

N° d'ordre : 1148

50376

1984

52

50376.

4984.

52.

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE 3^{ème} CYCLE

Spécialité Electronique

par

Jean François BRUDNY

Maître ès Sciences



SUR UNE METHODE D'ETUDE DES CIRCUITS NON LINEAIRES APPLICATION AUX CONVERTISSEURS STATIQUES.



Soutenue le 23 Mars 1984 devant la Commission d'Examen

MM.	G.	SEGUIER	Président
	C.	MAIZIERES	Rapporteur
	B.	TRANNOY	Examineur
	J.C.	GENTINA	Examineur

AVANT - PROPOS

Ce travail a été effectué dans le laboratoire de Systèmes Electromécaniques du Service d'Electrotechnique de l'Université des Sciences et Techniques de Lille.

Nous remercions Monsieur le Professeur SEGUIER d'avoir accepter de présider le Jury auquel nous soumettons ce mémoire.

Nous exprimons notre gratitude à Monsieur le Professeur MAIZIERES qui a assuré la direction de notre travail.

Nous remercions très vivement Monsieur le Professeur TRANNOY pour l'interêt qu'il a bien voulu porter à notre recherche en acceptant de participer à notre Jury de thèse.

Nous sommes très touché que Monsieur le Professeur GENTINA, qui s'étant intéressé initialement à nos travaux, ait-bien voulu accepter de venir les juger.

Nous tenons enfin à remercier tout le personnel et nos collègues du laboratoire pour l'aide qu'ils nous ont apportée. Nous exprimons notre reconnaissance à Madame LEMAIRE et à Monsieur HOUZE qui ont assuré la réalisation pratique de ce mémoire.

S O M M A I R E

INTRODUCTION

CHAPITRE I : Méthodes d'analyse des convertisseurs statiques	1
1.1. Introduction	2
1.2. Décomposition en phases	2
1.2.1. Système linéaire pas à pas	2
1.2.2. Méthode du premier harmonique	4
1.2.3. Simulation sur calculateur analogique	4
1.2.4. Simulation sur calculateur numérique	6
1.3. Méthodes d'analyse globale	8
1.3.1. Formulation globale des équations du circuit	8
1.3.2. Simulation globale analogique	8
1.3.3. Simulation globale par câblage direct	9
1.3.4. Simulation globale numérique	10
1.4. Méthode proposée	10
CHAPITRE II Présentation et mise en oeuvre de la méthode proposée	13
2.1. Introduction	14
2.2. Principe de la méthode	14
2.2.1. Introduction d'un circuit associé	14
2.2.2. Courant dans le circuit réel	15
2.2.3. Courants dans le circuit associé	16
2.2.4. Détermination du courant i	16
2.3. Mise en oeuvre de la méthode	18
2.3.1. Etude sur calculateur analogique	19
2.3.2. Mise en oeuvre sur calculatrice numérique	20
2.3.2.1. Précision dans la saisie de la condition $i'=j$	20
2.3.2.2. Technique de recherche des points	22
2.3.2.3. Recherche systématique des points	26
2.4. Extension de la méthode aux circuits à éléments non linéaires à point commun	29
2.4.1. Structure du circuit associé	29
2.4.2. Condition de test positif	32
2.4.3. Organigramme de principe	33
2.4.4. Application : Montage triphasé étoile à diodes	34
2.5. Conclusion	35

CHAPITRE III Circuit à structure parallèle, à partie linéaire du premier ordre	38
3.1. Introduction	39
3.2. Circuit associé	39
3.3. Réponses des circuits réel et associé	41
3.3.1. Circuit réel	42
3.3.2. Circuit associé	43
3.3.2.1. Condition sur la somme des courants j à l'instant t_{n+1}	44
3.3.2.2. Expression du courant i' à l'instant t_{n+1}	44
3.3.2.3. Pente a_0 de la rampe de tension imposée	45
3.3.2.4. Comparaison des courants i_{n+1} et i'_{n+1}	46
3.4. Etude directe du circuit "roue libre"	46
3.4.1. Caractéristiques du montage étudié	46
3.4.2. Phases de fonctionnement	47
3.4.3. Courant i dans la résistance inductive	48
3.5. Méthode du circuit associé	51
3.6. Précision de la méthode	54
3.6.1. Diode D_1 conductrice	54
3.6.1.1. Expression du courant i dans le circuit réel	54
3.6.1.2. Expression du courant i' dans le circuit associé	55
3.6.1.3. Erreur relative sur le courant dans le récepteur	55
3.6.1.3.1. Erreur ζ_0^{D1}	56
3.6.1.3.2. Expression générale de l'erreur	56
3.6.2. Diodes D_1 et D_2 conductrices	57
3.6.2.1. Erreur relative sur le courant dans le récepteur	57
3.6.2.2. Expression de ζ^{D1}	58
3.6.2.3. Expression de ζ^{D2}	59
3.6.2.4. Erreur ζ_0^{D2}	60
3.6.3. Diode D_2 conductrice	61
3.6.4. Estimation de la précision	62
3.7. Conclusion	63
CHAPITRE IV Circuit à structure série, à partie linéaire du premier ordre	
Dualité générateur de tension - générateur de courant	71
4.1. Introduction	72
4.2. Réponse du circuit réel	72
4.2.1. Structure du circuit	72

4.2.2. Expression algébrique du courant i dans le récepteur	73
4.3. Circuit associé	74
4.3.1. Expression de la somme des tensions aux bornes des éléments non linéaires à t_{n+1}	75
4.3.2. Tension aux bornes du récepteur à t_{n+1}	76
4.3.3. Pente b^* de la rampe de courant imposée	76
4.3.4. Comparaison des courants i_{n+1} et i'_{n+1}	76
4.4. Générateur associé à onde de courant parabolique	78
4.5. Etude comparée : générateur de tension - générateur de courant	80
4.5.1. Expression du courant i dans le récepteur	80
4.5.2. Courant i'_{n+1} dans le circuit associé à générateur de tension	80
4.5.3. Courant i'_{n+1} dans le circuit associé à générateur de courant	82
4.5.4. Comparaison expérimentale des erreurs relatives sur le courant dans le récepteur	83
4.6. Conclusion	86
 CHAPITRE V Circuit à structure parallèle à éléments linéaires en cascade	 87
5.1. Introduction	88
5.2. Présentation générale	88
5.3. Expression du courant i dans l'inductance L	91
5.4. Tension v' imposée à l'entrée du filtre	93
5.5. Tension u' imposée aux bornes de la résistance R	95
5.5.1. Evolution linéaire de la variable u'	95
5.5.2. Evolution parabolique de la tension u'	96
5.5.3. Tension u' caractérisée par un polynome du troisième degré	97
5.6. Courant i' imposé dans l'inductance L	98
5.6.1. Choix de la loi d'évolution du courant i'	98
5.6.2. Expression du courant i' à t_{n+1}	100
5.7. Application de la méthode au montage redresseur- filtre - charge	102
5.7.1. Modes de fonctionnement	103
5.7.2. Réponses du système	103
5.7.2.1. Discriminant positif $k < \sqrt{m}/2$	105
5.7.2.2. Discriminant négatif $k > \sqrt{m}/2$	105
5.7.3. Evolution du courant dans l'inductance L et de la tension aux bornes de R	106
5.8. Conclusion	111
 CHAPITRE VI Association de non linéarités et d'éléments linéaires couplés en polygone ou en étoile	 112
6.1. Introduction	113

6.2. Couplage en polygone des éléments linéaires	113
6.2.1. Cas général	113
6.2.2. Cas particulier : polygone des éléments linéaires ouvert	116
6.2.3. Application à l'étude des montages redresseurs en pont	118
6.2.4. Vérification expérimentale : montage monophasé en pont	120
6.3. Couplage en étoile des éléments linéaires	123
6.3.1. Cas général	123
6.3.2. Linéarisation de la caractéristique des éléments non linéaires	126
6.3.3. Montage redresseur - Phénomène d'empiètement	127
6.3.3.1. Caractérisation du montage	127
6.3.3.2. Présentation de la procédure	128
6.4. Conclusion	133
CHAPITRE VII Application de la méthode à des circuits non linéaires à caractéristiques non indépendantes du temps	134
7.1. Introduction	135
7.2. Traduction des conditions de commutation d'un thyristor	135
7.3. Gradateur mixte	136
7.3.1. Présentation du montage	136
7.3.2. Procédure d'étude	138
7.3.3. Réponses du circuit	139
7.3.4. Mise sous tension du montage	139
7.3.5. Vérification des résultats	141
7.4. Résolution d'une équation linéaire à coefficients variables	142
7.4.1. Equation mécanique du système	142
7.4.2. Schéma électrique équivalent	143
7.4.3. Résolution de l'équation différentielle	144
7.4.3.1. Procédure du générateur du courant	145
7.4.3.2. Evolution linéaire de la différence de potentiel v'	146
7.4.4. Application de la méthode et résultats	147
7.4.4.1. Caractéristiques du système étudié	147
7.4.4.2. Conditions initiales	148
7.4.4.3. Réponse du système	150
7.5. Conclusion	150
CONCLUSION	153
BIBLIOGRAPHIE	155

CHAPITRE 1

Méthodes d'analyse des
convertisseurs statiques

1.1. Introduction

Nous nous proposons de présenter les principales méthodes employées pour l'analyse des montages à diodes et à thyristors en les classant en deux groupes. Le premier conduit à décomposer le fonctionnement du circuit en autant de phases que le dispositif comporte d'états au cours d'une période. Le second rassemble les techniques procédant à une analyse globale de l'ensemble du système non linéaire.

1.2. Décomposition en phases

1.2.1. Systeme linéaire pas à pas

La méthode [1]*, [2] consiste, à partir d'un état donné du système, à rechercher les phases successives. Chacune d'elles est caractérisée par une ou plusieurs équations différentielles à coefficients constants et la loi de variation des grandeurs caractéristiques du montage est liée aux conditions initiales sur celles-ci, fonctions des instants de changement de régime qu'il convient également de déterminer.

Le comportement des diodes et des thyristors est idéalisé en supposant généralement ces éléments parfaits. Leurs caractéristiques $v(i)$ sont reproduites sur les figures 1.1 et 1.2.

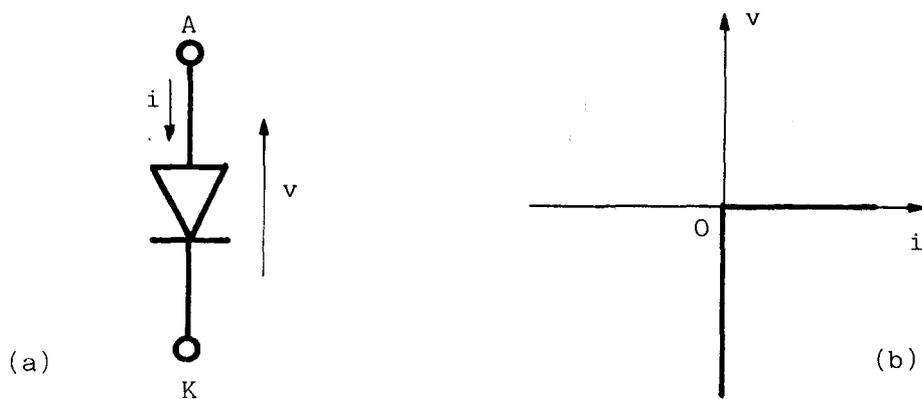
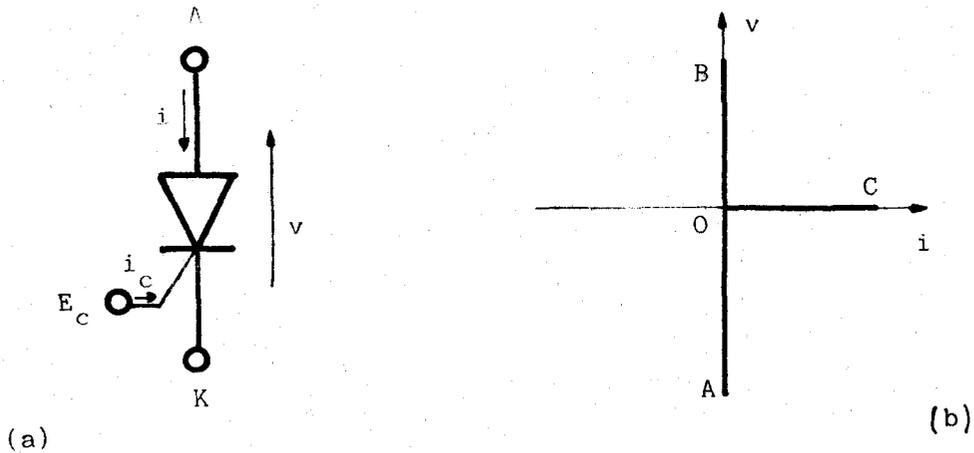


Figure 1.1

(a) Symbole d'une diode

(b) caractéristique $v(i)$ d'une diode parfaite

* Les chiffres entre crochets renvoient aux références bibliographiques annexées au présent mémoire.



(a) Symbole d'un thyristor

Figure 1.2

(b) Caractéristique $v(i)$ d'un thyristor parfait

Celle du thyristor présente trois branches

- OA thyristor bloqué par une tension à ses bornes négative
- OB thyristor polarisé en direct ($V_{AK} > 0$) mais bloqué ($i_c = 0$): pas d'impulsions appliquées à l'électrode de commande E_c .
- OC thyristor conducteur ($V_{AK} = 0$).

Dans le cas d'un montage complexe, entraînant le plus souvent l'augmentation du nombre des phases, la détermination de l'état initial du système, lorsqu'on s'intéresse en particulier au régime permanent établi, n'est pas toujours aisé à définir même pour un électronicien de puissance averti.

La modification d'une condition initiale (condensateur chargé différemment par exemple) nécessite de reprendre les calculs de façon à caractériser à nouveau les lois d'évolution des grandeurs caractéristiques et les conditions des changement d'état du dispositif. Des conditions initiales différentes peuvent d'ailleurs donner lieu à des modes de fonctionnement distincts.

De plus, l'assimilation des redresseurs à des éléments parfaits peut, en supposant à leur niveau les commutations instantanées, conduire à un comportement qui ne se produit pas en réalité, lorsque, par exemple, l'extinction d'un thyristor n'a pas lieu effectivement en raison du temps de blocage non négligeable.

Enfin, si cette méthode "des valeurs instantanées" présente l'avantage d'une grande généralité, son application est toutefois limitée, pour l'obtention d'expressions littérales, aux montages les plus simples pour lesquels les équations différentielles des divers régimes ne dépassent pas le second ordre.

1.2.2. Méthode du premier harmonique [3] [4] [5]

Lorsque le récepteur est suffisamment inductif, il est possible d'admettre, par exemple dans le cas des montages redresseurs, que l'expression du courant dans la charge se réduit aux deux premiers termes de son développement en série de Fourier. L'application du principe de superposition conduit à une détermination facile de ce courant à partir de la connaissance de l'évolution de la tension.

En d'autres circonstances, dans l'étude des onduleurs autonomes par exemple, la tension aux bornes du récepteur peut, s'il est précédé d'un filtre, être supposée sinusoïdale. Raisonnant ensuite essentiellement sur la composante fondamentale du courant, l'examen du comportement du dispositif est conduit en effectuant, de proche en proche à partir du récepteur, le bilan des puissances active et réactive absorbées.

1.2.3. Simulation sur calculateur analogique

Ce type de simulation permet, en faisant apparaître graphiquement les variations des grandeurs caractéristiques du montage, de reproduire sans risque le comportement du circuit réel dont il convient toutefois de connaître le fonctionnement pour la réalisation du câblage.

Cette méthode offre l'avantage de pouvoir examiner aisément l'influence de chaque paramètre sans pour autant pouvoir déduire, de façon systématique, leur valeur optimale.

Par contre, elle ne permet pas, comme précédemment, de résoudre le problème d'une modification de structure.

Il importe en effet de rechercher, à nouveau, le système d'équations à traiter et d'adapter ensuite la logique de test.

Il convient toutefois de procéder à un examen critique des grandeurs observées, un défaut de commutation lors du passage d'une séquence à la suivante pouvant néanmoins entraîner un fonctionnement d'apparence correcte qui ne peut-être mis en doute qu'à partir d'une connaissance préalable des phénomènes [6].

La simulation analogique permet, plus facilement que dans la méthode des valeurs instantanées, d'adopter pour les éléments redresseurs des caractéristiques moins idéalisées que celles de la diode et du thyristor parfaits (figures 1.3 et 1.4). Divers auteurs [7], [8], [9], ont proposé des variantes pour la simulation des diodes et des thyristors.

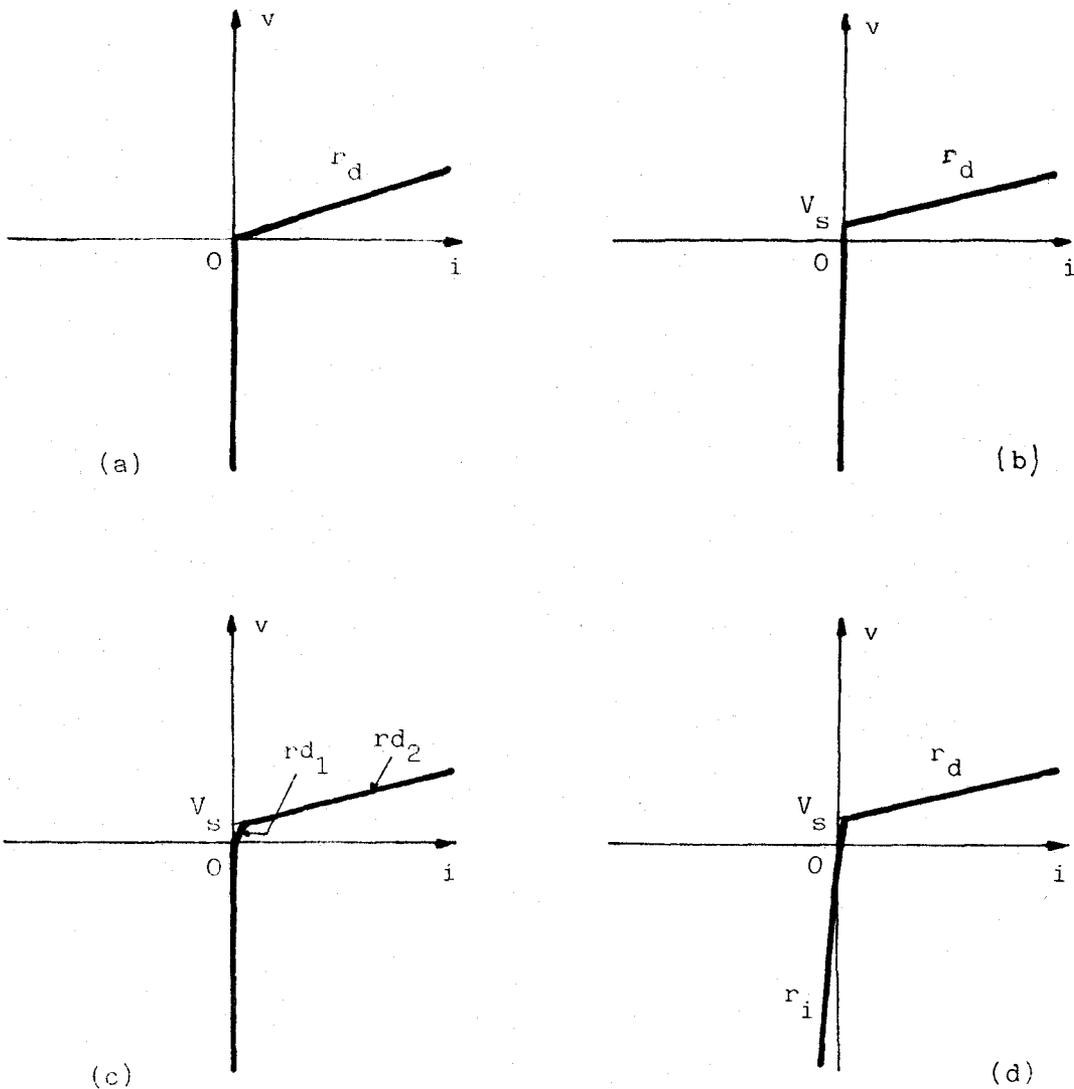


Figure 1.3

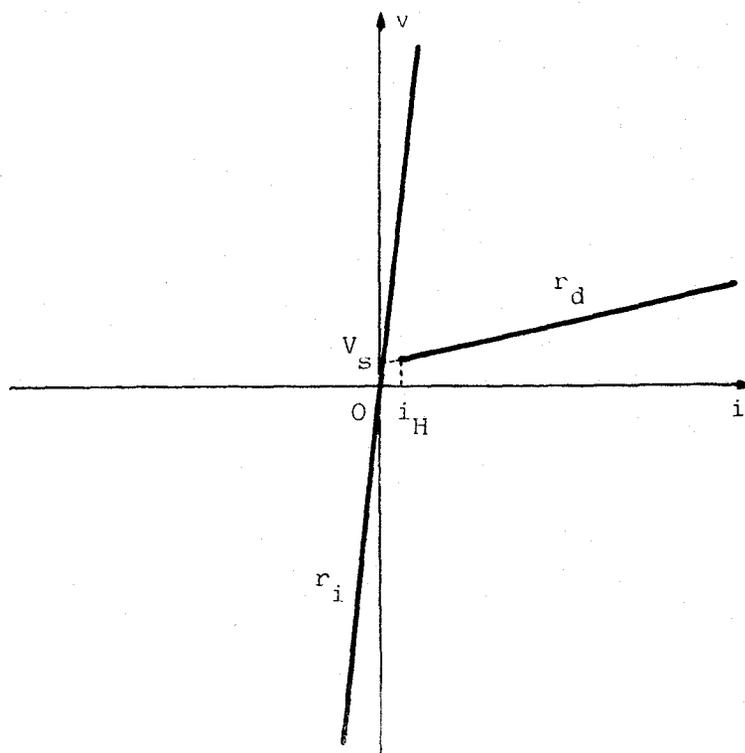


Figure 1.4

1.2.4. Simulation sur ordinateur numérique

La simulation par séquences sur ordinateur numérique présente les mêmes inconvénients que l'utilisation d'un ordinateur analogique, elle nécessite la connaissance préalable de l'enchaînement des phases de fonctionnement.

Néanmoins la mise en oeuvre des tests de passage est plus facile de sorte que ce type de simulation est employé, de préférence, lorsque la complexité du circuit s'accroît [10]. L'importance des tests logiques a d'ailleurs conduit certains auteurs à caractériser l'état du thyristor par une fonction logique [11].

Cette méthode permet de suivre aisément l'évolution des paramètres [12], [13] (temps de blocage, vitesses de croissance $\frac{dv}{dt}$ ou $\frac{di}{dt}$ de la tension ou de courant anodiques, etc...) qui conditionnent le bon ou le mauvais fonctionnement et même la destruction du thyristor [14].

Enfin la figure 1.5 représente schématiquement les différentes phases de l'étude lors d'une décomposition en phases.

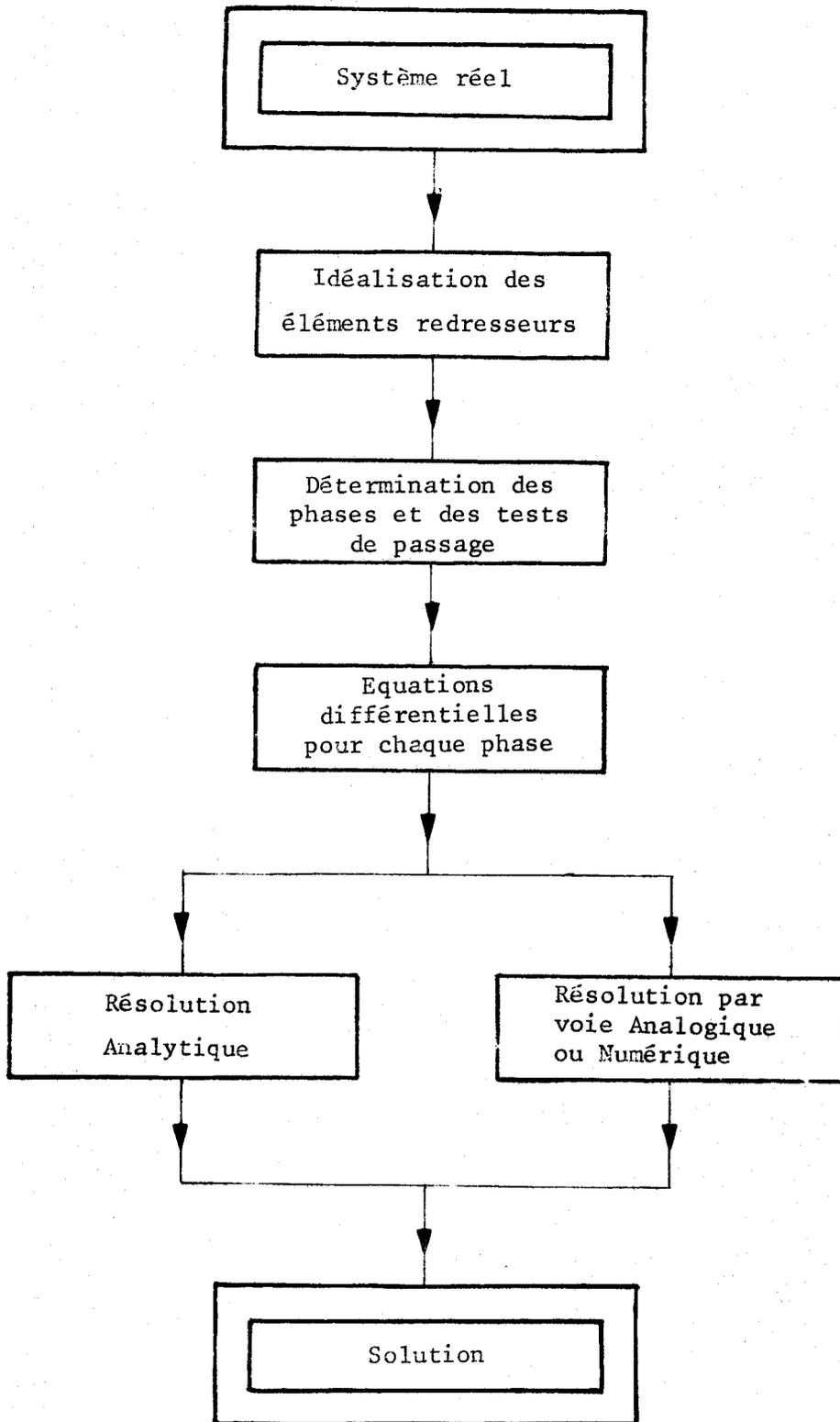


Figure 1.5

1.3. Méthodes d'analyse globale

1.3.1. Formulation globale des équations du circuit[15]

La méthode consiste à considérer un redresseur supposé parfait, comme une résistance constante pour chaque mode de fonctionnement passant ou bloqué.

C'est ainsi que la tension v aux bornes d'une diode a pour expression :

$$v = Di$$

en désignant par i le courant qui la traverse

$D = 0$ lorsque i est positif quelle que soit son intensité

$D = \infty$ soit $i = \frac{v}{D} = 0$ lorsque la tension v est négative

Pour un thyristor ; $v = Ti$

$T = 0$ quand le redresseur est passant quel que soit i positif

$T = \infty$ quand v est négatif ou lorsque v est positif tant qu'une impulsion positive de courant n'a pas été appliquée à l'électrode de commande.

Il est alors procédé à la mise en équation du montage, les éléments D et T intervenant, dans l'écriture de la loi d'Ohm, comme les autres résistances dans chaque maille considérée.

Le système global d'équations est ensuite résolu analytiquement en conservant la notation globale, puis à partir des expressions littérales des variables, sont déterminées les conditions qui caractérisent les changements de phase.

Enfin l'ordinateur est, pour diverses valeurs des paramètres du montage étudié, utilisé au calcul de ses variables caractéristiques et des instants de changement de phase. Le rôle de l'ordinateur est donc beaucoup plus réduit que dans les procédés antérieurs d'intégration des équations différentielles ; la précision obtenue est ainsi meilleure.

1.3.2. Simulation globale analogique [16]

Au niveau du câblage, les correspondances tension-courant ou courant-tension de l'élément non linéaire sont réalisables, lors de la simulation de diodes, au moyen de traducteurs de fonctions.

Ces fonctions peuvent être également obtenues au moyen d'amplificateurs à gain variable, prenant deux valeurs distinctes suivant que le redresseur est conducteur ou bloqué [6].

Le gain de l'amplificateur est lié à la valeur d'une variable logique donnant l'image du comportement du redresseur.

Cette simulation globale ne nécessite aucune connaissance préalable de fonctionnement du circuit étudié. Toutefois, la difficulté du câblage s'accroît avec le nombre d'équations à simuler, représentatives de la description globale du système et surtout en fonction de celui des modules traduisant les caractéristiques des semiconducteurs.

1.3.3. Simulation globale par câblage direct

La méthode précédente présente une grande souplesse quant à l'exploitation des résultats, néanmoins elle n'offre pas les avantages d'une étude sur maquette. En effet, une modification de structure même minime du circuit peut entraîner un changement important au niveau du système d'équations représentatif du système, ce qui conduit à reprendre totalement le câblage sur la calculatrice analogique.

Lors d'une étude sur maquette, le câblage (et ses modifications) ne pose pas de problèmes, puisqu'il reproduit le câblage réel. Par contre, l'exploitation des résultats est assez délicate car les grandeurs du montage ne sont pas de même nature (tensions et courants) et ne possèdent pas de référence commune.

H. FOCH [6] a imaginé une nouvelle méthode de simulation réunissant les avantages des deux méthodes précédentes en atténuant les inconvénients qu'elles présentent.

Elle consiste à réaliser, au moyen de circuits auxiliaires, des opérateurs "flottants" délivrant, sous forme de tension, l'image :

- du courant dans une admittance créée par la tension appliquée à ses bornes
- de la tension aux bornes d'une impédance résultant de la circulation du courant qui la traverse.

1.3.4. Simulation globale numérique [6] [17]

Cette méthode globale nécessite la modélisation des diodes et des thyristors dont les organigrammes de représentation s'intègrent à l'organigramme général.

A partir de l'état initial du système qu'il convient de définir au préalable, la résolution s'effectue par la méthode de Runge-Kutta en adaptant le pas de calcul pour réduire la durée du temps de calcul tout en garantissant la précision et la stabilité de la solution.

Il importe également d'élaborer le programme de commande des thyristors dont les séquences d'amorçage sont imposées.

1.4. Méthode proposée [18]

Cette méthode d'étude globale consiste à s'affranchir des variables dépendantes introduites par les non linéarités en imposant une évolution appropriée, entre deux instants t_n et t_{n+1} , à une ou plusieurs variables du système. Il est ainsi possible de fixer la loi d'évolution de la tension aux bornes de chaque non linéarité et de connaître alors le courant qui la traverse ⁽¹⁾.

Une procédure de test permet, par modification des coefficients des polynomes caractérisant les signaux imposés, d'obtenir la réponse du circuit aux instants considérés.

Nous avons, au chapitre 2, exposé d'abord le principe de cette méthode en considérant le montage redresseur simple alternance à diode débitant sur une résistance pure. Nous avons ensuite envisagé une première extension aux circuits comprenant plusieurs éléments non linéaires à point commun.

(1) Dans le cas d'un système à structure série, la loi d'évolution du courant dans les non linéarités est imposée et fixe celle de la tension aux bornes des éléments non linéaires.

Au chapitre 3, la structure précédente étant conservée, la résistance est remplacée par un récepteur régi par une équation linéaire du premier ordre. La précision en fonction du pas de calcul et de l'erreur admise dans l'appréciation de la condition de test est estimée.

Abordant, au chapitre 4, l'étude d'un système à structure série, le fait d'imposer, entre deux instants de tests successifs, la loi d'évolution du courant, permet, par une procédure de test sur les tensions, d'obtenir la réponse cherchée. Les résultats obtenus sont comparés à ceux que donnerait la méthode du générateur de tension appliquée au même circuit.

Considérant (chapitre 5) à nouveau un circuit à structure parallèle dont la partie linéaire est constituée d'éléments associés en cascade, nous recherchons la précision dans la détermination du courant fourni à l'ensemble de la charge en fonction de la forme d'onde imposée aux diverses grandeurs électriques qu'il est possible de choisir pour l'application de la méthode proposée.

Nous avons envisagé (chapitre 6) l'extension de la méthode à des circuits à structure encore plus complexes définis par deux ensembles alimentés par un ou plusieurs systèmes de tensions polyphasés et constitués par des non linéarités connectées à des éléments linéaires couplés en polygone ou en étoile. Le mode opératoire défini est ensuite adapté à l'étude des montages redresseurs en pont et du phénomène d'empiètement.

Nous avons enfin (chapitre 7) appliqué la méthode à l'étude de deux circuits dont la caractéristique de certains des éléments non linéaires n'est pas indépendante du temps. Pour le premier comportant des thyristors, nous avons tout d'abord défini une procédure qui permet de déduire le courant qui les traverse en fonction de la tension imposée à leurs bornes. En application, nous avons traité du gradateur triphasé mixte débitant sur trois résistances inductives couplées en étoile. Au moyen du second comprenant un moteur pas à pas, nous avons montré qu'il était possible d'adapter la méthode à la résolution d'équations non linéaires.

Le diagramme de la figure 1.6 situe la méthode proposée par rapport à celles présentées précédemment.

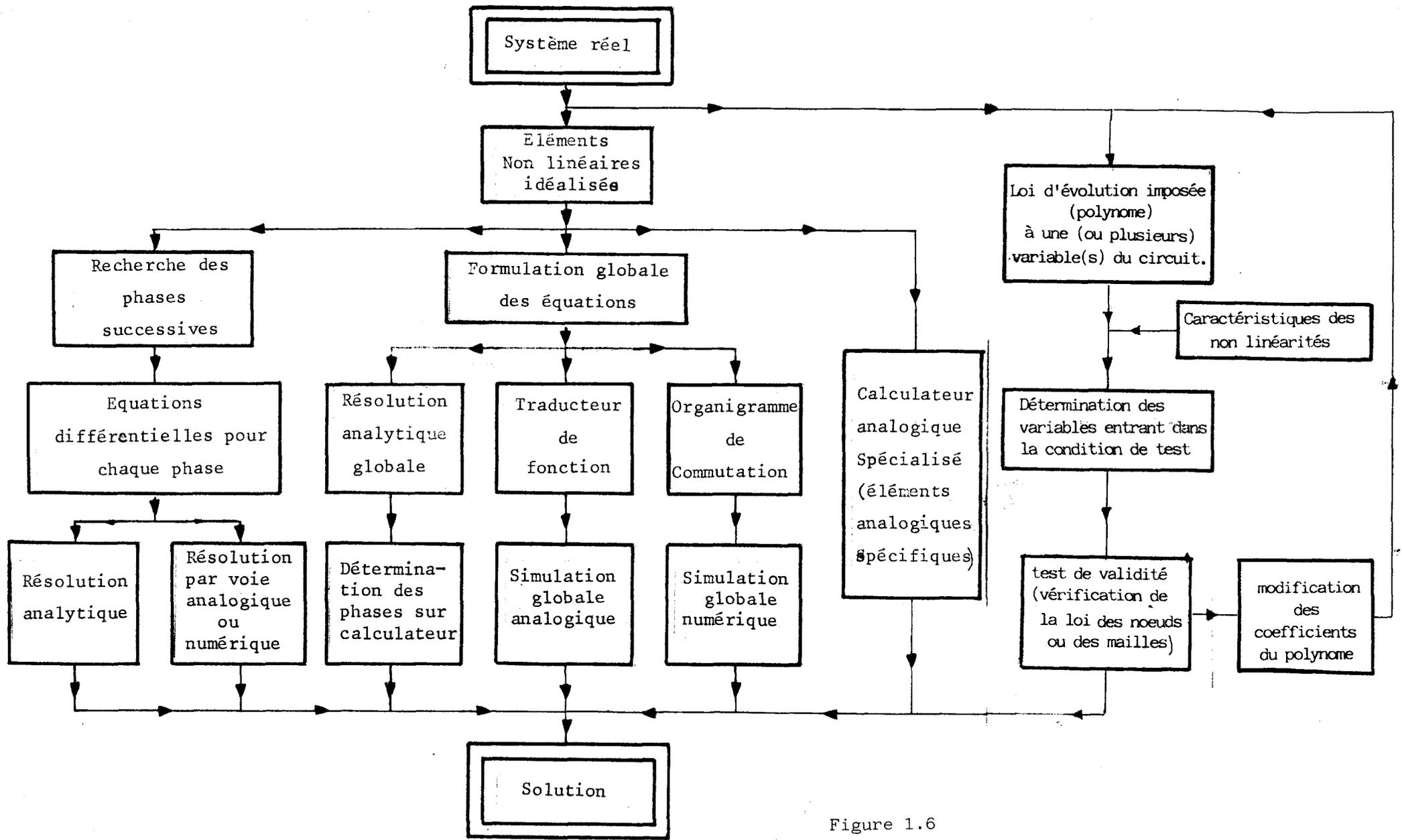


Figure 1.6

CHAPITRE 2

Présentation et mise en oeuvre
de la méthode proposée

2.1. Introduction

Nous nous proposons de présenter notre méthode [18] en considérant le système le plus élémentaire constitué par un composant non linéaire associé en série à un élément linéaire à caractéristique instantanée.

La mise en oeuvre portera sur l'étude du montage redresseur simple alternance à diode débitant sur une résistance pure.

Enfin, nous envisageons une première extension de notre méthode aux circuits comprenant plusieurs éléments non linéaires à point commun.

2.2. Principe de la méthode

Soit le système comportant (figure 2.1) une résistance R montée en série avec un élément non linéaire à caractéristique $v(i)$ biunivoque (figure 2.2).

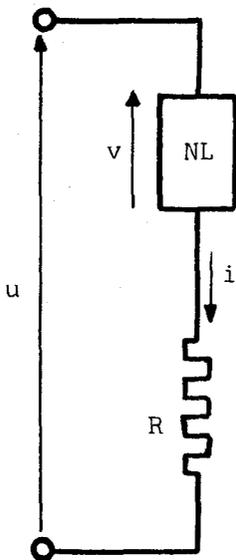


Figure 2.1

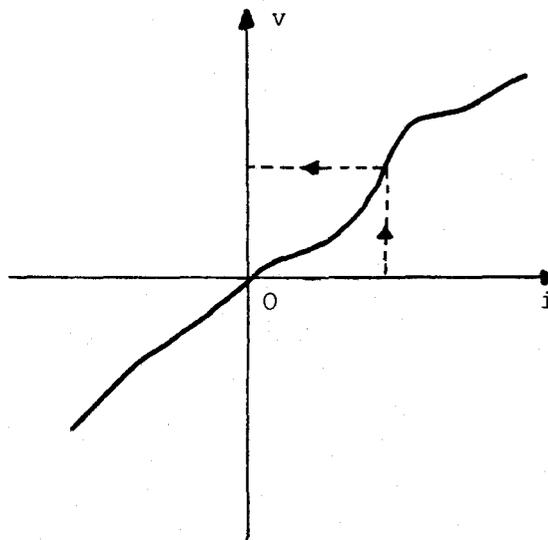


Figure 2.2

2.2.1. Introduction d'un circuit associé

Considérons le circuit associé de la figure 2.3 alimenté par la même tension u et obtenu en ajoutant aux bornes de l'élément non linéaire du montage initial une source, de force électromotrice e (de forme d'onde quelconque) et d'impédance interne négligeable.

Cette tension e impose, dans la branche NL, le courant j , fonction de la caractéristique $e(j)$ identique à $v(i)$.

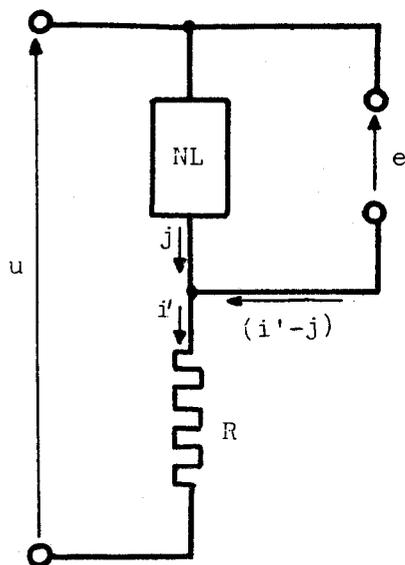


Figure 2.3

La détermination du courant i dans le système étudié est le résultat d'une procédure de tests portant sur les courants i' et j .

2.2.2. Courant dans le circuit réel

Le circuit de la figure 2.1. est régi par les équations :

$$(2.1) \quad u = v + Ri$$

$$(2.2) \quad v = v(i)$$

Pour une valeur donnée de u , celle prise par le courant i est unique à condition de ne pas trouver deux intensités i_1 et i_2 telles que :

$$(2.3) \quad u = v(i_1) + R i_1 = v(i_2) + R i_2$$

Soit lorsque

$$(2.4) \quad \frac{v(i_1) - v(i_2)}{i_1 - i_2} = -R$$

La relation (2.3) n'est jamais satisfaite et par conséquent la solution est unique si la pente de la caractéristique $v(i)$ est toujours positive ou nulle, ce qui est en particulier le cas lorsque l'élément non linéaire est une diode.

2.2.3. Courants dans le circuit associé

Les courants i' et j dans le circuit associé sont donnés par les relations indépendantes :

$$(2.5) \quad Ri' = u - e$$

$$(2.6) \quad j = j(e)$$

Si au moyen d'un test approprié, on constate que l'égalité $i' = j$ est satisfaite, le générateur e ne délivre alors aucun courant et la relation:

$$u = e + R i'$$

devient successivement :

$$u = v(j) + R i'$$

$$(2.7) \quad u = v(i') + R i'$$

Comme les circuits étudié et associé sont alimentés par la même tension u , il vient d'après (2.1) et (2.7) :

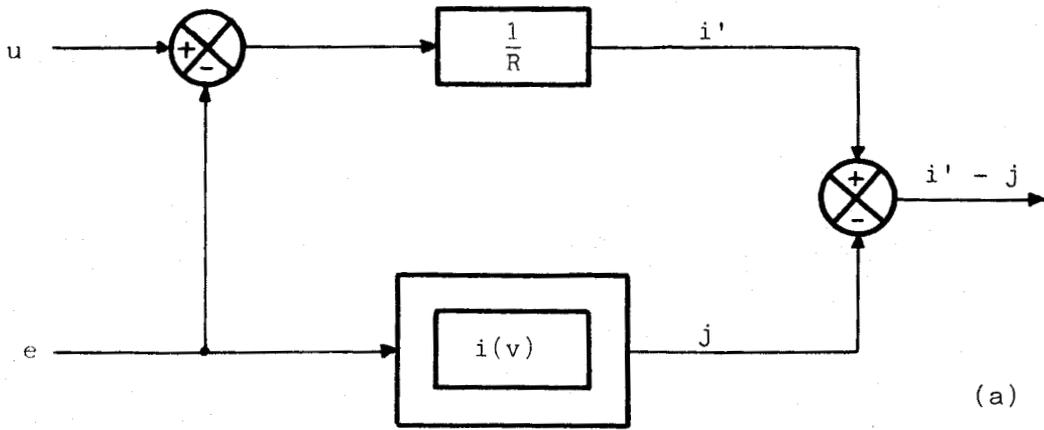
$$(2.8) \quad v(i) + R i = v(i') + R i'$$

La relation (2.8) étant identique à l'expression (2.3), le test $i' = j$ conduit à l'égalité $i' = i$ dans la mesure où la condition d'unicité de la réponse du circuit réel est satisfaite, à savoir caractéristique $v(i)$ à pente toujours positive ou nulle.

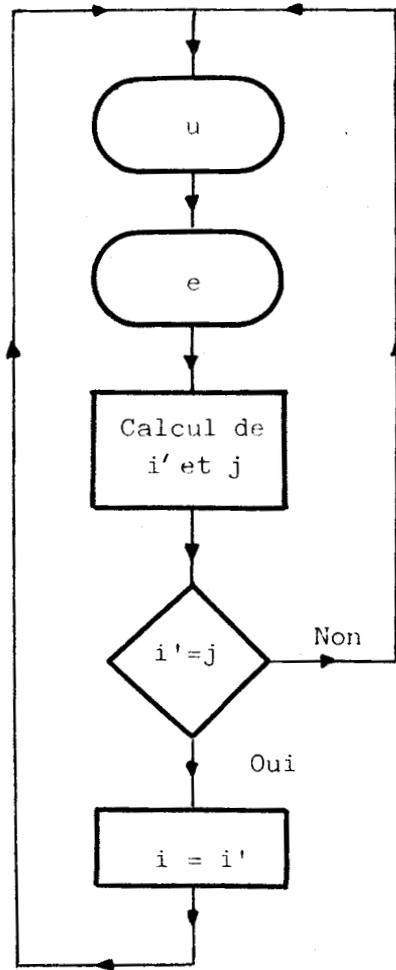
2.2.4. Détermination du courant i

La détermination du courant i peut être obtenue par techniques analogique (figure 2.4a) ou numérique (figure 2.4b).

La condition $i' - j = 0$ dans le premier cas ou $i' = j$ dans le second entraîne : $i = i'$.



(a)



(b)

Figure 2.4.

2.3. Mise en oeuvre de la méthode

Nous nous proposons d'étudier le circuit élémentaire constitué (figure 2.5) par l'association en série d'une diode D et d'une résistance $R = 0,6\Omega$ et alimenté par une tension sinusoïdale $u = U_m \sin 2\pi ft = U_m \sin \omega t$, d'amplitude $U_m = 18 V$ et de fréquence $f = 0,05 Hz$.

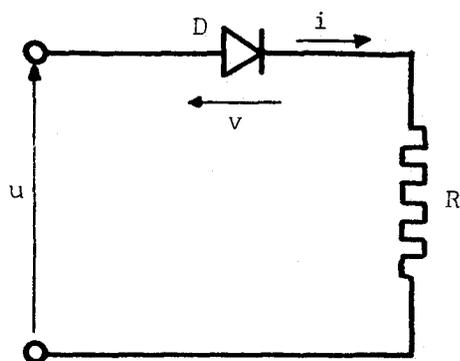


Figure 2.5

La caractéristique idéalisée de la diode D (figure 2.6) est définie dans le sens passant, par sa tension de seuil $V_s = 0,6V$ et sa résistance dynamique $r_d = \text{tg}\alpha = 0,2\Omega$. L'impédance de la diode, en régime bloqué, est supposée infinie

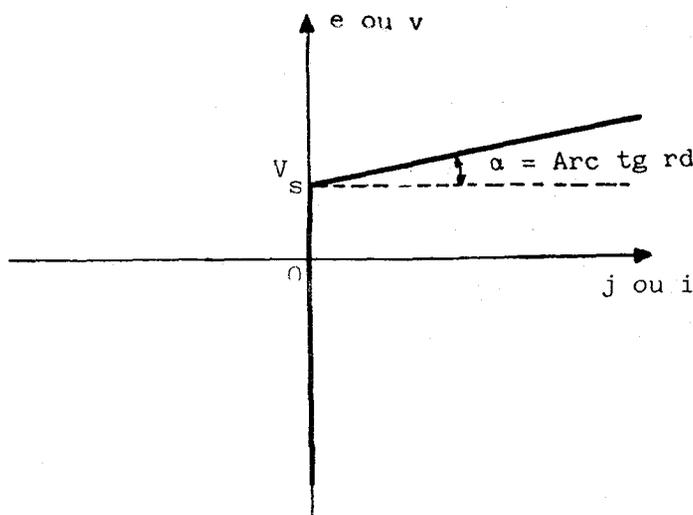


Figure 2.6

Après avoir présenté succinctement les résultats obtenus sur calculatrice analogique, moyen par lequel nous avons initialement testé la méthode proposée, nous développerons la procédure adoptée pour la détermination de la réponse de ce circuit sur calculatrice numérique. Ce mode d'investigation sera d'ailleurs le seul retenu lorsque nous envisagerons d'étendre le champ d'application de la méthode.

2.3.1. Etude sur calculatrice analogique

La forme d'onde de la tension e est indifférente ; nous adoptons donc pour e , par raison de commodité, un signal sinusoïdal de fréquence kf et d'amplitude E_m , au moins égale à la tension inverse maximale apparaissant aux bornes de la diode D . Dans ces conditions :

$$e = E_m \sin (k\omega t + \psi)$$

ψ représentant la phase à l'origine

La modification des valeurs des paramètres k et ψ permet d'obtenir des états à test positif plus nombreux et de mieux définir ainsi les courbes représentant les variations des grandeurs caractéristiques du montage.

Comme la diode D et la résistance R sont des éléments à caractéristique instantanée pour lesquels la tension aux bornes est liée essentiellement au courant, indépendamment du temps, la réponse du circuit n'est pas affectée par la fréquence de la tension u . La pulsation de la source fournissant la tension simulée peut donc être choisie de façon quelconque, sans relation avec celle de u . La valeur adoptée est fixée principalement par des impératifs d'enregistrement.

La figure 2.7. reproduit les points obtenus pour $i(t)$ et $v(t)$, en prenant pour E_m , k et ψ les valeurs particulières $E_m = 20V$, $k=5$, $\psi=0$.

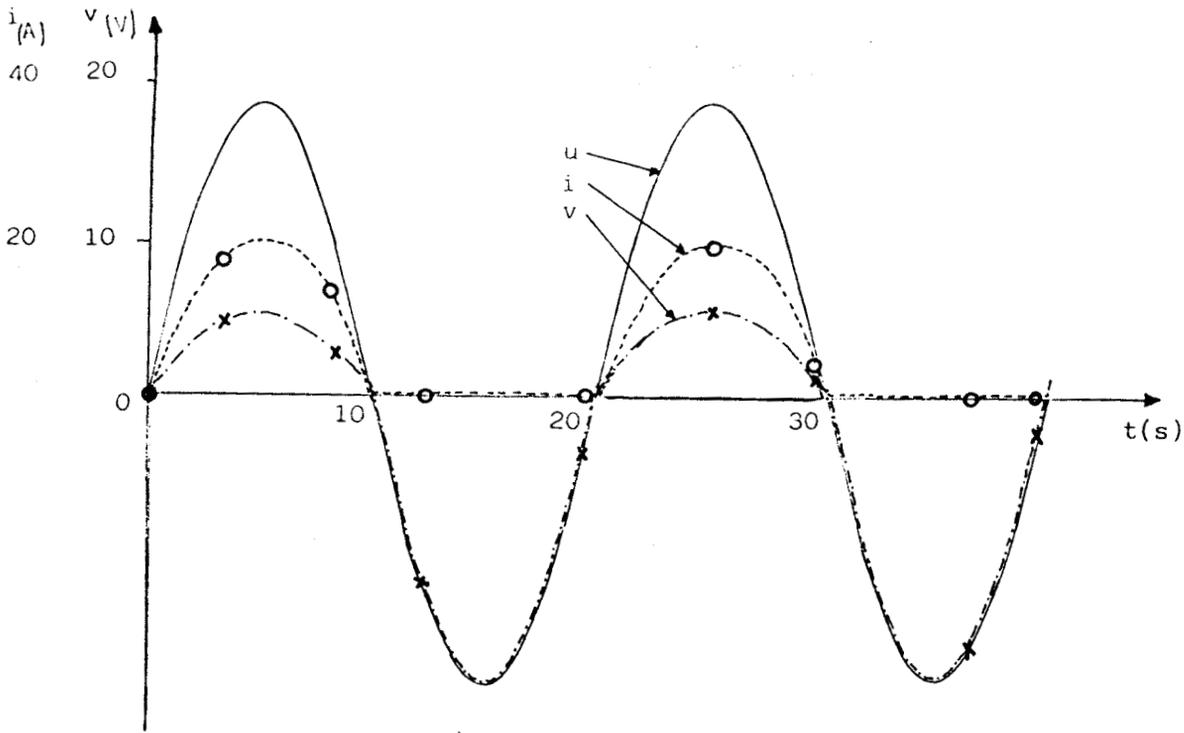


Figure 2.7

2.3.2. Mise en oeuvre sur calculatrice numérique

2.3.2.1. Précision dans la saisie de la condition $i' = j$

Comme les variables u , e , j et i' évoluent discrètement en fonction du pas de calcul Δt , l'égalité stricte $i' = j$ est rarement vérifiée.

Il convient d'imposer une limite supérieure ϵ à l'écart relatif λ permis pour l'estimation de la condition précédente .

Pour les valeurs non nulles de i' et j nous admettons que $i' = j = i$ lorsque :

$$\left| \frac{i' - j}{i'} \right| = \lambda \leq \epsilon \cong 0,01$$

Nous attribuons la valeur nulle à i si :

- $|i'| = \lambda \leq \epsilon = 0,01$ lorsque $j = 0$
- $|j| = \lambda \leq \epsilon = 0,01$ lorsque $i' = 0$

L'organigramme de la figure 2.8 résume la procédure adoptée pour la saisie de la condition de test.

2.3.2.2. Technique de recherche des points

Comme le régime permanent du courant i et de la tension v s'établit instantanément dans le circuit réel dès l'apparition de la tension d'alimentation u , il est donc possible, pour une valeur non entière de k , de rechercher, sur plusieurs périodes de u , les instants pour lesquels $i'=j=i$, puis regrouper les valeurs correspondantes de i et v sur une seule période.

IL est toutefois plus simple de conserver ce dernier intervalle d'étude et de modifier les paramètres E_m , k et ψ caractérisant la force électromotrice e .

En supposant que celle-ci évolue sinusoidalement :

$$e = E_m \sin (k\omega t + \psi)$$

La figure 2.9 présente l'organigramme retenu pour cette étude lorsqu'on modifie la valeur de ψ pour obtenir des points de test positif plus nombreux. Les autres paramètres conservent les valeurs précédentes.

Afin d'augmenter la probabilité d'obtention d'un point il faut que l'évolution de e , sur un intervalle correspondant à Δt , soit également relativement faible. En adoptant un pas de calcul $\Delta t = 0,1$ ms les variations de e sont au plus égales à 3 mV, on en déduit celles de la différence $i'-j$:

$$\begin{aligned} |\Delta(i'-j)|_{\max} &= |\Delta i'|_{\max} + |\Delta j|_{\max} \\ &= \frac{|\Delta u|_{\max} + |\Delta e|_{\max}}{R} + \frac{|\Delta e|_{\max}}{rd} \\ &\neq 20\text{mA} \end{aligned}$$

Cette valeur conditionne d'ailleurs le choix de la limite supérieure de l'erreur permise.

Pour réduire le temps de calcul nous nous sommes fixé deux pas de variation possibles pour Δt , la précision dans l'appréciation de la condition de test étant accrue lorsque Δt diminue (tableau 2.1)

K	Δt	Condition de test
1	$\Delta t = 10 \quad \Delta t_1 = 1 \text{ ms}$	$\Delta = i' - j \leq 0,1$
2	$\Delta t = \Delta t_1 = 0,1 \text{ ms}$	$\lambda \leq \epsilon = 0,01$

Tableau 2.1

Les calculs ont été réalisés au moyen d'un calculateur Hewlett-Packard HP 9830.

La figure 2.10a reproduit pour $k = 5$ et ψ valant successivement 0 et $\frac{\pi}{4}$ rad, les courbes $i' - j$ relevées au moyen d'une table traçante.

Les figures 2.10b et 2.10c représentent les caractéristiques $i(t)$ et $v(t)$, du circuit réel tracées à partir des valeurs de ces grandeurs aux instants de test positif.

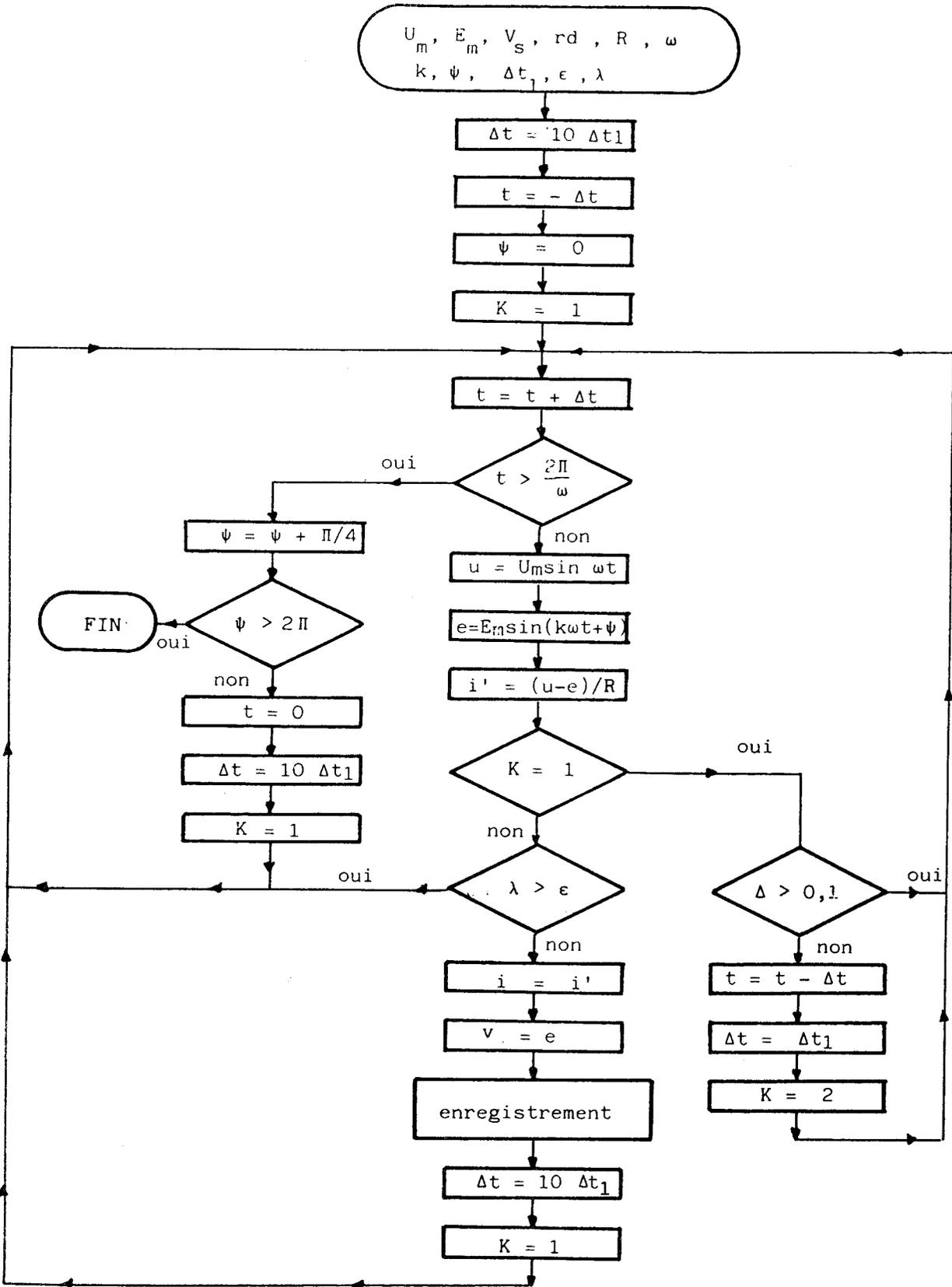


Figure 2.9

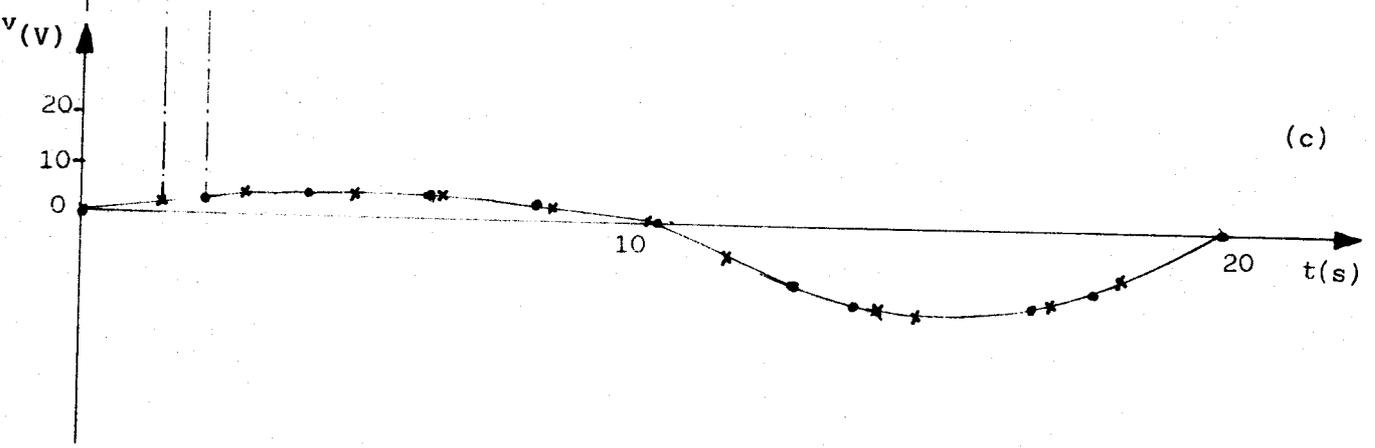
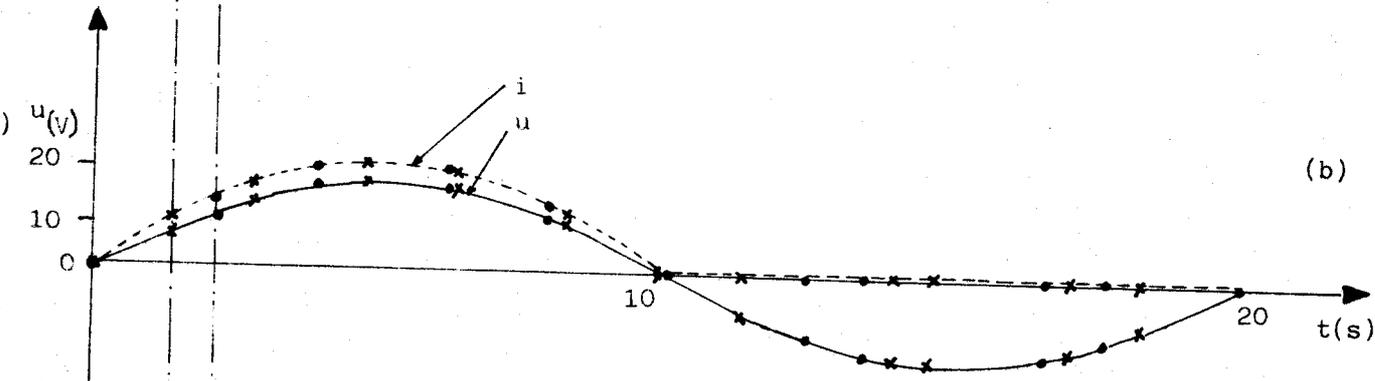
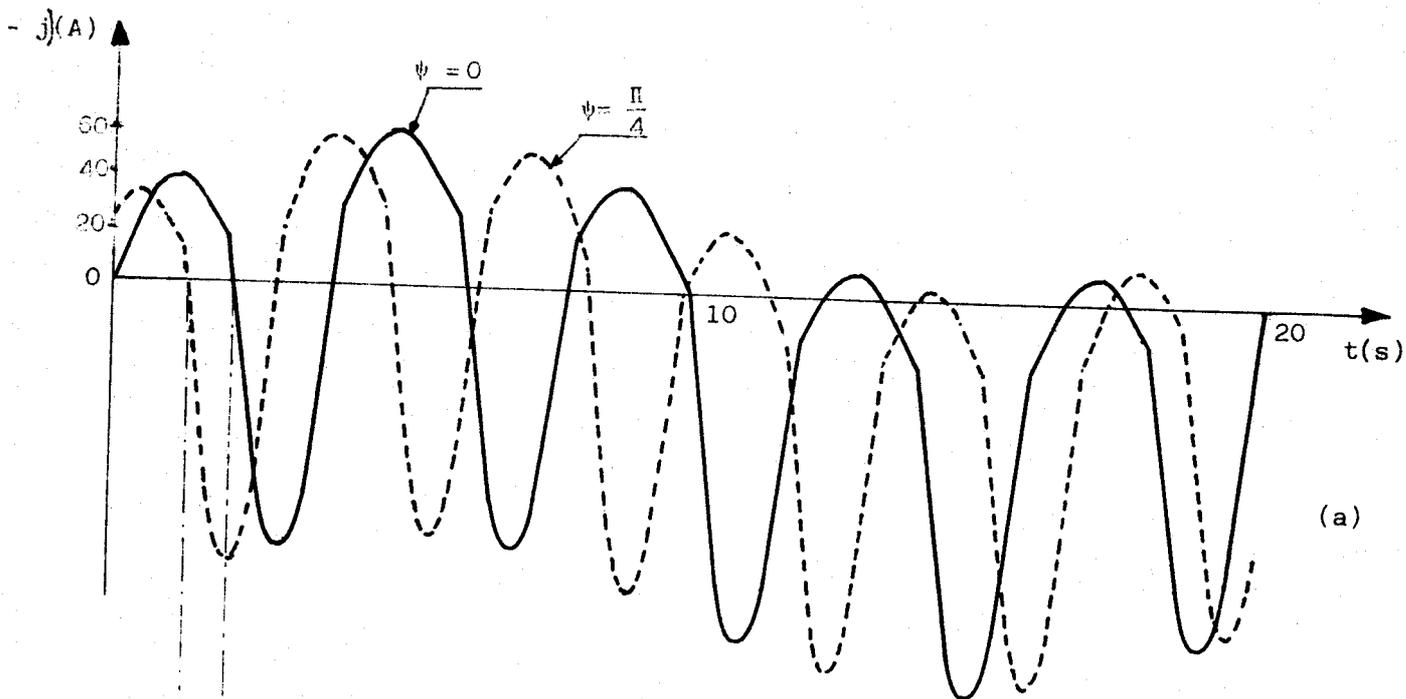


Figure 2.10

2.3.2.3. Recherche systématique des points

L'examen des courbes de la figure 2.10 montre que les points de test positif ne sont pas régulièrement répartis en fonction du temps, de sorte qu'elles sont, dans certaines zones, insuffisamment définies. De plus, le temps de calcul, nécessaire à la recherche d'un point très proche d'un autre précédemment déterminé, est perdu inutilement.

Pour pallier cet inconvénient, nous proposons une recherche systématique des points.

2.3.2.3.1. Principe

Les instants t_n auxquels nous désirons connaître la réponse du circuit sont imposés.

La valeur u_n de la tension u étant fixée, il convient de faire varier l'un des paramètres caractérisant la force électromotrice e jusqu'à l'obtention d'un point de test positif.

L'organigramme de la figure 2.11 schématise le mode opératoire lorsqu'on agit sur k pour la détermination d'un point.

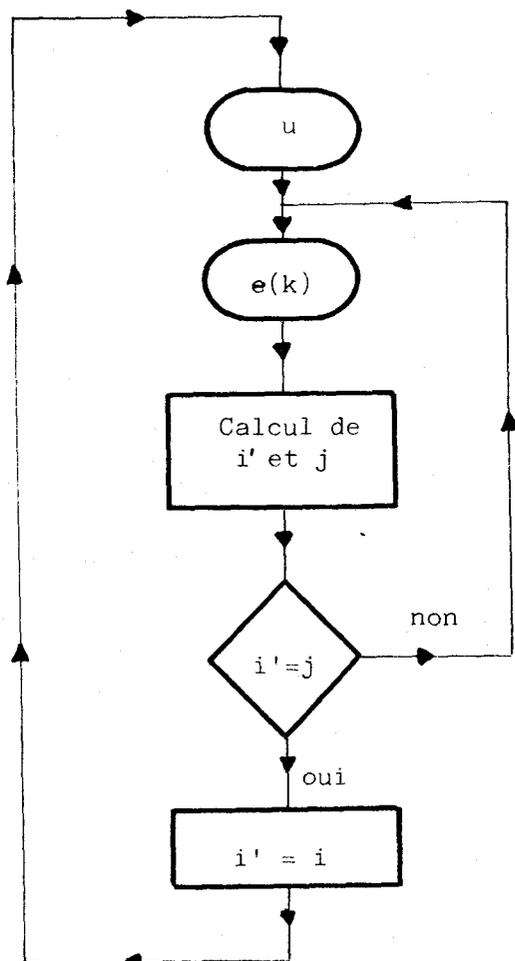


figure 2.11

2.3.2.3.2. Mise en oeuvre

La figure 2.12 représente l'organigramme retenu pour cette étude lorsque le nombre N de points désirés pour définir les courbes $i(t)$ et $v(t)$ sur une période de la tension d'alimentation u est fixé à 20. ($\Delta t=1$ s). Nous avons conservé ψ comme paramètre réglable mais dans ce cas les variations de ψ doivent être faibles de façon à pouvoir augmenter la probabilité d'obtention d'un point.

Comme précédemment nous nous sommes fixé deux pas de variation possibles pour ψ afin de réduire le temps de calcul. La précision dans l'appréciation de la condition de test étant accrue lorsque ψ diminue (tableau 2.2).

Les courbes $u(t)$, $i(t)$ et $v(t)$ sont obtenues figure 2.13 en tracé continu, à partir des ordonnées de ces grandeurs lorsque la condition de test est vérifiée.

K		Condition de test
1	$\Delta\psi = 10 \Delta\psi_1 = 0,1 \text{ rd}$	$\Delta = i' - j \leq 0,1$
2	$\Delta\psi = \Delta\psi_1 = 0,01 \text{ rd}$	$\lambda \leq \epsilon = 0,01$

Tableau 2.2

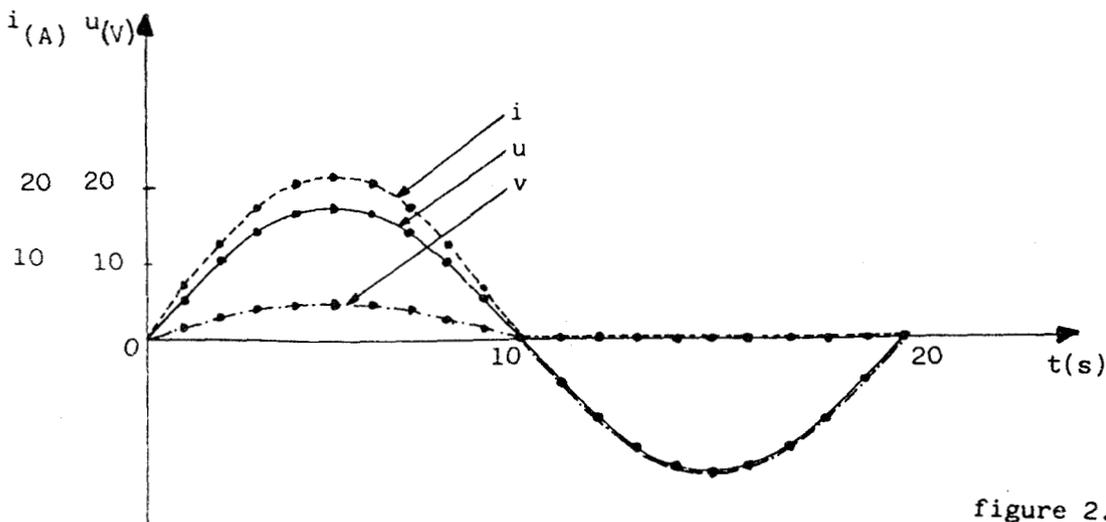


figure 2.13

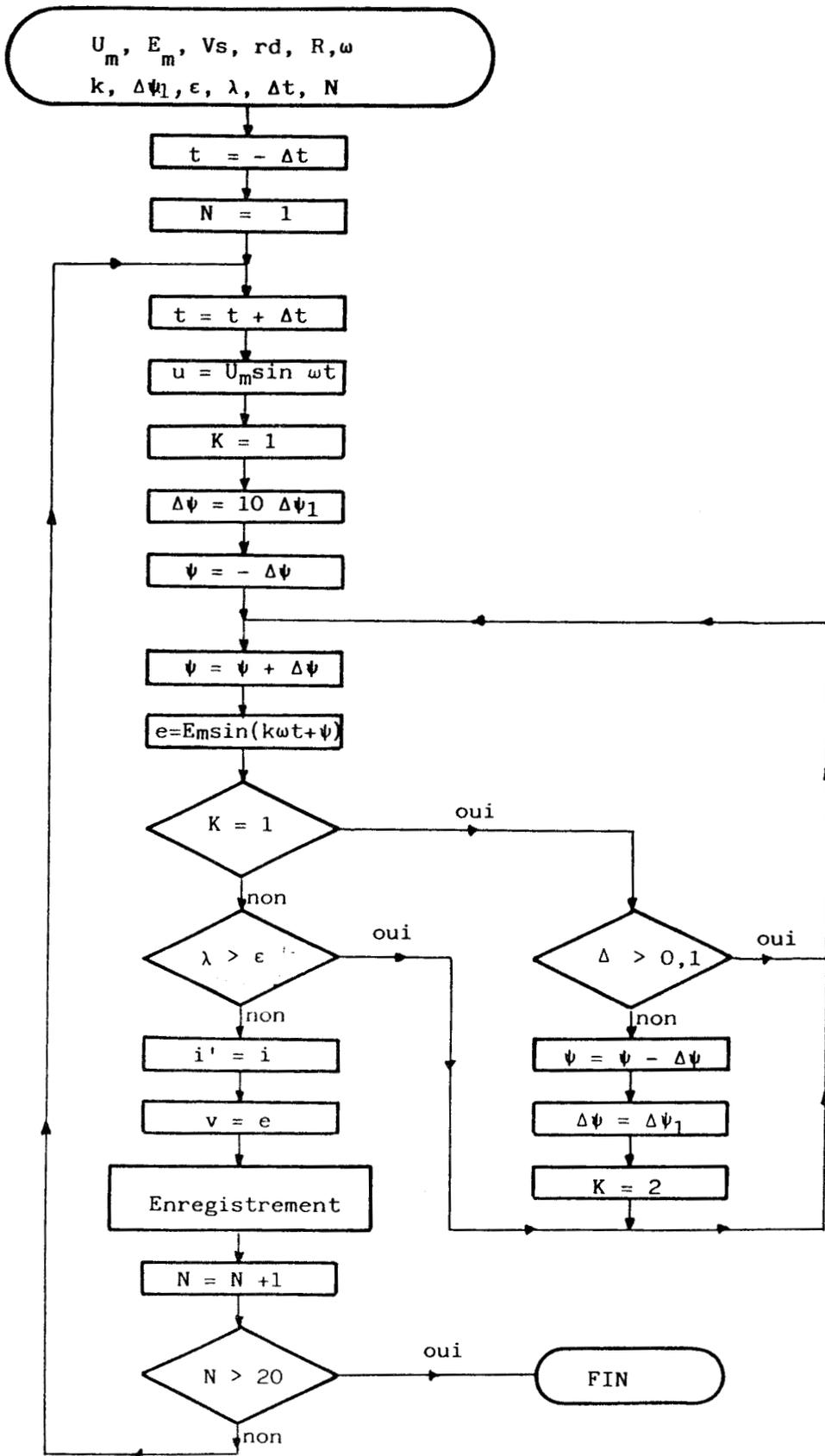


Figure 2.12.

2.4. Extension de la méthode aux circuits à éléments non linéaires à point commun

Nous nous proposons de rechercher la réponse du circuit de la figure 2.14 comprenant plusieurs éléments non linéaires NL^k à point commun (pouvant représenter un commutateur à diodes à cathodes communes) en série avec un élément linéaire à caractéristique instantanée (résistance). L'ensemble est alimenté par un système de tensions étoilées u^k .

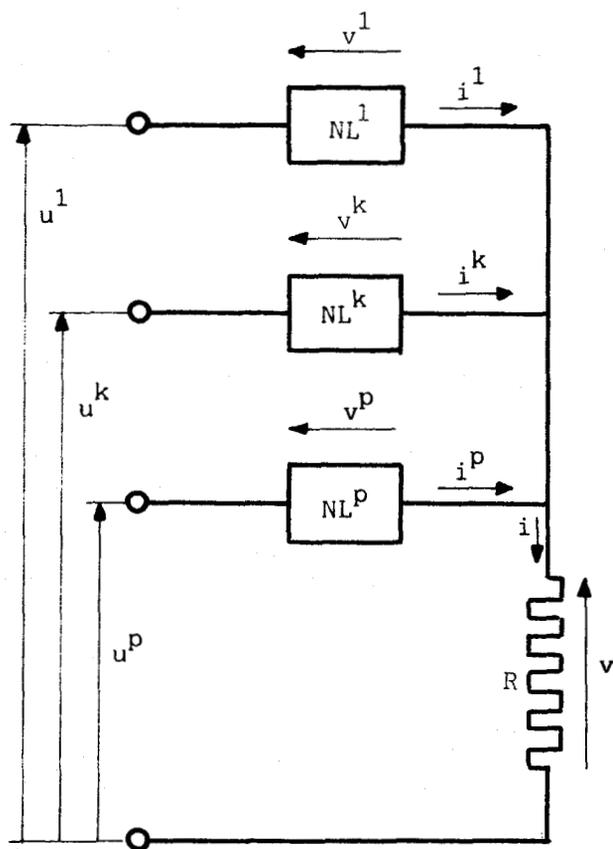


figure 2.14

2.4.1. Structure du circuit associé

Le fait d'avoir, pour le circuit associé du système monophasé, ajouté un générateur de force électromotrice e aux bornes de l'élément non linéaire pourrait nous conduire à connecter (figure 2.15) un générateur aux bornes de chaque élément NL .

Cette disposition n'est pas acceptable, car les forces électromotrices liées par les relations :

$$(2.9) \quad u^1 + e^1 = \dots = u^k + e^k = \dots = u^p + e^p$$

ne sont pas indépendantes.

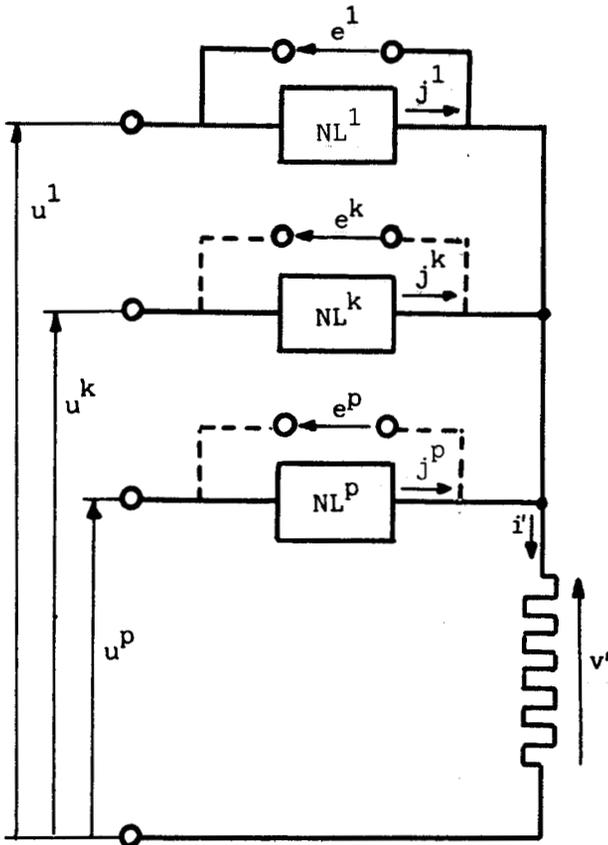


figure 2.15

En réalité, un seul générateur suffit, par exemple celui de force électromotrice e^1 (les connexions des autres générateurs, inutiles d'ailleurs, ont été représentées en pointillé).

Le but du (ou des) générateur(s) introduit(s) dans le circuit associé est de fixer la loi d'évolution de la tension aux bornes de chaque non linéarité de façon à imposer le courant qui la traverse, fonction de la caractéristique $v^k(i^k)$.

C'est ainsi que chaque non linéarité de la figure 2.15 est soumise à la tension connue :

$$(2.10) e^k = u^k - u^1 + e^1$$

L'emplacement du générateur est arbitraire ; il peut aussi être branché aux bornes de la résistance R (figures 2.16).

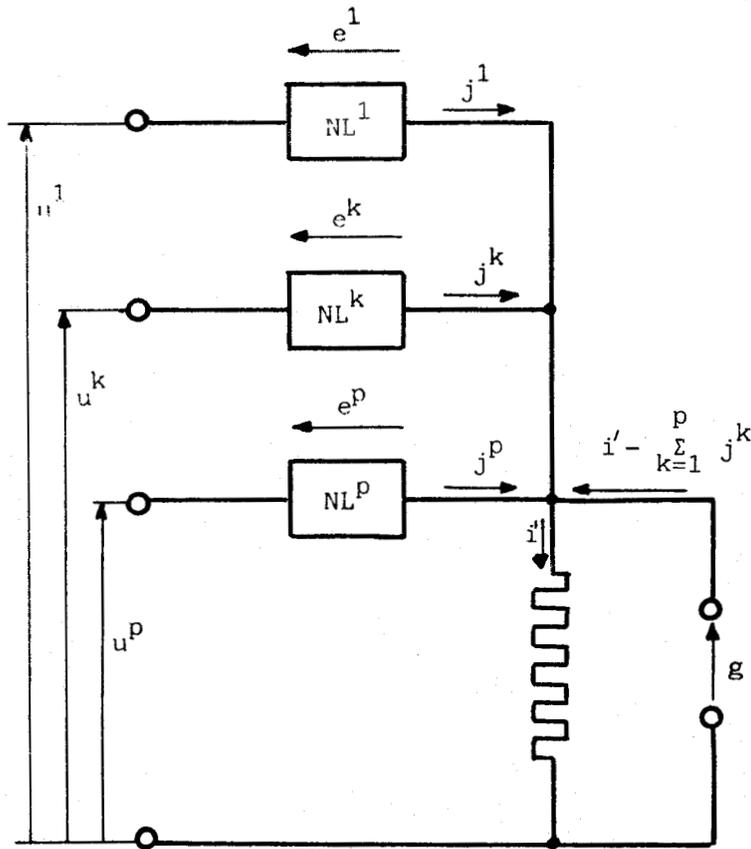


figure 2.16

En désignant par g sa force électromotrice, il impose :

- le courant dans la résistance de charge R

$$(2.11) i' = \frac{g}{R}$$

- la tension aux bornes de chaque non linéarité

$$e^k(j^k) = u^k - g$$

Soit en remplaçant g par son expression en fonction de i'

$$(2.12) \quad e^k(j^k) = u^k - R i'$$

- la condition d'un test positif

$$(2.13) \quad \sum_{k=1}^p j^k = i'$$

2.4.2. Condition de test positif

Supposons que la caractéristique $v^k(i^k)$, identique à $e^k(j^k)$, soit à pente toujours positive ou nulle.

Le fonctionnement du circuit réel est régi par les équations

$$(2.14) \quad v^k(i^k) = u^k - R i$$

$$(2.15) \quad \sum_{k=1}^p i^k = i$$

Par différence des relations (2.12) et (2.14) il vient :

$$(2.16) \quad e^k(j^k) - v^k(i^k) = R (i - i')$$

Cette égalité valable quel que soit l'instant considéré, l'est en particulier pour une valeur g_1 de g qui vérifie le test. D'où le système :

$$(2.17) \quad e_1^k(j_1^k) - v^k(i^k) = R (i - i'_1)$$

$$(2.18) \quad \sum_{k=1}^p j_1^k = i'_1$$

qui admet pour solution particulière $i'_1 = i$ donc $j_1^k = i^k$

Envisageons cependant le cas où i soit différent de i'_1 tel que par exemple $i'_1 > i$

Il en résulte, compte tenu des restrictions formulées sur les caractéristiques $v^k(i^k)$ et des relations (2.15) et (2.18) les inégalités successives:

$$e_1^k(j_1^k) < v^k(i^k)$$

$$j_1^k \leq i^k$$

$$i'_1 \leq i$$

qui conduisent à un résultat incompatible avec l'hypothèse initiale $i'_1 > i$.

La vérification du test $\sum_{k=1}^p j^k = i'$ entraîne l'égalité $i' = i$ dans la mesure où la condition d'unicité de la réponse du circuit réel est satisfaite.

La disposition adoptée pour le générateur montre que le nombre de ceux-ci n'est pas lié à celui des non-linéarités.

2.4.3. Organigramme de principe

Le schéma de la figure 2.17 reproduit l'organigramme résumant la procédure à suivre dans le cas d'une recherche systématique des points.

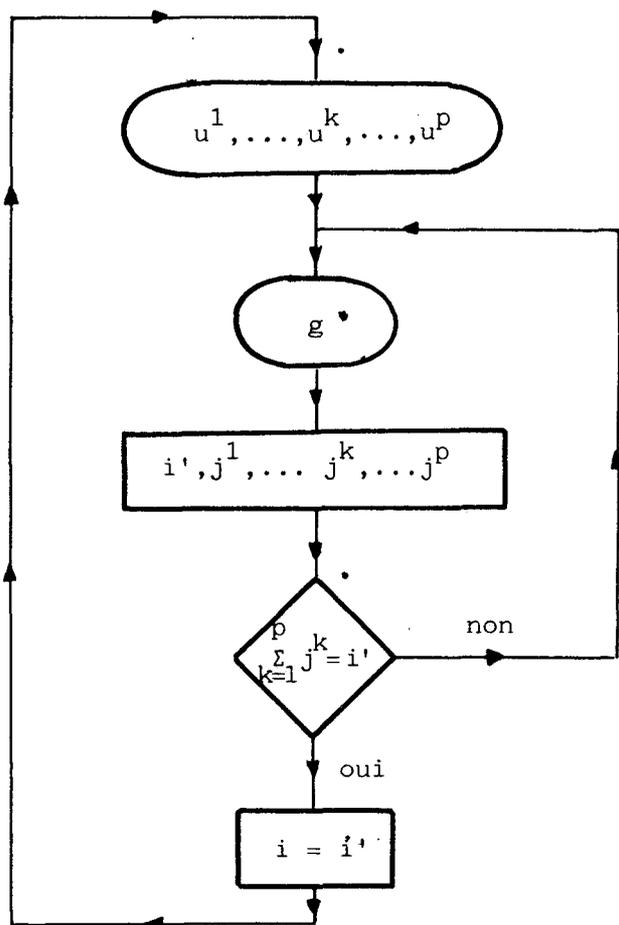


Figure 2.17.

2.4.4. Application : Montage triphasé étoile à diodes

Les figures 2.18(a) et (b) représentent respectivement les circuits étudié et associé alimentés, à la fréquence $f = 50$ Hz, par trois tensions triphasées équilibrées u^1 , u^2 et u^3 , de séquence directe et d'amplitude $U_m = 180$ V :

$$u^1 = U_m \sin \frac{2\pi ft}{1000} = U_m \sin 0,1 \pi t$$

$$u^2 = U_m \sin \left(\frac{2\pi ft}{1000} - \frac{2\pi}{3} \right) = U_m \sin \left(0,1 \pi t - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$u^3 = U_m \sin \left(\frac{2\pi ft}{1000} - \frac{4\pi}{3} \right) = U_m \sin \left(0,1 \pi t - \frac{4\pi}{3} \right)$$

le temps t étant exprimé en millisecondes.

Pour la recherche systématique des points, nous nous sommes imposés quarante points ($N = 40$) de test par période $T = 20$ ms ; soit $\Delta t = 0,5$ ms

Le récepteur est une résistance $R = 10\Omega$. Les diodes admettent pour caractéristique $v(i)$ ou $e(j)$ celle de la figure 2.6 : $V_s = 0,6$ V et $r_d = 0,2\Omega$.

La force électromotrice sinusoïdale délivrée par le générateur associé a pour expression :

$$g = G_m \sin \left(\frac{2k\pi ft}{1000} + \psi \right) = G_m \sin (0,1 k\pi t + \psi)$$

Le choix de G_m est arbitraire ; cette amplitude doit toutefois être suffisante pour obtenir les points de fonctionnement pour lesquels la tension inverse est maximale aux bornes des diodes.

Nous avons adopté $G_m = 2 U_m = 360$ V

En convenant de noter :

$$\Delta = |i' - (j^1 + j^2 + j^3)|$$

$$\lambda = \left| \frac{i' - (j^1 + j^2 + j^3)}{i'} \right| \quad \text{lorsque} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} i' \neq 0 \\ (j^1 + j^2 + j^3) \neq 0 \end{matrix}$$

$$\lambda = |i'| \quad \text{lorsque} \quad j^1 + j^2 + j^3 = 0$$

$$\lambda = |j^1 + j^2 + j^3| \quad \text{lorsque} \quad i' = 0$$

la structure de l'organigramme, lorsqu'on adopte ψ comme paramètre variable est identique à celle présentée pour l'étude du redressement simple alternance (figure 2.12), seules changent les relations qui conduisent aux différents courants :

$$\begin{aligned}
 i' &= \frac{g}{R} \\
 j^1 &= \frac{u^1 - g - Vs}{rd} & \text{si } (u^1 - g) > Vs \\
 j^1 &= 0 & \text{si } (u^1 - g) \leq Vs \\
 j^2 &= \frac{u^2 - g - Vs}{rd} & \text{si } (u^2 - g) > Vs \\
 j^2 &= 0 & \text{si } (u^2 - g) \leq Vs \\
 j^3 &= \frac{u^3 - g - Vs}{rd} & \text{si } (u^3 - g) > Vs \\
 j^3 &= 0 & \text{si } (u^3 - g) \leq Vs
 \end{aligned}$$

La figure 2.19 reproduit les variations, point par point en fonction du temps, des grandeurs i^1 , v et v^1 caractéristiques du circuit étudié lorsque la limite supérieure de l'erreur relative permise est de 0,01.

2.5. Conclusion

La méthode proposée consiste à ajouter au système à étudier, un générateur de tension, qui permet alors de fixer la loi d'évolution de la tension aux bornes de chaque non linéarité et d'imposer ainsi le courant qui la traverse.

Une procédure de test est ensuite mise en oeuvre de telle sorte qu'il soit, à divers instants régulièrement répartis au cours de la période, possible, par modification d'un des paramètres caractérisant la force électromotrice délivrée par le générateur, de trouver la réponse du circuit associé qui soit, à l'instant considéré, solution du système initial.

Cette méthode a été appliquée à l'étude de circuits comprenant plusieurs éléments non linéaires à point commun montés en cascade avec un élément linéaire à caractéristique instantanée.

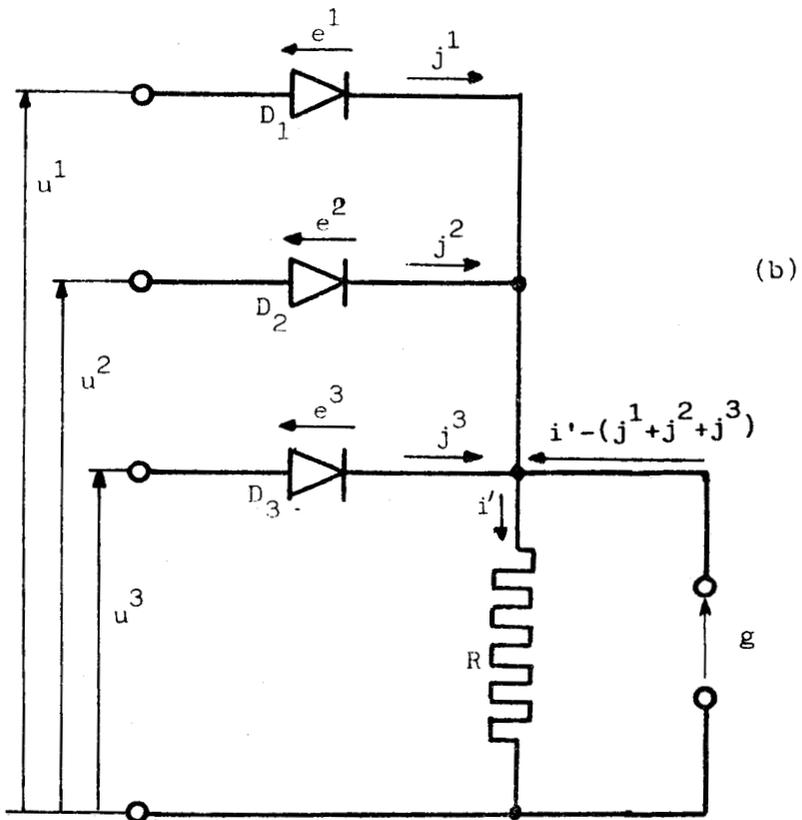
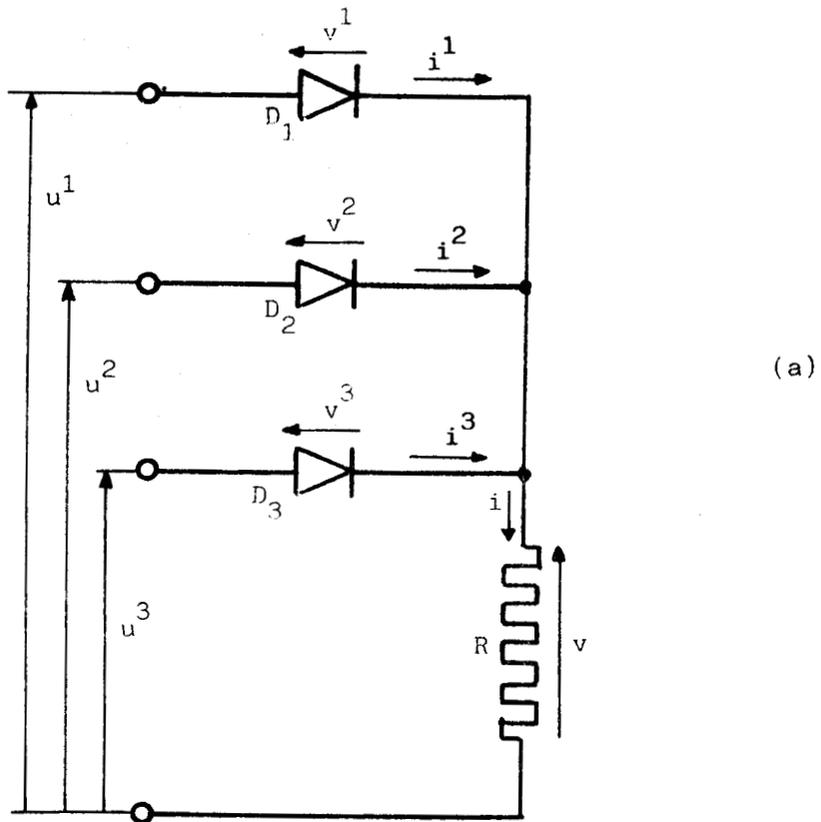


figure 2.18

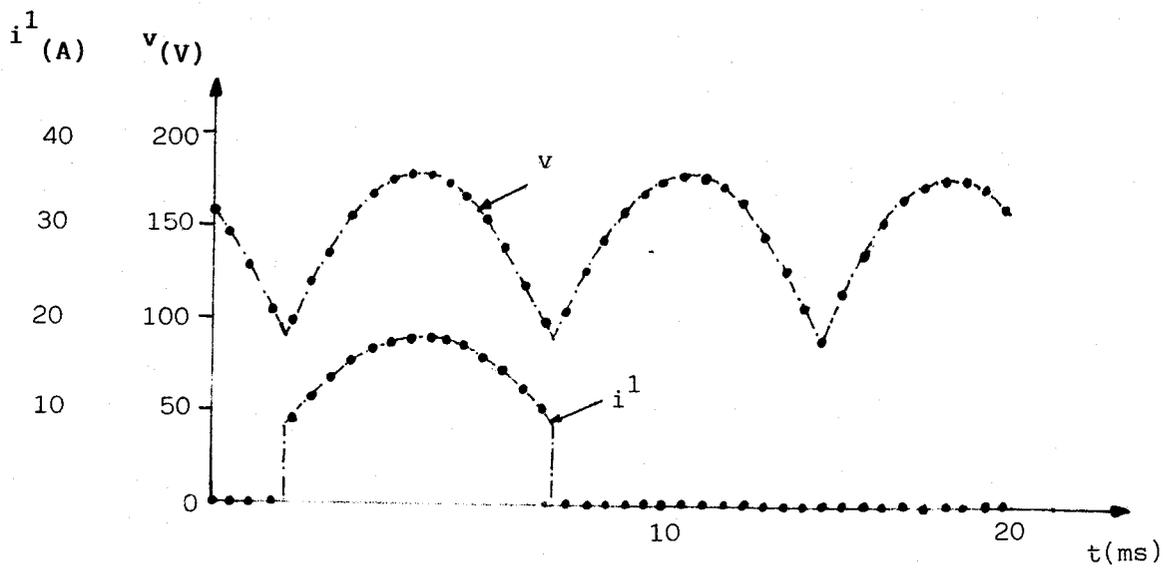
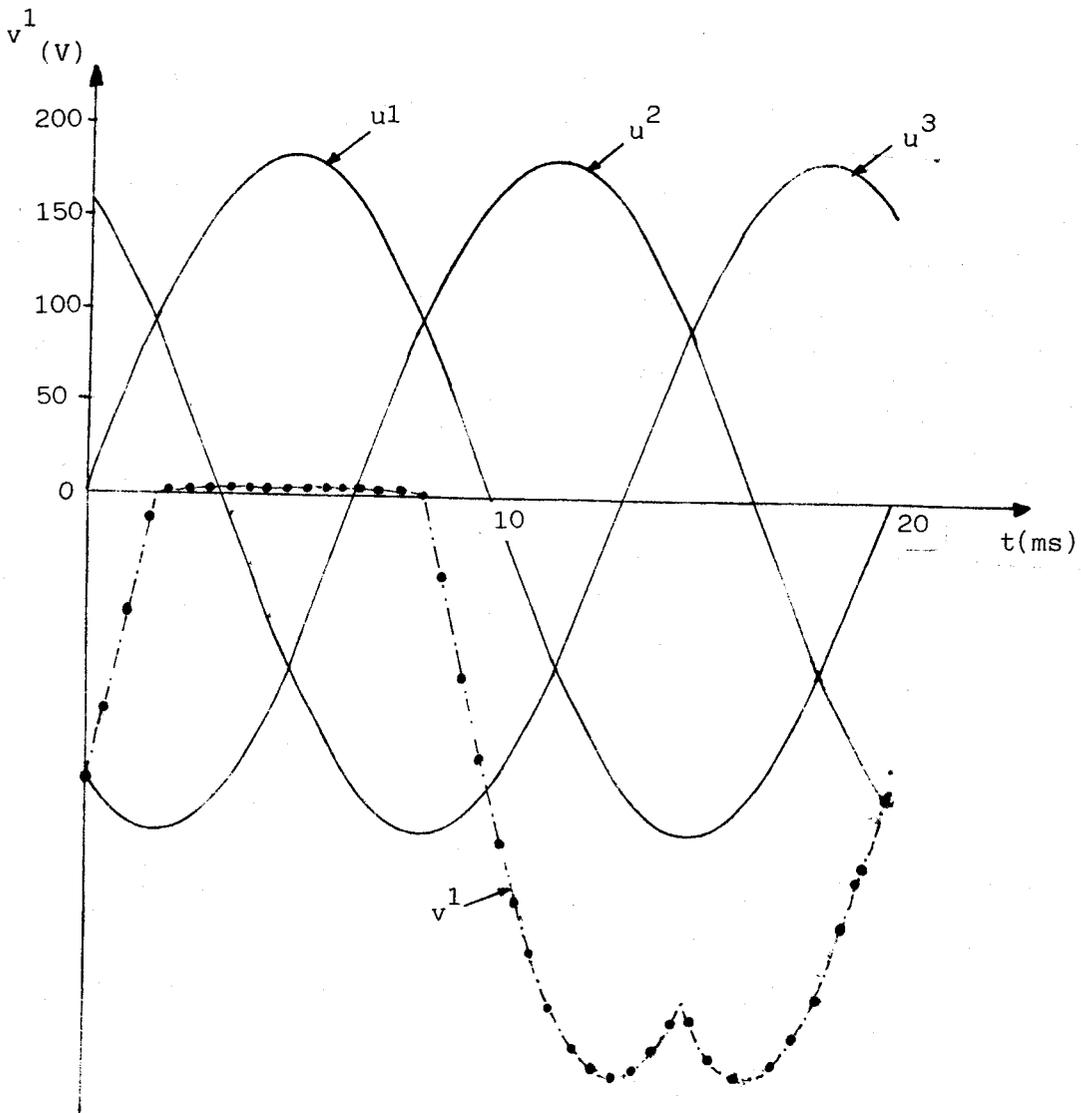


Figure 2.19

CHAPITRE 3

Circuit à structure parallèle, à partie linéaire du premier ordre

3.1. Introduction

L'extension de la méthode est envisagée en considérant toujours un circuit électrique comprenant plusieurs éléments non linéaires à point commun, mais montés maintenant en cascade avec une résistance inductive d'éléments R et L.

Un générateur extérieur impose, à la tension aux bornes du récepteur, une variation linéaire entre deux instants t_n et t_{n+1} de tests successifs.

La procédure mise en oeuvre permet d'obtenir, aux instants précédemment définis, la réponse approchée du circuit considéré, par réglage de la pente imposée à l'évolution de la tension.

L'application de cette méthode porte sur le circuit constitué d'une diode montée en série avec une résistance inductive shuntée par une diode (1) connectée en parallèle inverse.

La comparaison des résultats obtenus avec la réponse exacte du système permet d'estimer la précision de la méthode en fonction des valeurs choisies pour les différents paramètres introduits par la procédure de tests.

3.2. Circuit associé

Le circuit de la figure 3.1. sur lequel nous proposons l'extension de la méthode présentée au chapitre 2 est régi par les équations :

$$(3.1) \quad u^k - v^k(i^k) = v$$

$$(3.2) \quad Ri + L \frac{di}{dt} = v$$

$$(3.3) \quad i = \sum_{k=1}^p i^k$$

Pour s'affranchir, comme précédemment, de la dépendance tension-courant au niveau de chaque non linéarité, il importe de fixer la loi d'évolution de la différence de potentiel apparaissant aux bornes de chacune d'elles.

Un générateur de tension de force électromotrice g et d'impédance interne négligeable est alors branché (figure 3.2) aux bornes du récepteur.

(1) Cet élément est également appelé "diode de récupération" et l'ensemble du montage "circuit roue libre".

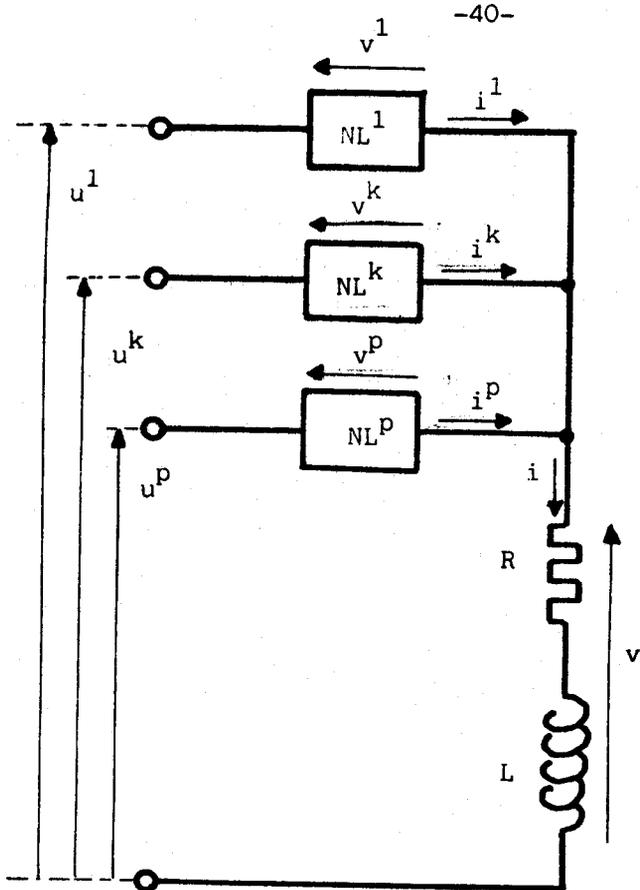


Figure 3.1

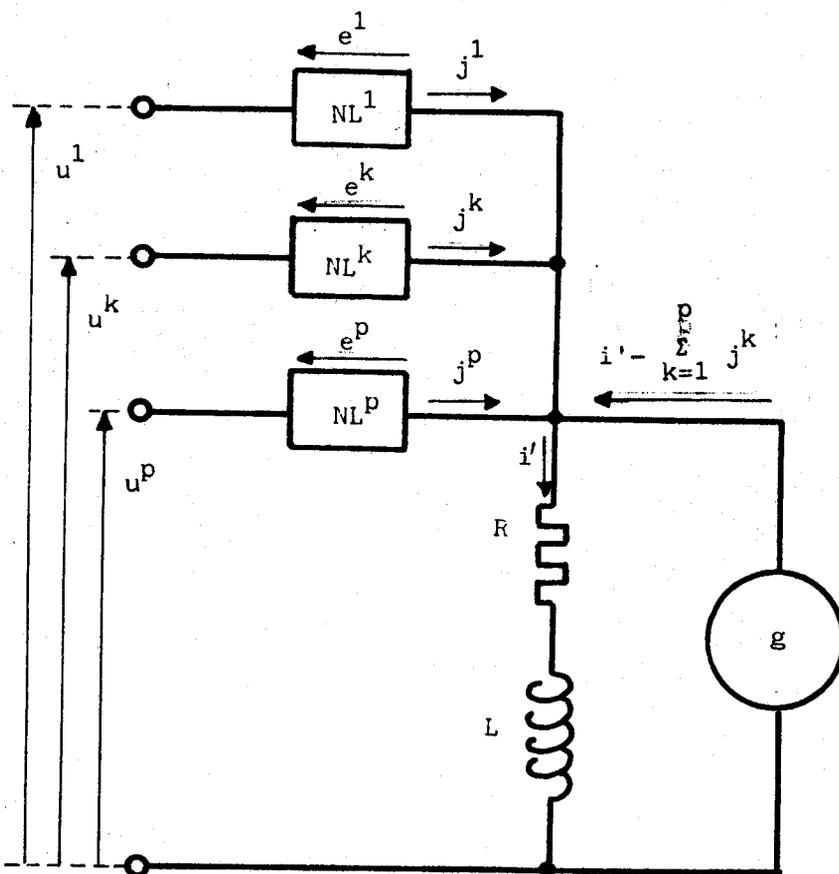


Figure 3.2

A partir de la connaissance de g , il est alors possible de déterminer d'abord la tension e^k aux bornes de chaque non linéarité puis le courant j^k qui la traverse, fonction de la caractéristique $v^k(i^k)$.

Lorsqu'on considère deux instants t_n et t_{n+1} suffisamment rapprochés, il est possible d'admettre que, dans cet intervalle, la variation de la tension v aux bornes du récepteur est, avec une bonne approximation, linéaire.

Le fait d'imposer une évolution linéaire à cette grandeur au moyen du générateur de tension extérieur permet, pour des conditions identiques à l'instant t_n dans les circuits réel et associé : $g_n = v_n$ et $i'_n = i_n$, d'envisager l'obtention, à l'instant t_{n+1} , d'une réponse i'_{n+1} très voisine de i_{n+1} lorsque l'égalité :

$$(3.4) \quad i'_{n+1} = \sum_{k=1}^p j_{n+1}^k$$

est satisfaite.

La condition (3.4) est réalisé en adaptant la pente des signaux rampe délivrés par le générateur de tension.

3.3. Réponses des circuits réel et associé

Nous supposons dans l'intervalle (t_n, t_{n+1}) tel que $t_{n+1} - t_n = \Delta t$:

- la résistance dynamique des éléments non linéaires constante et définie par la relation :

$$(3.5) \quad r_n^k = \left(\frac{dv^k}{di^k} \right)_{i_n^k, v_n^k}$$

- les variations des tensions u^k linéaires :

$$(3.6) \quad u^k = u_n^k + a_n^k (t - t_n)$$

a_n^k désignant la vitesse de croissance de la tension u^k .

3.3.1. Circuit réel (figure 3.1)

Sachant que :

$$(3.7) \quad v^k = v_n^k + r_n^k (i^k - i_n^k),$$

il vient d'après (3.1) et (3.6)

$$u_n^k + a_n^k (t-t_n) - v_n^k - r_n^k (i^k - i_n^k) = v$$

Or :

$$u_n^k - v_n^k = v_n$$

d'où

$$v_n - v = r_n^k (i^k - i_n^k) - a_n^k (t-t_n)$$

soit

$$(3.8) \quad \frac{1}{r_n^k} (v_n - v) = i^k - i_n^k - \frac{a_n^k}{r_n^k} (t-t_n)$$

En sommant membre à membre les p relations nous avons :

$$(v_n - v) \sum_{k=1}^p \frac{1}{r_n^k} = \sum_{k=1}^p i^k - \sum_{k=1}^p i_n^k - (t-t_n) \sum_{k=1}^p \frac{a_n^k}{r_n^k}$$

Posons : $\frac{1}{r_n} = \sum_{k=1}^p \frac{1}{r_n^k}$; il vient :

$$(v_n - v) \frac{1}{r_n} = i - i_n - (t-t_n) \sum_{k=1}^p \frac{a_n^k}{r_n^k}$$

$$(3.9) \quad v_n - v = r_n (i - i_n) - \alpha_n (t-t_n),$$

Le coefficient α_n ayant pour valeur :

$$\alpha_n = r_n \sum_{k=1}^p \frac{a_n^k}{r_n^k}$$

En associant (3.2) et (3.9) il vient :

$$v_n - Ri - L \frac{di}{dt} = r_n (i - i_n) - \alpha_n (t-t_n)$$

Finalement :

$$(3.10) \quad (R + r_n)i + L \frac{di}{dt} = v_n + r_n i_n + \alpha_n (t - t_n)$$

L'équation (3.10) admet pour solution

$$i = \lambda e^{-\frac{R+r_n}{L}(t-t_n)} + \frac{\alpha_n}{R+r_n}(t-t_n) + \frac{v_n+r_n i_n}{R+r_n} - \alpha_n \frac{L}{(R+r_n)^2}$$

Sachant qu'à $t = t_n$, $i = i_n$, la constante λ a pour expression

$$\lambda = i_n - \frac{v_n+r_n i_n}{R+r_n} + \alpha_n \frac{L}{(R+r_n)^2}$$

d'où

$$(3.11) \quad i = \left[i_n - \frac{v_n+r_n i_n}{R+r_n} + \alpha_n \frac{L}{(R+r_n)^2} \right] e^{-\frac{R+r_n}{L}(t-t_n)} + \frac{\alpha_n}{R+r_n}(t-t_n) + \frac{v_n+r_n i_n}{R+r_n} - \alpha_n \frac{L}{(R+r_n)^2}$$

En admettant que $\Delta t \ll \frac{L}{R+r_n}$, le courant i a pour valeur, à l'instant t_{n+1} , en considérant le développement limite de $e^{-\frac{R+r_n}{L} \Delta t}$ jusqu'au second ordre :

$$(3.12) \quad i_{n+1} \approx i_n + \frac{v_n - Ri_n}{L} \Delta t - \left(v_n - Ri_n - \alpha_n \frac{L}{R+r_n} \right) \frac{R+r_n}{2L^2} \Delta t^2$$

3.3.2. Circuit associé (figure 3.2)

Dans l'intervalle t_n, t_{n+1} , la tension aux bornes du récepteur a pour expression :

$$(3.13) \quad g = g_n + a (t - t_n)$$

soit en supposant qu'à t_n : $g_n = v_n$

$$(3.14) \quad g = v_n + a (t - t_n)$$

3.3.2.1. Condition sur la somme des courants j à l'instant t_{n+1}

A l'instant t_n :

$$e_n^k = u_n^k - v_n = v_n^k$$

d'où :

$$j_n^k = i_n^k$$

Dans ces conditions, la tension aux bornes de la non linéarité de rang k a pour expression :

$$(3.15) \quad e^k = v_n^k + r_n^k (j_n^k - i_n^k)$$

A l'instant t_{n+1} :

$$u_{n+1}^k = e_{n+1}^k + g_{n+1}$$

soit :

$$u_n^k + a_n^k \Delta t = v_n^k + r_n^k (j_{n+1}^k - i_n^k) + v_n + a \Delta t$$

d'où :

$$(a_n^k - a) \Delta t = r_n^k (j_{n+1}^k - i_n^k)$$

$$\left(\frac{a_n^k}{r_n^k} - \frac{a}{r_n^k} \right) \Delta t = j_{n+1}^k - i_n^k$$

En sommant membre à membre les p relations précédentes, il vient :

$$\left(\sum_{k=1}^p \frac{a_n^k}{r_n^k} - \frac{a}{r_n} \right) \Delta t = \sum_{k=1}^p j_{n+1}^k - i_n$$

Finalement :

$$(3.16) \quad (a_n - a) \Delta t = r_n \left(\sum_{k=1}^p j_{n+1}^k - i_n \right)$$

3.3.2.2. Expression du courant i' à l'instant t_{n+1}

L'expression algébrique du courant i' est tirée de la relation :

$$L \frac{di'}{dt} + R i' = v_n + a (t - t_n)$$

semblable à l'équation (3.10), il vient donc :

$$i' = \left(i_n - \frac{v_n}{R} + a \frac{L}{R^2} \right) e^{-\frac{R}{L}(t-t_n)} + \frac{a}{R} (t-t_n) + \frac{v_n}{R} - a \frac{L}{R^2}$$

d'où en admettant $\Delta t \ll \frac{L}{R}$, la valeur approchée du courant i' à t_{n+1} :

$$(3.17) \quad i'_{n+1} \approx i_n + \frac{v_n - R i_n}{L} \Delta t - (v_n - R i_n - a \frac{L}{R}) \frac{R}{2L^2} \Delta t^2$$

3.3.2.3. Pente a_0 de la rampe de tension imposée

Supposons satisfaite la condition de test (3.4) :

$$i'_{n+1} = \sum_{k=1}^p j_{n+1}^k$$

En désignant par a^* la pente correspondante de la rampe de tension, la relation (3.16) devient :

$$(3.18) \quad (\alpha_n - a^*) \Delta t = r_n (i'_{n+1} - i_n)$$

La relation (3.17) devient :

$$i'_{n+1} - i_n \approx \frac{v_n - R i_n}{L} \Delta t - (v_n - R i_n) \frac{R}{2L^2} \Delta t^2 + \frac{a^*}{2L} \Delta t^2$$

En reportant cette valeur de $i'_{n+1} - i_n$ dans (3.18), il vient :

$$\alpha_n - a^* \approx r_n \frac{v_n - R i_n}{L} - r_n (v_n - R i_n) \frac{R}{2L^2} \Delta t + r_n \frac{a^*}{2L} \Delta t$$

soit

$$-a^* \left(1 + \frac{r_n}{2L} \Delta t \right) \approx r_n \frac{v_n - R i_n}{L} \left(1 - \frac{R}{2L} \Delta t \right) - \alpha_n$$

ou encore en admettant $\Delta t \ll \frac{2L}{r_n}$

$$(3.19) \quad -a^* \approx r_n \frac{v_n - R i_n}{L} \left(1 - \frac{R + r_n}{2L} \Delta t \right) - \left(1 - \frac{r_n}{2L} \Delta t \right) \alpha_n$$

Cette valeur de a^* constitue donc la pente de la rampe de tension appliquée à l'ensemble R, L dans l'intervalle de temps (t_n, t_{n+1}) lorsque la condition de test est satisfaite.

3.3.2.4. Comparaison des courants i_{n+1} et i'_{n+1}

En reportant l'expression de a^* dans 3.18, il vient :

$$(3.20) \quad i'_{n+1} - i_n \neq \frac{v_n - R i_n}{L} \Delta t - \left(v_n - R i_n - \alpha_n \frac{L}{R+r_n} \right) \frac{R+r_n}{2L^2} \Delta t^2$$

La comparaison des relations 3.12 et 3.20 montre, qu'en supposant l'égalité des courants i_n et i'_n à l'instant t_n , le courant dans la résistance inductive à t_{n+1} a, jusqu'au second ordre, même expression pour les circuits réel et associé.

La méthode proposée semble donc satisfaisante pour la détermination de la réponse temporelle des circuits concernés.

Nous envisageons toutefois, pour un système donné (circuit "roue libre") de rechercher la précision de cette méthode et d'examiner l'influence sur celle-ci notamment du pas de calcul et de l'imprécision tolérée dans l'appréciation de la condition de test.

3.4. Etude directe du circuit "roue libre"

3.4.1. Caractéristiques du montage étudié

Le circuit "roue libre" de la figure 3.3. constitue un cas particulier du circuit électrique à deux éléments non linéaires à point commun montés en cascade avec une résistance inductive. En effet, pour ce système, la tension u^2 n'est pas variable en fonction du temps mais est constamment nulle.

La tension u^1 sinusoïdale d'amplitude $U_m^1 = 180$ V et de fréquence $f = 50$ Hz admet pour expression :

$$u^1 = U_m^1 \sin 2 \pi f t = 180 \sin 100 \pi t$$

Le récepteur de facteur de puissance $\cos \phi = 0,707$ à une résistance $R = 10 \Omega$.

La résistance directe des diodes, de tension de seuil nulle, est constante et égale à $r_d = 0,2 \Omega$ alors que l'impédance en inverse est supposée infinie.

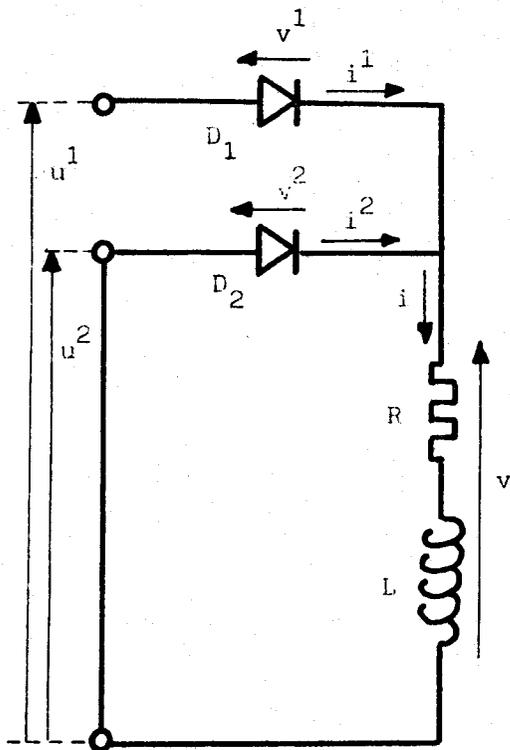


Figure 3.3

3.4.2. Phases de fonctionnement

Chaque cycle de fonctionnement comporte quatre phases distinctes, deux correspondant à la conduction de D_1 et D_2 , les deux autres relatives à la conduction simultanée de ces deux éléments pendant les intervalles de commutation.

Le tableau III.1. précise :

(A) les intervalles de temps correspondants (1)

(1) l'indice supérieur des temps indiqués correspond au rang du cycle de fonctionnement.

- (B) la ou les diodes conductrices
- (C) les équations régissant le fonctionnement du circuit
- (D) la condition de changement de phase
- (E) l'expression de la variable conditionnant le changement de phase, la loi d'évolution du courant i dans la charge étant supposée connue.

La figure 3.4 représente l'allure de la forme d'onde des courants i^1 et i^2 .

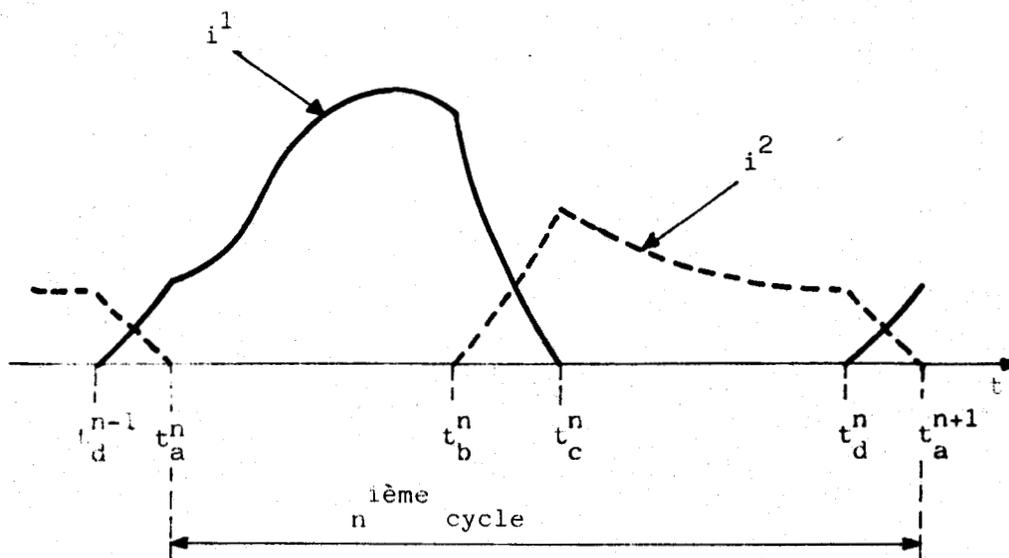


Figure 3.4

3.4.3. Courant i dans la résistance inductive

Le montage est alimenté à $t = 0$ lorsque la tension u^1 est nulle. En supposant qu'à cet instant $i = 0$, il en résulte que $t_a^1 = 0$.

Le tableau III.2 rassemble les éléments permettant de calculer, à tout instant, l'intensité du courant i et éventuellement de i_1 et i_2 sur un intervalle de temps limité à 2 périodes de la tension u^1 . La constante de temps du récepteur étant faible, ce délai suffit à l'établissement du régime permanent.

Phase	A	B	C	D	E
1	$t_a^n \leq t \leq t_b^n$	D_1	$L \frac{di}{dt} + (R+r_d) i = u^1$	$v^2 = 0^{(1)}$	$v^2 = r_d i - u_1$
2	$t_b^n \leq t \leq t_c^n$	D_1, D_2	$2L \frac{di}{dt} + (2R+r_d) i = u^1$	$i^1 = 0$	$i^1 = \frac{i}{2} + \frac{u^1}{2r_d}$
3	$t_c^n \leq t \leq t_d^n$	D_2	$L \frac{di}{dt} + (R+r_d) i = 0$	$v^1 = 0^{(1)}$	$v^1 = r_d i + u^1$
4	$t_d^n \leq \bar{t} \leq t_a^{n+1}$	D_2, D_1	$2L \frac{di}{dt} + (2R+r_d) i = u^1$	$i^2 = 0$	$i^2 = \frac{i}{2} - \frac{u^1}{2r_d}$

(1) par valeurs croissantes

Tableau III.1

n	$t_a^n \leq t^{(1)} \leq t_n^n$	$t_b^n \leq t \leq t_c^n$	$t_c^n \leq t \leq t_d^n$	$t_d^n \leq t \leq t_a^{n+1}$
	$i^{(2)} = A_1 e^{-\frac{(R+r_d)}{L}t} + B_1 \sin(\omega t - \phi_1)$ $i^1 = i$ $i^2 = 0$	$i = A_2 e^{-\frac{2R+r_d}{2L}t} + B_2 (\sin \omega t - \phi_2)$ $i^1 = \frac{i}{2} + \frac{u^1}{2r_d}$ $i^2 = i - i^1$	$i = A_3 e^{-\frac{R+r_d}{L}t}$ $i^1 = 0$ $i^2 = i$	$i = A_4 e^{-\frac{2R+r_d}{2L}t} + B_2 \sin(\omega t - \phi_2)$ $i^1 = i - i^2$ $i^2 = \frac{i}{2} - \frac{u^1}{2r_d}$
1	$t_a^1 = 0$ $t_b^1 = 9,9672$ $A_1 = 8,821799647$	$t_c^1 = 10,03215$ $A_2 = 112,8306125$	$t_d^1 = 19,993681$ $A_3 = 226,2256196$	$t_a^2 = 20,001316$ $A_4 = 2752,894688$
2	$t_a^2 = 29,96711$ $A_1 = 5582,773953$	$t_c^2 = 30,0322$ $A_2 = 64543,844468$	$t_d^2 = 39,99868$ $A_3 = 137589,2035$	$t_a^3 = 20,001316$ $A_4 = 1569947,17$

(1) t en millisecondes

$$B_1 = 12,60128540 \text{ A}$$

$$B_2 = 6,332221166 \text{ A}$$

(2) intensité des courants en ampères

$$\phi_1 = 0,775497497 \text{ rd}$$

$$\phi_2 = 0,78042308 \text{ rd}$$

Tableau III.2

3.5. Méthode de circuit associé

La figure 3.5. représente l'organigramme permettant l'étude du circuit associé (figure 3.6).

Pour réduire le temps nécessaire à la recherche de la pente a de la rampe de tension pour laquelle la condition de test positif :

$$i'_{n+1} - (j_{n+1}^1 + j_{n+1}^2) = 0$$

est satisfaite, nous nous sommes fixés trois pas Δa de variation possibles pour a , la précision dans l'appréciation de la condition de test étant accrue lorsque Δa diminue (tableau III.3).

La figure 3.7 reproduit l'enregistrement, sur table traçante, du courant i dans le récepteur lorsque le pas de calcul est égal à 0,5 ms.

K	Δa (V s ⁻¹)	Condition de test
1	100	$\Delta = i'_{n+1} - (j_{n+1}^1 + j_{n+1}^2) \leq 1A$
2	10	$\Delta \leq 0,1 A$
3	0,1	$\lambda = \left \frac{\lambda}{j_{n+1}^1 + j_{n+1}^2} \right \leq 0,01 \text{ si } i'_{n+1} \neq 0$ <p style="text-align: right;">et. $j_{n+1}^1 + j_{n+1}^2 \neq 0$</p> $\lambda = i' \leq 10^{-3} A \text{ si } j_{n+1}^1 + j_{n+1}^2 = 0$ $\lambda = j_{n+1}^1 + j_{n+1}^2 \leq 10^{-3} A \text{ si } i'_{n+1} = 0$

Tableau III.3

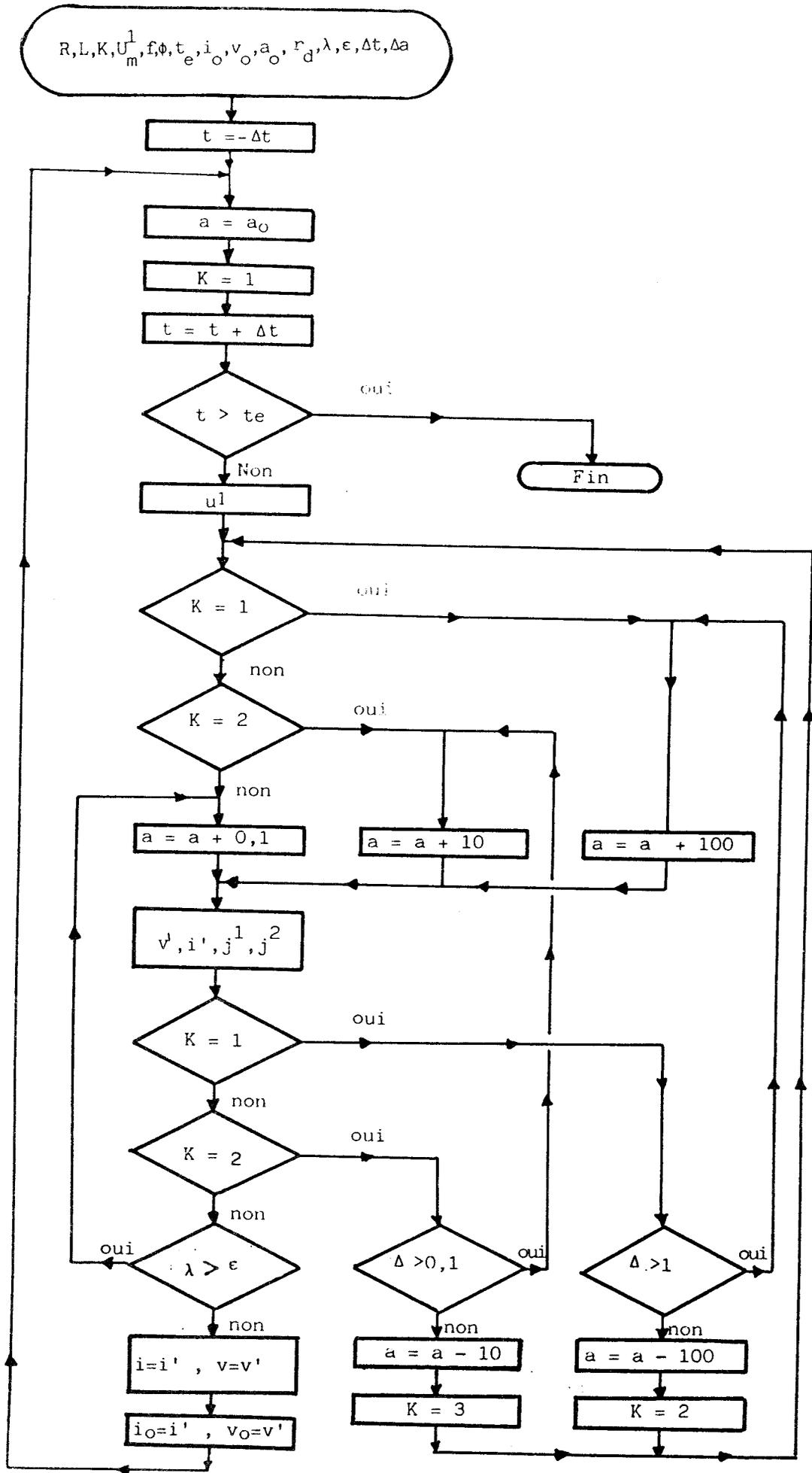


Figure 3.5

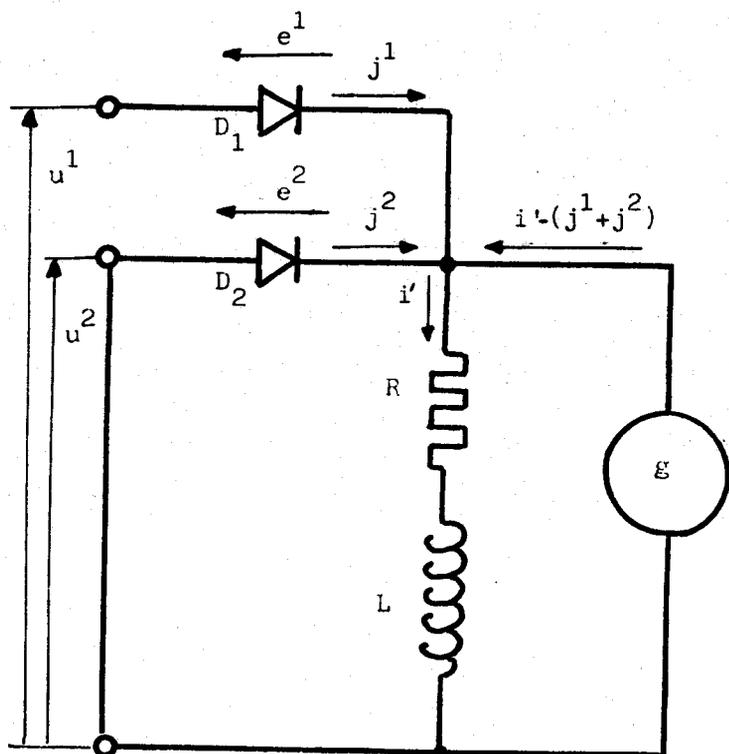


Figure 3.6

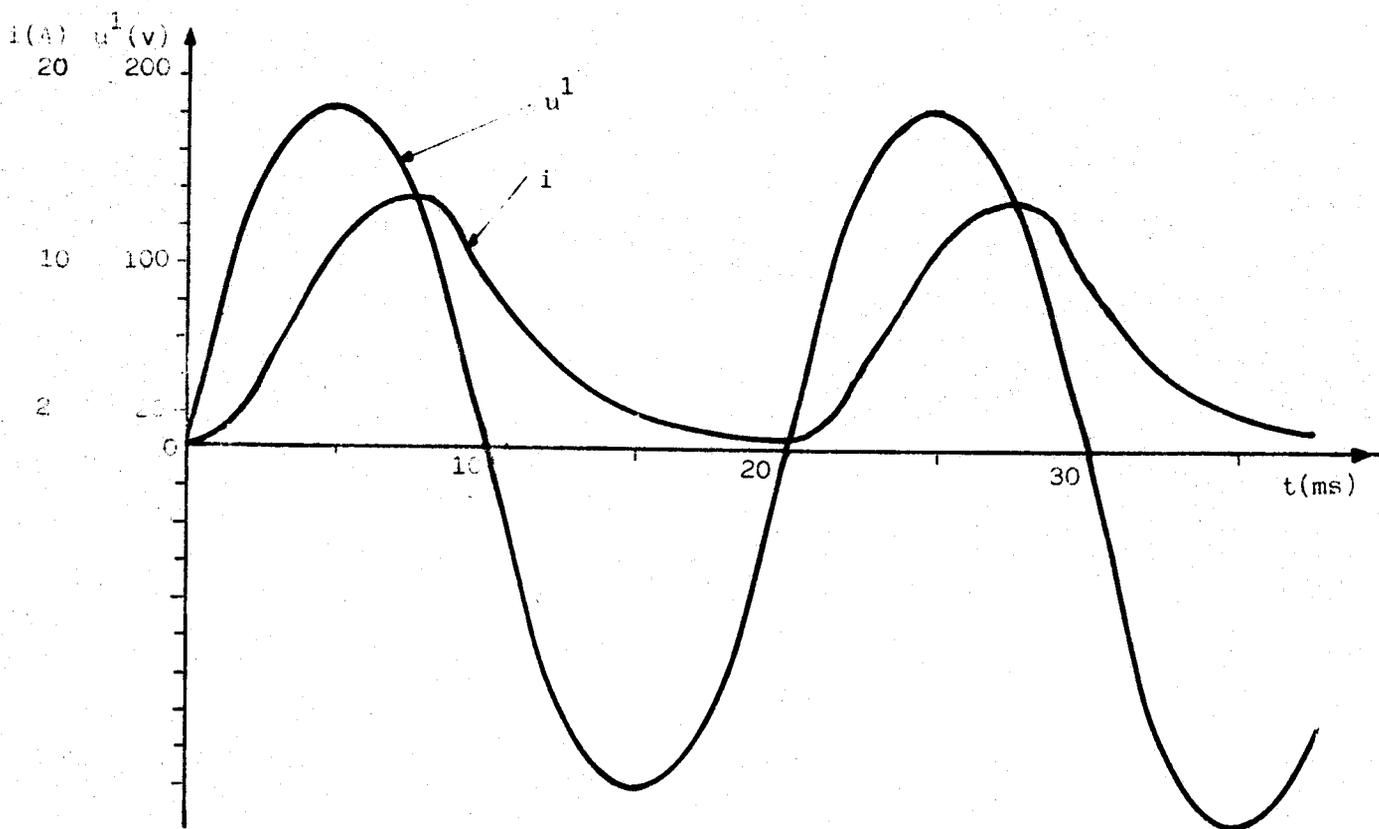


Figure 3.7

3.6. Précision de la méthode

Nous nous proposons, par un calcul approché, de rechercher l'ordre de grandeur de l'erreur relative ζ sur le courant i dans le récepteur à chaque instant de test dans les trois modes de fonctionnement.

3.6.1. Diode D_1 conductrice

3.6.1.1. Expression du courant i dans le circuit réel

Le circuit est, en posant $u^1 = u$, régi par la relation :

$$(3.21) \quad u_n + a_n (t - t_n) = (R+r) i + L \frac{di}{dt}$$

qui admet pour solution, en limitant le développement de $e^{-\frac{R+r}{L} \Delta t}$ au premier ordre :

$$(3.22) \quad i_{n+1} \approx i_n x + u_n \frac{\Delta t}{L}$$

où

$$x = 1 - \frac{R+r}{L} \Delta t$$

Il vient alors :

$$i_1 \approx i_0 x + u_0 \frac{\Delta t}{L}$$

Or à $t = 0$, $i_0 = 0$ et $u_0 = 0$; le courant i est donc, avec l'approximation adoptée pour le développement, nul à l'instant de test t_1 . Dans ces conditions, la valeur de i_1 est alors déduite de la relation (3.12) :

$$i_1 = \frac{a_0}{2} \frac{\Delta t^2}{L}$$

qui représentera le courant initial i_0 pour l'instant de test désigné par $m = 0$, en posant $m = n - 1$ soit :

$$(t_1)_n = (t_0)_m$$

Dans le repérage en m nous avons :

$$i_1 \approx i_0 x + u_0 \frac{\Delta t}{L} \quad (i_0 \text{ et } u_0 \neq 0)$$

$$i_2 \approx i_1 x + u_1 \frac{\Delta t}{L} = i_0 x^2 + (u_0 x + u_1) \frac{\Delta t}{L}$$

Finalement :

$$(3.23) \quad i_m \neq i_0 x^m + (u_0 x^{m-1} + u_1 x^{m-2} + \dots) \frac{\Delta t}{L}$$

3.6.1.2. Expression du courant i' dans le circuit associé

Le courant i' , déduit de la relation (3.17), a pour expression en la limitant au terme en Δt :

$$(3.24) \quad i'_{n+1} \neq i'_n + (g_n - R i'_n) \frac{\Delta t}{L}$$

Il n'est, en effet, plus possible d'admettre qu'à l'instant t_n : $g_n = v_n$ et $i'_n = i_n$.

La tension g est, au même instant, obtenue par la relation :

$$g_n = u_n - r j_n$$

Désignons par ϵ la précision relative choisie pour l'appréciation de la condition de test. En admettant que celle-ci est satisfaite à chaque instant t_n avec l'écart maximal permis correspondant à ϵ , il vient pour une approche par valeurs décroissantes du courant.

$$j_n = (1 + \epsilon) i'_n$$

de sorte que

$$(3.25) \quad i'_{n+1} \neq i'_n y + u_n \frac{\Delta t}{L}$$

avec

$$y = 1 - \frac{R+r(1+\epsilon)}{L} \Delta t$$

Le courant i' est également nul à $t = 0$, il est préférable de l'exprimer en introduisant, comme précédemment, $m = n-1$ soit :

$$(3.26) \quad i'_m \neq i'_0 y^m + (u_0 y^{m-1} + u_1 y^{m-2} + \dots) \frac{\Delta t}{L}$$

3.6.1.3. Erreur relative sur le courant dans le récepteur

Posons $\zeta_m^D = \frac{i_m - i'_m}{i_m}$ et calculons d'abord l'erreur sur le cou-

rant dans le récepteur pour $m = 0$.

3.6.1.3.1. Erreur $\zeta_o^{D_1}$

D'après les relations (3.12) et (3.17) les courants i et i' ont, dans le repérage en n , respectivement pour valeurs :

$$i_1 = a_o \frac{\Delta t^2}{2L} \quad \text{et} \quad i'_1 = a \frac{\Delta t^2}{2L}$$

Au même instant, le courant j_1^1 dans la diode D_1 est donné par l'expression :

$$a_o \Delta t = r j_1^1 + a \Delta t$$

Lorsque la condition de test est réalisée à ϵ près, il vient $(a_o - a^*) \Delta t = r (1 + \epsilon) i'_1$

ou encore

$$(a_o - a^*) \Delta t = r (1 + \epsilon) a^* \frac{\Delta t^2}{2L}$$

d'où

$$a^* \left[1 + r (1 + \epsilon) \frac{\Delta t}{2L} \right] = a_o$$

Or

$$\zeta_o^{D_1} = \frac{i_1 - i'_1}{i_1} = \frac{a_o - a^*}{a_o} = 1 - \frac{a^*}{a_o} = 1 - \frac{1}{1 + r(1+\epsilon) \frac{\Delta t}{2L}}$$

Finalement :

$$(3.27) \quad \zeta_o^{D_1} \neq r (1 + \epsilon) \frac{\Delta t}{2L}$$

3.6.1.3.2. Expression générale de l'erreur

D'après (3.23) et (3.26), il vient :

$$\zeta_m^{D_1} = \frac{x^m i_o - y^m i'_o + [(x^{m-1} - y^{m-1}) u_o + (x^{m-2} - y^{m-2}) u_1 + \dots] \frac{\Delta t}{L}}{x^m i_o + [x^{m-1} u_o + x^{m-2} u_1 + \dots] \frac{\Delta t}{L}}$$

En posant :

$$z = x - y = r \epsilon \frac{\Delta t}{L}, \quad \text{il vient :}$$

$$(3.29) \quad x^m - y^m \neq m z x^{m-1}$$

Dans ces conditions :

$$x^m i_o - y^m i'_o = (x^m - y^m \frac{i'_o}{i_o}) i_o = [x^m - (1 - \zeta_o^{D_1}) y^m] i_o$$

$$\neq [m z x^{m-1} + \zeta_o^{D_1} y^m] i_o = [m z x^{m-1} + \zeta_o^{D_1} (x^m - m z x^{m-1})] i_o$$

soit :

$$(3.30) \quad x^m i_o - y^m i'_o \neq [\zeta_o^{D_1} x^m + m z x^{m-1}] i_o$$

L'expression (3.28) devient alors :

$$(3.31) \quad \zeta_m^{D_1} \neq \frac{(\zeta_o^{D_1} x^m + m z x^{m-1}) i_o + [(m-1)x^{m-2} u_o + (m-2)x^{m-3} u_1 + \dots] z \frac{\Delta t}{L}}{x^m i_o + (x^{m-1} u_o + x^{m-2} u_1 + \dots) \frac{\Delta t}{L}}$$

Comme $i_o = u_o \frac{\Delta t}{2L}$, la relation (3.31) peut également s'écrire :

$$(3.32) \quad \zeta_m^{D_1} \neq \frac{(\frac{1+\epsilon}{4\epsilon} x^m + \frac{m}{2} x^{m-1} + (m-1) x^{m-2}) u_o + (m-2) x^{m-3} u_1 + \dots}{(\frac{x^m}{2} + x^{m-1}) u_o + x^{m-2} u_1 + \dots} z$$

3.6.2. Diodes D_1 et D_2 conductrices

3.6.2.1. Erreur relative sur le courant dans le récepteur

L'erreur relative $\zeta^{D_1 D_2}$ sur le courant i dans le récepteur a pour expression :

$$\zeta^{D_1 D_2} = \frac{i - i'}{i} = \frac{i^{D_1} - i'^{D_1}}{i} + \frac{i^{D_2} - i'^{D_2}}{i}$$

$$= \frac{i^{D_1} - i'^{D_1}}{i^{D_1}} \frac{i^{D_1}}{i} + \frac{i^{D_2} - i'^{D_2}}{i^{D_2}} \frac{i^{D_2}}{i}$$

$$= \zeta'^{D_1} \frac{i^{D_1}}{i} + \zeta'^{D_2} \frac{i^{D_2}}{i}$$

soit, en posant $i^{D_1} = k.i$

$$(3.33) \quad \zeta^{D_1 D_2} = k \zeta'^{D_1} + (1 - k) \zeta'^{D_2}$$

3.6.2.2. Expression de ζ^{D_1}

Le circuit "roue libre" qui admet la structure de la figure 3.8 est régi par les équations :

$$(3.34) \quad u = r i^1 + R i + L \frac{di}{dt}$$

$$(3.35) \quad u = r i^1 - r i^2$$

$$(3.36) \quad i = i^1 + i^2$$

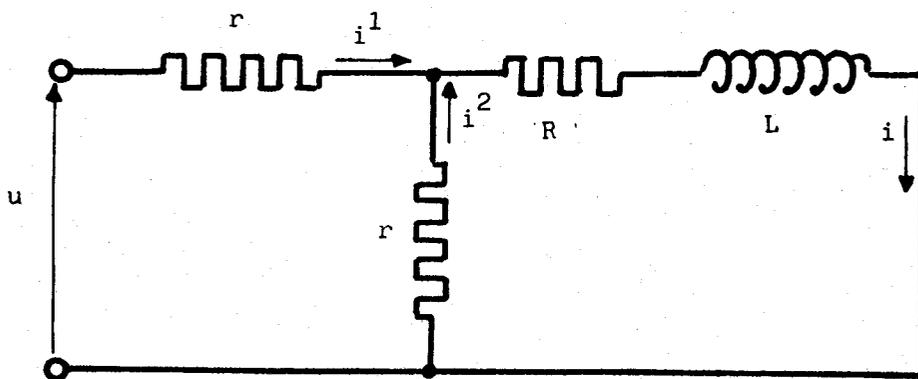


Figure 3.8

En tirant i^2 de (3.35)

$$i^2 = i^1 - \frac{u}{r}$$

la relation (3.36) devient :

$$i = 2 i^1 - \frac{u}{r}$$

d'où en reportant dans (3.34) :

$$\left(1 + \frac{R}{r}\right) \frac{u}{2} + \frac{L}{2r} \frac{du}{dt} = \left(R + \frac{r}{2}\right) i^1 + L \frac{di^1}{dt}$$

Or : $u = u_m + a_m (t - t_m)$ d'où $\frac{du}{dt} = a_m$

De sorte que :

$$\left(1 + \frac{R}{r}\right) \frac{u_m}{2} + \frac{L}{2r} a_m + \left(1 + \frac{R}{r}\right) \frac{a_m}{2} (t-t_m) = \left(R + \frac{r}{2}\right) i^1 + L \frac{di^1}{dt}$$

soit en posant :

$$u_m^1 = \left(1 + \frac{R}{r}\right) \frac{u_m}{2} + \frac{L}{2r} a_m \quad \text{et} \quad a_m^1 = \left(1 + \frac{R}{r}\right) \frac{a_m}{2}$$

$$(3.37) \quad u_m^1 + a_m^1 (t-t_m) = \left(R + \frac{r}{2}\right) i^1 + L \frac{di^1}{dt}$$

équation semblable à la relation (3.21).

L'erreur ζ'^{D_1} se déduit, par conséquent, de l'expression

(3.31) :

$$(3.38) \quad \zeta'_m{}^{D_1} = \frac{(\zeta'_o{}^{D_1} x'^m + m z' x'^{m-1}) i'_o{}^{D_1} + [(m-1)x'^{m-2} u_o^1 + (m-2)x'^{m-3} u_1^1 + \dots] z' \frac{\Delta t}{L}}{x'^m i'_o{}^{D_1} + (x'^{m-1} u_o^1 + x'^{m-2} u_1^1 + \dots) \frac{\Delta t}{L}}$$

où

$$x' = 1 - \left(R + \frac{r}{2}\right) \frac{\Delta t}{L} \quad , \quad z' = \frac{r}{2} \epsilon \frac{\Delta t}{L} = \frac{z}{2}$$

$i'_o{}^{D_1}$ et $\zeta'_o{}^{D_1}$ représentent respectivement le courant dans la diode D_1 à la fin du fonctionnement précédent et l'erreur relative correspondante

3.6.2.3. Expression de ζ'^{D_2}

Le remplacement du courant i par son expression en fonction du courant i^2 dans la diode D_2

$$i = \frac{u}{r} + 2 i^2$$

dans l'équation

$$r i^2 + R i + L \frac{di}{dt} = 0$$

conduit à :

$$- \frac{R}{2r} u - \frac{L}{2r} \frac{du}{dt} = \left(R + \frac{r}{2}\right) i^2 + L \frac{di^2}{dt}$$

ou encore à :

$$(3.39) \quad u_m^2 + a_m^2 (t-t_m) = \left(R + \frac{r}{2}\right) i^2 + L \frac{di^2}{dt}$$

en posant :

$$u_m^2 = -\frac{R}{2r} u_m - \frac{L}{2r} a_m \quad \text{et} \quad a_m^2 = -\frac{R}{2r} a_m$$

Or, pour $m = 0$, le courant i^2 est nul. Il convient donc, comme dans le fonctionnement précédent à une seule diode D_1 , de repérer les instants de test par l'indice p en posant $p = m-1$.

L'erreur ζ'^{D_2} , tirée de la relation (3.38), a alors pour expression :

$$(3.40) \quad \zeta'^{D_2}_p = \frac{(\zeta'_0{}^{D_2} x'^p + p z' x'^{p-1}) i'_0{}^{D_2} + [(p-1)x'^{p-2} u_0^2 + (p-2)x'^{p-3} u_1^2 + \dots] z' \frac{\Delta t}{L}}{x'^p i'_0{}^{D_2} + (x'^{p-1} u_0^2 + x'^{p-2} u_1^2 + \dots) \frac{\Delta t}{L}}$$

où

$$x' = 1 - (R + \frac{r}{2}) \frac{\Delta t}{L}, \quad z' = \frac{r}{2} \epsilon \frac{\Delta t}{L} = \frac{z}{2}$$

$i'_0{}^{D_2}$ et $\zeta'_0{}^{D_2}$ représentent respectivement le courant dans la diode D_2 à l'instant t_0 dans le repérage en p et l'erreur relative correspondante.

3.6.2.4. Erreur $\zeta'_0{}^{D_2}$

Dans le repérage en m , le courant i^2 a pour expression à l'instant $(t_1)_m$:

$$i_1^{D_2} \neq (1 - \frac{R+r}{2L} \Delta t) u_0^2 \frac{\Delta t}{L} + a_0^2 \frac{\Delta t^2}{2L}$$

Or dans l'intervalle de temps qui nous concerne $-a_0 \frac{L}{2r} \gg \frac{R}{2r} u_0$. Dans ces conditions, $u_0^2 \neq -\frac{L}{2r} a_0$. il vient donc :

$$i_1^{D_2} \neq (1 - \frac{r}{4L} \Delta t) a_0 \frac{\Delta t}{2r}$$

A l'instant $(t_1)_m$, le courant $i_1^{D_2}$, tiré de la relation (3.17), a pour expression :

$$i_1^{D_2} \neq \frac{\Delta t}{L} \left[\left(1 - \frac{R}{2L} \Delta t\right) u_o^2 + a_o^* \frac{\Delta t}{2} \right]$$

soit, compte tenu de l'appréciation précédente :

$$i_1^{D_2} \neq \frac{\Delta t}{2L} \left[-\left(1 - \frac{R}{2L} \Delta t\right) \frac{L}{r} a_o + a_o^* \Delta t \right]$$

Comme $(a_o^2 - a_o^*) \Delta t = \frac{r}{2} (1 + \epsilon) i_1^{D_2}$, il vient :

$$i_1^{D_2} \neq - \left[1 - \frac{r}{2} (1 + \epsilon) \frac{\Delta t}{2L} \right] \frac{\Delta t}{2r} a_o$$

Finalement :

$$\zeta_o^{D_2} = \frac{i_1^{D_2} - i_1^{D_2}}{i_1^{D_2}} \neq \frac{r \epsilon \frac{\Delta t}{4L}}{1 - \frac{r}{4L} \Delta t}$$

soit :

$$(3.41) \quad \zeta_o^{D_2} \neq r \epsilon \frac{\Delta t}{4L}$$

3.6.3. Diode D_2 conductrice

Le circuit "roue libre" est alors régi par la relation :

$$\left(R + \frac{r}{2}\right) i + L \frac{di}{dt} = 0$$

Nous avons respectivement pour les circuits réel et associé à l'instant t_m :

$$i_m = i_o x'^m$$

et

$$i'_m = i'_o y'^m$$

avec

$$x' = 1 - \left(R + \frac{r}{2}\right) \frac{\Delta t}{L} \quad \text{et} \quad y' = 1 - \frac{R + \frac{r}{2}(1 + \epsilon)}{L} \Delta t.$$

L'erreur relative $\zeta_o^{D_2}$ sur le courant dans le récepteur a pour expression :

$$\zeta_o^{D_2} = \frac{i_m - i'_m}{i_m} = \frac{(\zeta_o^{D_2} x'^m + m z' x'^{m-1}) i_o}{i_o x'^m}$$

D'où

$$(3.42) \quad \zeta_{D_2} = \zeta_0 + \frac{m}{x'} z'$$

$$\text{avec } z' = \frac{r}{2} \epsilon \frac{\Delta t}{L}$$

ζ_{D_2} représente l'erreur relative sur le courant dans la diode D_2 (ou dans le récepteur puisque $i_{D_1} = 0$) à la fin du fonctionnement de deux diodes.

3.6.4. Estimation de la précision

Les paramètres qui interviennent principalement sont le pas de calcul Δt et la précision ϵ dans l'appréciation de la condition de test.

Les figures 3.9 et 3.10 reproduisent, pour deux valeurs de Δt (0,1 et 0,5 ms) et de ϵ (1 et 5%), l'évolution de l'erreur ζ déduite soit des formules précédemment établies (courbes en trait plein) soit par comparaison entre les résultats de l'étude directe du circuit réel et ceux obtenus à partir de l'organigramme de la figure 3.5 (courbes en trait pointillé).

Les figures précédentes montrent une correspondance satisfaisante entre les courbes relatives aux deux modes d'estimation de la précision.

La périodicité de ζ est égale à celle de la tension d'alimentation (figures 3.11a, b et c). L'appréciation à ϵ près de la condition de test n'entraîne pas une accumulation d'erreurs dans la détermination du courant i dans le récepteur.

L'évolution, en fonction de Δt , de la valeur maximale ζ_M de l'erreur relative sur i est représenté (figure 3.12) pour diverses valeurs de ϵ , ce qui permet pour une précision souhaitée de fixer ϵ et de définir le nombre de points de test par période de façon à réduire le temps de calcul.

Il convient également de remarquer que la technique d'approche conduisant, dans le circuit associé, à la pente de tension pour laquelle la condition de test est satisfaite conditionne la valeur de ζ . Toutefois, il importe d'adopter une procédure aussi simple que possible de façon à réduire les difficultés liées à la mise au point du programme.

les tracés précédents ont été obtenus en recherchant la pente a^* appropriée de la rampe de tension par valeurs croissantes. La figure 3.13 représente (en trait plein) les variations de ζ en adoptant, pour le courant i déterminé, la semi-somme algébrique des intensités trouvées en initialisant le coefficient a à des valeurs inférieures puis supérieures à a^* . Il est constaté une nette amélioration de la précision par rapport aux résultats précédents (courbes en pointillé).

3.7. Conclusion

L'application, aux bornes du récepteur régi par une équation linéaire du premier ordre, d'une rampe de tension entre deux instants de tests successifs permet d'imposer la loi du courant qui le traverse.

Une procédure de test permet, par modification de la pente de la rampe, d'obtenir la réponse du circuit aux instants considérés.

L'estimation de la précision en fonction du pas de calcul Δt et de la précision ϵ dans l'appréciation de la condition de test nous a permis, dans le cas particulier du circuit "roue libre", de mettre en évidence les bons résultats obtenus par cette méthode.

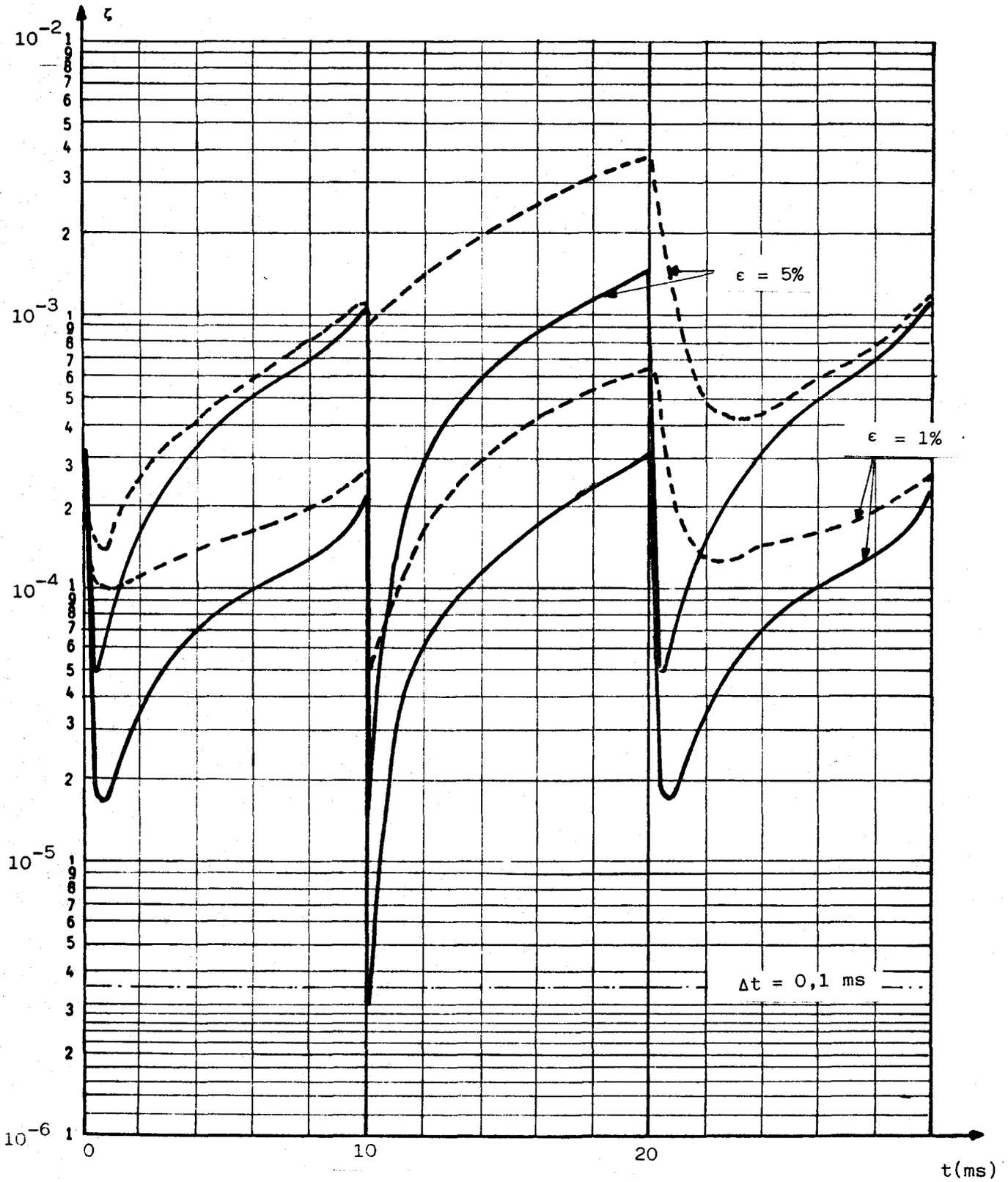


Figure 3.9

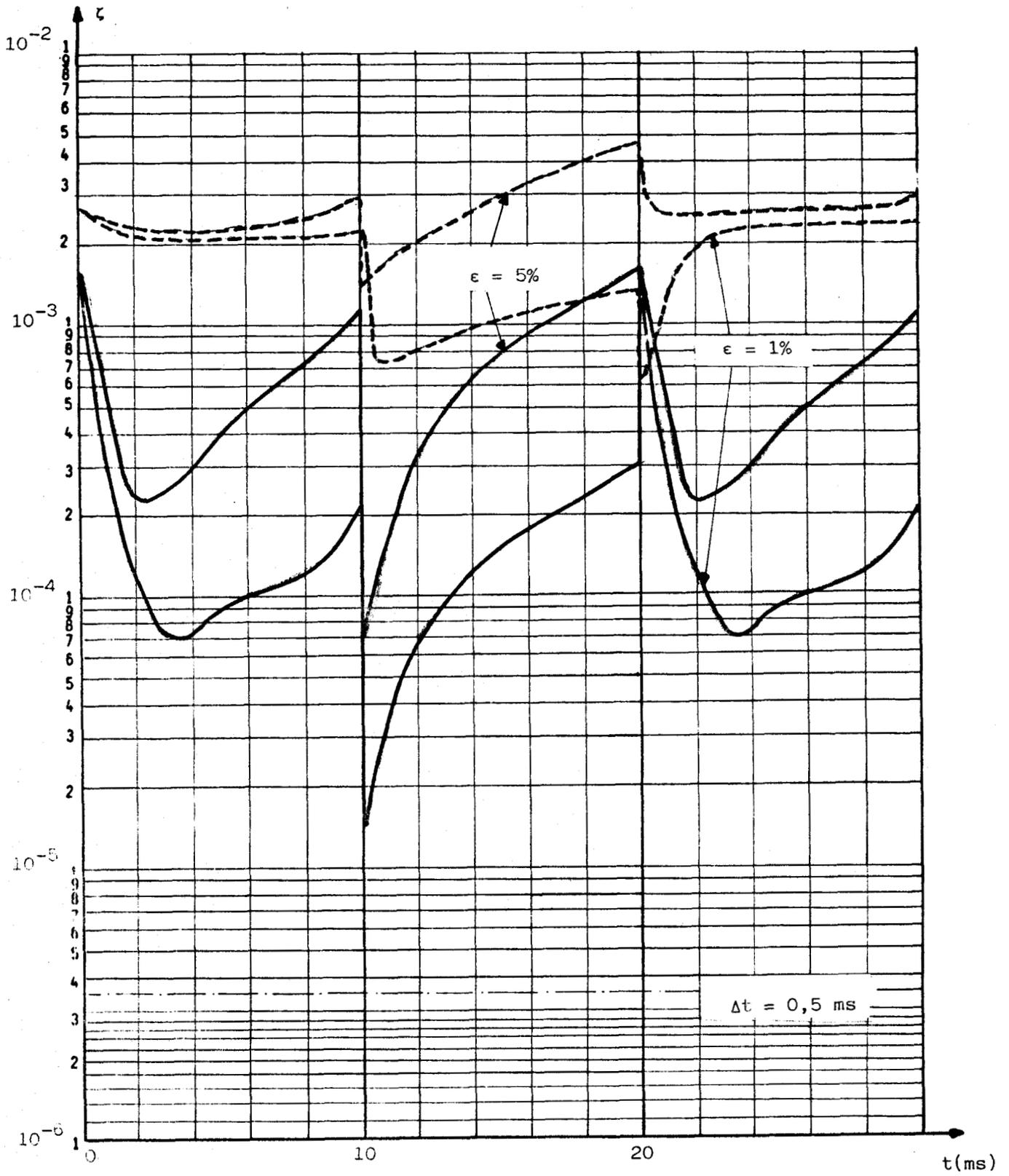


Figure 3.10

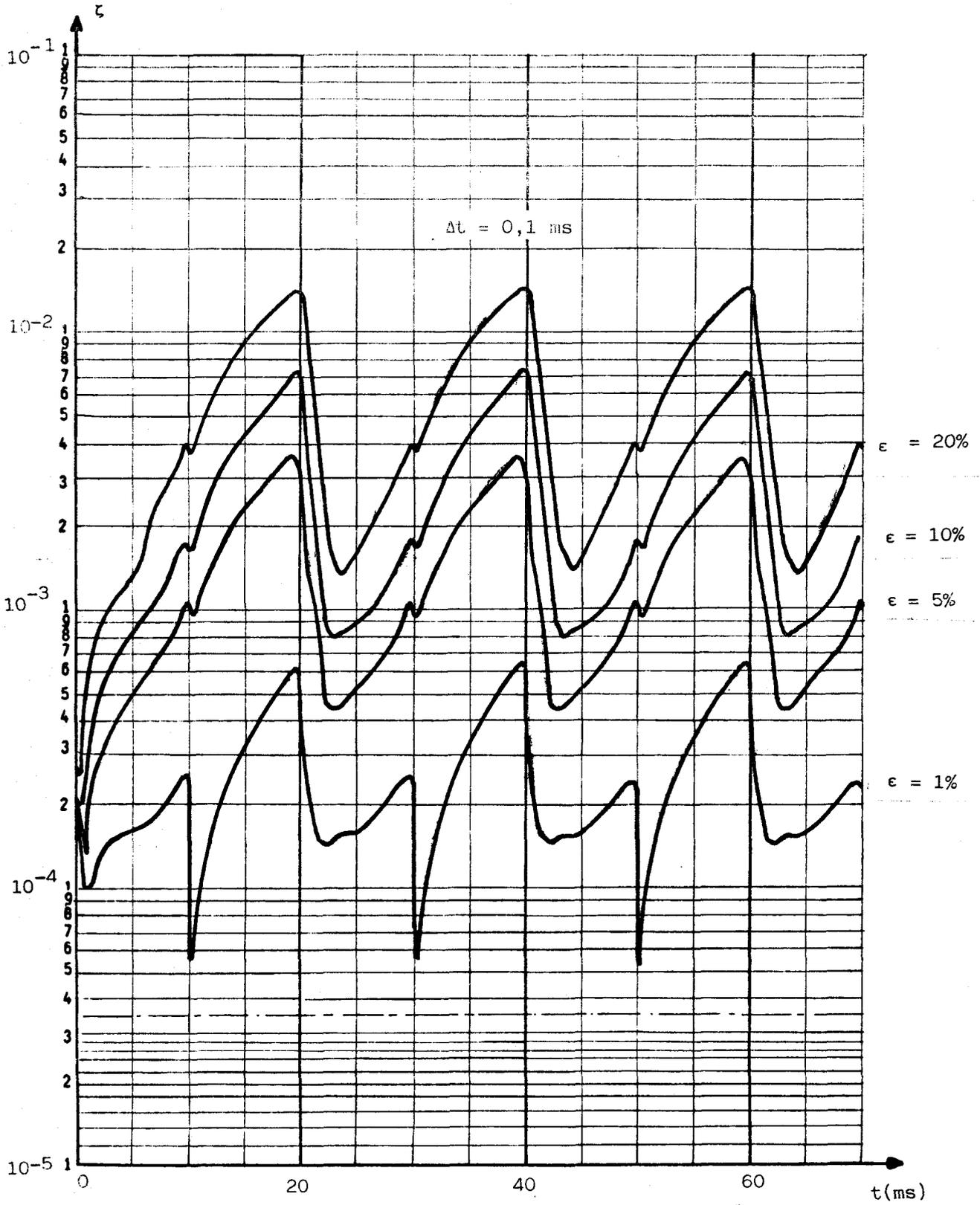


Figure 3.11 a

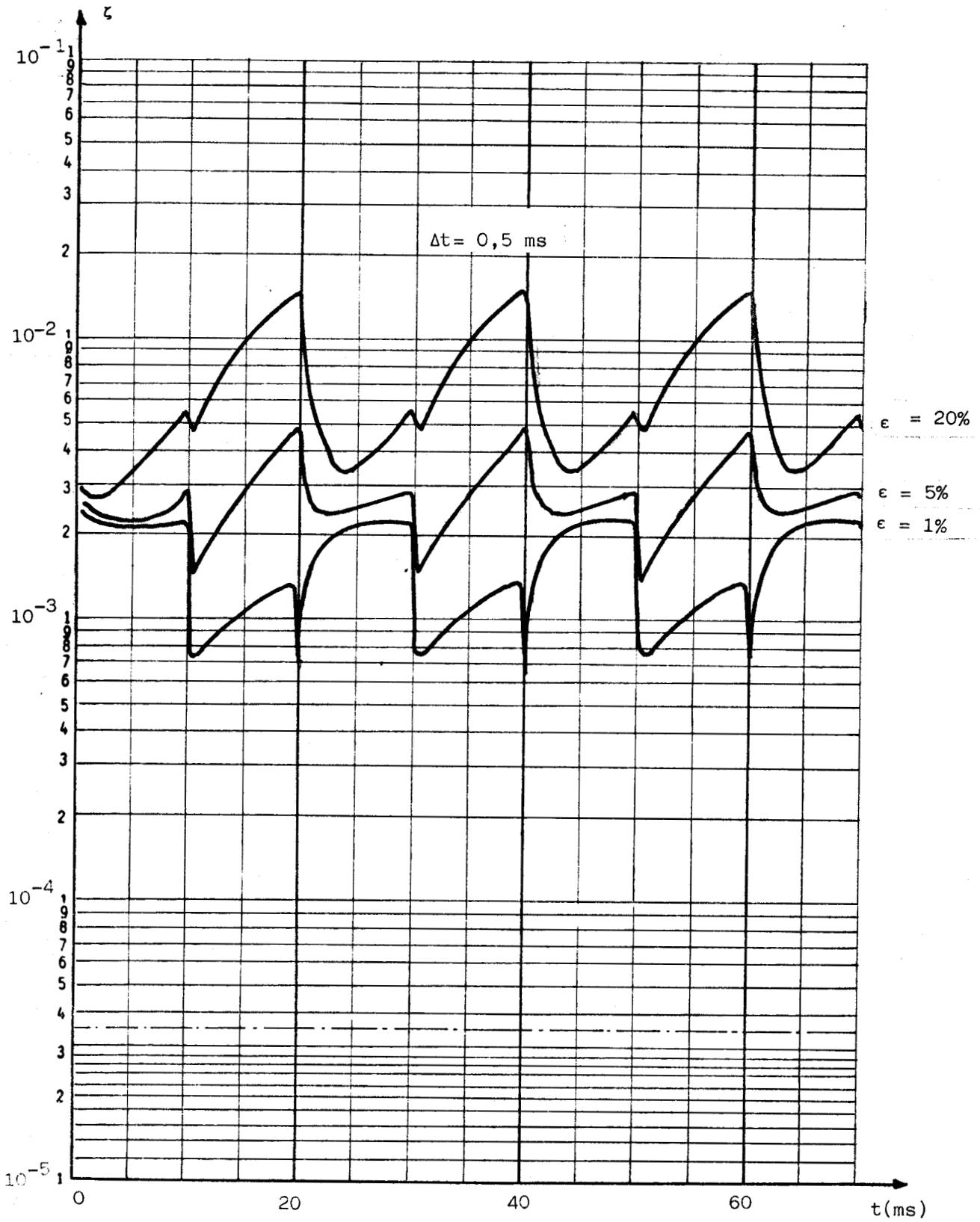


Figure 3.11 b

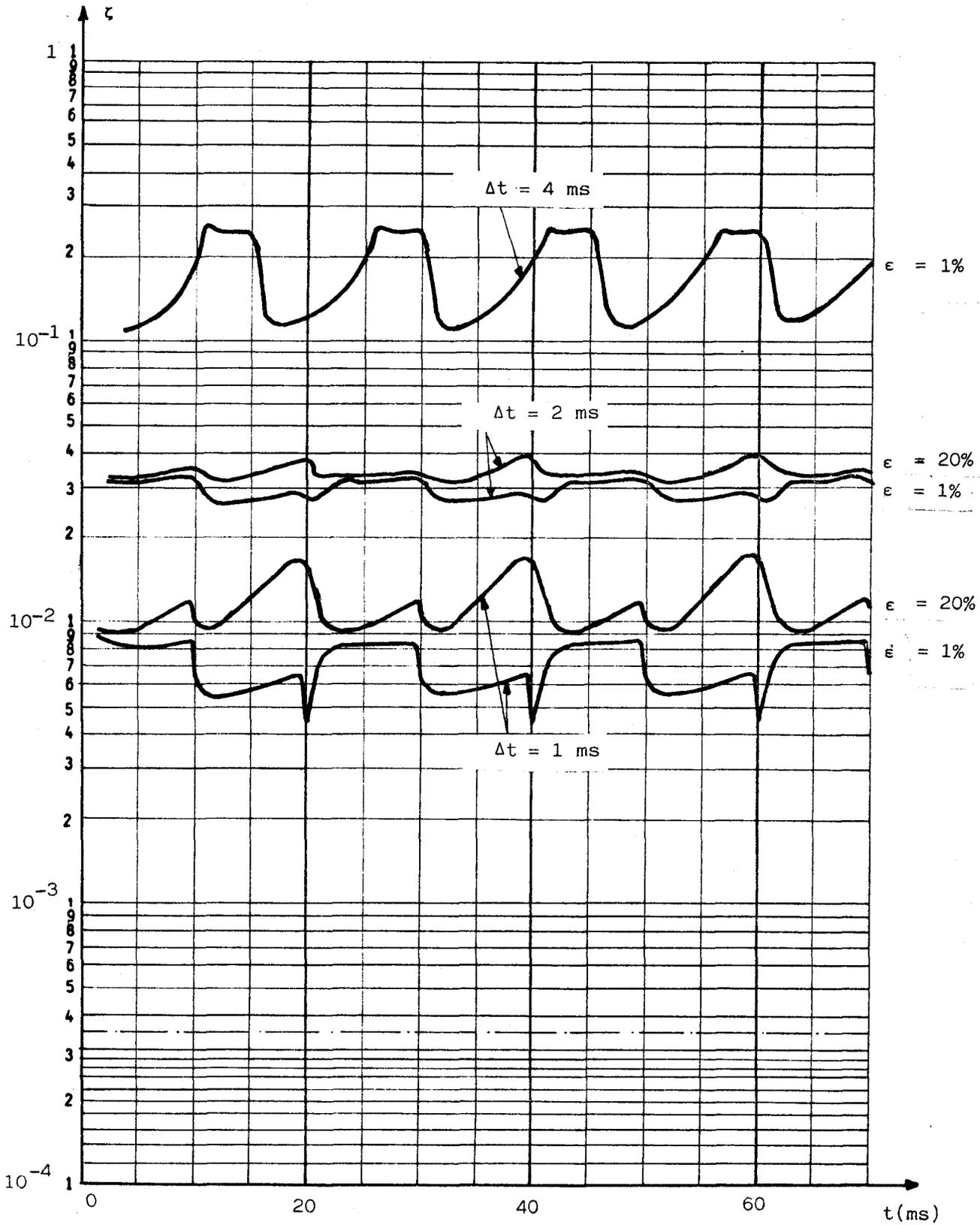


Figure 3.11 c

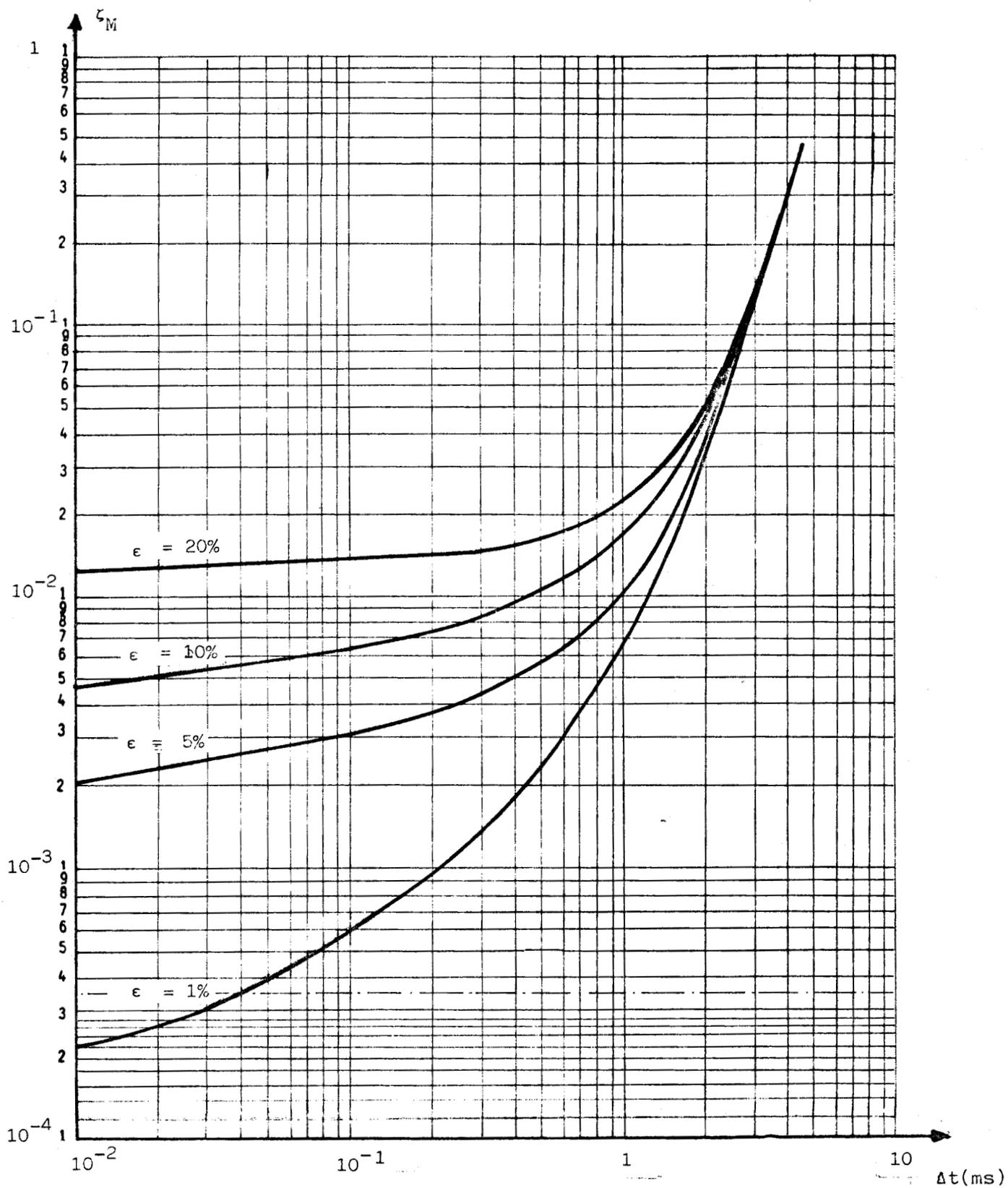


Figure 3.12

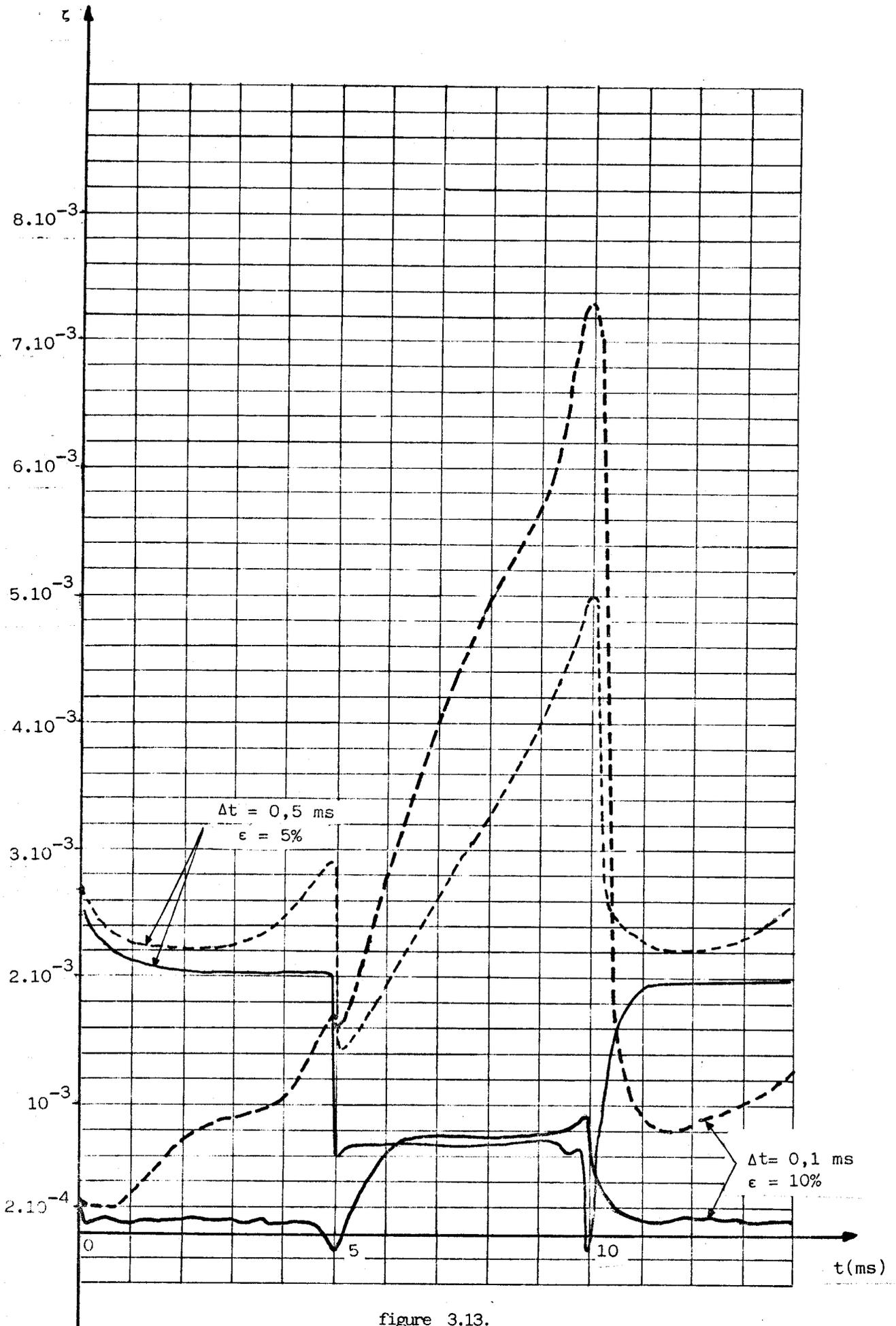


figure 3.13.

CHAPITRE 4

Circuit à structure série, à partie linéaire du premier ordre

Dualité générateur de tension - Générateur de courant

4.1. Introduction

La méthode précédente qui consiste, pour les circuits à structure parallèle à point commun, à appliquer, aux bornes du récepteur linéaire, un générateur extérieur de tension peut être étendue aux systèmes à structure série en introduisant, dans le circuit associé, un générateur de courant d'admittance interne infinie imposant au courant dans le récepteur une variation linéaire entre deux instants t_n et t_{n+1} de tests successifs.

4.2. Réponse du circuit réel

4.2.1. Structure du circuit

Le circuit est constitué (figure 4.1) d'une résistance inductive (R,L) montée en série avec q éléments non linéaires, l'ensemble étant alimenté par une tension u d'expression :

$$(4.1) \quad u = u_n + a_n (t - t_n)$$

a_n désignant la vitesse de croissance de cette tension.

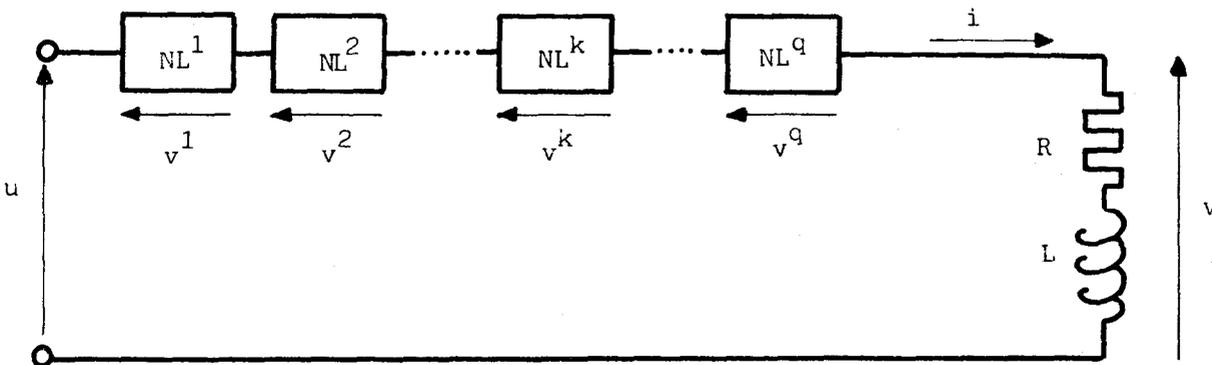


Figure 4.1

Chaque élément NL^k est défini par sa caractéristique $v^k(i^k)$ exprimant la tension v^k à ses bornes en fonction du courant i^k qui le traverse.

Comme ces éléments sont parcourus par un courant commun i , ils pourraient être remplacés par un élément unique de caractéristique $\sum_{k=1}^q v^k(i)$.

Nous avons toutefois, pour la présentation des résultats, conservé q éléments séparés car la méthode peut également être appliquée, comme nous le montrerons ultérieurement, à des circuits dont la caractéristique de tension des éléments non linéaires associés en série n'est pas obligatoirement fonction du courant i dans le récepteur.

4.2.2. Expression algébrique du courant i dans le récepteur

La résistance dynamique des éléments non linéaires, supposée constante dans l'intervalle (t_n, t_{n+1}) , est définie par la relation :

$$(4.2) \quad r_n^k = \left(\frac{dv^k}{di} \right)_{i_n, v_n^k}$$

La tension aux bornes de l'élément NL^k a alors pour expression :

$$(4.3) \quad v^k = v_n^k + r_n^k (i - i_n)$$

et la loi des mailles appliquée au circuit de la figure 4.1. conduit à :

$$u = \sum_{k=1}^q v^k + Ri + L \frac{di}{dt}$$

soit, pour $t_n \leq t \leq t_{n+1}$:

$$(4.4) \quad u_n + a_n (t-t_n) - \sum_{k=1}^q v_n^k = (i-i_n) \sum_{k=1}^q r_n^k + Ri + L \frac{di}{dt}$$

Or :

$$u_n - \sum_{k=1}^q v_n^k = v_n$$

et en posant :

$$(4.5) \quad \sum_{k=1}^q r_n^k = r_n,$$

il vient :

$$(4.6) \quad (R + r_n)i + L \frac{di}{dt} = v_n + r_n i_n + a_n (t - t_n)$$

Sachant qu'à $t = t_n$, $i = i_n$, l'équation (4.6) admet pour solution d'après (3.10) et (3.11) :

$$(4.7) \quad i = \left(i_n - \frac{v_n + r_n i_n}{R + r_n} + a_n \frac{L}{(R + r_n)^2} \right) e^{-\frac{R + r_n}{L}(t - t_n)} + \frac{a_n}{R + r_n} (t - t_n) + \frac{v_n + r_n i_n}{R + r_n} - a_n \frac{L}{(R + r_n)^2}$$

En admettant que $\Delta t \ll \frac{L}{R + r_n}$, le courant i a pour valeur, à l'instant t_{n+1} , en considérant le développement limité de $e^{-\frac{R + r_n}{L} \Delta t}$ jusqu'au second ordre :

$$(4.8) \quad i_{n+1} \approx i_n + \frac{v_n - R i_n}{L} \Delta t - \left(v_n - R i_n - a_n \frac{L}{R + r_n} \right) \frac{R + r_n}{2L^2} \Delta t^2$$

4.3. Circuit associé (figure 4.2)

Dans l'intervalle (t_n, t_{n+1}) , le courant i' dans le récepteur a pour expression :

$$(4.9) \quad i' = i'_n + b (t - t_n)$$

soit en supposant qu'à t_n , $i'_n = i_n$:

$$(4.10) \quad i' = i_n + b (t - t_n).$$

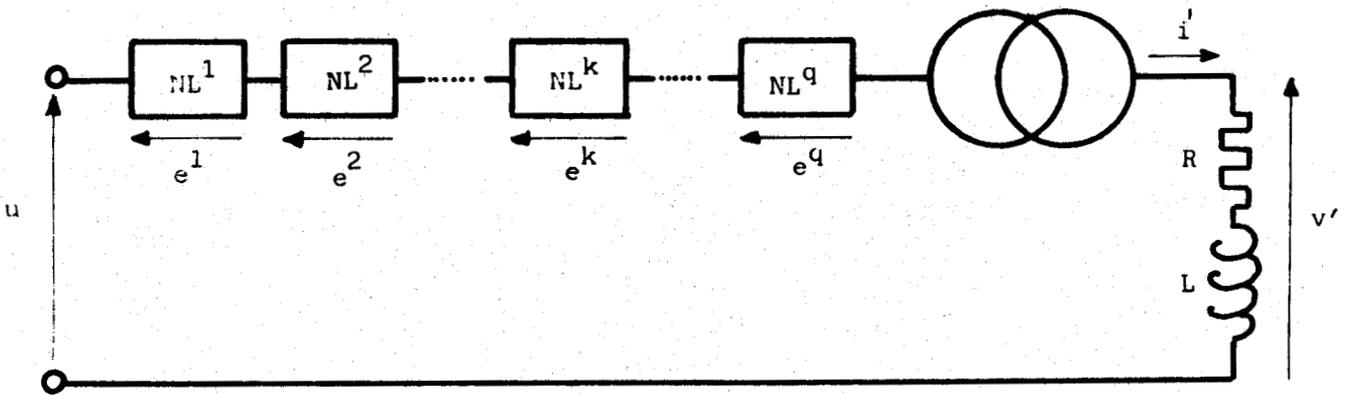


Figure 4.2

4.3.1. Expression de la somme des tensions aux bornes des éléments non linéaires à l'instant t_{n+1}

Comme à t_n , $i'_n = i_n$, il en résulte :

$$e_n^k = v_n^k$$

Dans ces conditions, la tension aux bornes de l'élément non linéaire de rang k est donné par la relation :

$$(4.11) \quad e^k = v_n^k + r_n^k (i' - i_n)$$

de sorte que

$$\sum_{k=1}^q e^k = \sum_{k=1}^q v_n^k + (i' - i_n) \sum_{k=1}^q r_n^k$$

d'où, à t_{n+1} :

$$\sum_{k=1}^q e_{n+1}^k = \sum_{k=1}^q v_n^k + r_n (i'_{n+1} - i_n)$$

or :

$$(4.12) \quad i'_{n+1} - i_n = b \Delta t$$

Finalement :

$$(4.13) \quad \sum_{k=1}^q e_{n+1}^k = u_n - v_n + b r_n \Delta t$$

4.3.2. Tension aux bornes du récepteur à t_{n+1}

La tension aux bornes du récepteur d'expression :

$$(4.14) \quad v' = R i' + L \frac{di'}{dt}$$

devient à t_{n+1} :

$$(4.15) \quad v'_{n+1} = R i_n + b (R \Delta t + L)$$

4.3.3. Pente b^* de la rampe de courant imposée

La pente de la rampe de courant est réglée à la valeur b^* telle que la somme des tensions dans le circuit soit nulle à t_{n+1} :

$$(4.16) \quad u_{n+1} = \sum_{k=1}^q e_{n+1}^k + v'_{n+1}$$

c'est à dire :

$$u_n + a_n \Delta t = u_n - v_n + b^* r_n \Delta t + R i_n + b^* (R \Delta t + L)$$

$$v_n + a_n \Delta t = R i_n + b^* [L + (R + r_n) \Delta t]$$

$$(4.17) \quad b^* \left[1 + (R + r_n) \frac{\Delta t}{L} \right] = \frac{v_n - R i_n}{L} + a_n \frac{\Delta t}{L}$$

Comme $\frac{L}{R+r_n} \gg \Delta t$, il vient :

$$(4.18) \quad b^* \neq \frac{v_n - R i_n}{L} + \left[a_n - (R + r_n) \frac{v_n - R i_n}{L} \right] \frac{\Delta t}{L}$$

4.3.4. Comparaison des courants i_{n+1} et i'_{n+1}

En reportant l'expression de b^* dans (4.12) il vient :

$$(4.19) \quad i'_{n+1} \neq i_n + \frac{v_n - R i_n}{L} \Delta t - \left(v_n - R i_n - a_n \frac{L}{R+r_n} \right) \frac{R+r_n}{L^2} \Delta t^2$$

La comparaison des relations (4.8) et (4.19) montre que les coefficients du terme en Δt^2 ne sont plus identiques mais dans le rapport deux.

Le courant dans le récepteur semble donc, dans le circuit à structure série, déterminé avec une précision moindre que dans le cas des circuits à structure parallèle précédemment étudiés.

L'écart entre les courants i_{n+1} et i'_{n+1} peut se justifier de la façon suivante :

La relation (4.18) définit la pente b^* de la rampe de courant lorsque la condition de test est satisfaite.

La tension v' aux bornes du récepteur imposée par le courant i' a pour expression, d'après (4.15), à l'instant t_n :

$$v'_n = R i_n + b L$$

soit :

$$v'_n = v_n + \left[a_n - (R + r_n) \frac{v_n - R i_n}{L} \right] \Delta t$$

L'identité, à t_n , de la condition initiale, sur la tension aux bornes du récepteur n'est donc pas respectée pour les circuits réel et associé.

Cet écart entre v_n et v'_n ne peut que contribuer à réduire la précision dans la détermination du courant dans la résistance inductive.

Pour obtenir, dans les circuits associés à générateurs de tension ou de courant, la même précision c'est à dire l'identité, jusqu'au second ordre des expressions, à t_{n+1} , des courants i et i' , il convient, dans la deuxième structure, d'augmenter le degré du polynôme qui caractérise la forme d'onde du signal délivré par le générateur de courant.

Dans ces conditions, il est possible d'imposer la condition $v'_n = v_n$ et d'atteindre ainsi une précision identique.

4.4. Générateur associé à onde de courant parabolique

Supposons le courant i' caractérisé, dans l'intervalle (t_n, t_{n+1}) , par la relation :

$$(4.20) \quad i' = i_n + b^1 (t - t_n) + \frac{b^2}{2} (t - t_n)^2$$

La différence de potentiel v' aux bornes du récepteur a alors pour expression :

$$(4.21) \quad v' = R i_n + L b^1 + (R b^1 + L b^2) (t - t_n) + \frac{R b^2}{2} (t - t_n)^2$$

soit, à l'instant t_n :

$$v'_n = R i_n + L b^1$$

Il convient donc, pour obtenir l'égalité $v' = v_n$, d'imposer au coefficient b^1 la valeur :

$$(4.22) \quad b^1 = \frac{v_n - R i_n}{L}$$

Les expressions de i' (4.20) et de v' (4.21) deviennent alors :

$$(4.23) \quad i' = i_n + \frac{v_n - R i_n}{L} (t - t_n) + \frac{b^2}{2} (t - t_n)^2$$

et

$$v' = v_n + (R \frac{v_n - R i_n}{L} + L b^2) (t - t_n) + \frac{R b^2}{2} (t - t_n)^2$$

Le coefficient b^2 , ne modifiant pas, à l'instant t_n , les conditions initiales : $i'_n = i_n$ et $v'_n = v_n$, introduit, de façon indépendante, le degré de liberté qui permet de satisfaire la condition de test.

La relation (4.16) donnant la condition de test positif s'exprime à partir de l'égalité (4.13) modifiée :

$$\sum_{k=1}^q e_{n+1}^k = u_n - v_n + r_n \left[\frac{v_n - R i_n}{L} \Delta t + \frac{b^2}{2} \Delta t^2 \right]$$

et de l'expression (4.24)

$$v'_{n+1} = v_n + (R \frac{v_n - R i_n}{L} + L b^2) \Delta t + \frac{R b^2}{2} \Delta t^2$$

Il en résulte :

$$(4.25) \quad a_n - (R + r_n) \frac{v_n - R i_n}{L} = L b^{2*} \left[1 + (R + r_n) \frac{\Delta t}{2L} \right]$$

relation qui fixe la valeur b^{2*} du coefficient b^2 .

En admettant $\frac{2L}{R+r_n} \geq \Delta t$, il vient :

$$(4.26) \quad b^{2*} \neq \frac{1}{L} \left[a_n - (R + r_n) \frac{v_n - R i_n}{L} \right]$$

D'après (4.20), le courant i' a pour valeur à l'instant t_{n+1} :

$$i'_{n+1} \neq i_n + \frac{v_n - R i_n}{L} \Delta t + \left[a_n - (R + r_n) \frac{v_n - R i_n}{L} \right] \frac{\Delta t^2}{2L}$$

ou encore

$$(4.27) \quad i'_{n+1} \neq i_n + \frac{v_n - R i_n}{L} \Delta t - \left[v_n - R i_n - a_n \frac{L}{R+r_n} \right] \frac{R+r_n}{2L^2} \Delta t^2$$

La comparaison des relations (4.8) et (4.27) montre une identité jusqu'aux termes du second ordre des expressions, à l'instant t_{n+1} , des courants dans le récepteur pour les circuits réel et associé.

Cette analogie dans les résultats, liée à la valeur Δt du pas de calcul, se retrouve d'ailleurs dans les équations (3.10) et (4.6) régissant le comportement des circuits réels à structures parallèle ou série dont la partie linéaire est une résistance inductive.

Le tableau IV.1 précise la valeur, dans ces relations, des coefficients r_n et α_n à l'instant t_n ainsi que les conditions que doit vérifier Δt .

	Structure parallèle	Structure série
r_n	$\frac{1}{r_n} = \sum_{k=1}^p \frac{1}{r_n^k}$	$r_n = \sum_{k=1}^q r_n^k$
α_n	$r_n \sum_{k=1}^p \frac{a_n^k}{r_n^k}$	a_n
Δt	$\ll \frac{L}{R} \quad \text{et} \quad \ll \frac{2L}{r_n}$	$\ll \frac{2L}{R+r_n}$

Tableau IV.1.

Une précision analogue des résultats obtenus au moyen soit d'un générateur de tension soit d'un générateur de courant semble indiquer que l'un ou l'autre peuvent être utilisés lorsque la structure du circuit étudié le permet.

Nous nous proposons donc d'effectuer néanmoins une comparaison dans le cas, par exemple, d'une résistance inductive en série avec un élément non linéaire unique ($p=1, q=1$).

4.5. Etude comparée : générateur de tension - générateur de courant

La figure 4.3 représente les configurations du circuit étudié (a) et des circuits associés à générateurs de tension (b) et de courant (c).

Notre analyse portera d'abord sur la détermination, jusqu'aux termes du troisième ordre, des expressions des courants i_{n+1} et i'_{n+1} . Les écarts théoriques et de ce fait approchés seront ensuite comparés avec ceux déduits des réponses réelles des circuits étudié et associés constitués d'une diode de résistance dynamique $r_d = 0,2\Omega$ en série avec un récepteur inductif de résistance $R = 10\Omega$ et de facteur de puissance $\cos\phi = 0,707$, l'ensemble étant alimenté par une tension sinusoïdale u d'amplitude $U_m = 180$ V et de fréquence $f = 50$ Hz.

4.5.1. Expression du courant i dans le récepteur

Le circuit de la figure (4.3a), soumis à la tension u

$$u = u_n + a_n (t - t_n)$$

admet pour réponse d'après (4.17) :

$$(4.28) \quad i_{n+1} \approx i_n + \frac{v_n - R i_n}{L} \Delta t - \left[v_n - R i_n - a_n \frac{L}{R+r_n} \right] \frac{R+r_n}{2L^2} \Delta t^2 \\ + \left[v_n - R i_n - a_n \frac{L}{R+r_n} \right] \frac{(R+r_n)^2}{6L^3} \Delta t^3$$

4.5.2. Courant i'_{n+1} dans le circuit associé à générateur de tension

En admettant la condition de test satisfaite, la relation (3.17) devient :

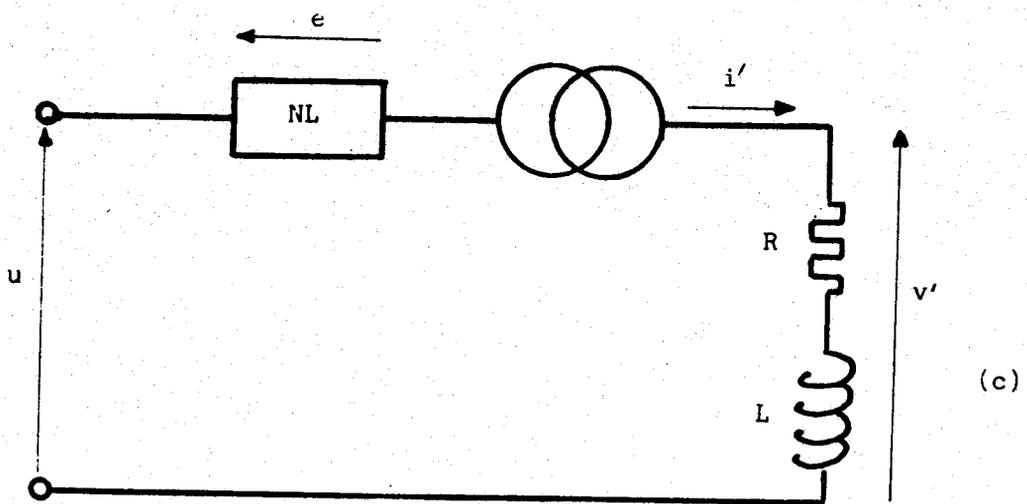
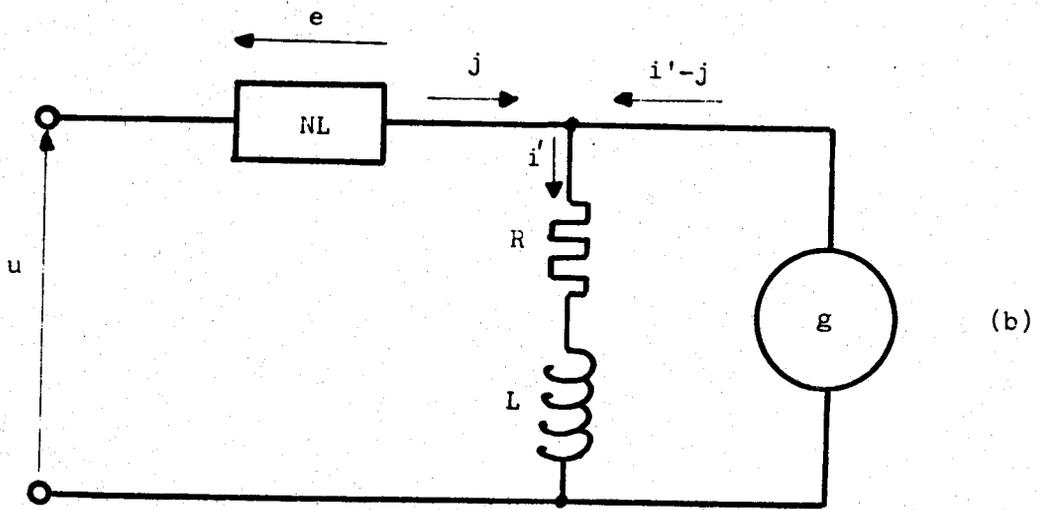
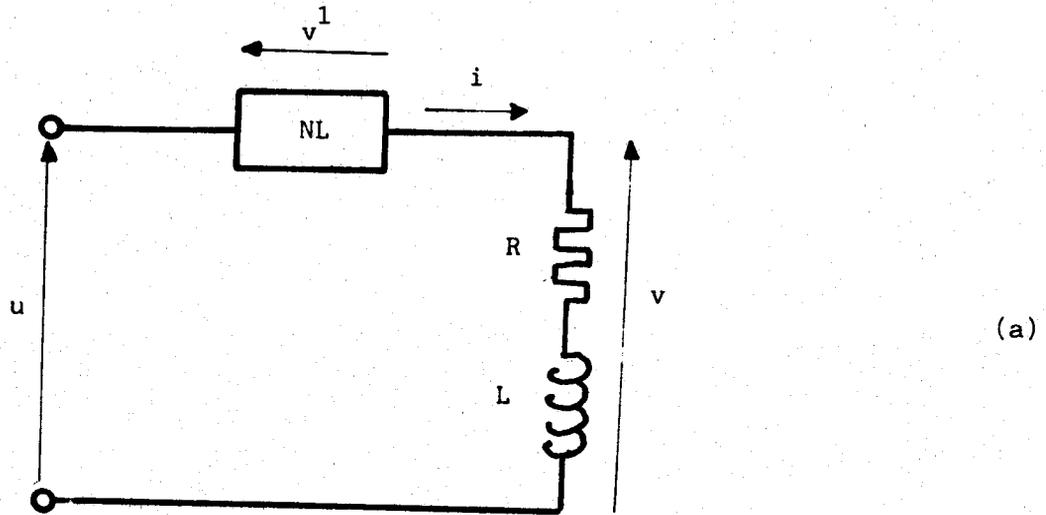


Figure 4.3

$$(4.29) \quad i'_{n+1} \neq i_n + \frac{v_n - R i_n}{L} \Delta t - (v_n - R i_n - a^* \frac{L}{R}) \frac{R}{2L^2} \Delta t^2 \\ + (v_n - R i_n - a^* \frac{L}{R}) \frac{R^2}{6L^3} \Delta t^3$$

En associant à (4.29) l'équation (3.18) dans laquelle $\alpha_n = a_n$, il vient :

$$(4.30) \quad -a^* \neq r_n \frac{v_n - R i_n}{L} (1 - \frac{R+r_n}{2L} \Delta t + \frac{R(R+r_n)}{6L^2} \Delta t^2) \\ - a_n (1 - \frac{r_n}{2L} \Delta t + \frac{r_n R}{6L^3} \Delta t^2)$$

puis en reportant l'expression de a^* dans (3.18) :

$$(4.31) \quad i'_{n+1} = i_n + \frac{v_n - R i_n}{L} \Delta t - (v_n - R i_n - a_n \frac{L}{R+r_n}) \frac{R+r_n}{2L^2} \Delta t^2 \\ + (v_n - R i_n - a_n \frac{L}{R+r_n}) \frac{R(R+r_n)}{6L^3} \Delta t^3$$

La soustraction membre à membre des relations (4.28) et (4.31) fournit l'écart approché entre les réponses du circuit réel et du circuit associé à générateur de tension :

$$(4.32) \quad i_{n+1} - i'_{n+1} \neq (v_n - R i_n - a_n \frac{L}{R+r_n}) \frac{R+r_n}{6L^3} r_n \Delta t^3$$

4.5.3. Courant i'_{n+1} dans le circuit associé à générateur de courant

Le terme du troisième ordre en Δt dans l'expression de i' (4.20) est obtenu en caractérisant, lorsque la condition de test est satisfaite, le coefficient b^{2*} par le polynôme du premier degré en Δt déduit de la relation (4.25).

$$(4.33) \quad b^{2*} \neq \frac{1}{L} [(a_n - (R + r_n) \frac{v_n - R i_n}{L}) (1 - (R + r_n) \frac{\Delta t}{2L})]$$

Le courant i' a alors pour valeur à l'instant t_{n+1} :

$$(4.34) \quad i'_{n+1} \neq i_n + \frac{v_n - R i_n}{L} \Delta t - (v_n - R i_n - a_n \frac{L}{R+r_n}) \frac{R+r_n}{2L^2} \Delta t^2 \\ + (v_n - R i_n - a_n \frac{L}{R+r_n}) \frac{(R+r_n)^2}{4L^3} \Delta t^3$$

En soustrayant membre à membre les relations (4.28) et (4.31), l'écart approché entre les réponses du circuit réel et du circuit associé à générateur de courant a pour valeur :

$$(4.35) \quad i_{n+1} - i'_{n+1} \approx - \left(v_n - R i_n - a_n \frac{L}{R+r_n} \right) \frac{R+r_n}{6L} \frac{R+r_n}{2} \Delta t^3$$

La comparaison des relations (4.32) et (4.35) montre qu'il est préférable d'adopter la méthode à générateur de tension.

4.5.4. Comparaison expérimentale des erreurs relatives sur le courant dans le récepteur

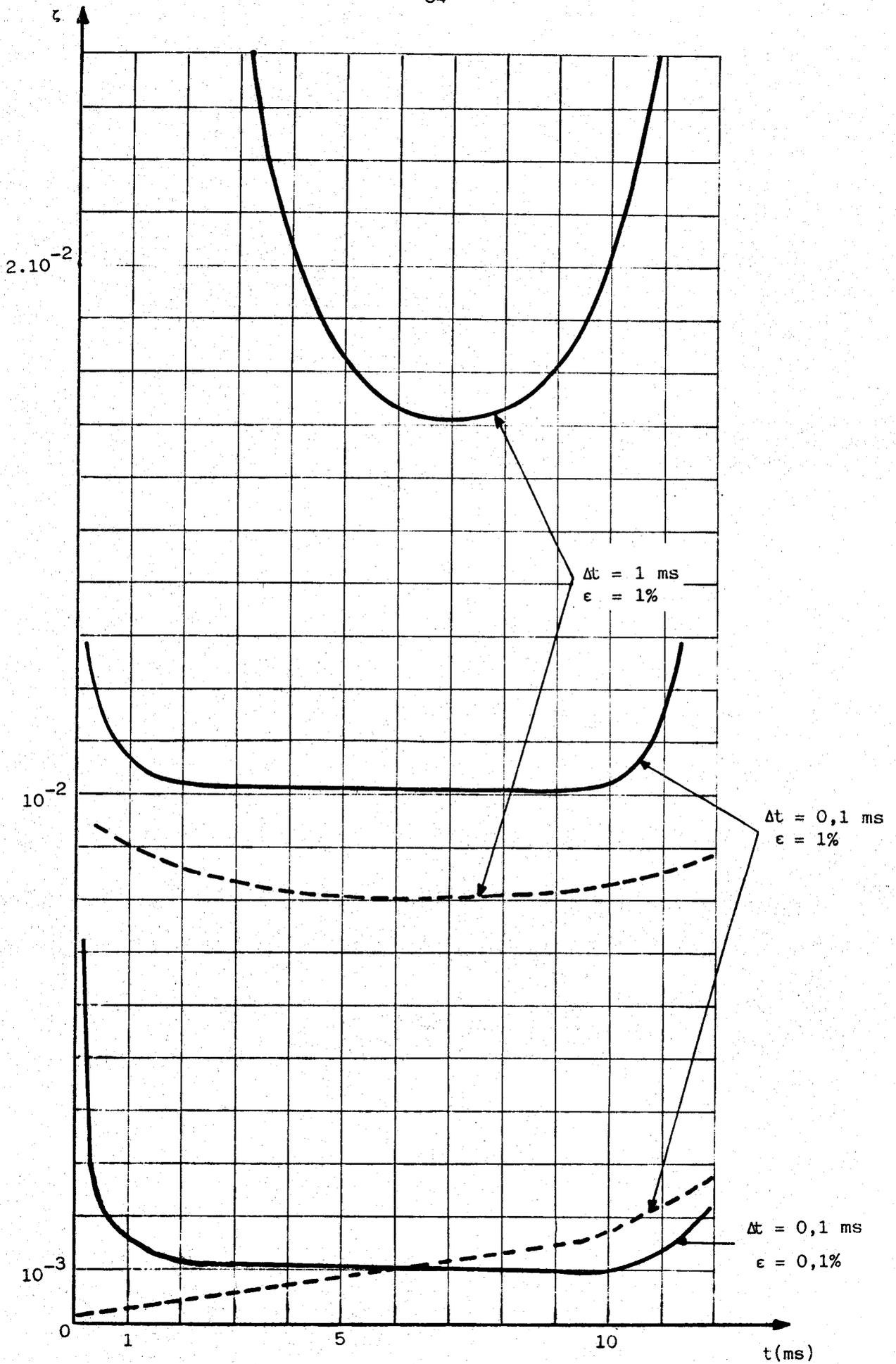
Par les deux méthodes à générateurs de tension ou de courant, nous avons relevé, à divers instants de test, le courant i' dans la résistance inductive. Connaissant la réponse exacte i du système, nous avons ensuite déterminé l'erreur relative $\zeta = \frac{i - i'}{i}$ commise, en ces différents points, sur le courant dans le récepteur.

La figure 4.4 représente, en fonction du temps, l'évolution de ζ pour diverses valeurs de ϵ et Δt lorsque les générateurs de tension ou de courant délivrent le premier signal rampe, le second une onde parabolique.

Ces courbes confirment les résultats de l'étude théorique : il est en effet préférable de retenir la méthode à générateur de tension.

Enfin, nous avons déterminé (figure 4.5) l'erreur relative sur i lorsque les variations imposées sont, soit linéaires pour le courant, soit par paliers pour la tension.

Bien que les résultats soient médiocres notamment pour les faibles intensités du courant, cette dernière étude met à nouveau en évidence que le degré du polynome caractérisant l'onde imposé doit être supérieur d'une unité à celui du polynome définissant le signal délivré par le générateur de tension.



--- Générateur de tension
— Générateur de courant

Figure 4.4

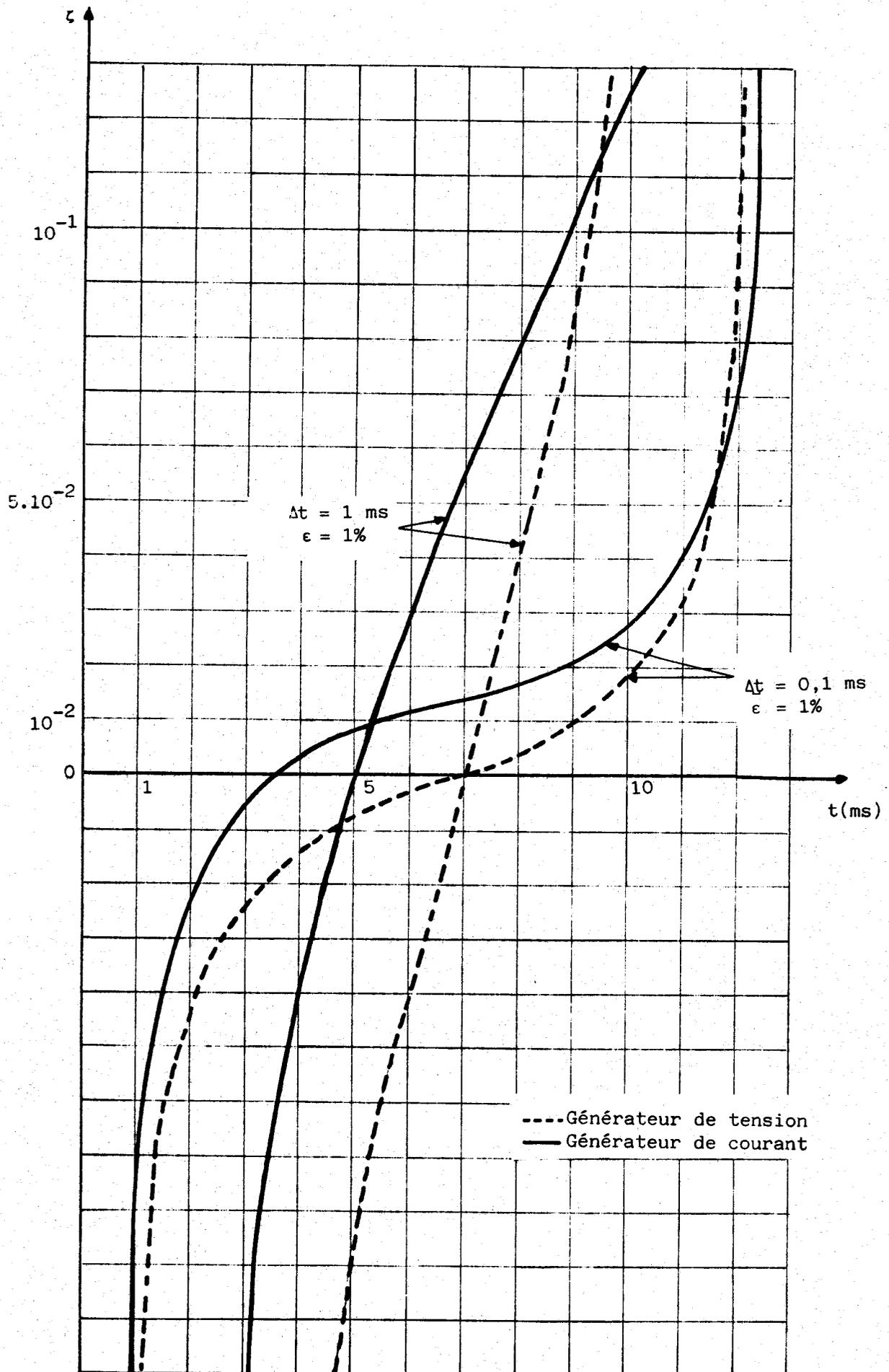


Figure 4.5.

4.6. Conclusion

Le fait d'imposer, entre deux instants de tests successifs, la loi d'évolution du courant dans un circuit à structure série fixe celle de la tension aux bornes du (ou des) élément(s) non linéaires.

Une procédure de test sur les tensions, en appliquant la loi des mailles, permet, en modifiant le coefficient du terme du second degré de l'onde de courant imposé, d'obtenir la réponse du système aux instants considérés.

En appliquant au même circuit la méthode du générateur de tension, nous avons constaté que cette dernière procédure donnait de meilleurs résultats. La forme d'onde de la tension appliquée aux bornes du récepteur est d'ailleurs caractérisée par un polynôme de degré inférieur d'une unité par rapport à celui du signal de courant précédemment imposé.

CHAPITRE 5

Circuit à structure parallèle à
éléments linéaires en cascade

5.1. Introduction

Nous envisageons d'étendre la méthode précédente à des circuits à structure parallèle dont la partie linéaire, constituée d'éléments associés en cascade, est régie par une équation différentielle du $n^{\text{ième}}$ ordre.

Considérant un montage redresseur débitant sur une résistance R, par l'intermédiaire d'un filtre L-C, nous rechercherons la précision dans la détermination du courant fourni à l'ensemble de la charge en fonction de la forme d'onde imposée à chacune des trois grandeurs électriques qu'il est possible de choisir dans l'application de la méthode précédemment proposée.

5.2. Présentation générale

Considérons (figure 5.1) le circuit électrique constitué de plusieurs éléments non linéaires à point commun de caractéristique $v^k(i^k)$ et montés en série avec un récepteur linéaire à structure en cascade comprenant p cellules de filtrage de type en L alimentant finalement une résistance R.

La détermination du courant i_1 , aux différents instants de test, peut être obtenue en imposant la loi d'évolution de :

a) la tension v, le courant i_1 étant solution de l'équation différentielle régissant le comportement de la partie linéaire du système considéré

b) la tension v_p aux bornes de la résistance R.

La tension v qui permet de déterminer les courants i^k dans les non linéarités et le courant i_1 tel que : $\sum_{k=1}^q i_{n+1}^k = i_{n+1}$ lorsque la condition de test est satisfaite, sont obtenus par la résolution de $4p+1$ équations élémentaires :

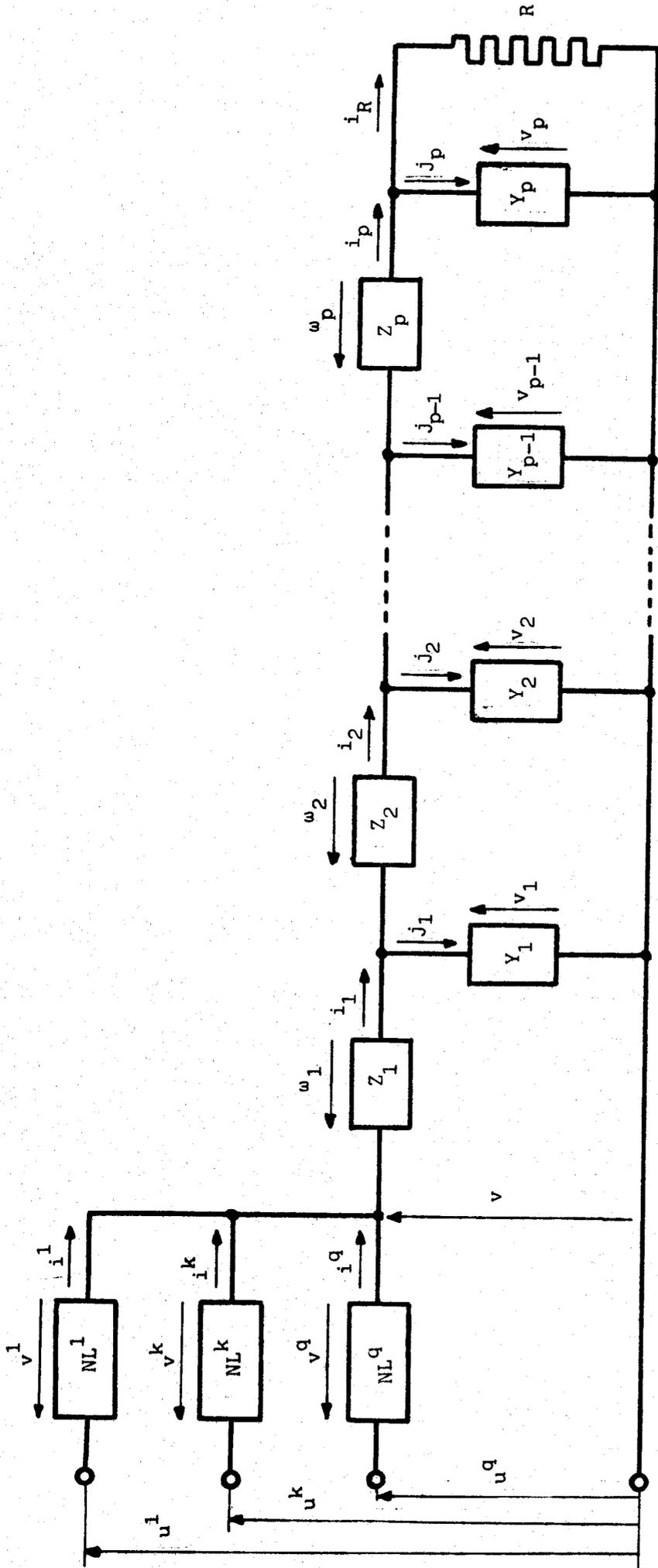


Figure 5.1.

$$i_R = \frac{v_p}{R}$$

$$j_p = f_p(v_p, Y_p)$$

$$i_p = j_p + i_R$$

$$w_p = g_p(i_p, Z_p)$$

$$v_{p-1} = w_p + v_p$$

$$j_{p-1} = f_{p-1}(v_{p-1}, Y_{p-1})$$

$$i_{p-1} = j_{p-1} + i_p$$

$$w_{p-1} = g_{p-1}(i_{p-1}, Z_{p-1})$$

$$v_{p-2} = w_{p-1} + v_{p-1}$$

⋮

c) la tension v_m aux bornes de l'admittance Y_m ou le courant i_m dans l'impédance Z_m de la cellule de rang m .

Il existe donc de nombreuses possibilités dans le choix de la variable dont la loi d'évolution est à fixer.

Nous allons examiner l'influence de ce choix, lié d'ailleurs à la forme d'onde du signal imposé, sur la précision de la détermination du courant i_1 fourni à l'ensemble de la charge.

Nous limiterons notre étude à celle d'un récepteur, régi par une équation du second d'ordre, constitué d'un filtre L-C chargé par une résistance R et alimenté par l'intermédiaire d'un commutateur à diodes à cathodes communes (figure 5.2).

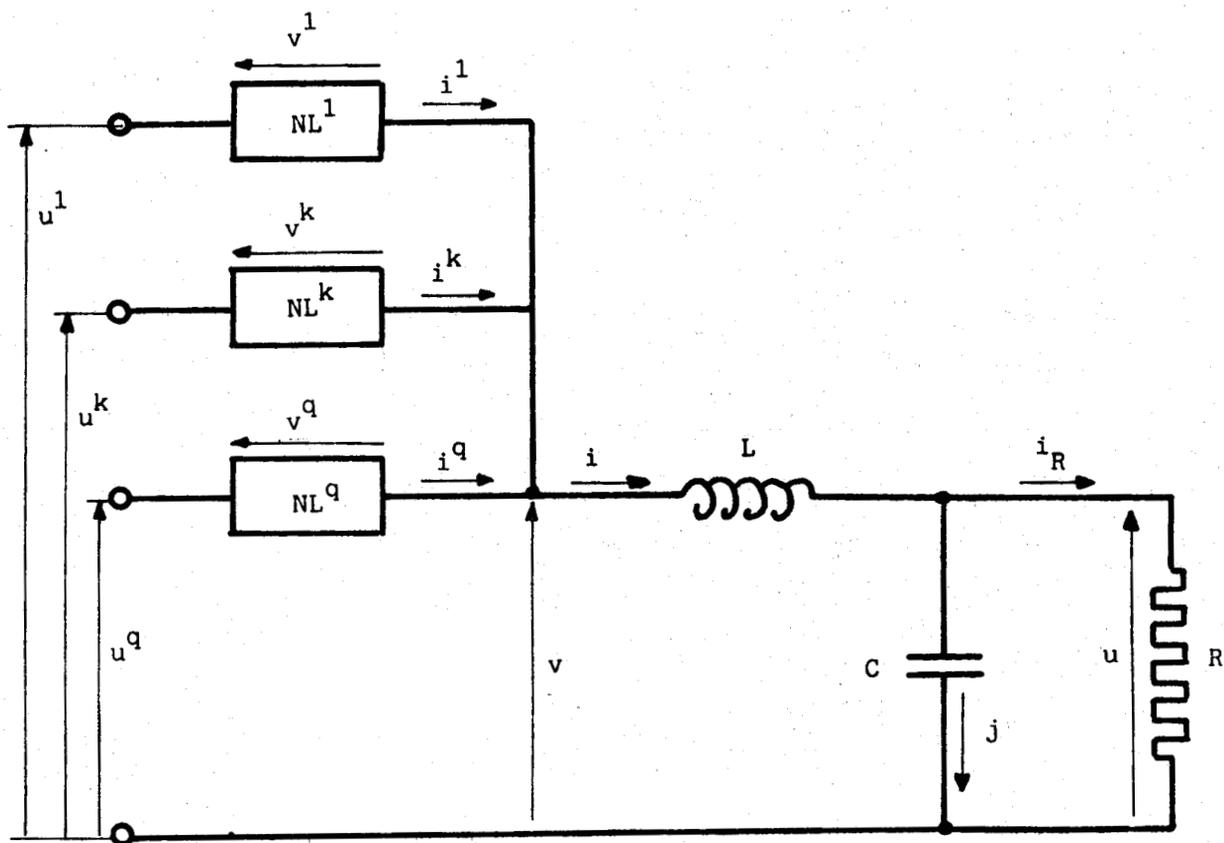


Figure 5.2

5.3. expression du courant i dans l'inductance L

En supposant, dans l'intervalle (t_n, t_{n+1}) , les variations des tensions appliquées u^k linéaires :

$$u^k = u_n^k + a_n^k (t - t_n),$$

la tension v aux bornes du récepteur est donnée par la relation (3.9) :

$$(5.1) \quad v_n - v = r_n (i - i_n) - \alpha_n (t - t_n)$$

où
$$\frac{1}{r_n} = \sum_{k=1}^q \frac{1}{r_n^k} \quad \text{avec} \quad r_n^k = \left(\frac{d v^k}{d i^k} \right)_{i_n^k, v_n^k}$$

et
$$\alpha_n = r_n \sum_{k=1}^q \frac{a_n^k}{r_n^k}$$

En exprimant les variables i et v en fonction de u :

$$i = C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R}$$

$$v = LC \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{du}{dt} + u \quad ,$$

et en posant :

$$\beta_0 = \frac{1}{LC} \left(1 + \frac{r_n}{R} \right)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{LC} \left(\frac{L}{R} + C r_n \right)$$

$$\gamma = \frac{1}{LC} (v_n + r_n i_n) \quad ,$$

l'équation (5.1) devient :

$$(5.2) \quad \frac{d^2 u}{dt^2} + \beta_1 \frac{du}{dt} + \beta_0 u = \gamma + \frac{\alpha_n}{LC} (t - t_n) \quad ,$$

relation dont les racines de son équation caractéristique sont :

$$x_1 = -\frac{1}{2} \left(\beta_1 + \sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_0} \right)$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} \left(\beta_1 - \sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_0} \right)$$

En désignant par λ_1 et λ_2 les constantes d'intégration, (5.2.) admet pour solution :

$$(5.3) \quad u = \lambda_1 e^{x_1(t-t_n)} + \lambda_2 e^{x_2(t-t_n)} + \frac{\alpha_n}{\beta_0 LC} (t-t_n) + \frac{\gamma}{\beta_0} - \frac{\beta_1 \alpha_n}{\beta_0^2 LC}$$

d'où l'expression du courant i :

$$(5.4) \quad i = \lambda_1 \left(Cx_1 + \frac{1}{R} \right) e^{x_1(t-t_n)} + \lambda_2 \left(Cx_2 + \frac{1}{R} \right) e^{x_2(t-t_n)} \\ + \frac{\alpha_n}{\beta_0 LCR} (t-t_n) + \frac{\gamma}{\beta_0 R} + \frac{\alpha_n}{\beta_0 L} \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_0 CR} \right)$$

Sachant qu'à $t = t_n$, $u = u_n$, $i = i_n$, il vient :

$$\lambda_1 = \frac{i_n - \frac{u_n}{R} - \frac{\alpha_n}{\beta_0 L} + Cx_2 \left(\frac{\gamma}{\beta_0} - \frac{\alpha_n}{LC} \frac{\beta_1}{\beta_0^2} - u_n \right)}{C(x_1 - x_2)}$$

$$\lambda_2 = \frac{i_n - \frac{u_n}{R} - \frac{\alpha_n}{\beta_0 L} + Cx_1 \left(\frac{\gamma}{\beta_0} - \frac{\alpha_n}{LC} \frac{\beta_1}{\beta_0^2} - u_n \right)}{C(x_2 - x_1)}$$

En admettant que $\Delta t \ll -\frac{1}{x_1}$ et $\Delta t \ll -\frac{1}{x_2}$, le courant i a pour valeur, à l'instant t_{n+1} , en considérant le développement des exponentielles jusqu'au second ordre :

$$(5.5) \quad i_{n+1} \approx i_n + \frac{1}{L} (v_n - u_n) \Delta t + \left[\frac{1}{RCL} (u_n - Ri_n) + \frac{\alpha_n}{L} + \frac{r_n}{L^2} (u_n - v_n) \right] \frac{\Delta t^2}{2}$$

5.4. Tension v' imposée à l'entrée du filtre

Dans l'intervalle t_n, t_{n+1} , la tension v' imposée à l'entrée du filtre a pour expression :

$$(5.6.) \quad v' = v_n + a(t - t_n)$$

En considérant comme variable la différence de potentiel u' aux bornes de R et en posant :

$$\beta'_0 = \frac{1}{LC}, \quad \beta'_1 = \frac{1}{CR}, \quad \gamma' = \frac{v_n}{LC},$$

il vient :

$$(5.7) \quad \frac{d^2 u'}{dt^2} + \beta'_1 \frac{du'}{dt} + \beta'_0 u' = \gamma' + \frac{a}{LC} (t - t_n)$$

relation dont les racines de son équation caractéristique sont :

$$x'_1 = -\frac{1}{2} \left(\beta'_1 + \sqrt{\beta'^2_1 - 4\beta'_0} \right)$$

$$x'_2 = -\frac{1}{2} \left(\beta'_1 - \sqrt{\beta'^2_1 - 4\beta'_0} \right)$$

En notant λ'_1 et λ'_2 les constantes d'intégration, (5.7) admet pour solution :

$$(5.8) \quad u' = \lambda'_1 e^{x'_1(t-t_n)} + \lambda'_2 e^{x'_2(t-t_n)} + \frac{a}{\beta'_0 LC} (t-t_n) + \frac{\gamma'}{\beta'_0} - \frac{\beta'_1}{\beta'_0} \frac{a}{LC}$$

d'où l'expression du courant i' dans l'inductance :

$$(5.9) \quad i' = \lambda'_1 \left(Cx'_1 + \frac{1}{R} \right) e^{x'_1(t-t_n)} + \lambda'_2 \left(Cx'_2 + \frac{1}{R} \right) e^{x'_2(t-t_n)} + \frac{a}{\beta'_0 LCR} (t-t_n) + \frac{\gamma'}{\beta'_0 R} + \frac{a}{\beta'_0 L} \left(1 - \frac{\beta'_1}{\beta'_0 CR} \right)$$

En admettant qu'à $t = t_n$, $u'_n = u_n$ et $i'_n = i_n$, les constantes λ'_1 et λ'_2 ont pour valeurs :

$$\lambda'_1 = \frac{i_n - \frac{u_n}{R} - \frac{a}{\beta'_0 L} + C x'_2 \left(\frac{\gamma'}{\beta'_0} - \frac{a}{LC} \frac{\beta'_1}{\beta'_0} - u_n \right)}{C (x'_1 - x'_2)}$$

$$\lambda'_2 = \frac{i_n - \frac{u_n}{R} - \frac{a}{\beta'_0 L} + C x'_1 \left(\frac{\gamma'}{\beta'_0} - \frac{a}{LC} \frac{\beta'_1}{\beta'_0} - u_n \right)}{C (x'_2 - x'_1)}$$

En supposant que $\Delta t \ll -\frac{1}{x'_1}$ et $\Delta t \ll -\frac{1}{x'_2}$, le courant i' a pour valeur approchée à l'instant t_{n+1} :

$$(5.10) \quad i'_{n+1} \neq i_n + \frac{1}{L} (v_n - u_n) \Delta t + \left[\frac{1}{RLC} (u_n - R i_n) + \frac{a}{L} \right] \frac{\Delta t^2}{2}$$

En désignant par a^* la pente de la rampe de tension imposée à l'entrée du filtre lorsque la condition de test est satisfaite, il vient successivement en procédant comme au paragraphe 3.3.2.3.

$$(\alpha_n - a^*) \Delta t = r_n (i'_{n+1} - i_n)$$

$$\alpha_n - a^* \left(1 + \frac{r_n}{2L} \Delta t\right) \neq \frac{r_n}{L} (v_n - u_n) + \frac{1}{RLC} (u_n - R i_n) \frac{r_n}{2} \Delta t$$

soit finalement en admettant $\Delta t \ll \frac{2L}{r_n}$:

$$(5.11) \quad i'_{n+1} \neq i_n + \frac{1}{L} (v_n - u_n) \Delta t + \left[\frac{1}{RCL} (u_n - R i_n) + \frac{\alpha_n}{L} + \frac{r_n}{L^2} (u_n - v_n) \right] \frac{\Delta t^2}{2}$$

La comparaison des relations (5.5) et (5.11) montre qu'en supposant l'égalité des courants i_n et i'_n et des tensions u_n et u'_n à l'instant t_n , le courant dans l'inductance L à t_{n+1} a, jusqu'au second ordre, même expression pour les circuits réel et associé, lorsque une rampe de tension est imposée à l'entrée du filtre.

5.5. Tension u' imposée aux bornes de la résistance R

5.5.1. Evolution linéaire de la variable u'

Sachant que dans l'intervalle t_n, t_{n+1} , la tension u' imposée aux bornes de la résistance R a pour expression :

$$u' = u_n + a^1 (t - t_n)$$

les variations du courant i' dans l'inductance L et la différence de potentiel v' à l'entrée du filtre sont données respectivement par les relations :

$$i' = \frac{a^1}{R} (t - t_n) + \frac{u_n}{R} + C a^1$$

$$v' = a^1 (t - t_n) + u_n + \frac{L}{R} a^1$$

Nous avons donc à l'instant t_n :

$$(5.12) \quad i'_n = \frac{u_n}{R} + C a^1$$

$$(5.13) \quad v'_n = u_n + \frac{L}{R} a^1$$

L'état du système à t_{n+1} est déterminé à partir de la connaissance des conditions initiales sur le courant i' et la tension v' . Or les valeurs i'_n et v'_n de ces grandeurs, constantes à t_n , ne peuvent pas dépendre, comme le montrent les relations (5.12) et (5.13), de la pente a^1 du signal rampe imposé.

Il n'est donc pas possible, en imposant une variation linéaire à la tension u' , d'identifier i'_n et v'_n à i_n et v_n .

5.5.2. Evolution parabolique de la tension u'

Le courant i' et la tension v' dans l'intervalle t_n, t_{n+1} se déduisent de l'expression de u' :

$$u' = u_n + a^1 (t - t_n) + \frac{a^2}{2} (t - t_n)^2$$

soit :

$$i' = \frac{u_n}{R} + C a^1 + \left(\frac{a^1}{R} + C a^2\right)(t - t_n) + \frac{a^2}{2R} (t - t_n)^2$$

$$v' = u_n + L \left(\frac{a^1}{R} + C a^2\right) + \left(a^1 + \frac{L}{R} a^2\right) (t - t_n) + \frac{a^2}{2} (t - t_n)^2$$

d'où les valeurs de ces grandeurs à t_n :

$$(5.14) \quad i'_n = \frac{u_n}{R} + C a^1$$

$$(5.15) \quad v'_n = u_n + L \left(\frac{a^1}{R} + C a^2\right)$$

L'état du circuit à l'instant t_n est lié aux valeurs des paramètres a^1 et a^2 qui sont alors imposées par les conditions initiales ; $i'_n = i_n$, $v'_n = v_n$.

La variation de u' ne peut, dans ces conditions, être traduite qu'en adoptant une loi d'évolution représentée par un polynôme du troisième degré.

5.5.3. Tension u' caractérisée par un polynôme du troisième degré

En adoptant pour u' l'expression :

$$(5.16) u' = u_n + a^1 (t - t_n) + \frac{a^2}{2} (t - t_n)^2 + \frac{a^3}{6} (t - t_n)^3,$$

les conditions initiales à t_n , concernant les variables i' et v' , sont également définies par les relations (5.14) et (5.15) de sorte que :

$$a^1 = \frac{1}{CR} (R i_n - u_n)$$

$$a^2 = \frac{1}{LC} (v_n - u_n) - \frac{1}{C^2 R^2} (R i_n - u_n)$$

A l'instant t_{n+1} , les valeurs i'_{n+1} du courant i' et v'_{n+1} de la tension v' , fonctions de i_n , v_n , u_n et a^3 , sont données par les relations :

$$(5.17) i'_{n+1} = i_n + \frac{v_n - u_n}{L} \Delta t + \left(\frac{a^2}{R} + C a^3 \right) \frac{\Delta t^2}{2} + \frac{a^3}{R} \frac{\Delta t^3}{6}$$

$$(5.18) v'_{n+1} = v_n + \left[a^1 + L \left(\frac{a^2}{R} + C a^3 \right) \right] \Delta t + \left(a^2 + \frac{La^3}{R} \right) \frac{\Delta t^2}{2} + a^3 \frac{\Delta t^3}{6}$$

En désignant par a^{3*} la valeur du paramètre réglable de l'expression de u' lorsque la condition de test sur le courant i' est satisfaite, i'_{n+1} est alors donné par la relation (5.19) :

$$(5.19) i'_{n+1} = i_n + \left[\alpha_n - a^1 - L \left(\frac{a^2}{R} + C a^{3*} \right) \right] \frac{\Delta t}{r_n} - \left(a^2 + \frac{La^{3*}}{R} \right) \frac{\Delta t^2}{2r_n} - a^{3*} \frac{\Delta t^3}{6r_n}$$

L'identification de (5.17) et (5.19) fournit la valeur approchée de a^{3*} .

$$-a^{3*} \neq \frac{1}{LC} \left[\frac{r_n}{L} (v_n - u_n) - \alpha_n - a^1 - \frac{L}{R} a^2 \right]$$

établie en admettant que $\left| \frac{r_n}{L} - \frac{1}{RC} \right| \frac{\Delta t}{2} \ll 1$

En reportant a^{3*} dans (5.17), il vient :

$$(5.20) \quad i'_{n+1} \neq i_n + \frac{1}{L} (v_n - u_n) \Delta t + \left[\frac{1}{RLC} (u_n - R i_n) + \frac{\alpha_n}{L} + \frac{r_n}{L^2} (u_n - v_n) \right] \frac{\Delta t^2}{2}$$

La caractérisation de la tension u' imposée aux bornes de la résistance R par un polynôme du 3^{ième} degré conduit pour i'_{n+1} à une relation dont les termes, jusqu'au second ordre, sont identiques à ceux de l'expression du courant dans le circuit réel.

5.6. Courant i' imposé dans l'inductance L

5.6.1. Choix de la loi d'évolution du courant i'

Pour comparer à i_{n+1} la valeur i'_{n+1} du courant i' à l'instant t_{n+1} , il importe que le système soit dans le même état à l'instant t_n soit :

$$i'_n = i_n, \quad u'_n = u_n, \quad v'_n = v_n$$

Le paramètre qui permet d'agir sur la loi d'évolution de i' pour satisfaire la condition de test, ne doit pas entraîner une modification des conditions initiales relatives aux variables i' , u' et v' .

Supposons donc le courant défini par un polynôme de degré k :

$$(5.21) \quad i' = i_n + a^1 (t - t_n) + \frac{a^2}{2!} (t - t_n)^2 + \dots + \frac{a^k}{k!} (t - t_n)^k$$

Les relations qui lient u' et v' au courant i' ont pour expressions :

$$(5.22) \quad u' + RC \frac{du'}{dt} = R i'$$

$$(5.23) \quad v' = L \frac{di'}{dt} + u'$$

En supposant la composante forcée u'_f de la tension u' de la forme :

$$u'_f = b^0 + b^1(t-t_n) + \frac{b^2}{2!}(t-t_n)^2 + \dots + \frac{b^k}{k!}(t-t_n)^k,$$

il vient :

$$(5.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} b^0 + RC b^1 = R i_n \\ b^1 + RC b^2 = R a^1 \\ b^2 + RC b^3 = R a^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b^{k-1} + RC b^k = R a^{k-1} \\ b^k = R a^k \end{array} \right.$$

Or, la solution de l'équation (5.22) est obtenue en ajoutant à u'_f la composante libre de u'_1 de u' d'expression :

$$u'_1 = \lambda e^{-\frac{t-t_n}{RC}}$$

Il en résulte qu'à $t = t_n$:

$$(5.25) \quad u'_n = \lambda + b^0 = \lambda + R (i_n - C b^1)$$

De la relation (5.23), on déduit :

$$(5.26) \quad v'_n = u'_n + L a^1$$

Pour u'_n et v'_n donnés, les relations (5.26) et (5.25) fixent les valeurs des coefficients a^1 et λ soit :

$$(5.27) \quad a^1 = \frac{v'_n - u'_n}{L}$$

et

$$(5.28) \quad \lambda = u'_n - R i_n + RC b^1$$



Or, pour un courant i' défini par un polynome de degré k , b^1 , tiré de (5.24), est donné par la relation :

$$b^1 = R [a^1 - RC a^2 + (RC)^2 a^3 + \dots - (RC)^{k-2} a^{k-1} + (RC)^{k-1} a^k]$$

Pour que la constante d'intégration λ soit indépendante des coefficients du polynome (5.21), autres que a^1 défini par la relation (5.27), il faut :

$$(5.29) \quad a^2 - RC a^3 + \dots + (RC)^{k-3} a^{k-1} - (RC)^{k-2} a^k = 0$$

Pour satisfaire la condition précédente et disposer d'un paramètre pour modifier la loi d'évolution de i' , il suffit de limiter à 3 le degré k du polynome caractérisant le courant i' .

Dans ces conditions :

$$a^3 = \frac{a^2}{RC}$$

et

$$(5.30) \quad i' = i_n + a^1 (t - t_n) + \frac{a^2}{2} (t - t_n)^2 + \frac{a^2}{6RC} (t - t_n)^3$$

5.6.2. Expression du courant i' à t_{n+1}

La tension u' a pour expression :

$$u' = \lambda e^{-\frac{t-t_n}{RC}} + b^0 + b^1(t - t_n) + \frac{b^2}{2}(t - t_n)^2 + \frac{b^3}{6}(t - t_n)^3$$

Les coefficients b^0 , b^1 , b^2 et b^3 sont déduits du système d'équations (5.24) et λ de la relation (5.25). Il vient donc sachant que $u'_n = u_n$ et $v'_n = v_n$:

$$b^3 = \frac{a^2}{C}$$

$$b^2 = 0$$

$$b^1 = Ra^1 = \frac{R}{L} (v_n - u_n)$$

$$b^0 = R (i_n - CRa^1) = R \left[i_n - \frac{CR}{L} (v_n - u_n) \right]$$

$$\lambda = u_n - b^0 = u_n - R i_n + \frac{CR^2}{L} (v_n - u_n)$$

d'où

$$(5.31) u' = \left[u_n - R i_n + \frac{CR^2}{L} (v_n - u_n) \right] e^{-\frac{t-t_n}{CR}} + R \left[i_n - \frac{CR}{L} (v_n - u_n) \right] + \frac{R}{L} (v_n - u_n) (t-t_n) + \frac{a^2}{6C} (t-t_n)^2$$

et

$$(5.32) v' = v_n - u_n + u' + La^2 (t-t_n) + \frac{La^2}{2RC} (t-t_n)^2$$

En supposant la condition de test satisfaite pour la valeur a^{2*} de a^2 , les relations (5.30) et (5.1) deviennent :

$$(5.33) i'_{n+1} - i_n = \frac{v_n - u_n}{L} \Delta t + \frac{a^{2*}}{2} \left(1 + \frac{\Delta t}{3RC} \right) \Delta t^2$$

$$(5.34) i'_{n+1} - i_n = \left[\alpha_n - La^2 \left(1 + \frac{\Delta t}{2RC} \right) \right] \frac{\Delta t}{r_n} - \frac{1}{r_n} (u'_{n+1} - u_n)$$

En supposant $\frac{\Delta t}{RC} \ll 1$, le développement de l'exponentielle $e^{-\frac{t-t_n}{RC}}$ peut être limité au terme du premier ordre. Dans ces conditions, la différence $(u'_{n+1} - u_n)$ a pour expression

$$u'_{n+1} - u_n \approx (R i_n - u_n) \frac{\Delta t}{RC}$$

Dans l'hypothèse où $\left(\frac{1}{RC} + \frac{r_n}{L} \right) \frac{\Delta t}{2} \ll 1$, on obtient :

$$a^{2*} \approx \frac{\alpha_n}{L} + \frac{1}{RLC} (u_n - R i_n) + \frac{r_n}{L^2} (u_n - v_n)$$

puis

$$(5.35) i'_{n+1} \approx i_n + \frac{1}{L} (v_n - u_n) \Delta t + \left[\frac{1}{RCL} (u_n - R i_n) + \frac{\alpha_n}{L} + \frac{r_n}{L^2} (u_n - v_n) \right] \frac{\Delta t^2}{2}$$

Les calculs précédents montrent donc que parmi les variables dont il est possible de fixer la loi d'évolution : tension v' à l'entrée du filtre, tension u' aux bornes de la résistance R , courant i' dans l'inductance L , il est préférable d'adopter la grandeur v' puisqu'une variation linéaire de celle-ci suffit à obtenir, à l'instant t_{n+1} , même expression du courant dans L pour les circuits réel et associé.

C'est dans ces conditions que nous envisageons de comparer les résultats obtenus par notre méthode à ceux précédemment présentés sur le même montage par d'autres auteurs [15] [19].

5.7. Applications de la méthode au montage redresseur-filtre-charge

Les tensions u^1 et u^2 (figure 5.3) supposées sinusoïdales, d'amplitude 180V et de fréquence 50 Hz, sont fournies par un transformateur monophasé à enroulement secondaire à point milieu.

La résistance directe des diodes, à tension de seuil $V_s = 0,6$ V, est égale à $0,2 \Omega$ alors que l'impédance inverse est supposée infinie.

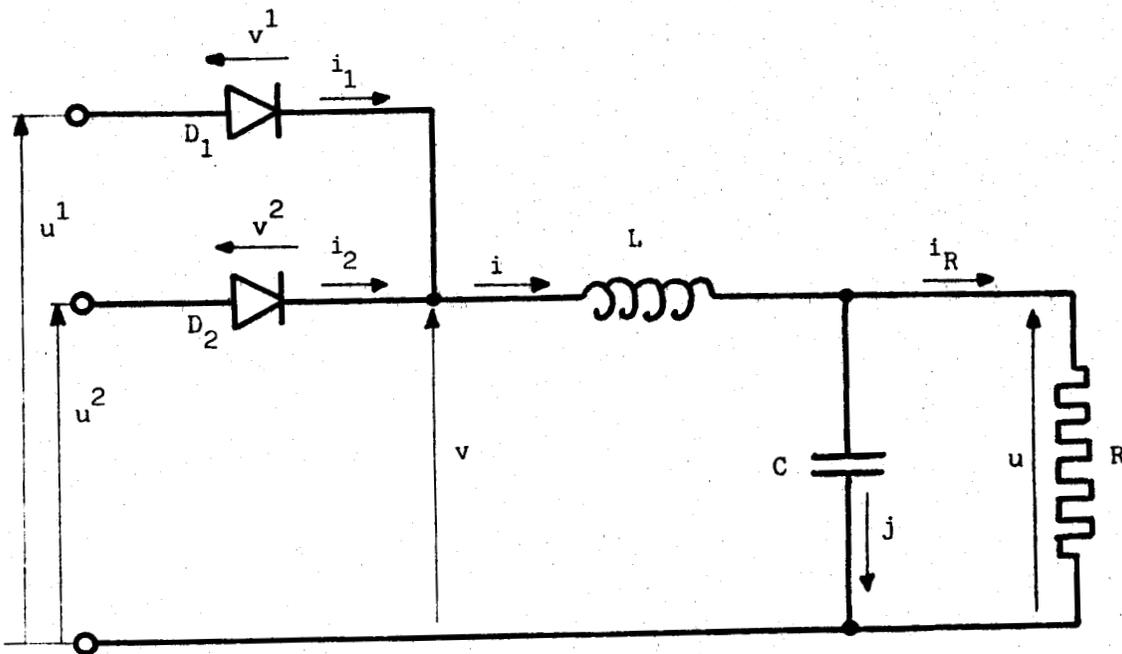


Figure 5.3.

5.7.1. Modes de fonctionnement

En supposant la conduction des diodes continue, la tension u' aux bornes de la résistance est régi par l'équation différentielle du second ordre :

$$(5.36) \quad LC \frac{d^2 u'}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{du'}{dt} + u' = v'$$

ou encore en adoptant comme variable l'angle $\theta = \omega t$:

$$(5.37) \quad m \frac{d^2 u'}{d\theta^2} + \frac{m}{k} \frac{du'}{d\theta} + u' = v'$$

en posant $m = LC\omega^2$ et $k = RC\omega$, paramètres caractéristiques du filtre et de la charge, dont les valeurs fixent (figure 5.4) les modes de fonctionnement possibles :

- a) conduction continue avec régime libre apériodique
- b) conduction continue avec régime libre pseudo-périodique
- c) conduction discontinue avec régime libre pseudo-périodique.

5.7.2. Réponses du système

En imposant, dans l'intervalle (t_n, t_{n+1}) une évolution linéaire à la tension v' :

$$v' = v_n + a (t - t_n)$$

la solution particulière de l'équation (5.36), correspondant au régime forcé, a pour expression :

$$(5.38) \quad u'_f = a (t - t_n) + v_n - \frac{L}{R} a = v' - \frac{L}{R} a$$

Le régime libre est apériodique si le discriminant de l'équation caractéristique :

$$(5.39) \quad m x^2 + \frac{m}{k} x + 1 = 0$$

est positif, soit pour

$$k < \frac{\sqrt{m}}{2}$$

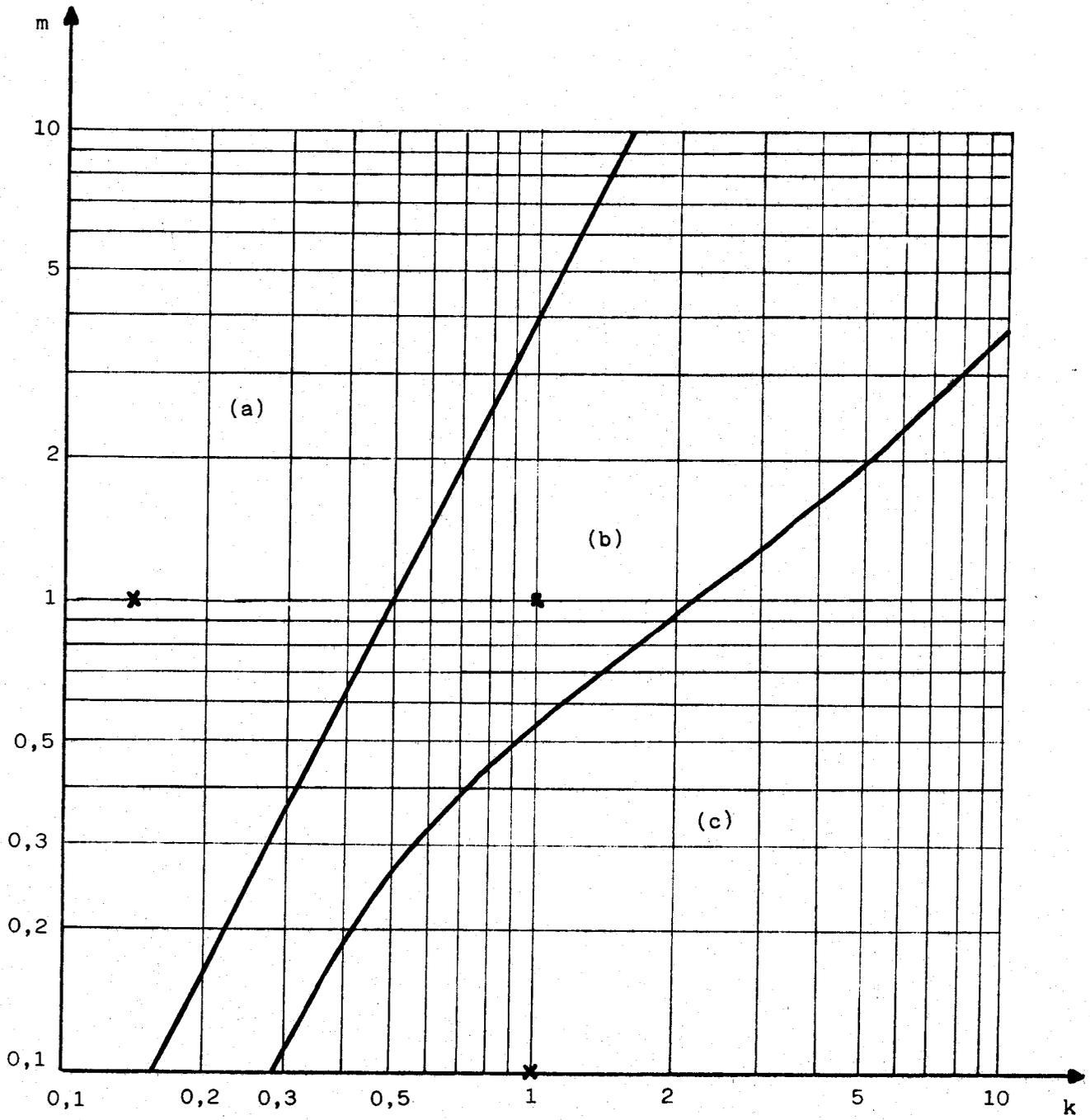


Figure 5.4.

5.7.2.1. Discriminant positif : $k < \frac{\sqrt{m}}{2}$

Les racines de l'équation caractéristique sont :

$$\begin{matrix} x'_1 \\ x'_2 \end{matrix} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{CR} \pm \sqrt{\frac{1}{(CR)^2} - \frac{4}{LC}} \right)$$

la tension u' et le courant i' ont alors pour expressions déduites des relations (5.8) et (5.9)

$$(5.40) \quad u' = \lambda'_1 e^{x'_1(t-t_n)} + \lambda'_2 e^{x'_2(t-t_n)} + v' - \frac{L}{R} a$$

$$(5.41) \quad i' = \lambda'_1 \left(Cx'_1 + \frac{1}{R} \right) e^{x'_1(t-t_n)} + \lambda'_2 \left(Cx'_2 + \frac{1}{R} \right) e^{x'_2(t-t_n)} + \frac{v'}{R} + a \left(C - \frac{L}{R^2} \right)$$

avec

$$\lambda'_1 = \frac{i_n - \frac{u'_n}{R} - aC + Cx'_2 \left(v_n - \frac{L}{R} a \right)}{C(x'_1 - x'_2)}$$

$$\lambda'_2 = u'_n - \left(v_n - \frac{L}{R} a \right) - \lambda'_1$$

5.7.2.2. Discriminant négatif : $k > \frac{\sqrt{m}}{2}$

Les racines de l'équation caractéristique, alors complexes, ont pour expression :

$$\begin{matrix} x'_1 \\ x'_2 \end{matrix} = \alpha \pm j\beta$$

avec $\alpha = -\frac{1}{2RC}$

et.

$$\beta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{1}{(RC)^2}}$$

La tension u' et le courant i' sont définis par les relations :

$$(5.42) \quad u' = e^{\alpha(t-t_n)} [\lambda'_1 \cos \beta(t-t_n) + \lambda'_2 \sin \beta(t-t_n)] + v' - \frac{L}{R} a$$

$$(5.43) \quad i' = e^{\alpha(t-t_n)} \left\{ \left[C(\alpha\lambda'_1 + \beta\lambda'_2) + \frac{\lambda'_1}{R} \right] \cos \beta(t-t_n) \right. \\ \left. + \left[C(\alpha\lambda'_2 - \beta\lambda'_1) + \frac{\lambda'_2}{R} \right] \sin \beta(t-t_n) \right\} + \frac{v'}{R} + a \left(C - \frac{L}{R^2} \right)$$

avec

$$\lambda'_1 = u'_n - v_n + \frac{L}{R} a$$

$$\lambda'_2 = \frac{i'_n - \frac{\lambda'_1}{2R} - \frac{v_n}{R} - a \left(C - \frac{L}{R^2} \right)}{C \beta}$$

Lorsque le régime libre est apériodique, la conduction est toujours continue. Par contre, pour le régime libre pseudo-périodique, elle est continue tant que le courant i' dans l'inductance ne s'annule pas au cours de la période. La limite de ce fonctionnement (figure 5.4) est obtenue en recherchant, pour chaque valeur de m , celle de k (avec $k > \frac{\sqrt{m}}{2}$) pour laquelle l'intensité minimale i'_{\min} du courant i' est nulle.

5.7.3. Evolutions du courant dans l'inductance L et de la tension aux bornes de R.

Nous avons montré précédemment qu'il était préférable d'imposer la loi d'évolution de la tension v' à l'entrée du filtre. Dans ces conditions, il suffit de reprendre l'organigramme proposé pour l'étude du circuit "roue libre" (chapitre 3) lorsque nous avons fixé, par notre méthode, la loi $v'(t)$ de la tension aux bornes de la résistance inductive R.L.

En considérant les conditions initiales nulles et la mise sous tension du circuit lorsque la tension u^1 s'annule par valeurs croissantes, les figures 5-5a, b et c reproduisent, lorsque $R = 10\Omega$, pour un pas de calcul de 0,5 ms et pour une précision ϵ dans l'appréciation de la condition de test de 1%, les variations, en fonction du temps, du courant i' dans l'inductance L et de la tension u' aux bornes de la résistance R dans les trois cas précisés précédemment pour les valeurs ci-dessous des paramètres m et k :

	m	k
a	0,5	0,03
b	1	1
c	0,1	1

L'examen des courbes des figures précédentes et de celles tracées par G. BCSVIEUX-COILLIOT [15] montre une réelle correspondance dans l'évolution des grandeurs caractéristiques $u'(t)$ et $i'(t)$.

Nous avons ensuite affiné la comparaison de nos résultats avec ceux présentés par M. GOLDBERG [19]. A cette effet, nous avons, pour deux couples de valeurs de m et k correspondant aux cas (b) et (c) pour lesquels l'établissement du régime périodique est rapide, dressé, lorsque celui-ci est atteint, un tableau récapitulatif des valeurs, en coordonnées réduites, des minima et maxima de u' et i' ainsi que **celles correspondantes** (indiquées entre parenthèses) de l'angle θ exprimé en radians (tableau V.1).

Les valeurs données par notre méthode sont très proches de celles obtenues par M. GOLDBERG. L'écart, par défaut, tient essentiellement au fait que nous avons tenu compte de la tension de seuil et de la résistance directe dynamique des diodes.

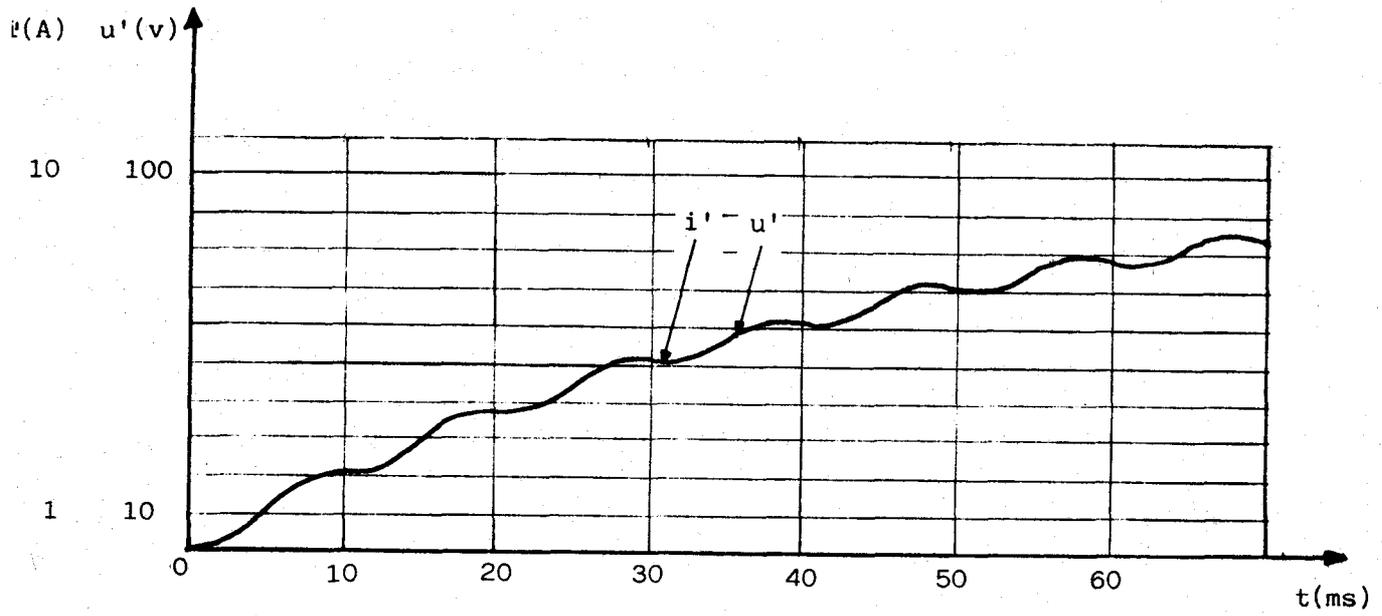


Figure 5.5a

$m = 0,5$
 $k = 0,03$

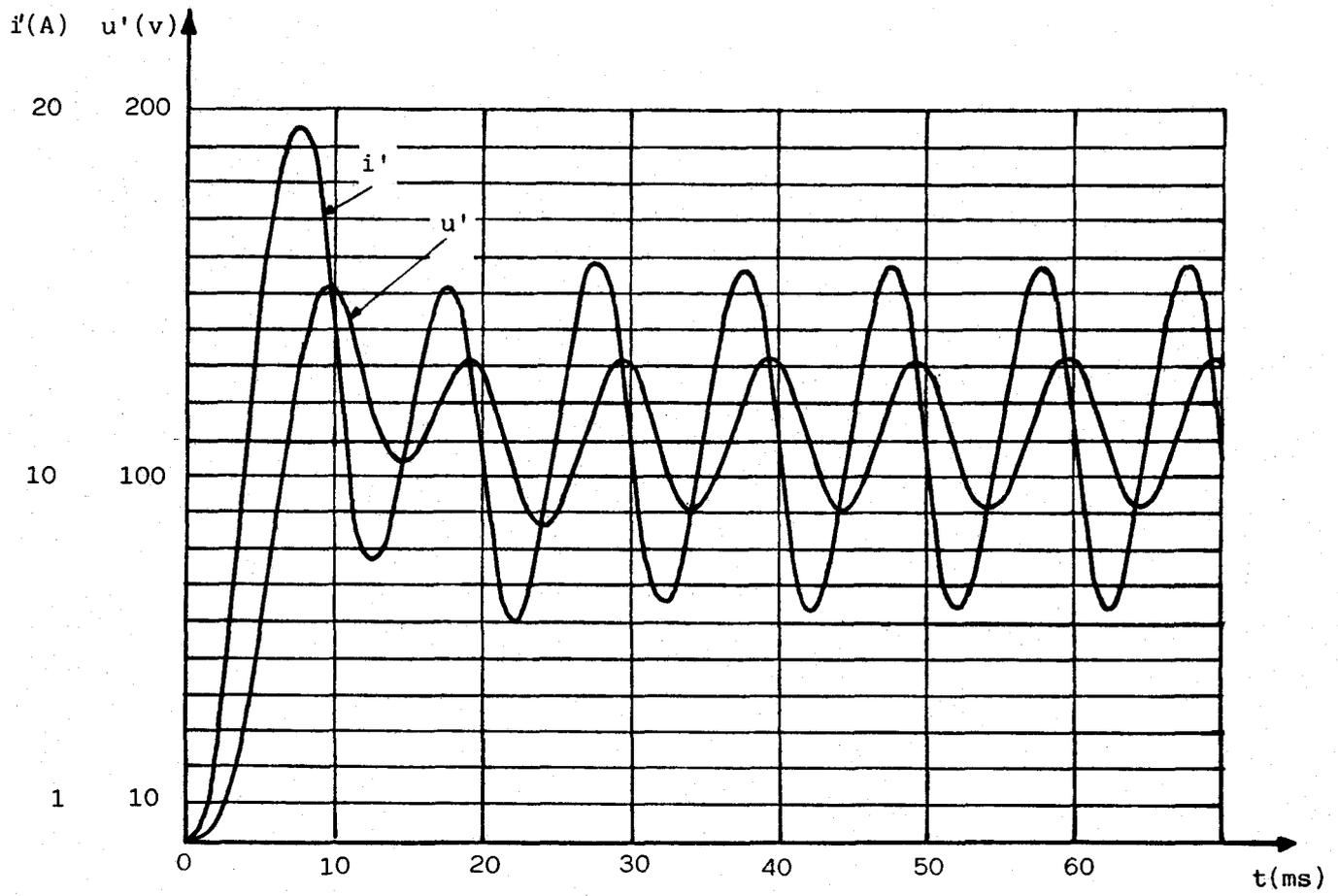
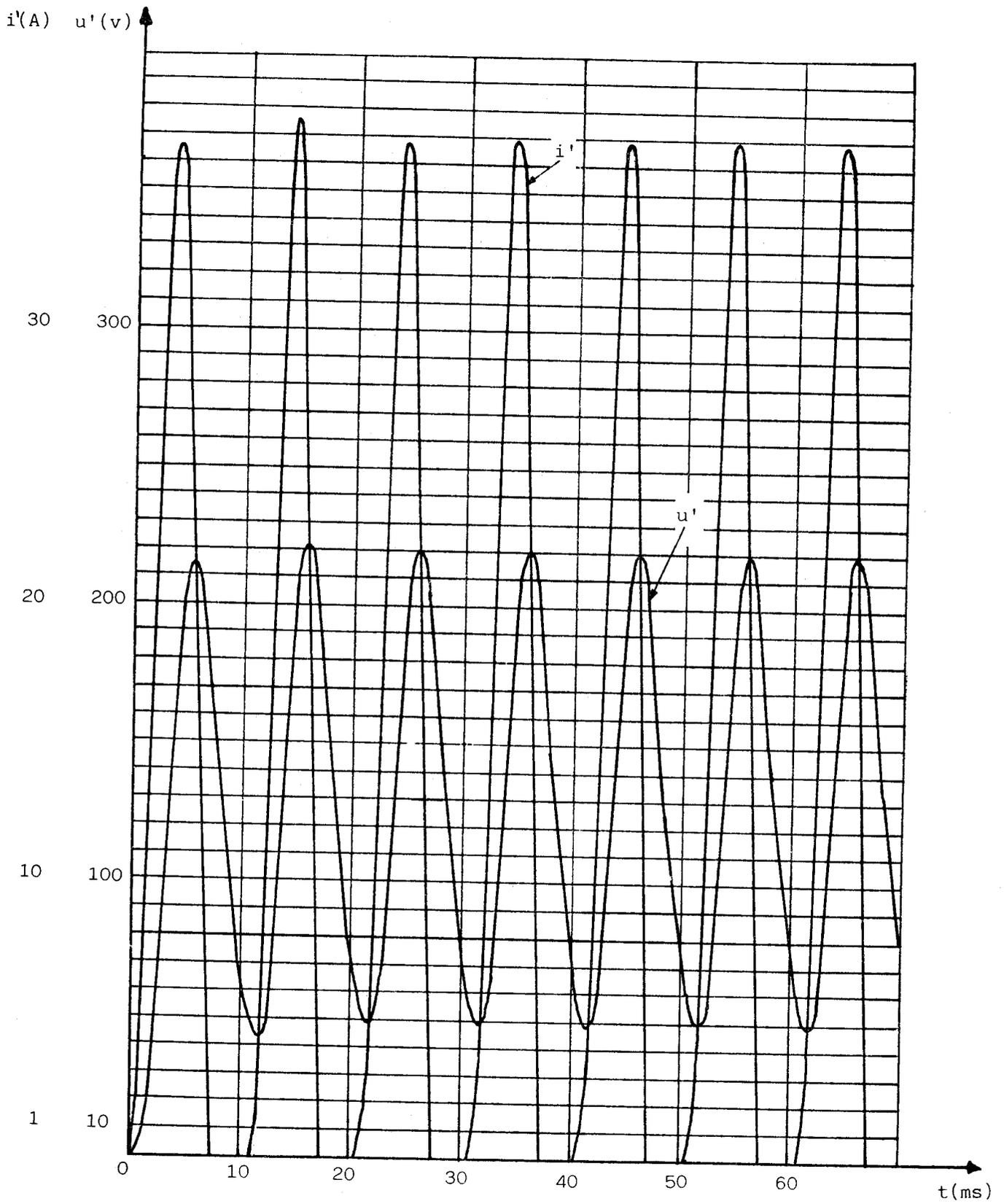


Figure 5.5b

$m = 1$
 $k = 1$



$m = 0,1$
 $k = 1$

Figure 5.5c

		N. GOLDBERG	G. BOSVIEUX-COILLIOT	Méthode proposée
(b) $m = 1, k = 1$	$\frac{u'_{\max}}{V_m}$	0,758 (2,897)	0,75 (2,83 ⁽¹⁾)	0,740 (2,83)
	$\frac{u'_{\min}}{V_m}$	0,522 (1,247)	0,52 (1,13)	0,505 (1,256)
	$\frac{i'_{\max}}{V_m/R}$	0,893 (2,368)	0,89 (2,26)	0,87 (2,355)
	$\frac{i'_{\min}}{V_m/R}$	0,370 (0,639)	0,39 (0,63)	0,35 (0,628)
(c) $m = 0,1 k = 1$	$\frac{u'_{\max}}{V_m}$	1,299 (1,777)	1,3 (1,64)	1,22 (1,73)
	$\frac{u'_{\min}}{V_m}$	0,262 (0,518)	0,27 (0,5)	0,268 (0,471)
	$\frac{i'_{\max}}{V_m/R}$	2,213 (1,31)	2,2 (1,13)	2,05 (1,26)

tableau V.1.

(1) Valeurs de θ approximatives car estimées à partir de courbes pour lesquelles l'échelle des abscisses est faible (2,5 cm pour Π radians).

5.8. Conclusion

Lorsque notre méthode est appliquée à un circuit à structure parallèle dont la partie linéaire est constituée d'éléments associés en cascade, il est encore préférable d'adopter la procédure du générateur de tension en imposant la loi d'évolution de la différence de potentiel aux bornes du système linéaire.

Les résultats obtenus sur le montage redresseur "double alternance" débitant sur une résistance R , par l'intermédiaire d'un filtre LC sont très voisins de ceux d'autres auteurs ayant procédé à une étude analytique du même circuit, en supposant les diodes parfaites.

CHAPITRE 6

Association de non linéarités et d'éléments

linéaires couplés en polygone ou en étoile

6.1. Introduction

Pour permettre l'extension de la méthode à l'étude de circuits de structures plus complexes, nous avons d'abord défini deux ensembles alimentés par un ou plusieurs systèmes de tensions polyphasées et constitués par des non linéarités connectées à des éléments linéaires couplés en polygone ou en étoile.

Après avoir présenté, dans ces deux cas, le mode opératoire permettant d'obtenir l'évolution des grandeurs caractéristiques du montage, nous avons ensuite adapté la procédure à l'étude des montages redresseurs en pont et du phénomène d'empiètement.

6.2. Couplage en polygone des éléments linéaires

6.2.1. Cas général

Un système de q tensions étoilées alimente, par l'intermédiaire d'éléments non linéaires $NL^1, NL^2, \dots, NL^k, \dots, NL^q$, q impédances $Z^1, Z^2, \dots, Z^k, \dots, Z^q$ couplées en polygone (figure 6.1).

Chaque élément NL^k reliant la phase k de la source d'alimentation au sommet A^k du polygone (figure 6.2a) peut d'ailleurs être remplacé par un circuit comprenant plusieurs éléments non linéaires à point commun (figure 6.2b). La méthode s'applique dans les mêmes conditions.

Le fait d'imposer, comme précédemment, dans l'intervalle de temps (t_n, t_{n+1}) la loi d'évolution d'une variable tension ou courant ne suffit plus à la détermination des autres variables du montage.

Il importe de fixer les variations de deux grandeurs, de préférence deux tensions puisque nous avons montré au chapitre 4 que la procédure du générateur de tension donnait de meilleurs résultats. Imposons donc deux tensions successives v'^1 et v'^2 , par exemple.

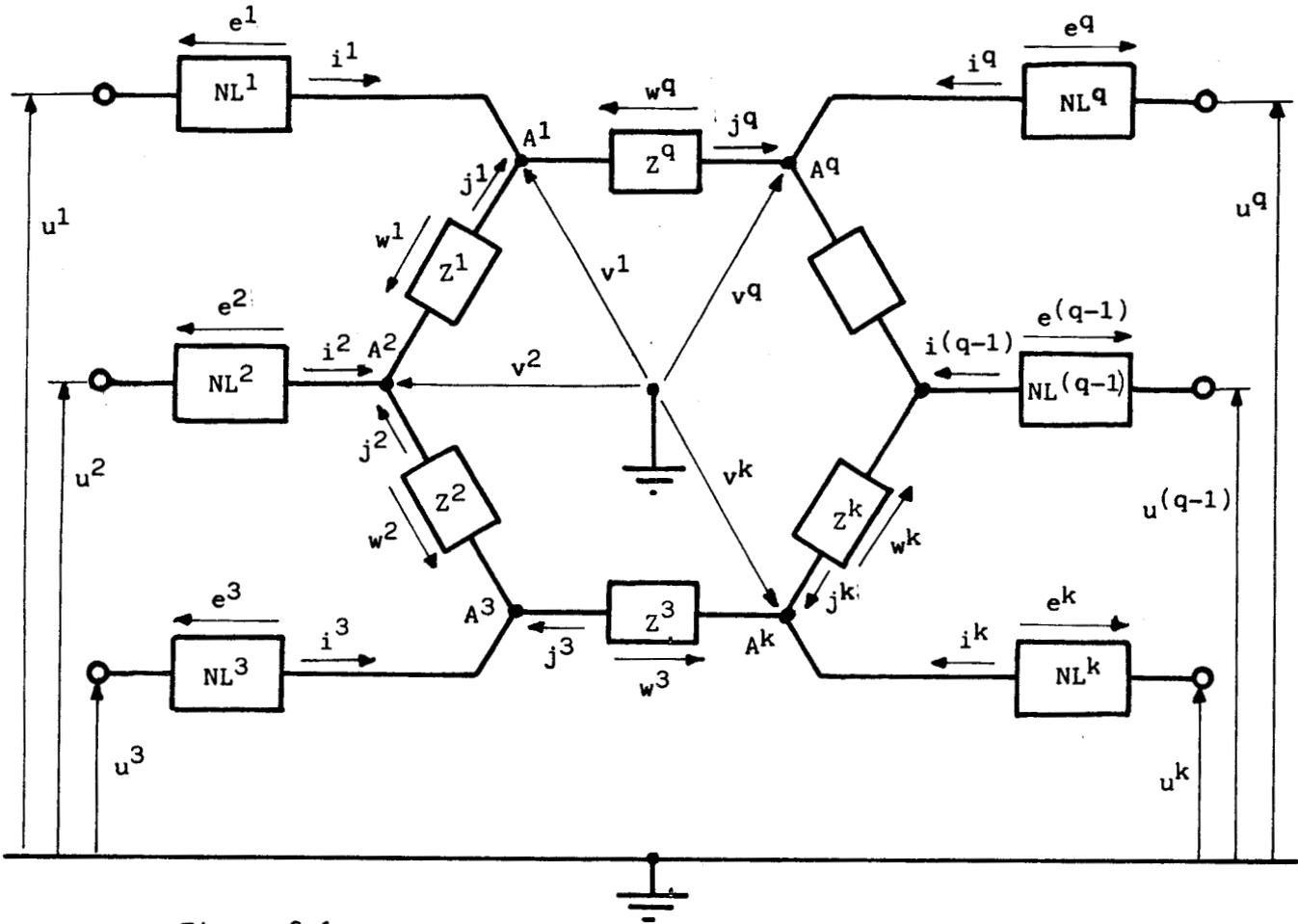


Figure 6.1

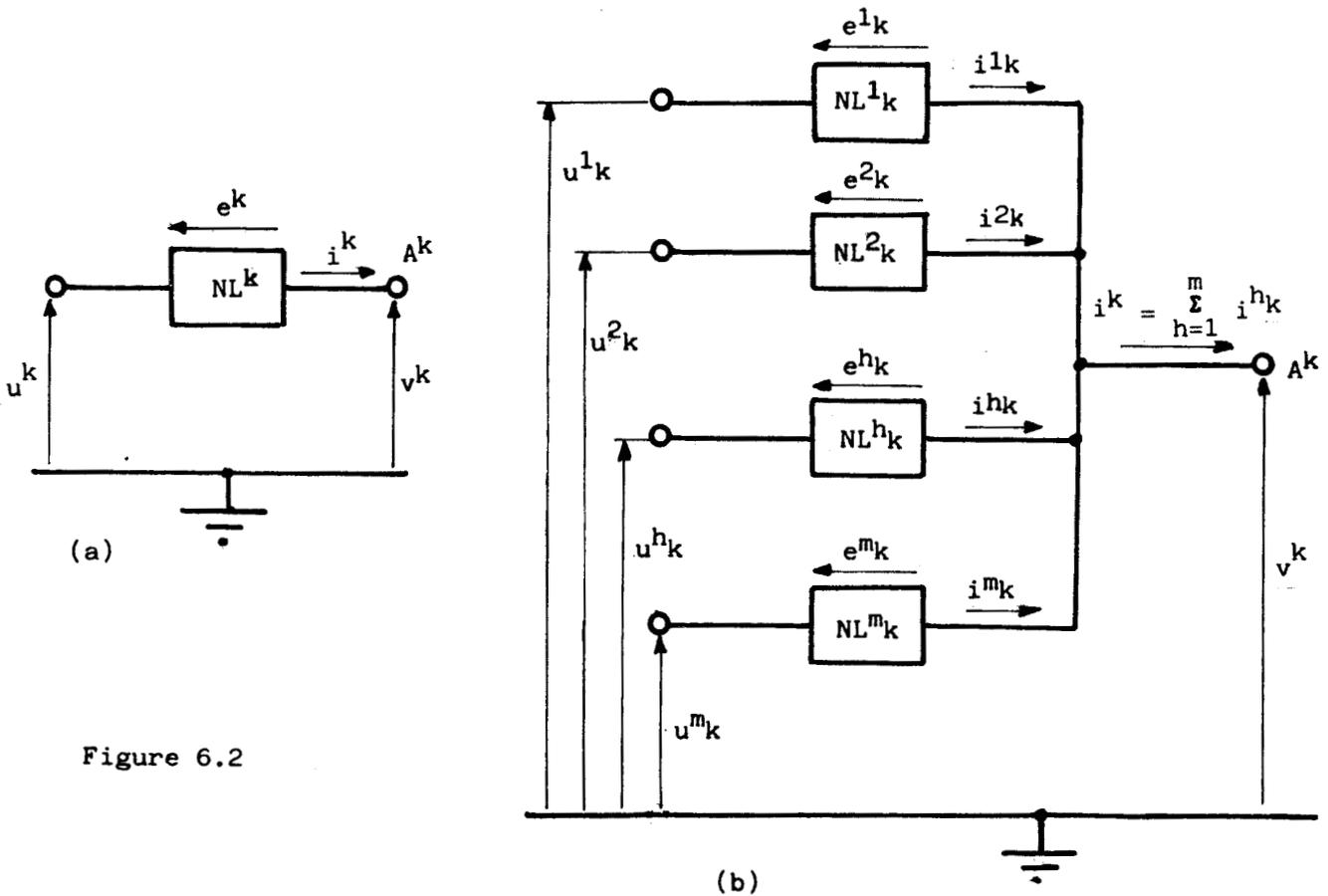


Figure 6.2

A partir de la connaissance des caractéristiques $e^k(i^k)$ des non linéarités et des impédances Z^k , il est possible de déduire d'abord, des différences de potentiel e'^1 , e'^2 et w'^1 alors connues :

$$e'^1 = u^1 - v'^1$$

$$e'^2 = u^2 - v'^2$$

$$w'^1 = v'^2 - v'^1$$

les courants j'^2 et j'^q respectivement dans les impédances Z^2 et Z^q :

$$j'^2 = j'^1 - i'^2$$

$$j'^q = j'^1 + i'^1$$

sachant que

$$i'^1 = f[e'^1, e^1(i^1)]$$

$$i'^2 = f[e'^2, e^2(i^2)]$$

$$j'^1 = f(w'^1, Z^1)$$

L'intensité $j'_{n+1}{}^q$ du courant j'^q à l'instant t_{n+1} est mise en mémoire dans l'attente de la vérification de la condition de test.

Puis, de proche en proche, en convenant de décrire la boucle dans le sens trigonométrique, il vient :

$$w'^2 = f(Z^2, j'^2)$$

$$v'^3 = v'^2 + w'^2$$

$$i'^3 = f[(u^3 - v'^3), e^3(i^3)]$$

$$j'^3 = j'^2 - i'^3$$

$$\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

jusqu'à

$$j'^{(q-1)} = j'^{(q-2)} - i'^{(q-1)}$$

$$i'^q = f[(u^q - v'^q), e^q(i^q)]$$

Si l'intensité $j'_{n+1}{}^q$ mise en mémoire ne vérifie pas, à l'erreur admise près, l'égalité :

$$j'_{n+1}{}^q = j'_{n+1}{}^{(q-1)} - i'_{n+1}{}^q ,$$

le calcul est réitéré en modifiant les valeurs prises initialement pour le couple de tensions $v'{}^1$ et $v'{}^2$.

L'organigramme de la figure 6.3 montre la procédure de détermination d'un point à l'instant t_{n+1} à condition que les plages de variation des tensions imposées $v'{}^1$ et $v'{}^2$ soient définies :

$$v'_{\min}{}^1 < v'_{n+1}{}^1 < v'_{\max}{}^1$$

$$v'_{\min}{}^2 < v'_{n+1}{}^2 < v'_{\max}{}^2$$

6.2.2. Cas particulier : polygone des éléments linéaires ouvert

Lorsqu'un élément Z^k présente une impédance infinie ($j^k = 0$) la procédure de détermination à t_{n+1} d'une variable du système est identique à celle présentée au paragraphe précédent mais il suffit d'imposer une seule tension v' , à savoir celle d'indice immédiatement supérieur soit $v'{}^{k+1}$

Supposons, par exemple, que $j^q = 0$ et imposons donc l'évolution de la tension $v'{}^1$ dans l'intervalle (t_n, t_{n+1}) .

Il vient successivement :

$$i'{}^1 = f [(u^1 - v'{}^1), e^1(i'{}^1)]$$

$$j'{}^1 = -i'{}^1$$

$$w'{}^1 = f(j'{}^1, Z^1)$$

$$v'{}^2 = w'{}^1 + v'{}^1$$

$$i'{}^2 = f[(u^2 - v'{}^2), e^2(i'{}^2)]$$

$$j'{}^2 = j'{}^1 - i'{}^2$$

$$w'{}^2 = f(j'{}^2, Z^2)$$

· ·
· ·
· ·

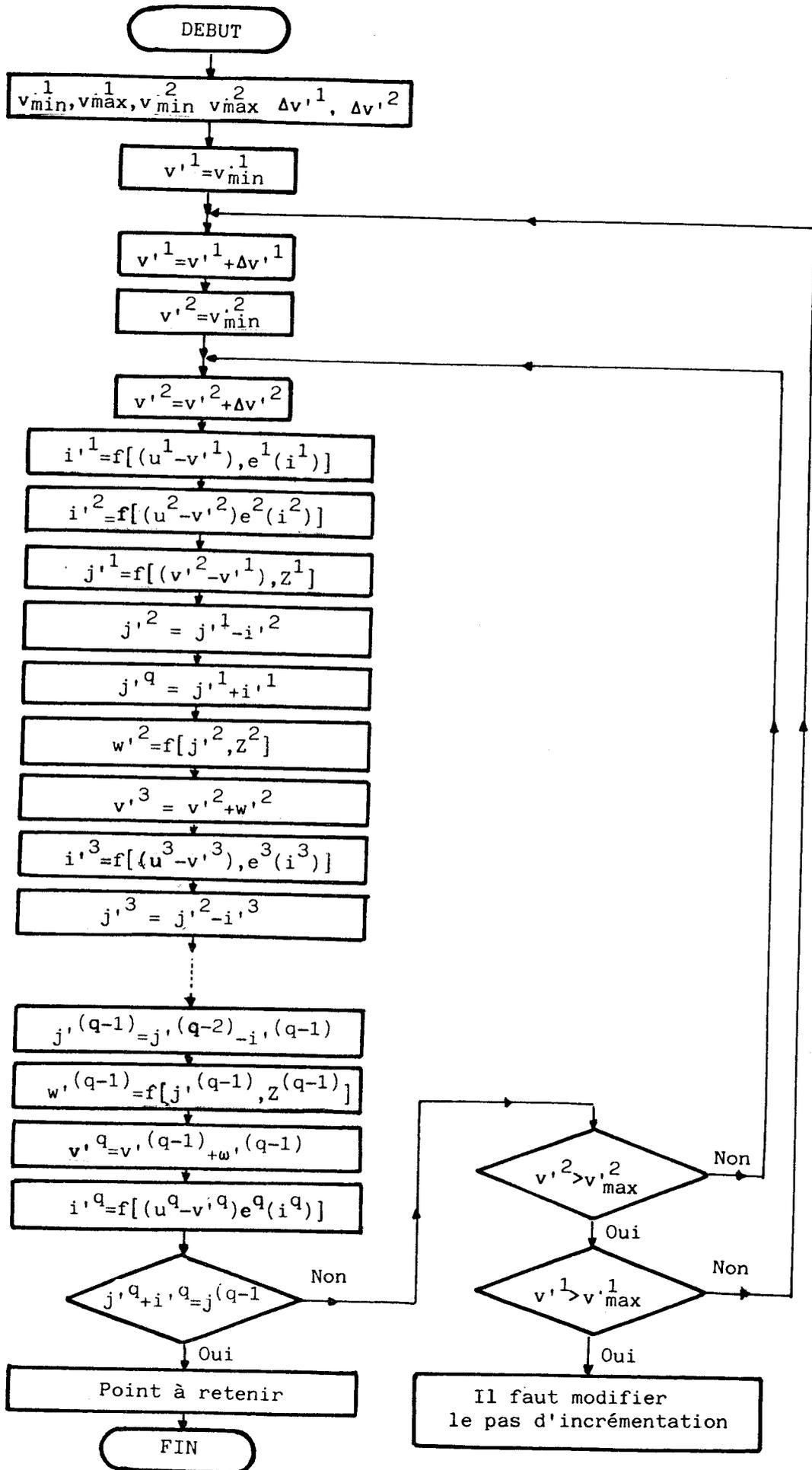


Figure 6.3

jusqu'à

$$j',^{(q-1)} = j',^{(q-2)} - i',^{(q-1)}$$

$$i',^q = f [(u^q - v',^q), e^q(i',^q)]$$

La condition de test positif est satisfaite si à t_{n+1} :

$$i',_{n+1}^q = j',_{n+1}^{(q-1)}$$

6.2.3. Application à l'étude des montages redresseurs en pont

Considérons le montage de la figure 6.4 comportant $2q$ éléments ($2q$ diodes) alimenté par un système de q tensions polyphasées.

Il représente en fait une classe particulière du système envisagé précédemment. Dans ce cas, il suffit de considérer que $(q-1)$ éléments du polygone de la figure 6.1 ont une impédance infinie.

La structure est à rapprocher de celle de la figure 6.2 avec la particularité suivante : le même système de tensions alimente les deux ensembles de non linéarités constitués par deux commutateurs à diodes, le premier groupe étant à cathodes communes, le second à anodes équipotentielles (figure 6.5).

La procédure consiste à imposer la tension $v',^1$; les courants $i',^{h1}$ sont alors définis par la connaissance de la tension $(u^h - v',^1)$ aux bornes de la diode D^{h1} et de la caractéristique $i(v)$ commune à toutes les diodes.

Le courant $i',^1 = \sum_{h=1}^q i',^{h1}$ entraîne dans l'impédance Z la chute de tension w' .

La tension $v',^2 = v',^1 - w'$ permet le calcul des courants $i',^{h2}$:

$$i',^{h2} = f [(v',^1 - w'), i(v)]$$

et du courant $i',^2$:

$$i',^2 = \sum_{h=1}^q i',^{h2}$$

Si à t_{n+1} , $i',_{n+1}^2 = i',_{n+1}^1$, cette intensité représente effectivement le courant, à cet instant, dans la charge du montage redresseur.

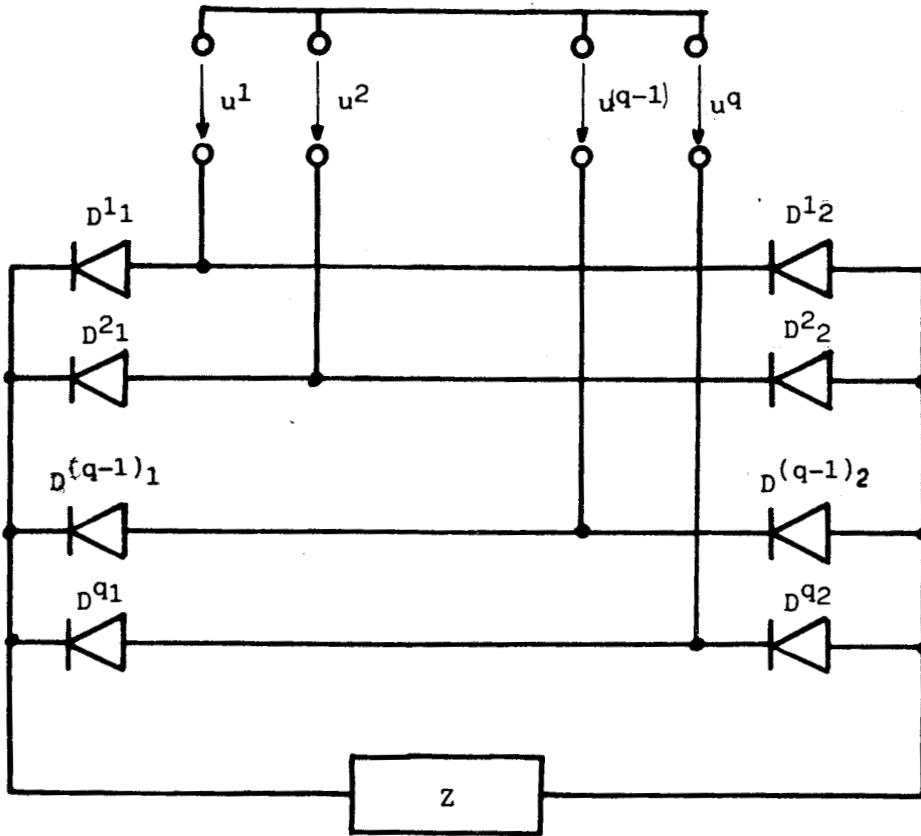


Figure 6.4

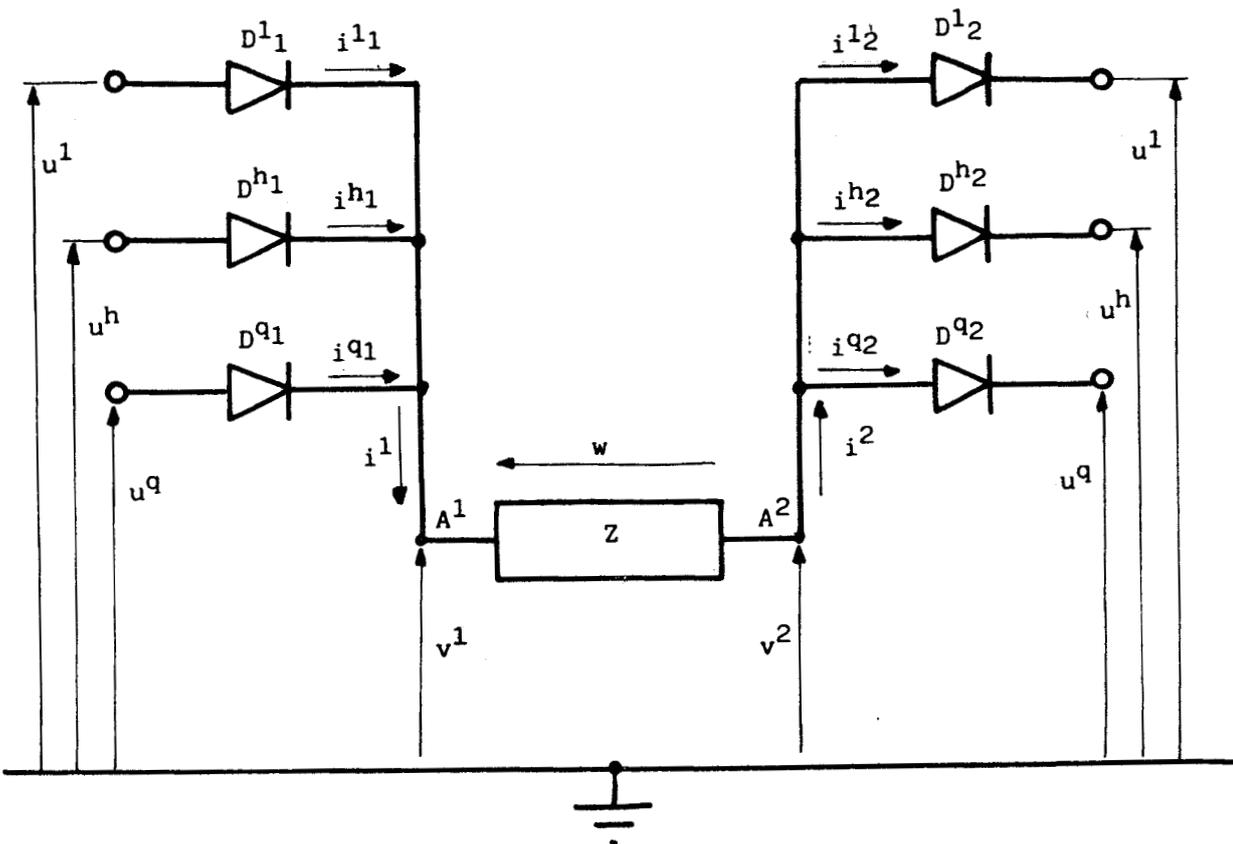


Figure 6.5

6.2.4. Vérification expérimentale : montage monophasé en pont

Nous nous proposons de vérifier la méthode précédemment développée sur le montage de la figure 6.6a.

La tension appliquée u est sinusoïdale, de fréquence 50Hz et de valeur efficace 220V, soit :

$$u = u^1 - u^2 = 220 \sqrt{2} \sin 2\pi ft$$

Les diodes supposées identiques ont les mêmes caractéristiques que celles précisées au chapitre précédent : $r_d = 0,2\Omega, V_s = 0,6V$.

La réponse de ce circuit (figure 6.6b) est déterminée en imposant une évolution linéaire à la tension v'^1 dans l'intervalle (t_n, t_{n+1})

$$v'^1 = v'_n + a (t - t_n)$$

Le pas de calcul $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ est fixé à 0,5ms

La structure de l'organigramme est celle proposée pour le circuit "roue libre". Nous ne présenterons donc que les relations qui permettent d'aboutir aux variables à considérer pour la vérification de la condition de test.

En supposant connue la réponse du système à l'instant t_n , il est possible de déterminer successivement pour toute valeur du paramètre a :

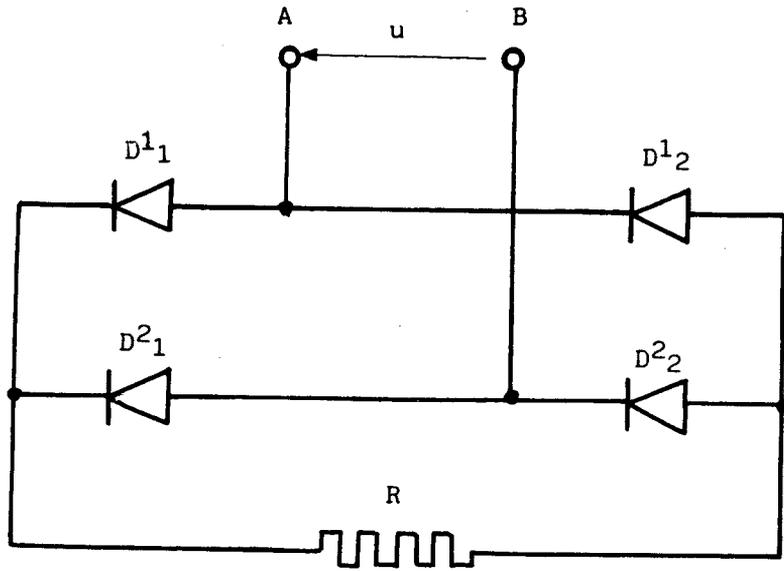
$$v'_{n+1} = v_n + a \Delta t$$

$$i'_{n+1} = \frac{1}{r_d} (u_{n+1}^1 - V_s - v'_{n+1}^1)$$

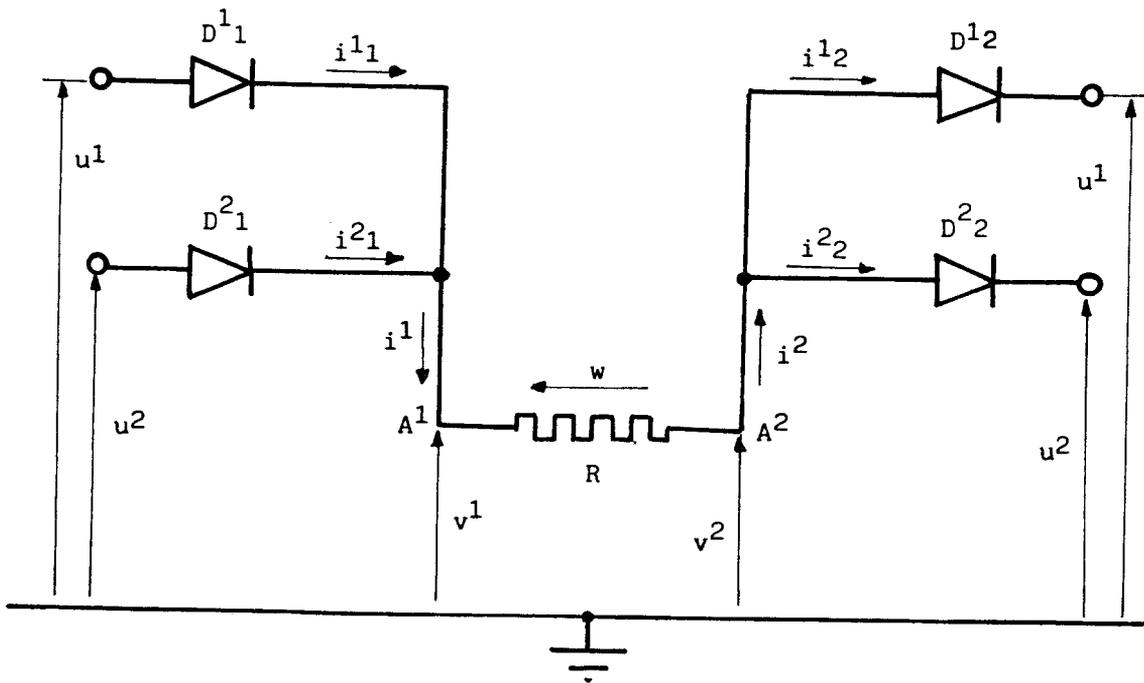
$$i'_{n+1} = \frac{1}{r_d} (u_{n+1}^2 - V_s - v'_{n+1}^1)$$

$$i'_{n+1} = i'_{n+1}^1 + i'_{n+1}^2$$

$$w'_{n+1} = R i'_{n+1}^1$$



(a)



(b)

Figure 6.6

$$v'_{n+1,2} = v'_{n+1,1} - w'_{n+1}$$

$$i'_{n+1,2,1} = \frac{1}{r_d} (v'_{n+1,2} - u_{n+1}^1 - V_s)$$

$$i'_{n+1,2,2} = \frac{1}{r_d} (v'_{n+1,2} - u_{n+1}^2 - V_s)$$

$$i'_{n+1,2} = i'_{n+1,2,1} + i'_{n+1,2,2}$$

La condition de test est vérifiée, dans la mesure où les courants $i'_{n+1,1}$ et $i'_{n+1,2}$ sont différents de zéro, lorsque la relation :

$$\frac{i'_{n+1,1} - i'_{n+1,2}}{i'_{n+1,1}} \leq \epsilon$$

est satisfaite. Par contre, si l'un des courants est nul et l'autre inférieur à λ , il est admis : $i'_{n+1,1} = i'_{n+1,2} = 0$

Les tensions u^1 et u^2 entrant dans la composition de u peuvent prendre diverses expressions suivant le point de référence (potentiel zéro) adopté, par exemple, le point milieu de l'enroulement secondaire d'un transformateur monophasé ou le neutre d'un réseau triphasé quatre fils.

Il est préférable, par raison de simplicité, de choisir comme référence l'une des bornes A ou B de la source d'alimentation (figure 6.6a) Dans notre cas, nous avons pris :

$$u^1 = 0 \quad , \quad u^2 = 220 \sqrt{2} \sin 2\pi ft.$$

La figure 6.7. reproduit les variations du courant i' dans la résistance $R = 10 \Omega$ (ou de la tension w' à ses bornes) pour $\epsilon = 1\%$ et en supposant que la mise sous tension s'effectue à $t = 0$.

La comparaison de l'intensité maximale du courant i' ; $I'_m = 29,8006A$ et de celle calculée à partir de la relation :

$$I_m = \frac{U^2 \sqrt{2} - 2 V_s}{R + 2 r_d}$$

soit $I_m = 29,7984A$ montre la validité de la méthode proposée.

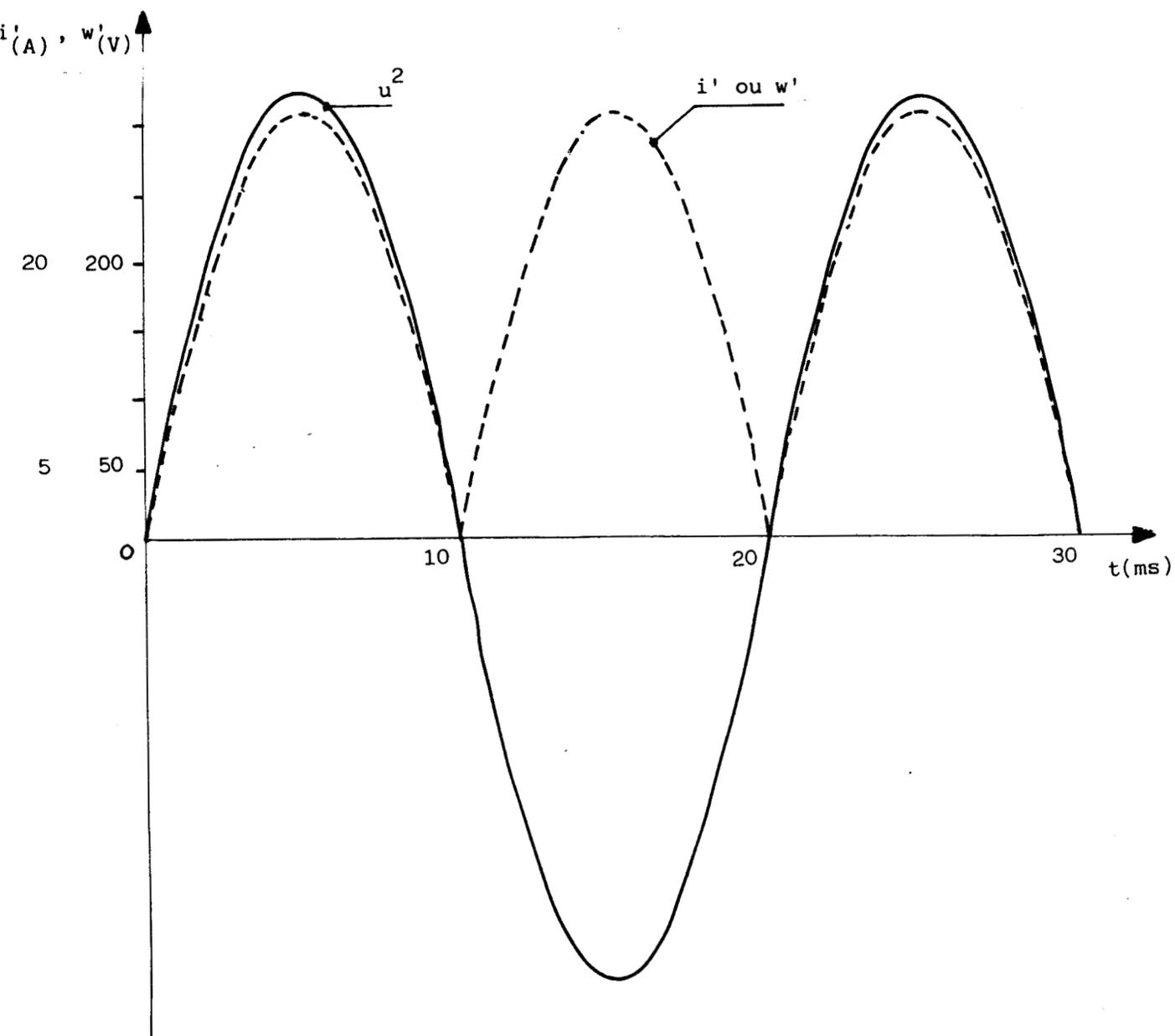


Figure 6.7

6.3. Couplage en étoile des éléments linéaires

6.3.1. Cas général

Un système de q tensions étoilées alimente (figure 6.8), par l'intermédiaire d'éléments non linéaires $NL^1, NL^2, \dots, NL^k, \dots, NL^q$, q impédances $Z^1, Z^2, \dots, Z^k, \dots, Z^q$ couplées en étoile. Une impédance Z^0 est connectée entre la borne commune à ces dipôles et le neutre du réseau d'alimentation.

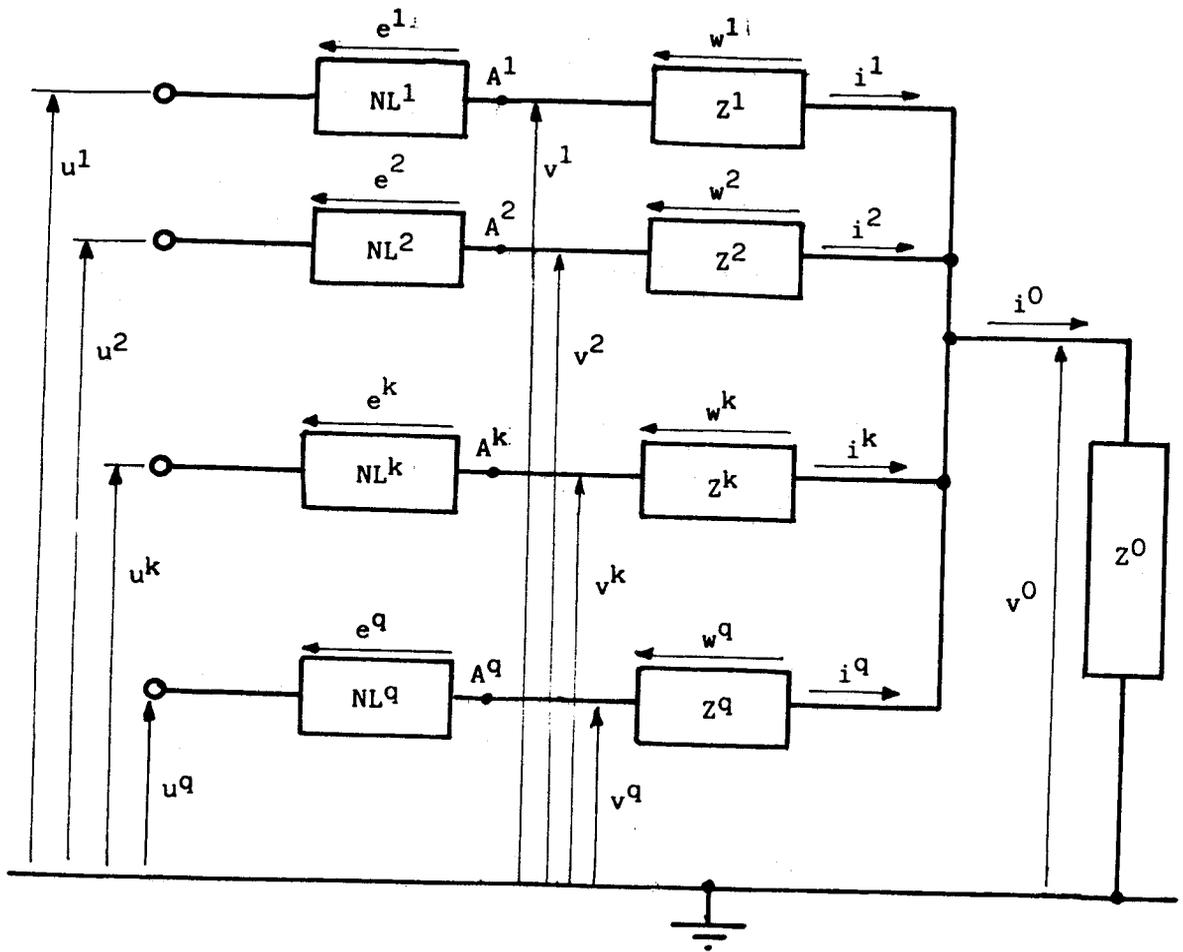


Figure 6.8

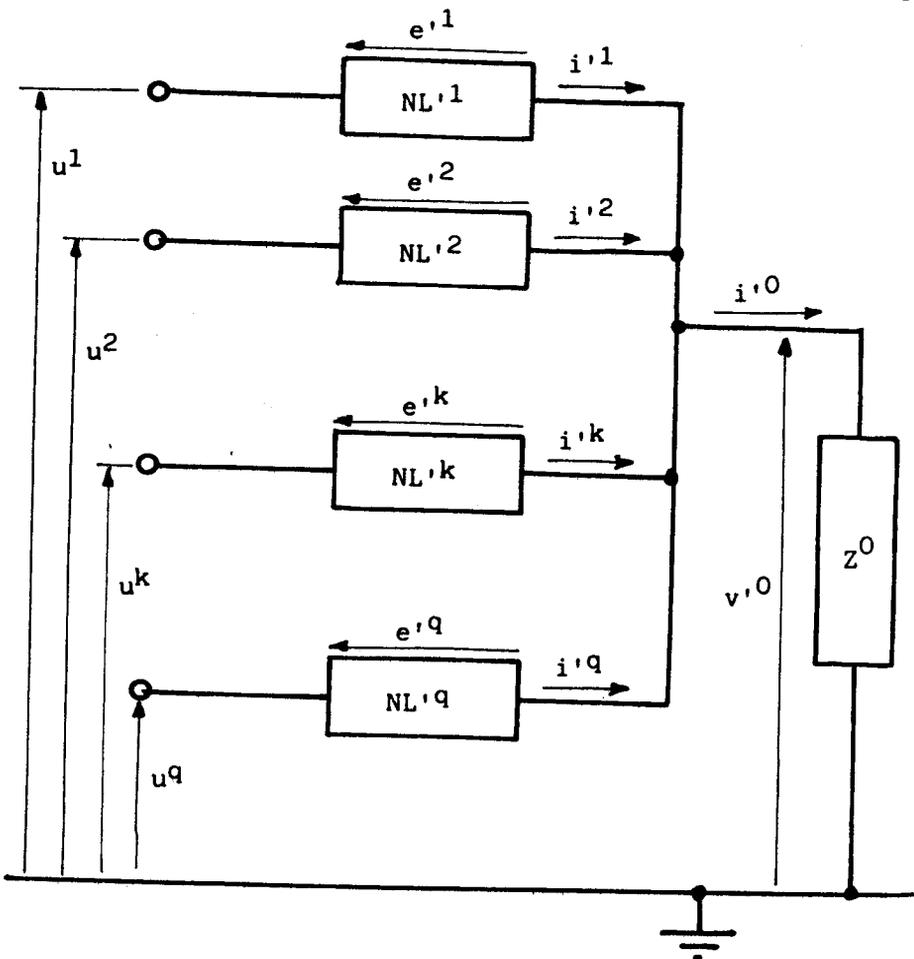


Figure 6.9

En imposant, sur un intervalle de temps donné (t_n, t_{n+1}), la loi d'évolution de la différence de potentiel v'^0 , il est possible de déduire les variations du courant i'^0 ainsi que celles des différences de potentiel aux bornes des non linéarités NL^k (figure 6.9) constituées par l'association en série d'un dipole Z^k et de la non linéarité initiale NL^k .

$$u^k - v'^0 = e^k + w^k$$

Le courant i'^k est déterminé par la méthode (générateur de courant) exposée au chapitre 4.

La condition de test est satisfaite lorsque la relation

$$\sum_{k=1}^q i'_{n+1}{}^k = i'_{n+1}{}^0$$

est vérifiée à ϵ près.

Si cette égalité n'est pas, à l'approximation près, réalisée, le même calcul est repris pour une valeur incrémentée de v'^0 .

Le circuit considéré (figure 6.8) peut d'ailleurs être compliqué en remplaçant chaque non linéarité NL^k par un ensemble de m éléments linéaires à point commun A^k (figure 6.2) alimentés par un système de tensions étoilées à m phases.

La procédure précédente s'applique également ; la condition de test sur i'^k est telle que :

$$\sum_{h=1}^m i'_{n+1}{}^h = i'^k$$

Quoiqu'il en soit, la détermination de chaque point est, dans les deux cas, laborieuse. Aussi nous avons cherché à réduire le temps de calcul en linéarisant les caractéristiques $e^k(i^k)$ des éléments non linéaires.

6.3.2. Linéarisation de la caractéristique des éléments non linéaires

La linéarisation de la caractéristique des éléments non linéaires NL^k permet, pour chacun des tronçons t de celle-ci (figure 6.10), d'inclure les paramètres (force contre électromotrice E_t^k et résistance dynamique r_t^k) qui les définissent dans l'équation différentielle unique qui lie le courant i^k à la tension e^k aux bornes de NL^k .

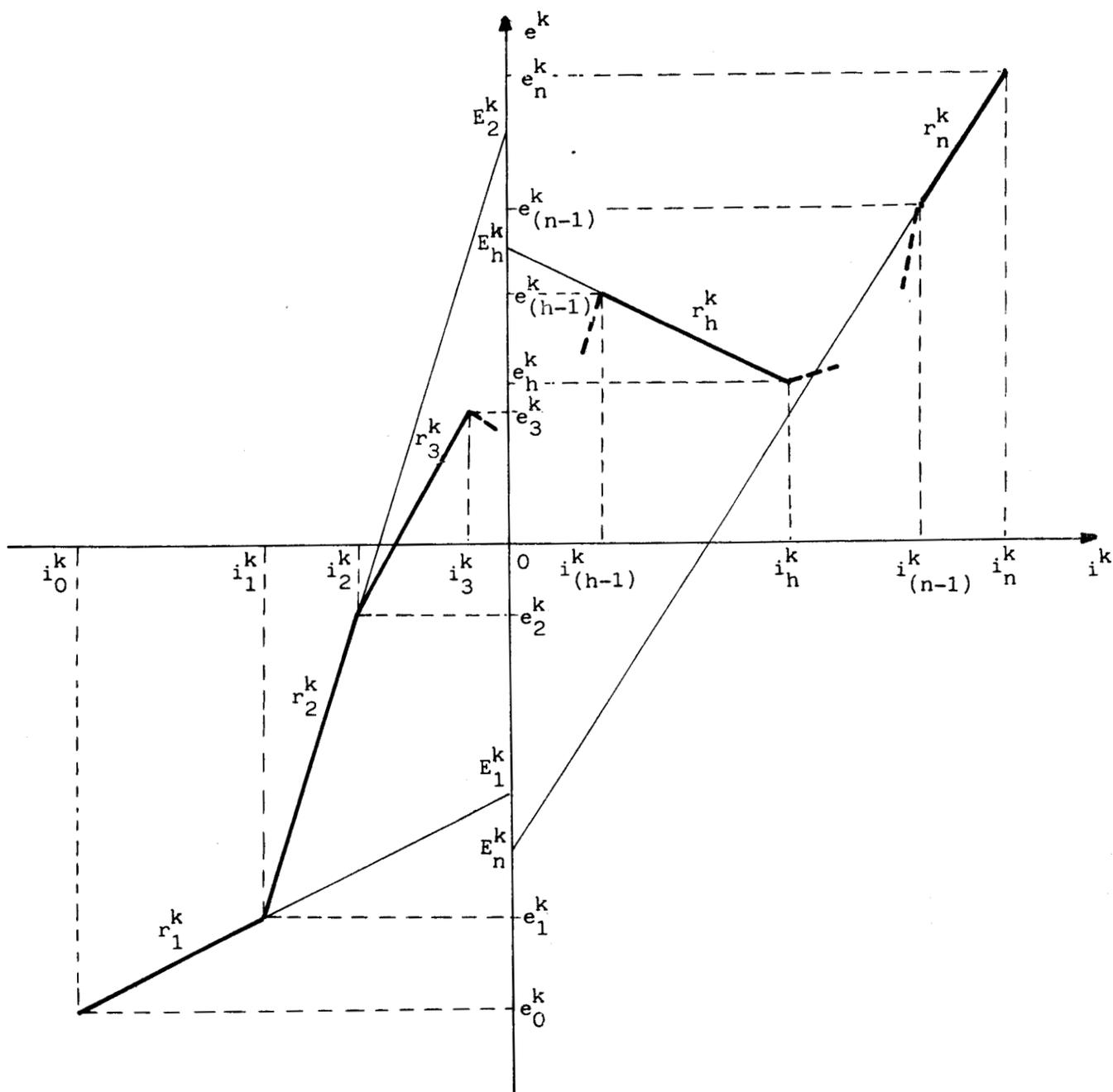


Figure 6.10

La différence de potentiel aux bornes du dipole Z^0 étant imposée :

$$v'^0 = v'_n + a(t - t_n)$$

la résolution de l'équation différentielle dont les coefficients sont propres au tronçon t , fournit le courant i'_{n+1}^k à l'instant t_{n+1} .

Si i'_{n+1}^k correspond à l'abscisse d'un point du tronçon t

$$i'_{t-1}^k \leq i'_{n+1}^k \leq i'_t^k ,$$

cette valeur, alors retenue, est conservée en mémoire.

Dans le cas contraire, la même résolution est reprise en considérant successivement les équations différentielles définies par les paramètres des tronçons $(t+1)$, $(t+2)$, ..., de la caractéristique $e^k(i^k)$ jusqu'au moment où le courant i'_{n+1}^k , solution d'une de ces équations, correspond à un point du tronçon concerné.

S'il s'avère qu'après avoir exploré toute la caractéristique k , aucun point de fonctionnement n'a pu être trouvé, il convient d'incrémenter le coefficient a de la relation fixant l'évolution de v'^0 (1).

Nous nous proposons de développer cette procédure en considérant un circuit dont la loi de variation de la tension v^k aux bornes des impédances Z^k ($0 \leq k \leq q$) en fonction du courant i^k qui le traverse est régi par une équation du premier ordre.

Nous allons ainsi étudier un montage redresseur triphasé, à trois diodes à cathodes équipotentielles, débitant dans un récepteur inductif d'éléments R et L .

6.3.3. Montage redresseur - Phénomène d'empiètement

6.3.3.1. Caractérisation du montage

Lorsque la source d'alimentation n'est pas parfaite (impédance interne non négligeable d'éléments r et l), la présence d'une inductance l dans chaque conducteur de phase (figure 6.11) interdit aux courants i^1 , i^2 et i^3 dans les diodes de subir des discontinuités. La commutation de ces courants n'est plus instantanée et pendant cet intervalle deux diodes conduisent simultanément : phénomène d'empiètement.

(1) Il est à rappeler que $v'_n = v_n$ correspond à la valeur de v'^0 , solution de la réponse du système à l'instant t_n .

Désignons par :

$$u^1 = U \sqrt{2} \sin \omega t$$

$$u^2 = U \sqrt{2} \sin (\omega t - 2\pi/3)$$

$$u^3 = U \sqrt{2} \sin (\omega t - 4\pi/3)$$

les forces électromotrices étoilées de la source triphasée et réduisons la caractéristique $e^k(i^k)$ (figure 6.12) à deux segments de droite ($t=1,2$).

Chaque tronçon admet pour équation :

$$e^k = E_t^k + r_t^k i^k$$

Lorsque la diode D^k est bloquée ($t=1, i_k \leq i_1^k$) les paramètres E_t^k et r_t^k deviennent $E_t^k = E_1^k, r_t^k = r_1^k = r_i, r_i$ résistance dynamique inverse de la diode.

Dès que $i^k > i_1^k$, la diode D^k est conductrice ($t=2$) ; il vient alors $E_t^k = E_2^k$ et $r_t^k = r_2^k = r_d, r_d$ résistance dynamique directe de la diode.

6.3.3.2. Présentation de la procédure

Une évolution linéaire est imposée, dans l'intervalle (t_n, t_{n+1}) , à la différence de potentiel v'^0 aux bornes du récepteur :

$$v'^0 = v_n + a (t - t_n)$$

Le courant i'^0 a alors pour expression :

$$i'^0 = \left(i_n - \frac{v_n}{R} + \frac{aL}{R^2} \right) e^{-\frac{R}{L}(t-t_n)} + \frac{a}{R}(t-t_n) + \frac{v_n}{R} - \frac{aL}{R^2}$$

la branche k est régie par l'équation différentielle :

$$(r+r_t^k) i'^k + L \frac{di'^k}{dt} = U\sqrt{2} \sin[\omega(t-t_n) + \phi_n^k] - v_n - E_t^k - a(t-t_n)$$

où ϕ_n^k représente, à $t=t_n$, la phase de u^k :

$$\phi_n^k = \text{Arc sin } \frac{u_n^k}{U\sqrt{2}}$$

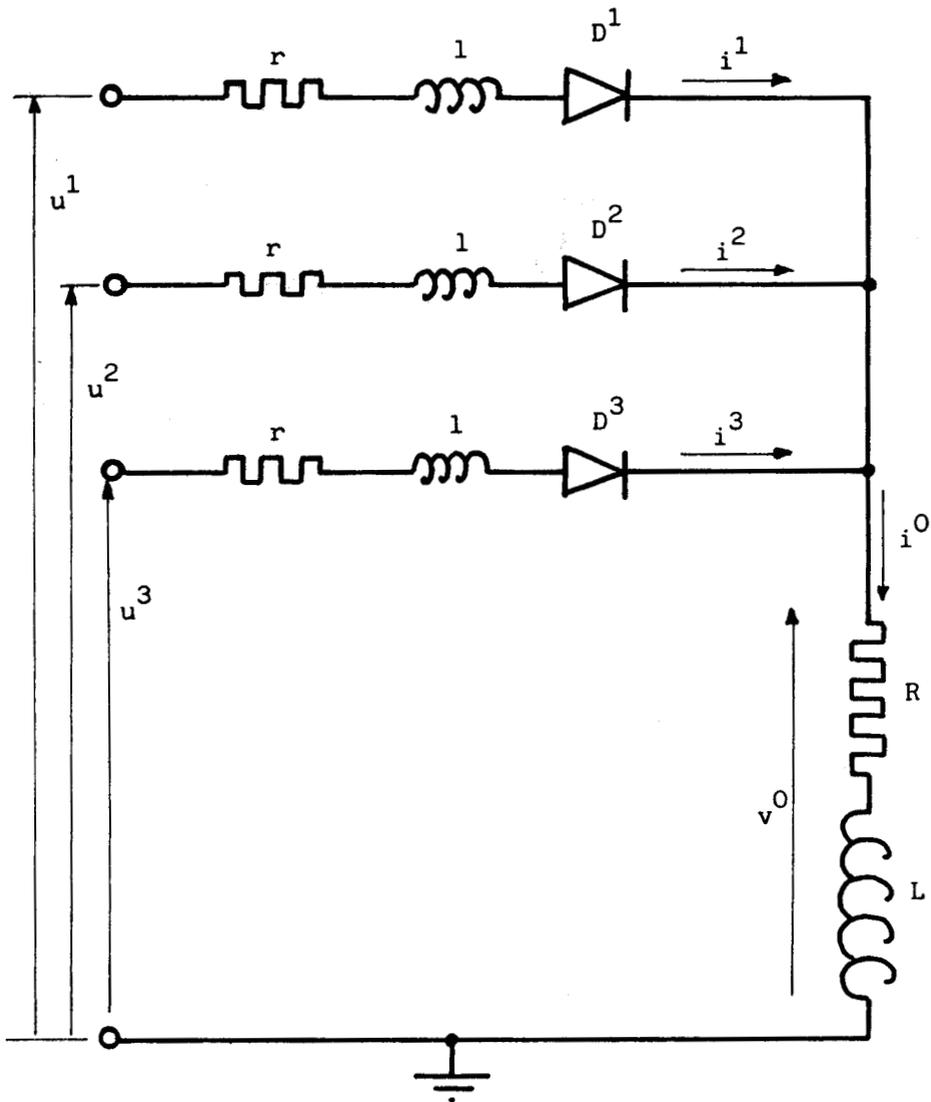


Figure 6.11

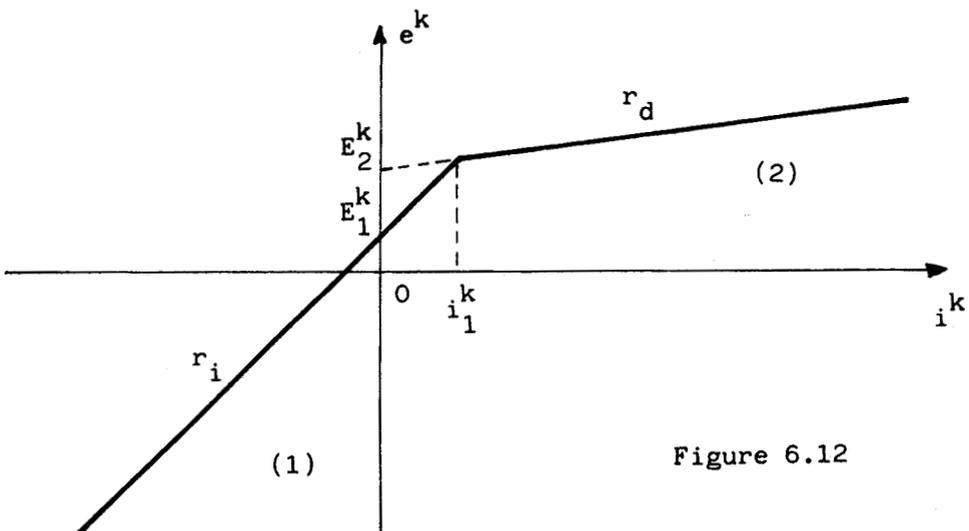


Figure 6.12

Elle admet pour solution :

$$i^k = \left\{ i_n^k + \frac{1}{r+r_t^k} [v_n + E_t^k - \frac{al}{r+r_t^k}] - \frac{r+r_t^k}{(r+r_t^k)^2 + l^2 \omega^2} U\sqrt{2} [\sin \phi_n^k - \frac{l\omega}{r+r_t^k} \cos \phi_n^k] \right\} e^{-\frac{r+r_t^k}{l}(t-t_n)}$$

$$- \frac{r+r_t^k}{(r+r_t^k)^2} U\sqrt{2} [\sin[\omega(t-t_n) + \phi_n^k] - \frac{l\omega}{r+r_t^k} \cos[\omega(t-t_n) + \phi_n^k]] - \frac{1}{r+r_t^k} [a(t-t_n) - \frac{al}{r+r_t^k} + v_n + E_t^k]$$

L'organigramme de la figure 6.13. présente la procédure de détermination d'un point.

L'étude a porté sur le circuit de caractéristiques :

source : $U = 127 \text{ V}$, $\omega = 100\pi$, $r = 0,1\Omega$, $l = 5 \text{ mH}$

récepteur : $R = 5 \Omega$, $L = 0,1 \text{ H}$

diodes : $E_1 = 0$, $r_1 = r_i = \infty$, $E_2 = V_s = 0,6 \text{ V}$, $i_1 = 0$, $r_2 = r_d = 0,2\Omega$

Lorsque la résistance dynamique inverse r_i est, comme nous l'avons supposé, infinie, la procédure précédente se simplifie.

Il suffit, pour une valeur donnée de a , de calculer en admettant toutes les diodes conductrices les trois courants i^1 , i^2 et i^3 . Comme ceux-ci ne peuvent être que positifs ou nuls, les intensités négatives trouvées sont remplacées par la valeur zéro.

La figure 6.14. reproduit, pour un pas de calcul $\Delta t = 0,1 \text{ ms}$ et une précision de 0,2% sur la vérification de la condition de test, les courbes de la tension v^0 aux bornes du récepteur, du courant i^0 dans celui-ci et des courants i^1 , i^2 et i^3 dans les diodes D^1 , D^2 et D^3 .

Remarque :

L'examen de la figure 6.14a. montre qu'au passage du fonctionnement à deux diodes à celui à une diode, des points s'écartent de la courbe $v^0(t)$.

Supposons la diode D^k conductrice à l'instant t_n et bloquée à t_{n+1} .

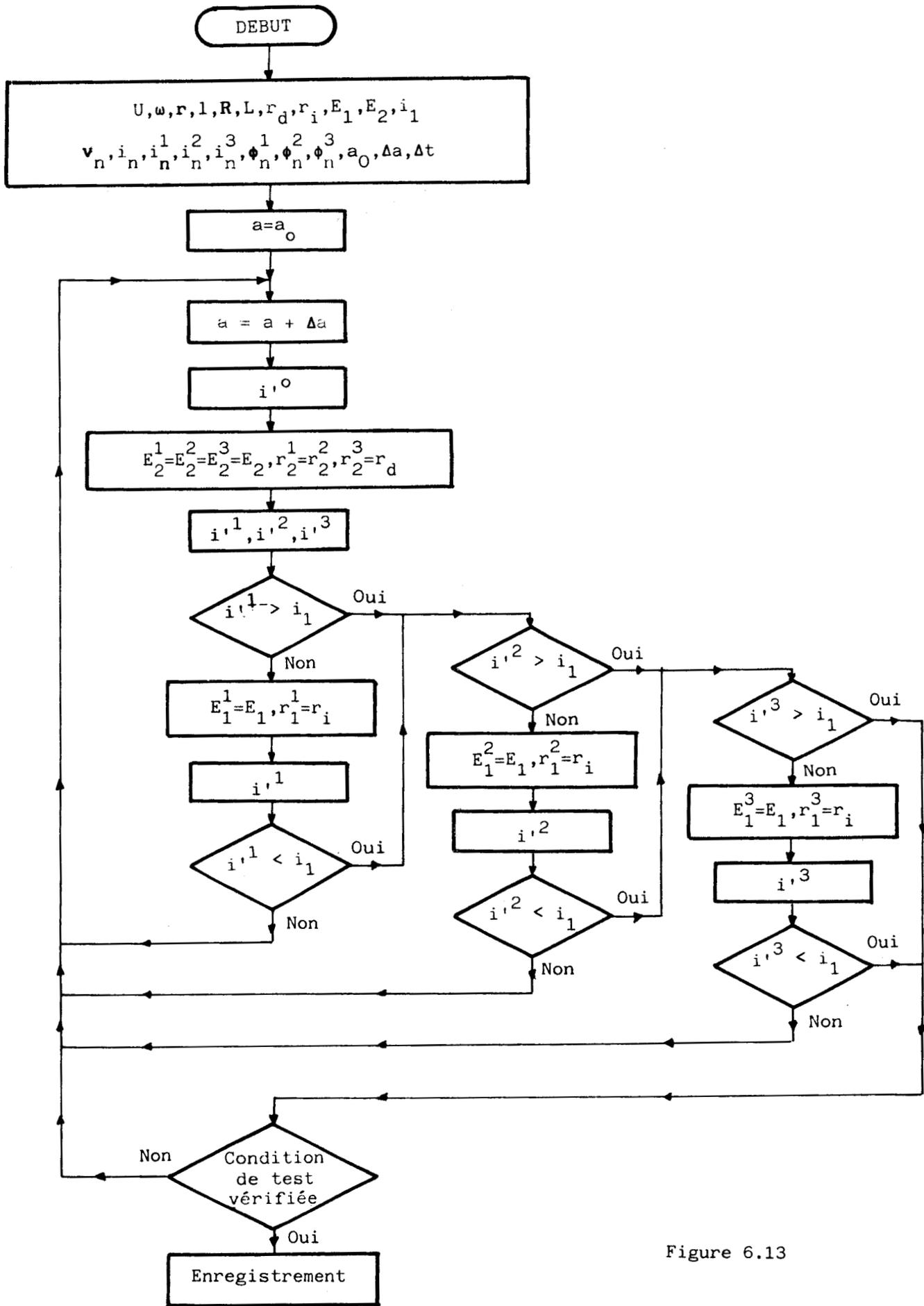
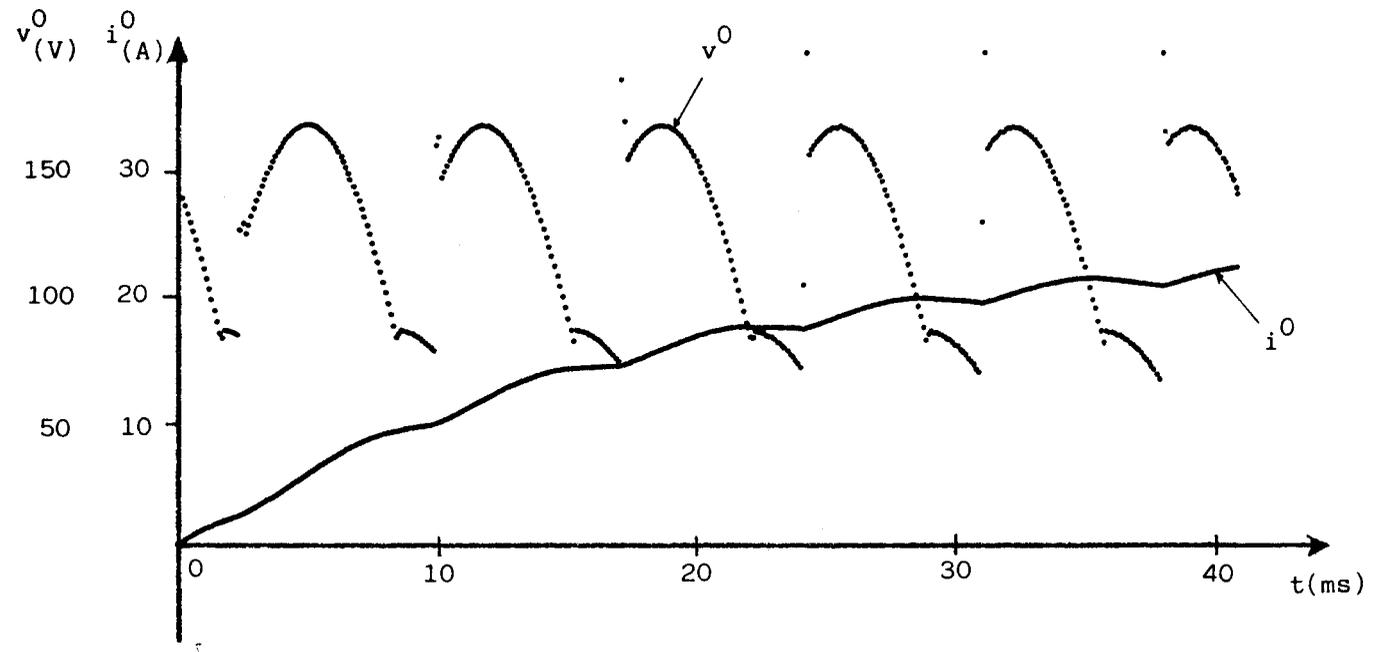
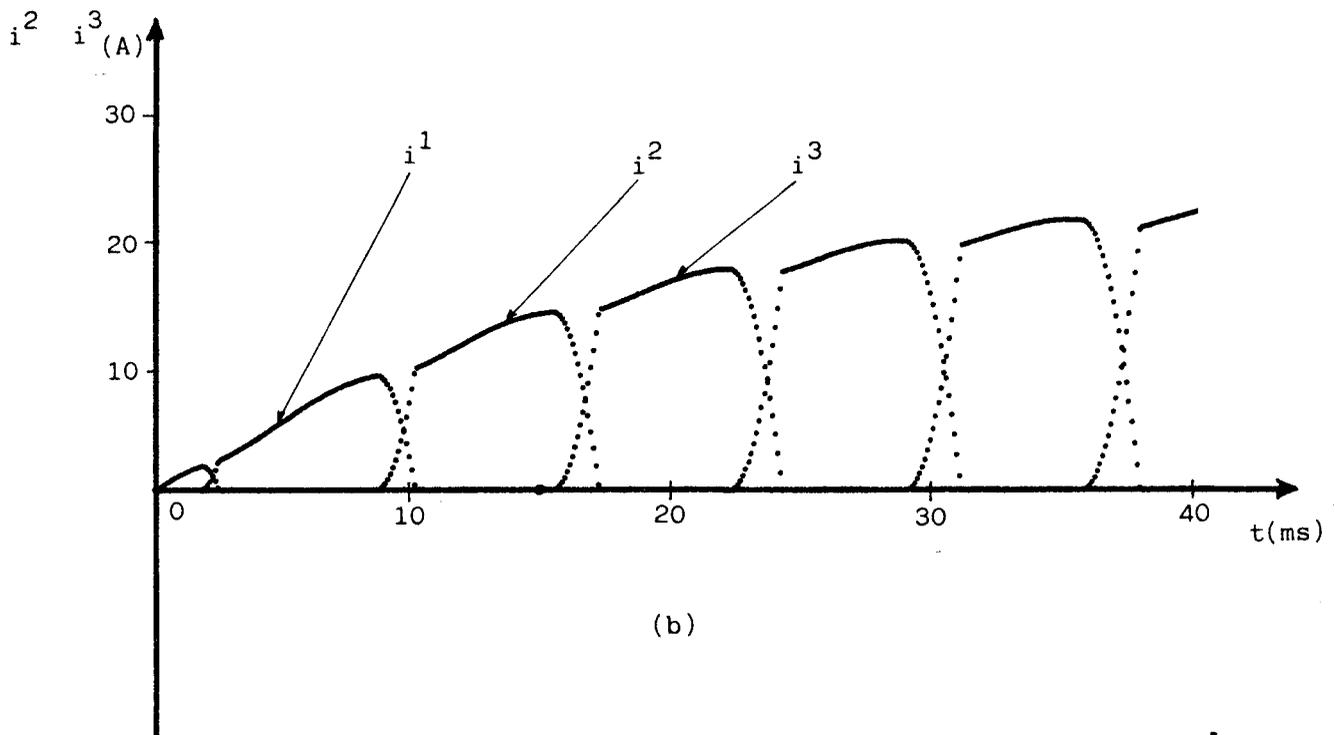


Figure 6.13



(a)



(b)

Figure 6.14

Comme il n'est pas possible de modifier les paramètres caractérisant la diode D^k dans l'intervalle (t_n, t_{n+1}) , le blocage de D^k est alors dans l'application de notre méthode, effectué à t_n alors que i^k n'est pas encore nul. Cette discontinuité du courant conduit pour $v^0(t)$ aux écarts constatés.

Ceux-ci sont d'autant plus atténués que la commutation est réalisée à courant i^k plus faible. Le remède consiste, comme nous le montrerons au chapitre suivant, à adopter, à partir de t_n , un pas de calcul plus petit.

6.4. CONCLUSION

Nous avons montré, dans ce chapitre, que la méthode proposée pouvait s'étendre à des circuits de structures complexes.

Toutefois son application est plus laborieuse. Il convient, en effet, soit d'augmenter le nombre des variables dont la loi d'évolution est à fixer, soit d'associer les techniques à générateur de tension et à générateur de courant pour les circuits à éléments linéaires couplés respectivement en polygone ou en étoile.

Dans le second cas, la procédure est notablement simplifiée à condition de pouvoir linéariser les caractéristiques des dipôles non linéaires.

CHAPITRE 7

Application de la méthode
à des circuits non linéaires
à caractéristiques non indépendantes du temps

7.1. Introduction

Nous avons, en ce qui concerne les exemples traités jusqu'à présent, envisagé essentiellement des montages à diodes. Nous nous proposons d'appliquer maintenant la méthode à des circuits comportant des thyristors.

Après avoir présenté d'abord la procédure retenue pour un montage élémentaire comportant un seul thyristor, nous avons considéré ensuite un gradateur mixte alimentant un récepteur triphasé équilibré comprenant trois résistances inductives couplées en étoile.

Enfin nous étendons la méthode à la résolution d'équations linéaires à coefficients variables. L'exemple porte sur la détermination de l'évolution de la vitesse d'un moteur pas à pas dans sa zone de démarrage.

7.2. Traduction des conditions de commutation d'un thyristor

Considérons le circuit alimenté par la tension u (figure 7.1) et constitué par l'association en série d'un thyristor Th et d'une impédance Z .

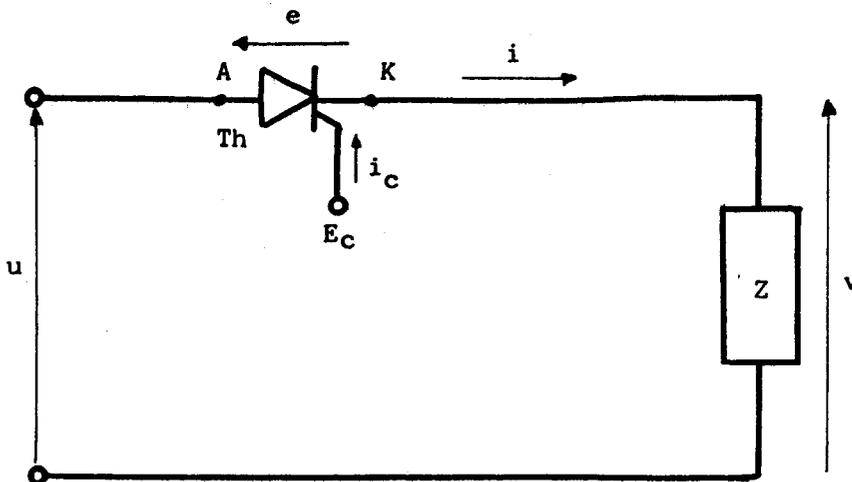


Figure 7.1

La réponse de ce circuit est obtenue en fixant, comme précédemment, la loi d'évolution de la tension v' aux bornes de Z . Toutefois, la procédure utilisée jusqu'alors pour la détermination du courant i' dans la non-linéarité doit être adaptée.

En effet, pour que le thyristor devienne conducteur, il importe que la tension anode-cathode e soit supérieure à zéro lorsque une impulsion positive du courant i_c est appliquée à l'électrode de commande E_c . Le thyristor se bloque, comme dans le cas d'une diode, lorsque le courant s'annule par valeurs décroissantes.

Le remplacement d'une diode par un thyristor conduit donc à introduire dans le programme les paramètres caractérisant l'instant d'application des impulsions de commande et de leur durée.

Le courant j_{n+1} dans le thyristor à l'instant t_{n+1} , est, pour une valeur fixée de v'_{n+1} , donné par la relation :

$$j_{n+1} = \frac{u_{n+1} - v'_{n+1} - E_0}{r_{Th}}$$

où E_0 représente la tension de seuil du thyristor et r_{Th} sa résistance dynamique directe.

Ce courant n'est à retenir, même s'il est positif, qu'à deux conditions :

- soit si le thyristor est précédemment conducteur : $i'_n > 0$
- soit si une impulsion positive de courant est effectivement appliquée à l'électrode de commande : $i_c > 0$

La condition de test positif est vérifiée si l'égalité des courants dans le thyristor et dans l'impédance Z est satisfaite : $j_{n+1} = i'_{n+1}$

7.3. Gradateur mixte

7.3.1. Présentation du montage

Le gradateur mixte de la figure 7.2 est alimenté par un système de tensions équilibrées de séquence directe et de pulsation $\omega = 100\text{Hz}$:

$$u^1 = U\sqrt{2} \sin \omega t$$

$$u^2 = U\sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$u^3 = U\sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right)$$

Chaque branche du gradateur est constituée d'un thyristor shunté par une diode connectée en parallèle inverse. Nous supposons que ces éléments ont même résistance dynamique directe et même tension de seuil :

$$r_{Th} = r_D = r$$

$$E_{o_{Th}} = E_{o_D} = E_o$$

Le récepteur est constitué de trois résistances inductives identiques couplées en étoile.

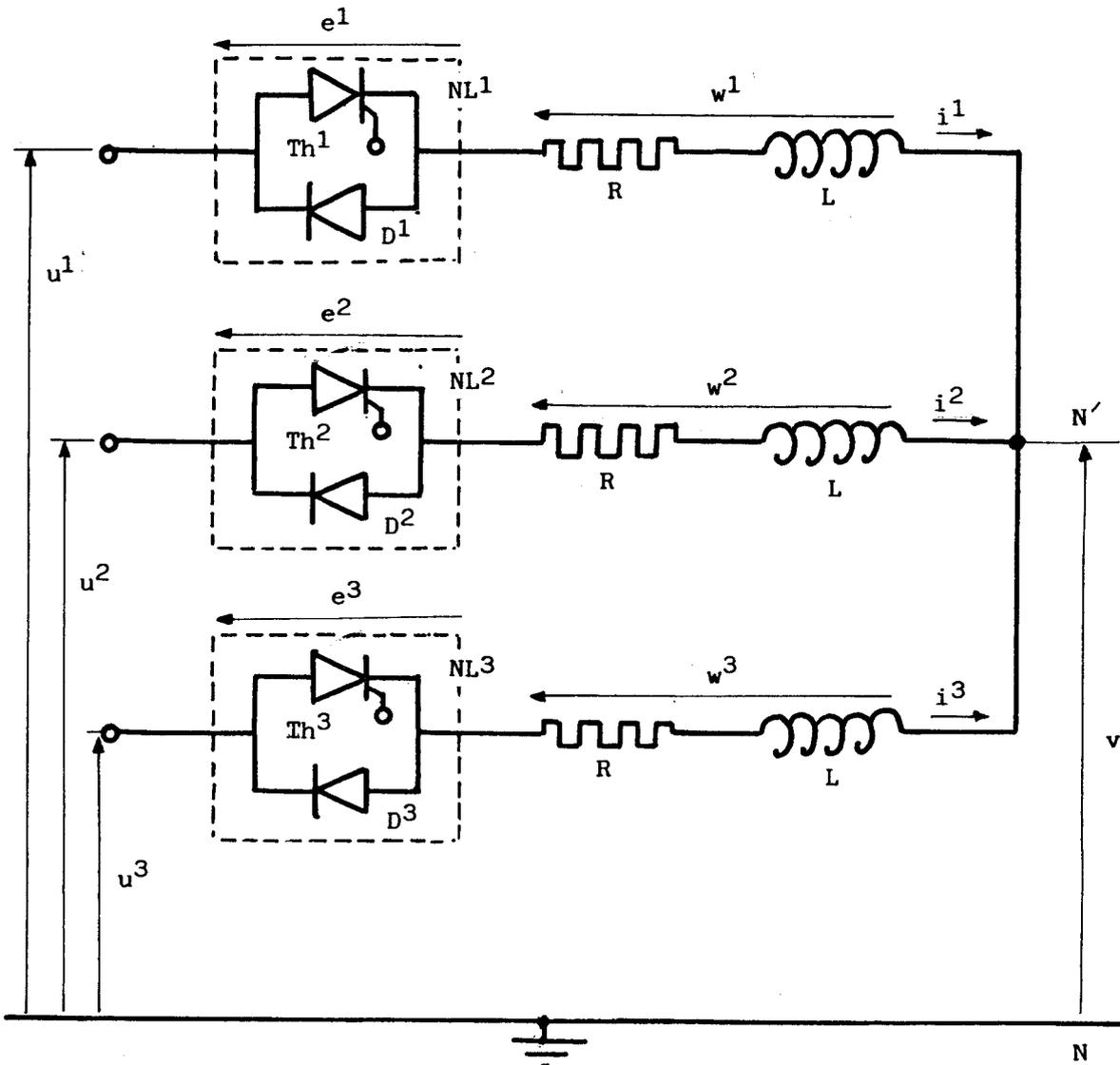


Figure 7.2

7.3.2. Procédure d'étude

L'étude du gradateur mixte s'appuie sur la procédure exposée au chapitre précédent (§6.2.3.).

Sur l'intervalle de temps (t_n, t_{n+1}) est imposée une évolution linéaire de la différence de potentiel v' appliquée entre les bornes N' et N , neutres respectifs du récepteur et du réseau d'alimentation :

$$v' = v'_n + a (t - t_n)$$

Supposons l'élément non linéaire NL^k ($k=1, 2$ ou 3) passant (thyristor Th_k ou diode D_k conducteur).

Le courant j^k dans la branche k est tiré de l'équation différentielle :

$$(R+r)j^k + L \frac{dj^k}{dt} = U \sqrt{2} \sin[\omega(t-t_n) + \phi_n^k] - [v'_n + a(t-t_n)] - E_o$$

soit

$$j^k = \left\{ j_n^k + \frac{1}{r+R} \left[v'_n + E_o - \frac{aL}{r+R} \right] - \frac{R+r}{(R+r)^2 + L^2 \omega^2} U \sqrt{2} \left[\sin \phi_n^k - \frac{L\omega}{R+r} \cos \phi_n^k \right] \right\} e^{-\frac{R+r}{L}(t-t_n)}$$

$$+ \frac{R+r}{(R+r)^2 + L^2 \omega^2} U \sqrt{2} \sin [\omega(t-t_n) + \phi_n^k] - \frac{L\omega}{R+r} \cos [\omega(t-t_n) + \phi_n^k] -$$

$$- \frac{1}{R+r} \left[a(t-t_n) - \frac{aL}{R+r} + v'_n + E_o \right]$$

Considérons d'abord les trois éléments NL^1 , NL^2 et NL^3 passants ; il est possible, pour toute valeur de la pente a de la rampe de tension, de déterminer, à t_{n+1} , les intensités j_{n+1}^1 , j_{n+1}^2 et j_{n+1}^3 des courants j^k .

Ils peuvent être indépendamment négatifs ou positifs. Les valeurs négatives, en raison de la présence des diodes, sont à prendre en considération. Par contre, pour les valeurs positives, il convient de s'assurer que les conditions définies au paragraphe 7.2 sont vérifiées. Lorsque ce n'est pas le cas, le courant dans la branche concernée doit être considéré comme nul.

La condition de test positif est telle que la loi des noeuds est satisfaite :

$$j_{n+1}^1 + j_{n+1}^2 + j_{n+1}^3 = 0$$

La structure de l'organigramme utilisé pour cette étude est identique à celle proposée au chapitre précédent. Une boucle supplémentaire est toutefois introduite pour réduire le pas de calcul à 10^{-4} ms et permettre ainsi d'augmenter la définition des courbes tracées au moment de la commutation des diodes et des thyristors.

7.3.3. Réponses du circuit

Les enregistrements, obtenus sur table traçante (figure 7.3) reproduisent les variations

- de la différence de potentiel $v = v_{N'} - v_N$
- de la tension w^1 aux bornes des éléments R,L de la phase 1.
- du courant i^1 dans le conducteur de ligne correspondant pour

les conditions suivantes :

- valeur efficace des tensions étoilées d'alimentation : $U = 127$ V
- argument du récepteur : $\phi = \frac{\pi}{12}$ rd
- résistance dynamique directe des diodes et des thyristors : $r = 0,2\Omega$
- tension de seuil (diodes et thyristors) : $E_o = 0$
- angle de retard à l'amorçage des thyristors $\gamma = \frac{\pi}{4}$ rd
- durée des impulsions de commande des thyristors : $\tau = 1$ ms
- pas de calcul (en dehors des zones de commutation) : $\Delta t = 0,1$ ms
- précision sur la condition de test : $\epsilon = 1\%$

7.3.4. Mise sous tension du montage

La mise sous tension du montage est effectuée à $t = 0$ lorsque la tension u^1 passe par zéro par valeurs croissantes. A cet instant $u^2 < 0$ et $u^3 > 0$; aucun des thyristors n'étant amorcé, les diodes D^1, D^2, D^3 ne sont pas conductrices.

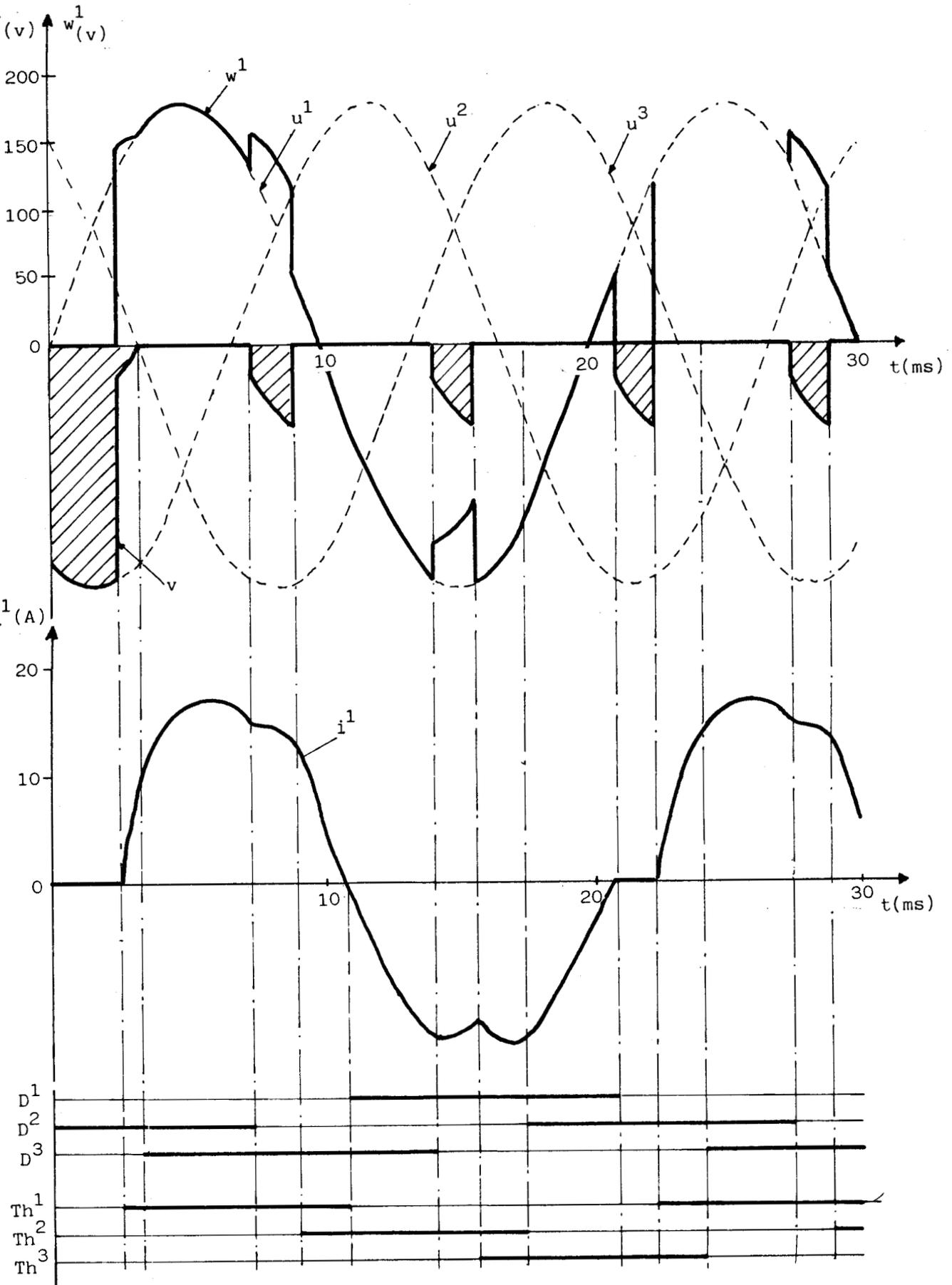


Figure 7.3

Toutefois, il est possible d'envisager la diode D^2 , dont la cathode est la plus négative, passante ($e^2=0$) à courant nul.

Dans ces conditions, $v_{N^1} - v_N = u^2$; la tension aux bornes des diodes D^1, D^3 est alors négative, ces éléments sont par conséquent bloqués. Le thyristor Th^1 ($e^1 > 0$) devient conducteur à l'instant $\frac{Y}{\omega}$ lorsque son électrode de commande est soumise à une impulsion positive de courant.

L'évolution de v ($v = u^2$) sur la figure 7.3 confirme ce résultat.

7.3.5. Vérification des résultats

Pour comparer nos résultats à ceux proposés par d'autres auteurs [20], nous avons procédé, en régime permanent établi, au calcul de la valeur efficace W' de la différence de potentiel w'^1 aux bornes d'une branche du récepteur et à une analyse harmonique de cette tension.

Les valeurs des grandeurs réduites $\frac{W'}{U}, \frac{W'^1}{U}, \dots, \frac{W'^5}{U}$ déterminées à partir, soit des résultats fournis par notre méthode, soit des expressions analytiques des grandeurs considérées établies en supposant les éléments diodes et thyristors parfaits sont regroupées dans le tableau 7.1.

	Méthode proposée	Méthode analytique
W'/U	0,9476	0,9667
W'^1/U	0,9198	0,9387
W'^2/U	0,1207	0,1183
W'^3/U	0,0001	0
W'^4/U	0,1056	0,1028
W'^5/U	0,0957	0,0908

Tableau 7.1

Il est constaté une bonne concordance dans les valeurs trouvées par les deux méthodes, les écarts étant essentiellement dus au fait qu'il n'est pas tenu compte, dans le second cas, de la résistance dynamique des diodes et des thyristors. Cette correspondance dans les résultats constitue une validation de la méthode proposée.

7.4. Résolution d'une équation linéaire à coefficients variables [21] [22]

7.4.1. Equation mécanique du système

Considérons un moteur pas à pas comportant au stator trois phases, à raison d'une bobine par phase, et au rotor quatre dents (d_1, d_2, d_3 et d_4) (figure 7.4) et supposons, lorsque le système est au repos, que les axes de la dent d_1 de la bobine de la phase I sont confondus.

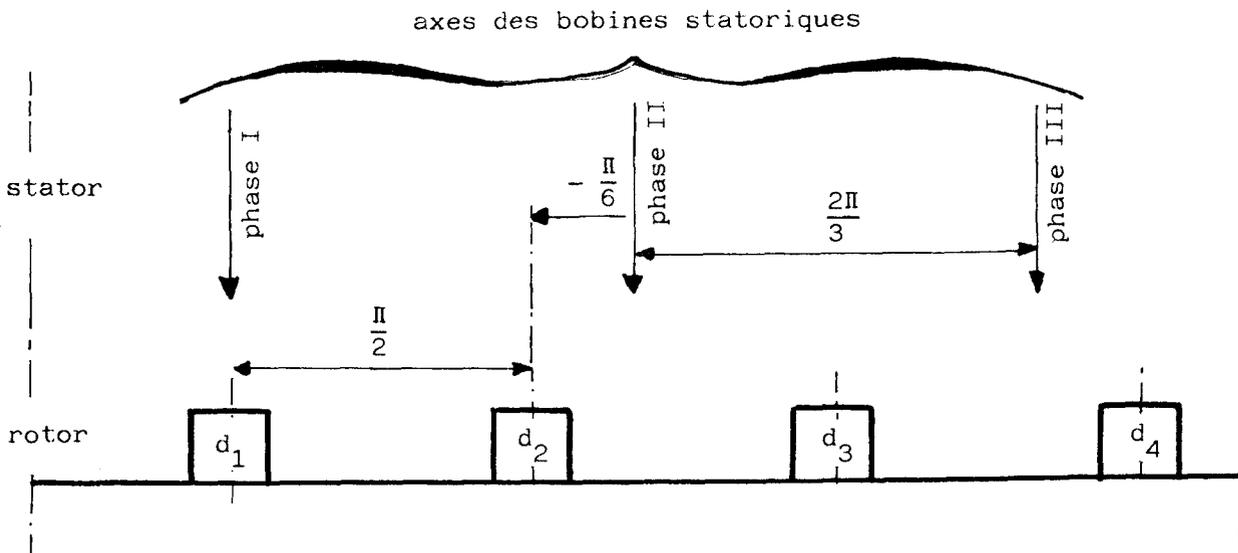


Figure 7.4

Soient θ l'angle de rotation du rotor et J le moment d'inertie de l'ensemble charge-moteur ramené sur l'arbre de celui-ci.

Le système est alors régi par l'équation :

$$(7.1.) \quad J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = C - C'$$

Il est admis [23] et [24] que le couple moteur est une fonction sinusoïdale de l'angle θ , d'expression :

$$C = - C_M \sin N_R \theta$$

où N_R désigne le nombre de pôles ou de dents du rotor.

Lorsque le moteur est alimenté à courant constant, C_M garde une valeur fixe [23] et [25] donnée par le constructeur.

Le couple résistant C' est dû à deux frottements, l'un sec, l'autre visqueux, d'expressions respectives :

$$C_R \operatorname{sgn} \frac{d\theta}{dt} \text{ et } f \frac{d\theta}{dt}.$$

La relation 7.1 devient alors :

$$7.2 \quad J \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} + C_R \operatorname{sgn} \frac{d\theta}{dt} + C_M \sin N_R \theta = 0$$

7.4.2. Schéma électrique équivalent

Pour résoudre l'équation (7.2) nous avons établi dans l'analogie couple-tension l'équation électrique équivalente. Comme le courant i est alors l'homologue de la vitesse $\frac{d\theta}{dt}$, il vient :

$$(7.3) \quad J \frac{di}{dt} + f i + C_R \operatorname{sgn} i + C_M \sin N_R \left(\int i(t) dt \right) = 0$$

Cette relation conduit au schéma électrique de la figure 7.5 dont les caractéristiques $v(i)$ des éléments non linéaires NL^1 et NL^2 d'expressions :

$$v^1 = C_M \sin N_R \left(\int i(t) dt \right)$$

$$v^2 = C_R \operatorname{sgn} i$$

sont respectivement représentées sur les figures 7.6(a) et 7.6(b).

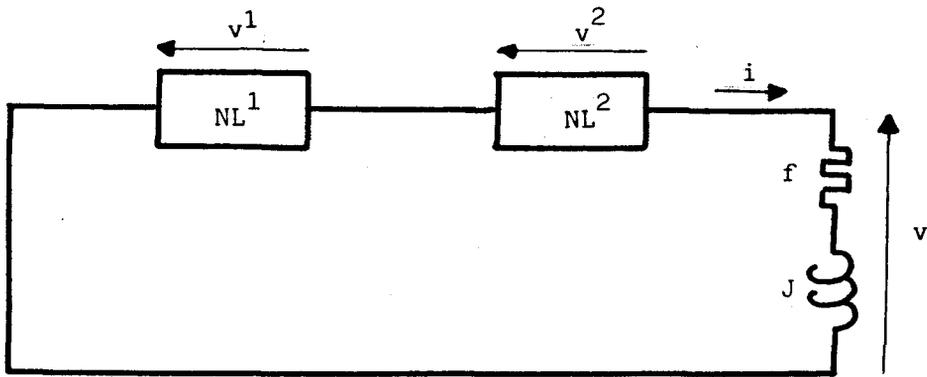


Figure 7.5

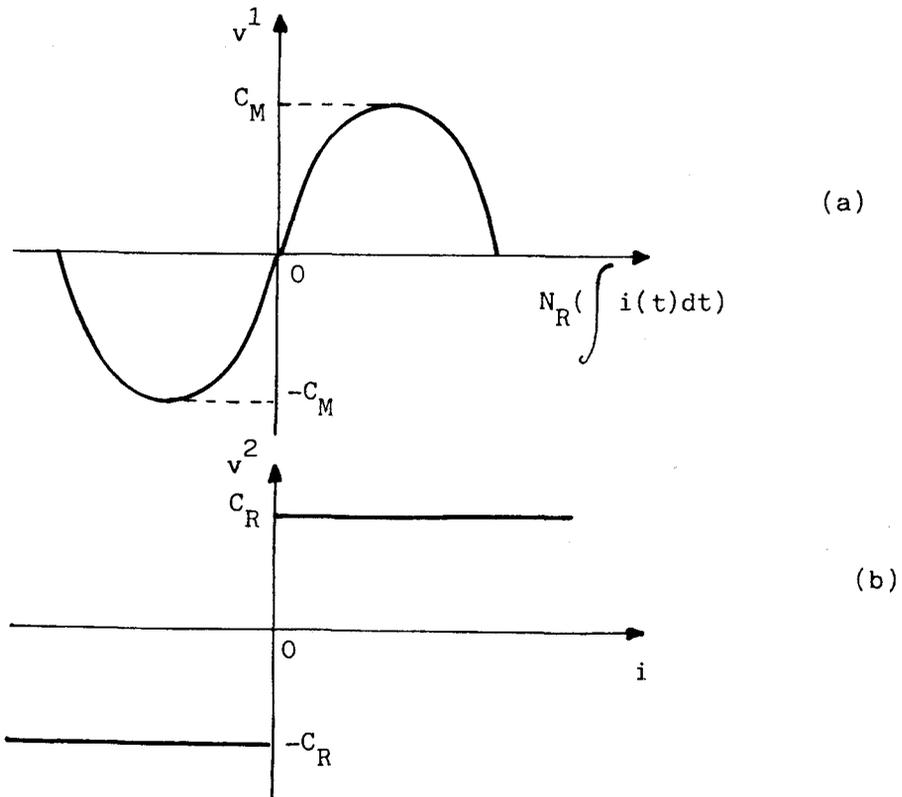


Figure 7.6

7.4.3. Résolution de l'équation différentielle

La réponse du circuit de la figure 7.5 à structure série, peut être déterminée en fixant la loi d'évolution, soit du courant dans la résistance inductive d'éléments f et J , soit de la tension à ses bornes. Cette seconde méthode nécessite toutefois une procédure hybride pour aboutir au résultat.

Quel que soit le procédé retenu, il convient, pour que le calcul soit possible dans tous les cas, de substituer à $\text{sgn } i$ la caractéristique $\Gamma(i)$ ne présentant pas de discontinuité (figure 7.7).

Pour ne pas entacher d'erreur la réponse du système, la pente de Γ dans l'intervalle $(-i_c, +i_c)$ est élevée.

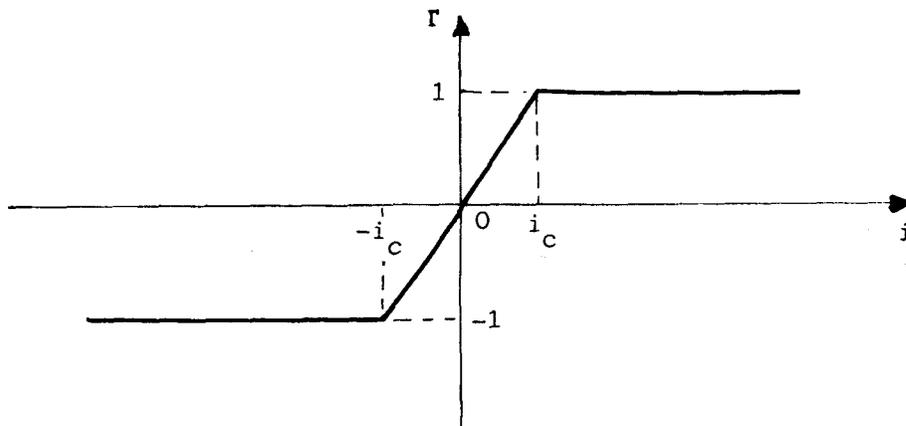


Figure 7.7

7.4.3.1. Procédure du générateur de courant

Nous avons montré au chapitre 4 (§4.3.4) que, pour obtenir une précision satisfaisante, il convenait d'imposer une onde de courant parabolique soit :

$$i' = i_n + b^1 (t - t_n) + \frac{b^2}{2} (t - t_n)^2$$

Les différences de potentiel v' aux bornes de la résistance inductive, e^1 et e^2 dans les non linéarités NL^1 et NL^2 ont respectivement pour expressions :

$$v' = J [b^1 + b^2(t - t_n)] + f [i_n + b^1(t-t_n) + \frac{b^2}{2}(t-t_n)^2]$$

$$e^1 = C_M \sin N_R \left[\frac{b^2}{6}(t-t_n)^3 + \frac{b^1}{2}(t-t_n)^2 + i_n(t-t_n) + C \right]$$

$$e^2 = C_R \Gamma(i')$$

Sachant que $C = q_n$, homologue de la position θ_n du rotor à t_n la vérification de la loi des mailles à cet instant fixe la valeur de la constante b^1 de l'expression de i' ; elle est déduite de la relation :

$$J b^1 + f i_n + C_M \sin N_R q_n + C_R \Gamma(i_n) = 0.$$

7.4.3.2. Evolution linéaire de la différence du potentiel v'

L'application de la procédure qui consiste à fixer la loi d'évolution de la différence de potentiel aux bornes de l'ensemble (J, f) , diffère de celle présentée au chapitre 3. Comme il n'est plus possible, à partir de la connaissance de v' , de définir les tensions e^1 et e^2 aux bornes de chacune des non linéarités, il convient d'opérer ainsi :

- les variations, dans l'intervalle (t_n, t_{n+1}) , du courant i' sont d'abord déterminées à partir de l'équation différentielle :

$$J \frac{di'}{dt} + f i' = v'$$

- les chutes de tension créées par le courant i' dans les non linéarités NL^1 et NL^2 sont ensuite calculées

- enfin la vérification de la loi des mailles à t_{n+1} est effectuée à savoir :

$$v'_{n+1} + e^1_{n+1} + e^2_{n+1} = 0$$

Supposons donc que la variation de v' dans l'intervalle (t_n, t_{n+1}) soit linéaire :

$$v' = v_n + a (t - t_n)$$

Les variables i' , e^1 et e^2 ont alors pour valeurs ;

$$i' = \left(i_n - \frac{v_n}{f} + \frac{a}{f^2} J \right) e^{-\frac{f}{J}(t-t_n)} + \frac{a}{f}(t-t_n) + \frac{v_n}{f} - \frac{a}{f^2} J$$

$$e^1 = C_M \sin N_R \left[-\frac{J}{f} \left(i_n - \frac{v_n}{f} + \frac{a}{f^2} J \right) e^{-\frac{f}{J}(t-t_n)} + \frac{a}{2f}(t-t_n)^2 + \left(\frac{v_n}{f} - \frac{a}{f^2} J \right) (t-t_n) + C' \right]$$

$$e^2 = \Gamma(i')$$

La condition initiale q_n permet la détermination de C' :

$$C' = q_n + \frac{J}{f} \left(i_n - \frac{v_n}{f} + \frac{a}{f^2} J \right)$$

d'où l'expression de e^1 :

$$e^1 = C_M \sin N_R \left[\frac{J}{f} \left(i_n - \frac{v_n}{f} + \frac{a}{f^2} J \right) \left(1 - e^{-\frac{f}{J}(t-t_n)} \right) + \frac{a}{2f}(t-t_n)^2 + \left(\frac{v_n}{f} - \frac{a}{f^2} J \right) (t-t_n) + q_n \right]$$

La valeur de v_n se déduit de la condition de vérification de la loi des mailles à $t = t_n$:

$$v'_n + e_n^1 + e_n^2 = 0$$

soit, sachant que $v_n = v'_n$:

$$v_n = - \left[C_M \sin N_R q_n + \Gamma(i_n) \right]$$

7.4.4. Application de la méthode et résultats

7.4.4.1. Caractéristiques du système étudié

Les paramètres du système d'entraînement considéré sont :

nombre de bobines statoriques $N_S = 3$

nombre de dents au rotor $N_R = 4$

$C_M = 0,38 \text{ mN}$

$C_R = 0,072 \text{ mN}$

$f = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ mN rd}^{-1} \text{ s}$

$J = 2,8 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$.

Sachant que l'unité retenue pour exprimer l'angle de rotation décrit, est le "pas", fonction de la constitution du moteur et égal à : $\frac{2\pi}{N_R \cdot N_S}$, soit $\frac{\pi}{6}$ dans l'exemple traité, la vitesse du rotor est donnée en pas par seconde.

L'abscisse i_c du coude de la caractéristique $\Gamma(i)$ (figure 7.7) est telle que la vitesse est alors de 5 pas par seconde soit de 2,62 rd/s.

7.4.4.2. Conditions initiales

Nous nous proposons d'étudier l'évolution du système en régime d'accélération. Les phases statoriques du moteur sont alors soumises à des impulsions rectangulaires de courant de plus en plus brèves.

Alimentons, à $t=0$, la phase II dont l'axe est pris pour référence ($\theta = 0$) et considérons le déplacement θ_{d_2} de la dent d_2 .

Les conditions initiales sont :

$$\left(\frac{d\theta_{d_2}}{dt}\right) = 0 \text{ rd.s}^{-1}$$

$$(\theta_{d_2})_{t=0} = -\frac{\pi}{6} \text{ rd} = -1 \text{ pas}$$

ou en considérant les homologues électriques :

$$(i)_{t=0} = i_0 = 0$$

$$(q)_{t=0} = q_0 = -\frac{\pi}{6}$$

Supposons que la première commutation (phase II hors tension, alimentation de la phase III) se produit à $t = T_1$. La condition initiale à introduire, pour la détermination de ce point de fonctionnement, sur la position de la dent d_2 , prise par rapport à l'axe de la phase nouvellement alimentée (figure 7.8), a pour valeur :

$$q_0^1 = q(T_1 - \Delta t) - \frac{2\pi}{3}$$

Sur l'intervalle :

$$T_1 \leq t < T_2$$

la dent d_2 se déplace, par rapport à l'axe de la phase II, d'une quantité

$$\theta_{d_2} = q + \frac{2\pi}{3}$$

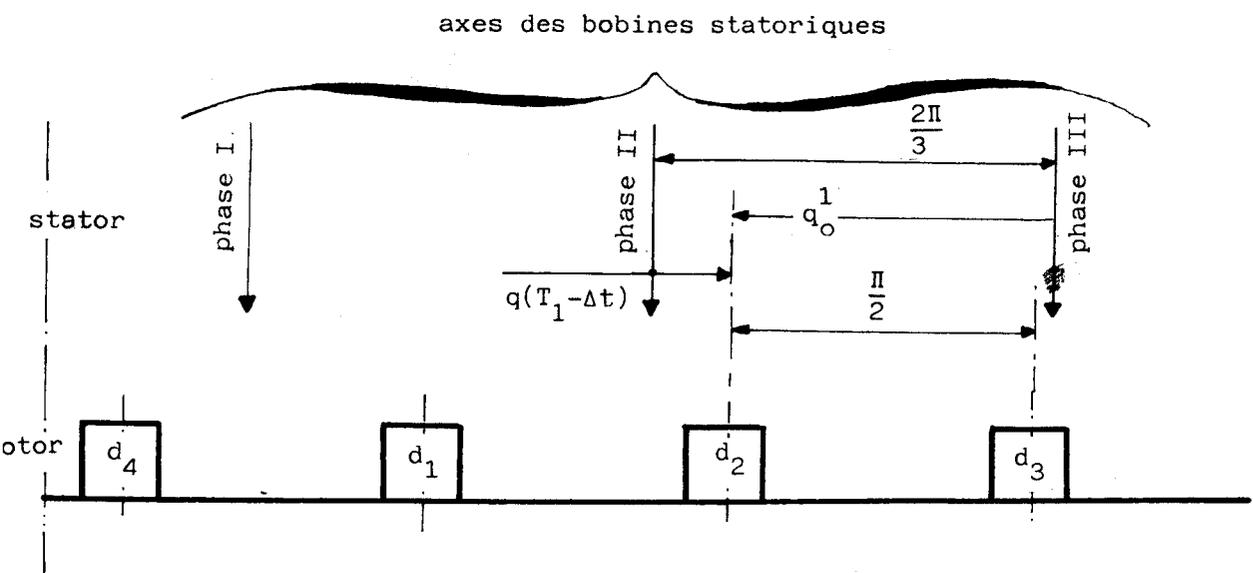


Figure 7.8

D'une manière générale, à la $n^{\text{ième}}$ commutation ($t=T_N$) la condition initiale à introduire pour le calcul est :

$$q_0^N = q (T_N - \Delta t) - \frac{2\pi}{3}$$

et sur l'intervalle

$$T_N \leq t < T_{N+1}$$

il vient :

$$\theta_{d_2} = q + N \frac{2\pi}{3}$$

7.4.4.3. Réponse du système

Nous avons, dans le plan de phase, tracé (figure 7.9) la réponse du système déterminée en imposant une évolution parabolique du courant. Le pas de calcul Δt et l'imprecision ϵ tolérée dans l'appréciation de la condition de test sont fixés respectivement à 1ms et à 1%.

Les temps de commutation sont précisés dans le tableau 7.2 où figurent également les valeurs de θ_{d_2} (en pas) et de $\frac{d\theta_{d_2}}{dt}$ (en pas par seconde) obtenues par les deux modes d'investigation développés au §7.4.3. Nous constatons une bonne concordance dans les résultats trouvés.

Nous avons, en outre, présenté ceux obtenus en imposant au courant i' une variation linéaire dans chaque intervalle de temps (t_n, t_{n+1}) .

Par rapport à nos relevés précédents, cette dernière procédure conduit à des écarts relativement faibles. Ils sont inférieurs à ceux enregistrés lorsque la comparaison est envisagée entre nos résultats initiaux et la réponse du système obtenue par voie analogique [26].

7.5 Conclusion

Les exemples traités dans ce chapitre montrent que la méthode proposée s'applique à l'étude de circuits dont la caractéristique de certains éléments non linéaires n'est pas indépendante du temps. Il importe toutefois d'adapter la procédure conduisant à la condition de test positif.

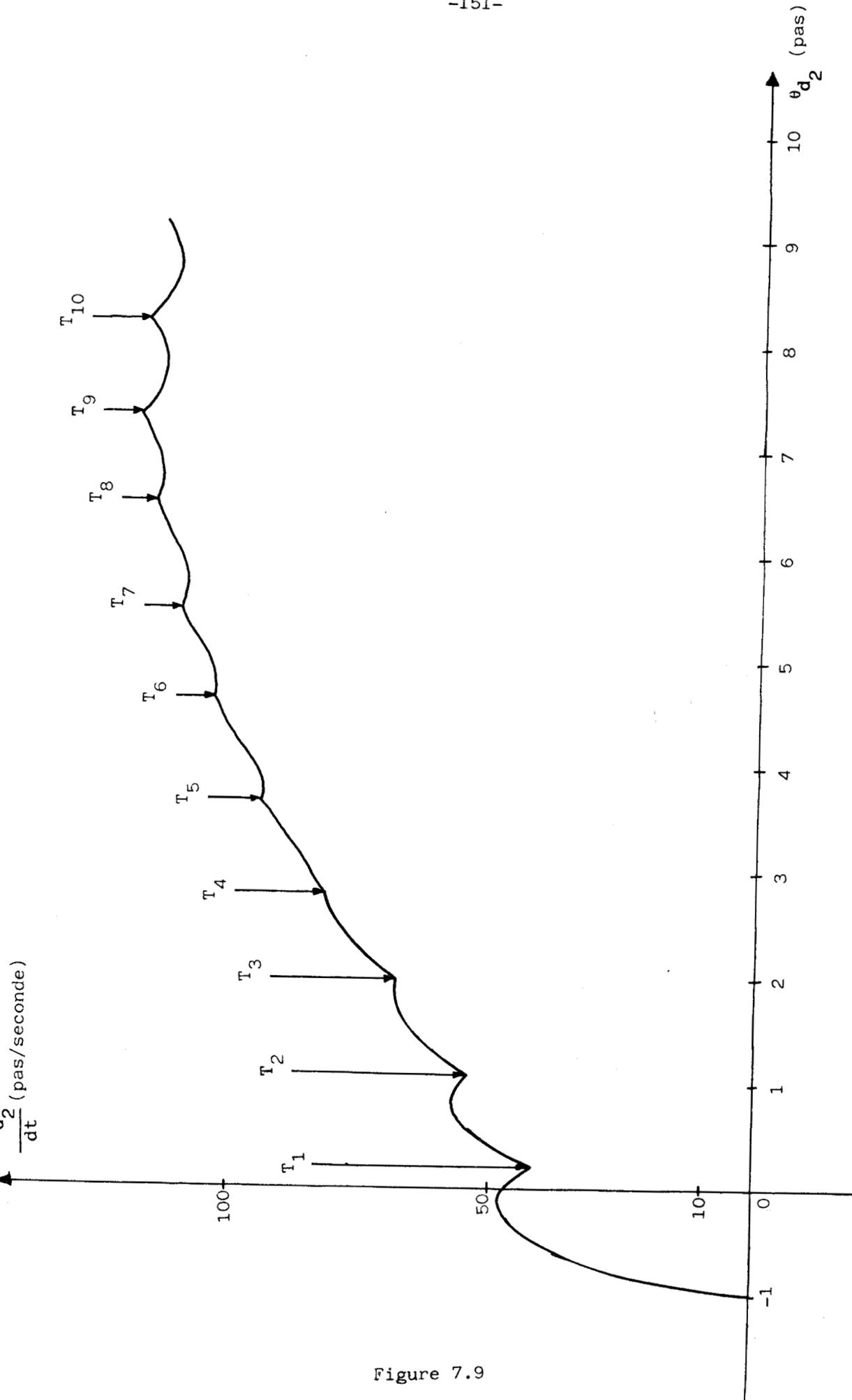


Figure 7.9

T	Variations linéaires de v		Variations paraboliques de i		Variations linéaires de i		Simulation analogique	
	θ_{d_2} (pas)	$\frac{d\theta_{d_2}}{dt}$ (pas/s)	θ_{d_2}	$\frac{d\theta_{d_2}}{dt}$	θ_{d_2}	$\frac{d\theta_{d_2}}{dt}$	θ_{d_2}	$\frac{d\theta_{d_2}}{dt}$
T ₁ = 0,038	0,177	42,053	0,181	42,084	0,161	40,90	0,195	43,2
T ₂ = 0,055	1,082	55,200	1,086	55,080	1,04	54,269	1,06	58,05
T ₃ = 0,068	1,921	69,215	1,924	69,009	1,875	68,629	1,91	71,55
T ₄ = 0,079	2,765	82,743	2,767	82,691	2,712	82,307	2,80	85,05
T ₅ = 0,89	3,646	94,179	3,649	94,219	3,589	93,754	3,715	95,85
T ₆ = 0,99	4,626	103,637	4,630	103,769	4,563	103,183	4,64	106,65
T ₇ = 0,107	5,474	110,546	5,479	110,783	5,407	110,000	5,58	113,4
T ₈ = 0,116	6,474	115,574	6,483	115,972	6,4	114,831	6,505	120,15
T ₉ = 0,123	7,281	118,193	7,293	118,823	7,200	117,101	7,445	124,2
T ₁₀ = 0,131	8,200	116,793	8,219	117,88	8,107	114,904	8,4	126,9

$\Delta t = 10^{-3}$ s

$\epsilon = 1\%$

Tableau 7.2

CONCLUSION

L'objectif de notre travail était de rechercher la réponse des convertisseurs statiques à semiconducteurs de puissance sans déterminer au préalable la configuration du système dans chaque intervalle de fonctionnement.

Le principe retenu a consisté à s'affranchir des variables dépendantes introduites par les non-linéarités en imposant une évolution appropriée, entre deux instants de tests successifs, à une ou plusieurs variables du montage. Cette étude nous a conduit tout naturellement à considérer les convertisseurs analysés en fonction de leur structure de complexité croissante et non pas, comme il est généralement admis, suivant la conversion électrique réalisée.

Nous nous sommes alors principalement appliqué, pour chaque structure successivement envisagée, à définir la meilleure procédure à retenir, à savoir la variable et la forme d'onde à imposer, pour obtenir, avec le pas de calcul choisi, des résultats en très bonne concordance avec ceux, soit déduits d'expressions littérales préalablement établies, soit donnés par d'autres auteurs. C'est ainsi qu'en nous intéressant surtout aux structures qu'il est possible d'analyser par notre méthode nous avons quelque peu négligé le problème du temps de calcul que nous n'avons pas cherché à minimiser en toute circonstance.

Il existe d'ailleurs dans l'application du principe proposé, à chaque système considéré, de nombreuses variantes que nous n'avons pas développées dans ce mémoire et qui permettent de réduire considérablement la durée d'utilisation du calculateur et voire même d'augmenter la précision des points obtenus.

Enfin, l'analyse du comportement en régime dynamique de l'ensemble convertisseur statique - charge associée en tenant compte des caractéristiques des semiconducteurs constitue le principal intérêt de la méthode. Nous étudions d'ailleurs actuellement les régimes transitoires de la machine asynchrone alimentée soit directement par le réseau, soit par l'intermédiaire d'un gradateur.

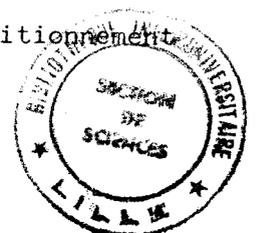
B I B L I O G R A P H I E

-o-o-o-o-o-

- [1] : G. SEGUIER
L'Electronique de Puissance. Dunod Editeur, 1974
- [2] : B.D. BEDFORD, R.G. HOFT
Principles of inverters circuits. Wiley editeur, 1964
- [3] : J. Ch. GILLE, P. DECAULNE, M. PELEGRIN
Systèmes asservis non linéaires. Dunod éditeur
- [4] : MAINGUENAUD
Systèmes asservis non linéaires. Masson éditeur
- [5] : P. NASLIN
Systèmes non linéaires. Sup. Elec. n°2158
- [6] : H. FOCH
Les convertisseurs statiques à commutation forcée - Etudes - Synthèses - Simulations.
Thèse de Doctorat.ès.Sciences, Toulouse, 1974
- [7] : A. SAFACA
Simulation einer ungesteuerten Drehstrom - Diodenbrücke auf dem Analogrechner . ETZ-A Bd. 92 (1971) H.11
- [8] : P. BUCHNER, KDT, DRESDEN
Methoden zur analogen simulation von Stromrichterstellgliedern
ELEKTRIE 25 (1971) H.4

- [9] : D. PROSKE, KDT, DRESDEN
Möglichkeiten zur Analogsimulation antiparallel geschalteter Halbleiterventile . ELEKTRIE 27 (1973) H.3
- [10] : J.S.C. HTSUI, W. SHEPHERD
Method of digital computation of thyristor switching circuits
PROC.IEE, Vol. 118, n°8, August 1971
- [11] : W.C. BEATTIE, J.H. PARKER
Bölean - Functional representation of a thyristor
Proc. IEE, Vol. 118, n°1, January 1971
- [12] : J. REEVE, R. MARTTILA
Calculation of turn-on stresses in a HVDC valve having parallel thyristor strings . Paper T 72545-2 présenté at the IEEE PES Summer Meeting, San Fransico, Calif, July 9-14-1972
- [13] : G.N. REVANKAR, P.K. SRIVASTAVA
Turnoff Model of an SCR. IEEE Trans. Ind. Electron. Contr. Instrum., Vol IECE-22, n°4, November 1975
- [14] : G. MAGGETHO
Le thyrsitor - Définitions - Protection - Commandes
Presses Universitaires de Bruxelles - 1971
- [15] : G.BOSVIEUX-COILLIOT
Méthode facilitant l'étude des montages de l'électronique de puissance . Thèse de troisième cycle , Lille, 1976
- [16] : H. FOCH, B. TRANNOY, J. FAUCHER
Complete simulation of a static converter by digital an analogue methods. IFAC Symposium - Control in Power Electronic and Electrical Drives - DUSSELDORF 7-9 Octobre 1974.
- [17] : E.R.C. DA SILVA, H. FOCH, B. TRANNOY
Méthode de simulation numérique des convertisseurs statiques de puissance. Application au convertisseur de Mac Murray-Beford.
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 274, (24 mai 1972)

- [18] : J.F. BRUDNY, G. MANESSE, Ch. MAIZIERES
Sur une méthode de simulation numérique des circuits non linéaires
C.R. Acad. Sc. Paris, t.289 (2 juillet 1979)
- [19] : M. GOLDBERG
Contribution à l'étude de l'ensemble montage redresseur - Filtre
charge. Thèse de Docteur Ingénieur, Lille, 1972
- [20] : Ch. ROMBAUT
Etude des gradateurs triphasés et d'autres convertisseurs alternatif-
alternatif fonctionnant en commutation naturelle
Thèse de Doctorat.ès.Sciences, Lille, 1979
- [21] : J.F. BRUDNY, D. PINCHON
Sur une méthode de résolution d'une équation non linéaire. Applica-
tion à l'étude de la mise en vitesse des moteurs pas à pas.
MECO'79 Third International Symposium, Grenoble, 13 au 15 juin 1979
- [22] : D. PINCHON, J.F. BRUDNY
Optimisation de la commande en vitesse de moteurs pas à pas
Congrès "Informatica y automatica" Madrid, 16 au 19 octobre 1979
- [23] : B.C. KUO, G. SINCH, R. YACKEL
Modeling and simulation of a stepping motor. IEEE Transactions in
automatic control, December 1969, p 745-747
- [24] : M. GROSSETETE
Les moteurs pas à pas à réluctance variable
Automatisme, juillet-août 1970, p 359-364
- [25] : P. LAFORIE, M. CHIOCCARELLO
Influence de la commande électronique sur le comportement dynamique
des moteurs pas à pas à aimant permanent. RGE Mars 1975, P 171-177.
- [26] : D. PINCHON
Sur l'optimisation du temps de réponse d'un système de positionnement
à moteur pas à pas . Thèse de troisième cycle, Lille 1980.



Circuit non linéaire. Convertisseur statique. Méthode numérique.

RESUME

Après avoir rappelé les principales techniques d'analyse des convertisseurs statiques, l'auteur présente d'abord le principe de sa méthode qui consiste, pour s'affranchir des variables dépendantes introduites par les non linéarités que constituent les semiconducteurs de puissance, à imposer entre deux instants de tests successifs, une évolution appropriée à une ou plusieurs variables du système.

Une estimation, sur le "circuit roue libre", de la précision en fonction du pas de calcul et de l'erreur fixée pour l'appréciation de la condition de test permet de mettre en évidence les bons résultats obtenus par la méthode proposée.

Dans l'analyse du comportement d'autres convertisseurs, à structure parallèle ou série, il a ensuite recherché, parmi les variables qu'il est possible de choisir, celle dont il est préférable de fixer la loi d'évolution.

Enfin pour permettre l'extension de la méthode à l'étude de circuits à structures plus complexes, l'auteur définit deux ensembles alimentés par un ou plusieurs systèmes de tensions polyphasées et constitués par des semiconducteurs connectés à des éléments linéaires couplés en polygone ou en étoile. Après avoir décrit le mode opératoire permettant d'obtenir les grandeurs caractéristiques de ces montages, il procède à l'étude d'un pont monophasé à quatre diodes, d'un redresseur triphasé alimenté par une source d'impédance interne non négligeable, d'un gradateur mixte débitant sur trois résistances inductives associés en étoile, cas particulier de la classification précédente.