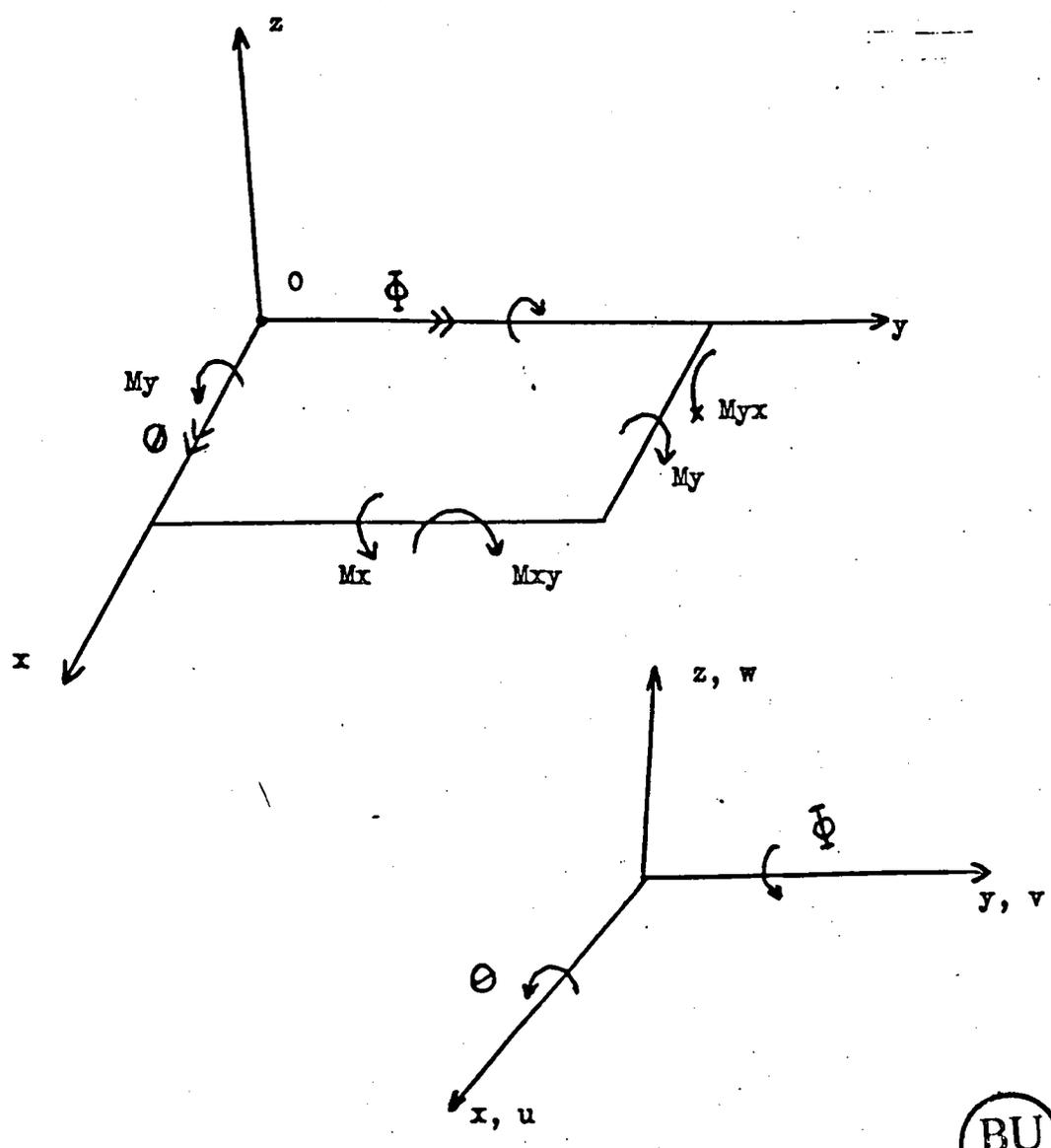
Enfin, le dernier chapitre fera l'objet d'une étude théorique portant d'une part sur l'obtention des équations générales à partir des équations variationnelles du problème, et d'autre part sur les estimations d'erreurs introduites par le passage du modèle tridimensionnel au modèle bidimensionnel utilisé.

CHAPITRE I

Dans ce chapitre, nous proposons une présentation analytique de la théorie de REISSNER ; cette théorie inclut l'effet des forces de cisaillement dans l'étude des plaques chargées transversalement, supposé négligeable dans la théorie habituelle des plaques minces ; cette hypothèse peut être justifiée si l'épaisseur de la plaque est petite devant ses autres dimensions et les charges appliquées ne sont pas trop élevées ou localisées.

La prise en compte de l'influence de l'effort tranchant sur le comportement des plaques, se traduit au niveau des équations générales, par un système d'ordre six au lieu de quatre dans la théorie classique. En effet, des termes supplémentaires s'ajoutent au système initial, traduisant ainsi l'effet des forces de cisaillement ; ces termes sont d'autant plus importants que la plaque est épaisse.

Plusieurs auteurs ont utilisé cette théorie pour des applications particulières ; ces travaux ont été menés dans le souci de satisfaire toutes les conditions aux bords, conditions qui ne pouvaient être assurées en utilisant la théorie classique.



Convention de signe

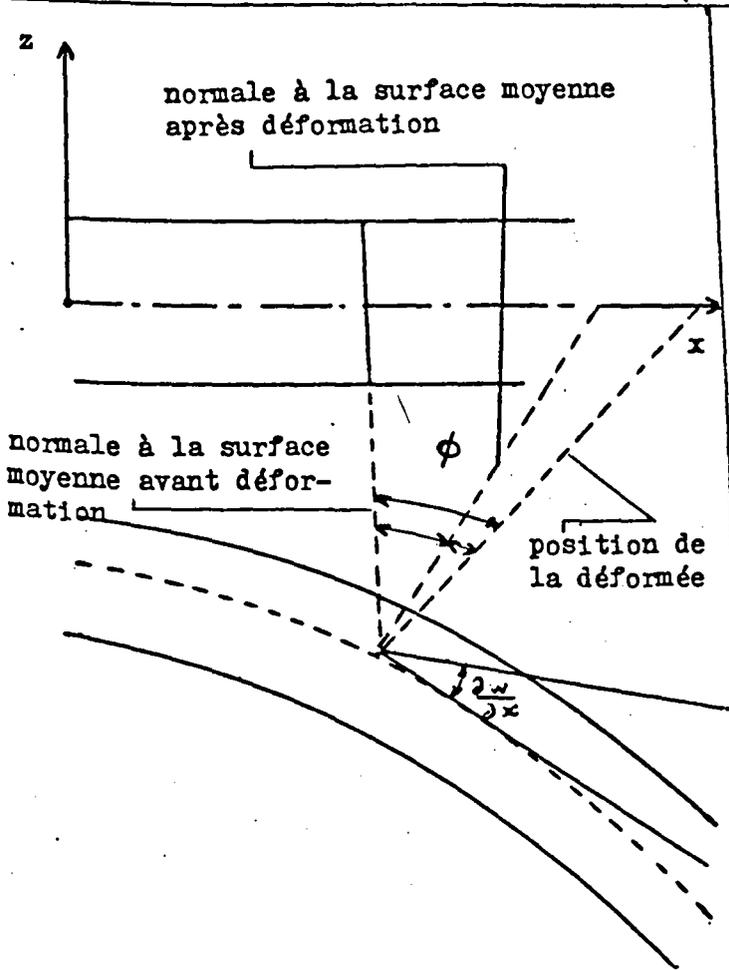
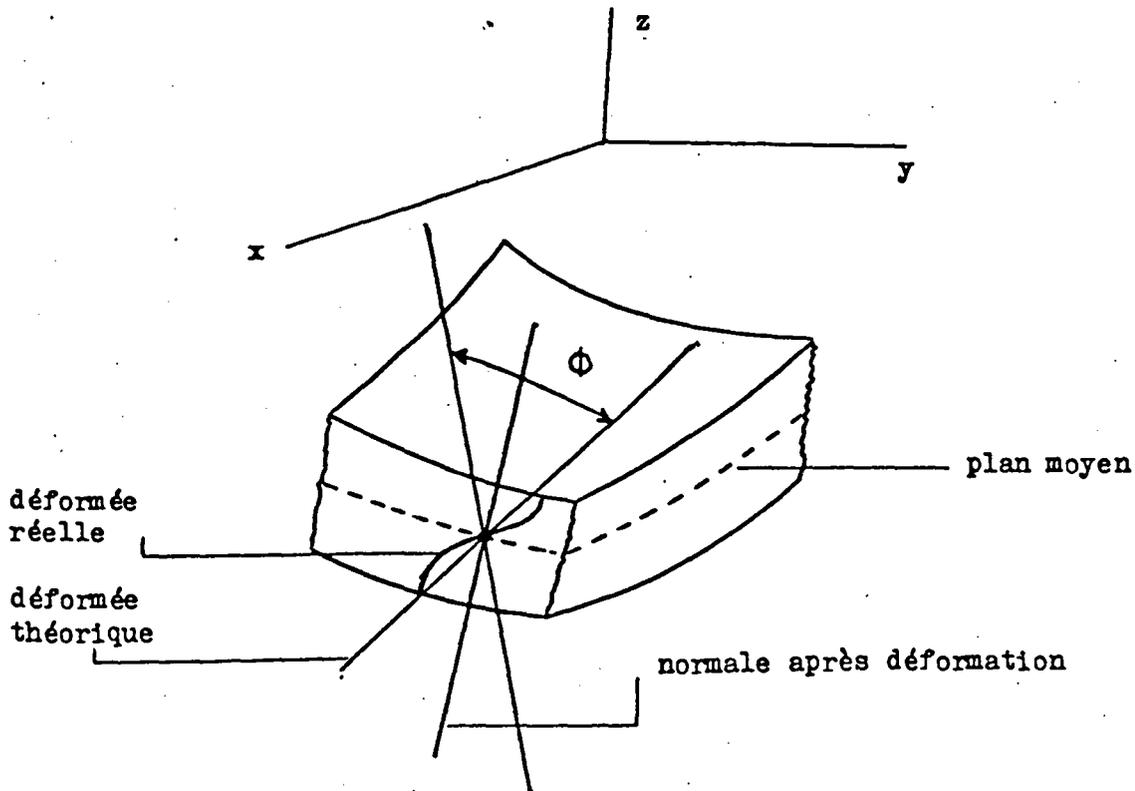


Schéma des déplacements dans le plan $(x - z)$ pour une section $x = cte$

Figure 2a

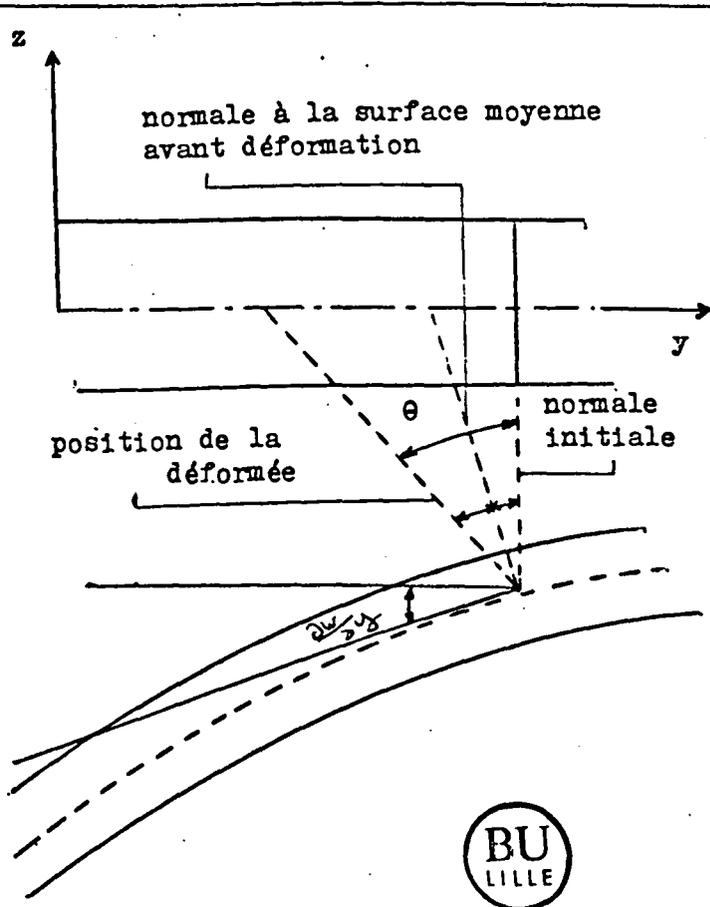


Schéma des déplacements dans le plan $(y - z)$ pour une section $y = cte$

Figure 2b



I.1. HYPOTHESES

Le milieu est linéaire, élastique, homogène et isotrope.

a) Les déplacements sont petits devant l'unité

b) La composante de la contrainte \sqrt{z} est négligeable

c) On néglige les déformations du plan moyen

d) Toute section plane normale à la surface moyenne avant déformation, reste plane après déformation, mais pas nécessairement normale à la surface moyenne.

Les hypothèses sont celles de la théorie classique des plaques minces à l'exception de la quatrième : celle-ci traduit la prise en compte de l'effet des forces de cisaillement.

I.2. RELATIONS GENERALES

I.2.1. Equations d'équilibre

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$$

I.2.2. Relations contraintes - déformations

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \nabla_{kk} \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \nabla_{ij} \quad i, j = x, y, z$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\nabla_x - (\nu \nabla_y + \nu \nabla_z)] \quad (a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\nabla_y - \nu (\nabla_x + \nabla_z)] \quad (b) \quad (2)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \nabla_{xy} \quad (c)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \nabla_{xz} \quad (d)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \nabla_{yz} \quad (e)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{module de cisaillement})$$

I.2.3. Relations déformations - déplacements

$$U = \langle u, v, w \rangle$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad 2 \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad 2 \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad 2 \varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

I.2.4. Définitions

Soit h l'épaisseur de la plaque.

Les résultantes des contraintes sont définies de la manière suivante :

- Moments de flexion :

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz$$

- Moments de torsion :

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} z dz$$

$$M_{yx} = M_{xy}$$

- Résultantes de cisaillement :

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz$$

I.2.5. Relations cinématiques

Si on désigne par θ et ϕ les rotations moyennes autour de x et de y respectivement, d'après les figures 2a et 2b et conformément à la convention de signe définie ci-dessus, on a :

$$u = z \phi (x, y)$$

$$v = - z \theta (x, y)$$

$$w = w (x, y)$$

avec θ et $\phi \ll 1$, d'après les hypothèses.

Il est aisé de vérifier que ce champ de déplacement permet de vérifier les équations de compatibilité aux déformations.

I.2.6. Composantes du tenseur des contraintes

Les équations (2a) et (2b) s'écrivent, en tenant compte des relations (3), de la façon suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x)$$

En combinant ces deux relations, on obtient :

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

qui s'écrit, en remplaçant u et v par leurs valeurs :

$$\sigma_y = \frac{E z}{1 - \nu^2} \left(\nu \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)$$

de la même manière :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1 - \nu^2}{E} \sigma_x$$

d'où :

$$\sigma_x = \frac{E z}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - \nu \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)$$

D'autre part, l'équation (2c) s'écrit, en tenant compte de (3) de la façon suivante :

$$\overline{\nabla}_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

où :

$$\overline{\nabla}_{xy} = G z \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)$$

Notons que $\overline{\nabla}_x$, $\overline{\nabla}_y$ et $\overline{\nabla}_{xy}$, varient linéairement suivant l'épaisseur.

Les composantes du cisaillement transverse sont données en fonction des déplacements par les relations suivantes :

$$\overline{\nabla}_{xz} = G \left(\phi + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\overline{\nabla}_{yz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta \right)$$

Les résultantes des contraintes peuvent être déduites de composantes des contraintes et s'écrivent :

$$M_x = D \left[\nu \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \theta}{\partial y} \right]$$

$$M_y = D \left[\nu \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right]$$

$$M_{xy} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right]$$

$$Q_x = G h \left[\phi + \frac{\partial w}{\partial x} \right]$$

$$Q_y = G h \left[\frac{\partial w}{\partial y} - \theta \right]$$

avec :

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (\text{la rigidité à la flexion de la plaque})$$

on retrouve en définitive :

$$\phi = \frac{Q_x}{G h} - \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\theta = -\frac{Q_y}{G h} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

CES DEUX RELATIONS MONTRENT QUE, CONTRAIREMENT A LA THEORIE HABITUELLE DES PLAQUES MINCES, LES ROTATIONS SONT EGALES AUX PENTES DU DEPLACEMENT TRANSVERSE PLUS UN TERME CORRECTIF DU A L'EFFORT TRANCHANT.

I.3. EQUATIONS DE BASE DU PROBLEME

A partir des relations générales établies au paragraphe précédent, nous pouvons déduire les équations de base ; en effet, les moments de flexion et de torsion s'écrivent, en tenant compte des expressions de θ et de ϕ en fonction de W et Q , de la manière suivante :

$$M_x = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + \frac{h^2}{6(1-\nu)} \left[\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right]$$

$$M_y = -D \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + \frac{h^2}{6(1-\nu)} \left[\nu \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right]$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{h^2}{12} \left[\frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} \right]$$

D'autre part, les équations d'équilibre en termes de résultantes sont données par :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + P = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (3)$$

En remplaçant M_x , M_y et M_{xy} dans (2) et (3) et en tenant compte de (1), on obtient les équations qui décrivent le comportement de la plaque en flexion suivant la théorie de REISSNER.

$$M_x = -D \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] + \frac{h^2}{6} \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{\nu h^2}{6(1-\nu)} P$$

$$M_y = -D \left[\nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] + \frac{h^2}{6} \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{\nu h^2}{6(1-\nu)} P$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial xy} + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} \right)$$

Pour aboutir à ces équations, nous avons supposé que les composantes du tenseur des contraintes \sqrt{x} , \sqrt{y} et \sqrt{xy} varient linéairement suivant z , par contre, nous n'avons fait aucune hypothèse concernant les forces de cisaillement ; l'hypothèse généralement admise est celle qui rend le champ de contraintes statiquement admissible ; ceci revient à adopter des expressions de \sqrt{xz} et \sqrt{yz} , qui permettent de vérifier les équations d'équilibre. Ces dernières sont vérifiées si \sqrt{xz} et \sqrt{yz} sont des fonctions paraboliques en z :

On pose :

$$\sqrt{xz} = \alpha z^2 + \beta z + \delta$$

$$\sqrt{yz} = \alpha' z^2 + \beta' z + \delta'$$

$\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta'$ et δ' étant calculés en tenant compte des conditions aux limites :

$$\nabla_{xz} = \nabla_{yz} = 0 \text{ pour } z = \pm \frac{h}{2}$$

et en fonction de Q_x et Q_y .

d'où :

$$\nabla_{xz} = \frac{3 Q_x}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right]$$

$$\nabla_{yz} = \frac{3 Q_y}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right]$$

d'autre part, on a :

$$\nabla_{xy} = G \left(\vartheta + \frac{\partial W}{\partial x} \right)$$

$$\nabla_{yz} = G \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \theta \right)$$

d'où :

$$\frac{3 Q_x}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] = G \left(\vartheta + \frac{\partial W}{\partial x} \right)$$

En multipliant les deux membres de cette relation par $\frac{3}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right)$ et en intégrant entre $-\frac{h}{2}$ et $+\frac{h}{2}$, on trouve :

$$Q_x = \frac{5}{6} G h \left(\vartheta + \frac{\partial W}{\partial x} \right)$$

$$Q_y = \frac{5}{6} G h \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \theta \right)$$

d'où :

$$\vartheta = \frac{6}{5} \frac{Q_x}{G h} - \frac{\partial W}{\partial x}$$

$$\theta = -\frac{6}{5} \frac{Q_y}{G h} + \frac{\partial W}{\partial y}$$

on pose $K = \frac{6}{5}$ (coefficient correctif au cisaillement)

Les équations générales s'écrivent alors :

$$M_x = -D \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] + \frac{K h^2}{6} \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{\nu h^2}{6(1-\nu)} P$$

$$M_y = - D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + \frac{K h^2}{6} \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{\nu h^2}{6(1-\nu)} P \quad (I)$$

$$M_{xy} = - D (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial xy} + \frac{K h^2}{12} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} \right)$$

On remarque que le terme correctif qui s'ajoute aux expressions des moments, comporte un facteur multiplicatif de l'ordre du carré de l'épaisseur ; ce qui confirme la possibilité d'utilisation de cette théorie pour étudier les plaques épaisses. Ainsi, nous pouvons déduire de ces équations, celles qui traduisent la théorie classique des plaques minces en négligeant les termes en h^2 pour h supposé petit.

I.4. CONDITIONS AUX LIMITES

Nous allons retrouver les conditions aux bords d'une plaque rectangulaire chargée transversalement, en utilisant le principe des travaux virtuels ; nous faisons l'hypothèse que toutes les liaisons sont parfaites, ce qui revient à écrire que la puissance virtuelle des efforts de liaison est nulle dans tout mouvement virtuel compatible avec la liaison considérée.

I.4.1. Expression du travail des forces linéiques de contact :

Désignons par ξ la surface moyenne de la plaque et par Γ sa frontière ; le torseur des efforts de liaison exercés sur ξ à travers Γ est défini par sa résultante et son moment à l'origine :

$$\vec{R} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \vec{T} \, dz \quad \text{avec } T_i = \sqrt{ij} \, n_j \text{ et } \vec{n} \text{ la normale extérieure au domaine}$$

Donc le travail virtuel des forces de contact est défini

par :

$$W^* = \int_{\Gamma} (\vec{R} \cdot \vec{U}^* + \vec{M} \cdot \vec{\omega}^*) ds$$

où s désigne l'abscisse curviligne.

En définitive, pour établir les conditions aux limites de la plaque, il suffit d'écrire, en tenant compte des conditions cinématiques de liaison que :

$$- R_z W^* + \dots \propto c^* \propto = 0 \text{ sur chaque bord.}$$

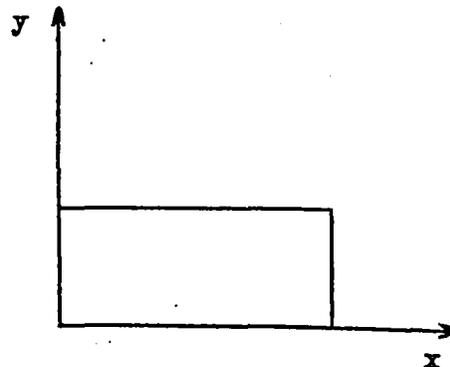
I.4.2. Conditions aux limites dans les cas usuels

Considérons le bord $x = cte$

$$n = \langle 1, 0, 0 \rangle ; c = \langle \phi, -\theta, 0 \rangle$$

La condition (1) s'écrit :

$$\triangleright Q_x W + M_x \phi - M_{xy} \theta = 0$$



Trois cas de liaisons sont fréquemment rencontrés dans la pratique : bord simplement appuyé, bord encasté et bord libre (le cas d'une plaque reposant sur des appuis élastiques sera discuté ultérieurement).

- Bord simplement appuyé
.....

La plupart des auteurs [15], [16] adoptent les conditions suivantes :

- (a) $W = 0, M_x = 0$ et $M_{xy} = 0$ et les "duals" de ces termes (Q_x, ϕ et θ) quelconques.

L'ordre du système d'équations obtenues en utilisant la théorie classique ne permet de vérifier que deux conditions aux limites sur chaque bord, par conséquent, la condition $M_{xy} = 0$ ne peut pas être vérifiée ; ceci explique la nécessité d'appliquer des réactions concentrées aux coins de la plaque.

Par contre, l'utilisation de la théorie de REISSNER permet de vérifier les trois conditions sur chaque bord (entièrement).

Une autre possibilité d'application des conditions aux limites est celle préconisée par [15] : Elle consiste à imposer les conditions suivantes :

(b) $W = 0, M_x = 0$ et $\theta = 0$ (Q_x, ϕ, M_{xy}) quelconques.

Physiquement, la condition $\theta = 0$ revient à maintenir les forces supérieures et inférieures du bord entre deux structures rigides, empêchant toute rotation autour de x ; ce schéma empêche également le soulèvement des coins ce qui ne rend pas indispensable l'application de la condition $M_{xy} = 0$.

Les conditions (b) sont plus utilisées dans le cas d'une résolution par la méthode des éléments finis en déplacements, elles permettent de spécifier deux conditions cinématiques au lieu d'une seule en se rapportant aux conditions (a) ; par conséquent, nous utiliserons les conditions (b) par la suite.

- Bord encasté
.....

Dans le cas d'un bord encasté, on applique généralement deux conditions cinématiques et une condition statique ; ces conditions sont les suivantes :

(a') $W = 0, \phi = 0, M_{xy} = 0$ et (Q_x, M_x, θ) quelconques.

Une condition d'encastrement est difficilement réalisable dans la pratique ; on peut cependant penser qu'un encastrement empêche tout déplacement ou rotation du bord et adopter les conditions suivantes :

(b') $W = 0, \varphi = 0, \theta = 0$ et (Q_x, M_x, M_{xy}) quelconques.

Ce sont ces conditions que nous adopterons par la suite.

- Bord libre
.....

Dans le cas d'un bord libre, tous les déplacements sont permis et le bord est libre dans tous ses mouvements ; d'après l'expression (1) on a les conditions :

(a'') $M_x = 0, M_{xy} = 0, Q_x = 0$ et (W, θ, φ) quelconques.

Ces conditions ne peuvent pas être exprimées dans une modélisation par la méthode des éléments finis, en prenant comme degrés de liberté W, θ et φ ; une possibilité d'exprimer $Q_x = 0$ a été suggérée par [12] qui a exprimé la rotation moyenne comme la somme de deux rotations ; le terme dû au cisaillement étant fonction de l'effort tranchant.

Les conditions que nous avons adoptées dans cette étude sont présentées dans le tableau 4

Bord simplement appuyé		Bord encasté		Bord libre	
SA*	EF**	SA	EF	SA	EF
$M_x = 0$	$W = 0$	$W = 0$	$W = 0$	$Q_x = 0$	$W = 0$
$W = 0$	$\theta = 0$	$M_{xy} = 0$	$\theta = 0$	$M_x = 0$	$\theta = 0$
$\theta = 0$		$\varphi = 0$	$\varphi = 0$	$M_{xy} = 0$	$\varphi = 0$

Tableau 4 : Conditions aux limites $x = cte$

* SA : solution analytique

** EF : éléments finis.

I.5. SOLUTIONS ANALYTIQUES

Les équations (I) qui traduisent la loi de comportement, les équations d'équilibre et les conditions aux limites, permettent d'obtenir le déplacement et les efforts en tout point de la plaque.

Contrairement à la théorie classique des plaques minces, l'ordre du système d'équations à résoudre offre la possibilité de vérifier toutes les conditions aux bords ; c'est la raison essentielle qui a conduit quelques auteurs [15], [16] à s'intéresser à cette théorie ; ceci est néanmoins resté limité à des cas particuliers en raison de la complexité du calcul ; il faut en effet vérifier douze conditions aux limites ; ainsi [15] a cherché la solution pour une plaque rectangulaire simplement appuyée sur ses quatre bords et chargée uniformément ; il a pris comme hypothèse simplificatrice, le fait que l'épaisseur de la plaque est petite devant ses autres dimensions.

Les résultats pour des plaques épaisses avec divers types de conditions aux limites sont rares, voire inexistants ; nous avons estimé nécessaire d'établir la solution pour quelques cas concrets, ceci afin de pouvoir comparer les résultats avec la solution numérique proposée dans la deuxième partie de cette étude.

I.5.1. Obtention de l'équation vérifiée par la flèche

En remplaçant K par sa valeur (6/5) dans les équations (I), celles-ci s'écrivent :

$$M_x = - D \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] + \frac{h^2}{5} \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{\nu h^2}{6(1-\nu)} P \quad (a)$$

$$M_y = - D \left[\nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] + \frac{h^2}{5} \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{\nu h^2}{6(1-\nu)} P \quad (b)$$

$$M_{xy} = - D (1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \frac{h^2}{10} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} \right) \quad (c)$$

En remplaçant ces quantités dans les deux dernières équations d'équilibre, celles-ci deviennent :

$$- D \frac{\partial \Delta W}{\partial x} + \frac{h^2}{10} \Delta Q_x - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{h^2(1+\nu)}{10(1-\nu)} - Q_x = 0 \quad (2')$$

$$- D \frac{\partial \Delta W}{\partial y} + \frac{h^2}{10} \Delta Q_y - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{h^2(1+\nu)}{10(1-\nu)} - Q_y = 0 \quad (3')$$

En dérivant (2') par rapport à x et (3') par rapport à y en faisant la somme des équations obtenues, on aboutit à :

$$(\alpha) \quad - D \Delta \Delta W + \frac{h^2}{10} \left(\frac{\partial \Delta Q_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta Q_y}{\partial y} \right) - \frac{h^2(1+\nu)}{10(1-\nu)} \Delta P - \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) = 0$$

D'autre part, en tenant compte de la première équation d'équilibre qui peut s'écrire :

$$\frac{\partial \Delta Q_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta Q_y}{\partial y} = - \Delta P$$

l'équation (α) devient :

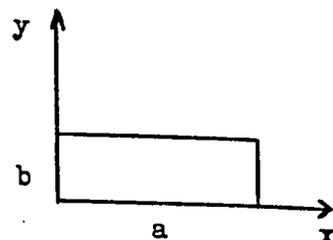
$$D \Delta \Delta W = P - \frac{h^2}{10(1-\nu)} \Delta P \quad (A)$$

On obtient ainsi l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la flèche.

I.5.2. Applications

1) Plaque rectangulaire simplement appuyée sur ses quatre bords

Les conditions aux limites étant de même nature sur tous les bords, on peut utiliser la solution de NAVIER et chercher une solution pour la flèche sous la forme d'une double série de FOURIER :



$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b}$$

$$\Delta \Delta W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b}$$

P peut également être développée en double série de FOURIER de la façon suivante :

$$P = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b}$$

$$\Delta P = -\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b}$$

On pose $C^2 = \frac{h^2}{10(1-\nu)}$ et on remplace les différentes quantités évaluées plus haut dans l'équation (A), on obtient :

$$W_{mn} = \frac{\left[1 + \pi^2 C^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \right] a_{mn}}{\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}$$

- calcul des efforts tranchants
.....

On cherche la solution de Q_x et Q_y sous la forme :

$$Q_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} R_{mn} \cos \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b}$$

$$Q_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} S_{mn} \sin \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b}$$

R_{mn} et S_{mn} peuvent être obtenus en remplaçant Q_x , Q_y et W par leurs valeurs dans les équations qui lient la flèche aux efforts tranchants

$$R_{mn} = \frac{\frac{m\pi}{a} \left\{ D W_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] - c^2(1+\nu) a_{mn} \right\}}{1 + \frac{h^2}{10} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]}$$

$$S_{mn} = \frac{\frac{n\pi}{b} \left\{ D W_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] - c^2(1+\nu) a_{mn} \right\}}{1 + \frac{h^2}{10} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]}$$

- Calcul des moments
.....

Les valeurs de M_x , M_y et M_{xy} peuvent être calculées en remplaçant W , Q_x , Q_y et P par leurs valeurs dans les équations (a), (b) et (c) ; on obtient :

$$M_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ D \left[\pi^2 W_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \nu \frac{n^2}{b^2} \right) \right] - \frac{h^2 m\pi}{5 a} R_{mn} - \frac{\nu h^2}{6(1-\nu)} a_{mn} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$M_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ D \left[\pi^2 W_{mn} \left(\frac{n^2}{b^2} + \nu \frac{m^2}{a^2} \right) \right] - \frac{h^2 n\pi}{5 b} S_{mn} - \frac{\nu h^2}{6(1-\nu)} a_{mn} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$M_{xy} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ - D(1-\nu) \frac{mn\pi^2}{ab} W_{mn} + \frac{h^2}{10} \left(\frac{n\pi}{b} R_{mn} + \frac{m\pi}{a} S_{mn} \right) \right\} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}$$

- Conditions aux limites
.....

Le choix des différentes fonctions permet de vérifier toutes les conditions aux bords ; en effet, la plaque est simplement appuyée sur ses quatre côtés, on a :

$$W(0, y) = W(a, y) = W(x, 0) = W(x, b) = 0$$

$$M_x(0, y) = M_x(a, y) = M_y(x, 0) = M_y(x, b) = 0$$

La troisième condition est prise telle que :

$$\theta(0, y) = \theta(a, y) = 0$$

$$\theta(x, 0) = \theta(x, b) = 0$$

- Cas de chargement
.....

Le développement de l'intensité de charge en série de FOURIER permet d'évaluer le coefficient a_{mn} [16]:

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b P(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

Dans le cas d'une répartition uniforme P_0 sur toute la surface on trouve :

$$a_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{pour } m \text{ et } n \text{ pairs} \\ \frac{16 P_0}{2^{mn}} & \text{pour } m \text{ et } n \text{ impairs} \end{cases}$$

Pour une P_0 répartie sur l'aire d'un rectangle de côtés a' et b' :

$$a_{mn} = \frac{16 P_0}{\pi^2_{mn} a' b'} \sin \frac{m \pi X_1}{a} \sin \frac{n \pi Y_1}{b} \sin \frac{m \pi a'}{2a} \sin \frac{n \pi b'}{2b}$$

X_1 et Y_1 étant les coordonnées du centre du rectangle.

On peut également en déduire le cas d'une charge concentrée P appliquée au point de coordonnées X_1 et Y_1 :

$$a_{mn} = \frac{4 P}{a b} \sin \frac{m \pi X_1}{a} \sin \frac{n \pi Y_1}{b}$$

2) Plaque simplement appuyée sur deux bords opposés

Dans ce cas, la solution de l'équation (A) peut être recherchée sous la forme de la somme de la solution générale sans second membre et d'une solution particulière.

$$W = W_1 + W_2$$

W_1 : la solution générale

W_2 : solution particulière

La solution particulière doit satisfaire l'équation (A) et les conditions aux limites ; elle peut être cherchée sous la forme d'une simple série de FOURIER :

$$W_2 = \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin \frac{n \pi x}{a}$$

$$\Delta \Delta W_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 \pi^4}{a^4} W_n \sin \frac{n \pi x}{a}$$

D'autre part, on peut faire l'hypothèse que l'intensité de charge ne dépend que de x et qu'elle puisse être développée en simple série de FOURIER :

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{a} \quad \text{avec } a_n = \frac{2}{a} \int_0^a P \sin \frac{n\pi x}{a} dx$$

$$\Delta P = - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

En remplaçant dans l'équation (A) on trouve :

$$W_n = \frac{\frac{a_n}{D} \left(1 + \frac{c^2 n^2 \pi^2}{a^2} \right)}{\frac{n^4 \pi^4}{a^4}}$$

- Solution de l'équation sans second membre :

$$\Delta \Delta W = 0$$

On cherche la solution générale sous la forme suivante :

$$W_1 = \sum_{n=1}^{\infty} Y(y) \sin \frac{n\pi x}{a}$$

où la fonction Y satisfait l'équation différentielle suivante :

$$Y^{IV} - 2 \frac{n^2 \pi^2}{a^2} Y'' + \frac{n^4 \pi^4}{a^4} Y = 0$$

Cette équation admet la solution suivante :

$$Y = A \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} + B \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + C \frac{n\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} + G \frac{n\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a}$$

Les constantes A, B, C et seront déterminées par les conditions aux limites. En définitive :

$$W = (Wn + Y) \sin \frac{n\pi x}{a}$$

- Calcul des efforts tranchants
.....

Les efforts tranchants doivent vérifier les équations suivantes :

$$(B) \left\{ \begin{aligned} Q_x - \frac{h^2}{10} \Delta Q_x + \frac{h^2}{10(1-\nu)} \frac{\partial P}{\partial x} &= -D \frac{\partial \Delta W}{\partial x} \\ Q_y - \frac{h^2}{10} \Delta Q_y + \frac{h^2}{10(1-\nu)} \frac{\partial P}{\partial y} &= -D \frac{\partial \Delta W}{\partial y} \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} &= -P \end{aligned} \right.$$

Posons :

$$Q_x = Q_{x1} + Q_{x2}$$

$$Q_y = Q_{y1} + Q_{y2}$$

où Q_{x1} et Q_{y1} désignent les solutions des équations (B) sans seconds membres, Q_{x2} et Q_{y2} des solutions particulières

• Solutions des équations générales sans seconds membres

$$Q_{x1} - \frac{h^2}{10} \Delta Q_{x1} = 0$$

$$Q_{y1} - \frac{h^2}{10} \Delta Q_{y1} = 0$$

On introduit la fonction $\psi(x, y)$, telle que :

$$Q_{x1} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$Q_{y1} = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Les équations se réduisent à une seule équation qui s'écrit :

$$\Psi - \frac{h^2}{10} \Delta \Psi = \text{cte}$$

Cette constante peut être prise comme égale à zéro.

On cherche ψ sous la forme :

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} X(y) \cos \frac{n\pi x}{a}$$

où X doit vérifier l'équation suivante :

$$X'' - \left(\frac{10}{h^2} + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \right) X = 0$$

d'où :

$$\Psi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} [E \operatorname{ch} \beta y + F \operatorname{sh} \beta y] \cos \frac{n\pi x}{a}$$

avec :

$$\beta^2 = \frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{10}{h^2}$$

E et F sont des constantes à déterminer par les conditions aux limites.

Solutions particulières

$$Q_{x2} - \frac{h^2}{10} \Delta Q_{x2} = -c^2 \frac{\partial P}{\partial x} - D \frac{\partial \Delta W}{\partial x}$$

$$Q_{y2} - \frac{h^2}{10} \Delta Q_{y2} = -c^2 \frac{\partial P}{\partial y} - D \frac{\partial \Delta W}{\partial y}$$

On introduit les fonctions Q_{x2}^* et Q_{y2}^* définies de la façon suivante :

$$Q_{x_2} = Q^* x_2 - \frac{\partial \Delta DW_1}{\partial x}$$

$$Q_{y_2} = Q^* y_2 - \frac{\partial D \Delta W_1}{\partial y}$$

Comme P est indépendante de y par hypothèse, on a :

$$Q_{y_2} = - \frac{\partial D \Delta W_1}{\partial y}$$

$Q^* x_2$ vérifie l'équation suivante :

$$Q^* x_2 - \frac{h^2}{10} \Delta Q^* x_2 = - c^2 \frac{\partial P}{\partial x} - D \frac{\partial \Delta W_2}{\partial x}$$

On cherche $Q^* x_2$ sous la forme suivante :

$$Q^* x_2 = \sum_0^{\infty} R_n \cos \frac{n\pi x}{a}$$

avec :

$$R_n = \frac{a n \frac{a}{n\pi}}{1 + \frac{h^2 \pi^2 n^2}{10a^2}}$$

En définitive, on trouve en tenant compte de la valeur de la flèche calculée plus haut :

$$Q_{x_2} = \sum_0^{\infty} \left[R_n - 2 D \frac{n^3 \pi^3}{a^3} \left(G \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} + C \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} \right) \right] \cos \frac{n\pi x}{a}$$

$$Q_{y_2} = - D \sum_1^{\infty} \frac{2n^3 \pi^3}{a^3} \left(C \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} + G \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} \right) \sin \frac{n\pi x}{a}$$

De la même manière et en tenant compte de la valeur de ψ :

$$Q_{x_1} = \sum_0^{\infty} \beta (E \operatorname{sh} \beta y + F \operatorname{Ch} \beta y) \cos \frac{n\pi x}{a}$$

$$Q_{y_1} = \sum_1^{\infty} \frac{n\pi}{a} (E \operatorname{ch} \beta y + F \operatorname{sh} \beta y) \sin \frac{n\pi x}{a}$$

d'où :

$$Q_x = \sum_0^{\infty} \left[R_n - 2 D \frac{n^3 \pi^3}{a^3} \left(G \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} + C \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} \right) + \beta (E \operatorname{sh} \beta y + F \operatorname{ch} \beta y) \right] \cos \frac{n\pi x}{a}$$

$$Q_y = \sum_1^{\infty} \left[\frac{n\pi}{a} (E \operatorname{Ch} \beta y + F \operatorname{sh} \beta y) - 2 D \frac{n^3 \pi^3}{a^3} \left(C \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} + G \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} \right) \right] \sin \frac{n\pi x}{a}$$

- Calcul des moments
.....

Les moments sont donnés à partir des relations (1), (2) et (3)
par les relations suivantes :

$$M_x = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ - D \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \left[- W_n + \operatorname{Sh} \frac{n\pi y}{a} \left(A(\nu-1) + C \frac{n\pi y}{a} (\nu-1) \right) \right. \right. \\ \left. \left. + 2\nu G + \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} \left(\beta (\nu-1) G + \frac{n\pi y}{a} (\nu-1) + 2c\nu \right) \right] \right. \\ \left. - \frac{n\pi}{a} \frac{h^2}{5} \left[R_n - 2 D \frac{n^3 \pi^3}{a^3} \left(G \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} + C \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \beta (E \operatorname{sh} \beta y + F \operatorname{ch} \beta y) \right] - \frac{\nu h^2}{6(1-\nu)} a n \right\} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

$$M_y = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -D \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \left[-\nu W_n + \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} (A(1-\nu) + C \frac{n\pi y}{a} (1-\nu) + 2C) \right. \right. \\ \left. \left. + \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} (B(1-\nu) + \frac{n\pi y}{a} (1-\nu) + 2C) \right] + \frac{h^2}{5} \frac{n\pi}{a} \left[(E \operatorname{sh} \beta y \right. \right. \\ \left. \left. + F \operatorname{ch} \beta y) - 2D \frac{n^3 \pi^3}{3} (C \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + G \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a}) \right] - \frac{\nu h^2}{6(1-\nu)} \operatorname{an} \right\} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

$$M_{xy} = \sum_{n=0}^{\infty} -D(1-\nu) \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \left[\operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} (A + C \frac{n\pi y}{a} + G) + \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} (B + C \frac{n\pi y}{a} + C) \right] \\ + \frac{h^2}{10} \left[-4D \frac{n^4 \pi^4}{4} (C \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} + G \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a}) + (\frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \beta^2) \right. \\ \left. (E \operatorname{ch} \beta y + F \operatorname{sh} \beta y) \right] \cos \frac{n\pi x}{a}$$

On remarque que les conditions aux bords simplement appuyés sont automatiquement vérifiées, en effet :

$$\theta(0, y) = \theta(a, y) = 0$$

$$M_x(0, y) = M_x(a, y) = 0$$

$$W(0, y) = W(a, y) = 0$$

Deux cas ont été traités dans le but d'obtenir des résultats pour différentes conditions aux limites :

a - deux bords encastés

b - deux bords libres

a) Considérons une plaque rectangulaire chargée symétriquement par rapport à l'axe des x, fig. , la surface fléchie étant symétrique par rapport à cet axe, on ne garde par conséquent que les fonctions paires dans le développement de la flèche, celle-ci s'écrit :

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} (W_n + B \operatorname{ch} M y + C M y \operatorname{sh} M y) \sin Mx$$

avec $M = \frac{n\pi}{a}$; $A = G = 0$

appelons : $M1 = \frac{n\pi b}{2a}$

$$M2 = \frac{\beta b}{2}$$

$$\alpha = \frac{6}{5ch} \quad \text{avec } \beta = \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{10}{h^2}}$$

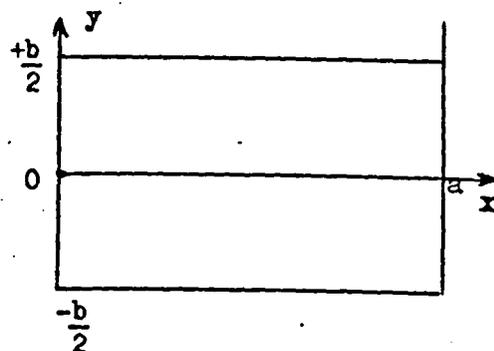


Fig.

Les conditions sur les bords encastés sont les suivants :

$$W(x, \pm \frac{b}{2}) = 0$$

$$\theta(x, \pm \frac{b}{2}) = 0$$

$$Mxy(x, \pm \frac{b}{2}) = 0$$

Ces conditions se traduisent par le système suivant :

$$\left\{ \begin{aligned} W_n + B \operatorname{ch} M1 + C M1 \operatorname{sh} M1 &= 0 \\ \alpha F \operatorname{sh} M2 - C(2 D \alpha M^2 \operatorname{sh} M1 + \operatorname{sh} M1 + M1 \operatorname{ch} M1) - B \operatorname{sh} M1 &= 0 \\ \frac{(M^2 + \beta^2) h^2}{10} \operatorname{sh} M2 F + C \left[- D(1 - \nu) M^2 (M1 \operatorname{ch} M1 + \operatorname{sh} M1) - \frac{2 h^2}{5} D M^4 \operatorname{sh} M1 \right] & \\ - B D (1 - \nu) M^2 \operatorname{sh} M1 &= 0 \\ E &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\text{d'où : } C = \frac{R2}{R1}$$

$$B = \frac{-Wn}{\text{ch } M1} - \frac{R2 M1}{R1} \text{ th } M1$$

$$F = \frac{R2}{R1 \alpha \text{ sh } M2} (2 D M^2 \alpha \text{ sh } M1 + \text{sh } M1 + M1 \text{ ch } M1) - \frac{\text{sh } M1}{\alpha \text{ sh } M2}$$

$$\left(\frac{Wn}{\text{ch } M1} + \frac{R2}{R1} M1 \text{ th } M2 \right)$$

avec :

$$R1 = (M1 \text{ ch } M1 + \text{sh } M1) \left(-D(1-\nu) M^2 + \frac{(M^2 + \beta^2)h^2}{10} \right) + \text{sh } M1 \left(-\frac{2h^2}{5} D M^4 \right. \\ \left. + D M^2 \frac{(M^2 + \beta^2)h^2}{5} + D(1-\nu) M^2 M1 \text{ th } M1 - \frac{(M^2 + \beta^2)h^2}{10} M1 \text{ th } M1 \text{ sh } M1 \right)$$

$$R2 = Wn \left[D(1-\nu) M^2 \text{ th } M1 - \frac{(M^2 + \beta^2)h^2}{10 \alpha} \text{ th } M1 \right]$$

Les déplacements et les efforts sont à présent complètement déterminés.

b) Le problème se traite de la même manière que le cas (a), les conditions aux bords $y = \text{cte}$ deviennent :

$$M_y \left(x, \pm \frac{b}{2} \right) = 0$$

$$Q_y \left(x, \pm \frac{b}{2} \right) = 0$$

$$M_{xy} \left(x, \pm \frac{b}{2} \right) = 0$$

Celles-ci se traduisent par le système suivant :

$$F \text{ sh } M2 - 2 D M^2 \text{ sh } M1 C = 0$$

$$C \left[- D M^2 M_1 (1-\nu) \operatorname{sh} M_1 - \operatorname{ch} M_1 \left(2 D M^2 + \frac{2D h^2}{5} M^4 \operatorname{ch} M_1 \right) \right] - D M^2 (1-\nu) \beta \operatorname{ch} M_1 B + \frac{M h^2}{5} \beta F \operatorname{ch} M_2 + \nu D M^2 W_n - \frac{h^2}{6(1-\nu)} a_n = 0$$

$$C \left[- D (1-\nu) M^2 (M_1 \operatorname{ch} M_1 + \operatorname{sh} M_1) - \frac{2h^2}{5} D M^4 \operatorname{sh} M_1 \right] + \frac{(M^2 + \beta^2) h^2}{10} \operatorname{sh} M_2 F - D (1-\nu) M^2 \operatorname{sh} M_1 B = 0$$

$$\text{d'où : } C = \frac{R'2}{R'1}$$

$$F = \frac{2 D M^2 \operatorname{sh} M_1}{\operatorname{sh} M_2} \frac{R'2}{R'1}$$

$$B = \frac{R'2}{R'1} \left[\frac{R'3}{D(1-\nu) M^2 \operatorname{sh} M_1} + \frac{(M^2 + \beta^2) h^2}{5 (1-\nu)} \right]$$

où, on a posé :

$$R'1 = D M^2 M_1 (1-\nu) - \operatorname{ch} M_1 \operatorname{sh} M_1 \left(2 D M^2 - D(1-\nu) M^2 + 2 D M^2 \frac{(M^2 + \beta^2) h^2}{10} \right) + 2 D \frac{M^3 h^2 \beta}{5} \operatorname{sh}^2 M_1 \operatorname{th} M_2$$

$$R'2 = \operatorname{sh} M_1 \left(\frac{h^2 a_n}{6(1-\nu)} - \nu D M^2 W_n \right)$$

$$R'3 = - D (1-\nu) M^2 (M_1 \operatorname{ch} M_1 + \operatorname{sh} M_1) - \frac{2h^2}{5} D M^4 \operatorname{sh} M_1$$

Des résultats numériques sont proposés dans un chapitre suivant et servent de comparaison avec les résultats fournis par la méthode des éléments finis.

I.5.3. Plaque simplement appuyée sur ses quatre bords et reposant sur une fondation élastique

Le cas d'une plaque reposant sur des appuis élastiques est traité en supposant que ces appuis exercent sur la plaque une force proportionnelle à la flèche, cette hypothèse revient à assimiler la fondation élastique à une série de ressorts accolés ; dans le cas d'une plaque reposant sur le sol, le coefficient de proportionnalité est appelé coefficient de réaction et la force exercée sur la plaque étant la pression de contact.

Le coefficient de réaction est supposé fonction uniquement de la nature du sol et indépendant des dimensions de la fondation ; il se mesure par l'essai à la plaque [6] ; des valeurs expérimentales de ce coefficient sont largement répandues dans la bibliographie [6], [10].

- Calcul du déplacement et des efforts pour une plaque simplement appuyée sur ses quatre bords et reposant sur des appuis élastiques

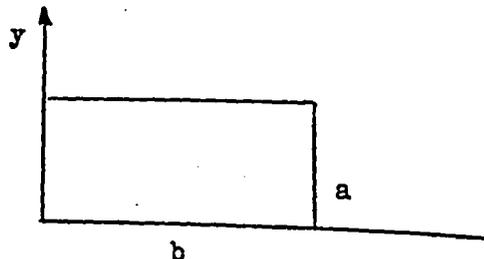
Dans ce cas, la plaque est soumise à sa face supérieure à une intensité de charge P_1 et d'autre part à la réaction d'appui P_2 où $P_2 = -KW$; K étant le coefficient de réaction.

L'équation (A) devient :

$$(A') \Delta \Delta W - \frac{c^2 K}{D} \Delta W + \frac{K}{D} W = P_1$$

avec :

$$c^2 = \frac{h^2}{10(1-\nu)}$$



La plaque étant simplement appuyée sur ses quatre bords, on peut chercher la solution de (A') en utilisant la méthode de NAVIER évoquée précédemment.

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$P1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

avec :

$$a_{mn} = \int_0^a \int_0^b P1(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

En portant W et P1 dans l'équation (A'), on obtient :

$$W_{mn} = \frac{\left\{ \frac{c^2}{D} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] + \frac{1}{D} \right\} a_{mn}}{\left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] + \frac{KC^2}{D} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] + \frac{K}{D}}$$

Nous pouvons également chercher les efforts tranchants et les moments fléchissants sous la forme :

$$Q_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$Q_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}$$

avec :

$$b_{mn} = \frac{\frac{m\pi}{a} \left\{ D \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] W_{mn} - C^2(1+\nu)(K W_{mn} + a_{mn}) \right\}}{\frac{h^2}{10} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] + 1}$$

et :

$$c_{mn} = \frac{\frac{n\pi}{b} \left\{ D \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] W_{mn} - C^2(1-\nu)(K W_{mn} + a_{mn}) \right\}}{\frac{h^2}{10} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] + 1}$$

Les moments sont déduits des relations (1), (2) et (3) et s'écrivent :

$$M_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ D \left[\pi^2 W_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \right] - \frac{h^2}{5} \frac{m\pi}{a} b_{mn} - \frac{\nu h^2}{6(1-\nu)} a_{mn} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$M_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ D \left[\pi^2 W_{mn} \left(\frac{n^2}{b^2} + \frac{\nu m^2}{a^2} \right) \right] - \frac{h^2}{5} \frac{n\pi}{b} c_{mn} - \frac{\nu h^2}{6(1-\nu)} a_{mn} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$M_{xy} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -D(1-\nu) \frac{mn\pi^2}{a b} W_{mn} + \frac{h^2}{10} \left(\frac{n\pi}{b} b_{mn} + \frac{m\pi}{a} c_{mn} \right) \right\} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}$$

CHAPITRE II

II - RESOLUTION PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

II.1. EXPRESSION DE L'ENERGIE POTENTIELLE TOTALE

II.1.1. Energie potentielle de déformation

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \epsilon$$

$$\sigma^T = [\sigma_x \sigma_y \sigma_{xy} \sigma_{xz} \sigma_{yz}]$$

$$\epsilon^T = [\epsilon_x \epsilon_y 2\epsilon_{xy} 2\epsilon_{xz} 2\epsilon_{yz}]$$

on a : $\sigma = C \epsilon$, $\sigma^T = \epsilon^T C$

C = matrice d'élasticité qui s'écrit pour un milieu linéaire élastique et isotrope de la façon suivante :

$$C = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix}$$

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ module du cisaillement.

$$C = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y) \\ \frac{E}{1-\nu^2} (\nu\epsilon_x + \epsilon_y) \\ 2G\epsilon_{xy} \\ 2G\epsilon_{xz} \\ 2G\epsilon_{yz} \end{bmatrix}$$

$$\epsilon^T C \epsilon = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x^2 + \nu\epsilon_y^2) + \frac{E}{1-\nu^2} (\nu\epsilon_x + \epsilon_y)^2 + 4G\epsilon_{xy}^2 + 4G\epsilon_{xz}^2 + 4G\epsilon_{yz}^2$$

$$= \epsilon^T C_1 \epsilon + \epsilon^T C_2 \epsilon$$

$$\text{avec } C_1 = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \text{ et } \epsilon_1 = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\text{et } C_2 = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \quad \epsilon_2 = \begin{Bmatrix} 2\epsilon_{xz} \\ 2\epsilon_{yz} \end{Bmatrix}$$

donc, l'énergie potentielle de déformation d'une plaque homogène et isotrope s'écrit comme la somme de deux termes, l'un dû à la flexion et l'autre au cisaillement.

$$U = U_1 + U_2, \text{ avec } U_1 = \frac{1}{2} \int_V \epsilon^T C_1 \epsilon \, dv \quad ; \quad U_2 = \frac{1}{2} \int_V \epsilon^T C_2 \epsilon \, dv$$

..... Ecriture de l'énergie potentielle de déformation en termes de déplacements

$$\vec{U} = \begin{Bmatrix} z \varphi(x, y) \\ -z \theta(x, y) \\ W(x, y) \end{Bmatrix} \quad \begin{array}{l} \cdot \varphi, \theta \text{ sont les rotations autour de } \\ \text{y et de x respectivement} \\ \cdot W \text{ est le déplacement suivant z} \end{array}$$

$$\text{donc } \varepsilon^T_1 = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, 2\varepsilon_{xy}] = \left[z \frac{\partial \varphi}{\partial x}, -z \frac{\partial \theta}{\partial y}, z \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \right]$$

$$\varepsilon^T_2 = [2\varepsilon_{xz}, 2\varepsilon_{yz}] = \left[\varphi + \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y} - \theta \right]$$

appelons

$$\varepsilon'_1 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{Bmatrix} ; \quad \varepsilon'_2 = \begin{Bmatrix} \varphi + \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\partial W}{\partial y} - \theta \end{Bmatrix}$$

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon'^T_1 z^2 c_1 \varepsilon'_1 dx dy dz$$

\varepsilon'_1 ne dépend que de x et de y.

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left[\varepsilon'^T_1 \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} c_1 z^2 dz \right) \varepsilon'_1 \right] dx dy = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left(\varepsilon'^T_1 c_1 \frac{h^3}{12} \varepsilon'_1 \right) dx dy$$

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left(\varepsilon'^T_1 c'1 \varepsilon'_1 \right) dx dy$$

$$c'1 = \frac{h^3}{12} c_1 = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

de même :
$$U_2 = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \epsilon^T C' \epsilon \, dx \, dy \quad ; \quad C' = \begin{bmatrix} K G h & 0 \\ 0 & K G h \end{bmatrix}$$

h = épaisseur de la plaque

K = coefficient de correction au cisaillement.

II.1.2. L'énergie due aux forces extérieures

Appelons Γ la frontière du domaine, θ_n et θ_t les rotations autour de la normale et de la tangente à la frontière respectivement ; Q_n , M_n et M_t désignent l'effort tranchant, le moment de torsion et celui de flexion respectivement.

- Le travail de forces de liaison s'écrit :
$$W_l = - \int_{\Gamma} Q_n W + M_n \theta_n - M_t \theta_t \, ds$$

s : abscisse curviligne.

- Le travail des forces appliquées s'écrit :
$$W_a = - \int_{\Sigma} q W \, d\Sigma$$

d'où
$$X = U - \int_{\Sigma} q W \, d\Sigma - \int_{\Gamma} (Q_n W + M_n \theta_n - M_t \theta_t) \, ds$$

avec :
$$U_1 = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left\{ D \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - 2\nu \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} d\Sigma$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} K G h \left[\left(\varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta \right)^2 \right] d\Sigma$$

En définitive, on a :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left\{ D \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 - 2(\nu-1) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \right] + K G h \left[\left(\varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\theta - \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} d\Sigma$$

II.2. CONVERGENCE

Dans ce paragraphe, nous démontrerons que des approximations linéaires du déplacement sur un élément carré permettent d'assurer la convergence de l'énergie potentielle totale vers la solution exacte quand les dimensions de l'élément tendent vers zéro.

Soient : \bar{w} , $\bar{\theta}$ et $\bar{\phi}$ champ cinématiquement admissible qui permet de minimiser l'énergie potentielle totale.

w , θ et ϕ la solution exacte.

Appelons $\alpha = \bar{w} - w$, $\beta = \bar{\theta} - \theta$, $\gamma = \bar{\phi} - \phi$

$$\Delta X = X(\bar{w}, \bar{\theta}, \bar{\phi}) - X(w, \theta, \phi)$$

$$\approx \delta X + \frac{1}{2!} \delta^2 X \text{ en considérant la variation jusqu'à 2ème ordre.}$$

δX qui représente la première variation, disparaît à cause des conditions aux limites, la deuxième variation s'écrit :

$$\delta^2 X = \int \left\{ D \left[\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 - 2(\nu-1) \frac{\partial \gamma}{\partial x} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 \right] \right. \\ \left. + K \nu h \left[\left(\gamma + \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + \left(\beta - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} d\epsilon$$

Majoration de ΔX :

Démontrons que $\Delta X \geq 0$

$$\Delta X = \int \left\{ D \left[\left(\gamma_{,x} - \beta_{,y} \right)^2 - 2(\nu-1) \gamma_{,x} \beta_{,y} + \frac{1-\nu}{2} \left(\gamma_{,y} - \beta_{,x} \right)^2 \right] \right. \\ \left. + K G h \left[\left(\gamma + \alpha_{,x} \right)^2 + \left(\beta - \alpha_{,y} \right)^2 \right] \right\} d\epsilon$$

On ne doit considérer que les deux premiers termes, les autres étant positifs, par conséquent l'intégrale de ces termes sur le domaine borné est positive.

Soient $A = \gamma, x$ et $B = \beta, y$

$$I = (A-B)^2 + 2(1-\nu) AB$$

$$AB = \frac{(A+B)^2 - (A-B)^2}{4}$$

$$I = (A-B)^2 + \frac{1-\nu}{2} [(A+B)^2 - (A-B)^2]$$

$$I = (A-B)^2 \left(\frac{1+\nu}{2} \right) + \left(\frac{1-\nu}{2} \right) (A+B)^2$$

comme $\nu < 1 \Rightarrow I \geq 0$

donc $\int_{\Sigma} (\gamma, x - \beta, y)^2 - 2(\nu-1) \gamma, x \beta, y \, d\epsilon \geq 0$

et $\Delta I \geq 0$

considérons $\int_{\Sigma} \gamma, x \beta, y \, d\epsilon$

on a, d'après l'inégalité de SCHWARZ :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} (\gamma, x \beta, y) \, d\epsilon &\leq \sqrt{\left(\int_{\Sigma} |\gamma, x|^2 \, d\epsilon \right) \times \left(\int_{\Sigma} |\beta, y|^2 \, d\epsilon \right)} \\ &= \sqrt{\|\gamma, x\|^2 \times \|\beta, y\|^2} \quad * \end{aligned}$$

donc : $\int_{\Sigma} \gamma, x \beta, y \, d\epsilon \leq \|\gamma, x\| \times \|\beta, y\|$

 * $\|f\|$: norme de la fonction f ($\|f\| = \sqrt{\int_{L2} |f|^2 \, d\epsilon}$)

Considérons à présent les termes tels que :

$$\int_{\Sigma} (\alpha, x - \beta, y)^2 d\Sigma$$

on a :

$$\int_{\Sigma} (\gamma, x - \beta, y)^2 d\Sigma = \|\gamma, x - \beta, y\|^2$$

et d'après l'inégalité triangulaire, on peut écrire :

$$\|\gamma, x - \beta, y\|^2 \leq (\|\gamma, x\| + \|\beta, y\|)^2$$

donc

$$\int_{\Sigma} (\gamma, x - \beta, y)^2 d\Sigma \leq (\|\gamma, x\| + \|\beta, y\|)^2$$

de la même manière :

$$\int_{\Sigma} (\gamma, y - \beta, x)^2 d\Sigma \leq (\|\gamma, y\| + \|\beta, x\|)^2$$

$$\int_{\Sigma} (\gamma + \alpha, x)^2 d\Sigma \leq (\|\gamma\| + \|\alpha, x\|)^2$$

$$\int_{\Sigma} (\beta - \alpha, y)^2 d\Sigma \leq (\|\beta\| + \|\alpha, y\|)^2$$

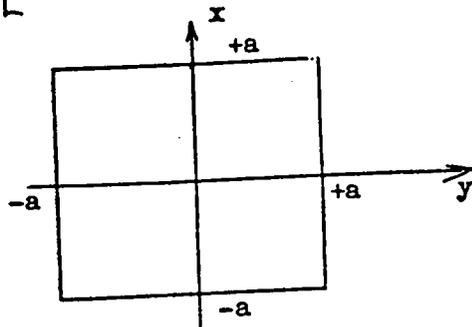
En définitive, on a :

$$0 \leq \Delta x \left\{ \left\{ \frac{D}{2} \left[(\|\gamma, x\| + \|\beta, y\|)^2 - D(\nu - 1) \|\gamma, x\| \|\beta, y\| + \frac{1-\nu}{4} D \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \int_{\Sigma} (\|\gamma, y\| + \|\beta, x\|)^2 + K \delta h \left[(\|\gamma\| + \|\alpha, x\|)^2 + (\|\beta\| + \|\alpha, y\|)^2 \right] \right\} \right\} d\Sigma$$

Développons W , θ et ϕ en séries de TAYLOR jusqu'à 2ème ordre au point a :

$$W = W(a, a) + (x-a) W'_x(a, a) + (y-a) W'_y(a, a)$$

$$+ \frac{1}{2!} \left[(x-a)^2 W''_{xx}(a, a) + 2(x-a)(y-a) W''_{xy}(a, a) + (y-a)^2 W''_{yy}(a, a) \right]$$



On suppose que W , θ et ϕ sont de classe C^2 .

On a : $|X - a| < 2a$

$|Y - a| < 2a$

W'' , θ'' et $\phi'' < f$ (elles sont de classe C^2 et le domaine est borné)

En choisissant : $\bar{W} = ax + by + c$

$\bar{\theta} = a_1x + b_1y + c_1$

$\bar{\phi} = a_2x + b_2y + c_2$

on a :

$$\alpha = \bar{W} - W = \frac{1}{2!} \left[(x-a)^2 W''_{xx}(a, a) + 2(x-a)(y-a) W''_{xy}(a, a) + (y-a)^2 W''_{yy}(a, a) \right]$$

$\exists c > 0$ t.q $\alpha \leq c a^2 \Rightarrow \alpha = O(a^2)$

En conclusion on a $\alpha = O(a^2)$

$\beta = O(a^2)$

$\sigma = O(a^2)$

$$\| \sigma, x \|^2 = \int_{\Sigma} | \sigma, x |^2 d\epsilon = \int_{\Sigma} | \sigma, x | | \gamma, x | d\epsilon = \int_{\Sigma} (\sigma, x \gamma)_{,x} dA - \int_{\Sigma} \sigma_{,xx} \gamma d\epsilon$$

d'autre part $\int_{\underline{\varepsilon}} (\gamma, x \gamma), x d\varepsilon = \int_{-a}^{+a} [(\gamma, x \gamma)(a, y) - (\gamma, x \gamma)(-a, y)] dy$

comme $\gamma = 0$ pour $y = \pm a$ ($\bar{w}, \bar{\theta}, \bar{\varphi}$ champ cinématiquement admissible)

alors $\int_{\underline{\varepsilon}} (\gamma, x \gamma), x d\varepsilon = 0$

d'où $\|\gamma, x\|^2 = - \int \gamma, x \gamma d\varepsilon$
 $\leq C a^2 \times M \times a^2$ M est une constante positive

$$\|\gamma, x\|^2 \leq K a^4 \Rightarrow \|\gamma, x\|^2 = O(a^4)$$

de la même manière : $\|\beta, x\|^2 = O(a^4)$

$$\|\alpha, x\|^2 = O(a^4)$$

et $\|\gamma, y\|^2 = O(a^4)$

$$\|\beta, y\|^2 = O(a^4)$$

$$\|\alpha, y\|^2 = O(a^4)$$

donc $0 \leq \Delta X \leq K' a^4$

quand $a \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta X \rightarrow 0$ et χ app $\rightarrow X$ exact

On vient de démontrer qu'une approximation linéaire du déplacement permet d'assurer la convergence vers la solution exacte quand les dimensions de l'élément tendent vers zéro.

II.3. ELEMENTS DE PLAQUES OBTENUS SUIVANT LA THEORIE DE MINDLIN

GREIMANN et LYNN [7] proposent trois éléments rectangulaires, formulés de façon à inclure l'effet du cisaillement transverse dans le comportement des plaques chargées transversalement ; ils ont comparé les résultats avec ceux obtenus par la solution analytique, pour une plaque carrée ($\frac{h}{a} = 0.1$), encastree sur ses quatre bords, chargée au centre et uniformément sur toute sa surface.

Ils ont tracé l'évolution de la flèche et des moments en fonction du nombre d'éléments (maillage 4×4 , 6×6 et 8×8).

Les trois éléments considérés sont les suivants :

1. Élément rectangulaire à 4 noeuds et 5 degrés de liberté par noeud.
2. Élément rectangulaire à 8 noeuds : 4 noeuds aux sommets ayant 3 degrés de liberté chacun et 4 aux milieux des côtés à 1 degré de liberté par noeud.
3. Élément rectangulaire à 4 noeuds et à 3 degrés de liberté par noeud.

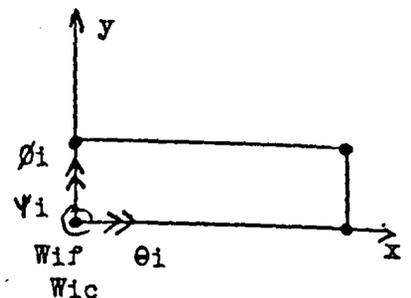
II.3.1. Élément 1

Les paramètres nodaux sont les suivants :

w_f : flèche due à la flexion

w_c : flèche due au cisaillement

$$\theta = \frac{\partial w_f}{\partial y} ; \quad \phi = \frac{\partial w_f}{\partial x} ; \quad \psi = \frac{\partial^2 w_f}{\partial x \partial y}$$



La flèche totale est donc la superposition des effets de la flexion et du cisaillement.

$$W = W_f + W_c$$

Choix des fonctions d'interpolation

La flèche due à la flexion peut être décrite par un polynôme de 4ème degré. On doit pouvoir évaluer 16 constantes, qui peuvent être déterminées sans difficultés, compte-tenu du nombre des noeuds de l'élément et des relations qui existent entre les degrés de liberté ; d'autre part, la condition de compatibilité nécessite une classe de continuité C1 pour la flèche ; cette condition ne pouvant être assurée en prenant des fonctions polynomiales ; cette difficulté peut être surmontée en fixant aux noeuds la dérivée croisée de la flèche. Cette démarche a été adoptée par BOGNER [17] pour obtenir des éléments de plaque de KIRCHHOFF conformes.

Le critère du mode rigide et de déformation constante est vérifié par le maintien des termes linéaires dans l'approximation de la flèche.

Les bases polynomiales choisies sont les suivantes :

$$W_f = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 \\ + a_{11}x^3y + a_{12}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{14}x^3y^2 + a_{15}x^2y^3 + a_{16}x^3y^3$$

$$W_c = b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy ; \theta = \frac{\partial W_f}{\partial y} ; \phi = \frac{\partial W_f}{\partial x} \text{ et } \psi = \frac{\partial^2 W_f}{\partial x \partial y}$$

Ces relations peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante

w_f	1	x	y	x^2	xy	y^2	x^3	x^2y	xy^2	y^3	x^3y	x^2y^2	xy^3	x^3y^2	x^2y^3	x^3y^3	0	0	0	0	
w_c	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	x	y	xy
θ	0	0	1	0	x	zy	0	x^2	2xy	$3y^2$	x^3	$2x^2y$	$3xy^2$	$2x^3y$	$3x^2y^2$	$3x^3y^2$	0	0	0	0	
ϕ	0	1	0	2x	y	0	$3x^2$	2xy	y^2	0	$3x^2y$	$2xy^2$	y^3	$3x^2y^2$	$2xy^3$	$3x^2y^3$	0	0	0	0	
ψ	0	0	0	0	1	0	0	2x	zy	0	$3x^2$	4xy	$3y^2$	$6x^2y$	$6xy^2$	$9x^2y^2$	0	0	0	0	

On remarque que le choix des paramètres nodaux ne respecte pas la théorie de MINDLIN ; en effet, les rotations sont les pentes de la flèche due au cisaillement. Or, dans la théorie de MINDLIN les rotations sont indépendantes, donc c'est une simple méthode de superposition des effets sur la flèche du cisaillement et de la flexion.

Il en résulte que par cette modélisation, on exclut les effets du cisaillement sur les moments, ceci est apparent dans les relations "contraintes" - "déformations". En effet, on a :

$$M_x = D \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - \nu \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \quad (1)$$

$$M_y = D \left(\nu \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \quad (2)$$

$$M_{xy} = \left(\frac{1-\nu}{2} \right) D \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \quad (3)$$

$$Q_x = K_G h \left(\phi + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \quad (4)$$

$$Q_y = K_G h \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \theta \right) \quad (5)$$

Les équations (1), (2) et (3) donnent les moments de flexion et de torsion en fonction des rotations ; on a :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial^2 W_f}{\partial x^2} ; \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial^2 W_f}{\partial y^2}$$

Ces dérivés sont donc des fonctions de la flèche due à la flexion uniquement, ceci explique le fait qu'on obtient des moments identiques à ceux donnés par la théorie classique des plaques minces.

En dépit de ces remarques, cette formulation fournit des résultats pour la flèche très proches de ceux donnés par la solution analytique, quant aux moments, ils sont identiques à ceux donnés par la théorie des plaques minces.

En conclusion, nous avons un élément rectangulaire à 4 noeuds et à 5 degrés de liberté par noeud ; il permet de vérifier les critères de convergence, la matrice de rigidité élémentaire est de dimension 20 x 20.

II.3.2. Elément 2

Il s'agit d'un élément rectangulaire à 8 noeuds construit suivant la théorie de MINDLIN, les bases polynomiales sont les suivantes :

$$W = A_1 + A_2 x + a_3 y + a_4 xy + a_5 x^2 + a_6 y^2 + a_7 x^2 y + a_8 xy^2$$

$$\theta = b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 xy$$

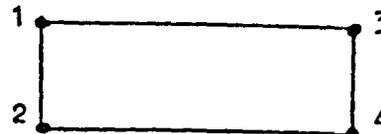
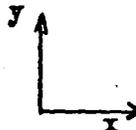
$$\phi = C_1 + C_2 x + C_3 y + C_4 xy$$

W, θ et ϕ sont indépendants.

• Justification du choix des bases polynomiales :

Considérons l'élément rectangulaire à 4 noeuds de la figure ci-contre

Sur le côté 1 - 3 ($y = 0$) :



$$W = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$$

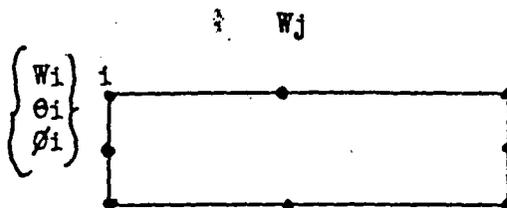
Etant un polynôme de 3ème degré, W ne peut pas être déterminée complètement par les paramètres nodaux des noeuds 1 et 3, donc la condition de la continuité de la flèche aux frontières des éléments n'est pas satisfaite, d'où l'idée d'introduire des noeuds supplémentaires aux milieux des côtés du rectangle et de prendre la flèche comme degré de liberté en ces noeuds.

$$\theta = b_1 + b_2 x$$

$$\phi = c_1 + c_2 x$$

Donc θ et ϕ peuvent être déterminées sans aucune ambiguïté par leurs valeurs aux noeuds 1 et 3. Par conséquent, le choix de base polynomiale de θ et de ϕ permet de satisfaire la condition de compatibilité inter-éléments et la flèche sera l'unique degré de liberté aux noeuds des milieux des côtés.

On obtient l'élément suivant :



En définitive, on a un élément conforme construit suivant la théorie de MINDLIN et ayant 16 degrés de liberté.

Ce type d'élément a été utilisé avec succès, les résultats obtenus sont très proches de la solution exacte aussi bien pour la flèche que pour les moments ; en particulier le couplage entre le cisaillement et la flexion est respecté, en plus, la matrice de rigidité élémentaire est de dimension 16×16 tandis qu'elle était de 20×20 dans la formulation précédente, la taille du problème est donc réduite. Néanmoins, il présente quelques difficultés de mise en oeuvre, ces difficultés sont dues essentiellement à la présence des noeuds aux milieux des côtés ayant un nombre de degrés de liberté différent de celui des noeuds de sommets ; l'introduction de cet élément dans un logiciel existant, nécessite en plus du sous programme qui calcule les matrices de rigidité élémentaires, un sous programme d'assemblage adapté à ce type d'élément, qui est plus complexe que les sous programmes d'assemblage classiques ; difficultés de programmation entraînant généralement un temps de calcul important.

II.3.3. Elément 3

Il s'agit d'un élément rectangulaire à 4 noeuds comportant 3 degrés de liberté par noeud. Les auteurs adoptent les mêmes bases polynomiales que dans le cas précédent et imposent certaines conditions sur les forces de cisaillement afin de réduire le nombre de constantes à évaluer, le champ de déplacement est donc entièrement déterminé par le déplacement transverse et les deux rotations autour de x et de y .

Les conditions imposées sont les suivantes :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0$$

d'après les relations "contraintes-déformations", on a :

$$Q_x = K c h \left(\vartheta + \frac{\partial W}{\partial x} \right)$$

$$Q_y = K c h \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \theta \right)$$

Les conditions (1) $\Rightarrow \vartheta + \frac{\partial W}{\partial x} = f(y)$

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \theta = g(x)$$

Ces conditions n'ont aucune signification physique ; les auteurs les ont imposées pour assurer la continuité de la flèche à l'interface des éléments.

On a donc :

$$a_5 = \frac{b_2}{2} ; a_6 = \frac{c_2}{2} ; a_7 = \frac{b_4}{2} ; a_8 = \frac{c_4}{2}$$

Le champ de déplacement devient :

$$W = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy + \frac{b_2}{2} x^2 + \frac{c_2}{2} y^2 + \frac{b_4}{2} x^2 y + \frac{c_4}{2} xy^2$$

$$\theta = b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 xy$$

$$\phi = C_1 + C_2 x + C_3 y + C_4 xy$$

sur le côté ($y = 0$) de l'élément rectangulaire à 4 noeuds, on a :

$$W = a_1 + a_2 x + \frac{b_2}{2} x^2$$

$$\theta = b_1 + b_2 x$$

$$\phi = C_1 + C_2 x$$

W , θ et ϕ peuvent être entièrement déterminés en fonction des paramètres nodaux des noeuds d'extrémité du côté ; par conséquent, les conditions de compatibilité inter-éléments sont satisfaites.

PRYOR, BARKER et FREDERICK proposent un élément rectangulaire à 4 noeuds et à 5 degrés de liberté par noeud ; ces auteurs décrivent séparément les rotations induites par la flexion et le cisaillement de la façon suivante :

Les rotations suivant la théorie de MINDLIN sont données par :

$$\theta = \theta^f + \theta^c$$

$$\phi = \phi^f + \phi^c$$

θ^f et ϕ^f sont les dérivées de la flèche par rapport à y et à x respectivement. θ^c et ϕ^c sont les rotations dues au cisaillement.

$$\theta_c = K \frac{Q_x}{Gh}$$

$$\phi_c = K \frac{Q_y}{Gh}$$

En utilisant la méthode du déplacement pour formuler le problème, on remarque que, pour satisfaire les critères de compatibilité inter-éléments, il faut que la flèche et sa dérivée première soient continues aux interfaces des éléments.

L'approximation du champ du déplacement est la suivante :

$$W = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + a_7 x^3 + a_8 x^2 y + a_9 xy^2 + a_{10} y^3 + a_{11} x^3 y + a_{12} xy^3$$

$$\theta_c = a_{13} + a_{14} x + a_{15} y + a_{16} xy$$

$$\phi_c = a_{17} + a_{18} x + a_{19} y + a_{20} xy$$

θ et ϕ sont des fonctions des dérivées premières de W , de θ_c et de ϕ_c .

Le choix de ces bases polynomiales permet d'assurer la continuité de la flèche, de θ_c et de ϕ_c aux interfaces des éléments ($x = \text{cte}$ et $y = \text{cte}$), tandis que la continuité de θ et de ϕ ne peut pas être assurée, ces rotations sont fixées aux noeuds.

La dimension de la matrice de rigidité élémentaire est de 20×20 , la taille du problème est importante. En dépit de cet inconvénient, cette formulation offre plus de possibilités pour l'application des conditions aux limites, en particulier pour les bords libres, on peut annuler l'effort tranchant en faisant disparaître θ_c ou ϕ_c , condition qui ne pouvait pas être satisfaite en utilisant d'autres formulations.

Les auteurs ont comparé les résultats obtenus en utilisant cet élément avec ceux de la théorie de REISSNER pour une plaque carrée simplement appuyée, chargée au centre et uniformément sur sa surface, pour un maillage (6 x 6) ils obtiennent un écart de l'ordre de 10 % avec la solution analytique pour différentes épaisseurs.

II.4. PRESENTATION DES ELEMENTS UTILISES

II.4.1. Choix de l'élément

Dans la plupart des problèmes bidimensionnels et à géométrie simple, les auteurs utilisent en général des éléments triangulaires ou rectangulaires. Les premiers ont l'avantage de permettre une large liberté dans la discrétisation, notamment dans les zones qui nécessitent un maillage très fin (concentration des contraintes), les derniers sont plus simples à mettre en oeuvre, notamment dans la génération automatique des éléments.

Dans le cas des plaques minces chargées transversalement, l'expérience montre que les éléments rectangulaires donnent des meilleurs résultats que les éléments triangulaires, surtout pour les éléments conformes ; CLOUGH et TOCHER [3] ont comparé la flèche au centre d'une plaque carrée, chargée au centre, en utilisant d'une part des éléments triangulaires et d'autre part des éléments rectangulaires, avec la solution analytique donnée par TIMOSHENKO. On remarque que pour un maillage (6 x 6), l'écart est de 0,5 % pour les éléments rectangulaires tandis qu'il est de 4 % pour les éléments triangulaires (tableaux 1 et 2).

maillage	W max x Pa ² / 10 ⁵ D	
	éléments triangulaires	Eléments rectangulaires
2 x 2	798	1108
4 x 4	1039	1147
6 x 6	1108	1154

Valeur exacte : 1160

Tab. 1 : Plaque carrée simplement appuyée sur ses 4 bords et chargée au centre.

Les auteurs ont comparé les résultats obtenus en utilisant cet élément avec ceux de la théorie de REISSNER pour une plaque carrée simplement appuyée, chargée au centre et uniformément sur sa surface, pour un maillage (6 x 6) ils obtiennent un écart de l'ordre de 10 % avec la solution analytique pour différentes épaisseurs.

II.4. PRESENTATION DES ELEMENTS UTILISES

II.4.1. Choix de l'élément

Dans la plupart des problèmes bidimensionnels et à géométrie simple, les auteurs utilisent en général des éléments triangulaires ou rectangulaires. Les premiers ont l'avantage de permettre une large liberté dans la discrétisation, notamment dans les zones qui nécessitent un maillage très fin (concentration des contraintes), les derniers sont plus simples à mettre en oeuvre, notamment dans la génération automatique des éléments.

Dans le cas des plaques minces chargées transversalement, l'expérience montre que les éléments rectangulaires donnent des meilleurs résultats que les éléments triangulaires, surtout pour les éléments conformes ; CLOUGH et TOCHER [3] ont comparé la flèche au centre d'une plaque carrée, chargée au centre, en utilisant d'une part des éléments triangulaires et d'autre part des éléments rectangulaires, avec la solution analytique donnée par TIMOSHENKO. On remarque que pour un maillage (6 x 6), l'écart est de 0,5 % pour les éléments rectangulaires tandis qu'il est de 4 % pour les éléments triangulaires (tableaux 1 et 2).

: $W_{max} \times Pa^2 / 10^5 D$:		
maillage	: éléments triangulaires	: Eléments rectangulaires
2 x 2	: 798	: 1108
4 x 4	: 1039	: 1147
6 x 6	: 1108	: 1154

Valeur exacte : 1160

Tab. 1 : Plaque carrée simplement appuyée sur ses 4 bords et chargée au centre.

W max x Pa ² / 10 ⁵ D		
maillage	éléments triangulaires	éléments rectangulaires
2 x 2	169	530
4 x 4	461	548
6 x 6	503	555

Valeur exacte : 560.

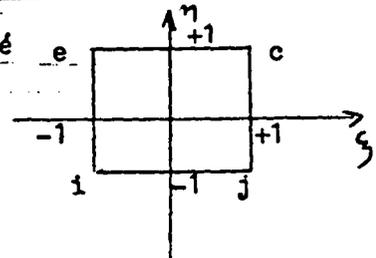
Tab. 2 : Plaque carrée encastree sur ses quatre bords et chargée au centre.

Etant donné que les éléments rectangulaires conformes donnent des résultats plus proches de la solution "exacte" que les éléments triangulaires, dans le cas des plaques minces, il est raisonnable de penser que cette constatation reste valable dans le cas des plaques "relativement épaisses". Par conséquent, nous utiliserons dans un premier temps des éléments rectangulaires à 4 noeuds et 3 degrés de liberté avec intégration normale. Ceci va nous permettre de comparer les résultats obtenus avec ceux de la littérature ; nous montrerons que ce type d'éléments donne de bons résultats quand l'épaisseur de la plaque n'est pas trop petite devant les autres dimensions. Nous utiliserons ensuite ce même élément mais avec intégration sélective et réduite, cette technique a été suggérée par ZIENKEWICZ [13], et montrerons que cet élément donne également des bons résultats même pour des plaques très minces, et ensuite nous présenterons la formulation pour un élément quadrilatère quelconque, qui, à notre connaissance, n'a pas encore été utilisé pour étudier ce problème. L'élément quadrilatère est d'un intérêt évident dans notre cas, étant donné qu'il regroupe les avantages de l'élément triangulaire et rectangulaire présenté plus haut.

II.4.2. Obtention de la matrice de rigidité élémentaire

Nous utilisons l'approche de déplacement pour obtenir la matrice de rigidité élémentaire, la méthode étant la même pour les trois éléments, la différence réside dans le choix du nombre des points d'intégration.

Nous utilisons donc l'élément de référence carré représenté dans un repère de référence (ξ, η) .



- Choix des fonctions d'interpolation

Nous avons démontré dans un chapitre précédent que les fonctions d'interpolation linéaires, définies sur un élément rectangulaire permettent d'assurer la convergence de l'énergie potentielle totale approximative vers l'énergie potentielle totale exacte quand les dimensions de l'élément tendent vers zéro.

On choisit la base polynomiale suivante :

$$W = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi \eta$$

$$\theta = \alpha_5 + \alpha_6 \xi + \alpha_7 \eta + \alpha_8 \xi \eta \quad (1)$$

$$\phi = \alpha_9 + \alpha_{10} \xi + \alpha_{11} \eta + \alpha_{12} \xi \eta$$

Le critère de compatibilité nécessite une classe de continuité C^1 , W , θ et ϕ doivent être continues aux frontières des éléments ; le choix des bases polynomiales permet de satisfaire ce critère. En effet, W , θ et ϕ peuvent être définies sans aucune ambiguïté aux frontières des éléments en fonction des noeuds d'extrémité. D'autre part, en gardant les termes linéaires dans le polynôme incomplet, le critère de déformation constante et du mode rigide se trouve vérifié.

Les 12 constantes α_i données par la relation (1) s'obtiennent en fonction des valeurs de W , θ et ϕ aux noeuds.

On obtient donc les quatre fonctions d'interpolation qui permettent de lier le déplacement en tout point de l'élément aux déplacements aux noeuds.

$$N\alpha = \frac{1}{4} (1 + \xi\alpha) (1 + \eta\eta\alpha) \quad \alpha = i, j, k, l$$

$$W = [N_i \ N_j \ N_k \ N_l] \begin{bmatrix} W_i \\ W_j \\ W_k \\ W_l \end{bmatrix} = \sum N\alpha W^e \quad \text{et } W^e = \begin{bmatrix} W_i \\ W_j \\ W_k \\ W_l \end{bmatrix}$$

$$\theta = [N_i \ N_j \ N_k \ N_l] \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ \theta_k \\ \theta_l \end{bmatrix} = \sum N\alpha \theta^e \quad \theta^e = \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ \theta_k \\ \theta_l \end{bmatrix}$$

$$\phi = [N_i \ N_j \ N_k \ N_l] \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \\ \phi_l \end{bmatrix} = \sum N\alpha \phi^e \quad \phi^e = \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \\ \phi_l \end{bmatrix}$$

Dans le chapitre précédent, nous avons établi l'expression de l'énergie potentielle de déformation sous la forme de :

$$U = U_1 + U_2$$

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\epsilon^T C^1 \epsilon) dx dy \quad \text{et } U_2 = \int_{\Sigma} \epsilon^T C^2 \epsilon dx dy$$

avec :

$$\epsilon^1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \text{et } \epsilon^2 = \begin{bmatrix} \phi + \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\partial W}{\partial y} - \theta \end{bmatrix}$$

$$\text{et } C'1 = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad C'2 = \begin{bmatrix} K G h & 0 \\ 0 & K G h \end{bmatrix}$$

compte-tenu des relations matricielles :

$$\phi = [N] \{\phi\}^e, \quad w = [N] \{w\}^e, \quad \theta = [N] \{\theta\}^e$$

on a :

$$\mathcal{E}'1 = \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] \{\phi\}^e \\ \left[-\frac{\partial N}{\partial y} \right] \{\theta\}^e \\ \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right] \{\phi\}^e - \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] \{\theta\}^e \end{array} \right\} \quad \text{et } \mathcal{E}'2 = \left\{ \begin{array}{l} [N] \{\phi\}^e + \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] \{w\}^e \\ \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right] \{w\}^e - [N] \{\theta\}^e \end{array} \right\}$$

appelons $\mathcal{E} = \begin{Bmatrix} \mathcal{E}'1 \\ \mathcal{E}'2 \end{Bmatrix}$; peut s'exprimer sous la forme :

$$\mathcal{E} = [B] \{q^e\} \quad \text{avec } q^e = \begin{Bmatrix} w^e \\ \theta^e \\ \phi^e \end{Bmatrix}$$

$$\text{et } [B] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] \\ [0] & \left[-\frac{\partial N}{\partial y} \right] & [0] \\ [0] & \left[-\frac{\partial N}{\partial x} \right] & \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right] \\ \hline \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] & [0] & [N] \\ \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right] & [-N] & [0] \end{bmatrix} \begin{array}{l} \uparrow \\ B_f \\ \downarrow \\ B_c \end{array}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 & 0 & 0 \\ \nu D & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & K_G h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_G h \end{bmatrix}$$

par conséquent la matrice de rigidité élémentaire s'écrit :

$$[K]^e = \iint_A [B]^T [C] [B] dx dy = \iint_A [B_F]^T [C'1] [B_F] dA + \iint_A [B_C] [C'2] [B_C] dx dy$$

A = l'aire de l'élément.

--- Calcul de la matrice de rigidité élémentaire

Les fonctions d'interpolation sont calculées sur l'élément de référence, il convient donc d'effectuer un changement de variables dans l'expression de $[K]^e$.

La matrice $[B]$ dépend des fonctions d'interpolation et de leurs dérivées par rapport à x et à y ; l'élément étant isoparamétrique, les termes qui définissent la transformation géométrique sont identiques aux fonctions d'interpolation.

$$X(\xi, \eta) = [N_i \ N_j \ N_k \ N_l] \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \\ x_l \end{Bmatrix}$$

$$Y(\xi, \eta) = [N_i \ N_j \ N_k \ N_l] \begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \\ y_k \\ y_l \end{Bmatrix}$$

On a donc les relations suivantes :

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial N^\alpha}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N^\alpha}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\alpha = i, j, k, l$$

$$\frac{\partial N^\alpha}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N^\alpha}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$\frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta}{\partial x}$, $\frac{\partial \xi}{\partial y}$ et $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ s'obtiennent en calculant l'inverse de la matrice

Jacobienne de la transformation qui est définie par :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

qui se calcule à partir de l'expression de la transformation géométrique, et son déterminant est un polynôme en ξ et η .

$$J = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -x_i+x_j+x_k-x_l + \eta(x_i-x_j+x_k-x_l) & -y_i+y_j+y_k-y_l + \eta(y_i-y_j+y_k-y_l) \\ -x_i-x_j+x_k+x_l + \xi(x_i-x_j+x_k-x_l) & -y_i-y_j+y_k+y_l + \xi(y_i-y_j+y_k-y_l) \end{bmatrix}$$

$$\det(J) = A + B \xi + C \eta$$

$$\text{avec } A = \frac{1}{8} \left[(y_l - y_j)(x_k - x_i) - (y_k - y_i)(x_l - x_j) \right]$$

$$B = \frac{1}{8} \left[(y_k - y_l)(x_j - x_i) - (y_j - y_i)(x_k - x_l) \right]$$

$$C = \frac{1}{8} \left[(y_l - y_i)(x_k - x_j) - (y_k - y_j)(x_l - x_i) \right]$$

$$[J]^{-1} = \frac{1}{4\det(J)} \begin{bmatrix} -y_i - y_j + y_k + y_l + \zeta(y_i - y_j + y_k - y_l) & y_i - y_j - y_k + y_l - (y_i - y_j + y_k - y_l) \\ x_i + x_j - x_k - x_l - \zeta(x_i - x_j + x_k - x_l) & -x_i + x_j + x_k - x_l + \gamma(x_i - x_j + x_k - x_l) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{1}{4\det(J)} \left[-y_i - y_j + y_k + y_l + \zeta(y_i - y_j + y_k - y_l) \right]$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{1}{4\det(J)} \left[y_i - y_j - y_k + y_l - \gamma(y_i - y_j + y_k - y_l) \right]$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{1}{4\det(J)} \left[x_i + x_j - x_k - x_l - \zeta(x_i - x_j + x_k - x_l) \right]$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y} = \frac{1}{4\det(J)} \left[-x_i + x_j + x_k - x_l + \gamma(x_i - x_j + x_k - x_l) \right]$$

En définitive, on a :

$$[K]^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [C] [B] \det J \, d\zeta \, d\gamma$$

II.4.3. Cas de l'élément rectangulaire

Nous avons calculé la matrice $[K]^e$ numériquement en utilisant la méthode de GAUSS.

Dans le cas de l'élément rectangulaire, la matrice Jacobienne de la transformation est constante.

$$J = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_j - x_i & 0 \\ 0 & y_l - y_i \end{bmatrix} \quad \text{et } \det(J) = \frac{(x_j - x_i)(y_l - y_i)}{4}$$

$$\text{et } [J]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{x_j - x_i} & 0 \\ 0 & \frac{2}{y_l - y_i} \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{2}{x_j - x_i} ; \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0 ; \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 ; \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{2}{y_l - y_i}$$

donc :

$$\frac{\partial N\alpha}{\partial x} = \frac{\partial N\alpha}{\partial \xi} \times \frac{2}{x_j - x_i} ; \frac{\partial N\alpha}{\partial y} = \frac{\partial N\alpha}{\partial \eta} \times \frac{2}{y_l - y_i}$$

$$\text{et } [K]^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B(\xi, \eta)]^T [C] [B(\xi, \eta)] \frac{(x_j - x_i)(y_l - y_i)}{4} d\xi d\eta$$

intégration numérique de $[K]^{(e)}$:

- intégration normale
.....

appelons $[f]$ la fonction à intégrer :

$$[f(\xi, \eta)] = [B]^T [C] [B] \frac{(x_j - x_i)(y_l - y_i)}{4}$$

La matrice Jacobienne de la transformation étant constante, $[f(\xi, \eta)]$ est donc constituée par des polynômes dont on connaît le degré maximal des monômes que comportent ces polynômes. On peut par conséquent

calculer exactement $[K]^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta$

en utilisant la méthode GAUSS à deux dimensions sur un élément carré unitaire.

Cette méthode permet en utilisant $P \times S$ points appelés points de GAUSS, d'intégrer exactement tous les polynômes d'ordre $2P - 1$ en ξ et $2S - 1$ en η .

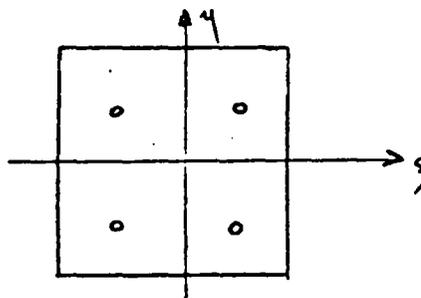
Dans notre cas, la matrice $[f(\xi, \eta)]$ est constituée des polynômes tels que :

$$\frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \xi}, \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 N_{\alpha}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 N_{\alpha}}{\partial \eta^2} \quad \text{avec } \xi = \eta \text{ et } \alpha = i, j, k, l$$

Les fonctions d'interpolation établies précédemment montrent que le degré maximal de ces polynômes est de 3. Par conséquent, 4 points de GAUSS (2×2) permettent de calculer exactement tous les polynômes que comporte $[f(\xi, \eta)]$. Les points sont représentés sur la figure

$$\xi_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \eta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\xi_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \eta_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$



$W = 1$, W étant le poids de GAUSS.

Nous avons calculé sur un exemple, les termes de la matrice de rigidité élémentaire par intégration numérique suivant la méthode exposée ci-dessus, et comparé les résultats en effectuant des intégrations directes pour tous les termes, le résultat est sensiblement identique.

Donc, nous avons l'assurance que les points de GAUSS choisis plus haut permettent d'obtenir exactement tous les termes de la matrice de rigidité élémentaire calculés en quatre points de GAUSS.

II.4.4. Elément rectangulaire avec intégration sélective

L'élément rectangulaire avec intégration normale donne des résultats satisfaisants dans le cas où l'épaisseur de la plaque n'est pas trop faible devant ses autres dimensions ($\geq 15 \%$). Dans le cas contraire, les résultats obtenus sont plus faibles que la solution exacte ; ceci met en évidence le fait que le modèle qui décrit le comportement des plaques relativement épaisses n'est plus valable quand l'épaisseur tend vers zéro.

La raison essentielle à cette discontinuité est apparente à partir de l'expression du déplacement établie dans le premier chapitre.

$$\theta = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{K}{Gh} Qx$$

quand $h \rightarrow 0$, $\frac{\partial W}{\partial x}$ devient négligeable devant $\frac{K Q x}{G h}$; par conséquent, l'effet du cisaillement, qui est négligeable dans la théorie des plaques minces, devient prépondérant devant de la flexion.

ZIENKEWICZ [12] a expliqué ce phénomène à partir de l'expression de l'énergie potentielle totale qui peut s'écrire en utilisant des variables non dimensionnelles sous la forme suivante :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \bar{\epsilon}'_1 \bar{c}'_1 D \bar{\epsilon}'_1 d\bar{x} d\bar{y} + \frac{L^2}{2} \int_{\Sigma} \bar{\epsilon}'_2{}^T c'_2 \bar{\epsilon}'_2 d\bar{x} d\bar{y}$$

$$\text{avec : } \bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{y} = \frac{y}{L}, \bar{c}'_1 = \frac{C'1}{D}, \bar{\epsilon}'_1 = L \epsilon'_1, \bar{\epsilon}'_2 = \epsilon'_2$$

L étant une longueur de référence et $C'2 = K h I$ (I = matrice d'identité 2×2)

En posant $\alpha = 6 K(1-\nu)\left(\frac{L}{h}\right)^2$, U peut encore s'écrire de la façon suivante :

$$U = \frac{D}{2} \left\{ \int_{\Sigma} \bar{\epsilon}'_1{}^T \bar{c}'_1 \bar{\epsilon}_1 d\bar{x} d\bar{y} + \alpha \int_{\Sigma} \bar{\epsilon}'_2{}^T \bar{\epsilon}'_2 d\bar{x} d\bar{y} \right\}$$

Le champ cinématiquement admissible qui minimise l'énergie potentielle totale est la solution du système :

$$[K]\{4\} = \left\{ [K]_F + \alpha [K]_C \right\} \{\vec{U}\} = \vec{F}$$

Si $h \ll L$, $\alpha \rightarrow \infty$ et $\vec{U} \rightarrow 0$, par conséquent si $[K]_C$ n'est pas singulière le comportement de l'élément est uniquement régi par le cisaillement, ce qui explique l'inexactitude des résultats quand l'épaisseur de la plaque devient très faible.

Cette difficulté peut être surmontée en utilisant la technique d'intégration réduite préconisée par [5], elle consiste à diminuer la valeur de la rigidité due au cisaillement, en effectuant une intégration numérique en 1×1 point de GAUSS, ce qui revient à négliger certains modes de déplacement tout en conservant la convergence de la solution.

Nous avons utilisé cette technique pour un élément rectangulaire, en calculant la matrice de rigidité à la flexion en 2×2 points de GAUSS et celle du cisaillement en un seul point situé au centre de l'élément, les résultats obtenus confirment la performance de cet élément dans la plupart des cas traités.

II.4.5. Elément quadrilatère général

Dans le cas d'un quadrilatère quelconque, le déterminant de la Jacobienne de la transformation est polynôme de premier degré en ξ et η ; les fonctions f comportent par conséquent des fractions rationnelles et les méthodes d'intégration numérique de la matrice de rigidité élémentaire ne sont plus applicables.

Il n'existe pas un nombre de points de GAUSS qui permette de calculer exactement la matrice de rigidité élémentaire. On peut néanmoins trouver le nombre de points minimal qui permet de garantir la convergence ; ZIENKEWICZ [9] suggère d'adopter le nombre qui permet d'intégrer exactement le volume de l'élément, ce qui revient à chercher le nombre de points qui permet de calculer exactement le déterminant de la Jacobienne ; ceci correspond, dans notre cas, à une intégration en (1 x 1) point.

Ce choix permet effectivement d'assurer la convergence de la méthode, mais nécessite de réaliser un maillage comportant un nombre d'éléments très important pour obtenir une solution acceptable.

Les fonctions f comportent des termes tels que :

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x} \cdot \frac{\partial N}{\partial y} \right) \det J \, d\xi \, d\eta = \left(\frac{\partial N}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial N}{\partial \eta} \right) \frac{d\xi \, d\eta}{\det J}$$

$\frac{\partial N}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial N}{\partial \eta}$ sont des polynômes de degrés supérieurs à celui de $\det J$, par conséquent les termes qui constituent f se réduisent à des polynômes plus des termes en $\frac{cte}{\det J}$; il suffit donc de déterminer le nombre de points qui permette

d'intégrer exactement $\int \frac{d\xi \, d\eta}{\det J}$; ceci est impossible compte-tenu de l'influen-

ce sur la précision de l'intégration de la taille et de la déformation de l'élément*.

* Déformation de l'élément dans le sens de son "éloignement" d'un parallélogramme

Dans le but d'un choix optimal, nous avons évalué $\int \frac{d\xi d\eta}{\det J}$ en effectuant une intégration en (1 x 1), (2 x 2) et (3 x 3) points de GAUSS et comparé les résultats obtenus avec la solution exacte, et ceci pour différentes configurations de l'élément.

Considérons l'élément quadrilatère de la figure ci-contre.

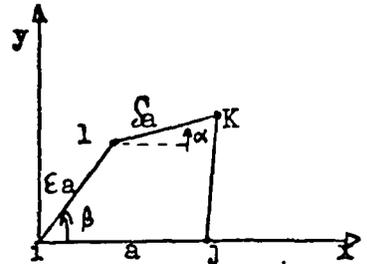
On a :

$$x_i = y_i = 0$$

$$x_j = a ; y_j = 0$$

$$x_k = \xi a \cos \beta + \zeta a \cos \alpha ; y_k = \xi a \sin \beta + \zeta a \sin \alpha$$

$$x_l = \xi a \cos \beta ; y_l = \xi a \sin \beta$$



soit :

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi d\eta}{\det J} \quad \text{avec } \det J = A + B\xi + C\eta$$

la solution exacte est donnée par :

$$I = \frac{1}{B} \text{Log} \left[\frac{(A+B+C)(A+B-C)}{(A-B+C)(A-B-C)} \right] + \frac{1}{C} \text{Log} \left[\frac{(A+B+C)(A-B+C)}{(A+B-C)(A-B-C)} \right] - \frac{A}{BC} \text{Log} \left[\frac{(A+B-C)(A-B+C)}{(A+B+C)(A-B-C)} \right]$$

où A, B et C sont des fonctions de coordonnées des noeuds définies plus haut.

- Coordonnées et poids de GAUSS
.....

Les coordonnées et les poids de GAUSS correspondants sont ceux qui permettent d'intégrer exactement les polynômes de degré maximum 1, 3 et 5 respectivement :

. 1 x 1

$$\xi_1 = \eta_1 = 0$$

$$w_1 = 0$$

. 2 x 2

$$\xi_1 = \eta_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$w_1 = 2$$

. 3 x 3

$$\xi_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \pm \sqrt{\frac{3}{5}} \end{Bmatrix} \quad \eta_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \pm \sqrt{\frac{3}{5}} \end{Bmatrix} \quad \begin{array}{l} w_1 = 8/9 \\ w_2 = w_3 = 5/9 \end{array}$$

Les résultats obtenus sont présentés dans les tableaux pages suivantes.

$\cdot \varepsilon = 1, \beta = \frac{\pi}{2}, \alpha = 0$

$\frac{I_a^2}{\delta}$	Exact	(1 x 1)	(2 x 2)	(3 x 3)
2	0.6931472	0.66667	0.6923077	0.6931213
3	0.5493	0.50	0.5454545	0.54902
5	0.402356	0.3333	0.3913043	0.40067
10	0.2558428	0.1818182	0.2340426	0.2496233

Tableau 2a

$\cdot \varepsilon = 0.75, \beta = \frac{\pi}{2}, \alpha = 0$



$\frac{I_a^2}{\delta}$	Exact	(1 x 1)	(2 x 2)	(3 x 3)
2	0.9241962	0.8888	0.9230769	0.9241617
3	0.7324082	0.66667	0.7272727	0.7320267
5	0.5364793	0.4444	0.5217391	0.5342267
10	0.3411237	0.121212	0.310567	0.3328311

Tableau 2b

$\epsilon = 0.50, \beta = \frac{\pi}{2}, \alpha = 0$

$\frac{I_a^2}{16} \backslash \delta$	Exact	(1 x 1)	(2 x 2)	(3 x 3)
2	1.3862944	1.3333	1.3846154	1.3862426
3	1.0986123	1	1.0909	1.09804
5	0.804719	0.66667	0.7826087	0.80134
10	0.5116856	0.36364	0.468085	0.4992460

Tableau 2c

$\epsilon = 0.25, \beta = \frac{\pi}{2}, \alpha = 0$



$\frac{I_a^2}{16} \backslash \delta$	Exact	(1 x 1)	(2 x 2)	(3 x 3)
2	2.7725887	2.66667	2.7692308	2.772485
3	2.1972246	2	2.1818182	2.19608
5	1.6094379	1.3333	1.5652174	1.60268
10	1.0233712	0.72727	0.9361702	0.99849

Tableau 2d

Le tableau 2e présente les écarts entre les valeurs obtenues pour différentes valeurs de δ .

$\frac{\Delta I}{I} \%$	(1 x 1)	(2 x 2)	(3 x 3)
2	3.8	0.12	0.003
3	8.9	0.7	0.05
5	17.16	2.7	0.419
10	28.93	8.52	2.43

Tableau 2e.

Ces résultats montrent que l'intégration de I en (3 x 3) points donne la solution la plus proche de la solution exacte. D'autre part, ils confirment le fait que l'écart est d'autant plus important que l'élément est "déformé".

A la lumière de ces résultats, nous avons calculé la matrice de rigidité élémentaire pour un élément quadrilatère quelconque en (3 x 3) points de GAUSS, pour la matrice de flexion et en (1 x 1) point pour les termes de cisaillements.

Les résultats sont identiques à ceux obtenus par l'élément rectangulaire avec intégration réduite.

II.5. PLAQUE REPOSANT SUR LE SOL

Le comportement d'un massif reposant sur le sol est influencé dans une large mesure par la déformation de ce dernier. La distribution de la pression de contact dépend des rigidités relatives de la plaque et du sol ainsi que de leur interaction.

La méthode des éléments finis est particulièrement adaptée à ce type de problèmes, la prise en compte du sol dans un problème statique consiste à exprimer l'énergie potentielle de déformation de l'ensemble comme la somme de l'énergie emmagasinée dans le massif et dans le sol.

$$U = U_M + U_S \Rightarrow [K] = [K]_M + [K]_S$$

U_M étant l'énergie potentielle de déformation de la plaque et U_S celle du sol ; $[K]_M$ et $[K]_S$ désignent les matrices de rigidité.

Trois approches différentes sont généralement utilisées pour la modélisation du sol.

II.5.1. Hypothèse des matrices cohérentes [1]

Elle consiste à utiliser la démarche classique suivie dans la modélisation de la plaque. Dans ce cas, il faut connaître les constantes du sol et adopter une loi de comportement, la matrice de rigidité élémentaire s'écrit :

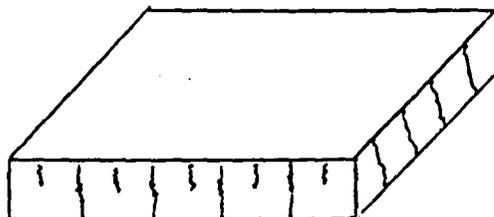
$$[K]_S = \iint_{S^e} [B]^T [C]_S [B] dS$$

$[C]_S$ étant la matrice d'élasticité d'un élément du sol.

Mis à part le coût important d'une telle modélisation (le temps de calcul est multiplié par 2), son utilisation est dangereuse dans la mesure où la rigidité du sol est beaucoup plus faible que celle du massif : en effet la matrice de rigidité globale est la somme de deux matrices, la rigidité du sol sera négligée devant celle de la plaque.

II.5.2. Hypothèse des rigidités concentrées. [11] .

Cette méthode consiste à assimiler le sol à une série de ressorts accolés, exerçant des réactions en tout point de la plaque.



La réaction en tout point d'un élément du sol s'écrit :

$$q = [E]_S \{u\} dS \quad dS \text{ étant l'élément de surface}$$

et

$$U_S = \frac{1}{2} \int_S \{u\}^T [E]_S \{u\} dS$$

D'autre part, le déplacement à l'intérieur de l'élément est lié aux déplacements aux noeuds par l'intermédiaire des fonctions d'interpolation $[N]$

$$\{u\} = [N] \{u\}^e \quad , \{u\}^e \text{ étant le vecteur déplacement aux noeuds}$$

$$U_S = \frac{1}{2} \int_{S^e} \{u\}^T e [N]^T [E]_S [N] \{u\}^e dS$$

$$\text{et } [K]_S = [N]^T [E]_S [N]$$

où E_S est une matrice diagonale comportant les coefficients de réaction du sol.

$$E_S = \begin{bmatrix} K_W & 0 & 0 \\ 0 & K\theta & 0 \\ 0 & 0 & K\phi \end{bmatrix}$$

II.5.3. Hypothèse des rigidités concentrées aux noeuds

Cette méthode est de loin la plus simple à mettre en oeuvre. Elle consiste à réduire l'influence d'un élément de sol qui était assimilé auparavant à une série de ressorts, à un seul ressort agissant au noeud.

La matrice de rigidité globale du sol est alors diagonale, chaque terme de la diagonale comporte la rigidité équivalente de l'élément du sol considéré.

Il est évident qu'en augmentant indéfiniment le nombre d'éléments de plaque, on se rapproche des résultats obtenus en admettant l'hypothèse des rigidités concentrées.

II.6. CONCLUSION

Le logiciel utilisé pour les applications nous a été fourni par le Laboratoire Central des Ponts et Chaussées ; ce logiciel a été conçu pour le calcul des plaques minces, en utilisant des éléments "non conformes" et implanté sur un ordinateur IRIS 80. Nous l'avons adapté à notre cas en introduisant les sous-programmes nécessaires : il s'agit des sous-programmes de calcul des différentes matrices de rigidité, des efforts et des moments.

Ce logiciel est, à l'état actuel, opérationnel sur un MINI 6 92 à l'Ecole des Mines de DOUAI.

Nous avons traité quelques exemples qui nous ont permis de comparer nos résultats avec ceux donnés par la solution analytique, ainsi que par l'élément de BARKER et FREDERIK [12].

Les résultats (présentés par les tableaux et les figures en annexe) montrent que l'élément rectangulaire à 4 noeuds et 3 degrés de liberté par noeud avec intégration réduite (E F2) donne, dans tous les cas considérés des résultats en parfait accord avec la solution analytique, aussi bien pour les plaques minces que pour les plaques épaisses ; l'écart entre les deux solutions est de 1 % pour les épaisseurs faibles ($\frac{h}{a} < 0.15$), il passe à 3 % pour les autres épaisseurs, ceci dans le cas d'une plaque simplement appuyée sur ses quatre bords et chargée au centre (fig. B1 , tab.

A1) ; dans le cas d'une charge uniformément répartie sur toute la surface, l'écart est de 0.1 % pour toutes les épaisseurs. Pour une plaque simplement appuyée sur deux bords opposés et encadrée aux autres bords, l'écart entre les deux solutions est de 5 % en moyenne pour toutes les épaisseurs.

Le cas d'une plaque simplement appuyée sur ses quatre bords et reposant sur des appuis élastiques a été traité en affectant des rigidités équivalentes aux noeuds.

Les résultats sont présentés par les tab. A4 et A5 ils montrent que pour un maillage 6×6 , l'écart entre les deux solutions est de 2 % en moyenne.

L'élément rectangulaire à 4 noeuds et 3 degrés de liberté par noeud avec intégration normale (E F1), donne dans tous les cas considérés des résultats qui présentent un écart de 60 % avec la solution analytique pour les épaisseurs faibles en considérant un maillage 6×6 ; ce résultat s'améliore sensiblement en augmentant le nombre d'éléments comme le montre la fig. B4 : l'écart passe à 10 % pour un maillage 10×10 .

L'élément quadrilatère général donne des résultats identiques à ceux de l'élément rectangulaire avec intégration réduite.

A la lumière de ces résultats, nous pouvons annoncer les conclusions suivantes :

- l'élément rectangulaire avec intégration réduite donne des excellents résultats dans tous les cas ; on note également que les résultats sont identiques à ceux donnés par l'élément [12] qui comporte cinq degrés de liberté par noeud.
- les résultats obtenus en utilisant l'élément rectangulaire avec intégration normale permettent de confirmer le fait que cet élément présente des défaillances pour les épaisseurs faibles, nous constatons que, même pour des épaisseurs élevées, il nécessite un nombre d'éléments important pour atteindre la convergence.

CHAPITRE III

Ce chapitre a pour but la détermination des erreurs introduites par le passage du modèle tridimensionnel au modèle bidimensionnel.

Ce problème a été traité en utilisant la méthode proposée par M. DESTUYNDER [4] pour les plaques minces.

- Notations :

- $2\xi = H$ Epaisseur de la plaque
- ω, S_0 Surface moyenne et sa frontière
- Γ^+ et Γ^- Les surfaces supérieures et inférieures du domaine
- g^+ et g^- Charges surfaciques appliquées sur les faces supérieures et inférieures
- Ω Domaine de la plaque

Les lettres grecques désignent les indices des composantes dans le plan moyen ($x - y$).

$\partial_\alpha f$ désigne la dérivée de f par rapport à α ($\alpha = x, y$).

III.1. PRINCIPE D'HELLINGER - REISSNER POUR LES PLAQUES EN FLEXION

On considère les espaces de fonctions Σ et V définis de la façon suivante :

$$\Sigma = \left\{ Z = (z_{ij}) \in L^2(\Omega), z_{ij} = z_{ji} \right\}$$

$$V = \left\{ v = (v_i) \in H^1(\Omega), v_i = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \right\}$$

a et B deux formes bilinéaires et F une forme linéaire définis dans Σ et V de la façon suivante :

$$a(\nabla, Z) = \int_{\Omega} \left(\frac{1+\nu}{E} \nabla_{ij} - \frac{\nu}{E} \nabla_{pp} \delta_{ij} \right) Z_{ij}$$

$$B(Z, u) = - \int_{\Omega} Z_{ij} \partial_i u_j$$

$$F(v) = - \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} g^{\pm} v_3$$

$$(\nabla, Z) \in \Sigma \text{ et } (u, v) \in V$$

si (∇, u) sont la solution du problème, ils doivent vérifier le système variationnel suivant :

$$\forall Z \in \Sigma \quad a(\nabla, Z) + B(Z, u) = 0$$

$$\forall v \in V \quad B(\nabla, v) = F(v) \tag{I}$$

La première relation traduit la condition subsidiaire $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i)$ ainsi que la loi de comportement du matériau ; la seconde exprime le principe des travaux virtuels. Par conséquent, le système (I) est le modèle mathématique décrivant les problèmes d'élasticité linéaire en trois dimensions.

Nous allons retrouver le modèle de REISSNER à partir du système (I) en choisissant des approximations appropriées pour les inconnus du problème. La géométrie particulière du solide nous amène à choisir l'espace d'approximation suivant :

$$\Sigma^a = \left\{ \begin{aligned} z'_{\alpha\beta} &= z \times z_{\alpha\beta}(x,y), \quad z'_{\alpha z} = z_{\alpha z}(x,y), \quad z'_{zz} = 0, \quad z_{\alpha\beta}, \\ z_{\alpha z} &\in L^2(\omega), \quad \alpha, \beta = x, y \end{aligned} \right.$$

$$V^a = \left\{ \begin{aligned} v'_{\alpha} &= z \times v_{\alpha}(x,y), \quad v'_3 = v_3(x,y), \quad v_{\alpha}, v_3 \in H_0^1(\omega) \end{aligned} \right.$$

l'équation $a(\sigma, z) + B(z, u) = 0$ s'écrit si σ' et u' appartiennent à Σ^a et à V^a .

$$\int_{\omega} \left(\frac{1+\nu}{E} \nabla_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E} \nabla_{\mu\mu} \delta_{\alpha\beta} \right) z_{\alpha\beta} \left(\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} z^2 dz \right) + 2 \frac{(1+\nu)}{E} \nabla_{\alpha z} z_{\alpha} \left(\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dz \right) - \int_{\omega} z_{\alpha\beta} \partial_{\alpha} u_{\beta} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} z^3 dz - \int_{\omega} z_{\alpha z} (\partial_{\alpha} u_3 + u_{\alpha}) \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dz = 0$$

$$2 \frac{\varepsilon^3}{3} \int_{\omega} \left(\frac{1+\nu}{E} \nabla_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E} \nabla_{\mu\mu} \delta_{\alpha\beta} \right) z_{\alpha\beta} + 2 \varepsilon \int_{\omega} 2 \frac{(1+\nu)}{E} \nabla_{\alpha z} z_{\alpha} - 2 \frac{\varepsilon^3}{3} \int_{\omega} z_{\alpha\beta} \partial_{\alpha} u_{\beta} - 2 \varepsilon \int_{\omega} z_{\alpha z} (\partial_{\alpha} u_3 + u_{\alpha}) = 0$$

En identifiant les termes de même puissance en ε on obtient :

$$\frac{\varepsilon^2}{3} \int_{\omega} \left(\frac{1+\nu}{E} \nabla_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E} \nabla_{\mu\mu} \delta_{\alpha\beta} \right) z_{\alpha\beta} - \frac{\varepsilon^2}{3} \int_{\omega} z_{\alpha\beta} \partial_{\alpha} u_{\beta} = 0 \quad (1)$$

$$\int_{\omega} \frac{2(1+\nu)}{E} \nabla_{\alpha} z \cdot z_{\alpha z} - \int_{\omega} (\partial_{\alpha} u_3 + u_{\alpha}) z_{\alpha z} = 0 \quad (2)$$

(II) De la même manière, l'équation $B(\nabla, v) = F(v)$ nous donne :

$$\frac{\varepsilon^2}{3} \int_{\omega} \nabla_{\alpha\beta} \partial_{\alpha} v_{\beta} + \int_{\omega} \nabla_{\alpha} z \cdot = 0 \quad (3)$$

$$\int_{\omega} \nabla_{\alpha z} \partial_{\alpha} v_3 = \varepsilon^{-1} \int_{\omega} \frac{\varepsilon^+ + \varepsilon^-}{2} v_3 \quad (4) \quad \alpha, \beta = x, y$$

∇ et u sont l'unique solution du système (II).

$$(1) \Rightarrow \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E} \nabla_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E} \nabla_{\mu\mu} \delta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\partial_{\alpha} u_{\beta} + \partial_{\beta} u_{\alpha})$$

où :

$$\nabla_{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ (1-\nu) \varepsilon_{\alpha\beta}(u) + \nu \varepsilon_{\mu\mu}(u) \delta_{\alpha\beta} \right\}$$

$$(2) \Rightarrow \nabla_{\alpha z} = \frac{E}{2(1+\nu)} (\partial_{\alpha} u_3 + u_{\alpha})$$

En reportant (1) et (2) dans (3) et (4) on obtient le modèle de NAGHDI et REISSNER pour les plaques en flexion :

$$\frac{\varepsilon^2}{3} \int_{\omega} \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ (1-\nu) \varepsilon_{\alpha\beta}(u) + \nu \varepsilon_{\mu\mu} \delta_{\alpha\beta} \right\} \varepsilon_{\alpha\beta}(v) + \int_{\omega} \frac{E}{2(1+\nu)} (\partial_{\alpha} u_3 + u_{\alpha}) v_{\alpha} = 0$$

$$\int_{\omega} \frac{E}{2(1+\nu)} (\partial_{\alpha} u_3 + u_{\alpha}) \partial_{\alpha} v_3 = \varepsilon^{-1} \int_{\omega} \frac{\varepsilon^+ + \varepsilon^-}{2} v_3$$

A présent, nous allons démontrer que la solution du problème tridimensionnel décrite par le modèle de REISSNER peut être approchée en utilisant l'approximation qui découle de la théorie de HENCHY-MINDLIN ; nous retrouvons dans un premier temps l'équation générale donnant la flèche déjà établie dans le premier chapitre, et ensuite nous donnons les estimations d'erreurs.

On définit pour des éléments arbitraires ∇, z, u les quantités suivantes :

$$a_0(\nabla, z) = \int_{\omega} \frac{2(1+\nu)}{E} \nabla_{\alpha z} z_{\alpha z}$$

$$a_2(\nabla, z) = \frac{1}{3} \int_{\omega} \left(\frac{1+\nu}{E} \nabla_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E} \nabla_{\mu\mu} \delta_{\alpha\beta} \right) z_{\alpha\beta}$$

$$b_0(z, u) = - \int_{\omega} (\partial_{\alpha} u_3 + u_{\alpha}) z_{\alpha z}$$

$$b_2(z, u) = - \frac{1}{3} \int_{\omega} z_{\alpha\beta} \partial_{\alpha} u_{\beta}$$

$$F_{-1}(u) = - \int_{\omega} \frac{g^+ + g^- u}{2} \frac{u}{3}$$

Le système (II) que doivent vérifier $\nabla_{\alpha\beta}, \nabla_{\alpha z}$ et u s'écrit :

$$(III) \quad a_0(\nabla, z) + b_0(z, u) + \varepsilon^2 \left\{ a_2(\nabla, z) + b_2(z, u) \right\} = 0 \quad (1)$$

$$b_0(\nabla, u) + \varepsilon^2 b_2(\nabla, u) = \varepsilon^{-1} F_{-1}(u) \quad (2)$$

On prend un développement de la solution du système (III) sous la forme :

$$\nabla = \varepsilon^{-3} \nabla^{-3} + \varepsilon^{-1} \nabla^{-1} + \dots$$

$$u = \varepsilon^{-3} u^{-3} + \varepsilon^{-1} u^{-1} + \dots$$

$$\int_{\omega} \frac{2(1+\nu)}{E} \left[\varepsilon^{-3} \nabla_{\alpha z}^{-3} + \varepsilon^{-1} \nabla_{\alpha z}^{-1} \right] z_{\alpha z} - \int_{\omega} (\partial_{\alpha} u_3^{-3} \varepsilon^{-3} + \varepsilon^{-3} u_{\alpha}^{-3} + \partial_{\alpha} u_3^{-1} \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-1} u^{-1}) z_{\alpha z} + \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{3} \int_{\omega} \left(\frac{1+\nu}{E} \varepsilon^{-3} \nabla_{\alpha\beta}^{-3} - \frac{\nu}{E} \varepsilon^{-3} \nabla_{\mu\mu}^{-3} \delta_{\alpha\beta} + \frac{1+\nu}{E} \varepsilon^{-1} \nabla_{\alpha\beta}^{-1} - \frac{\nu}{E} \varepsilon^{-1} \nabla_{\mu\mu}^{-1} \delta_{\alpha\beta} \right) z_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \int_{\omega} z_{\alpha\beta} (\partial_{\alpha} \varepsilon^{-3} u_{\beta}^{-3} + \partial_{\alpha} \varepsilon^{-1} u_{\beta}^{-1}) \right\} = 0$$

En identifiant les termes de même puissance on obtient :

$$\int_{\omega} \frac{2(1+\nu)}{E} \nabla_{\alpha z}^{-3} z_{\alpha z} - \int_{\omega} (\partial_{\alpha} u_{\alpha}^{-3} + u_{\alpha}^{-3}) z_{\alpha z} = 0 \Rightarrow$$

$$a_0(\nabla^{-3}, z) + b_0(z, u^{-3}) = 0 \quad (i.1)$$

et

$$- \int_{\omega} (\partial_{\alpha} u_{\alpha}^{-1} + u_{\alpha}^{-1}) z_{\alpha z} + \frac{1}{3} \int_{\omega} \left(\frac{1+\nu}{E} \nabla_{\alpha\beta}^{-3} - \frac{\nu}{E} \nabla_{\mu\mu}^{-3} \delta_{\alpha\beta} \right) z_{\alpha\beta}$$

$$- \frac{1}{3} \int_{\omega} z_{\alpha\beta} \partial_{\alpha} u_{\beta}^{-3} + \int_{\omega} \frac{2(1+\nu)}{E} \nabla_{\alpha z}^{-1} z_{\alpha z} = 0$$

$$b_0(z, u^{-1}) + a_0(\nabla^{-1}, z) + a_2(\nabla^{-3}, z) + b_2(z, u^{-3}) = 0 \quad (i.2)$$

D'autre part, l'équation II.2 permet d'écrire :

$$\int_{\omega} (\partial_{\alpha} v_{\alpha} + v_{\alpha}) (\varepsilon^{-3} \nabla_{\alpha z}^{-3} + \varepsilon^{-1} \nabla_{\alpha z}^{-1}) + \frac{\varepsilon^2}{3} \int_{\omega} (\varepsilon^{-3} \nabla_{\alpha\beta}^{-3} + \varepsilon^{-1} \nabla_{\alpha\beta}^{-1}) d\alpha v_{\beta}$$

$$= \varepsilon^{-1} \int_{\omega} \frac{\varepsilon^+ + \varepsilon^-}{2} v_{\alpha} \Rightarrow \int_{\omega} (\partial_{\alpha} v_{\alpha} + v_{\alpha}) \nabla_{\alpha z}^{-3} = 0 \quad (\text{termes en } \varepsilon^{-3})$$

$$b_0(\nabla^{-3}, v) = 0 \quad (i.3)$$

$$\int_{\omega} (\partial_{\alpha} v_{\alpha} + v_{\alpha}) \nabla_{\alpha z}^{-1} + \frac{1}{3} \int_{\omega} \nabla_{\alpha\beta}^{-3} \partial_{\alpha} v_{\beta} = \int_{\omega} \frac{\varepsilon^+ + \varepsilon^-}{2} v_{\alpha}$$

où :

$$b_0(\nabla^{-1}, v) + b_2(\nabla^{-3}, v) = F_{-1}(v) \quad (i.4)$$

On obtient en définitive le système :

$$a_0(\nabla^{-3}, z) + b_0(z, u^{-3}) = 0 \quad (1.1)$$

$$b_0(\nabla^{-3}, v) = 0 \quad (1.3)$$

$$(IV) \quad b_0(z, u^{-1}) + a_0(\nabla^{-1}, v) + a_2(\nabla^{-3}, z) + b_2(z, u^{-3}) = 0 \quad (1.2)$$

$$b_0(\nabla^{-1}, v) + b_2(\nabla^{-3}, v) = F_{-1}(v) \quad (1.4)$$

Appelons $N = N_1 \times N_2$ l'ensemble défini de la manière suivante :

$$N_1 = \left\{ \nabla = (\nabla_{\alpha\beta}, \nabla_{\alpha z}) \mid \nabla_{\alpha\beta} \in L^2(\omega), \nabla_{\alpha z} = \frac{K_{\alpha} E}{2(1+\nu)}, K_{\alpha} \in H^1(\omega) \right\}$$

$$N_2 = \left\{ u = (u_{\alpha}, u_3) \mid u_{\alpha} = -\partial_{\alpha} u_3 + K_{\alpha}, u_3, u_{\alpha} \in H_0^1(\omega) \right\}$$

On remarque que la solution des équations (1.1) et (1.3) appartient à cet espace quand $K_{\alpha} = 0$ ($\alpha = x, y$).

Appelons $N_0 = N_1^{\circ} \times N_2^{\circ}$ l'espace N quand $K_{\alpha} = 0$; ceci correspond à la famille de solution pour les plaques minces ($N_0 \subset N$)

$$(\nabla^{-3}, u^{-3}) \in N$$

Les équations (1.2) et (1.4) contiennent aussi bien des termes en puissance -1 que des termes en -3. Pour palier à cette difficulté, on choisit (z, v) éléments de l'espace N_0 et on sait que la solution unique du problème appartient à l'espace N .

On a :

$$\forall (z, v) \in N_0 \quad a_0(\nabla^{-1}, z) + b_0(z, u^{-1}) = 0$$

$$b_0(\nabla^{-1}, v) = 0$$

Par conséquent le système (IV) se réduit à :

$$(V^{-3}, u^{-3}) \in N \quad a_2(V^{-3}, z) + b_2(z, u^{-3}) = 0 \quad (1)$$

(V)

$$(z, v) \in N_0 \quad b_2(V^{-3}, v) = F_{-1}(v) \quad (2)$$

$$(V.1.) \Rightarrow \frac{1}{3} \int_{\omega} \left(\frac{1+\nu}{E} \nabla_{\alpha\beta}^{-3} - \frac{\nu}{E} \nabla_{\mu\mu}^{-3} \delta_{\alpha\beta} \right) z_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \int_{\omega} z_{\alpha\beta} \partial_{\alpha} u_{\beta}^{-3} = 0$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1+\nu}{E} \nabla_{\alpha\beta}^{-3} - \frac{\nu}{E} \nabla_{\mu\mu}^{-3} \delta_{\alpha\beta} \right) = \frac{1}{3} \partial_{\alpha} u_{\beta}^{-3}$$

où
$$\varepsilon_{\alpha\beta}(u^{-3}) = \partial_{\alpha} u_{\beta}^{-3} \quad (3.1)$$

$$(V.2.) \Rightarrow -\frac{1}{3} \int_{\omega} \nabla_{\alpha\beta}^{-3} \partial_{\alpha} v_{\beta} = - \int_{\omega} \frac{g^+ + g^-}{2} v_3$$

où
$$\frac{2}{3} \int_{\omega} \nabla_{\alpha\beta}^{-3} \partial_{\alpha} v_{\beta} = \int_{\omega} (g^+ + g^-) v_3$$

Le premier membre de cette équation s'écrit encore :

$$\int_{\omega} \nabla_{\alpha\beta}^{-3} \partial_{\alpha} v_{\beta} = - \int_{\omega} \partial_{\alpha} \nabla_{\alpha\beta}^{-3} v_{\beta} + \int_{\Sigma_0} \nabla_{\alpha\beta}^{-3} v_{\beta} \nu_{\beta} \quad (\text{formule de GREEN})$$

ν_{β} étant la composante de la normale.

Le deuxième terme du second membre est nul puisque $v_{\beta} = 0$ sur Σ

donc :
$$\int_{\omega} \nabla_{\alpha\beta}^{-3} \partial_{\alpha} v_{\beta} = - \int_{\omega} \partial_{\alpha} \nabla_{\alpha\beta}^{-3} v_{\beta}$$

d'autre part, $v \in N'_0 \Rightarrow v_{\beta} = -\partial_{\beta} v_3$, d'où

$$\int_{\omega} \nabla_{\alpha\beta}^{-3} \partial_{\alpha} v_{\beta} = - \int_{\omega} \partial_{\alpha} \nabla_{\alpha\beta}^{-3} v_{\beta} = \int_{\omega} \partial_{\alpha} \nabla_{\alpha\beta}^{-3} \partial_{\alpha} v_3$$

En appliquant toujours la formule de GREEN, on obtient :

$$\int_{\omega} \nabla_{\alpha\beta}^{-3} \partial_{\alpha} v_{\beta} = \int_{\omega} \partial_{\alpha} \nabla_{\alpha\beta}^{-3} \partial_{\alpha} v_{\beta} = - \int_{\omega} \partial_{\alpha\beta} \nabla_{\alpha\beta}^{-3} v_{\beta} + \int_{\Gamma_0} \partial_{\alpha} \nabla_{\alpha\beta}^{-3} v_{\beta}$$

comme $v_{\beta} = 0$ sur Σ_0 ; $\int_{\Sigma_0} \nabla_{\alpha\beta}^{-3} v_{\beta} = 0$

par conséquent ; $\int_{\omega} \nabla_{\alpha\beta}^{-3} \partial_{\alpha} v_{\beta} = - \int_{\omega} \partial_{\alpha\beta} \nabla_{\alpha\beta}^{-3} v_{\beta}$

L'équation (V.2) s'écrit en définitive :

$$-\frac{2}{3} \partial_{\alpha\beta} \nabla_{\alpha\beta}^{-3} = g^+ + g^- \quad (j.2)$$

donc le système (V) se transforme en deux équations (j.1) et (j.2)

$$(\nabla^{-3}, u^{-3}) \in N ; \quad \varepsilon_{\alpha\beta}(u^{-3}) = \partial_{\alpha} u_{\beta}^{-3} \quad (j.1) \quad (VI)$$

$$\alpha, \beta = x, y ; \quad -\frac{2}{3} \partial_{\alpha\beta} \nabla_{\alpha\beta}^{-3} = g^+ + g^- \quad (j.2)$$

$$(j.1) \Rightarrow \frac{1+\nu}{E} \nabla_{\alpha\beta}^{-3} - \frac{\nu}{E} \nabla_{\mu\mu}^{-3} \delta_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha} u_{\beta}^{-3} = \varepsilon_{\alpha\beta}(u^{-3})$$

En inversant cette relation, on obtient :

$$\nabla_{\alpha\beta}^{-3} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[(1-\nu) \varepsilon_{\alpha\beta} + \nu \varepsilon_{\mu\mu} \delta_{\alpha\beta} \right]$$

$$\partial_{\alpha\beta} \nabla_{\alpha\beta}^{-3} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[(1-\nu) \partial_{\alpha\beta}^2 \varepsilon_{\alpha\beta} + \nu \partial_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} \right]$$

En développant cette expression, on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha\beta} \nabla_{\alpha\beta} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[(1-\nu) \partial_{xx} \varepsilon_{xx} + \nu (\partial_{xx} \varepsilon_{xx} + \partial_{xx} \varepsilon_{yy}) \right. \\ &\quad + 2(1-\nu) \partial_{xy} \varepsilon_{xy} + (1-\nu) \partial_{yy} \varepsilon_{yy} \\ &\quad \left. + \nu (\partial_{yy} \varepsilon_{xx} + \partial_{yy} \varepsilon_{yy}) \right] \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\partial_{xx} \varepsilon_{xx} + \nu \partial_{xx} \varepsilon_{yy} + 2(1-\nu) \partial_{xy} \varepsilon_{xy} + \partial_{yy} \varepsilon_{yy} \right. \\ &\quad \left. + \partial_{yy} \varepsilon_{xx} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha\beta} \nabla_{\alpha\beta} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\partial_{xxx} u_x^{-3} + \partial_{xyy} u_y^{-3} + (1-\nu) \partial_{xyy} u_x^{-3} + \partial_{yxx} u_y^{-3} \right. \\ &\quad \left. + \partial_{yyy} u_x^{-3} + \partial_{xyx} u_y^{-3} \right] \end{aligned}$$

comme $u \in N$ on a : $u_{,\alpha} = -\partial_{\alpha} u_3 + K_{\alpha}$

$$u_x^{-3} = -\partial_x u_3^{-3} + K_x$$

$$u_y^{-3} = -\partial_y u_3^{-3} + K_y$$

En remplaçant u_x et u_y par leurs valeurs, on obtient :

$$\begin{aligned} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\partial_x^4 u_3 + 2\partial_{x^2 y^2} u_3 + \partial_y^4 u_3 - \partial_x [\partial_x^2 K_1 + \partial_y^2 K_1] \right. \\ &\quad \left. - \partial_y [x^2 K_2 + y^2 K_2] \right] \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\Delta \Delta u_3^{-3} - \partial_x \Delta K_x - \partial_y \Delta K_y \right] \end{aligned}$$

En remplaçant $\partial_{\alpha\beta} \nabla_{\alpha\beta}$ par sa valeur dans l'équation (j.2) celle-ci devient :

$$\frac{2E}{3(1-\nu^2)} \left[\Delta \Delta u_3^{-3} - \partial_x \Delta K_x - \partial_y \Delta K_y \right] = g^+ + g^- \quad (j'.1)$$

En approchant u par u^{-3} , $u^{-3} = \epsilon^3 u_3$ et l'équation (j'.1)

s'écrit :

$$\frac{2 \epsilon^3}{3(1-\nu^2)} \Delta \Delta u_3 = g^+ + g^- + \frac{2 E \epsilon^3}{3(1-\nu^2)} \left[\partial_x \Delta K_1 + \partial_y \Delta K_2 \right]$$

Remarque :

On retrouve l'équation générale donnant la flèche suivant la théorie de REISSNER en supposant que $K_\alpha = C Q_\alpha$ où Q_α désigne l'effort tranchant et C un coefficient multiplicatif ; en effet, l'équation d'équilibre qui lie les efforts tranchants s'écrit :

$$\partial_x Q_x + \partial_y Q_y = g^+ + g^-$$

$$\partial_x^3 Q_x + \partial_x^2 \partial_y Q_y = \partial_x^2 (g^+ + g^-)$$

$$\partial_{xy}^2 Q_x + \partial_y^3 Q_y = \partial_y^2 (g^+ + g^-) \Rightarrow \partial_x \Delta Q_x + \partial_y \Delta Q_y = \Delta (g^+ + g^-)$$

Si D désigne la rigidité à la flexion de la plaque, on a :

$$D \Delta \Delta u_3 = q + \Delta q$$

avec $q = g^+ + g^-$

III.2. ESTIMATIONS D'ERREURS

Ce paragraphe a pour but d'obtenir une estimation d'erreurs introduites par l'approximation du champ tridimensionnel à l'aide du champ défini par l'ensemble N, le problème général étant défini par le système III.

Considérons l'équation suivante :

$$A = a_0 \left(\nabla - \frac{\nabla^{-3}}{\varepsilon^3}, Z \right) + b_0 \left(Z, u - \frac{u^{-3}}{\varepsilon^3} \right) + \varepsilon^2 \left\{ a_2 \left(\nabla - \frac{\nabla^{-3}}{\varepsilon^3}, Z \right) + b_2 \left(Z, u - \frac{u^{-3}}{\varepsilon^3} \right) \right\}$$

En tenant compte de la définition des différentes fonctions intervenant dans l'expression de A, celle-ci s'écrit :

$$A = a_0(\nabla, Z) + b_0(Z, u) + \varepsilon^2 \left\{ a_2(\nabla, Z) + b_2(Z, u) \right\} - \frac{1}{\varepsilon^3} \left\{ a_0(\nabla^{-3}, Z) + b_0(Z, u^{-3}) \right\} - \frac{1}{\varepsilon} \left\{ a_2(\nabla^{-3}, Z) + b_2(Z, u^{-3}) \right\}$$

Cette expression est identiquement nulle, compte-tenu de l'équation (C.1) du système IV ainsi que des équations III.1 et V.1, établies au paragraphe précédent. Par conséquent, on peut écrire :

$$VI.1 \quad a_0 \left(\nabla - \frac{\nabla^{-3}}{\varepsilon^3}, Z \right) + b_0 \left(Z, u - \frac{u^{-3}}{\varepsilon^3} \right) + \varepsilon^2 \left\{ a_2 \left(\nabla - \frac{\nabla^{-3}}{\varepsilon^3}, Z \right) + b_2 \left(Z, u - \frac{u^{-3}}{\varepsilon^3} \right) \right\}$$

de la même façon :

$$b_0 \left(\nabla - \frac{\nabla^{-3}}{\varepsilon^3}, v \right) + \varepsilon^2 b_2 \left(\nabla - \frac{\nabla^{-3}}{\varepsilon^3}, v \right) = \varepsilon^{-1} F(v) - b_0 \left(\frac{\nabla^{-3}}{\varepsilon^3}, v \right) - \varepsilon^2 b_2 \left(\frac{\nabla^{-3}}{\varepsilon^3}, v \right) \Rightarrow$$

$$VI.2 \quad b_0 \left(\nabla - \frac{\nabla^{-3}}{\varepsilon^3}, v \right) + \varepsilon^2 b_2 \left(\nabla - \frac{\nabla^{-3}}{\varepsilon^3}, v \right) = -\varepsilon^{-1} b_2 \left(\nabla^{-3}, v \right) + \varepsilon^{-1} F(v)$$

D'autre part, en utilisant la formule de GREEN et la relation V.2. on peut écrire :

$$b_2(\nabla^{-3}, v) = -\frac{1}{3} \int_{\omega} \nabla_{\alpha\beta}^{-3} \partial_{\alpha} v_{\beta} = -\frac{1}{3} \int_{\omega} \nabla_{\alpha\beta}^{-3} \partial_{\beta} v_{\alpha} = \frac{1}{3} \int_{\omega} \partial_{\beta} \nabla_{\alpha\beta}^{-3} v_{\alpha} = F(v)$$

Cette relation s'écrit en remplaçant v_{α} par sa valeur :

$$\frac{1}{3} \int_{\omega} \frac{\partial^2 \nabla_{\alpha\beta}^{-3}}{\partial_{\alpha} \partial_{\beta}} v_3 = - \int_{\omega} \frac{\varepsilon_3^+ + \varepsilon_3^-}{2} v_3$$

Posons :

$$\nabla_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{1}{3} \partial_{\beta} \nabla_{\alpha\beta}^{-3} \quad \text{on obtient :}$$

$$\int_{\omega} \nabla_{\alpha\beta}^{-1} \partial_{\alpha} v_3 = \int_{\omega} \frac{\varepsilon_3^+ + \varepsilon_3^-}{2} v_3$$

Par conséquent, l'équation VI.2 devient :

$$\text{VI.3} \quad b_0\left(\nabla - \frac{\nabla^{-3}}{\varepsilon^3}, v\right) + \varepsilon^2 b_2\left(\nabla - \frac{\nabla^{-3}}{\varepsilon^3}, v\right) = -\varepsilon^{-1} \left\{ \int_{\omega} \nabla_{\alpha\beta}^{-1} \partial_{\alpha} v_3 + \int_{\omega} \nabla_{\alpha\beta}^{-1} v_{\alpha} \right\}$$

En choisissant $Z = \nabla - \frac{\nabla^{-3}}{\varepsilon^3}$ et $u = v - \frac{v^{-3}}{\varepsilon^3}$ et en faisant la différence des équations VI.2 et VI.3 on obtient ainsi :

$$\text{VI.4} \quad a_0\left(\nabla - \frac{\nabla^{-3}}{\varepsilon^3}, \nabla - \frac{\nabla^{-3}}{\varepsilon^3}\right) + \varepsilon^2 a_2\left(\nabla - \frac{\nabla^{-3}}{\varepsilon^3}, \nabla - \frac{\nabla^{-3}}{\varepsilon^3}\right) = \varepsilon^{-1} \left\{ \int_{\omega} \nabla_{\alpha\beta}^{-1} \left(\partial_{\alpha} u_3 - \frac{\partial_{\alpha} u_3^{-3}}{\varepsilon^3} + u_{\alpha} - \frac{u_{\alpha}^{-3}}{\varepsilon^3} \right) \right\}$$

On suppose que $\nabla_{\alpha\beta}^{-3} \in H^1(\omega)$ on a par conséquent,

$$\nabla_{\alpha\beta}^{-1} \in L^2(\omega)$$

En utilisant l'inégalité de SCHWARTZ, le second membre de la relation VI.4 peut être majoré de la façon suivante :

$$\varepsilon^{-1} \left\{ \nabla_{\alpha z}^{-1} \left(\partial_{\alpha} u_3 - \frac{\partial_{\alpha} u_3^{-3}}{\varepsilon^3} + u_{\alpha} - \frac{u_{\alpha}^{-3}}{\varepsilon^3} \right) \right\} \leq$$

$$\varepsilon^{-1} \|\nabla_{\alpha z}^{-1}\|_{0, \omega} \left\| \partial_{\alpha} u_3 - \frac{\partial_{\alpha} u_3^{-3}}{\varepsilon^3} + u_{\alpha} - \frac{u_{\alpha}^{-3}}{\varepsilon^3} \right\|_{0, \omega}$$

D'autre part, compte-tenu du fait que a_0 et a_2 sont des formes bilinéaires continues, on a en utilisant l'inégalité de KORN [14]

$$\sum_{\alpha, \beta} \varepsilon^2 \left\| \nabla_{\alpha \beta} - \frac{\nabla_{\alpha \beta}^{-3}}{\varepsilon^3} \right\|_{0, \omega}^2 + \sum_{\alpha} \left\| \nabla_{\alpha z} - \nabla_{\alpha z}^{-3} \right\|_{0, \omega}^2 \leq$$

$$a_0 \left(\nabla - \frac{\nabla^{-3}}{\varepsilon^3}, \nabla - \frac{\nabla^{-3}}{\varepsilon^3} \right) + \varepsilon^2 a_2 \left(\nabla - \frac{\nabla^{-3}}{\varepsilon^3}, \nabla - \frac{\nabla^{-3}}{\varepsilon^3} \right)$$

En définitive, on obtient l'inégalité suivante :

$$\sum_{\alpha, \beta} \varepsilon^2 \left\| \nabla_{\alpha \beta} - \frac{\nabla_{\alpha \beta}^{-3}}{\varepsilon^3} \right\|_{0, \omega}^2 + \sum_{\alpha} \left\| \nabla_{\alpha z} - \nabla_{\alpha z}^{-3} \right\|_{0, \omega}^2 \leq$$

$$\varepsilon^{-1} \|\nabla_{\alpha z}^{-1}\|_{0, \omega} \left\| \left(u_{\alpha} - \frac{u_{\alpha}^{-3}}{\varepsilon^3} \right) + \partial_{\alpha} u_3 - \frac{\partial_{\alpha} u_3^{-3}}{\varepsilon^3} \right\|_{0, \omega}$$

VI.5

Par ailleurs, en explicitant a_2 et b_2 , on a la relation suivante :

$$a_2 \left(\nabla - \frac{\nabla^{-3}}{\varepsilon^3}, \nabla - \frac{\nabla^{-3}}{\varepsilon^3} \right) + b_2 \left(\nabla - \frac{\nabla^{-3}}{\varepsilon^3}, u - \frac{u^{-3}}{\varepsilon^3} \right) = 0$$

En portant cette expression dans l'équation VI.1 on peut écrire :

$$a_0 \left(\nabla - \frac{\nabla^{-3}}{\varepsilon^3}, \nabla - \frac{\nabla^{-3}}{\varepsilon^3} \right) + b_0 \left(\nabla - \frac{\nabla^{-3}}{\varepsilon^3}, u - \frac{u^{-3}}{\varepsilon^3} \right) = 0$$

$$\int_{\omega} \frac{2(1+\nu)}{E} \left(\nabla_{\alpha z} - \frac{\nabla_{\alpha z}^{-3}}{\varepsilon^3} \right) \left(\nabla_{\alpha z} - \frac{\nabla_{\alpha z}^{-3}}{\varepsilon^3} \right) =$$

$$\int_{\omega} \left(\partial_{\alpha} u_3 - \frac{\partial_{\alpha} u_3^{-3}}{\varepsilon^3} + u_{\alpha} - \frac{u_{\alpha}^{-3}}{\varepsilon^3} \right) \left(\nabla_{\alpha z} - \frac{\nabla_{\alpha z}^{-3}}{\varepsilon^3} \right)$$

On a les inégalités suivantes :

$$\exists M \text{ t.q. } \int_{\omega} \left(\partial_{\alpha} u_3 - \frac{\partial_{\alpha} u_3^{-3}}{\varepsilon^3} + u_{\alpha} - \frac{u_{\alpha}^{-3}}{\varepsilon^3} \right) \left(\nabla_{\alpha z} - \frac{\nabla_{\alpha z}^{-3}}{\varepsilon^3} \right) \geq$$

$$\| \partial_{\alpha} u_3 - \frac{\partial_{\alpha} u_3^{-3}}{\varepsilon^3} + u_{\alpha} - \frac{u_{\alpha}^{-3}}{\varepsilon^3} \|_{0, \omega} \| \nabla_{\alpha z} - \frac{\nabla_{\alpha z}^{-3}}{\varepsilon^3} \|_{0, \omega}$$

On en déduit :

$$\| \nabla_{\alpha z} - \frac{\nabla_{\alpha z}^{-3}}{\varepsilon^3} \|_{0, \omega} \geq \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot M \| \partial_{\alpha} u_3 - \frac{\partial_{\alpha} u_3^{-3}}{\varepsilon^3} + u_{\alpha} - \frac{u_{\alpha}^{-3}}{\varepsilon^3} \|_{0, \omega}$$

où :

$$\| \nabla_{\alpha z} - \frac{\nabla_{\alpha z}^{-3}}{\varepsilon^3} \|_{0, \omega} \geq M' \| \partial_{\alpha} u_3 - \frac{\partial_{\alpha} u_3^{-3}}{\varepsilon^3} + u_{\alpha} - \frac{u_{\alpha}^{-3}}{\varepsilon^3} \|_{0, \omega} \quad \text{VI.6}$$

En portant cette inégalité dans VI.5 on obtient :

$$\sum_{\alpha} \varepsilon \| \nabla_{\alpha \beta} - \frac{\nabla_{\alpha \beta}^{-3}}{\varepsilon^3} \|_{0, \omega} + \| \nabla_{\alpha z} - \frac{\nabla_{\alpha z}^{-3}}{\varepsilon^3} \|_{0, \omega} \leq \frac{M'}{\varepsilon} \quad \text{VI.7}$$

Par ailleurs, de :

$$\frac{1}{3} \int_{\omega} \partial_{\alpha} \left(u_{\alpha} - \frac{u_{\alpha}^{-3}}{\varepsilon^3} \right) z_{\alpha \beta} = \frac{1}{3} \int_{\omega} \frac{1+\nu}{E} \left(\nabla_{\alpha \beta} - \frac{\nabla_{\alpha \beta}^{-3}}{\varepsilon^3} \right) z_{\alpha \beta}$$

$$- \frac{\nu}{E} \left(\nabla_{\mu \mu} - \frac{\nabla_{\mu \mu}^{-3}}{\varepsilon^3} \right) z_{\mu \mu}$$

Nous déduisons :

$$\| u_\alpha - u_\alpha^{-3} \|_{0, \omega} \leq M \| \nabla_{d\beta} - \frac{\nabla_{d\beta}^{-3}}{\varepsilon^3} \|_{0, \omega} \leq \frac{M}{\varepsilon^2} \quad \text{VI.8}$$

et enfin, d'après la relation VI.6 on peut écrire :

$$\| u_3 - \frac{u_3^{-3}}{3} \|_{1, \omega} \leq \frac{M}{\varepsilon^2} \quad \text{VI.9}$$

En conclusion, la solution tridimensionnelle est bien approchée par la solution approximative, les estimations d'erreurs sont données par les relations VI.7, VI.8 et VI.9.

A N N E X E

- S A Solution analytique (chapitre I)
- E F 1 Solution par la méthode des éléments finis, élément rectangu-
laire avec intégration normale
- E F 2 Solution par la méthode des éléments finis, élément rectangu-
laire avec intégration réduite
- Ref Résultats donnés par l'élément de PKYOR, BARKER et FREDERICK [12]

oo 0 oo
 0 oo

$W_{max} \times D \times 10^2 / P A^2$				
h/a	S A	E F 1	E F 2	Ref
0.01	1.16173	0.02368	1.173	1.170
0.05	1.2088	0.41253	1.20	1.219
0.10	1.35348	0.89121	1.3359	1.353
0.12	1.44056	1.03405	1.4166	
0.14	1.54368	1.164	1.5165	
0.15	1.6	1.2258	1.57105	1.551
0.16	1.6611	1.2867	1.6265	
0.18	1.794	1.4088	1.7503	
0.20	1.9428	1.5309	1.8532	1.801
0.25	2.3835	1.86	2.28	2.101
0.30	2.921	2.2343	2.85119	



Tableau A.1 : plaque carrée simplement appuyée sur ses quatre bords, chargée au centre

(maillage 6 x 6)

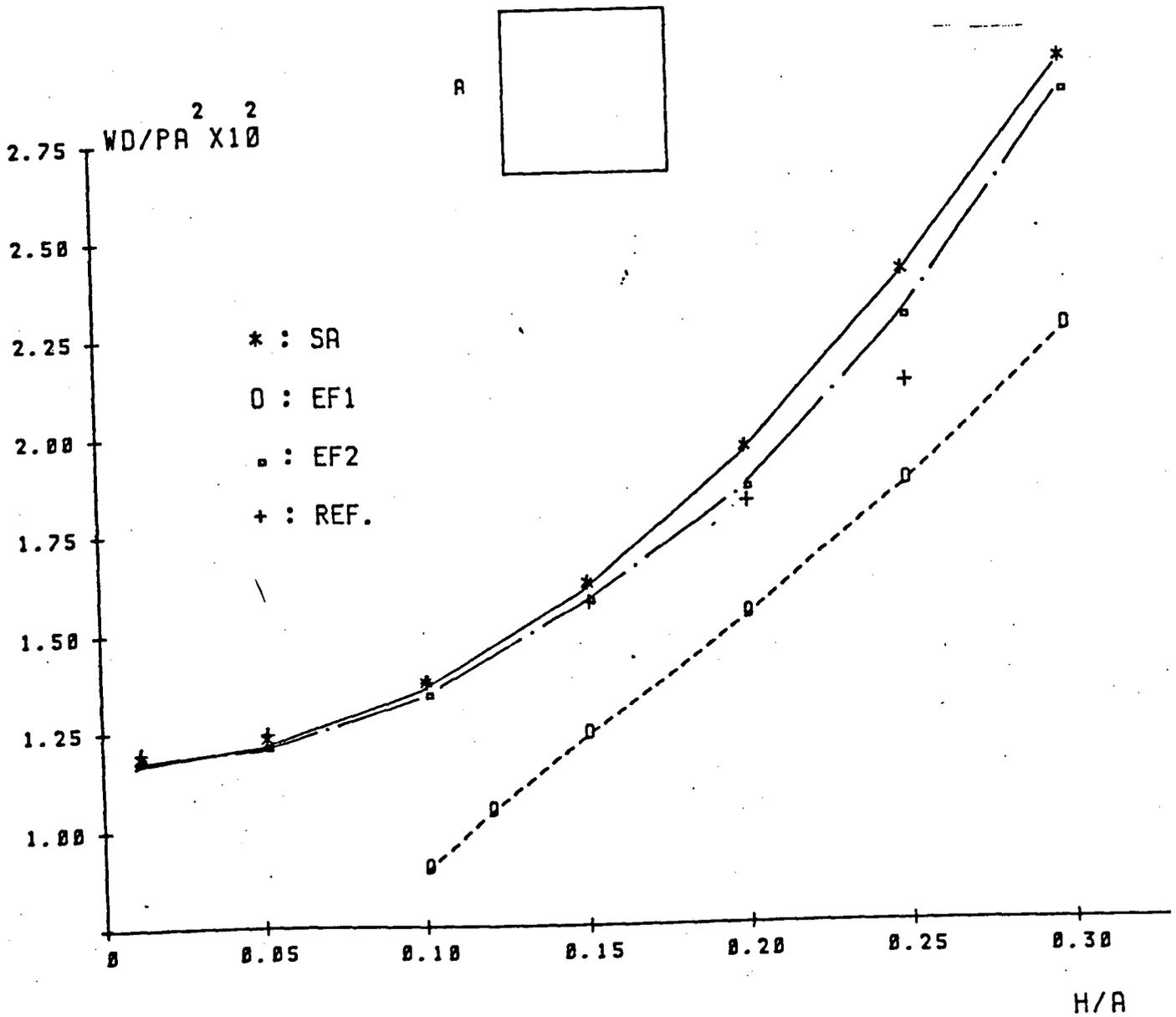


Fig. B.1. : PLAQUE SIMPLEMENT APPUYEE
SUR SES QUATRE BORDS
CHARGEE AU CENTRE.



$W \max E h^3 / q A^4 \times 10^2$				
h/a	S A	E F 1	E F 2	Ref
0.01	4.4375	0.09056	4.4328	4.423
0.05	4.4840	1.54125	4.4437	4.469
0.10	4.6275	3.150	4.595	4.612
0.12	4.7133	3.56832	4.68288	
0.14	4.813	3.89648	4.802	
0.15	4.870125	4.050	4.848	4.852
0.16	4.9299	4.1984	4.89472	
0.18	5.0611	4.45565	5.04468	
0.20	5.2076	4.7032	5.16	5.186
0.25	5.64164	5.30242	5.64844	5.617
0.30	6.1793	5.694	6.21	



Tableau A.2 : plaque carrée simplement appuyée sur ses quatre bords et chargée uniformément.

(maillage 6 x 6).

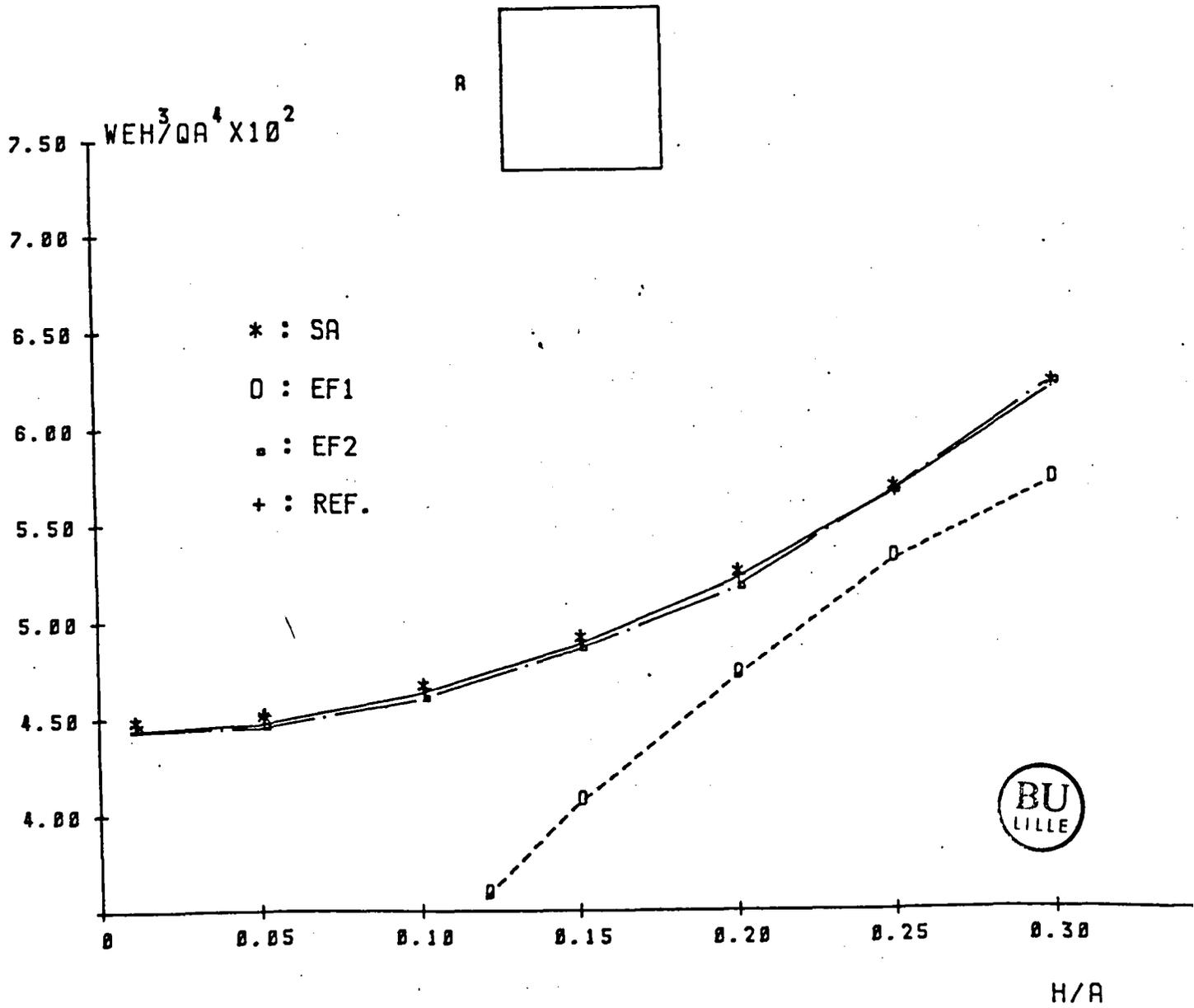


Fig. B.2. : PLAQUE SIMPLEMENT APPUYEE
 SUR SES QUATRE BORDS
 CHARGÉE UNIFORMEMENT

h/a	$W_{\max} E h^3 / q A^4 \times 10^2$		
	S A	E F 1	E F 2
0.05	0.0211719	0.0058437	0.0208125
0.10	0.02275	0.0145	0.023
0.12	0.0239736	0.01728	0.0241056
0.14	0.0255456	0.0200312	0.0255192
0.18	0.029335	0.0249901	0.0288684
0.20	0.03208	0.02748	0.0308
0.24	0.0388454	0.0324864	0.0352512
0.30	0.045275	0.04089	0.0430

Tableau A 3 : Plaque carrée simplement appuyée sur deux bords opposés et encastrée sur les autres bords.



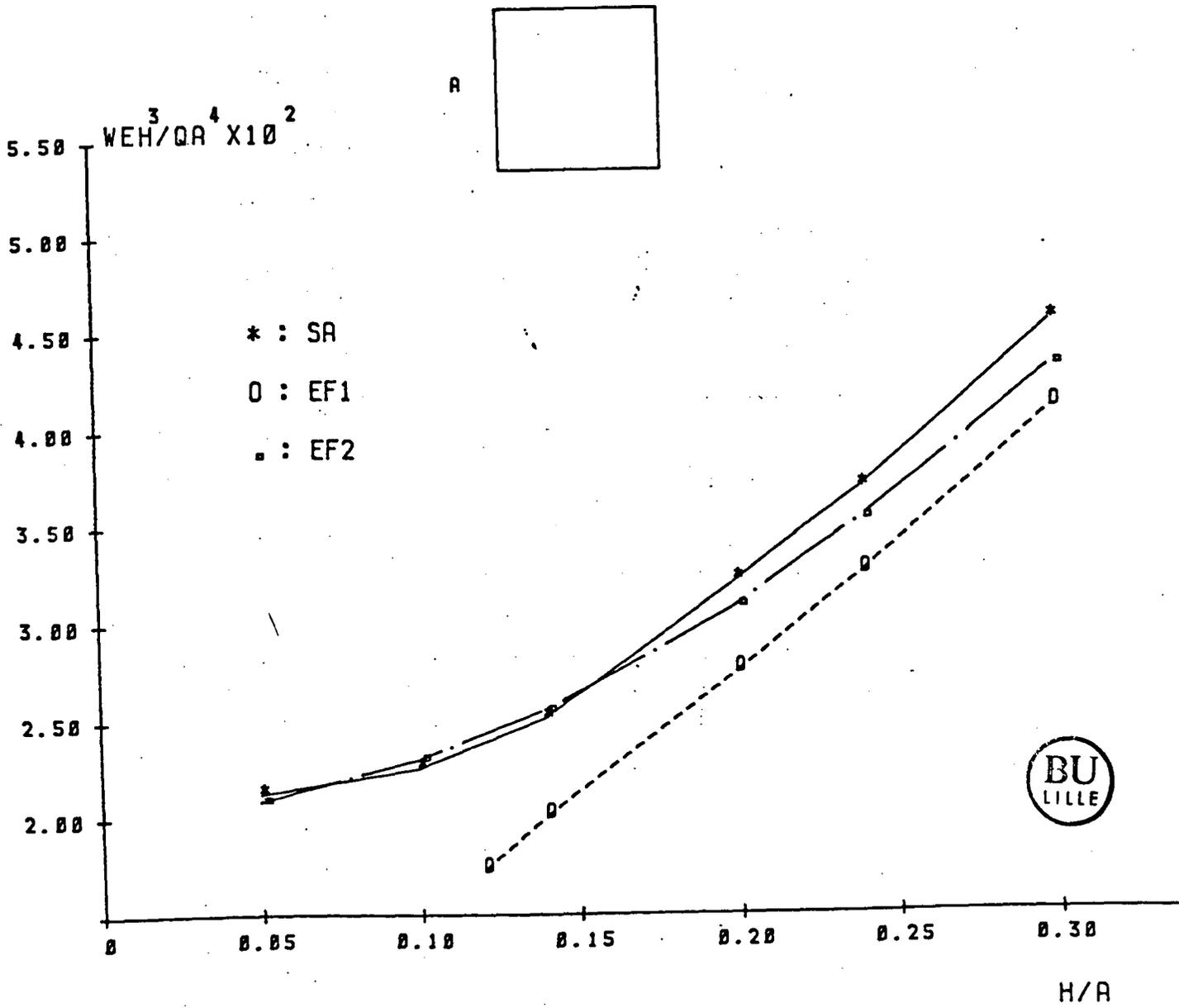


Fig. B.3. : PLAQUE CARREE SIMPLEMENT APPUYEE
 SUR DEUX BORDS OPPOSES
 ENCASTREE SUR LES AUTRES BORDS
 CHARGEE UNIFORMEMENT

h/a	W* _{max} (cm) × 10 ²		W** _{max} (cm)	
	S A	E F 2	S A	E F 2
0.01	902.9	902.6	229.270	221.181
0.05	7.41	7.18	1.776	1.7637
0.10	1.003	0.969	0.2268	0.2253
0.15	0.3490	0.321	0.06922	0.0690
0.20	0.163	0.156	0.030615	0.03045
0.25	0.0982	0.0935	0.0165	0.0164
0.30	0.0672	0.0636	0.01016	0.01015

Tableau A 4 : Plaque rectangulaire simplement appuyée sur ses quatre bords.

$$E = 2.10^5 \text{ kg/cm}^2$$

$$\nu = 0.3$$

$$a = 100 \text{ cm}$$

$$B = 200 \text{ cm}$$

$$P = 1000 \text{ kg}$$

$$q = 4 \text{ kg/cm}^2$$



* charge concentrée

** charge uniforme répartie sur toute la surface.

h/a	W* max (cm) × 10 ²		W** max (cm) × 10 ²	
	S A	E F 2	S A	E F 2
0.01	100.42	100.213	474.3649	473
0.05	4.8788	4.7410	64.3310	63.534
0.10	0.737	0.721	9.124	9.05
0.15	0.25980	0.253	2.87	2.8589
0.20	0.133	0.129	1.295	1.290
0.25	0.0834	0.0810	0.721	0.720
0.30	0.0590	0.0586	0.457	0.450

Tableau A 5 : plaque carrée simplement appuyée sur ses quatre bords et reposant sur des appuis élastiques.
(maillage 6 × 6)

$$E = 2.10^5 \text{ kg/cm}^2$$

$$\nu = 0.3$$

$$a = 100 \text{ cm}$$

$$P = 1000 \text{ kg}$$

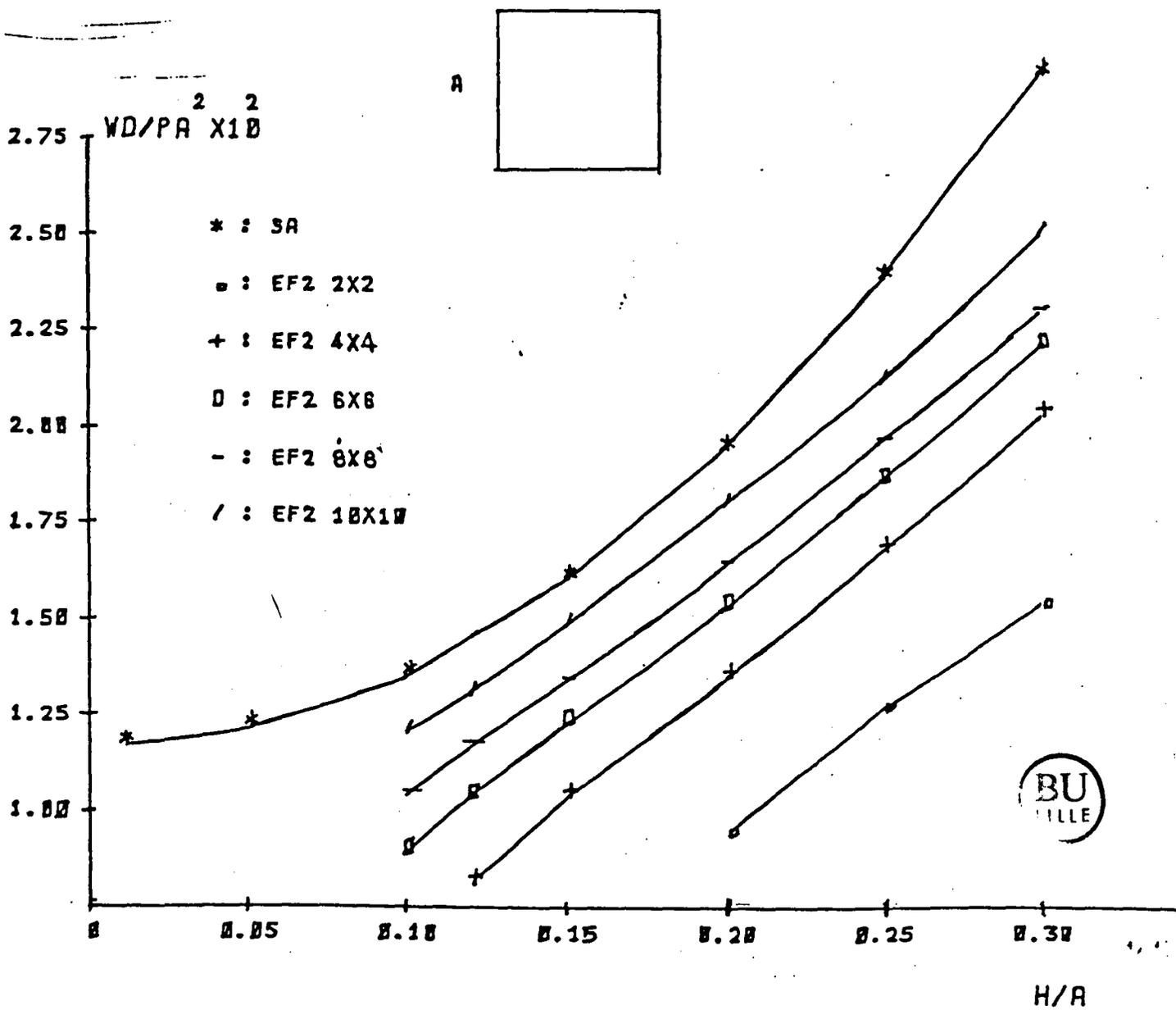
$$q = 4 \text{ kg/cm}^2$$

$$KW = 1 \text{ kg/cm}^3$$



* charge centrée

** charge uniforme répartie sur toute la surface.



PLAQUE SIMPLEMENT APPUYÉE
SUR SES QUATRE BORDS
CHARGÉE AU CENTRE

Fig. B.4 : Convergence en fonction du nombre d'éléments

BIBLIOGRAPHIE

- 1 ARCHER- Jhon S (1965) - Consistent ~~matrix~~ formulations for structural analysis using Finite éléments techniques, A.I.A.A. Journ.- Vol.3.n°10 - P. 1910-1918
- 2 BUZDUGAN G.(1972) - Dynamiques des fondations des machines - EYROLLES (éd.) p. 394-396
- 3 CLOUGH.R.W, TOCHER J.L.(1965) - proc. A.F.I.T. Conf. DAYTON, OH p. 515-546
- 4 DESTUYNDER Ph.(1980) - Analyse des plaques de REISSNER par la méthode des éléments finis
- Rapport interne, Centre de Mathématiques appliquées, école polytechnique - p. 1-41
- 5 DOHERTY W.P., WILSON E.L., TAYLOR R.L.(1969)
Stress analysis of axisymétric solids utilizing Higher order quadrilatéral Finite éléments. Structural - Engineering laboratory university of California, BERKLEY.
- 6 GIROUD J.P.(1975) - Tassement et stabilité des fondations superficielles tome 1 \ presses universitaires de GRENOBLE - p. 157-183
- 7 GREIMANN L.F. LYNN P.P.(1970) Finite éléments analysis of plate bending with transverse shear déformation - Nuclear Engineer Désign 14 P.223-230
- 8 IAN M. SMITH (1968) A finite élément analysis for "moderately thick" rectangular plates in bending.int. J.MECH. SCi - vol.10 - p.563-570
- 9 IMBERT J.F.(1980) - analyse des structures par la méthode des éléments finis - CEPADVES (ed.) p.135
- 10 LEBELLE P. CASSE. B.(1973) poutre sur appui continu et élastique Cours professé au C.H.E.C. . p. 101-105
- 11 MIYAHARA F, ERGATOUDIS J.G.(1976) Matrix analysis of structure - fondatic interaction, A.S.C.E.- vol.102 n° ST₁ - p 251-263.
- 12 PRYOR W.Charles, BARKER M, FREDERIK D.(1970) Finite element bending analy of REISSNER plates - P.A.S.C.E. EM6 - p 967-982.
- 13 A study of Quadrilatéral plate bending with reduced integration - inter. Jour. for numerical Methodes in Engineering . vol 12 - p.1059-1079
- 14 RAVIART P., PAURRE P.(1976) - Cours d'analyse numérique professé à l'école polytechnique.

- 15 THOMAS G. CARLEY, HENRY L LANGHAR (1968)
transverse shearing stress in rectangular plates
P.A.S.C.E. - EM₁ , p.138-151
- 16 TIMOSHENKO S, WOINOWSKY KRIEGER S.(1959)
theory of plates and shells - MC GRAW HILL (éd.)
- 17 ZIENKEWICZ O.C. (1971) the finite element methode in Engineering science
MC GRAW HILL (ed.) p.173-199.

