

50376  
1984  
91

50376.  
1984.  
91.

# THÈSE

présentée à

l'Université des Sciences et Techniques de Lille

pour obtenir le grade de

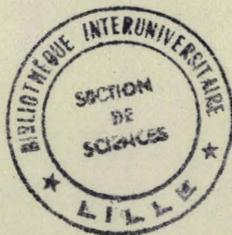
Docteur ès Sciences Physiques

par

**Jean-Noël DÉCARPIGNY**

*Ingénieur ISEN*

APPLICATION DE LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS  
A L'ÉTUDE DE TRANSDUCTEURS PIÉZOÉLECTRIQUES



Soutenue le 30-Mai 1984 devant la Commission d'Examen

Président	M. ESCAIG
Rapporteurs	M. ALAIS M. DEBUS M. ROBINET
Examineurs	M. CANTIN M. LEFAUDEUX M. TOCQUET M. VERCHERY

*A la Mémoire  
de mon Père,*

*A ma Mère,*

*A Véronique  
Benôit  
Vincent  
Anne-Sophie,*

*A ma Famille et  
à tous mes Amis.*

*Cette thèse a été préparée à l'INSTITUT SUPERIEUR D'ELECTRONIQUE DU NORD qui a soutenu et encouragé depuis 1978 l'ensemble de nos travaux et a permis la formation d'un groupe spécialisé dans la simulation numérique.*

*L'activité de ce groupe s'est développée dans le cadre du L.A. 253 du CNRS (Laboratoire des Surfaces et Interfaces) qui a favorisé son orientation et son expansion et lui a apporté une aide précieuse.*

*Le code ATILA a été conçu pour le GERDSM (Groupe d'Etude et de Recherche en Détection Sous Marine) et son développement a été financé par la DCAN (Direction des Constructions et Armes Navales) dans le cadre de conventions et de travaux sur mémoire cités en références. D'autre part, les résultats expérimentaux relatifs aux transducteurs immergés ont tous été obtenus par le GERDSM.*

*J'exprime ma reconnaissance à Monsieur le Professeur B. ESCAIG, qui a accepté la présidence de ce Jury.*

*Je remercie Messieurs les Professeurs P. ALAIS, J.C. ROBINET et G. VERCHERY pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail, la qualité de l'accueil qu'ils m'ont réservé, et pour leur participation au jury.*

*Je remercie également Monsieur l'Ingénieur en Chef de l'Armement F. LEPAUDEUX, Chef du GERDSM, pour le soutien qu'il a apporté à nos activités et pour sa participation au jury.*

*Je remercie Monsieur le Professeur G. CANTIN pour sa participation à ce jury et l'assure, ainsi que Monsieur le Professeur R. NEWTON, de toute ma gratitude pour l'accueil qu'ils nous ont réservé à Monterey et l'intérêt des suggestions qu'ils nous ont faites.*

*Monsieur B. TOCQUET, Chef du Groupe Acoustique Interne et Techniques d'Emission du GERDSM a suivi ce travail durant tout son déroulement. L'aide qu'il a apportée, les conseils qu'il a formulés, sa confiance et ses encouragements ont été très précieux et je l'en remercie chaleureusement.*

*Monsieur J.C. DEBUS, qui m'a formé à l'utilisation de la méthode des éléments finis, a participé activement à toutes les phases de ce travail, m'aidant de ses conseils et de son soutien amical et constant. Je l'en remercie vivement et l'assure de ma reconnaissance.*

*Monsieur M. LANNOO m'a apporté aide, encouragement et amitié depuis que je participe à une activité de recherche. Je lui dois une grande part de ma formation et l'enthousiasme qu'il m'a communiqué. Je lui exprime toute ma gratitude.*

*Je tiens à remercier très sincèrement tous ceux qui ont participé au développement du code ATILA : R. EDDE, J.L. CARTON, D. COLLARD, P. TIERCE, R. BOSSUT, B. HAMONIC, ainsi que J. POULIQUEN et C. GRANGER qui ont assuré certaines mesures et aidé à leur interprétation, D. BOUCHER, Ingénieur au GERDSM, qui a suivi ce travail et avec qui j'ai eu de nombreuses discussions amicales et fructueuses, G. ALLAN pour son aide sur divers problèmes d'analyse numérique et d'informatique et son soutien amical.*

*Enfin, je tiens à remercier très vivement Madame G. LANNOO qui a réalisé un travail remarquable de frappe et de mise en page, malgré les difficultés dues aux nombreuses équations et aux délais réduits. Les mêmes remerciements vont à mon épouse qui a réalisé, dans les mêmes délais, une grande partie des figures.*

## SOMMAIRE

INTRODUCTION .....	1
I. PRESENTATION DES MODELES CLASSIQUES DE TRANSDUCTEURS ...	5
I.1 LE TRANSDUCTEUR DE TYPE TONPILZ .....	6
I.1.1 Description .....	6
I.1.2 Modèle à constantes localisées .....	11
I.1.3 Modèle à constantes réparties ou modèle d'onde plane .....	17
I.2 LE TRANSDUCTEUR ANNULAIRE MULTIMOTEUR DE TYPE ISABELLE.....	26
I.2.1 Description.....	26
I.2.2 Modèle à constantes localisées.....	30
I.3 LE TRANSDUCTEUR ANNULAIRE A IMMERSION LIBRE .....	34
I.3.1 Description .....	34
I.3.2 Modèle simple .....	34
I.4 LES TRANSDUCTEURS UTILISANT DES VIBRATIONS DE COQUES MINCES .....	38
I.5 BILAN .....	43
II. ANALYSE DU PROBLEME ELECTROMECHANIQUE A L'AIDE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS .....	45
II.1 LES EQUATIONS DU PROBLEME .....	46
II.2 LA FORMULATION VARIATIONNELLE .....	48
II.3 L'ANALYSE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS .....	50

II.3.1 Principe .....	50
II.3.2 Les fonctions d'interpolation .....	51
II.3.3 La formulation des différents tenseurs ...	55
II.3.4 Application du principe variationnel .....	56
II.3.5 Equations à résoudre et algorithmes .....	61
II.3.6 Formulation isoparamétrique et éléments utilisés .....	65
II.3.7 L'assemblage et la méthode de réduction de Guyan .....	67
II.3.8 Les autres approches .....	72
II.4 L'ETUDE DE QUELQUES STRUCTURES TESTS .....	73
II.4.1 Analyse du pavillon du Tonpilz T1 .....	74
II.4.2 Analyse d'un anneau de céramique isolé ...	91
II.4.3 Analyse d'une colonne motrice de longueur réduite .....	107
II.4.4 Conclusions .....	114
III. MODELISATION ET ANALYSE DE TRANSDUCTEURS TONPILZ DANS L'AIR .....	115
III.1 LA METHODE D'ANALYSE INITIALE .....	116
III.2 LES TRANSDUCTEURS ETUDIES .....	117
III.3 LES MAILLAGES UTILISES .....	120
III.4 LES RESULTATS ET L'IDENTIFICATION DES MODES .....	124
III.4.1 Les transducteurs T2a .....	125
III.4.2 Le transducteur T2b .....	141
III.4.3 Le transducteur T3 .....	141
III.4.4 Le transducteur T1 .....	149
III.4.5 Conclusions .....	150
III.5 LES PROBLEMES LIES A LA TIGE DE PRECONTRAINTE ...	161
III.6 LA METHODE MIXTE .....	163
III.6.1 Principe et mise en équations .....	163
III.6.2 Les résultats .....	166
IV. ANALYSE DU PROBLEME COUPLE FLUIDE-STRUCTURE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS .....	175

IV.1 LES EQUATIONS DU PROBLEME.....	176
IV.2 LA FORMULATION VARIATIONNELLE DU PROBLEME FERME..	180
IV.3 L'ANALYSE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS DU PROBLEME FERME.....	182
IV.3.1 Principe et mise en équations.....	182
IV.3.2 Equations à résoudre et algorithmes .....	187
IV.3.3 Eléments utilisés .....	189
IV.3.4 L'assemblage et la méthode de réduction de Guyan .....	192
IV.4 LA FORMULATION ET LA RESOLUTION PAR ELEMENTS FINIS DU PROBLEME OUVERT .....	197
IV.4.1 Formulation mathématique de la condition de rayonnement .....	198
IV.4.2 L'élément rayonnant .....	201
IV.4.3 Les algorithmes de résolution .....	204
IV.5 L'ETUDE DE QUELQUES PROBLEMES TESTS .....	207
IV.5.1 Analyse modale d'un domaine fluide. Cri- tère de maillage .....	208
IV.5.2 Analyse modale d'un domaine mixte fermé. Premier test de l'interface et de la réduction de Guyan .....	209
IV.5.3 Analyse modale d'un domaine mixte fermé. Second test de l'interface et de la réduc- tion de Guyan .....	221
IV.5.4 Calcul du champ de pression rayonné par un piston circulaire, bafflé dur, excité uniformément .....	229
IV.5.5 Calcul du champ de pression rayonné par un piston circulaire, bafflé dur, excité paraboliquement .....	246
IV.5.6 Analyse harmonique d'un problème couplé ..	251
IV.5.7 Conclusion .....	272
IV.6 PRESENTATION COMPARATIVE DES AUTRES METHODES DE MODELISATION D'UN PROBLEME OUVERT .....	276
IV.6.1 Les approches déduites des représentations intégrales de Helmholtz .....	276

IV.6.2 Les approches déduites d'une condition de non-réflexion .....	282
IV.6.3 Les approches utilisant les éléments infinis .....	287
IV.6.4 Conclusion .....	290
<b>V. MODELISATION ET ANALYSE DE TRANSDUCTEURS TONPILZ RAYONNANT DANS L'EAU .....</b>	<b>293</b>
<b>V.1 DEFINITION DES CONDITIONS DU PROBLEME .....</b>	<b>294</b>
V.1.1 Les conditions de baffle .....	294
V.1.2 Le rendement électroacoustique .....	295
V.1.3 Les modes de tige .....	301
<b>V.2 ANALYSE DE LA REPOSE DU TRANSDUCTEUR T2a .....</b>	<b>305</b>
V.2.1 Définition du maillage .....	305
V.2.2 Présentation des résultats et discussion .....	306
<b>V.3 ANALYSE DE LA REPOSE DU TRANSDUCTEUR T2b .....</b>	<b>323</b>
V.3.1 Définition du maillage .....	323
V.3.2 Analyse du comportement du T2b pour une excitation électrique normale .....	323
V.3.3 Analyse du comportement du T2b pour une excitation différenciée des céramiques .....	326
<b>V.4 APPLICATION DE LA METHODE MIXTE .....</b>	<b>340</b>
<b>V.5 CONCLUSION .....</b>	<b>341</b>
<b>CONCLUSION .....</b>	<b>343</b>
<b>REFERENCES .....</b>	<b>346</b>
<b>ANNEXES .....</b>	<b>355</b>
<b>ANNEXE 1. Définition des caractéristiques classiques d'un projecteur piézoélectrique d'ondes sonore .....</b>	<b>355</b>
<b>ANNEXE 2. Les céramiques ferroélectriques : relations caractéristiques et mesure des constantes physiques .....</b>	<b>359</b>

ANNEXE 3. Expressions des matrices de transfert utilisées dans le modèle d'onde plane .....	369
ANNEXE 4. Présentation brève des algorithmes utilisés.	379
ANNEXE 5. Organigramme de deux éléments : l'hexaèdre isoparamétrique à vingt noeuds et le quadrilatère isoparamétrique pour applications à symétrie axiale .....	385
ANNEXE 6. Evolution avec $R_{\infty}$ de l'erreur induite par la condition de rayonnement .....	391
ANNEXE 7. Présentation globale du code ATILA .....	395

## INTRODUCTION

Les transducteurs électromécaniques utilisés dans les systèmes SONAR convertissent de l'énergie électrique en énergie mécanique, par l'intermédiaire de l'effet piézoélectrique, puis en énergie acoustique, par la génération et le rayonnement dans un fluide d'une onde sonore divergente. Le développement des modèles mathématiques nécessaires à la compréhension de leur comportement et à la conception de transducteurs nouveaux implique la résolution de trois problèmes. Le premier est l'intégration simultanée des équations de l'élasticité et de l'équation de Poisson à l'intérieur d'une structure hétérogène, de forme géométrique complexe. Le second est la prise en compte du couplage, par les équations de continuité, entre le champ de déplacement de la structure et le champ de pression du fluide. Enfin le troisième est la représentation du rayonnement, qui nécessite que le domaine fluide analysé s'étende à l'infini.

Pour résoudre ces problèmes, les multiples approches proposées reposent sur des hypothèses simplificatrices souvent sévères, tant au niveau de la géométrie du transducteur que du comportement du matériau piézoélectrique, de la modélisation du rayonnement ou de la gamme de fréquence utilisée. Parmi ces approches se trouvent les techniques de schémas électriques équivalents à constantes localisées [1-4] ou réparties [3-5], les premières utilisant les représentations classiques à l'aide de masses et ressorts, les secondes s'appuyant sur une approximation d'onde plane et s'apparentant aux méthodes des matrices de transfert [6]. Avec l'aide d'expressions analytiques des impédances de rayonnement [1,2,7-10], ces approches ont permis le développement de méthodes de conception opérationnelles [11-14] et la réalisation de nombreux transducteurs. Néanmoins, pour lever les hypothèses trop restrictives, des techniques numériques plus évoluées ont été rapidement mises en oeuvre. Côté structure sont ainsi apparues des applications des méthodes variationnelles de type Rayleigh-Ritz [15]. Côté fluide, le problème de rayonnement a été pris en compte par résolution numérique de l'une ou l'autre forme des équations intégrales de Helmholtz [16-18]. Malheureusement, l'abandon des

hypothèses simplificatrices a souvent conduit ces approches nouvelles à des modèles trop spécialisés [19,20] dans la perspective globale d'un travail de conception.

Pour surmonter ces difficultés, les laboratoires américains impliqués dans la conception de transducteurs SONAR nouveaux ont, dès 1970, fait appel à la méthode des éléments finis, qui permet à la fois de prendre en compte des formes géométriques complexes, des inhomogénéités de structure et l'anisotropie des matériaux piézoélectriques. De plus, outre le fait qu'elle fournit une information physique très détaillée sur le comportement des structures modélisées, cette méthode bénéficie des moyens multiples, algorithmiques, informatiques ou autres, conçus dans d'autres domaines d'application [21]. Ainsi ont été développés des codes de simulation de transducteurs piézoélectriques dans l'air [22-24] puis de transducteurs immergés, en conditions de rayonnement [25-28]. Avec ces produits, de nombreux transducteurs actuels ont pu être analysés : transducteurs classiques, de type Tonpitz, utilisant un mode de vibration longitudinal [22,23], transducteurs annulaires fonctionnant en immersion libre [25,26,29], transducteurs basse fréquence utilisant des résonances de coque [30-32], résonateurs de Helmholtz [33], antennes linéaires remorquées [34]... Plus tardivement, la même méthode a été exploitée au Japon, pour analyser le comportement de résonateurs de Langevin [35], et en France, pour modéliser des éléments de céramique utilisés en haute fréquence dans des dispositifs d'imagerie ultrasonore [36,37] ou pour optimiser différents types de filtres [38]. Toutefois, même si l'un d'eux met en oeuvre une approche perturbative originale du problème piézoélectrique [36,37], les codes associés à ces deux dernières applications n'incorporent pas les effets du rayonnement et n'ont pas le caractère général des codes américains évoqués précédemment.

Cette étude a donc pour objet le développement, la mise au point et le test d'un code général de simulation de transducteurs piézoélectriques pour systèmes SONAR, utilisant la méthode des éléments finis pour représenter à la fois la structure électromécanique et le domaine fluide soumis au rayonnement de l'onde sonore. Elle porte essentiellement sur la modélisation à deux et trois dimensions de composants piézoélectriques et de transducteurs de formes complexes [39,40], la prise en compte du rayonnement suivant une approche simple qui n'utilise que la méthode des éléments finis [41,43] et le test du code dans le cas de transducteurs réels, bien caractérisés expérimentalement [44,45]. Hormis la description du code ATILA [46], nous présentons des résultats originaux au niveau des

méthodes comme au niveau de l'analyse du comportement des transducteurs. Au niveau des méthodes, nous précisons les conditions de maillage de structures piézoélectriques [39], étendons au problème couplé fluide-structure la technique de condensation de Guyan [41] qui permet le recours à l'algorithme classique d'assemblage frontal [47], construisons un élément fini rayonnant et définissons son domaine d'application [41-43], proposons une méthode d'identification des caractéristiques des céramiques piézoélectriques utilisées dans les transducteurs [48,49] et enfin développons une méthode mixte, couplant les approches par onde plane et par éléments finis, qui permet une réduction considérable de la taille des systèmes d'équations à résoudre en conservant tous les aspects fondamentaux du comportement des dispositifs modélisés [50-52]. Au niveau de l'analyse, nous interprétons en détail le comportement d'un transducteur classique, le Tonpiliz, à la fois dans l'air (identification des modes propres, sensibilité des modes aux paramètres de fabrication...) et en rayonnement dans l'eau (interprétation des variations avec la fréquence du niveau d'émission, étude détaillée du critère de champ lointain, étude du champ proche...). Enfin, réalisée avec P. TIERCE [51,53] et R. BOSSUT [54,56] l'application du code à des transducteurs plus complexes, sur le plan de leurs structures ou des conditions de rayonnement, est en cours d'achèvement.

Ce rapport est divisé en cinq chapitres. Le premier décrit les structures de projecteurs piézoélectriques utilisés actuellement dans les systèmes SONAR. Pour chacun d'eux, il présente les modèles simplifiés existants et dresse la liste de leurs limitations essentielles. Le second présente succinctement le formalisme de l'application de la méthode des éléments finis à des structures piézoélectriques. Il décrit ensuite les divers tests réalisés sur des structures simples dont l'assemblage constitue un transducteur Tonpiliz complet. Le troisième résume les résultats de l'analyse modale de plusieurs transducteurs Tonpiliz et présente, d'une part, l'identification détaillée des modes obtenus et, d'autre part, la méthode mixte dont il prouve l'efficacité. Le quatrième présente le formalisme de l'application de la méthode des éléments finis au problème fluide et insiste particulièrement sur la modélisation du rayonnement. Il décrit également les tests réalisés et compare la méthode retenue aux autres approches existantes. Le cinquième analyse les résultats obtenus en modélisant des transducteurs Tonpiliz immergés et permet une interprétation détaillée de leur fonctionnement, tout en constituant un test ultime du code. Parallèlement à ces chapitres, plusieurs annexes décrivent les grandeurs physiques caractéristiques des transducteurs et les propriétés des céramiques utilisées, les

algorithmes de calcul et la constitution du programme. Enfin, en conclusion, les possibilités actuelles du code sont résumées et comparées à celles des autres produits connus, de même qu'une description des perspectives essentielles est brièvement réalisée, au niveau des principes comme à celui des algorithmes ou des applications nouvelles.

## CHAPITRE I

### PRESENTATION DES MODELES CLASSIQUES DE TRANSDUCTEURS

*L'objet de ce chapitre est la présentation de quelques transducteurs classiques (transducteurs à vibration longitudinale de type Tonpilz, transducteurs annulaires à immersion libre fonctionnant en équipression, transducteurs utilisant des vibrations de coques minces...) et des modèles simples qui permettent leur analyse et aident à leur conception. Dans chaque cas, une description géométrique et physique sommaire est donnée et les principaux arguments des modèles sont développés pour mettre en évidence leurs limitations essentielles. Enfin, l'accent est surtout porté sur la structure Tonpilz qui est la structure test de cette étude.*

## I.1 LE TRANSDUCTEUR DE TYPE TONPILZ

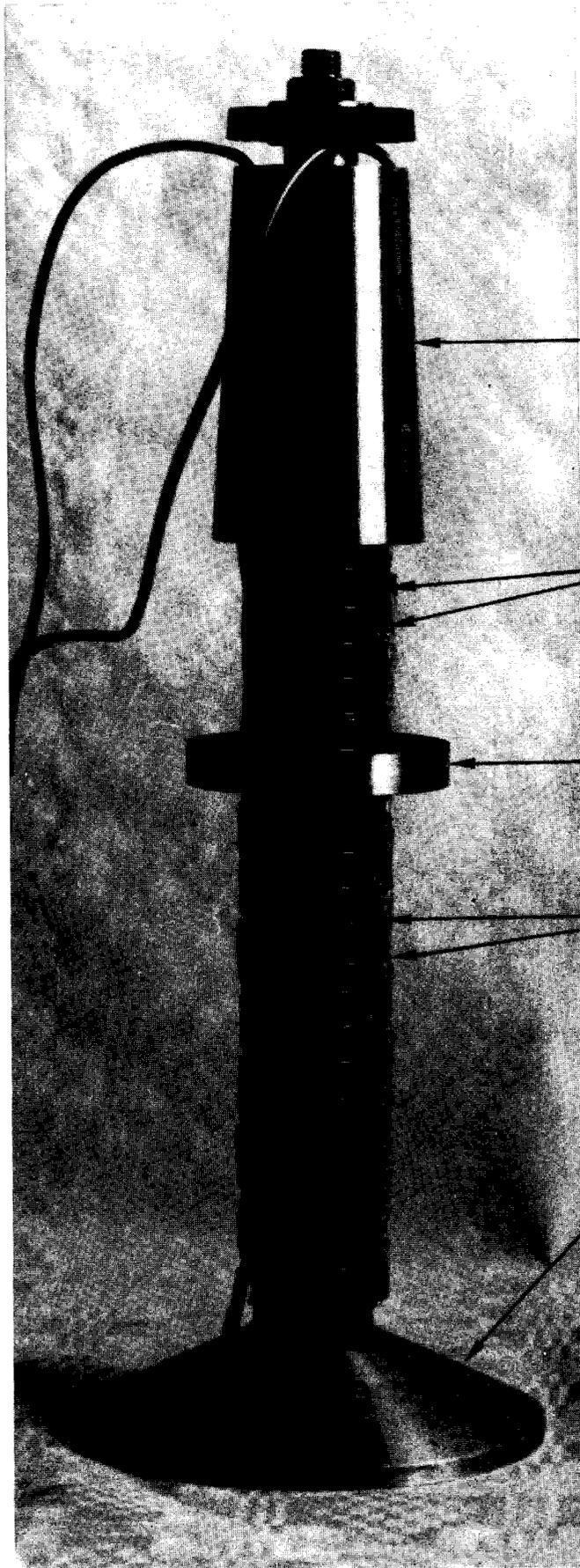
### I.1.1 Description

Ce transducteur, dont une présentation schématique est donnée figure (I.1), est généralement constitué par :

- une colonne motrice formée d'un empilement de céramiques piézoélectriques annulaires, séparées par des électrodes annulaires de mêmes rayons. Les axes de polarisation des céramiques sont parallèles à l'axe du moteur, leurs orientations étant alternées. Les électrodes peuvent être très minces (quelques dixièmes de millimètres) et assurer seulement une fonction d'excitation électrique, ou épaisses (épaisseur comparable à celle des céramiques), auquel cas elles assurent de plus une fonction mécanique en contribuant à l'élasticité de la colonne,
- un pavillon, dont la face avant ou face "parlante" est au contact du fluide. Il assure l'adaptation d'impédance entre la colonne motrice et le fluide et doit être constitué d'un matériau léger (duralumin, alliage de magnésium...). Ses dimensions transversales sont liées aux conditions de rayonnement, en particulier au couplage entre transducteurs élémentaires d'une même base,
- une contremasse, constituée par un matériau de forte densité (acier, laiton, tungstène...),
- une tige de précontrainte, qui assure la cohérence entre céramiques et électrodes et maintient les céramiques en état de compression permanente durant leur excitation, condition indispensable pour qu'elles fonctionnent correctement [3,4]. Cette tige, généralement en acier traité, est de section faible. Dans certaines configurations, elle peut être remplacée par un fourreau extérieur.

Le transducteur Tonpilz est monté dans un boîtier auquel il est fixé soit par l'intermédiaire d'une électrode porteuse intercalée dans la colonne motrice au niveau d'un noeud de vibration, soit par l'intermédiaire d'une suspension souple (joints toriques). Enfin, la face parlante du pavillon est vulcanisée, la peau de caoutchouc assurant de plus l'étanchéité du boîtier. Les figures (I.2) et (I.3) présentent deux structures tests sous les références T1 et T2a.

Dans un fonctionnement normal, le Tonpilz est excité électriquement sur sa fréquence de résonance fondamentale (quelques



Contremasse.

Céramiques.

Electrode porteuse.

Electrodes minces.

Pavillon.

Figure I.3 . Structure à symétrie axiale avec électrode porteuse : le Tonpilz T2a .

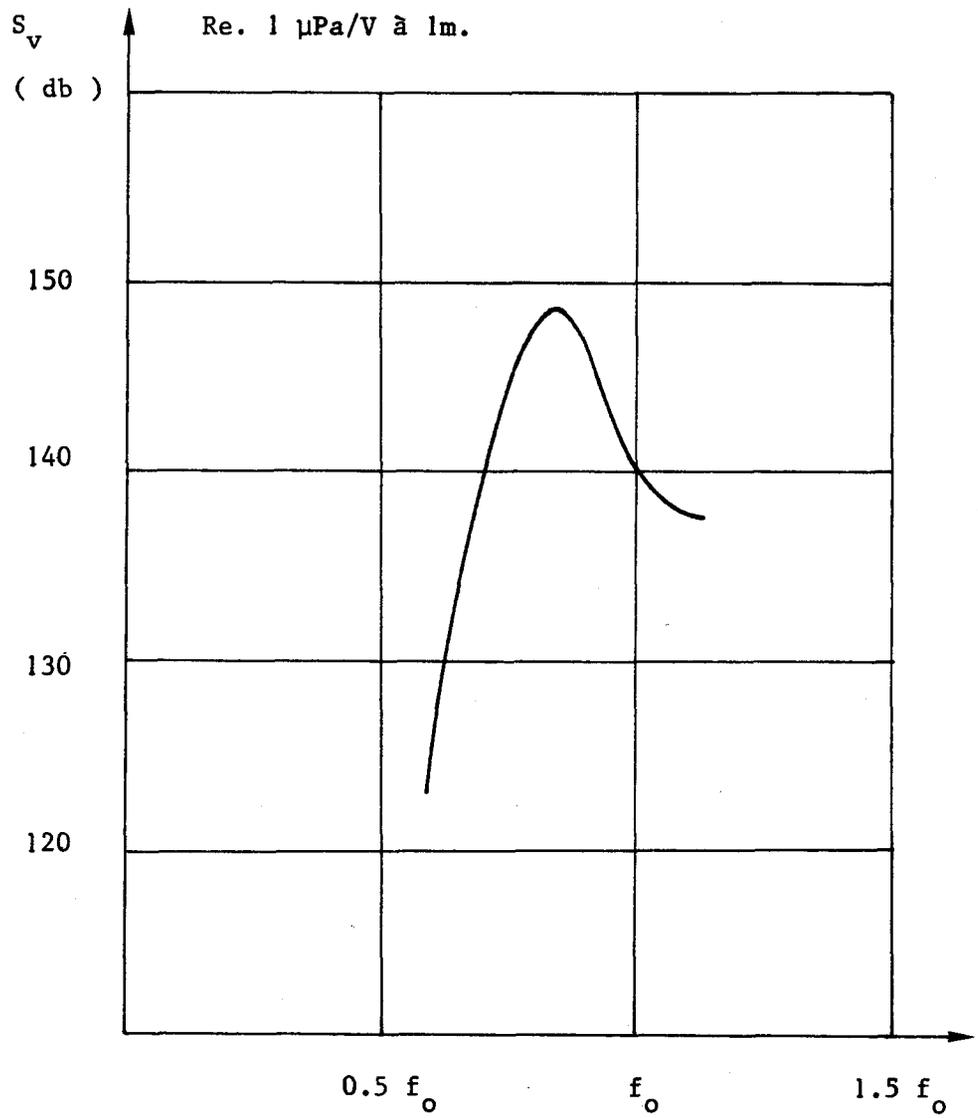


Figure I.4 . Niveau d'émission mesuré d'un transducteur Tonpilsz . Les fréquences sont normées à la fréquence  $f_0$  du mode fondamental dans l'air

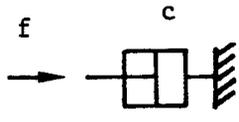
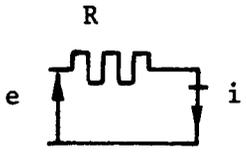
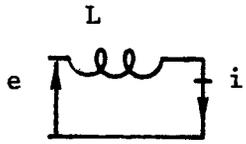
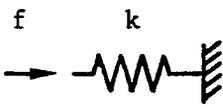
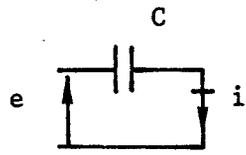
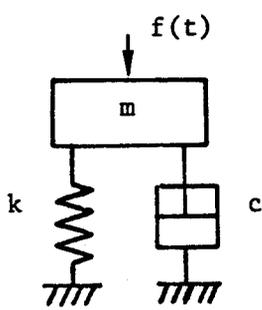
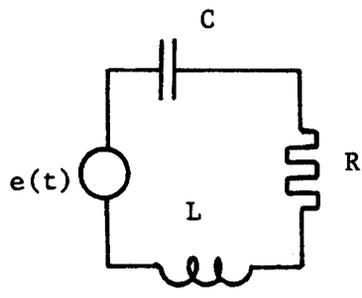
kilohertz). Cette résonance est fortement amortie (coefficient de qualité de quelques unités, par exemple) par le rayonnement acoustique et grâce à un choix judicieux du pavillon. Le niveau d'émission  $S_v^{(+)}$  présente ainsi un maximum important et large, comme le montre la figure (I.4).

### I.1.2 Modèle à constantes localisées

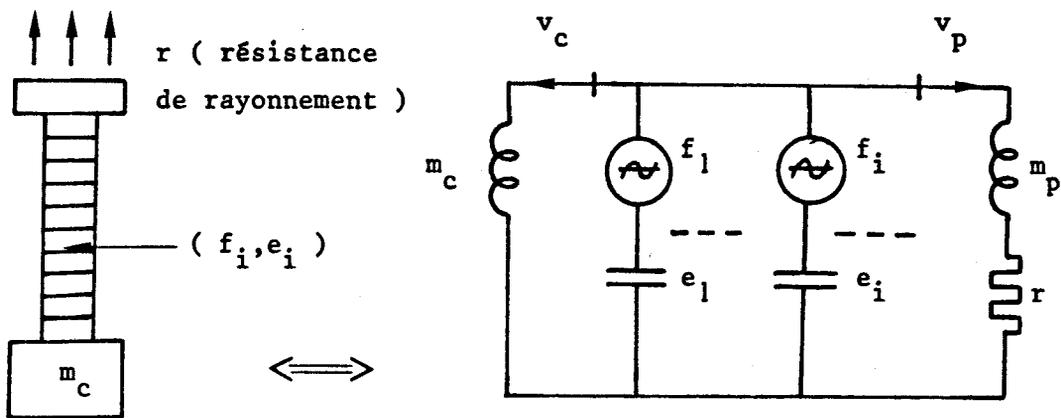
En première approximation, si la fréquence de fonctionnement est suffisamment basse, le Tonpiliz est équivalent à un ressort, la colonne motrice, qui relie deux masses terminales, le pavillon et la contremasse. Ce ressort se décompose en une série de ressorts élémentaires, les céramiques, qui sont excités séparément par des forces alternatives dues à l'effet piézoélectrique. Enfin, l'ensemble est amorti par le rayonnement d'une onde acoustique dans le fluide, au niveau du pavillon. Cette approche dans laquelle les fonctions d'élasticité, d'inertie, d'amortissement et d'excitation sont bien "localisées", est due, en particulier pour le Tonpiliz, à O. BRANDT [11]. Utilisant les analogies électromécaniques classiques que résume le tableau ci-après [11,57,58] :

Tableau I.1	Analogies électromécaniques
Mécanique	Electrique
Force (f)	Tension (e)
Vitesse (v)	Courant (i)
Déplacement (u)	Charge (q)

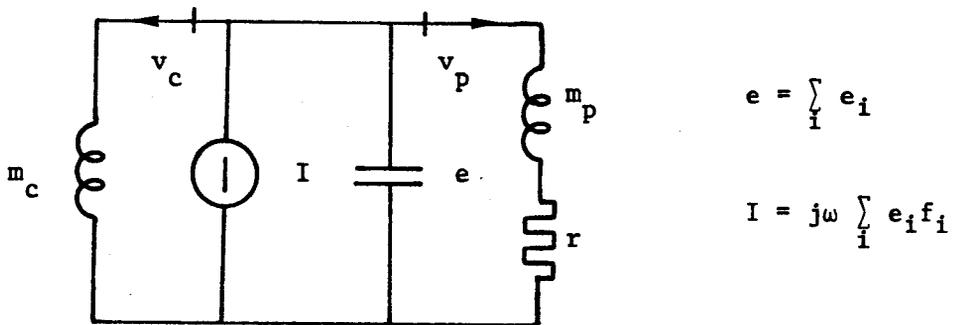
-----  
 + Le niveau d'émission et les caractéristiques classiques d'un transducteur sont définies dans l'annexe 1.

Masse (m)	Inductance (L)
Elasticité (e=1/k)	Capacité (C)
Amortissement (c)	Résistance (R)
 $f = cv = c\dot{u}$	 $e = Ri = R\dot{q}$
 $f = m\dot{v} = m\ddot{u}$	 $e = Li = L\ddot{q}$
 $f = ku = k \int v dt$	 $e = q/C = 1/C \int idt$
 $m\dot{v} + cv + k \int v dt = f(t)$ $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f(t)$	 $Li + Ri + 1/C \int idt = e(t)$ $L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = e(t)$

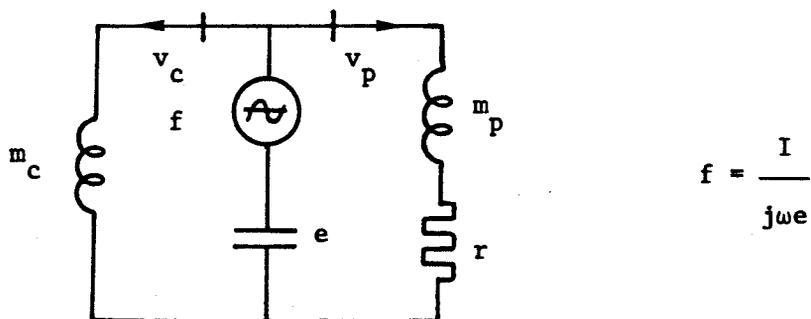
on obtient la représentation électrique analogue :



En remplaçant les générateurs de tension (branches  $f_i, e_i$ ) par des générateurs de courant équivalents, on déduit :



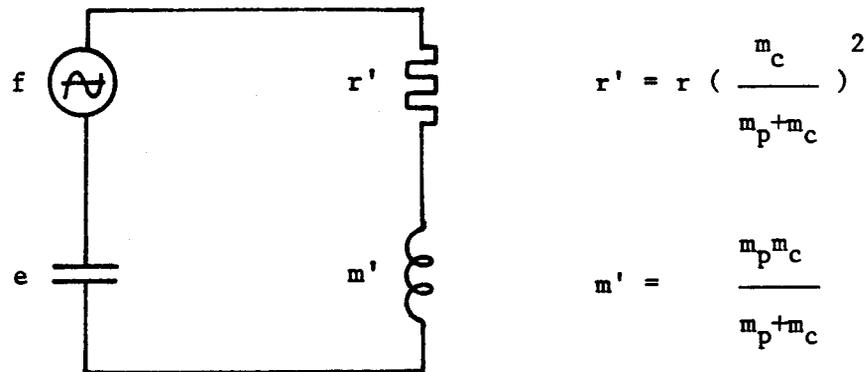
où  $\omega$  est la pulsation de la force d'excitation et  $j^2 = -1$ . Finalement, revenant à un schéma en tension, on a :



Dans la gamme de fréquence intéressante, la résistance de rayonnement  $r$  vérifie généralement l'inégalité :

$$r \ll m_p \omega \quad (I.1)$$

Alors, le développement de l'impédance au premier ordre en  $r/m_p \omega$  conduit au schéma final :



$$r' = r \left( \frac{m_c}{m_p + m_c} \right)^2$$

$$m' = \frac{m_p m_c}{m_p + m_c}$$

On en déduit simplement la pulsation de résonance :

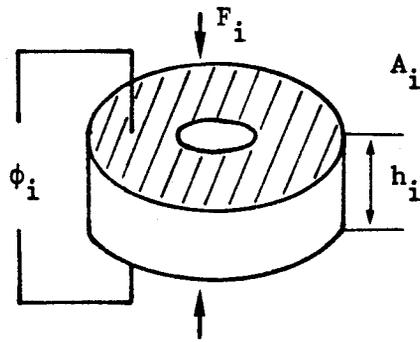
$$\omega_0 = \left( \frac{m_p + m_c}{m_p m_c e} \right)^{1/2} \quad (I.2)$$

et le coefficient de qualité :

$$Q = \frac{(m_p + m_c) m_p \omega_0}{m_c r} \quad (I.3)$$

Pour compléter la description, il suffit maintenant de déterminer les forces  $f_i$  à partir des tensions appliquées  $\phi_i$ . Pour l'anneau de céramique (i) représenté ci-après, notant  $F_i$  la force appliquée,  $v_i$  l'amplitude de la vitesse vibratoire,  $S_i$  et  $T_i$  les composantes axiales de la déformation et de la contrainte,  $A_i$  la surface,  $h_i$  l'épaisseur,  $d_i$  la constante piézoélectrique appropriée<sup>(+)</sup> et  $E_i$  le module d'Young

-----  
 (+) Les relations constitutives caractéristiques du matériau piézoélectrique sont décrites en détail à l'annexe 2.



du matériau, on a la relation :

$$S_i = \frac{1}{E_i} \cdot T_i - d_i \frac{\phi_i}{h_i} \quad (I.4)$$

d'où :

$$F_i = A_i \left( E_i \cdot \frac{v_i}{j\omega h_i} + E_i d_i \cdot \frac{\phi_i}{h_i} \right) \quad (I.5)$$

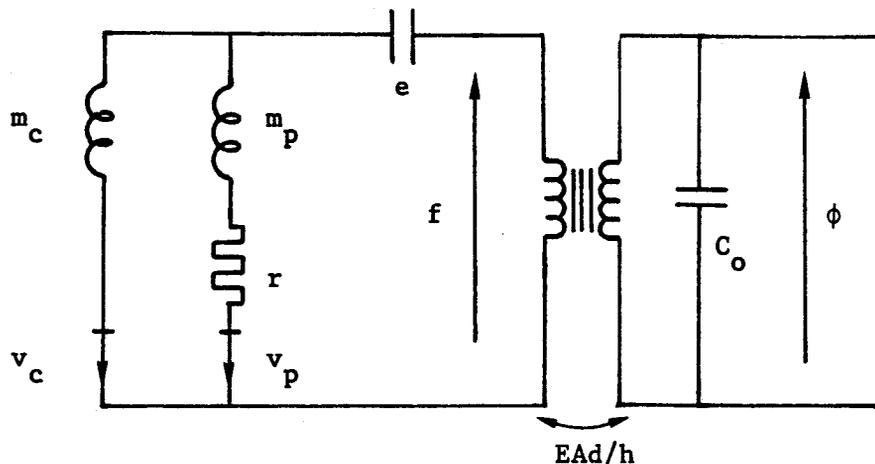
soit finalement :

$$F_i = \frac{v_i}{j\omega e_i} + f_i$$

$$e_i = \frac{h_i}{E_i A_i} \quad (I.6)$$

$$f_i = \frac{E_i A_i d_i}{h_i} \phi_i$$

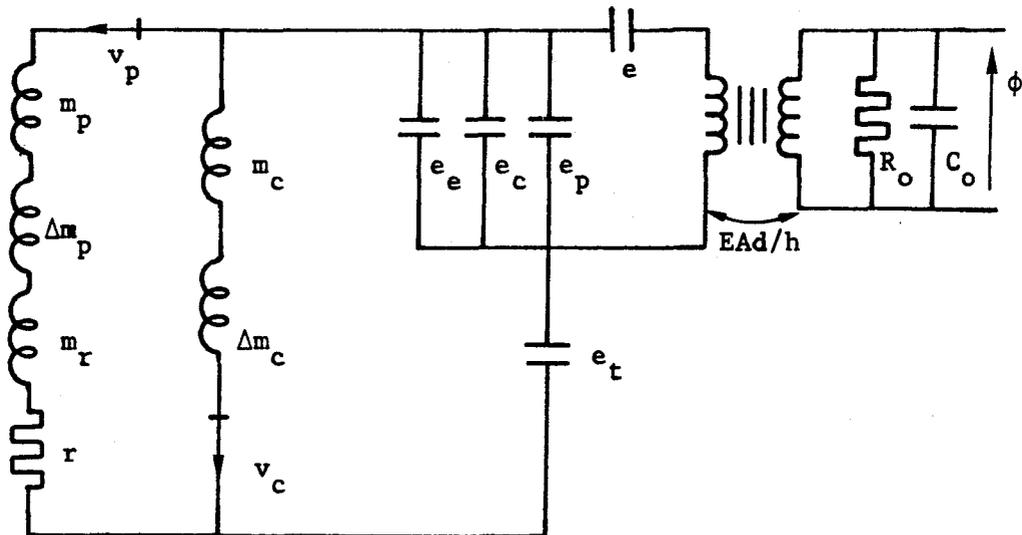
Si toutes les céramiques de la colonne motrice sont identiques et soumises à la même excitation électrique  $\phi$ , on obtient alors le schéma électrique équivalent global suivant :



où  $C_o$  est la capacité "bloquée" de la colonne (i.e. la capacité de la colonne sans mouvement). Pour améliorer les performances de ce schéma, on peut tenir compte :

- de l'élasticité des parties inactives (élasticité des électrodes  $e_e$ , élasticité des masses terminales rapportées sur la colonne motrice  $e_p$  et  $e_c$ ),
- de la masse de la colonne motrice (masses rapportées sur les masses terminales,  $\Delta m_p$  et  $\Delta m_c$ , obtenues, par exemple, en calculant l'énergie cinétique moyenne dans les deux parties situées de part et d'autre du plan nodal),
- de l'élasticité  $e_t$  de la tige de précontrainte en parallèle sur la colonne motrice,
- d'une expression complète de l'impédance de rayonnement tenant compte à la fois de l'effet dissipatif  $r$  et de l'effet de masse ajoutée,  $m_r$  [1,2],
- des pertes diélectriques  $R_o$ .

Ainsi, si toutes les céramiques sont identiques, on aboutit au schéma complet suivant :

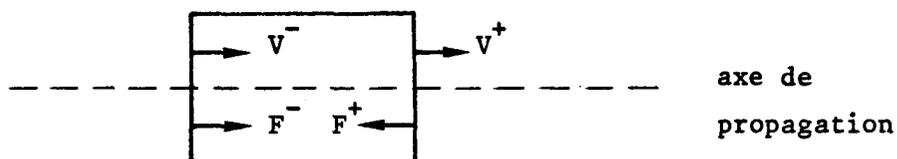


Pour un cahier des charges donné, cette modélisation simple permet de calculer les dimensions caractéristiques de la structure, de choisir les matériaux, d'effectuer un bilan de puissance (calcul des énergies électrique, mécanique, acoustique, du rendement...) et, en général, d'obtenir une ébauche raisonnable. Toutefois, le mode fondamental d'un Tonpilz étant du type  $\lambda/2$  ( $\lambda$ , longueur d'onde), l'approximation des impédances localisées est souvent à la limite de sa validité et une approche réaliste doit prendre en compte le caractère réparti de la masse et de l'élasticité sur l'ensemble de la structure. Cette conclusion a conduit au développement des modèles de type "onde plane".

### I.1.3 Modèle à constantes réparties ou modèle d'onde plane

Pour tenir compte du caractère réparti de la masse et de l'élasticité à l'intérieur de la structure Tonpilz, il faut décrire le comportement de celle-ci en termes de propagation d'onde. Toutefois, les dimensions transversales de ces transducteurs étant en général petites devant les dimensions longitudinales et, corrélativement, devant les longueurs d'onde aux fréquences de fonctionnement, on peut considérer que le champ du déplacement ou de toute autre grandeur mécanique est uniforme dans un plan de section droite orthogonal à l'axe du transducteur. Dans ces conditions, l'onde qui se propage est une onde plane dont les plans de section droite mentionnés précédemment sont les plans d'onde. Cette approche, développée par G.E. MARTIN pour les colonnes piézoélectriques segmentées [5] et exploitée dans des codes de simulation de transducteurs comme le code

SEADUCER [12] permet d'utiliser alors la méthode classique des "matrices de transfert" dont les applications en calcul de structures sont très nombreuses [6]. Considérant un élément homogène du transducteur, représenté ci-dessous par un rectangle, notant respectivement  $V^-$  et  $V^+$  les vitesses vibratoires de ses faces gauche et droite,  $F^-$  et  $F^+$  les forces appliquées sur ces mêmes faces,



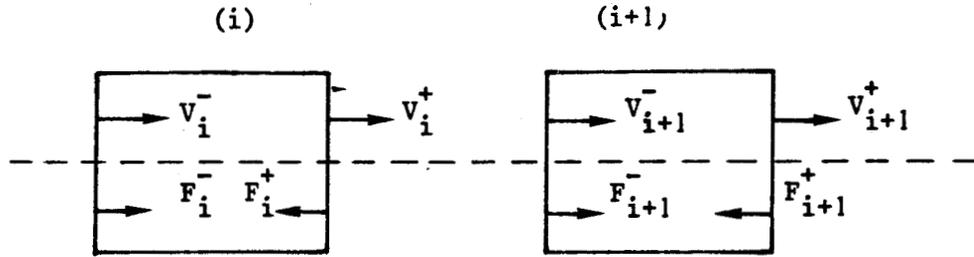
l'intégration de l'équation de propagation de l'onde plane dans cet élément permet d'écrire la relation matricielle :

$$\begin{bmatrix} F^+ \\ V^+ \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} F^- \\ V^- \end{bmatrix} \quad (I.7)$$

où  $[T]$  est la matrice de transfert caractéristique de l'élément. Si l'élément considéré est piézoélectrique et soumis à une différence de potentiel  $\phi$ , l'équation (I.7) devient :

$$\begin{bmatrix} F^+ \\ V^+ \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} F^- \\ V^- \end{bmatrix} + \phi \xi \quad (I.8)$$

où  $\xi$  est un vecteur caractéristique de l'élément. En annexe 3 sont établies des expressions de  $[T]$  et  $\xi$  pour quelques éléments fondamentaux : cylindre métallique homogène, cône métallique homogène et cylindre de céramique homogène. Si on associe deux éléments notés (i) et (i+1) en série l'identité de  $V_i^+$  et  $V_{i+1}^-$  d'une part, de  $F_i^+$  et



$F_{i+1}^-$  d'autre part permet d'écrire :

$$\begin{bmatrix} F_{i+1}^+ \\ V_{i+1}^+ \end{bmatrix} = [T_{i+1}] \begin{bmatrix} F_i^+ \\ V_i^+ \end{bmatrix} = [T_{i+1}] [T_i] \begin{bmatrix} F_i^- \\ V_i^- \end{bmatrix} \quad (I.9)$$

si ces éléments sont purement mécaniques, ou :

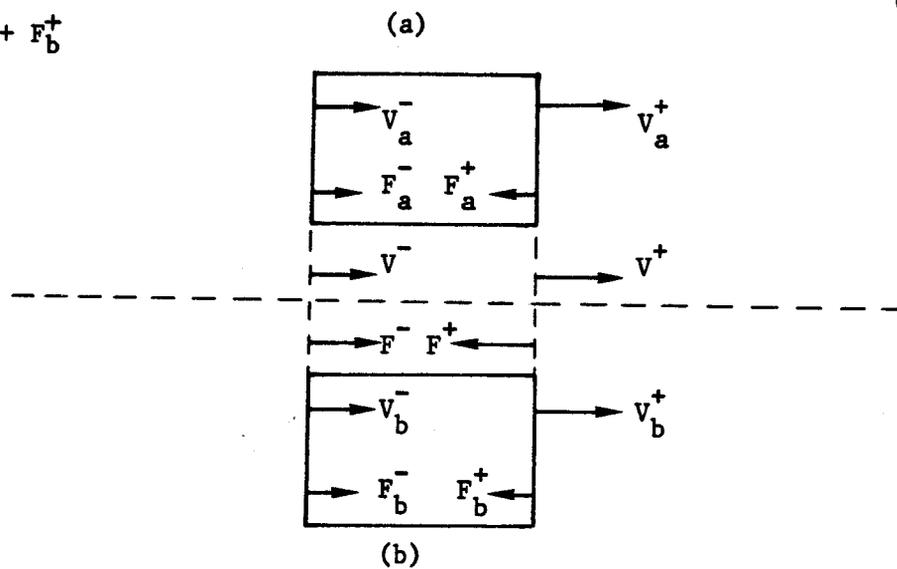
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F_{i+1}^+ \\ V_{i+1}^+ \end{bmatrix} &= [T_{i+1}] \begin{bmatrix} F_i^+ \\ V_i^+ \end{bmatrix} + \phi_{i+1} \epsilon_{i+1} \\ &= [T_{i+1}] [T_i] \begin{bmatrix} F_i^- \\ V_i^- \end{bmatrix} \\ &+ [T_{i+1}] \epsilon_i \phi_i + \phi_{i+1} \cdot \epsilon_{i+1} \end{aligned} \quad (I.10)$$

si ces éléments sont piézoélectriques. Si on associe deux éléments notés (a) et (b) en parallèle, l'identité de  $V_a^-$  et  $V_b^-$  d'une part, de  $V_a^+$  et  $V_b^+$  d'autre part, couplée aux relations d'additivité :

$$F^- = F_a^- + F_b^-$$

$$F^+ = F_a^+ + F_b^+$$

(I.11)



permet d'écrire :

$$\begin{bmatrix} F^+ \\ V^+ \end{bmatrix} = [T//] \begin{bmatrix} F^- \\ V^- \end{bmatrix}$$

(I.12)

avec :

$$[T//] = \begin{bmatrix} \frac{c_{11}}{c_{21}} & c_{12} - \frac{c_{11} \cdot c_{22}}{c_{21}} \\ 1 & -\frac{c_{22}}{c_{21}} \end{bmatrix}$$

(I.13)

où :

$$c_{11} = \frac{T_{11}^a}{T_{21}^a} + \frac{T_{11}^b}{T_{21}^b}$$

$$c_{21} = \frac{1}{T_{21}^a} + \frac{1}{T_{21}^b}$$

$$\begin{aligned}
c_{12} &= T_{12}^a - \frac{T_{11}^a \cdot T_{22}^a}{T_{21}^a} + T_{12}^b - \frac{T_{11}^b \cdot T_{22}^b}{T_{21}^b} \\
c_{22} &= -\frac{T_{22}^a}{T_{21}^a} - \frac{T_{22}^b}{T_{21}^b}
\end{aligned}
\tag{I.14}$$

si ces éléments sont purement mécaniques, ou :

$$\begin{bmatrix} F^+ \\ V^+ \end{bmatrix} = [ T // ] \begin{bmatrix} F^- \\ V^- \end{bmatrix} + \bar{\alpha}_a \phi_a + \bar{\alpha}_b \phi_b
\tag{I.15}$$

avec :

$$\bar{\alpha}_a = \begin{bmatrix} d_1^a - \frac{c_{11}}{c_{21}} d_2^a \\ d_2^a \\ -\frac{d_2^a}{c_{21}} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\alpha}_b = \begin{bmatrix} d_1^b - \frac{c_{11}}{c_{21}} d_2^b \\ d_2^b \\ -\frac{d_2^b}{c_{21}} \end{bmatrix}
\tag{I.16}$$

où :

$$d_1^a = t_1^a - t_2^a \frac{T_{11}^a}{T_{21}^a}$$

$$d_2^a = - \frac{t_2^a}{T_{21}^a}$$

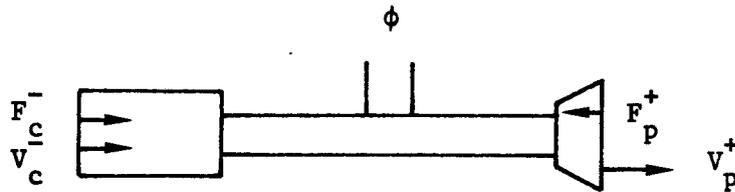
$$d_1^b = t_1^b - t_2^b \frac{T_{11}^b}{T_{21}^b}$$

$$d_2^b = - \frac{t_2^b}{T_{21}^b}$$

(I.17)

si ces éléments sont piézoélectriques.

Considérant alors un transducteur complet, et supposant que la



même différence de potentiel  $\phi$  est appliquée à toutes les céramiques, les lois d'association démontrées ci-dessus permettent d'écrire :

$$\begin{bmatrix} F_p^+ \\ V_p^+ \end{bmatrix} = [ T^s ] \begin{bmatrix} F_c^- \\ V_c^- \end{bmatrix} + \epsilon^s \cdot \phi$$

(I.18)

Sachant que :

$$F_c^- = 0$$

$$F_p^+ = Z \cdot V_p^+$$

(I.19)

où  $Z$  est l'impédance de rayonnement du pavillon, on déduit finalement :

$$V_c^- = - \frac{Z t_2^s - t_1^s}{Z T_{22}^s - T_{12}^s} \cdot \phi$$

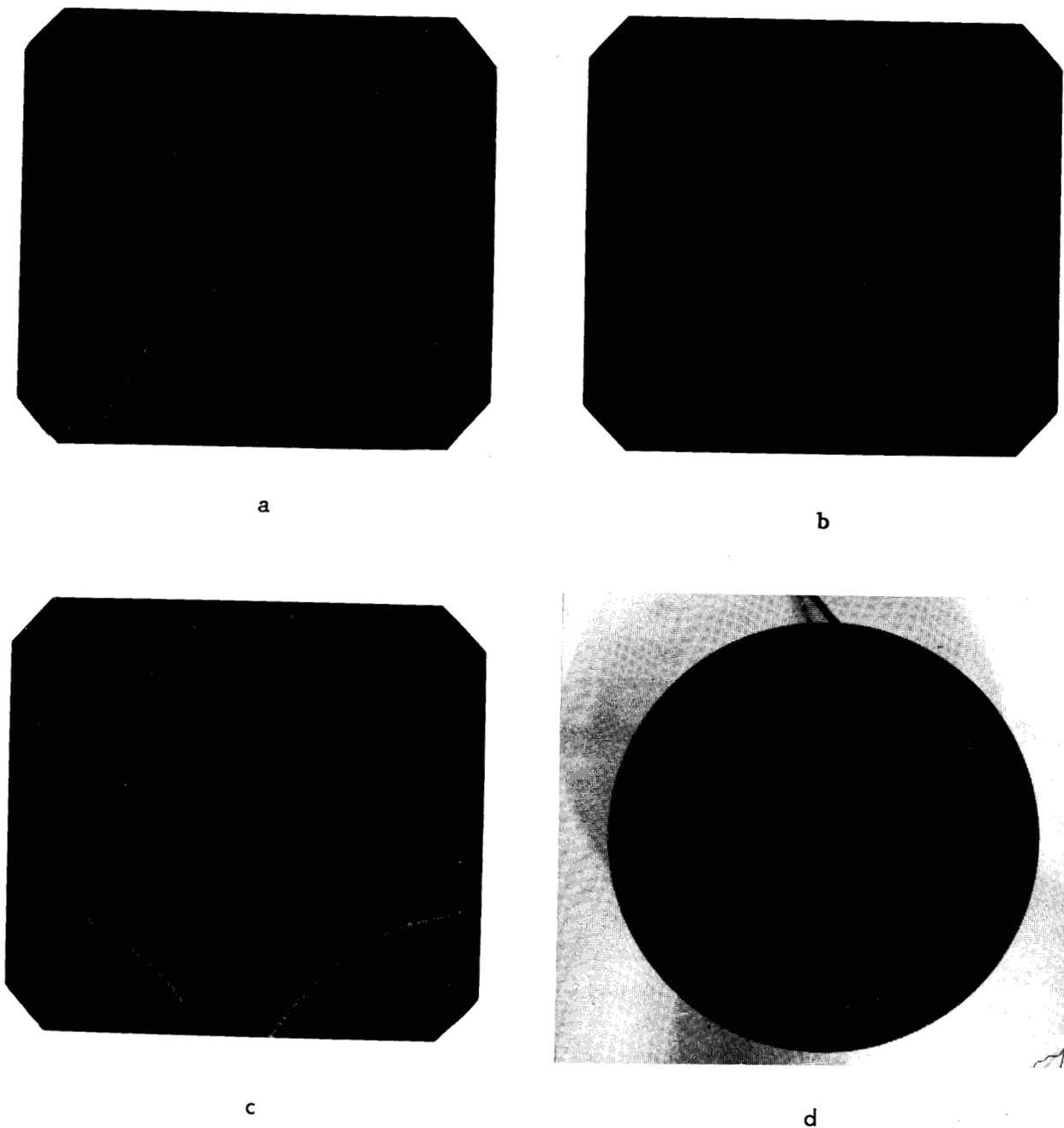
$$V_p^+ = \frac{T_{22}^s t_1^s - T_{12}^s t_2^s}{Z T_{22}^s - T_{12}^s} \cdot \phi$$

(I.20)

Partant de ces résultats, forces et vitesses peuvent être déterminées à tous les interfaces entre éléments, donnant ainsi l'ensemble des caractéristiques du mouvement du transducteur.

Cette approche reste simple et susceptible d'être exploitée dans un code de calcul général, même sur microordinateur [59]. Elle a donné dans de nombreuses applications des résultats très satisfaisants [12,40,59] et apporté une aide considérable à la conception grâce aux informations détaillées qu'elle fournit sur le comportement des éléments constitutifs d'une structure. Toutefois, pour des transducteurs de dimensions transversales importantes ou pour des transducteurs dont la gamme de fréquence utile s'étend nettement au delà de la fréquence du mode fondamental, elle devient insuffisante parce qu'elle néglige tous les effets 2D ou 3D [40,59]. Parmi ces derniers, on peut citer :

- l'excitation de modes radiaux ou de modes axiaux à forte composante radiale. Cet effet apparaît lorsque les colonnes motrices sont de faible longueur et que le diamètre des céramiques devient comparable à la longueur d'onde [59].
- la flexion du pavillon, appelée papillonnage, qui peut se coupler fortement au mouvement de dilatation-compression de la colonne motrice et même être responsable de modes de résonance supplémentaires du Tonpilz (modes de papillonnage). Cette flexion, dont les évidences expérimentales sont nombreuses (figure I.5), peut perturber fortement l'émission acoustique du transducteur en diminuant la surface effective de la face parlante du pavillon [60]



**Figure I.5 .** Papillonnage des pavillons : les lignes blanches sont les lignes nodales du pavillon du transducteur T1 pour son troisième (a), quatrième (b), septième mode (c) et du pavillon d'un transducteur à symétrie axiale pour son second mode (d) . La technique expérimentale est la technique classique des figures de Chladni .

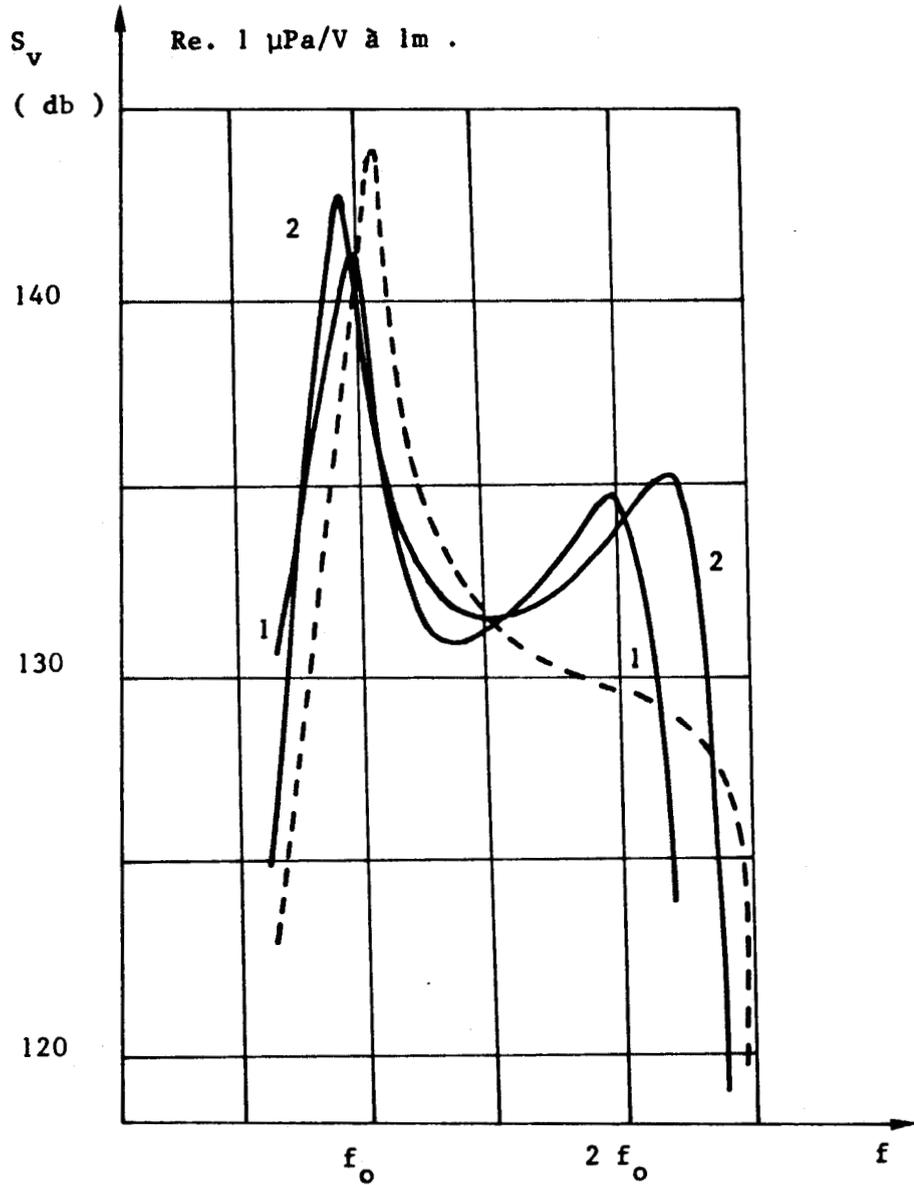


Figure I.6 . Comparaison des niveaux d'émission du transducteur T2a : (1) mesuré, (2) calculé par éléments finis en tenant compte des effets de flexion, (3) calculé par ondes planes . Le pic aux environs de  $2 f_0$  est induit par le couplage du papillonnage du pavillon et du mouvement de dilatation-compression de la colonne motrice . La fréquence de référence est la fréquence du mode fondamental du T2a dans l'air, calculée par éléments finis .

ou, au contraire, en induisant de nouveaux maxima dans la courbe de niveau d'émission [44], comme le montre la figure (I.6).

- l'excitation par une distribution de pression dissymétrique sur la face parlante du pavillon (cas d'une antenne, par exemple) de modes de flexion du Tonpilz complet ("rocking modes") [22].
- les effets spécifiques aux géométries qui n'ont pas la symétrie axiale (dédoublings de certaines résonances...) [23,39].

## **I.2 LE TRANSDUCTEUR ANNULAIRE MULTIMOTEUR DE TYPE ISABELLE**

### **I.2.1. Description**

Dans son mode de réalisation le plus simple, ce transducteur se présente sous la forme d'un anneau sur la face intérieure duquel plusieurs moteurs de type Tonpilz sont fixés en étoile (figures I.7 et I.8). L'anneau est excité radialement et la structure présente deux fréquences de résonance utiles, la plus basse due au mode fondamental de l'anneau, la plus haute due au mode fondamental du moteur. Ces deux résonances donnent une courbe de niveau d'émission caractéristique (figure I.9) qui autorise le fonctionnement de l'Isabelle dans deux gammes de fréquence distinctes. Si l'épaisseur de l'anneau est suffisante pour que la structure résiste à la pression hydrostatique, ce transducteur peut travailler à grande immersion. Enfin, la superposition des anneaux pour former une base cylindrique, permet de créer une directivité importante en site.

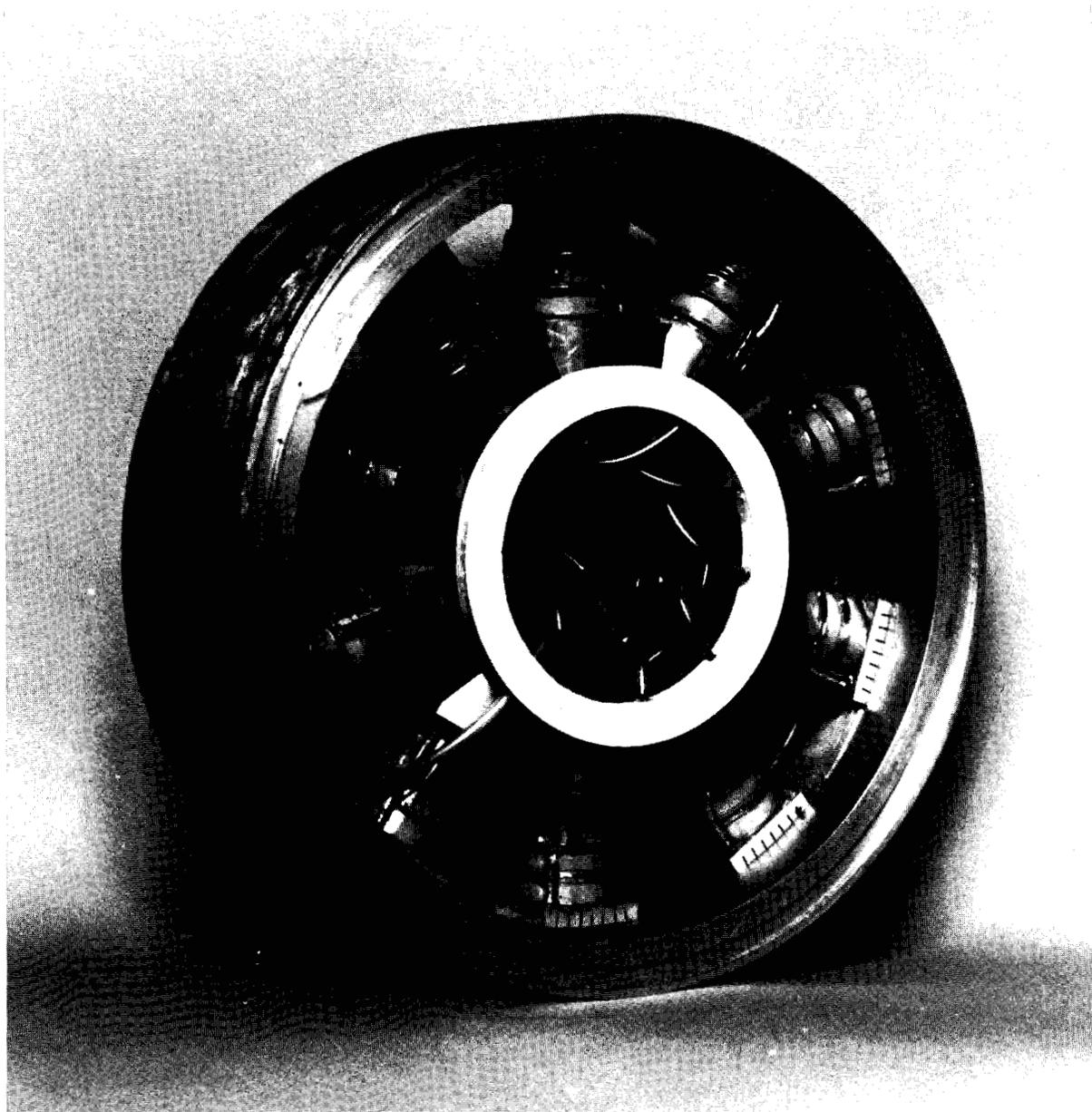


Figure I.7 . Présentation d'un anneau à dix moteur d'un transducteur de type Isabelle ( voir description détaillée figure I.8 ) .

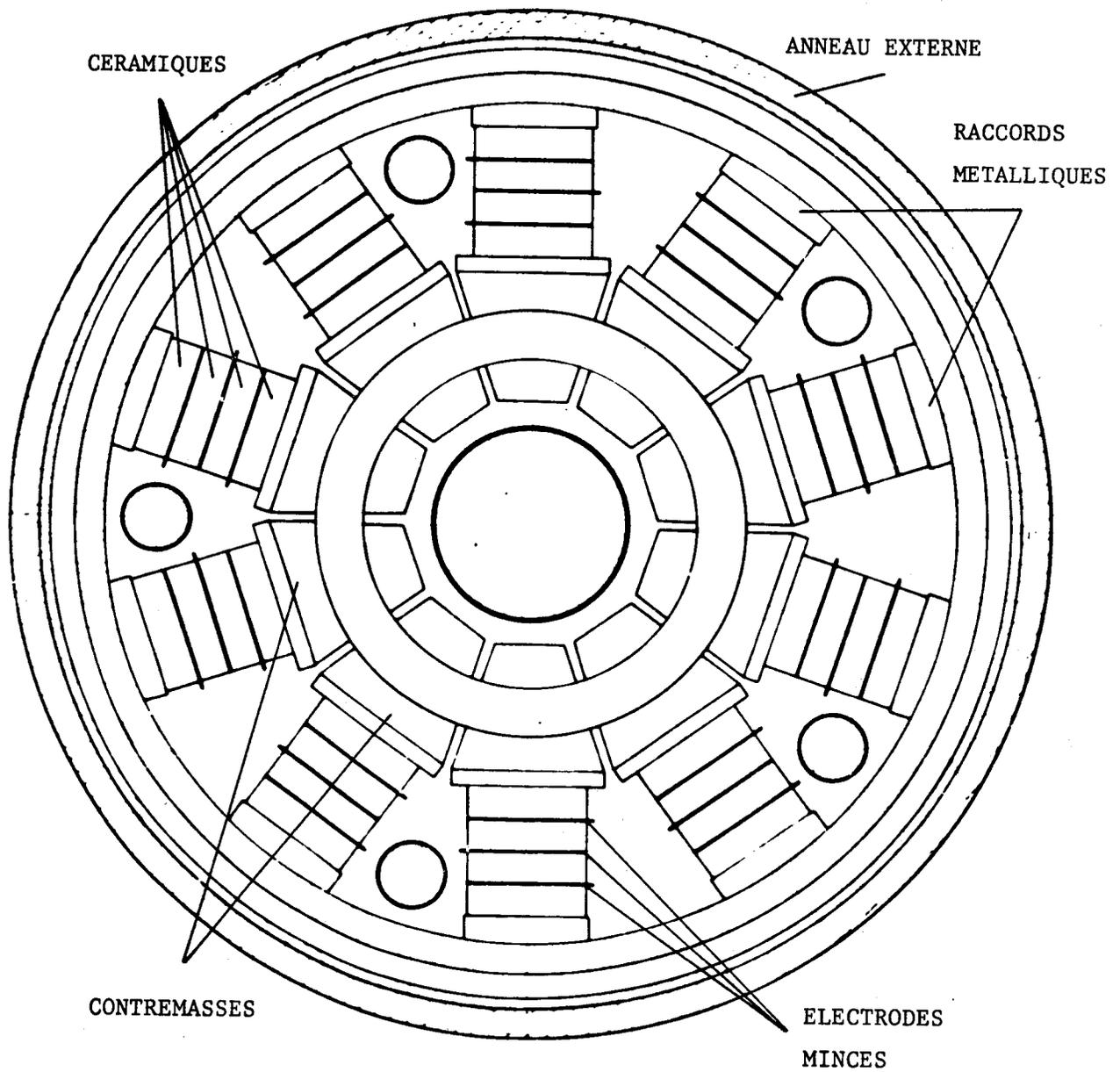


Figure I.8 . Structure Isabelle : présentation schématique d'un anneau .

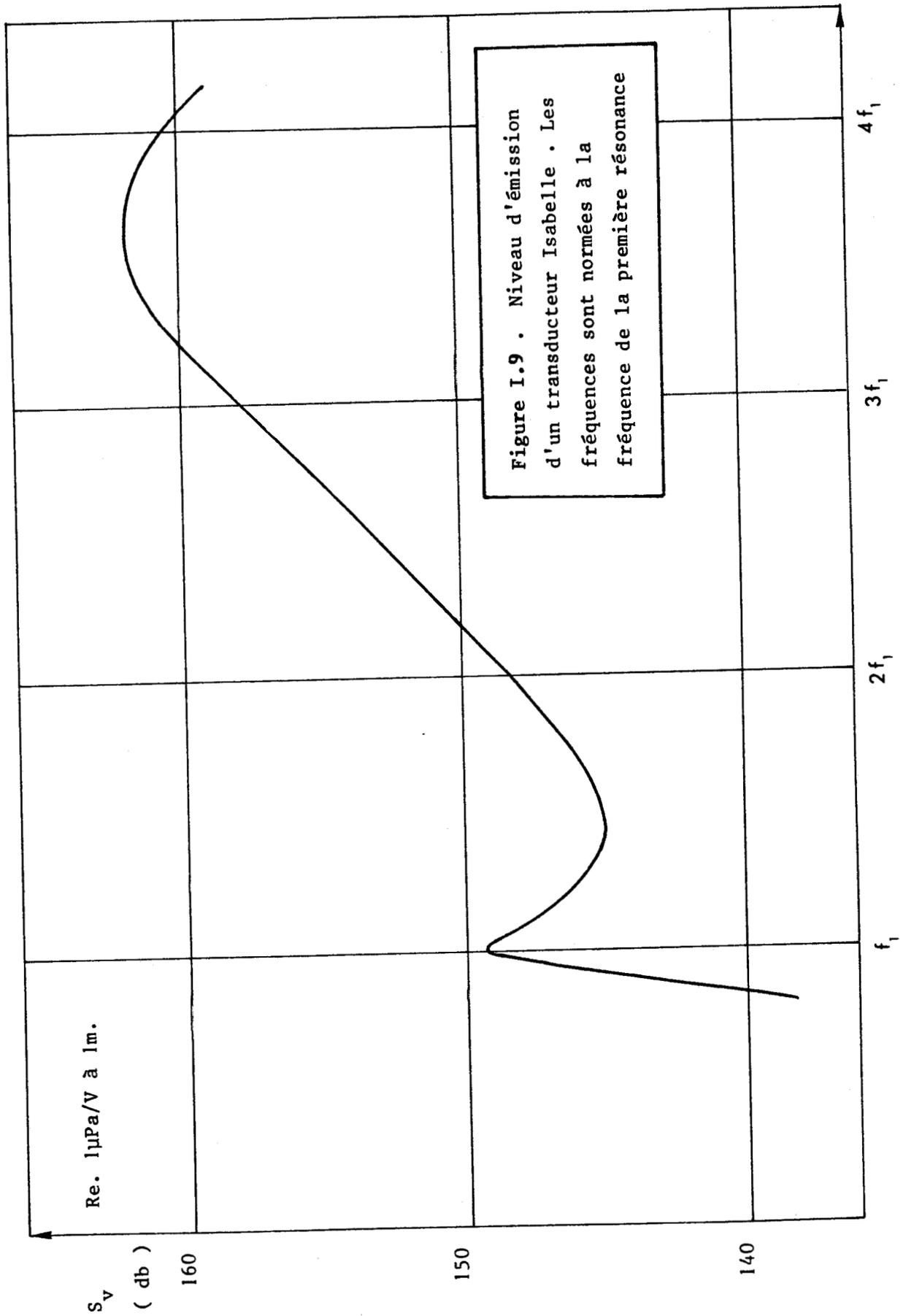
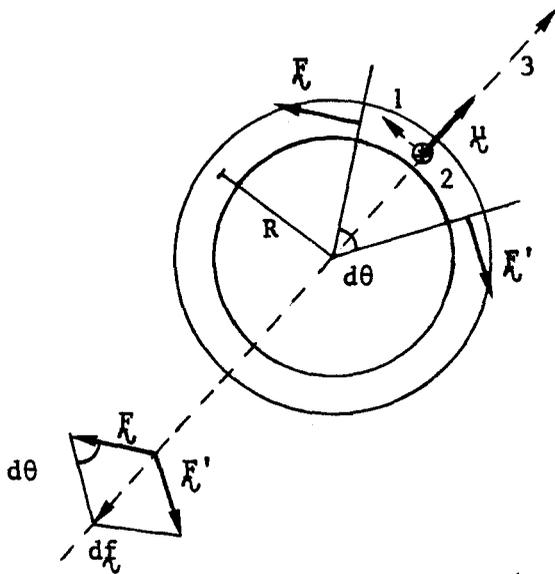


Figure I.9 . Niveau d'émission d'un transducteur Isabelle . Les fréquences sont normées à la fréquence de la première résonance

### I.2.2 Modèle à constantes localisées

Considérant d'abord l'anneau seul, on note  $R$  son rayon moyen,  $A$  sa section,  $E$  et  $\rho$  le module d'Young et la masse volumique du matériau qui le constitue. Le schéma ci-contre permet d'écrire simplement l'équation du mouvement pour un secteur d'angle au centre  $d\theta$  :



$$\rho R A \frac{d^2 u}{dt^2} \cdot d\theta = df \quad (I.21)$$

où  $u$  est l'amplitude du déplacement radial et :

$$df = F \cdot d\theta = -AE \cdot \frac{u}{R} \cdot d\theta \quad (I.22)$$

On en déduit :

$$\rho R \frac{d^2 u}{dt^2} = - \frac{E}{R} u \quad (I.23)$$

d'où la pulsation du mode fondamental de l'anneau :

$$\omega_a = \sqrt{\frac{E}{\rho R^2}} \quad (I.24)$$

Si on considère maintenant la structure Isabelle, pour chaque moteur le schéma équivalent doit comprendre :

- la masse de la contremasse,  $m_c$ ,
- la force motrice  $f$  et l'élasticité  $e$  de la colonne motrice,
- une fraction de la masse de l'anneau :

$$m_a = \frac{2\pi R \rho A}{n} \quad (I.25)$$

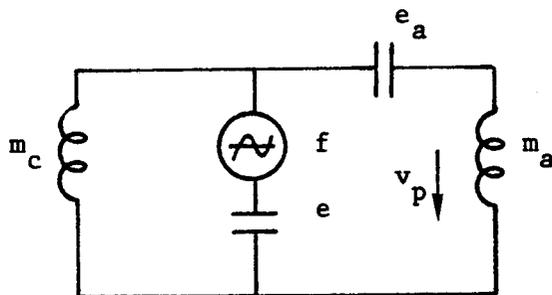
où  $n$  est le nombre de moteurs,

- l'élasticité due à l'anneau :

$$e_a = \frac{nR}{2\pi EA} \quad (I.26)$$

que l'on déduit aisément de la relation (I.22).

On obtient ainsi un schéma global, dû à O. BRANDT [61] et B. TOCQUET [62] :



Compte tenu de ce schéma, la vitesse vibratoire de l'anneau est :

$$v_p = \frac{j\omega e f}{1 + \frac{m_a}{m_c} + \frac{e}{e_a} - m_a e \omega^2 - \frac{1}{m_c e_a \omega^2}} \quad (I.27)$$

A la résonance :

$$\omega^2 = \frac{\omega_a^2 + \omega_m^2}{2} \pm \frac{1}{2} (\omega_a^2 + \omega_m^2) \sqrt{1 - \frac{4\omega_m^2 \omega_a^2}{(\omega_a^2 + \omega_m^2)^2} \frac{m_a}{m_a + m_c}} \quad (I.28)$$

avec :

$$\omega_m^2 = \frac{m_c + m_a}{m_a m_c e}$$

Si  $\omega_a < \omega_m$  et  $m_a < m_c$ , un développement au premier ordre de la racine carrée donne :

$$\omega^2 = \omega_a^2 \frac{m_a}{m_a + m_c} < \omega_a^2$$

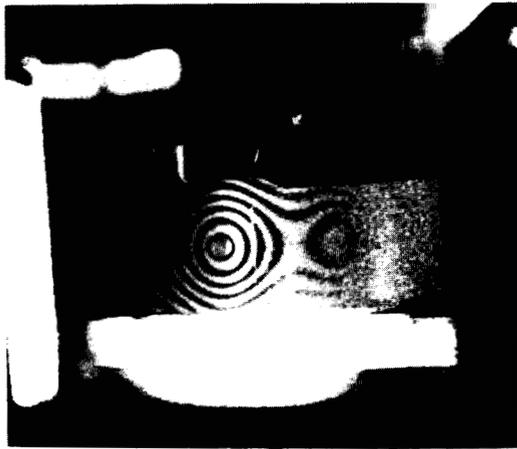
ou

$$\omega^2 = \omega_m^2 + \omega_a^2 \frac{m_c}{m_a + m_c} > \omega_m^2 \quad (I.29)$$

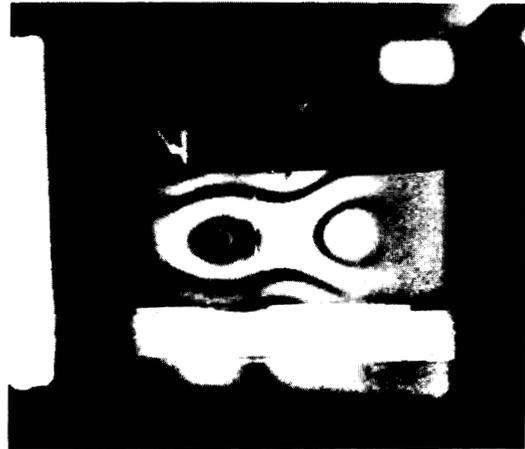
i.e une fréquence de résonance basse et une fréquence de résonance haute. Enfin, en incluant dans le schéma équivalent une impédance de rayonnement en série avec  $m_a$ , en remplaçant  $f$  par le transformateur fictif de la section (I.1.2), en faisant apparaître l'élasticité de la tige de précontrainte et les différentes pertes (diélectriques, frottements internes), on obtient un schéma global correspondant à celui qui a été développé pour le Tonpiliz.

Comme pour le Tonpiliz, ce schéma équivalent permet de calculer les dimensions caractéristiques de la structure, de choisir les matériaux, d'effectuer un bilan de puissance, pour un cahier des charges donné. Il contient en outre l'existence des deux modes de résonance typiques de cette structure. Toutefois, comme pour le Tonpiliz, au delà de l'ébauche, on retrouve les mêmes défauts :

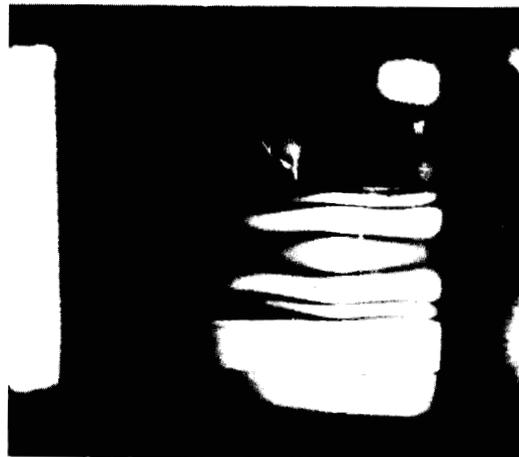
- la localisation des impédances, approximation à laquelle on ne peut plus substituer simplement un modèle d'onde plane compte tenu de la présence de l'anneau,
- l'ignorance des effets 3D. Ces effets peuvent être dûs aux déformations radiales des moteurs, la longueur n'étant plus très grande par rapport au diamètre des céramiques. Ils peuvent aussi être dûs à des flexions complexes de l'anneau pour des fréquences situées en haut de bande, flexions bien révélées expérimentalement, par holographie par exemple (figure I.10).



a



b



c

Figure I.10 . Clichés holographiques d'un secteur de l'anneau Isabelle sur ses premier (a), second (b) et troisième (c) modes de vibration . On notera l'apparition progressive de la flexion ( mouvement en "tonneau" ) .

De plus, on se heurte dans ce cas au problème de la détermination de l'impédance de rayonnement dont les expressions approchées sont bien moins assurées que dans le cas d'un pavillon circulaire ou rectangulaire [63,64].

### **I.3 LE TRANSDUCTEUR ANNULAIRE A IMMERSION LIBRE**

#### **I.3.1 Description**

Le transducteur annulaire à immersion libre [65] est un tube cylindrique de céramique piézoélectrique, d'épaisseur faible, auquel une excitation électrique communique une vibration radiale. L'anneau peut être :

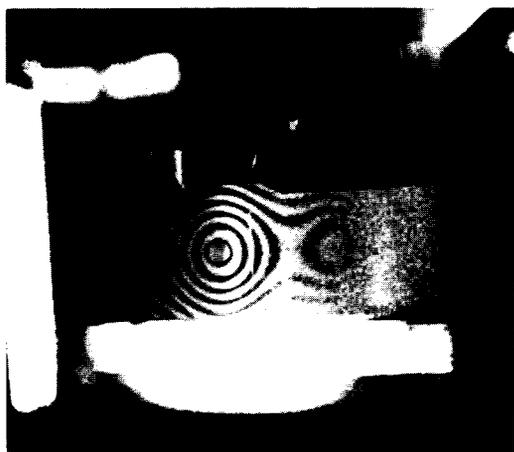
- homogène, polarisé radialement, avec des électrodes sur ses faces interne et externe (figure I.11.a) [66],
- segmenté, polarisé tangentielllement, avec des électrodes minces, radiales, entre les segments (figure I.11.b) [19,25,26].

Dans tous les cas l'anneau est revêtu d'une couche protectrice étanche (néoprène...) et peut être précontraint par un cerclage en fibres de verre.

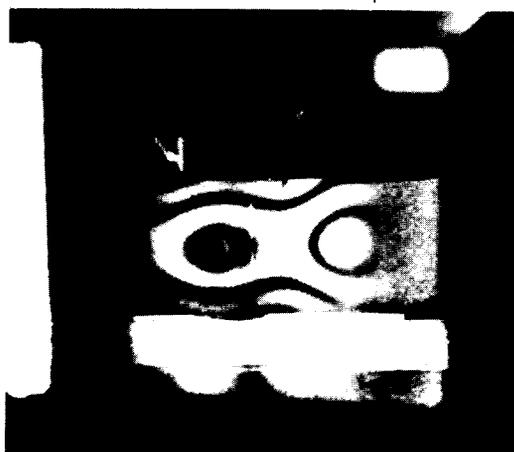
Dans un fonctionnement normal, ce transducteur présente deux résonances de fréquences très voisines qui lui confèrent une large bande : le mode radial de l'anneau d'une part, le mode fondamental de la cavité fluide interne d'autre part. La céramique étant, du point de vue statique, en équipression, ce transducteur peut fonctionner par forte immersion. Enfin, l'association des anneaux pour former une base [66,67], représentée figure (I.11.c), permet d'obtenir une directivité importante dans le plan de l'axe de symétrie.

#### **I.3.2 Modèle simple**

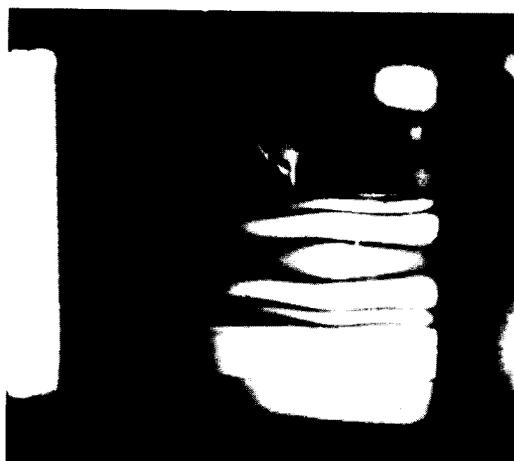
Dans le cas d'un anneau polarisé radialement, sous réserve que sa hauteur  $h$  soit faible devant son rayon  $R$ , le résultat obtenu en (I.2.2) est valable si on tient compte de l'effet piézoélectrique dans la relation entre contrainte et déformation. Ainsi, l'équation (I.22) devient [3] :



a



b



c

Figure I.10 . Clichés holographiques d'un secteur de l'anneau Isabelle sur ses premier (a), second (b) et troisième (c) modes de vibration . On notera l'apparition progressive de la flexion ( mouvement en "tonneau" ) .

De plus, on se heurte dans ce cas au problème de la détermination de l'impédance de rayonnement dont les expressions approchées sont bien moins assurées que dans le cas d'un pavillon circulaire ou rectangulaire [63,64].

### **I.3 LE TRANSDUCTEUR ANNULAIRE A IMMERSION LIBRE**

#### **I.3.1 Description**

Le transducteur annulaire à immersion libre [65] est un tube cylindrique de céramique piézoélectrique, d'épaisseur faible, auquel une excitation électrique communique une vibration radiale. L'anneau peut être :

- homogène, polarisé radialement, avec des électrodes sur ses faces interne et externe (figure I.11.a) [66],
- segmenté, polarisé tangentielllement, avec des électrodes minces, radiales, entre les segments (figure I.11.b) [19,25,26].

Dans tous les cas l'anneau est revêtu d'une couche protectrice étanche (néoprène...) et peut être précontraint par un cerclage en fibres de verre.

Dans un fonctionnement normal, ce transducteur présente deux résonances de fréquences très voisines qui lui confèrent une large bande : le mode radial de l'anneau d'une part, le mode fondamental de la cavité fluide interne d'autre part. La céramique étant, du point de vue statique, en équipression, ce transducteur peut fonctionner par forte immersion. Enfin, l'association des anneaux pour former une base [66,67], représentée figure (I.11.c), permet d'obtenir une directivité importante dans le plan de l'axe de symétrie.

#### **I.3.2 Modèle simple**

Dans le cas d'un anneau polarisé radialement, sous réserve que sa hauteur  $h$  soit faible devant son rayon  $R$ , le résultat obtenu en (I.2.2) est valable si on tient compte de l'effet piézoélectrique dans la relation entre contrainte et déformation. Ainsi, l'équation (I.22) devient [3] :

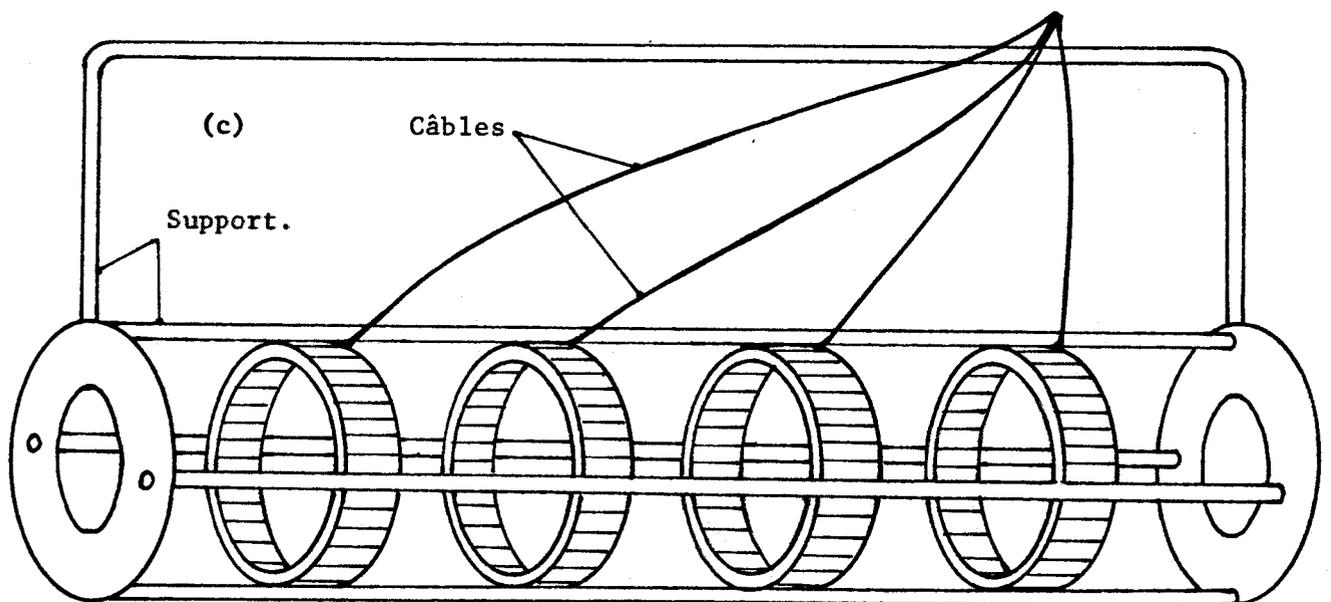
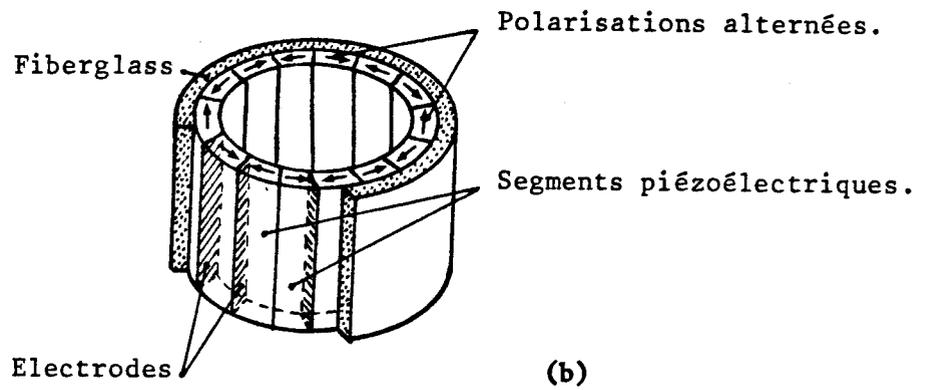
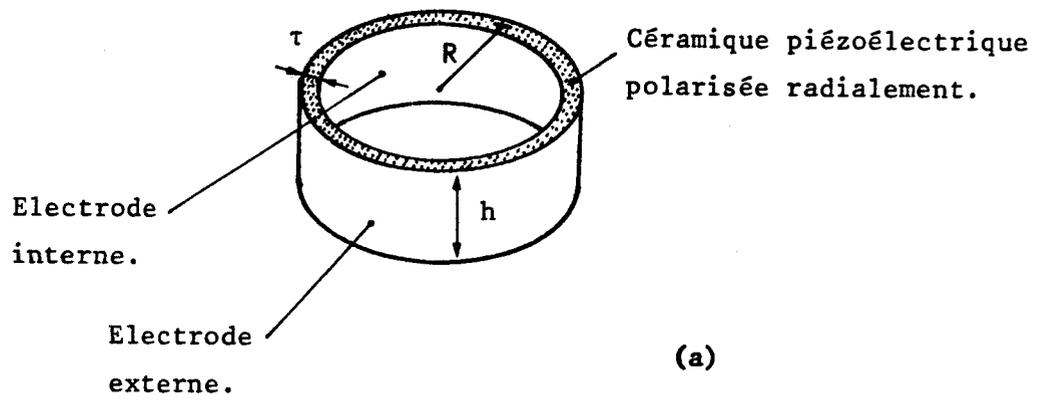


Figure I.11 . Anneaux à immersion libre : (a) polarisation radiale, (b) : polarisation tangentielle, (c) : base de quatre éléments .

$$df = h\tau \left( \frac{1}{s_{11}^E} \frac{u}{R} - \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \frac{\phi}{\tau} \right) d\theta \quad (1.30)$$

où  $s_{11}^E$  et  $d_{31}$  sont les constantes élastique et piézoélectrique appropriées (annexe 2),  $u$  est le déplacement radial,  $\phi$  le potentiel excitateur et  $\tau$  l'épaisseur. On en déduit :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{\rho R^2 s_{11}^E} u = \frac{d_{31}}{\rho R s_{11}^E} \frac{\phi}{\tau} \quad (1.31)$$

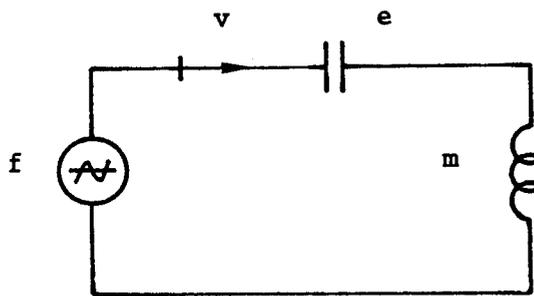
d'où :

$$u = \frac{d_{31}}{\rho R s_{11}^E} \frac{\phi}{(\omega_a^2 - \omega^2)} \cdot \frac{1}{\tau} \quad (1.32)$$

avec, comme en (1.24) :

$$\omega_a = \sqrt{\frac{1}{\rho R^2 s_{11}^E}} \quad (1.33)$$

On retrouve ainsi un schéma mécanique équivalent simple :

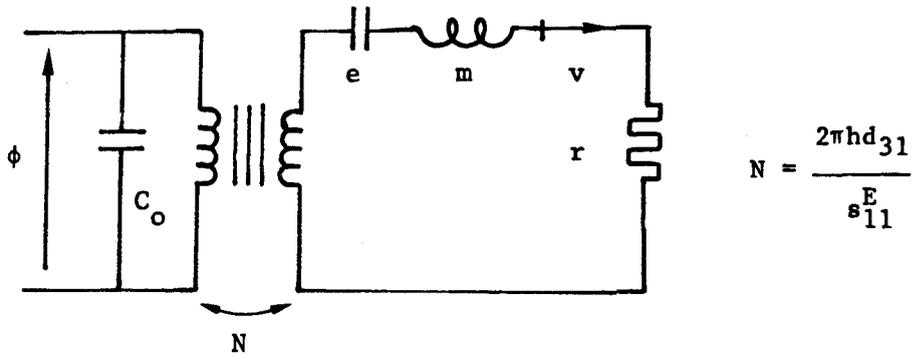


$$m = 2\pi\rho h\tau$$

$$e = \frac{R s_{11}^E}{2\pi h\tau}$$

$$f = \frac{2\pi h d_{31}}{s_{11}^E} \cdot \phi$$

qui, si on introduit le transformateur électromécanique, la capacité bloquée  $C_0$  et la résistance de rayonnement  $r$  devient :



$$N = \frac{2\pi h d_{31}}{s_{11}^E}$$

Cette approche, même si elle donne une bonne approximation de la pulsation de résonance  $\omega_a$  et permet de calculer la vitesse vibratoire, est trop grossière en résumant l'effet du fluide sous la forme de la résistance de rayonnement  $r$ . De fait, le fluide contenu dans la cavité délimitée par le cylindre présente, lui aussi, des résonances dont la pulsation fondamentale est, en première approximation :

$$\omega_c = \frac{\pi c}{h} \quad (I.34)$$

où  $c$  est la célérité du son dans l'eau. L'impédance de rayonnement doit donc être représentée au moins par un circuit rLC équivalent, sinon par des expressions plus complexes que l'on rencontre classiquement lors de l'étude de la propagation du son dans les tubes [2]. Pour traiter ce problème, une seule approche semi-analytique a été développée par J.P.D. WILKINSON et al [19], à l'aide d'une formulation en potentiel de simple couche, mais elle nécessite une résolution numérique d'un système d'équations linéaires. De plus, il faut noter que même la relation (I.34) a été corrigée par G.W. Mc MAHON [66] qui a proposé :

- de tenir compte des effets de bord en remplaçant la hauteur  $h$  par une hauteur effective  $h_e$  donnée par [8] :

$$h_e = h (1 + 2 \alpha R) \quad (I.35)$$

avec :

$$\alpha = .633 - .106 \frac{\omega_c R}{c} \quad (I.36)$$

$$\text{pour } .33 < \frac{\omega_c R}{c} < 3.3$$

- de tenir compte de l'élasticité des parois du cylindre en remplaçant la vitesse de propagation  $c$  par une vitesse effective  $c_e$  donnée par [68] :

$$c_e = c \left( 1 + \frac{2Ks_{11}^E R}{\tau} \right)^{1/2} \quad (\text{I.37})$$

où  $K$  est la compressibilité de l'eau.

Enfin, différents auteurs ont essayé de tenir compte de la hauteur vraie du cylindre dans l'analyse du problème mécanique [69] ainsi que d'une vibration dans l'épaisseur, induite par effet piézoélectrique, qui différencie les vitesses des faces interne et externe [70].

De manière plus critique que pour le Tonpilz et l'Isabelle, ce transducteur échappe donc à l'analyse par des modèles simples. Une approche sérieuse nécessite :

- une description couplée du comportement de la structure et du fluide, qui dispense de corrections du type (I.37) et surtout qui traite le rayonnement,
- une description 2D, qui prend en compte la géométrie véritable de l'anneau et les effets de bord que schématise la relation (I.35).

Une telle approche peut alors décrire également les modes harmoniques de la cavité ainsi que les flexions de l'anneau qui apparaissent lorsque le transducteur est employé dans une bande large [25,26,29]. Elle donne aussi accès à l'étude du couplage par le fluide entre anneaux d'une même base.

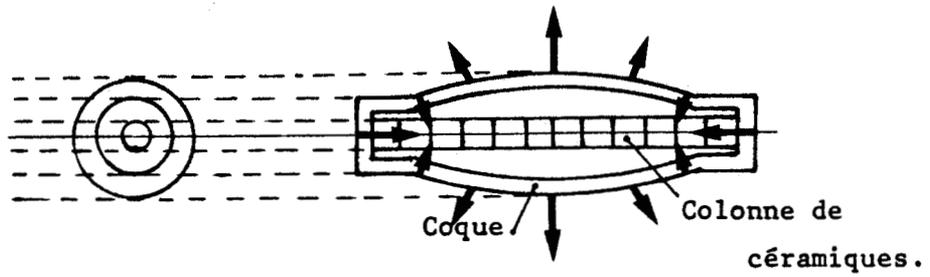
#### I.4 LES TRANSDUCTEURS UTILISANT DES VIBRATIONS DE COQUES MINCES

Un transducteur de ce type, désigné ci-après sous le nom de "criquet" [71], est constitué par un barreau, un disque ou un anneau de céramique piézoélectrique dont la vibration longitudinale ou radiale induit un mouvement de flexion d'une coque qui rayonne dans le fluide environnant [72]. Ce transducteur, dont les figures (I.12) à

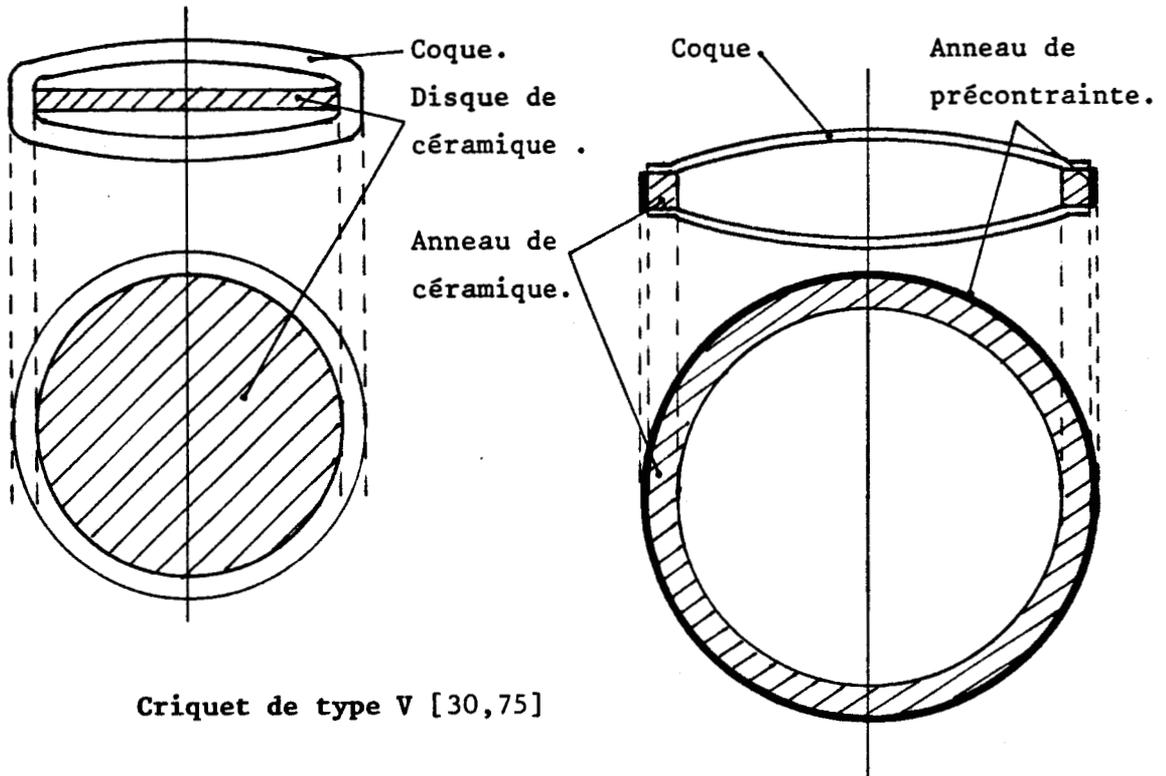
(I.14) présentent quelques structures classiques, est spécialement conçu pour fonctionner en basse fréquence (i.e. pour des fréquences notablement inférieures à la fréquence du mode fondamental du barreau, du disque ou de l'anneau piézoélectrique), la grande rigidité de la céramique étant compensée par l'inertie effective très importante ramenée par le mouvement de la coque pour produire la résonance désirée. Il n'existe pas, à l'heure actuelle, de modèle analytique simple de ces transducteurs susceptible d'aider efficacement à leur conception. Toutefois, en traitant approximativement et séparément les trois parties (moteur piézoélectrique, coque, fluide) et en écrivant les conditions de raccordement mécanique ou acoustique qui les lient, plusieurs auteurs ont pu obtenir des informations théoriques intéressantes sur divers types de structures. L.H. ROYSTER [73] a analysé un "criquet" de type I en décrivant la colonne motrice suivant le modèle d'onde plane développé en (I.1.3), en modélisant la coque suivant une technique de différences finies et le rayonnement à l'aide d'une formulation intégrale de Helmholtz. R.A. NELSON et L.H. ROYSTER [20] ont repris la même approche pour un "criquet" de type V, le mode radial du disque étant décrit à l'aide des fonctions de Bessel. Enfin, G.A. BRIGHAM [74] a étudié le "criquet" de type IV en décrivant également la colonne motrice suivant un modèle d'onde plane, en assimilant la coque à un anneau ovale (largeur  $L$  faible devant le périmètre  $4S$ ) dont l'équation du mouvement est résolue grâce à une décomposition en série de Fourier des champs de contrainte et déformation et en adoptant comme impédance de rayonnement celle d'un cylindre de section elliptique vibrant dans un baffle dur infini de même section.

De ces diverses analyses, on peut tirer quelques remarques essentielles :

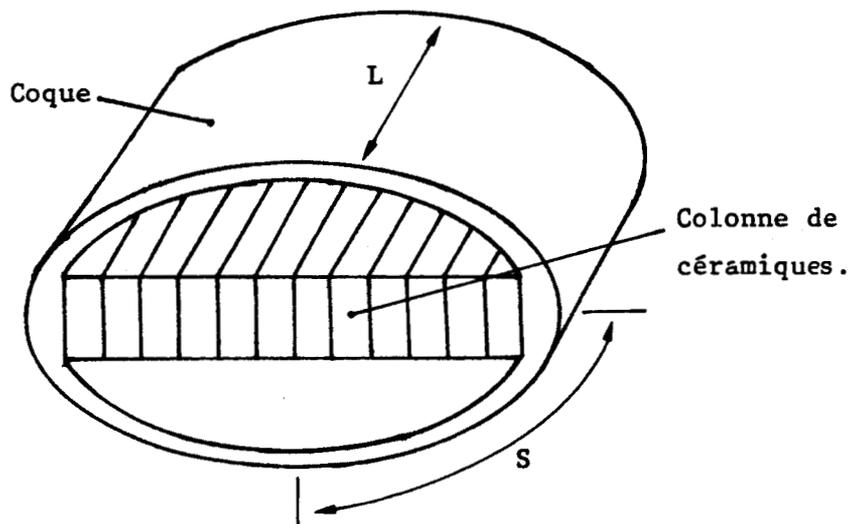
- chaque code de calcul développé, sinon chaque méthode, est propre à un type de transducteur "criquet" et dépend de manière assez critique de sa géométrie,
- le modèle de coque employé est souvent simple et mal adapté pour décrire l'interface entre la coque et le moteur ou pour prendre en compte la forte courbure et la surépaisseur dans cette même région,
- les modèles de coque analysés par différences finies convergent mal [75],
- la prise en compte du rayonnement est, en général, sinon grossière, du moins chère en ressources informatiques.



Criquet de type I [73]



Criquet de type V [30,75]



Criquet de type IV [74]

Figure I.12 .  
Représentations schématiques de différents types de criquet .

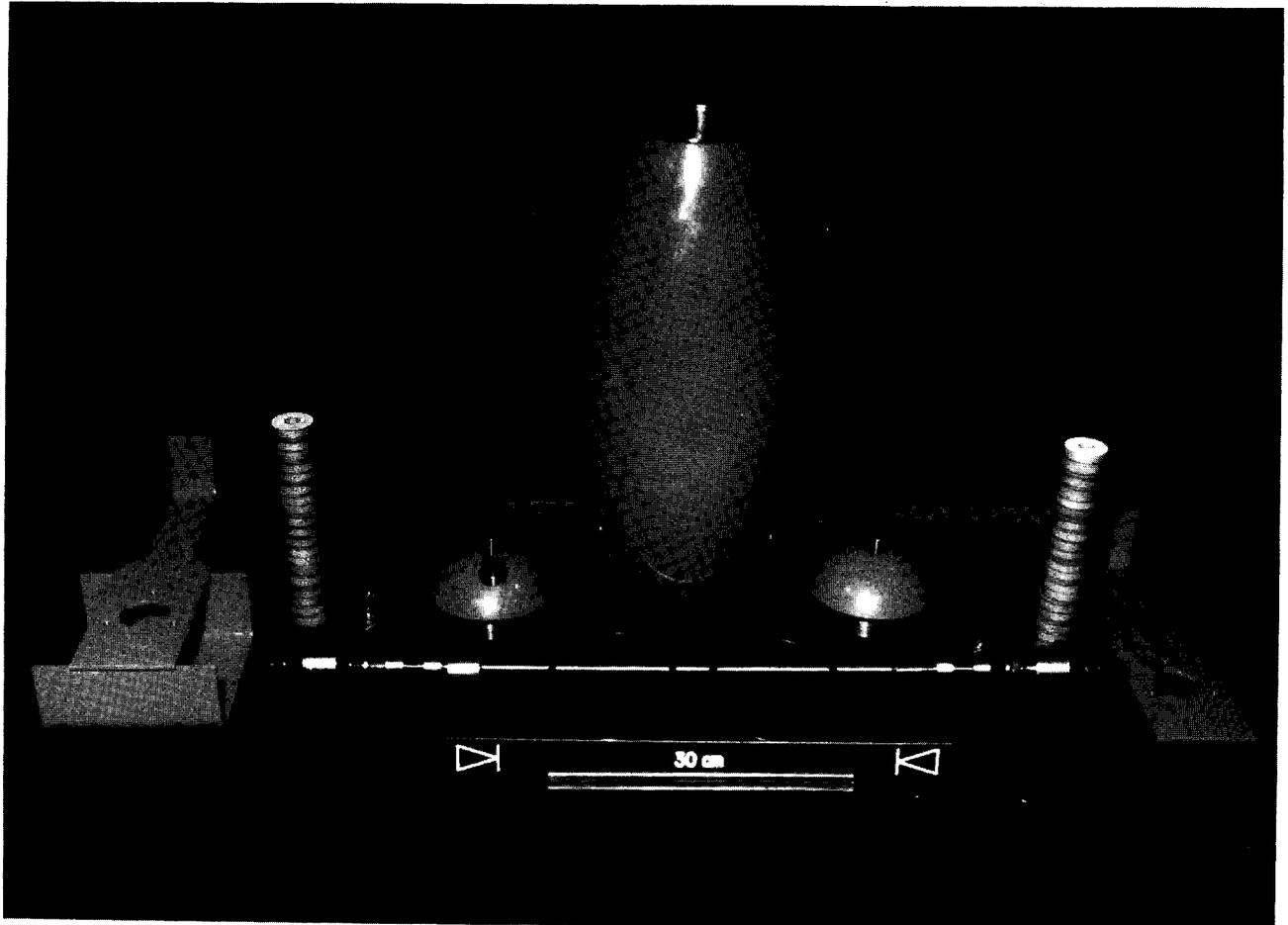


Figure I.13 . Présentation éclatée d'un criquet de type 1 .

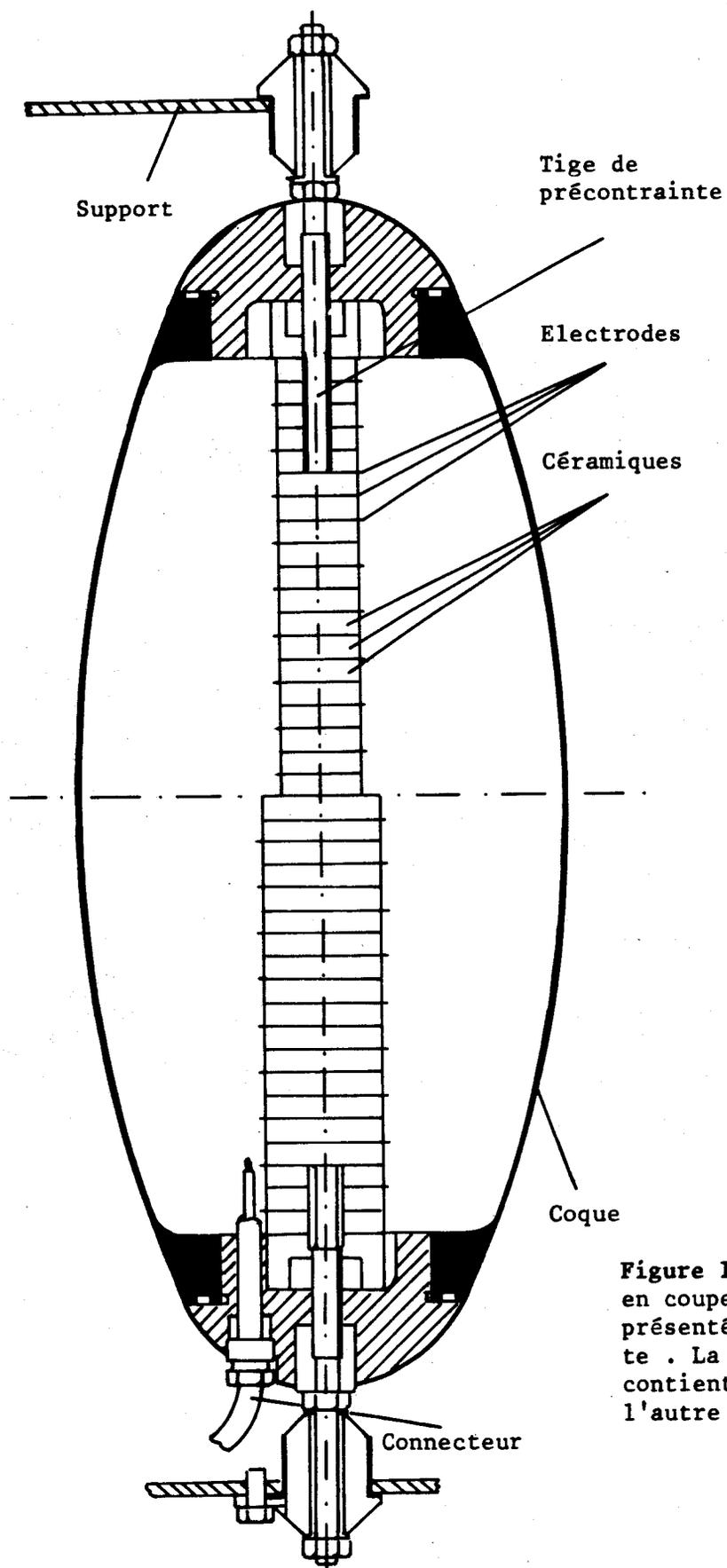


Figure I.14 . Schéma détaillé en coupe du criquet de type I présenté à la page précédente . La colonne de céramiques contient en fait l'une ou l'autre variété .

Par opposition, une approche nouvelle doit donc être polyvalente au niveau de la description de la structure, ne pas dépendre des modèles employés pour étudier la coque en permettant, par exemple, le test de diverses approximations, et assurer une prise en compte naturelle du rayonnement. Dans certaines configurations, elle doit aussi permettre la modélisation d'un fluide interne utilisé pour compenser les effets de la pression hydrostatique extérieure dans le cas de transducteurs à forte immersion [30].

## I.5 BILAN

De cette analyse rapide il ressort que si les schémas équivalents classiques à impédances localisées ou réparties (onde plane) permettent de comprendre simplement les éléments essentiels du fonctionnement d'un transducteur et de réaliser une première ébauche de sa conception, ils ne prennent pas en compte ou décrivent mal de nombreux effets importants, entr'autres :

- le papillonnage des pavillons de Tonpitz, essentiel pour comprendre et prévoir le fonctionnement de transducteurs large bande ou multifréquence,
- les modes de flexion de ces mêmes transducteurs (rocking modes) induits par des excitations dissymétriques,
- les déformations radiales de colonnes motrices dont la largeur est comparable à la longueur d'onde,
- les déformations non radiales des anneaux Isabelle ou à immersion libre (flexion...),
- le couplage hydroélastique et les effets de bord pour les modes de cavité des anneaux à immersion libre,
- le couplage entre le mouvement longitudinal ou radial du moteur et le mouvement de flexion de la coque qui est responsable du fonctionnement de transducteurs de type "criquet".

Par ailleurs, au delà des effets 2D, 3D ou hydroélastiques, ils ont recours à des expressions analytiques des impédances de rayonnement qui, dans la grande majorité des conditions de fonctionnement, n'ont pas été établies exactement pour la géométrie de la structure et ne sont pas des solutions autocohérentes du problème couplé.

Cet ensemble d'observations montre que, au delà de l'ébauche, la conception d'un nouveau transducteur demande soit une mise au point expérimentale, résultant souvent d'une démarche par "essais et erreurs" et impliquant la réalisation de maquettes et de mesures parfois difficiles, soit une simulation numérique précise, apte à prendre en compte les effets complexes évoqués précédemment. Même si sa réponse n'a pas un caractère aussi absolu que celui d'une analyse expérimentale, cette dernière approche a souvent l'avantage de l'économie et de la rapidité et, surtout, fournit une information très détaillée sur le comportement de tous les éléments de la structure permettant souvent, par la compréhension qu'elle induit, d'accélérer la convergence du processus de mise au point. Cette simulation numérique doit pouvoir prendre en compte :

- des géométries complexes (2D, 3D, coques, coques épaisses, tiges...),
- des structures hétérogènes et souvent anisotropes (céramiques piézoélectriques),
- le couplage électro-mécanique dû à la piézoélectricité i.e. résoudre simultanément, dans un même domaine, les équations de l'élasticité et l'équation de Poisson,
- le couplage hydroélastique i.e. résoudre simultanément, dans deux domaines adjacents, les équations de l'élasticité et l'équation de Helmholtz,
- l'effet de rayonnement.

Elle doit disposer d'autre part d'interfaces d'entrée-sortie commodes et reposant sur une présentation graphique, pour l'essentiel, compte tenu de la nature complexe du problème. A cet ensemble de requêtes, la méthode des éléments finis [21] est actuellement la plus apte à répondre. La suite de cette thèse va présenter l'application que nous en avons faite et montrer comment elle a permis d'analyser en détails le comportement des structures Tonpilz. Les études, par la même méthode, de la structure Isabelle et des anneaux à immersion libre sont respectivement les sujets des thèses de P. TIERCE [53] et R. BOSSUT [55].

## CHAPITRE II

### ANALYSE DU PROBLEME ELECTROMECHANIQUE

#### A L'AIDE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

*L'objet de ce chapitre est de présenter l'application de la méthode des éléments finis à la résolution du problème électromécanique du comportement dynamique d'un transducteur piézoélectrique dans l'air. Après un rappel des équations du problème, leur formulation variationnelle est posée et discutée. La méthode des éléments finis est alors introduite dans son application au problème traité, les détails techniques de la formulation des éléments ou de l'algorithmique étant reportés en annexe. Enfin, les résultats de plusieurs tests caractéristiques sont présentés pour prouver la capacité de la méthode à résoudre le problème et préciser les critères de maillage. L'analyse détaillée du comportement d'une dizaine de Tonpilz différents, permettant d'appréhender les règles générales qui régissent leurs comportements est, elle, conduite au chapitre suivant.*

## II.1 LES EQUATIONS DU PROBLEME

L'analyse à conduire est une analyse harmonique d'une structure hétérogène, de forme géométrique complexe, constituée en général de matériaux métalliques divers et de céramiques piézoélectriques anisotropes. Dans cette analyse, seuls les effets élastiques et piézoélectriques sont pris en compte, les modèles utilisés excluant en particulier les non-linéarités de grands déplacements ou de comportement et les effets dissipatifs (frottements internes, pertes diélectriques). Les équations, la formulation variationnelle et l'introduction des éléments finis sont développées dans le cas d'un matériau piézoélectrique, le cas d'un matériau métallique ou d'un domaine mixte s'en déduisant de façon évidente en supprimant si nécessaire le champ électrique et les grandeurs et constantes physiques qui sont associées à son effet. Dans ces conditions, les équations d'état du système sont (annexe 2) :

$$\begin{aligned} T_{ij} &= c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k \\ D_i &= e_{ikl} S_{kl} + \epsilon_{ij}^S E_j \end{aligned} \quad (II.1)$$

où  $[T]$  est le tenseur des contraintes,  $[S]$  le tenseur des déformations,  $\mathcal{E}$  le vecteur champ électrique,  $\mathcal{D}$  le vecteur excitation du champ électrique,  $[c^E]$  le tenseur des constantes élastiques à champ électrique constant,  $[e]$  le tenseur des constantes piézoélectriques,  $[\epsilon^S]$  le tenseur des constantes diélectriques à déformation constante.  $i, j, k$  et  $l$  varient de 1 à 3 et repèrent les axes de coordonnées, la notation d'Einstein étant dès maintenant utilisée systématiquement. En complément :

$$\begin{aligned} S_{kl} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \\ E_i &= - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (II.2)$$

où  $u$  est le vecteur déplacement et  $\phi$  le potentiel électrique. Dans tout le domaine  $\Omega$  doivent être vérifiées l'équation générale du

mouvement [76] :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{II.3})$$

et l'équation de Poisson :

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{II.4})$$

les différents matériaux ne contenant pas de charges libres en volume. Avec les relations (II.1), notant  $\omega$  la pulsation, on obtient le système :

$$-\rho \omega^2 u_i = \frac{\partial}{\partial x_j} (c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (e_{ikl} S_{kl} + \epsilon_{ij}^S E_j) = 0 \quad (\text{II.5})$$

Ces équations sont assorties d'un ensemble de conditions aux limites mécaniques ou électriques diverses. Les conditions mécaniques sont :

- des conditions sur le champ de déplacement, du type Dirichlet :

$$u_i = u_i' \quad (\text{II.6})$$

où  $u_i'$  est une quantité connue. On notera  $S_u$  l'ensemble des éléments de surface soumis à une telle condition,

- des conditions sur le champ de contrainte, du type Neumann [76] :

$$T_{ij} \cdot n_j = f_i \quad (\text{II.7})$$

où  $\underline{n}$  est le vecteur normal à la surface, orienté vers l'extérieur, et  $\underline{f}$  est un vecteur connu. On notera  $S_T$

l'ensemble des éléments de surface soumis à une telle condition.

Les conditions électriques sont :

- des conditions sur l'excitation du champ électrique, valables sur toute partie de la surface du matériau piézoélectrique qui ne porte pas d'électrode, et donc pas de charges superficielles :

$$D_i \cdot n_i = 0 \quad (II.8)$$

où  $\underline{n}$  est le vecteur normal à la surface. On notera  $S_\sigma$  l'ensemble des éléments de surface soumis à une telle condition. On remarquera que (II.8) suppose que l'excitation du champ électrique est négligeable à l'extérieur du domaine  $\Omega$ , ce qui est facilement vérifié pour une céramique piézoélectrique,

- des conditions sur le potentiel et l'excitation du champ électrique, valables sur les électrodes. Notant  $p$  l'indice qui repère les électrodes et varie de 0 à  $M$ ,  $S_p$  la surface de l'électrode  $p$ , on a :

$$\phi = \phi_p \quad (II.9)$$

en tout point de  $S_p$  et :

$$- \iint_{S_p} D_i \cdot n_i \, dS_p = Q_p \quad (II.10)$$

Suivant les cas, le potentiel ou la charge est imposé. Dans le premier cas,  $\phi_p$  est une valeur connue à priori et (II.10) permet le calcul de  $Q_p$ . Dans le second cas,  $Q_p$  est une valeur connue, (II.9) impliquant seulement que  $\phi_p$  est une constante à déterminer. Enfin, pour définir l'origine des potentiels, il est nécessaire d'imposer que le potentiel d'une électrode, l'électrode  $p = 0$  par exemple, est nul ( $\phi_0 = 0$ ).

## II.2 LA FORMULATION VARIATIONNELLE

Les équations (II.5) d'une part, (II.6) à (II.10) d'autre part, sont respectivement les équations d'Euler [77,78] et les conditions aux limites associées à la quantité stationnaire  $L$  définie par :

$$\begin{aligned}
L = & \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} (S_{ij} c_{ijkl}^E S_{kl} - \rho \omega^2 u_i^2) d\Omega \\
& - \iint_{S_u} (u_i - u'_i) n_j (c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k) dS_u \\
& - \iint_{S_T} f_i \cdot u_i dS_T \\
& - \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} (2 S_{kl} e_{ikl} E_i + E_i \epsilon_{ij}^S E_j) d\Omega \\
& - \sum_{p=0}^M \iint_{S_p} (\phi - \phi_p) n_i (e_{ikl} S_{kl} + \epsilon_{ij}^S E_j) dS_p \\
& + \sum_{p=0}^M \phi_p Q_p
\end{aligned}
\tag{II.11}$$

Cette quantité, dont le premier terme est le lagrangien du problème mécanique seul, a été trouvée suivant une approche classique d'essais et erreurs par J.A. LEWIS [79], R. HOLLAND et E.P. EER NISSE [80,81] puis justifiée à l'aide du principe des travaux virtuels par H. ALLIK et T.J.R. HUGHES [82]. L'annulation de la variation de L au premier ordre implique la vérification de l'ensemble des équations et conditions aux limites (II.5) à (II.10). Le détail de la démonstration et sa discussion peuvent être trouvés dans le livre de HOLLAND et EER NISSE [15] et dans la thèse de D. BOUCHER [37] et ne seront pas reproduits ici.

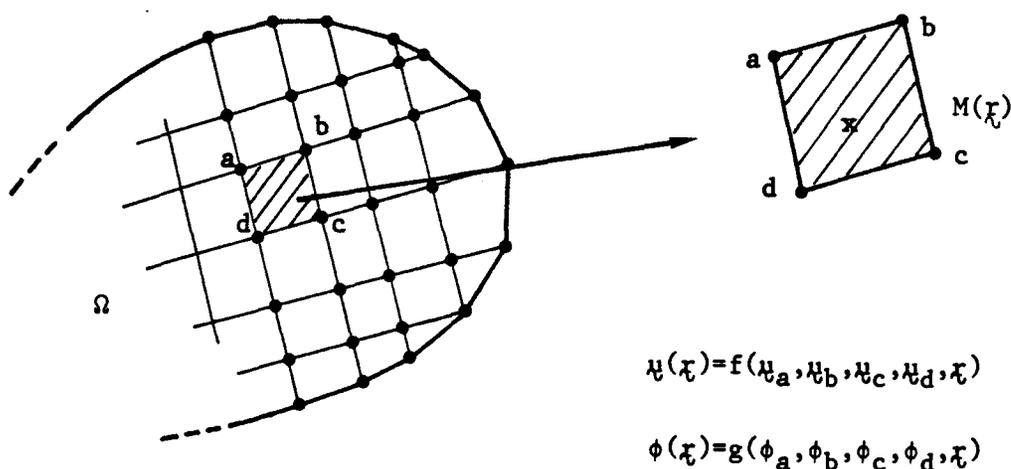
Ce principe variationnel a été exploité suivant une approche de Rayleigh-Ritz pour plusieurs applications : recherche des modes propres d'un parallélépipède piézoélectrique [83] (les fonctions de base étant des produits de lignes trigonométriques qui vérifient, à priori, certaines conditions aux limites), recherche des modes propres d'un disque piézoélectrique épais portant des électrodes complètes sur ses faces orthogonales à l'axe de polarisation [80] (les fonctions de

base étant des produits de lignes trigonométriques et de fonctions de Bessel qui ont la symétrie des modes de dilatation-compression et vérifient, à priori, certaines conditions aux limites), recherche de l'admittance et des modes propres d'un disque piézoélectrique épais portant des électrodes segmentées et concentriques sur ses faces orthogonales à l'axe de polarisation [81]. Toutefois, la méthode de Rayleigh-Ritz suppose, en général, que les fonctions de base employées sont définies sur tout le domaine. Elle devient donc inutilisable pratiquement lorsque le domaine a une frontière irrégulière et lorsqu'il est hétérogène. Dans ce cas, la formulation variationnelle doit conduire à une analyse par la méthode des éléments finis qui, en utilisant des fonctions de base définies "par morceaux", s'adapte bien aux conditions complexes [21].

## II.3 L'ANALYSE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

### II.3.1 Principe

Dans une analyse par la méthode des éléments finis, le domaine  $\Omega$  dans lequel le champ de déplacement  $u$  et le potentiel électrique  $\phi$  sont recherchés est découpé fictivement par des lignes ou des surfaces



en *éléments* qui sont interconnectés en un nombre fini de points situés à leurs frontières, les *noeuds*. L'ensemble des éléments constitue le *maillage*. A l'intérieur de chaque élément, le champ de déplacement et le potentiel électrique sont définis de manière unique par les seules valeurs qu'ils prennent aux noeuds de l'élément, cette définition étant assurée à l'aide de *fonctions d'interpolation ou de pondération*. Ainsi on dispose sur  $\Omega$  d'une fonction d'essai, dépendant des seules

valeurs nodales de  $u$  et  $\phi$ , qui est définie par "morceaux" dans des domaines élémentaires jointifs. Ces domaines élémentaires, contrairement à  $\Omega$ , peuvent être des domaines de formes géométriques simples et de composition homogène. Injectant cette fonction dans  $L$  et écrivant les conditions de minimisation, on obtient un système d'équations dont les inconnues sont les valeurs nodales. Les interpolations étant linéaires par rapport aux valeurs nodales et la fonctionnelle dans (II.11) étant quadratique, on montre ultérieurement que ce système est linéaire et susceptible d'être traité par les algorithmes puissants de l'analyse numérique moderne.

La suite de cette partie va présenter :

- les fonctions d'interpolation utilisées,
- la formulation en 3D des différents tenseurs,
- l'application du principe variationnel,
- les équations à résoudre et les algorithmes correspondants,
- les éléments utilisés et la formulation isoparamétrique,
- la technique d'assemblage,
- les autres approches.

### II.3.2 Les fonctions d'interpolation

Soit un élément triangulaire  $e$  dont les trois sommets sont les trois noeuds et  $\phi_1^e, \phi_2^e, \phi_3^e$  les valeurs nodales du potentiel sur ces trois noeuds. La connaissance de  $\phi_1^e, \phi_2^e, \phi_3^e$  et des coordonnées des sommets permet d'obtenir une valeur de  $\phi$  en tout point à l'intérieur du triangle par une interpolation linéaire :

$$\phi = \sum_{i=1}^3 N_i^e(x,y) \phi_i^e \quad (\text{II.12})$$

dont les coefficients  $N_i^e$ , appelés fonctions d'interpolation ou de pondération, sont représentés ci-après. Ces fonctions sont des polynômes en  $x$  et  $y$  dont les neuf coefficients constants (3x3) sont définis par les relations :

$$\begin{aligned} N_i^e(x_j, y_j) &= 1 & \text{si } i &= j \\ &= 0 & \text{si } i &\neq j \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

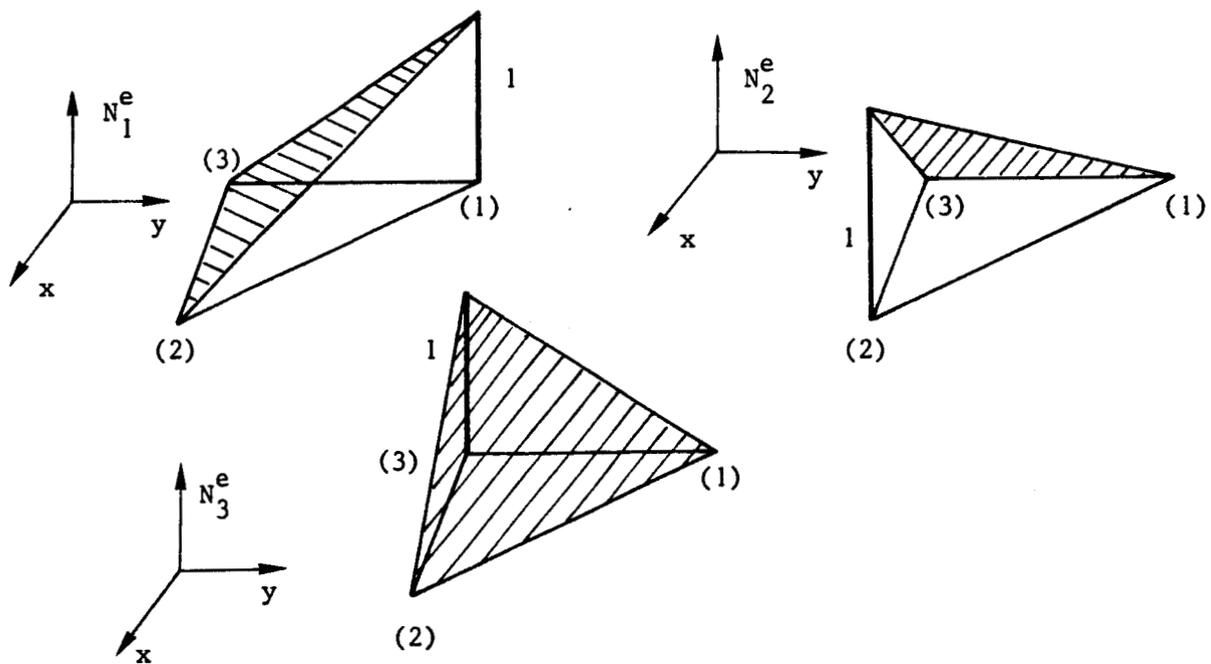
avec  $i = 1,3$  et  $j = 1,3$ . Pour le même élément, si on s'intéresse au champ de déplacement  $u$  dont les valeurs nodales sont  $u_1^e, u_2^e, u_3^e$ , on a :

$$u = \sum_{i=1}^3 [N_i^e] U_i^e \quad (\text{II.14})$$

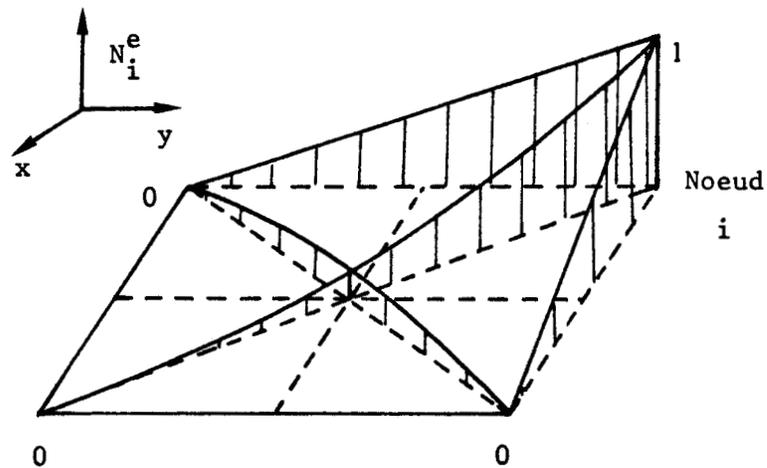
avec :

$$[N_i^e] = N_i^e(x,y) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.15})$$

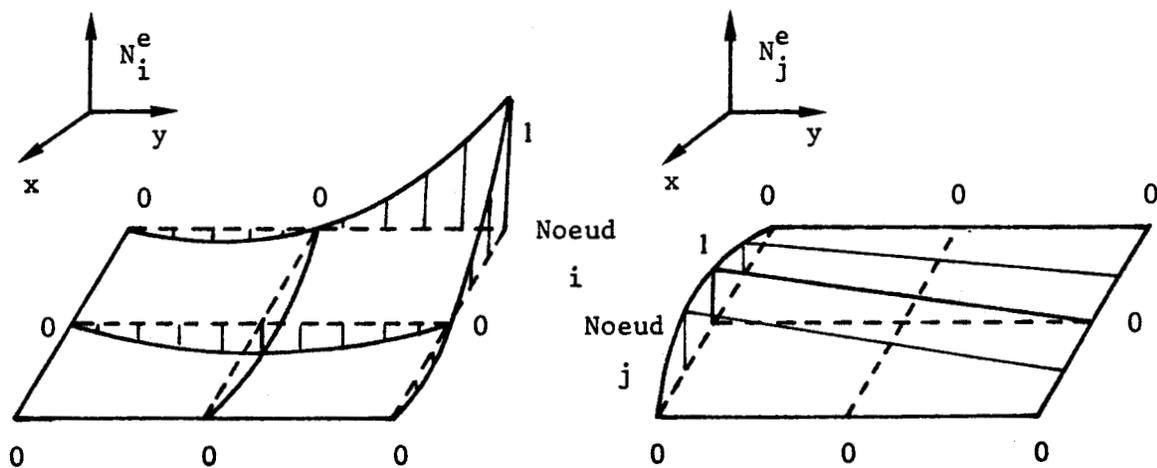
dans le cas où le vecteur  $u$  a trois composantes.



Pour un élément quadrilatère dont les quatre coins sont les quatre noeuds, les relations (II.12) à (II.15) restent valables, à condition de faire varier  $i$  et  $j$  de 1 à 4. Les fonctions d'interpolation restent linéaires sur les côtés de l'élément mais deviennent quadratiques à l'intérieur.



Pour un élément quadrilatère dont les quatre coins et les milieux des quatre côtés sont les huit noeuds, les relations (II.12) à (II.15) restent valables, à condition de faire varier  $i$  et  $j$  de 1 à 8. Les fonctions d'interpolation deviennent cette fois quadratiques sur les côtés.



Cette procédure de construction est évidemment généralisable à des interpolations d'ordres plus élevés ou à des éléments tridimensionnels. Notant  $p$  le nombre de noeuds d'un élément  $e$  on a

alors :

$$\phi = [N_{\phi}^e] \phi^e \quad (\text{II.16})$$

où  $\phi^e$  est le vecteur des p valeurs nodales de  $\phi$  et :

$$[N_{\phi}^e] = [N_1^e, N_2^e \dots \dots N_p^e] \quad (\text{II.17})$$

De même :

$$u = [N^e] u^e \quad (\text{II.18})$$

où :

$$u^e = \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_p^e \end{bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

et :

$$[N^e] = [ [N_1^e], [N_2^e] \dots [N_p^e] ] \quad (\text{II.20})$$

Les p x p coefficients des polynômes d'interpolation sont définis par :

$$N_i^e(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

avec  $i = 1, p$  et  $j = 1, p$ .

Il est intéressant de noter ici qu'à chaque interface entre deux éléments les relations (II.16) et (II.18) impliquent la continuité du potentiel et des composantes du champ de déplacement mais pas la continuité de leurs dérivées spatiales. Il faut aussi remarquer que :

$$\sum_{i=1}^p N_i^e(x, y) = 1 \quad \forall x, y \text{ élément} \quad (\text{II.22})$$

On trouvera dans le livre de O.C. ZIENKIEWICZ [21] d'autres propriétés que les fonctions d'interpolation doivent posséder pour assurer la convergence de la méthode.

### II.3.3 La formulation des différents tenseurs

Dans ce paragraphe, on va dériver de (II.16) et (II.18) les expressions du vecteur champ électrique  $\vec{E}$  et du tenseur des déformations [S] dont on pourra déduire le vecteur excitation du champ électrique  $\vec{D}$  et le tenseur des contraintes [T]. Cette dérivation est faite dans le cas d'un problème 3D mais est évidemment réductible à des dimensions inférieures (2D, symétrie axiale). Pour le champ électrique :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= - \text{grad } \phi \\ &= - [\text{grad } N_1^e, \dots, \text{grad } N_p^e] \phi \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

soit encore :

$$\vec{E} = - [B_\phi^e] \phi \quad (\text{II.24})$$

avec :

$$[B_\phi^e] = [B_{\phi 1}^e, B_{\phi 2}^e, \dots, B_{\phi p}^e] \quad (\text{II.25})$$

et :

$$B_{\phi i}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{II.26})$$

Pour les déformations, utilisant la notation condensée à six composantes [83], on obtient :

$$\vec{\xi} = [B^e] \vec{u} \quad (\text{II.27})$$

avec :

$$[B^e] = [ [B_1^e], [B_2^e] \dots [B_p^e] ] \quad (II.28)$$

et :

$$[B_1^e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1^e}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial N_1^e}{\partial z} & \frac{\partial N_1^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (II.29)$$

Dès lors :

$$\mathcal{U} = [c^E] [B^e] \mathcal{U} + [e]^T [B_\phi^e] \phi \quad (II.30)$$

$$\mathcal{U} = [e] [B^e] \mathcal{U} - [\epsilon^S] [B_\phi^e] \phi \quad (II.31)$$

où  $[c^E]$  est la matrice 6x6 obtenue par condensation du tenseur  $c_{ijkl}^E$  et  $[e]$  est la matrice 3x6 obtenue par condensation du tenseur  $e_{ikl}$  [83].

#### II.3.4 Application du principe variationnel [82]

Pour introduire dans la fonctionnelle de la relation (II.11) les expressions développées en (II.3.2) et (II.3.3) des grandeurs mécaniques ou électriques, il faut décomposer  $L$  en une somme d'intégrales sur tous les éléments  $e$  du maillage. Notant  $\Omega_e$  le volume

de l'élément e,  $S_{ue}$ ,  $S_{Te}$ ,  $S_{pe}$  les parties des surfaces  $S_u$ ,  $S_T$  et  $S_p$  appartenant à e, si elles existent, (II.11) devient :

$$\begin{aligned}
 L = & \sum_e \left[ \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_e} \mu^{eT} [B^e]^T [c^E] [B^e] \mu^e d\Omega_e \right. \\
 & - \frac{1}{2} \omega^2 \iiint_{\Omega_e} \rho \mu^{eT} [N^e]^T [N^e] \mu^e d\Omega_e \\
 & + \iiint_{\Omega_e} \mu^{eT} [B^e]^T [e] [B_\phi^e] \phi^e d\Omega_e \\
 & - \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_e} \phi^{eT} [B_\phi^e]^T [\epsilon^S] [B_\phi^e] \phi^e d\Omega_e \\
 & \left. - \iint_{S_{Te}} \mu^{eT} [N^e]^T f dS_{Te} \right] \\
 & + \sum_{p=0}^M \phi_p \cdot Q_p
 \end{aligned}
 \tag{II.32}$$

où  $\mu^e$  et  $\phi^e$  sont les vecteurs des valeurs nodales de  $\mu$  et  $\phi$  dans l'élément e,  $[B^e]$ ,  $[B_\phi^e]$ ,  $[N^e]$  sont les matrices d'interpolation caractéristiques de l'élément e et l'exposant T indique une transposition. De cette expression, les intégrales étendues aux surfaces  $S_u$  et  $S_p$  ont disparu ce qui nécessite une explication complémentaire. De fait, considérant l'intégrale sur  $S_{ue}$  :

$$\iint_{S_{ue}} (u_i - u'_i) n_j (c_{ijkl}^E s_{kl} - e_{kij} E_k) dS_{ue}
 \tag{II.33}$$

il est évident qu'elle ne dépendra que des valeurs prises par  $\mu$  et  $\phi$  sur les noeuds de  $S_{ue}$ , à l'exclusion de tous les autres noeuds de  $\Omega_e$ , puisque, comme le montre le paragraphe (II.3.2), seules les fonctions de pondération des noeuds d'une face d'un élément ne sont pas identiquement nulles en tous points de cette face. En conséquence, si,

dans l'équation (II.32), on impose aux déplacements des noeuds de  $S_u$  les valeurs fixées par les conditions aux limites prescrites, toutes les intégrales (II.33) deviennent identiquement nulles et ces conditions aux limites sont bien prises en compte dans la formulation variationnelle par l'expression (II.32) de  $L$ . La même approche s'applique, évidemment, à l'intégrale étendue à la surface  $S_{pe}$ .

Dans l'expression de  $L$ , les vecteurs  $\mu^e$  et  $\phi^e$  ne dépendent pas des variables d'intégration.  $L$  peut donc se réécrire :

$$\begin{aligned}
 L = \sum_e & \left[ \frac{1}{2} \mu^{eT} [K_{uu}^e] \mu^e - \frac{1}{2} \omega^2 \mu^{eT} [M^e] \mu^e \right. \\
 & + \mu^{eT} [K_{u\phi}^e] \phi^e + \frac{1}{2} \phi^{eT} [K_{\phi\phi}^e] \phi^e \\
 & \left. - \mu^{eT} \cdot \mathcal{F}^e \right] + \sum_{p=0}^M \phi_p Q_p
 \end{aligned}
 \tag{II.34}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 [K_{uu}^e] &= \iiint_{\Omega_e} [B^e]^T [c^E] [B^e] d\Omega_e \\
 [M^e] &= \iiint_{\Omega_e} \rho [N^e]^T [N^e] d\Omega_e \\
 [K_{u\phi}^e] &= \iiint_{\Omega_e} [B^e]^T [e] [B_\phi^e] d\Omega_e \\
 [K_{\phi\phi}^e] &= -\iiint_{\Omega_e} [B_\phi^e]^T [\epsilon^S] [B_\phi^e] d\Omega_e \\
 \mathcal{F}^e &= \iint_{S_{Te}} [N^e]^T \mathcal{f} dS_{Te}
 \end{aligned}
 \tag{II.35}$$

Les matrices  $[K_{uu}^e]$ ,  $[K_{u\phi}^e]$  et  $[K_{\phi\phi}^e]$  sont les matrices élémentaires de rigidité, respectivement mécanique, piézoélectrique et diélectrique. La matrice  $[M^e]$  est la matrice élémentaire de masse cohérente [21]. Définissant alors  $\mu$  et  $\phi$ , les vecteurs des valeurs nodales de  $\mu$  et  $\phi$

sur tout le domaine  $\Omega$ , l'expression (II.34) peut être réarrangée sous la forme :

$$\begin{aligned}
 L = & \sum_{i\alpha, j\beta} \frac{1}{2} U_{i\alpha} ( [K_{uu}]_{i\alpha, j\beta} - \omega^2 [M]_{i\alpha, j\beta} ) U_{j\beta} \\
 & + \sum_{i\alpha, j} U_{i\alpha} ( [K_{u\phi}]_{i\alpha, j} ) \phi_j \\
 & + \sum_{i, j} \frac{1}{2} \phi_i ( [K_{\phi\phi}]_{ij} ) \phi_j \\
 & - \sum_{i\alpha} U_{i\alpha} F_{i\alpha} + \sum_j \phi_j Q_j
 \end{aligned}
 \tag{II.36}$$

où  $i$  et  $j$  décrivent tous les noeuds du domaine,  $\alpha$  et  $\beta$  les trois coordonnées  $x, y, z$  et  $Q$  est le vecteur des valeurs nodales  $Q_j$ , tel que si les noeuds  $j'$  sont les noeuds de l'une des électrodes  $p$  dont le potentiel est égal à  $\phi_p$ , alors la somme des charges  $Q_j$ , est égale à  $Q_p$ , sinon  $Q_j$  est nulle. Dans cette relation :

$$[K_{uu}]_{i\alpha, j\beta} = \sum_{e(i, j)} [K_{uu}^e]_{i\alpha, j\beta}$$

$$[M]_{i\alpha, j\beta} = \sum_{e(i, j)} [M^e]_{i\alpha, j\beta}$$

$$[K_{u\phi}]_{i\alpha, j} = \sum_{e(i, j)} [K_{u\phi}^e]_{i\alpha, j}$$

$$[K_{\phi\phi}]_{i, j} = \sum_{e(i, j)} [K_{\phi\phi}^e]_{i, j}$$

$$F_{i\alpha} = \sum_{e(i)} F_{i\alpha}^e$$

(II.37)

$e(i,j)$  représentant un élément  $e$  qui contient les noeuds  $i$  et  $j$ ,  $e(i)$  un élément qui contient le noeud  $i$ . L'opération de réarrangement et addition représentée par les équations (II.37) est une phase essentielle d'une analyse par éléments finis appelée *assemblage*.

Dès lors, l'application du principe variationnel conduit à minimiser  $L$  par rapport aux valeurs nodales de  $u$  et  $\phi$ , i.e à écrire :

$$\frac{\partial L}{\partial U_{i\alpha}} = 0 \quad \forall i\alpha \quad (II.38)$$

et :

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_j} = 0 \quad \forall j \quad (II.39)$$

On obtient :

$$\sum_{j\beta} ([K_{uu}]_{i\alpha,j\beta} - \omega^2 [M]_{i\alpha,j\beta}) U_{j\beta} + \sum_j ([K_{u\phi}]_{i\alpha,j}) \phi_j = F_{i\alpha} \quad \forall i\alpha \quad (II.40)$$

et :

$$\sum_{i\alpha} ([K_{u\phi}]_{i\alpha,j}) U_{i\alpha} + \sum_i ([K_{\phi\phi}]_{i,j}) \phi_i = -Q_j \quad \forall j \quad (II.41)$$

Ces deux équations peuvent se regrouper sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}] - \omega^2 [M] & [K_{u\phi}] \\ [K_{u\phi}]^T & [K_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ -Q \end{bmatrix} \quad (II.42)$$

la matrice du premier membre étant réelle et symétrique.

### II.3.5 Equations à résoudre et algorithmes

La résolution de (II.42) peut d'abord être conduite dans plusieurs cas correspondants à des structures purement élastiques :

#### (a) l'analyse statique

Une structure purement élastique est soumise à une force statique  $\bar{F}$  sur sa frontière. Le déplacement à tous les noeuds est obtenu en résolvant :

$$[K_{uu}] U = \bar{F} \quad (\text{II.43})$$

La connaissance de  $U$  permet de déterminer, à l'aide des matrices d'interpolation  $[N]$  et  $[B]$ , le déplacement, les déformations et les contraintes en tous points.

#### (b) l'analyse modale

Les modes propres d'une structure purement élastique sont fournis par :

$$([K_{uu}] - \omega^2 [M]) U = 0 \quad (\text{II.44})$$

les pulsations propres étant les racines de :

$$\left| [K_{uu}] - \omega^2 [M] \right| = 0 \quad (\text{II.45})$$

#### (c) l'analyse harmonique

Une structure purement élastique est soumise sur sa frontière à une force dépendant sinusoïdalement du temps, à la pulsation  $\omega$ . L'amplitude du déplacement à tous les noeuds est obtenue en résolvant :

$$([K_{uu}] - \omega^2 [M]) U = \bar{F} \quad (\text{II.46})$$

Le système d'équations (II.46) est singulier pour les fréquences propres de la structure, la modélisation ne tenant compte d'aucun effet d'amortissement.

La résolution peut ensuite être conduite dans plusieurs cas correspondants à des structures électromécaniques purement piézoélectriques ou mixtes. Dans ces différents cas, la relation (II.42) peut être avantageusement réordonnée en classant les degrés de liberté du potentiel en trois catégories :

- les degrés de liberté des électrodes, notés  $\phi_p$  ( $p = 1, M$ ), regroupés dans le vecteur  $\Phi_p$ ,
- les degrés de liberté de référence  $\phi_0$  ( $\phi_0 = 0$ ),
- les degrés de liberté internes à la céramique, notés  $\phi_i$ , regroupés dans le vecteur  $\Phi_i$ .

Alors :

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}] - \omega^2 [M] & [K_{u\phi}^i] & [K_{u\phi}^p] & K_{u\phi_0} \\ [K_{u\phi}^i]^T & [K_{\phi\phi}^{ii}] & [K_{\phi\phi}^{ip}] & K_{\phi\phi_0}^i \\ [K_{u\phi}^p]^T & [K_{\phi\phi}^{ip}]^T & [K_{\phi\phi}^{pp}] & K_{\phi\phi_0}^p \\ K_{u\phi_0}^T & K_{\phi\phi_0}^{iT} & K_{\phi\phi_0}^{pT} & K_{\phi_0\phi_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \Phi_i \\ \Phi_p \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ Q \\ -Q_p \\ -Q_0 \end{bmatrix} \quad (II.47)$$

Dans ce système, la dernière équation ne sert qu'au calcul de la charge de l'électrode de référence,  $Q_0$ , et peut être éliminée. D'autre part, le vecteur  $\Phi_i$  peut être remplacé dans la première et la troisième ligne par :

$$\Phi_i = - [K_{\phi\phi}^{ii}]^{-1} ([K_{u\phi}^i]^T U + [K_{\phi\phi}^{ip}] \Phi_p) \quad (II.48)$$

(II.47) devient alors :

$$\begin{bmatrix} [\bar{K}_{uu}] - \omega^2 [M] & [\bar{K}_{u\phi}^p] \\ [\bar{K}_{u\phi}^p]^T & [\bar{K}_{\phi\phi}^{pp}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \Phi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ -Q_p \end{bmatrix} \quad (II.49)$$

où  $[\bar{K}]$  est la matrice  $[K]$  transformée par la substitution (II.48).

Dès lors, on retrouve différentes analyses possibles :

d) *l'analyse statique*

Plusieurs éventualités sont à considérer. Si, par exemple, la structure électromécanique est isolée électriquement ( $Q_p = 0$ ) et soumise à une force statique  $\bar{F}$  sur sa frontière extérieure, alors :

$$([\bar{K}_{uu}] - [\bar{K}_{u\phi}^P] [\bar{K}_{\phi\phi}^{PP}]^{-1} [K_{u\phi}^P]^T) \bar{u} = \bar{F} \quad (II.50)$$

et :

$$\phi_p = - [\bar{K}_{\phi\phi}^{PP}]^{-1} [K_{u\phi}^P]^T \bar{u} \quad (II.51)$$

(II.50) fournit le champ de déplacement en tous points, (II.51) et (II.48) les potentiels induits par effet piézoélectrique direct. Si, au contraire, des tensions excitatrices sont appliquées à une structure mécaniquement libre, le champ de déplacement induit par effet piézoélectrique inverse est :

$$\bar{u} = - [K_{uu}]^{-1} [K_{u\phi}^P] \phi_p \quad (II.52)$$

la relation :

$$Q_p = - [ [\bar{K}_{\phi\phi}^{PP}] - [K_{u\phi}^P]^T [K_{uu}]^{-1} [K_{u\phi}^P] ] \phi_p \quad (II.53)$$

donnant les valeurs des charges. D'autres combinaisons sont évidemment possibles.

e) *l'analyse modale en court-circuit*

Dans ce cas, toutes les électrodes sont au potentiel zéro et :

$$([\bar{K}_{uu}] - \omega^2 [M]) \bar{u} = 0 \quad (II.54)$$

Cette équation est formellement identique à (II.44) les modes propres obtenus sont appelés des *résonances*. La relation :

$$Q_p = - [K_{u\phi}^P]^T \bar{u} \quad (II.55)$$

permet de calculer les charges.

f) l'analyse modale en circuit ouvert

Dans ce cas, il n'y a pas de charge sur les électrodes. La relation (II.51) s'applique et :

$$\left( [\bar{K}_{uu}] - [\bar{K}_{u\phi}^P] [\bar{K}_{\phi\phi}^{PP}]^{-1} [\bar{K}_{u\phi}^P]^T - \omega^2 [M] \right) \bar{u} = 0 \quad (\text{II.56})$$

De nouveau cette équation est formellement identique à (II.44). Les modes propres obtenus sont appelés des *antirésonances*. Plusieurs combinaisons sont possibles, qui correspondent à des modes différents, si des électrodes chaudes sont reliées entr'elles et donc au même potentiel. En particulier, l'antirésonance sera souvent définie comme un mode propre obtenu en circuit ouvert, toutes électrodes chaudes reliées.

g) l'analyse harmonique

Plusieurs éventualités sont à considérer. Si, par exemple, la structure électromécanique est soumise à des excitations sinusoïdales  $\phi_p$ , de pulsation  $\omega$ , et qu'elle est mécaniquement libre :

$$\left( [\bar{K}_{uu}] - \omega^2 [M] \right) \bar{u} = - [\bar{K}_{u\phi}^P] \phi_p \quad (\text{II.57})$$

et :

$$Q_p = - [\bar{K}_{\phi\phi}^{PP}] \phi_p - [\bar{K}_{u\phi}^P]^T \bar{u} \quad (\text{II.58})$$

La relation (II.58) est particulièrement utile puisque, en régime harmonique, l'intensité  $I_p$  du courant qui entre dans l'électrode p est donnée par :

$$I_p = j\omega Q_p \quad (\text{II.59})$$

Si toutes les électrodes chaudes sont reliées entr'elles, au même potentiel  $\phi_s$ , définissant :

$$(\bar{K}_{u\phi}^P)_i = \sum_{j=1}^P ([\bar{K}_{u\phi}^P])_{i,j} \quad (\text{II.60})$$

on a :

$$\left( [\bar{K}_{uu}] - \omega^2 [M] \right) \bar{u} = - \bar{K}_{u\phi}^P \cdot \phi_s \quad (\text{II.61})$$

De même, définissant :

$$\bar{K}_{\phi\phi}^{PP} = \sum_{i,j} ( [\bar{K}_{\phi\phi}^{PP}] )_{i,j} \quad (\text{II.62})$$

on obtient l'admittance de la structure :

$$Y = \frac{1}{Z} = j\omega [ \bar{K}_{u\phi}^{PT} [ [K_{uu}] - \omega^2 [M] ]^{-1} \bar{K}_{u\phi}^P - \bar{K}_{\phi\phi}^{PP} ] \quad (\text{II.63})$$

Les équations (II.57) et (II.61) sont singulières pour les fréquences de résonance de la structure, la modélisation ne tenant compte d'aucun effet d'amortissement. Ici aussi, d'autres combinaisons sont possibles.

Du point de vue algorithmique, l'ensemble de ces sept problèmes conduit essentiellement à trois types d'opérations classiques de l'algèbre linéaire :

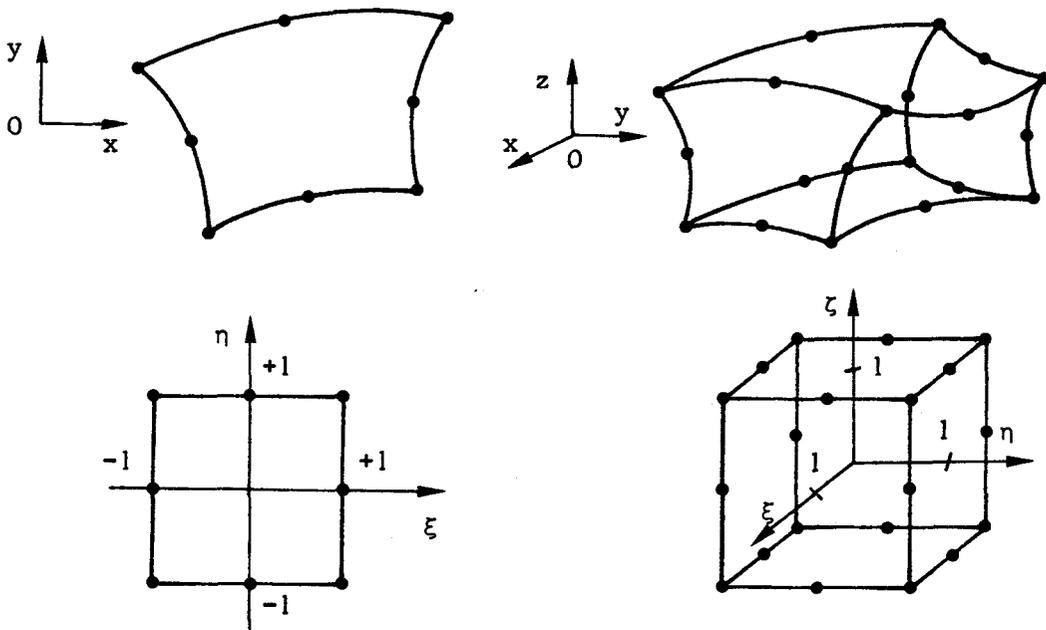
- la résolution d'un système linéaire dont la matrice est réelle et symétrique. C'est le cas de (II.43), (II.46), (II.50), (II.57) et (II.61).
- l'inversion d'une matrice réelle symétrique. C'est le cas de (II.51), (II.52).
- la diagonalisation d'une matrice réelle symétrique. C'est le cas de (II.44), (II.54) et (II.56).

Ces opérations sont abondamment décrites dans la littérature, avec un choix de méthodes important dépendant de la taille du système traité [47,84-86]. Les techniques qui sont retenues dans cette étude sont présentées dans la section (II.3.) relative à l'assemblage et en annexe 4.

### II.3.6 Formulation isoparamétrique et éléments utilisés

Les cinq sections précédentes ont présenté de façon générale l'application de la méthode des éléments finis à l'analyse des structures électromécaniques qui exploitent les effets de la piézoélectricité. Cette section et la suivante vont discuter deux aspects plus techniques, le choix des éléments d'une part, la méthode d'assemblage d'autre part, dont l'importance est néanmoins très grande car ils conditionnent directement la convergence et la qualité des résultats.

Les éléments présentés dans la section (II.3.2) sont des éléments de formes simples (triangles, rectangles) qui ne peuvent modéliser une frontière courbe que par une succession de segments de droite ou de facettes planes. Cette contrainte peut, dans certains cas, imposer un nombre d'éléments prohibitif pour la précision souhaitée du résultat. La technique des éléments isoparamétriques [21] permet d'obtenir des éléments aux contours plus arbitraires à l'aide d'une correspondance point par point entre un élément simple et un élément curviligne. Les figures ci-dessous schématisent ce type de correspondance pour deux cas, respectivement 2D et 3D. La relation entre les coordonnées



réelles  $(x, y)$  ou  $(x, y, z)$  d'un point de l'élément et les coordonnées réduites  $(\xi, \eta)$  ou  $(\xi, \eta, \zeta)$  du même point dans l'élément simple est assurée à l'aide des fonctions de pondération. Ainsi pour un élément à  $p$  noeuds :

$$(x, y, z) = [N_1(\xi, \eta, \zeta), N_2(\xi, \eta, \zeta) \dots N_p(\xi, \eta, \zeta)] \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_p & y_p & z_p \end{bmatrix} \quad (\text{II.65})$$

De ce fait, à titre d'exemple, des éléments à interpolation

quadratique ont, dans l'espace réel, des côtés rectilignes ou paraboliques, permettant d'approcher des frontières beaucoup plus complexes, comme le montrent les nombreuses applications. Bien entendu, ce changement de variable modifie le calcul des intégrales (II.35). Ainsi, en 3D, toute intégrale du type :

$$\iiint_{\Omega_e} [G] d\Omega_e \quad (\text{II.66})$$

devient :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [G(\xi, \eta, \zeta)] \det [J] d\xi d\eta d\zeta \quad (\text{II.67})$$

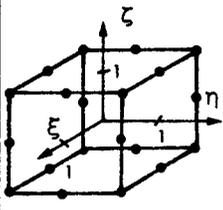
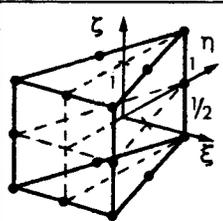
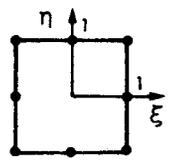
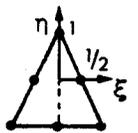
Det[J] représente le jacobien du changement de coordonnées. Cette intégration est alors généralement menée par méthode numérique (méthode de Gauss).

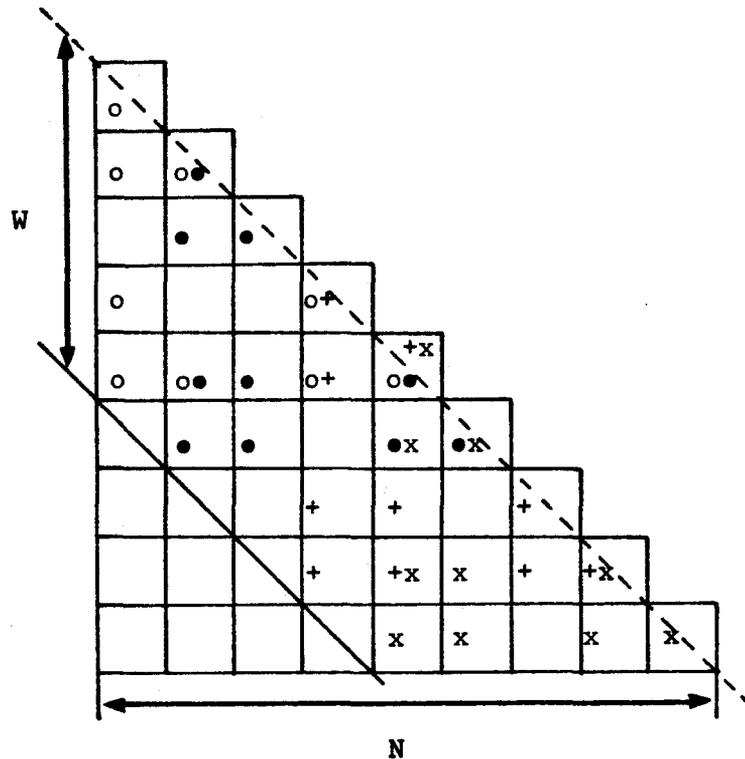
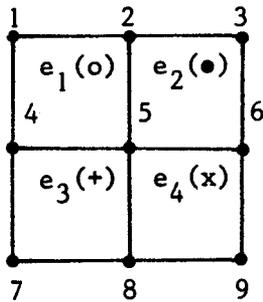
Le tableau de la page suivante présente les divers éléments qui ont été employés. Pour chaque élément sont donnés un schéma, le nombre de noeuds, le nombre de degrés de liberté par noeud, la liste des monômes en  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  à partir desquels les fonctions d'interpolation polynômiales sont construites. Ce tableau est loin d'être exhaustif, certaines applications mécaniques nécessitant des éléments de plaques, de coques, de coques épaisses [21]... L'annexe 5 présente en détail l'organigramme de deux éléments utilisés.

### II.3.7 L'assemblage et la méthode de réduction de Guyan

L'assemblage est l'ensemble des opérations représenté par les équations (II.37). Il se déroule parallèlement au calcul des matrices représentatives des éléments, les coefficients d'une matrice  $[A^e]$  d'un élément  $e$  particulier étant, dès le calcul de  $[A^e]$  achevé, aussitôt rangés et cumulés dans la matrice  $[A]$  globale de la structure entière. Cet assemblage est schématisé ci-après, les coefficients d'une même matrice élémentaire étant symbolisés par un motif type (o,o,+,x) que l'on retrouve dans les positions appropriées de la matrice globale, la présence de plusieurs symboles à la même position impliquant un cumul. Dans ce schéma, seule la moitié inférieure de la matrice globale est représentée compte tenu des propriétés de symétrie déjà évoquées. Si la numération des degrés de liberté (ou des noeuds) et l'ordre d'assemblage sont bien conçus, la matrice globale possède deux

TABLEAU RECAPITULATIF DES ELEMENTS UTILISES

Nature de l'élément	Schéma réduit	Nbre de noeuds	Degrès de liberté	Monômes
Hexaèdre isop.		20	$u_x, u_y, u_z$ $3 \times 20 = 60$	$1, \xi, \eta, \zeta, \xi\eta, \xi\zeta, \eta\zeta, \xi\eta\zeta$ $\xi^2, \eta^2, \zeta^2, \xi^2\eta, \xi^2\zeta, \eta^2\xi$ $\eta^2\zeta, \zeta^2\xi, \zeta^2\eta, \xi^2\eta\zeta$ $\eta^2\xi\zeta, \zeta^2\xi\eta$
Idem piézo.	"	"	$u_x, u_y, u_z, \phi$ $4 \times 20 = 80$	" "
Prisme triangulaire isop.		15	$u_x, u_y, u_z$ $3 \times 15 = 45$	$1, \xi, \eta, \zeta, \xi\eta, \xi\zeta, \eta\zeta, \xi\eta\zeta$ $\xi^2, \eta^2, \zeta^2, \xi^2\zeta, \eta^2\zeta, \zeta^2\xi$ $\zeta^2\eta$
Idem piézo.	"	"	$u_x, u_y, u_z, \phi$ $4 \times 15 = 60$	" "
Quadrilatère isop. sym. axiale		8	$u_x, u_y$ $2 \times 8 = 16$	$1, \xi, \eta, \xi\eta, \xi^2, \eta^2, \xi^2\eta$ $\eta^2\xi$
Idem piézo.	"	"	$u_x, u_y, \phi$ $3 \times 8 = 24$	" "
Triangle isop. sym. axiale		6	$u_x, u_y$ $2 \times 6 = 12$	$1, \xi, \eta, \xi\eta, \xi^2, \eta^2$
Idem piézo.	"	"	$u_x, u_y, \phi$ $3 \times 6 = 18$	" "
Ressort		2	$u_x, u_y, u_z$ $3 \times 2 = 6$	$1, \xi$



caractéristiques équivalentes, très intéressantes sur le plan numérique :

- la largeur de bande  $W$  peut être notablement inférieure à l'ordre  $N$  de la matrice, surtout pour certaines géométries dont une dimension est très supérieure aux deux autres,
- les termes concernant un degré de liberté donné peuvent être tous assemblés bien avant la fin de l'assemblage global. Ainsi, par exemple, si les éléments sont assemblés dans l'ordre  $e_1, e_2, e_3, e_4$ , tous les termes concernant le noeud 1 sont définitivement implantés à la fin de l'assemblage de  $e_1$ , tous les termes concernant les noeuds 2 et 3 sont définitivement implantés à la fin de l'assemblage de  $e_2$ ...

La première de ces remarques a conduit au développement de méthodes de stockage des matrices permettant des économies de mémoire très significatives [47]. La seconde est à l'origine de la méthode dite *d'assemblage frontal*, couplée soit à une *élimination par substitution*, soit à une *réduction de Guyan*, suivant que le problème est statique ou dynamique. De fait, si on considère le problème statique de l'équation (II.43) et si  $l$  est un degré de liberté dont tous les termes qui le concernent sont assemblés, on a :

$$K_{11} U_1 + \sum_{j \neq 1} K_{1j} U_j = F_1$$

$$\sum_j K_{ij} U_j = F_i \quad \forall i \neq 1$$

(II.68)

calculant  $U_1$  dans la première relation et reportant dans la seconde :

$$\sum_{j \neq 1} \left( K_{ij} - \frac{K_{i1}K_{1j}}{K_{11}} \right) U_j = F_i - \frac{K_{i1}F_1}{K_{11}} \quad \forall i \neq 1$$

(II.69)

Ainsi, la modification des lignes et colonnes autres que la ligne et la colonne 1 dans la partie déjà assemblée du système permet de réduire d'une unité l'ordre de celui-ci et, par l'abandon des positions réservées aux termes de la ligne et de la colonne 1, de réaliser une économie de mémoire. Si cette procédure est exploitée chaque fois qu'un degré de liberté est définitivement assemblé, le système (II.43) est résolu de fait en même temps que l'assemblage se termine. Il suffit alors d'appliquer dans l'ordre inverse de l'assemblage les équations de substitution pour trouver les composantes de  $\underline{U}$  à tous les noeuds du maillage. Cette dernière phase porte le nom de *substitution arrière*. Comme elle se situe après la phase d'assemblage, les termes de la substitution dont elle a besoin ( $K_{1j}/K_{11}$  et  $F_1/K_{11} \forall j \neq 1$ , pour chaque 1) n'ont pas à être stockés en mémoire centrale simultanément à la matrice globale et ne relèvent que d'une mémoire de masse (fichier sur disque). C'est la progression caractéristique d'une ligne ou d'une surface en deçà de laquelle toutes les substitutions sont achevées à travers le maillage qui vaut à la méthode la dénomination de méthode frontale. En dehors de l'équation (II.48), ces substitutions s'appliquent à l'équation (II.42) qui permet de condenser (II.47) en (II.49) ainsi qu'à l'analyse statique des problèmes piézoélectriques. Dans le cas d'un problème dynamique, la technique n'est plus applicable directement à cause de la matrice de masse. En effet, pour l'équation (II.44) par exemple,  $\omega$  n'est connue qu'après la diagonalisation du système. Pour l'équation (II.46), par contre,  $\omega$  est connue au moment de l'assemblage mais la nécessité de faire un balayage en fréquence avec de nombreux points exclut l'hypothèse de réaliser un assemblage spécifique à chaque fréquence. Dans ce cas, la technique utilisée, appelée condensation de Guyan [87,88], revient à négliger l'inertie associée à certains degrés de liberté, les *degrés de liberté esclaves*, mais à

traiter toujours exactement l'aspect élastique. Cette procédure, si la sélection des esclaves est réalisée judicieusement, ne perturbe pas la partie basse fréquence du spectre de vibration de la structure analysée. Par contre, elle peut entraîner la disparition de modes de fréquences élevées et altérer la partie haute fréquence du spectre. Pour l'introduire explicitement, on considère le système d'équations (II.44) :

$$([K] - \omega^2 [M]) \bar{U} = Q$$

dans l'écriture duquel  $[K_{uu}]$  a été remplacé par  $[K]$  pour des raisons de simplicité. Si  $s$  est le numéro du degré de liberté esclave,  $m$  (ou  $n$ ) symbolisant tous les autres degrés de liberté, on a :

$$U_s = - \sum_m \frac{K_{sm} - \omega^2 M_{sm}}{K_{ss} - \omega^2 M_{ss}} U_m \quad (II.70)$$

Si alors :

$$\omega^2 \ll \frac{K_{ss}}{M_{ss}} \quad (II.71)$$

la relation (II.70) devient, en développant au premier ordre [89] :

$$U_s = - \frac{1}{K_{ss}} \sum_m \left( K_{sm} - \omega^2 M_{sm} + \omega^2 \frac{K_{sm} M_{ss}}{K_{ss}} \right) U_m \quad (II.72)$$

En reportant dans (II.44) :

$$\sum_m \left( \left( K_{nm} - \frac{K_{ns} \cdot K_{sm}}{K_{ss}} \right) - \omega^2 \left( M_{nm} - \frac{K_{ns} M_{sm}}{K_{ss}} \right) - \frac{M_{ns} K_{sm}}{K_{ss}} + \frac{K_{ns} M_{ss} K_{sm}}{K_{ss}^2} \right) U_m = 0 \quad \forall n \quad (II.73)$$

le nouveau système obtenu étant équivalent à (II.44) mais avec un ordre diminué de une unité. L'avantage de cette procédure est que la

relation (II.73) joue, pour un problème dynamique, le même rôle que (II.69) et relève donc également de la méthode d'assemblage frontal, avec les mêmes économies de stockage. La principale différence est que la relation (II.71) doit être vérifiée pour toutes les pulsations  $\omega$  utiles et tous les degrés esclaves, obligeant à conserver un nombre minimal de degrés appelés *degrés maîtres*. La sélection automatique des degrés maîtres peut s'effectuer en définissant une pulsation maximum  $\omega_{\max}$  telle que si :

$$\omega_{\max}^2 < \frac{K_{ii}}{M_{ii}} \quad (\text{II.74})$$

le degré  $i$  est automatiquement un esclave ou en fixant à priori le nombre de maîtres  $N_m$  et en éliminant les degrés de liberté dans l'ordre des rapports  $K_{ii}/M_{ii}$  décroissants. Dans ce second cas, le spectre de vibration sera fortement perturbé si la pulsation  $\omega$  devient comparable au plus petit des rapports  $(K_{ii}/M_{ii})^{1/2}$  correspondant à un degré  $i$  esclave. Ces deux approches, décrites primitivement par HENSHELL et ONG [90] et reprises récemment par SHAH et RAYMUND [91], sont compatibles avec un assemblage frontal, la seconde ayant été retenue pour toutes les applications présentées dans les sections suivantes.

La méthode d'assemblage frontal, couplée à la condensation de Guyan, a l'avantage de réduire notablement la taille des tableaux à traiter et de ramener les problèmes de diagonalisation à des ordres compris entre 100 et 200 pour les transducteurs qui ont été modélisés, autorisant ainsi le recours à la méthode de Householder [85]. Par ailleurs le même sous-programme qui calcule les coefficients de (II.73) réalise exactement la condensation statique des degrés piézoélectriques de l'équation (II.48). Enfin, le chapitre IV montre que la condensation de Guyan est généralisable au cas des fluides, à condition de remplacer l'approximation sur les inerties par une approximation formellement identique sur les compressibilités. Toutefois, comme on le verra également, cette méthode pour devenir trop grossière dans le cas de maillages de densité uniforme et isotrope, nécessitant alors le recours à des algorithmes plus performants [47].

### II.3.8 Les autres approches

Plusieurs auteurs ont analysé par éléments finis des structures électromécaniques mues par effet piézoélectrique. Sans être

exhaustive, cette section présente quelques contributions significatives. Pour des structures à symétrie axiale, Y. KAGAWA et T. YAMABUCHI [35] ont développé un code utilisant des éléments triangulaires avec interpolation linéaire et supposant un champ électrique uniforme, ce qui réduit les paramètres électriques aux seules différences de potentiel entre les électrodes. Ils ont, en particulier, analysé un transducteur sandwich de type Langevin et obtenu dans ce cas un bon recoupement avec l'expérience. J.T. HUNT, R.R. SMITH, D. BARACH, H. ALLIK et K.M. WEBMAN [22,23,24] ont développé un code, nommé MARTSAM, très proche de celui que nous avons mis au point, avec lequel ils ont analysé les vibrations dans l'air de Tonpilz à symétrie axiale [22] ou non [23] et d'anneaux à immersion libre [25,26,29]. Comme dans notre cas, le recours à des éléments de formes diverses (hexaèdres, prismes à base triangulaire) et surtout à la formulation isoparamétrique les a autorisés à traiter des structures complexes. Plus récemment, le même code a permis à E.F. RYNNE [32] et G.W. MAC MAHON et al [30,31] d'étudier le comportement de projecteurs utilisant des vibrations de coques minces. Tous ces exemples ont donné lieu à des recoupements nombreux et satisfaisants avec les mesures. Enfin, il faut signaler une approche intéressante et économique de la détermination des fréquences de résonance et antirésonance de structures piézoélectriques due à D. BOUCHER et al [36,37]. Cette approche revient à calculer, à l'aide d'une analyse classique par éléments finis, les modes de résonance d'une structure purement mécanique obtenue en annulant les constantes piézoélectriques et diélectriques de la structure réelle étudiée, puis à traiter l'effet piézoélectrique à l'aide d'un développement en perturbation au premier et au second ordre. Les confrontations réalisées avec les mesures montrent que les résultats obtenus ont une bonne précision. La méthode a l'avantage de ne demander qu'un seul assemblage pour étudier, avec une même structure, diverses excitations électriques (résonance, antirésonance avec un ou plusieurs potentiels libres) et même diverses configurations d'électrodes. La méthode n'a pas été étendue à l'analyse harmonique.

#### II.4 L'ETUDE DE QUELQUES STRUCTURES TESTS

Afin de juger les performances du code de calcul que nous avons développé suivant les principes et techniques décrits dans la section (II.3), une vingtaine de structures tests ont été modélisées, en général avec plusieurs maillages différents, et les résultats obtenus ont été comparés soit à des résultats déjà publiés soit à des résultats de mesures réalisées au laboratoire [92,93]. Ces tests ont permis de préciser des critères de définition des maillages ainsi que

des critères de réduction (au sens de la condensation de Guyan). Les trois sections suivantes présentent trois applications retenues parce qu'elles concernent des éléments constitutifs de structures Tonpilz et fournissent donc, outre le test, des informations physiques intéressantes.

#### II.4.1 Analyse du pavillon du Tonpilz T1

Le pavillon, visible sur la figure I.2, est représenté par un schéma simplifié figure II.1. Les simplifications portent essentiellement sur la couronne arrière dont les gorges ont été supprimées pour obtenir un cylindre creux d'épaisseur constante, l'épaisseur étant calculée pour conserver la masse totale. Le matériau constituant le pavillon est du GA3Z1, de masse volumique 1800 kg/m<sup>3</sup>, de module d'Young  $.420 \cdot 10^{11}$  Pa et de coefficient de Poisson .335. Du point de vue du test, ce pavillon est intéressant car il a une géométrie complètement tridimensionnelle, la légère différence entre les deux côtés de sa face parlante impliquant la non dégénérescence de tous ses modes. Pour cette structure, libre, l'analyse décrite ci-après est une analyse modale, du type indiqué en (II.3.5.b). Cette section présente l'étude des symétries, les deux maillages ayant fait l'objet d'une modélisation, la technique expérimentale d'étude puis les résultats et leur interprétation.

##### a) effet des symétries

Si une structure admet un plan de symétrie P, ses modes de vibration doivent vérifier une condition de symétrie ou d'antisymétrie par rapport à P. Si, par exemple, P est le plan  $x = 0$ , et  $u$  le vecteur déplacement, de composantes  $u_x$ ,  $u_y$  et  $u_z$ , on doit avoir :

$$\begin{aligned} u_x(x,y,z) &= -\delta \cdot u_x(-x,y,z) \\ u_y(x,y,z) &= \delta \cdot u_y(-x,y,z) \\ u_z(x,y,z) &= \delta \cdot u_z(-x,y,z) \end{aligned} \tag{II.75}$$

où  $\delta = +1$  pour un mode symétrique et  $-1$  pour un mode antisymétrique. Ainsi, la condition de symétrie d'un mode par rapport à P doit s'écrire :

$$u_x(0,y,z) = 0 \quad \forall y,z \tag{II.76}$$

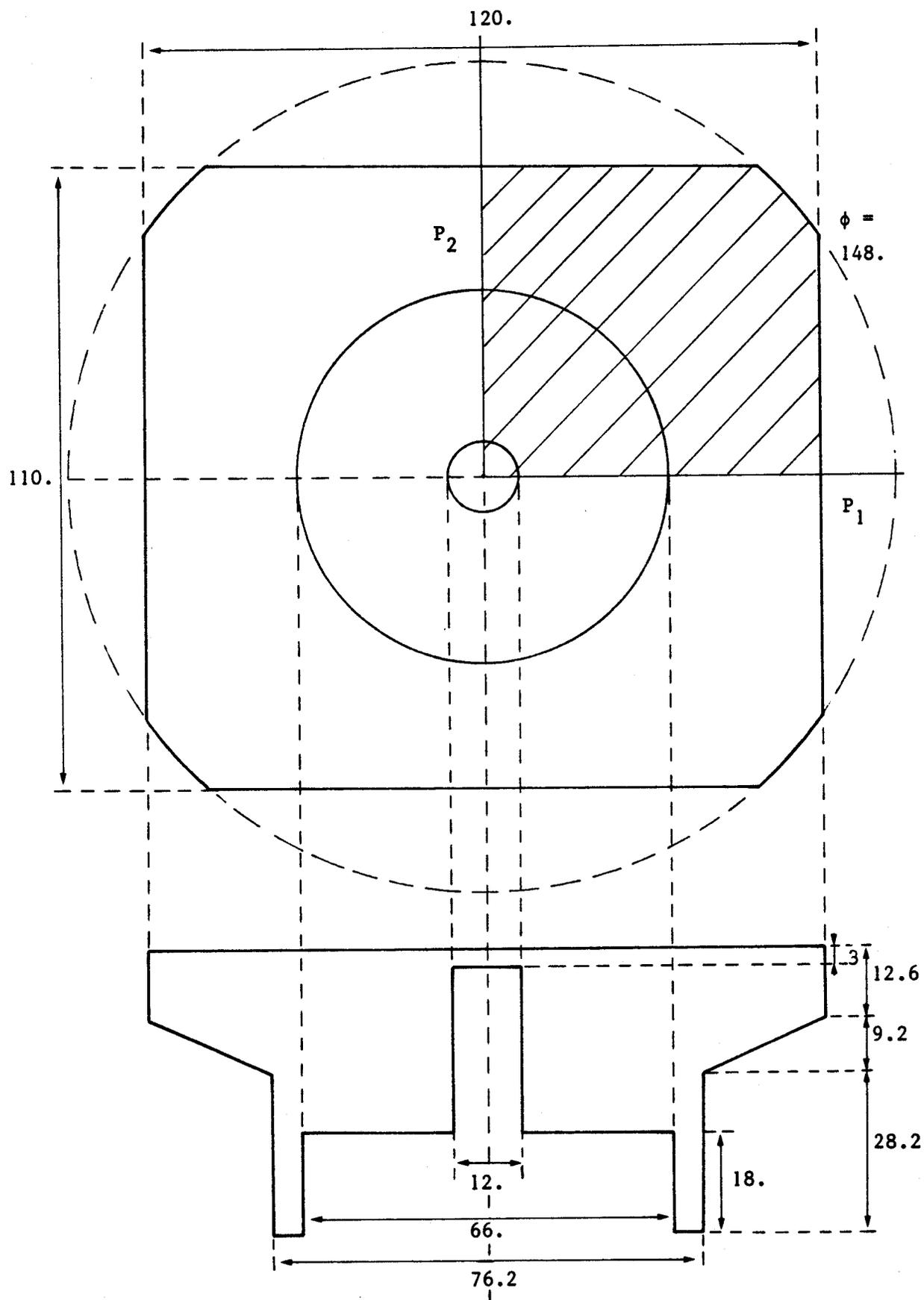


Figure II.1 . Schéma simplifié du pavillon du tonpiliz T1 ( côtes en mm ).

et la condition d'antisymétrie :

$$u_y(0, y, z) = 0$$

$$u_z(0, y, z) = 0 \quad \forall y, z \quad (\text{II.77})$$

Dans le cas de ce pavillon existent deux plans de symétrie, notés P1 et P2 sur la figure (II.1). Si on ne modélise par éléments finis que le quart de la structure (zone hachurée) les différents modes s'obtiennent en quatre calculs, avec des combinaisons de conditions aux limites regroupées dans le tableau ci-dessous.

Symétrie du mode par rapport à P1	Symétrie du mode par rapport à P2	Conditions sur le déplacement $u$	Notations
Symétrique	Symétrique	$u \in P1 \text{ et } P2$	S S
Symétrique	Antisymétrique	$u \in P1 \text{ et } \perp P2$	S A
Antisymétrique	Symétrique	$u \perp P1 \text{ et } \in P2$	A S
Antisymétrique	Antisymétrique	$u \perp P1 \text{ et } P2$	A A

#### b) maillages

Le premier maillage réalisé est un maillage fin, représenté figure (II.2), qui correspond exactement au schéma de la figure (II.1). Il ne s'écarte de la structure réelle que par la description de la couronne arrière. Ses caractéristiques sont :

- nombre d'éléments : 30
- nombre de noeuds : 239
- nombre de degrés de liberté : cas SS : 629  
cas SA : 588  
cas AS : 588  
cas AA : 544

Pour des raisons liées au temps de calcul, seuls les cas SS et SA ont été effectivement étudiés, avec, dans les deux cas, 120 degrés maîtres en phase finale de diagonalisation.

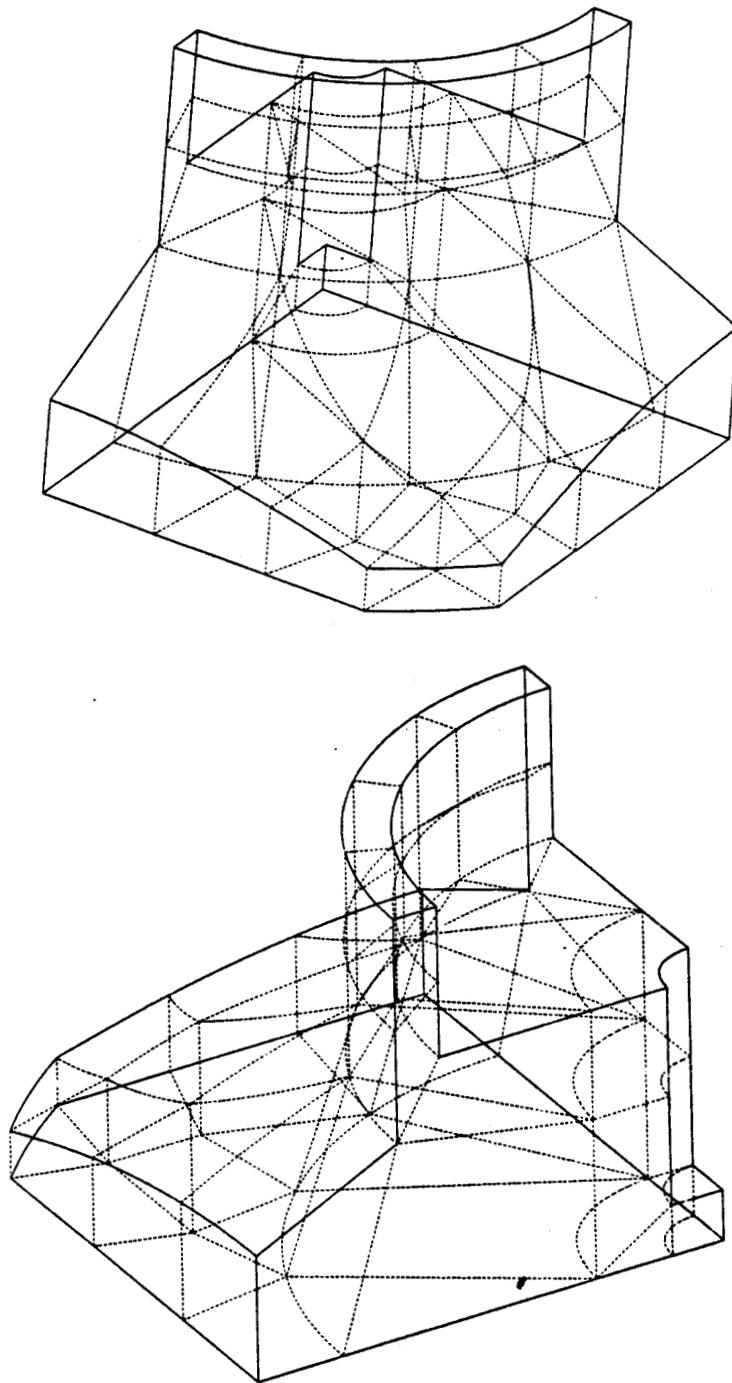


Figure II.2 . Maillage fin du pavillon du Tonpilz T1 .

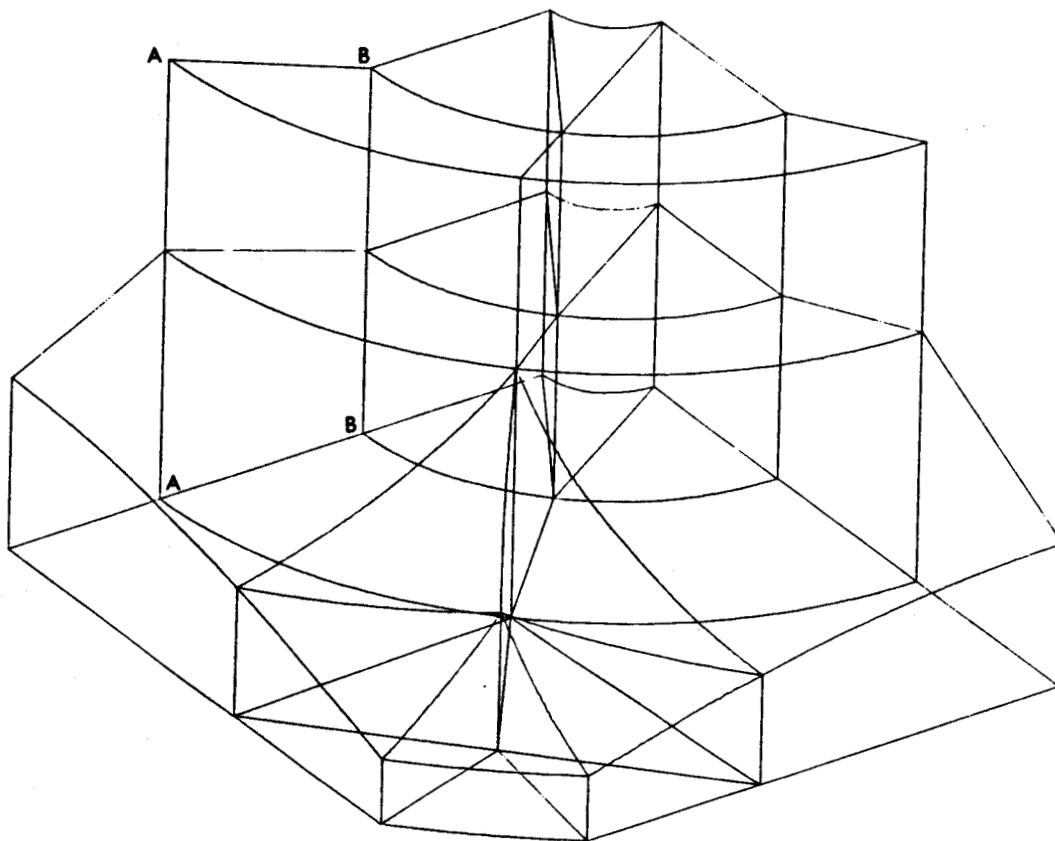


Figure II.3 . Maillage grossier du pavillon du Tonpiliz T1 . On notera la surépaisseur ( $AA > BB$ ) qui équivaut, en masse et en moment d'inertie par rapport à l'axe, à la couronne de la figure (II.2), ainsi que le trou de la tige de pré-contrainte qui est prolongé jusqu'à la face parlante .

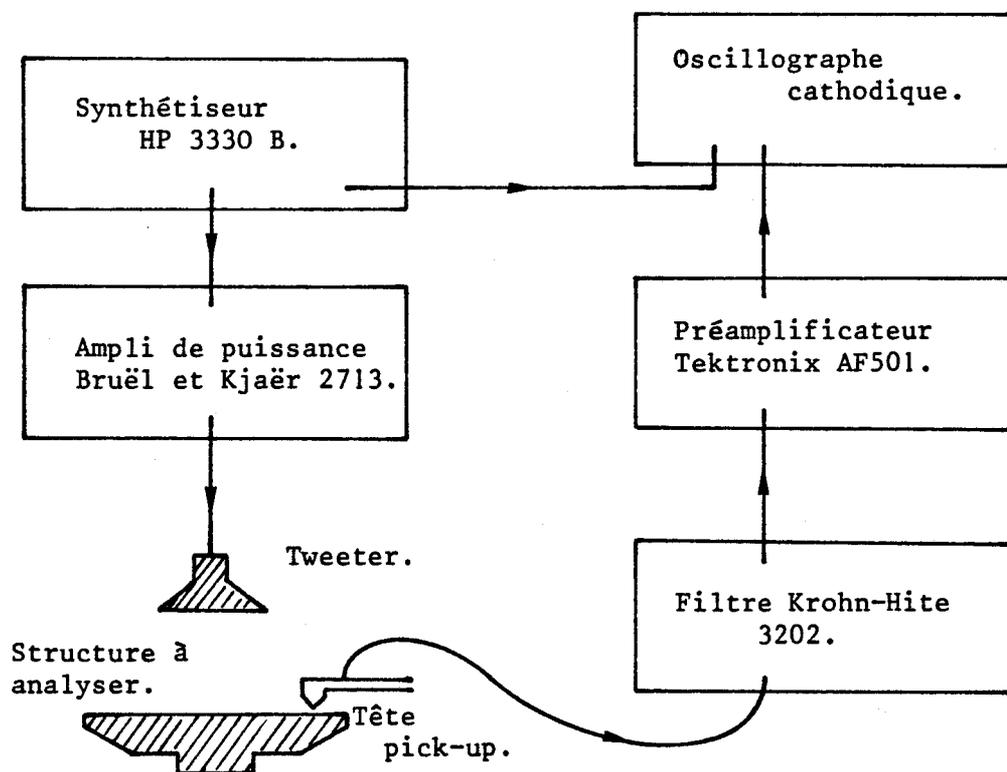
Le second maillage, représenté figure (II.3), est un maillage plus grossier dans lequel, d'une part, la couronne arrière a été supprimée et remplacée par une surépaisseur qui conserve la masse et le moment d'inertie par rapport à l'axe, et, d'autre part, le trou prévu pour la tige de précontrainte a été prolongé jusqu'à la face avant. Ses caractéristiques sont :

- nombre d'éléments : 17
- nombre de noeuds : 125
- nombre de degrés de liberté : cas SS : 323  
cas SA : 297  
cas AS : 297  
cas AA : 271

Les quatre combinaisons de symétrie ont été, cette fois, calculées, avec 100 degrés maîtres en phase finale de diagonalisation. Ce maillage a été développé pour être incorporé au maillage global du transducteur T1 complet.

*c) technique expérimentale d'étude*

Pour obtenir les fréquences propres d'une structure mécanique, le dispositif expérimental schématisé ci-dessous a été systématiquement



employé [92], les résonances excitées par le tweeter étant détectées par la tête pick-up. Ce dispositif permet une analyse, entre quelques kilohertz et trente ou quarante kilohertz, qui vérifie les spécifications critiques suivantes :

- la fréquence synthétisée est très stable et permet des observations de durée suffisante pour des résonances toujours très étroites (coefficients de qualité supérieurs à  $10^4$ , par exemple),
- l'excitation est transmise par un couplage très lâche (air) pour ne pas perturber les modes analysés,
- la sonde est ponctuelle, dans cette gamme de fréquence, et sa sensibilité est directive, ce qui permet un tracé qualitatif de la carte de déplacement.

De plus, en laissant fixe la position de l'excitation par rapport à la structure et en déplaçant la sonde, une analyse de phase est possible qui facilite le repérage des symétries et antisymétries.

#### *d) résultats et interprétation*

Pour chaque condition de symétrie (SS,SA,AS,AA), les résultats sont regroupés dans un tableau comportant :

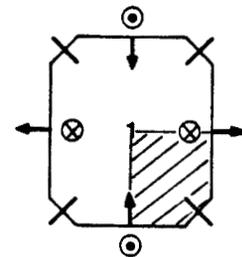
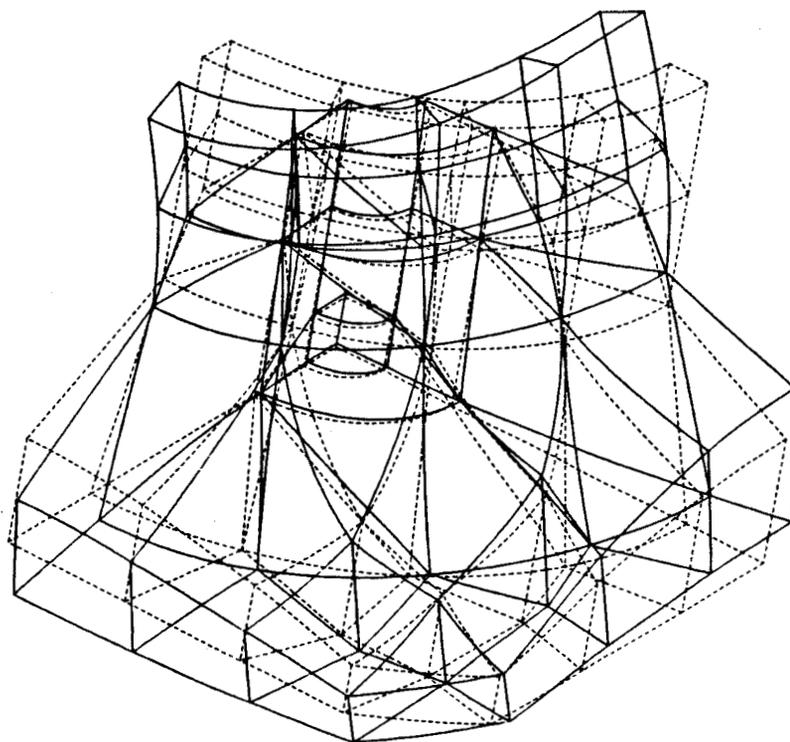
- le numéro d'identification du mode, dans l'ordre des résultats obtenus avec le maillage grossier,
- la fréquence expérimentale ( $f_{ex}$ )
- la ou les fréquences calculées ( $f_{cal}$ ),
- le ou les écarts relatifs à la valeur expérimentale :  
$$\Delta = (f_{cal} - f_{ex}) / f_{ex}$$

Toutes les valeurs de fréquence sont normées à la valeur calculée par éléments finis de la fréquence du mode fondamental du transducteur T1 dans l'air.

Dans le cas où P1 et P2 sont deux plans de symétrie du champ de déplacement, le tableau récapitulatif est le suivant :

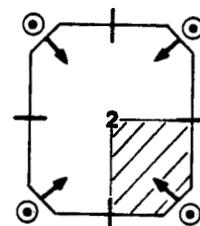
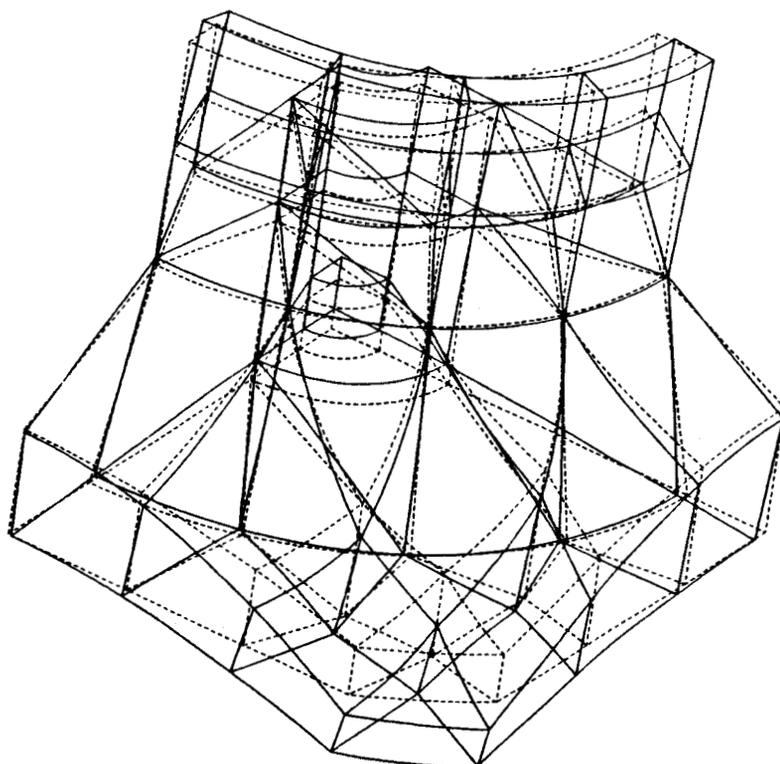
Pavillon du Tonpiliz Tl. Modes libres. Symétrie SS					
N°	$f_{ex}$	$f_{cal.}$ mail.fin	$\Delta\%$	$f_{cal.}$ mail gros.	$\Delta\%$
SS1	1.607	1.575	-2.0	1.681	4.6
SS2	2.263	2.276	0.6	2.335	3.2
-	2.751	2.993	8.8	-	-
SS4	3.731	3.677	-1.4	3.758	0.7
-	3.973	3.991	0.5	-	-
SS5	4.758	non déterminée	-	4.837	1.6
SS6	5.188	"	-	5.306	2.3
SS7	5.213	"	-	5.559	6.6

La figure (II.4) présente, dans le cas du maillage fin, les cinq premiers modes obtenus, en précisant les critères d'identification. Les modes numérotés dans le tableau sont des modes dont le champ de déplacement concerne le pavillon entier. Ils ont été détectés expérimentalement et identifiés au niveau de la face parlante et constituent, pour l'essentiel, des papillonnages. Avec les maillages réalisés, et compte tenu des simplifications de la structure, les valeurs de leurs fréquences fournies par la modélisation sont précises. Les deux modes non numérotés dans le tableau sont des modes de la couronne qui ne doivent probablement pas apparaître parmi les modes fournis par le maillage grossier, compte tenu de la simplification trop sévère réalisée dans ce cas sur cette partie de la structure. Néanmoins, le maillage grossier a produit un mode, numéroté SS3, à la fréquence réduite de 3.618, dont le champ de déplacement pourrait correspondre au premier mode de couronne mais de façon trop imprécise pour permettre une réelle identification.



**Mode SS1**

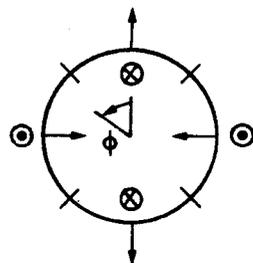
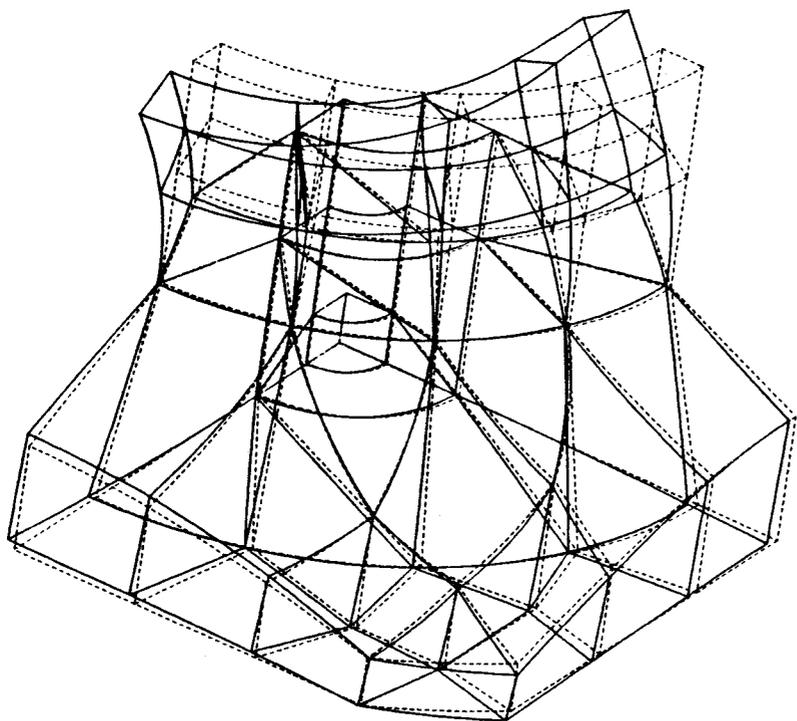
$$f_{ex} = 1.607$$



**Mode SS2**

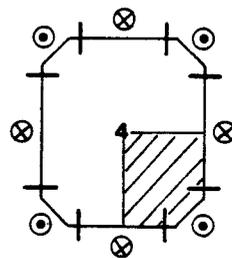
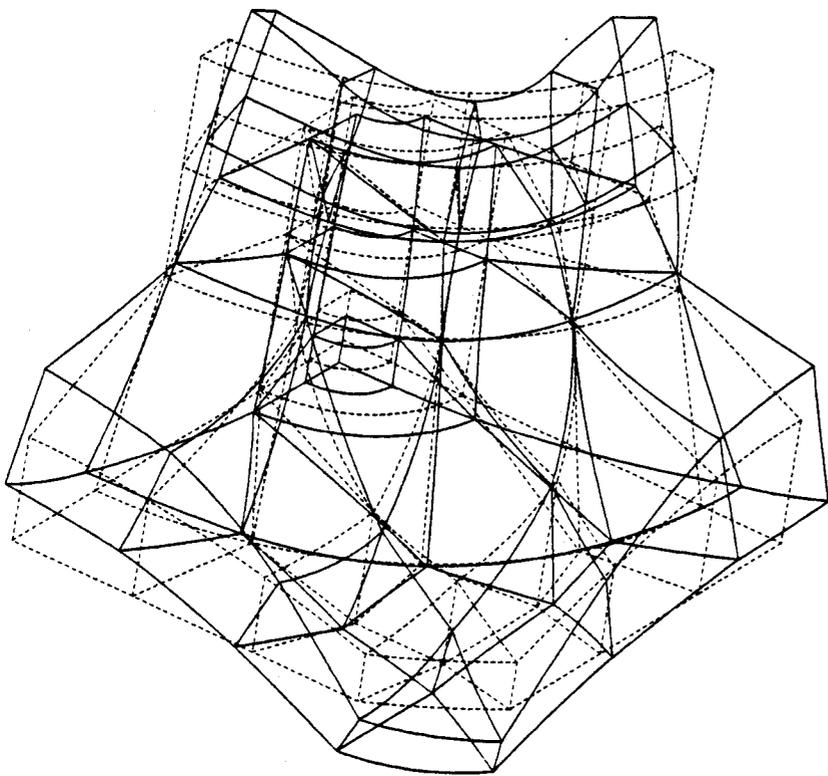
$$f_{ex} = 2.263$$

Figure II.4 . Représentation des cinq premiers modes du pavillon du tonpilz T1 obtenus avec le maillage fin et des conditions SS . Les schémas de droite indiquent les critères d'identification ( le tiret symbolisant un noeud ) .



Premier mode de  
couronne (  $\cos 2\phi$  )

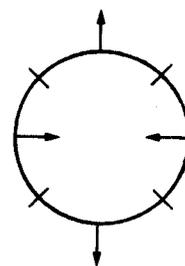
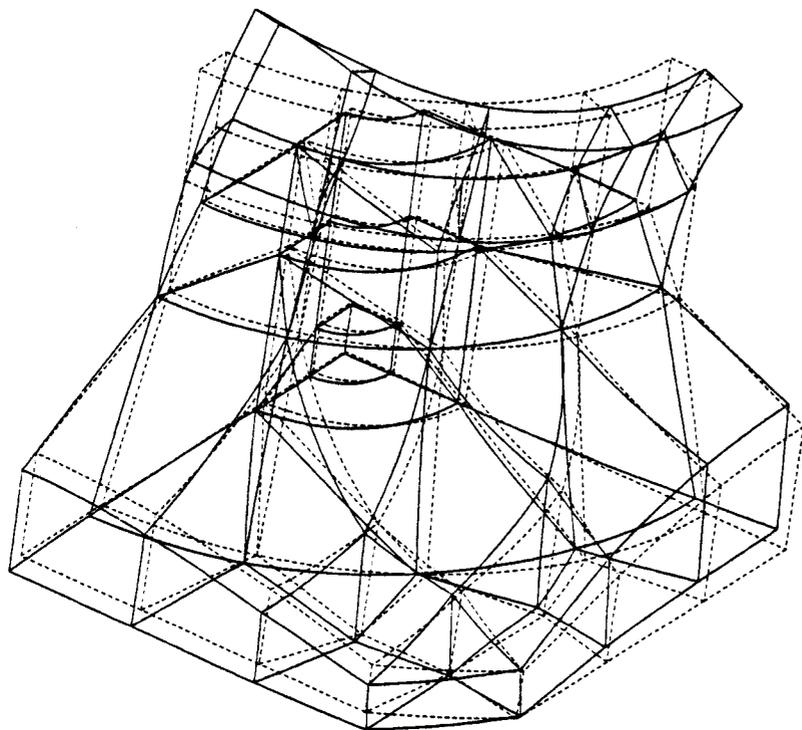
$$f_{ex} = 2.751$$



Mode SS4

$$f_{ex} = 3.731$$

Figure II.4 . Suite .



Second mode de  
couronne

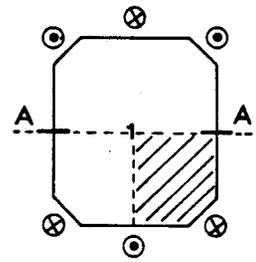
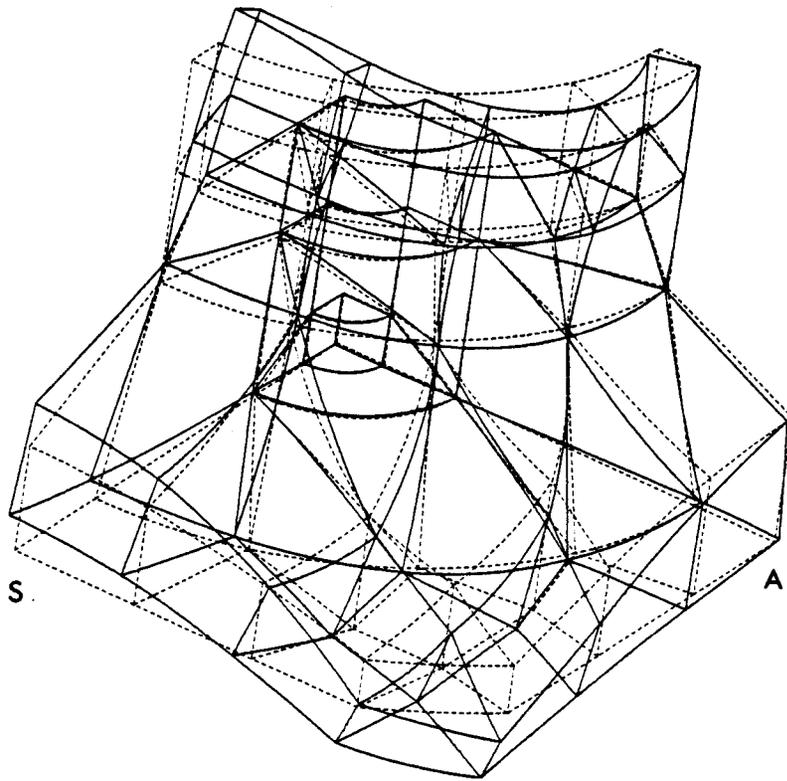
$$f_{ex} = 3.973$$

Figure II.4 . Suite .

Dans le cas où P1 est un plan de symétrie et P2 un plan d'antisymétrie, le tableau récapitulatif est le suivant :

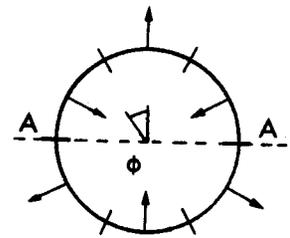
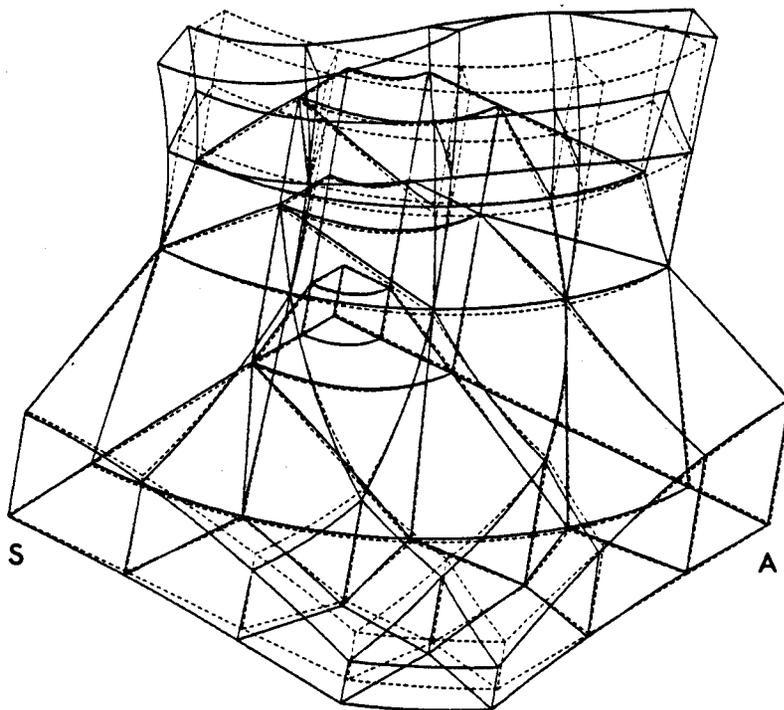
Pavillon du Tonpiliz T1. Modes libres. Symétrie SA					
N°	$f_{ex}$	$f_{cal.}$ mail.fin	$\Delta\%$	$f_{cal.}$ mail gros.	$\Delta\%$
SA1	2.468	2.459	-0.4	2.616	6.0
-	2.822	3.143	11.4	-	-
-	3.213	3.423	6.5	-	-
SA2	3.654	3.876	6.0	3.604	-1.4
SA3	3.975	4.002	0.7	3.955	-0.5
SA4	4.964	non déterminée	-	5.184	4.4
SA5	5.697	"	-	5.794	1.7

La figure (II.5) présente, dans le cas du maillage fin, les cinq premiers modes obtenus, en précisant les critères d'identification. Les modes numérotés de SA1 à SA5 sont des modes dont le champ de déplacement concerne le pavillon entier. Ils ont été détectés expérimentalement et identifiés au niveau de la face parlante. Les deux modes non numérotés sont des modes de la couronne et, pour les raisons évoquées au paragraphe précédent, ne sont pas produits par le maillage simple. Globalement, l'accord est moins bon que dans le cas SS, bien que tout à fait suffisant. On peut noter, en particulier, que le mode SA2 est moins bien décrit avec le maillage fin qu'avec le maillage grossier, ce qui traduit un effet important de la modélisation de la couronne.



Mode SA1 .

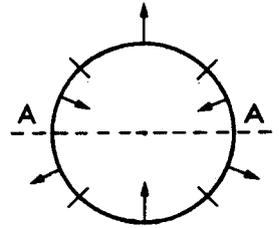
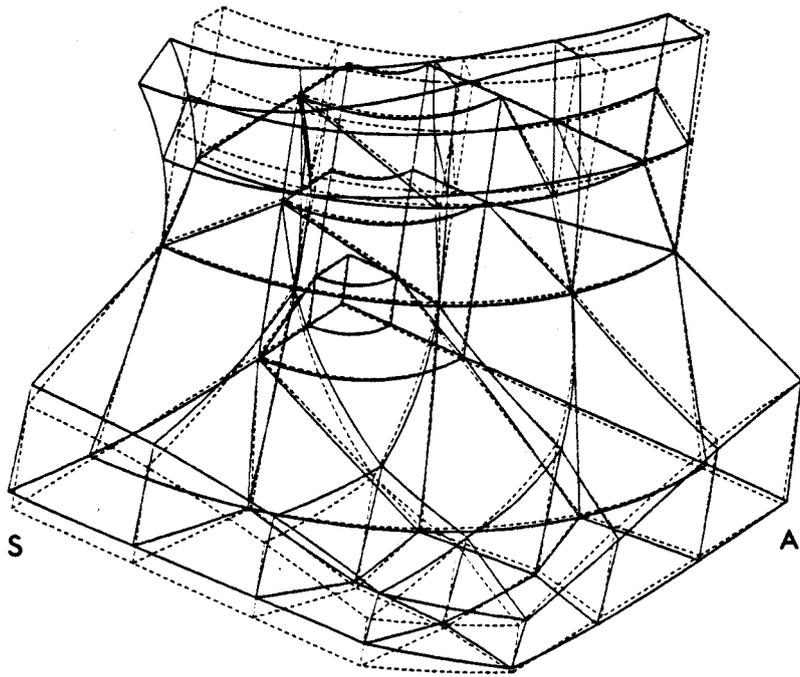
$$f_{ex} = 2.468$$



Premier mode de  
couronne ( $\cos 5\phi$ ).

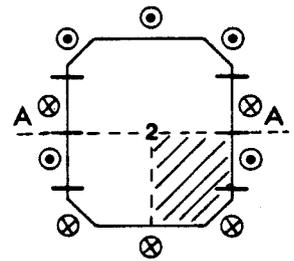
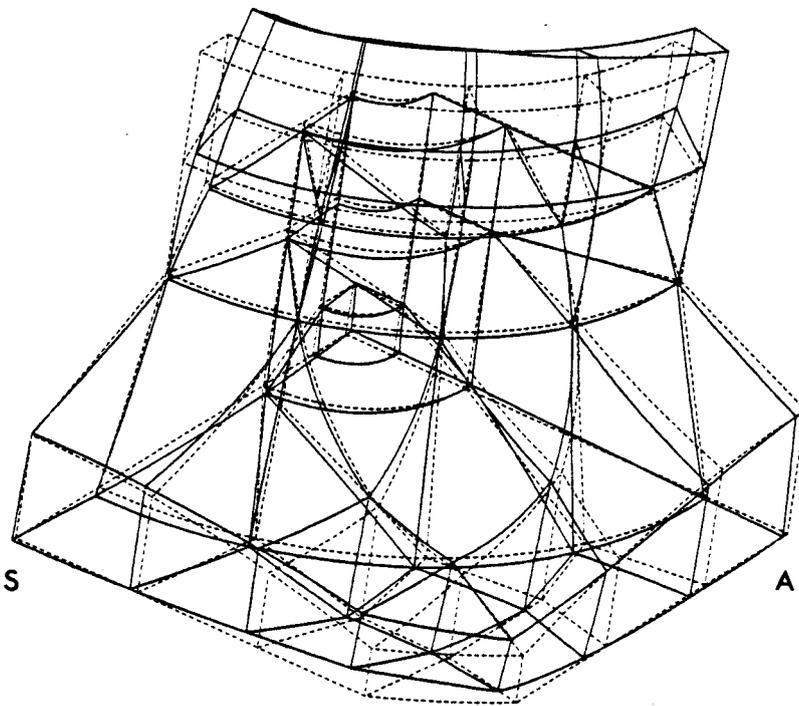
$$f_{ex} = 2.822$$

Figure II.5 . Représentation des cinq premiers modes du pavillon du Tonpilz T1 obtenus avec le maillage fin et des conditions de symétrie SA . Les schémas de droite indiquent les critères d'identification ( le tiret symbolise un noeud ) .



Second mode de couronne .

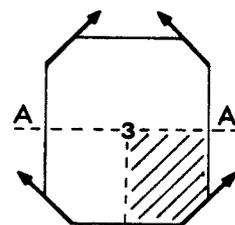
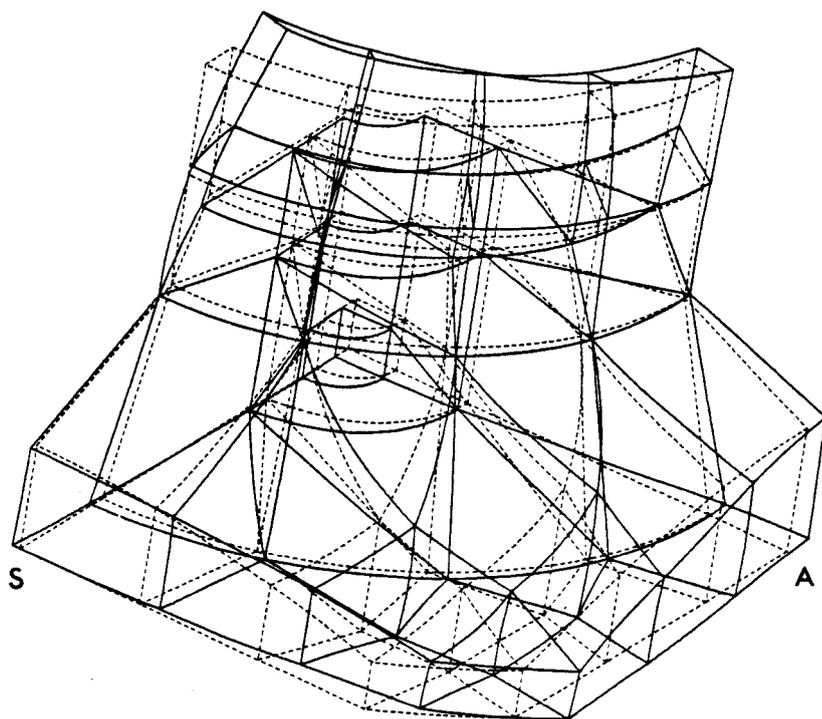
$$f_{ex} = 3.213$$



Mode SA2 .

$$f_{ex} = 3.654$$

Figure II.5 . Suite .



Mode SA3 .

$$f_{ex} = 3.975$$

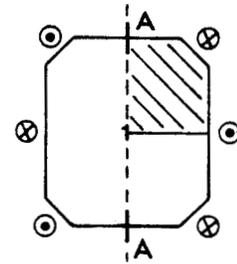
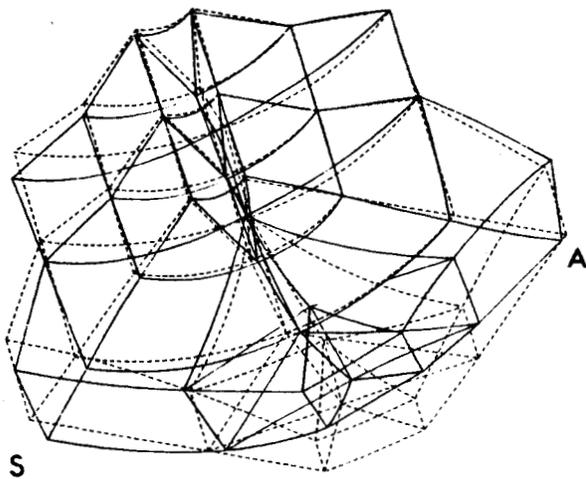
Figure II.5 . Suite .

Dans le cas où P1 est un plan d'antisymétrie et P2 un plan de symétrie, le maillage fin n'a pas été exploité et le tableau récapitulatif est le suivant :

Pavillon du Tonpilz T1. Modes libres Symétrie AS			
N°	$f_{exp}$	$f_{cal}$ mail.gros.	$\Delta$ %
AS1	2.370	2.486	4.9
AS2	3.568	3.552	-0.4
AS3	3.957	4.037	2.0
AS4	5.111	5.362	4.9
AS5	5.571	5.803	4.2

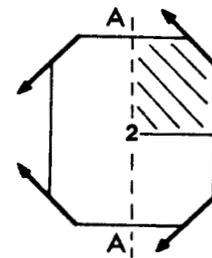
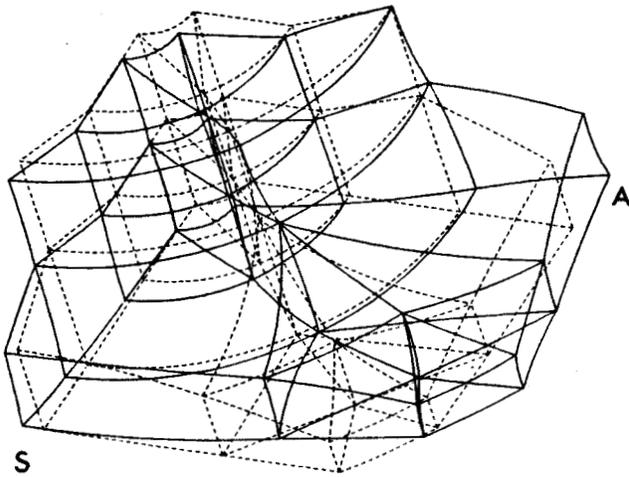
La figure (II.6) présente les trois premiers modes obtenus en précisant les critères d'identification. Les cinq premiers modes AS correspondent, à une permutation des axes près, aux cinq premiers modes SA, à l'exception des modes 2 et 3 qui sont interchangeables (SA2  $\equiv$  AS3 et SA3  $\equiv$  AS2). L'accord est pratiquement le même que pour le cas SA.

Enfin, dans le cas où P1 et P2 sont tous deux des plans d'antisymétrie, le maillage fin n'a pas été exploité non plus et le tableau récapitulatif est le suivant :



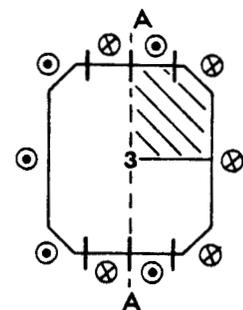
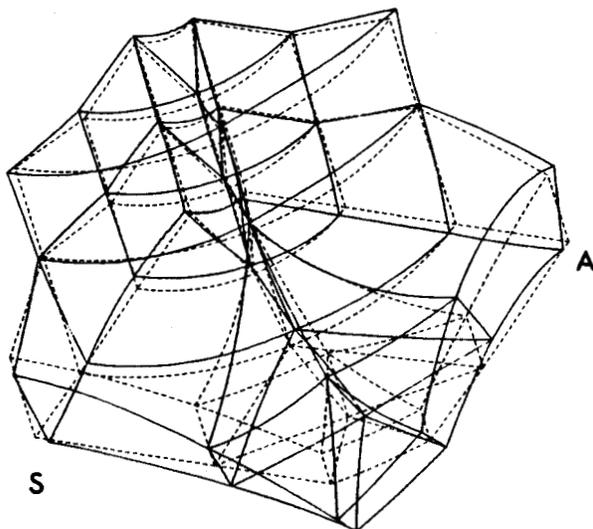
Mode AS1

$$f_{ex} = 2.370$$



Mode AS2

$$f_{ex} = 3.568$$



Mode AS3

$$f_{ex} = 3.957$$

**Figure II.6 .** Représentation des trois premiers modes du pavillon du Tonpilz T1 obtenus avec le maillage grossier et des conditions AS . Les schémas de droite indiquent les critères d'identification . On notera que le secteur présenté est tourné de  $90^\circ$  par rapport au cas SA

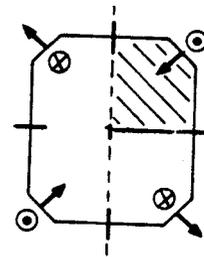
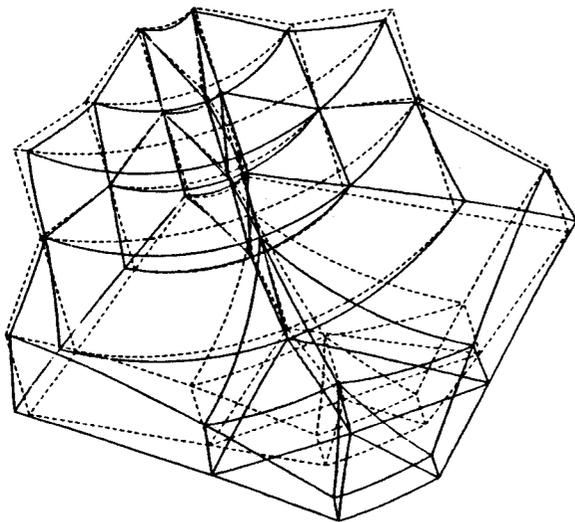
Pavillon du Tonpiliz T1. Modes libres Symétrie AA			
N°	$f_{exp}$	$f_{cal}$ mail.gros.	$\Delta \%$
AA1	1.331	1.364	2.5
AA2	non détectée	3.473	-
AA3	3.613	3.864	6.9
AA4	4.399	4.362	-0.8
AA5	non détectée	5.389	-

La figure (II.7) présente les trois premiers modes détectés en précisant les critères d'identification. On note que les modes AA2 et AA5 n'ont pu être détectés avec le dispositif décrit dans le paragraphe (c) probablement pour des raisons liées au procédé d'excitation. Ici aussi, l'accord est comparable à celui du cas SA.

Globalement, ces résultats sont de bonne qualité, les fréquences calculées étant très proches des fréquences mesurées et les champs de déplacement obtenus étant, en valeurs relatives, identiques à ceux que le dispositif expérimental permet d'observer. Enfin, pour reproduire correctement les effets du papillonnage dans une modélisation globale du transducteur T1, le maillage grossier est tout à fait suffisant.

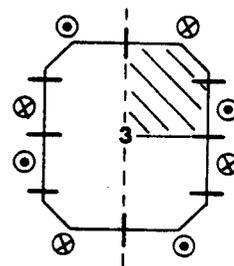
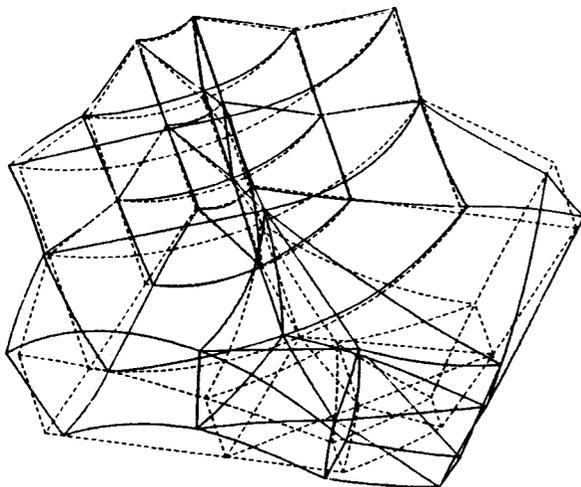
#### II.4.2 Analyse d'un anneau de céramique isolé

Les anneaux de céramique étudiés dans cette section sont les éléments constitutifs des moteurs des transducteurs Tonpiliz. La figure ci-après présente un anneau caractéristique et définit ses paramètres géométriques. La polarisation étant parallèle à l'axe et les électrodes, complètes, perpendiculaires à cet axe, un anneau possède trois plans de symétrie, numérotés P1, P2 et P3. Les analyses présentées plus loin ne considèrent que le cas où le champ de déplacement est symétrique par rapport à ces trois plans, ce qui permet d'atteindre, entr'autres, tous les modes couplés



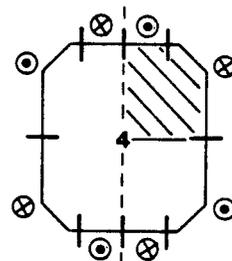
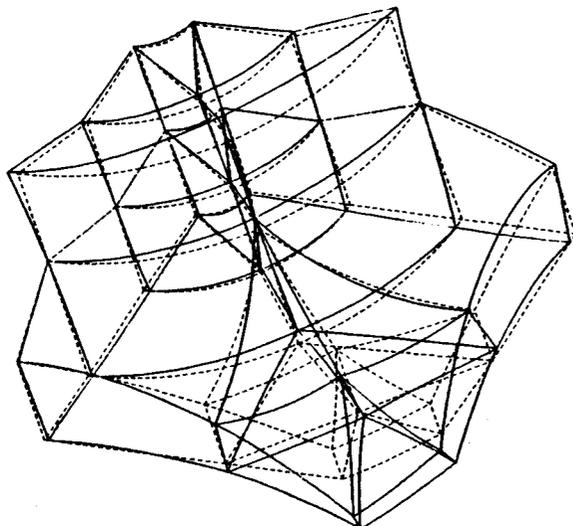
Mode AA1

$$f_{ex} = 1.331$$



Mode AA3

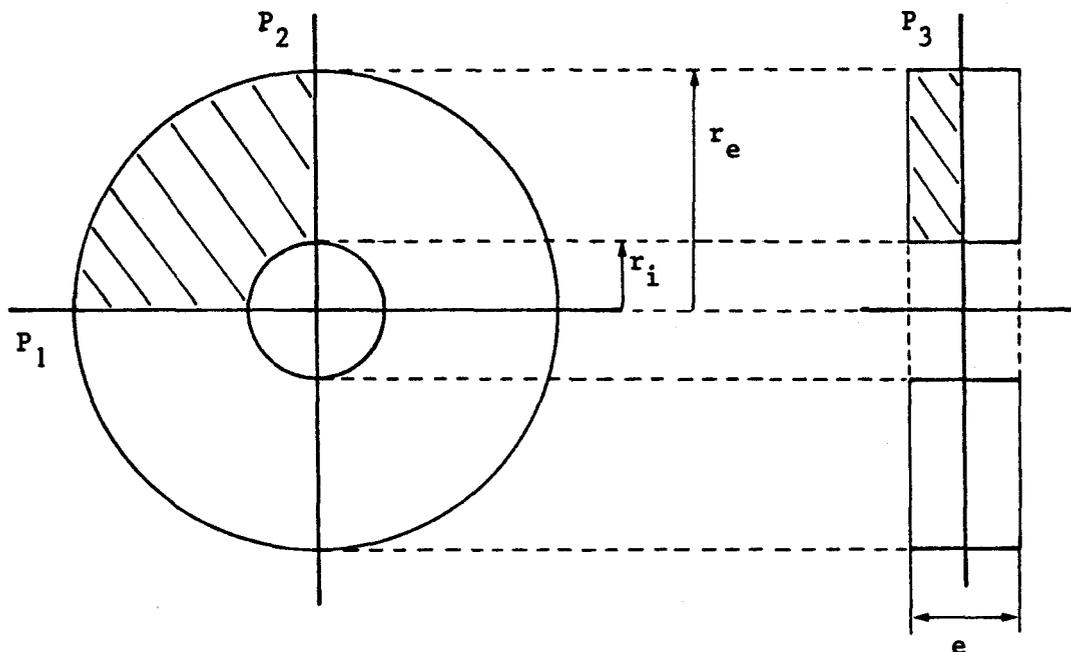
$$f_{ex} = 3.613$$



Mode AA4

$$f_{ex} = 4.399$$

**Figure II.7** . Représentation des trois premiers modes détectés du pavillon du Tonpilz T1 obtenus avec le maillage grossier et des conditions AA . Les schémas de droite indiquent les critères d'identification .



électriquement. Les caractéristiques physiques des matériaux constitutifs sont, au moins dans un premier temps, mesurées suivant une technique proposée par W.P. MASON [4] et décrite en Annexe 2. Trois types d'études peuvent être envisagés :

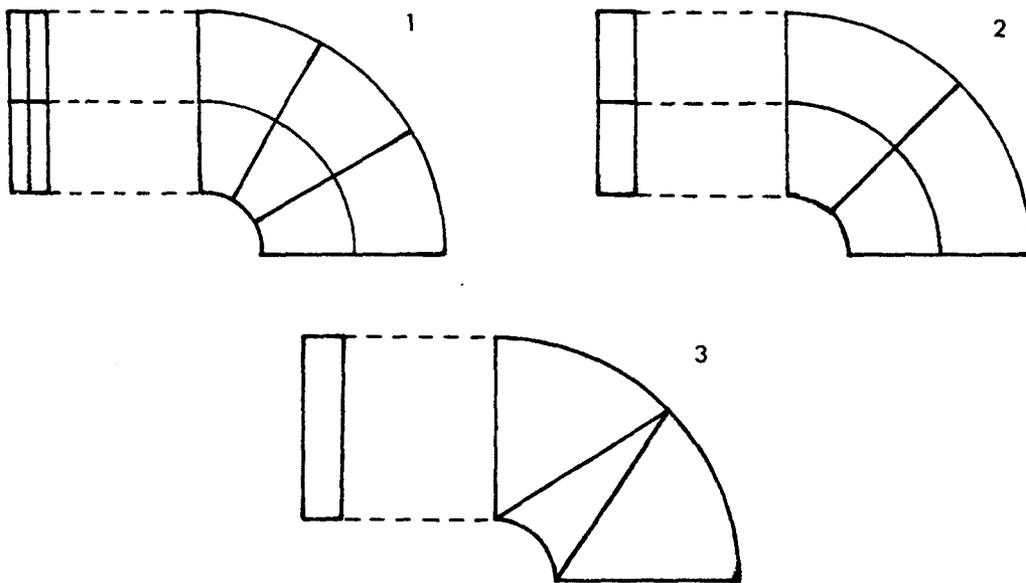
- l'analyse modale avec les électrodes en court-circuit, i.e la recherche des résonances, correspondant au système d'équations (II.54),
- l'analyse modale avec les électrodes en circuit ouvert, i.e la recherche des antirésonances, correspondant au système d'équations (II.56),
- l'analyse harmonique, correspondant au système d'équations (II.61) et (II.63).

Cette section présente les tests de convergence en fonction du maillage, la technique de mesure employée, les résultats obtenus avec une céramique de variété X9<sup>(+)</sup> puis avec une céramique de variété X5105<sup>(+)</sup>. Dans ce dernier cas, elle suggère un nouveau procédé de caractérisation.

-----  
 (+) Ces variétés de céramique, produites par la société PONS-ALCATEL, sont respectivement à base de titanate de baryum et de titanozirconates de plomb.

a) tests de convergence en fonction du maillage

L'anneau de céramique étant un élément utilisé à de nombreux exemplaires (plus de vingt, par exemple) dans les transducteurs, il est important de connaître le maillage minimal nécessaire pour une qualité de résultats donnée. Pour cela, les dix premières fréquences de résonance d'un anneau de dimensions  $e = 10\text{mm}$ ,  $r_i = 6\text{mm}$  et  $r_e = 22.5\text{mm}$  ont été calculées avec trois maillages différents schématisés ci-dessous. Les conditions aux limites imposées sont, pour le champ de



déplacement :

$$- u \in P1, P2 \text{ et } P3$$

et, pour le potentiel :

$$- \phi = 0 \text{ en tout point de } P3 \text{ et de l'électrode.}$$

Le premier maillage comporte 12 éléments, 111 noeuds et 315 degrés de liberté, le second 4 éléments, 51 noeuds et 115 degrés de liberté, le troisième 3 éléments, 29 noeuds et 64 degrés de liberté. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-après. Les fréquences  $f$  sont normées à la valeur de la fréquence du premier mode couplé électriquement (mode 2) calculée avec le maillage (1). Pour les maillages (2) et (3), la première colonne donne la valeur de la fréquence  $f$  et la seconde l'écart relatif  $\Delta$  à la valeur obtenue avec

Test de convergence. Céramique annulaire à la résonance.					
N°	Maillage (1) - f -	Maillage (2)		Maillage (3)	
		f	$\Delta(\%)$	f	$\Delta(\%)$
1	0.589	0.603	2.3	0.642	8.9
2	1.000	1.000	0.0	1.015	1.5
3	1.445	1.458	0.8	1.484	2.7
4	1.687	1.811	7.3	1.925	14.1
5	2.531	2.508	-0.9	2.583	2.0
6	2.650	2.653	0.1	2.653	0.1
7	2.842	2.821	-0.7	2.953	3.9
8	2.782	3.049	9.6	3.164	13.7
9	3.171	3.177	0.2	3.363	6.1
10	3.348	3.427	2.4	3.458	3.3

le maillage (1). La figure (II.8) présente les huit premiers modes. Dans le cas du maillage (2), on peut noter qu'à l'exception des modes 4 et 8, les résultats sont très bons, l'amélioration obtenue en passant au maillage (1) ne justifiant pas l'accroissement de complexité. Le signe - affecté à  $\Delta$  pour les modes 5 et 7, qui peut surprendre compte tenu du type de convergence habituel des calculs par éléments finis [21,80], s'explique par l'effet de la réduction de Guyan qui porte, dans le cas du maillage (1), sur 195 degrés esclaves, et, dans le cas du maillage (2), sur 15 degrés esclaves seulement, pouvant ainsi induire dans le cas (1) une dégradation du résultat supérieure à celle due au changement de maillage. Dans le cas du maillage (3), la perte de précision est plus importante mais reste raisonnable, en particulier pour les deux modes à symétrie axiale (modes 2 et 7) qui sont les seuls couplés électriquement. Ce maillage est donc suffisant pour décrire, par exemple, le comportement en dilatation-compression d'une colonne motrice.

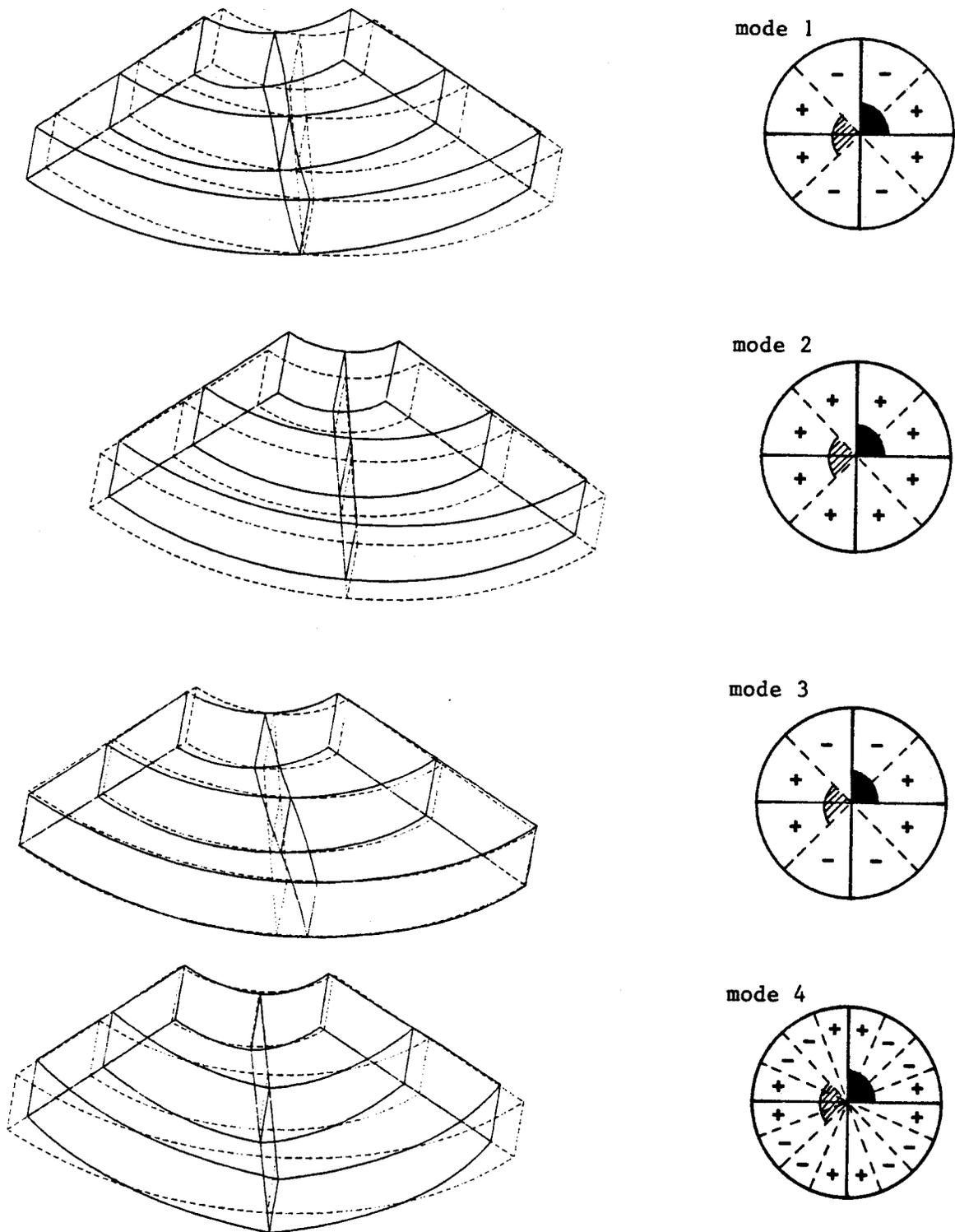


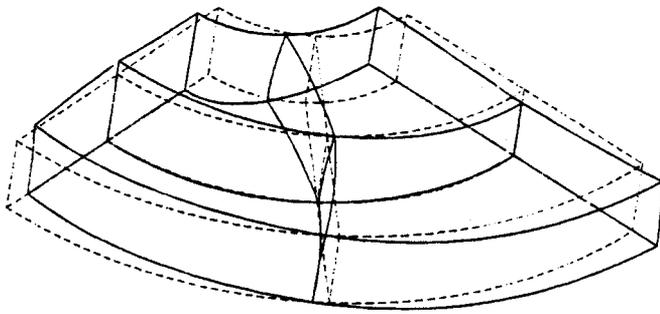
Figure II.8 . Présentation des huit premiers modes de l'anneau , qualitativement identiques pour le test, la X9 et la X5105 . Les schémas de droite indiquent les changements de signe de la densité superficielle de charge .



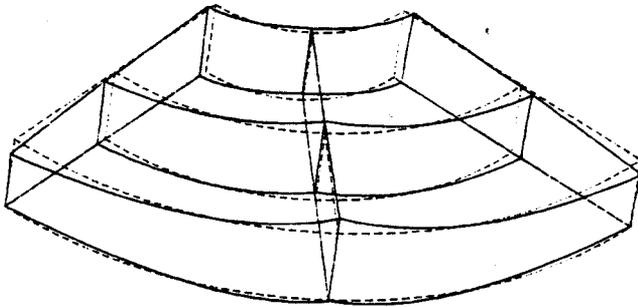
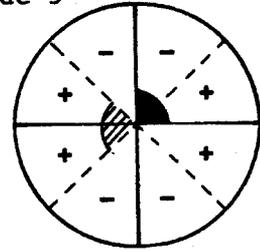
secteur modélisé



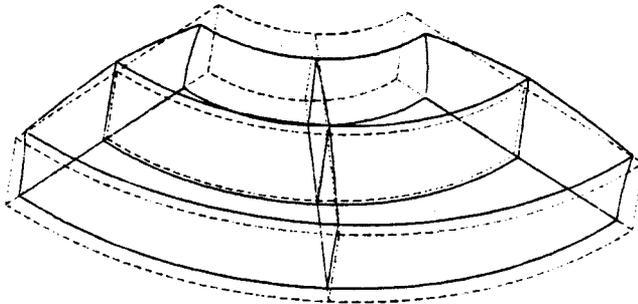
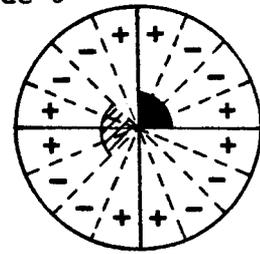
électrode segmentée (II.4.2.b)



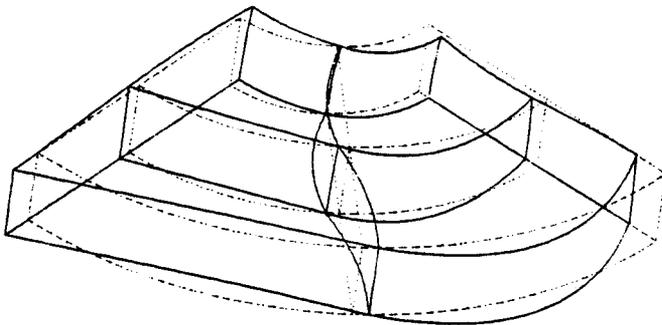
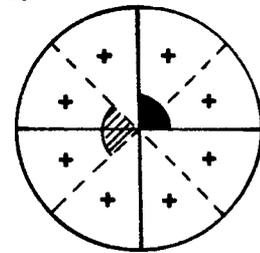
mode 5



mode 6



mode 7



mode 8

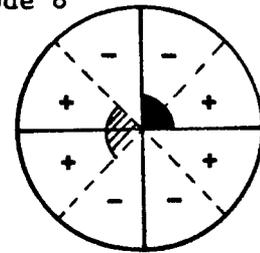
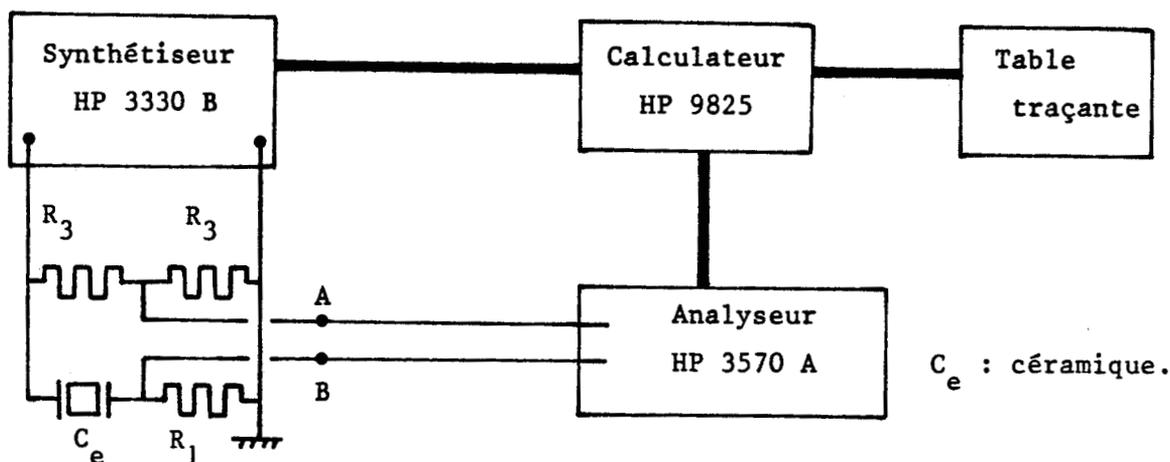


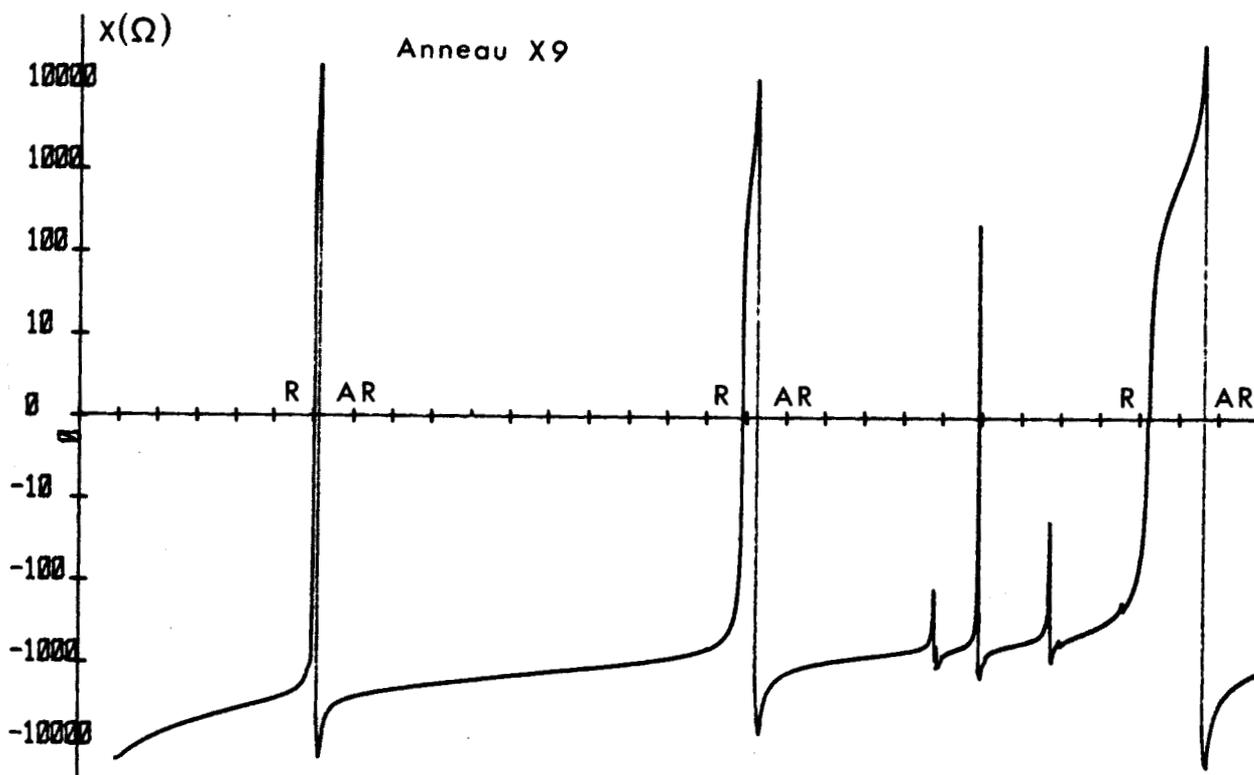
Figure II.8 . Suite .

b) technique expérimentale d'étude

La méthode expérimentale développée est une mesure d'impédance utilisant le montage schématisé ci-dessous [94]. Le synthétiseur de

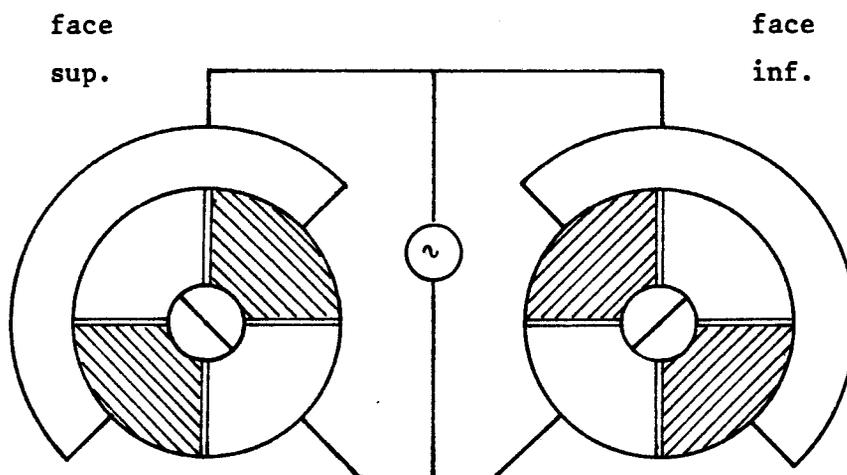


fréquence fournit le signal sinusoïdal. La céramique est placée dans le pont et l'analyseur de réseau prélève les tensions aux points A et B. Le calculateur, qui pilote l'ensemble du banc, traite les mesures et fournit une courbe, semblable à celle ci-dessous, qui présente les variations de l'impédance de l'anneau avec la fréquence, ainsi que les



valeurs des fréquences de résonance (R) et d'antirésonance (AR).

Dans le cas des modes présentés figure (II.8), seuls les numéros 2 et 7 sont couplés électriquement et observables par la méthode ci-dessus, le coefficient de couplage étant, en effet, proportionnel à l'intégrale de la densité de charge sur toute l'électrode [79] et donc nul pour les numéros 1,3,4,5,6 et 8. Toutefois, expérimentalement, si on segmente les électrodes et qu'on les connecte comme indiqué ci-dessous, les modes 1,3,5 et 8 vont se coupler, 4 et 6 restant non



couplés, 2 et 7 perdant leur couplage. Or, à la résonance, les électrodes sont en court-circuit et leur segmentation n'intervient pas dans le calcul. Les fréquences de résonance théoriques s'obtiennent donc simultanément pour les deux modes d'excitation, ce qui accroît notablement le nombre de comparaisons possibles. Cette dernière remarque ne s'applique évidemment pas au cas de l'antirésonance ou de l'analyse harmonique.

c) analyse d'une céramique de variété X9

Pour cette céramique, qui est l'élément moteur du transducteur T1, les côtes sont les suivantes :  $e = 10\text{mm}$ ,  $r_i = 6\text{mm}$  et  $r_e = 22.5\text{mm}$ . Les valeurs de ses constantes physiques mesurées suivant la méthode de Mason (Annexe 2), sont groupées dans le tableau ci-après. Le maillage employé est le maillage (2), à quatre éléments, de la section (a),



Caractéristiques physiques de la céramique X9. Unités MKSA					
$s_{11}^E$	$s_{12}^E$	$s_{33}^E$	$s_{13}^E$	$s_{44}^E$	$d_{33}$
$7.54 \cdot 10^{-12}$	$-2.15 \cdot 10^{-12}$	$8.18 \cdot 10^{-12}$	$-2.49 \cdot 10^{-12}$	$2.54 \cdot 10^{-11}$	$9.67 \cdot 10^{-11}$
$d_{31}$	$d_{15}$	$\epsilon_{11}^S$	$\epsilon_{33}^S$	$\rho$	
$-3.35 \cdot 10^{-11}$	$2.04 \cdot 10^{-10}$	$5.36 \cdot 10^{-9}$	$5.19 \cdot 10^{-9}$	5450.	

traité avec cent degrés maîtres. Le tableau ci-dessous compare les fréquences de résonance et d'antirésonance calculées ( $f_{cal}$ ) et mesurées ( $f_{exp}$ ). Ces fréquences sont normées à la fréquence de résonance calculée du premier mode couplé électriquement (mode 2). Les colonnes  $\Delta$  donnent les écarts relatifs entre les deux types de résultats.

Céramique X9. Analyse modale en résonance et en antirésonance.						
N° mode	Résonance			Antirésonance		
	$f_{exp}$	$f_{cal}$	$\Delta(\%)$	$f_{exp}$	$f_{cal}$	$\Delta(\%)$
1	.580(+)	.609	5.0	-	.609	-
2	.988	1.000	1.2	1.010	1.021	1.1
3	1.441(+)	1.471	2.0	-	1.471	-
4	-	1.842	-	-	1.842	-
5	2.474(+)	2.512	1.5	-	2.512	-
6	-	2.708	-	-	2.708	-
7	2.786	2.784	-0.1	2.842	2.838	-0.1
8	3.031(+)	3.081	1.6	-	3.081	-

(+) : mesure faite avec électrodes segmentées

Les huit premiers modes sont présentés schématiquement sur la figure (II.8). Il faut noter le très bon accord obtenu sur les deux modes couplés 2 et 7, et en particulier le fait que l'écart entre fréquences de résonance et d'antirésonance est prévu avec précision par le calcul.

D'autre part, l'analyse harmonique de cette céramique a aussi été réalisée, dans la même bande de fréquence que l'analyse modale présentée ci-dessus. La figure (II.9) présente l'évolution du champ de déplacement avec la fréquence alors que la figure (II.10) présente la comparaison entre impédances calculée et mesurée. Outre le très bon accord obtenu, il faut noter, sur le plan physique, l'évolution d'un mouvement en piston très pur en basse fréquence vers un mouvement à forte dominante radiale au voisinage de la première résonance couplée.

d) analyse d'une céramique de variété X5105

Pour cette céramique, qui est l'élément moteur du transducteur T2a, les côtes sont les suivantes :  $e = 10\text{mm}$ ,  $r_1 = 6\text{mm}$ ,  $r_e = 17.5\text{mm}$ . Les valeurs de ses constantes physiques, mesurées suivant la méthode de Mason, sont groupées dans le tableau ci-après. Le maillage employé est le même que pour la X9.

Caractéristiques physiques de la céramique X5105. Unités MKSA					
$s_{11}^E$	$s_{12}^E$	$s_{33}^E$	$s_{13}^E$	$s_{44}^E$	$d_{33}$
$1.10 \cdot 10^{-11}$	$-3.35 \cdot 10^{-12}$	$1.15 \cdot 10^{-11}$	$-3.96 \cdot 10^{-12}$	$2.67 \cdot 10^{-11}$	$1.30 \cdot 10^{-10}$
$d_{31}$	$d_{15}$	$\epsilon_{11}^S$	$\epsilon_{33}^S$	$\rho$	
$-7.59 \cdot 10^{-11}$	$2.74 \cdot 10^{-10}$	$7.93 \cdot 10^{-9}$	$8.00 \cdot 10^{-9}$	7350.	

Le tableau ci-après compare les fréquences de résonance et d'antirésonance calculées ( $f_{cal}$ ) et mesurées ( $f_{exp}$ ). Ces fréquences sont normées à la fréquence de résonance calculée du premier mode couplé électriquement (mode 2). Les colonnes  $\Delta$  donnent les écarts relatifs entre les deux types de résultats. Les huit premiers modes sont présentés schématiquement sur la figure (II.8). Le douzième mode,

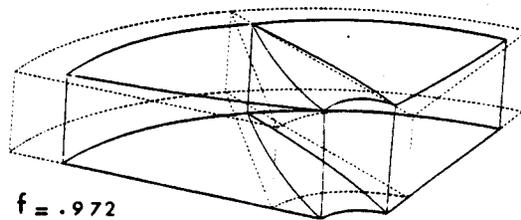
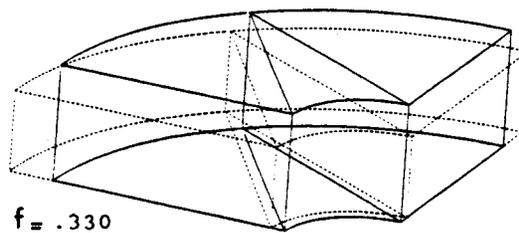
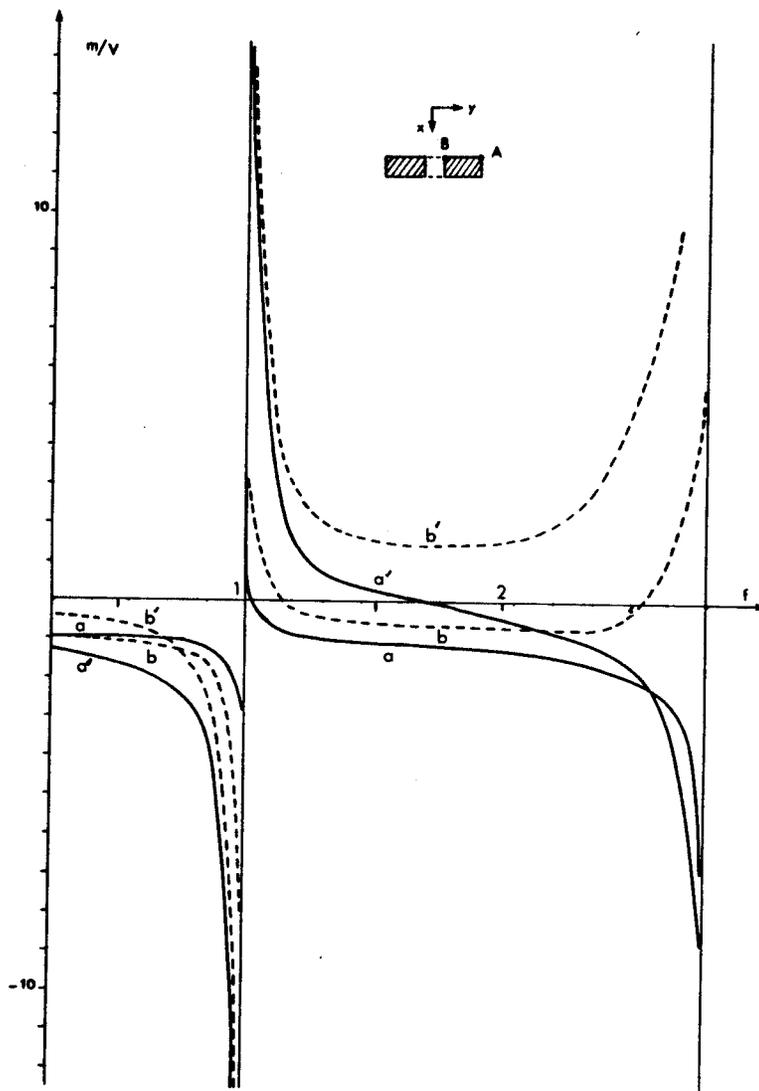


Figure II.9 . a/ Variations avec la fréquence normée des déplacements des points A et B ( a et a' : point A en x et y, b et b' : point B en x et y )  
 b/ Présentation schématique du champ de déplacement pour les fréquences normées .330 et .972 .

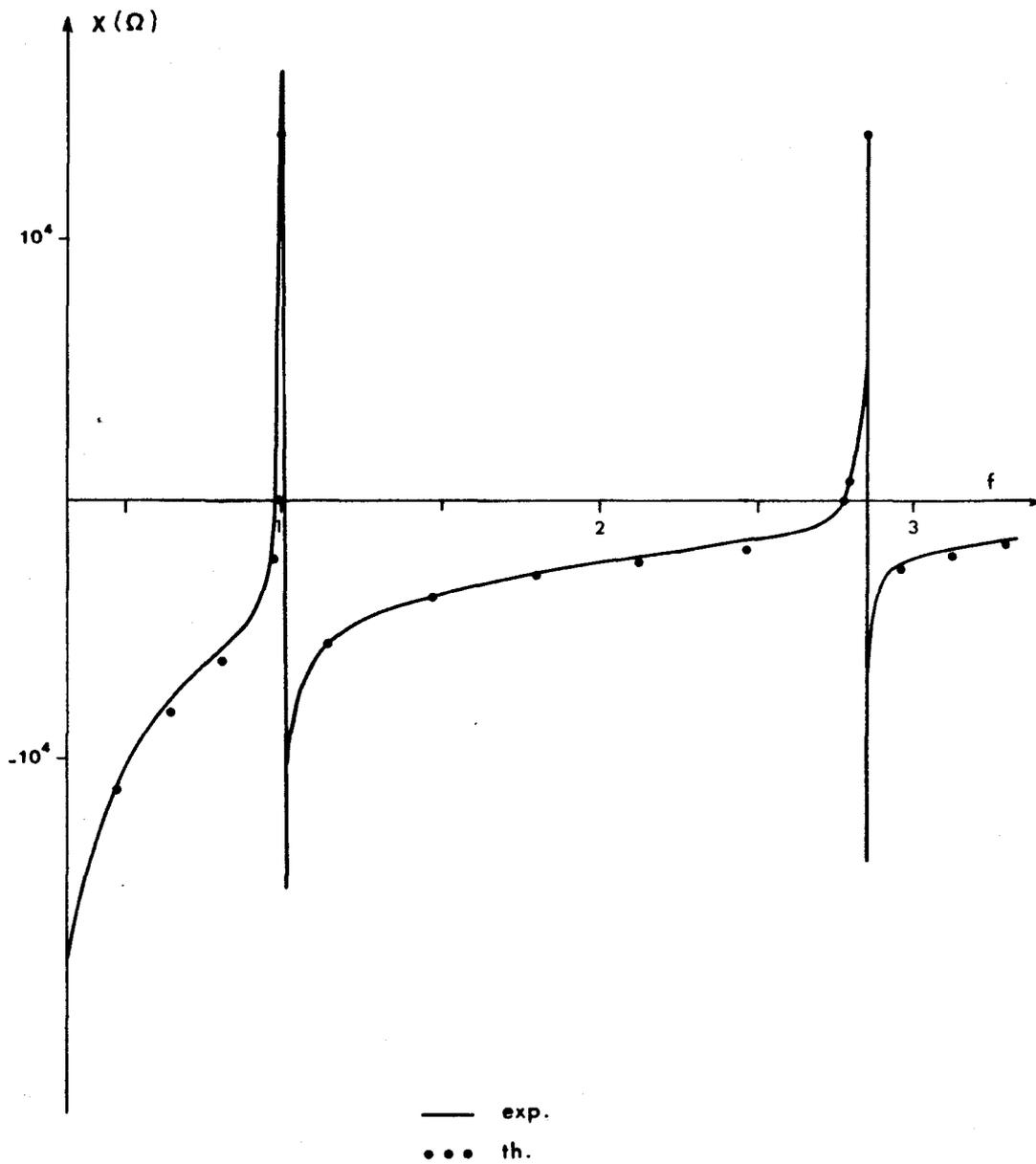
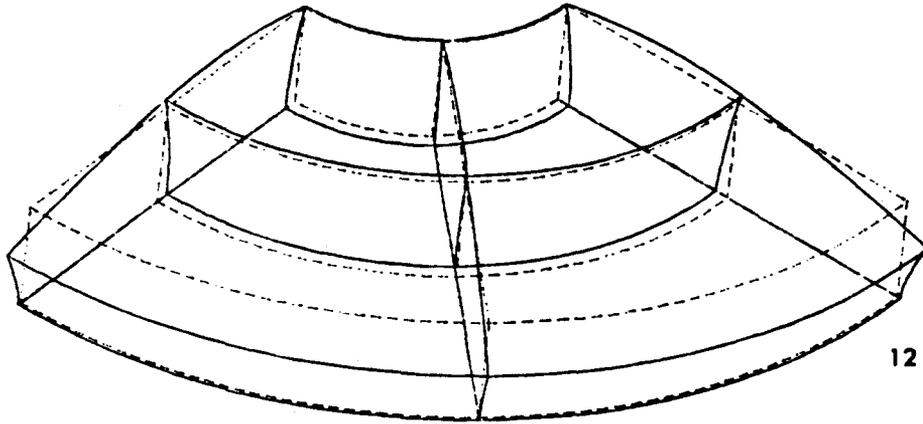


Figure II.10 . Variations de l'impédance de la céramique x9 avec la fréquence ( fréquence normée à celle de la première résonance couplée ) . La courbe en trait plein est mesurée . Les points sont calculés par éléments finis.

Céramique X5105. Analyse modale en résonance et en antirésonance.						
N° mode	Résonance			Antirésonance		
	$f_{exp}$	$f_{cal}$	$\Delta(\%)$	$f_{exp}$	$f_{cal}$	$\Delta(\%)$
1	.578 <sup>(+)</sup>	.583	0.8	-	.583	-
2	1.019	1.000	-1.9	1.079	1.055	-2.3
3	1.529 <sup>(+)</sup>	1.515	-0.9	-	1.515	-
4	-	1.866	-	-	1.866	-
5	2.682 <sup>(+)</sup>	2.685	0.1	-	2.685	-
6	-	2.773	-	-	2.773	-
7	2.992	2.940	-1.7	3.170	3.112	-1.8
8	3.200 <sup>(+)</sup>	3.153	-1.5	-	3.153	-
9	-	3.320	-	-	3.320	-
10	-	3.534	-	-	3.534	-
11	-	4.293	-	-	4.293	-
12	4.389	4.312	-1.8	4.411	4.348	-1.4

(+) : mesure faite avec électrodes segmentées

qui est le troisième mode couplé et qui n'a pas été analysé dans le cas de la X9 est, lui, présenté ci-après. Comme on le voit, l'accord est de bonne qualité. Toutefois, il faut noter qu'il est moins bon pour les modes utiles, i.e. les modes couplés, que pour les autres, et que les fréquences calculées sont inférieures aux fréquences expérimentales, ce qui traduit une erreur systématique indépendante de la méthode de calcul. Compte tenu des difficultés rencontrées lors de la mesure du jeu de paramètres de la céramique, ce jeu a été remis en cause et ajusté de manière à fournir les meilleures valeurs calculées



Mode 12 . (  $f = 4.312$  )

possibles des fréquences couplées. Pour des raisons de simplicité, et compte tenu de la nature du champ de déformation des modes concernés, seuls les paramètres  $s_{33}^E$ ,  $s_{11}^E$ ,  $d_{33}$  et  $d_{31}$  ont été variés,  $s_{44}^E$ ,  $d_{15}$ ,  $\epsilon_{11}^S$ ,  $\epsilon_{33}^S$  et les rapports  $s_{12}^E/s_{11}^E$  et  $s_{13}^E/s_{33}^E$  étant laissés constants. Le tableau de la page suivante présente les résultats optimaux, avec la même norme que le tableau précédent. On voit que, au prix d'une légère dégradation pour les modes non couplés, l'amélioration pour les trois modes couplés est notable, le modèle de céramique ainsi obtenu étant de qualité nettement supérieure pour s'intégrer dans la modélisation d'un transducteur complet. Le second tableau de la page suivante donne les nouvelles valeurs des paramètres qui ont été variés et précise l'écart relatif.

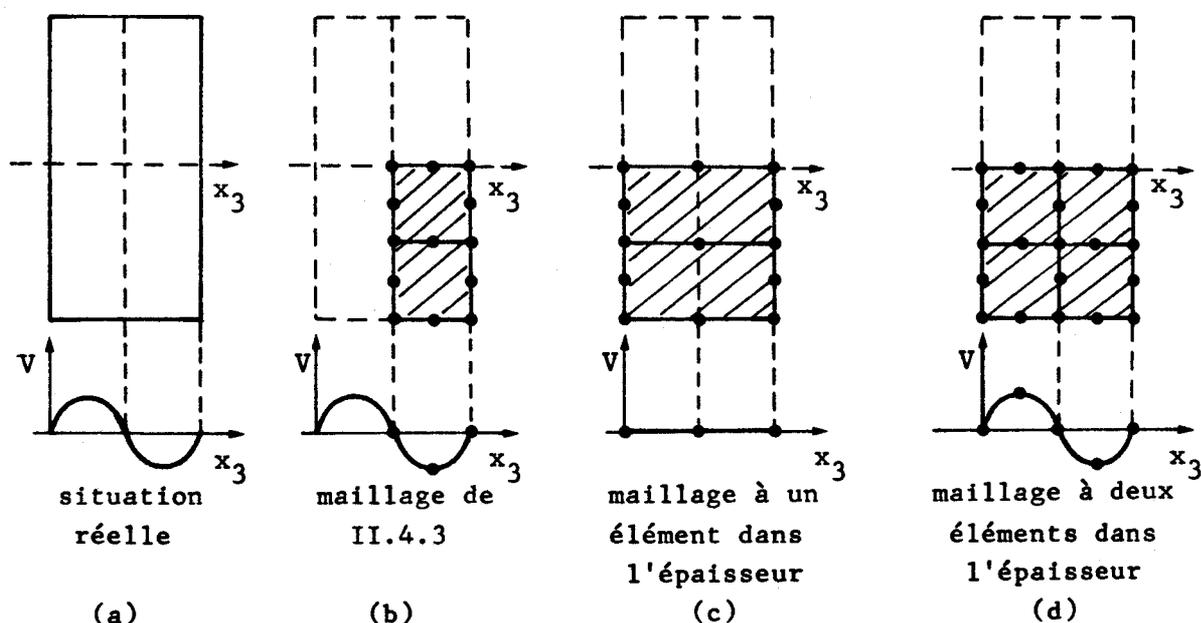
Céramique X5105. Analyse modale avec paramètres optimisés						
N° mode	Résonance			Antirésonance		
	$f_{exp}$	$f_{cal}$	$\Delta(\%)$	$f_{exp}$	$f_{cal}$	$\Delta(\%)$
1	.578	.594	2.9	-	.594	-
2	1.019	1.016	-0.3	1.079	1.077	-0.2
3	1.529	1.542	0.9	-	1.542	-
4	-	1.899	-	-	1.899	-
5	2.682	2.731	1.8	-	2.731	-
6	-	2.822	-	-	2.822	-
7	2.992	2.992	0.0	3.170	3.173	0.1
8	3.200	3.208	0.3	-	3.208	-
9	-	3.381	-	-	3.381	
10	-	3.597	-	-	3.597	
11	-	4.370	-	-	4.370	-
12	4.389	4.389	0.0	4.411	4.427	0.4

Modification des paramètres de la X5105 pour optimisation				
Paramètre	$s_{33}^E$	$s_{11}^E$	$d_{33}$	$d_{31}$
Ancienne Valeur (MKSA)	$1.15 \cdot 10^{-11}$	$1.10 \cdot 10^{-11}$	$1.30 \cdot 10^{-10}$	$-7.59 \cdot 10^{-11}$
Nouvelle valeur (MKSA)	$1.25 \cdot 10^{-11}$	$1.14 \cdot 10^{-11}$	$2.20 \cdot 10^{-10}$	$-1.00 \cdot 10^{-10}$
$\Delta (\%)$	8.7	3.6	69.2	31.7

Cette procédure d'ajustage, sous réserve d'être menée systématiquement (effets de tous les paramètres, prise en compte de modes d'ordre plus élevé ou de modes n'ayant pas la symétrie axiale, approche numérique précise de l'optimisation et tests d'unicité...), peut être généralisée et même substituée à la méthode classique de Mason par rapport à laquelle elle a l'avantage de ne pas nécessiter les nombreuses découpes d'échantillons et d'homogénéiser le jeu de valeurs par effet de moyenne sur un anneau entier [48,49,53].

### II.4.3 Analyse d'une colonne motrice de longueur réduite

Dans la section précédente, on a montré que les premiers modes propres d'un anneau de céramique piézoélectrique s'obtiennent correctement avec des maillages très légers à trois ou quatre éléments, mais le pas du maillage axial n'a pas été discuté. De fait, l'existence d'un plan de symétrie orthogonal à l'axe piézoélectrique (plan P3) permet de décrire jusqu'à une oscillation complète du potentiel électrostatique à l'intérieur de la céramique en imposant un plan nodal entre les électrodes. Toutefois, si l'existence de ce plan de symétrie n'est pas exploitée, il est évident que le maillage doit comporter au moins deux éléments dans l'épaisseur de la céramique, sinon, à la résonance, les trois noeuds de chaque arête sont au potentiel zéro et le potentiel utilisé dans le calcul des modes est nul partout, comme l'indique très schématiquement la figure ci-après. En conséquence, dans le cas de céramiques dont le plan médian n'est pas un plan de symétrie de la structure complète la finesse du



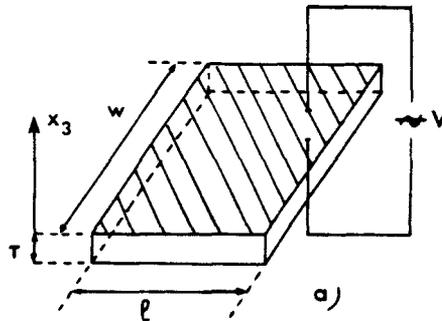
maillage pose une question importante, d'autant qu'elle conditionne très directement la taille du problème numérique. Cette section fournit d'abord une réponse à l'aide d'une approche analytique simplifiée puis elle la confirme par les résultats de la modélisation d'une colonne motrice à deux céramiques et trois électrodes.

a) *approche analytique simplifiée*

L'étude analytique d'une onde de dilatation-compression dans une plaque mince de céramique peut aider à mieux cerner le problème. Considérant la plaque représentée ci-après, dont l'axe piézoélectrique est normal aux électrodes, on peut montrer que [39] :

$$V(x_3) - V(0) = h_{33} (u_3(x_3) - u_3(0)) - \beta_{33}^S D_3 x_3 \quad (\text{II.78})$$

où  $V(x_3)$  est le potentiel électrostatique à l'abscisse  $x_3$ ,  $u_3(x_3)$  le déplacement à l'abscisse  $x_3$ ,  $D_3$  l'excitation du champ électrique qui est constante,  $h_{33}$  et  $\beta_{33}^S$  deux paramètres caractéristiques du



matériau. De plus :

$$u_3(x_3) = \left( A \sin \frac{\omega x_3}{c} + B \cos \frac{\omega x_3}{c} \right) e^{j\omega t} \quad (\text{II.79})$$

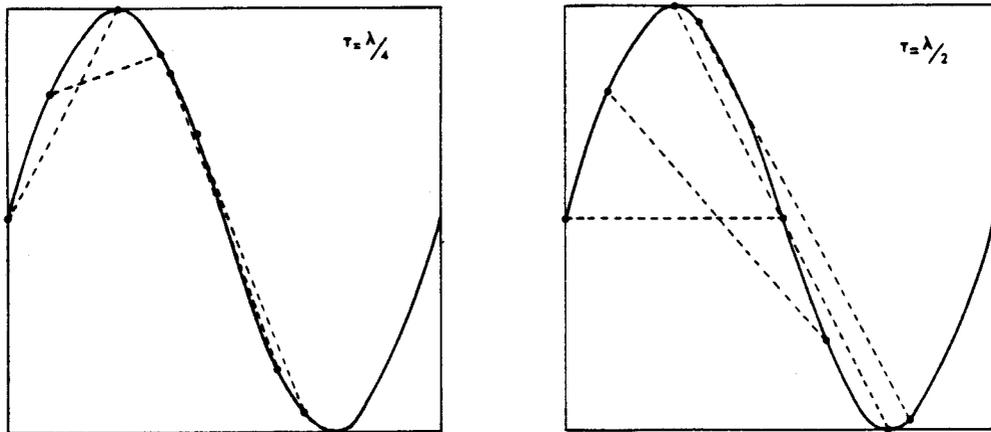
où  $c$  est la vitesse de propagation de l'onde,  $A$  et  $B$  deux constantes d'intégration fixées par les conditions aux limites. A la résonance,  $V(0)$  et  $V(\tau)$  sont nuls.  $V(x_3)$  s'obtient donc graphiquement par différence entre le fragment de sinusoïde :

$$y_1(x_3) = h_{33} u_3(x_3) \quad (\text{II.80})$$

et le segment de droite représentatif de :

$$y_2(x_3) = \beta_{33}^S D_3 x_3 + h_{33} u_3(0) \quad (\text{II.81})$$

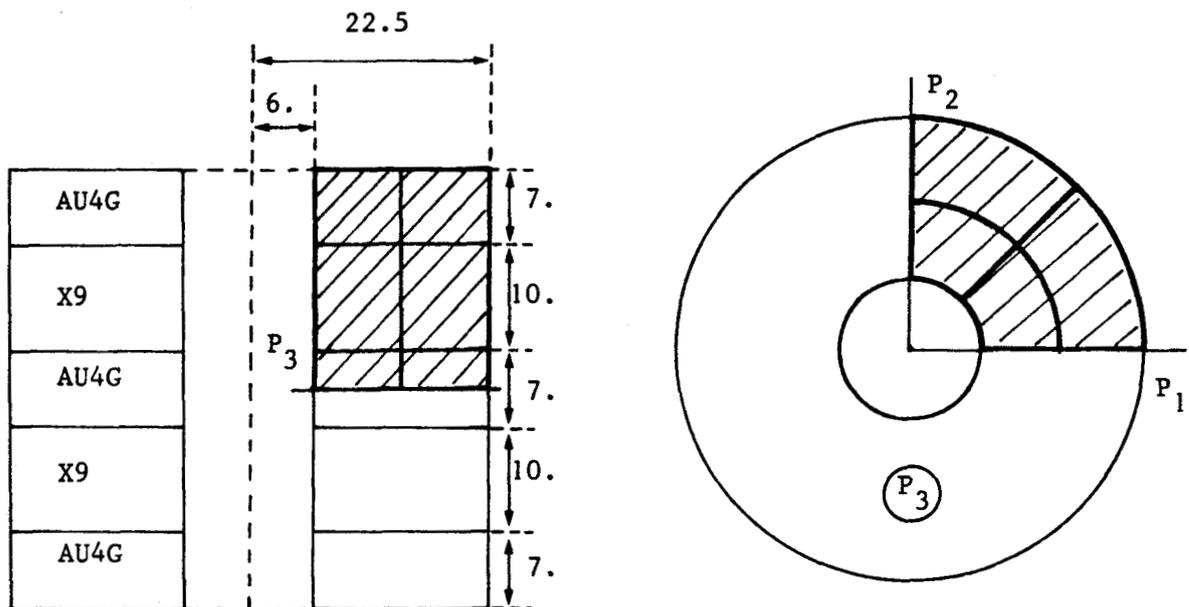
le fragment de sinusoïde et le segment de droite ayant leurs extrémités confondues en  $x_3 = 0$  et  $x_3 = \tau$ . Les figures ci-après présentent la construction pour  $\tau = \lambda/4$  et  $\tau = \lambda/2$ . On voit que



l'oscillation du potentiel disparaît rapidement (i.e il n'y a plus de plan nodal pour le potentiel) lorsque le plan médian de la céramique n'est plus strictement un plan de symétrie pour le déplacement. Cette disparition est, évidemment, d'autant plus rapide que la longueur d'onde augmente. On peut donc en conclure que, dans le cas d'une structure de dimension longitudinale grande par rapport à l'épaisseur de la céramique, un maillage simple en épaisseur est suffisant.

#### b) analyse par éléments finis

Pour tester les conclusions du modèle simple précédent, on a modélisé une colonne motrice à trois électrodes en AU4G et deux céramiques X9, représentée ci-après. Trois plans de symétrie,  $P_1$ ,



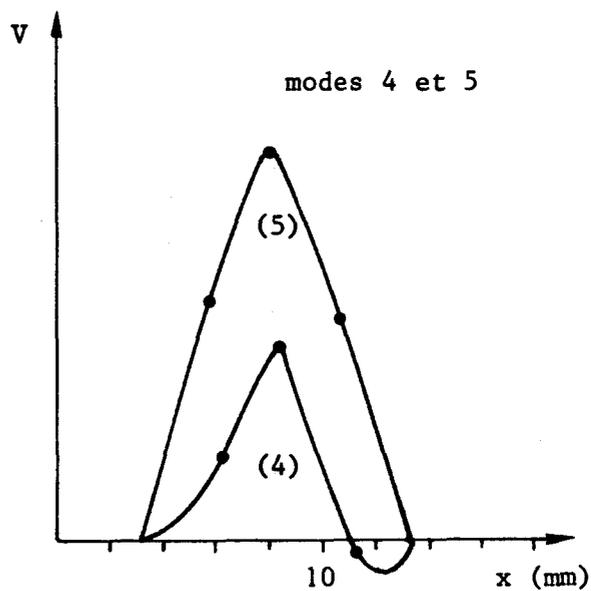
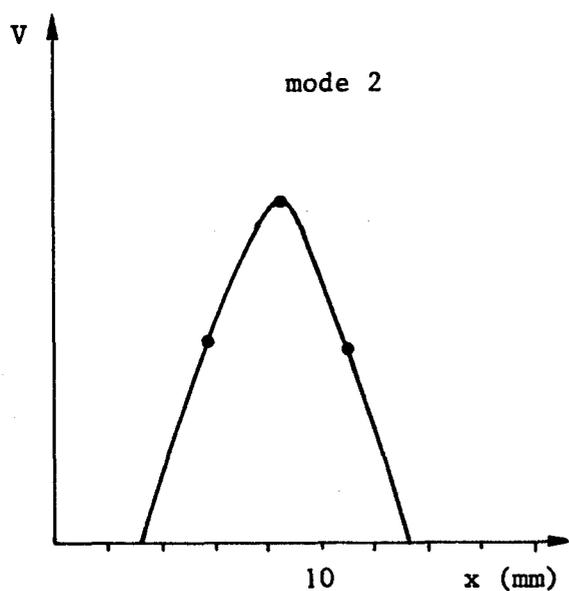
côtes en mm .

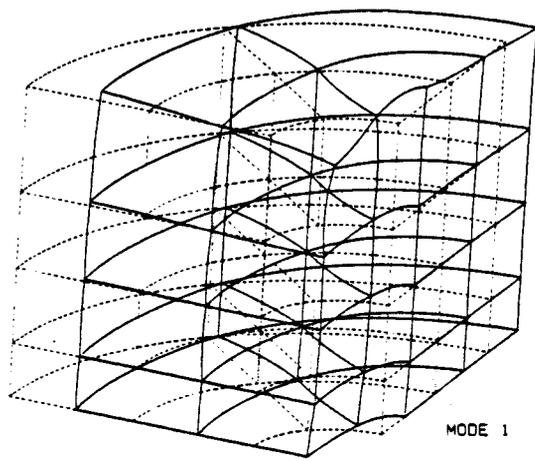
$P_2, P_3$ , ont permis de réduire le maillage à un huitième de la structure et de sélectionner les modes de dilatation-compression. Deux maillages ont été développés. Le premier, schématisé ci-dessus (zone hachurée), comporte 12 éléments hexaédriques et 111 noeuds. Le second est obtenu à partir du premier en coupant en deux, perpendiculairement à l'axe  $ox_3$ , chacun des quatre éléments piézoélectriques. Il comporte donc 16 éléments hexaédriques et 141 noeuds. Le tableau ci-après compare les fréquences de résonance et antirésonance obtenues avec les deux maillages, ainsi que les premières valeurs expérimentales. Ces fréquences ont la même norme que les fréquences de la céramique X9 seule (cf. section II.4.2.c). La figure (II.11) présente les quatre premiers modes propres et la figure (II.12) la variation avec la fréquence de l'impédance électrique obtenus avec le maillage à 16 éléments. On note que, comme pour la céramique isolée, les résultats sont bons, et surtout, qu'ils sont identiques avec les deux maillages. En particulier, la différence entre fréquences de résonance et d'antirésonance pour les trois modes couplés indiqués est la même, ce qui prouve que l'effet du champ électrique est pris en compte de façon très semblable dans les deux

Colonne AUG/X9/AU4G/X9/AU4G. Analyse modale.

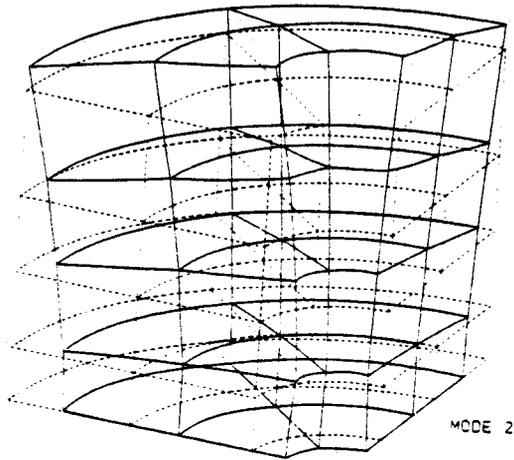
N° mode	Résonance			Antirésonance		
	maillage 12 elts	maillage 16 elts	exp	maillage 12 elts	maillage 16 elts	exp
1	.619	.619	-	.619	.619	-
2	.875	.873	.860	.904	.904	.888
3	.922	.919	-	.922	.919	-
4	1.059	1.061	1.035	1.064	1.066	1.038
5	1.275	1.270	1.227	1.291	1.286	1.234
6	1.562	1.547	-	1.562	1.547	-
7	1.786	1.784	-	1.786	1.784	-

cas. Ce résultat est bien interprété par la figure ci-dessous, où l'on a reporté la variation du potentiel à l'intérieur d'une céramique (avec l'interpolation quadratique des éléments employés) obtenue avec

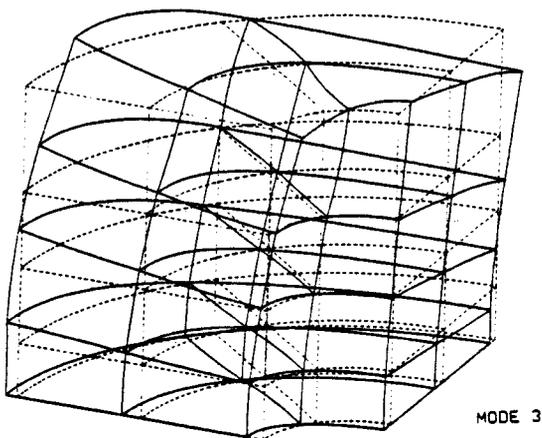




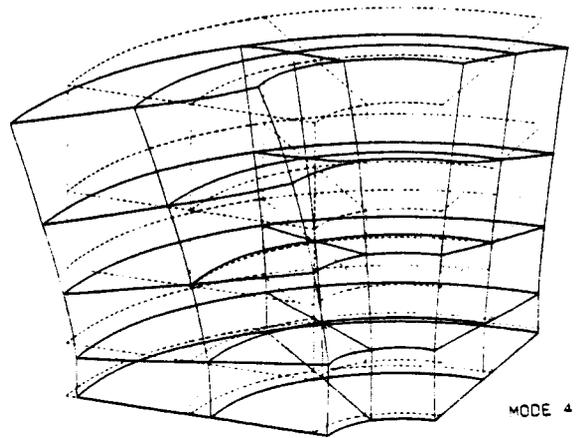
MODE 1



MODE 2



MODE 3



MODE 4

**Figure II.11 . Présentation des quatre premiers modes de la  
colonne AU4G/X9/AU4G/X9/AU4G .**

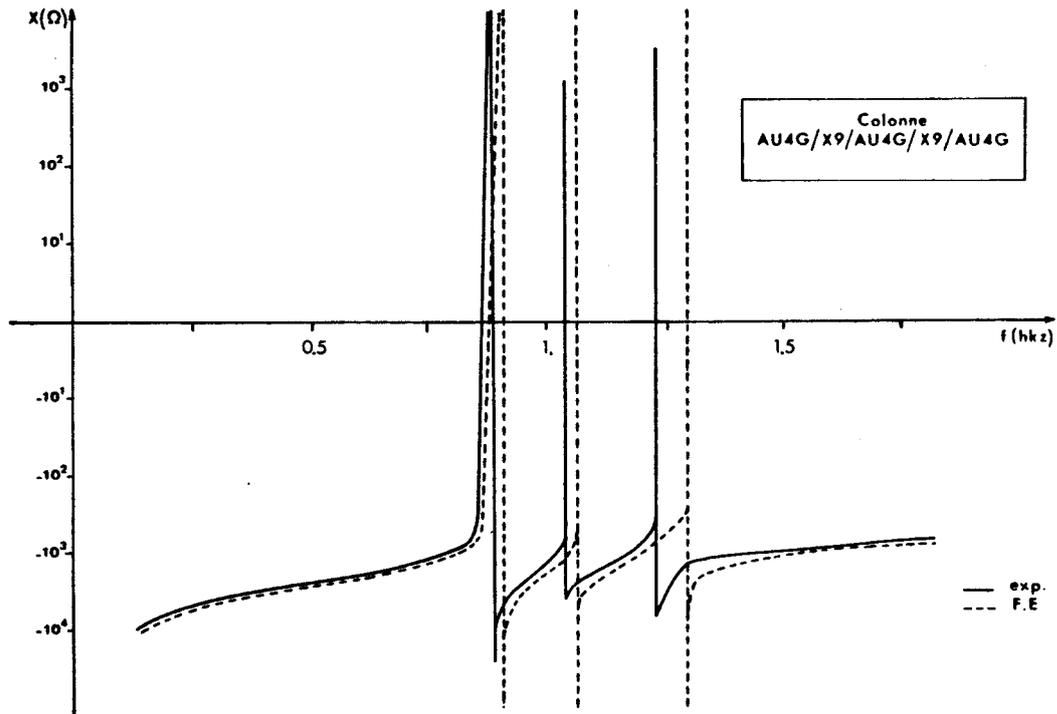


Figure II.12 . Variations avec la fréquence normalisée de l'impédance de la colonne AU4G/X9/AU4G/X9/AU4G . La norme de la fréquence est la même que pour la céramique X9 seule ( Cf. figure II.10 )

maillage fin, pour les modes 2,4 et 5. Ces variations sont, en effet, pratiquement sans oscillation et susceptibles d'une bonne approximation par l'interpolation parabolique d'un élément unique, dans le cas du maillage simple.

Dans le cas d'une colonne motrice à une ou deux dizaines de céramiques, la situation est encore plus favorable au maillage à un élément dans l'épaisseur, sauf pour une ou deux céramiques qui contiennent un noeud mais dans lesquelles, compte tenu de la grande longueur d'onde, le potentiel est quasiment nul partout.

#### II.4.4 Conclusion

L'ensemble des tests, dont les sections (II.4.1) à (II.4.3) sont un échantillon représentatif, a permis de dégager quelques règles utiles pour la modélisation de transducteurs Tonpilz entiers :

- un anneau de céramique peut être modélisé avec un seul élément dans l'épaisseur,
- un anneau de céramique, réduit au quart par symétrie, peut être modélisé en 3D par trois éléments triangulaires,
- un anneau de céramique dans une analyse utilisant la symétrie axiale peut donc, par conséquent, être modélisé avec un seul élément,
- l'écart entre fréquences de résonance et d'antirésonance est prévu avec une erreur absolue très inférieure à celle qui entache les deux fréquences, assurant ainsi une erreur relative satisfaisante,
- la réduction de Guyan et la procédure de sélection des degrés maîtres sont efficaces,
- les modes de papillonnage des pavillons sont susceptibles d'une description précise.

Ces remarques ont conduit aux maillages choisis pour modéliser les Tonpilz complets dont le chapitre suivant présente une analyse détaillée.

## CHAPITRE III

### MODELISATION ET ANALYSE DE TRANSDUCTEURS TONPILZ DANS L'AIR

*Comme indiqué au premier chapitre, le mode fondamental d'un transducteur Tonpilz est un mode de dilatation-compression qui est parfaitement décrit à l'aide d'un modèle d'onde plane . Toutefois, pour des transducteurs à large bande ou multifréquences, le fonctionnement du Tonpilz peut mettre en cause des effets 2D ou 3D qui perturbent les modes de dilatation-compression ou font apparaître des modes supplémentaires, comme par exemple les modes de papillonnage des pavillons. Le but de ce chapitre est l'interprétation, pour une dizaine de transducteurs différents, de leurs spectres de fréquences propres entre la fréquence fondamentale  $f_0$  et, suivant les cas, quatre à dix  $f_0$ . Il présente successivement la méthode d'analyse retenue, les transducteurs étudiés, les maillages utilisés, les résultats et l'identification des modes, les problèmes liés à la tige de précontrainte. Enfin, il suggère une méthode mixte, utilisant simultanément les méthodes d'onde plane et d'éléments finis et permettant, avec une très bonne précision, de réduire notablement les ressources informatiques nécessaires.*

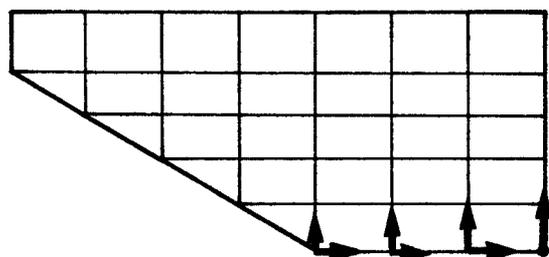
### III.1 LA METHODE D'ANALYSE INITIALE

Pour identifier tous les modes dans la partie du spectre intéressante de chacun des transducteurs étudiés, quatre analyses ont été réalisées systématiquement :

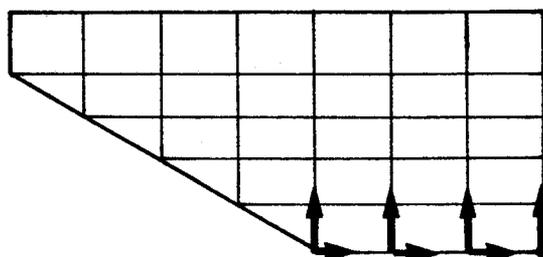
- l'analyse modale du transducteur complet à la résonance, à l'aide des éléments finis. Cette étape fournit précisément les fréquences de tous les modes et donne une représentation graphique des champs de déplacement correspondants.
- l'analyse modale du transducteur complet, à la résonance, à l'aide des ondes planes. Cette étape permet de repérer, parmi les modes fournis par le calcul en éléments finis, les modes de dilatation-compression et de mesurer les effets sur les valeurs de leurs fréquences des déformations 2D ou 3D.
- l'analyse modale du transducteur sans tige ou fourreau de précontrainte, à la résonance, à l'aide des ondes planes. Par différence avec les résultats de la précédente, cette étape permet d'identifier les modes propres liés à la tige et dont la section (III.5) discute en détail.
- l'analyse modale, par éléments finis, du pavillon du transducteur, avec des conditions aux limites différentes, schématisées ci-après :
  - . pavillon libre (aucune condition)
  - . embase se déplaçant parallèlement à elle-même ( $U_1$  constant)
  - . embase bloquée suivant l'axe du Tonpilz ( $U_1$  bloqué).

Elle a comme objectif la recherche d'une technique de prévision simple des fréquences de papillonnage.

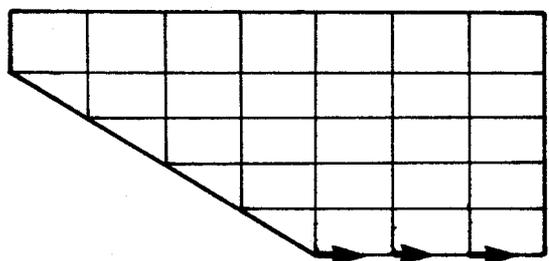
Dans tous les cas, la comparaison des résultats des quatre analyses a permis l'identification et donné des informations intéressantes. D'autre part, dans certains cas, les fréquences propres des modes ont été recherchées expérimentalement par méthode électrique (relevé d'impédance au kennellymètre par exemple), à l'aide de la détection par tête pick-up présentée en (II.4.1.c) ou par holographie, de façon à évaluer la précision des résultats théoriques obtenus et la validité des maillages développés.



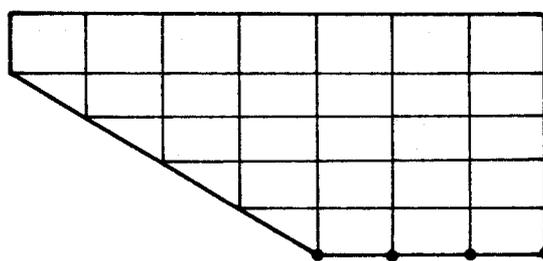
Pavillon libre.



$U_1$  constant.



$U_1$  bloqué.



$\tilde{U}$  bloqué.

### III.2 LES TRANSDUCTEURS ETUDIÉS

#### a) Le transducteur T1

Il est représenté figure (I.2) et comporte :

- une colonne motrice formée d'un empilement de dix céramiques X9 et de neuf électrodes épaisses en AU4G,
- un pavillon en GA3Z1, schématisé figure (II.1),
- une contremasse cylindrique en laiton,
- une tige de précontrainte en acier trempé 25CD4.

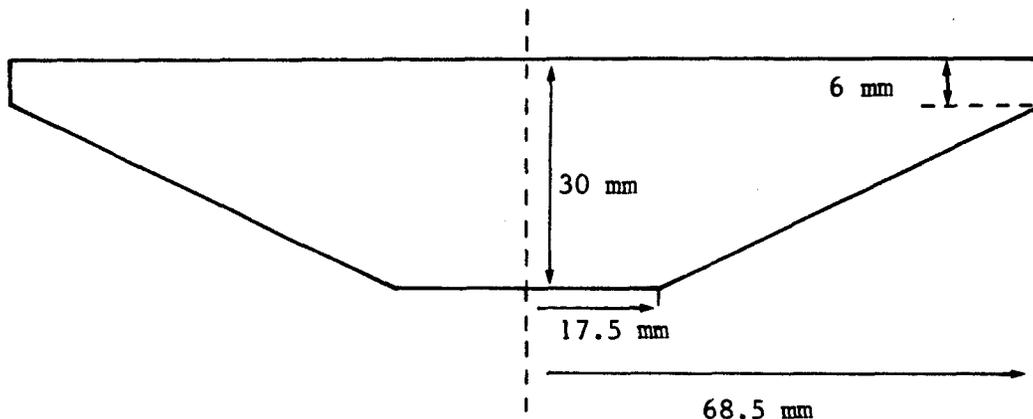
Par la forme quasi rectangulaire de sa face parlante, ce transducteur nécessite une modélisation tridimensionnelle complète.

#### b) Le transducteur T2a nominal

Il est représenté figure (I.1) et figure (I.3) et comporte :

- une colonne motrice formée de deux groupes de céramiques X5105, comportant respectivement six et seize éléments. Entre ces deux groupes se trouve une électrode porteuse en AU4G. Dans chaque groupe, les céramiques sont séparées par des électrodes très minces permettant l'établissement des

- contacts électriques,
- un pavillon à symétrie axiale, en AU4G, schématisé ci-dessous,



- une contremasse tronconique en acier trempé 25CD4,
- une tige de précontrainte en acier trempé 25CD4.

c) *Les transducteurs T2a à pavillons non nominaux*

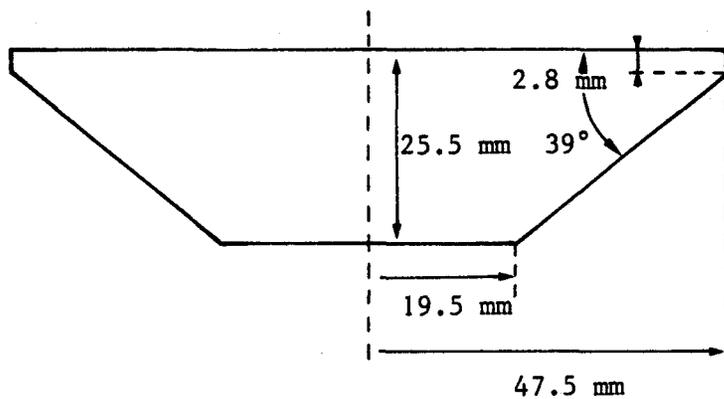
Pour analyser le phénomène de papillonnage et sa corrélation avec les dimensions du pavillon, cinq transducteurs ont été étudiés, qui ne diffèrent du T2a nominal que par les dimensions du pavillon :

- diamètre 180mm, épaisseur totale 30mm,
- diamètre 160mm, épaisseur totale 30mm,
- diamètre 120mm, épaisseur totale 30mm,
- diamètre 100mm, épaisseur totale 36mm.

d) *Le transducteur T2b*

Il comporte :

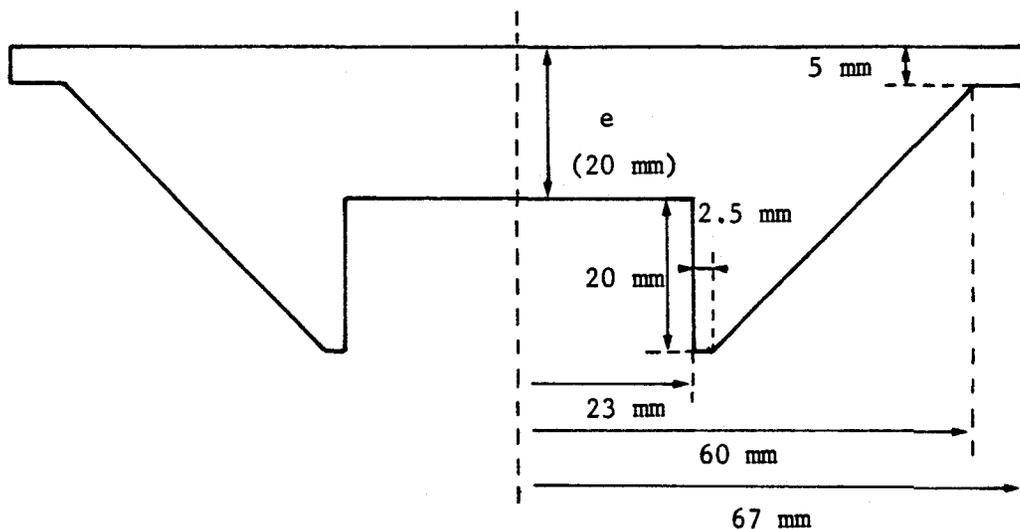
- une colonne motrice à vingt six céramiques X5105, séparées par des électrodes minces,
- un pavillon à symétrie axiale, en AU4G, schématisé ci-après,
- une contremasse et une tige de précontrainte identiques à celles du T2a.



e) *Le transducteur T3*

C'est aussi un transducteur à symétrie axiale mais dans lequel la précontrainte est maintenue grâce à un fourreau extérieur et non une tige. Deux versions ont été modélisées qui correspondent à deux épaisseurs de pavillon différentes. Ce transducteur comporte :

- une colonne motrice à vingt deux céramiques X5105,
- un pavillon à symétrie axiale, en AU4G, schématisé ci-dessous. Suivant la version, l'épaisseur  $e$  de ce pavillon est de 20 ou 15 mm,



- une contremasse en acier trempé 25CD4,
- un fourreau de précontrainte, cylindrique, en acier trempé 25CD4.

### III.3 LES MAILLAGES UTILISES

#### a) *Le transducteur T1*

La forme quasi rectangulaire du pavillon implique l'utilisation d'un maillage 3D, qui a été limité au quart de la structure par la prise en compte de deux plans de symétrie. Ce maillage est représenté sur la figure (III.1). Il comporte 597 noeuds et 115 éléments répartis en :

- 14 hexaèdres isoparamétriques à vingt noeuds,
- 80 éléments isoparamétriques à quinze noeuds, dont 30 piézoélectriques,
- 21 éléments unidimensionnels à deux noeuds.

Il contient environ 1200 degrés de liberté, dont 180 ont été retenus comme maîtres en phase finale de diagonalisation. Les principales simplifications introduites par rapport à la structure originale sont localisées au niveau du pavillon et ont été discutées en (II.4.1).

#### b) *Le transducteur T2a*

Le maillage utilisé est à symétrie axiale. Il est présenté sur la figure (III.2) pour le T2a nominal. Il comporte :

- 45 quadrilatères isoparamétriques à huit noeuds, dont 22 piézoélectriques,
- 5 triangles isoparamétriques à six noeuds,
- 12 éléments unidimensionnels à deux noeuds.

Au total, il contient environ 230 noeuds et 490 degrés de liberté dont 120 ont été retenus comme maîtres en phase finale de diagonalisation. Seules quelques simplifications mineures ont été réalisées. Il est intéressant de noter, par comparaison avec le maillage du T1, le raccordement en "parapluie" de la modélisation 1D de la tige de précontrainte sur la modélisation 2D du pavillon et de la contremasse. Comme il sera discuté plus loin, cette technique permet une description plus réaliste de la déformation dans la zone de transition.

#### c) *Le transducteur T2b*

Le maillage utilisé, à symétrie axiale, est quasiment identique à celui du T2a. Il comporte :

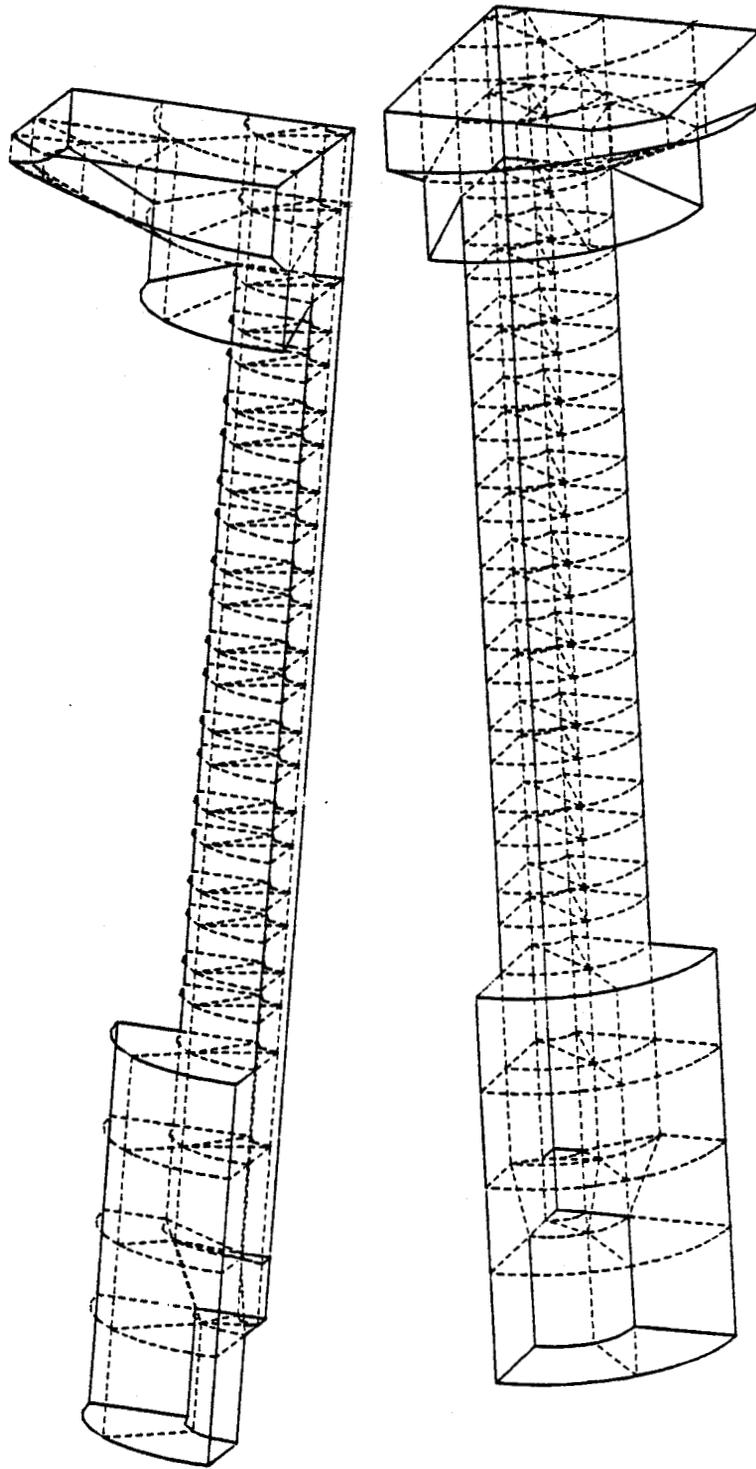


Figure III.1 . Présentation du maillage du Tonpilz T1 .

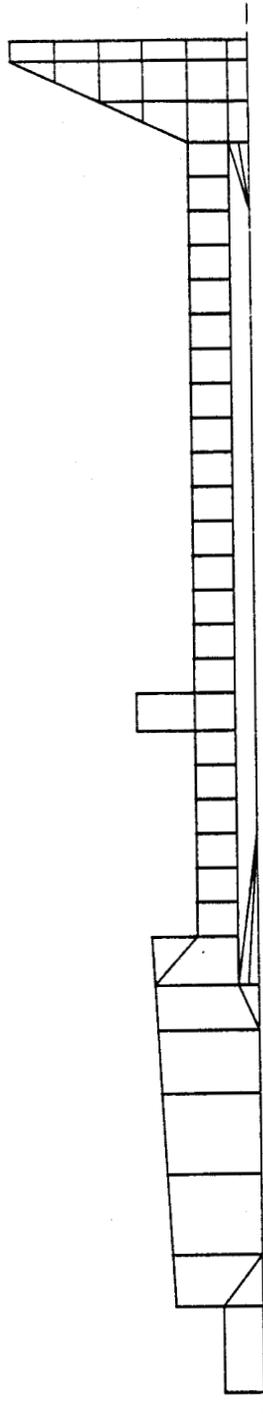


Figure III.2 . Présentation du maillage du Tonpilz T2a .

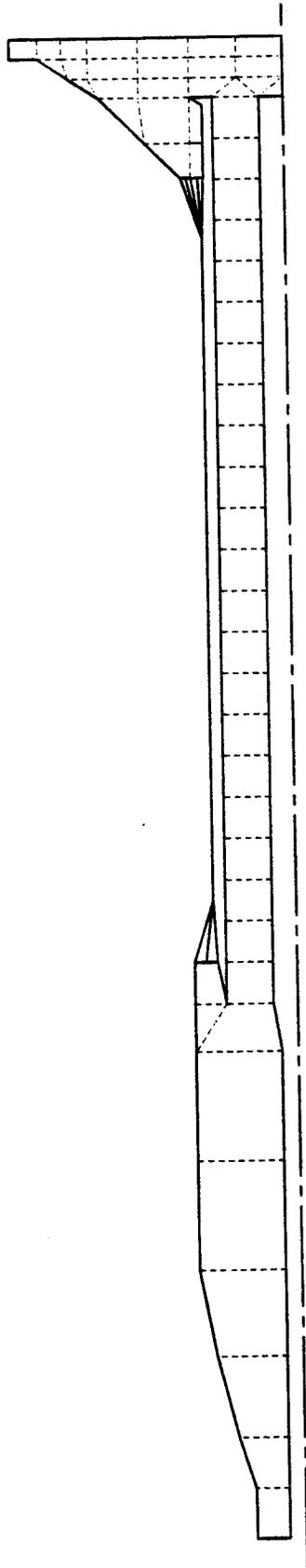


Figure III.3 . Présentation du maillage du Tonpilz T3 .

- 42 quadrilatères isoparamétriques à huit noeuds, dont 26 piézoélectriques,
- 5 triangles isoparamétriques à six noeuds,
- 14 éléments unidimensionnels à deux noeuds.

d) *Le transducteur T3*

A symétrie axiale également, le maillage utilisé est représenté sur la figure (III.3). Il comporte :

- 49 quadrilatères isoparamétriques à huit noeuds, dont 22 piézoélectriques,
- 7 triangles isoparamétriques à six noeuds,
- 16 éléments unidimensionnels à deux noeuds.

Au total il contient environ 260 noeuds et 540 degrés de liberté dont 120 ont été retenus comme maîtres en phase finale de diagonalisation. De nouveau, on remarque le raccordement en "parapluie" de la modélisation 1D sur la modélisation 2D. Par ailleurs, on doit noter également que la représentation utilisée pour ce fourreau exclut l'obtention de ses modes radiaux dont certains sont susceptibles d'apparaître dans la gamme de fréquences étudiée mais ne sont probablement pas couplés électriquement.

#### III.4 LES RESULTATS ET L'IDENTIFICATION DES MODES

Dans tous les cas analysés, les résultats sont groupés en deux tableaux comportant, pour le premier :

- les fréquences propres obtenues par éléments finis,
- les fréquences propres obtenues par la méthode des ondes planes,
- les fréquences propres obtenues par la méthode des ondes planes pour le transducteur sans tige,
- les caractéristiques retenues pour l'identification,

et, pour le second, les fréquences propres des trois premiers modes du pavillon, obtenues avec les quatre conditions aux limites discutées en III.1. Pour chaque transducteur, les valeurs des fréquences sont normées à la valeur de la fréquence du mode fondamental calculée par éléments finis. Pour les six transducteurs T2a, la même référence est choisie, celle du transducteur nominal, et, pour les deux transducteurs T3, celle du transducteur dont le pavillon a 20mm d'épaisseur. L'ordre de présentation retenu permet d'exploiter d'abord

les effets liés à la taille du pavillon et de terminer sur les aspects plus complexes du problème 3D.

#### III.4.1 Les transducteurs T2a [40,44]

Les résultats sont groupés en six tableaux dans les pages suivantes, une représentation schématique des champs de déplacement obtenus par la méthode des éléments finis étant donnée par la figure (III.4). Globalement, on trouve :

- une succession de *modes de dilatation-compression* situés, en moyenne, aux fréquences normées 1.0, 2.6, 4.5, 6.2, 7.7, ayant respectivement 1,2,3,4 et 5 plans nodaux. Si, dans un modèle très simple, on admet que ces modes sont en  $n\lambda/2$ , où  $n$  est entier, et qu'on prend pour vitesse de propagation une moyenne des vitesses des trois matériaux pondérée par leurs épaisseurs respectives, on obtient les fréquences normées 1.7, 3.4, 5.1, 6.8, 8.5, qui correspondent grossièrement aux valeurs indiquées précédemment. De façon plus détaillée, on note que l'écart entre les résultats obtenus par éléments finis et par onde plane est surtout important au voisinage d'un mode de papillonnage, comme c'est le cas, par exemple, pour le troisième mode du T2a de diamètre 160mm et le cinquième mode du T2a de diamètre 120mm. Cet écart s'explique évidemment par la forte contribution au mode considéré d'une déformation 2D du pavillon.
- une succession de *modes de tige*, situés en moyenne aux fréquences normées 3.0, 6.3 et 9.7. Ils correspondent exactement aux modes de dilatation-compression en  $n\lambda/2$  d'une tige dont les extrémités fixes sont les limites d'encastrement dans le pavillon et la contremasse, comme le confirment les courbes de la figure (III.5.a).
- une flexion du pavillon très importante, dès le second mode, pour ces deux types de modes.
- des *modes de papillonnage* dont les fréquences évoluent très rapidement avec le diamètre du pavillon, comme le résume la figure (III.6.a)
- un *mode d'électrode porteuse*, formellement identifié par une modélisation séparée de l'électrode et des céramiques premières voisines qui donne, pour le mode de flexion représenté figure (III.5.b) et pour des conditions aux limites variées, la fréquence réduite de 6.3.

**ANALYSE MODALE DU T2a NOMINAL A LA RESONANCE**  
 ( $\phi = 137\text{mm}$ ,  $e = 30\text{mm}$ )

Modes de la structure complète				
N°	Eléments finis	Ondes planes avec tige	Ondes planes sans tige	Commentaires
1	1.00 <sup>+</sup>	1.05	1.05	1 plan nodal
2	2.28	2.53	2.55	2 plans nodaux
3	3.03	3.46	-	Mode de tige $\lambda/2$
4	3.47 <sup>+</sup>	Papillonnage		2 plans nodaux
5	4.55	4.36	4.35	3 plans nodaux
6	6.14	6.36	6.38	4 plans nodaux
7	6.37	6.81	-	Mode de tige $\lambda$
8	6.63	-	-	Mode de l'électrode
9	7.51	Papillonnage		4 plans nodaux
10	8.19	7.24	7.18	5 plans nodaux
11	9.30	8.97	8.97	6 plans nodaux
12	9.98	10.25	-	Mode de tige $3\lambda/2$
13	10.36	10.56	10.55	7 plans nodaux

+ exp : .949 et 3.50 respectivement

Modes du pavillon				
N°	libre	$U_{\perp}$ constant	$U_{\perp}$ bloqué	$\mu$ bloqué
1	3.52	3.54	2.25	2.33
2	8.78	8.90	6.24	6.25
3	9.59	9.62	9.56	9.69

(fréquences normées : référence fréquence N°1 - éléments finis)

**ANALYSE MODALE DU T2a,  $\phi = 180\text{mm}$ ,  
e = 30mm, à la résonance**

Modes de la structure complète				
N°	Eléments finis	Ondes planes avec tige	Ondes planes sans tige	Commentaires
1	.846	.943	.946	1 plan nodal
2	1.77	Papillonnage		1 plan nodal
3	2.64	2.44	2.45	2 plans nodaux
4	3.18	3.45	-	Mode de tige $\lambda/2$
5	4.12	4.29	4.29	3 plans nodaux
6	5.42	Papillonnage		3 plans nodaux
7	6.20	6.33	6.35	4 plans nodaux
8	6.61	6.80	-	Mode de tige $\lambda$
9	6.77	-	-	Mode de l'électrode
10	7.50	7.24	7.17	5 plans nodaux
11	7.59	Papillonnage		5 plans nodaux
12	8.58	8.97	8.97	6 plans nodaux
13	9.75	10.26	-	Mode de tige $3\lambda/2$

Modes du pavillon				
N°	libre	$U_{\perp}$ constant	$U_{\perp}$ bloqué	$\bar{U}$ bloqué
1	2.04	2.06	1.26	1.28
2	5.69	5.73	4.00	4.04
3	7.28	7.29	7.28	7.35

(fréquences normées : référence fréquence N°1 - éléments finis - du T2a nominal).

**ANALYSE MODALE DU T2a,  $\phi = 160\text{mm}$ ,  
e = 30mm, à la résonance**

Modes de la structure complète				
N°	Eléments finis	Ondes planes avec tige	Ondes planes sans tige	Commentaires
1	.906	.988	.994	1 plan nodal
2	2.02	Papillonnage		1 plan nodal
3	2.81	2.47	2.49	2 plans nodaux
4	3.25	3.45	-	Mode de tige $\lambda/2$
5	4.30	4.31	4.31	3 plans nodaux
6	5.89	6.34	6.36	4 plans nodaux
7	6.23	6.80	-	Mode de tige $\lambda$
8	6.63	-	-	Mode de l'électrode
9	7.20	Papillonnage		4 plans nodaux
10	7.65	7.23	7.18	5 plans nodaux
11	8.50	Papillonnage		5 plans nodaux
12	8.80	8.96	8.97	6 plans nodaux
13	9.91	10.26	-	Mode de tige $3\lambda/2$

Modes du pavillon				
N°	libre	$U_{\perp}$ constant	$U_{\perp}$ bloqué	$\mu$ bloqué
1	2.62	2.62	1.62	1.68
2	6.91	6.98	4.90	4.92
3	8.20	8.20	8.20	8.29

(fréquences normées : référence fréquence N°1 - éléments finis - du T2a nominal)

**ANALYSE MODALE DU T2a,  $\phi = 120\text{mm}$ ,  
e = 30mm, à la résonance**

Modes de la structure complète				
N°	Eléments finis	Ondes planes avec tige	Ondes planes sans tige	Commentaires
1	1.05	1.10	1.10	1 plan nodal
2	2.43	2.58	2.61	2 plans nodaux
3	3.12	3.47	-	Mode de tige $\lambda/2$
4	3.82	Papillonnage		2 plans nodaux
5	4.90	4.40	4.40	3 plans nodaux
6	6.18	6.37	6.39	4 plans nodaux
7	6.54	6.83	-	Mode de tige $\lambda$
8	6.66	-	-	Mode de l'électrode
9	7.55	7.24	7.19	5 plans nodaux
10	8.53	8.97	8.97	6 plans nodaux
11	9.77	10.26	-	Mode de tige $3\lambda/2$
12	10.20	10.56	10.55	7 plans nodaux

Modes du pavillon				
N°	libre	$U_{\perp}$ constant	$U_{\perp}$ bloqué	$U_{\parallel}$ bloqué
1	4.52	4.55	2.95	3.03
2	10.45	10.51	7.48	7.48
3	11.16	11.31	10.90	11.05

(fréquences normées : référence fréquence N°1 - éléments finis - du T2a nominal)

**ANALYSE MODALE DU T2a,  $\phi = 100\text{mm}$ ,  
e = 30mm, à la résonance**

Modes de la structure complète				
N°	Eléments finis	Ondes planes avec tige	Ondes planes sans tige	Commentaires
1	1.11	1.16	1.17	1 plan nodal
2	2.56	2.65	2.69	2 plans nodaux
3	3.17	3.48	-	Mode de tige $\lambda/2$
4	4.18	4.48	4.48	3 plans nodaux
5	5.68	Papillonnage		3 plans nodaux
6	6.21	6.39	6.43	4 plans nodaux
7	6.62	6.85	-	Mode de tige $\lambda$
8	7.05	-	-	Mode de l'électrode
9	7.60	7.25	7.21	5 plans nodaux
10	8.80	8.99	8.99	6 plans nodaux
11	9.93	10.26	-	Mode de tige $3\lambda/2$
12	10.48	10.56	10.55	7 plans nodaux

Modes du pavillon				
N°	libre	$U_{\perp}$ constant	$U_{\perp}$ bloqué	$\mu$ bloqué
1	6.22	6.31	4.24	4.32
2	12.54	12.55	9.21	9.29
3	14.14	14.52	13.06	13.21

(fréquences normées : référence fréquence N°1 - éléments finis - du T2a nominal)

**ANALYSE MODALE DU T2a,  $\phi = 100\text{mm}$ ,  
e = 36mm, à la résonance**

Modes de la structure complète				
N°	Éléments finis	Ondes planes avec tige	Ondes planes sans tige	Commentaires
1	1.05	1.10	1.11	1 plan nodal
2	2.49	2.58	2.61	2 plans nodaux
3	3.16	3.46	-	Mode de tige $\lambda/2$
4	4.14	4.39	4.38	3 plans nodaux
5	5.81	Papillonnage		3 plans nodaux
6	6.23	6.35	6.37	4 plans nodaux
7	6.62	6.81	-	Mode de tige $\lambda$
8	7.17	-	-	Mode de l'électrode
9	7.61	7.23	7.17	5 plans nodaux
10	8.72	8.93	8.93	6 plans nodaux
11	9.91	10.24	-	Mode de tige $3\lambda/2$
12	10.38	10.52	10.50	7 plans nodaux

Modes du pavillon				
N°	libre	$U_{\perp}$ constant	$U_{\perp}$ bloqué	$\mu$ bloqué
1	6.70	6.77	4.07	4.13
2	11.82	11.82	8.60	8.72
3	14.85	15.17	12.36	12.43

(fréquences normées : référence fréquence N°1 - éléments finis - du T2a nominal)

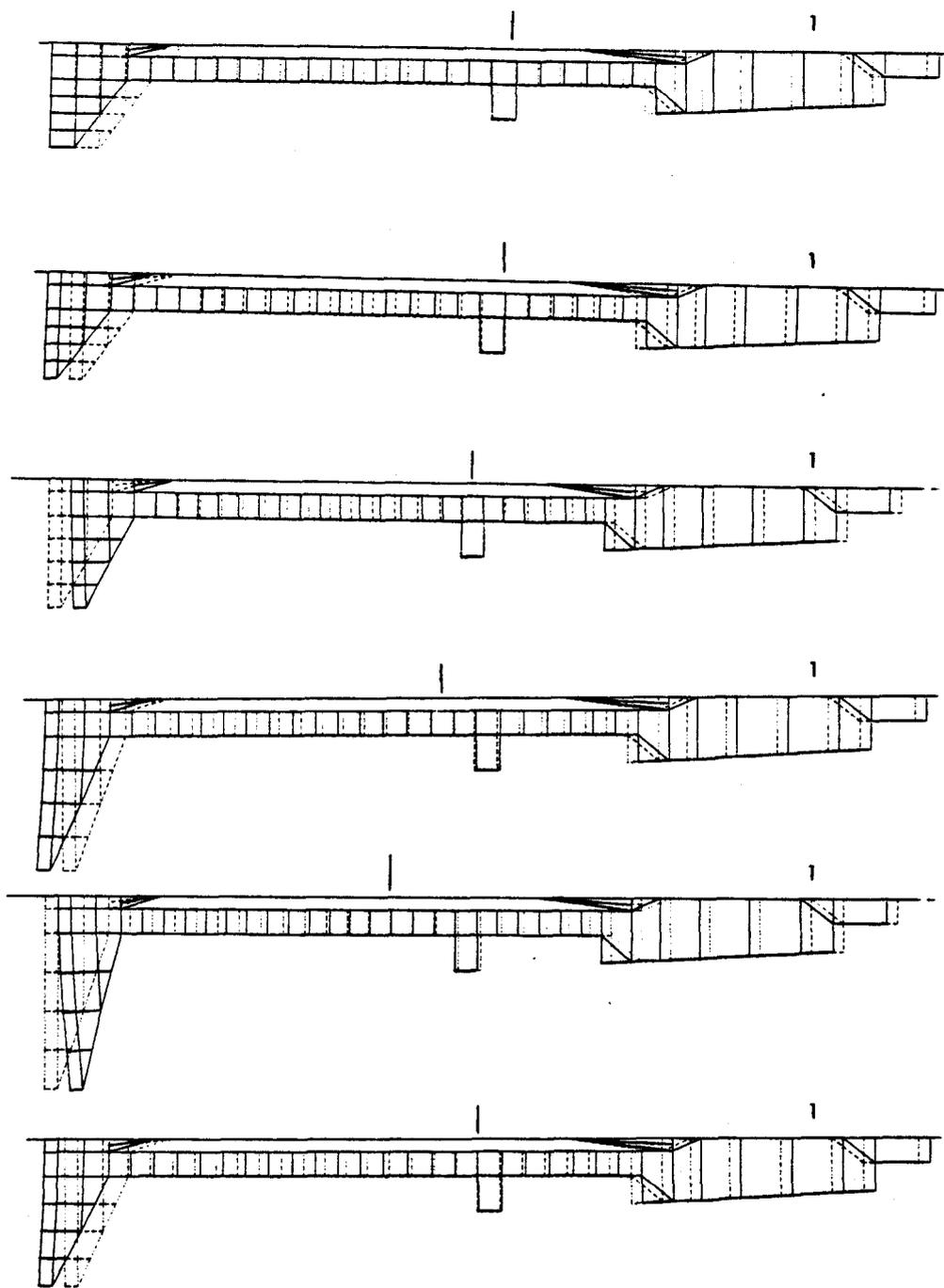


Figure III.4 . Présentation schématique des modes du T2a . Le numéro est celui du mode et fait référence aux tableaux des pages précédentes . Les tirets repèrent les plans nodaux . De bas en haut :  $\phi = 137$  mm, 180 mm, 160 mm, 120 mm, 100 mm avec  $e = 30$  mm, 100 mm avec  $e = 36$  mm .

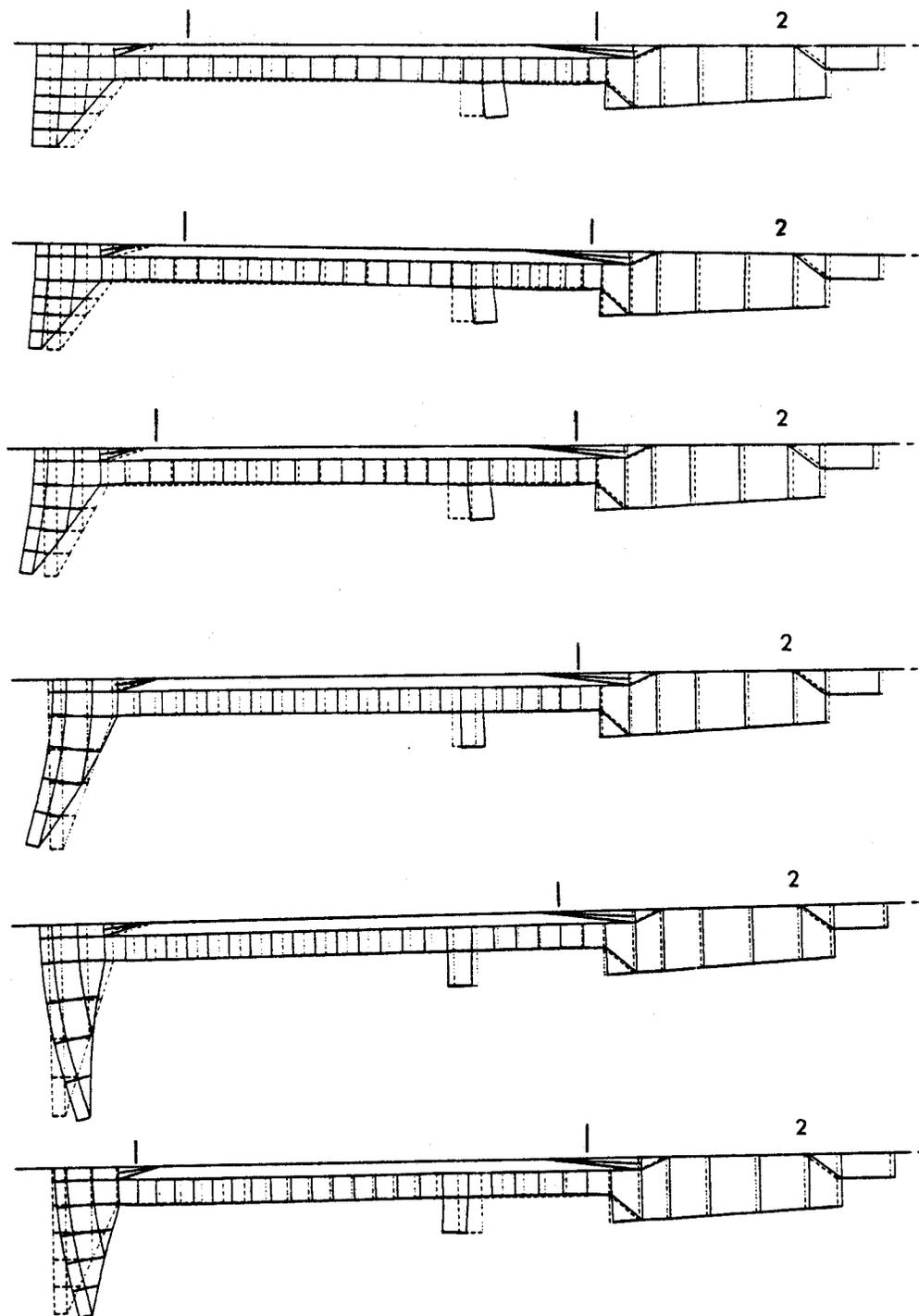


Figure III.4 . Suite .

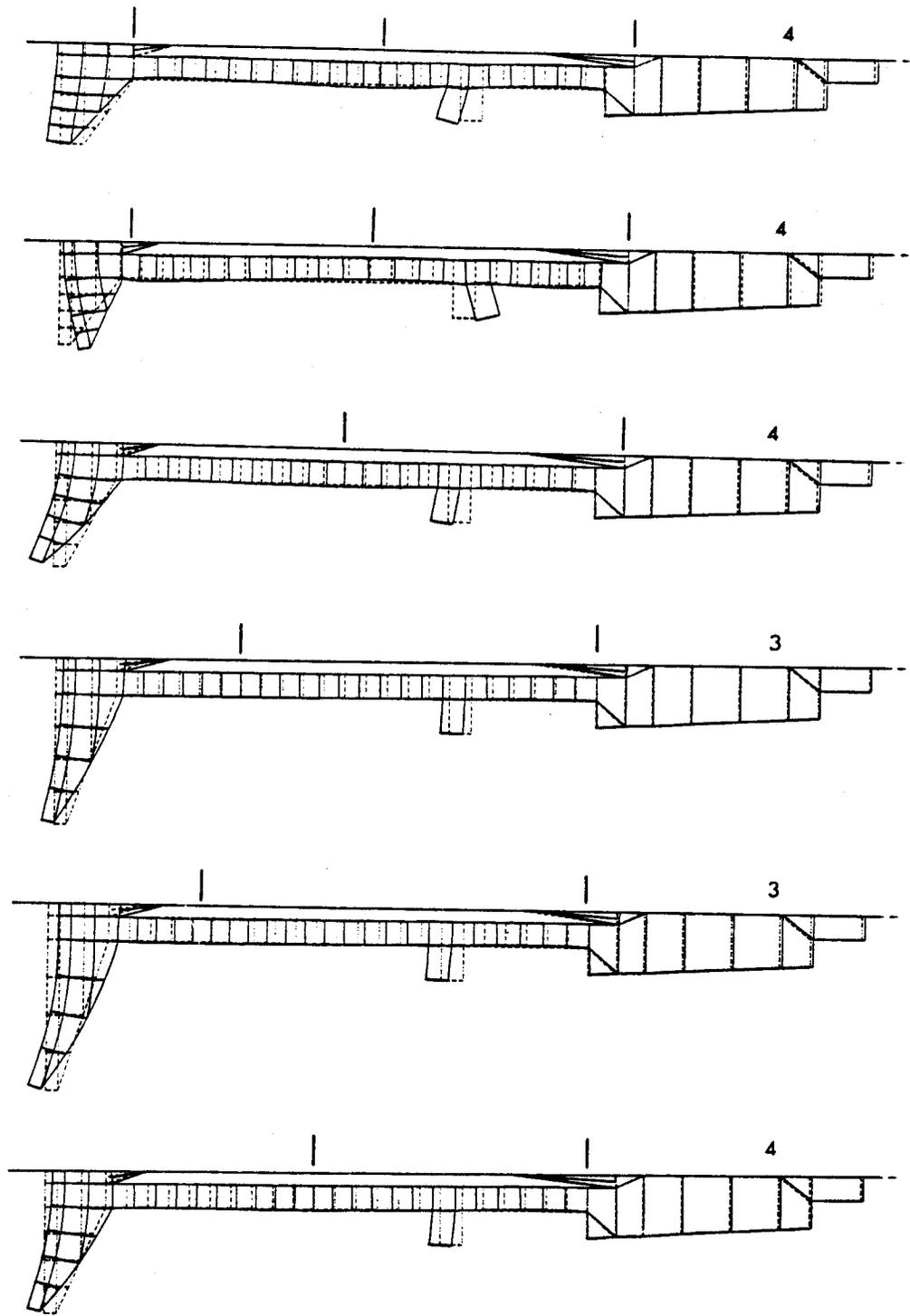


Figure III.4 . Suite .

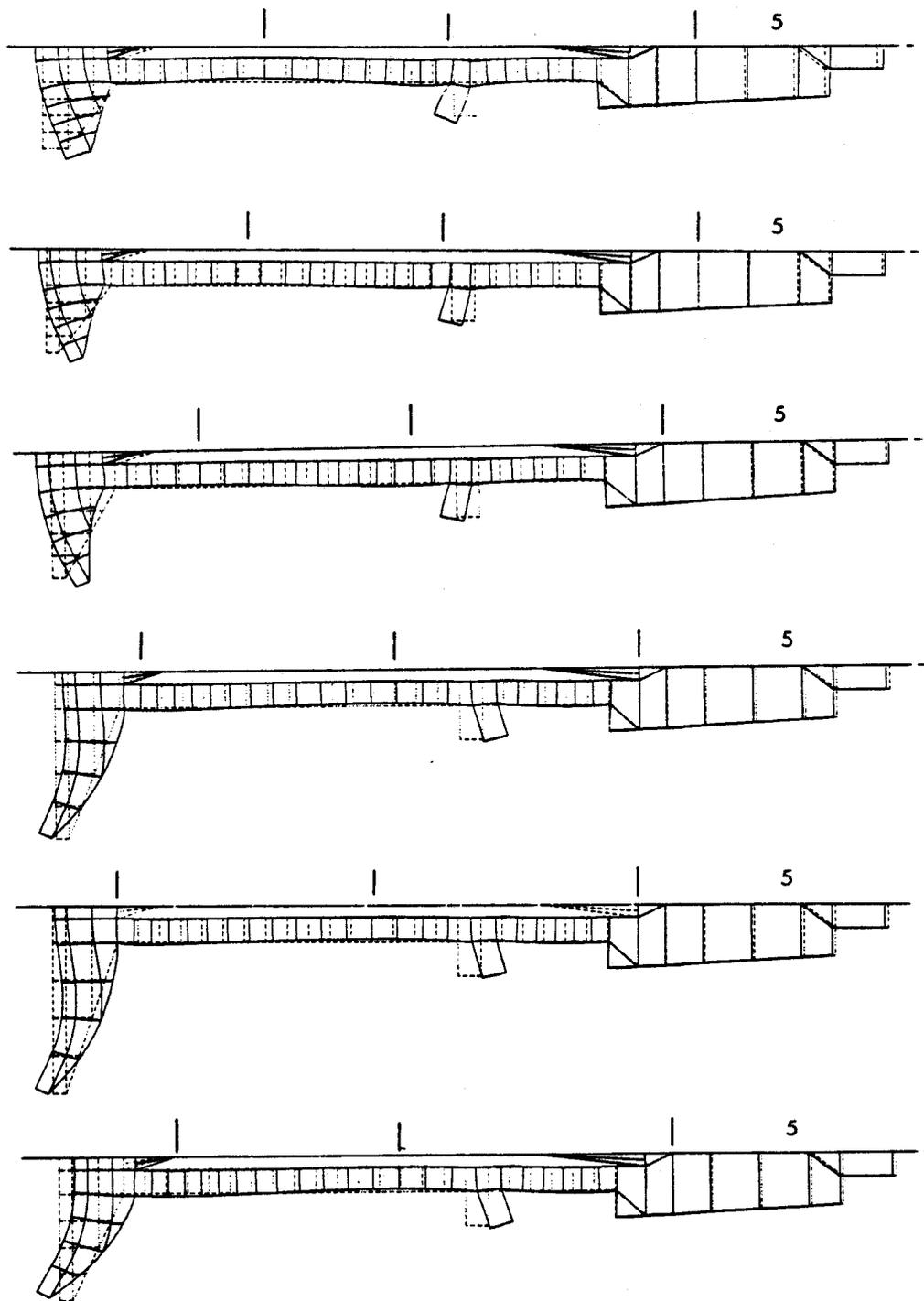


Figure III.4 . Suite .

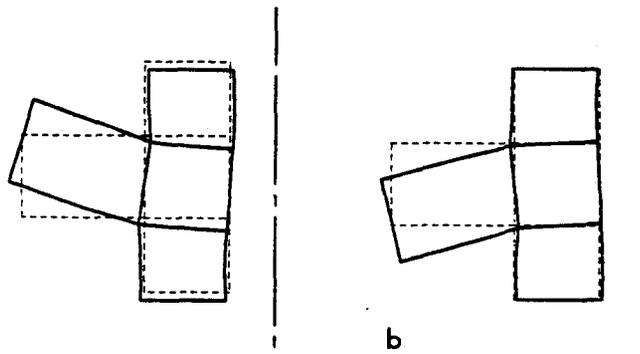
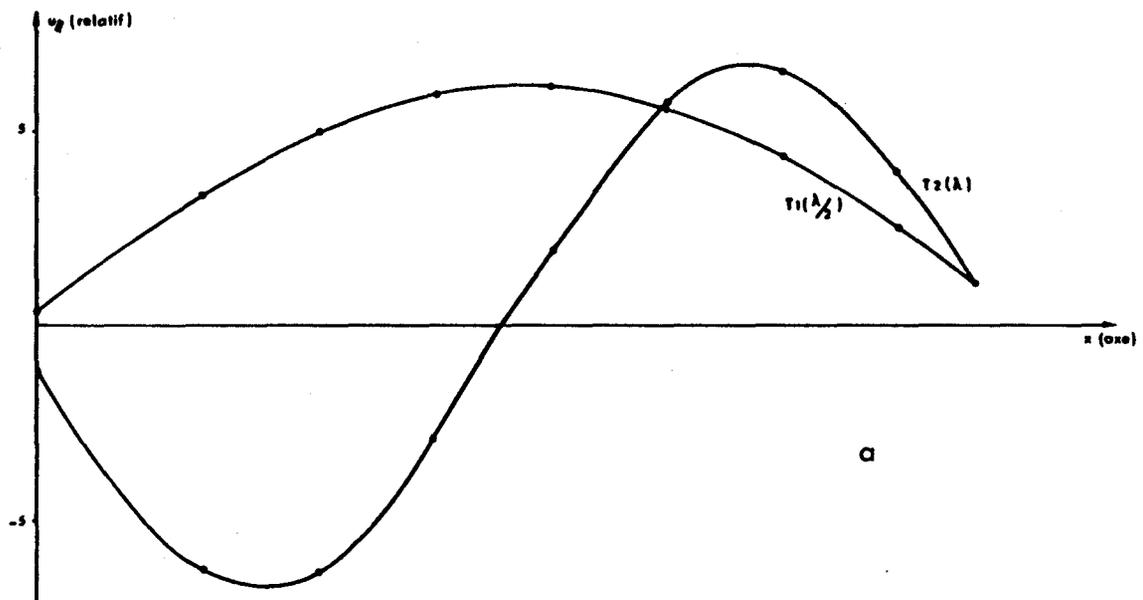


Figure III.5 . a/ Variations le long de la tige de précontrainte du déplacement axial pour les modes de tige  $\lambda/2$  et  $\lambda$  du T2a nominal . Les points correspondent aux noeuds .  
 b/ Mode de flexion de l'électrode porteuse du T2a nominal . Le modèle comprend, outre l'électrode, les 2 céramiques premières voisines avec, sur les faces supérieure et inférieure, une condition de blocage ( fig. de droite ) ou de déplacement à  $u_x$  constant ( fig. de gauche ) .

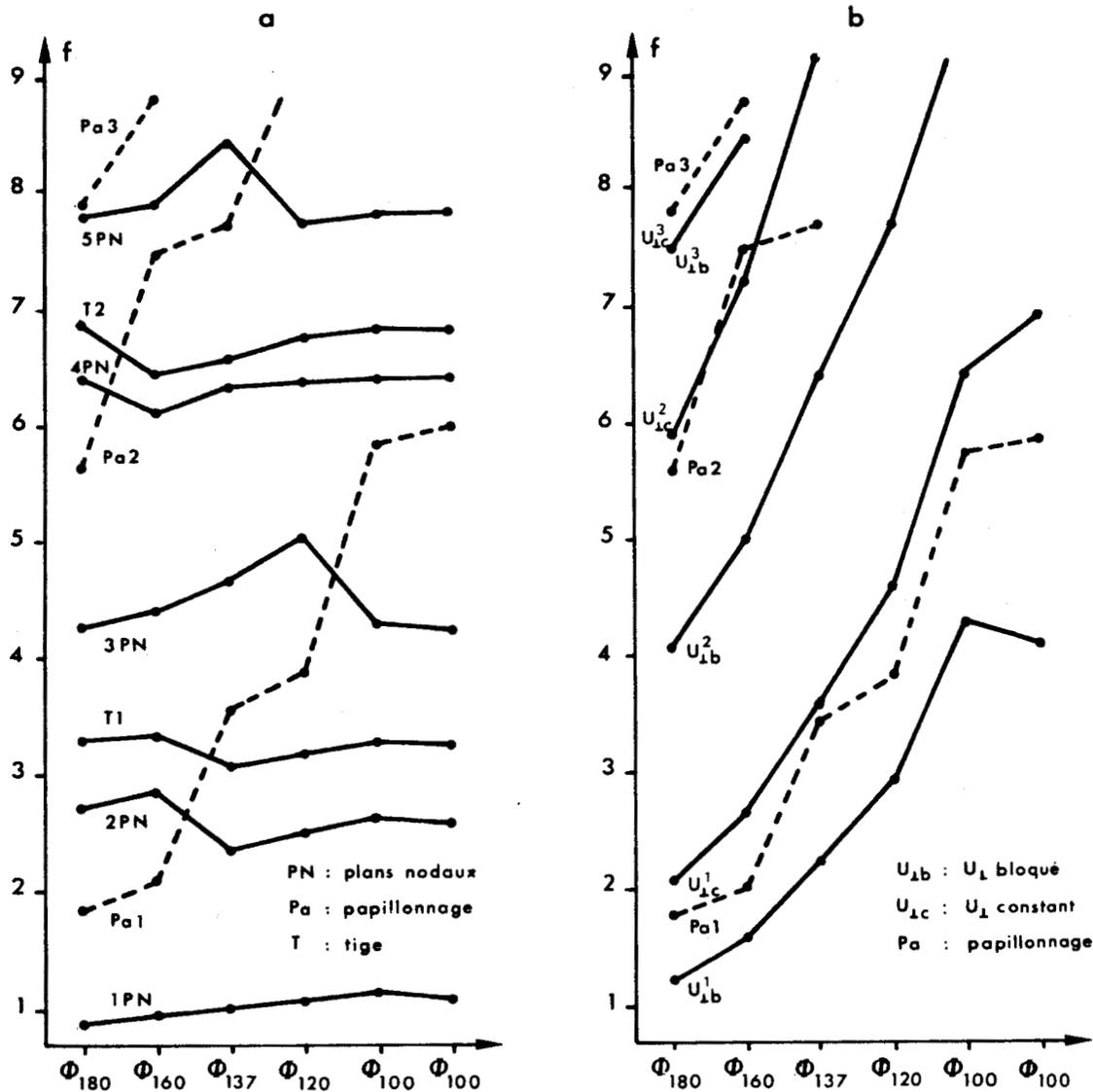


Figure III.6 . a - Variations des fréquences propres du T2a avec le type de pavillon ( on note la relative indépendance des modes de dilatation compression et la forte variation des modes de papillonnage ) .

b - Variations avec le type de pavillon des fréquences de papillonnage du T2a et des premières fréquences propres du pavillon seul ( on note l'encadrement très lâche des deux premiers papillonnages ) .

Les fréquences sont normées comme indiqué dans le texte .

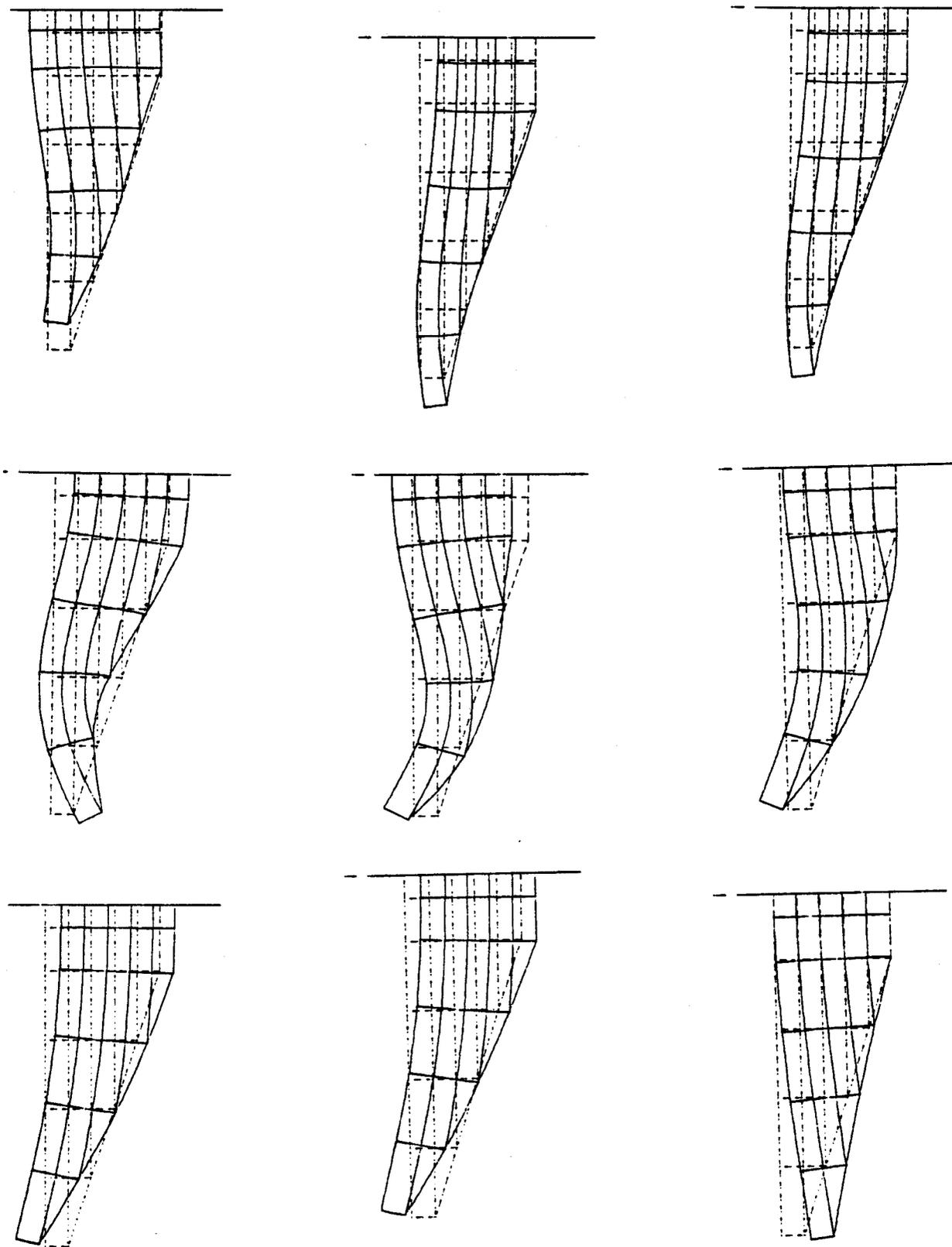


Figure III.7 . Présentation des modes propres du pavillon du T2a de 180 mm de diamètre . De gauche à droite : libre,  $U_1$  constant et  $U_1$  bloqué .

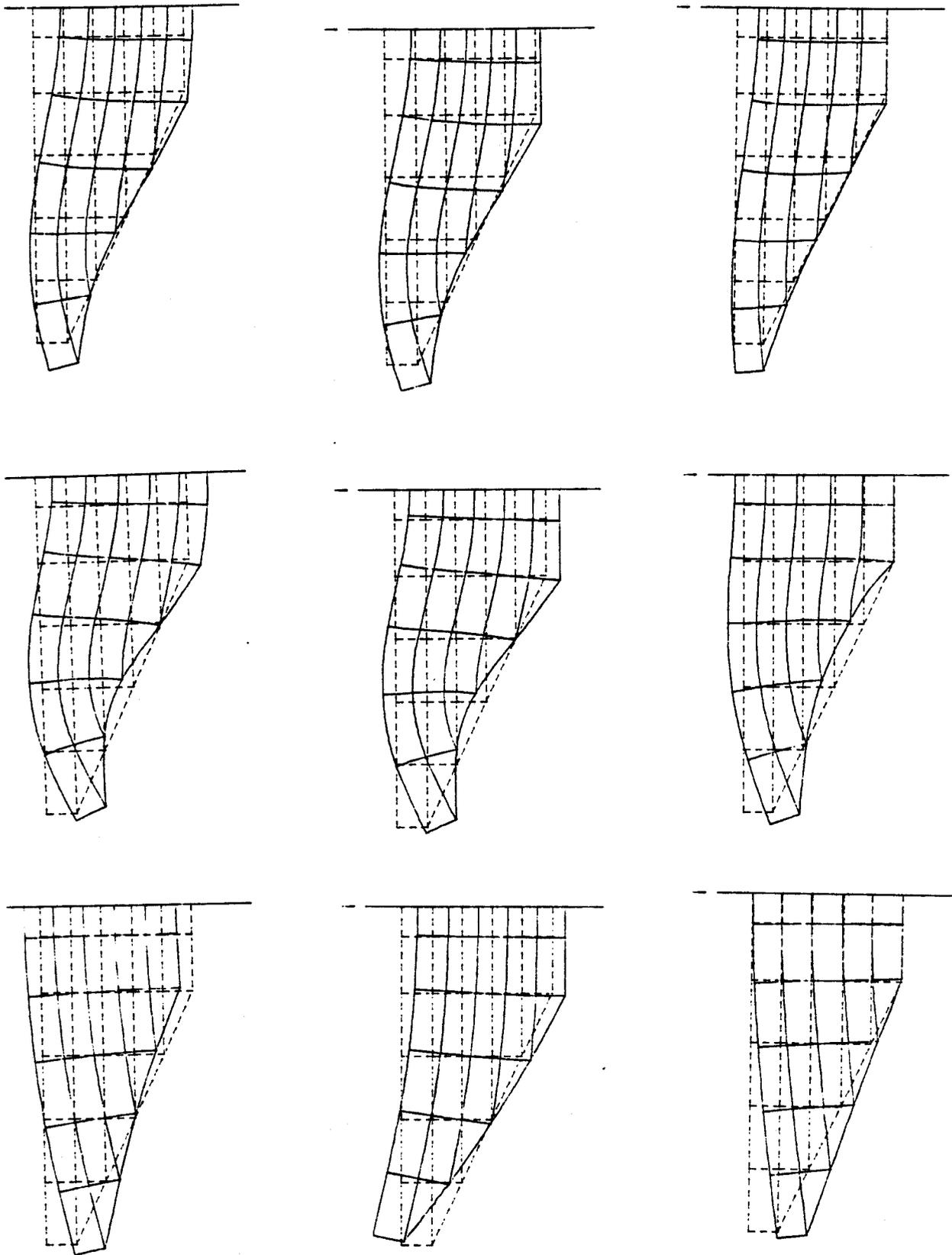


Figure III.7 . Suite . Pavillon de 137 mm de diamètre .

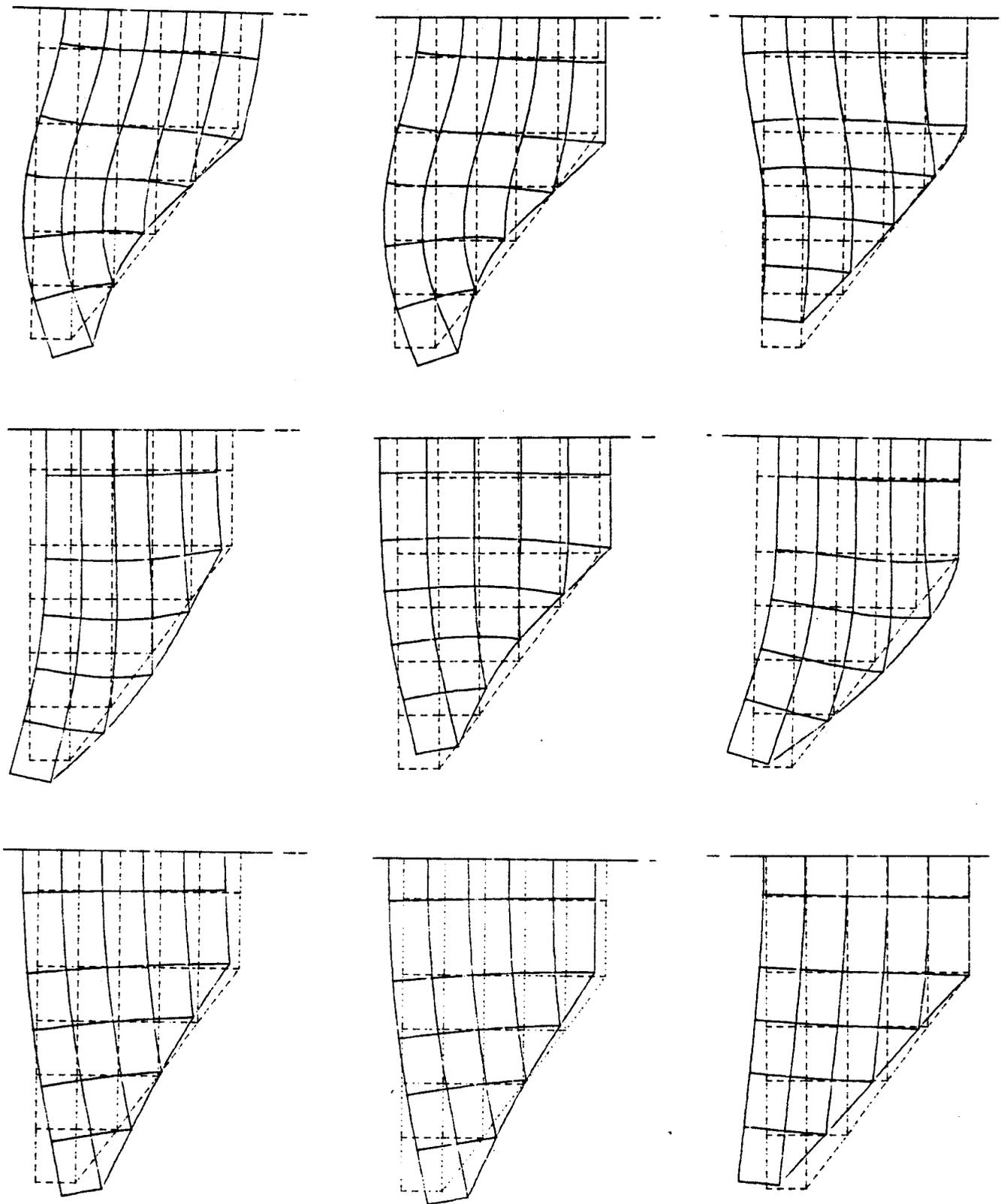


Figure III.7 . Suite . Pavillon de 100 mm de diamètre .

Expérimentalement, seul le T2a nominal a été caractérisé, les modes 1 et 4 étant facilement excités et identifiés. La précision des résultats obtenus à l'aide des éléments finis est, pour ces deux modes, de 5% et 1% respectivement, l'écart sur le fondamental s'expliquant en bonne partie par le fait que les vingt électrodes minces ont été négligées dans le maillage. Les autres modes, bien que très peu couplés électriquement dans l'air, seront retrouvés ultérieurement avec un couplage électrique beaucoup plus important dans l'eau. Par ailleurs, les seconds tableaux et la présentation graphique associée de la figure (III.6.b) montrent que, pour les deux premiers papillonnages :

$$f(U_{\perp} \text{ bloqué}) < f(\text{papillonnage}) < f(U_{\perp} \text{ constant})$$

alors que, pour le troisième, il n'y a pas d'encadrement. Enfin, la figure (III.7) présente les modes propres de trois des six pavillons.

#### III.4.2 Le transducteur T2b [40]

Comme pour le T2a, les résultats sont groupés en un tableau, page suivante, alors que les champs de déplacement des huit premiers modes propres du transducteur complet et des trois premiers modes du pavillon seul sont schématisés respectivement figure (III.8) et figure (III.9). L'analyse est la même que pour le T2a, hormis l'absence du mode d'électrode. Les fréquences des modes 1,2,4 et 5 ont été mesurées par méthode électrique. La précision des résultats obtenus à l'aide des éléments finis est, pour ces quatre modes, 3.9%, 0.9%, 5.8% et 5.6%, l'écart sur le fondamental s'expliquant, ici aussi, par le fait que les vingt cinq électrodes minces ont été négligées dans le maillage. Enfin, on note que, pour le premier papillonnage :

$$f(U_{\perp} \text{ bloqué}) < f(\text{papillonnage}) < f(U_{\perp} \text{ constant})$$

#### III.4.3 Le transducteur T3 [40]

Pour les deux transducteurs (pavillons d'épaisseurs respectives 20mm et 15mm), les résultats sont groupés en tableaux sur les pages suivantes. Les champs de déplacement des sept premiers modes propres du transducteur complet et des trois premiers modes propres du pavillon seul sont schématisés respectivement figure (III.10) et (III.11) pour le seul cas du pavillon de 15mm d'épaisseur, les deux cas étant, du point de vue des modes propres, quasi identiques. L'analyse est la même que pour le T2b à condition de remplacer les modes de tige par les modes de fourreau. L'inégalité entre fréquences

**ANALYSE MODALE DU T2b A LA RESONANCE**

Modes de la structure complète				
N°	Eléments finis	Ondes planes avec tige	Ondes planes sans tige	Commentaires
1	1.00 <sup>+</sup>	1.02	1.03	1 plan nodal
2	2.27 <sup>+</sup>	2.33	2.39	2 plans nodaux
3	2.71	2.92	-	Mode de tige $\lambda/2$
4	3.79 <sup>+</sup>	3.93	3.93	3 plans nodaux
5	5.09 <sup>+</sup>	Papillonnage		3 plans nodaux
6	5.27	5.74	-	Mode de tige $\lambda$
7	6.08	5.41	5.46	4 plans nodaux
8	6.59	6.54	6.54	5 plans nodaux
9	7.57	7.49	7.49	6 plans nodaux
10	8.27	8.54	-	Mode de tige $3\lambda/2$
11	8.93	9.06	9.06	7 plans nodaux

+ exp : 0.962, 2.25, 3.58, 4.82 respectivement

Modes du pavillon				
N°	libre	$U_{\perp}$ constant	$U_{\perp}$ bloqué	$\mu$ bloqué
1	6.05	6.20	4.53	4.65
2	12.88	12.95	10.02	10.10
3	13.71	14.26	13.48	13.78

(fréquences normées : référence fréquence N°1 - éléments finis)

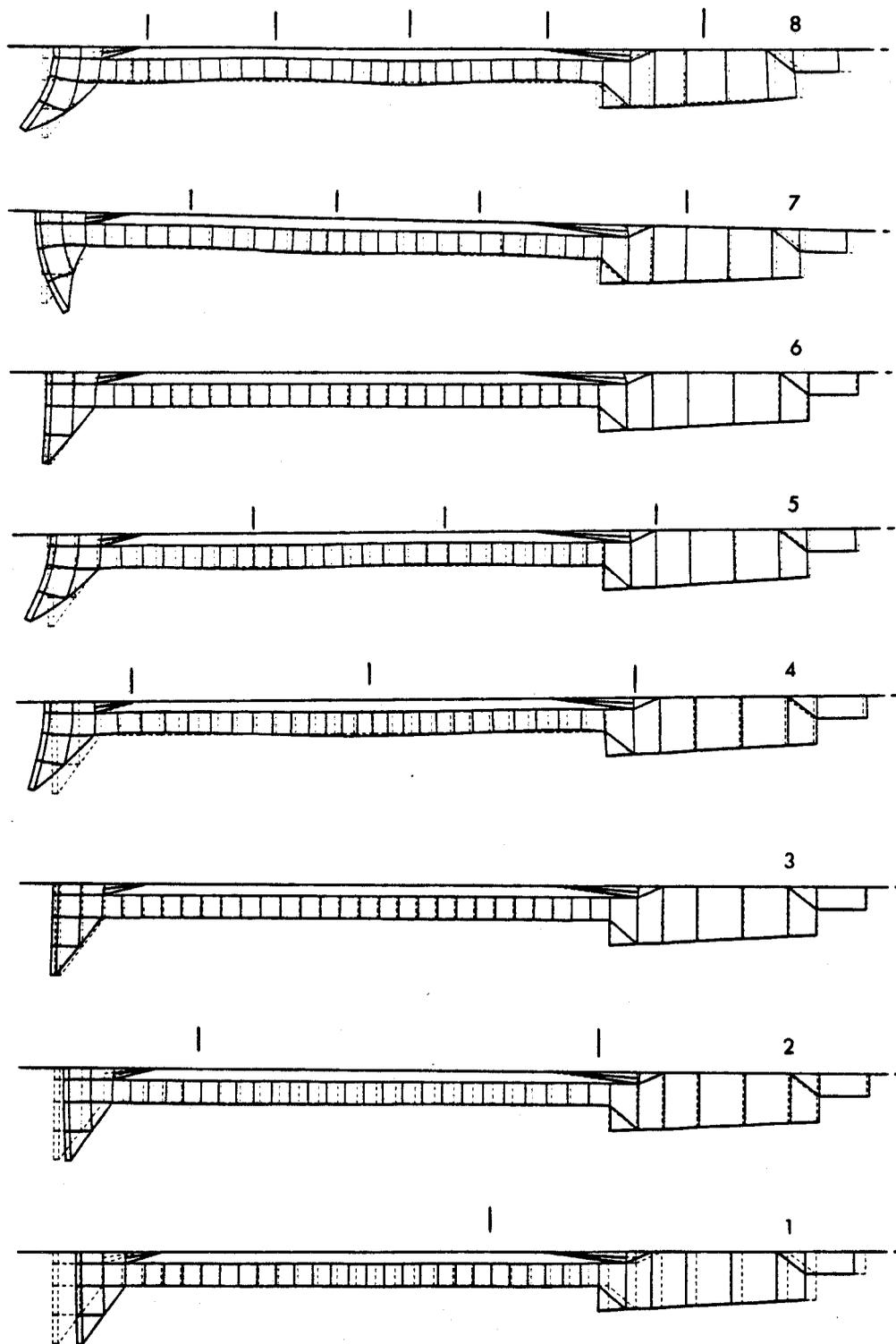


Figure III.8 . Présentation schématique des modes du T2b . le numéro est celui du mode et fait référence au tableau de la page précédente . Les tirets repèrent les plans nodaux .

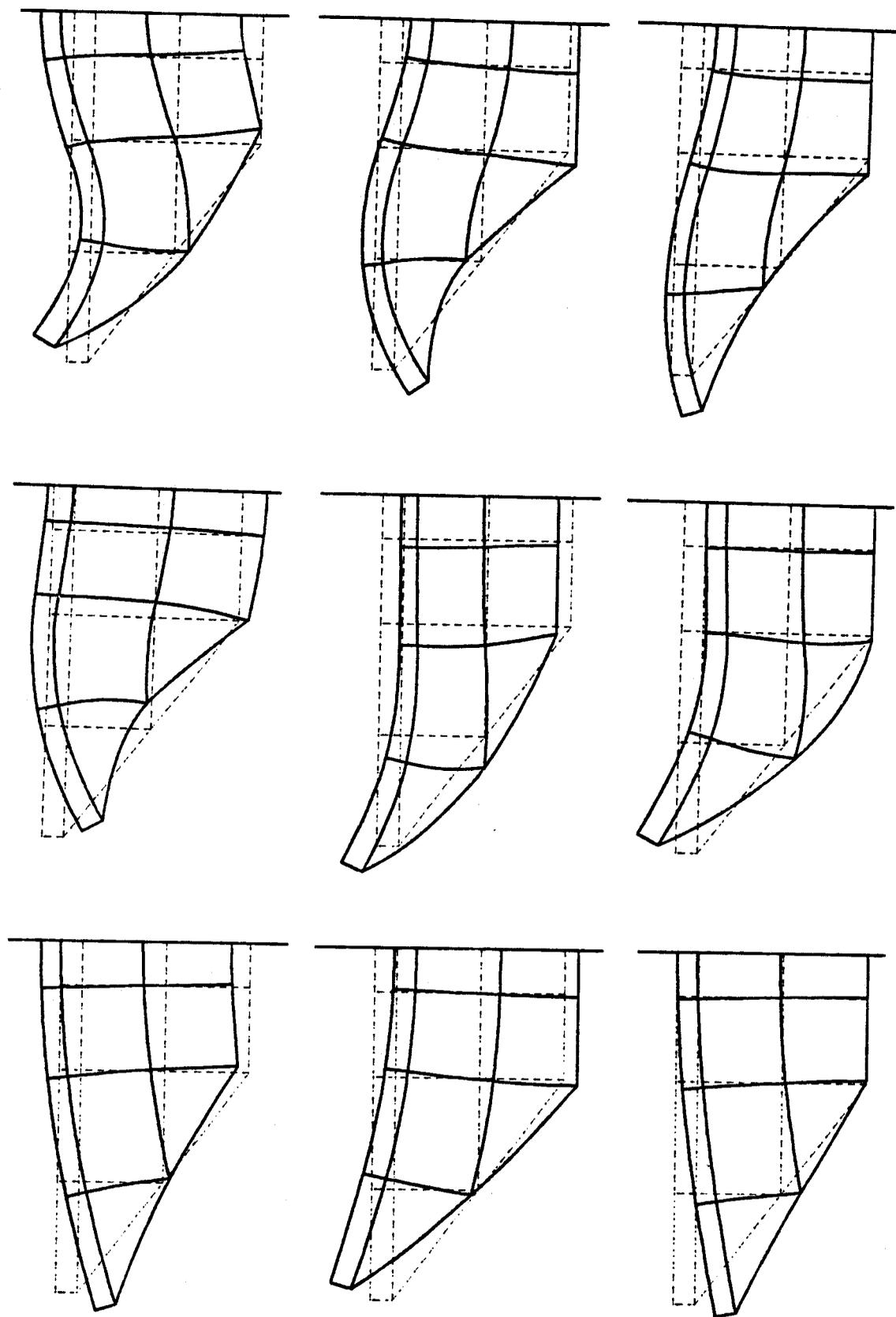


Figure III.9 . Présentation des modes propres du pavillon du T2b . De gauche à droite : libre,  $U_1$  constant et  $U_1$  bloqué .

**ANALYSE MODALE DU T3 (pavillon d'épaisseur 20mm)  
A LA RESONANCE**

Modes de la structure complète				
N°	Eléments finis	Ondes planes avec fourreau	Ondes planes sans fourreau	Commentaires
1	1.00	1.02	1.03	1 plan nodal
2	2.09	2.30	2.34	2 plans nodaux
3	3.41	Papillonnage		2 plans nodaux
4	3.46	3.20	-	Mode de fourreau $\lambda/2$
5	4.48	4.07	4.06	3 plans nodaux
6	5.43	5.62	5.70	4 plans nodaux
7	6.24	Papillonnage		4 plans nodaux
8	6.91	6.28	-	Mode de fourreau $\lambda$
9	7.36	6.74	6.68	5 plans nodaux
10	8.31	8.11	8.11	6 plans nodaux

Modes du pavillon				
N°	libre	$U_{\perp}$ constant	$U_{\perp}$ bloqué	$\mu$ bloqué
1	3.74	3.80	2.04	2.16
2	7.35	7.49	5.82	5.86
3	8.20	8.23	7.92	8.26

(fréquences normées : référence fréquence N°1 - éléments finis)

**ANALYSE MODALE DU T3 (pavillon d'épaisseur 15mm)  
A LA RESONANCE**

Modes de la structure complète				
N°	Eléments finis	Ondes planes avec fourreau	Ondes planes sans fourreau	Commentaires
1	1.03	1.07	1.09	1 plan nodal
2	2.04	2.35	2.41	2 plans nodaux
3	3.18	Papillonnage		2 plans nodaux
4	3.46	3.22	-	Mode de fourreau $\lambda/2$
5	4.32	4.12	4.11	3 plans nodaux
6	5.30	Papillonnage		3 plans nodaux
7	6.11	5.63	5.73	4 plans nodaux
8	6.89	6.31	-	Mode de fourreau $\lambda$
9	7.18	6.75	6.75	5 plans nodaux
10	8.20	8.14	8.14	6 plans nodaux

Modes du pavillon				
N°	libre	$U_{\perp}$ constant	$U_{\perp}$ bloqué	$\mu$ bloqué
1	3.23	3.32	1.82	1.90
2	6.74	7.03	5.21	5.31
3	7.96	7.98	7.84	8.19

(fréquences normées : référence fréquence N°1 - éléments finis - du T3 dont le pavillon a une épaisseur de 20mm).

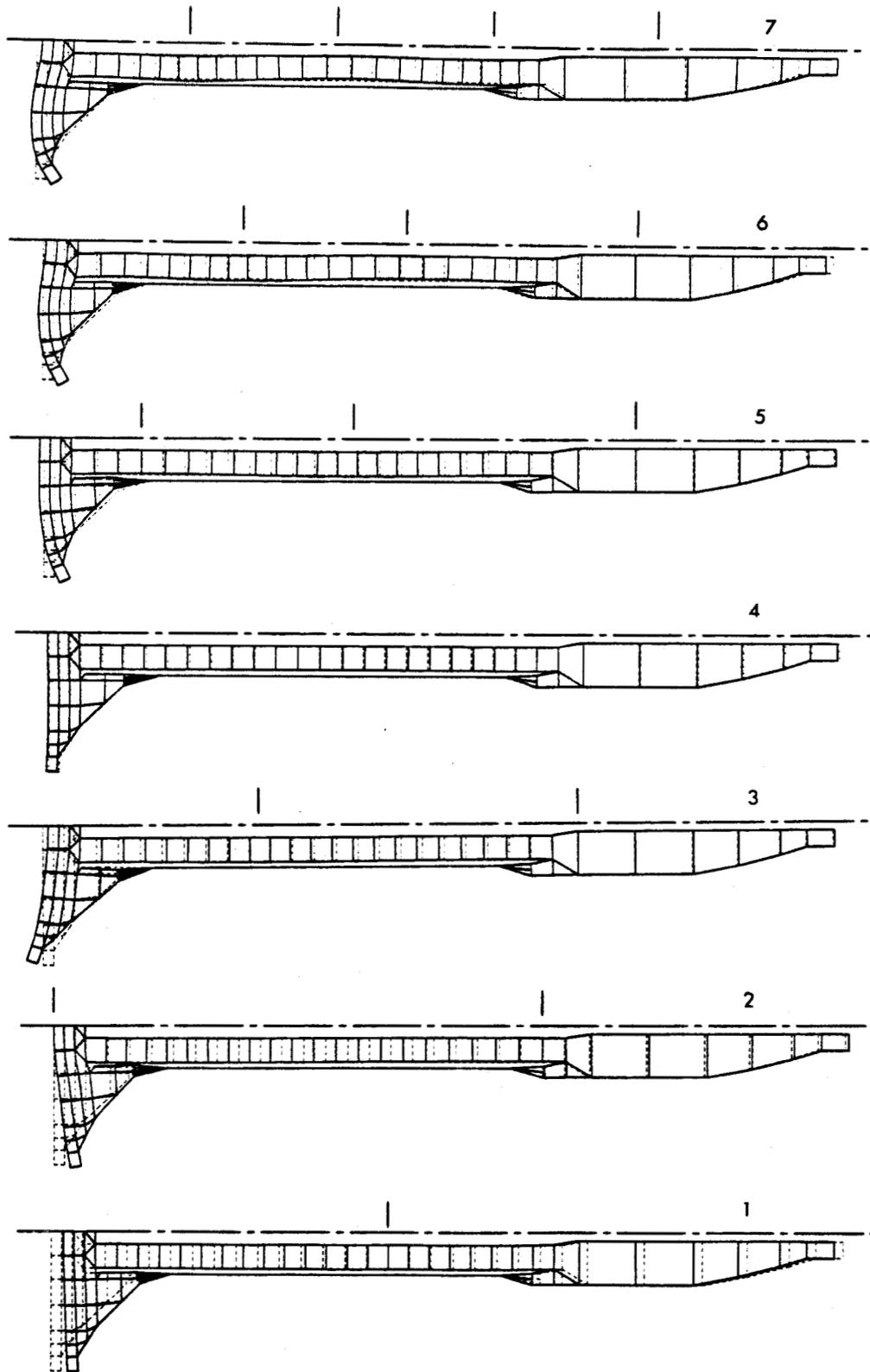


Figure III.10 . Présentation schématique des modes du T3 . Le numéro est celui du mode et fait référence au tableau de la page précédente . Les tirets repèrent les plans nodaux .

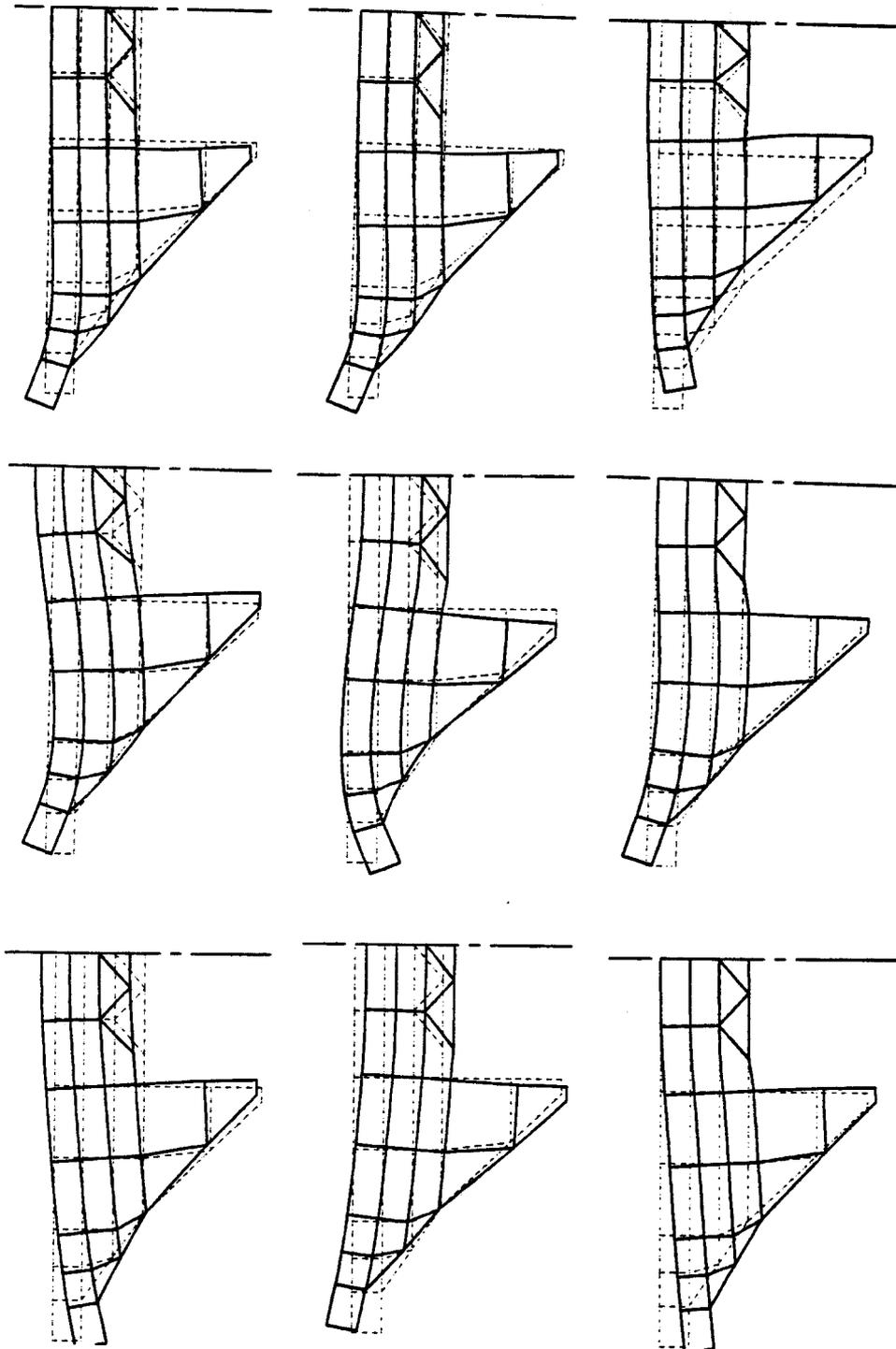


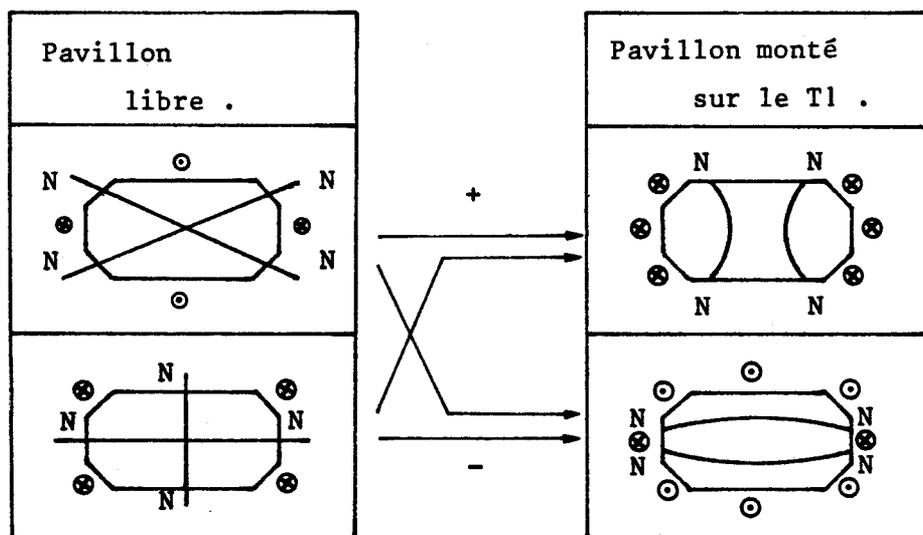
Figure III.11 . Présentation des modes propres du pavillon du T3  
 (15 mm) . De gauche à droite : libre,  $U_1$  constant  
 et  $U_1$  bloqué .

de papillonnage et fréquences du pavillon seul est vérifiée pour les deux premiers papillonnages.

#### III.4.4 Le transducteur T1 [39,40]

Comme pour les autres transducteurs, les résultats sont regroupés en tableaux dans les pages suivantes, les champs de déplacement des premiers modes étant représentés figure (III.12). Les modes 1,3,4,7 et 8 ont été caractérisés expérimentalement par méthode électrique, par analyse à la tête pick-up et par holographie. Les fréquences obtenues à l'aide des éléments finis ont respectivement une précision de 2%, 10.7%, 10.6%, 7.4% et 9.3%. Ces précisions sont satisfaisantes compte tenu du nombre très important de réductions effectuées pour minimiser la taille de la matrice à diagonaliser. L'analyse des modes est proche de celle des autres transducteurs. Il faut noter toutefois que :

- avec un plan nodal dans la colonne motrice existent deux modes de papillonnage, de fréquences voisines, qui correspondent grossièrement à des flexions du pavillon selon sa longueur ou sa largeur. Ces modes ont des champs de déplacement très différents des modes correspondants SS1 et SS2 de la figure (II.4), bien que les fréquences soient proches. Ce fait s'interprète simplement si on considère que, le pavillon étant très peu différent d'un carré, SS1 et SS2 sont quasi dégénérés et que la perturbation induite sur l'embase par la colonne motrice favorise l'apparition de deux combinaisons simples de ces deux modes, leur somme et



leur différence, qui sont effectivement les deux premiers papillonnages. Cette analyse est résumée schématiquement à la page précédente, la figure (III.13) comparant les positions des lignes nodales calculées à celles déterminées expérimentalement.

- la modélisation par éléments finis, parce qu'elle est ici tridimensionnelle, fournit des modes non couplés, comme le mode de contremasse, beaucoup plus complexes que dans les cas précédents.
- les fréquences des modes de tige obtenues par éléments finis et par onde plane sont très différentes. Ce fait peut s'expliquer par la façon dont le maillage unidimensionnel de la tige s'articule sur les maillages du pavillon et de la contremasse, sans recours à la structure "parapluie", créant ainsi une concentration de la déformation, probablement très incorrecte, que met en évidence la figure (III.14).
- expérimentalement, il apparaît un mode très peu couplé à la fréquence réduite de 2.74, qui pourrait être le premier mode de couronne de la figure (II.4) mais que le maillage grossier du pavillon utilisé dans la représentation globale du T1 ne peut restituer.

#### III.4.5 Conclusion

L'ensemble de l'analyse effectuée sur dix transducteurs a montré que les modes se répartissent essentiellement en trois catégories :

- les *modes de dilatation-compression* de la colonne motrice. Ces modes sont grossièrement en  $n\lambda/2$ , où  $n$  est le nombre de plans nodaux. Sauf pour le fondamental, leurs champs de déplacement sont fortement perturbés par la flexion du pavillon. Leurs fréquences sont raisonnablement prévues par le modèle d'onde plane mais des écarts de 15 à 20% peuvent apparaître. Ils sont peu sensibles à la forme du pavillon.
- les *modes de tige ou de fourreau*. Ils correspondent à des modes de dilatation-compression en  $n\lambda/2$  de la tige ou du fourreau avec extrémités encastées aux niveaux du pavillon et de la contremasse. Leurs fréquences dépendent peu de la forme du pavillon et sont bien prévues par le modèle d'onde plane mais sont très sensibles, en éléments finis, à la modélisation de l'articulation entre maillages 1D et 3D (nécessité d'une structure "parapluie").

**ANALYSE MODALE DU TRANSDUCTEUR T1  
A LA RESONANCE**

Modes de la structure complète				
N°	Eléments finis	Ondes planes avec tige	Ondes planes sans tige	Commentaires
1	1.00 <sup>+</sup>	1.01	1.03	1 plan nodal
2	1.28	2.10	-	Mode de tige $\lambda/2$
3	1.96 <sup>+</sup>	Papillonnage		1 plan nodal
4	2.19 <sup>+</sup>	Papillonnage		1 plan nodal
5	2.47	-	-	Mode de contre-masse
6	2.87	4.25	-	Mode de tige $\lambda$
7	3.03 <sup>+</sup>	2.71	2.69	2 plans nodaux
8	3.66 <sup>+</sup>	Papillonnage		2 plans nodaux

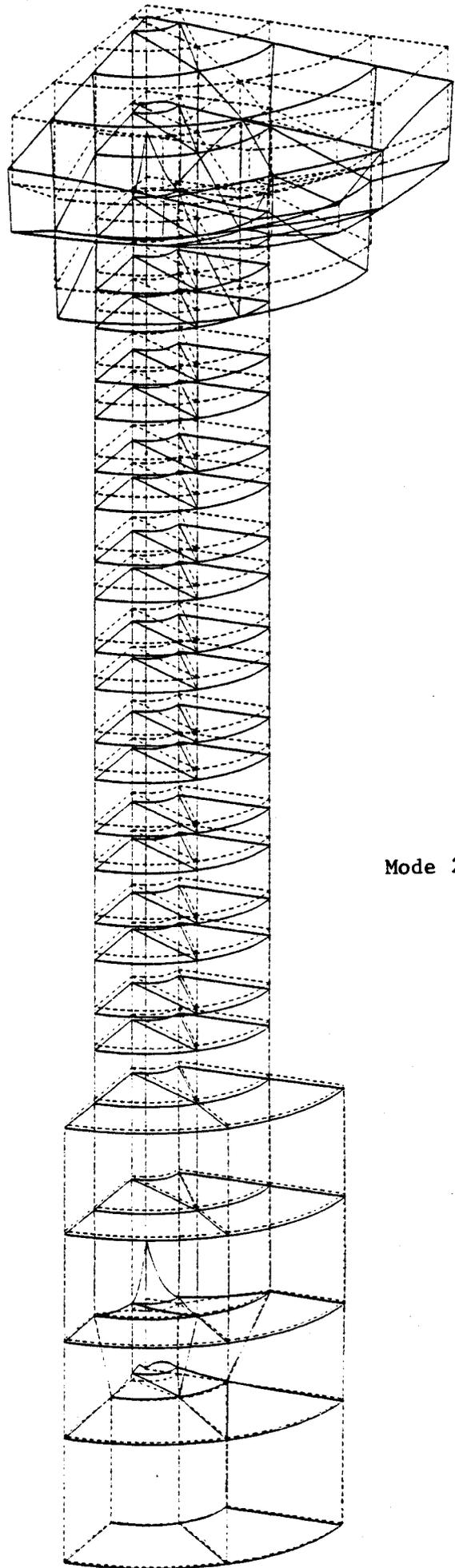
+ exp : 0.980, 1.77, 1.98, 2.82, 3.35 respectivement.

Modes du pavillon								
N°	libre		U constant		U bloqué		U bloqué	
	G	F	G	F	G	F	G	F
1	1.68	1.57	1.88	1.73	1.68	1.62	1.82	1.74
2	2.33	2.28	2.40	2.30	1.95	1.81	2.17	1.99
3	3.76	3.68	3.82	3.70	3.31	3.21	3.33	3.24

G et F : maillages grossier et fin par référence à la section II.4.1

(fréquences normées : référence fréquence N°1 - éléments finis)

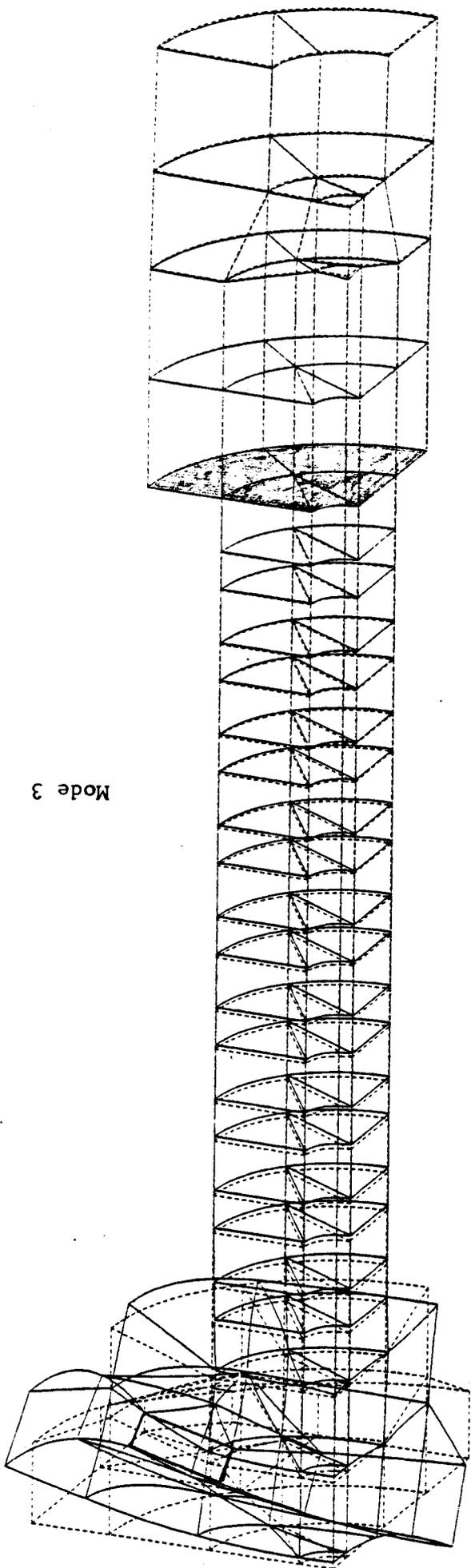




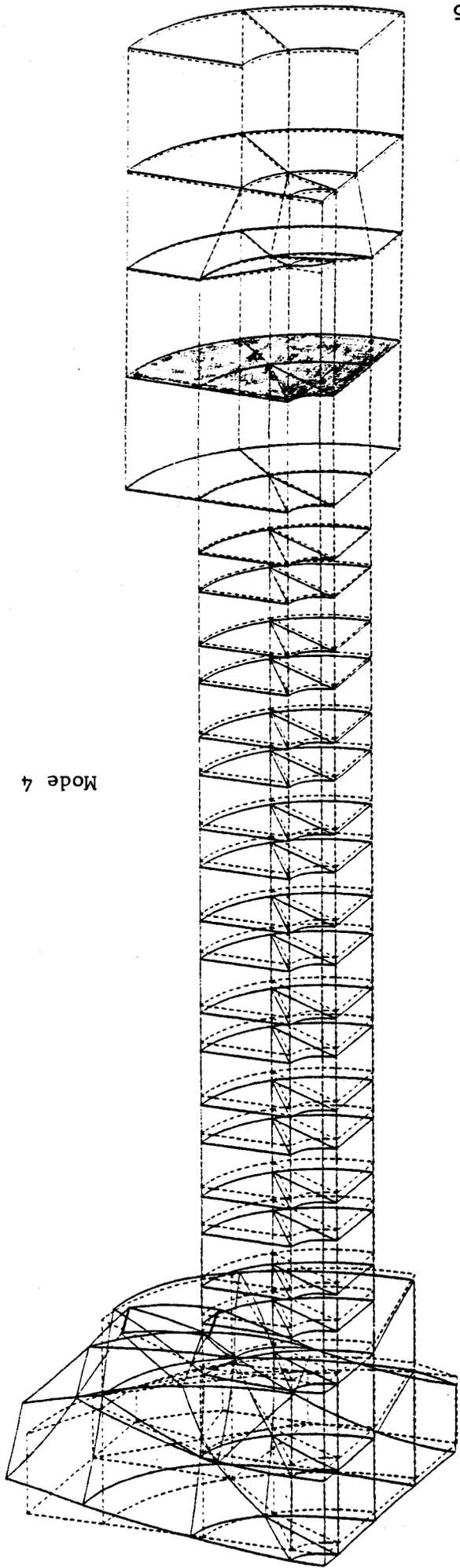
Mode 2

Figure III.12 .  
Suite .

Figure III.12 .  
Suite .



Mode 3



Mode 4

Figure III.12 .  
Suite .

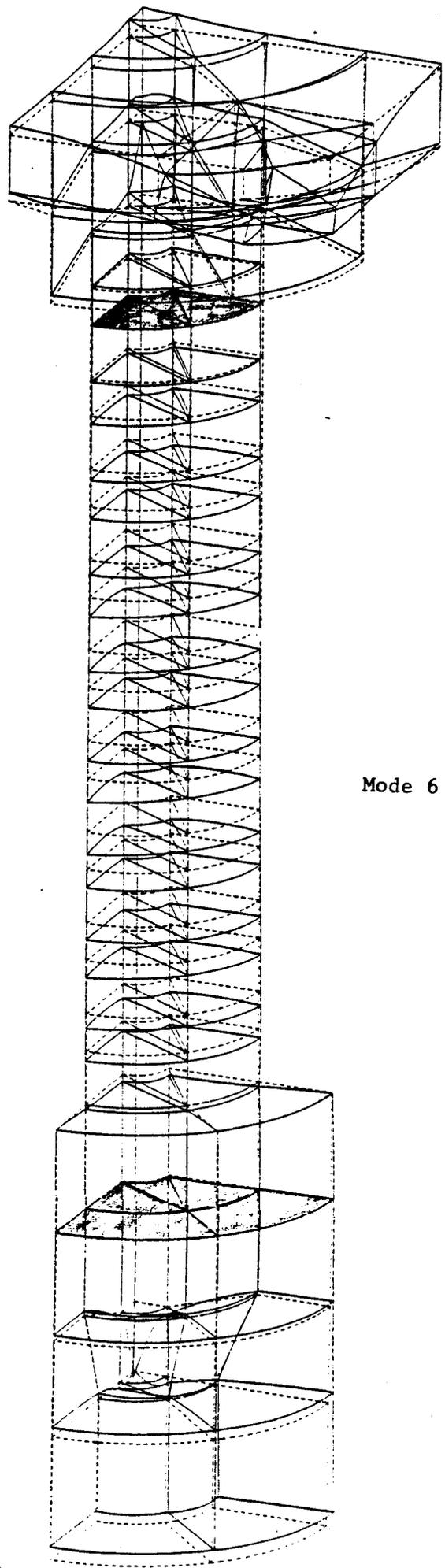
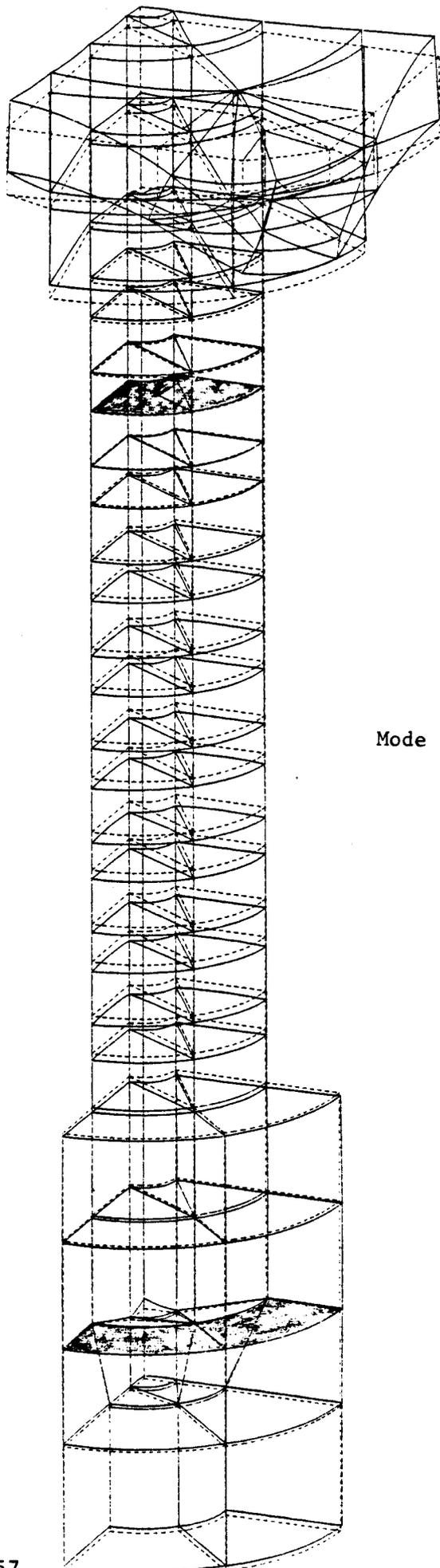
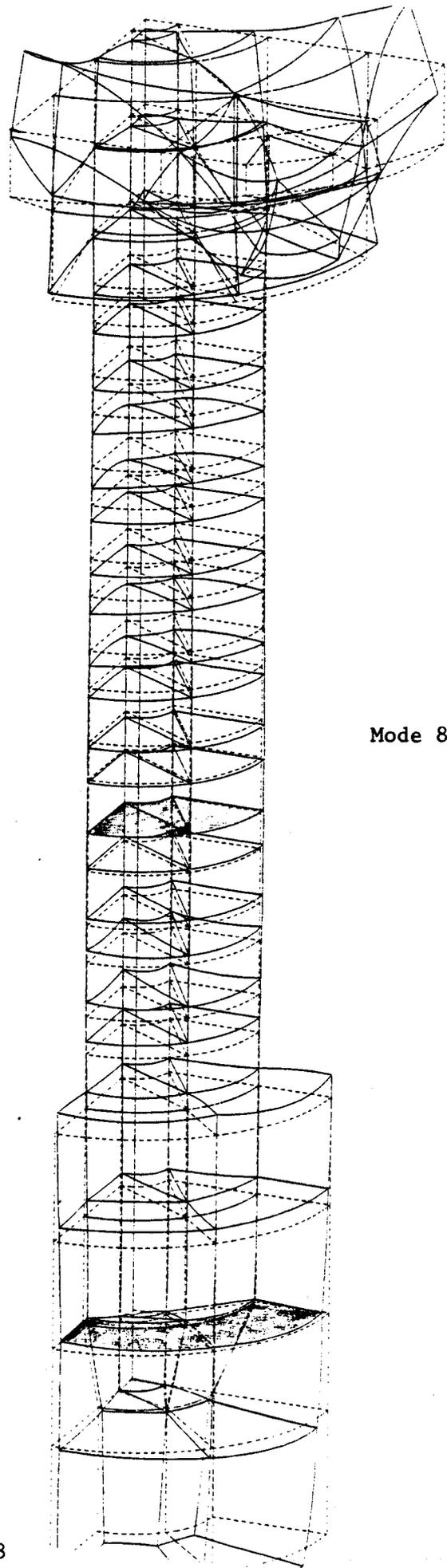


Figure III.12 .  
Suite .



Mode 7

Figure III.12 .  
Suite .



Mode 8

Figure III.12 .  
Suite .

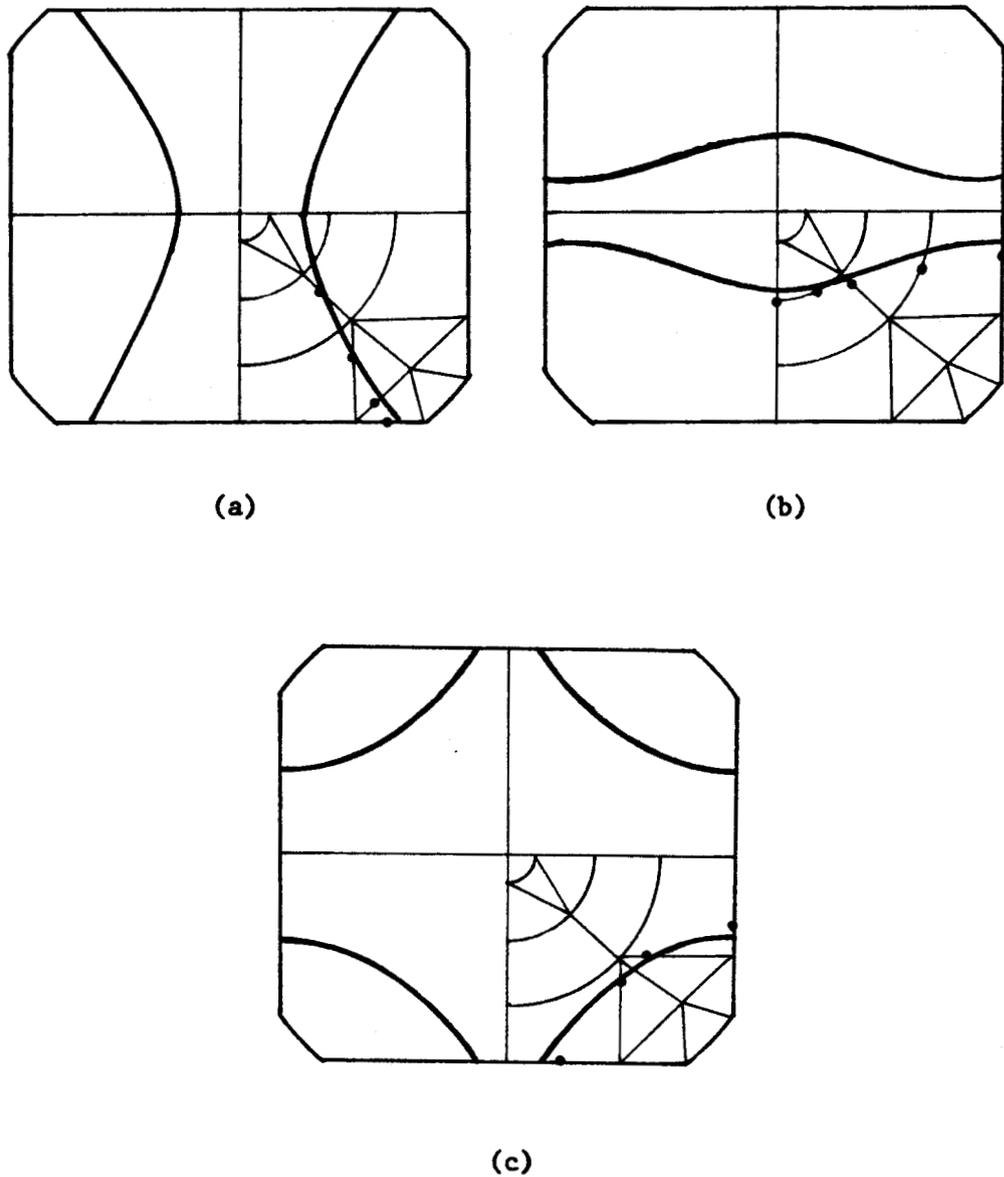


Figure III.13 . Représentation schématique des lignes nodales sur le pavillon du transducteur T1 .

- : maillage de la face parlante .
- : ligne nodale obtenue expérimentalement à l'aide des figures de Chladni ( voir figure I.5 ) .
- • • : points nodaux calculés par éléments finis .

(a): mode 3, (b): mode 4, (c): mode 7 .

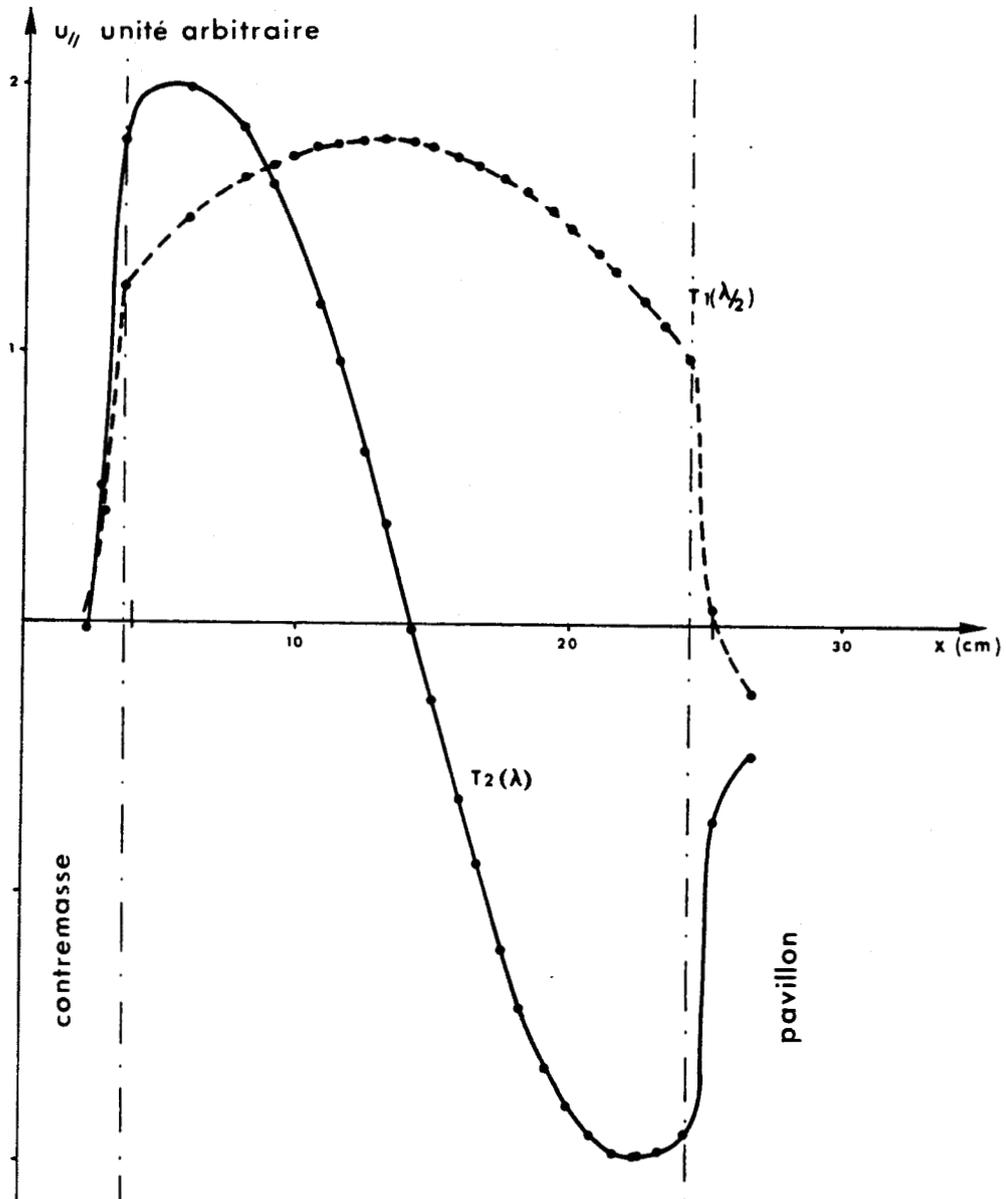


Figure II.14 . Variations avec l'abscisse du déplacement axial le long de la tige de précontrainte pour les deux premiers modes de tige ( $\lambda/2$  et  $\lambda$ ) du T1 . Les points correspondent aux abscisses des noeuds . On note la variation très brutale au raccordement avec le pavillon et la contremasse .

- les *modes de papillonnage*. Liés à la flexion du pavillon, ils s'intercalent entre les modes précédents et sont très sensibles à la forme et aux dimensions du pavillon. Leurs fréquences sont souvent encadrées par celles des modes propres du pavillon seul, suivant l'inégalité :

$$f(U \text{ bloqué}) < f(\text{papillonnage}) < f(U \text{ constant})$$

mais cet encadrement est lâche et n'est pas systématique, ce qui lui interdit tout rôle prévisionnel.

La précision des résultats obtenus est bonne, en général meilleure que 5% dans la bande utile, et les écarts s'interprètent assez simplement (insuffisance du maillage, problème numérique...). Dans quelques cas, les fréquences d'antirésonance des modes couplés ont été calculées et mesurées, montrant que, comme pour les structures tests, l'erreur absolue sur la différence entre fréquences de résonance et d'antirésonance est beaucoup plus faible que sur les fréquences elles-mêmes, rendant ainsi l'erreur relative raisonnable et prouvant que la prise en compte de l'effet piézoélectrique est correcte.

### III.5 LES PROBLEMES LIES A LA TIGE DE PRECONTRAINT

Dans l'analyse théorique par éléments finis ou par onde plane sont apparus des modes de tige ou de fourreau dont les fréquences sont simplement prévues. Toutefois, pour aucun des transducteurs considérés dans la section (III.4), il n'y a eu de mise en évidence expérimentale de ces modes. Afin de résoudre ce problème, un transducteur T2b a été modifié pour minimiser, au niveau de la tige, les amortissements habituels dûs à divers facteurs de fabrication : présence du guipage des conducteurs électriques, présence de colle, encastrement plus ou moins ferme dans la contremasse... et favoriser ainsi l'apparition des modes recherchés, ce qui a été réalisé. Le tableau ci-après compare les résultats obtenus par éléments finis et expérimentalement, la colonne  $\Delta$  donnant les écarts relatifs, la fréquence de référence étant celle du premier mode du T2b nominal calculée par éléments finis. Les résultats sont satisfaisants, en particulier pour le premier mode de tige, confirmant les interprétations précédentes. On peut aussi noter que les résultats obtenus sont proches de ceux du T2b, sauf pour les fréquences des modes de tige qui sont plus basses, le point de fixation sur la contremasse ayant été notablement reculé, comme le montre la figure (III.15).

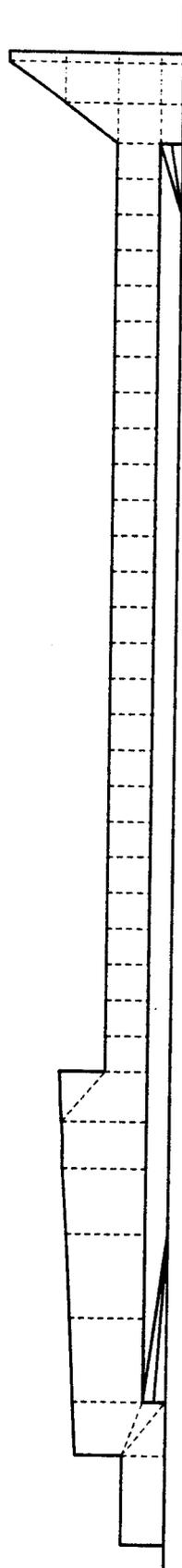


Figure III.15 . Présentation du maillage du Tonpilz de type T2b utilisé pour la mise en évidence des modes de tige .

Transducteur T2b : mise en évidence des modes de tige				
N°	elts finis	exp.	$\Delta(\%)$	nature du mode
1	.993	.935	6.2	1er mode dilat.comp.
2	2.01	1.96	2.6	1er mode tige ( $\lambda/2$ )
3	2.42	2.29	5.6	2ème mode dilat.comp.
4	3.77	-	-	3ème mode dilat.comp.
5	4.18	3.77	10.8	2ème mode tige ( $\lambda$ )
6	5.11	4.85	5.3	1er mode papillonnage
7	5.86	5.93	-1.2	4ème mode dilat.comp.
8	6.46	5.43	18.9	3ème mode tige ( $3\lambda/2$ )

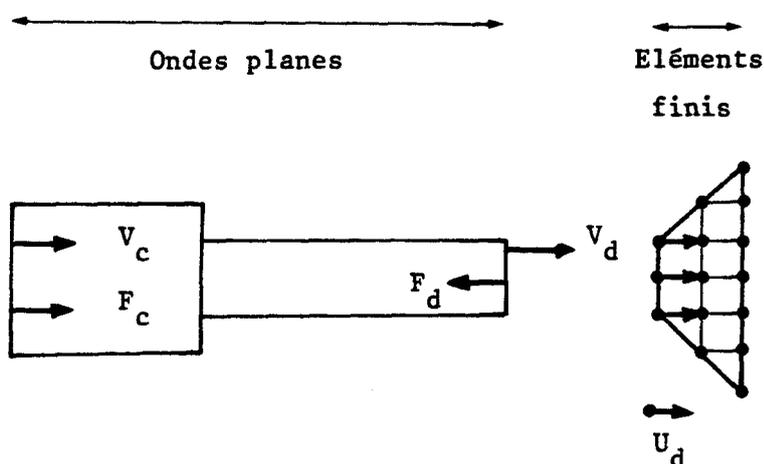
### III.6 LA METHODE MIXTE [50-52]

#### III.6.1 Principe et mise en équations

Tous les résultats obtenus, en particulier les figures (III.4), (III.8), (III.10) et (III.12) montrent que, dans toute la bande de fréquence analysée, l'ensemble constitué par l'empilement de céramiques, la contremasse, la tige ou le fourreau de précontrainte, appelé ci-après, pour condenser, la colonne motrice, vibre en dilatation-compression, son champ de déplacement vérifiant bien l'approximation d'onde plane. Par contre, le champ de déplacement du pavillon a, hormis pour le mode fondamental, des caractères 2D ou 3D très marqués qui ne peuvent être modélisés que par éléments finis. Enfin, la prévision des fréquences de papillonnage nécessite la prise en compte de toute la structure, l'étude d'un pavillon isolé avec des conditions aux limites très simples sur son embase étant insuffisante. Pour intégrer tous ces aspects, la méthode mixte proposée consiste à modéliser la colonne motrice par onde plane, le pavillon par éléments finis, et à raccorder les deux modèles en imposant sur les noeuds de l'interface entre colonne motrice et pavillon une impédance mécanique

déduite du modèle d'onde plane. Evidemment, dans cette procédure, l'analyse par onde plane étant analytique et ne consommant aucune ressource informatique, la réduction très importante de la taille du maillage se traduit par une économie substantielle sur le plan numérique.

Avec les notations de la section (I.1.3) et du schéma ci-après,



on a, côté colonne motrice, la relation :

$$\begin{bmatrix} F_d \\ V_d \end{bmatrix} = [ T ] \begin{bmatrix} F_c \\ V_c \end{bmatrix} + \mathfrak{t} \quad (\text{III.1})$$

où  $\mathfrak{t}$  dépend linéairement des potentiels appliqués aux diverses électrodes. Sachant que la face arrière de la contremasse est libre, on en déduit :

$$\begin{aligned} F_d &= T_{12} V_c + t_1 \\ V_d &= T_{22} V_c + t_2 \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

d'où :

$$F_d = K_o U_d + P_\phi \quad (\text{III.3})$$

avec :

$$V_d = j\omega U_d$$

$$K_o = j\omega \frac{T_{12}}{T_{22}}$$

$$P_\phi = t_1 - t_2 \cdot \frac{T_{12}}{T_{22}}$$

(III.4)

$K_o$  et  $p_\phi$  sont, compte tenu des propriétés énoncées en annexe 3, des quantités purement réelles,  $p_\phi$  représentant physiquement l'excitation électrique par les céramiques. Côté pavillon, considérant que sa face parlante n'est pas chargée, on a :

$$\begin{bmatrix} [KM]_{RR} & \widetilde{KM}_{Rd} \\ \widetilde{KM}_{Rd}^T & KM_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{\mathcal{R}} \\ U_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_d \end{bmatrix}$$

(III.5)

où  $U_d$  est le déplacement axial identique pour tous les noeuds de l'interface,  $U_{\mathcal{R}}$  est le vecteur déplacement regroupant tous les autres degrés de liberté du pavillon,  $KM_{ii}$  est la notation condensée :

$$KM_{ii} = K_{ii} - \omega^2 M_{ii} \quad (III.6)$$

$[K]$  et  $[M]$  étant les matrices de rigidité et de masse du pavillon. De (III.5) on déduit :

$$U_d = \frac{P_\phi}{KM_{dd} - K_o} - \frac{\widetilde{KM}_{Rd}^T \cdot U_{\mathcal{R}}}{KM_{dd} - K_o} \quad (III.7)$$

et :

$$\left[ [KM]_{RR} - \frac{\widetilde{KM}_{Rd} \widetilde{KM}_{Rd}^T}{KM_{dd} - K_o} \right] U_{\mathcal{R}} = - \frac{P_\phi \widetilde{KM}_{Rd}}{KM_{dd} - K_o} \quad (III.8)$$

Le système d'équations (III.8) est réel, symétrique, et se résoud aisément, par élimination de Gauss par exemple, la relation (III.7) permettant le calcul de  $U_d$ . Les fréquences de résonance sont alors obtenues à l'aide d'un balayage en fréquence, en recherchant les valeurs de  $\omega$  pour lesquelles  $U_d$  est infini.

### III.6.2 Les résultats

Pour illustrer les possibilités de cette technique, l'analyse de quelques-uns des transducteurs précédents a été reprise, les résultats étant regroupés dans les tableaux des pages suivantes. On constate que :

- la méthode mixte fournit les fréquences propres des transducteurs T2 avec une excellente précision, souvent de l'ordre de 1%. Les seuls écarts notables sont enregistrés au voisinage du mode d'électrode que la méthode mixte ne peut pas prévoir mais qui est susceptible d'interagir, dans la modélisation par éléments finis, avec les modes de dilatation-compression ou de papillonnage qui l'entourent.
- les fréquences propres des modes de papillonnage sont calculées avec précision, prouvant que l'impédance mécanique ramenée sur l'interface par le modèle d'onde plane est une bonne approximation.
- l'effet du papillonnage sur les valeurs des fréquences propres de certains modes de dilatation-compression est bien décrit.
- la méthode mixte fournit des fréquences propres du transducteur T1 inférieures à celles données par la méthode des éléments finis et nettement plus proches des valeurs expérimentales indiquées en (III.4.4). Ce résultat s'explique simplement en considérant que l'erreur introduite par la modélisation en onde plane de la colonne motrice est inférieure à celle induite par les nombreuses réductions de Guyan nécessitées par la résolution du problème complet. (A noter que cet argument ne s'applique pas aux modes de tige pour les raisons déjà évoquées en III.4.4).
- la méthode mixte prévoit des déformations des faces parlantes des pavillons très proches de celles obtenues par le calcul complet, comme le montrent les figures (III.16) et (III.17). Ce résultat est très important, dans la perspective de l'étude du problème de rayonnement.

Analyse par la méthode mixte du T2a $\phi = 137$ mm				
N°	elts finis	meth. mixte	$\Delta(\%)$	nature du mode
1	1.00	1.02	2.0	1er mode de dil.comp.
2	2.28	2.28	0.0	2ème mode de dil.comp.
3	3.03	3.12	3.0	1er mode de tige ( $\lambda/2$ )
4	3.47	3.49	0.6	1er mode de papillonn.
5	4.55	4.64	2.1	3ème mode de dil.comp.
6	6.14	6.17	0.6	4ème mode de dil.comp.
7	6.37	6.46	1.4	2ème mode de tige ( $\lambda$ )
8	6.63	-	-	Mode de l'électrode
9	7.51	7.05	-6.1	2ème mode de papillonn.
10	8.19	8.39	2.4	5ème mode de dil.comp.

Analyse par la méthode mixte du T2a $\phi = 180$ mm				
N°	elts finis	meth. mixte	$\Delta(\%)$	nature du mode
1	.846	.858	1.4	1er mode de dil.comp.
2	1.77	1.77	0.0	1er mode de papillonn.
3	2.64	2.69	1.6	2ème mode de dil.comp.
4	3.18	3.27	2.8	1er mode de tige ( $\lambda/2$ )
5	4.12	4.15	0.8	3ème mode de dil.comp.
6	5.42	5.49	1.3	2ème mode de papillonn.
7	6.20	6.24	0.6	4ème mode de dil.comp.
8	6.61	6.70	1.4	2ème mode de tige ( $\lambda$ )
9	6.77	-	-	Mode de l'électrode
10	7.50	7.25	3.4	5ème mode de dilat.comp

(fréquences normées : référence mode 1 du T2a nominal - éléments finis)

Analyse par la méthode mixte du T2a $\varnothing = 160$ mm				
N°	elts finis	meth. mixte	$\Delta$ (%)	nature du mode
1	.906	.937	3.3	1er mode de dil.comp.
2	2.02	2.01	-0.5	1er mode de papillonn.
3	2.81	2.87	2.0	2e mode de dil.comp.
4	3.25	3.32	2.3	1er mode de tige ( $\lambda/2$ )
5	4.30	4.37	1.5	3ème mode de dil.comp.
6	5.89	5.95	1.0	4ème mode de dil.comp.
7	6.23	6.30	1.0	2ème mode de tige ( $\lambda$ )
8	6.63	-	-	Mode de l'électrode
9	7.20	6.89	-4.4	2ème mode de papillonn.
10	7.65	7.60	-0.7	5ème mode de dil.comp.

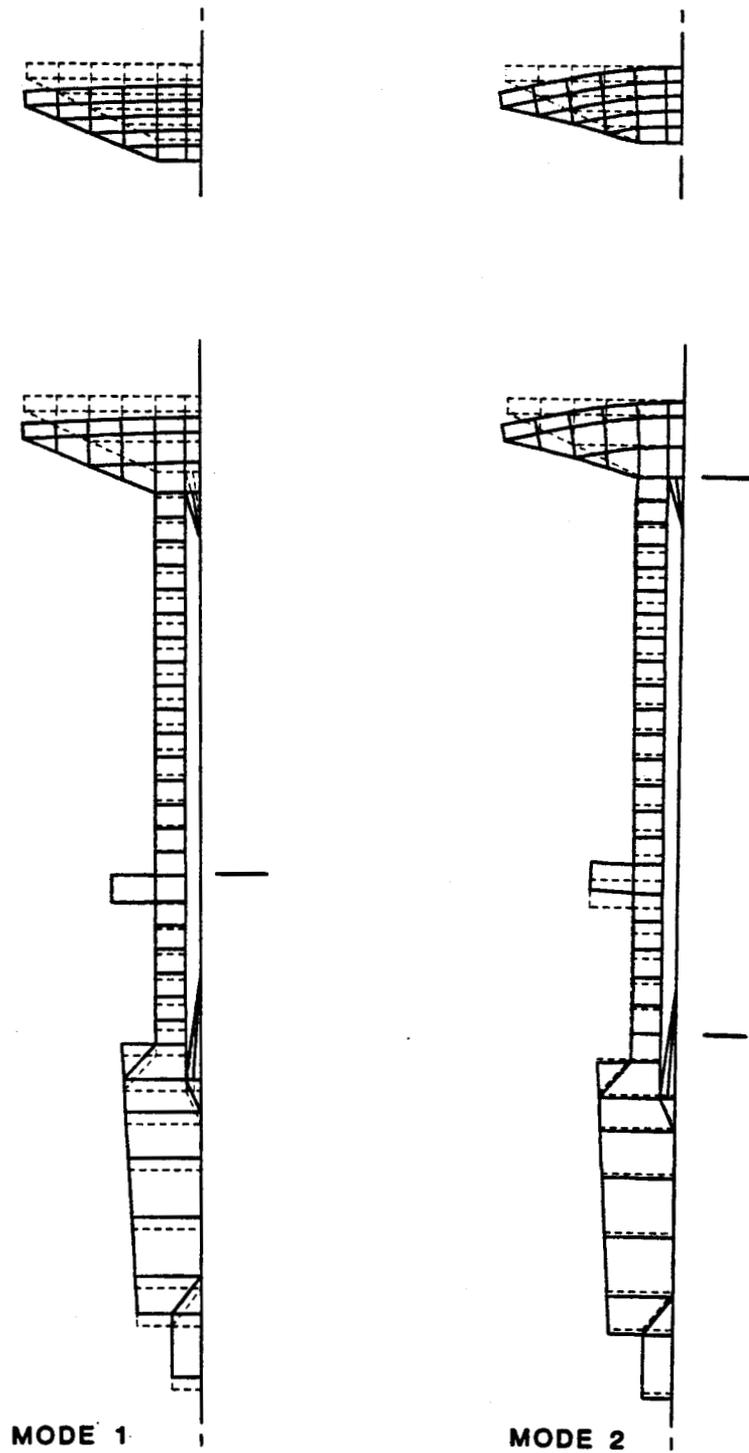
Analyse par la méthode mixte du T2a $\varnothing = 120$ mm				
N°	elts finis	meth.mixte	$\Delta$ (%)	nature du mode
1	1.05	1.08	2.9	1er mode de dil.comp.
2	2.43	2.44	0.3	2ème mode de dil.comp.
3	3.12	3.22	3.2	1er mode de tige ( $\lambda/2$ )
4	3.82	3.81	-0.2	1er mode de papillonn.
5	4.90	4.98	1.8	3ème mode de dil.comp.
6	6.18	6.21	0.5	4ème mode de dil.comp.
7	6.54	6.60	0.9	2ème mode de tige ( $\lambda$ )
8	6.66	-	-	Mode de l'électrode
9	7.55	7.17	-5.0	5ème mode de dil.comp.
10	8.53	8.82	3.4	6ème mode de dil.comp.

(fréquences normées : référence mode 1 du T2a nominal - éléments finis)

Analyse par la méthode mixte du T2b				
N°	elts finis	meth. mixte	$\Delta$ (%)	nature du mode
1	1.00	1.01	1.0	1er mode de dil.comp.
2	2.27	2.28	0.4	2ème mode de dil.comp.
3	2.71	2.78	2.6	1er mode de tige ( $\lambda/2$ )
4	3.79	3.77	-0.5	3ème mode de dil.comp.
5	5.09	5.05	-0.8	1er mode de papillonn.
6	5.27	5.32	0.9	2ème mode de tige ( $\lambda$ )
7	6.08	6.03	-0.8	4ème mode de dil.comp.
8	6.59	6.62	0.4	5ème mode de dil.comp.
9	7.57	7.74	2.2	6ème mode de dil.comp.
10	8.27	8.14	-1.6	3ème mode de tige ( $3\lambda/2$ )

Analyse par la méthode mixte du T1				
N°	elts finis	meth. mixte	$\Delta$ (%)	nature du mode
1	1.00	.982	-1.8	1er mode de dil.comp.
2	1.28	2.17	69.5	1er mode de tige ( $\lambda/2$ )
3	1.96	1.85	-5.6	1er mode de papillonn.
4	2.19	2.06	-5.9	2ème mode de papillonn.
5	2.47	-	-	Mode de la contremasse
6	2.87	3.98	38.6	2ème mode de tige ( $\lambda$ )
7	3.03	2.92	-3.6	2ème mode de dil.comp.
8	3.66	3.59	-1.9	3ème mode de papillonn.

(fréquences normées : respectivement mode 1 du T2b et mode 1 du T1 - éléments finis).



**Figure III.16** . Représentation schématique des modes du T2a nominal .  
 Les numéros font référence au tableau de la p.167 .  
 Les dessins du bas sont obtenus par éléments finis,  
 ceux du haut par la méthode mixte .

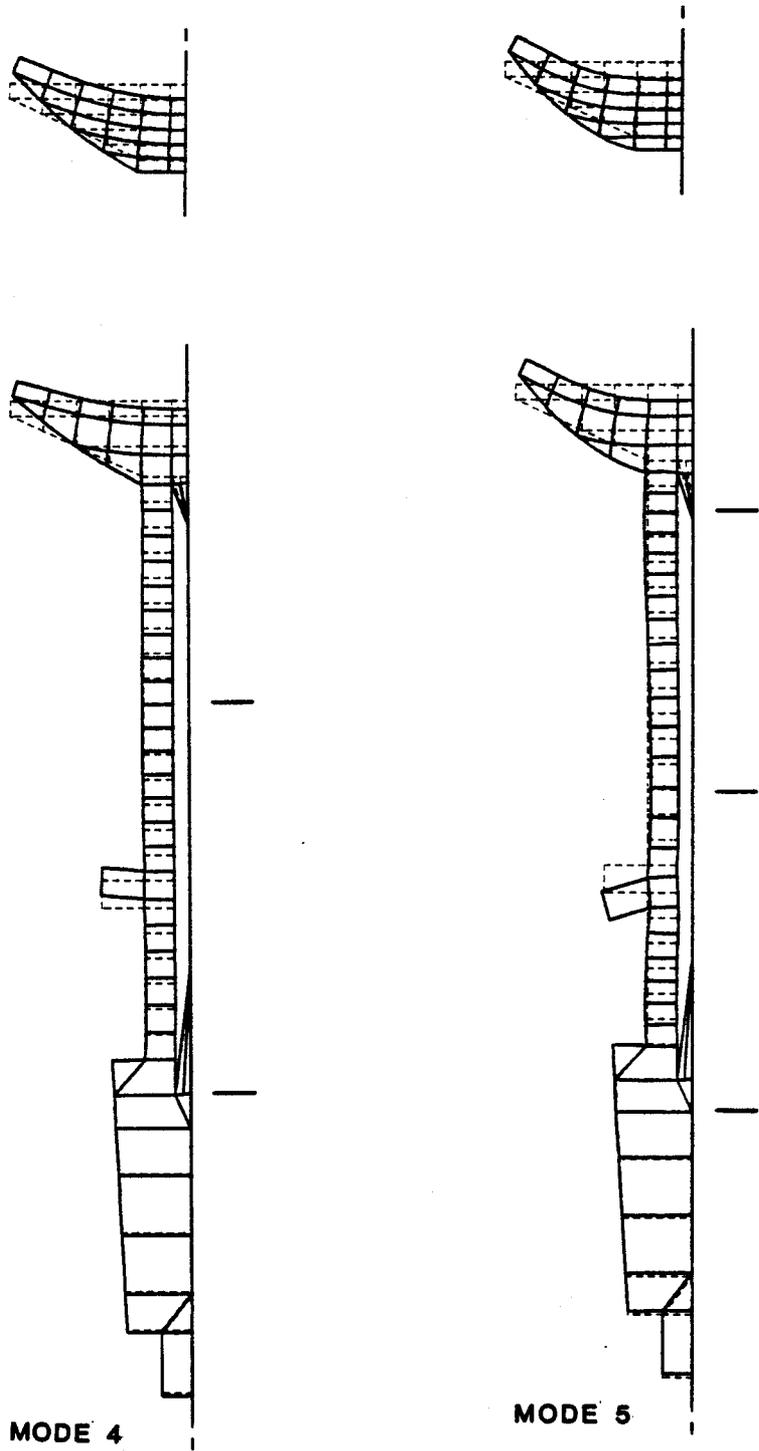


Figure III.16 . Suite .

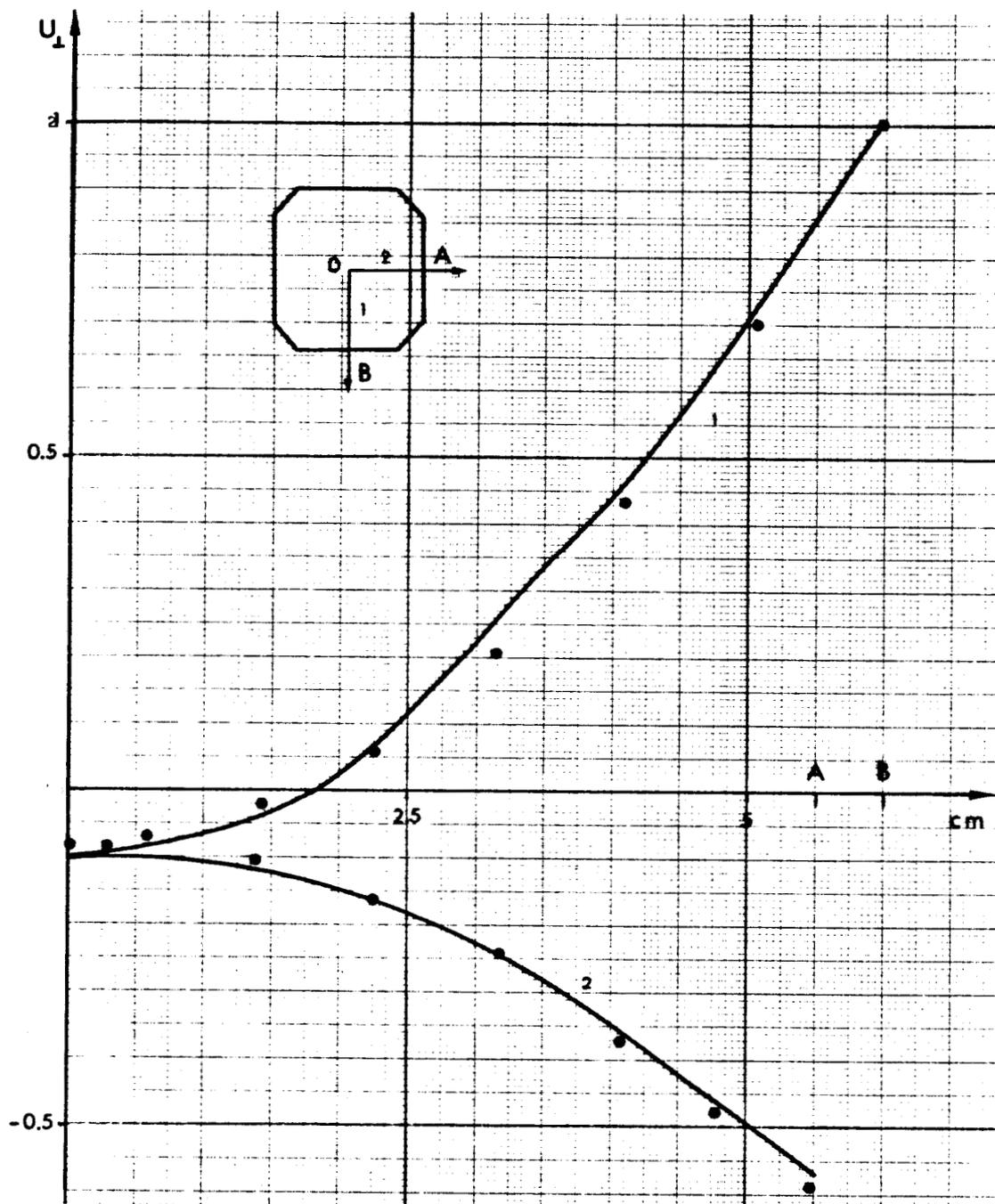


Figure III.17 . Variations du déplacement normal le long des segments OA et OB sur la face parlante du pavillon du T1 . L'échelle est arbitraire et la valeur du déplacement en B constitue une norme . Les courbes sont obtenues par la méthode mixte et les points par éléments finis . Le mode est le premier papillonnage .

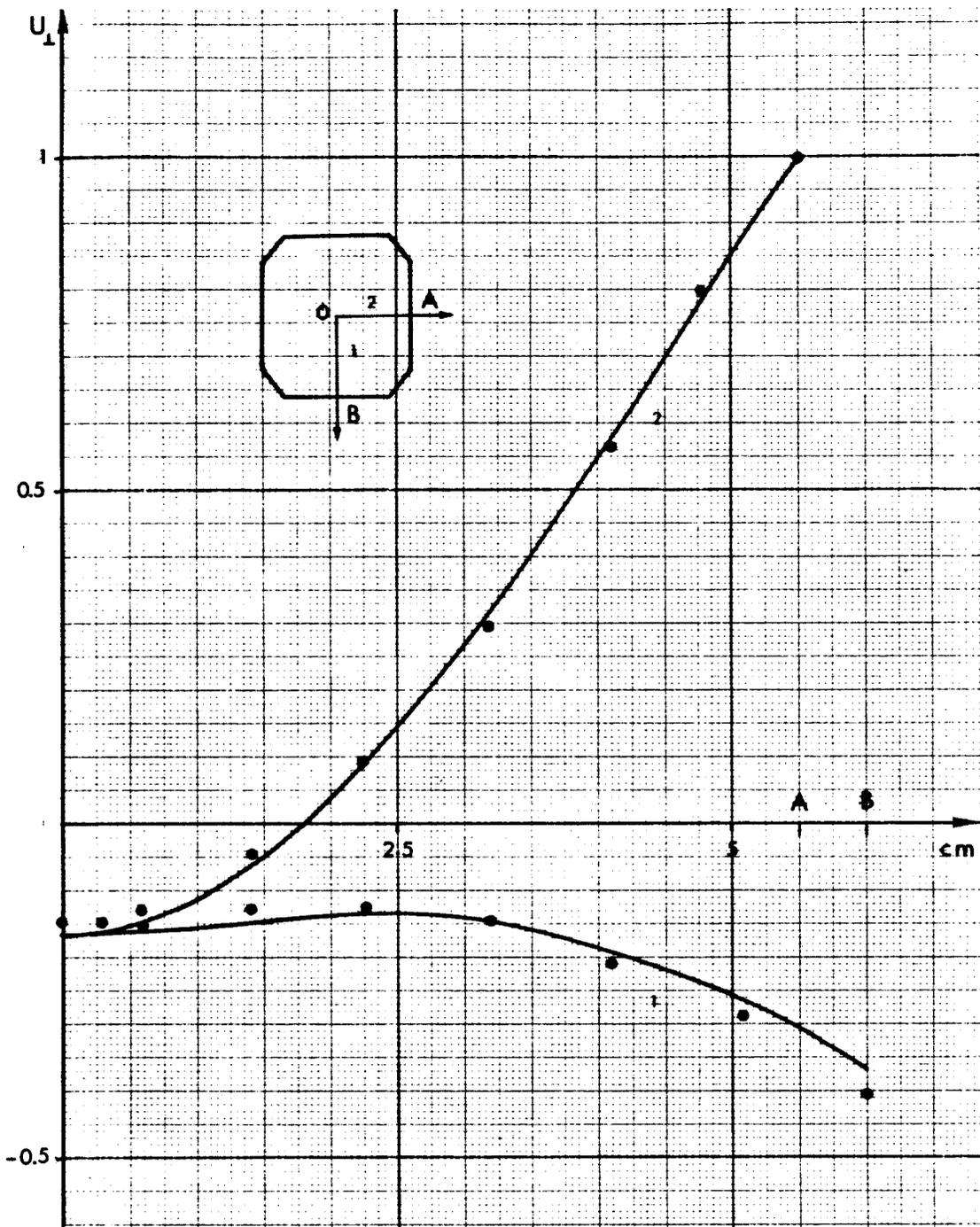


Figure III.17 . Suite . Même légende que la première figure . La norme est la valeur du déplacement normal en A . Le mode est le second papillonnage .

Par ailleurs, dans tous les cas, la comparaison des positions des plans nodaux dans la colonne motrice obtenues par la méthode mixte ou par calculs complets, montre un très bon accord, l'imprécision étant toujours inférieure à l'épaisseur d'une céramique. Enfin, à titre de contrôle, la force  $F_c$  sur la face libre de la contremasse, lorsqu'elle est recalculée à partir des valeurs de  $F_d$  et  $U_d$  obtenues pour chaque fréquence, est telle que le rapport  $F_c/F_d$  reste toujours inférieur à  $10^{-5}$ , prouvant la parfaite cohérence de l'ensemble des résultats.

Ainsi, la méthode mixte constitue une approche précise, comme le montrent les exemples traités précédemment, et efficace, par la forte réduction des ressources numériques nécessaires qu'elle entraîne. Son application à l'analyse modale de projecteurs complexes utilisant des moteurs quasi unidimensionnels [51,53] (Isabelle, criquet de type I ou IV...) ou à l'analyse de transducteurs immergés [52] présente donc un grand intérêt.

## CHAPITRE IV

### ANALYSE DU PROBLEME COUPLE FLUIDE-STRUCTURE

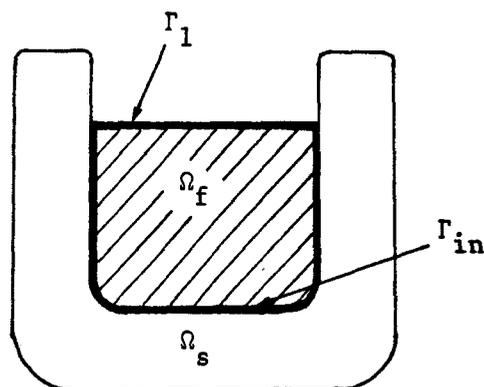
#### PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

*L'objet de ce chapitre est de présenter l'application de la méthode des éléments finis à la résolution du problème hydroélastique du comportement dynamique d'un transducteur piézoélectrique dans l'eau. Après un rappel des équations générales, une formulation variationnelle et son approche par éléments finis sont présentées et discutées pour les problèmes fermés i.e les problèmes conservatifs du point de vue énergétique, qui ne font pas intervenir le rayonnement. Ensuite, la prise en compte du rayonnement est analysée en détail, compte tenu de son caractère physique essentiel pour l'étude des transducteurs et de sa complexité, et le formalisme développé précédemment est étendu au cas des problèmes ouverts. Plusieurs tests sont alors présentés pour les deux catégories de problèmes. Les tests sur la première permettent de prouver la validité de la formulation du couplage et de la généralisation de la méthode de Guyan ainsi que de préciser les critères de maillage. Les tests sur la seconde aboutissent essentiellement à la discussion de la position de la surface frontière qui limite le maillage, position qui conditionne de fait la taille du système numérique à résoudre. Enfin, une revue des autres approches possibles est effectuée : méthode des équations intégrales de Helmholtz et méthode des éléments frontières ("boundary elements"), exprimée ou non sous forme variationnelle, méthode des éléments infinis... Dans chaque cas, les équations de base et une analyse comparative se référant à l'approche exploitée ici sont données, les informations plus techniques étant simplement renvoyées aux articles spécialisés. Les applications à différents Tonpilsz, permettant pour la première fois une interprétation détaillée du comportement de cette structure, en particulier de son niveau d'émission, dans une large bande de fréquence, font l'objet du chapitre suivant, ainsi que l'extension au cas du fluide de la méthode mixte. Les perspectives d'étude de sources plus complexes (dipolaires...) sont abordées en conclusion.*

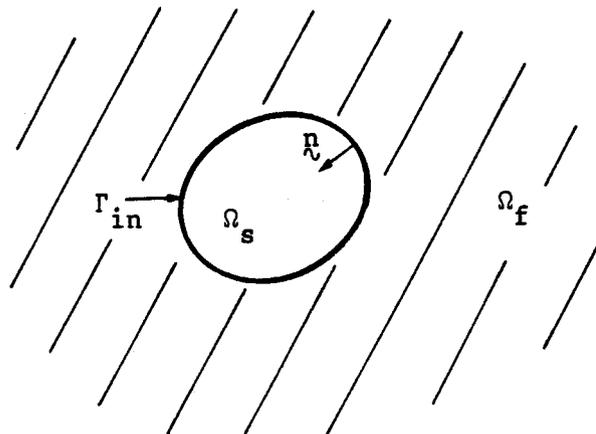
#### IV.1 LES EQUATIONS DU PROBLEME

Le problème concret du transducteur immergé est un problème à la fois électrique, mécanique et acoustique (fluide). En fait, les deux couplages, électromécanique d'une part, hydroélastique d'autre part, sont indépendants et peuvent être abordés séparément. Sur le plan de la formulation, ce chapitre ne traite donc que le problème hydroélastique. Les équations du problème électromécanique, établies et résolues aux chapitres II et III, sont simplement ajoutées à celles développées ci-après, chaque fois que l'excitation électrique doit intervenir.

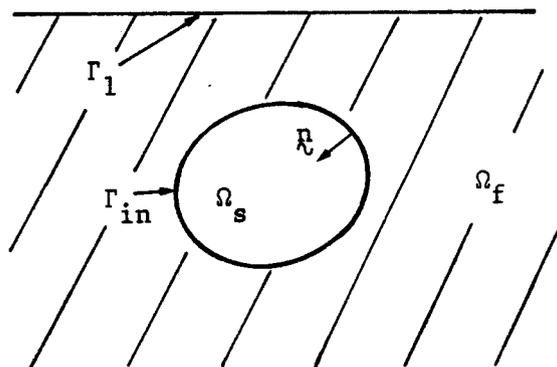
Deux types de problèmes hydroélastiques sont rencontrés classiquement [95,96]. Le problème fermé, schématisé ci-dessous,



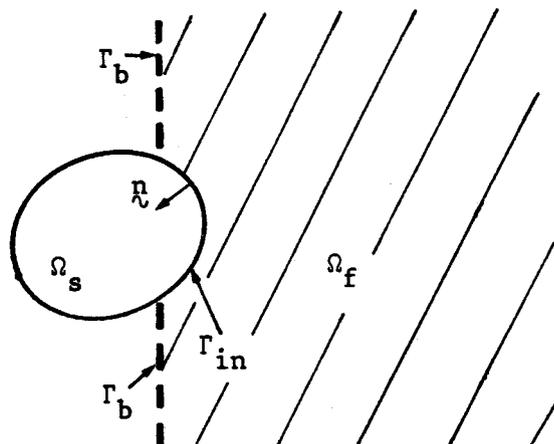
correspond au couplage entre les vibrations d'un solide (domaine  $\Omega_s$ ) et d'un fluide (domaine  $\Omega_f$ ) qui sont au contact l'un de l'autre en tout point d'une interface (surface  $\Gamma_{in}$ ), le fluide étant par ailleurs limité par une surface libre  $\Gamma_1$ . Cette catégorie, qui contient, du point de vue du calcul des structures, les importants problèmes de réservoir, ne concerne pas l'analyse des transducteurs, mais sera utilisée dans la section (IV.4) pour tester le traitement numérique de l'équation de Helmholtz et du couplage. Le problème ouvert, schématisé ci-après, correspond au rayonnement d'une énergie acoustique. Le solide (domaine  $\Omega_s$ ) et le fluide (domaine  $\Omega_f$ ) sont de nouveau en contact en tout point de l'interface (surface  $\Gamma_{in}$ ) mais le domaine fluide s'étend, cette fois, à l'infini. L'extension à l'infini peut



d'ailleurs ne pas concerner tout l'espace, mais, en particulier, se limiter à un demi espace, si on ajoute au schéma précédent une surface



libre ( $\Gamma_1$ ) ou toute autre surface frontière, comme par exemple les baffles (surface  $\Gamma_b$ ), fréquemment employés en théorie du rayonnement acoustique [1,2,7,64]. Dans ce second cas, la dissipation d'énergie



par rayonnement implique l'existence, dans  $\Omega_s$ , d'une source d'excitation qui est, pour ce qui concerne les transducteurs, l'effet piézoélectrique. Dans tous les cas :

- le fluide est homogène et idéal. Toutes les causes de dispersion et d'amortissement sont négligées.
- le fluide est compressible. Cette condition est, bien sûr, indispensable pour décrire le phénomène physique du rayonnement. Elle sera toutefois levée dans quelques tests et pour introduire la notion de masse ajoutée.
- les effets d'écoulement sont négligés. Bien qu'importants en technique SONAR [97-99] (sources de bruit et d'amortissement supplémentaire...) et susceptibles d'un traitement par éléments finis [100], ils sortent du cadre de cette étude.
- les ondes de surface sont négligées sur la surface libre  $\Gamma_1$ . Cette approximation, parfaitement valide dans la gamme de fréquence caractéristique de nos applications, permet de remplacer une condition complexe [95,101] par la condition  $p = 0$ .

Les équations du problème sont :

- en tout point du domaine  $\Omega_s$ , l'équation du mouvement, vérifiée par le champ de déplacement  $u_i$  :

$$-\rho_s \omega^2 u_i = \frac{\partial}{\partial x_j} (c_{ijkl} S_{kl}) \quad (\text{IV.1})$$

les notations étant celles de la section (II.1),

- en tout point du domaine  $\Omega_f$ , l'équation de Helmholtz vérifiée par le champ de pression  $p$  :

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad (\text{IV.2})$$

où  $k = \omega/c$ ,  $c = (K/\rho_f)^{1/2}$ ,  $\omega$  est la pulsation,  $c$  la célérité du son dans le fluide,  $K$  et  $\rho_f$  la compressibilité et la masse volumique du fluide.

Elles sont assorties des conditions aux limites suivantes :

- pour le solide, des conditions sur le champ de déplacement  $u$  du type :

$$u_i = u'_i \quad (\text{IV.3})$$

où  $u'_i$  est une quantité connue. On notera  $\Gamma_u$  l'ensemble des éléments de surface soumis à une telle condition,

- pour le solide, des conditions sur le champ de contrainte, du type :

$$T_{ij} n_j = -f_i \quad (\text{IV.4})$$

où  $n$  est le vecteur normal à la surface, orienté cette fois vers l'intérieur du solide,  $f$  une charge connue hormis la pression. On notera  $\Gamma_T$  l'ensemble des éléments de surface soumis à une telle condition,

- pour le solide et le fluide, en tout point de l'interface  $\Gamma_{in}$ , les conditions de couplage dynamique :

$$T_{ij} n_j = -p \cdot n_i \quad (\text{IV.5})$$

et cinématique :

$$n_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho_f \omega^2 n_i u_i \quad (\text{IV.6})$$

- pour le fluide, une condition sur le champ de pression, du type :

$$p = p' \quad (\text{IV.7})$$

où  $p'$  est une quantité connue. On notera  $\Gamma_p$  l'ensemble des éléments de surface soumis à une telle condition.  $\Gamma_p$  contient la surface libre  $\Gamma_l$  et les baffles mous pour lesquels  $p' = 0$ ,

- pour le fluide, une condition de flux, du type :

$$n_i \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} = \psi \quad (\text{IV.8})$$

où  $\psi$  est une quantité connue. On notera  $\Gamma_n$  l'ensemble des éléments de surface soumis à une telle condition.  $\Gamma_n$  contient, entr'autres, les baffles durs pour lesquels  $\psi = 0$ , - pour le fluide, si le problème est ouvert, la condition de rayonnement de Sommerfeld [102] :

$\lim_{r \rightarrow \infty} (rp)$  finie, et

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[ r \left( ikp + \frac{\partial p}{\partial r} \right) \right] = 0$$

(IV.9)

uniformément dans toutes les directions,  $r$  étant la distance à tout point défini. Cette condition peut se réécrire sous forme plus précise [103,104] :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \iint_S \left| ikp + \frac{\partial p}{\partial r} \right|^2 dS = 0 \quad (IV.10)$$

où  $S$  est une sphère de rayon  $r$  centrée en  $r = 0$ .

Cette dernière condition, comme indiqué au début du chapitre, rendle système dissipatif et change la nature du problème mathématique qu'elle complique notablement. En conséquence, l'approche formelle décrite ci-après est divisée en trois étapes, les deux premières donnant la formulation variationnelle et l'application de la méthode des éléments finis pour un problème fermé, la troisième décrivant, avec l'aide de la technique ainsi développée, la prise en compte de la condition de rayonnement pour les problèmes ouverts.

#### IV.2 LA FORMULATION VARIATIONNELLE DU PROBLEME FERME

Les équations (IV.1) et (IV.2) d'une part, (IV.3) à (IV.8) d'autre part, sont respectivement les équations d'Euler et les conditions aux limites associées à la quantité stationnaire  $L$  définie par [95,101,105,106] :

$$\begin{aligned}
L = & \iiint_{\Omega_s} \frac{1}{2} (S_{ij} c_{ijkl} S_{kl} - \rho_s \omega^2 u_i^2) d\Omega_s \\
& + \iint_{\Gamma_u} (u_i - u_i') n_j c_{ijkl} S_{kl} d\Gamma_u \\
& - \iint_{\Gamma_T} f_i u_i d\Gamma_T \\
& + \frac{1}{\rho_f \omega^2} \iiint_{\Omega_f} \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)^2 - k^2 p^2 \right] d\Omega_f \\
& - \frac{1}{\rho_f \omega^2} \iint_{\Gamma_p} (p - p') n_i \frac{\partial p}{\partial x_i} d\Gamma_p \\
& - \frac{1}{\rho_f \omega^2} \iint_{\Gamma_n} p \psi d\Gamma_n \\
& - \iint_{\Gamma_{in}} p u_i n_i d\Gamma_{in}
\end{aligned} \tag{IV.11}$$

Les trois premières intégrales ont déjà été rencontrées dans l'équation (II.11). La quatrième intégrale correspond à l'équation de Helmholtz (IV.2), la cinquième à la condition du type Dirichlet (IV.7) et la sixième à la condition du type Neumann (IV.8). Enfin, la dernière intégrale contient à la fois la condition dynamique (IV.5), obtenue en développant les équations d'Euler relatives au champ  $u$ , et la condition cinématique (IV.6), obtenue en développant l'équation d'Euler relative au champ  $p$ . Une condition de flux nul, déduite de (IV.8) en posant  $\psi = 0$ , n'apparaît pas dans cette formulation dont elle est, de ce fait, la condition aux limites naturelle.

D'autres expressions ont été introduites, discutées et exploitées, par exemple par H. MORAND et al [107] A. COMBESURE et al [101] et W.J.T. DANIEL [108]. Dans certains cas, elles ont nécessité l'introduction d'une nouvelle variable indépendante, du type  $\pi = p/\omega^2$ , afin d'aboutir à une formulation symétrique, très commode lors d'une analyse modale. Notre objectif relevant plutôt d'une analyse harmonique, l'expression (IV.11) qui nécessite le nombre minimal de variables a été utilisée systématiquement. Enfin, il faut signaler que

certains auteurs [109] ont proposé de décrire le milieu fluide comme un milieu élastique particulier dans lequel la première constante de Lamé,  $\lambda$ , est égale au coefficient de compressibilité du fluide,  $K$ , alors que la seconde,  $\nu$ , est nulle. Cette approche, très simple en principe puisqu'elle élimine formellement la notion d'interface, a l'inconvénient de traiter un déplacement à trois composantes plutôt qu'une pression et surtout d'introduire, pour un problème fermé, des modes parasites [39]. Elle a donc été définitivement écartée.

#### IV.3 L'ANALYSE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS DU PROBLEME FERME

##### IV.3.1 Principe et mise en équation

Comme le domaine solide  $\Omega_s$ , le domaine fluide  $\Omega_f$  est découpé en éléments simples constituant un maillage. A l'intérieur de chaque élément  $e$ , comme le déplacement  $u$  et le potentiel électrique  $\phi$ , la pression  $p$  est donnée par :

$$p = [N_p^e] p^e \quad (IV.12)$$

où  $p^e$  est le vecteur des valeurs nodales de  $p$  et  $N_p^e$  un polynôme d'interpolation semblable à ceux décrits en (II.3.2). En conséquence, le gradient du champ de pression, qui apparaît dans (IV.11), s'exprime par :

$$\vec{\text{grad}} p = [B_p^e] p^e \quad (IV.13)$$

avec :

$$[B_p^e] = [B_{p1}^e, B_{p2}^e \dots B_{pp}^e] \quad (IV.14)$$

et :

$$\mathcal{R}_{pi}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{pi}^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_{pi}^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_{pi}^e}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (IV.15)$$

Dès lors, reportant les expressions (II.18), (II.27), (IV.12) et (IV.13) dans la fonctionnelle de (IV.11) et adoptant les conventions de notation de (II.32), on obtient :

$$\begin{aligned}
 L = \sum_e^{(1)} & \left[ \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_e} \mathcal{U}^{eT} [B^e]^T [e] [B^e] \mathcal{U}^e d\Omega_e \right. \\
 & - \frac{1}{2} \omega^2 \iiint_{\Omega_e} \rho_s \mathcal{U}^{eT} [N^e]^T [N^e] \mathcal{U}^e d\Omega_e \\
 & \left. - \iint_{\Gamma_{Te}} \mathcal{U}^{eT} [N^e]^T \mathcal{f} d\Gamma_{Te} \right] \\
 + \frac{1}{\rho_f \omega^2} \sum_e^{(2)} & \left[ \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_e} \mathcal{R}^{eT} [B_p^e]^T [B_p^e] \mathcal{R}^e d\Omega_e \right. \\
 & - \frac{1}{2} k^2 \iiint_{\Omega_e} \mathcal{R}^{eT} [N_p^e]^T [N_p^e] \mathcal{R}^e d\Omega_e \\
 & \left. - \iint_{\Gamma_{ne}} \mathcal{R}^{eT} [N_p^e]^T \psi d\Gamma_{ne} \right] \\
 - \sum_e^{(3)} & \iint_{\Gamma_{ine}} \mathcal{U}^{eT} [N^e]^T \mathcal{q} [N_p^e] \mathcal{R}^e d\Gamma_{ine}
 \end{aligned} \quad (IV.16)$$

où  $\sum^{(1)}$  est une somme sur les éléments e solides, y compris leurs frontières  $\Gamma_{Te}$ ,  $\sum^{(2)}$  une somme sur les éléments e fluides, y compris leurs frontières  $\Gamma_{ne}$ ,  $\sum^{(3)}$  une somme sur les éléments interfaces  $\Gamma_{ine}$  communs aux éléments solides et fluides. De cette expression les intégrales étendues aux surfaces  $\Gamma_u$  et  $\Gamma_p$  ont disparu, pour des raisons exposées en détail dans la section (II.3.4), les conditions (IV.3) et (IV.7) étant simplement remplies en donnant aux variables nodales concernées les valeurs imposées  $u_i'$  et  $p'$  convenables. Dans (IV.16), les vecteurs  $\psi^e$  et  $\chi^e$  ne dépendent pas des variables d'intégration. Dès lors :

$$\begin{aligned}
 L = & \sum_e^{(1)} \left[ \frac{1}{2} \psi^{eT} [K^e] \psi^e - \frac{1}{2} \omega^2 \psi^{eT} [M^e] \psi^e - \psi^{eT} \cdot \chi^e \right] \\
 & + \frac{1}{\rho_f c^2 \omega^2} \sum_e^{(2)} \left[ \frac{1}{2} \chi^{eT} [H^e] \chi^e - \frac{1}{2} \chi^{eT} [M_1^e] \chi^e \right. \\
 & \quad \left. - \rho_f c^2 \chi^{eT} \psi^e \right] \\
 & - \sum_e^{(3)} \psi^{eT} [L^e] \chi^e
 \end{aligned}
 \tag{IV.17}$$

avec, comme en (II.35) :

$$\begin{aligned}
 [K^e] &= \iiint_{\Omega_e} [B^e]^T [c] [B^e] d\Omega_e \\
 [M^e] &= \iiint_{\Omega_e} \rho_s [N^e]^T [N^e] d\Omega_e \\
 \chi^e &= \iint_{\Gamma_{Te}} [N^e]^T \xi d\Gamma_{Te}
 \end{aligned}
 \tag{IV.18}$$

et :

$$[H^e] = \iiint_{\Omega_e} K [B_p^e]^T [B_p^e] d\Omega_e$$

$$[M_1^e] = \iiint_{\Omega_e} \rho_f [N_p^e]^T [N_p^e] d\Omega_e$$

$$\psi^e = \iint_{\Gamma_{ne}} [N_p^e]^T \psi d\Gamma_{ne}$$

$$[L^e] = \iint_{\Gamma_{ine}} [N^e]^T \mathfrak{u} [N_p^e] d\Gamma_{ine}$$

(IV.19)

Les matrices  $[K^e]$  et  $[M^e]$  sont respectivement les matrices élémentaires de rigidité et de masse cohérente d'un élément  $e$  solide. Par extension,  $[H^e]$  et  $[M_1^e]$  sont appelées aussi matrices de rigidité et de masse pour un élément  $e$  fluide mais, comme le montre la section suivante, cette dénomination ne correspond pas à une signification physique simple. Enfin,  $[L^e]$  est la matrice de couplage de l'élément interface  $\Gamma_{ine}$ . Définissant alors  $\mathfrak{u}$ , le vecteur des valeurs nodales de  $\mathfrak{u}$  sur tout le domaine  $\Omega_s$ , et  $\mathfrak{p}$ , le vecteur des valeurs nodales de  $p$  sur tout le domaine  $\Omega_f$ , l'expression (IV.17) peut être réarrangée sous la forme :

$$\begin{aligned} L = & \sum_{i\alpha, j\beta} \frac{1}{2} U_{i\alpha} ([K]_{i\alpha, j\beta} - \omega^2 [M]_{i\alpha, j\beta}) U_{j\beta} \\ & - \sum_{i\alpha} U_{i\alpha} F_{i\alpha} \\ & + \frac{1}{\rho_f c^2 \omega^2} \sum_{m,n} \frac{1}{2} P_m ([H]_{m,n} - \omega^2 [M_1]_{m,n}) P_n \\ & - \frac{1}{\rho_f \omega^2} \sum_m P_m \psi_m \\ & - \sum_{i\alpha, m} U_{i\alpha} [L]_{i\alpha, m} P_m \end{aligned}$$

(IV.20)

où  $i$  et  $j$  décrivent tous les noeuds du domaine  $\Omega_s$ ,  $m$  et  $n$  tous les noeuds du domaine  $\Omega_f$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  les trois coordonnées  $x, y, z$ . Dans cette relation :

$$\begin{aligned}
[K]_{i\alpha, j\beta} &= \sum_{e(i,j)} [K^e]_{i\alpha, j\beta} & i, j \in \Omega_s \\
[M]_{i\alpha, j\beta} &= \sum_{e(i,j)} [M^e]_{i\alpha, j\beta} & i, j \in \Omega_s \\
F_{i\alpha} &= \sum_{e(i)} F_{i\alpha}^e & i \in \Omega_s \\
[H]_{m,n} &= \sum_{e(m,n)} [H^e]_{m,n} & m, n \in \Omega_f \\
[M_1]_{m,n} &= \sum_{e(m,n)} [M_1^e]_{m,n} & m, n \in \Omega_f \\
\psi_m &= \sum_{e(m)} \psi_m^e & m \in \Omega_f \\
[L]_{i\alpha, m} &= \sum_{e(i,j)} [L^e]_{i\alpha, m} & i \in \Omega_s, m \in \Omega_f
\end{aligned}$$

(IV.21)

$e(i, j)$  représentant un élément  $e$  qui contient les noeuds  $i$  et  $j$ ,  $e(i)$  un élément qui contient le noeud  $i$ . Comme les relations (II.37), ces relations correspondent à une opération d'assemblage. Il est intéressant de noter ici que la dernière des six égalités ci-dessus revient à définir l'élément de surface  $\Gamma_{ine}$  comme un élément fini proprement dit, auquel est associée la seule matrice  $[L^e]$ .

L'application du principe variationnel conduit à minimiser  $L$  par rapport aux valeurs nodales de  $u$  et  $p$ , i.e à écrire :

$$\frac{\partial L}{\partial U_{i\alpha}} = 0 \quad \forall i\alpha \quad (IV.22)$$

et :

$$\frac{\partial L}{\partial P_m} = 0 \quad \forall m \quad (IV.23)$$

On obtient :

$$\sum_{j\beta} ([K]_{i\alpha, j\beta} - \omega^2 [M]_{i\alpha, j\beta}) U_{j\beta} - \sum_m [L]_{i\alpha, m} P_m = F_{i\alpha} \quad (\text{IV.24})$$

et :

$$\frac{1}{\rho_f c^2 \omega^2} \sum_n ([H]_{m, n} - \omega^2 [M_1]_{m, n}) P_n - \sum_{i\alpha} U_{i\alpha} [L]_{i\alpha, m} = \frac{1}{\rho_f \omega^2} \Psi_m \quad (\text{IV.25})$$

Ces deux équations peuvent se condenser sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} [K] - \omega^2 [M] & -[L] \\ -\rho_f c^2 \omega^2 [L]^T & [H] - \omega^2 [M_1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ \rho_f c^2 \Psi \end{bmatrix} \quad (\text{IV.26})$$

la matrice de gauche étant toujours réelle mais, cette fois, dissymétrique.

#### IV.3.2 Equations à résoudre et algorithmes

L'objectif de l'étude du problème fermé étant uniquement de tester la résolution de l'équation de Helmholtz et la formulation du couplage fluide-structure, et non d'envisager tous les cas physiques correspondants, seule l'analyse modale de systèmes couplés a été entreprise. Considérant une structure mécanique libre et une condition de flux nul sur la surface  $\Gamma_n$  si elle existe, l'équation (IV.26) devient :

$$\begin{bmatrix} [K] - \omega^2 [M] & -[L] \\ -\rho_f^2 c^2 \omega^2 [L]^T & [H] - \omega^2 [M_1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \mathcal{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ Q \end{bmatrix} \quad (\text{IV.27})$$

équation dont les valeurs propres sont les pulsations de résonance. Pour pouvoir utiliser les techniques classiques de diagonalisation (annexe IV), comme en (II.44), la matrice de (IV.27) doit être symétrisée. Cette transformation est réalisée facilement grâce à une opération de réarrangement et substitution due à B.M. IRONS [95], qui conduit à :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_f c^2} [M_1] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \frac{[M_1][H]^{-1}[M_1]}{\rho_f^2 c^2} & [M_1][H]^{-1}[L]^T \\ [L][H]^{-1}[M_1] & [M'] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{R} \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ Q \end{bmatrix} \quad (\text{IV.28})$$

où :

$$[M'] = [M] + \rho_f^2 c^2 [L] [H]^{-1} [L]^T$$

A ce stade, il est intéressant de considérer le cas particulier du fluide incompressible, i.e, physiquement, le cas des grandes longueurs d'onde. Dans l'expression (IV.16) de L, comme k tend vers 0, l'intégrale associée à  $[M_1]$  disparaît et (IV.27) devient :

$$\begin{bmatrix} [K] - \omega^2 [M] & -[L] \\ -\rho_f^2 c^2 \omega^2 [L]^T & [H] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \mathcal{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ Q \end{bmatrix} \quad (\text{IV.29})$$

La seconde équation donne :

$$\mathcal{R} = \rho_f^2 c^2 \omega^2 [H]^{-1} [L]^T U \quad (\text{IV.30})$$

que l'on reporte dans la première pour obtenir :

$$([K] - \omega^2 [M']) U = Q \quad (\text{IV.31})$$

Ainsi, dans le cas du fluide incompressible, l'analyse modale est la même que pour la structure mécanique seule à condition de remplacer la matrice de masse cohérente  $[M]$  par la matrice de masse cohérente  $[M']$ . Le terme supplémentaire,  $\rho_f^2 c^2 [L][H]^{-1}[L]^T$ , est la masse ajoutée [95,101,110] correspondant à l'inertie du fluide entraîné. Comme indiqué précédemment, on voit donc que la matrice  $[H]$  est associée à l'effet d'inertie, tout l'effet de compressibilité étant contenu dans  $[M_1]$ , ce qui traduit une signification physique contraire à la dénomination traditionnelle de ces deux matrices.

#### IV.3.3 Eléments utilisés

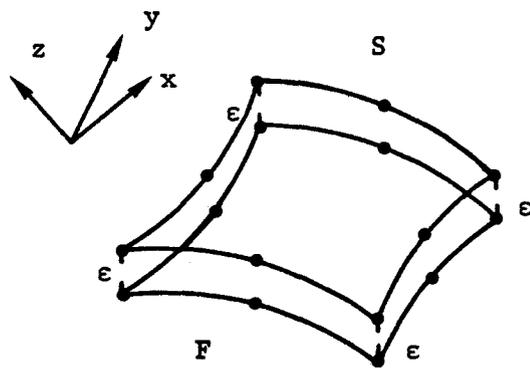
En se référant au tableau de la section (II.3.6), les éléments utilisés pour modéliser le domaine fluide sont, en 3D :

- l'hexaèdre isoparamétrique à 20 noeuds,
- le prisme triangulaire isoparamétrique à 15 noeuds,

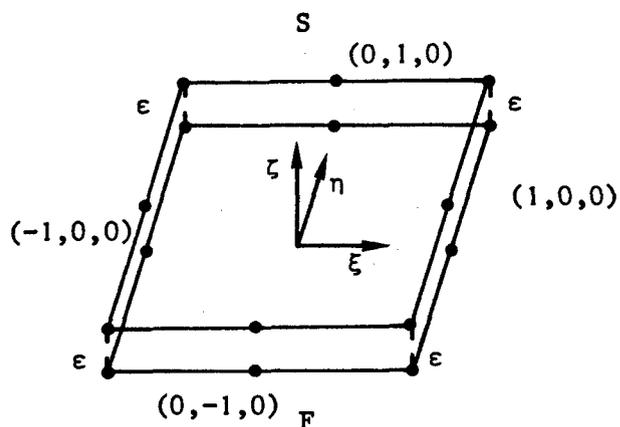
et, dans les cas à symétrie axiale :

- le quadrilatère isoparamétrique à 8 noeuds,
- le triangle isoparamétrique à 6 noeuds.

Pour l'interface, les éléments utilisés demandent une conception particulière puisqu'ils couplent deux domaines distincts. En 3D, l'élément schématisé ci-dessous en coordonnées réelles et en coordonnées réduites est un élément d'épaisseur nulle à 16 noeuds. La matrice  $[L^e]$  qui le représente contient au maximum  $24 \times 8$  termes non



$\epsilon \rightarrow 0$



nuls. Formellement :

$$L_{i\alpha,m}^e = \iint_{\Gamma_{ine}} N_i^e N_{pm}^e [\delta_{\alpha 1}, \delta_{\alpha 2}, \delta_{\alpha 3}] d\Gamma_{ine} \quad (IV.32)$$

où 1,2,3 symbolisent les coordonnées x,y,z. En coordonnées réduites :

$$N_i^e = N_i^e(\xi, \eta, \zeta)$$

$$N_{pm}^e = N_{pm}^e(\xi, \eta, \zeta) \quad (IV.33)$$

et :

$$d\Gamma_{ine} = \begin{bmatrix} dy \wedge dz \\ dz \wedge dx \\ dx \wedge dy \end{bmatrix} \quad (IV.34)$$

sachant que :

$$x = \sum_i N_i^e(\xi, \eta, \zeta) X_i^e$$

$$y = \sum_i N_i^e(\xi, \eta, \zeta) Y_i^e$$

$$z = \sum_i N_i^e(\xi, \eta, \zeta) Z_i^e \quad (IV.35)$$

où  $X_i^e$ ,  $Y_i^e$  et  $Z_i^e$  sont les coordonnées du noeud i de l'élément e, la somme portant sur tous les noeuds de e. Alors, classiquement :

$$dy \wedge dz = \frac{\partial(y,z)}{\partial(\xi,\eta)} d\xi \wedge d\eta + \frac{\partial(y,z)}{\partial(\eta,\zeta)} d\eta \wedge d\zeta + \frac{\partial(y,z)}{\partial(\zeta,\xi)} d\zeta \wedge d\xi \quad (IV.36)$$

avec la notation habituelle :

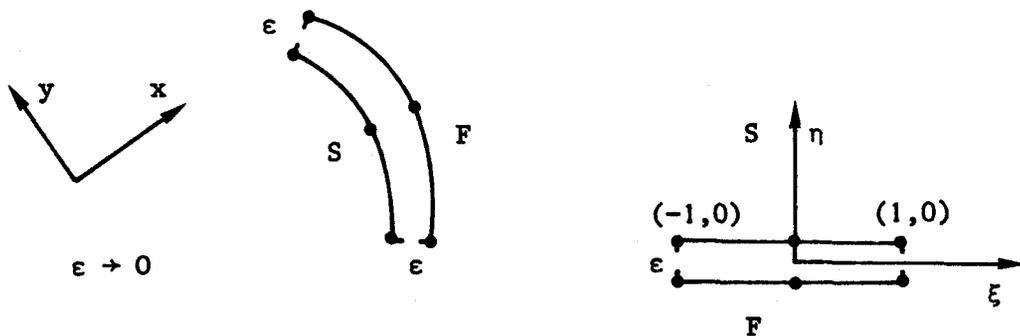
$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\xi,\eta)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.37})$$

deux relations semblables étant à écrire pour les deux autres composantes de  $d\vec{\Gamma}_{\text{ine}}$ . Si, comme sur la figure présentée, le plan de l'élément interface en coordonnées réduites est le plan  $(\xi,\eta)$ , seul  $d\xi \wedge d\eta$  apporte une contribution non nulle et :

$$L_{i\alpha,m}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i^e(\xi,\eta) N_{pm}^e(\xi,\eta) [\delta_{\alpha 1}, \delta_{\alpha 2}, \delta_{\alpha 3}] .$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial(y,z)}{\partial(\xi,\eta)} \\ \frac{\partial(z,x)}{\partial(\xi,\eta)} \\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} \end{bmatrix} d\xi \cdot d\eta \quad (\text{IV.38})$$

Dans le cas de la symétrie axiale, le seul élément interface, schématisé ci-dessous, a 6 noeuds. Sa matrice  $[L^e]$  a, au maximum,  $6 \times 3$



termes non nuls, qui se déduisent simplement de (IV.38) :

$$L_{i\alpha,m}^e = 2\pi \int_{-1}^1 N_i^e(\xi) N_{pm}^e(\xi) d(\xi) [\delta_{\alpha 1}, \delta_{\alpha 2}] \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \cdot d\xi \quad (\text{IV.39})$$

d représentant la distance à l'axe de symétrie d'un point courant de l'élément.

#### IV.3.4 L'assemblage et la méthode de réduction de Guyan

Comme dans le cas d'un solide, l'assemblage est réalisé suivant une méthode frontale couplée à la réduction de Guyan. Cette section donne, dans le cas du problème couplé, les équations de condensation et leurs conditions de validité [41].

Appliquant, pour un degré de pression esclave  $P_1$ , le développement proposé en (II.70) à la seconde équation de (IV.27), on obtient :

$$P_1 = - \sum_{m \neq 1} \frac{H_{1m} - \omega^2 M_{11m}}{H_{11} - \omega^2 M_{111}} P_m + \sum_i \frac{\rho_f^2 c^2 \omega^2 L_{im}}{H_{11} - \omega^2 M_{111}} U_i \quad (\text{IV.40})$$

Si :

$$\omega^2 \ll \frac{H_{11}}{M_{111}} \quad (\text{IV.41})$$

(III.40) peut être développée au premier ordre en  $\omega^2$  :

$$P_1 = - \sum_{m \neq 1} \frac{1}{H_{11}} (H_{1m} - \omega^2 M_{11m} + \omega^2 \frac{M_{111} H_{1m}}{H_{11}}) P_m + \sum_i \rho_f^2 c^2 \omega^2 \frac{L_{i1}}{H_{11}} U_i \quad (\text{IV.42})$$

Reportant dans les deux équations du système (IV.27) :

$$\sum_j [K_{ij} - \omega^2 (M_{ij} + \rho_f^2 c^2 \frac{L_{i1} L_{j1}}{H_{11}})] U_j - \sum_{m \neq 1} (L_{jm} - \frac{L_{j1} H_{1m}}{H_{11}}) P_m = 0 \quad (\text{IV.43})$$

quel que soit  $i$ , et :

$$\sum_{m \neq 1} [(H_{nm} - \frac{H_{n1} H_{1m}}{H_{11}}) - \omega^2 (M_{1nm} - \frac{H_{n1} M_{11m}}{H_{11}} - \frac{M_{1n1} H_{1m}}{H_{11}} + \frac{H_{n1} M_{111} H_{1m}}{H_{11}^2})] P_m - \sum_j \rho_f^2 c^2 \omega^2 (L_{jn} - \frac{L_{j1} H_{1n}}{H_{11}}) U_j = 0 \quad (\text{IV.44})$$

quel que soit  $n$ . De même, appliquant le développement pour un degré de déplacement esclave  $U_1$  à la première équation de (IV.27), on obtient :

$$U_1 = - \sum_{j \neq 1} \frac{K_{1j} - \omega^2 M_{1j}}{K_{11} - \omega^2 M_{11}} U_j + \sum_m \frac{L_{1m}}{H_{11}} P_m \quad (\text{IV.45})$$

Si :

$$\omega^2 \ll \frac{K_{11}}{M_{11}} \quad (\text{IV.46})$$

(IV.45) peut être développée au premier ordre en  $\omega^2$  :

$$U_1 = - \sum_{j \neq 1} \frac{1}{K_{11}} (K_{1j} - \omega^2 M_{1j} + \omega^2 \frac{K_{1j} M_{11}}{K_{11}}) U_j + \sum_m \frac{L_{1m}}{K_{11}} P_m$$

(IV.47)

Reportant dans les deux équations du système (IV.27) :

$$\sum_{j \neq 1} [(K_{ij} - \frac{K_{i1} K_{1j}}{K_{11}}) - \omega^2 (M_{ij} - \frac{M_{i1} K_{1j}}{K_{11}} - \frac{K_{i1} M_{1j}}{K_{11}} + \frac{K_{i1} M_{11} K_{1j}}{K_{11}})] U_j - \sum_m (L_{im} - \frac{K_{i1} L_{1m}}{K_{11}}) P_m = 0$$

(IV.48)

quel que soit  $i$ , et :

$$\sum_m [H_{nm} - \omega^2 (M_{nm} + \rho_{fc}^2 \frac{L_{1n} L_{1m}}{K_{11}})] P_m + \sum_{j \neq 1} \rho_{fc}^2 \omega^2 (L_{jn} - \frac{L_{1n} K_{1j}}{K_{11}}) U_j = 0$$

(IV.49)

quel que soit  $n$ . Ainsi, appliquant les transformations :

$$\bar{H}_{nm} = H_{nm} - \frac{H_{n1}H_{1m}}{H_{11}}$$

$$\bar{M}_{1nm} = M_{1nm} - \frac{H_{n1}M_{11m}}{H_{11}} - \frac{M_{1n1}H_{1m}}{H_{11}} + \frac{H_{n1}M_{111}H_{1m}}{H_{11}^2}$$

$$\bar{K}_{ij} = K_{ij}$$

$$\bar{M}_{ij} = M_{ij} + \rho_f^2 c^2 \frac{L_{i1}L_{j1}}{H_{11}}$$

$$\bar{L}_{jm} = L_{jm} - \frac{L_{j1}H_{1m}}{H_{11}}$$

(IV.50)

ou :

$$\bar{H}_{nm} = H_{nm}$$

$$\bar{M}_{nm} = M_{nm} + \rho_f^2 c^2 \frac{L_{1n}L_{1m}}{K_{11}}$$

$$\bar{K}_{ij} = K_{ij} - \frac{K_{i1}K_{1j}}{K_{11}}$$

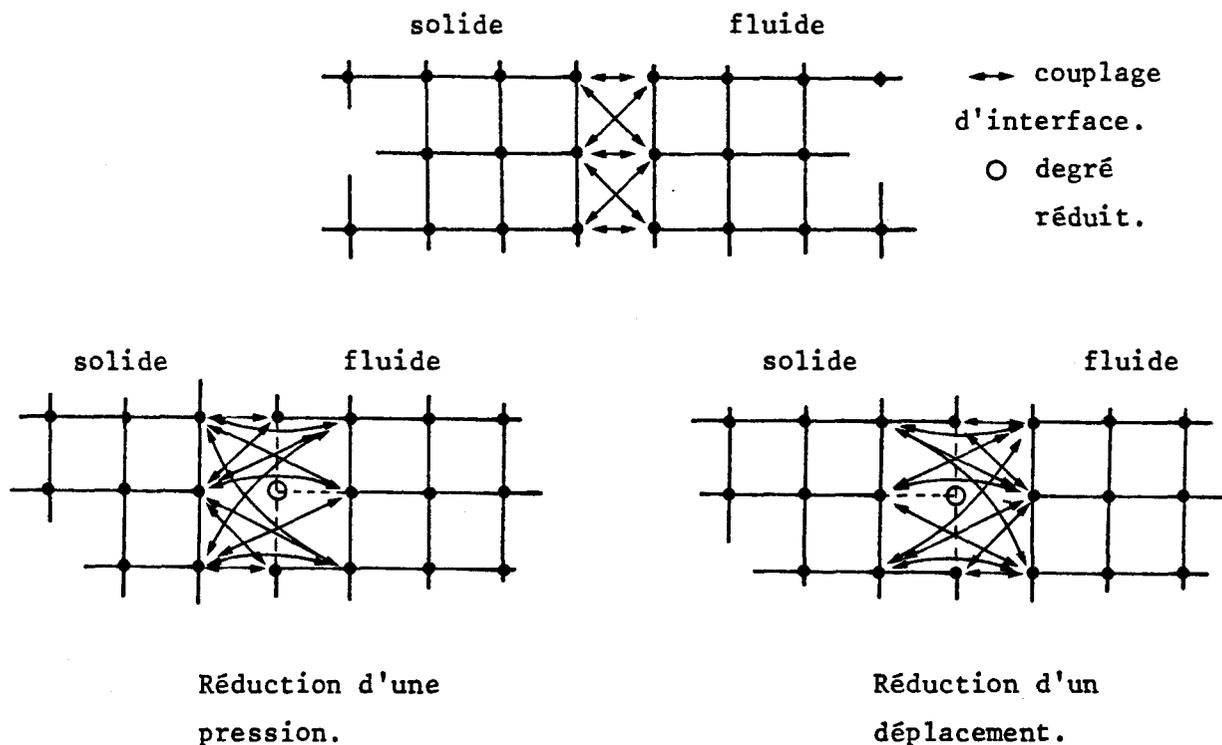
$$\bar{M}_{ij} = M_{ij} - \frac{M_{i1}K_{1j}}{K_{11}} - \frac{K_{i1}M_{1j}}{K_{11}} + \frac{K_{i1}M_{11}K_{1j}}{K_{11}^2}$$

$$\bar{L}_{jm} = L_{jm} - \frac{L_{1m}K_{1j}}{K_{11}}$$

(IV.51)

suivant que le degré esclave traité est le degré  $P_1$  ou le degré  $U_1$ , on peut éliminer dans (IV.27) la ligne et la colonne 1 et obtenir un système d'équations dont l'organisation est rigoureusement identique mais dont l'ordre est diminué d'une unité.

Cette réduction de Guyan généralisée a l'avantage de permettre l'emploi de la même technique d'assemblage frontal pour les problèmes couplés et les problèmes de structures seules. Dans le cas de la réduction d'un degré solide, la condition (IV.46) est identique à (II.71) et l'approximation réalisée consiste à négliger l'inertie associée à ce degré esclave. Dans le cas de la réduction d'un degré fluide, la condition (IV.41) est formellement identique à (IV.46) et permet donc l'utilisation du même algorithme de sélection des degrés maîtres. L'approximation réalisée consiste, cette fois, à négliger la compressibilité associée au noeud esclave. On peut d'ailleurs vérifier très simplement que, si on réduit la totalité des degrés de liberté fluides, le problème dégénère en un problème de masse ajoutée dont l'équation est identique à (IV.31). Enfin, (IV.50) et (IV.51) montrent, comme le schématise la figure ci-dessous, que la réduction

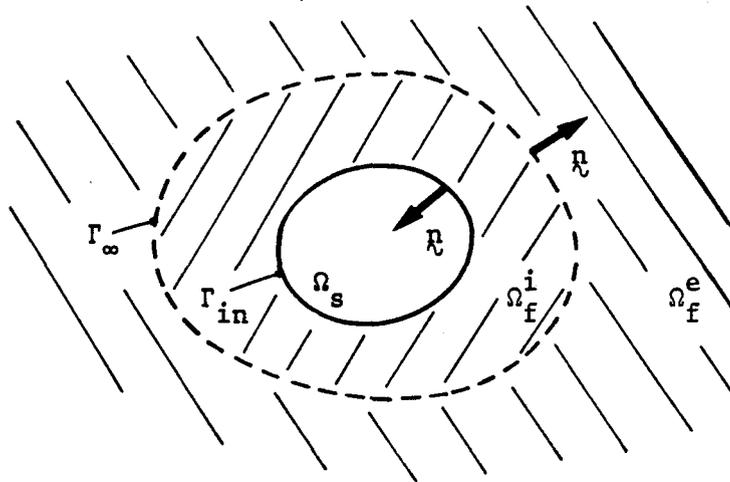


d'un degré de liberté d'interface se traduit par l'apparition de nouveaux termes de couplage hors de l'élément interface lui-même.

La généralisation de la méthode de Guyan présentée ci-dessus est originale. Sa mise en oeuvre et son efficacité sont analysées dans la section (IV.5).

#### IV.4 LA FORMULATION ET LA RESOLUTION PAR ELEMENTS FINIS DU PROBLEME OUVERT

Pour traiter un problème de rayonnement dans le contexte des éléments finis, il est nécessaire de tronquer le volume fluide  $\Omega_f$  en le limitant par une surface frontière  $\Gamma_\infty$  sur laquelle des conditions appropriées sont imposées. La partie de  $\Omega_f$  interne à  $\Gamma_\infty$ , notée  $\Omega_f^i$ , est alors maillée comme dans le cas d'un problème fermé, la partie externe, notée  $\Omega_f^e$ , étant seulement simulée par les conditions aux limites sur  $\Gamma_\infty$ . De nombreuses approches ont été développées suivant cette ligne [26,41-44,111-113] différant les unes des autres par le choix des conditions imposées sur  $\Gamma_\infty$ , et, en conséquence, par la



position de  $\Gamma_\infty$ . Pour sélectionner une de ces approches, les critères que nous avons retenus sont :

- avoir une condition aux limites sur  $\Gamma_\infty$  du type :

$$n_i \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} = T \quad (IV.52)$$

Cette condition est identique à (IV.8) et permet, de ce fait, d'utiliser une formulation simple, très proche de celle du problème fermé,

- avoir une condition locale, i.e que le calcul du terme T de (IV.52) ne nécessite pas la connaissance du champ de pression p en tout point de  $\Gamma_\infty$ , de façon à conserver la structure des équations de la méthode des éléments finis.

Ils ont conduit au développement d'un élément rayonnant directement déduit des travaux de O.C. ZIENKIEWICZ et al [95], D.V. DEAN [111] et A. BAYLISS et al [112]. Cette section présente l'analyse mathématique dont l'approche est issue, la formulation de l'élément, les différents algorithmes de résolution correspondant aux situations rencontrées concrètement. Comme indiqué au début du chapitre, la section (IV.5) résume les résultats obtenus pour plusieurs cas tests et la section (IV.6) compare la méthode retenue aux nombreuses autres, qu'elles relèvent du contexte des éléments finis ou non.

#### IV.4.1 Formulation mathématique de la condition de rayonnement

Pour prendre en compte avec un maillage limité à  $\Gamma_\infty$  les effets du rayonnement, O.C. ZIENKIEWICZ et al [95] ont d'abord proposé d'appliquer une condition semblable à la condition de Sommerfeld directement sur  $\Gamma_\infty$  :

$$n_i \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} \Big|_{\Gamma_\infty} = -j k p \quad (IV.53)$$

ce qui, à l'évidence, revient à imposer que le rapport de la pression à la vitesse normale est égal, en tout point de  $\Gamma_\infty$ , à l'impédance caractéristique du fluide,  $\rho_f c$ . (IV.53) est toutefois une relation très imprécise et nécessite de rejeter  $\Gamma_\infty$  loin des sources, en principe à l'infini. Pour réduire le volume de  $\Omega_f^i$  et, par conséquent, la taille du maillage, D.V. DEAN [111] a proposé l'emploi de la condition :

$$\frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{\Gamma_\infty} = - \left( \frac{1}{r} + j k \right) p \quad (IV.54)$$

en tout point d'une surface frontière  $\Gamma_\infty$  sphérique centrée au voisinage du centre acoustique de la source. Dans ce cas le rapport de

la pression à la vitesse normale est égal, en tout point de  $\Gamma_\infty$ , à l'impédance d'une onde sphérique. Comme pour (IV.53), les deux conditions de sélection retenues sont remplies par (IV.54) mais, en outre, (IV.54) est vérifiée par l'expression du champ de pression lointain et devient donc exacte dès que  $\Gamma_\infty$  entre dans la zone de validité de cette expression. En effet, si  $r$ ,  $\theta$  et  $\phi$  sont des coordonnées sphériques d'un système centré près de la source, on sait qu'en champ lointain la pression  $p$  est donnée par [1,2,9,64] :

$$p = p_\infty = \frac{e^{-jkr}}{kr} F_0(\theta, \phi) \quad (\text{IV.55})$$

qui est bien solution de (IV.54).

Dans de nombreux cas, en particulier celui des sources pulsantes ou, de manière équivalente, celui des pistons montés dans des baffles durs, la zone de validité de (IV.55) est, classiquement [64,114] :

$$r \gg d$$

$$r \gg \frac{d^2}{\lambda}$$

(IV.56)

où  $d$  est la plus grande dimension de la source dans le plan normal à la direction de propagation considérée. De ce fait, si, dans ces différents cas, on impose que le rayon  $R_\infty$  de la sphère  $\Gamma_\infty$  vérifie la relation (IV.56) i.e que :

$$R_\infty \gg d$$

$$R_\infty \gg \frac{d^2}{\lambda}$$

(IV.57)

on assure simultanément la validité de la condition aux limites (IV.54) et de l'expression approchée (IV.55). Les valeurs de la pression sur  $\Gamma_\infty$  fournies par le calcul à l'aide des éléments finis sont alors directement les valeurs en champ lointain et autorisent, sans traitement numérique supplémentaire, l'obtention du niveau d'émission (annexe 1) et de la fonction de directivité  $F_0(\theta, \phi)$ .

Toutefois, la condition (IV.57) peut être trop sévère pour assurer la validité de (IV.54) et, d'autre part, la condition (IV.56) n'est pas, comme il sera discuté ultérieurement, complètement générale.

Pour lever, au moins partiellement, ces dernières difficultés, il est intéressant de noter que, à l'extérieur de la sphère circonscrite à toute surface vibrante, le champ de pression  $p$  se développe suivant la série :

$$p(r, \theta, \phi) = \frac{e^{-jkr}}{kr} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(\theta, \phi)}{(kr)^n} \quad (\text{IV.58})$$

série dont la convergence absolue et uniforme a été prouvée par C.H. WILCOX [103,104]. Dans cette série,  $F_n(\theta, \phi)$  se déduit de la fonction de directivité par :

$$F_n(\theta, \phi) = \frac{1}{n!(-2j)^n} \sum_{l=1}^n \frac{\pi}{[1(1-l)+Q]} F_0(\theta, \phi) \quad (\text{IV.59})$$

où  $Q$  est l'opérateur de Beltrami défini par :

$$Q = \frac{1}{\sin\theta} \left( \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \quad (\text{IV.60})$$

De ce fait, si on assimile le champ de pression  $p$  au champ de pression lointain  $p_\infty$  en tout point de  $\Gamma_\infty$ , l'erreur réalisée décroît en  $1/R_\infty^2$  :

$$p - p_\infty \Big|_{\Gamma_\infty} = O \left( \frac{1}{R_\infty^2} \right) \quad (\text{IV.61})$$

Par contre, si on impose la condition (IV.54), l'erreur réalisée décroît en  $1/R_\infty^3$  :

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} + jk \right) p \Big|_{\Gamma_\infty} = O \left( \frac{1}{R_\infty^3} \right) \quad (\text{IV.62})$$

De façon plus précise, si on note  $W(\underline{x})$  la différence entre la solution du problème de rayonnement réel et celle du problème approché, et si on mesure l'erreur réalisée par la norme  $|| W(\underline{x}) ||$  telle que :

$$|| W(\underline{x}) ||^2 = \iint_{\Gamma_{\infty}} | W(\underline{x}) |^2 d\Gamma \quad (\text{IV.63})$$

en assimilant le champ de pression  $p$  à  $p_{\infty}$  en tout point de  $\Gamma_{\infty}$  on a : (annexe 6) :

$$|| W(\underline{x}) || \sim \frac{C}{k^2 R_{\infty}} \quad (\text{IV.64})$$

alors qu'en imposant la condition (IV.54) on a (annexe 6) :

$$|| W(\underline{x}) || \sim \frac{C'}{k^3 R_{\infty}^2} \quad (\text{IV.65})$$

Ainsi il apparaît que l'erreur induite par l'application de la condition (IV.54) décroît plus rapidement avec  $R_{\infty}$  que l'erreur due à l'approximation du champ lointain. Dans certains cas, on doit donc pouvoir placer la surface frontière  $\Gamma_{\infty}$  dans le champ proche et obtenir néanmoins une bonne description de la pression, la détermination du niveau d'émission et de la fonction de directivité nécessitant alors toutefois le recours à un calcul supplémentaire, à l'aide d'une des formulations intégrales de Helmholtz par exemple. Dans tous les cas étudiés, l'absence d'un critère de convergence précis et simple nous a conduit à justifier par des tests numériques la position de  $\Gamma_{\infty}$ , confirmant systématiquement les conclusions qualitatives de cette section.

#### IV.4.2 L'élément rayonnant

Revenant aux équations du problème posées dans la section (IV.1), la condition (IV.54) est une condition de flux du type (IV.8) et peut donc être incorporée dans la formulation éléments finis de la relation matricielle (IV.26) en calculant le vecteur chargement  $\Psi_e$ .  $\Gamma_{\infty e}$  étant un élément de la surface frontière, on a alors :

$$\Psi_e = - \iint_{\Gamma_{\infty e}} [N_p^e]^T \left( \frac{1}{R_{\infty}} + jk \right) p d\Gamma_{\infty e} \quad (\text{IV.66})$$

soit :

$$\Psi_e = - \frac{1}{\rho_f c} \left( \frac{1}{R_\infty} + jk \right) [D^e] \mathcal{R}^e \quad (\text{IV.67})$$

avec :

$$[D^e] = \rho_f c \iint_{\Gamma_{\infty e}} [N_p^e]^T [N_p^e] d\Gamma_{\infty e} \quad (\text{IV.68})$$

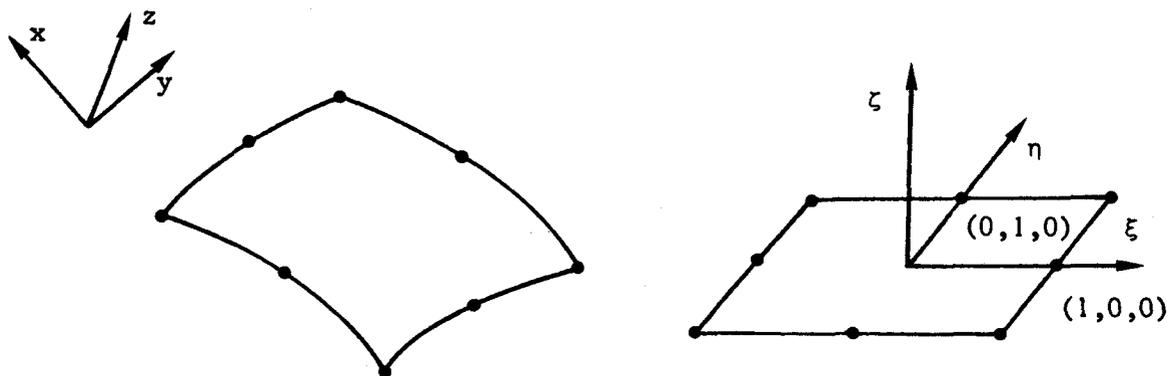
Appelant  $[D]$  la matrice obtenue par assemblage des matrices élémentaires  $[D^e]$ , (IV.26) devient :

$$\begin{bmatrix} [K] - \omega^2 [M] & - [L] \\ -\rho_f^2 c^2 \omega^2 [L]^T & [H_1] - \omega^2 [M_1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U} \\ \mathcal{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{F} \\ -j\omega [D] \mathcal{R} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.69})$$

avec :

$$[H_1] = [H] + \frac{c}{R_\infty} [D] \quad (\text{IV.70})$$

L'élément rayonnant est un élément permettant la fabrication de la matrice élémentaire  $[D^e]$ . En 3D, l'élément schématisé ci-dessous est un élément à 8 noeuds dont la matrice représentative contient 8x8



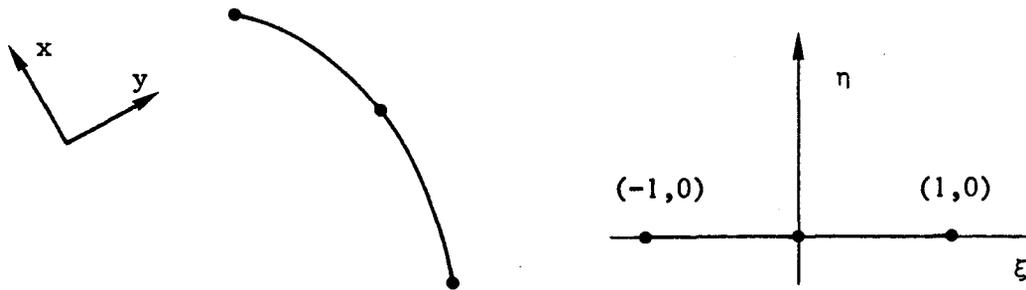
termes, d'expression générale :

$$D_{m,n}^e = \rho_f c \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_{pm}^e(\xi, \eta) N_{pn}^e(\xi, \eta) \times$$

$$\times \left[ \left( \frac{\partial(y,z)}{\partial(\xi, \eta)} \right)^2 + \left( \frac{\partial(z,x)}{\partial(\xi, \eta)} \right)^2 + \left( \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi, \eta)} \right)^2 \right] d\xi d\eta$$

(IV.71)

avec les notations de la section (IV.3.3). Dans un cas à symétrie axiale, comme schématisé ci-dessous, c'est un élément à 3 noeuds dont



la matrice représentative contient 3x3 termes d'expression générale :

$$D_{m,n}^e = 2\pi\rho_f c \int_{-1}^1 N_{pm}^e(\xi) N_{pn}^e(\xi) d(\xi) \times$$

$$\times \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right] d\xi$$

(IV.72)

d représentant la distance à l'axe de symétrie d'un point courant de l'élément.

#### IV.4.3 Les algorithmes de résolution

Deux cas sont à considérer concrètement :

- la distribution de vitesse à l'interface  $\Gamma_{ine}$  est connue et seul le champ de pression est à calculer. Ce problème permet de tester la formulation développée mais aussi de traiter des cas physiques où la réaction du fluide sur la structure excitatrice est négligeable, comme par exemple le cas du rayonnement dans l'air.
- la force excitatrice est seule connue et le problème couplé structure-fluide est à résoudre dans son ensemble. C'est typiquement le cas des transducteurs SONAR dans l'eau.

a) *Premier cas : la vitesse est connue en tout point de l'interface*

La relation (IV.69) devient :

$$([H_1] - \omega^2 [M_1] + j \omega [D]) \mathcal{R} = \rho_f^2 c^2 \omega^2 [L]^T \mathcal{U} \quad (IV.73)$$

$\mathcal{U}$  étant un vecteur connu. Séparant  $\mathcal{R}$  en parties réelle et imaginaire :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 + j \mathcal{R}_2 \quad (IV.74)$$

et considérant  $\mathcal{U}$  comme un vecteur réel (phase de référence), on obtient :

$$([H_1] - \omega^2 [M_1]) \mathcal{R}_1 - \omega [D] \mathcal{R}_2 = \rho_f^2 c^2 \omega^2 [L]^T \mathcal{U} \quad (IV.75)$$

et :

$$([H_1] - \omega^2 [M_1]) \mathcal{R}_2 + \omega [D] \mathcal{R}_1 = 0 \quad (IV.76)$$

Numériquement, le problème se ramène à la résolution de :

$$([HM] + \omega^2 [D] [HM]^{-1} [D]) \mathcal{R}_1 = \rho_f^2 c^2 \omega^2 [L]^T \mathcal{U} \quad (IV.77)$$

où :

$$[HM] = [H_1] - \omega^2 [M_1] \quad (IV.78)$$

En fait, la matrice  $[D]$  est une matrice très creuse, cette

caractéristique permettant une simplification notable des équations ci-dessus. Appelant  $\mathcal{R}^i$  et  $\mathcal{R}^r$  les parties de  $\mathcal{R}$  correspondant respectivement aux noeuds intérieurs à  $\Gamma_\infty$  et aux noeuds de  $\Gamma_\infty$ , on peut ordonner  $\mathcal{R}$  tel que :

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \mathcal{R}^i \\ \mathcal{R}^r \end{bmatrix} \quad (\text{IV.79})$$

Alors :

$$[D] = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [d] \end{bmatrix} \quad (\text{IV.80})$$

et le système (IV.77) devient :

$$\begin{bmatrix} [HM]_{i,i} & [HM]_{i,r} \\ [HM]_{r,i} & [HM]_{r,r} + \omega^2 [d] [A]^{-1} [d] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{R}_1^i \\ \mathcal{R}_1^r \end{bmatrix} = \rho_f^2 c^2 \omega^2 [L]^T \mathcal{U} \quad (\text{IV.81})$$

avec :

$$[A] = [HM]_{r,r} - [HM]_{r,i} [HM]_{i,i}^{-1} [HM]_{i,r}$$

(IV.81) étant résolu à l'aide d'une élimination de Gauss, on achève le calcul de  $\mathcal{R}$  par :

$$\mathcal{R}_2^i = \omega [HM]_{i,i}^{-1} [HM]_{i,r} [A]^{-1} [d] \mathcal{R}_1^r \quad (\text{IV.82})$$

et

$$\mathcal{R}_2^r = -\omega [A]^{-1} [d] \mathcal{R}_1^r \quad (\text{IV.83})$$

Compte tenu de la faible taille de  $[d]$ , les noeuds de  $\Gamma_\infty$  ne sont jamais réduits, les degrés esclaves étant seulement choisis dans  $\mathcal{R}^i$ .

b) Deuxième cas : le problème couplé

La relation (IV.69) doit être considérée dans son ensemble. Choisisant la référence de phase telle que les composantes de  $\mathcal{F}$  soient réelles et posant :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 + j \mathcal{R}_2 \quad (\text{IV.84})$$

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 + j \mathcal{U}_2$$

on obtient :

$$\mathcal{U}_1 = [\text{KM}]^{-1} (\mathcal{R} + [\text{L}] \mathcal{R}_1) \quad (\text{IV.85})$$

$$\mathcal{U}_2 = [\text{KM}]^{-1} [\text{L}] \mathcal{R}_2$$

où :

$$[\text{KM}] = [\text{K}] - \omega^2 [\text{M}] \quad (\text{IV.86})$$

Substituant dans la seconde ligne de (IV.69) :

$$\begin{aligned} ([\text{HM}] - \rho_f^2 c^2 \omega^2 [\text{L}]^T [\text{KM}]^{-1} [\text{L}]) \mathcal{R}_1 - \omega [\text{D}] \mathcal{R}_2 \\ = \rho_f^2 c^2 \omega^2 [\text{L}]^T [\text{KM}]^{-1} \mathcal{R} \end{aligned} \quad (\text{IV.87})$$

et :

$$([\text{HM}] - \rho_f^2 c^2 \omega^2 [\text{L}]^T [\text{KM}]^{-1} [\text{L}]) \mathcal{R}_2 + \omega [\text{D}] \mathcal{R}_1 = 0 \quad (\text{IV.88})$$

Formellement (IV.87) est identique à (IV.75) et (IV.88) à (IV.76). La séparation de  $\mathcal{R}$  en  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  est donc de nouveau utile pour permettre l'exploitation de la structure particulière de la matrice  $[\text{D}]$ , la démarche devenant parallèle à celle décrite de (IV.80) à (IV.83).

Si la structure étudiée est une structure électromécanique excitée par une tension extérieure  $\phi_S$ , on a montré en (II.3.5.g) que l'équation (II.46) caractéristique d'une analyse harmonique :

$$([\text{K}_{uu}] - \omega^2 [\text{M}]) \mathcal{U} = \mathcal{F}$$

doit être remplacée par l'équation (II.61) :

$$(\bar{K}_{uu} - \omega^2 [M]) U = - \bar{K}_{u\phi}^P \cdot \phi_S$$

Le système d'équations (IV.83) à (IV.86) n'est donc pas modifié si on pose :

$$\bar{K} = - \bar{K}_{u\phi}^P \cdot \phi_S \quad (IV.89)$$

D'autre part, (II.58), (II.59), (II.60) et (II.62) permettent d'écrire le courant total :

$$I = -j\omega ( (\bar{K}_{u\phi}^P)^T \cdot U + \bar{K}_{\phi\phi}^{PP} \phi_S ) \quad (IV.90)$$

On en déduit les parties réelle et imaginaire de l'admittance électrique :

$$X(\omega) = \omega (\bar{K}_{u\phi}^P)^T U_2 / \phi_S \quad (IV.91)$$

et :

$$Y(\omega) = - \omega ( (\bar{K}_{u\phi}^P)^T U_1 / \phi_S + \bar{K}_{\phi\phi}^{PP} ) \quad (IV.92)$$

Dans le cas d'un transducteur SONAR,  $X(\omega)$  et  $Y(\omega)$  sont directement reliés aux composantes parallèles  $R_p$  et  $C_p$  du schéma équivalent (annexe 1).

D'une façon générale, les traitements numériques nécessaires aux deux cas a et b sont, d'une part, des réarrangements de grands tableaux pour lesquels une attention particulière a dû être accordée au compromis temps CPU/espace mémoire [41], et, d'autre part, des inversions ou résolutions de systèmes linéaires décrites en annexe IV.

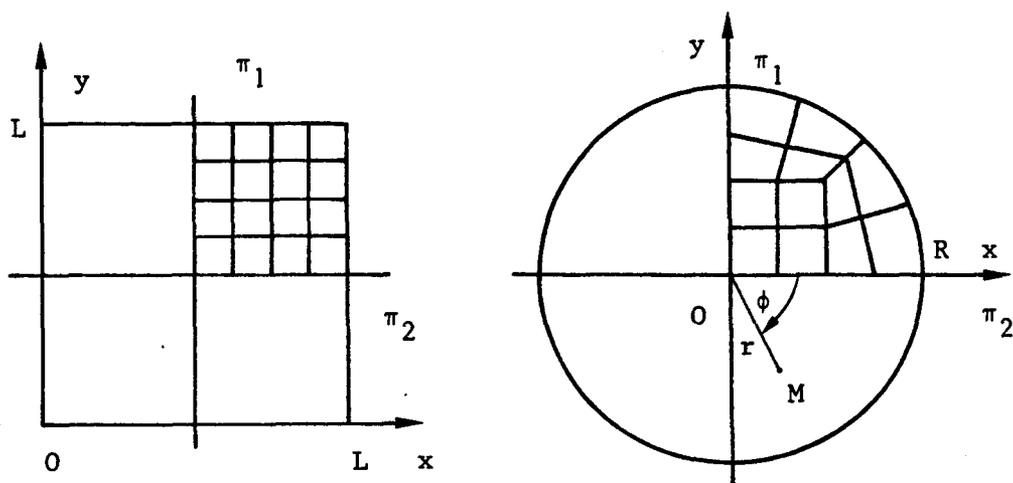
#### IV.5 ETUDE DE QUELQUES PROBLEMES TESTS

Afin de préciser les possibilités du code que nous avons développé suivant les principes décrits dans les quatre premières sections de ce chapitre, de nombreux exemples ont été traités. Cette section en présente plusieurs qui précisent le critère de maillage (IV.5.1), analysent les effets des réductions de GUYAN dans le fluide et à l'interface ((IV.5.2) et (IV.5.3)), testent la modélisation du rayonnement ((IV.5.4) et (IV.5.5)) et d'un problème couplé ouvert (IV.5.6). Dans la majorité des cas, la référence est une solution analytique totale (plaque ou sphère vibrant uniformément) ou partielle

(piston bafflé). Dans un cas (IV.5.3), une étude expérimentale détaillée a été mise en place.

#### IV.5.1 Analyse modale d'un domaine fluide. Critère de maillage

Pour préciser le critère de maillage d'un domaine fluide, deux



exemples ont été traités : une plaque carrée de côté  $L$  et un disque de rayon  $R$ . Dans les deux cas, l'épaisseur choisie est suffisamment faible pour que le champ de pression reste uniforme dans la direction perpendiculaire au plan des figures, et la condition imposée sur les surfaces externes est une condition de flux nul. La symétrie permet, dans chaque cas, de ne mailler que le quart de la structure et on a utilisé, respectivement, 16 et 15 éléments. En appliquant successivement des conditions de symétrie (flux nul) ou d'antisymétrie (pression nulle) sur les plans  $\pi_1$  et  $\pi_2$ , on peut réaliser trois combinaisons distinctes notées SS, SA et AA, qui donnent accès à tous les modes. Dans le cas de la plaque, les fréquences propres sont données par [2] :

$$f_{nm} = \frac{c}{2L} \sqrt{m^2 + n^2}$$

et les modes propres par :

$$p = p_0 \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi y}{L} \quad (\text{IV.94})$$

Dans le cas du disque, les fréquences propres sont données par [2] :

$$f_{mn} = \frac{c}{2R} \alpha_{mn} \quad (\text{IV.95})$$

avec :

$$\frac{d}{d\alpha} J_m(\pi\alpha) \Big|_{\alpha = \alpha_{mn}} = 0 \quad (\text{IV.96})$$

et les modes propres par :

$$p = p_0 J_m \left( \pi \alpha_{mn} \frac{r}{R} \right) \cos(m\phi) \quad (\text{IV.97})$$

où  $r$  et  $\phi$  sont les coordonnées polaires. Les deux tableaux de la page suivante comparent les valeurs normalisées des fréquences calculées à l'aide des relations ci-dessus et par éléments finis, et donnent les valeurs relatives de l'erreur. Les figures (IV.1) et (IV.2) présentent quelques modes propres. Pour les ordres  $m$  et  $n$  faibles, les résultats sont excellents. Ils ne commencent à se dégrader que lorsque  $m$  ou  $n$  atteint ou dépasse la valeur 4, i.e, lorsque la longueur d'onde devient de l'ordre de  $L/2$  ou de  $R$  et qu'un élément contient le quart de cette longueur d'onde. Ce critère de convergence, dit "critère en  $\lambda/4$ ", est, de fait, très général, et se justifie simplement en considérant que, le long d'un élément, l'interpolation par les fonctions de forme utilisées est quadratique. Cette justification permet en outre de prévoir que, dans le cas d'un problème de rayonnement, le critère en  $\lambda/4$  ne doit être vérifié de façon précise que dans la direction de propagation.

#### IV.5.2 Analyse modale d'un domaine mixte fermé. Premier test de l'interface et de la réduction de Guyan

Pour tester l'élément interface, deux modèles simples ont été développés afin de permettre la comparaison des résultats obtenus par éléments finis à des solutions analytiques. Le premier modèle est

Plaque carrée.			Fréquences normalisées			$(2L/c) f_{mn}$			
m	n	E.F	theor.	$\Delta \%$	m	n	E.F	theor.	$\Delta\%$
1	0	1.001	1.	0.1	3	3	4.288	4.243	1.1
1	1	1.420	1.414	0.4	4	0	4.299	4.	7.5
2	0	2.046	2.	2.3	4	1	4.288	4.123	4.0
2	1	2.272	2.236	1.6	4	2	4.856	4.472	8.6
2	2	2.929	2.828	3.6	4	3	5.445	5.	8.9
3	0	3.122	3.	4.1	4	4	6.385	5.657	11.3
3	1	3.174	3.162	0.4	5	0	5.512	5.	10.2
3	2	3.815	3.605	5.8	5	1	5.268	5.099	3.3

Disque			Fréquences normalisées			$\alpha_{mn} = 2R/c f_{mn}$			
m	n	E.F	theor.	$\Delta \%$	m	n	E.F	theor.	$\Delta\%$
0	2	1.231	1.219	1.0	2	3*	3.221	3.173	1.5
0	3	2.338	2.330	0.3	3	1	1.353	1.337	1.2
0	4	3.478	3.237	7.4	3	2	2.591	2.552	1.5
1	1	0.586	0.585	0.3	4	1 <sup>+</sup>	1.769	1.693	4.5
1	2	1.706	1.697	0.5	4	1*	1.694	1.693	0.1
1	3	2.757	2.714	1.6	4	2 <sup>+</sup>	3.178	2.954	7.6
2	1 <sup>+</sup>	0.981	0.972	0.9	4	2*	2.985	2.954	1.0
2	1*	0.973	0.972	0.1	5	1	2.091	2.032	2.9
2	2 <sup>+</sup>	2.196	2.134	2.9	6	1 <sup>+</sup>	2.568	2.377	8.0
2	2*	2.145	2.134	0.5	6	1*	2.432	2.377	2.3
2	3 <sup>+</sup>	3.313	3.173	4.4					
<p>+ : valeur E.F déterminée avec la condition SS  * : valeur E.F déterminée avec la condition AA</p>									

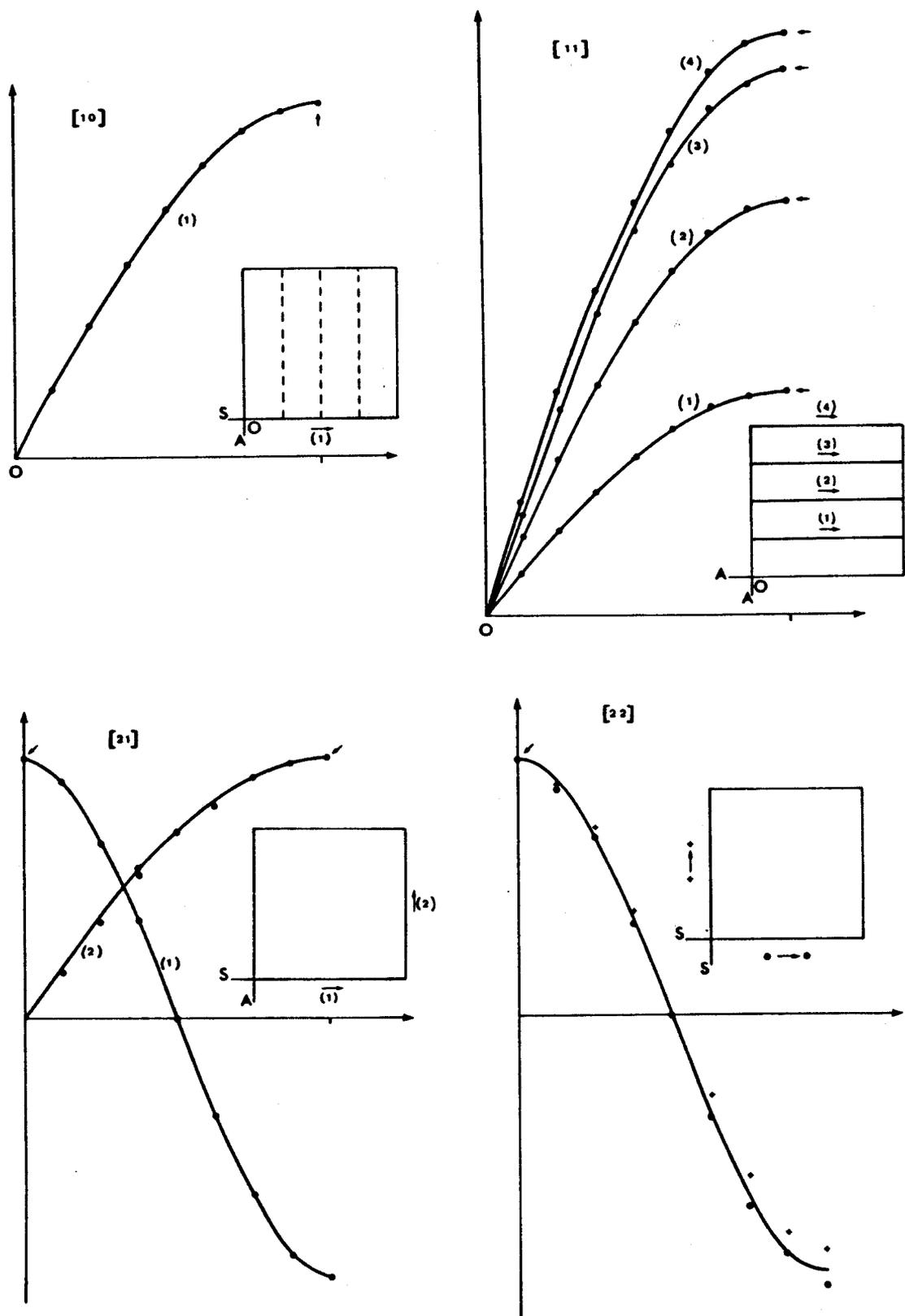


Figure IV.1 . Variations de la pression pour certaines directions privilégiées de la plaque carrée . Les courbes représentent la relation (IV.94) . Les points sont calculés par éléments finis . Les flèches indiquent les points de normalisation .

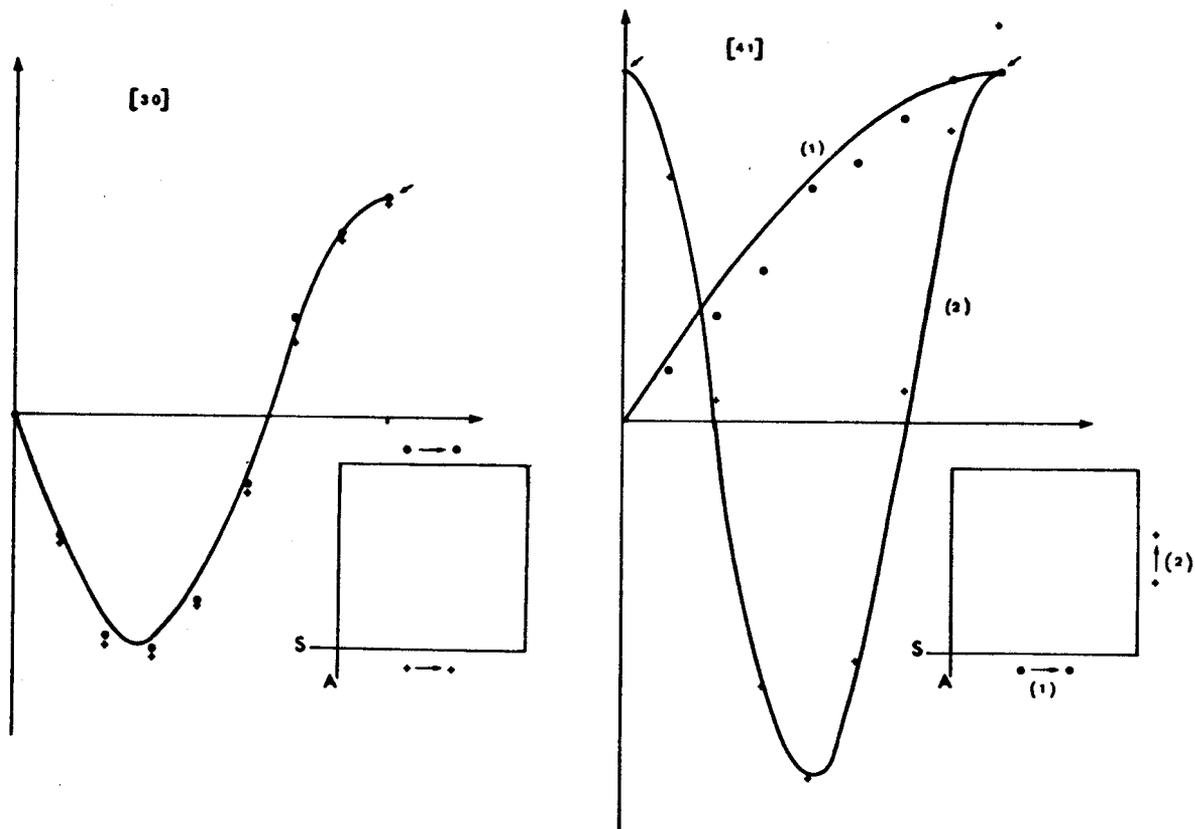
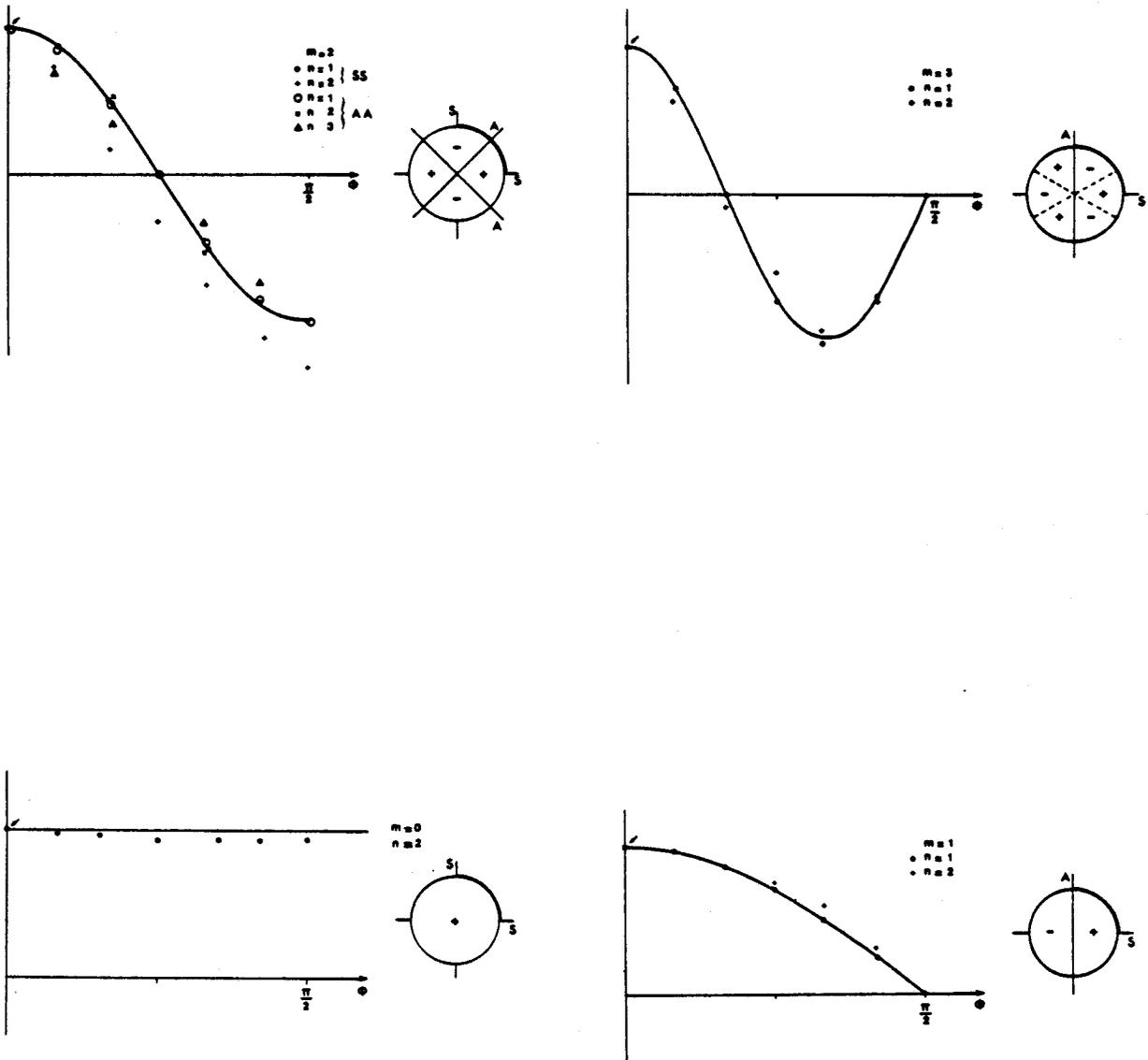


Figure IV.1 . Suite .



**Figure IV.2 .** Variations de la pression avec  $r$  ou  $\phi$  dans le cas du disque . Les courbes représentent la relation (IV.97). Les points sont calculés par éléments finis . Les flèches indiquent les points de normalisation .

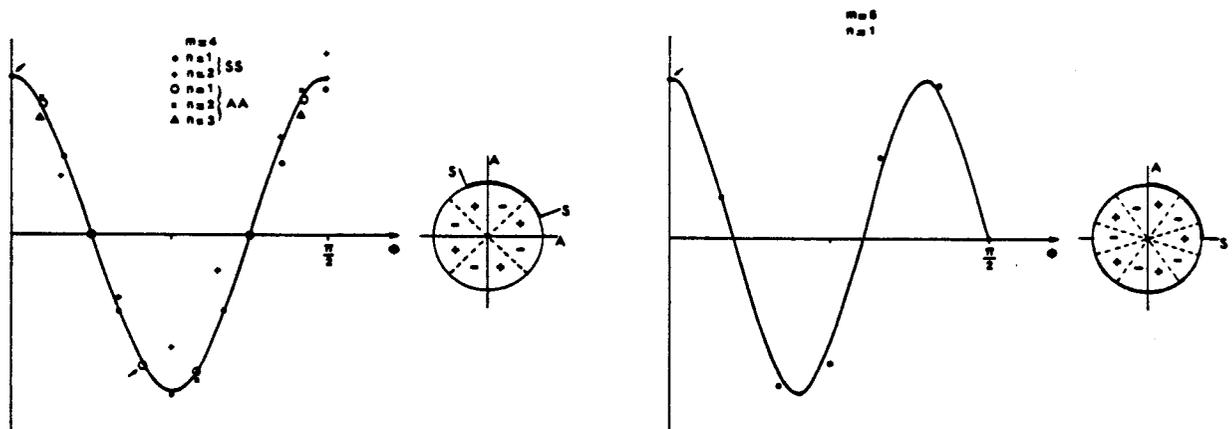
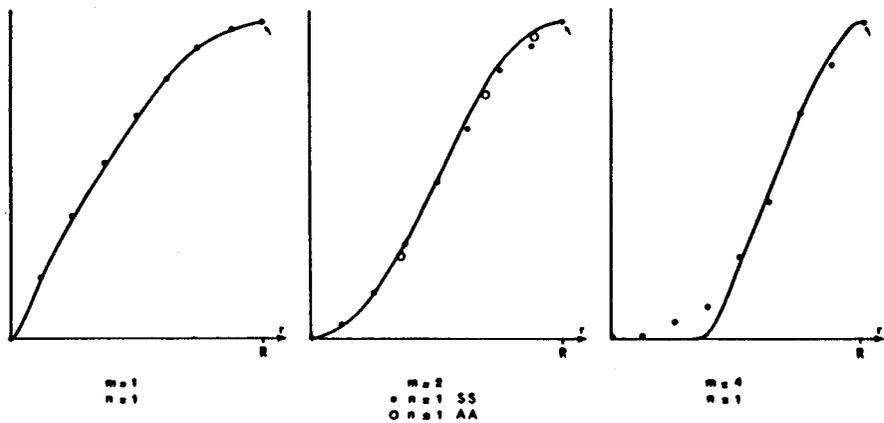
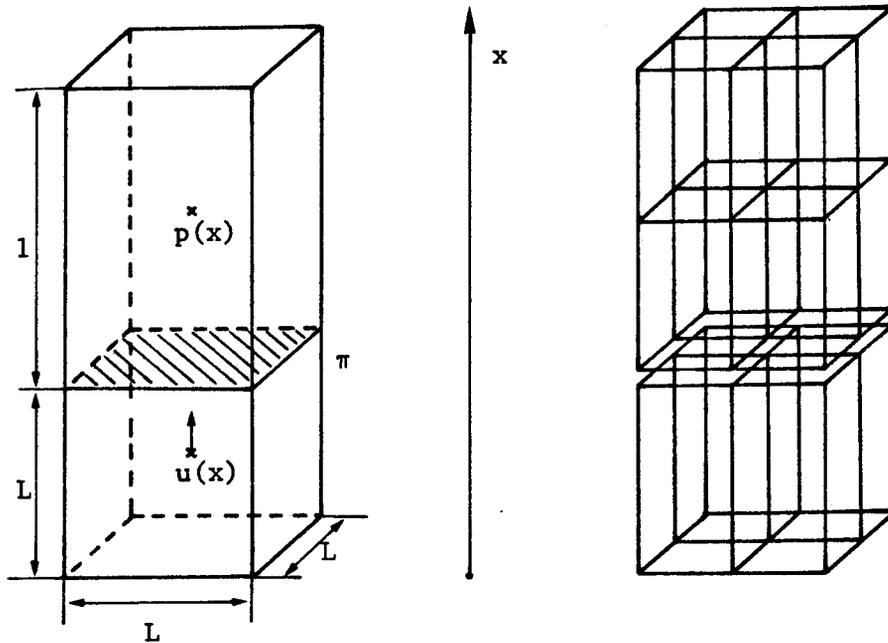


Figure IV.2 . Suite .

constitué par un cube solide, d'arête  $L = 10 \text{ cm}$ , de masse volumique  $\rho_s = 1600 \text{ kg/m}^3$ , de module d'Young  $E = .260 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ , de coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ , surmonté par une colonne fluide de même section, de hauteur  $l = 16 \text{ cm}$ , de masse volumique  $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$ , de coefficient de compressibilité  $K = .222 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ . Le fond du cube est fixé rigidement. Les quatre parois sont infiniment rigides. La surface du fluide est libre. Ce modèle est décrit en éléments finis à l'aide de quatre hexaédres solides (51 noeuds), huit hexaédres fluides (81 noeuds) et quatre rectangles interfaces. Pour le cube seul, la surface  $\pi$  étant libre, les fréquences de résonance correspondant aux modes de



dilatation-compression sont données par :

$$f_s = \frac{c_s}{4L} (2n_s + 1) \quad (\text{IV.98})$$

où  $c_s$  est la vitesse de propagation des ondes longitudinales :

$$c_s = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho_s}} \quad (\text{IV.99})$$

Pour le fluide seul, la surface  $\pi$  étant rigide les fréquences de

résonance des mêmes modes sont :

$$f_f = \frac{c_f}{4l} (2n_f + 1) \quad (\text{IV.100})$$

où  $c_f$  est la vitesse du son :

$$c_f = \sqrt{\frac{K}{\rho_f}} \quad (\text{IV.101})$$

Pour le problème couplé, écrivant les expressions des champs de déplacement :

$$u = A \sin \frac{\omega x}{c_s} \quad (\text{IV.102})$$

et de pression :

$$p = B \sin \frac{\omega}{c_f} (x - l - L) \quad (\text{IV.103})$$

et les conditions de continuité :

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=L} = \omega^2 \rho_f u(L)$$

$$\rho_s c_s^2 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=L} = -p(L)$$

(IV.104)

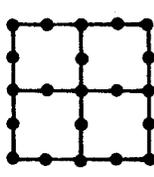
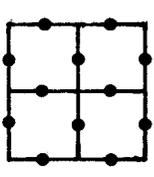
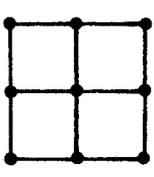
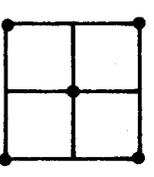
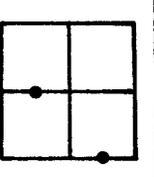
on montre aisément que les fréquences de résonance sont solutions de :

$$\text{tg} \left( 2\pi f \frac{L}{c_s} \right) = \frac{\rho_s c_s}{\rho_f c_f} \cotg \left( 2\pi f \frac{l}{c_f} \right) \quad (\text{IV.105})$$

Le tableau ci-après résume les résultats, cent degrés maîtres ayant été retenus pour le calcul par éléments finis.

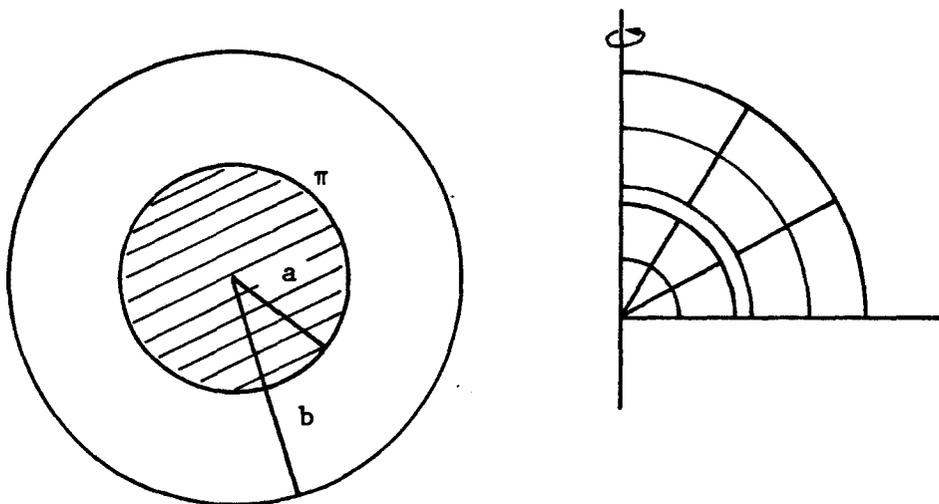
1er modèle théorique : comparaison des résultats analytiques et EF						
f en hz	Cube seul		fluide seul		Problème couplé	
	(IV.98)	E.F	(IV.100)	E.F	(IV.105)	E.F
mode 1	3700	3711	2328	2331	1620	1622
mode 2			6984	7126	4182	4298
mode 3					7100	7383

Il montre un excellent accord et prouve la validité de la représentation du couplage utilisée par le code, d'autant que, la modélisation par éléments finis étant 3D, d'autres modes que les modes de dilatation-compression apparaissent dans le spectre calculé, le troisième mode couplé étant ainsi, en fait, le neuvième mode. Pour tester la validité de la réduction de Guyan des noeuds d'interface, le même calcul a été repris en ne conservant dans l'interface que 12 puis 9, 5 et 2 noeuds maîtres, au lieu des 21 noeuds initiaux. Le tableau ci-dessous présente l'évolution des résultats, chaque figure indiquant la position des noeuds maîtres conservés.

1er modèle théorique : effet de la réduction des noeuds d'interface						
Mode	Anal.	21 maîtres	12 maîtres	9 maîtres	5 maîtres	2 maîtres
f en hz						
1	1620	1622	1626	1641	1650	1644
2	4182	4298	4286	4173	4110	4174
3	7100	7383	7506	7699	7743	7738

On note que la dégradation des résultats reste inférieure à 5% et que l'effet sur le mode 2 est opposé aux effets sur les modes 1 et 3 .

Le second modèle est constitué par une sphère solide, de rayon  $a = 10$  cm, de masse volumique  $\rho_s = 2000$  kg/m<sup>3</sup>, de module d'Young  $E = 3 \cdot 10^9$  Pa et de coefficient de Poisson  $\nu = 0.15$ , immergée dans une sphère fluide de même centre, de rayon  $b = 20$  cm, de compressibilité  $K = 3.7 \cdot 10^9$  Pa et de masse volumique  $\rho_f = 1000$  kg/m<sup>3</sup>, la surface externe du fluide étant libre. Ce modèle est décrit par éléments finis à



l'aide d'un maillage à symétrie axiale à six éléments solides (23 noeuds), six éléments fluides (29 noeuds) et trois éléments interfaces, schématisé ci-dessus. Pour le solide seul, l'interface  $\pi$  étant libre, les modes purement radiaux ont un vecteur déplacement du type [115] :

$$u(r) = \frac{\xi}{r} \frac{h \cosh r - \sinh r}{(hr)^2} \quad (\text{IV.106})$$

où, notant  $c_s$  la vitesse des ondes longitudinales définies par (IV.99) :

$$h = \frac{\omega}{c_s} \quad (\text{IV.107})$$

Annulant la contrainte normale en  $r = a$ , on obtient les fréquences de

résonance qui sont solutions de :

$$\frac{\operatorname{tgh} a}{h a} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\kappa}{h}\right)^2 \left(\frac{h a}{2}\right)^2} \quad (\text{IV.108})$$

où :

$$\kappa = \frac{\omega}{c_t} \quad (\text{IV.109})$$

$c_t$  étant la vitesse des ondes transversales. Si on considère le fluide seul, l'interface  $\pi$  étant rigide, le champ de pression s'exprime par :

$$p(x) = \frac{A \sin kr}{kr} + \frac{B \cos kr}{kr} \quad (\text{IV.110})$$

avec :

$$k = \frac{\omega}{c_f} \quad (\text{IV.111})$$

la vitesse du son  $c_f$  étant définie par (IV.101). Les fréquences de résonance sont solutions de l'équation :

$$\operatorname{tg} k(a-b) = ka \quad (\text{IV.112})$$

obtenue en imposant à  $p$  les conditions aux limites en  $a$  et  $b$ . Pour le problème couplé, utilisant les expressions des champs (III.106) et (III.110) et les équations de couplage :

$$\rho_f \omega^2 u(a) = \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=a}$$

$$\left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + 2\lambda \frac{u}{a} \right]_{r=a} = -p(a)$$

(IV.113)

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé, on montre aisément que les fréquences de résonance sont solutions de :

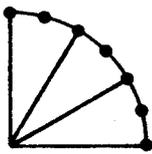
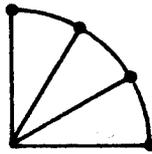
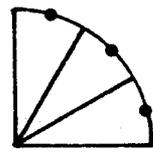
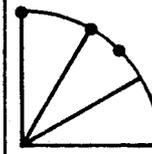
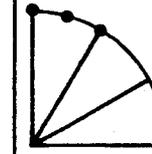
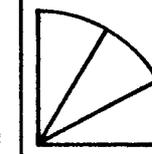
$$\frac{\rho_s}{\rho_f} \cdot \frac{(\frac{\kappa^2 a^2}{4} - 1) \operatorname{tgh} a + ha}{\frac{\kappa^2 a^2}{4} (ha - \operatorname{tgh} a)} = - a \frac{\operatorname{tgh} k(a-b)}{\operatorname{tgh} k(a-b) - ka} \quad (\text{IV.114})$$

Le tableau ci-après résume les résultats. Il montre un excellent accord et prouve de nouveau la validité de la modélisation du couplage

2e modèle théorique : comparaison des résultats analytiques et EF						
f en hz	Solide seul		Fluide seul		Problème couplé	
	(IV.108)	E.F	(IV.112)	E.F	(IV.114)	E.F
mode 1	4729	4732	6211	6238	3205	3206
mode 2	12024	12030			7344	7370
mode 3					11259	11395

utilisée, d'autant que des modes non radiaux [116] apparaissent dans le spectre calculé, le troisième mode couplé étant, de ce fait, le sixième mode à symétrie axiale. Enfin, pour tester aussi dans ce cas la réduction de Guyan des noeuds d'interface, le même calcul a été repris en ne conservant dans l'interface qu'un nombre réduit de noeuds maîtres. Le tableau ci-après présente l'évolution des résultats, chaque figure indiquant la position des noeuds maîtres conservés. La dernière colonne précise les valeurs des fréquences propres dans l'approximation de la masse ajoutée qui constituent, comme indiqué en (IV.3.4), les limites obtenues en condensant tous les degrés de liberté fluides. On note que la dégradation des résultats reste inférieure à 2% mais qu'elle n'est pas complètement négligeable devant l'effet de la compressibilité, et que l'effet sur les modes 2 et 3 est opposé à l'effet sur le mode 1.

Ces deux exemples montrent, par référence à des résultats

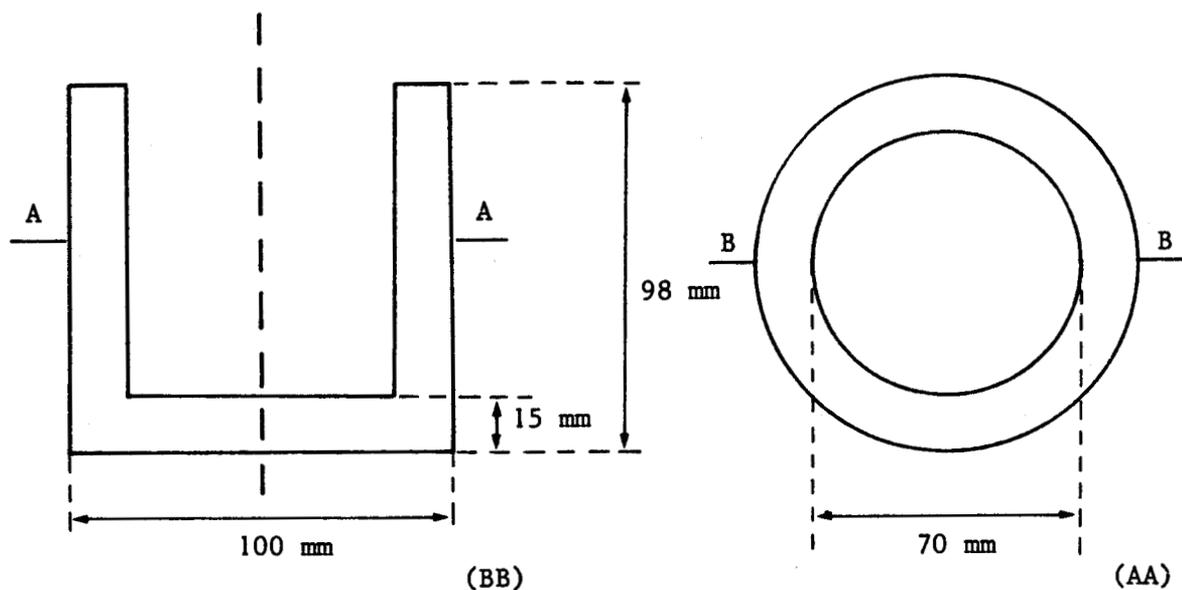
2ème modèle théorique : effet de la réduction des noeuds d'interface							
Mode	7 maîtres	4 maîtres	3 maîtres	3 maîtres	3 maîtres	0 maître	masse ajoutée
f en hz							(E.F)
1	3206	3247	3200	3231	3245	3252	3403
2	7370	7292	7433	7339	7290	7282	x
3	11395	11269	11474	11350	11348	11348	10367

analytiques, que la modélisation de l'interface et la réduction de Guyan des noeuds de l'interface sont correctes et susceptibles de fournir des résultats très précis. Toutefois, les modèles analysés sont très simples. En proposant l'étude d'une structure réelle avec, comme référence, des résultats expérimentaux, la section suivante aborde la modélisation de déformations complexes.

#### IV.5.3 Analyse modale d'un domaine mixte fermé. Second test de l'interface et de la réduction de Guyan

La structure analysée est un cylindre creux, schématisé ci-après, réalisé en AU4G (masse volumique 2780 kg/m<sup>3</sup>, module d'Young  $.714 \cdot 10^{11}$  Pa, coefficient de Poisson .344), dont les modes propres ont été déterminés à vide et pour quatre niveaux différents de remplissage en eau (1/4, 1/2, 3/4 et 4/4). La première modélisation par éléments finis qui a été réalisée est à symétrie axiale et utilise huit éléments solides (43 noeuds), douze éléments fluides (51 noeuds) et sept éléments interface. L'analyse expérimentale correspondante a été effectuée à l'aide d'une tête pick-up, comme décrit en (II.4.1.c), et d'un hydrophone de très petites dimensions, permettant de relever la carte de pression dans le fluide. L'identification des modes n'a été enregistrée que lorsque tous les éléments contrôlables étaient satisfaisants (positions des lignes nodales ou ventrales, phases relatives, dans certains cas amplitudes relatives, cartes de pression). La mesure des pressions a toujours été délicate et souvent

imprécise mais elle a permis néanmoins d'assurer le repérage des modes



de type fluide. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure (IV.3). Ils montrent :

- un bon accord entre valeurs calculées (chiffres supérieurs) et mesurées (chiffres inférieurs) pour tous les modes représentés, quel que soit le niveau de remplissage.
- une évolution complexe, mais bien reproduite numériquement, des modes propres en fonction du remplissage. Globalement, on peut considérer que des modes fluides, repérés par la lettre F, correspondant à une onde de pression en  $\lambda/4$ ,  $3\lambda/4$ ..., viennent progressivement s'intercaler entre des modes solides dont les filiations sont repérées par les flèches. De ce fait, les fréquences propres des modes du cylindre ne décroissent pas d'une manière monotone en fonction du remplissage comme l'imposerait un effet de masse ajoutée seul. Expérimentalement, cette irrégularité a été mise nettement en évidence en recherchant les modes propres à symétrie axiale dans la bande 18-21 KHz en fonction du remplissage mais avec un nombre élevé de points de mesure, les résultats étant regroupés sur la figure (IV.4). Sur cette figure, les flèches relient les points correspondant aux modes de la figure (IV.3) issus des modes 2 et 3 du cylindre vide, et montrent les passages d'une courbe à l'autre associés au croisement d'un mode solide et d'un mode

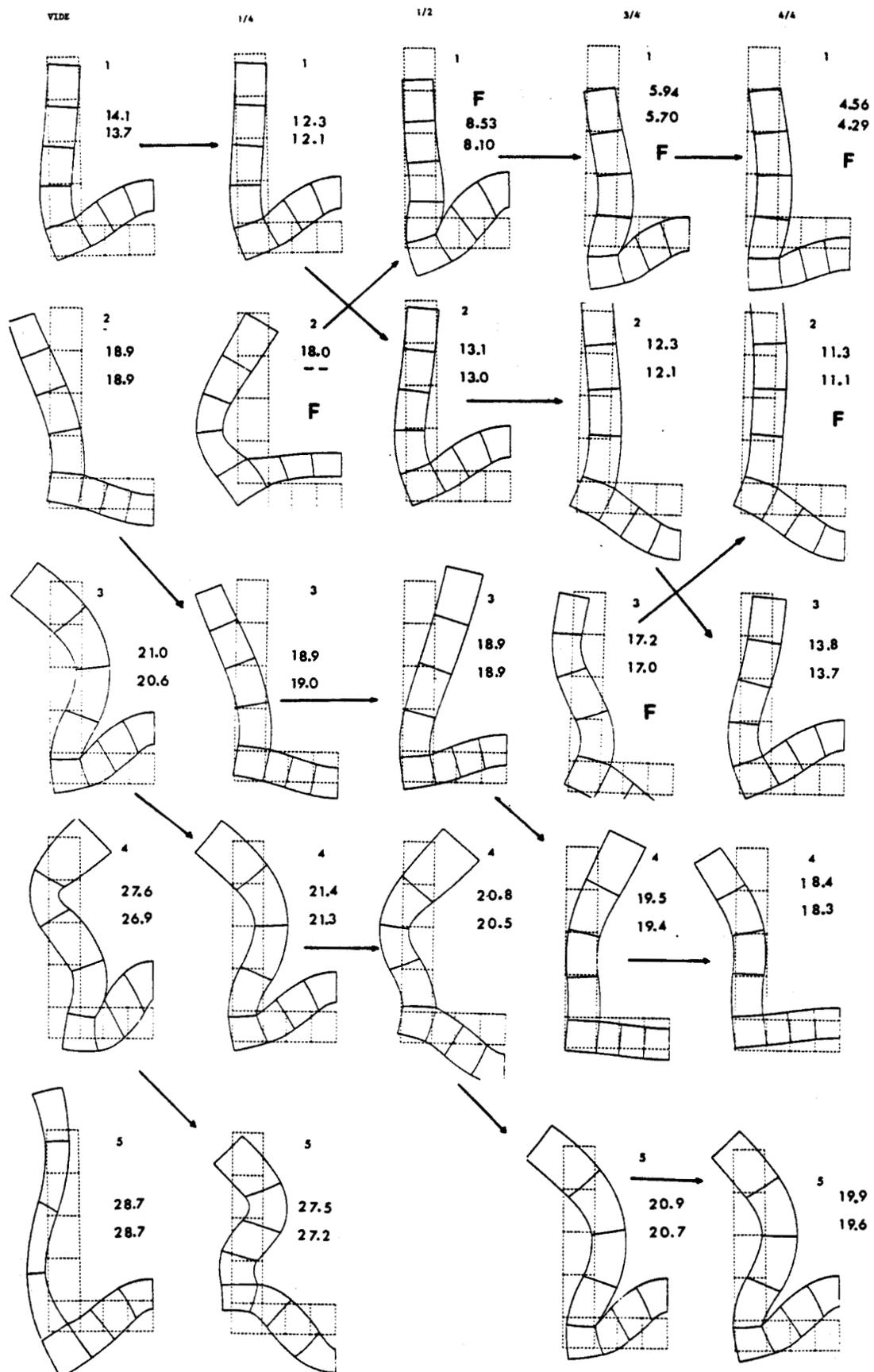


Figure IV.3 . Evolution des modes propres du cylindre avec le remplissage en eau . Les fréquences sont en khz ( Sup. : E.F. , Inf. : exp. ) . Le signe du déplacement est arbitraire .

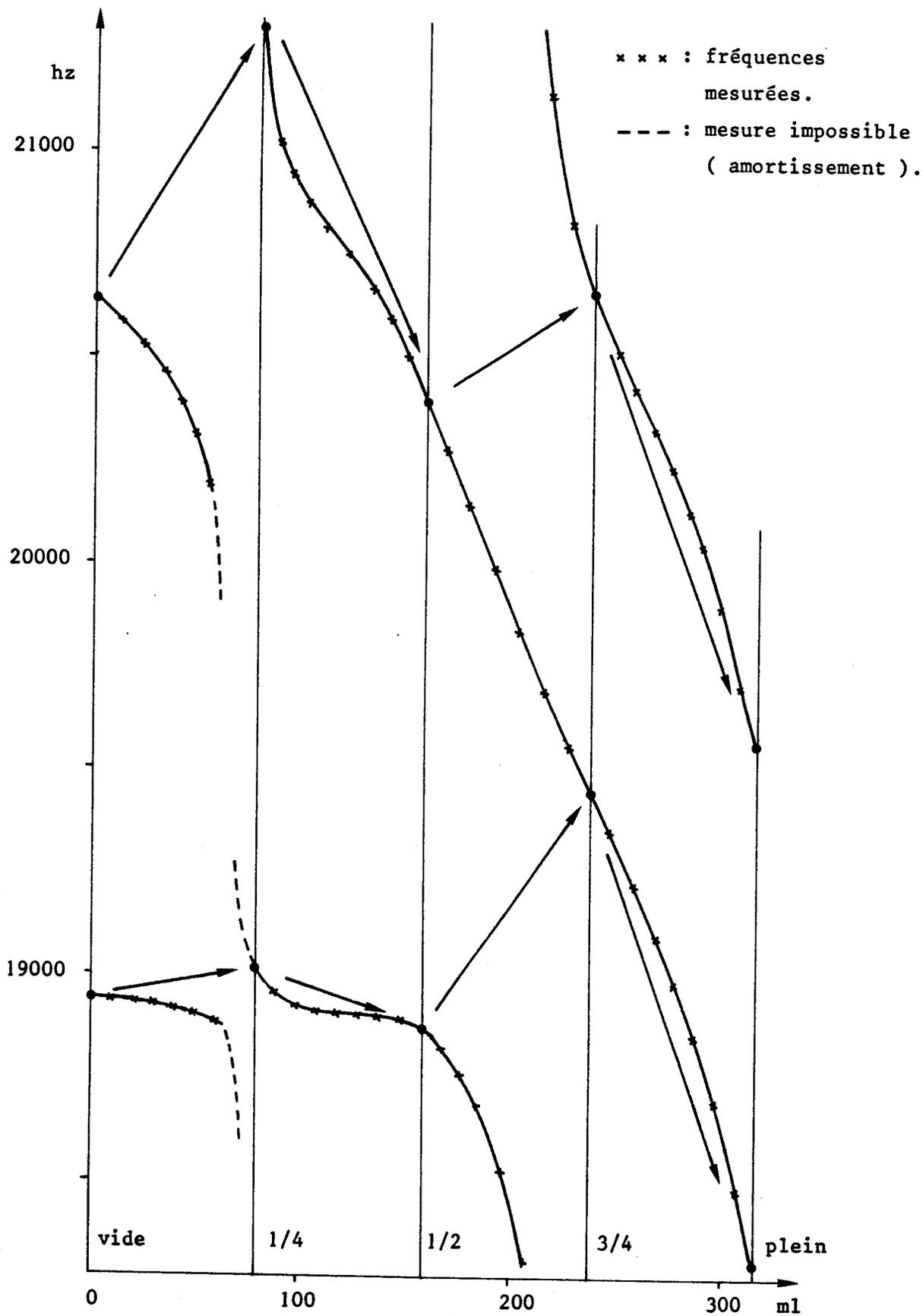
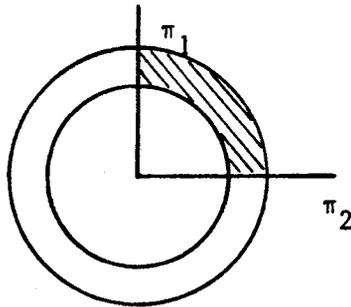


Figure IV. 4 . Evolution mesurée des fréquences des modes propres du cylindre dans la bande 18-21 khz avec le remplissage .

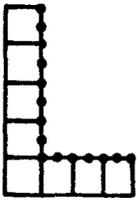
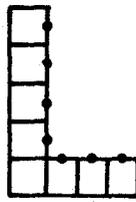
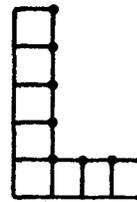
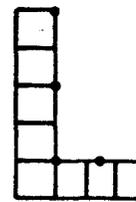
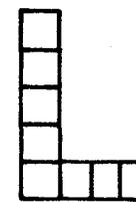
fluide.

- une évolution très nette, également bien reproduite numériquement, de la déformation dans la série allant du second mode du cylindre vide au quatrième mode du cylindre plein, se traduisant par une inversion de la phase relative des déplacements du fond et de la paroi. Un tel effet, s'il est correctement prévu par la modélisation globale proposée ici, pourrait être plus difficilement décrit à l'aide des techniques de synthèse modale [108,117].

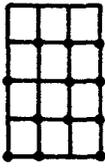
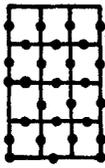
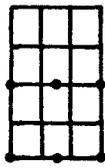
Pour cet exemple, l'effet des réductions a également été analysé dans le cas du cylindre plein en considérant d'abord des réductions dans l'interface seulement, puis dans le fluide seulement et enfin dans l'ensemble structure + fluide, laissant dans ce dernier cas l'algorithme de sélection précédemment mentionné choisir les degrés maîtres. Les trois tableaux ci-après résument les résultats obtenus et précisent, dans chaque cas, les maîtres retenus. Ils montrent de nouveau un accord remarquable. Enfin, un maillage tridimensionnel du quart de la structure, limité par deux plans de symétrie  $\pi_1$  et  $\pi_2$  (voir figure ci-dessous) a été testé. Il comporte 78 éléments (26



solides, 30 fluides et 22 interfaces), 442 noeuds (230 solides et 212 fluides) et 785 degrés de liberté (614 solides et 171 fluides). En phase finale de diagonalisation, 120 maîtres ont été retenus automatiquement (71 fluides et 49 solides). Les résultats sont regroupés dans un tableau ci-après qui contient, en outre, les fréquences des modes du cylindre vide et des modes du fluide seul, considéré comme contenu dans un cylindre infiniment rigide. Si le spectre est correctement obtenu, avec une précision relative meilleure que 10% pour les 9 premières fréquences, l'erreur sur la variation de fréquence due au fluide est parfois trop importante, probablement à cause d'un nombre de réductions trop élevé et surtout différent pour le cylindre vide et le cylindre plein. La figure (IV.5) présente schématiquement les déformations pour trois modes n'ayant pas la symétrie axiale, déformations qui ont été retrouvées expérimentalement avec un très bon accord.

N°	Pas de réduction					
1	4.56	4.56	4.53	4.54	4.54	4.53
2	11.3	11.3	11.3	11.5	11.4	11.6
3	13.8	13.8	13.8	14.0	14.1	14.0
4	18.4	18.4	18.4	18.5	18.5	18.5
5	19.9	19.9	20.0	20.0	20.0	20.0

Analyse de l'effet des réductions des noeuds d'interface (f en khz)

N°	Pas de réduction			
1	4.57	4.55	4.54	4.62
2	11.3	11.7	11.4	11.9
3	13.8	14.9	14.1	16.2
4	18.4	18.7	18.5	18.8
5	19.9	20.0	20.0	20.0

Analyse de l'effet des réductions des noeuds fluides (f en khz)

N°	Pas de réduction	100 maîtres auto (56S/44F)	75 maîtres auto (31S/44F)	50 maîtres auto (18S/32F)	30 maîtres auto (11S/19F)
1	4.57	4.56	4.53	4.53	4.53
2	11.3	11.3	11.3	11.3	11.5
3	13.8	13.8	13.8	13.9	14.1
4	18.4	18.4	18.4	18.5	19.0
5	19.9	19.9	20.0	20.1	20.7

Analyse de l'effet des réductions avec sélection automatique par le code des degrés maîtres (f en khz).

Fréquences propres du cylindre. Analyse 3D (SS) (fréquences en khz)												
N°	Cylindre vide			fluide seul		cylindre plein				f (plein) (+) -f (vide)		
	exp.	EF axi.	EF 3D	(++) th.	EF 3D	exp.	EF axi	EF 3D	Δ (%)	exp	EF axi.	EF 3D
1	-	-	-	4.49	4.50	4.29	4.56	4.52	5.4	-	-	-
2	5.55	-	5.68	-	-	5.10	-	5.23	2.5	0.45	-	0.45
3	-	-	-	13.5	13.7	11.1	11.3	11.7	5.4	-	-	-
4	12.9	-	13.3	-	-	11.9	-	12.3	3.4	1.05	-	1.05
5	13.7	14.1	14.4	-	-	13.7	13.8	14.3	4.4	0.00	0.30	0.10
6	18.9	18.9	19.4	-	-	18.3	18.4	19.4	6.0	0.65	0.55	0.00
7	20.1	-	20.7	-	-	19.4	-	21.2	9.3	0.70	-	-0.50
8	20.6	21.0	21.7	-	-	19.6	19.9	21.3	8.7	1.05	1.13	0.40
9	22.1	-	23.3	-	-	20.1	-	21.9	8.9	2.03	-	1.41

(+) : mesure l'effet du fluide

(++) : fréquences données par la relation :

$$f_{pmn} = \frac{c}{2} \left( \frac{\alpha_{mn}^2}{R^2} + \frac{(2p+1)^2}{4l^2} \right)^{1/2}$$

avec  $R = 70\text{mm}$ ,  $l = 84\text{mm}$  et  $(p,m,n) = (0,0,1)$  ou  $(1,0,1)$ .

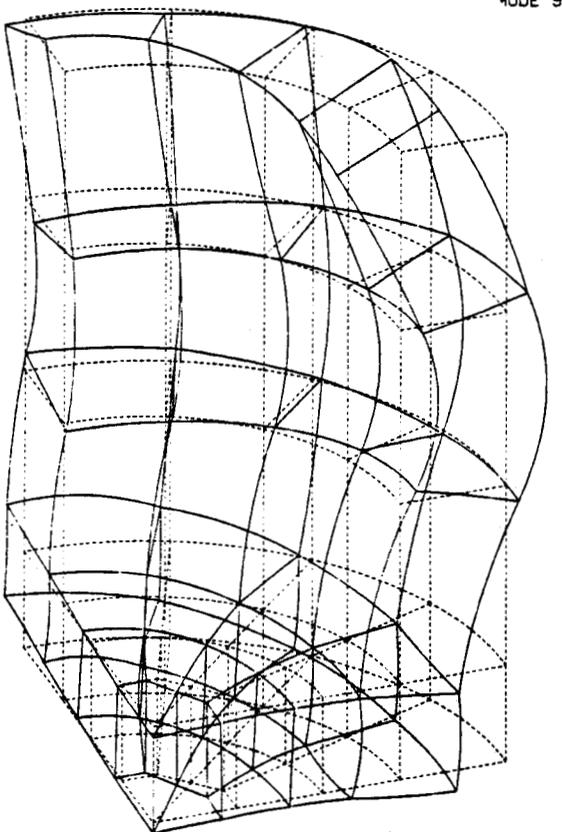
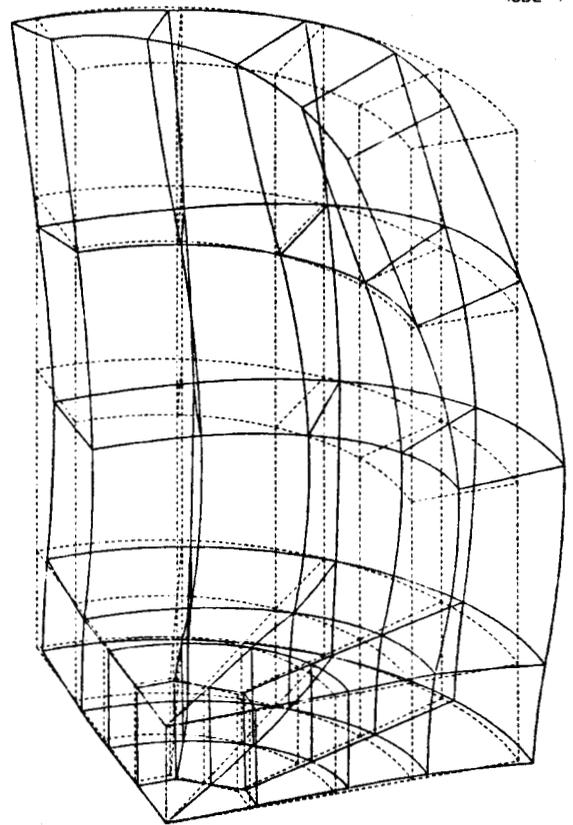
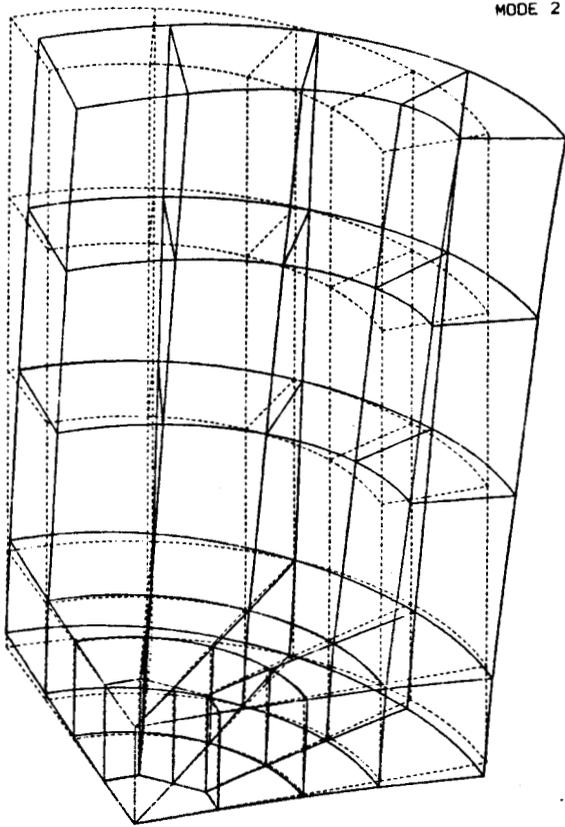


Figure IV.5 . Représentation schématique des modes propres du cylindre plein n'ayant pas la symétrie axiale .

#### IV.5.4 Calcul du champ de pression rayonné par un piston circulaire, bafflé dur, excité uniformément.

Pour tester la méthode de modélisation du rayonnement que nous avons présentée en (IV.4), deux étapes sont nécessaires :

- le contrôle des éléments rayonnants et des algorithmes dans des cas simples pour lesquels la formulation utilisée est exacte,
- le contrôle de la validité de l'approximation dans des cas réels.

La première étape a été réalisée en étudiant le rayonnement d'une sphère pulsante [41]. Elle a permis de vérifier que, dans ce cas, si le pas du maillage est inférieur à  $\lambda/4$ , la position de  $\Gamma_\infty$  n'a, comme il se doit, aucun effet sur la précision du résultat. La seconde étape nécessite la connaissance préalable de la pression en champ lointain et, au moins partiellement, en champ proche. Plusieurs possibilités sont offertes pour lesquelles existent des solutions analytiques : piston circulaire bafflé dur à excitation uniforme ou parabolique [1,2,9], piston rectangulaire bafflé dur à excitation uniforme [1,9], cylindre pulsant dans un baffle cylindrique dur [64]... De même existent plusieurs possibilités pour lesquelles des solutions numériques détaillées sont connues : cylindre de hauteur finie [16,118], plaques diverses [98]... Nous avons retenu le piston circulaire bafflé dur, avec excitation uniforme ou parabolique, car il peut être modélisé avec un maillage à symétrie axiale et, surtout, il correspond au cas concret de nombreux transducteurs Tonpiliz. Cette section traite de l'excitation uniforme et la suivante de l'excitation parabolique.

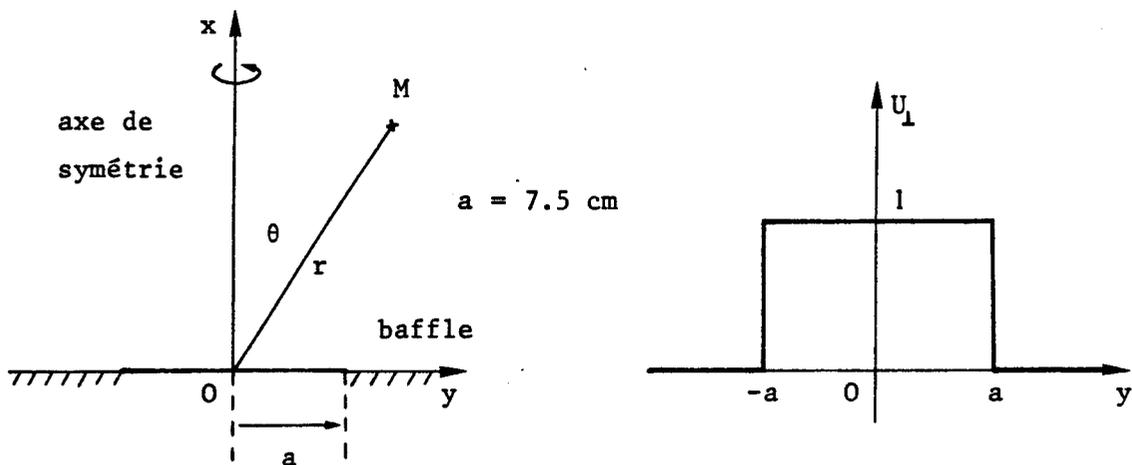
La figure ci-après définit le problème et les notations utilisées. L'amplitude du déplacement du piston étant arbitrairement fixée à l'unité, on dispose des relations analytiques suivantes [1,2,9], qui donnent :

- les parties réelle et imaginaire de la pression,  $p_1$  et  $p_2$ , en tout point de l'axe  $ox$  :

$$p_1 = -2c\rho_f\omega \sin \left[ \frac{k}{2} \sqrt{a^2+x^2} - x \right] \cos \left[ \frac{k}{2} \sqrt{a^2+x^2} + x \right]$$

$$p_2 = 2c\rho_f\omega \sin \left[ \frac{k}{2} \sqrt{a^2+x^2-x} \right] \sin \left[ \frac{k}{2} \sqrt{a^2+x^2+x} \right]$$

(IV.115)



- les parties réelle et imaginaire de la pression,  $p_1$  et  $p_2$ , en tout point du bord du piston :

$$p_1 = - \frac{c\rho_f\omega}{2} H_0(2ka)$$

$$p_2 = \frac{c\rho_f\omega}{2} (1 - J_0(2ka))$$

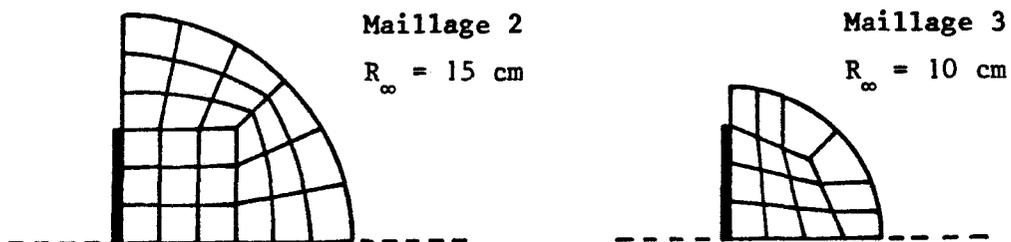
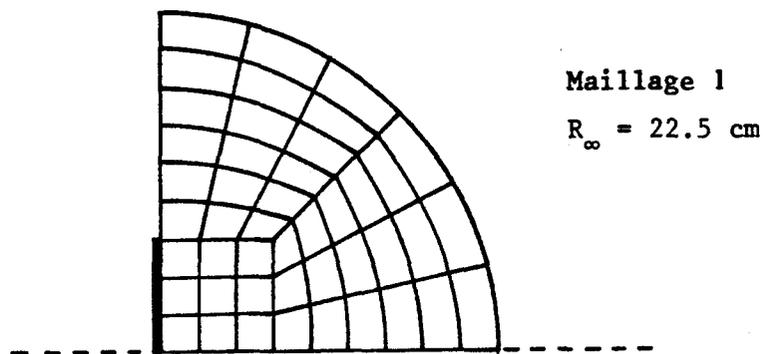
(IV.116)

où  $J_n$  et  $H_n$  représentent respectivement les fonctions de Bessel et de Struve d'ordre  $n$  [119].

- l'amplitude de la pression en champ lointain :

$$P_{\infty} = \frac{\rho_f \omega^2 a^2}{2r} \cdot \frac{2 J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \quad (\text{IV.117})$$

Le calcul par éléments finis a été réalisé pour six fréquences : 3000 hz, 5000 hz, 7000 hz, 10.000 hz, 12.000 hz et 15.000 hz. Pour ces différents cas, la limite du champ lointain, donnée classiquement par  $4a^2/\lambda$ , est à 4.5 cm, 7.5 cm, 10.5 cm, 15 cm, 18 cm et 22.5 cm. Trois maillages ont été utilisés, représentés schématiquement ci-dessous, avec  $R_{\infty}$  égal à 22.5 cm, 15 cm et 10 cm. Dans une direction radiale, la



largeur d'un élément est toujours inférieure à 2.5 cm. Le critère en  $\lambda/4$  est donc vérifié dans les trois cas jusqu'à 15 khz au moins. Les résultats sont regroupés dans les six tableaux des pages suivantes et sur les figures (IV.6) à (IV.12). Chaque tableau présente les

Evolution des résultats éléments finis avec le rayon de $\Gamma_{\infty} \cdot U_1$ uniforme. $f = 3.000$ hz	$x, y : \text{cm}$ $P_1, P_2 : 10^{10} \text{Pa}$ $\Delta P : 2\%$
--	--

Variation de $p_1$ et $p_2$ suivant l'axe (ox)								
x	résultats analytiques		$R_{\infty} = 22.5\text{cm}$		$R_{\infty} = 15\text{cm}$		$R_{\infty} = 10\text{cm}$	
	$P_1$	$P_2$	$\Delta P_1$	$\Delta P_2$	$\Delta P_1$	$\Delta P_2$	$\Delta P_1$	$\Delta P_2$
0.0	-2.28	1.17	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2.5	-1.49	1.15	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
5.0	-0.892	1.09	0.2	0.0	0.1	0.0	-1.2	-1.8
7.5	-0.453	0.999	0.4	-0.1	0.4	-1.0	-4.2	-5.0
10.0	-0.130	0.875	3.8	-0.1	3.8	-1.9	-18.	-9.1
12.5	0.104	0.729	-8.4	-0.3	-7.0	-3.4		
15.0	0.267	0.568	-3.1	-0.2	-4.1	-5.4		
17.5	0.368	0.403	-2.4	-0.5				
20.0	0.418	0.242	-2.8	-0.8				
22.5	0.422	0.093	-3.1	-1.3				

Variation de $p_1$ et $p_2$ sur le piston (oy)								
y	résultats analytiques		$R_{\infty} = 22.5 \text{ cm}$		$R_{\infty} = 15 \text{ cm}$		$R_{\infty} = 10 \text{ cm}$	
	$P_1$	$P_2$	$P_1$	$P_2$	$\Delta P_1$	$\Delta P_2$	$\Delta P_1$	$\Delta P_2$
0.00	-2.28	1.17	-2.28	1.17	0.0	0.0	0.0	0.0
1.25			-2.26	1.17	0.0	0.0	0.0	0.0
2.50			-2.18	1.15	0.0	0.0	0.0	0.8
3.75			-2.05	1.13	0.0	0.0	0.5	0.9
5.00			-1.87	1.10	0.0	0.0	0.0	0.9
6.25			-1.57	1.06	0.0	0.0	0.6	1.9
7.50	-1.10	0.994	-1.10	1.01	0.0	0.0	1.8	2.9

Evolution des résultats éléments finis  
avec le rayon de  $r_{\infty} \cdot U_{\perp}$  uniforme.  
 $f = 5.000$  hz

$x, y$  : cm  
 $p_1, p_2$  :  $10^{10}$  Pa  
 $\Delta p$  : %

Variation de  $p_1$  et  $p_2$  suivant l'axe (ox)

x	résultats analytiques		$R_{\infty} = 22.5$ cm		$R_{\infty} = 15$ cm		$R_{\infty} = 10$ cm	
	$p_1$	$p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$
0.0	-4.68	4.73	0.0	0.0	0.2	0.0	0.2	0.0
2.5	-2.30	4.49	0.4	0.2	0.9	0.2	0.9	-0.4
5.0	-0.359	3.83	-2.2	0.0	7.2	0.3	14.2	-2.3
7.5	0.999	2.84	2.1	0.3	-5.2	0.3	-12.1	-5.6
10.0	1.75	1.70	1.7	0.6	-4.6	1.2	-10.3	-12.9
12.5	1.95	0.576	2.0	3.8	-5.1	5.5		
15.0	1.70	-0.358	2.3	-6.7	-6.5	-11.7		
17.5	1.15	-0.987	3.5	-2.4				
20.0	0.461	-1.26	8.2	-1.6				
22.5	-0.191	-1.18	15.2	-0.8				

Variation de  $p_1$  et  $p_2$  sur le piston (oy)

y	résultats analytiques		$R_{\infty} = 22.5$ cm		$R_{\infty} = 15$ cm		$R_{\infty} = 10$ cm	
	$p_1$	$p_2$	$p_1$	$p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$
0.00	-4.68	4.73	-4.68	4.73	0.2	0.0	0.2	0.0
1.25			-4.60	4.68	0.0	0.0	0.0	0.0
2.50			-4.34	4.52	0.0	0.0	0.0	0.4
3.75			-3.96	4.27	-0.2	0.0	-0.2	0.7
5.00			-3.38	3.94	-0.3	0.0	-0.6	1.3
6.25			-2.50	3.53	-0.8	0.0	-0.4	2.2
7.50	-1.19	3.06	-1.19	3.06	-2.5	0.0	-3.4	3.6

Evolution des résultats éléments finis avec le rayon de $\Gamma_{\infty} \cdot U_{\perp}$ uniforme. $f = 7.000 \text{ hz}$	$x, y : \text{cm}$ $p_1, p_2 : 10^{10} \text{ Pa}$ $\Delta p : \%$
--	--

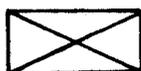
Variation de $p_1$ et $p_2$ suivant l'axe (ox)								
	résultats analytiques		$R_{\infty} = 22.5 \text{ cm}$		$R_{\infty} = 15 \text{ cm}$		$R_{\infty} = 10 \text{ cm}$	
x	$p_1$	$p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$
0.0	-5.24	10.50	0.0	0.0	0.0	0.0	0.2	0.0
2.5	-0.328	9.38	3.9	-0.1	-4.6	0.2	24.4	0.1
5.0	3.49	6.43	-1.1	0.0	1.7	1.4	-7.7	0.1
7.5	5.17	2.62	-1.5	0.0	1.9	6.5	-9.5	2.3
10.0	4.65	-0.843	-2.4	0.7	3.0	-27.0	-13.7	-20.0
12.5	2.60	-2.98	-4.2	0.7	5.8	-7.7		
15.0	0.079	-3.39	-61.0	0.3	184.	-5.6		
17.5	-1.86	-2.29	2.1	1.3				
20.0	-2.57	-0.465	0.0	4.7				
22.5	-2.01	1.20	-1.5	-1.7				

Variation de $p_1$ et $p_2$ sur le piston (oy)								
	résultats analytiques		$R_{\infty} = 22.5 \text{ cm}$		$R_{\infty} = 15 \text{ cm}$		$R_{\infty} = 10 \text{ cm}$	
y	$p_1$	$p_2$	$p_1$	$p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$
0.00	-5.24	10.50	-5.24	10.50	0.0	0.0	0.2	0.0
1.25			-5.11	10.30	0.2	0.0	0.0	0.0
2.50			-4.72	9.64	0.4	-0.1	-0.4	0.3
3.75			-4.17	8.66	0.5	-0.3	-1.7	0.2
5.00			-3.31	7.39	1.5	-0.5	-3.3	0.4
6.25			-1.95	5.93	3.0	-1.2	-6.7	0.7
7.50	-0.007	4.38	0.175	4.38	-47.2	-1.8	112.	1.6

Evolution des résultats éléments finis avec le rayon de $r_{\infty} \cdot U_1$ uniforme. $f = 10.000 \text{ Hz}$	$x, y : \text{cm}$ $p_1, p_2 : 10^{10} \text{ Pa}$ $\Delta p : \%$
--	--

Variation de $p_1$ et $p_2$ suivant l'axe (ox)								
x	résultats analytiques		$R_{\infty} = 22.5 \text{ cm}$		$R_{\infty} = 15 \text{ cm}$		$R_{\infty} = 10 \text{ cm}$	
	$p_1$	$p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$
0.0	0.197	18.70	-23.3	0.0	-20.8	0.0	37.0	0.0
2.5	9.93	13.80	-0.8	0.0	-1.5	-0.7	0.7	2.2
5.0	13.80	2.60	-0.7	-5.0	-2.9	10.0	1.4	34.0
7.5	8.90	-7.14	-1.1	2.9	-4.8	5.9	5.4	-19.7
10.0	-0.298	-9.41	14.4	2.5	116.	5.2	<del> </del>	-14.2
12.5	-6.67	-4.31	-0.6	3.5	1.9	8.6	<del> </del>	<del> </del>
15.0	-6.25	2.76	-1.3	-0.7	-1.3	-5.4	<del> </del>	<del> </del>
17.5	-0.891	5.90	-7.3	1.5	<del> </del>	<del> </del>	<del> </del>	<del> </del>
20.0	4.04	3.43	0.2	2.9	<del> </del>	<del> </del>	<del> </del>	<del> </del>
22.5	4.51	-1.49	-0.7	-2.7	<del> </del>	<del> </del>	<del> </del>	<del> </del>

Variation de $p_1$ et $p_2$ sur le piston (oy)								
y	résultats analytiques		$R_{\infty} = 22.5 \text{ cm}$		$R_{\infty} = 15 \text{ cm}$		$R_{\infty} = 10 \text{ cm}$	
	$p_1$	$p_2$	$p_1$	$p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$
0.00	0.197	18.70	0.151	18.70	3.3	0.0	78.8	0.0
1.25	<del> </del>	<del> </del>	-0.060	18.10	-25.1	0.0	<del> </del>	-0.5
2.50	<del> </del>	<del> </del>	-0.544	16.30	-7.2	0.0	-10.1	-1.2
3.75	<del> </del>	<del> </del>	-1.34	13.50	-5.2	0.7	-2.2	-2.2
5.00	<del> </del>	<del> </del>	-1.89	10.30	-5.3	0.0	2.1	-5.1
6.25	<del> </del>	<del> </del>	-1.48	6.84	-9.4	0.9	8.7	-8.6
7.50	.569	3.61	0.670	3.70	21.9	1.6	-10.3	-16.2

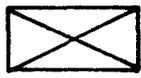


- Signe incorrect

Evolution des résultats éléments finis avec le rayon de $\Gamma_{\infty} \cdot U_1$ uniforme. $f = 12.000 \text{ hz}$	$x, y : \text{cm}$ $p_1, p_2 : 10^{10} \text{Pa}$ $\Delta p : \%$
---	---

Variation de $p_1$ et $p_2$ suivant l'axe (ox)								
x	résultats analytiques		$R_{\infty} = 22.5 \text{cm}$		$R_{\infty} = 15 \text{cm}$		$R_{\infty} = 10 \text{cm}$	
	$p_1$	$p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$
0.0	6.83	20.20	1.5	0.0	0.9	0.0	0.4	-1.0
2.5	19.20	10.70	0.5	0.9	0.0	2.8	3.1	-0.9
5.0	17.60	-7.51	1.1	-2.7	-0.6	-9.7	10.2	1.7
7.5	2.08	-15.80	11.0	-1.9	-7.7	-5.7	119.	1.3
10.0	-11.00	-7.39	0.9	-2.2	4.5	-5.5	-4.5	6.4
12.5	-9.50	6.06	3.2	1.3	6.3	-0.8		
15.0	1.78	9.57	-1.5	0.4	-18.5	-2.0		
17.5	8.39	1.53	0.2	1.3				
20.0	3.84	-6.54	6.2	0.3				
22.5	-4.38	-5.22	-3.4	1.1				

Variation de $p_1$ et $p_2$ sur le piston (oy)								
y	résultats analytiques		$R_{\infty} = 22.5 \text{ cm}$		$R_{\infty} = 15 \text{ cm}$		$R_{\infty} = 10 \text{ cm}$	
	$p_1$	$p_2$	$p_1$	$p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$
0.00	6.83	20.20	6.93	20.20	-0.6	0.0	-1.0	-1.0
1.25			5.97	19.50	-0.5	0.0	-2.3	-1.0
2.50			3.62	17.50	0.0	-0.6	-8.3	-0.6
3.75			0.228	14.50	16.6	-1.4		-0.7
5.00			-2.75	10.90	-2.5	-1.8	21.4	0.0
6.25			-3.76	7.32	-1.9	-4.1	17.8	0.8
7.50	-1.25	4.19	-1.38	4.15	-2.9	-7.0	28.9	1.9



- signe incorrect

Evolution des résultats éléments finis avec le rayon de $r_{\infty} \cdot U_1$ uniforme. $f = 15.000 \text{ hz}$	$x, y : \text{cm}$ $p_1, p_2 : 10^{10} \text{Pa}$ $\Delta p : \%$
--	---

Variation de $p_1$ et $p_2$ suivant l'axe (ox)								
	résultats analytiques		$R_{\infty} = 22.5 \text{cm}$		$R_{\infty} = 15 \text{cm}$		$R_{\infty} = 10 \text{cm}$	
x	$P_1$	$P_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$
0.0	14.00	13.60	2.1	-1.5	2.1	0.7	0.7	0.7
2.5	27.50	-4.14	0.4	-3.7	-0.4	9.7	-2.9	19.5
5.0	7.42	-25.80	2.0	-1.6	-0.1	3.1	-23.3	8.9
7.5	-19.80	-12.30	0.0	0.8	-4.0	8.9	6.1	26.0
10.0	-13.40	14.80	3.7	-3.4	-7.4	-3.4	3.0	-15.5
12.5	11.20	13.00	-3.6	-0.8	3.5	3.8		
15.0	12.10	-8.72	3.3	-3.6	-1.6	-5.7		
17.5	-6.99	-11.10	-7.1	0.9				
20.0	-10.20	5.76	2.9	-5.8				
22.5	4.87	9.36	-10.1	0.5				

Variation de $p_1$ et $p_2$ sur le piston (oy)								
	résultats analytiques		$R_{\infty} = 22.5 \text{ cm}$		$R_{\infty} = 15 \text{ cm}$		$R_{\infty} = 10 \text{ cm}$	
y	$P_1$	$P_2$	$P_1$	$P_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$
0.00	14.00	13.60	14.30	13.40	0.0	-0.7	-1.4	0.7
1.25			12.00	14.10	0.8	0.0	0.0	1.4
2.50			6.65	15.00	2.1	1.3	4.0	3.3
3.75			-0.459	15.70	-171.	2.5		4.4
5.00			-5.95	14.90	-7.4	3.3	-16.3	5.4
6.25			-7.05	12.30	-7.6	3.3	-12.0	3.2
7.50	1.68	8.37	-1.80	8.19	-31.1	2.1	-45.8	-2.0

- Signe incorrect

Figure IV.6 . Variations le long de l'axe de la pression rayonnée par un piston bafflé dur à champ de déplacement uniforme.

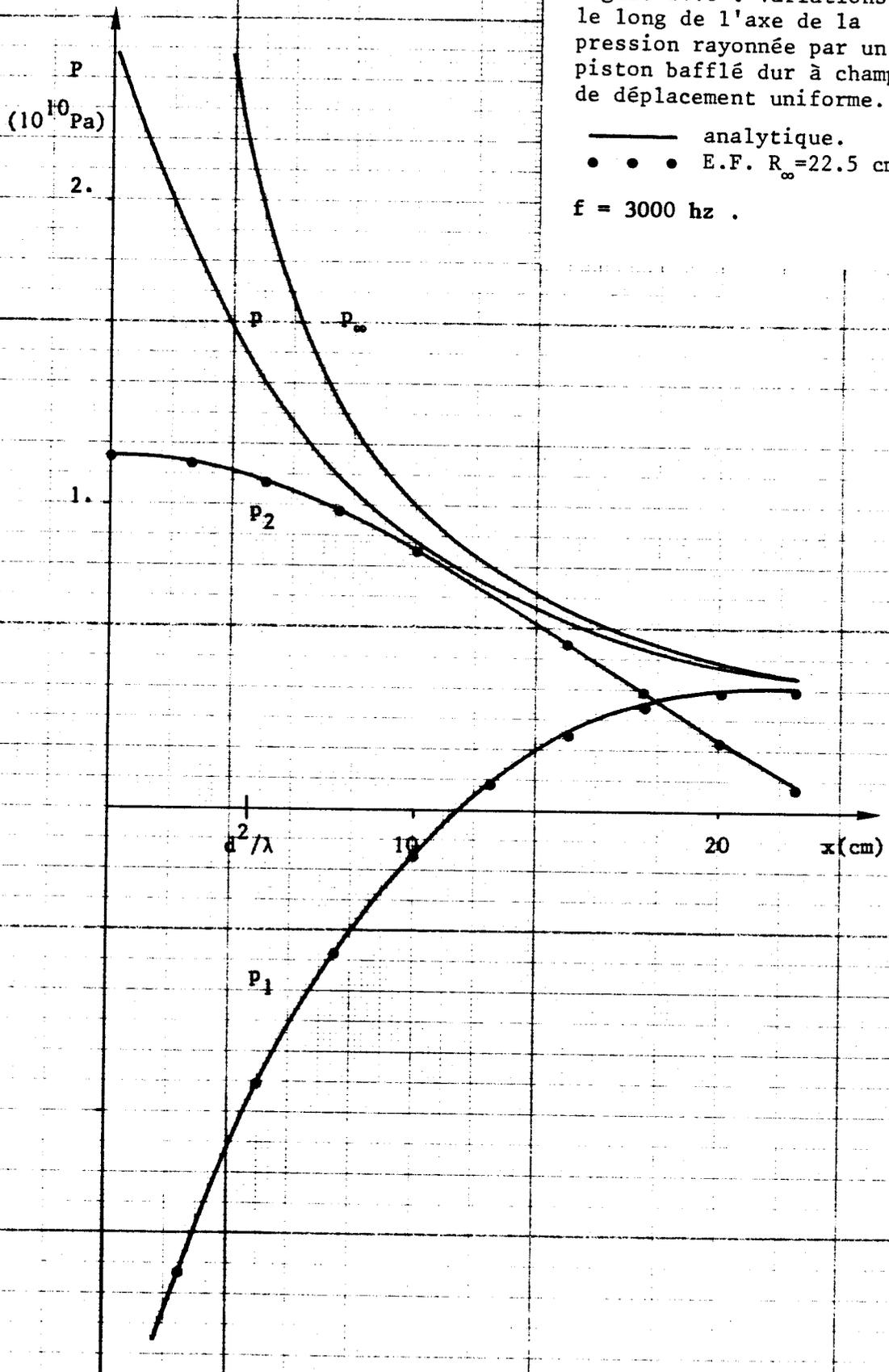


Figure IV.7 . Variations  
 le long de l'axe de la  
 pression rayonnée par un  
 piston bafflé dur à champ  
 de déplacement uniforme.

— analytique.  
 • • • E.F.  $R_{\infty}=22.5$  cm  
 $f = 5000$  hz .

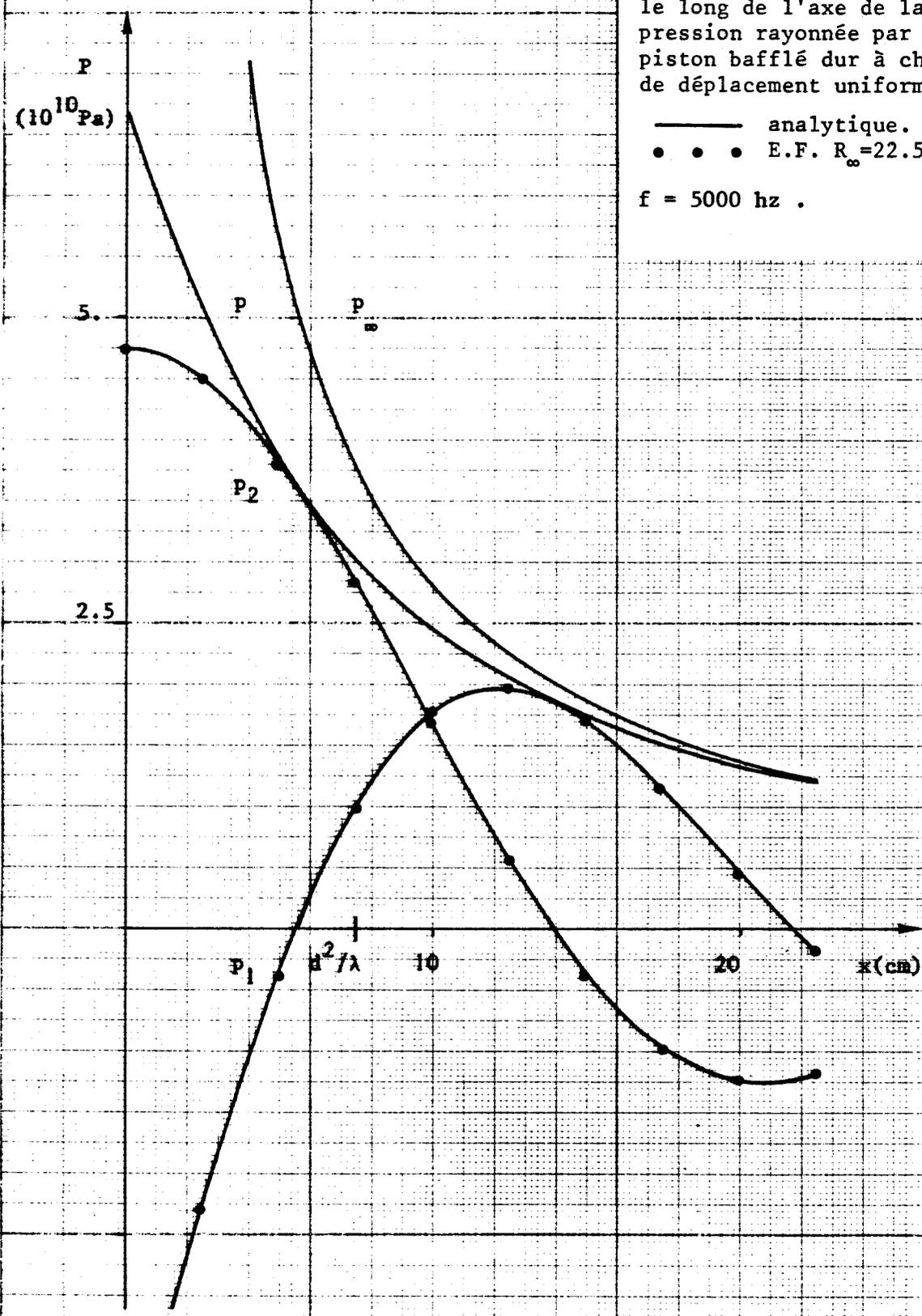


Figure IV.8 . Variations  
 le long de l'axe de la  
 pression rayonnée par un  
 piston bafflé dur à champ  
 de déplacement uniforme.

— analytique.  
 • • • E.F.  $R_{\infty}=22.5$  cm  
 $f = 7000$  hz .

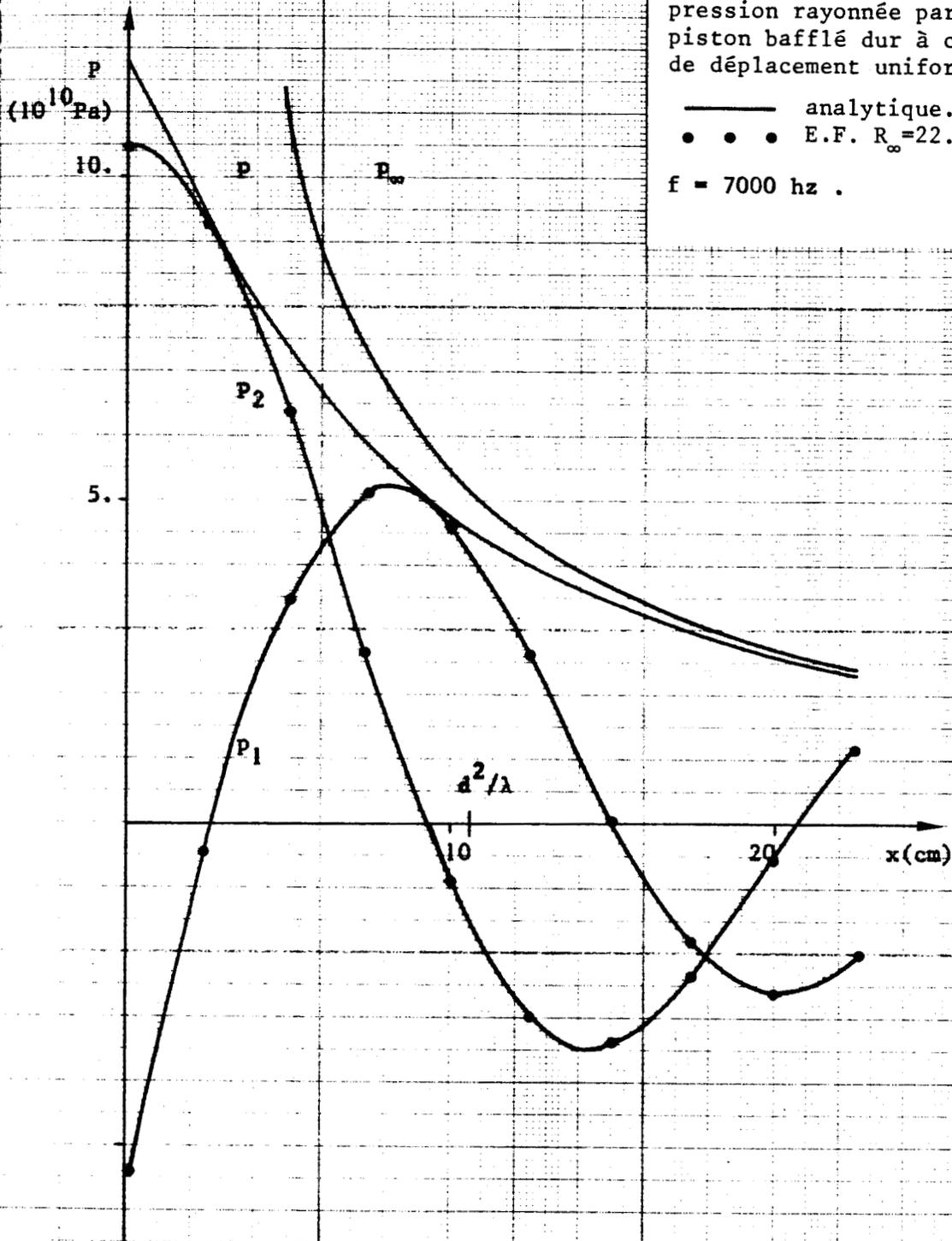
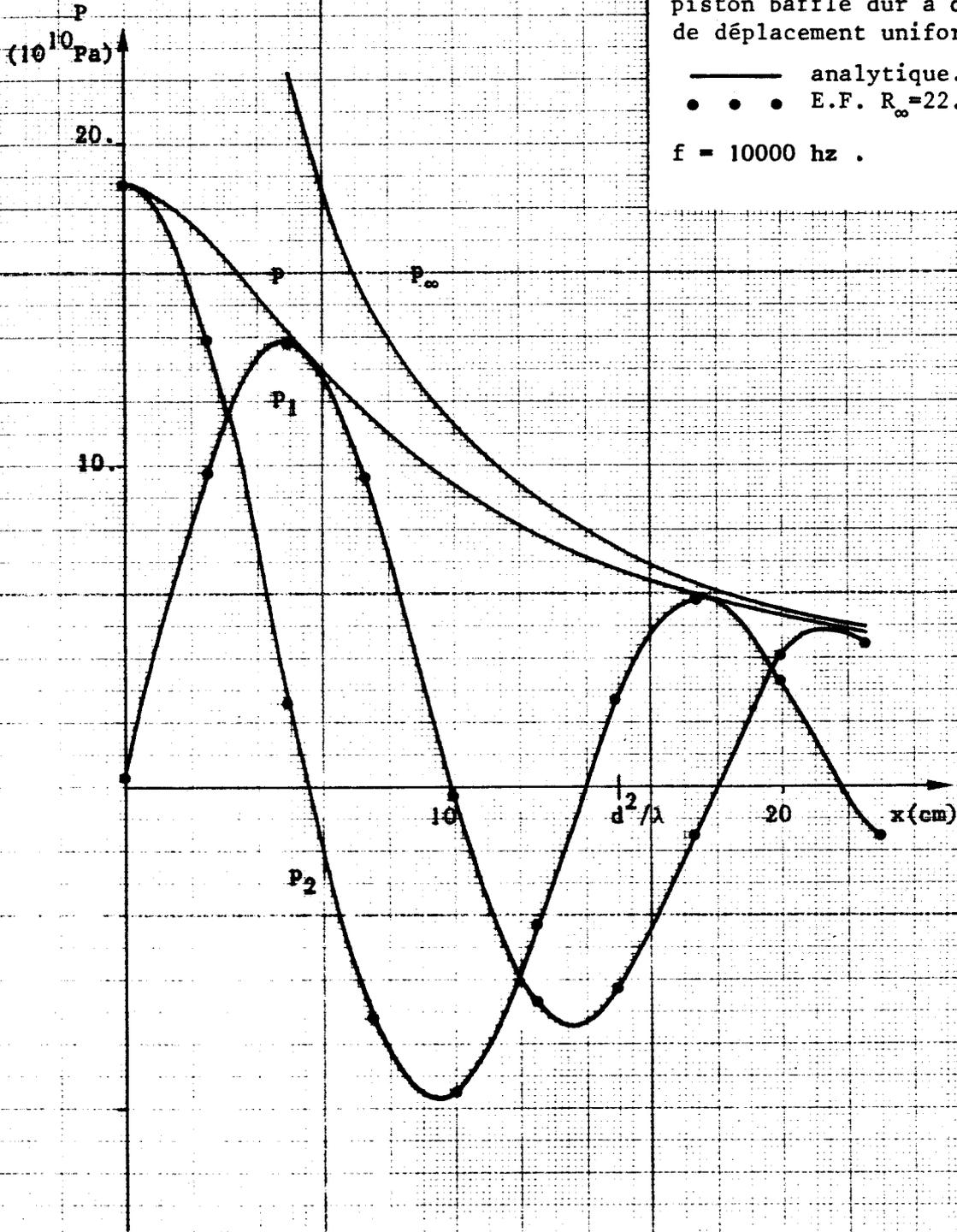


Figure IV.9 . Variations  
 le long de l'axe de la  
 pression rayonnée par un  
 piston bafflé dur à champ  
 de déplacement uniforme.

— analytique.  
 • • • E.F.  $R_{\infty}=22.5$  cm  
 $f = 10000$  hz .



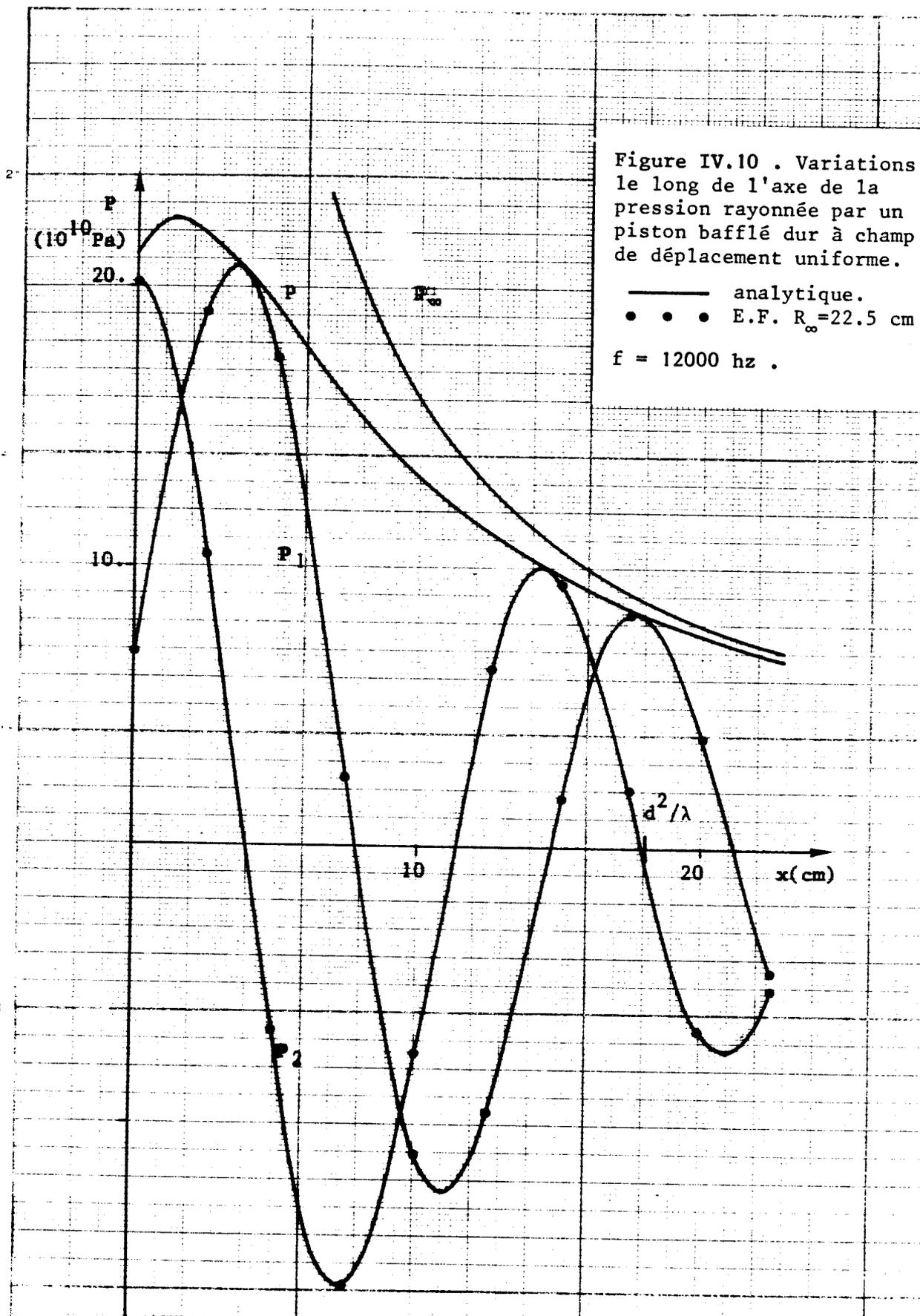
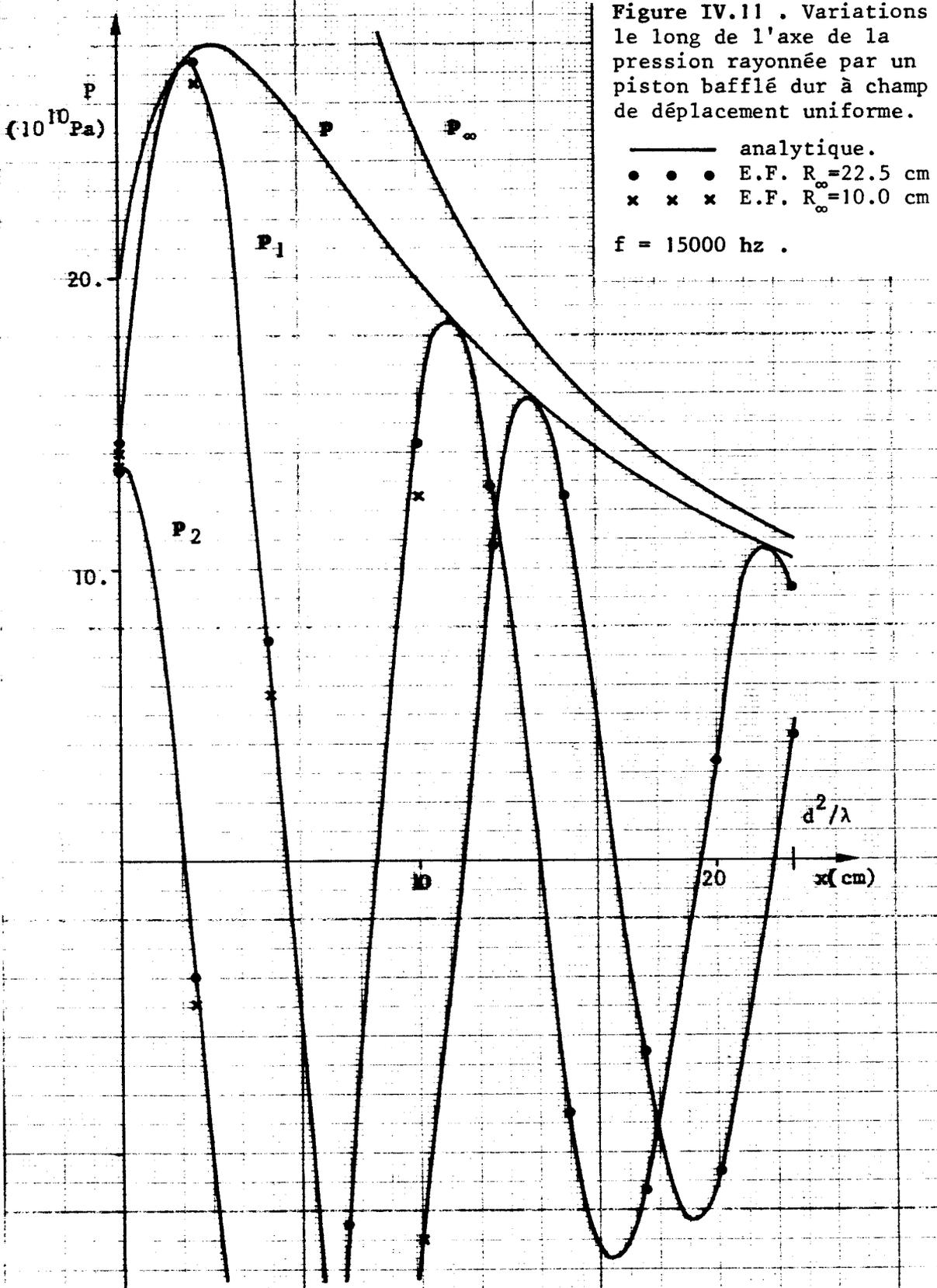


Figure IV.11 . Variations le long de l'axe de la pression rayonnée par un piston bafflé dur à champ de déplacement uniforme.



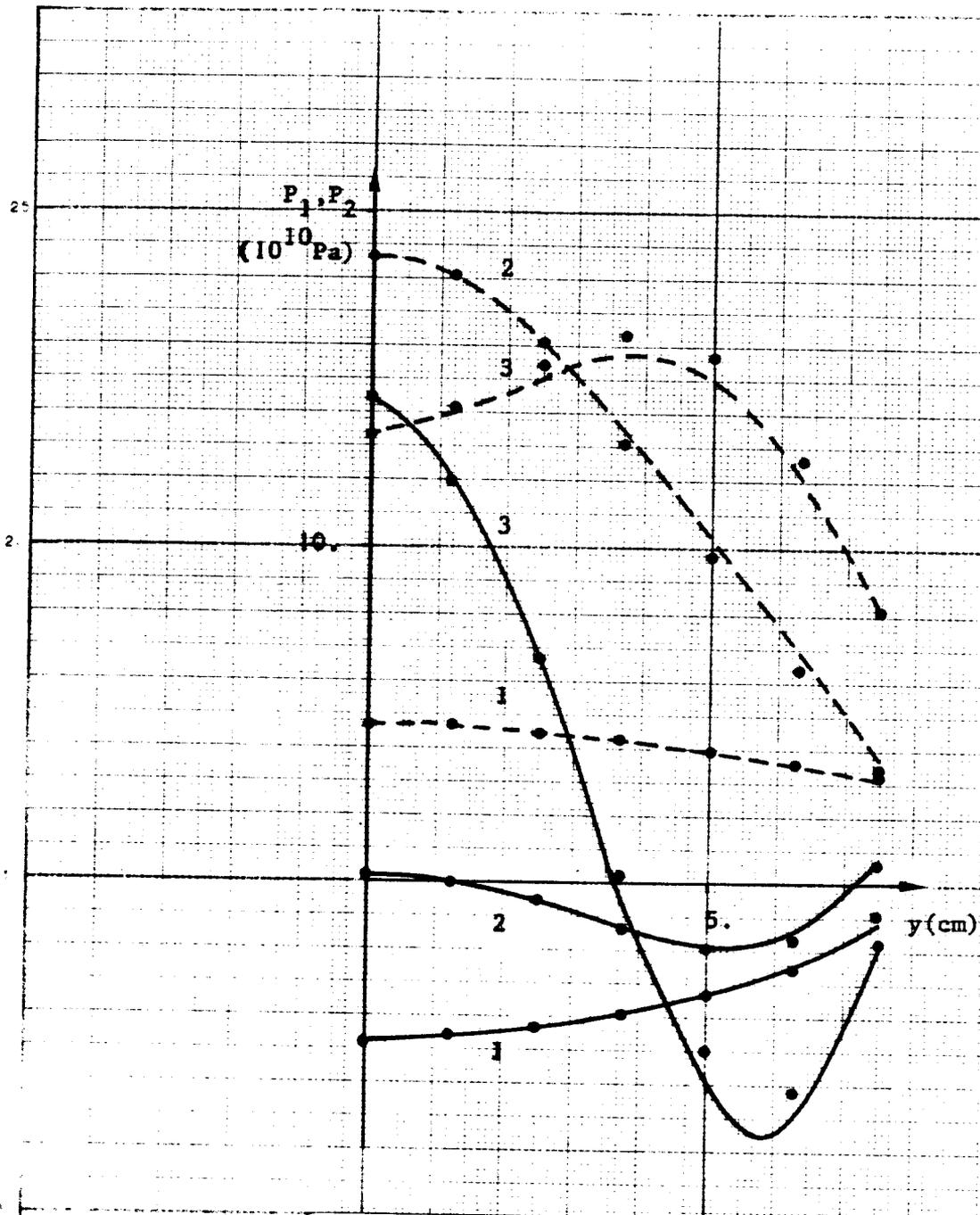


Figure IV.12 . Variations de la pression le long d'un rayon du piston bafflé dur à champ de déplacement uniforme .

- partie réelle, E.F.  $R_{\infty} = 22.5$  cm .
- - - partie imaginaire, même calcul .
- • • E.F.  $R_{\infty} = 10.0$  cm .
- (1): 5000hz, (2): 10000hz, (3): 15000hz .

variations de  $p_1$  et  $p_2$  suivant l'axe Ox et suivant l'axe Oy. Suivant l'axe Ox, il donne :

- les valeurs de  $p_1$  et  $p_2$  calculées analytiquement à l'aide des équations (IV.115),
- pour chaque valeur de  $R_\infty$ , les écarts relatifs (en %)  $\Delta p_1$  et  $\Delta p_2$  entre les résultats obtenus par éléments finis d'une part, analytiquement d'autre part.

Suivant l'axe Oy il donne :

- les valeurs de  $p_1$  et  $p_2$  calculées analytiquement au centre, à l'aide des équations (IV.115), et au bord, à l'aide des équations (IV.116),
- les valeurs de  $p_1$  et  $p_2$  calculées par éléments finis pour  $R_\infty = 22.5$  cm,
- pour  $R_\infty = 15$  cm et 10 cm, les écarts relatifs (en %)  $\Delta p_1$  et  $\Delta p_2$  entre les résultats obtenus par éléments finis dans chacun de ces cas, d'une part, les résultats obtenus par éléments finis pour  $R_\infty = 22.5$  cm d'autre part.

Les six premières figures présentent, pour chaque fréquence, les variations de  $p_1, p_2, p = (p_1^2 + p_2^2)^{1/2}$  et  $p_\infty$  avec  $x$ , les courbes étant déduites des équations (IV.115) et (IV.117) et les points calculés par éléments finis. Enfin, la figure (IV.12) montre les variations de  $p_1$  et  $p_2$  avec  $y$ , sur le piston, pour différentes fréquences, les courbes étant obtenues par éléments finis avec  $R_\infty = 22.5$  cm et les points par éléments finis avec  $R_\infty = 10$  cm. L'ensemble de ces résultats prouve que :

- pour  $R_\infty = 22.5$  cm, les valeurs de  $p_1$  et  $p_2$  sont toujours très bonnes, sauf cas particulier où l'une est négligeable devant l'autre. Pour ce rayon,  $\Gamma_\infty$  est toujours en champ lointain comme le montre sur les figures, à cette abscisse, la concordance entre  $p$  et  $p_\infty$ ,
- pour  $R_\infty = 15$  cm et 10 cm, les valeurs de  $p_1$  et  $p_2$  restent très bonnes, bien que, pour  $R_\infty = 15$  cm,  $\Gamma_\infty$  soit en champ proche à 12 et 15 khz et que, pour  $R_\infty = 10$  cm,  $\Gamma_\infty$  soit en champ proche pour 7,10,12 et 15 khz.
- lorsque des écarts importants apparaissent dans les tableaux, comme par exemple à 15 khz pour  $R_\infty = 10$ cm, ils sont au moins partiellement dûs au mode d'évaluation de l'écart relatif, comme le montre la figure (IV.11) sur laquelle ont été reportées les valeurs obtenues avec  $R_\infty =$

10cm. On voit en effet que les écarts sur  $p_1$  et  $p_2$  sont provoqués par la conjonction d'une oscillation très brutale avec un léger décalage dans la direction de propagation,  
 - même pour  $R_\infty = 10\text{cm}$ , la pression en tout point du piston est correctement calculée.

En conséquence, même lorsque la surface frontière se situe en champ proche, ces résultats montrent qu'une excellente description du champ de pression peut être obtenue. Il faut toutefois garder en mémoire le fait que, si  $\Gamma_\infty$  est en champ proche, la détermination du niveau d'émission et du diagramme de directivité à partir des résultats éléments finis n'est plus immédiate, comme le montre la figure (IV.13). On constate en effet, sur cette figure, que si les diagrammes de directivité  $D_1$  et  $D_2$  calculés respectivement par éléments finis et par la relation (IV.117) sont confondus pour  $R_\infty$  à 22.5cm, ils présentent des différences notables pour  $R_\infty$  égal à 10cm. Or, dans ce dernier cas, les valeurs obtenues à 10 cm du centre acoustique avec le maillage correspondant à  $R_\infty$  égal à 22.5cm donnent des points situés pratiquement sur  $D_1$ , prouvant la validité de ce diagramme. L'écart entre  $D_1$  et  $D_2$  provient donc bien du fait que la surface  $\Gamma_\infty$  de rayon 10cm est pratiquement en champ proche à toutes les fréquences testées.

Enfin, il faut noter que l'introduction de réductions de Guyan dans la résolution de ce problème peut présenter des inconvénients importants si les degrés de liberté maîtres et esclaves se répartissent grossièrement en couches successives et que la distance entre deux couches de degrés maîtres excède le quart de la longueur d'onde. Dans ce cas, la dégradation de la solution peut être très rapide dans tout le domaine. Ici encore, un contrôle à posteriori de la sélection automatique des degrés maîtres est donc indispensable.

#### IV.5.5 Calcul du champ de pression rayonné par un piston circulaire, bafflé dur, excité paraboliquement

Cette section poursuit le même objectif que la précédente et s'intéresse au problème défini par les figures ci-après. Dans ce cas, l'amplitude du *déplacement* du piston varie avec la distance  $r$  du point courant au centre suivant la relation :

$$U = 1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \quad (\text{IV.118})$$

Ce cas est intéressant car il correspond qualitativement au champ de

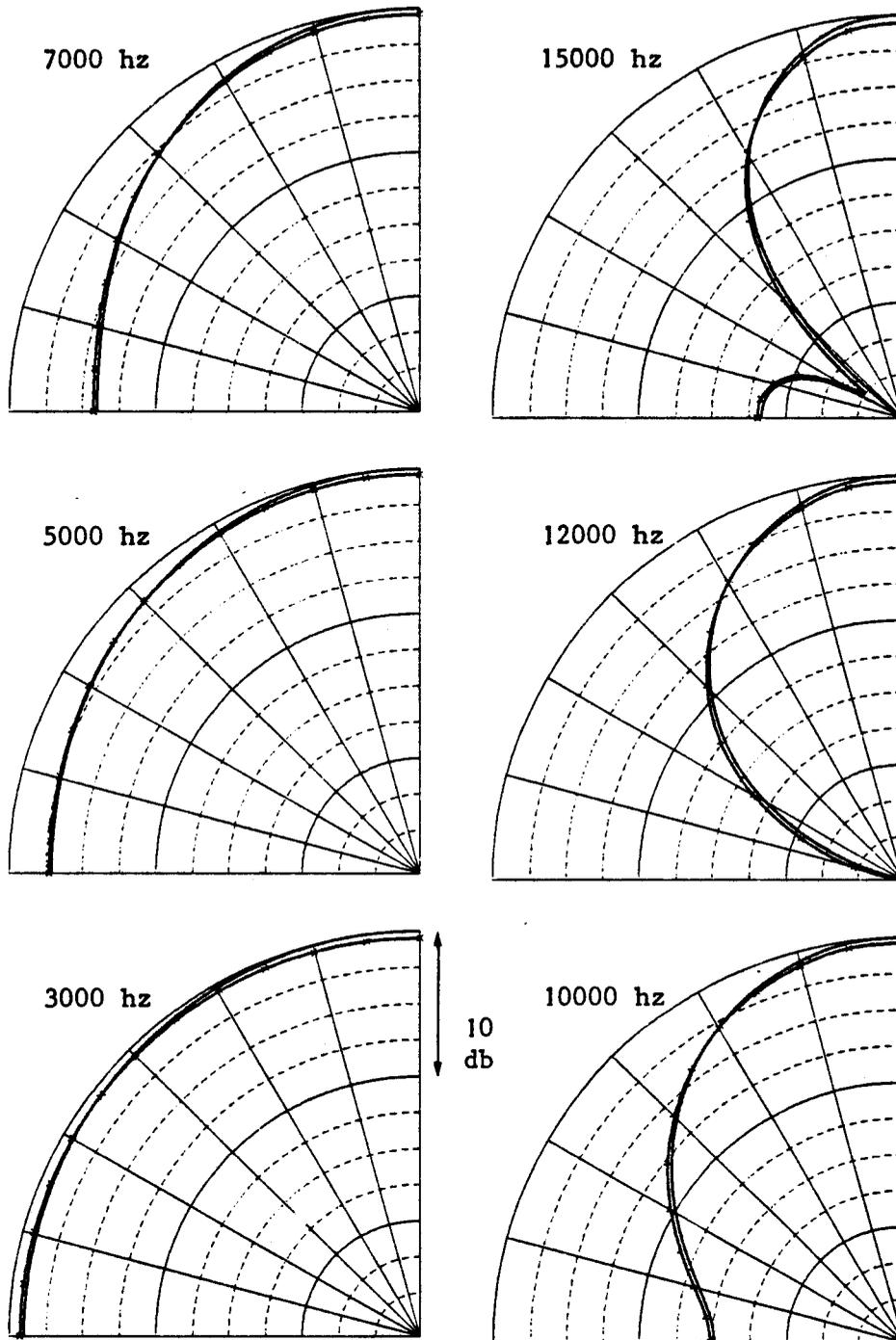


Figure IV.13 . Diagramme de directivité du piston bafflé dur à champ de déplacement uniforme .

(- - -) éléments finis, (—) théorie .

$$R_{\infty} = 22.5 \text{ cm}$$

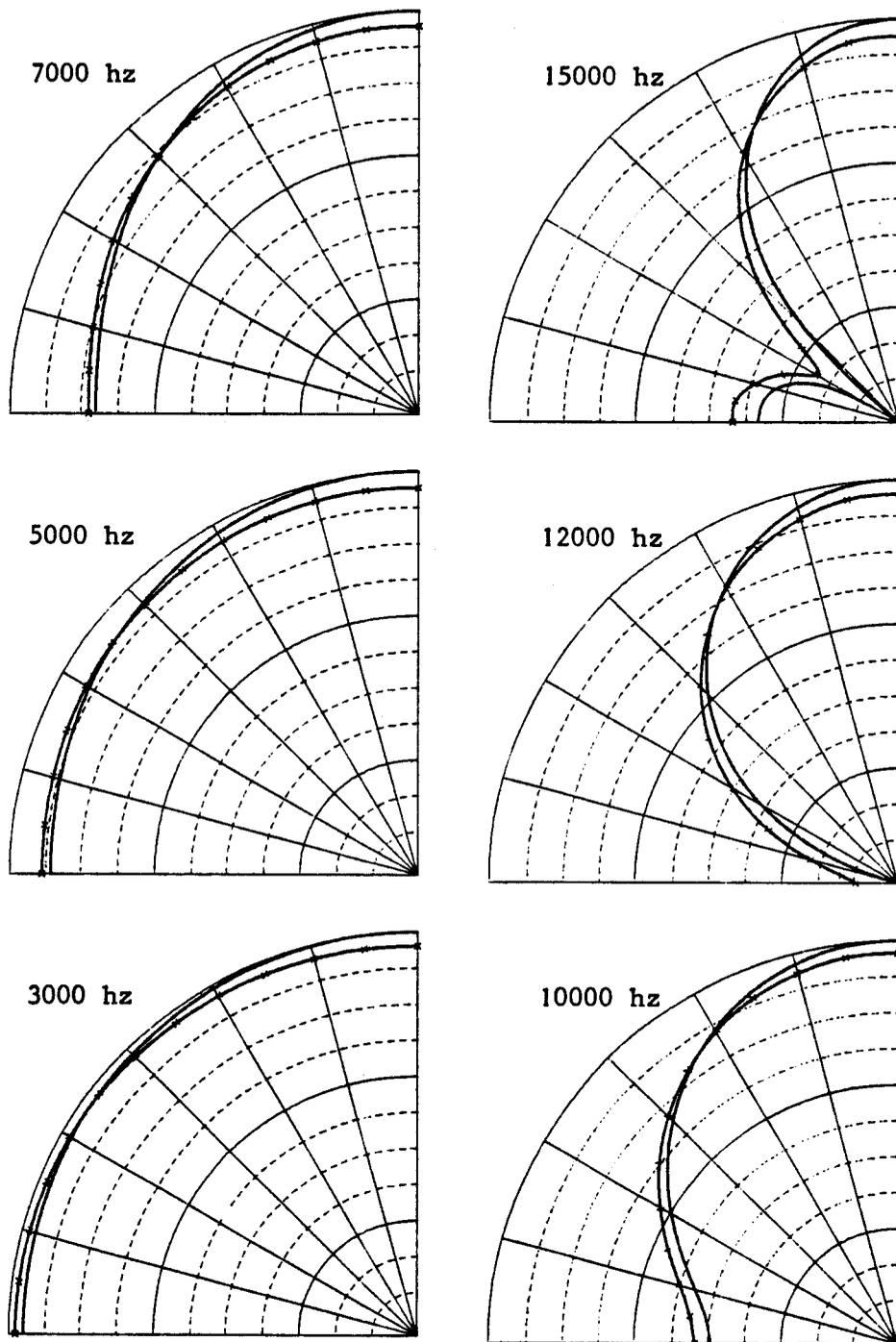


Figure IV.13 . Suite .  $R_{\infty} = 15 \text{ cm}$  .

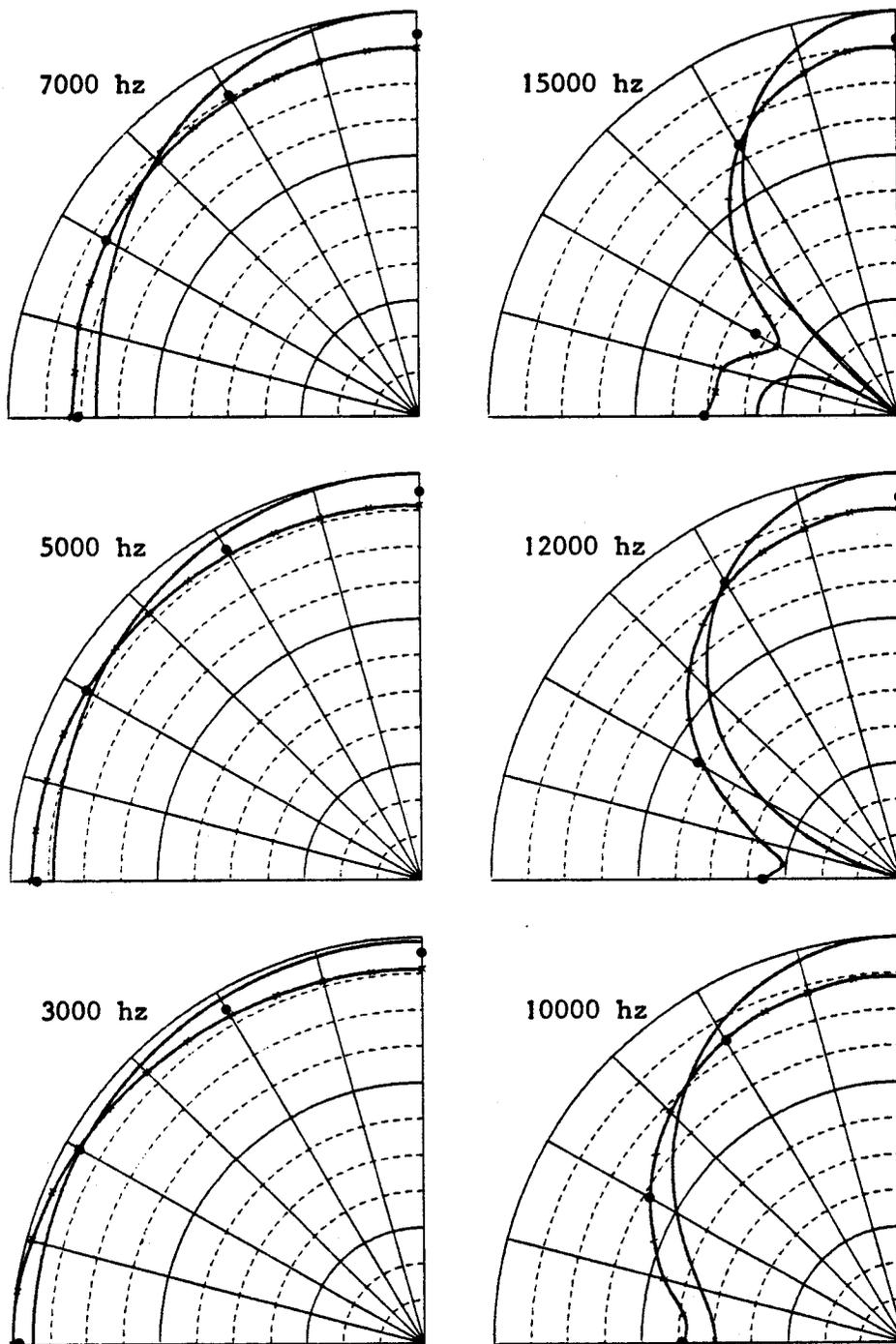
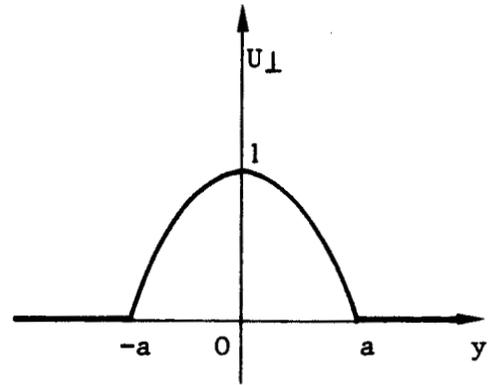
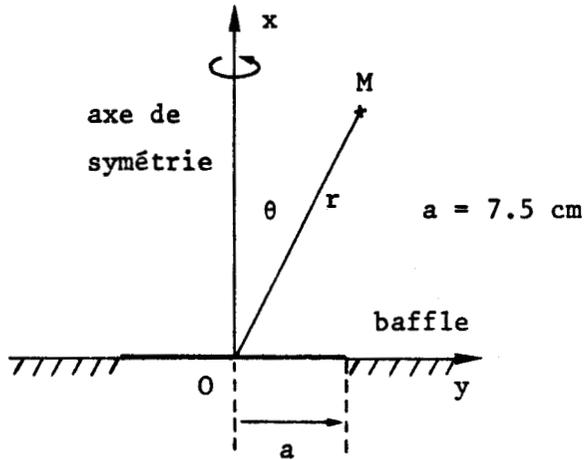


Figure IV.13 . Suite .  $R_{\infty} = 10. \text{ cm} .$

Les points noirs (•) indiquent les valeurs obtenues par éléments finis à 10. cm du centre acoustique lorsque  $R_{\infty} = 22.5 \text{ cm} .$



déplacement obtenu sur la face parlante d'un transducteur Tonpilz lorsque le pavillon papillonne. Analytiquement, on dispose des relations suivantes [1,9] qui donnent :

- les parties réelle et imaginaire de la pression,  $p_1$  et  $p_2$ , en tout point de l'axe  $ox$  :

$$p_1 = - \frac{2\rho_f c^2}{ka^2} \left[ kx \cos kx - \left(1 + \frac{k^2 a^2}{2}\right) \sin kx \right. \\ \left. + \sin ks - ks \cos ks \right]$$

$$p_2 = \frac{2\rho_f c^2}{ka^2} \left[ kx \sin kx + \left(1 + \frac{k^2 a^2}{2}\right) \cos kx \right. \\ \left. - \cos ks - ks \sin ks \right]$$

(IV.119)

avec :

$$s = \sqrt{a^2 + x^2}$$

(IV.120)

- les parties réelle et imaginaire de la pression,  $p_1$  et  $p_2$ , en tout point du bord du piston :

$$p_1 = \rho_f c \omega \left[ \frac{4}{\pi k a} - \frac{H_1(2ka)}{ka} - \frac{H_0(2ka)}{k^2 a^2} \right]$$

$$p_2 = \rho_f c \omega \left[ \frac{1 - J_0(2ka)}{k^2 a^2} - \frac{J_1(2ka)}{ka} \right]$$

(IV.121)

- l'amplitude de la pression en champ lointain :

$$p_\infty = \frac{\rho_f \omega^2 a^2}{4r} \frac{8J_2(k a \sin \theta)}{(k a \sin \theta)^2}$$

(IV.122)

Le calcul par éléments finis a été réalisé pour les mêmes fréquences et les mêmes maillages que dans la section précédente. Les résultats sont présentés dans les six tableaux des pages suivantes et sur les figures (IV.14) à (IV.21), avec les mêmes conventions que dans la section précédente. Les conclusions sont également identiques, sinon plus favorables, en particulier pour les diagrammes de rayonnement obtenus avec  $R_\infty = 10$  cm. De fait, pour ces diagrammes, la comparaison de la figure (IV.21) à la figure (IV.13), montre que la dépendance angulaire est plus faible pour une fréquence donnée, suivant un phénomène classique d'apodisation, ce qui simplifie la représentation par éléments finis.

#### IV.5.6 Analyse harmonique d'un système couplé

Pour tester l'algorithme décrit en (IV.4.3.b), le premier modèle étudié est constitué d'une plaque métallique cylindrique, encadrée latéralement, et surmontée d'une colonne d'eau infinie. Cette plaque, excitée sur sa face arrière par une pression uniforme  $p_0$ , de pulsation  $\omega$ , rayonne une onde plane dans le fluide. Se référant à la figure ci-après et notant  $\rho_s$  et  $\rho_f$  les masses volumiques du solide et du fluide,  $c_s$  et  $c_f$  les célérités du son dans le solide et dans le fluide,  $u(x)$  le champ de déplacement dans le solide,  $p(x)$  le champ de pression dans

Evolution des résultats éléments finis avec le rayon de $\Gamma_{\infty} \cdot U_1$ parabolique. $f = 3.000$ hz	$x, y : \text{cm}$ $p_1, p_2 : 10^{10} \text{Pa}$ $\Delta p : \%$
---	---

Variation de $p_1$ et $p_2$ suivant l'axe (ox)								
x	résultats analytiques		$R_{\infty} = 22.5 \text{cm}$		$R_{\infty} = 15 \text{cm}$		$R_{\infty} = 10 \text{cm}$	
	$p_1$	$p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$
0.0	-1.62	0.601	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2.5	-0.941	0.591	0.2	0.0	0.2	0.0	0.0	-0.3
5.0	-0.535	0.561	0.2	0.0	0.2	-0.2	-0.6	-1.4
7.5	-0.272	0.513	0.4	0.0	0.4	-0.6	-2.6	-3.3
10.0	-0.091	0.450	1.2	0.0	1.4	-1.3	-11.0	-6.2
12.5	0.037	0.376	-4.6	0.0	-6.9	-2.1		
15.0	0.125	0.294	-1.6	0.0	-2.4	-3.4		
17.5	0.180	0.210	-1.7	0.0				
20.0	0.208	0.128	-1.9	0.0				
22.5	0.212	0.053	-2.3	-2.1				

Variation de $p_1$ et $p_2$ sur le piston (oy)								
y	résultats analytiques		$R_{\infty} = 22.5 \text{ cm}$		$R_{\infty} = 15 \text{ cm}$		$R_{\infty} = 10 \text{ cm}$	
	$p_1$	$p_2$	$p_1$	$p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$
0.00	-1.62	0.601	-1.62	0.601	0.0	0.0	0.0	0.0
1.25			-1.58	0.599	0.0	0.0	0.0	0.0
2.50			-1.46	0.591	0.0	0.2	0.0	0.3
3.75			-1.26	0.579	0.0	0.2	0.0	0.5
5.00			-1.02	0.562	-1.0	0.2	0.0	0.9
6.25			-0.730	0.541	-0.1	0.2	0.7	1.3
7.50	-0.466	0.516	-0.465	0.516	0.0	0.4	1.3	1.9

Evolution des résultats éléments finis  
avec le rayon de  $r_{\infty} \cdot U_1$  parabolique.  
 $f = 5.000 \text{ hz}$

$x, y : \text{cm}$   
 $p_1, p_2 : 10^{10} \text{ Pa}$   
 $\Delta p : \%$

Variation de $p_1$ et $p_2$ suivant l'axe (ox)								
	résultats analytiques		$R_{\infty} = 22.5 \text{ cm}$		$R_{\infty} = 15 \text{ cm}$		$R_{\infty} = 10 \text{ cm}$	
x	$p_1$	$p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$
0.0	-3.81	2.54	0.0	0.4	0.0	0.4	0.0	0.0
2.5	-1.79	2.42	0.6	0.0	0.6	0.0	0.6	-0.4
5.0	-0.470	2.07	-0.2	0.5	2.3	0.5	4.0	-1.4
7.5	0.372	1.56	1.3	0.0	-5.1	0.0	-10.2	-3.8
10.0	0.834	0.957	1.1	0.7	-3.3	0.8	-7.4	-8.3
12.5	0.979	0.367	1.3	1.9	-3.5	2.7		
15.0	0.877	-0.129	1.6	6.2	-4.3	-9.3		
17.5	0.608	-0.469	2.3	1.7				
20.0	0.263	-0.624	4.9	1.1				
22.5	-0.071	-0.601	13.2	0.8				
Variation de $p_1$ et $p_2$ sur le piston (oy)								
	résultats analytiques		$R_{\infty} = 22.5 \text{ cm}$		$R_{\infty} = 15 \text{ cm}$		$R_{\infty} = 10 \text{ cm}$	
y	$p_1$	$p_2$	$p_1$	$p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$
0.00	-3.81	2.54	-3.81	2.55	0.0	0.0	0.0	-0.4
1.25			-3.67	2.52	0.3	0.0	0.3	0.0
2.50			-3.30	2.43	0.0	0.0	0.0	0.4
3.75			-2.69	2.30	0.0	0.0	0.0	0.0
5.00			-1.94	2.11	-0.5	0.0	-0.5	0.9
6.25			-1.08	1.89	-0.9	0.0	-0.9	1.0
7.50	-0.303	1.63	-0.305	1.63	-3.6	0.0	-5.2	2.5

Evolution des résultats éléments finis avec le rayon de $r_{\infty} \cdot U_1$ parabolique. $f = 7.000$ hz	$x, y : \text{cm}$ $p_1, p_2 : 10^{10} \text{Pa}$ $\Delta p : \%$
--	---

Variation de $p_1$ et $p_2$ suivant l'axe (ox)								
	résultats analytiques		$R_{\infty} = 22.5 \text{cm}$		$R_{\infty} = 15 \text{cm}$		$R_{\infty} = 10 \text{cm}$	
x	$p_1$	$p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$
0.0	-5.69	6.09	0.2	0.0	0.0	0.0	0.2	0.0
2.5	-1.50	5.49	0.7	0.0	0.0	0.2	2.0	0.2
5.0	1.27	3.88	-1.6	0.0	0.8	1.0	-7.9	0.3
7.5	2.53	1.79	-1.2	0.0	1.6	3.3	-6.7	0.6
10.0	2.46	-0.148	-1.2	0.7	2.0	362.	-8.9	-29.1
12.5	1.49	-1.40	-2.7	0.0	3.3	-5.7		
15.0	0.188	-1.72	-14.4	0.6	25.0	-3.5		
17.5	-0.855	-1.23	1.4	0.8				
20.0	-1.28	-0.321	0.0	2.2				
22.5	-1.05	0.545	-1.0	-0.9				

Variation de $p_1$ et $p_2$ sur le piston (oy)								
	résultats analytiques		$R_{\infty} = 22.5 \text{cm}$		$R_{\infty} = 15 \text{cm}$		$R_{\infty} = 10 \text{cm}$	
y	$p_1$	$p_2$	$p_1$	$p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$
0.00	-5.69	6.09	-5.70	6.09	-0.2	0.0	0.0	0.2
1.25			-5.42	5.96	0.0	0.0	0.0	0.2
2.50			-4.66	5.58	0.0	0.0	-0.2	0.4
3.75			-3.46	4.99	0.3	-0.2	-0.6	0.2
5.00			-2.00	4.22	0.5	-0.2	-2.0	0.5
6.25			-0.413	3.34	5.0	-0.6	-11.4	0.6
7.50	0.898	2.41	0.915	2.41	-3.3	-1.2	7.5	0.8

Evolution des résultats éléments finis  
avec le rayon de  $r_{\infty} \cdot U_1$  parabolique.  
 $f = 10.000 \text{ Hz}$

$x, y : \text{cm}$   
 $p_1, p_2 : 10^{10} \text{ Pa}$   
 $\Delta p : \%$

Variation de $p_1$ et $p_2$ suivant l'axe (ox)								
	résultats analytiques		$R_{\infty} = 22.5 \text{ cm}$		$R_{\infty} = 15 \text{ cm}$		$R_{\infty} = 10 \text{ cm}$	
x	$p_1$	$p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$
0.0	-5.88	13.2	0.8	0.0	0.8	0.0	-0.5	0.0
2.5	3.03	10.3	-2.3	0.0	-3.0	0.0	1.3	1.0
5.0	7.19	3.48	-0.8	-1.4	-1.9	-2.9	1.2	9.2
7.5	5.51	-2.78	-0.7	2.9	-2.9	5.4	2.7	-18.7
10.0	0.688	-4.91	-3.2	1.8	-18.4	3.4	32.4	-10.0
12.5	-3.10	-2.71	0.0	1.8	-1.6	4.4		
15.0	-3.36	1.01	-0.6	0.0	-0.9	-3.4		
17.5	-0.774	2.95	-1.3	1.0				
20.0	1.88	1.93	0.0	2.1				
22.5	2.34	-0.560	0.0	-3.2				
Variation de $p_1$ et $p_2$ sur le piston (oy)								
	résultats analytiques		$R_{\infty} = 22.5 \text{ cm}$		$R_{\infty} = 15 \text{ cm}$		$R_{\infty} = 10 \text{ cm}$	
y	$p_1$	$p_2$	$p_1$	$p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$
0.00	-5.88	13.2	-5.93	13.2	0.0	0.0	-1.3	0.0
1.25			-5.51	12.7	-0.2	0.0	-1.3	0.0
2.50			-4.37	11.2	-0.5	0.0	-0.1	-0.9
3.75			-2.62	9.00	-1.1	0.2	-1.1	-1.4
5.00			-0.607	6.39	-6.9	0.2	-2.0	-3.1
6.25			1.41	3.72	3.5	0.5	-2.8	-6.5
7.50	2.68	1.32	2.70	1.36	2.2	1.5	-1.1	-18.3

Evolution des résultats éléments finis  
avec le rayon de  $r_{\infty} = 0.1$  parabolique.  
 $f = 12.000$  hz

$x, y$  : cm  
 $p_1, p_2$  :  $10^{10}$  Pa  
 $\Delta p$  : %

Variation de $p_1$ et $p_2$ suivant l'axe (ox)								
x	résultats analytiques		$R_{\infty} = 22.5$ cm		$R_{\infty} = 15$ cm		$R_{\infty} = 10$ cm	
	$p_1$	$p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$
0.0	-3.75	17.6	-0.5	0.6	0.3	0.6	1.1	-0.6
2.5	8.71	11.5	0.2	0.0	-0.3	0.9	2.4	-0.9
5.0	11.0	-0.941	0.9	-10.8	0.0	-33.7	6.4	7.3
7.5	3.26	-8.07	2.4	-1.4	-1.5	-4.2	27.6	0.6
10.0	-4.93	-5.03	0.2	-1.2	2.6	-3.0	-13.6	2.0
12.5	-5.42	2.26	1.8	1.3	3.3	-1.8		
15.0	0.185	5.01	-52.0	0.4	-56.1	-1.6		
17.5	4.16	1.32	0.5	2.3				
2	2.32	-3.08	4.7	0.0				
22.5	-1.94	-2.86	-3.1	1.4				
Variation de $p_1$ et $p_2$ sur le piston (oy)								
y	résultats analytiques		$R_{\infty} = 22.5$ cm		$R_{\infty} = 15$ cm		$R_{\infty} = 10$ cm	
	$p_1$	$p_2$	$p_1$	$p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$
0.00	-3.75	17.6	-3.73	17.7	0.8	0.0	1.6	-1.1
1.25			-3.46	16.7	0.6	0.0	2.3	-0.6
2.50			-2.68	14.2	0.4	0.0	5.2	-0.7
3.75			-1.43	10.6	-0.7	-0.9	14.7	-0.9
5.00			0.020	6.56	208.	-1.5		-0.2
6.25			1.55	2.87	1.9	-4.5	-18.1	0.7
7.50	2.40	.118	2.33	.112	0.9		-9.0	31.2

Evolution des résultats éléments finis  
avec le rayon de  $r_{\infty} = 0.1$  parabolique.  
 $f = 15.000$  hz

$x, y : \text{cm} \cdot 10^1$   
 $p_1, p_2 : 10^1 \text{ Pa}$   
 $\Delta p : \%$

Variation de  $p_1$  et  $p_2$  suivant l'axe (ox)

x	résultats analytiques		$R_{\infty} = 22.5\text{cm}$		$R_{\infty} = 15\text{cm}$		$R_{\infty} = 10\text{cm}$	
	$P_1$	$P_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$
0.0	1.43	21.2	3.5	0.0	-0.7	-0.9	-13.3	0.5
2.5	18.3	7.44	-0.5	2.5	-1.1	-1.8	-3.3	-3.6
5.0	10.3	-12.5	0.0	-2.4	-1.0	1.6	-9.1	7.2
7.5	-8.36	-10.0	-1.6	0.0	-3.7	4.0	5.8	11.1
10.0	-9.01	5.82	1.1	-3.8	-3.8	-2.9	-0.7	-10.8
12.5	4.27	7.94	-3.5	-0.6	1.6	2.3		
15.0	7.00	-3.28	1.8	-4.8	-1.0	-5.5		
17.5	-2.63	6.22	-8.4	0.5				
20.0	-5.57	2.17	2.1	-8.3				
22.5	1.85	5.03	-12.4	0.8				

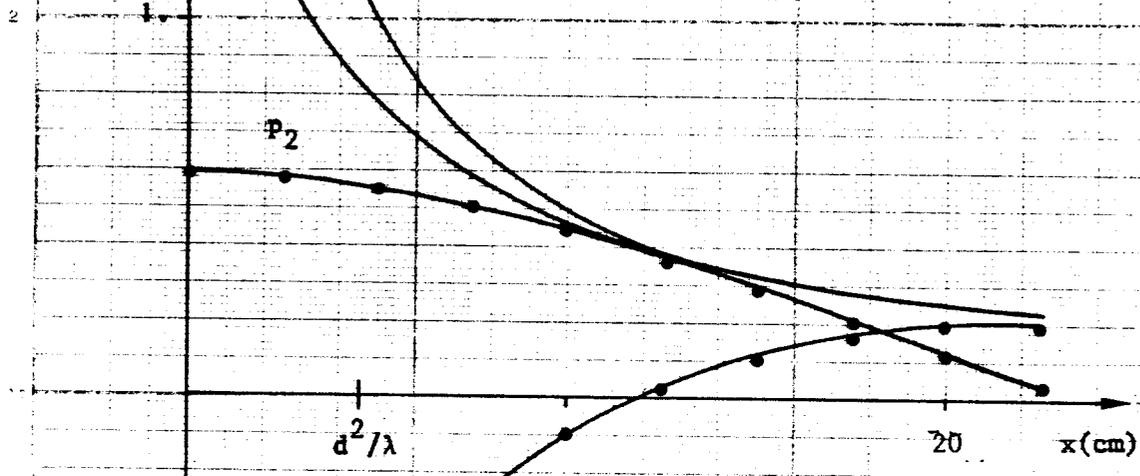
Variation de  $p_1$  et  $p_2$  sur le piston (oy)

y	résultats analytiques		$R_{\infty} = 22.5 \text{ cm}$		$R_{\infty} = 15 \text{ cm}$		$R_{\infty} = 10 \text{ cm}$	
	$P_1$	$P_2$	$P_1$	$P_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$	$\Delta p_1$	$\Delta p_2$
0.00	1.43	21.2	1.48	21.2	-4.0	-0.9	-16.2	0.5
1.25			1.00	19.9	-2.4	-0.5	-27.0	0.5
2.50			0.078	16.4	43.6	0.0	79.4	1.2
3.75			-0.716	11.6	-15.9	0.8	-40.1	2.6
5.00			-0.847	6.67	-21.4	3.5	-55.1	5.7
6.25			0.114	2.64	192.	8.7	354.	10.2
7.50	1.12	.259	1.07	0.191	19.6	71.7	29.9	29.3

$P$   
( $10^{10}$  Pa)

Figure IV.14 . Variations  
le long de l'axe de la  
pression rayonnée par un  
piston bafflé dur à champ  
de déplacement parabolique.

— analytique.  
• • • E.F.  $R_{\infty} = 22.5$  cm  
 $f = 3000$  hz .



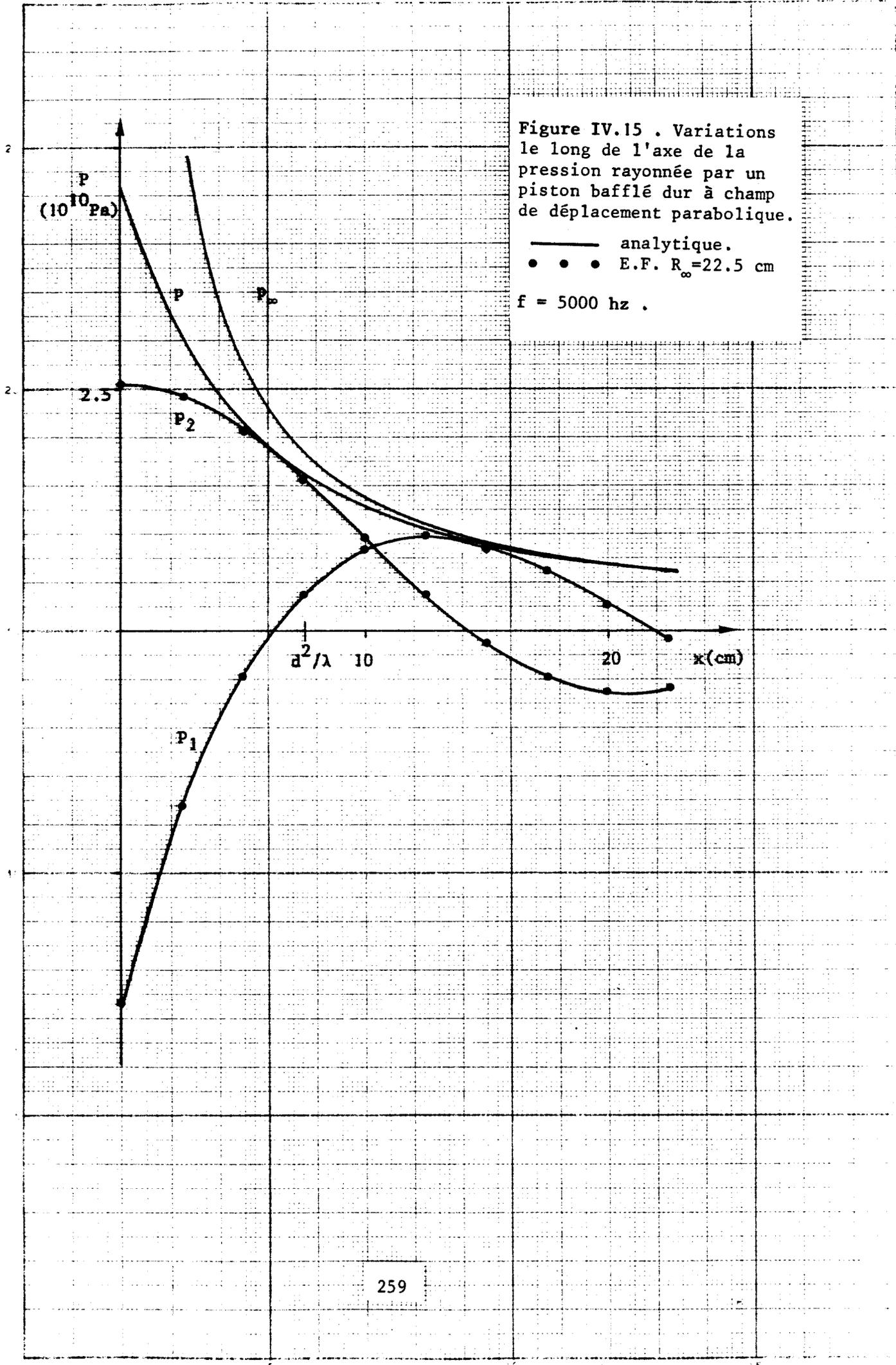
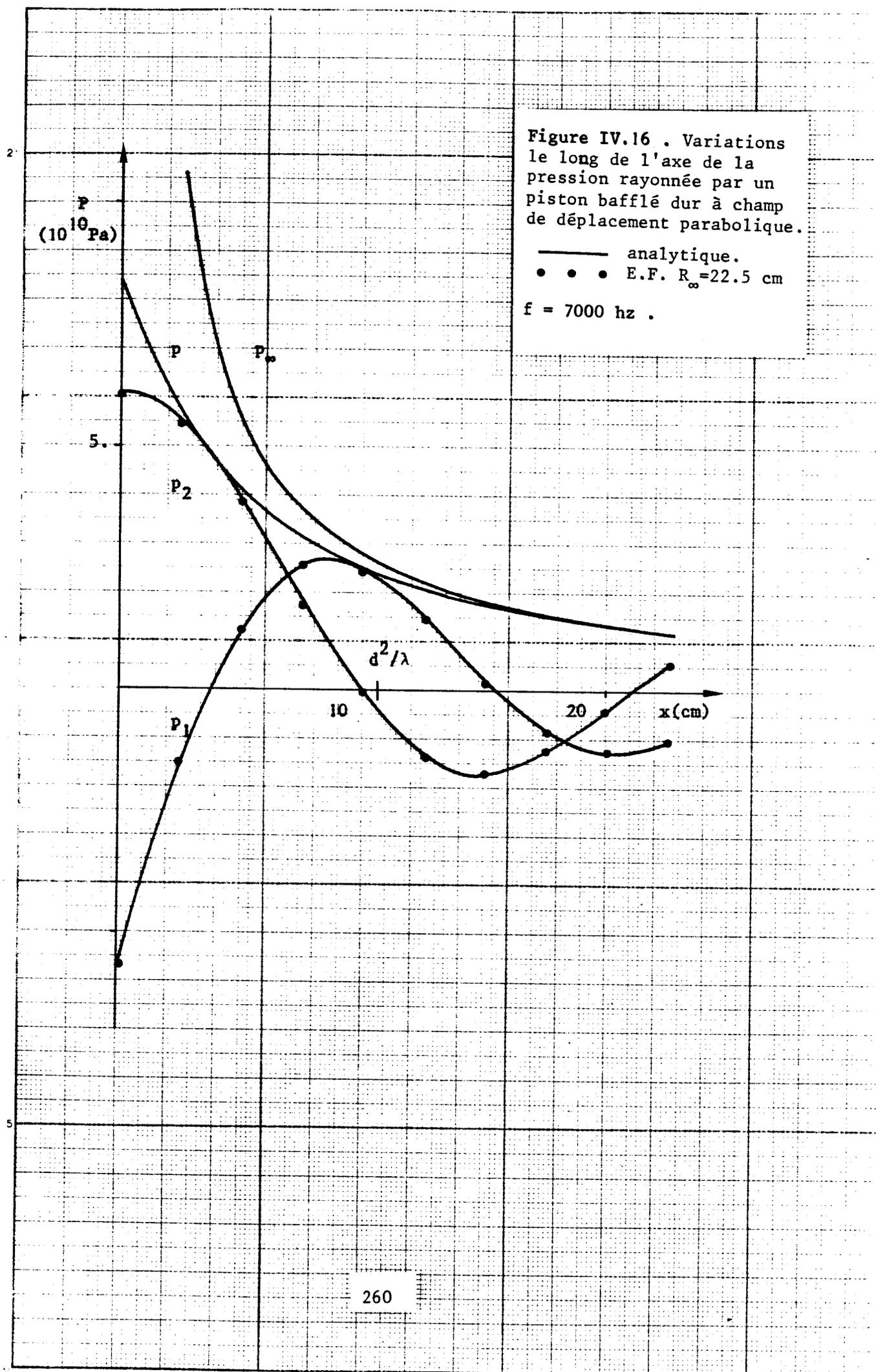
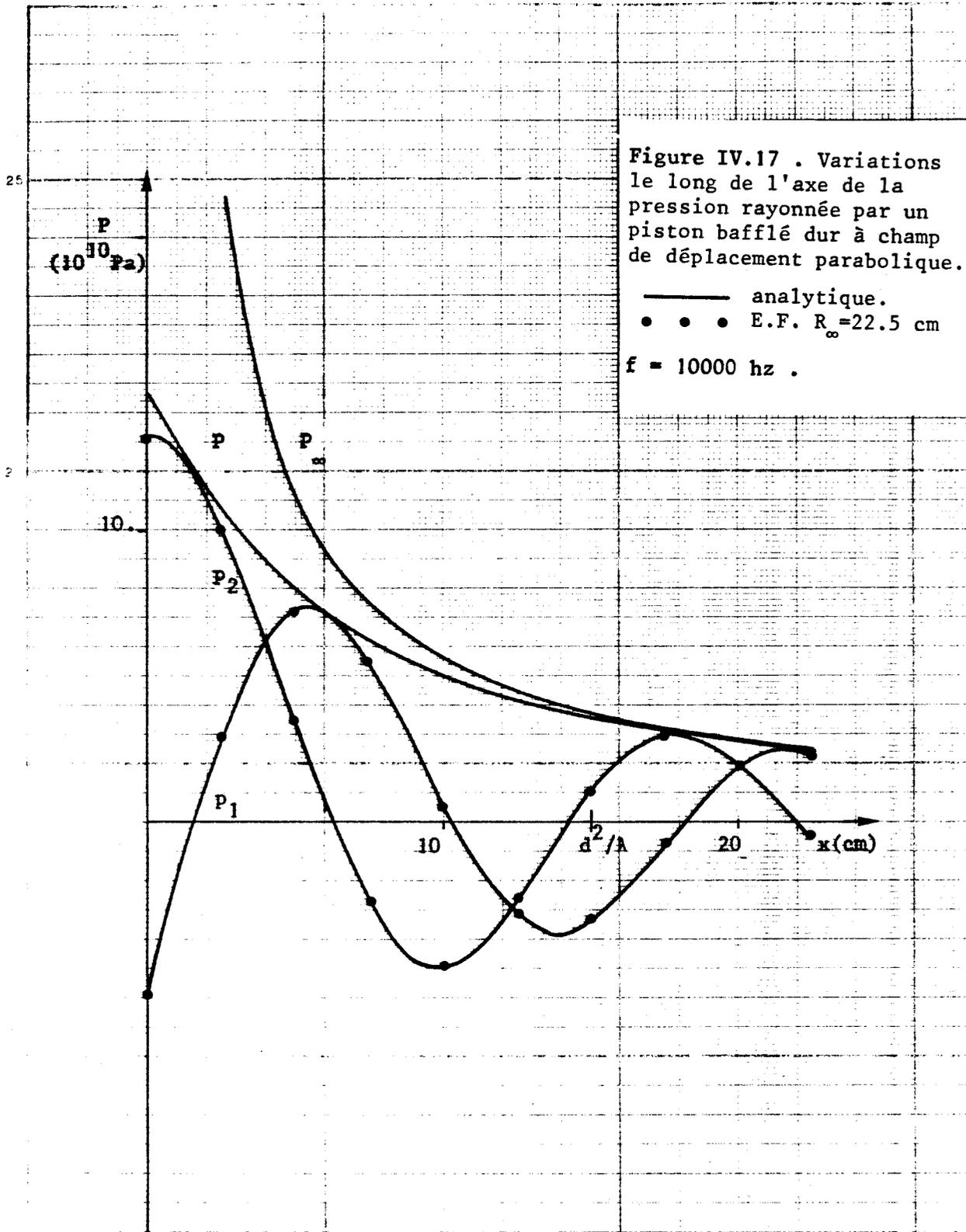


Figure IV.16 . Variations le long de l'axe de la pression rayonnée par un piston bafflé dur à champ de déplacement parabolique.

— analytique.  
 • • • E.F.  $R_{\infty} = 22.5$  cm  
 $f = 7000$  hz .





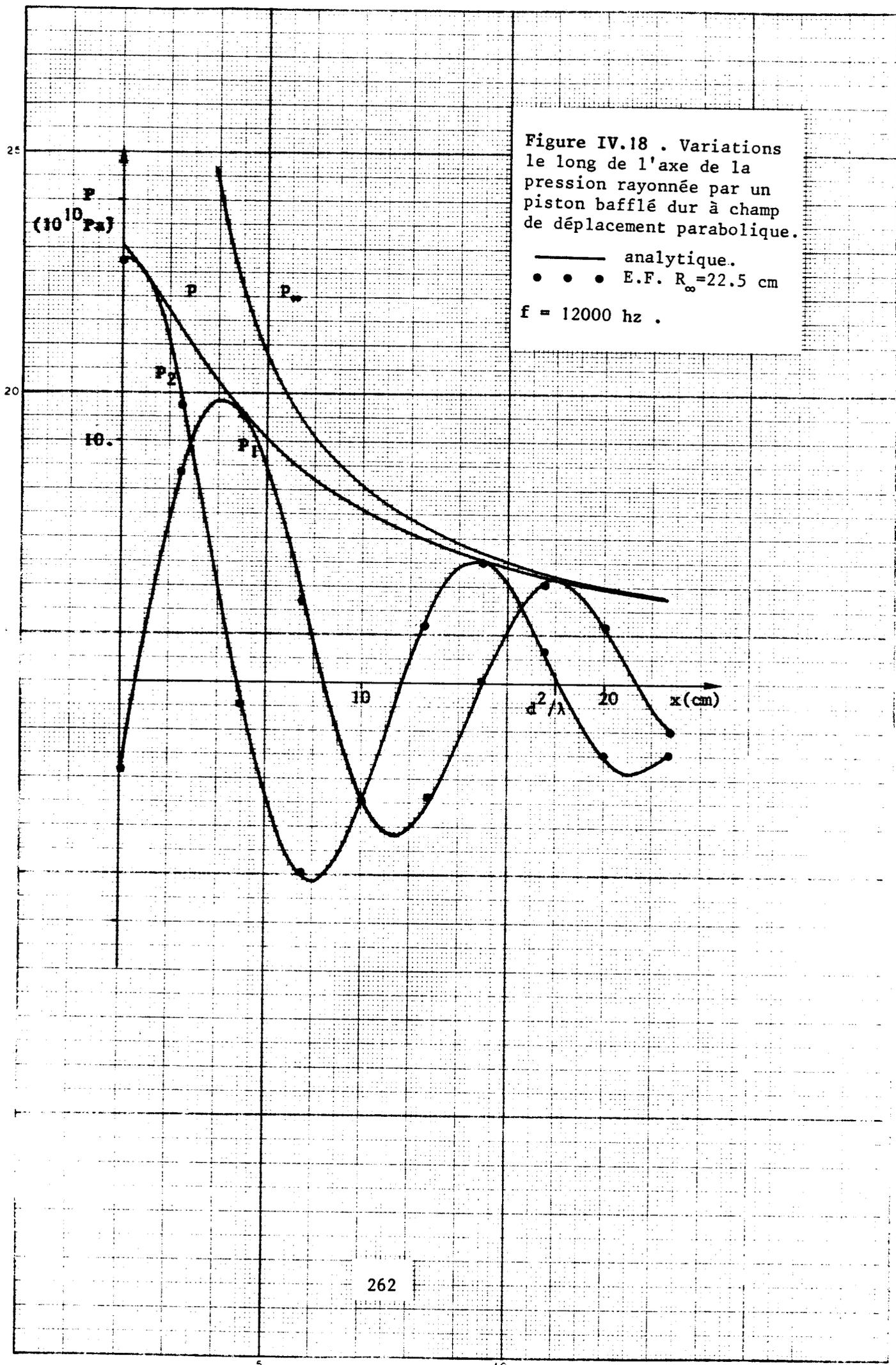


Figure IV.18 . Variations le long de l'axe de la pression rayonnée par un piston bafflé dur à champ de déplacement parabolique.

— analytique.  
 • • • E.F.  $R_\infty = 22.5$  cm  
 $f = 12000$  Hz .

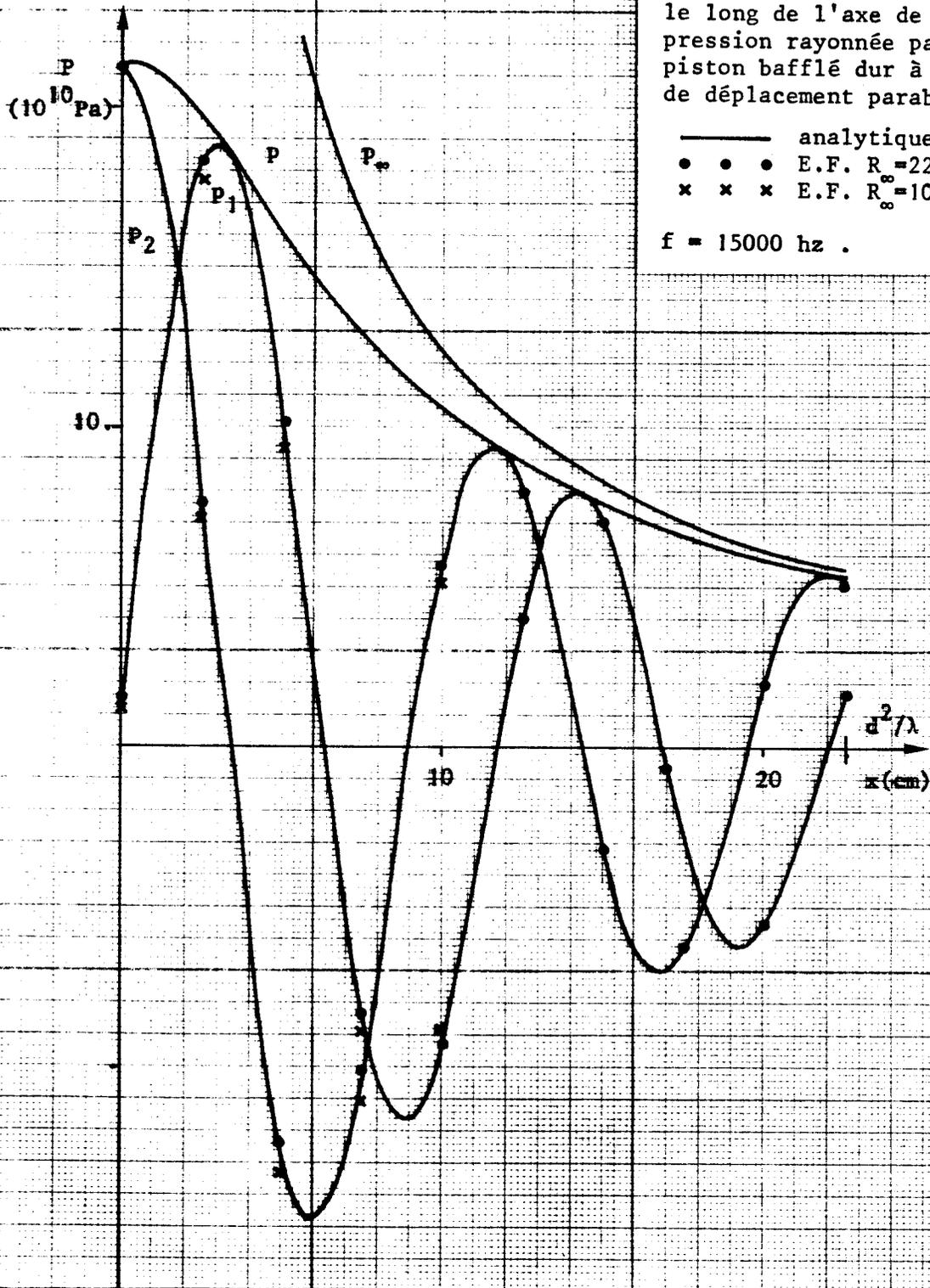


Figure IV.19 . Variations le long de l'axe de la pression rayonnée par un piston bafflé dur à champ de déplacement parabolique.

— analytique.  
 • • • E.F.  $R_{\infty} = 22.5$  cm  
 x x x E.F.  $R_{\infty} = 10.0$  cm  
 $f = 15000$  hz .

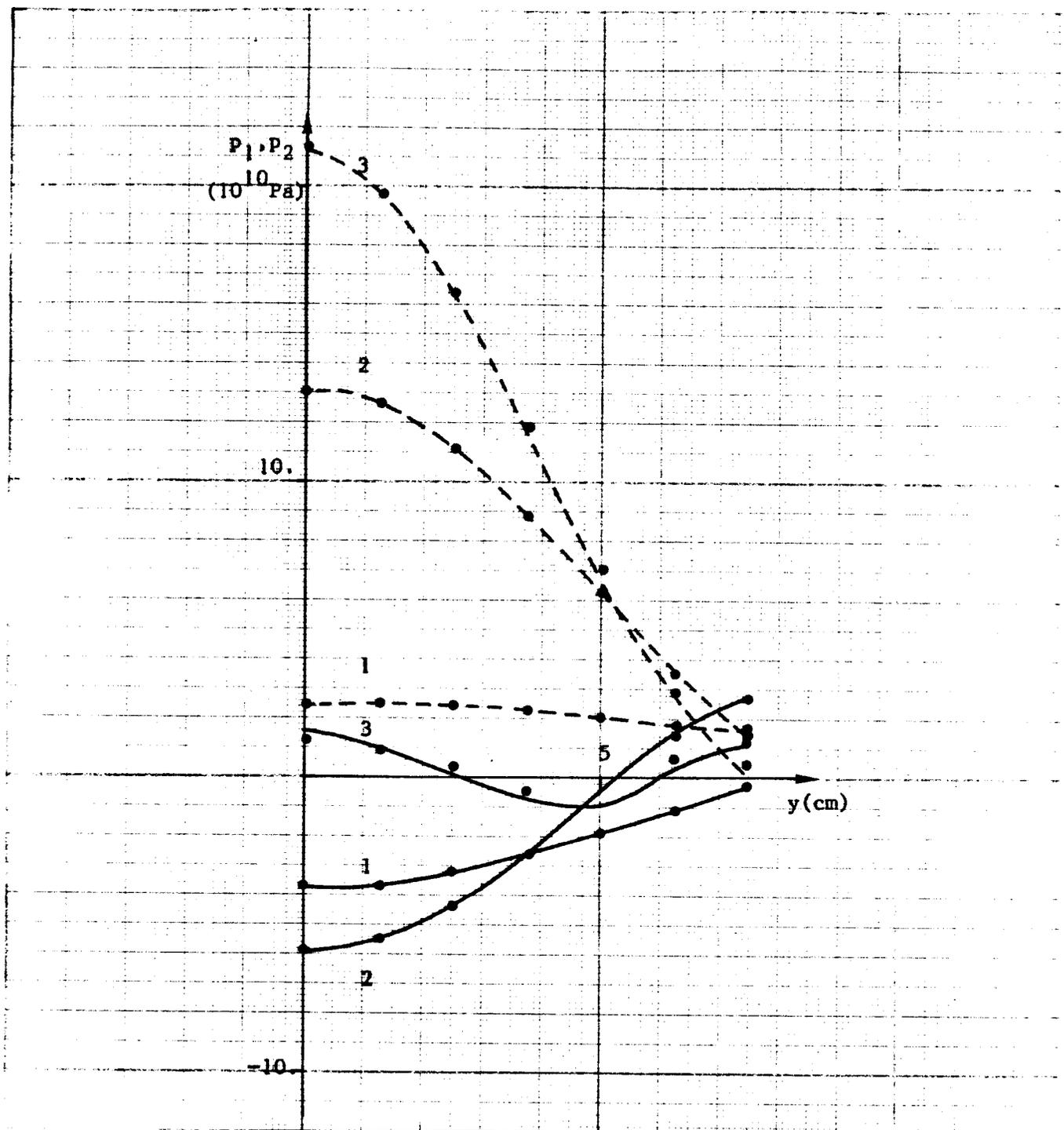


Figure IV.20 . Variations de la pression le long d'un rayon du piston bafflé dur à champ de déplacement parabolique .

— partie réelle, E.F.  $R_{\infty} = 22.5$  cm.

- - - partie imaginaire, même calcul .

• • • E.F.  $R_{\infty} = 10.0$  cm .

(1): 5000hz, (2): 10000hz, (3): 15000hz .

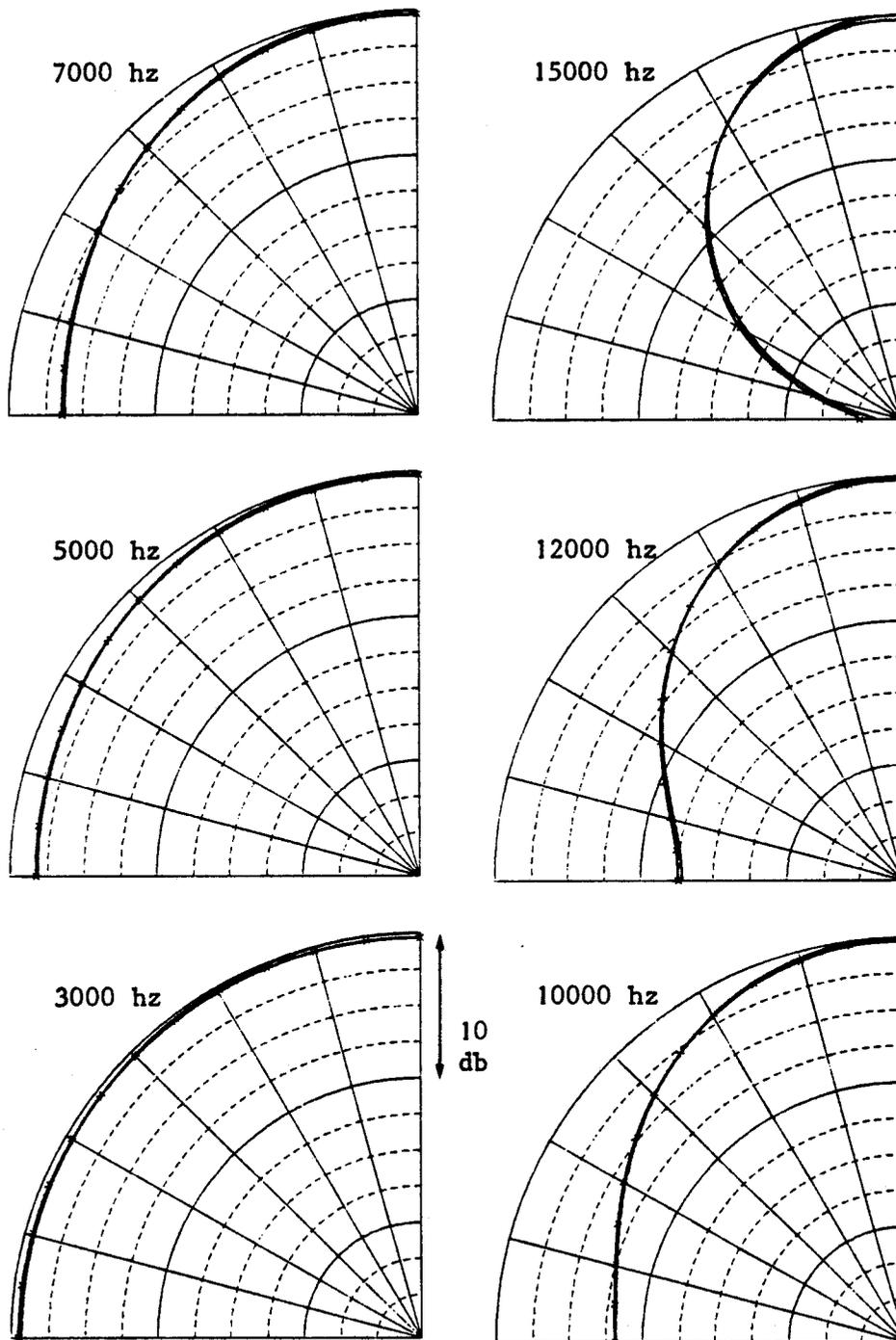


Figure IV.21 . Diagramme de directivité du piston bafflé dur à champ de déplacement parabolique .

(- - -) éléments finis, (—) théorie .

$$R_{\infty} = 22.5 \text{ cm} .$$

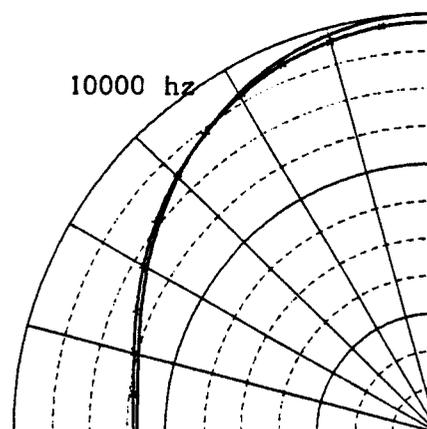
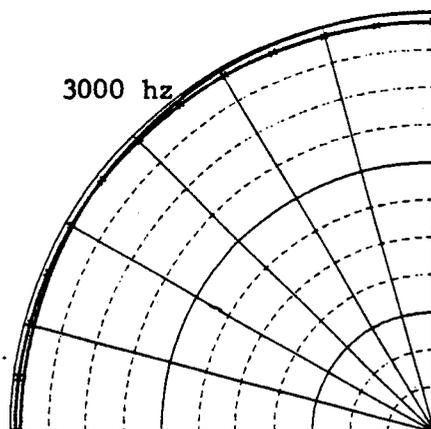
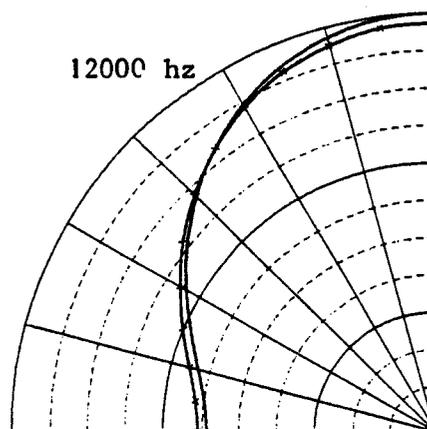
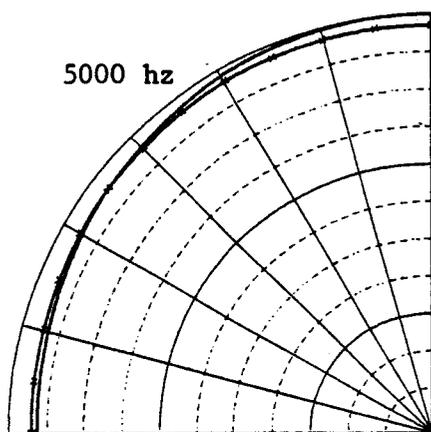
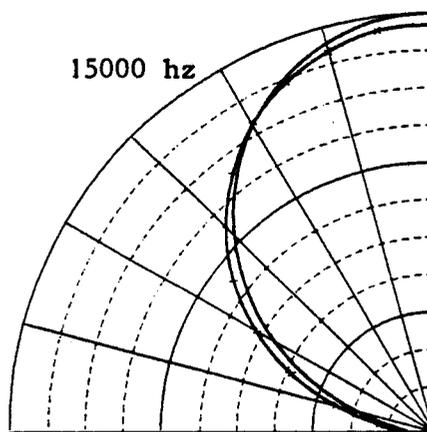
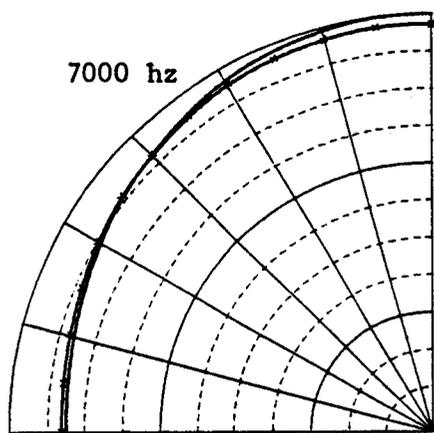


Figure IV.21 . Suite .  $R_{\text{e}} = 15. \text{ cm} .$

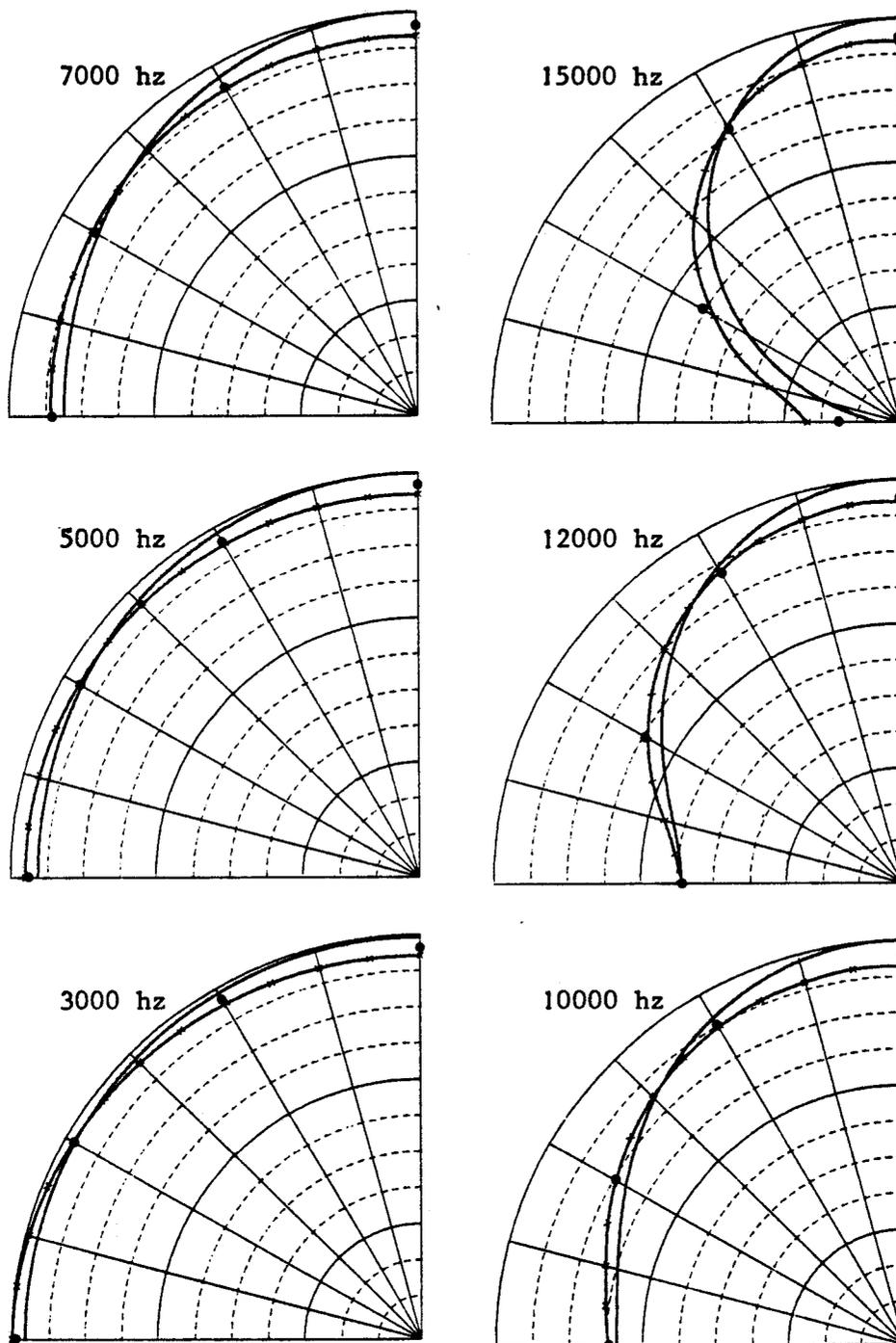
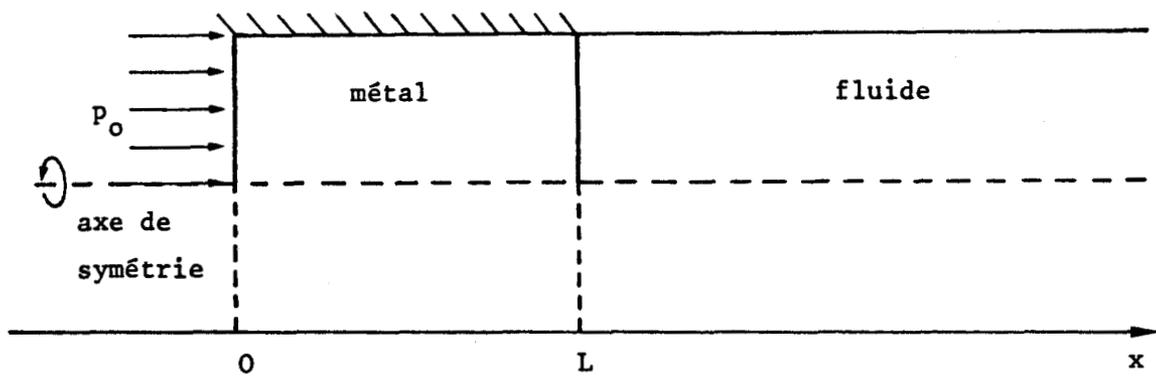


Figure IV.21 . Suite .  $R_{\infty} = 10. \text{ cm} .$

Les points noirs (●) indiquent les valeurs obtenues par éléments finis à 10. cm du centre acoustique lorsque  $R_{\infty} = 22.5 \text{ cm} .$



le fluide, on obtient simplement, sous forme analytique [41] :

$$\begin{aligned}
 u(x) &= u_1(x) + j u_2(x) \\
 u_1(x) &= - p_0 [ \cos kL \sin k(x-L) \\
 &\quad + v^2 \sin kL \cos k(x-L) ] / k \rho_s c_s^2 d^2 \\
 u_2(x) &= - p_0 v \cos kx / k \rho_s c_s^2 d^2
 \end{aligned}
 \tag{IV.123}$$

et :

$$\begin{aligned}
 p(x) &= p_1(x) + j p_2(x) \\
 p_1(x) &= p_0 [ \cos kL \cos k'(x-L) \\
 &\quad - v \sin kL \sin k'(x-L) ] / d^2 \\
 p_2(x) &= - p_0 [ v \sin kL \cos k'(x-L) \\
 &\quad + \cos kL \sin k'(x-L) ] / d^2
 \end{aligned}
 \tag{IV.124}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 v &= \rho_s c_s / \rho_f c_f \\
 k &= \omega / c_s \\
 k' &= \omega / c_f \\
 d^2 &= \cos^2 kL + v^2 \sin^2 kL
 \end{aligned}
 \tag{IV.125}$$

Enfin, définissant le coefficient de transmission :

$$T = \frac{|p|}{p_0} \quad (\text{IV.126})$$

on a :

$$T = \frac{1}{d} \quad (\text{IV.127})$$

Le maillage utilisé comporte dix éléments solides, vingt éléments fluides, un élément interface et un élément rayonnant, la surface frontière étant située à une distance  $L$  de l'interface. Compte tenu de la géométrie, ces éléments sont à symétrie axiale. Pour les valeurs numériques  $L = 40\text{cm}$ ,  $\rho_s = 2780 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_s = 2847 \text{ m/s}$ ,  $c_f = 1480 \text{ m/s}$ ,  $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ , la figure (IV.22) présente l'évolution de  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $p_1$  et  $p_2$  à la pulsation  $\omega = 40\,000 \text{ rd/s}$ . La figure (IV.23) montre la variation du coefficient de transmission  $T$  avec le produit  $kL$ . Les résultats sont excellents et l'ensemble des simulations réalisées prouve qu'ils ne se dégradent que lorsque le pas du maillage devient supérieur à  $\lambda/4$ , comme indiqué déjà à propos d'autres exemples.

Le second modèle utilisé, très voisin du premier, sert à tester la prise en compte de l'effet piézoélectrique dans un problème de rayonnement. Il est constitué par une plaque cylindrique de céramique piézoélectrique, polarisée axialement, encastrée latéralement et surmontée d'une colonne d'eau infinie. Cette plaque, excitée par une tension d'amplitude  $\phi_0$ , rayonne une onde plane dans le fluide. Se référant à la figure ci-après et notant  $\rho_s$  et  $\rho_f$  les masses volumiques du solide et du fluide,  $c_{33}^D$ ,  $h_{33}$  et  $\beta_{33}^S$  les constantes élastique, piézoélectrique et diélectrique utiles,  $u(x)$  le champ de déplacement dans le solide,  $p(x)$  le champ de pression dans le fluide, on obtient simplement, sous forme analytique [41] :

$$p(x) = p_1(x) + j p_2(x)$$

$$p_1(L) = -\alpha (v X_a \sin kL - Y_a \cos kL) \phi_0$$

$$p_2(L) = -\alpha (X_a \cos kL + v Y_a \sin kL) \phi_0$$

(IV.128)

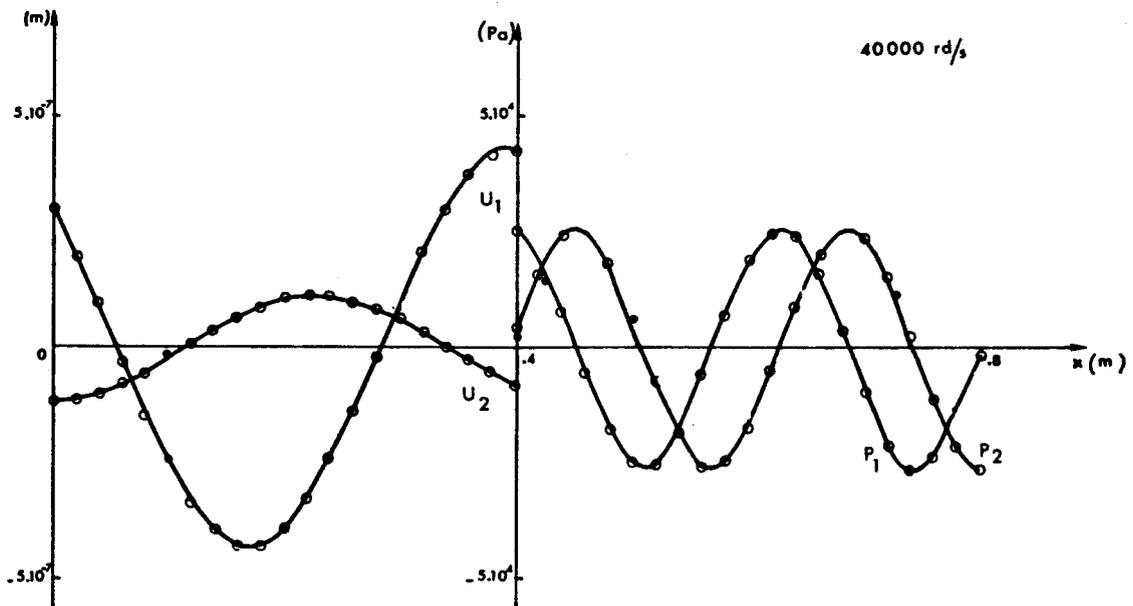


Figure IV.22 . Variations avec l'abscisse  $x$  des composantes réelles et imaginaires du déplacement ( $u_1$  et  $u_2$ ) et de la pression ( $p_1$  et  $p_2$ ) . — analytique,  $\circ \circ \circ$  E.F.

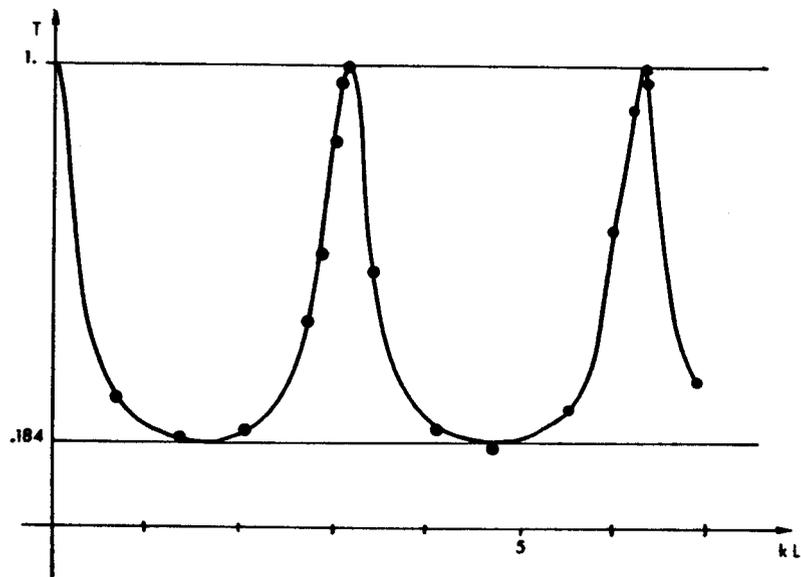
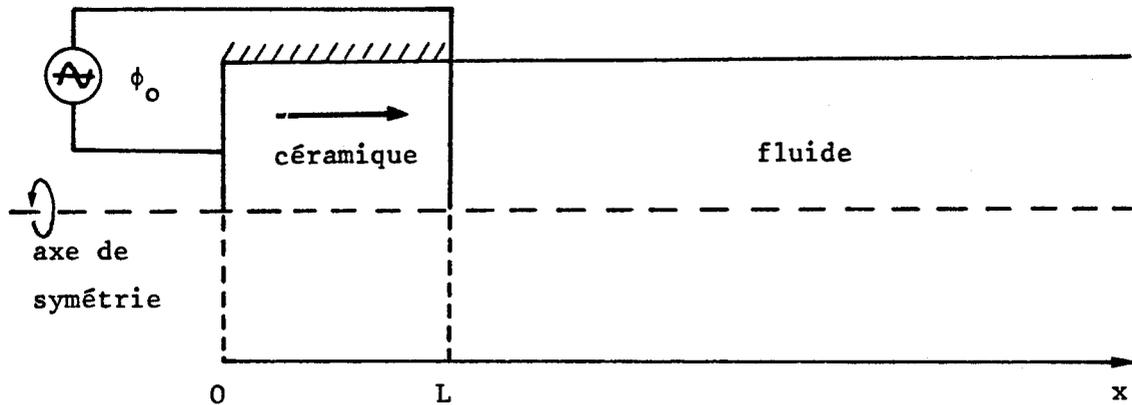


Figure IV.23 . Variations avec le produit  $kL$  du coefficient de transmission de la lame à faces parallèles . — analytique,  $\bullet \bullet \bullet$  E.F.



où :

$$v = \rho_s c_s / \rho_f c_f$$

$$k = \omega / c_s$$

$$a = \frac{h_{33}(\cos kL - 1)}{\omega A (\cos^2 kL + v^2 \sin^2 kL)}$$

(IV.129)

A étant la section du disque,  $X_a$  et  $Y_a$  les parties réelle et imaginaire de l'admittance électrique. L'impédance électrique est donnée par :

$$Z = \frac{1}{jC_0 \omega} \left( 1 - j \frac{k_t^2 2v(1 - \cos kL) - j \sin kL}{kL \cos kL + jv \sin kL} \right)$$

(IV.130)

où :

$$C_0 = A/L \beta_{33}^S$$

$$k_t^2 = h_{33}^2 / C_{33}^D \beta_{33}^S$$

(IV.131)

Le maillage utilisé comporte quatre éléments piézoélectriques, quinze éléments fluides, un élément interface et un élément rayonnant. Ces éléments sont à symétrie axiale. Avec les valeurs numériques  $L = 10\text{cm}$ ,  $A = 78.5\text{ cm}^2$ ,  $c_s = 4395.4\text{ m/s}$ ,  $c_f = 1490\text{ m/s}$ ,  $c_{33}^D = 1.42 \cdot 10^{11}\text{ Pa}$ ,  $\epsilon_{33}^S = 8.0 \cdot 10^{-9}\text{ F/m}$ ,  $k_t = 0.211$ ,  $v = 21.7$  et  $\phi_0 = 1\text{V}$ , la figure (IV.24) présente les variations de  $|p(o)|$  et des parties réelle et imaginaire de  $Z$  avec la fréquence, autour de la première résonance. Ces résultats

sont excellents. La figure (IV.25) présente les mêmes variations autour de la seconde résonance, mettant seulement en évidence un très léger décalage en fréquence. Enfin, la figure (IV.26) analyse la sensibilité du second résultat aux réductions de Guyan dans le fluide et montre une très bonne stabilité.

#### IV.5.7 Conclusion

L'ensemble des tests réalisés dans cette section permet de dégager les conclusions suivantes :

- dans une direction de variation de la pression et, en particulier, dans une direction de propagation, le pas du maillage doit toujours être inférieur au quart de la longueur d'onde ( $\lambda/4$ ). Cette condition est directement liée au caractère quadratique de l'interpolation par les éléments finis utilisés et est très stricte.
- la condensation de Guyan d'un problème couplé fluide-structure est opérationnelle et efficace, surtout lors d'une analyse modale. En particulier, d'excellents résultats ont été obtenus même en réduisant la totalité des degrés de liberté d'un interface. Toutefois, dans des problèmes de rayonnement pour lesquels la densité du maillage du domaine fluide est souvent quasi uniforme, la répartition des esclaves doit être contrôlée pour éviter la formation de couches réduites d'épaisseur supérieure à  $\lambda/4$ . Cette difficulté, associée au choix des algorithmes de résolution employés, est la contrainte qui fixe actuellement la taille des maillages, donc la fréquence maximale ou les dimensions extrêmes des faces parlantes.
- la modélisation du rayonnement pour des sources de type monopolaire est simple, précise, et la position de la surface frontière peut être nettement en deçà de la distance classique,  $d^2/\lambda$ , qui détermine la séparation entre champ proche et champ lointain. Cette conclusion rend la technique choisie parfaitement opérationnelle pour traiter les problèmes de transducteurs Tonpilz et, de façon plus générale, de transducteurs isolés dont le rayonnement a un caractère monopolaire marqué. Toutefois pour des sources ayant essentiellement un caractère dipolaire, i.e une vitesse volumique nulle (sphère oscillante, piston en baffle mou, transducteur annulaire à immersion libre...), la position de la surface frontière peut être rejetée trop loin

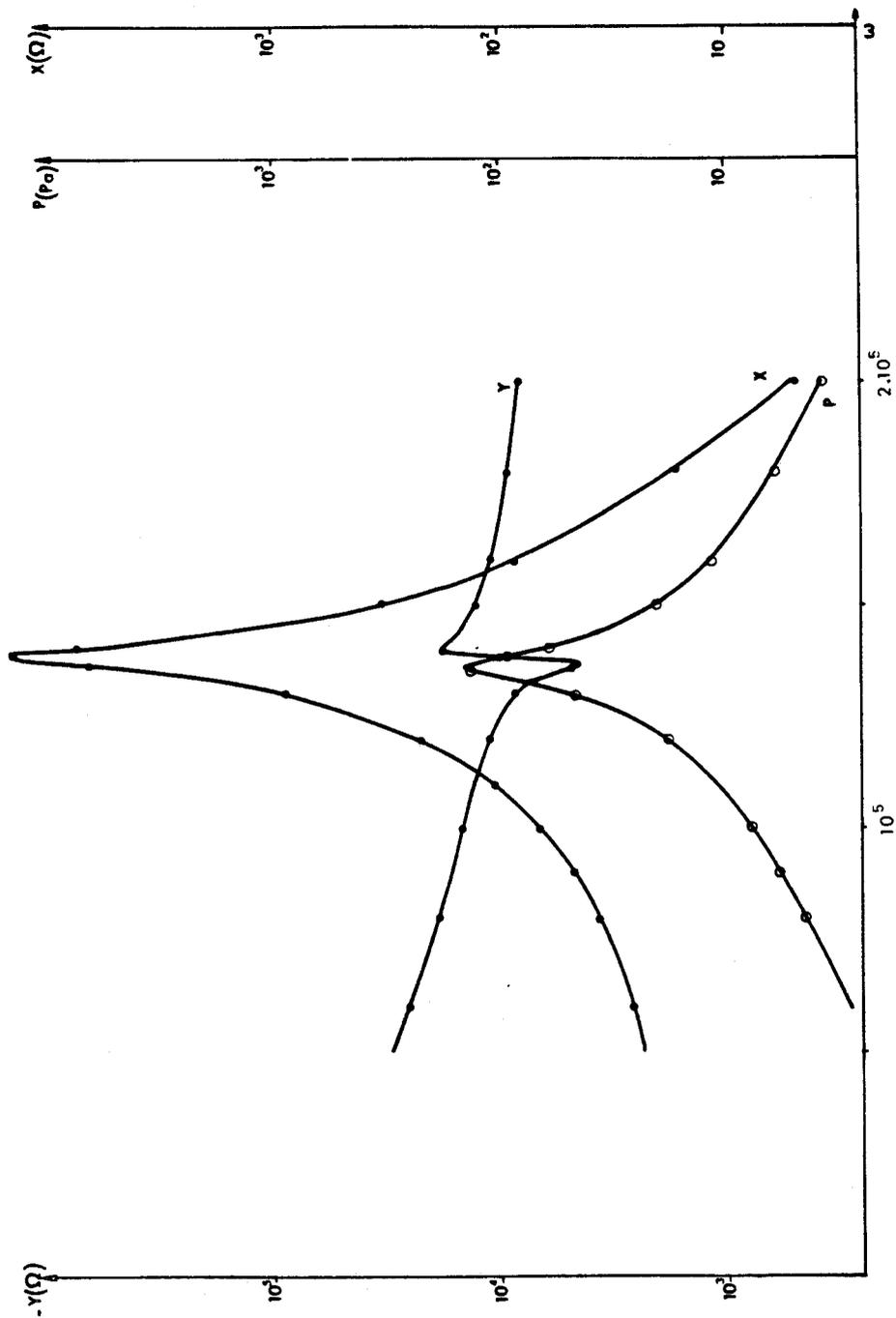


Figure IV.24 . Variations avec la pulsation  $\omega$  de la pression à l'interface  $p(0)$  et des parties réelle (X) et imaginaire (Y) de l'impédance .

— analytique, —●— et —○— E.F.

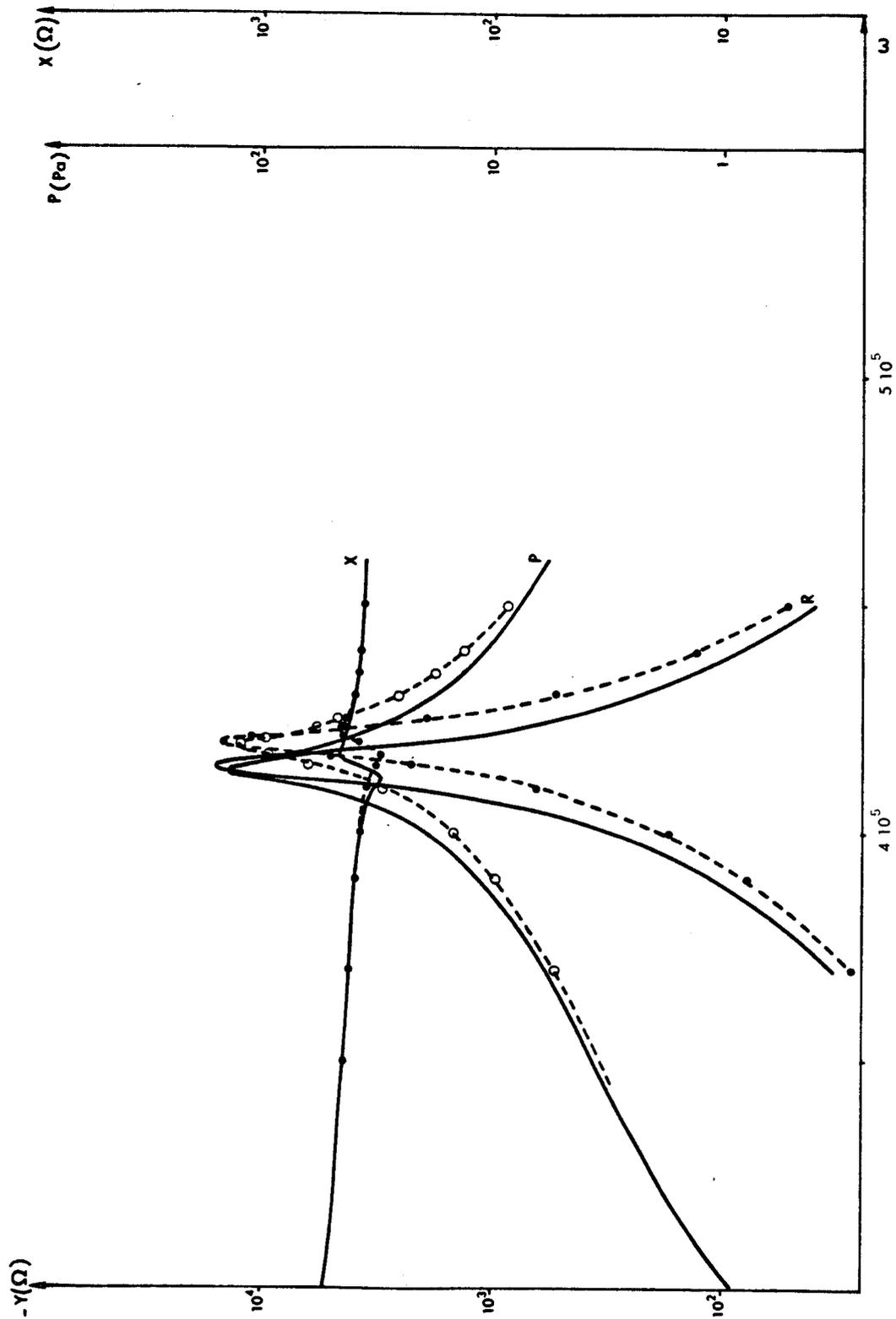


Figure IV.25 . Variations avec la pulsation  $\omega$  de la pression à l'interface  $p(0)$  et des parties réelle ( $X$ ) et imaginaire ( $Y$ ) de l'impédance .

— analytique, ●—●—● et ⊖—○—○ E.F

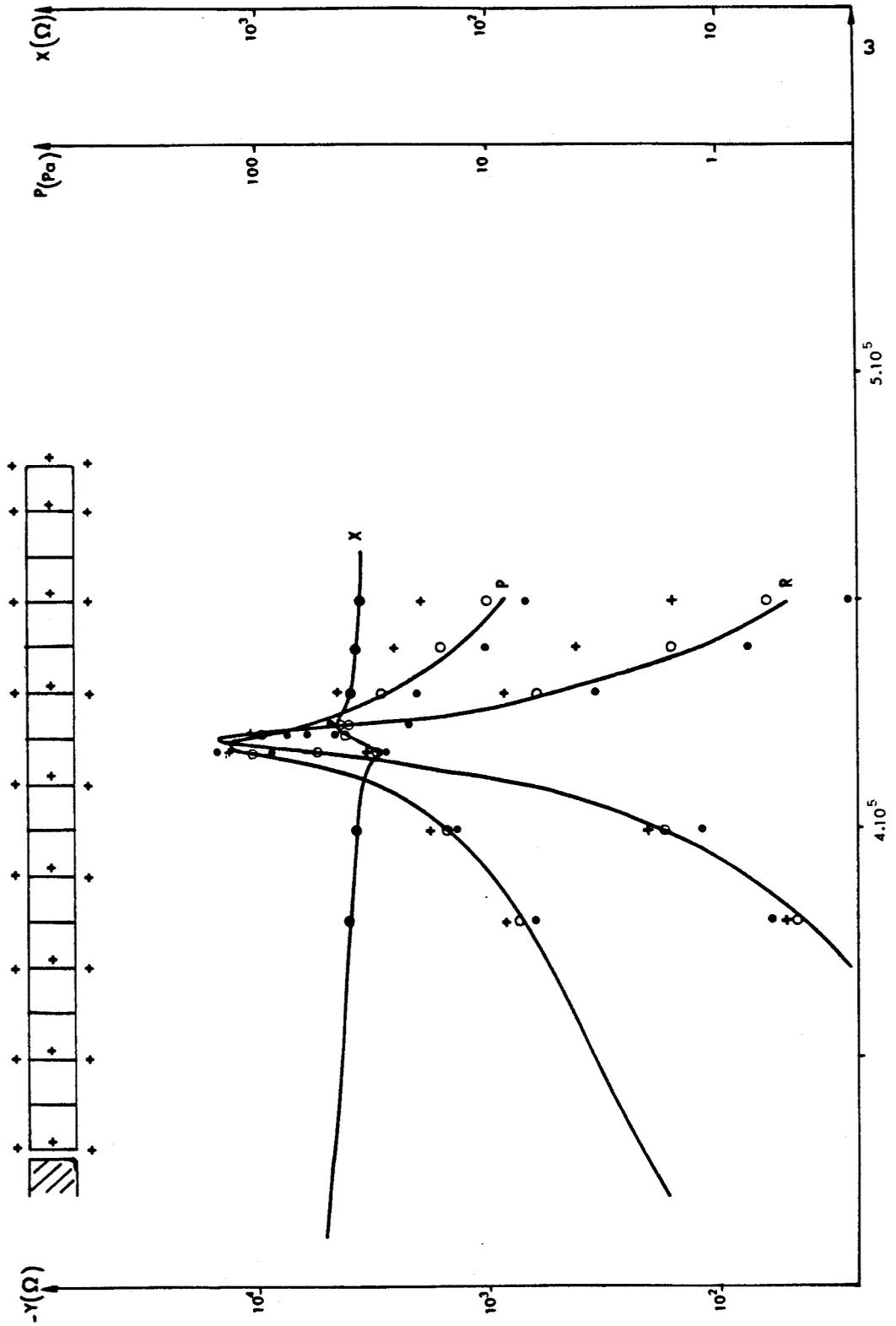


Figure IV.26 . Effet des réductions :

- résultats E.F. sans réduction
- • • réduction de tous les noeuds milieux
- ○ ○ réduction de tous les noeuds de coin
- + + + résultats avec les maîtres du maillage décrit en encart

et imposer l'emploi d'une condition de non réflexion plus complexe [54-56,112] dont traite la section IV.6.

En l'état, le code ATILA est donc capable de traiter un grand nombre de problèmes actuels de l'hydroélasticité et du rayonnement acoustique dans les domaines basse et moyenne fréquence pour lesquels la quantité caractéristique sans dimension  $ka$  ( $k = 2\pi/\lambda$ ,  $a$  dimension maximale de la face parlante) n'excède pas quelques unités.

#### **IV.6 PRESENTATION COMPARATIVE DES AUTRES METHODES DE MODELISATION D'UN PROBLEME OUVERT**

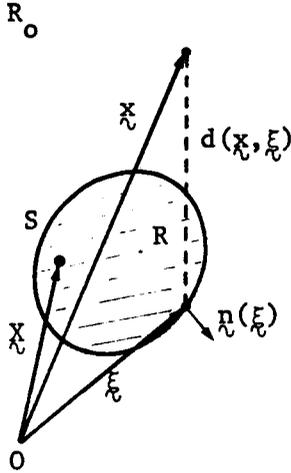
Sans rechercher un caractère exhaustif, cette section décrit quelques approches du problème du rayonnement susceptibles d'être couplées à une modélisation par éléments finis de la structure. La première, qui ne requiert pas la modélisation d'un domaine fluide, utilise les différentes représentations intégrales de Helmholtz, sous leurs formes originales dues aux travaux de C.H. WILCOX [103,104], G. CHERTOCK [18,120], L.G. COPLEY [17] et H.A. SCHENCK [16], ou sous les formes plus récentes des "éléments frontières" [121,122-129]. Elle a conduit à une première version du code de simulation de transducteurs développé par les laboratoires de la marine américaine [25]. La seconde requiert la modélisation d'un domaine fluide d'étendue limitée sur la frontière duquel est imposée une condition de non réflexion. Cette condition peut être déduite d'une représentation intégrale de Helmholtz, auquel cas elle a conduit à une seconde version du code de simulation évoqué dans les lignes précédentes [26]. Elle peut aussi être déduite du développement multipolaire (IV.58) [112], auquel cas elle a conduit, outre les résultats présentés ici, à la notion d'élément rayonnant dipolaire [54-56,112]. Enfin, la troisième utilise, au delà du domaine fluide proche, des éléments infinis associés à des fonctions de pondération particulières [113,130-132]. Pour chaque approche, le principe et les équations fondamentales sont présentés et les avantages et inconvénients discutés.

##### **IV.6.1 Les approches déduites des représentations intégrales de Helmholtz**

###### *IV.6.1.a) Principe*

Pour présenter ces approches on peut, dans un premier temps, simplifier le système d'équations décrit en (IV.1). Pour cela, on considère un corps  $R$ , de forme quelconque, limité par une surface extérieure  $S$  dont le champ de vitesse est  $\chi$ , rayonnant dans le domaine

infini  $R_0$  une onde de pression  $p$  (figure ci-contre). Le champ de pression  $p$  doit vérifier :



- l'équation de Helmholtz (IV.2) en tout point de  $R_0$ ,
- la condition de couplage cinématique (IV.6) en tout point de  $S$ ,
- la condition de rayonnement de Sommerfeld (IV.10).

Notant les abscisses vectorielles d'un point courant de  $R$ ,  $R_0$  et  $S$  respectivement par une lettre majuscule ( $x$ ), minuscule ( $x$ ) ou grecque ( $\xi$ ), le champ de pression  $p$  est alors donné par [16,133,134] :

$$p(x) = 4\pi j\omega\rho_f \iiint_S \sigma(\xi) \cdot g(x, \xi, k) \cdot dS(\xi) \quad (IV.132)$$

où :

$$g(x, \xi, k) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jk|x-\xi|}}{|x-\xi|} \quad (IV.133)$$

est la fonction de Green de l'espace libre et  $\sigma(\xi)$  est une fonction densité, inconnue, sans signification physique immédiate. Utilisant la condition (IV.6),  $\sigma(\xi)$  peut être déduit de l'équation intégrale<sup>+</sup> :

$$x(\xi) \cdot n(\xi) = 2\pi \sigma(\xi) - \iiint_S \sigma(\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial n(\xi)} g(x, \xi, k) \cdot dS(\xi) \quad (IV.134)$$

(IV.132) permet alors le calcul de  $p(x)$  en tout point de  $R_0$ . Cette représentation intégrale est appelée représentation de simple couche.

-----  
+ Dans cette équation, la notation intégrale est impropre et doit être comprise comme une partie principale.

Pour s'affranchir de l'utilisation de la densité  $\sigma(\xi)$ , une autre représentation, appelée représentation de Helmholtz extérieure, s'écrit [16-18,103,104,134] :

$$p(\underline{x}) = \iint_S [p(\underline{\xi}) \cdot \frac{\partial}{\partial n(\underline{\xi})} g(\underline{x}, \underline{\xi}, k) + j\omega\rho_f \underline{v}(\underline{\xi}) \cdot \underline{n}(\underline{\xi}) \cdot g(\underline{x}, \underline{\xi}, k)] dS(\underline{\xi}) \quad (\text{IV.135})$$

Dans ce cas, le calcul de l'intégrale nécessite la connaissance de la pression en tout point de S, que l'on peut déduire de l'équation intégrale<sup>+</sup> :

$$\frac{1}{2} p(\underline{\zeta}) - \iint_S p(\underline{\xi}) \frac{\partial}{\partial n(\underline{\xi})} g(\underline{\xi}, \underline{\zeta}, k) dS(\underline{\xi}) = j\omega\rho_f \iint_S \underline{v}(\underline{\xi}) \cdot \underline{n}(\underline{\xi}) \cdot g(\underline{\xi}, \underline{\zeta}, k) dS(\underline{\xi}) \quad (\text{IV.136})$$

ou de la représentation de Helmholtz intérieure :

$$\iint_S [p(\underline{\xi}) \frac{\partial}{\partial n(\underline{\xi})} g(\underline{X}, \underline{\xi}, k) + j\omega\rho_f \underline{v}(\underline{\xi}) \cdot \underline{n}(\underline{\xi}) \cdot g(\underline{X}, \underline{\xi}, k)] dS(\underline{\xi}) = 0 \quad (\text{IV.137})$$

D'autres représentations intégrales, en particulier celle du potentiel hybride, sont décrites, par exemple, par J. GIROIRE [134].

-----  
<sup>+</sup> Le facteur 1/2 doit être modifié en un point singulier de S et remplacé par le rapport à 4 $\pi$  de l'angle solide extérieur défini par la surface S en ce point.

#### IV.6.1.b Couplage avec la méthode des éléments finis

Si la structure R est modélisée à l'aide des éléments finis, la surface S est découpée en un certain nombre de surfaces élémentaires  $S_e$ , connectées par des noeuds dont les  $\xi_\beta$  représentent les abscisses vectorielles ( $\beta = 1, M$ ). Utilisant les relations d'interpolation :

$$\underset{\sim}{v}(\xi) = [N^e(\xi)] \underset{\sim}{v}^e \quad (\text{IV.138})$$

déduite de (II.18), et :

$$\underset{\sim}{p}(\xi) = [N_P^e(\xi)] \underset{\sim}{p}^e \quad (\text{IV.139})$$

déduite de (IV.12), on peut réécrire l'équation intégrale (IV.136) à chacun des noeuds de S sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \underset{\sim}{p}(\xi_\alpha) - \sum_e \iint_{S_e} [N_P^e(\xi)] \underset{\sim}{p}^e \cdot \frac{\partial}{\partial n(\xi)} g(\xi, \xi_\alpha, k) dS_e(\xi) \\ = j\omega\rho_f \sum_e \iint_{S_e} \underset{\sim}{n}^T(\xi) [N^e(\xi)] \underset{\sim}{v}^e g(\xi, \xi_\alpha, k) dS_e(\xi) \end{aligned} \quad (\text{IV.140})$$

soit :

$$[A] \underset{\sim}{p} = [B] \underset{\sim}{v} \quad (\text{IV.141})$$

où  $\underset{\sim}{p}$  et  $\underset{\sim}{v}$  sont les vecteurs des valeurs nodales de p et v pour toute la surface S et :

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} - \sum_{e(\beta)} \iint_{S_e} N_{P\beta}^e(\xi) \frac{\partial}{\partial n(\xi)} g(\xi, \xi_\alpha, k) dS_e(\xi) \\ B_{\alpha\beta}^T = j\omega\rho_f \sum_{e(\beta)} \iint_{S_e} [N^e(\xi)] \underset{\sim}{n}(\xi) g(\xi, \xi_\alpha, k) dS_e(\xi) \end{aligned} \quad (\text{IV.142})$$

$B_{\alpha\beta}$  est un vecteur à trois composantes compte tenu des caractères respectifs scalaire et vectoriel de p et v.  $e(\beta)$  représente classiquement un élément e de S qui contient le noeud  $\beta$ . Ainsi, de (IV.141) on déduit :

$$\underset{\sim}{P} = [A]^{-1} [B] \underset{\sim}{V} \quad (\text{IV.143})$$

L'équation (IV.26) permet alors de calculer le vecteur force (chargement) appliqué par le fluide sur la structure :

$$\underset{\sim}{F} = [L] \underset{\sim}{P} = [L] [A]^{-1} [B] \underset{\sim}{V} \quad (\text{IV.144})$$

et de réduire la résolution du problème de rayonnement à la seule résolution du problème électromécanique avec un chargement sur la surface externe. Ce chargement, qui dépend de la fréquence, représente tout l'effet du domaine fluide infini [25]. En fait, il faut noter que, techniquement, l'équation intégrale est souvent traitée par collocation sur une grille qui diffère du maillage par éléments finis [126], ce qui ajoute dans (IV.144) une matrice assurant la correspondance par interpolation entre les deux représentations.

#### IV.6.1.c) *Avantages et inconvénients*

Par rapport à la méthode proposée dans cette étude et incorporée au code ATILA, l'approche décrite dans cette section présente l'avantage important de limiter le maillage par éléments finis à la structure seule, ce qui entraîne évidemment des économies nombreuses sur le plan numérique. Par ailleurs, la formulation sur laquelle elle repose est exacte, contrairement à la condition de non réflexion de la relation (IV.54) et peut donc s'appliquer à tout type de rayonnement (monopolaire, dipolaire...). Les trois inconvénients les plus évidents sont :

- la nécessité de reprendre, pour chaque valeur de  $\omega$  et donc de  $k$ , le calcul complexe de toutes les intégrales  $A_{\alpha\beta}$  et  $B_{\alpha\beta}$  ainsi que l'assemblage des matrices  $[A]$  et  $[B]$ ,
- l'existence d'un couplage entre chaque noeud  $\alpha$  et tous les autres noeuds  $\beta$  de la surface  $S$ , contrairement au cas des éléments finis où, pour être couplés, les noeuds  $\alpha$  et  $\beta$  doivent appartenir au même élément,
- la nécessité d'utiliser la représentation de Helmholtz extérieure (IV.135) pour déterminer les champs de pression proche et lointain.

Un autre inconvénient beaucoup plus grave est l'existence des classiques "valeurs de  $k$  à problème" [16-18,120,134]. Les propriétés générales des équations de Fredholm [135], dont (IV.134) et (IV.136) sont deux exemples, permettent en effet de montrer que :

- pour certaines valeurs de  $k$  associées aux modes propres du problème de Helmholtz intérieur, la solution du problème de rayonnement ne peut pas être représentée par la relation (IV.132), i.e la représentation de simple couche n'existe pas,
- pour les mêmes valeurs de  $k$ , les équations (IV.135) et (IV.136) sont insuffisantes pour définir le champ de pression de façon unique, i.e la solution existe mais est indéterminée.

Or, des fréquences propres du problème de Helmholtz intérieur associé à un transducteur sont souvent situées dans la bande utile de ce transducteur et peuvent donc perturber fortement le résultat. Ainsi, pour ces valeurs de  $k$ , la matrice  $[A]$  de la relation (IV.143) n'est pas inversible. De plus, pour des raisons liées à la limite de précision d'un ordinateur, il existe autour de ces valeurs de  $k$  des plages de valeurs également très perturbées qui peuvent se recouvrir si la densité modale du problème intérieur est élevée.

Pour surmonter ce dernier inconvénient, H.A. SCHENCK [16] a proposé de surdéterminer le système d'équations déduit de la représentation de Helmholtz extérieure par quelques équations obtenues en écrivant la représentation intérieure (IV.137) en des points  $\mathcal{X}$  judicieusement choisis dans  $R$ . De fait, pour cette représentation, il n'y a pas de valeurs de  $k$  à problème mais, malheureusement, le système d'équations auquel elle conduit présente un comportement peu intéressant sur le plan numérique, qui exclut son utilisation systématique [16]. Du point de vue de l'équation (IV.143), la surdétermination du système d'équations implique un calcul de  $\mathcal{R}$  à l'aide d'une méthode de moindres carrés [16,25,136].

En résumé, l'ensemble de ces inconvénients semble avoir imposé une spécialisation à une ou quelques surfaces  $S$  particulières de chacun des codes numériques existants. Dans la perspective du développement d'un code de simulation valable pour toutes les structures de transducteurs, qui est celle du code ATILA, la méthode des représentations intégrales est donc apparue moins intéressante qu'une méthode qui relève totalement des éléments finis.

#### IV.6.1.d) *Développements récents*

Bien que les premières applications sur ordinateur utilisant les représentations intégrales de Helmholtz aient près de vingt ans, les deux avantages importants qu'elles présentent, discutés en (IV.6.1.e),

conduisent actuellement de nombreux auteurs à les exploiter, conjointement avec les éléments finis, sous la dénomination standard de méthode des "éléments frontières" ("boundary integral elements" ou "boundary elements"). Parmi les travaux de synthèse, on peut citer entr'autres ceux de ZIENKIEWICZ et al [122-124], BREBBIA [121], EATOCK TAYLOR [125], GIROIRE [134]... Dans la majorité des cas, la représentation de Helmholtz extérieure est utilisée, des formulations plus complexes étant parfois développées [127] lorsque les valeurs de  $k$  à problème peuvent perturber le résultat.

Très récemment, des formulations variationnelles des équations intégrales ont été proposées, qui évitent les singularités des intégrales à évaluer et conduisent à des systèmes d'équations symétriques. Une présentation précise en a été faite par M.A. HAMDI qui les a appliquées au calcul de la propagation et du rayonnement du son par les conduits [128] et au calcul des modes hydroélastiques d'une plaque mince immergée [129]. Cette nouvelle approche est très intéressante mais elle conserve quelques problèmes inhérents aux représentations intégrales : calcul séparé des champs, formulation relativement dépendante de la structure, valeurs de  $k$  à problème<sup>+</sup>...

#### IV.6.2 Les approches déduites d'une condition de non réflexion

Ces approches relevant strictement de la formulation présentée dans la section (IV.4) et utilisée dans le code ATILA, leur principe n'est pas repris ici. Par contre, deux conditions qui diffèrent de (IV.54) par la prise en compte d'une impédance d'onde plus complexe sont rapidement décrites.

##### IV.6.2.a) Condition de non réflexion déduite de la représentation intégrale de Helmholtz extérieure

La résolution d'un problème de rayonnement à l'aide de l'équation matricielle (IV.26) suppose la connaissance du vecteur chargement  $\psi$ , directement déduite de celle du flux normal à la surface  $\Gamma_\infty$  :

$$n_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = -j\omega\rho_f v^n \quad (\text{IV.145})$$

-----  
 + Les valeurs de  $k$  à problème n'apparaissent pas dans les deux applications indiquées [128,129] car, dans les deux cas, la surface  $S$  est ouverte.

où  $v^n$  est la vitesse normale des particules de fluide. Or, si la surface  $\Gamma_\infty$  qui limite le maillage est sphérique, la pression  $p$  et la vitesse  $v^n$  peuvent être décomposées sur une base d'harmoniques sphériques suivant les relations :

$$p(R_\infty, \theta, \phi) = \sum_{l,m} p_{l,m}(R_\infty) Y_{l,m}(\theta, \phi)$$

$$v^n(R_\infty, \theta, \phi) = \sum_{l,m} v_{l,m}^n(R_\infty) Y_{l,m}(\theta, \phi)$$

(IV.146)

où  $\theta$  et  $\phi$  sont les angles du système de coordonnées sphériques et  $l$  et  $m$  sont des entiers tels que  $-1 \leq m \leq l$ . Avec cette base, utilisant la représentation de Helmholtz extérieure, HUNT et al [26] ont montré que :

$$n_i \frac{\partial p_{l,m}}{\partial x_i} \Big|_{\Gamma_\infty} = - \frac{1}{R_\infty} \cdot \frac{1}{\lambda_1(kR_\infty)} \cdot p_{l,m}(R_\infty)$$

(IV.147)

où :

$$1/\lambda_1(x) = 1 + 1 - x [ h_{l-1}^-(x)/h_l^-(x) ]$$

(IV.148)

$h_l^-$  étant la fonction de Hankel sphérique d'ordre  $l$  [119]. De ce fait, si on utilise sur la surface  $\Gamma_\infty$  la base des harmoniques sphériques plutôt que la base des fonctions d'interpolation  $N_{pi}^e$ , on sait écrire le vecteur chargement  $\psi$  en fonction de la seule pression, comme dans la relation (IV.54), et on sait donc résoudre le système d'équations représentant le problème de rayonnement. Pour effectuer ce changement de base il faut :

- définir une base finie de fonctions  $Y_{l,m}$  ayant la même dimension que celle des fonctions d'interpolation de  $\Gamma_\infty$ . Sachant que :

$$\sum_{l=0}^L (2l+1) = (L+1)^2$$

(IV.149)

il faut choisir  $L$  tel que :

$$(L+1)^2 = N_R \quad (\text{IV.150})$$

où  $N_R$  est le nombre de noeuds rayonnants.

- appliquer aux matrices éléments finis concernées ( $[H]$ ,  $[M_1]$  et  $[L]$ ) les transformations associées à ce changement de base. Réduite à l'ensemble des noeuds de  $\Gamma_\infty$ , la matrice de changement de base pour cette transformation est formée de  $N_R$  vecteurs  $\chi_{1,m}$  dont chacune des  $N_R$  composantes est obtenue en évaluant l'harmonique sphérique  $Y_{1,m}(\theta, \phi)$  au noeud concerné de  $\Gamma_\infty$ .
- écrire la matrice d'impédance, qui joue le même rôle que la matrice  $[D]$  de l'équation (IV.67). Ici cette matrice est diagonale et formée par les termes  $1/\lambda_1(kR_\infty)$  de la relation (IV.148).

La résolution est alors la recherche classique des solutions d'un grand système linéaire.

Cette méthode présente, par rapport à celle que nous exploitons, l'avantage de permettre une meilleure description de la condition de rayonnement. De fait, la relation (IV.54) est un cas particulier de la relation (IV.147) correspondant à  $l=0$ . Cette meilleure description permet alors de réduire fortement la taille du domaine fluide  $\Omega_f^i$  en rapprochant la surface  $\Gamma_\infty$  des sources. De plus, si la géométrie de la source le rend souhaitable, un autre système de coordonnées orthogonales peut être utilisé, dont  $\Gamma_\infty$  est une surface de niveau, mais au prix d'un accroissement notable de complexité. Parmi les inconvénients, le premier est lié au caractère mixte de la représentation du champ de pression qui alourdit notablement l'algorithme de résolution et tend, de nouveau, à spécialiser le code pour certaines géométries. Ainsi, par exemple, une version simplifiée peut être plus facilement développée pour une structure dont la géométrie et l'excitation sont à symétrie axiale, les seules harmoniques sphériques à  $m$  nul étant requises. Le second inconvénient, lié au recours à la représentation de Helmholtz extérieure, est l'existence de  $k$  à problème, pour lesquels HUNT et al [26] ont toutefois proposé une technique simple et efficace de surdétermination.

Comme indiqué au début de cette section, cette méthode est utilisée dans le code de simulation américain, ainsi que le précisent de nombreuses références [26-33].

#### IV.6.2.b) Condition de non réflexion de type dipolaire

Dans la section (IV.4.1), la relation (IV.62) est due au fait que la condition de non-réflexion (IV.54) utilisée dans cette étude est exactement vérifiée par le premier terme du développement multipolaire (IV.58). Si la surface frontière est trop proche des sources ou si la vitesse volumique de la source est nulle ou négligeable (sphère oscillante, piston en baffle mou, anneau à immersion libre...), la contribution du second terme du développement peut devenir essentielle et rendre erronée la condition (IV.54) retenue. Pour éliminer cette difficulté, BAYLISS et al [112] ont montré que, si on définit l'opérateur  $B_1$  tel que :

$$B_1 = \frac{\partial}{\partial r} - jk + \frac{1}{r} \quad (\text{IV.151})$$

et les opérateurs  $B_m$  successifs ("dampers") par la relation de récurrence :

$$B_m = \left( \frac{\partial}{\partial r} - jk + \frac{2m-1}{r} \right) B_{m-1} \quad (\text{IV.152})$$

le champ de pression  $p$  vérifie la relation :

$$B_m p \Big|_{\Gamma_\infty} = 0 \left( \frac{1}{R_\infty^{2m+1}} \right) \quad (\text{IV.153})$$

i.e que la condition de non-réflexion :

$$B_m p \Big|_{\Gamma_\infty} = 0 \quad (\text{IV.154})$$

est exacte pour les  $m$  premiers termes du développement multipolaire. En fait, l'opérateur  $B_2$  s'avère d'un emploi aussi aisé que celui de  $B_1$  dans le cadre de la méthode des éléments finis. Développant  $B_2$  :

$$B_2 = \left( \frac{\partial}{\partial r} - jk + \frac{3}{r} \right) B_1$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left( \frac{4}{r} + 2jk \right) \frac{\partial}{\partial r} + \left( \frac{2}{r} + 4jk \right) \frac{1}{r} - k^2$$

(IV.155)

on obtient, en éliminant la dérivée seconde par rapport à  $r$  grâce à l'équation de Helmholtz :

$$B_2 = 2 \left( \frac{1}{r} + jk \right) \frac{\partial}{\partial r} + 2 \left( \frac{1}{r^2} + 2j \frac{k}{r} - k^2 \right) - \frac{Q}{r^2}$$

où  $Q$  est l'opérateur de Beltrami de la relation (IV.60). Si, pour simplifier l'écriture, on considère un problème à symétrie axiale, la condition de non-réflexion :

$$B_2 p \Big|_{\Gamma_\infty} = 0 \quad (IV.157)$$

devient :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = - \left( \frac{1}{r} + jk \right) p + \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial p}{\partial \theta})}{r^2 \sin \theta \left( -\frac{1}{r} + jk \right)}$$

(IV.158)

Le premier terme correspond à la condition de non-réflexion monopolaire, i.e la relation (IV.54). Le second est associé à la composante dipolaire. L'intégration de cette relation dans le formalisme des éléments finis conduit alors à [54-56,112] :

$$\psi_e = - \frac{1}{\rho_f c} \left[ \left( \frac{1}{R_\infty} + jk \right) [D^e] \right] \mathcal{R}$$

$$+ \frac{1}{1+k^2 R_\infty^2} \left[ \frac{1}{R_\infty} - jk \right] [D'^e] \mathcal{R}$$

(IV.159)

où  $[D^e]$  est définie en (IV.68) et  $[D'^e]$  est donnée par :

$$[D'^e] = \frac{1}{2} \rho_f c \iint_{\Gamma_{\infty e}} \left[ \frac{\partial N_p^e}{\partial \theta} \right]^T \left[ \frac{\partial N_p^e}{\partial \theta} \right] d\Gamma_{\infty e}$$

(IV.160)

La présentation détaillée de cette méthode peut être trouvée dans la thèse de R. BOSSUT [54] ainsi que plusieurs applications. Sans accroître beaucoup la complexité de la formulation par éléments finis du problème de rayonnement, la prise en compte des termes dipolaires peut améliorer très notablement la qualité des résultats ou, de façon équivalente, réduire  $R_\infty$ . Par ailleurs, R. BOSSUT [54-56] a développé une méthode d'extrapolation permettant un calcul simple du champ lointain à partir du champ proche obtenu en éléments finis et des opérateurs  $B_1$  et  $B_2$ .

#### IV.6.3 Les approches utilisant les éléments infinis

Contrairement aux deux autres approches, la méthode des éléments infinis n'est pas propre aux problèmes de rayonnement mais a permis de traiter des applications variées dans des domaines infinis ou semi-infinis : écoulement [130], élasticité [132], calculs de potentiels [132,137], diffraction et réfraction des ondes de surface [131], vibrations couplées de structures hydroélastiques [138]... Plusieurs présentations ont été développées depuis quelques années. Cette section décrit succinctement l'une d'entr'elles qui fait correspondre

un élément réduit standard à l'élément infini à l'aide de relations<sup>+</sup> d'interpolation [113] ("mapped infinite elements") .

Pour aborder simplement la méthode, on va considérer d'abord le cas d'un problème statique à une dimension. Soit alors un élément fini réduit unidimensionnel représenté par le segment  $-1 \leq \xi \leq 1$ . A l'aide de la transformation :

$$x = N_0(\xi) x_0 + N_2(\xi) x_2$$

$$N_0(\xi) = \xi/(\xi-1)$$

$$N_2(\xi) = 1/(1-\xi)$$

(IV.161)

on lui fait correspondre point par point un domaine unidimensionnel infini,  $x \geq x_1$ , où  $x_1$  est l'abscisse du milieu de segment  $[x_0, x_2]$ , comme indiqué sur le schéma ci-dessous. Ce domaine constitue un



élément infini. Si maintenant une quantité  $p$  est exprimée dans l'élément réduit par le polynôme :

$$p = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_n \xi^n \quad \text{(IV.162)}$$

dans l'élément infini la correspondance entre  $\xi$  et  $x$  permet d'écrire :

$$\xi = 1 - \frac{A}{r}$$

$$p = \beta_0 + \frac{\beta_1}{r} + \dots + \frac{\beta_n}{r^n}$$

(IV.163)

-----  
 + Pour des raisons évidentes dans la suite de cette section on distingue nettement ici les relations d'interpolation, associées à la géométrie, et les fonctions de pondération, associées à la représentation de la variable.

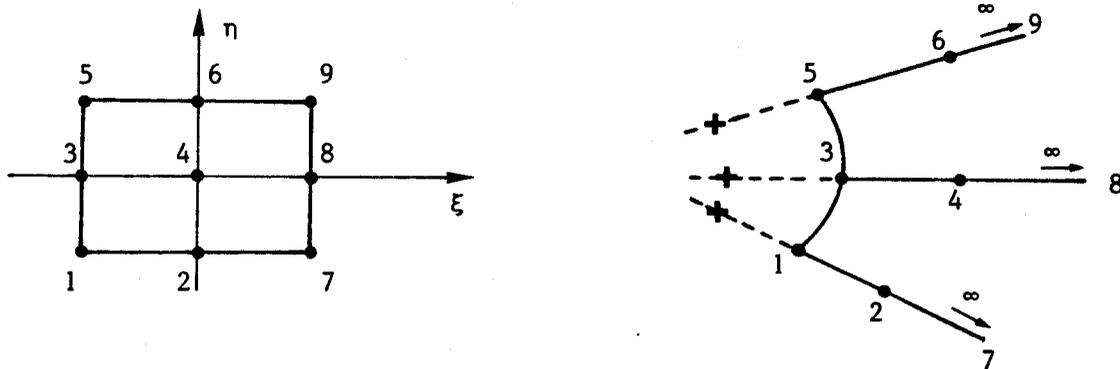
avec :

$$A = 2 (x_2 - x_1)$$

$$r = x - x_0$$

(IV.164)

le coefficient  $\beta_0$  étant nul si  $p$  tend vers zéro à l'infini. Cette expression de la quantité  $p$  peut représenter au delà de  $x_1$  et avec une précision qui dépend de  $n$ , le comportement de toute fonction décroissante. Le point  $x_1$  doit alors raccorder le maillage par éléments finis du domaine  $x < x_1$  à l'élément infini, le point  $x_0$  étant le pôle de la partie asymptotique de  $p$ . A deux dimensions, la même correspondance peut être définie entre l'élément réduit et l'élément



infini schématisé ci-dessus. Pour la variable  $x$  on a alors :

$$\begin{aligned} x = & N_1 (\eta) [ (2x_1 - x_2) N_0 (\xi) + x_2 N_2 (\xi) ] \\ & + N_2 (\eta) [ (2x_3 - x_4) N_0 (\xi) + x_4 N_2 (\xi) ] \\ & + N_3 (\eta) [ (2x_5 - x_6) N_0 (\xi) + x_6 N_2 (\xi) ] \end{aligned}$$

(IV.165)

Pour la variable  $y$ , la même relation permet d'achever la correspondance point par point entre les deux domaines. Dans ces relations, les fonctions  $N_1, N_2, N_3$  sont des fonctions de pondération standard. Pour la fonction  $p$ , l'interpolation suivant  $\eta$  est classique. Par contre, comme précédemment, l'interpolation suivant  $\xi$  correspond dans le domaine réel à une représentation par un polynôme en  $1/r$ , où  $r$  est la distance au pôle correspondant (+ sur le schéma ci-dessus), suivant les directions [1,7[, [3,8[, [5,9[...

Pour les problèmes de rayonnement, cette méthode peut être employée si les fonctions de pondération contiennent le caractère d'onde progressive de la solution en champ lointain [113,131,138]. Ainsi, par exemple, si la dépendance par rapport à  $\xi$  dans l'élément réduit s'écrit :

$$p = (\alpha_0 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_n \xi^n) \exp \frac{jkA}{1-\xi}$$

(IV.166)

la fonction  $p$  est représentée dans le domaine réel par le classique produit du terme de propagation  $\exp(jkr)$  et d'un polynôme en  $1/r$ , qui vérifie la condition de rayonnement de Sommerfeld. A partir de ces notions, la construction des matrices représentatives de l'élément infini est standard, bien qu'elle se heurte à des difficultés d'intégration dues au terme oscillant. Ce point est largement discuté par P. BETTESS et al [113,130-132] et n'est pas repris ici. De même, l'extension au cas tridimensionnel est directe.

La méthode des éléments infinis a l'avantage de conserver toutes les propriétés des éléments finis (symétrie des matrices, bandes étroites, possibilité de maillage de domaines complexes..) et donc de ne nécessiter aucune technique de résolution particulière. Du point de vue du code, l'élément infini se comporte en fait comme tout autre élément de la bibliothèque. Toutefois, hormis l'important problème d'intégration évoqué au paragraphe précédent, les éléments infinis présentent aussi l'inconvénient d'un choix arbitraire du polynôme en  $\xi$  et des relations d'interpolation (IV.161) qui ne sont pas uniques. Par ailleurs, bien évidemment, ils ne servent qu'à simuler l'effet du domaine infini lointain sur le domaine fini proche, sans prétendre représenter le comportement réel de la solution dans ce domaine lointain. Leur application au rayonnement acoustique reste actuellement très rare.

#### IV.6.4 Conclusion

Cette section montre que le choix des méthodes de modélisation du rayonnement acoustique susceptibles d'être couplées aux éléments finis est large. La méthode retenue dans cette étude présente les avantages suivants :

- la formulation est simple et reste entièrement du type éléments finis. En particulier, l'élément rayonnant est un élément standard de la bibliothèque des éléments,
- la formulation est libre de toute singularité, comme les valeurs de  $k$  à problème,
- les résultats obtenus, avec des maillages de taille raisonnable, sont précis pour des sources de type monopolaire et dans des gammes de fréquence telles que le produit  $ka$  n'excède pas quelques unités. Rentrent dans cette catégorie les cas des transducteurs Tonpiliz, Isabelle et des transducteurs utilisant des coques minces,
- en général, le calcul fournit directement le champ proche et le champ lointain (niveau d'émission, diagramme de directivité...).

L'inconvénient majeur est le caractère approximatif de la condition de rayonnement utilisée qui, pour des sources de vitesse volumique nulle (anneau à immersion libre...) ou pour des sources monopolaires étendues, à produit  $ka$  élevé (antenne ou base de transducteurs Tonpiliz, d'anneaux Isabelle...), rend la taille du maillage du domaine fluide intérieur  $\Omega_F^i$  prohibitive. Dans un premier temps, l'élément rayonnant de type dipolaire permet toutefois de traiter, avec une taille du maillage raisonnable, les problèmes d'anneaux à immersion libre [54-56] ou d'interaction entre quelques transducteurs élémentaires. Le calcul par éléments finis fournit alors, dans le domaine fluide, le champ proche, une méthode d'extrapolation simple donnant le champ lointain. Pour des bases plus importantes ou pour des fréquences plus élevées, le maillage du domaine fluide est très probablement exclu et le recours aux équations intégrales est quasi obligatoire. Il nécessite la prise en compte des inconvénients majeurs de cette technique : difficultés numériques, valeurs de  $k$  à problème et forte dépendance de l'algorithme par rapport à la structure, mais on peut attendre des nombreux travaux actuels (approches variationnelles, approches utilisant d'autres représentations...) des éléments de solution intéressants.



## CHAPITRE V

### MODELISATION ET ANALYSE DE TRANSDUCTEURS TONPILZ

#### RAYONNANT DANS L'EAU

*Ce chapitre décrit l'application de la méthode proposée précédemment au calcul du champ de pression rayonné par un transducteur de type Tonpilz. Il montre qu'un bon accord peut être obtenu entre les valeurs calculées et mesurées de plusieurs grandeurs physiques caractéristiques, en particulier la réponse en tension, constituant ainsi un test ultime de la validité du code ATILA. Par ailleurs, il propose une interprétation détaillée du comportement de ce transducteur, établissant des corrélations précises entre les diverses structures de sa courbe de réponse en fonction de la fréquence<sup>†</sup> et l'évolution du champ de déplacement (position des plans nodaux dans la colonne motrice, papillonnage...). Il définit ainsi certaines conditions nécessaires à la conception et à la réalisation de transducteurs à large bande ou multifréquences. Après une discussion détaillée des conditions de comparaison entre les résultats de simulation et les résultats expérimentaux obtenus par le G.E.R.D.S.M., il présente successivement l'analyse du Tonpilz T2a nominal puis du Tonpilz T2b avec diverses excitations électriques. Enfin, il étend au cas du problème de rayonnement l'application de la méthode mixte onde plane-éléments finis dont il démontre l'efficacité.*

-----  
**Note importante.** Dans ce chapitre, toutes les fréquences sont normées à la valeur de la fréquence du premier mode propre du Tonpilz considéré, dans l'air, calculée par éléments finis (comme pour les tableaux du Chapitre III).

## V.1 DEFINITION DES CONDITIONS DU PROBLEME

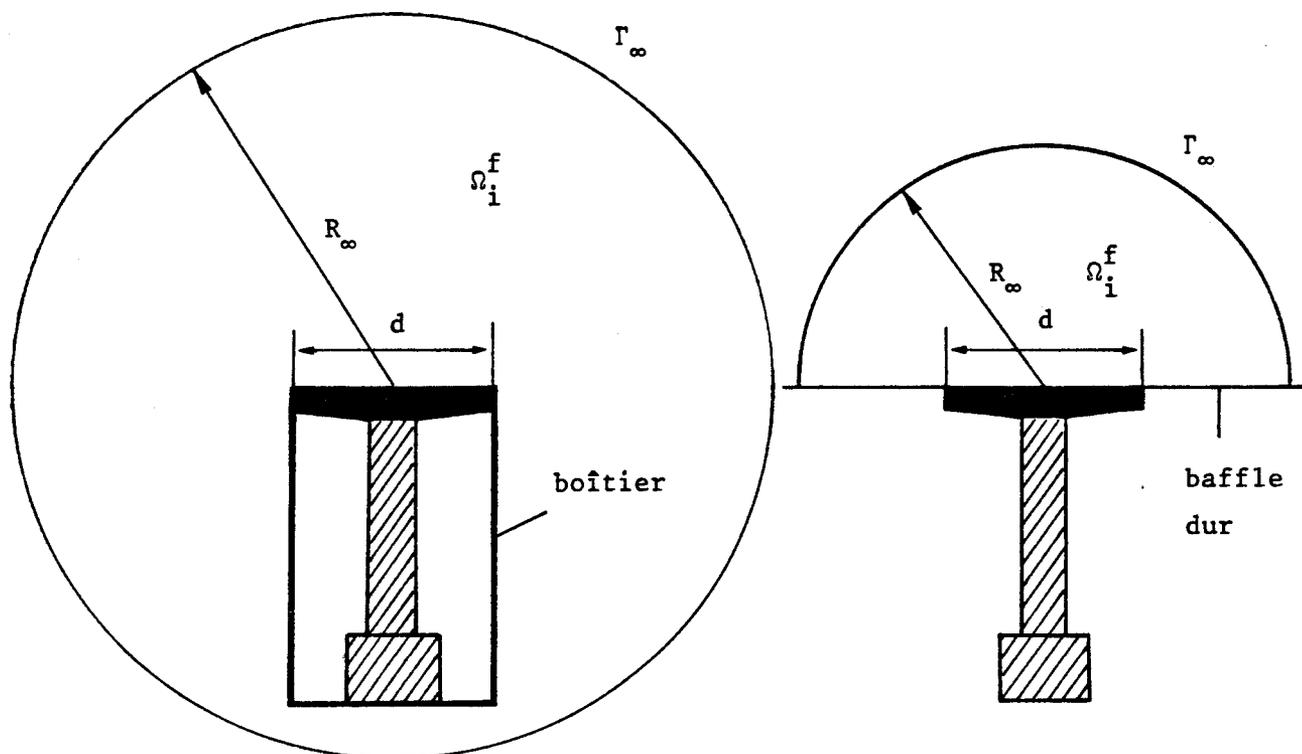
La comparaison entre les résultats numériques obtenus avec ATILA et les mesures effectuées au G.E.R.D.S.M. pose trois problèmes :

- les conditions de baffle, qui peuvent modifier fortement toutes les caractéristiques du rayonnement, surtout en basse fréquence,
- la prise en compte des dissipations internes à la structure électromécanique qui font chuter la valeur du rendement électroacoustique,
- les modes de tige qui peuvent perturber le spectre du transducteur si le montage mécanique ne les amortit pas totalement.

Ces problèmes sont évidemment apparus tout au long de l'étude. Ils sont ici regroupés en tête de chapitre pour faciliter ultérieurement l'analyse du comportement des Tonpilz T2a et T2b et rendre la présentation plus logique.

### V.1.1 Les conditions de baffle

Comme indiqué dans les sections (IV.5.4) et (IV.5.5), la modélisation du champ rayonné par un piston bafflé dur, de déformation quelconque, pour des valeurs du produit adimensionnel  $ka$  de quelques unités, est facilement réalisable par éléments finis avec une grande précision. Physiquement, cette condition de baffle peut être rapprochée du cas d'un transducteur monté dans une base plane ou dans une base cylindrique de grand rayon dont les autres projecteurs seraient bloqués pour éviter les phénomènes importants d'interaction acoustique. Toutefois, le G.E.R.D.S.M. ne disposant pas au moment de la caractérisation des transducteurs analysés dans ce chapitre d'un baffle dur de taille et qualité suffisantes, le montage retenu pour les Tonpilz a été le montage classique, en boîtiers cylindriques, à l'intérieur desquels ils sont suspendus par une électrode porteuse, des joints toriques ou, parfois, l'écrou de contremasse. La modélisation de la situation expérimentale réelle, schématisée ci-après par le dessin de gauche, s'avère alors très différente de la modélisation initialement prévue, schématisée sur le dessin de droite. En particulier, la surface  $\Gamma_\infty$  doit englober largement l'ensemble de la structure, dont la longueur est souvent supérieure à la valeur de  $R_\infty$  que fournit l'application du critère classique en  $d^2/\lambda$  à la seule face parlante du pavillon. De ce fait, la taille du maillage peut être notablement accrue, de même que la complexité du calcul numérique. Cet



accroissement de complexité est, de plus, d'une utilité souvent très réduite car, malgré le découplage entre le projecteur et son boîtier, ce dernier rayonne de l'énergie sonore dans la partie haute fréquence du spectre, d'une façon suffisante pour perturber des résultats déduits d'une approximation de boîtier rigide et trop complexe pour être, dans un premier temps, bien prise en compte par le modèle. Pour comparer la situation expérimentale réelle à celle du projecteur monté en baffle dur, une condition de baffle intermédiaire peut être utilisée, qui consiste à considérer le boîtier comme un tube rigide semi-infini, terminé par la face parlante du pavillon. Elle est désignée ci-après par condition de baffle cylindrique (ou "pipe baffle"). Plusieurs comparaisons peuvent alors être effectuées en supposant que le mouvement du pavillon est rigide et en utilisant les formules classiques de RAYLEIGH [1,2,9] et de LEVINE et SCHWINGER [1,8]. La figure (V.1) présente ainsi dans les deux cas les variations avec la fréquence de l'impédance de rayonnement, la figure (V.2) montrant, elle, celles de l'index de directivité (annexe 1). Elles mettent en évidence des différences notables dans la partie basse fréquence du spectre, jusque  $ka$  égal à deux. Plus intéressante, la figure (V.3) compare les réponses en tension obtenues pour le Tonpiliz

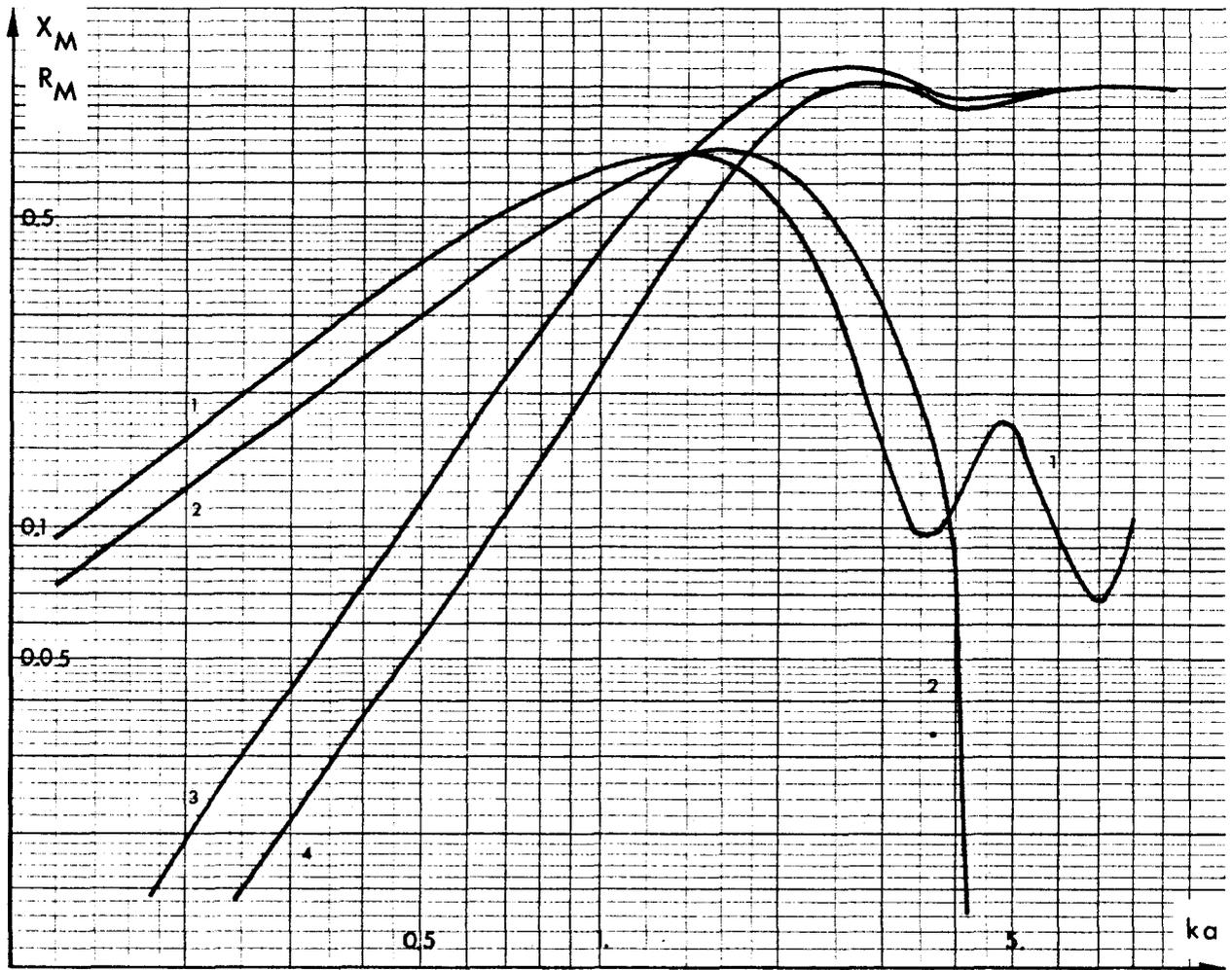
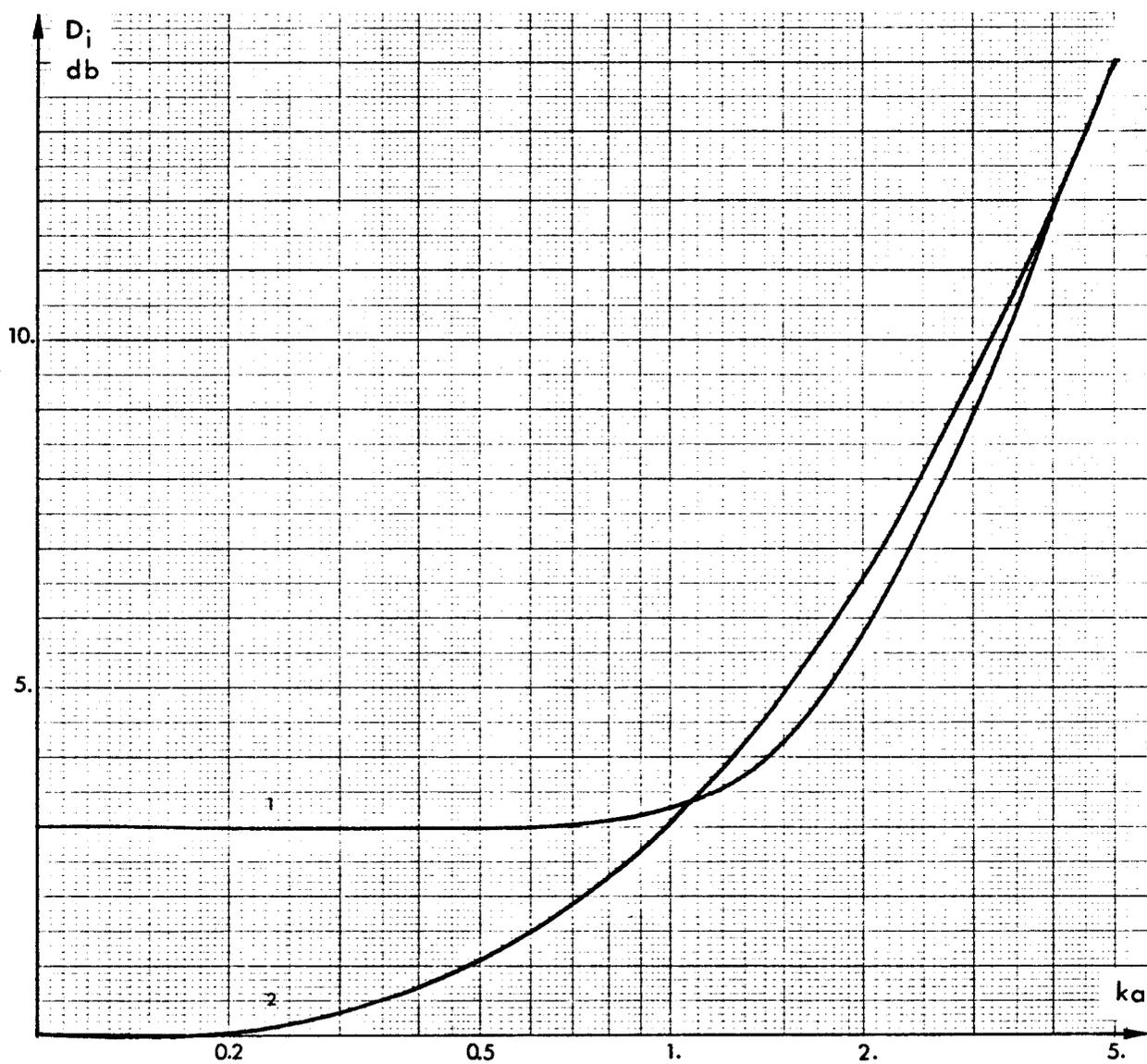


Figure V.1 . Variations avec le produit  $ka$  des parties réelle ( $R_M$ ) et imaginaire ( $X_M$ ) de l'impédance de rayonnement, normées à  $\pi a^2 \rho_f c$  ( $a$  : rayon du piston,  $\rho_f$  : masse volumique du fluide,  $c$  : célérité du son dans le fluide )

- (1) et (3) :  $X_M$  et  $R_M$  pour le baffle plan dur .
- (2) et (4) :  $X_M$  et  $R_M$  pour le baffle cylindrique dur .



**Figure V.2 .** Variations avec le produit  $ka$  de l'index de directivité pour le baffle plan dur (1) et le baffle cylindrique dur (2) .

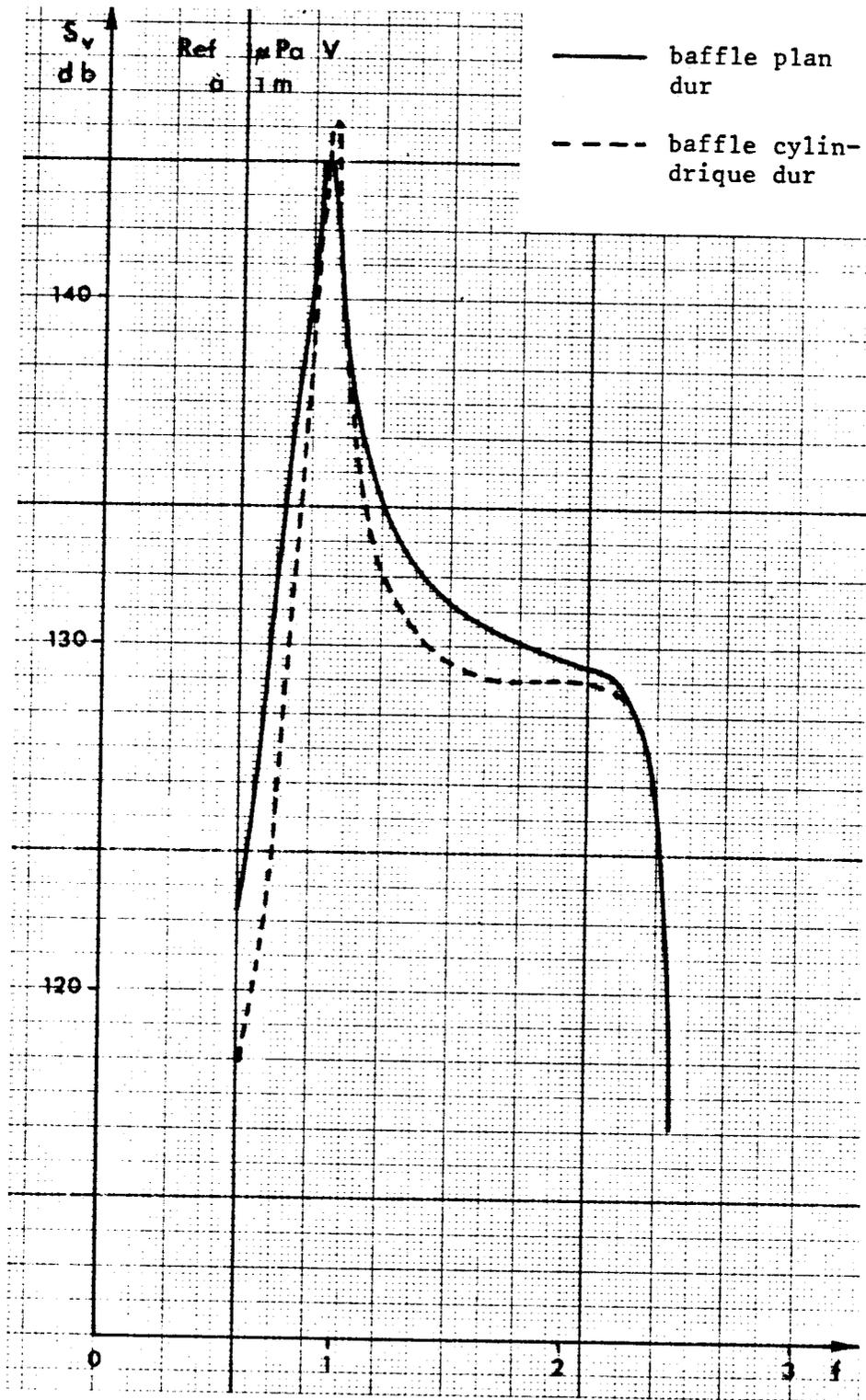


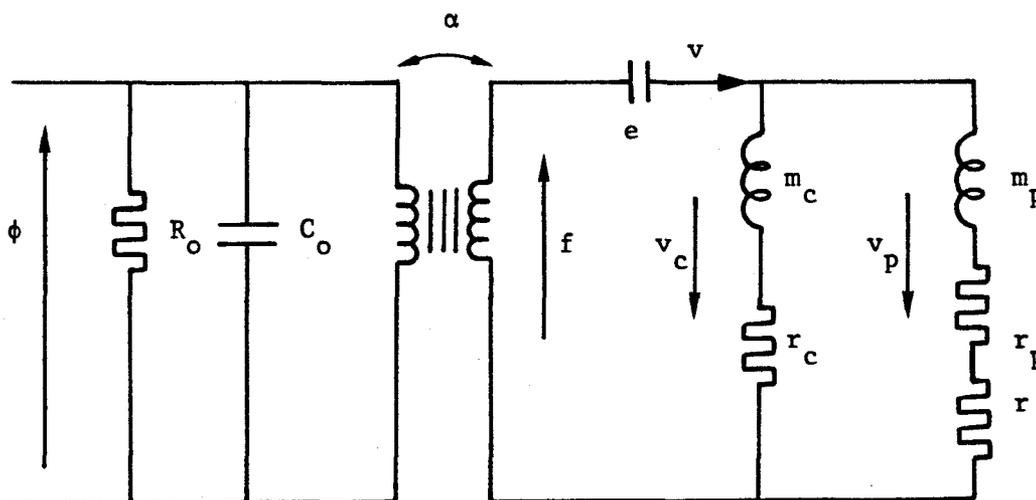
Figure V.3 . Comparaison des variations avec la fréquence de la réponse en tension du Tonpilz T2a calculées par la méthode d'onde plane pour un baffle plan dur ou un baffle cylindrique dur .

T2a avec la méthode d'onde plane dans les deux cas. Les calculs correspondants utilisent la technique classique décrite dans la section (I.1.3), l'impédance  $Z$  de l'équation (I.19) étant remplacée par l'expression appropriée [1,2,8,9]. Elle montre cette fois un excellent accord autour de la résonance fondamentale, pour la partie basse fréquence du spectre utile. En conséquence globale de cette analyse, les calculs par éléments finis des réponses des transducteurs T2a et T2b présentés dans les sections suivantes utilisent la condition de baffle dur. Pour les niveaux d'émission, cette condition ne doit pas perturber la comparaison entre théorie et expérience. Par contre, aucune comparaison quantitative des diagrammes de directivité théoriques et expérimentaux n'est possible, au moins dans la partie basse fréquence du spectre balayé.

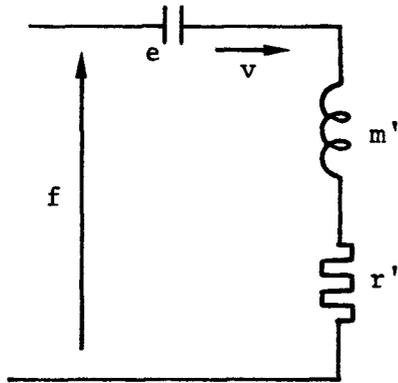
### V.1.2 Le rendement électroacoustique

Dans un projecteur piézoélectrique, la dissipation d'énergie par rayonnement d'une onde sonore est toujours accompagnée de dissipations parasites dues aux frottements internes, aux pertes diélectriques... Ces dissipations ne sont pas prises en compte par la modélisation en éléments finis. En conséquence, le rendement électroacoustique théorique est toujours égal à un, contrairement au rendement réel. Du point de vue de la pression rayonnée, cet effet se traduit par une diminution d'amplitude à excitation donnée, i.e par une diminution de la réponse en tension pour le cas réel par rapport au cas théorique.

Dans la partie basse fréquence du spectre, le schéma équivalent à constantes localisées de la section (I.1.2) peut être repris et complété comme ci-dessous pour tenir compte des pertes. Sur ce schéma,



$R_0$  représente les pertes diélectriques,  $r_c$  et  $r_p$  les pertes mécaniques de part et d'autre du plan nodal. Si  $r$  et  $r_p$  sont nettement inférieures à  $m_p\omega$  et  $r_c$  à  $m_c\omega$ , le schéma de la partie motionnelle est équivalent à :



$$m' = \frac{m_p m_c}{m_p + m_c}$$

$$r' = \frac{(r+r_p)m_c^2 + r_c m_p^2}{(m_p + m_c)^2}$$

Comme  $m_c$  est souvent grande devant  $m_p$ , l'expression de  $r'$  se réduit à :

$$r' = \frac{m_c^2(r+r_p)}{(m_c + m_p)^2} \quad (V.1)$$

montrant que seule la résistance mécanique en série avec la résistance de rayonnement a un effet notable sur le comportement du transducteur. En conséquence, si on néglige la résistance de pertes diélectriques,  $r$  et  $r_p$  étant parcourues par le même courant, le rendement électromécanique est donné par :

$$\eta = \frac{r}{r + r_p} \quad (V.2)$$

Pour ce qui concerne l'impédance électrique vue entre les bornes du transducteur, la résistance  $R_p$  résulte, à la résonance, de la mise en parallèle de  $R_0$  et  $(r+r_p)/\alpha$ . Comme  $r$  et  $r_p$  sont très inférieurs à  $R_0$ , on a donc :

$$R_p = (r+r_p)/\alpha \quad (V.3)$$

Par rapport au cas théorique idéal,  $R_p$  est donc multiplié par  $1/\eta$ . Par contre, loin de la résonance,  $R_p$  résulte de la mise en parallèle de  $R_0$  et de :

$$R'_p = \frac{(m'\omega - 1/e\omega)^2}{\alpha(r + r_p)} \quad (V.4)$$

dont le résultat peut être notablement inférieur à la valeur obtenue dans le cas sans perte. Enfin, pour ce qui concerne l'amplitude de la pression rayonnée, elle est proportionnelle à  $v_p$  dont la valeur à la résonance est :

$$v_p = \frac{f(m_p + m_c)}{m_c(r + r_p)} \quad (V.5)$$

Ainsi, à la résonance, le rapport des pressions avec et sans pertes est aussi égal à  $\eta$ . Par contre, loin de la résonance, la valeur de  $v_p$  est de nouveau fixée par la partie réactive de l'impédance et dépend donc beaucoup moins des pertes.

En conséquence de ce modèle simple, on peut conclure que l'effet des pertes est important à la résonance, les variations de  $R_p$  et de la pression rayonnée qui lui sont dues étant, en valeurs relatives, égales au rendement. Par contre, hors de la résonance, cet effet peut devenir négligeable. Enfin, ce modèle n'est valable que dans les limites d'application du schéma à impédances localisées, la situation devenant beaucoup plus complexe dès que la fréquence augmente. Dans les sections suivantes, ces différents éléments vont permettre de comparer les résultats théoriques et expérimentaux en se référant aux valeurs limites de l'effet des pertes. Ainsi, pour la réponse en tension  $S_v$ , on peut considérer que la valeur de  $\eta$  exprimée en décibels est bien représentative de l'effet maximum des pertes.

### V.1.3 Les modes de tige

Comme indiqué dans la section (III.5), la tige de précontrainte présente des résonances multiples, pour les fréquences telles que la longueur de tige comprise entre les points d'encastrement soit égale à un nombre entier de demi-longueurs d'onde. Lorsqu'une telle résonance se produit, la réponse en tension d'un transducteur immergé décroît brutalement, à cause de la variation importante d'impédance électrique qu'elle provoque. De ce fait, par rapport à un transducteur sans

résonance de tige, i.e un transducteur pour lequel les vibrations de la tige sont fortement amorties, le transducteur avec résonance de tige a une réponse en tension qui présente des minimas supplémentaires très marqués.

Ce fait est confirmé théoriquement et expérimentalement par les figures (V.4) et (V.5). Sur la figure (V.4) sont présentées les variations avec la fréquence des réponses en tension du Tonpilz T2a calculées en tenant compte ou non de la tige de précontrainte. On voit que le mode de tige perturbe très fortement la réponse dans la bande de fréquence qui l'entoure. De même, sur la figure (V.5) sont reportées les variations avec la fréquence des réponses en tension du T2b avec un montage normal et avec le montage particulier décrit dans la section (III.5) qui favorise l'apparition des modes de tige. Deux minimas supplémentaires très marqués apparaissent à proximité des deux premières résonances.

L'apparition de minimas associés à des modes de tige dans un calcul par éléments finis peut être gênante car, dans la majorité des cas, le montage des transducteurs est tel qu'ils ne sont pas observés expérimentalement. Par ailleurs, le code ATILA ne prenant pas en compte les pertes internes la modélisation de l'effet physique qui élimine ces modes n'est pas possible. En conséquence, afin de ne pas perturber les résultats numériques, les modes de tige sont supprimés dans les exemples des sections suivantes en donnant à la tige toutes ses propriétés physiques normales hormis sa masse volumique qui est divisée par cent. Cette procédure conserve l'effet de la rigidité de la tige qui est important pour déterminer précisément la première fréquence de résonance, mais rejette les modes de tige à des fréquences dix fois supérieures, hors de la gamme utile. Globalement, cette méthode ne modifie pas les autres résonances, comme le montre le tableau ci-après qui compare les fréquences propres dans l'air obtenues avec les deux méthodes pour le T2a nominal et le T2b. Dans tous les cas représentés, l'accord est meilleur que 3.5 %. Par ailleurs, les champs de déplacement ne sont modifiés que dans le voisinage immédiat des extrémités de la tige.

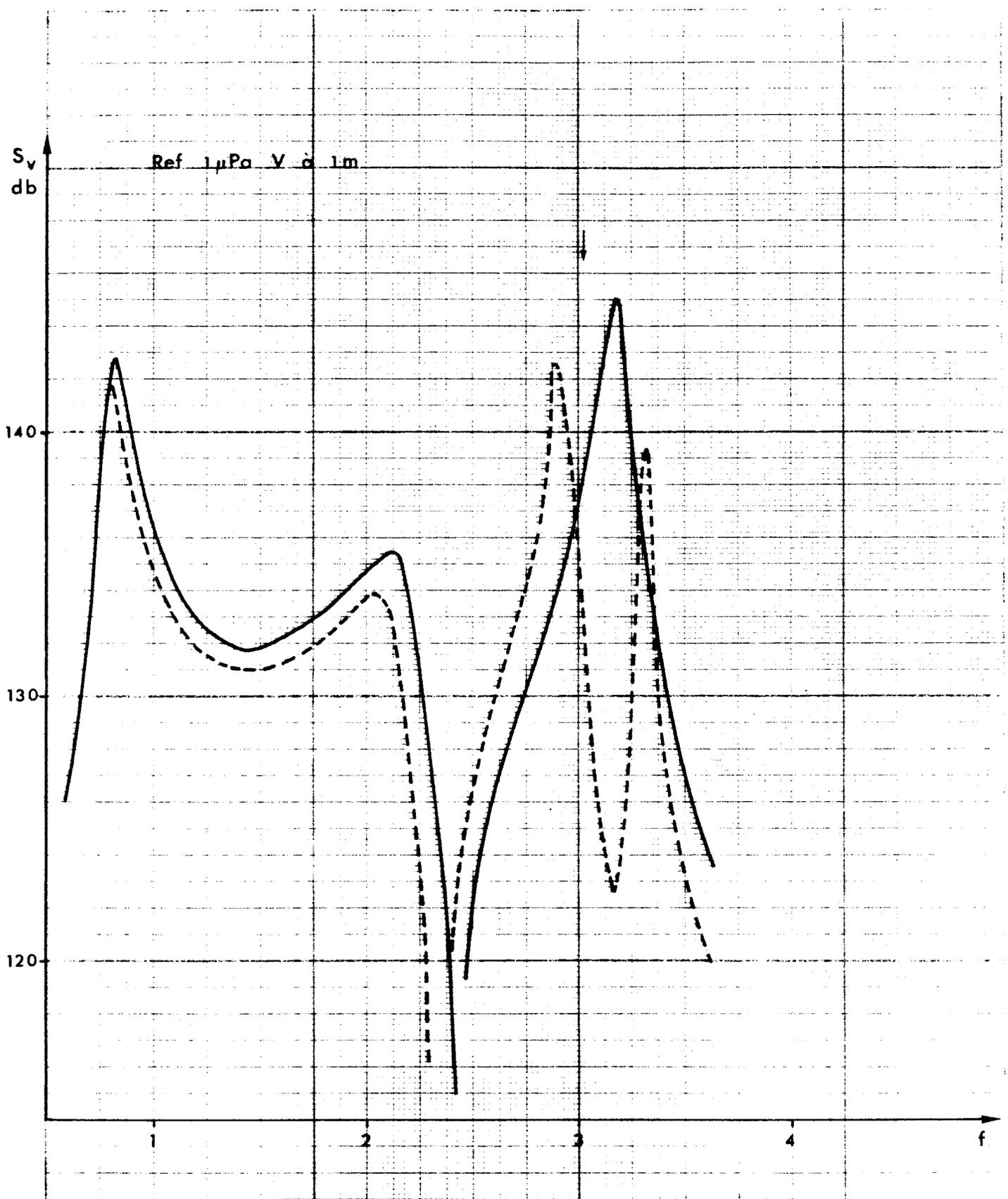


Figure V.4 . Variations avec la fréquence normée de la réponse en tension du T2a calculée par éléments finis avec (-----) ou sans (——) la tige de précontrainte . La flèche repère le mode de tige .

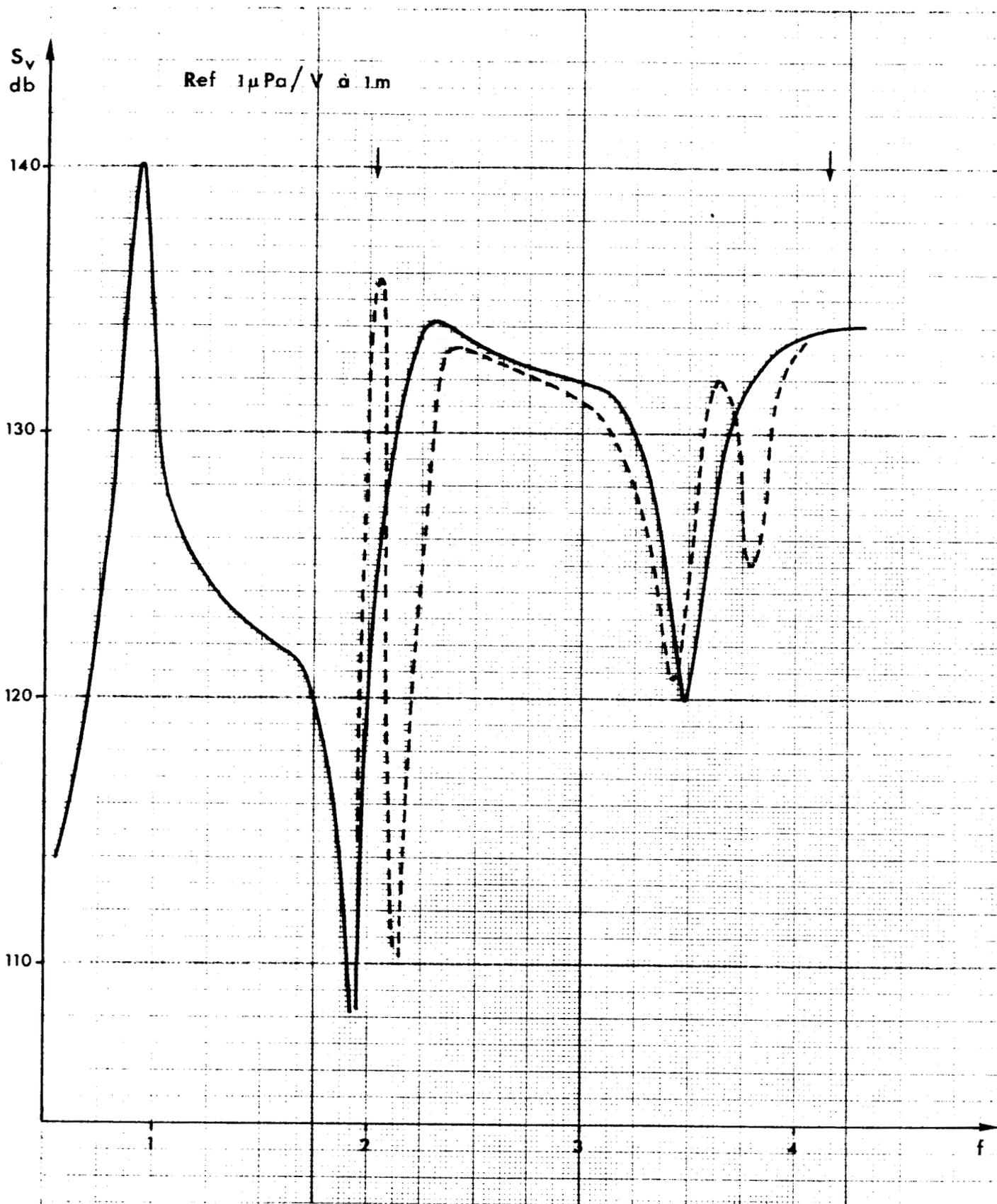


Figure V.5 . Variations avec la fréquence normée de la réponse en tension mesurée du T2b monté classiquement (—) ou sans amortissement des modes de tige (---) . Les flèches repèrent les fréquences des modes de tige .

Effet de l'élimination des modes de tige			
Tonpilz T2a nominal		Tonpilz T2b	
Modes de tige reproduits	Modes de tige éliminés( $\rho/100$ )	Modes de tige reproduits	Modes de tige éliminés( $\rho/100$ )
1.00	1.00	1.00	1.01
2.28	2.28	2.27	2.35
3.03	-	2.71	-
3.47	3.38	3.79	3.80
4.55	4.55	5.09	5.11
6.14	6.19	5.27	-
6.37	-	6.08	6.03

## V.2 ANALYSE DE LA REPONSE DU TRANSDUCTEUR T2a

Le Tonpilz T2a nominal est décrit dans la section (III.2.b). Les pages suivantes présentent en détail l'analyse de son comportement, en particulier les corrélations entre le champ de déplacement dans le transducteur et le champ de pression rayonné dans le fluide.

### V.2.1 Définition du maillage

Le maillage utilisé est à symétrie axiale. La maillage de la structure est le même que celui décrit dans la section (III.3.b), qui contient 62 éléments et 230 noeuds. La position de la surface frontière  $\Gamma_\infty$  est obtenue en calculant  $R_\infty$  à l'aide de la relation :

$$R_\infty = \frac{d^2}{\lambda_{\min}} \quad (V.6)$$

où  $\lambda_{\min}$  est la longueur d'onde associée à la fréquence maximale du spectre étudié, fréquence choisie ici égale à 5.0 en valeur normée. Le

pas du maillage fluide doit rester inférieur à  $\lambda_{\min}/4$  dans toutes les directions radiales. Avec ces contraintes, le maillage fluide obtenu, représenté sur la figure (V.6), contient :

- 6 éléments interfaces à 3 noeuds,
- 108 éléments fluides quadrilatères isoparamétriques à 8 noeuds,
- 12 éléments rayonnants à 3 noeuds,
- 331 noeuds (donc 331 degrés de liberté).

Le baffle dur est représenté par une condition de flux nul, naturellement prise en compte par la formulation éléments finis, imposée sur les côtés concernés de six éléments. La technique de réduction de Guyan a permis la condensation de la moitié des degrés de liberté, avec une répartition uniforme des esclaves dans la structure et dans le fluide.

Pour tester la validité de ce maillage, le calcul de la réponse en tension a été effectué également avec deux autres maillages pour lesquels les rayons de la sphère externe sont respectivement :

$$R_{\infty} = 0.87 d^2/\lambda_{\min}$$

et :

$$R_{\infty} = 0.72 d^2/\lambda_{\min}$$

Dans ces deux cas, les fréquences maximales compatibles avec la relation (V.6) sont respectivement, en valeurs normées, 4.45 et 3.60, au lieu de 5.0. Les maillages correspondants sont obtenus à partir du maillage de la figure (V.6) en enlevant une puis deux couches d'éléments fluides. Les résultats sont reportés sur la figure (V.7), montrant une bonne convergence et validant ainsi la modélisation. Comme discuté au chapitre IV, on note donc qu'avec un maillage de taille raisonnable l'approche retenue fournit à la fois les informations caractéristiques du champ proche et du champ lointain.

### V.2.2 Présentation des résultats et discussion

Pour le maillage de la figure (V.6), l'analyse complète du T2a a été réalisée avec un balayage en fréquence de 40 valeurs prises dans la bande 0.5 - 5.0 en valeurs normées. Les résultats sont groupés dans

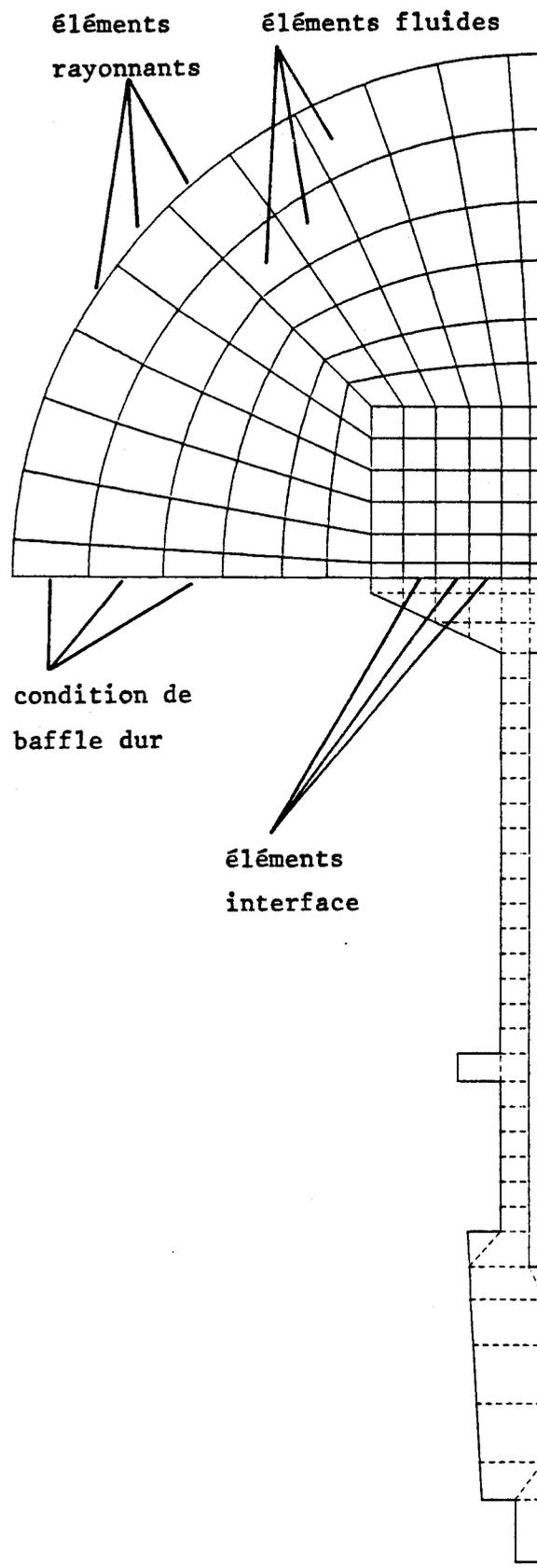


Figure V.6 . Maillage du T2a immergé avec  $R_{\infty} = d^2/\lambda$  .

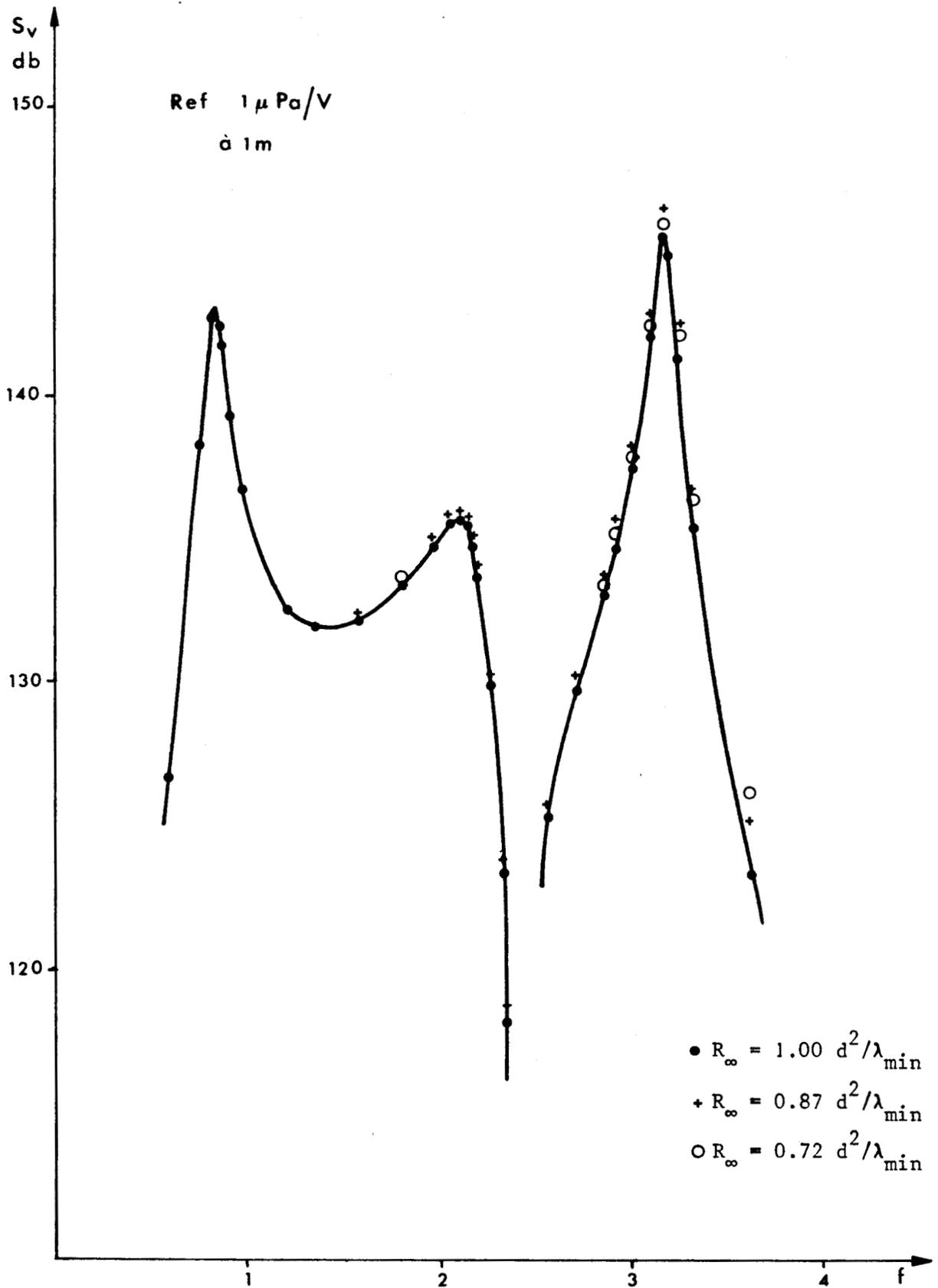


Figure V.7 . Comparaison, pour les trois maillages, des variations avec la fréquence normée de la réponse en tension du T2a . Lorsqu'une croix ou un cercle n'apparaît pas, le résultat correspondant est identique à celui de l'approximation antérieure .

les figures ci-après qui présentent :

- la comparaison des variations avec la fréquence des réponses en tension calculée et mesurée (figure V.8),
- les variations avec la fréquence de l'amplitude de déplacement au centre et au bord du pavillon. Comme indiqué par l'équation (IV.84), cette amplitude est complexe et doit être représentée en parties réelle et imaginaire (figure V.9),
- les déformations du transducteur pour les fréquences normées 0.81, 2.02, 3.17, 4.68 (figure V.10),
- la comparaison des variations avec la fréquence des résistances parallèles  $R_p$  calculée et mesurée (figure V.11),
- la comparaison des variations avec la fréquence des capacités parallèles  $C_p$  calculée et mesurée (figure V.12).

#### V.2.2.a) *Interprétation du comportement du transducteur*

La courbe de réponse en tension du T2a présente six structures nettement marquées, quatre maximas et deux minimas très profonds, que l'on trouve à des fréquences très voisines à la fois sur la courbe théorique et sur la courbe expérimentale. L'existence de ces extrêmes s'explique simplement, par corrélation avec l'évolution du champ de déplacement dans le transducteur.

Le premier maximum, situé à la fréquence normée théorique de 0.825, correspond à la résonance fondamentale du Tonpilz, i.e au premier mode de dilatation-compression. Comme le montrent la figure (V.9) et la première figure (V.10), le centre et le bord de la face parlante du pavillon vibrent en phase, avec des amplitudes comparables, sans indiquer pratiquement d'effets de flexion. A cette fréquence,  $R_p$  présente un minimum très marqué, ainsi que le prouve simplement le schéma équivalent discuté dans la section (V.1.2). Il est intéressant de noter que le glissement de la fréquence de résonance dû au fluide atteint 17.5 %.

Le second maximum, situé à la fréquence normée théorique de 2.00, correspond au second mode de dilatation-compression du Tonpilz. L'étude du champ de déplacement de la face parlante sur les figures (V.9) et (V.10) montre que, à cette fréquence, la zone centrale du pavillon a un déplacement négligeable, alors que le mouvement du bord du pavillon est très important. En conséquence, le second maximum de la courbe  $S_v$  doit être directement associé à un effet de papillonnage, même si le mode propre correspondant n'est pas un mode de papillonnage

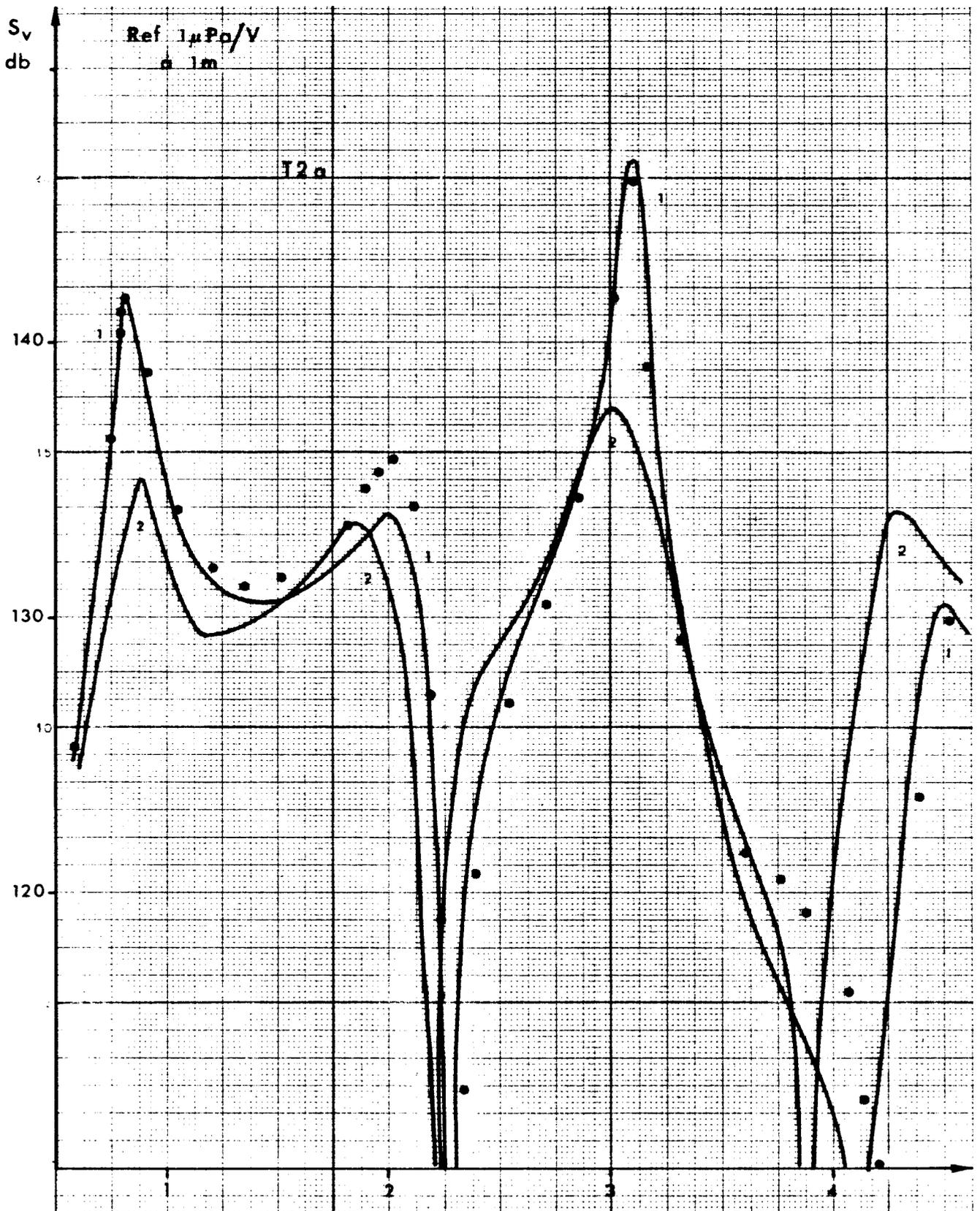


Figure V.8 . Variations avec la fréquence normée des réponses en tension du T2a mesurée (2) et calculées par éléments finis (1) ou par méthode mixte (•) .

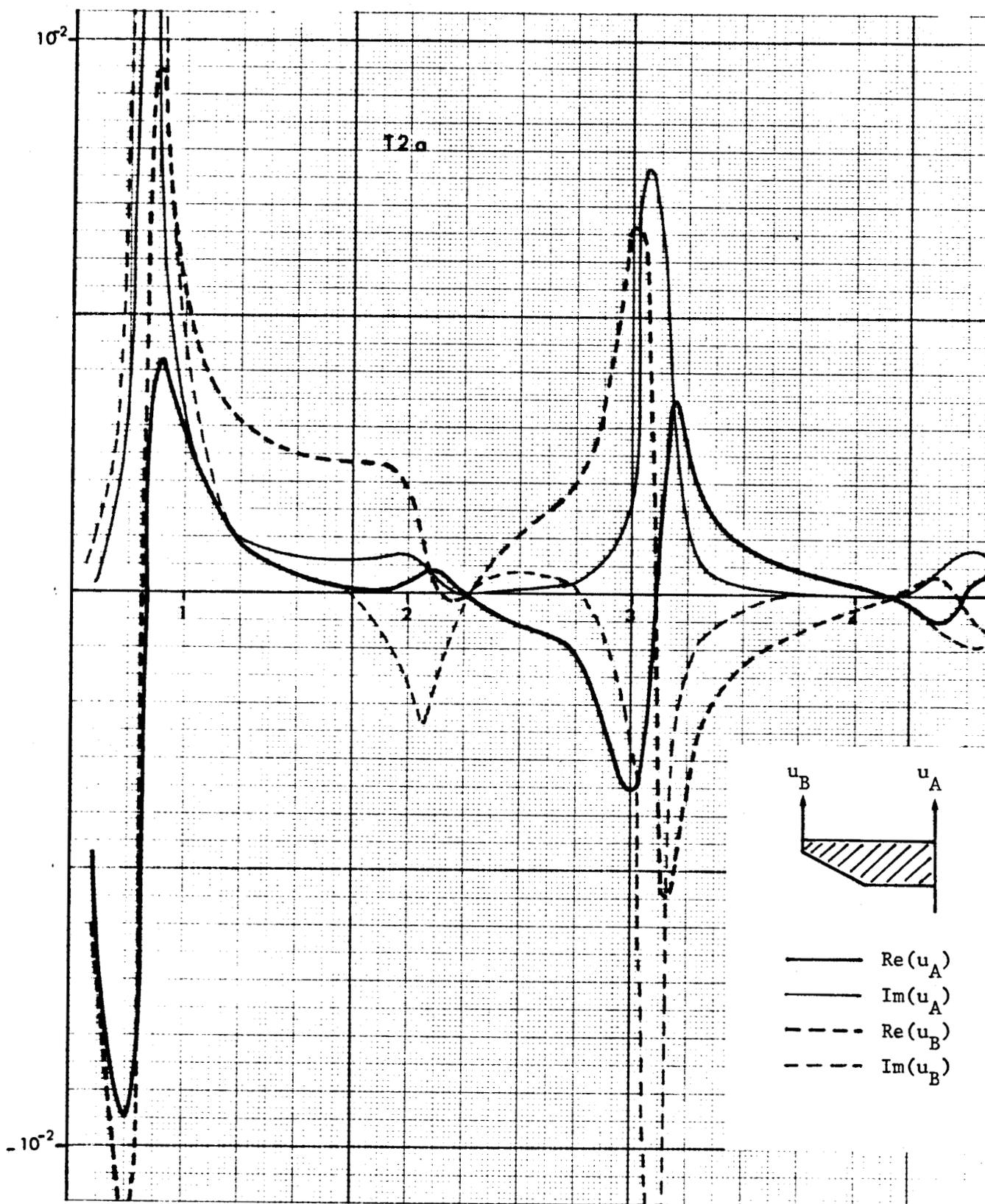
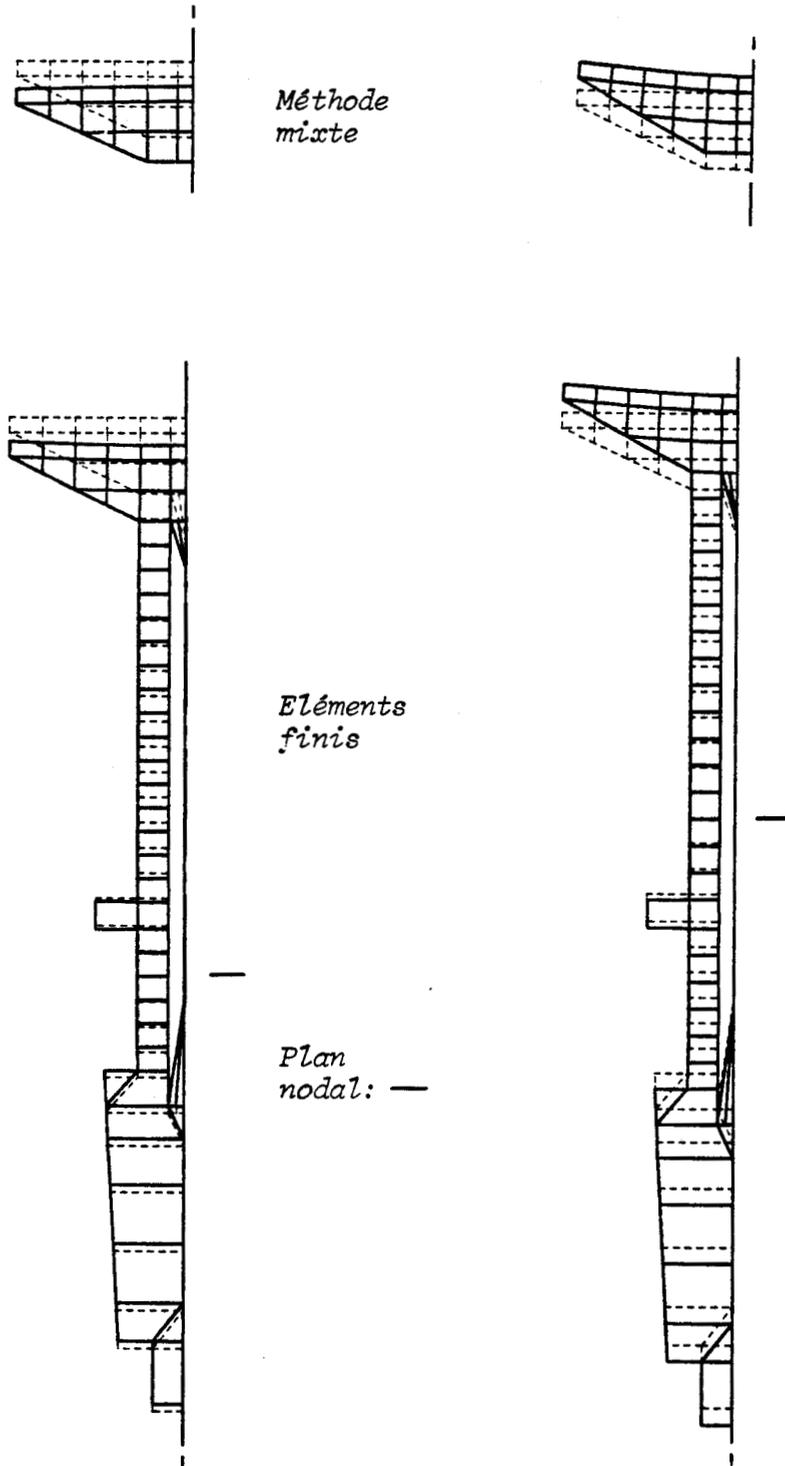


Figure V.9 . Variations avec la fréquence normée de l'amplitude du déplacement ( $u/V$ ) au centre A et au bord B du pavillon du T2a .



**Figure V.10 .** Représentation schématique de la déformation du T2a à la fréquence normée de 0.81 . A gauche, partie réelle du champ de déplacement, à droite, partie imaginaire .

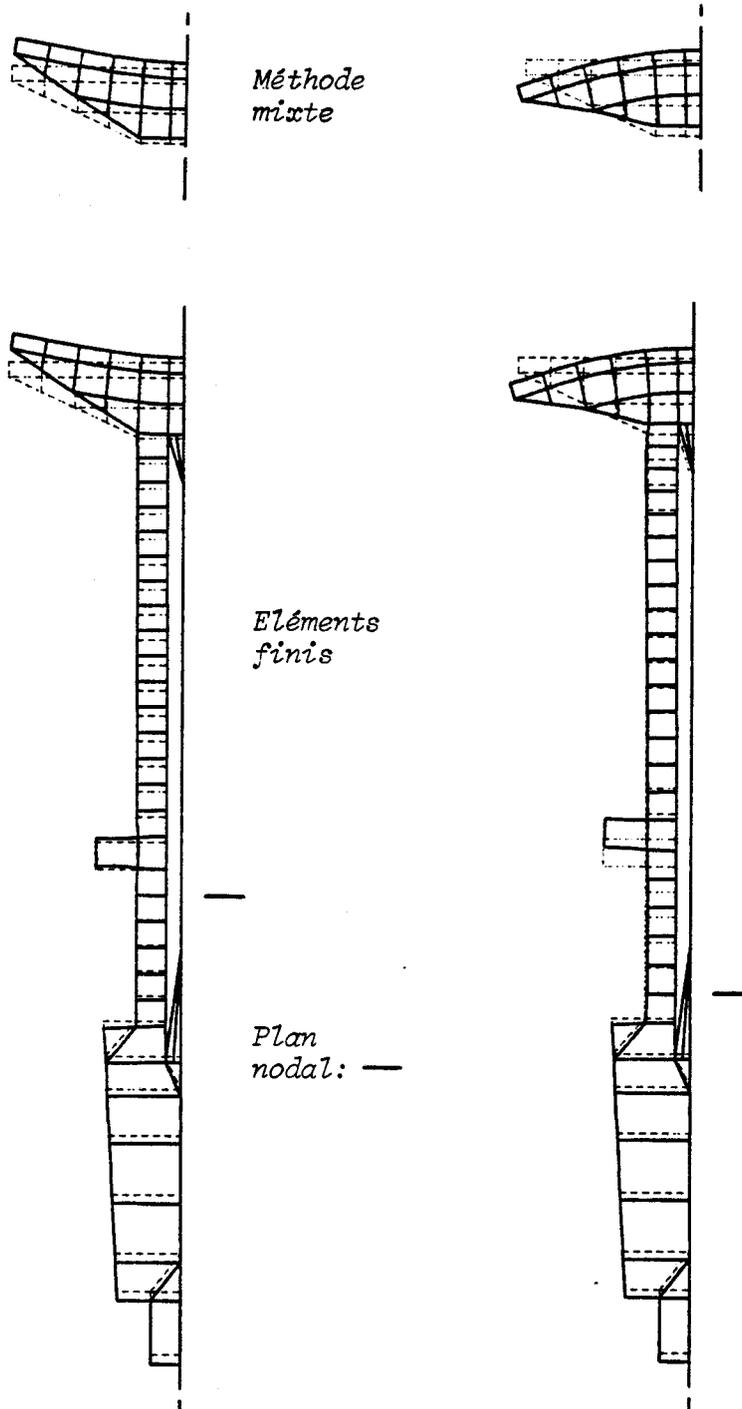


Figure V.10 . Suite . Fréquence normée 2.02 .

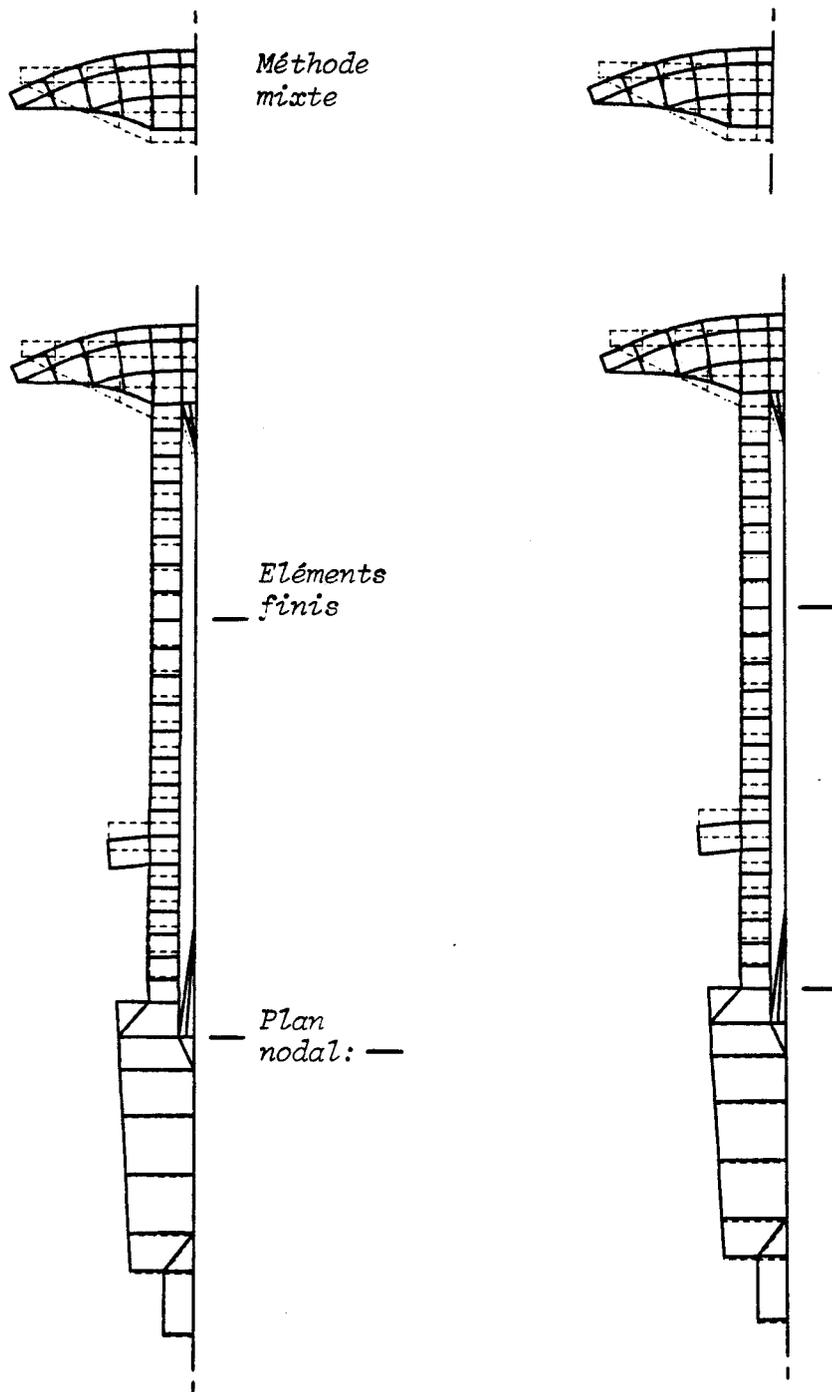


Figure V.10 . Suite . Fréquence normée 3.17 .

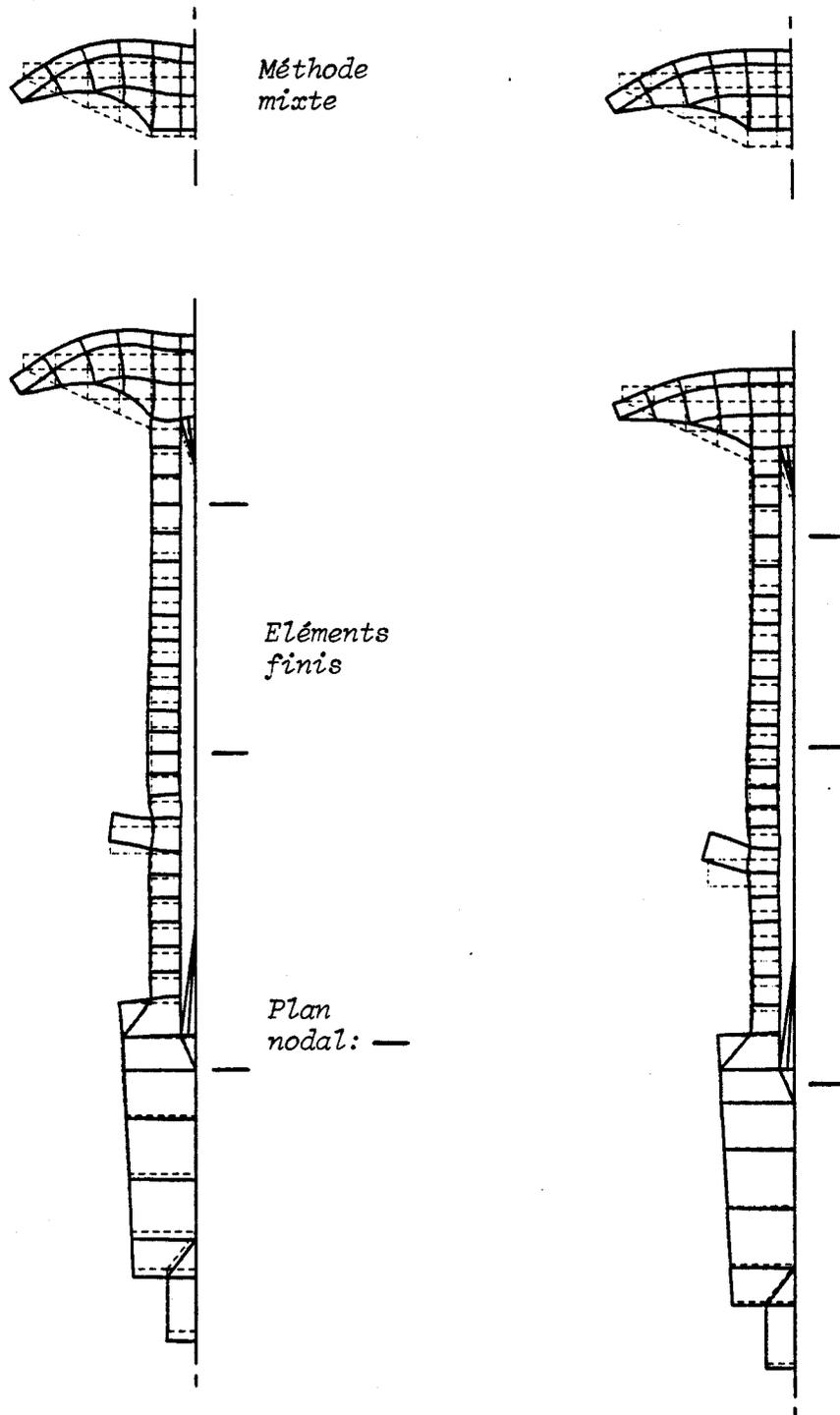


Figure V.10 . Suite . Fréquence normée 4.68 .

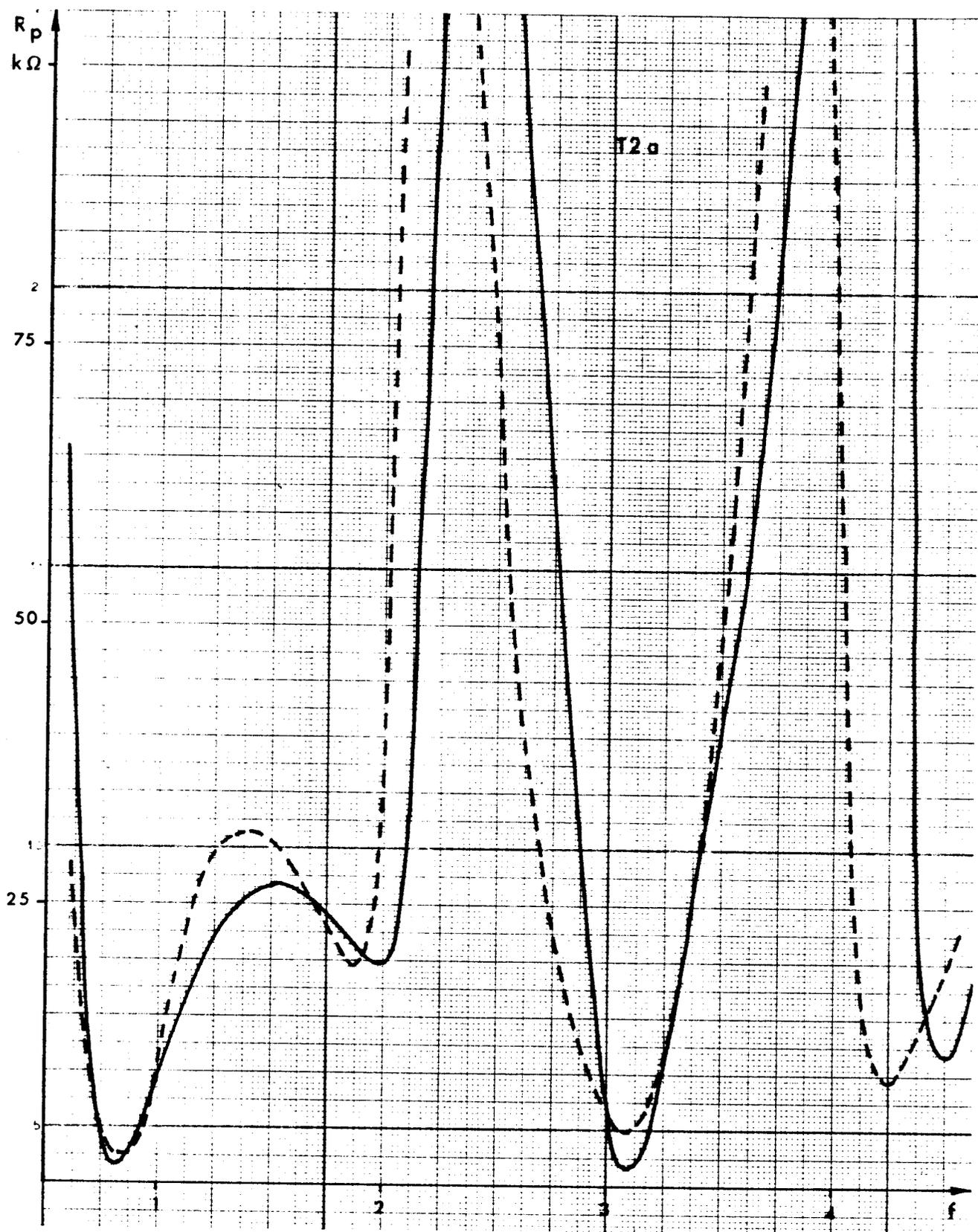


Figure V.11 . Variations avec la fréquence normée de la résistance parallèle  $R_p$  du T2a calculée par éléments finis (—) ou mesurée (- - -) .

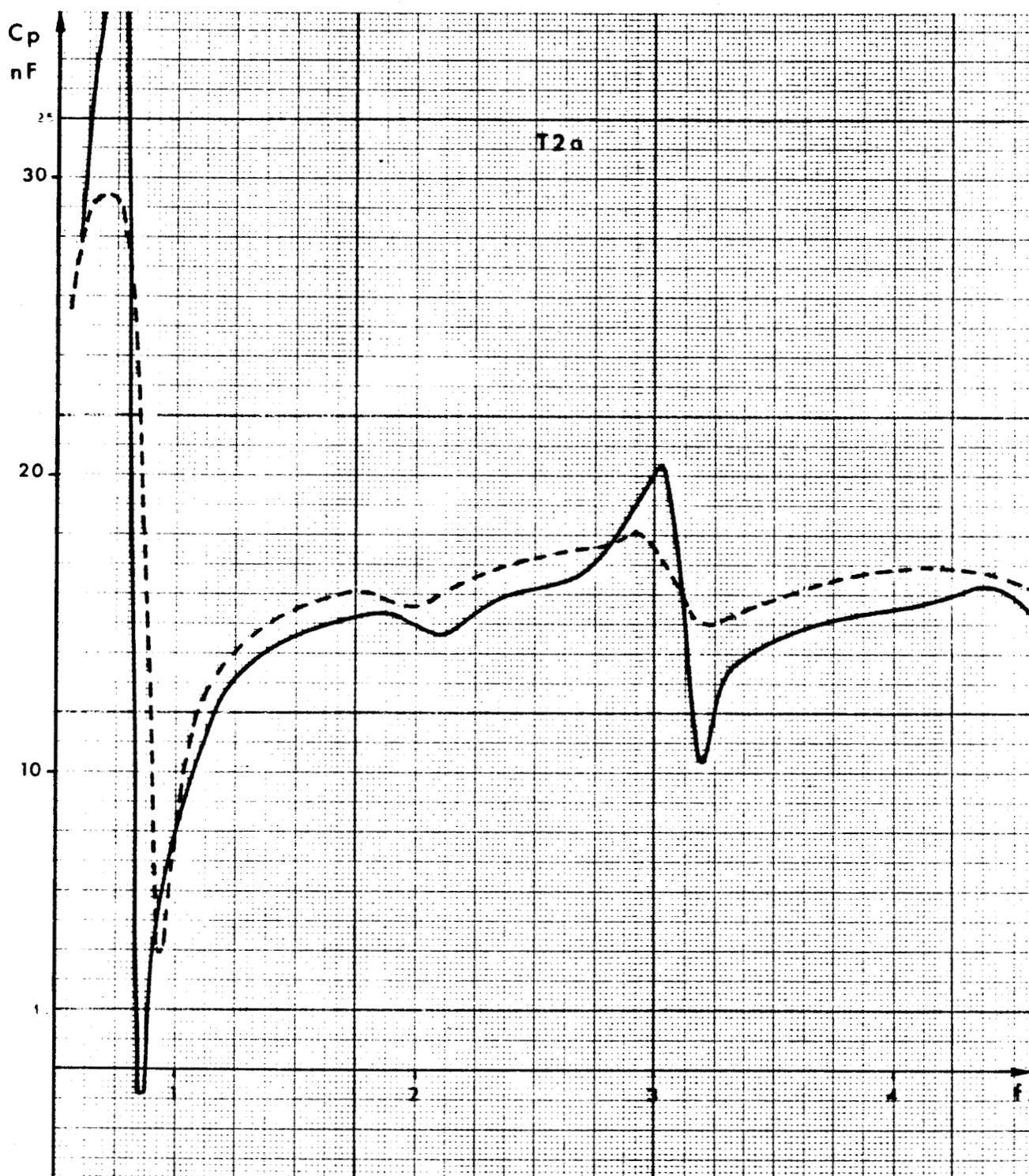


Figure V.12 . Variations avec la fréquence normée de la capacité parallèle  $C_p$  du T2a calculée par éléments finis (—) ou mesurée (- -) .

au sens du chapitre III. Ceci implique, comme le montre la figure (I.6), qu'un modèle d'onde plane est *incapable* de reproduire ce maximum. Par ailleurs, plusieurs remarques sont à dégager sur le plan physique :

- comme indiqué au chapitre III, le second mode du T2a n'est pratiquement pas couplé électriquement dans l'air. Le rayonnement entraîne, dans l'eau l'apparition d'un couplage très important,
- le glissement de fréquence dû au fluide est de 14.0%,
- dans la colonne matrice n'apparaît qu'une seule zone d'amplitude de déplacement minimale, alors que le mode propre associé contient deux plans nodaux. Cet effet peut s'expliquer par le glissement de fréquence dont l'importance est suffisante pour faire "sortir" le second plan nodal par le côté pavillon de la structure.

Le troisième maximum, situé à la fréquence normée théorique de 3.10, correspond lui au premier mode de papillonnage du Tonpilz. La figure (V.9) montre à cette fréquence un mouvement en opposition de phase du centre et du bord de la face parlante, avec une amplitude nettement plus importante sur le bord. Par ailleurs la colonne motrice contient deux zones très marquées de déplacement minimal, correspondant aux deux plans nodaux du mode propre associé. Le glissement de fréquence dû au fluide est de 12.0 %.

Enfin, le quatrième mode, à la fréquence normée théorique de 4.50 correspond au troisième mode de dilatation compression du Tonpilz. La colonne motrice contient trois zones de déplacement minimal correspondant aux trois plans nodaux du mode propre associé, alors que la figure (V.9) montre un mouvement du bord en opposition de phase avec celui du centre et une partie réelle du champ de déplacement pratiquement nulle. Le glissement de fréquence est, cette fois, très faible, de l'ordre de 1%. Ce point est commenté ultérieurement, en (V.2.2.c).

Le deux minimas très marqués (99db et 105db) sont aux fréquences normées théoriques de 2.25 et 4.12. L'examen de la figure (V.9) montre qu'ils coïncident avec deux annulations simultanées des composantes réelles et imaginaires du déplacement normal au centre et au bord au pavillon, i.e à une face parlante complètement immobile. Ils sont en fait associés à l'apparition dans le transducteur d'un plan nodal supplémentaire qui, en supprimant au niveau du pavillon le mouvement de dilatation-compression, fait disparaître également le mouvement de

flexion. En conséquence, la présence de ces minima très marqués est inhérente au principe de fonctionnement du Tonpilz et ne peut être éliminée par des modifications de conception (dimensions, nature des matériaux...).

Cette analyse, présentée ici en détail, a été réalisée pour plusieurs transducteurs. Elle conduit systématiquement aux mêmes corrélations et souligne toujours l'importance des modes propres du transducteur et de l'apparition de plans nodaux supplémentaires.

#### V.2.2.b) *Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux*

Le G.E.R.D.S.M. a réalisé plusieurs caractérisations expérimentales du transducteur T2a nominal. Les premières correspondent à un transducteur maintenu dans le boîtier cylindrique par l'électrode porteuse. Cette technique, efficace au voisinage du mode fondamental pour lequel le plan nodal coïncide pratiquement avec l'électrode, s'avère beaucoup moins intéressante pour une étude dans une bande de fréquence large puisque, pour certaines fréquences, l'électrode va coïncider avec un ventre de vibration. Or, la mise en vibration du boîtier par le mouvement de l'électrode porteuse peut, comme indiqué en (V.1.1), perturber fortement le rayonnement du transducteur. Aussi, pour minimiser cet effet, la dernière caractérisation correspond à un transducteur seulement maintenu, au niveau de la contremasse, par un amortisseur en caoutchouc, et, au niveau du pavillon, par le caoutchouc d'étanchéité. Les résultats expérimentaux reportés sur les courbes de variation de  $S_v$ ,  $R_p$  et  $C_p$  correspondent à cette dernière situation.

Du point de vue de la réponse en tension, on constate que les courbes théorique et expérimentale sont très semblables, présentant les mêmes structures, pratiquement aux mêmes fréquences. Les écarts relatifs sur les fréquences des quatre maximas sont respectivement de 6%, 7%, 3% et 6%. Seul l'écart sur le premier mode peut demander une analyse plus fine car il est de signe contraire à l'écart obtenu pour le même mode dans l'air, les deux écarts étant, de ce fait, cumulatifs. Toutefois, l'examen de la figure (V.1) montre que, en basse fréquence, l'effet du fluide sur la structure, associé physiquement à la notion d'impédance de rayonnement, est beaucoup plus important pour la situation modélisée que pour la situation expérimentale et peut justifier qualitativement cet écart. Pour ce qui concerne le niveau, on note un accord raisonnable, avec des écarts de l'ordre de 1 à 2 décibels sauf pour les première et troisième

résonances. Toutefois, comme discuté en (V.1.2), l'écart peut alors être attribué à un rendement électroacoustique faible. Or, de fait, le rendement électroacoustique mesuré pour ces deux fréquences vaut, dans les deux cas, 25%, et peut donc justifier un écart maximum de 12 décibels ( $-20 \log \eta$ ), largement suffisant pour étayer notre interprétation.

Les courbes de  $R_p$  et  $C_p$  conduisent à des conclusions voisines, les structures étant bien reproduites, à la bonne fréquence, mais avec des valeurs numériques qui peuvent être assez différentes. Pour  $R_p$ , les écarts sur les minimas s'interprètent aussi en termes de rendement, comme expliqué en (V.1.2). Par contre, l'écart dans la région comprise entre les deux premières résonances est associé à la condition de baffle. En effet, la même analyse théorique réalisée avec une condition de baffle mou donne, dans cette gamme, une résistance  $R_p$  calculée supérieure à la résistance mesurée. Pour  $C_p$ , deux points sont à noter. Le premier est l'apparition sur la courbe théorique d'une petite bande de fréquence pour laquelle la capacité est négative. Il s'explique très bien à l'aide des schémas équivalents de la section (V.1.2) et s'observe expérimentalement pour d'autres transducteurs. Le second est le fait que l'oscillation de  $C_p$  au passage par les résonances est nettement plus importante théoriquement. Cet effet peut être relié en principe aux valeurs minimales de  $R_p$  puisque, au passage par la résonance, la capacité motionnelle ramenée par le transformateur est inversement proportionnelle à la résistance.

En conclusion, l'accord obtenu paraît raisonnable, compte tenu des réserves posées dès le début de la comparaison, dans la section (V.1). La qualité des résultats est de toute façon suffisante pour valider l'interprétation proposée pour le comportement du transducteur et pour permettre un véritable travail de conception. L'étude ultérieure d'un transducteur de meilleur rendement confirmera ces divers points.

#### V.2.2.c) *Exploitation des diagrammes de directivité*

Comme indiqué en (V.1.1), le choix d'une condition de baffle dur interdit la comparaison des diagrammes de directivité calculés et mesurés. Néanmoins, la comparaison des diagrammes calculés par éléments finis à ceux déduits de l'équation (IV.117) pour un piston rigide est instructive. Cette comparaison est réalisée sur la figure (V.13) pour différentes fréquences. On constate en effet que la déformation par flexion de la face parlante du pavillon perturbe la directivité de façon notable à partir de la valeur 3.0 de la fréquence

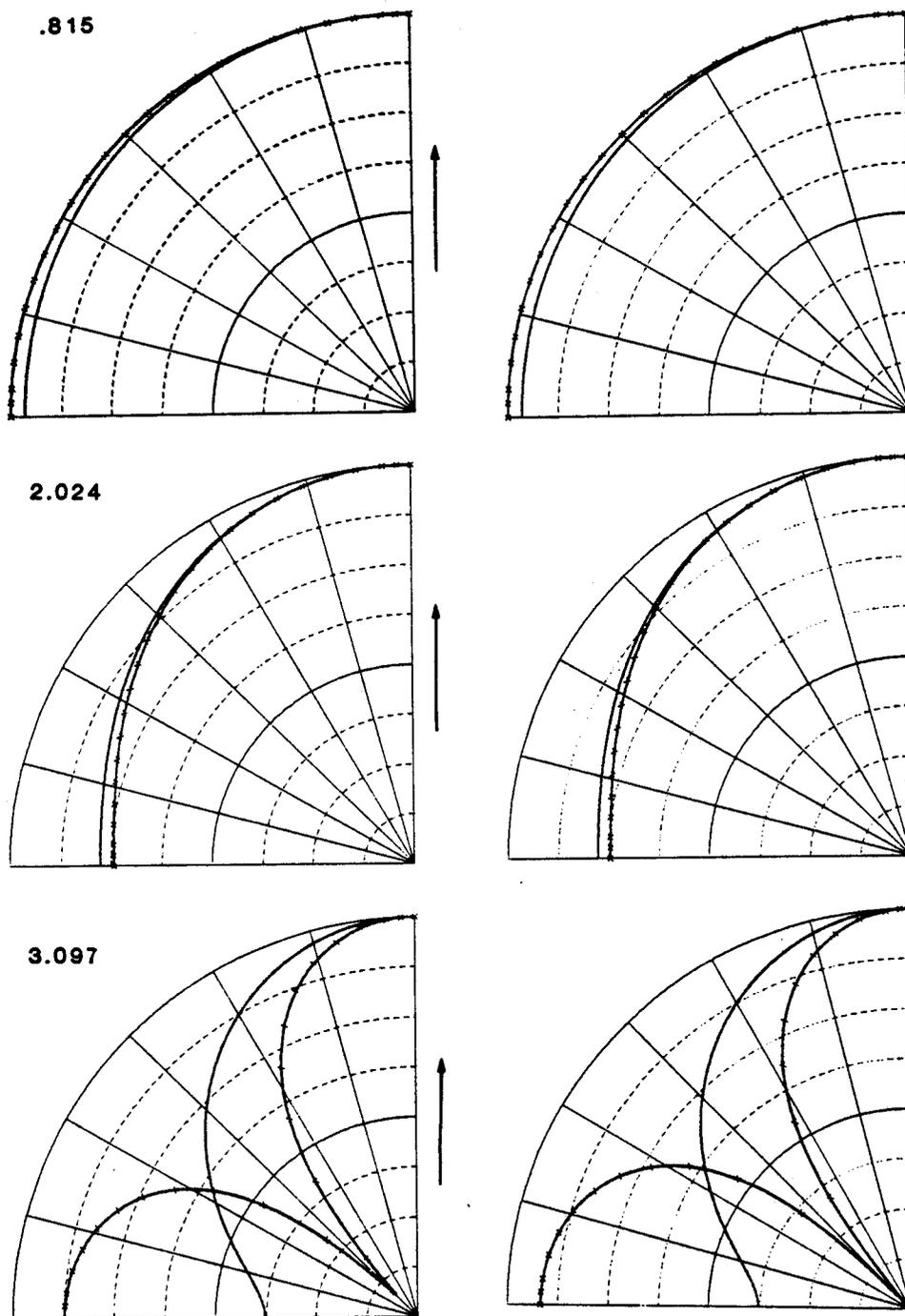
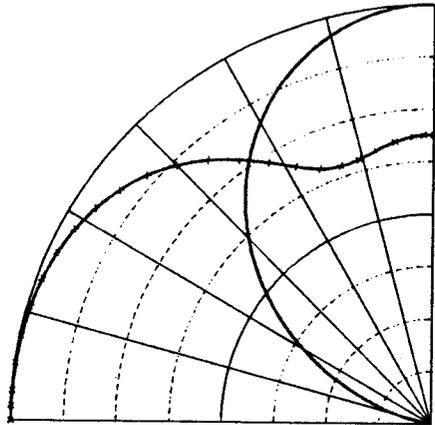
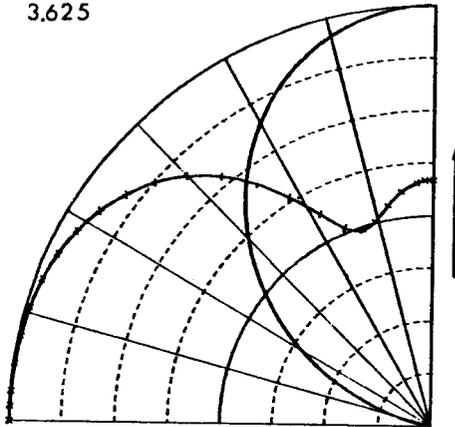


Figure V.13 . Diagrammes de directivité du T2a en baffle dur . Les figures de gauche proviennent d'un calcul par éléments finis, les figures de droite d'un calcul par méthode mixte . (  $\cdots$  E.F. ou méthode mixte,  $\text{—}$  formule analytique) .

3.625



4.531

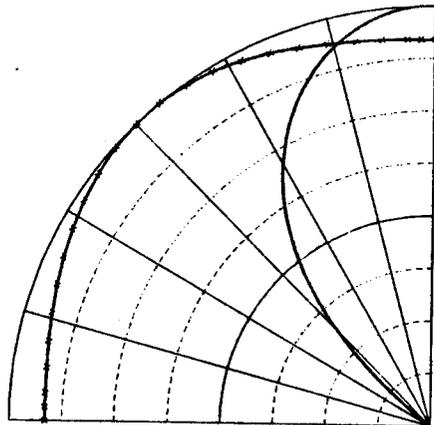
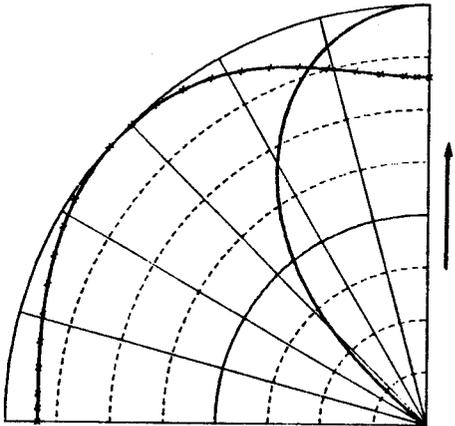


Figure V.13 . Suite .

normée. Ce point, déjà mentionné par J.L. BUTLER et al [60], s'interprète évidemment à l'aide de l'opposition de phase entre le centre et le bord du pavillon. En particulier, si la ligne nodale séparant les deux zones de phases opposées découpe la surface du pavillon en deux parties égales, la vitesse volumique devient très faible et on doit obtenir une forte diminution de la pression rayonnée dans l'axe du transducteur, ce que confirment les deux derniers diagrammes. Ce résultat est également confirmé par la faiblesse du niveau de la réponse en tension pour la quatrième résonance, alors que le gain de  $S_v$  dû à la directivité seule est alors de plus de 10db par rapport à la résonance fondamentale. Enfin, il peut être associé à la très faible valeur du glissement de fréquence de la quatrième résonance.

### **V.3 ANALYSE DE LA REPOSE DU TRANSDUCTEUR T2b**

Le Tonpiliz T2b est décrit dans la section (III.2.c). Les pages suivantes présentent l'analyse de son comportement et de l'influence du type d'excitation électrique sur sa réponse en tension.

#### **V.3.1 Définition du maillage**

Le maillage utilisé est à symétrie axiale. Le maillage de la structure est le même que celui décrit dans la section (III.3.c), qui contient 61 éléments et 226 noeuds.  $R_\infty$  étant calculé pour une fréquence maximale de 5.7, le maillage fluide, représenté figure (V.14) contient :

- 4 éléments interface à 3 noeuds,
- 48 éléments fluides quadrilatères isoparamétriques à 8 noeuds,
- 8 éléments rayonnants à 3 noeuds,
- 169 noeuds (donc 169 degrés de liberté).

Le baffle dur est représenté par une condition de flux nul sur les segments appropriés.

#### **V.3.2 Analyse du comportement du T2b pour une excitation électrique normale**

La figure (V.15) présente les variations avec la fréquence de la réponse en tension du T2b. Comme pour le T2a, elle est caractérisée par une succession de maximas et de minimas très prononcés, dont les

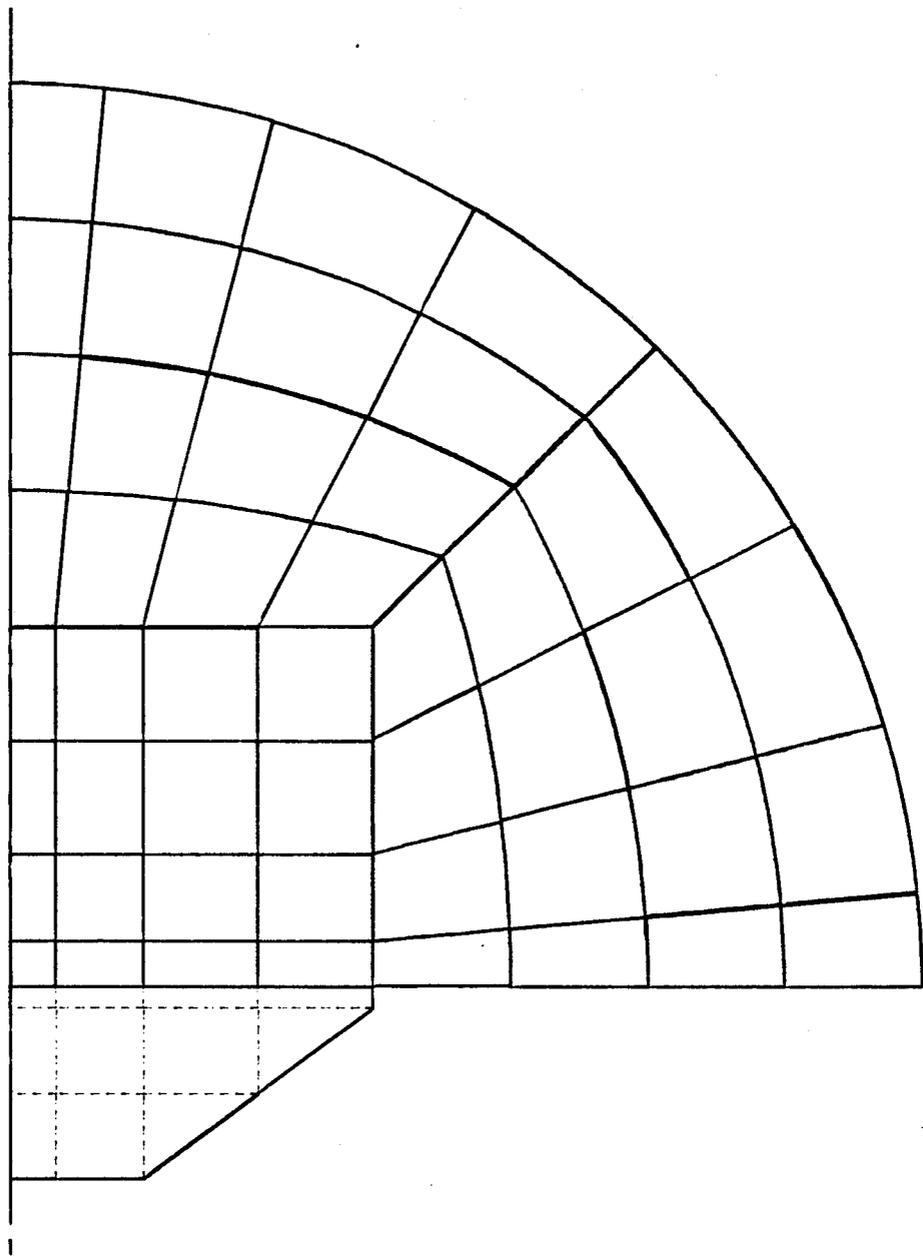


Figure V.14 . Maillage du T2b immergé. Dans le transducteur, seul le maillage du pavillon est représenté .

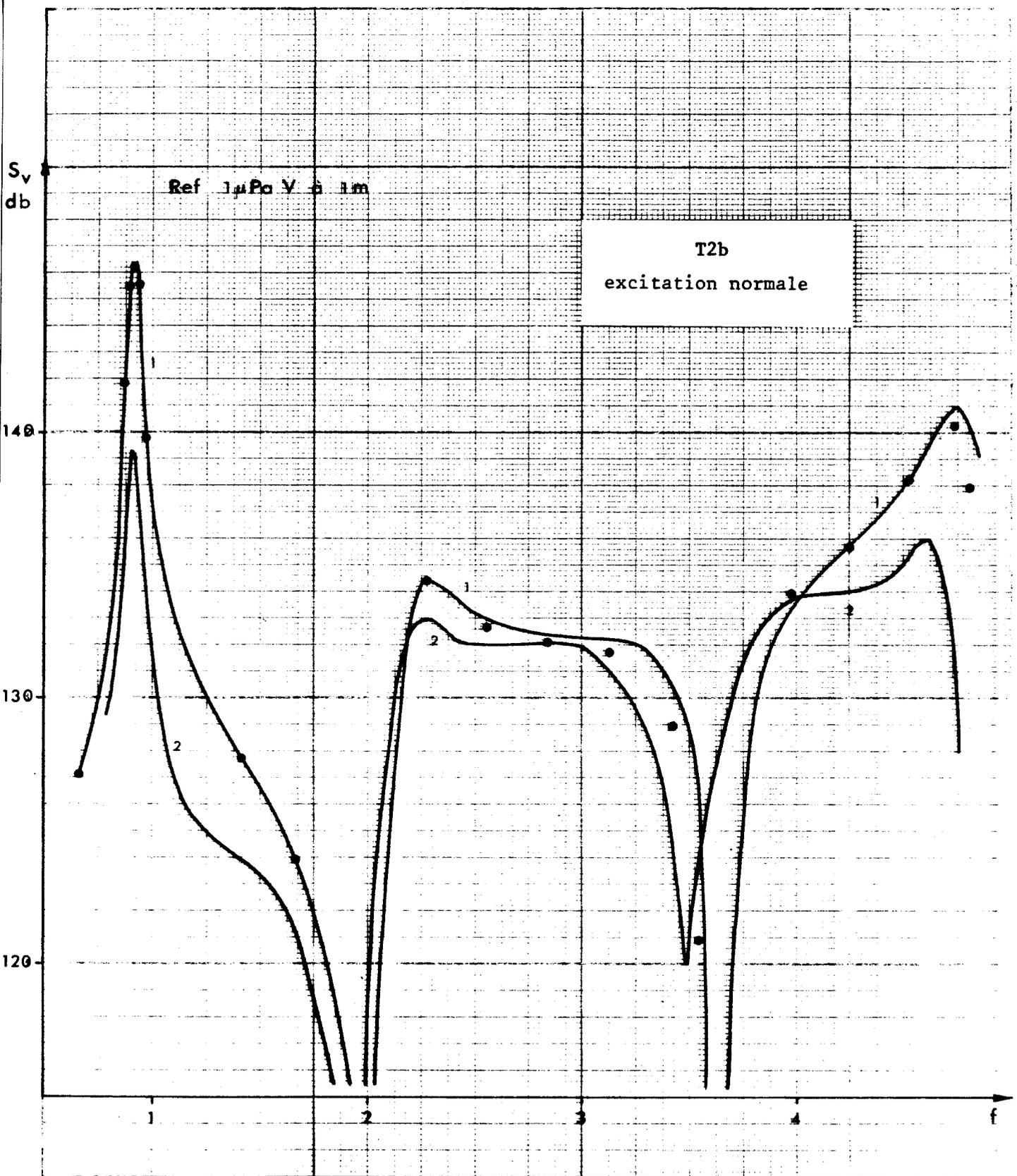


Figure V.15 . Variations avec la fréquence normée des réponses en tension mesurée (2) et calculées par éléments finis (1) ou par méthode mixte (•) pour le Tonpilz T2b en excitation normale .

fréquences calculées ou mesurées sont, respectivement, très proches.

Le premier maximum, à la fréquence normée de 0.922 est associé au premier mode de dilatation-compression du T2b. Le glissement de fréquence dû au fluide est de 7.8%. Le second maximum, à la fréquence normée de 2.27, est associé au second mode de dilatation-compression. Le glissement de fréquence est, cette fois, nul. Enfin, le troisième maximum est associé au premier mode de papillonnage. Sa fréquence normée vaut 4.73 et a subi un glissement de 7.6%. Les représentations schématiques du champ de déplacement fournies pour ces trois fréquences par la figure (V.16) confirment l'identification proposée par la corrélation existant entre les zones de déplacement minimal du transducteur immergé et les plans nodaux du transducteur résonnant dans l'air. Par rapport au T2a, il est intéressant de noter que le troisième mode de dilatation-compression, dont la fréquence propre est 3.79, ne semble pas couplé électriquement lorsque le transducteur est immergé et ne fournit pas de maximum. Enfin, comme pour le T2a, les minima très prononcés sont associés à l'entrée dans le transducteur d'un plan nodal supplémentaire.

Du point de vue de la comparaison à l'expérience, l'accord est de même qualité que pour le T2a, les différences essentielles concernant les niveaux des première et troisième résonances. L'interprétation de ces écarts peut alors se faire, de nouveau, en termes de rendement électroacoustique.

### **V.3.3 Analyse du comportement du T2b pour une excitation différenciée des céramiques**

Si on considère, sur la figure (III.8) par exemple, les déformations relatives des différentes céramiques d'une colonne motrice, on constate que, suivant les positions que ces céramiques occupent par rapport aux plans nodaux, elles peuvent être de signes opposés. Certaines céramiques sont ainsi en état de compression alors que d'autres sont en état de dilatation. Or, l'excitation électrique classique consiste à appliquer la même différence de potentiel à toutes les céramiques. On peut donc penser que, suivant la position et la fréquence, l'effet de cette excitation est constructif ou destructif par rapport au mouvement d'ensemble de la colonne motrice. Pour modifier ce point, l'idée proposée par le G.E.R.D.S.M. [140] consiste, suivant le mode que l'on veut privilégier, à différencier par opposition de phase l'excitation des céramiques compte tenu des positions qu'elles occupent par rapport aux plans nodaux, les plans nodaux ayant été repérés initialement par une analyse modale par

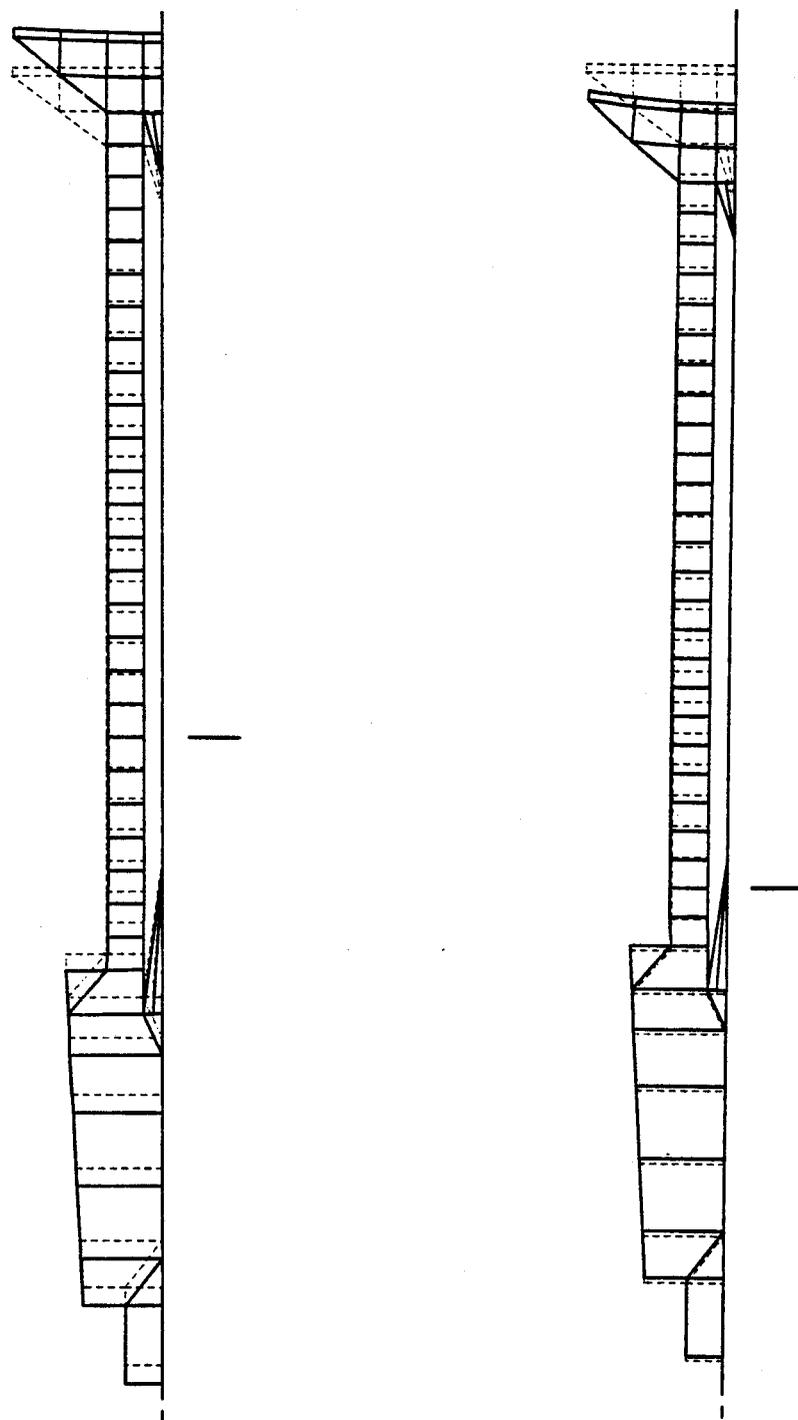


Figure V.16 . Représentation schématique de la déformation du T2b à la fréquence normée de 0.922 . A gauche, partie imaginaire du champ de déplacement, à droite, partie réelle .

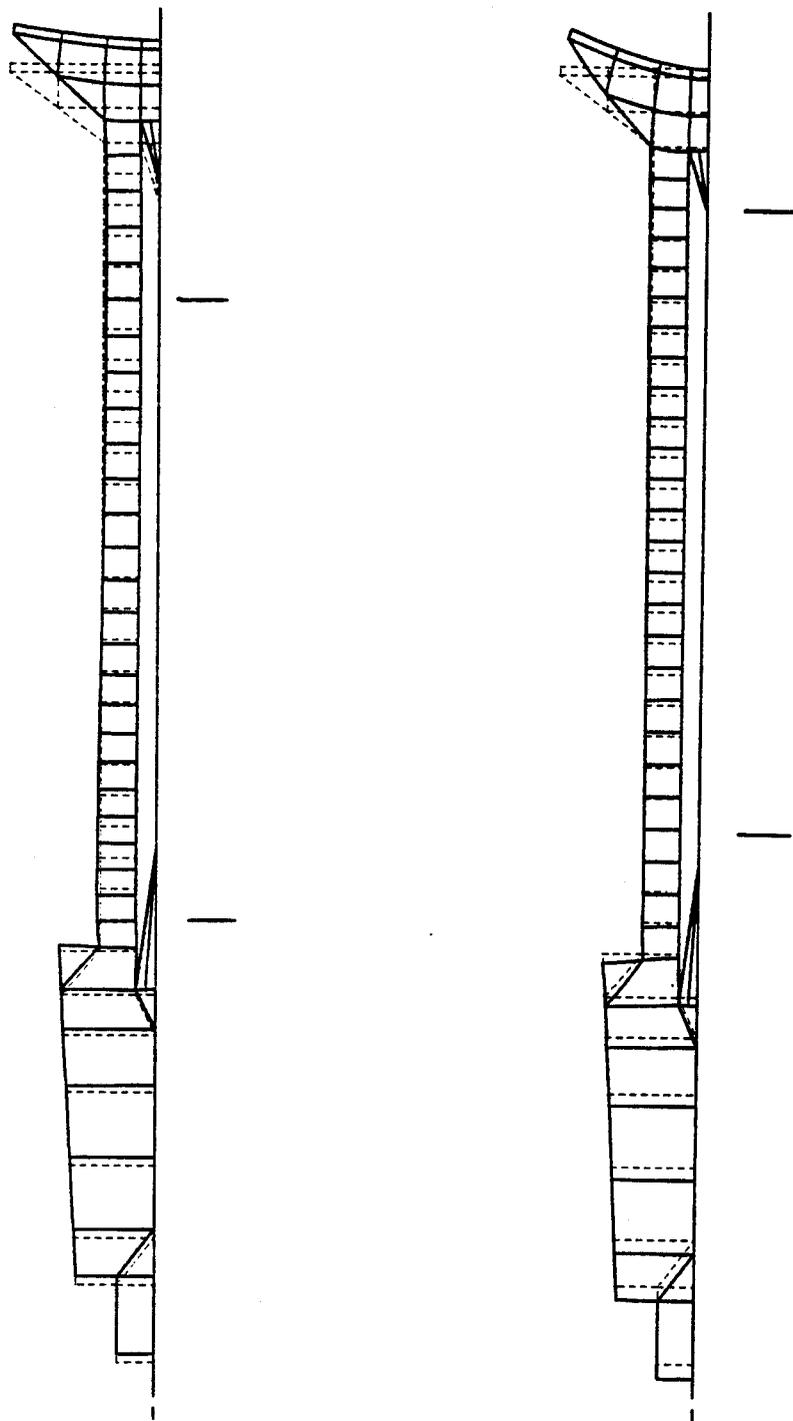


Figure V.16 . Suite . Fréquence normée 2.27 .

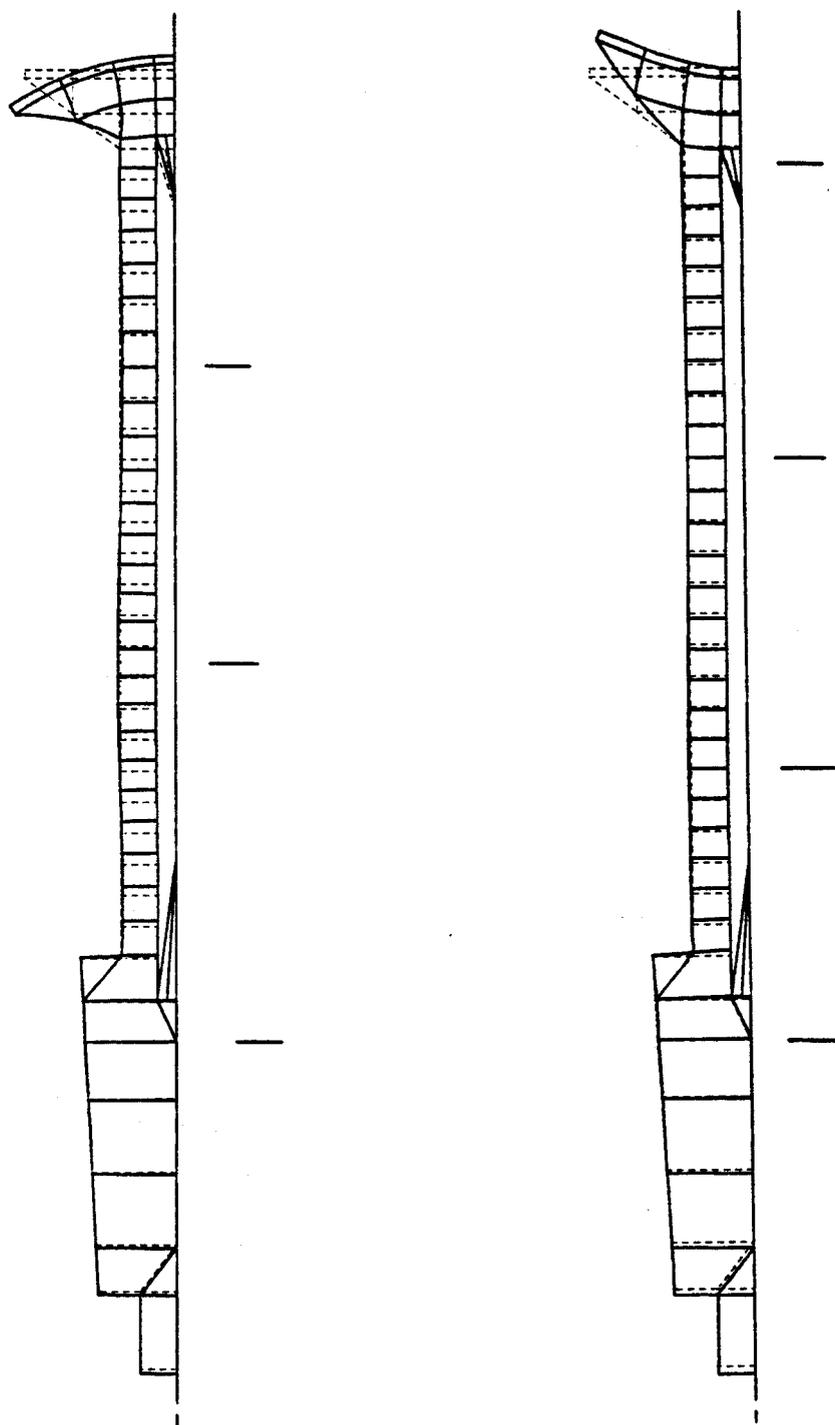


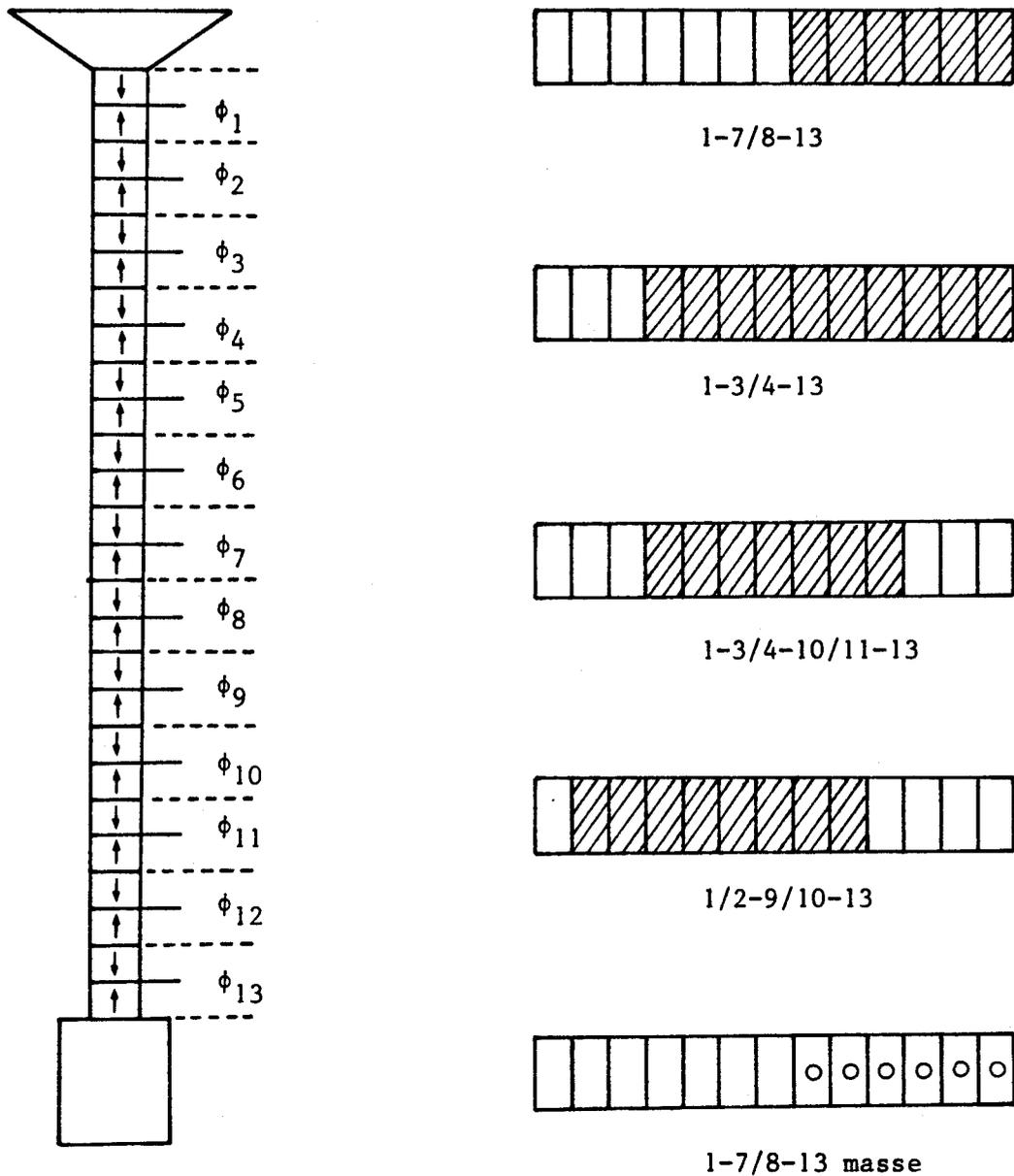
Figure V.16 . Suite . Fréquence normée 4.73 .

éléments finis ou, si le transducteur existe déjà, par une analyse des phases des différences de potentiel induites sur les céramiques par une excitation sonore du Tonpiz utilisé comme récepteur. Le bien fondé de cette proposition est confirmé par les figures (V.18) à (V.22) qui comparent les courbes de variation des réponses en tension calculées et mesurées pour les différentes excitations électriques décrites sur la figure (V.17) et par le tableau ci-après qui met en évidence les couplages électriques forts par une analyse modale en antirésonance. On constate en effet que la répartition et l'amplitude des extrêmes des courbes de réponse sont largement affectées par le type de l'excitation électrique utilisée, favorisant ainsi l'une ou l'autre bande de fréquence.

Dans le premier cas, noté (1-7/8-13) par référence à la numérotation des groupes de la figure (IV.17), le maximum associé au mode fondamental est fortement réduit, la totalité des céramiques de la colonne motrice étant soit en état de compression, soit en état de dilatation. Par contre, le maximum associé au second mode de dilatation-compression est, lui, fortement renforcé, la séparation entre les deux zones d'excitations opposées coïncidant avec la séparation entre les zones de dilatation et de compression. Il en est de même pour le mode de papillonnage, le troisième mode de dilatation-compression restant, lui, non couplé. La figure (V.23) illustre cette interprétation, de même que la colonne (1) du tableau suivant.

Dans le second cas, noté (1-3/4-13), le premier mode reste raisonnablement couplé alors que le second est renforcé par la répartition de l'excitation. Toutefois, c'est le troisième mode de dilatation-compression, situé à la fréquence normée de 3.72, qui bénéficie le plus de cette nouvelle répartition. Cette dernière remarque est encore plus vraie dans le cas de l'excitation (1-3/4-10/11-13), la figure (V.23) confirmant que, cette fois, l'adéquation entre la répartition de l'excitation et les zones de dilatation ou de compression est quasi parfaite. Les mêmes interprétations peuvent évidemment être développées pour les deux derniers cas.

Il est intéressant de noter, du point de vue du comportement du transducteur, que les fréquences correspondant aux minima des courbes de réponse dépendent nettement du mode d'excitation. Ainsi le premier minimum est à la fréquence 2.00 pour l'excitation normale et l'excitation (1-3/4-10/11-13), à la fréquence 1.25 pour les excitations (1/2-9/-10-13) et (1-7/8-13 à la masse), à la fréquence 2.75 pour l'excitation (1-3/4-13) et enfin à la fréquence 3.60 pour l'excitation (1-7/8-13). Par ailleurs, il faut remarquer que les



Numérotation des groupes  
de céramiques .

Figure V.17 . Représentation schématique des différentes excitations  
du T2b . (  $\square$  phase de référence,  $\text{\textbackslash}$  déphasage  
180°,  $\circ$  à la masse ) .

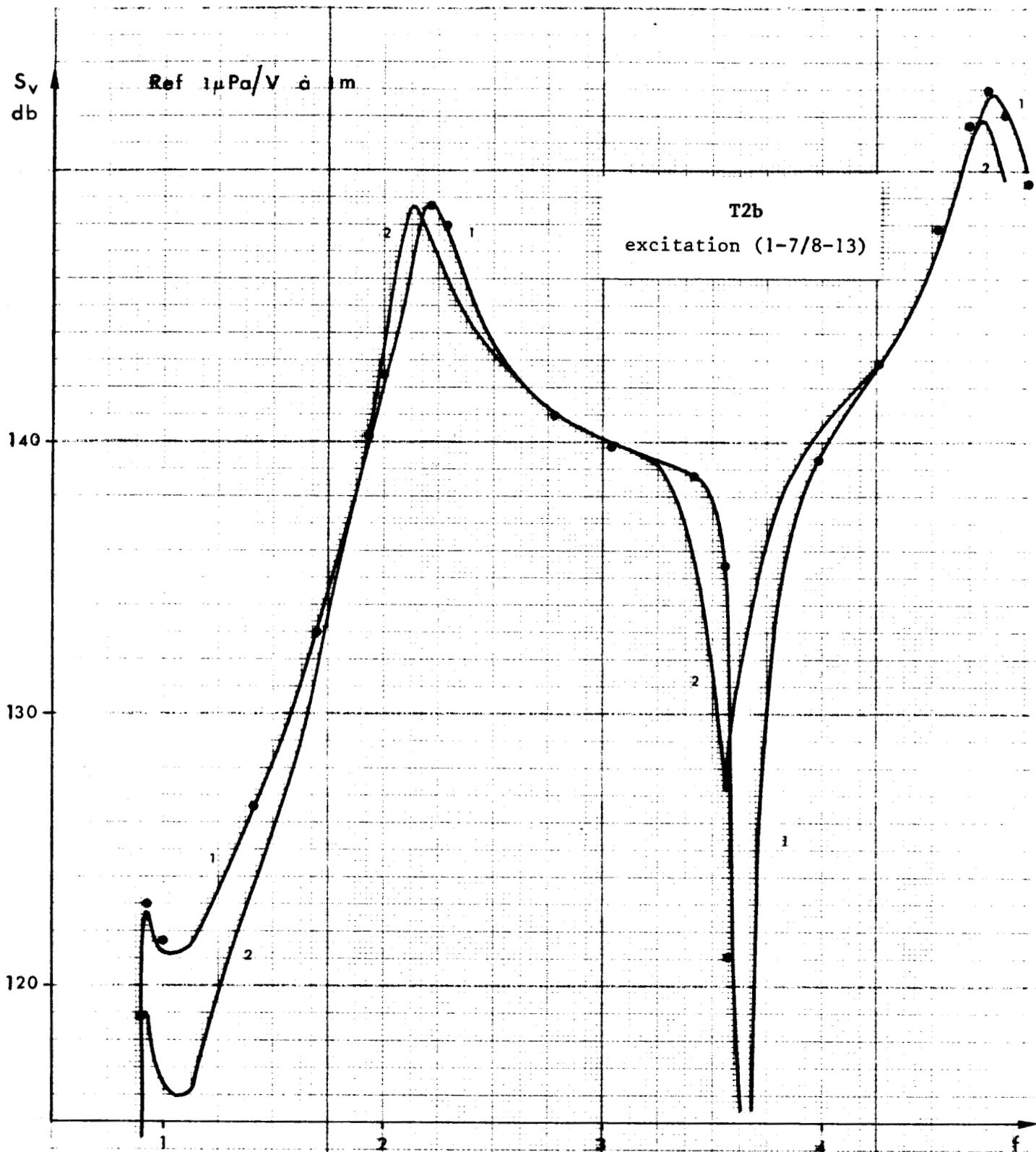


Figure V.18 . Variations avec la fréquence normée des réponses en tension mesurée (2) et calculées par éléments finis (1) ou par méthode mixte (●) pour le Tonpilz T2b en excitation (1-7/8-13) .

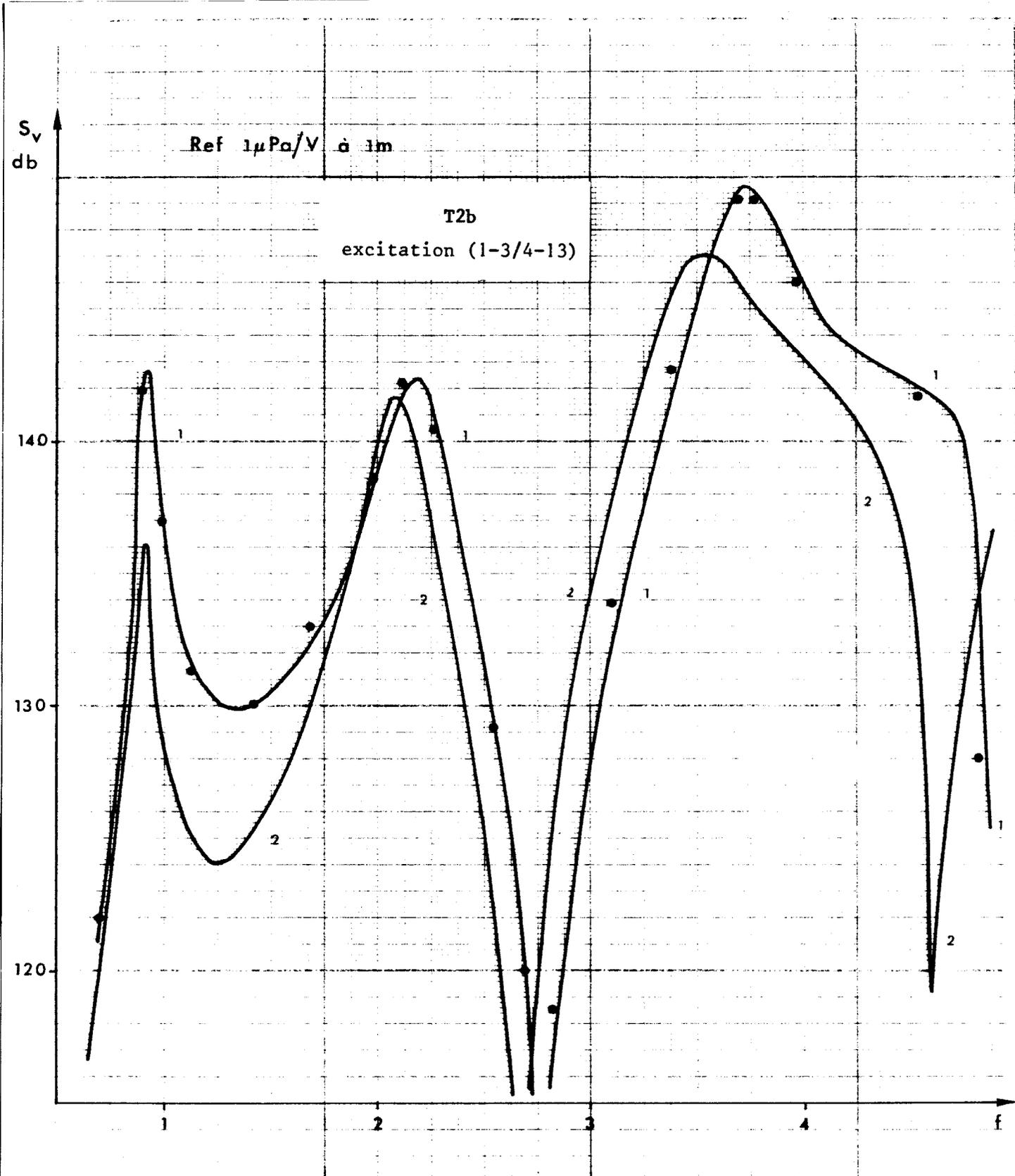


Figure V.19 . Variations avec la fréquence normée des réponses en tension mesurée (2) et calculées par éléments finis (1) ou par méthode mixte (●) pour le Tonpilz T2b en excitation (1-3/4-13) .

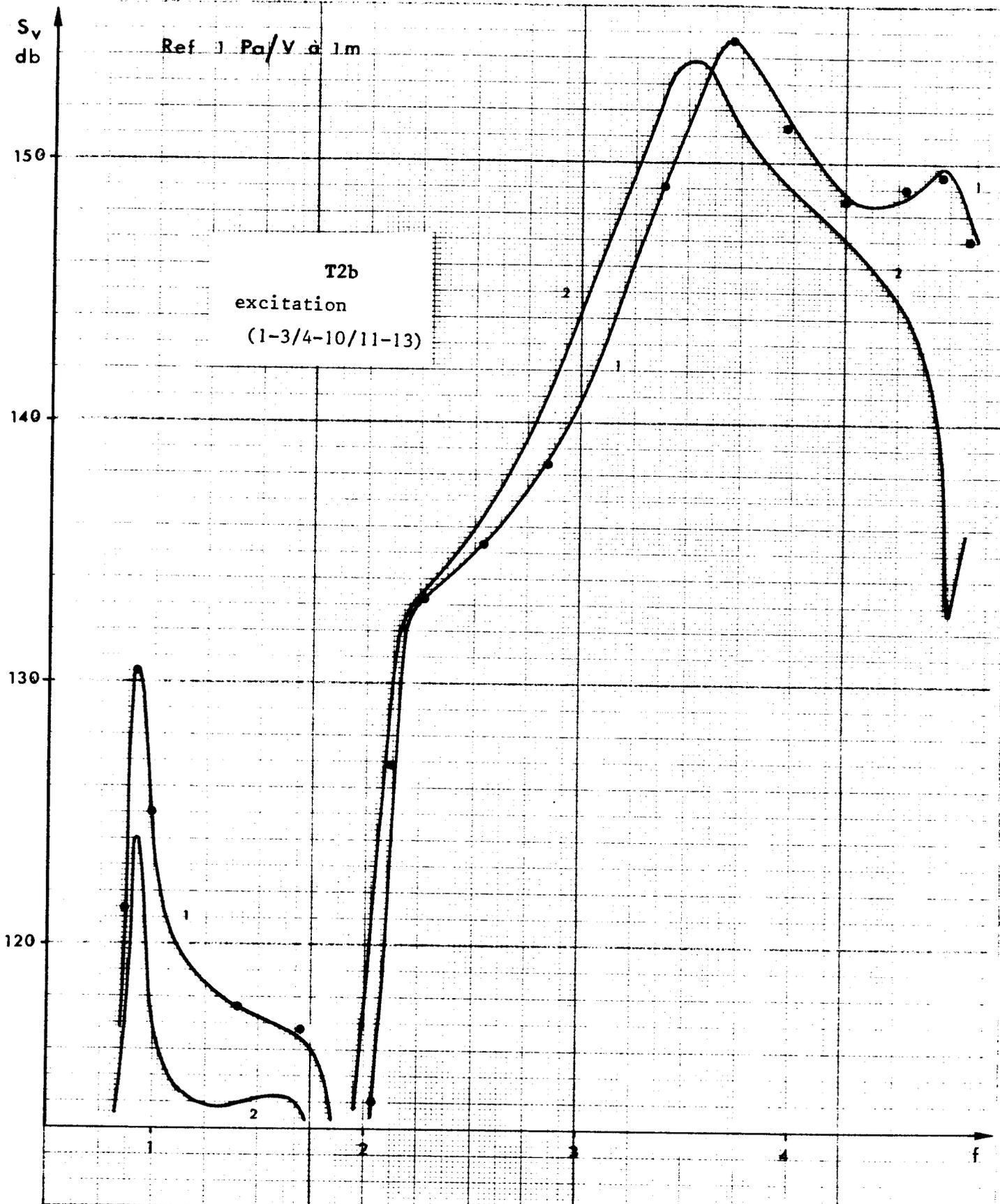


Figure V.20 . Variations avec la fréquence normée des réponses en tension mesurée (2) et calculées par éléments finis (1) ou par méthode mixte ( ) pour le Tonpils T2b en excitation (1-3/4-10/11-13) .

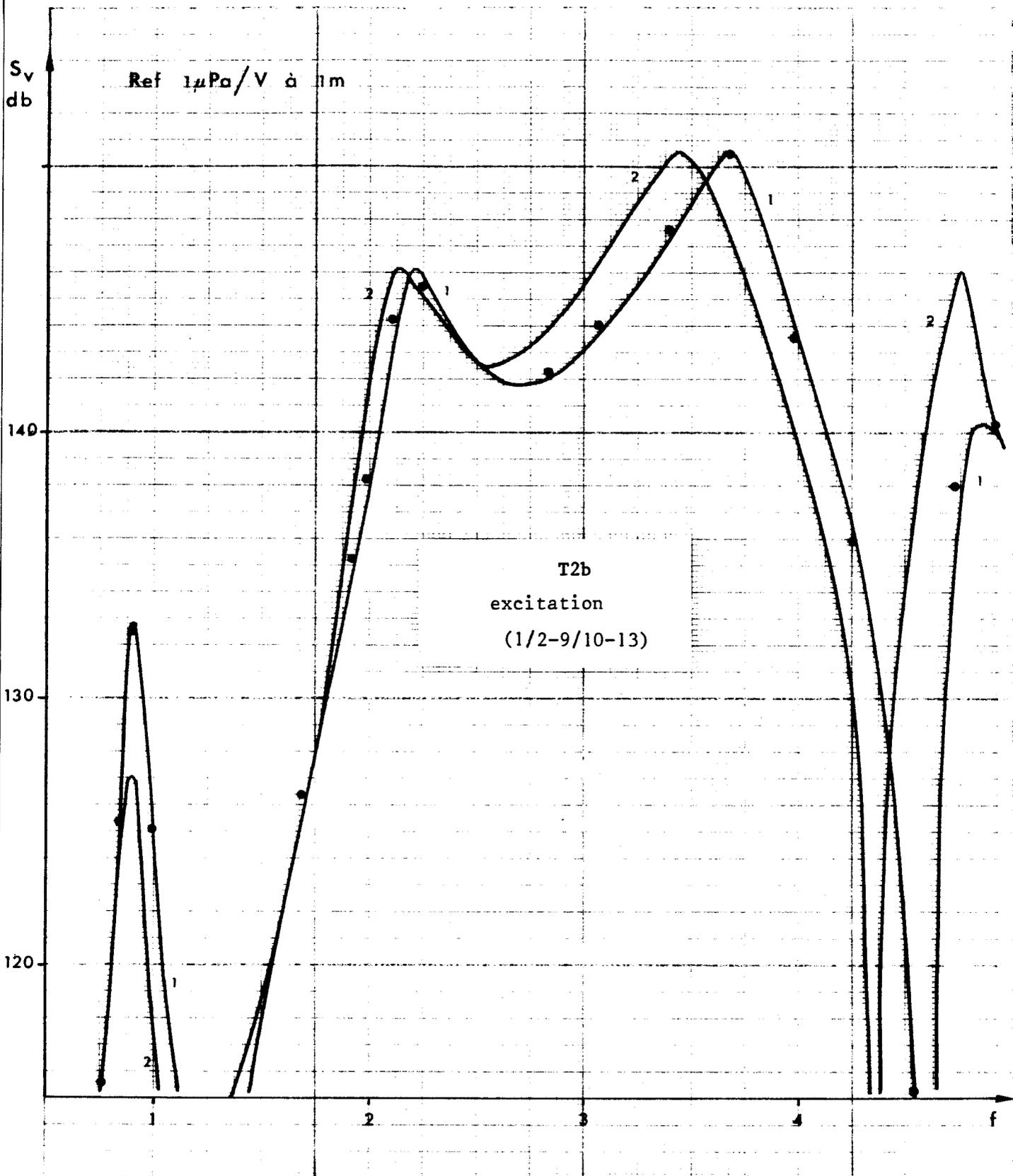


Figure V.21 . Variations avec la fréquence normée des réponses en tension mesurée (2) et calculées par éléments finis (1) ou par méthode mixte (●) pour le Tonpilz T2b en excitation (1/2-9/10-13) .

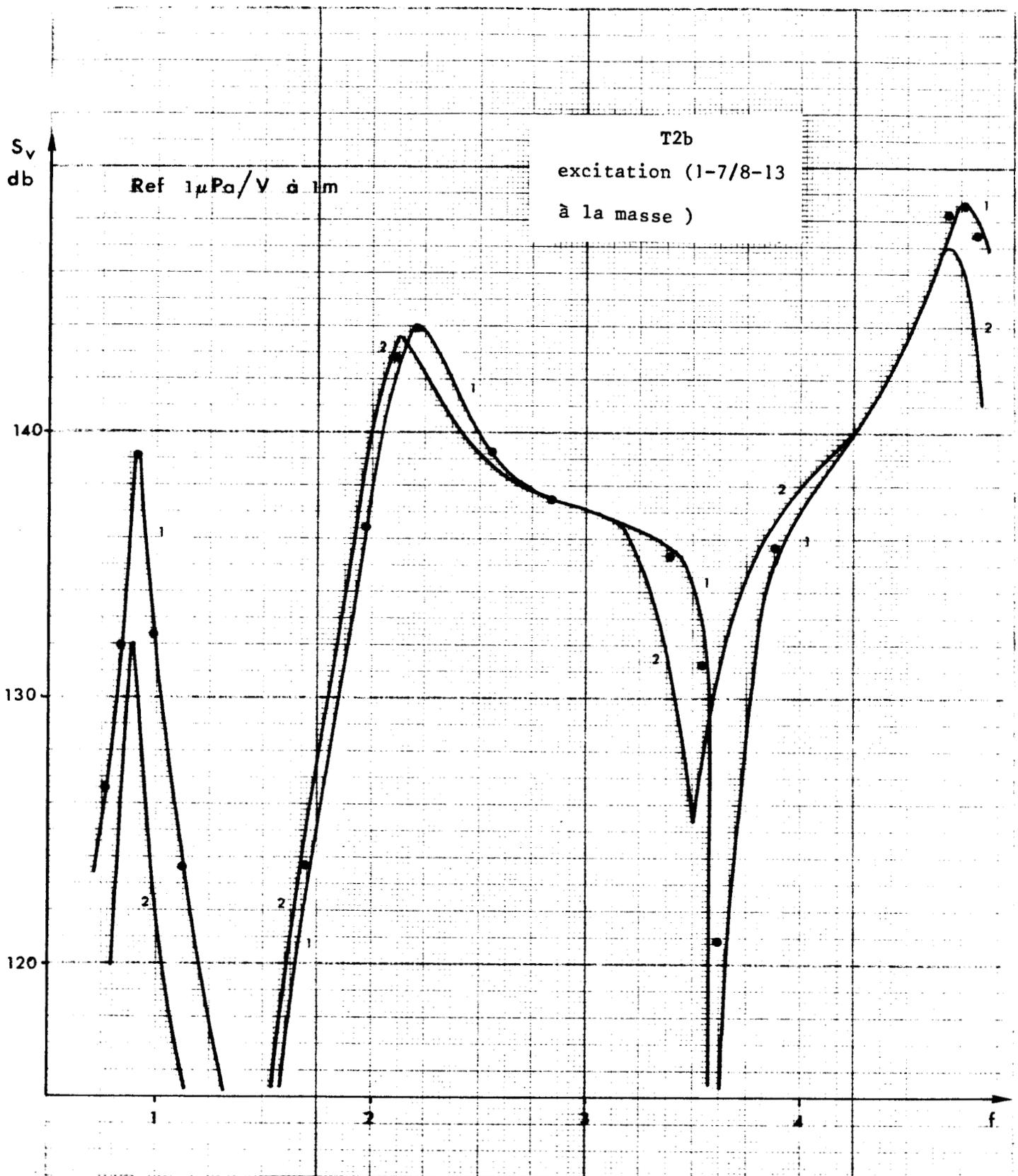


Figure V.22 . Variations avec la fréquence normée des réponses en tension mesurée (2) et calculées par éléments finis (1) ou par méthode mixte (●) pour le Tonpilz T2b en excitation (1-7/8-13 à la masse) .



Analyse modale du T2b avec excitations différenciées des céramiques.  
Calcul des fréquences d'antirésonance (même norme qu'en (II.4.2)).

N°	Nature du mode	Résonance	Antirésonance			
			(1)	(2)	(3)	(4)
1	1er mode dil. comp.	1.01	1.01	1.09	1.01	1.01
2	2e mode dil. comp.	2.35	<u>2.68</u>	2.39	2.36	<u>2.49</u>
4	3e mode dil. comp.	3.80	3.80	<u>3.94</u>	<u>4.23</u>	<u>3.94</u>
5	1er papillon- nage	5.11	<u>5.23</u>	5.12	5.11	5.13
7	4e mode dil. comp.	6.03	6.04	6.04	<u>6.11</u>	6.04

- (1) : excitation 1-7/8-13
- (2) : excitation 1-3/4-13
- (3) : excitation 1-3/4-10/11-13
- (4) : excitation 1/2-9/10-13

Ces valeurs sont calculées avec une tige de masse volumique réduite à 1/100 (cf (V.1.3)). Les valeurs soulignées correspondent à des couplages électriques forts induits par modification de l'excitation électrique.

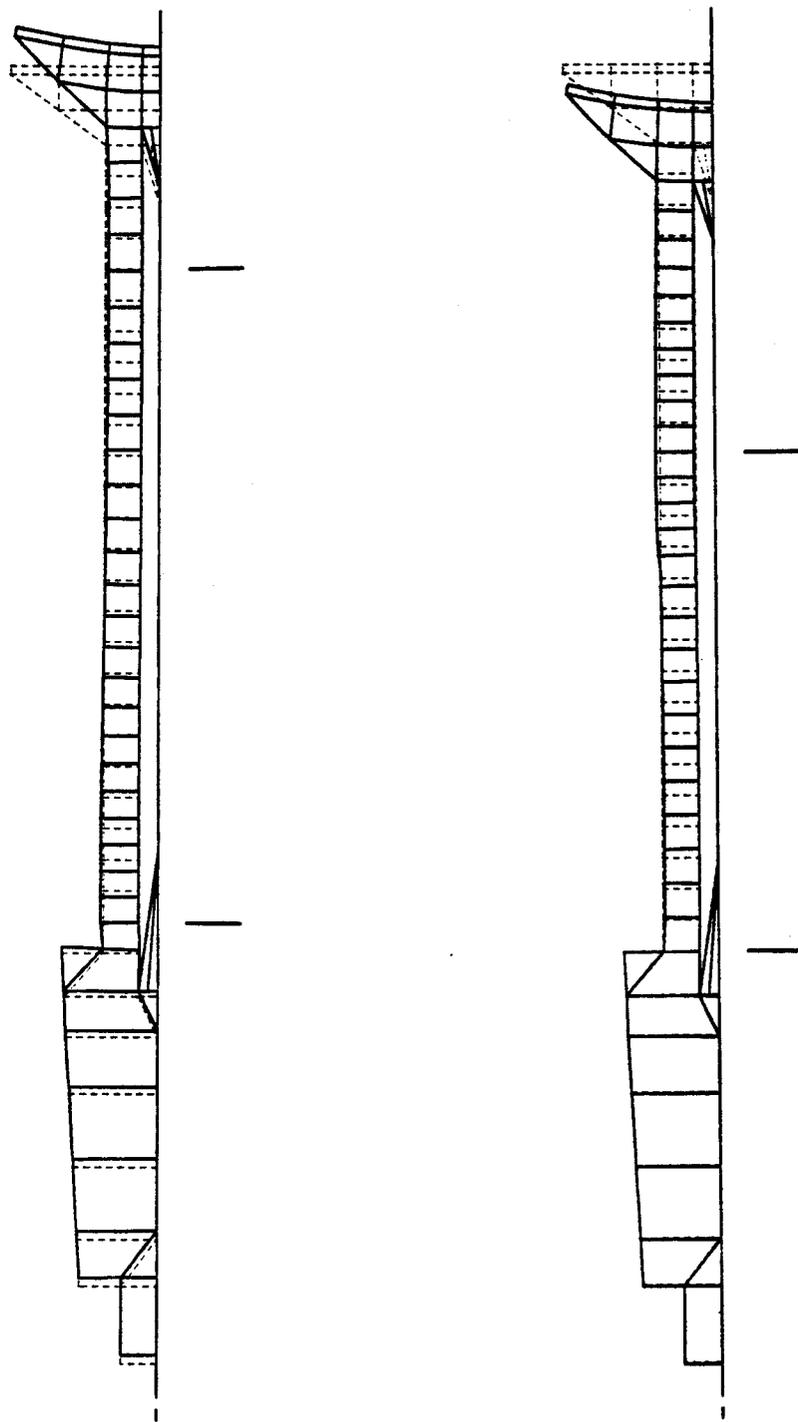


Figure V.24 . Représentation schématique de la déformation du T2b en excitation (1-7/8-13), à la fréquence normée de 2.18 (à gauche, partie imaginaire, à droite, partie réelle) .

les déformations de la colonne motrice sous excitation différenciée présentent des irrégularités que ne produit pas l'excitation normale. Ce fait est démontré, par exemple, par la figure (V.24) qui montre la déformation du T2b sous l'excitation (1-7/8-13) à la fréquence normée de 2.18.

Du point de vue de la comparaison entre résultats numériques et expérimentaux, les courbes (V.18) à (V.22) témoignent d'un accord remarquable quant à la description des différentes structures, maximas et minimas, et à leurs fréquences. En outre, l'accord sur les niveaux est en général meilleur que pour le T2a ou le T2b à excitation normale, ce qui justifie des valeurs du rendement électromécanique mesuré assez élevées.

#### V.4 APPLICATION DE LA METHODE MIXTE

La méthode mixte, telle qu'elle est décrite dans la section (III.6), peut évidemment être appliquée au problème du rayonnement d'un transducteur Tonpiliz. Dans ce cas, comme en (III.6), l'ensemble de la colonne motrice est analysé par onde plane, le déplacement normal de l'interface entre colonne motrice et pavillon est supposé uniforme et égal à  $U_d$  et la force  $F_d$  de l'équation (IV.89) est remplacée par un vecteur à une seule composante :

$$F_d = K_o U_d + p_\phi$$

avec les notations des équations (III.1) à (III.4). La technique de résolution est alors la même qu'en (IV.4.3.b). La substitution arrière dans le modèle d'onde plane, qui fournit le champ de déplacement en tout point de la colonne motrice, est menée comme pour une analyse modale mais en tenant compte, cette fois, du caractère complexe du vecteur  $U_d$ .

Pour chacun des cas étudiés dans ce chapitre, la détermination de la réponse en tension a été reprise par la méthode mixte avec le même maillage du domaine fluide que pour le calcul complet par éléments finis. La figure (V.13) présente ainsi le maillage utilisé par méthode mixte pour le T2b. La comparaison avec les résultats obtenus par éléments finis est réalisée sur les figures (V.8), (V.15) et (V.18) à (V.22). Pour le T2b, l'accord est parfait. Pour le T2a, le niveau du second maximum et la fréquence du second minimum sont légèrement différents (+ 2db pour le niveau, + 3% pour la fréquence), mais, globalement, l'accord est aussi bon. Enfin, la figure (V.10) compare les champs de déplacement du pavillon obtenus avec les deux approches

pour les fréquences 0.81, 2.02, 3.17 et 4.68. Ils sont identiques. De plus, l'économie de ressources informatiques réalisée par rapport à un calcul complet par éléments finis est considérable, plus importante encore que pour l'analyse modale de la section (III.6). Typiquement, un facteur quatre ou cinq est gagné sur la taille des tableaux et le temps CPU de l'assemblage, un facteur deux ou trois sur le temps CPU de la résolution, à nombres de degrés maîtres fluides identiques. La qualité des résultats et l'importance de l'économie peuvent justifier pleinement un recours systématique à cette méthode.

## V.5 CONCLUSION

L'analyse détaillée du fonctionnement des Tonpilz T2a et T2b en condition de rayonnement montre que :

- les courbes de réponse en tension présentent des structures importantes. Les maximas sont associés sans ambiguïté aux différents modes de résonance du transducteur. Les minimas correspondent à l'entrée dans la structure de plans nodaux supplémentaires et sont inhérents au Tonpilz.
- les fréquences des modes du transducteur peuvent être fortement modifiées par l'effet du rayonnement, des glissements de 20% en valeurs relatives ayant été obtenus.
- les champs de déplacement fournis par l'analyse modale sont très semblables à ceux calculés dans les conditions de rayonnement. En particulier, les effets de papillonnage apparaissent à des fréquences souvent assez basses et peuvent exclure le recours à l'analyse par onde plane uniquement.
- certains modes non couplés dans l'air se couplent fortement lorsque le transducteur est immergé.
- une excitation différenciée des céramiques de la colonne motrice permet de modifier notablement les fréquences et niveaux des maximas de la courbe de réponse en tension.
- le papillonnage du pavillon peut modifier complètement la directivité du transducteur, suivant la position des lignes nodales sur la face parlante.

Ces résultats, qui fournissent une interprétation complète du comportement du transducteur Tonpilz dans une large gamme de fréquence, vont aider à la conception de dispositifs nouveaux en permettant de s'affranchir des limites classiques des modèles de schémas équivalents ou d'onde plane. Par ailleurs, ils constituent une importante validation du code ATILA en montrant qu'il est capable de

reproduire en détail et aux mêmes fréquences toutes les structures d'une courbe de réponse en tension. Ils en indiquent aussi une limite, liée au problème de rendement électroacoustique, due à l'ignorance des effets de dissipation interne. Enfin, la méthode mixte paraît être le meilleur compromis précision/coût chaque fois que la colonne motrice présente un caractère unidimensionnel marqué.

## CONCLUSION

Les résultats obtenus lors de cette thèse ont conduit au développement du code ATILA dont ce rapport présente les principes et les applications essentielles. Ce code permet la modélisation à l'aide de la méthode des éléments finis de transducteurs piézoélectriques rayonnant ou non dans un fluide environnant. La géométrie des structures étudiées peut être quelconque, à symétrie axiale ou réellement tridimensionnelle. Les champs représentés par les interpolations classiques de la méthode des éléments finis sont le déplacement dans la partie élastique, le potentiel électrique dans la partie piézoélectrique et la pression dans le fluide. Le déplacement et le potentiel électrique sont couplés dans le volume piézoélectrique par les équations constitutives du matériau. Le déplacement et la pression sont couplés en tout point de l'interface fluide-structure par les relations de couplage dynamique et cinématique. Enfin, le rayonnement est pris en compte en imposant sur une surface sphérique qui entoure le maillage fluide une condition de non-réflexion, exacte en champ lointain, bien adaptée au problème de projecteurs isolés de type monopolaire, i.e à vitesse volumique non nulle.

Ce code permet l'analyse modale ou harmonique de structures mécaniques ou électromécaniques dans l'air, la résolution de problèmes de couplage fluide-structure en espace fermé ou ouvert et, en particulier, l'analyse harmonique de transducteurs piézoélectriques en condition de rayonnement. Dans tous les cas évoqués, il a été testé avec succès par rapport à d'autres résultats numériques ou analytiques ou par rapport à des mesures, réalisées en particulier au G.E.R.D.S.M. Plusieurs transducteurs Tonpiliz ont notamment servis à la validation en permettant de montrer que le code reproduit correctement leurs réponses en tension dans de larges gammes de fréquence. Par ailleurs, P. TIERCE [53] et R. BOSSUT [56] ont réalisé avec succès les mêmes validations, respectivement pour un transducteur Isabelle et pour des anneaux de céramique à immersion libre. Le code est donc actuellement

opérationnel et prêt à aider à un travail de conception de transducteurs nouveaux. Avec des approches souvent différentes, il permet de réaliser les multiples applications des codes américains évoquées en introduction et il a fourni, à notre connaissance pour la première fois, les résultats d'une simulation tridimensionnelle d'un transducteur rayonnant [51]. Dans ce dernier cas, la méthode mixte, qui allie la simplicité d'une analyse par onde plane aux nombreuses possibilités des éléments finis, s'avère très utile.

Du point de vue de l'acoustique, l'analyse détaillée du fonctionnement du Tonpiz a été réalisée dans une large bande, bien au delà de sa gamme de fréquence habituelle. Après avoir explicité le problème de l'interaction entre le mouvement de dilatation-compression de la colonne motrice et le mouvement de flexion du pavillon, mettant en évidence les modes de papillonnage, et prouvé l'existence des modes de tige, nous avons identifié l'origine des nombreuses structures des courbes de variation de la réponse en tension en fonction de la fréquence. Ainsi, les maximas sont directement reliés aux modes de résonance et les minimas profonds à l'introduction dans le transducteur de plans nodaux supplémentaires, effets qui sont inhérents à la structure Tonpiz. Enfin, sur une idée proposée par le G.E.R.D.S.M., nous avons analysé les possibilités d'une excitation électrique différenciée des céramiques, vérifiant ainsi que les variations avec la fréquence du niveau d'émission peuvent, dans une large mesure, être ajustées. Hormis la compréhension qu'elles apportent, ces conclusions sont intéressantes car elles prouvent l'efficacité de ces simulations numériques dans une opération de conception.

D'autres applications ou extensions de la méthode et du code sont d'ores et déjà à l'étude : analyse de l'interaction entre deux transducteurs, modélisation de transducteurs utilisant des flexions de coques minces, modélisation d'antennes linéaires, analyse des effets de baffle ou de boîtier... Par contre, d'autres problèmes ne sont actuellement qu'au niveau de l'approche théorique. L'un d'eux est la prise en compte des pertes internes dont l'influence sur les valeurs des niveaux d'émission et des impédances est très importante au voisinage des résonances. Si leur traitement par éléments finis est, dans certains cas, classique [21,45], la mesure des paramètres caractéristiques des matériaux est souvent difficile, de même que l'identification des pertes associées aux interfaces. L'autre problème, plus fondamental, est la possibilité d'analyser des dispositifs de grandes tailles : antennes comportant plusieurs dizaines de projecteurs, dômes SONAR... En l'état actuel avec des

ressources informatiques classiques, ces problèmes sont hors de portée. Toutefois, du point de vue structure, grâce à la méthode mixte par exemple, des solutions sont envisageables aisément. L'effort doit donc porter sur la prise en compte du rayonnement, à l'aide d'éléments rayonnants d'ordres plus élevés (dipolaires...) [54-56,112] ou des développements récents des méthodes d'équations intégrales [128,129,141].



## REFERENCES

1. L.L. BERANEK, "Acoustics", Ed. Mc Graw Hill, (1954).
2. P.M. MORSE, "Vibration and Sound", Ed. American Institute of Physics, (1976).
3. D.A. BERLINCOURT, D.R. CURRAN, H. JAFFE, dans "Physical Acoustics, principles and methods", Vol. 1, Ed. par W.P. MASON, Academic Press, (1964).
4. W.P. MASON, "Electromechanical transducers and wave filters", Ed. Van Nostrand, (1976).
5. G.E. MARTIN, J.A.S.A., 35, 510, (1963). J.A.S.A., 36, 1366, (1964) et J.A.S.A., 36, 1496, (1964).
6. W. Mc GUIRE, R.H. GALLAGHER, "Matrix structural analysis", Ed. Wiley and Sons, (1979).
7. Lord RAYLEIGH, "Theory of sound", Vol.2, Sec. 278, Ed. Dover N.Y., (1945).
8. H. LEVINE, J. SCHWINGER, Phys. Rev., 73, 383, (1948).
9. D.H. STENZEL, O. BROSZE, "Leitfaden zur Berechnung von Schallvorgängen, Ed. Springer Verlag, (1958).
10. M. GREENSPAN, J.A.S.A., 65, 608, (1979).
11. O. BRANDT, "Le transducteur de type Tonpilz", rapport N° 14505 DSM/B du laboratoire DSM du Brusco, (1956).
12. M.J. EARWICKER, "Mathematical modelling of piezoelectric transducers", A.U.W.E. technical note 482/73, (1973).
13. E.A. NEPPIRAS, "Ultrasonics International 1973 Conference proceedings, p. 295, (1973).
14. D.F. Mc CAMMON, W. THOMSON Jr, J.A.S.A., 68, 754, (1980).
15. R. HOLLAND, E.P. EER NISSE, "Design of resonant piezoelectric devices", Research monograph N° 56, M.I.T. Press, (1969).
16. H.A. SCHENCK, J.A.S.A., 44, 41, (1968).
17. L.G. COPLEY, J.A.S.A., 41, 807, (1967) et J.A.S.A., 44, 28, (1968).
18. G. CHERTOCK, J.A.S.A., 36, 1305, (1964).
19. J.P.D. WILKINSON, M.J. DA COSTA, Winter annual meeting of the A.S.M.E., paper N° 70-WA/DE.7, New-York, (1970).
20. R.A. NELSON Jr, L.H. ROYSTER, J.A.S.A., 49, 1609, (1971).
21. O.C. ZIENKIEWICZ, "The finite element method", Ed. Mc Graw Hill, (1977).
22. J.T. HUNT, R.R. SMITH, D. BARACH, I.E.E.E. Region six conference proceedings, p. 100, (1972).

23. H. ALLIK, K.M. WEBMAN, J.T. HUNT, J.A.S.A., 56, 1782, (1974).
24. H. ALLIK, "MARTSAM II - A general structural analysis and matrix system", MART program report Vol. 6, (1971) et "Piezoelectric finite element analysis of axisymmetric solids", MART program report Vol. 7, (1971).
25. R.R. SMITH, J.T. HUNT, D. BARACH, J.A.S.A., 54, 1277, (1973).
26. J.T. HUNT, M.R. KNITTEL, D. BARACH, J.A.S.A., 55, 269, (1974).
27. J.T. HUNT, M.R. KNITTEL, C.S. NICHOLS, D. BARACH, J.A.S.A., 57, 287, (1975).
28. M.R. KNITTEL, C.S. NICHOLS, D. BARACH, J.A.S.A., 58, 983, (1975).
29. M.R. KNITTEL, C.S. NICHOLS, R.R. SMITH, D. BARACH, J.A.S.A., 56, 1905, (1974).
30. G.W. Mc MAHON, B.A. ARMSTRONG, Proceedings of the conference on transducers for sonar applications, Birmingham G.B., (1980).
31. B.A. ARMSTRONG, G.W. Mc MAHON, 102nd ASA meeting, Miami, (1981).
32. E.F. RYNNE, 102nd ASA meeting, Miami, (1981).
33. S. SPRATT, "Finite element analysis of low frequency Helmholtz resonator transducers", Naval Undersea Center Research Report TN 1614, (1975).
34. R.R. SMITH, D. BARACH, C.S. NICHOLS, L. Mc CLEARY, M. CARLSON, "Towed array analysis package for self noise analysis of towed sonar array using finite element techniques", US Sensor and Information Technology department, (1974).
35. Y. KAGAWA, T. YAMABUCHI, I.E.E.E. Trans. Sonics Ultrasonics, SU23, 379, (1976) et SU26, 81, (1979).
36. D. BOUCHER, C. LAGIER, M. MAERFELD, Ultrasonics Symposium proceedings, I.E.E.E., (1979).
37. D. BOUCHER, "Calcul des modes de vibration de transducteurs piézoélectriques par une méthode de perturbation appliquée à l'analyse par éléments finis", Thèse, Université du Maine, (1979).
38. H. CARRU, Electron. Lett., 15, 805, (1979).
39. J.L. CARTON, J.C. DEBUS, J.N. DECARPIGNY, J. POULIQUEN, Convention de recherche N° C.79.48.826.219 avec le GERDSM, rapport de synthèse, (1979).
40. J.C. DEBUS, J.N. DECARPIGNY, P. TIERCE, T.S.M. N° S.81.48.826.159.T pour le G.E.R.D.S.M., rapport final, (1983).
41. J.L. CARTON, J.C. DEBUS, J.N. DECARPIGNY, T.S.M. N° S.80.48.826.329.T pour le GERDSM, rapport final, (1982).
42. J.N. DECARPIGNY, J.C. DEBUS, B. TOCQUET, D. BOUCHER, 102nd ASA meeting, Miami, (1981).
43. J.N. DECARPIGNY, J.C. DEBUS, B. TOCQUET, D. BOUCHER, Compte rendus des deuxièmes journées sur les tendances nouvelles en calcul de structures, Sophia Antipolis, Ed. DRET/CELAR, (1982).

44. J.L. CARTON, J.C. DEBUS, J.N. DECARPIGNY, P. TIERCE, Convention de recherche N° C.81.48.826.309 avec le GERDSM, premier rapport d'avancement, (1982).
45. J.C. DEBUS, J.N. DECARPIGNY, T.S.M. N° S.82.48.826.513.T, rapport final, (1984).
46. *ATILA est le sigle du code (Analyse de Transducteurs par Intégration des équations de Laplace), sur une proposition de D. BOUCHER.*
47. M. GERADIN, Bulletin de l'ATMA, 78, 167, (1978).
48. P. TIERCE, J.N. DECARPIGNY, T.S.M. N° S.82.48.826.268.T pour le GERDSM, rapport final (1983).
49. J.N. DECARPIGNY, J.C. DEBUS, P. TIERCE, B. TOCQUET, D. BOUCHER, 106th ASA meeting, San Diego, (1983).
50. J.C. DEBUS, J.N. DECARPIGNY, P. TIERCE, Convention de recherche N° C.82.48.826.291 avec le GERDSM, premier rapport d'avancement, (1983).
51. D. BOUCHER, B. TOCQUET, J.C. DEBUS, P. TIERCE, 106th ASA meeting, San Diego, (1983).
52. J.N. DECARPIGNY, J.C. DEBUS, P. TIERCE, B. TOCQUET, D. BOUCHER, soumis pour publication au J.A.S.A., (1984).
53. P. TIERCE, Thèse de doctorat-ingénieur, à soutenir en 1984.
54. R. BOSSUT, J.N. DECARPIGNY, 106th ASA meeting, San Diego, (1983).
55. R. BOSSUT, J.N. DECARPIGNY, soumis pour publication au J.A.S.A., (1984).
56. R. BOSSUT, thèse de doctorat-ingénieur, à soutenir en 1984.
57. A.H. CHURCH, "Mechanical vibrations", Ed. Wiley and sons, (1963).
58. F.S. TSE, I.E. MORSE, R.T. HINKLE, "Mechanical vibrations", Ed. Allyn and Bacon, (1963).
59. J. POULIQUEN, C. GRANGER, Compte-rendus des journées d'étude sur l'utilisation des ultrasons dans les techniques de production, Lille, (1980).
60. J.L. BUTLER, J.R. CIPOLLA, W.D. BROWN, J.A.S.A., 70, 500, (1981).
61. O. BRANDT, "Le transducteur de type Isabelle", rapport N° 19276 DSM/B du laboratoire DSM du Brusco, (1979).
62. B. TOCQUET, 89th ASA meeting, (1975).
63. W. WILLIAMS, N.G. PARKE, D.A. MORAN, C.H. SHERMAN, J.A.S.A., 36, 2316, (1964).
64. M.C. JUNGER, M. PERULLI, "Elements d'acoustique physique", Collection Université de Compiègne, Ed. Maloine S.A., (1978).
65. *Les transducteurs annulaires à immersion libre sont regroupés sous le nom de "free flooded cylinders" dans les articles en langue anglaise.*
66. G.W. Mc MAHON, J.A.S.A., 36, 528, (1964).
67. B. TOCQUET, "Les transducteurs", cycle d'enseignement

- d'acoustique sous-marine du Galf, 2ème partie, Marseille, (1974).
68. H. LAMB, "The dynamical theory of sound", Ed. Dover, N.Y., (1960).
  69. J.F. HASKINS, J.L. WALSH, J.A.S.A., 29, 729, (1957).
  70. J.F. ZALESK, P.H. ROGERS, J.A.S.A., 56, 1052, (1974).
  71. *Les transducteurs utilisant les vibrations de flexion d'une coque mince sont regroupés sous le nom de "flexensional transducers" dans les articles en langue anglaise.*
  72. G.A. BRIGHAM, B. GLASS, J.A.S.A., 68, 1046, (1980).
  73. L.H. ROYSTER, J.A.S.A., 45, 671, (1968).
  74. G.A. BRIGHAM, J.A.S.A., 56, 31, (1974).
  75. G. GEORGOPOULOS, L.H. ROYSTER, "Development of a finite element model for the class V flexensional underwater transducer shell", Technical report N° 20, Mechanical and aerospace engineering dpt, NCSU, Rayleigh, U.S.A., (1971).
  76. L. LANDAU, E. LIFCHITZ, "Théorie de l'élasticité, Ed. Mir, (1967).
  77. P.M. MORSE, H. FESBACH, "Methods of theoretical physics", Ed. Mc Graw Hill, Vol. 1, (1953).
  78. R. WEINSTOCK, "Calculus of variations", Ed. Mc Graw Hill (1952).
  79. J.A. LEWIS, B.S.T.J., 60, 1259, (1961).
  80. E.P. EER NISSE, I.E.E.E. Trans. Sonics. Ultrasonics, SU 14, 153, (1967).
  81. R. HOLLAND, E.P. EER NISSE, I.E.E.E. Trans. Sonics. Ultrasonics, SU 15, 119, (1968).
  82. H. ALLIK, T.J.R. HUGHES, Int. J. Num. Meth. Eng., 2, 151, (1970).
  83. J.F. NYE, "Physical properties of crystals", Ed. Clarendon Press, Oxford Univ. Press., (1957).
  84. A. RALSTON, "A first course in numerical analysis", Ed. Mc Graw Hill - Kogakusha Ltd, (1965).
  85. A.R. GOURLAY, G.A. WATSON, "Computational methods for matrix eigenproblems", Ed. J. Wiley and sons, (1973).
  86. G. DAHLQUIST, A. BJÖRCK, "Numerical methods", Ed. Prentice-Hall, (1974).
  87. R.J. GUYAN, A.I.A.A. Journal, 3, 380, (1965).
  88. B.M. IRONS, J. Roy. Aeronaut. Soc., 67, 526, (1963).
  89. C.A. MILLER, J. of the Struct. Div., Proc. of the A.S.C.E., 106, s<sup>t</sup> 10, 2097, (1980).
  90. R.D. HENSHELL, S.M. ONG, Int. J. Earthquake Struct. Dyn., 3, 375, (1975).
  91. V.N. SHAH, M. RAYMUND, Int. J. Num. Meth. Eng., 18, 89, (1982).
  92. J.N. DECARPIGNY, J. POULIQUEN, J.C. DEBUS, R. EDDE, 10th international congress on acoustics, Sydney, (1980).
  93. J.L. CARTON, J.C. DEBUS, J.N. DECARPIGNY, Compte-rendus des

- jours d'étude sur l'utilisation des ultrasons dans les techniques de production, Lille, (1980).
94. M. FETIVEAU, H. OHANESSIAN, Y. FETIVEAU, Rev. Mesures, Régulation, Automatisme, p. 89, Février 1979.
  95. O.C. ZIENKIEWICZ, R.E. NEWTON, Proc. of the international symposium on finite element techniques, Stuttgart, (1969).
  96. R. VALID, Compte-rendus des deuxièmes jours sur les tendances nouvelles en calcul de structures, Sophia Antipolis, Ed. DRET/CELAR (1982).
  97. R.J. URICK, "Principles of underwater sound", Ed. Mc Graw Hill, (1983).
  98. D. ROSS, "Mechanics of underwater noise", Ed. Pergamon Press, (1976).
  99. J.C. DEBUS, J.N. DECARPIGNY, T.S.M. N° S.82.48.826.327.T pour le GERDSM, rapport final, (1982).
  100. J.J. CONNOR, C.A. BREBBIA, "Finite element techniques for fluid flow", Ed. Newnes-Butterworths, (1976).
  101. A. COMBESCURE, R.J. GIBERT, F. JEANPIERRE, A. HOFFMAN, M. LIVOLANT, Computers and Structures, 12, 471, (1980).
  102. F.V. ATKINSON, Phil. Mag., 40, 645, (1949).
  103. C.H. WILCOX, Proc. Amer. Math. Soc., 7, 271, (1956).
  104. C.H. WILCOX, Arch. Rat. Mech., 3, 133, (1959).
  105. A. CRAGGS, J. Sound. Vib., 15, 509, (1971). J. Sound. Vib., 30, 343, (1973).
  106. W.J.T. DANIEL, Int. J. Num. Meth. Eng., 15, 1585, (1980).
  107. H. MORAND, R. OHAYON, Int. J. Num. Meth. Eng., 14, 741, (1979).
  108. W.J.T. DANIEL, Int. J. Num. Meth. Eng., 15, 1161, (1980).
  109. N. AKKAS, H.U. AKAY, C. YILMAZ, Computers and structures, 10, 773, (1979).
  110. J.C. DEBUS, B. HAMONIC, J.N. DECARPIGNY, contrat de recherche N° 81/1118 avec la DRET, rapport final, (1982), et références incluses.
  111. D.V. DEAN, "Finite element study of acoustic waves", thèse, U.S. Naval Postgraduate School, Monterey (1970).
  112. A. BAYLISS, M. GUNZBURGER, E. TURKEL, ICASE report N° 80/1, NASA Langley, (1980).
  113. O.C. ZIENKIEWICZ, P. BETTESS, T.C. CHIAM, C. EMSON, Proc. of the winter annual meeting of the ASME, AMD vol. 46, Ed. A.J. KALINOWSKI, (1981).
  114. R.J. BOBBER, "Underwater electroacoustic measurements", Naval Research Laboratory Technical Report, distribué par D.T.I.C., Dpt of Defense, USA, (1970).
  115. A.E.H. LOVE, "A treatise on the mathematical theory of elasticity", Ch. 12, Ed. Dover, (1944).

116. A.C. ERINGEN, E.S. SUHUBI, "Elastodynamics", p. 804, Ed. Academic Press, (1975).
117. J.A. WOLF, A.I.A.A. Journal, 15, 743, (1977).
118. W. WILLIAMS, N.G. PARKE, D.A. MORAN, C.H. SHERMAN, J.A.S.A., 36, 2316, (1964).
119. M. ABRAMOWITZ, I.A. STEGUN, "Handbook of mathematical functions", Ed. Dover, (1972).
120. G. CHERTOCK, "Integral equation methods in sound radiation and scattering from arbitrary surfaces", technical report 3538, Naval Ship Research and Development Center, Washington, (1971).
121. C.A. BREBBIA, "The boundary element method for engineers", Ed. Pentech Press, (1978).
122. O.C. ZIENKIEWICZ, D.W. KELLY, P. BETTESS, International symposium on innovative numerical analysis in applied engineering science, Versailles (1977).
123. O.C. ZIENKIEWICZ, D.W. KELLY, P. BETTESS, Int. J. Num. Meth. Eng., 11, 355, (1977).
124. O.C. ZIENKIEWICZ, P. BETTESS, D.W. KELLY, dans "Numerical methods in offshore engineering", Ed. O.C. ZIENKIEWICZ, R. LEWIS et K.G. STAGG, Wiley, (1977).
125. R. EATOCK TAYLOR, J. ZIETSMAN, Proc. of the conference on numerical methods for coupled problems, Ed. Pineridge Press (1981).
126. G. DELHOMMEAU, B. PESEUX, J.P. QUEVAT, Proc. of the conference on numerical methods for coupled problems, Ed. Pineridge Press (1981).
127. I.C. MATHEWS, G.W. MUSTOE, Proc. of the conference on numerical methods for coupled problems, Ed. Pineridge Press (1981).
128. M.A. HAMDI, "Formulation variationnelle par équations intégrales pour le calcul de champs acoustiques linéaires proches et lointains", Thèse, Université de Technologie de Compiègne, (1982).
129. M.A. HAMDI, J.B. MARYEM, Compte- rendus des deuxièmes journées sur les tendances nouvelles en calcul de structures, Sophia Antipolis, Ed. DRET/CELAR (1982).
130. P. BETTESS, Int. J. Num. Meth. Eng., 11, 53, (1977).
131. P. BETTESS, O.C. ZIENKIEWICZ, Int. J. Num. Meth. Eng., 11, 1271, (1977).
132. P. BETTESS, Int. J. Num. Meth. Eng., 15, 1613, (1980).
133. O.D. KELLOGG, "Foundations of potential theory", Ed. Dover, (1953).
134. J. GIROIRE, Compte-rendus de la journée d'étude S.E.E. sur les calculs de propagation et diffraction par la méthode des éléments finis, (1979).

135. F. SMITHIES, "Integral equations", Ed. Cambridge University Press, (1958).
136. *Cette approche est utilisée dans le code CHIEF (Combined Helmholtz Integral Equation Formulation) développé par H.A. SCHENCK et al. au NUWC - San Diego- U.S.A.*
137. P. ORSERO, Compte rendus des deuxièmes journées sur les tendances nouvelles en calcul de structures, Sophia Antipolis, Ed. DRET/CELAR (1982).
138. S.S. SAINI, P. BETTESS, O.C. ZIENKIEWICZ, Earth. Eng. Struct. dyn., 6, 363, (1978).
139. D. BOUCHER, "Impédance de rayonnement et index de directivité de pistons circulaires", Note technique 41560 ET/LD, G.E.R.D.S.M., (1983).
140. C. LASALLE "Optimisation de l'excitation des céramiques piézoélectriques d'un transducteur de type Tonpiliz", rapport N° 4116L ET/LD (1983).
141. B. STUPFEL, J.N. DECARPIGNY, T.S.M. N° 83/1085 pour la D.R.E.T., rapport bibliographique, (1984).
142. AMERICAN NATIONAL STANDARD, "Procedures for calibration of underwater electroacoustic transducers", A.N.S.I., S1-20, (1972).
143. D.A.BERLINCOURT, J.A.S.A., 70, 1586, (1981).
144. I.R.E. STANDARDS ON PIEZOELECTRIC CRYSTALS, Proc. I.R.E., 45, 353, (1957) - 46, 764, (1958) - 49, 1161, (1961).
145. P. TIERCE, "Caractérisation des céramiques piézoélectriques", rapport de D.E.A., Université des Sciences et Techniques de Lille, (1981).
146. R. BOSSUT, "Caractérisation des céramiques piézoélectriques", Rapport de D.E.A., Université des Sciences et Techniques de Lille, (1981).
147. J.L. CARTON, "Application de la méthode des éléments finis à la piézoélectricité", rapport de D.E.A., Université des Sciences et Techniques de Lille, (1980).
148. J.C. DEBUS, J.N. DECARPIGNY, B. HAMONIC, P. TIERCE Convention de recherche N° C.82.48.826.398. avec le GERDSM, notice du programme ATILA, (1984).



## ANNEXE 1

### DEFINITION DES CARACTERISTIQUES CLASSIQUES D'UN PROJECTEUR

#### PIEZOELECTRIQUE D'ONDES SONORES

Cette annexe a pour objectif de rappeler les définitions des grandeurs physiques qui caractérisent un projecteur d'ondes sonores utilisé dans un système SONAR, en particulier de celles qui sont déterminées à l'aide du code ATILA. Une discussion détaillée de leurs significations et des moyens mis en oeuvre classiquement pour les mesurer peut être trouvée dans le livre de R.J. BOBBER [114] ou dans les rapports correspondants de l'AMERICAN NATIONAL STANDARD [142].

a) *la réponse en tension ou réponse par volt  $S_v$*

Loin d'un transducteur, l'onde de pression qu'il rayonne est une onde sphérique divergente qui semble provenir d'une source ponctuelle, le *centre acoustique*. L'amplitude de cette onde décroît alors suivant la loi classique en inverse de la distance. Par ailleurs, la pression émise par le transducteur est souvent une fonction rapidement variable de la direction d'émission. Elle présente un maximum dans une direction déterminée appelée *axe principal du transducteur*. Enfin, si le comportement du transducteur est linéaire, l'amplitude de l'onde de pression est directement proportionnelle à la valeur de la tension appliquée à l'entrée. Compte-tenu de ces remarques, on appelle *réponse en tension* ou *réponse par volt  $S_v$*  le rapport de la valeur de la pression acoustique à une distance de référence donnée du centre acoustique, dans la direction de l'axe principal, et de la valeur de la tension appliquée à l'entrée du transducteur. En général, la distance de référence est prise égale à un mètre, même si à cette

distance la condition de champ lointain n'est pas remplie. Dans ce cas, la valeur de la pression utilisée est une valeur effectivement mesurée ou calculée dans le champ lointain et ramenée à un mètre par une règle de trois immédiatement déduite de la loi en inverse de la distance. Par ailleurs, la pression est souvent repérée sur une échelle logarithmique par rapport à une pression de référence  $p_0$ , généralement un micropascal (1  $\mu\text{Pa}$ ), suivant la relation :

$$20 \log_{10} \left( \frac{P}{P_0} \right) \quad (\text{A.1.1})$$

En conséquence, la réponse en tension  $S_v$  s'exprime en décibels, référence un micropascal par volt (1  $\mu\text{Pa/V}$ ), à un mètre.

La réponse  $S_v$  d'un projecteur est une fonction souvent rapidement variable de la fréquence d'émission. Enfin, dans certains cas, elle peut être déterminée dans une direction caractéristique différente de celle de l'axe principal mais la mention doit alors en être explicitement faite.

b) *le niveau d'émission S*

Le niveau d'émission d'un transducteur est la valeur de l'intensité sonore qu'il émet dans la direction de son axe principal, déterminée à la distance de référence de un mètre (avec les réserves faites en a). Il s'exprime le plus souvent en décibels par rapport à un niveau de référence égal à  $6.6 \cdot 10^{-19} \text{ W/m}^2$  (intensité d'une onde plane de pression efficace 1  $\mu\text{Pa}$  se propageant dans l'eau). Si  $u$  est la tension efficace appliquée à l'entrée du transducteur, on a :

$$S_v = S - 20 \log_{10} u \quad (\text{A.1.2})$$

A partir de cette définition et par analogie avec (A.1.2), on peut introduire la *réponse en courant*  $S_i$  :

$$S_i = S - 20 \log_{10} i \quad (\text{A.1.3})$$

où  $i$  est l'intensité du courant entrant dans le transducteur, et la *réponse en puissance*  $S_w$  :

$$S_w = S - 10 \log_{10} W \quad (\text{A.1.4})$$

où  $W$  est la puissance électrique fournie au transducteur.

c) *le diagramme de directivité*

L'intensité sonore émise par un transducteur est une fonction variable de la direction d'émission. Cette fonction est souvent exprimée par rapport à un système de coordonnées sphériques dont l'axe est l'axe principal du transducteur. Elle s'exprime donc comme une relation du type  $f(\theta, \phi)$ , appelée *fonction de directivité*. Si, à partir d'une origine, on reporte dans la direction  $(\theta, \phi)$  un vecteur dont le module est proportionnel à  $f(\theta, \phi)$ , l'extrémité du vecteur décrit la *surface de directivité*. Enfin, la courbe obtenue en coupant la surface de directivité par un plan qui contient l'axe principal est le *diagramme de directivité*.

d) *l'index de directivité  $D_i$*

Le *facteur de directivité* d'un transducteur  $R_\theta$  se calcule suivant la relation :

$$R_\theta = 4\pi / \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f^2(\theta, \phi) \sin \theta \, d\theta \, d\phi \quad (\text{A.1.5})$$

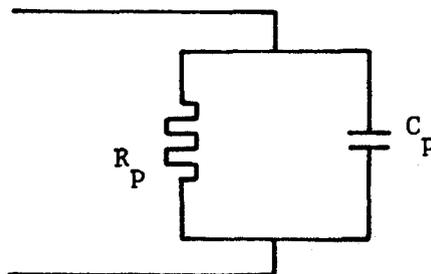
L'*index de directivité*  $D_i$  est défini par :

$$D_i = 10 \log_{10} R_\theta \quad (\text{A.1.6})$$

Pour un transducteur réel,  $R_\theta$  et  $D_i$  sont déduits d'une intégration graphique de la fonction de directivité mesurée.

e) *l'impédance électrique*

On adopte souvent une représentation électrique équivalente de l'impédance du transducteur, vue entre les bornes d'entrée, suivant le schéma :



$R_p$  et  $C_p$  sont respectivement la résistance parallèle et la capacité parallèle du transducteur.

f) *Puissances et rendement*

La *puissance électrique*  $P_e$  fournie par la source au transducteur est liée à la tension d'excitation  $e$  et à la résistance parallèle par :

$$P_e = \frac{e^2}{R_p} \quad (\text{A.1.7})$$

La *puissance acoustique totale*  $P_a$  s'obtient en intégrant l'intensité acoustique rayonnée sur toute sphère entourant le projecteur, si on néglige les pertes de propagation dues à l'absorption par le fluide. Elle est liée au niveau d'émission  $S$  par :

$$S = 10 \log P_a + D_i + 171 \text{ db}^{(+)} \quad (\text{A.1.8})$$

Le *rendement électroacoustique* du transducteur  $\eta$  est le rapport de la puissance acoustique à la puissance électrique :

$$\eta = \frac{P_a}{P_e} \quad (\text{A.1.9})$$

On déduit de cette définition les relations :

$$10 \log_{10} \eta = S - D_i - 10 \log_{10} P_e - 171 \text{ db} \quad (\text{A.1.10})$$

et :

$$10 \log_{10} \eta = S_v - D_i + 10 \log_{10} R_p - 171 \text{ db} \quad (\text{A.1.11})$$

ou :

$$10 \log_{10} \eta = S_i - D_i - 10 \log_{10} R_p - 171 \text{ db} \quad (\text{A.1.12})$$

-----  
+ Les 171db proviennent d'une part du logarithme décimal de la valeur de l'intensité de référence et, d'autre part, du logarithme du facteur  $4\pi$  qui norme  $R_\theta$ .

## ANNEXE 2

### LES CERAMIQUES FERROELECTRIQUES : RELATIONS CARACTERISTIQUES

#### ET MESURE DES CONSTANTES PHYSIQUES

##### A.2.1 RELATIONS CONSTITUTIVES POUR UN MATERIAU PIEZOELECTRIQUE

Dans un matériau piézoélectrique les tenseurs de déformation et de contrainte [S] et [T] et les vecteurs champ électrique et excitation du champ électrique  $\vec{E}$  et  $\vec{D}$  sont liés entr'eux par quatre couples équivalents de relations constitutives [3,83]. Choisisant, par exemple, les variables indépendantes [S] et  $\vec{E}$ , on a :

$$\begin{aligned} T_{ij} &= c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k \\ D_i &= e_{ikl} S_{kl} + \epsilon_{ij}^S E_j \end{aligned} \tag{A.2.1}$$

où  $[c^E]$  est le tenseur d'ordre 4 des rigidités à champ électrique constant,  $[e]$  est le tenseur d'ordre 3 des constantes piézoélectriques,  $[\epsilon^S]$  est le tenseur d'ordre 2 des constantes diélectriques à déformation constante. En fait, les propriétés remarquables des tenseurs [S] et [T] permettent de condenser leurs notations sous forme de vecteurs à 6 composantes [83]. La relation (A.2.1) devient alors :

$$\begin{aligned} T_i &= c_{ij}^E S_j - e_{ji} E_j \\ D_i &= e_{ij} S_j + \epsilon_{ij}^S E_j \end{aligned} \tag{A.2.2}$$

les éléments  $c_{ij}^E$  et  $e_{ij}$  se déduisant très simplement des éléments  $c_{ijkl}^E$  et  $e_{jkl}$ . Si on choisit comme variables indépendantes [S] et  $\mathcal{D}$ , on substitue à (A.2.2) la relation :

$$\begin{aligned} T_i &= c_{ij}^D S_j - h_{ji} D_j \\ E_i &= -h_{ij} S_j + \beta_{ij}^S D_j \end{aligned} \quad (\text{A.2.3})$$

Si on choisit [T] et  $\mathcal{E}$  :

$$\begin{aligned} S_i &= s_{ij}^E T_j + d_{ji} E_j \\ D_i &= d_{ij} T_j + \epsilon_{ij}^T E_j \end{aligned} \quad (\text{A.2.4})$$

Enfin, si on choisit [T] et  $\mathcal{D}$  :

$$\begin{aligned} S_i &= s_{ij}^D T_j + g_{ji} D_j \\ E_i &= -g_{ij} T_j + \beta_{ij}^T D_j \end{aligned} \quad (\text{A.2.5})$$

Compte tenu de l'équivalence entre les quatre couples (A.2.2) à (A.2.5), les différentes constantes sont reliées comme suit :

a)

$$\begin{aligned} d_{mi} &= \epsilon_{nm}^T \cdot g_{ni} = e_{mj} \cdot s_{ji}^E \\ g_{mi} &= \beta_{nm}^T \cdot d_{ni} = h_{mj} \cdot s_{ji}^D \quad \text{avec } m, n = 1 \text{ à } 3 \\ e_{mi} &= \epsilon_{nm}^S \cdot h_{ni} = d_{mj} \cdot c_{ji}^E \quad i, j = 1 \text{ à } 6 \\ h_{mi} &= \beta_{nm}^S \cdot e_{ni} = g_{mj} \cdot c_{ji}^D \end{aligned} \quad (\text{A.2.6})$$

b)

$$s_{ij}^D = s_{ij}^E - d_{mi} \cdot g_{mj}$$

$$c_{ij}^E = (-1)^{(i+j)} \cdot \Delta_{ij}^{SE} / \Delta^{SE} \quad \text{avec } m = 1 \text{ à } 3$$

$$c_{ij}^D = c_{ij}^E + e_{mj} \cdot h_{mi} \quad i, j = 1 \text{ à } 6$$

$$c_{ij}^D = (-1)^{(i+j)} \cdot \Delta_{ij}^{SD} / \Delta^{SD}$$

(A.2.7)

c)

$$\beta_{mn}^T = (-1)^{(m+n)} \cdot \Delta_{mn}^{\epsilon T} / \Delta^{\epsilon T}$$

$$\epsilon_{mn}^S = \epsilon_{mn}^T - d_{ni} \cdot e_{mi} \quad \text{avec } m = 1 \text{ à } 3$$

$$\beta_{mn}^S = \beta_{mn}^T + g_{ni} \cdot h_{mi} \quad i = 1 \text{ à } 6$$

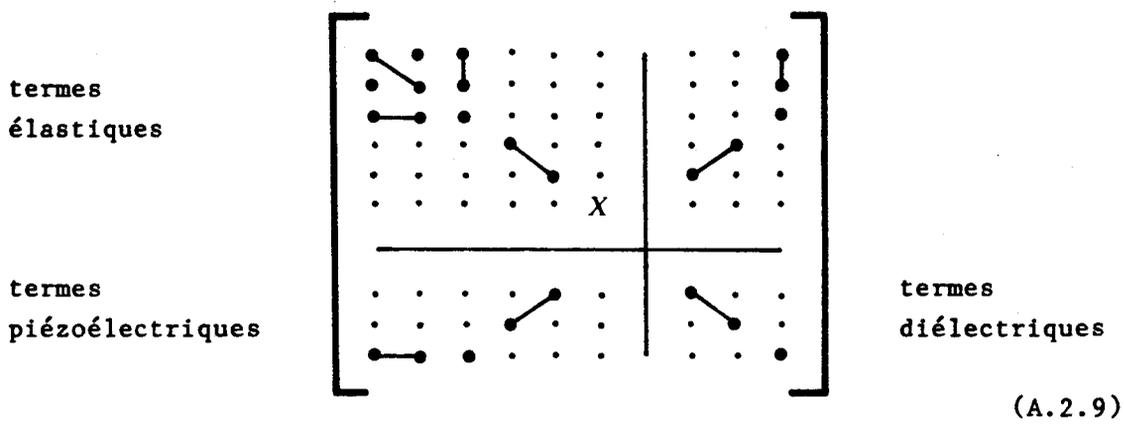
$$\beta_{mn}^S = (-1)^{(m+n)} \cdot \Delta_{mn}^{\epsilon S} / \Delta^{\epsilon S}$$

(A.2.8)

où  $\Delta^x$  est le déterminant de la matrice  $[x]$  et  $\Delta_{ij}^x$ , le mineur de la même matrice obtenu en supprimant la ligne  $i$  et la colonne  $j$ .

#### A.2.2 CAS D'UNE CERAMIQUE FERROELECTRIQUE

Les céramiques ferroélectriques sont des composés obtenus par frittage d'oxydes et de sels de plomb, de zirconium et de titane [143]. Après polarisation, réalisée en soumettant la céramique à un champ électrique élevé (quelques dizaines de kV/cm), généralement à une température proche de la température de Curie, apparaît un effet piézoélectrique, la symétrie des tenseurs caractéristiques étant alors celle de la classe 6mm [3]. Si on adopte la présentation générale qui regroupe les trois tenseurs dans une notation symbolique matricielle unique, on a donc dans ce cas :



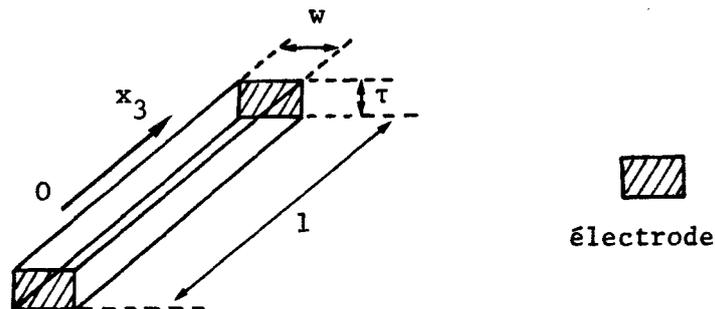
les petits points indiquant des termes nuls, les lignes joignant des termes égaux et la croix représentant, suivant les cas,  $2(s_{11}-s_{12})$  ou  $(c_{11}-c_{12})/2$ . Comme on le voit, seul l'axe  $Ox_3$ , qui est l'axe de polarisation, est privilégié, le matériau étant isotrope dans le plan  $Ox_1x_2$ . La céramique étant un matériau fritté, donc moulé, et l'axe de polarisation étant défini par la direction du champ électrique polarisant, elle permet la réalisation de composants piézoélectriques originaux, par exemple des sphères creuses ou des anneaux à polarisation radiale. Les propriétés d'une céramique sont très sensibles à de nombreux paramètres extérieurs [3] : température, précontrainte axiale, pression hydrostatique, champ électrique élevé, vieillissement..., cette sensibilité pouvant compliquer notablement leur emploi. Néanmoins, le fort couplage électromécanique qui les caractérise les a fait préférer à tous les autres matériaux dans la fabrication des projecteurs que nous étudions.

**A.2.3 CARACTERISATION DES CERAMIQUES PIEZOELECTRIQUES**

La détermination par éléments finis de modes dont le champ de déformation est complexe implique la connaissance des dix coefficients de la matrice (A.2.9), dont seuls quelques termes très utiles ( $s_{33}$ ,  $d_{33}$ ,  $\epsilon_{33}$ ) sont, en général, mesurés par le fabricant. D'autre part, à cause de la grande sensibilité des paramètres du matériau aux effets extérieurs et de la technique de fabrication, la dispersion des valeurs peut être grande (de 2 ou 3% à 20% pour certains coefficients). Il est donc important, dans une phase de conception d'un transducteur, de savoir mesurer, rapidement et avec une bonne précision, l'ensemble des dix coefficients. Pour cela la méthode classique, dite méthode de Mason [3,4,37], préconisée par les "IRE standards ou piezoelectric crystals" [144], consiste en une mesure de l'impédance ou de l'admittance d'échantillons de céramique dont la géométrie a été choisie pour privilégier certains modes de vibration.

A l'aide des fréquences de résonance ou d'antirésonance et des capacités HF et BF les diverses caractéristiques recherchées peuvent alors être atteintes.

A titre d'exemple, considérant le barreau représenté ci-dessous dont les dimensions transversales  $w$  et  $\tau$  sont très faibles devant la



longueur  $l$ , on peut admettre que, pour ses premiers modes propres de dilatation-compression, seules les composantes  $T_3$  et  $E_3$  des vecteurs  $\vec{T}$  et  $\vec{E}$  sont non nulles. Alors :

$$\frac{\partial D_3}{\partial x_3} = 0 \quad (\text{A.2.10})$$

et :

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \frac{\partial T_3}{\partial x_3} = \frac{1}{s_{33}^D} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \quad (\text{A.2.11})$$

où  $\vec{u}$  est le vecteur déplacement. On en déduit :

$$u_3(x_3) = A \cos \frac{\omega x_3}{c} + B \sin \frac{\omega x_3}{c} \quad (\text{A.2.12})$$

avec :

$$c = (\rho s_{33}^D)^{-1/2} \quad (\text{A.2.13})$$

A l'antirésonance,  $D_3$  est nul. La condition aux limites :

$$T_3(0) = T_3(1) = 0 \quad (\text{A.2.14})$$

devient :

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \Big|_{x_3=1} = 0 \quad (\text{A.2.15})$$

d'où :

$$\sin \frac{\omega l}{c} = 0 \quad (\text{A.2.16})$$

Les fréquences d'antirésonance  $f_a$  vérifient donc :

$$f_a = n \frac{c}{2l} \quad (\text{A.2.17})$$

A la résonance, la différence de potentiel appliquée est nulle, i.e :

$$\int_0^l E_3 \cdot dx_3 = 0 \quad (\text{A.2.18})$$

On en déduit :

$$\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{33}^D} \left[ A \cos \frac{\omega l}{c} + B \sin \frac{\omega l}{c} - A \right] = \left( \beta_{33}^T + \frac{\varepsilon_{33}^2}{\varepsilon_{33}^D} \right) D_3 l \quad (\text{A.2.19})$$

d'où, avec les conditions (A.2.14) :

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{kl}{2}}{\frac{kl}{2}} = \frac{1}{k_{33}^2} \quad (\text{A.2.20})$$

où :

$$\frac{1}{k_{33}^2} = 1 + \frac{\beta_{33}^T s_{33}^D}{g_{33}^2} \quad (\text{A.2.21})$$

Notant  $f_{ao}$  et  $f_{ro}$  les fréquences fondamentales d'antirésonance et de résonance, on a finalement :

$$k_{33}^2 = \frac{\pi}{2} \frac{f_{ro}}{f_{ao}} \cotg \frac{f_{ro}}{f_{ao}}$$

$$s_{33}^D = 1/4p \ l^2 \ f_{ao}^2 \quad (\text{A.2.22})$$

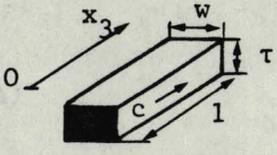
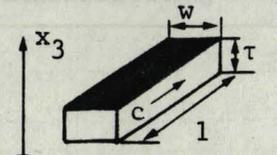
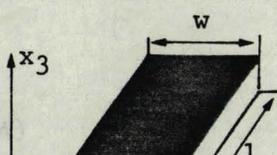
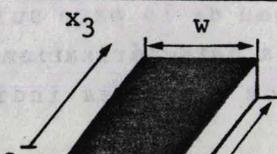
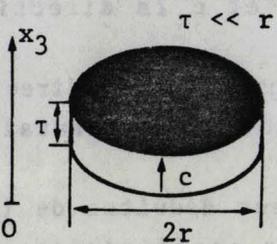
et, en couplant les premières relations de (A.2.6) et (A.2.7) :

$$s_{33}^E = \frac{s_{33}^D}{1 - k_{33}^2} \quad (\text{A.2.23})$$

Ainsi, la mesure de  $f_{ao}$  et  $f_{ro}$  pour cette éprouvette particulière nous donne  $k_{33}^2$ ,  $s_{33}^D$  et  $s_{33}^E$ . La même procédure peut être employée pour d'autres géométries simples (différents barreaux, plaques, disques, anneaux...) et permettre d'atteindre d'autres caractéristiques ou de recouper des valeurs déjà mesurées. Le tableau de la page suivante présente un jeu de cas possibles, retenu pour la caractérisation de la céramique X9 de la section (II.4.2.c). Les colonnes indiquent successivement :

- le type de champ de déplacement,
- la géométrie de l'échantillon et la configuration des électrodes,  $ox_3$  étant la direction de polarisation et  $\vec{c}$  la direction de propagation,
- les relations fondamentales permettant l'exploitation directe des mesures,  $f_{ro}$  et  $f_{ao}$  étant des fréquences fondamentales de résonance et d'antirésonance,
- les relations complémentaires, généralement déduites de (A.2.6), (A.2.7) ou (A.2.8), permettant le calcul des coefficients.

Dans ce cas, seules les quatre premières éprouvettes sont indispensables, le disque permettant plusieurs recouplements (mesures

	Géométrie du résonateur.	Relations fondamentales.	Relations complémentaires.
dilatation	 w et $\tau \ll 1$	$k_{33}^2 = \frac{\pi}{2} \frac{f_{ro}}{f_{ao}} \cotg \frac{\pi}{2} \frac{f_{ro}}{f_{ao}}$ $\underline{s_{33}^D} = 1/4 \rho l^2 f_{ao}^2$	$k_{33}^2 = g_{33}^2 / \beta_{33}^T E_{33}$ $\underline{s_{33}^E} = s_{33}^D / (1 - k_{33}^2)$
dilatation	 w et $\tau \ll 1$	$\frac{k_{31}^2 - 1}{k_{31}^2} = \frac{2}{\pi} \frac{f_{ro}}{f_{ao}} \tg \frac{\pi}{2} \frac{f_{ao}}{f_{ro}}$ $\underline{s_{11}^E} = 1/4 \rho l^2 f_{ro}^2$	$k_{31}^2 = d_{31}^2 / \epsilon_{33}^T E_{11}$ $\underline{s_{11}^D} = s_{11}^E (1 - k_{31}^2)$
dilatation	 $\tau \ll w$ et $1$	$\underline{c_{33}^D} = 4 \rho \tau^2 f_{ao}^2$ $\underline{\epsilon_{33}^T} = \tau C_{BF} / lw$ $C_{BF}$ : capacité BF	$\underline{d_{33}} = \sqrt{\epsilon_{33}^T E_{33}} \cdot k_{33}$ $\underline{d_{31}} = \sqrt{\epsilon_{33}^T E_{11}} \cdot k_{31}$
contour	Idem cas précédent	$f_3, f_4$ : modes contour 3 et 4 . $\alpha = f_3 / f_4$ $\sigma_E = -s_{12}^E / s_{11}^E = .4929 \alpha^2 - 2.3786 \alpha + 2.7235$ si : $0.25 < \sigma_E < 0.35$	$\underline{s_{12}^D} = s_{12}^E - k_{31}^2 s_{11}^E$ $\underline{s_{13}^D} = [ 1/2 (s_{11}^D + s_{12}^D) \cdot (s_{33}^D - 1/c_{33}^D) ]^{1/2}$ $\underline{s_{13}^E} = s_{13}^D + d_{31} d_{33} / \epsilon_{33}^T$
cisaillement	 $\tau \ll 1$	$\underline{s_{44}^D} = 1/4 \rho \tau^2 f_{ao}^2$ $\underline{\epsilon_{11}^T} = \tau C_{BF} / lw$ $k_{15}^2 = 1 - C_{HF} / C_{BF}$ $C_{HF}$ : capacité HF	$k_{15}^2 = d_{15}^2 / \epsilon_{11}^T s_{44}^E$ $\underline{s_{44}^E} = s_{44}^D / (1 - k_{15}^2)$ $\underline{d_{15}} = \sqrt{\epsilon_{11}^T s_{44}^E} \cdot k_{15}$
radial	 $\tau \ll r$	$k_p^2 = \frac{(1 - \sigma_E) \alpha - \gamma}{2 \alpha - \gamma}$ ou $\alpha = J_1(\theta_2), \gamma = \theta_2 J_0(\theta_2)$ $\theta_2 = \theta_1 f_{ao} / f_{ro}$ $\theta_1^2 = 4 \pi^2 r^2 \rho s_{11}^E (1 - \sigma_E^2) f_{ro}^2$	$k_p = k_{31} \sqrt{2 / (1 - \sigma_E)}$ $(1 - \sigma_E) J_1(\theta_1) = \theta_1 J_0(\theta_1)$ $\theta_1$ plus petite racine positive (recouplement)
dilatation	Idem cas précédent	$\underline{c_{33}^D} = 4 \rho \tau^2 f_{ao}^2$ $\underline{\epsilon_{33}^T} = \tau C_{BF} / \pi r^2$ (recouplement)	

indépendantes de  $c_{33}^D$ ,  $\epsilon_{33}^T$ ,  $s_{11}^E$ ,  $k_p$ ). Soulignés dans le tableau, on retrouve tous les termes des tenseurs  $[s^D]$ ,  $[s^E]$ ,  $[d]$  et  $[\epsilon^T]$ , tous les autres s'en déduisant par le calcul. D'autres procédures sont évidemment imaginables.

La méthode de mesure utilise le montage présenté dans la section (II.4.2.b). Sa mise au point a fait l'objet des DEA de P. TIERCE [145] et R. BOSSUT [146]. Les éprouvettes étant taillées avec le plus grand soin, elles sont métallisées à la laque à l'argent ou par dépôt sous vide puis les contacts sont établis par deux pointes élastiques qui assurent simultanément la fixation de l'échantillon. Dans certains cas, l'amortissement est faible et les mesures de fréquence sont stables et reproductibles. Par contre, dans d'autres cas, un amortissement important perturbe les mesures et diverses techniques plus complexes ont dû être mises en oeuvre (utilisation de plusieurs harmoniques, méthode de soustraction capacitive...).

D'un principe très simple, cette méthode a quelques inconvénients notables :

- la nécessité de couper des éprouvettes dans un matériau très dur,
- la durée d'une mesure,
- l'amortissement important de certains modes qui diminue la précision des mesures correspondantes,
- le recours à des fréquences élevées (5 à 10 MHz par exemple) lorsque les échantillons sont, pour des raisons liées à la coupe, de très petite taille.

De ces points de vue, la méthode d'identification proposée en (II.4.2.d) est plus séduisante et a déjà donné des résultats complets pour plusieurs variétés de céramiques [48,49].



### ANNEXE 3

#### EXPRESSIONS DES MATRICES DE TRANSFERT UTILISEES

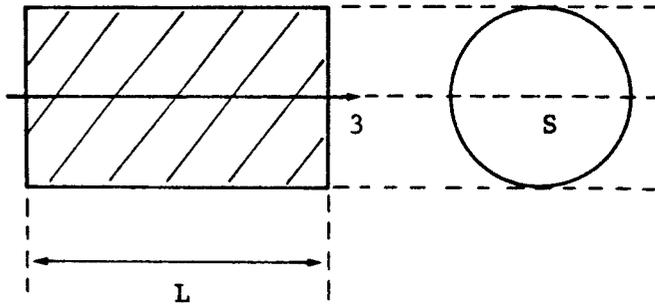
#### DANS LE MODELE D'ONDE PLANE

L'analyse par onde plane [12] suppose que les grandeurs physiques caractéristiques du mouvement d'un transducteur (déplacement, vitesse, contrainte...) se propagent le long de la structure en ayant la même valeur en tout point d'une section droite. Suivant le paragraphe (I.1.3), considérant un élément homogène, notant  $V^-$  et  $V^+$  les vitesses vibratoires de ses faces gauche et droite,  $F^-$  et  $F^+$  les forces appliquées sur ces mêmes faces,  $\phi$  la différence de potentiel appliquée si l'élément est piézoélectrique, on a :

$$\begin{bmatrix} F^+ \\ V^+ \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} F^- \\ V^- \end{bmatrix} + \xi \phi \quad (\text{A.3.1})$$

Les paragraphes ci-après donnent les expressions de  $[T]$  et  $\xi$  dans trois cas typiques et discutent quelques propriétés.

### A.3.1 CYLINDRE METALLIQUE HOMOGENE



Section : S  
 Longueur : L  
 module d'Young : E  
 masse volumique :  $\rho$

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Si, à la fréquence utilisée, les dimensions transversales de la structure sont négligeables, seule la composante  $T_3$  de la contrainte est non nulle. L'équation du mouvement dans le cylindre est donc :

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \frac{\partial T_3}{\partial x_3} \quad (\text{A.3.2})$$

avec :

$$T_3 = E \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (\text{A.3.3})$$

On en déduit, oubliant la dépendance temporelle en  $e^{j\omega t}$  :

$$u_3(x_3) = A \cos kx_3 + B \sin kx_3 \quad (\text{A.3.4})$$

Les conditions aux limites donnent :

$$V^- = j\omega u_3(0) = j\omega A$$

$$V^+ = j\omega u_3(L) = j\omega (A \cos kL + B \sin kL)$$

$$F^+ = -ST_3(0) = -SEkB$$

$$F^- = -ST_3(L) = -SEk (B \cos kL - A \sin kL) \quad (\text{A.3.5})$$

soit, après un traitement élémentaire :

$$V^+ = V^- \cos kL - \frac{j\omega \sin kL}{kES} F^-$$

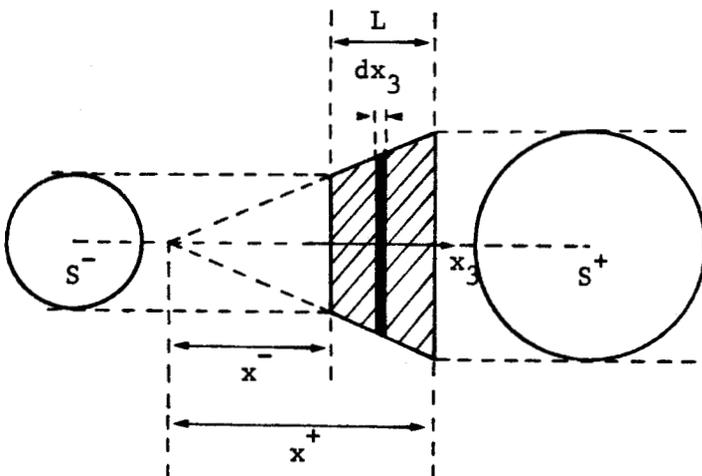
$$F^+ = F^- \cos kL + \frac{kES \sin kL}{j\omega} V^-$$

d'où la matrice de transfert :

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos kL & -j\rho cS \sin kL \\ -\frac{j\sin kL}{\rho cS} & \cos kL \end{bmatrix}$$

Ce résultat reste valable si la section droite n'est pas circulaire, ou, en particulier, dans le cas d'un anneau.

### A.3.2 CONE METALLIQUE HOMOGENE



section minimale :  $S^-$   
 section maximale :  $S^+$   
 Longueur :  $L$   
 module d'Young :  $E$   
 masse volumique :  $\rho$

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Considérant, comme pour le cas du cylindre, que seule la composante  $T_3$  de la contrainte est non nulle et notant  $S(x_3)$  l'aire de la section

droite au point  $x_3$ , l'équation du mouvement d'une tranche d'épaisseur  $dx_3$  s'écrit :

$$\rho S(x_3) dx_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_3} (S(x_3) \cdot T_3(x_3) \cdot dx_3) \quad (\text{A.3.8})$$

soit, sachant que  $S(x_3)$  varie comme  $x_3^2$  :

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = E \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + \frac{2}{x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \quad (\text{A.3.9})$$

ou, avec une dépendance temporelle en  $e^{j\omega t}$  :

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + \frac{2}{x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + k^2 u_3 = 0 \quad (\text{A.3.10})$$

dont la solution générale est :

$$u_3(x_3) = A \frac{\cos kx_3}{x_3} + B \frac{\sin kx_3}{x_3} \quad (\text{A.3.11})$$

Les conditions aux limites donnent :

$$V^- = j\omega u_3(x^-) = j\omega \left( A \frac{\cos kx^-}{x^-} + B \frac{\sin kx^-}{x^-} \right)$$

$$V^+ = j\omega u_3(x^+) = j\omega \left( A \frac{\cos kx^+}{x^+} + B \frac{\sin kx^+}{x^+} \right)$$

$$F^- = -S^- T_3(x^-) = -S^- E k \left( B \frac{\cos kx^-}{x^-} - A \frac{\sin kx^-}{x^-} - A \frac{\cos kx^-}{kx^{-2}} - B \frac{\sin kx^-}{kx^{-2}} \right)$$

$$F^+ = -S^+ T_3(x^+) = -S^+ E k \left( B \frac{\cos kx^+}{x^+} - A \frac{\sin kx^+}{x^+} - A \frac{\cos kx^+}{kx^{+2}} - B \frac{\sin kx^+}{kx^{+2}} \right)$$

(A.3.12)

Développant dans  $V^+$  les lignes trigonométriques de  $kx^+$  en lignes trigonométriques de  $kx^-$  et  $kL$  on obtient :

$$V^+ = j\omega \left( A \frac{\cos kx^- \cos kL}{x^+} - A \frac{\sin kx^- \sin kL}{x^+} + B \frac{\cos kx^- \sin kL}{x^+} + B \frac{\sin kx^- \cos kL}{x^+} \right) \quad (\text{A.3.13})$$

et, en regroupant :

$$V^+ = j\omega \left( \frac{V^- x^- \cos kL}{j\omega x^+} - \frac{F^- x^- \sin kL}{S^- E k x^+} + \frac{V^- \sin kL}{j\omega k x^+} \right) \quad (\text{A.3.14})$$

d'où :

$$V^+ = - \frac{j \sin kL}{\rho c \sqrt{S^- S^+}} F^- + \frac{S^- \sin kL}{\sqrt{S^- S^+}} \left( \cotg kL + \frac{1}{kx^-} \right) V^- \quad (\text{A.3.15})$$

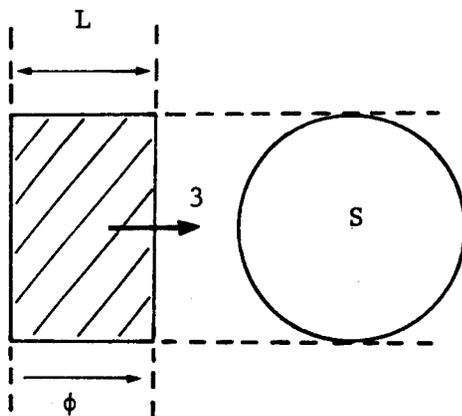
La même transformation sur l'expression de  $F^+$  donne finalement la matrice de transfert :

$$\left[ \begin{array}{c|c}
 \frac{S^+ \sin kL}{\sqrt{S^- S^+}} x & -j\rho c \sqrt{S^- S^+} \frac{1}{\sin kL} - \sin kL x \\
 x \left( \cotg kL - \frac{1}{kx^+} \right) & x \left( \cotg kL - \frac{1}{kx^+} \right) \left( \cotg kL + \frac{1}{kx^-} \right) \\
 \hline
 - \frac{j \sin kL}{\rho c \sqrt{S^- S^+}} & \frac{S^- \sin kL}{\sqrt{S^- S^+}} x \left( \cotg kL + \frac{1}{kx^-} \right)
 \end{array} \right]$$

(A.3.16)

Strictement, ce résultat n'est vrai que pour un cône plein mais peut être appliqué à un cône percé si la section droite du trou reste très inférieure à  $S^-$ .

### A.3.3 CYLINDRE DE CERAMIQUE HOMOGENE



Section : S  
 Longueur : L  
 Axe de polarisation : 3  
 ddp :  $\phi$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho s_{33}^D}}$$

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Dans les mêmes conditions que pour le cylindre métallique :

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \frac{\partial T_3}{\partial x_3}$$

avec, puisque les dimensions transversales sont négligées :

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = s_{33}^D T_3 + g_{33} D_3 \quad (\text{A.3.17})$$

comme indiqué en annexe 2. Utilisant l'équation de Poisson :

$$\frac{\partial D_3}{\partial x_3} = 0 \quad (\text{A.3.18})$$

on déduit :

$$u_3(x_3) = A \cos kx_3 + B \sin kx_3 \quad (\text{A.3.19})$$

Les conditions aux limites donnent :

$$V^- = j\omega u_3(0) = j\omega A$$

$$V^+ = j\omega u_3(L) = j\omega (A \cos kL + B \sin kL)$$

$$F^- = -ST_3(0) = -\frac{SkB}{s_{33}^D} + S \frac{g_{33}}{s_{33}^D} D_3$$

$$F^+ = -ST_3(L) = -\frac{Sk}{s_{33}^D} (B \cos kL - A \sin kL) + S \frac{g_{33}}{s_{33}^D} D_3$$

(A.3.20)

Pour éliminer  $D_3$ , on utilise :

$$E_3 = -g_{33} T_3 + \beta_{33}^T D_3 \quad (\text{A.3.21})$$

soit :

$$E_3 = - \frac{\epsilon_{33}}{s_{33}^D} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \left( \beta_{33}^T + \frac{\epsilon_{33}^2}{s_{33}^D} \right) D_3 \quad (\text{A.3.22})$$

et, intégrant de  $x_3 = 0$  à  $x_3 = L$  :

$$\left( \beta_{33}^T + \frac{\epsilon_{33}^2}{s_{33}^D} \right) L D_3 = - \phi + \frac{\epsilon_{33}}{s_{33}^D} \frac{V^+ - V^-}{j\omega} \quad (\text{A.3.23})$$

De (A.3.20) on déduit, par exemple :

$$V^+ = V^- \cos kL - \frac{j\omega s_{33}^D}{Sk} \sin kL \left( F^- - S \frac{\epsilon_{33}}{s_{33}^D} D_3 \right) \quad (\text{A.3.24})$$

qui, couplée à la relation (A.3.23) et avec les notations :

$$K = \frac{\epsilon_{33} C_0}{s_{33}^D}$$

$$C_0 = \frac{S}{L \left( \beta_{33}^T + \frac{\epsilon_{33}^2}{s_{33}^D} \right)}$$

$$Z_1^1 = - j\omega C_0 S \operatorname{tg} k \frac{1}{2}$$

$$Z_2^1 = \frac{j\omega C_0 S}{\operatorname{sink}L} - \frac{jK^2}{C_0 \omega}$$

(A.3.25)

devient la relation :

$$V^+ = \frac{F^-}{z_2^1} + \left(1 + \frac{z_1^1}{z_2^1}\right) V^- + \frac{K}{z_2^1} \phi$$

(A.3.26)

Procédant de même pour  $F^+$ , on obtient la relation de transfert :

$$\begin{bmatrix} F^+ \\ V^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{z_1^1}{z_2^1} & z_1^1 \left(2 + \frac{z_1^1}{z_2^1}\right) \\ \frac{1}{z_2^1} & 1 + \frac{z_1^1}{z_2^1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F^- \\ V^- \end{bmatrix} + \phi \begin{bmatrix} \frac{z_1^1}{z_2^1} K \\ K \\ \frac{z_1^1}{z_2^1} \end{bmatrix}$$

(A.3.27)

Ce résultat reste valable si la section droite n'est pas circulaire, ou, en particulier, dans le cas d'un anneau.

#### A.3.4 PROPRIETES DES MATRICES ET VECTEURS DE TRANSFERT [T] ET $\xi$

De façon évidente, on peut noter que les matrices et vecteurs de transfert définis en (A.3.7), (A.3.16) et (A.3.27) ont les formes générales :

$$[T] = \begin{bmatrix} a & jb \\ jc & d \end{bmatrix}$$

$$\xi = \begin{bmatrix} \alpha \\ j\beta \end{bmatrix}$$

(A.3.28)

où  $a, b, c, d, \alpha$  et  $\beta$  sont des quantités purement réelles. Cette propriété se conserve dans une association série, lorsqu'on forme les produits  $[T_i] [T_{i+1}]$  et  $[T_{i+1}] \kappa_i$  de la relation (I.10), ou dans une association parallèle, lorsqu'on applique les relations (I.13) à (I.17). Elle est donc globalement valable pour toute structure complexe formée par association de ces trois éléments simples. D'autre part, on vérifie que, pour chaque matrice :

$$\det [ T ] = 1 \quad (\text{A.3.29})$$

relation qui se conserve également lors des associations série ou parallèle. Ces deux propriétés sont directement liées au caractère non dissipatif des éléments étudiés et à la réciprocity de la notion de transfert.

Enfin, il est intéressant de noter que, si la relation (A.3.1) est vérifiée, on a :

$$\begin{bmatrix} F^- \\ V^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{22} & -T_{12} \\ -T_{21} & T_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F^+ \\ V^+ \end{bmatrix} + \kappa \phi \quad (\text{A.3.30})$$

$$\kappa = \begin{bmatrix} t_2 T_{12} - t_1 T_{22} \\ t_1 T_{21} - t_2 T_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.31})$$

la nouvelle matrice de transfert et le vecteur  $\kappa$  vérifiant également les deux propriétés énoncées au début de cette section.

## ANNEXE 4

### LES ALGORITHMES NUMERIQUES

Comme indiqué dans les sections (II.3.5), (IV.3.2) et (IV.4.3), l'application de la méthode des éléments finis conduit essentiellement à la résolution de systèmes d'équations linéaires et à l'inversion ou la diagonalisation de matrices. Dans les différents cas évoqués, les matrices à traiter sont réelles et symétriques. Ces problèmes sont classiques et les techniques associées abondamment documentées. On peut citer, entr'autres références, les ouvrages de A. RALSTON [84], A.R. GOURLAY et al [85] et G. DAHLQUIST et al [86], ainsi qu'une synthèse claire de M. GERADIN [47]. L'objectif de cette annexe est simplement de préciser les choix d'algorithmes effectués dans ce travail, sans les décrire.

#### A.4.1 RESOLUTION D'UN SYSTEME D'EQUATIONS LINEAIRES A MATRICE REELLE ET SYMETRIQUE.

La méthode retenue est la méthode classique d'*élimination de Gauss*. Le système d'équations étant noté :

$$[A] \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (\text{A.4.1})$$

on transforme [A] en une matrice triangulaire supérieure [U] par une série d'opérations sur les lignes de [A] telles que, globalement :

$$[L] [A] = [U] \quad (\text{A.4.2})$$

Le système à résoudre devient alors :

$$[U] \underline{x} = \underline{y} = [L] \underline{b} \quad (\text{A.4.3})$$

dont la solution est, à l'évidence :

$$x_i = \frac{1}{U_{ii}} \left[ y_{ii} - \sum_{j=i+1}^n U_{ij} x_j \right]$$

$$i = 1, n$$

(A.4.4)

n étant l'ordre du système. Dans cette méthode, la matrice [U] doit être construite explicitement mais pas la matrice de transformation [L]. La méthode de condensation statique présentée en (II.3.7) par les équations (II.68) et (II.69) est très voisine de l'élimination de Gauss. Le nombre d'opérations nécessaires, pour n grand, varie comme  $n^3/3$ .

#### A.4.2 INVERSION D'UNE MATRICE REELLE SYMETRIQUE

Dans le cas général, l'inversion est réalisée en utilisant la méthode d'élimination de Gauss et en résolvant l'équation (A.4.1) pour n vecteurs  $\underline{b}$  différents constitués par les n colonnes de la matrice identité n x n. Les n vecteurs résultats  $\underline{x}$  constituent ainsi la matrice  $[A]^{-1}$ .

Si la matrice [A] est définie positive, elle peut se décomposer sous la forme :

$$[A] = [R] [R]^T \quad (\text{A.4.5})$$

où [L] est une matrice triangulaire inférieure. Cette opération porte le nom de *décomposition de Cholewsky*. Alors :

$$[A]^{-1} = ( [R]^{-1} )^T [R]^{-1} \quad (\text{A.4.6})$$

les éléments de  $[R]^{-1}$  étant calculés par :

$$r_{ik}^- = - \frac{1}{r_{ii}} \sum_{m=i+1}^k r_{im} r_{mk}^- \quad i < k$$

$$r_{ik}^- = \frac{1}{r_{ii}} \quad i = k$$

$$r_{ik}^- = 0 \quad i > k$$

(A.4.7)

#### A.4.3 DIAGONALISATION D'UNE MATRICE REELLE SYMETRIQUE

Les équations aux valeurs propres produites par les applications de la méthode des éléments finis sont de la forme :

$$[K] \mathcal{U} = \omega^2 [M] \mathcal{U} \quad (\text{A.4.8})$$

différente de la forme canonique :

$$[H] \mathcal{U} = \lambda \mathcal{U} \quad (\text{A.4.9})$$

La méthode retenue se décompose en trois étapes.

A.4.3.a) *La réduction à la forme canonique à l'aide de l'algorithme de Cholewski*

La matrice de masse cohérente [M] étant définie positive, elle peut se décomposer sous la forme :

$$[M] = [L] [L]^T \quad (\text{A.4.10})$$

où [L] est une matrice triangulaire inférieure, comme indiqué en (A.4.2). Alors :

$$[L]^{-1} [K] [L]^{-T} \mathcal{V} = \omega^2 \mathcal{V} \quad (\text{A.4.11})$$

où :

$$\mathcal{V} = [L]^T \mathcal{U} \quad (\text{A.4.12})$$

(A.4.11) est bien la forme canonique (A.4.9). On note que les valeurs

propres de (A.4.11) sont les mêmes que celles de (A.4.8) mais que le calcul des vecteurs propres du problème initial suppose le stockage de [L] et l'application de la relation (A.4.12).

A.4.3.b) *La tridiagonalisation de Householder*

La matrice  $[L]^{-1} [K] [L]^{-T}$  est une matrice symétrique. Les algorithmes classiques de Givens ou de Householder permettent de la réduire à une forme tridiagonale symétrique en un nombre fini d'opérations. La méthode de Householder, plus efficace pour traiter les matrices denses fournies par un nombre important de condensations de Guyan, est retenue dans le code. Le nombre total d'opérations requis est  $2n^3/3$  pour  $n$  grand.

A.4.3.c) *La séquence de Sturm*

La recherche des valeurs propres d'une matrice tridiagonale symétrique peut être réalisée en exploitant les propriétés des suites de Sturm. C'est un procédé classique de *dichotomie* qui est retenu dans le code. De façon schématique, si [T] est la matrice tridiagonale :

$$[T] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ t_{12} & t_{22} & t_{23} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & t_{23} & t_{33} & t_{34} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & t_{n-1,n} & t_{n,n} \end{bmatrix}$$

(A.4.13)

et si on définit la suite des mineurs principaux :

$$P_0(\lambda) = 1$$

$$P_1(\lambda) = t_{11} - \lambda$$

$$P_2(\lambda) = (t_{11}-\lambda)(t_{22}-\lambda) - t_{12}^2$$

$$P_r(\lambda) = \det \begin{bmatrix} t_{11}^{-\lambda} & t_{12} & 0 & \dots \\ t_{12} & t_{22}^{-\lambda} & t_{23} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & t_{r,r}^{-\lambda} \end{bmatrix}$$

$$P_n(\lambda) = \det [T - \lambda I] \tag{A.4.14}$$

le nombre d'identité de signes successifs dans la suite, noté  $s(\lambda)$ , est égal au nombre de valeurs propres de  $[T]$  strictement supérieures à  $\lambda$ . Ainsi, si :

$$s(\lambda_1) = k \quad \lambda_2 < \lambda_1$$

$$s(\lambda_2) = k + 1 \tag{A.4.15}$$

il existe nécessairement une valeur propre de  $[T]$  dans l'intervalle  $[\lambda_2, \lambda_1]$ , qui peut être identifiée par dichotomie. La précision de l'ensemble des trois étapes est directement liée à celle de la dichotomie.

Le code fournit toutes les fréquences propres du problème (A.4.8) et les vingt premiers vecteurs propres au maximum. On note que la méthode conserve les modes rigides (fréquences propres nulles ou très faibles). Associée à la condensation de Guyan, elle a été appliquée à des matrices d'ordre compris entre 1000 et 2000 avec 120 à 180 degrés maîtres, en conservant une précision raisonnable.



## ANNEXE 5

### ORGANIGRAMME DE DEUX ELEMENTS

Cette annexe présente sous forme simplifiée l'organigramme de deux éléments. La technique retenue est classique, d'autres variantes étant décrites par exemple par O.C. ZIENKIEWICZ [21].

#### A.5.1 L'HEXAEDRE ISOPARAMETRIQUE A VINGT NOEUDS

##### A.5.1.a) Formulation des équations

La correspondance entre les coordonnées des points de l'élément réel et de l'élément réduit est définie par la relation (II.65). Elle peut se réécrire :

$$x^{(\alpha)} = [ N_1(\xi, \eta, \zeta) \dots N_p(\xi, \eta, \zeta) ] \begin{bmatrix} x_1^{(\alpha)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_p^{(\alpha)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5.1})$$

où  $\alpha$  vaut 1, 2 ou 3 et repère les axes de coordonnées. Sous une forme équivalente :

$$x^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^{20} c_i^{(\alpha)} m_i \quad (\text{A.5.2})$$

où les  $m_i$  sont les monômes en  $\xi$ ,  $\eta$  et  $\zeta$  regroupés dans le tableau de

la section (II.3.6). Si  $\mathbf{x}^{(\alpha)}$  est le vecteur des valeurs nodales de  $x^{(\alpha)}$  et  $[A]$  est la matrice obtenue en donnant aux monômes  $m_i$  leurs valeurs calculées aux vingt noeuds :

$$[A] = \begin{bmatrix} m_1(1) & m_2(1) & \dots & m_{20}(1) \\ m_1(2) & m_2(2) & \dots & m_{20}(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1(20) & m_2(20) & \dots & m_{20}(20) \end{bmatrix} \quad (\text{A.5.3})$$

on a :

$$\mathbf{x}^{(\alpha)} = [A] \mathbf{\xi}^{(\alpha)} \quad (\text{A.5.4})$$

Notant :

$$\mathbf{N}^T = [N_1, N_2 \dots N_{20}] \quad (\text{A.5.5})$$

la ligne des vingt fonctions d'interpolation, on a :

$$\mathbf{N}^T = \mathbf{\mu}^T [A]^{-1} \quad (\text{A.5.6})$$

où  $\mathbf{\mu}$  est le vecteur constitué par les valeurs des monômes  $m_i$  au point considéré. Définissant par  $\mathbf{\mu}_\xi$  le vecteur des valeurs des dérivées par rapport à  $\xi$  des monômes  $m_i$  au point considéré, on a :

$$\frac{\partial x^{(\alpha)}}{\partial \xi} = \mathbf{\mu}_\xi^T [A]^{-1} \mathbf{x}^{(\alpha)} \quad (\text{A.5.7})$$

Deux relations semblables en  $\eta$  et  $\zeta$  permettent alors le calcul de la matrice de Jacobi  $[J]$ . D'autre part :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_x^T \\ \mathbf{N}_y^T \\ \mathbf{N}_z^T \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{\mu}_\xi^T \\ \mathbf{\mu}_\eta^T \\ \mathbf{\mu}_\zeta^T \end{bmatrix} [A]^{-1} \quad (\text{A.5.8})$$

où :

$$\mathcal{N}_x^T = \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{N}^T \quad (\text{A.5.9})$$

On en déduit la matrice [B] qui relie les composantes du tenseur des déformations aux composantes du vecteur déplacement. Regroupant les termes par lignes de 20, correspondant à un classement des composantes de  $\mathcal{U}$  en trois groupes associés aux trois axes de coordonnées, au lieu de l'ordonnement théorique de la relation (II.28), on a :

$$[B] = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_x^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{N}_y^T & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{N}_z^T \\ 0 & \mathcal{N}_z^T & \mathcal{N}_y^T \\ \mathcal{N}_z^T & 0 & \mathcal{N}_x^T \\ \mathcal{N}_y^T & \mathcal{N}_x^T & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5.10})$$

qui peut se factoriser sous la forme :

$$[B] = [b] [A^+] \quad (\text{A.5.11})$$

avec :

$$[A^+] = \begin{bmatrix} [A]^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & [A]^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & [A]^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5.12})$$

[b] étant déduite des termes de :

$$[J]^{-1} \begin{bmatrix} \varpi_{\xi}^T \\ \varpi_{\eta}^T \\ \varpi_{\zeta}^T \end{bmatrix}$$

Dès lors on obtient :

$$[K_{uu}^e] = [A^+]^T [R] [A^+]$$

$$[M^e] = [A^+]^T [R'] [A^+]$$

(A.5.13)

avec :

$$[R] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [b]^T [c] [b] \det [J] d\xi d\eta d\zeta$$

$$[R'] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \varpi \cdot \varpi^T \det [J] d\xi d\eta d\zeta$$

(A.5.14)

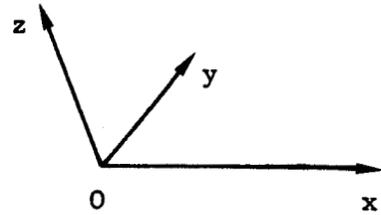
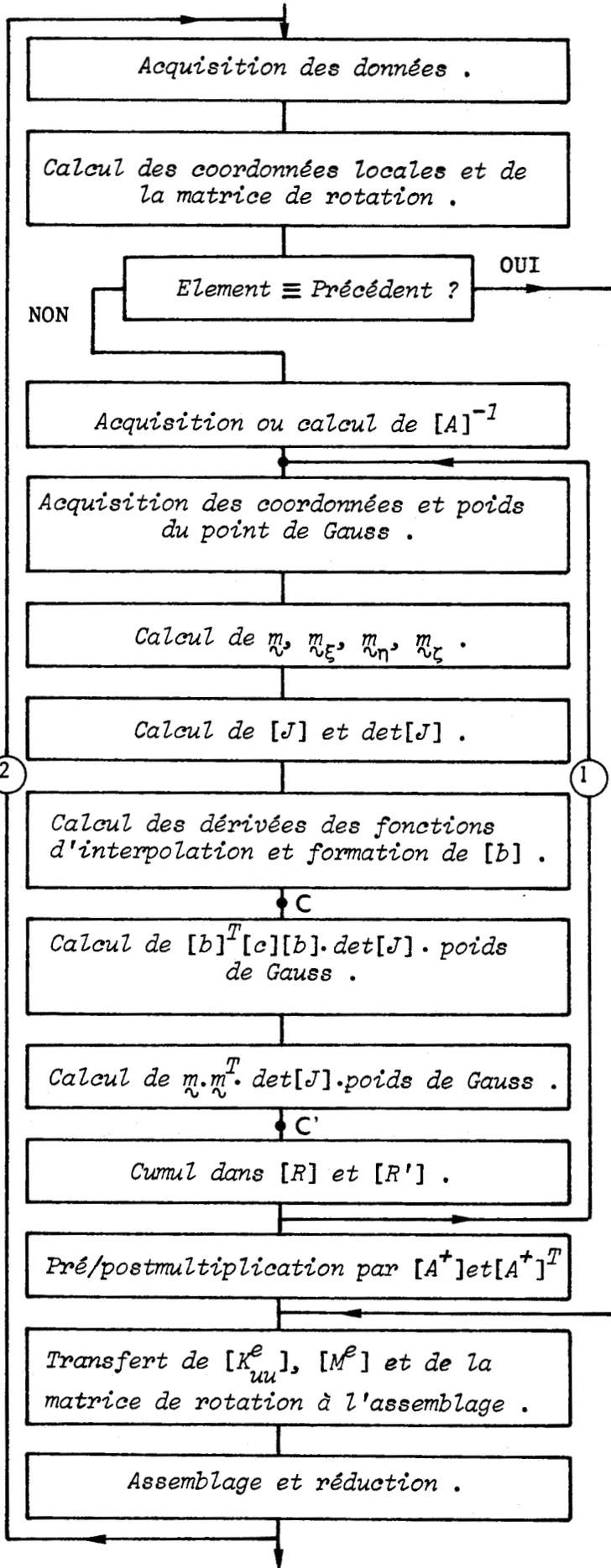
On dispose ainsi de toutes les quantités nécessaires au calcul des matrices élémentaires, les intégrations étant réalisées à l'aide d'une quadrature de Gauss à 27 points (3x3x3). La page suivante présente schématiquement l'organigramme de l'élément.

#### A.5.2 LE QUADRILATERE ISOPARAMETRIQUE POUR APPLICATIONS A SYMETRIE AXIALE

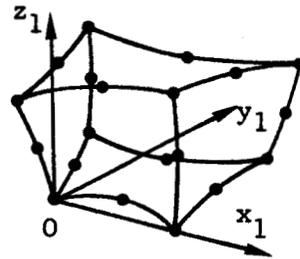
Par rapport au cas précédent,  $\alpha$  est limité aux valeurs 1 et 2 et le nombre de noeuds à 8. En conséquence la matrice [A] est une matrice 8x8, la matrice [J] une matrice 2x2, la matrice [B] une matrice 3x16. Les intégrations se font par rapport à  $\xi$  et  $\eta$  seulement, à l'aide de 9 points de Gauss :

$$[R] = 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [b]^T [c] [b] d \det [J] d\xi d\eta$$

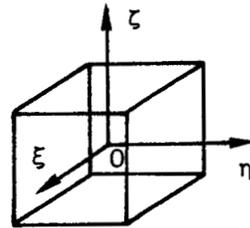
(A.5.15)



Oxyz : repère global



Ox<sub>1</sub>y<sub>1</sub>z<sub>1</sub> : repère local

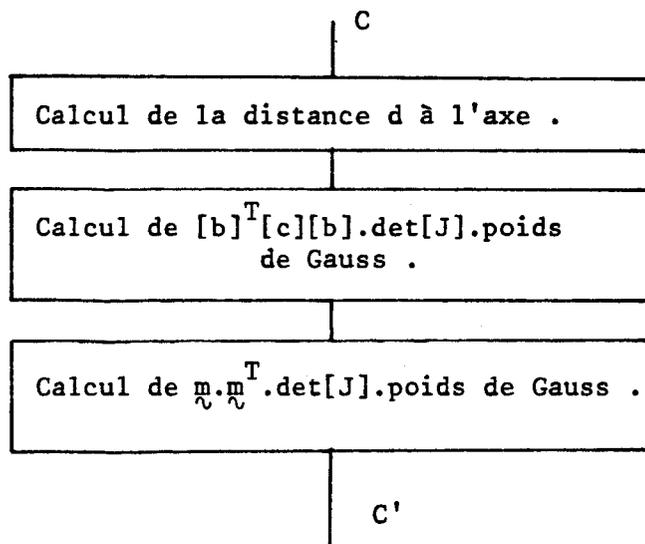


Oξηζ : repère réduit

① boucle points de Gauss

② boucle éléments

une relation déduite de (A.5.14) par la même transformation donnant [R']. Dans l'intégrale, d représente la distance du point courant à l'axe de symétrie. L'organigramme est le même que pour l'hexaèdre à condition de remplacer le tronçon CC' par :



## ANNEXE 6

### EVOLUTION AVEC $R_\infty$ DE L'ERREUR INDUITE PAR LA CONDITION DE RAYONNEMENT

Si en tout point de la surface frontière  $\Gamma_\infty$  on assimile la pression  $p$  à sa valeur en champ lointain  $p_\infty$ , compte tenu du développement en série (IV.59) on a :

$$p - p_\infty \sim \frac{e^{-ikr} F_1(\theta, \phi)}{(kr)^2} \quad (\text{A.6.1})$$

Comme défini en (IV.4.1), notant  $W(x)$  la différence entre la solution du problème de rayonnement réel et celle du problème approché, on a, suivant (IV.63) :

$$\| \| W(x) \| \|^2 = \iint_{\Gamma_\infty} \frac{|F_1(\theta, \phi)|^2}{(kr)^4} d\Gamma \quad (\text{A.6.2})$$

d'où :

$$\| \| W(x) \| \|^2 \sim \frac{C}{k^2 R_\infty} \quad (\text{A.6.3})$$

Si maintenant on impose en tout point de  $\Gamma_\infty$  la condition (IV.54) on a :

$$\Delta W(\underline{x}) + k^2 W(\underline{x}) = 0 \quad (\text{A.6.4})$$

$$n_i \frac{\partial W}{\partial x_i} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{in} \quad (\text{A.6.5})$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} + ik \right) W(\underline{x}) = h(\underline{x}) \quad \text{sur } \Gamma_\infty \quad (\text{4.6.6})$$

avec :

$$h(\underline{x}) = \frac{C'}{k^2 R_\infty^3} \quad (\text{A.6.7})$$

Dès lors, notant  $\bar{W}(\underline{x})$  la quantité conjuguée de  $W(\underline{x})$ , (A.6.4) implique :

$$\iint_{\Gamma_\infty + \Gamma_{in}} (\bar{W} \cdot \text{grad } W) \underline{n} \cdot d\Gamma = \iiint_{\Omega_f^i} (|\text{grad } W|^2 - k^2 |W|^2) d\Omega$$

soit, utilisant (A.6.5) :

$$\text{Im} \iint_{\Gamma_\infty} (\bar{W} \cdot \text{grad } W) \underline{n} \cdot d\Gamma = 0 \quad (\text{A.6.9})$$

et :

$$\text{Im} \iint_{\Gamma_\infty} \bar{W} \left[ h - \left( \frac{1}{r} + ik \right) w \right] d\Gamma = 0 \quad (\text{A.6.10})$$

Finalement :

$$k ||W||^2 = \text{Im} \iint_{\Gamma_\infty} \bar{W} \cdot h \cdot d\Gamma \quad (\text{A.6.11})$$

soit, utilisant l'inégalité de Schwartz :

$$k ||W||^2 < ||W|| \cdot ||h|| \quad (\text{A.6.12})$$

et :

$$\| | W | \| \sim \frac{C'}{k^3 R_\infty^2}$$

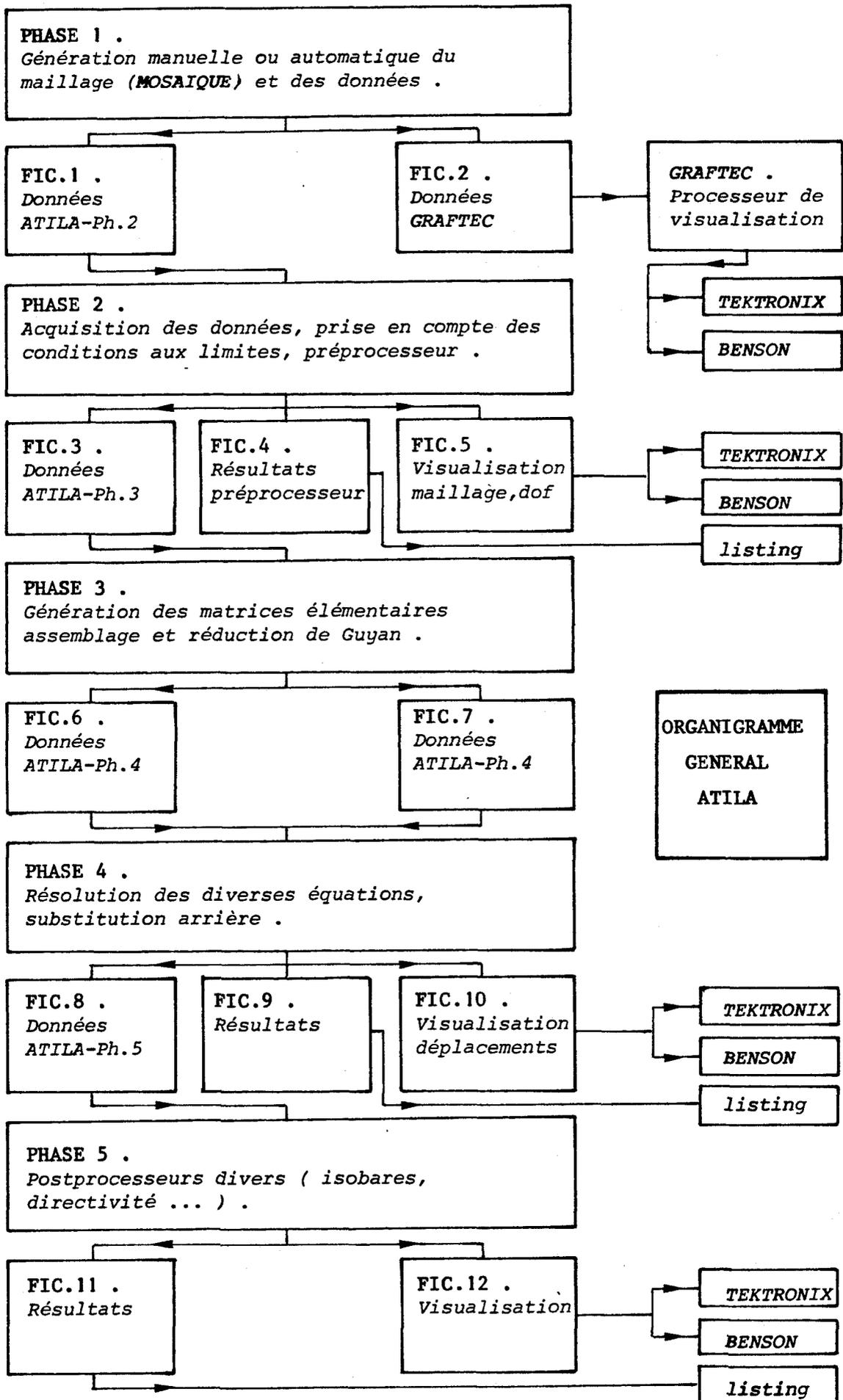
Les conséquences des relations (A.6.3) et (A.6.12) sont discutées dans la section (IV.4.1).



## ANNEXE 7

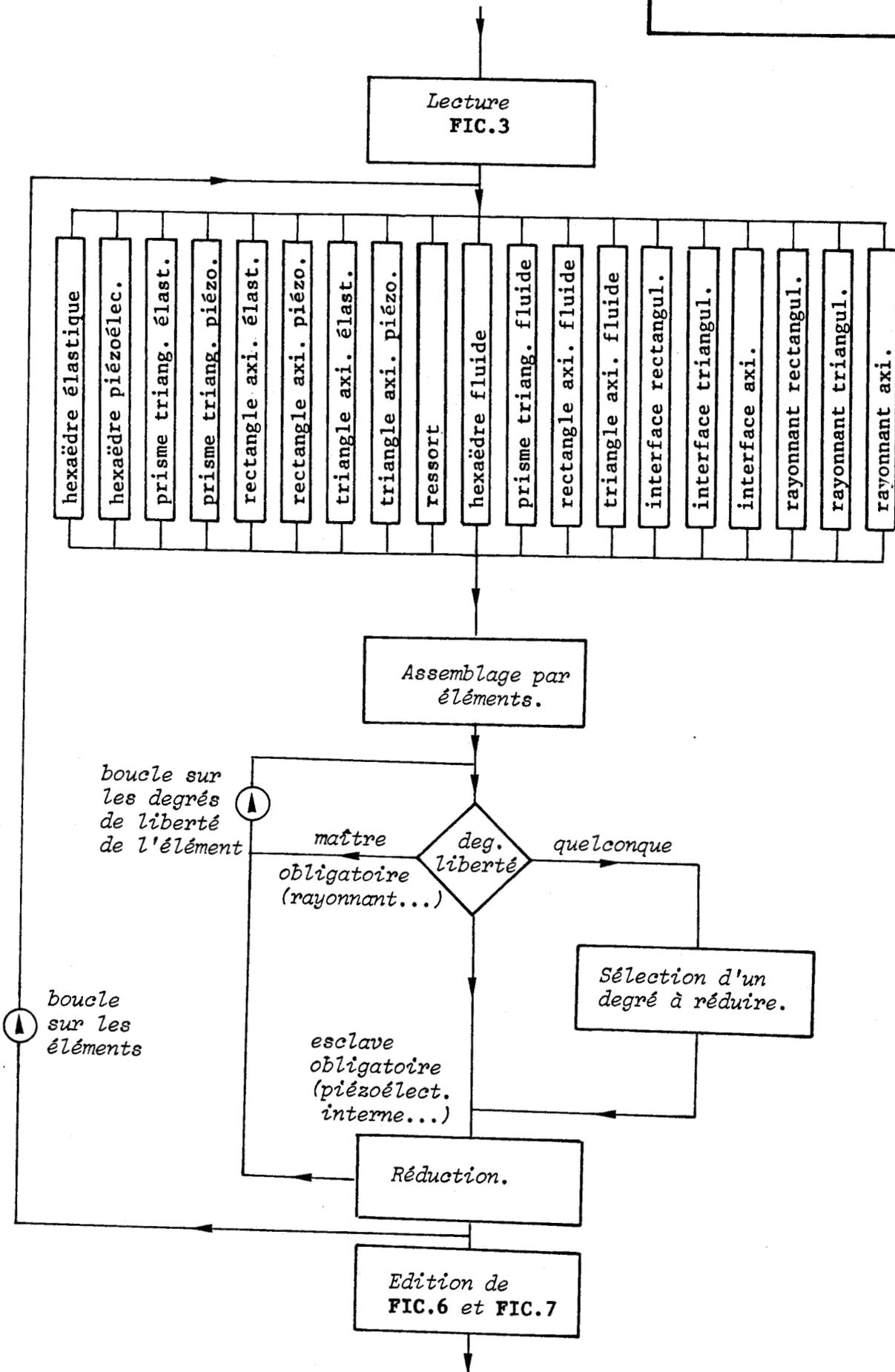
### PRESENTATION GLOBALE DU CODE ATILA

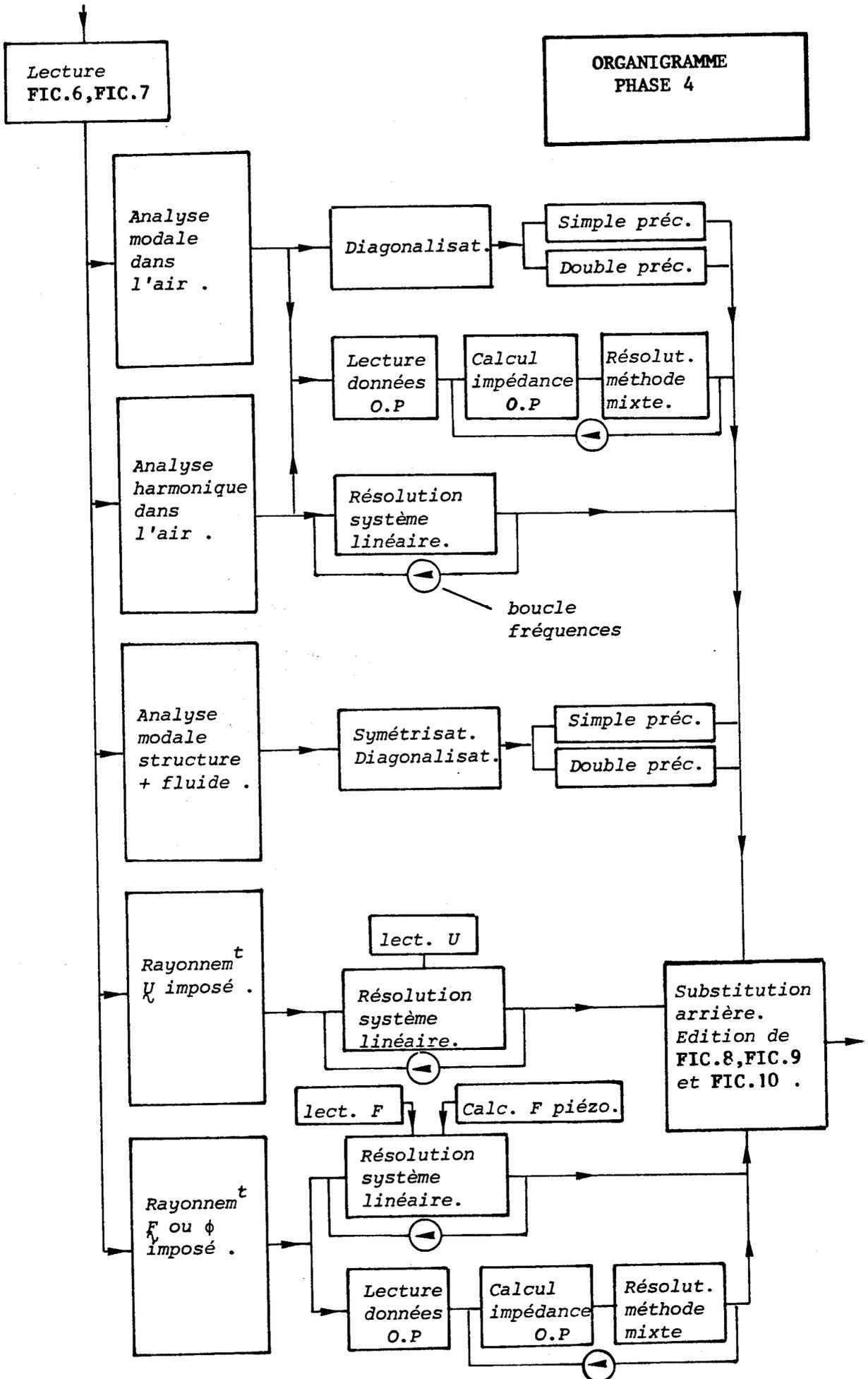
Le code ATILA contient environ 260 sous-programmes et 30.000 instructions FORTRAN. Le déroulement d'une exécution est commandé par un programme principal, écrit par l'utilisateur en fonction de son application, qui associe les déroulements de cinq phases successives, suivant l'organigramme de la page suivante. Les phases 3 et 4 qui différencient les applications sont d'autre part détaillées en deux tableaux synoptiques ci-après. Comme indiqué dans l'organigramme, la phase 1 fait appel à un générateur de maillage (MOSAIQUE) et un processeur de visualisation (GRAFTEC) qui sont, en fait, des codes indépendants. Le code a été ou est installé sur les systèmes suivants : IBM 370/148, IBM 4341 modèle 1 (ISEN), VAX 780 (GERDSM) et UNIVAC 1110 (CCSA). Des temps d'exécution sur IBM 4341 sont regroupés dans le tableau ci-après. Ils sont voisins de ceux obtenus sur VAX 780 et donnent des ordres de grandeur. Enfin, il faut noter les possibilités de reprise à chaque changement de phase.



ORGANIGRAMME

PHASE 3





Type de calcul	Temps CPU	Type de calcul	Temps CPU
Analyse modale d'une céramique : symétrie axiale (§ II.4.2)	5sec.	Analyse harmonique d'un Tonpilz immergé, à symétrie axiale (§ V.2 et V.3) : <i>assemblage</i>	20 à 30 min.
Analyse modale d'une céramique : 3D (§ II.4.2)	30sec.	Analyse harmonique d'un Tonpilz immergé, à symétrie axiale (§ V.2 et V.3) : <i>pas de fréquence</i>	3 à 8 min.
Analyse modale d'un Tonpilz à symétrie axiale (§ III.4)	7 à 10 min.		



## RÉSUMÉ

L'application de la méthode des éléments finis à l'analyse de transducteurs piézoélectriques, utilisés particulièrement comme projecteurs dans les systèmes SONAR, est décrite. L'objectif poursuivi est la modélisation de structures de géométrie quelconque, à symétrie axiale ou réellement tridimensionnelles, rayonnant ou non dans un fluide environnant.

Les champs représentés par les interpolations de la méthode des éléments finis sont le déplacement dans la partie élastique, le potentiel électrique dans la partie piézoélectrique, la pression dans le fluide. Le déplacement et le potentiel électrique sont couplés dans le volume piézoélectrique par les équations constitutives du matériau. Le déplacement et la pression sont couplés en tout point de l'interface fluide-structure par les relations de couplage cinématique et dynamique. Le rayonnement est pris en compte en imposant sur une surface sphérique qui entoure le maillage fluide une condition de non-réflexion, exacte en champ lointain, bien adaptée au problème de projecteurs isolés de type monopolaire.

L'analyse modale de structures électromécaniques dans l'air, la résolution de problèmes couplés fluide-structure en espace fermé ou ouvert, l'analyse harmonique de transducteurs rayonnants, sont testées avec succès. Plusieurs projecteurs réels sont notamment utilisés pour la validation, en permettant de montrer que la méthode reproduit correctement leurs réponses en tension dans de larges gammes de fréquence. Parmi les apports originaux, on peut citer l'extension aux problèmes couplés de la technique d'assemblage frontal, le développement d'une méthode mixte onde plane-éléments finis pour les structures présentant une partie à géométrie unidimensionnelle, l'analyse détaillée d'un type de transducteur, le Tonpizl, dans une large bande, permettant d'envisager des utilisations nouvelles. Ce travail est le support théorique qui a permis le développement du code ATILA.

## MOTS-CLEFS

Transducteur électroacoustique  
(*electroacoustic transducer*)

SONAR  
(*sonar*)

Interaction fluide-structure  
(*fluid-structure interaction*)

Piézoélectrique  
(*piezoelectric materials*)

Éléments finis  
(*finite element*)

Onde acoustique  
(*acoustical wave*)

Conception assistée  
(*computer aided design*)