

50376
1984
97

50376.
1984.
97.

N° d'ordre : 1173

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir le titre de

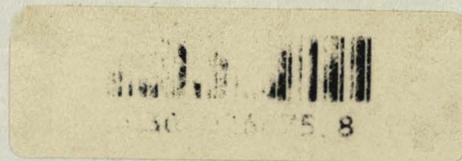
Docteur de 3ème cycle

Spécialité : Mécanique des Fluides.



HASSANE NAJI

MODELISATION ET CALCUL DE L'ECOULEMENT TURBULENT DANS
UN JET TOURNANT LIBRE.



Soutenue le 06 Juillet 1984

devant la Commission d'Examen

Président : M. MARTIN, Professeur, E.N.S.E.M., I.N.P.L., Nancy.

Rapporteurs: M. DYMENT, Professeur, Université de Lille.

M. COUSTEIX, Chef de Groupe de Recherche ONERA-CERT, Toulouse.

Examineurs: M. MICHEAU, Professeur, Université de Lille I.

M. TOURNIER, Professeur, Université de Valenciennes.

M. HOUDEVILLE, Ingénieur de Recherche ONERA-CERT, Toulouse.

M. STANISLAS, Ingénieur de Recherche ONERA-IMFL, Lille.

A LA MÉMOIRE DE MA MÈRE,

A MON PÈRE,

A MES FRÈRES,

A MES SOEURS ET MES AMIS.

AVANT PROPOS

Ce travail a été effectué au laboratoire de Mécanique des Fluides de l'Université des Sciences et Techniques de Lille sous la direction de Monsieur le Professeur A. DYMENT envers qui je suis reconnaissant pour son exemple scientifique qui m'a fait persévérer dans ma recherche et pour le soutien moral essentiel qu'il a su m'apporter. Ses enseignements qui m'ont initié à la Mécanique des Fluides et l'attention qu'il a constamment témoignée à l'égard de cette étude ont été pour moi plus que des encouragements.

Monsieur J. COUSTEIX, Chef de Groupe de Recherche à l'O.N.E.R.A.-C.E.R.T., a beaucoup contribué à cette étude. Il n'a ménagé ni son temps ni sa peine pour me permettre de résoudre et de clarifier de nombreux problèmes. Il m'a suggéré de nombreuses idées, sans lesquelles je n'aurais pu progresser dans cette étude. Qu'il me soit permis ici de lui témoigner mon entière reconnaissance et ma profonde estime.

Monsieur M. MARTIN, Professeur à l'I.N.P.L. - Nancy, a bien voulu consacrer une partie de son temps pour examiner ce travail et participer à mon jury de thèse. Je le prie d'accepter l'expression de mes vifs remerciements.

Monsieur P. MICHEAU, Professeur à l'E.U.D.I.L. et Monsieur C. TOURNIER, Professeur à l'Université de Valenciennes ont montré un vif intérêt pour ce travail et ont accepté d'être présents dans le jury. Il m'est agréable de les remercier.

Il me tient à coeur d'adresser plus que des remerciements à l'attention de Monsieur R. HOUDEVILLE. J'ai été très sensible à la communication qui s'est instaurée entre nous au cours de mon séjour au C.E.R.T. Mon estime et mon amitié lui sont acquises.

Je remercie tout particulièrement Monsieur M. STANISLAS de l'I.M.F.L, à qui je dois beaucoup pour avoir suivi mon travail à ses débuts et qui a été pour moi plus qu'un initiateur aux méthodes de calcul.

Je souhaite également remercier très chaleureusement Messieurs D. VANDROMME et H. MUHE pour les discussions enrichissantes que nous avons eues, tant sur le plan numérique, que sur le plan expérimental.

Je tiens à remercier ici toutes personnes avec lesquelles j'ai été en relation au cours de cette étude et qui m'ont fourni de précieux renseignements, et en particulier MM. AUPOIX B., ARNAL D., COUSTOLS E., JUILLEN J.C., JELLITI M., GLEYZES C. et TINEL Y.

Mes reconnaissances vont également à tout le personnel du C.I.T.I. de l'U.S.T.L. pour leur dévouement et leur gentillesse.

Un hommage particulier doit être rendu à N. NAJI, mon épouse, pour sa patience et son soutien moral, indispensables surtout en fin de parcours. Qu'il me soit permis ici de lui témoigner ma profonde affection.

C'est avec un grand plaisir que j'exprime mes sincères remerciements à Mme JUILLEN et Mlle PUJOL qui ont facilité mes séjours effectués à Toulouse et en particulier au D.E.R.A.T-C.E.R.T.

Il m'est difficile d'exprimer en quelques mots ma reconnaissance envers Mme PETIAUX, responsable de la présentation de ce mémoire. Son accueil et son sourire ont été constamment pour moi le meilleur des encouragements.

Enfin, je remercie le personnel du secrétariat de l'U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées, des bibliothèques et du service de reproduction pour leur gentillesse et leur efficacité.

Pour terminer, je me dois de remercier le Ministère de l'Industrie et de la Recherche qui m'a fait bénéficier d'une bourse sans laquelle il m'aurait été difficile de mener à bien ce travail.

ERRATA

page 137 : il faut lire $v_t = \dots\dots\dots$.

page 138 : il faut remplacer dans V.3.7 ϵ par ϵ_P
et dans V.3.8 ϵ par ϵ_T .

page 202 : lire Profils initiaux de u , v , k et ϵ .

fig. V.8 : remplacer s^* par s et ϵ par ϵ^* .

fig. V.2 à V.5 et fig. V.15 : ξ varie de -2.0 à $+2.0$.

Enfin, je remercie le personnel du secrétariat de l'U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées, des bibliothèques et du service de reproduction pour leur gentillesse et leur efficacité.

Pour terminer, je me dois de remercier le Ministère de l'Industrie et de la Recherche qui m'a fait bénéficier d'une bourse sans laquelle il m'aurait été difficile de mener à bien ce travail.

ERRATA

page 137 : il faut lire $\nu_t = \dots\dots\dots$.

page 138 : il faut remplacer dans V.3.7 ϵ par ϵ_P
et dans V.3.8 ϵ par ϵ_T .

page 202 : lire Profils initiaux de u , v , k et ϵ .

fig. V.8 : remplacer s^* par s et ϵ par ϵ^* .

fig. V.2 à V.5 et fig. V.15 : ξ varie de -2.0 à +2.0 .

SOMMAIRE

	Pages
PRINCIPALES NOTATIONS	8
INTRODUCTION	12
CHAPITRE I : PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA MODELISATION DANS L'ESPACE PHYSIQUE	15
1.1.- L'APPROCHE STATISTIQUE	15
1.2.- LES EQUATIONS DE L'ECOULEMENT INSTANTANE ET MOYEN	16
1.2.1.- Equations de l'écoulement instantané et moyen	16
1.3.- TECHNIQUES UTILISEES DANS LA DESCRIPTION DE LA TURBULENCE	19
1.3.1.- Equations de transport aux contraintes de Reynolds	19
1.3.2.- <u>Interprétation</u> des termes des équations de transport pour $u_i u_j$	20
1.3.3.- Equations des différentes énergies caractéristiques de la turbulence	21
1.3.3.1.- Equation de l'énergie cinétique instantanée	21
1.3.3.2.- Equation de l'énergie cinétique moyenne	21
1.3.3.3.- Equation de l'énergie cinétique turbulente	23
1.4.- NECESSITE DE LA MODELISATION	24
CHAPITRE II : MODELISATION DE LA TURBULENCE DANS L'ESPACE PHYSIQUE	26
II.1.- VISUALISATION ET SCHEMATISATION DE LA TURBULENCE	26
II.2.- LE PHENOMENE DE CASCADE D'ENERGIE	27
II.2.1.- Structure de la turbulence	27
II.2.2.- Echelles pratiques en turbulence	28
II.2.2.1.- Les grosses structures	28
II.2.2.2.- Les petites structures	29

II.2.3.-	Hypothèses nécessaires à la modélisation.	30
II.2.3.1.-	L'échelle unique de temps	30
II.2.3.2.-	Isotropie locale	31
II.2.3.3.-	Ordre de grandeur du nombre de Reynolds de la turbulence	32
II.3.-	MODELISATION DES EQUATIONS DE TRANSPORT POUR UN ECOULEMENT EN GEOMETRIE DE REVOLUTION	32
II.3.1.-	Equations de transport du mouvement moyen	32
II.3.1.1.-	Equation de continuité	32
II.3.1.2.-	Equation radiale de la quantité de mouvement	32
II.3.1.3.-	Equation tangentielle de la quantité de mouvement	37
II.3.1.4.-	Equation axiale de la quantité de mouvement	37
II.3.2.-	Equations de transport de la turbulence	38
II.3.2.1.-	Equation de transport pour $\overline{U^2}$	38
II.3.2.2.-	Equation de transport pour $\overline{V^2}$	39
II.3.2.3.-	Equation de transport pour $\overline{W^2}$	39
II.3.2.4.-	Equation de transport pour \overline{UV}	40
II.3.2.5.-	Equation de transport pour \overline{UW}	41
II.3.2.6.-	Equation de transport pour \overline{VW}	41
II.4.-	MODELISATION DES EQUATIONS DE TRANSPORT DES TENSIONS DE REYNOLDS	42
II.4.1.-	Modélisation du terme de production	43
II.4.2.-	Modélisation de la corrélation vitesse-pression	43
II.4.2.1.-	Modélisation du terme non linéaire $\sigma_{ij,1}$	44
II.4.2.2.-	Modélisation du terme linéaire $\sigma_{ij,2}$	45

II.4.3.-	Modélisation du terme de diffusion	49
II.4.4.-	Modélisation du terme de dissipation	53
II.5.-	MODELE GLOBAL RESULTANT	53
II.6.-	MODELISATION DE L'EQUATION DE TRANSPORT POUR k	54
II.6.1.-	Analyse des différents termes	54
II.6.2.-	Modélisation	56
II.7.-	MODELISATION DE L'EQUATION DE TRANSPORT POUR ϵ	57
II.7.1.-	Analyse des différents termes	57
II.7.2.-	Modélisation	58
II.8.-	REVUE DES EQUATIONS ELLIPTIQUES MODELISEES.....	59
CHAPITRE III : PROCEDURES DE RESOLUTION NUMERIQUE DES		
	PROBLEMES DE CISAILLEMENT SIMPLE.....	61
III.1.-	CALCUL NUMERIQUE EN MECANIQUE DES FLUIDES	61
III.1.1.-	Rôle du calcul numérique	61
III.1.2.-	Méthode intégrale	62
III.1.3.-	Méthode "fonction de courant-rotationnel"	62
III.1.4.-	Méthode des "volumes finis"	63
III.2.-	PROCEDURES MISES EN OEUVRE POUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS.....	63
III.2.1.-	Formulation $(\Psi, \Omega, \mathbf{v})$	63

III.2.1.1.- Equations adimensionnelles du mouvement	63
III.2.1.1.1.- Equation de la fonction de courant	66
III.2.1.1.2.- Equation du tourbillon	66
III.2.1.1.3.- Equation de la vitesse orthoradiale	66
III.2.1.2.- Discrétisation des équations	68
III.2.1.3.- Résolution numérique	71
III.2.1.4.- Conditions aux limites	72
III.2.1.5.- Conditions initiales	72
III.2.2.- Formulation (U, V, W, P)	73

CHAPITRE IV : APPLICATION DE LA METHODE DES VOLUMES FINIS

AU CALCUL DES JETS TOURNANTS TURBULENTS	74
IV.1.- MODELES DE TURBULENCE ENVISAGES	74
IV.1.1.- Rappel des équations à résoudre	74
IV.1.2.- Modèle de longueur de mélange	75
IV.1.3.- Modèle à deux équations de transport pour k et ϵ	78
IV.1.4.- Modèle à quatre équations de transport pour $k, \epsilon, \overline{u'w'}$ et $\overline{v'w'}$	80
IV.2.- CHOIX DU DOMAINE ET DES CONDITIONS AUX LIMITES	80
IV.2.1.- Conditions à l'entrée	81
IV.2.1.1.- Calcul de l'écoulement entre les deux disques	81
IV.2.1.1.1.- Système d'équations à résoudre	81
IV.2.1.1.2.- Conditions d'initialisation	84
IV.2.1.1.3.- Conditions aux limites	90

IV.2.2.- Profils initiaux pour le calcul de jets tournants.....	91
IV.2.3.- Conditions aux limites pour les jets tournants.....	92
IV.3.- METHODES DE RESOLUTION PAR VOLUMES FINIS	93
IV.3.1.- Principe de la méthode	94
IV.3.1.1.- Idée fondamentale de la méthode	94
IV.3.1.2.- Intégration dans un volume fini.....	95
IV.3.1.3.- Hypothèses de mise en oeuvre	96
IV.3.1.4.- Discrétisation des équations.....	98
IV.3.1.4.1.- Forme résultante des équations discrétisées.....	104
IV.3.1.4.2.- Expressions des coefficients a_j, b_j, c_j et d_j pour les schémas UDS et CDS	106
IV.3.1.4.3.- Revue des différentes expressions des coefficients a_j, b_j, c_j , et d_j	108
IV.3.1.4.4.- Intégration de W	112
IV.3.1.5.- Résolution par l'algorithme de THOMAS	115
IV.3.1.5.1.- Expression matricielle	115
IV.3.1.5.2.- Algorithme de THOMAS	116
IV.3.1.5.3.- Algorithme de la procédure	120
IV.4.- DETAILS DES CALCULS	120
IV.4.1.- Définition du système de maillage utilisé.....	120
IV.4.2.- Détermination du pas longitudinal.....	122
IV.4.3.- Calcul des termes S_j^u, D_j^u et c_Φ	122
IV.4.3.1.- Equation radiale de quantité de mouvement	122
IV.4.3.2.- Equation orthoradiale de quantité de mouvement ..	124

IV.4.3.3.- Equation de l'énergie cinétique turbulente	124
IV.4.3.4.- Equation du taux de dissipation	125
IV.5.- ORGANIGRAMME DU PROGRAMME	125
CHAPITRE V : CONFRONTATION ENTRE LE CALCUL ET L'EXPERIENCE	126
V.1.- INTRODUCTION	126
V.1.1.- Effet d'une rotation sur la turbulence	127
V.1.2.- Effet des conditions initiales	127
V.2.- LA CONFRONTATION ENTRE LE CALCUL ET L'EXPERIENCE	128
V.2.1.- Généralités	128
V.2.2.- Vitesses moyennes	130
V.2.2.1.- Profils de la vitesse radiale moyenne	130
V.2.2.2.- Profils de la vitesse orthoradiale moyenne	130
V.2.3.- Echelles caractéristiques du jet	131
V.2.3.1.- Echelles des vitesses moyennes	131
V.2.3.2.- Degré local de rotation	132
V.2.3.3.- Taux de dispersion	132
V.2.4.- Tensions de Reynolds	133
V.2.4.1.- Tensions de Reynolds \overline{uw}	133
V.2.4.2.- Tensions de Reynolds \overline{vw}	134
V.2.5.- Energie cinétique turbulente	134
V.2.6.- Taux de dissipation	135
V.3.- CONCLUSION	135

CONCLUSION	141
ANNEXE 1 : EQUATIONS DE TRANSPORT DES CONTRAINTES DE REYNOLDS EN COORDONNES CARTESIENNES	144
ANNEXE 2 : EQUATIONS DE TRANSPORT DES CONTRAINTES DE REYNOLDS EN COORDONNES CYLINDRIQUES	148
ANNEXE 3 : METHODE DE RESOLUTION NUMERIQUE EN (ψ, Ω)	167
ANNEXE 4 : ORGANIGRAMME DE LA PROCEDURE NUMERIQUE PAR VOLUMES FINIS	190
REFERENCES	192
LISTE DES FIGURES	202

PRINCIPALES NOTATIONS

Nous donnons ici la liste des principaux symboles utilisés; les autres sont définis dans le texte.

NOTATIONS LATINES :

$\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z$	vecteurs unitaires en coordonnées cylindriques
$x_i (i=1,2,3)$	trièdre cartésien de référence
\tilde{u}_i	composante de la vitesse instantanée dans la direction i
U_i	composante de la vitesse moyenne dans la direction i
u_i	composante de la vitesse fluctuante dans la direction i
\tilde{p}	pression instantanée
P	pression moyenne
p	fluctuation de la pression
$\overline{u_i u_j}$	tenseur de Reynolds
k	énergie cinétique de turbulence
l	échelle de longueur des grosses structures
l'	échelle de longueur des petites structures
r, θ, z	coordonnées cylindriques, où z est la distance axiale à partir du plan médian des deux disques
r_0	origine virtuelle du jet
R_0	rayon des disques
h	écartement entre les disques
U_Q	vitesse radiale moyenne à la sortie

$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$	composantes instantanée de la vitesse radiale, tangentielle et axiale respectivement
U, V, W	composantes moyennes de la vitesse radiale, tangentielle et axiale
u, v, w	composantes fluctuantes de la vitesse radiale, tangentielle et axiale
U_m, V_m	valeurs maximales de U et de V
C_μ $C_{\epsilon 1}, C_{\epsilon 2}$	constantes dans le modèle $k-\epsilon$
l_0	longueur de mélange
F, f_2, f_μ	fonctions correctrices de viscosité
u_τ	vitesse de frottement
C_f	coefficient de frottement
H	paramètre de forme
S_θ	terme de source relatif à la variable θ
$L(r)$	longueur de référence
C_{P1}, C_{P2} C_{T1}, C_{T2}	constantes dans le modèle multi-échelle
$Re_t = \frac{k^2}{\nu \cdot \epsilon}$	nombre de Reynolds de la turbulence
$Re_\theta = \frac{\theta \cdot U_e}{\nu}$	nombre de Reynolds relatif à θ
$Re = \frac{\omega \cdot R_0}{\nu}$	nombre de Reynolds relatif au taux de rotation ϵ
$Pe = \frac{W \cdot \Delta z}{\nu}$	nombre de Peclet
Ri	nombre de flux de Richardson

NOTATIONS GRECQUES :

ρ	masse volumique
μ	viscosité dynamique moléculaire
μ_t	viscosité turbulente dynamique
ν	viscosité cinématique
ν_t	viscosité turbulente cinématique
τ_d	échelle unique de temps
$\mu_e = \mu + \mu_t$	viscosité dynamique effective
$\nu_e = \nu + \nu_t$	viscosité cinématique effective
δ_{ij}	tenseur de Kronecker
ϵ_{ij}	dissipation
ϵ	taux de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence
$\eta = \frac{z}{L(r)}$	ordonnée réduite
σ_θ	nombre de "Prandtl turbulent" relatif à la variable θ
$\phi_{ij,1}$	corrélation pression-vitesse : terme non linéaire
$\phi_{ij,2}$	corrélation pression-vitesse : terme linéaire
δ	épaisseur du jet (distance axiale entre les plans où $U = U_m$ et $U = \frac{1}{2}U_m$) ou de couche limite sur plaque plane
δ^*	distance axiale entre les plans où $U = U_c$ et $U = 0.01U_m$
δ_1	épaisseur de déplacement
θ	épaisseur de quantité de mouvement

ε^*	rapport de l'écartement au rayon du disque
ω	taux de rotation
$\xi = \frac{z}{\delta}$	distance axiale adimensionnelle
Δ	Laplacien en coordonnées cylindriques
ψ	fonction de courant
Ω	rotationnel
τ	contrainte totale : $\tau = \tau_{\text{lam}} + \tau_{\text{tot}}$

INDICES :

l	linéaire
nl	non linéaire
p	condition à la paroi
e , o	condition extérieure
i	condition intérieure
d	condition aval
u	condition amont
+	condition en η^+
-	condition en η^-

INTRODUCTION

Les écoulements de cisaillement libres qui comprennent essentiellement les jets turbulents, les sillages et les zones de mélange présentent, malgré leur simplicité apparente, bien des caractères qui les désignent particulièrement comme des tests cruciaux pour valider certaines méthodes numériques.

Ces écoulements sont caractérisés sur un plan physique par les propriétés suivantes :

- L'écoulement s'effectue dans un domaine présentant une distorsion géométrique orthogonale à la direction principale de la vitesse.
- Les frontières de l'écoulement sont libres en partie ou en totalité, ce qui rend l'écoulement turbulent même à nombre de Reynolds modéré.

Ils sont aussi caractérisés d'un point de vue spectral, soit par une faible production d'énergie cinétique turbulente, dominée par les processus convectifs comme dans le sillage derrière un obstacle, soit par une production forte comme dans les jets plans.

Dans la présente recherche, nous nous sommes particulièrement intéressés au calcul de jets en rotation, cette dernière étant induite par un obstacle tournant. Le problème abordé concerne les jets issus de l'interstice entre deux disques coaxiaux, l'un fixe, l'autre tournant à vitesse constante.

Le caractère fortement diffusif de la turbulence, propre aux écoulements cisailés est, souvent décrit par un coefficient dit de viscosité turbulente par analogie avec la diffusivité moléculaire. Mais même si cette

formulation a apporté satisfaction dans de nombreux cas, elle a fait l'objet de critiques fondées car elle n'a pas permis de décrire certains problèmes à champ moyen dissymétrique.

La détermination de cette viscosité turbulente peut se réaliser à l'aide de plusieurs méthodes. Parmi celles-ci, on peut citer le modèle de longueur de mélange de Prandtl, le modèle de Prandtl-Kolmogorov, et le modèle $k-\epsilon$ qui détermine cette viscosité turbulente à l'aide d'un groupement entre l'énergie cinétique turbulente k et son taux de dissipation ϵ .

Le calcul des jets s'effectue à l'aide d'un modèle $k-\epsilon$ mettant en jeu, outre les équations de quantité de mouvement auxquelles on a appliqué l'approximation de couche limite et l'équation de continuité, deux équations de transport pour l'énergie cinétique turbulente k et pour le taux de dissipation ϵ . La technique numérique qui a servi ici à résoudre ce système à cinq équations aux dérivées partielles est du type "volumes finis". Elle s'inspire des travaux de PATANKAR et SPALDING.

Le mémoire se présente de la façon suivante :

- Le premier chapitre rappelle quelques principes fondamentaux de la modélisation dans l'espace physique.
- Le second chapitre traite succinctement de la modélisation de la turbulence dans l'espace physique, de la modélisation des équations de transport pour un écoulement en géométrie de révolution, des tensions de Reynolds, de l'énergie cinétique de turbulence et de son taux de dissipation.
- Dans le troisième chapitre, nous passons en revue quelques procédures de résolution numérique des problèmes de cisaillement simple.
- La technique de calcul utilisée est présentée dans le quatrième chapitre.
- Le chapitre cinq est consacré à la comparaison du calcul avec l'expérience.

On y aborde différents problèmes soulevés par cette comparaison et on essaye d'apporter quelques propositions comme perspectives de développement futur de la recherche.

- Enfin, nous résumons les résultats obtenus dans la conclusion, en soulignant les avantages et les lacunes de la procédure numérique et du modèle utilisés.

CHAPITRE I

PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA MODELISATION DE LA TURBULENCE DANS L'ESPACE PHYSIQUE

La turbulence est un phénomène très courant en Mécanique des Fluides. En effet, la majorité des écoulements rencontrés dans les applications pratiques sont turbulents. Ce phénomène est caractérisé par une agitation apparemment désordonnée, des particules fluides. Son apparition peut être néfaste, par exemple en provoquant un dérèglement des brûleurs, une augmentation de la traînée, une excitation de structure; mais il peut procurer certains avantages comme le retardement des décollements des couches limites.

Théoriquement, toute étude d'écoulement turbulent doit se faire en résolvant les équations de Navier-Stokes et de la continuité qui régissent les vitesses instantanées. Or, cette voie s'est avérée très compliquée voir impossible. Alors, on se contente d'aborder les écoulements turbulents par une approche qui consiste à décomposer toute grandeur physique en une partie moyenne constante dans le temps et en une partie fluctuante de moyenne temporelle nulle, et à essayer d'appréhender les grandeurs moyennes.

I.1.- L'APPROCHE STATISTIQUE

La méthode classique pour décrire un écoulement turbulent est de décomposer toute grandeur instantanée \tilde{f} en une moyenne d'ensemble $\langle \tilde{f} \rangle$ et une fluctuation f :

$$\tilde{f} = \langle \tilde{f} \rangle + f$$

I.1.1

$\langle \tilde{f} \rangle$ est obtenue en moyennant \tilde{f} sur un ensemble infini de réalisations du phénomène.

f est la partie aléatoire de \tilde{f} .

Un écoulement est stationnaire lorsque la moyenne d'ensemble $\langle \tilde{f} \rangle$ est indépendante du temps et se réduit donc à une valeur moyenne ordinaire qu'on notera \bar{f} :

$$\bar{f}(\vec{x}) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(\vec{x}, t) dt \quad \text{I.1.2}$$

Nous écrirons alors :

$$\tilde{f} = \bar{f} + f \quad \text{I.1.3}$$

La moyenne de la fluctuation de \tilde{f} est évidemment nulle.

I.2.- LES EQUATIONS DE L'ECOLEMENT INSTANTANE ET MOYEN

I.2.1.- Equations de l'écoulement instantané et moyen

Une étude générale d'un écoulement nécessite la résolution des équations de Navier-Stokes, de la continuité, de l'énergie et des différentes lois d'état du fluide.

Si on adopte les hypothèses suivantes :

- fluide newtonien à propriétés physiques constantes,
- température constante,
- écoulement stationnaire,
- forces extérieures négligeables

le phénomène étudié est purement dynamique et il ne nécessite que la résolution

du système :

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{I.2.1.1}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_k \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_k^2} \quad \text{I.2.1.2}$$

En appliquant l'approche statistique décrite ci-dessus aux équations I.2.1.1 et I.2.1.2 et en prenant la moyenne, on obtient :

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{I.2.1.3} \quad \text{pour l'écoulement moyen}$$

d'ou, par différence,

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{I.2.1.4} \quad \text{pour les fluctuations}$$

et les équations dites de Reynolds pour le mouvement moyen

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j} \right] \quad \text{I.2.1.5}$$

L'équation I.2.1.3 associée aux 3 équations I.2.1.5 permettent de déterminer l'écoulement moyen à condition de connaître l'expression des termes supplémentaires $\overline{u_i u_j}$.

L'apparition de ces termes turbulents est lié au caractère non linéaire des équations de Navier-Stokes. On nomme ces termes tensions de Reynolds car ils jouent un rôle semblable à celui des contraintes visqueuses. Ils constituent les composantes d'un tenseur symétrique appelé tenseur de Reynolds.

$$\vec{R}_{ij} = \begin{pmatrix} \overline{u^2} & \overline{uv} & \overline{uw} \\ \overline{uv} & \overline{v^2} & \overline{vw} \\ \overline{uw} & \overline{vw} & \overline{w^2} \end{pmatrix} \quad \text{I.2.1.6}$$

Comme nous l'avons signalé plus haut, l'étude d'un écoulement passe par la détermination du mouvement moyen (vitesse-pression). Pour cela, on ne dispose que de l'équation de continuité et des équations de Reynolds dont la réunion constitue un système ouvert.

Si l'on dérive l'équation I.2.1.2 par rapport à X_i , que l'on somme et que l'on tient compte de l'équation de continuité, on obtient l'équation de Pression pour \tilde{p} :

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial X_i^2} = - \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial X_k} \quad \text{I.2.1.7}$$

En utilisant encore la décomposition classique I.1.3, on obtient deux équations de Poisson pour la pression moyenne et la fluctuation de la pression :

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial X_i^2} = - \left\{ \frac{\partial U_k}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial U_i}{\partial X_k} + \overline{\frac{\partial u_k}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial X_k}} \right\} \quad \text{I.2.1.8}$$

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial X_i^2} = - \left\{ 2 \frac{\partial U_k}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial X_k} + \frac{\partial^2}{\partial X_i^2} \left(u_i u_k - \overline{u_i u_k} \right) \right\} \quad \text{I.2.1.9}$$

En tenant compte de l'équation de continuité de la fluctuation turbulente, on peut écrire I.2.1.8 sous la forme :

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial X_i^2} = - \left(\frac{\partial U_k}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial U_i}{\partial X_k} + \frac{\partial^2 \overline{u_i u_k}}{\partial X_i \partial X_k} \right) \quad \text{I.2.1.10}$$

On voit alors d'après I.2.1.5 et I.2.1.10 que la détermination des vitesses moyennes et de la pression nécessite la spécification des quantités en surnombre qui sont dues aux effets de la turbulence.

1.3.- TECHNIQUES UTILISEES DANS LA DESCRIPTION DE LA TURBULENCE

La voie idéale pour décrire la turbulence est d'établir des équations de transport exactes pour les tensions de Reynolds à partir des équations instantanées de Navier-Stokes (Annexe 1). Cependant cette voie mène à des équations contenant des corrélations de vitesses d'ordre supérieur ou égal à 2 et des corrélations vitesses-pressions.

1.3.1.- Equations de transport des contraintes de Reynolds

En multipliant par u_i l'équation de Navier-Stokes projetée suivant x_j , en lui ajoutant sa conjuguée, en sommant membre à membre et en moyennant on obtient l'équation de transport de la grandeur $\overline{u_i u_j}$ / 1 /, / 2 / :

$$(I) \quad \frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = - \left[\overline{u_i u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + \overline{u_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} \right] \quad \text{II}$$

$$- 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} \quad \text{III}$$

I.3.1.1

$$+ \frac{p}{\rho} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad \text{IV}$$

$$- \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{u_i u_j u_k} - \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} + \frac{p}{\rho} (\delta_{jk} u_i + \delta_{ik} u_j) \right] \quad \text{V}$$

1.3.2.- Interprétation des différents termes constituant l'équation de transport des contraintes de Reynolds

Il est possible de donner à chaque terme de l'équation de transport pour $\overline{u_i u_j}$ une interprétation physique :

- Le terme I est la dérivée matérielle de $\overline{u_i u_j}$. Il représente le transport convectif de $\overline{u_i u_j}$ par l'écoulement moyen.

- Le terme II est la production due au mouvement moyen. Il représente une action du gradient de la vitesse moyenne sur les contraintes de Reynolds. On montre que suivant le signe du gradient, ce terme correspond soit à une production positive, soit à une production négative pour $\overline{u_i u_j}$.

- Le terme III exprime la dissipation de la contrainte visqueuse. En effet, on remarque que ce terme est le produit d'une contrainte $\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ par un gradient $\frac{\partial u_j}{\partial x_k}$. Donc il représente l'effet du gradient de la vitesse d'agitation turbulente sur la contrainte visqueuse correspondant à l'agitation. On montre dans l'espace spectral que ce terme correspond toujours à une destruction de $\overline{u_i u_j}$. Sa contraction entraîne la dissipation de l'énergie turbulente par effet visqueux.

- Le terme IV exprime une corrélation entre les fluctuations des gradients de vitesses et de la pression. On montre que ce terme disparaît dans l'équation de l'énergie cinétique de turbulence. Il représente donc une redistribution (échange) entre les composantes normales $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ et $\overline{w^2}$.

- Enfin, le terme V représente le transport par diffusion des tensions dû à l'écoulement turbulent, à la viscosité et aux interactions vitesses-pressions fluctuantes.

1.3.3.- Equations des différentes énergies caractéristiques de la turbulence

Dans un écoulement, on peut définir plusieurs formes d'énergies liées au mouvement instantané, moyen et fluctuant.

1.3.3.1.- Equation de l'énergie cinétique du mouvement instantané

En multipliant par \tilde{u}_i l'équation de quantité de mouvement I.2.1.2, on obtient l'équation de transport pour l'énergie cinétique $\frac{1}{2}\tilde{u}_i\tilde{u}_i$ du mouvement instantané :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \tilde{u}_i \tilde{u}_i \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\tilde{u}_j \left(\frac{\tilde{p}}{\rho} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} \right) \right] & \quad \text{I.3.3.1.1} \\ = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\tilde{u}_i \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] - \nu \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) & \end{aligned}$$

Cette équation exprime que les variations locales par unité de temps et de masse de l'énergie cinétique instantanée(1) sont égales à la somme des contributions convectives de la pression totale (2) de la diffusion visqueuse (3) et de la dissipation mécanique due au frottement visqueux (4).

1.3.3.2.- Equation de l'énergie cinétique du mouvement moyen

En multipliant par U_j l'équation I.2.1.5 (équation du mouvement moyen), on obtient l'équation dite de l'énergie cinétique moyenne / 2 /, / 3 /:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} U_i U_i \right) = \overline{u_i u_i} \otimes S_{il} - 2\nu S_{il} \otimes S_{il}$$

I.3.3.2.1

$$+ \frac{\partial}{\partial x_l} \left(2\nu U_i S_{il} - \overline{u_i u_i} U_i - \frac{P}{\rho} U_i \delta_{il} \right)$$

En posant $S_{il} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l}{\partial x_i} \right)$ tenseur de déformation
 et $T_{il} = \nu 2 S_{il} - \overline{u_i u_i} - \frac{P}{\rho} \delta_{il}$ tenseur qui représente la somme des
 contraintes visqueuse, turbulente et de pression, on peut écrire l'équation

I.3.3.2.1 sous la forme :

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} U_i U_i \right) = -T_{il} \otimes S_{il} + \frac{\partial}{\partial x_l} (T_{il} U_i)$$

I.3.3.2.2

- Le terme 2 représente le travail interne de déformation. En effet,
 il peut être mis sous la forme :

$$-T_{il} \otimes S_{il} = -2\nu S_{il} \otimes S_{il} + \overline{u_i u_i} \otimes S_{il} + \frac{P}{\rho} S_{il} \otimes \delta_{il}$$

(a) (b) (c)

I.3.3.2.3

Le terme (a) correspond à la dissipation visqueuse, donc à une transformation de l'énergie cinétique moyenne en chaleur. C'est un travail de déformation pour les contraintes visqueuses. Ce terme est toujours négatif, ce qui a pour effet de prélever de l'énergie cinétique au mouvement moyen.

Le terme (b) correspond à un travail de déformation pour les contraintes turbulentes. Il est en général négatif, donc il correspond à un prélèvement de l'énergie cinétique à l'écoulement moyen, mais dans certains cas /57/, il restitue au contraire de l'énergie à l'écoulement moyen.

- Le terme (c) est nul, ce qui implique que la pression n'intervient pas dans la déformation.

Le terme 3 représente la somme des travaux externes reçus par la masse fluide.

1.3.3.3.- Equation de l'énergie cinétique turbulente

Elle est définie par : $k = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$

L'équation de transport pour k s'obtient en faisant la contraction des équations de transport pour $\overline{u_i u_j}$. On a donc :

$$\frac{Dk}{Dt} = \underbrace{-\overline{u_i u_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_1 - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u_j k} + \overline{u_j \frac{p}{\rho}} - \nu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right)}_3 \underbrace{- \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2}_6 \quad \text{I.3.3.3.1}$$

Le terme 1 représente la convection de l'énergie turbulente k dûe au mouvement moyen.

Le terme 2 peut s'écrire : $-\overline{u_i u_j} \otimes S_{ij}$. Notons qu'il apparaît changé de signe dans l'équation pour l'énergie cinétique moyenne. Il exprime alors un échange entre ces deux formes d'énergie.

Les termes 3 et 4 pris en compte ensemble s'écrivent :

$$\overline{u_j \frac{\partial k}{\partial x_j}} + \overline{u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{p}{\rho} \right)} = \overline{u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k + \frac{p}{\rho} \right)} \quad \text{I.3.3.3.2}$$

Ceci représente la convection par diffusion dûe au mouvement fluctuant et aux interactions entre les vitesses fluctuantes et la pression.

Les termes visqueux 5 et 6 peuvent s'écrire sous la forme :

$$\nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j^2} - \nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \underbrace{\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u_i 2s_{ij}} \right)}_{\beta} - \underbrace{2\nu \overline{s_{ij} \otimes s_{ij}}}_{\lambda} \quad \text{I.3.3.3.3}$$

où

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]$$

Le terme noté λ s'appelle la dissipation vraie : il correspond à un travail de déformation pour les tensions de Reynolds. Il est toujours négatif et représente une dissipation d'énergie turbulente en chaleur. On peut l'écrire encore :

$$2\nu s_{ij} \otimes s_{ij} = \nu \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2} + \nu \overline{\frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j}} \quad \text{I.3.3.3.4}$$

En turbulence homogène, le terme $\nu \overline{\frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j}}$ est nul, si bien que la dissipation vraie se réduit au taux de dissipation :

$$\varepsilon = \nu \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2} \quad \text{I.3.3.3.5}$$

De là :

$$\nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j^2} - \nu \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2} = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{(2u_i s_{ij})} - \varepsilon \quad \text{I.3.3.3.6}$$

I.4.- NECESSITE DE LA MODELISATION

Un examen de l'équation de transport pour $\overline{u_i u_j}$ permet de constater qu'il est impossible de résoudre directement les équations de l'écoulement moyen et celles des tensions de Reynolds. En effet, on voit apparaître des inconnues supplémentaires telles que les corrélations triples de vitesses et les corrélations pression-vitesses.

La première-idée qui vient à l'esprit pour surmonter cette difficulté est d'écrire des équations de transport pour ces nouvelles inconnues, mais il apparaît encore de nouvelles corrélations d'un ordre supérieur pour lesquelles il faudrait former de nouvelles équations de transport. Il s'avère donc nécessaire de faire une modélisation c'est-à-dire établir des hypothèses sur

les termes inconnus : c'est ce qu'on appelle la fermeture des équations.

Une modélisation prend presque toujours appui sur l'expérience afin de donner une représentation réaliste, capable de caractériser correctement la turbulence.

CHAPITRE II

MODELISATION DE LA TURBULENCE DANS

L'ESPACE PHYSIQUE

II.1.- VISUALISATION ET SCHEMATISATION DE LA TURBULENCE

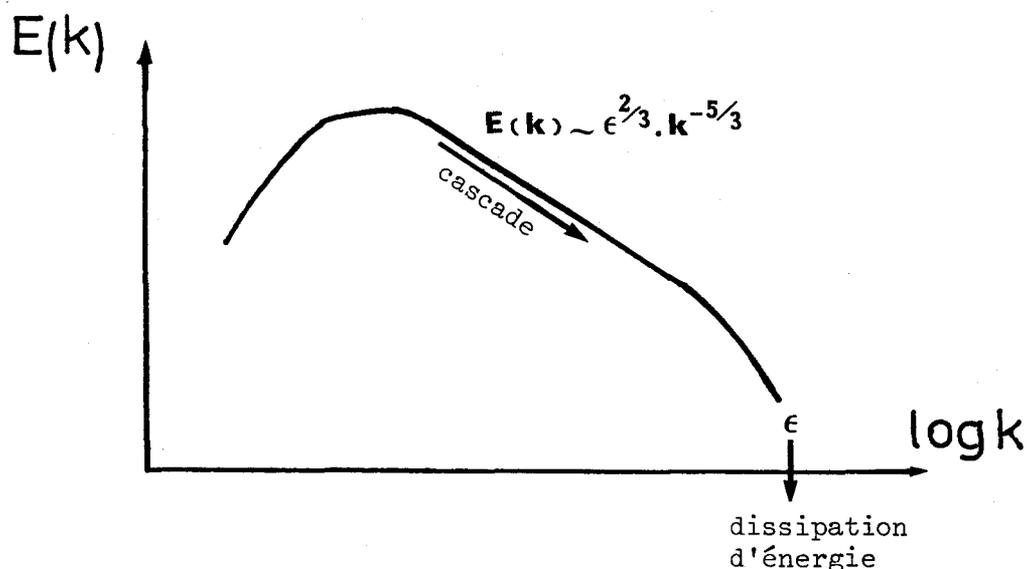
Si on visualise une couche limite, un sillage ou un jet turbulent, on met en évidence l'existence de structures s'ordonnant suivant une hiérarchie de taille. Cette visualisation montre que l'écoulement moyen impose une orientation particulière aux grosses structures. En reprenant l'hypothèse de KOLMOGOROV qui consiste à supposer que la turbulence est en équilibre local, on peut montrer dans l'espace spectral l'existence d'une production d'énergie non négligeable au niveau des grosses structures et transfert de cette même quantité vers les petites structures : c'est ce phénomène qu'on nomme "phénomène de cascade d'énergie" / 4 /, / 5 /, / 6 / qu'on peut représenter de façon schématique en imaginant qu'un tourbillon donné se scinde en tourbillons plus petits et ainsi de suite jusqu'aux échelles microscopiques où la viscosité intervient pour dissiper toute l'énergie sous forme de chaleur.

La théorie de KOLMOGOROV est souvent présentée dans l'espace de Fourier où on décompose le champ des vitesses en une superposition d'ondes planes caractérisée chacune par un nombre d'onde k ; à k on associe l'énergie cinétique moyenne de l'onde correspondante, appelée spectre d'énergie ou densité d'énergie, et qu'on note $E(k)$.

La représentation de $E(k)$ est formée par le schéma ci-dessous.

On peut démontrer que la loi de Kolmogorov implique que le cube du spectre d'énergie est proportionnel à l'inverse de la puissance cinquième du nombre d'onde :

$E \sim \epsilon^{2/3} \cdot k^{-5/3}$, ϵ étant le taux de dissipation défini par I.3.3.3.5.



II.2.- LE PHENOMENE DE CASCADE D'ENERGIE

II.2.1.- Structure de la turbulence

Les grosses structures de fréquence basse prélèvent l'énergie de l'écoulement moyen dans les zones de forts gradients (terme b de l'équation I.3.3.2.3). Cette énergie est transférée à des structures de plus en plus petites jusqu'à être dissipée en chaleur par les structures dont la taille est fixée par les effets visqueux.

Si on considère que la turbulence est en équilibre local c'est-à-dire que le flux d'énergie à travers le spectre de dissipation est constant et égal au taux de dissipation de l'énergie par action de la viscosité du fluide, alors, on peut considérer qu'on est en présence d'un phénomène qui peut-être caractérisé par les seules grosses structures.

II.2.2.- Echelles pratiques en turbulence

On vient de voir qu'on peut scinder les structures présentes en turbulence en deux catégories, en l'occurrence les grosses et les petites structures, dont les propriétés vont être précisées ci-dessous.

Les grosses structures sont celles dans le mouvement desquelles la viscosité peut être négligée; les petites structures sont celles pour lesquelles la dissipation s'effectue par viscosité :

II.2.2.1.- Les grosses structures

On peut montrer par analyse spectrale que ces structures contiennent une partie importante d'énergie. Elles peuvent être caractérisées à la fois par une échelle de vitesse U liée à l'agitation turbulente :

$$U = k^{1/2} \quad \text{II.2.2.1.1}$$

et par une échelle de longueur l liée à leur taille. A titre d'exemple, cette longueur est de l'ordre de l'épaisseur d'une couche limite, d'un sillage ou d'un jet. L'échelle de temps qui lui correspond est :

$$t = \frac{l}{k^{1/2}} \quad \text{II.2.2.1.2}$$

A partir des échelles U et l et de la viscosité cinématique ν , on forme le nombre de Reynolds de la turbulence caractéristique de ces grosses structures :

$$Re_t = \frac{k^{1/2} \cdot l}{\nu} \quad \text{II.2.2.1.3}$$

II.2.2.2.- Petites structures

Ces structures sont caractérisées par les hautes fréquences. Elles sont responsables de la dissipation de l'énergie par viscosité. On leur attribue un temps caractéristique défini par :

$$t' = \sqrt{\frac{\nu}{\epsilon}} \quad \text{II.2.2.2.1}$$

On peut aussi leur associer une échelle de vitesse u' et une échelle de longueur l' .

Souvent on admet que le processus de dissipation se fait à des nombres de Reynolds de turbulence de l'ordre de l'unité, donc, pour

$$\frac{u' \cdot l'}{\nu} \approx 1. \quad \text{II.2.2.2.2}$$

(le symbole \approx signifiant ici "de l'ordre de").

Or $u' = \frac{l'}{t'}$, on en déduit les expressions des échelles susceptibles de caractériser les petites structures :

$$u' = (\nu \cdot \epsilon)^{1/4} \quad \text{II.2.2.2.3}$$

$$l' = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4} \quad \text{II.2.2.2.4}$$

$$t' = \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{1/4} \quad \text{II.2.2.2.5}$$

II.2.3.- Hypothèses nécessaires à la modélisation

II.2.3.1.- L'échelle unique de temps

Cette hypothèse d'échelle unique de temps est à la source des différents modèles de turbulence. On suppose que le temps nécessaire pour effectuer le transfert d'énergie aux petites structures dissipatives est du même ordre que le temps caractéristique des grosses structures. Ainsi, on admet le concept d'une seule échelle de temps τ_d pour l'évolution de la turbulence.

En utilisant l'analyse dimensionnelle, on peut écrire :

$$\tau_d = \frac{u^2}{\epsilon} \quad \text{II.2.3.1.1}$$

Or d'après l'hypothèse ci-dessus, on a : $\tau_d \approx t = \frac{l}{u}$

d'où

$$\epsilon \approx \frac{u^3}{l} \quad \text{II.2.3.1.2}$$

et par conséquent, le taux de dissipation de l'énergie est relié aux grosses structures.

L'hypothèse d'échelle unique de temps n'est valable que pour les grands nombres de Reynolds. Pour des nombres de Reynolds faibles, la relation II.2.3.1.2 n'est plus vérifiée et on peut trouver un autre dimensionnement du taux de dissipation ϵ en faisant intervenir la viscosité :

$$\epsilon \approx \nu \frac{k}{l^2} \approx \nu \left(\frac{u}{l} \right)^2 \quad \text{II.2.3.1.3}$$

Cette formule est à peu près celle proposée par HARLOW / 59 / :

$$\epsilon \approx 2\nu \cdot H\left(\frac{u}{l}\right)^2 \quad \text{II.2.3.1.4}$$

où H est une fonction empirique de la forme :

$$H = \alpha^* \left[\beta^* \frac{\nu_t}{\nu} + 1 \right] \quad \text{II.2.3.1.5}$$

ν_t étant la viscosité turbulente qu'on précisera dans la suite, et α^* et β^* étant des constantes voisines de 5 et 0.2 respectivement.

II.2.3.2.- Isotropie locale

Les visualisations à l'aide de fumée d'un sillage ou d'un jet turbulent montrent l'existence de grosses structures turbulentes. Celles-ci se développent en s'ordonnant suivant des directions particulières imposées par le mouvement moyen, ce qui a pour effet de rendre le tenseur de Reynolds anisotrope. Mais on suppose qu'à grand nombre de Reynolds, les tourbillons dissipatifs sont indépendants de ces directions privilégiées et sont par conséquent presque isotropes.

On peut alors écrire :

$$\overline{\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2} = \frac{2}{3} \epsilon \delta_{ij} \quad \text{II.2.3.1}$$

où δ_{ij} est le tenseur de Kronecker et ϵ est le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente.

II.2.3.3.- Ordre de grandeur du nombre de Reynolds de la turbulence

Le problème de modélisation est grandement simplifié si le nombre de Reynolds turbulent est grand. En effet, comme on l'a vu ci-dessus, on peut alors représenter le terme de destruction des tensions de Reynolds par un tenseur isotrope.

II.3.- MODELISATION DES EQUATIONS DE TRANSPORT POUR UN ECOULEMENT EN GEOMETRIE DE REVOLUTION

II.3.1.- Equations de transport du mouvement moyen

En vue de traiter le cas du jet tournant turbulent, nous allons expliciter les équations de transport modélisées du mouvement moyen, supposé en outre permanent et axisymétrique.

II.3.1.1.- Equation de continuité

Elle s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial r}(rU) + \frac{\partial}{\partial z}(rW) = 0.$$

II.3.1.1.1

II.3.1.2.- Equation radiale de la quantité de mouvement

En appliquant l'approche statistique (I.1) aux équations instantanées de Navier-Stokes, on obtient :

$$\rho U \frac{\partial U}{\partial r} + \rho W \frac{\partial U}{\partial z} = - \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left(\Delta U - \frac{U}{r^2} \right) \quad \text{II.3.1.2.1}$$

$$+ \rho \frac{V^2}{r} + \frac{\rho \overline{V^2}}{r} - \frac{\rho}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\overline{r u^2}) - \rho \frac{\partial \overline{u w}}{\partial z}$$

En tenant compte de l'équation II.3.1.1.1, l'équation ci-dessus peut-
être mise sous la forme :

$$\rho \frac{\partial (WU)}{\partial z} + \frac{\rho}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (rUU) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial r} \quad \text{II.3.1.2.2}$$

$$- \mu \frac{U}{r^2} - \frac{\partial P}{\partial r} + \rho \frac{V^2}{r} + \frac{\rho \overline{V^2}}{r} - \frac{\rho}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\overline{r u^2}) - \rho \frac{\partial \overline{u w}}{\partial z}$$

Utilisons la formulation générale des tensions de Reynolds :

$$\overline{u_i u_j} = -\nu_t \left[\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right] + \frac{1}{3} \overline{u_k u_k} \delta_{ij} \quad \text{II.3.1.2.3}$$

où le terme $\frac{1}{3} \overline{u_k u_k} \delta_{ij}$ a été ajouté afin qu'après contraction des indices on obtienne bien $2k$ au second membre.

La traduction de la formule II.3.1.2.3 en coordonnées cylindriques avec l'hypothèse $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$, fournit les expressions suivantes :

$$\overline{u^2} = -2\nu_t \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{3} \overline{u_k u_k} \quad (\text{a})$$

$$\overline{v^2} = -2\nu_t \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{3} \overline{u_k u_k} \quad (\text{b})$$

$$\overline{w^2} = -2\nu_t \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{1}{3} \overline{u_k u_k} \quad (\text{c})$$

II.3.1.2.4

$$\overline{uv} = -\nu_t r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V}{r} \right) \quad (\text{d})$$

$$\overline{uw} = -\nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r} \right) \quad (\text{e})$$

$$\overline{vw} = -\nu_t \frac{\partial V}{\partial z} \quad (\text{f})$$

L'équation II.3.1.2.2 s'écrit :

$$\rho \frac{\partial}{\partial z} (WU) + \frac{\rho}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU^2) = \frac{\partial}{\partial z} (\mu \frac{\partial U}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial r} (\mu \frac{\partial U}{\partial r}) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial U}{\partial r}$$

$$-\frac{\partial P}{\partial r} + \rho \frac{V^2}{r} - 2 \frac{\mu U}{r^2} + \frac{2}{3} \frac{\rho}{r} k + \frac{\partial}{\partial z} (\mu_t \frac{\partial U}{\partial z}) \quad \text{II.3.1.2.5}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} (\mu_t \frac{\partial W}{\partial r}) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\mu_t r \frac{\partial U}{\partial r}) - \frac{2}{3} \frac{\rho}{r} \frac{\partial r k}{\partial r} - \mu \frac{U}{r^2}$$

En posant $\mu_e = \mu + \mu_t$, on a :

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial}{\partial z} (WU) + \frac{\rho}{I_c} \frac{\partial}{\partial r} (rU^2) &= \frac{\partial}{\partial z} (\mu_e \frac{\partial U}{\partial z}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\mu_e^r \frac{\partial U}{\partial r}) \\
 &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\mu_t^r \frac{\partial U}{\partial r}) \oplus \frac{\partial}{\partial z} (\mu_t \frac{\partial W}{\partial r}) \\
 &\quad - \frac{2}{3} \cdot \frac{\rho}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rk) + \frac{2}{3} \cdot \frac{\rho}{r} k - 2\mu_t \frac{U}{r^2} \\
 &\quad - \mu \frac{U}{r^2} + \rho \frac{V^2}{r} - \frac{\partial P}{\partial r}
 \end{aligned}$$

II.3.1.2.6

On peut écrire :

$$\begin{aligned}
 I_c &= II_d + \frac{\partial}{\partial z} (\mu_e \frac{\partial W}{\partial r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\mu_e^r \frac{\partial U}{\partial r}) - \frac{\partial}{\partial z} (\mu \frac{\partial W}{\partial r}) \\
 &\quad \leftarrow \text{III} \rightarrow \\
 &\quad - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\mu_r \frac{\partial U}{\partial r}) - \frac{2}{3} \frac{\rho}{r} \frac{\partial}{\partial r} rk + \frac{2}{3} \cdot \frac{\rho}{r} k \\
 &\quad - 2\mu_e \frac{U}{r^2} + \mu \frac{U}{r^2} + \rho \frac{V^2}{r} - \frac{\partial P}{\partial r}
 \end{aligned}$$

ou encore :

$$I_c = II_d + III - \rho \frac{V^2}{r} - \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{2}{3} \cdot \frac{\rho}{r} \frac{\partial}{\partial r} r k + \frac{2}{3} \cdot \frac{\rho}{r} k$$

$$- 2\mu_e \frac{U}{r^2} - \left\{ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\mu_e r \frac{\partial U}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu_e \frac{\partial W}{\partial r}) - \mu_e \frac{U}{r^2} \right\}$$

← IV →

En tenant compte de l'équation de continuité, on montre que le terme IV est identiquement nul.

On obtient donc l'équation :

$$\rho \frac{\partial}{\partial z} (WU) + \frac{\rho}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (rU^2) = \frac{\partial}{\partial z} (\mu_e \frac{\partial U}{\partial z}) - \frac{\partial P}{\partial r} + \rho \frac{V^2}{r}$$

$$+ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\mu_e r \frac{\partial U}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu_e \frac{\partial W}{\partial r})$$

$$+ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\mu_e r \frac{\partial U}{\partial r}) - \frac{2}{3} \cdot \frac{\rho}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r k)$$

$$- 2\mu_e \frac{U}{r^2} + \frac{2}{3} \frac{\rho}{r} k$$

II.3.1.2.7

II.3.1.3.- Equation tangentielle de la quantité de mouvement

En procédant de la même façon que pour l'équation II.3.1.2.1, on obtient :

$$\rho U \frac{\partial V}{\partial r} + \rho W \frac{\partial V}{\partial z} = \mu \left[\Delta V - \frac{V}{r^2} \right] - \rho \frac{UV}{r} - 2\rho \frac{\overline{uv}}{r} - \rho \frac{\partial \overline{uv}}{\partial r} - \rho \frac{\partial \overline{vw}}{\partial z} \quad \text{II.3.1.3.1}$$

En tenant compte de l'équation II.3.1.2.3, on peut écrire l'équation ci-dessus sous la forme :

$$\rho \frac{\partial}{\partial z} (WV) + \frac{\rho}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUV) = \frac{\partial}{\partial z} (\mu_e \frac{\partial V}{\partial z}) - \rho \frac{UV}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\mu_e r \frac{\partial U}{\partial r}) - \frac{V}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r \mu_e) \quad \text{II.3.1.3.2}$$

II.3.1.4.- Equation axiale de la quantité de mouvement

De la même façon, on obtient :

$$\rho \frac{\partial}{\partial z} (W^2) + \frac{\rho}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUW) = \frac{\partial}{\partial z} (\mu_e \frac{\partial W}{\partial z}) - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\mu_e r \frac{\partial W}{\partial r}) + C \quad \text{II.3.1.4.1}$$

avec

$$C = \frac{\partial}{\partial Z} (\mu_e \frac{\partial W}{\partial Z}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\mu_e r \frac{\partial U}{\partial Z}) - \frac{2}{3} \rho \frac{\partial k}{\partial Z}$$

II.3.2.- Equations de transport de la turbulence

Les équations du mouvement moyen font intervenir un certain nombre de corrélations inconnues entre grandeurs fluctuantes. Celles-ci peuvent à leur tour être décrites par des équations dont le nombre est fonction de la complexité du problème et de la procédure de fermeture adoptée.

Nous allons nous limiter aux corrélations doubles du type

$$\overline{\rho u_i u_j} \quad (i, j = 1, 2, 3):$$

L'établissement détaillé de ces équations fait l'objet de l'annexe A 2.

II.3.2.1.- Equation de transport pour $\overline{u^2}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial t} + U \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial r} + W \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial Z} - 2 \overline{uv} \frac{V}{r} \\ = -2 \left[\overline{u^2} \frac{\partial U}{\partial r} + \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial Z} - \overline{uv} \frac{V}{r} \right] \\ - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\overline{r u^3}) + \frac{\partial}{\partial Z} (\overline{u^2 w}) - 2 \frac{\overline{uv^2}}{r} \right]_{\text{II.3.2.1.1}} \\ - 2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\overline{u \frac{p}{\rho}} \right] + 2 \frac{\overline{p}}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \\ + \nu \left\{ \Delta \overline{u^2} - 2 \left[\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial Z} \right)^2} + \frac{\overline{u^2}}{r^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

II.3.2.2.- Equation de transport pour $\overline{v^2}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial t} + U \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial r} + W \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial z} + 2\overline{uv} \frac{V}{r} \\ = -2 \left[\overline{uv} \frac{\partial V}{\partial r} + \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z} + \overline{v^2} \frac{U}{r} \right] \\ - \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{uv^2}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{wv^2}) + 2 \frac{\overline{uv^2}}{r} \right] \\ + \nu \left\{ \Delta v^2 - 2 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \frac{v^2}{r^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

II.3.2.2.1

II.3.2.3.- Equation de transport pour $\overline{w^2}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial t} + U \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial r} + W \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial z} = -2 \left[\overline{uw} \frac{\partial W}{\partial r} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} \right] \\ - \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{uw^2}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{ww^2}) \right] \end{aligned}$$

II.3.2.3.1

$$-2 \frac{\partial}{\partial z} \overline{\left(w \frac{p}{\rho} \right)} + 2 \frac{\overline{p}}{\rho} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + \nu \left\{ \Delta \overline{w^2} - 2 \left[\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2} \right] \right\}$$

II.3.2.4.- Equation de transport pour \overline{uv}

$$\frac{\partial \overline{uv}}{\partial t} + U \frac{\partial \overline{uv}}{\partial z} + W \frac{\partial \overline{uv}}{\partial z} + (\overline{u^2} - \overline{v^2}) \frac{V}{r}$$

$$= - \left[\overline{vw} \frac{\partial U}{\partial z} + \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial r} + \overline{uw} \frac{\partial V}{\partial z} - \overline{v^2} \frac{V}{r} + \overline{u^2} \frac{\partial V}{\partial r} + \overline{uv} \frac{U}{r} \right] \quad \text{II.3.2.4.1}$$

$$- \left[\frac{\partial \overline{uvw}}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{uvw}) + \frac{\overline{uvw}}{r} - \frac{v^3}{r} \right]$$

$$- \frac{\partial}{\partial r} \overline{\left(v \frac{p}{\rho} \right)} + \frac{\overline{p}}{\rho} \cdot \frac{\partial v}{\partial r}$$

$$+ \nu \left\{ \Delta \overline{uv} - 2 \left[\overline{\frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r}} + \overline{\frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z}} + \frac{\overline{uv}}{r^2} \right] \right\}$$

II.3.2.5.- Equation de transport pour \overline{uW}

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \overline{uW}}{\partial t} + U \frac{\partial \overline{uW}}{\partial r} + W \frac{\partial \overline{uW}}{\partial z} - \overline{vw} \frac{V}{r} \\
 &= - \left[\overline{uw} \frac{\partial W}{\partial z} + \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial r} + \overline{u^2} \frac{\partial W}{\partial r} + \overline{w^2} \frac{\partial U}{\partial z} - \overline{vw} \frac{V}{r} \right] \\
 & - \left[\frac{\partial \overline{uW^2}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{u^2 W}) - \frac{\overline{wV^2}}{r} \right] \\
 & - \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{u \frac{p}{\rho}} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\overline{w \frac{p}{\rho}} \right) \right] + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r} \right) \\
 & + \nu \left\{ \Delta \overline{uW} - 2 \left[\overline{\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial W}{\partial r}} + \overline{\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z}} + \frac{\overline{uW}}{r^2} \right] + \frac{\overline{uW}}{r^2} \right\}
 \end{aligned}$$

II.3.2.5.1

II.3.2.6.- Equation de transport pour \overline{vW}

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \overline{vW}}{\partial t} + U \frac{\partial \overline{vW}}{\partial r} + W \frac{\partial \overline{vW}}{\partial z} + \overline{vw} \frac{V}{r} \\
 &= - \left[\overline{w^2} \frac{\partial V}{\partial z} + \overline{uw} \frac{\partial V}{\partial r} + \overline{vw} \frac{\partial W}{\partial z} + \overline{uv} \frac{\partial W}{\partial r} + \overline{vw} \frac{U}{r} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{\partial}{\partial z} (\overline{wvw}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{uvw}) + \frac{\overline{uvw}}{r} \right] \\
& - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{v \frac{p}{\rho}}) + \frac{\overline{p}}{\rho} \frac{\partial v}{\partial z} \\
& + \nu \left\{ \Delta \overline{vw} - 2 \left[\frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{vw}{r^2} \right] + \frac{vw}{r^2} \right\}
\end{aligned}$$

II.3.2.6.1

II.4.- MODELISATION DES EQUATIONS DE TRANSPORT DES TENSIONS DE REYNOLDS

En adoptant une notation indicielle, on peut écrire les équations aux tensions de Reynolds de façon abrégée sous la forme :

$$\frac{D \overline{u_i u_j}}{Dt} = \mathcal{P}_{ij} + \mathcal{C}_{ij} + \mathcal{D}_{ij} - \mathcal{E}_{ij}$$

Dérivée convective du tenseur	Production du tenseur $\overline{u_i u_j}$	Corrélation pression/ vitesse	Diffusion	Dissipation
----------------------------------	---	-------------------------------------	-----------	-------------

avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{ij} &= - \left[\overline{u_i u_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] \\
\mathcal{C}_{ij} &= + \frac{p}{\rho} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \\
\mathcal{D}_{ij} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \right] - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{u_i u_j u_k} + \frac{p}{\rho} (u_i \delta_{jk} + u_j \delta_{ik}) \right]
\end{aligned}$$

II.4.1

$$\varepsilon_{ij} = 2\nu \left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} \right) + \text{d'autres termes provenant de la formulation en coordonnées cylindriques.}$$

Notons que la dérivée convective du tenseur $\overline{u_i u_j}$, la production \mathcal{P}_{ij} , la corrélation vitesse-pression (\mathcal{E}_{ij}), la diffusion (\mathcal{D}_{ij}) et la dissipation (ε_{ij}) contiennent des termes supplémentaires qui ne sont pas présents en représentation cartésienne.

CHASSAING (P) / 7 / donne les expressions de ces termes en coordonnées cylindriques.

II.4.1.- Modélisation du terme de production

Si on considère l'ensemble des six composantes du tenseur de Reynolds, ce terme ne nécessitera pas de modélisation puisqu'il ne fait intervenir que le gradient de vitesse moyenne et les contraintes de Reynolds.

Dans certains écoulements possédant des propriétés physiques particulières, les équations peuvent être mises sous une forme approximative, d'où certaines contraintes de Reynolds peuvent être éliminées. C'est le cas par exemple des couches limites, des jets ou des sillages. Dans ces circonstances, il suffit de considérer les équations de transport pour les seules contraintes qui demeurent dans les équations de première approximation.

En ce qui concerne les jets tournants, on peut se limiter aux équations d'évolution des quantités \overline{UW} et \overline{VW} .

II.4.2.- Modélisation de la corrélation pression-vitesse

Ce terme contient la fluctuation de la pression qui est régie par l'équation de Poisson I.2.1.9.

En intégrant cette équation après avoir multiplié par $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ et en moyennant, on obtient /7/ .

$$\overline{\rho s_{ij}} \Big|_X = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\partial^2 u_i u_m}{\partial x_i \partial x_m} \Big|_y \overline{s_{ij}} \Big|_X \frac{dv}{\xi} + \frac{1}{2\pi} \int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \Big|_y \frac{\partial u_m s_{ij}}{\partial x_i} \Big|_X \frac{dv}{\xi} + (S_{ij} + S_{ji}) \quad \text{II.4.2.1}$$

$$\xi = \|x - y\|$$

L'indice X (respectivement Y) indique une valeur prise au point X (respectivement Y) du domaine d'intégration.

- $(S_{ij} + S_{ji})$ représente une intégrale de surface qui doit son existence à la présence d'une paroi.

- Les termes 1 et 2 sont souvent notés $\phi_{ij,1}$ et $\phi_{ij,2}$ respectivement.

II.4.2.1.- Modélisation du terme non linéaire

$\phi_{ij,1}$ est un terme non linéaire qui ne dépend que de l'agitation fluctuante. Il est appelé "terme de retour à l'isotropie" /8/

ROTTA /9/ a proposé un modèle fondé sur l'hypothèse linéaire de retour à l'isotropie, qui stipule :

$$\phi_{ij,1} = - \frac{C_1}{\tau} \left[\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right] \quad \text{II.4.2.1.1}$$

où C_1 est un coefficient positif et τ une constante de temps, qui peut être assimilée à celle caractérisant les grosses structures, en l'occurrence

$\frac{k}{\varepsilon}$ /10/ , /11/. Ainsi, le schéma II.4.2.1.1 peut s'écrire :

$$\phi_{ij,1} = -C_1 \frac{\epsilon}{k} \left[\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right] \quad \text{II.4.2.1.2}$$

La détermination de la constante C_1 a posé quelques problèmes. ROTTA /9/ proposa la valeur 1.4 en 1951, alors qu'en 1962, il doubla pratiquement cette valeur et ceci afin d'être en bon accord avec quelques expériences /12/.

REYNOLDS et TUCKER /13/ proposaient eux, une valeur de l'ordre de 3, mais leurs expériences étaient faites à des nombres de Reynolds faibles, ce qui avait amené LAUNDER et al /14/ à revenir à la valeur de 1.5:

$$\phi_{ij,1} = -1.5 \frac{\epsilon}{k} \left[\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right] \quad \text{II.4.2.1.3}$$

II.4.2.2.- Modélisation du terme linéaire

$\phi_{ij,2}$ est un terme associé à l'écoulement moyen et est appelé "terme linéaire".

On montre /6/ que ce terme peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \phi_{ij,2} = & - \frac{1}{2\pi} \left. \frac{\partial U}{\partial x_m} \right|_y \int_V \left[\frac{\partial^2 \overline{u_m u_i}}{\partial r_l \partial r_j} + \frac{\partial^2 \overline{u_m u_j}}{\partial r_l \partial r_i} \right] \frac{dv}{\|\vec{r}\|} \\ & + \frac{1}{2\pi} \left. \frac{\partial U}{\partial x_m} \right|_y \int_V \left[\frac{\partial^2 \overline{u_m u_i}}{\partial x_j \partial r_l} + \frac{\partial^2 \overline{u_m u_j}}{\partial x_i \partial r_l} \right] \frac{dv}{\|\vec{r}\|} \end{aligned} \quad \text{II.4.2.2.1}$$

où $\vec{r} = \vec{y} - \vec{x}$ décrit tout l'espace. Le prime indique une valeur prise au point y .

La seconde intégrale est nulle en turbulence homogène. De plus, le gradient de vitesse moyenne est supposé constant dans le domaine où $\frac{\partial^2 \overline{u_m u_i}}{\partial r_l \partial r_j}$ n'est pas négligeable /8/. Cependant, dans les problèmes de couche limite mince, la turbulence n'est pas homogène : le volume d'intégration de la quantité $\frac{\partial^2 \overline{u_m u_i}}{\partial r_l \partial r_j}$ est de la taille des grosses structures turbulentes et le gradient de vitesse moyenne est assujéti à de fortes variations dans cette zone.

Moyennant les hypothèses d'homogénéité de la turbulence et de faible variation du gradient, LAUNDER, REECE et RODI /14/ proposent en première approximation la relation :

$$\phi_{ij,2} = \frac{\partial U_l}{\partial x_m} \left[a_{lj}^{mi} + a_{li}^{mj} \right] \quad \text{II.4.2.2.2}$$

avec

$$a_{lj}^{mi} = - \frac{1}{2\pi} \int_V \left(\frac{\partial^2 \overline{u'_m u'_i}}{\partial r_l \partial r_j} + \frac{\partial^2 \overline{u'_m u'_j}}{\partial r_l \partial r_i} \right) \frac{dv}{\|r\|}$$

La forme du tenseur du 4ème ordre a_{lj}^{mi} a été déterminée par ROTTA /9/ qui a montré que ce tenseur satisfait les propriétés suivants :

$$a/ \quad a_{lj}^{mi} = a_{jl}^{mi} \quad (\text{Théorème de SCHWARTZ})$$

II.4.2.2.3

$$b/ \quad a_{lj}^{mi} = a_{lj}^{im} \quad (\text{homogénéité})$$

$$c/ a_{li}^{mi} = 0$$

$$d/ a_{ll}^{im} = 2 \overline{u_m u_i}$$

Des propriétés (a) et (b), on déduit que l'expression la plus générale du tenseur a_{lj}^{mi} est de la forme :

$$a_{lj}^{mi} = \alpha \overline{u_m u_i} \delta_{lj} + \beta \left[\overline{u_i u_j} \delta_{ml} + \overline{u_l u_i} \delta_{mj} + \overline{u_m u_j} \delta_{il} + \overline{u_m u_l} \delta_{ij} \right] \\ + c_2 \overline{u_l u_j} \delta_{mi} + \gamma k \delta_{mi} \delta_{lj} + \nu k \left[\delta_{ml} \delta_{ij} + \delta_{mj} \delta_{il} \right]$$

II.4.2.2.4

Les hypothèses (c) et (d) indiquent qu'on peut expliciter quatre des cinq constantes α , β , c_2 , γ et ν en fonction d'une seule, par exemple c_2 :

$$\alpha = \frac{2}{11} (2c_2 + 5)$$

$$\beta = -\frac{1}{11} (3c_2 + 2)$$

$$\gamma = -\frac{2}{55} (25c_2 + 2)$$

$$\nu = \frac{2}{55} (10c_2 + 3)$$

II.4.2.2.5

En substituant l'expression II.4.2.2.4 dans l'équation II.4.2.2.2, on aboutit à l'expression finale de $\sigma_{ij,2}$:

$$\begin{aligned} \phi_{ij,2} = & -\frac{c_2+8}{11} \left[P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right] \\ & - \frac{15c_2-1}{55} \cdot k (4 S_{ij}) \\ & - \frac{8c_2-2}{11} \left[D_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right] \end{aligned}$$

II.4.2.2.6

où

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{est le tenseur moyen de déformation}$$

$$P_{ij} = - \left[\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right] \quad \text{est le terme de production dans l'équation de transport pour } \overline{u_i u_j}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot P_{ii} \quad \text{est la production de l'énergie cinétique de turbulence.}$$

$$D_{ij} = - \left[\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right]$$

Il est intéressant de noter qu'en turbulence isotrope soumise à une brutale distorsion, l'équation II.4.2.2.6 se réduit à /15/ :

$$\phi_{ij,2} = 0.4 \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad \text{II.4.2.2.7}$$

Comme pour $\phi_{ij,1}$, la modélisation "finale" du terme $\phi_{ij,2}$ demande la détermination de la constante C_2 . Celle-ci a été obtenue par plusieurs chercheurs qui ont essayé de retrouver certaines grandeurs turbulentes à partir de mesures faites par d'autres chercheurs. Les diverses valeurs de C_2 proposées sont rappelées dans le tableau n° II.1.

Tableau n° II.1

Auteurs	valeur de C_2
LAUNDER et al /14/	0.4
LUMELEY et al /16/	1.17
NAOT et al /17/	0.31

II.4.3.- Modélisation du terme de diffusion

Le dernier terme de l'équation de transport I.3.1.1 pour $\overline{u_i u_j}$ est une conséquence de la nature non homogène du champ turbulent. Rappelons l'expression de ce terme :

$$D_{ij} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{u_i u_j u_k} + \frac{\rho}{\rho} (u_i \delta_{jk} + u_j \delta_{ik}) - \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \right] \quad \text{II.4.3.1}$$

A grand nombre de Reynolds, $\nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_k^2}$ est négligeable si bien que l'expression de D_{ij} se ramène à :

$$D_{ij} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{u_i u_j u_k} + \frac{p}{\rho} (\delta_{jk} u_i + \delta_{ik} u_j) \right] \quad \text{II.4.3.2}$$

En principe le terme de pression devrait être du même ordre que la corrélation triple /2/. Cela est vrai si p est d'ordre ρu^2 : en effet, les deux termes dans D_{ij} sont alors d'ordre u^3 .

Cependant, certaines expériences montrent qu'on peut négliger le terme de pression /18/. Donc, la modélisation de D_{ij} se ramène à celle de la corrélation triple, laquelle est régie, à grand nombre de Reynolds, par l'équation de transport /10/ :

$$\begin{aligned} \text{I} \quad \frac{D \overline{u_i u_j u_k}}{Dt} = & - \left[\overline{u_i u_j u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \overline{u_j u_k u_l} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \overline{u_k u_l u_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right] \quad \text{II} \\ & + \left[\overline{u_i u_j} \frac{\partial u_k u_l}{\partial x_l} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial u_i u_l}{\partial x_l} + \overline{u_k u_l} \frac{\partial u_j u_i}{\partial x_l} \right] \\ & \text{III} \end{aligned} \quad \text{II.4.3.3}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_l} \overline{u_i u_j u_k u_l} \quad \text{IV}$$

$$- \left[\overline{u_i u_j \frac{\partial p}{\partial x_k}} + \overline{u_j u_k \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{u_k u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} \right] \quad \text{V}$$

CHOU /19/ propose de négliger la convection (I) et la production (II).

La corrélation d'ordre quatre $\overline{u_i u_j u_k u_l}$ est exprimée par une loi normale :

$$\overline{u_i u_j u_k u_l} = \overline{u_i u_j} \cdot \overline{u_k u_l} + \overline{u_i u_k} \cdot \overline{u_j u_l} + \overline{u_i u_l} \cdot \overline{u_j u_k} \quad \text{II.4.3.4}$$

et par conséquent, les termes (III) et (IV) peuvent être traités simultanément :

$$\text{III} + \text{IV} = - \left[\overline{u_i u_l} \frac{\partial \overline{u_j u_k}}{\partial x_l} + \overline{u_j u_l} \frac{\partial \overline{u_k u_i}}{\partial x_l} + \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \right] \quad \text{II.4.3.5}$$

La corrélation vitesse-pression (V) peut être décomposée en un terme linéaire P_l par rapport au gradient de vitesse moyenne et un terme non linéaire P_{nl} de retour à l'isotropie /2/, /7/. On néglige le premier et on modélise le second en s'inspirant de ce qui a été fait en II.4.2.1. Il vient alors :

$$\overline{u_i u_j \frac{\partial p}{\partial x_k}} \Big|_{nl} + \overline{u_j u_k \frac{\partial p}{\partial x_i}} \Big|_{nl} + \overline{u_k u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} \Big|_{nl} = \frac{1}{c_3} \cdot \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i u_j u_k} \quad \text{II.4.3.6}$$

L'indice nl signifiant "non linéaire".

Soit finalement :

$$D_{ij} = + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ c_3 \frac{k}{\varepsilon} \left[\overline{u_i u_l \frac{\partial u_j u_k}{\partial x_l}} + \overline{u_j u_l \frac{\partial u_k u_i}{\partial x_l}} + \overline{u_k u_l \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_l}} \right] \right\} \quad \text{II.4.3.7}$$

Cette formulation est souvent délaissée au profit d'une autre, de type gradient, c'est-à-dire :

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[c_4 \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_l} \cdot \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \right] \quad \text{II.4.3.8}$$

où $c_4 \in [0.08, 0.25]$ d'après /10/, /11/, /14/.

La relation II.4.3.8 a conduit à des résultats satisfaisants /20/.

Cependant, on n'a pas encore dégagé suffisamment de supports physiques pouvant affirmer cette expression réduite.

Dans le cas de couches de cisaillement où les tensions de Reynolds ne sont pas toutes calculées, on utilise une formulation du type gradient par analogie avec les termes de diffusion moléculaire, soit :

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\mu_t}{\rho} \right) \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \right] \quad \text{II.4.3.8}$$

La modélisation du terme D_{ij} semble grossière, mais ceci n'est pas très gênant puisque le rôle de ce terme n'est prépondérant qu'au voisinage d'une paroi.

II.4.4.- Modélisation du terme de dissipation

En se basant sur le caractère isotrope des structures dissipatives à grand nombre de Reynolds de turbulence, ROTTA /9/ a suggéré de modéliser ce terme à l'aide de la formule :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij}$$

II.4.4.1

qui a été utilisée avec succès par HANJALIC et al /10/.

II.5.- MODELE GLOBAL RESULTANT

A la lumière de ce qui a été développé ci-dessus, nous obtenons l'équation de transport des tensions de Reynolds :

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} &= P_{ij} - c_1 \frac{\varepsilon}{k} \left[\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right] \\ &+ \phi_{ij,2} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_{\overline{u_i u_j}}} \right) \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \right] \\ &- \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \end{aligned}$$

II.5.1

$\phi_{ij,2}$ ayant l'expression II.4.2.2.6.

Enfin, nous renvoyons le lecteur désireux d'obtenir des précisions à la référence /7/ pour voir la façon dont on transforme les équations II.4.2.2.6 et II.5.1 en coordonnées cylindriques, équations que nous avons écrites en II.3.2.

II.6.- MODELISATION DE L'EQUATION DE TRANSPORT POUR k

II.6.1.- Analyse des différents termes

L'équation de transport de $k = \frac{1}{u^2} \frac{\overline{u_i^2}}{v^2}$ s'obtient en faisant la somme des équations de transport de $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ et $\overline{w^2}$ écrites en II.3.2 :

$$\begin{aligned}
 \rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + U \frac{\partial k}{\partial r} + W \frac{\partial k}{\partial z} \right) = & -\rho \left[\overline{u^2} \frac{\partial U}{\partial r} + \overline{uv} \frac{\partial V}{\partial r} + \overline{uw} \frac{\partial W}{\partial r} \right. \\
 & + \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} + \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} \\
 & \left. - \overline{uv} \frac{V}{r} + \overline{v^2} \frac{U}{r} \right] \quad \text{II.6.1.1} \\
 & - \rho \left[\frac{\partial \overline{uk}}{\partial r} + \frac{\overline{uk}}{r} + \frac{\partial \overline{wk}}{\partial z} \right] \\
 & - \left[\overline{u \frac{\partial p}{\partial r}} + \overline{w \frac{\partial p}{\partial z}} \right] \\
 & + \mu \left[\Delta k - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\overline{u^2 + v^2}}{r^2} \right]
 \end{aligned}$$

Rappelons que toute répétition d'indices signifie sommation sur ces indices (convention d'Einstein).

On peut écrire encore cette équation sous la forme (voir Annexe A2).

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial k}{\partial t} + U \frac{\partial k}{\partial r} + W \frac{\partial k}{\partial z} &= \nu \Delta k \\
 &\quad \text{I}_k \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial z} \left[\overline{w \left(k + \frac{p}{\rho} \right)} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \overline{u \left(k + \frac{p}{\rho} \right)} \right] \\
 &\quad \text{III}_k \qquad \text{II.6.1.2} \\
 &\quad - \left(\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{uv} \frac{V}{r} + \overline{v^2} \frac{U}{r} \right) \\
 &\quad \text{IV}_k \\
 &\quad - \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\overline{u^2 + v^2}}{r^2} \right) \\
 &\quad \text{V}_k
 \end{aligned}$$

I_k = convection de k due à l'écoulement moyen

II_k = diffusion visqueuse de k

III_k = diffusion turbulente

IV_k = production : transformation de l'énergie cinétique moyenne en énergie cinétique turbulente

V_k = dissipation visqueuse.

II.6.2.- Modélisation

Les termes I_k et II_k n'ont pas à être modélisés.

Le terme III_k est modélisé par analogie avec le terme II_k . Donc :

$$III_k = \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \cdot \frac{\partial k}{\partial Z} \right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} r \frac{\partial k}{\partial r} \right)$$

où σ_k est analogue au nombre de Prandtl pour k .

Le terme de production IV_k s'écrit, en utilisant la relation générale II.3.1.2.3, sous la forme :

$$IV_k = \nu_t \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial W}{\partial Z} \right)^2 + \left(\frac{U}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial Z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r} \right)^2 \right\}$$

En supposant que la dissipation de l'énergie cinétique turbulente se produit principalement dans les petites structures turbulentes qui, outre cela, sont supposées isotropes localement, on a :

$$V_k = -C_d \frac{k^{3/2}}{l_d}$$

où l_d est une échelle de longueur caractéristique des grosses structures et C_d une constante ($C_d = 0.09$).

Si ces différentes hypothèses sont substituées dans l'équation II.6.1.2, nous obtenons :

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial Z} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial Z} \right] + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) r \frac{\partial k}{\partial r} \right] + \nu_t P_S - \varepsilon \quad \text{II.6.3}$$

avec $P_S = \overrightarrow{\text{grad}} \vec{U} \otimes 2 \vec{S}_{ij}$

II.7.- MODELISATION DE L'EQUATION DE TRANSPORT POUR ϵ

II.7.1.- Analyse des différents termes

L'équation exacte du taux de dissipation ϵ , lequel est égal à l'opposé du terme V de l'équation de transport de k , a été formulée par HARLOW et NAKAYAMA /21/, RODI /22/, /23/ et J. OLIVER /58/.

On obtient cette équation en différentiant l'équation de quantité de mouvement pour U_j par rapport à X_j en multipliant par la quantité $2\nu \cdot \frac{\partial U_j}{\partial X_j}$ et en moyennant. Tous calculs faits, on obtient :

$$\frac{D\epsilon}{Dt_I} = \nu \frac{\Delta \epsilon}{II} + 2 \left\{ \frac{\partial}{\partial Z} \left[\frac{k}{\epsilon} (\overline{w^2} \frac{\partial \epsilon}{\partial Z} + \overline{uw} \frac{\partial \epsilon}{\partial r}) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{k}{\epsilon} (\overline{uw} \frac{\partial \epsilon}{\partial Z} + \overline{u^2} \frac{\partial \epsilon}{\partial r}) \right] \right\} III$$

$$+ 2 \frac{\epsilon}{k} \left\{ \frac{\partial}{\partial Z} \left[\frac{k}{\epsilon} (\overline{w^2} \frac{\partial k}{\partial Z} + \overline{uw} \frac{\partial k}{\partial r}) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{k}{\epsilon} (\overline{uw} \frac{\partial k}{\partial Z} + \overline{u^2} \frac{\partial k}{\partial r}) \right] \right\} VI$$

II.7.1.1

$$- C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} (\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \overline{v^2} \frac{U}{r} - \overline{uv} \frac{V}{r}) IV$$

$$- C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} V$$

On retrouve les termes de convection (I), de diffusion visqueuse (II),

de diffusion turbulent (III), de production (IV), de dissipation (V) plus un terme supplémentaire de production.

II.7.2.- Modélisation

Les termes I et II restent inchangés.

Le terme III est modélisé comme pour l'énergie cinétique turbulente,

soit :

$$\text{III} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\nu_t \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\nu_t \right) r \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \right]$$

ou σ_ϵ est un coefficient analogue à un nombre de Prandtl pour la dissipation visqueuse.

Le terme IV est aussi modélisé de la même façon que pour k :

$$\text{IV} = C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \nu_t \cdot P_S$$

Quant au terme supplémentaire VI, RODI (1971) /23/ a montré qu'on peut le traiter simultanément avec le terme V, qui représente la décroissance du taux de dissipation sous l'action de la viscosité. On a alors :

$$\text{V} + \text{VI} = -C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k}$$

De là l'équation :

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U \frac{\partial \epsilon}{\partial r} + W \frac{\partial \epsilon}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) r \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \right]$$

$$+ C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \nu_t \cdot P_S$$

$$-C_{\varepsilon 2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{k}$$

avec

$$P_S = \frac{\overline{v}_t^3}{\nu_t}$$

et $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$, σ_ε sont des constantes à grands nombres de Reynolds.

II.8.- REVUE DES EQUATIONS ELLIPTIQUES MODELISEES

II.8.1.- Forme conservative

Nous pouvons noter que les équations en II.3.1, II.5, II.6 et II.7 peuvent être mises sous la forme commune suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(W\phi) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(rU\phi) = \frac{\partial}{\partial z}(c_\phi \frac{\partial \phi}{\partial z}) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r c_\phi \frac{\partial \phi}{\partial r}) + S_\phi$$

Le passage du cas axisymétrique au cas cartésien se fait en remplaçant $\frac{\partial}{\partial r}$ par $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ par $\frac{\partial}{\partial y}$ et en posant $r = 1$.

Le tableau II.2 résume cette partie concernant les modèles éventuels que nous serons amenés à utiliser dans la partie consacrée à la résolution numérique de jets tournants.

Tableau n° II.2

conservation de	\emptyset	c_\emptyset	S_\emptyset
Masse	1	0	0
Composante radiale de la quantité de mouvement	U	ν_e	$\frac{\partial}{\partial z} (\nu_e \frac{\partial W}{\partial z}) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\nu_e r \frac{\partial U}{\partial r})$ $- \frac{2}{3} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (rk) - 2\nu_e \frac{U}{r^2} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{V^2}{r}$
Composante tangentielle de la quantité de mouvement	V	ν_e	$-\frac{UV}{r} + \frac{V}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r\nu_e)$
Composante axiale de la quantité de mouvement	W	ν_e	$\frac{\partial}{\partial z} (\nu_e \frac{\partial W}{\partial z}) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\nu_e r \frac{\partial U}{\partial r})$ $- \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial k}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z}$
Energie cinétique turbulente	k	$\nu_t \frac{\nu_t}{\sigma_k}$	$\nu_t P_s - \epsilon$
Taux de dissipation	ϵ	$\nu_t \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon}$	$\frac{\epsilon}{k} \cdot [C_{\epsilon 1} \nu_t P_s - C_{\epsilon 2} \cdot \epsilon]$

CHAPITRE III

PROCEDURES DE RESOLUTION NUMERIQUE DES PROBLEMES DE CISAILLEMENT SIMPLE

III.1.- CALCUL NUMERIQUE EN MECANIQUE DES FLUIDES

III.1.1.- Rôle du calcul numérique

Les méthodes analytiques ne permettent la résolution des équations de Navier-Stokes que dans de rares cas, tous limités au régime laminaire.

Traditionnellement la Mécanique des fluides puise ses fondements à la fois dans l'expérience et la théorie. Mais, depuis plusieurs années, un troisième axe de recherche est né grâce aux progrès accomplis dans le domaine de la technologie des ordinateurs qui ont commencé à permettre d'utiliser les algorithmes complexes, d'améliorer les insuffisances des méthodes analytiques et d'ouvrir la voie à ce qu'on appelle maintenant couramment "l'expérience numérique".

Cette voie est devenue nécessaire, sinon indispensable pour tester certains modèles provenant de la théorie ou de l'expérience et pour prédéterminer les écoulements qui sont soit très difficiles, soit très onéreux à réaliser expérimentalement.

La voie numérique présente un caractère expérimental pour deux raisons essentielles :

- les équations sont non linéaires ce qui implique que l'existence et l'unicité de la solution ne sont toujours pas démontrées,
- on ne dispose pas d'une théorie permettant de bien cerner et maîtriser les méthodes numériques employées.

Grâce à ce caractère expérimental, l'approche numérique a donné naissance à une multitude de méthodes. HA MINH /24/ propose une excellente bibliographie sur de nombreuses méthodes relative à des équations elliptiques. Quant aux méthodes relatives aux équations paraboliques, on peut citer les ouvrages de PATANKAR et SPALDING /25/, de S.V. PATANKAR /26/ et de D.B. SPALDING /27/.

Parmi les nombreuses méthodes disponibles à l'heure actuelle pour traiter les écoulements turbulents de cisaillement simple, nous distinguons celles qui traitent les équations intégrales et celles qui traitent les équations locales.

III.1.2.- Méthode intégrale

Cette méthode consiste en la résolution des équations intégrales des quantités de mouvement appelées équations de VON KARMAN /28/. Elle n'est applicable qu'aux écoulements de cisaillement, ce qui n'est pas le cas des autres méthodes.

III.1.3.- Méthode "fonction de courant-rotationnel"

Afin d'éviter des itérations sur la pression, on élimine cette grandeur en introduisant une fonction de courant Ψ et le rotationnel Ω . Cette méthode est aussi applicable pour certains écoulements tridimensionnels moyennant quelques modifications, mais dans ce cas on voit mal l'intérêt de cette formulation. Pour les écoulements bidimensionnels, elle permet une simplification du nombre d'équations à résoudre.

De plus, comme les équations sont elliptiques, les conditions aux limites doivent être spécifiées pour toutes les variables et sur toutes les frontières du domaine de calcul. Ce dernier point constitue l'un des défauts

majeurs de cette formulation notamment dans le cas des écoulements à frontières libres (sillages, jets, ...) à cause des conditions aux limites pour Ω qui sont difficiles à spécifier.

III.1.4.- Méthode des volumes finis

Cette méthode a été développée par PATANKAR et SPALDING /25/. C'est une formulation dite en U , V , W , P , donc proche de la description physique du problème étudié et par conséquent l'interprétation des résultats devient plus aisée. Grâce à ses propriétés paraboliques en ce qui concerne les cas de cisaillement simple, elle a été largement utilisée par de nombreux chercheurs : JONES et LAUNDER (1972), KOLLMANN et VANDROMME (1979), CLER et BUIKHAC (1979), J.M. GALMES (1981), HOUEVILLE R. et TULAPURKARA (1981), COUSTOLS E. (1983).

III.2.- PROCEDURES MISES EN OEUVRE POUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS

III.2.1.- Formulation (ψ, Ω, \mathbf{v})

Au début de notre recherche nous avons mis en oeuvre une méthode qui s'inspire des travaux de GOSSMAN et al /29/. Afin de tester cette méthode nous l'avons appliqué au cas de l'écoulement radial laminaire entre deux disques. C'est ce que nous allons exposer à présent.

III.2.1.1.- Equations adimensionnelles du mouvement

Etant donnée la symétrie radiale du problème les équations de Navier-Stokes sont formulées en coordonnées cylindriques (r, θ, z). Les équations de continuité et de quantité de mouvement pour un fluide newtonien incompressible, sans forces extérieures peuvent s'écrire.

$$\frac{\partial ru}{\partial r} + \frac{\partial rw}{\partial z} = 0 \quad \text{III.2.1.1.1}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu (\Delta u - \frac{u}{r^2}) \quad \text{III.2.1.1.2}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \nu (\Delta v - \frac{v}{r^2}) \quad \text{III.2.1.1.3}$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w \quad \text{III.2.1.1.4}$$

La fonction de courant ψ et le rotationnel Ω sont définis par :

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad w = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad \Omega = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \quad \text{III.2.1.1.5}$$

Nous introduisons les variables adimensionnalisées suivantes :

$$\hat{u} = \frac{u}{U_0} \quad \hat{v} = \frac{v}{U_0} \quad \hat{w} = \frac{w}{U_0}$$

$$\hat{r} = \frac{r}{h} \quad \hat{z} = \frac{z}{h} \quad \hat{p} = \frac{p}{\rho U_0^2} \quad \text{III.2.1.1.6}$$

En tenant compte des relations III.2.1.1.6, on a :

III.2.1.1.1.- Equation de la fonction de courant

D'après III.2.1.1.8.c, on a :

$$\Omega = \frac{\partial}{\partial Z} \left(-\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial Z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)$$

ou

$$-\frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial Z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + r \left(-\frac{\Omega}{r} \right) = 0 \quad \text{III.2.1.1.13}$$

III.2.1.1.2.- Equation du tourbillon

On obtient l'équation du tourbillon en éliminant la pression entre

III.2.1.1.10 et III.2.1.1.12. Tout calcul fait, on trouve :

$$r^2 \left[\frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\Omega}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Omega}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial Z} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial Z} \left(r^3 \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{1}{R_e} \cdot \frac{\Omega}{r} \right) \right) \quad \text{III.2.1.1.14}$$

$$- \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{R_e} \cdot \frac{\Omega}{r} \right) \right) - r \frac{\partial v^2}{\partial Z} = 0$$

III.2.1.1.3.- Equation de V

Si l'on introduit les relations III.2.1.1.8 a-b dans l'équation

III.2.1.1.11, que l'on multiplie par r^2 , on trouve :

$$\left(\frac{\partial}{\partial Z} (r.v \frac{\partial \psi}{\partial r}) - \frac{\partial}{\partial r} (r.v \frac{\partial \psi}{\partial Z}) \right) - \frac{\partial}{\partial Z} \left[\frac{r^3}{R_e} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{r.v}{r^2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r^3}{R_e} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r.v}{r^2} \right) \right] = 0$$

III.2.1.1.15

Les équations III.2.1.1.13 à 15 peuvent se mettre sous la forme

suivante :

$$a_\phi \left\{ \frac{\partial}{\partial Z} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial Z} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial Z} \left[r.b_\phi \cdot \frac{\partial}{\partial Z} (c_\phi \cdot \phi) \right]$$

III.2.1.1.16

$$- \frac{\partial}{\partial r} \left[r.b_\phi \cdot \frac{\partial}{\partial r} (c_\phi \cdot \phi) \right] + r.d_\phi = 0$$

où la grandeur ϕ peut être égale à ψ , $\frac{\Omega}{r}$, $r \times v$, ...

Les coefficients a_ϕ , b_ϕ , c_ϕ et d_ϕ sont données dans le tableau III.1

ϕ	a_ϕ	b_ϕ	c_ϕ	d_ϕ
ψ	0	$\frac{1}{r^2}$	1	$-\frac{\Omega}{r}$
$\frac{\Omega}{r}$	r^2	r^2	$\frac{1}{R_e}$	$-\frac{\partial v^2}{\partial Z}$
$r.v$	1	$\frac{r^2}{R_e}$	$\frac{1}{r^2}$	0

Tableau III.1

III.2.1.2.- Discretisation des équations

Nous disposons d'un système d'équation aux dérivées partielles elliptiques. En conséquence, des conditions aux limites doivent être spécifiées à la fois par toutes les variables et sur toutes les frontières du domaine de calcul (Fig.III.1). De plus, il faut initialiser les variables dans le champ.

Nous allons transformer ces équations en des équations algébriques qui peuvent être résolues par une méthode itérative.

La technique de discrétisation que nous avons adoptée consiste à intégrer l'équation locale III.2.1.1.16 dans un domaine élémentaire entourant un point courant P du maillage.

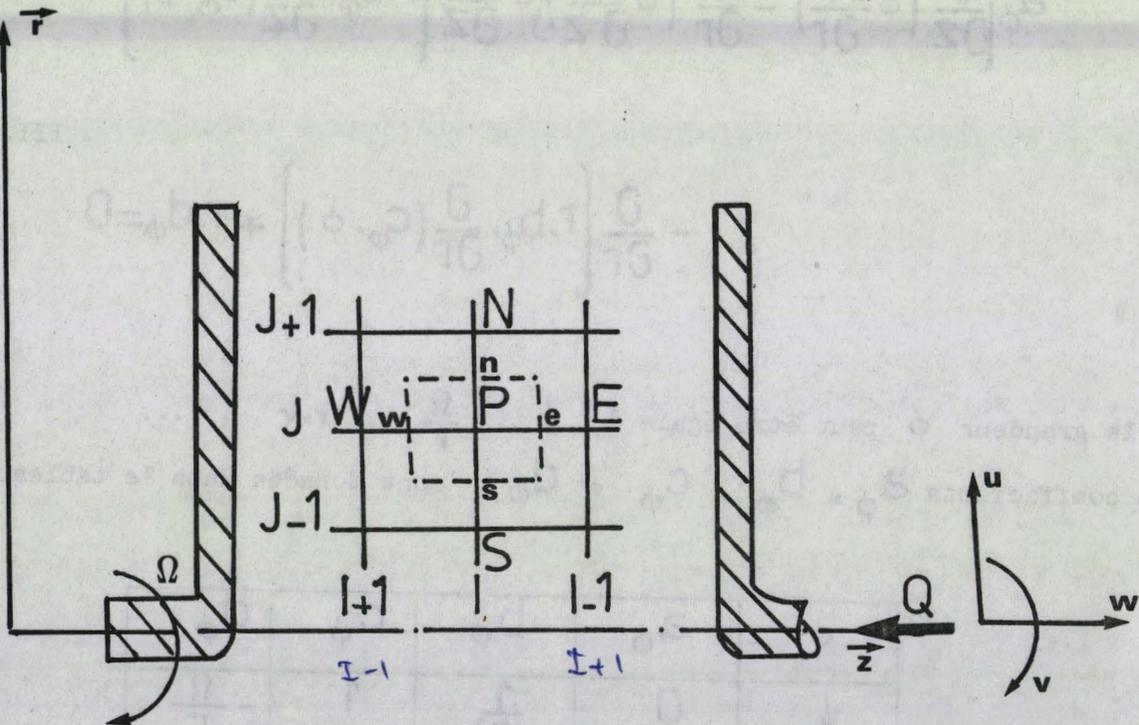


Fig. III.1

L'intégration de l'équation III.2.1.1.16 sur le domaine ci-dessus nous permet d'obtenir l'équation algébrique aux différences finies suivante :

$$\phi_P = c_E \phi_E + c_W \phi_W + c_S \phi_S + c_N \phi_N + D \quad \text{III.2.1.2.1}$$

avec

$$c_E = (A_E + c_{\phi,E} B_E) / \Sigma,$$

$$c_W = (A_W + c_{\phi,W} B_W) / \Sigma,$$

$$c_S = (A_S + c_{\phi,S} B_S) / \Sigma,$$

$$c_N = (A_N + c_{\phi,N} B_N) / \Sigma,$$

$$\Sigma = A_E + A_W + A_S + A_N + c_{\phi,P} (B_E + B_W + B_S + B_N),$$

et

$$D = -d_{\phi,P} \cdot V_P / \Sigma$$

Les coefficients A_I , B_I ($I = E, W, N, S$) et V_P s'écrivent :

$$A_E = \frac{a_{\phi,P}}{8} \left\{ (\psi_S + \psi_{SE} - \psi_N - \psi_{NE}) + |\psi_S + \psi_{SE} - \psi_N - \psi_{NE}| \right\}$$

$$A_W = \frac{a_{\phi,P}}{8} \left\{ (\psi_N + \psi_{NW} - \psi_S - \psi_{SW}) + |\psi_N + \psi_{NW} - \psi_S - \psi_{SW}| \right\}$$

$$A_N = \frac{a_{\phi,P}}{8} \left\{ (\psi_E + \psi_{NE} - \psi_W - \psi_{NW}) + |\psi_E + \psi_{NE} - \psi_W - \psi_{NW}| \right\}$$

$$A_S = \frac{a_{\phi,P}}{8} \left\{ (\psi_W + \psi_{SW} - \psi_E - \psi_{SE}) + |\psi_W + \psi_{SW} - \psi_E - \psi_{SE}| \right\}$$

$$B_E = (b_{\phi,E} + b_{\phi,P}) / 8 \cdot \frac{\Gamma_N - \Gamma_S}{Z_E - Z_P} (\Gamma_E + \Gamma_P)$$

III.2.1.2.2

$$B_W = (b_{\phi,W} + b_{\phi,P}) / 8 \cdot \frac{\Gamma_N - \Gamma_S}{Z_P - Z_W} (\Gamma_W + \Gamma_P)$$

$$B_N = (b_{\phi,N} + b_{\phi,P}) / 8 \cdot \frac{Z_E - Z_W}{\Gamma_N - \Gamma_P} (\Gamma_N + \Gamma_P)$$

$$B_S = (b_{\phi,S} + b_{\phi,P}) / 8 \cdot \frac{Z_E - Z_W}{\Gamma_P - \Gamma_S} (\Gamma_S + \Gamma_P)$$

$$V_P = \frac{\Gamma_P}{4} \cdot (Z_E - Z_W) \cdot (\Gamma_N - \Gamma_S)$$

Le détail de la partie algébrique de cette technique est développé dans l'annexe A3 .

III.2.1.3.- Résolution numérique

La formule III.2.1.2.1 est écrite sous une telle forme afin de faciliter son analyse du point de vue stabilité, mais pour que sa programmation soit facile, nous l'écrivons sous la forme suivante /29/:

$$\phi_P = \frac{\sum_{J=E,W,N,S} (A_J / V_P + c_{\phi,J} \cdot B_J / V_P) \cdot \phi_J - d_{\phi,P}}{\sum_J (A_J / V_P + c_{\phi,P} \cdot B_J / V_P)} \quad \text{III.2.1.3.1}$$

ou

$$\phi_P = \frac{\sum_{J=E,W,N,S} (A'_J + c_{\phi,J} (b_{\phi,J} + b_{\phi,P}) B'_J) \phi_J - d_{\phi,P}}{\sum_J (A'_J + c_{\phi,P} (b_{\phi,J} + b_{\phi,P}) B'_J)} \quad \text{III.2.1.3.2}$$

avec

$$A'_J = A_J / V_P \quad \text{III.2.1.3.3}$$

$$B'_J = B_J / V_P \cdot (b_{\phi,J} + b_{\phi,P}) \quad \text{III.2.1.3.4}$$

Ce sont les relations III.2.1.3.2.3.4 que nous avons programmées dans notre cas test.

Pour plus de détail, on se reportera à l'annexe A3 ... (organigramme, coefficients A'_j et B'_j , ...).

III.2.1.4.- Conditions aux limites

Des conditions sur la vitesse :

$$u = v = w = 0 \quad \text{pour } z = h \quad \text{III.2.1.4.1}$$

$$u = w = 0; v = \omega R_0 \quad \text{pour } z = 0 \quad \text{III.2.1.4.2}$$

on déduit celles pour la fonction de courant et le rotationnel :

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad \text{pour } z = 0 \quad \text{et } z = h \quad \text{III.2.1.4.3}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} = -\frac{Re \cdot v^2}{r} \quad \text{pour } z = 0 \quad \text{III.2.1.4.4}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} = -\frac{Re \cdot v^2}{r} \quad \text{pour } z = h \quad \text{III.2.1.4.5}$$

III.2.1.5.- Conditions initiales

Les variables ψ et Ω sont initialisées par intégration et dérivation du profil des vitesses choisi, à savoir un profil en forme de chapeau, avec conditions aux limites aux parois. Quant à la vitesse tangentielle, elle est initialisée par le profil suivant :

$$v = \omega r \cdot \left(1 - \frac{z}{h}\right) / U_Q \quad \text{III.2.1.5.1}$$

III.2.2.- Formulation (U , V , W , P)

Cette procédure de résolution développée par PATANKAR et al /25/ s'applique à un ensemble d'équations de transport du type parabolique dans l'espace et couplées avec l'équation de continuité.

Cette méthode permet de déterminer l'évolution d'une couche limite dynamique, thermique ou massique.

Notons que plusieurs caractéristiques de cette méthode telles que l'introduction d'une fonction de courant comme variable transversale et pour satisfaire l'équation de continuité, les points de glissements et le traitement des termes sources ont été abandonnées. C'est donc une autre version différente de celle utilisée par VANDROMME /30/, GALMES /31/, qui sera proposée au chapitre suivant et qui constitue pour nous une source de résultat formant l'essentiel de notre contribution au problème.

CHAPITRE IV

APPLICATION DE LA METHODE DES VOLUMES FINIS AUX CALCULS DES JETS TOURNANTS TURBULENTS

IV.1.- MODELES DE TURBULENCE ENVISAGEES

IV.1.1.- Rappel des équations à résoudre

Nous nous proposons de résoudre le problème de jets en rotation, cette dernière étant induite par un obstacle tournant. Plus précisément, le jet est issu de l'interstice entre deux disques coaxiaux, l'un fixe, l'autre tournant à vitesse constante (fig. IV.1).

Dans le cadre de l'approximation de couche limite, le système d'équations que nous allons résoudre est /32/ :

$$\frac{\partial r U}{\partial r} + \frac{\partial r W}{\partial z} = 0 \quad \text{IV.1.1.1}$$

$$U \frac{\partial U}{\partial r} + W \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{V^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial U}{\partial z} \right) - \frac{\partial \overline{UW}}{\partial z} \quad \text{IV.1.1.2}$$

$$U \frac{\partial V}{\partial r} + W \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{UV}{r} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial V}{\partial z} \right) - \frac{\partial \overline{VW}}{\partial z} \quad \text{IV.1.1.3}$$

C'est le système simplifié grâce à des considérations sur les ordres de grandeur, obtenu à partir des équations II.3.1.2.1 et II.3.1.3.1, l'équation axiale II.3.1.4.1 pouvant être laissée de côté.

On remarque que le système ci-dessus est ouvert car les tensions turbulentes \overline{UW} et \overline{VW} sont pour le moment des inconnues supplémentaires. Il importe alors de fermer ce système en introduisant des modèles de turbulence qui permettent d'exprimer ces inconnues en surnombre à l'aide d'échelles caractéristiques du mouvement moyen, avec l'aide éventuelle d'équations de transport. Ce sont ces modèles que nous nous proposons d'examiner dans ce qui suit :

IV.1.2.- Modèle de longueur de mélange

Dans le cas général d'une tension $\overline{u_i u_j}$ quelconque, on peut faire l'hypothèse d'une viscosité turbulente par analogie avec les mécanismes de diffusion moléculaire et exprimer cette tension à l'aide de la formule II.3.1.2.3

Dans notre cas, on a :

$$-\overline{UW} = \nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial r} \right) \quad \text{IV.1.2.1}$$

$$-\overline{VW} = \nu_t \frac{\partial V}{\partial Z} \quad \text{IV.1.2.2}$$

Le modèle de longueur de mélange est basé sur l'hypothèse de Prandtl /33/ et /34/. La viscosité turbulente est exprimée sous la forme /28/ :

$$\nu_t = l_0^2 \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial Z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial Z} \right)^2} \quad \text{IV.1.2.3}$$

Dans le cas d'une couche limite, la longueur l_0 est une fonction supposée universelle de la distance à la paroi et de l'épaisseur δ de couche

limite. Pour un écoulement de cisaillement libre (jet, sillage), l_0 n'est fonction que de l'épaisseur δ du jet ou du sillage.

Pour le jet dans la zone d'équilibre, on reconduit la formulation exprimée dans le cas d'un sillage lointain /6/.

$$\frac{l_0}{\delta} = 0.12 \quad \text{IV.1.2.4}$$

Dans le cas de la couche limite sur plaque plane on a :

$$\frac{l_0}{\delta} = 0.085 \text{Th} \left(\frac{\chi}{0.085} \cdot \frac{z}{\delta} \right) \quad \text{IV.1.2.5}$$

où $\chi = 0.41$ est la constante de KARMAN.

La relation IV.1.2.5 n'est qu'un regroupement des deux comportements asymptotiques déterminés par expérience :

$$l_0 = 0.41 \delta \quad \text{dans la région logarithmique}$$

$$l_0 = 0.085 \delta \quad \text{dans la région déficitaire.}$$

Le modèle de longueur de mélange n'est pas adapté à l'étude du sillage proche /6/ et de la zone près de la sortie du jet dans notre cas. Mais, il peut être employé pour l'étude des zones lointaines du jet (zones d'équilibre). Toute-

fois, ce modèle n'est valable que lorsque le nombre de Reynolds de la turbulence $Re_t = \frac{k^2}{\nu \epsilon}$ est grand (effets négligeables de ν sur la turbulence).

Par contre quand ce nombre est faible, la viscosité du fluide devient capitale.

C'est le cas pour une couche limite tout près de la paroi ou pour les régions centrales d'un jet peu après l'émission et d'un sillage débutant. On modifie donc

le modèle en introduisant une fonction correctrice F de sous-couche visqueuse /34/.

$$F = 1 - \exp\left(-\frac{l_0}{26\chi\mu} \cdot \sqrt{\rho\tau}\right) \quad \text{IV.1.2.6}$$

où τ est le frottement total : $\tau_{\text{lam}} + \tau_{\text{tur}}$

De là

$$\nu_t = (Fl_0)^2 \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2} \quad \text{IV.1.2.7}$$

Notons que la formule II.1.26 englobe celle proposée par VAN-DRIEST (1956).

Ce modèle est surtout intéressant par sa simplicité, ce qui a fait qu'il a été largement utilisé.

Les inconvénients sont les suivants :

- L'échelle de longueur l_0 doit être spécifiée pour chaque problème, mais pour des écoulements complexes, cette prescription devient compliquée voire impossible.

- La viscosité turbulente doit s'annuler là où les gradients de vitesses s'annulent et vice-versa. Cette conséquence qui provient de l'application de ce modèle est mise en défaut dans certains cas. Parmi ces cas, on peut citer l'écoulement entre deux plaques parallèles, l'une étant rugueuse et l'autre ne l'étant pas et un sillage bidimensionnel dissymétrique.

- Enfin, l'hypothèse de longueur de mélange ne tient pas compte du transport de la turbulence.

IV.1.3.- Modèle à deux équations de transport pour k et ϵ

Le modèle $k-\epsilon$ a été élaboré et développé par LAUNDER et JONES (1972). Il détermine l'expression de la viscosité turbulente à partir de la relation suivante/35/ :

$$\nu_t = C_\mu \cdot \frac{k^2}{\epsilon}$$

IV.1.3.1

avec

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2})$$

énergie cinétique turbulente

$$\epsilon = \nu \left(\sum \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{u^2 + v^2}{r^2} \right)$$

taux de dissipation de k

$$C_\mu = 0.09$$

constante qu'on détermine expérimentalement

On voit alors que le calcul des tensions \overline{uw} et \overline{vw} demande la connaissance de k et ϵ .

L'énergie cinétique turbulente est calculée en couche de cisaillement à l'aide de l'équation de transport II.6.3 dans laquelle certains termes sont laissés de côté en tenant compte des hypothèses de couche limite.

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial z} \right) + \nu_t \cdot P_s - \epsilon$$

IV.1.3.2

Le taux de dissipation est lui aussi déterminé par son équation de transport qui s'écrit en couche cisailée (voir équation II.7.2.1) :

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \nu_t \cdot P_S - C_{\varepsilon 2} f_2 \cdot \frac{\varepsilon^2}{k}$$

IV.1.3.3

avec

$$P_S = \overrightarrow{\text{grad}} U \otimes 2 \overrightarrow{S}$$

S étant le tenseur moyen de déformation

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_k = 1. \\ \sigma_\varepsilon = 1.3 \end{array} \right\} \text{ nombres analogues aux nombres de Prandtl}$$

$$C_{\varepsilon 1} \in [1.4, 1.45]$$

$$C_{\varepsilon 2} \in [1.9, 2.0]$$

$$f_2 = 1. - 0.3 \exp(-Re_t^2)$$

est une fonction qui fait intervenir le nombre de Reynolds turbulent et qui prend en compte les effets de faible nombre de Reynolds dans la région de sortie du jet ou du proche sillage.

Comme on le constate, les constantes $C_{\varepsilon 1}$ et $C_{\varepsilon 2}$ peuvent prendre plusieurs valeurs. Ceci implique que σ_ε doit être ajusté en fonction de ces constantes de telle sorte que l'équation de ε vérifie en région logarithmique la condition /2/ :

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = 0$$

$$\varepsilon = \frac{(0.3.k)^{3/2}}{0.41}$$

IV.1.3.4

Ce modèle permet de prendre en compte le transport de la turbulence. Le modèle établi pour de grands nombres de Reynolds est supposé valable aussi bien pour une couche limite, que pour un jet turbulent ou un sillage.

Les effets de proximité de paroi où les nombres de Reynolds sont faibles, qui ne nous intéressent pas directement ici, seront étudiés aux paragraphes concernant les conditions initiales et à l'entrée.

La formulation de la viscosité turbulente sous la forme II.3.1.2.3 implique qu'il y a annulation simultanée du gradient de vitesse et de la tension de Reynolds. Or comme on l'a déjà signalé, ce résultat est en défaut dans certains cas. Donc on peut conclure que certains phénomènes ne peuvent pas être correctement représentés par ce modèle.

IV.1.4.- Modèle à quatre équations de transport pour k , ϵ , \overline{UW} et \overline{VW}

Bien que ce modèle n'ait pas été utilisé, nous allons le décrire brièvement. Il possède bien entendu tous les avantages du modèle $k-\epsilon$. De plus, il permet d'apporter un remède au défaut de la formulation de viscosité turbulente signalé ci-dessus. Néanmoins, ce modèle présente un inconvénient notable en ce qui concerne la résolution numérique. Ce défaut provient du fait qu'il est nécessaire d'introduire les tensions de Reynolds \overline{UW} et \overline{VW} dans les équations de quantité de mouvement IV.1.1.2 et IV.1.1.3.

Il en résulte que ces équations perdent alors leur caractère parabolique, ce qui rend délicat l'utilisation de méthodes numériques fondées précisément sur ce caractère parabolique.

IV.2.- CHOIX DU DOMAINE DE CALCUL ET DES CONDITIONS AUX LIMITES

Tous les écoulements subsoniques sont tels que toute perturbation des propriétés en un point provoque des changements en tout point du domaine où s'effectue l'écoulement. Ceci provient de ce que les équations qui régissent

l'écoulement sont elliptiques. Mais, il y a des circonstances où, grâce à des simplifications concernant notamment les mécanismes de convection, de diffusion et de pression, les équations de première approximation qui les décrivent sont de nature paraboliques. En effet, dans ces écoulements les perturbations sont véhiculées par le mouvement moyen selon une direction privilégiée, radiale dans notre cas. Ce fait impose de fixer des conditions spatiales initiales pour toutes les variables U , V , k , ϵ , ... dans une station amont à partir de laquelle se fera le calcul. De plus, il nous faut prescrire des conditions sur les frontières extérieures pour ces mêmes variables.

IV.2.1.- Conditions à l'entrée

Comme nous ne disposons pas de conditions à l'entrée du fait que les résultats expérimentaux connus /32/ concernent le jet lointain ($r \geq 80h$), nous avons le choix entre adopter des profils de vitesse approximatifs ou démarrer les calculs entre les disques pour obtenir des conditions correctes à l'entrée du domaine de calcul. C'est cette dernière option que nous avons choisie.

IV.2.1.1.- Calcul de l'écoulement entre les deux disques

IV.2.1.1.1.- Système d'équations à résoudre

Du fait que les frontières inférieure et supérieure sont des parois, il est nécessaire de tenir compte des effets de faible nombre de Reynolds et des modifications dues à l'anisotropie.

La modélisation à faible nombre de Reynolds des équations de transport pour k et ϵ a été effectuée par JONES et LAUNDER (1972) /35/.

Nous nous sommes inspiré des travaux de ces chercheurs /35/ pour le

choix du système à résoudre. Ce dernier s'écrit :

$$\frac{\partial r U}{\partial r} + \frac{\partial r W}{\partial z} = 0 \quad \text{IV.2.1.1.1.1}$$

$$U \frac{\partial U}{\partial r} + W \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{V^2}{r} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_u} \right) \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial r} \quad \text{IV.2.1.1.1.2}$$

$$U \frac{\partial V}{\partial r} + W \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{UV}{r} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_v} \right) \frac{\partial V}{\partial z} \quad \text{IV.2.1.1.1.3}$$

$$U \frac{\partial k}{\partial r} + W \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial z} + \nu_t P_S - \epsilon \underbrace{- 2\nu \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial z} \right)^2}_a \quad \text{IV.2.1.1.1.4}$$

$$U \frac{\partial \epsilon}{\partial r} + W \frac{\partial \epsilon}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial z} + C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \nu_t P_S - C_{\epsilon 2} f_2 \cdot \frac{\epsilon \cdot \epsilon}{k} + 2\nu_t \nu \underbrace{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)^2}_b \quad \text{IV.2.1.1.1.5}$$

avec $\sigma_u = 1.$

$\sigma_v = 1.$

Les constantes σ_k , σ_ϵ , $C_{\epsilon 1}$, $C_{\epsilon 2}$ et C_μ gardent les mêmes valeurs que celles données en IV.1.3.

On verra plus loin comment l'influence du nombre de Reynolds est introduite au moyen de deux fonctions :

$$f_2 = 1 - 0.3 \exp\left(-Re_t^2\right) \quad \text{IV.2.1.1.1.6}$$

$$f_\mu = \exp\left(-2.5/\left(1 + \frac{Re_t}{50}\right)\right) \quad \text{IV.2.1.1.1.7}$$

où $Re_t = \frac{k}{\nu \cdot \epsilon}$ est le nombre de Reynolds de la turbulence.

Un terme supplémentaire par rapport aux équations IV.1.3.2 et IV.1.3.3 apparaît dans chacune des équations pour k et ϵ :

- le terme $2\nu \cdot \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial z}\right)^2$ a été rajouté pour retrouver le comportement parabolique de k au voisinage d'une paroi. Dans l'équation IV.2.1.1.1.4, la dissipation est représentée par le terme $\epsilon + 2\nu \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial z}\right)^2$ et non plus par le seul terme ϵ de l'équation IV.1.3.2.

En fait le terme (d) a été introduit afin que le terme $C_{\epsilon_2} f_2 \cdot \frac{\epsilon^2}{k}$ ne devienne infini au voisinage de la paroi. En effet, à cet endroit, on a /31/, /36/, /47/ :

$$k|_p \sim z^2 \quad \text{et} \quad \epsilon|_p \sim \nu \frac{\partial^2 k}{\partial z^2}$$

la dernière relation indique que le taux de dissipation n'est pas nul à la paroi.

Donc, on peut poser :

$\epsilon_p \sim 2\nu \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial z}\right)^2$
 - le terme $2\nu \nu_t \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)^2$ est introduit empiriquement afin de retrouver le niveau maximum de k pour $z^+ = 20$.

La viscosité turbulente ν_t n'est plus calculée à partir de la relation IV.1.3.1, relation établie dans les régions où la convection et la diffusion des contraintes de Reynolds \overline{UW} et \overline{VW} sont négligeables et où

il y a équilibre entre production et destruction. En fait, on pondère cette expression par une fonction de viscosité empirique f_μ qu'on optimise numériquement. On pose :

$$\nu_t = f_\mu C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

IV.2.1.1.1.8

Notons qu'à mesure qu'on s'éloigne de la paroi, les fonctions de correction f_2 et f_μ augmentent comme Re_t . Or ces fonctions ayant été introduites uniquement pour un traitement de paroi, on les bloque alors à leur valeur maximum (théoriquement 1) car la décroissance de Re_t à l'extérieur de la couche limite provoquerait aussi leur diminution.

IV.2.1.1.2.- Conditions d'initialisation

Nous avons choisi de les écrire en $r = 20h$.

- Profil de vitesse radiale

Le profil des vitesses est obtenu par la méthode proposée par D.L. WHITFIELD /37/. Il s'agit d'une représentation analytique de couche limite turbulente.

Les variables et les paramètres utilisés sont :

$$z^+ = \frac{u_\tau}{\nu} z$$

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} \quad u_\tau = U_e \cdot \frac{C_f}{2} \quad \frac{C_f}{2} = \frac{\tau_p}{\rho U_e^2}$$

$$\theta = \int_0^{\infty} \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dz$$

$$Re_{\theta} = \frac{\theta \cdot u_e}{\nu}$$

L'expression des profils est une combinaison linéaire de deux fonctions trigonométriques qui dépendent des paramètres z^+ , $\frac{z}{\theta}$, C_f , le paramètre de forme H et de Re_{θ} .

La solution générale est : $u^+ = u_i^+ + u_e^+$ IV.2.1.1.2.1

Dans la région interne, on a une solution de la forme :

$$u_{i(\text{inner})}^+ = \frac{1}{0.09} \text{Arctan}(0.09 z^+) \quad \text{IV.2.1.1.2.2}$$

Cette expression permet de décrire à la fois la sous-couche visqueuse, la région tampon et la région logarithmique.

Contrairement à la solution u_i^+ qui a un fondement théorique, la solution dans la région externe est fondée sur l'expérience.

D'après l'équation IV.2.1.1.2.2, on remarque qu'on a

$$u_i^+ \xrightarrow{z^+ \rightarrow \infty} \frac{\pi}{0.18} \quad \text{IV.2.1.1.2.3}$$

et comme u^+ doit tendre vers $u_e^+ = \sqrt{\frac{2}{C_f}}$ à l'extérieur de la couche limite, on a :

$$u_o^+(\text{outer}) \longrightarrow \left(\sqrt{\frac{2}{C_f}} - \frac{\pi}{0.18} \right) \quad \text{IV.2.1.1.2.4}$$

$Z \rightarrow \infty$ (extérieur de la couche limite).

Par ailleurs, puisque l'expression IV.2.1.1.2.2 donne d'excellents résultats au voisinage de la paroi, la solution u^+ doit tendre vers 0 comme Z . Par conséquent, on adopte la forme suivante :

$$u^+ = \frac{1}{0.09} \text{Arctang}(0.09 z^+) + \left(\sqrt{\frac{2}{C_f}} - \frac{\pi}{0.18} \right) \cdot G\left(\frac{z}{\theta}\right) \quad \text{IV.2.1.1.2.5}$$

où G est une fonction analytique qui dépend des paramètres C_f , H et Re_θ et qui vérifie :

$$G(0) \longrightarrow 0 \quad \text{IV.2.1.1.2.6}$$

$$G(\infty) \longrightarrow 1 \quad \text{IV.2.1.1.2.7}$$

Une formulation de la fonction G est / 37 / :

$$G\left(\frac{z}{\theta}\right) = \sqrt{\text{Th}\left[a\left(\frac{z}{\theta}\right)^b\right]} \quad \text{IV.2.1.1.2.8}$$

où a et b sont des paramètres fonctions de C_f , H et Re_θ .

Donc la formulation finale de la solution globale est :

$$u^+ = \frac{1}{0.09} \cdot \text{Arctang}(0.09) + \left(\sqrt{\frac{2}{C_f}} - \frac{\pi}{0.18} \right) \text{Th}^{1/2} \left(a \left(\frac{z}{\theta} \right)^b \right)$$

IV.2.1.1.2.9

Les coefficients a et b sont déterminés par expérience en étudiant la distribution de $\frac{u}{u_e}$ en deux points par exemple $\frac{z}{\theta} = 2$ et $\frac{z}{\theta} = 5$.

Nous donnons dans le tableau IV.1 la procédure permettant de déterminer les profils radiaux.

- Profil de la vitesse orthoradiale

Nous avons donné un profil linéaire en Z vérifiant les conditions d'adhérence sur les parois. Ce profil pêche par sa simplicité, mais nous avons pensé qu'il est inutile de chercher un profil compliqué qui risquerait de provoquer des difficultés de démarrage de la procédure.

- Profil de la vitesse axiale

On peut l'obtenir à partir de l'équation de continuité

$\frac{\partial r U}{\partial r} + \frac{\partial r W}{\partial z} = 0$. Mais la dérivée de U suivant r n'est pas connue. On est donc amené à formuler différentes hypothèses pour s'affranchir de cet obstacle :

- Comme W est petit, on peut prendre $W = 0$.

- On peut adopter une hypothèse de similitude qui stipule que les profils de U sont semblables suivant la direction radiale. U_m étant la vitesse maximale sur l'axe, fonction de r , on pose :

TABLEAU IV.1

Calcul

Pas

1 On se donne $H = \frac{\delta}{\theta}$, $u_e^+ = \left(\frac{2}{C_f}\right)$, $Re_\theta = \frac{u_e \cdot \theta}{\nu}$ et u_e

2 On calcule $\frac{U}{U_e}(2) = 1.723 \left(1 + \frac{50}{Re}\right) \cdot \exp(-0.6H)$

3 On calcule $\frac{U}{U_e}(5) = 0.87 + 0.08 \exp\left(-2.6(H-1.95)^2\right)$

4 On calcule $G(2) = \frac{U}{U_e}(2) - \frac{1}{.09} \text{Arctg}\left(\frac{0.1 Re_\theta}{U_e^+}\right) / \left(1 - \frac{\pi}{0.18 U_e^+}\right)$

5 On calcule $G(5) = \frac{U}{U_e}(5) - \frac{1}{.09} \text{Arctg}\left(\frac{0.1 Re_\theta}{U_e^+}\right) / \left(1 - \frac{\pi}{0.18 U_e^+}\right)$

6 On calcule $b = \frac{\text{Ln Th}^{-1}[G^2(2)]}{\text{Th}^{-1}[G^2(5)]} / \text{Ln}\left(\frac{2}{5}\right)$

7 On calcule $a = \text{Th}^{-1}\left[G^2(2)\right] / 2^b$

8 On calcule $u^+ = \frac{1}{0.09} \text{Arctg}(0.09z^+) + \left(U_e^+ - \frac{\pi}{0.08}\right) \cdot \text{Th}^{\frac{1}{2}}\left(a\left(\frac{z}{\theta}\right)^b\right)$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U}{U_m} \right) = 0$$

IV.2.1.1.2.10

et à l'aide de l'équation de continuité, on obtient :

$$\frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{U}{U_m} \cdot \frac{\partial(rUm)}{\partial r}$$

IV.2.1.1.2.11

On calcule donc la distribution $W(z)$ en $\frac{r}{h} = 20$ à l'aide des profils $U(z)$, $U_m(r)$ et de la condition sur les parois $W = 0$.

- Profils de k , ϵ , \overline{uW} et \overline{vW} :

Les profils initiaux de ces grandeurs turbulentes sont déterminées à partir du profil des vitesses de manière classique (2). On obtient :

$$k = \frac{(Fl_0)^2}{0.3} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial r} \right)$$

$$\epsilon = \frac{(0.3k)^{3/2}}{l_0} \text{ juste!}$$

IV.2.1.1.2.12

$$-\overline{uW} = (Fl_0)^2 \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2} \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r} \right)$$

$$-\overline{vW} = (Fl_0)^2 \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$L = \frac{1}{2} u^2 + v^2 + w^2$$

au voisinage de la paroi $\overline{uW} = 0,13 L$ expérimental

avec

$$\frac{l_0}{\delta} = 0.085 \operatorname{Th} \left(\frac{0.41}{0.085} \cdot \frac{z}{\delta} \right)$$

Dans le cas du modèle $k-\epsilon$, il faut se donner les valeurs de k_e et ϵ_e aux frontières extérieures de la couche limite. Nous avons adopté un taux de turbulence extérieur de l'ordre de 1 %.

On a donc :

$$k_e = 0.0001 U_e^2 \quad \text{IV.2.1.1.2.13}$$

avec

$$\epsilon_e = (0.3 \times k)^{1.5} / 0.085 \delta \quad \text{IV.2.1.1.2.14}$$

car région déficitaire

δ étant l'épaisseur de la couche limite définie par $\frac{U}{U_e} = 0.996$.

Ces profils obtenus pour k , ϵ , \overline{UW} et \overline{VW} sont évidemment approximatifs, mais leur influence ne se fait sentir que sur quelques pas de calculs jusqu'à ce que les profils corrects commencent à s'établir. On pourrait également se baser sur des profils expérimentaux pour de telles grandeurs mais dans notre cas, les informations expérimentales sont rares voire absentes.

IV.2.1.1.3.- Conditions aux limites

Sur la paroi supérieure, on impose des conditions d'adhérence :

$$U = V = W = 0$$

IV.2.1.1.3.1

ce qui implique :

$$k = 0 \quad \text{et} \quad \epsilon = 0 \quad \text{IV.2.1.1.3.2}$$

Sur la paroi inférieure, on impose les conditions suivantes :

$$U = 0 \quad , \quad V = \omega r \quad , \quad W = 0 \quad \text{IV.2.1.1.3.3}$$

$$k = 0 \quad \text{et} \quad \epsilon = 0 \quad \text{IV.2.1.1.3.4}$$

Notons que le gradient de pression a été calculé à l'aide de la formule de Bernoulli :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\rho U_e \frac{dU_e}{dr} \quad \text{IV.2.1.1.3.5}$$

IV.2.2- Profils initiaux pour le calcul de jets tournants

Nous avons procédé au calcul de l'écoulement entre les disques par la méthode des volumes finis (que nous allons détailler au paragraphe IV.3) grâce à un premier code que nous avons élaboré.

Nous avons mené la résolution jusqu'à la sortie soit $r = 15$ cm et nous avons stocké les profils de vitesses et de toutes les grandeurs turbulentes afin qu'ils puissent nous servir comme profils initiaux pour le second code élaboré pour le calcul de jets tournants turbulents. Ces profils initiaux sont représentés sur les figures IV.3 à 6.

IV.2.3.- Conditions aux limites pour les jets tournants

Comme les frontières du jet sont fonction de la distance radiale nous avons imposé les conditions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r U}{\partial r} &= 0 \\ V &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{condition homogène de Fourier} \\ \text{pour } Z = Z_e \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{IV.2.3.1} \\ \text{IV.2.3.2} \end{array}$$

où Z_e est la frontière du jet.

La relation IV.2.3.1 nous permet d'obtenir plusieurs conséquences.

En effet :

$$\left. \frac{\partial r U}{\partial r} \right|_e = 0 \text{ implique } U|_e = \frac{\text{cte}}{r} \text{ condition compatible avec l'évolution de } U \text{ en } \frac{1}{r}$$

$$\text{et } \left. \frac{\partial W}{\partial z} \right|_e = 0 \text{ condition qui tient compte des effets d'entraînement IV.2.3.3 de l'atmosphère environnante.}$$

Les valeurs limites des grandeurs turbulentes ne sont pas arbitraires lorsqu'on utilise des équations de transport. En effet, les formes limites des équations pour k et ϵ à l'extérieur ($Z = Z_e$) se réduisent au système d'équations différentielles du premier ordre /30/, /35/ :

$$U_e \cdot \frac{\partial k_e}{\partial r} = \nu_t \cdot (P_S)_e - \epsilon_e \quad \text{IV.2.3.4}$$

$$U_e \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial r} = c_{\epsilon 1} \cdot \frac{\epsilon}{k} \Big|_e \cdot \nu_t (P_S)_e - c_{\epsilon 2} \cdot \frac{\epsilon \epsilon}{k} \Big|_e \quad \text{IV.2.3.5}$$

Enfin, il reste à fixer une condition pour la composante verticale W . Ici, on est confronté au problème de localisation de la surface où il faudrait imposer cette condition : en s'inspirant du traitement des sillages de plaque plane, on a posé :

$$W = 0$$

IV.2.3.6

dans un plan $z = \text{cte}$, par exemple celui correspondant au plan médian des deux disques si on néglige la dissymétrie introduite par le mouvement du disque mobile.

IV.3.- METHODE DE RESOLUTION PAR VOLUMES FINIS

Le système d'équations obtenues étant du type parabolique, nous avons choisi de le résoudre à l'aide d'une méthode qui s'inspire des travaux de PATANKAR et SPALDING /25/ et qui est largement utilisée au DERAT-CERT /38/, /39/, /40/.

L'intérêt essentiel de cette méthode réside dans sa rapidité qui résulte de son caractère non itératif et dans son universalité car elle permet de traiter simultanément les équations de quantité de mouvement et des modèles de plusieurs équations de transport.

Les raisons qui nous ont guidé dans le choix de cette méthode se justifient par les raisons invoquées ci-dessus et par ses principales caractéristiques qui sont :

- Le schéma implicite de discrétisation vérifie le caractère conservatif des équations du problème et il assure par ailleurs une stabilité inconditionnelle du calcul.

- L'utilisation d'un algorithme tridiagonal (algorithme de THOMAS) dont la mise en oeuvre peut se résumer à triangulation et une inversion d'une matrice bidiagonale.
- La marche "pas à pas" de la méthode permet le calcul de l'écoulement de façon rapide tout en ne nécessitant que peu de place mémoire dans l'unité centrale de l'ordinateur.

IV.3.1.- Principe de la méthode

IV.3.1.1.- Idée fondamentale de la méthode

Partant de la forme générale des équations paraboliques de transport, nous obtiendrons, après quelques changements appropriés, une forme commune :

$$U \frac{\partial \phi}{\partial r} + W \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(c_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + S_{\phi} \quad \text{IV.3.1.1.1}$$

où ϕ représente U , V , k , ϵ , etc ...

S_{ϕ} est le terme de source. En plus du terme de gradient de pression, il contient des termes de production-destruction des grandeurs turbulentes et les termes supplémentaires qui apparaissent à cause du système de coordonnées utilisé.

L'équation de continuité, multipliée par ϕ , s'écrit :

$$\frac{\phi}{r} \cdot \frac{\partial rU}{\partial r} + \phi \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad \text{IV.3.1.1.2}$$

En faisant la somme des 2 équations IV.3.1.1.1 et IV.3.1.1.2, on obtient :

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(rU\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(W\phi) = \frac{\partial}{\partial z}(c_\phi \frac{\partial \phi}{\partial z}) + S_\phi \quad \text{IV.3.1.1.3}$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial z}(rW\phi) + \frac{\partial}{\partial r}(rU\phi) = r \cdot \frac{\partial}{\partial z}(c_\phi \frac{\partial \phi}{\partial z}) + r \cdot S_\phi \quad \text{IV.3.1.1.4}$$

IV.3.1.2.- Intégration dans un volume fini

Comme l'épaisseur du jet δ augmente avec r , les frontières du domaine doivent être des fonctions croissantes de r (fig. IV.2). On introduit une longueur de référence $L(r)$ telle que $L > 2\delta$ et la variable $\eta = \frac{z}{L}$. Ainsi, on se ramène à un domaine rectangulaire (r, η) .

Nous nous sommes inspiré de l'expérience /32 / pour donner une évolution de $L(r)$. Nous avons ainsi adopté pour $L(r)$ une variation linéaire (fig. IV.2).

Avec le changement de variables :

$$\eta = \frac{z}{L(r)} \quad \text{IV.3.1.2.1}$$

$$R = r \quad \text{IV.3.1.2.2}$$

On obtient

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{L(r)} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \quad \text{IV.3.1.2.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial R} - \frac{\dot{L}(r)}{L(r)} \cdot \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \quad \text{IV.3.1.2.4}$$

Les équations IV.2.1.1.1 et IV.3.1.1.4 s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial r}(rU) - r \frac{\dot{L}}{L} \eta \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{r}{L} \cdot \frac{\partial W}{\partial \eta} = 0 \quad \text{IV.3.1.2.5}$$

$$\frac{1}{L} \cdot \frac{\partial(rW\phi)}{\partial \eta} + \frac{\partial(rU\phi)}{\partial r} - \frac{L}{L} \eta \frac{\partial(rU\phi)}{\partial \eta} = \frac{r}{L^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} (c_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta}) + r \cdot S_\phi \quad \text{IV.3.1.2.6}$$

La méthode utilisée pour résoudre ce système consiste à l'intégrer dans un volume élémentaire fini D_j (fig. IV.5).

IV.3.1.3.- Hypothèses de mise en oeuvre

Avant de procéder à l'intégration de l'équation IV.3.1.2.6 dans le domaine D_j , nous allons expliciter des hypothèses nécessaires à la discrétisation.

1. Toute fonction $\phi(r, \eta)$ est connue, en toute section $r = c^{te}$ par ses valeurs aux points η_j .
2. $\phi(r, \eta)$ est supposée varier par sauts suivant r . Entre r^u et r^d on a $\phi = \phi_{rd}$ à η constant pour que le schéma soit implicite afin d'assurer la stabilité pour Δr grand (fig. IV.3).

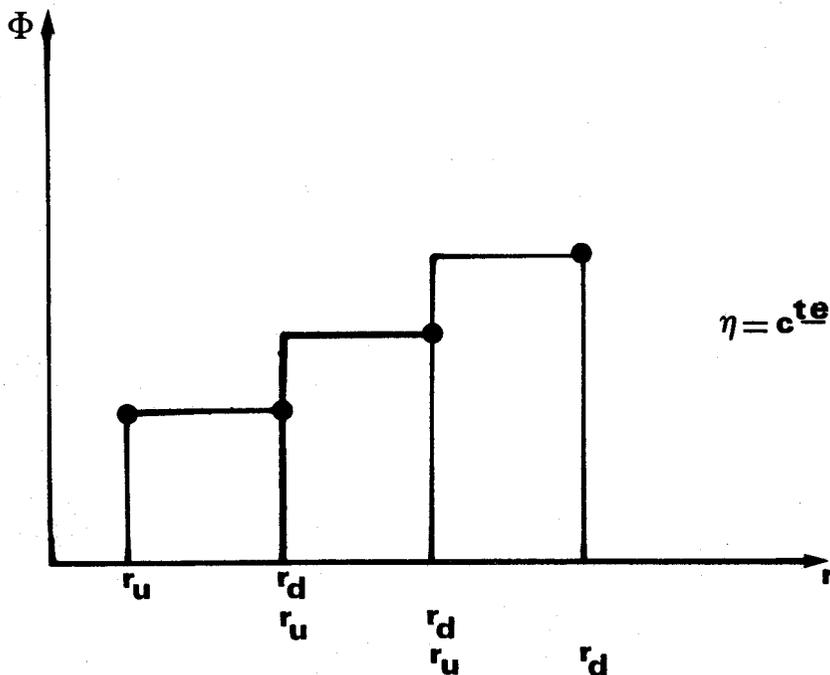


fig. IV.3

3. Entre deux noeuds consécutifs en η , $\phi(r, \eta)$ est supposée varier linéairement en fonction de η (fig. IV.4)

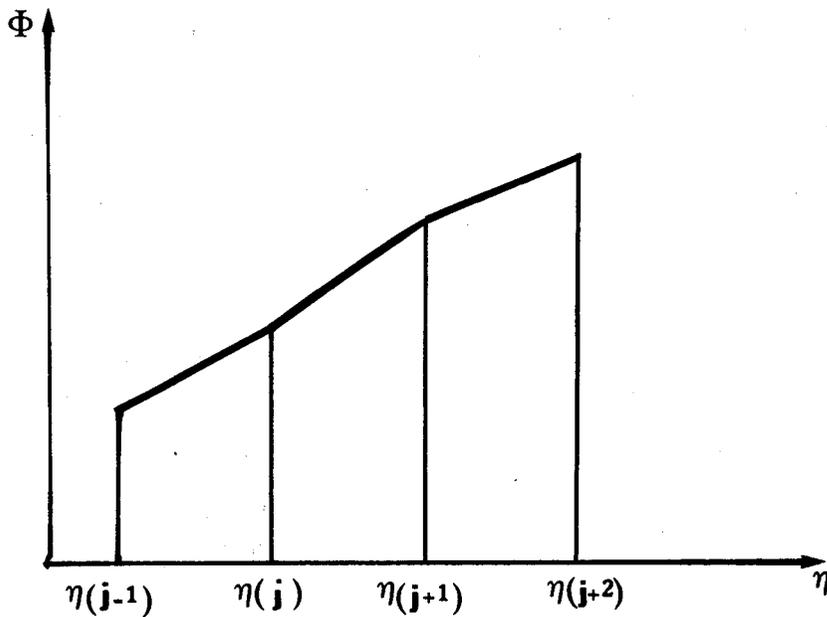


fig. IV.4

4. Lors de la discrétisation, certains coefficients seront pris égaux aux valeurs prises en r^d , d'autres sont pris égaux aux valeurs prises en r^u . Ceci est fait uniquement par souci de simplicité.
5. Afin d'atténuer les effets de non linéarité du terme S_ϕ , on le décomposera de la manière suivante :

$$S_\phi = S_\phi^u + \phi^d \cdot D_\phi^u$$

IV.3.1.3.1

où D_{\varnothing}^u et S_{\varnothing}^u sont respectivement la partie linéaire et non linéaire qu'on détermine à la position amont.

$\varnothing d$ est la valeur de \varnothing à la position aval.

Cette décomposition exige que le coefficient D_{\varnothing}^u soit toujours inférieur ou égal à zéro comme le signale PATANKAR S.V. /26/. Par exemple, dans l'équation orthoradiale de quantité de mouvement, le terme S_{\varnothing} s'écrit :

$$S_{\varnothing} = - \frac{UV}{r} \quad \text{IV.3.1.3.2}$$

et la décomposition appropriée pourrait être :

$$S_V^u = \max\left(-\frac{U}{r}, 0\right) \quad \text{IV.3.1.3.3}$$

$$D_V^u = -\max\left(\frac{U}{r}, 0\right) \quad \text{IV.3.1.3.4}$$

Pour obtenir la forme discrétisée des équations de transport, il nous faut intégrer chaque terme de la forme générale IV.3.1.2.6 en tenant compte des hypothèses explicitées ci-dessus. Ceci va faire l'objet du paragraphe suivant.

IV.3.1.4.- Discrétisation des équations

Avant de procéder à la discrétisation, nous allons encore transformer les équations IV.3.1.2.5-6. La raison de cette transformation sera fournie dans les paragraphes suivants.

En posant $F_W = W - \eta \dot{L} U$, on obtient pour les équations IV.3.1.2.5 et IV.3.1.2.6 :

$$\frac{\partial rU}{\partial r} + \frac{r}{L} \cdot \frac{\partial F}{\partial \eta} + \frac{\dot{L}}{L} rU = 0$$

IV.3.1.4.1

$$\frac{\partial}{\partial r}(rU\varnothing) + \frac{1}{L} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta}(r\varnothing F) = \frac{r}{L^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta}(c_{\varnothing} \cdot \frac{\partial \varnothing}{\partial \eta})$$

IV.3.1.4.2

$$\left\{ S_{\varnothing+}^u \left(D_{\varnothing}^u - \frac{\dot{L}}{L} U \right) \right\} r$$

Cette transformation est commode car elle va permettre de faire apparaître un nombre de Peclet, nombre qui va nous guider dans le choix du schéma.

Procédons à présent à l'intégration dans le domaine D_j que nous allons rappeler afin d'y expliciter effectivement l'intégration.

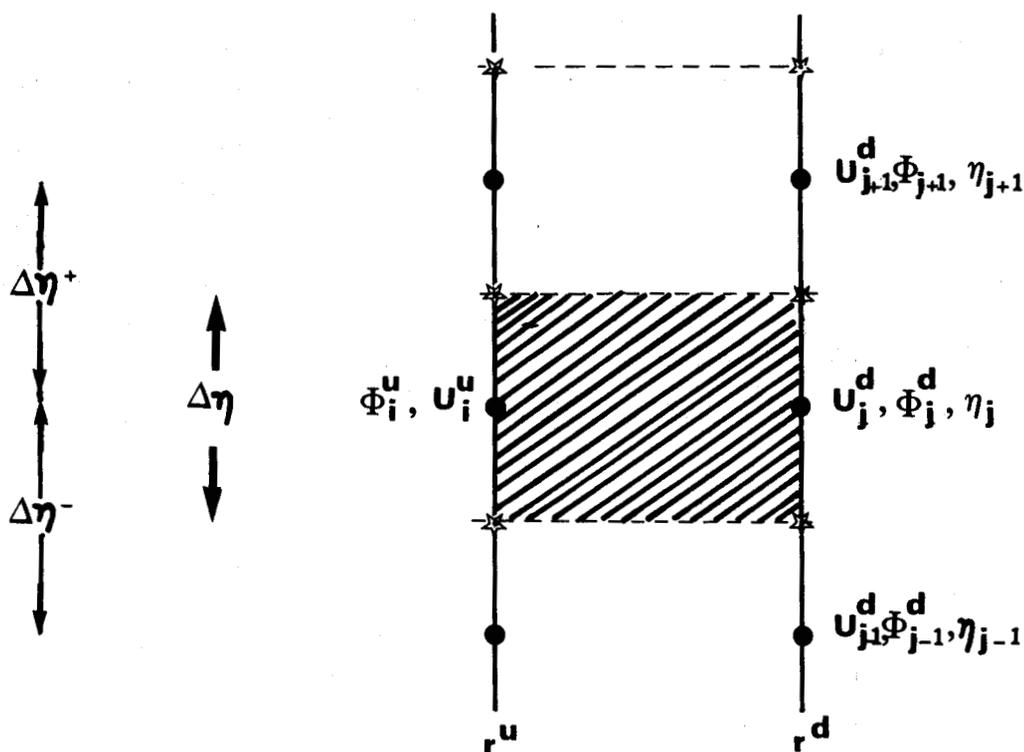


fig. IV.5 } **Domaine d'intégration**
 } **Volume de controle D_j**

a. 1er terme de IV.3.1.4.2

$$\int_{b^-}^{b^+} \left[\int_{ru}^{rd} \frac{\partial}{\partial r} (rU\varnothing) dr \right] d\eta = \int_{b^-}^{b^+} rU\varnothing \Big|_{ru}^{rd} d\eta$$

$$= \left[r^d U_j^d \varnothing_j^d - r^u U_j^u \varnothing_j^u \right] \Delta\eta \quad \text{IV.3.1.4.3}$$

avec $\Delta\eta = \eta^+ - \eta^- = \frac{\eta_{j+1} - \eta_{j-1}}{2}$

b. Second terme de IV.3.1.4.2

$$\int_{ru}^{rd} \left[\int_{b^-}^{b^+} \frac{1}{L} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} (r\varnothing F) d\eta \right] dr = \frac{1}{L^d} \int_{ru}^{rd} r \left[\int_{b^-}^{b^+} \frac{\partial}{\partial \eta} (\varnothing F) d\eta \right] dr$$

$$= \frac{1}{L^d} \int_{ru}^{rd} r \varnothing F \Big|_{b^-}^{b^+} . dr \quad \text{IV.3.1.4.4}$$

$$= \frac{1}{L^d} \left[\varnothing_+^d F_+^u - \varnothing_-^d F_-^u \right] \bar{r} \Delta r$$

C'est à ce stade qu'il faut faire le choix d'un schéma de calcul.

Différentes possibilités se présentent :

- Schéma aux différences centrées (CDS)

Ce schéma utilise une interpolation linéaire pour obtenir les valeurs de \varnothing aux points situés sur les faces du volume de contrôle.

On a donc :

$$\varnothing_+^d \cdot F_+^u = \frac{1}{2} (\varnothing_{j+1}^d + \varnothing_j^d) \cdot F_+^u \quad \text{IV.3.1.4.5}$$

$$\varnothing_-^d \cdot F_-^u = \frac{1}{2} (\varnothing_j^d + \varnothing_{j-1}^d) \cdot F_-^u \quad \text{IV.3.1.4.6}$$

Ce schéma donne d'excellents résultats lorsque le nombre de Reynolds de maille (ou nombre de Peclet) défini par

$$Pe = \frac{W \cdot \Delta z}{\nu} \quad \text{IV.3.1.4.7}$$

est tel que $|Pe| < 2$. Par contre, il donne des résultats non réalistes dans le cas contraire / 26 /.

C'est à cause de ce défaut du CDS que les schémas aux différences décentrées ont pris naissance.

- Schéma aux différences décentrées (UDS)

On utilise les interpolations suivantes :

$$\varnothing_+^d \cdot F_+^u = \varnothing_j^d \cdot \max(F_+^u, 0) - \varnothing_{j+1}^d \cdot \max(-F_+^u, 0) \quad \text{IV.3.1.4.8}$$

$$\theta_-^d \cdot F_-^u = \theta_{j-1}^d \cdot \max(F_-^u, 0) - \theta_j^d \cdot \max(-F_-^u, 0) \quad \text{IV.3.1.4.9}$$

SPALDING /41/ a montré que ce schéma permet d'obtenir des résultats excellents et interprétables physiquement lorsque $|\mathcal{P}e| > 2$ est c'est pour cela qu'il le qualifie de "supérieur" au CDS, alors que pour $|\mathcal{P}e| < 2$, il n'est pas nécessaire de l'utiliser car d'une part, il donne des résultats moins bons par rapport au CDS et d'autre part, il fait intervenir des formules compliquées (IV.3.1.4.8.9).

- Schéma hybride (HDS)

Afin de réaliser un équilibre entre les schémas centré et décentré amont (Upwind), SPALDING /41/ a proposé un schéma qui utilise les avantages qu'offrent ces deux schémas :

Lorsque $|\mathcal{P}e| < 2$, on utilise le CDS, alors que pour $|\mathcal{P}e| \geq 2$ on utilise le UPS.

La combinaison de ces deux schémas a donné naissance au schéma dit hybride.

c. 3ème terme de IV.3.1.4.2

$$\int_{r_u}^{r_d} \frac{r}{L^2} \left[\int_{\eta^-}^{\eta^+} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(c_\emptyset \frac{\partial \emptyset}{\partial \eta} \right) d\eta \right] dr = \int_{r_u}^{r_d} \frac{r}{L^2} \left[c_\emptyset \frac{\partial \emptyset}{\partial \eta} \right]_{\eta^-}^{\eta^+} dr \quad \text{IV.3.1.4.10}$$

$$= \frac{1}{(L^2)^d} \left[c_+^u \frac{\theta_{j+1}^d - \theta_j^d}{\Delta \eta^+} - c_-^u \frac{\theta_j^d - \theta_{j-1}^d}{\Delta \eta^-} \right] \bar{r} \Delta r$$

Afin de généraliser le résultat, c'est-à-dire utiliser le HDS, on multiplie les termes discrétisés de diffusion par la fonction / 26 /.

$$G(\mathcal{P}e) = \max(0, 1 - 0.5 \times |\mathcal{P}e|) \quad \text{IV.3.1.4.11}$$

D'où

$$I_3 = \frac{1}{L^d} \left(\frac{c_+^u}{L^d \Delta \eta^+} (\varnothing_{j+1}^d - \varnothing_j^d) \cdot G\left(\frac{F_+^u \cdot L \cdot \Delta \eta^+}{c_+^u}\right) - \frac{c_-^u}{L^d \cdot \Delta \eta^-} (\varnothing_j^d - \varnothing_{j-1}^d) \cdot G\left(\frac{F_-^u \cdot L \cdot \Delta \eta^-}{c_-^u}\right) \right) \bar{r} \cdot \Delta r \quad \text{IV.3.1.4.12}$$

d. Le terme de IV.3.1.4.2

$$I_4 = \int_{r_u}^{r_d} \int_{\eta^-}^{\eta^+} \left[S_\varnothing^u + \left(D_\varnothing^u - \frac{\dot{L}^u}{L} \right) \varnothing \right] r \cdot dr \cdot d\eta \quad \text{IV.3.1.4.13}$$

$$= S_j^u \cdot \bar{r} \cdot \Delta r \cdot \Delta \eta + \left[D_j^u - \frac{\dot{L}^u}{L} U^u \right] \varnothing_j^d \cdot \bar{r} \cdot \Delta r \cdot \Delta \eta$$

Finalement, l'équation de transport discrétisée s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \left(r^d U_j^d \varnothing_j^d - r^u U_j^u \varnothing_j^u \right) \Delta \eta + \frac{1}{L^d} \left[\varnothing_j^d \cdot \max(-F_+^u, 0) - \varnothing_{j+1}^d \cdot \max(-F_+^u, 0) \right. \\
& \quad \left. - \varnothing_{j-1}^d \cdot \max(F_-^u, 0) + \varnothing_j^d \cdot \max(-F_-^u, 0) \right] \bar{r} \Delta r \\
& \quad - S_j^u \bar{r} \Delta r \Delta \eta - \left(b_j^u - \left(\frac{L}{L} \right) U_j^u \right) \varnothing_j^d \bar{r} \Delta r \Delta \eta \\
& \quad - \frac{\bar{r} \Delta r}{L^d} \left[\frac{c_+^u}{L^d \Delta \eta^+} \cdot G\left(\frac{F_-^u \cdot L \cdot \Delta \eta^+}{c_+^u} \right) \cdot (\varnothing_{j+1}^d - \varnothing_j^d) \right. \\
& \quad \left. - \frac{c_-^u}{L^d \Delta \eta^-} \cdot G\left(\frac{F_+^u \cdot L \cdot \Delta \eta^-}{c_-^u} \right) \cdot (\varnothing_j^d - \varnothing_{j-1}^d) \right] = 0
\end{aligned}$$

IV.3.1.4.14

IV.3.1.4.1.- Forme résultante des équations discrétisées

Après arrangement de l'équation IV.3.1.4.14, nous obtenons la forme suivante :

$$a_j \varnothing_{j+1}^d + b_j \varnothing_j^d + c_j \varnothing_{j-1}^d = d_j$$

IV.3.1.4.1.1

où \varnothing_{j-1}^d , \varnothing_j^d et \varnothing_{j+1}^d sont les inconnues sur trois points successifs

à la position aval, et a_j , b_j , c_j et d_j sont des coefficients entièrement connus car ils ne font intervenir que des valeurs de la position amont.

Les coefficients a_j , b_j , c_j et d_j sont :

$$a_j = -\frac{1}{L^d} \left[\max(-F_+^u, 0.) + \frac{c_+^u}{L^d \Delta h^+} \max(0, 1. - \frac{|F_+^u \cdot L \cdot \Delta h^+|}{2c_+^u}) \right] \bar{r} \Delta r$$

$$c_j = -\frac{1}{L^d} \left[\max(F_-^u, 0.) + \frac{c_-^u}{L^d \Delta h^-} \max(0, 1. - \frac{|F_-^u \cdot L \cdot \Delta h^-|}{2c_-^u}) \right] \bar{r} \Delta r$$

$$d_j = \left[S_j^u \bar{r} \Delta r + \emptyset_j^u r^u U_j^u \right] \Delta h$$

$$b_j = r^d U_j^d \Delta h + \frac{1}{L^d} \left[\max(F_+^u, 0.) + \max(-F_-^u, 0.) \right] \bar{r} \Delta r$$

$$- \left[D_j^u - \frac{i}{L} U_j^u \right] \bar{r} \Delta r \Delta h$$

$$+ \frac{1}{L^d} \left[\frac{c_-^u}{L^d \Delta h^+} \max(0, 1. - \frac{|F_+^u \cdot L \cdot \Delta h^+|}{2c_+^u}) \right.$$

$$\left. \frac{c_+^u}{L^d \Delta h^-} \max(0, 1. - \frac{|F_-^u \cdot L \cdot \Delta h^-|}{2c_-^u}) \right] \bar{r} \Delta r$$

IV.3.1.4.2.- Expression des coefficients a_j ,
 b_j , c_j et d_j pour les schémas CDS et UDS

Ici nous allons expliciter les expressions des coefficients a_j ,
 b_j , c_j et d_j dans le cas des deux schémas cités en IV.3.1.4.

- Schéma CDS

$$\text{On a } \frac{|F_+^u \cdot L \cdot \Delta t^+|}{c_+^u} < 2 \implies G(\mathcal{P}e) = 1 - \frac{|F_+^u \cdot L \cdot \Delta t^+|}{2c_+^u}$$

Si $F_+^u > 0$ ($|F_+^u| = F_+^u$, $-F_+^u < 0$), alors :

$$a_j = -\frac{\bar{r} \cdot \Delta r}{L^d} \left(0 + \frac{c_+^u}{L^d \Delta t^+} - \frac{c_+^u}{L^d \Delta t^+} \cdot \frac{F_+^u \cdot L \cdot \Delta t^+}{2c_+^u} \right)$$

ou

$$a_j = -\frac{\bar{r} \cdot \Delta r}{L^d} \left(\frac{c_+^u}{L^d \Delta t^+} - \frac{F_+^u}{2} \right)$$

Si $F_+ < 0$, on a :

$$a_j = -\frac{\bar{r} \cdot \Delta r}{l_d} \left(-F_+^u + \frac{c_+^u}{l_d \cdot \Delta \eta^+} - \frac{c_+^u}{l_d \cdot \Delta \eta^+} \cdot \frac{-F_+^u \cdot l_d \cdot \Delta \eta^+}{2 c_+^u} \right)$$

ou

$$a_j = -\frac{\bar{r} \cdot \Delta r}{l_d} \left(\frac{c_+^u}{l_d \cdot \Delta \eta^+} - \frac{F_+^u}{2} \right)$$

On remarque que a_j a la même expression quelque soit le signe de F^u .

Il en est de même pour c_j dont l'expression s'écrit :

$$c_j = -\frac{1}{l_d} \left(\frac{F_-^u}{2} + \frac{c_-^u}{l_d \cdot \Delta \eta^-} \right)$$

- Schéma UDS

$$\text{On a } \frac{F^u \cdot l_d \cdot \Delta}{c_+^u} > 2 \longrightarrow G(\mathcal{P}_e) = 0$$

$$\text{Si } F_+^u > 0, \text{ on a } a_j = -\frac{1}{l_d} (0) \bar{r} \cdot \Delta r ; c_j = -\frac{1}{l_d} (F_+^u + 0) \cdot \bar{r} \cdot \Delta r$$

$$\text{Si } F_+^u < 0, \text{ on a } a_j = -\frac{1}{l_d} (-F_+^u) \bar{r} \cdot \Delta r ; c_j = -\frac{1}{l_d} (0 + 0) \cdot \bar{r} \cdot \Delta r$$

On regroupe ces expressions en une seule :

$$a_j = -\frac{1}{l_d} \cdot \max(-F_+, 0) \bar{r} \cdot \Delta r$$

$$c_j = -\frac{1}{l_d} \cdot \max(+F, 0) \bar{r} \cdot \Delta r$$

$$\text{Si } F^u > 0$$

$$b_j = r^d \cdot U_j^u \cdot \Delta \eta + \frac{1}{L^d} (F_+^u + 0) \bar{r} \cdot \Delta r - \left(D_j^u - \frac{\dot{L}}{L} U_j^u \right) \bar{r} \cdot \Delta r \cdot \Delta \eta$$

$$+ \frac{1}{L^d} (0 + 0) \bar{r} \cdot \Delta r$$

si $F^u < 0$

$$b_j = r^d \cdot U_j^u \cdot \Delta \eta + \frac{1}{L^d} (0 - F_-^u) \bar{r} \cdot \Delta r - \left(D_j^u - \frac{\dot{L}}{L} U_j^u \right) \bar{r} \cdot \Delta r \cdot \Delta \eta$$

$$+ \frac{1}{L^d} \cdot (0 + 0) \bar{r} \cdot \Delta r$$

IV.3.1.4.3.- Revue des différentes expressions
des coefficients a_j , b_j , c_j et d_j

On a en définitive l'expression de l'équation IV.3.1.4.14 dans le cas
 du schéma hybride :

$$\begin{aligned}
 & (r^d U_j^d \phi_j^d - r^u U_j^u \phi_j^u) \Delta \eta \left\{ \begin{array}{l} + \frac{\bar{r} \Delta r}{L^d} \left[\max(F_+^u, 0) \phi_j^d - \max(-F_+^u, 0) \phi_{j+1}^d \right. \\ \left. + \max(-F_-^u, 0) \phi_j^d - \max(F_-, 0) \phi_{j-1}^d \right] \text{UDS} \\ \text{ou} \\ \frac{\bar{r} \Delta r}{2L^d} \left[F_+^u \cdot (\phi_{j+1}^d \oplus \phi_j^d) - F_-^u \cdot (\phi_j^d \oplus \phi_{j-1}^d) \right] \text{CDS} \end{array} \right. \\
 & - S_j^u \bar{r} \Delta r \Delta \eta + \left(D_j^u - \frac{L}{L^d} \right) \phi_j^d \bar{r} \Delta r \Delta \eta \text{UDS.CDS}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\bar{r} \Delta r}{L^d} \left(0 \right) = 0 \quad \text{UDS} \\
 & \text{ou}
 \end{aligned}$$

$$- \frac{\bar{r} \Delta r}{L^d} \left(c_+^u \frac{\phi_{j+1}^d - \phi_j^d}{L^d \Delta \eta^+} \right)$$

$$\left(c_-^u \frac{\phi_j^d - \phi_{j-1}^d}{L^d \Delta \eta^-} \right) = 0 \quad \text{CDS}$$

Les coefficients a_j , b_j , c_j et d_j sont :

$$a_j = \begin{cases} -\frac{\bar{r}\Delta r}{L^d} \cdot \max(-F_+^U, 0) + 0. & \text{UDS} \\ +\frac{\bar{r}\Delta r}{2L^d} \cdot (+F_+^U) + \left(-\frac{\bar{r}\Delta r}{(L^d)^2} \cdot \frac{c_+^U}{\Delta\eta^+}\right) & \text{CDS} \end{cases}$$

$$c_j = \begin{cases} -\frac{\bar{r}\Delta r}{L^d} \cdot \max(-F_-^U, 0) + 0. & \text{UDS} \\ -\frac{\bar{r}\Delta r}{2L} \cdot (+F_-) + \left(-\frac{\bar{r}\Delta r}{(L^d)^2} \cdot \frac{c_-^U}{\Delta\eta^-}\right) & \text{CDS} \end{cases}$$

$$b_j = \begin{cases} r^d U_j^d \Delta\eta + \frac{\bar{r}\Delta r}{L^d} \left(\max(F_+^U, 0) + \max(-F_-^U, 0) \right) & \text{UDS} \\ - \left(D_j^U - \frac{\dot{L}}{L} U_j^U \right) \bar{r}\Delta r \Delta\eta + 0 \\ r^d U_j^d \Delta\eta + \frac{\bar{r}\Delta r}{L} (F_+^U - F_-^U) - \left(D_j^U - \frac{\dot{L}}{L} U_j^U \right) \bar{r}\Delta r \Delta\eta & \text{CDS} \\ + \frac{\bar{r}\Delta r}{(L^d)^2} \left(\frac{c_+^U}{\Delta\eta^+} + \frac{c_-^U}{\Delta\eta^-} \right) \end{cases}$$

$$d_j = \begin{cases} (S_j^U \bar{r}\Delta r + \phi_j^U r^U U_j^U) \Delta\eta & \text{UDS} \\ (S_j^U \bar{r}\Delta r + \phi_j^U r^U U_j^U) \Delta\eta & \text{CDS} \end{cases}$$

En fait, il existe une relation entre les coefficients a_j , b_j et c_j , relation qui est surtout exploitée en programmation.

Démontrons cette relation pour les schémas centré et décentré amont.

Nous allons avoir besoin d'utiliser la relation :

$$\max(-\alpha, 0) = \max(+\alpha, 0) + \alpha$$

On a

$$-a_j - c_j = \begin{cases} \frac{\bar{r} \cdot \Delta r}{L^d} \left(\max(F_+^u, 0) - \max(-E^u, 0) + F_-^u - F_+^u \right) & \text{UDS} \\ -\frac{\bar{r} \cdot \Delta r}{L^d} (F_+^u - F_-^u) + \frac{\bar{r} \cdot \Delta r}{(L^d)^2} \left(\frac{c_+^u}{\Delta \eta^+} + \frac{c_-^u}{\Delta \eta^-} \right) & \text{CDS} \end{cases}$$

D'où

$$b_j = \begin{cases} r^d U_j^d \Delta \eta - a_j - c_j + (F_+^u - F_-^u) \cdot \frac{\bar{r} \cdot \Delta r}{L} - \left(\mathcal{D}_j^u - \frac{L}{L} U_j^u \right) \cdot \bar{r} \cdot \Delta r \cdot \Delta \eta & \text{UDS} \\ r^d U_j^d \Delta \eta - \frac{\bar{r} \cdot \Delta r}{2L^d} (F_+^u - F_-^u) + \frac{\bar{r} \cdot \Delta r}{(L^d)^2} \left(\frac{c_+^u}{\Delta \eta^+} + \frac{c_-^u}{\Delta \eta^-} \right) - \left(\mathcal{D}_j^u - \frac{L}{L} U_j^u \right) \bar{r} \cdot \Delta r \cdot \Delta \eta & \text{CDS} \end{cases}$$

Or, d'après l'équation de continuité, on a :

$$r^d U_j^d \Delta \eta = r^u U_j^u \Delta \eta - \frac{\bar{r} \Delta r}{L^d} (F_+^u - F_-^u) - \frac{\dot{L}}{L} U_j^u \bar{r} \Delta r \Delta$$

d'où

$$b_j = \begin{cases} -a_j - c_j + r^u U_j^u \Delta \eta - D_j^u \bar{r} \Delta r \Delta \eta & \text{UDS} \\ \underbrace{r^u U_j^u \Delta \eta - \frac{\bar{r} \Delta r}{L^d} (F_+^u - F_-^u) + \frac{\bar{r} \Delta r}{(L^d)^2} \left(\frac{c_+^u}{\Delta \eta^+} + \frac{c_-^u}{\Delta \eta^-} \right)}_{-a_j - c_j} - D_j^u \bar{r} \Delta r \Delta \eta & \text{CDS} \end{cases}$$

On obtient donc la même équation pour les deux schémas.

IV.3.1.4.4.- Intégration de W

L'intégration de l'équation de continuité IV.3.1.2.5 est nécessaire pour calculer W sur la face aval du volume de contrôle. L'équation discrétisée qui en résulte est :

$$\frac{W_+ - W_-}{\eta^+ - \eta^-} = - \frac{L^d}{\bar{r} \Delta r} (r^d U_j^d - r^u U_j^u) + \dot{L}^d \cdot \eta_j \cdot \frac{U_{j+1}^d - U_{j-1}^d}{\eta_{j+1} - \eta_{j-1}}$$

Or $\eta^+ - \eta^- = \frac{\eta_{j+1} - \eta_{j-1}}{2}$

d'où

$$W_+ = W_- - \frac{L^d}{r\Delta r} \cdot \frac{\eta_{j+1} - \eta_{j-1}}{2} (r^d U_j^d - r^u U_j^u) + L^d \eta_j \cdot \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2}$$

IV.3.1.4.4.1

Passons maintenant à l'évaluation de W au point P le plus proche de la paroi.

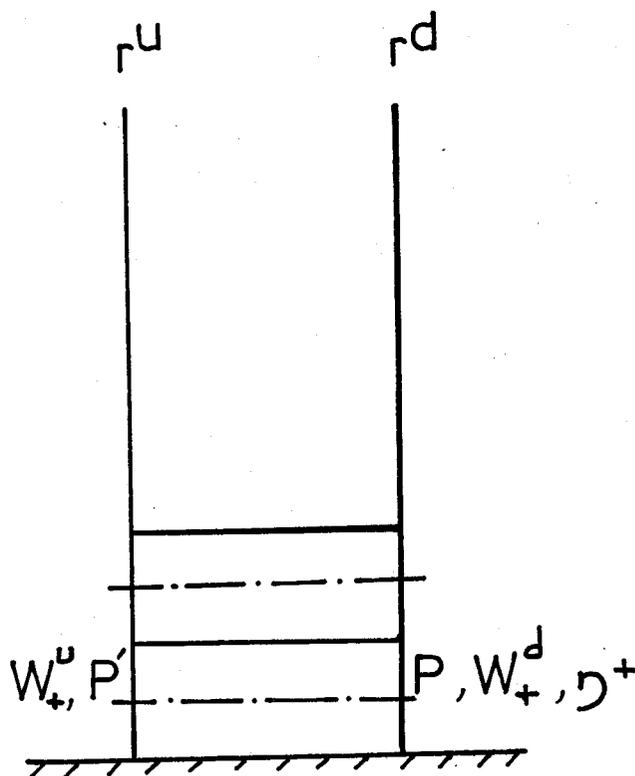


Fig. IV.6.

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma} \Big|_P = \frac{W(P) - W(1)}{\gamma^+ - \gamma(1)} = \frac{W(P)}{\gamma^+}$$

or $\gamma^+ = \frac{1}{2}(\gamma(2) + \gamma(1))$

et

$$\gamma(1) = 0$$

d'où

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma} \Big|_P = 2 \cdot \frac{W^d}{\gamma(2)}$$

$$\gamma \cdot L^d \frac{\partial U}{\partial \gamma} \Big|_P = \gamma^+ \cdot L^d \cdot \frac{U^d(2) - U^d(1)}{\gamma(2)}$$

or

$$U^d(1) = 0$$

d'où

$$\gamma \cdot L^d \cdot \frac{\partial U}{\partial \gamma} \Big|_P = \frac{\gamma(2)}{2} \cdot L^d \cdot \frac{U^d(2)}{\gamma(2)} = \frac{L^d}{2} U^d(2)$$

$$\frac{L}{r} \cdot \frac{\partial r U}{\partial r} \Big|_P = \frac{L^d}{r} \cdot \frac{r^d \cdot U_P^d - r^u \cdot U_P^u}{\Delta r}$$

$$= \frac{L^d}{2r \Delta r} \cdot (r^d U^d(2) - r^u \cdot U^u(2))$$

Donc

$$\frac{2W_+}{\eta(2)} = i \frac{U^d(2)}{2} - \frac{L^d}{2r\Delta r} \left(r^d \cdot U^d(2) - r^u \cdot U^u(2) \right)$$

ou

$$W_+^d = \frac{\eta(2)}{4} \cdot \left[i U^d(2) - \frac{L^d}{r\Delta r} \left(r^d U^d(2) - r^u U^u(2) \right) \right]$$

IV.3.1.4.4.2

IV.3.1.5.- Résolution du système par l'algorithme de THOMAS

IV.3.1.5.1.- Expression matricielle

L'équation IV.3.1.4.1.1 peut s'écrire sous la forme matricielle

suivante :

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ c_2 \\ a_1 \\ b_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ 0 \\ c_j \\ b_j \\ a_j \\ \vdots \\ c_{jm} \\ b_{jm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ 0 \\ c_j \\ b_j \\ a_j \\ \vdots \\ c_{jm} \\ b_{jm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{j-1} \\ \phi_j \\ \phi_{j+1} \end{pmatrix} = d_j$$

IV.3.1.5.1

puis, réduisons la seconde en lui soustrayant c_2 fois la première :

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ 0 & b_2 - c_2 \frac{a_1}{b_1} & a_3 & & & & 0 \\ & c_3 & b_3 & & & & \\ & & & \dots & & & \\ & & & & c_j & b_j & a_j \\ & & & & & & \dots \\ & & & & & & & a_{jm-1} \\ & & & & & & & & c_{jm} & b_{jm} \end{array} \right) \phi_j = \left(\begin{array}{c} \frac{d_1}{b_1} \\ d_2 - c_2 \frac{d_1}{b_1} \\ \\ \\ d_j \\ \\ \\ d_{jm} \end{array} \right)$$

On normalise la seconde ligne, puis on réduit la troisième et si on réitère le procédé pour les jm lignes du système, on obtient le système à matrice bidiagonale unitaire :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \left(\begin{array}{ccccccc}
 1 & & & & & & \\
 & \alpha_1 & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & \alpha_2 & & & \\
 & & & & \ddots & & \\
 & & & & & 1 & \\
 & & & & & & \alpha_j \\
 & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & & & & \alpha_{jm-1} \\
 & & & & & & & & & & 1
 \end{array} \right)
 \begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{c} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_j \\ \vdots \\ \phi_{jm} \end{array} \right) =
 \left(\begin{array}{c} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_j \\ \vdots \\ \beta_{jm} \end{array} \right)
 \end{array}
 \end{array}$$

En résumé, l'algorithme de Thomas emprunte les étapes suivantes :

- Triangulation

$$\alpha_1 = \frac{a_1}{b_1} \quad \text{IV.3.1.5.1.3}$$

$$\alpha_j = \frac{a_j}{b_j - c_j \cdot \alpha_{j-1}} \quad j = 2, jm-1 \quad \text{IV.3.1.5.1.4}$$

$$\beta_1 = \frac{d_1}{b_1} \quad \text{IV.3.1.5.1.5}$$

$$\beta_j = \frac{d_j - c_j \cdot \beta_{j-1}}{b_j - c_j \cdot \alpha_{j-1}} \quad j = 2, jm-1 \quad \text{IV.3.1.5.1.6}$$

- Résolution du système à matrice bidiagonale

$$\varnothing_{jm}^d = \beta_{jm} \quad \text{IV.3.1.5.1.7}$$

$$\varnothing_j^d = \beta_j - \alpha_j \cdot \varnothing_{j+1}^d \quad j = jm-1, 1, -1 \quad \text{IV.3.1.5.1.8}$$

- Conditions aux limites

La relation IV.3.1.5.1.8 écrite pour $j = 1$ donne :

$$\varnothing_1^d = \beta_1 - \alpha_1 \cdot \varnothing_2^d \quad \text{IV.3.1.5.1.9}$$

Or, $\varnothing_1 = \varnothing_{\text{limite}}$ est connue; alors pour que la relation IV.3.1.5.1.9 soit toujours vérifiée, il suffit de prendre :

$$\alpha_1 = 0. \quad \text{IV.3.1.5.1.10}$$

et

$$\beta_1 = \varnothing_{\text{limite}}^d \quad \text{IV.3.1.5.1.11}$$

Il faut connaître \varnothing_{jm}^d pour pouvoir démarrer le calcul. Pour cela, écrivons IV.3.1.5.1.8 pour $j = jm$.

$$\varnothing_{jm}^d = \beta_{jm} - \alpha_{jm} \cdot \varnothing_{jm+1}^d \quad \text{IV.3.1.5.12}$$

Or $\varnothing_{jm}^d = \varnothing_{\text{limite}}^d$, donc il faut prendre :

$$\alpha_{jm} = 0$$

IV.3.1.5.1.13

$$\beta_{jm} = \delta_{limite}^d$$

IV.3.1.5.1.14

IV.3.1.5.3.- Algorithme de la procédure

Finalement l'algorithme de la procédure est :

1. On calcule α_1 et β_1 à partir de IV.3.1.5.1.3 et 5.
2. On utilise les formules IV.3.1.5.1.4 et IV.3.1.5.1.6 pour calculer α_j et β_j de $j=2, jm-1$.
3. On calcule δ_{jm}^d grâce à la relation IV.3.1.5.1.12.
4. Enfin, on calcule les δ_j^d par valeurs décroissantes de j c'est-à-dire de $j = jm-1, \dots, 2$ à l'aide de la formule IV.3.1.5.1.8.

IV.4.- DETAILS DES CALCULS

Dans ce paragraphe, nous allons préciser certaines étapes qui nous ont apparues intéressantes.

IV.4.1.- Définition du système de maillage utilisé (Fig. IV.7)

Le choix des coordonnées $r, \eta = \frac{z}{L(r)}$ étant adopté, il convient de bien répartir les pas en η afin d'obtenir une distribution satisfaisante des points de calcul à travers l'épaisseur du jet ou de la couche limite.

Comme l'écoulement se produit dans le domaine présentant une distorsion (domaine mince) qui est orthogonale à la direction moyenne de la vitesse du jet, il convient de concentrer suffisamment de points dans cette région.

Ainsi, dans la section d'entrée, on fixe pour h une grille en progression géométrique de raison q . Ce choix a été utilisé avec succès au DERAT-CERT /38/, /39/, /40/, et aussi par GALMES /31/.

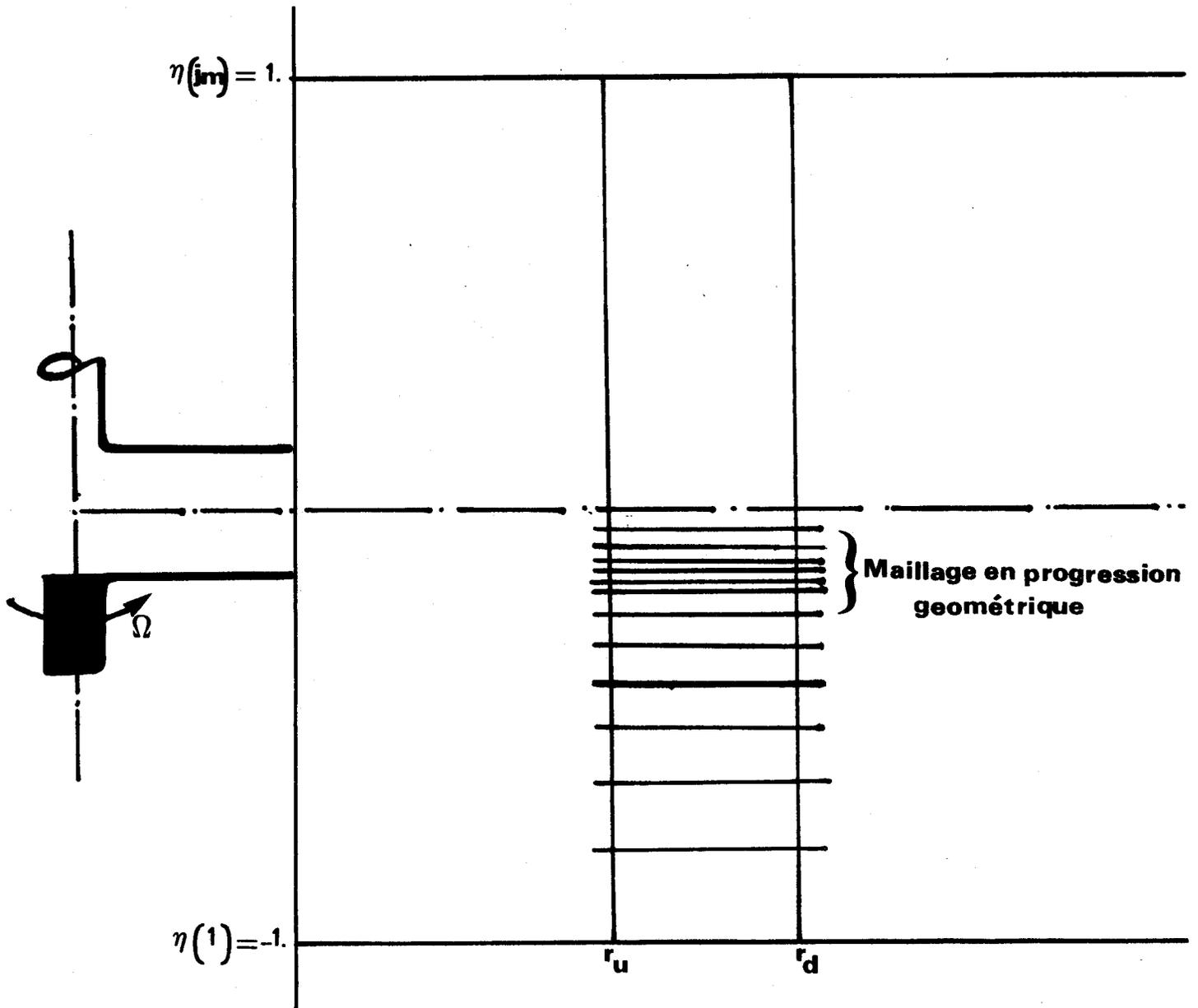


fig. IV.7

On se fixe un nombre de pas j_m et on prend :

$$\frac{z(j+1)}{z(j)} = \frac{1. - q^j}{1. - q^{(j-1)}}$$

ou

$$z(j) = X \cdot \frac{1. - q^{(j-1)}}{1. - q^{(j_m-1)}}$$

X étant la hauteur de la partie à mailler.

IV.4.2.- Détermination du pas longitudinal

La progression de la résolution dans le sens de l'écoulement pose le problème du choix du pas Δr : si ce pas est trop grand le schéma diverge; s'il est trop petit, le temps de calcul et donc son coût deviennent prohibitifs.

Il existe alors un compromis entre ces deux extrêmes. Pour arriver effectivement à ce compromis, le pas Δr doit être de l'ordre de l'épaisseur de quantité de mouvement θ ou de l'ordre d'une fraction de l'épaisseur du jet ou de la couche limite calculée dans le pas précédent /31/.

IV.4.3.- Calcul des termes S_j^u , D_j^u et C_ϕ

Modèle k- ϵ

Quatre équations sont traitées :

- quantité de mouvement radiale
- quantité de mouvement orthoradiale
- énergie cinétique de turbulence
- taux de dissipation ϵ .

IV.4.3.1.- Equation radiale de quantité de mouvement

Cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial(rUU)}{\partial r} + \frac{\partial(rUW)}{\partial z} = r \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left[(\nu + \nu_t) \frac{\partial U}{\partial z} \right] + \left[\frac{V^2}{r} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial r} \right] \cdot r$$

On a donc :

$$S_j^U = \frac{V^2}{r} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial r}, \text{ soit d'après IV.2.1.3.5.}$$

$$S_j^U = \left[\frac{V^2}{r} + \frac{1}{2} \cdot \frac{dU_e^2}{dr} \right]_j^U$$

$$D_j^U = 0$$

$$C_\phi = \nu + \nu_t$$

avec $\nu_t = f_\mu \cdot C_\mu \cdot \frac{k^2}{\varepsilon}$

$$f_\mu = \exp\left(-2.5\left(1 + \frac{Re_t}{50}\right)\right)$$

$$Re_t = \frac{k^2}{\nu \varepsilon}$$

IV.4.3.2.- Equation orthoradiale de quantité de mouvement

Elle s'écrit :

$$\frac{\partial(rUV)}{\partial r} + \frac{\partial(rWV)}{\partial z} = r \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left[c_{\phi} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right] + \left[-\frac{UV}{r} \right]_r$$

on a :

$$S_j^u = -\frac{UV}{r} \Big|_j^u$$

$$D_j^u = 0$$

$$c_{\phi} = \nu + \nu_t$$

IV.4.3.3.- Equation de l'énergie cinétique turbulente

Elle s'écrit :

$$\frac{\partial(rUk)}{\partial r} + \frac{\partial(rWk)}{\partial z} = r \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left[c_{\phi} \frac{\partial k}{\partial z} \right] + \left[\nu_t P_S - \epsilon \right]_r$$

On a :

$$\phi = k$$

$$S_j^u = \nu_t \cdot P_S^u - \epsilon_j^u$$

$$D_j^u = 0$$

$$c_{\phi} = \nu + \frac{\nu}{\sigma_k} \quad , \quad \sigma_k = 1.$$

IV.4.3.4.- Equation du taux de dissipation

Elle s'écrit :

$$\frac{\partial(rU\varepsilon)}{\partial r} + \frac{\partial(rW\varepsilon)}{\partial z} = r \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left[c_\phi \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right] + \left[C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \nu_t P_S - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \right] \cdot r$$

On a :

$$\phi = \varepsilon$$

$$S_j^u = 0.$$

$$D_j^u = \frac{1}{k} \left[C_{\varepsilon 1} \nu_t P_S - C_{\varepsilon 2} \varepsilon \right]_j^u$$

$$c_\phi = \nu + \nu_t / \sigma_\varepsilon, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3$$

IV.5.- ORGANIGRAMME DU PROGRAMME

Nous avons décrit dans les paragraphes précédents tous les éléments nécessaires à l'écriture d'un programme de calcul de jets tournants turbulents. Dans l'annexe A 4, nous esquissons l'organigramme de ce programme.

CHAPITRE V

CONFRONTATION ENTRE LE CALCUL ET L'EXPERIENCE

V.1.- INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons aborder les comparaisons de nos calculs effectués à l'aide du modèle $k-\epsilon$ avec les différents résultats expérimentaux disponibles. Tout d'abord, nous nous sommes attachés à tester nos codes, d'une part dans le cas d'un écoulement laminaire radial entre deux disques avec ou sans rotation, d'autre part dans le cas d'un jet laminaire sans rotation même si la réalisation de ce dernier cas est assez difficile voire impossible. Puis, nous nous sommes intéressés aux jets tournants turbulents dont l'étude expérimentale a été entreprise par MUHE /32/.

Nous tenons à préciser que ce type de problème est l'un des plus difficile à explorer tant expérimentalement que numériquement. Plusieurs chercheurs s'accordent sur la complexité du problème d'une turbulence en rotation; parmi ceux-ci, on peut citer RODI W. /48/, LAUNDER et MORSE /49/, AUPOIX et COUSTEIX /50/, GENGE et al /51/, COUSTEIX J. et AUPOIX B. /52/, BERTOGLIO J.P. et al. /53/. Par ailleurs, si dans de tels écoulements, les défauts du modèle $k-\epsilon$ ont bien entendu leur importance, il faut toutefois signaler que les conditions initiales nécessaires au démarrage du calcul peuvent avoir elles aussi un effet important. Un début de solution sera évoqué au cours d'une discussion en fin de ce chapitre.

V.1.1.- Effet d'une rotation sur la turbulence

Les études menées sur la rotation sont malheureusement fort rares. Ces études ont simplement pour but d'essayer d'expliquer et de comprendre l'action du cisaillement qui résulte de la superposition d'une déformation pure et d'une rotation. CLER A. /2/ suppose que la rotation présenterait un effet inhibiteur sur le transfert de l'énergie des grosses structures vers les petites structures, ce qui rend caduque l'hypothèse d'échelle unique.

L'équation classique du taux de dissipation ne fait aucune différence entre de tels écoulements et ceux relatifs à la turbulence homogène isotrope. Selon les chercheurs cités plus haut c'est cette équation qui est à l'origine des déficiences dans le traitement de quelques problèmes de cisaillement (jets turbulents plan et circulaire avec ou sans rotation, sillage plan lointain, couche limite avec gradient de pression adverse, ...).

La rotation a pour effet de rendre la turbulence anisotrope. Il apparaît donc nécessaire d'en tenir compte. Une première tendance a consisté à introduire un terme rotationnel dans l'équation pour ϵ . Ce terme devrait être lié à la production totale de l'énergie cinétique turbulente k pour pouvoir soit agir dans le cas des écoulements à faible production d'énergie (sillage plan), soit s'évanouir dans le cas de ceux à forte production. Le terme rotationnel de HANJALIC et al. /54/ constitue une première approche en ce sens.

V.1.2.- Effet des conditions initiales

Comme nous l'avons signalé au Chapitre IV, nous étions amenés à calculer l'écoulement entre les deux disques afin d'obtenir des profils initiaux de jet "acceptables". Nous avons fait ce choix pour deux principales raisons :

- La première est que les résultats expérimentaux pouvant servir comme conditions initiales sont fort rares pour ce type de problème.
- La seconde vient du fait de la propriété qu'on les modèles tel que $k - \epsilon$ de tendre rapidement vers une solution asymptotique indépendant des conditions initiales. Ainsi, JONES et LAUNDER /35/ ont suggéré l'idée de faire démarrer le calcul suffisamment loin en amont afin de provoquer un effacement des conditions initiales.

Ajoutons, par ailleurs, qu'il est présomptueux d'être exigeant avec des modèles simples du type gradient jusqu'à leur demander une prédiction "parfaite" de résultats expérimentaux qui, d'ailleurs, sont eux-mêmes entachés d'erreurs. Toutefois, il faut espérer que le calcul recoupe ces résultats expérimentaux au moins pour les caractéristiques principales du problème étudié. Dans le problème que nous traitons il s'agirait de la vitesse radiale, de l'élargissement du jet, du degré local de rotation, des vitesses maximales radiale et tangentielle.

V.2.- LA COMPARAISON ENTRE CALCUL ET EXPERIENCE

V.2.1.- Généralités

Avant de confronter le calcul à l'expérience, nous allons préciser quelques paramètres caractéristiques des jets. Ces paramètres sont :

- Le nombre de rotation S définit comme le rapport des vitesses tangentielle et radiale à la sortie du jet, soit :

$$S = \frac{\omega \cdot R_0}{U_0}$$

- Le nombre de Reynolds $Re = \frac{\omega \cdot R_0^2}{\nu}$.

insérer cette équation à l'endroit

- Le rapport de l'écartement des deux disques au rayon :

$$\epsilon^* = \frac{h}{R_0}$$

On pourra se reporter aux travaux de MUHE /32/ à la fois pour le choix de ces paramètres et pour la description des expériences.

Les résultats ont été représentés sous forme adimensionnelle pour différents nombres de rotation et pour différentes positions radiales .

Le tableau V.I présente les données qui ont été utilisées à la fois dans nos calculs et dans les expériences.

		Re × 10 ⁻⁵		
		3.90	5.46	7.80
U m/sec	Ω R m/sec	39.3	54.98	78.54
	23.58	1.67	2.33	3.33
18.86	2.08	2.89	4.16	S
14.15	2.78	3.90	5.55	

Tableau V.1

Conditions d'essais pour le jet libre.

V.2.2.- Vitesses moyennes

V.2.2.1.- Profil de la vitesse radiale moyenne

Le profil de la vitesse radiale moyenne adimensionnelle $\frac{U}{U_m}$ en fonction de la distance axiale adimensionnelle $\xi = \frac{z}{\delta}$ à $\frac{r}{h}$ fixe et en prenant **S** comme paramètre, est comparé aux profils expérimentaux (fig. V.1 à V.3). La comparaison est faite pour les positions $\frac{r}{h} = 80, 92$ et 104. On constate que dans l'ensemble l'accord est bon. Parfois, le modèle **k - ε** surestime les résultats par rapport à l'expérience pour $\xi < 0$ et pour $\xi > 0$, il les sousstime.

La figure V.4 présente le profil $\frac{U}{U_m}$ en fonction de ξ pour **S** fixe et $\frac{r}{h}$ variable. Elle montre là aussi un bon accord.

V.2.2.2.- Profil de la vitesse orthoradiale moyenne

Le profil de la vitesse orthoradiale moyenne adimensionnelle $\frac{V}{V_m}$ en fonction de ξ à $\frac{r}{h}$ fixe et **S** variable, est comparé aux résultats expérimentaux (fig. V.5 à 7). L'accord est bon pour $|\xi| < 0.4$. Quand à $|\xi| > 0.4$ le modèle surestime de façon notable les profils par rapport à l'expérience. Ceci montre, sans équivoque, qu'il faut reprendre le modèle afin de décrire de façon plus précise l'évolution de la vitesse tangentielle. Nous pensons aussi qu'il faut être prudent en ce qui concerne les mesures de cette grandeur par l'anémométrie à fil chaud aux faibles vitesses.

Notons que le modèle prédit une vitesse plus élevée du côté du disque tournant, ce qui correspond à la réalité et qui est bien observé expérimentalement.

La figure V.8 présente le profil de la vitesse moyenne orthoradiale adimensionnelle $\frac{V}{V_m}$ en fonction de ξ pour **S** constant et $\frac{r}{h}$ variable.

Elle montre qu'il y a accord seulement pour $|\xi| < 0.4$. Le modèle classique présent ne permet pas de prédire cette grandeur correctement pour $|\xi| > 0.4$, c'est-à-dire dans les zones extérieures. Ceci renforce l'idée de revoir et l'équation orthoradiale de quantité de mouvement et les équations de transport pour k et ϵ , et en particulier les termes production-destruction ainsi que les valeurs des différentes constantes mises en jeu.

A la sortie du jet ($\frac{r}{h} = 60$), la vitesse orthoradiale maximale est égale à la vitesse de rotation du disque. On observe qu'à mesure que $\frac{r}{h}$ augmente et quelque soit S , la vitesse maximale V_m tend à être atteinte vers le plan médian des deux disques. En d'autres termes, quand r croît les profils $\frac{V}{V_m}$ deviennent insensible à la dissymétrie créée par la rotation. Ce phénomène a aussi été observé expérimentalement.

V.2.3.- Echelles caractéristiques du jet

V.2.3.1.- Echelles des vitesses moyennes

Les échelles caractéristiques des vitesses moyennes radiale et orthoradiale sont les vitesses maximales U_m et V_m .

Les figures V.9 et V.10 présentent les variations des rapports $\frac{U}{U_m}$ et $\sqrt{\frac{\omega \cdot R_0}{V_m}}$ en fonction de $\frac{r}{h}$ pour différentes valeurs de S . On constate que l'accord est bien meilleur, notamment en ce qui concerne la vitesse V_m car on aurait pu penser d'après ce qui précède que le modèle prédit mal cette grandeur.

On a observé aussi que la vitesse maximale orthoradiale décroît plus vite que la vitesse maximale radiale, phénomène qui est confirmé expérimentalement.

V.2.3.2.- Degré local de rotation

Ce paramètre est défini comme étant le rapport $\frac{V_m}{U_m}$. Ses variations en fonction de **S** pour différentes valeurs de $\frac{r}{h}$ sont rapportées sur la figure V.11 et comparées avec l'expérience. On constate que l'accord est excellent sauf peut être pour les faibles valeurs de **S** et de $\frac{r}{h}$.

V.2.3.3.- Taux de dispersion δ

Ce paramètre est une caractéristique majeure d'un écoulement de jet. Il est défini par la distance axiale entre les plans où $U = U_m$ et $U = \frac{U_m}{2}$. La prédiction de ce paramètre n'est pas parfaite. En effet, le modèle indique que lorsque le nombre de rotation **S** augmente, les pentes des droites $\frac{\delta}{h} = f\left(\frac{r}{h}\right)$ augmentent (fig. V.12). Un examen de cette même figure montre que le calcul prédit une origine virtuelle $\frac{r_0}{h}$ du jet comprise entre $\frac{r}{h} = 50$ et $\frac{r}{h} = 60$ quelle que soit la valeur de **S**. Par contre, l'expérience montre qu'on trouve des droites sensiblement parallèles ayant pratiquement la même pente, ce qui donne pour les valeurs de **S** les plus élevées des origines fictives comprises entre $\frac{r}{h} = 20$ et $\frac{r}{h} = 40$, c'est-à-dire pour $5 \text{ cm} \leq r \leq 10 \text{ cm}$. Ce résultat expérimental n'est pas très cohérent car il signifie que lorsque **S** augmente, le jet tend à naître tout près de la zone d'impact du fluide d'alimentation. Sur ce point, le calcul semble donc donner des résultats plus acceptables physiquement.

Notons enfin que dans les deux cas, on trouve que le jet s'élargit linéairement, résultat qui est confirmé théoriquement pour d'autres écoulements de jet, plus simples /61/, /62/.

V.2.4.- Tensions de Reynolds

Le tenseur de Reynolds est défini par la relation I.2.1.6.

Cependant dans ce modèle de turbulence, on ne calcule que les quantités

$k = \frac{1}{2} (\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2})$ et les tensions \overline{uw} et \overline{vw} . L'énergie cinétique de turbulence k est calculée à partir de son équation de transport (équation IV.1.3.2). Quant aux tensions de Reynolds, elles sont calculées par les relations suivantes :

$$\overline{-uw} = \nu_t \left(\frac{\tau_{lam}}{\nu} \right) \quad V.2.2.4.1$$

$$\overline{-vw} = \nu_t \left(\frac{\tau'_{lam}}{\nu} \right) \quad V.2.2.4.2$$

où ν_t est la viscosité turbulente définie par IV.1.3.1 et où

$$\tau_{lam} = \nu \cdot \frac{\partial u}{\partial z}$$

et

$$\tau'_{lam} = \nu \cdot \frac{\partial v}{\partial z}$$

V.2.4.1.- Tension de Reynolds \overline{uw}

L'équation V.2.2.4.1 permet donc une comparaison entre les tensions de Reynolds calculée et mesurée à $\frac{r}{h} = 80$ et S variable (figure V.13). La prédiction est correcte pour $-0.8 \leq \xi \leq 0$ c'est-à-dire du côté du disque

tournant, tandis que pour $\xi < -0.8$ et $\xi > 0$, les frottements turbulents sont légèrement surestimés par le modèle $k - \epsilon$. A $\frac{r}{h} = 92$ et $\frac{r}{h} = 104$ (fig. V.14-15), on constate que l'accord est bon pour $-0.8 < \xi < 2.0$. Sur les trois figures, on remarque que le modèle surestime les frottements pour $\xi < -0.8$ (régions intermittente et extérieure).

La figure V.16 présente le frottement turbulent \overline{uw} à $\frac{r}{h}$ fixe et S variable et montre que la prédiction est correcte pour les grandes valeurs de $\frac{r}{h}$ ($\frac{r}{h} = 92, 104$ et pour $-1 < \xi < 2.0$).

V.2.4.2.- Tension de Reynolds \overline{vw}

L'équation V.2.2.4.2 permet la comparaison entre le frottement turbulent \overline{vw} calculé et mesuré. Sur les figures V.17, V.18, V.19 et V.20, on constate que le modèle permet de trouver des profils ayant des formes semblables pour $\frac{r}{h} = 80$ et 92 et quelle que soit la valeur de S , alors que l'expérience n'obtient ce résultat que pour les grandes valeurs de S . Notons que pour les grandes valeurs de S , la prédiction est correcte et que pour $\xi > 0$ (respectivement $\xi < 0$) le modèle surestime (respectivement sousstime) le frottement turbulent.

V.2.5.- Energie cinétique turbulente k

Les figures V.21 et V.22 présente les variations de l'énergie cinétique turbulente k en fonction de ξ à $\frac{r}{h}$ constant et pour différentes valeurs de S . Avant de nous livrer à la comparaison, nous tenons à donner quelques précisions. L'énergie cinétique turbulente calculée

par le modèle est égale à la demi-somme des tensions $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ et $\overline{w^2}$, tandis qu'expérimentalement, on définit k comme étant égale à $\frac{1}{2}(\overline{u^2} + \overline{v^2})$, la quantité $\overline{w^2}$ n'ayant pas été mesurée. Ceci dit, un examen des figures V.21 à V.22 montre que le calcul surestime de façon marquée l'énergie cinétique par rapport à l'expérience. Nous pensons que ceci est dû à plusieurs choses :

- les différences dans la définition de k pour le modèle et l'expérience,
- les conditions initiales.

V.2.6.- Taux de dissipation ϵ

Les résultats obtenus numériquement sont rapportés sur les figures V.23, V.24 et V.25. Nous présentons la distribution de la quantité adimensionnelle $\frac{\epsilon \cdot \delta}{U_m^3}$ en fonction de ξ à $\frac{r}{h}$ fixe et en prenant S variable. On constate que les profils ne sont pas symétriques, que cette quantité est légèrement supérieur du côté du disque fixe, qu'elle diminue lorsque $\frac{r}{h}$ augmente et que tous les profils admettent un creux central et un maximum accusé en dehors de l'axe central, relatif certainement à la zone de production (du jet). On remarque également que la dissipation adimensionalisée augmente avec S à $\frac{r}{h}$ constant.

Notons enfin que la comparaison de ces profils avec des résultats expérimentaux n'est pas possible car ces derniers ne sont pas disponibles.

V.3.- CONCLUSION

Les résultats présentés dans les paragraphes V.2.1 à V.2.5 permettent à la fois de souligner un certain nombre de faits et d'essayer d'améliorer le modèle classique en vue d'une bonne prise en compte des effets de la rotation sur la turbulence.

Tout d'abord, on constate que dès que la composante tangentielle moyenne \mathbf{V} ou fluctuante \mathbf{v} apparaît, un certain désaccord se manifeste entre calcul et expérience. Ceci n'est pas étonnant car on s'attendait un peu à ce que le modèle classique ne représente pas correctement les effets de la rotation.

Le modèle fournit un élargissement plus faible que l'expérience, mais il prédit une origine virtuelle dont la localisation nous semble plus réaliste (voir V.2.2.3.3).

Le calcul prédit également une croissance plus élevée de l'énergie cinétique turbulente.

Comme nous l'avons signalé au paragraphe V.1, il importe de tenter d'améliorer le modèle utilisé. B.E. LAUNDER et A. MORSE /49/, RODI W. /48/ affirment que certains défauts de ce modèle ont principalement pour origine l'équation de transport pour ϵ .

RODI W. /48/ suggère de modifier le modèle $k - \epsilon$ classique en multipliant le coefficient $C_{\epsilon 1}$ par une fonction dite de RICHARDSON ayant la forme :

$$R_i = (1. + C_{\epsilon 3} \cdot R_f) \quad \text{V.3.1}$$

où R_f est le nombre de flux de RICHARDSON ("flux Richardson number") défini par :

$$R_f = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G_{v^2} + G_{w^2}}{P + G} \quad \text{V.3.2}$$

$G_{\frac{v^2}{v^2+w^2}}$ est la production/destruction des fluctuations $\overline{v^2}$ et $\overline{w^2}$ due à une rotation ou aux forces extérieures. $P + G$ est la production

totale (cisaillement + $F_{ext.}$) de l'énergie cinétique turbulente k .

Le modèle $k-\epsilon$ qu'il faudrait tester ultérieurement est le suivant /48/ :

$$U \frac{\partial k}{\partial r} + W \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial z} \right) + P + G - \epsilon \quad \text{V.3.3}$$

$$U \frac{\partial \epsilon}{\partial r} + W \frac{\partial \epsilon}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \right) + C_{\epsilon 1} \left(1 + C_{\epsilon 3} R_f \right) \frac{\epsilon}{k} (P+G) - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad \text{V.3.4}$$

avec $\sigma_k = 1$, $\sigma_\epsilon = 1.3$

$$C_{\epsilon 1} = 1.44 \quad , \quad C_{\epsilon 3} \in [0. , 0.9]$$

$$\nu_t = C_\mu \cdot \frac{k^2}{\epsilon}$$

$$C_\mu = 0.09 - 0.04 f$$

$$C_{\epsilon 2} = 1.92 - 0.067 f$$

et

$$f = \left| \frac{\delta^*}{U_m} \left\{ \frac{\partial U_c}{\partial r} - \left| \frac{\partial U_c}{\partial r} \right| \right\} \right|^{0.2}$$

où l'indice **c** signifie ici "central".

Un autre reproche que l'on peut faire au modèle classique est le fait qu'il utilise l'hypothèse d'une mono-échelle. K. HANJALIC et al /54/, LAUNDER B.E. et SCHIESTEL /55/, /56/ et SCHIESTEL /57/ ont introduit un modèle multi-échelle destiné à décrire les écoulements turbulents pour lesquels l'hypothèse d'une échelle unique n'est plus acceptable. L'idée principale qui se dégage de ces travaux est la mise en oeuvre de méthodes de calcul à équations de transport tenant compte de la nature spectrale de la turbulence et conservant l'efficacité des méthodes de résolutions dans l'espace physique.

Pour des études à venir, on pourrait utiliser le modèle multi-échelle s'inspirant des travaux des chercheurs cités plus haut. Ce modèle devrait avoir la forme suivante :

$$\frac{Dk_P}{Dt} = \frac{\partial}{\partial Z} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_{k_P}} \right) \frac{\partial k_P}{\partial Z} \right) + P - \epsilon_P \quad \text{v.3.5}$$

$$\frac{Dk_T}{Dt} = \frac{\partial}{\partial Z} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_{k_T}} \right) \frac{\partial k_T}{\partial Z} \right) + \epsilon_P - \epsilon \quad \text{v.3.6}$$

$$\frac{D\epsilon_P}{Dt} = \frac{\partial}{\partial Z} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_{\epsilon_P}} \right) \frac{\partial \epsilon_P}{\partial Z} \right) + c_{P1} \cdot P \cdot \frac{\epsilon_P}{k_P} - c_{P2} \frac{\epsilon_P^2}{k_P} \quad \text{v.3.7}$$

$$\frac{D\epsilon_T}{Dt} = \frac{\partial}{\partial Z} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_{\epsilon_T}} \right) \frac{\partial \epsilon_T}{\partial Z} \right) + c_{T1} \frac{\epsilon_P \cdot \epsilon_T}{k} - c_{T2} \frac{\epsilon_T^2}{k_T} \quad \text{v.3.8}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_T$$

V.3.9

où $\nu_t = C_\mu k \frac{k_P}{k_T}$ et P est le taux de production de k par cisaillement.

Le choix des coefficients doit être dégagé de quelques expériences numériques préliminaires. HANJALIC et al. ont choisi ces coefficients comme des fonctions des rapports $\frac{k_P}{k_T}$ et $\frac{\varepsilon_P}{\varepsilon_T}$. Ils proposent :

$$C_{T1} = 1.08 \frac{\varepsilon_P}{\varepsilon_T}$$

$$C_{T2} = 1.15$$

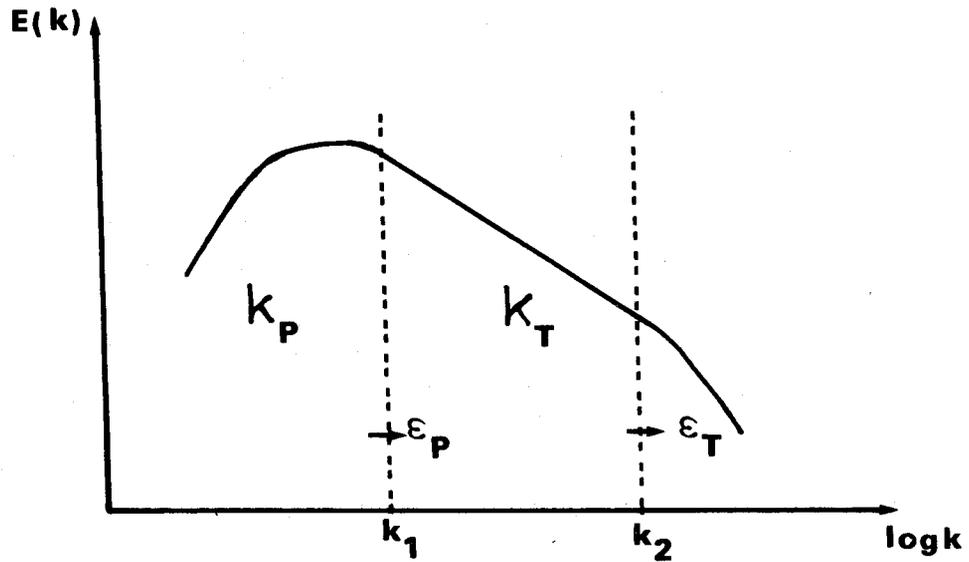
$$C_{P2} = 1.8 - 0.3 \frac{\frac{k_P}{k_T} - 1}{\frac{k_P}{k_T} + 1}$$

Il reste à déterminer le coefficient C_{P1} du terme de production de l'équation pour ε_P . CLER A. /2/ suggère la valeur 1.085.

Dans ce schéma le spectre est caractérisé par trois flux d'énergie :

ε_P transfert de l'énergie hors de la zone de production délimité par le nombre d'onde k_1 , ε_T transfert d'énergie à travers la zone inertielle qui ne subit ni production ni dissipation et ε transfert d'énergie vers les tourbillons dissipateurs (assimilé à grand nombre de Reynolds de turbulence au taux de dissipation). Le schéma de principe ci-après illustre ce qui vient

d'être cité.



Enfin, pour terminer, il est intéressant d'essayer d'utiliser aussi le modèle à quatre équations de transport pour k , ϵ , \overline{uw} et \overline{vw} déjà cité au chapitre IV.

CONCLUSION

Dans le présent travail, nous nous sommes efforcés de calculer les jets tournants turbulents, à l'aide du modèle de turbulence à deux équations de transport pour l'énergie cinétique turbulente k et pour son taux de dissipation ϵ dans lequel les tensions de Reynolds sont décrites à l'aide d'une hypothèse du type gradient et dans lequel les effets des bas nombres de Reynolds n'ont pas été pris en compte.

Afin de favoriser l'effacement des effets des conditions aux limites à l'entrée, nous avons procédé en premier lieu au calcul de l'écoulement entre les deux disques à l'aide d'un modèle $k-\epsilon$ du type JONES et LAUNDER, dans lequel il a été tenu compte des effets de parois à l'aide de fonctions d'amortissement.

Pour le calcul du jet, nous avons appliqué l'approximation de couche limite, hypothèse qui nous a permis d'obtenir un système parabolique dont la résolution numérique a été entreprise à l'aide d'un programme de calcul que nous avons élaboré et qui est basé sur une méthode du type "volumes finis". Auparavant, nous avons développé un premier code utilisant la même technique et qui résout le système du type JONES et LAUNDER pour l'écoulement entre les deux disques.

Signalons que le code a permis d'explorer un intervalle proche du début du jet, là où des données expérimentales n'existent pas. Nous considérons que le calcul de cet intervalle est acceptable puisque la comparaison entre calcul et expérience faite en aval a donné satisfaction.

A la lumière des résultats obtenus, nous pouvons confirmer les constatations suivantes :

- Le profil de vitesse radiale atteint son état de similitude plus vite que le profil de la vitesse orthoradiale. Cet état dépend du nombre de rotation . En effet, on remarque que plus **S** augmente, plus cet état est atteint rapidement.
- Le calcul, tout comme l'expérience, a permis de montrer que les maxima de la vitesse radiale et de la vitesse orthoradiale varient au loin comme $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{r^2}$.
- Le taux de dispersion du jet varie linéairement en fonction de la distance radiale **r** . Le calcul prédit une origine virtuelle réduite comprise entre 50 et 60 (station de sortir du jet) quelle que soit la valeur de **S** , résultat qui semble acceptable physiquement.

Il est à souligner que la procédure numérique utilisée est très différente de celle de PATANKAR et SPALDING. L'utilisation d'une fonction de courant comme variable transversale et des points de glissement a été laissée de côté. Dans la nouvelle procédure mise en oeuvre, nous normalisons la variable transversale **z** à l'aide d'une fonction **L(r)** qui est prise au moins égale au double de l'épaisseur du jet.

Cette méthode a permis de donner d'excellents résultats pour des temps de calcul beaucoup plus courts (5 minutes pour MULTICS).

Le schéma utilisé est basé sur l'hypothèse d'unicité des échelles de références de la turbulence pour le temps et la vitesse. Or, on sait que de tels modèles sont en défaut dans de nombreuses situations pratiques. En particulier ils ne sont pas aptes à prédire correctement le taux de dispersion des jets et des sillages.

Il faut noter également que le schéma n'a pas permis de déceler l'influence du nombre de rotation sur les contraintes turbulentes, en particulier \overline{vw} , aux faibles valeurs du paramètre S comme le laisse prévoir l'expérience.

Le modèle étant du type viscosité turbulente, il n'est pas apte alors à renseigner sur l'isotropie ou non du champ turbulent.

Malgré ces défauts du modèle $k-\epsilon$ classique, il n'est pas question de condamner ce modèle qui a fait preuves dans de nombreux cas d'écoulements.

Enfin, différentes directions sont suggérées pour les études à venir :

- L'utilisation d'un modèle $k-\epsilon$ modifié incluant les effets de rotation.
- L'utilisation d'un modèle multi-échelle simplifié, puisant ses fondements dans l'espace spectral et pouvant aider à la compréhension des problèmes de turbulence en rotation. Ce modèle devrait aussi résoudre le problème d'élargissement des jets et prédire correctement le non alignement des tensions de Reynolds sur le gradient de vitesse moyenne.
- L'utilisation d'un modèle à quatre équations de transport pour k , ϵ , \overline{uw} et \overline{vw} .

ANNEXE 1

EQUATIONS DE TRANSPORT DES CONTRAINTES DE REYNOLDS
EN COORDONNEES CARTESIENNES

L'expression des tensions de Reynolds est $-\rho \overline{u_i u_j}$.

Si on adopte les hypothèses suivantes :

- fluide newtonien à propriétés physiques constantes.
- écoulement tridimensionnel.
- forces extérieures négligeables.

Les équations de continuité et de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{A 1.1}$$

$$\rho \frac{D \tilde{u}_i}{Dt} = - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j^2} \quad \text{A 1.2}$$

En passant aux grandeurs moyennes et fluctuantes, on obtient :

$$\frac{\partial (U_i + u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad \text{A 1.3}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (U_i + u_i) + (U_k + u_k) \frac{\partial}{\partial x_k} (U_i + u_i) \\ = - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial (P + p)}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 (U_i + u_i)}{\partial x_k^2} \quad \text{A 1.4} \end{aligned}$$

En prenant la moyenne statistique, on obtient :

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{A 1.5}$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u_i u_k}}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2} \quad \text{A 1.6}$$

Par soustraction entre A 1.4 et A 1.6, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i u_k - \overline{u_i u_k}) \\ = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \quad \text{A 1.7} \end{aligned}$$

On obtiendrait de même pour u_j :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j}{\partial t} + U_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_j u_k - \overline{u_j u_k}) \\ = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k^2} \quad \text{A 1.8} \end{aligned}$$

Multipliant A 1.7 (respectivement A 1.8) par u_j (respectivement u_i),
faisant la somme et prenant la moyenne, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} (\overline{u_i u_j}) + u_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_j}) \\
&= - \left[\overline{u_j u_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right] \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_j u_k}) \\
&\quad - \frac{1}{\rho} \left[\overline{u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} \right] \\
&\quad + \nu \left[\overline{u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}} + \overline{u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k^2}} \right]
\end{aligned}$$

A 1.9

En tenant compte des relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\overline{u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}} + \overline{u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k^2}} &= \nabla^2 \overline{u_i u_j} - 2 \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} \\
-\frac{1}{\rho} \left[\overline{u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} \right] &= - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{\frac{p}{\rho} (u_j \delta_{ik} + u_i \delta_{jk})} \right] \\
&\quad + \overline{\frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}
\end{aligned}$$

L'équation A 1.9 s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} (\overline{u_i u_j}) + u_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_j}) \\
 = - \left[\overline{u_j u_k \frac{\partial u}{\partial x_k}} + \overline{u_i u_k \frac{\partial u}{\partial x_k}} \right] \\
 + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \\
 - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{u_i u_j u_k} - \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \right. \\
 \left. + \frac{p}{\rho} (u_i \delta_{jk} + u_j \delta_{ik}) \right]
 \end{aligned}$$

C'est l'équation qui gouverne les tensions de Reynolds.

ANNEXE 2

EQUATIONS DE TRANSPORT DES CONTRAINTES DE REYNOLDS
EN COORDONNEES CYLINDRIQUES

Nous écrirons ces équations pour un écoulement tridimensionnel axisymétrique d'un fluide incompressible à viscosité constante. Nous supposons que les forces extérieures sont négligeables.

A 2.1.- EQUATION DE TRANSPORT DE LA TENSION $\overline{u^2}$

Partant de l'équation de quantité de mouvement projetée suivant \vec{e}_r :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} - \frac{\tilde{v}^2}{r} \right) \\ = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} - \frac{\tilde{u}}{r^2} \right) \end{aligned}$$

On obtient, en passant aux grandeurs moyennes et fluctuants, en multipliant l'équation résultante par u et en prenant la moyenne :

$$\begin{aligned} \rho \left(\overline{u \frac{\partial u}{\partial t}} + \overline{Uu \frac{\partial u}{\partial r}} + \overline{Wu \frac{\partial u}{\partial z}} - \overline{uv} \frac{v}{r} + \overline{u^2} \frac{\partial u}{\partial r} + \overline{uw} \frac{\partial u}{\partial z} \right. \\ \left. - \overline{uv} \frac{v}{r} + \overline{u^2} \frac{\partial u}{\partial r} + \overline{uw} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\overline{uv^2}}{r} \right) \end{aligned}$$

$$= -\overline{u \frac{\partial p}{\partial r}} + \mu \left(\overline{u \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}} + \frac{1}{r} \overline{u \frac{\partial u}{\partial r}} + \overline{u \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} - \overline{\frac{u^2}{r^2}} \right)$$

ou

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{1}{2} \overline{\frac{\partial u^2}{\partial t}} + \overline{u \frac{\partial u^2}{\partial r}} + \overline{w \frac{\partial u^2}{\partial z}} - \overline{uv} \frac{v}{r} \right) \\ &= -\rho \left(\overline{u^2 \frac{\partial u}{\partial r}} + \overline{uw} \frac{\partial u}{\partial z} - \overline{uv} \frac{v}{r} \right) \\ &= -\rho \left(\frac{1}{2} \left(\overline{\frac{\partial u^3}{\partial r}} - \overline{u^2 \frac{\partial u}{\partial r}} \right) + \frac{1}{2} \left(\overline{\frac{\partial u^2 v}{\partial z}} - \overline{u^2 \frac{\partial w}{\partial z}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \overline{\frac{uv^2}{r}} \right) \\ &= -\overline{u \frac{\partial p}{\partial r}} \\ &+ \mu \left(\frac{1}{2} \overline{\frac{\partial^2 u^2}{\partial r^2}} - \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{r} \overline{\frac{\partial u^2}{\partial r}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial^2 u^2}{\partial z^2}} - \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2} - \overline{\frac{u^2}{r}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rho \left(\frac{\partial \overline{U^2}}{\partial t} + U \frac{\partial \overline{U^2}}{\partial x} + W \frac{\partial \overline{U^2}}{\partial z} - 2 \overline{UV} \cdot \frac{V}{l} \right) \\
&= -2\rho \left[\overline{U^2} \frac{\partial U}{\partial x} + \overline{UW} \frac{\partial U}{\partial z} - \overline{UV} \frac{V}{l} \right] \\
&- \rho \left[\frac{\partial \overline{U^3}}{\partial x} - \overline{U^2} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \overline{U^2 W}}{\partial z} - \overline{U^2} \frac{\partial W}{\partial z} - 2 \frac{\overline{UV^2}}{l} \right] \\
&- 2 \overline{U} \frac{\partial P}{\partial x} \\
&+ \mu \left[\frac{\partial^2 \overline{U^2}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \overline{U^2}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \overline{U^2}}{\partial z^2} \right. \\
&\quad \left. - 2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 - 2 \frac{\overline{U^2}}{l} \right]
\end{aligned}$$

$$\text{Or } - \overline{U^2} \frac{\partial U}{\partial x} - \overline{U^2} \frac{\partial W}{\partial z} = + \frac{\overline{U^3}}{l} \quad (\text{continuité})$$

d'où l'équation de transport pour $\overline{U^2}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \overline{U^2}}{\partial t} + U \frac{\partial \overline{U^2}}{\partial x} + W \frac{\partial \overline{U^2}}{\partial z} - 2 \overline{UV} \frac{V}{l} \\
&= -2 \left[\overline{U^2} \frac{\partial U}{\partial x} + \overline{UW} \frac{\partial U}{\partial z} - \overline{UV} \cdot \frac{V}{l} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{u^3}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u^2 w}) - 2 \frac{\overline{u v^2}}{r} \right] \\
& - \frac{2}{\rho} \cdot \overline{u \frac{\partial p}{\partial r}} \\
& + \nu \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \overline{u^2}}{\partial z^2} \right. \\
& \quad \left. - 2 \left[\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2} + \frac{\overline{u^2}}{r} \right] \right]
\end{aligned}$$

A 2.2.- EQUATION DE TRANSPORT POUR $\overline{v^2}$

On part de l'équation de quantité de mouvement projetée suivant \vec{e}_θ :

$$\rho \frac{D\tilde{v}}{Dt} = \mu \left[\Delta \tilde{v} - \frac{\tilde{v}}{r^2} \right]$$

On pose : $\tilde{u} = U + u$

$$\tilde{v} = V + v$$

$$\tilde{w} = W + w$$

$$\tilde{p} = P + p$$

On obtient l'équation de quantité de mouvement moyenne, qu'on multiplie par \mathbf{V} et après avoir pris la moyenne de l'équation résultante, il vient :

$$\begin{aligned}
& \rho \left(\overline{v \frac{\partial v}{\partial t}} + U \overline{v \frac{\partial v}{\partial x}} + W \overline{v \frac{\partial v}{\partial z}} + \overline{uv} \frac{V}{l} \right) \\
&= -\rho \left[\overline{uv} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z} + \overline{v^3} \frac{U}{l} \right] \\
&\quad - \rho \left[\overline{uv \frac{\partial v}{\partial x}} + \overline{vw \frac{\partial v}{\partial z}} + \frac{\overline{uv^2}}{l} \right] \\
&\quad + \mu \left[\overline{v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} + \frac{v}{l} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \overline{v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}} - \frac{\overline{v^2}}{l^2} \right]
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
& \rho \left(\frac{\partial \overline{v^2}}{\partial t} + U \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial x} + W \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial z} + 2\overline{uv} \frac{V}{l} \right) \\
&\quad - 2\rho \left[\overline{uv} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z} + \overline{v^3} \frac{U}{l} \right] \\
&\quad - \rho \left[\frac{\partial \overline{uv^2}}{\partial x} - \overline{v^2} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \overline{wv^2}}{\partial z} - \overline{v^2} \frac{\partial W}{\partial z} + 2\frac{\overline{uv^2}}{l} \right] \\
&\quad + \mu \left[\frac{\partial^2 \overline{v^2}}{\partial x^2} + \frac{1}{l} \cdot \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \overline{v^2}}{\partial z^2} \right. \\
&\quad \quad \left. - 2 \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 - 2 \frac{\overline{v^2}}{l^2} \right]
\end{aligned}$$

or
$$-\overline{v^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \overline{v^2} \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\overline{uv^2}}{2} \quad (\text{continuité})$$

Soit l'équation de transport pour $\overline{v^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial t} + U \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial x} + W \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial z} + 2 \overline{uv} \frac{v}{2} \\ = -2 \left[\overline{uv} \frac{\partial v}{\partial x} + \overline{vw} \frac{\partial v}{\partial z} + \overline{v^2} \frac{U}{2} \right] \\ - \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (2 \overline{uv^2}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{wv^2}) + 2 \frac{\overline{uv^2}}{2} \right] \\ + \nu \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (2 \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial x}) + \frac{\partial^2 \overline{v^2}}{\partial z^2} \right. \\ \left. - 2 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \frac{v^2}{2} \right] \right] \end{aligned}$$

A 2.3.- EQUATION DE TRANSPORT POUR $\overline{W^2}$

En procédant de la même façon que pour $\overline{U^2}$ et $\overline{V^2}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\rho \left[\frac{\partial \overline{w^2}}{\partial t} + U \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial r} + W \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial z} \right] &= -2\rho \left[\overline{uw} \frac{\partial W}{\partial r} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} \right] \\
&- \rho \left[\frac{\partial \overline{uw^2}}{\partial r} - \overline{w^2} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial \overline{w^3}}{\partial z} - \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} \right] \\
&- 2 \overline{w \frac{\partial p}{\partial z}} \\
&+ \mu \left[\frac{\partial^2 \overline{w^2}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \overline{w^2}}{\partial z^2} \right. \\
&\quad \left. - 2 \left[\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2} \right] \right]
\end{aligned}$$

En tenant compte des relations suivantes :

$$-\overline{w^2} \frac{\partial U}{\partial r} - \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\overline{uw^2}}{r} \quad (\text{continuité})$$

$$\frac{\partial^2 \overline{w^2}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \overline{w^2})$$

L'équation ci-dessus s'écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{w^2}}{\partial t} + U \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial r} + W \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial z} &= -2 \left(\overline{uw} \frac{\partial w}{\partial r} + \overline{w^2} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
&- \left(\frac{\partial \overline{uw^2}}{\partial r} + \frac{\partial \overline{w^3}}{\partial z} + \frac{\overline{uw^2}}{r} \right) \\
&- \frac{2}{\rho} \overline{w} \frac{\partial p}{\partial z} \\
&+ \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \overline{w^2}}{\partial z} \right) \right. \\
&\quad \left. - 2 \left(\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

A 2.4.- EQUATION DE TRANSPORT POUR \overline{uv}

On considère l'équation :

$$\frac{D\tilde{u}}{Dt} - \frac{\tilde{v}^2}{r} = \nu \left[\Delta \tilde{u} - \frac{\tilde{u}}{r^2} \right]$$

En adoptant toujours la décomposition :

$$\tilde{u} = U + u$$

$$\tilde{v} = V + v$$

$$\tilde{w} = W + w$$

$$\tilde{p} = P + p ,$$

en multipliant par V et en prenant la moyenne, on obtient :

$$\begin{aligned} \overline{v \frac{\partial u}{\partial t}} + \overline{Uv \frac{\partial u}{\partial x}} + \overline{Wv \frac{\partial u}{\partial z}} + \overline{uv \frac{\partial U}{\partial x}} + \overline{vw \frac{\partial U}{\partial z}} + \overline{uv \frac{\partial u}{\partial x}} + \overline{vw \frac{\partial u}{\partial z}} \\ - 2 \frac{\overline{v^2} V}{\lambda} - \frac{\overline{v^3}}{\lambda} \\ = -v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right) \\ - \nu \left[\overline{v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{v}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial x} + \overline{v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} - \frac{\overline{uv}}{\lambda} \right] \end{aligned}$$

A 2.4.1

On considère de même l'équation

$$\frac{D\tilde{v}}{Dt} + \frac{\tilde{u}\tilde{v}}{\lambda} = \nu \left[\Delta\tilde{v} - \frac{\tilde{v}}{\lambda^2} \right]$$

En adoptant la même décomposition que ci-dessus, en multipliant par U et en prenant la moyenne, il vient :

$$\begin{aligned}
& \overline{u \frac{\partial v}{\partial t}} + U \overline{u \frac{\partial v}{\partial r}} + W \overline{u \frac{\partial v}{\partial z}} + \overline{uu} \frac{\partial v}{\partial r} + \overline{uw} \frac{\partial v}{\partial z} \\
& + \overline{u^2} \frac{\partial v}{\partial r} + \overline{uw} \frac{\partial v}{\partial z} + \overline{uv} \frac{U}{r} \\
& + \overline{u^2} \frac{V}{r} + \frac{\overline{u^2 v}}{r} \\
& = \nu \left(\overline{u \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}} + \frac{U}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \overline{u \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}} - \frac{\overline{uv}}{r^2} \right)
\end{aligned}$$

A 2.4.2

En faisant la somme des 2 équations A 2.4.1 et A 2.4.2, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \overline{uv}}{\partial t} + U \frac{\partial \overline{uv}}{\partial r} + W \frac{\partial \overline{uv}}{\partial z} + (\overline{u^2} - \overline{v^2}) \frac{V}{r} \\
& = - \left[\overline{vw} \frac{\partial U}{\partial z} + \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial r} - \overline{v^2} \frac{V}{r} + \overline{uw} \frac{\partial V}{\partial z} + \overline{u^2} \frac{\partial V}{\partial r} + \overline{uv} \frac{U}{r} \right] \\
& - \left[\frac{\partial \overline{uvw}}{\partial z} - \overline{uv} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial \overline{u^2 v}}{\partial r} - \overline{uv} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\overline{u^2 v}}{r} - \frac{\overline{v^3}}{r} \right] \\
& - \nu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\rho}{\rho} \right) \\
& + \nu \left[\frac{\partial^2 \overline{uv}}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial \overline{u}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \overline{v}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \overline{uv}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \overline{uv}}{\partial z^2} \right. \\
& \left. - 2 \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \overline{v}}{\partial z} - 2 \frac{\overline{uv}}{r^2} \right]
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\frac{D\overline{uv}}{Dt} + (\overline{u^2} - \overline{v^2})\frac{V}{2} = & - \left[\overline{vw}\frac{\partial U}{\partial z} + \overline{uv}\frac{\partial U}{\partial z} + \overline{uw}\frac{\partial V}{\partial z} \right. \\
& \left. + \overline{u^2}\frac{\partial V}{\partial z} + \overline{uv}\frac{U}{2} - \overline{v^2}\frac{V}{2} \right] \\
& - \left[\frac{\partial \overline{uvw}}{\partial z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (2\overline{uv^2}) + \frac{\overline{u^2v}}{2} - \frac{\overline{v^3}}{2} \right] \\
& - \overline{v}\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} \right) \\
& + \nu \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (2\frac{\partial \overline{uv}}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \overline{uv}}{\partial z} \right) \right. \\
& \left. - 2 \left[\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \overline{v}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \overline{v}}{\partial z} + \frac{\overline{uv}}{z^2} \right] \right]
\end{aligned}$$

A 2.5.- EQUATIONS DE TRANSPORT POUR \overline{uw}

En appliquant la même procédure que pour \overline{uv} , on a :

$$\begin{aligned}
\overline{w}\frac{\partial u}{\partial t} + \overline{Uw}\frac{\partial u}{\partial z} - \overline{Ww}\frac{\partial u}{\partial z} + \overline{uw}\frac{\partial U}{\partial z} + \overline{w^2}\frac{\partial U}{\partial z} \\
- 2\overline{vw}\frac{V}{2} + \overline{uw}\frac{\partial u}{\partial z} + \overline{w^2}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\overline{wv^2}}{2} \\
= -\overline{w}\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \nu \left[\overline{w}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{w}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \overline{w}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\overline{uw}}{z^2} \right]
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \overline{u \frac{\partial w}{\partial t}} + U \overline{u \frac{\partial w}{\partial z}} + W \overline{u \frac{\partial w}{\partial z}} + \overline{u^2 \frac{\partial w}{\partial z}} + \overline{uw} \frac{\partial W}{\partial z} \\
& \quad + \overline{u^2 \frac{\partial w}{\partial z}} - \overline{uw} \frac{\partial w}{\partial z} \\
& = - \overline{u \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} \right)} \\
& \quad + \nu \left[\overline{u \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}} + \frac{1}{2} \cdot \overline{u \frac{\partial w}{\partial z}} + \overline{u \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}} \right]
\end{aligned}$$

En faisant la somme, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \overline{\frac{\partial uw}{\partial t}} + U \overline{\frac{\partial uw}{\partial z}} + W \overline{\frac{\partial uw}{\partial z}} - \overline{vw} \frac{V}{z} \\
& = - \left[\overline{\frac{\partial uw}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z}} + \overline{\frac{\partial uw}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z}} + \overline{w^2 \frac{\partial u}{\partial z}} + \overline{u^2 \frac{\partial w}{\partial z}} - \overline{vw} \frac{V}{z} \right] \\
& \quad - \left[\overline{\frac{\partial uw^2}{\partial z}} - \overline{uw} \frac{\partial w}{\partial z} + \overline{\frac{\partial u^2 w}{\partial z}} - \overline{uw} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\overline{vw^2}}{z} \right] \\
& \quad - \left[\overline{w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} \right)} + \overline{u \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} \right)} \right] \\
& \quad + \left[\overline{\frac{\partial^2 uw}{\partial z^2}} + \frac{1}{2} \cdot \overline{\frac{\partial uw}{\partial z}} + \overline{\frac{\partial uw}{\partial z^2}} \right. \\
& \quad \left. - 2 \left[\overline{\frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial z}} + \overline{\frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial z}} - \frac{\overline{uw}}{z^2} \right] \right]
\end{aligned}$$

En tenant compte de la relation :

$$-\overline{UW} \frac{\partial W}{\partial z} - \overline{UW} \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{U^2 W}{z}$$

L'équation de transport pour \overline{UW} peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{UW}}{\partial t} + U \frac{\partial \overline{UW}}{\partial z} + W \frac{\partial \overline{UW}}{\partial z} - \overline{vW} \frac{U}{z} \\ = - \left[\overline{UW} \frac{\partial U}{\partial z} + \overline{UW} \frac{\partial W}{\partial z} + \overline{U^2} \frac{\partial W}{\partial z} + \overline{W^2} \frac{\partial U}{\partial z} - \overline{vW} \frac{U}{z} \right] \\ - \left[\frac{\partial}{\partial z} (\overline{UWw}) - \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\overline{zUWw}) - \frac{\overline{Wv^2}}{z} \right] \\ - \left[\overline{w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} \right)} + \overline{u \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} \right)} \right] \\ + \nu \left[\frac{1}{z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial \overline{UW}}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \overline{UW}}{\partial z} \right) \right. \\ \left. - 2 \left[\frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right] - \frac{\overline{UW}}{z^2} \right] \end{aligned}$$

A 2.6.- EQUATION DE TRANSPORT POUR \overline{VW}

Le même procédé que pour \overline{UV} ou \overline{UW} , nous permet d'avoir :

$$\begin{aligned} & \overline{w \frac{\partial v}{\partial t}} + \overline{U w \frac{\partial v}{\partial x}} + \overline{W w \frac{\partial v}{\partial z}} + \overline{uw \frac{\partial v}{\partial x}} + \overline{uw \frac{\partial v}{\partial x}} + \overline{w^2 \frac{\partial v}{\partial z}} \\ & + \overline{vw \frac{\partial v}{\partial x}} + \overline{uw \frac{\partial v}{\partial x}} + \overline{w^2 \frac{\partial v}{\partial z}} + \overline{\frac{uvw}{z}} \\ & = \nu \left(\overline{w \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} + \overline{\frac{w}{z} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}} + \overline{w \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}} - \overline{\frac{vw}{z^2}} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \overline{v \frac{\partial w}{\partial t}} + \overline{U v \frac{\partial w}{\partial x}} + \overline{W v \frac{\partial w}{\partial z}} + \overline{uv \frac{\partial w}{\partial x}} + \overline{vw \frac{\partial w}{\partial z}} + \overline{uv \frac{\partial w}{\partial x}} \\ & - \overline{vw \frac{\partial w}{\partial z}} \\ & = -\nu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \nu \left(\overline{v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}} + \overline{\frac{v}{z} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}} + \overline{v \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}} \right) \end{aligned}$$

La somme membre à membre de ces 2 équations nous permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \overline{vw}}{\partial t} + U \frac{\partial \overline{vw}}{\partial z} + W \frac{\partial \overline{vw}}{\partial z} + \overline{uw} \frac{V}{z} \\
 & = - \left(\overline{uw} \frac{\partial V}{\partial z} + \overline{w^2} \frac{\partial V}{\partial z} + \overline{vw} \frac{\partial W}{\partial z} + \overline{uv} \frac{\partial W}{\partial z} + \overline{vw} \frac{U}{z} \right) \\
 & \quad - \overline{v \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} \right)} \\
 & \quad - \left(\frac{\partial \overline{v \overline{vw}}}{\partial z} - \overline{vw} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial \overline{u \overline{vw}}}{\partial z} - \overline{vw} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \overline{v \overline{vw}}}{\partial z} \right) \\
 & \quad + \nu \left(\frac{\partial^2 \overline{vw}}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial \overline{vw}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \overline{vw}}{\partial z^2} \right. \\
 & \quad \left. - 2 \left[\frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right] - \frac{\overline{vw}}{z^2} \right)
 \end{aligned}$$

Comme $\overline{vw \cdot \frac{\partial w}{\partial z}} - \overline{vw} \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = -\frac{\overline{uvw}}{r}$, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \overline{vw}}{\partial t} + U \frac{\partial \overline{vw}}{\partial r} + W \frac{\partial \overline{vw}}{\partial z} + \overline{uw} \frac{V}{r} \\ & - \left[\overline{uw} \frac{\partial V}{\partial r} + \overline{w^2} \frac{\partial V}{\partial z} + \overline{uw} \frac{\partial W}{\partial z} \right. \\ & \quad \left. + \overline{uv} \frac{\partial W}{\partial r} + \overline{vw} \frac{U}{r} \right] \\ & - \left[\frac{\partial \overline{uvw}}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial r \overline{uvw}}{\partial r} + \frac{\overline{uvw}}{r} \right] \\ & - \overline{v \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} \right)} \\ & \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \overline{vw}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \overline{vw}}{\partial z} \right) - \frac{\overline{vw}}{r^2} \right. \\ & \quad \left. - 2 \left[\frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right] \right) \end{aligned}$$

A 2.7.- EQUATION DE TRANSPORT POUR k

L'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente k s'obtient en faisant la somme des trois équations de transport pour $\overline{U^2}$, $\overline{V^2}$ et $\overline{W^2}$.

On a :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{u^2 + v^2 + w^2}) + U \frac{\partial}{\partial r} (\overline{u^2 + v^2 + w^2}) + W \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u^2 + v^2 + w^2})$$

$$= -2 \left[\overline{u^2} \frac{\partial U}{\partial r} + \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\overline{uv}}{r} + \overline{uv} \frac{\partial V}{\partial r} + \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z} \right.$$

$$\left. + \overline{v^2} \frac{U}{r} + \overline{uw} \frac{\partial W}{\partial r} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} \right]$$

$$- \left[\frac{\partial}{\partial r} \overline{u(u^2 + v^2 + w^2)} + \frac{u}{r} \overline{(u^2 + v^2 + w^2)} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{w(u^2 + v^2 + w^2)} \right]$$

$$- 2 \left[\overline{u \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho} \right)} + \overline{w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} \right)} \right]$$

$$+ \nu \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} (\overline{u^2 + v^2 + w^2}) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\overline{u^2 + v^2 + w^2}) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\overline{u^2 + v^2 + w^2}) - 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right] \right]$$

$$- 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] - 2 \frac{\overline{u^2 + v^2}}{r^2} \right]$$

Or $\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2} = 2k$, d'où :

$$\begin{aligned} \frac{Dk}{Dt} = & - \left(\overline{u^2} \frac{\partial U}{\partial r} + \overline{uv} \frac{\partial V}{\partial r} + \overline{uw} \frac{\partial W}{\partial r} + \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} \right. \\ & \left. + \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} - \overline{uv} \frac{V}{r} + \overline{v^2} \frac{U}{r} \right) \\ & - \left(\frac{\partial \overline{uk}}{\partial r} + \frac{\overline{uk}}{r} + \frac{\partial \overline{wk}}{\partial z} \right) \\ & - \left(\overline{u \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{p}{\rho} \right)} + \overline{w \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{p}{\rho} \right)} \right) \\ & + \nu \left(\Delta k - \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right\} - \frac{\overline{u^2 + v^2}}{r^2} \right) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\frac{Dk}{Dt} &= \nu \Delta k - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{wk} + \overline{w \frac{p}{\rho}}) \\
&\quad - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r(\overline{uk} + \overline{u \frac{p}{\rho}})) \\
&\quad + \left[-\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\overline{v^2} U}{r} + \overline{uv} \frac{V}{r} \right] \\
&\quad - \nu \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\overline{u^2}}{r} + \frac{\overline{v^2}}{r} \right]
\end{aligned}$$

ANNEXE 3

I .- PROCEDURE (Ω, ψ, v)

Considérons l'équation III.2.1.1.6 du chapitre III

$$a_{\phi} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[r \cdot b_{\phi} \frac{\partial c_{\phi \cdot \phi}}{\partial z} \right] - \frac{\partial}{\partial r} \left[r b_{\phi} \frac{\partial c_{\phi \cdot \phi}}{\partial r} \right] + r \cdot d_{\phi} = 0$$

La figure III.1 présente les notations choisies pour nommer les points entourant le point central

Intégrons l'équation ci-dessus dans le domaine choisi. On a :

$$\begin{aligned} & \int_{r_s}^{r_n} \int_{z_w}^{z_e} a_{\phi} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] dz dr \\ & - \int_{r_s}^{r_n} \int_{z_w}^{z_e} \frac{\partial}{\partial z} \left[b_{\phi} \cdot r \frac{\partial c_{\phi \cdot \phi}}{\partial z} \right] dz dr \\ & - \int_{r_s}^{r_n} \int_{z_w}^{z_e} \frac{\partial}{\partial r} \left[b_{\phi} \cdot r \frac{\partial c_{\phi \cdot \phi}}{\partial r} \right] dz \cdot dr \\ & + \int_{r_s}^{r_n} \int_{z_w}^{z_e} r \cdot d_{\phi} dz dr = 0 \end{aligned}$$

Hypothèse 1 : On suppose que $\bar{r}^2 = r_p^2$

On a alors :

$$a_\phi \int_{r_s}^{r_n} \left[\phi_e \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_e - \phi_w \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_w \right] dr - \int_{z_w}^{z_e} \left[\phi_n \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_n - \phi_s \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_s \right] dz$$

termes de convection $\equiv I_{\text{conv}}$

$$- \int_{r_s}^{r_n} \left\{ (b_\phi \cdot r)_e \left[\frac{\partial}{\partial z} (c_\phi \cdot \phi) \right]_e - (b_\phi \cdot r)_w \left[\frac{\partial}{\partial z} (c_\phi \cdot \phi) \right]_w \right\} dr - \int_{z_w}^{z_e} \left\{ (b_\phi \cdot r)_n \left[\frac{\partial}{\partial r} (c_\phi \cdot \phi) \right]_n - (b_\phi \cdot r)_s \left[\frac{\partial}{\partial r} (c_\phi \cdot \phi) \right]_s \right\} dz$$

Terme de diffusion $\equiv I_{\text{diff}}$

$$+ \int_{r_s}^{r_n} \int_{z_w}^{z_e} r d_\phi dr dz = 0$$

termes de source $\equiv I_s$

Posons par exemple :
$$I_{ce} = a_{\phi, p} \int_{r_s}^{r_n} \phi_e \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_e dr$$

Hypothèse 2 : On suppose que ϕ est uniforme à l'intérieur de chaque rectangle.

D'où
$$I_{ce} = a_{\phi, p} \bar{\phi}_e (\psi_{ne} - \psi_{se})$$

Notons que la moyenne de ϕ est évaluée par la technique de la différence amont. En effet, on a :

$$w = + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} \qquad u = - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

Considérons l'intégrale

$$\int_{r_s}^{r_n} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) dr \approx (\psi_{ne} - \psi_{se})$$

On voit que si $\psi_{ne} - \psi_{se} > 0$, i.e. $(w)_e > 0$, la direction de l'écoulement est dirigée du point P vers le point E ($P \longrightarrow E$)
et par conséquent on a :

$$\bar{\phi}_e = \phi_P$$

Si $\psi_{ne} - \psi_{se} < 0$, i.e. $(w)_e < 0$, alors on a $P \longleftarrow E$
et $\bar{\phi}_e = \phi_E$.

Donc I_{ce} peut s'écrire sous la forme mathématique suivante :

$$I_{ce} = a_{\phi, p} \left\{ \phi_P \frac{(\psi_{ne} - \psi_{se}) + |\psi_{ne} - \psi_{se}|}{2} + \phi_E \frac{(\psi_{ne} - \psi_{se}) - |\psi_{ne} - \psi_{se}|}{2} \right\}$$

De même, on a $I_{cw} = a_{\emptyset, P} \bar{\emptyset}_W (\psi_{nw} - \psi_{sw})$

ou

$$I_{cw} = a_{\emptyset, P} \left\{ \emptyset_P \cdot \frac{(\psi_{nw} - \psi_{sw}) - |\psi_{nw} - \psi_{sw}|}{2} + \emptyset_W \cdot \frac{(\psi_{nw} - \psi_{sw}) + |\psi_{nw} - \psi_{sw}|}{2} \right\}$$

$$-I_{cn} \approx a_{\emptyset, P} \bar{\emptyset}_N (\psi_{ne} - \psi_{nw})$$

ou

$$I_{cn} \approx a_{\emptyset, P} \left\{ \emptyset_P \cdot \frac{(\psi_{ne} - \psi_{nw}) - |\psi_{ne} - \psi_{nw}|}{2} + \emptyset_N \cdot \frac{(\psi_{ne} - \psi_{nw}) + |\psi_{ne} - \psi_{nw}|}{2} \right\}$$

$$-I_{cs} \approx a_{\emptyset, P} \bar{\emptyset}_S (\psi_{se} - \psi_{sw})$$

ou

$$I_{cs} = a_{\emptyset, P} \left\{ \emptyset_P \cdot \frac{(\psi_{se} - \psi_{sw}) + |\psi_{se} - \psi_{sw}|}{2} + \emptyset_S \cdot \frac{(\psi_{se} - \psi_{sw}) - |\psi_{se} - \psi_{sw}|}{2} \right\}$$

D'où, on a :

$$I_{conv} = I_{ce} - I_{cw} - I_{cn} + I_{cs}$$

Hypothèse 3 : La valeur de la fonction de courant aux coins du domaine est égale à la moyenne des 4 valeurs aux noeuds voisins.

Ainsi, on a :

$$\psi_{ne} = \frac{1}{4} (\psi_P + \psi_N + \psi_E + \psi_{NE}),$$

$$\psi_{se} = \frac{1}{4} (\psi_P + \psi_S + \psi_E + \psi_{SE}),$$

$$\psi_{nw} = \frac{1}{4} (\psi_P + \psi_W + \psi_N + \psi_{NW}),$$

et

$$\psi_{sw} = \frac{1}{4} (\psi_P + \psi_W + \psi_S + \psi_{SW})$$

D'où

$$I_{ce} = \frac{a_{\emptyset,P}}{2} \left\{ (\emptyset_P - \emptyset_E) \left[(\psi_{se} - \psi_{ne}) + |\psi_{ne} - \psi_{se}| \right] + 2\emptyset_P (\psi_{ne} - \psi_{se}) \right\},$$

$$I_{cw} = \frac{a_{\emptyset,P}}{2} \left\{ -(\emptyset_P - \emptyset_W) \left[(\psi_{nw} - \psi_{sw}) + |\psi_{nw} - \psi_{sw}| \right] + 2\emptyset_P (\psi_{nw} - \psi_{sw}) \right\},$$

$$I_{cn} = \frac{a_{\emptyset, P}}{2} \left\{ -(\emptyset_P - \emptyset_N) \left[(\psi_{ne} - \psi_{nw}) + |\psi_{ne} - \psi_{nw}| \right] + 2\emptyset_P (\psi_{ne} - \psi_{nw}) \right\},$$

et

$$I_{cs} = \frac{a_{\emptyset, P}}{2} \left\{ (\emptyset_P - \emptyset_S) \left[(\psi_{sw} - \psi_{se}) + |\psi_{sw} - \psi_{se}| \right] + 2\emptyset_P (\psi_{se} - \psi_{sw}) \right\}$$

En posant :

$$A_E = \frac{a_{\emptyset, P}}{2} \left[(\psi_{se} - \psi_{ne}) + |\psi_{se} - \psi_{ne}| \right],$$

$$A_W = \frac{a_{\emptyset, P}}{2} \left[(\psi_{nw} - \psi_{sw}) + |\psi_{nw} - \psi_{sw}| \right],$$

$$A_N = \frac{a_{\emptyset, P}}{2} \left[(\psi_{ne} - \psi_{nw}) + |\psi_{ne} - \psi_{nw}| \right],$$

et

$$A_S = \frac{a_{\emptyset, P}}{2} \left[(\psi_{sw} - \psi_{se}) + |\psi_{sw} - \psi_{se}| \right]$$

On peut écrire :

$$I_{ce} = +A_E (\varphi_P - \varphi_E) + a_{\varphi,P} \varphi_P (\psi_{ne} - \psi_{se}),$$

$$I_{cw} = -A_W (\varphi_P - \varphi_W) + a_{\varphi,P} \varphi_P (\psi_{nw} - \psi_{sw}),$$

$$I_{cn} = -A_N (\varphi_P - \varphi_N) + a_{\varphi,P} \varphi_P (\psi_{ne} - \psi_{nw}),$$

et

$$I_{cs} = +A_S (\varphi_P - \varphi_S) + a_{\varphi,P} \varphi_P (\psi_{se} - \psi_{sw}).$$

Soit finalement :

$$I_{conv} = A_E (\varphi_P - \varphi_E) + A_W (\varphi_P - \varphi_W) \\ + A_N (\varphi_P - \varphi_N) + A_S (\varphi_P - \varphi_S)$$

On notera que les coefficients A_E , A_W , A_N et A_S ne peuvent jamais être négatifs (ils sont toujours ≥ 0).

Termes de diffusion :

On a : $I_{diff} = I_{de} - I_{dw} + I_{dn} - I_{ds}$

avec

$$-I_{de} = \int_{r_s}^{r_n} (b_{\varphi,r})_e \left[\frac{\partial}{\partial z} (c_{\varphi} \varphi) \right]_e dr$$

Hypothèse 4 : $r_e = \frac{r_P + r_E}{2}$

$$b_{\phi,e} = \frac{b_{\phi,P} + b_{\phi,E}}{2}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} (c_{\phi} \cdot \phi) \right|_e = \frac{c_{\phi,E} \cdot \phi_E - c_{\phi,P} \cdot \phi_P}{z_E - z_P}$$

d'où

$$I_{de} = +(r_E + r_P)/2 \cdot (b_{\phi,E} + b_{\phi,P})/2$$

$$-I_{dw} = \int_{r_s}^{r_n} (b_{\phi} \cdot r)_w \cdot \left[\frac{\partial}{\partial z} (c_{\phi} \cdot \phi) \right]_w dr \cdot \frac{c_{\phi,E} \cdot \phi_E - c_{\phi,P} \cdot \phi_P}{z_E - z_P} \cdot (r_N - r_S)/2$$

Le même traitement et les mêmes hypothèses que ci-dessus nous

permettent de trouver que :

$$I_{dw} = -(r_W + r_P)/2 \cdot (b_{\phi,W} + b_{\phi,P})/2 \cdot \frac{c_{\phi,W} \cdot \phi_W - c_{\phi,P} \cdot \phi_P}{z_P - z_W} \cdot (r_N - r_S)/2$$

De la même façon, on a :

$$-I_{dn} = \int_{z_w}^{z_e} (b_{\phi} \cdot r)_n \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} (c_{\phi} \cdot \phi) \right]_n dz$$

ou

$$I_{dn} \approx +(\Gamma_N + \Gamma_P)/2 \cdot \frac{c_{\phi,N} \phi_N - c_{\phi,P} \phi_P (z_E - z_W)/2}{\Gamma_N - \Gamma_P} \cdot (b_{\phi,N} + b_{\phi,P})/2$$

$$-I_{ds} = \int_{z_W}^{z_E} (b_{\phi,S} \Gamma_S) \left[\frac{\partial}{\partial \Gamma} (c_{\phi,S} \phi_S) \right] dz$$

ou

$$I_{ds} \approx -(\Gamma_S + \Gamma_P)/2 \cdot \frac{c_{\phi,S} \phi_S - c_{\phi,P} \phi_P (z_E - z_W)/2}{\Gamma_P - \Gamma_S} \cdot (b_{\phi,S} + b_{\phi,P})/2$$

En posant

$$B_E = (b_{\phi,E} + b_{\phi,P})/8 \cdot \frac{\Gamma_N - \Gamma_S}{z_E - z_P} (\Gamma_E + \Gamma_P),$$

$$B_W = (b_{\phi,W} + b_{\phi,P})/8 \cdot \frac{\Gamma_N - \Gamma_S}{z_P - z_W} (\Gamma_W + \Gamma_P),$$

$$B_N = (b_{\phi,N} + b_{\phi,P})/8 \cdot \frac{z_E - z_W}{\Gamma_N - \Gamma_P} (\Gamma_N + \Gamma_P),$$

et

$$B_S = (b_{\phi,S} + b_{\phi,P})/8 \cdot \frac{z_E - z_W}{\Gamma_P - \Gamma_S} (\Gamma_S + \Gamma_P)$$

On peut écrire :

$$I_{de} = +B_E \cdot (c_{\phi,E} \phi_E - c_{\phi,P} \phi_P),$$

$$I_{dw} = -B_W \cdot (c_{\phi,W} \phi_W - c_{\phi,P} \phi_P),$$

$$I_{dn} = +B_N \cdot (c_{\emptyset, N} \cdot \emptyset_N - c_{\emptyset, P} \cdot \emptyset_P),$$

et

$$I_{ds} = -B_S \cdot (c_{\emptyset, S} \cdot \emptyset_S - c_{\emptyset, P} \cdot \emptyset_P)$$

Le terme de diffusion s'écrira finalement :

$$I_{diff} = B_E (c_{\emptyset, E} \cdot \emptyset_E - c_{\emptyset, P} \cdot \emptyset_P) + B_W (c_{\emptyset, W} \cdot \emptyset_W - c_{\emptyset, P} \cdot \emptyset_P) \\ + B_N (c_{\emptyset, N} \cdot \emptyset_N - c_{\emptyset, P} \cdot \emptyset_P) + B_S (c_{\emptyset, S} \cdot \emptyset_S - c_{\emptyset, P} \cdot \emptyset_P)$$

Terme source :

On a
$$I_S = \int_{r_s}^{r_n} \int_{z_w}^{z_e} r d_{\emptyset} dr dz$$

Comme d_{\emptyset} peut ne pas être constant, cette intégrale ne peut pas être calculée immédiatement. On est alors amené à faire l'hypothèse suivante :

Hypothèse 5 : On suppose que d_{\emptyset} est uniforme dans le domaine d'intégration et est égal à sa valeur en P .

Si nous supposons de plus que $\bar{r} = r_P$, on peut écrire :

$$I_S \approx r_P d_{\emptyset, P} \cdot (z_E - z_W) \cdot (r_N - r_S) / 4$$

On pose

$$V_P = r_P (z_E - z_W) \cdot (r_N - r_S) / 4$$

On a donc : $I_S = d_{\varnothing, P} \cdot V_P$

L'équation finale s'écrit :

$$\begin{aligned} & A_E(\varnothing_P - \varnothing_E) + A_W(\varnothing_P - \varnothing_W) + A_N(\varnothing_P - \varnothing_N) \\ & + A_S(\varnothing_P - \varnothing_S) - B_E(c_{\varnothing, E} \cdot \varnothing_E - c_{\varnothing, P} \cdot \varnothing_P) - B_W(c_{\varnothing, W} \cdot \varnothing_W - c_{\varnothing, P} \cdot \varnothing_P) \\ & - B_N(c_{\varnothing, N} \cdot \varnothing_N - c_{\varnothing, P} \cdot \varnothing_P) - B_S(c_{\varnothing, S} \cdot \varnothing_S - c_{\varnothing, P} \cdot \varnothing_P) + d_{\varnothing, P} V_P = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & \left(A_E + A_W + A_N + A_S + c_{\varnothing, P} (B_E + B_W + B_N + B_S) \right) \varnothing_P \\ & = (A_E + c_{\varnothing, E} B_E) \varnothing_E + (A_W + c_{\varnothing, W} B_W) \varnothing_W \\ & + (A_N + c_{\varnothing, N} B_N) \varnothing_N + (A_S + c_{\varnothing, S} B_S) \varnothing_S + D \varnothing \end{aligned}$$

Soit finalement :

$$C_P \varnothing_P = C_E \varnothing_E + C_W \varnothing_W + C_N \varnothing_N + C_S \varnothing_S + D \quad \text{I.1}$$

avec $C_E = (A_E + c_{\varnothing, E} B_E) / \Sigma$

$$C_W = (A_W + c_{\varnothing, W} B_W) / \Sigma$$

$$C_N = (A_N + c_{\emptyset, N} B_N) / \Sigma$$

I.2

$$C_S = (A_S + c_{\emptyset, S} B_S) / \Sigma$$

$$D = -d_{\emptyset, P} \cdot V_P / \Sigma$$

et

$$\Sigma = A_E + A_W + A_N + A_S + c_{\emptyset, P} (B_E + B_W + B_N + B_S) \quad \text{I.3}$$

En utilisant la 3ème hypothèse, les coefficients A_E , A_W , A_N et

A_S s'écrivent :

$$A_E = \frac{a_{\emptyset, P}}{8} \left\{ (\psi_S + \psi_{SE} - \psi_N - \psi_{NE}) + \left| \text{même } q^{te} \right| \right\},$$

$$A_W = \frac{a_{\emptyset, P}}{8} \left\{ (\psi_N + \psi_{NW} - \psi_S - \psi_{SW}) + \left| \text{-----} \right| \right\},$$

I.4

$$A_N = \frac{a_{\emptyset, P}}{8} \left\{ (\psi_E + \psi_{NE} - \psi_W - \psi_{NW}) + \left| \text{-----} \right| \right\},$$

et

$$A_S = \frac{a_{\emptyset, P}}{8} \left\{ (\psi_W + \psi_{SW} - \psi_E - \psi_{SE}) + \left| \text{-----} \right| \right\}$$

II.- PROGRAMMATION

Nous écrivons la formule (1) sous la forme :

$$\varnothing_P = \frac{\sum_j \{ [A'_j + c_{\varnothing,j} (b_{\varnothing,j} + b_{\varnothing,p}) B'_j] \varnothing_j \} - d_{\varnothing,p}}{\sum_j [A'_j + c_{\varnothing,p} (b_{\varnothing,p} + b_{\varnothing,j}) B'_j]} \quad \text{II.1}$$

avec

$$A'_j = A_j / V_P \quad \text{II.2}$$

$$B'_j = B_j / (b_{\varnothing,j} + b_{\varnothing,p}) V_P \quad \text{II.3}$$

c'est la formule II.1 avec II.2 et II.3 que nous avons programmées.

A 3.1.- CALCUL DES COEFFICIENTS A'_E , A'_W , A'_N et A'_S .

On pose

$$A_{\text{NUM}} = \sum_{j=E, \dots, S} [A'_j + c_{\varnothing,j} (b_{\varnothing,j} + b_{\varnothing,p}) B'_j] \varnothing_j - d_{\varnothing,p}$$

$$A_{\text{DEN}} = \sum_j [A'_j + c_{\varnothing,p} (b_{\varnothing,p} + b_{\varnothing,j}) B'_j]$$

D'après les relations I.4, on a :

$$A'_E = A_E / V_P$$

$$= 0.5 a_{\varnothing,p} \left[\text{abs}(AE1) - AE1 \right],$$

$$A'_W = A_W / V_P$$

$$= 0.5 a_{\varnothing,p} \left[\text{abs}(AW1) + AW1 \right],$$

$$A'_N = A_N / V_P$$

$$= 0.5 a_{\emptyset, P} \left[\text{abs}(AN1) - AN1 \right]$$

et

$$A'_S = A_S / V_P$$

$$= 0.5 a_{\emptyset, P} \left[\text{abs}(AS1) + AS1 \right]$$

avec

$$AE1 = \left[\psi(i, j+1) - \psi(i, j-1) + \psi(i+1, j+1) - \psi(i+1, j-1) \right] / 4 \cdot V_P,$$

$$AW1 = \left[\psi(i, j+1) - \psi(i, j-1) + \psi(i-1, j+1) - \psi(i-1, j-1) \right] / 4 \cdot V_P,$$

$$AN1 = \left[\psi(i-1, j) - \psi(i+1, j) + \psi(i-1, j+1) - \psi(i+1, j+1) \right] / 4 \cdot V_P,$$

et

$$AS1 = \left[\psi(i-1, j) - \psi(i+1, j) + \psi(i-1, j-1) - \psi(i+1, j-1) \right] / 4 \cdot V_P$$

A 3.2.- CALCUL DES COEFFICIENTS B'_j ($j = E, W, N, S$) POUR CHAQUE FONCTION \emptyset .

A 3.2.a.- Fonction Ω

$$B'_E = BE(i) = \frac{1}{(z_E - z_W)(z_E - z_P)}$$

$$B'_W = BW(i) = \frac{1}{(z_E - z_W)(z_P - z_W)}$$

$$B'_N = BN(j) = \frac{0.5}{r_N - r_S} \left(1 + \frac{r_N}{r_P} \right) / (r_N - r_P)$$

$$B'_S = BS(j) = \frac{0.5}{r_N - r_S} \left(1 + \frac{r_S}{r_P} \right) / (r_P - r_S)$$

et

$$BBE = (b_{\emptyset, E} + b_{\emptyset, P}) \cdot BE(i)$$

$$= 2 \cdot r_P^2 \cdot BE(i)$$

$$BBW = (b_{\emptyset, W} + b_{\emptyset, P}) \cdot BW(i)$$

$$= 2 \cdot r_P^2 \cdot BW(i)$$

$$BBN = (b_{\emptyset, N} + b_{\emptyset, P}) \cdot BN(j)$$

$$= (r_N^2 + r_P^2) \cdot BN(j)$$

$$BBS = (b_{\emptyset, S} + b_{\emptyset, P}) \cdot BS(j)$$

$$= (r_S^2 + r_P^2) \cdot BS(j)$$

comme $c_{\emptyset,p} = \frac{1}{Re}$, on a : $B_N = BN(j) = \frac{0.2}{1 + \dots}$

$$A_{NUM}(\Omega) = (AE' + \frac{1}{Re} BBE) \Omega(i, p) + (AW' + \frac{1}{Re} BBW) \Omega(i-1, j) + (AN' + \frac{1}{Re} BBN) \Omega(i, j+1) + (AS' + \frac{1}{Re} BBS) \Omega(i, j-1) + S_{\Omega}$$

$$A_{DEN}(\Omega) = AE' + AW' + AN' + AS' + \frac{1}{Re} (BBE + BBN + BBW + BBS)$$

A 3.2.b.- Fonction de courant Ψ

$$BBE = \frac{2}{\Gamma_p^2} BE(i),$$

$$BBW = \frac{2}{\Gamma_p^2} BW(i),$$

$$BBN = \frac{8}{(\Gamma_N + \Gamma_p)^2} BN(j),$$

$$BBS = \frac{8}{(\Gamma_s + \Gamma_p)^2} BS(j)$$

et

Comme $c_{\emptyset,j} = 1 \forall j$ et $a_{\emptyset,p} = 0$, on a :

$$A_{\text{NUM}}(\psi) = \text{BBE} \cdot \psi(i+1, j) + \text{BBW} \cdot \psi(i-1, j) \\ + \text{BBN} \cdot \psi(i, j+1) + \text{BBS} \cdot \psi(i, j-1) + S_{\psi}$$

$$A_{\text{DEN}}(\psi) = \text{BBE} + \text{BBW} + \text{BBN} + \text{BBS}$$

A 3.2.c. - Moment angulaire $\mathbf{T} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$

On a :

$$\text{BBE} = 2 \cdot \frac{\Gamma_{\text{p}}^2}{\text{Re}} \cdot \text{BE}(i),$$

$$\text{BBW} = 2 \cdot \frac{\Gamma_{\text{p}}^2}{\text{Re}} \cdot \text{BW}(i),$$

$$\text{BBN} = \frac{(\Gamma_{\text{N}}^2 + \Gamma_{\text{p}}^2)}{\text{Re}} \cdot \text{BN}(j),$$

et

$$\text{BBS} = \frac{(\Gamma_{\text{S}}^2 + \Gamma_{\text{p}}^2)}{\text{Re}} \cdot \text{BS}(j)$$

comme $C_{\emptyset} = \frac{1}{r(j)^2}$ et $a_{\emptyset, P} = 1$, on a :

$$\begin{aligned} A_{\text{NUM}}(T) = & (AE + \frac{1}{r^2(j)} \cdot BBE) \cdot T(i+1, j) \\ & + (AW + \frac{1}{r^2(j)} \cdot BBW) \cdot T(i-1, j) \\ & + (AN + \frac{1}{r^2(j+1)} \cdot BBN) \cdot T(i, j+1) \\ & + (AS + \frac{1}{r^2(j+1)} \cdot BBS) \cdot T(i, j-1) + S_T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{\text{DEN}}(T) = & AE + AW + AN + AS \\ & + \frac{1}{r^2(j)} \cdot (BBE + BBW + BBN + BBS) \end{aligned}$$

III.- PROCEDURE DE RESOLUTION

Dans le but d'obtenir la distribution de chaque fonction \emptyset en chaque point du maillage, nous avons appliqué la méthode itérative de GAUSS-SEIDEL avec relaxation (point successive over-relation /60/) :

En adoptant une notation matricielle, nous écrivons le système sous la forme :

$$C \cdot \emptyset = E$$

III.1

où C est une matrice carrée $M \times M$ formée à partir des coefficients C_j de la relation I.1.

On pose $C = I + S$ III.3

où I (respectivement S) est une matrice diagonale inférieure (respectivement diagonale supérieure dont la diagonale principale est nulle).

La formule III.1 s'écrit alors :

$$I.\varnothing^{(N)} + S.\varnothing^{(N-1)} = E \quad \text{III.4}$$

l'indice N indiquant ici le n° du cycle d'itération.

A partir de la formule ci-dessus, on obtient facilement la valeur de $\varnothing^{(N)}$:

$$\varnothing^{(N)} = -I^{-1}.S\varnothing^{(N-1)} + I^{-1}.E \quad \text{III.5}$$

- critère de convergence :

Comme la méthode est itérative, nous devons appliquer un critère de convergence afin d'arrêter le calcul lorsque la solution tend vers celle des équations aux dérivées partielles. Nous avons choisi d'appliquer le critère suivant :

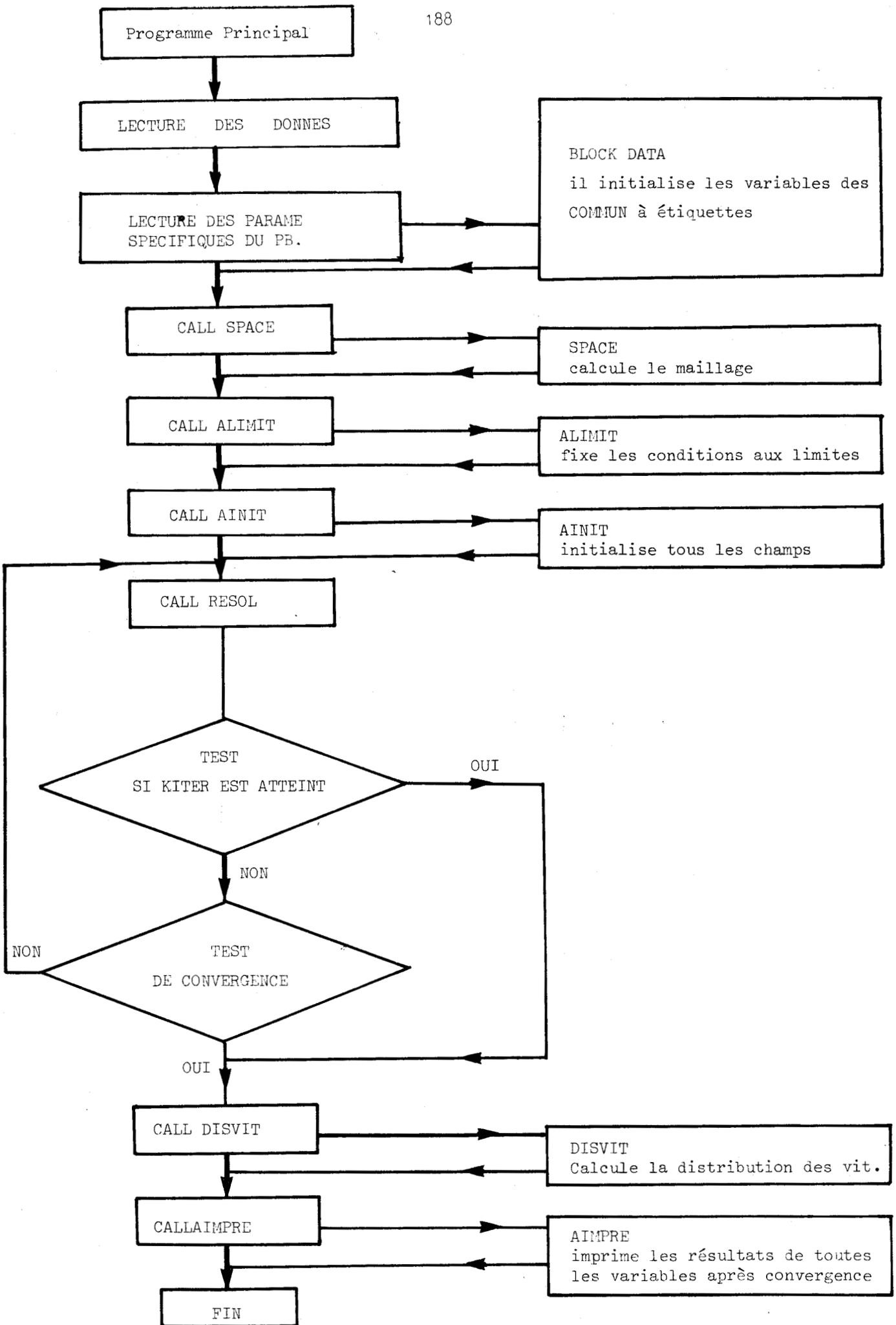
$$\text{Max} \left(\frac{\varnothing^N - \varnothing^{N-1}}{\varnothing^N} \right) \leq \text{cc} \quad \text{III.6}$$

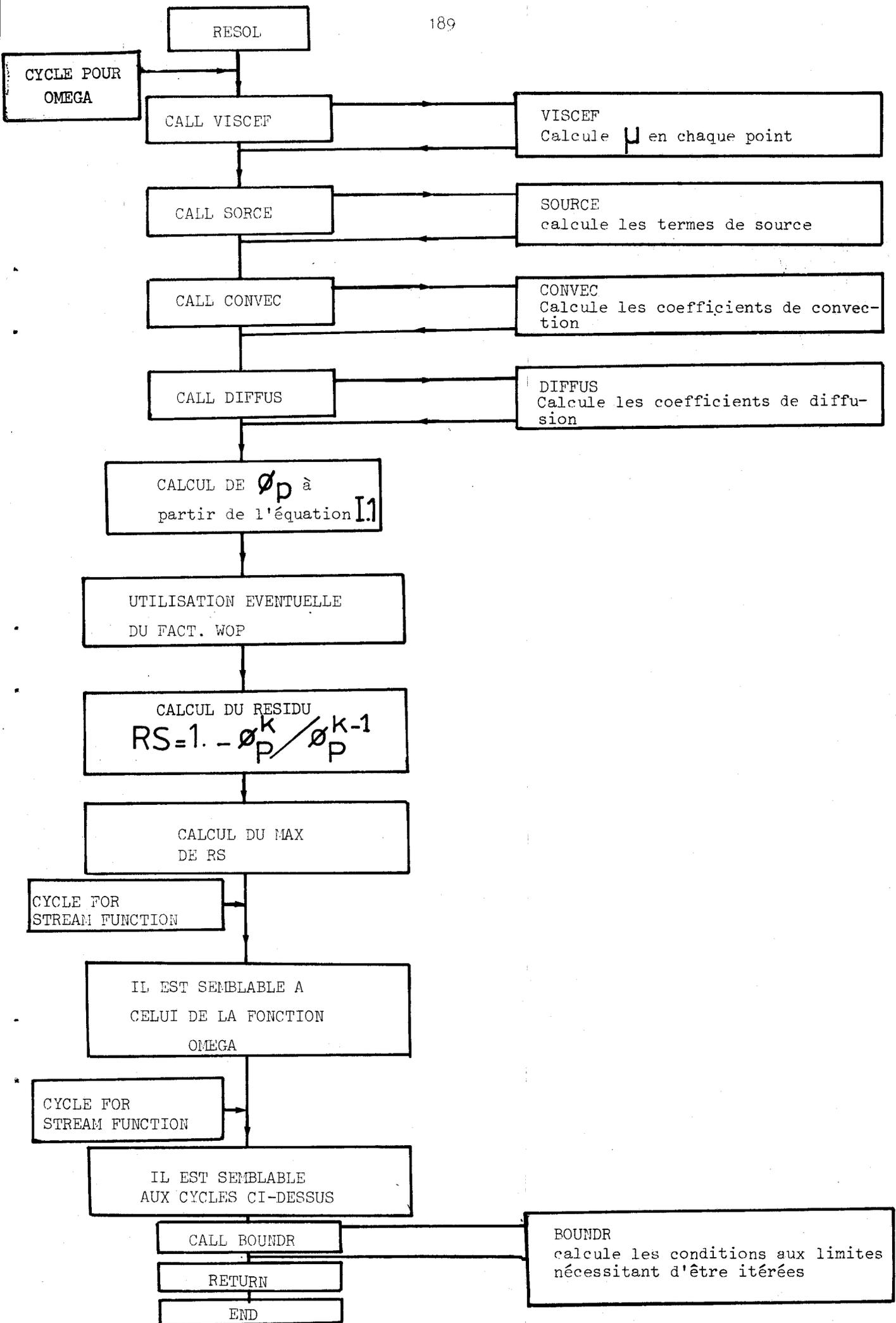
avec

$$10^{-3} \leq \text{cc} \leq 5.10^{-3}$$

IV.- ORGANIGRAMME

Dans cette annexe, nous avons décrit tous les éléments nécessaires pour l'écriture d'un programme de calcul laminaire. La description de ce programme et son organisation sont illustrées sur l'organigramme présenté ci-après.

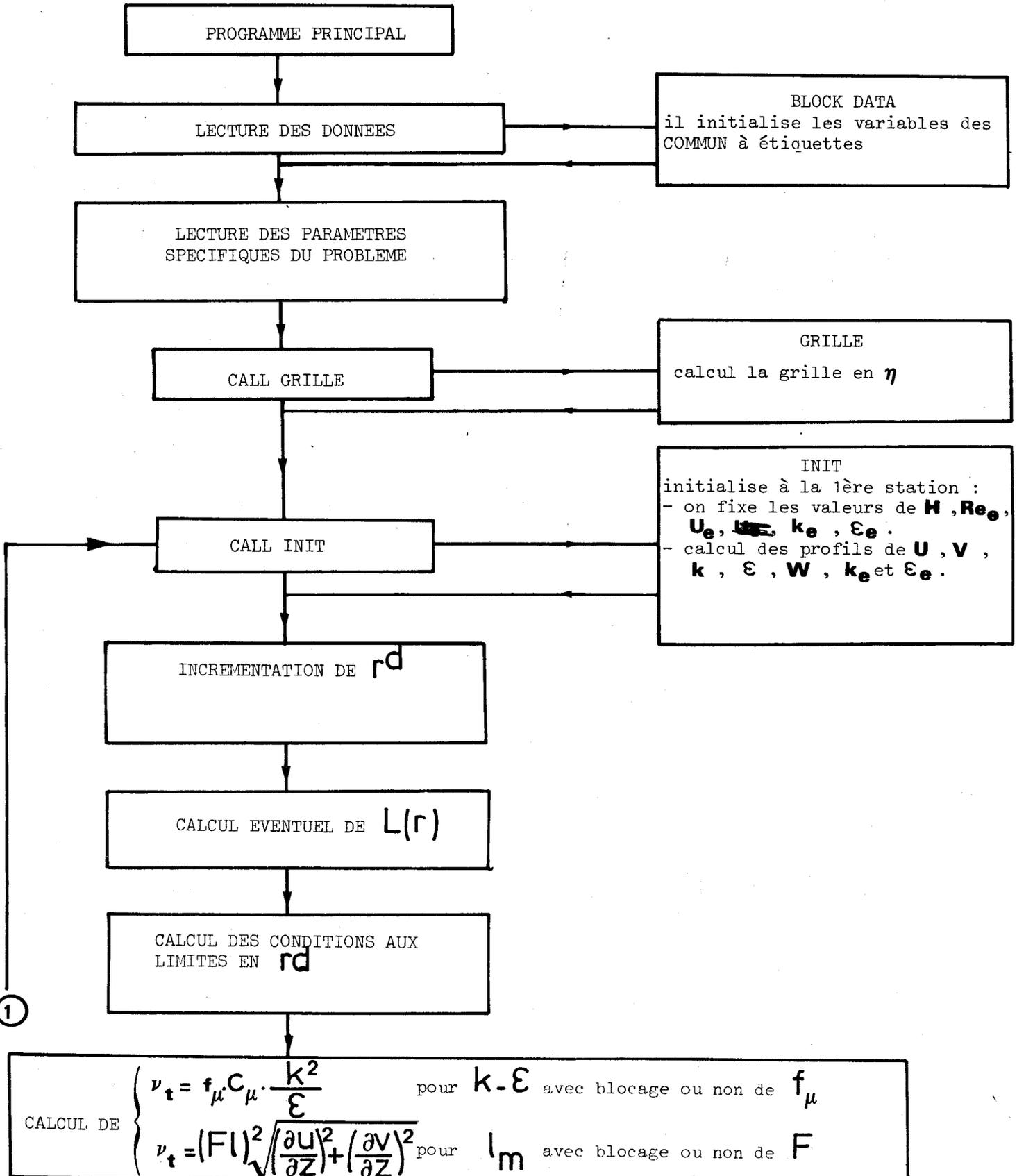




ANNEXE 4

ORGANIGRAMME

Dans cette annexe, nous présentons un organigramme qui décrit à la fois le programme et son organisation principale.



1

CALCUL DE Fw par $Fw = W - \delta LU$

CALCUL DE \emptyset
 $\emptyset = U, V, k, \epsilon$

Calcul de $c_{\emptyset}^u, c_{\emptyset}^v, D_{j,j}^u, S_{j,j}^u$
Calcul des coefficients $a(j), b(j), c(j)$ et $d(j)$.

TRIANGULATION DE LA MATRICE TRIDIAGONALE

RESOLUTION DU SYSTEME A MATRICE BIDIAGONALE

CALCUL DE W à la station r^d

CALL SORTIE

SORTIE

il calcul

- les épaisseurs δ, δ_m et $\delta_{1/2}$
- les vitesses $u_m, u_{1/2}$ et v_m
- Re_m, Re, Re_{unit}
- les profils

$$\eta = z \cdot \frac{u}{u_m}, \quad \frac{v}{v_m}$$

$$\frac{k}{u_m^2}, \frac{\epsilon \delta}{u_m^3}, \frac{\sqrt{k}}{u} \quad \text{et } W$$

non
 $r^d + \Delta r > r_{max}$
oui

FIN

REFERENCES

- /1/ STANISLAS M. "Etude d'un écoulement interne décollé par une méthode vélocimétrique d'holographie à double exposition et par un calcul utilisant un modèle de turbulence à une équation de transport".
Thèse de Docteur-Ingénieur, Université de Lille I, (1981).
- /2/ CLER A. "Modélisation de la turbulence dans le cadre des fermetures en un point. Calcul d'échelles de temps et de longueur".
Thèse de Docteur-Ingénieur, E.N.S.A.E., (1982).
- /3/ HINZE J.O. "Turbulence". Mac Graw Hill.
Second edition, (1975).
- /4/ KOLMOGOROV A.N. "Local structure of turbulence in an incompressible fluid at very high Reynolds numbers".
Dokl. Akad. Nauk, SSSR 30, (1941).
- /5/ LESIEUR M. "La turbulence développée".
La recherche, n° 139, pp. 1413-1425, (1982)
- /6/ AUPOIX B. "Etude fondamentale d'écoulements cisailés tridimensionnels". (Couche limite et sillages). Thèse de Docteur-Ingénieur, E.N.S.A.E., (1979).

- /7/ CHASSAING P. "Mélange turbulent de gaz inertes dans un jet de tube libre".
Thèse de Docteur ès Sciences, I.N.P. Toulouse, (1979).
- /8/ LAUNDER B.E. "Progress in the modelling of turbulent transport".
VKI, Lecture Séries 76, (1975).
- /9/ ROTTA J. "Statische theorie nichthomogener". Turbulenz, Z. Phys., B.D. 129, s. 547-572, B.D. 131, S. 51-77.
- /10/ HANJALIC K. "A Reynolds stress model of turbulence and its
LAUNDER B.E. application to thin shear flows".
Jl. Fluid. Mech. Vol. 52 (4), pp. 609-638, 1972.
- /11/ DALY B.J. "Transport equations in turbulence".
HARLOW F.H. The Phys. of Fluids, vol. 13, n° 11, pp. 1634-1649,
(1970).
- /12/ UBEROI M.S. "Effect of wind tunnel contraction of free stream
turbulence".
Jl. of Aero. Sci. vol. 23, pp. 754-764, (1956).
- /13/ REYNOLDS A.J. "The distorsion of turbulence by irrotationnel plane
TUCKER M.J. strain".
Jl. Fluid. Mech. vol. 32, part 4, (1968).

- /14/ LAUNDER B.E. "Progress in the development of a Reynolds-stress
REECE G.J. turbulence closure".
RODI W. Jl. Fluid. Mech. vol. 68, part 3, pp. 537-566,
(1975).
- /15/ CROW S.C. "Viscoelastic properties of fine-grained incompressible
turbulence".
Jl. Fluid. Mech. vol. 33, part 1, pp. 1-20, (1968).
- /16/ LUMLEY J.L. "Modelling homogeneous deformation of turbulence".
KHAJEH NOURI B.J. Pennsylvania State University, Report, (1973).
- /17/ NAOT D. "Numerical calculation of Reynolds stresses in a
SHAVIT A. square duct with secondary flow".
WOLFSHTEIN M. Wärme -und Stoffübertragung 7, 151, (1974).
- /18/ HANJALIC K. "Fully developed asymmetric flow in a plane channel".
LAUNDER B.E. Jl. Fluid. Mech. Vol. 51, p. 301, (1972).
- /19/ CHOU P.Y. "On velocity correlations and the solutions of the
equations of turbulent fluctuations".
Quarter of Appl. Math. Vol. 3(1), pp. 38-54, (1945).
- /20/ ZEMAN D. "Modeling buoyancy driven mixed layers".
LUMLEY J.L. Jl. Atmos. Sci. Vol. 33, pp. 1974-1988, (1976).
- /21/ HARLOW F.H. "Transport of turbulence energy decay rate".
NAKAYAMA P. Los Alamos Sci. Lab. Rep. LA 3854, (1968).

- /22/ RODI W. "Basic equations for turbulent flow in cartesian and cylindrical co-ordinates".
Imperial College Report, BL/TN/A/36, (1970).
- /23/ RODI W. "On the equation governing the rate of turbulente energy dissipation".
Imperial College Report, TM/TN/A/14, (1971).
- /24/ HA MINH H. "Décollement provoqué d'un écoulement turbulent incompressible. Etude théorique et expérimentale.
Thèse Docteur d'Etat, I.N.P. Toulouse (1976).
- * /25/ PATANKAR S.V. "Heat and Mass Transfer in boundary layers".
SPALDING D.B. 2nd edition Inter text London (1970).
- /26/ PATANKAR S.V. "Numerical heat transfert and fluid flow".
Mc GRAW-Hill book company, (1980).
- * /27/ SPALDING D.B. "A general computer program for two-dimensional parabolic phenomena".
Pergamon Press, (1977).
- /28/ COUSTEIX J. "Analyse théorique et moyens de prévision de la couche limite turbulente tridimensionnelle".
Thèse Docteur d'Etat, Université de Parix VI et O.N.E.R.A. Chatillon, (1974).

- * /29/ GOSMAN A.D. et al. "Heat and mass transfer in recirculating flows".
Academic Press - London and New York, (1969).
- /30/ VANDROMME D. "Modèle de turbulence à deux équations pour
écoulement plan cisailé à masse volumique variable".
Thèse de Docteur-Ingénieur, Université de Lille I,
(1980).
- /31/ GALMES J.M. "Modélisation et calcul de couches limites turbulentes
accélérées ou retardées sur paroi athermane en
écoulement supersonique".
Thèse de Doctorat de 3ème cycle, Université
d'Aix-Marseille II, (1981).
- /32/ MUHE H. "Jets tournants libre et pariétal".
Thèse de Docteur-Ingénieur, Université de Lille I,
(1982).
- /33/ LAUNDER B.E. "Mathematical models of turbulence".
SPALDING D.B. Academic Press, (1972).
- /34/ MICHEL R. "Application d'un schéma de longueur de mélange
QUENARD C. à l'étude des couches limites turbulentes d'équilibre".
DURANT R. O.N.E.R.A. Note technique n° 154, (1969).

- /35/ JONES W.P. "The prediction of laminarization with a two-
LAUNDER B.E. equation model of turbulence".
Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 15, pp. 301-384,
(1972).
- /36/ PATEL W.C. "Evaluation of turbulence models for near-wall
RODI W. and low-Reynolds number flows".
SCHEUERER G. Third Symposium on turbulent shear flows, University
of California, Davis, (1981).
- /37/ WHITFIELD D.L. "Analytical description of the complete turbulent
boundary-layer velocity profile".
AIAA J, vol. 17, n° 10, pp. 1145-1147, (1979).
- /38/ CLER A. "Analyse expérimentale de diverses hypothèses de
BUIKHAC H. modélisation de la turbulence et mise au point
d'une méthode de résolution rapide des équations
de couche limite avec équations de transport".
Projet effectué à l'O.N.E.R.A.-CERT Toulouse(1979).
- /39/ HOUEVILLE R. "Prediction of boundary layers wakes and mixed flows
TULAPURKARA E.G. using modified $k-\epsilon$ model".
Rapport technique OA 46/2259-DERAT 30/5004 DN
O.N.E.R.A.-CERT (1981).
- /40/ COUSTOLS E. "Stabilité et transition en écoulement tridimensionnel :
cas des ailes en flèche".
Thèse de Docteur-Ingénieur, E.N.S.A.E., (1983).

- /41/ SPALDING D.B. "A novel finite difference formulation for differential expression involving both first and second derivatives".
Int. J. Num. meth. in engineering, 4, pp. 551-559,
(1972).
- /42/ HOUEVILLE R. "Etude du mélange couche limite sillage en aval d'une plaque plane en écoulement bidimensionnel".
Rapport DERAT-CERT Toulouse.
- /43/ LA PORTE M. "Algorithmes numériques. Analyse et mise en oeuvre.
VIGNES J. Tome 1 : arithmétique des ordinateurs, systèmes linéaire".
Editions Technip., (1974).
- /44/ SIBONY M. "Analyse numérique 1. Systèmes linéaires et non
MARDON J.C. linéaires". Hermann, (1982).
- /45/ GOURDIN A. "Méthodes numériques appliquées (avec nombreux
BOUMAH RAT M. problèmes résolus en Fortran IV)".
Tec & Doc. Lavoisier, (1983).
- /46/ ROATCHE P.J. "Computational Fluid dynamics".
Hermosa Publishers, 1972, Albuquerque.
New Mexico.
- /47/ HANJALIC K. "Contribution towards a Reynolds stress closure
LAUNDER B.E. for low-Reynolds-number turbulence".
Jl. Fl. Mech., vol. 74, part. 4, pp. 593-610 (1976).

- /48/ RODI W. "Influence of buoyancy and rotation on equations for the turbulent length scale".
Second Symposium on Turbulent shear Flows.
July 2-4, pp. 10.37-10.42, (1979).
- /49/ LAUNDER G.E. "Numerical Prediction of axisymmetric Free Shear
MORSE A. Flow with a Reynolds-stress closure".
Turbulent Shear Flows 1. Springer-Verlag-Berlin
(1979).
- /50/ AUPOIX B. "Analyse d'effets de rotation sur la turbulence".
COUSTEIX J. 19^e Colloque d'Aérodynamique Appliquée, Marseille,
(1982).
- /51/ GENCE J.N. "Action d'une rotation pure sur une turbulence
CHABER L. homogène anisotrope".
ITSWEIRE E. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 289, pp. 197-200,
(1981).
- /52/ COUSTEIX J. "Modélisation des équations aux tensions de Reynolds
AUPOIX B. dans un repère en rotation".
La Recherche Aérospatiale, n^o 4, pp. 275-285, (1981).
- /53/ BERTOGLIO J.B. "Effet d'une rotation en bloc sur les spectres
CHARNAY G. des corrélations doubles d'une turbulence homo-
GENCE J.N. gène soumise à des gradients".
MATHIEU J. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 286, pp. 167-170, (1978).



- /54/ HANJALIC K. "Multiple-time concepts in turbulent transport
LAUNDER B.E. modelling".
SCHIESTEL R. Second Symposium on Turbulent Shear Flows.
July 2-4, pp. 10.31-10.36, (1979).
- /55/ LAUNDER B.E. "Sur l'utilisation d'échelles temporelles
SCHIESTEL R. multiples en modélisation des écoulements
libres turbulents".
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 286, pp. 709-712,
(1978).
- /56/ LAUNDER B.E. "Application d'un modèle de turbulence à
SCHIESTEL R. échelles multiples au calcul d'écoulements
libres turbulents".
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 288, pp. 127-130,
(1979).
- /57/ SCHIESTEL R. "Sur un nouveau modèle de turbulence appliqué
aux transferts de quantité de mouvement et de
chaleur".
Thèse de Docteur ès Sciences, Université de
NANCY I, (1974).
- /58/ OLIVER J. "The prediction of heat transfer and fluid flow
in the entrance region of an annulus with the
inner cylinder rotating".
Ph. D. Thesis, Central Electricity Research
Laboratories, Surrey, U.K., (1975).

- /59/ MARTIN M. "Mécanique des Fluides. Couches limites
dynamique et thermique".
Cours professé à l'Ecole des Mines de NANCY.
- /60/ VARGA R.S. "Matrix iterative analysis".
Printice Hall, (1962).
- /61/ DYMENT A. "Introduction à la Mécanique des Fluides".
Cours de Maîtrise de Mécanique, fascicule 14,
Université de Lille I.
- /62/ COMTE-BELLOT G. "Turbulence".
Cours dispensé en 3ème année de l'Ecole Centrale
de Lyon.

LISTE DES FIGURES

Dispositif expérimental	Fig. IV.1
Domaine physique-domaine de calcul	Fig. IV.2 a - b
Profils initiaux de U , V , K et ϵ	Fig. IV.3 à 6
Profils de la vitesse radiale moyenne	Fig. V.1 à 4
Profils de la vitesse orthoradiale moyenne	Fig. V.5 à 8
Evolution des vitesses radiale et orthoradiale	Fig. V.9
maximales	Fig. V.10
Evolution du degré local de rotation à différents $\frac{r}{h}$	Fig. V.11
Evolution du taux de dispersion à différent S	Fig. V.12
Profils de la tension de Reynolds \overline{uw}	Fig. V.13 à 16
Profils de la tension de Reynolds \overline{vw}	Fig. V.17 à 20
Profils de l'énergie cinétique turbulente	Fig. V.21 à 22
Profils du taux de dissipation	Fig. V.23 à 25



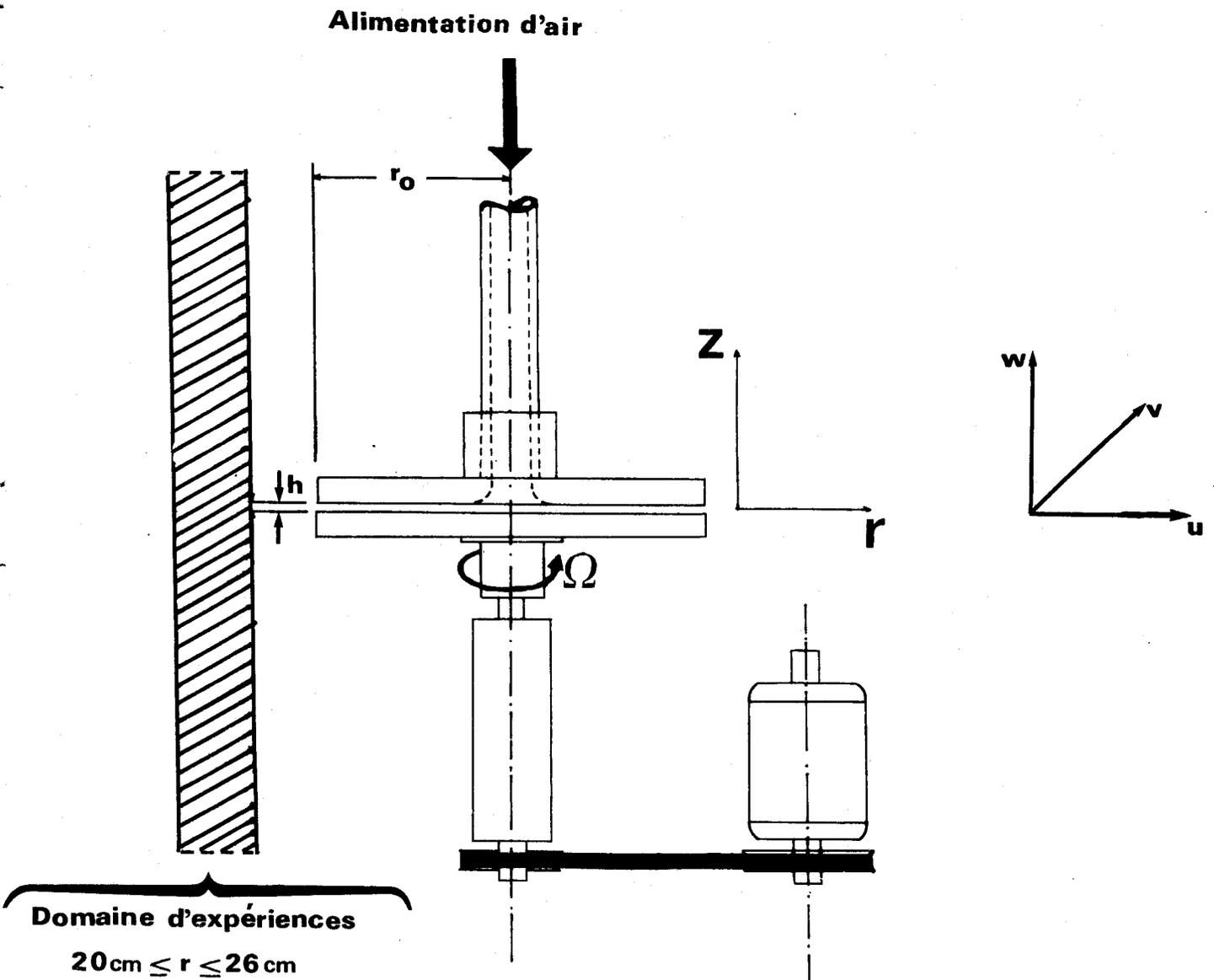


fig. IV.1



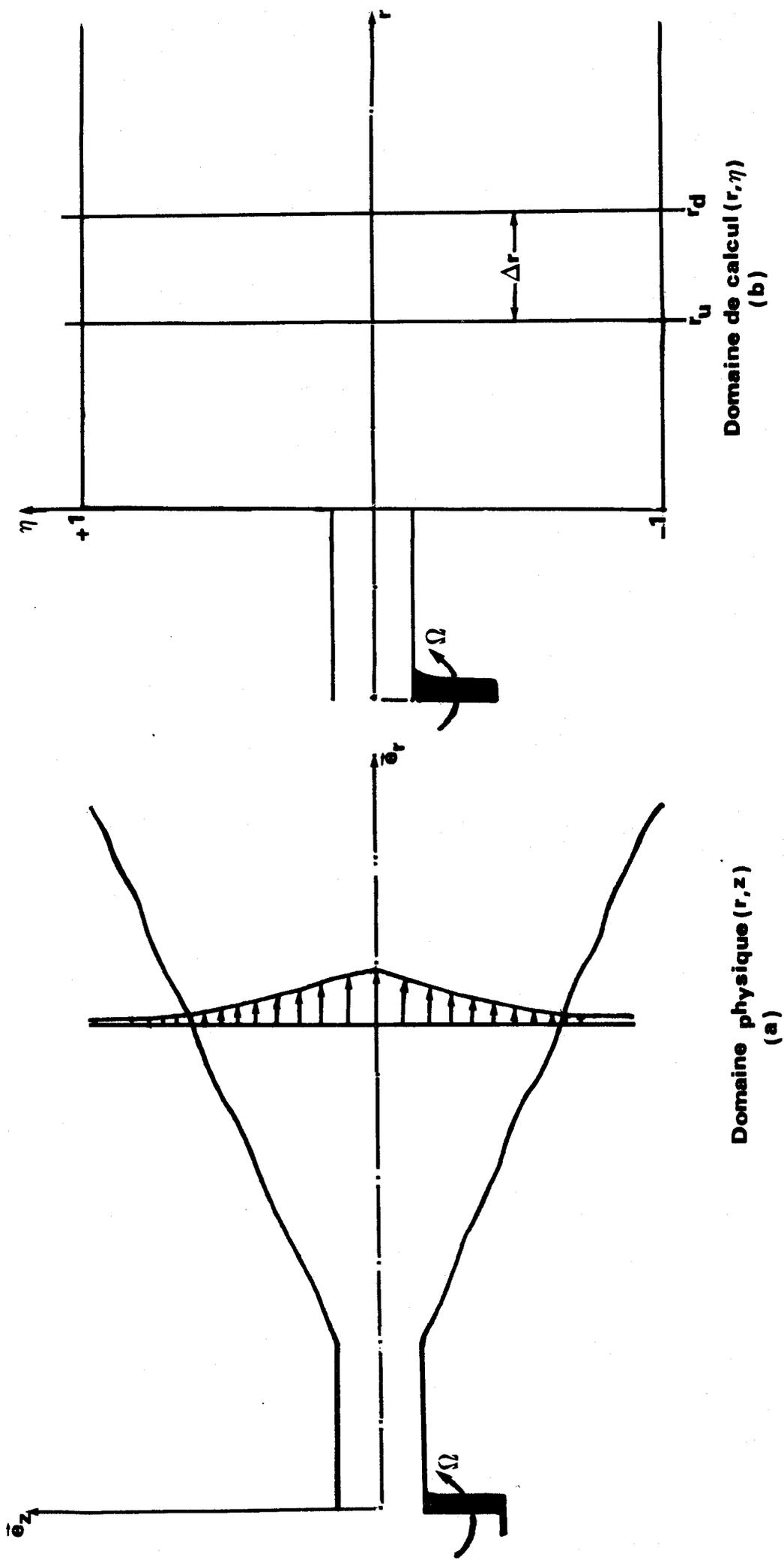


fig. IV.2

Domaine physique (r, z)
(a)

S	calcul	u _m
1.67	●	27.76
2.90	△	21.60
3.33	□	27.80
4.16	x	20.93

$r/h = 60.$

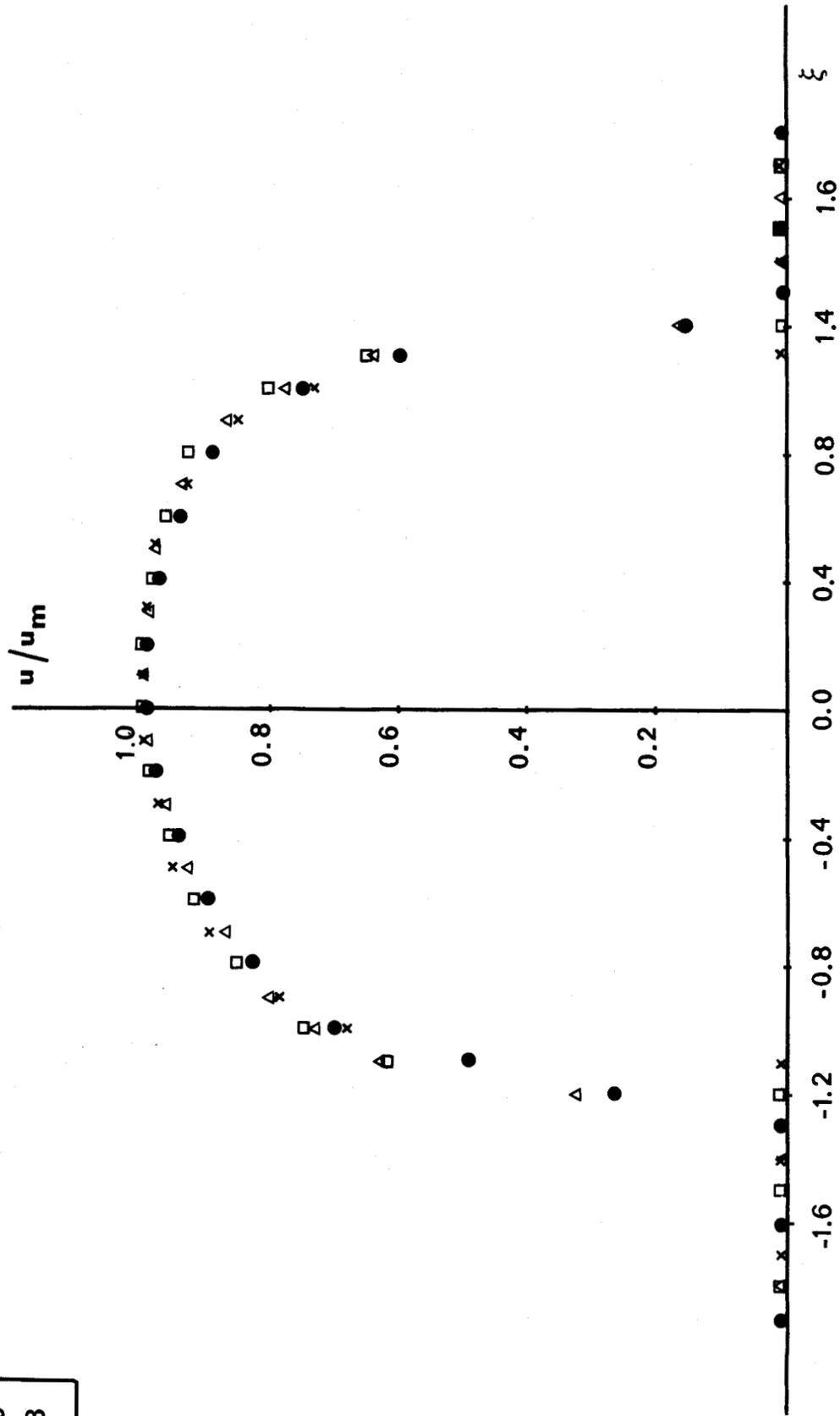


fig. IV.3



S	calcul	v_m
1.67	●	39.27
2.90	△	54.94
3.33	□	78.50
4.16	x	78.50

$r/h = 60.$

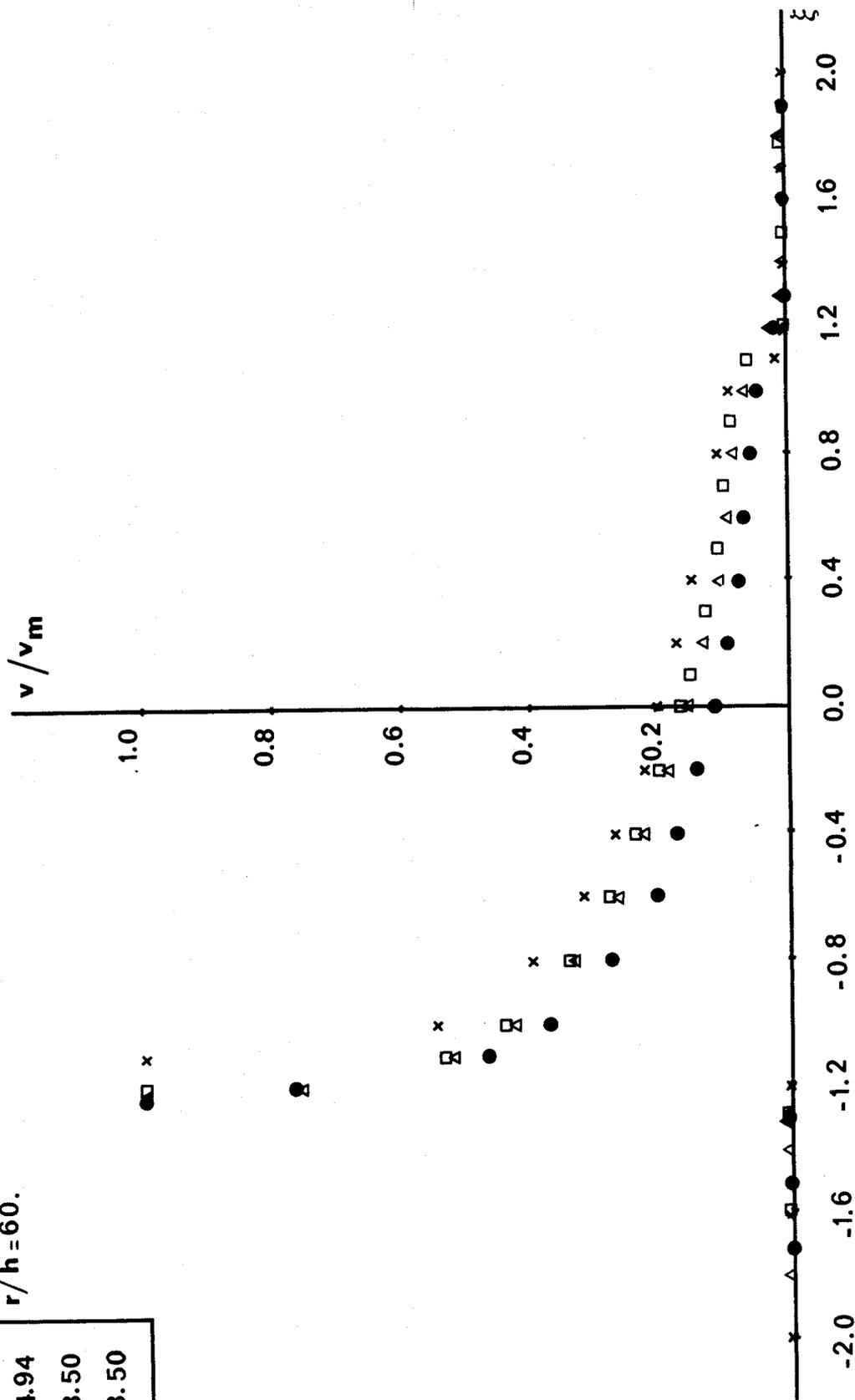


fig. IV.4



$(k/u_m^2) \cdot 10^2$

Re. 10^{-5}
● 3.90
△ 5.46
□ 7.80
× 7.80
r/h = 60.

memme légende que fig. IV.3

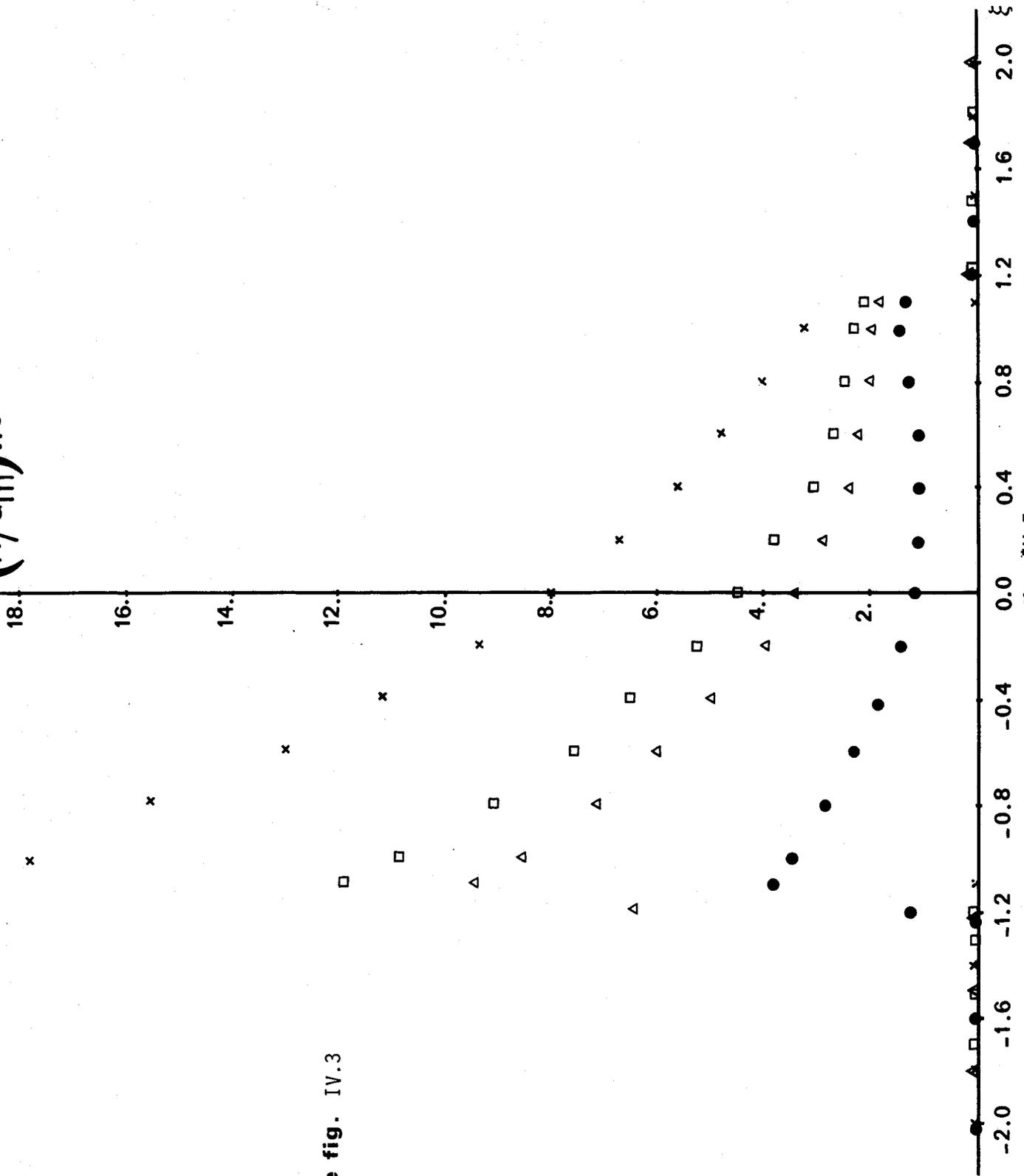


fig. IV.5



S	calcul	μ_m
1.67	●	27.76
2.08	▽	22.06
2.90	△	21.60

$r/h = 60$

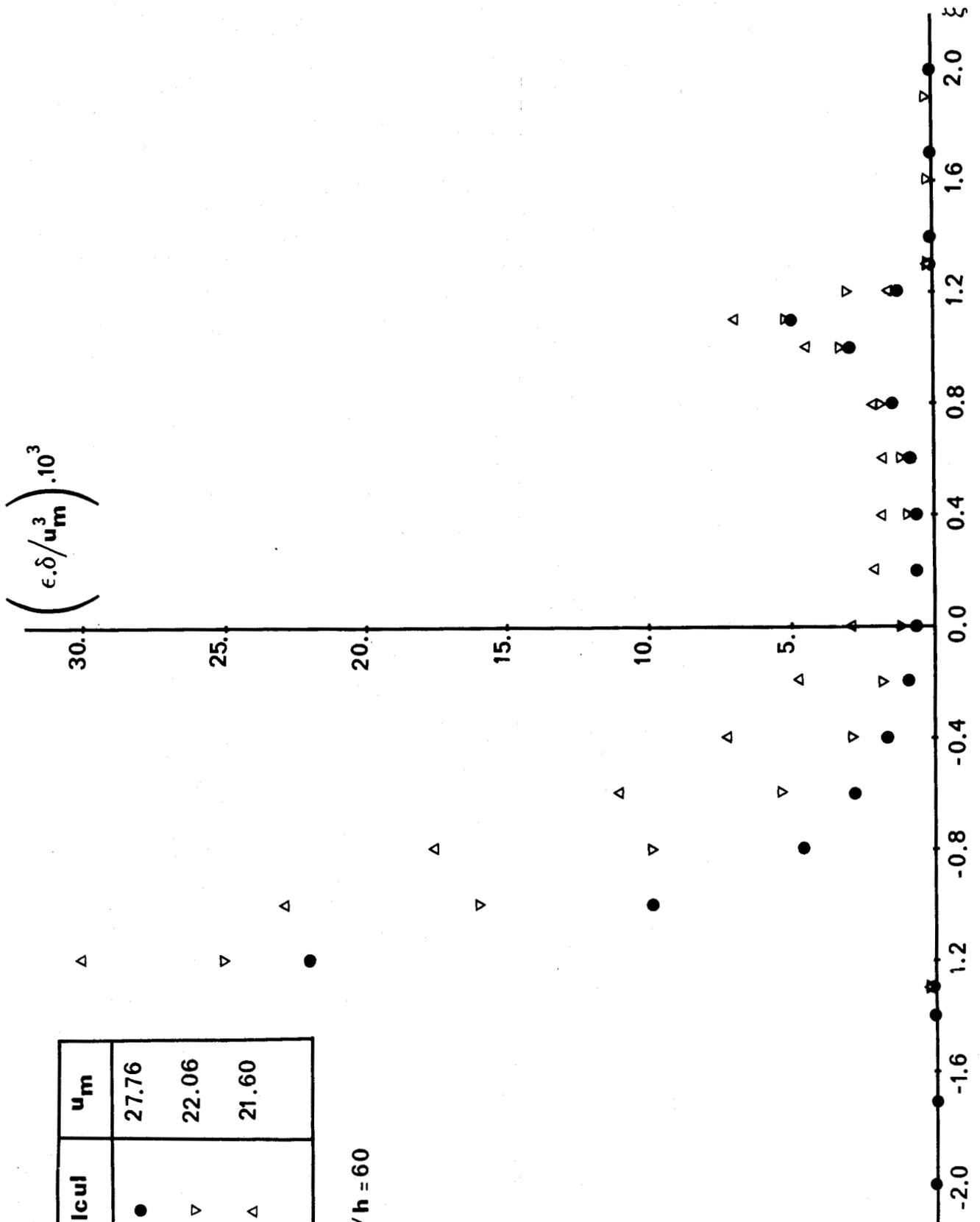


fig. IV.6

S	calcul modèle k-ε	expérience
0.0	○	☆
1.67	●	▼
2.08	★	▲
2.33	φ	▽
2.78	×	+
2.89	△	θ
3.33	□	■

$r/h = 80.$

$\epsilon^* = 0.0167$

$Re \cdot 10^{-5}$

● × 3.90

φ ▲ 5.46

□ 7.80

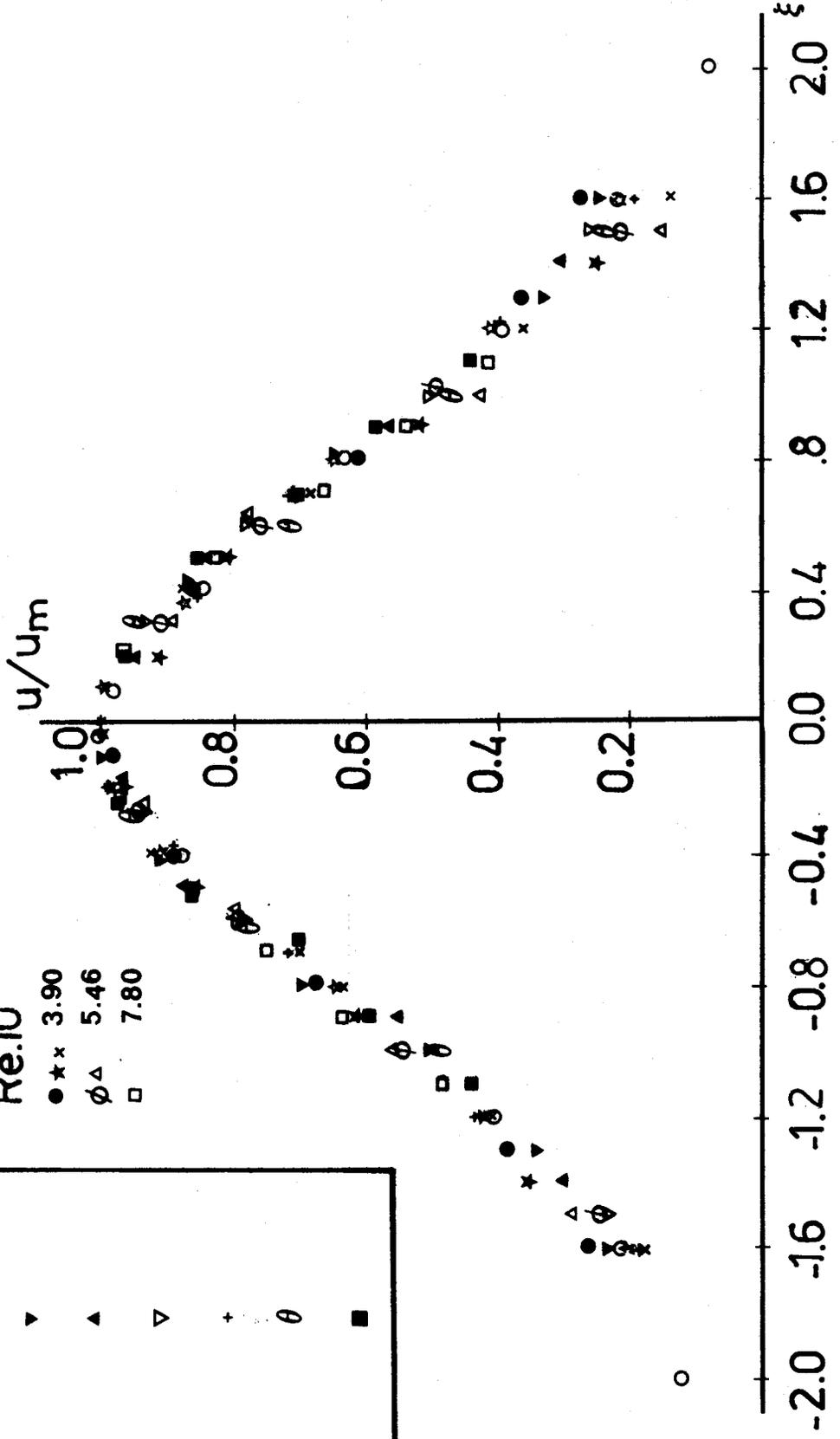


FIG. V.1



$r/h = 92.$

$Re \cdot 10^{-5}$

● ** 3.90

△ 5.46

□ 7.80

même légende que fig. v.1

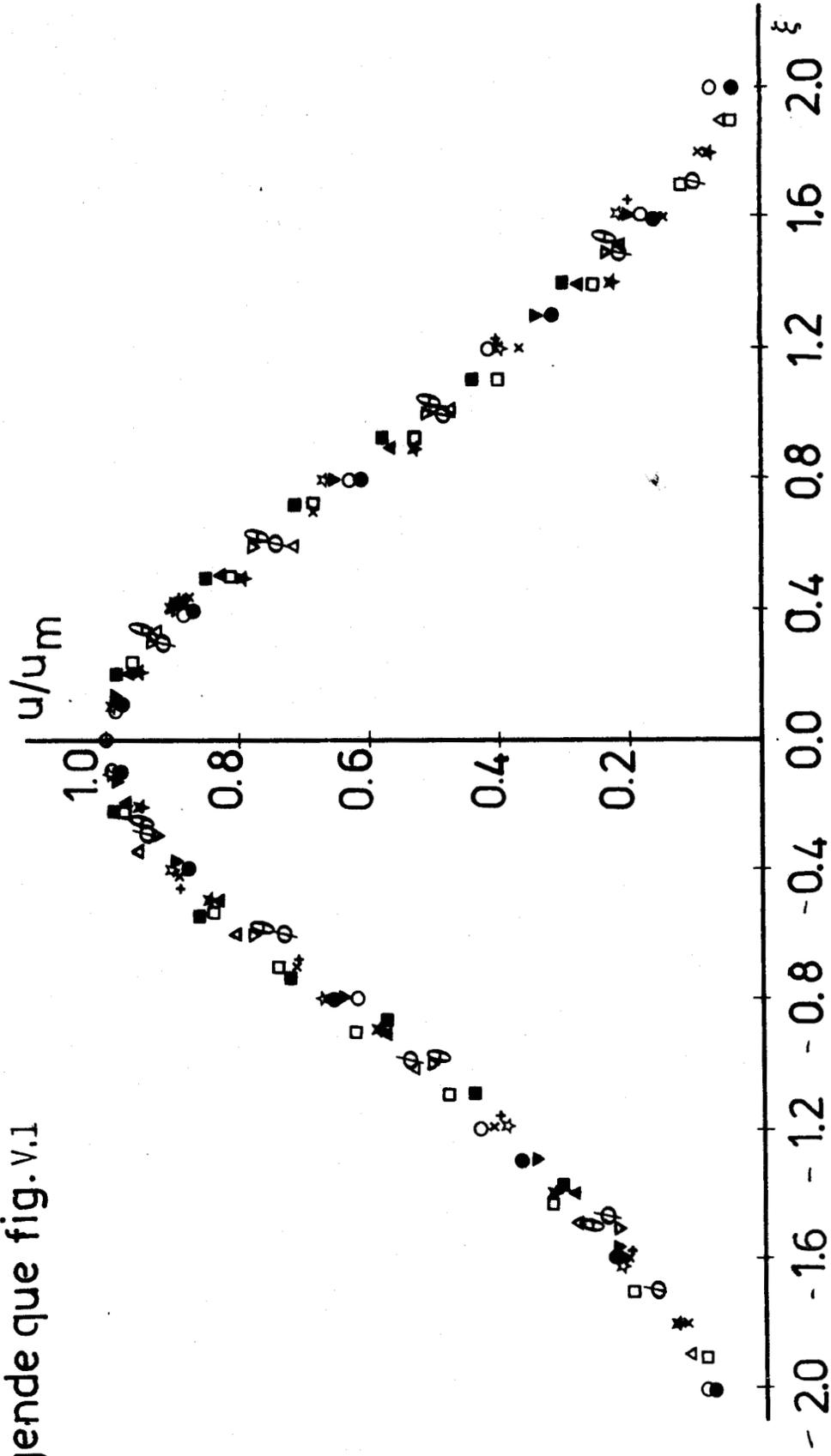


fig. v.2



Re.10⁻⁵

$$r/h = 104.$$

$$\epsilon^* = 0.0167$$

- 3.90
- φ 5.46
- 7.80

même légende que fig. V.1

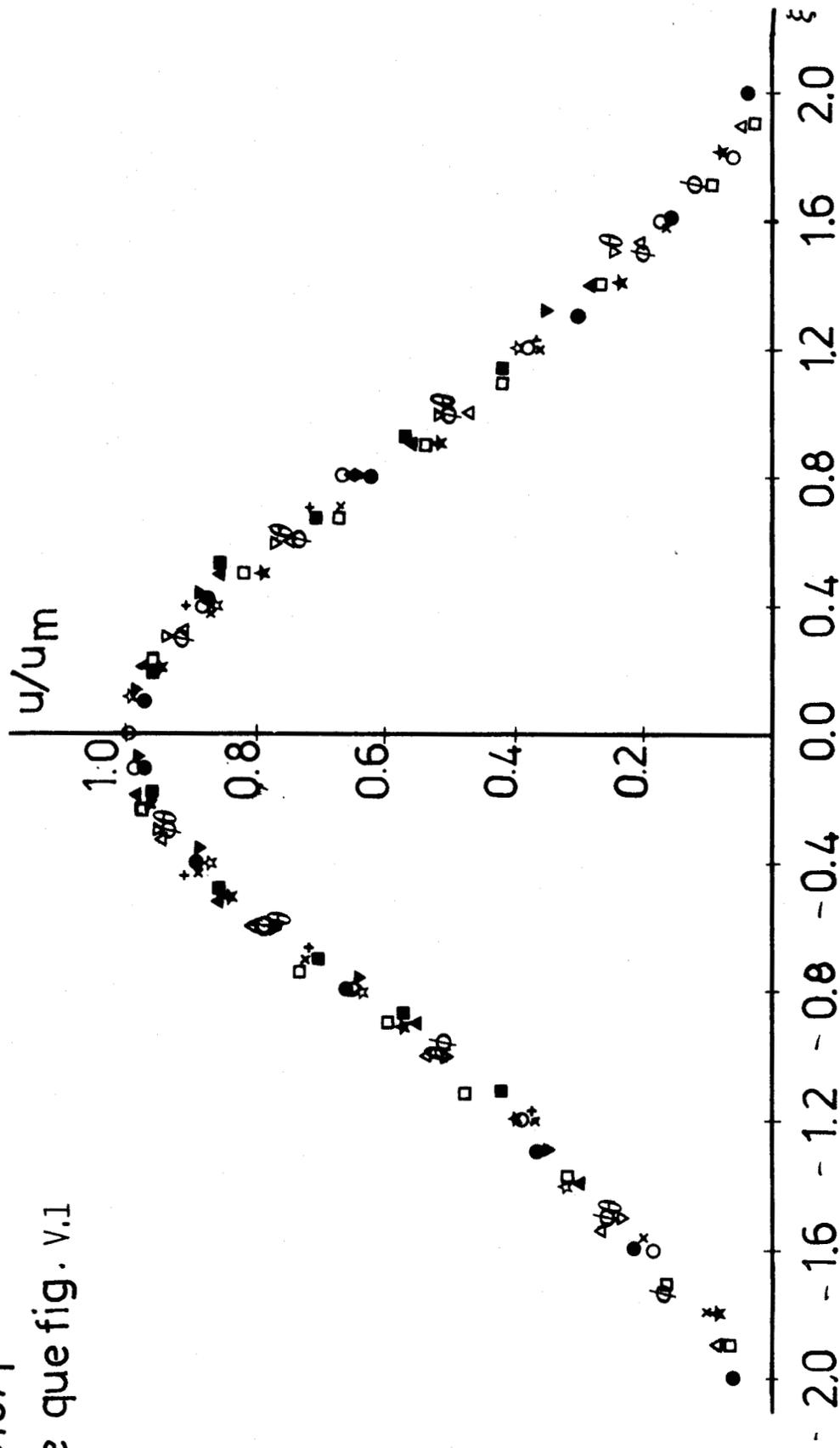


fig. V.3

$$Re = 5.46 \times 10^{-5}$$

$$\epsilon^* = 0.0167$$

$$S = 2.33$$

r/h	calcul modele k-ε	expérience
80.	○	+
92.	★	▲
104.	△	□

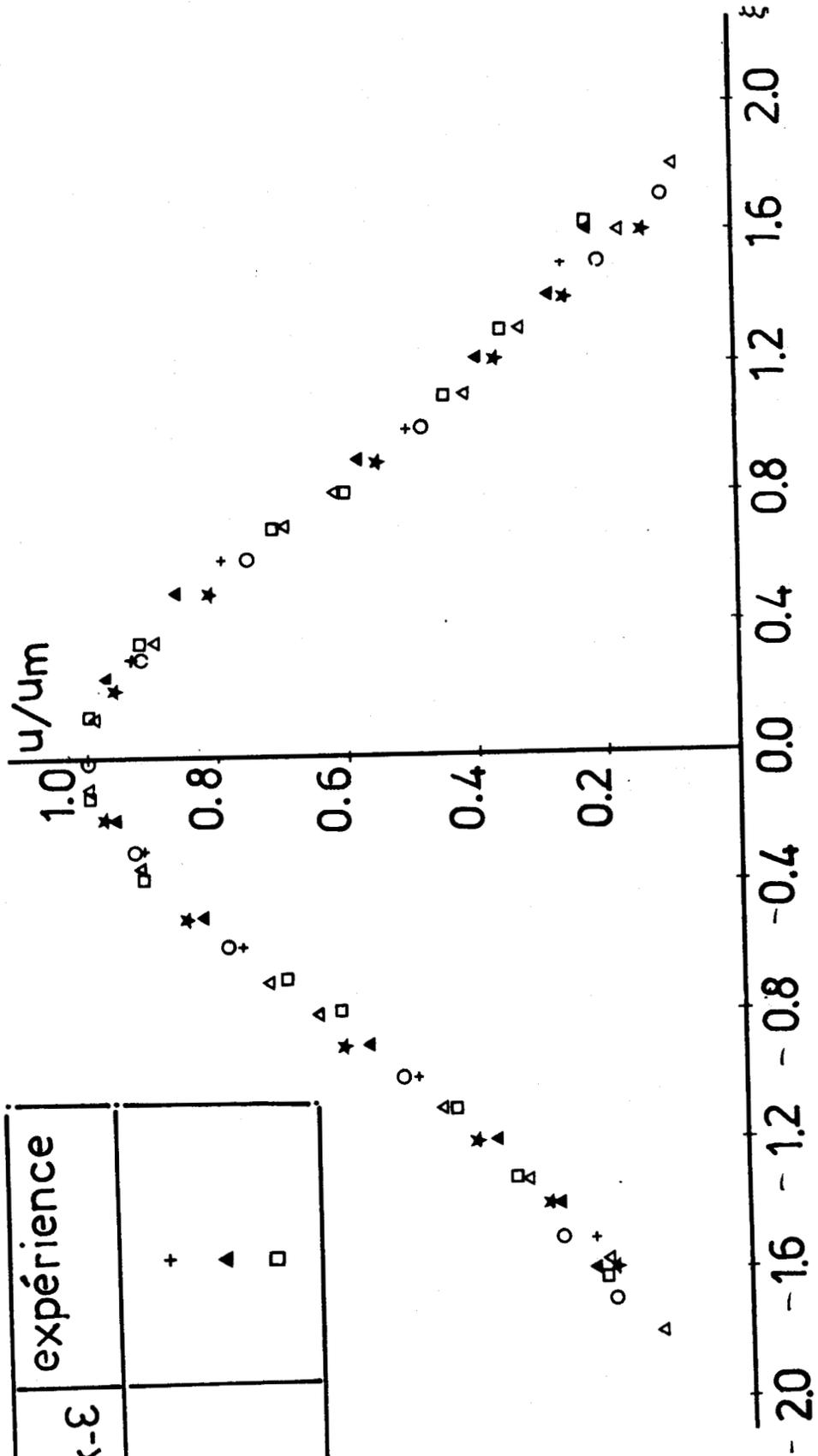


fig. v.4



$Re \cdot 10^{-5}$

● * 3.90

△ 5.46

□ 7.80

$r/h = 80.$

$\varepsilon^* = 0.0167$

même légende que fig. V.1

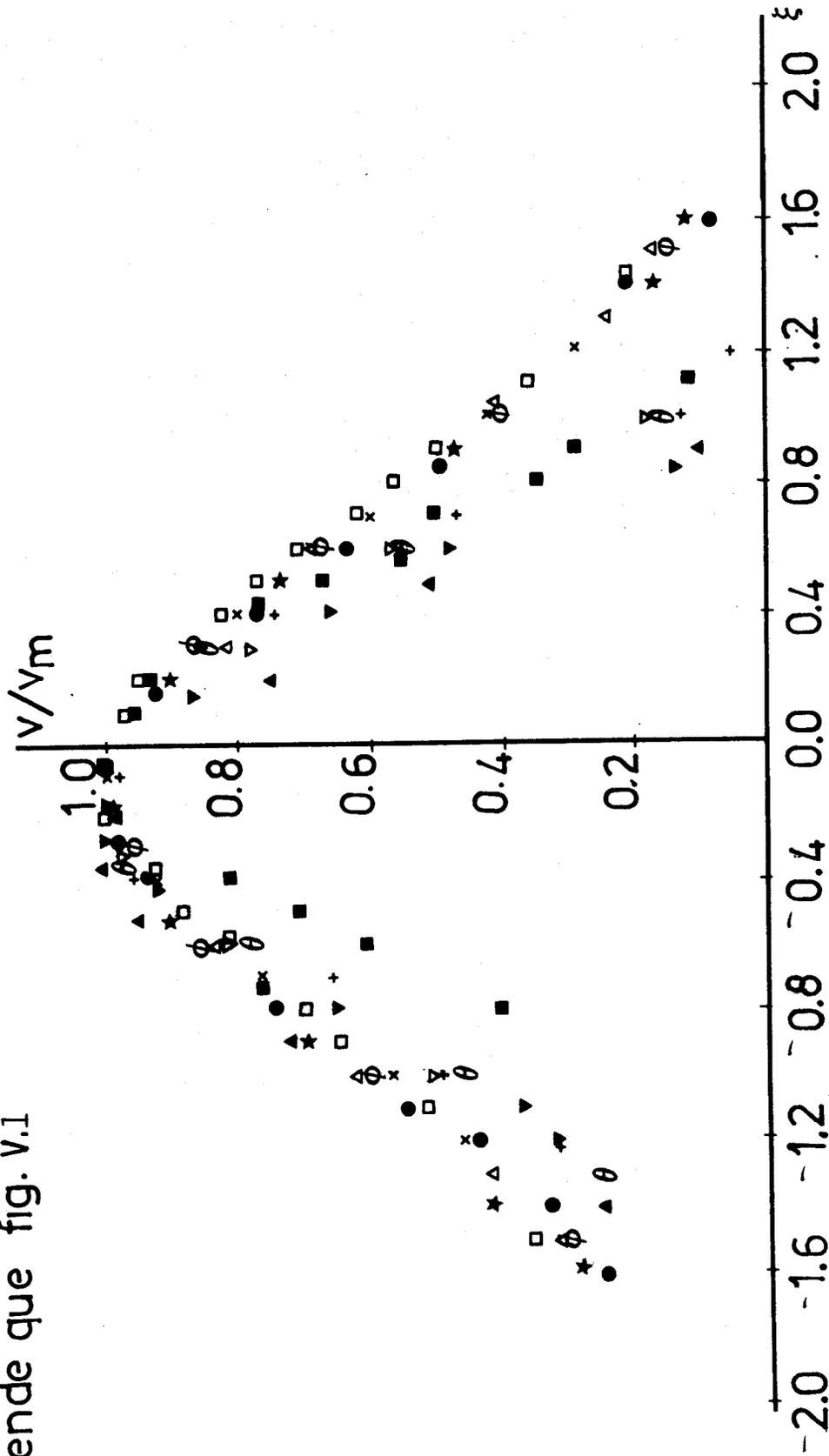


fig. V.5

$Re \cdot 10^{-5}$

$r/h = 92.$

● × 3.90

φ Δ 5.46

□ 7.80

$\varepsilon^* = 0.0167$

même légende que fig. V.1

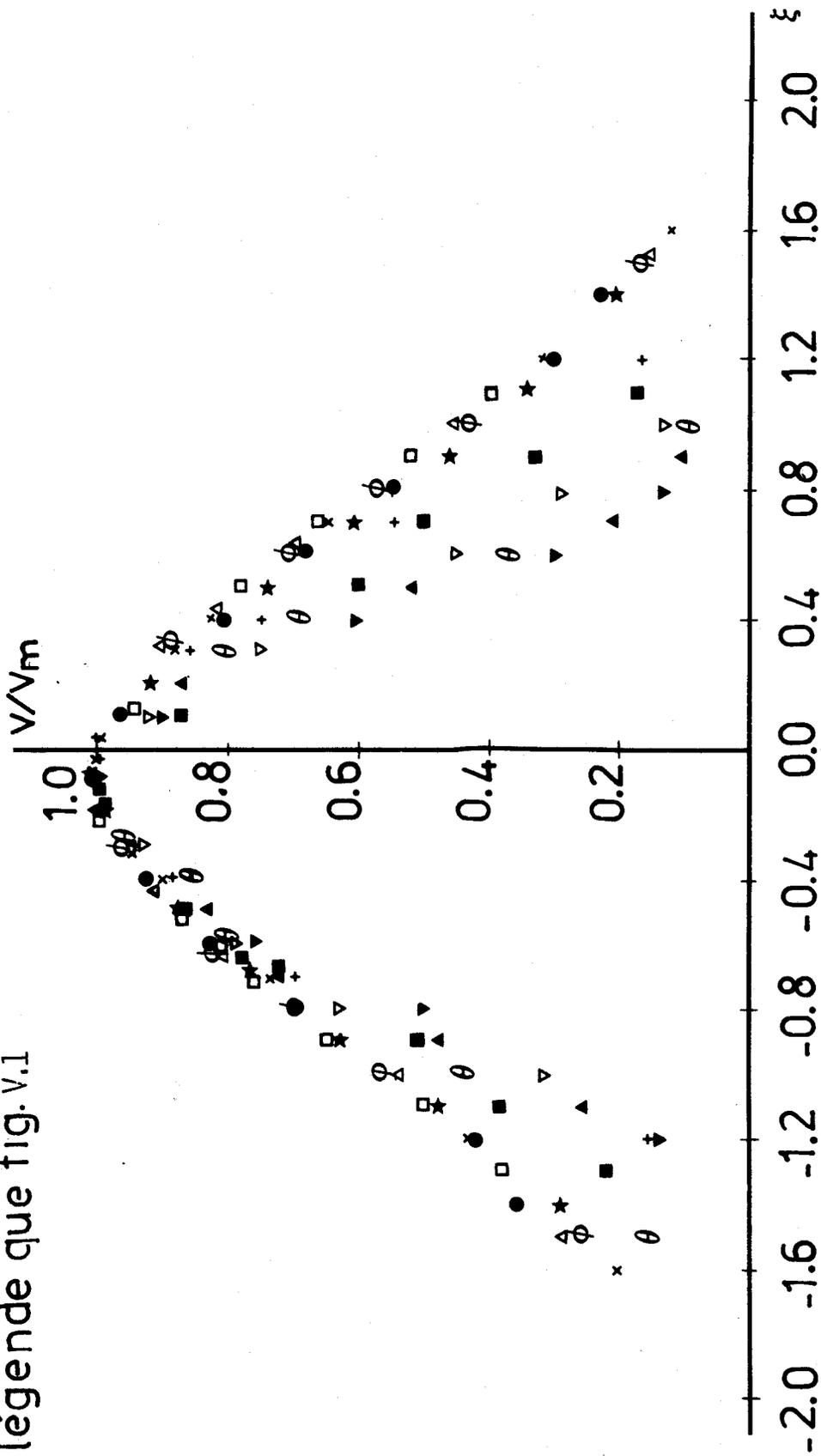


fig. V.6

$Re \cdot 10^{-5}$

$r/h = 104.$

$\varepsilon^* = 0.0167$

● $\star \star$ 3.90

$\phi \Delta$ 5.46

\square 7.80

même légende que fig. v.1

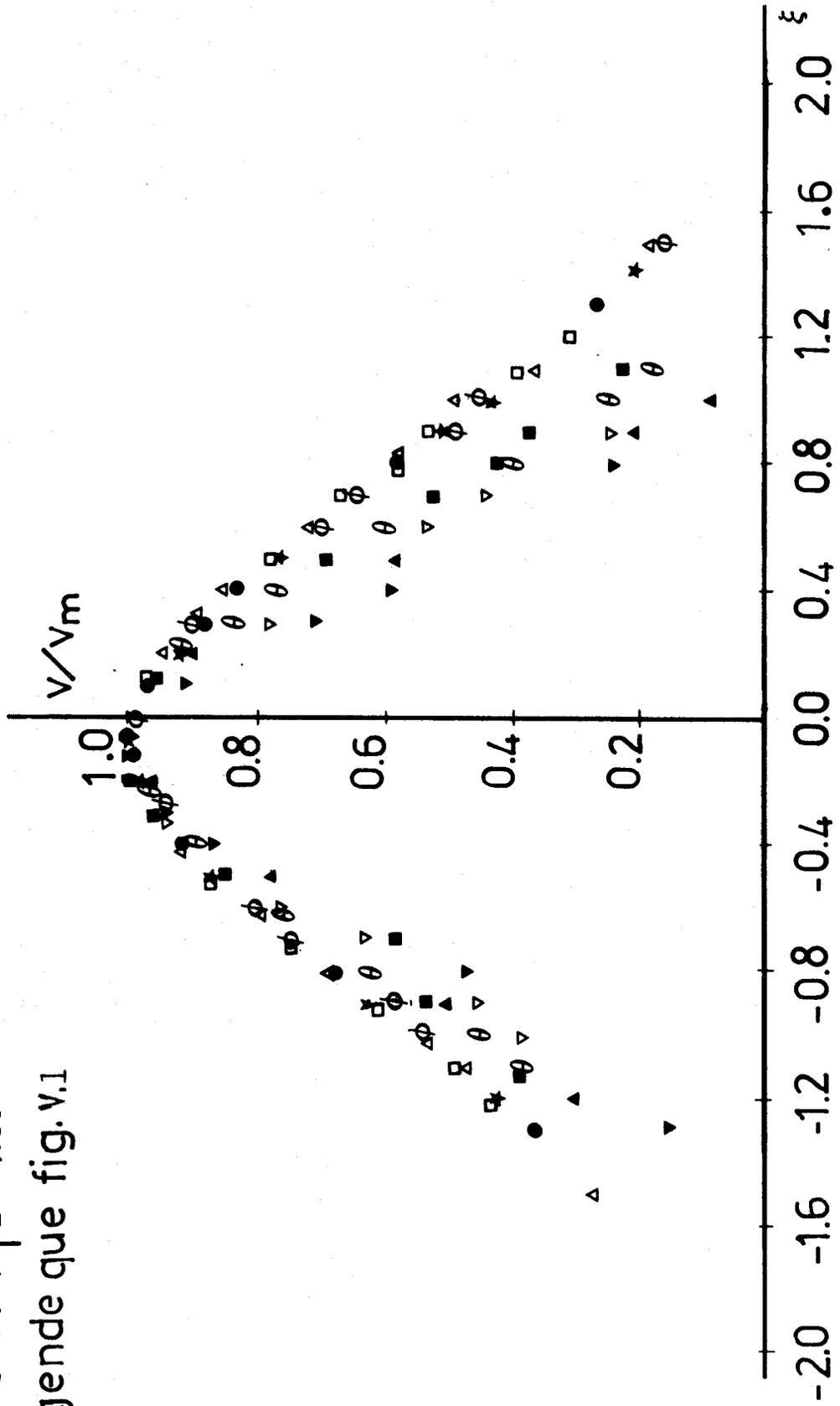


fig. v.7



$$Re = 5.46 \times 10^5$$

$$S^* = 2.33$$

$$\epsilon^* = 0.0167$$

r/h	calcul modele k-ε	expérience
80.	○	+
92.	*	▲
104.	△	□

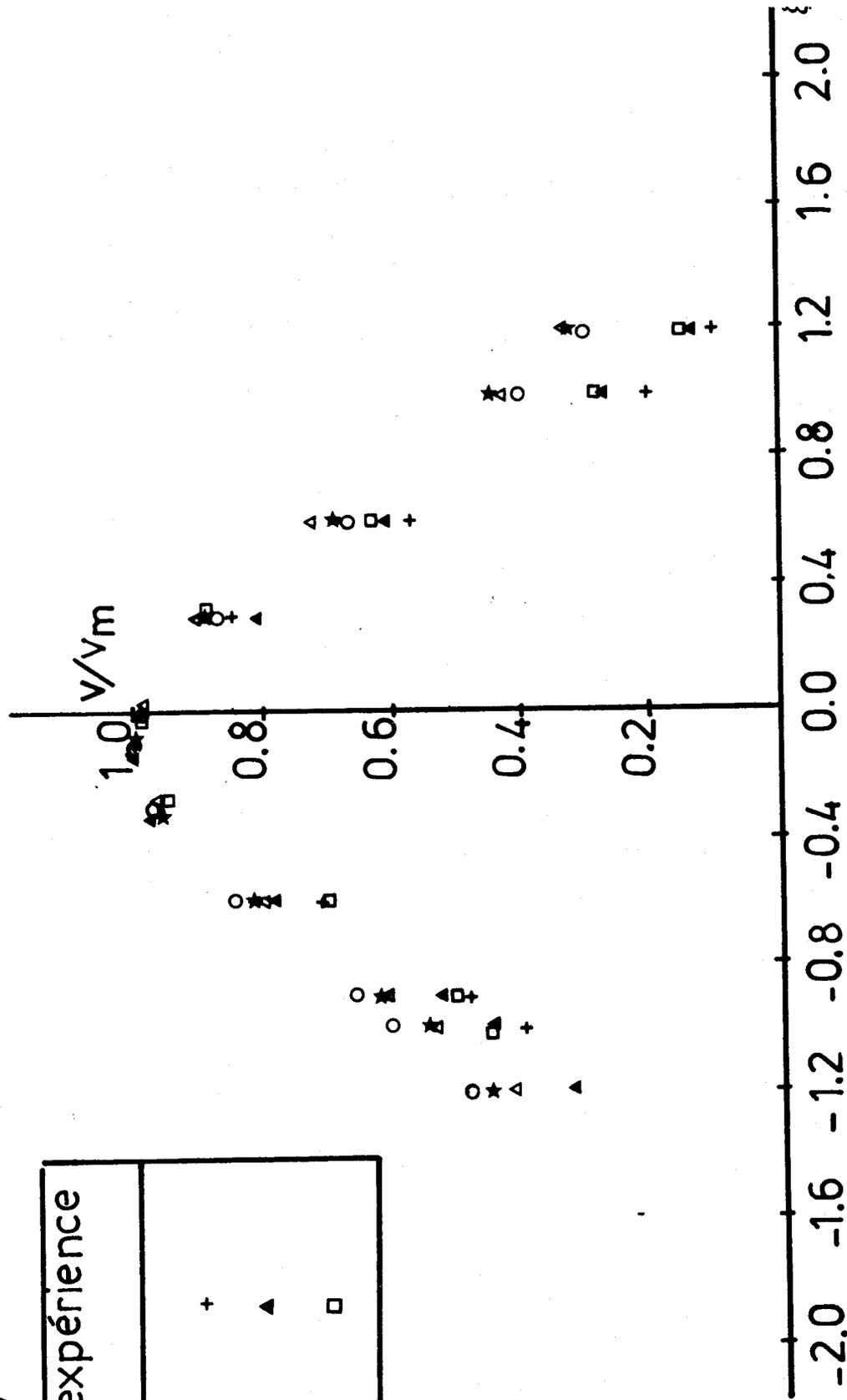


fig. v.8



S	calcul modele k-ε	expérience
0.0	○	
1.67	●	▲
2.33	▽	▼
3.33	□	■

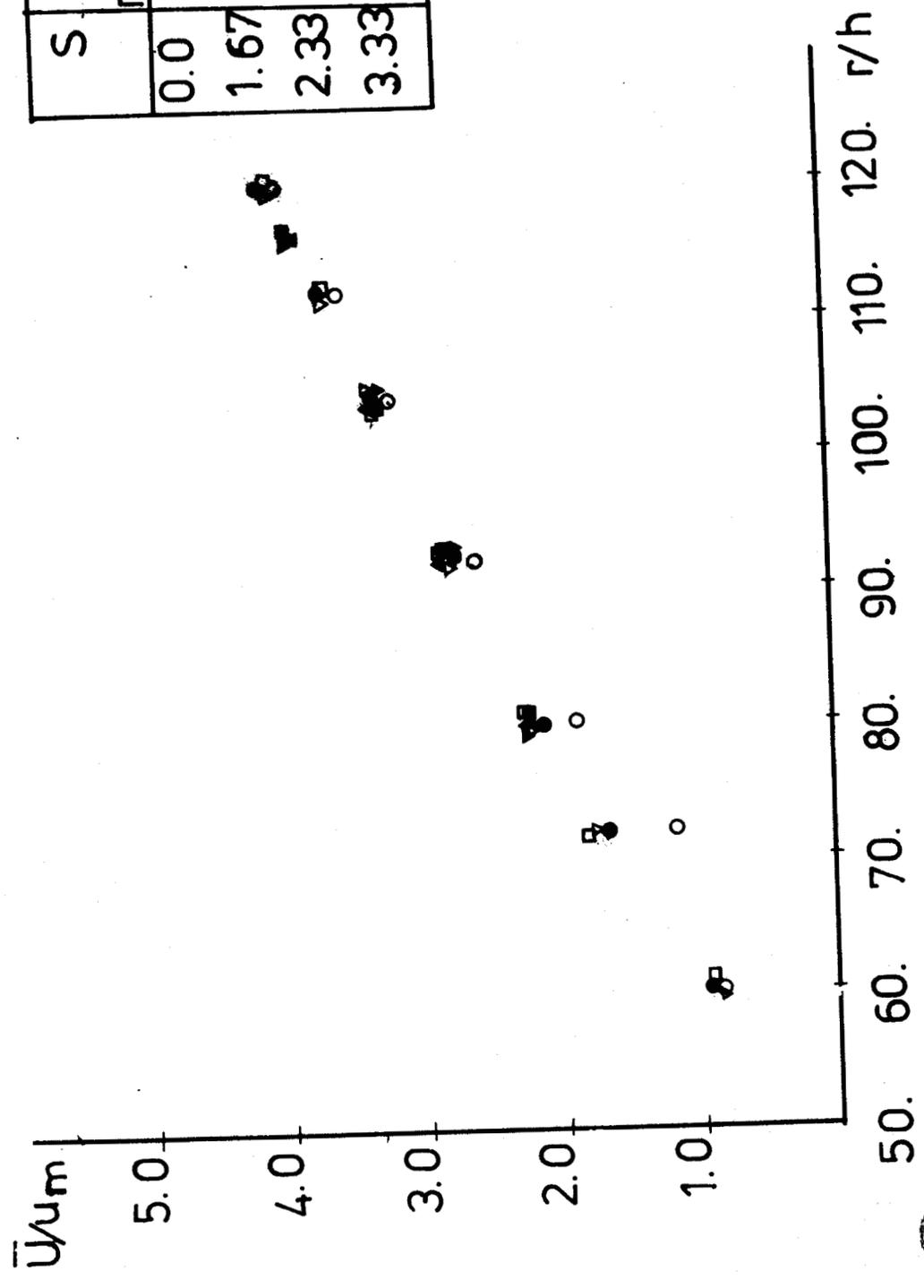
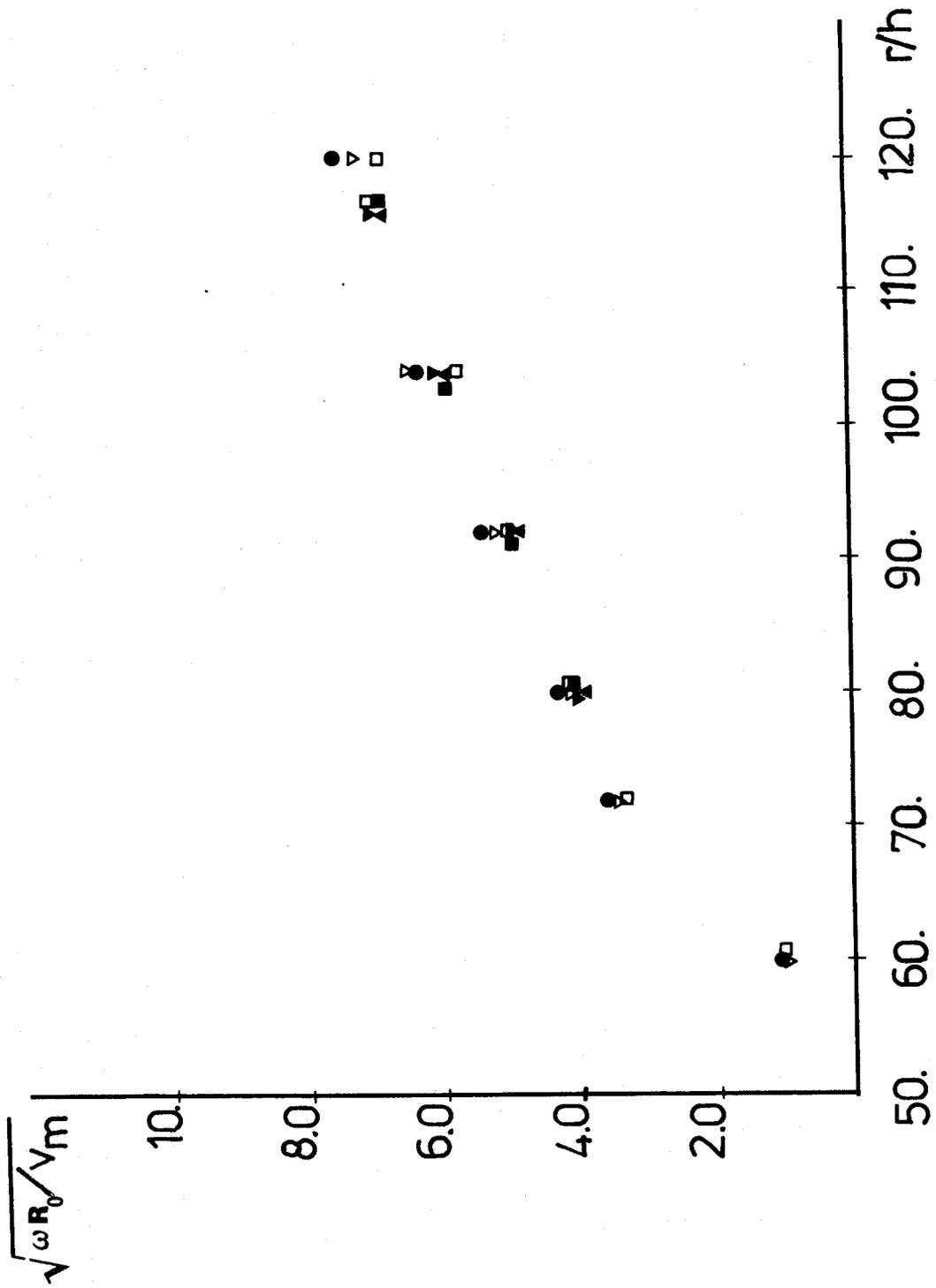


fig. v.9





même légende que
fig. V.9

fig. V.10



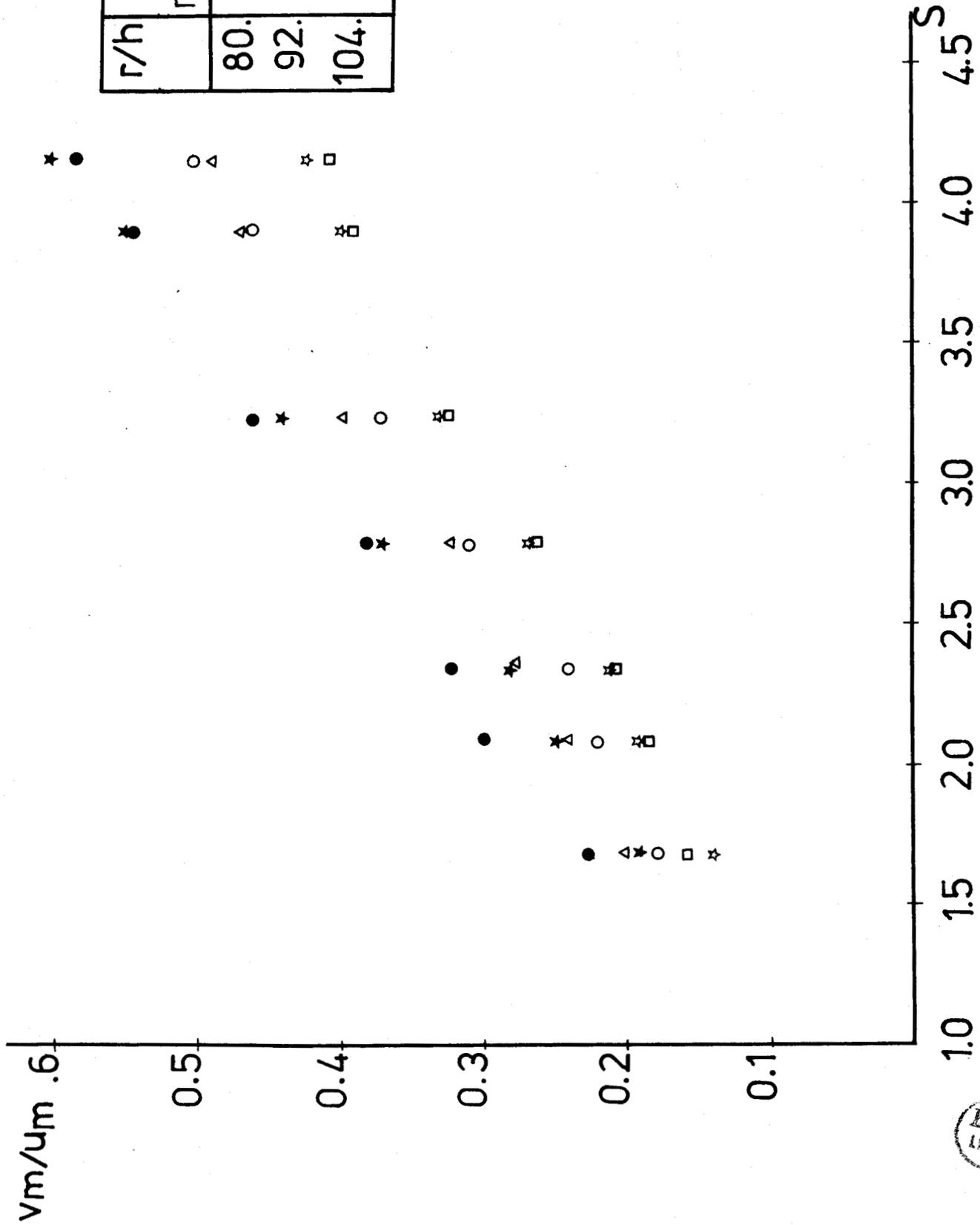


fig. V.11



S	calcul modele k-ε	expérience
1.67	●	▼
2.33	▲	◻
3.33	△	○

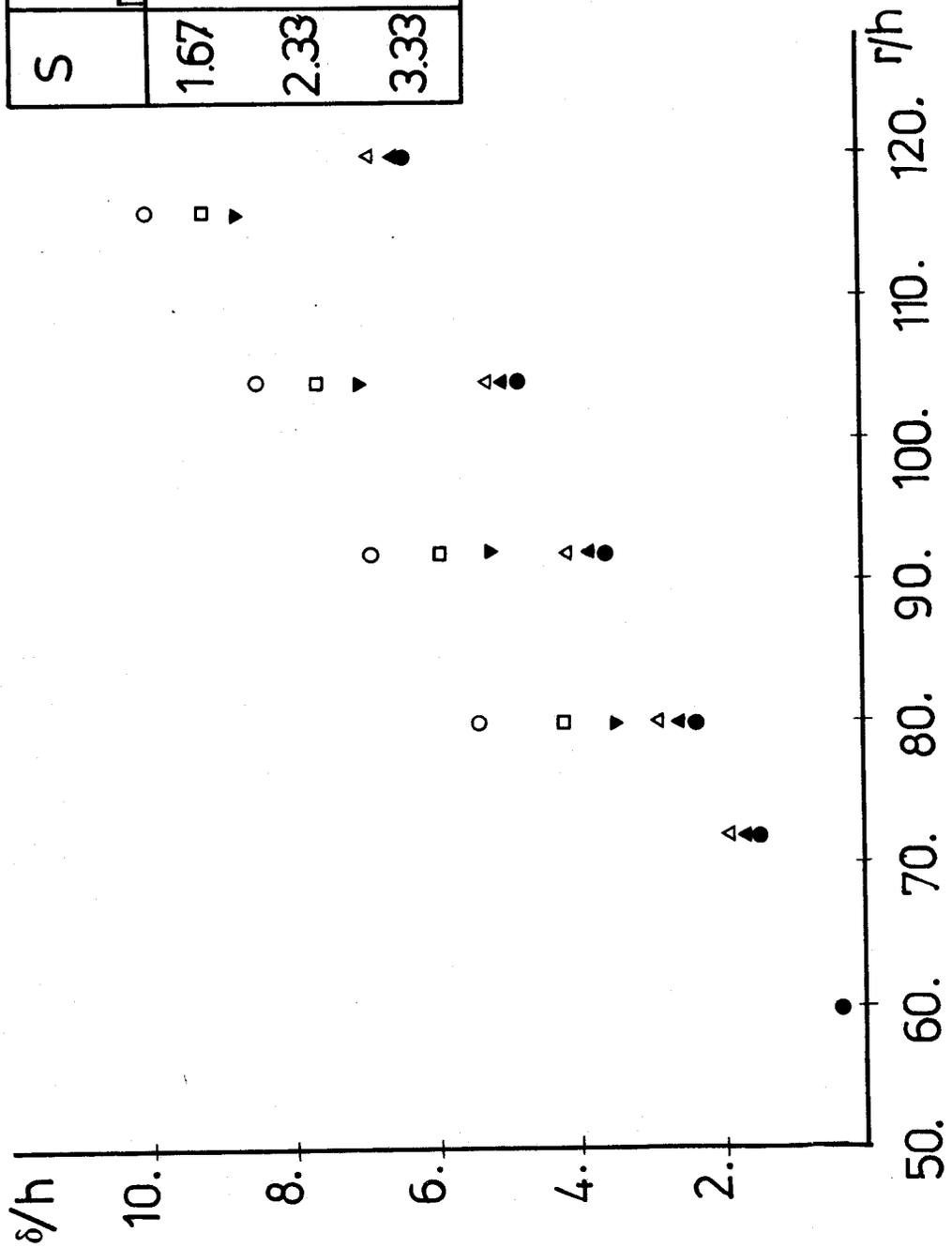


fig. v.12

S	calcul modele k-ε	expérience
1.67	○	+
2.33	★	▲
3.33	△	□

$r/h = 80.$

$\epsilon^* = 0.0167$

$Re \cdot 10^{-5}$

○+ 3.90

★▲ 5.46

△□ 7.80

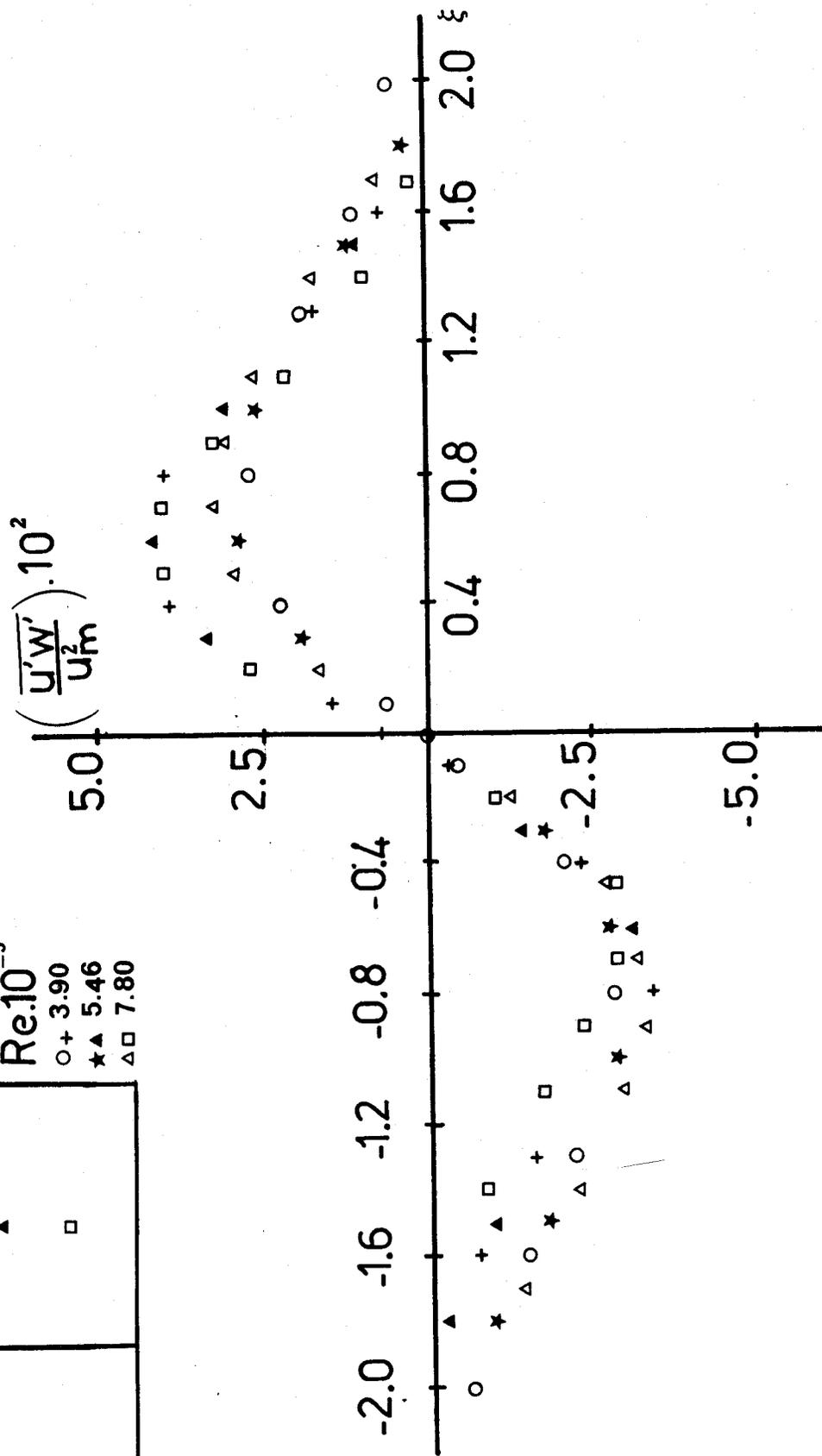


fig. v.13



$r/h = 92.$
 $\epsilon^* = 0.0167$

$Re \cdot 10^{-5}$

○ + 3.90
 ★ ▲ 5.46
 ▲ □ 7.80

même légende que fig. v.13

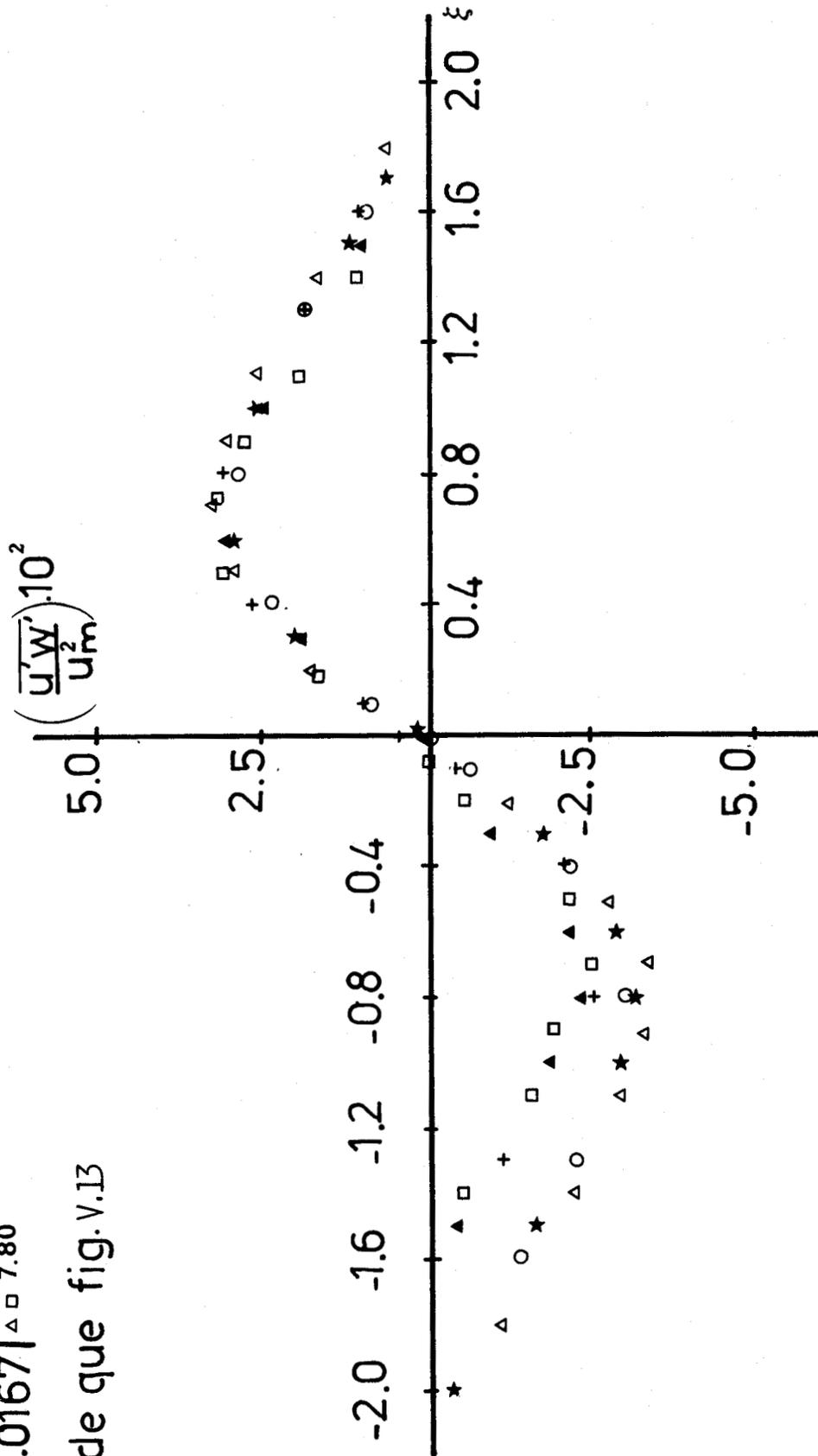


fig. v.14



$Re \cdot 10^{-5}$

- + 3.90
- ★ ▲ 5.46
- △ □ 7.80

$r/h = 104$

$\epsilon^* = 0.0167$

même légende que fig. V.13

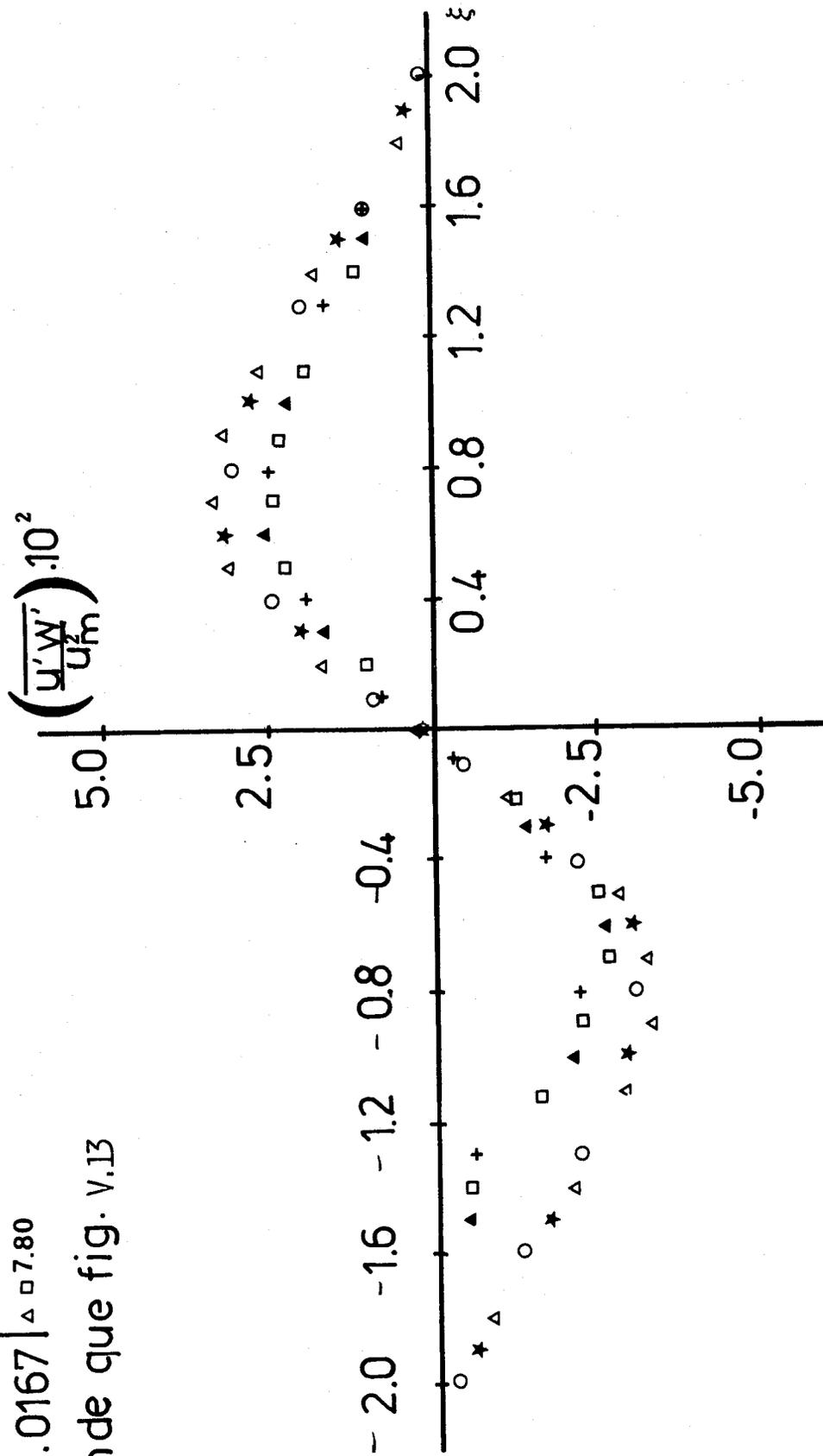


fig. V.15



$Re \cdot 10^{-5}$

$\epsilon^* = 0.0167$

$S = 2.33$

○ +
* ▲ 5.46
△ □

r/h	calcul modele k-ε	expérience
80.	○	+
92.	*	▲
104.	△	□

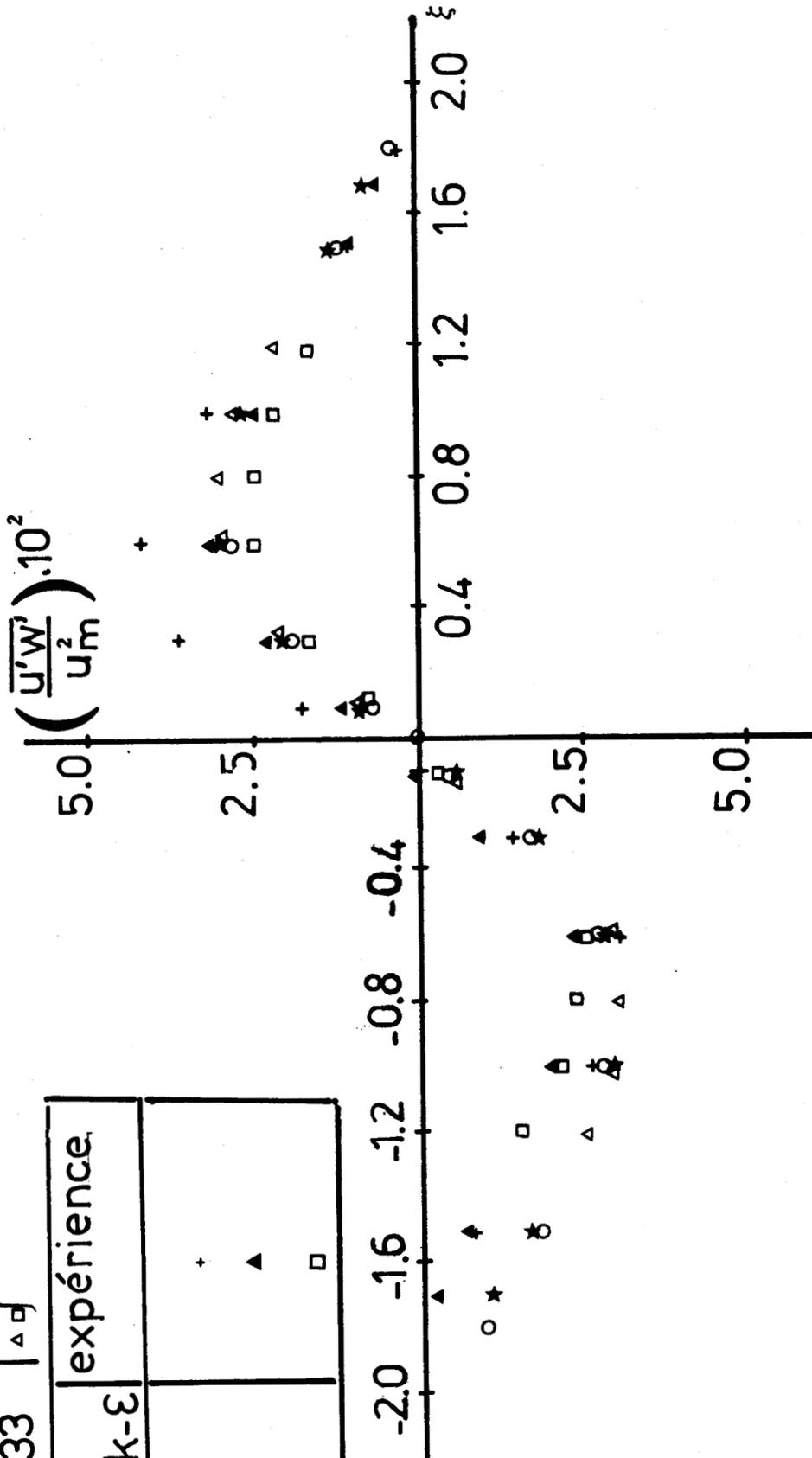


fig. V.16

$r/h = 80.$
 $\text{Re} \cdot 10^{-5}$
 $\circ + 7.80$
 $\star \triangle 5.46$
 $\epsilon^* = 0.0167$

S	calcul	expérience
3.33	○	+
3.90	★	▲
4.16	△	□

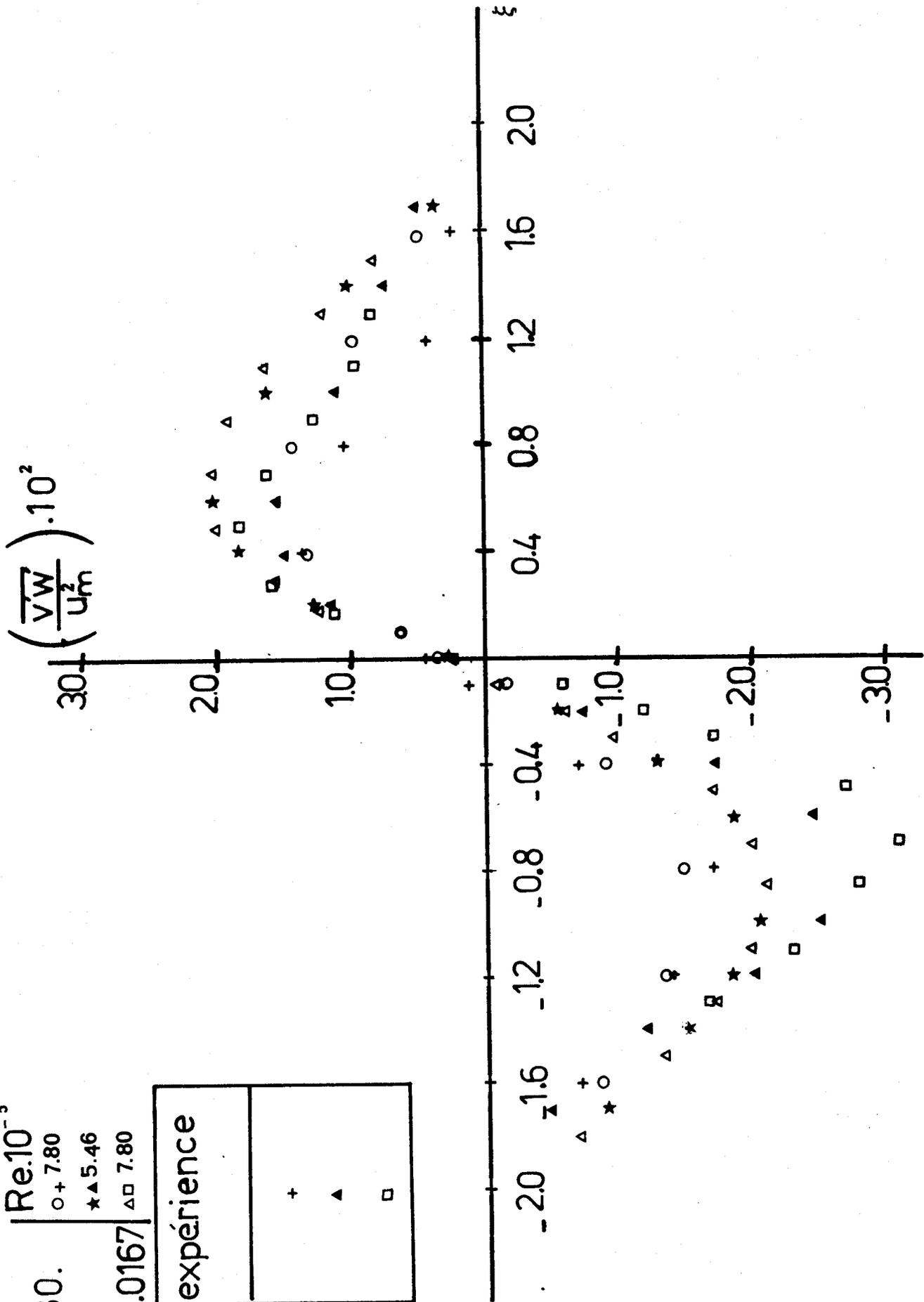


fig. V.17



$r/h = 80.$
 $\epsilon^* = 0.0167$

$Re \cdot 10^{-5}$
 $\star \circ 3.90$
 $\star + 5.46$
 $\star \Delta \bullet 7.80$

S	calcul	expérience
2.08	*	o
2.90	*	+
4.16	Δ	•

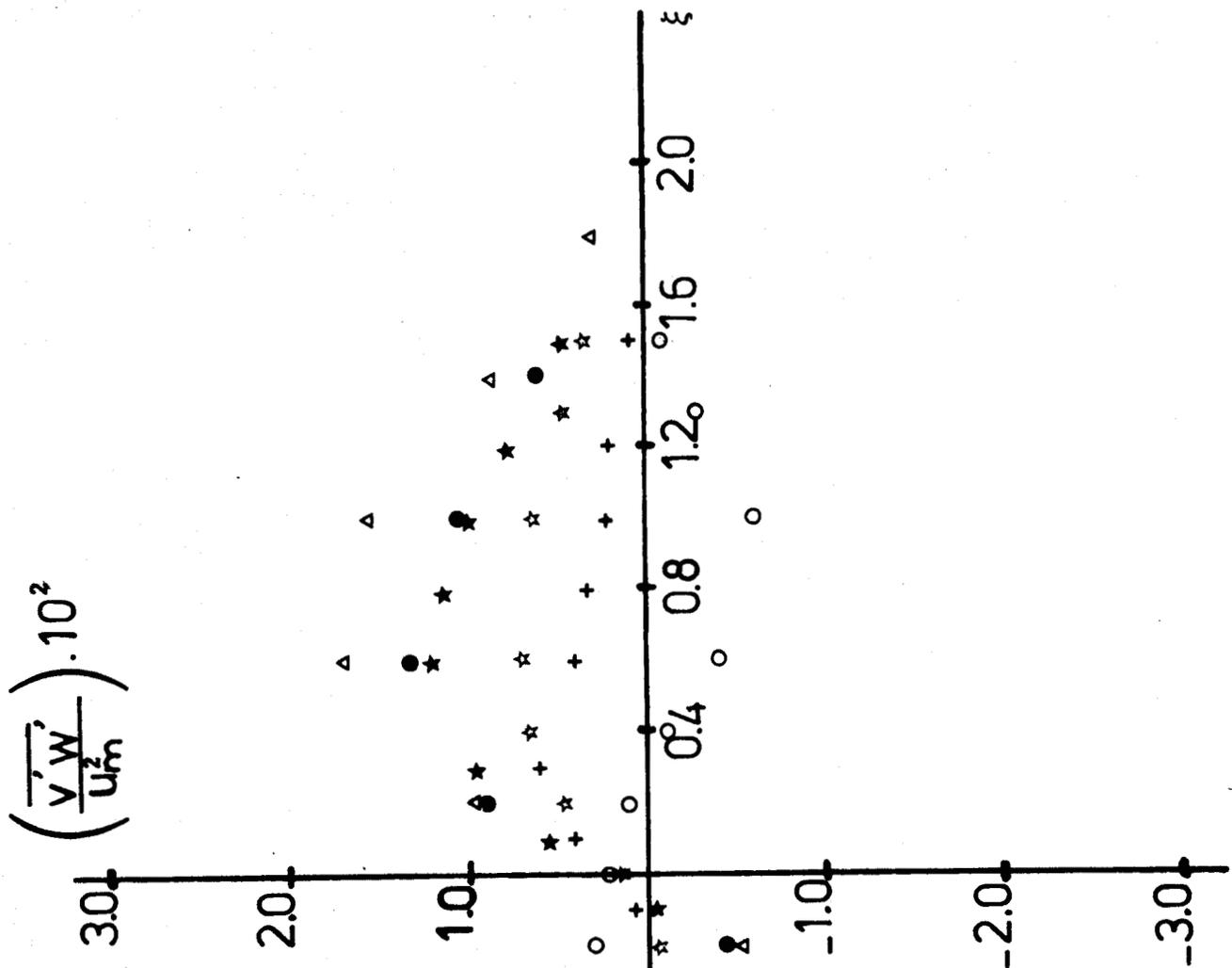


fig. V.18



$$Re = 7.80 \cdot 10^5$$

$$\Gamma/h = 92.$$

$$\varepsilon^* = 0.0167$$

S	calcul	expérience
3.33	○	+
4.16	△	□

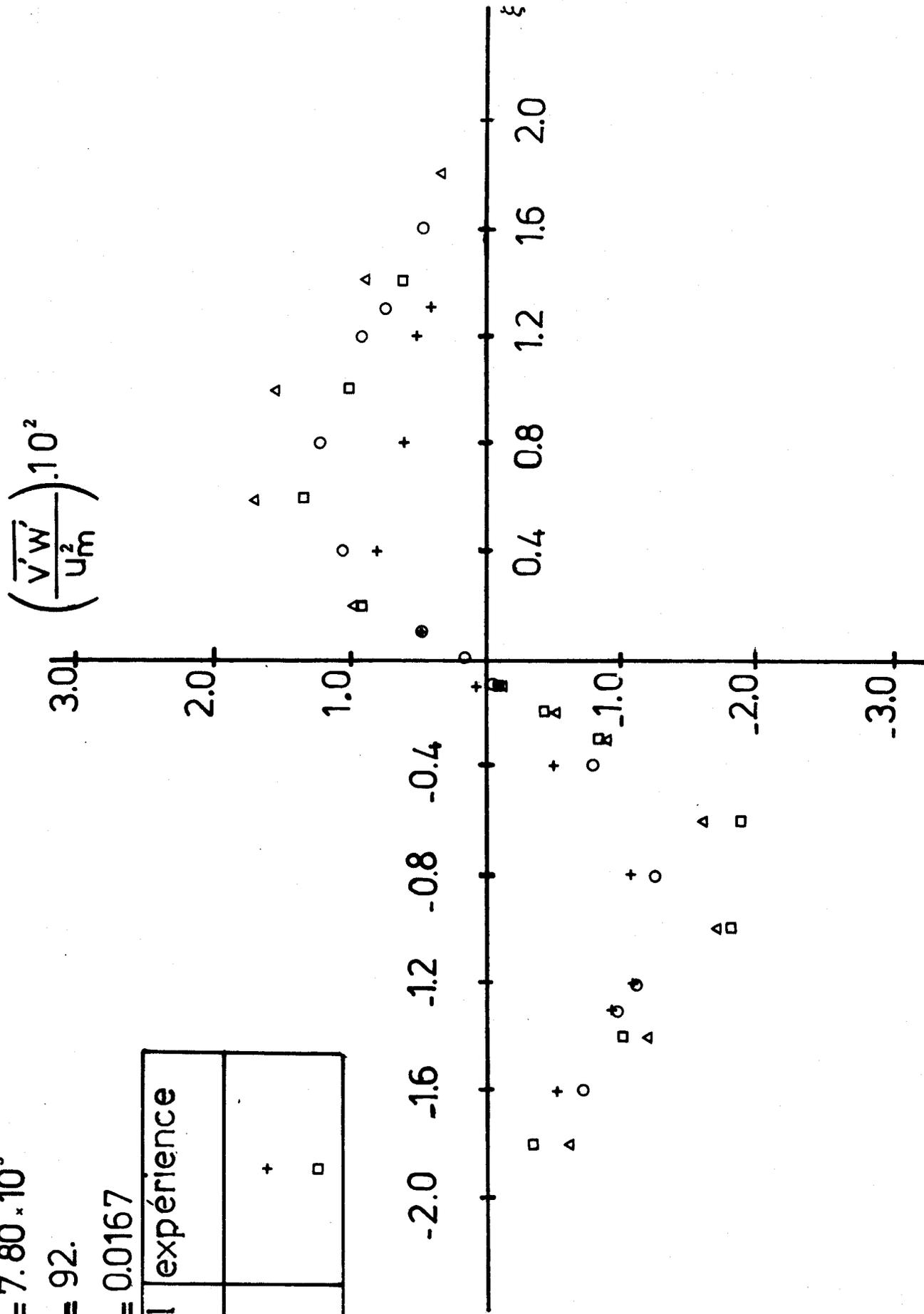


fig. V.19

$r/h = 92.$ $Re \cdot 10^{-5}$

☆○ 3.90

★+ 5.46

△● 7.80

$\epsilon^* = 0.0167$
même légende que fig. V.18

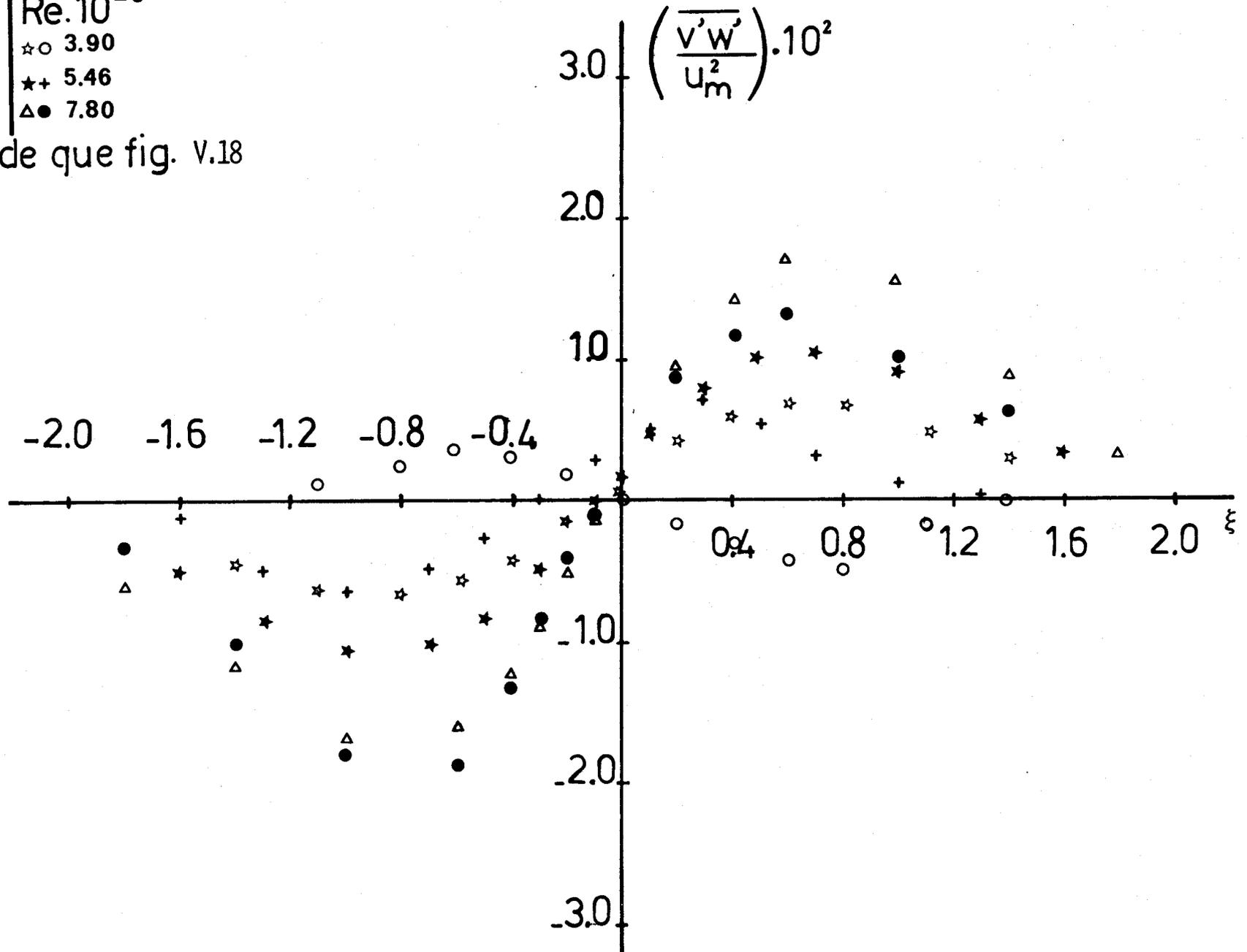


fig. V.20



$Re \cdot 10^{-5}$

▽ 3.90

x △ 5.46

■ 7.80

$r/h = 80.$

$\epsilon^* = 0.0167$

S	k-ε	expérience
1.67	▽	△
2.33	x	□
2.90	△	●
3.33	■	+

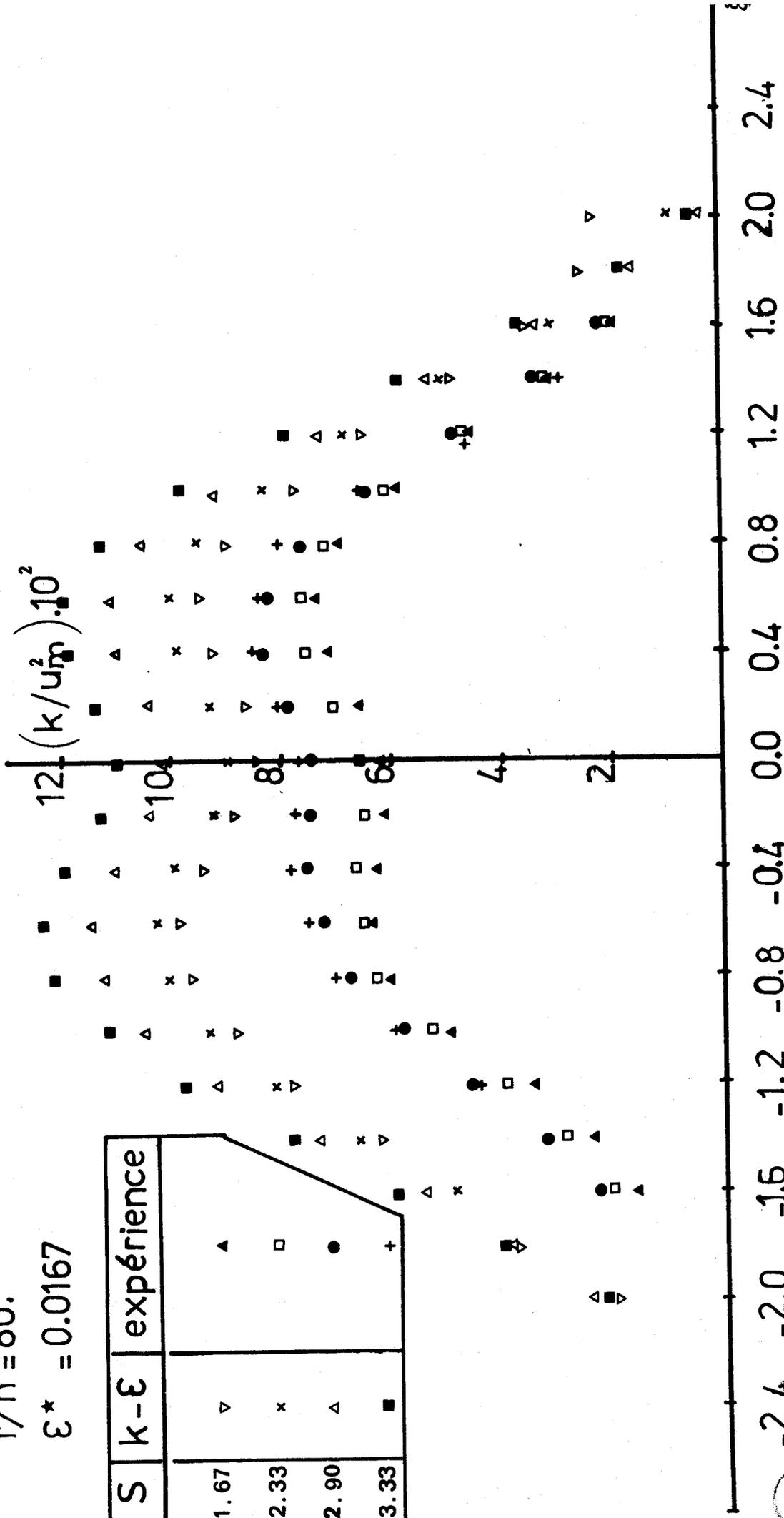


fig. v.21

$Re \cdot 10^{-5} \begin{cases} \nabla & 3.90 \\ \times \Delta & 5.46 \end{cases}$
 $r/h = 92.$
 $\varepsilon = 0.0167$

même légende que fig. V.21

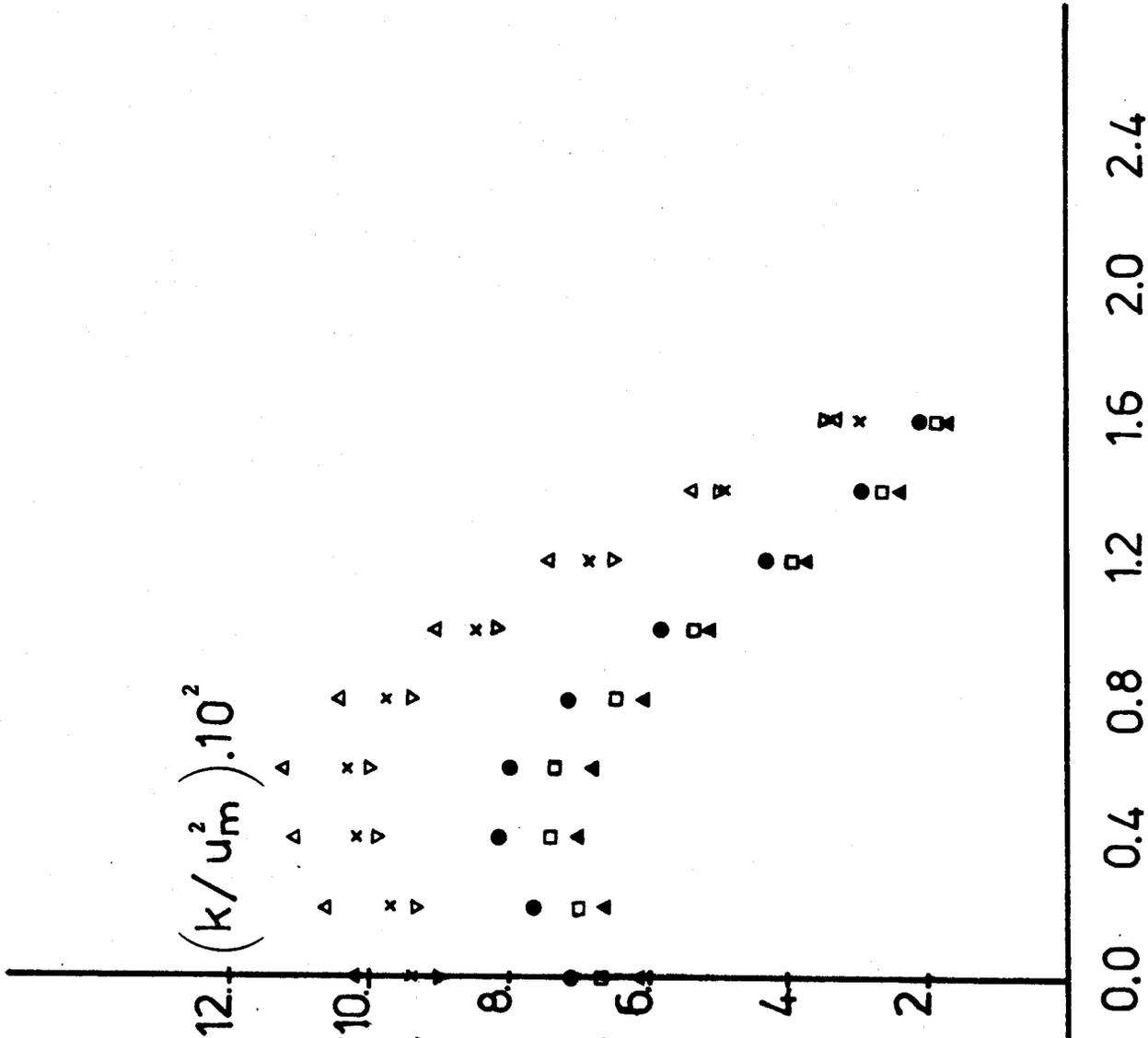


fig. V.22

-2.4 -2.0 -1.6 -1.2 -0.8 -0.4 0.0 0.4 0.8 1.2 1.6 2.0 2.4

S	calcul k-ε
1.67	●
2.08	★
2.33	☆
2.89	△
3.33	□
4.16	■

$r/h = 80.$

$\epsilon^* = 0.0167$

$Re.10^{-5}$

● 3.90

★ 5.46

□ 7.80

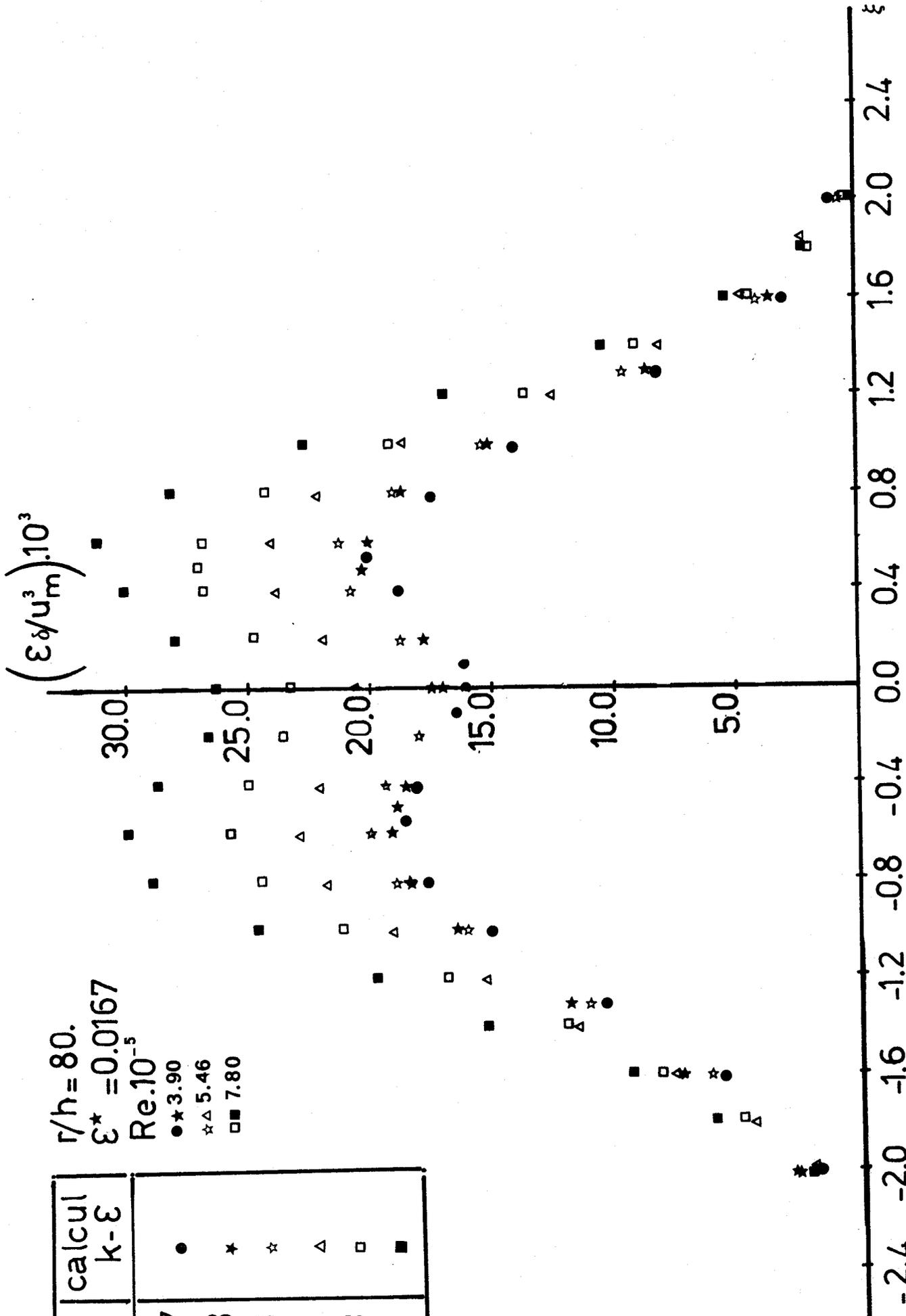


fig. V.23

$$r/h = 92.$$

$$\varepsilon^* = 0.0167$$

même légende que fig. V.23

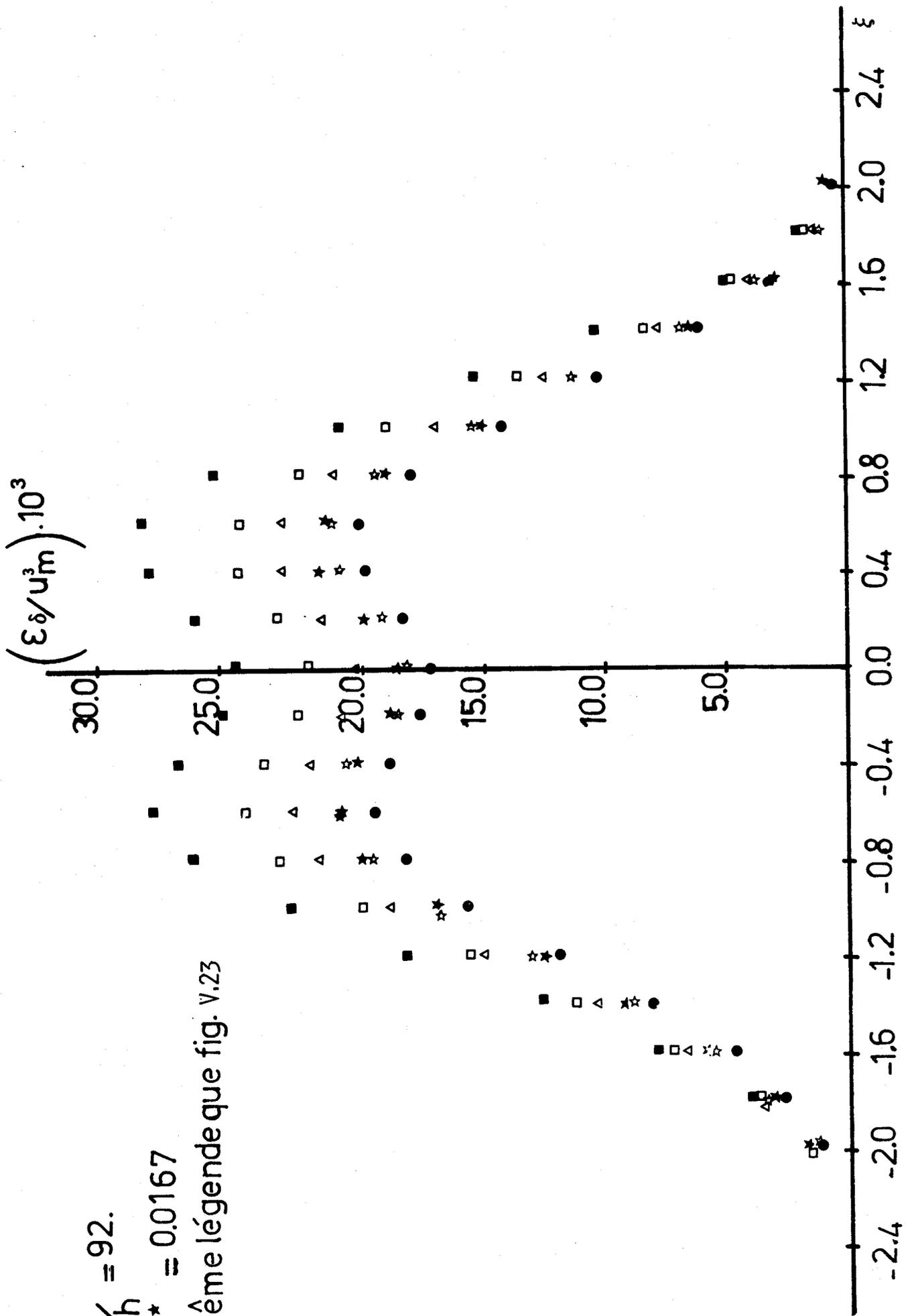


fig. V.24

$r/h = 104.$

memme légende que fig. V.23

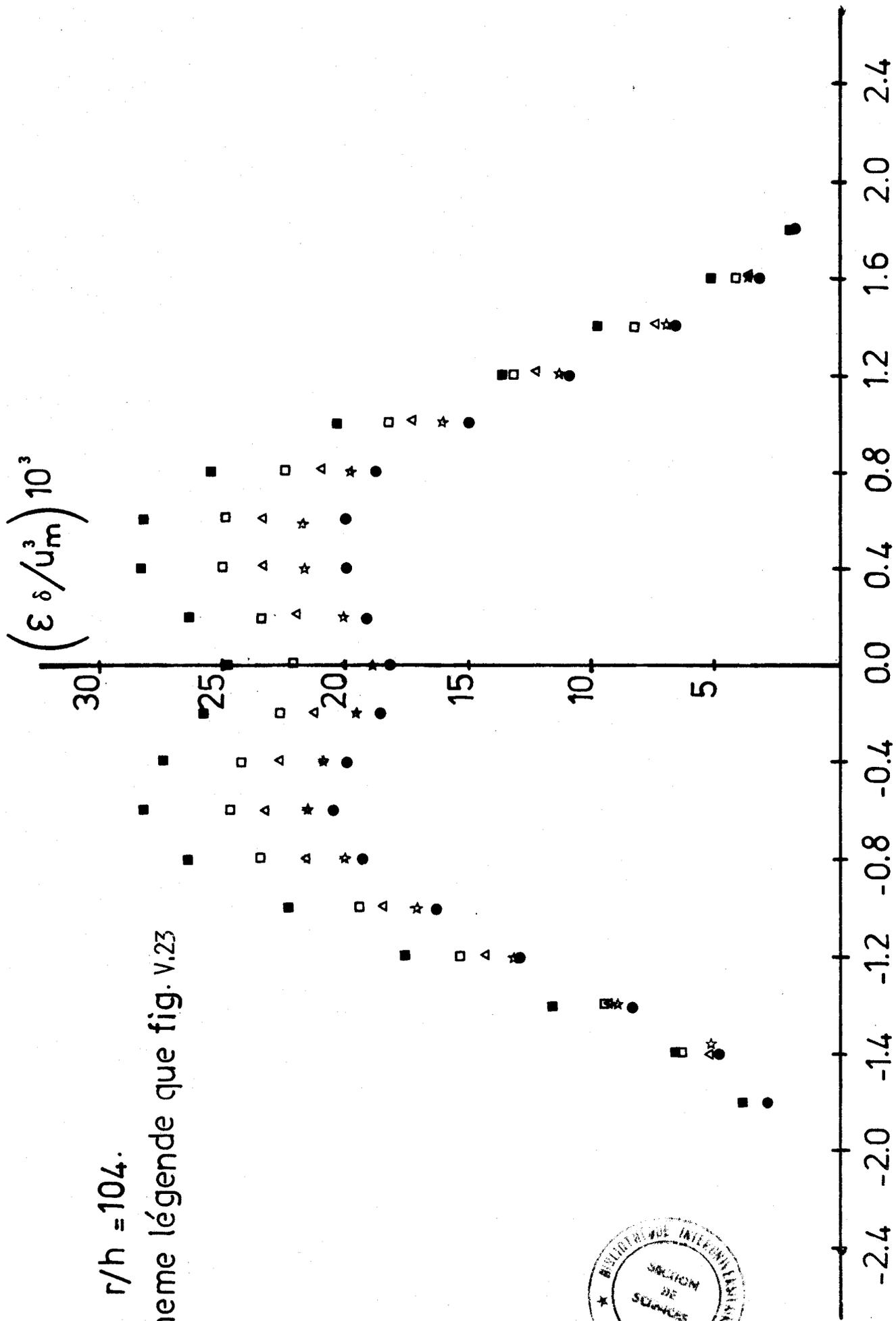


fig. V.25



RESUME

Le jet tournant libre est un exemple d'écoulement de cisaillement rendu complexe par des effets de rotation.

Le système ouvert des équations d'évolution régissant le phénomène est transformé en un système fermé au moyen d'une modélisation s'appuyant sur l'hypothèse de transport turbulent par gradient.

Une procédure du type "PATANKAR-SPALDING" a été prise comme base de résolution numérique. Un certain nombre de modifications ont été introduites : les plus importantes sont l'utilisation d'une fonction pour normaliser la coordonnée transversale et d'un maillage relatif à la vitesse axiale décalé par rapport à celui concernant les autres inconnues, à savoir les autres composantes de la vitesse et les grandeurs turbulentes.

Le code élaboré, fondé sur un modèle de turbulence du type énergie turbulente-dissipation, a permis de calculer l'écoulement dans la zone de sortie du jet.

L'accord avec les résultats expérimentaux est relativement satisfaisant en ce qui concerne l'évolution des profils de vitesses moyennes et des caractéristiques turbulentes du jet. Le calcul permet de plus d'accéder à certaines grandeurs difficilement mesurables.

MOTS CLES

TURBULENCE - COUCHE DE CISAILLEMENTS - JETS TOURBILLONNAIRES -

ECOULEMENT - INCOMPRESSIBLE - EQUATIONS DE REYNOLDS - CALCUL NUMERIQUE -

METHODE PATANKAR-SPALDING.