

N° d'ordre : 608

50376
1984
68

50376.
1984.
68.

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

Gilles JOLY

**QUELQUES PROPRIETES OPTIQUES DE PILES
HELICOIDALES DE LAMES BIREFRINGENTES :
BIREFRINGENCE ELLIPTIQUE ET REFLEXION
SELECTIVE DE LA LUMIERE**



Soutenue le 31 janvier 1984 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

Président
Rapporteurs

M. FRANÇON
M. BILLARD

Professeur à l'Université de Paris 6
Professeur, Chef du Service de Physique du Laboratoire
Central des Ponts et Chaussées

M. IMBERT
M. ISAERT

Professeur à l'Université de Paris-Sud
Maître-Assistant à l'Université de Lille 1

Examineurs

M. CALIFANO
M. CONSTANT
M. FOURET
M. MALVACHE

Professeur à l'Université de Paris 6
Professeur à l'Université de Lille 1
Professeur à l'Université de Lille 1
Professeur à l'Université de Valenciennes

ERRATA

. Le coefficient 2 a été omis dans l'expression de la biréfringence $2\Delta n$ aux pages suivantes :

page 61 : § du bas $2\Delta\phi = \frac{4\pi\Delta ne}{\lambda}$

page 63 : légende de la figure : biréfringence $2\Delta n$

page 73 : § du milieu ... l'ensemble des paramètres $(e, \beta, 2\Delta n, n, \lambda)$

page 93 : second paragraphe ... chacun des paramètres $(e, \beta, 2\Delta n, n$ et $\lambda)$

page 122 : 3^e paragraphe... biréfringence induite $2\Delta n$

déformation homogène des polymères, $2\Delta n$

. page 23 : lames identiques biréfringentes inactives, jointives ...

. page 41 : 4^e ligne : on constate qu'à l'extérieur d'une

. page 46 : $i \rightarrow j$ dans les formules

. page 49 : avant-dernier paragraphe : caractère anomal à la

. page 57 : en bas "Rappelons ... inverse" : note de bas de page.

plus bas " $\gamma(44)$ change de signe et la vibration..."

. page 58 : fin du § 3.2 (haut de page)

placer la ligne "Pour les empilements gauches ... inversés".

juste avant la ligne "Le signe du déphasage $\phi_{2,1}$... empilement"

. page 59 : en haut : $m_{1,2} = n \pm \dots$

. page 86 : conditions de continuité du champ magnétique $R_{(\beta)} \begin{pmatrix} \cdot & -n_2 \\ n_1 & \cdot \end{pmatrix}$

bas de page $N_1^{-1} V_e = \dots$

. page 89 : formules 76 et 77, dans les $\sqrt{\quad}$: $f_1 f_1^*$ et $f_2 f_2^*$ à la place de f_1^2 et f_2^2

. page 93 : 2^e ligne : Les phénomènes auxquels ...

. page 102 : sur la figure 22 remplacer M_0 par M_i

. références bibliographiques : (11), (43), (45) Ann. de Chi. et de Phys.

(3) C.R.Acad.Sci.(Paris), ...

(25) Chem.Phys.Ser., Springer (Berlin), 1980, ...



N° d'ordre : 608

50376
1984
68

50376
1984
68

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

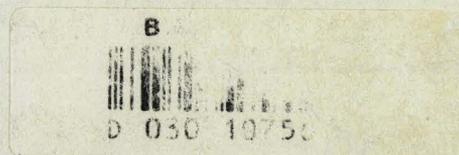
pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

Gilles JOLY

**QUELQUES PROPRIETES OPTIQUES DE PILES
HELICOIDALES DE LAMES BIREFRINGENTES :
BIREFRINGENCE ELLIPTIQUE ET REFLEXION
SELECTIVE DE LA LUMIERE**



Soutenue le 31 janvier 1984 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

Président

M. FRANÇON

Professeur à l'Université de Paris 6

Rapporteurs

M. BILLARD

Professeur, Chef du Service de Physique du Laboratoire
Central des Ponts et Chaussées

M. IMBERT

Professeur à l'Université de Paris-Sud

M. ISAERT

Maître-Assistant à l'Université de Lille 1

Examineurs

M. CALIFANO

Professeur à l'Université de Paris 6

M. CONSTANT

Professeur à l'Université de Lille 1

M. FOURET

Professeur à l'Université de Lille 1

M. MALVACHE

Professeur à l'Université de Valenciennes

A tous ceux qui y ont cru avec moi,

à mes parents

A Dominique, fidèle compagne de route

A nos enfants

Ce travail a été réalisé à l'Université des Sciences et Techniques de Lille, dans l'équipe de Dynamique des Cristaux Moléculaires dirigée par Monsieur le Professeur FOURET.

La majeure partie de cette recherche s'est déroulée sous la direction de Monsieur le Professeur BILLARD ; en le remerciant encore de m'avoir accueilli dans son laboratoire, je tiens à lui renouveler l'expression de toute mon estime pour les remarques toujours pertinentes dont il a su jalonner les diverses étapes de ma progression.

Avant, et plus encore après le départ de Monsieur le Professeur BILLARD, mon collègue N. ISAERT m'a efficacement aidé en m'amenant à analyser avec rigueur beaucoup de points délicats. Qu'il trouve ici, en plus de mes remerciements, l'expression sincère de mon amitié.

Monsieur le Professeur FRANCON a accepté de présider le jury : c'est pour moi, humble admirateur de ses qualités scientifiques et pédagogiques, une grande joie.

Monsieur le Professeur IMBERT, qui à diverses reprises a montré son intérêt pour mon sujet s'est joint à Messieurs BILLARD et ISAERT pour rapporter sur cette thèse : sa compétence me fait doublement apprécier le jugement qu'il a bien voulu porter sur mes modestes résultats.

J'apprécie la présence dans le jury de Messieurs les Professeurs CALIFANO, CONSTANT et FOURET qui, malgré des préoccupations habituellement éloignées de l'Optique des Cristaux Liquides, ont accepté de juger le mémoire.

Je suis très sensible à la marque d'amitié que m'a témoignée Monsieur le Professeur MALVACHE en distayant sans hésitation une partie de son temps pour participer au jury.

Avec une mention spéciale pour Monsieur SOULESTIN qui s'occupe avec bonne humeur de nos problèmes techniques, tous les membres du laboratoire ont contribué à des degrés divers et chacun à sa manière, à l'accomplissement de ce travail grâce à l'agréable ambiance qu'ils ont su créer. Merci à tous.

La vérification expérimentale décisive qui a signé la conclusion de cette étude a été réalisée grâce au spectroscope obligeamment mis à ma disposition par Messieurs BERNAGE et NIAV : je tiens à les assurer ici de toute ma gratitude pour leur collaboration et leur aide.

Je ne saurais enfin oublier Madame BOEREZ qui s'est acquittée avec gentillesse et diligence de la frappe du mémoire, Monsieur RAFFAUD qui en a exécuté les dessins et Messieurs FAUQUEMBERGUE et VILAIN qui se sont chargés du tirage des fascicules.

SOMMAIRE



<u>INTRODUCTION</u>	1
<u>CHAPITRE 1 : LES VIBRATIONS PROPRES D'UNE PILE DE DEUX LAMES A BIREFRINGENCE RECTILIGNE NE SONT PAS ORTHOGONALES</u>	5
1. Introduction	5
2. Quelques définitions : état de polarisation, orthogonalité vibrations privilégiées d'un milieu homogène, vibrations propres d'un empilement	6
3. Vibrations propres d'une pile de deux lames à biréfringence rectiligne identiques éclairée sous l'incidence normale	7
3.1 Analyse du problème	7
3.2 Ecart à l'orthogonalité des vibrations propres	11
4. Vérifications expérimentales	14
4.1 Principe des mesures	14
4.2 Réglages du microellipsomètre	18
4.3 Réalisation de la pile de deux lames	18
4.4 Résultats expérimentaux	19
5. Conclusion	20
<u>CHAPITRE 2 : PILES HELICOIDALES DE LAMES BIREFRINGENTES ECLAIREES SOUS L'INCIDENCE NORMALE</u>	23
1. Vibrations itératives : définitions et généralités	23
2. Calcul des valeurs propres. Indices d'itération	26
3. Etats de polarisation du champ itératif total	29
3.1 Etats de polarisation des vibrations itératives associés à des valeurs propres complexes de module unité	31
3.2 Vibrations itératives associées à deux valeurs propres complexes α et $1/\alpha$: problème du retour inverse	34
3.3 Propriétés du champ électromagnétique itératif associé à une valeur propre réelle	36

4. Piles de lamelles biréfringentes très minces : propriétés des mésophases torses	41
4.1 Vibrations favorisées	41
4.2 La réflexion sélective de la lumière par les mésophases torses	44
5. Conclusion et remarques	48

CHAPITRE 3 : CONDITIONS DE PROPAGATION DES VIBRATIONS ITERATIVES A

TRAVERS LES LAMES D'UNE PILE HELICOIDALE SEMI-INFINIE.....

1. Introduction	51
2. Méthode d'étude de la phase des vibrations itératives ...	51
3. Variations de la phase des vibrations itératives lors de la traversée d'une lame	55
3.1 Signification des différents termes	55
3.2 Sens de parcours des vibrations itératives	57
3.3 Indices associés	58
4. Bandes multiples de réflexion sélective	59
4.1 Longueurs d'onde des rayonnements réfléchis	59
4.2 Sens de parcours des vibrations réfléchies	60
4.3 Répartition spectrale des deux séries de bandes de réflexion sélective	60
4.4 Remarque sur les indices associés dans les bandes de réflexion sélective	63
5. Détermination graphique des longueurs d'onde de réflexion sélective	64
5.1 Principe de la méthode graphique	64
5.2 L'angle entre deux lames consécutives est fixé	70
5.3 Distinction graphique des deux séries de bandes de réflexion sélective	72
5.4 L'angle β entre deux lames consécutives est très faible. Le cas particulier des mésomorphes à torsion.....	74
5.5 Caractéristiques géométriques de piles présentant le phénomène de réflexion sélective	75
6. Largeur des domaines de réflexion sélective	78
7. Conclusion	80

CHAPITRE 4 : PHENOMENES DE BIREFRINGENCE ELLIPTIQUE PRESENTES PAR QUELQUES PILES HELICOIDALES D'EXTENSION FINIE ECLAIREES SOUS L'INCIDENCE NORMALE : OBSERVATIONS EXPERIMENTALES ET INTERPRETATIONS	83
1. Introduction	83
2. Piles d'extension finie éclairées en lumière monochromati- que	83
2.1 Méthode d'étude générale	83
2.2 Vibration transmise par une pile finie : solution simplifiée à l'extérieur des bandes de réflexion sélective	87
2.3 Etude de la solution simplifiée par la méthode géo- métrique de Poincaré	90
3. Exemples de piles d'extension finie éclairées en lumière blanche : biréfringence elliptique et pouvoir rotatoire d'entraînement	93
3.1 Angle d'empilement β faible ($\phi_{2,1} \cong 2\Delta\phi$) ; cas de lames de retard $2\Delta\phi$ proche de π	94
3.2 Angle β d'empilement faible ($\phi_{2,1} \cong 2\Delta\phi$) ; lames de retard $2\Delta\phi$ élevé	97
3.3 Le cas des piles de Reusch : $\beta = 60^\circ$ et lames de retard $2\Delta\phi$ faible devant 2π	101
3.4 Angle d'empilement élevé ($\beta = 60^\circ$) ; lames de retard $2\Delta\phi$ proche de π	104
3.5 Cas d'un empilement ($\beta = 60^\circ$) de lames de retard $2\Delta\phi (\cong 6\pi)$ important	106
4. Conclusion	111

CHAPITRE 5 : MISE EN EVIDENCE EXPERIMENTALE DES BANDES MULTIPLES DE REFLEXION SELECTIVE DE PILES HELICOIDALES D'EXTENSION FINIE	111
1. Introduction	111
2. Répartition en intensité de la lumière transmise par une pile comportant un grand nombre de lames	111
2.1 Etude de la lumière transmise par une pile : solution approchée à l'intérieur des bandes de réflexion sé- lective	113
2.2 Répartition spectrale des intensités transmises par une pile pour diverses vibrations incidentes	119

3. Réalisation de piles hélicoïdales de lames biréfrin- gentes présentant des bandes de réflexion sélective dans le visible	119
3.1 Les contraintes expérimentales	119
3.2 Choix d'un milieu expérimental	121
3.3 Réalisation d'un empilement hélicoïdal	125
4. Observation des bandes multiples de réflexion sélective ..	127
4.1 Prévisions	127
4.2 Pile hélicoïdale à 60° : observation des deux séries de bandes de réflexion sélective	129
4.3 Pile de lames à 90°	136
5. Conclusion	138
<u>CONCLUSION</u>	141
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	145

INTRODUCTION

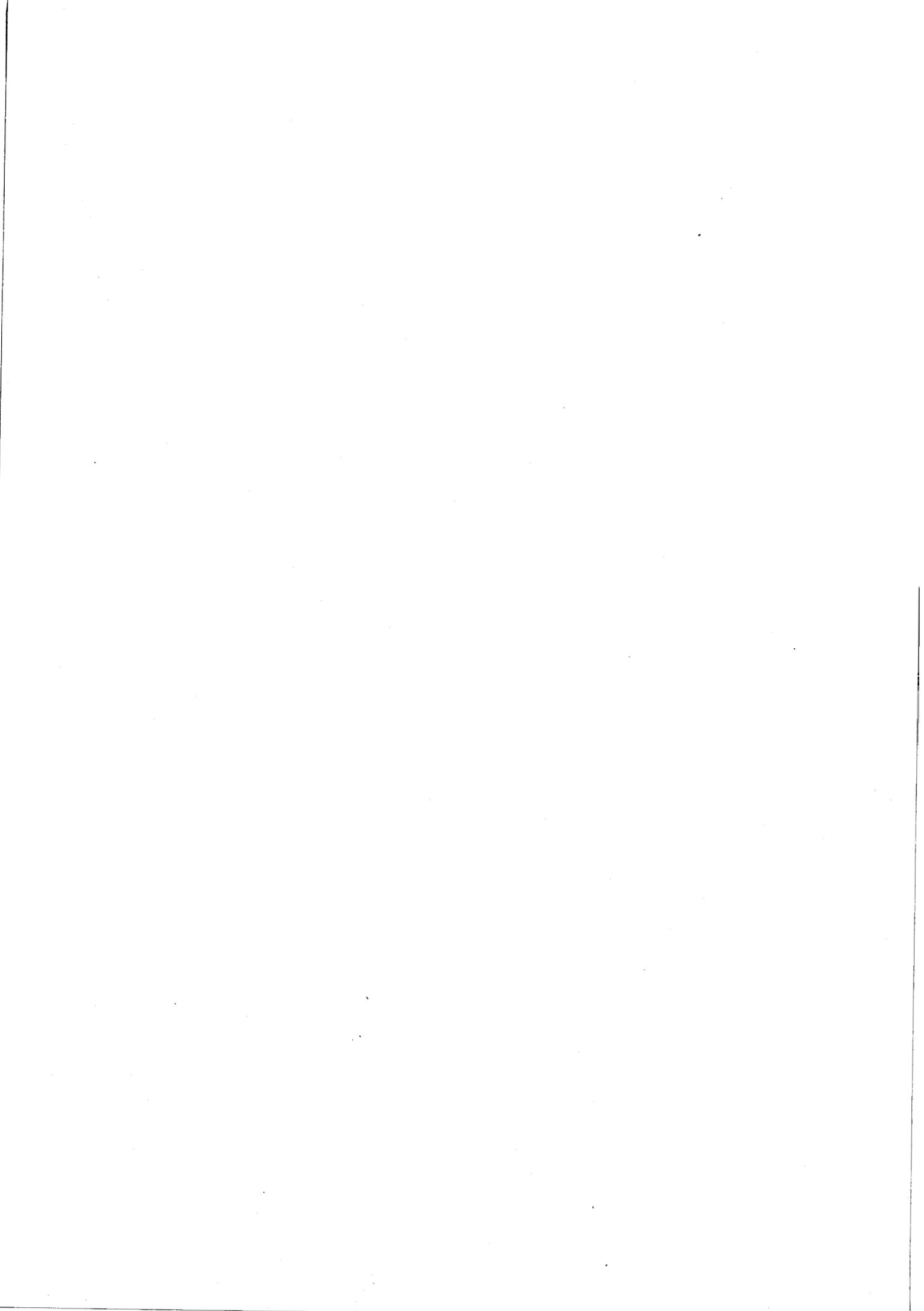
La diversité de phénomènes optiques que les cristaux liquides offrent à l'observation est remarquable : textures chatoyantes, couleurs mouvantes, arrangements géométriques, apparitions fugaces ou progressives. De toutes ces propriétés, la plus fascinante à nos yeux est la réflexion sélective que présentent certaines mésophases torsadées : éclairée en lumière blanche naturelle, une préparation réfléchit "sélectivement" un domaine étroit de longueurs d'onde. Une partie seulement de la lumière incidente appartenant à ce domaine est réfléchi : en effet, pour une préparation donnée, une seule des composantes circulaires de la vibration incidente est transmise ; l'autre est réfléchi. Curieusement, le sens de polarisation de cette dernière est le même que celui de la composante incidente correspondante, contrairement à la réflexion habituelle par un miroir. La sélectivité spectrale d'une part et le sens "anomal" de polarisation de la réfléchi d'autre part, confèrent au phénomène de réflexion sélective une double originalité.

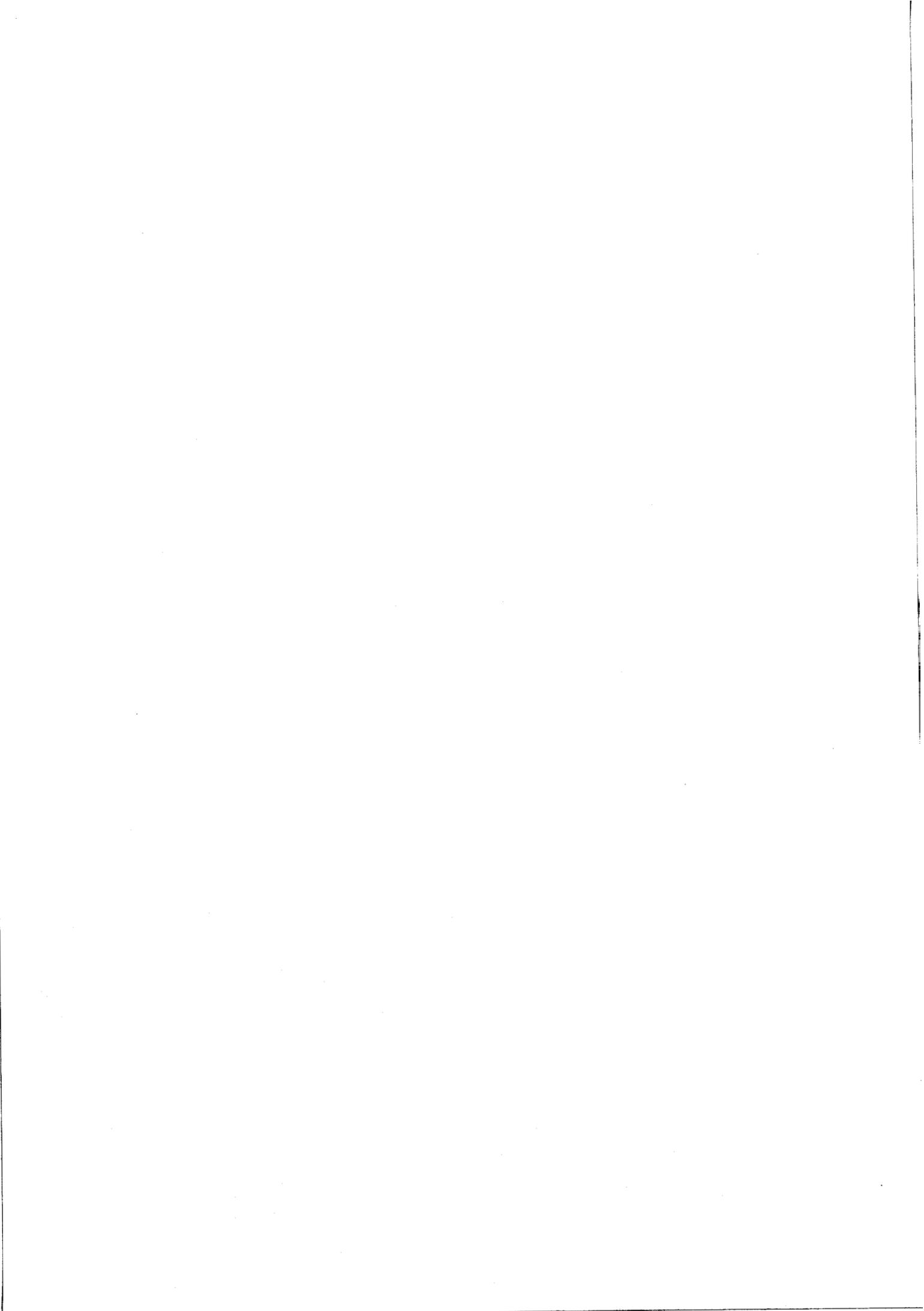
Les mésophases torses possèdent en dehors de la bande de réflexion sélective des propriétés de polarisation rotatoire. Le pouvoir rotatoire observé est beaucoup plus important que celui des cristaux et des liquides ou des gaz. Dès 1869, Reusch [1] avait retrouvé les propriétés de polarisation rotatoire des cristaux actifs avec des empilements de lamelles de mica. Suivant la même inspiration, reprenant un modèle macroscopique analogue proposé par plusieurs auteurs pour expliquer qualitativement tout ou partie des propriétés des mésophases torses, nous avons abordé l'étude théorique des propriétés d'un empilement hélicoïdal de lames biréfringentes : un tel modèle constitue une simple généralisation des piles de Reusch.

Les techniques habituelles d'étude d'un tel empilement sont en général incomplètes ainsi que le met en évidence le chapitre 1. Aussi un formalisme original qui permet de prendre en compte toutes les ondes réfléchies aux dioptries a-t-il été mis au point. Il a permis d'établir la coïncidence entre les propriétés optiques des mésophases torses et celles de piles de lamelles biréfringentes très minces dont l'orientation

varie très progressivement. Les propriétés optiques originales des mésophases torses apparaissent ainsi comme un cas particulier des propriétés des assemblages hélicoïdaux de lames à biréfringence rectiligne.

Les applications du formalisme proposé ne se limitent pas aux piles de lamelles ; les notions essentielles permettant d'étudier la propagation de la lumière le long de l'axe de torsion de n'importe quel empilement hélicoïdal sont dégagées aux chapitres 2 et 3. Quelques exemples de piles de lames épaisses présentant des phénomènes de biréfringence elliptique additionnée de pouvoir rotatoire d'entraînement lié à la structure torse sont étudiés au chapitre 4. Enfin, il est montré que les piles hélicoïdales de lames épaisses présentent, comme les mésophases torses, le phénomène de réflexion sélective : il se manifeste sous forme de deux séries distinctes de bandes spectrales étroites réfléchies. Le chapitre 5 décrit les diverses mises en évidence expérimentales de cette propriété nouvelle.





CHAPITRE I

LES VIBRATIONS PROPRES D'UNE PILE DE DEUX LAMES

À BIRÉFRINGENCE RECTILIGNE NE SONT PAS ORTHOGONALES

1. INTRODUCTION

Des méthodes classiques de calcul analytique ou numérique permettent de tenir compte des réflexions aux divers dioptries des piles "périodiques" de lames isotropes [2,3,4,5]. Il n'existe pratiquement pas d'études analogues pour les piles de lames biréfringentes. Habituellement, dès que le nombre de lames dépasse quelques unités, les réflexions sont négligées et on considère que la vibration incidente sur une lame représente la totalité de la vibration transmise par la lame précédente. J. BILLARD [6] donne un exemple de pile où ce type de raisonnement conduit à un paradoxe : si on éclaire cette pile avec une vibration convenable, l'émergente a une amplitude supérieure à celle de l'incidente. Une critique des hypothèses montre que l'origine de la difficulté peut provenir de la non-prise en compte des ondes réfléchies aux dioptries.

Ainsi que nous l'avons laissé entendre dans l'introduction générale, notre étude concerne les piles hélicoïdales de lames biréfringentes. Divers auteurs [7,8] ayant proposé des modèles théoriques de telles piles mettent qualitativement en évidence le rôle que pourraient y jouer les réflexions. Il nous importait donc au premier chef de juger quantitativement s'il y a lieu ou non de tenir compte des ondes réfléchies aux divers dioptries d'une pile de lames.

L'étude détaillée qui suit montre que ces réflexions jouent un rôle subtil mais non négligeable même dans la pile la plus simple qui puisse être imaginée, puisqu'elle ne comporte que deux lames à biréfringence rectiligne, parfaitement transparentes.

2. QUELQUES DEFINITIONS : ETAT DE POLARISATION D'UNE VIBRATION,
ORTHOGONALITE, VIBRATIONS PRIVILEGIEES D'UN MILIEU HOMOGENE,
VIBRATIONS PROPRES D'UN EMPILEMENT

L'état de polarisation d'une vibration monochromatique peut être caractérisé par un nombre complexe. Si V_x et V_y sont les composantes complexes d'une vibration elliptique, le nombre complexe $V_y/V_x = f$ permet de calculer les angles η d'ellipticité et θ d'inclinaison du grand axe de la vibration sur les axes de référence [9,10] :

$$\eta = \frac{1}{2} \text{Arc sin } 2j \frac{p_i f}{1+ff^*} \quad ; \quad \theta = \frac{1}{2} \text{Arc tg } \frac{2p_r f}{1-ff^*} \quad (1)$$

où p_i et p_r représentent partie imaginaire et partie réelle de f ; f^* est le nombre complexe conjugué de f et $j = \sqrt{-1}$.

Deux vibrations elliptiques sont dites orthogonales quand elles vérifient les trois conditions suivantes :

- 1) Axes de même nom orthogonaux
- 2) Même angle d'ellipticité en valeur absolue
- 3) Sens de parcours inverses (angles d'ellipticité opposés).

Quand deux vibrations elliptiques sont orthogonales, les nombres complexes f_1 et f_2 qui caractérisent leurs états de polarisation sont tels que :

$$f_1 f_2^* = -1 \quad (2)$$

Dans les milieux homogènes, deux vibrations peuvent en général se propager sans déformation ; elles conservent un état de polarisation constant par rapport à un référentiel fixe. Ce sont les vibrations privilégiées dont la notion fut introduite par Fresnel [11,12]. L'ellipticité et la vitesse de propagation de ces vibrations dépendent des propriétés du milieu, et, pour les milieux anisotropes, de la direction de propagation.

Soit un faisceau parallèle de lumière monochromatique polarisée elliptiquement tombant sous l'incidence normale sur une association de lames anisotropes à faces planes et parallèles quelconque. Par rapport à un même référentiel, il existe deux vibrations incidentes d'états de polarisation adéquats conduisant à des vibrations émergentes de la dernière lame ayant mêmes états de polarisation que les incidentes correspondantes. Ces deux vibrations sont appelées vibrations propres du système [6].

3. VIBRATIONS PROPRES D'UNE PILE DE DEUX LAMES A BIREFRINGENCE RECTILIGNE

IDENTIQUES ECLAIREE SOUS L'INCIDENCE NORMALE

3.1 Analyse du problème

Soit une pile de deux lames taillées avec la même orientation dans un même milieu biréfringent, inactif, transparent. Le milieu d'immersion est isotrope d'indice n , inactif et transparent. Soient e l'épaisseur commune aux deux lames, d la distance qui les sépare et β l'angle entre les lignes neutres de même nom des deux lames. La pile est éclairée sous l'incidence normale par une onde plane, homogène, de longueur d'onde dans le vide λ . Les lignes neutres d'une lame sont notées x et y ; les vibrations privilégiées des lames sont polarisées rectilignement parallèlement à ces directions, et soient n_1 et n_2 les indices de réfraction correspondants.

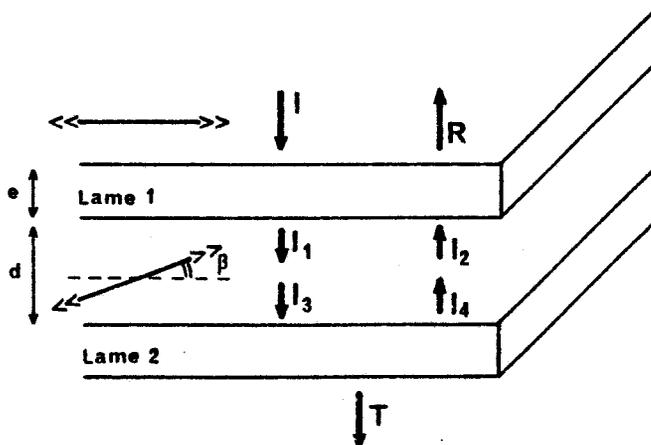


FIGURE 1 : Notation des ondes présentes dans une pile de deux lames.

Les milieux sont supposés magnétiquement isotropes ; il suffit donc de considérer, au niveau de chaque dioptre les vibrations électriques. Pour prendre en compte les ondes réfléchies aux divers dioptres de la pile (comme cela a été fait pour certaines piles de lames isotropes [3] c'est le champ électrique résultant de toutes les ondes qui se propagent dans un sens qui sera représenté [13a, 13b, 14] par une matrice colonne (I_x/I_y) . Ainsi sur le premier dioptre, \mathbf{I} désigne le champ électrique de l'onde incidente de la première lame (figure 1) et \mathbf{R} représente le champ électrique résultant de toutes les ondes dont le sens de propagation est opposé à celui de l'onde incidente.

La continuité des champs aux niveaux des dioptres de la lame 1 permet d'établir les relations matricielles liant les champs électriques des ondes émergentes \mathbf{I}_1 et \mathbf{R} et incidentes \mathbf{I}_2 et \mathbf{I} . Par rapport aux lignes neutres de la lame 1, les champs des ondes sont tels que

$$\begin{pmatrix} I_{1x} \\ I_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_x \\ I_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{2x} \\ I_{2y} \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} R_x \\ R_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{2x} \\ I_{2y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_x \\ I_y \end{pmatrix} \quad (4)$$

où

$$A' = \frac{4 n_2/n}{(1+n_2/n)^2 \exp(2i\pi n_2 e/\lambda) - (1-n_2/n)^2 \exp(-2i\pi n_2 e/\lambda)} \quad (5)$$

et

$$B' = \frac{2i [1-(n_2/n)^2] \sin(2\pi n_2 e/\lambda)}{(1+n_2/n)^2 \exp(2i\pi n_2 e/\lambda) - (1-n_2/n)^2 \exp(-2i\pi n_2 e/\lambda)} \quad (6)$$

Les coefficients A et B sont obtenus à partir de A' et B' en remplaçant n_2 par n_1 .

Par rapport aux lignes neutres de la lame 2, les relations entre I_3 , I_4 et T sont analogues à (3) et (4). En utilisant comme système de référence les lignes neutres de la première lame, ces relations sont :

$$[T] = R_{(-\beta)} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} R_{(\beta)} [I_3] \quad (7)$$

et

$$[I_4] = R_{(-\beta)} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} R_{(\beta)} [I_3] \quad (8)$$

où

$$R_{(\beta)} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

Si φ représente l'angle du déphasage subi par les ondes lors de la traversée de l'épaisseur d du milieu d'immersion et si $X = \exp 2 i\varphi$, l'onde transmise T par la pile est liée à l'onde incidente I par :

$$\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} I_x \\ I_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} A^2(B'^2 - X) \cos^2 \beta + AA'(BB' - X) \sin^2 \beta \\ A^2(B'^2 - X) - AA'(BB' - X) \sin \beta \cos \beta \\ AA'(BB' - X) - A'^2(B^2 - X) \sin \beta \cos \beta \\ AA'(BB' - X) \sin^2 \beta + A'^2(B^2 - X) \cos^2 \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_x \\ I_y \end{pmatrix} \quad (9)$$

où

$$\delta = [X \cos^2 \beta (B - B')^2 - (BB' - X)^2] / \exp(i\varphi)$$

Le déterminant de la matrice \mathbf{M} qui permet d'exprimer T en fonction de I , c'est à dire le produit des valeurs propres de \mathbf{M} , est de module inférieur à l'unité : l'intensité transmise par la pile est inférieure à l'intensité incidente.

Les vecteurs propres de \mathbf{M} , de la forme $\frac{1}{\sqrt{f^2 + 1}} \begin{pmatrix} 1 \\ f \end{pmatrix}$, représentent les vibrations propres de la pile. Les rapports f des composantes selon y

et x caractérisent leurs états de polarisation :

$$f = \frac{\cos^2 \beta [A^2(B'^2 - X) - A'^2(B^2 - X)] \pm \sqrt{\Delta}}{2 [A'^2(B^2 - X) - AA'(BB' - X)] \sin \beta \cos \beta} \quad (10)$$

où :

$$\Delta = \cos^2 \beta [A'^2(B^2 - X) - A^2(B'^2 - X)]^2 - \sin^2 \beta \cos^2 \beta [(A'B - AB')^2 - X(A - A')^2]^2$$

Les ellipticités et les orientations des vibrations propres de la pile peuvent être déterminées à l'aide des relations (1) et (2). Si $\beta = 0$ les lignes neutres de même nom des lames coïncident. Les vibrations propres sont les vibrations privilégiées rectilignes et orthogonales des lames. Pour $\beta = \pi/2$, la matrice \mathbf{M} prend une forme diagonale et les éléments diagonaux sont non nuls et égaux. Les directions propres de la matrice sont indéterminées : toute vibration polarisée incidente sur la pile est propre. Les effets des deux lames se compensent donc, même si toutes les réflexions sont prises en compte.

Pour un angle β quelconque ($0 < \beta < \pi/2$) les vibrations propres sont d'ellipticités égales et de sens de parcours inverses mais les axes de même nom font entre eux un angle ϵ en général différent de $\pi/2$. Les deux vibrations propres ne sont donc pas orthogonales [14]. Cela résulte de la prise en compte des réflexions aux dioptries. En effet, si les réflexions sont négligées, sur la sphère de Poincaré [9], l'action d'une lame à vibrations privilégiées orthogonales est représentée par une rotation autour du diamètre joignant les points représentatifs des vibrations privilégiées de la lame. L'action de la pile est donc représentée par un produit de rotations autour de diamètres différents : c'est une rotation autour d'un diamètre dont les extrémités caractérisent deux vibrations orthogonales qui sont les vibrations propres de la pile.

3.2 Ecart à l'orthogonalité des vibrations propres

Tous les calculs exposés ci-après ont été effectués en considérant des lames d'épaisseurs réalisables et pour le domaine du visible.

Les azimuts θ (1) des grands axes des vibrations propres sont des fonctions de X et de A, A', B, B' (5,6). Si seule l'épaisseur e des lames varie, ces derniers coefficients sont des fonctions périodiques de e/λ , de période $1/n_1$ pour A et B et $1/n_2$ pour A' et B' . Ainsi la différence ε des azimuts des vibrations propres est une fonction oscillante de e/λ de pseudo-période $1/(n_1+n_2)$ modulée par une oscillation lente de période $1/(n_1-n_2)$. L'oscillation lente passe par un maximum pour les lames quart d'onde : pour les lames de cette épaisseur, l'influence des réflexions est maximale. Aussi les variations de l'angle ε (figures 2(a) et (b)) sont données uniquement pour des lames approximativement quart d'onde. En donnant aux indices n_1 et n_2 des valeurs voisines de 1,6 une variation de e/λ d'une pseudo-période est réalisée, à longueur d'onde constante, pour une variation d'épaisseur Δe de $0,17 \mu\text{m}$ tandis que la même variation de e/λ est réalisée, à épaisseur constante, pour une variation de la longueur d'onde de 30 \AA (figures 2 (a) et (b)).

Dans les conditions pour lesquelles les figures 2(a) et 2(b) ont été tracées, d est fixe, ε oscille de manière quasi symétrique par rapport à 90° . Les valeurs moyennes de ε prises sur e ou λ sont donc proches de 90° . L'écart à l'orthogonalité des vibrations propres n'est par conséquent observable qu'avec des lames d'uniformité suffisante et un rayonnement assez monochromatique.

L'angle ε dépend aussi de la distance d entre les lames par l'intermédiaire de $X = \exp 2 \cdot i \varphi$. A e/λ fixe, ε varie de façon quasi sinusoïdale en fonction de d autour d'une valeur fixée par le choix de e/λ , en général différente de 90° . Pour une pile de deux lames approximativement quart d'onde ($30 \mu\text{m}$, épaisseur estimée pour des lames utilisées pour la vérification expérimentale), l'amplitude (figure 3) est de quatre à cinq degrés et la période de $0,3 \mu\text{m}$. Cette propriété pourrait être mise à profit pour réaliser un micromètre de sensibilité meilleure que le dixième de micron.

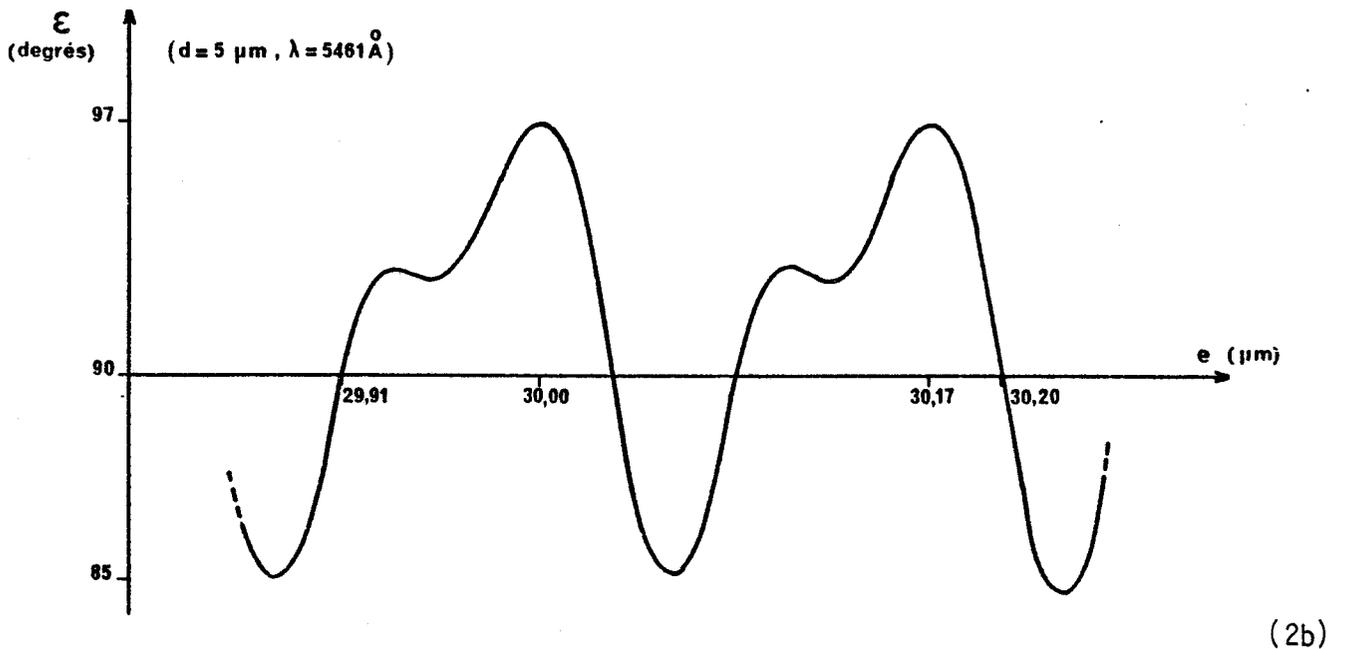
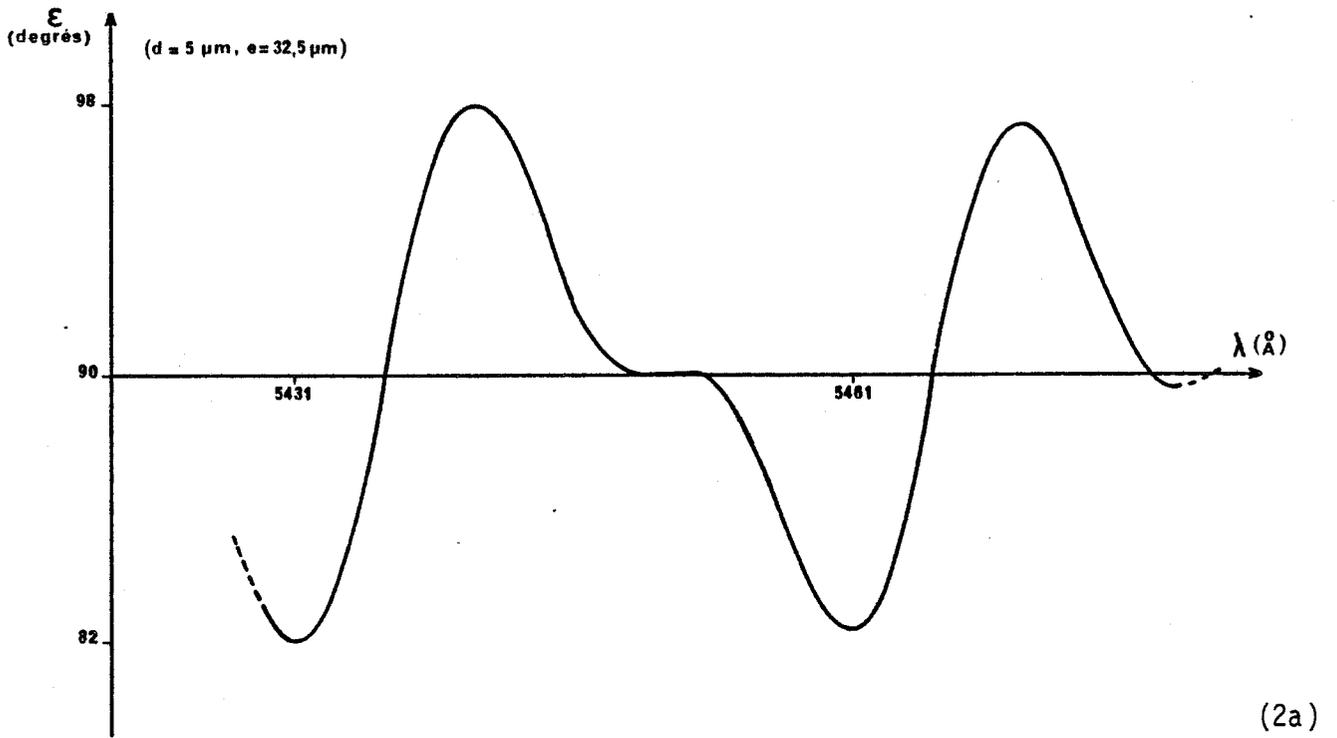


FIGURE 2 : Variations de la différence ϵ des azimuts des grands axes des vibrations propres d'une pile de deux lames : (a) en fonction de la longueur d'onde λ du rayonnement dans le vide pour des lames approximativement quart d'onde (soit $e = 32.50 \mu\text{m}$ pour $\lambda = 5461 \text{ \AA}$) : (b) en fonction de l'épaisseur e des lames. Les lames utilisées pour la mise en évidence expérimentale (voir 4.3) ont des épaisseurs comprises dans le domaine considéré. L'angle entre les lames est $\beta = 45^\circ$. Les indices principaux sont $n_1 = 1.5621$ et $n_2 = 1.5663$.

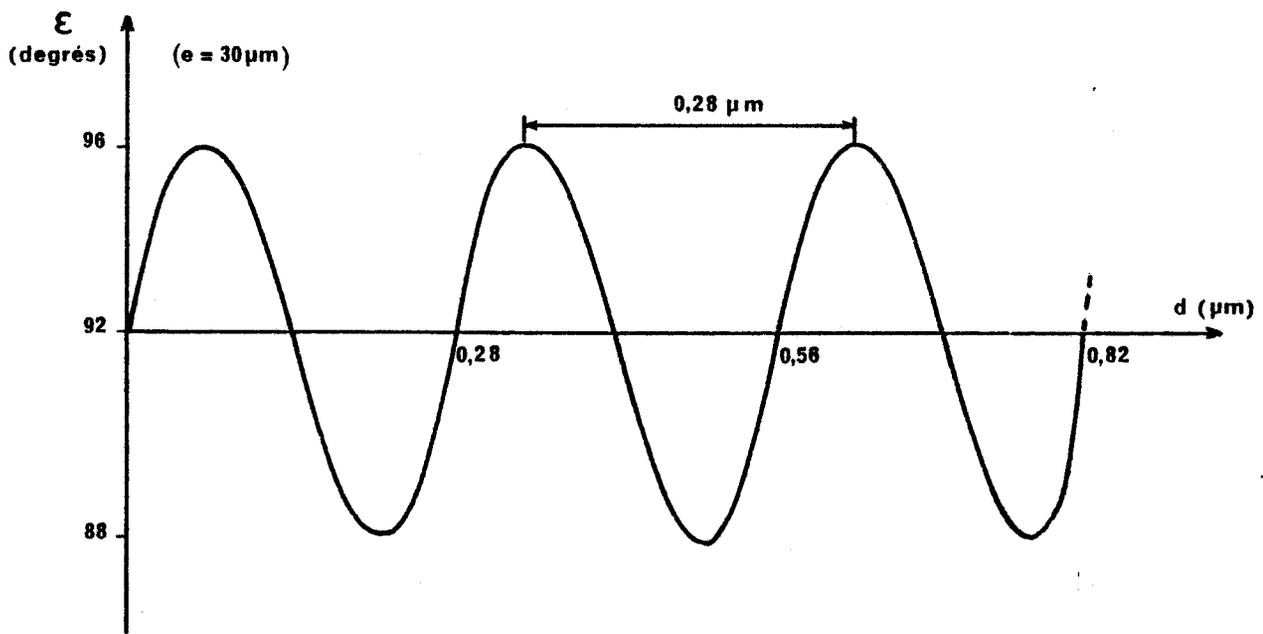


FIGURE 3 : Variation de la différence ϵ entre les azimuts des vibrations propres en fonction de la distance d entre les lames. La courbe oscille autour de la valeur $\epsilon = 92^\circ$ fixée par le choix de e/λ (cf. figure 2). Les valeurs de β , n_1 , n_2 et λ sont les mêmes que celles utilisées pour tracer la figure 2.

Comme il a été déjà mentionné (figure 2) les états de polarisation des vibrations propres varient rapidement en fonction de la longueur d'onde. Pourtant un tel dispositif ne constitue pas un interféromètre meilleur que le Pérot-Fabry : pour une même épaisseur, à transmittance égale, les raies sont plus larges.

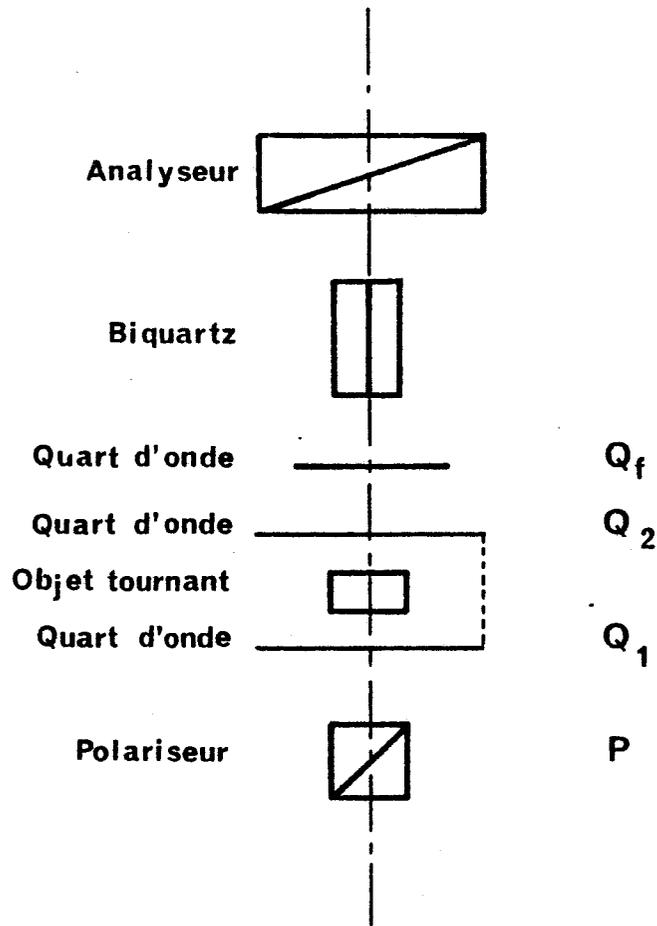
4. VERIFICATIONS EXPERIMENTALES

4.1 Principe des mesures

L'analyse précédente prévoit un défaut d'orthogonalité des grands axes des vibrations propres d'une pile de deux lames. Pour mettre ce phénomène en évidence, les vibrations propres d'une pile de deux lames de mica immergées dans l'air sont déterminées. La pile est placée entre un polariseur et un analyseur elliptiques réglés à l'extinction. Sont recherchés les états des polariseur et analyseur elliptiques qui conservent cette extinction.

Les observations sont effectuées sur un microscope polarisant (Panphot, Leitz) éclairé par une lampe à mercure monoisotopique dont la raie verte 5461 \AA est isolée par un filtre interférentiel (ORIEL OPTICS) de bande passante 100 \AA . Un montage mécanique (figure 4(a)) remplace la platine du microscope : il permet de transformer ce dernier en micro-ellipsomètre par transmission. Tous les éléments constitutifs de l'appareil peuvent effectuer une rotation complète de 360° autour de l'axe optique du microscope et des verniers placés en regard de cercles gradués associés à chaque dispositif permettent des mesures angulaires à la minute près.

Le polariseur elliptique est constitué d'un polariseur P (prisme de Ahrens en calcite, monté sur le condenseur du microscope) suivi d'une lame quart d'onde Q_1 (figure 4(a)). Le grand axe de la vibration elliptique obtenue est parallèle à l'axe lent de Q_1 ; l'angle formé par cette direction et la direction des vibrations rectilignes issues du polariseur représente l'ellipticité de la vibration elliptique.



4a

FIGURE 4a : Schéma de principe du micro-ellipsomètre

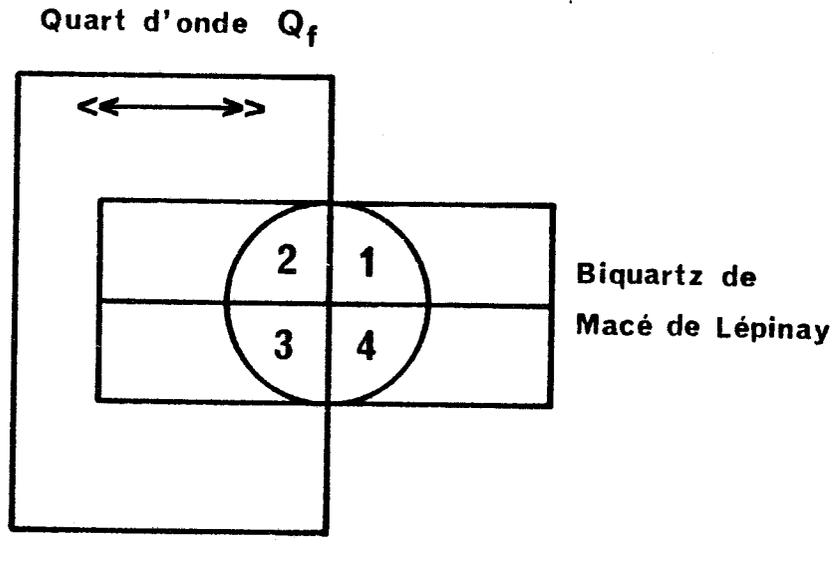


FIGURE 4b : Disposition du biquartz et de la quart d'onde réalisant le système analyseur à quatre plages.

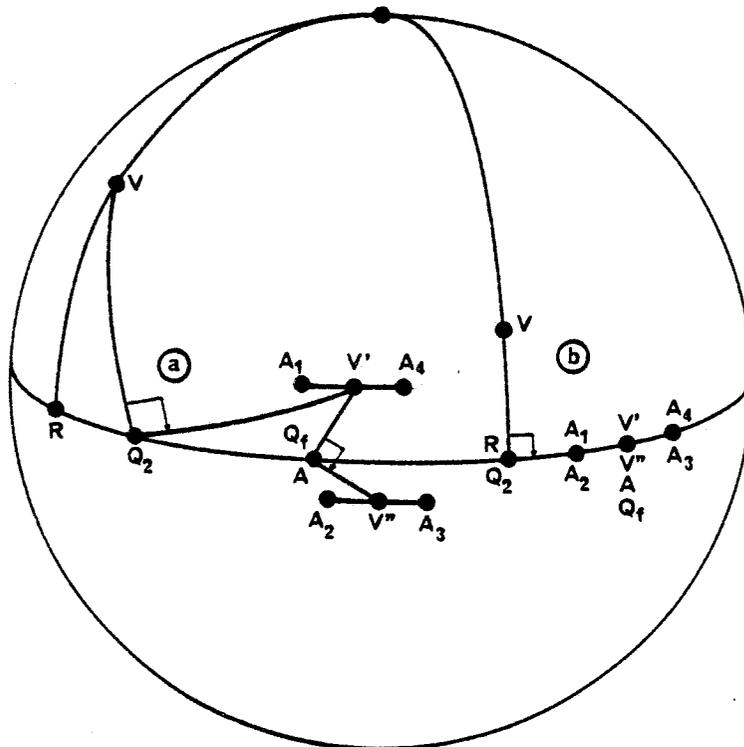


FIGURE 5 : Représentation sur la sphère de Poincaré du principe de l'analyseur elliptique constitué de la lame quart d'onde Q_2 et de l'analyseur à quatre plages (figure 4b) : les quatre plages n'ont pas le même éclairement : (a) les quatre plages ont le même éclairement (b).

L'objet à étudier est placé sur une platine tournante équipée d'un dispositif de translation.

La lumière transmise par l'objet est étudiée à l'aide d'un analyseur elliptique comprenant une lame quart d'onde Q_2 suivie d'un oculaire de Wright [15] surmonté d'un analyseur rectiligne (de Glazebrook en calcite). Pour améliorer la qualité de l'extinction lors des pointés, un dispositif de pénombre [16] est placé dans le plan de l'image intermédiaire de l'oculaire de Wright. Ce système de pénombre à quatre plages comporte un biquartz de Macé de Lépinay [17] (prisme constitué de deux cristaux de quartz taillés perpendiculairement à l'axe, de pouvoirs rotatoires opposés et accolés) précédé, sur une moitié du champ, par une lame quart d'onde Q_f (figure 4(b)) dont l'axe lent est parallèle à la direction A des vibrations rectilignes éteintes de l'analyseur. Le bord de Q_f est taillé avec soin, la précision des pointés effectués avec les dispositifs à pénombre dépendant fortement de la finesse des lignes de séparation des plages [16]. La figure 5 illustre le fonctionnement de l'analyseur elliptique.

La lame Q_2 transforme la vibration elliptique à analyser V en une vibration V'. Sur la moitié du champ (plages 1 et 4 de la figure 4(b)) V' traverse seulement le biquartz ; elle donne naissance à deux vibrations elliptiques A_1 et A_4 dont les intensités transmises par l'analyseur sont égales quand celui-ci est convenablement orienté par rapport à V'. Sur l'autre moitié du champ, V' traverse d'abord la lame quart d'onde Q_f (plages 2 et 3 de la figure 4(b)) ; elle devient la vibration elliptique V'' que le biquartz décompose ensuite en deux vibrations elliptiques A_2 et A_3 . Les quatre plages du dispositif de pénombre ne sont vues également éclairées que si V' coïncide avec le point A représentant les vibrations rectilignes éteintes par l'analyseur : ceci n'est réalisé que lorsque l'axe lent de Q_2 est confondu avec le grand axe R de la vibration V et l'ensemble du système de plages et de l'analyseur correctement orienté par rapport à Q_2 .

De part et d'autre de la platine porte-objet, les deux lames quart d'onde Q_1 et Q_2 peuvent être rendues solidaires l'une de l'autre par un dispositif qui tourne autour de l'axe optique du microscope.

Ainsi, le polariseur et l'analyseur rectilignes étant réglés à l'extinction, le polariseur et l'analyseur elliptiques restent croisés quand les lames Q_1 et Q_2 sont tournées simultanément.

4.2 Réglages du microellipsomètre

Le microscope est équipé d'un objectif de grossissement 32 et de l'oculaire de Wright de grossissement 10. L'épaisseur variable du biquartz de Macé de Lépinay permet de choisir l'angle de pénombre (de l'ordre de 8° dans les mesures rapportées ici). Les lames Q_1 et Q_2 étant escamotées et en absence d'objet sur la platine, en observant le biquartz, les plans de polarisation de l'analyseur et du polariseur sont réglés à l'orthogonalité. La lame quart d'onde Q_f est introduite dans l'oculaire de Wright et orientée de manière à ce que les quatre plages du champ aient la même luminosité. Les lignes neutres de Q_f sont alors parallèles aux plans de polarisation du polariseur et de l'analyseur.

La lame quart d'onde Q_1 est ensuite introduite dans le montage et réglée de façon que l'égalité des plages soit rétablie. Le même réglage est appliqué à Q_2 . (A cette étape des réglages, les positions respectives des cercles gradués associés aux lames Q_1 et Q_2 sont repérées : elles servent d'origine pour les mesures d'ellipticités. Les deux lames Q_1 et Q_2 sont rendues solidaires. L'égalité d'éclairement des quatre plages est conservée après une rotation simultanée de ces deux lames.

4.3 Réalisation de la pile de deux lames

La pile de deux lames étudiée est constituée de deux lames provenant d'un même clivage de mica. Leur retard pour la raie verte du mercure, mesuré par la méthode de Friedel [18], est de 83° . Les indices, mesurés au réfractomètre de Pulfrich, sont $n_1 = 1.5621$ et $n_2 = 1.5663$. Dans ces conditions, l'ellipticité moyenne des vibrations propres est de $16^\circ 01'$. Pour orienter les deux lames de la pile, leur mise en place est contrôlée en lumière polarisée rectiligne (les lames quart d'onde Q_1 et Q_2 sont remises à leurs positions initiales). La première lame de mica est fixée sur la platine du microscope ; cette dernière est orientée jusqu'à rétablir l'égalité des plages de l'analyseur, puis tournée de 45° (pour réaliser l'angle de 45° entre les deux lames de mica) et enfin

bloquée dans cette position. A l'aide du dispositif de translation de la platine, la première lame de mica est déplacée jusqu'au bord du champ : la lumière observée ne traverse plus que le polariseur et l'analyseur rectilignes. La seconde lame de mica est déposée au-dessus de la première à l'aide d'un manipulateur à dépression (Dymax MK II, Austen Pumps Ltd) de manière à ne la recouvrir qu'à moitié. Cette lame est orientée de façon que l'égalité des plages de l'analyseur soit rétablie dans la partie du champ couverte par cette seule lame. Les lignes neutres des deux lames de mica font alors entre elles un angle de 45° et une nouvelle translation du guide-objet de la platine amène dans le champ la zone où les deux lames sont superposées.

L'azimut et l'ellipticité du faisceau incident sur la pile peuvent alors être modifiés par rotation de la platine et des lames quart d'onde Q_1 et Q_2 rendues solidaires : quand l'égalité des plages est à nouveau obtenue, les caractéristiques de l'une des vibrations propres de la pile sont lues sur les cercles gradués.

4.4 Résultats expérimentaux

Pour éviter les erreurs dues à un dérèglement éventuel du micro-ellipsomètre, après chaque série de deux ou trois pointés, tous les réglages sont repris. Les piles 1 et 2 du Tableau I correspondent à deux de ces réglages. Ces piles sont réalisées avec les mêmes lames, orientées de la même façon ; elles ne diffèrent que par l'épaisseur, incontrôlable, de la couche d'air entre les lames.

	η_1	η_2	ϵ
Pile 1	$16^\circ 24'$	$-16^\circ 05'$	$90^\circ 51'$
	$15^\circ 59'$	$-15^\circ 55'$	$90^\circ 56'$
Pile 2	$15^\circ 18'$	$-15^\circ 20'$	$91^\circ 07'$
	$15^\circ 36'$	$-15^\circ 44'$	$91^\circ 01'$
	$15^\circ 23'$	$-15^\circ 45'$	$91^\circ 16'$

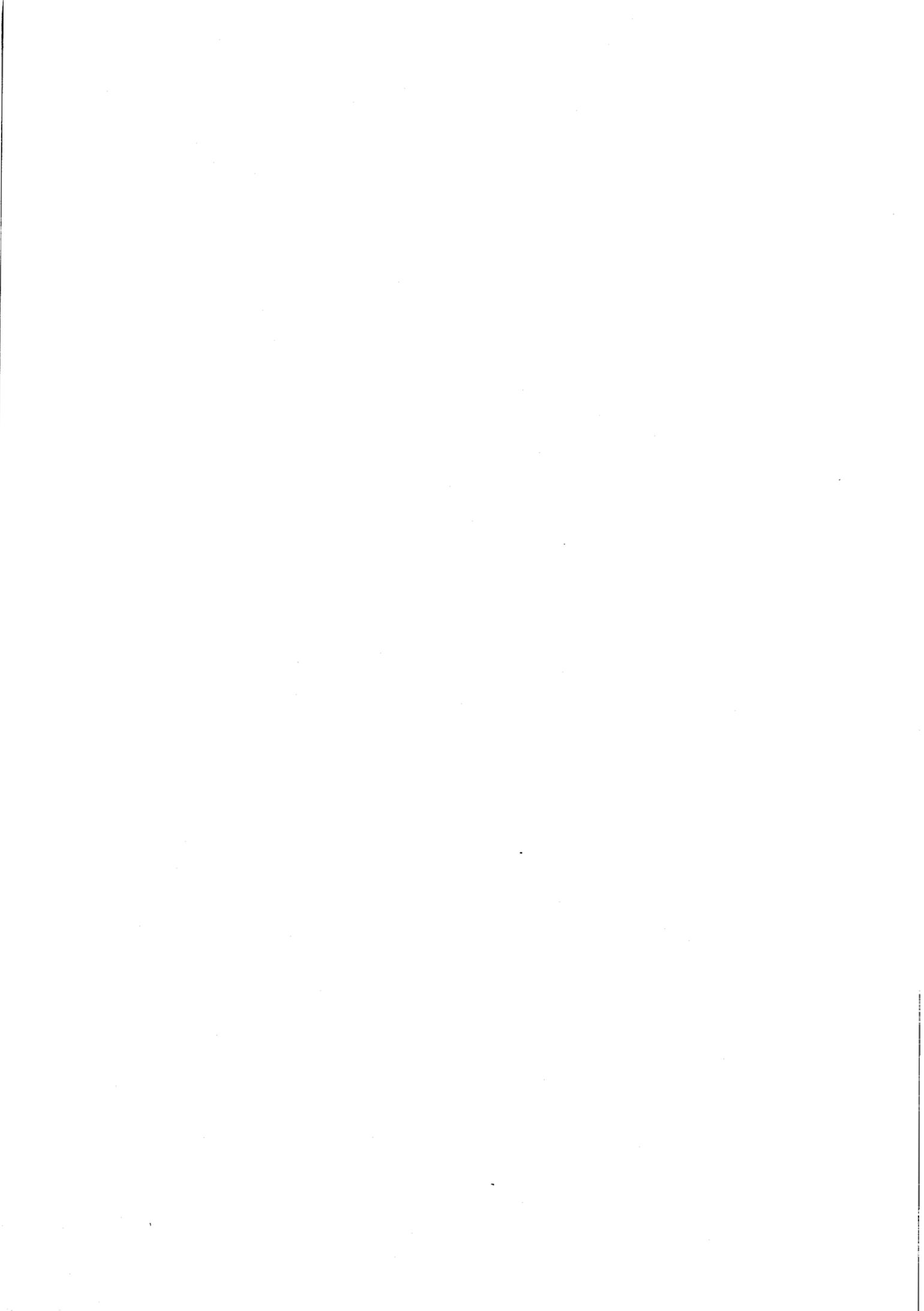
TABLEAU I : Ellipticités η_1 et η_2 et différence ϵ entre les azimuts des vibrations propres d'une pile de deux lames à biréfringence rectiligne identiques tournées de 45° l'une par rapport à l'autre.

La précision que laissent espérer les mesures angulaires à la minute d'arc près n'est pas atteinte : les vibrations propres ont des ellipticités qui diffèrent de plus de deux minutes alors qu'elles devraient être égales en valeur absolue. Cependant, ϵ diffère suffisamment de 90° pour que cet écart ne puisse être imputé aux incertitudes de mesure [14] .

5. CONCLUSION

Les vibrations propres d'une pile de deux lames parfaitement transparentes à biréfringence rectiligne ne sont pas orthogonales en général. Ce résultat a pu être prévu par la méthode matricielle d'étude des piles de lames biréfringentes éclairées sous l'incidence normale par un faisceau parallèle de lumière polarisée, en prenant en compte toutes les ondes réfléchies sur les dioptries. Il faut noter que, même dans ce cas, les effets de deux lames identiques croisées plongées dans un milieu d'immersion isotrope inactif quelconque se compensent exactement.

Au cours des chapitres suivants, le formalisme utilisé pour la pile de deux lames nous permettra d'apprécier quantitativement le rôle des ondes réfléchies lors de la propagation d'ondes planes monochromatiques et homogènes le long de l'axe de torsion d'une pile hélicoïdale d'un nombre infini de lames uniaxes parallèles à l'axe identiques.





CHAPITRE 2

PILES HELICOÏDALES DE LAMES BIRÉFRINGENTES

ÉCLAIRÉES SOUS L'INCIDENCE NORMALE

Les piles hélicoïdales dont nous abordons maintenant l'étude, comportent un nombre infini de lames identiques uniaxes parallèles à l'axe, jointives et parfaitement transparentes. Nous nous limitons à l'étude de la propagation d'ondes planes et homogènes le long de l'axe de torsion. Ces piles constituent une généralisation des piles de lames de mica observées par Reusch [1]. Celui-ci réalise en 1869 des paquets ternaires (empilement à 60°) ou quaternaires (45°) de lamelles de mica qui présentent des phénomènes optiques qui tiennent à la fois de la biréfringence rectiligne et de la polarisation rotatoire. Reusch leur attribue le nom de polarisation rotatoire elliptique. Les propriétés des empilements de lamelles biréfringentes sont expliquées théoriquement par Mallard [19] dès 1876 avec les hypothèses suivantes : lamelles très minces, introduisant un retard infiniment petit et réflexions aux dioptries négligées.

Notre formalisme permet de tenir compte de toutes les ondes réfléchies aux divers dioptries. Il s'applique à toutes les piles hélicoïdales, qu'elles soient constituées de lamelles biréfringentes très minces ou de lamelles biréfringentes épaisses ; l'angle d'empilement peut être infiniment petit ou fini ($-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$).

1. VIBRATIONS ITERATIVES : DEFINITIONS ET GENERALITES

Soient (x_k, y_k) et (x_{k+1}, y_{k+1}) les lignes neutres de deux lames consécutives k et $k+1$ représentées sur la figure 6. L'empilement hélicoïdal est uniforme : l'angle β ($-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$) entre lignes neutres de même nom x_k et x_{k+1} est le même pour tous les couples de lames consécutives.

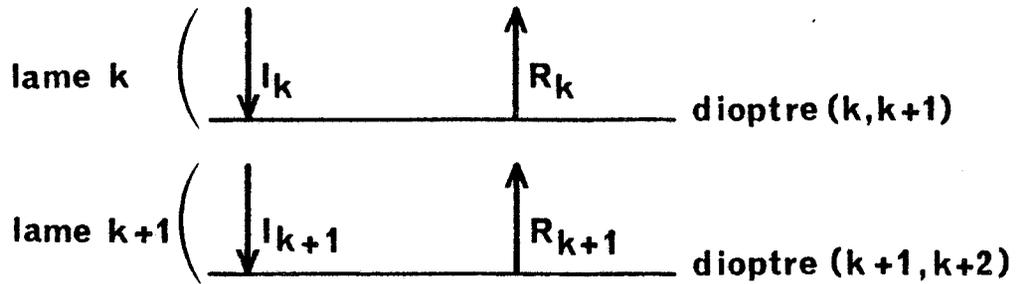


FIGURE 6 : Champs électriques aux niveaux des dioptres de deux lames consécutives.

L'axe de torsion Oz forme avec (x_k, y_k) un trièdre et est dirigé dans le sens de la numérotation croissante des lames.

Les conventions adoptées sont les suivantes : le sens positif des angles autour de l'axe Oz est le sens trigonométrique ; si l'angle d'empilement β est compris entre 0 et $\pi/2$, la pile réalisée est droite ou dextre ; s'il est compris entre 0 et $-\pi/2$, la pile est gauche ou sénestre. Une rotation du plan de polarisation dans le sens des aiguilles d'une horloge pour un observateur recevant la lumière est appelée droite ; le sens opposé est gauche. Si Oz est dirigé dans le sens de la propagation, une rotation droite est négative et une rotation gauche est positive.

Soit I_k la matrice colonne à deux lignes représentative au niveau du dioptre $(k, k+1)$, des composantes selon x_k et y_k du champ électrique résultant dans la lame k de toutes les ondes qui se propagent vers le dioptre $(k+1, k+2)$. La matrice R_k représente, au même endroit, le champ résultant des ondes qui se propagent vers le dioptre $(k-1, k)$. Les vibrations privilégiées [11] des lames sont rectilignes et parallèles à leurs lignes neutres. Soient n_1 et n_2 les indices de réfraction correspondant respectivement aux lignes neutres x et y .

Si e est l'épaisseur des lames et λ la longueur d'onde dans le vide du rayonnement, les déphasages subis par les privilégiées lors de la traversée d'une lame sont $\phi_{1,2} = 2 \pi n_{1,2} e / \lambda$. Les champs représentés par $I_k, I_{k+1}, R_k, R_{k+1}$ sont tels que :

$$\begin{pmatrix} I_{k+1}, x_{k+1} \\ I_{k+1}, y_{k+1} \\ R_{k+1}, x_{k+1} \\ R_{k+1}, y_{k+1} \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} I_k, x_k \\ I_k, y_k \\ R_k, x_k \\ R_k, y_k \end{pmatrix} \quad (11)$$

avec $\mathbf{M} =$

$$\begin{pmatrix} \cos \beta \exp(-i\phi_1) & \frac{n_1+n_2}{2n_1} \sin \beta \exp(-i\phi_1) & 0 & \frac{n_1-n_2}{2n_1} \sin \beta \exp(-i\phi_1) \\ -\left(\frac{n_1+n_2}{2n_2}\right) \sin \beta \exp(-i\phi_2) & \cos \beta \exp(-i\phi_2) & \frac{n_1-n_2}{2n_2} \sin \beta \exp(-i\phi_2) & 0 \\ 0 & \frac{n_1-n_2}{2n_1} \sin \beta \exp(i\phi_1) & \cos \beta \exp(i\phi_1) & \frac{n_1+n_2}{2n_1} \sin \beta \exp(i\phi_1) \\ \left(\frac{n_1-n_2}{2n_2}\right) \sin \beta \exp(i\phi_2) & 0 & -\left(\frac{n_1+n_2}{2n_2}\right) \sin \beta \exp(i\phi_2) & \cos \beta \exp(i\phi_2) \end{pmatrix} \quad (12)$$

La matrice \mathbf{M} (12) admet quatre valeurs propres et quatre vecteurs propres ; ces vecteurs sont des solutions itératives du problème : ils représentent des rayonnements électromagnétiques dont l'état de polarisation est le même à chaque dioptré :

$$\begin{pmatrix} I_{k+1} \\ R_{k+1} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} I_k \\ R_k \end{pmatrix} = \dots = \alpha^k \begin{pmatrix} I_1 \\ R_1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Chaque valeur propre α est un nombre complexe dont le module caractérise l'atténuation du champ itératif d'un dioptré au suivant tandis que l'argument caractérise le déphasage du champ itératif entre deux dioptries consécutifs. Si par exemple α est de module inférieur à l'unité, il y a atténuation simultanée des champs I_k et R_k ; ceci est compréhensible : en effet, si l'on considère une pile semi-infinie éclairée du côté de la lame 1, les ondes réfléchies qui contribuent à la vibration de type

R sont plus intenses au niveau du dioptre $(k, k+1)$ qu'au niveau du dioptre $(k+1, k+2)$. Une valeur de α de module supérieur à l'unité ne correspond pas à une amplification de l'amplitude mais au contraire à une atténuation d'une onde se dirigeant dans le sens de $z < 0$.

Le champ total au niveau d'un dioptre est $\vec{I} + \vec{R}$. Nous étudierons ci-après les modifications de l'état de polarisation de ce champ quand il est itératif.

2. CALCUL DES VALEURS PROPRES. INDICES D'ITERATION

L'équation aux valeurs propres de M (12) est réciproque ; en effet, en posant :

$$y = \alpha + 1/\alpha \quad (14)$$

elle peut être écrite sous la forme

$$g(y) = y^2 + ay + b - 2 = 0 \quad (15)$$

où

$$a = -2 \cos \beta (\cos \phi_1 + \cos \phi_2)$$

et

$$b = 2 \cos^2 \beta (1 + \cos \phi_1 \cos \phi_2) + 2 \cos \phi_1 \cos \phi_2$$

$$- \left(\frac{n_1}{n_2} + \frac{n_2}{n_1} \right) \sin^2 \beta \sin \phi_1 \sin \phi_2$$

Le discriminant de l'équation (15) à coefficients réels est positif ou nul : les racines y_1 et y_2 de $g(y) = 0$ sont réelles. D'une racine y_1 peuvent être déduites par l'équation (14), deux valeurs propres α_1^+ et α_1^- dont le produit est égal à 1 :

$$\alpha_1^{\pm} = \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 4}}{2} \quad (16)$$

Racines y	$g(2)$	$g(-2)$	Position des racines y	Valeurs propres de M	
Réelles	>0	>0	y_1 et $y_2 \in [-2,2]$	Quatre complexes de module unité, inverses deux à deux	cas 1
		<0 >0	y_1 ou $y_2 \in [-2,2]$	Deux complexes conjugués de module unité et deux réelles inverses l'une de l'autre	cas 2
	<0	<0	y_1 et $y_2 \notin [-2,2]$	Quatre réelles inverses deux à deux	cas 3

TABLEAU II : Nature des valeurs propres α de la matrice itérative M selon les signes de $g(2)$ et $g(-2)$.



De même, à partir de y_2 sont calculées deux autres valeurs propres de \mathbf{M} inverses l'une de l'autre. Comme y_1 et y_2 sont réelles, les valeurs propres de \mathbf{M} qui s'en déduisent sont réelles ou complexes selon la position de y_1 et y_2 par rapport à 2 et -2. Deux valeurs propres complexes obtenues à partir d'une racine y réelle sont complexes conjuguées et inverses l'une de l'autre, elles sont de module unité. La discussion sur les formes des valeurs propres α peut être résumée dans le tableau II.

$$\text{Soit } \alpha = \exp [-2 i\pi(\nu - i\chi)e/\lambda] \quad (17)$$

le module $\exp(-2 \pi\chi e/\lambda)$ de α représente le rapport des amplitudes de la vibration itérative correspondante aux niveaux des dioptries ($k, k+1$) et ($k+1, k+2$) ; χ est analogue à un indice d'extinction. L'argument $(-2 \pi\nu e/\lambda)$ de α représente leur déphasage ; ν correspond à un indice de réfraction. Si l'on considère en un premier temps une pile semi-infinie éclairée du côté de la lame $k=1$, seules sont à prendre en considération les vibrations itératives dont l'amplitude décroît ($\chi > 0$) et la phase croît ($\nu > 0$) dans le sens de numérotation des lames. Dans toute la suite, les valeurs propres associées à ces deux vibrations itératives seront appelées $\alpha_1 (= \alpha_1^+)$ et $\alpha_2 (= \alpha_2^+)$.

Les vibrations itératives ne peuvent pas être considérées comme des ondes progressives puisque leur existence n'est définie qu'au niveau des dioptries. En particulier, aux solutions réelles de l'équation aux valeurs propres de \mathbf{M} ne correspondent pas des vitesses de phase infinies : simplement, à tous les dioptries où elles sont définies, les champs des vibrations itératives sont déphasés d'un multiple entier de π . La situation est comparable à celle de l'effet tunnel [20]. Il faut d'ailleurs noter que seul le régime permanent est étudié ; le régime transitoire pendant lequel s'établit cet état vibratoire n'est pas envisagé ici.

3. ETATS DE POLARISATION DU CHAMP ITERATIF TOTAL

Soit \vec{F} le champ électromagnétique total $\vec{I} + \vec{R}$ quand il est itératif. Son état de polarisation est caractérisé par le nombre complexe f :

$$f = \frac{I_y + R_y}{I_x + R_x} = \frac{I_y}{I_x} \frac{1 + R_y/I_y}{1 + R_x/I_x} \quad (18)$$

Le calcul des directions propres de **M** conduit à diverses formes des rapports figurant dans l'expression (18) :

$$\begin{aligned} \frac{I_y}{I_x} &= j \frac{n_1+n_2}{n_2} e^{i\varphi_1} \frac{\sin \beta \sin \varphi_1 \alpha}{\alpha^2 e^{i\varphi_2} - \alpha \cos \beta \left[1 + e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \right] + e^{i\varphi_1}} \\ &= j \frac{n_1}{n_1+n_2} e^{-i\varphi_2} \frac{\alpha^2 e^{i\varphi_1} - \alpha \cos \beta \left[1 + e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \right] + e^{i\varphi_2}}{\sin \beta \sin \varphi_2 \alpha} \end{aligned} \quad (19 \text{ a et b})$$

$$\begin{aligned} \frac{R_x}{I_x} &= \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2} e^{i\varphi_1} \frac{\alpha^2 e^{i\varphi_1} - \alpha \cos \beta \left[1 + e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \right] + e^{i\varphi_2}}{\alpha^2 - \alpha \cos \beta \left[e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2} \right] + e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}} \\ &= \frac{n_1+n_2}{n_1-n_2} e^{i\varphi_1} \frac{\alpha^2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} - \alpha \cos \beta (e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2}) + 1}{\alpha^2 e^{i\varphi_2} - \alpha \cos \beta \left[1 + e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \right] + e^{i\varphi_1}} \end{aligned} \quad (20 \text{ a et b})$$

$$\begin{aligned} \frac{R_y}{I_y} &= - \left(\frac{n_1+n_2}{n_1-n_2} \right) e^{i\varphi_2} \frac{\alpha^2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} - \alpha \cos \beta \left[e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2} \right] + 1}{\alpha^2 e^{i\varphi_1} - \alpha \cos \beta \left[e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} + 1 \right] + e^{i\varphi_2}} \\ &= - \left(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2} \right) e^{i\varphi_2} \frac{\alpha^2 e^{i\varphi_2} - \alpha \cos \beta \left[1 + e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \right] + e^{i\varphi_1}}{\alpha^2 - \alpha \cos \beta \left[e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2} \right] + e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}} \end{aligned} \quad (21 \text{ a et b})$$

Dans ces expressions, α représente l'une des valeurs propres de \mathbf{M} (12). L'expression (35, §4.1) constitue un exemple de forme explicite que prend le scalaire f caractérisant l'état de polarisation de la vibration itérative $\vec{F}_{(\alpha)}$.

3.1 Etats de polarisation des vibrations itératives associées à des valeurs propres complexes de module unité

Dans le cas 1 du tableau II, toutes les valeurs propres sont de module unité, le coefficient d'extinction est nul. Les deux vibrations itératives associées aux valeurs propres α_1 et α_2 dont l'argument est négatif ($\nu > 0$) ont même amplitude à tous les dioptries.

De façon générale, les vibrations itératives \vec{F}_1 et \vec{F}_2 associées à α_1 et α_2 sont des vibrations elliptiques non orthogonales : elles sont parcourues en sens inverses et leurs angles d'ellipticité sont en général différents ; d'autre part les grands axes de ces ellipses font un angle qui diffère de $\pi/2$. Pour des conditions expérimentales déterminées, seule une analyse numérique détaillée permet de connaître avec précision les états de polarisation des vibrations \vec{F}_1 et \vec{F}_2 qui dépendent des divers paramètres : β angle d'empilement, e épaisseur d'une lame, λ longueur d'onde dans le vide, $n = (n_1 + n_2)/2$ indice moyen des lames et $2\Delta n = n_2 - n_1$ biréfringence des lames.

Les calculs numériques mettent en évidence le résultat suivant : au niveau d'une lame k quelconque de la pile, le grand axe de la vibration itérative \vec{F}_1 fait un angle $\theta \cong |\beta|/2$ (dans le sens de l'empilement) avec la ligne neutre x_k tandis que le grand axe de l'autre vibration itérative F_2 fait le même angle avec la ligne neutre y_k : les grands axes de chacune des vibrations itératives sont dirigés en première approximation, selon les bissectrices des angles formés par les lignes neutres de même nom des lames k et $k+1$.

Pour l'ellipticité, la situation est plus complexe. Tout d'abord, les calculs montrent que l'écart entre n_1 et n_2 est en général faible et nous le négligeons par la suite ; par contre, cet angle d'ellipticité

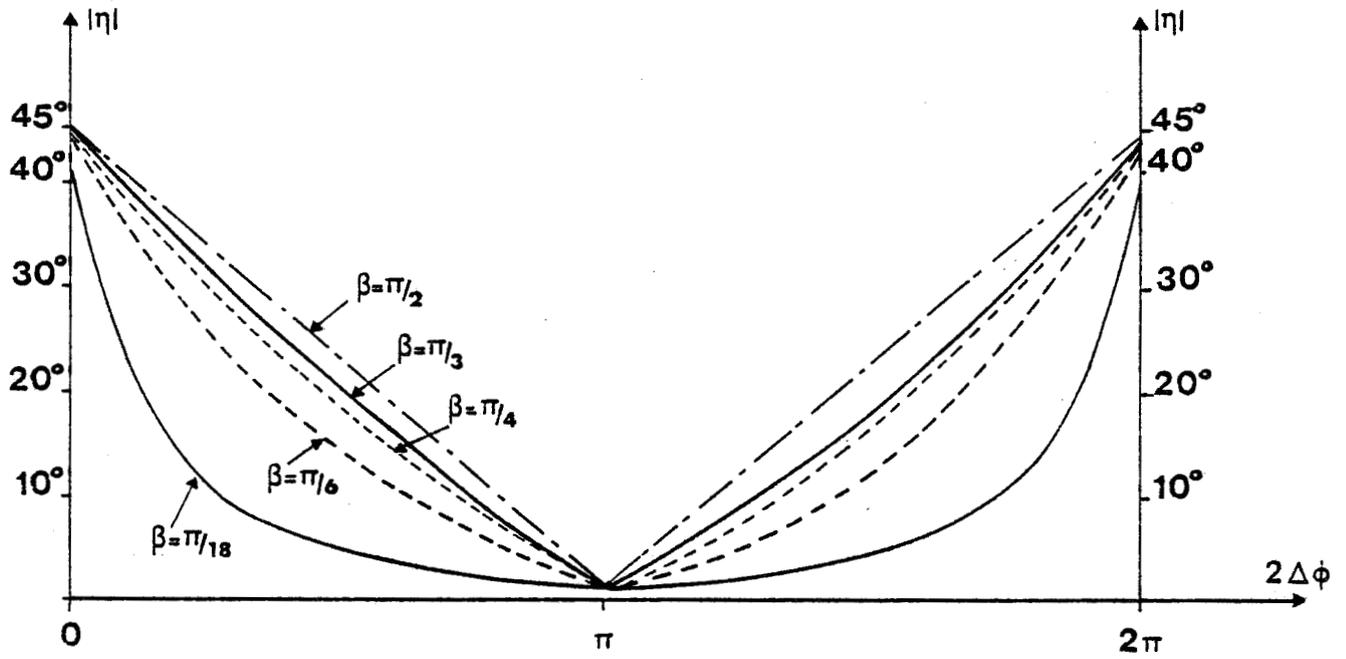


FIGURE 7 : Evolution de l'ellipticité $|\eta|$ des vibrations itératives en fonction du déphasage $2\Delta\phi$ des lames biréfringentes constituant la pile.

$\eta \cong \eta_1 \cong \eta_2$ varie beaucoup en fonction de l'angle d'empilement β et en fonction de l'angle de déphasage introduit par une lame biréfringente entre les deux vibrations privilégiées rectilignes qui la traversent :

$$2\Delta\phi = \frac{2\Delta n}{n} \phi = \frac{2\Delta n}{n} \frac{2\pi n e}{\lambda} , \quad (22)$$

comme nous le montrent les courbes de la figure 7.

En particulier, les empilements de lames très minces ou de lames onde sont caractérisés par des vibrations itératives quasi-circulaires ; l'ellipticité des vibrations ne dépend pas de l'angle β d'empilement. Pour des empilements de lames demi-onde, les vibrations itératives sont quasi-rectilignes, leur ellipticité ne dépend pas de l'empilement. Dans tous les autres cas, quand les lames de la pile et la longueur d'onde sont données ($2\Delta\phi = \text{Cste}$), l'ellipticité des vibrations itératives croît avec l'angle d'empilement β .

Certes, la non-orthogonalité des vibrations privilégiées des milieux biréfringents [6] ainsi que celle des vibrations favorisées des milieux biréfringents à torsion [10] entraîne dans certains cas des anomalies des propriétés optiques [21] : cependant les propriétés essentielles s'expliquent de manière satisfaisante en supposant que les vibrations privilégiées ou favorisées sont orthogonales en première approximation. Par conséquent, leur défaut d'orthogonalité étant en général très faible sauf exceptions dûment mentionnées dans le texte, les vibrations itératives \vec{F}_1 et \vec{F}_2 associées à deux valeurs propres α_1 et α_2 complexes de module unité seront considérées comme orthogonales : leurs ellipticités seront supposées égales en valeur absolue et leurs grands axes orthogonaux.

Pour terminer remarquons que dans le cas 2 du tableau II, une des valeurs propres est réelle tandis que l'autre est complexe. A cette dernière est associée une vibration itérative semblable à celles décrites ci-dessus : son ellipticité varie selon les courbes de la figure 7 et ses axes coïncident en première approximation avec les bissectrices de l'angle d'empilement β . Par contre, comme on le montrera au § 3.3, les vibrations itératives ne peuvent pas être considérées comme orthogonales.

3.2 Vibrations itératives associées à deux valeurs propres inverses α et $1/\alpha$: problème du retour inverse.

Si les vibrations itératives $\vec{F}_{(\alpha_1)}$ et $\vec{F}_{(\alpha_2)}$ associées à α_1 et α_2 se "propagent" dans le sens de la numérotation croissante des lames, les vibrations itératives $\vec{F}_{(1/\alpha_1)}$ et $\vec{F}_{(1/\alpha_2)}$ associées aux deux autres valeurs propres $1/\alpha_1$ et $1/\alpha_2$ de la matrice \mathbf{M} (12) se "propagent" dans le sens de la numérotation décroissante, donc en sens inverse de $\vec{F}_{(\alpha_1)}$ et $\vec{F}_{(\alpha_2)}$. Comparons les états de polarisation des vibrations itératives associées à deux valeurs propres inverses (\vec{F}'_1 et \vec{F}'_1 ou \vec{F}'_2 et \vec{F}'_2). Pour des raisons qui apparaitront clairement à la suite du calcul exprimons les champs dans le plan de symétrie d'une lame :

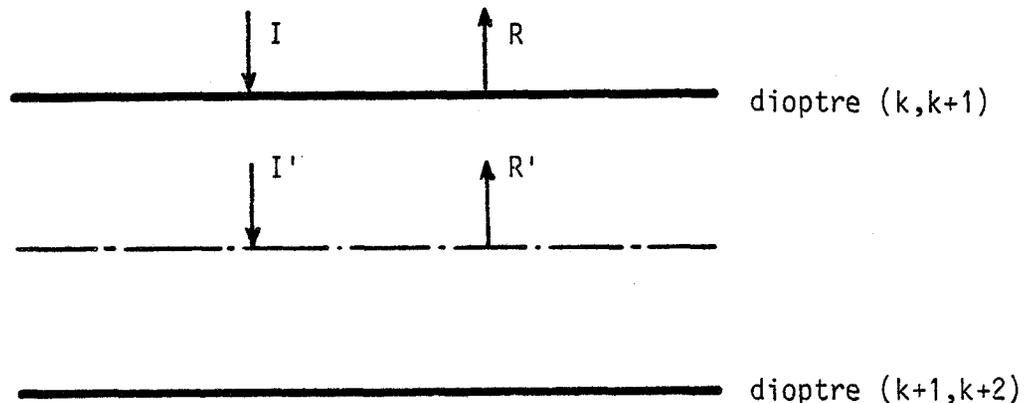


FIGURE 8 : Champs électriques au niveau du plan de symétrie d'une lame.

$$\left\{ \begin{array}{l} I'_x = I_x e^{i\varphi_1/2} \\ I'_y = I_y e^{i\varphi_2/2} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} R'_x = R_x e^{-i\varphi_1/2} \\ R'_y = R_y e^{-i\varphi_2/2} \end{array} \right. \quad (23)$$

Les relations (23) sont toujours valables et en particulier s'appliquent aux champs itératifs associés à α et $1/\alpha$.

D'après (18) l'état de polarisation du champ $\vec{I}' + \vec{R}'$ associé à α s'exprime par le nombre complexe :

$$f'(\alpha) = \frac{I'_y(\alpha) + R'_y(\alpha)}{I'_x(\alpha) + R'_x(\alpha)} = \frac{I_y(\alpha)}{I_x(\alpha)} \times \frac{e^{i\varphi_2/2} + \frac{R_y}{I_y}(\alpha) e^{-i\varphi_2/2}}{e^{i\varphi_1/2} + \frac{R_x}{I_x}(\alpha) e^{-i\varphi_1/2}} \quad (24)$$

La comparaison des expressions (19, 20, 21) quand on effectue le changement α en $1/\alpha$ montre que $f'(\alpha)$ (24) peut être écrite sous la forme :

$$f'(\alpha) = - e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \frac{R_y}{R_x} \left(\frac{1}{\alpha}\right) \frac{e^{i\varphi_2/2} + \left[e^{2i\varphi_2} \frac{I_y}{R_y} \left(\frac{1}{\alpha}\right) \right] e^{-i\varphi_2/2}}{e^{i\varphi_1/2} + \left[e^{2i\varphi_1} \frac{I_y}{I_x} \left(\frac{1}{\alpha}\right) \right] e^{-i\varphi_1/2}}$$

$$= - \frac{R_y \left(\frac{1}{\alpha}\right) e^{-i\varphi_2/2} + I_y \left(\frac{1}{\alpha}\right) e^{i\varphi_2/2}}{R_x \left(\frac{1}{\alpha}\right) e^{-i\varphi_2/2} + I_x \left(\frac{1}{\alpha}\right) e^{i\varphi_1/2}}$$

D'où en tenant compte des relations (23) appliquées au champ itératif associé à $1/\alpha$:

$$f'(\alpha) = - \frac{R'_y(1/\alpha) + I'_y(1/\alpha)}{R'_x(1/\alpha) + I'_x(1/\alpha)} \quad \text{soit} \quad f'(\alpha) = - f'(1/\alpha) \quad (25)$$

Les états de polarisation des champs associés à α et $1/\alpha$ sont représentés par des complexes opposés : les vibrations ont même ellipticité en valeur absolue, elles sont parcourues en sens inverses et leurs grands axes sont symétriques par rapport aux lignes neutres de la lame considérée.

Montrons que ce résultat vérifie les règles de symétrie du milieu. Une pile hélicoïdale infinie de lames biréfringentes est invariante par rotation de 180° autour d'un axe coïncidant avec une des lignes neutres d'une lame et situé à égale distance des faces de la lame : cet axe binaire est situé dans le plan de symétrie de la lame.

Le changement du sens de propagation équivaut à un retournement de la pile : si l'axe binaire coïncide par exemple avec la ligne neutre x_k , le sens de la ligne neutre y_k est modifié. Dans l'expression (18) seules les composantes y des champs changent de signe et la symétrie du milieu impose la relation :

$$f'(1/\alpha) = -f'(\alpha)$$

établie plus haut de manière analytique dans le plan de symétrie des lames.

Remarquons pour terminer que la situation des vibrations associées à α et $1/\alpha$ n'a rien de surprenant : par rapport à la direction de propagation (ou pour un observateur qui reçoit la lumière), les vibrations itératives $\vec{F}(\alpha)$ et $\vec{F}(1/\alpha)$ ont même forme, même sens de parcours et même inclinaison sur les lignes neutres des lames successives qu'elles traversent. Le principe du retour inverse est donc bien vérifié.

3.3 Propriétés du champ électromagnétique itératif associé à une valeur propre réelle.

Dans des conditions particulières d'empilement ou d'éclairage, une au moins des valeurs propres peut devenir réelle de module inférieur à l'unité. Calculons alors (cas 2 et 3 du tableau II) l'état de polarisation de la vibration itérative correspondante. Pour simplifier l'écriture des relations (19 à 21) posons :

$$N_1 = \alpha^2 e^{i\varphi_1} - \alpha \cos \beta \left[1 + e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \right] + e^{-i\varphi_2} \quad (26)$$

et

$$D_1 = \alpha^2 e^{-i\varphi_1} - \alpha \cos \beta \left[1 + e^{-i(\varphi_1 + \varphi_2)} \right] + e^{-i\varphi_2} \quad (27)$$

Quand une valeur propre α est réelle, les relations suivantes existent entre les diverses formes de I_y/I_x , R_y/I_y et R_x/I_x (19,20,21) :

$$\frac{R_x}{I_x} = \frac{n_1+n_2}{n_1-n_2} \frac{N_1}{D_1} \quad \text{ou} \quad \frac{R_x}{I_x} = \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2} \frac{D_1^*}{N_1^*} \quad (28 \text{ a et b})$$

$$\frac{R_y}{I_y} = \frac{n_1+n_2}{n_2-n_1} \frac{N_1}{D_1^*} e^{2i\varphi_2} \quad \text{ou} \quad \frac{R_y}{I_y} = \frac{n_2-n_1}{n_2+n_1} \frac{D_1}{N_1^*} e^{2i\varphi_2} \quad (29 \text{ a et b})$$

$$\frac{I_y}{I_x} = j \left(\frac{n_1}{n_1+n_2} \right) \frac{e^{-i\varphi_2} D_1^*}{\alpha \sin \beta \sin \varphi_2} \quad \text{ou} \quad \frac{I_y}{I_x} = j \left(\frac{n_1+n_2}{n_2} \right) \frac{\alpha \sin \beta \sin \varphi_1}{e^{j\varphi_2} D_1} \quad (30 \text{ a et b})$$

Utilisons les formes (28, 29, 30b) pour calculer le nombre f représentant l'état de polarisation de la vibration itérative associée à α , et les formes (28, 29, 30a) pour calculer f^* complexe conjugué de f . On constate alors que $f = f^*$: le scalaire f est réel, le champ électrique itératif associé à une valeur propre réelle est polarisé rectilignement.

Dans le cas 2 du tableau II, deux valeurs propres sont réelles : à celle de module inférieur à l'unité correspond une vibration itérative dont l'amplitude décroît d'un dioptre au suivant et telle qu'à tous les dioptres où elle est définie, les champs sont en phase. Les lames de la pile étant parfaitement transparentes, l'énergie correspondant à la vibration itérative associée à la valeur propre $\alpha < 1$ ne peut être que réfléchie. Ainsi qu'il a été établi au paragraphe précédent, la valeur propre $\alpha > 1$ caractérise la "propagation" d'une vibration itérative vers les $z < 0$.

Dans le cas 3 du tableau II, toutes les valeurs propres sont réelles, et deux à deux inverses l'une de l'autre. Toute la lumière incidente correspondant aux vibrations itératives d'amplitude décroissante dans le sens de la numérotation des lames est réfléchie par la pile.

Il est intéressant d'analyser l'état de polarisation du champ magnétique itératif associé à une valeur propre réelle. Le milieu constituant les lames étant magnétiquement isotrope et à biréfringence rectiligne, l'expression du champ magnétique itératif au niveau d'un dioptre est la suivante :

$$\mathbf{F}_H = \frac{1}{\mu c} \begin{bmatrix} 0 & -n_2(1-R_y/I_y)/(1+R_y/I_y) \\ n_1(1-R_x/I_x)(1+R_x/I_x) & 0 \end{bmatrix} \mathbf{F} \quad (31)$$

où μ est la perméabilité du vide et c la vitesse de la lumière dans le vide.

Le produit des formes (28a) et (28b) de R_x/I_x est un nombre complexe de module 1 : R_x/I_x prend donc la forme d'un nombre complexe de module unité quand la valeur propre α est réelle. il en est de même pour R_y/I_y . Les coefficients de la matrice (31) sont alors imaginaires purs. Le champ \mathbf{F}_H représente donc un champ magnétique qui vibre en quadrature avec le champ électrique \mathbf{F} polarisé électriquement ; le flux, à travers un dioptre du vecteur de Poynting de la vibration itérative associée à la valeur propre α réelle, a une moyenne nulle au cours du temps : à cette vibration de type oscillation évanescence n'est pas associé de transport d'énergie. Comme les lames sont supposées parfaitement transparentes, la lumière incidente correspondante est totalement réfléchi. Le phénomène présenté par une pile de lames quand une des valeurs propres de \mathbf{M} (12) est réelle, est analogue à celui présenté par les mésophases torses dans la bande de réflexion sélective [22] pour les longueurs d'ondes voisines du pas de torsion.

Dans l'expression $\vec{F} = \vec{I} + \vec{R}$ du champ électrique itératif au niveau d'un dioptre, le champ \vec{R} représente la partie du champ "incident" \vec{I} qui est globalement réfléchi au niveau du dioptre. A propos du calcul du champ magnétique itératif \vec{F}_H il a été établi que le rapport R_x/I_x est complexe de module unité. Il en est de même du coefficient R_y/I_y (29a et b) : quand α est réelle, les champs \vec{R} et \vec{I} ont même amplitude. Au niveau d'un dioptre, l'amplitude de la somme des ondes "incidentes" est égale à celle de la somme des ondes "réfléchies" : en effet si l'amplitude du champ \vec{I} décroît proportionnellement à α entre le dioptre k et le dioptre

$k+1$, l'amplitude du champ \vec{R} croît proportionnellement à $1/\alpha$ entre les dioptries $k+1$ et k . L'énergie perdue par le champ \vec{I} est réfléchiée et contribue à l'accroissement de l'amplitude du champ \vec{R} . Chaque fois qu'une valeur propre α est réelle, la pile présente une bande de réflexion sélective pour la vibration itérative $\vec{F}(\alpha)$ correspondante.

Le caractère rectiligne et évanescent de la vibration rectiligne \vec{F} dans une bande de réflexion sélective ne peut s'expliquer uniquement à l'aide de l'égalité des amplitudes des champs \vec{I} et \vec{R} . Revenons aux états de polarisation ; à partir des expressions (28,29,30) valables quand α est réelle, une relation simple peut être établie :

$$\frac{R_y}{R_x} = \frac{R_y}{I_y} \cdot \frac{I_y}{I_x} \cdot \frac{I_x}{R_x} = - \frac{D_1}{D_1^*} e^{2i\varphi_2} \left(\frac{I_y}{I_x} \right)$$

Soit en choisissant pour I_y/I_x la forme (30a) :

$$\frac{R_y}{R_x} = -i \left(\frac{n_1}{n_1+n_2} \right) \frac{D_1 e^{i\varphi_2}}{\alpha \sin \beta \varphi_2} \quad \text{c'est à dire} \quad \frac{R_y}{R_x} = \left(\frac{I_y}{I_x} \right)^*$$

Les états de polarisation des champs \vec{I} et \vec{R} sont complexes conjugués : ils caractérisent deux ellipses qui ne diffèrent que par le sens de parcours.

Prenons les axes de la vibration \vec{I} d'ellipticité η comme référence. Les champs \vec{R} et \vec{I} de même amplitude présentent un déphasage arbitraire φ . La répartition effective de champ $\vec{F} = \vec{I} + \vec{R}$ au niveau d'un dioptre peut être calculée :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ itgn \end{pmatrix} + e^{i\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ -itgn \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1+e^{j\varphi} \\ itgn(1-e^{j\varphi}) \end{bmatrix} = (F)$$

Le scalaire $F_y/F_x = f = tg \eta \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ est réel. \vec{F} est une vibration rectiligne dont l'azimut $\theta = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} f$ dépend du déphasage φ entre \vec{I} et \vec{R} . D'un dioptre au suivant, cette vibration rectiligne s'enroule sur une hélice de même pas que la pile.

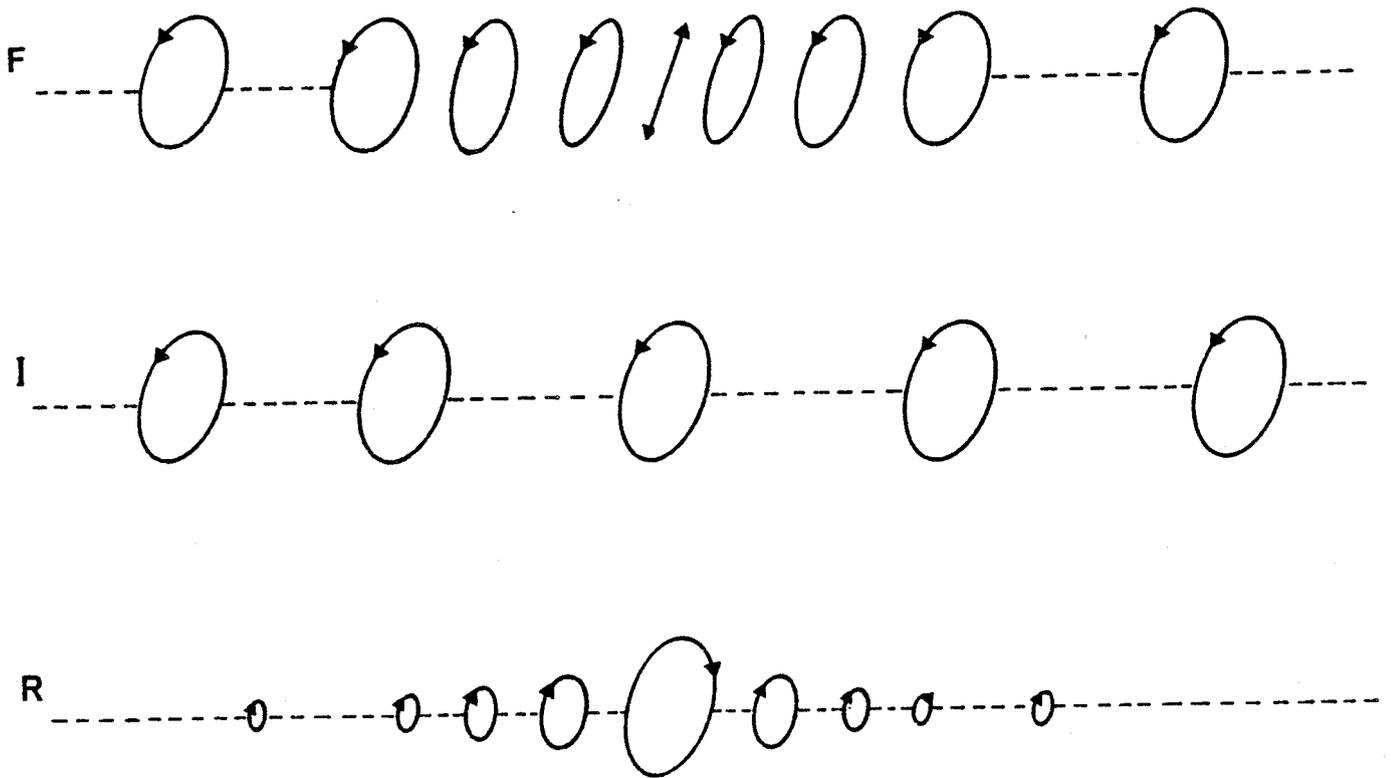


FIGURE 9 : Modifications du champ itératif $\vec{F} = \vec{I} + \vec{R}$ et des champs \vec{I} "incident" et \vec{R} "réfléchi" à la traversée d'une bande de réflexion sélective.
Dans les conditions numériques illustrées, \vec{I} est fortement elliptique.

Toutes les considérations précédentes permettent maintenant d'expliquer les modifications de l'état de polarisation d'une vibration itérative lors de la traversée d'une bande de réflexion sélective. Numériquement on constate qu'à l'intérieur d'une bande, l'amplitude du champ \vec{R} est très faible devant celle de \vec{I} et la vibration itérative $\vec{F} = \vec{I} + \vec{R}$ a un état de polarisation très proche de celui de \vec{I} . A l'approche d'une bande de réflexion sélective, la vibration itérative \vec{F} se déforme très rapidement, devenant elliptique très aplatie près de la bande puis rectiligne à l'intérieur ; par contre la vibration \vec{I} conserve un état de polarisation constant (figure 9). A l'approche de la bande de réflexion sélective l'amplitude du champ réfléchi \vec{R} croît au détriment de celle du champ incident \vec{I} : la vibration itérative \vec{F} se déforme en s'aplatissant . Dans la bande de réflexion sélective, l'amplitude du champ \vec{R} est égale à celle du champ \vec{I} et la vibration itérative \vec{F} résulte de la superposition de deux ondes elliptiques de même amplitude et parcourues en sens inverses : \vec{F} est rectiligne stationnaire ; son amplitude décroît d'un dioptre au suivant car la valeur propre associée α est réelle inférieure à l'unité: on a affaire à une oscillation évanescence [23a,23b]. La vibration réfléchie \vec{R} ne diffère de la vibration incidente \vec{I} que par le sens de parcours dans l'espace. Par rapport à la direction d'observation, \vec{I} et \vec{R} sont donc deux vibrations polarisées de même sens. Dans la bande de réflexion sélective, les rayonnements incidents polarisés qui correspondent à la vibration $\vec{F} \approx \vec{I}$ sont réfléchis totalement par la pile sous forme de rayonnements de même état de polarisation que les incidents. Le phénomène diffère d'une réflexion habituelle (sur un miroir par exemple) où les sens de parcours sont inversés.

4. PILES DE LAMELLES BIREFRINGENTES TRES MINCES : PROPRIETES DES

MESOPHASES TORSSES

4.1 Vibrations favorisées

Si l'épaisseur e des lames de la pile ainsi que l'angle β entre deux lames consécutives tendent vers zéro, la pile tend vers un milieu biréfringent à torsion continue, configuration qui est, à une bonne approximation, celle des mésophases torsées ; sous cette dénomination peuvent être rangés les nématiques torsadés (cholestériques), les

smectiques C,G,F,I à torsion et les mésophases discoïdes [24a,25] qui peuvent être torses dans la phase fluide [24b,26,27a,27b]. Une grandeur caractéristique de la structure des mésophases torses est la valeur du pas p de la torsion ; le signe de p , positif pour une torsion dextre, caractérise le sens de l'enroulement.

Mauguin [7], Oseen [28] puis Hl. de Vries [8] ont étudié les propriétés optiques des nématiques torsadés en les considérant comme continus. Leur méthode consiste à écrire les équations de Maxwell et le tenseur des propriétés diélectriques dans un référentiel mobile lié au milieu : l'un des axes coïncide avec l'axe de torsion et les deux autres avec les directions principales du milieu dans le plan perpendiculaire à l'axe de torsion au point considéré. Mauguin [7] définit les vibrations favorisées qui conservent en tout point le même état de polarisation par rapport au référentiel mobile. La notion de vibration favorisée permet à de Vries [8] d'établir les propriétés essentielles du pouvoir rotatoire apparent des mésophases torses [29,30] .

Le formalisme développé dans les paragraphes précédents peut être appliqué à des piles de lamelles très minces tournées d'angles β très faibles. Dans ce cas la quantité $2\pi/\beta$ est pratiquement égale à un entier N très grand et la longueur $2Ne$ double de la périodicité d'orientation des lamelles définit le pas de torsion p de l'empilement. L'angle β et les déphasages ϕ_1 et ϕ_2 subis par les vibrations privilégiées d'une lame lors de la traversée de cette lame sont liés par les relations :

$$\phi_1 = \beta n_1 p / 2\lambda \quad \text{et} \quad \phi_2 = \beta n_2 p / 2\lambda \quad (33)$$

La pile prend la configuration d'un milieu torsadé continu quand β , ϕ_1 et ϕ_2 tendent simultanément vers zéro. Alors les lignes trigonométriques de β , ϕ_1 et ϕ_2 peuvent être remplacées par des développements limités. La forme obtenue pour α (17) permet de déduire l'expression de l'indice de réfraction ν des vibrations itératives :

$$\nu^2 = \frac{\lambda^2}{p^2} + \frac{n_1^2 + n_2^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(n_2^2 - n_1^2)^2}{4} + \frac{2\lambda^2}{p^2} (n_1^2 + n_2^2)} \quad (34)$$

D'après (13), les vibrations itératives \mathbf{I} , \mathbf{R} sont les directions propres de la matrice \mathbf{M} (12). Le champ électrique total $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{R}$ au niveau d'un dioptre est itératif ; il a un état de polarisation représenté par le nombre complexe (17) :

$$f = \frac{I_y + R_y}{I_x + R_x} = \frac{I_y}{I_x} \frac{1 + \frac{R_y}{I_y}}{1 + \frac{R_x}{I_x}}$$

ou, après calcul des directions propres de \mathbf{M} :

$$f = \frac{(n_1+n_2) \alpha \sin \beta \sin \phi_1 e^{-i\phi_2}}{n_2 \left[\alpha^2 e^{-i\phi_2} - \alpha \cos \beta (1 + e^{-i(\phi_1+\phi_2)}) + e^{-i\phi_1} \right]} \times$$

$$\frac{\left[n_2 \cos \phi_2 + i n_1 \sin \phi_2 \right] \left[\alpha \cos \beta e^{-i\phi_1} - \alpha^2 \right] + n_2 \left[\alpha \cos \beta - e^{-i\phi_1} \right]}{\left[n_1 \cos \phi_1 + i n_2 \sin \phi_1 \right] \left[\alpha^2 - \alpha \cos \beta e^{-i\phi_2} \right] + n_1 \left[e^{-i\phi_2} - \alpha \cos \beta \right]}$$

(35)

Cette expression, quand β , ϕ_1 et ϕ_2 tendent vers zéro, prend la forme particulière :

$$f = \frac{2 \nu \lambda / p}{n_2^2 - \nu^2 - \lambda^2 / p^2}$$

(36)

Les expressions de ν (34) et f (35) sont les mêmes que celles établies par Mauguin [7] pour les milieux nématiques torsadés considérés comme continus. Quand le nombre de lames par pas croît, les caractéristiques des vibrations itératives tendent uniformément vers celles des vibrations favorisées du milieu torsadé équivalent.

Les vibrations favorisées, comme les vibrations itératives des piles de lames, sont en général non-orthogonales [10] (leurs ellipticités peuvent différer notablement, en particulier au voisinage de la bande de réflexion sélective). Les réflexions aux dioptres des lamelles

élémentaires sont à l'origine de cette non-orthogonalité ; en effet Mauguin [7], pour introduire la notion de vibration favorisée utilise en un premier temps la représentation de Poincaré [9] de la lumière polarisée qui ne permet pas de tenir compte des réflexions : les vibrations favorisées trouvées sont orthogonales. Ce n'est qu'ensuite [7], en proposant la méthode d'étude des milieux biréfringents torsadés basée sur les équations de Maxwell qu'il constate que les vibrations favorisées ne sont pas orthogonales.

Il peut être intéressant de connaître combien de lames par pas doit comporter une pile pour que ses propriétés optiques soient, à une approximation donnée, les mêmes que celles d'un milieu à torsion continue de mêmes indices et même pas. Pour un milieu biréfringent d'indices (choisis arbitrairement et vraisemblables dans le domaine du visible pour un cholestérique) $n_1 = 1,599\ 8$ et $n_2 = 1,595\ 5$ auquel est imposée une torsion continue telle que $\lambda/p = 1$, les vibrations favorisées ont des ellipticités de $44^\circ 58'$ et $44^\circ 51'$ et les indices correspondants sont $0,597\ 6$ et $2,597\ 6$. Une pile hélicoïdale de mêmes caractéristiques et comportant des lames d'épaisseur $p/6$, a des vibrations itératives d'ellipticités $44^\circ 58'$ et $44^\circ 51'$ associées à des indices de réfraction $0,597\ 8$ et $2,597\ 8$. Avec des lames d'épaisseur $p/10$, aux vibrations itératives de mêmes ellipticités correspondent les indices $0,597\ 6$ et $2,597\ 6$.

4.2 La réflexion sélective de la lumière par les mésophases torsées

L'étude détaillée des variations des indices de réfraction ν (34) des vibrations favorisées en fonction de la torsion spécifique λ/p [10] permet de prévoir l'existence du phénomène de réflexion sélective [22] qui est sans doute la plus spectaculaire des propriétés optiques des mésophases torsadées : pour les valeurs de λ/p comprises entre les indices n_1 et n_2 du milieu non torsadé, l'indice ν_- (34) est imaginaire pur ; la vibration favorisée ordinaire est une oscillation évanescence polarisée rectilignement. Son champ électrique a pour expression :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \cotg \Delta \\ 1 \end{bmatrix} \exp\left(\frac{-2\pi\chi}{\lambda} z\right) \quad (37)$$

Sa direction forme un angle Δ avec l'axe lent ; cet angle est, en première approximation, tel que :

$$\cotg \Delta = -(1-\epsilon) \sqrt{\frac{1+\delta}{1-\delta}}$$

Dans cette expression $\delta = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\lambda}{np} - 1 \right)$ donne la position de λ/np par rapport à 1 à l'intérieur de la bande de réflexion sélective de largeur relative $\epsilon = \Delta n/n$. L'angle Δ , indépendant de z , varie de 0 à $\pi/2$ quand la longueur d'onde varie d'une extrémité à l'autre de la bande de réflexion sélective : la vibration favorisée ordinaire est une vibration rectiligne dirigée selon la ligne neutre n_1 du milieu biréfringent pour la longueur d'onde minimale $\lambda_1 = n_1 p$; pour la longueur d'onde maximale $\lambda_2 = n_2 p$ elle est dirigée selon la ligne neutre n_2 . Son azimuth varie progressivement entre ces deux positions extrêmes pour les valeurs de λ comprises entre λ_1 et λ_2 .

Le champ magnétique de la vibration ordinaire a pour expression :

$$\mathbf{H} = (-j) \frac{n}{\mu c} (1-\epsilon) \begin{bmatrix} \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \cotg \Delta \\ 1 \end{bmatrix} \exp\left(\frac{-2\pi\chi z}{\lambda}\right) \quad (38)$$

Il est également polarisé rectilignement et vibre en quadrature avec le champ électrique. Dans tout le domaine de réflexion sélective ($\lambda \cong np$), la vibration favorisée ordinaire ne transporte pas d'énergie ; comme le milieu n'est pas absorbant, la lumière incidente correspondante est totalement réfléchie.

Ainsi qu'il l'a été rappelé au paragraphe 4.1 les vibrations favorisées des mésophases torses sont définies dans un repère mobile lié au milieu. A l'extérieur de la bande de réflexion sélective, les vibrations ordinaire et extraordinaire sont quasi-circulaires inverses. Leurs indices de réfraction dans le repère mobile sont en première approximation [8] :

$$\left. \begin{aligned} v_o &\equiv n - \lambda/p \\ v_e &\equiv n + \lambda/p \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Le formalisme utilisé pour l'étude d'une pile de lamelles permet de distinguer les contributions des champs \vec{I} et \vec{R} au niveau de chaque dioptré (§ 3.1 et 3.3). A l'approche de la bande de réflexion sélective des mésophases torses, les champs \vec{I} et \vec{R} qui constituent la vibration favorisée ordinaire sont quasi-circulaires inverses et leurs amplitudes deviennent progressivement égales. La vibration ordinaire s'aplatit régulièrement jusqu'à devenir rectiligne à l'intérieur de la bande de réflexion ; son amplitude décroît alors exponentiellement dans la direction z . Dans la bande de réflexion sélective, son champ électrique (37) est la somme de deux vibrations circulaires inverses de même amplitude :

$$2 \begin{pmatrix} \cos \Delta \\ \sin \Delta \end{pmatrix} e^{-\left(\frac{2\pi\chi}{\lambda}\right) z} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-i\Delta} + \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{i\Delta} \right] e^{-\left(\frac{2\pi\chi}{\lambda}\right) z}$$

La vibration favorisée extraordinaire, par contre, n'est pas affectée par la réflexion sélective.

Supposons que la mésophase considérée est dextre. Si p est son pas de torsion, à la côte z , le repère mobile a tourné d'une angle $+\frac{2n}{p} z$ par rapport à un repère lié au laboratoire. Les expressions des vibrations favorisées dans le repère du laboratoire, à l'intérieur de la bande de réflexion sélective sont respectivement :

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{p} z & -\sin \frac{2\pi}{p} z \\ \sin \frac{2\pi}{p} z & \cos \frac{2\pi}{p} z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-i \frac{2\pi(n+\lambda)}{p} z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} \left(n + \frac{\chi}{p} - \frac{\chi}{p} \right) z} \quad (40)$$

pour la vibration favorisée extraordinaire, quasi-circulaire gauche (par rapport au référentiel fixe, la vibration extraordinaire est une vibration circulaire gauche qui se déplace vers les $z > 0$ avec un indice de réfraction égal à l'indice moyen de la mésophase) ; et :

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi}{p} z & -\sin \frac{2\pi}{p} z \\ \sin \frac{2\pi}{p} z & \cos \frac{2\pi}{p} z \end{bmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} e^{-i\Delta} + \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix} e^{i\Delta} \right] e^{-\frac{2\pi\chi}{\lambda} z} =$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} e^{-i\left(\Delta + \frac{2\pi}{p} z\right)} + \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix} e^{i\left(\Delta + \frac{2\pi}{p} z\right)} \right] e^{-\frac{2\pi\chi}{\lambda} z} \quad (41),$$

pour la vibration favorisée ordinaire rectiligne, d'après (39) .

Dans le référentiel du laboratoire, la vibration favorisée ordinaire rectiligne résulte de la superposition des deux vibrations suivantes dont les amplitudes sont constamment égales et décroissent exponentiellement dans la direction z :

a) une vibration circulaire droite $\begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}$ qui se propage vers les $z > 0$ et qui correspond à la vibration favorisée ordinaire définie hors de la bande de réflexion sélective. Cette vibration, au cours de sa propagation "voit" une variation régulière d'indice de période p .

b) une vibration circulaire $\begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix}$ qui se propage dans le sens des $z < 0$. Une telle vibration est droite pour un observateur qui reçoit la lumière : le rayonnement réfléchi qui correspond à la vibration favorisée ordinaire est polarisé circulairement dans le même sens que le rayonnement incident. Cette propriété distingue le phénomène de réflexion sélective du phénomène de réflexion habituel. Comme la vibration incidente (a), la vibration réfléchie "voit" une variation régulière d'indice de période p .

Les relations (40) et (41) nous permettent de considérer qu'à l'intérieur et à l'extérieur de la bande de réflexion sélective se propagent dans le milieu deux vibrations quasi-circulaires inverses. Dans une bande étroite de longueurs d'onde, l'hélice décrite par la vibration droite (gauche) pour un milieu dextre (senestre) a le même pas que l'hélice selon laquelle s'enroule le milieu biréfringent : il y a résonance et établissement d'une oscillation stationnaire évanescence résultant de

la superposition des ondes directe et réfléchi qui sont circulaires, de même amplitude et de sens de parcours inverses dans l'espace. La résultante de cette superposition constitue la vibration favorisée ordinaire rectiligne calculée [8,28] à l'aide des équations de Maxwell : celles-ci tiennent implicitement compte de toutes les réflexions internes régulièrement réparties dans le milieu de propagation.

Dans la bande de réflexion sélective, les mésophases torsées se comportent comme des réflecteurs parfaits pour une vibration circulaire donnée ; leur coefficient de réflexion égal à l'unité est régulièrement réparti dans le milieu. L'autre vibration circulaire n'est pas affectée par le phénomène de réflexion et est transmise [31,32]

5. CONCLUSION ET REMARQUES

La notion de vibrations itératives est introduite pour étudier la propagation de la lumière le long de l'axe de torsion d'une pile hélicoïdale de lames à biréfringence rectiligne jointives. Ces vibrations se reproduisent identiques à elles-mêmes d'un dioptre au suivant.

Les indices de réfraction associés aux deux vibrations itératives définies pour un même sens de propagation varient avec les conditions expérimentales :

- quand les deux indices sont réels, les vibrations itératives sont elliptiques et peuvent être considérées comme orthogonales en première approximation. La pile présente alors des phénomènes de biréfringence elliptique.
- quand un des indices de réfraction est imaginaire pur, la vibration itérative correspondante est évanescence. Le formalisme permet d'étudier séparément les champs "incident" \vec{I} et "réfléchi" \vec{R} qui constituent la vibration itérative : quand celle-ci est évanescence, \vec{I} et \vec{R} ont même amplitude et même sens de parcours par rapport à la direction d'observation. La pile réfléchit sélectivement la part d'énergie incidente qui excite la vibration itérative d'indice imaginaire. Le rayonnement réfléchi a même état de polarisation que le rayonnement incident correspondant. L'autre vibration itérative est transmise par la pile.

- les deux vibrations itératives peuvent enfin être simultanément évanescentes : la pile présente alors un phénomène de réflexion sélective totale.

Les vibrations itératives d'une pile hélicoïdale de lamelles biréfringentes très minces coïncident exactement avec les vibrations favorisées d'une mésophase torse de même pas et mêmes indices que la pile. Cette équivalence confirme le rôle prépondérant que jouent les réflexions internes multiples dans le phénomène de réflexion sélective ainsi que l'ont pressenti De Vries [8] et Chandrasekhar et al. [33,34] : la condition de réflexion sélective $\lambda = np$ (où $n = (n_1+n_2)/2$) établie par Oseen [28] et De Vries [8] pour les nématiques torsadées est en fait la condition d'interférence parfaitement constructive de toutes les ondes réfléchies aux divers dioptries de la pile de lamelles équivalente.

Le formalisme adopté permet de montrer que dans la bande de réflexion sélective des mésophases torses, la vibration favorisée rectiligne évanescente résulte de la superposition de deux ondes circulaires inverses dans l'espace, de même amplitude et se propageant dans des sens opposés. il en résulte que par rapport à la direction d'observation, la vibration réfléchie a même état de polarisation que la vibration incidente, phénomène qui confère un caractère anormal à la réflexion sélective présentée par les mésophases torses.

Remarquons pour terminer que l'équivalence entre piles de lames et milieux biréfringents torsadés, montre aussi les causes de la difficulté de l'étude théorique des milieux cholestériques éclairés sous l'incidence oblique [35,36] : de manière générale, au niveau de chaque dioptrie, chaque isophase se décompose en une isophase ordinaire et une isophase extraordinaire dont les orientations varient d'un dioptrie au suivant.



CHAPITRE 3

CONDITIONS DE PROPAGATION DES VIBRATIONS ITÉRATIVES

À TRAVERS LES LAMES D'UNE PILE HÉLICOÏDALE SEMI-INFINIE

1. INTRODUCTION

L'étude de la propagation d'une vibration \vec{V} plane et homogène dans la direction de l'axe de torsion d'une pile hélicoïdale de lames biréfringentes peut s'effectuer de la manière suivante : la vibration \vec{V} est décomposée sur les deux vibrations itératives dont les états de polarisation sont connus (chapitre 2, § 3.1). La traversée des lames de la pile affecte chaque vibration itérative d'un angle de déphasage différent. Pour obtenir la vibration \vec{V}' issue de \vec{V} après traversée d'un nombre donné de lames, il suffit de recomposer les deux vibrations itératives en tenant compte de leurs déphasages respectifs.

C'est la problème du calcul de ces déphasages que nous abordons maintenant. Quelques conséquences intéressantes des résultats obtenus seront ensuite exposées. Chacune des vibrations itératives des piles de lames épaisses est associée à une valeur propre α de la matrice \mathbf{M} (12). En dehors des bandes de réflexion sélective, α est complexe de module unité. D'après (17), l'argument de α représente la variation de phase subie par la vibration itérative associée quand celle-ci passe d'un dioptre au suivant ; pour n lames traversées, la vibration subit une variation de phase $n (\text{Arg } \alpha)$.

2. METHODE D'ETUDE DE LA PHASE DES VIBRATIONS ITERATIVES

Le déphasage $\text{Arg } \alpha_{1,2}$ (17) que subit une vibration itérative en "traversant" une lame dans le sens des $z > 0$ est tel que :

$$\cos \text{Arg } \alpha_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\alpha_{1,2} + \frac{1}{\alpha_{1,2}} \right)$$

soit d'après (14) :

$$\cos \text{Arg } \alpha_{1,2} = \frac{1}{2} y_{1,2} \quad (42)$$

où y_1 et y_2 sont les racines de l'équation du second degré (15).

Pour étudier les variations de phase subies par les vibrations itératives entre deux dioptrés successifs, nous analyserons donc le comportement de ces racines y_1 et y_2 .

Les courbes de la figure 10 donnent les variations de $1/2 y_1$ et $1/2 y_2$ en fonction de l'épaisseur d'une lame (ou de $\phi = (2\pi ne)/\lambda$ qui lui est proportionnel) pour diverses valeurs de l'angle d'empilement β . La figure 11 précise les intersections des courbes : celles-ci sont situées aux valeurs $\phi = q\pi$ qui annulent le discriminant Δ de l'équation 15. En ces points, la racine double $y_1 = y_2$ de l'équation (15) est de la forme :

$$y_1 = y_2 = \pm \cos \beta \cos \Delta\phi$$

Les intersections des courbes $1/2 y_1(\phi)$ et $1/2 y_2(\phi)$ sont donc situées sur la courbe d'équation $y = \cos \beta \cos \Delta\phi$ aux points d'abscisses $\phi = 2q\pi$ et sur la courbe d'équation $y = -\cos \beta \cos \Delta\phi$ aux points d'abscisses $\phi = (2q+1)\pi$. En particulier, pour $\phi = 0$ (figure 11) les courbes $1/2 y_1$ et $1/2 y_2$ débutent au même point d'ordonnée $\cos \beta$.

Les courbes $1/2 y_1(\phi)$ et $1/2 y_2(\phi)$ présentent périodiquement des maxima supérieurs à l'unité et des minima inférieurs à -1 sur de très faibles intervalles de variation de ϕ ; ce résultat est rendu visible par une interruption très brève des courbes au voisinage de chaque sommet : le traceur de courbe effectue un lever de plume dès que $|y| > 2$. Le sens physique de ces points remarquables est connu et a fait l'objet du § 3.3 du chapitre précédent : pour les valeurs correspondantes de β et ϕ les valeurs propres α et $1/\alpha$ sont réelles de module différent de l'unité et leur somme $y = \alpha + 1/\alpha$ est en module supérieur à 2 ; la pile présente alors le phénomène de réflexion sélective.

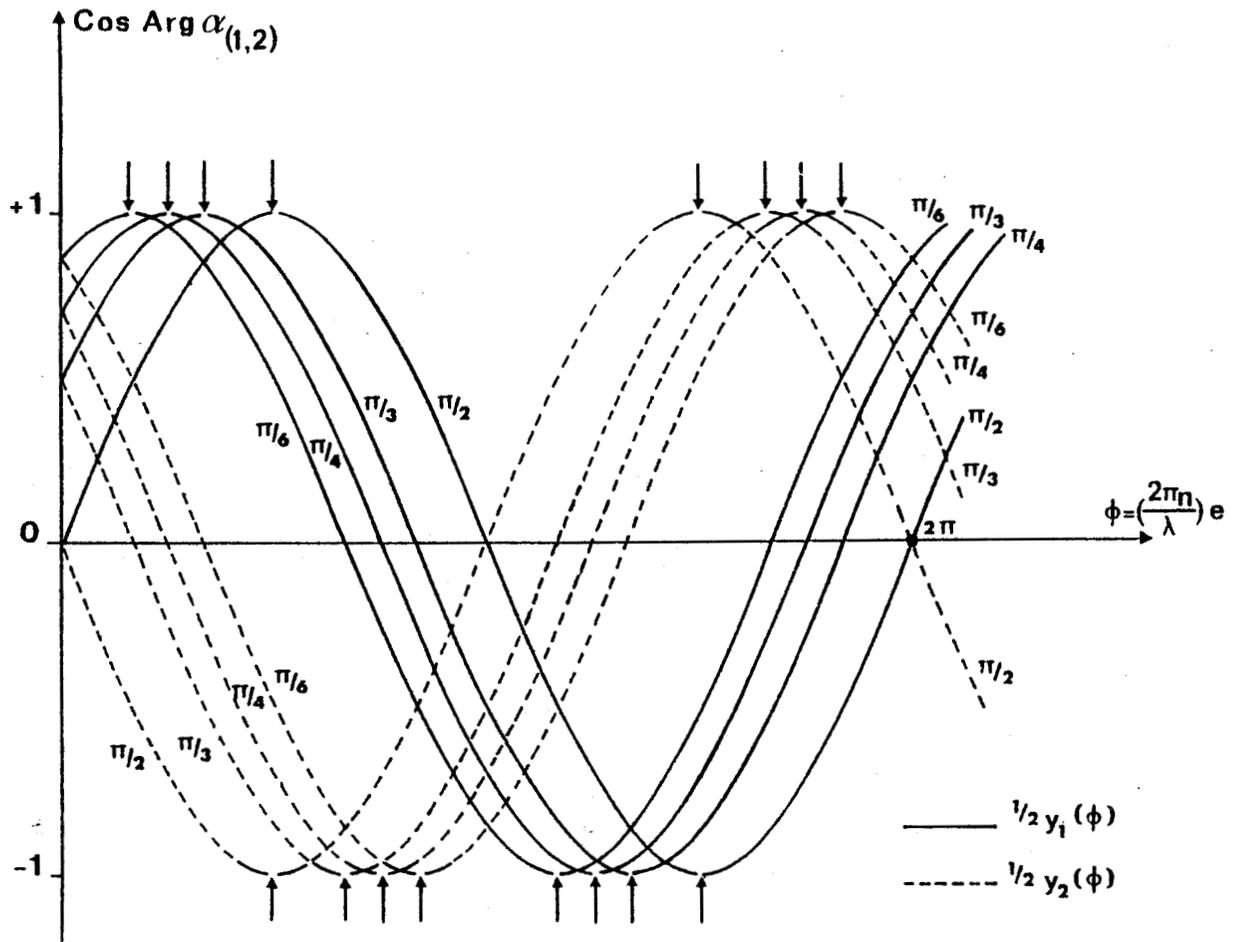


FIGURE 10 : Evolution de $\cos \text{Arg } \alpha_{(1,2)} = \frac{1}{2} y_{(1,2)}$ en fonction de l'épaisseur pour quelques valeurs particulières de l'angle d'empilement β . Les valeurs numériques correspondent à la pile décrite au chapitre 5 (n est l'indice moyen d'une lame).

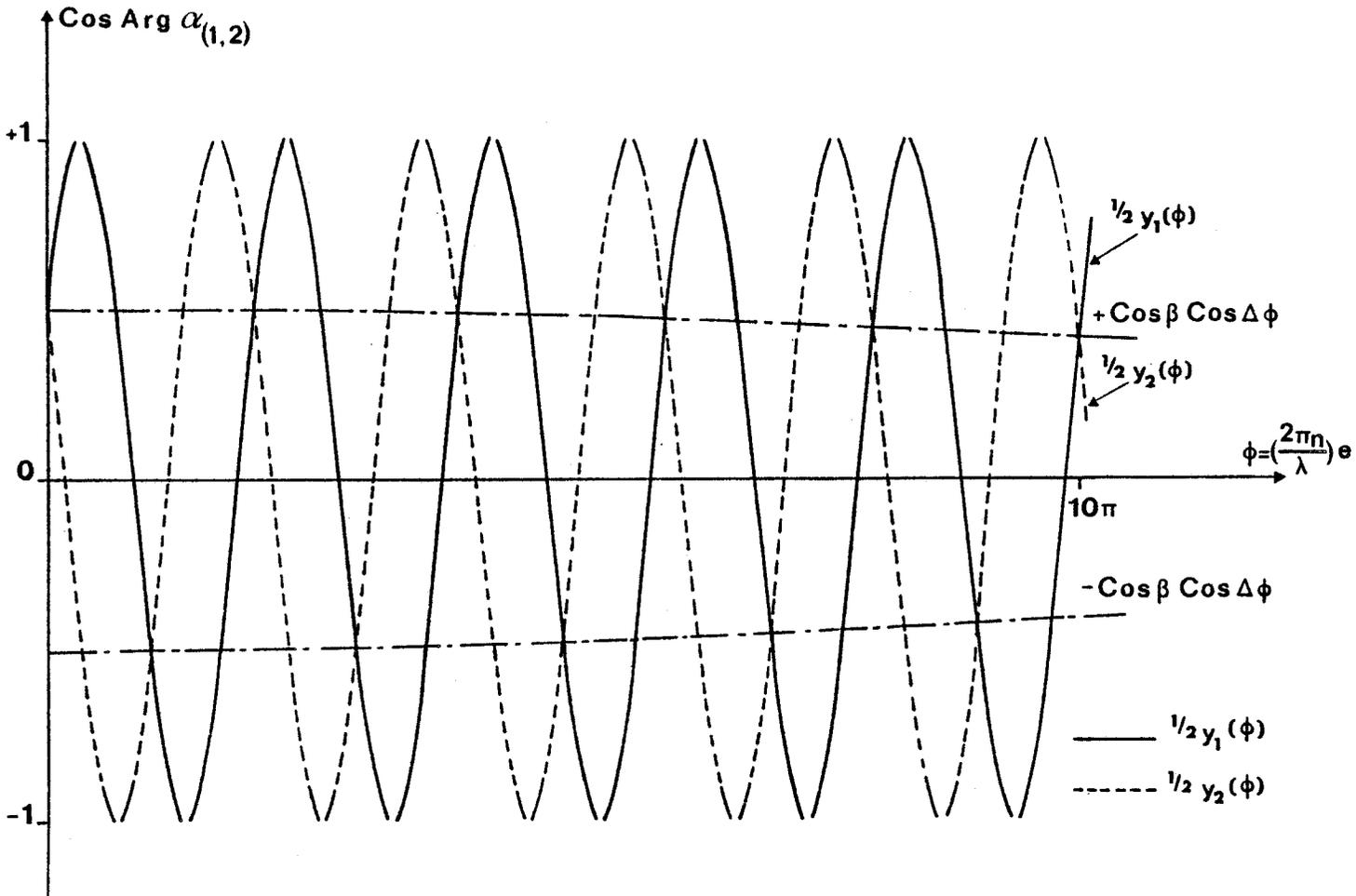


FIGURE 11 : Variations de $\text{cos Arg } \alpha_{(1,2)} = \frac{1}{2} y_{(1,2)}$ en fonction de l'épaisseur d'une lame. Aux points d'abscisses $\phi = q\pi$, les courbes $y_1(\phi)$ et $y_2(\phi)$ se coupent sur les courbes d'équation $\pm \text{cos } \beta \text{ cos } \Delta \phi$. La figure est tracée en donnant à β la valeur particulière $\pi/3$.

En particulier, quand β vaut $\pi/2$, les courbes $y_1/2$ et $y_2/2$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Leurs intersections se produisent sur l'axe des abscisses pour $\phi = q\pi$; les courbes $y_1/2$ et $y_2/2$ présentent simultanément des points d'ordonnées supérieures à l'unité en module quand ϕ est égal à $(2q+1)\pi/2$. Ce sont les conditions de réflexion sélective pour les piles de lames biréfringentes croisées.

L'allure quasi-sinusoïdale des courbes des figures 10 et 11 ainsi que les remarques sur les points d'intersection aux abscisses $\phi = 0$ et $\phi = q\pi$ suggèrent les expressions approchées suivantes :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} y_1 \cong \cos(\phi-\gamma) \\ \frac{1}{2} y_2 \cong \cos(\phi+\gamma) \end{cases} \quad \text{où } \gamma = \text{Arc cos} [\cos \beta \cos \Delta\phi] \quad (43)$$

3. VARIATIONS DE LA PHASE DES VIBRATIONS ITERATIVES LORS DE LA TRAVERSEE D'UNE LAME

Compte tenu des relations approchées (43), les arguments des valeurs propres α_1 et α_2 (42) varient en fonction de ϕ selon les relations :

$$\begin{cases} \text{Arg } \alpha_1 \cong \phi-\gamma \\ \text{Arg } \alpha_2 \cong \phi+\gamma \end{cases} \quad \text{avec } \gamma = \text{Arc cos} [\cos \beta \cos \Delta\phi] ; \beta < |\gamma| < \frac{\pi}{2} \quad (44)$$

$\Delta\phi$ varie beaucoup moins vite que ϕ et, dans la limite où $\cos \Delta\phi$ peut être considéré comme constant, $\text{Arg } \alpha_1$ et $\text{Arg } \alpha_2$ sont des fonctions quasi linéaires de ϕ .

3.1 Signification des différents termes

En particulier, quand $\Delta\phi$ est faible (cas des figures 10 et 11), $\cos \Delta\phi \cong 1$ et :

$$\text{Arg } \alpha_{1,2} \cong \phi \mp \beta \quad (45a)$$

Le premier terme $\phi = (2\pi ne)/\lambda$ de (45a) représente la variation de phase subie par une vibration qui traverserait une épaisseur e de matériau isotrope d'indice n égal à l'indice moyen des lames. Le second terme est de l'ordre de grandeur de l'angle d'empilement ; sa présence peut sembler surprenante : en effet pour une pile de lamelles infiniment minces, le déphasage subi par les itératives à la traversée d'une lamelle aurait la valeur non nulle :

$$\text{Arg } \alpha_{1,2} \cong \mp \beta \dots !$$

Analysons ce paradoxe afin de montrer pourquoi l'argument de α (45), différence de phase subie par une vibration itérative, comporte en plus d'un terme de phase $\phi = (2\pi ne)/\lambda$ un terme de rotation β .

Les vibrations itératives sont définies au niveau de chaque dioptre de la pile et toujours du même côté : leurs composantes sont repérées par rapport aux lignes neutres des lames successives. Ainsi au dioptre $(k, k+1)$ \vec{F} est repérée par rapport aux axes (x_k, y_k) de la lame k et au dioptre $(k+1, k+2)$ par rapport aux lignes neutres (x_{k+1}, y_{k+1}) de la lame $k+1$. La matrice \mathbf{M} (12) qui permet d'étudier les vibrations itératives exprime le passage du dioptre $(k, k+1)$, la traversée de la lame $k+1$ et enfin la rotation β entre lignes neutres des lames k et $k+1$.

Dans le cas de lames d'épaisseur très faible, les coefficients de la matrice \mathbf{M} (12) n'expriment plus que la rotation β entre lignes neutres de deux lames consécutives ; d'après la figure 7, quelque soit β , les vibrations itératives sont circulaires droite et gauche dans le repère mobile lié aux lames. Soit la vibration itérative droite D_k se propageant de la lame k vers la lame $k+1$: si $(D_k) = \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}$ est son expression dans le référentiel lié à la lame k , dans le référentiel lié à la lame $k+1$, elle devient :

$$(D_{k+1}) = \mathbf{M} (D_k) = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-j\beta} \\ je^{-j\beta} \end{pmatrix} = e^{-j\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} = \alpha_D \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}$$

L'argument $(-\beta)$ de la valeur propre α_D qui présente la variation de phase de la vibration itérative circulaire droite quand elle passe d'un dioptre au suivant exprime non pas une différence de marche due à une propagation mais une rotation du référentiel. De même, pour $\phi = 0$, la vibration circulaire gauche est affectée d'un déphasage fictif $(+\beta)$.

Pour $\phi \neq 0$, l'expression générale (44) de $\text{Arg } \alpha$ est composée d'un terme de phase $\phi = (2\pi ne)/\lambda$ et d'un terme γ qui dépend de manière complexe de l'angle d'empilement β . Ce second terme ne peut cependant être attribué à la seule rotation β ; en effet, en général les vibrations itératives sont elliptiques (figure 7) et seul le rétablissement en axes fixes d'une vibration circulaire se traduit par un simple déphasage égal à l'angle de rotation.

3.2 Sens de parcours des vibrations itératives

Nous sommes maintenant en mesure de préciser le sens droit (D) ou gauche (G) des vibrations itératives. Pour une pile dextre ($\beta > 0$) de lamelles très minces ($\phi \approx 0$), \vec{F}_1 est circulaire droite tandis que \vec{F}_2 est circulaire gauche. Quand l'épaisseur des lames croît ($\phi > 0$), l'angle γ (43) diffère de β progressivement ; les vibrations itératives deviennent elliptiques (figure 7) en conservant leurs sens de parcours établis pour $\phi = 0$. Tans que $\Delta\phi$ reste positif nous pouvons distinguer le sens de parcours des itératives pour une pile dextre dans les relations (44) :

$$\begin{cases} \text{Arg } \alpha_D \approx \phi - \gamma \\ \text{Arg } \alpha_G \approx \phi + \gamma \end{cases} \quad \text{avec } \gamma = \text{Arc cos } [\cos \beta \cos \Delta\phi] \quad (45b)$$

Rappelons qu'une vibration gauche G est une vibration dont le plan de polarisation tourne dans le sens trigonométrique pour un observateur qui reçoit la lumière. Pour une vibration droite D, le sens de rotation est inverse.

Si l'épaisseur des lames continue à croître, $\cos \Delta\phi$ s'annule pour $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ puis change de signe ; γ (44) s'annule puis devient négatif et la vibration qui était droite (gauche) s'aplatit jusqu'à être rectiligne

(figure 7, pour $2\Delta\phi = \pi$) puis devient gauche (droite). Une telle modification de sens se reproduit à chaque changement de signe de $\cos \Delta\phi$. Pour les empilements gauches ($\beta < 0$) tous les signes et sens de parcours sont inversés.

$\text{Arg } \alpha_2$ et $\text{Arg } \alpha_1$ (44) expriment des retards de phase affectant \vec{F}_2 et \vec{F}_1 lors du passage d'un dioptre k au suivant $k+1$, la direction de propagation étant celle de la numérotation croissante des lames. Chaque traversée de lame introduit donc entre \vec{F}_2 et \vec{F}_1 un déphasage :

$$\left. \begin{aligned} \phi_{2,1} &= 2 \gamma = 2 \text{ Arc cos } [\cos \beta \cos \Delta\phi] \quad \text{quand } \gamma > 0 \\ \phi_{2,1} &= -2 \gamma = -2 \text{ Arc cos } [\cos \beta \cos \Delta\phi] \quad \text{quand } \gamma < 0 \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Le signe du déphasage $\phi_{2,1}$ dépend du retard $2\Delta\phi$ des lames et du sens de l'empilement.

3.3 Indices associés

Soient m_1 et m_2 les indices de réfraction qui peuvent être associés à \vec{F}_1 et \vec{F}_2 . D'après les relations (44) on peut écrire :

$$\text{Arg } \alpha_{1,2} = \frac{2\pi m_{1,2} e}{\lambda} \cong \frac{2\pi n e}{\lambda} \mp \gamma$$

où n est l'indice moyen du milieu constituant les lames et $\gamma = \text{Arc cos } [\cos \beta \cos \Delta\phi]$. D'où l'expression générale des indices m_1 et m_2 pour un empilement de lames d'épaisseur e :

$$m_{1,2} = n \pm \frac{\gamma\lambda}{2\pi e} \quad (47)$$

Pour un empilement dextre, quand la quantité $\pm\gamma$ est positive, l'indice correspondant est associé à une vibration gauche.

Pour un empilement hélicoïdal comportant un nombre entier $N = \frac{\pi}{\beta}$ de lames d'épaisseur e par demi pas $p/2$, les expressions (47) peuvent être écrites :

$$m_{1,2} = n + \frac{\gamma}{\beta} \frac{\lambda}{p} \quad (48)$$

Quand les lames sont très minces, $\Delta\phi$ est faible et $\gamma \cong \beta$. Soit $p = \frac{2\pi e}{\beta}$ le pas de l'édifice hélicoïdal. m_1 et m_2 prennent les formes :

$$m_{1,2} \cong n \pm \frac{\lambda}{p} \quad (49)$$

et l'on retrouve l'expression approchée (cf chapitre 2, § 4.2) des indices de propagation des vibrations favorisées des milieux cholestériques [7,8,34]. Remarquons que les expressions (49) restent valables quand les lames sont "onde" ($2\Delta\phi = 2k\pi$).

Ainsi que nous l'avons déjà mis en évidence au chapitre 2 (§ 4.2) et au paragraphe précédent 3.1, le second terme $\pm \frac{\lambda}{p}$ de (49) manifeste la présence de la rotation du repère mobile défini pour l'étude des mésophases torsés. Dans l'expression générale (48) des indices relatifs à une pile de lames discrètes l'influence de la rotation β d'une lame à l'autre apparaît encore mais de manière plus complexe puisque γ dépend à la fois de β et du retard $2\Delta\phi$ des lames.

4. BANDES MULTIPLES DE REFLEXION SELECTIVE

4.1 Longueurs d'onde des rayonnements réfléchis

Les valeurs des longueurs d'onde réfléchies sélectivement se déduisent de l'étude des variations de phase qui précède (§ 3.).

En effet, α_1 (α_2) devient réelle (l'amplitude de la vibration itérative associée s'atténue d'un dioptre au suivant) à chaque fois que $\frac{1}{2} y$ (42) atteint la valeur +1 ou -1 ; l'argument de α_1 (α_2) est alors égal à $q\pi$ et reste égal à $q\pi$ tant que $\frac{1}{2} y$ reste supérieur à l'unité en valeur absolue.

Les expressions approchées (45) nous permettent de calculer les longueurs d'onde réfléchies sélectivement :

$$\text{Arg } \alpha = \phi \mp \gamma = q\pi \quad \text{d'où} \quad \phi(\pm) = \frac{2\pi ne}{\lambda} = q\pi \pm \gamma \quad (50)$$

Soit

$$\lambda = \frac{2\pi ne}{q\pi \pm \gamma} \quad \text{avec} \quad \gamma = \text{Arc cos} [\cos \beta \cos \Delta\phi] \quad (51)$$

4.2 Sens de parcours des vibrations réfléchies

La vibration \vec{I} qui subit la réflexion sélective est proche de la vibration itérative \vec{F} calculée hors de la bande de réflexion considérée (là où la contribution du champ "réfléchi" \vec{R} est faible (cf chapitre 2, fin du § 3.3) : si la quantité $\pm\gamma$ (51) est positive, la vibration qui subit la réflexion est elliptique dextre, sinon elle est senestre. Par rapport à la direction d'observation (chapitre 2, § 3.3) la vibration réfléchie \vec{R} est parcourue dans le même sens que la vibration incidente \vec{I} .

4.3 Répartition spectrale des deux séries de bandes de réflexion sélective

Ecrivons la relation (50) sous la forme :

$$\frac{1}{\lambda} = \pm \frac{\gamma}{2\pi ne} + \frac{q}{2ne} \quad (52)$$

Quand la quantité $(\pm\gamma)$ est positive l'entier q est positif ou nul ; un empilement dextre réfléchit les rayonnements de longueurs d'onde (52) correspondantes sous forme de vibrations droites.

Quand la quantité $(\pm\gamma)$ est négative l'entier q est strictement positif, supérieur ou égal à l'unité ; les vibrations réfléchies sont gauches pour un empilement dextre.

La longueur d'onde maximale que peut réfléchir une pile dextre de lames d'épaisseur e vaut donc :

$$\lambda_{\max} = \frac{2\pi ne}{\gamma} \quad \text{où } \gamma = \text{Arc cos} [\cos \beta \cos \Delta\phi] \quad (53)$$

La vibration correspondante est dextre.

Pour un empilement hélicoïdal de lames ondes ($2\Delta\phi = 2\pi$) comportant un nombre entier de lames par pas ($\beta = \frac{2\pi e}{p}$), et pour un empilement de pas p de lamelles très minces ($e \rightarrow 0$, $\Delta\phi \rightarrow 0$) la relation (53) prend une forme particulièrement simple :

$$\lambda_{\max} = \frac{2\pi e}{\beta} n = n \cdot p \quad ; \quad (54)$$

c'est la longueur d'onde du rayonnement que réfléchirait un milieu biréfringent à torsion continue de pas p . D'après (54), un empilement de lames d'épaisseur $30 \mu\text{m}$ comportant 6 lames par pas réfléchit la longueur d'onde maximale $\lambda \approx 270 \mu\text{m}$. Ce calcul approximatif suppose que l'indice moyen reste constant ($n \approx 1,5$) et que la transparence parfaite des lames ainsi que leur biréfringence sont conservées.

Les considérations précédentes sur le signe de ($\pm\gamma$) montrent que les bandes de réflexion sélective peuvent être classées en deux séries infinies distinctes, l'une relative à la vibration itérative \vec{F}_1 , l'autre à la vibration itérative \vec{F}_2 ; les longueurs d'onde réfléchies sont toutes inférieures à celle qui serait réfléchie par une mésophase torse de même pas (54).

Comme les états de polarisation de \vec{F}_1 et \vec{F}_2 (§ 3.1 du chapitre 2), la distance entre bandes d'une même série et le décalage entre les deux séries dépendent du retard $2\Delta\phi$ des lames constituant la pile ; $2\Delta\phi = \frac{2\pi\Delta ne}{\lambda}$ varie d'autant plus rapidement en fonction de λ que la biréfringence $2\Delta n$ et l'épaisseur e d'une lame sont élevées. Nous supposons que la bande spectrale $[\lambda_1 \lambda_2]$ couverte par le rayonnement incident est suffisamment étroite pour que l'approximation $2\Delta\phi \approx \text{constante}$ s'applique. Au besoin, l'intervalle $[\lambda_1 \lambda_2]$ sera fractionné en domaines $[\lambda_i \lambda_j]$ de largeurs adéquates. La distance $\Delta(\frac{1}{\lambda})$ entre deux bandes successives d'une même série correspond à une variation d'une unité de l'entier q (52) :

$$\Delta(\frac{1}{\lambda}) = \frac{1}{2ne} \quad (55a)$$

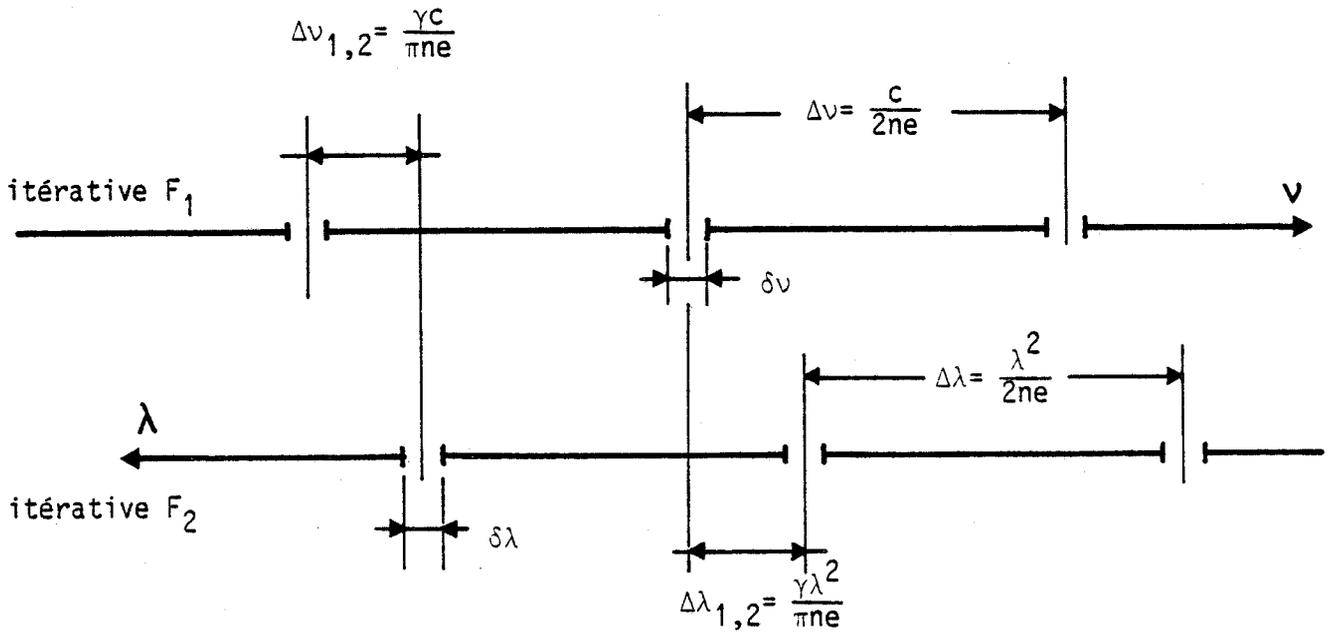


FIGURE 12 : Répartition en fonction de la longueur d'onde et de la fréquence des bandes de réflexion sélective relatives à chacune des vibrations itératives \vec{F}_1 et \vec{F}_2 d'un empilement droit ($\beta > 0$) de lames d'épaisseur e , d'indice moyen n et de biréfringence Δn . Le rayonnement incident excite tantôt \vec{F}_1 tantôt \vec{F}_2 . L'angle γ est tel que $\cos \gamma = \cos \beta \cos \frac{\pi \Delta n e}{\lambda}$; les largeurs $\delta \lambda$ et $\delta \nu$ des bandes sont définies dans le texte.

Soit en fréquence

$$\Delta\nu = \frac{c}{2ne} \quad ; \quad (55b)$$

à l'intérieur de chaque série les fréquences successives sont équidistantes tant que $\Delta\phi \cong \text{constante}$.

D'après (52) le décalage $\Delta(\frac{1}{\lambda})_{1,2}$ entre les deux séries de bandes vaut :

$$\Delta(\frac{1}{\lambda})_{1,2} = \frac{2|\gamma|}{2\pi ne} \quad \text{où} \quad \gamma = \text{Arc cos} \cos \beta \cos \Delta\phi \quad (56a)$$

soit en fréquence

$$\Delta\nu_{1,2} = \frac{c|\gamma|}{\pi ne} \quad (56b)$$

Le décalage entre les deux séries dépend de l'angle β d'empilement et de la biréfringence Δn des lames par l'intermédiaire de γ .

La figure 12 illustre la répartition en longueur d'onde et en fréquence des bandes de réflexion sélective dans chacune des deux séries.

4.4 Remarque sur les indices associés dans les bandes de réflexion sélective

Chaque vibration itérative \vec{F}_1 et \vec{F}_2 présente une bande de réflexion sélective quand $\text{Arg} \alpha_{1,2} = q\pi$. En exprimant $\text{Arg} \alpha_{1,2}$ en fonction des indices m_1 et m_2 associés à \vec{F}_1 et \vec{F}_2 (3.3), on obtient :

$$m_{1,2} = \frac{\lambda}{2e} q \quad \text{ou encore} \quad 2e = q \frac{\lambda}{m_{1,2}} \quad (57)$$

C'est la forme habituelle de la condition de réflexion de Bragg [37] sur les divers dioptres de la pile.

Quand $\beta = \frac{\pi}{2}$ (lames croisées), $\gamma = \frac{\pi}{2}$ et d'après (51) la pile réfléchit les longueurs d'ondes telles que $4ne = (2q \pm 1)\lambda$; seules les composantes impaires de Bragg sont réfléchies.

5. DETERMINATION GRAPHIQUE DES LONGUEURS D'ONDE DE REFLEXION SELECTIVE

5.1 Principe de la méthode graphique

Si une valeur propre α de la matrice itérative \mathbf{M} est réelle, la pile réfléchit le rayonnement correspondant à la vibration itérative (de type oscillation évanescence) associée à α . La nature des valeurs propres de \mathbf{M} (cf. Tableau II, chapitre 2) dépend essentiellement du signe des quantités $g(2)$ et $g(-2)$ et le présent paragraphe en propose une méthode d'étude pratique. Les quantités $g(2)$ et $g(-2)$ sont, en fonction de $\cos \beta$, des trinômes du second degré :

$$g(\pm 2) = \cos^2 \beta \left[2(1 + \cos \phi_1 \cos \phi_2) + \left(\frac{n_1}{n_2} + \frac{n_2}{n_1} \right) \sin \phi_1 \sin \phi_2 \right] \\ \pm 4 \cos \beta (\cos \phi_1 + \cos \phi_2) \\ + \left[2(1 + \cos \phi_1 \cos \phi_2) - \left(\frac{n_1}{n_2} + \frac{n_2}{n_1} \right) \sin \phi_1 \sin \phi_2 \right] \quad (58)$$

Le coefficient de $\cos^2 \beta$ est toujours positif. Les deux équations

$$g(2) = 0 \text{ et } g(-2) = 0 \text{ ont le même discriminant } \sin^2 \phi_1 \sin^2 \phi_2 \left(\frac{n_1}{n_2} + \frac{n_2}{n_1} \right)^2 \geq 0.$$

Leurs racines sont donc réelles :

$$r(\pm) = \frac{2 [\cos \phi_1 + \cos \phi_2] \pm \left(\frac{n_1}{n_2} - \frac{n_2}{n_1} \right) \sin \phi_1 \sin \phi_2}{2 [1 + \cos \phi_1 \cos \phi_2] + \left(\frac{n_1}{n_2} + \frac{n_2}{n_1} \right) \sin \phi_1 \sin \phi_2} \quad (59)$$

pour $g(2) = 0$ et $-r(\pm)$ pour $g(-2) = 0$

Les trinômes $g(2)$ et $g(-2)$ peuvent être exprimés sous la forme

$$g(2) = [\cos \beta - r(+)] [\cos \beta - r(-)]$$

et

$$g(-2) = [\cos \beta + r(+)] [\cos \beta + r(-)]$$

et les signes de $g(2)$ et $g(-2)$ sont déterminés par la position de $\cos \beta$ par rapport à $r(+)$ et $r(-)$. Pour la discussion, la forme abrégée suivante est suffisante :

$$r(\pm) = r \pm \ell \quad (60)$$

où

$$r = \frac{2[\cos \phi_1 + \cos \phi_2]}{2[1 + \cos \phi_1 \cos \phi_2] + \left(\frac{n_1}{n_2} + \frac{n_2}{n_1}\right) \sin \phi_1 \sin \phi_2}$$

Pour les cas pratiquement intéressants, le rapport n_2/n_1 est voisin de l'unité et la grandeur ℓ est toujours très faible devant r . L'allure des courbes donnant les variations, en fonction de $\phi = (\phi_1 + \phi_2)/2$, des racines $r(\pm)$ de $g(2) = 0$ (les racines de $g(-2) = 0$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses) est donc connue en traçant la courbe $r(\phi)$. Des formes approchées de r et ℓ (60) peuvent être établies :

$$r \cong \frac{\cos \phi}{\cos \Delta\phi} \quad (61)$$

et

$$\ell = 1/4 (n_2/n_1 - n_1/n_2) (1 - r^2)$$

où

$$\Delta\phi = \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \phi \quad \text{soit encore} \quad \Delta\phi = \frac{\Delta n}{n} \phi$$

Ces relations sont utiles pour justifier les propriétés essentielles de la courbe $r(\phi)$ et les variations de $r(\pm)$ en fonction de ϕ qui s'en déduisent. Cette courbe présente des oscillations rapides de pseudo période 2π égale à celle du numérateur de r (61). L'amplitude des oscillations est modulée par une courbe enveloppe d'équation $1/\cos \Delta\phi$: cette courbe étant par définition symétrique par rapport à l'axe des abscisses sa période est moitié de celle de $\cos \Delta\phi$ soit $\pi(n_2 + n_1)/(n_2 - n_1)$. Cette enveloppe passe par les points d'ordonnées ± 1 pour les valeurs de $\Delta\phi$ multiples de π . Dans le cas général où n_2/n_1 est quelconque, la courbe enveloppe admet une asymptote verticale chaque fois que le dénominateur de r (61) est nul, soit pour $\Delta\phi = (2q + 1)\pi/2$ où q est un nombre entier.

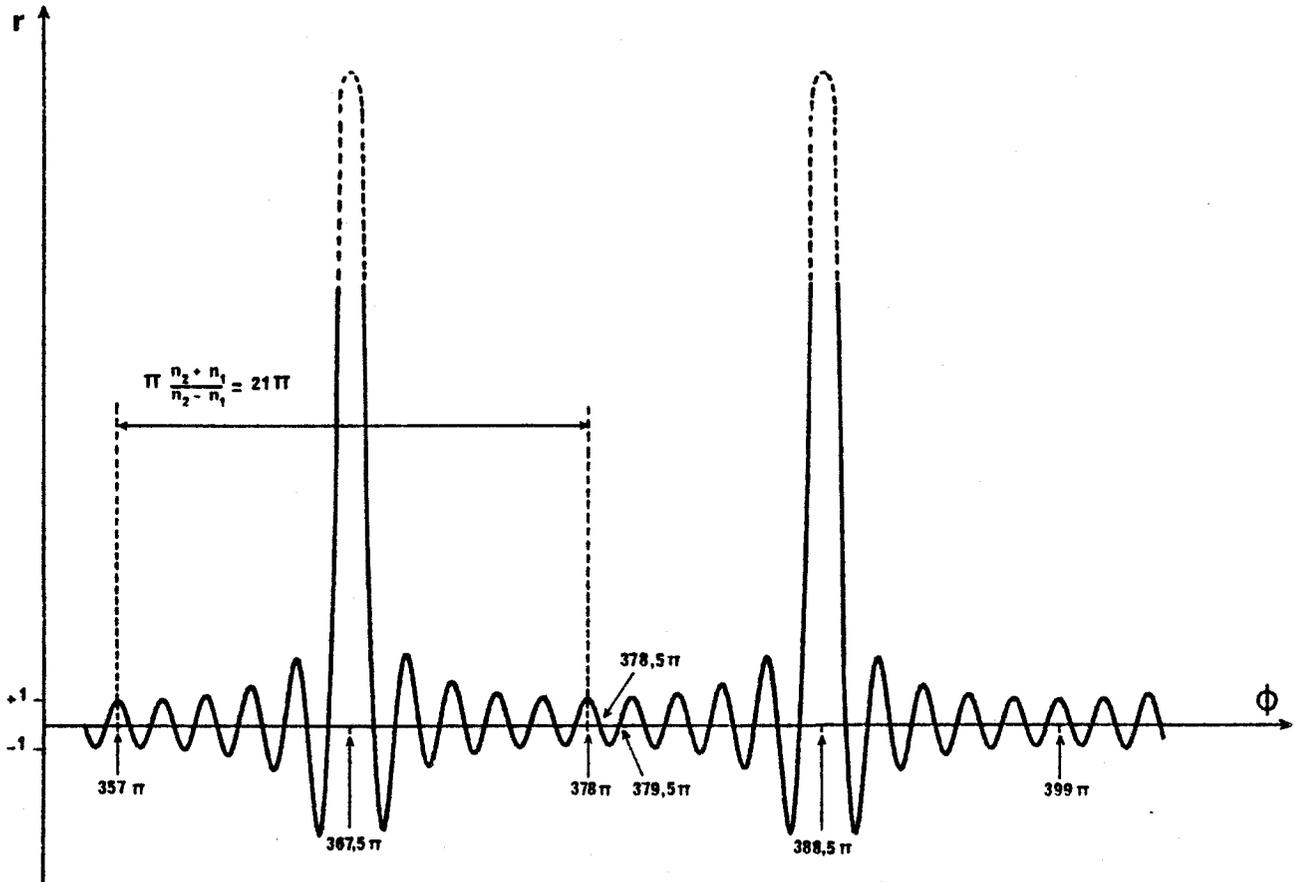


FIGURE 13 : Variations de la valeur moyenne r des racines de $g(2) = 0$ en fonction de l'angle $\phi = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$ moyen de déphasage subi par les privilégiées des lames lors de la traversée d'une lame pour le cas particulier (cf. texte) où $n_2/n_1 = 1,1$. La valeur moyenne $-r$ des racines de $g(-2) = 0$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

Les lames, telles que $\phi_2 - \phi_1 = (2q + 1)\pi$, sont alors demi-onde (à des épaisseurs onde près) pour la longueur d'onde considérée. De part et d'autre de ces asymptotes, r change de signe comme le dénominateur $\cos \Delta\phi$.

Dans le cas particulier où le rapport n_2/n_1 est de la forme $(b+1)/b$ où b est entier, $(n_2+n_1)/(n_2-n_1)$ est entier impair et la courbe $r(\phi)$ est périodique : sa période $\pi(n_2 + n_1)/(n_2 - n_1)$ est celle de la courbe enveloppe ; le numérateur et le dénominateur de r s'annulent simultanément pour les valeurs de ϕ multiples impaires de $[(n_2 + n_1)/(n_2 - n_1)] \pi/2$: l'amplitude de r présente alors un maximum maximum au lieu de tendre vers l'infini (cas général où n_2/n_1 est quelconque) ; pour les valeurs de ϕ de la forme $q\pi$ telles que $\Delta\phi = q'\pi$, c'est-à-dire pour les entiers q et q' tels que $q/q' = (n_2 + n_1)/(n_2 - n_1)$, le plus petit maximum de la courbe $r(\phi)$ coïncide avec le minimum d'ordonnée $+1$ de la branche positive de la courbe enveloppe. Ce cas est illustré par la figure 13 tracée avec la valeur arbitraire $n_2/n_1 = 1,1$ pour $q = 357, 358$ et $q' = 17, 18, 19$.

Toujours dans le cas où n_2/n_1 est de la forme $(b + 1)/b$, quand ϕ_2 ou $\phi_1 = 2q\pi$ [alors $\phi = q\pi(n_2 + n_1)/n_2$ ou $q\pi(n_2 + n_1)/n_1$] :

$$r(\pm) = 1$$

Entre ces deux valeurs de ϕ , $\cos \Delta\phi$ est inférieur à l'unité et la courbe présente un maximum supérieur à l'unité (figure 13).

De même si ϕ_2 ou $\phi_1 = (2q + 1)\pi$ [alors $\phi = (2q + 1)\pi(n_2 + n_1)/2n_2$ ou $(2q + 1)\pi(n_2 + n_1)/2n_1$] :

$$r(\pm) = -1$$

Entre ces deux valeurs de ϕ la courbe présente un minimum inférieur à -1 (figure 14).

D'après (61) r s'annule quand $\phi = (2q + 1)\pi/2$.

D'après (61) la grandeur l est maximum quand $r = 0$ et nulle quand $r = \pm 1$. Pour les valeurs de ϕ comprises entre 0 et π environ, les racines $r(\pm)$ de $g(2)$ et $-r(\pm)$ de $g(-2) = 0$ varient selon les courbes de la figure 14.

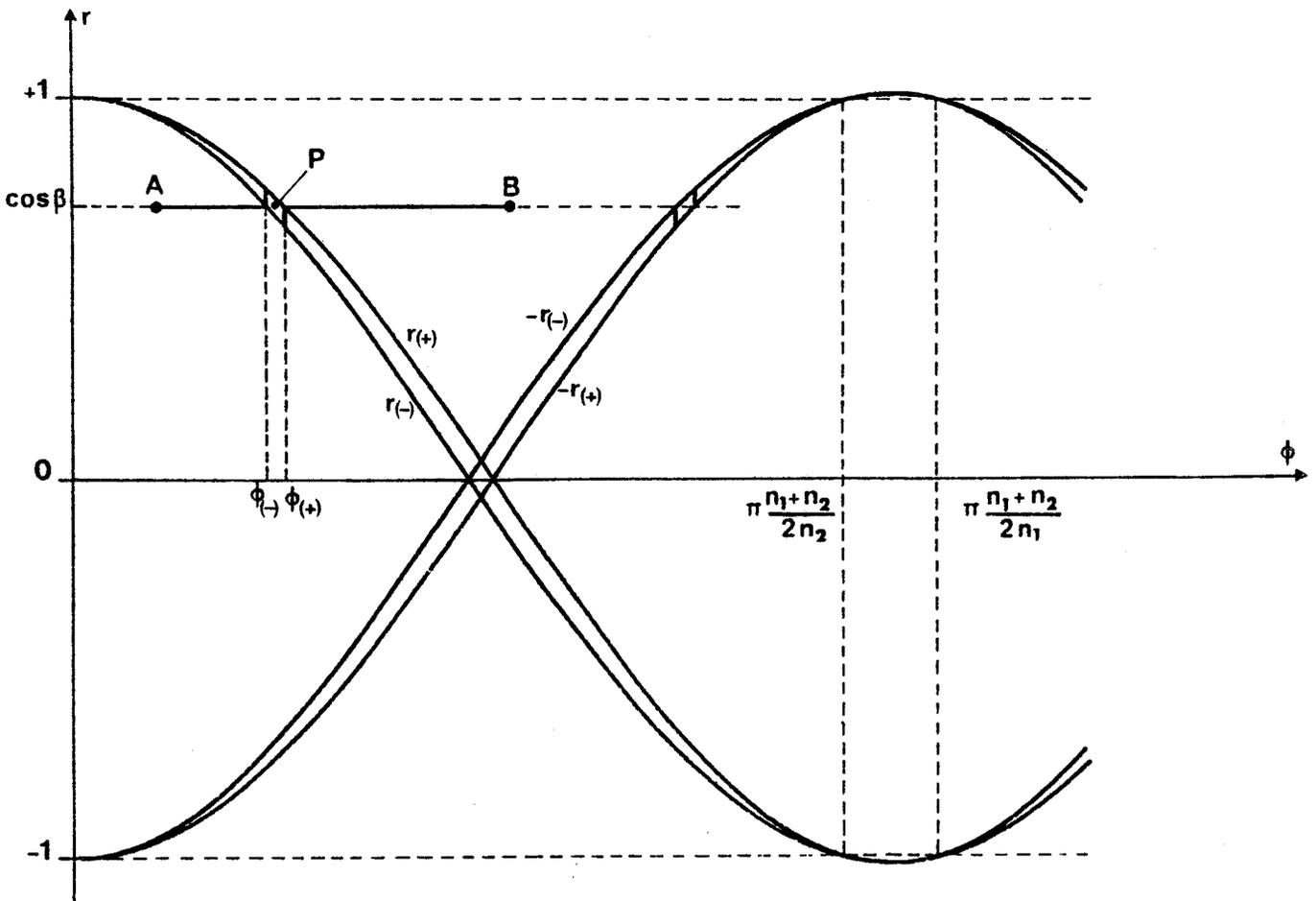


FIGURE 14 : Variations des racines $r \pm l$ de $g(2) = 0$ et $-(r \pm l)$ de $g(-2) = 0$ en fonction de l'angle $\phi = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$, demi-somme des déphasages subis, par chacune des vibrations privilégiées des lames lors de la traversée d'une lame telle que $n_2/n_1 = 1,1$. La figure 13 donne l'allure des variations de la valeur moyenne de r des racines de $g(2) = 0$ sur un large domaine de variation de ϕ .

Le choix des lames (e, n_1, n_2) et de la longueur d'onde du rayonnement incident fixe la valeur de ϕ . La torsion de la pile impose la valeur de $\cos \beta$. Une pile de lames telles que $n_2/n_1 = 1,1$ éclairée par un rayonnement monochromatique est représentée par un point de l'espace de la figure 14 compris entre les droites d'ordonnées ± 1 . Sur cette figure le segment de droite AB représente la même pile éclairée en lumière non monochromatique.

Soit alors (figure 14) le point P représentatif de la pile précédente éclairée par la radiation de longueur d'onde moyenne λ ; P est situé entre les deux courbes $r(+)$ et $r(-)$ racines de $g(2) = 0$; dans ce cas $g(2)$ est négatif tandis que $g(-2)$ est positif et (tableau II, chapitre 2) deux valeurs propres sont complexes de module unité : il leur correspond deux vibrations itératives d'amplitudes constantes dont les phases varient en sens inverses. Les deux autres valeurs propres sont réelles inverses l'une de l'autre, deux oscillations évanescentes leur sont associées. Si la lame $k = 1$ de la pile définie par P est éclairée, la part de l'énergie incidente correspondant à l'excitation de la vibration itérative à indice d'extinction d'itération $\chi > 0$ est totalement réfléchi.

Chaque fois que le segment représentatif de la pile éclairée sous l'incidence normale par des rayonnements à spectre continu coupe les courbes $r(+)$ et $r(-)$, la pile présente un domaine de réflexion sélective. Alors qu'une seule bande réflexion sélective est connue pour les mésophases torsées on peut s'attendre à des domaines multiples avec des piles hélicoïdales de lames biréfringentes. De manière générale, d'après la forme (60) des racines de $g(2) = 0$, le nombre 1 restant très petit par rapport à r , les courbes $r(+)$ et $r(-)$ sont très proches l'une de l'autre : les bandes de réflexion sélective sont étroites et le phénomène se produit donc à chaque fois que la condition $\cos \beta = r(\phi)$ [ou $\cos \beta = -r(\phi)$ pour $g(-2) = 0$] est pratiquement réalisée [38].

Diverses méthodes d'étude théorique des conditions expérimentales à réunir pour réaliser une pile de lames présentant le phénomène de réflexion sélective peuvent être envisagées. Pour la discussion $\cos \beta$ est supposé positif : seul le demi-plan supérieur de la figure 13 est donc à considérer : cependant, pour que tous les cas possibles de réflexion sélective puissent être envisagés, la figure doit être complétée par la courbe

$-r(\phi)[g(-2) = 0]$ symétrique de $r(\phi)$ par rapport à l'axe des abscisses (la figure 14 reproduit une faible partie de toutes les courbes utiles). Le choix de $\cos \beta$ positif signifie que la détermination principale de l'angle entre lignes neutres de même nom de deux lames consécutives varie entre $-\pi/2$ et $\pi/2$; si β est choisi positif la pile est droite sinon elle est gauche : les possibilités d'existence du phénomène de réflexion sélective ne dépendent pas du sens de la torsion mais seulement de $|\beta|$. Il faut enfin noter que dans la discussion qui suit, les phénomènes de dispersion sont négligés en première approximation.

5.2 L'angle entre deux lames consécutives est fixé

La droite $\cos \beta = \text{Cte}$ coupe toutes les arches des courbes $r(\phi)$ et $-r(\phi)$ (figure 15) puisque les sommets de ces arches sont d'ordonnée au moins égale à l'unité : pour une même valeur de β , sur une période des courbes $r(\phi)$ et $-r(\phi)$, un nombre fini de valeurs de $\phi = f(e/\lambda)$ conviennent pour réaliser des piles présentant le phénomène de réflexion sélective. Si la longueur d'onde λ est donnée, une série de valeurs discrètes des épaisseurs e des lames à empiler conduit au phénomène ; pour une épaisseur des lames donnée une série de longueurs d'onde peuvent être réfléchies.

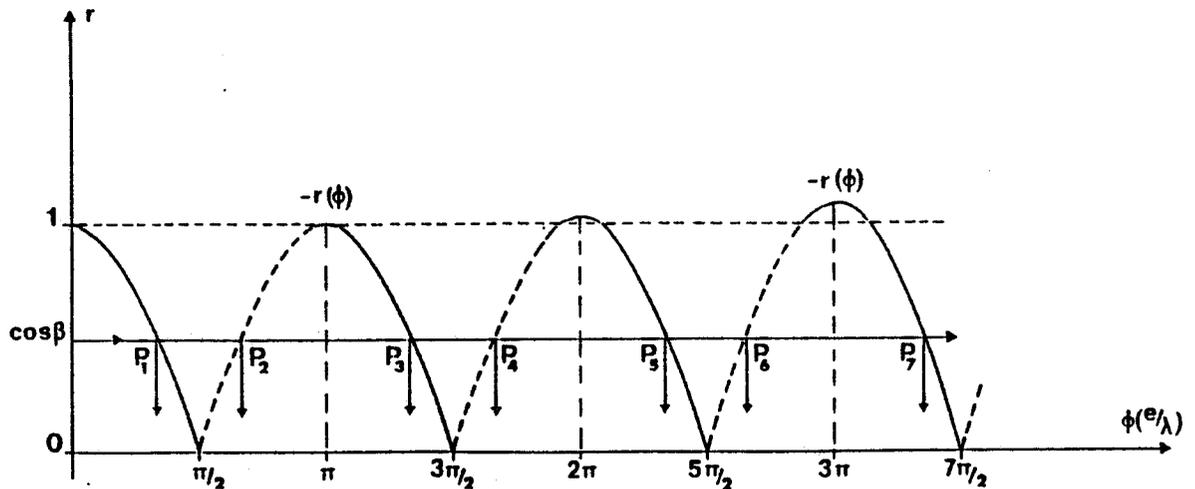


FIGURE 15 : Recherche des points représentatifs de piles présentant le phénomène de réflexion sélective quand l'angle β est fixé (figure tracée en supposant $n_2/n_1 = 1,1$).

Chaque arche des courbes $\pm r$ fournit deux intersections qui peuvent être considérées comme les composantes d'un doublet centré sur le sommet de l'arche correspondante. La distance entre les composantes des doublets évolue lentement quand ϕ croît à cause de la modulation en $1/\cos \Delta\phi$ de l'amplitude des arches. Pour une arche, l'approximation $\cos \Delta\phi = \text{cste}$ est justifiée et les abscisses $\phi(+)$ et $\phi(-)$ des deux composantes d'un doublet sont telles que $\cos \beta = \frac{\cos \phi(\pm)}{\cos \Delta\phi}$, d'où :

$$\phi(\pm) \cong q\pi \pm \gamma \quad \text{où } \gamma = \text{Arc cos} [\cos \beta \cos \Delta\phi] \quad \text{et } q \text{ entier } > 0 ;$$

On retrouve la condition de réflexion sélective (50) établie au § 4.1 du présent chapitre.

Si les variations de ϕ ne dépassant pas quelques π dans les conditions expérimentales choisies, $\Delta\phi$ peut être considérée comme constant pour plusieurs arches successives : les distances entre composantes des doublets sont pratiquement égales. Dans les cas particuliers où la précision graphique est insuffisante, la résolution numérique de l'équation $\cos \beta = \pm r(\phi)$ s'impose.

Quand $\Delta\phi$ est suffisamment faible pour que $\cos \Delta\phi$ reste voisin de 1 (cas de la figure 14 par exemple), la courbe $r(\phi)$ est pratiquement confondue avec la courbe $\cos \phi$ et les intersections de la droite d'ordonnée $\cos \beta$ avec $\pm r(\phi)$ ont pour abscisses :

(62)

$$\phi(\pm) = \frac{2\pi ne}{\lambda} \cong q\pi \pm \beta \quad q \text{ est entier } > 0, \beta \text{ est } > 0 \text{ pour une pile dextre ; on reconnaît la condition de réflexion sélective pour une pile de lamelles très minces (50) ou une mésophase torse de même pas.}$$

Si les lames à biréfringence rectiligne constituant la pile sont approximativement demi-onde pour la longueur d'onde λ , leur retard $2\Delta\phi$ est tel que $\Delta\phi$ est un multiple impair de $\pi/2$: la courbe enveloppe de $\pm r(\phi)$ tend vers l'infini et les arches ont des flancs presque verticaux. La distance entre composantes d'un même doublet est maximale et pratiquement indépendante de l'angle d'empilement β choisi ; elle correspond (figure 13) à une variation de ϕ approximativement égale à 2π . La distance entre

les composantes les plus proches de deux doublets successifs est minimale. La largeur des domaines de réflexion sélective tend vers zéro quand $\Delta\phi$ tend vers $\pi/2$ c'est à dire quand les lames sont parfaitement demi-onde.

L'axe des abscisses ($\beta = 90^\circ$) représente les piles comportant exactement quatre lames par pas. Dans ce dernier cas, les valeurs de ϕ correspondantes aux zones d'existence de la réflexion sélective sont voisines de $(2q + 1)\pi/2$, pour lesquelles $r(\phi)$ et $-r(\phi)$ s'annulent en même temps. Les trinômes $g(2)$ et $g(-2)$ (cf tableau II du chapitre 2) sont tous deux négatifs : la pile réfléchit la totalité de la lumière incidente. La plus faible valeur de ϕ étant $\pi/2$, en lumière monochromatique de longueur d'onde λ , les piles qui conviennent sont constituées de lames identiques croisées d'épaisseurs voisines de $e_0 = (2q + 1)\lambda/2 (n_1 + n_2)$. Une pile de lames d'épaisseur e_0 réfléchit les ondes monochromatiques de longueurs d'onde voisines de $\lambda = 2e_0(n_1 + n_2)/(2q + 1)$.

5.3 Distinction graphique des deux séries de bandes de réflexion sélective

La vibration itérative droite \vec{F}_1 est réfléchiée chaque fois que $\text{Arg } \alpha_1$ atteint une valeur multiple de π (§ 4.) ; pour une pile dextre et tant que γ reste positif (§3.2), cette condition est remplie pour les longueurs d'onde vérifiant la relation (50) :

$$\phi = \frac{2\pi ne}{\lambda} \cong q\pi + \gamma \quad \text{où } \gamma = \text{Arc cos} [\cos \beta \cos \Delta\phi] \quad (50)$$

Dans cette relation l'entier q peut prendre la valeur $q = 0$: les lames de la pile et la longueur d'onde sont alors telles que $\phi < \pi/2$ et $\Delta\phi = \frac{2\Delta n}{n} \phi \cong 0$. La condition de réflexion sélective (50) est $\phi \cong \beta$; elle correspond à l'intersection de la droite d'ordonnée $\cos \beta$ avec la première demi arche de la courbe $r(\phi)$ de la figure 15. La condition de réflexion sélective de \vec{F}_1 est à nouveau remplie chaque fois que ϕ croît approximativement de π . Les intersections de la droite d'ordonnée $\cos \beta$ avec les flancs droits des arches $\pm r(\phi)$ (portions de courbes tracées en trait plein) définissent donc les bandes de réflexion sélective de la vibration itérative droite.

Pour la même pile dextre, la condition de réflexion sélective de la vibration itérative gauche est remplie pour les longueurs d'onde vérifiant la relation :

$$\phi = \frac{2\pi ne}{\lambda} \cong q\pi - \gamma \quad \text{où} \quad \gamma = \text{Arc cos} [\cos \beta \cos \Delta\phi] \quad (50)$$

Dans cette relation, l'entier q ne peut prendre de valeur inférieure à l'unité car ϕ est toujours positif. Pour $q = 1$, $\gamma = \text{Arc cos} [\cos \beta \cos \Delta\phi] \cong \beta$ car l'angle de déphasage $\Delta\phi$ est pratiquement nul : $\phi \cong \pi - \beta$ varie donc entre $\pi/2$ et π puisque l'angle d'empilement β est compris entre 0 et $\pi/2$ pour une pile droite. La première bande de réflexion sélective de la vibration gauche est située sur le flanc gauche de la première arche entière des courbes de la figure 15. La condition de réflexion sélective (50) étant à nouveau remplie à chaque accroissement π de la variable ϕ , les intersections de la droite d'ordonnée $\cos \beta$ avec les flancs gauches (tracés en pointillés) des arches successives définissent les bandes de réflexion de la vibration itérative gauche par une pile droite.

Soit donc en résumé une pile dextre ($\beta > 0$) éclairée en lumière blanche : les rayonnements de longueurs d'onde λ telles que les points représentatifs de l'ensemble des paramètres (e , β , Δn , n et λ) appartiennent aux portions de courbes de la figure 15 tracées en trait plein sont réfléchis sous forme de vibrations polarisées elliptiquement à droite. Quand les points représentatifs appartiennent aux portions de courbe tracées en pointillés, les rayonnements incidents de la longueur d'onde correspondantes sont réfléchis sous forme de vibrations polarisées elliptiquement à gauche.

Si la pile considérée est sénestre ($\beta < 0$) la même courbe peut être utilisée : les courbes en trait plein correspondent à la réflexion de vibrations elliptiques gauches et les courbes en pointillés à la réflexion de vibrations elliptiques droites.

On retrouve donc les deux séries de bandes de réflexion sélective distinguées au § 4.3 ; rappelons que dans ce paragraphe ont été précisées les expressions littérales donnant la répartition spectrale (55 a et b) des bandes dans une même série ainsi que le décalage spectral (56 a et b) entre les deux séries.

5.4 L'angle β entre deux lames consécutives est très faible.

Le cas particulier des mésomorphes à torsion.

Pour les valeurs faibles de β , la droite $\cos \beta \cong 1$ coupe (figure 14 et 15) la première demi-arche de $r(\phi)$ pour des valeurs très faibles de ϕ : ce cas correspond aux milieux biréfringents à torsion continue (§ 4.2 du chapitre 2). Les autres intersections de la droite $\cos \beta \cong 1$ avec les courbes $\pm r(\phi)$ sont constituées par des doublets approximativement centrés sur les sommets des arches, d'abscisses $\phi \cong q\pi \pm \Delta\phi$ d'après (50).

Soit une phase cholestérique présentant dans le visible une bande de réflexion sélective pour la longueur d'onde moyenne λ . La pile équivalente est représentée par un point proche du sommet de la première demi-arche de $r(\phi)$. Ce point a une abscisse φ très faible. Le premier doublet de réflexion sélective que présente la pile quand ϕ croît à partir de φ a pour abscisse moyenne $\phi \cong \pi$: si la dispersion des indices est négligée, la longueur d'onde moyenne λ' réfléchi est telle que :

$$2\pi ne = \varphi \lambda = \lambda' \pi$$

Le rapport φ/π est très faible et la longueur d'onde $\lambda' \ll \lambda$ appartient au domaine des rayons X. Cela signifie que la bande de réflexion présentée par les cholestériques dans le visible est unique [38].

Le fait que cette bande soit représentée par un point proche du sommet de la première demi-arche permet de distinguer aisément les deux séries de bandes de réflexion sélective des piles de lames. Une mésophase dextre réfléchit une vibration circulaire droite tandis qu'une mésophase sénestre réfléchit une vibration circulaire gauche. Pour une pile hélicoïdale de lames, la plus grande longueur d'onde λ_{\max} (54) qui peut être réfléchi correspond à un point représentatif de la pile qui appartient à la première demi-arche de la figure 15. Si la pile est dextre, le rayonnement de longueur d'onde λ_{\max} est réfléchi sous forme d'une vibration droite et les flancs droits des arches (en pointillés sur la figure 15) définissent la série des bandes de réflexion de vibrations elliptiques droites. Pour une pile sénestre, la situation est inverse.

La géométrie de piles équivalentes aux mésophases à torsion dans le domaine de longueurs d'ondes de la lumière visible semble difficile à réaliser puisque β et ϕ doivent être simultanément infiniment petits. Cependant la remarque générale suivante autorise la réalisation de piles ayant des propriétés optiques similaires à celles des milieux biréfringents à torsion continue : les caractéristiques des vibrations itératives étant des fonctions des lignes trigonométriques de ϕ_1 et ϕ_2 (déphasages subis par chaque privilégiée lors de la traversée d'une lame), une modification de l'épaisseur des lames telle que ϕ_1 et ϕ_2 deviennent $\phi_1 + 2q_1\pi$ et $\phi_2 + 2q_2\pi$ laisse les états de polarisation et les indices de réfraction des vibrations itératives inchangés. La quantité E dont peut être augmentée l'épaisseur e d'une lame est multiple d'une épaisseur onde pour la radiation de longueur d'onde λ dans le vide :

$$E = (q_2 - q_1)\lambda / (n_2 - n_1)$$

Si $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$, avec un milieu d'indices tels que $n_2/n_1 = 1,02$ et $n = 1,5$, la plus faible épaisseur E à réaliser ($q_2 = 101$, $q_1 = 100$) est de $20 \mu\text{m}$. De manière générale les entiers q_1 et q_2 doivent être grands et tels que $q_2/q_1 = \phi_2/\phi_1 = n_2/n_1$. Expérimentalement cette condition peut être remplie en faisant varier les indices n_2 et n_1 avec la température.

5.5 Caractéristiques géométriques de piles présentant le phénomène de réflexion sélective

Les angles β et ϕ peuvent être écrits $\beta = 2\pi/t$ et $\phi = 2\pi\bar{n}e/\lambda$ où $t > 4$ est un nombre réel positif et $\bar{n} = (n_1 + n_2)/2$ est l'indice moyen d'une lame de la pile. La relation $\beta = \left(\frac{\lambda}{nte}\right)\phi$ qui en découle permet de tracer $\cos \beta$ en fonction de ϕ pour diverses valeurs de λ/nte . L'angle β est tel que $|\beta| < \pi/2$: seules les intersections de la première arche de la courbe $\cos \beta$ avec les courbes $r(\phi)$ et $-r(\phi)$ (figure 16) sont à considérer. β étant a priori quelconque, le nombre t n'est pas entier en général et la notion de pas ne peut être appliquée à la pile dont le nombre de lames discrètes est toujours entier. Cependant, si β est exprimé en fonction de l'épaisseur e d'une lame sous la forme $\beta = \frac{2\pi e}{te}$, le dénominateur (te) représente la distance au bout de laquelle les lignes neutres des lames ont tourné exactement de 2π . Le paramètre λ/nte apparaît donc comme l'équivalent de la torsion réduite λ/np qui est un

paramètre essentiel pour décrire les propriétés optiques des milieux biréfringents continus torses de pas p . L'étude qui suit propose une solution à la question suivante : étant donné un milieu biréfringent à torsion réduite λ/np connue, quelles sont les piles hélicoïdales de lames réfléchissant sélectivement la radiation λ ?

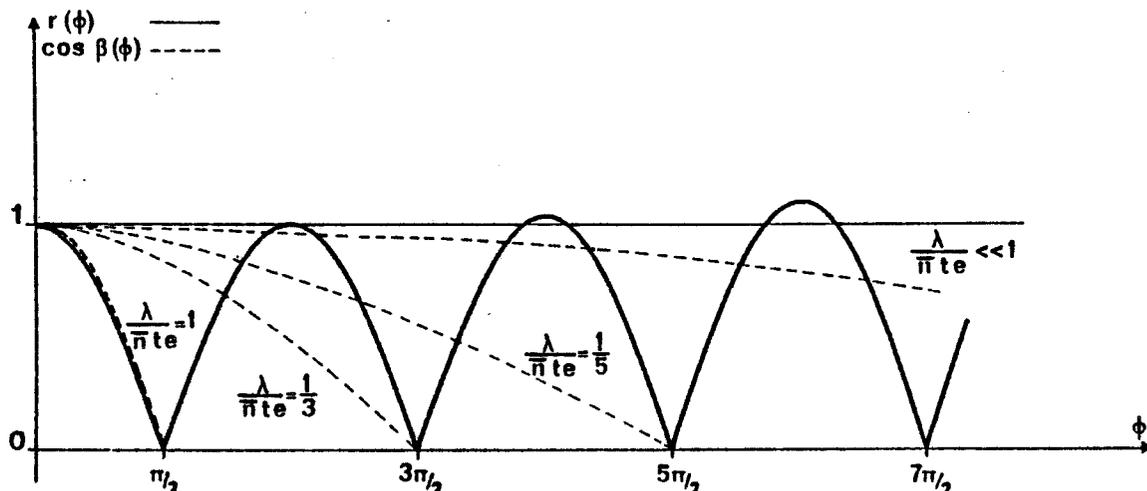


FIGURE 16 : Possibilités d'existence de piles présentant le phénomène de réflexion sélective pour diverses valeurs de la quantité $\lambda/\bar{n}te$.

(Figure tracée en supposant $n_2/n_1 = 1,1$).

Si λ/nte est faible devant l'unité, $\cos \beta$ est une fonction trigonométrique de ϕ de période $2\pi/(\lambda/nte)$ très grande devant celle des oscillations rapides de r et $-r$. La courbe $\cos \beta = f(\phi)$ coupe successivement chacune des arches de $r(\phi)$ et $-r(\phi)$ en deux points dont l'abscisse moyenne est celle du sommet de l'arche soit $\phi = q\pi$. Comme précédemment, l'ordonnée d'une intersection fixe l'angle d'empilement β des lames tandis que l'abscisse permet de déterminer l'épaisseur des lames à réaliser pour réfléchir la radiation λ (ou la longueur d'onde réfléchie si l'épaisseur des lames est fixée à l'avance).

Quand la quantité λ/nte croît en restant inférieure à l'unité, le nombre d'intersections de $\cos \beta$ avec $r(\phi)$ et $-r(\phi)$ diminue. Pour les valeurs de λ/nte égales à $1/m$ où m est impair différent de l'unité, $\cos \beta$ s'annule pour une valeur de ϕ qui annule simultanément $r(\phi)$ et $-r(\phi)$. Ces points particuliers communs aux courbes $\cos \beta$, r et $-r$ caractérisent les piles comportant quatre lames par pas dont l'existence a déjà été envisagée à plusieurs reprises. Les autres points communs à $\cos \beta$ et r ou $-r$ sont au nombre de $m - 2$: ils représentent des piles pour lesquelles la notion de pas ne peut être utilisée puisque le nombre t n'est pas entier en général.

Le cas λ/nte voisin de l'unité présente un intérêt particulier car β est alors pratiquement égal à ϕ . L'angle β restant compris entre $-\pi/2$ et $+\pi/2$, le dénominateur de $r \cong \frac{\cos \beta}{\cos \Delta\phi}$ (61) reste très proche de l'unité et les premières demi-arches des courbes $\cos \beta$ et $r(\phi)$ sont pratiquement confondues (figure 16) : la zone d'existence du phénomène de réflexion sélective est une bande large si λ/nte est voisin de 1. La limite inférieure de cette bande représente les cholestériques et la limite supérieure des piles de lames d'épaisseurs inférieures à $\lambda/4n$. Si λ/nte est supérieure à l'unité la courbe $\cos \beta = f(\phi)$ coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse inférieure à $\pi/2$: il n'existe pas de pile pouvant présenter le phénomène de réflexion sélective si $\lambda/nte > 1$.

Si la période $2\pi \frac{n_2 + n_1}{n_2 - n_1}$ de la courbe enveloppe de r (cf. § 5.1) est multiple de 2π , pseudo-période des oscillations rapides, la courbe $r(\phi)$ est périodique de période $2\pi \frac{n_2 + n_1}{n_2 - n_1}$. La coïncidence entre les courbes $\cos \beta = f(\phi)$ et $r(\phi)$ se reproduit pour les valeurs de ϕ comprises entre $2\pi \frac{n_2 + n_1}{n_2 - n_1}$ et $2\pi \frac{n_2 + n_1}{n_2 - n_1} + \frac{\pi}{2}$. Les lames considérées sont alors telles que $\phi_2 - \phi_1 = 2\Delta\phi$ vaille approximativement 4π et leur épaisseur est voisine de celle de lames deux fois onde. D'après la forme (61) de $r(\phi)$, la coïncidence entre $\cos \beta$ et $-r(\phi)$ peut aussi être obtenue, toujours dans le cas où $\frac{n_2 + n_1}{n_2 - n_1}$ est entier, pour les valeurs de ϕ voisines de $\pi \frac{n_2 + n_1}{n_2 - n_1}$. Les lames constituant la pile sont alors d'épaisseur approximativement onde.

6. LARGEUR DES DOMAINES DE REFLEXION SELECTIVE

La droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par P (figure 14) coupe les courbes $r(+)$ et $r(-)$ en deux points d'abscisses $\phi(+)$ et $\phi(-)$: la largeur $\delta\phi = \phi(+)-\phi(-)$ de la bande comprise entre $r(+)$ et $r(-)$ dépend de l'ordonnée de P. Elle est rigoureusement nulle quand P est à l'intérieur des courbes $r(+)=r(-)=\pm 1$; elle est maximale sur l'axe des abscisses ; sa valeur peut être calculée à partir de la pente de $r(\phi)$ au voisinage de P :

$$\delta\phi = 2\ell / \left(\frac{dr}{d\phi} \right)_P \quad \text{car (60) } r(\pm) = r(\phi) \pm \ell$$

Sur une arche de la courbe de la figure 14, la quantité $\cos \Delta\phi$ peut être considérée comme constante. La pente de $r(\phi) = \frac{\cos \phi}{\cos \Delta\phi}$ (61) vaut alors :

$$\frac{dr}{d\phi} \cong - \frac{\sin \phi}{\cos \Delta\phi}$$

La condition de réflexion sélective étant remplie quand est réalisée la condition $\cos \beta \cong r$, la largeur $\delta\phi$ peut être exprimée sous la forme :

$$\delta\phi = -\frac{2\Delta n}{n} \frac{(1-r^2)}{\sin \phi} \quad \cos \Delta\phi = -\frac{2\Delta n}{n} \frac{\sin^2 \beta \cos \Delta\phi}{\sqrt{1 - \cos^2 \beta \cos^2 \Delta\phi}} \quad (63)$$

Vers le sommet de l'arche, β tend vers zéro et $\delta\phi$ s'annule ; sur l'axe des abscisses, β vaut $\frac{\pi}{2}$ et les bandes de réflexion sélective sont obtenues pour des valeurs de ϕ multiples impaires de $\pi/2$. La largeur des bandes est maximale :

$$\delta\phi_{\max} = \frac{2\Delta n}{n} \cos \Delta\phi \quad (64)$$

Pour une même valeur de $\cos \beta = r$, les fluctuations de $\cos \Delta\phi$ pour quelques arches successives sont faibles ; les bandes de réflexion sélective, quelque soit la série à laquelle elles appartiennent (§ 5.3) ont sensiblement même largeur $\delta\phi$. Cette largeur est une fonction croissante de la biréfringence relative $\frac{2\Delta n}{n}$ des lames.

La largeur relative des bandes spectrales réfléchies sélectivement se déduit aisément de la valeur de $\delta\phi$ (63) :

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\delta\phi}{\phi} \quad \text{où} \quad \phi = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$$

est la variation moyenne de phase à la traversée d'une lame.

La quantité $\frac{\lambda}{\phi}$ est indépendante de la longueur d'onde si la dispersion est négligée. Quand $0 < \beta < \pi/2$, la largeur spectrale des bandes peut être calculée à partir des relations (63) et (65) :

$$\delta\lambda = \frac{\lambda^2 \Delta n}{\pi n^2 e} \frac{\sin^2 \beta \cos \Delta\phi}{\sqrt{1 - \cos^2 \beta \cos^2 \Delta\phi}} \quad (66)$$

en longueur d'onde, ou

$$\delta\nu = \frac{c \Delta n}{\pi n^2 e} \frac{\sin^2 \beta \cos \Delta\phi}{\sqrt{1 - \cos^2 \beta \cos^2 \Delta\phi}} \quad (67)$$

en fréquence.

. Quand β est nul, la largeur $\delta\lambda$ des bandes réfléchies est rigoureusement nulle ; il ne peut en effet y avoir de réflexion sélective dans un empilement non torse de lames biréfringentes jointives.

. Quand β est très petit, la première longueur d'onde réfléchie est égale à np où le pas $p = \frac{2\pi e}{\beta}$ est celui d'un milieu torsadé selon la même hélice que l'empilement ; on retrouve les propriétés des cholestériques. Les autres longueurs d'onde λ_q que peut réfléchir la pile valent approximativement $2ne/q$ et sont infiniment petites devant $\lambda = np$.

Soit alors $\delta\lambda$ la largeur de la première bande de réflexion sélective. Pour les valeurs de ϕ très petites, $r(+)$ et $r(-)$, (59) se comportent comme $1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\phi n_1}{n}\right)^2$ et $1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\phi n_2}{n}\right)^2$: ce sont deux paraboles de même sommet, homothétiques l'une de l'autre. Il en résulte que la quantité $\frac{\delta\lambda}{\lambda}$ ($= \frac{\delta\phi}{\phi}$, cf figure 13) conserve une valeur constante sur un domaine de variation de $\phi(-)$ trop important pour que la mesure expérimentale de $\delta\lambda/\lambda$ permette de déterminer $\phi(-)$ avec précision ce qui exclut une méthode optique d'estimation de l'épaisseur des lames et de l'angle β pour les mésophases torsadées.

. Quand $\beta = \pi/2$, les longueurs d'onde λ_+ et λ_- (51) coïncident, la pile réfléchit totalement les radiations de longueur d'onde $\lambda = 4ne/2q+1$ quel que soit l'état de polarisation de la lumière ; la largeur spectrale des bandes réfléchies est alors maximale et vaut :

$$\delta\lambda_{\max} = \frac{\lambda^2 \Delta n}{\pi n^2 e} \cos \frac{\pi \Delta ne}{\lambda} \quad (76)$$

en longueur d'onde, ou

$$\delta\nu_{\max} = \frac{c \Delta n}{\pi n^2 e} \cos \frac{\pi \Delta ne}{\lambda} \quad (77)$$

en fréquence, avec $e \cong \frac{(2q+1)}{4n}$

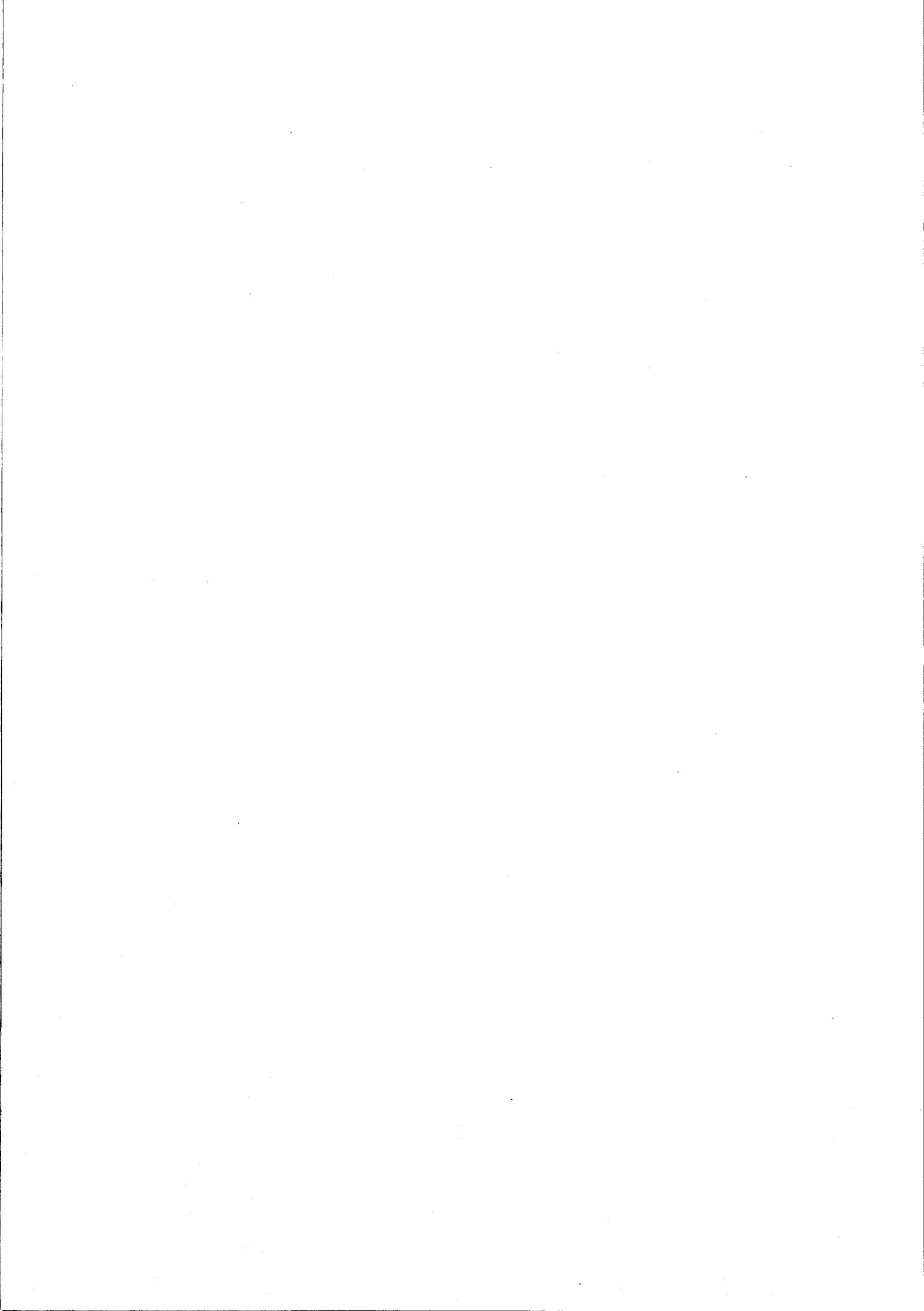
7. CONCLUSION

Les modifications de phase subies par les vibrations itératives entre deux dioptries successifs d'une pile hélicoïdale d'extension infinie sont étudiées. Le déphasage correspondant entre les deux vibrations itératives relatives à un même sens de propagation dépend de l'angle d'empilement β et du retard $2\Delta\phi$ des lames constituant la pile.

Une vibration itérative dont la phase croît exactement de π d'un dioptre au suivant subit, pour les longueurs d'onde concernées, le phénomène de réflexion sélective. Une méthode graphique simple permet de déterminer les bandes de réflexion sélective que peut présenter une pile hélicoïdale de lames pour tout angle d'empilement. La longueur d'onde maximale que peut réfléchir la pile correspond à la longueur d'onde réfléchie sélectivement par une mésophase torsadée de même pas et de même indice moyen que la pile.

Les bandes de réflexion se répartissent en deux séries infinies dont les caractéristiques essentielles sont décrites quantitativement. Chaque série est relative à un mode elliptique particulier : si la pile réfléchit une elliptique gauche, elle transmet une elliptique droite quasi-orthogonale à la précédente.

Le phénomène peut être envisagé comme une réflexion de Bragg polarisée [39]. Les variations de phase entre deux dioptries permettent de définir des "indices de réfraction" associés à chaque vibration itérative et de calculer les longueurs d'onde réfléchies.



CHAPITRE 4

PHÉNOMÈNES DE BIRÉFRINGENCE ELLIPTIQUE PRÉSENTÉS PAR QUELQUES PILES HÉLICOÏDALES D'EXTENSION FINIE ÉCLAIRÉES SOUS L'INCIDENCE NORMALE : OBSERVATIONS EXPÉRIMENTALES ET INTERPRÉTATIONS

1. INTRODUCTION

Tous les résultats exposés aux chapitres précédents ont été obtenus en supposant la pile semi-infinie. Les propriétés des vibrations itératives et les conditions de leur propagation ont été établies en considérant que de part et d'autre de deux lames successives quelconques de la pile existent une infinité de lames identiques. Nous nous proposons maintenant de montrer comment les vibrations itératives permettent d'étudier la propagation de la lumière dans une pile hélicoïdale comportant un nombre J fini de lames jointives ; la pile est immergée dans un milieu isotrope inactif d'indice N et elle est éclairée d'un seul côté sous l'incidence normale.

Dans ce chapitre nous ne considérons que les vibrations itératives qui se propagent au sens habituel du terme, ce qui exclut les bandes de réflexion sélective, très étroites bien qu'en nombre infini.

2. PILES D'EXTENSION FINIE ÉCLAIRÉES EN LUMIÈRE MONOCHROMATIQUE

2.1 Méthode d'étude générale *

Nous utiliserons les deux référentiels suivants :
tout d'abord celui que nous avons utilisé aux chapitres précédents, en particulier pour définir et calculer les vibrations itératives : référentiel tournant

* Ainsi qu'il a été mentionné en introduction, les bandes de réflexion sélective ne sont pas étudiées au chapitre 4. Cependant, l'étude proposée dans ce paragraphe est rigoureuse et s'applique sans restrictions à l'intérieur des bandes de réflexion sélective également.

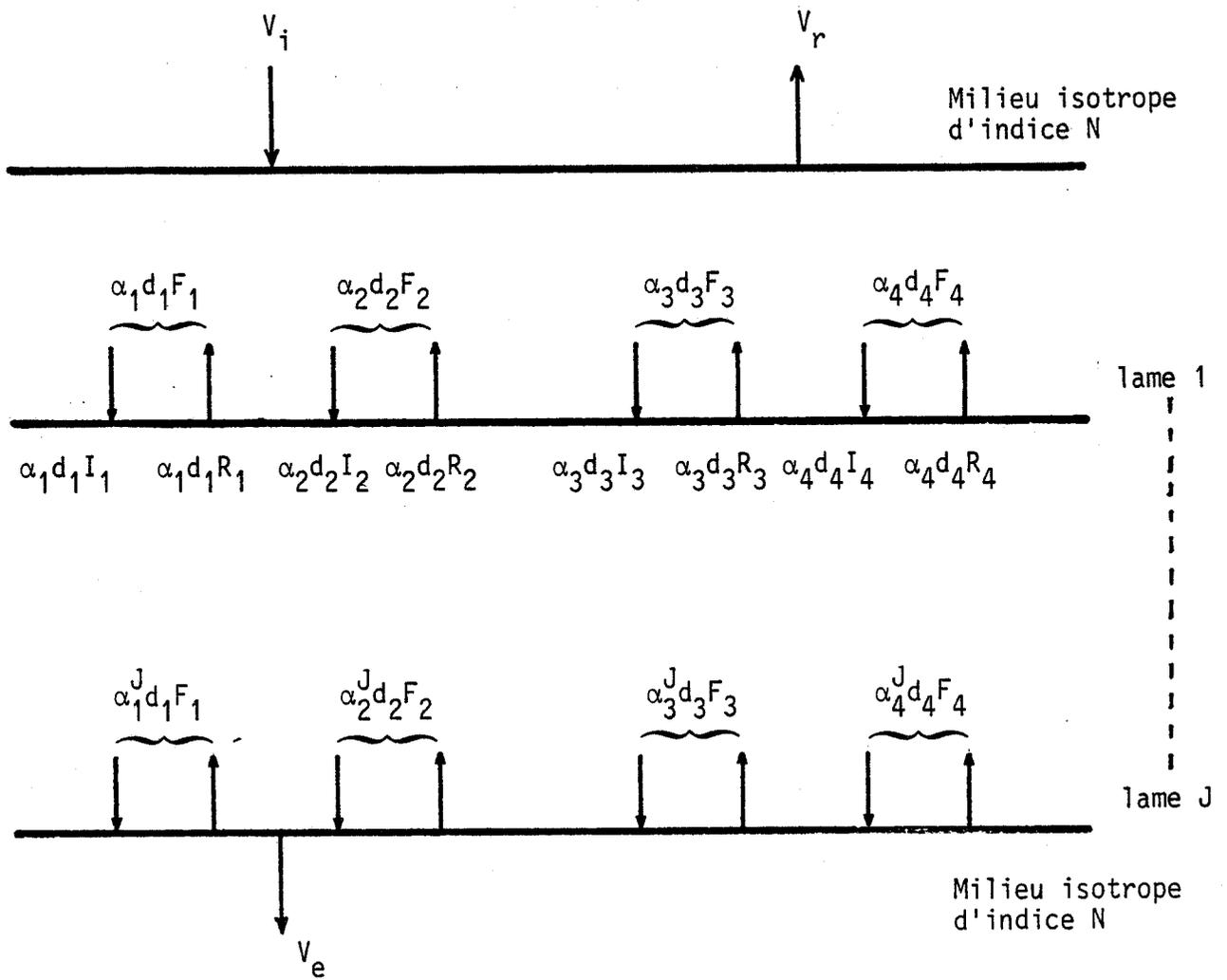


FIGURE 17 : Pile de dimension finie.

$\vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}$ où le vecteur unitaire \vec{z} est parallèle à l'axe de torsion de l'empilement et où les vecteurs unitaires \vec{x}_k et \vec{y}_k sont parallèles aux lignes neutres de la lame k ;

d'autre part, un repère $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}$, que nous appellerons repère du laboratoire : \vec{z} est défini comme pour le repère tournant et les vecteurs \vec{x}_0 et \vec{y}_0 sont parallèles aux lignes neutres de la lame numéro 0.

Considérons une pile hélicoïdale (figure 17) comportant un nombre fini J de lames (k varie de 1 à J) éclairée sous l'incidence normale par un rayonnement monochromatique de longueur d'onde λ . La vibration incidente, repérée dans le repère du laboratoire (tourné d'un angle $-\beta$ par rapport au repère tournant défini au niveau de la lame 1, ou encore dirigé selon les lignes neutres de la lame 0 fictive) est notée \vec{V}_1 .

Dans la pile se propagent en général les quatre vibrations itératives caractérisées par les vecteurs normalisés $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ et \vec{F}_4 dans le repère tournant. Soient $\alpha_1 d_1, \alpha_2 d_2, \alpha_3 d_3 = d_3/\alpha_1$ et $\alpha_4 d_4 = d_4/\alpha_2$ leurs amplitudes respectives à la sortie de la lame 1. Au niveau du dioptre de sortie de la pile, les vibrations itératives ont les amplitudes $\alpha_1^J d_1, \alpha_2^J d_2, \alpha_3^J d_3$ et $\alpha_4^J d_4$. Notons \vec{V}_e l'expression de la vibration émergente de la pile exprimée dans le repère de la dernière lame J.

L'expression, dans le repère du laboratoire, du champ existant à la sortie de la lame k est :

$$(\mathbf{v}_k)_\ell = \mathcal{R}(k\beta) \sum_{m=1}^4 \alpha_m^k d_m \mathbf{F}_m$$

et l'expression de la vibration émergente de la pile :

$$(\mathbf{v}_e)_\ell = \mathcal{R}(J\beta) (\mathbf{v}_e) \quad (70)$$

où $\mathcal{R}(k\beta)$ et $\mathcal{R}(J\beta)$ sont les matrices rotations d'angles $k\beta$ et $J\beta$.

Comme en optique cristalline classique, pour une incidente donnée, le problème consiste à déterminer les composantes de la vibration réfléchie, les composantes de la vibration transmise et les amplitudes des quatre vibrations définies dans le système, ici les vibrations

itératives. On dispose pour celà des conditions de continuité des champs électrique et magnétique aux dioptrés d'entrée et de sortie de la pile.

Au dioptré d'entrée, les conditions de continuité du champ électrique sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_i + \mathbf{V}_r = \mathbf{R}(\beta) \begin{bmatrix} e^{j\varphi_1} & \cdot \\ \cdot & e^{j\varphi_2} \end{bmatrix} \left\{ \alpha_1 d_1 \mathbf{I}_1 + \alpha_2 d_2 \mathbf{I}_2 + \alpha_3 d_3 \mathbf{I}_3 + \alpha_4 d_4 \mathbf{I}_4 \right\} \\ + \mathbf{R}(\beta) \begin{bmatrix} e^{-j\varphi_1} & \cdot \\ \cdot & e^{-j\varphi_2} \end{bmatrix} \left\{ \alpha_1 d_1 \mathbf{R}_1 + \alpha_2 d_2 \mathbf{R}_2 + \alpha_3 d_3 \mathbf{R}_3 + \alpha_4 d_4 \mathbf{R}_4 \right\} \end{aligned} \quad (71)$$

$$\text{avec } \varphi_{1,2} = \frac{2\pi n_{1,2} e}{\lambda}$$

et les conditions de continuité du champ magnétique :

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \begin{bmatrix} \cdot & -1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} (\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_r) = \mathbf{R}(\beta) \begin{bmatrix} \cdot & n_2 \\ n_1 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{j\varphi_1} & \cdot \\ \cdot & e^{j\varphi_2} \end{bmatrix} (\alpha_1 d_1 \mathbf{I}_1 + \alpha_2 d_2 \mathbf{I}_2 + \alpha_3 d_3 \mathbf{I}_3 + \alpha_4 d_4 \mathbf{I}_4) \\ - \mathbf{R}(\beta) \begin{bmatrix} \cdot & -n_2 \\ n_1 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-j\varphi_1} & \cdot \\ \cdot & e^{-j\varphi_2} \end{bmatrix} (\alpha_1 d_1 \mathbf{R}_1 + \alpha_2 d_2 \mathbf{R}_2 + \alpha_3 d_3 \mathbf{R}_3 + \alpha_4 d_4 \mathbf{R}_4) \end{aligned} \quad (72)$$

Au dioptré de sortie, les conditions de continuité du champ électrique peuvent être écrites :

$$\mathbf{V}_e = \alpha_1 d_1 (\mathbf{I}_1 + \mathbf{R}_1) + \alpha_2 d_2 (\mathbf{I}_2 + \mathbf{R}_2) + \alpha_3 d_3 (\mathbf{I}_3 + \mathbf{R}_3) + \alpha_4 d_4 (\mathbf{I}_4 + \mathbf{R}_4) ; \quad (73)$$

enfin pour le champ magnétique :

$$\mathbf{N} \begin{bmatrix} \cdot & -1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \cdot & -n_2 \\ n_1 & \cdot \end{bmatrix} \left[\alpha_1 d_1 (\mathbf{I}_1 - \mathbf{R}_1) + \alpha_2 d_2 (\mathbf{I}_2 - \mathbf{R}_2) + \alpha_3 d_3 (\mathbf{I}_3 - \mathbf{R}_3) + \alpha_4 d_4 (\mathbf{I}_4 - \mathbf{R}_4) \right] \quad (74)$$

Les équations matricielles (71, 72, 73, 74) constituant un système de 8 équations linéaires à 8 inconnues $d_1, d_2, d_3, d_4, V_{rx}, V_{ry}, V_{ex}$ et V_{ey} . La résolution de ce système permet de déterminer, en fonction des composantes V_{ix} et V_{iy} de la vibration incidente, les composantes des vibrations transmises et réfléchies par la pile ainsi que les amplitudes des quatre vibrations itératives qui existent à l'intérieur de l'empilement. Toutes ces quantités sont des fonctions linéaires homogènes des composantes V_{ix} et V_{iy} ; par exemple :

$$d_1 = a_1 V_{ix} + b_1 V_{iy}$$

Dans les expressions de a_1 et b_1 (par exemple) figurent des rapports $I_{jy}/I_{jx}, R_{jy}/R_{jx}$ (38) qui caractérisent les états de polarisation des itératives et des rapports R_{jx}/I_{jx} et R_{jy}/I_{jy} qui caractérisent les rapports d'amplitude entre les composantes des itératives.

Quand les conditions d'éclairage de la pile sont quelconques, les quatre (deux "aller" et deux "retour") vibrations itératives existent dans la pile ($d_1, d_2, d_3, d_4 \neq 0$) [40,41].

Le nombre des vibrations itératives dans la pile peut être réduit à trois quand la vibration incidente a un état de polarisation convenable tel que par exemple :

$$\frac{V_{iy}}{V_{ix}} = - \frac{a_1}{b_1} \quad \text{d'où} \quad d_1 = 0$$

Réduire le nombre des itératives à deux est en général impossible : l'état de polarisation de la vibration incidente doit satisfaire deux conditions en général incompatibles sauf si l'indice N du milieu extérieur, l'épaisseur et les indices des lames sont liés par une relation de compatibilité.

De la même façon, imposer un état de polarisation à la vibration réfléchie \vec{V}_r ou à la vibration transmise \vec{V}_e fixe l'état de polarisation de la vibration incidente \vec{V}_i .

2.2 Vibration transmise par une pile finie : solution simplifiée à l'extérieur des bandes de réflexion sélective

En optique cristalline, pour calculer la vibration \vec{V}_e transmise par une lame à faces planes et parallèles éclairée sous l'incidence normale, on procède habituellement en supposant que les vibrations

réfléchies à l'extérieur et à l'intérieur de la lame n'existent pas. Cela revient à supposer que le milieu extérieur est identique au milieu constituant la lame, ce qui permet de négliger les effets des dioptries d'entrée et de sortie : la vibration incidente V_i est décomposée sur les seules vibrations privilégiées "aller" ($d_3 = 0, d_4 = 0$) ; la traversée de la lame fixe les déphasages entre privilégiées et, à l'extrémité de la lame, la somme algébrique des privilégiées (compte-tenu des déphasages) constitue la vibration \vec{V}_e transmise par la pile puisqu'il n'y a pas de vibration réfléchie.

Procédons de manière identique avec la pile de J lames étudiée de manière rigoureuse au § 2.1. Supposons la pile immergée entre deux piles semi-infinies correctement orientées, ce qui permet de considérer que les vibrations itératives "retour" (\vec{F}_3 et \vec{F}_4) et la vibration \vec{V}_r réfléchie par la pile n'existent pas. Le schéma de la figure (17) se réduit à celui de la figure (18) ; contrairement à l'étude rigoureuse du paragraphe précédent, sont maintenant exclues les bandes de réflexion sélective :

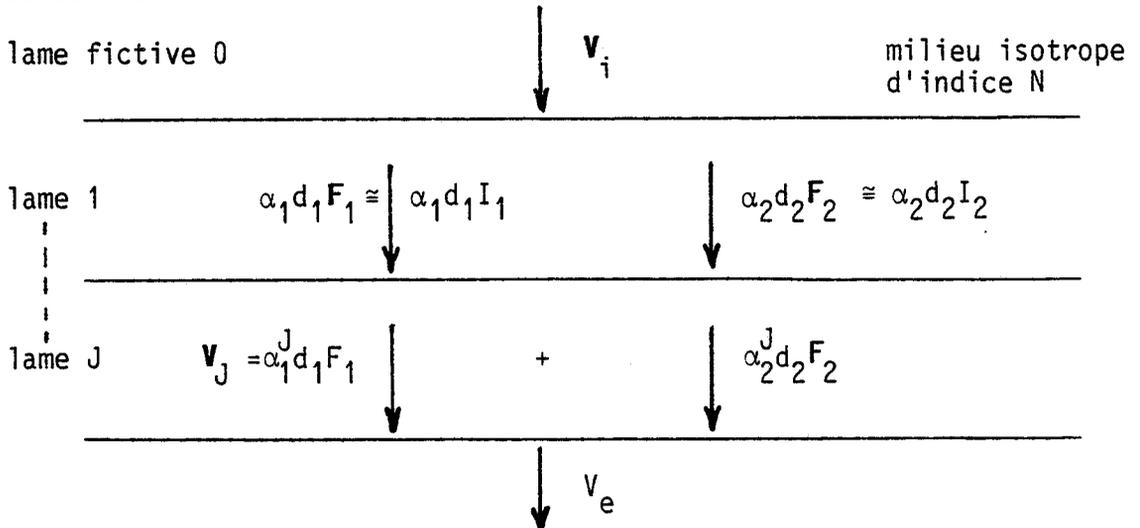


FIGURE 18 (*) : Pile de dimension finie : étude simplifiée hors des bandes de réflexion sélective (la vibration incidente est décomposée sur les vibrations itératives "aller" \vec{F}_1 et \vec{F}_2 seules).

(*) Rappelons qu'à l'extérieur des bandes de réflexion sélective, le champ F coïncide pratiquement avec sa composante "incidente" :

$$|\vec{R}_{1,2}| \ll |\vec{I}_{1,2}| \quad \text{et} \quad \vec{F}_{1,2} \cong \vec{I}_{1,2}$$

Soit $\alpha_1 d_1$ ($\alpha_2 d_2$) l'amplitude de la vibration \vec{F}_1 (\vec{F}_2) au niveau du dioptre de sortie de la première lame (lame 1). Au niveau du dioptre précédent (dioptre d'entrée de la pile) l'amplitude de \vec{F}_1 (\vec{F}_2) est donc d_1 (d_2). Au dioptre d'entrée le champ électrique de l'onde incidente \vec{V}_i s'identifie à la somme des champs des vibrations itératives \vec{F}_1 et \vec{F}_2

$$\mathbf{V}_i = d_1 \mathbf{F}_1 + d_2 \mathbf{F}_2 \quad (75)$$

Soient f_1 et f_2 les nombres complexes caractérisant les états de polarisation de \vec{F}_1 et \vec{F}_2 dans le repère tournant défini au § 2.1. Dans ce repère la décomposition de V_i sur les vecteurs "vibrations itératives" normés s'écrit :

$$\mathbf{V}_i = \frac{1}{\sqrt{1+f_1^2}} d_1 \begin{pmatrix} 1 \\ f_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{1+f_2^2}} d_2 \begin{pmatrix} 1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad (76)$$

Le champ \vec{V}_J au dioptre de sortie de la lame J est obtenu en affectant chaque vibration itérative du coefficient α^J correspondant :

$$\mathbf{V}_J = \frac{\alpha_1^J}{\sqrt{1+f_1^2}} d_1 \begin{pmatrix} 1 \\ f_1 \end{pmatrix} + \frac{\alpha_2^J}{\sqrt{1+f_2^2}} d_2 \begin{pmatrix} 1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad (77)$$

Par continuité du champ électrique au dioptre de sortie, la vibration transmise par la pile est égale à :

$$\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_J$$

et dans le repère du laboratoire :

$$(\mathbf{V}_e)_\ell = \mathbf{R}(J\beta) \mathbf{V}_J \quad (78)$$

D'où la relation matricielle liant l'onde émergente \vec{V}_e à l'onde incidente \vec{V}_i dans le repère du laboratoire :

$$(\mathbf{V}_e)_\ell = \left[\mathbf{R}(J\beta) \right] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ f_1 & f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^J & 0 \\ 0 & \alpha_2^J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ f_1 & f_2 \end{bmatrix}^{-1} (\mathbf{V}_i) \quad (79)$$

La solution approchée fournie par cette méthode est beaucoup plus simple que celle fournie par la méthode rigoureuse développée au paragraphe précédent. L'approximation effectuée est du même ordre que celle réalisée en optique cristalline : elle est d'autant meilleure que l'indice du milieu isotrope extérieur est proche de l'indice moyen des lames.

Sous les formes (77) et (79) l'expression de l'onde transmise V_e par une pile hélicoïdale finie est simple mais il est clair que chaque cas est un cas particulier qui doit être étudié séparément, puisque les vibrations itératives dépendent des caractéristiques géométriques (e, β) de l'empilement et des propriétés des lames $(n, \Delta n)$.

Le présent paragraphe et le précédent sont basés sur la notion de vibration itérative. Si le paragraphe 2.2 ne fournit qu'une méthode simplifiée du calcul approché de la vibration transmise par une pile hélicoïdale d'un nombre quelconque de lames biréfringentes, le développement du paragraphe 2.1 permet de calculer de manière rigoureuse les vibrations transmise et réfléchiée par la même pile. Ces résultats théoriques mettent en évidence l'utilité et le caractère concret des vibrations itératives introduites de manière formelle au chapitre 2.

2.3 Etude de la solution simplifiée par la méthode géométrique de Poincaré

La méthode proposée par Poincaré [9] fournit une représentation géométrique de la solution simplifiée proposée au paragraphe précédent.

Le repère utilisé est le repère tournant Ox_k, y_k, z défini au § 2.1. Soit \vec{V}_k une vibration elliptique (figure 19) d'ellipticité η_k dont la direction du grand axe (azimut) fait un angle θ_k avec la direction référence. Cette vibration est représentée sur la sphère de Poincaré par le point M_k , de latitude $2\eta_k$ et de longitude $2\theta_k$ (le méridien origine coupe l'équateur au point G qui représente les vibrations rectilignes dirigées selon le grand axe de la vibration itérative \vec{F}_1).

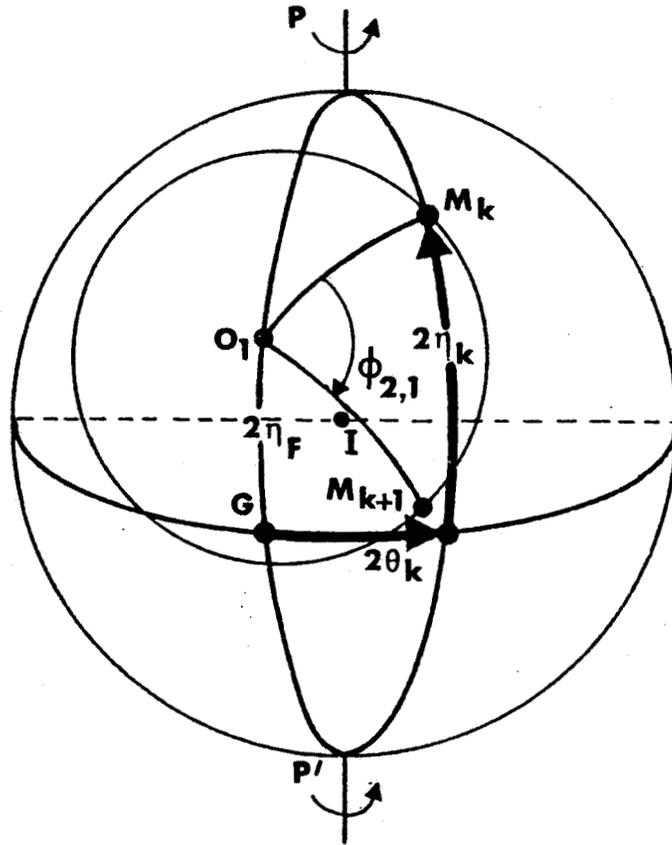


FIGURE 19 : Représentation de l'action d'une lame de la pile : le déphasage introduit entre les itératives \vec{F}_1 et \vec{F}_2 par la traversée de la lame est égal à $\phi_{2,1}$.

En première approximation, à l'extérieur des bandes de réflexion sélective, les vibrations itératives \vec{F}_1 et \vec{F}_2 sont orthogonales (chapitre 2, § 3.1). Si le grand axe de \vec{F}_1 coïncide avec la direction de référence, \vec{F}_1 et \vec{F}_2 sont représentées par les points O_1 et O_2 du méridien origine, diamétralement opposés et de latitude $2\eta_F$ et $-2\eta_F$. Le passage d'un dioptré au suivant dans la pile introduit le déphasage $\phi_{2,1}$ (46) entre \vec{F}_1 et \vec{F}_2 .

Soit une vibration \vec{V}_k elliptique au niveau du dioptré k : elle est représentée par un point M_k de la sphère ; la vibration \vec{V}_{k+1} à laquelle elle donne naissance au niveau du dioptré $k+1$ est représentée par le point M_{k+1} obtenu en faisant tourner M_k autour du diamètre O_1O_2 d'un angle égal à $\phi_{2,1}$.

Soit M_i le point représentatif d'une vibration V_i incidente sur une pile de J lames (angle d'empilement β). J rotations successives autour de O_1O_2 , correspondant à un angle total $J \times \phi_{2,1}$, amènent M_i en M_e : la latitude $2\eta_e$ et la longitude $2\theta_e$ de M_e caractérisent dans le repère tournant lié à la dernière lame de la pile, l'ellipticité η_e et l'azimut θ_e de la vibration V_e transmise par la pile. Pour connaître l'azimut de \vec{V}_e dans le repère du laboratoire il y a lieu de tenir compte de la rotation de repère soit $J\beta$.

L'application de la méthode géométrique de Poincaré aux piles hélicoïdales de lames est basée sur les vibrations itératives (champs locaux totaux). Comme pour la méthode simplifiée du paragraphe précédent, toutes les réflexions aux dioptrés de la pile, à l'exception des deux dioptrés extrêmes, sont prises en compte.

La méthode géométrique ci-dessus constitue un outil très pratique pour l'étude de la vibration transmise \vec{V}_e par une pile hélicoïdale quelconque de lames biréfringentes : elle permet des raisonnements qualitatifs très aisés comme le montrent les quelques exemples d'application proposés aux paragraphes suivants. La méthode analytique simplifiée du § 2.2 permet d'apporter les compléments quantitatifs éventuellement nécessaires.

3. EXEMPLES DE PILES D'EXTENSION FINIE ÉCLAIRÉES EN LUMIÈRE BLANCHE :

BIRÉFRINGENCE ELLIPTIQUE ET POUVOIR ROTATOIRE D'ENTRAÎNEMENT

Soit une pile hélicoïdale éclairée par un rayonnement non monochromatique de largeur spectrale $[\lambda_1, \lambda_2]$. Les phénomènes nouveaux auxquels on peut s'attendre sont les phénomènes de biréfringence elliptique des vibrations itératives et les phénomènes de réflexion sélective de la lumière.

Les phénomènes de réflexion sélective seront étudiés au chapitre suivant. Une étude détaillée des propriétés de biréfringence elliptique des piles sort du cadre de ce travail. Elle consisterait à appliquer une des méthodes proposées aux paragraphes 2.2 et 2.3 en tenant compte des influences respectives de chacun des paramètres e , β , Δn , n et λ . Nous nous contenterons d'appliquer la méthode géométrique du § 2.3 à quelques empilements particuliers que nous définissons maintenant.

Ainsi qu'il a été montré au chapitre 2 (figure 7, § 3.1), l'ellipticité des vibrations itératives \vec{F}_1 et \vec{F}_2 d'une pile hélicoïdale de lames dépend de l'angle d'empilement β et du retard $2\Delta\phi$ qu'une lame introduit entre ses deux vibrations privilégiées rectilignes. De manière générale les vibrations itératives sont quasi rectilignes pour les valeurs de $2\Delta\phi$ proches de $(2k+1)\pi$; nous devons alors observer des phénomènes de biréfringence sensiblement rectiligne auxquels s'additionne une rotation d'entraînement égale à l'angle de torsion de l'empilement (les zones d'existence de vibrations itératives rectilignes sont d'autant plus larges que β est plus faible). Pour les valeurs de $2\Delta\phi$ proches de $2k\pi$, les vibrations itératives sont fortement elliptiques, voire quasi-circulaires ; nous observerons alors des phénomènes de polarisation rotatoire dus à cette biréfringence circulaire auxquels s'additionne encore la rotation égale à la torsion de l'empilement.

Entre les vibrations \vec{F}_1 et \vec{F}_2 , le passage d'un dioptré au suivant introduit un retard :

$$\phi_{2,1} = 2\gamma = 2 \text{ Arc cos } [\cos \beta \cos \Delta\phi] \quad (46).$$

Ce retard dépend en particulier de la quantité $2\Delta\phi$ et les exemples des

§ 3.1 et 3.2 montreront que les phénomènes observés diffèrent fortement selon la valeur de $2\Delta\phi$.

Le retard $\phi_{2,1}$ prend une forme simple pour les faibles valeurs de β :

$$\phi_{2,1} \cong 2\Delta\phi \quad (80)$$

et une autre forme simple quand $\Delta\phi$ est faible ou multiple de π :

$$\phi_{2,1} \cong 2\beta \quad (81)$$

Les piles de Reusch que nous étudierons au §3.3 constituent une illustration bien connue de ce cas particulier.

Nous terminerons enfin (§ 3.4 et 3.5) avec deux cas plus généraux d'empilements à 60 degrés.

3.1 Angle d'empilement β faible ($\phi_{2,1} \cong 2\Delta\phi$) ; cas de lames de retard $2\Delta\phi$ proche de π

Les adhésifs transparents du commerce possèdent en général une biréfringence suffisamment uniforme pour réaliser des expériences courantes de polarisation [42]. Leur relative régularité d'épaisseur autorise une réalisation facile d'empilements hélicoïdaux de lames biréfringentes identiques.

Une pile droite de 10 couches de l'un de ces matériaux disposées à 10° les unes des autres à l'aide de la platine tournante du microscope, présente un pouvoir rotatoire de $+90^\circ$ quand la lumière incidente est polarisée selon une ligne neutre de la première lame. Ce pouvoir rotatoire est achromatique, l'extinction de la lumière transmise par la pile est réalisée pour toutes les longueurs d'onde quand l'analyseur est correctement orienté.

L'adhésif employé pour la manipulation présentée ici a une épaisseur de $30 \mu\text{m}$ et une biréfringence $2\Delta n \cong 0,01$. Une couche introduit entre les deux vibrations privilégiées rectilignes du matériau un déphasage $2\Delta\phi = 1,1 \pi$ pour les longueurs d'onde du centre du visible ($\lambda = 5500 \text{ \AA}$). Les vibrations itératives \vec{F}_1 et \vec{F}_2 de l'empilement de telles

lames à $\beta = 10^\circ$ sont quasi-rectilignes orthogonales, dirigées à $\beta/2$ et $\frac{\pi}{2} + \beta/2$ des lignes neutres des lames ; la traversée d'une lame introduit entre \vec{F}_1 et \vec{F}_2 un déphasage $\phi_{2,1} \cong 197^\circ$. Utilisons la représentation géométrique de Poincaré (figure 20).

Les vibrations itératives \vec{F}_1 et \vec{F}_2 sont représentées par les extrémités O_1 et O_2 d'un diamètre situé dans le plan de l'équateur (E). Puisque $\phi_{2,1} \cong \pi$, la traversée d'une lame équivaut à une rotation de π autour du diamètre O_1O_2 . La vibration incidente rectiligne \vec{V}_i d'azimut θ par rapport au grand axe de la vibration \vec{F}_1 est représentée par le point M_i de longitude 2θ sur la sphère. Quand le nombre de lames J de la pile est impair, la rotation $J \times \phi_{1,2} \cong J \times \pi$ autour de O_1O_2 amène M_i en M_{e1} qui caractérise une vibration \vec{V}_{e1} rectiligne, symétrique de \vec{V}_i par rapport au grand axe de \vec{F}_1 ; si le nombre de lames est pair, la vibration émergente \vec{V}_{e2} (M_{e2}) coïncide avec \vec{V}_i . Dans le référentiel mobile, la modification d'azimut entre \vec{V}_i et \vec{V}_e est donc $-\theta [1 + (-1)^J]$ pour une pile de J lames.

Comme il a été expliqué au § 2.2, le repère mobile au niveau du dioptre d'entrée fait un angle $-\beta$ avec les lignes neutres de la lame d'entrée. Par conséquent, par rapport au repère du laboratoire, le référentiel mobile a tourné de $J\beta$ et la rotation totale de la vibration émergente \vec{V}_e par rapport à la vibration incidente \vec{V}_i est donc :

$$\Omega = J\beta - \theta [1 + (-1)^J] \quad ;$$

le premier terme $J\beta$ représente le pouvoir rotatoire d'entraînement dû à la torsion de la pile ; le second résulte de la biréfringence quasi-rectiligne des vibrations itératives.

Quand \vec{V}_i coïncide avec la vibration itérative \vec{F}_1 , la rotation totale de \vec{V}_e est réduite à la rotation d'entraînement $\Omega = J\beta$.

Quand \vec{V}_i est dirigée selon une ligne neutre de la lame d'entrée, $\theta = \beta/2$ et pour une pile de 10 lames, $\Omega = 90^\circ$. Tant que l'azimut θ de la vibration incidente reste de l'ordre de l'angle (faible) d'empilement β , la rotation de \vec{V}_e conserve l'ordre de grandeur $\Omega \cong (J-1)\beta$ qui correspond à la rotation des lignes neutres de la première à la dernière lame.

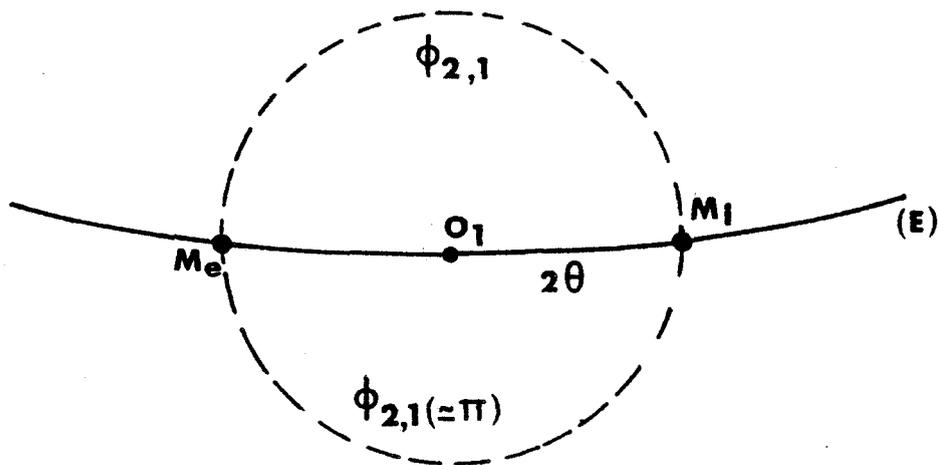


FIGURE 20 : Représentation, sur la sphère de Poincaré, de l'action d'une pile de lames de retard $2\Delta\phi$ proche de π . Seul le voisinage de l'équateur (E) de la sphère est représenté ; O_1 , M_i , M_e représentant les vibrations itérative, incidente et émergente. Le point diamétralement opposé à O_1 représente la position de l'analyseur qui éteint la vibration \vec{F}_1 .

Le raisonnement effectué ci-dessus pour les radiations de longueurs d'onde $\lambda = 5500 \text{ \AA}$ reste valable pour une grande partie du spectre visible. En effet pour $\lambda = 6600 \text{ \AA}$, le retard introduit par une lame est $2\Delta\phi = 165^\circ$ ($0,92 \pi$); le déphasage correspondant entre les deux itératives encore quasi-rectilignes vaut $\phi_{2,1} = 164^\circ$. Pour $\lambda = 4400 \text{ \AA}$, $2\Delta\phi = 243^\circ$ ($1,38 \pi$) les vibrations itératives sont encore rectilignes mais le calcul perd de sa validité car $\phi_{2,1} = 247^\circ$ est fortement différent de 180° . Cependant la plus grande partie du visible traverse la pile dans les mêmes conditions ce qui explique que le pouvoir rotatoire observé est quasiment achromatique.

Tous les phénomènes décrits résultent de la biréfringence rectiligne des vibrations itératives \vec{F}_1 et \vec{F}_2 . Quand la vibration incidente coïncide avec l'une des itératives, on n'observe que la rotation due à la torsion de la pile. Quand la vibration incidente est rectiligne d'azimut quelconque, des phénomènes de biréfringence rectiligne s'ajoutent à la rotation d'entraînement de l'empilement.

La situation est analogue à celle présentée par les phases nématiques torsadées de grand pas (lames nématiques de Mauguin) : éclairées par une vibration polarisée selon une ligne neutre de la face d'entrée elles présentent un pouvoir rotatoire achromatique égal à la torsion de la structure ; plus généralement, quand la vibration itérative V_j diffère des vibrations itératives quasi-rectiligne une lame nématique présente des effets de biréfringence rectiligne auxquels s'ajoute une rotation égale à la torsion de la structure.

3.2 Angle β d'empilement faible ($\phi_{2,1} \cong 2\Delta\phi$) ; lames de retard $2\Delta\phi$ élevé

Au chapitre suivant, pour observer les bandes de réflexion sélective, nous utilisons des lames trois fois onde pour $\lambda = 5500 \text{ \AA}$. Leur retard au centre du visible est élevé ($2\Delta\phi \cong 6\pi$) ; si on réalise un empilement analogue au précédent ($\beta = 10^\circ$, 10 lames) les observations entre polariseur et analyseur sont nettement différentes. En lumière blanche, les phénomènes sont très peu colorés et la rotation de l'analyseur n'entraîne que des variations faibles de l'intensité. Le minimum

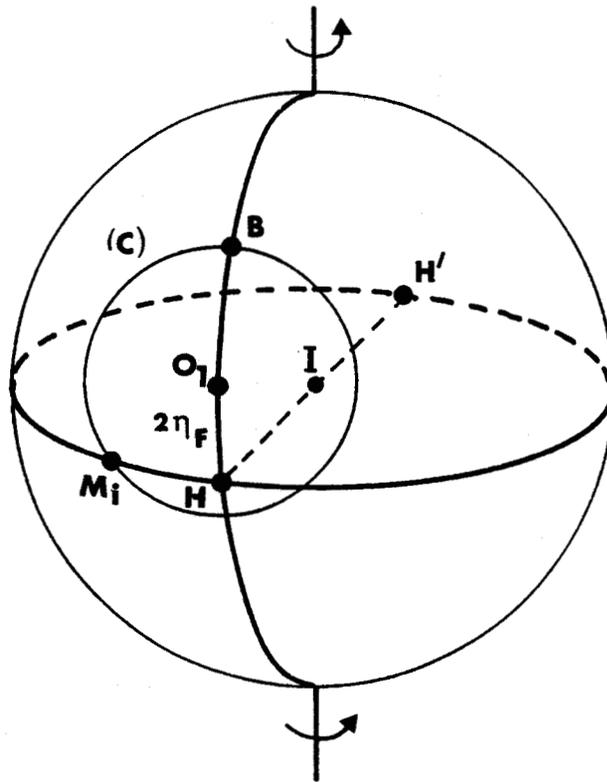


FIGURE 21 : Représentation, sur la sphère de Poincaré, de l'action d'une pile ($\beta = 10^\circ$) de lames de retard $2\Delta\phi$ élevé. La vibration itérative représentée par O_1 a une ellipticité $2\eta_F$ qui peut être élevée (cf. texte). M_i représente la vibration rectiligne incidente. Les vibrations transmises par la pile, pour les diverses radiations d'une bande spectrale étroite, sont représentées par les points du cercle (C). Le point H' représente la position de l'analyseur qui éteint le mieux l'itérative \vec{F}_1 .

d'intensité est obtenu pour une rotation de l'analyseur de 90° environ, ce qui correspond encore à la torsion de l'empilement. Si on éclaire la pile en lumière monochromatique obtenue avec un filtre interférentiel continu (Véril, Schott) la situation s'améliore légèrement : pour tout le visible, une rotation de l'analyseur de 90° entraîne la meilleure extinction, les conditions d'éclairage les plus favorables étant obtenues quand la vibration issue du polariseur est approximativement dirigée selon une ligne neutre de la lame d'entrée. Les fluctuations qui permettent d'estimer quand l'extinction est réalisée sont faibles pour $\lambda \sim 6600 \text{ \AA}$, pratiquement inexistantes pour $\lambda \sim 5500 \text{ \AA}$, un peu plus importantes pour $\lambda \sim 4400 \text{ \AA}$.

Pour $\lambda \sim 6600 \text{ \AA}$, $2\Delta\phi = 5\pi$ et pour $\lambda \sim 4400 \text{ \AA}$, $2\Delta\phi = 7,5\pi$. Les ellipticités (figure 7 du chapitre 2) des vibrations itératives sont faibles, de l'ordre de 5° environ ($\sim 3^\circ$ pour $\lambda = 4400 \text{ \AA}$ et $\sim 7^\circ$ pour $\lambda = 6600 \text{ \AA}$). Le filtre interférentiel continu a une bande passante de l'ordre de 200 à 300 \AA ; les fluctuations de $2\Delta\phi$ correspondantes sont faibles et les itératives conservent une ellipticité η constante : leurs points représentatifs O_1 et O_2 sur la sphère de Poincaré sont fixes, situés à une latitude de $2\eta_F \cong 10^\circ$ (figure 21), pour toute la bande délivrée par le filtre.

Soit M_i le point représentant la vibration rectiligne incidente. Chaque traversée de lame impose à M_i une rotation égale à $\phi_{2,1} \cong 2\Delta\phi$ autour du diamètre O_1O_2 ; $2\Delta\phi$ est élevé et la rotation, pour une seule lame atteint plusieurs tours : pour une pile de J lames, le nombre de tours est très élevé. Une modification minimale de la longueur d'onde incidente se traduit alors par une modification importante de la rotation de M_i autour de O_1O_2 ; par exemple, dans le bleu, une variation d'un tour ($\Delta\phi_{2,1} = 2\pi$) est atteinte pour un déplacement spectral $\delta\lambda$ tel que

$$\frac{\delta\lambda}{4400} = \frac{2\pi}{7,5} \quad \text{soit} \quad \delta\lambda \cong 100 \text{ \AA}$$

Le filtre utilisé ayant une bande passante supérieure à 100 \AA , les points représentatifs des vibrations transmises par la pile éclairée en bleu ($\lambda \sim 4400 \text{ \AA}$) ou en rouge ($\lambda \sim 6600 \text{ \AA}$) sont répartis sur le petit cercle (C) d'axe O_1O_2 et de rayon O_1M_i . Si le cercle (C) est petit l'extinction



simultanée de toutes les vibrations transmises avec un analyseur rectiligne dirigé selon le grand axe de F_1 est à peu près correcte : la situation la plus favorable est obtenue quand M_i est en H, c'est à dire quand la vibration incidente coïncide avec un des axes des vibrations itératives. Remarquons que dans ce cas l'ellipticité de certaines vibrations émergentes de la pile atteint 10° (point B de la figure 21). Bien entendu il faut tenir compte de la rotation de repère, puisque la figure est tracée dans le repère mobile : la rotation de l'analyseur qui conduit à l'extinction correspond à $(J-1)\beta$ soit 90° pour une pile de 10 lames.

En résumé, pour ces longueurs d'ondes la pile présente des phénomènes dus à la biréfringence quasi-rectiligne des itératives ; on retrouve le pouvoir rotatoire d'entraînement additionné de phénomènes classiques de biréfringence rectiligne. La différence avec le cas présenté au paragraphe précédent réside dans le fait que le déphasage introduit entre itératives par la traversée est élevé : dans le repère mobile, pour une pile de J lames ce déphasage vaut approximativement $J \times 6\pi$. La dispersion avec la longueur d'onde est importante alors qu'elle était négligeable dans l'exemple précédent.

Pour $\lambda \sim 5500 \text{ \AA}$ (vert), $2\Delta\phi \approx 6\pi$ et l'ellipticité η_F des itératives vaut environ 30° : les phénomènes diffèrent des précédents puisque la biréfringence des itératives est fortement elliptique ; le pouvoir rotatoire observé se compose de cette biréfringence fortement elliptique et du pouvoir rotatoire d'entraînement. O_1 (figure 21) a une latitude $2\eta_F$ élevée : le cercle (C) lieu des points représentatifs des vibrations émergentes de la pile est très grand, même si la vibration incidente $\vec{V}_i(M_i)$ est dirigée selon le grand axe (H) de la vibration itérative $\vec{F}_1(O_1)$. Les azimuts et les ellipticités des diverses émergentes \vec{V}_e (cercle (C)) varient beaucoup et une extinction satisfaisante ne peut être obtenue avec un analyseur (la situation s'aggrave d'autant plus que M_i s'éloigne de H). Bien sûr les phénomènes obtenus dépendent de la largeur spectrale du rayonnement incident ; avec un rayonnement suffisamment monochromatique, on pourrait observer un pouvoir rotatoire apparent Ω_{app} de la forme :

$$\Omega_{app} = J\beta - \frac{1}{2} \phi_{2,1}$$

où le terme $\frac{1}{2} \phi_{2,1}$ représente le pouvoir rotatoire de Fresnel [43] d'une pile dont les vibrations itératives sont supposées quasi-circulaires. Cette situation est proche de celle des lames cholestériques à forte torsion pour lesquelles le pouvoir rotatoire apparent a la forme :

$$\Omega_{app} = \Omega_{ent.} + \Omega_{bir.circ.}$$

où Ω_{ent} est le pouvoir rotatoire d'entraînement et $\Omega_{bir.circ.}$ le pouvoir rotatoire de Fresnel dû à la biréfringence quasi-circulaire des vibrations favorisées des cholestériques.

Les diverses conditions spectrales d'éclairage étudiées montrent que dans tous les cas la pile transmet des vibrations d'ellipticité et d'azimuts variables et l'extinction obtenue est mauvaise.

En lumière blanche polarisée, même quand l'azimut de la vibration incidente coïncide avec la direction d'un des axes des vibrations itératives les phénomènes observés correspondent à la superposition d'un grand nombre de phénomènes des types précédemment décrits : l'analyseur n'éteint réellement qu'un très petit nombre des différentes vibrations transmises par la pile et les teintes observées, dues essentiellement à la biréfringence elliptique des itératives dans le repère mobile sont délavées.

3.3 Le cas des piles de Reusch : $\beta = 60^\circ$ et lames de retard

$2\Delta\phi$ faible devant 2π

Les paquets ternaires de lames réalisés par Reusch en 1869 [1] sont constitués de 3 lames identiques dont les lignes neutres respectives sont inclinées de 60° . La superposition de plusieurs paquets donne une pile de lames dont les axes sont disposés en spirale droite ou gauche selon le sens d'empilement d'un paquet élémentaire. Les lames de mica utilisées sont les plus minces que l'on peut espérer réaliser de manière reproductible : leur retard est de $\lambda/7$ dans le visible. La pile hélicoïdale observée par Reusch comporte 10 paquets.

Les vibrations itératives d'un empilement ($\beta = 60^\circ$, lames $2\Delta\phi = \frac{2\pi}{7}$) sont des vibrations d'ellipticité $|\eta_F| = 30^\circ$ dont les grands axes sont orientés à 30° des lignes neutres des lames ; les fluctuations

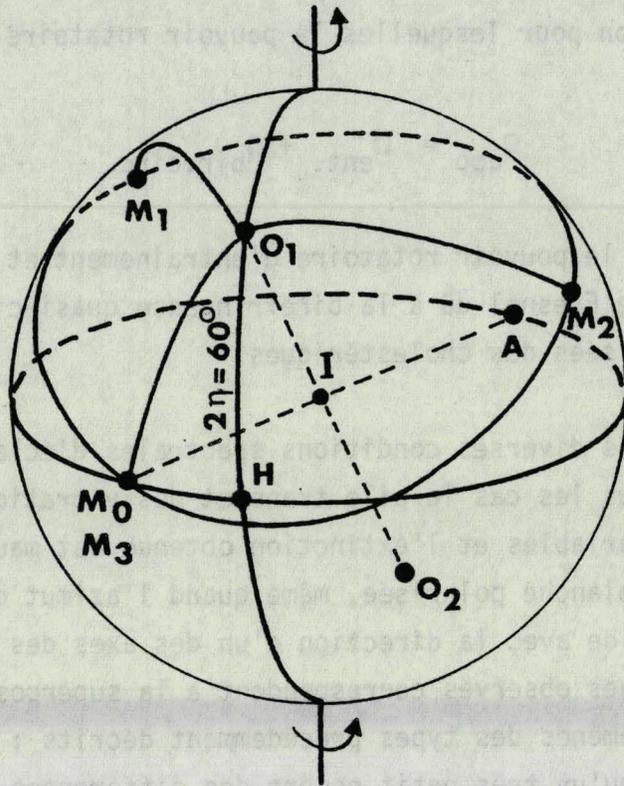


FIGURE 22 : Représentation de l'action d'une pile de Reusch ($\beta = 60^\circ$, $2\Delta\phi = \frac{2\pi}{7}$, $\phi_{2,1} \cong 2\beta$) sur une vibration rectiligne incidente $\vec{V}_i(M_i)$. O_1 représente la vibration itérative \vec{F}_1 de la pile. La vibration $\vec{V}_3(M_3)$ issue d'un paquet ternaire coïncide avec \vec{V}_i . Le point A représente la position de l'analyseur qui éteint la vibration incidente \vec{V}_i .

de $|\eta_F|$ (figure 7) pour les longueurs d'onde du spectre visible, sont négligeables puisque $2\Delta\phi$ ne varie que de 43° à 64° quand λ passe de 6600 \AA à 4400 \AA . On pourra donc considérer que le point représentatif O_1 (figure 22) de la vibration itérative \vec{F}_1 sur la sphère de Poincaré est fixe pour tout le domaine du visible.

L'origine de ces propriétés de polarisation rotatoire des piles de Reusch réside dans le fait que le déphasage $\phi_{2,1}$ introduit entre les deux vibrations itératives lors du passage d'un dioptre au suivant est proche de 2β puisque $\Delta\phi \cong \pi/7$ et $\cos \Delta\phi \cong 1$; on constate numériquement que pour les trois longueurs d'onde $\lambda = 4400 \text{ \AA}$, 5500 \AA , 6600 \AA le déphasage $\phi_{2,1}$ prend les valeurs $\phi_{2,1} = 130^\circ, 126^\circ, 124^\circ$ proches de $\frac{2\pi}{3}$.

Soit (figure 22) une vibration rectiligne incidente $\vec{V}_i(M_i)$ sur la première lame d'un paquet. La traversée de chaque lame fait effectuer à M_i approximativement un tiers de tour autour du diamètre O_1O_2 ; au bout de trois lames, soit un paquet ternaire, le déphasage $3\phi_{2,1}$ entre les itératives vaut approximativement 2π et M_3 est proche de M_i : l'écart entre M_3 et M_i est plus important dans le violet ($\phi_{2,1} = 130^\circ$) que dans le rouge ($\phi_{2,1} = 124^\circ$). Cet écart augmente avec le nombre de paquets empilés mais les phénomènes observés pour une pile varient peu quand on rajoute un paquet supplémentaire à la pile [44]. Les points représentant les vibrations émergentes de la pile aux diverses radiations du visible sont donc répartis sur un arc du cercle (C) d'axe de révolution O_1O_2 et de rayon O_1M_i . Si le nombre de paquets ternaires est faible, le lieu des points représentant les émergentes de la pile est proche de l'équateur. Les phénomènes observés sont d'autant plus colorés que M_i est voisin de H c'est à dire que la direction de la vibration \vec{V}_i est proche du grand axe de l'itérative \vec{F}_1 : le lieu de M_3 coupe l'équateur sous un angle très faible et toutes les vibrations émergentes (M_3) de la pile sont quasi-rectilignes ; par contre plus M_i s'éloigne de H, plus le lieu de M_3 coupe l'équateur sous un angle important et les vibrations correspondant aux extrémités du spectre sont elliptiques et mal éteintes par l'analyseur.

Si le sens d'empilement des paquets est modifié ($\beta \rightarrow -\beta$), $\phi_{2,1}$ ainsi que la biréfringence elliptique des itératives changent de signe :

le pouvoir "rotatoire" observé (succession des teintes due à la biréfringence elliptique) change de signe avec le sens d'empilement des paquets [1,45].

Bien entendu à ce phénomène de "polarisation rotatoire" il faudrait ajouter la rotation d'entraînement du repère mobile ; celle-ci n'apparaît pas dans les expériences de Reusch qui étudie des empilements de dix paquets ternaires (30 lames) pour lesquels la rotation d'entraînement est multiple de π (elle apparaîtrait en utilisant un paquet incomplet).

Les propriétés décrites sont proches de celles présentées par les phases cholestériques dans la zone de De Vries (fortes torsions) : le pouvoir rotatoire apparent est la superposition du pouvoir rotatoire d'entraînement et du pouvoir rotatoire de Fresnel dû à la biréfringence très fortement elliptique des vibrations itératives.

3.4 Angle d'empilement élevé ($\beta = 60^\circ$) ; lames de retard $2\Delta\phi$ proche de π

A l'aide de l'adhésif déjà utilisé en 3.1 réalisons un empilement de 12 couches orientées cette fois à 60° les unes des autres. Les phénomènes obtenus sont très colorés et suggèrent des propriétés de biréfringence rectiligne. Cependant, pour certaines orientations du polariseur qui fournit la vibration incidente il est possible d'obtenir une extinction presque totale en croisant l'analyseur avec le polariseur. Sur l'ensemble du visible, la quantité $2\Delta\phi$ varie autour de π (cf 3.1) ; pour un angle d'empilement $\beta = 60^\circ$, l'ellipticité des itératives \vec{F}_1 et \vec{F}_2 a une valeur moyenne $|\eta_F| \sim 5^\circ$. O_1 qui représente \vec{F}_1 sur la figure 23 est proche de l'équateur puisque sa latitude est $2|\eta_F| = 10^\circ$.

Les valeurs de $\phi_{2,1}$ pour diverses longueurs d'onde peuvent être calculées. Pour le rouge ($\lambda = 6600 \text{ \AA}$) $\phi_{2,1}$ vaut 173° ; la pile de 12 lames introduit un déphasage de $11,5\pi$ entre les itératives : elle est à peu près quart d'onde. Pour le bleu ($\lambda = 4400 \text{ \AA}$) $\phi_{2,1}$ atteint 212° et la pile est approximativement onde ($12\phi_{2,1} \cong 14,1\pi$).

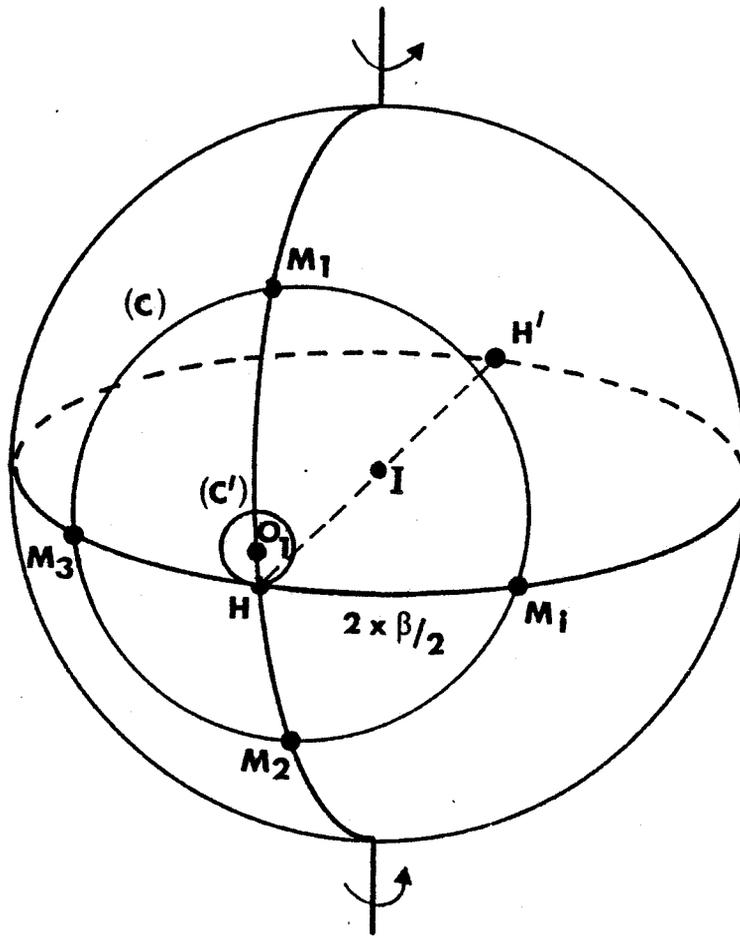


FIGURE 23 : Représentation de l'action d'une pile ($\beta = 60^\circ$) de lames de retard $2\Delta\phi$ proche de π . Quand la vibration V_i incidente (M_i) est d'azimut quelconque, les points représentant les vibrations émergentes appartiennent au cercle (C). Quand M_i est en H (grand axe de \vec{F}_1) l'émergente est représentée par un point du cercle (C').

Eclairons la pile avec une vibration rectiligne \vec{V}_i dirigée à $-(\frac{\beta}{2}) = -30^\circ$ de la direction de la première couche : \vec{V}_i coïncide avec le grand axe de l'une des vibrations itératives à l'entrée de la pile. Soit H le point représentatif de \vec{V}_i sur la sphère : toutes les vibrations émergentes correspondant aux diverses radiations du visible sont représentées par des points du cercle (C') de faible rayon : un analyseur correctement orienté éteint approximativement toute la lumière transmise par la pile. La rotation d'entraînement du repère mobile $12 \times \frac{\pi}{3} = 4\pi$ n'apparaît pas : on constate que pour éteindre approximativement toutes les radiations il suffit de croiser l'analyseur avec le polariseur.

Ajoutons une treizième lame à la pile et éclairons encore dans la direction du grand axe d'une itérative : la rotation de repère est maintenant $4\pi + \frac{\pi}{3}$ et il est nécessaire de tourner l'analyseur de $90 + 60^\circ = 150^\circ$ pour obtenir l'extinction.

Si la pile de 12 lames est éclairée par une vibration d'azimut quelconque, représentée par M_i sur la figure, les vibrations émergentes sont représentées par les points du cercle (C) dont l'axe O_1O_2 est peu incliné sur l'équateur : (C) est à peu près un "petit cercle" de la sphère et les phénomènes observés ressemblent aux phénomènes de biréfringence rectiligne d'une lame de retard important.

3.5 Cas d'un empilement ($\beta = 60^\circ$) de lames de retard

$2\Delta\phi (\cong 6\pi)$ important

Réalisons un empilement à 60° d'une dizaine de lames que nous utiliserons pour l'étude des bandes de réflexion sélective (cf. § 3.2 et chapitre 5). Eclairons la pile en lumière blanche à travers un polariseur. La rotation de l'analyseur montre de légères fluctuations de l'intensité sans modification sensible de la teinte observée (rose clair très pale). Les phénomènes de polarisation rotatoire restent indécélables même si la pile est éclairée à l'aide d'un filtre interférentiel de bande passante 100 \AA dans le vert.

Des phénomènes colorés en lumière blanche existent quand le nombre de lames est très faible (4 ou 5) que l'on tourne l'analyseur ou la pile. Ils disparaissent progressivement quand le nombre de lames croît jusqu'à la dizaine.

Deux effets mis en évidence dans les § précédents se combinent pour donner ce résultat : pour $\beta = 60^\circ$ et $2\Delta\phi \approx 6\pi$ (centre du visible, $\lambda = 5500 \text{ \AA}$) les vibrations itératives de l'empilement sont quasi-circulaires ($|\eta| \approx 42^\circ$) : dans le repère mobile la pile présente du pouvoir rotatoire apparent somme du pouvoir rotatoire d'entraînement et du pouvoir rotatoire de Fresnel dû à la biréfringence circulaire des itératives ; d'autre part, le retard introduit par la pile entre les itératives \vec{F}_1 et \vec{F}_2 varie très vite avec la longueur d'onde. Les vibrations transmises par la pile sont quasi-rectilignes mais leur azimuth varie de manière importante avec la longueur d'onde : l'analyseur transmet un blanc d'ordre supérieur de pouvoir rotatoire.

4. CONCLUSION

Les propriétés optiques de quelques piles d'extension finie sont étudiées à l'aide des vibrations itératives. Pour une vibration V_i incidente donnée, existent en toute rigueur dans une pile hélicoïdale les quatre vibrations itératives, deux dans un sens et deux dans l'autre. Les deux vibrations itératives "retour" peuvent être négligés en première approximation à l'extérieur des bandes de réflexion sélective. Il est alors possible d'aborder l'étude de la biréfringence elliptique et du pouvoir rotatoire des empilements hélicoïdaux de lames biréfringentes en appliquant la méthode cinématique de Fresnel [43] aux vibrations itératives ou en utilisant la représentation géométrique de Poincaré [9] qui constitue une illustration très pratique de la méthode de Fresnel.

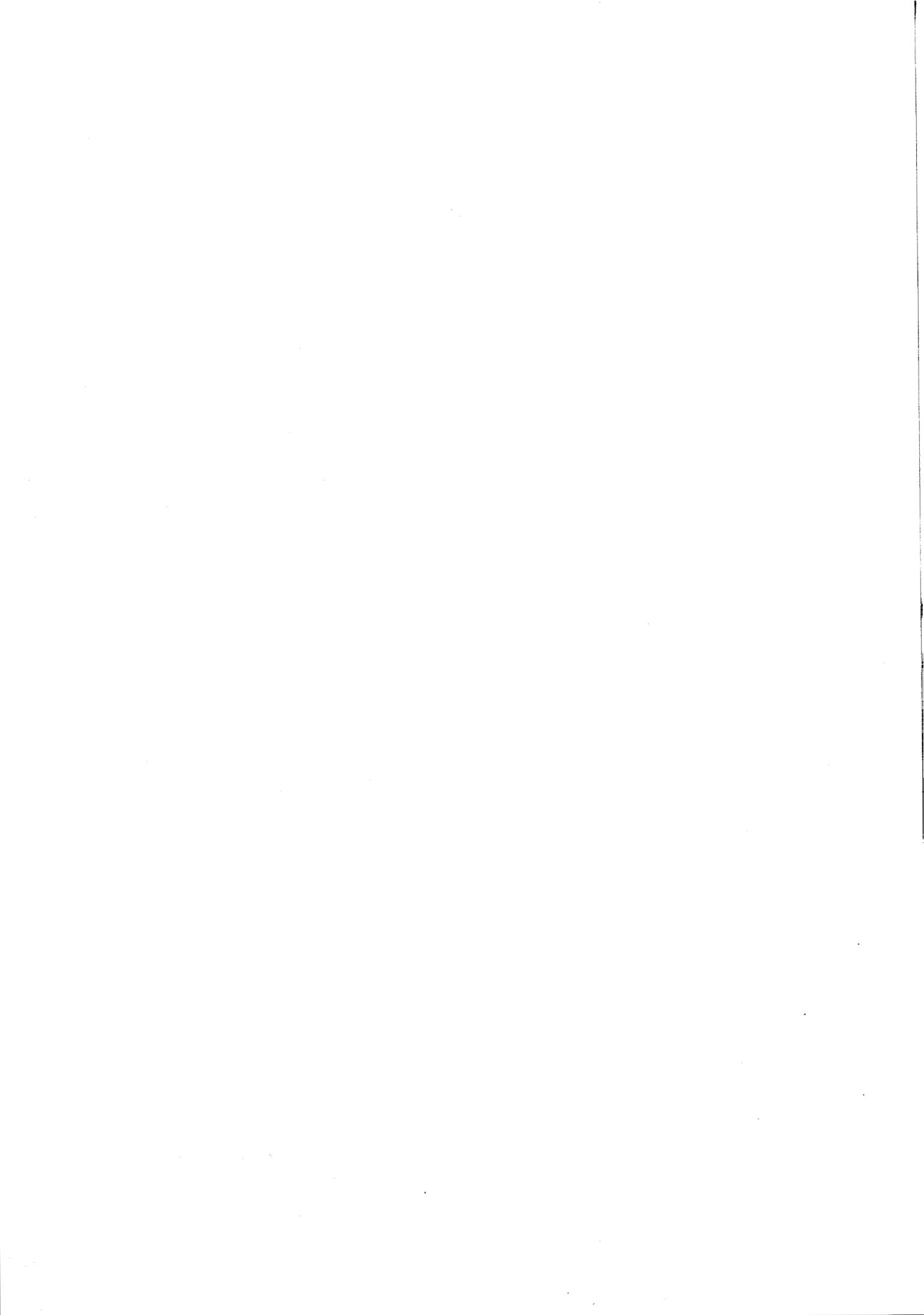
Les phénomènes de dispersion du pouvoir rotatoire apparent ou de biréfringence observés sur quelques empilements connus (piles de Reusch et piles de lames de polymères transparents et biréfringents) sont analysés sur la sphère de Poincaré. Les exemples traités mettent en évidence les influences respectives de l'angle d'empilement et du retard $2\Delta\phi$ de chaque lame : l'on trouve tantôt de la biréfringence quasi-rectiligne

additionnée de pouvoir rotatoire d'entraînement, ce qui donne aux piles des propriétés qui ressemblent à celles des lames nématiques faiblement torsadées de Mauguin [7,21] ; l'on trouve aussi de la biréfringence circulaire qui, additionnée au pouvoir rotatoire d'entraînement, confère aux piles des propriétés qui rappellent celles des cholestériques de petit pas de De Vries [8] ; l'on trouve enfin des situations de biréfringence elliptique qui font penser aux phénomènes décrits, pour les cholestériques de pas intermédiaires, par Isaert, Berthault et Billard [21].

La situation est cependant plus complexe que celle présentée par les mésophases torses pour lesquelles on distingue assez nettement les diverses zones du pouvoir rotatoire apparent.

Notre étude des propriétés de biréfringence elliptique, additionnée du pouvoir rotatoire d'entraînement, présentées par les piles hélicoïdales de lames transparentes à biréfringence rectiligne est limitée à quelques exemples ; la méthode de Fresnel basée sur les vibrations itératives, utilisée sous forme analytique ou géométrique avec la représentation de Poincaré permettrait au besoin de la généraliser.





CHAPITRE 5

MISE EN ÉVIDENCE EXPÉRIMENTALE DES BANDES MULTIPLES DE RÉFLEXION SÉLECTIVE DE PILES HÉLICOÏDALES D'EXTENSION FINIE

1. INTRODUCTION

Outres les phénomènes de biréfringence elliptique mis en évidence sur quelques exemples au chapitre précédent, toute pile hélicoïdale de lames biréfringentes éclairée sous l'incidence normale en lumière naturelle non monochromatique présente des phénomènes de réflexion sélective (chapitre 3) : cette propriété restée jusqu'ici ignorée a un caractère général qui fait des piles hélicoïdales finies des sortes de résonateurs sur deux modes elliptiques déterminés par les caractéristiques des lames et du mode d'empilement ($e, n, 2\Delta n, \beta$).

La vérification expérimentale de cette propriété fait l'objet de ce chapitre. Cependant, avant d'exposer les résultats obtenus, qui confirment les prévisions, les diverses contraintes expérimentales rencontrées lors de la réalisation de piles hélicoïdales de lames biréfringentes sont décrites.

2. REPARTITION EN INTENSITE DE LA LUMIERE TRANSMISE PAR UNE PILE COMPORTANT UN GRAND NOMBRE DE LAMES

Soit une pile hélicoïdale de lames biréfringentes éclairée par un rayonnement incident de largeur spectrale $[\lambda_1, \lambda_2]$. L'intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$ contient plusieurs bandes de réflexion sélective de la pile. La quantité $\Delta\phi$ (25) peut être considérée comme constante sur $[\lambda_1, \lambda_2]$ tant que $(\lambda_2 - \lambda_1)$ reste faible devant la longueur d'onde moyenne λ ; et les états de polarisation des composantes I des vibrations itératives peuvent être considérés comme invariants sur tout le domaine $[\lambda_1, \lambda_2]$ (figure 7, chapitre 2).

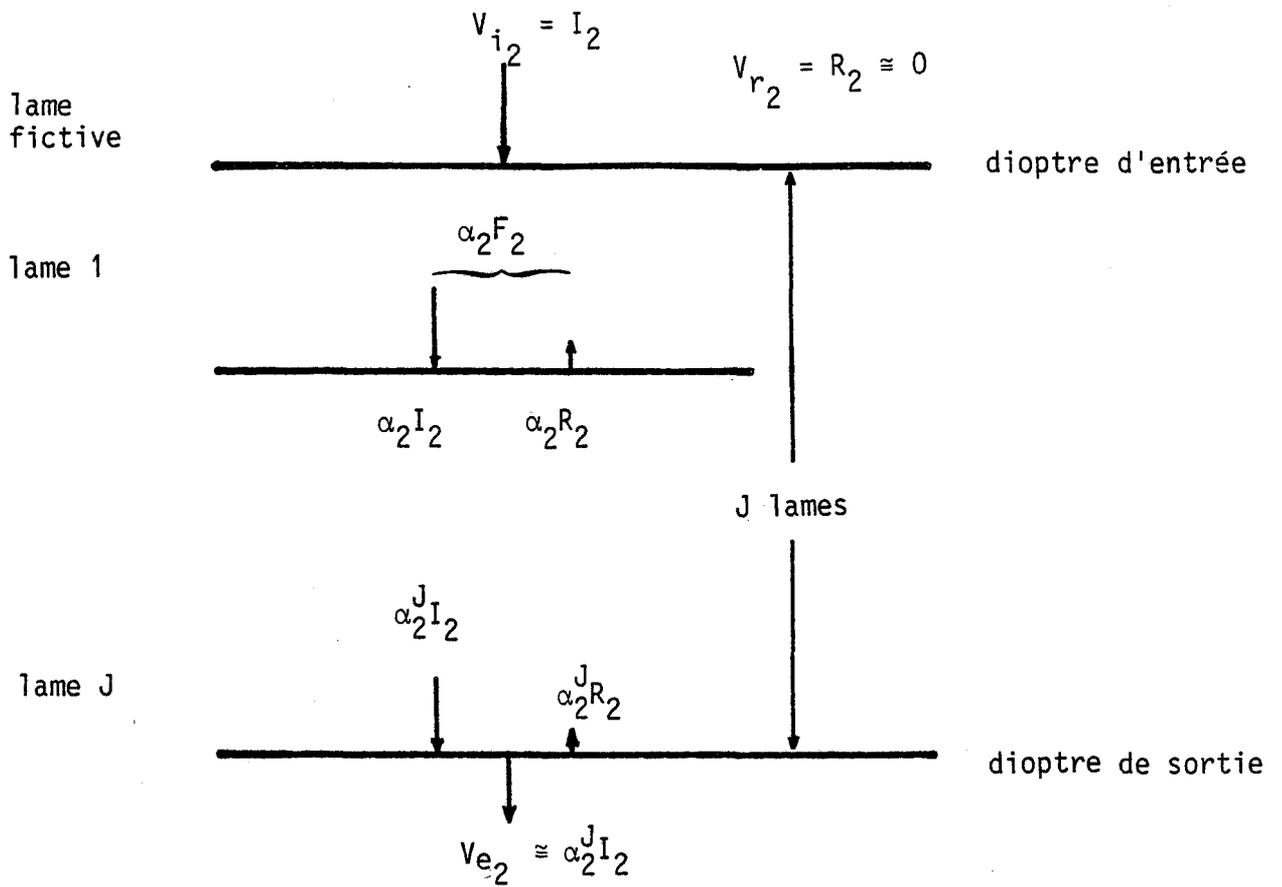


FIGURE 24 : Vibration itérative \vec{F}_2 associée à une valeur propre complexe de module unité, aux divers dioptrés d'une pile de J lames.

2.1 Etude de la lumière transmise par une pile : solution approchée à l'intérieur des bandes de réflexion sélective

La méthode d'étude rigoureuse d'une pile de J lames, exposée au paragraphe 1 du chapitre 4 s'applique quand une ou plusieurs vibrations itératives sont affectées par la réflexion sélective. Par contre, en raison de l'existence même de cette réflexion d'amplitude importante, la méthode simplifiée ne peut plus s'appliquer sous la forme exposée au paragraphe 2 du chapitre 4 car elle revient à considérer que toutes les vibrations réfléchies sont nulles ; cependant, avec quelques modifications qui font l'objet de ce paragraphe elle permet de calculer de manière approchée les caractéristiques principales des vibrations transmises et réfléchies par une pile dans les domaines de réflexion sélective.

De même qu'au § 2.2 du chapitre 4, considérons que seules les deux vibrations itératives "aller" \vec{F}_1 et \vec{F}_2 (figure 18) existent dans la pile et analysons séparément les comportements de \vec{F}_1 et \vec{F}_2 .

Reconsidérons tout d'abord la vibration itérative \vec{F}_2 qui se propage normalement c'est à dire sans atténuation dans la pile (figure 24), et regardons de façon plus attentive qu'au chapitre précédent les parties descendante (\vec{I}_2) et remontante (\vec{R}_2).

La valeur propre α_2 associée à \vec{F}_2 est complexe de module unité ; les rapports R_{2x}/I_{2x} et R_{2y}/I_{2y} (20,21) sont de module très inférieur à l'unité (cf. § 3.1, chapitre 2) et l'amplitude de la composante réfléchie \vec{R}_2 est beaucoup plus faible que celle de la composante incidente \vec{I}_2 au niveau de chaque dioptré. Soit $\alpha_2 \vec{F}_2$ la valeur du champ électrique au niveau du dioptré de sortie de la première lame (lame 1) de la pile. Au niveau du dioptré précédent (dioptré d'entrée de la pile), le champ électrique est égal à \vec{F}_2 ; par identification la vibration \vec{V}_{i2} incidente sur la pile coïncide avec la partie \vec{I}_2 de \vec{F}_2 tandis que la vibration \vec{V}_{r2} réfléchie par la pile coïncide avec la partie \vec{R}_2 de \vec{F}_2 ; l'amplitude de $\vec{V}_{r2} = \vec{R}_2$ est très faible devant celle de $\vec{V}_{i2} = \vec{I}_2$. Au dioptré de sortie la composante incidente $\alpha_2^J I_2$ ($|\alpha_2^J| = 1$) a une amplitude très supérieure à celle de la composante réfléchie $\alpha_2^J R_2$; par continuité du champ électrique, la vibration \vec{V}_{e2} transmise par la pile est pratiquement égale à $\alpha_2^J I_2$.

Pour la vibration itérative \vec{F}_1 qui subit la réflexion sélective, la situation est différente. Nous supposons que le nombre J de lames est suffisant pour que l'amplitude α_1^J de \vec{F}_1 soit négligeable au dioptre de sortie ($\alpha_1^J \ll 1$) :

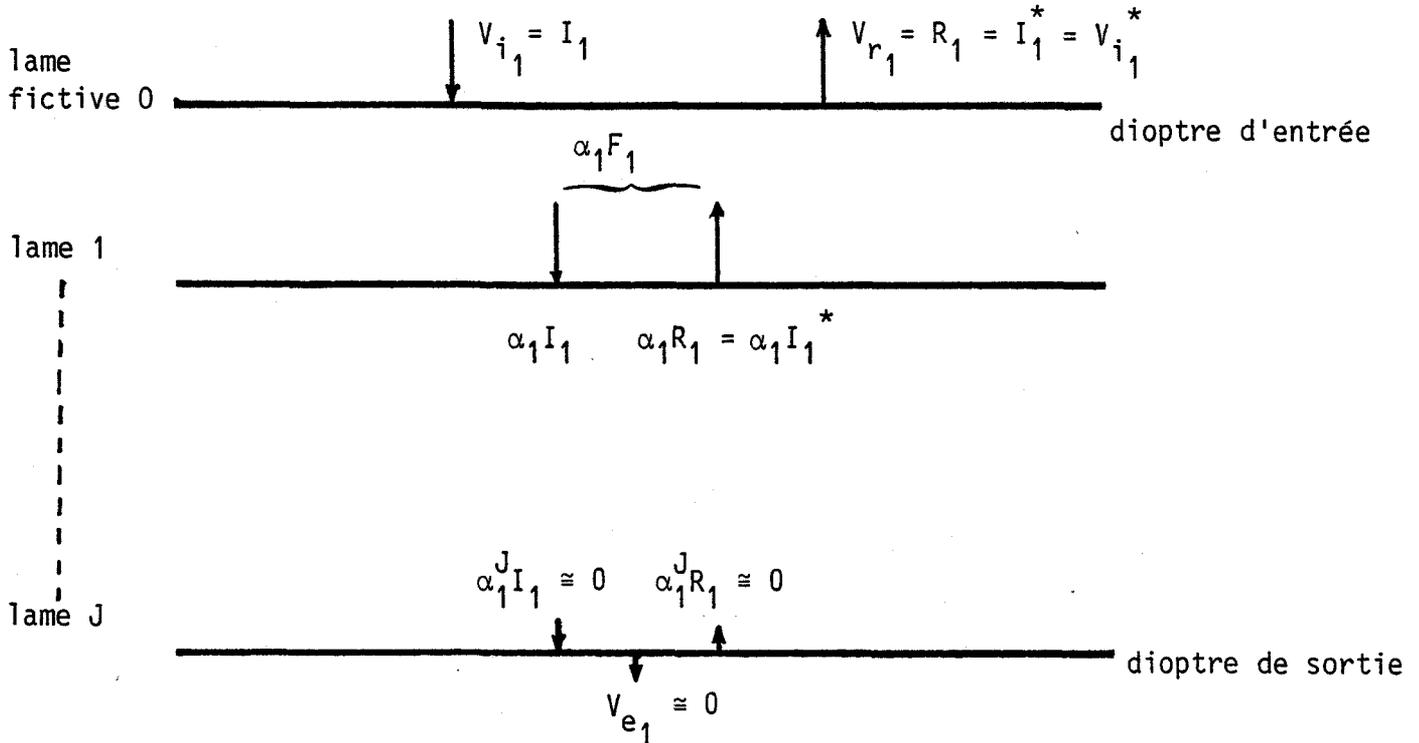


FIGURE 25 : Réflexion sélective de la vibration itérative \vec{F}_1 par une pile de J lames.

La valeur propre α_1 associée à \vec{F}_1 est réelle inférieure à l'unité ; ainsi qu'il a été établi au chapitre 2 (§ 3.3), au niveau de chaque dioptre les composantes "incidente" \vec{I}_1 et "réfléchie" \vec{R}_1 de \vec{F}_1 ont même amplitude ($\vec{R}_1 = \vec{I}_1^*$) contrairement à la vibration \vec{F}_2 qui se propage normalement et pour laquelle $|\vec{R}_2| \ll |\vec{I}_2|$.

Soit $\alpha_1 \vec{F}_1$ le champ électrique au niveau du dioptre de sortie de la lame 1. Au dioptre d'entrée de la pile, le champ électrique est égal à \vec{F}_1 . Par identification à ce dioptre, la vibration incidente \vec{V}_{i1} sur la pile coïncide avec la composante \vec{I}_1 de \vec{F}_1 tandis que la vibration réfléchie \vec{V}_{r1} coïncide avec la composante $\vec{R}_1 = \vec{I}_1^*$ de \vec{F}_1 qui, contrairement au cas précédent, n'est pas négligeable, mais a même amplitude que \vec{I}_1 .

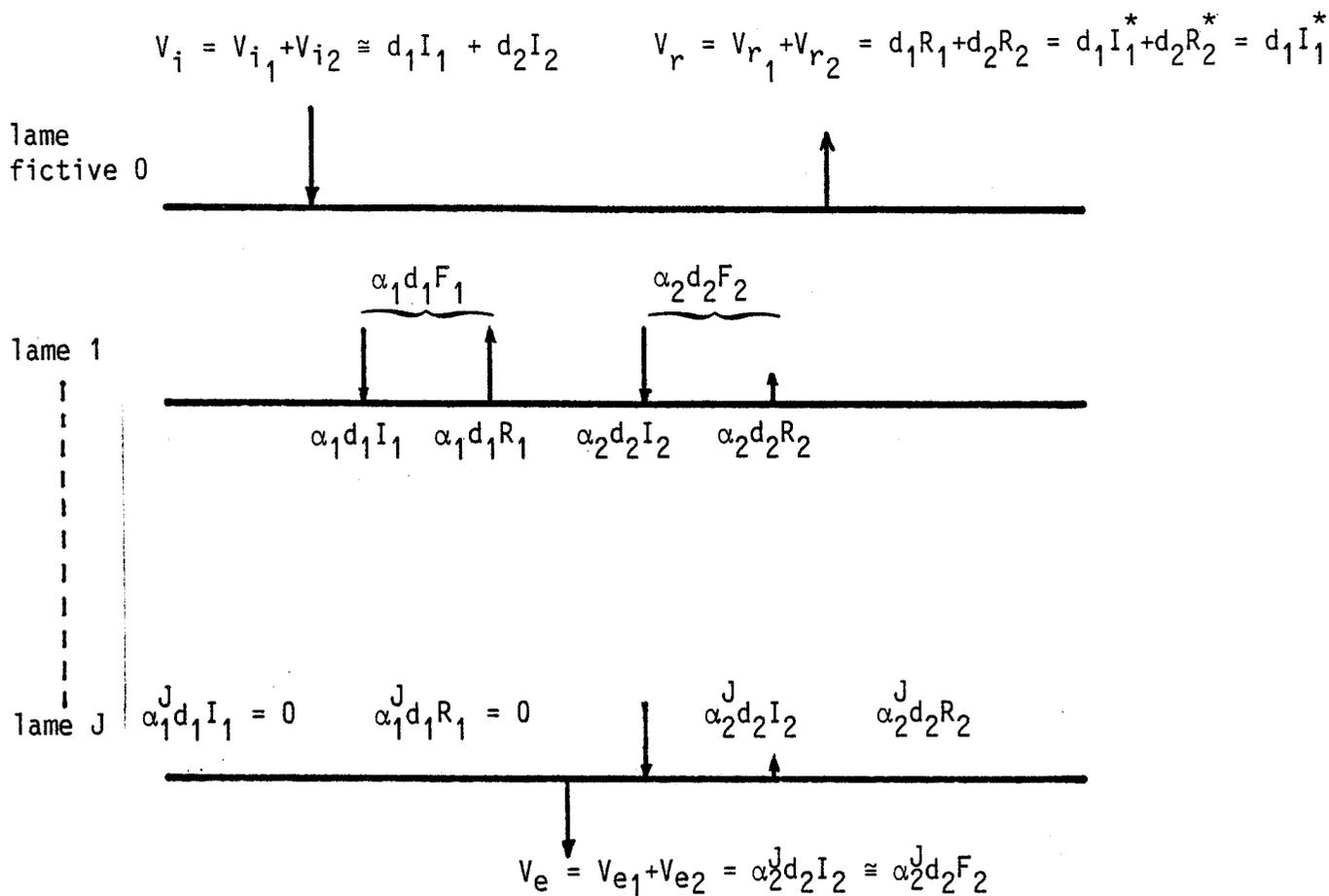


FIGURE 26 : Réflexion sélective dans une pile hélicoïdale de J lames biréfringentes : la vibration itérative \vec{F}_1 est affectée par la réflexion sélective tandis que \vec{F}_2 ne l'est pas.

c'est à dire que la vibration incidente $\vec{V}i_1$. Au niveau de la lame J, l'amplitude α_1^J du champ itératif \vec{F}_1 est nulle et par continuité du champ électrique, l'amplitude de la vibration transmise $\vec{V}e_1$ est nulle également.

Toute l'énergie perdue par \vec{I}_1 au cours de la traversée des J lames est réfléchié par la pile sous forme de la vibration \vec{R}_1 dont l'amplitude au niveau de la première lame est égale à celle de \vec{I}_1 : par rapport à la direction d'observation la vibration incidente $\vec{V}i_1$ est réfléchié par la pile sous forme de la vibration $\vec{V}r_1$ de même amplitude et même état de polarisation.

Si l'on considère simultanément le comportement des deux vibrations \vec{F}_1 et \vec{F}_2 d'amplitudes équivalentes ($d_1 \cong d_2$ en module) dans la pile de J lames on obtient le schéma de la figure 26 .

La partie $\vec{V}i_1$ de l'onde incidente $\vec{V}i$ qui correspond à la vibration itérative \vec{F}_1 évanescence est réfléchié totalement par la pile sous la forme de $\vec{V}r_1$; l'état de polarisation de $\vec{V}r_1$ par rapport à la direction d'observation est identique à celui de $\vec{V}i_1$. \vec{F}_1 étant totalement atténuée après traversée des J lames ($\alpha_1^J = 0$) sa contribution $\vec{V}e_1$ à la vibration transmise Ve est nulle.

La part $\vec{V}i_2$ de $\vec{V}i$ donne naissance à la composante incidente \vec{I}_2 de \vec{F}_2 qui se propage sans atténuation dans la pile. L'énergie correspondante est transmise sous la forme $\vec{V}e_2$. A \vec{I}_2 est associée la composante réfléchié \vec{R}_2 d'amplitude très faible qui donne naissance à la vibration Ve_2 .

La vibration transmise par la pile $\vec{V}e = \vec{V}e_1 + \vec{V}e_2$ est composée uniquement de $\vec{V}e_2$: la pile transmet une vibration dont l'état de polarisation est très proche de celui de la vibration itérative \vec{F}_2 .

La vibration réfléchié $\vec{V}r$ par la pile est constituée essentiellement par $\vec{V}r_1 = \vec{R}_1 = \vec{I}_1^*$ car l'amplitude de $\vec{V}r_2$ est très faible devant celle de $\vec{V}r_1$. A l'intérieur d'une bande de réflexion sélective de \vec{F}_1 , et, par rapport à la direction d'observation, l'état de polarisation de $\vec{V}r$ est très proche de celui de \vec{I}_1 .

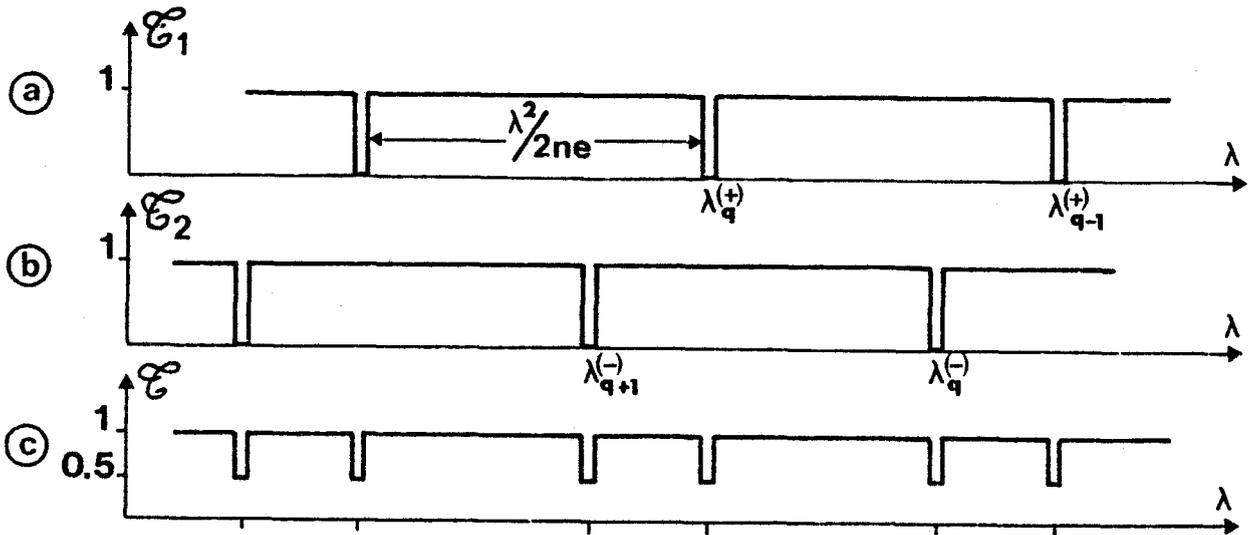


FIGURE 27 : Courbes de transmission d'un empilement dextre

- a) lumière incidente polarisée selon \vec{F}_1 : extinctions pour $\lambda_q^{(+)}$ (51).
- b) lumière incidente polarisée selon \vec{F}_2 : extinctions pour $\lambda_q^{(-)}$
- c) lumière incidente naturelle : superposition des cas a) et b).

2.2 Répartition spectrale des intensités transmises par une pile pour diverses vibrations incidentes

Si l'angle d'empilement des lames est fini et différent de $\pi/2$ (§ 5.2, chapitre 3), les séries de bandes de réflexion sélective relatives à \vec{F}_1 et \vec{F}_2 ne coïncident pas.

Choisissons une vibration incidente égale à \vec{I}_1 , \vec{F}_1 existe pratiquement seule dans la pile et la vibration incidente subit périodiquement le phénomène de réflexion sélective aux longueurs d'onde λ_1 (51). Le spectre de la lumière transmise par la pile présente aux longueurs d'onde λ_1 des cannelures de largeur $\delta\lambda$ (66) distantes de $\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2ne}$ (55a). Quand la vibration incidente est égale à \vec{I}_2 , le mode d'éclairage favorise la vibration itérative \vec{F}_2 , et la lumière transmise par la pile présente des cannelures aux longueurs d'onde λ_2 (51). La figure 27 donne les courbes de transmission d'un empilement dextre comportant un grand nombre de lames pour divers modes d'éclairage.

La lumière naturelle peut être considérée comme la superposition de deux vibrations elliptiques orthogonales incohérentes : la courbe de transmission de la pile éclairée en lumière naturelle est donc obtenue en superposant les courbes de transmission de chacune des vibrations itératives incidentes.

Les courbes (a) et (b) peuvent aussi être obtenues en analysant avec un analyseur elliptique croisé avec \vec{F}_2 ou \vec{F}_1 la lumière transmise par la pile éclairée en lumière naturelle.

3. RÉALISATION DE PILES HÉLICOÏDALES DE LAMES BIRÉFRINGENTES PRÉSENTANT DES BANDES DE RÉFLEXION SÉLECTIVE DANS LE VISIBLE

3.1 Les contraintes expérimentales

Il ressort immédiatement des expressions $\Delta\nu$ (55b), $\Delta\nu_{1,2}$ (56b) et $\delta\nu$ (67) que l'intervalle entre bandes d'une même série, le décalage entre les deux séries et la largeur des bandes sont d'autant plus importants que les lames utilisées sont minces ; la largeur des bandes réfléchies est en outre proportionnelle à la biréfringence $2\Delta n$ des lames. Les lames destinées à une vérification expérimentale des propriétés de réflexion sélective d'une pile hélicoïdale doivent donc être très minces

et fortement biréfringentes. D'autre part le décalage $\Delta v_{1,2}$ entre les deux séries de bandes croît avec l'angle γ . D'après la relation $\cos \gamma = \cos \beta \cos \Delta\phi$ (43), γ prend les valeurs extrêmes β ou $\pi - \beta$ quand $\Delta\phi = q\pi$; la situation expérimentale la plus favorable est obtenue quand les lames sont onde vraie ($q = 1, 2 \Delta\phi = 2\pi$) ou multiple. D'autres contraintes plus difficilement exprimables quantitativement doivent être respectées pour la réalisation expérimentale d'une pile présentant le phénomène de réflexion sélective. Elles résultent des hypothèses adoptées pour développer le formalisme :

(α) les lames sont supposées être parfaitement transparentes dans la gamme spectrale étudiée

(β) les lames sont supposées d'épaisseurs identiques et parfaitement jointives. Ces deux hypothèses sont regroupées car elles supposent toutes une qualité optique des lames pratiquement irréalisable. L'expérience montrera cependant qu'une forte tolérance est acceptable. Il serait d'ailleurs intéressant d'étudier numériquement l'influence des défauts d'épaisseur sur les valeurs $\delta\lambda$ et $\Delta\lambda_{1,2}$. Ajoutons encore que nous avons étudié par ailleurs le cas de lames non jointives, séparées par des lames isotropes d'épaisseur constante. Nous ne reproduirons pas cette étude ici car d'une part, les propriétés de tels empilements diffèrent peu de celles de lames jointives exposées ci-dessus et d'autre part, la réalisation d'un empilement parfaitement régulier de lames biréfringentes séparées par des lames isotropes d'épaisseur constante nous semble, a posteriori, encore plus difficile que celle d'une pile de lames jointives.

(γ) le formalisme développé au chapitre 2 suppose la pile infinie ; chaque vibration itérative est alors périodiquement parfaitement réfléchie. Si la pile comporte un nombre J fini de lames, la réflexion des itératives n'est plus que partielle ; elle est d'autant plus élevée que J est grand. En effet (§ 3, chapitre 2) la valeur propre α correspondant à une bande de réflexion sélective est réelle mais diffère peu de l'unité ; 0,96 est la valeur minimale rencontrée dans les calculs numériques, l'ordre de grandeur habituel étant 0,99. Soit A_0 l'amplitude du mode elliptique qui subit la réflexion sélective. D'un dioptre au suivant l'amplitude décroît proportionnellement à α . Pour une pile de J lames l'amplitude transmise vaut $A_0 \alpha^J$ et l'amplitude réfléchie $A_0 (1 - \alpha^J)$. Si $J = 50$, les amplitudes transmise et réfléchie valent respectivement $0,6 A_0$ et $0,4 A_0$ pour $\alpha = 0,99$. Un minimum d'une centaine de lames parfaitement identiques

et régulièrement disposées est nécessaire pour que la réflexion sélective soit à peu près totale.

3.2 Choix d'un milieu expérimental

Dans la condition de réflexion sélective (50) :

$$\phi = \frac{2\pi ne}{\lambda} = q\pi \pm \gamma$$

donnons à l'entier q une valeur arbitraire fixe. La condition (50) peut être remplie pour des largeurs d'onde optique, infra-rouge ou millimétrique etc., à condition de donner à l'épaisseur e les valeurs correctes correspondantes. La largeur $\delta\lambda$ (66) des bandes de réflexion sélective étant inversement proportionnelle à e et proportionnelle à λ^2 , il paraît avantageux de choisir des longueurs d'onde appartenant aux domaines infra-rouge ou millimétrique : pour le même ordre q les épaisseurs des lames auraient alors des valeurs plus aisément réalisables [46] que dans le domaine optique et la largeur $\delta\lambda$ des bandes serait supérieure. Mais dans ces domaines les caractéristiques optiques des matériaux (biréfringence, absorption) sont loin d'être maîtrisées comme l'a par exemple montré l'échec de l'étude d'une pile héliocœdale de lames dans le domaine des ondes millimétriques réalisée dans notre laboratoire. Nous avons donc choisi de réaliser l'expérience dans le domaine du visible où, a priori, le problème du choix du milieu en fonction de ses propriétés optiques ne se pose pas avec trop d'acuité ; ceci malgré le problème délicat de la précision de l'épaisseur des lames.

Quelques valeurs numériques nous permettent de situer les difficultés. Il est nécessaire de choisir un milieu biréfringent permettant de donner aux lames la plus grande identité possible. Les milieux cristallins de qualité optique convenable sont le quartz, le mica et, à un degré moindre, le spath. Les épaisseurs minimales réalisables compatibles avec l'obtention d'un grand nombre de lames sont de 30 μm pour les deux premiers minéraux et 120 μm pour le troisième. La précision de taille est de 1 μm pour les lames de mica, de 0,25 μm pour celles de quartz et de 1,5 μm pour les lames de spath. Les lames obtenues sont très fragiles.

Si l'on considère que l'indice moyen du mica et du quartz a la même valeur $n = 1,6$ pour le centre du visible ($\lambda = 5500 \text{ \AA}$), la largeur spectrale $\delta\lambda$ des bandes réfléchies par un empilement à 60° de lames de 30 \mu m d'épaisseur diffère selon la nature du matériau, en raison de la différence entre les biréfringences : pour le quartz ($2\Delta n \approx 9 \cdot 10^{-3}$) $\delta\lambda$ est de l'ordre de $0,02 \text{ \AA}$ tandis que pour le mica ($2\Delta n \approx 4 \cdot 10^{-3}$) $\delta\lambda$ est de l'ordre de $0,08 \text{ \AA}$. Avec des lames de spath, dont la biréfringence $2\Delta n = 0,17$ est une des plus fortes connues pour les milieux cristallins, la largeur spectrale $\delta\lambda$ atteint $0,17 \text{ \AA}$.

Les valeurs d'épaisseurs indiquées représentent la limite inférieure techniquement réalisable de lames à peu près reproductibles : la largeur calculée, très faible, des bandes de réflexion sélective n'incite pas à réaliser, en vue d'une vérification expérimentale, un empilement hélicoïdal avec de telles lames, malaisées à manipuler.

Notre attention s'est alors reportée sur les propriétés de biréfringence que présentent certains polymères en phase amorphe soumis à une déformation [47]. De nombreux polymères sont transparents dans le visible et pour un certain nombre les lois d'évolution de la biréfringence induite Δn en fonction de la traction imposée à chaud sont connues : l'anisotropie induite se traduit par l'apparition de deux lignes neutres, celle de plus faible indice coïncidant avec la direction d'étirement ; la différence entre les indices dépend de manière complexe des caractéristiques initiales de la lame étirée et de l'allongement imposé. La biréfringence induite ne disparaît pas à la température ambiante quand la traction est supprimée : avec des allongements d'un facteur 3 à 10 compatibles avec les propriétés de déformation homogène des polymères, Δn atteint couramment des valeurs très supérieures [48] à celles connues pour les minéraux biréfringents classiques, spath mis à part. Il existe d'autre part une grande gamme de films polymères d'épaisseurs diverses (10 \mu m à plusieurs mm). On dispose là d'un moyen apparemment commode pour obtenir un grand nombre de lames biréfringentes identiques quand plusieurs éprouvettes peuvent être découpées dans un film polymère choisi pour son épaisseur et ses propriétés. En première approximation, la déformation des éprouvettes est isovolumique : pour un allongement de 300 % à 1000 % la partie utile des lames obtenues a une surface de l'ordre du cm^2 pour une largeur n'excédant pas le demi-centimètre. Cela limite fortement la zone

de recouvrement des lames qui constitue la pile proprement dite. Les fluctuations d'épaisseur observées d'une lame à l'autre atteignent $5 \mu\text{m}$ pour une épaisseur moyenne de $50 \mu\text{m}$. Ces fluctuations traduisent une médiocre reproductibilité de la déformation des lames qui se manifeste aussi par des fluctuations de la biréfringence Δn . Ajoutons enfin que les lames obtenues ne sont pas planes, le film tendant à se déformer quand la traction est supprimée et la température ramenée à la température ambiante. Les lames obtenues ne sont donc pas identiques et ne peuvent en aucun cas être rendues jointives à moins de leur appliquer une pression importante qui se traduirait par des variations incontrôlables de la biréfringence.

Toutes ces difficultés sont imputables au fait que les lames sont obtenues une à une et qu'il est impossible d'assurer leur similitude parfaite. La seule solution est de tirer toutes les lames d'un même échantillon ayant subi une déformation uniforme; de tels échantillons existent couramment sous la forme de films polymères transparents industriels : d'usage divers, les plus connus pour leurs propriétés biréfringentes sont les rubans d'adhésif transparent. Cependant, de tels films sont en général biaxes et présentent souvent une dispersion des lignes neutres aisément décelable au microscope polarisant. Les propriétés optiques varient d'un film à l'autre mais sont relativement constantes pour un même film et il est possible d'obtenir un nombre élevé de lames à peu près identiques. Ajoutons que de telles lames présentent l'avantage de pouvoir être manipulées avec un minimum de précautions sans risque de casse notamment.

Après divers essais, nous avons retenu un film polymère utilisé par la firme M.R.C. (Material Research Company) pour l'emballage de rouleaux de métaux ultra-purs. Le matériau se présente sous forme d'une bande de 2 cm de large et d'épaisseur $53 \mu\text{m}$. Pour la longueur totale que nous avons utilisée ($\sim 1 \text{ m}$) ; les fluctuations d'épaisseur ne dépassent pas 2 %. L'indice moyen est élevé $n = 1,71$; il a été mesuré à l'aide d'un interféromètre de Michelson éclairé en lumière blanche. Le matériau utilisé est transparent et biaxe, l'angle des axes valant approximativement 70° . La ligne neutre de plus grand indice n_2 est sensiblement perpendiculaire à la plus grande dimension du film, qui correspond à la direction d'étirement.

La principale qualité du film utilisé est la remarquable régularité du retard $2\Delta\phi$ (22) et donc de la biréfringence $n_2 - n_1$ (puisque l'épaisseur est pratiquement constante). Ce retard et la biréfringence Δn ont été évalués à l'aide d'un compensateur d'Erhinghaus équipant le microscope polarisant (Panphot, Leitz). Soit δ la différence de marche entre les deux lignes neutres du film. En faisant basculer la lame de spath du compensateur, on superpose à δ une différence de marche variable et de signe opposé. En lumière blanche parallèle, entre polariseur et analyseur croisés, la compensation exacte est repérée par l'apparition d'une croix noire occupant le centre du champ du microscope. Un tambour gradué permet de mesurer le retard introduit par la lame de spath. La mesure a été effectuée avant le découpage des lames. Une fois la compensation réalisée, la croix noire ne s'est pas déplacée de plus du quart de la largeur du champ du microscope quand on a fait défiler toute la longueur du film utilisée, ce qui correspond à une variation de δ de $0,14 \mu\text{m}$: les fluctuations du retard $2\Delta\phi$ des lames ne dépassent donc pas $0,02 \pi$ au centre du visible sur la totalité du film. La biréfringence du matériau se déduit de δ compte tenu de l'épaisseur e du film :

$$2\Delta n = \frac{\delta}{e} = 0,031 \quad ;$$

elle est trois fois plus élevée que celle du quartz et sept fois plus élevée que celle du mica.

45 lames de $2,5 \text{ cm} \times 1,5 \text{ cm}$ ont pu être découpées dans le film décrit ci-dessus. Ces lames considérées comme parfaitement identiques ont les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} e &= 53 \mu\text{m} \pm 1 \mu\text{m} \\ n &= 1,71 \pm 0,03 \\ 2\Delta n &= 0,031 \end{aligned}$$

Une lame éclairée en lumière blanche s'éteint franchement quand elle est correctement orientée entre polariseur et analyseur croisés. Tournée de 45° par rapport à la direction précédente elle présente une couleur de biréfringence uniforme, caractéristique d'une épaisseur onde pour les radiations du milieu du spectre visible. Les lames ne présentent aucun signe de dichroïsme ni de dispersion des lignes neutres avec la longueur d'onde.

3.3 Réalisation d'un empilement hélicoïdal

Les lames obtenues sont relativement souples ; elles sont aisées à manipuler avec des pinces plates. Cependant, elles se chargent facilement d'électricité statique et le nombre de manipulations doit être réduit au minimum.

Les lames ont été nettoyées à sec, à l'aide d'un bâtonnet garni de coton hydrophile. Ce procédé simple est efficace ; il a l'avantage de ne pas provoquer d'altération de la surface des lames ainsi qu'il a pu être contrôlé par examen au microscope. L'opération a cependant l'inconvénient de charger fortement les lames et il a fallu attendre une semaine environ avant de pouvoir les manipuler commodément à nouveau.

Plusieurs méthodes d'empilement des lames ont échoué ; elles reposaient sur une estimation optique de l'orientation mutuelle des lames, l'observation étant réalisée au microscope polarisant. L'empilement le plus satisfaisant a finalement été obtenu de la manière suivante : l'un des deux bords du film initial a été choisi comme bord de référence pour chaque lame (figure 28). Le bord b_1 d'une première lame L_1 est amené contre une butée rectiligne solidaire de la platine tournante du microscope. La lame L_1 ayant été orientée pour obtenir l'extinction entre polariseur P et analyseur A, la direction de b_1 est repérée. La lame L_1 est ôtée de la platine et la direction du bord de référence de chaque lame est repérée comme ci-contre.

Il a ainsi pu être vérifié que pour la plupart des lames, les lignes neutres sont dirigées à 1° et 91° du bord de référence (b). Certaines lames pour lesquelles ces orientations différaient d'au moins un degré ont été éliminées ce qui a ramené le nombre de lames disponibles à 45.

L'orientation des lignes neutres de chaque lame étant connue par rapport à (b), l'empilement hélicoïdal des lames peut alors être réalisé en empilant les lames dans un prisme creux dont l'angle des faces à la valeur β désirée. Cette méthode présente deux inconvénients :

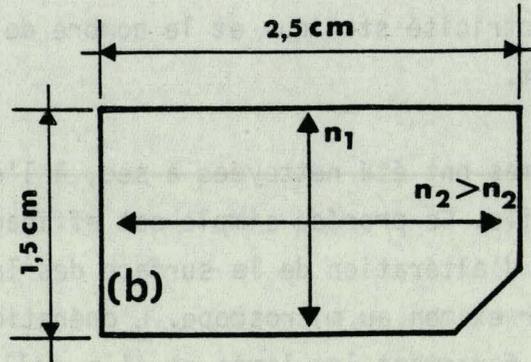


FIGURE 28 : Une lame de la pile : le bord de référence (b) est repéré grâce à une encoche dans la lame.

a) les valeurs possibles de β sont limitées par les possibilités mécaniques de construction du prisme

b) le nombre de lames par pas est obligatoirement entier.

Pratiquement nous nous sommes limités à un empilement à 60° dans un prisme équilatéral et un empilement à 90° aisé à réaliser dans une simple boîte carrée ou rectangulaire. Les lames empilées dans le prisme sont maintenues en position par un couvercle qui s'emboîte exactement dans le prisme. Le couvercle et la base du prisme sont percés de trous en regard (ϕ 1 cm) qui permettent le passage de la lumière dans la zone de superposition des lames. Les vis qui assurent la solidarité du couvercle et du prisme sont serrées très légèrement pour éviter d'introduire une biréfringence parasite et une déformation des lames. Celles-ci sont alors supposées être jointives.

4. OBSERVATION DES BANDES MULTIPLES DE REFLEXION SELECTIVE

Les phénomènes de réflexion sélective présentés par les deux types d'empilements ($\beta = 60^\circ$ et $\beta = 90^\circ$) réalisés à partir des lames polymères décrites au § 3.2 varient quand on modifie la longueur d'onde de la lumière incidente.

4.1 Prévisions

Pour le centre du visible ($\lambda = 5500 \text{ \AA}$) les lames utilisées sont trois fois onde. En effet :

$$\phi \approx 330 \pi \quad \text{et} \quad 2\Delta\phi = \frac{2\Delta n}{n} \phi \approx 5,97 \pi$$

Dans ce cas, pour $\beta = 90^\circ$, les deux vibrations itératives sont circulaires inverses. Les deux séries de bandes de réflexion sélective coïncident et à l'intérieur d'une bande la totalité de la lumière incidente est réfléchie pour une pile infinie. Les bandes sont distantes de $\Delta\lambda = 16,7 \text{ \AA}$ (56a). Leur largeur calculée est maximale : $\delta\lambda \approx 0,096 \text{ \AA}$ (76).

Pour $\beta = 60^\circ$ et $\lambda = 5500 \text{ \AA}$, $|n|$ vaut $\sim 42^\circ$: les vibrations itératives sont quasi-circulaires et le repérage de leurs axes est pratiquement impossible. La largeur des bandes de réflexion sélective est inférieure à celle des bandes obtenues pour $\beta = 90^\circ$. Elle peut être calculée à partir de la relation (66) à condition d'y faire $\cos \beta = \frac{1}{2}$; on obtient :

$$\delta\lambda = 0,083 \text{ \AA}$$

Deux bandes d'une même série sont séparées par un intervalle spectral $\Delta\lambda$ tel que :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\pi}{330 \pi} \quad \text{d'où} \quad \Delta\lambda = 16,7 \text{ \AA}$$

tandis que les deux séries sont décalées d'une quantité $\Delta\lambda_{1,2}$ (56a) telle que la variation correspondante $\delta\phi$ de l'angle moyen ϕ soit égale à β d'où :

$$\Delta\lambda_{1,2} \approx \frac{\Delta\lambda}{3} = 5,5 \text{ \AA}$$

Cette distance correspond au tiers de l'intervalle séparant deux bandes d'une même série.

Dans le rouge ($\lambda = 6200 \text{ \AA}$) les lames sont telles que :

$$\phi = 292,7 \pi \quad \text{et} \quad 2 \Delta\phi = 5,31 \pi \quad ;$$

quand $\beta = 60^\circ$, les vibrations itératives ont une ellipticité de 15° et leurs grands axes sont dirigés selon les bissectrices de l'angle entre lignes neutres de deux lames consécutives (chapitre 2, § 3.1). Deux bandes d'une même série sont séparées par un intervalle spectral théorique $\Delta\lambda = 21,1 \text{ \AA}$: pour un angle d'empilement $\beta = 60^\circ$, les deux séries sont décalées de $\frac{\Delta\lambda}{3}$.

Dans le violet ($\lambda = 4250 \text{ \AA}$) et pour l'empilement étudié ($\beta = 90^\circ$), l'intervalle spectral entre deux bandes d'une série peut être calculé :

$$\Delta\lambda = 9,9 \text{ \AA}$$

4.2 Pile hélicoïdale à 60° : observation des deux séries de bandes de réflexion sélective.

La pile réalisée dans le prisme équilatéral est éclairée sous l'incidence normale en lumière naturelle blanche (lampe à iode). La lumière transmise est analysée avec un spectroscopie à réseau réglé, pour les radiations étudiées, dans le second ordre. Le réseau comporte 1200 traits par millimètre et la distance d'observation est de 4 m. Les bandes spectrales analysées ont 100 à 150 Å de large. Avec les données numériques ci-dessous la dispersion de l'appareil pour les radiations $\lambda = 4250 \text{ Å}$, $\lambda = 5500 \text{ Å}$ et $\lambda = 6200 \text{ Å}$ est de 0,896 Å/mm, 0,782 Å/mm et 0,696 Å/mm. Un analyseur circulaire droit ou gauche peut être intercalé entre la pile et la fente d'entrée du spectroscopie si nécessaire. Le montage correspond au schéma de la figure 29.

La source lumineuse S est une lampe à iode fournissant une lumière blanche intense. Cependant la lumière transmise par la pile de 45 lames dans la direction de la fente d'entrée du spectroscopie est très faible : les lames ne sont pas parfaitement transparentes et une quantité non négligeable de la lumière incidente est diffusée.

Seule la lumière transmise par la pile a été analysée ; en effet le contraste entre l'énergie lumineuse réfléchie dans les bandes de réflexion sélective et la lumière diffusée est trop faible pour permettre une étude de la lumière réfléchie ; de plus les phénomènes sont perturbés par la non-planéité des lames.

L'essentiel des propriétés de réflexion sélective d'un empilement hélicoïdal est résumé par la photo (a) de la planche 1 qui reproduit à l'échelle 1/1 les phénomènes observés avec le spectroscopie. Cette photo (a) correspond à l'analyse du centre du visible ($\lambda = 5500 \text{ Å}$) ; la dispersion est de 16 Å pour 3 cm. Le cliché central correspond à l'analyse de la lumière transmise par la pile, en l'absence d'analyseur circulaire (figure 27). Ce cliché présente des cannelures sombres espacées en moyenne de 3,1 cm soit 16,5 Å environ. Cette valeur est en bon accord avec la valeur théorique $\Delta\lambda = 16,7 \text{ Å}$ calculée au § 4.1. Les clichés du haut et du bas de la photo (a) montrent le déplacement des cannelures quand un analyseur



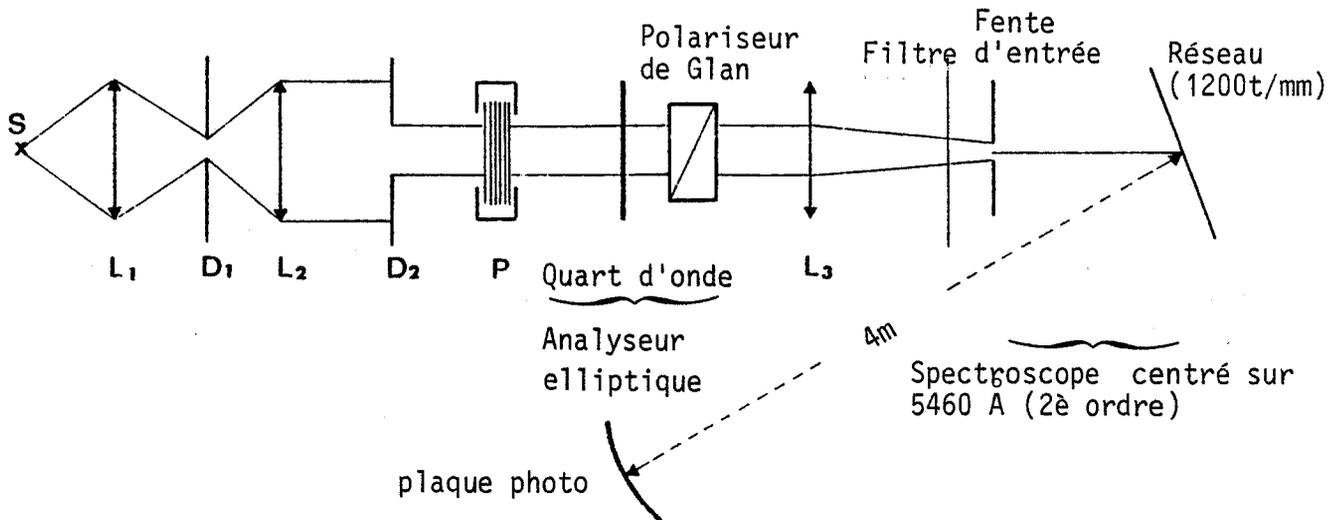
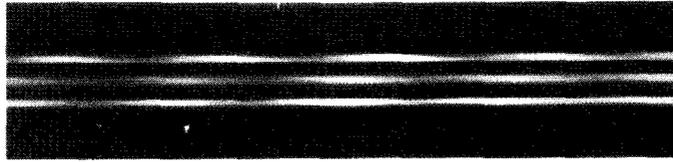
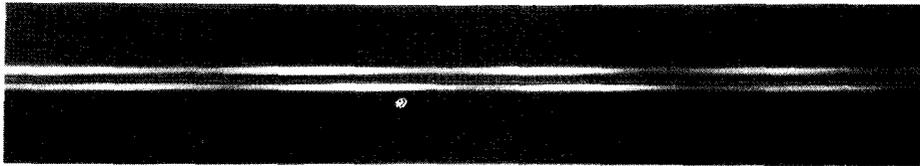


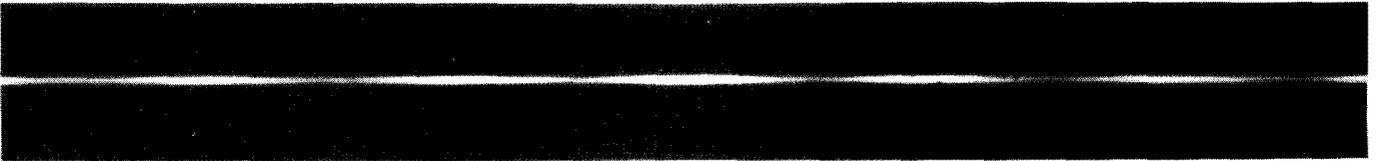
FIGURE 29 : Schéma de principe du montage d'analyse de la lumière transmise par la pile hélicoïdale P .



(a)



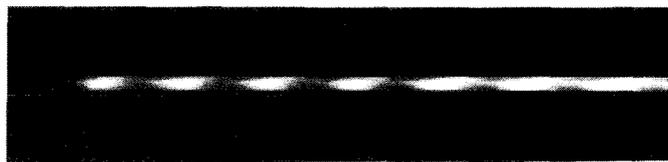
(b)



(c)



(d)



(e)

Analyse spectrale de la lumière transmise par un empilement dextre de lames biréfringentes (les lignes neutres de deux lames consécutives font entre elles un angle de 60°).

Photographie (a) : Centre du visible ($\lambda = 5500 \text{ \AA}$). La dispersion est de $7,82 \text{ \AA}$ par cm. Distance entre cannelures $\Delta\lambda \approx 16,5 \text{ \AA}$.
- cliché central : sans analyseur
- cliché du haut : analyseur circulaire droit
- cliché du bas : analyseur circulaire gauche

Photographie (b) : Région rouge ($\lambda \approx 6200 \text{ \AA}$) du visible. La dispersion est de $6,96 \text{ \AA}$ par cm. Distance entre cannelures $\Delta\lambda \approx 21 \text{ \AA}$.
- cliché du bas : sans analyseur
- cliché du haut : analyseur elliptique réglé pour une vibration d'ellipticité $\eta \approx 15^\circ$ orientée à $\theta = 30^\circ$ des lignes neutres de la dernière lame de la pile (η et θ caractérisent une vibration itérative de l'empilement).

Analyse spectrale de la lumière transmise par un empilement de lames croisées ($\beta = 90^\circ$).

Photographie (c) : Région rouge ($\lambda \approx 6200 \text{ \AA}$) du visible. La dispersion est de $6,96 \text{ \AA}$ par cm.
La distance entre cannelures est la même que celle mesurée sur la photo (b) : $\Delta\lambda \approx 21 \text{ \AA}$

Photographie (d) : Région verte ($\lambda \approx 5500 \text{ \AA}$) du visible. La dispersion est de $7,82 \text{ \AA}$ par cm.
La distance entre cannelures est la même que celle mesurée sur la photo (a) : $\Delta\lambda \approx 16,5 \text{ \AA}$

Photographie (e) : Région violette ($\lambda \approx 4400 \text{ \AA}$) du visible. La dispersion est de $8,96 \text{ \AA}$ par cm. Distance entre cannelures : $\Delta\lambda \approx 10 \text{ \AA}$

circulaire droit ou gauche est intercalé entre la pile et le spectroscopie ; chaque mode itératif quasi-circulaire étudié est affecté par une série de bandes de réflexion sélective régulièrement espacées (figure 27). Les cannelures correspondant à chaque mode sont décalées d'un sixième de période de part et d'autre de celles observées sans analyseur : les cannelures du cliché central réalisé sans analyseur résultent de la superposition des systèmes de cannelures relatifs aux deux modes circulaires inverses [49].

La largeur des cannelures est très importante. Elle ne correspond pas à la valeur $\delta\lambda = 0,086 \text{ \AA}$ calculée au § 4.1. Elle est due aux irrégularités d'épaisseur des lames et aux fluctuations de l'angle β de l'empilement. Dans les conditions adoptées pour réaliser la pile on peut estimer que les imprécisions sur e et β atteignent au moins 2%. Il est prévisible qu'une valeur de $\delta\lambda$ plus proche de la valeur calculée serait obtenue avec un empilement hélicoïdal plus minutieusement réalisé.

Une analyse photométrique (figure 30) du négatif de la photo (a) a été réalisée à l'aide du microscope équipé d'un photomultiplicateur. Les minimums d'intensité correspondant aux cannelures apparaissent nettement pour chacun des trois clichés. On retrouve la périodicité des cannelures dans chaque série et le décalage d'un tiers de période entre les deux séries obtenues avec les analyseurs circulaires inverses.

La photo (b) de la planche 1 correspond à l'étude d'une bande spectrale située dans la région rouge du spectre visible ($\lambda = 6200 \text{ \AA}$). Les deux clichés qui la composent présentent des cannelures distantes de $30,3 \text{ mm}$ ce qui correspond à un intervalle spectral $\Delta\lambda = 21 \text{ \AA}$, valeur en bon accord avec la valeur théorique calculée en 4.1. Un cliché a été réalisé sans analyseur tandis que l'autre a été réalisé avec un analyseur elliptique réglé pour une vibration d'ellipticité $\eta = 15^\circ$ et d'azimut $\beta/2$ soit $+30^\circ$ par rapport aux lignes neutres de la dernière lame. Conformément aux prévisions ($\beta=60^\circ$) les deux séries de cannelures de la photo (b) sont décalées d'une quantité $\frac{1}{2} \Delta\lambda_{1,2}$ soit $(\Delta\lambda)/6$.

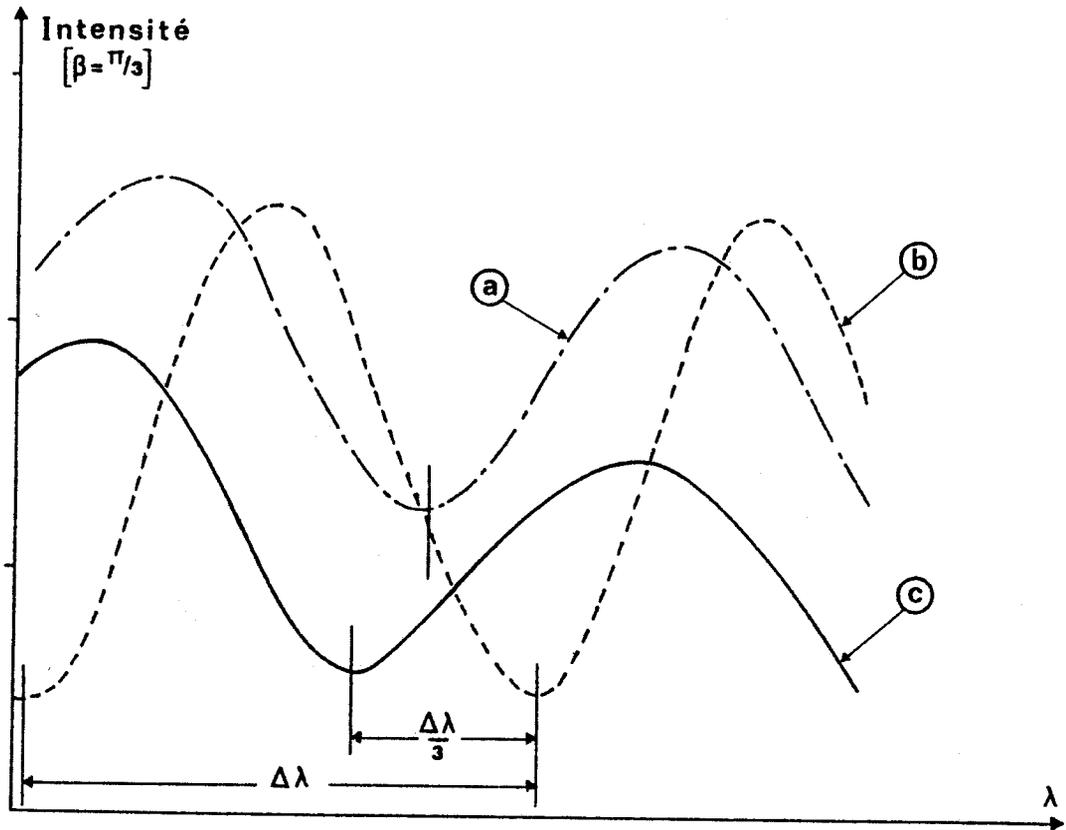


FIGURE 30 : Variations de l'intensité transmise en fonction de la longueur d'onde, pour un empilement à 60° dans le centre du visible (photo a de la planche 1)
(a) sans analyseur (cliché central)
(b) avec un analyseur circulaire droit (cliché haut)
(c) avec un analyseur circulaire gauche (cliché bas)

Les valeurs $\eta = 15^\circ$ et $\theta = +30^\circ$ sont celles qui ont permis de réaliser le cliché le plus contrasté. Elles coïncident avec les valeurs d'ellipticité et d'azimut de l'une des vibrations itératives prévues par le calcul. Ce résultat constitue une confirmation expérimentale de la réalité d'existence des vibrations itératives et en particulier de leur orientation qui en première approximation est celle de la bissectrice de l'angle entre lignes neutres de deux lames consécutives.

4.3 Pile de lames à 90°

L'empilement des lames est plus facile à réaliser (figure 31). Les lames sont empilées rapidement dans les positions correctes repérées grâce à l'encoche de chaque lame. Pour amener les bords de référence (b) des lames en coïncidence avec les surfaces orthogonales directrices (1) et (2), il suffit, ainsi que le montrent les flèches de la figure, de pousser en bloc les deux paquets de lames auxquels se réduit la pile pour $\beta = 90^\circ$. L'opération est relativement aisée car les deux poussées peuvent être effectuées en même temps. Aussi les réglages obtenus pour $\beta = 90^\circ$ sont nettement meilleurs que pour $\beta = 60^\circ$: la dispersion des cannelures due aux irrégularités d'empilement s'atténue (photos c, d, e). Les photos c, d, e de la planche 1 illustrent les phénomènes de réflexion sélective observés pour les radiations $\lambda \approx 6200 \text{ \AA}$, $\lambda \approx 5500 \text{ \AA}$ et $\lambda \approx 4250 \text{ \AA}$ avec une pile à 90° ; les intervalles spectraux entre cannelures qui peuvent être mesurés $\Delta\lambda = 21 \text{ \AA}$, $\Delta\lambda = 16,6 \text{ \AA}$ et $\Delta\lambda = 9,9 \text{ \AA}$ correspondent aux valeurs calculées au § 4.1 à partir de la relation (66) :

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2ne} .$$

L'expression littérale ci-dessus est celle qui caractérise la distance entre deux pics successifs d'un étalon de Pérot-Fabry d'épaisseur e et d'indice n . Cette remarque n'autorise pas à envisager la pile comme une succession d'étalons Pérot-Fabry identiques. En effet un tel système nécessiterait, pour assurer la coïncidence exacte des pics des divers étalons, une identité absolue des 45 lames de la pile. Une telle identité est techniquement impossible à réaliser avec la méthode utilisée dans notre montage. Signalons d'ailleurs que le spectre de la lumière

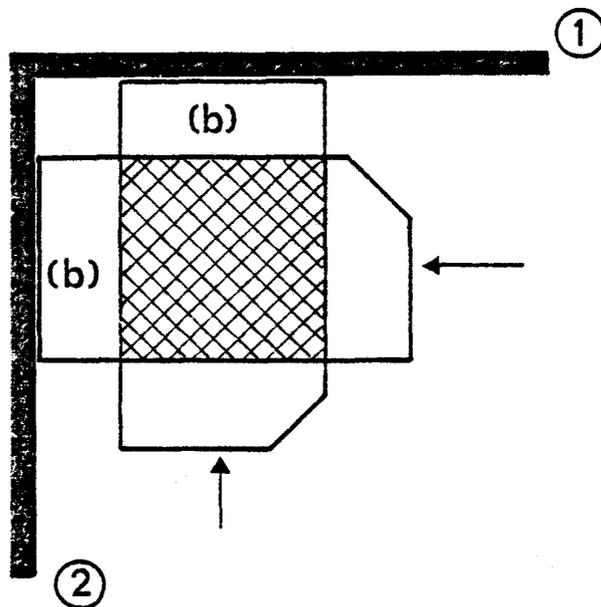


FIGURE 31 : Méthode d'empilement des lames pour $\beta = 90^\circ$ chaque lame porte une encoche qui permet de repérer sa position correcte. Les bords de référence (b) sont amenés en coïncidence avec les faces orthogonales (1) et (2).

transmise par une lame seule (disposée à la place de la pile dans le montage de la figure 29) ne présente expérimentalement aucune cannelure et que l'effet Pérot-Fabry d'une lame n'est pas visible.

5. CONCLUSION

Les vibrations itératives permettent de décomposer la lumière incidente sur une pile en deux vibrations elliptiques dont les caractéristiques (η, θ) dépendent à la fois des propriétés de l'empilement réalisé et du domaine spectral étudié. Chacune de ces vibrations est affectée tour à tour, quand l'angle d'empilement diffère de $\pi/2$, par un phénomène de réflexion sélective : outre les phénomènes de biréfringence elliptique accompagnée de pouvoir rotatoire d'entraînement liés à leur structure (chapitre 4), les piles hélicoïdales de lames à biréfringence rectiligne parfaitement transparentes présentent des bandes multiples de réflexion sélective. Ce phénomène est connu pour certains milieux biréfringents à torsion continue (mésophases torses en particulier) dont il constitue la propriété la plus spectaculaire ; pour ces milieux, la bande de réflexion est unique .

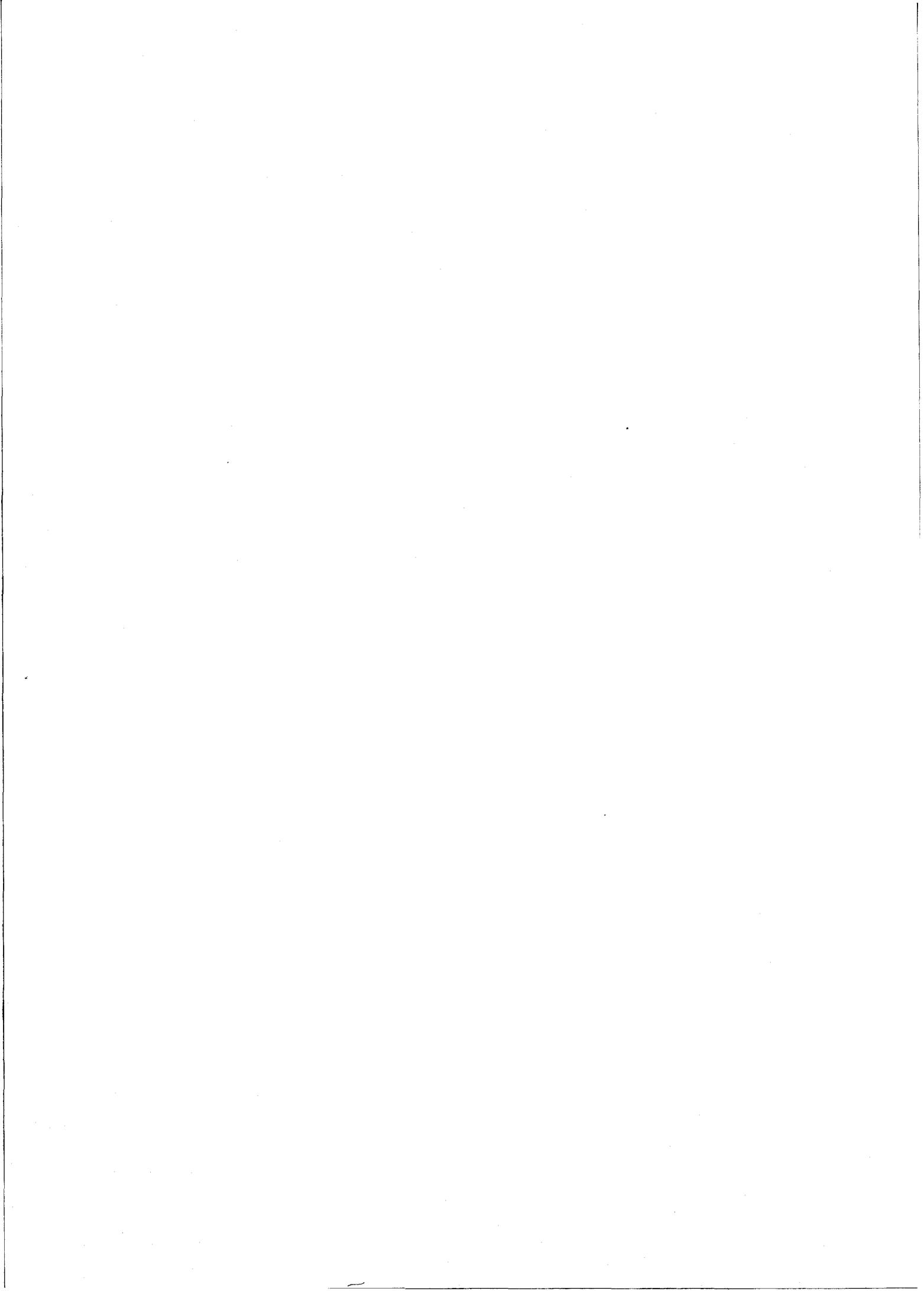
Chaque bande de réflexion sélective correspond à un défaut de transmission de la pile sur un domaine étroit de longueurs d'ondes. Expérimentalement, le spectre de la lumière transmise par une pile de lames parfaitement transparentes dans le domaine spectral analysé présente deux séries distinctes de cannelures. Ces observations s'interprètent par l'existence de deux séries de bandes multiples de réflexion sélective.

Deux types différents d'empilements hélicoïdaux destinés à présenter les phénomènes prévus dans le visible ont été réalisés. Les distances entre cannelures mesurées dans divers domaines spectraux du visible correspondent aux valeurs prévues par la théorie.

La position des cannelures varie quand l'état de polarisation de la lumière analysée coïncide avec celui de l'une ou l'autre des vibrations itératives. Les états de polarisation mesurés coïncident avec les valeurs attendues, ce qui met en évidence expérimentalement la réalité de l'existence des vibrations itératives ; en particulier les résultats permettent de confirmer leur orientation qui coïncide approximativement avec la bissectrice de l'angle entre lignes neutres de deux lames successives.

Les cannelures observées sont beaucoup plus larges que ne le prévoit le calcul. Cette divergence doit être imputée aux défauts de réalisation des empilements : irrégularités d'épaisseur des lames, fluctuations de l'angle d'empilement d'une lame à la suivante, variations de la biréfringence des lames successives.

Les coefficients de réflexion au niveau de chaque dioptré de la pile sont très faibles ; en effet la différence d'indice entre deux lames pour une direction de vibration donnée ne peut excéder la biréfringence $2\Delta n$ (quand $\beta = \pi/2$) du milieu constituant les lames. Cependant, dans des bandes spectrales étroites, la pile se comporte globalement comme un résonateur Pérot-Fabry pour les modes elliptiques itératifs définis par l'empilement : le coefficient de réflexion proche de l'unité n'est obtenu que par l'accord de phase de toutes les ondelettes réfléchies aux dioptrés successifs ; dans certaines bandes très étroites de fréquences une pile hélicoïdale de lames biréfringentes se comporte comme un miroir dont le pouvoir réflecteur élevé est continûment réparti dans la structure.



CONCLUSION

Notre étude a débuté par un désir d'analyser quantitativement le rôle des réflexions aux dioptries d'une pile de lames biréfringentes, réflexions en général négligées quelles que soient les méthodes employées : méthode analytique de Mallard, géométrique de Poincaré et Mauguin, ou encore matricielle de Jones. A cet effet un formalisme original permettant de tenir globalement compte de toutes les ondes réfléchies par chaque lame a été mis au point.

La méthode a d'abord été appliquée à la pile élémentaire la plus simple, constituée de deux lames à biréfringence rectiligne tournées d'un angle quelconque. La prise en compte des réflexions affecte de manière significative l'état de polarisation des ondes transmises par la pile : en particulier les vibrations propres de la pile ne sont pas orthogonales. Ce résultat de notre analyse ne peut être prévu par les méthodes classiques et a pu être vérifié expérimentalement.

L'application à une pile hélicoïdale de lames à biréfringence rectiligne éclairée dans la direction de l'axe de torsion par une onde plane et homogène a conduit à introduire la notion nouvelle de vibration itérative : une telle vibration représente simplement une répartition globale de champ électromagnétique qui se reproduit sans déformation en des plans homologues de la pile, en tournant d'un angle égal à l'angle de torsion de la structure ; la périodicité est égale à l'épaisseur d'une lame.

Une pile hélicoïdale de lamelles biréfringentes tend vers un milieu biréfringent torse continu quand l'épaisseur des lamelles et l'angle que font les lignes neutres de deux lames consécutives tendent vers zéro. Le calcul montre que les vibrations itératives de la pile tendent alors vers les vibrations favorisées du milieu. Ce résultat confirme l'équivalence entre notre méthode et l'application directe des équations de Maxwell à un milieu biréfringent torsadé. En séparant

nettement les composantes aller et retour, notre calcul permet en plus d'analyser comment interagissent les réflexions internes multiples qui, comme l'avaient pressenti De Vries et Chandrasekhar, sont à l'origine du phénomène de réflexion sélective présenté par les cholestériques.

Les vibrations itératives permettent d'étudier de manière rigoureuse les propriétés optiques de piles hélicoïdales comportant un nombre limité de lames d'épaisseur finie. Cependant, les calculs sont considérablement simplifiés quand l'étude approximative des propriétés des piles est effectuée selon la méthode cinématique de Fresnel appliquée aux vibrations itératives ; la représentation géométrique de Poincaré qui en constitue une illustration très pratique montre que les phénomènes observés résultent de la superposition de la biréfringence (déphasage des itératives) et du pouvoir rotatoire d'entraînement dû à la torsion de la structure. Le déphasage des itératives varie avec les valeurs respectives de l'angle d'empilement et du retard des lames. Les vibrations itératives sont le plus souvent elliptiques ; elles peuvent être, pour une pile donnée, rectilignes ou circulaires pour certaines longueurs d'onde. Les propriétés observées diffèrent notablement d'un empilement à l'autre ; pour un même empilement elles dépendent fortement de la longueur d'onde.

Les quelques exemples décrits montrent l'utilité de la notion de vibration itérative qui permettrait, au besoin, d'étudier de manière exhaustive les relations qui lient le pouvoir rotatoire spécifique d'une pile hélicoïdale finie aux propriétés des lames et à l'angle d'empilement.

Des résultats non encore étudiés jusqu'à présent sont apparus à l'examen des conditions de propagation des vibrations itératives des piles de lames d'épaisseur finie. Les piles hélicoïdales éclairées sous l'incidence normale présentent un phénomène optique analogue au phénomène de réflexion sélective observé avec les mésophases torsées éclairées dans la direction de l'axe de torsion : mais alors que pour les mésophases la bande de réflexion est unique, la réflexion sélective des piles hélicoïdales existe sous forme de deux infinités de bandes très étroites.

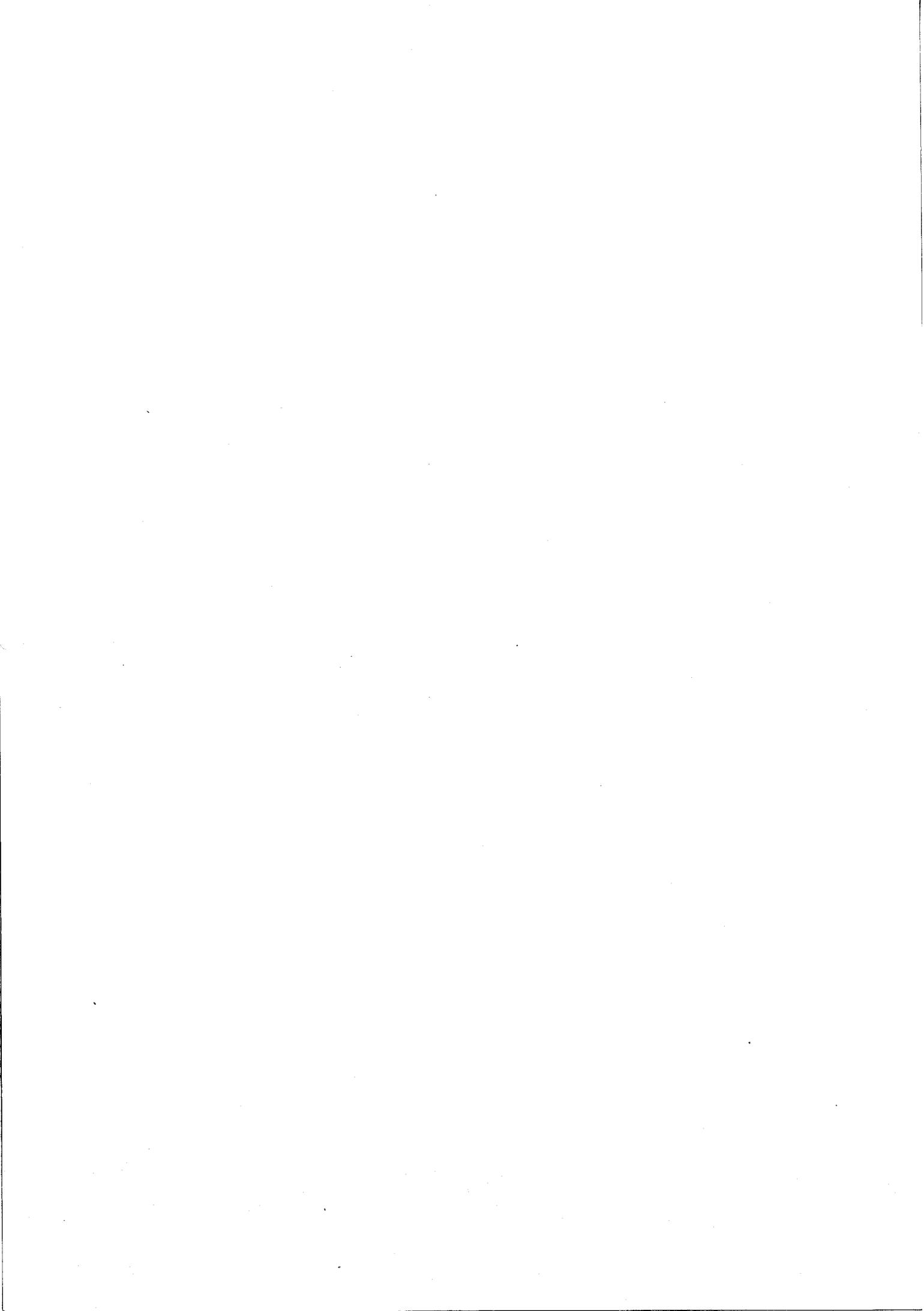
Chaque série de bandes affecte un mode elliptique particulier dont les caractéristiques dépendent de l'empilement et de la longueur d'onde. La pile peut être globalement considérée comme un résonateur

Pérot-Fabry fonctionnant sur deux modes elliptiques qui peuvent être choisis à l'avance. Le phénomène prévu par l'analyse est très sélectif, chacune des ondelettes réfléchies aux dioptrés est de faible amplitude car les coefficients de réflexion liés aux différences d'indices d'une lame à l'autre sont très faibles. Cependant, dans une bande de réflexion sélective, le coefficient de réflexion global pour le mode itératif correspondant est proche de l'unité si la pile est suffisamment épaisse : l'amplitude du mode concerné décroît exponentiellement d'un dioptré au suivant à la manière d'une oscillation évanescence et toute l'énergie incidente correspondante est réfléchi. La pile constitue alors un milieu dont le pouvoir réflecteur élevé est périodiquement réparti.

Les propriétés prévues ont été étudiées expérimentalement sur des empilements hélicoïdaux de lames minces de polymère plastique transparent biréfringent. L'existence des bandes de réflexion sélective a été indirectement mise en évidence par l'analyse spectrale de la lumière transmise par une pile de lames croisées et par une pile hélicoïdale de lames dont les lignes neutres tournent de 60° d'une lame à la suivante : les spectres obtenus présentent des cannelures dont la période coïncide avec celle des bandes de réflexion sélective prévue par le calcul.

Le phénomène existe en lumière naturelle non polarisée, de manière analogue à celui présenté par les mésophases torsées observées en transmission. L'utilisation d'un analyseur elliptique pour l'observation de la lumière transmise met en évidence le décalage prévu entre les deux séries de bandes relatives à chaque mode itératif de la pile à 60° .

Le formalisme utilisé permet d'étudier séparément les conditions de propagation des diverses ondes qui constituent une répartition itérative de champ. Dans une bande de réflexion sélective, il a pu ainsi être montré pourquoi l'état de polarisation de la lumière réfléchi doit, paradoxalement, être le même que celui de la lumière incidente. Cette explication a permis une interprétation simple de l'origine du sens de polarisation "anomal" de la lumière réfléchi sélectivement par une préparation de mésophase torsée.



REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- (1) REUSCH (E.). - Ann.der Phys.Chem., 1869, 18, 628-38.
- (2) BORN (M.), WOLF (E.). - Principles of Optics, Pergamon Press, 1965, 66-70.
- (3) HERPIN (A.). - C.R.Acad.Sci.Paris, 1947, 225, 182-3.
- (4) DUFOUR (C.), HERPIN (A.). - Rev.Opt., 1953, 32, 321-48.
- (5) ABELES (F.). - Ann. de Phys., 1950, 5, 596-640 et 706-781.
- (6) BILLARD (J.). - Thèse, Paris, 1966.
- (7) MAUGUIN (Ch.). - Bull.Soc.fr.Min.Crist., 1911, 34, 71-117.
- (8) DE VRIES (Hl.). - Acta Cryst., 1951, 4, 219-26.
- (9) POINCARÉ (H.). - Théorie math. de la lumière, II, Carré, Paris, 1892, 275-85.
- (10) BILLARD (J.). - Mol.Cryst., 1967, 3, 227-40.
- (11) FRESNEL (A.). - Ann.de Chi. Phys., 1821, II 7, 80-102 ; 167-96 ; 312-5.
- (12) AIRY (G.B.). - Trans.Cambridge Phil.Soc., 1833, 4, 79-123 et 199-208.
- (13a) JOLY (G.). - Thèse, Lille, 1972.
- (13b) JOLY (G.), BILLARD (J.). - C.R.Acad.Sci., 1972, 275B, 485-88.
- (14) JOLY (G.), BILLARD (J.). - J. Optics (Paris), 1981, 12, 323-29.
- (15) WRIGHT (F.E.). - Amer.J.Sci., 1910, 29, 415-426.

- (16) CHAUMONT (L.). - Ann. de Phys., 1915, 4, 61-206 ; 1916, 5, 17-78.
- (17) MACE DE LEPINAY (J.). - J. de Phys., 1900, 9, 585-8.
- (18) FRIEDEL (G.). - C.R.Acad.Sci. (Paris), 1893, 116, 272-4.
- (19a) MALLARD (E.). - Traité de Cristallographie, Dunod, Paris, 1884, p.262.
Ann. des Mines, 1876, 10, p.60 et 1881, 19, p.256.
- (19b) MASCART (E.). - Traité d'Optique, Gauthier-Villars, Paris, 1889,
324-342.
- (20) KONDRATIEV (V.N.). - La structure des atomes et des molécules,
Masson, Paris, 1964, p.75.
- (21) ISAERT (N.), BERTHAULT (J.P.), BILLARD (J.). - J.Optics (Paris),
1980, 11, 17-41.
- (22) REINITZER (F.). - Monatsh.f.Chem., 1888, 9, 421-41.
- (23a) NEWTON (I.). - Traité d'Optique, Gauthier-Villars, Paris, 1955
(vol.2, p.1, 4, 7 et vol.3, p.29).
- (23b) COON (D.D.). - Am.J.Phys., 1966, 34, 240-3.
- (24a) NGUYEN HUU TINH, DESTRADE (C.), GASPAROUX (H.). - Phys.Lett., 1979,
72A, 251-54.
- (24b) DESTRADE (C.), NGUYEN HUU TINH, MALTHETE (J.), JACQUES (J.). -
Phys.Lett., 1980, 79A, 189-192.
- (25) BILLARD (J.). - Chem.Phys.Sci., 1980, 11, 383-395.
- (26) VAUCHIER (C.), ZANN (A.), LE BARNY (P.), DUBOIS (J.C.), BILLARD (J.).
Mol.Cryst.Liq.Cryst., 1981, 66, 103-114.
- (27a) MALTHETE (J.), DESTRADE (C.), NGUYEN HUU TINH et JACQUES (J.). -
Mol.Cryst.Liq.Cryst., 1981, 66, 103.
- (27b) ISAERT (N.), MALTHETE (J.). - J.Optics (Paris), 1983, 14, à paraître.

- (29) BERREMAN (D.W.). - Mol.Cryst. and Liq. Cryst., 1973, 22, 175.
- (30) PARODI (O.). - J. de Phys., 1975, 36, C1-325.
- (31) FRIEDEL (G.). - Ann. de Phys., 1922, 9, p.273.
- (32) MATHIEU (J.P.). - Bull.Soc.fr.Min.Crist., 1938, 61, p.174.
- (33) CHANDRASEKHAR (S.), SRINIVASA RAO (K.N.). - Acta Cryst., 1968, A24, 445-81.
- (34) CHANDRASEKHAR (S.), SHASHIDARA PRASAD (J.). - Mol.Crystal., 1971, 14, 115-28.
- (35) BERREMAN (D.W.), SCHEFFER (T.J.). - Phys.Rev.Lett., 1970, 25, 577-81.
- (36) TAUPIN (D.). - J.de Phys. (Paris), 1969, Colloq.69 (Suppl.C4), 32.
- (37) BRAGG (W.L.). - Proc.Roy.Soc., 1924, A105, 370.
- (38) JOLY (G.), BILLARD (J.). - J.Optics (Paris), 1982, 13, 227-238.
- (39) BELYAKOV (V.A.), DMITRIENKO (V.E.), ORLOV (V.P.). - Sov.Phys.Usp., 1979, 22, 63-88.
- (40) MARATHAY (A.S.). - J.Opt.Soc.Am., 1971, 61, 1963-72.
- (41) MARTIN (J.C.). - J.de Phys., 1975, 301, 273-81.
- (42) Berkeley Physics Course, Ondes, Armand Colin, Paris, 1972, 420.
- (43) FRESNEL (A.). - Ann. de Chi.Phys., 1825, II 28, 147-61
Mém.Acad.Sci., 1846, 20, 163-94.
- (44) BOUASSE (H.). - Optique cristalline, Polarisation rotatoire, états mésomorphes, Delagrave, Paris, 1925, 259-290.

- (45) BERTIN. - Ann. de Chim. Phys., 1870, IV 20, 207-215.
- (46) BILLARD (J.), MOISES (A.). - Colloque d'Optique Ultrahertzienne, Bordeaux, 1970.
- (47) ROCABOY (F.). - Comportement thermique des polymères synthétiques, Masson, Paris, 1972, p.35.
- (48) ENGELAERE (J.C.). - Thèse, Lille, 1981.
- (49) JOLY (G.), ISAERT (N.). - C.R.Acad.Sc. (Paris), 1983, 296, 1135-1138.



"I want, I can"

Sammy Davies J^r (black, one-eyed and jew ...)

RESUME

Les propriétés optiques des empilements hélicoïdaux de lames transparentes à biréfringence rectiligne, éclairés dans la direction de l'axe de torsion sont étudiées en tenant compte de toutes les ondes réfléchies aux dioptries.

Quatre répartitions itératives de champ à symétrie hélicoïdale, tantôt progressives, tantôt évanescentes sont définies.

Les phénomènes de polarisation rotatoire des piles sont étudiés à l'aide des vibrations progressives : ils s'interprètent comme l'addition d'un pouvoir rotatoire égal à la torsion et de la biréfringence elliptique des vibrations itératives. Quelques empilements expérimentaux sont étudiés à titre d'exemples.

Quand une vibration itérative est évanescente, il est montré qu'elle résulte de l'interférence d'un groupe d'ondes aller et d'un groupe d'ondes retour de même état de polarisation et de même amplitude. L'énergie correspondant aux ondes aller est réfléchié sélectivement sous forme d'une vibration d'état de polarisation "anomal".

A la différence des cristaux liquides torsadés, qui ne sont qu'un cas particulier d'empilements de lames très minces et pour lesquels la bande de réflexion est unique, les empilements de lames épaisses présentent deux séries infinies de bandes étroites de réflexion sélective, affectant alternativement une vibration elliptique gauche ou une vibration elliptique droite. Les vérifications expérimentales sont en bon accord avec la théorie.

MOTS CLES

Etats de polarisation
Piles de lames biréfringentes
Oscillations évanescentes.

