

Université des Sciences
et Techniques de Lille

55376

1984

H

N° d'ORDRE:

1172

55376

1984

4

THESE DE 3^e CYCLE

Discipline : Mathématiques Pures
Option : Géométrie Algébrique.

Courbes de l'espace projectif:
Séries linéaires incomplètes et multisécantes

par
Jean d'ALMEIDA

Thèse soutenue

le: 9 Juillet 1984



JURY:

Président:

D. LEHMANN

Professeur à l'Université de Lille 1

Rapporteur:

L. GRUSON

Professeur à l'Université de Lille 1

Examineur:

J. F. ROBINET

Maître - Assistant.

Université de Lille 1

A ma mère

(1924)

REMERCIEMENTS

Je remercie D. LEHTANN pour
l'honneur qu'il me fait en
acceptant de présider le jury.

R. GOBLOT m'a fait découvrir
la géométrie algébrique.
Depuis il m'a jamais cessé
de s'intéresser à mon travail.
Je tiens à lui exprimer toute
ma reconnaissance.

Je remercie également J.F. ROBINET
qui a accepté d'examiner cette
thèse.

Ce travail a été accompli sous
la direction de L. GRUSON.

J'ai eu le privilège de profiter
de son incontestable compétence
scientifique.

Il a fait preuve d'une
extraordinaire disponibilité
pour guider mes premiers pas
dans la "jungle" des « hyper-
image directe, complexe d'Eagon-Northcott,
suite spectrale, éclatement,
multiséante, surfaces réglées
quartiques et quintiques,
rationnelles et elliptiques,
courbe hyperelliptique, fibre
vectoriel stable, semistable
ou instable, etc ».

Si ce travail a un
quelconque intérêt, c'est
à lui que je le dois.

Introduction

On considère une courbe réduite irréductible X de degré d de $\mathbb{P}^r$ ($r \geq 3$).

On suppose que X n'est contenue dans aucun hyperplan de $\mathbb{P}^r$.

On s'intéresse alors à la série linéaire des sections de X par les hypersurfaces de degré n .

Cette série est complète lorsque l'homomorphisme naturel :

$$H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(n))$$

est surjectif.

C'est le cas dès que n est assez grand.

Il est naturel de chercher à préciser le sens de "n assez grand".

Ce travail a été entrepris par Castelnuovo dans [2].

Il a montré que la série était complète pour $n \geq d-2$ (X lisse).

Plus récemment Gruson, Lazarsfeld et Peskine se sont intéressés à ce problème dans [4].

Ils ont obtenu le résultat suivant :

Théorème ([4])

Soit $X \in \mathbb{P}^r$ une courbe réduite irréductible de degré d , non contenue dans un hyperplan.

- (i) La n -série est complète pour $n \geq d+1-r$.
- (ii) La $(d-r)$ -série est incomplète si et seulement si X est lisse rationnelle et ou bien $d = r+2$, ou bien $d > r+2$ et alors X a une $(d+2-r)$ -sécante.

L'existence de la $(d+2-r)$ -sécante semble donc être "l'obstruction essentielle" au caractère complet de la $(d-r)$ -série.

On pourrait se demander si cette situation subsiste pour les valeurs de $n < d-r$.

Les auteurs de [4] terminent leur article par la conjecture suivante:

Conjecture. ([4])

Pour $n \geq \frac{2d}{3} - (n-3)$, $H^2(\mathcal{I}_X(n)) \neq 0$ si et seulement si X a une $(n+2)$ -sécante.

(On se propose ici de vérifier cette conjecture pour les courbes de $\mathbb{P}^3$ dans le cas $n = d-4$.)

Dans le chapitre 1 on établira un énoncé qui permettra de vérifier la conjecture si le degré de X est supérieur à 9 et si X n'est pas d'un des types suivants:

- a.) X est une courbe rationnelle tracée sur une surface réglée quartique.
- b.) X est une courbe elliptique tracée sur une surface réglée quintique elliptique.

Cet énoncé (proposition 2) sera établi en utilisant les techniques de [4].

Il faudra cependant tenir compte du fait que les courbes ne sont plus nécessairement rationnelles comme dans [4].

Ceci nous obligera à avoir recours à la notion de filtration de Harder-Narasimhan.

La proposition 2 du chapitre 2 permettra de traiter le cas des courbes tracées sur les surfaces réglées.

On montrera essentiellement qu'il faut dans ce cas se préoccuper de l'intersection de X et du lieu singulier de la surface. Il faudra donc procéder à une description du lieu singulier et espérer qu'une de ses composantes sera la $(d-2)$ -sécante cherchée.

Dans le chapitre 2 on suppose que X est une courbe rationnelle tracée sur une surface réglée quartique rationnelle.

Dans ce cas, le lieu double est: une cubique gauche, une conique plus une droite, trois droites, une droite double plus une droite simple.

Dans chacun des cas on a le résultat escompté.

Dans le chapitre 3 X est une courbe elliptique tracée sur une surface réglée quintique elliptique.

On donne une description moderne de la transformation quadric-cubique de Semple - Roth ([9]).

On applique alors cette transformation à la description du lieu singulier de la surface réglée elliptique.

Enfin le chapitre 4 est consacré à l'étude des courbes de degré inférieur à 9.

Chapitre 2

Dans tout le texte on désignera par X une courbe lisse irréductible non plane de $\mathbb{P}^3$, de degré d .

On notera $\mathcal{I}_X$ l'idéal définissant

X dans $\mathbb{P}^3$.

Soit $\tilde{X}$ la normalisée de X et $p: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^3$ l'application naturelle.

$$\text{Poson } M = p^* \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(n).$$

On a alors la :

Proposition 2 : Soit X une courbe venant des hypothèses ci-dessus. Soit n un entier $> \frac{2}{3}d - 2$ (≥ 1 si le genre géométrique g de X est ≤ 2) tel que $h^1(\mathcal{I}_X(n)) > 0$. On suppose qu'il n'existe pas de droite au moins $(n+2)$ -sécante à X . Il existe alors un sous-fibré de rang 2 N de M de degré $> 2(n+1-d)$ dont tout fibré quotient de rang 1 est de degré $> n+1-d$.

$$0 \rightarrow \pi^*(\Lambda^2 M) \otimes f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)) \rightarrow \pi^*(\Lambda^2 N) \otimes f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)) \rightarrow \pi^*(N) \otimes f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)) \rightarrow \mathcal{O}_{X \times \mathbb{P}^3} \rightarrow \mathcal{O}_P \rightarrow 0$$

Soit A un $\mathcal{O}_X$ -module inversible de degré $n+g$ assez général.

Si on tensorise le complexe par π^*A et qu'on prend l'image par $R^i f_*$ on obtient pour $i=0, 1$ le complexe

$$C_i: 0 \rightarrow H^i(A(-1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) \rightarrow H^i(\Lambda^2 \pi^* N \otimes A) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \rightarrow H^i(\pi^* N \otimes A) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \rightarrow H^i(A) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow 0$$

Notons que $h^2(\pi^* N \otimes A) = 0$ (car $h^2(B \otimes Q \otimes A) = 0$ implique $h^1(Q \otimes A) = 0$, puisque B^V est engendré par ses sections, et $h^2(B \otimes A) = 0$ car $\chi(B \otimes A) = n+1-6 > 0$ et A assez général.)

Par ailleurs l'aboutissement de la suite spectrale d'hyper-image directe par f d'une résolution de $\pi^*A \otimes \mathcal{O}_P$ est $R^i p_* A$ ($i=0, 1$), et l'on a $R^2 p_* A = 0$ puisque p est fini.

$$E_n \text{ notant } u: H^0(\pi^* N \otimes A) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \rightarrow H^0(A) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$$

la flèche de droite de C_0 , on a une suite exacte $H^0(A(-1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) \rightarrow H^0(\Lambda^2 \pi^* N \otimes A) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \rightarrow H^0(\pi^* N \otimes A) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \rightarrow H^0(A) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow 0$

D'autre part le conoyau de la flèche composée $H^1(A(-1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) \rightarrow H^1(\Lambda^2 \pi^* N \otimes A) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \rightarrow H^1(\pi^* N \otimes A) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)$

$$\text{est } K = (R^2 f_*(\pi^*(\Lambda^2 Q \otimes A) \otimes \mathcal{O}_Y))(-2)$$



Démonstration:

Montrons que M n'est pas semi-stable: d'après [4], prop 1.2, il suffit

de voir que $h^1(\Lambda^2 M \otimes A) = 0$ pour au moins un $\mathcal{O}_X$ -module inversible A de degré $n+g$ si par l'absurde on suppose que π est semi-stable.

Comme $\chi(\Lambda^2 M \otimes A) = 3(n+1) - 2d$, ceci résulte de [8] 1.6.3 et 1.7.4, compte tenu des hypothèses faites sur n .

Supposons qu'il existe une suite exacte $0 \rightarrow B \rightarrow M \rightarrow Q \rightarrow 0$ telle que Q soit un fibré de rang 2 et que $h^1(B \otimes Q \otimes A) = 0$ pour 1 $\mathcal{O}_X$ -module inversible A de degré $n+g$, assez général. Posons $b = \deg(B^V)$. On sait que $h^2(\Lambda^2 M \otimes A) \neq 0$ ([4] prop 1.2). La suite exacte $0 \rightarrow B \otimes Q \rightarrow \Lambda^2 M \rightarrow \Lambda^2 Q \rightarrow 0$ induit un isomorphisme $H^2(\Lambda^2 M \otimes A) \xrightarrow{\sim} H^2(\Lambda^2 Q \otimes A)$ donc $\chi(\Lambda^2 Q \otimes A) = -d + 6 + n + 1 < 0$.

Montrons (en suivant [4], p. 502, "cas 2") qu'il existe une droite $(d-6)$ -séante à X .

Notons $p: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^3$ le morphisme d'image X , $M \subset \tilde{X} \times \mathbb{P}^3$ le graphe de p , $\pi: \tilde{X} \times \mathbb{P}^3 \rightarrow \tilde{X}^2$ les projections.

Y est l'hypersurface de $X \times \mathbb{P}_3$ ayant pour équation la section de $H^*(B^v) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(1)$ déduite de l'inclusion $B \subset M$

On a $Y = \text{Proj}_X(E)$ où E est le fibré de rang 3 sur X , conoïde de la flèche $B \rightarrow V \otimes \mathcal{O}_X = H^0(\mathbb{P}_3^{(1)}) \otimes \mathcal{O}_X$.

Notons l'interprétation suivante de la trace sur Y de la fibre $f^{-1}(x)$ (indentifié à X^v) d'un point x de $\mathbb{P}_3$: si $q: X^v \rightarrow \mathbb{P}_3^v$ est le morphisme

de degré b défini par la transposée $V^* \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow B^*$ de l'inclusion ci-dessus, $f^{-1}(x) \cap Y$ est l'image réciproque par q du plan de $\mathbb{P}_3^v$

défini par x . Ainsi $\text{supp}(K)$ est la variété linéaire L de $\mathbb{P}_3$ orthogonale de la variété linéaire de $\mathbb{P}_3^v$ engendrée par l'image de q . Comme $b > 0$, on a $\dim(L) \leq 2$.

Si $\dim(L) \leq 0$ la suite exacte $0 \rightarrow K \rightarrow \text{coker } u \rightarrow P_* A \rightarrow 0$ montre que $J_X / \text{ann}(\text{coker } u)$ est de longueur finie;

comme $\text{ann}(\text{coker } u)$ est $(n+1)$ -régulier ([I] prop 1.2) on en déduit $h^2(J_X(n)) = 0$ contrairement à l'hypothèse.

Si $\dim(L) = 2$, l'image de q est la droite orthogonale de L et q s'identifie à la projection de sommet L ; comme q est de degré b , L est $(d-b)$ -sécante à X .

Si la filtration de Harder-Narasimhan (L_i) de M est $0 \rightarrow B \rightarrow M \rightarrow Q \rightarrow 0$ avec $\text{rg}(B) = 2$, et si $h^1(B \otimes Q \otimes A) > 0$ pour tout A de degré $n+g$, on a $\chi(B \otimes Q \otimes A) = -d + \deg(B) + 2(n+1) < 0$, ce qui est impossible car $\deg(B) > -\frac{d}{3}$; on est donc dans le cas ci-dessus.

Si la filtration de Harder-Narasimhan de M est $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow B \rightarrow 0$ avec $\text{rg}(B) = 1$, on a $h^2(N \otimes B \otimes A) = 0$ (car $\deg(N) > -\frac{2d}{3} \geq -n-1$)

donc $h^2(B \otimes N \otimes A) > 0$ donc $\chi(B \otimes N \otimes A) = -\deg(N) + 2(n+1-d) < 0$, d'où la proposition dans ce cas (puisque N est semi-stable).

Enfin, si les quotients successifs de la filtration de Harder-Narasimhan de M sont trois modules de rang 1 $(B_i)_{1 \leq i \leq 3}$ de degrés respectifs (b_i) $b_1 > b_2 > b_3$, et si l'on n'est pas dans le cas ci-dessus on a $h^2(B_1 \otimes B_3 \otimes A) > 0$ pour tout A de degré $n+g$ donc $\chi(B_1 \otimes B_3 \otimes A) = b_2 - d + n + 1 < 0$, d'où la proposition.

c. q. f. d.

Application :

On a $n = d - 4$. Les hypothèses sont
 $h^2(\mathcal{I}_X(d-4)) > 0$, $d > 9$ (≥ 9 si $g \leq 2$).
Il faut montrer qu'il existe une droite
($d-2$)-sécante à X . Si ce n'est pas le cas,
il existe, d'après la proposition 1, un sous-fibré
de rang 2 N de M , de degré $\geq 1-5$, dont
tout quotient de rang 1 est de degré $\geq 1-2$.

On pose $V = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$, $E = \frac{V \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}}{N}$,
 $\tilde{S} = \text{Proj}_{\tilde{X}}(E)$, on note $\pi: \tilde{S} \rightarrow \tilde{X}$
la projection et $\mathcal{O}_{\tilde{S}}(1)$ le $\mathcal{O}_{\tilde{S}}$ -module
inversible "tautologique" quotient de π^*E .
Le composé $V \otimes \mathcal{O}_{\tilde{S}} \rightarrow \pi^*E \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{S}}(1)$
définit un morphisme $q: \tilde{S} \rightarrow \mathbb{P}^3$ de
degré $\deg(E) = -\deg(N) \leq 5$; l'application
 $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ -linéaire naturelle $E \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{X}}(1)$ définit
une section non nulle du $\mathcal{O}_{\tilde{S}}$ -module
inversible $(\Lambda^2 E^\vee(1)) \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{X}}} \mathcal{O}_{\tilde{S}}(1)$ dont
la courbe des zéros est isomorphe à $\tilde{X}$ par π ;
la restriction de q à cette courbe est
isomorphe par π au morphisme $p: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^3$.

Autrement dit la courbe X est tracée sur la
surface réglée S de $\mathbb{P}^3$, image de $\tilde{S}$ par q .

La donnée de q est équivalente à celle
d'un morphisme $\bar{q}$ de $\tilde{X}$ dans la grassmannienne
 G des droites de $\mathbb{P}^3$: pour tout point x de $\tilde{X}$,
 $\bar{q}(x)$ est le point de G attaché à la droite
 $\pi^{-1}(x) \subset \tilde{S}$ plongée par q dans $\mathbb{P}^3$.
Le morphisme composé de $\bar{q}$ et de l'inclusion
de G dans $\mathbb{P}^5$ est défini par l'application
 $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ -linéaire naturelle de $\Lambda^2 V \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ sur $\Lambda^2 E$;
cel est de degré $(\deg E)$.

Supposons que $\bar{q}$ ne soit pas une application
birationnelle de $\tilde{X}$ sur son image; celle-ci
est alors une conique (elle ne peut être
une droite car X n'est pas plane).
Si le plan de cette conique est contenu dans G ,
 S est un cône du second degré dont une
génératrice générale coupe X en 2 points;
on vérifie alors que X est, selon la
parité de d , intersection complète ou liée à
une droite sur S , donc authentiquement
de Cohen-Macaulay, ce qui est exclu (ici).

Si le plan de $\bar{q}(\tilde{X})$ n'est pas contenu
dans G , S est une quadrique lisse dont
une famille de génératrices (correspondant à la
conique $\bar{q}(\tilde{X})$) est formée de bisécantes à X
(puisque $\bar{q}: \tilde{X} \rightarrow \bar{q}(\tilde{X})$ est 1 revêtement (ramifié) double;
l'autre famille est donc formée de $(d-2)$ -sécantes
à X .

On suppose maintenant que $\bar{q}$ est une application birationnelle de $\tilde{X}$ sur son image.

Si $\bar{q}(\tilde{X})$ est plane, S est un cône de degré ≤ 5 , ou une quadrique selon que le plan de $\bar{q}(\tilde{X})$ est contenu dans G ou pas. Dans le premier cas X (supposée lisse et birationnelle à $\bar{q}(\tilde{X})$) est de degré ≤ 6 , ce qui est exclu; dans le second cas une famille de génératrices de la quadrique est formée de $(d-1)$ -sécantes à X .

Si $\bar{q}(\tilde{X})$ n'est pas plane, on a $g \leq 2$ (puisque le degré de $\bar{q}(\tilde{X}) \leq 5$).

On vérifie qu'un fibré de rang 2 et de degré 5 ayant au moins quatre sections indépendantes sur une courbe de genre 2 est instable, ce qui permet d'éliminer le cas où X est de genre 2: en effet si $N^\vee$ est de degré 5, il est stable.

Il faut maintenant examiner les cas

$g=0$ et $g=1$.

Supposons $\tilde{X}$ rationnelle; on a $\deg(E) \leq 4$ (car $N^\vee$ n'est pas stable; si $\deg(E) < 4$ on vérifie facilement que X a une $(d-1)$ -sécante).

On peut donc supposer que $\deg(E) = 4$

On a alors $N = \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(-2)$

(après identification de $\tilde{X}$ à $\mathbb{P}^2$).

Ce sera l'objet du chapitre 2.

Supposons $\tilde{X}$ elliptique; on a $\deg(E) \geq 4$,

car $\bar{q}(\tilde{X})$ n'est pas plane;

Il faut maintenant examiner les cas:

$\deg(E) = 4$ et $N^\vee$ semi-stable; $\deg(E) = 5$ et $N^\vee$ stable.

Ce sera l'objet du chapitre 2.

Proposition 2.

Soient S une surface de $\mathbb{P}^3$ dont la normalisée $\tilde{S}$ est lisse, $\mathcal{I}_P$ l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$, image réciproque du "conducteur" $\text{Hom}(\mathcal{O}_{\tilde{S}}, \mathcal{O}_S) \subset \mathcal{O}_S$,

Γ la courbe (non nécessairement réduite de $\mathbb{P}^3$ d'idéal $\mathcal{I}_P$, $\tilde{X}$ une courbe tracée sur $\tilde{S}$, section d'un $\mathcal{O}_{\tilde{S}}$ -module inversible L ;

On suppose que l'image X de $\tilde{X}$ dans $\mathbb{P}^3$ n'a pas de composante commune avec Γ .

Notons $\mathcal{I}_X$ l'idéal de X dans $\mathbb{P}^3$.

Pour que $h^2(\mathcal{I}_X(n)) = 0$ (où n est un entier ≥ 0)

il suffit que $h^2(L(s-n-4)) = 0$ (où s est le degré de S) et $h^2(\mathcal{I}_X \otimes \mathcal{O}_\Gamma(n)) = 0$.



Démonstration

On a $\mathcal{I}_P = \omega_{\tilde{S}} \otimes \omega_S^\vee$, où $\omega_{\tilde{S}}$ et ω_S désignent les faisceaux canoniques.

La proposition résulte alors de la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{I}_P \otimes L^\vee \rightarrow \mathcal{I}_X \rightarrow \mathcal{I}_X \otimes \mathcal{O}_P \rightarrow 0$ en tenant compte de l'égalité $\omega_S = \mathcal{O}_S(s-4)$ et de l'isomorphisme $H^2(L(s-m-4)) = (H^2(L^\vee \otimes \omega_S^{(n+4-s)}))^\vee$ c. q. f. d.

La proposition 2 sera utilisée en supposant que la surface S est réglée.

On utilisera les notations suivantes:

Soient $\tilde{X}$ une courbe lisse, E un $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ -module localement libre de rang 2 et de degré s , $\tilde{S} = \mathbb{P}(E)$, $\pi: \tilde{S} \rightarrow \tilde{X}$ la projection, $\mathcal{O}_{\tilde{S}}(1)$ le quotient inversible tautologique de π^*E . L'application $(A, k) \rightarrow A \otimes \mathcal{O}_{\tilde{S}}(k)$ identifie $\text{Pic}(\tilde{X}) \oplus \mathbb{Z}$ et $\text{Pic}(\tilde{S})$, donc $\mathbb{Z}^2$ et le quotient $\text{Num}(\tilde{S})$ de $\text{Pic}(\tilde{S})$ par l'équivalence numérique.

La classe de $A \otimes \mathcal{O}_{\tilde{S}}(k)$ est donc identifiée au vecteur colonne $\begin{pmatrix} \deg A \\ k \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$.

La matrice de la forme bilinéaire d'intersection est alors $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & s \end{pmatrix}$, le $\mathcal{O}_{\tilde{S}}$ -module inversible canonique $\omega_{\tilde{S}}$ est isomorphe à $(\omega_{\tilde{X}} \otimes \pi^*E) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{S}}(-2)$, sa classe dans $\text{Num}(\tilde{S})$ est $\begin{pmatrix} 2g-2+s \\ -2 \end{pmatrix}$.

Il faut maintenant voir comment la proposition 2 se traduit dans ce contexte.

On s'intéresse à l'isomorphisme $H^*(L(s-m-4)) = (H^*(L^\vee \otimes \omega_S^{(n+4-s)}))^\vee$

La suite spectrale $H^p R^q \pi_* F \Rightarrow H^m F$

dégénère ici (du fait que $\tilde{X}$ et les fibres de π sont de dimension 1) en une suite exacte

$$0 \rightarrow H^0(R^1 \pi_* (L(s-m-4))) \rightarrow H^2(L(s-m-4)) \rightarrow H^2(\pi_* L(s-m-4)) \rightarrow 0$$

Supposons $L = A \otimes \mathcal{O}_{\tilde{S}}(1)$. Le terme de droite est nul pour $m \geq s-2$ et le terme de gauche est égal à $H^0(A \otimes (\pi^*E)^\vee \otimes \mathcal{O}_{\tilde{S}}^{m+1-s})$ d'après [6] III exercice 8.4.

On est maintenant en mesure d'énoncer un corollaire qui est exactement la traduction de la proposition 2.

Corollaire: Soit X une courbe non plane de degré d de $\mathbb{P}^3$, de normalisée $\tilde{X}$. On suppose que les hypothèses de la proposition 2 sont satisfaites. On suppose de plus que $\tilde{S} = \mathbb{P}(E)$, où E est un $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ -module localement libre de rang 2 et de degré s .

On suppose enfin que $h^2(\mathcal{I}_X(d-4)) > 0$,

$d > 9$ (≥ 9 si $g \leq 2$).

Alors on a $h^0((\Lambda^2 E)^{\otimes 2})^\vee \otimes \mathcal{O}_X(2) \otimes \text{Sym}^2(E^\vee) > 0$
 $d-3-A$

ou $h^2(\mathcal{I}_X \otimes \mathcal{O}_\Gamma(d-4)) > 0$.

Démonstration :

Il suffit de prendre $A = \Lambda^2 E^\vee \otimes \mathcal{O}_X(2)$

On a évidemment $d-4 \geq 5-2$
 c.q.f.d

On devra donc s'intéresser à l'intersection
 de X et de Γ . Sur $\tilde{S}$ on peut calculer
 le nombre d'intersection des diviseurs
 associés à $\tilde{X}$ et à l'image réciproque
 de Γ sur $\tilde{S}$.

On peut montrer que ce nombre est
 aussi le "nombre d'intersection" de Γ et
 de X , i.e. le degré du schéma (de dimension 0)
 d'idéal $\mathcal{I}_X + \mathcal{I}_\Gamma$.

Il suffit d'avoir un résultat local.

Soient R un anneau local de Gorenstein,
 de dimension 2, réduit, dont le normalisé
 $\bar{R}$ est régulier, $\bar{I}$ le caractère de $\bar{R}$ dans R ,

Soit f un élément de R .

La courbe X étant lisse, on a

$$R/(R \cap f\bar{R}) = \bar{R}/f\bar{R} \quad \text{donc}$$

$$R/(1+R \cap f\bar{R}) = \bar{R}/(1+f\bar{R})$$

On a donc $\text{long}(R/(1+(R \cap f\bar{R}))) = \text{long}(\bar{R}/(1+f\bar{R}))$.

On suppose évidemment que X et Γ n'ont
 pas de composante commune.



Chapitre 2

Courbes rationnelles.

Soit X une courbe non plane de $\mathbb{P}_3$, lisse rationnelle de degré d , image d'un morphisme $p: \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_3$ (qui est un isomorphisme de $\mathbb{P}_1$ sur X .)

Si $h^2(\mathcal{I}_X(d-4)) > 0$ alors, ou bien X admet une droite au moins $(d-2)$ -sécante, ou bien $M = p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(2)$ admet 1 sous-fibré N de rang 2 isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-2)$. On pose $E = \frac{V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}}{N}$

ou $V = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(2))$ et on utilise les notations relatives à la surface réglée S de degré 4 contenant X .

Comme S n'est pas un cône (X est lisse), on a soit $E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(2)$, soit $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(3)$

Appliquons le corollaire de la proposition 2 :

on a $((\wedge^2 E) \otimes \mathcal{O}_X)^v \otimes \mathcal{O}_X(1) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(d-8)$ $m+1-s=d-7$.
Par ailleurs $H^0(\text{Sym}_{d-7}(E^v)(d-8)) = 0$ car la

décomposition de $\text{Sym}_{d-7}(E^v)$ en somme directe de modules inversibles fait intervenir des modules de degré $\leq -(d-7)$.

On voit donc que $H^2(\mathcal{I}_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(d-4)) \neq 0$ ou

Γ est le lieu singulier de S .

Il s'agit de montrer que ceci implique que l'une des composantes de Γ est une droite $(d-2)$ -sécante à X .

On devra donc procéder à la description du lieu singulier de S et étudier son intersection avec X .

La donnée de l'inclusion $N \subset V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}$ est équivalente (après choix d'un isomorphisme $N \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-2)$ et d'une base de V) à celle d'une matrice (q_{ij}) où $\begin{matrix} 0 \leq i \leq 3 \\ j = 0, 1, 2 \end{matrix}$

$q_{ij} \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(2))$. Identifions $\mathbb{P}_2$ et $\mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(2)))$ (ce qui revient à plonger $\mathbb{P}_2$ dans $\mathbb{P}_3$ par le morphisme de Veronese.) Notons h_{ij} l'image de q_{ij} dans $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(2))$.
Identifions $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(2))$ à $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(2))$.

Le sous-schéma de $\mathbb{P}_2$ défini par les 2-mineurs de la matrice (h_{ij}) est de dimension zéro : en effet il ne rencontre pas l'image C du plongement de Veronese $v: \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_2$ (car N est 1 sous-fibré de $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}$).
Considérons le complexe d'Eagon-Northcott

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^4(-2) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2) \rightarrow 0$$

(construit sur la matrice (hig));

son homologie est de support fini.

Notons F, R, R' le conoyau, l'image, le noyau de la flèche de droite. Par le calage on voit que $H^2(R) \cong H^2(R') = 0$; comme les lignes de (hig) sont indépendantes (sur le corps de base $\mathbb{C}$) (car S n'est pas un cône), on a $h^0(F) \leq 2$, donc F est de longueur ≤ 2 .

On distingue les cas suivants:

(a) $F = 0$, (b) $F \cong k(x)$ pour $x \in \mathbb{P}^2$,

(c) $F \cong k(x_1) \oplus k(x_2)$, $x_1 \neq x_2$,

(d) $F \cong \mathcal{O}_x / (t, u^2)$ où $x \in \mathbb{P}^2$, (t, u)

est un système de générateurs de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_x$.

Parmi les $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ -modules de longueur 2 figure aussi $k(x) \oplus k(x)$ où x est un point de $\mathbb{P}^2$, mais ce cas ne peut se présenter ici: il correspond au cas où toutes les droites h_{ig} passent par x ;

dans ce cas l'inclusion $N \hookrightarrow V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ est invariante par l'involution de $\mathbb{C}$ des couples de points alignés avec x de sorte que S est une quadrique double.

Etude du cas (a)

Ce cas est (abstraction faite de la position de C dans $\mathbb{P}^2$) uniquement déterminé à automorphisme près de $\mathbb{P}^2$, plus précisément:

Lemme 2: Soit $(h_{ig})_{0 \leq i \leq 3, g=0,1,2}$ une matrice

coefficients dans $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$ dont les mineurs maximaux sont sans zéro commun dans $\mathbb{P}^2$. Soit E le $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ -module localement libre de rang 2, noyau de l'application linéaire $u: \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^4(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^4$ définie par cette matrice. Notons

$\pi: P = \text{Proj}_{\mathbb{P}^2}(E) \rightarrow \mathbb{P}^2$ la projection et $\mathcal{O}_P(2)$ le quotient inversible tautologique de π^*E .

Le composé $\mathcal{O}_P^4 \rightarrow \pi^*E \rightarrow \mathcal{O}_P(2)$ définit un morphisme $q: P \rightarrow \mathbb{P}^3$ qui identifie P à l'éclatement d'une cubique gauche γ de $\mathbb{P}^3$.

Cette cubique gauche se décrit comme suit: si l'on note (T_0, T_1, T_2) les coordonnées de $\mathbb{P}^2$, et si l'on écrit $h_{ig} = \sum_{0 \leq k \leq 2} h_{igk} T_k$ et

$H_{gk} = \sum_{0 \leq i \leq 3} h_{igk} X_i$, γ est la variété des zéros des 2-mineurs de la matrice $(H_{gk})_{g=0,1,2, k=0,1,2}$.

Démonstration:

Les de Chern du fibré E sont $c_1 = 2, c_2 = 3$.

L'anneau de Chow de $\mathbb{P}_2$ est $\mathbb{Z}[t]/(t^3)$

où t est la classe de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1)$, celui de P est $\mathbb{Z}[t, u]/(t^3, u^2 - 2t^2u + 3t^3)$

où u est la classe de $\mathcal{O}_P(1)$.

On en déduit $u^3 = t^2u$ dans cet anneau, et t^2u est la classe d'un point (car t^2 est la classe d'un point de $\mathbb{P}_2$) ceci exprime que le morphisme q est de degré un.

Soit x un point de $\mathbb{P}_3$ de coordonnées (x_0, x_1, x_2, x_3) , un antécédent de x par q s'identifie à un couple $(t, u) \in \mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_3$ où les coordonnées (t_0, t_1, t_2) de t sont solution du système

$$\sum_{i=0}^2 x_i h_{ijk} t_k = 0 \quad (j=0,1,2). \quad \text{Par suite}$$

t est unique si et seulement si ce système est de rang deux, i.e., si et seulement si x n'est pas un zéro commun aux 2-mineurs de la matrice (H_{jk}) ; dans le cas contraire l'image réciproque de x par q est l'ensemble des couples (t, u) où t parcourt la droite de $\mathbb{P}_2$ solution des deux équations (proportionnelles) du système ci-dessus.

Ainsi l'ensemble des points de H_3 au dessus desquels q n'est pas un isomorphisme est le lieu Y des zéros communs aux 2-mineurs de (H_{jk}) .

Pour montrer que Y est une cubique lisse il suffit de voir qu'elle est lisse.

Soit x un point Y ; par changement de coordonnées on peut supposer que x coordonnées sont $(0,0,0,1)$; comme h_{30} et h_{31} sont proportionnels on peut (en transformant élémentairement la matrice (h_{ij})) supposer $h_{31}=0$. On a supposé que les 2-mineurs de (h_{ij}) sont sans zéro commun, donc $(h_{12})_{i=0,1,2}$ sont indépendants (sur $\mathbb{C}$) et (par transposition $(H_{12})_{k=0,1,2}$ sont indépendants. D'autre part toujours parce que les 2-mineurs de (h_{ij}) sont sans zéro commun, on a $h_{30} \neq 0$, donc les H_{0k} ne s'annulent pas tous en x ; les plans tangents en x aux quelques courbes Y ont pour équations les combinaisons linéaires des 2-mineurs de la matrice

$$\begin{pmatrix} H_{00}(x) & H_{01}(x) & H_{02}(x) \\ H_{10} & H_{11} & H_{12} \end{pmatrix}$$

On voit facilement que ceux-ci forment une famille de rang deux, d'où l'attention.



Pour vérifier que q est l'éclatement de Y dans $\mathbb{P}_3$, on utilise la description de P comme sous-variété de $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_3$ définie par le système d'équations $\sum_{i,k} x_i h_{ijk} t_k = 0$ ($j=0,1,2$).

Ce système est équivalent au système $t_i D_j - t_j D_i = 0$ ($0 \leq i < j \leq 2$), où D_i est le mineur obtenu en supprimant la i -ème colonne de (H_{jk}) ; comme P est intègre, l'assertion résulte du fait que les D_i engendrent l'idéal de Y et de la définition d'un éclatement ([5] pp 160).

Remarque :

On peut décrire géométriquement le diviseur exceptionnel de P comme l'ensemble des couples (t, x) tels qu'il existe une droite L "sautaise pour E " passant par t telle que x soit le point de $\mathbb{P}^2_{\text{proj}}(E)$ défini par la section de $E_L(-2)$.

En effet, si x est un point de Y de coordonnées (x_0, x_1, x_2, x_3) , si L est la droite définie par les équations (proportionnelles)

$\sum_{i,k} x_i h_{ijk} T_k = 0$, on voit que (x_0, x_1, x_2, x_3) est une ~~relation~~ relation entre les colonnes de la matrice de l'application $H^0(\mathcal{O}_L^4) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_L^{2(1)})$ induite par (h_{ij}) , et réciproquement.

La situation décrite dans le lemme est unique à choix de bases près;

Voici un exemple :

La matrice (H_{jk}) est $\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ et

par suite la matrice h_{ij} est $\begin{pmatrix} t_0 & 0 \\ t_1 & t_0 \\ t_2 & t_1 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}$;

On peut utiliser la représentation paramétrique $(t, u) \rightarrow (t^3, t^2u, tu^2, u^3)$ de Y ;

L'équation de la droite sautaise attachée au point de Y de paramètre (t, u) est

$t^2 T_0 + tu T_1 + u^2 T_2$: ainsi l'enveloppe de ces droites est une conique.

Notons aussi que l'image par q d'une "droite" (= fibre d'un point de $\mathbb{P}_2$ par π) est une bécotante à Y , et inversement; en utilisant les bases ci-dessus, l'image de la droite $\pi^{-1}(t)$ où t est le point de $\mathbb{P}_2$ de coordonnées (t_0, t_1, t_2) a pour système d'équations $t_0 x_0 + t_1 x_1 + t_2 x_2 = 0$

avec Y ont pour paramètres les solutions de l'équation $t^2 T_0 + tu T_1 + u^2 T_2$ en (t, u) .

Notons enfin que le morphisme $q: \mathbb{P}_2 \rightarrow G$
 (grassmannienne des droites de $\mathbb{P}_3$) attaché
 à q ; composé avec le plongement de G dans $\mathbb{P}_5$,
 est le plongement de Veronese usuel.
 Il est défini par les 2-mineurs de (h_{ij})
 qui forment une base de $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(2))$
 (On le voit, soit en utilisant la résolution
 d'Eagon-Northcott de l'idéal de ces mineurs,
 soit en utilisant les bases ci-dessus.)

Revenons au cas (a). On voit que $\bar{q}(C)$
 est une section hyperplane de $\bar{q}(\mathbb{P}_2)$.
 En d'autres termes, la surface réglée S
 peut être décrite comme l'ensemble
 des bisécantes à Y appartenant à un
 certain complexe linéaire (éventuellement singulier)
 En particulier le lieu singulier de S (qui est
 de degré 3) est égal à Y .

En effet $S = q(\pi^{-1}(C))$; comme C est
 une section de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(2)$ et comme
 $q^* \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(2) = \mathcal{I}_Y(2)$ S est
 une section de $\mathcal{I}_Y^2(4)$, d'où l'assertion
 puisque le lieu singulier de S est de degré 3.

On remarque que E est isomorphe
 à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(3)$ ou à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(2)$

selon que l'hyperplan de $\mathbb{P}_5$
 contenant $\bar{q}(C)$ est ou non tangent
 à la grassmannienne G .

L'image réciproque de Y dans $\tilde{S}$ est
 une section de $\mathcal{W}_{\tilde{S}}^\vee = \mathcal{O}_{\tilde{S}}(-2)$.

D'autre part $\tilde{X}$ est une section de

$$\mathcal{O}_{\tilde{S}} \begin{pmatrix} d-4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Le nombre d'intersection de ces 2 diviseurs
 est $(-2, 2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d-4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2d-2$.

Par suite $\mathcal{I}_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d-4)$ est un
 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -module inversible de degré $d-10$;
 donc $h^1(\mathcal{I}_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d-4)) = 0$ pour $d \geq 9$.
 La série est donc complète dès que $d \geq 9$.

Etude du cas (b)

Le conoyau de $t(h_{ij})$ est un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$ -module
 de longueur un, de support un point O
 de $\mathbb{P}_2$.

Lemme 2: La matrice (h_{ij}) est équivalente à $\begin{pmatrix} T_0 & 0 \\ T_2 & T_0 \\ 0 & T_2 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$
 où (T_0, T_2, T_2) est une base de $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(2))$
 (dans laquelle les coordonnées de O sont $(0, 0, 1)$)

Démonstration:

On va à remplacer (h_{ij}) par une matrice équivalente, on peut supposer $h_{ij}(0) = 0$ pour $(i,j) \neq (3,2)$, car $(h_{ij}(0))$ est de rang 2.

La famille (h_{i0}) $i=0,1,2$ est de rang deux: sinon on pourrait supposer $h_{i0}=0$ pour $i=1,2$; l'idéal des mineurs de (h_{ij}) serait alors contenu dans (h_{00}, h_{30}^2) et le conoyau de (h_{ij}) ne serait pas de longueur 1.

Par suite on peut supposer $h_{30}=0$.

Les mineurs de (h_{ij}) $i=0,1,2$, $j=0,1,2$ sont sans facteur commun, sinon l'idéal des mineurs de (h_{ij}) serait contenu dans $m_0 \cap (q, h_{32})$ où q est le facteur commun, et le conoyau de (h_{ij}) ne serait pas de longueur un.

Les h_{ij} $i=0,1,2$, $j=0,1,2$ sont des éléments homogènes de degré un de $R = \mathbb{C}[u,v]$ où (u,v) est une base de $H^0(m_0(1))$. Comme les mineurs maximaux de la matrice (h_{ij}) $i=0,1,2$, $j=0,1,2$ sont sans facteur commun, cette matrice est une présentation de m^3 ou m est l'idéal maximal (u,v) de R , et par

suite sa transposée est une présentation de $\text{Ext}_R^2(R/m^2, R)$.

Ce dernier module, tensorisé par R/m , est canoniquement isomorphe au dual de l'espace vectoriel m/m^2 ; il apparaît ainsi une base naturelle de $m/m^2 = H^0(m_0(1))$ (l'image de la base naturelle de R^2 par la surjection $R^2 \rightarrow \text{Ext}_R^2(R/m^2, R)$).

On remplace (u,v) par cette base qu'on note (T_0, T_1) . On voit alors que les sous-modules de R^2 , images respectives des matrices $t(h_{ij})$ $i=0,1,2$, $j=0,1$ et $\begin{pmatrix} T_0 & T_1 & 0 \\ 0 & T_0 & T_2 \end{pmatrix}$ sont égaux; par suite qu'il suffit de multiplier (h_{ij}) $i=0,1,2$, $j=0,1$ par un élément de $GL_3(\mathbb{C})$, on peut supposer que ces matrices sont égales. En posant $h_{32} = T_2$ (nécessairement indépendant de (T_0, T_1)) on obtient le lemme.

(comme dans le cas (a)), on forme la sous-variété de $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_3$ définie par les équations $\sum_{i=1,2} x_i t_{ij} t_k = 0 \quad (j=0,1)$,

c'est à dire ici $x_0 t_0 + x_1 t_1 = 0 = x_1 t_0 + x_2 t_1 + x_3 t_2$.

On note P cette variété (qui cette fois n'est pas lisse) et $q: P \rightarrow \mathbb{P}_3$ la seconde projection. q est alors l'éclatement de l'idéal des mineurs de $\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$.

La variété Y définie par cet idéal est l'union de la droite L d'équation $x_0=0=x_1$ et de la conque Q d'équation $x_0 x_2 - x_1^2 = 0 = x_3$ qui se coupent en w de coordonnées $(0,1,0,1,0)$.

Soit $\tilde{\mathbb{P}}_2$ l'éclatement de 0 dans $\mathbb{P}_2$; On sait que $\tilde{\mathbb{P}}_2$ est isomorphe à $\text{Proj}(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(n))$.

L'image réciproque de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(2)$ est notée $\mathcal{O}(\frac{2}{2})$ et le diviseur exceptionnel $\mathcal{O}(-\frac{2}{2})$.

Le transformé propre sur $\tilde{\mathbb{P}}_2$ du faisceau de $\begin{pmatrix} t_0 \\ t_2 \end{pmatrix}: \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}^2$ est

isomorphe à $\mathcal{O}(\frac{1}{0})$.

Par suite si $\tilde{E}$ est le transformé propre sur $\tilde{\mathbb{P}}_2$ du faisceau de $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_3 \end{pmatrix}: \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}^2(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}^4$, il existe une suite exacte localement

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(\frac{0}{-1}) \rightarrow \mathcal{O}^2 \oplus \mathcal{O}(\frac{1}{0}) \rightarrow \tilde{E} \rightarrow 0$$

(le fait que cette suite est localement scindée se vérifie aisément au voisinage de chaque point de la droite exceptionnelle).

On pose alors $\tilde{P} = \text{Proj}(\tilde{E}^2)$ et l'on

note $\tilde{q}: \tilde{P} \rightarrow \mathbb{P}_3$ le composé du morphisme évident de $\tilde{P}$ dans P et de q .

Comme $\tilde{E}$ est un quotient localement libre de rang 2 de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}^4$, il lui correspond un morphisme $\tilde{q}: \tilde{\mathbb{P}}_2 \rightarrow G$ dont l'image est une surface cubique, car $\mathcal{H}^2 \tilde{E} \simeq \mathcal{O}(1)$ donc $c_2(E) = 3$.

On voit (cf cas a) que cette surface est l'adhérence de l'ensemble des droites rencontrant L et Q en des points distincts de S . S est évidemment une section de $\mathbb{P}^2(4)$; par contre $\tilde{q}(C)$ n'est pas une section hyperplane de $\tilde{q}(\tilde{\mathbb{P}}_2)$.



Comme Y est un lieu double, le nombre d'intersection de $\mathcal{O}_S^*(0)$ et de $\mathcal{O}_S^*(L)$ (resp $\mathcal{O}_S^*(\varphi)$) est deux (resp quatre); de même le nombre d'intersection de $\mathcal{O}_S^*(1)$ et de $\mathcal{O}_S^*[L]$ (resp $\mathcal{O}_S^*(\varphi)$) est un. On en déduit $\mathcal{O}_S^*(L) = \mathcal{O}_S^*(-\frac{2}{2})$

$$\text{et } \mathcal{O}_S^*(\varphi) = \mathcal{O}_S^*(0).$$

L est donc une $(d-2)$ -section à X . L'image réciproque de L dans $\tilde{S}$ est lisse (resp décomposé en une génératrice section de $\mathcal{O}_S^*(1)$ et une section exceptionnelle de $\mathcal{O}_S^*(-\frac{3}{2})$) selon que E est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}^2(2)$ ou à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(3)$.

Dans le premier cas, par un point général de L passent 2 génératrices (mobiles), dans le second cas une seule.

Etude des cas (c) et (d)

Le $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$ -module conoyau de $t(h_{ij})$ est de longueur deux. La sous-variété Z de $\mathbb{P}_2$ définie par les 2 mineurs de (h_{ij}) est de degré deux;

Le complexe d'Eagon-Northcott s'écrit

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}^3(-4) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}^8(-3) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}^6(-2) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2} \rightarrow 0$$

Il est acyclique à l'extérieur de Z .

Les 2-mineurs engendrent un sous-espace vectoriel de dimension 4 de $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(2))$.

À l'extérieur de Z , le conoyau de (h_{ij}) est un fibré de rang deux quotient de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}^4$, induisant un morphisme $\bar{q}: \mathbb{P}_2 - Z \rightarrow G$ qui, composé avec l'inclusion de G dans $\mathbb{P}_5$ est précisément défini par les six sections (h_{ij}) de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(2)$. L'image de $\bar{q}$ admet donc pour adhérence GV où V est une sous-variété linéaire de dimension 3 de $\mathbb{P}_5$. C'est une quadrique lisse, ou un cône, selon que Z est constituée de deux points ou d'un point double.

Dans le premier cas la restriction à GV du fibré tautologique de G est isomorphe à $\mathcal{O}(1,0) \oplus \mathcal{O}(0,1)$ (les notations proviennent de l'identification de la quadrique lisse GV et de $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$); ainsi, sous ces hypothèses, $\bar{q}(c)$ est une quartique à point double.

La droite de P_5 conjuguée de V par rapport à G coupe G en deux points distincts correspondant à deux droites L_1 et L_2 rencontrées par chacune droite provenant d'un point de GNV . Sur S , l'image réciproque de chacune de ces droites est une section de $O_S^2(-2)$, de sorte que chacune de ces droites est une $(d-2)$ -sécante à X .

On remarque que dans ce cas E est toujours isomorphe à $O_{P_2}^2(2)$.

Dans le second cas (i.e. le cas (d)) le modèle non singulier du cône du second degré GNV est $\text{Proj}_{P_2}(O_{P_2} \oplus O_{P_2})$.

L'image réciproque sur cette surface du fibré tangentiel de G est un module E tel qu'il existe une suite exacte non scindée $0 \rightarrow O(-1) \rightarrow E \rightarrow O(1) \rightarrow 0$.

La quartique $q(c)$ est sur cette surface section d'un diviseur qui est section soit de $O(2)$ soit de $O(1)$;

Dans le premier cas on obtient une suite exacte $0 \rightarrow O_{P_1}(2) \rightarrow N \rightarrow O_{P_1}(2) \rightarrow 0$.

Dans le second cas on a une suite exacte

$$0 \rightarrow O_{P_2}(3) \rightarrow N \rightarrow O_{P_2}(1) \rightarrow 0$$

contrairement aux hypothèses.

La droite de P_5 conjuguée de V par rapport à G est tangente à G en un point auquel correspond une droite L .

On peut représenter géométriquement GNV comme l'ensemble des droites bisectrices de la courbe L "doublée" le long d'une certaine quadrique lisse contenant L (plus précisément, on se donne une certaine correspondance $(1,2)$ entre L et la droite orthogonale dans P_3^V , et l'on considère l'ensemble des droites L' coupant L , telles que le point d'intersection de L et L' et le point d'intersection de leurs orthogonales dans P_3^V se correspondent.)

L'image réciproque de L dans S est une section de $O_S^2(-2)$ et L est une $(d-2)$ -sécante à X .

Courbes elliptiques

Compte dans des résultats établis

au chapitre 1 et fait maintenant

examiner les situations suivantes :

(Les notations pour celles du chapitre 2, application de la proposition 2.)

- 1) $\tilde{X}$ est elliptique, $\deg(E) = 4$, N^V est semi-stable.
- 2) $\tilde{X}$ est elliptique, $\deg(E) = 5$, N^V est stable.

Dans le premier cas la courbe $\tilde{q}(X)$ est une courbe elliptique tracée sur G , nécessairement

contenue dans une variété linéaire V de dimension 3, et les considérations du

chapitre 2 (cas (c) et (d)) se répètent.

On obtient alors deux (d-2) - rectangles "distincts ou confondus".

On suppose à partir de maintenant que N^V est stable de degré 5.

On ne mentionnant décrire une transformation birationnelle qu'on veut transformation univale à l'étude du lieu

apparaissant de la surface réglée quadratique elliptique.



La transformation de Semple

Soit $\tilde{X}$ une courbe elliptique munie d'un module universel de degré 5 muni

$\tilde{O}_X(1)$, $V = H^0(\tilde{O}_X(1))$, $P_V = \text{Proj}(\text{Sym}(V))$. Soit $P: \tilde{X} \rightarrow P_V$ la morphisme évident

de la fibre évidente $V \otimes \tilde{O}_X \rightarrow \tilde{O}_X(1)$. Nous $\tilde{X}$ d'image de $\tilde{X}$ par P , $\tilde{X}$ idéal

de X dans P_V , $W = H^0(\tilde{X}(2))$, $P_W = \text{Proj}(\text{Sym}(W))$. La transformation de Semple est une

(correspondance birationnelle entre P_V et P_W [9] La suite exacte $0 \rightarrow \tilde{X} \rightarrow \tilde{O}_X(1) \rightarrow \tilde{O}_X(2) \rightarrow 0$

(dim $V = \dim W = 5$) La suite exacte $0 \rightarrow \tilde{X} \rightarrow \tilde{O}_X(1) \rightarrow \tilde{O}_X(2) \rightarrow 0$

(déduite du choix d'isomorphisme $\tilde{O}_X \approx W(X)$ d'isomorphisme $\tilde{O}_X(1) \approx W(X)$

transformée par $\tilde{O}_X(2)$, donc un isomorphisme déterminé à multiplication

près par un scalaire.

On en déduit par passage aux sections, une application $\mathbb{C}$ -linéaire $\Lambda^3 W \rightarrow V$ donc (compte tenu de l'isomorphisme $\Lambda^3 W \cong (\Lambda^2 W)^\vee$ déduit du choix d'un générateur de $\Lambda^5 W$) un élément de $(\Lambda^2 W) \otimes V$.

Si l'on choisit des bases $(T_0, \dots, T_4)$ de V et $(X_0, \dots, X_4)$ de W , cet élément s'écrit

$$\sum a_{ijk} (X_j \wedge X_k) \otimes T_i, \text{ où les } a_{ijk}$$

$$0 \leq i \leq 4, 0 \leq j < k \leq 4$$

sont des réels; on pose $a_{ijj} = 0$,

$$a_{ikj} = -a_{ijk} \quad (j > k).$$

$$A = \left(\sum_{0 \leq i \leq 4} T_i a_{ijk} \right)_{0 \leq j, k \leq 4}.$$

A est une matrice 5×5 alternée à coefficients dans V .

(On pose $K = \left(\frac{J_X}{J_{X^2}} \right) (2)$. K est un $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de rang 3 ($H^0(K) = W$).

Montrons que K est stable. K étant engendré par ses sections il suffit de montrer que $H^2(K) = 0$ et qu'il n'existe pas de sous-fibré L de K de rang un et de degré 2.

Si $H^2(K) \neq 0$ alors H^2 surjective $J_X \rightarrow \mathcal{O}_X(-2)$; son noyau est l'idéal d'une courbe X_2 de degré dix tracée sur quatre quadriques (et de même support que X); la composante contenant X de l'intersection de ces quadriques est une surface de degré ≤ 2 , d'où une contradiction.

Si $H^1(K) = 0$ et s'il existe un sous-fibré L de K de rang un et de degré deux, l'image réciproque de $H^0(L)$ dans $H^0(J_X(2))$ est un pinceau de quadriques de P_W tangentes le long de X .

La réunion des lieux singuliers de ces quadriques est une réunion finie de variétés linéaires de P_W , distinctes de P_W ;

Elle doit contenir X , d'où une contradiction.

(On a alors le

Lemme 3 : le complexe

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_P(-5) \rightarrow W^\vee \otimes_{P^\vee} \mathcal{O}_P(-3) \xrightarrow{A} W \otimes_{P^\vee} \mathcal{O}_P(-2) \rightarrow \mathcal{O}_P \rightarrow 0$$

définit une résolution graduée libre minimale du $(\text{Sym } V)$ -module gradué $\bigoplus_{n \geq 0} H^0(\mathcal{O}_X(n))$

(les flèches non notées proviennent de l'inclusion $W \subset H^0(\mathcal{O}_P(2))$)

Démonstration:

X est arithmétiquement normale; de plus l'image par le foncteur $\text{Hom}(\ , \mathcal{O}_P(-5))$, d'une résolution minimale de $\mathcal{O}_X$ est une résolution minimale de $\omega_X \subseteq \mathcal{O}_X$ nécessairement isomorphe à la première.

L'assertion est donc "numériquement" vraie i.e. que les classes d'isomorphisme de modules gradués-libres formant une résolution minimale du $(\text{Sym } V)$ -module gradué $\bigoplus_{n \geq 0} H^0(\mathcal{O}_X(n))$ sont celles que donne l'énoncé.

L'application $\mathbb{C}$ -linéaire $W \rightarrow H^0((J_X/J_X^2)(2))$ est bijective; de plus le conoyau de l'application $\mathcal{O}_X$ -linéaire $u: W \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow (J_X/J_X^2)(2)$ est nul;

le complexe d'Eagon-Northcott construit sur u s'écrit:

$$0 \rightarrow (J_X/J_X^2)^V(-3) \xrightarrow{tu} W^V \otimes \mathcal{O}_X(-1) \xrightarrow{A} W \otimes \mathcal{O}_X \xrightarrow{u} (J_X/J_X^2)(2)_{\geq 0}$$

(cf. Northcott, Finite free resolutions, Cambridge tracts 44, 94pC). compte tenu de l'isomorphisme $H^3((J_X/J_X^2)(2)) \cong \mathcal{O}_X(1)$, ce complexe est acyclique.

L'application $\mathbb{C}$ -linéaire $H^0(J_X(3)) \rightarrow H^0((J_X/J_X^2)(3))$ est bijective.

De l'exactitude du complexe ci-dessus on déduit l'exactitude de la suite

$$0 \rightarrow W^V \rightarrow H^0(W \otimes \mathcal{O}_X(2)) \rightarrow H^0((J_X/J_X^2)(3)) \rightarrow 0$$

qui est isomorphe à la suite

$$0 \rightarrow W^V \rightarrow H^0(W \otimes \mathcal{O}_{P_V}(2)) \rightarrow H^0(J_X(3)) \rightarrow 0$$

ainsi W^V est l'espace des relations de degré un liant une base de générateurs de degré deux de J_X .

Le lemme résulte alors de sa conséquence numérique mentionnée plus haut.

(On identifie $\text{Pic}(P_V \times P_W)$ à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

en convenant que $\mathcal{O}(1,0)$ (resp $\mathcal{O}(0,1)$) est l'image réciproque de $\mathcal{O}_{P_V}(2)$ (resp $\mathcal{O}_{P_W}(2)$), par la 1^{ère} (resp 2^{ème}) projection.

On note P la sous-variété de $P_V \times P_W$ définie par des équations

$$\sum_{0 \leq i, k \leq 4} T_i a_{ik} X_k = 0 \quad (0 \leq j \leq 4)$$

La famille de ces équations est une section
de $W \otimes \mathcal{O}(1,1)$ dont l'image dans
 $H^0(\mathcal{O}(1,2))$ est $\sum T_i a_{ijk} X_j X_k = 0$,
 $0 \leq i, j, k \leq 4$

Car la matrice A est alternée.
Autrement dit P est une section du
 $\mathcal{O}_{P^4 \times P^4}$ -module (localement libre de rang 4)

$$L = \mathcal{O}_{P^4}(-2) \otimes \mathcal{S}_{P^4}^{(2)}.$$

La restriction $f: P \rightarrow P^4$ de la 1^{ère} projection
est l'éclatement de X .

En effet $A: W^v \otimes \mathcal{O}_{P^4} \rightarrow W \otimes \mathcal{O}_{P^4}(-2)$ est
une présentation de $\mathcal{I}_X(3)$; comme P
est la variété des zéros de la composée

$$W^v \otimes \mathcal{O}_{P^4 \times P^4} \rightarrow W \otimes \mathcal{O}_{P^4}(-2) \otimes \mathcal{O}_{P^4} \rightarrow \mathcal{O}(1,1),$$

on voit que $P = \text{Proj}_{P^4}(\text{sym } \mathcal{I}_X)$; X étant
localement intersection complète, cette dernière
variété coïncide avec l'éclatement de X .

On vérifie que $\mathcal{I}_X \mathcal{O}_P = \mathcal{O}_P(-2,2)$.

(On peut, en choisissant une base
de $\Lambda^5 W$ identifier $\Lambda^i W^v$ et $\Lambda^{5-i} W$

(comme $SL(W)$ -modules).)

L'élévation au carré (divisé par deux) est
une application $SL(W)$ -linéaire $W \rightarrow \text{Sym}_2(\Lambda^3 W)$.

On note ν la composée $W \otimes \mathcal{O}_P \rightarrow \text{Sym}_2(\Lambda^3 W) \otimes \mathcal{O}_P \rightarrow \mathcal{O}_P^{(2)}$

La transposition de la multiplication de $\Lambda^3 W^v$
induit une application $SL(W)$ -linéaire $W^v \rightarrow W \otimes \Lambda^3 W$.

On note A la composée $W^v \otimes \mathcal{O}_P \rightarrow W \otimes \Lambda^3 W \otimes \mathcal{O}_P \rightarrow W \otimes \mathcal{O}_P^{(2)}$.

Formons la séquence d'applications $\mathcal{O}_P$ -linéaires

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_P(-5) \xrightarrow{\nu} W^v \otimes \mathcal{O}_P(-3) \xrightarrow{A} W \otimes \mathcal{O}_P(-2) \xrightarrow{\nu} \mathcal{O}_P \rightarrow \mathcal{O}_6 \rightarrow 0.$$

Si l'on choisit une base de W (et si d'on munit
les $\Lambda^i W$ des bases correspondantes) la matrice
de cette séquence est le complexe de

Buchsbaum-Eisenbud (prop. 6.4 (n=2)) $[1]$
cette séquence définit donc une résolution
gradué libre minimale du $(\text{sym } (\Lambda^3 W))$ -module
gradué $\bigoplus H^0(\mathcal{O}_6(n))$.

D'autre part le quotient tautologique
(de rang 2) de $W^v \otimes \mathcal{O}_6$ (réalisant
 G comme grassmannienne des plans de P^4)

est par construction l'image

de $A \otimes \mathcal{O}_G(3)$, donc le quotient
homologique (de rang trois) de $W \otimes \mathcal{O}_G$
est isomorphe $(A \otimes \mathcal{O}_G(2)) \cong (J_6/J_6^2(2))$.

Il faut enfin noter qu'on a

$$X = G \cap P_V.$$

Cela résulte du fait que la résolution
de $\mathcal{O}_X$ sur $\mathcal{O}_{P_V}$ est le produit tensoriel
par $\mathcal{O}_{P_V}$ de la résolution de $\mathcal{O}_G$.

G sera considéré indifféremment comme
grassmannienne des droites de P_W^V ou
comme grassmannienne des plans de P_W .

Considérons $g: P \rightarrow P_W$ de la deuxième projection.

On pose $Z = \text{Proj}_X K$. Z est identifié à
la sous-variété de P d'idéal $J_X \cdot \mathcal{O}_P$.

Soit $\bar{Z}$ l'image de Z par g , autrement dit
l'image du morphisme de Z dans P_W défini
par $W \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow K$. $\bar{Z}$ est une hypersurface
de degré 5 de P_W .

Lemme 4: Z est la normalisée de $\bar{Z}$.

On doit montrer que la restriction de g à Z est
un morphisme fini, birationnel sur son image.

Soit x un point de X ; comme K est stable
 $H^2(K(-x)) = 0$ et g induit un plongement
de la fibre de x dans Z , dans P_W .

Si x et y sont 2 points distincts de X , on a
une suite exacte $0 \rightarrow K(-x-y) \rightarrow K(-x) \oplus K(-y) \rightarrow K \rightarrow 0$.

Comme K est stable, $h^2(K(-x-y)) = 2$ et qui
montre que les plans de P_W images des
fibres dans Z de x et de y respectivement
se coupent en un point.

Par suite l'ensemble des points de la fibre de x

fi



dans Z , dont la fibre par g a (ensemblement) au moins deux points est au plus de dimension un (en fait c'est une cubique lisse, isomorphe à X); g induit donc un morphisme birationnel de Z sur $\bar{Z}$.

Enfin, si x, y, z sont trois points, deux à deux distincts de X , on a une suite exacte

$$0 \rightarrow K(-x-y-z) \rightarrow K(-x-y) \oplus K(-y-z) \oplus K(-x-z) \rightarrow K(-x) \oplus K(-y) \oplus K(-z) \rightarrow K_0$$

Le noyau de la flèche de droite est $K \otimes Q$ où $Q = \ker (O(-x) \oplus O(-y) \oplus O(-z) \rightarrow O_X)$ est stable; par suite $K \otimes Q$ est semi-stable de degré -2 et $h^2(K \otimes Q) = 2$, donc $H^0(K(-x) \oplus K(-y) \oplus K(-z)) \rightarrow H^0(K)$ est surjectif, donc les plans de $\mathbb{P}_W$ images respectives des fibres de x, y, z dans Z n'ont pas de point commun. Les fibres de la restriction de g à Z ont (ensemblement) au plus deux points: $g|_Z$ est un morphisme fini.

Lemme 5: g est l'éclatement du lieu singulier de $\bar{Z}$...

Démonstration:

P est défini par l'annulation de l'application composée

$$O_{P_V} \otimes (\Omega_{P_W}^2(2))^V \xrightarrow{B} V \otimes O_{P_V} \otimes O_{P_W} \rightarrow O(1,0)$$

où $B: (\Omega_{P_W}^2(2))^V \rightarrow V \otimes O_{P_W}$

provient de la matrice $(\sum_{0 \leq k \leq 4} a_{ijk} X_k)_{0 \leq i, j \leq 4}$

On a donc $P = \text{Proj}(\text{sym}(\omega_{\text{her } B}))$.

On va montrer que $\omega_{\text{her } B} = \mathcal{I}(3)$ où $\mathcal{I}$ est l'idéal de O_{P_W} image réciproque du conducteur de O_Z dans $O_{\bar{Z}}$.

Il la suite exacte $0 \rightarrow O_P(-2, 2) \rightarrow O_P \rightarrow O_Z \rightarrow 0$ on déduit la suite exacte:

$$0 \rightarrow g_* O_P \rightarrow g_* O_Z \rightarrow R^2 g_* O_P(-4, 2) \rightarrow R^2 g_* O_P$$

Les $R^m g_* O_P(a, b)$ sont l'aboutissement de la suite spectrale d'hyper-image directe, par la projection $\mathbb{P}_W = \mathbb{P}_V \times \mathbb{P}_W \rightarrow \mathbb{P}_W$, de la résolution de Koszul de $O_{P_V} \times P_W$ - module O_P , qui s'écrit

$$0 \rightarrow \Lambda^4 L^V(a, b) \rightarrow \Lambda^3 L^V(a, b) \rightarrow \Lambda^2 L^V(a, b) \rightarrow \Lambda^1 L^V(a, b) \rightarrow L^V(a, b) \rightarrow 0$$

$$\text{On a } \Lambda^4 L^V(a, b) = O_{P_V}(a-9) \otimes \Lambda^{4-9} \Omega_{P_W}^2(6+5-29)$$

donc $R^p P_{W*}(\Lambda^4 L^V(a, b)) = H^p(O_{P_V}(a-9) \otimes \Lambda^{4-9} \Omega_{P_W}^2(6+5-29))$

Pour $a \geq 0$, (resp $a < 0$), la suite spectrale dégénère en l'image du complexe de Koszul par P_{W*} (resp $R^p P_{W*}$); ainsi pour $a=0=b$, le seul terme non nul est celui d'indices $(0,0)$ qui est O_{P_W} , d'où les relations

$$g_* O_P = O_{P_V} \quad \text{et} \quad R^2 g_* O_P = 0$$

Pour $(a, b) = (-2, 2)$ on obtient la suite exacte $0 \rightarrow V^* \otimes \mathcal{O}_P(-2) \rightarrow \Omega_P^2 \rightarrow R^2 g_* \mathcal{O}_P(-2, 1) \rightarrow 0$ dont la flèche de gauche est la transposée de B par dualité.

La restriction de $g = 2$ étant un morphisme fini, la relation $R^2 g_* \mathcal{O}_P(-2, 1) = g_* \mathcal{O}_Z / \mathcal{O}_{\bar{Z}}$ montre que l'anneau des $\mathcal{O}_P$ -modules $R^2 g_* \mathcal{O}_P(-2, 1)$ est l'image réciproque du conducteur de $\mathcal{O}_Z$ dans $\mathcal{O}_{\bar{Z}}$. Ce conducteur étant de codimension deux, $(\omega_B + B)$ est aussi de codimension 2 et

B est une présentation de $(\text{Ann}(\omega_B(3)))$ le nombre 3 est dû à $\text{cs}(\Omega_P^2(2)) = 3$ c'est à dire de $J(3)$.

Il faut maintenant montrer que le lieu double de $\bar{Z}$ est localement intersection complètement. Ceci entraînera, comme plus haut, que g est l'éclatement de J .

Il suffit pour cela de montrer que le lieu triple de $\bar{Z}$ est vide:

le lieu triple est vide pour

de la matrice $(\sum_{0 \leq k \leq 4} a_{ijk} X_k)$ $0 \leq i, j \leq 4$.

S'il contenait un point x de coordonnées $(x_0, \dots, x_4)$ de système d'équations $\sum_{i,k} T_{ik} a_{ijk} X_k$ $(0 \leq j \leq 4)$ définirait une variété linéaire $V_x \subset V$, de dimension telle que $V_x \times (x)$ soit contenue dans P , ce qui implique $J_x \cdot \mathcal{O}_{V_x} = \mathcal{O}_{V_x}(-2)$.

Par suite V_x serait un plan contenant une composante de X de degré deux, ce qui est absurde. La transformation de Semple est la correspondance birationnelle entre P_V et P_W de graphe P .

Étudions maintenant le lieu double de $\bar{Z}$. Calculons la classe dans $\text{Pic}(Z)$ du conducteur de $\mathcal{O}_Z$ dans $\mathcal{O}_{\bar{Z}}$: comme $\bar{Z}$ est une hypersurface de degré cinq de $\mathbb{P}^4$, son module canonique est trivial, donc la classe du conducteur est celle de ω_Z . Notons $\pi: Z \rightarrow X$ la projection naturelle; la suite exacte $0 \rightarrow \Omega_{Z/X}^1 \rightarrow \pi^* K \otimes \mathcal{O}_Z(-1) \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0$ est l'isomorphisme $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X$ montrant que

$$\omega_Z \simeq (\pi^* \mathcal{O}_X(1) \otimes \mathcal{O}_Z(-3))$$

On a en particulier $H^0(\omega_Z(3)) \simeq V$.

On se propose de "globaliser" la description de l'intersection du lieu double et de la fibre $\pi^{-1}(t)$ d'un point t de X , vue comme un plan de P^2 .

Les équations définissant le plan attaché à la fibre de t sont les éléments de $H^0(K(-t)) \subset H^0(K)$. On est donc amené à regarder le sous-fibre de $K(-t)$ engendré par $H^0(K(-t))$: on constate que c'est un fibre trivial de rang deux (car $K(-t)$ est stable de degré deux.)

Notons $P_i : X \times X \rightarrow X$ ($i=1,2$) les projections et Δ la diagonale de $X \times X$; il résulte de ce qui précède que $P_1^* P_2^* (P_1^* K)(-\Delta)$ est un sous-fibre de $(P_1^* K)(-\Delta)$, de la forme $K'(-\Delta)$ où K' est un sous-fibre de rang deux de $P_1^* K$.

Lemme 6 : Le $\mathcal{O}_{X \times X}$ -module inversible $P_2^* K / K'$ est isomorphe à $(P_2^* \mathcal{O}_X(2) \oplus P_2^* \mathcal{O}_X(2))(-2\Delta)$.

Démonstration : On travaille dans l'anneau de Chow de $X \times X$.

Soit $L = P_{2*} P_2^* K$ le $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de rang 2.

On applique la formule de Porteous (Fulton, Intersection theory, II 14.4 [3], au morphisme de fibres $(P_2^* E)(\Delta) \rightarrow P_2^* K$ qui est partout localement sur $X \times X$ (i.e. son cycle de dégénérescence est le cycle vide.)

La deuxième classe de Chern du "fibre virtuel" $P_2^* K - (P_2^* E)(\Delta)$ est donc nulle, ce qui se traduit dans l'anneau de Chow de $X \times X$ par la relation $(3\Delta)(P_2^*(c_2 E)) - (P_1^*(c_1 K)) \cdot (P_2^*(c_2 E) + \Delta)$.

En prenant l'image directe de cette relation par P_1 et P_2 respectivement on trouve les égalités :

$$3c_2 E - (\deg(c_2 E)) \cdot c_1 K - 2c_1 K = 0$$

$$3c_2 E - (\deg(c_1 K)) \cdot c_2 E - 2c_1 K = 0$$

Comme $\deg(c_1 K) = 5$, ces relations impliquent $2(c_2 E + c_1 K) = 0$ pour $\deg(c_2 E) = -5$, puis

$$3(c_2 E + c_1 K) = 0, \text{ et finalement } c_2 E = -c_1 K;$$

Ce lemme est donc établi.

Le degré (self-intersection) du $\mathcal{O}_{X \times X}$ -module inversible $P_1^* K / K'$ est dix, donc (Riemann-Roch) sa caractéristique d'Euler est cinq ; comme $h^i(P_1^* K / K') = 0$ pour $i=1,2$, on en déduit que l'application linéaire composée $W \rightarrow H^0(P_1^* K) \rightarrow H^0(P_1^* K / K')$ est un isomorphisme.

On peut maintenant montrer que le morphisme composé $X \times X \rightarrow Z \rightarrow \mathbb{P}^n$ se factorise par le quotient $\text{Div}_2(X)$ de $X \times X$ par l'involution $(t, u) \rightarrow (u, t)$ de $X \times X$. Soit L un $\mathcal{O}_X$ -module inversible de degré deux ; le $\mathcal{O}_{X \times X}$ -module inversible $\underline{L} = (p_1^* L \otimes p_2^* L)(-\Delta)$ a une section dans la courbe des zéros (ensemblement d'égalité de l'ensemble des (t, u) tels que $L \simeq \mathcal{O}_X(t+u)$) est isomorphe à X par l'une des projections.

Comme le nombre d'intersection de $\underline{L}$ et $p_1^* K/K'$ est deux, le morphisme considéré induit un revêtement d'ordre deux de la courbe des zéros de la section de $\underline{L}$ sur son image (qui est une droite de $\mathbb{P}^n$).

En particulier si $L = \mathcal{O}_X(t+u)$, (t, u) et (u, t) ont même image dans $\mathbb{P}^n$. En effet $\underline{L}$ est la première projection de l'intersection des classes de $\underline{L}$ et $p_1^* K/K'$ dans l'anneau de Chow de $X \times X$:

$$\underline{L} \cdot (p_1^* K/K') = p_1^* \mathcal{O}_X(2) \cdot p_2^* L + p_2^* \mathcal{O}_X(2) \cdot p_1^* L - A \cdot (p_1^* L^{(2)} + p_2^* L^{(2)})$$

Comme la restriction de $i: X \times X \rightarrow Z$ à la fibre $p_1^{-1}(t)$ d'un point de X est un plongement plan de degré trois de X , on déduit du calcul de la classe de l'image réciproque dans Z du lieu

possible de Z , que i est un isomorphisme de $X \times X$ sur cette image réciproque.

On voit que $\text{Div}_2(X)$ est une surface réglée, de base une courbe X' isomorphe (non canoniquement) à X ; le morphisme de $X \times X$ dans $\mathbb{P}^n$ définit un morphisme de degré cinq de $\text{Div}_2(X)$ dans $\mathbb{P}^n$ dont la restriction à chaque droite de $\text{Div}_2(X)$ est de degré un; ce morphisme est déduit d'un fibré stable de rang deux et de degré cinq quotient de $W \otimes \mathcal{O}_{X'}$, dont W s'identifie à l'espace des sections. On en déduit que ce morphisme est un plongement de $\text{Div}_2(X)$ dans $\mathbb{P}^n$.

Remarque : Transformation de Semple duale.

On est parti d'une application $\mathbb{C}$ -linéaire surjective $\Lambda^3 W \rightarrow V$. Notons W' le dual de W et V' le conjoin de la transposée $V^V \rightarrow (\Lambda^3 W)^V \simeq \Lambda^3 W'$. On a $\dim V' = 5 = \dim W'$.

On a vu que X est l'intersection de $\mathbb{P}^n$ et de G_W (grassmannienne des plans de $\mathbb{P}^n$, contenue dans $\text{Proj}(\text{Sym } \Lambda^3 W)$) paramétrant la famille des plans de réunion $\bar{Z}$. On constate qu'un point de $\mathbb{P}^n \cap G_W'$ (notations évidentes) correspond à une droite de $\mathbb{P}^n$ rencontrant tous les plans de $\mathbb{P}^n$ paramétrés par X .

Une telle droite est évidemment une génératrice du lieu singulier de $\bar{Z}$.

Autrement dit $P_{V'} \cap G_{W'}$ est naturellement isomorphe à X' et paramètre le volume réglé en plans dual de la surface réglée de $P_{W'}$ lieu double de $\bar{Z}$.

Cette situation donne naissance à une transformation de Semple entre $P_{V'}$ et $P_{W'}$ (qui est naturel d'appeler dual de la première).

On va maintenant appliquer cette construction à l'étude du lieu singulier de la surface réglée quintique elliptique.

La situation est la suivante : X est une courbe elliptique munie d'un fibré vectoriel T stable de rang deux et de degré cinq ($T = N^V$ si l'on veut, garder les notations de la proposition 2.)

On pose $W = H^0(T)^V$ et $K = W \otimes \mathcal{O}_X / T^V$

K est un fibré de rang trois.

Montrons que K est stable ; il est clair qu'il est engendré par ses sections et que $H^2(K) = 0$; s'il n'est pas stable, il est isomorphe à $L \oplus L_2$ où L_2 est de rang 2

et de degré 2, L_2 stable de rang deux et de degré trois.

On en déduit $W = H^0(L) \oplus H^0(L_2)$ puis

$$T = (H^0(L_2) \otimes \mathcal{O}_X) \cap T \oplus (H^0(L) \otimes \mathcal{O}_X) \cap T$$

d'où une contradiction.

Posons $\mathcal{O}_X(1) = \Lambda^3 K$ et $V = H^0(\mathcal{O}_X(2))$

On a $\dim(V) = 5$. Montrons que l'application

$\mathbb{C}$ -linéaire $\Lambda^3 W \rightarrow V$ déduite par passage aux sections de $\Lambda^3 \mu$, où $\mu : W \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow K$ est

le passage au quotient, est surjective.

Si $R = \text{Ker } \Lambda^2 \mu$, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \Lambda^2 T^V \rightarrow R \rightarrow T^V \otimes K \rightarrow 0$$

Montrons que $H^0(R) = 0$: comme T est stable, $\Lambda^2 T^V$ est semi-stable donc $H^0(\Lambda^2 T^V) = 0$;

de même comme T et K sont stables, $H^0(T^V \otimes K) = \text{Hom}(T, K) = 0$, d'où l'assertion.

Comme $\Lambda^2 K$ est semi-stable de degré dix, $h^0(\Lambda^2 K) = 10$, donc on déduit de la

suite exacte $0 \rightarrow R \rightarrow \Lambda^2 W \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \Lambda^2 K \rightarrow 0$ un isomorphisme $\Lambda^2 W \cong H^0(\Lambda^2 K)$ puis

une suite exacte $0 \rightarrow H^2(R) \rightarrow H^2(\Lambda^2 W \otimes \mathcal{O}_X) \rightarrow H^2(\Lambda^2 K) = 0$ C'est à dire par transposition un isomorphisme $H^0(R^V) \cong \Lambda^3 W$.



En dualisant la suite exacte
 $0 \rightarrow \Lambda^2 T^\vee \rightarrow R \rightarrow T^\vee \otimes K \rightarrow 0$ on trouve la
suite exacte $0 \rightarrow K^\vee \otimes T \rightarrow R^\vee \rightarrow \Lambda^2 T \rightarrow 0$, puis
la suite exacte $0 \rightarrow \text{Hom}(K, T) \rightarrow \Lambda^3 W \rightarrow V \rightarrow 0$
(par passage aux sections, compte tenu de $H^0(K^\vee \otimes T) = 0$)

Le morphisme $\mu: W \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow K$ définit un
morphisme $\bar{q}: X \rightarrow G$ ou $G \subset P = \text{Proj}(\text{sym } \Lambda^3 W)$
est la grassmannienne des plans de P_W

On doit vérifier que $\bar{q}$ est un isomorphisme
de X sur $G \cap P_V$, où P_V est identifié à
une variété linéaire (de dimension 4) de P par
l'application $\mathbb{C}$ -linéaire surjective $\Lambda^3 W \rightarrow V$.

Il faut aussi montrer que K est
canoniquement isomorphe à $(\mathcal{I}_X / \mathcal{I}_X^2)^{(2)}$ où
 $\mathcal{I}_X$ est l'idéal de X dans P_V .

On peut voir en utilisant la
résolution minimale de G que le quotient
dualogique de $W \otimes \mathcal{O}_G$ était isomorphe à $(\mathcal{I}_G / \mathcal{I}_G^2)^{(2)}$.

Dans le contexte actuel le quotient
 K de $W \otimes \mathcal{O}_X$ est l'image réciproque
par le morphisme $\bar{q}: X \rightarrow G$ du
quotient dualogique de $W \otimes \mathcal{O}_G$.

Comme P_V est la variété linéaire de
 P engendrée par $\bar{q}(X)$, $\bar{q}$ est un isomorphisme
de X sur $G \cap P_V$ et les quotients
 K et $(\mathcal{I}_X / \mathcal{I}_X^2)^{(2)}$ de $W \otimes \mathcal{O}_X$ sont égaux.

La surface réglée S n'est intervenue
jusqu'à présent que par l'intermédiaire de T ,
i.e. du plongement normale de sa courbe.

Faisons maintenant intervenir le plongement
de S dans $\mathbb{P}^3$, par l'intermédiaire
d'une section linéaire de K , ne s'annulant
en aucun point de X ; on pose $W_h = \frac{W}{\mathbb{C}h}$

de sorte que $H = \text{Proj sym } W_h$ est un
hyperplan de P_W tel que $S = H \cap \bar{Z}$, où
 $\bar{Z}$ est l'image du morphisme de $\text{Proj}_X K$
dans P_W défini par le quotient K de $W \otimes \mathcal{O}_X$.
L'hypothèse selon laquelle h ne s'annule en
aucun point de X traduit le fait que
 H ne contient aucun plan de $\bar{Z}$.

La normalisée de S est $\tilde{S} = \text{Proj}_X E$ où
 $E = \frac{W_h \otimes \mathcal{O}_X}{T^\vee} = \frac{K}{h \cdot \mathcal{O}_X}$.

Étudions l'application composée
 $\Lambda^2 W_h \rightarrow \Lambda^3 W \rightarrow V$ (la flèche de
gauche est déduite de la multiplication extérieure par h)

Le noyau de cette application s'identifie à $\text{Hom}(T, E)$: En effet la suite exacte

$$0 \rightarrow T^\vee \rightarrow W_h \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow E \rightarrow 0$$

montre que, si $R = \text{Ker}(\Lambda^2 W_h \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \Lambda^2 E)$, on a une suite exacte $0 \rightarrow \Lambda^2 T^\vee \rightarrow R \rightarrow T^\vee \otimes E \rightarrow 0$,

donc une application injective $H^0(R) \rightarrow \text{Hom}(T, E)$.

D'autre part E est engendré par ses sections et n'a pas de facteur direct trivial.

Deux cas peuvent apparaître :

- (a) E est stable : il existe alors un isomorphisme de T sur E , formant une base de $\text{Hom}(T, E)$;
- (b) E est décomposable en somme directe de fibres de rang un, de degrés respectifs deux et trois ; dans ce cas il existe un morphisme de rang un de T dans E , d'image de son fib' de rang un et de degré trois de E ; il forme une base de $\text{Hom}(T, E)$.

Comme $H^0(R) = \text{Ker}(\Lambda^2 W_h \rightarrow V)$, on a $h^0(R) \geq 2$; par suite $H^0(R) = \text{Hom}(T, E)$ et l'application $\Lambda^2 W_h \rightarrow V$ est surjective.

Prouvons que l'image de h par l'isomorphisme $W \cong H^0(\mathcal{I}_X(2)) \subset \text{Sym}_2 V$ est l'image dans $\text{Sym}_2 V$ d'une équation (élément de $\text{Sym}_2(\Lambda^2 W_h)$) de la grassmannienne des droites de H

En transposant le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Sym}_2(\Lambda^2 W) & \rightarrow & \Lambda^4 W \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Sym}_2(\Lambda^2 W_h) & \rightarrow & \Lambda^4 W_h \end{array}$$

(lignes : élévation au carré)
(colonnes : passage au quotient)

et en utilisant la dualité de l'algèbre extérieure, on trouve un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \text{Sym}_2(\Lambda^2 W_h) \\ \downarrow & & \downarrow \\ W & \rightarrow & \text{Sym}_2(\Lambda^3 W) \end{array}$$

(colonnes : multiplication par h)

dont la première ligne est une équation de la grassmannienne des droites de H et la seconde ligne est l'isomorphisme $W \cong H^0(\mathcal{I}_G(2))$. On obtient l'assertion en effectuant la restriction à G .

On s'intéresse maintenant à l'étude du lieu singulier de S ; il est défini par le conducteur de $\mathcal{O}_S$ dans $\mathcal{O}_S$, c'est-à-dire l'image réciproque sur S du conducteur de $\mathcal{O}_Z$ dans $\mathcal{O}_{\bar{Z}}$; il s'identifie donc à $D \cap H$ où D est le lieu double de $\bar{Z}$.

Selon qu'on est dans le cas (a) ou (b) ci dessus, $D \cap H$ est lisse ou contient une droite.

En effet, pour qu'un élément non nul de $\text{Hom}(T, E)$ soit de rang un, il faut et il suffit que l'élément de $\Lambda^2 W_h$ qui lui correspond soit décomposable.

(Si k est le corps de fractions rationnelles de X , la matrice par blocs de la forme alternée que définit cet élément sur $W_h \otimes k = (V \otimes k) \oplus (E^V \otimes k)$ s'écrit $\begin{pmatrix} * & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ où a est l'élément correspondant

de $\text{Hom}(T, E)$; cette matrice est de rang deux si et seulement si a est de rang un.)

Donc il faut et il suffit qu'il existe un élément non nul de $\text{Ker}(\Lambda^3 W \rightarrow V)$ de la forme $h_1 \wedge h_2 \wedge h_3$.

L'assertion résulte alors du fait que dans la transformation de Sempale duale, le point de P^V correspondant à un élément

de décomposable non nul $h_1 \wedge h_2 \wedge h_3$ de $\text{Ker}(\Lambda^3 W \rightarrow V)$ (donc pitre) est transformé en le plan de P^V orthogonal

à la droite d'équations (h_1, h_2, h_3) de P^W .

Dans le cas (a) où E est stable, la courbe $H \cap D$ est une quintique elliptique lisse de H , dont l'image réciproque sur $\tilde{S}$ est de classe $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans $\text{Num}(\tilde{S})$.

Dans le cas (b) où E est décomposable, la courbe $H \cap D$ est réunion d'une droite A et d'une biquadratique (courbe elliptique de degré 4) B se coupant (avec tangentes distinctes) en un point w .

En effet le résiduel de A dans l'intersection de H et D est soit une biquadratique, soit la réunion d'une génératrice de D (pouvant coïncider avec A) et d'une cubique

plane lisse; le plan de cette cubique couperait toutes les génératrices de D et serait donc contenu dans $\tilde{E}$ (transformation de Sempale duale, ce qu'on a exclu).

Les classes dans $\text{Num}(\tilde{S})$ des images réciproques respectives de A et B sur $\tilde{S}$ sont $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$; le point w est l'image commune des 2 points d'intersection de ces images réciproques.

Soit maintenant C une courbe de degré d tracée sur S , intersectant aux génératrices de $\tilde{S}$.

Montrons que dans les cas (a) et (b) on a $h^0(J_C(d-1)) = 0$ pour $d \geq 8$.

D'après le corollaire de la Proposition 2, on doit vérifier que $h^0(\text{Sym}_{d-8}^0(E)^V \otimes L) = 0$ pour tout $\mathcal{O}_X$ -module inversible L de degré $(d-10)$ (L est ici $\mathcal{O}_X(-2)$ tensorisé par $\mathcal{O}_C(2)$) au moyen de la projection (isomorphisme) de C sur X .



d'une part, $h^2(\mathcal{I}_C \otimes \mathcal{O}_{D \cap H}(d-4)) = 0$ d'autre part.

Le degré de $\text{Sym}_{d-2}^n(E^*) \otimes L$ est $(d-7)(10 - \frac{3}{2}d) < 0$, compte tenu des hypothèses.

Si E est stable, ce fibré est semi-stable et n'a donc pas de section. Si E est décomposable, ce fibré est décomposable en somme directe de fibrés de rang un dont le degré maximum est $6-d < 0$; il n'a pas de section.

Dans le cas (a) où $D \cap H$ est une quintique elliptique lisse, C coupe $D \cap H$ selon un diviseur de degré $3d-5$: en effet les classes de C , resp $D \cap H$ dans $\text{Num}(S)$ sont $\begin{pmatrix} d-5 \\ 2 \end{pmatrix}$ resp $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$. La forme bilinéaire d'intersection est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Par conséquent $\mathcal{O}_{D \cap H} \otimes \mathcal{I}_C(d-4)$ est un module inversible de degré $(2d-15)$ sur $D \cap H$;

donc $h^2(\mathcal{O}_{D \cap H} \otimes \mathcal{I}_C(d-4))$ est nul compte tenu des hypothèses faites sur d .

Dans le cas (b)', C coupe A , resp B selon un diviseur de degré $(d-3)$ resp $(2d-2)$.

On a une suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{O}_B(-w) \rightarrow \mathcal{O}_{D \cap H} \rightarrow \mathcal{O}_A \rightarrow 0$

d'où par tensorisation avec $\mathcal{I}_C(d-4)$ une suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{O}_B(-w) \otimes \mathcal{I}_C(d-4) \rightarrow \mathcal{O}_{D \cap H} \otimes \mathcal{I}_C(d-4) \rightarrow \mathcal{O}_A \otimes \mathcal{I}_C(d-4) \rightarrow 0$

Le terme de gauche est un $\mathcal{O}_B$ -module inversible de degré $2d-15$, le terme de droite est un $\mathcal{O}_A$ -module de degré -1 ;

donc $h^2(\mathcal{O}_{D \cap H} \otimes \mathcal{I}_C(d-4)) = 0$

Chapitre 4

Courbes de degré inférieur à 9

On vérifie facilement la conjecture pour les courbes de degré $d \leq 6$.

On suppose donc que $7 \leq d \leq 9$.

On va adapter le raisonnement de [4] 2.1.

On suppose que X a un genre $g \geq 2$ et on considère un fibré inversible positif "général" A de degré $(g-2)$ sur $\tilde{X}$. ($h^0(A) = 2$).

On a la résolution suivante :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^2(-4) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^\alpha(-3) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^\delta(-3) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^\gamma(-2) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{d-5}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow p_* A \rightarrow 0$$

Si $\beta = 0$ on peut construire le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} & \rightarrow & \mathcal{O}_X \rightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow s \\ 0 & \rightarrow & K & \rightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^\gamma(-2) & \xrightarrow{d-5} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{(-1)} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow p_* A \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & N & \rightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^\gamma(-2) & \xrightarrow{d-5} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{(-1)} \rightarrow \text{coher } s \rightarrow 0 \\ & & & & & & \downarrow 0 \end{array}$$

Le lemme du serpent permet alors

$$d_X \cong \frac{N}{K}$$

On montre alors comme dans [4] que

d_X est $(d-3)$ -régulier donc $H^2(d_X(d-4)) = 0$.

Si $\beta \neq 0$ on transpose avec $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)$.

On obtient alors :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{d-5}(-3) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^\gamma(-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^\beta(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^\alpha(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^2 \rightarrow (p_* A)^\vee \rightarrow 0$$

De cette résolution on déduit la composition

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^\beta(-1) \xrightarrow{\begin{pmatrix} H_0, \dots \\ H_2, \dots \end{pmatrix}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \xrightarrow{(A_0, A_2)} (p_* A)^\vee \xrightarrow{w_X} 0$$

H_0 et H_1 sont des sections de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)$, ρ_0, ρ_1 sont 2 sections indépendantes de $(p_* A)^V \otimes \omega_X$.

On a $\rho_0 H_0 + \rho_1 H_1 = 0$.

Il en résulte que $L = H_0 \cap H_1$ est une $(d-g)$ -sécante à X .

Si X est hyperelliptique, le diviseur positif "général" de degré $g-2$ sur $\tilde{X}$ a pour complémentaire relativement à $\omega_{\tilde{X}}$ le composé d'un $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ -module inversible de degré deux et deux sections et d'un diviseur positif de degré $g-2$ formé de points fixes. Les plans H_0 et H_1 se coupent donc en une $(d-2)$ -sécante à X .

Si X n'est pas hyperelliptique, $A^V \otimes \omega_X$ est engendré par ses deux sections sur A est "général" (positif de degré $g-2$).

Notons Y le quotient de $\tilde{X}^{g-2}$ par l'action du groupe de permutations des facteurs, A le $\mathcal{O}_{Y \times \tilde{X}}$ -module inversible "naturel" dont la restriction à la fibre de la classe de $(x_1, \dots, x_{g-2})$ est $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(x_1 + \dots + x_{g-2})$.



$p_Y : Y \times \tilde{X} \rightarrow Y$ et $p_X : Y \times \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ les projections. Par hypothèse la restriction à la fibre de tout point de Y du $\mathcal{O}_{Y \times \tilde{X}}$ -module $A^V \otimes p_X^*(M \otimes \omega_{\tilde{X}})$

a des sections non nulles, autrement dit $p_{Y*}(A^V \otimes p_X^*(M \otimes \omega_{\tilde{X}})) \neq 0$. D'autre part $p_{Y*}(A^V \otimes p_X^*(\omega_{\tilde{X}}))$ est un $\mathcal{O}_Y$ -module sans torsion de rang deux, et $H^0(\pi^V)$ contient le dual de $V = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2))$. Il existe donc un ouvert non vide U de Y et, au dessus de U , une application linéaire surjective de $V^V \otimes \mathcal{O}_Y$ dans $p_{Y*}(A^V \otimes p_X^*(\omega_{\tilde{X}}))$.

Elle définit un morphisme de U dans la grassmannienne G des droites de $\mathbb{P}_3^V$ (ou de $\mathbb{P}_3$) dont l'interprétation géométrique est de transformer un diviseur effectif de degré $(g-2)$ "assez général" D en une droite rencontrant X selon un diviseur D' de degré $d-g$, tel que $\omega_{\tilde{X}}(-D + D') \cong \mathcal{O}_{\tilde{X}}(2)$.

Comme $d \geq 7$, ceci ne peut se produire pour $g \geq 4$ (lemme des trois-sécantes).

En effet (si U est assez petit) le morphisme de U dans G est (ensemblément) injectif, donc l'adhérence de l'image de U est de dimension $g-2$.

peu implique $4 - (d-g), g=2$ d'après le
lemme des trisécantes $(g=2, 2)$ donc $d \leq 6$.

Supposons maintenant que $g=3$. Soit p le
degré de la surface réglée adhérente de l'image
de U dans G .

Cette surface est une composante de toute
surface de degré $(d-4)$ contenant X car elle
est formée de $(d-3)$ -sécantes;

Comme $h^0(\mathcal{O}_X(d-4)) = d(d-4) - 2$, on a

l'inégalité $\binom{d-1}{3} \leq \binom{d-1-5}{3} + d(d-4) - 2$

Or $\binom{d-1}{3} - \binom{d-4}{3} - d(d-4) + 2 = \binom{d-6}{2}$.

La surface réglée étant de genre 3, on a $5 \geq 4$.

On arrive donc à une contradiction.

Ce raisonnement suppose que la courbe X est
tracée sur une surface de degré $(d-4)$.

C'est évidemment le cas compte de
nos hypothèses $(g=3, d \geq 7)$.

Enfin dans le cas $g=2$ on
trouve une $(d-2)$ -sécante.

Compte tenu de la proposition 1,
il faut maintenant considérer les
courbes rationnelles et elliptiques
de degré 7 et 8.

Courbe rationnelle de degré 7

On considère la décomposition de Π .

Si Π a un facteur direct de degré ≥ 2 ,
il y a une 6-sécante [4].

Sinon $\Pi \cong \mathcal{O}^2(-2) \oplus \mathcal{O}(-3)$ et

la courbe est sur une surface réglée
de degré 4.

Si le lieu double de cette surface
est une cubique gauche (lisse)

on est dans un cas d'exception.

Si le lieu double n'est pas une
cubique gauche on a une 5-sécante.

Courbe elliptique de degré 7

La 3-série est incomplète.

La courbe n'a en général pas de
5-sécante. C'est donc un cas d'exception.

On peut tracer une courbe de
ce type sur une surface de Del Pezzo
de degré 4.

d'clater 5 points P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 de $\mathbb{P}^2$ (en position générale).

Appelons $\mathcal{L}$ la classe de la transformée totale d'une droite de $\mathbb{P}^2$, et si la classe de la courbe exceptionnelle correspondant à P_i .

Le groupe de Picard de la surface de del Pezzo est le groupe abélien libre à 6 générateurs $\mathcal{L}, -e_1, -e_2, -e_3, -e_4, -e_5$.

La forme d'intersection est donnée par $\mathcal{L}^2 = 1, e_i^2 = -1, \mathcal{L} \cdot e_i = 0, e_i e_j = 0 (i \neq j)$. La courbe de degré 7 et de genre 2 correspond au diviseur $(3, 1, 1, 0, 0, 0)$.

- La surface contient 16 droites. Ce sont
- (a) les courbes exceptionnelles (E_i)
 - (b) les transformées propres des droites D_{ij} de $\mathbb{P}^2$ contenant P_i et P_j $1 \leq i < j \leq 5$
 - (c) la transformée propre de l'unique conique contenant les 5 points.

La surface de del Pezzo est dans $\mathbb{P}^4$. Si on la projette dans $\mathbb{P}^3$ on obtient une surface quartique dont le lieu double est une conique.

On vérifie aisément que la courbe n'a pas de 5-sécante.

Courbe rationnelle de degré 8

On considère la décomposition de π . Si π a un facteur de degré > 1 , X a une 7-sécante. Sinon $\pi = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^2(-3)$ ou $\pi = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^2(-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-4)$

Dans le premier cas la filtration de Harder Narasimhan est $0 \rightarrow B \rightarrow \pi \rightarrow Q \rightarrow 0$ avec $B = \mathcal{O}(-2)$ $Q = \mathcal{O}^2(-3)$.

On a $h^1(B \otimes A \otimes Q) = 0$ et l'argument de la fin de la démonstration de la proposition 2 montre que X admet une 6-sécante si $h^2(\mathcal{I}_X(4)) > 0$.

Dans le deuxième cas X est tracée par une surface réglée rationnelle de degré 4.

Si le lieu double de cette surface est une cubique gauche (lisse), celle-ci coupe X en quatorze points et $h^2(\mathcal{I}_X(4)) = 2$; on est alors dans un cas d'exception. Sinon on a une 6-sécante.

Courbe elliptique de degré 8

(On se propose de montrer que la conjecture est encore vérifiée dans ce cas.)

Commençons d'abord par établir un lemme probablement bien connu mais dont nous n'avons pas trouvé de démonstration.

Lemme sur les groupes de points:

Soit $S \subseteq \mathbb{P}^2$ un groupe de points de degré d . Soit $k = \sup(n, H^2(\mathcal{I}_S(n)))$

Supposons que $d \leq 2k+2$. Alors ou bien S est l'intersection d'une conique et d'une courbe de degré $k+2$, ou bien il existe une droite L telle que $\deg(S \cap L) = k+2$.

Démonstration: On remarque

d'abord que $d \geq k+2$, et l'égalité ayant lieu

si et seulement si S est sur une droite. En effet soit L une droite ne rencontrant pas S . On peut écrire la suite exacte:

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{I}_S(l)) \rightarrow H^0(\mathcal{I}_S(l+1)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_L(l+1)) \rightarrow H^1(\mathcal{I}_S(l)) \rightarrow H^1(\mathcal{I}_S(l+1)) \rightarrow 0 \quad (l \geq k-2).$$

(Comme $\bigoplus H^0(\mathcal{O}_L(l))$ est un quotient de $\bigoplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n))$, on voit que si $H^0(\mathcal{I}_S(l+1)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_L(l+1))$ est surjectif pour un $l \geq k-2$, il l'est pour tout $l \geq k-2$. Mais il ne peut l'être pour $l = k$, car $H^1(\mathcal{I}_S(k)) \neq 0 = H^1(\mathcal{I}_S(k+1))$; la suite $h^1(\mathcal{I}_S(l))_{-1 \leq l \leq k+1}$ est strictement décroissante.

Comme $h^1(\mathcal{I}_S(-1)) = d$, on a $k \leq d-2$.

Si S n'est pas sur une droite, $h^1(\mathcal{I}_S(1)) = d-3$ et $k \leq d-3$.

Dans tous les cas on a $d \geq k+2$.

Soit m le plus petit $\geq k+2$ tel que $\mathcal{I}_S(m)$ soit engendré par ses sections. On a $m = k+2$ ou $k+2$ car $h^1(\mathcal{I}_S(l)) = 0$ pour $l \geq k+2$.

Montrons qu'il existe une courbe réduite irréductible section de $\mathcal{I}_S(m)$. Posons

$$h^0 = h^0(\mathcal{I}_S(m)) = \binom{m+2}{2} - d.$$

Comme $\mathcal{I}_S(m)$ est engendré par ses sections, celles-ci sont les images des sections hyperplanes d'un morphisme de l'éclatement $\tilde{P}$ de S dans $\mathbb{P}^2$, dans un espace projectif $\mathbb{P}^{h^0-2}$.

Si l'image de ce morphisme est une surface le théorème de Bertini assure l'existence de la courbe cherchée.

Si non l'image est une courbe intègre de $\mathbb{P}^{h^0-2}$, non dégénérée, donc de degré $S \gg h^0-2$. Une section générale de $\mathcal{I}_S(m)$ admet S composantes irréductibles de degré ≥ 2 chacune, donc $S \leq m$ i.e.

$\binom{m+2}{2} - d - 1 \leq m$. Ceci n'est possible que pour $m = k+2$, $0 \leq m \leq 3$, donc $0 \leq k \leq 2$ et donc $d \leq 6$. Ce cas a déjà été traité.

Soit donc C une courbe intègre (réduite et irréductible) contenant S .

Notons $\mathcal{I}_{S/C}$ l'idéal de S dans C .

$$\mathcal{I}_{S/C}^\vee = \text{Hom}(\mathcal{I}_{S/C}, \mathcal{O}_C).$$

$$\text{Or on a } h^0(\mathcal{I}_{S/C}^\vee(m-k-3)) \neq 0.$$

$$\text{En effet } h^0(\mathcal{I}_{S/C}^\vee(m-k-3)) = h^2(\mathcal{I}_{S/C}(k+3-m) \otimes \mathcal{O}_C) = h^2(\mathcal{I}_{S/C}(k))$$

$$\text{car } \mathcal{O}_C = \mathcal{O}_C(m-3).$$

Par ailleurs la suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(\mathcal{I}_S(k)) \rightarrow H^1(\mathcal{I}_{S/C}(k)) \rightarrow H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k-m)) \rightarrow 0$$

$$(\text{d' suite de } 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-m) \rightarrow \mathcal{I}_S \rightarrow \mathcal{I}_{S/C} \rightarrow 0)$$

montre que $H^1(\mathcal{I}_{S/C}(k)) \neq 0$.

Puisque C est intègre, la transposée $\mathcal{I}_{S/C}^{(k+3-m)} \rightarrow \mathcal{O}_C$

admet une section non nulle de $\mathcal{I}_{S/C}^\vee(m-k-3)$ définit un groupe de points de degré $d-m(k+3-m)$.

Si $m = k+2$ ce degré est $d-2k-2$ qui est nul car $d \leq 2k+2$. Donc $d = 2k+2$ et

$\mathcal{I}_{S/C} = \mathcal{O}_C(-2)$. S est donc l'intersection complète de C et d'une conique.

Considérons maintenant le cas $m = k+2$. Le groupe de points S' section de $\mathcal{I}_{S/C}^\vee(m-k-3)$ est de degré $d-k-2 \leq k$.

Par suite $h^2(\mathcal{I}_{S'}(k-1)) = 0$. La suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-k-2) \rightarrow \mathcal{I}_{S'} \rightarrow \mathcal{I}_{S'/C} \rightarrow 0$$

$$\text{donne } 0 \rightarrow H^2(\mathcal{I}_{S'}(k-1)) \rightarrow H^2(\mathcal{I}_{S'/C}(k-1)) \rightarrow H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3)) = \mathbb{C}$$

On a alors $h^2(\mathcal{I}_{S/C}(k-1)) = h^1(\mathcal{I}_{S/C}(k)) = h^2(\mathcal{I}_S(k)) = 1$

Soit $0 \rightarrow \bigoplus \mathcal{O}(-n_{a_j}) \xrightarrow{M} \bigoplus \mathcal{O}(-n_{b_i}) \rightarrow \mathcal{I}_S \rightarrow 0$

la résolution de $\mathcal{I}_S$.

les n_{a_j} sont $\leq k+3$ et l'égalité est atteinte pour un seul; les n_{b_i} sont $\leq k+2$ et l'un au moins est égal à $k+2$.

On peut donc construire un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus \mathcal{O}(-n_{a_j}) & \longrightarrow & \bigoplus \mathcal{O}(-n_{b_i}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}(-k-3) & \xrightarrow{L} & \mathcal{O}(-k-2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

où L est une droite.

En restreignant à L on voit que $L \cap S$ est de degré $\geq k+2$ (égal en fait).

Exemple: Si $d=8$ et $h^2(\mathcal{I}_S(3)) \neq 0$,
 Si $\mathcal{I}_S$ est sur une conique, on contient 5 points alignés.
 Si $h^2(\mathcal{I}_S(4)) \neq 0$, S contient six points alignés.

Voilà maintenant comment ce lemme peut être utilisé.

Soit C une courbe elliptique de degré 5.

Si C est sur une cubique, celle-ci n'a que des singularités isolées et on a, aucun mal à trouver la 6-sécante.

On suppose donc que C n'est pas sur une surface cubique. On a $h^2(\mathcal{I}_C(k)) = 4, 6, 4$

pour $k=1, 2, 3$.

a) Supposons que $h^2(\mathcal{I}_C(4)) \geq 2$.
 Il existe alors (au moins) un plan H tel que la multiplication $H^2(\mathcal{I}_C(3)) \xrightarrow{H} H^2(\mathcal{I}_C(4))$ ne soit pas surjective. On effectue donc choisit des bases de $H^2(\mathcal{I}_C(3))$ et $H^2(\mathcal{I}_C(4))$, la matrice de la multiplication par H d'où
 $(\text{lig}(H))_{0 \leq i \leq h^2(\mathcal{I}_C(4))}$ où les lig sont

$$0 \leq j \leq 4$$

des fonctions linéaires homogènes de H , et la variété des mineurs maximaux de cette matrice est non vide puisque $h^2(\mathcal{I}_C(4)) \geq 2$.

Soit H 1 tel plan; la suite exacte

$H^2(\mathcal{I}_C(3)) \xrightarrow{H} H^2(\mathcal{I}_C(4)) \rightarrow H^2_{\mathcal{I}_C \cap H}(4) \rightarrow 0$ montre que $H^2(\mathcal{I}_{C \cap H}(4)) \neq 0$ donc H contient une 6-sécante à C d'après le lemme.

b.) Supposons que $h^2(j_c(4)) = 2$ et

que $H^2(j_c(3)) \xrightarrow{H} H^2(j_c(4))$ est l'application nulle.

Comme dans a.) on obtient $H^2(j_{c \cap H}(4)) \neq 0$

donc H contient une 6-sécante.

c.) Supposons maintenant que $h^2(j_c(4)) = 2$ et $H^2(j_c(3)) \xrightarrow{H} H^2(j_c(4))$ n'est pas l'application nulle.

Soit C' la liée de C par 2 quartiques (nécessairement intègre). Le module de Horrocks-Hartshorne-Rao $\bigoplus H^2(j_{C'}(n))$

est le dual (relativement à $\mathbb{C}$) de

$$\bigoplus H^2(j_c(n+4)).$$

En particulier on a $h^2(j_{C'}(n)) = 1, 4, 6, 4, 0$ pour $n=0, 1, 2, 3, 4$ et l'application $H^2(j_{C'}) \otimes H^0(\mathcal{O}_{P^3}(1)) \rightarrow H^2(j_{C'}(2))$ est bijective.

Notons que $H^0(\mathcal{O}_{C'})$ est une $\mathbb{C}$ -algèbre factorielle de rang 2, donc isomorphe à $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ ou à $\mathbb{C}[\varepsilon]$ avec $\varepsilon^2 = 0$.

a.) $H^0(\mathcal{O}_{C'}) = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$

$C' = C'_1 \cup C'_2$ où C'_1 et C'_2 sont des courbes (localement Cohen-Macaulay mais non nécessairement réduites, ni localement intersection complète) disjointes. L'idéal de C'_i dans C' est engendré par un idempotent e_i de $H^0(\mathcal{O}_{C'})$.

L'image de e_i dans $H^0(\mathcal{O}_{C'_i})$ est non nulle, donc $e_i: H^2(j_{C'_i}) \otimes H^0(\mathcal{O}_{P^3}(1)) \rightarrow H^2(j_{C'_i}(2))$ est surjectif comme l'est $e_i: H^0(\mathcal{O}_{C'_i}(2)) \rightarrow H^2(j_{C'_i}(1))$. Le lemme du serpent permet alors de dire que $H^0(\mathcal{O}_{P^3}(1)) \rightarrow H^2(\mathcal{O}_{C'_i}(1))$ est surjectif donc

bijectif. La courbe C n'étant pas une cubique on a $H^2(\mathcal{O}_{C'}(1)) = 0$. Donc on a $H^2(\mathcal{O}_{C'_i}(1)) = 0$ et donc $\chi(\mathcal{O}_{C'_i}(1)) = 4$ i.e. $d_i - g_i = 3$.

Par ailleurs $H^0(\mathcal{O}_{C'_i}) = \mathbb{C}$ donc $g_i \geq 0$. Puisque $d_1 + d_2 = 8$ les 2 possibilités sont:

$$- d_1 = 3 \quad g_1 = 0 \quad d_2 = 5 \quad g_2 = 2$$

$$- d_1 = d_2 = 4 \quad g_1 = g_2 = 2$$

Supposons que $d_1 = 3$ et $d_2 = 5$.

On a alors $(H^0(\mathcal{O}_{C'_1}(2)) = 0) \quad h^0(j_{C'_1}(2)) \geq 13$

et $h^0(j_{C'_2}(2)) \geq 1$.

Comme $h^0(j_{C'}(u)) = 3$, on a nécessairement

$h^0(j_{C'_2}(2)) = 3$ et $h^0(j_{C'_2}(2)) = 2$ et
toute quartique contenant C' est produit de
2 quadriques contenant resp C'_2 et C'_2 .

Ceci est impossible puisque C' est contenue
dans l'intersection de 2 quartiques intègres.

Si maintenant $d_1 = d_2 = 4$ on a $h^0(j_{C'}(2)) \geq 2$

Comme $h^0(j_{C'}(4)) = 3$ on obtient une contradiction
en tenant compte du

Lemme de Clifford: Soient U, V, W 3

$\mathbb{C}$ -espaces vectoriels de rang respectif u, v, w .

Soit $f: U \otimes V \rightarrow W$ une application linéaire.

On suppose que $f(x \otimes y) \neq 0$ pour $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

Alors $w \geq u + v - 2$.

Si $w = u + v - 2$ alors tout élément non nul z de W
s'écrit $z = f(x \otimes y)$ pour (x, y) convenable

b°) $H^0(\mathcal{O}_{C'}) = \mathbb{C}[\varepsilon]$ avec $\varepsilon^2 = 0$.

Notons C'_2 la courbe définie dans C'

par l'idéal $\text{Ann}(\varepsilon)$ dans $\mathcal{O}_{C'}$, et

C'_2 la courbe définie par $\text{Ann}(\text{Ann}(\varepsilon))$

(C' est géométriquement intersection complète)

Notons I l'idéal $\text{Ann}(\text{Ann}(\varepsilon))$.

On a une suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{O}_{C'_2} \xrightarrow{\varepsilon} I \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow 0$

où F est un module de support fini.

Soit d_i le degré de C'_i ; on a $d_1 + d_2 = 8$.

On note g_i le genre arithmétique de C'_i .

Comme l'image de ε de $H^2(j_{C'})$ est non nulle,

$H^0(I(1)) \rightarrow H^2(j_{C'}(2))$ est surjective, de plus
 $H^2(I(2)) = 0$ car $H^2(\mathcal{O}_{C'_2}(1)) = 0$ (C'_2 n'est pas

une courbe cubique)

Il en résulte que $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{C'_2}(1))$
est bijective (lemme du serpent)

(C'_2 n'est pas plane du fait que $C'_2 \subset C'_2$)

Comme tout à l'heure on obtient $d_1 - g_1 = 3$.

La suite exacte $0 \rightarrow H^0(I) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{C'}) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{C'_2}) \rightarrow$

$H^1(I) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_{C'}) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_{C'_2}) \rightarrow 0$ donne

$\chi(\mathcal{O}_{C'_2}) = h^2(I) - 2$ et $-2 \leq \chi(\mathcal{O}_{C'_2}) \leq 2$;

donc on a $0 \leq g'_2 \leq 2$.

Par ailleurs $d_2 = 4$ ou 5 ($d_2 \leq d_2$).

Si $d_1 = 4$ ($g_1 = 2$) on a $h^0(j_{C'_2}(2)) \geq 2$.

Comme $j_{C'} \supset j_{C'_2}$ on obtient une contradiction
en utilisant le lemme de Clifford.

Si $dz = 5$ ($g_1 = 2$) on a $h^0(\mathcal{I}_{C_2}(2)) = 2$
 (sinon on a encore une absurdité.)
 (le lemme de Castelnuovo montre que $\mathcal{I}_{C_2}$
 est engendré par $h^0(\mathcal{I}_{C_2}(3))$, donc C_2 est
 liée à une droite par une quadrique et
 une surface cubique. C_2 est donc arithmétiquement
 Cohen-Macaulay, en particulier $h^0(\mathcal{O}_{C_2}) = 2$.

On a $h^0(\mathcal{O}_{C_2}) \leq h^0(I) = 2$ donc $g_2 \geq 0$.

Comme $h^2(\mathcal{O}_{C_2}(2)) = 0$, on obtient $h^0(\mathcal{I}_{C_2}^{(2)}) \geq 3$.

Ainsi $(\mathcal{I}_{C_1} \supset \mathcal{I}_{C_1} \cdot \mathcal{I}_{C_2})$ toute quartique
 contenant C_1 est produit de la quadrique contenant
 C_2 et d'une quadrique contenant C_1 . d'après
 le lemme de Clifford.

On a donc encore une contradiction.

Ceci montre que la conjecture est
 valable pour les courbes elliptiques de
 degré 8.

On est donc en mesure d'énoncer
 le résultat suivant :

Théorème : Soit $X \subseteq \mathbb{P}^3$

une courbe lisse non plane
 de degré d et de genre g .

On suppose que $(d, g) \notin \{(7, 0); (7, 2); (8, 0)\}$.

Alors $H^2(\mathcal{I}_X(d-4)) \neq 0$ si et seulement si

X a une $(d-2)$ -sécante



BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. BUCHSBAUM, D. EISENBUD
Algebra Structures for finite free resolutions
and some structure theorems for ideals of
codimension three Vol 99 N°3 PP 447-485
Amer Jour of Math
- [2] G. CASTELNUOVO.
Sui multipli di una serie lineare di gruppi
di punti appartenente ad una curva algebrica
Palermo 7 (1893).
Rend acc Nat
- [3] W. FULTON
Intersection Theory
L. GRUSON, R. LAZARSCHEID, C. PESKINE
On a theorem of Castelnuovo, and the Equations
defining space curves Inv Math 72 1983.
- [5] G. HARDER, N.S. NARASIMHAN
On the cohomology groups of moduli spaces
of vector bundles on curves.
Math Ann, vol 212, 1975
- [6] R. HARTSHORNE
Algebraic Geometry, Graduate texts in
Mathematics, vol 52, Springer-Verlag
New-York.
- [7] D. NORTHCOTT
Finite free resolutions, Cambridge tract 72 Appc.
- [8] M. RAYNAUD
fibres vectoriels sur une courbe
Sections des Math France 110 1982.
Publ soc
- [9] J.C. SEMPLÉ, L. ROTH
Introduction to Algebraic geometry

classification AMS : 14N05

Mots clés : série linéaire, sécante, fibre vectoriel
éclatement, surface réglée, lieu singulier
courbe hyperelliptique.