

50376  
1985  
117

N° d'ordre : 625

50376  
1985  
117

# THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES**

par

**Bruno DUTHOIT**

**Ingénieur EUDIL - Docteur 3ème Cycle**

## **LES METHODES DE LA THEORIE DU SIGNAL APPLIQUEES A L'ETUDE DES INTERACTIONS ENERGETIQUES ENTRE UNE PAROI OPAQUE ET SON ENVIRONNEMENT**



Soutenue le 16 Octobre 1985 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

MM.	J.P.	BARDON	Président
	P.	THERY	
	J.C.	MASO	
	R.	JAVELAS	
	A.	LEBRUN	
	A.	DUBRULLE	
	J.P.	HENRY	
	R.	FAUCONNIER	

## AVANT-PROPOS

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire "Mesures Automatiques" du Centre de Recherche Science des Matériaux et Techniques de Construction (CRESMAT) de l'Université de Lille I. Je suis très reconnaissant à Messieurs A. LEBRUN et P. THERY d'avoir bien voulu m'y accueillir.

Monsieur le Professeur THERY m'a confié le thème de cette étude. Je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude pour l'aide et les encouragements qu'il m'a prodigués tout au long de ce travail et la part active qu'il a eu dans son aboutissement.

Monsieur le Professeur BARDON, Directeur du Laboratoire de Thermocinétique de l'Université de Nantes s'est intéressé à mes travaux, ses conseils m'ont été très précieux. Je lui en suis très reconnaissant, je suis très sensible à l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.

Je suis particulièrement reconnaissant à Monsieur le Professeur MASO, Président de l'Association Française de Recherches et d'Essais sur les Matériaux et les constructions (AFREM), pour les conseils qu'il m'a prodigués, je suis très honoré par sa présence dans ce jury.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur JAVELAS, responsable du Laboratoire de Thermique du Bâtiment à l'I.N.S.A. de Toulouse pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de juger mon travail.

Je suis particulièrement reconnaissant à Monsieur le Professeur LEBRUN pour les conseils judicieux et les encouragements qu'il m'a apportés tout au long de mes travaux de recherche.

Je remercie Monsieur le Professeur JOUANNA, Directeur du Laboratoire de Génie Civil de l'Université de Montpellier pour l'intérêt qu'il a toujours bien voulu porter à mes travaux et les conseils qu'il m'a prodigués.

Monsieur le Professeur DUBRULLE, Vice-Président de l'Université de Lille a bien voulu me faire l'honneur d'accepter de faire partie de mon jury, je l'en remercie vivement.

Je suis très reconnaissant à Monsieur le Professeur HENRY, responsable de l'option Génie Civil de l'EUDIL de bien vouloir faire partie de ce jury.

Je remercie Monsieur FAUCONNIER, chercheur à la Direction de la Recherche de l'U.T.I. pour sa présence dans ce jury.

Je tiens aussi à remercier Messieurs LESENNE, Directeur de l'I.U.T. de Béthune et CAPET, chef du département Génie Civil pour avoir permis qu'une large part du travail expérimental se déroule au sein de l'I.U.T.

Je ne saurais oublier d'exprimer ma reconnaissance à tous mes collègues, chercheurs du Laboratoire, pour la sympathie qu'ils m'ont témoignée.

Mes sincères remerciements à Madame HOYEZ qui a dactylographié ce manuscrit.

Enfin, je remercie tout le personnel qui a assuré avec beaucoup de gentillesse l'impression de ce document.

# S O M M A I R E

-----

## INTRODUCTION

## RESUME

### CHAPITRE I : REPRESENTATION DES TRANSFERTS THERMIQUES DANS UNE PAROI EN REGIME VARIABLE

- I. INTRODUCTION : Représentation de la réponse d'un système linéaire invariant dans le temps.
  
- II. Modes de base et grandeurs généralisées associées représentatifs des interactions énergétiques entre une paroi homogène et son environnement.
  - 2.1. Représentation des transferts de chaleur unidirectionnels dans une paroi homogène
  - 2.2. Modes de base - Matrice de transfert
  - 2.3. Réponse du système à partir du "point de fonctionnement moyen".
  - 2.4. Fonctions de réponses.
    - 2.4.1. Stockage pur et transfert pur.
    - 2.4.2. Réponses dans l'espace du temps.
  - 2.5. Régimes continus, quasi-stationnaires, instationnaires.
    - 2.4.1. Régime continu ou indépendant du temps
      - 1°) Stockage à flux constant
      - 2°) Régime continu au mode antisymétrique.
    - 2.4.2. Régimes variables
      - 1°) Transfert pur
      - 2°) Stockage pur
      - 3°) Régimes quasi-stationnaires.
    - 2.4.3. Considérations sur la dynamique des transferts thermiques dans une paroi homogène

III. Représentation des transferts unidirectionnels dans les parois hétérogènes multicouches.

3.1. Relations entre grandeurs généralisées

3.2. Valeurs asymptotiques des réponses temporelles

IV. Application de l'analyse statistique de la relation "flux-température de surface" à la détermination de la résistance thermique en régime aléatoire.

V. Application des fonctions de corrélation à l'analyse des transferts thermiques en régime variable.

5.1. Notion de corrélation

5.2. Application des fonctions de corrélations à l'analyse des transferts thermiques en régime variable.

VI. CONCLUSION

## **CHAPITRE II : ANALYSE THERMODYNAMIQUE DES TRANSFERTS THERMIQUES EN REGIME VARIABLE**

I. INTRODUCTION

II. Etude théorique

2.1. Lois fondamentales de la thermodynamique des évolutions irréversibles.

2.1.1. Loi de conservation de l'énergie

2.1.2. Echange d'entropie dans un système en évolution

2.2. Représentation des échanges avec le milieu extérieur en fonction des flux et température de surfaces.

2.3. Augmentation d'entropie par conduction thermique en régime variable.

2.4. Bilan d'entropie en régime variable.

2.4.1. Variation d'entropie en régime variable

#### 2.4.2. Expression générale du bilan d'entropie

- 1°) Régimes continus
- 2°) Régimes quasi-stationnaires
- 3°) Régimes instationnaires.

#### 2.4.3. Généralisation aux systèmes multicouches.

### III. Simulation des transferts et de la dissipation interne dans une paroi homogène

#### 3.1. Analyse par simulation du bilan d'entropie en régime transitoire.

##### 3.1.1. Introduction, méthode de calcul

3.1.2. Bilan d'entropie dans une transformation sans variation de température moyenne.

3.1.3. Bilan d'entropie dans un processus de "stockage pur" sans transfert de chaleur à travers le système.

3.1.4. Bilan d'entropie pour un processus dans lequel il y a à la fois stockage et transfert de chaleur.

#### 3.2. Représentation "temps" de la dissipation interne

3.2.1. Transfert pur

3.2.2. Stockage de chaleur sensible.

### IV. CONCLUSION

## CHAPITRE III : RESULTATS EXPERIMENTAUX

### I. INTRODUCTION

#### II. Etude d'une paroi homogène en régime variable.

2.1. Conditions expérimentales

2.2. Production d'entropie

2.3. Représentation "temps" de la dissipation interne dans le processus de transfert.

2.4. Prise en compte des échanges superficiels.

III. Bilan d'entropie dans une structure bicouche.

IV. Mesures in situ

4.1. Introduction

4.2. Etude des composantes "lentement variables" ou basses fréquences

4.2.1. Instrumentation

4.2.2. Les signaux observés

4.2.3. Traitement par moyennes temporelles

4.2.4. Etude énergétique.

4.3. Etude des "sollitations rapides" ou hautes fréquences

4.3.1. Fonction réponse d'une paroi soumise à des sollicitations rapides.

4.3.2. Application aux signaux naturels

4.3.3. Echanges énergétiques entre une paroi et une ambiance intérieure dont la température subit des variations rapides.

V. CONCLUSION

CONCLUSION

ANNEXES

Annexe 1    Systèmes linéaires, propriétés générales

Annexe 2    Capteurs de flux

-----§§§§-----

I N T R O D U C T I O N

## INTRODUCTION

---

Durant ces dernières années, le coût de l'énergie a imposé dans toutes les branches industrielles d'importants efforts afin de minimiser les dépenses énergétiques. Dans le domaine du bâtiment, les problèmes de l'estimation et de la réduction des énergies de fonctionnement peuvent être abordés suivant deux aspects. Au niveau prévisionnel, par modélisation plus ou moins fine de la construction d'une part, et après réalisation par des études sur site en développant une instrumentation et des traitements de l'information adaptés.

Le premier aspect est abordé en phase de conception. Dans le domaine de l'habitat, cette préoccupation a amené une évolution rapide des normes et des règlements de calculs thermiques. Le **D.T.U. \* thermique** de 1963 (modifié en 1974) prenait en compte uniquement le transfert de chaleur dans les parois en régime permanent. Le paramètre fondamental était la résistance thermique. La réglementation ThG (1977) introduit un coefficient global de déperdition en régime permanent **G**, les règles THB (1982) prennent en compte les apports gratuits, les futures règles THC incluent l'efficacité des systèmes actifs (production, distribution...). On s'achemine avec les programmes H2E85 et H3E90 vers d'importantes réductions (prévisionnelles) de consommations dans l'habitat neuf et dans l'habitat ancien. L'application de ces règlements nécessite de la part du concepteur l'art d'un subtil dosage de coefficients semi-empiriques.

Actuellement, de nombreuses équipes de recherche travaillent à réaliser une modélisation numérique fine du comportement thermique des bâtiments en régime instationnaire (colloques SFT Reims 1979, Lyon 1983). Une modélisation complète impose l'étude des transferts de masse (renouvellement d'air, condensations ...), des transferts de chaleur au travers de l'enveloppe ainsi que l'écriture de relations de couplages entre les différents éléments. La simulation exacte du comportement d'un bâtiment est impossible, tous les modèles utilisent des hypothèses simplificatrices qu'il faut ensuite valider. La solution la plus objective consiste à confronter le résultat du

(\*) **D.T.U.** Document Technique Unifié

modèle à une expérimentation "in situ". Malgré les hypothèses simplificatrices retenues une modélisation fine est très complexe et impose de définir pour chaque élément les grandeurs fondamentales qui seront strictement nécessaires à l'obtention du résultat recherché : la dépense énergétique minimum, et (ou) le "confort thermique".

Les méthodes de calcul des transferts de chaleur dans les parois opaques de l'enveloppe ont fait l'objet de très nombreux travaux. Parmi les méthodes de résolution de l'équation de la chaleur les méthodes analytiques (séparation de variables, Laplace ...) sont les plus anciennes (3,4,5), elles fournissent des solutions spatio-temporelles exactes au prix de résolutions souvent complexes et lourdes. Ces méthodes associées au calcul matriciel ont permis le développement de l'étude de la conduction unidirectionnelle dans les parois multicouches (6).

Les méthodes numériques "directes" sont plus récentes (7,8). Elles sont basées sur une discrétisation dans le temps et dans l'espace de l'équation de la chaleur (différences finies). L'utilisation de ces méthodes nécessite des moyens de calcul importants. Le calcul donne en chaque point du maillage le flux et la température, ce résultat est en général surabondant.

Les méthodes numériques "indirectes" font intervenir pour obtenir la réponse en flux à la surface d'une paroi un produit de convolution entre le signal discrétisé représentant la température d'une face ou d'une ambiance (en linéarisant les transferts par rayonnement-convection), l'autre face étant maintenue à température constante et une fonction de réponse : "facteur de réponse" propre à la paroi. Ces méthodes introduites par Mitalas et Stepheson (9) sont actuellement développées par l'équipe de l'INSA de Lyon. Le facteur de réponse est généralement obtenu en calculant (analytiquement ou numériquement) ou en mesurant le flux sur une face de la paroi quand on impose sur celle-ci ou sur l'ambiance une sollicitation triangulaire de température, l'autre face étant maintenue à température constante (10). La méthode présente l'avantage de caractériser la paroi vue de "l'extérieur" (surface ou ambiance"). Elle fournit la densité de flux correspondant à une sollicitation de température donnée, mais ne fournit pas un "bilan global" des interactions entre la paroi et son environnement.

La seconde voie de recherche consiste à analyser la réponse réelle à une séquence climatique donnée "in situ". Cette analyse peut viser soit à caractériser l'élément à des fins de vérification ou de diagnostic, soit à caler un modèle numérique, soit à rechercher une gestion optimale de l'énergie.

Si les travaux de modélisation sont très nombreux actuellement, les études expérimentales sur sites sont assez peu développées. Cela résulte essentiellement de deux difficultés liées à cette approche. La première résulte de la forme très complexe des sollicitations réelles qui sont généralement la superposition de sollicitations lentement variables (climat moyen par exemple), de fluctuations périodiques (jours-nuits, régulation, intermittances) et de variations rapides à caractère aléatoire (vent, soleil, pluie, mouvements d'air intérieur ...). Pour surmonter cette difficulté, des chercheurs ont été conduits à effectuer des essais de laboratoire en vraie ou en semi-grandeur ou à utiliser des cellules climatiques qui permettent de contrôler les ambiances extérieure et intérieure (11). La seconde difficulté est liée à l'instrumentation. Les expériences sont essentiellement basées sur des mesures de températures. Ce n'est que très récemment que furent développés des capteurs de flux adaptés aux mesures dans le bâtiment : faible temps de réponse, sensibilité importante, taille suffisante pour intégrer les hétérogénéités des matériaux de construction, faible coût (12, 13, 14).

Les premières mesures de caractérisation de parois "in situ" utilisant des capteurs fluxmétriques ont été effectuées au CEBTP et par l'équipe de l'I.U.T. d'Amiens avec laquelle nous avons collaboré (16, 17). Ces mesures visaient à déterminer la résistance thermique globale d'une paroi par "moyennage" dans le temps des signaux flux et écart de température. Cette méthode permet une mesure du coefficient K in situ. Elle est cependant difficilement applicable à des signaux bruités de faible énergie et inopérante sur des signaux à moyenne voisine de zéro.

Notre travail qui se situe dans le cadre de ces deux préoccupations (modélisation, étude sur site) développe de nouvelles méthodes d'analyse des transferts thermiques dans les parois opaques et conduit à l'estimation de leurs performances énergétiques vis-à-vis des sollicitations qui leur sont appliquées. L'objectif est de fournir une formulation globale des interactions entre la paroi et son environnement mettant en

*évidence les processus fondamentaux de "stockage", de "transfert" et les grandeurs généralisées associées.*

*Cette démarche nous amène naturellement à introduire les méthodes de la théorie du signal et des systèmes dans l'étude des transferts thermiques et à recourir à la thermodynamique des évolutions irréversibles pour estimer la permormance énergétique et justifier les traitements en donnant un sens physique aux couplages des grandeurs généralisées et aux fonctions d'intercorrélations qui en résultent.*

*La théorie du signal permet de simplifier et de généraliser la formulation en isolant les grandeurs de chargement généralisées du système et en permettant l'analyse des échanges d'énergie indépendamment de la forme temporelle exacte des sollicitations mais uniquement en fonction de leur contenu spectral. Dans le domaine expérimental les méthodes de la théorie du signal autorisent le traitement de signaux quelconques déterministes ou aléatoires et permettent d'analyser les sollicitations complexes mesurées "in situ".*

*La thermodynamique des évolutions irréversibles développée par Onsager dès 1931, a permis la modélisation des échanges énergétiques entre processus couplés. Ce formalisme développé pour le régime permanent n'est pas adapté à la description des échanges énergétiques en régime variable. Le but de l'étude phénoménologique développée dans ce travail est de fournir les bases d'une méthode générale d'analyse des transferts thermiques dans les parois réelles en régime variable fondée sur la thermodynamique. La formulation donne une importance fondamentale de pertes thermodynamiques dues à l'irréversibilité des évolutions (et représentés par une production minimale d'entropie en régime quasi-stationnaire). Dans la partie théorique, nous montrons pour la première fois à notre connaissance, l'intérêt des méthodes de la théorie du signal pour représenter la dissipation en régime quasi-stationnaire et généraliser ainsi le domaine d'application du théorème de production minimale d'entropie aux processus quasi-stationnaires.*

*La formulation considère uniquement des parois ou systèmes interagissant avec le milieu à travers leurs deux surfaces extrêmes. Suivant le langage de la théorie des*

*systemes, les milieux extérieurs sont considérés comme des "sources externes" interagissant avec le système étudié à travers deux "accès". Le flux thermique et la température des deux surfaces (accès) étant mesurables en temps réel, la description du système est développée à partir de la connaissance des variations de ces grandeurs, en fonction du temps.*

—§§§—

RESUME

-----

## RESUME

*L'objectif de ce travail est essentiellement d'étudier les interactions énergétiques entre une paroi et son environnement en utilisant les méthodes de la théorie du signal. Cette approche a l'avantage de simplifier la formulation et permet d'introduire d'un point de vue thermodynamique les processus fondamentaux caractérisant les performances énergétiques de la paroi vis-à-vis des sollicitations extérieures.*

*L'objet du premier chapitre est d'adapter aux processus de transfert de chaleur dans les parois les méthodes habituellement utilisées pour simuler ou analyser les évolutions des systèmes linéaires. Dans un souci de simplification cette étude est d'abord développée en détail pour les systèmes homogènes monodimensionnels, puis généralisée aux structures hétérogènes. Des grandeurs généralisées exprimées en fonction aux flux et des températures sont introduites en vue de la formulation des pertes thermodynamiques.*

*Le but du second chapitre est d'exprimer en utilisant le formalisme de la théorie du signal le bilan d'entropie d'un système homogène monodimensionnel en régime variable. Les grandeurs généralisées définies au chapitre I permettent de définir deux forces de déséquilibre entre le système et le milieu extérieur et deux grandeurs conjuguées. Le taux de production d'entropie s'obtient par la somme algébrique des produits entre les forces de déséquilibre et les grandeurs conjuguées et d'une variation d'entropie non mesurable mais réversible. La différence entre la production d'entropie réelle et celle qui résulterait d'un régime quasi-stationnaire est imputable aux régimes transitoires et caractérise la performance énergétique du système vis-à-vis de la sollicitation qui lui est appliquée. La représentation proposée de la production d'entropie à partir de fonctions de corrélations est générale puisqu'elle ne dépend pas de la forme exacte des sollicitations mais uniquement de leur contenu*

spectral. Nous montrons que les fonctions d'intercorrélations représentatives de la production réelle d'entropie peuvent être obtenues par un produit de convolution entre des fonctions de réponses propres au système et des fonctions d'intercorrélations caractéristiques de la production minimale d'entropie.

Ces résultats théoriques sont validés par des simulations numériques, le calcul des termes mesurables et non mesurables du bilan permet de vérifier les expressions théoriques obtenues. Certains résultats sont généralisés aux systèmes hétérogènes et serviront de base à de futurs développements.

Le troisième chapitre est relatif aux résultats expérimentaux. L'objectif est de montrer l'intérêt des méthodes de la théorie du signal et des mesures fluxmétriques dans le domaine de la thermique du bâtiment en régime variable.

La première partie est développée de façon à montrer l'intérêt du bilan d'entropie en régime variable. La paroi homogène d'un caisson climatique est étudiée en régime variable. Les résultats expérimentaux sont comparés à des simulations afin de valider les mesures ; le problème des échanges superficiels est abordé. Une structure bicouche est ensuite utilisée afin de mettre en évidence les conséquences sur la performance énergétique des positions relatives des couches capacitatives et résistives vis-à-vis de la sollicitation.

La seconde partie concerne les mesures in situ qui peuvent avoir pour objectif de caractériser ou de diagnostiquer un système, de caler un modèle, de contrôler un processus de production de chaleur, ... etc. Les signaux de flux et de température mesurés qui résultent des sollicitations naturelles sont souvent complexes, ils résultent de la superposition de composantes lentement variables (régime moyen), de composantes périodiques (régulation, jour-nuit ...) et de composantes à caractères aléatoires ou bruits (vent, soleil, pluie, convection ...). Le recours aux techniques de la théorie du signal est

*indispensable pour traiter de telles informations. La définition au chapitre I des coordonnées généralisées et l'identification de processus fondamentaux permettent ici de simplifier les traitements.*

*Selon les objectifs que l'on se fixe on peut s'intéresser à deux aspects du comportement du système. On peut s'intéresser au comportement en "moyenne" du système, le paramètre fondamental est alors la résistance thermique globale (ou le coefficient  $K$ ). Nous montrons que la résistance thermique peut être obtenue par le rapport de deux fonctions de corrélation.*

*On peut aussi s'intéresser au comportement "instantané" du système, le paramètre fondamental de la réponse du système est alors l'effusivité. En isolant les fluctuations rapides par technique de lissage, nous montrons que l'effusivité des couches extrêmes est accessible à la mesure.*

*En mesurant simultanément à l'intérieur d'un local la température d'air, la température de surface et le flux, nous proposons une modélisation de la relation flux, température d'air en fonction de l'effusivité du matériau et du nombre de Biot.*

NOTATIONS

## PRINCIPALES NOTATIONS

- a : diffusivité thermique ( $\text{m}^2 \text{S}^{-1}$ )
- b : effusivité thermique ( $\text{J} \cdot \text{S}^{-\frac{1}{2}} \text{m}^{-2} \text{K}^{-1}$ )
- c : chaleur massique ( $\text{J} \cdot \text{Kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ )
- $\rho$  : masse volumique ( $\text{Kg m}^{-3}$ )
- C : capacité thermique ( $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$ )
- $\lambda$  : conductivité thermique ( $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ )
- R : Résistance thermique ( $\text{K m}^{-2} \text{W}^{-1}$ )
- T : Constante de temps fondamentale  $\tau = \frac{RC}{\pi^2}$  ( $\Delta$ )
- $\Delta, S$  : surface ( $\text{m}^2$ )
- V : volume ( $\text{m}^3$ )
- m : masse (Kg)
- x : variable d'espace
- t : variable temps
- Z : temps normalisé ( $Z = t/\tau$ )
- h(t) : réponse impulsionnelle
- H(P) : fonction de transfert, transformée de Laplace à la réponse impulsionnelle
- u(t) : réponse indicielle
- U(P) : transformée de Laplace de la réponse indicielle
- Q : quantité de chaleur (J)
- u : densité massique d'énergie interne ( $\text{J Kg}^{-1}$ )
- U : énergie interne (J)
- S : entropie ( $\text{J K}^{-1}$ )
- s : entropie par unité de volume ( $\text{J K}^{-1} \text{m}^{-3}$ )
- T : température absolue
- $\theta$  : variation de température

- $\phi$  : densité de flux ( $W/m^2$ )
- $\Phi$  : flux (W)
- $\Sigma \theta \Delta \phi$  : grandeurs généralisées de flux ( $W/m^2$ )
- $\Sigma \theta \Delta \theta$  : grandeurs généralisées de température (K)
- $R_{xx}$  : fonction d'auto corrélation du signal x.
- $R_{yx}$  : fonction d'inter corrélation des signaux x et y
- $\mathcal{L}(f)$  : transformée de Laplace du signal f
- $F(f)$  : transformée de Fourier du signal f
- Bi : nombre de Biot

CHAPITRE I

**REPRESENTATION DES TRANSFERTS THERMIQUES  
DANS UNE PAROI EN REGIME VARIABLE**

—§§§§—

## I. INTRODUCTION - REPRESENTATION DE LA REPONSE D'UN SYSTEME LINEAIRE INVARIANT DANS LE TEMPS

L'objet de cette première partie est d'adapter les méthodes habituellement utilisées pour analyser et simuler les évolutions des systèmes linéaires à l'analyse des transferts thermiques dans les parois homogènes. Nous groupons sous cette appellation l'ensemble des méthodes qui font appel au calcul opérationnel et analysent les réponses temporelles en les reliant aux réponses en fréquence (18 à 22). La transformation de Laplace a l'avantage de remplacer les équations différentielles par des équations algébriques et d'introduire la réponse impulsionnelle pour analyser l'évolution des systèmes. Ces méthodes peuvent être appliquées à l'étude des transferts thermiques dans une paroi puisque celle-ci peut être considérée en première approximation comme un système linéaire continu et stationnaire. La propriété essentielle de ces systèmes est telle qu'au signal d'entrée complexe :

$$X(p, t) = e^{p t}$$

$p$  étant la variable complexe,

correspond un signal de sortie de même forme

$$Y(p, t) = H(p) \cdot e^{p \cdot t}$$

La fonction  $H(p)$  de la variable complexe  $p$  est caractéristique du système, c'est la fonction de transfert isomorphe.

De façon plus générale, si l'on peut exprimer une entrée sous la forme d'une superposition d'exponentielles complexes :

$$x(t) = \int X(p) e^{p t} d p$$

la sortie du système linéaire est également donnée par superposition :

$$\begin{aligned} y(t) &= \int X(p) H(p) e^{P t} d p \\ &= \int Y(p) e^{P t} d p \end{aligned}$$

$$\text{avec } Y(p) = H(p) X(p)$$

La méthode symbolique ainsi définie, fournit la réponse d'un système linéaire à une entrée quelconque. Le système est caractérisé par une fonction complexe  $H(p)$  dont le produit ordinaire par  $X(p)$  fait connaître la transformée de Laplace de la réponse du système. Le principal domaine d'application de la transformée de Laplace concerne l'analyse des signaux causaux discontinus à l'origine. Cette méthode permet en particulier l'étude des régimes transitoires et la formulation des conditions initiales. Dans le cas particulier de l'excitation par une impulsion très brève par rapport à la constante de temps du système

$$L(x(t)) = 1 \quad \text{et} \quad Y(p) = H(p)$$

la transformée de Laplace inverse ( $L^{-1}$ ) de la fonction de transfert :

$$L^{-1}(H(p)) = h(t)$$

appelée "réponse impulsionnelle" caractérise le système dans le "domaine temps".

Connaissant la réponse impulsionnelle  $h(t)$ , il est possible d'obtenir toutes les réponses du système à divers types de sollicitations. En particulier la réponse à une sollicitation en échelon (ou réponse indicielle)  $u(t)$  est obtenue par intégration de la réponse impulsionnelle :

$$h(t) = \frac{d}{dt} u(t) \quad \text{ou} \quad u(t) = \int_0^t h(t) dt$$

La réponse indicielle, comme la réponse impulsionnelle, caractérise entièrement le système, elle permet de décrire la réponse à une sollicitation quelconque en transformant cette sollicitation en une somme d'échelons décalés dans le temps.

Introduisons pour décrire la sollicitation la suite unitaire définie par

$$\begin{aligned} a(n) &= 1 && \text{pour } n = 0 \\ a(n) &= 0 && \text{pour } n \neq 0 \end{aligned}$$

La suite des échantillons caractéristiques de la sollicitation peut s'écrire :

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) a(n-m)$$

De la même façon, la réponse impulsionnelle est décrite par la suite :

$$h(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m) a(n-m)$$

La réponse d'un système linéaire  $y_n = \sum y(m) a(n-m)$  s'exprime alors par l'équation de convolution numérique :

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m) x(n-m) \quad (1)$$

On peut de la même façon utiliser les échantillons de la réponse indicielle pour calculer la valeur du nième échantillon de la réponse

$$y(n) = x(0) u(n) + \sum_{m=0}^{m=n-1} \{x(m+1) - x(m)\} \cdot u\{n - (m+1)\} \quad (2)$$

En présence d'une condition initiale différente de zéro, il y a lieu d'ajouter à ces expressions un terme supplémentaire représentant l'effet de la condition initiale :

$$Y(n) = Y_0(n) + X(0) u(n) + \sum_{m=0}^{m=n-1} \{x(m+1) - x(m)\} \cdot u\{n - (m+1)\}$$

$Y_0(n)$  résulte des conditions initiales et représente le "régime libre".

## II. MODES DE BASE ET GRANDEURS GENERALISEES ASSOCIEES REPRESENTATIFS DES INTERACTIONS ENERGETIQUES ENTRE UNE PAROI HOMOGENE ET SON ENVIRONNEMENT

### 2.1.) Représentation des transferts de chaleur unidirectionnels dans une paroi homogène

La représentation des transferts thermiques dans la paroi monodimensionnelle de caractéristiques thermiques  $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $c$  représentée figure 1, nécessite la résolution de l'équation de Fourier :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (3)$$

$\lambda$  = conductivité thermique

$\rho$  = masse volumique

$c$  = chaleur massique

$a$  = effusivité thermique =  $\frac{\lambda}{\rho c}$

où  $\theta$  est la variation de la température en fonction du temps ( $t$ ) et de l'abscisse  $x$  suivant l'épaisseur. La résolution de cette équation impose la définition des conditions limites.

Les conditions limites caractérisent les échanges thermiques sur les faces extrêmes  $x = 0$  et  $x = \ell$  entre le système et le monde extérieur.

Sur la surface  $x = 0$ , il y a continuité du champ de température :

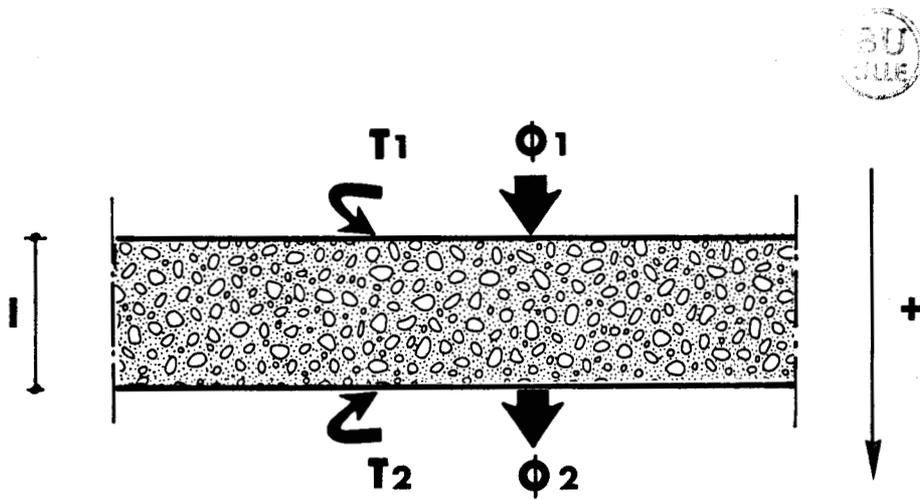
$$\theta(0 - \varepsilon, t) = \theta(0, t) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

Il y a également conservation du flux :

$$\phi(0 - \varepsilon, t) = \phi(0, t) = - \frac{\lambda \partial \theta(0, t)}{\partial x}$$

On ne peut imposer simultanément le flux thermique et la variation de température en  $x = 0$ . On considère généralement des conditions limites à température imposée, la valeur du flux étant déterminée lorsque l'on connaît les caractéristiques de la paroi. On aura également des conditions du type flux imposé, la température de surface  $x = 0$  représentant cette fois la réponse du système. Enfin, lorsque la surface  $x = 0$  est en contact avec un fluide de température  $\theta_e$ , on aura une condition limite de la forme (figure 2)

$$\phi(0, t) = h \{ \theta_e - \theta(0, t) \}$$

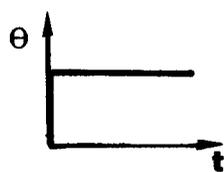


- FIGURE 1 -

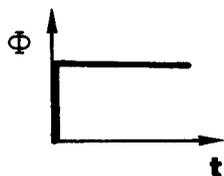
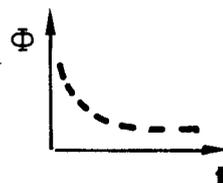
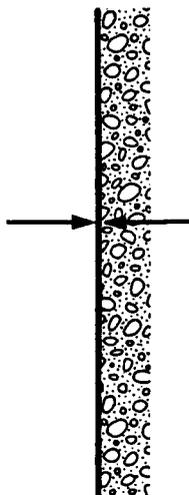
PAROI HOMOGENE SOUMISE A UN FLUX UNIDIRECTIONNEL

-ACTION-

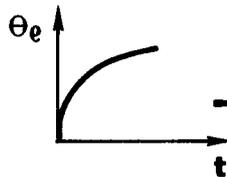
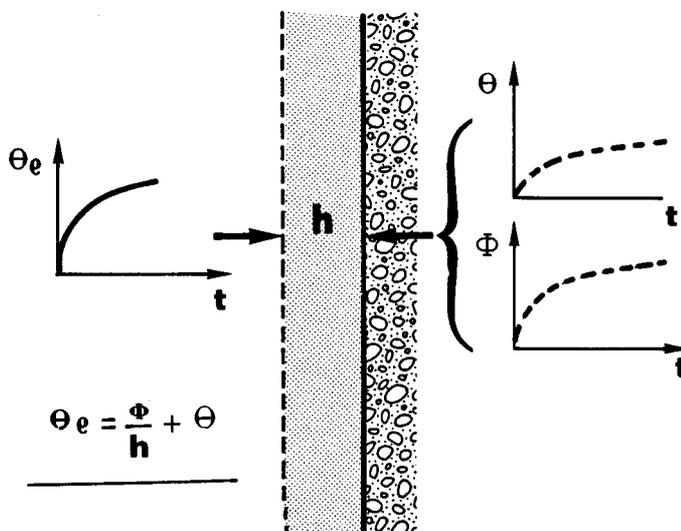
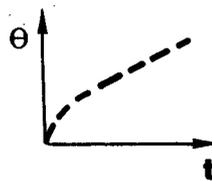
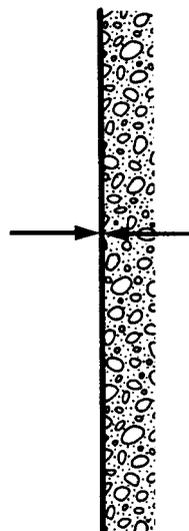
-REPOSE-



$$\theta = \theta_0$$



$$\Phi = \Phi_0$$



$$\theta_e = \frac{\Phi}{h} + \theta$$

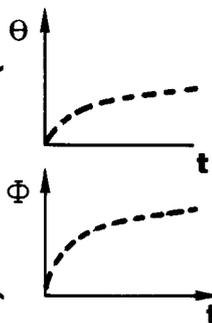


FIGURE 2- CONDITIONS LIMITES

$h$  est le coefficient d'échange exprimé en  $W/m^2 K$ , il est représentatif des échanges par convection et rayonnement sur la face  $x = 0$ .

De façon très générale, la relation entre flux et température en  $x = 0$  et  $x = \ell$  dépend à la fois du système localisé entre  $0$  et  $\ell$  et des conditions d'échange en  $x = 0$  et  $x = \ell$ . Lorsque l'on ne connaît pas en détail la modélisation des échanges en  $x = 0$  et  $x = \ell$  il est possible d'obtenir une information représentative des interactions avec le monde extérieur en mesurant à chaque instant

$$\begin{array}{ccc} \theta(0, t) & & \theta(\ell, t) \\ \phi(0, t) & \text{et} & \phi(\ell, t) \end{array}$$

qui représentent les températures en densité de flux sur les faces  $x = 0$  et  $x = \ell$ .

Puisque les deux premières quantités sont représentatives de l'interaction entre le système vu du plan  $x = 0$  et la région  $x < 0$  et les secondes l'interaction entre le système vu du plan  $x = \ell$  et la région  $x > \ell$ , la connaissance de ces quatre grandeurs simplifie l'analyse des transferts, la modélisation des conditions limites étant remplacée par la mesure simultanée du flux et de la température sur les surfaces d'échanges.

De nombreuses méthodes ont été développées et permettent de calculer simplement le champ de température pour divers types de conditions limites (Dirichlet, Neuman...). L'objet de cette partie est d'exprimer la solution indépendamment de toute contrainte expérimentale particulière mais uniquement en fonction des grandeurs  $\theta(0, t)$ ,  $\theta(\ell, t)$ ,  $\phi(0, t)$ ,  $\phi(\ell, t)$  supposées connues (puisque mesurées) sur les limites du système. Pour traiter ce problème de façon générale, l'état thermique local est défini par un vecteur  $(\theta(x, t), \phi(x, t))$  et nous utilisons la solution matricielle classique de l'équation de Fourier pour exprimer l'état thermique dans le plan  $x$  en fonction de l'état thermique dans le plan  $x=0$ . (23 à 26)

Supposons les conditions initiales identiquement nulles (état isotherme)

$$\phi(x, 0) = 0$$

$$0 < x < \ell$$

$$\theta'(x, 0) = \theta_0$$

La variation de température  $\theta(x,t)$  dans un plan d'abscisse  $x$  est définie par la relation

$$\theta'(x,t) = \theta_0 + \theta(x,t)$$

En introduisant la transformée de Laplace

$$\begin{vmatrix} \tilde{\theta}(x,p) \\ \tilde{\phi}(x,p) \end{vmatrix} = L \begin{vmatrix} \theta(x,t) \\ \phi(x,t) \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \tilde{\theta}(0,p) \\ \tilde{\phi}(0,p) \end{vmatrix} = L \begin{vmatrix} \theta(0,t) \\ \phi(0,t) \end{vmatrix}$$

on obtient la relation matricielle bien connue (5)

$$\begin{vmatrix} \tilde{\theta}(x,p) \\ \tilde{\phi}(x,p) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ch} \sqrt{\frac{P}{a}} x & -\frac{1}{b \sqrt{p}} \text{sh} \sqrt{\frac{P}{a}} x \\ -b \sqrt{p} \text{sh} \sqrt{\frac{P}{a}} x & \text{ch} \sqrt{\frac{P}{a}} x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \tilde{\theta}(0,p) \\ \tilde{\phi}(0,p) \end{vmatrix} \quad (4)$$

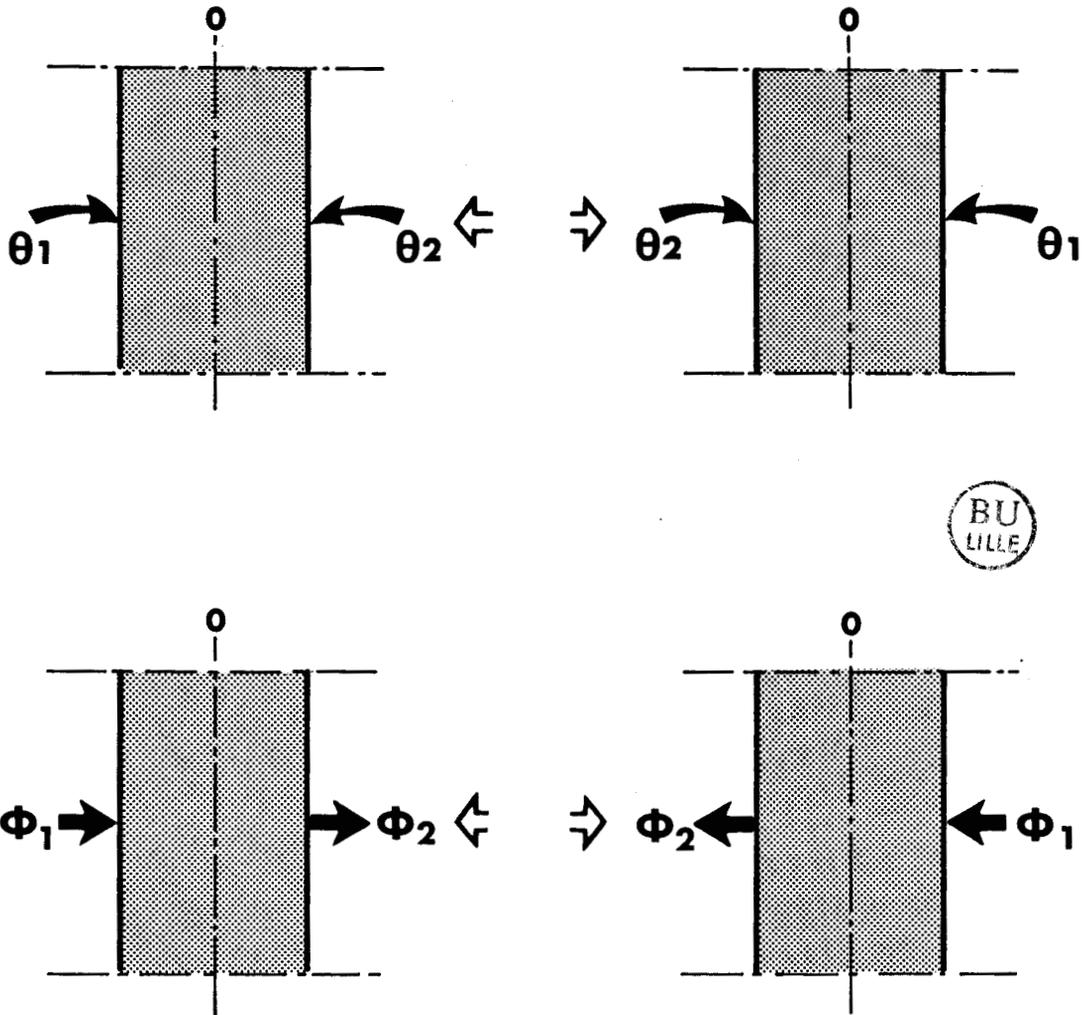
$b =$  effusivité thermique :  $\sqrt{\lambda \rho C}$

Dans le cas particulier où  $x = \ell$  la relation précédente exprime la dépendance entre l'état de sortie et l'état d'entrée. Le déterminant de la matrice de transition est égal à l'unité. La relation inverse s'écrit :

$$\begin{vmatrix} \tilde{\theta}(0,p) \\ \tilde{\phi}(0,p) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ch} \sqrt{\frac{P}{a}} \ell & \frac{1}{b \sqrt{p}} \text{sh} \sqrt{\frac{P}{a}} \ell \\ b \sqrt{p} \text{sh} \sqrt{\frac{P}{a}} \ell & \text{ch} \sqrt{\frac{P}{a}} \ell \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \tilde{\theta}(\ell,p) \\ \tilde{\phi}(\ell,p) \end{vmatrix} \quad (5)$$

cette relation exprime l'état d'entrée en fonction de l'état de sortie.

Du point de vue "système", une telle paroi est en liaison avec le monde extérieur par deux accès : la face d'entrée et la face de sortie. Vue de l'extérieur, une paroi homogène est symétrique et donc invariante par retournement. Dire que le système est invariant par retournement signifie que si  $(\phi_1, \phi_2)$ ,  $(\theta_1, \theta_2)$  est un régime de fonctionnement, il en est de même de  $(\phi_2, \phi_1)$ ,  $(\theta_2, \theta_1)$ . On peut remarquer que les parois hétérogènes multicouches symétriques par rapport au plan médian sont invariantes par retournement (figure 3).



- FIGURE 3 -

PAROI INVARIANTE PAR PERMUTATION DES CONDITIONS LIMITES

## 2.2. Modes de base - Matrice de transfert

Dans le cas particulier d'une paroi homogène, nous utilisons comme modèle de connaissance l'équation matricielle classique introduite dans la partie précédente. Cette équation introduit pour représenter l'état thermique à l'entrée et à la sortie du système les vecteurs  $(\theta_1, \phi_1)$  et  $(\theta_2, \phi_2)$  liés entre eux par une relation matricielle de la forme :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\theta}_2 \\ \tilde{\phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ -D & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\theta}_1 \\ \tilde{\phi}_1 \end{pmatrix}$$

avec  $A = \text{ch} \sqrt{\frac{P}{a}} \ell$

$$B = \frac{1}{b \sqrt{p}} \cdot \text{sh} \sqrt{\frac{P}{a}} \ell$$

$$D = b \sqrt{p} \cdot \text{sh} \sqrt{\frac{P}{a}} \ell$$

et la relation inverse :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\theta}_1 \\ \tilde{\phi}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ D & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

En retranchant les premières équations membre à membre il vient :

$$\Delta \tilde{\theta} (1+A) = B \sum \tilde{\phi}$$

$$\text{soit } \sum \tilde{\phi} = \frac{1+A}{B} \cdot \Delta \tilde{\theta} = \frac{b \sqrt{p}}{\text{th} \sqrt{\frac{P}{a}} \cdot \frac{\ell}{2}} \cdot \Delta \tilde{\theta} = H \Delta \tilde{\theta}$$

En opérant de la même façon à partir de la deuxième équation, on obtient :

$$\Delta \tilde{\phi} = \tilde{\phi}_1 - \tilde{\phi}_2 = D \sum \tilde{\theta} - A \Delta \tilde{\phi}$$

$$\sum \tilde{\theta} = \frac{1+A}{D} \cdot \Delta \tilde{\phi} = \frac{1}{b \sqrt{p}} \cdot \frac{1}{\text{th} \sqrt{\frac{P}{a}} \cdot \frac{\ell}{2}} \cdot \Delta \tilde{\phi}$$

Cette relation peut encore s'écrire :

$$\tilde{\Sigma\theta} = \frac{b \sqrt{p}}{\text{th} \frac{\sqrt{P}}{a} \frac{\ell}{2}} \cdot \frac{\tilde{\Delta\phi}}{\lambda \rho c p}$$

L'évolution du système est représentée par la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Sigma\phi} \\ \tilde{\Sigma\theta} \end{pmatrix} = H(p) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda \rho c p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\Delta\theta} \\ \tilde{\Delta\phi} \end{pmatrix} \quad (6)$$

avec

$$H(p) = \frac{b \sqrt{p}}{\text{th} \frac{\sqrt{P}}{a} \frac{\ell}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{Cp}{R}}}{\text{th} \frac{\sqrt{RCp}}{4}}$$

en posant : C : capacité thermique :  $\rho c \ell$   
R : résistance thermique :  $\frac{\ell}{\lambda}$

Nous avons ainsi défini par combinaisons linéaires des grandeurs initiales  $\phi_1, \phi_2, \theta_1, \theta_2$  quatre grandeurs généralisées  $\Sigma\phi, \Delta\phi, \Sigma\theta, \Delta\theta$  qui ont la propriété fondamentale d'être liées par une matrice de transfert diagonale.

La relation matricielle définit deux modes de base indépendants qui caractérisent entièrement les échanges de chaleur entre la paroi et son environnement. Le mode "transfert" (ou antisymétrique) caractérisé par les grandeurs généralisées  $\Sigma\phi, \Delta\theta$  est représentatif du transfert de chaleur à travers la paroi. Le mode "stockage" (ou symétrique), caractérisé par les grandeurs  $\Delta\phi, \Sigma\theta$  représente le processus de stockage de chaleur au sein de la paroi.

L'une quelconque des composantes symétriques ou antisymétriques, supposée accessible à la mesure, peut être considérée comme une grandeur primaire en fonction de laquelle la grandeur conjuguée peut être calculée à partir d'une fonction réponse  $H_s$  ou  $H_t$  caractéristique du système :

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma\phi}(P) &= H_t(P) \cdot \tilde{\Delta\theta}(P) \\ \tilde{\Sigma\theta}(P) &= H_s(P) \cdot \tilde{\Delta\phi}(P) \end{aligned}$$

Toute évolution peut donc être considérée comme la superposition de ces deux régimes fondamentaux. Inversement, lorsque l'on connaît chacune des composantes  $\Sigma\phi$ ,  $\Delta\theta$  et  $\Sigma\theta$ ,  $\Delta\phi$ , on retrouve les variables originelles par les relations simples : (figure 5)

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{\Delta\theta + \Sigma\theta}{2} & \phi_2 &= \frac{\Delta\phi + \Sigma\phi}{2} \\ \theta_2 &= \frac{\Sigma\theta - \Delta\theta}{2} & \phi_2 &= \frac{\Sigma\phi - \Delta\phi}{2}\end{aligned}$$

Les modes symétriques et antisymétriques sont les "modes de base" de la paroi homogène. Dans le prochain paragraphe, nous utiliserons systématiquement cette représentation afin de simplifier l'analyse mathématique des transferts dans la paroi homogène en régime variable. Nous étudions ainsi séparément le mode "transfert pur" défini par  $\Delta\phi = \Sigma\theta = 0$  et le mode "stockage pur" défini par  $\Sigma\phi = \Delta\theta = 0$

### 2.3. Réponse du système à partir du "point de fonctionnement moyen"

#### - Moyenne spatiale du flux thermique

$$\text{Par définition } \bar{\tau}_{\phi}(p) = \frac{1}{l} \int_0^l \phi(x,p) dx$$

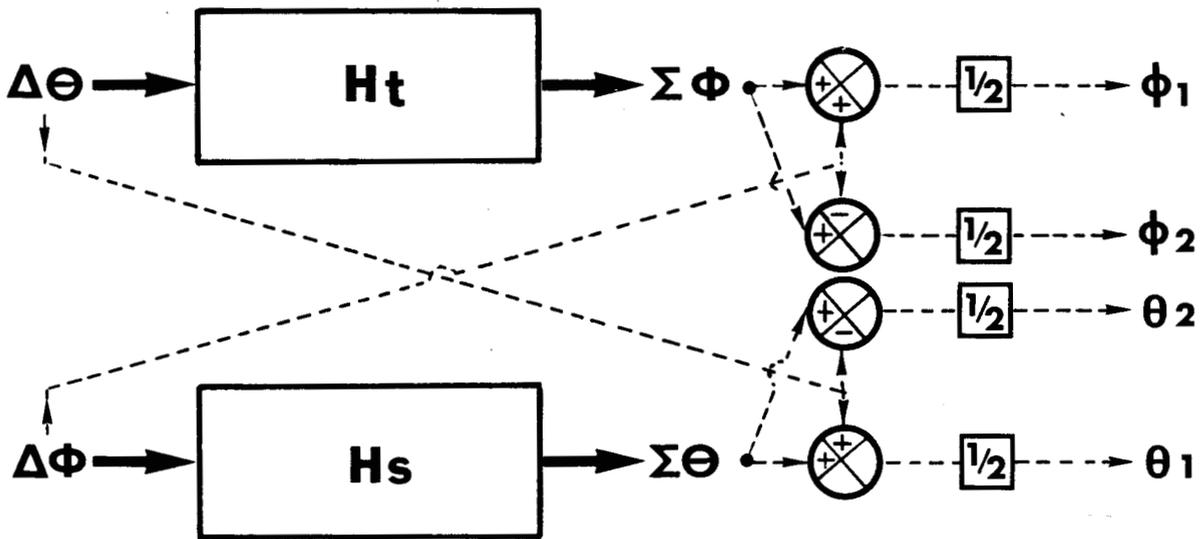
L'intégration entre 0 et  $l$  de l'expression de  $\phi(x,p)$  obtenue par la relation matricielle (4) conduit à

$$\bar{\tau}_{\phi}(p) = \frac{\lambda}{l} \Delta\hat{\theta}(p)$$

$$\text{soit en passant à l'original } \boxed{\bar{\phi}(t) = \frac{\lambda}{l} \Delta\theta(t) = \frac{\Delta\theta(t)}{R}} \quad (7)$$

R étant par définition la résistance thermique du système par unité de surface.

La différence de température entre les extrémités du système est donc proportionnelle à la moyenne spatiale du flux thermique. Imposer une différence de



- FIGURE 5 -

RELATIONS ENTRE GRANDEURS CONJUGUEES ET VARIABLES ORIGINELLES

température revient à imposer un flux moyen dans une paroi homogène.

### Moyenne spatiale du champ de températures

De la même façon, la moyenne spatiale du champ de température est obtenue par l'intégration de l'expression de  $\theta(x,p)$  entre 0 et  $\ell$

$$\bar{\theta} = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} \theta(x,p) dx$$

en effectuant le calcul on obtient la relation bien connue :

$$\tilde{\theta}(p) = \frac{\tilde{\Delta\phi}}{\ell \rho_c p} = \frac{\tilde{\Delta\phi}}{Cp}$$

où C représente la capacité thermique du système par unité de surface.

En passant à l'original nous obtenons :

$$\boxed{\bar{\theta}(t) = \frac{1}{C} \int_0^t \Delta\phi(t) dt} \quad (8)$$

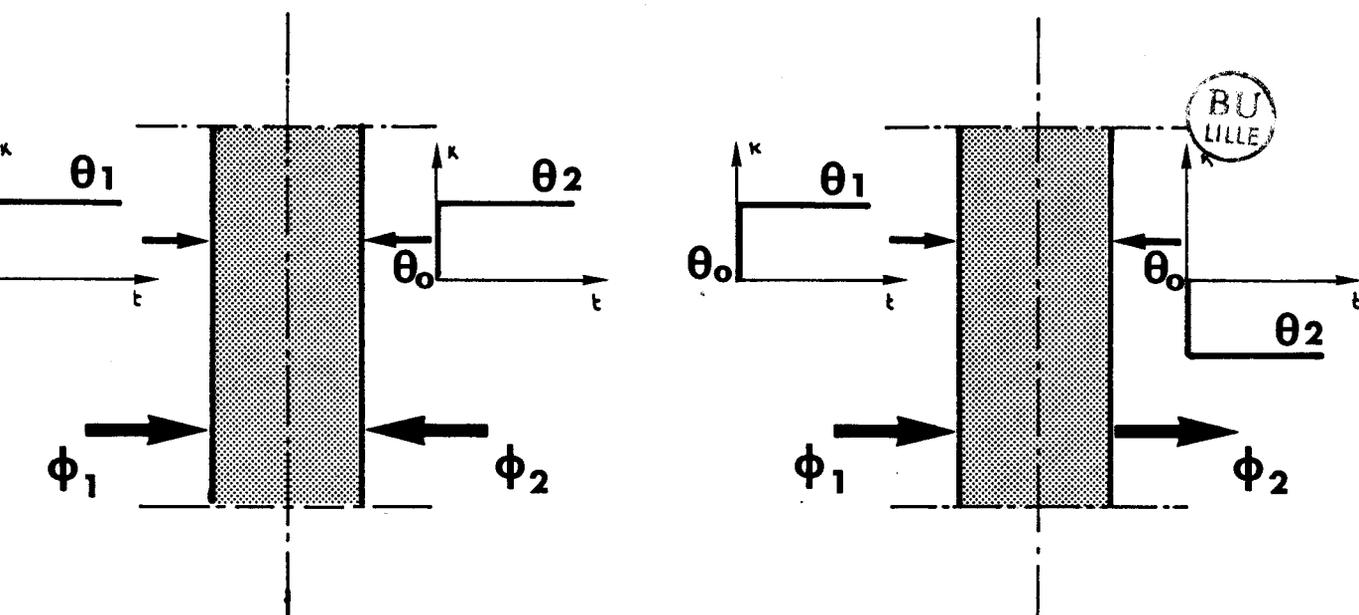
Les variations de la température moyenne sont déterminées par  $\Delta\phi(t)$ . La mesure des variations temporelles de flux et de température sur les surfaces de la paroi homogène permet donc de connaître à chaque instant la température moyenne et le flux moyen traversant le système. En substituant ces grandeurs dans la relation matricielle précédente (6), nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \Sigma\phi \\ \Sigma\theta \end{pmatrix} = H'(p) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\phi} \\ \bar{\theta} \end{pmatrix} \quad (9)$$

avec

$$H'(p) = \frac{\sqrt{\frac{p}{a}} \ell}{\text{th} \sqrt{\frac{p}{a}} \frac{\ell}{2}} = \frac{\sqrt{RCp}}{\text{th} \sqrt{\frac{RCp}{4}}} = R \cdot H(p)$$

Le vecteur  $(\bar{\phi}, \bar{\theta})$  représente le "point de fonctionnement moyen" du système, l'équation matricielle 9 montre la relation qui existe entre les grandeurs généralisées mesurables aux bornes du système et sa réponse moyenne.



- FIGURE 6 -

MODES SYMETRIQUE ET ANTISYMETRIQUE

En calculant la limite de cette expression lorsque  $p \rightarrow 0$ , il apparaît clairement qu'en régime quasi statique les coordonnées normales sont liées aux valeurs moyennes par la relation :

$$\begin{vmatrix} \Sigma\phi \\ \Sigma\theta \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{\phi} \\ \bar{\theta} \end{vmatrix}$$

## 2.4. Fonction de réponse

### 2.4.1. Stockage pur - Transfert pur

$$\text{La relation : } H(p) = \frac{\tilde{\Sigma\phi}(p)}{\tilde{\Delta\theta}(p)}$$

est une relation biunivoque entre  $\tilde{\Delta\theta}$  et  $\tilde{\Sigma\phi}$  qui définit une "fonction réponse". L'exploitation pratique de cette relation suppose que l'on considère  $\tilde{\Delta\theta}$  comme grandeur primaire accessible à la mesure et  $\tilde{\Sigma\phi}$  comme grandeur résultant de la transformation par le système. Cette procédure n'est pas unique, la relation précédente étant biunivoque, il est également possible de considérer la quantité  $\tilde{\Sigma\phi}$  comme grandeur de base et  $\tilde{\Delta\theta}$  résultant de la transformation des variations de  $\tilde{\Sigma\phi}(t)$  par la paroi homogène. Cette relation caractérise le mode antisymétrique totalement indépendant du mode symétrique défini par l'une ou l'autre des "fonctions réponse"

$$\frac{\tilde{\Sigma\theta}(p)}{\tilde{\theta}(p)} = RH(p) \quad \text{ou} \quad \frac{\tilde{\theta}(p)}{\tilde{\Sigma\theta}(p)} = \frac{1}{RH(p)}$$

Les fonctions de transfert ainsi définies caractérisent totalement les modes symétrique et antisymétrique de la partie précédente. Cette représentation des évolutions par "fonctions de transfert" des modes symétriques et antisymétriques sera systématiquement utilisée dans la suite de notre travail.

Le mode antisymétrique pur ou (transfert pur) est caractérisé par la valeur du flux moyen ou par une variation de différence de températures sans variation de température moyenne  $\Delta\phi(t) = 0 \forall t$ . Ce mode est uniquement décrit par les grandeurs  $\{ \tilde{\Delta\theta}(t), \tilde{\Sigma\phi}(t) \}$

Cette modélisation correspond aux expériences réalisées en imposant des variations de température égales et opposées sur chacune des faces du système homogène.

Le mode symétrique pur (ou stockage pur) dans lequel la somme des températures des faces extrêmes ne dépend que de la variation de la température moyenne. Dans le mode symétrique pur on a  $\Delta\theta = 0$ . Un tel transfert peut être réalisé pratiquement en imposant des variations de température égales sur chacune des faces du système  $\theta_1 = \theta_2$ . Le mode stockage pur est décrit par les quantités conjuguées  $\{\Delta\phi \quad \Sigma\theta\}$

La température de surface moyenne  $\Sigma\theta / 2 = \theta(p)$  s'exprime en fonction de  $\Delta\phi$  par la relation :

$$\theta(p) = \frac{\Sigma\tilde{\theta}(p)}{2} = \frac{H(p)}{2\lambda\rho c p} \Delta\phi(p) = \frac{H(p)R}{2} \cdot \tilde{\theta}(p)$$

Cette relation montre que la dynamique du processus de stockage pur est tout à fait analogue à celle du processus de transfert pur caractérisé précédemment. L'analogie est due à l'identité entre les expressions des fonctions de transfert (à  $R/2$  près). Il en résulte que les deux phénomènes sont caractérisés par la même constante de temps. Dans le processus de stockage pur "l'action" est due aux variations de la température moyenne par rapport à la température de référence  $\theta_0$

$$\bar{\theta} = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t \Delta\phi(t) dt$$

Compte tenu de cette relation, la température  $\bar{\theta}$  ne peut subir de variation instantanée de type échelon puisqu'une telle variation imposerait une valeur infiniment grande de  $\Delta\phi$  ce qui ne correspond pas à une transformation physique réalisable.

La décomposition en modes de base est particulièrement intéressante puisqu'elle fournit une méthode permettant de simuler la réponse à une sollicitation quelconque en fonction de grandeurs mesurées sur les parois externes du système. Deux méthodes sont possibles suivant les grandeurs supposées connues :

- 1) Les variations de températures  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont connues. Connaissant les transformées de Laplace de ces grandeurs on déduit les quantités primaires  $\Delta\tilde{\theta}(p)$  et  $\Sigma\tilde{\theta}(p)$  puis les réponses correspondantes  $\Sigma\tilde{\phi}(p)$ ,  $\Delta\tilde{\phi}(p)$  caractérisant l'évolution du système.
- 2) Les flux  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont connus. Connaissant les transformées de Laplace des flux  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , il est possible de déduire les grandeurs de base  $\Delta\tilde{\phi}$  et  $\Sigma\tilde{\phi}$  puis les réponses correspondantes  $\Sigma\tilde{\theta}(p)$  et  $\Delta\tilde{\theta}(p)$  caractérisant l'évolution du système.

### 2.4.2. Réponses dans l'espace du temps

Pour caractériser la solution, nous nous limiterons à calculer la réponse des coordonnées  $\Sigma \phi(t)$  et  $\Delta \phi(t)$  lorsque la paroi est soumise à des variations de température en échelon sur chacune des faces. La connaissance de la réponse indicielle permet la détermination de la réponse à une sollicitation quelconque par un produit de convolution.

Soient donc les conditions limites suivantes :

$$\text{en } x = 0 \quad \begin{cases} \theta = 0 & t < 0 \\ \theta = \theta_1 & t > 0 \end{cases}$$

$$\text{en } x = \ell \quad \begin{cases} \theta = 0 & t < 0 \\ \theta = \theta_2 & t > 0 \end{cases}$$

Les transformées de Laplace  $\Sigma \tilde{\phi}(p)$  et  $\Delta \tilde{\phi}(p)$  sont liées aux transformées de Laplace des coordonnées  $\Delta \tilde{\theta}(p)$  et  $\Sigma \tilde{\theta}(p)$  par les relations (6) soit :

$$\Sigma \tilde{\phi}(p) = \frac{b\sqrt{p}}{\text{th} \sqrt{\frac{P}{a}} \frac{\ell}{2}} \cdot \Delta \tilde{\theta}(p)$$

$$\Delta \tilde{\phi}(p) = b\sqrt{p} \text{th} \sqrt{\frac{P}{a}} \frac{\ell}{2} \Sigma \tilde{\theta}(p)$$

les signaux imposés étant des échelons

$$\Delta \tilde{\theta}(p) = \frac{\theta_1 - \theta_2}{p} \quad \text{et} \quad \Sigma \tilde{\theta}(p) = \frac{\theta_1 + \theta_2}{p}$$

Les pôles de  $\Sigma \tilde{\phi}(p)$  sont  $p = 0$  et ceux de  $\text{sh} \sqrt{\frac{P}{a}} \frac{\ell}{2}$  ; ceux de  $\Delta \phi(p)$  sont  $p = 0$  et ceux de  $\text{ch} \sqrt{\frac{P}{a}} \frac{\ell}{2}$

Posons  $z = \sqrt{\frac{P}{a}} = \alpha + j\beta$ , les racines des dénominateurs sont définies par les équations :

$$\text{sh} \sqrt{\frac{P}{a}} \frac{\ell}{2} = \text{sh} \alpha \frac{\ell}{2} \cos \beta \frac{\ell}{2} + j \text{ch} \alpha \frac{\ell}{2} \sin \beta \frac{\ell}{2} = 0$$

et

$$\operatorname{ch} \sqrt{\frac{P}{a}} \frac{\ell}{2} = \operatorname{ch} \alpha \frac{\ell}{2} \cos \beta \frac{\ell}{2} + j \operatorname{sh} \alpha \frac{\ell}{2} \sin \beta \frac{\ell}{2} = 0$$

ce qui implique  $\alpha = 0$  et  $z = \sqrt{\frac{P}{a}} = j \beta$

En posant  $z = j \sqrt{\frac{m}{a}}$  ou  $p = -m$ , les pôles relatifs à  $\operatorname{sh} \sqrt{\frac{P}{a}} \frac{\ell}{2}$  sont de la forme

$$m_k = \frac{4 K^2 \pi^2}{\ell^2} a \quad \text{avec } K \neq 0$$

et ceux de  $\operatorname{ch} \sqrt{\frac{P}{a}} \frac{\ell}{2}$  s'expriment :

$$m_k = \frac{\pi^2}{\ell^2} a (1 + 2K)^2 \quad \text{avec } K \neq 0$$



Connaissant les pôles des fonctions de transfert précédentes, la solution se met sous la forme :

$$\begin{aligned} \Sigma \phi(t) &= \frac{2\lambda}{\ell} (\theta_1 - \theta_2) \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp \frac{-4a K^2 \pi^2 t}{\ell^2} \right] \\ \Delta \phi(t) &= \frac{4\lambda}{\ell} (\theta_1 + \theta_2) \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \exp \frac{-a (2K+1)^2 \pi^2 t}{\ell^2} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

Les réponses indicielles sont définies en prenant  $\theta_1 - \theta_2$  et  $\theta_1 + \theta_2$  égaux à l'unité soit :

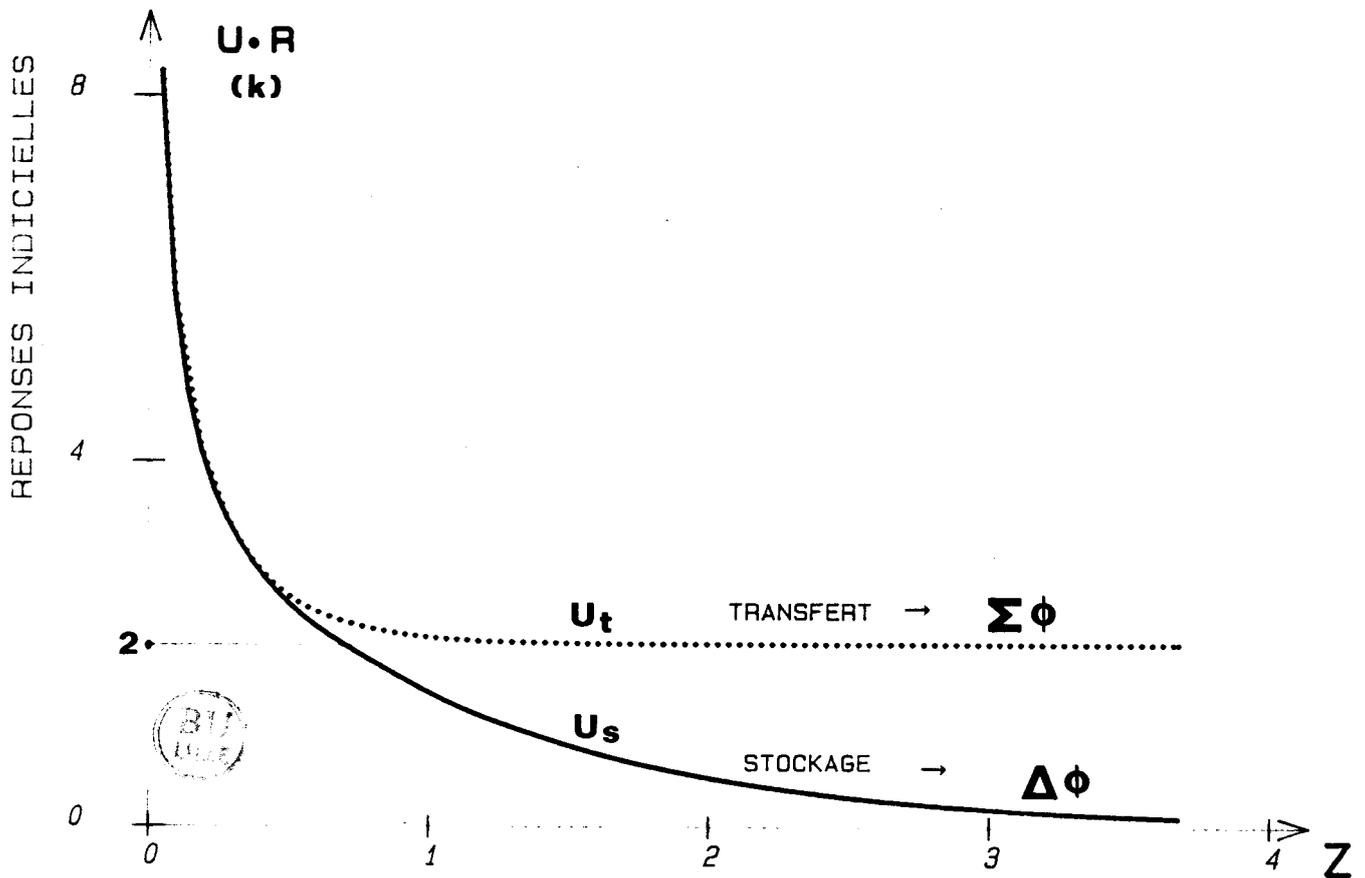
$$\begin{aligned} U_t(z) &= \frac{2\lambda}{\ell} \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp -4 K^2 z \right] \\ U_s(z) &= \frac{4\lambda}{\ell} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \exp - (2K+1)^2 z \right] \end{aligned}$$

avec

$$\tau = \frac{\ell^2}{a \pi^2} = \frac{RC}{\pi^2} \quad z = \frac{t}{\tau}$$

On note que le processus de transfert pur a une constante de temps quatre fois plus faible que celle du processus de stockage pur à température imposée

$$\tau_{\text{transfert}} = \frac{\tau}{4} = \frac{\ell^2}{4 a \pi^2}$$



- FIGURE 7 -

REPONSES INDICIELLES NORMALISEES DES PROCESSUS DE STOCKAGE ET DE TRANSFERT  
A TEMPERATURES IMPOSEES

Les réponses indicielles représentées figure 7 caractérisent le processus de transfert ( $U_t$ ) et de stockage ( $U_s$ ) à température imposée dans une paroi homogène en fonction du paramètre sans dimension  $z : t/\tau$ , les courbes sont multipliées par la résistance thermique afin d'obtenir une représentation générale indépendante des caractéristiques thermophysiques du matériau.

### Remarques :

#### 1) Variation de flux imposée sur les surfaces limites

Supposons le système soumis à une sollicitation  $\Delta\theta(p)$  en forme d'échelon, à partir de la relation matricielle (6), nous obtenons :

$$\Sigma \tilde{\theta}(p) = \frac{H(p)}{\lambda \rho c P} \cdot \Delta \tilde{\theta}(p)$$

La variable de Laplace  $p$  au dénominateur implique une réponse temporelle proportionnelle à l'intégrale de la réponse indicielle  $U_t$  étudiée précédemment :

$$U'_s = \frac{1}{b^2} \int_0^t U_t(t) dt \quad (12)$$

Il apparaît ici que le stockage à flux de chaleur imposée a une constante de temps  $\frac{RC}{4\pi^2}$  identique au processus de transfert. La réponse indicielle  $U'_s(t)$  normalisée en multipliant la courbe par la résistance thermique est représentée figure 8.

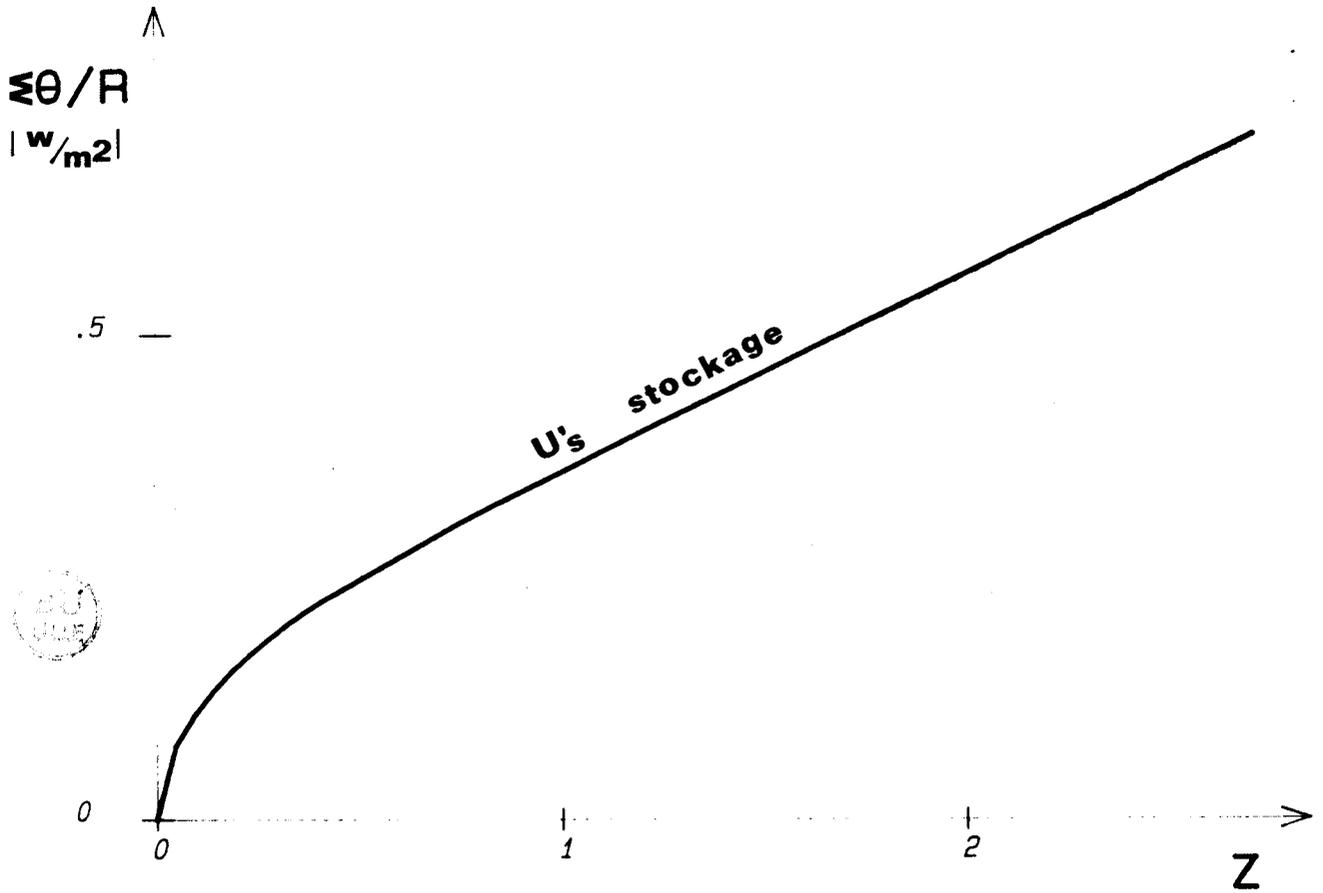
#### 2) Analyse des réponses indicielles des échanges à température imposée

L'étude de la solution 10 amène deux remarques (figure 9)

-  $\Delta \phi(t)$  peut être représenté par une exponentielle simple à 1/100 près pour un temps  $t > t_1$  avec  $t_1 = 0,058 RC$  valeur du temps

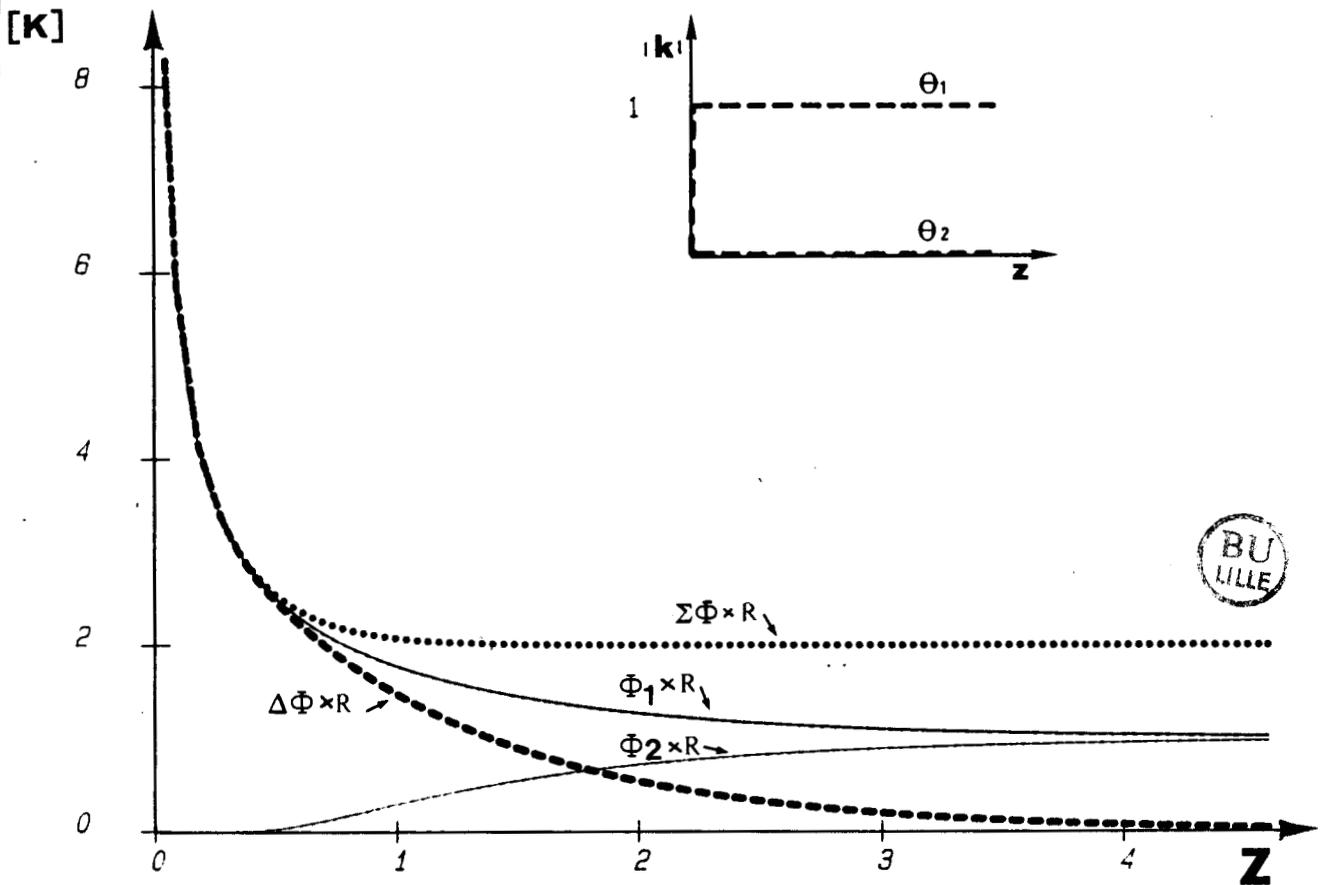
$$\Delta \phi(t) = \frac{4\lambda}{l} (\theta_1 + \theta_2) \exp \frac{-t}{\tau}$$

- de la même façon, la coordonnée  $\Sigma \phi(t)$  est proportionnelle à  $\Delta\theta(t)$  à 1/100 près pour  $t > t_2$  avec  $t_2 = 0,13 RC$



- FIGURE 8 -

REPONSE INDICIELLE NORMALISEE DU STOCKAGE PUR A FLUX IMPOSE



- FIGURE 9 -

COMPARAISON DES EVOLUTIONS DES FLUX SURFACIQUES ET DES GRANDEURS  $\Sigma\phi$  ET  $\Delta\phi$   
 POUR UNE SOLLICITATION ECHELON DE TEMPERATURE SUR UNE FACE

On a dans ces conditions :

$$\Sigma \phi (t) = \frac{2\lambda}{l} (\theta_1 - \theta_2)$$

### 2.5. Régimes continu, quasi stationnaire et instationnaire

De façon générale, "l'état thermique local" à un instant  $t$  est défini par la variation locale de la température  $\theta (x,t)$  par rapport à une référence  $T_0$  et le flux thermique  $\phi(x,t)$ .

Compte tenu du principe de superposition, chacune de ces quantités peut être considérée comme la superposition d'une valeur moyenne instantanée dépendant uniquement du temps et une variation locale de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \theta (x,t) &= \bar{\theta}(t) + \theta' (x,t) & \text{avec} & \quad \bar{\theta} (t) = \frac{1}{C} \int \Delta\phi dt \\ \phi (x,t) &= \bar{\phi}(t) + \phi' (x,t) & \text{avec} & \quad \bar{\phi} (t) = \frac{\Delta\theta}{R} (t) \end{aligned} \quad (11)$$

Les grandeurs  $\bar{\theta} (t)$  et  $\bar{\phi}(t)$  sont les moyennes spatiales du champ des températures et du flux calculées précédemment. Les champs des écarts  $\theta'$  et  $\phi'$  vérifient par définition les relations :

$$\begin{aligned} \int_{-l/2}^{l/2} \theta' (x,t) dx &= 0 ; & \int_{-l/2}^{l/2} \phi' (x,t) dx &= 0 \end{aligned}$$

#### 2.5.1. Le régime continu ou indépendant du temps

Dans la partie thermodynamique de notre travail, nous montrerons l'intérêt fondamental des régimes continus et quasi-stationnaires lorsque l'on s'intéresse aux problèmes de dissipation interne, ce sont des régimes de référence ou régimes de "dissipation minimale". Cette remarque nous conduit à préciser la description des régimes continus et quasi-stationnaires de chacun des modes "transfert pur" et

"stockage pur". D'une façon générale, en régime continu, les flux thermiques en chaque point sont indépendants du temps. Il en est de même des quantités  $\Delta\phi$  et  $\Sigma\phi$  définissant chaque mode de base.

Nous avons donc à analyser d'une part la partie asymptotique de la réponse  $\Sigma\phi(t)$  quand on impose une différence de températures  $\Delta\theta(t)$  constante, et, d'autre part, le stockage de chaleur dans le système soumis à un flux constant.

### 1.) Stockage à flux constant

La figure 10 représente l'établissement d'un processus de "stockage pur" dans lequel les variations de température moyenne de surface  $\frac{\Sigma\theta}{2}$  et de température moyenne sont dues à une variation en échelon de la quantité  $\Delta\phi$ .

La transformée de Laplace de la réponse indicielle est définie par la relation :

$$\tilde{\Sigma\theta}(p) = \frac{RH(p)}{Cp} \cdot \tilde{\Delta\phi}(p)$$

Partant de cette relation, nous obtenons pour la différence entre la moyenne des températures de surface et la température moyenne en fonction de  $\tilde{\Delta\phi}(p)$  :

$$\frac{\tilde{\Sigma\theta}}{2}(p) - \tilde{\bar{\theta}}(p) = \left[ \frac{RH(p)}{2pC} - \frac{1}{pC} \right] \tilde{\Delta\phi}(p) \quad (13)$$

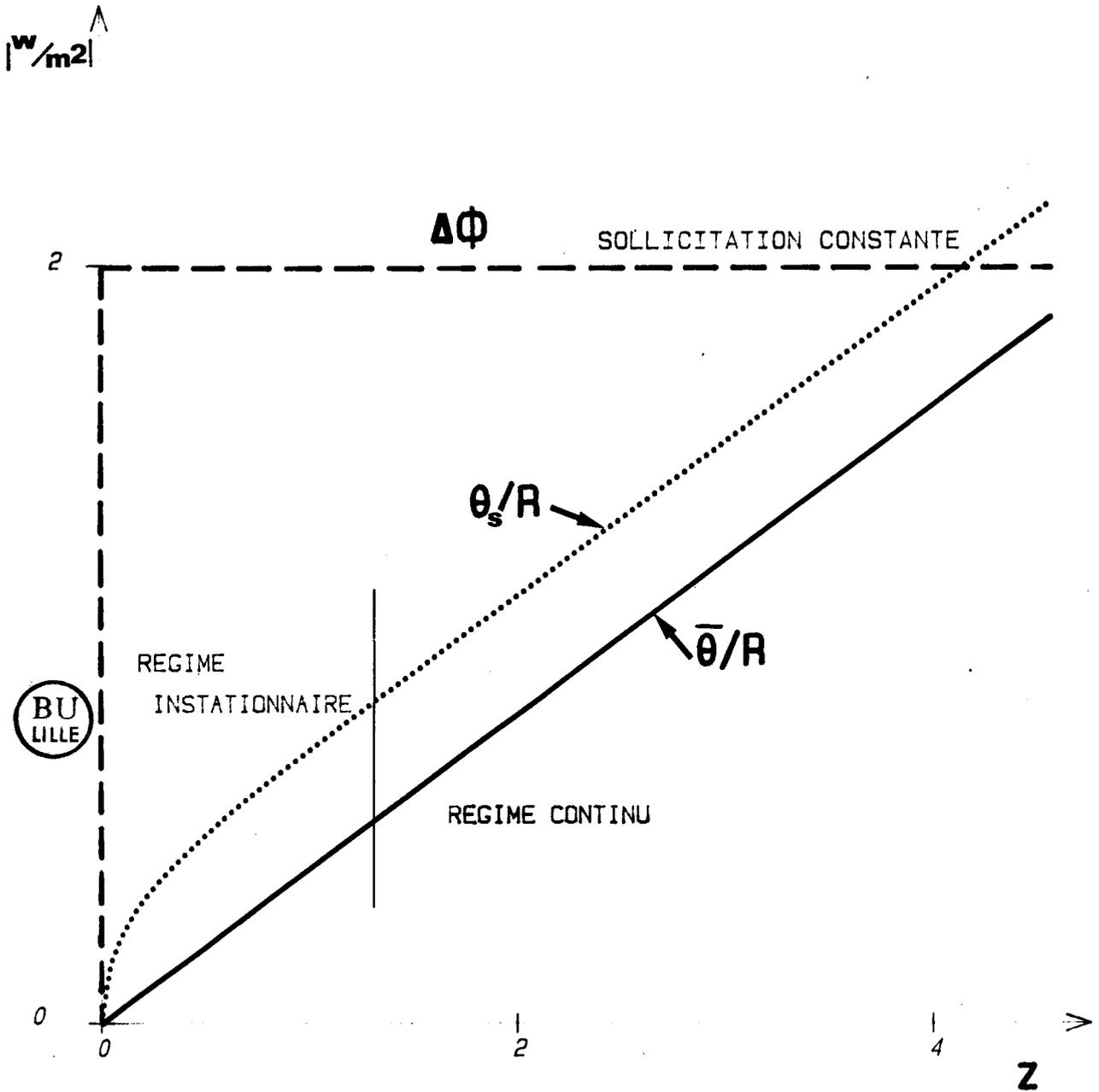
En régime continu, cette relation tend vers :

$$\frac{\Sigma\theta}{2}(p \rightarrow 0) - \bar{\theta}(p \rightarrow 0) = \frac{R}{12} \Delta\theta(p \rightarrow 0) = R_s \Delta\phi$$

En régime continu  $\frac{\Sigma\theta}{2}$  et  $\bar{\theta}$  augmentent à la même vitesse. La différence de température entre la température de surface  $\frac{\Sigma\theta}{2}$  et la température moyenne  $\bar{\theta}$  est constante et proportionnelle à  $\Delta\phi$ . Pour un stockage pur, les températures de chacune des surfaces sont égales à  $\frac{\Sigma\theta}{2}$ , le flux moyen  $\bar{\phi} = \frac{\Delta\theta}{R}$  est nul. Le flux en chaque point du système est donc égal à la seule fluctuation  $\phi'(x) = \phi(x)$ .

Pour représenter la dissipation interne, il est intéressant d'introduire pour le stockage à flux constant une résistance interne définie par :

$$R_s = \frac{\frac{\Sigma\theta}{2} - \bar{\theta}}{\Delta\phi} = \frac{R}{12} \quad (14)$$



- FIGURE 10 -

EVOLUTIONS NORMALISEES DES TEMPERATURES SUPERFICIELLE ET MOYENNE  
 LORS D'UN STOCKAGE A FLUX CONSTANT

Cette notion généralise le concept de résistance thermique définie uniquement lorsque le champ des températures est indépendant du temps. La résistance thermique du mode de stockage est introduite dans le cas où seule la différence des températures superficielle et moyenne est indépendante du temps. Le régime continu est représenté par une résistance thermique  $R_s$  accessible à la mesure.

## 2) Le régime continu du mode antisymétrique

Le régime permanent correspondant au mode antisymétrique est bien connu théoriquement et expérimentalement. Il est caractérisé par une valeur constante du flux thermique dans tout le système :

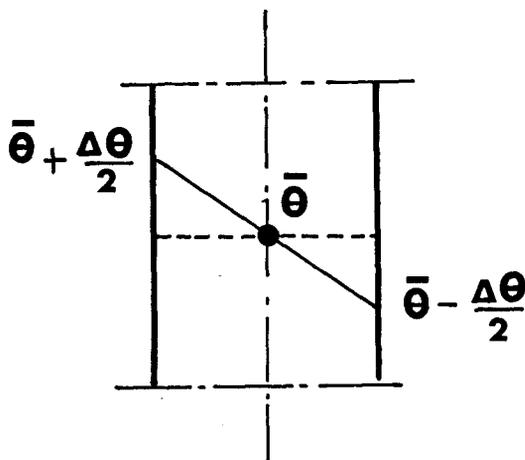
$$\phi(x,t) = \phi_1 = \phi_2 = \frac{\Sigma \phi}{2} = \frac{\lambda}{l} \Delta\theta = \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{R}$$

La valeur locale du flux est égale à sa valeur moyenne et le champ des fluctuations spatiales  $\phi'(x)$  est identiquement nul.

Le champ de températures interne est indépendant du temps. Dans une paroi homogène la température moyenne est égale à la température du milieu de la paroi

$$\bar{\theta} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \theta_0$$

pour le mode antisymétrique pur, le champ des écarts de température par rapport à la valeur moyenne est représenté par : (figure 11)



- FIGURE 11 -

$$\theta'(x) = \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{l} x$$

en prenant l'origine au centre de symétrie de la paroi. Comme précédemment, le régime permanent est caractérisé par une résistance  $R$  accessible à la mesure en régime permanent.

### 2.5.2. Les régimes variables

En régime de variations rapides, la sollicitation thermique agissant sur le système varie de façon significative sur une durée de l'ordre de grandeur de la "constante de temps" fondamentale du système. Dans ces conditions, la réponse du système n'est plus proportionnelle à la cause qui lui a donné naissance. Pour décrire les régimes de variations rapides, nous utiliserons l'expression générale de la réponse sous forme d'un produit de convolution entre la réponse impulsionnelle et la fonction du temps représentative de la sollicitation imposée au système. L'état du système pouvant toujours être considéré comme la superposition d'un mode de "stockage pur" et d'un mode de "transfert pur", nous avons à représenter deux régimes rapides.

#### 1) Transfert pur (sans stockage de chaleur)

C'est un régime de variations rapides dans lequel la relation  $\Delta\phi = 0$  est vérifiée à chaque instant de sorte qu'il n'y a aucune variation de température moyenne.

Si nous appelons  $h(t)$  la transformée de Laplace inverse de  $H(p)$ , nous obtenons pour la fonction du temps représentant l'évolution temporelle de  $\Sigma\phi(t)$  :

$$\Sigma\phi(t) = h(t) \otimes \Delta\theta(t) = R h(t) \otimes \bar{\phi}(t)$$

La coordonnée généralisée  $\Sigma\phi(t)$  s'exprime par un produit de convolution entre la grandeur conjuguée  $\Delta\theta(t)$  et la réponse impulsionnelle.

Cette représentation de la réponse n'est pas unique, il est possible d'en obtenir une autre formulation à partir de la réponse indicelle :

$$u(t) = \int_0^t h(t) \cdot dt$$

$$\Sigma\phi(t) = u(t) \cdot \Delta\theta(0) + u(t) \otimes \frac{d \Delta\theta(t)}{dt} \quad (15)$$

$\frac{d \Delta \theta(t)}{dt}$  étant la dérivée temporelle de la différence de température  $\Delta \theta(t)$ . En régime variable  $\frac{\Sigma \phi(t)}{2}$  prend des valeurs notablement différentes de la valeur moyenne du flux  $\bar{\phi}(t) = \Delta \theta(t)/R$  dans la paroi.

Un cas typique de régime instationnaire est celui d'une sollicitation indicielle dans laquelle  $\Delta \theta(t)$  est représenté par un "échelon". Dans ce cas particulier  $\bar{\phi} = \Delta \theta(t)/R$  est aussi un échelon, par contre  $\Sigma \phi(t)$  est notablement différent de  $2 \bar{\phi}$  sur les faibles valeurs du temps  $t < 1,3 \tau$ , (figure 9).

Dans une telle évolution, le système est fortement écarté du régime permanent et le flux thermique à l'intérieur du système prend des valeurs très différentes de celles du régime quasi statique. La figure 12 représente le champ des écarts de température  $\theta'(x,z)$  et de flux  $\phi'(x,t)$  en fonction de  $x$  pour plusieurs valeurs du temps normalisé  $z = \frac{t}{\tau}$ .

La paroi étant symétrique par rapport au centre 0, nous avons représenté les champs de température et de flux pour  $x/l$  variant de 0 à 0,5.

Pour les fortes valeurs du temps  $z > 1$ , le champ a même structure qu'en régime continu. La température  $\theta'(x, 1.25)$  varie linéairement avec  $x$  et  $\phi'(x, 1.25)$  est nul puisque le flux est uniforme. Ces considérations restent sensiblement valables pour des temps tels que  $z : t/\tau > 1$ . Pour les faibles valeurs du temps  $z < 0,25$  le système est en régime instationnaire, le champ des écarts de température ne prend de valeurs significatives qu'au voisinage de la surface, il en est de même pour le champ des variations spatiales de flux thermiques.

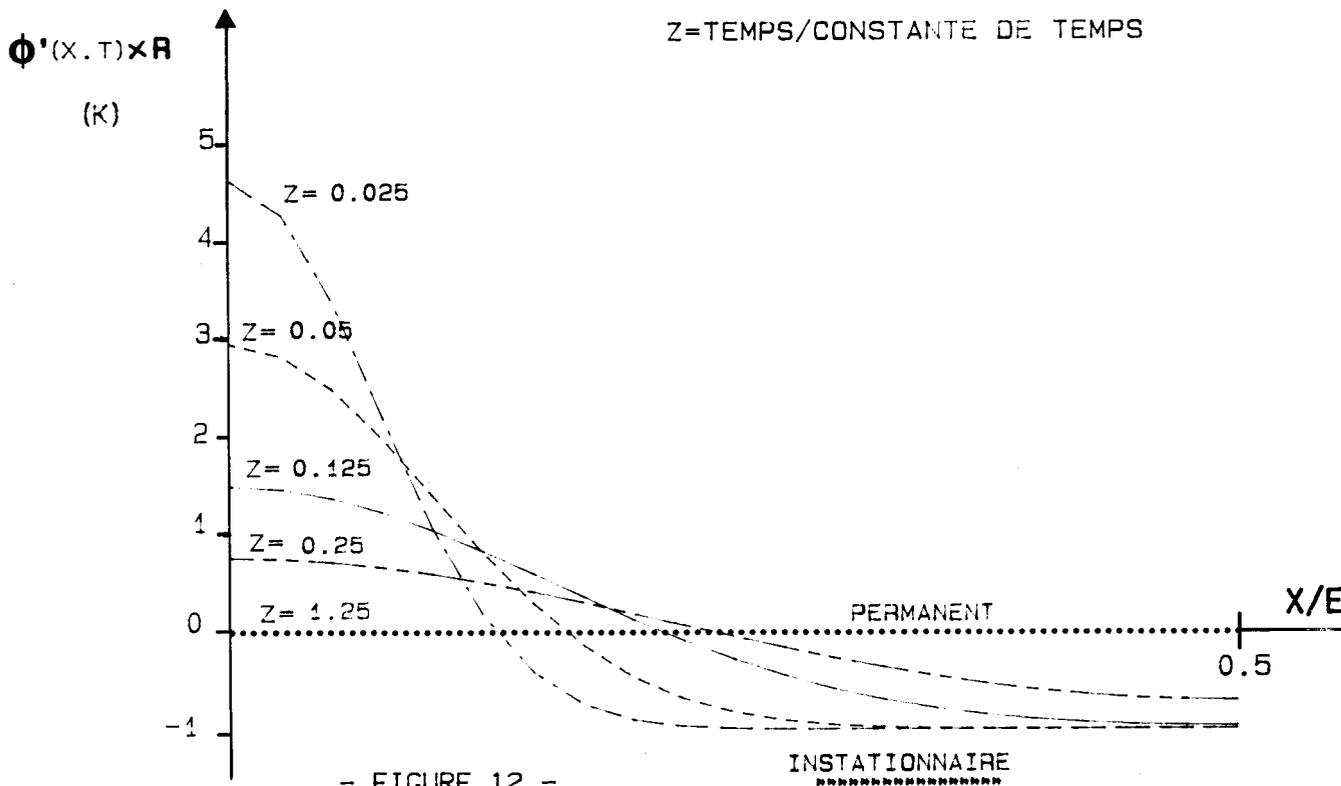
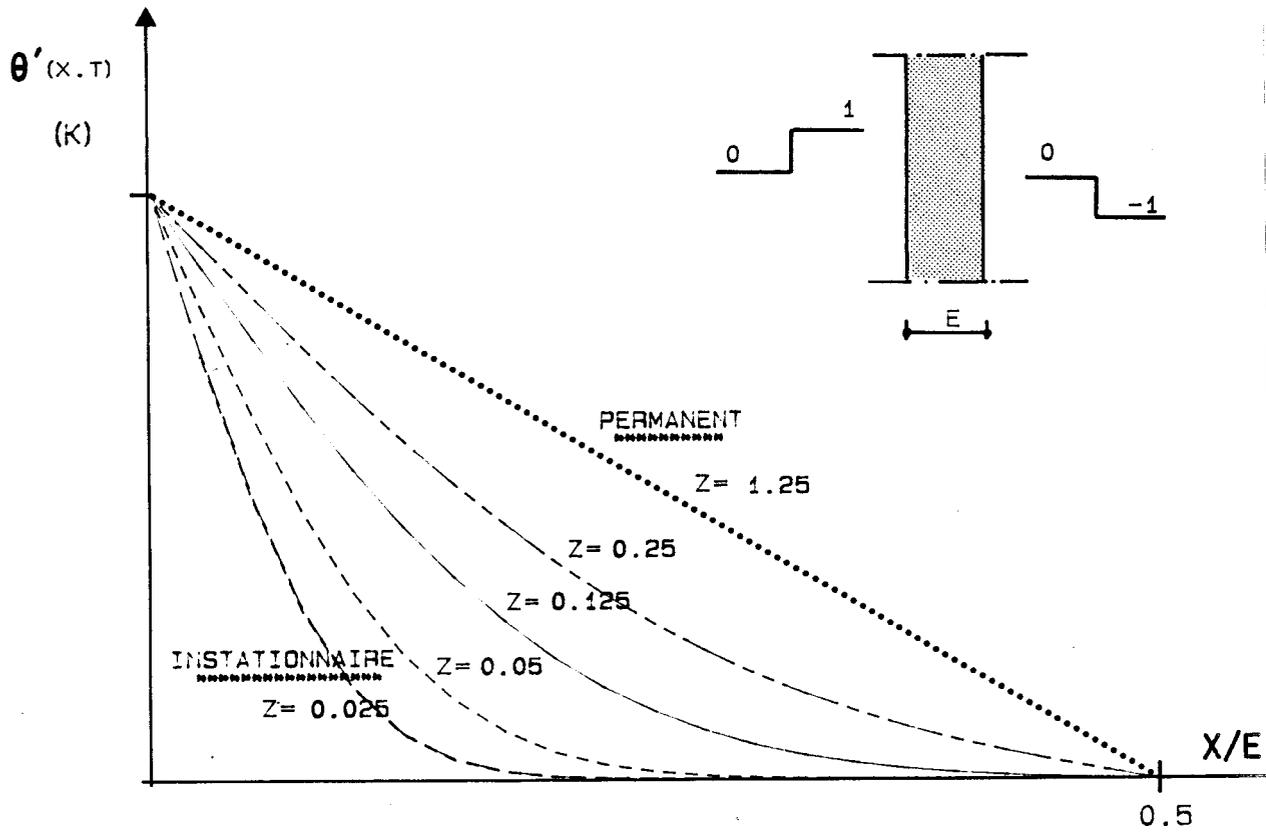
## 2) Stockage pur sans transfert $\Delta \theta(t) = 0$

Pour calculer la température de surface moyenne en fonction de la quantité  $\Delta \phi(t)$  supposée connue, nous pouvons procéder comme précédemment en introduisant la fonction réponse :

$$h'(t) = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{H(p)}{b^2 p} \right)$$

Connaissant cette fonction, il est possible d'exprimer la variation temporelle de la quantité  $\Sigma \theta$  en fonction de  $\Delta \phi(t)$  par le produit de convolution :

$$\Sigma \theta(t) = h'(t) \otimes \Delta \phi(t)$$



- FIGURE 12 -

CHAMP DES ECARTS DE FLUX ET DE TEMPERATURE EN FONCTION DE X ET DU TEMPS NORMALISE POUR UNE EVOLUTION DE TRANSFERT PUR

ou en utilisant la réponse indicielle  $u'_s$  définie en 12 :

$$\Sigma \theta(t) = u'_s(t) \cdot \Delta\phi(0) + u'_s(t) \otimes \frac{d\Delta\phi(t)}{dt} \quad (16)$$

Cette relation permet de simuler la température de surface moyenne lorsque l'on connaît les flux  $\phi_1$  et  $\phi_2$  entrant dans la paroi. Inversement, lorsque l'on connaît la température de surface moyenne  $\frac{\Sigma\theta}{2}$ , la quantité  $\Delta\phi(t)$  est obtenue par une relation de même forme.

Connaissant la quantité  $\Sigma\theta(t)$  nous obtenons facilement l'écart entre la température de surface et la température moyenne  $\bar{\theta}(t)$ . En régime de variation rapide  $\frac{\Sigma\theta}{2} - \bar{\theta}$  n'est pas proportionnelle à  $\Delta\phi$  (figure 13).

La figure 14 représente les évolutions de  $\Delta\phi(t)$  et de  $\bar{\theta}(t)$  résultant d'une variation en échelon de  $\Sigma\theta(t)$ . Une telle transformation est évidemment instationnaire, pour les valeurs du temps inférieures à  $4\tau$ .

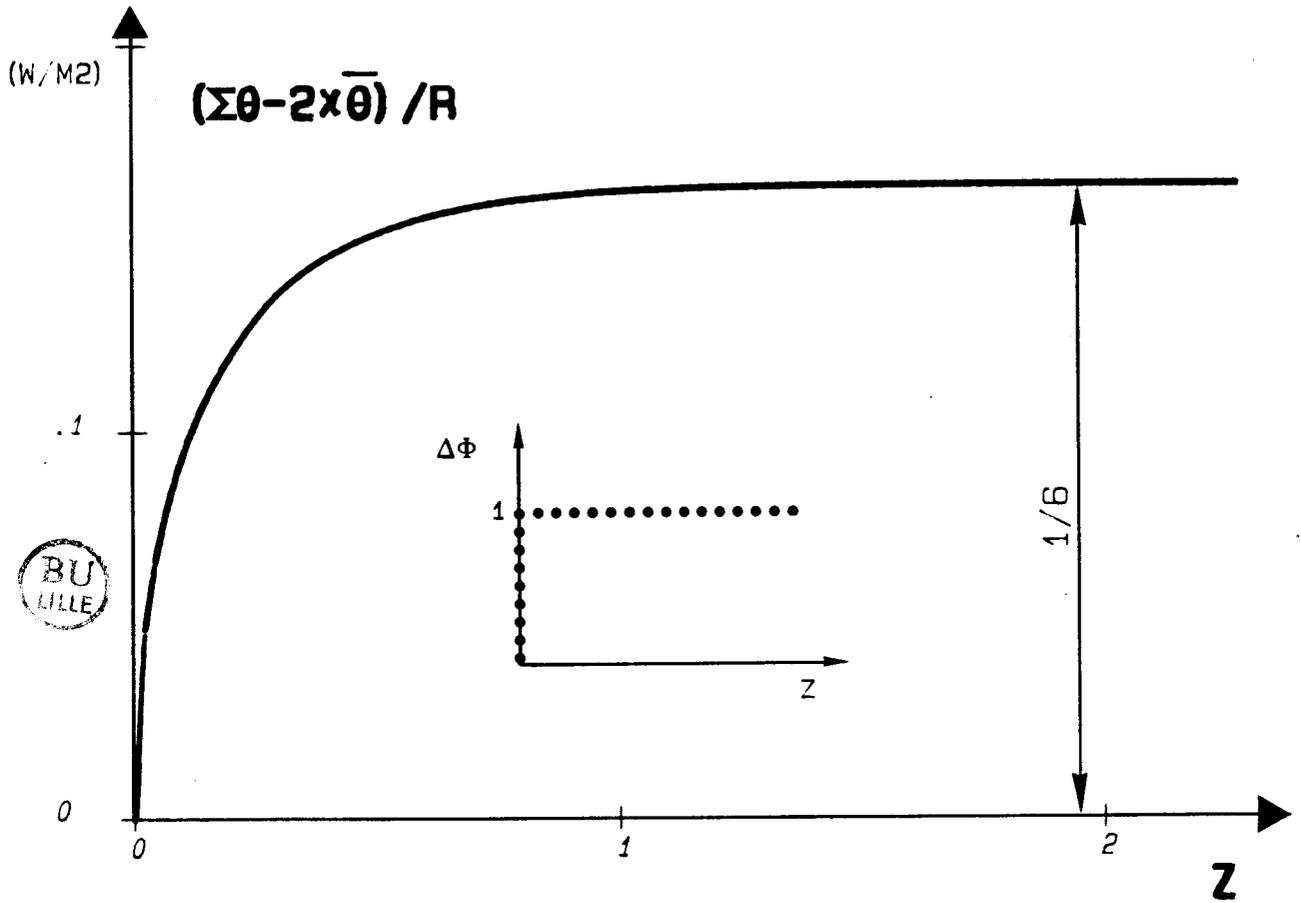
### 3) Régimes quasi-stationnaires

L'analyse précédente montre que pour les valeurs importantes du temps réduit,  $z > 1$  pour le transfert pur ou le stockage pur à flux imposé et  $z > 4$  pour le stockage pur à température imposée, le champ de température a la même structure qu'en régime continu. Cette observation caractérise l'ensemble des régimes lentement variables vis-à-vis de la constante de temps fondamentale du processus considéré. La réponse du système peut être considérée comme étant très rapide par rapport au temps de variation de la sollicitation extérieure. Un tel régime est dit quasi-stationnaire.

#### Transfert pur en régime quasi-stationnaire

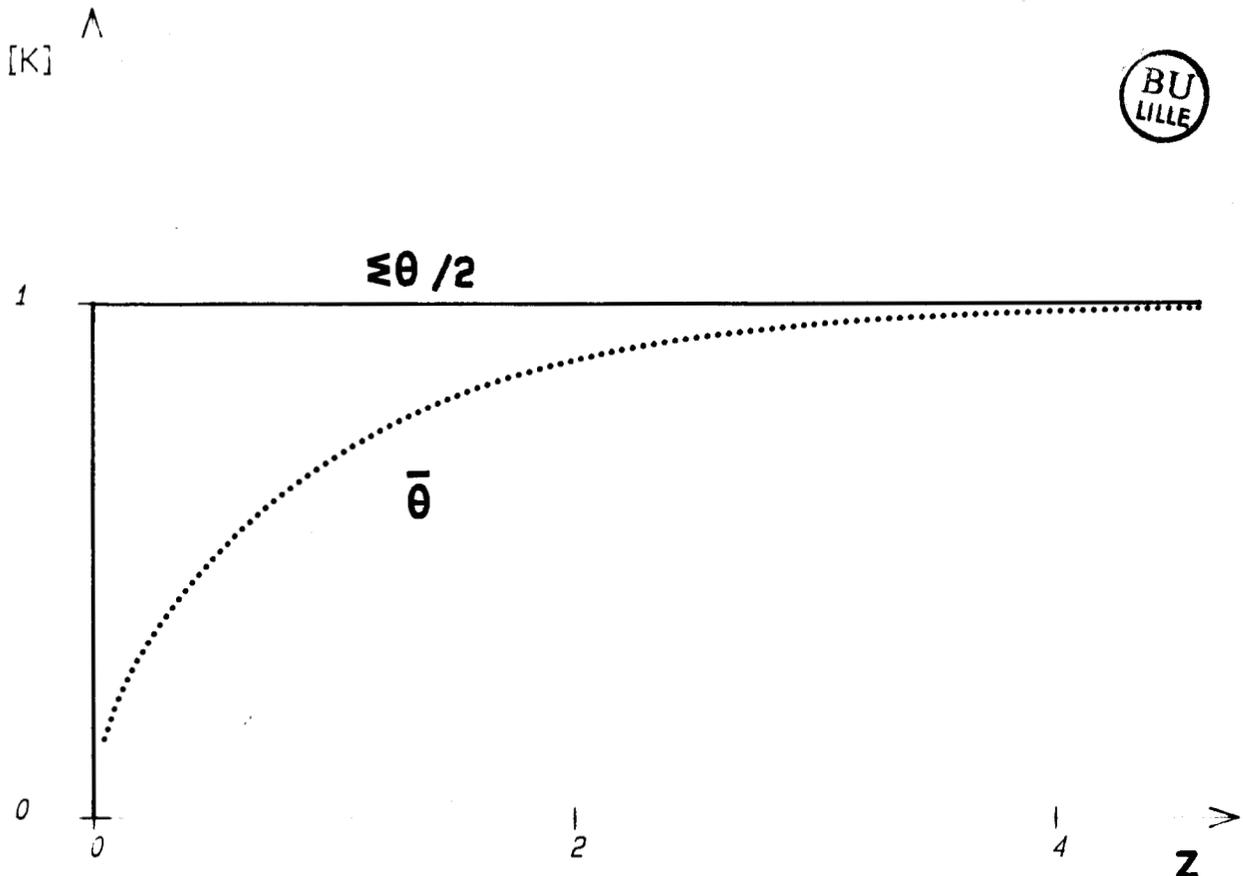
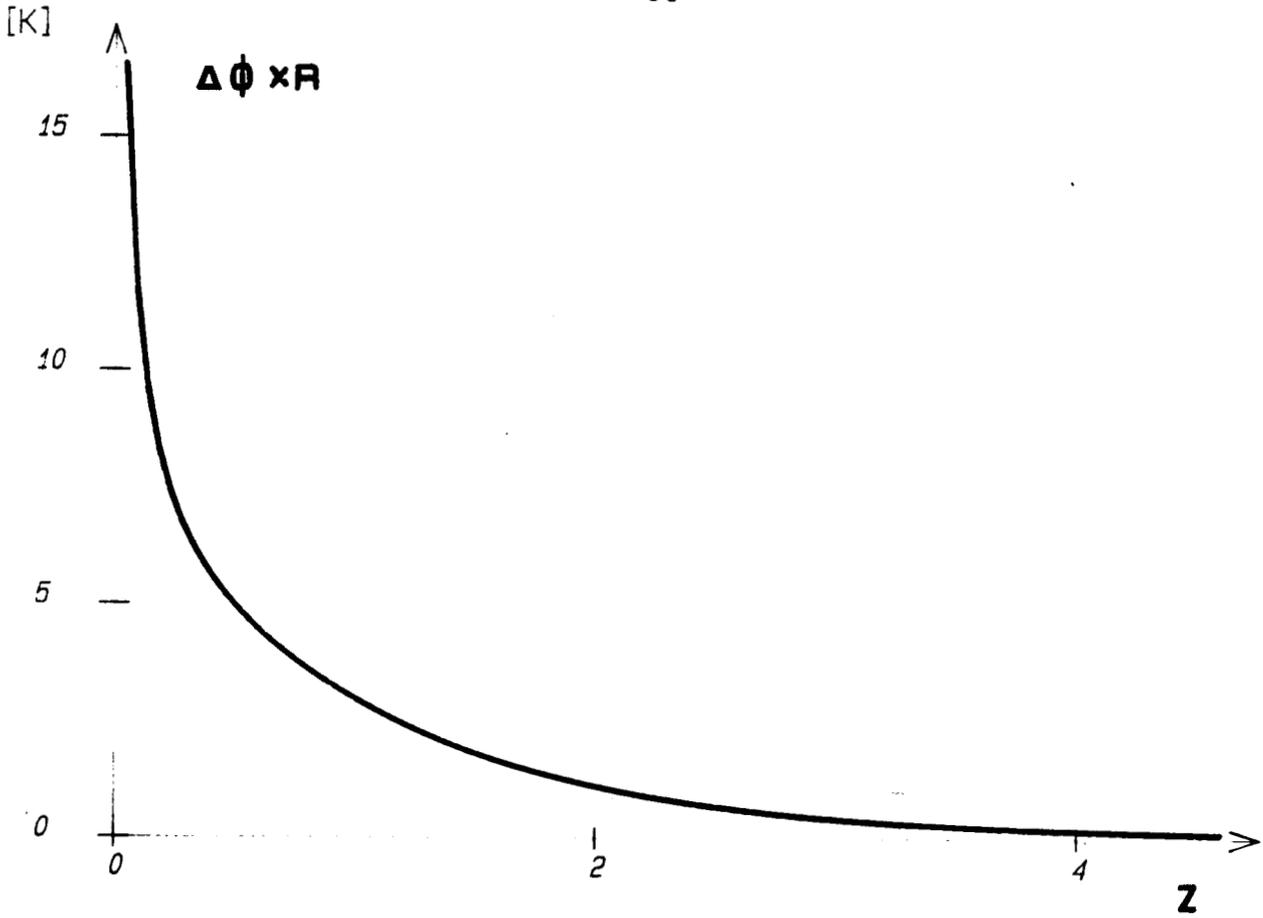
Lorsque les variations de la fonction  $\Delta\theta(t)$  sont lentes vis-à-vis de celle de la réponse impulsionnelle  $h(t)$ , la réponse est représentée par la même relation qu'en régime continu :

$$\Sigma\phi(t) = \frac{2}{R} \Delta\theta(t)$$



- FIGURE 13 -

ECART NORMALISE ENTRE TEMPERATURES SUPERFICIELLE ET MOYENNE LORS D'UN STOCKAGE  
 PUR EN ECHELON DE FLUX IMPOSE



- FIGURE 14 - EVOLUTIONS DE LA DIFFERENCE DES FLUX ET DE LA TEMPERATURE MOYENNE RESULTANT D'UNE VARIATION EN ECHELON DES TEMPERATURES SUPERFICIELLES

On peut rendre compte de cette relation en assimilant  $h(t)$  à une "impulsion de Dirac" puisque le produit de convolution se réduit dans ce cas à la relation :

$$\Sigma\phi(t) = \frac{2}{R} \delta(t) \otimes \Delta\theta(t) = \frac{2}{R} \Delta\theta(t)$$

Cette relation définit le régime quasi-stationnaire du mode de "transfert pur". La sollicitation externe, agissant sur le système est suffisamment lente pour que la réponse du système puisse être considérée comme étant extrêmement rapide, c'est à dire assimilable à une fonction de Dirac.

### Stockage pur en régime quasi-stationnaire

De la même façon, le processus de stockage est quasi-stationnaire lorsque la réponse du système est rapide par rapport à la vitesse de variation des sollicitations en provenance du milieu extérieur. Pour un échange à température de surface imposée, la constante de temps fondamentale est quatre fois plus importante que celle du transfert pur. Les processus quasi-stationnaires de stockage pur à température imposée sont donc beaucoup plus lents que les processus quasi-stationnaires de "transfert pur". Pour un stockage pur à flux imposé, la constante de temps de l'évolution est la même que celle d'un transfert pur  $\tau_t = \frac{\tau}{4}$ . Dans ce cas, la relation :

$$\frac{\Delta\bar{\theta}}{2} - \bar{\theta} = \left| \frac{RH}{2} - \frac{1}{Cp} \right| \Delta\phi$$

qui tend vers :  $\frac{\Sigma\bar{\theta}}{2} - \bar{\theta} = R_s \Delta\phi$

le régime continu peut être également considérée comme le produit de convolution

$$\frac{\Sigma\bar{\theta}}{2}(t) - \bar{\theta}(t) = \delta(t) R_s \otimes \Delta\phi(t)$$

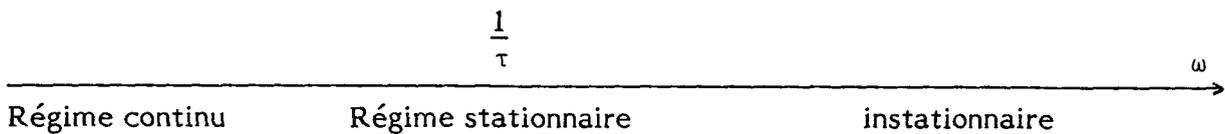
dans lequel la fonction réponse est remplacée par la "fonction de Dirac".

Effectuer ce remplacement revient à considérer comme précédemment que le temps de réponse du processus de stockage est très faible vis-à-vis de la vitesse de variation de la sollicitation imposée.

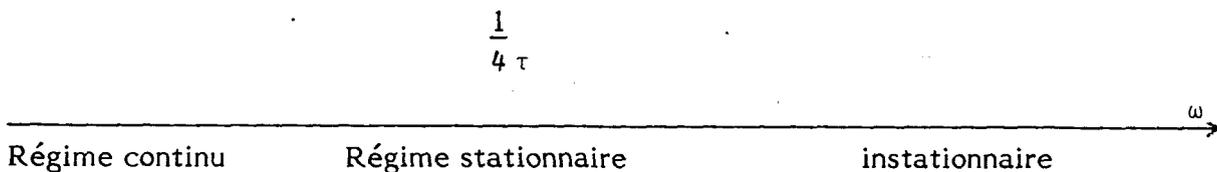
### 2.5.3. Considérations sur la dynamique des transferts thermiques dans une paroi homogène

Les flux et températures mesurés sur la surface d'une paroi pouvant être considérés à chaque instant comme la superposition de deux processus indépendants : un mode de transfert pur et un mode de stockage pur, nous sommes amenés pour caractériser les transferts thermiques à réaliser le diagramme suivant :

"Transfert pur ou stockage pur à flux imposé"



"Stockage pur à température imposée"



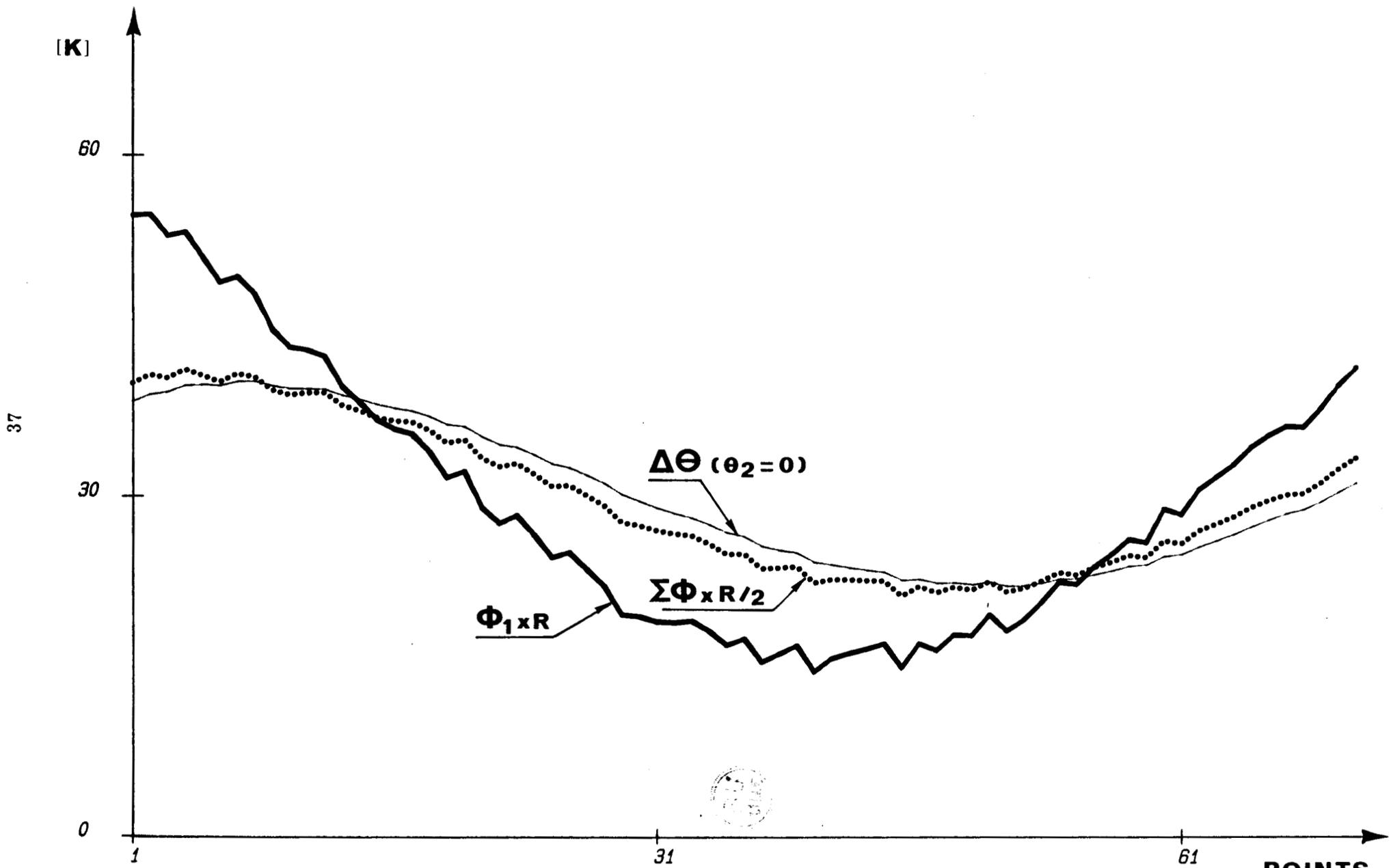
Les vitesses de variation  $\omega$  sont représentées en abscisse. Les divers types de régimes sont classés suivant les valeurs de  $\omega$  par rapport aux pulsations caractéristiques des modes fondamentaux.

Les modes de base étant indépendants l'un de l'autre (uniquement dans une paroi homogène) il est possible de traiter les coordonnées conjuguées relatives à un mode indépendamment de l'autre mode.

Par exemple, pour toutes les sollicitations suffisamment lentes pour que le mode de transfert soit en régime quasi-stationnaire, la relation :

$$\Sigma\phi = \frac{2}{R} \Delta\theta$$

est vérifiée que la mode de "stockage" soit en régime continu, quasi-stationnaire ou



- FIGURE 15 - COMPARAISON DE LA SOMME DES FLUX ET DU FLUX SUPERFICIEL POUR UNE EVOLUTION A DIFFERENCE DE TEMPERATURES IMPOSEE

**POINTS**  
pas réduit = 0,14

instationnaire. Il n'en est pas de même des flux  $\phi_1$  ou  $\phi_2$  qui sont fonction du détail de la transformation imposée au système.

La figure 15 illustre ces considérations dans le cas particulier où la température  $\theta_2$  est maintenue constante, la température  $\theta_1$  subissant les variations représentées. L'examen des courbes montre que  $\Sigma\phi$  est sensiblement proportionnel à  $\Delta\theta$ . Il n'en est pas de même du flux qui ne serait proportionnel à  $\Delta\theta$  que pour des variations beaucoup plus lentes.

Seule la contrainte  $\Delta\phi = 0$  ou  $\bar{\theta} = \text{Cte}$  permet de limiter l'analyse du seul flux  $\phi_1$  puisque dans ces conditions  $\Sigma\phi = 2\phi$ , et le mode de transfert pur est représenté par la relation :

$$\phi_1 = \frac{\Delta\theta}{R} \quad \text{en régime quasi-stationnaire}$$

et

$$\phi_1 = \frac{h(t)}{R} \otimes \Delta\theta(t) \quad \text{en régime variable.}$$

Dans ce cas particulier, il est possible de caractériser les transferts thermiques en mesurant un seul flux. Dans le cas plus général où la température moyenne varie, il faut nécessairement mesurer les flux  $\phi_1$  et  $\phi_2$  afin de pouvoir étudier séparément les processus de transfert et de stockage.

### III. REPRESENTATION DES TRANSFERTS UNIDIRECTIONNELS DANS LES PAROIS HETEROGENES MULTICOUCHES

#### 3.1. Relations entre grandeurs généralisées

Un travail de recherche développé actuellement dans notre laboratoire consiste à développer une modélisation des transferts dans les parois multicouches utilisant les grandeurs généralisées  $\Sigma\phi, \Delta\phi, \Sigma\theta, \Delta\theta$  pour représenter globalement les interactions entre le "système" paroi (considéré comme une boîte noire) et le mode extérieur, la modélisation proposée permet de définir des fonctions de réponses accessibles à la mesure. Nous reprendrons dans ce passage certains de ces résultats (27).

Dans une paroi homogène soumise à un transfert unidirectionnel, la quantité  $\Sigma\phi$  est liée de façon biunivoque à la quantité  $\Delta\theta$ , de même  $\Delta\phi$  ne dépend que de  $\Sigma\theta$ , ces quatre grandeurs définissent deux modes de base indépendants. Il n'en est pas de même dans les parois multicouches, la matrice de transfert obtenue par produits en cascades des matrices de chaque couche élémentaire dépend du sens suivant lequel on considère le système, en considérant la face 1 "entrée" et la face 2 "sortie" (28 à 31)

on obtient figure (16)

$$\begin{vmatrix} \tilde{\theta}_2 \\ \phi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & F \\ F' & E' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \tilde{\theta}_1 \\ \phi_1 \end{vmatrix}$$

et inversement :

$$\begin{vmatrix} \tilde{\theta}_1 \\ \phi_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E' & -F' \\ -F' & E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \tilde{\theta}_2 \\ \phi_2 \end{vmatrix}$$

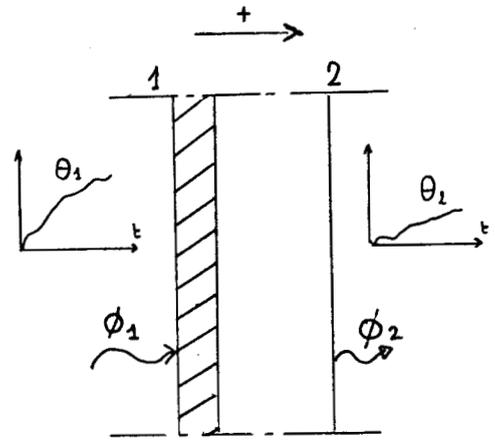


figure 16

Le système n'est plus invariant par retournement. Les grandeurs généralisées sont introduites par combinaisons linéaires des relations matricielles précédentes :

$$\tilde{\Sigma} \phi_{12} = -\left(\frac{1 + \Sigma E / 2}{F}\right) \Delta \tilde{\theta} - \frac{\Delta E}{2F} \tilde{\Sigma} \theta$$

$$\Delta \tilde{\phi}_{12} = \left(\frac{1 - \Sigma E / 2}{F}\right) \tilde{\Sigma} \theta - \frac{\Delta E}{2F} \Delta \tilde{\theta}$$

avec  $\Sigma E = E + E'$  et  $\Delta E = E - E'$

$$\tilde{\Sigma} \phi_{12} = H1 \cdot \Delta \tilde{\theta} + H2 \cdot \tilde{\Sigma} \theta$$

$$\Delta \tilde{\phi}_{12} = H3 \cdot \tilde{\Sigma} \theta + H2 \cdot \Delta \tilde{\theta}$$

(17)

On montre que pour interchanger les accès entrée-sortie (2 → 1) il suffit de substituer dans les relations 17 H2 en - H2 soit

$$\tilde{\Sigma} \phi_{21} = H1 \cdot \Delta \tilde{\theta} - H2 \cdot \tilde{\Sigma} \theta$$

$$\Delta \tilde{\phi}_{21} = H3 \cdot \tilde{\Sigma} \theta - H2 \cdot \Delta \tilde{\theta}$$

A partir de ces relations, il apparaît qu'une structure multicouche quelconque est entièrement caractérisée quand on connaît trois fonctions réponses H1, H2, H3, la dissymétrie du système est représentée par la fonction de transfert H2 qui change de signe par permutation du système vis-à-vis de la sollicitation.

Dans le cas particulier d'une structure multicouche symétrique le terme  $\Delta E$  est nul et on retrouve comme pour un système homogène des relations biunivoques entre  $\Sigma\phi$ ,  $\Delta\theta$  et  $\Delta\phi$ ,  $\Sigma\theta$ .

Dans le domaine temporel la relation 17 devient :

$$\begin{aligned}\Sigma\phi_{12}(t) &= h1 \otimes \Delta\theta(t) + h2 \Sigma\theta(t) \\ \Delta\phi_{12}(t) &= h3 \otimes \Sigma\theta(t) + h2 \Delta\theta(t)\end{aligned}\quad (18)$$

Une représentation équivalente peut être exprimée à partir des réponses indicielles soit :

$$\begin{aligned}\Sigma\phi_{12}(t) &= U1 \otimes \frac{\partial \Delta\theta(t)}{\partial t} + \frac{U2 \otimes \partial \Sigma\theta(t)}{\partial t} + U1 \cdot \Delta\theta(o) + U2 \Sigma\theta(o) \\ \Delta\phi_{12}(t) &= U3 \otimes \frac{\partial \Sigma\theta(t)}{\partial t} + \frac{U2 \otimes \partial \Delta\theta(t)}{\partial t} + U3 \cdot \Sigma\theta(o) + U2 \Delta\theta(o)\end{aligned}$$

### 3.2. Valeurs asymptotiques des réponses temporelles

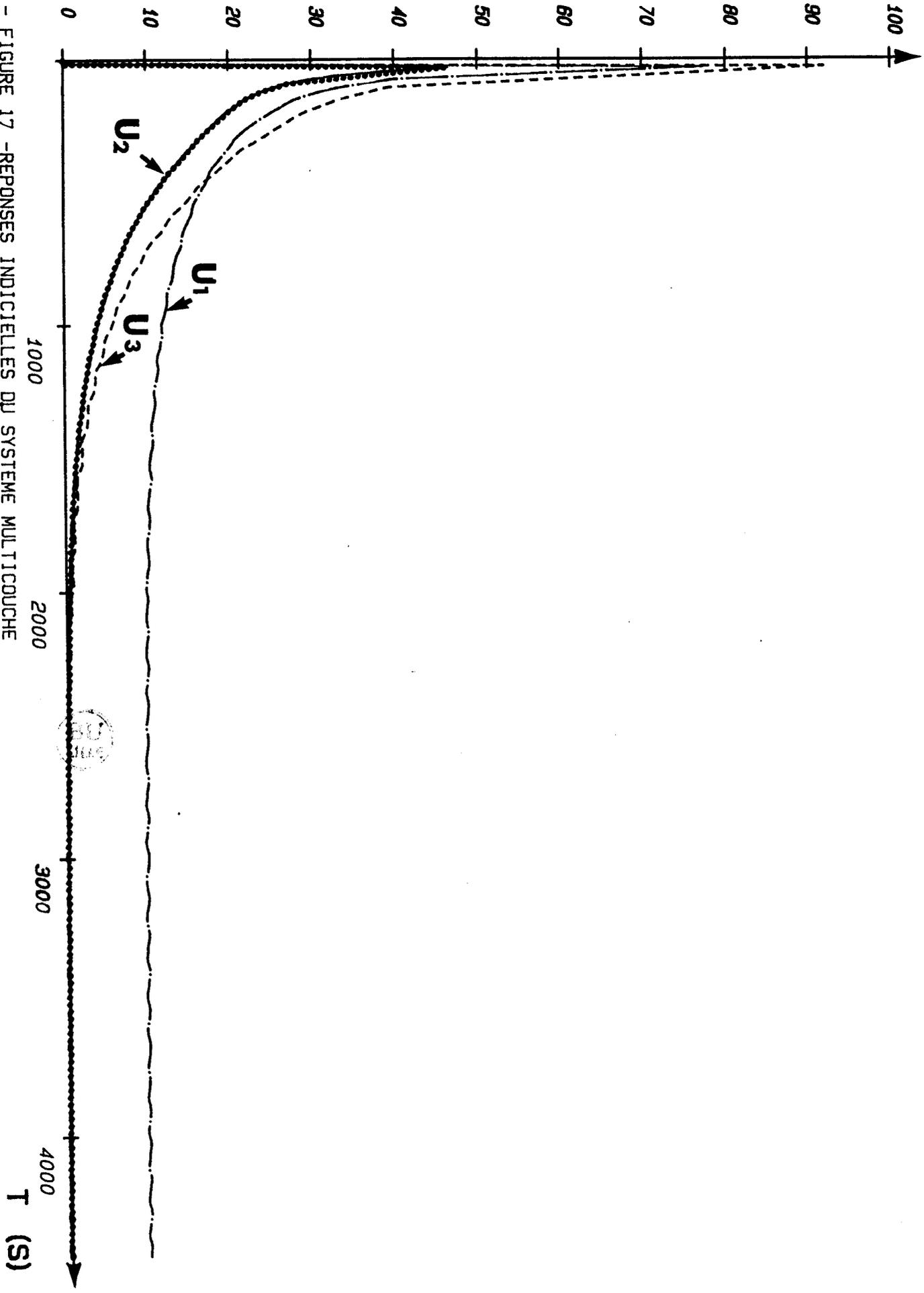
Les relations intervenant en régime asymptotique sont obtenues en faisant  $P \rightarrow 0$  dans les fonctions réponse  $H1, H2, H3$  on obtient :

$$H1 \rightarrow \frac{2}{\Sigma R} \quad H2, H3 \rightarrow 0$$

en régime asymptotique l'expression de la somme des flux observés sur une structure multicouche est identique à celle d'une paroi homogène en prenant comme résistance équivalente la somme des résistances thermiques soit :

$$\Sigma\phi = \frac{2}{\Sigma R} S(t) \otimes \Delta\theta(t) = \frac{2}{\Sigma R} \Delta\theta(t)$$

la figure 17 montre les trois réponses indicielles caractéristiques d'un système Klegicel 14,5 mm, verre 5mm et plexiglass 5 mm.



- FIGURE 17 - REPONSES INDICIELLES DU SYSTEME MULTICOUCHE

#### IV. APPLICATION DE L'ANALYSE STATISTIQUE DE LA RELATION "FLUX TEMPERATURE DE SURFACE" A LA DETERMINATION DE LA RESISTANCE THERMIQUE EN REGIME ALEATOIRE

De façon générale, les grandeurs  $\phi_1, \phi_2, \theta_1, \theta_2$  ne sont pas des fonctions déterministes du temps et nous aurons à modéliser la transformation de "sollicitations aléatoires" par les fonctions de transfert d'une paroi monodimensionnelle.

Les entrées du système sont supposées soumises à des actions assimilables à des processus aléatoires tels que moyennes temporelles et d'ensemble peuvent être interchangeables. Dans ces conditions, en prenant la valeur statistique moyenne de chacun des membres de la relation

$$\Sigma \phi(p) = H(p) \Delta \theta(p)$$

on obtient (23) :

$$\overline{\Sigma \phi}(t) = H(o) \cdot \overline{\Delta \theta}(t) \quad (20)$$

soit puisque  $H(o) : 2/R$

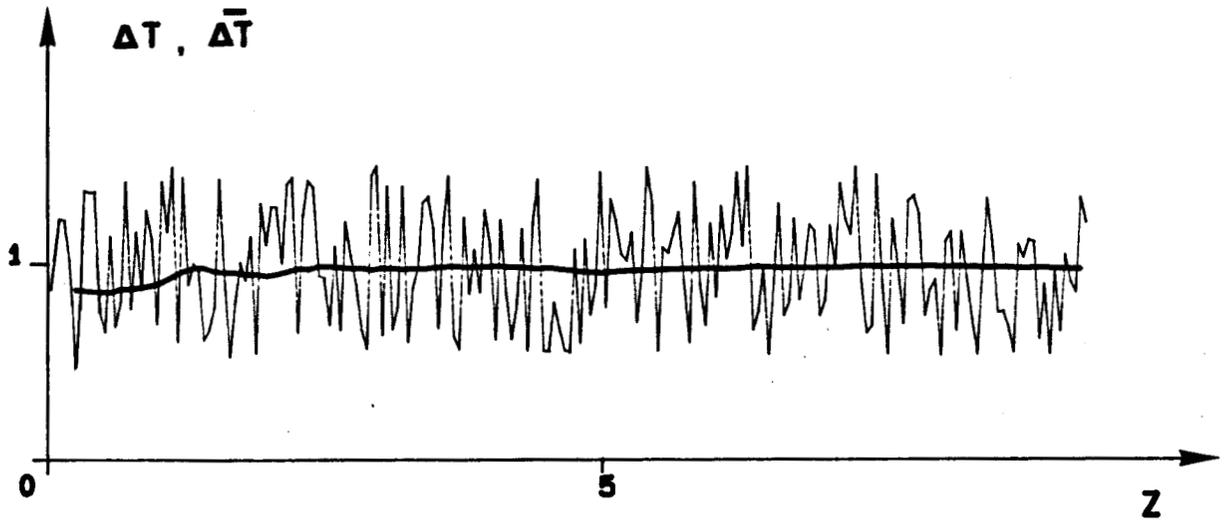
$$R = \frac{2 \overline{\Delta \theta}(t)}{\overline{\Sigma \phi}(t)}$$

La résistance thermique est donc égale au rapport de la valeur moyenne de la différence des températures et de la demi-somme des flux quel que soit le régime (pourvu que  $\overline{\Sigma \phi} \neq 0$  et  $\overline{\Delta \theta} \neq 0$ ).

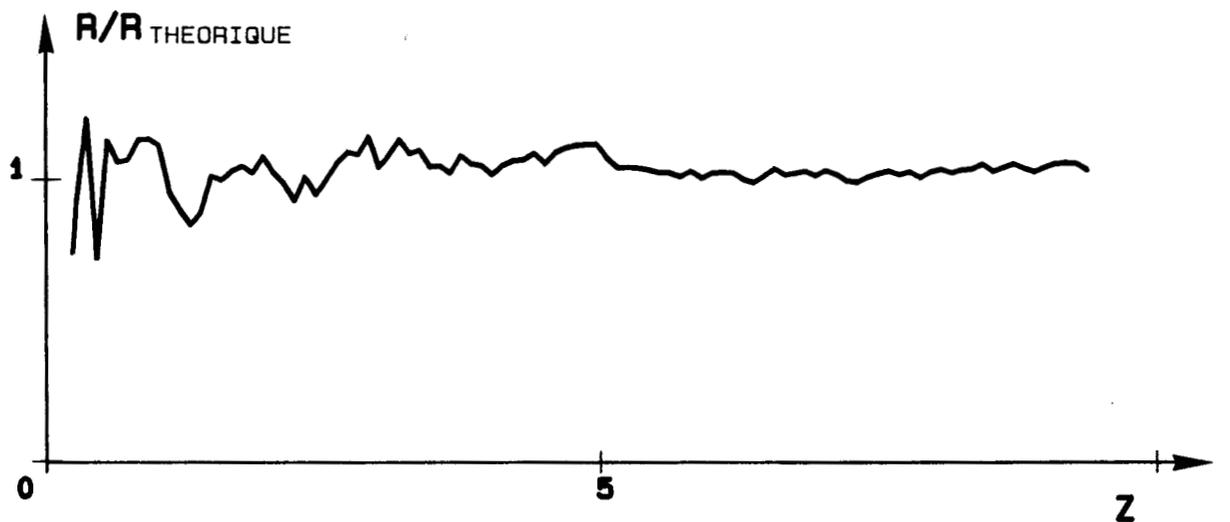
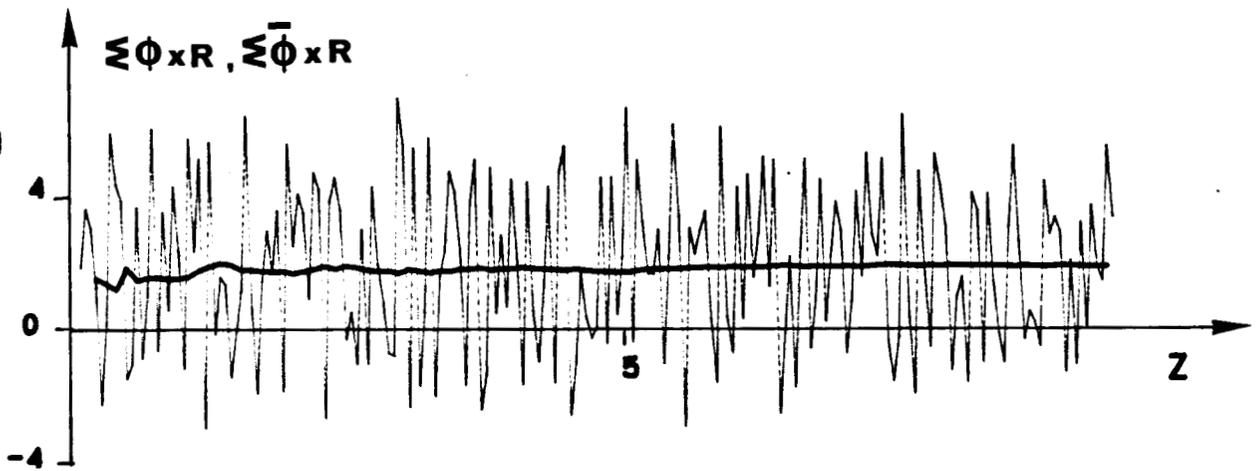
Cette relation est généralisable aux structures multicouches puisque nous avons vu au paragraphe 32 que  $H_2 \rightarrow o$  si  $P \rightarrow o$  on a alors  $\Sigma R = \frac{2 \overline{\Delta \theta}(t)}{\overline{\Sigma \phi}(t)}$  (21)

La figure 18 représente les enregistrements de  $\Delta \theta(t)$  (simulés) sur les surfaces d'une paroi homogène, la courbe  $\Sigma \phi(t)$  représente la somme des flux calculée par le produit de convolution :

$$\Sigma \phi(t) = h(t) \otimes \Delta \theta(t)$$



BU  
LILLE



- FIGURE 18 -SIMULATION D'UNE EVOLUTION ALEATOIRE

Les valeurs moyennes sont représentées par chacune des courbes et la résistance est égale au rapport des valeurs moyennes.

Ces considérations montrent clairement que le concept de résistance thermique n'est utilisable qu'en régime permanent. L'utiliser pour représenter des transferts thermiques en régime variable revient à remplacer les évolutions réelles par un régime quasi-permanent obtenu à partir des moyennes de  $\Delta\theta(t)$  et de  $\Sigma\phi(t)$ . Ce concept n'est pas applicable pour représenter les détails d'un processus thermique en régime variable puisque la valeur obtenue est indépendante du détail de la transformation.

Les relations 20 et 21 sont également applicables à la classe importante de signaux d'"énergie finie" et de formes quelconques tels que ceux représentés figure 19. Ces signaux sont définis par

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

c'est-à-dire qu'ils appartiennent à la classe des fonctions de carré sommable.

Les conditions initiales et finales seront nulles.

$$\begin{aligned} \Delta\theta(t_0) &= \Sigma\phi(t_0) = 0 \\ \Delta\theta(t_j) &= \Sigma\phi(t_j) = 0 \end{aligned}$$

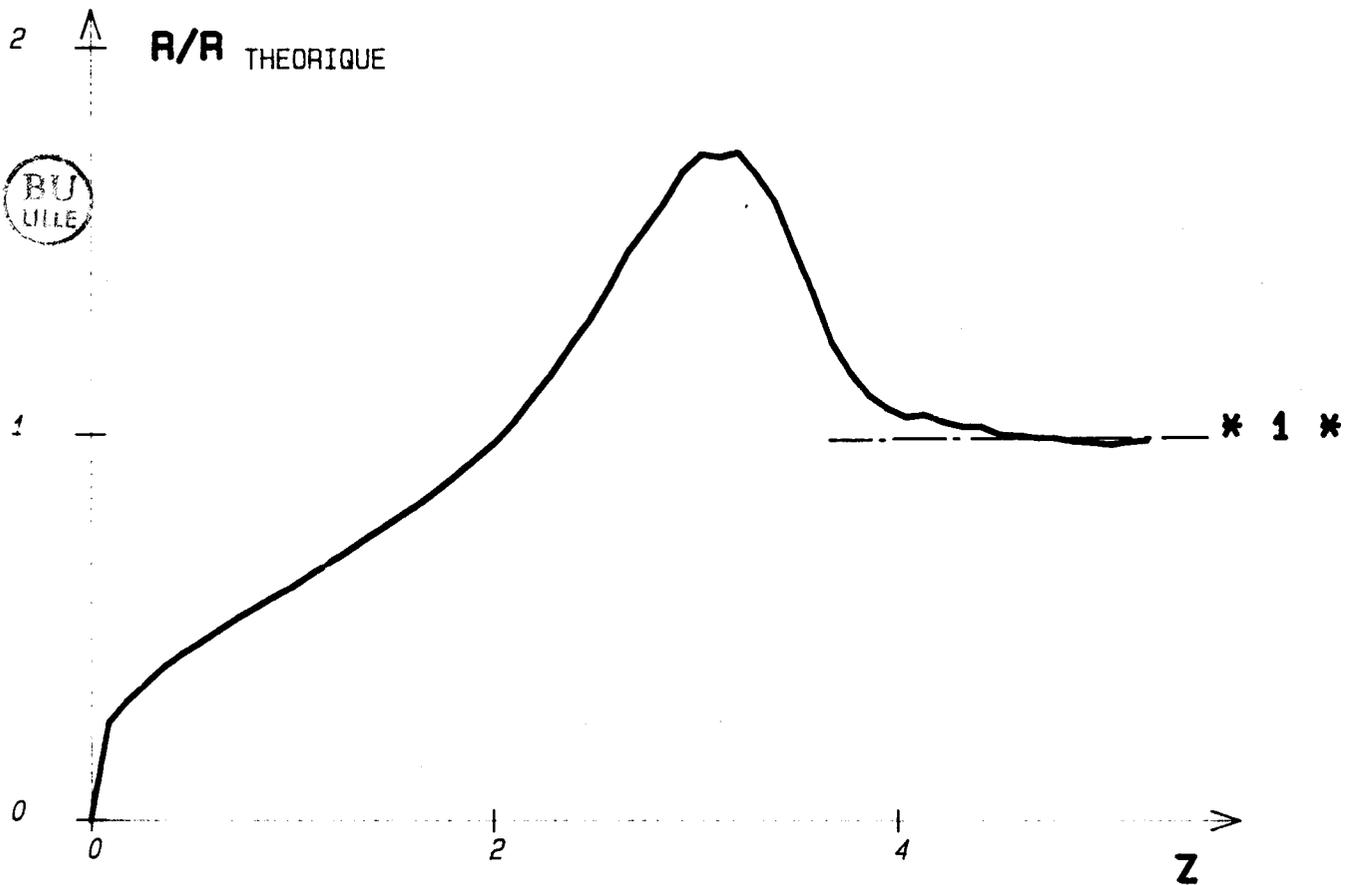
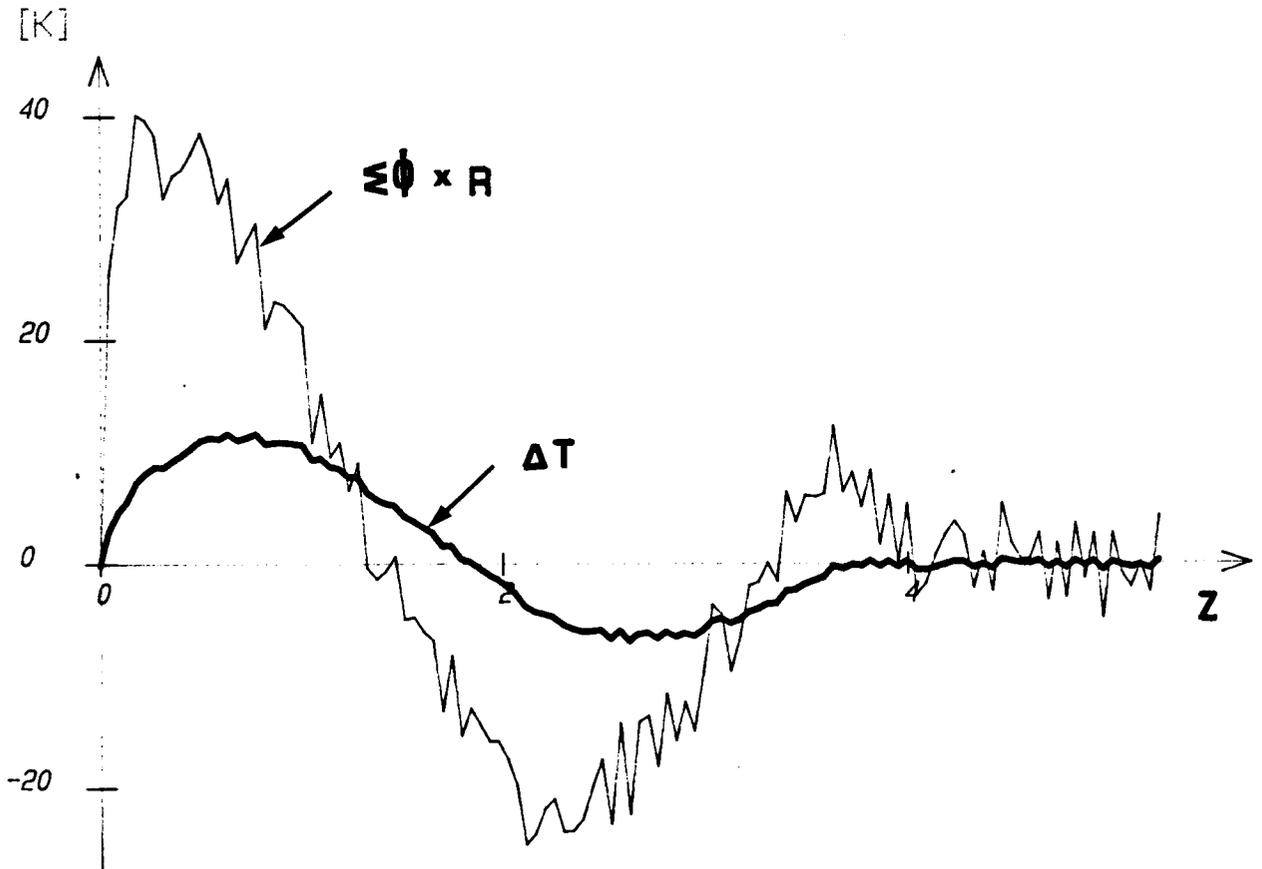
on a alors

$$R = \frac{2 \int_{t_0}^{t_j} \Delta\theta(t) dt}{\int_{t_0}^{t_j} \Sigma\phi(t) dt} \quad (22)$$

Cette relation est applicable en particulier à des signaux de formes quelconques facilement réalisables en laboratoire et peut donc être utilisée pour caractériser la résistance thermique d'échantillons.

## V. APPLICATION DES FONCTIONS DE CORRELATION A L'ANALYSE DES TRANSFERTS THERMIQUES EN REGIME VARIABLE

Dans les paragraphes précédents, nous avons introduit des variables conjuguées  $\Delta\theta(t)$ ,  $\Sigma\phi(t)$  et  $\Delta\phi(t)$ ,  $\Sigma\theta(t)$ , ces grandeurs sont connues par mesurées simultanées ou simulées par des produits de convolution. L'observation temporelle directe ne permet cependant pas d'estimer quantitativement les relations de dépendance entre une action et une réponse, c'est pourquoi les mathématiciens et physiciens ont introduit les



- FIGURE 19 -SIMULATION D'UN SIGNAL D'ENERGIE FINIE

fonctions de corrélation qui donnent réellement une information quantitative sur la relation de dépendance entre une action et une réponse. Les fonctions de corrélation ne dépendent pas de la forme temporelle des signaux, mais uniquement de leur contenu fréquentiel (18 à 21).

### 5.1. Notion de corrélation

#### - Fonction d'autocorrélation

Soit un signal déterministe ou aléatoire  $x(t)$ , sa fonction d'autocorrélation est définie par la relation :

$$R_{XX}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t-\tau) dt \quad (23)$$

Cette fonction décrit la mémoire statistique du processus  $x(t)$  ; elle exprime la dépendance entre les valeurs définissant le processus à un instant donné et les valeurs définissant le même processus aux instants précédents décalés de  $\tau$ .

La fonction d'autocorrélation est une fonction paire dont le maximum est situé à l'origine.

#### - Fonction d'intercorrélation

Soit deux signaux déterministes ou aléatoires  $x(t)$  et  $y(t)$ , leur fonction d'intercorrélation est définie par la relation :

$$R_{YX}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t) x(t-\tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t+\tau) dt \quad (24)$$

La fonction d'intercorrélation exprime la dépendance statistique entre deux phénomènes, quand  $R_{XY}(\tau) = 0$  les deux processus  $x(t)$  et  $y(t)$  ne sont plus corrélés. L'abscisse du maximum de la fonction correspond au "retard" moyen introduit par le système.

### - Principales applications

Les méthodes de corrélation permettent de résoudre de nombreux problèmes expérimentaux. Citons :

- détection et extraction de signaux noyés dans du bruit
- identification des systèmes linéaires
- obtention de densités spectrales
- mesure de retards.

#### 1°) Elimination du bruit

Le traitement par corrélation permet l'élimination du bruit superposé à un signal. Cette propriété fondamentale des fonctions de corrélation permet le traitement précis des mesures in situ.

Considérons un signal  $x(t)$  résultant de la superposition d'un bruit  $b(t)$  et du signal  $u(t)$  la fonction d'autocorrélation de  $x(t)$  s'écrit :

$$R_{xx}(\tau) = R_{uu}(\tau) + R_{bb}(\tau) + R_{bu}(\tau) + R_{ub}(\tau)$$

$R_{bb}(\tau)$  est la fonction d'autocorrélation du bruit qui tend vers 0 pour un temps  $|\tau| > \tau_M$  dépend des caractéristiques du bruit. Les fonctions  $R_{bu}(\tau)$  et  $R_{ub}(\tau)$  sont nulles puisque le bruit et le signal ne sont pas corrélés, on a donc finalement

$$R_{xx}(\tau) = R_{uu}(\tau)$$

#### 2°) Identification des systèmes linéaires

L'identification des systèmes linéaires par les fonctions de corrélation est basée sur l'équation de Wiener Hopf qui relie la fonction d'intercorrélation entrée-sortie à la fonction de corrélation de l'entrée.

Considérons un système linéaire qui soumis à un signal d'entrée  $x(t)$  fournit un signal de sortie  $y(t)$ , la fonction d'intercorrélation s'écrit :

$$R_{yx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t+\tau) dt$$

La sortie du système est reliée à l'entrée par une intégrale de convolution

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(u) x(t-u) du$$

En remplaçant  $y(t)$  dans la fonction de corrélation  $R_{xy}(t)$

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x(t) \int_0^{\infty} h(u) x(t+\tau-u) du dt$$

En interchangeant l'ordre des intégrations on obtient :

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} h(u) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t+\tau-u) dt du$$

La fonction entre crochets est la fonction d'autocorrélation du signal d'entrée  $x(t)$  donc

$$R_{yx}(\tau) = \int_0^{\infty} h(u) R_{xx}(\tau-u) du$$

soit

(25)

$$R_{yx}(\tau) = h(\tau) \otimes R_{xx}(\tau)$$

L'équation de Wiener Hopf exprime la fonction d'intercorrélation comme la sortie d'un système de réponse impulsionnelle  $h(\tau)$  soumis à une excitation d'entrée  $R_{xx}(\tau)$ .

Cette relation est de forme analogue à la relation reliant le signal d'entrée  $x(t)$ , à la seule sortie corrélée  $y(t)$  puisque le bruit superposé est éliminé par le traitement de corrélation. Il est en principe possible d'effectuer des opérations de déconvolution pour obtenir la réponse impulsionnelle du système, cette opération, délicate en général, est particulièrement simple lorsque le signal d'entrée est un "bruit blanc". La relation précédente devient alors :

$$R_{yx}(\tau) = h(\tau)$$

### 3°) Densités spectrales de puissance

Considérons un signal aléatoire  $x(t)$ , si l'on applique ce signal à l'entrée d'un filtre

passer bande idéal centré sur la fréquence  $f_0$  et de largeur  $f$ , on recueille à la sortie une puissance moyenne  $P(f_0, \Delta f)$  que l'on peut écrire si  $\Delta f$  est petit

$$\frac{d.P(f)}{df} \Big|_{f=f_0} \cdot df = G_X(f_0) df$$

$G_X(f)$  est la densité spectrale de puissance du signal  $x(t)$ , la puissance moyenne s'écrit :

$$x^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_X(f) df = R_{XX}(0)$$

Selon l'équation de Wiener Kinchine, la densité spectrale est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation.

$$G_X(f) = F(R_{XX}(\tau))$$

Par analogie, la transformée de Fourier de la fonction d'intercorrélacion est appelée Interspectre de puissance

$$G_{YX}(f) = F(R_{YX}(\tau))$$

$G_{YX}(f)$  représente la puissance d'interaction en fonction de la fréquence.

### Remarques

1°) - Le calcul des fonctions de corrélacions de signaux aléatoires se fait toujours sur un temps  $T$  fini. On obtient donc une approximation de ces fonctions en calculant  $R(\tau, T)$  et non  $R(\tau, \infty)$ .

Cependant, dans le cas particulier d'un phénomène aléatoire stationnaire dont les propriétés statistiques sont invariables par déplacement de l'origine des temps, les fonctions de corrélacions ne dépendent pas de la portion de la tranche  $T$  dans l'histoire du processus considéré.

2°) Pour calculer les fonctions de corrélacions de signaux "d'énergie finie" (ou "transitoires") on utilise les définitions suivantes :

$$R_{XX}(\tau) = \int_{-T}^T x(t) x(t-\tau) dt$$

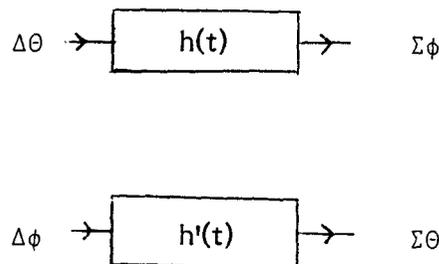
$$R_{yx}(\tau) = \int_{-T}^T y(t) x(t-\tau) dt$$

On se divise plus par le temps d'intégration puisque les intégrales sont convergentes et que la moyenne tendrait vers 0. Les bornes d'intégrations  $-T$  et  $T$  sont choisies de sorte qu'en ces points les signaux puissent être considérés comme nuls.

Dans le cas de signaux d'énergie finie, la transformée de Fourier ne définit plus des spectres de densité de puissance, mais des spectres de densité d'énergie.

### 5.2. Application des fonctions de corrélations à l'analyse des transferts thermiques en régime variable

Nous avons défini précédemment deux modes fondamentaux et les coordonnées conjuguées associées pour décrire les transferts dans une paroi homogène, en utilisant ces coordonnées, une paroi homogène peut être considérée comme un système linéaire transformant des signaux d'entrée  $\Delta\theta(t)$  et  $\Delta\phi(t)$  en des signaux de sortie  $\Sigma\phi(t)$  et  $\Sigma\theta(t)$ .  
(33 à 36)



Les actions sur le système amènent deux fonctions d'autocorrélation :

$$R_{\Delta\theta\Delta\theta} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Delta\theta(t) \cdot \Delta\theta(t-\tau) dt$$

pour le processus de transfert et

$$R_{\Delta\phi\Delta\phi} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Delta\phi(t) \cdot \Delta\phi(t-\tau) dt$$

pour le processus de stockage.

Les réponses fournissent deux fonctions d'intercorrélation

$$R_{\Sigma\phi\Delta\theta} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \Sigma\phi(t) \cdot \Delta\theta(t-\tau) dt$$

et

$$R_{\Sigma\theta\Delta\phi} = \int_{-T/2}^{T/2} \Sigma\theta(t) \cdot \Delta\phi(t-\tau) dt$$

Ces fonctions sont liées entre elles par des produits de convolution

$$R_{\Sigma\phi\Delta\theta} = h(t) \otimes R_{\Delta\theta\Delta\theta} \quad (26)$$

$$R_{\Sigma\theta\Delta\phi} = h'(t) \otimes R_{\Delta\phi\Delta\phi}$$

Cette dernière relation peut aussi se mettre sous la forme

$$R_{\Sigma\theta\Delta\phi} = R \cdot h(t) \otimes R_{\bar{\theta}\Delta\phi} \quad (27)$$

$R$  est ici la résistance thermique du système  $R = e/\lambda$

Les réponses impulsionnelles  $h(t)$  et  $h'(t)$  ont été définies dans la partie précédente pour les processus de transfert et de stockage. Ces relations sont particulièrement intéressantes puisqu'elles établissent l'équivalence de toutes les "actions" qui ont même fonction d'autocorrélation et représentent de façon globale leur transformation par une paroi. La notion de régime quasi-stationnaire du mode de transfert introduite précédemment nous conduit par exemple à grouper l'ensemble des sollicitations suffisamment lentes pour que la réponse au système puisse être assimilée à un "facteur de Dirac"  $h(t) \approx \frac{2}{R} \delta(t)$ .

$$\Sigma\phi = \frac{2}{R} \Delta\theta(t) \quad \text{ou} \quad \Sigma\phi = \frac{2}{R} \delta(t) \otimes \Delta\theta$$

Pour l'ensemble de ces sollicitations

$$R_{\Sigma\phi\Delta\theta} = \frac{2}{R} \delta(t) \otimes R_{\Delta\theta\Delta\theta}$$

La relation de dépendance entre l'action et la réponse ne dépend que de la structure du signal  $\Delta\theta(t)$  qui reste invariante lorsqu'on la convolue avec la réponse impulsionnelle du système représenté ici par  $\frac{2\delta(t)}{R}$ .

Dans le cas général à partir des relations précédentes et par un raisonnement analogue à celui du paragraphe IV on peut montrer que pour un signal  $\Delta\theta(t)$  aléatoire ou d'énergie finie on a la relation :

$$R \frac{\Sigma\phi\Delta\theta}{R} = \frac{2\delta(t)}{R} \otimes R \frac{\Delta\theta\Delta\theta}{R}$$

Cette procédure qui autorise le traitement de signaux bruités de faible niveau est particulièrement intéressante pour le traitement des mesures in situ, la résistance thermique sera obtenue par la relation

$$R = \frac{2 \int_{-T/2}^{T/2} R_{\Delta\theta\Delta\theta}(\tau) d\tau}{\int_{-T/2}^{T/2} R_{\Sigma\phi\Delta\theta}(\tau) d\tau} \quad (28)$$

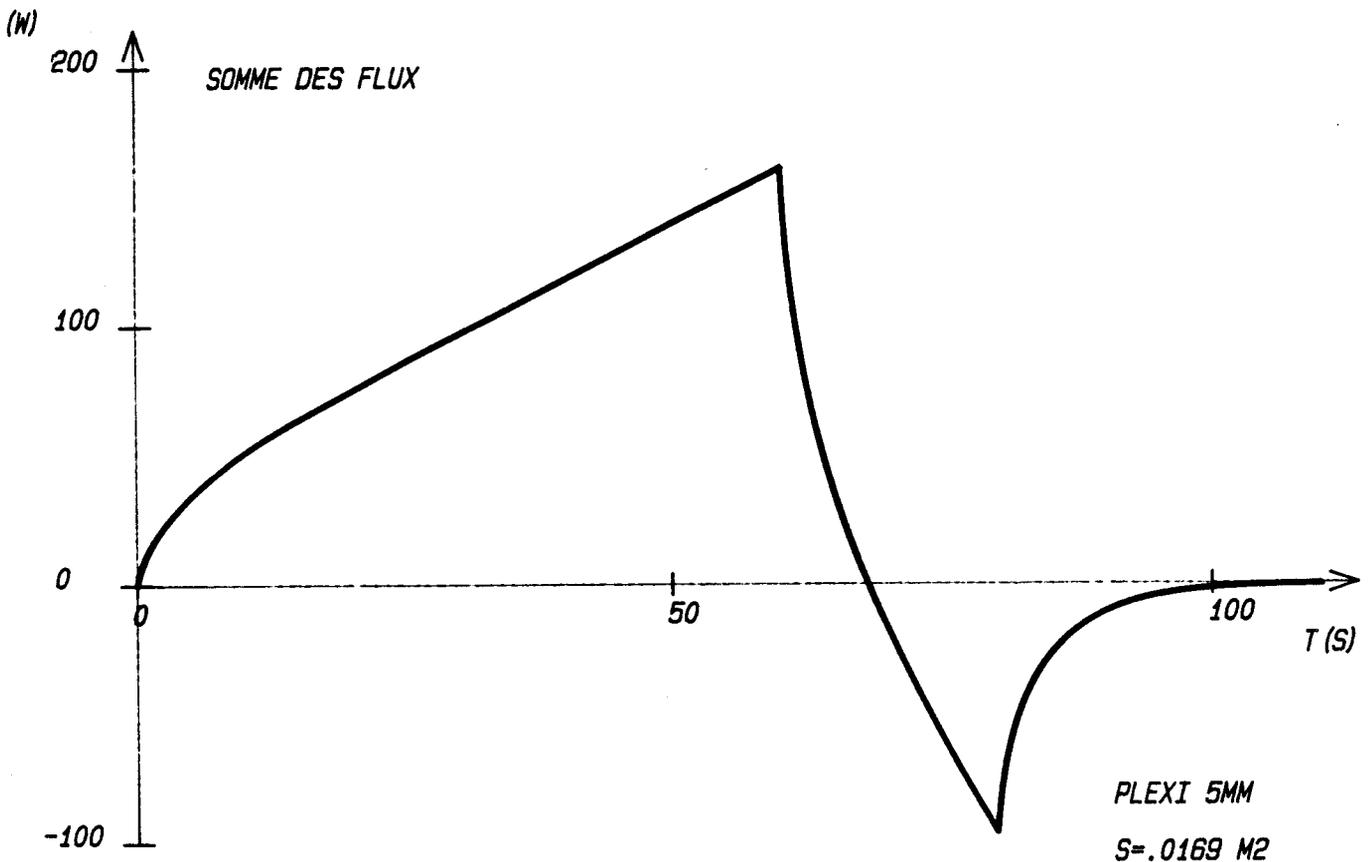
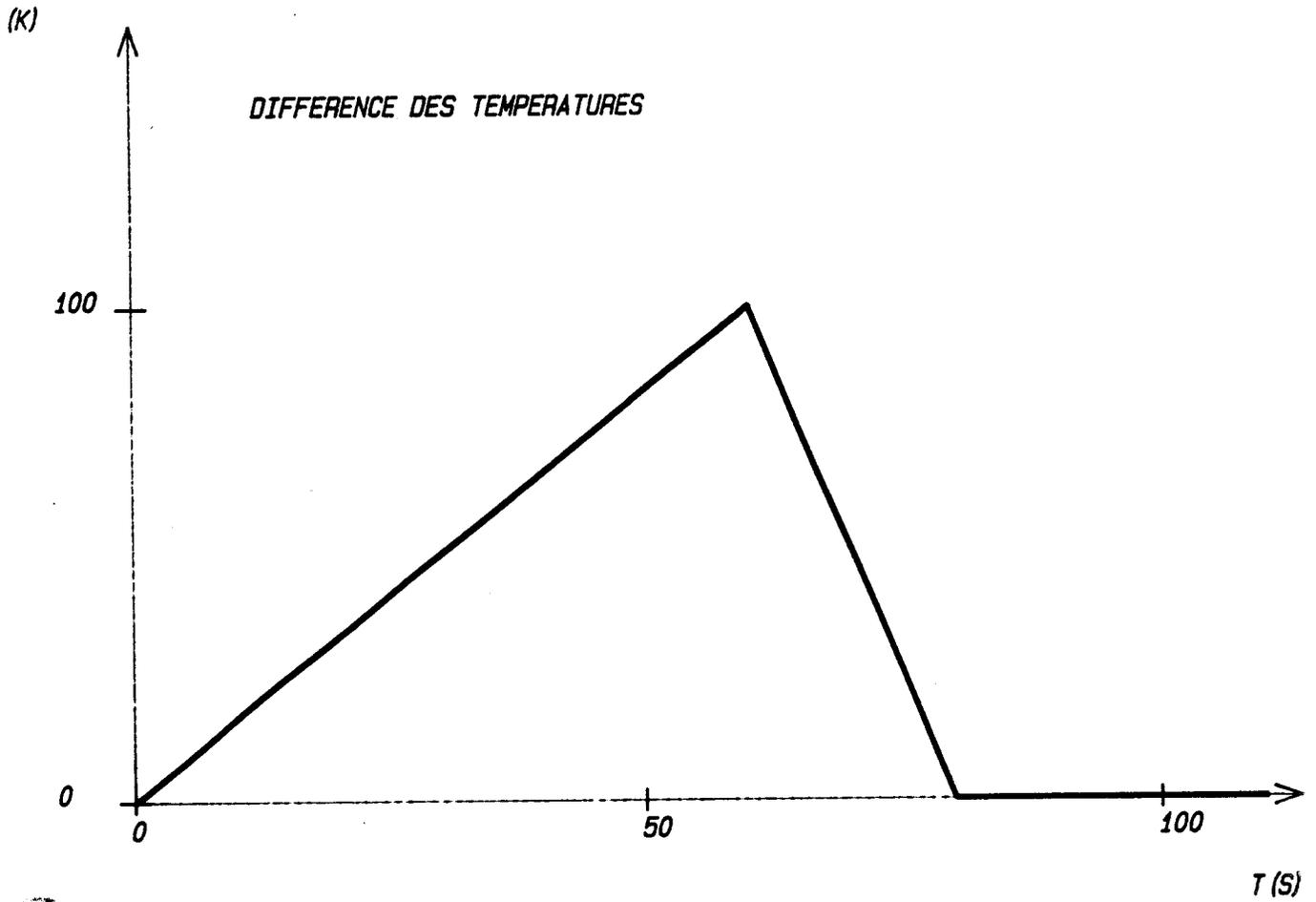
Pour une paroi multicouche on obtient à partir de la relation 17 :

$$\begin{aligned} R_{\Sigma\phi\Delta\theta} &= h_1 \otimes R_{\Delta\theta\Delta\theta} + h_2 \otimes R_{\Sigma\theta\Delta\theta} \\ R_{\Delta\phi\Sigma\theta} &= h_3 \otimes R_{\Sigma\theta\Sigma\theta} + h_2 \otimes R_{\Delta\theta\Sigma\theta} \end{aligned}$$

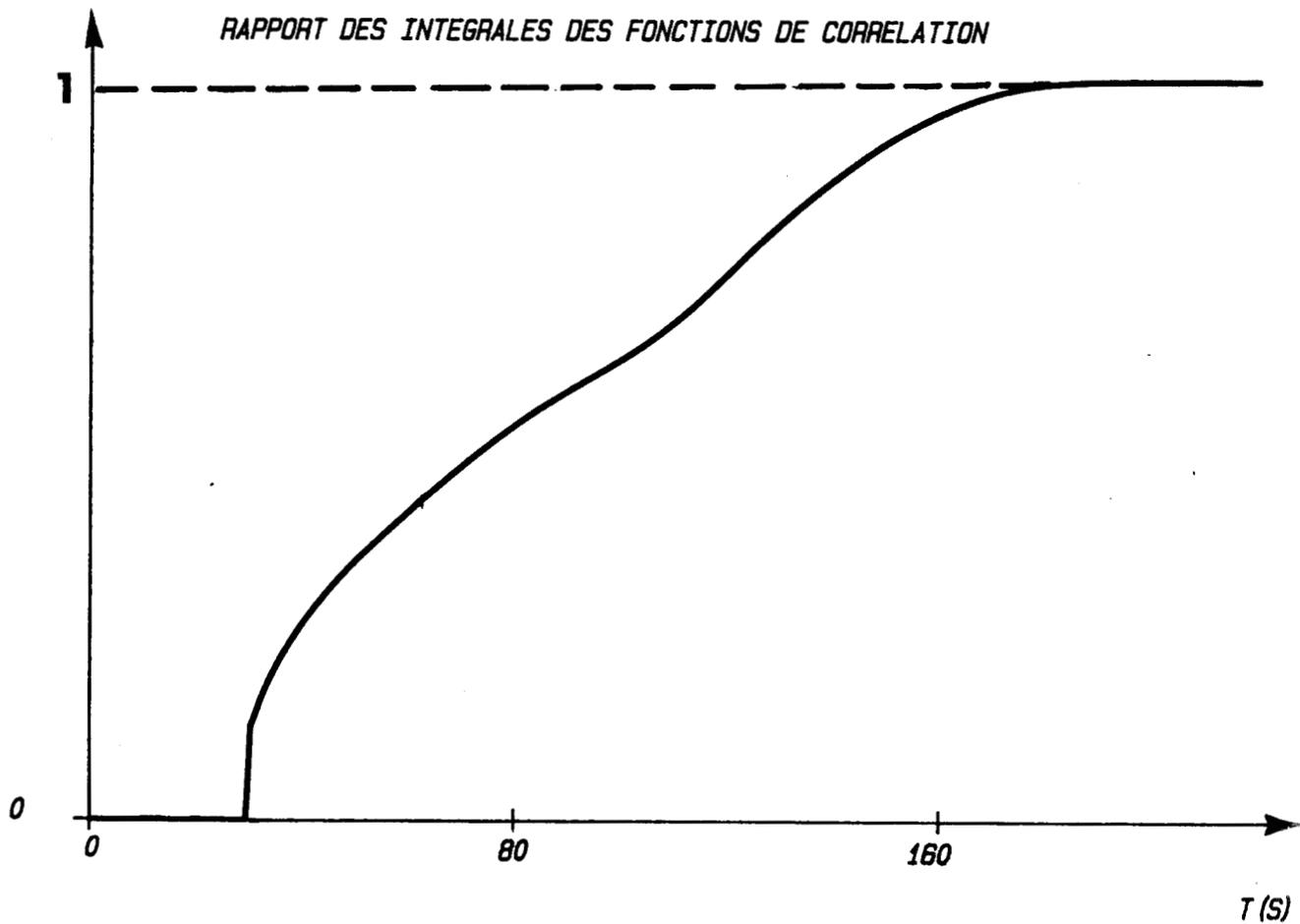
La relation 28 est aussi applicable aux structures multicouches en remplaçant R par  $\Sigma R$

La simulation relative à un transfert pur représentée figure 20 représente les transferts thermiques dans une paroi soumise à une variation de température présentant une discontinuité de la dérivée  $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ .

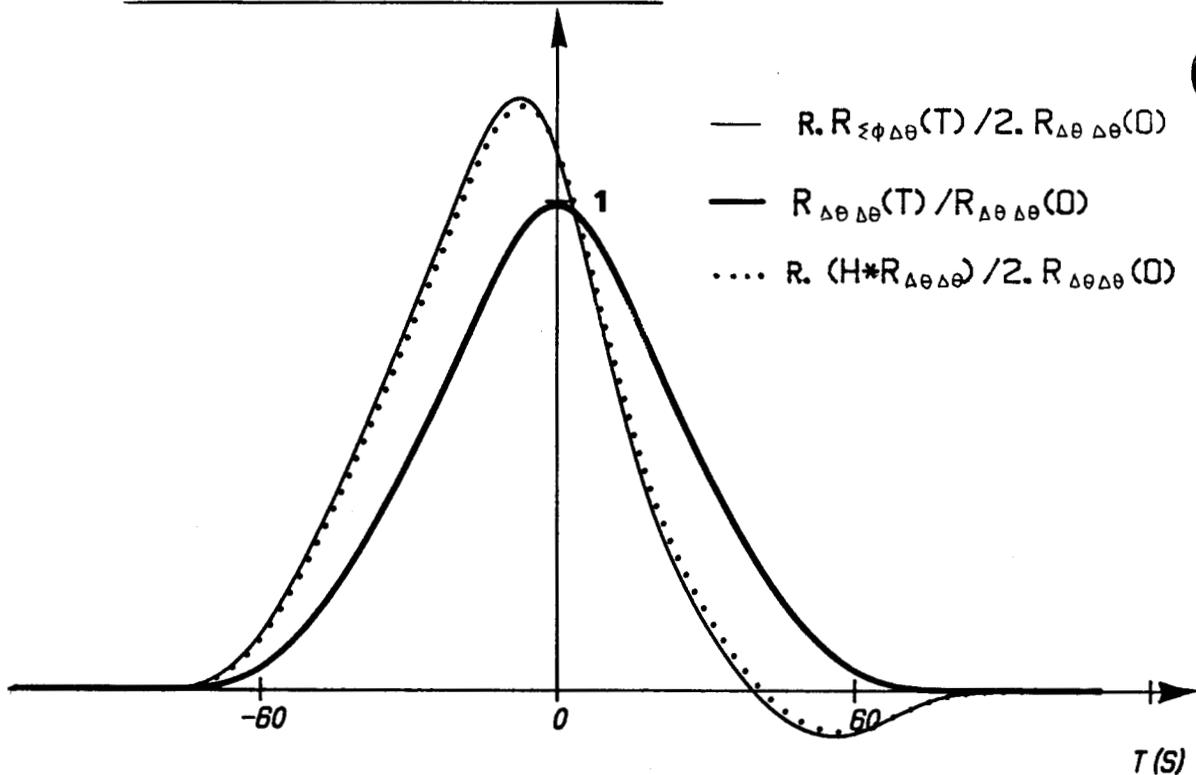
On peut remarquer figure 21 que la fonction d'intercorrélation  $R_{\Sigma\phi\Delta\theta}$  est parfaitement confondue avec le résultat du produit de convolution de  $R_{\Delta\theta\Delta\theta}$  et de la réponse impulsionnelle. Le rapport des intégrales défini par la relation 28 (figure 21) converge vers la valeur de la résistance thermique du système.



- FIGURE 20 - SIMULATION DE LA SOMME DES FLUX ET DE LA DIFFERENCE DES TEMPERATURES SUR UN ECHANTILLON DE PLEXIGLASS DE 5MM D'ÉPAISSEUR



**FONCTIONS DE CORRELATION ET CONVOLUTION**



- FIGURE 21 -

RAPPORT DES INTEGRALES DES FONCTIONS DE CORRELATIONS

FONCTIONS D'AUTOCORRELATION. D'INTERCORRELATION. CONVOLUTION

Les transformées de Fourier des fonctions de corrélation définiront les densités spectrales énergétiques et les interspectres énergétiques. On peut remarquer figure 2' que le rapport des valeurs moyennes défini de manière adimensionnelle par  $\frac{P}{2} \frac{R_{\Sigma\phi\Delta\theta}^{(0)}}{R_{\Delta\theta}}$  n'est pas égal à 1, une interprétation physique sera développée dans les prochains chapitres en utilisant le concept d'entropie.

Si la formulation mathématique est identique ici à la formulation mise en oeuvre pour traiter des signaux physiques pour lesquels la théorie du signal a été initialement développée, le sens physique de ces relations n'a pas été défini pour les sollicitations thermiques. Prenons l'exemple de l'analogie "électrique-thermique" classique qui fait correspondre une différence de potentiel ( $u$ ) à une différence de température ( $\Delta\theta$ ) et une intensité de courant ( $I$ ) à un flux de chaleur ( $\psi$ ); le produit  $u \cdot I$  a un sens physique puisqu'il définit une puissance, ce couple de grandeurs permet donc de définir une fonction d'intercorrélation dont la transformée de Fourier est l'interspectre de puissance. Dans ce cas de signaux thermiques, le produit  $\phi \cdot \theta$  n'a pas de sens physique évident, ce n'est qu'en utilisant le concept d'entropie introduit dans le prochain chapitre que l'on pourrait définir des grandeurs conjuguées, par rapport à une grandeur physique l'entropie.

## VI. CONCLUSION

Nous avons cherché dans ce chapitre à adapter aux processus de transfert thermique certaines techniques utilisées en analyse des systèmes et en traitement du signal. Cette approche permet une représentation globale des échanges entre le "système paroi" et le monde extérieur.

Cette formulation permet d'introduire quatre grandeurs généralisées  $\Sigma\phi, \Delta\phi, \Sigma\theta, \Delta\theta$  pour représenter les interactions entre une paroi et son environnement. La connaissance (mesure ou simulation) de ces grandeurs dispense de faire une hypothèse quant aux conditions limites.

Dans le cas d'une paroi homogène soumise à un transfert unidirectionnel, les relations entre grandeurs généralisées amènent deux modes de base indépendants et deux couples de grandeurs conjuguées associées : le mode "transfert" qui est entièrement caractérisé par le couple des grandeurs  $\Sigma\phi, \Delta\theta$  et le mode "stockage" caractérisé par le couple  $\Delta\phi, \Delta\theta$ . En régime variable les grandeurs de "sortie" du système résultent dans le domaine temporel d'un produit de convolution entre la grandeur "d'entrée" et une fonction de réponse propre au système. Une paroi homogène

est entièrement caractérisée quand on connaît les deux fonctions de réponse caractéristiques des modes "transfert" et "stockage". L'étude des relations entrée-sortie pour les processus lentement variables permet d'introduire des régimes de références : les régimes quasi-stationnaires pour les deux modes de base.

Dans le cas des parois hétérogènes multicouches, les modes de base ne sont plus indépendants, il y a couplage, une grandeur de sortie dépend alors de deux grandeurs d'entrée. Une structure multicouche dissymétrique est entièrement caractérisée quand on connaît trois fonctions de réponse  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$ , la fonction de réponse  $H_2$  est caractéristique de la dissymétrie de la structure et change de signe quand on permute le système vis-à-vis de la sollicitation.

Pour des sollicitations de type aléatoires stationnaires ou d'"énergie finie", la résistance thermique globale du système est égale au rapport des valeurs moyennes de la différence des températures et de la demi-somme des flux.

L'utilisation des fonctions de corrélation des grandeurs généralisées pour représenter les transferts thermiques dans les parois permet de généraliser les traitements en représentant les signaux indépendamment de leurs formes exactes mais uniquement en fonction de leurs contenus fréquentiels. Le calcul des fonctions de corrélation permet l'élimination des "bruits" superposés aux signaux et fournit ainsi un outil de traitement particulièrement bien adapté aux mesures in situ.

CHAPITRE II

**ANALYSE THERMODYNAMIQUE DES  
TRANSFERTS THERMIQUES EN REGIME VARIABLE**

## I. INTRODUCTION

Dans la partie précédente, nous avons établi les relations entre flux et température mesurés sur les surfaces limites d'une paroi homogène en régime variable. Nous avons montré l'intérêt de la représentation en modes de base qui permet de représenter les échanges avec le milieu extérieur sans avoir à faire d'hypothèse particulière quant aux conditions limites. Dans cette partie, nous développons une analyse thermodynamique de transferts thermiques montrant l'intérêt de l'analyse en modes de base, puisque  $\Delta \phi(t)$ , et  $\Delta \theta(t)$  déterminent les "forces thermodynamiques" représentatives du déséquilibre entre le système et le milieu extérieur.

L'analyse thermodynamique d'un système en évolution est fondée sur deux principes, la conservation de l'énergie et le bilan d'entropie en régime variable. L'objectif de cette partie est de montrer que le bilan d'entropie est un concept suffisamment abstrait et général pour modéliser dans les domaines temps ou fréquence des interactions entre un système et le milieu extérieur en régime variable. (37 à 40).

Des considérations semblables ont été appliquées à l'analyse des "pertes thermodynamiques" en régime permanent puisque dans ces conditions le bilan d'entropie se réduit à l'expression de la production d'entropie par conduction thermique. En régime permanent, la génération d'entropie par conduction thermique est minimale ; dans ce cas la modélisation des pertes thermodynamiques est utilisée pour optimiser les transferts thermiques dans les systèmes complexes. Le principe de production minimale d'entropie introduit un niveau de référence qui sera utilisé pour évaluer les pertes en régime variable.

Pour établir l'expression du bilan d'entropie, nous allons appliquer les équations de base de la thermodynamique des phénomènes irréversibles à la représentation des transferts thermiques. La formulation est développée de façon à introduire une base thermodynamique du traitement des flux et températures mesurés sur les faces extérieures du système.

## II. ETUDE THEORIQUE

### 2.1. Lois fondamentales de la thermodynamique des évolutions irréversibles

#### 2.1.1. Loi de conservation de l'énergie

Pour un système physique homogène, il est possible de définir une énergie interne  $U$  et une densité interne  $u$  telle que

$$U = M \cdot u \quad U \text{ en (Joule)} \quad u \text{ en (Joule/kg)}$$

$M$  = masse du système en Kg.

Lorsque les seuls échanges entre le système et le monde extérieur sont des échanges de chaleur et en considérant les travaux de dilatation très faibles vis-à-vis des quantités de chaleur échangées

$$dU = dQ$$

$dQ$  = quantité de chaleur échangée avec l'extérieur

On introduit pour représenter les échanges énergétiques la densité de flux thermique

$$\phi = \frac{dQ}{\Delta \cdot dt} \quad \text{en} \quad \frac{W}{m^2}$$

La densité de flux représente la quantité d'énergie échangée avec le milieu extérieur par unité de surface et de temps.

Le principe de conservation de l'énergie implique

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho u \, dv = \int_{\Delta} \phi \, \vec{n} \, d\Delta$$

$\rho$  est la masse volumique Kg/m<sup>3</sup>,  $n$  normale à la surface extérieure

Par application du théorème de Gauss, la divergence du flux peut être considérée comme le flux sortant par unité de volume :

$$\rho \frac{du}{dt} = - \operatorname{div} \phi \quad (\text{en notant le flux sortant positif})$$

Soit puisque  $\rho du : \rho c dT$

$$c \text{ étant la chaleur volumique } \rho c = \frac{\rho du}{dT}$$

on obtient la relation

$$\rho c \cdot \frac{dT}{dt} = - \operatorname{div} \phi$$

Les variables thermodynamiques qui interviennent localement dans le bilan d'énergie sont la divergence du flux thermique  $\phi(x, t)$  et la température absolue  $T(x, t)$ . Pour caractériser un système en évolution il est intéressant d'introduire la capacité thermique globale  $C$  définie par :

$$C = \int_V \rho c dV \quad (\text{J/K}) \quad (29)$$

et la variation de température moyenne  $\bar{dT}$  définie par :

$$\frac{dU}{dt} = \int_V \rho c \frac{dT}{dt} dV = C \frac{\bar{dT}}{dt}$$

Dans le cas particulier d'un milieu monodimensionnel échangeant de la chaleur à travers deux surfaces égales  $S$

$$\phi_1 = \int_S \phi_1 dS \quad \phi_2 = \int_S \phi_2 dS$$

et

$$\frac{dU}{dt} = \phi_1 - \phi_2 = \Delta \phi = C \frac{\bar{dT}}{dt} \quad (30)$$

La variation d'énergie interne globale ne dépend que de la variation de température moyenne du système, elle est indépendante du niveau de référence utilisé pour représenter les températures. On peut donc également utiliser une variable représentant les variations de températures par rapport à un niveau de référence  $T_0$  tel que l'on ait :

$$\begin{array}{lcl} \text{localement} & T(x,t) & = \theta(x,t) + T_0 \\ \text{globalement} & \bar{T}(t) & = \bar{\theta}(t) + T_0 \end{array}$$

L'équation précédente s'écrit  $\frac{dU}{dt} = C \frac{d\bar{\theta}}{dt}$

L'expression du bilan d'énergie montre que pour les transferts purement thermiques, l'intégrale de  $\Delta \phi$  est une "grandeur d'état" au sens thermodynamique du terme. Les variations de cette grandeur sont représentatives de l'évolution du système quel que soit le détail de la transformation.

$\Delta \phi$  représente la vitesse de variation de l'énergie interne, il apparaît que les évolutions purement antisymétriques introduites précédemment sont des transformations à énergie interne constante, par contre les évolutions symétriques sont des transformations à variation d'énergie interne imposée.

### 2.1.2. Echange d'entropie dans un système en évolution

De façon très générale, la variation d'entropie d'un système échangeant uniquement de la chaleur avec le milieu extérieur est la somme d'échanges réversibles à travers les surfaces externes du système et d'échanges irréversibles à l'intérieur du système.

L'échange de chaleur à travers la surface externe du système est un processus réversible provoquant une variation d'entropie  $\frac{deS}{dt}$

Par contre, l'échange de chaleur par conduction thermique à l'intérieur du système est un processus essentiellement irréversible provoquant une augmentation de l'entropie du système  $\frac{diS}{dt}$

De façon générale, nous aurons la superposition des deux variations.

Pour un système quelconque, nous aurons donc :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{diS}{dt} + \frac{deS}{dt} \quad \text{en W/K}$$

$\frac{dS}{dt}$  est la variation d'entropie du système par unité de temps.

## 2.2. REPRESENTATION DES ECHANGES AVEC LE MILIEU EXTERIEUR EN FONCTION DES FLUX ET TEMPERATURES DE SURFACES

Les échanges avec le milieu extérieur, représentés par le terme  $\frac{deS}{dt}$  dans l'équation précédente sont par définition réversibles.

Connaissant la valeur locale du flux d'entropie  $\phi/T$ , nous obtenons pour la variation correspondante d'entropie par unité de temps pour l'ensemble du système :

$$\frac{deS}{dt} = - \int_{\Delta} \frac{\phi}{T} d\Delta$$

Dans le cas particulier du milieu monodimensionnel :

$$\frac{deS}{dt} = \frac{\phi_1}{T_1} - \frac{\phi_2}{T_2}$$

En effectuant les changements de variables définis par :

$$\Sigma \left( \frac{1}{T} \right) = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \quad \Sigma \phi = \phi_1 + \phi_2$$

$$\Delta \left( \frac{1}{T} \right) = \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \quad \Delta \phi = \phi_1 - \phi_2$$

L'échange d'entropie avec le milieu extérieur s'exprime par la relation :

$$\frac{deS}{dt} = \frac{\Delta \phi}{2} \Sigma \left( \frac{1}{T} \right) - \frac{\Sigma \phi}{2} \Delta \left( \frac{1}{T} \right) \quad (31)$$

que l'on notera

$$\frac{deS}{dt} = \frac{d}{dt} (J_1 - J_2)$$

avec

$$J_1 = \int_{t_0}^t \frac{\Delta\phi}{2} \cdot \Sigma \left( \frac{1}{T} \right) dt \quad \text{et} \quad J_2 = \int_{t_0}^t \frac{\Sigma\phi}{2} \cdot \Delta \left( \frac{1}{T} \right) dt$$

$J_1$  est représentatif de l'entropie fournie par le milieu extérieur pour entretenir le processus de stockage de chaleur dans le système. Dans le cas d'une évolution purement antisymétrique, sans variation d'énergie interne  $J_1 = 0$ , puisque  $\bar{\theta} =$  constante et  $\Delta\phi(t) = 0$ .

Le terme  $J_2$  représente l'entropie fournie par les sources pour entretenir le processus de transfert de chaleur. Dans le cas particulier d'une évolution symétrique, on aura  $J_2 = 0$ , puisque cette fois  $\Delta\theta(t) = 0$ .

### 2.3. Augmentation d'entropie par conduction thermique en régime variable

La thermocinétique est fondée sur la loi de Fourier qui exprime la proportionnalité entre le flux thermique local et le gradient de température

$$\phi = - \lambda \text{grad } \theta$$

Cette loi d'origine expérimentale peut également être formulée en terme de production d'entropie : le produit de l'augmentation d'entropie par unité de temps par la température absolue est égal au produit du flux thermique par la force thermodynamique conjuguée

$$T \frac{dis}{dt} = \phi \cdot X$$

Dans un système en déséquilibre thermique, la force thermodynamique conjuguée du flux de chaleur est définie par la relation :

$$X = - \frac{\text{grad } T}{T}$$

Il en résulte pour l'augmentation d'entropie par conduction thermique

$$T \frac{diS}{dt} = - \phi \frac{\text{grad } T}{T}$$

Soit compte tenu de la loi de Fourier :

$$\frac{diS}{dt} = - \phi \frac{\text{grad } T}{T^2} = \lambda \frac{\text{grad}^2 T}{T^2} = \frac{\phi^2}{\lambda T^2} \quad (\text{W/KM}^3)$$

La production globale d'entropie pour un volume V quelconque s'écrira à partir de l'une quelconque de ces relations par intégration sur le volume du système :

$$\frac{diS}{dt} = - \int_V \frac{\phi \text{grad } T}{T^2} dV$$

En régime permanent, pour un système monodimensionnel le flux est uniforme et :

$$\frac{diS}{dt} = \phi \int_{T_1}^{T_2} - \frac{dT}{T^2}$$

La production globale d'entropie s'écrit alors :

$$\frac{diS}{dt} = \phi \left[ \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right] = \phi \frac{\Delta T}{T_1 T_2}$$

cette relation s'identifie avec la relation de la partie précédente calculée à partir des échanges avec les sources pour entretenir le régime continu

$$\frac{deS}{dt} = \frac{diS}{dt} = \phi \frac{\Delta T}{T_1 T_2} \quad (32)$$

Pour calculer la génération interne d'entropie par conduction thermique en régime variable dans un système monodimensionnel, nous pouvons introduire comme précédemment la moyenne spatiale instantanée du flux thermique

$$\bar{\phi}(t) = \frac{\Delta\theta(t)}{R}$$

Le flux thermique local est la superposition de la moyenne spatiale  $\bar{\phi}$  et des fluctuations locales  $\bar{\phi}(x,t)$

$$\phi(x,t) = \bar{\phi}(t) + \phi'(x,t)$$

$$\text{Compte tenu de cette définition} \quad \int_V \phi'(x,t) dv = 0$$

En remplaçant dans la relation de définition on obtient pour l'augmentation d'entropie :

$$\frac{diS}{dt} = \bar{\phi}(t) \cdot \Delta\left(\frac{1}{T(t)}\right) + \int_0^l \frac{\phi'^2(x,t)}{\lambda T^2(x,t)} dx + \int_0^l \frac{\bar{\phi}(t) \cdot \phi'(x,t)}{\lambda T^2(x,t)} dx \quad (33)$$

L'augmentation d'entropie pour une transformation de durée finie s'obtient en intégrant par rapport au temps :

$$\Delta iS = D_1 + D_2 + D_{12}$$

avec

$$D_1 = \int_{t_0}^{t_1} \bar{\phi}(t) \cdot \Delta\left(\frac{1}{T(t)}\right) dt$$

$$D_2 = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{\ell} \frac{\phi'(x,t)^2}{\lambda T^2(x,t)} dx dt \quad (34)$$

$$D_{12} = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{\ell} \frac{\bar{\phi}(t) \cdot \phi'(x,t)}{\lambda T^2(x,t)} dx dt$$

Le premier terme  $D_1$  est calculé en remplaçant la valeur réelle du flux par sa moyenne spatiale. Cette quantité est représentative de la dissipation dans le système supposé à chaque instant en régime permanent.

Le second terme  $D_2$  représente l'augmentation d'entropie due aux fluctuations spatiales  $\phi'(x,t)$  du flux superposées au régime permanent. En chaque point du système, il y a superposition des flux  $\bar{\phi}$  et  $\phi'$  mais l'augmentation d'entropie localement proportionnelle à  $(\bar{\phi} + \phi')^2$  ne vérifie pas ce principe de superposition.

Le troisième terme  $D_{12}$  est un terme "croisé" représentatif de l'interaction entre le régime permanent et le régime instationnaire.

Les termes  $D_2$  et  $D_{12}$  résultent des régimes transitoires. Dans le cas particulier d'un régime continu, ces deux termes seront identiquement nuls.

La création d'entropie par conduction thermique s'exprimant par la relation

$$\frac{diS}{dt} = \int_V \left( \frac{\bar{\phi} + \phi'}{\lambda T^2} \right)^2 dV$$

il apparaît clairement que cette quantité prend une valeur minimale quand  $\phi'$  sera nul, c'est-à-dire en régime continu.

## 2.4. Bilan d'entropie en régime variable

### 2.4.1. Variation d'entropie en régime variable

Lorsque l'évolution d'un système résulte d'échanges réversibles de chaleur à travers ses surfaces extrêmes, le travail des forces de déséquilibre est lié à la variation d'entropie par la relation bien connue :

$$dU = dQ = T dS$$

$dS$  est la variation d'entropie et  $T$  la température absolue.

Cette relation n'est valable que pour des transformations réversibles. Nous allons tenter d'exprimer dans cette partie le bilan d'entropie d'un système en déséquilibre en régime variable. Pour définir l'entropie du système, on le décompose en cellules élémentaires dont l'entropie peut être calculée en fonction de l'état thermique local. La valeur globale de l'entropie s'obtient par la sommation des entropies de chaque cellule du système. L'hypothèse de base est que chaque cellule est en "quasi-équilibre" avec son environnement de sorte que son entropie peut être définie comme si elle était en équilibre, la légitimité de cette démarche a été étudiée par Prigogine (38). Soit donc un élément de volume unité et  $S$  son entropie, nous obtenons pour la variation temporelle :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\rho c}{T} \frac{dT}{dt} \quad \left| \frac{W}{K m^3} \right|$$

L'entropie est une fonction du temps dont la variation est obtenue par intégration entre des temps  $t_0$  et  $t_1$  de cette quantité.

$$\Delta S = S(t_1) - S(t_0) = \rho c \text{Log} \frac{T(x,t)}{T(x,t_0)} = \rho c \text{Log} \frac{(\bar{T}(t_1) + \theta'(x,t_1))}{(\bar{T}(t_0) + \theta'(x,t_0))}$$

$\bar{T}(t_1)$  et  $\bar{T}(t_0)$  sont les températures moyennes du système aux instants  $t_1$  et  $t_0$ .  $\theta'(x,t_1)$  et  $\theta'(x,t_0)$  sont les variations spatiales de la température locale autour des valeurs moyennes  $\bar{T}(t_1)$  et  $\bar{T}(t_0)$  aux instants  $t_1$  et  $t_0$ .

Pour un volume  $V$  la variation d'entropie s'écrit :

$$\Delta S = \int_V \rho c \text{Log} \frac{T(x,t)}{T(x,t_0)} dV = \int_V \rho c \text{Log} \frac{\bar{T}(t)}{\bar{T}(t_0)} dV + \int_V \rho c \left\{ \text{Log} \left( 1 + \frac{\theta'(x,t)}{\bar{T}(t)} \right) - \text{Log} \left( 1 + \frac{\theta'(x,t_0)}{\bar{T}(t_0)} \right) \right\} dV$$

En développant le second terme de cette expression au deuxième ordre et en remarquant que par définition la moyenne spatiale de  $\theta'(x,t)$  est nulle on obtient :

$$\Delta S = C \text{Log} \frac{\bar{T}(t)}{\bar{T}(t_0)} - \int_V \frac{\rho c}{2} \left( \frac{\theta'^2(x,t)}{\bar{T}^2(t)} - \frac{\theta'^2(x,t_0)}{\bar{T}^2(t_0)} \right) dV \quad (35)$$

on notera par convention :

$$\Delta S = \Delta S_1 - \Delta S_2$$

L'analyse de cette variation montre que toute modification du champ des températures est associée à une variation d'entropie réversible notée  $\Delta S_2$ . Il faut remarquer que ce terme représente une entropie réversible puisque toute variation est restituée avec un signe opposé lorsque le système revient à son état initial. Notons que cette entropie n'est différente de zéro que lorsque le champ de température n'est pas uniforme.

Le premier terme  $\Delta S_1$  représente les variations réversibles d'entropie liées aux variations de température moyenne. Dans le cas particulier d'une transformation réalisée entre deux états d'équilibre, les températures moyennes de l'état initial et de l'état final sont égales aux températures de ces deux états et nous obtenons pour  $\Delta S_1$  l'expression bien connue

$$\Delta S_1 = C \text{ Log } \frac{T_f}{T_i}$$

$T_f$  = température finale

$T_i$  = température initiale

Il faut remarquer que par définition  $\Delta S_1$  s'exprime en fonction de la température moyenne instantanée. Cette quantité est donc définie en régime instationnaire. Compte tenu de la relation de définition  $\Delta S_1$  peut également s'exprimer en fonction de la quantité  $\Delta\phi(t)$  supposée connue par mesure sur les surfaces extrêmes du système :

$$\Delta S_1 = C \text{ Log } \frac{\bar{T}(t)}{\bar{T}(t_0)} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\Delta\phi(t)}{\bar{T}(t)} dt$$

#### 2.4.2. Expression générale de bilan d'entropie

En utilisant l'expression de la variation d'entropie, le bilan d'entropie s'écrit sous la forme :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS_1}{dt} - \frac{dS_2}{dt} = \frac{deS}{dt} + \frac{diS}{dt}$$

Il en résulte pour la variation temporelle de la production interne :

$$\frac{diS}{dt} = \Delta\phi \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{T} \right) + \frac{\Sigma\phi}{2} \Delta \left( \frac{1}{T} \right) - \frac{dS_2}{dt}$$

soit

$$\boxed{\frac{diS}{dt} = \Delta\phi X_s + \Sigma\phi X_t - \frac{dS_2}{dt}} \quad (36)$$

$$\text{avec } X_s = \frac{1}{T} - \frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{T}$$

$$X_t = \frac{1}{2} \Delta \left( \frac{1}{T} \right)$$

$X_s$  et  $X_t$  sont des "forces de déséquilibre" entre le système et le milieu extérieur et  $\frac{dS_2}{dt}$  une variation réversible d'entropie nulle pour les processus quasi-stationnaires ou d'"énergie finie". Compte tenu de cette relation, un transfert thermique peut être considéré comme la superposition de deux processus élémentaires bien définis au niveau de la dissipation, l'un est lié à la variation d'énergie interne (ou du contenu thermique) caractérisée par la différence des flux  $\Delta\phi$  (composante symétrique), l'autre est lié au transfert thermique pur (sans stockage) caractérisé par la force généralisée  $\Delta \left( \frac{1}{T} \right)$ .

Il en résulte que la formulation thermodynamique des phénomènes de transfert conduit à considérer uniquement deux forces thermodynamiques bien définies  $X_s$  et  $X_t$  et deux paramètres généralisés accessibles à la mesure  $\Delta\phi$  et  $\Sigma\phi$ . Le taux d'augmentation d'entropie généré dans le processus de stockage peut être séparé de l'entropie produite par le transfert pur de chaleur à travers le système.

Compte tenu de la forme des expressions précédentes, il apparaît que la formulation thermodynamique des transferts thermiques peut être développée uniquement en fonction des niveaux de température et des variations de flux mesurées sur les faces extrêmes du système. Etant donné l'histoire des températures  $\theta_1(t)$  et  $\theta_2(t)$  mesurées sur les surfaces limites d'une paroi homogène, il suffit pour rendre compte en régime variable des échanges d'entropie avec le monde extérieur, de mesurer ou de

simuler les flux  $\phi_1(t)$  et  $\phi_2(t)$ .

### 1) Régimes continus

Un processus est par définition continu si les forces thermodynamiques  $X_s$  et  $X_t$  ainsi que les grandeurs conjuguées  $\Delta\phi$ ,  $\Sigma\phi$  ne dépendent pas du temps. On pourra donc définir pour chacune des évolutions élémentaires (symétrique et antisymétrique) un régime de production minimale d'entropie.

#### Mode symétrique ( $\Delta\theta = 0$ )

Pour une valeur constante de  $\Delta\phi$ , le mode symétrique continu est caractérisé (chapitre 1, courbe<sup>10</sup>) par les relations :

$$\begin{aligned}\Sigma\theta(t) - 2 \cdot \bar{\theta}(t) &= 2 \cdot R_s \cdot \Delta\phi(t) \\ \Delta\theta(t) &= 0, \Sigma\phi(t) = 0, \Delta S_2 = 0\end{aligned}$$

Le champ des écarts de températures  $\theta(x,t) - \bar{\theta}(t)$  est constant et la production d'entropie s'exprime par :

$$\frac{diS}{dt} = \Delta\phi \cdot X_s = \Delta\phi \left| \frac{1}{T} - \frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{T} \right| = \Delta\phi \left| \frac{1}{T} - \frac{1}{T} \right|$$

avec  $\bar{T} = T_0 + \bar{\theta}$

$$T = T_0 + \theta_s \quad (\theta_s = \text{température de surface})$$

et 
$$\Delta\phi = \frac{\theta_s - \bar{\theta}}{R_s}$$

#### Mode antisymétrique ( $\Delta\phi = 0$ )

En régime continu de transfert pur  $\Sigma\phi = 2\phi_1$  est une constante ainsi que la force de déséquilibre  $X_t$ . Il n'y a pas de modification du champ interne de température et  $\frac{dS_2}{dt} = 0$ . Il en résulte pour l'augmentation d'entropie dans le système :

$$\frac{diS}{dt} = \Sigma\phi \cdot X_t$$

avec

$$\Sigma \phi = \frac{2 \Delta T}{R}$$

## 2) Régimes quasi-stationnaires

En régime variable les forces de déséquilibre et les variables généralisées sont des fonctions du temps. Pour analyser la dissipation interne également fonction du temps, nous allons utiliser les méthodes de la théorie du signal. Dans le cas particulier des régimes quasi-stationnaires (ou régimes basse fréquence) les relations de proportionnalités entre forces de déséquilibre et grandeurs généralisées sont vérifiées à chaque instant.

Pour un signal d'entrée de type déterministe, la quantité  $\frac{dS_2}{dt}$  est différente de 0 mais son bilan sur une évolution cyclique sera nulle puisque ce terme est représentatif d'une entropie réversible. De la même façon, pour un signal aléatoire stationnaire, on pourra admettre que  $\Delta S_2 = 0 \forall t$ .

### Régime quasi-stationnaire de stockage pur

Dans ce cas particulier, l'expression générale précédente se réduit à  $\frac{diS}{dt} = \Delta \phi(t) \cdot X_S(t)$  puisque  $\frac{dS_2}{dt} = 0$

$$\text{avec } \Delta \phi(t) = \frac{\theta_S - \bar{\theta}}{R_S}$$

Cette équation décrit l'interaction entre le système et le monde extérieur en régime quasi-stationnaire, indépendamment de la forme des signaux. Il est intéressant d'introduire le formalisme de la théorie du signal et de considérer la quantité  $\Delta iS$  entre les temps  $-t_1$ ,  $+t_1$ ,

$$\Delta iS = \int_{-t_1}^{t_1} \Delta \phi(t) \cdot X_S(t) dt$$

comme la valeur origine de la fonction d'intercorrélation :

$$R_{\Delta \phi, X_S(\tau)} = \int_{-t_1}^{t_1} \Delta \phi(t) X_S(t-\tau) dt = \int_{-t_1}^{t_1} \left( \frac{\theta_S(t) - \bar{\theta}(t)}{R_S} \right) X_S(t-\tau) dt$$

Cette fonction d'intercorrélation est une "représentation temps" de l'entropie dissipée pour entretenir le processus de stockage pur en régime quasi-stationnaire.

### Régime quasi-stationnaire de transfert pur

Pour ce type d'évolution la création d'entropie entre des temps  $-t_1, t_1$  s'écrit :

$$\Delta iS = \int_{-t_1}^{t_1} \Sigma \phi(t) \cdot X_t(t) dt = \int_{-t_1}^{t_1} \frac{2 \Delta \theta(t)}{R} \cdot X_t(t) dt$$

Comme précédemment, on peut considérer la quantité  $\Delta iS$  comme la valeur origine de la fonction d'intercorrélation :

$$R_{\Sigma \phi, X_t}(\tau) = \int_{-t_1}^{t_1} \Sigma \phi(t) \cdot X_t(t-\tau) dt = \int_{-t_1}^{t_1} \frac{2 \Delta \theta(t)}{R} \cdot X_t(t-\tau) dt$$

Cette fonction d'intercorrélation est une représentation temps de l'entropie dissipée pour entretenir le processus de transfert pur en régime quasi-stationnaire .

Les fonctions d'intercorrélation entre grandeurs généralisées contiennent la même information que l'interspectre entre ces deux grandeurs. Il apparaît clairement que toutes les sollicitations ayant le même contenu spectral provoquent la même dissipation interne. Dans la mesure où le régime est quasi-stationnaire, la dissipation interne est parfaitement déterminée quand on connaît les variations temporelles des quantités généralisées et les résistances  $R_S$  et  $R$  caractéristiques des processus de stockage et de transfert.

### 3) Régimes instationnaires

Pour simplifier la formulation thermodynamique des transferts thermiques en régime instationnaire, nous allons considérer comme dans les paragraphes précédents les deux évolutions de base (symétrique, antisymétrique) séparément.

### Transfert pur

Le bilan d'entropie s'écrit :

$$\frac{dS}{dt} = \Sigma \phi (t) \cdot X_t (t) - \frac{dS_2}{dt}$$

Comme précédemment, la variation entre  $-t_1$  et  $t_1$  de l'entropie

$\int_{-t_1}^{t_1} \Sigma \phi (t) \cdot X_t dt$  peut être considérée comme la valeur origine de la fonction d'intercorrélation  $R_{\Sigma \phi, X_t} (\tau)$ . Il apparaît en régime variable que la fonction de référence  $R_{\Delta \theta, X_t}$  définie en régime quasi-stationnaire est liée à la fonction d'intercorrélation par la relation :

$$R_{\Sigma \phi, X_t} = \frac{2}{R} \cdot h \otimes R_{\Delta \theta, X_t} \quad (37)$$

Cette fonction d'intercorrélation est une représentation dans le temps de l'entropie dissipée et de l'entropie potentielle  $\Delta S_2$  résultant des modifications du champ des températures. Cette fonction est liée par un produit de convolution à la fonction d'intercorrélation de référence représentative de la production minimale d'entropie en régime quasi-stationnaire.

L'écart à l'origine des deux fonctions d'intercorrélation

$$R_{\Sigma \phi, X_t} (0) - \frac{2}{R} R_{\Delta \theta, X_t} (0)$$

représente l'entropie dissipée pour entretenir les régimes transitoires. Cette fonction est à minimiser lorsque l'on désire réaliser des évolutions à dissipation minimale

### Stockage pur

De la même façon, pour un stockage pur, la production d'entropie correspondant à une évolution symétrique quelconque est liée à la production minimale d'entropie en régime quasi-stationnaire par une relation de convolution

$$R_{\Delta \phi, X_t} = h_s \otimes R \left( \frac{\theta_s - \bar{\theta}}{R_s} \right) \cdot X_s$$

ou inversement :

$$R_{\left(\frac{\theta_s - \bar{\theta}}{R_s}\right), X_s} = h'_s \otimes R_{\Delta\phi, X_s} \quad (38)$$

avec

$$h'_s = \mathcal{L}^{-1} \left( \left( \frac{\delta H(P)}{PC} - \frac{1}{R_s PC} \right) \right)$$

### Cas général

Pour une évolution quelconque on peut écrire en utilisant la propriété de linéarité des fonctions de corrélation :

$$R_{\Sigma\phi, X_t} + R_{\Delta\phi, X_s} = h \otimes \frac{R_{2\Delta\theta}}{R}, X_t + h_s \otimes \left( \frac{R_{\theta_s - \bar{\theta}}}{R_s} \right), X_s \quad (39)$$

### 2.4.3. Généralisation aux systèmes multicouches

Nous avons montré au paragraphe précédent que la variation d'entropie pour un système monodimensionnel résultait de deux contributions réversibles, l'une uniquement liée aux variations de température moyenne et l'autre résultant de la modification du champ des températures internes.

$$\Delta S = \Delta S_1 - \Delta S_2$$

Pour un système multicouche, nous aurons :

$$\Delta S = (\Delta S_1 - \Delta S_2)_1 \dots + (\Delta S_1 - \Delta S_2)_i + \dots + (\Delta S_1 - \Delta S_2)_n$$

avec

$$(\Delta S_1)_i = C_i \text{ Log } \frac{\overline{T_i(t)}}{\overline{T_i(t_0)}}$$

$$(\Delta S_2)_i = \frac{\rho_i C_i}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{\theta_i^2(x, t_1)}{\bar{T}_i^2(t_1)} - \frac{\theta_i^2(x, t_0)}{\bar{T}_i^2(t_0)} \right| dt$$

Pour généraliser l'analyse précédente aux systèmes multicouches, on peut définir une température moyenne globale :

$$\bar{T} = \bar{T}_0 + \int_{t_0}^t \frac{\Delta\phi}{(C_1 + C_2 + \dots + C_n)} dt$$

avec

$$\bar{T}_0 = \frac{C_1 \bar{T}_{01} + \dots + C_n \bar{T}_{0n}}{\sum C_i}$$

A cette température moyenne est associée la variation réversible d'entropie

$$\Delta S_{lg} = \sum C_i \text{Log} \frac{\bar{T}(t)}{\bar{T}(t_0)}$$

La variation d'entropie est alors définie par la relation :

$$\Delta S = \Delta S_{lg} + \sum (\Delta S_2)_i + \Delta E$$

Le nouveau terme  $\Delta E$  est une entropie réversible résultant des écarts entre les températures moyennes des différentes couches et la température moyenne globale.

$$\Delta E = \sum_1^n C_i \left| \left( \frac{\Delta T_i}{\bar{T}} - \frac{\Delta T_i^2}{2 \bar{T}^2} \right) - \left( \frac{\Delta T_{0i}}{\bar{T}_0} - \frac{\Delta T_{0i}^2}{2 \bar{T}_0^2} \right) \right| \quad (40)$$

$$\text{avec } \Delta T_i = \bar{T}_i - \bar{T}$$

Pour un système multicouche le bilan d'entropie s'écrira :

$$\Delta_i S = \int_{t_0}^{t_1} \Delta\phi \left| \frac{1}{\bar{T}} - \frac{1}{2} \sum \left( \frac{1}{\bar{T}} \right) \right| dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sum\phi}{2} \cdot \Delta \left( \frac{1}{\bar{T}} \right) dt + \Delta E - \sum \Delta S_2$$

ou

$$\Delta_i S = \int_{t_0}^{t_1} \Delta\phi \cdot X_s dt + \int_{t_0}^{t_1} \Delta\phi \cdot X_t dt + \Delta E - \sum \Delta S_2 \quad (41)$$

avec

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_n \quad \sum \left( \frac{1}{\bar{T}} \right) = \frac{1}{\bar{T}_1} + \frac{1}{\bar{T}_n}$$

$$\sum\phi = \phi_1 + \phi_n \quad \Delta \left( \frac{1}{\bar{T}} \right) = \frac{1}{\bar{T}_1} - \frac{1}{\bar{T}_n}$$

**Remarque :**

- Pour une évolution cyclique :

$$\Delta_i S = \int \Delta \phi X_s dt + \int \Sigma \phi X_t dt$$

- Une paroi monodimensionnelle soumise à des conditions limites de Fourier est assimilable à un système trois couches, les deux couches extrêmes étant alors des résistances pures ( $C_1 = C_3 = 0$ ). Il en résulte  $\Delta E = 0$  et le bilan d'entropie s'écrit comme dans une paroi homogène

$$\frac{diS}{dt} = \Delta \phi X_s + \Sigma \phi X_t - \frac{dS_2}{dt}$$

les forces  $X_s$  et  $X_t$  étant relatives aux températures extrêmes  $T_1$  et  $T_4$ .

### III) SIMULATION DES TRANSFERTS THERMIQUES ET DE LA DISSIPATION INTERNE DANS UNE PAROI HOMOGENE

#### 3.1. Analyse par simulation du bilan d'entropie en "régime transitoire"

##### 3.1.1. Introduction, méthode de calcul

Dans la partie théorique précédente, nous avons établi l'expression générale du bilan d'entropie. Ce bilan comporte des termes qui ne dépendent que des flux et températures mesurées sur les surfaces extérieures du système ( $\Delta s_1, J_1, J_2$ ). Elle fait également intervenir d'autres termes représentatifs de l'augmentation interne d'entropie qui ne peuvent être calculés que si l'on connaît le détail du champ de température et le flux à l'intérieur du système. La vérification des résultats précédents ne peut être développée que pour des transformations particulières et nécessite la résolution de l'équation de Fourier compte tenu des conditions limites de la transformation. Pour vérifier et illustrer ces résultats, nous avons analysé les échanges d'entropie et la dissipation interne dans une paroi soumise sur ses faces extérieures à des sollicitations représentées par des fonctions transitoires du temps du type "créneau".

Par raison de simplicité, nous avons simulé les champs de température et de flux en chaque point d'une plaque de plexiglass. Ce matériau a l'avantage d'être

parfaitement connu du point de vue de ses caractéristiques thermophysiques ( $\lambda = 0,19 \text{ W/m.k}$ ,  $\rho = 1150 \text{ kg/m}^3$ ,  $C = 1420 \text{ J/Kg}$ ). L'épaisseur sera prise égale à  $5.10^{-3} \text{ m}$

La solution de l'équation de Fourier correspondant à des variations de température imposées en échelons sur les faces externes d'une paroi a été détaillée dans le chapitre I. Cette solution peut être utilisée pour représenter le champ de température et le flux local pour chaque sollicitation type :

- type 1 : variation en "créneau" de la différence de température  $\Delta\theta$  à température moyenne constante  $\Delta\phi(t) = 0$  (transfert pur)
- type 2 : variation en "créneau" de la somme des températures avec un gradient thermique nul  $\Delta\theta = 0$  (stockage pur)
- type 3 : établissement d'un régime permanent avec variations simultanées de la température moyenne et de la différence des températures et retour à l'état initial.

Pour chaque transformation, les températures de surfaces sont supposées connues et les champs de flux et de température sont calculés à partir des réponses à des échelons (en appliquant le principe de superposition).

Si  $t_f$  représente la durée du "créneau", pour  $t > t_f$  on aura :

$$T(x,t) = T_0 + \theta(x,t) - \theta(x,t-t_f)$$

et

$$\phi(x,t) = \phi(x,t) - \phi(x,t-t_f)$$

Les réponses en flux et température définies à chaque point du système à une sollicitation échelon sont données par les relations suivantes :

$$T(x,t) = \frac{T_2 + T_1}{2} + \frac{x}{e} \frac{T_1 - T_2}{2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(T_2 - T_0) \sin \frac{K\pi}{2} (1 - \frac{x}{e}) + (T_1 - T_0) \sin \frac{K\pi}{2} (1 + \frac{x}{e})}{k \pi \cos k\pi} \cdot \text{Exp} \left( -\frac{\alpha k^2 \pi^2 t}{4e^2} \right)$$

$$\bar{\phi}(x,t) = \frac{\lambda S}{e} \frac{T_1 - T_2}{2} - \frac{\lambda S}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(T_2 - T_0) \cos \frac{K\pi}{2} (1 - \frac{x}{e}) - (T_1 - T_0) \cos \frac{K\pi}{2} (1 + \frac{x}{e})}{\cos K\pi} \cdot \text{Exp} \left( \frac{-a k^2 \pi^2}{4 e^2} t \right)$$

- où  $T_0$  = température initiale (et finale)  
 $T_1$  = température de la face 1 pour  $0 < t < t_f$   
 $T_2$  = température de la face 2 pour  $0 < t < t_f$   
 $e$  = demi-épaisseur de la paroi  
 $a$  = diffusivité thermique  
 $x$  = abscisse du point considéré

Pour les faibles valeurs du temps, la solution précédente ne converge vers la valeur exacte que si l'on prend en compte un nombre important de termes dans le développement en série. Pour ces faibles valeurs du temps, le milieu peut être considéré comme "semi-infini" et pour une variation en échelon de température de surface le champ de température interne est décrit par la relation (24) :

$$T(x,t) = T_0 + \Delta T \left( 1 - \text{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{at}} \right) \right)$$

$\Delta T$  = amplitude de l'échelon de température superficielle.

Il en résulte pour l'équation du flux local :

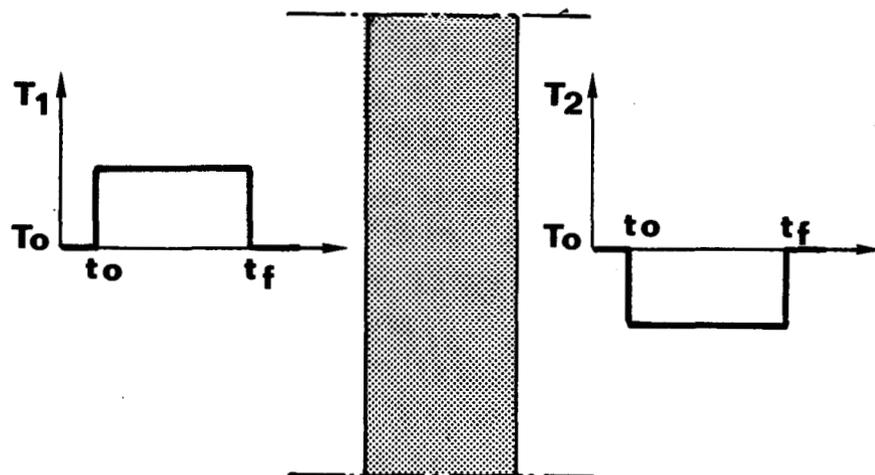
$$\phi(x,t) = \Delta T \sqrt{\frac{\lambda \rho c}{\pi t}} \exp - \left( \frac{x^2}{2\sqrt{at}} \right)$$

Pour les faibles valeurs du temps, l'utilisation de cette solution analytique a l'avantage de diminuer considérablement le temps de calcul. En pratique, nous avons utilisé cette solution pour  $t \leq 5.10^{-2} \tau$ .

Les sollicitations des types 1 et 2 sont respectivement antisymétrique et symétrique par rapport au centre du système. Il est donc possible de limiter la simulation à une demi-épaisseur  $0 < x < \frac{e}{2}$ .

Pour décrire les champs de température et de flux avec précision, l'échantillon a été découpé en 80 tranches pendant les premières secondes, puis en 40 tranches au-delà. De la même façon, le pas de calcul est variable entre  $4 \cdot 10^{-4}$  secondes au début de l'évolution à 0,2 secondes au voisinage du régime stationnaire. Les intégrations ont été effectuées suivant la méthode de Simpson.

### 3.1.2. Bilan d'entropie dans une transformation sans variation de température moyenne



Les variations de température imposées sur les surfaces sont :

$$\begin{aligned}
 T_1 = T_2 &= 0 && \text{pour } t < t_0 \\
 T_1 = T_0 &+ \frac{\Delta\theta}{2} \\
 T_2 = T_0 &- \frac{\Delta\theta}{2} && \text{pour } t_0 < t < t_f \\
 T_1 = T_2 &= T_0 && \text{pour } t > t_f
 \end{aligned}$$

Le système étant symétrique, le flux entrant pour la face 1 prend une valeur égale et opposée au flux sortant par la face 2. Il n'y a aucune variation d'énergie interne au cours de l'évolution et la température moyenne reste constante pendant toute la transformation

$$\bar{\theta}(t) = \theta_0 \quad \Delta\phi(t) = 0$$

Connaissant les valeurs locales du flux  $\phi(x,t) = \bar{\phi} + \phi'(x,t)$  et de la température absolue  $T(x,t) = T_0 + \theta(x,t)$ , nous avons simulé à chaque instant :

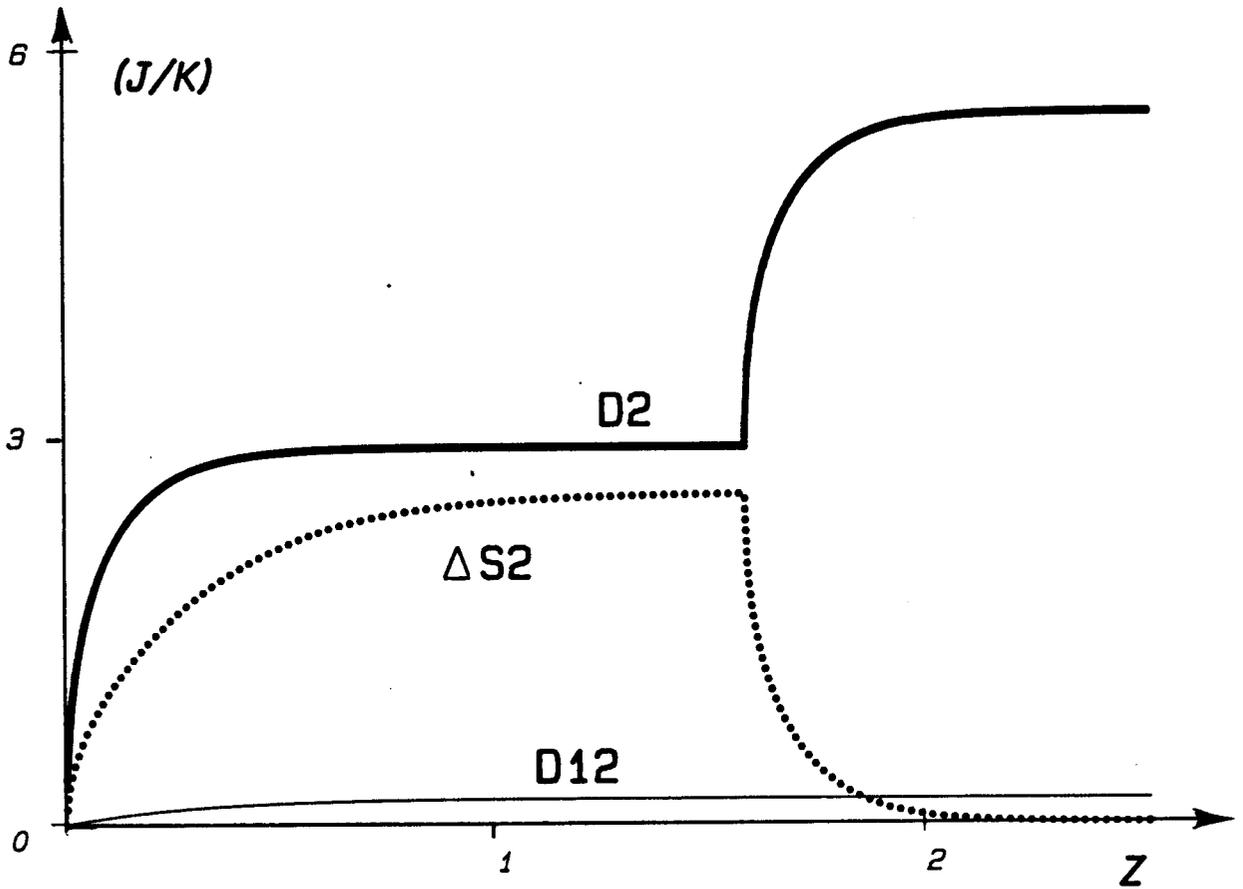
- l'entropie du champ des écarts de température  $\Delta S_2$
- l'augmentation d'entropie  $D_2$  résultant en régime transitoire des écarts entre le flux local et la valeur moyenne  $\bar{\phi}$
- l'entropie résultant du couplage entre les flux  $\bar{\phi}$  et  $\phi'$  notée  $D_{12}$ .

Ces résultats sont représentés figure 22 pour les conditions  $T_0 = 300^\circ\text{K}$  et  $\Delta\theta/2 = 100^\circ\text{K}$ .

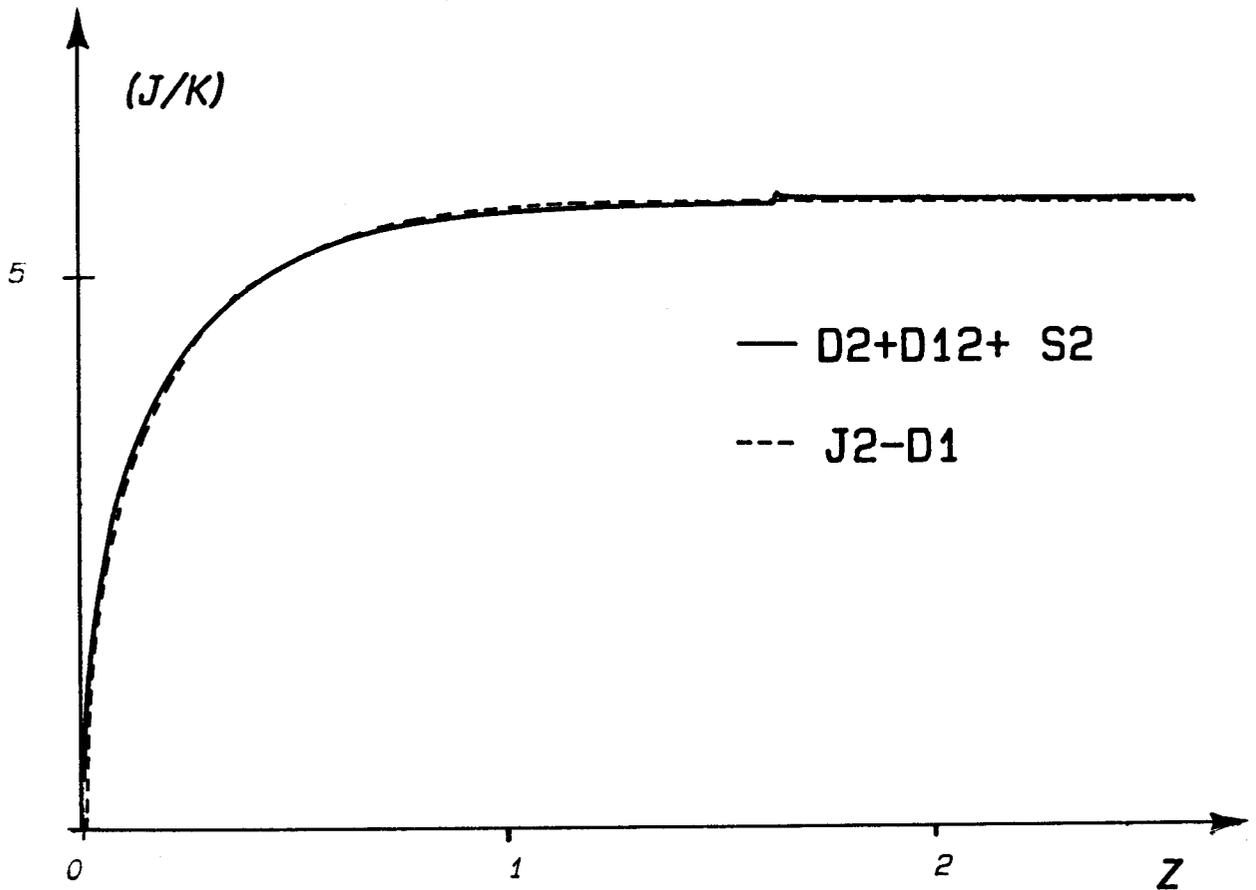
L'examen des courbes représentatives de l'établissement du champ de température montre que les quantités  $D_2$  et  $\Delta S_2$  ne varient de façon significative qu'en régime transitoire et tendent vers des valeurs constantes pour des durées supérieures à  $\tau = RC/\pi^2$ .

Dans la phase de retour à l'état initial, le système est en évolution libre et la dissipation interne par conduction thermique est compensée par la variation de l'entropie du champ des écarts de température interne. L'examen des courbes montre que les quantités  $D_2$  et  $\Delta S_2$  ont même variation en fonction du temps et que leur somme est liée à la loi de conservation  $\Delta(D_2 + \Delta S_2) = 0$  quel que soit l'instant considéré.

Les quantités représentées figure 22 caractérisent l'évolution interne du système, ce sont des fonctions de transformation qui dépendent du détail de l'évolution. Ces variations de l'état thermodynamique du système sont entretenues par des échanges d'entropie avec le milieu extérieur. Pour représenter le bilan des échanges avec le milieu extérieur, nous avons calculé et représenté figure 23 l'entropie échangée. Pour faciliter la comparaison des échanges avec le milieu extérieur et les termes précédents, nous avons représenté les quantités  $J_2 - D_1$  et  $\Delta S_2 + D_2 + D_{12}$ . Ces courbes étant confondues, il apparaît que le bilan d'entropie est vérifié à chaque



- FIGURE 22 -



- FIGURE 23 -

instant du régime transitoire considéré soit :

$$J_2 = D_1 + \Delta S_2 + D_2 + D_{12}$$

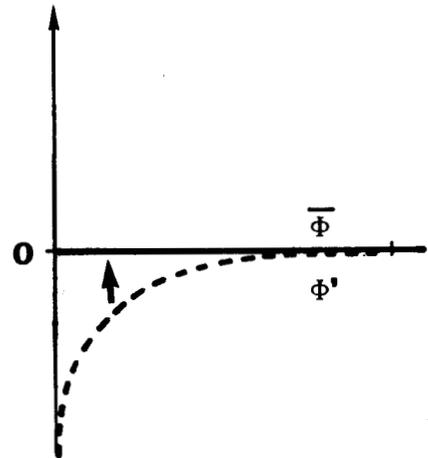
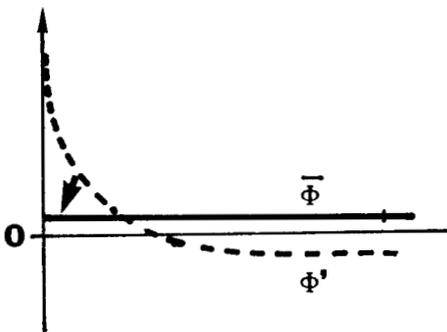
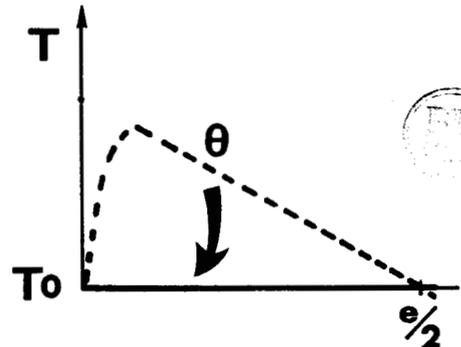
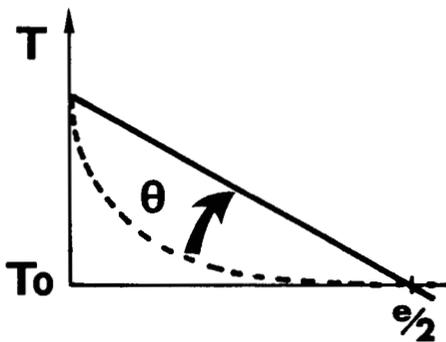
Dans ces conditions, le bilan d'entropie s'écrit :

$$\int_{t_0}^t \frac{\Sigma \phi \Delta T}{2 T_1 T_2} dt - \int_{t_0}^t \frac{\bar{\phi} \Delta T}{T_1 T_2} dt = \int_V \rho c \left( \frac{\theta^2}{\bar{T}^2(t)} \right) dv +$$

$$+ \int_{t_0}^t \int_V \frac{\phi'^2}{\lambda T^2} dv dt + \int_{t_0}^t \int_V \frac{\phi \phi'}{\lambda T^2} dv dt$$

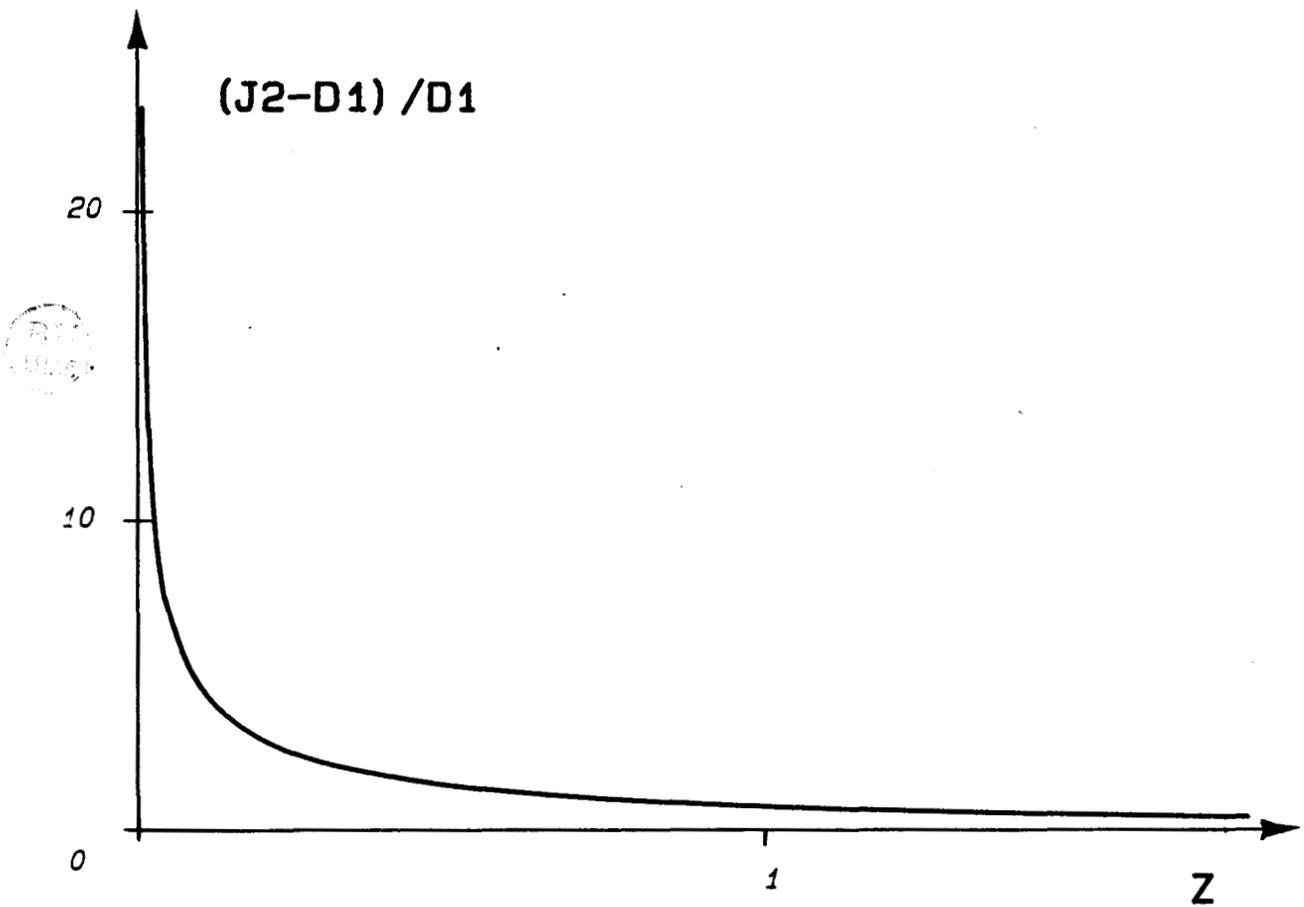
soit  $J_2 - D_1 = S_2 + D_2 + D_{12}$

L'évolution de température est décrite par le champ des variations spatiales  $\theta(x,t)$  autour de la valeur moyenne  $\theta_0$ . De la même façon, le flux local est décrit comme la superposition d'un flux moyen  $\bar{\phi}(t)$  et d'une variation spatiale  $\phi'(x,t)$  (figure 24)



PHASE D'ETABLISSEMENT DU TRANSFERT

PHASE DE RETOUR A L'EQUILIBRE



- FIGURE 25 -

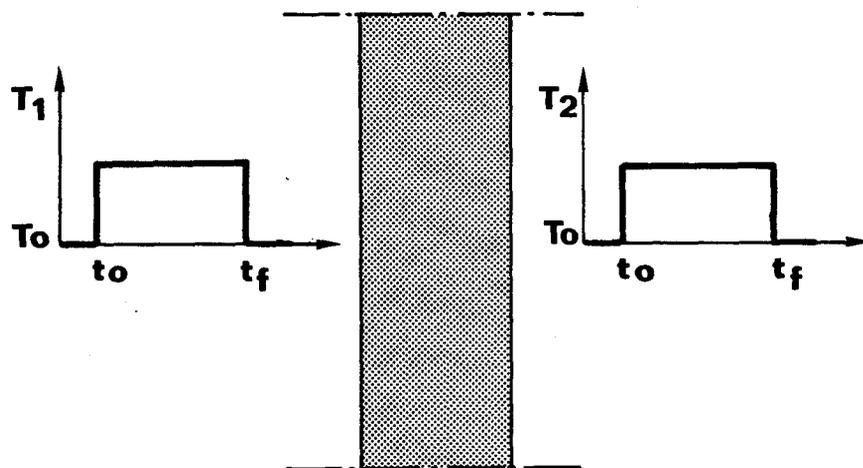
PRODUCTION D'ENTROPIE DES REGIMES TRANSITOIRES

La figure 25 représente l'évolution de la quantité  $(J_2 - D_1)/D_1$  en fonction du temps. Ce terme est représentatif de l'entropie créée pour entretenir les régimes transitoires rapportée à l'entropie du système supposé en régime permanent. Cette quantité n'est grande que pour des évolutions de faible durée par rapport à la constante de temps  $\tau$ .

### 3.1.3. Bilan d'entropie dans un processus de "stockage pur" sans transfert de chaleur à travers le système

Pour une telle transformation :

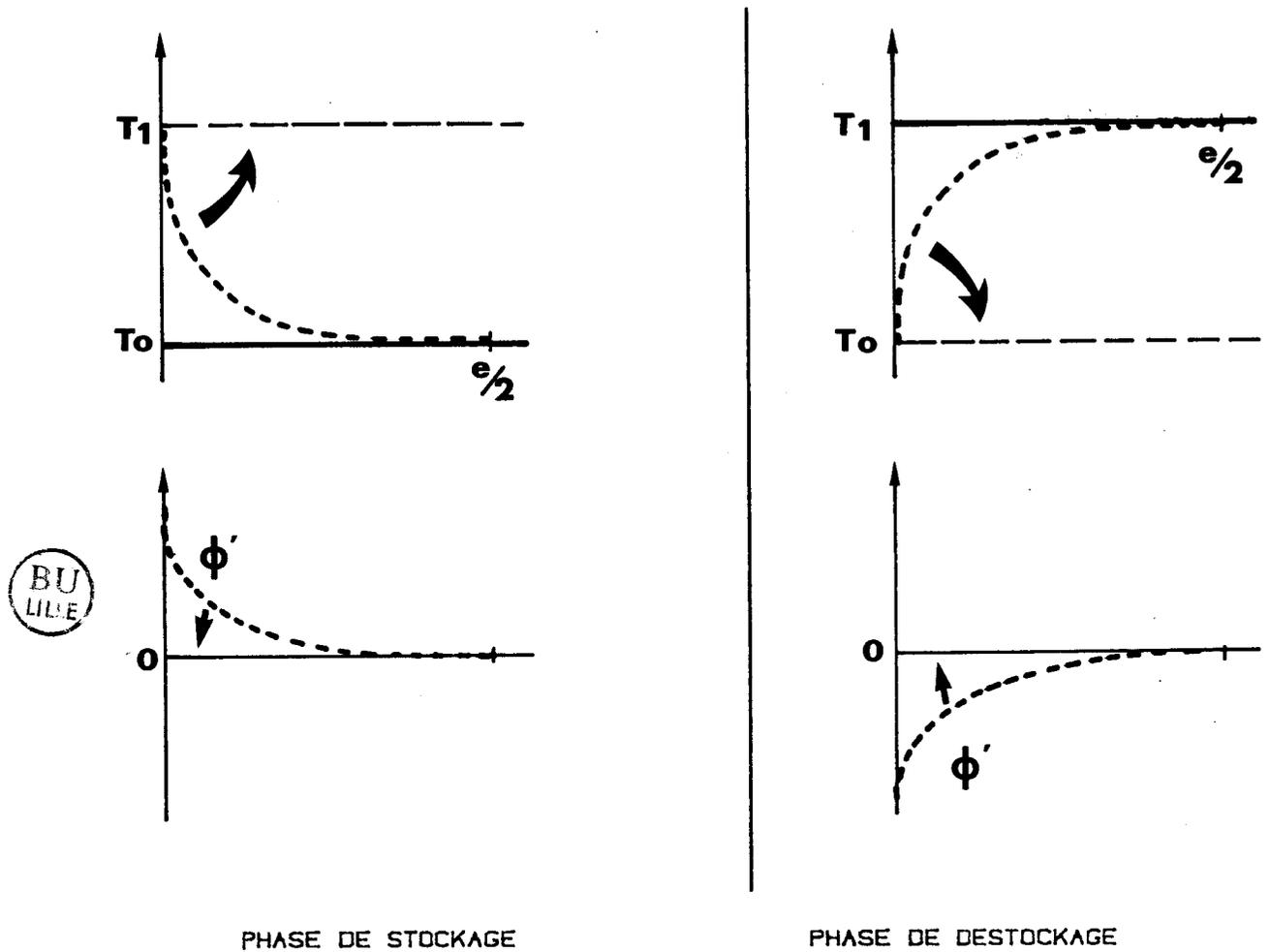
$$\begin{array}{lll} T_1 = T_2 = T_0 & \text{si} & t < 0 \\ T_1 = T_2 = T_0 + \theta & \text{pour} & 0 < t < t_f \\ T_1 = T_2 = T_0 & \text{si} & t > t_f \end{array}$$



Le système étant symétrique, les flux  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont à chaque instant de même amplitude et de sens contraire de sorte que  $\Sigma \phi(t) = 0$ . La température moyenne est définie en fonction de la différence des flux  $\Delta \phi$  par :

$$\bar{T}(t) = T_0 + \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t_f} \Delta \phi(t) dt$$

L'allure des variations spatiotemporelles des champs de température et de flux correspondant à ces conditions limites est représentée figure 26



- FIGURE 26 -

Le bilan d'entropie s'écrit :

$$\int_{t_0}^t \frac{\Delta\phi}{\bar{T}(t)} dt - \int_{t_0}^t \frac{\Delta\phi}{(T_0+\theta)} = \int_{t_0}^t \int_V \frac{\phi'^2}{\lambda T^2} dv dt + \int_V \frac{\rho c}{2} \left( \frac{\theta^2(x,t)}{\bar{T}^2(t)} \right) dv$$

soit

$$\Delta S_1 - J_1 = D_2 + \Delta S_2$$

Connaissant les variations des flux et température en fonction du temps et des coordonnées d'espace, il est possible de calculer :

- l'augmentation d'entropie provoquée par la circulation des flux en régime transitoire  $D_2$
- l'entropie stockée dans le champ des écarts de température  $\Delta S_2$  qui n'est différente de zéro qu'en régime transitoire.

Les conditions imposées pour la simulation sont :  $T_0 = 200^\circ\text{K}$ ,  $\theta = 100^\circ\text{K}$ .

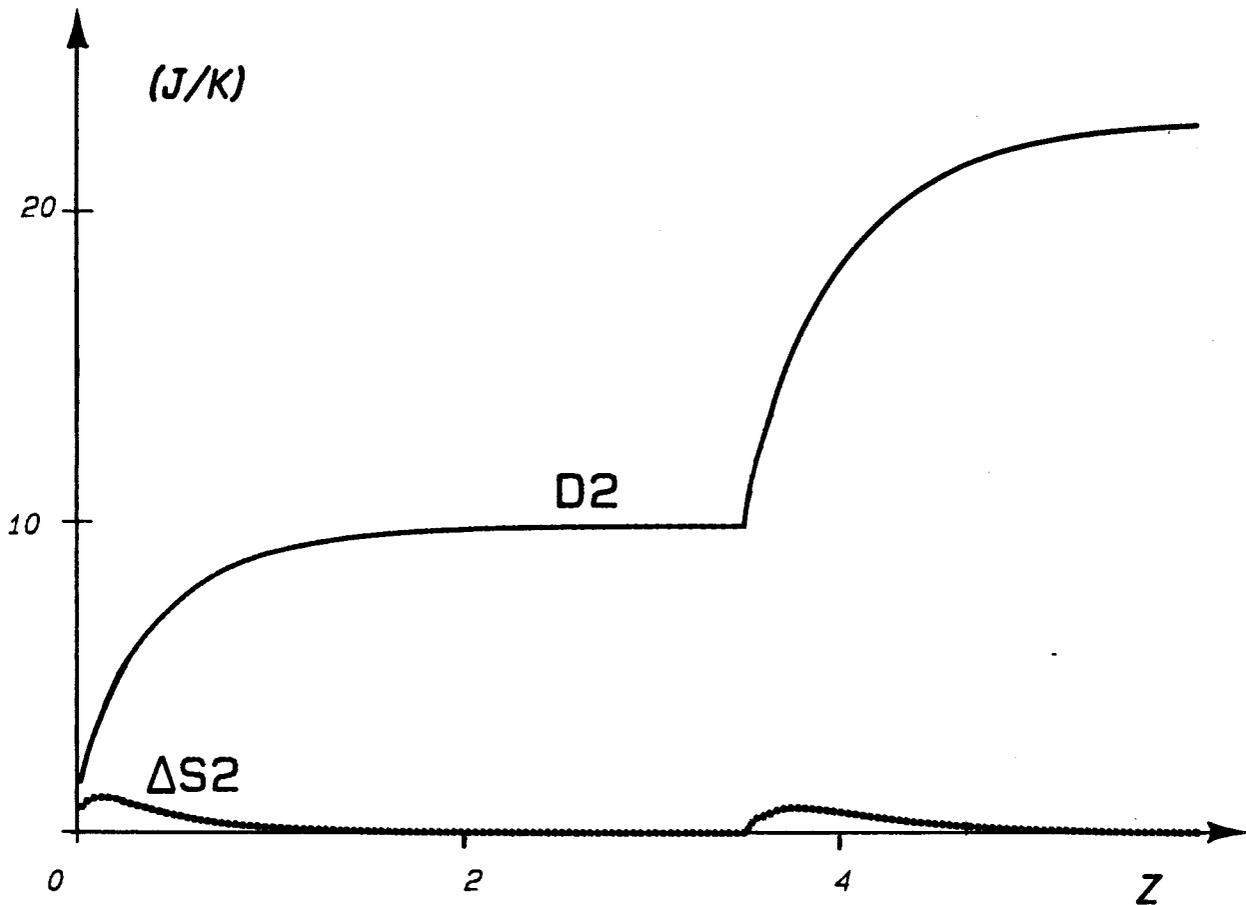
Les quantités calculées sont représentées figure 27. Il apparaît nettement sur cette figure que l'augmentation d'entropie par conduction thermique est prépondérante. Cette augmentation d'entropie est entretenue à chaque instant par les échanges avec le milieu extérieur. Pour vérifier le bilan d'entropie en régime transitoire, nous avons simulé la variation de la quantité  $\Delta S_1$  ainsi que l'entropie échangée avec le milieu extérieur  $J_1$ .

Les courbes de la figure 28 représentent la quantité  $\Delta S_1 - J_1$  et la somme des variations d'entropie  $\Delta S_2 + D_2$ . Les courbes étant confondues, il apparaît que le bilan est vérifié à chaque instant du régime transitoire.

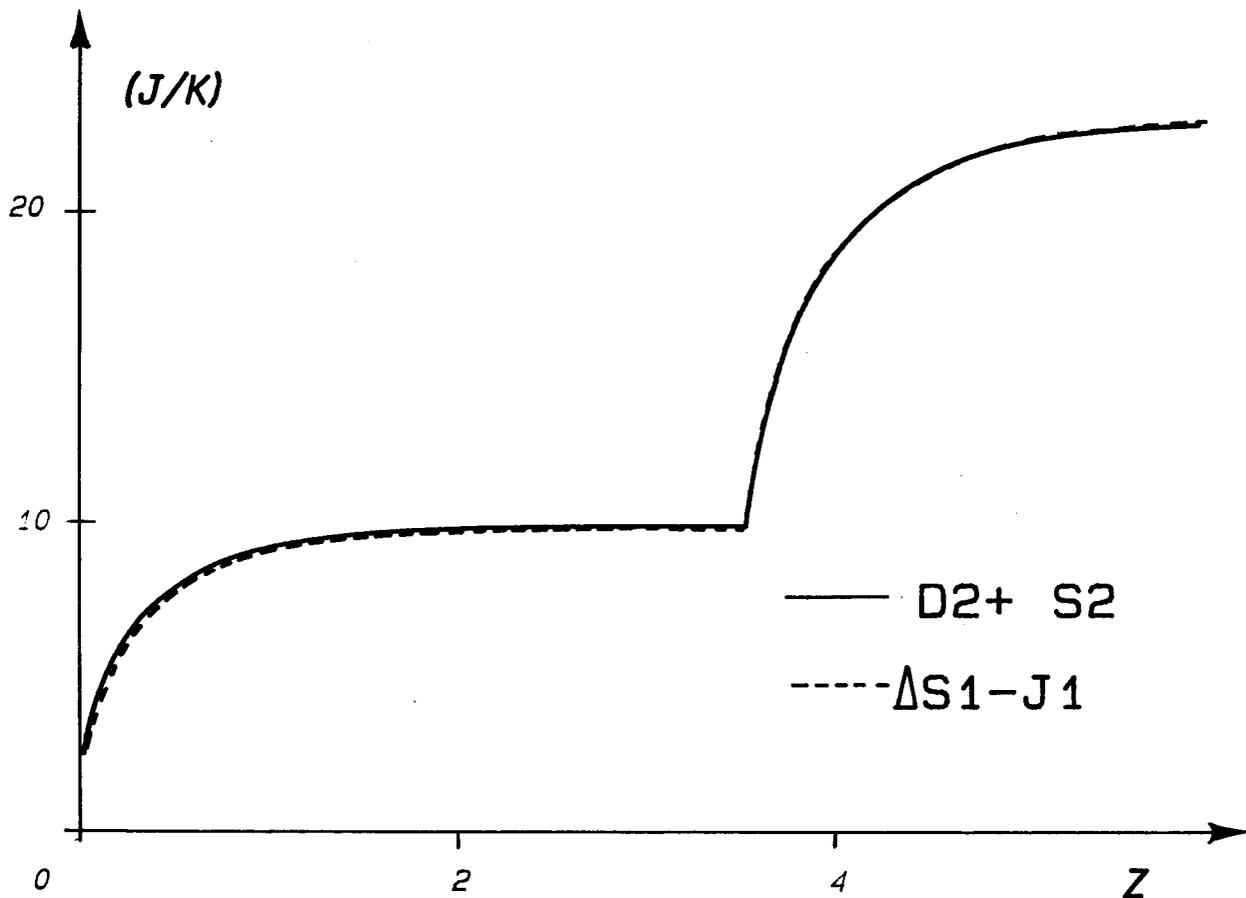
$$\Delta S_1(t) - J_1(t) = D_2(t) + \Delta S_2(t)$$

La valeur asymptotique de la quantité  $\Delta S_1 - J_1$  est égale à + 22,84, valeur très voisine de la valeur calculée à partir de la résolution analytique.

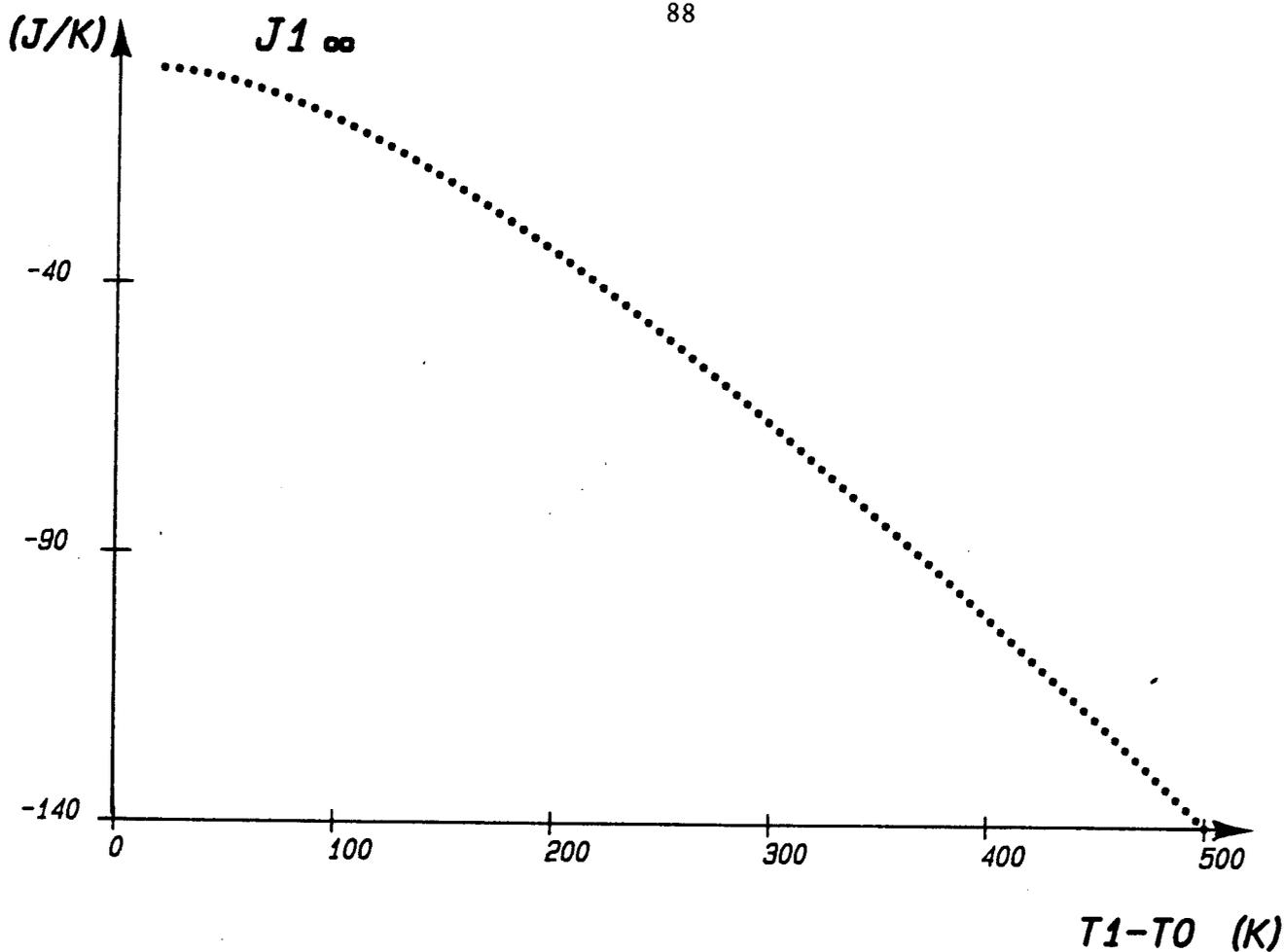
La figure 29 montre les variations de  $J_{1\infty}$  en fonction de l'amplitude du stockage pour une température initiale  $T_0 = 300^\circ\text{K}$ . Sur la figure 30  $J_{1\infty}$  est représenté en fonction de la température initiale pour un stockage d'amplitude constante égale à  $100^\circ\text{K}$ . On vérifie sur ces deux courbes que la valeur absolue de  $J_{1\infty}$  est d'autant plus grande que l'amplitude de la variation de température imposée sur la surface du système est importante par rapport à sa température initiale.



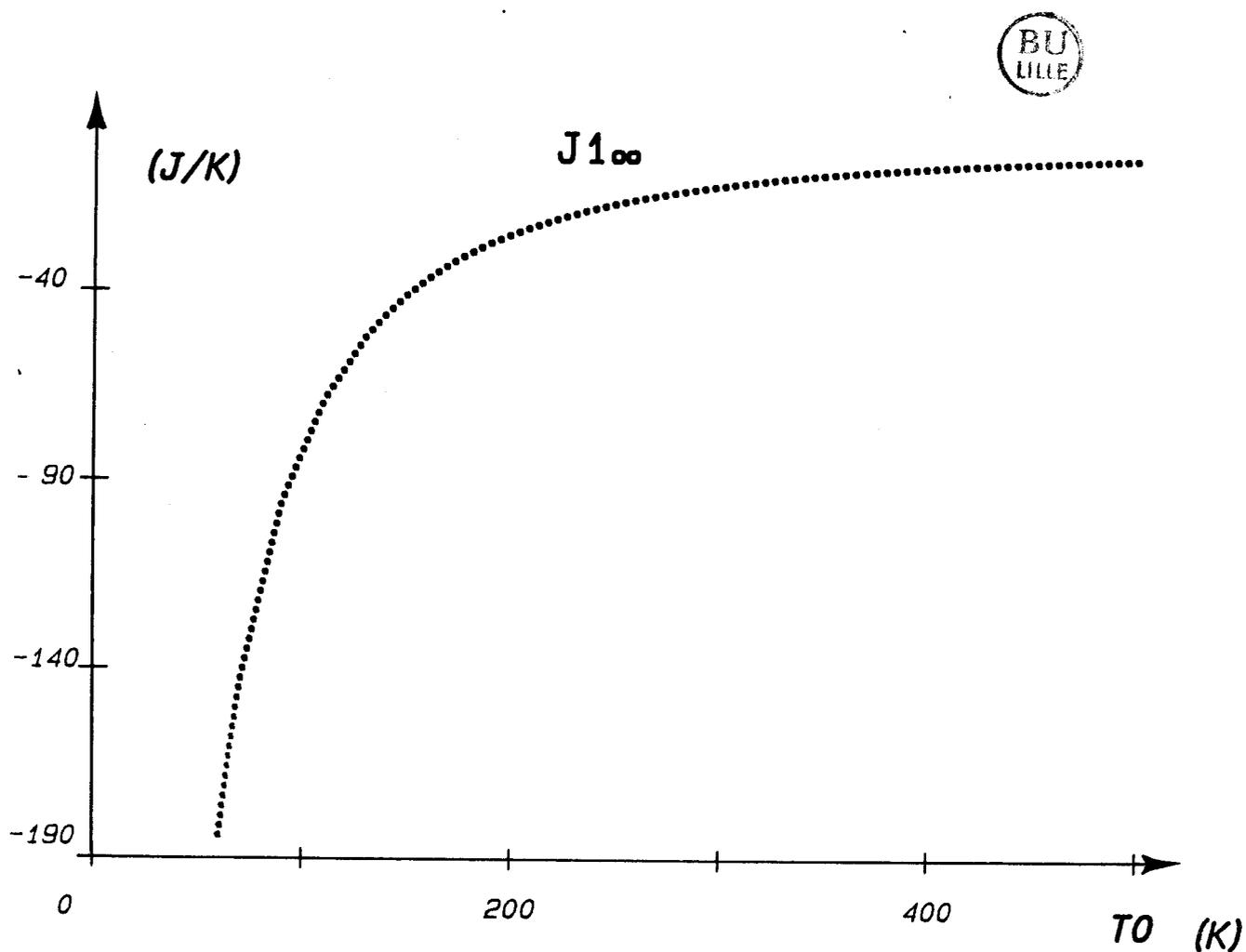
- FIGURE 27 -



- FIGURE 28 -



- FIGURE 29 -



- FIGURE 30 -

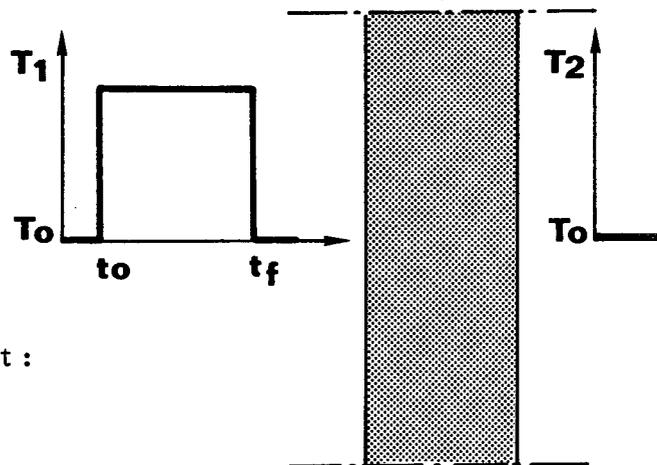
**3.1.4. Bilan d'entropie pour un processus dans lequel il y a à la fois stockage et transfert de chaleur (élévation de la température sur une surface extérieure)**

L'évolution simulée est un créneau de température sur une face de la paroi, l'autre face étant maintenue constante.

$$\begin{array}{l} T_1 = T_2 = T_0 \\ T_1 = T_0 + \Delta\theta \\ T_2 = T_0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{pour } t < 0 \text{ ou } t > t_f \\ \text{pour } 0 < t < t_f \end{array} \right\}$$

avec

$$\begin{array}{l} T_0 = 200^\circ \text{ K} \\ \Delta\theta = 200^\circ \text{ K} \end{array}$$

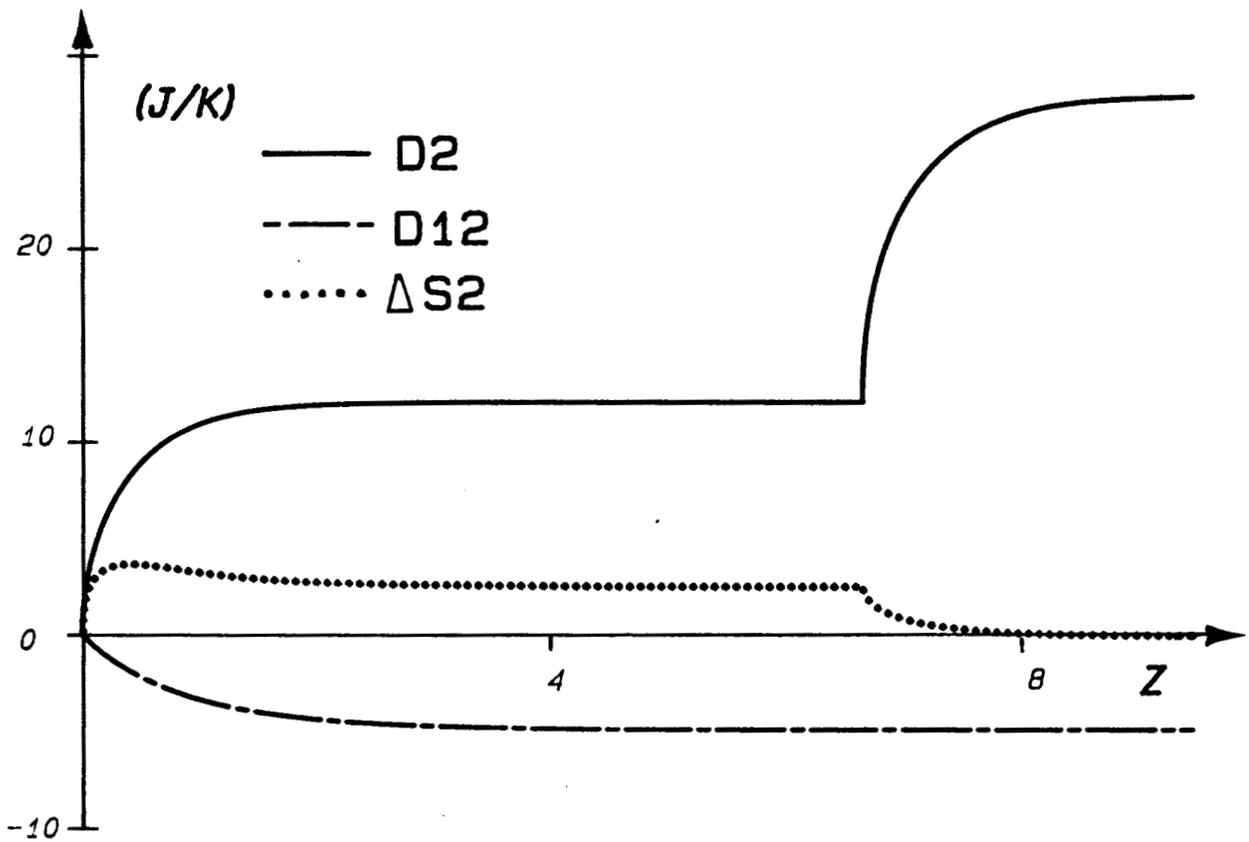


L'expression du bilan d'entropie s'écrit :

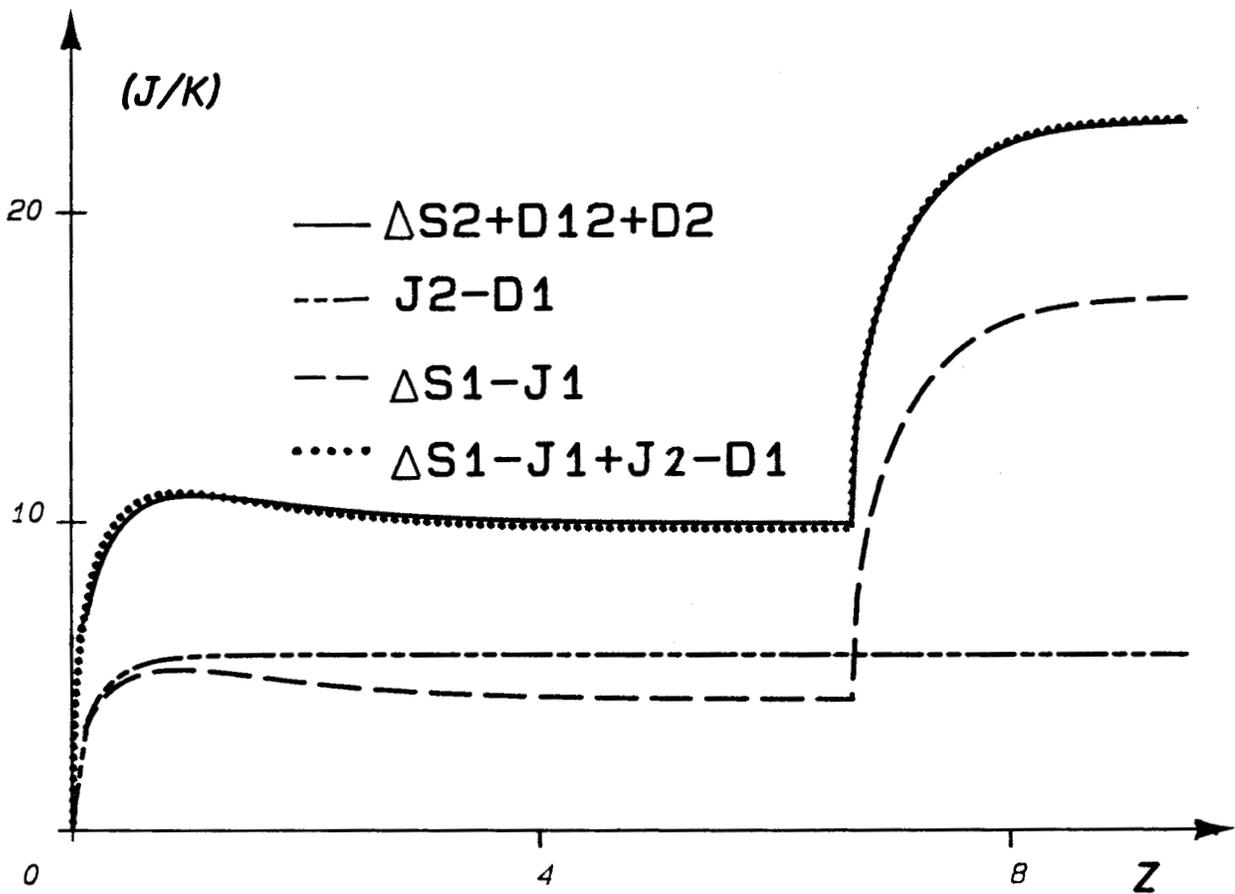
$$\Delta S_1 - J_1 + J_2 - D_1 = \Delta S_2 + D_2 + D_{12}$$

La figure 31 représente les évolutions des quantités  $\Delta S_2$ ,  $D_2$  et  $D_{12}$ . On peut remarquer que la courbe de  $\Delta S_2$  présente un maximum en régime transitoire avant de tendre vers une valeur constante caractéristique de la distribution linéaire de la température locale : ce terme résulte ici en régime transitoire de la superposition des processus de stockage et de transfert de chaleur.

La valeur négative du terme de couplage  $D_{12}$  peut être interprétée en observant l'allure des évolutions locales de flux et température représentées figure 32. En régime transitoire, la partie positive du produit  $\phi \phi'$  est divisée par le terme  $(T_0 + \theta(x,t))^2$

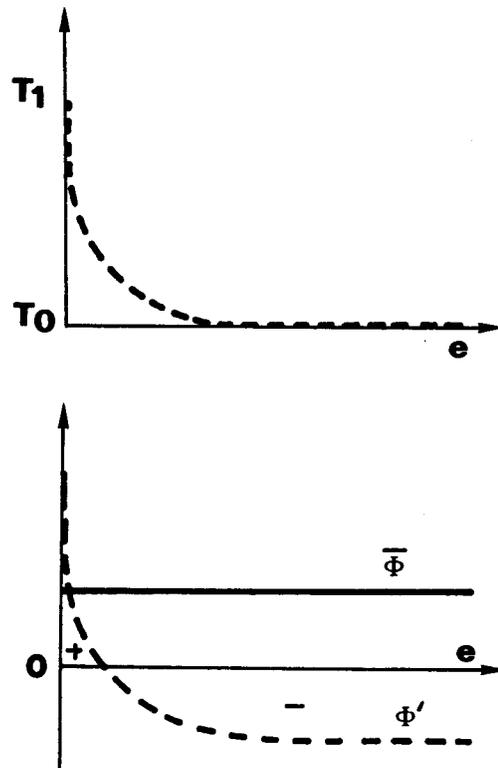


- FIGURE 31 -



- FIGURE 33 -

(important par rapport à  $T_0^2$ ), alors que la partie négative est divisée par un dénominateur beaucoup plus faible voisin de  $T_0^2$ .



FLUX ET TEMPERATURE EN REGIME TRANSITOIRE

- FIGURE 32 -

On peut remarquer que l'amplitude de la quantité  $D_2$  est beaucoup plus élevée ici que dans le cas du transfert pur (avec  $\Delta\theta$  équivalent), ce résultat est logique si l'on remarque que par raison de symétrie la constante de temps relative au flux local est quatre fois plus faible pour un transfert pur que celle relative à une évolution quelconque.

La figure 33 représente les variations de  $\Delta S_1 - J_1$ ,  $J_2 - D_1$  et permet de comparer la courbe  $\Delta S_1 - J_1 + J_2 - D_1$  avec  $D_2 + D_{12} + \Delta S_2$ . On peut observer une très bonne coïncidence entre ces deux évolutions qui vérifie le bilan d'entropie. La courbe  $J_2 - D_1$  est ici strictement identique à celle observée figure 23 pour un transfert pur. Ces processus sont caractérisés par la même constante de temps  $\frac{RC}{4\pi^2}$ , pour un temps  $t > 0,13 RC$  on a  $\frac{dJ_2}{dt} = 0$ ,  $J_2$  entretient uniquement la production minimale d'entropie. Il en résulte que le terme source  $J_1$  entretient seul l'écart entre l'entropie dissipée et la production minimale d'entropie.

## 3.2. "Représentation temps" de la dissipation interne

### 3.2.1. Transfert pur

Nous avons simulé sur le même échantillon de plexiglass que précédemment trois variations en créneaux de  $\Delta\theta$  d'amplitude  $100^\circ\text{K}$  et de durée  $0,45 \tau$ ,  $1,8 \tau$  et  $5,5 \tau$ , les réponses correspondantes  $\Sigma\phi$  sont représentées figure 34.

Pour ces trois processus, nous avons calculé :

- les fonctions d'intercorrélation  $R_{\phi\Delta} \left(\frac{1}{T}\right)$  représentatives de la production minimale d'entropie
- les fonctions d'intercorrélation  $R_{\Sigma\phi\Delta} \left(\frac{1}{T}\right)$  représentatives de la production réelle d'entropie.

L'objectif de ces simulations est de montrer l'intérêt de l'analyse par corrélation des échanges thermodynamiques pour caractériser le degré d'irréversibilité des évolutions. Nous utilisons la production minimale d'entropie en régime quasi-stationnaire comme "état de référence", les courbes sont normalisées par la valeur maximale  $D_1$  de cette fonction d'autocorrélation qui représente pour une évolution l'entropie minimale produite en supposant le système en régime permanent à tout instant.  $D_1$  est la valeur à l'origine de la fonction  $R_{\phi\Delta} \left(\frac{1}{T}\right)$

La figure 35 représente les fonctions d'intercorrélation  $R_{\phi\Delta} \left(\frac{1}{T}\right)$  normalisées. Les courbes sont des triangles isocèles centrés à l'origine

$$R_{\phi\Delta} \left(\frac{1}{T}\right) = \int_{-t_1}^{t_1} \frac{\Delta\theta}{R} \cdot \frac{\Delta\theta}{T_1 T_2} (t-\tau) dt$$

Pour un transfert pur le produit  $T_1 T_2$  est constant

$$R_{\phi\Delta} \left(\frac{1}{T}\right) = \left(\frac{1}{R T_1 T_2}\right) \int_{-t_1}^{t_1} \Delta\theta \cdot \Delta\theta(t-\tau) dt$$

Le calcul se réduit à celui de la fonction d'autocorrélation de la différence des températures. Les fonctions obtenues constituent des représentations temporelles de la production minimale d'entropie dans les processus considérés.

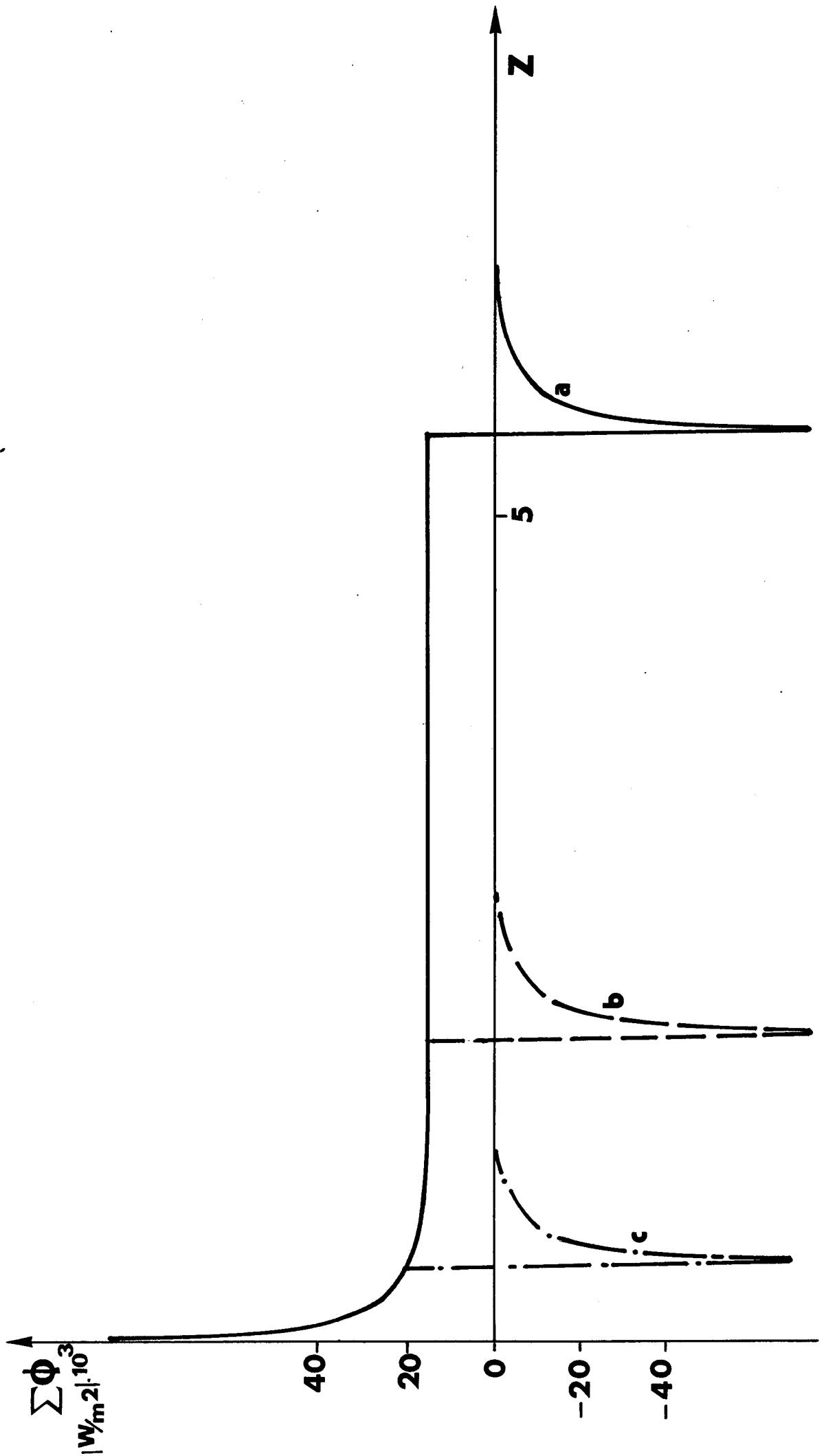
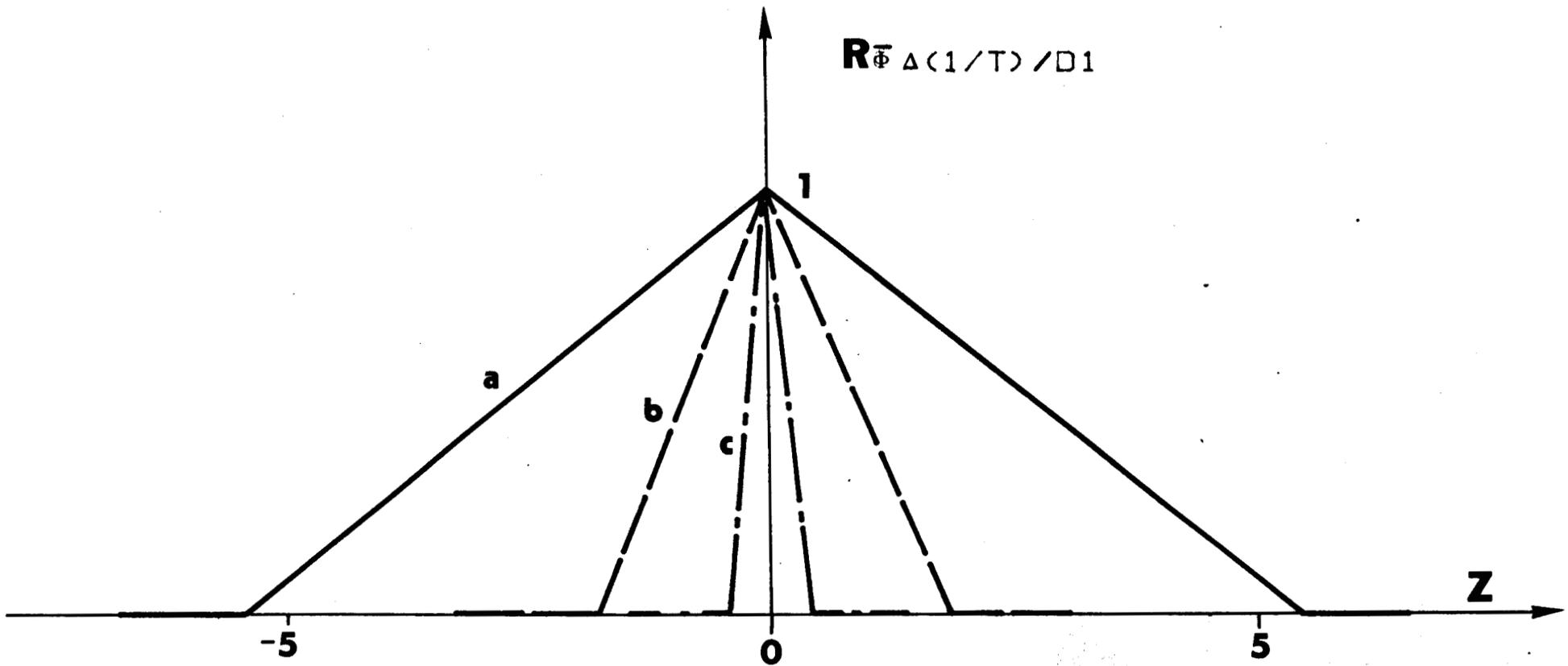
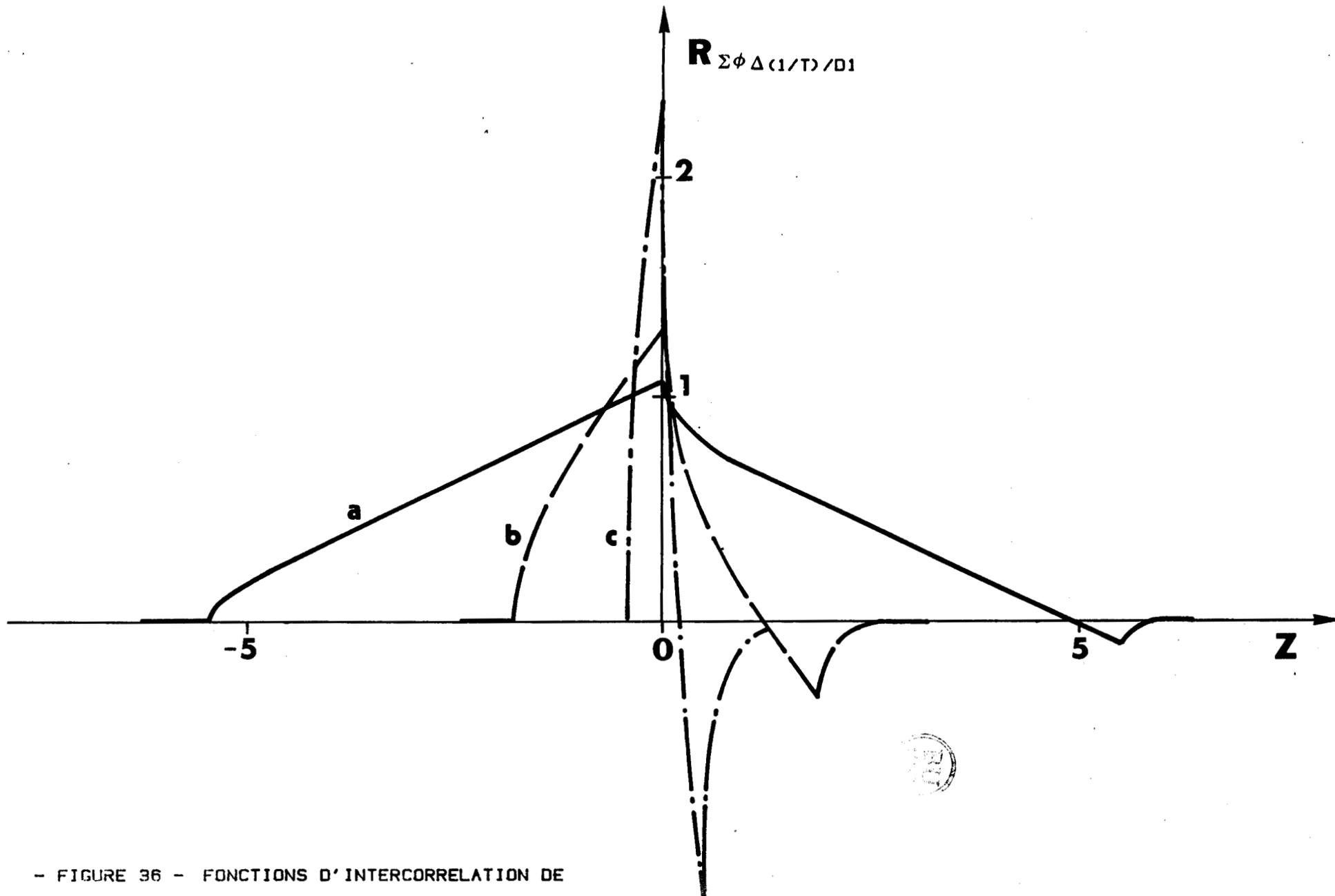


FIGURE 24. COMPARISON OF THE FLUX DENSITY PROFILES OF THE FUNDAMENTAL MODES



- FIGURE 35 - FONCTIONS D'INTERCORRELATION REPRESENTATIVES DE LA PRODUCTION MINIMALE



- FIGURE 36 - FONCTIONS D'INTERCORRELATION DE  
LA PRODUCTION REELLE D'ENTROPIE

La figure 36 représente les fonctions d'intercorrélation  $R_{\Sigma\phi\Delta}(\frac{1}{T})$  normalisées par rapport à la même valeur  $D_1$  que précédemment. Ces fonctions sont des représentations de l'entropie échangée avec le milieu extérieur pendant les évolutions. Pour chacun des processus (a, b, c) la différence entre cette fonction et la fonction d'autocorrélation précédente est représentative de l'entropie créée pour entretenir les régimes transitoires. En particulier, au point origine, toute évolution quasi-stationnaire passera par le point 1. La comparaison des courbes montre que l'évolution rapide (c) engendre une dissipation trois fois plus élevée que la production minimale correspondante. Pour l'évolution (a) dont la durée est de l'ordre de  $5,5 \tau$  la fonction d'intercorrélation est assez proche de l'évolution triangulaire idéale et la valeur à l'origine est voisine de 1.

La figure 37 représente une autre simulation pour laquelle la variation imposée de la quantité  $\Delta\theta$  est un triangle rectangle de durée voisine de  $4 \tau$  et d'amplitude maximale  $100^\circ\text{K}$ . Nous avons considéré :

$$T_0 = 300^\circ\text{K}$$

$$T_1 = T_0 + \Delta\theta/2$$

$$T_2 = T_0 - \Delta\theta/2$$

Sur la figure 38 sont représentées :

- la fonction d'intercorrélation représentative de la production minimale d'entropie  $R_{\phi\Delta}(\frac{1}{T})$
- la fonction d'intercorrélation  $R_{\Sigma\phi\Delta}(\frac{1}{T})$  représentative de l'entropie réellement dissipée
- le produit de convolution entre la réponse impulsionnelle du processus et  $R_{\phi\Delta}(\frac{1}{T})$

Toutes ces courbes sont normalisées par la valeur origine de  $R_{\phi\Delta}(\frac{1}{T}) = D_1$ .

Nous vérifions une très bonne coïncidence entre le produit de convolution  $h \otimes R_{\phi\Delta}(\frac{1}{T})$  et la fonction d'intercorrélation  $R_{\Sigma\phi\Delta}(\frac{1}{T})$

L'écart entre les fonctions  $R_{\phi\Delta}(\frac{1}{T})$  et  $R_{\Sigma\phi\Delta}(\frac{1}{T})$  caractérise la création d'entropie dans les régimes transitoires. La comparaison des valeurs à l'origine montre que les régimes transitoires provoquent environ 30 % de création supplémentaire d'entropie.

Une autre façon de rendre compte de l'entropie créée dans les régimes transitoires consiste à introduire une valeur numérique, la "résistance apparente"  $R_a$  représentative de la dissipation interne. Définissons pour cela une nouvelle fonction d'intercorrélacion  $R_{\Delta\theta, \Delta} \left(\frac{1}{T}\right)$  par :

$$R_{\Delta\theta, \Delta} \left(\frac{1}{T}\right) = R \cdot R_{\phi, \Delta} \left(\frac{1}{T}\right)$$

En régime continu, le rapport des fonctions d'intercorrélacion au point origine  $\tau = 0$  est égal à la demi-résistance thermique du système. (41)

$$\frac{R_{\Delta\theta, \Delta} \left(\frac{1}{T}\right) (0)}{R_{\Sigma\phi, \Delta} \left(\frac{1}{T}\right) (0)} = \frac{R}{2}$$

Pour une évolution quelconque, l'entropie créée prend une valeur toujours supérieure à la valeur minimale de référence. On peut alors définir une résistance apparente par le rapport :

$$R_a = 2 \cdot \frac{R_{\Delta\theta \cdot \Delta} \left(\frac{1}{T}\right) (0)}{R_{\Delta\phi \cdot \Delta} \left(\frac{1}{T}\right) (0)} \quad \text{avec } R_a \leq R \quad (42)$$

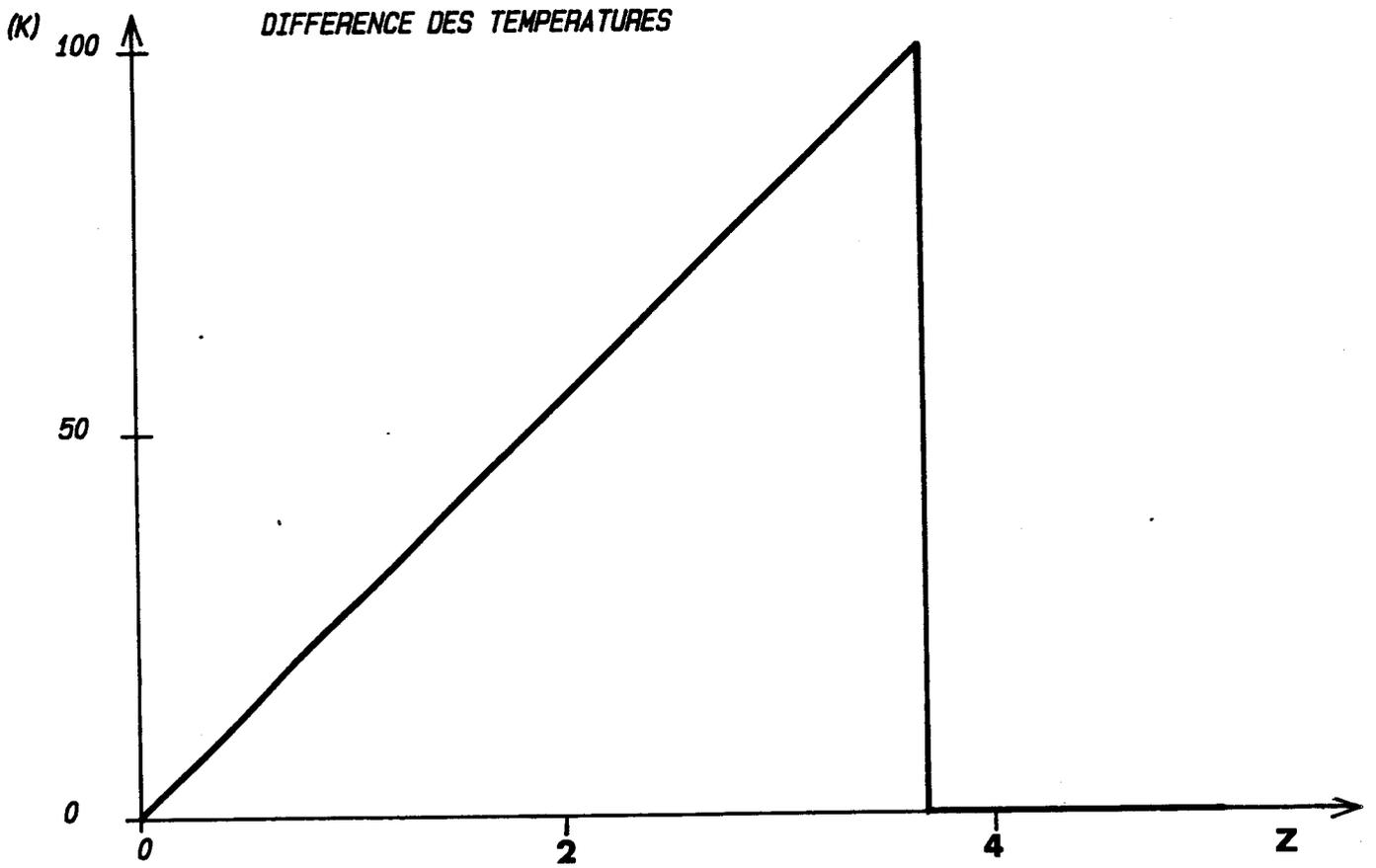
Cette grandeur caractérise la part de transitoire dans la transformation, elle dépend du détail de l'évolution et non des seules caractéristiques thermophysiques du système. Minimiser la création d'entropie revient alors à faire tendre la résistance apparente vers la résistance thermique mesurable en régime continu

$$\Delta S_{i, \text{mini}} \text{ si } R_a \rightarrow R$$

Dans l'exemple simulé figure 37 la valeur de  $R_a$  est voisine de 1,2 (K/W) alors que la résistance thermique est de 1,57 (K/W).

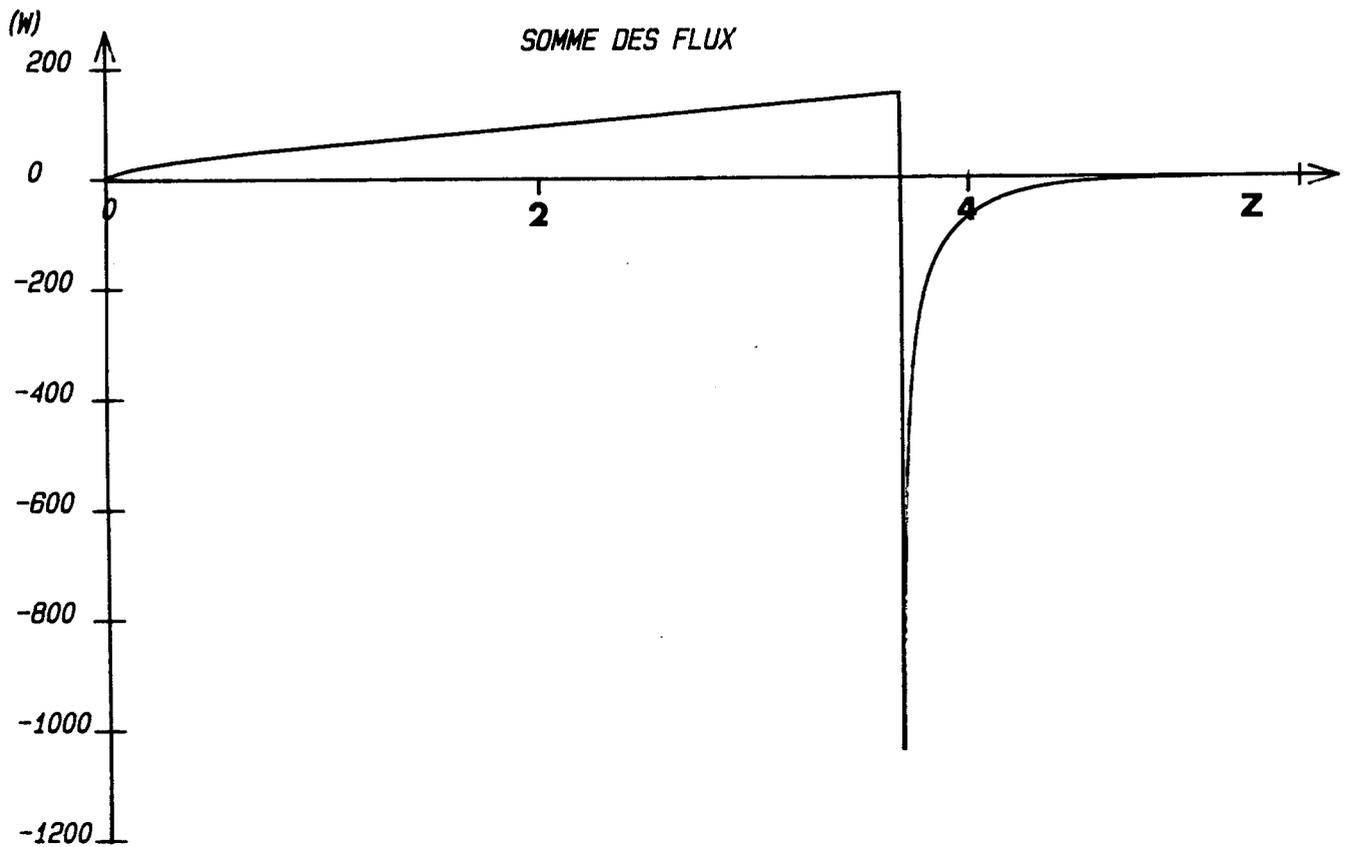
De nombreuses simulations ont permis de montrer que le dénominateur  $T_1 T_2$  avait un rôle négligeable. Dans la plupart des cas, la résistance apparente est donnée par la relation :

$$R_a = \frac{2 \cdot R_{\Delta\theta \cdot \Delta\theta} (0)}{R_{\Sigma\phi \cdot \Delta\theta} (0)} \quad (43)$$

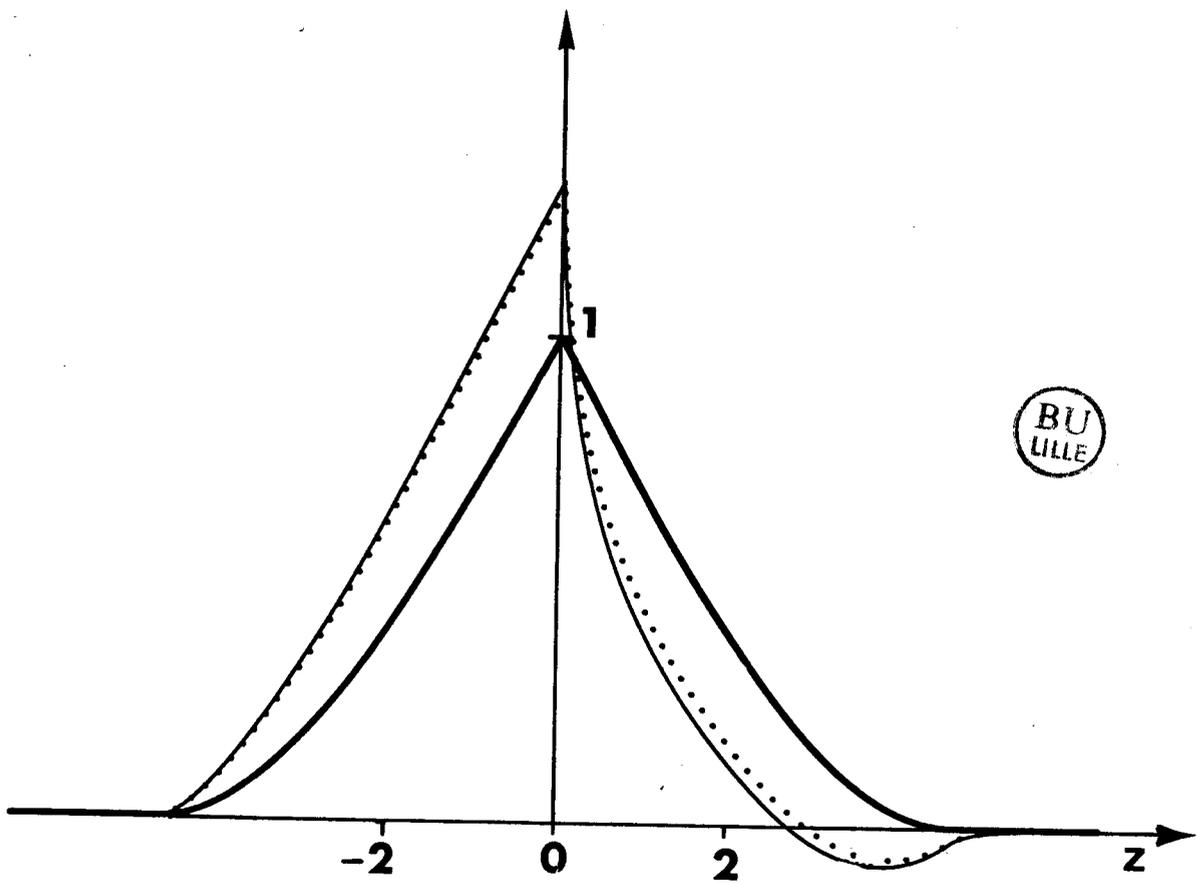


- FIGURE 37 -

PLEXI 5MM  
S=0.0169 M2



- FIGURE 38 -



- FIGURE 39 -

—  $R_{\Sigma\phi_{\Delta}(1/T)/D1}$

—  $R_{\phi_{\Delta}(1/T)/D1}$

....  $h_t \otimes R_{\phi_{\Delta}(1/T)/D1}$

### 3.2.2. Stockage de chaleur sensible

#### "Stockage pur" à flux de chaleur imposé

Le processus de stockage-déstockage de chaleur sensible dans une paroi homogène caractérisé par des variations en "créneaux" de la différence des flux est analysé dans cette partie en fonction de la durée de la sollicitation.

L'évolution est symétrique et caractérisée à tout instant par la relation :

$$\phi_1 = -\phi_2 = \Delta\phi / 2$$

Le système utilisé pour la simulation est une paroi de béton de 20 cm d'épaisseur et de caractéristiques :

$$\begin{aligned} \lambda &= 1,8 \text{ W/mK} \\ c &= 1000 \text{ J/Kg K} \\ \rho &= 2500 \text{ Kg/m}^3 \end{aligned}$$

La température initiale  $T_0 = 300^\circ\text{K}$

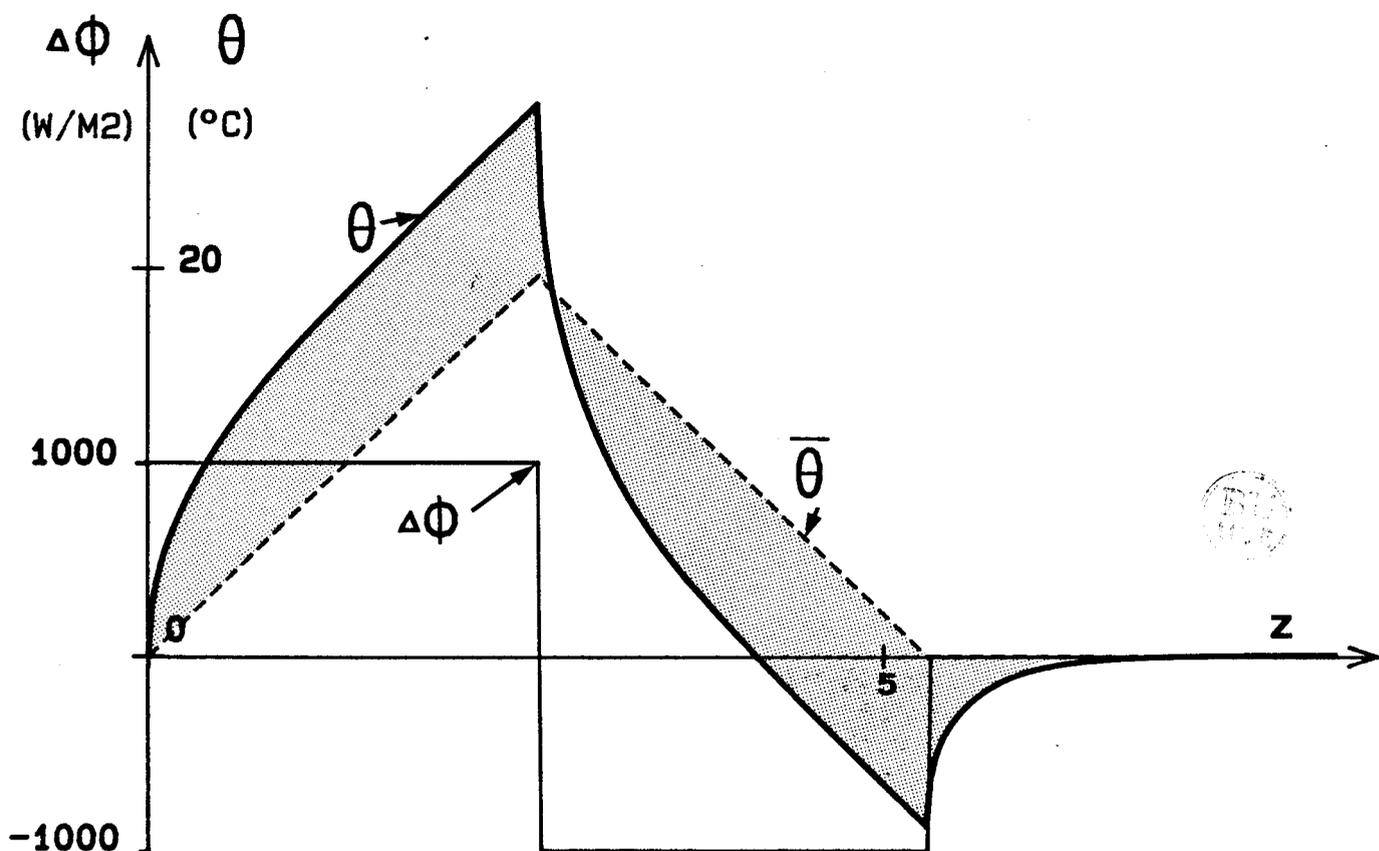
L'amplitude de la sollicitation est de  $1000 \text{ W/m}^2$

La durée des créneaux de  $\Delta\phi$  est égale à  $2,6 \tau$ . La figure 39 représente la sollicitation imposée et les évolutions résultantes de la température de surface  $\theta$  et de la température moyenne  $\bar{\theta}$ .

La différence entre la température de surface et la température moyenne (zone ombrée) fait apparaître une force thermodynamique  $X_s$  agissant sur le système, laquelle provoque une augmentation d'entropie par dissipation interne.

Nous avons défini précédemment le régime quasi-stationnaire de stockage dans lequel il y avait à tout instant proportionnalité entre la différence  $\theta - \bar{\theta}$  et la différence des flux. La différence des flux en régime quasi-stationnaire  $\Delta\phi$  est liée à l'écart de température  $\theta - \bar{\theta}$  par la relation :

$$\Delta\phi = \frac{\theta - \bar{\theta}}{R_s} \quad \text{avec} \quad R_s = \frac{R}{12}$$



- FIGURE 39 -

STOCKAGE A FLUX IMPOSE

Pour toute variation observée de la quantité de  $\theta - \bar{\theta}$ , ce régime est un régime de référence pour lequel la production d'entropie est minimale.

La production minimale d'entropie en régime quasi-stationnaire peut être considérée comme la valeur origine de la fonction d'intercorrélacion  $R_{\Delta\phi', X_S}(0)$ . La production réelle dans l'évolution est égale à la valeur origine de la fonction d'intercorrélacion  $R_{\Delta\phi, X_S}(0)$ . Ces deux fonctions sont liées par un produit de convolution :

$$R_{\Delta\phi, X_S}(\tau) = h_S \otimes R_{\Delta\phi', X_S}(\tau) \quad \text{puisque } \Delta\phi = h_S \otimes \Delta\phi' \quad (44)$$

ou

$$R_{\Delta\phi', X_S}(\tau) = h'_S \otimes R_{\Delta\phi, X_S}(\tau) \quad \text{puisque } \Delta\phi' = h'_S \otimes \Delta\phi$$

Nous avons représenté figure 40 les fonctions d'intercorrélacion  $R_{\Delta\phi', X_S}$  (courbe A) et  $R_{\Delta\phi, X_S}$  (courbe B). La différence entre les valeurs à l'origine des deux courbes est caractéristique de l'écart entre la production minimale d'entropie et la production réelle. A l'origine, on observe que la production réelle est supérieure de 7 % à la production minimale (pour une même évolution de  $\theta - \bar{\theta}$ ). Toutes les courbes sont normalisées par la valeur de référence  $R_{\Delta\phi', X_S}(0)$  et sont représentées en fonction du paramètre adimensionnel  $Z = \frac{t \cdot \pi^2}{RC} = \frac{t}{\tau}$ .

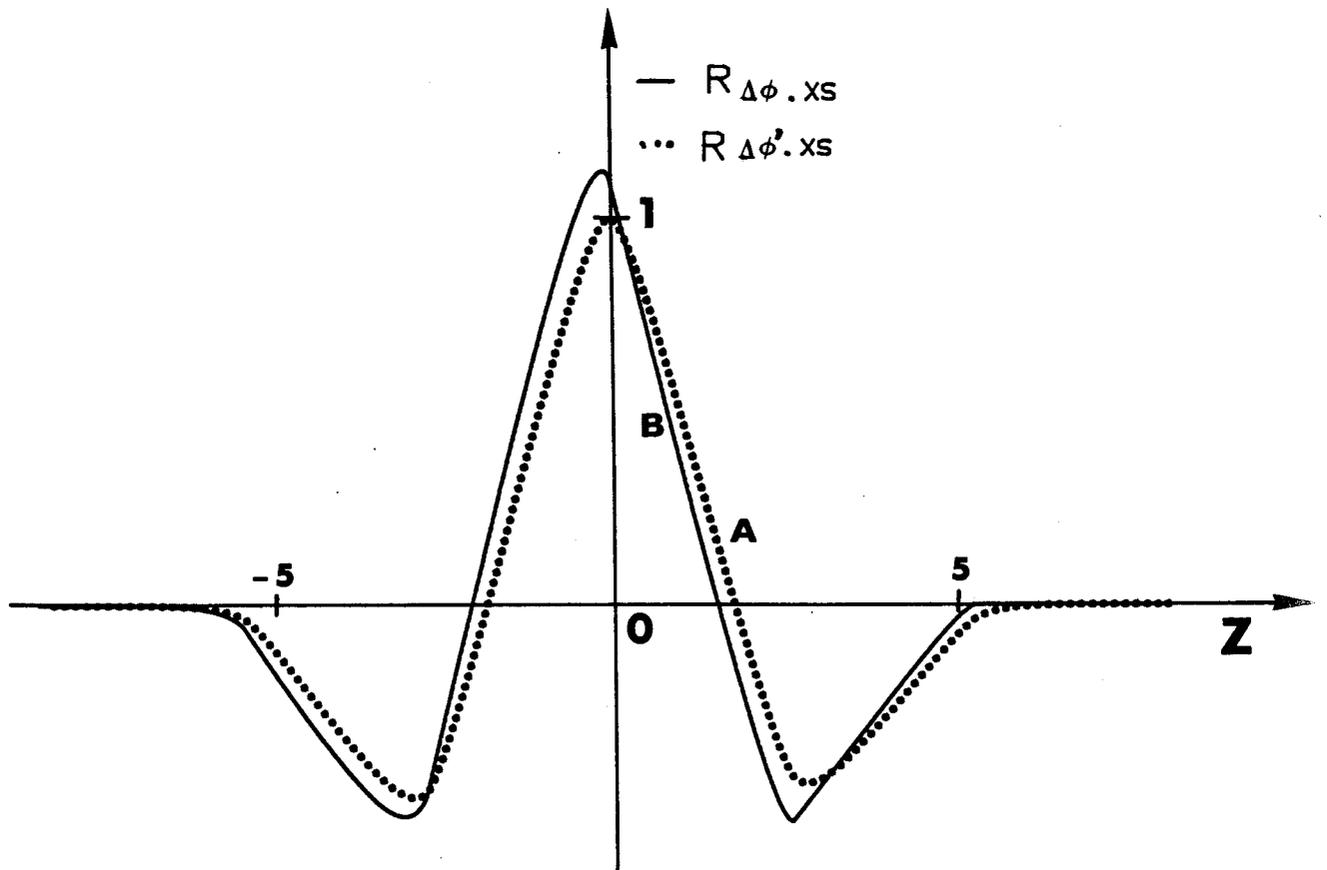
La figure 41 qui représente la fonction  $R_{\Delta\theta', X_S}(\tau)$  comparée au produit de convolution  $h'_S \otimes R_{\Delta\phi, X_S}(\tau)$  fait apparaître une parfaite coïncidence des courbes qui vérifie les relations 44.

Par analogie avec l'analyse des transferts thermiques de la partie précédente, on peut définir à partir de la dissipation interne une "résistance apparente" en mode stockage  $R_{sa}$ . Introduisons pour cela une nouvelle fonction d'intercorrélacion

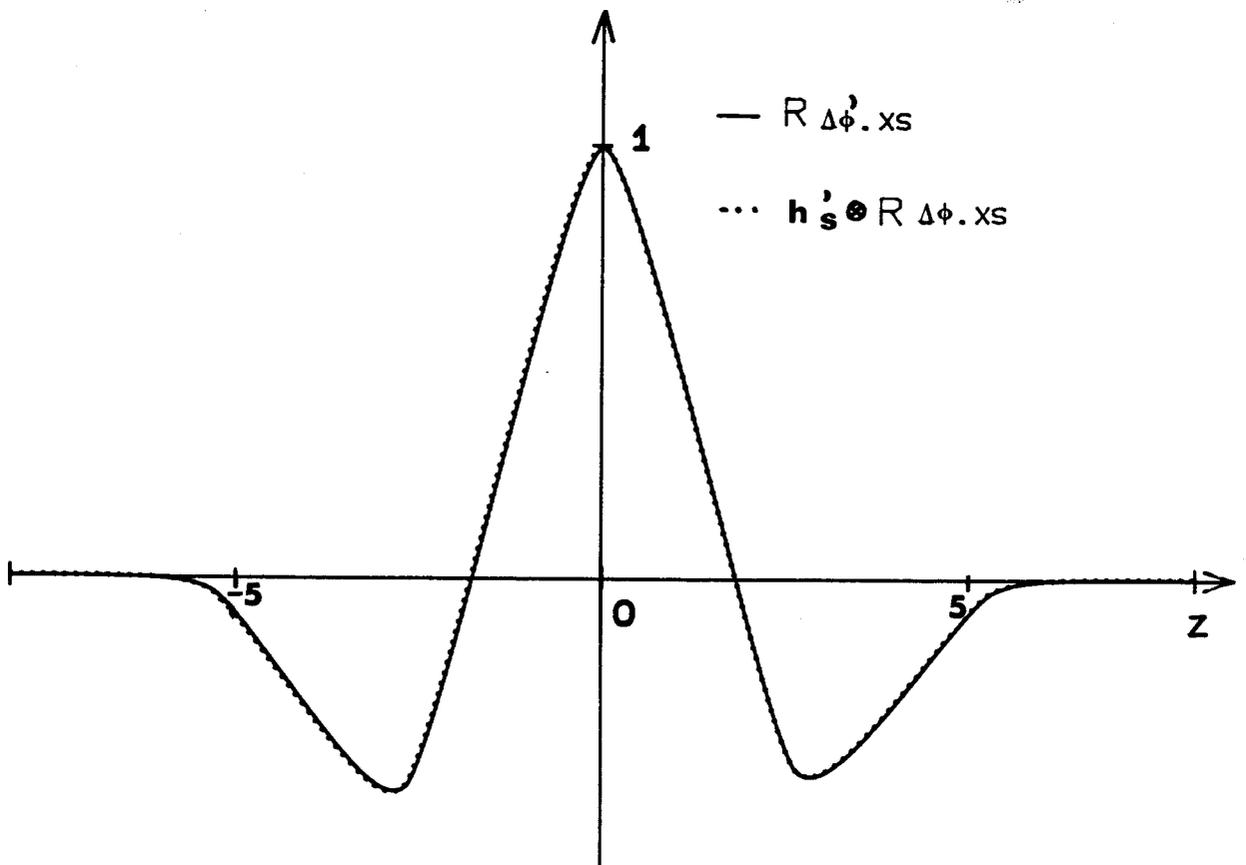
$$R_{\Delta\theta', X_S}(\tau) = R_S \cdot R_{\Delta\phi', X_S}(\tau)$$

La résistance apparente sera alors définie par le rapport :

$$R_{sa} = \frac{R_{\Delta\theta', X_S}(\tau)}{R_{\Delta\phi, X_S}(\tau)} \quad \text{avec} \quad R_{sa} \leq R_S$$



- FIGURE 40 -



- FIGURE 41 -

$R_{SA}$  est une fonction de transformation qui dépend du détail de l'évolution. Minimiser la production d'entropie revient alors à faire tendre  $R_{SA}$  vers  $R_S$ .

Une procédure plus classique pour caractériser le rendement énergétique d'un processus de stockage est de prendre comme référence l'évolution réversible. Cette démarche est fondamentalement différente de la précédente puisque l'on considère alors comme référence une évolution quasi-statique dans laquelle  $\theta - \bar{\theta} \approx 0$ . Pour une évolution réversible, il y a à tout instant égalité entre la variation d'entropie  $\Delta S_1$  qui est liée à la température moyenne et le terme source  $J_1$ .

$$\Delta S_i = \Delta S_1 - J_1 \approx 0$$

Au cours d'un stockage de chaleur, la température de surface est toujours supérieure à la température moyenne ce qui entraîne  $\Delta S_1 > J_1$  et  $\Delta S_i \neq 0$ . De même, dans un cycle stockage-déstockage la chaleur est restituée à une température inférieure à celle à laquelle elle avait été apportée au système, dans l'état final  $\Delta S_1 = 0$  et  $J_1 \infty < 0$ .

Pour caractériser le rendement énergétique d'une évolution selon ce critère on peut définir un "coefficient de qualité"

$$Q = \frac{|J_1|}{\Delta S_1 M}$$

$\Delta S_1 M$  représentera l'amplitude maximale atteinte par  $\Delta S_1$  dans le processus. Un stockage idéal sera caractérisé par un coefficient de qualité  $Q = 1$

$$\text{Stockage idéal} \implies Q \rightarrow 1$$

Un cycle stockage-déstockage idéal sera caractérisé par un coefficient de qualité nul

$$\text{Stockage - Déstockage idéal} \implies Q \rightarrow 0$$

Pour un cycle simulé, on obtient  $Q = 0,045$ .

### "Stockage pur" à température de surface imposée

Nous avons simulé sur le même échantillon de béton des processus de stockage déstockage de chaleur en imposant des créneaux de température de surface d'amplitude  $100^\circ\text{K}$  et de durée variable ( $T_1 = T_2 \forall t$  et  $T_0 = 300^\circ\text{K}$ ).

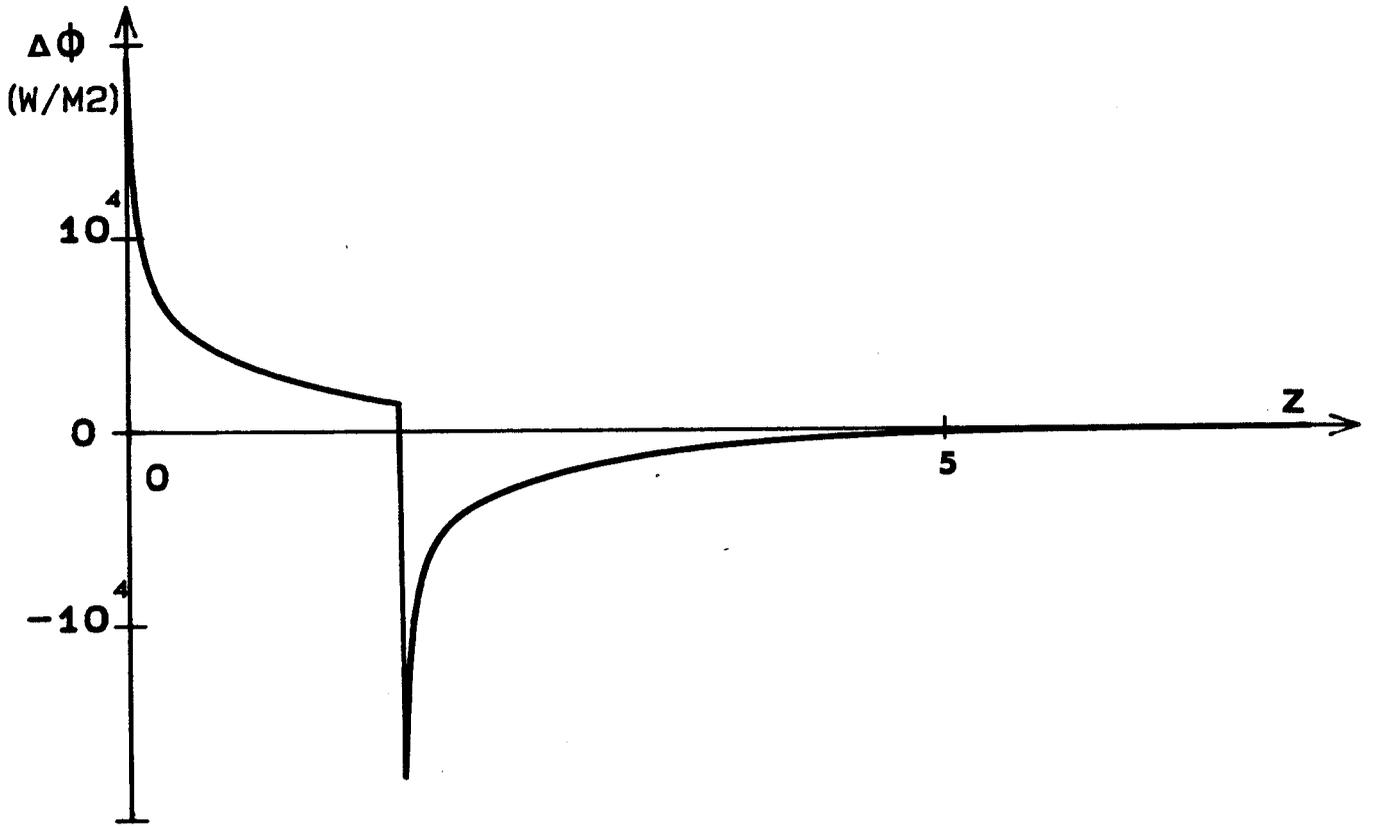
Une évolution type est représentée figure 42 ainsi que la différence des flux et la température moyenne résultants. La différence entre la température de surface et la température moyenne représentée (zone ombrée) est caractéristique de la dissipation d'entropie.

La figure 43 représente pour deux évolutions A et B les fonctions d'intercorrélations représentatives de la production minimale d'entropie  $R_{\Delta\phi', X_S}(\zeta)$  (traits pointillés) et la production réelle caractérisée par la fonction  $R_{\Delta\phi, X_S}(\zeta)$  (traits pleins). L'évolution A est relative au créneau de température représenté figure 42 de durée  $1,7 \tau$ , l'évolution B beaucoup plus rapide a une durée voisine de  $0,3 \tau$ . Les courbes sont normalisées par  $R_{\Delta\phi', X_S}(0)$  et sont représentées en fonction du paramètre adimensionnel  $Z$ .

Pour le processus A, les courbes représentatives de la production minimale d'entropie et de la production réelle sont voisines. A l'origine on obtient une dissipation réelle supérieure de 6,5 % à la production minimale. On a alors  $R_{sa} \approx R_s$ . Pour le processus B par contre la production d'entropie est supérieure de 55 % à la production minimale. La dissipation énergétique du processus beaucoup plus importante s'explique par la très grande amplitude du flux au début de l'évolution  $\Delta\phi \gg \Delta\phi'$ .

La figure 44 représente pour trois évolutions de formes identiques mais de durées différentes les variations d'entropie  $\Delta S_1$  comparées à l'entropie fournie par les sources extérieures  $J_1$ . Les différences entre ces courbes sont représentatives des écarts entre le régime réversible et le régime réel. Toutes les courbes sont normalisées par  $\Delta S_1 M$  qui correspond à la variation maximale de l'entropie dans l'évolution.

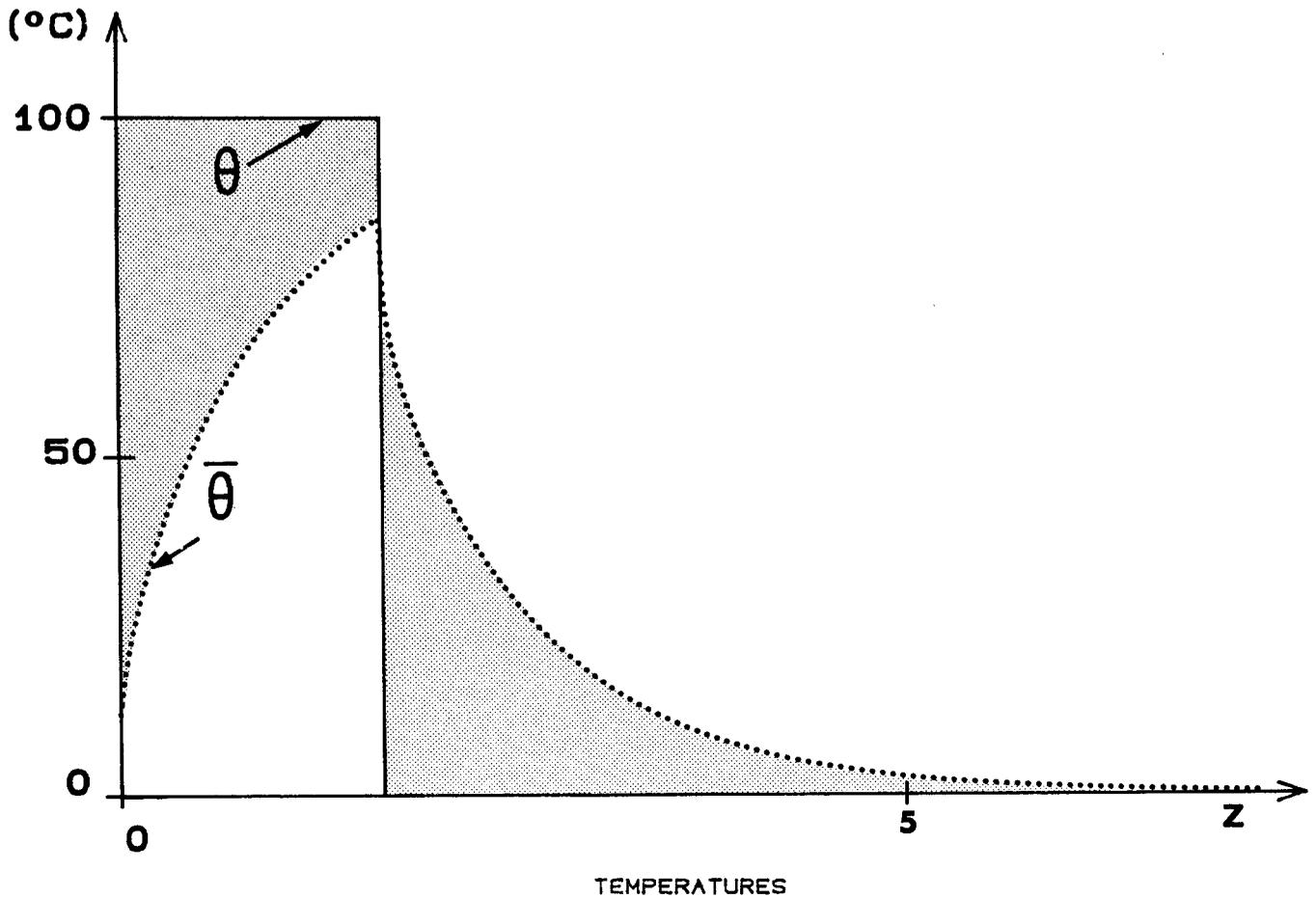
On vérifie sur ces courbes que  $\Delta S_1 > J_1$  en cours de stockage et que la valeur finale de  $J_1$  est négative  $J_{1\infty} < 0$ . La valeur absolue normalisée de  $J_{1\infty}/\Delta S_1 M$  est égale au coefficient de qualité de l'évolution. Pour les trois processus étudiés le coefficient de qualité est sensiblement constant et égal à 0,3.



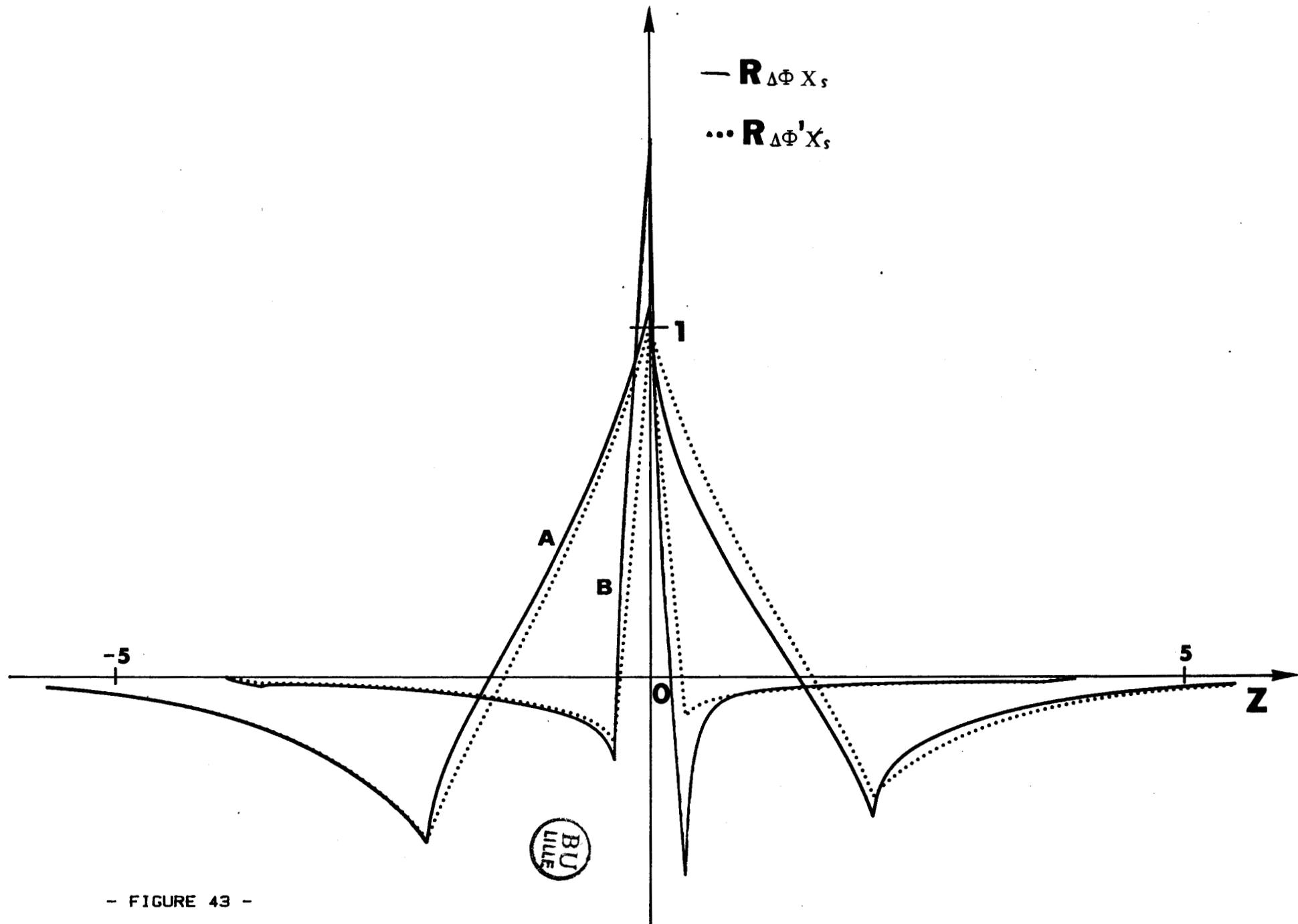
DIFFERENCE DES FLUX



- FIGURE 42 -

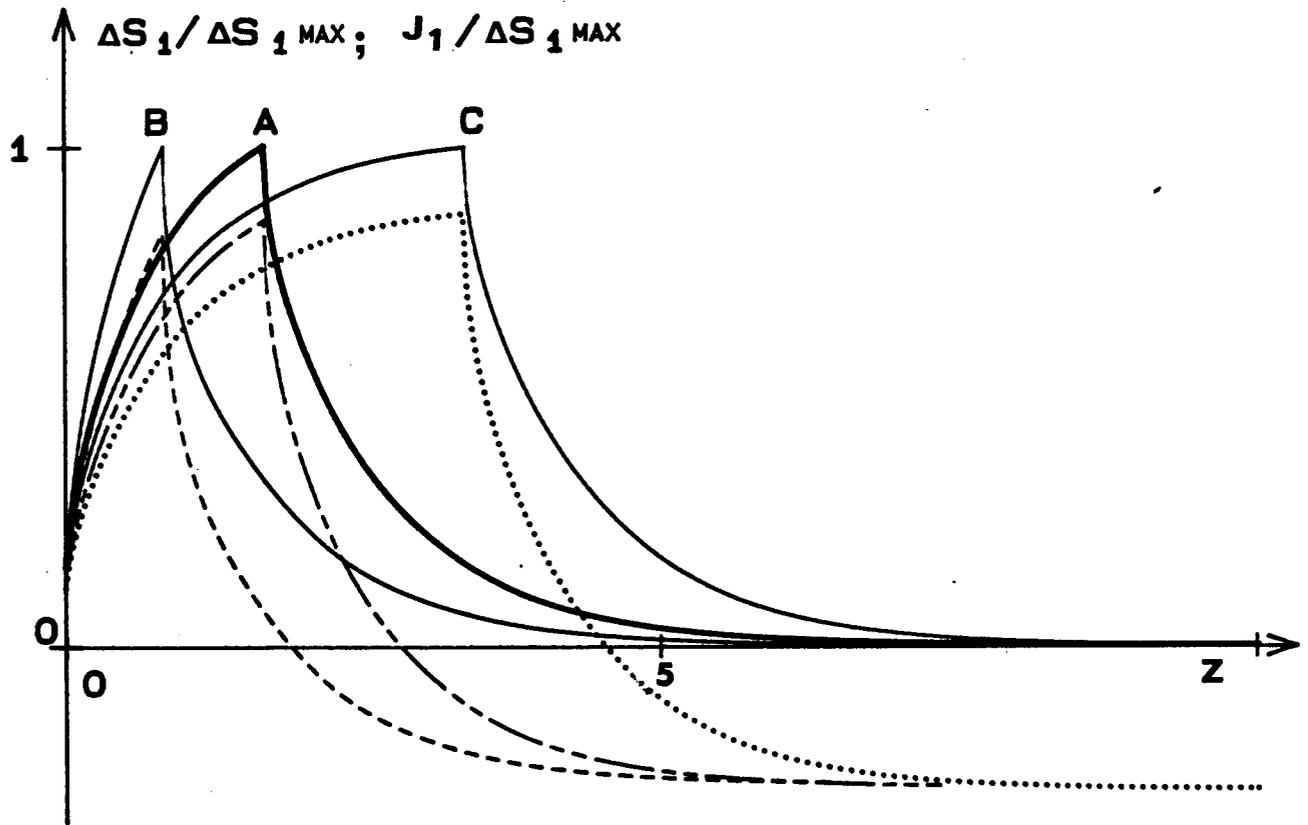


TEMPERATURES



- FIGURE 43 -

PRODUCTIONS D'ENTROPIE MINIMALE ET REELLE



$T_0 = 300 \text{ (K)}$

- FIGURE 44 -

TERME SOURCE  $J_1$  VARIATION D'ENTROPIE  $\Delta S_1$

#### IV. CONCLUSION

Pour un système en déséquilibre thermique, il est possible d'exprimer les échanges d'énergie et d'entropie avec l'extérieur en fonction des grandeurs généralisées mesurables introduites au chapitre précédent. La grandeur  $\Delta\phi$  représente la vitesse de variation de l'énergie interne, son intégrale est une fonction d'état. L'échange d'entropie avec le milieu extérieur permet d'entretenir deux processus : le stockage de chaleur sensible et la dissipation interne par conduction thermique.

L'expression générale du bilan d'entropie relative à une paroi homogène fait apparaître deux forces de déséquilibre, l'une résulte de l'écart de température  $\Delta\theta$  aux bornes du système, elle induit la dissipation du mode "transfert", l'autre résulte de l'écart instantané entre la température moyenne de surface et la température moyenne du système  $\Sigma \theta / 2 - \bar{\theta}$ , elle induit la dissipation du mode "stockage". La production interne d'entropie s'obtient par la somme des produits des forces de déséquilibre et de leurs grandeurs conjuguées  $\Sigma\phi$  et  $\Delta\phi$  et d'une entropie réversible qui dépend du détail du champ de température interne. L'étude au chapitre I des régimes quasi-stationnaires relatifs aux deux modes de base permet de définir deux régimes de références caractérisés par une dissipation minimale. On montre que pour un processus instationnaire, la dissipation réelle résulte de produits de convolution entre les productions minimales et des fonctions réponses propres au système. Les fonctions de corrélation relatives aux forces de déséquilibre et à leurs grandeurs conjuguées fournissent une représentation générale de la dissipation interne qui ne dépend que du contenu spectral des signaux.

Pour un processus donné l'écart entre la production réelle d'entropie et la production minimale résulte des importances respectives des régimes transitoires (hautes fréquences) et des régimes quasi-stationnaires (basses fréquences) dans l'évolution. Cette évaluation peut être faite en introduisant la notion de "résistance apparente", cette grandeur est une fonction de transformation qui s'identifie à la résistance thermique du système quand la part des régimes transitoires est faible dans la période d'observation considérée.

Dans le cas d'un système multicouche dissymétrique il y a lieu d'ajouter à l'expression du bilan d'entropie une contribution réversible qui résulte de l'écart instantané entre la température moyenne de chaque couche et la température moyenne globale définie par le rapport de la quantité de chaleur stockée et de la somme des capacités thermiques du système.

Ces développements théoriques introduisent naturellement des produits flux-forces généralisés ou de façon plus générale des fonctions d'intercorrélation flux-forces généralisées pour représenter la dissipation interne et les échanges d'entropie avec le monde extérieur. En pratique dans le domaine de la thermique des bâtiments les écarts de températures sont faibles vis-à-vis de la température absolue les échanges d'entropie peuvent être représentés par des produits flux-variation de température.

CHAPITRE III

RESULTATS EXPERIMENTAUX

## **I. INTRODUCTION**

Ce chapitre consacré aux résultats expérimentaux a deux objectifs nettement distincts :

- Une première partie traite d'essais de laboratoire effectués généralement sur des échantillons de grandes tailles et vise essentiellement à illustrer et vérifier par l'expérimentation les développements théoriques des chapitres I et II.
- La seconde partie relative à des mesures sur site a pour objectif de montrer sur un exemple d'application l'intérêt des méthodes de traitement qui ont été développées et validées par des interprétations théoriques dans le cadre général de la thermodynamique dans les parties précédentes.

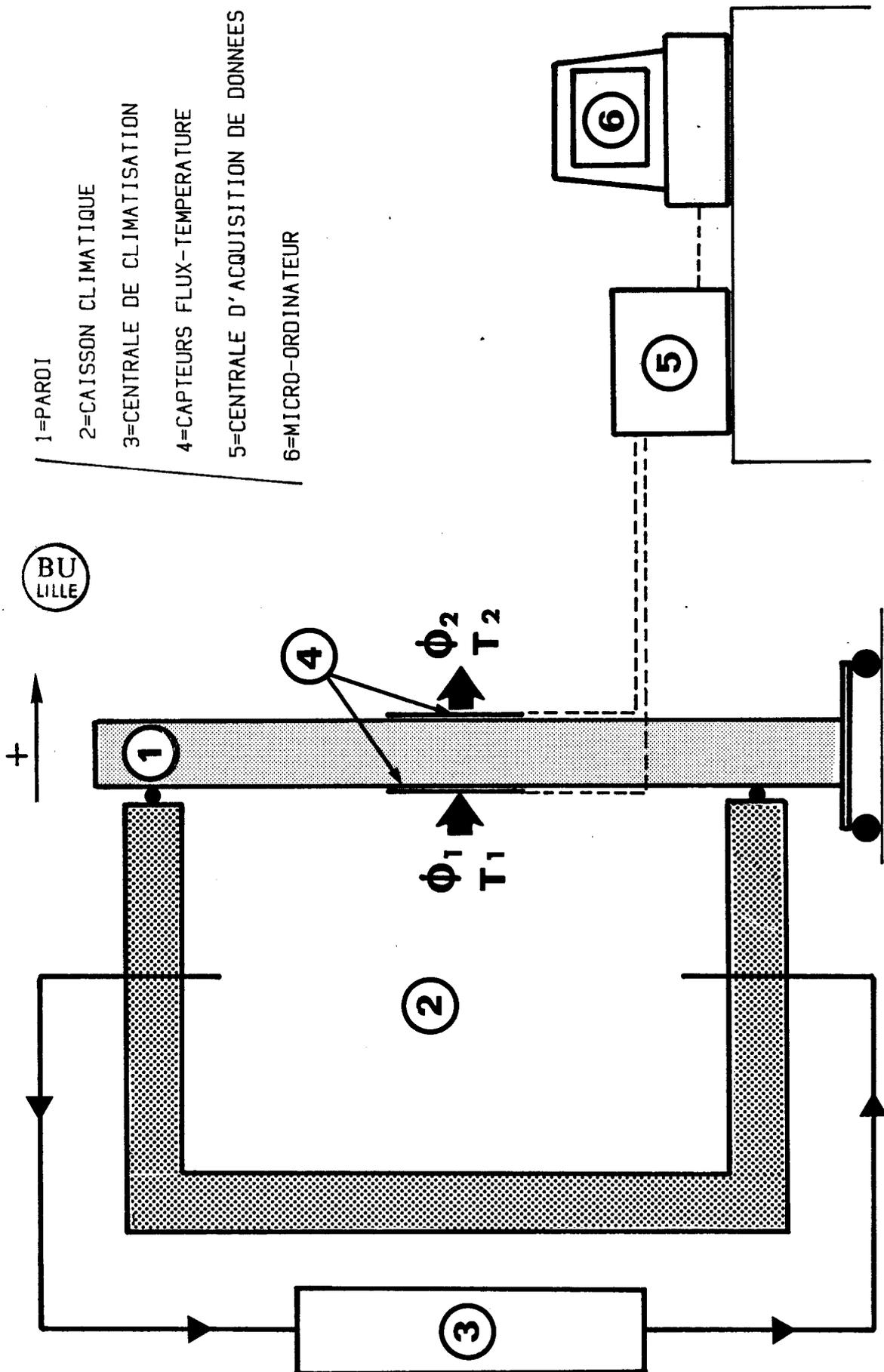
## **II. ETUDE EXPERIMENTALE DES TRANSFERTS THERMIQUES DANS UNE PAROI HOMOGENE EN REGIME VARIABLE**

### **2.1. Conditions expérimentales**

Les méthodes de traitement des flux et températures de surfaces développées dans les chapitres précédents sont générales et ne supposent aucune modélisation préalable des conditions limites. Ces résultats s'appliquent au traitement des mesures effectuées au cours d'essais sur une cloison homogène dont les faces échangent de la chaleur par convection et rayonnement avec le milieu environnant.

La paroi de 1,5 x 2,1 m est constituée de carreaux de plâtre pleins d'épaisseur 7 cm. La cloison est disposée sur un chariot mobile afin de faciliter la mise en place dans le dispositif expérimental (figure 45).

Une face de la paroi est soumise à des échanges thermiques dues aux variations de température de l'air d'un caisson climatique de volume voisin de 4 m<sup>3</sup>. L'autre face est soumise à des sollicitations naturelles et incontrôlables résultant d'échanges avec l'ambiance du laboratoire.



- FIGURE 45 -

L'état thermodynamique de l'air du caisson climatique est contrôlé par échanges thermiques dans deux batteries chaudes de puissances modulables et une batterie froide. La circulation de l'air est assurée par un ventilateur à débit variable. Les batteries peuvent être pilotées par une régulation proportionnelle industrielle, ou contrôlées par un micro-ordinateur assurant à la fois l'acquisition des données et le pilotage de la centrale de climatisation.

Le micro-ordinateur utilisé est un CBM 4032 auquel est associée une chaîne d'acquisition classique interfacée HPIB qui permet le balayage et la mesure de "10 voies bas "niveaux". Une chaîne réalisée dans la laboratoire (42) interfacée sur le port utilisateur du micro-ordinateur permet à la fois l'acquisition des données et le pilotage des batteries de chauffe.

Les fluxmètres thermiques sont "collés" à la graisse sur les surfaces de la cloison. Les capteurs utilisés sont du type "plans" (annexe 2) de surface active 0,25 x 0,25 m, l'épaisseur totale est inférieure à 0,2 mm. La sensibilité est de l'ordre de  $30 \mu\text{V/W/m}^2$ , la constante de temps est de l'ordre de 1 seconde. Les variations de température dans les plans de mesure ont été mesurées par des thermocouples plats intégrés aux fluxmètres thermiques. La surface extérieure des capteurs est revêtue d'un film de peinture blanc mat afin d'uniformiser les caractéristiques de rayonnement thermique du capteur et de la cloison de plâtre.

Afin de vérifier la validité de nos mesures dans ces conditions expérimentales, nous avons mesuré en laboratoire la résistance et la capacité (R et C) de la paroi de plâtre, ces mesures ont été effectuées suivant une procédure classique entre plaques échangeuses à température régulée, la détermination de la capacité est obtenue par des bilans d'énergie entre deux états isothermes (43), la résistance thermique par l'exploitation des flux et températures de surfaces en régime quasi-stationnaire.

Connaissant les valeurs des paramètres R et C ainsi que les expressions théoriques des fonctions de transfert caractéristiques de la paroi, il est possible de simuler la réponse de la cloison à une sollicitation aléatoire mesurée et de la comparer aux mesures expérimentales.

La figure 46 permet de comparer la quantité  $\dot{\xi}_\phi$  mesurée lors d'un essai (traits pleins) à la somme des flux simulée à partir de l'enregistrement de la différence des températures  $\Delta\theta$  :

$$\dot{\xi}_\phi(t)_{\text{simulé}} = h_t \Delta\theta(t)$$

La figure 46 montre que la courbe simulée se confond avec la courbe expérimentale. Les fluctuations expérimentales très rapides de la quantité  $\dot{\xi}_\phi$  sont "intégrées" au niveau de  $\Delta\theta$ , les variations temporelles de  $\dot{\xi}_\phi$  obtenues par simulation apparaissent "plus lissées" que le signal expérimental.

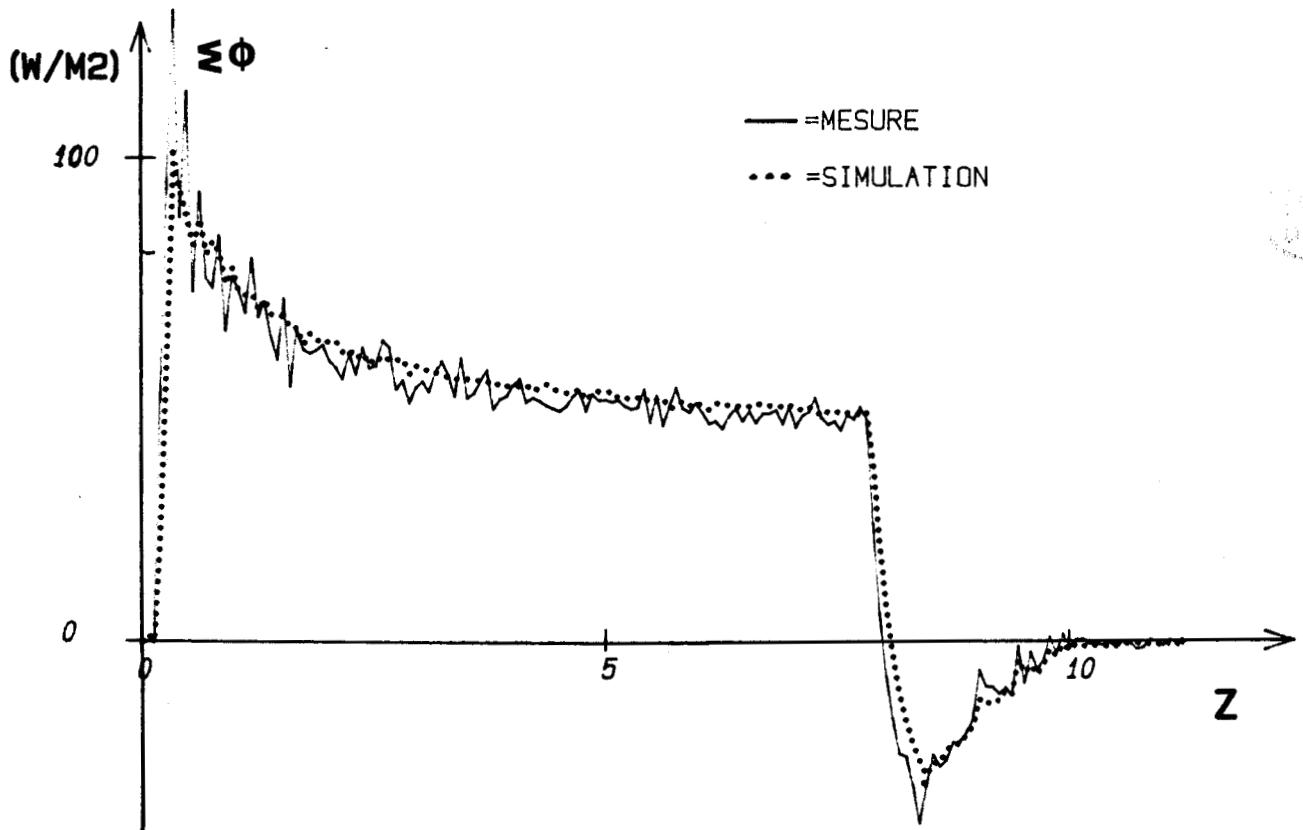
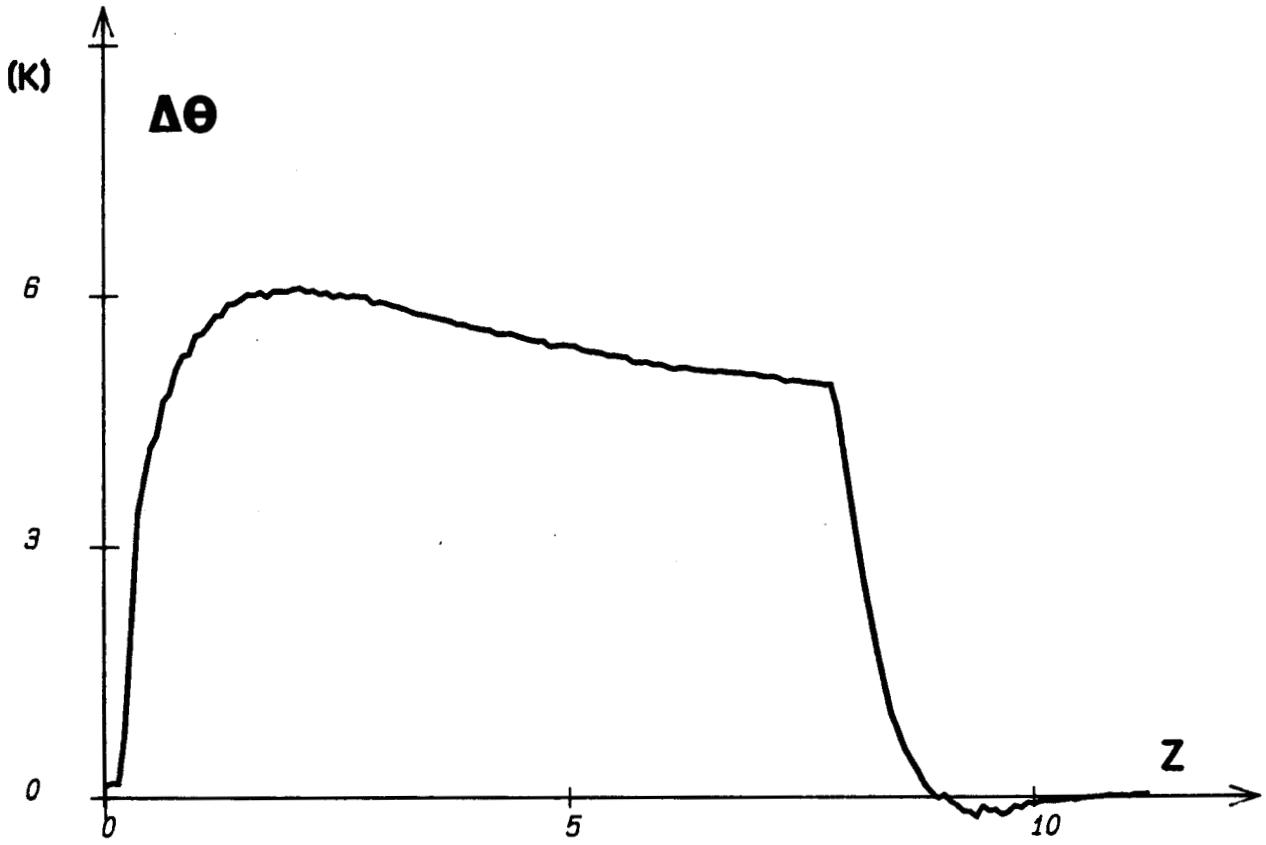
De la même façon la figure 47 permet de comparer pour un autre essai les évolutions des quantités  $\dot{\xi}_\theta$  (somme des températures) mesurées et simulées à partir des variations de  $\Delta\phi$  mesurées expérimentalement.

$$\dot{\xi}_\theta(t)_{\text{simulé}} = h_s \Delta\phi(t)$$

Les courbes obtenues sont très voisines. Ces résultats valident les mesures de flux et températures réalisées. Une autre vérification consiste à calculer la résistance thermique (application de la relation théorique 22) par le rapport des moyennes temporelles des quantités  $\Delta\theta(t)$  et  $\dot{\xi}_\phi(t)$  et comparer cette valeur au résultat obtenu dans les plaques échangeuses en régime quasi-stationnaire. La figure 48 représente la variation du rapport  $\frac{2 \cdot \int \Delta\theta(t) \cdot dt}{\int \dot{\xi}_\phi(t) \cdot dt}$  obtenu. On peut constater que cette fonction converge bien vers la valeur de R en fin d'essai.

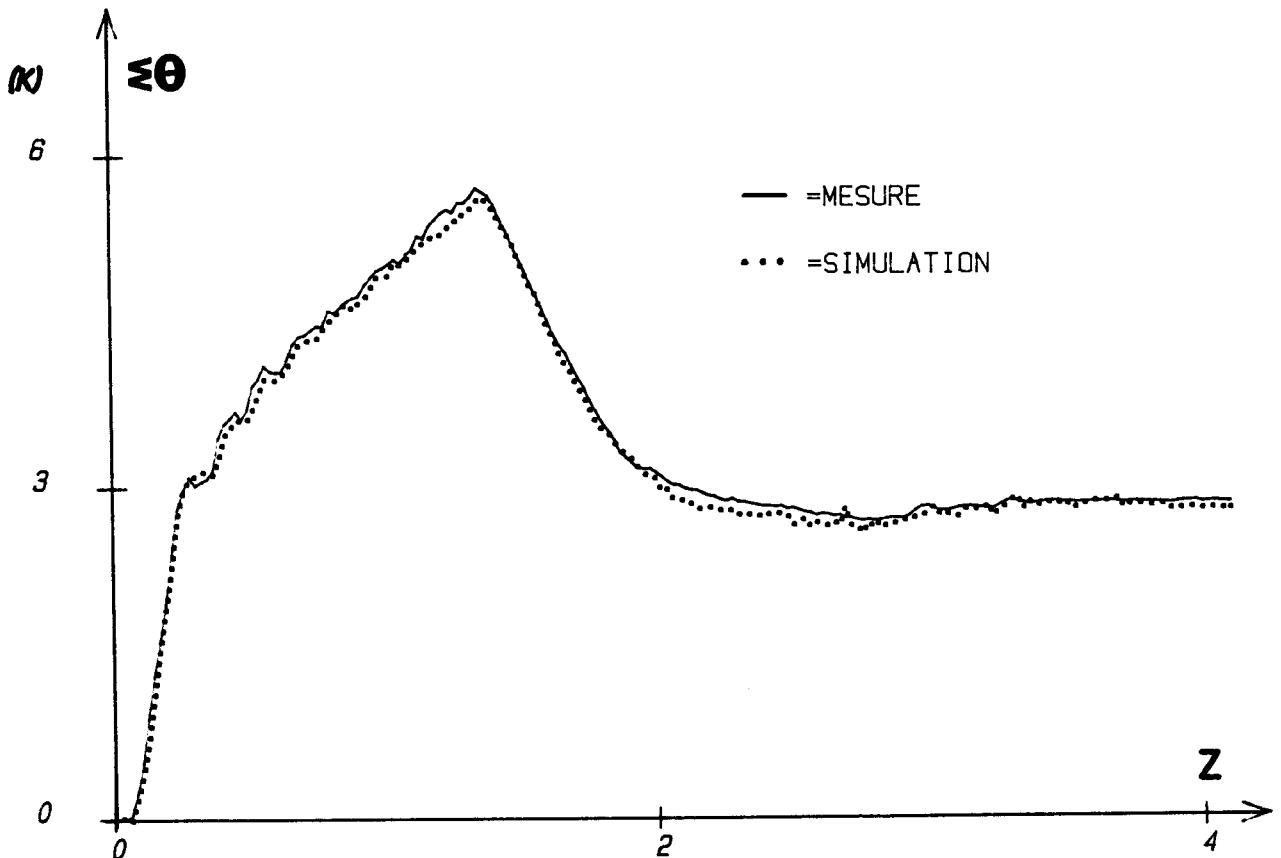
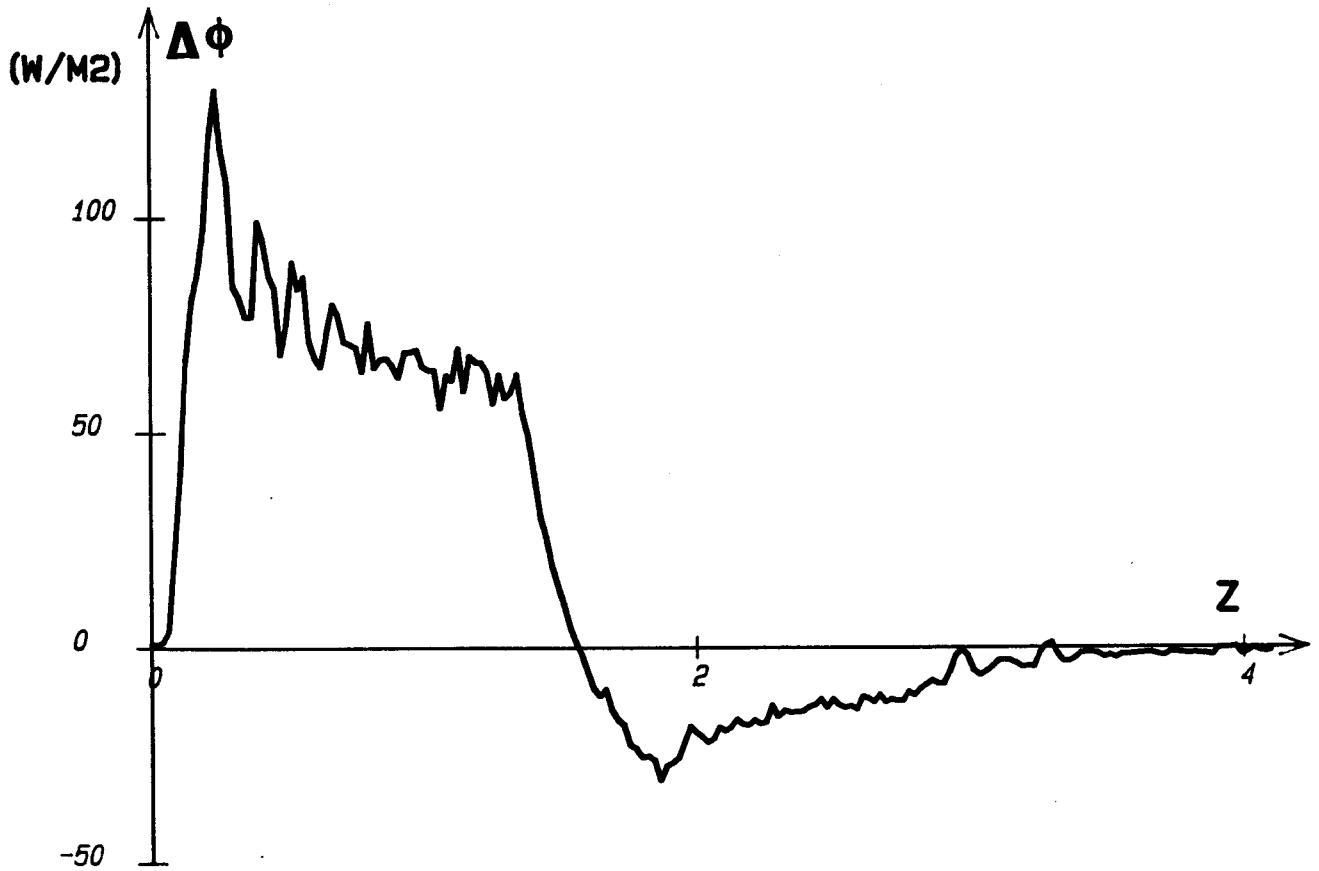
## 2.2. Production d'entropie

Nous avons montré dans le second chapitre que la production d'entropie par conduction thermique était la superposition de deux contributions. L'une, associée à la variation d'énergie interne résulte de l'écart instantané entre la température superficielle et la température moyenne du système. L'autre, associée au processus de transfert de chaleur dans l'échantillon s'exprime en fonction de la différence des températures entre les surfaces limites du système. Pour une évolution entre deux

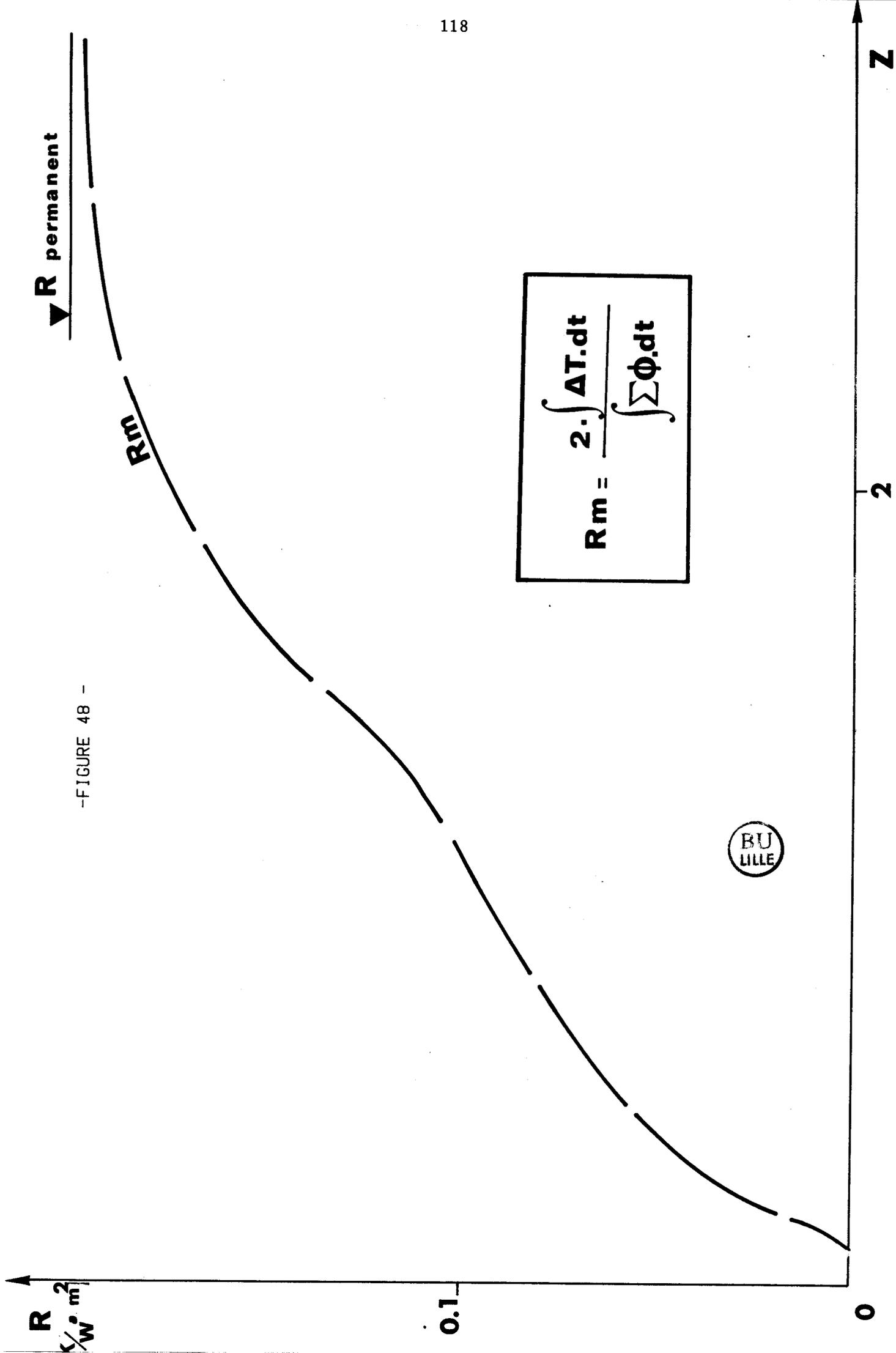


- FIGURE 46 -

COMPARAISON DES SIGNAUX MESURES ET SIMULES



- FIGURE 47 -  
COMPARAISON DES SIGNAUX MESURES ET SIMULES



états isothermes, ces contributions peuvent être explicitées sous la forme :

$$\Delta iS = \int_0^t \Delta\phi \cdot X_S \cdot dt + \int_0^t \xi_\phi \cdot X_t \cdot dt = E_1 + J_2$$

La production d'entropie est la somme des produits entre les forces thermodynamiques  $X_t = \Delta\left(\frac{1}{T}\right)$ ,  $X_S = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$  et les grandeurs conjuguées accessibles à la mesure  $\Delta\phi$  et  $\xi_\phi$ . Pour chacune de ces forces thermodynamiques la production d'entropie est minimale en régime quasi-stationnaire lorsque  $\xi_\phi$  et  $\Delta\phi$  sont proportionnels aux quantités  $\Delta\theta$  et  $\xi_\theta - \bar{\theta}$ .

La figure 49 représente la variation temporelle de la différence des températures superficielles  $\Delta\theta$  observées entre les surfaces extrêmes. Dans ces conditions la paroi est soumise à une force thermodynamique  $X_t$  et la réponse est représentée par les variations de la quantité conjuguée  $\xi_\phi(t)$ . La figure 50 représente pour le même essai la demi-somme des températures superficielles  $\xi_{\theta/2}$  et la température moyenne  $\bar{\theta}$ . L'inégalité de ces quantités provoque l'apparition d'un flux conjugué  $\Delta\phi$  (mesuré). L'état final isotherme est tel que  $\xi_{\theta/2} = \bar{\theta}$  et  $\Delta\phi = 0$ .

La figure 54 permet de comparer :

- pour le processus de transfert

. la production réelle d'entropie est :  $J_2 = \int \frac{\xi_\phi \cdot \Delta\theta}{2 T_1 T_2} dt$

. la production minimale étant :  $D_1 = \int \frac{\Delta \theta^2}{R T_1 T_2} dt$

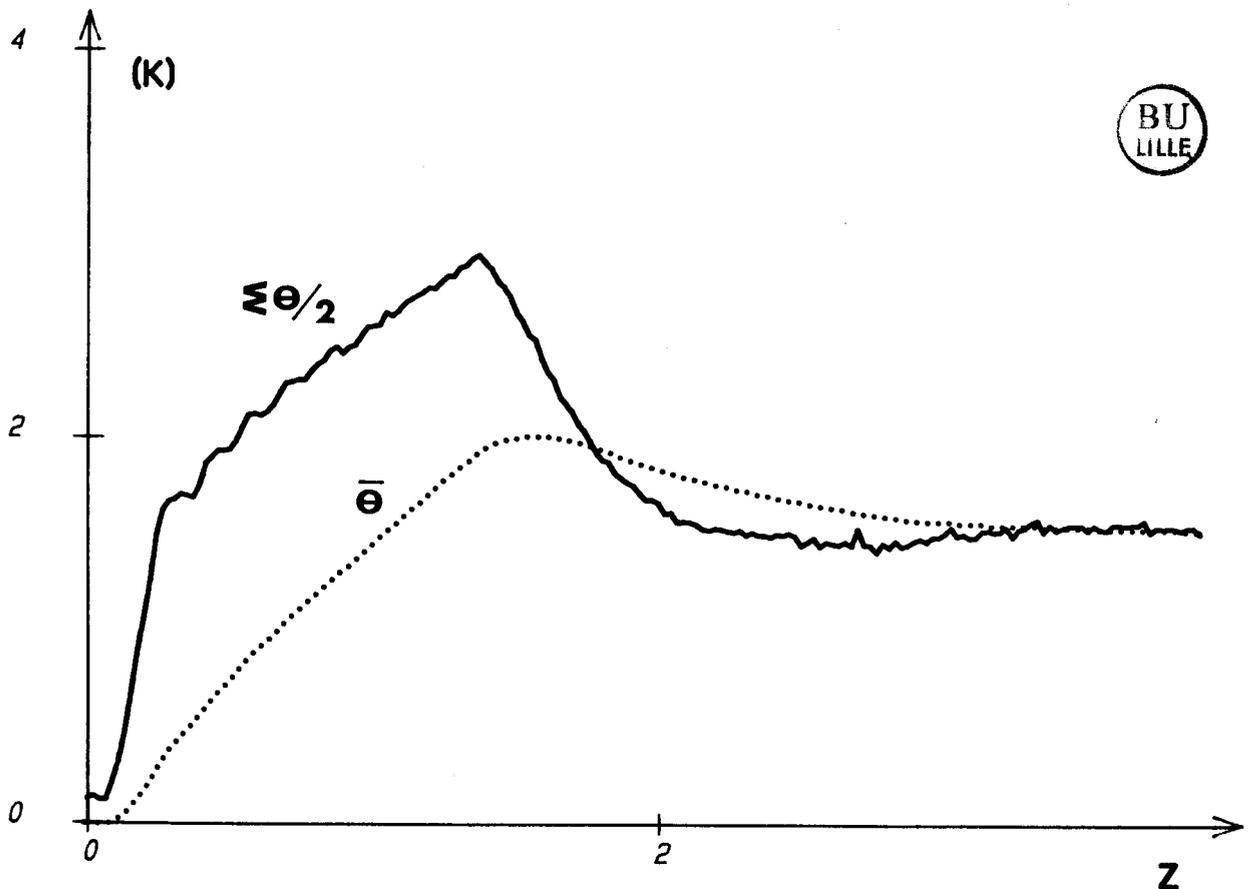
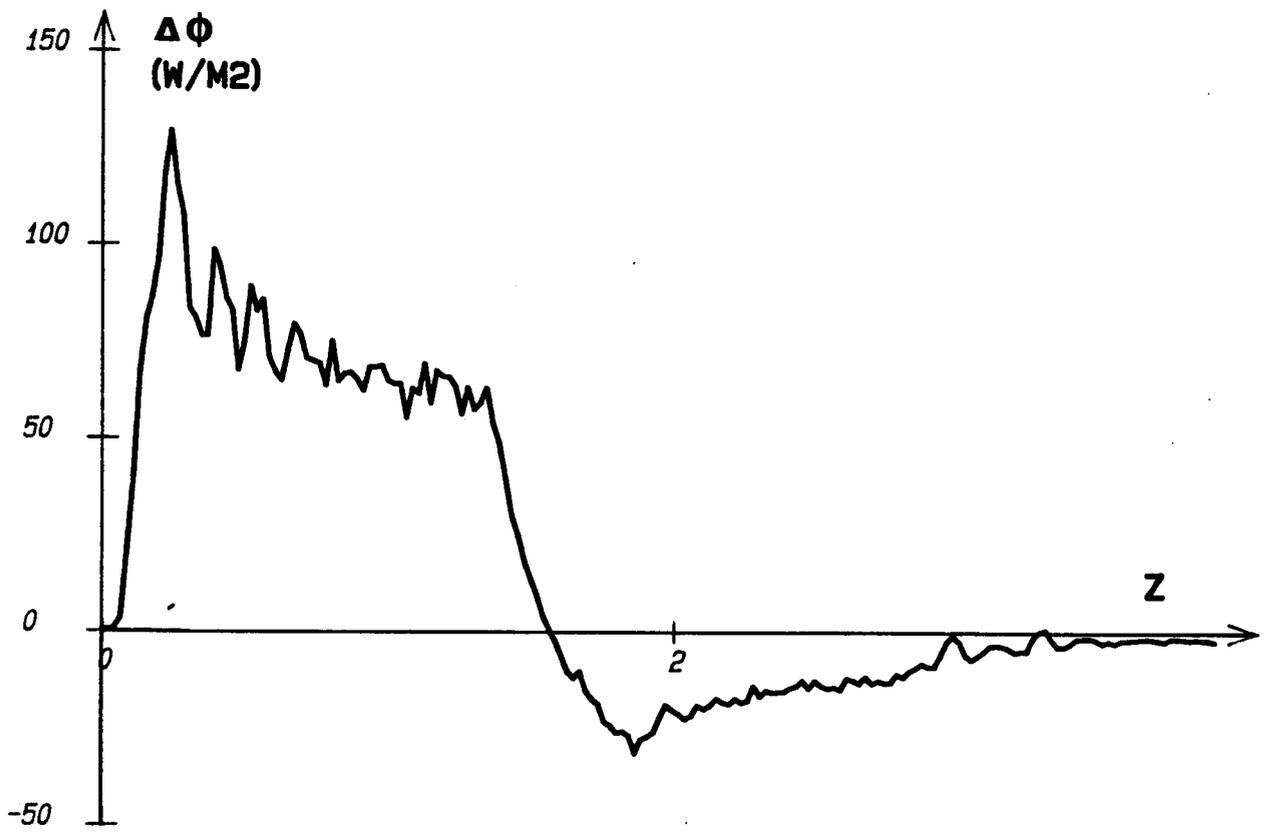
- pour le processus de stockage

. la production réelle d'entropie est :

$$E_1 = \int \Delta\phi \cdot \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \xi_\phi dt$$

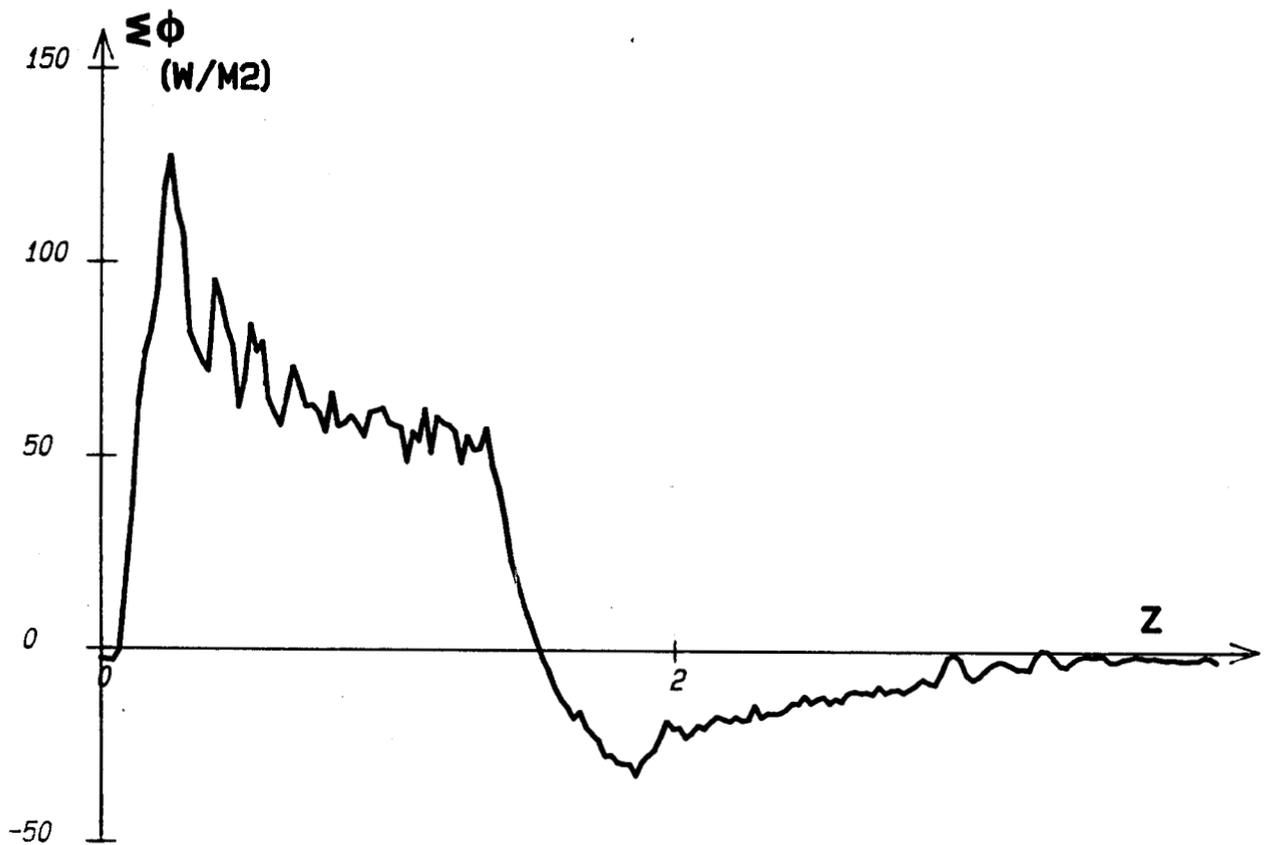
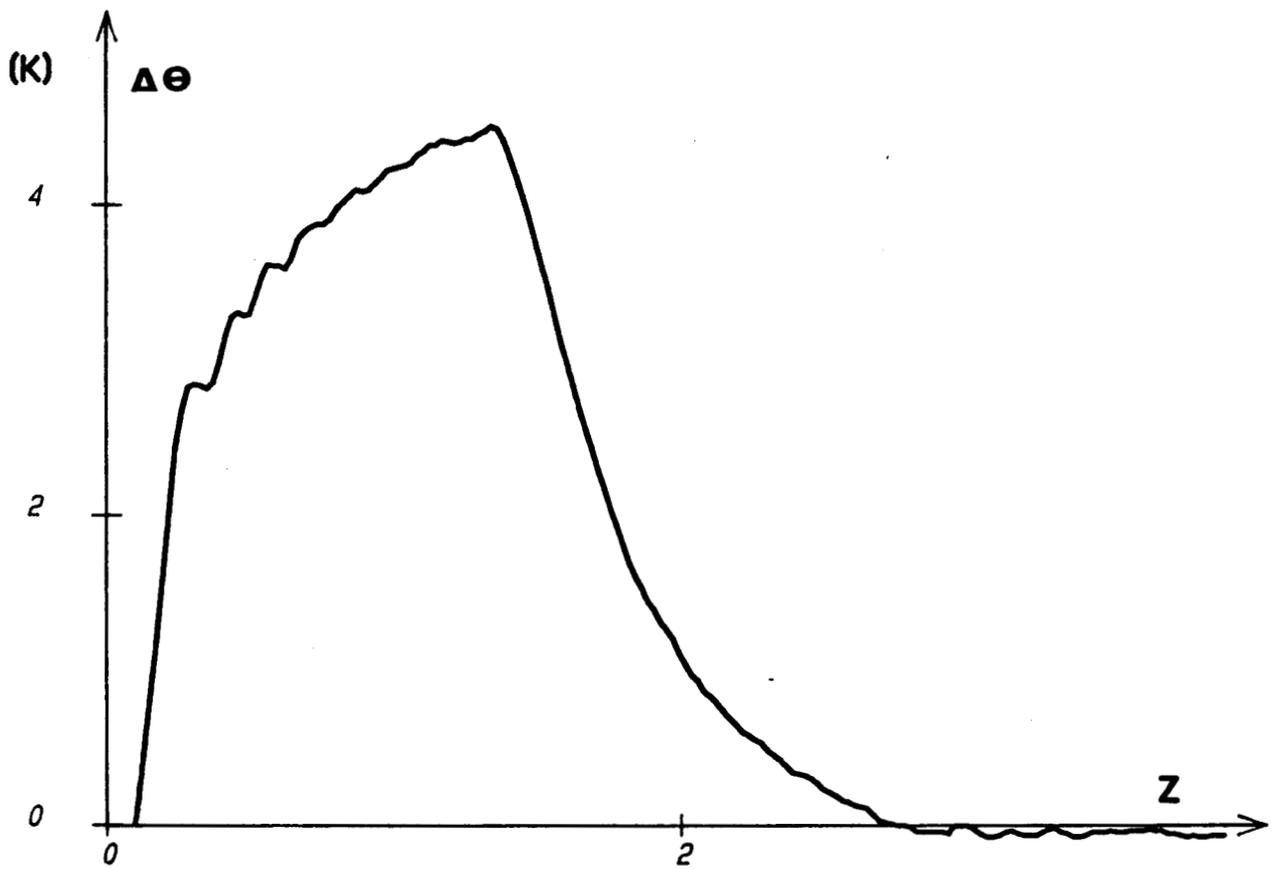
. la production minimale étant :

$$E'_1 = \int \Delta\phi \cdot \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \xi_\phi dt$$



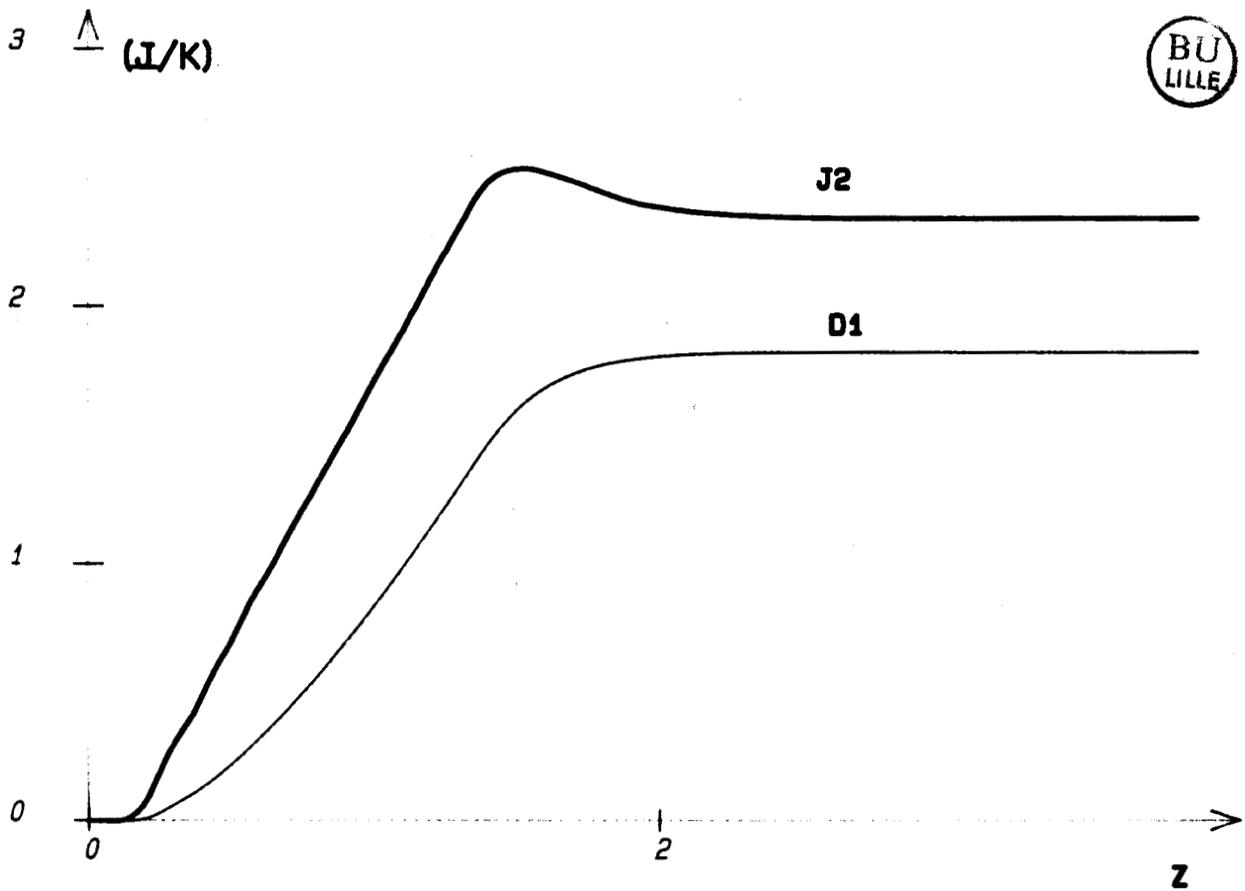
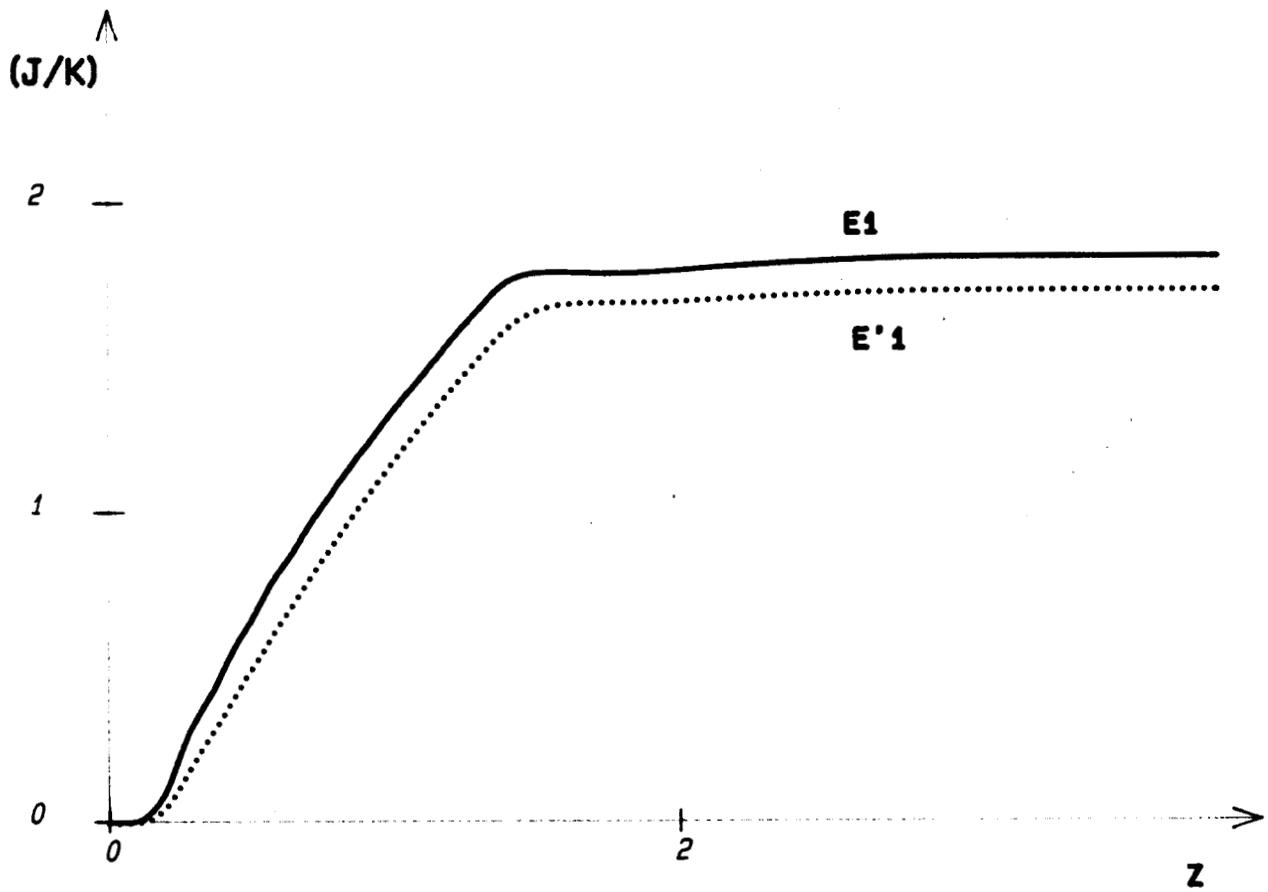
- FIGURE 49 -

DIFFERENCE DES FLUX TEMPERATURES MOYENNE ET DE SURFACE



- FIGURE 50 -

DIFFERENCE DES TEMPERATURES ET SOMME DES FLUX



- FIGURE 51 -  
PRODUCTION D'ENTROPIE

On constate que les deux contributions sont ici du même ordre de grandeur  $J_2$  final = 2,3 (J/K),  $E_1$  final = 1,87 (J/K). Cependant, pour le processus de transfert l'écart entre la production réelle et la production minimale est plus important que pour le processus de stockage. Nous obtenons respectivement dans l'état final :

$$\begin{aligned} J_2/D_1 &= 1,28 \\ E_1/E'_1 &= 1,06 \end{aligned}$$

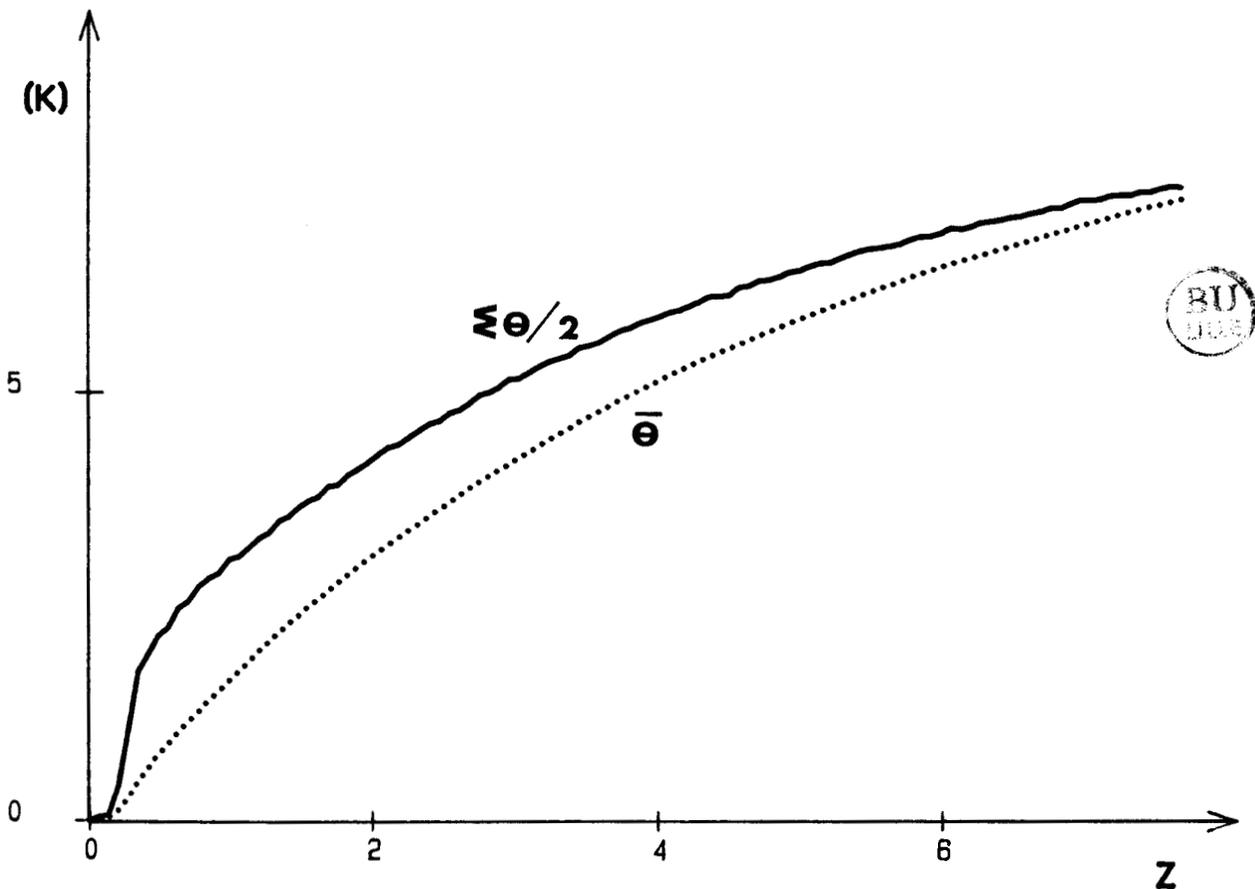
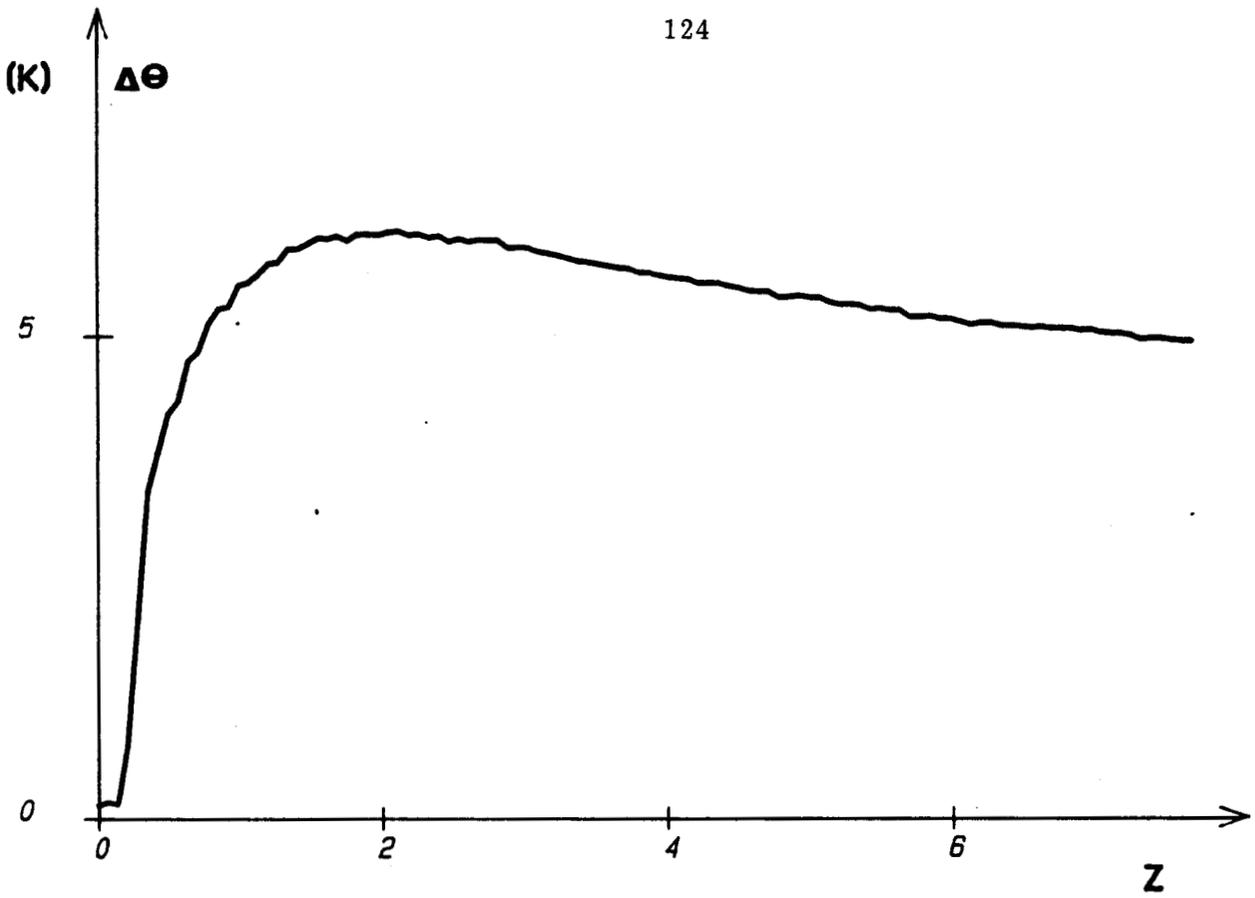
La production totale d'entropie dans l'évolution est égale à la somme  $J_2 + E_1 = 4,17$  (J/K), la production minimale est  $D_1 + E'_1 = 3,56$  (J/K), la différence entre ces grandeurs correspond à l'entropie produite dans l'ensemble des régimes transitoires.

La figure 52 illustre un autre essai, la variation de la quantité  $\Delta\theta$  est représentée par un "échelon" dont la durée est grande devant la constante de temps de la paroi  $z > 7$ . La température moyenne  $\bar{\theta}$  et la demi-somme des températures de surface  $\xi \theta/2$  sont représentés. La somme des températures superficielles rapidement variable en début d'essai croît ensuite lentement comme la température ambiante du laboratoire.

La somme et la différence des flux sont représentées figure 53. Dans la phase transitoire ( $z < 2$ ) ces deux quantités sont pratiquement confondues ( $\Phi_2 \approx 0$ ) puis  $\Delta\Phi$  diminue avec  $\xi \theta/2 - \bar{\theta}$ . La quantité  $\xi\Phi$  est sensiblement constante et le régime est quasi-stationnaire.

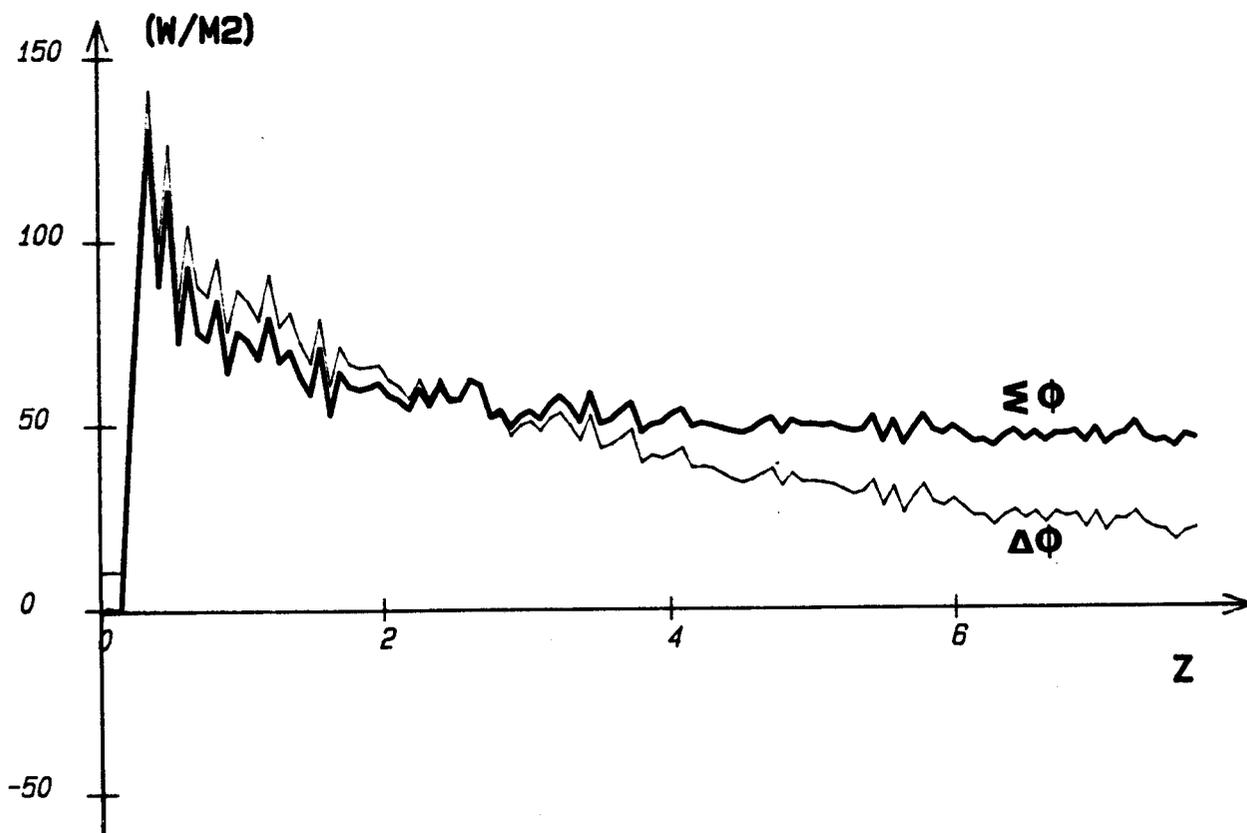
La figure 54 représente les variations dans le temps de l'entropie créée par conduction thermique dans le processus de stockage (traits fins) et dans le processus de transfert (traits forts). Les productions minimales des deux processus sont représentées en traits mixtes et pointillés.

Pour cet essai la quantité  $\Delta S_2$  n'est pas nulle puisque l'état final n'est pas isotherme, pour une différence de température de 5°C on peut estimer sa valeur en régime stationnaire  $\Delta S_2 \approx 0,85$  (J/K).

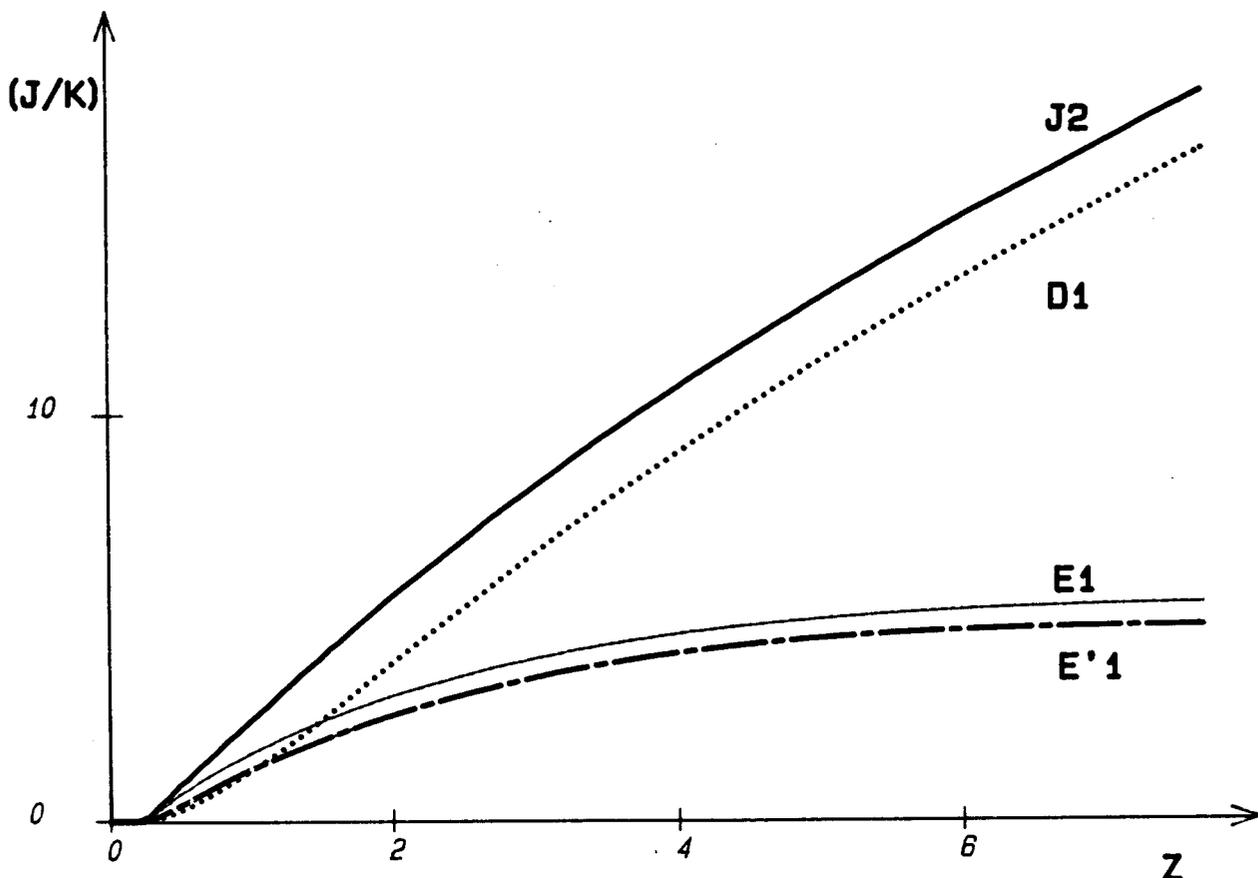


- FIGURE 52 -

TEMPERATURES MOYENNES ET DE SURFACE, DIFFERENCE DES TEMPERATURES



- FIGURE 53 -  
SOMME ET DIFFERENCE DES FLUX



- FIGURE 54 -  
PRODUCTIONS D'ENTROPIE REELLE ET MINIMALE

On constate que l'entropie produite au cours du processus de transfert est beaucoup plus importante que dans le processus de stockage.

$$J_2 \text{ final} \approx 18 \quad (\text{J/k})$$

$$E_1 \text{ final} \approx 5,4 \quad (\text{J/k})$$

Dans la partie asymptotique de la courbe  $\theta / 2 - \xi \bar{\theta} \rightarrow 0$  et la production d'entropie du processus de stockage tend vers une constante, par contre la quantité  $J_2$  est une fonction croissante du temps représentative de l'entretien du processus de transfert en régime quasi-stationnaire.

En comparant les productions réelles et les productions minimales d'entropie, on constate que c'est au tout début de l'évolution, en début de régime transitoire que se crée l'écart, dès le temps réduit  $z > 1$  les productions réelles et minimales évoluent parallèlement.

Il apparaît que pour une paroi homogène soumise à des variations de température en forme d'échelons, les processus de transfert et de stockage engendrent des productions d'entropie du même ordre de grandeur en régime transitoire. Dans la partie asymptotique de l'évolution, le taux d'entropie produite par conduction thermique (par unité de temps) est nul pour le processus de stockage et constant pour le processus de transfert (régime permanent). C'est en régime fortement transitoire que se crée l'essentiel de l'écart entre la production réelle et la production minimale d'entropie.

### 2.3. Représentation "temps" de la dissipation interne dans le processus de transfert

La production d'entropie au cours d'une telle évolution est représentée par le terme  $J_2 = \int_0^t \xi \Phi \cdot X_t$ . Pour une évolution déterminée l'écart entre cette valeur et la production minimale  $D_1$  représente l'entropie dissipée pour entretenir les régimes transitoires. L'entropie dissipée dans les régimes transitoires peut être représentée par la différence des valeurs à l'origine de deux fonctions d'intercorrélations  $R \xi \Phi, X_t(0)$  et  $\frac{2}{R} \cdot R \Delta \theta, X_t(0)$ .

La figure 55 représente pour deux essais la différence des températures ( $\Delta\theta$ ) et la somme des flux ( $\xi\phi$ ) mesurés. Les signaux imposés ont la forme de créneaux, le signal (a) est de durée grande par rapport à la constante de temps de la paroi ( $z \approx 10$ ), le signal (b) a une durée beaucoup plus petite ( $z \approx 2$ ).

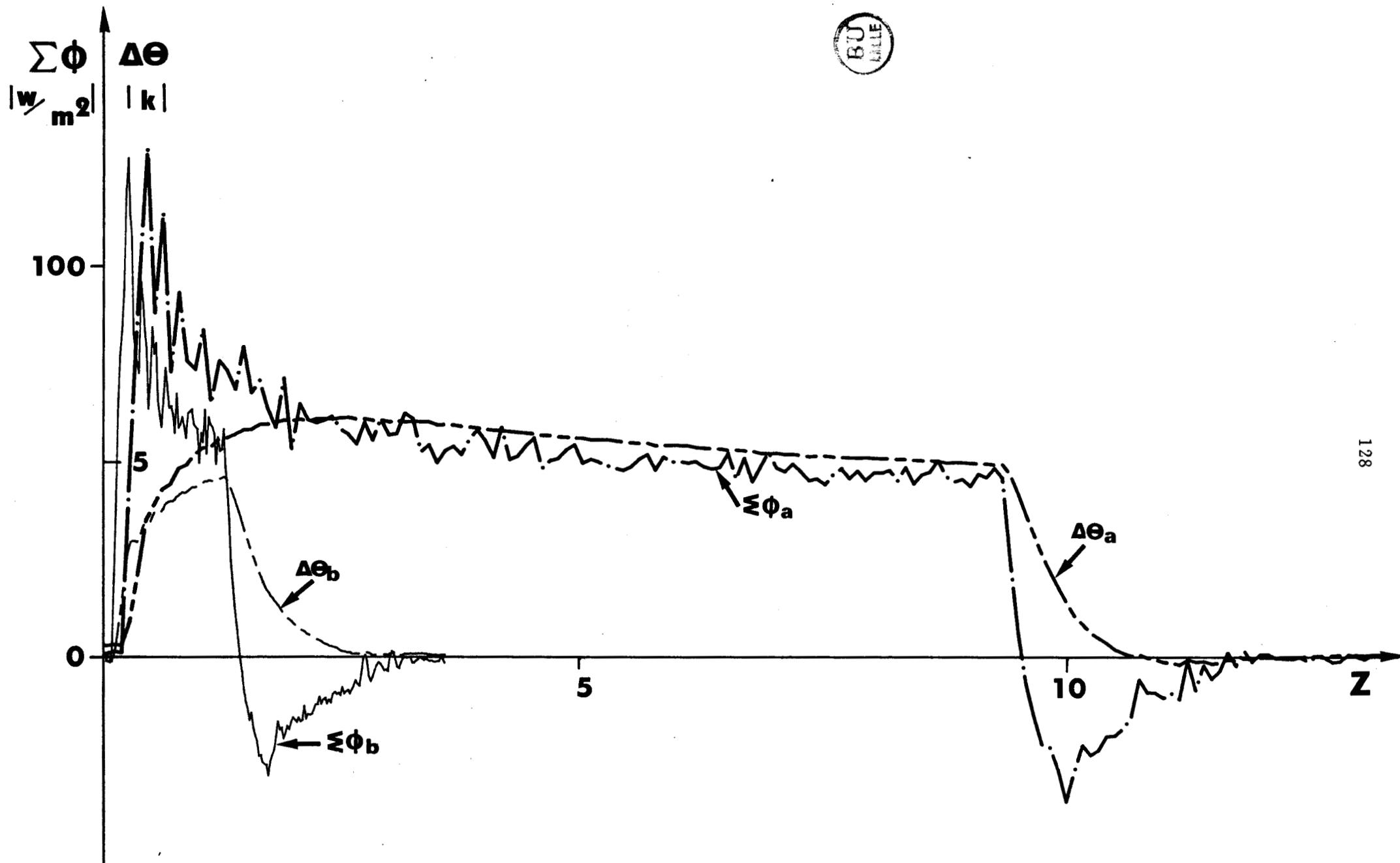
La figure 56 représente pour les deux évolutions les fonctions de corrélations  $R_{\xi\phi} X_t(\tau)$  et  $\frac{2}{R} R_{\Delta\theta} X_t(\tau)$  ainsi que le produit de convolution  $h_t \otimes R_{\Delta\theta} X_t$ . Toutes ces courbes sont normalisées par rapport à la valeur à l'origine  $\frac{2}{R} R_{\Delta\theta} X_t(0)$  qui est une valeur de référence du point de vue de la dissipation (production minimale d'entropie).

On retrouve ici des résultats identiques à ceux obtenus par simulation dans le chapitre précédent, pour le processus (a) qui a une durée longue devant la constante de temps les fonctions  $R_{\xi\phi} X_t(\tau)$  et  $\frac{2}{R} R_{\Delta\theta} X_t(\tau)$  sont voisines, la production réelle d'entropie est proche de la production minimale, la valeur origine normalisée  $R_{\xi\phi} X_t(0)/D_1$  est voisine de 1. Pour le processus rapide (b) les courbes de  $R_{\xi\phi} X_t(\tau)$  et  $\frac{2}{R} R_{\Delta\theta} X_t(\tau)$  sont très différentes, la valeur origine  $R_{\xi\phi} X_t(0)/D_1$  est égale à 1,45, la production d'entropie est supérieure de 45 % à la production minimale.

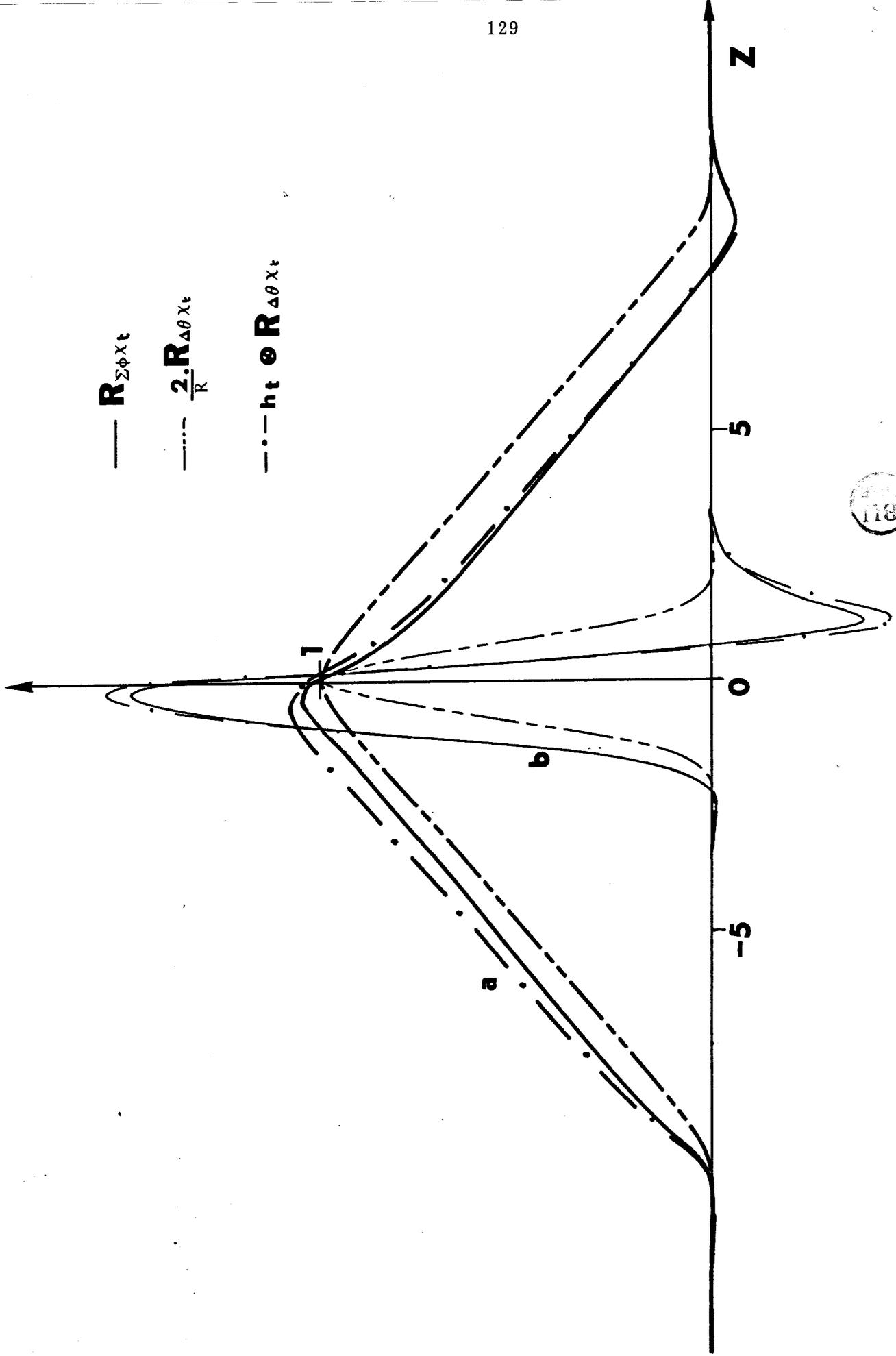
Le produit de convolution entre  $R_{\Delta\theta} X_t$  et la réponse impulsionnelle conduit à des valeurs très voisines de la fonction d'intercorrélation  $R_{\xi\phi} X_t(\tau)$  (écart maxi 6 %). La production réelle d'entropie s'obtient donc pour un produit de convolution entre la production minimale et une réponse impulsionnelle du système.

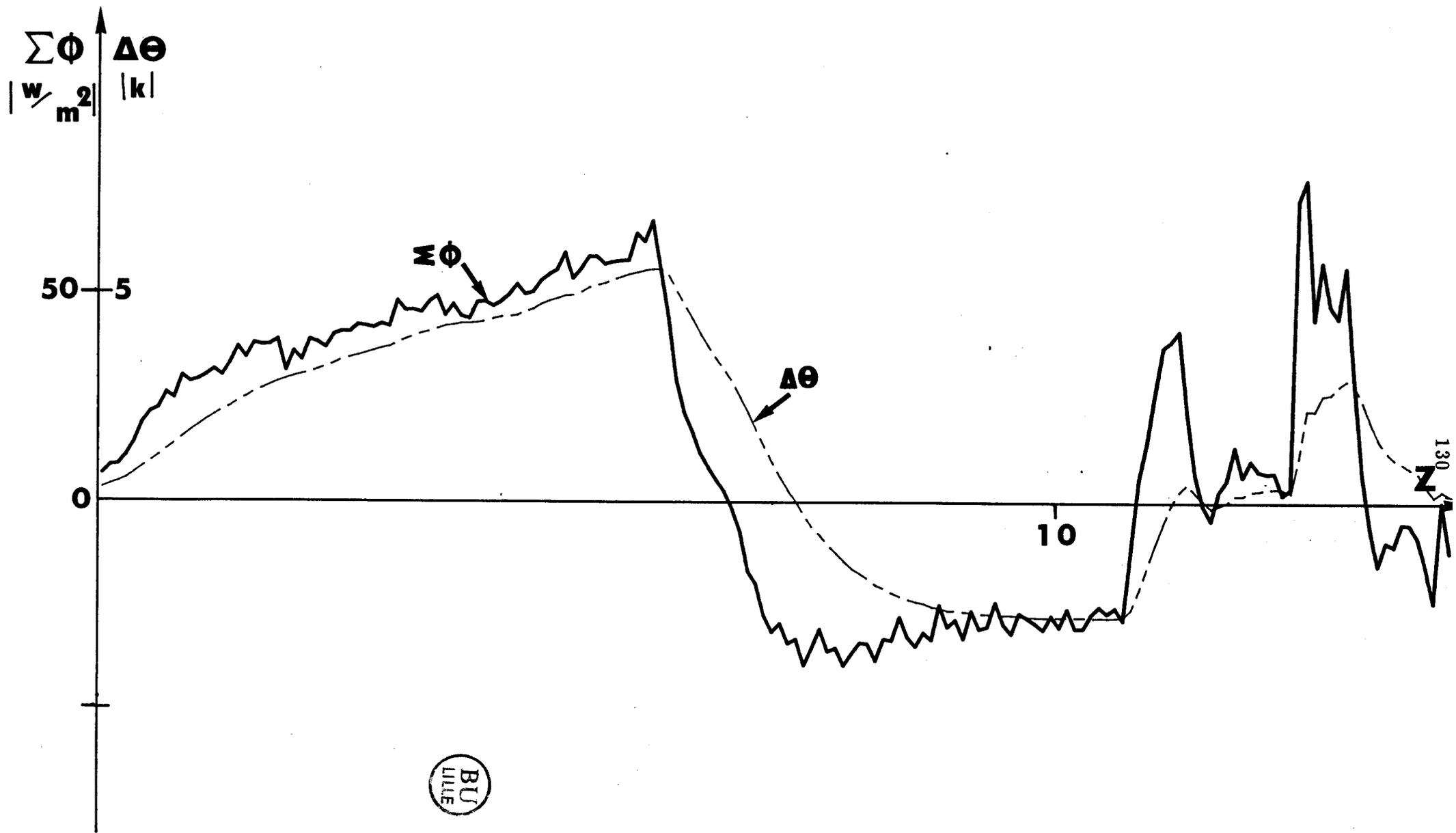
La figure 57 représente les évolutions de  $\Delta\theta$  et  $\xi\phi$  relatifs à un autre essai dans lequel nous avons réalisé une inversion de signe du gradient de température. La durée de l'essai est grande vis-à-vis de la constante de temps de la paroi.

La figure 58 représente les fonctions de corrélations  $R_{\xi\phi} X_t$  et  $\frac{2}{R} R_{\Delta\theta} X_t$  ainsi que le produit de convolution  $h_t \otimes R_{\Delta\theta} X_t$ . Comme précédemment ces courbes sont normalisées par la valeur à l'origine  $D_1$ . Les deux fonctions d'intercorrélation ont

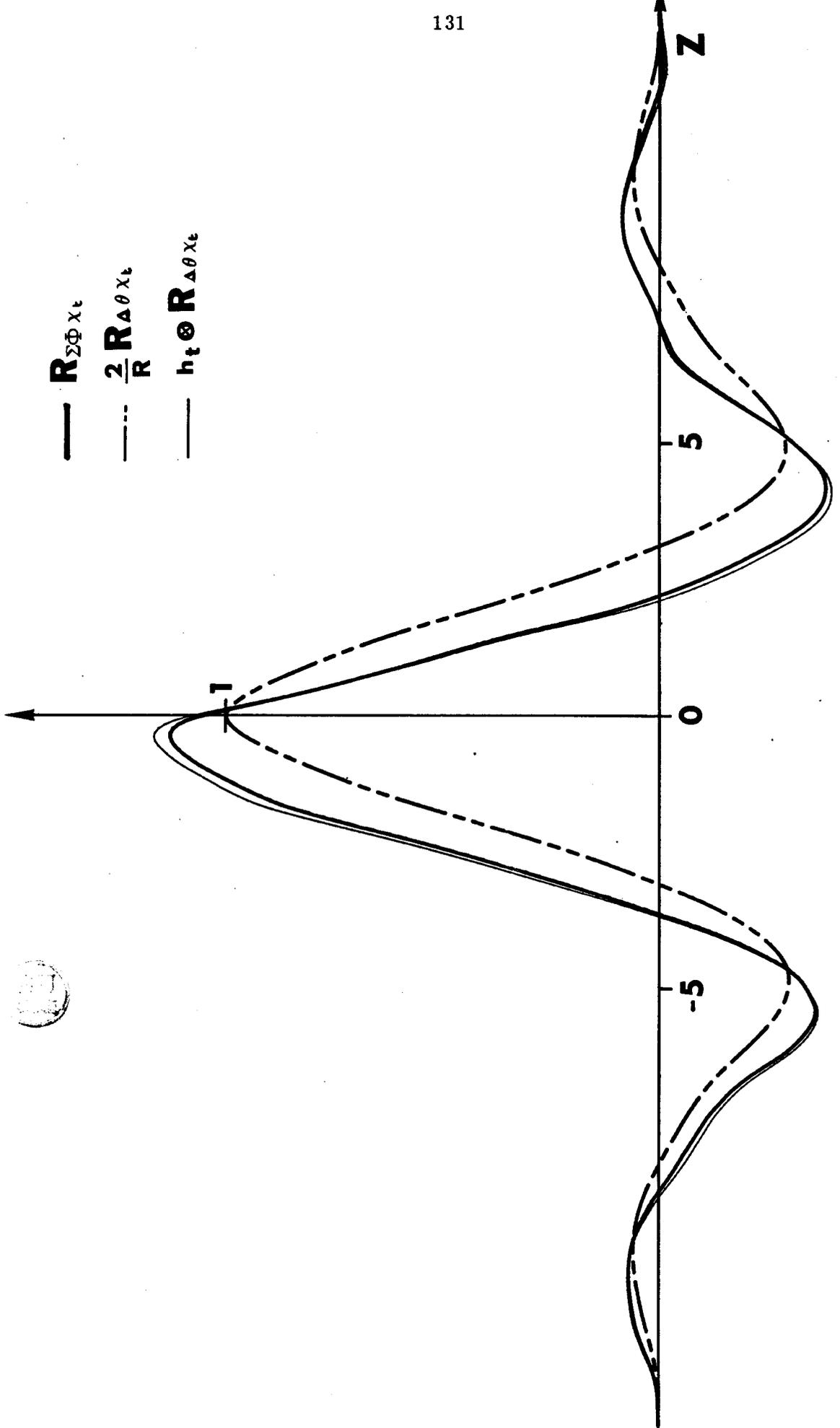


- FIGURE 55 - DIFFERENCES DES TEMPERATURES ET SOMMES DES FLUX





- FIGURE 57 - DIFFERENCE DES TEMPERATURES ET SOMME DES FLUX



- FIGURE 58 -

même allure, on observe une légère avance de  $R \leq \phi \cdot X_t$ . A l'origine  $R \leq \phi \cdot X_t(0) = 1,06$ , le processus a donc dissipé 6 % d'entropie de plus que la production minimale.

Nous avons aussi défini pour rendre compte de la production d'entropie une fonction de transformation, la "résistance apparente" par le rapport :

$$R_a = \frac{2 R \Delta\theta, X_t(0)}{R \phi, X_t(0)} = \frac{R \cdot D1}{J_2}$$

$R_a$  tend vers la résistance thermique  $R$  quand la production réelle d'entropie ( $J_2$ ) tend vers la production minimale ( $D_1$ ).

Nous avons représenté figure 59 les valeurs de résistance apparente  $R_a$  obtenues pour des sollicitations de  $\Delta\theta$  de formes voisines de créneaux (tels que ceux de la figure 55) et de durées variables. Cette courbe montre que pour le type de sollicitations imposées, la résistance apparente tend vers la résistance thermique  $R$  pour  $z > 5$ .

$R_a$  caractérise la part des régimes transitoires dans le processus de transfert, il apparaît ici que la production d'entropie résultant de créneaux de  $\Delta\theta$  est voisine de la production minimale dès que la durée normalisée du créneau est supérieure à 5 ( $z > 5$ ). Pour de tels processus la dissipation énergétique peut être représentée en fonction d'un seul paramètre du système : sa résistance thermique.

Pour compléter cette analyse nous avons représenté figure 60 les taux des évolutions d'entropie  $\frac{dJ_2}{dt}$  et  $\frac{dD_1}{dt}$  ainsi que les variations d'entropie  $J_2$  et  $D_1$  résultant d'un signal  $\Delta\theta$  en forme d'échelon. Un échelon parfait est irréalisable expérimentalement, nous avons donc procédé ici à une simulation numérique à partir de la réponse indicielle d'une paroi homogène. Cette procédure offre une bonne précision de calcul et permet de comparer pour ce signal transitoire de référence l'évolution réelle et, la production minimale en fonction du temps normalisé  $z$ .

Nous avons considéré pour cette simulation une paroi de plâtre identique à celle étudiée précédemment soumise à un signal  $\Delta\theta$  d'amplitude 50 k (transfert pur), la

température initiale étant de 300 k.

Pour bien mettre en évidence et préciser quantitativement le rôle de la durée du phénomène par rapport à la constante de temps du système, nous avons représenté figure 61 le rapport des productions d'entropie minimale et réelle  $D1/J2$  en fonction du temps normalisé  $z$  ( $z = t^{\frac{1}{2}}/RC$ ).

Cette courbe est une représentation de l'évolution de la résistance "apparente" pour des signaux transitoires de type "créneaux" puisque dans les phases de retour de l'équilibre  $\frac{dJ2}{dt} = \frac{dD1}{dt} = 0$  et  $R_a = \frac{RD1}{J2}$

Pour  $z < 1$ , la production d'entropie réelle représente plus de deux fois la production minimale, cette phase est illustrée plus précisément sous une autre forme par la figure 25 (Chapitre II).

Pour  $z \approx 7,5$  la production réelle est supérieure de 10 % environ à la production minimale, en fin de calcul  $z \approx 19$ , l'écart est de l'ordre de 4 %.

#### 2.4. Prise en compte des échanges superficiels

Nous avons jusqu'à présent considéré des sources localisées sur les surfaces de la paroi. Nous nous proposons dans ce paragraphe d'inclure dans la représentation les résistances superficielles qui modélisent les conditions limites de Fourier (échanges radiatifs et convectifs avec l'ambiance sur les surfaces limites d'une paroi).

Les transferts de chaleur sur la surface d'une paroi en contact avec un fluide peuvent être décrits de façon générale par la relation :

$$\Phi = - \lambda \left\{ \frac{\partial T}{\partial x} \right\} = h_C (T_s - T_a) + A (T_s^4 - T_p^4)$$

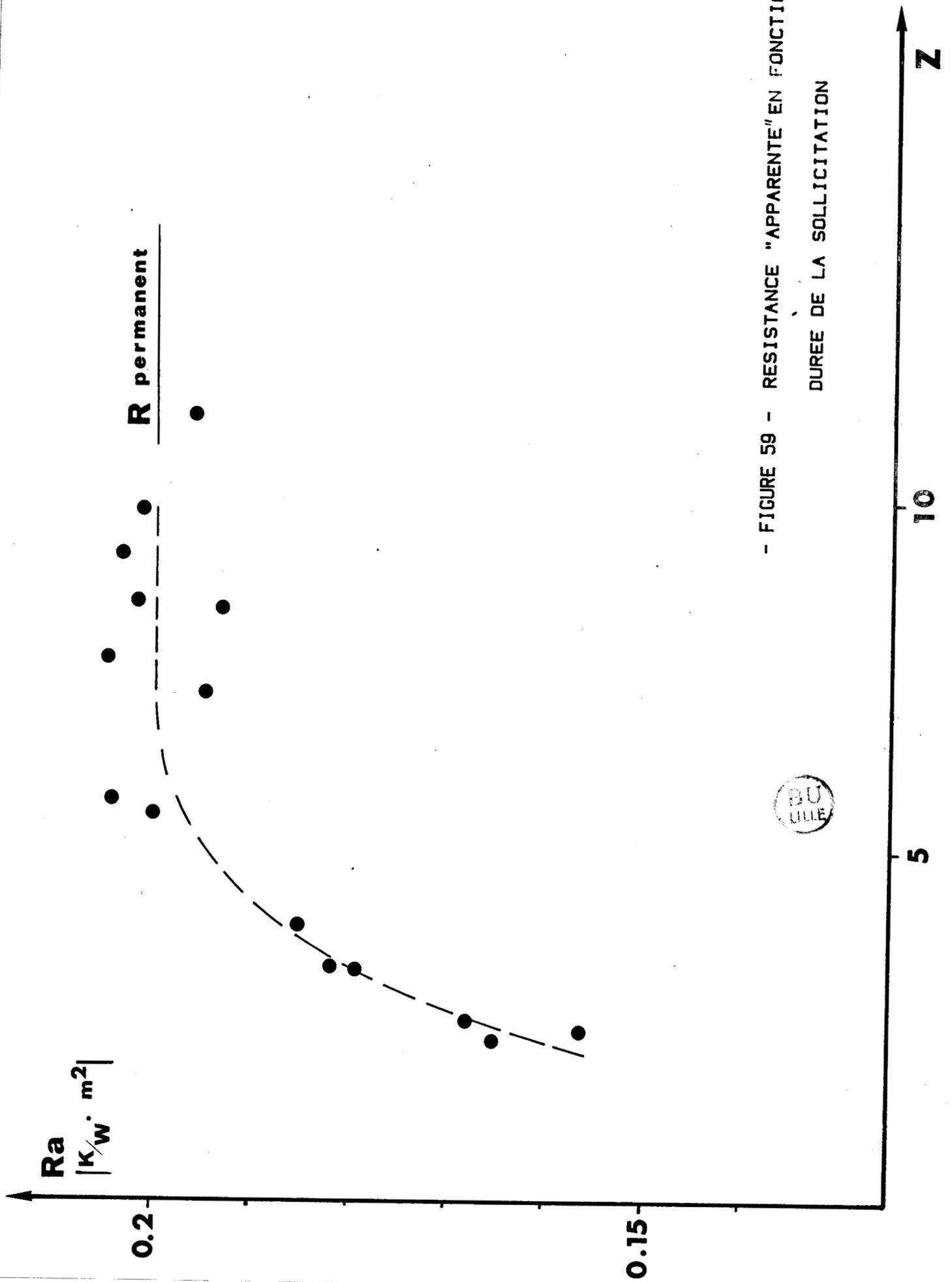
$h_C$  = coefficient de convection

$A$  = coefficient de rayonnement

$T_s$  = température de surface

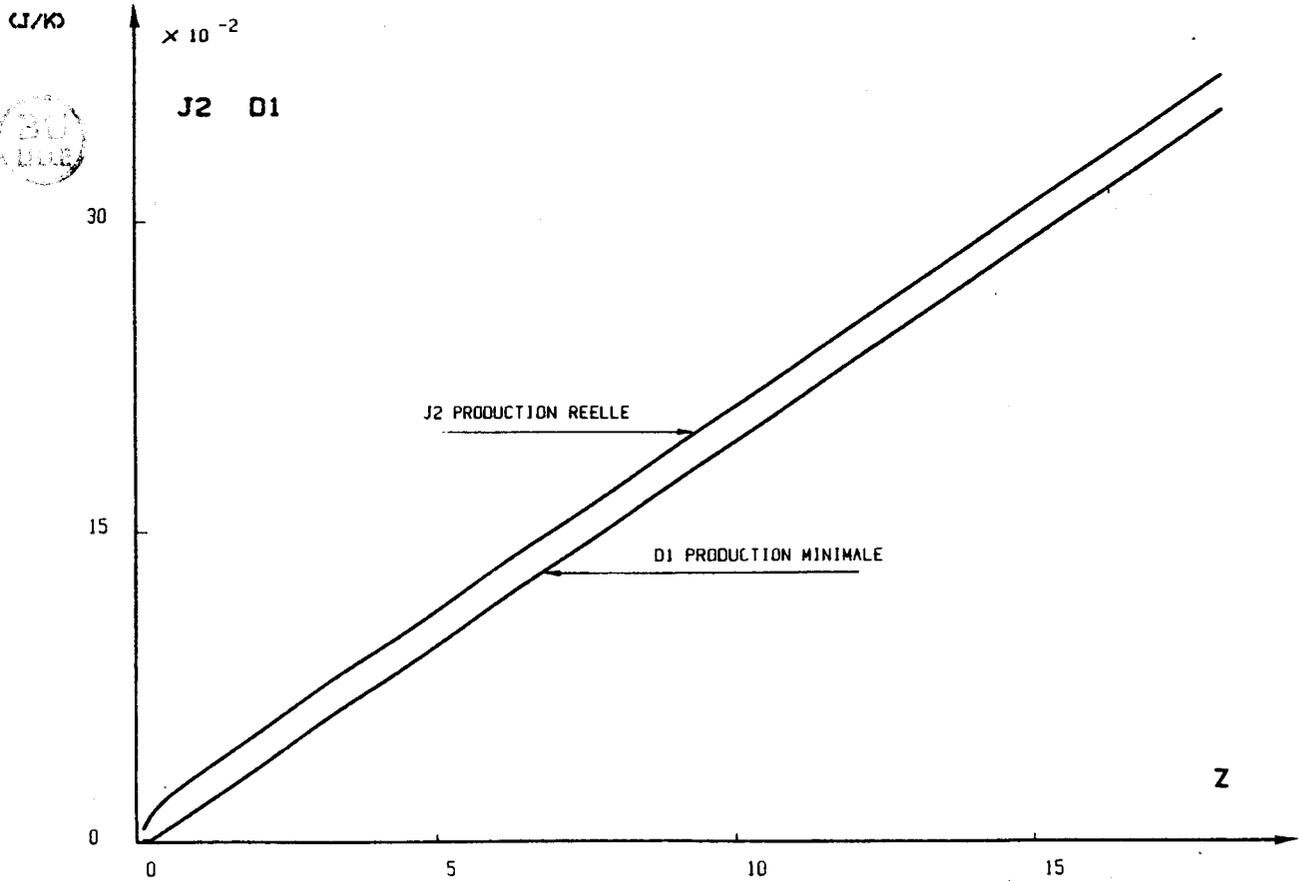
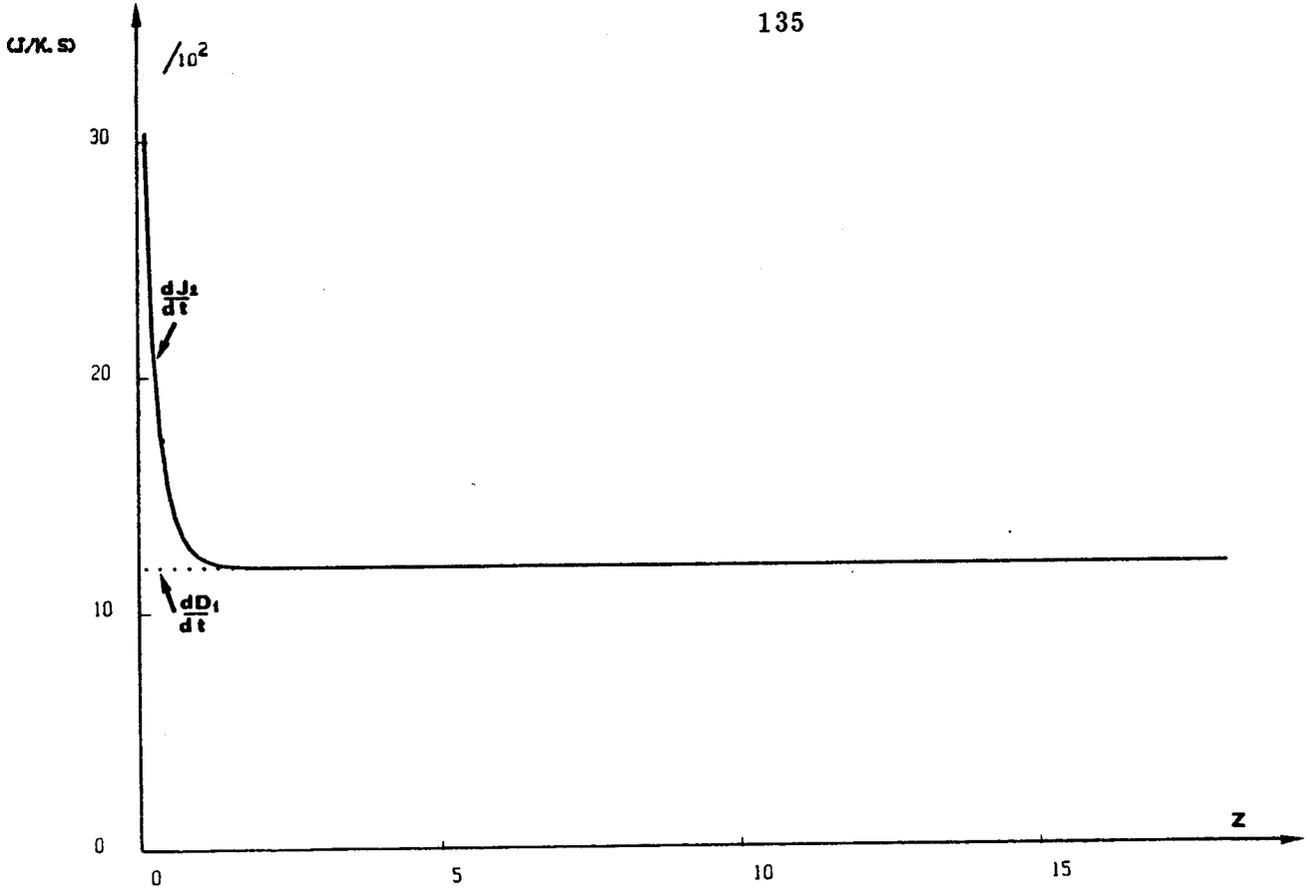
$T_a$  = température d'air ambiant

$T_p$  = température de l'environnement qui rayonne avec la paroi.



- FIGURE 59 - RESISTANCE "APPARENTE" EN FONCTION DE LA  
DUREE DE LA SOLLICITATION

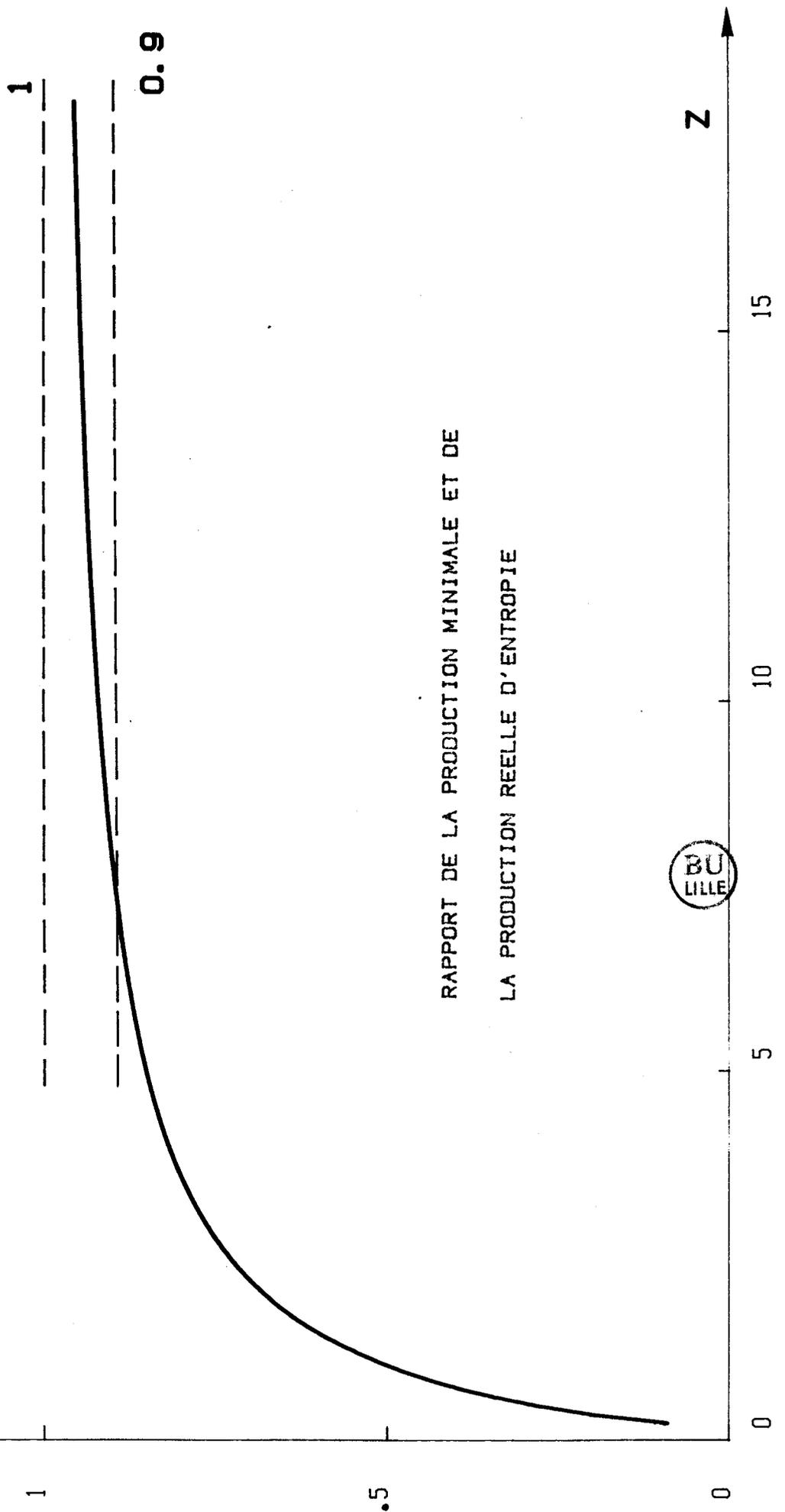
BU  
LILLE



- FIGURE 60 -

PRODUCTION D'ENTROPIE POUR UNE SOLLICITATION ECHELON

D1/J2



RAPPORT DE LA PRODUCTION MINIMALE ET DE  
LA PRODUCTION REELLE D'ENTROPIE

BU  
LILLE

Cette relation n'est pas linéaire puisqu'elle contient des termes à la puissance quatre et que  $h_C$  est une fonction de la température. Dans de nombreux cas pratiques, il est possible de linéariser cette équation et d'aboutir à une condition limite de Fourier sous la forme :

$$\phi = - \lambda \left\{ \frac{\partial T}{\partial x} \right\}_s = h (T_s - T_e)$$

- $h$  est un coefficient d'échange global de transfert incluant les effets convectifs et radiatifs (44 à 47)
- $T_e$  est une température pondérée obtenue à partir de la température d'air  $T_a$  et de la température  $T_p$  des éléments qui échangent de l'énergie par rayonnement avec la paroi.

Cette relation peut encore se simplifier dans le cas où les éléments qui échangent de la chaleur par rayonnement avec la paroi et l'air ambiant sont à des températures voisines. C'est par exemple le cas dans les locaux fortement isolés ou quand les éléments rayonnants sont des cloisons intérieures, on a alors  $T \approx T_a$  et :

$$\phi = h (T_s - T_a)$$

Suivant cette modélisation les températures des sources à considérer sont celles de l'air ambiant de part et d'autre de la paroi. Le système étudié est donc constitué de trois couches dont les deux extrêmes peuvent être modélisés comme des éléments purement résistifs.

Nous avons montré précédemment (chapitre II) que dans ce cas l'entropie produite était obtenue comme pour un système homogène par l'équation :

$$\Delta iS = \int \Delta \phi \cdot X_s dt + \int \xi \phi \cdot X_t dt - \Delta S_2 = E_1 + J_2 - \Delta S_2$$

Les forces  $X_s$  et  $X_t$  sont cette fois exprimées en fonction des températures d'air. Les sondes de mesure de température d'air sont réalisées à partir de thermocouples jumelés. Pour assurer aux capteurs un faible temps de réponse les thermocouples sont réalisés avec des fils de 0,2 mm de diamètre. Les capteurs sont disposés dans des

petits cylindres à parois réfléchissantes afin d'éliminer les échanges radiatifs entre les sondes et l'environnement.

Les figures 62 et 63 représentent les évolutions des divers paramètres dont résulteront les forces thermodynamiques  $X_t$  et  $X_s$  :

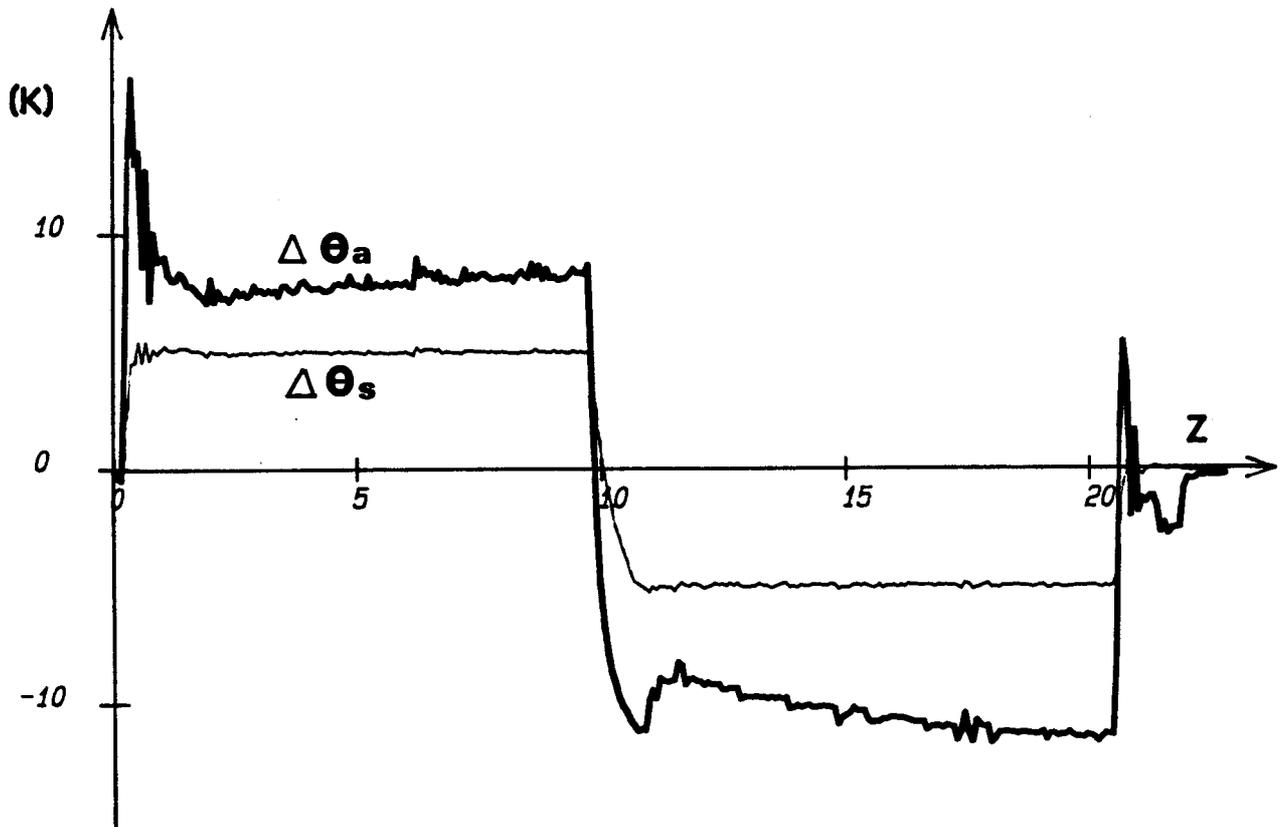
- différence des températures superficielles  $\Delta\theta_s$
- différence des températures d'air  $\Delta\theta_a$
- somme des températures superficielles  $\Sigma\theta_s$
- somme des températures d'air  $\Sigma\theta_a$
- température moyenne  $\bar{\theta}$ .

La figure 64 représente la somme des flux  $\Sigma\phi$  et la différence des flux  $\Delta\phi$  résultants.

La courbe de la différence de températures superficielles  $\Delta\theta_s$  est caractérisée par deux "créneaux" d'amplitudes et de durées sensiblement égales mais de signes opposés. L'évolution de  $\Delta\theta_a$  permet de distinguer trois variations brusques, la première en début d'essai, la seconde lors de l'inversion de gradient et la dernière lors de l'annulation de  $\Delta\theta$ . Cette évolution est à rapprocher de celle de la quantité  $\Sigma\phi$ , les variations de  $\Sigma\phi$  et  $\Delta\theta_a - \Delta\theta_s$  sont semblables, ce résultat justifie la modélisation par des résistances pures des échanges superficiels.

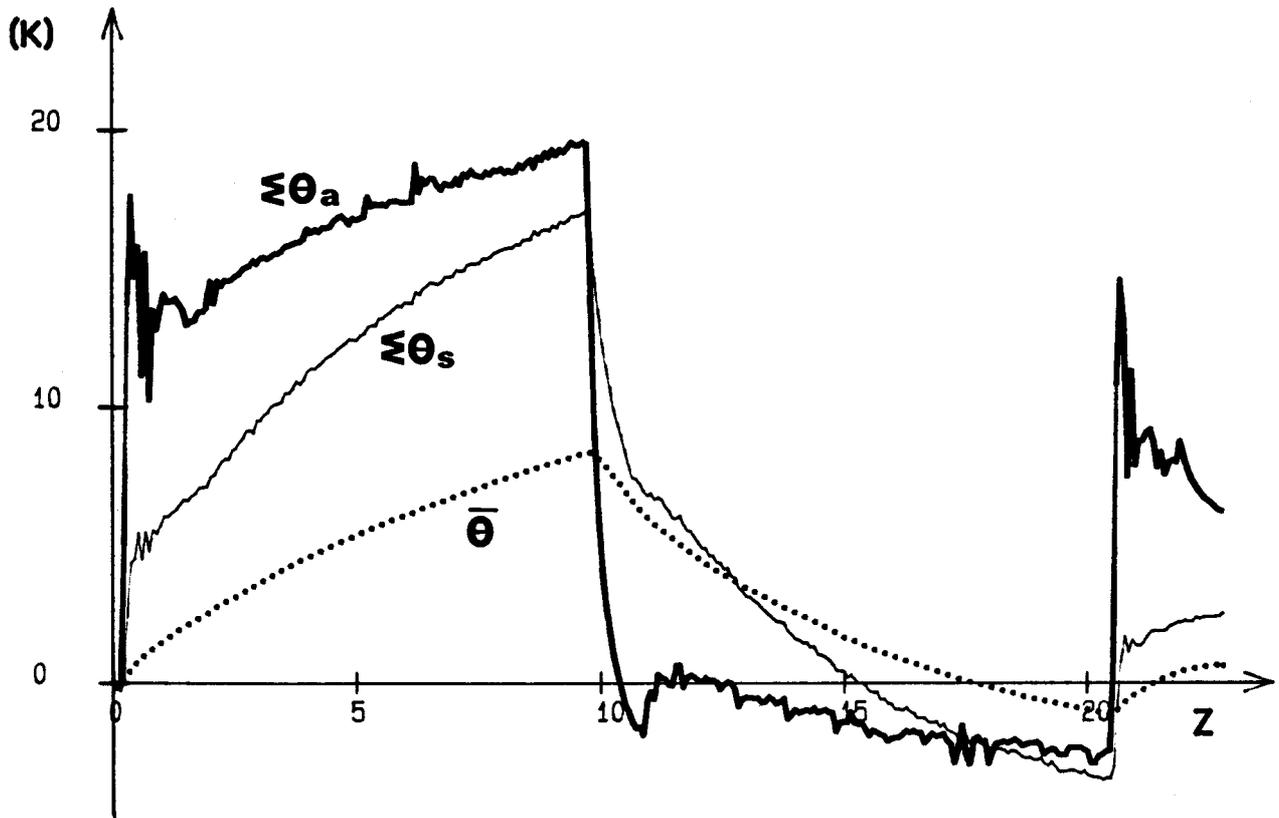
Pour confirmer cette modélisation nous avons représenté figure 65 le rapport  $\left(\frac{\theta_{a1} - \theta_{s1}}{\phi_1}\right)$  qui caractérise l'échange superficiel sur la face intérieure du caisson climatique. C'est en effet sur cette face que les sollicitations thermiques sont les plus rapides et les plus importantes. Nous constatons que ce rapport est sensiblement constant même durant la phase fortement transitoire d'inversion de gradient. En fin d'essai, la brusque augmentation observée résulte de l'arrêt de la ventilation dans le caisson, l'échange par convection diminue donc fortement et la résistance superficielle augmente.

La figure 66 permet de comparer les évolutions des quantités  $J_2$  et  $E_1$  qui représentent les productions d'entropie des modes transfert et stockage.  $J_{2s}$  et  $E_{1s}$  sont relatifs aux températures superficielles,  $J_{2a}$  et  $E_{1a}$  aux températures d'air.



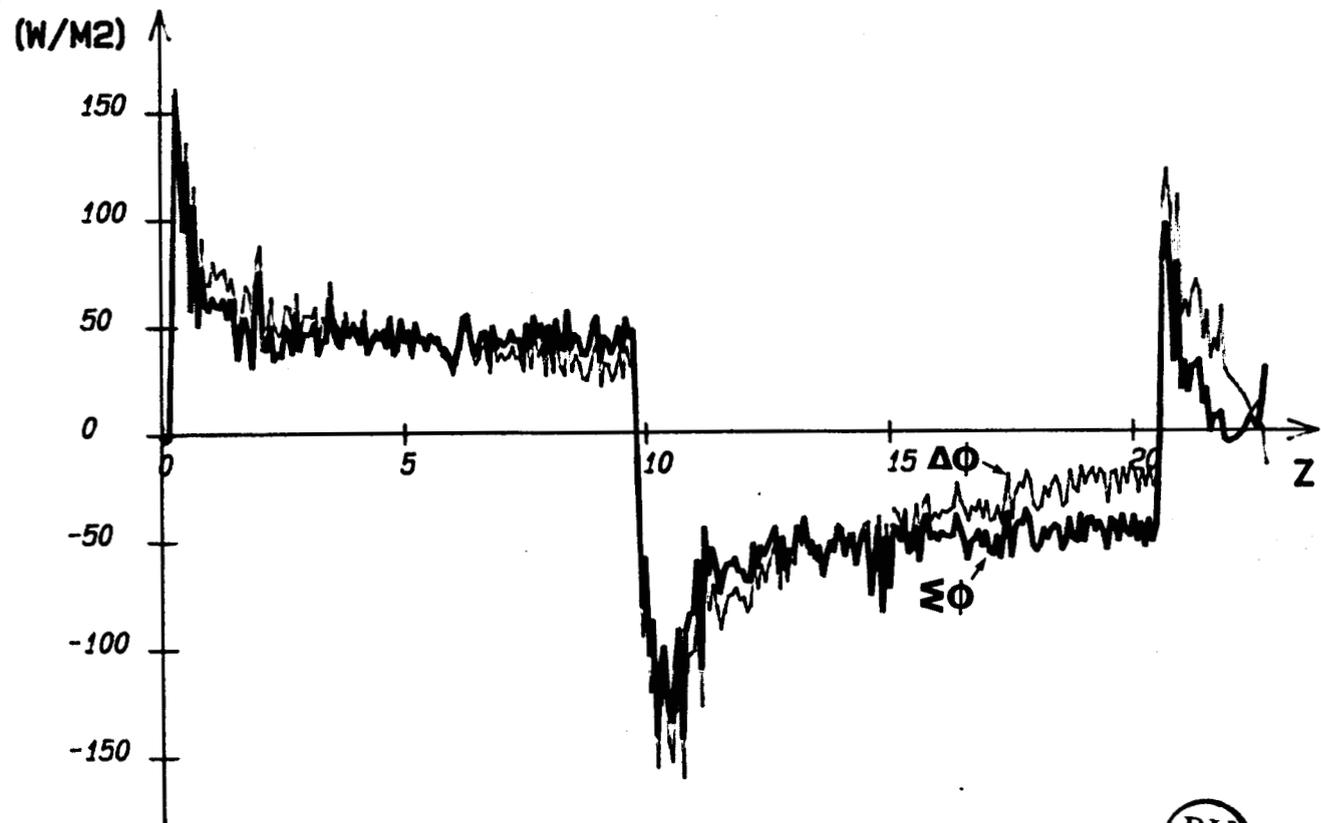
- FIGURE 62 -

DIFFERENCES DES TEMPERATURES



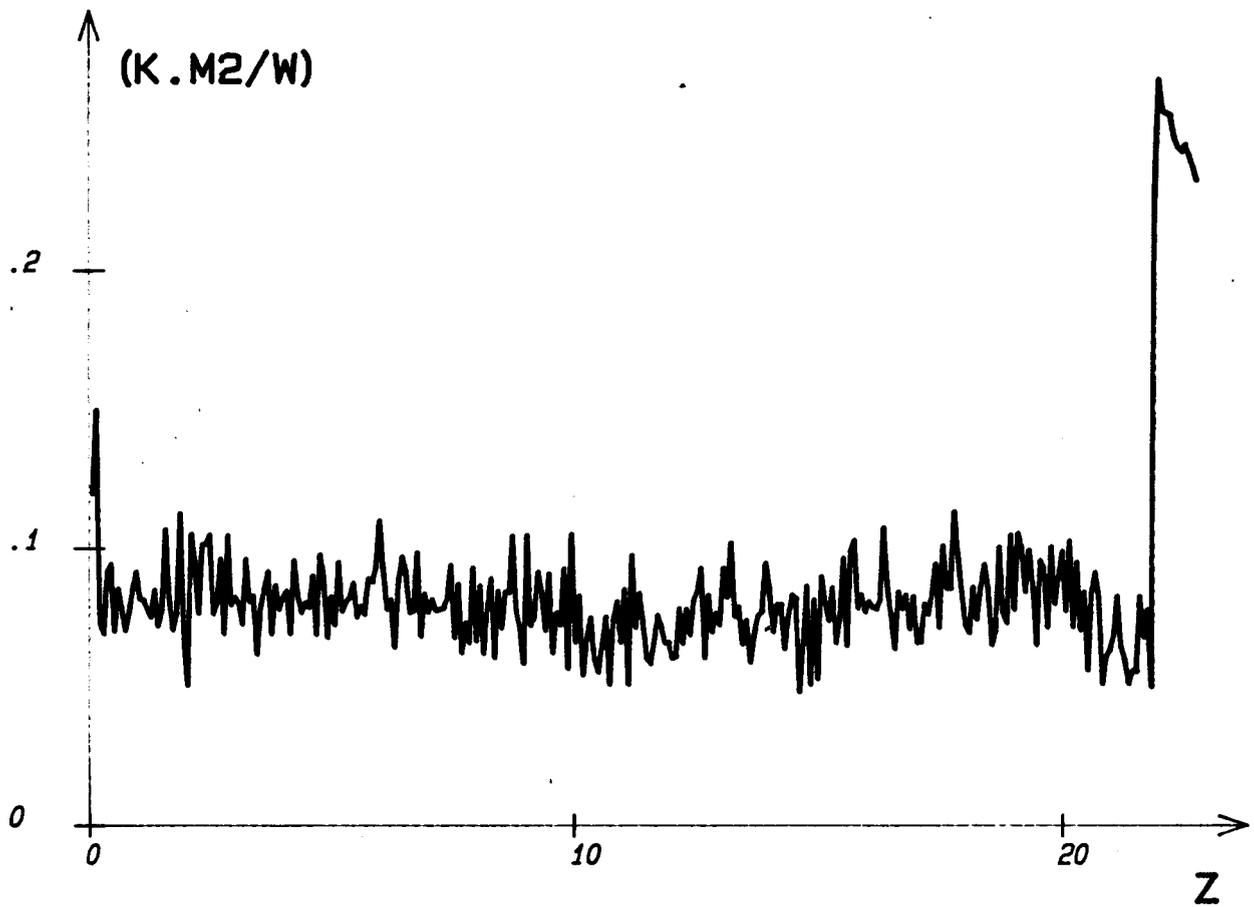
- FIGURE 63 -

TEMPERATURES D'AIR, DE SURFACE ET MOYENNE

BU  
LILLE

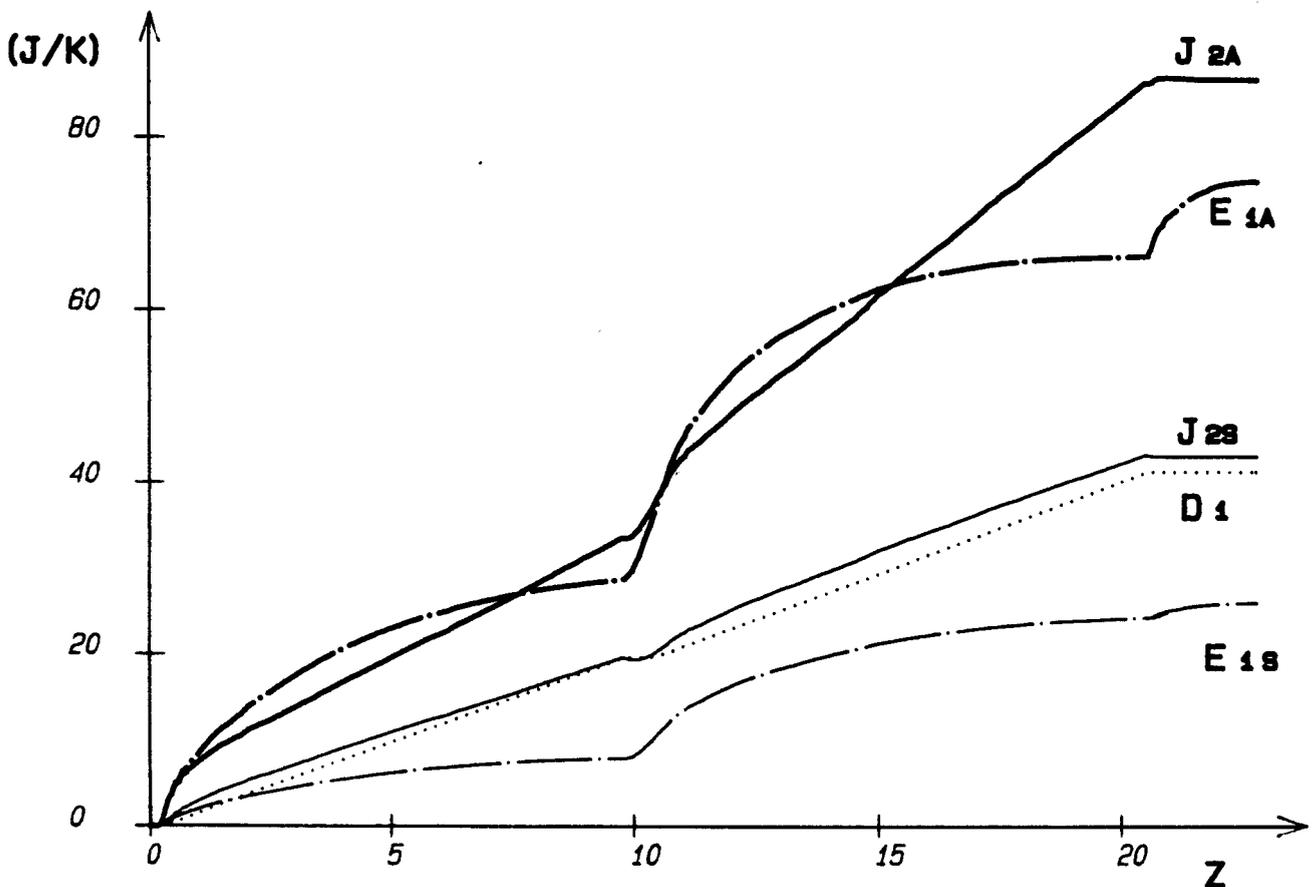
- FIGURE 64 -

SOMME ET DIFFERENCE DES FLUX



- FIGURE 65 -

RAPPORT ECART TEMPERATURES AIR-SURFACE AVEC LE FLUX



- FIGURE 66 - PRODUCTIONS D'ENTROPIE

On constate que la production d'entropie  $J_{2s}$  est très proche de la production minimale

$$J_{2s} \text{ final} : 1,04 D_1 \text{ final}$$

La résistance apparente calculée sur cette évolution est une très bonne approximation de la résistance thermique de la paroi  $R_a \approx 0,96 R$ .

La comparaison des productions d'entropie dans la paroi seule et dans l'ensemble paroi-résistances superficielles met en évidence une grande différence de valeurs entre  $J_{2s}$  et  $J_{2A}$ . Cet écart est représentatif de l'entretien des échanges superficiels. L'état final étant un état d'équilibre, les termes  $J_{2s}$  et  $J_{2A}$  gardent une valeur constante.

La production d'entropie par conduction thermique dans le processus de stockage de chaleur croît également quand on inclut les résistances superficielles au système. On peut observer dans chaque phase transitoire une augmentation d'entropie liée à  $\xi \theta/2 - \bar{\theta}$ .

La création d'entropie qui résulte des transferts thermiques entre deux ambiances séparée par une paroi peut être considérée comme la somme de l'entropie produite par conduction dans la paroi et de l'entropie produite par les échanges superficiels. Les parts respectives de ces deux contributions dépendant du nombre de Biot relatif au système

$$Bi = \frac{h \xi}{\lambda}$$

$h$  = coefficient de transfert superficiel

$\lambda$  = conductivité de la paroi

$\xi$  = paramètre dimensionnel

La qualité d'un processus de stockage-destockage dans une paroi est ainsi étudiée actuellement dans notre laboratoire en fonction du nombre de Biot

**Remarque :**

Dans le premier chapitre, nous avons montré que la rapport des moyennes temporelles de la différence des températures et de la somme des flux  $\overline{\Delta\theta}$  et  $\overline{\xi\phi}$  permettait de déterminer la résistance thermique R d'un système. Dans cet essai les moyennes  $\overline{\Delta\theta}$  et  $\overline{\xi\phi}$  sont voisines de zéro et leur rapport n'a pas de signification

$$\frac{2\overline{\Delta\theta}}{\overline{\xi\phi}} \neq R$$

Par contre, la résistance apparente donne une très bonne approximation de la résistance thermique.

$$R_a = 0,96 R.$$

Dans les problèmes de transferts dans les parois le dénominateur  $T_1 T_2$  a en général un rôle négligeable et

$$R_a \approx 2 \frac{\int \Delta\theta_s \cdot \Delta\theta_s dt}{\int \xi\phi \Delta\theta_s}$$

**III. BILAN D'ENTROPIE DANS UNE STRUCTURE BICOUCHE**

Nous avons considéré jusqu'à présent le cas d'un système homogène pour lequel une sollicitation quelconque pouvait toujours être représentée par deux modes indépendants : un mode "transfert" décrit par les grandeurs conjuguées  $\xi\theta$ ,  $\Delta\theta$  et un mode stockage décrit par les grandeurs conjuguées  $\Delta\theta$ ,  $\xi\theta$ .

Pour une structure dissymétrique les relations entre grandeurs fluxmétriques et températures dans le domaine temporel sont du type :

$$\begin{aligned} \xi\phi(t) &= h_1 \otimes \Delta\theta(t) + h_2 \otimes \xi\theta(t) \\ \Delta\phi(t) &= h_3 \otimes \xi\theta(t) + h_2 \otimes \Delta\theta(t) \end{aligned}$$

Les deux modes sont couplés et on ne peut plus distinguer ici un mode transfert et un mode stockage. Nous avons établi au chapitre II l'expression de la production d'entropie dans les milieux dissymétriques

$$\Delta iS = \int_{t_0}^{t_1} \Delta\phi \left( \frac{1}{\bar{T}} - \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{T} \right\rangle \right) dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sum \phi}{2} \Delta \left( \frac{1}{T} \right) dt + \Delta E - \sum \Delta S_2$$

avec

$$\bar{T} = \bar{T}_0 + \int_{t_0}^t \frac{\Delta\phi}{\sum C_i} dt$$

$$\left\langle \frac{1}{T} \right\rangle = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_n} \qquad \Delta \left( \frac{1}{T} \right) = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_n}$$

$\Delta E$  résulte des écarts entre les températures moyennes de chaque couche et la température moyenne globale, comme  $\Delta S_2$  ce terme n'est pas accessible à la mesure à partir des surfaces extérieures du système.

Pour un essai cyclique entre deux états isothermes nous avons  $\Delta E = \sum \Delta S_2 = 0$  et

$$\Delta iS = \int_{t_0}^{t_1} \Delta\phi X_s \cdot dt + \int_{t_0}^{t_1} \sum \phi X_t \cdot dt$$

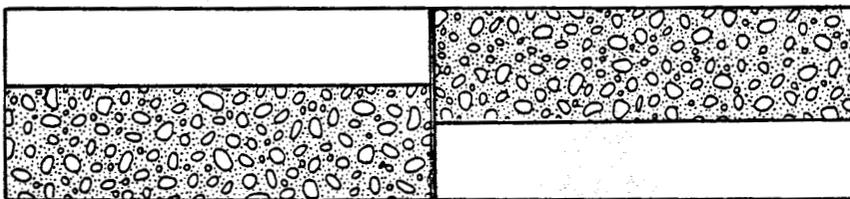
Il est possible dans ces conditions de calculer la production d'entropie à partir des mesures de flux et de température aux surfaces du système.

Les fonctions de réponses caractéristiques d'une structure dissymétrique quelconque  $h_1, h_2, h_3$  dépendent de la position des différentes couches vis-à-vis de la sollicitation appliquée, il en va de même de la production d'entropie. Pour mettre en évidence ce résultat, nous avons réalisé un essai comparatif sur un système bicouche constitué d'une couche de Klegicel isolante et peu capacitive et d'une couche de Plexiglass relativement capacitive et conductrice. Les caractéristiques thermophysiques des matériaux sont :

<u>Klegicel</u>	$\lambda$	=	0,045 (W/MK)
	$c$	=	1400 (J/Kg.K)
	$\rho$	=	228 (Kg/M <sup>3</sup> )
	$e$	=	1,4 10 <sup>-2</sup> (m)

<u>Plexiglass</u>	$\lambda$	=	0,18 (W/MK)
	$c$	=	1420 (J/Kg.K)
	$\rho$	=	1150 (Kg/M <sup>3</sup> )
	$e$	=	1 10 <sup>-2</sup> (m)

Deux systèmes de 25 x 25 cm de côté, équipés de capteurs de flux et de températures sur leurs faces d'entrée et de sortie ont été étudiés dans la disposition schématisée figure 67.



- FIGURE 67 -

**a**

**b**

Vis-à-vis de la sollicitation de température, le système (a) est disposé "capacité-résistance" et le système (b) "résistance-capacité". Les systèmes a et b sont disposés cote à cote entre deux plaques échangeuses de 50 x 50 cm de côté. La plaque inférieure maintient une température constante sur la face de sortie, la plaque supérieure impose une variation cyclique de température aux deux structures.

La figure 68 montre comparativement pour les deux configurations les évolutions des différences de flux  $\Delta \phi_a$ ,  $\Delta \phi_b$ , de la somme des températures  $\sum \theta$  et des températures moyennes globales  $\bar{\theta}_a$ ,  $\bar{\theta}_b$ . On constate que la configuration (a) "stocke" beaucoup plus d'énergie que la configuration b,  $\bar{\theta}_a \gg \bar{\theta}_b$ , d'autre part  $\bar{\theta}_a$  est rapidement supérieur à la demi-somme des températures superficielles  $\bar{\theta}_a > \frac{\sum \theta}{2}$

La figure 69 montre l'évolution de la différence des températures et de la somme des flux.

Nous avons représenté figure 70 pour les deux systèmes les évolutions temporelles des termes du bilan d'entropie accessible à la mesure :

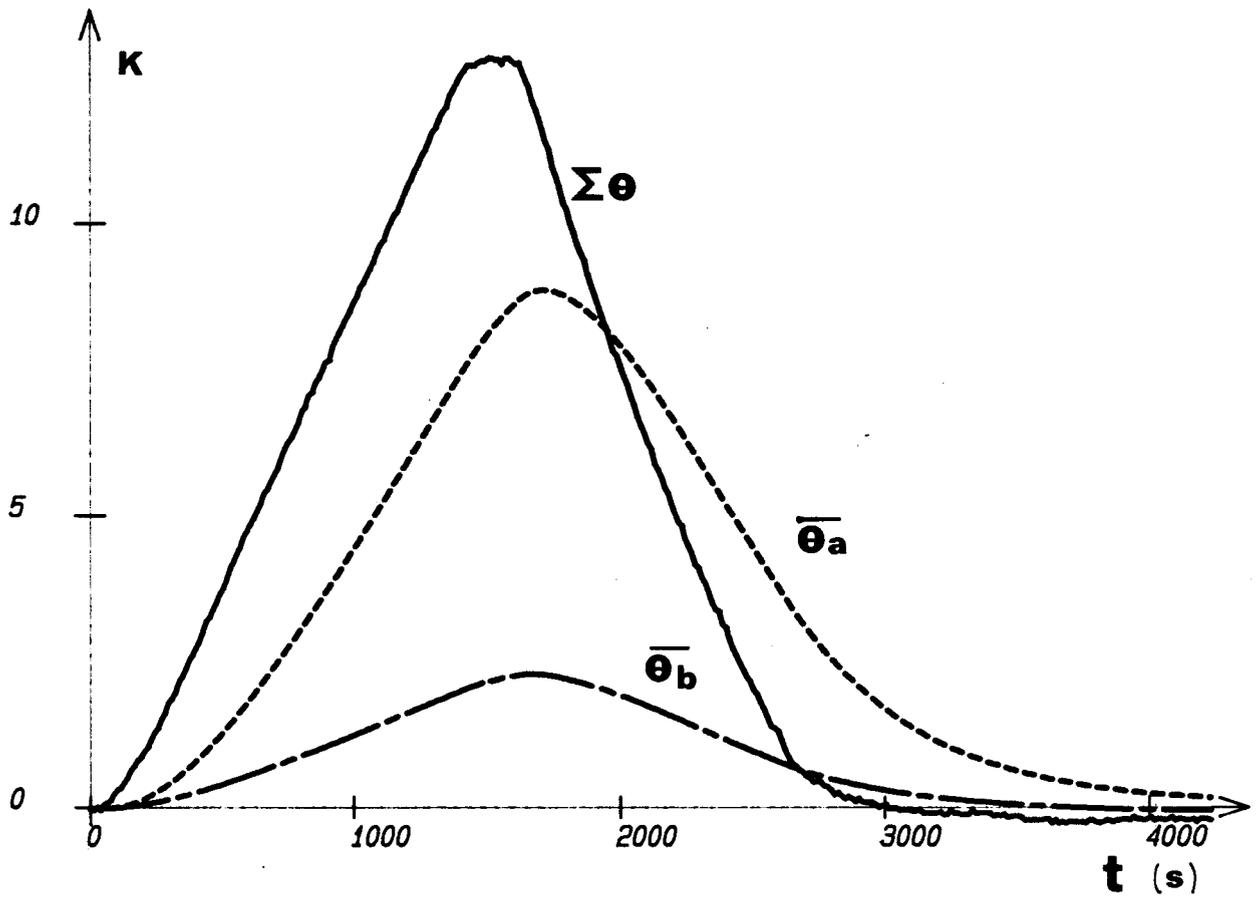
$$J_2 = \int \sum \phi X_t dt \quad \text{et} \quad E_1 = \int \Delta \phi X_s dt$$

L'évolution étant cyclique la somme des valeurs finales de ces expressions représente la production d'entropie dans ce processus.

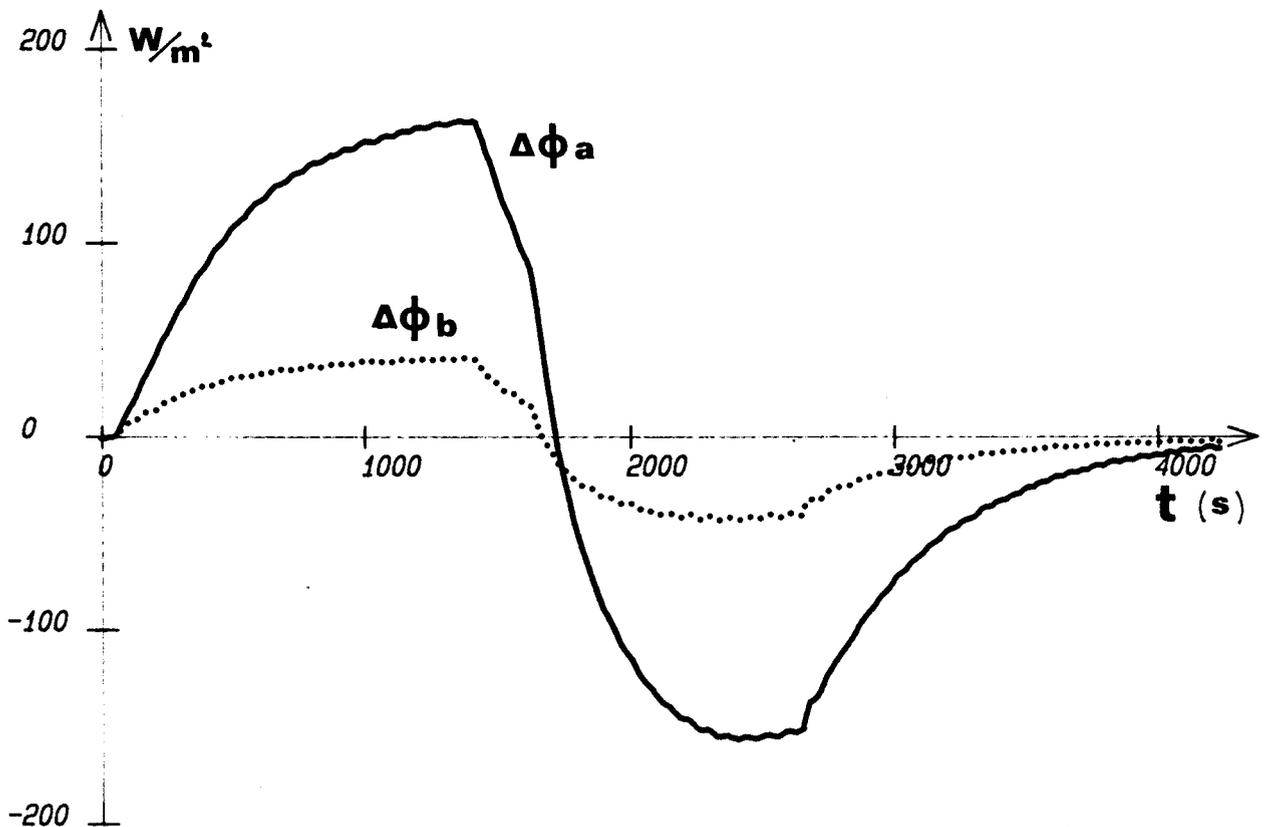
Pour le système (a) en phase de stockage on obtient rapidement  $\bar{T} > \frac{2 T_1 T_2}{T_1 + T_2}$ , il en résulte une portion négative dans la courbe  $E_{1a}$ . Notons bien que  $E_1 + J_2$  ne représente durant l'évolution qu'une part de la production d'entropie puisque  $\Delta E$  et  $\Delta S_2$  ne sont nuls qu'en fin de cycle.

La figure 71 montre comparativement les sommes  $(J_2 + E_1)$  pour chaque configuration (a) et (b). On peut constater que la disposition (a) est nettement plus dissipative que la disposition (b)

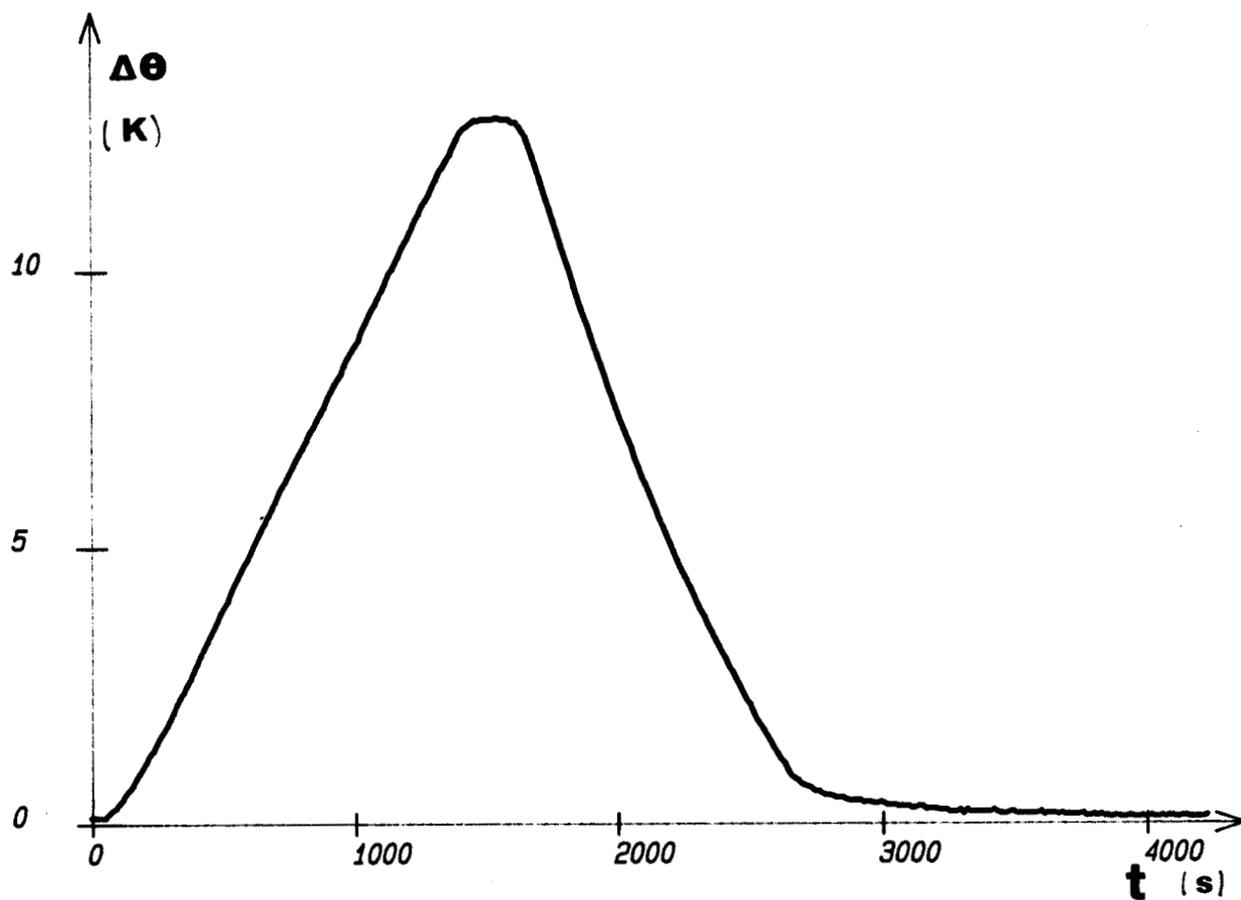
$$\frac{(J_2 + E_1)_a}{(J_2 + E_1)_b} = 2.6$$



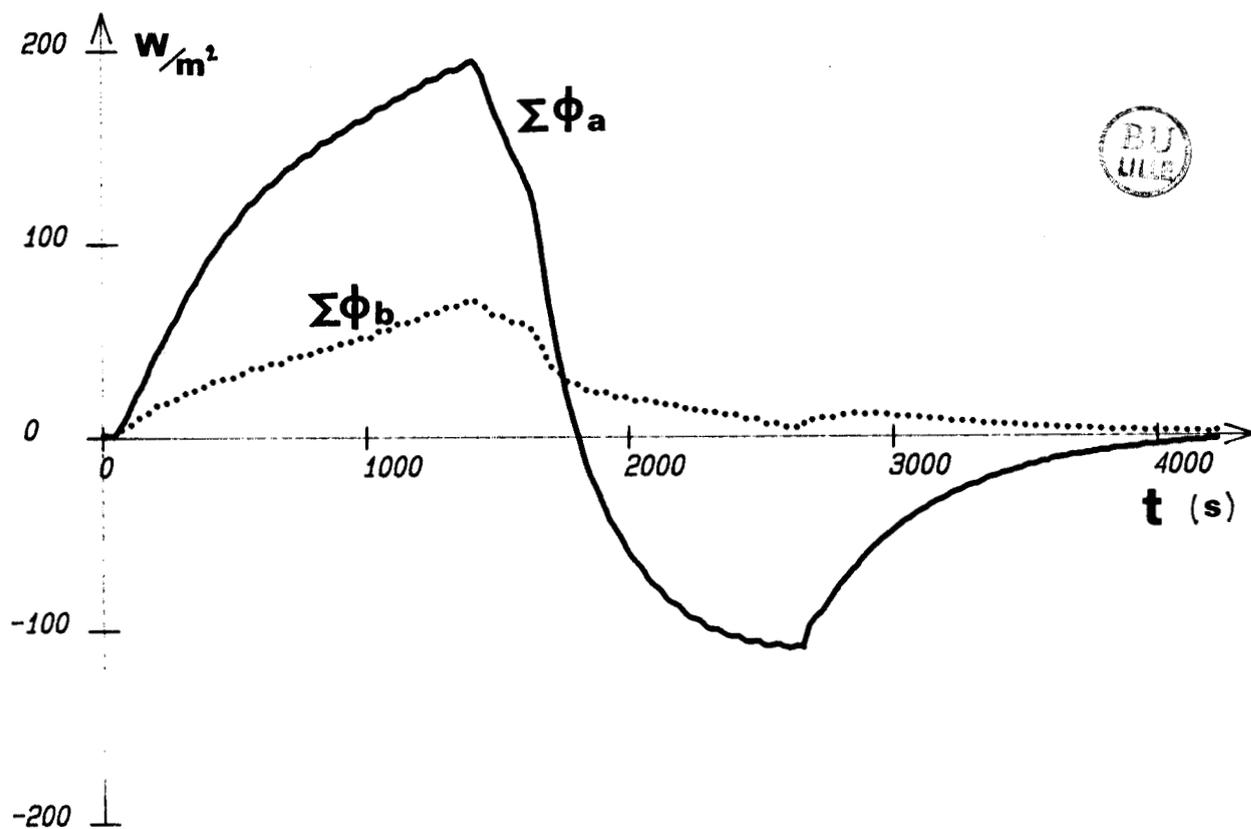
TEMPERATURES DE SURFACE ET MOYENNES



- FIGURE 68 - DIFFERENCES DES FLUX

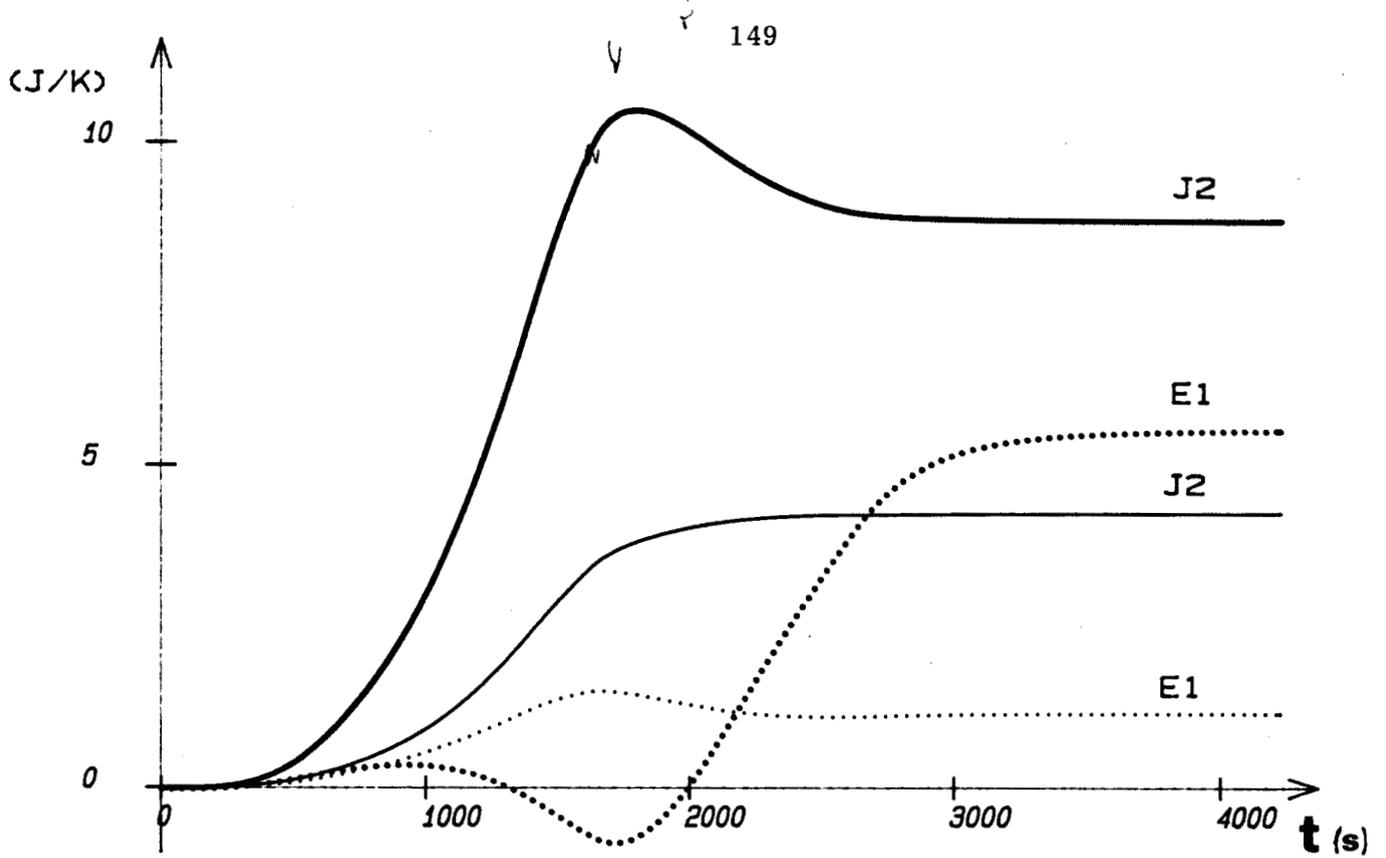


DIFFERENCE DES TEMPERATURES

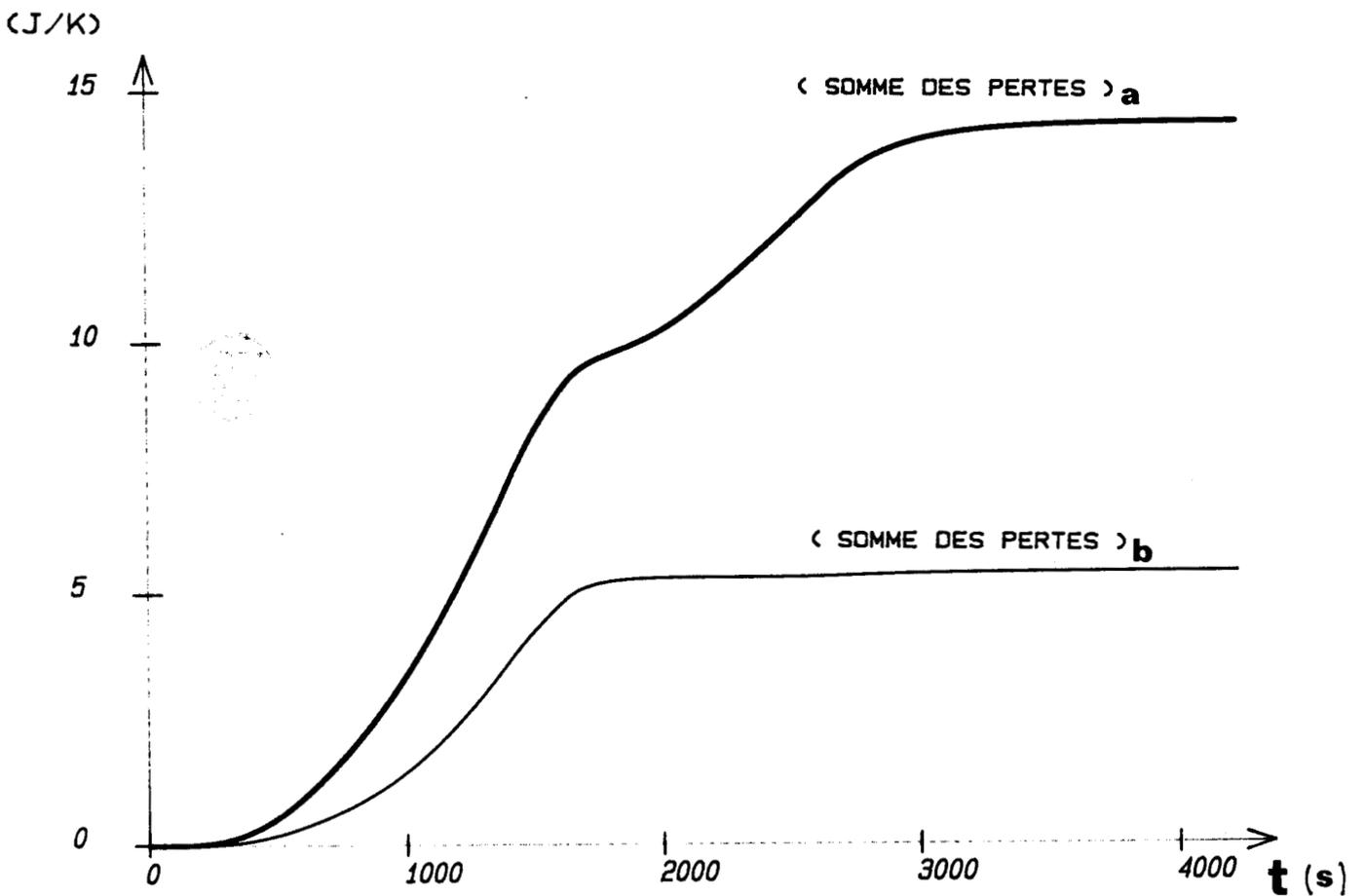


- FIGURE 69 -

SOMMES DES FLUX



- FIGURE 70 - PRODUCTIONS D'ENTROPIE



- FIGURE 71 - PRODUCTIONS TOTALES D'ENTROPIE

## IV. MESURES IN SITU

### 4.1. Introduction

Cette partie a pour objet de développer des techniques de mesures et de traitements adaptés à l'expérimentation sur site. Des mesures in situ peuvent avoir trois types d'objectifs :

- le contrôle ou le diagnostic des systèmes : vérification de la conformité au projet, relevé de l'existant à des fins de réhabilitation ...
- le calage de modèles ou d'éléments de modèles : de multiples modèles de comportements thermiques des enveloppes sont développés actuellement, tous les modèles utilisent des hypothèses simplificatrices qu'il faut ensuite valider, la mesure sur site encore trop peu développée constitue la méthode la plus objective de validation.
- l'étude des interactions enveloppe-ambiance pour développer de nouveaux modèles de comportements qui permettront une meilleure gestion de l'énergie du point de vue de l'économie ou du confort thermique.

Pour aborder les mesures in situ on peut être tenté de transposer les méthodes classiques de laboratoire qui étudient la réponse d'un système soumis à des signaux déterministes (échelon, sinusoïde, etc.). Ces signaux particuliers que l'on arrive à approcher au prix de techniques sophistiquées en laboratoire permettent d'obtenir les résultats recherchés par un traitement élémentaire mais sont difficilement applicables sur le site. Notre approche du problème consiste à développer de nouvelles méthodes de traitements peu exigeantes quant à la nature des signaux et permettant en particulier de traiter des sollicitations naturelles à composantes aléatoires. Cette démarche nous amène naturellement à introduire les méthodes du traitement du signal.

Une autre particularité est liée à l'instrumentation, dans les essais de laboratoire, les conditions limites sont généralement du type flux imposé ou

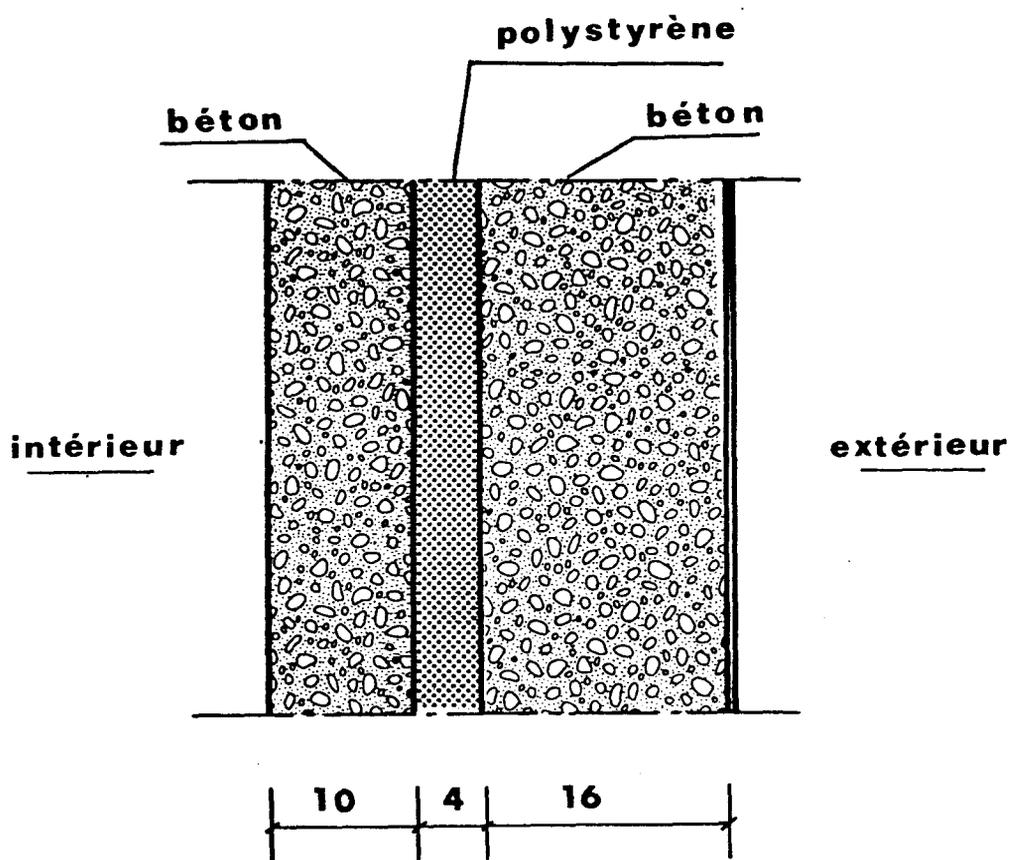
température imposée, ces contraintes n'existent pas sur le site, et il est nécessaire de mesurer simultanément les flux et les températures dans les plans d'entrée et de sortie. Ces mesures nous dispenseront de faire une hypothèse quant aux conditions limites.

Les signaux observés sur des durées de plusieurs jours sont très complexes, on peut considérer qu'ils résultent de la superposition d'une composante moyenne (climat moyen par exemple), de fluctuations périodiques (jour-nuit, régulation ...) et de variations rapides à caractères aléatoires ou "bruits" (soleil, vent, ...). Il est difficile de distinguer le bruit du signal. Dans son ouvrage "Méthodes et Techniques de traitement du signal, J. MAX (19) remarque : "Ce qui distingue le signal du bruit c'est que l'un transporte une information qui nous intéresse, l'autre une information qui ne nous intéresse pas, pour le moment du moins. Le problème peut être analysé différemment selon le résultat recherché, deux préoccupations peuvent être envisagées :

- on s'intéresse au comportement en "moyenne" du système, le traitement visera à caractériser les paramètres du régime quasi-stationnaire (Résistance thermique R, coefficient de transmission K ...). Il faut alors éliminer les composantes "rapidement variables" (ou hautes fréquences) pour ne garder que les évolutions lentement variables (basses fréquences). (16.17.55)
- on cherche à caractériser le "comportement instantané" du système, c'est cette fois uniquement les variations rapides qu'il faut analyser et supprimer les composantes moyennes. Cette préoccupation se rencontrera dans les problèmes liés à la régulation de confort dans lesquels l'effusivité thermique joue un rôle prépondérant. (56)

#### 4.2. Etude des composantes "lentement variables" ou basse fréquences

La paroi étudiée d'orientation Sud-Ouest, est située en zone géographique H1 (règles Th). Il s'agit d'une structure tricouche béton-polystyrène-béton (figure 69). La face extérieure est revêtue d'un parement céramique de couleur noire, la face intérieure reçoit un simple revêtement de peinture.



- FIGURE 72 -

##### 4.2.1. Instrumentation

###### - Flux

Les capteurs fluxmétriques utilisés sont de type "plan", de surface active 25,25 cm, un anneau de garde amène les dimensions extrêmes à 40 x 40 cm.

Pour assurer l'uniformité des caractéristiques relatives au rayonnement thermique, un film plastique de 0,1 mm d'épaisseur, de 1 m de côté et de couleur adaptée au revêtement considéré a été collé sur les capteurs.

### - Températures

Les températures de surfaces sont mesurées par des thermocouples de types K (chromel - alumel) de 0,2 mm de diamètre, quatre capteurs montés en série sont disposés sous les fluxmètres dans des petites rainures. La continuité thermique est assurée par de la graisse silicone.

Les sondes de température d'air sont réalisées à partir du même type de thermocouples disposés dans un cylindre à double paroi réfléchissante de façon à éliminer l'influence du rayonnement thermique sur les capteurs.

### - Acquisition de données

La chaîne d'acquisition de données est identique à celle décrite au paragraphe II.21.

## 4.2.2. Les signaux observés

La figure 73 montre des signaux de températures et de flux observés sur une durée de 6 jours en février 1984. On note sur ces enregistrements les trois composantes décrites précédemment : une composante moyenne, une composante périodique et des bruits. Tous les signaux ont une composante "aléatoire" : si l'on pouvait répéter plusieurs fois l'expérience dans des conditions apparemment identiques, les signaux enregistrés  $X_1(t)$ ,  $X_2(t)$  ne seraient pas les mêmes, à cause des phénomènes relevant du hasard (actions non contrôlées).

Côté intérieur, la programmation Jour - Nuit du chauffage engendre des modulations de période 24 H en formes de créneaux pour les signaux de flux et de température d'air et de formes triangulaires pour la température de surface.

Les signaux mesurés côté extérieur sont plus complexes, le bruit est tel que les composantes moyennes et périodiques sont complètement noyées. On peut observer dans certaines zones des signaux températures un gradient de température surface-air de signe contraire au gradient global intérieur-extérieur, il en résulte un flux extérieur négatif.

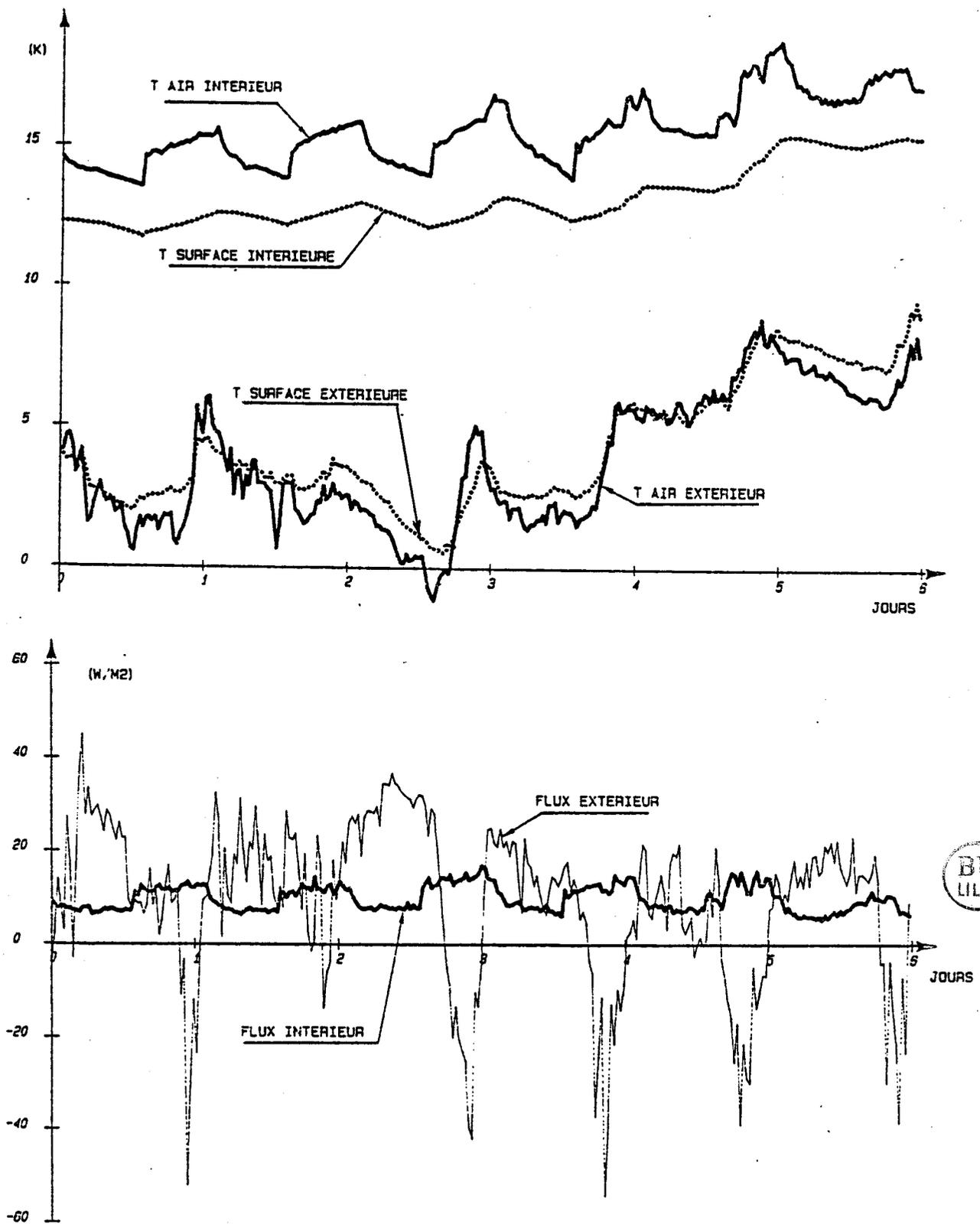


Figure 73 Températures d'air et de surface intérieure et extérieure et flux thermiques intérieur et extérieur.

### 4.2.3. Traitement par moyennes temporelles

Cette procédure est applicable aux variables aléatoires à condition de faire deux hypothèses (18) :

- les processus sont ergodiques, c'est-à-dire que l'on peut substituer aux moyennes au sens des probabilités des moyennes temporelles sur une épreuve unique
- les processus aléatoires sont stationnaires, c'est-à-dire que leurs propriétés statistiques sont indépendantes d'une translation arbitraire dans le temps.

Quand ces hypothèses sont vérifiées il existe une relation simple entre la moyenne temporelle du signal d'entrée  $\overline{X}$  et la moyenne temporelle du signal de sortie  $\overline{Y}$  :

$$\overline{Y(t)} = H(0) \overline{X(t)}$$

$H(0)$  est ici la valeur de la fonction de transfert du système dans laquelle  $P = 0$

En appliquant cela à une paroi dissymétrique quelconque, on obtient :

$$\overline{\Sigma \phi(t)} = H_1(0) \overline{\Delta \theta(t)} + H_2(0) \overline{\Sigma \theta(t)}$$

$$H_1(0) = \frac{2}{R} \quad H_2(0) = 0$$

$$\text{On a finalement } \overline{\Sigma \phi(t)} = \frac{2}{R} \overline{\Delta \theta(t)}$$

Cette relation est encore vérifiée sur des sollicitations "lentement" variables en moyenne.

On obtient évidemment une relation analogue en considérant la moyenne de chacun des flux :

$$\overline{\phi_1(t)} = \frac{1}{R} \overline{\Delta \theta(t)} \quad \text{et} \quad \overline{\phi_2(t)} = \frac{1}{R} \overline{\Delta \theta(t)}$$

En appliquant ce traitement aux signaux mesurés, nous obtenons les courbes de la figure 74. Les trois courbes  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  calculées à partir des moyennes  $\phi_1$ ,  $\Sigma \phi$ ,  $\phi_2$  convergent toutes vers la même valeur au bout de 5 jours d'intégration. Les processus ne sont pas rigoureusement stationnaires, il faut donc un temps minimal d'intégration pour obtenir la convergence du rapport des moyennes.

La valeur de la résistance thermique globale obtenue est de 0,9 (K/W m<sup>2</sup>) ce qui est très proche de la valeur estimée à partir des règles Th en vigueur :  $R_{\text{calculé}} : 1,06$  (K/W m<sup>2</sup>).

Les courbes A et B figure 74 sont obtenues en prenant l'écart de températures soit sur l'air, soit sur les surfaces, la différence sensiblement constante de ces deux courbes résulte des échanges superficiels et induit en moyenne un coefficient de proportionnalité entre le flux et l'écart de température air-surface. Ce résultat n'est généralement vrai qu'en moyenne, nous avons représenté figure 74 les valeurs instantanées des rapports des flux sur les écarts de températures de la surface et de l'air de l'ambiance considérée, si côté intérieur ce rapport est sensiblement constant, côté extérieur il fluctue beaucoup.

La valeur instantanée du flux à la surface d'une paroi extérieure dépend de nombreux paramètres : la température d'air  $\theta_a$  mais aussi les températures des éléments qui rayonnent avec la surface (nuages, autres immeubles...), de l'ensoleillement, de la pluie et de l'évaporation qui lui succède ainsi que du vent qui fait varier le coefficient de convection. Pour modéliser les échanges superficiels on peut alors faire intervenir la notion de "température équivalente de l'environnement" (paragraphe 24) définie par :

$$\phi = h (\theta_s - \theta_E)$$

Notons cependant que la simplicité de cette relation n'est qu'apparente car il n'est pas évident de définir  $\theta_E$  et  $h$  dans des cas complexes.

Les traitements par moyennes temporelles présentent deux inconvénients majeurs :

- ils sont difficilement applicables sur des signaux bruités de faible énergie
- ils sont totalement inopérants sur des signaux à moyenne voisine de zéro (mi-saison par exemple).

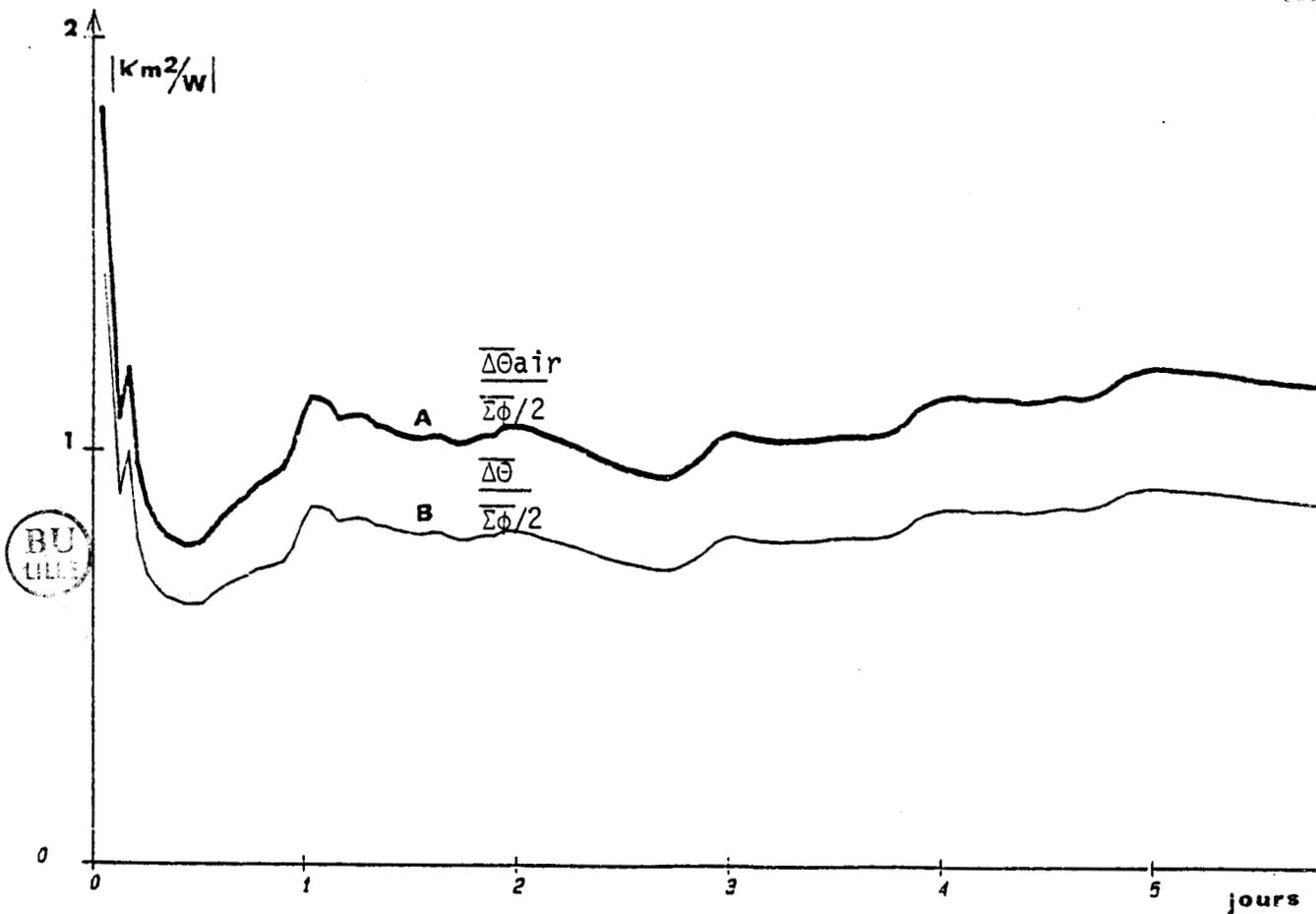
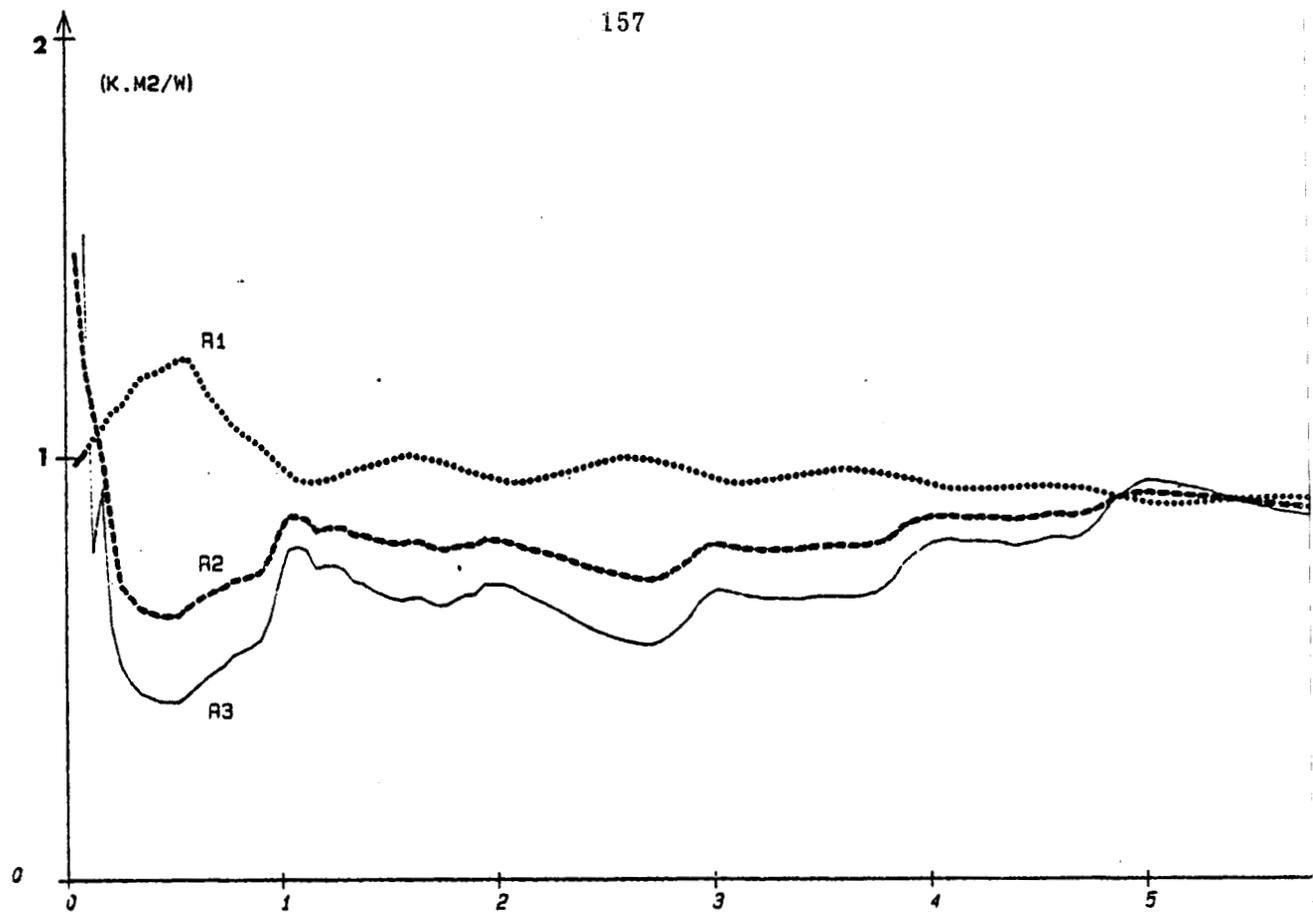
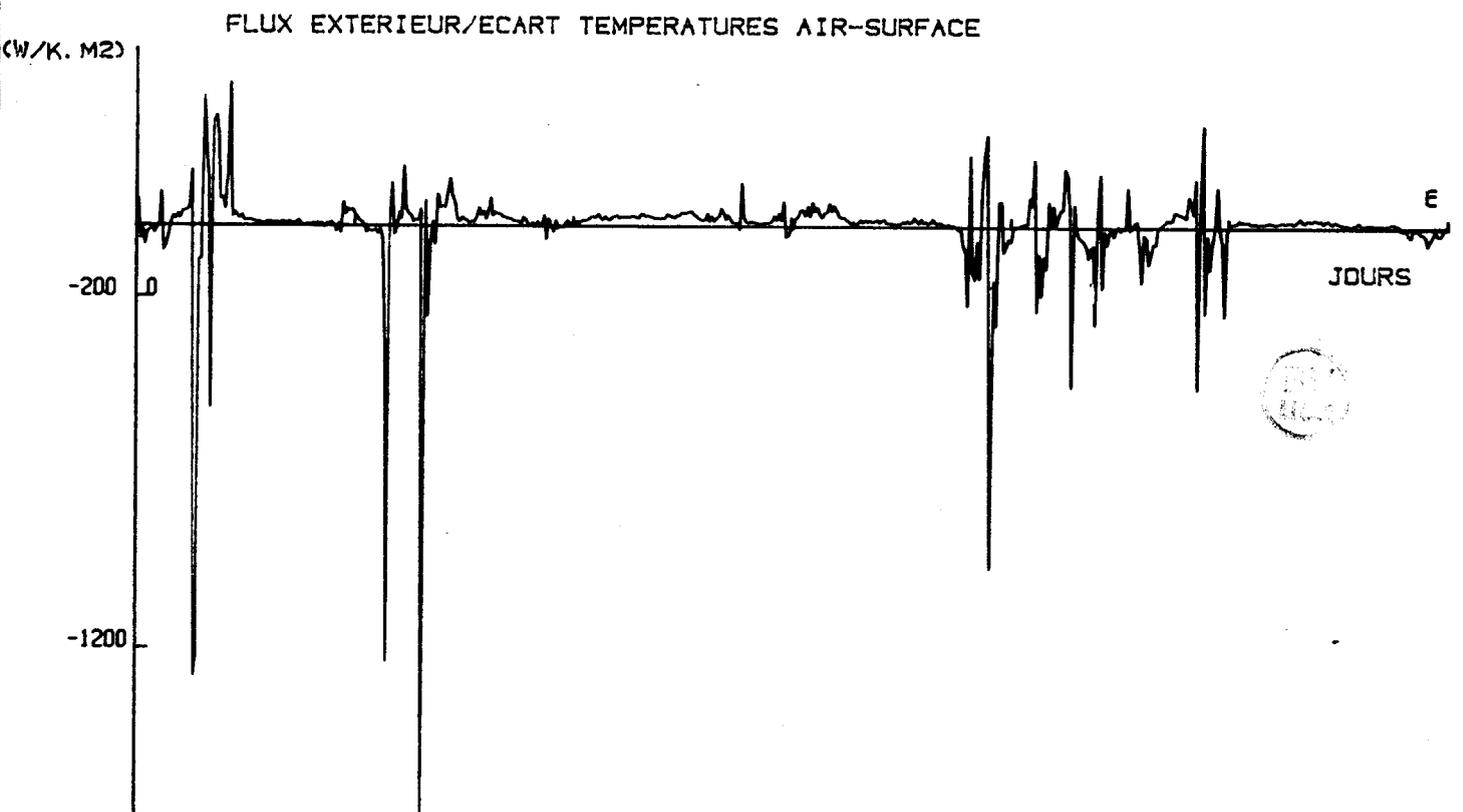
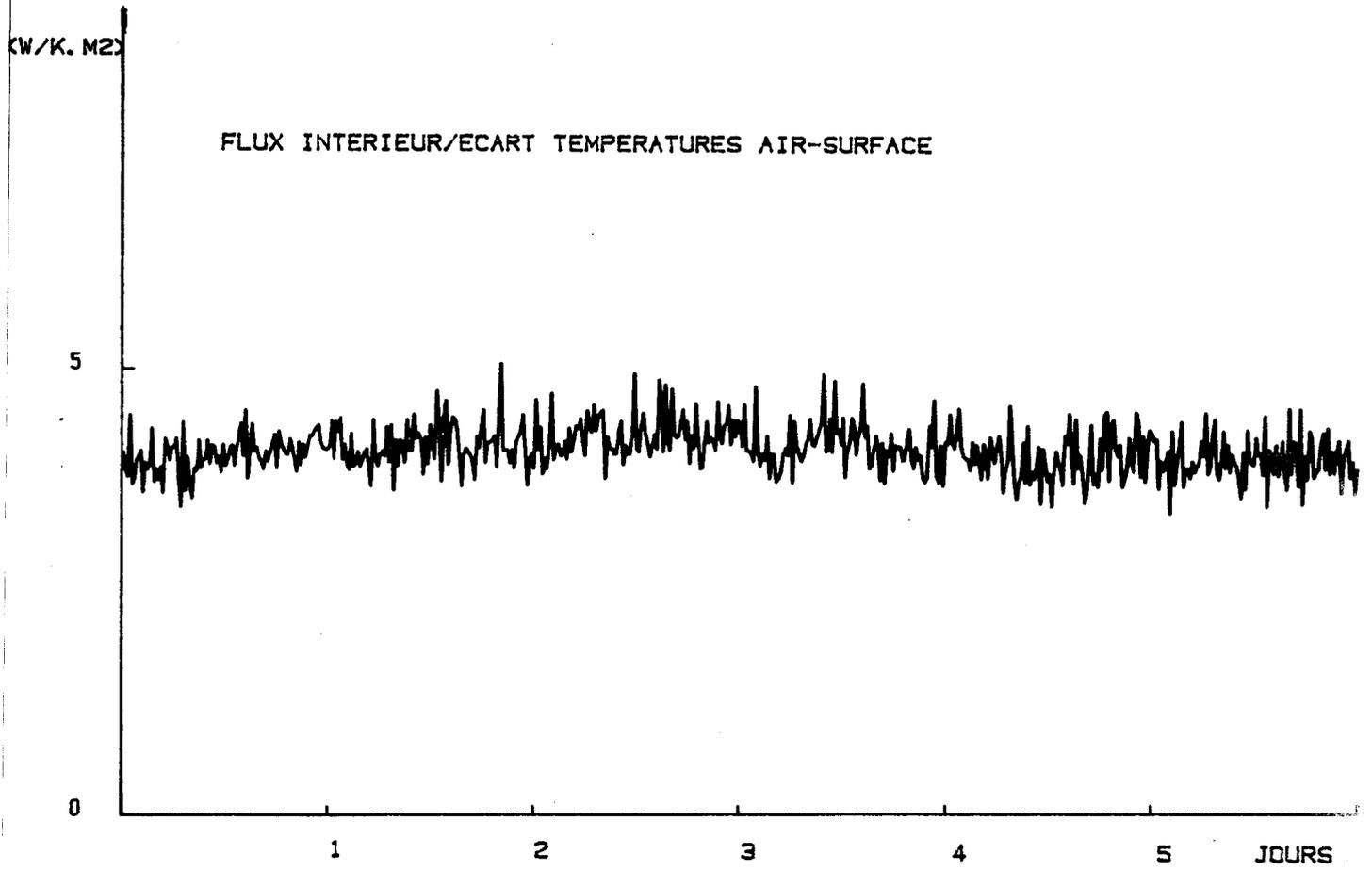


Figure 74 : Moyennes temporelles en fonction du nombre d'échantillons ou de la durée de l'observation.  $R_1$  de la quantité  $\frac{\Delta\theta}{\phi_1}$ .  $R_3$  de la quantité  $\frac{\Delta\theta}{\phi_2}$   
 $R_2$  de la quantité  $\frac{\overline{\Delta\theta}}{\overline{\Sigma\phi}/2}$



- FIGURE 75 -  
ECHANGES SUPERFICIELS

Ces remarques conduisent à développer un autre procédé de traitement fondé sur l'analyse énergétique des signaux, on conçoit que l'information obtenue sera beaucoup plus riche si l'on développe des traitements en moyenne quadratique qui donneront une information énergétique.

#### 4.2.4. Etude énergétique

Pour analyser l'énergie mutuelle d'interaction entre deux processus aléatoires stationnaires et ergodiques, la théorie du signal a introduit les fonctions de corrélations. Une fonction de corrélation est une représentation en moyenne quadratique d'un processus. La relation qui existe entre la fonction d'intercorrélation entrée-sortie d'un système et la fonction d'autocorrélation de l'entrée est aussi une représentation en "moyenne" de la réponse du système :

$$R_{\xi\phi\Delta\theta} = h_1 \otimes R_{\Delta\theta\Delta\theta} + h_2 \otimes R_{\xi\theta\Delta\theta}$$

Si la durée d'observation est suffisamment grande pour que les processus puissent être considérés aléatoires-stationnaires :

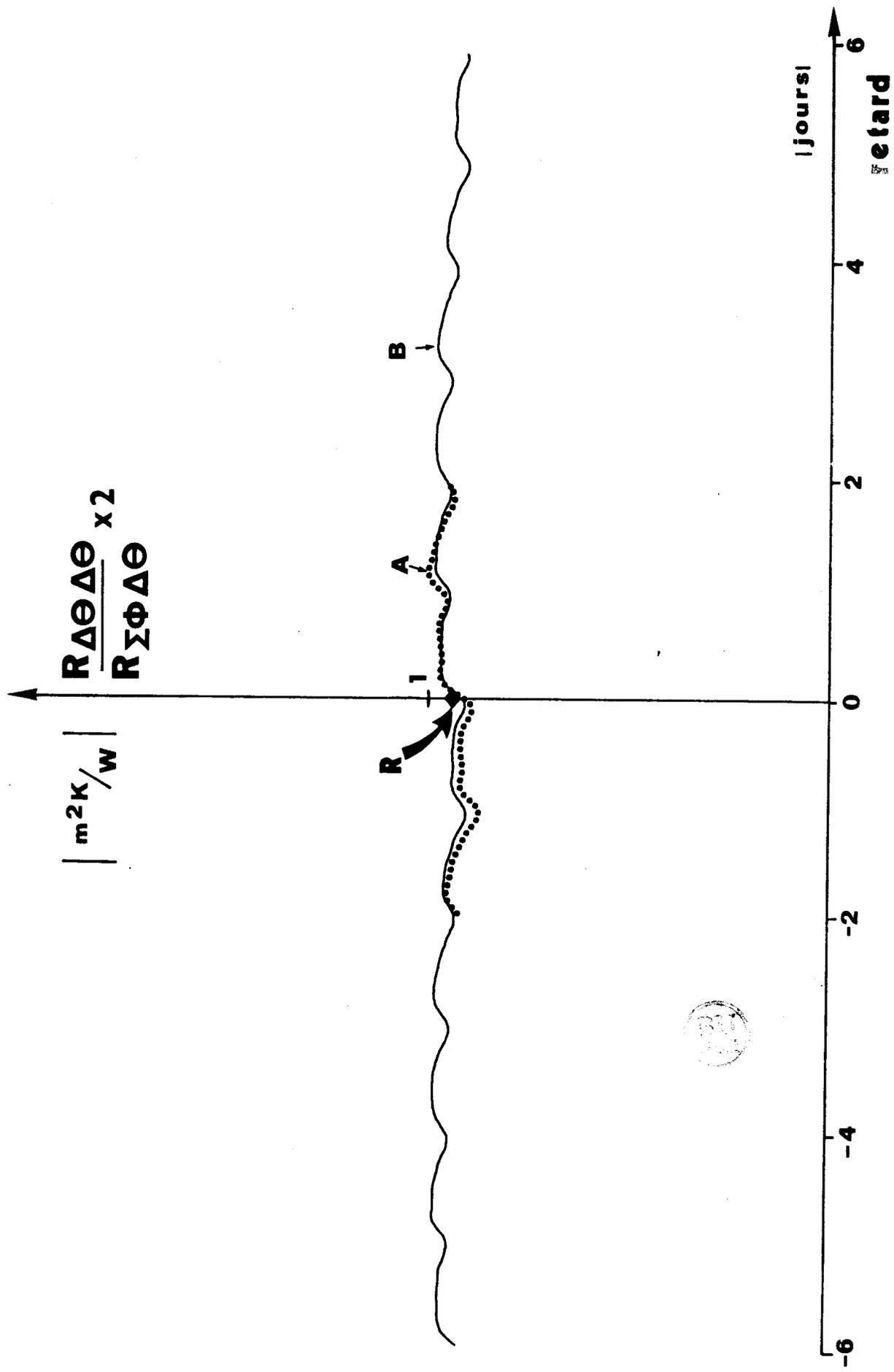
$$R_{\xi\phi\Delta\theta} \rightarrow \frac{2}{R} R_{\Delta\theta\Delta\theta}$$

Cette relation est encore valable pour des processus à moyennes "lentement variables" pour lesquels le système est en régime quasi-stationnaire en moyenne.

La figure 76 montre les rapports des fonctions de corrélation  $R_{\Delta\theta\Delta\theta}$  et  $R_{\xi\phi\Delta\theta}$  pour des durées de 2 jours et  $\pm 6$  jours. Dans les deux cas, ce rapport est pratiquement constant et égal à la valeur de la résistance thermique obtenue par le traitement en moyennes temporelles.

La théorie thermodynamique développée au second chapitre nous permet de valider ces traitements énergétiques en donnant un sens au couple de grandeurs  $\Sigma \phi \Delta\theta$  et  $\Delta\theta \cdot \Delta\theta$ . Dans le domaine de température qui nous intéresse on peut admettre que la température absolue est constante. La quantité  $\Sigma \phi \cdot \Delta\theta$  caractérise alors l'entropie fournie par les sources pour entretenir le transfert de chaleur et  $\Delta\theta \cdot \Delta\theta$  caractérise la dissipation minimale.

- FIGURE 76 - RAPPORT DES FONCTIONS DE CORRELATION



Le rapport à l'origine des fonctions de corrélation correspond à la "résistance apparente" que nous avons introduit au chapitre II pour caractériser la dissipation

$$R_a = \frac{2 \cdot R \Delta\theta \Delta\theta}{R \Sigma \emptyset \Delta\theta}$$

### 4.3. Comportement vis-à-vis des sollicitations rapides (ou hautes fréquences)

Dans la partie précédente notre objectif était l'analyse des composantes moyennes des signaux, dans cette partie au contraire nous ne nous intéressons qu'aux variations autour des composantes moyennes, c'est-à-dire à un problème de variables centrées. Un signal  $x(t)$  peut toujours être considéré comme résultant de la somme d'une composante moyenne  $x_m(t)$  et de fluctuations  $x'(t)$ . Le signal centré sera défini par :

$$x'(t) = x(t) - x_m(t)$$

#### 4.3.1. Fonction réponse d'une paroi soumise à des sollicitations rapides

L'objectif est de représenter les interactions entre une paroi et son environnement dans le domaine des variations assez rapides pour que la paroi se comporte comme un milieu semi-infini. Cette démarche introduit la notion d'admittance thermique pour représenter la relation fonctionnelle flux température sur la surface de la paroi.

Pour un milieu semi-infini soumis à des oscillations de pulsation  $\omega$  on montre facilement (57) que le flux et la température à la surface d'une paroi sont liés par la relation :

$$\frac{\phi(\omega)}{\theta(\omega)} = Y_c \quad \text{avec } Y_c = b \sqrt{j \omega}$$

$Y_c$  représente l'admittance thermique et s'exprime en ( $W/m^2 K$ )

En décomposant en module et phase on obtient :

$$\frac{\text{Mod}(\phi)}{\text{Mod}(\theta)} = b \sqrt{\omega}$$

L'oscillation de flux est en avance de  $\frac{\pi}{4}$  sur l'oscillation de température.

La validité de l'hypothèse d'un milieu semi-infini est liée à la profondeur de pénétration de l'onde thermique vis-à-vis de l'épaisseur de la paroi. A une fréquence donnée l'amplitude des oscillations de flux et de température s'amortit selon une loi exponentielle caractérisée par un paramètre homogène à une longueur "l'épaisseur de peau"  $\epsilon$  qui se définit par :

$$\epsilon = \sqrt{\frac{2a}{\omega}}$$

Le milieu pourra être considéré comme semi-infini si  $e/\epsilon$  est grand (en pratique de l'ordre de 4).

**Remarque :**

Pour un milieu de dimension finie l'admittance d'entrée prend encore une expression simple dans deux cas particuliers : le plan de sortie est à température constante (puits thermique), ou à flux nul (face isolée).

Pour le mur isolé ( $\phi(e, \omega) = 0$ )

$$\frac{\phi(0, \omega)}{\theta(0, \omega)} = b \sqrt{\frac{\omega}{2}} (1 + j) \cdot \text{th} \frac{l}{\epsilon} (1 + j)$$

Pour une paroi dont le plan de sortie est un "puits" ( $\theta(e, \omega) = \theta(0)$ ) maintenu à température constante

$$\frac{\phi(0, \omega)}{\theta(0, \omega)} = b \sqrt{\frac{\omega}{2}} (1 + j) / \text{th} \frac{l}{\epsilon} (1 + j)$$

En décomposant dans les deux cas en module et en phase en fonction du paramètre adimensionnel  $e/\epsilon$  on observe que l'admittance d'entrée est celle d'un milieu semi-infini à 2 % près des  $e/\epsilon \approx 2$  et à environ 10 % pour  $e/\epsilon \approx 1$

### 4.3.2. Application aux signaux naturels

Nous avons dans un premier temps centré les signaux de flux et de températures de la figure 73 mesurés sur les faces intérieure et extérieure de la paroi. Les signaux centrés obtenus  $\phi - \theta_1$  et  $\phi - \theta_2$  sont représentés figure 77, pour ces traitements les flux entrants sont considérés positifs afin de rester en accord avec la convention de signe utilisée en théorie des systèmes. On obtient alors des signaux très bruités difficiles à traiter directement.

Une application fondamentale des fonctions de corrélations est l'extraction de signaux noyés dans un bruit. La figure 78 montre pour les deux plans intérieur et extérieur les fonctions d'autocorrélation de la température de surface  $R_{\theta_s \theta_s}$  et l'intercorrrelation flux-température de surface  $R_{\phi \theta_s}$  obtenus pour des durées d'intégration de 2 jours. On obtient par ces traitements des signaux de période 24 h, la périodicité résulte de la programmation jour-nuit du chauffage pour l'ambiance intérieure et des variations climatiques diurne-nocturne pour la face extérieure. Une période de 24 h sur une paroi de béton correspond à une épaisseur de peau  $\varepsilon : 0,14$  m ce qui donne pour la couche côté intérieur  $e/\varepsilon : 0,7$  et pour la couche extérieure  $e/\varepsilon = 1,14$

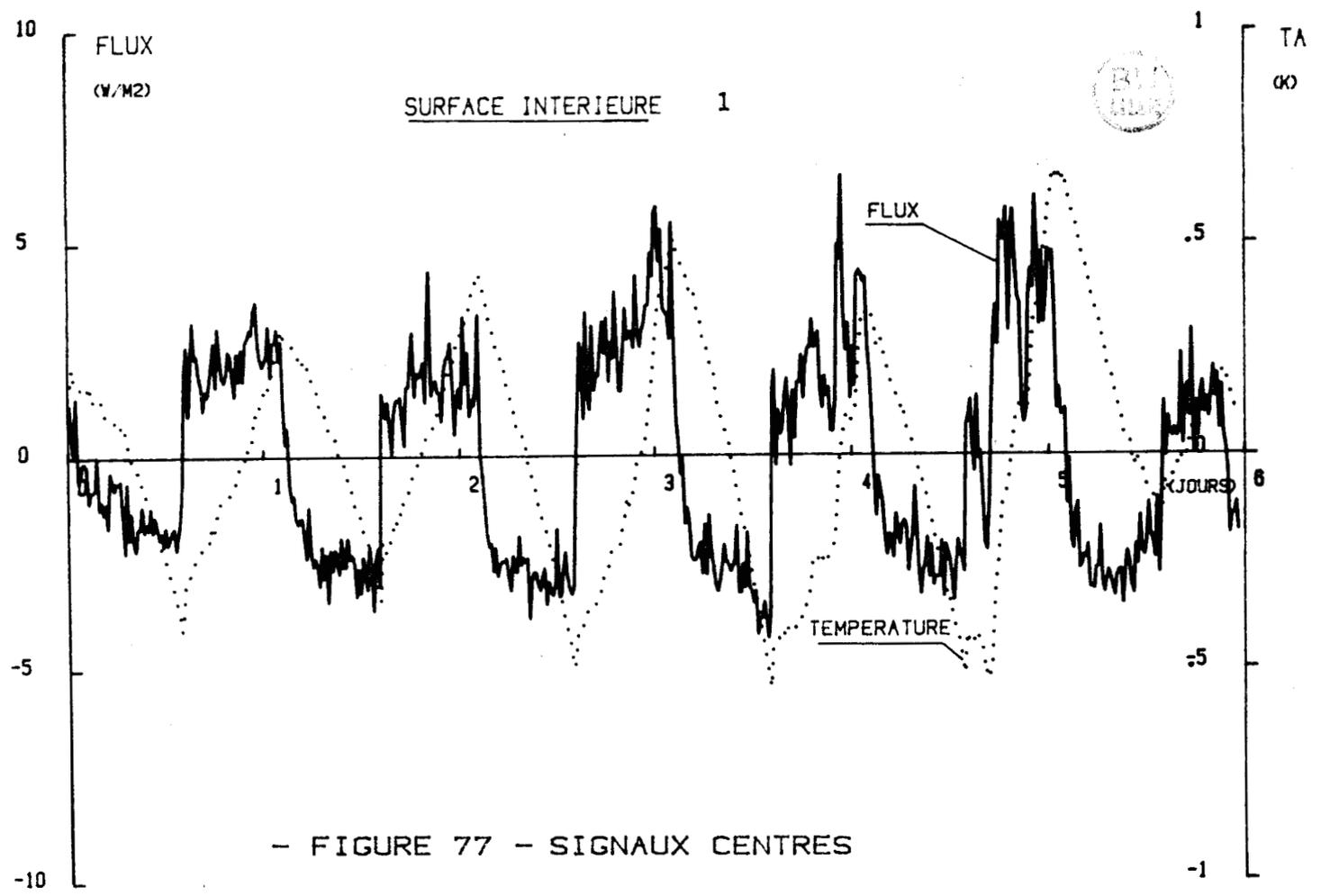
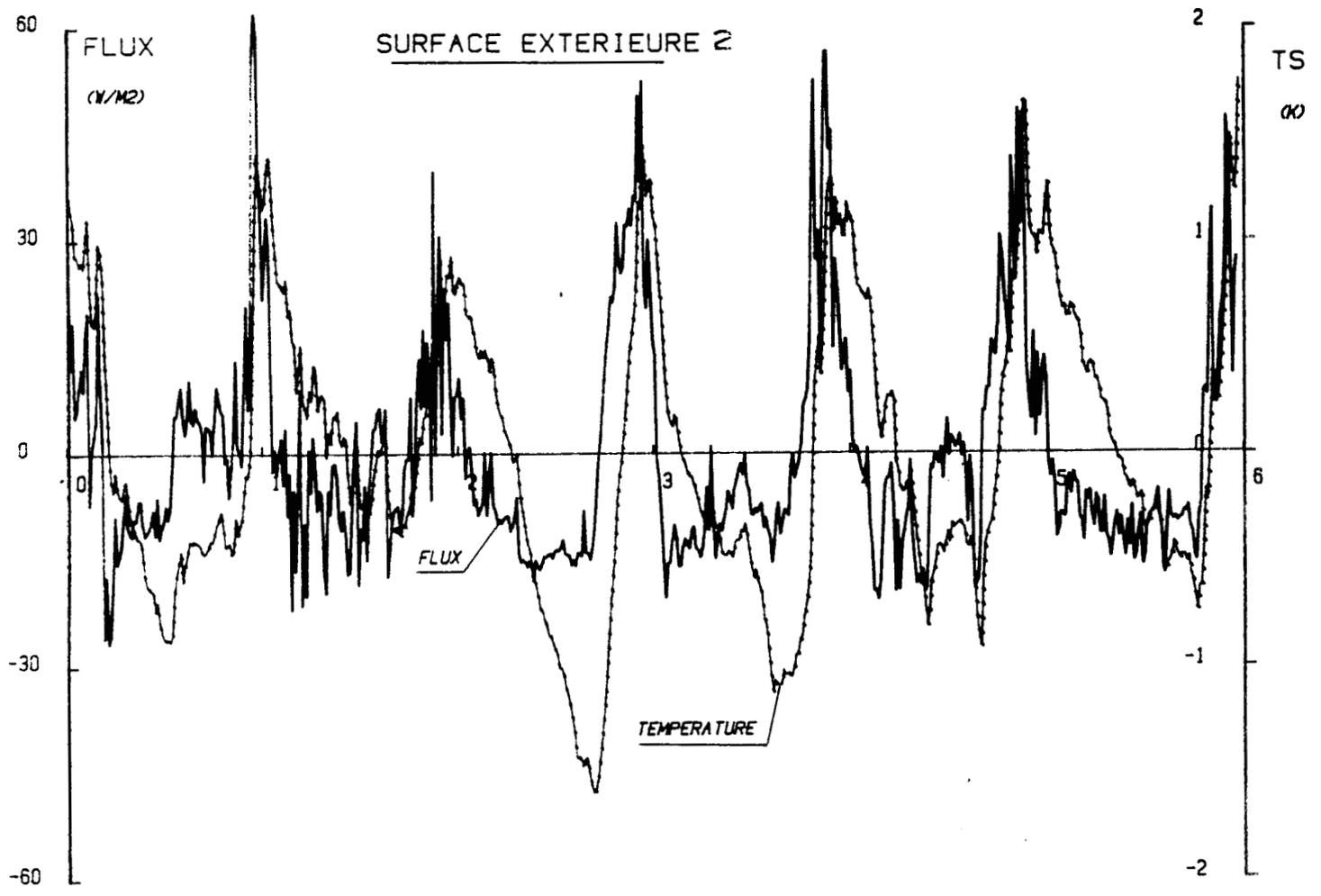
Les fonctions d'intercorrrelation sont maximales pour décalage  $\tau < 0$ , cet écart par rapport à l'origine des temps représente le déphasage qui existe entre le flux et la température, on vérifie que le flux est en avance sur la température.

Les fonctions d'intercorrrelation  $R_{\phi \theta_s}$  et d'autocorrrelation  $R_{\theta_s \theta_s}$  sont liées par les mêmes relations fonctionnelles que les grandeurs originales  $\phi, \theta_s$ , en particulier pour un milieu semi-infini.

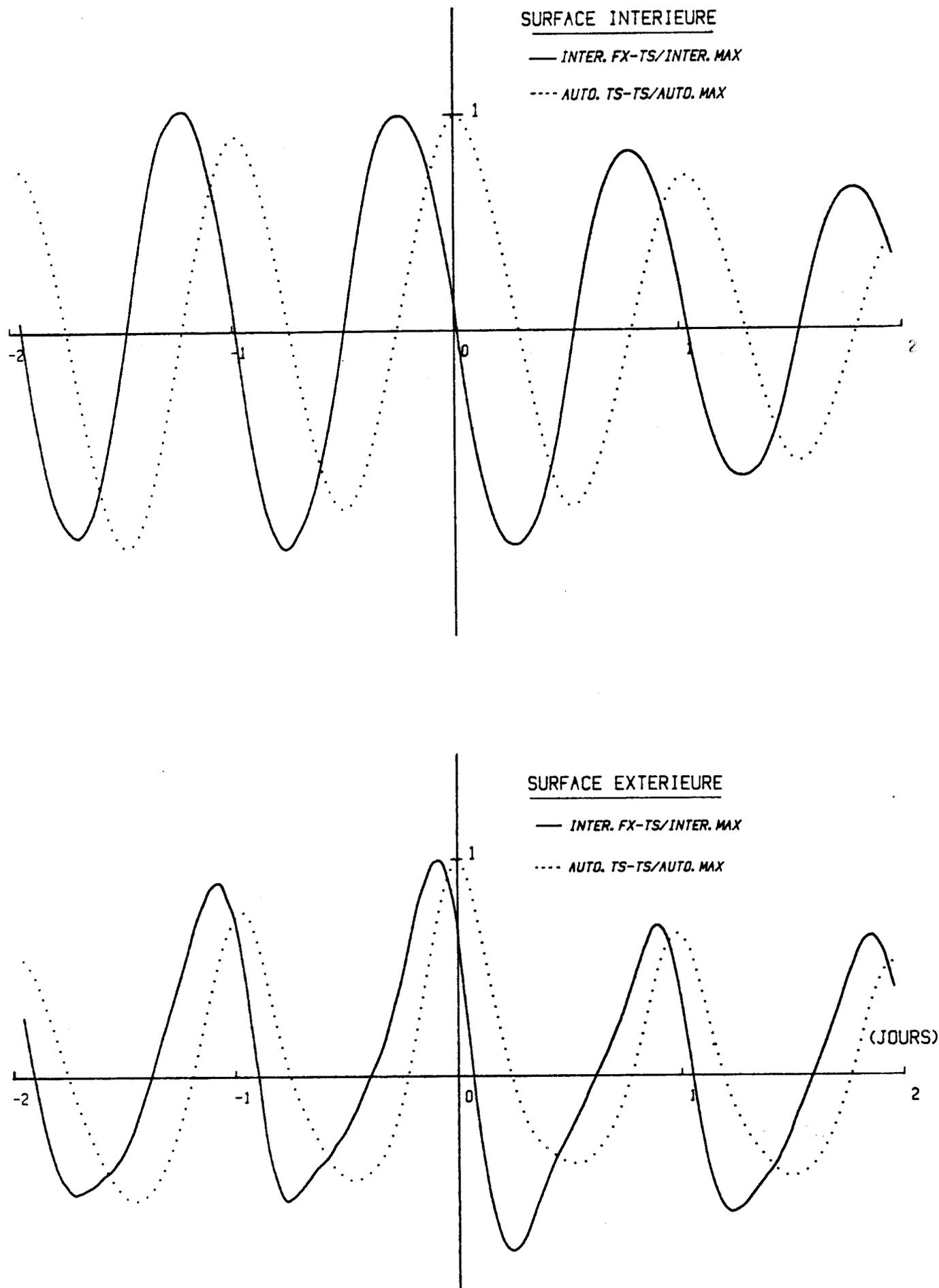
$$\frac{R_{\phi \theta_s}}{R_{\theta_s \theta_s}} = b \sqrt{j\omega}$$

L'exploitation de cette relation dans le domaine fréquentiel nécessite la décomposition en série de Fourier des fonctions de corrélations. Le rapport des modules du fondamental est égal à  $2140 \sqrt{\omega}$  pour la face extérieure. Cette valeur se situe dans la fourchette de l'admittance calculée pour une paroi de béton à partir des résultats de la littérature  $1700 < b < 2200$ .

Par contre, pour la face intérieure la valeur obtenue pour l'effusivité est très inférieure à la valeur précédente. Cet écart s'explique par la faible valeur du paramètre  $e/\varepsilon : 0,7$  pour laquelle le modèle du milieu semi-infini ne peut être appliqué.



- FIGURE 77 - SIGNAUX CENTRES



-FIGURE 78 -

### 4.3.3. Echanges énergétiques entre une paroi et une ambiance intérieure dont la température subit des variations rapides

Pour étudier les interactions entre l'ambiance du local et l'enveloppe, nous allons utiliser des signaux résultant d'une modulation de période 2,5 h de la température d'air du local.

Les sollicitations sont contrôlées par un micro-ordinateur qui commande la puissance dissipée dans des convecteurs électriques de puissances 5 Kw ainsi que des batteries de ventilateurs qui assurent le brassage de l'air du local afin d'en modifier les conditions de convection.

Trois essais ont été effectués : sans ventilation, avec une ventilation "faible", avec une ventilation "forte". Dans tous les cas 8 cycles chauffage-refroidissement ont été programmés, la durée totale de l'essai est de 20 h.

Les figures 79 et 80 représentent les signaux enregistrés lors de deux essais : essai 2 "ventilation faible" et essai 3 avec ventilation "forte". Pour chaque signal, flux, température de surface et température d'air, nous avons représenté la valeur instantanée en traits pleins et la composante moyenne en pointillés.

Les figures 81 et 82 représentent dans les deux cas en traits pleins le rapport du flux et de l'écart des températures air-surface.  $\phi / T_a - T_s$  et en comparaison en pointillés le rapport effectué sur les valeurs moyennes.

Le rapport des valeurs instantanées n'est pas constant pour l'essai 2, on distingue nettement une périodicité, les valeurs observées dans les phases de chauffage sont différentes de celles observées en refroidissement. Dans cet essai, le brassage de l'air est assuré par un petit ventilateur, le flux superficiel résulte d'échanges par convection et par rayonnement avec l'environnement :

$$\phi = h_c (\theta_s - \theta_a) + h_r (\theta_s - \theta_p) = h (\theta_s - \theta_E)$$

$\theta_E$  est la température "équivalente de l'environnement" que l'on peut définir dans nos conditions expérimentales par :

$$\theta_E = \frac{h_r \theta_p + h_c \theta_a}{h_r + h_c}$$

Pour avoir un rapport  $\phi / (\theta_s - \theta_a)$  constant il faudrait avoir  $\theta_a = \theta_E$  à chaque instant.

Dans les phases de chauffage, la température globale des éléments qui rayonnent avec la paroi  $\theta_p$  est inférieure à la température d'air  $\theta_a$  (quelque soit les constantes de temps de ces éléments). On a donc  $\theta_E < \theta_a$  et :

$$\frac{\phi}{\theta_s - \theta_a} < \frac{\phi}{\theta_s - \theta_E}$$

Dans les phases de refroidissement par contre, compte tenu des constantes de temps respectives des cloisons et équipements divers qui rayonnent avec la paroi nous avons  $\theta_p > \theta_a$  et donc  $\theta_E > \theta_a$

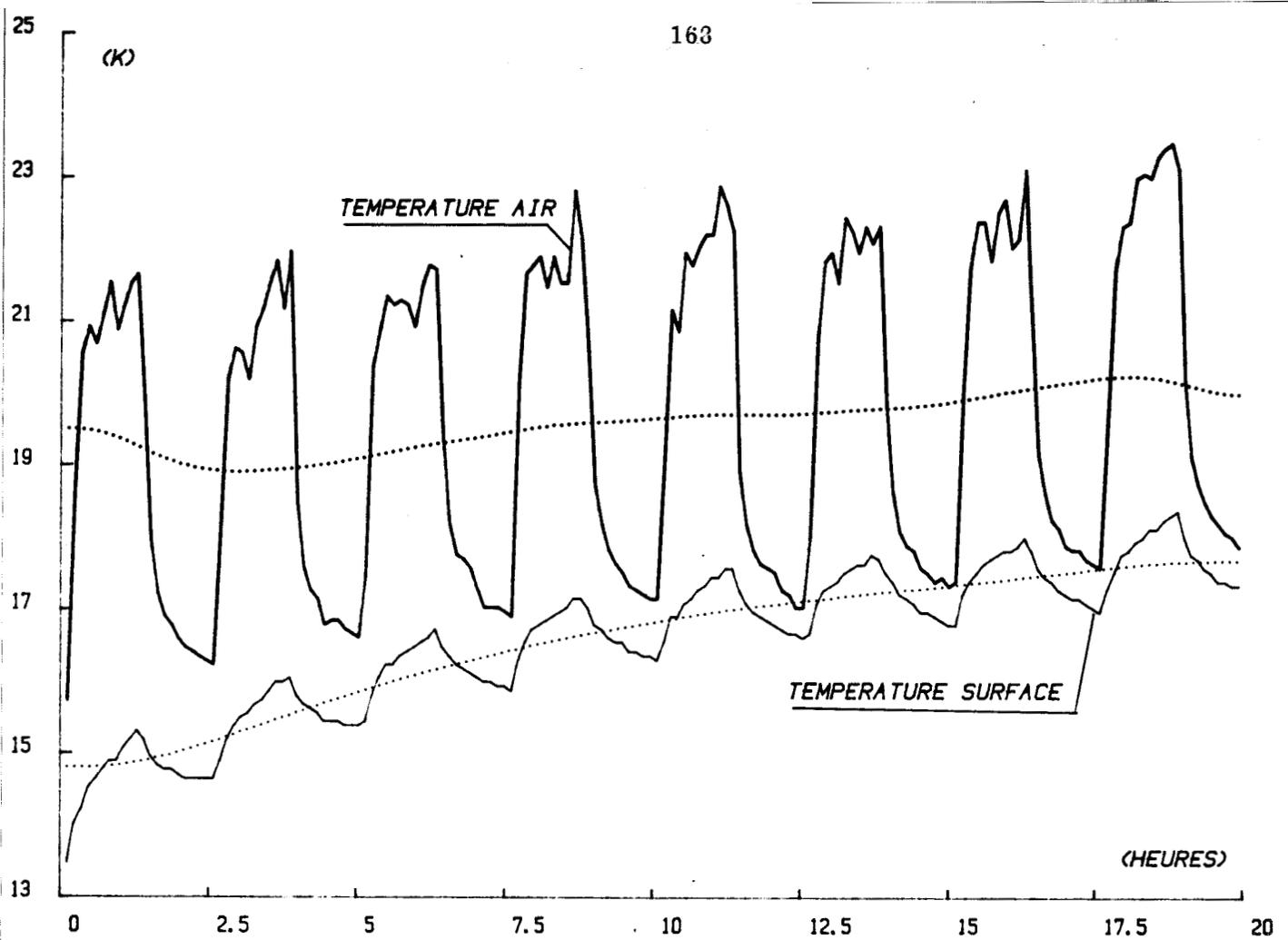
Ce phénomène est d'autant plus marqué que la part de convection est faible vis-à-vis du rayonnement c'est-à-dire pour un cas de figure donné ( $h_r$  et  $h_c$  constants) quand l'écart  $\theta_s - \theta_a$  est petit. C'est ce que nous observons dès le milieu de l'essai, la température moyenne du mur augmentant, l'écart  $\theta_s - \theta_a$  diminue il en résulte une part importante de rayonnement dans le processus de transfert, les fluctuations du rapport sont plus importantes.

Durant l'essai 3, des ventilateurs à grands débits ont été mis en fonctionnement, il en résulte un déséquilibre des coefficients d'échanges

$$h_c \gg h_r$$

Durant le premier tiers environ de l'essai le rapport  $\phi / (\theta_a - \theta_s)$  est pratiquement constant ce qui est normal puisque l'échange résulte essentiellement de la convection. Puis une périodicité apparaît, ce phénomène coïncide (voir figure 80) avec une nette diminution dans les phases de refroidissement de l'écart  $\theta_a - \theta_s$ , bien que le coefficient  $h_c$  soit grand le transfert par rayonnement devient alors non négligeable. Dans le dernier tiers de l'essai l'écart entre la température d'air et de surface est pratiquement nul, il n'y a plus aucune corrélation entre les valeurs instantanées de cet écart et le flux qui résulte alors uniquement du rayonnement avec l'environnement.

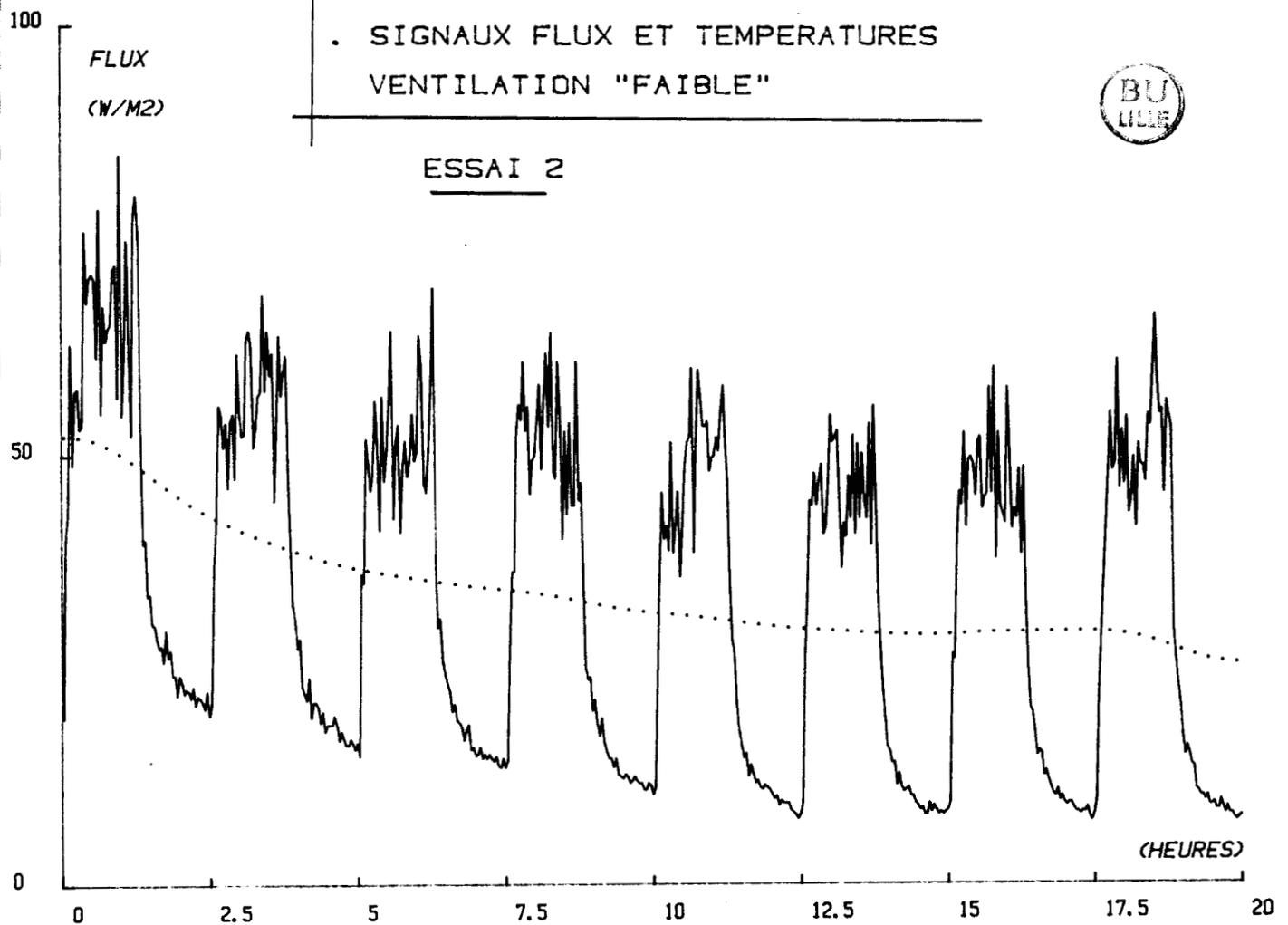
On constate par contre tout au long de l'essai que le rapport  $\phi / (\theta_a - \theta_s)$  est constant dans les phases de chauffage dans lesquelles  $\theta_a - \theta_s$  est grand et autorise le

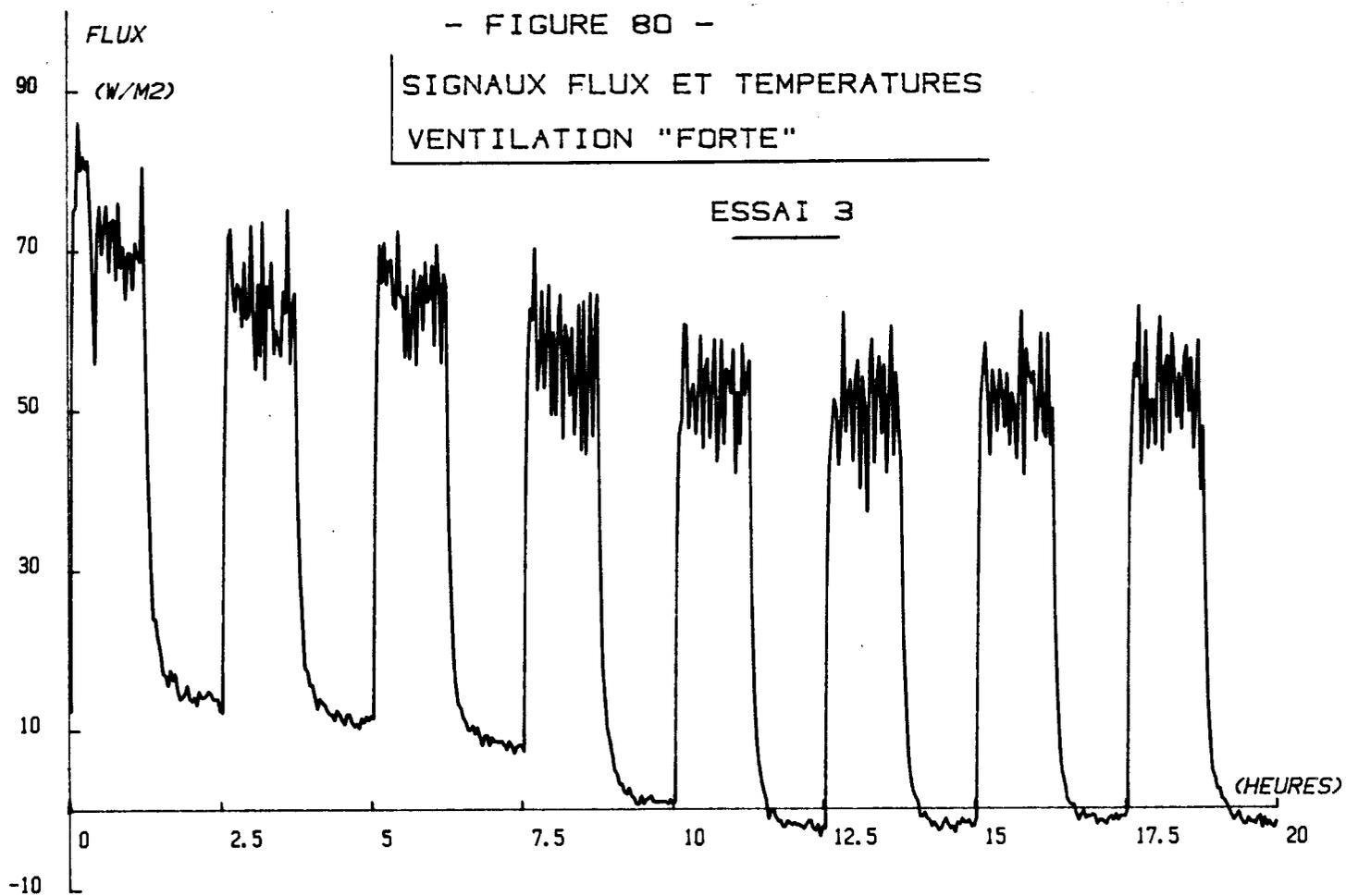
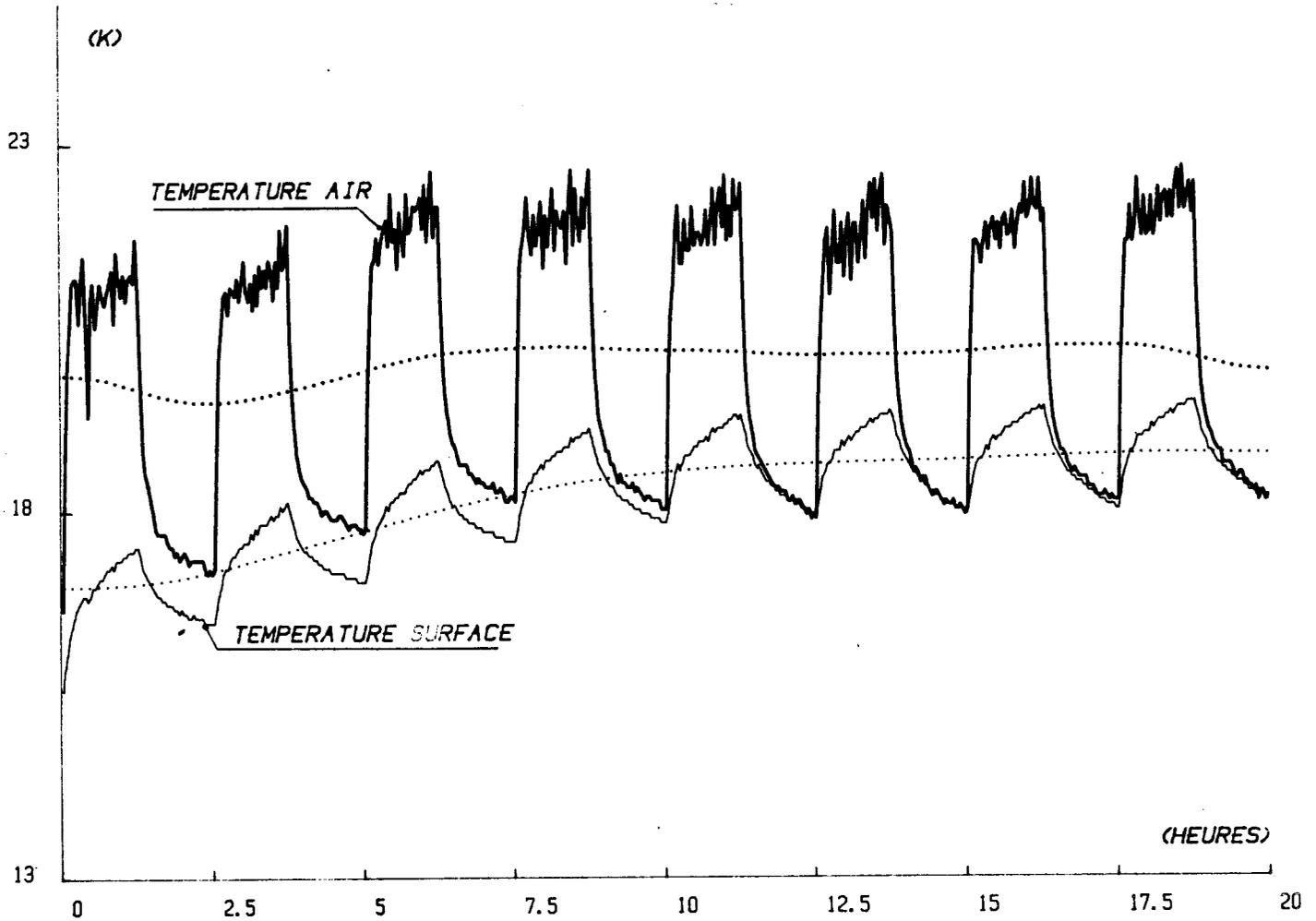


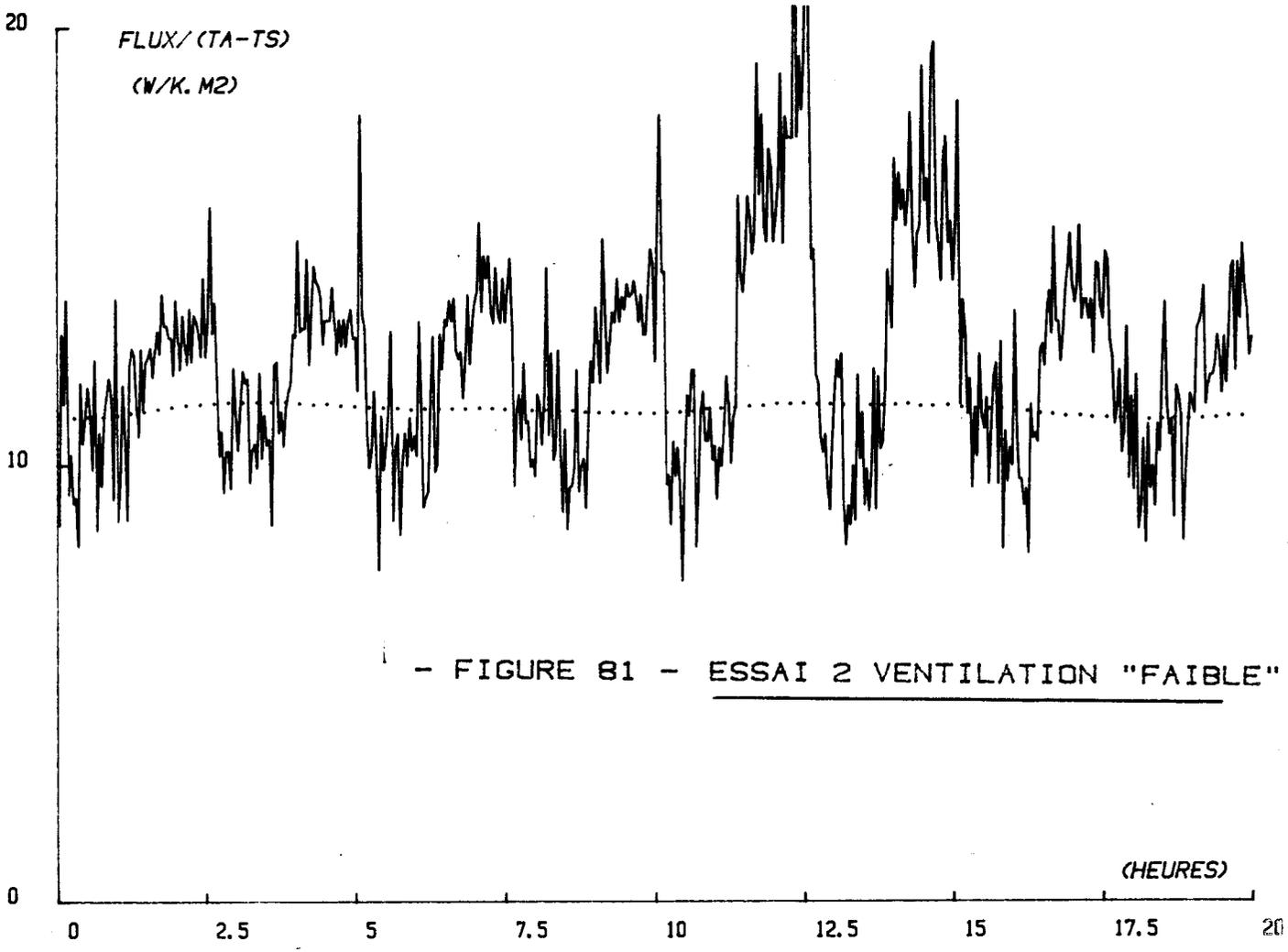
-FIGURE 79 -

SIGNAUX FLUX ET TEMPERATURES  
VENTILATION "FAIBLE"

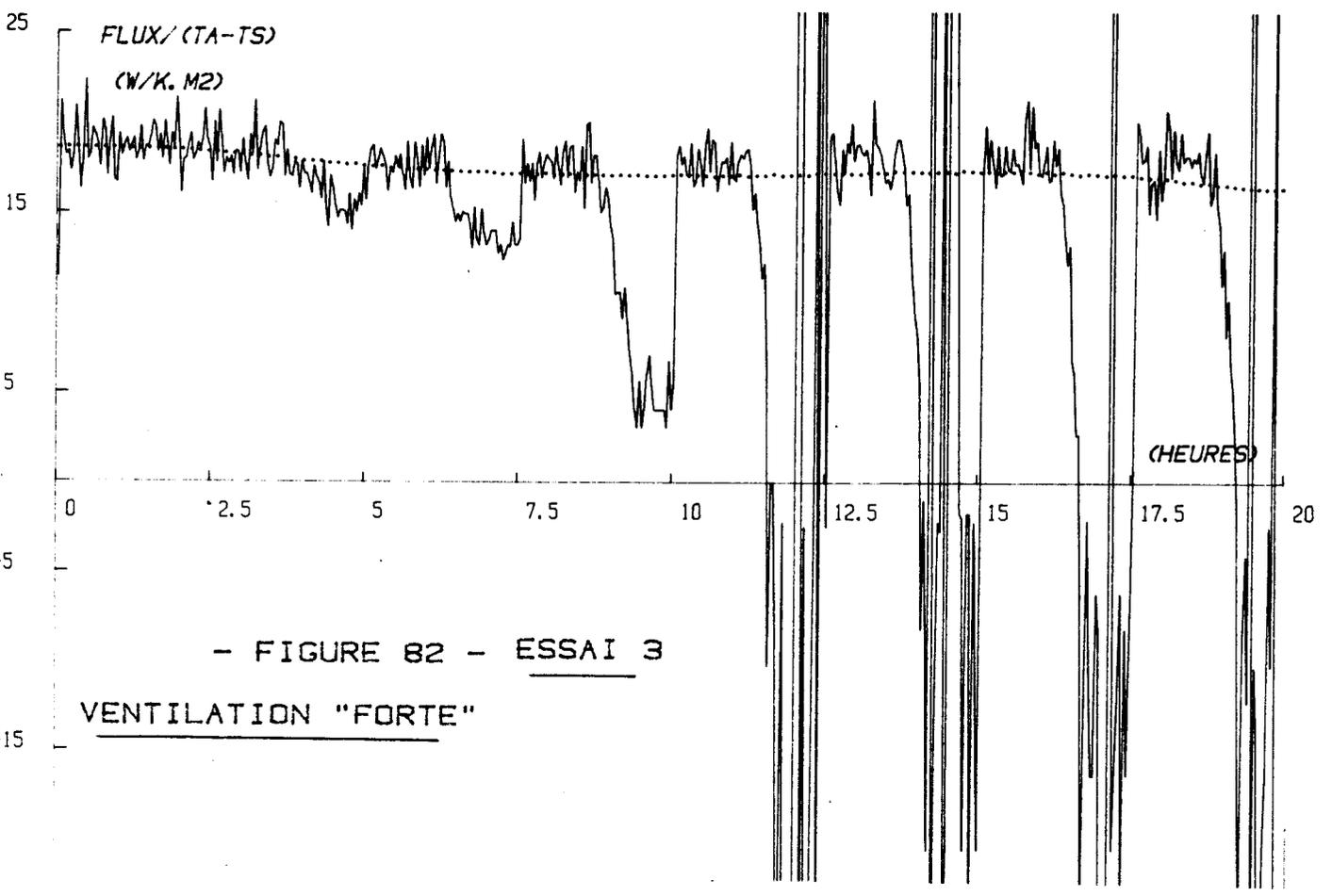
ESSAI 2







- FIGURE 81 - ESSAI 2 VENTILATION "FAIBLE"



- FIGURE 82 - ESSAI 3  
VENTILATION "FORTE"

transfert par convection.

Par contre en moyenne (courbes en pointillés) le flux moyen est proportionnel à l'écart des températures moyennes. Un coefficient d'échange moyen peut être défini par la relation :

$$\bar{h} = \frac{\phi_m}{\theta_{am} - \theta_{sm}}$$

Il faut bien remarquer ici que ce résultat se vérifie sur tous les essais effectués avec des systèmes de chauffage du type convecteurs mais n'est pas applicable aux productions de chaleur de types radiatives (infra-rouge ...).

### Relation flux-température d'air

De la même façon que nous avons introduit la notion d'admittance thermique en analysant la relation flux-température à la surface de la paroi une démarche analogue peut être utilisée pour analyser les relations entre le flux et la température d'air. Cette modélisation implique deux hypothèses simplificatrices : la paroi se comporte comme un milieu semi-infini, le coefficient d'échange est constant, on peut alors écrire :

$$\theta_a - \theta_s = \frac{\phi}{h}$$

L'admittance thermique définie en 4.3.1. s'écrit :

$$\frac{\phi(\omega)}{\theta_s(\omega)} = b \sqrt{j\omega}$$

Par analogie, on introduit une grandeur  $b'$  (apparente)

$$\frac{\phi(\omega)}{\theta_a(\omega)} = b' \sqrt{j\omega}$$

En combinant les trois relations on obtient l'expression de  $b'$  :

$$b' : \frac{h b}{h + b \sqrt{j\omega}}$$

$b'$  est une grandeur complexe, une décomposition en module et en phase donné :

$$\text{Mod}(b') = \frac{b}{\sqrt{1 + \frac{2}{\text{Bi}} + \frac{2}{\text{Bi}^2}}} \quad \text{et } \psi = -\text{Artg} \frac{1}{1 + \text{Bi}}$$

$\text{Bi}$  est ici le nombre de Biot pour une sollicitation périodique :

$$\text{Bi} : \frac{h}{b} \sqrt{\frac{2}{\omega}}$$

Le déphasage  $\gamma$  qui existe entre le flux et la température d'air s'obtient à partir des relations précédentes :

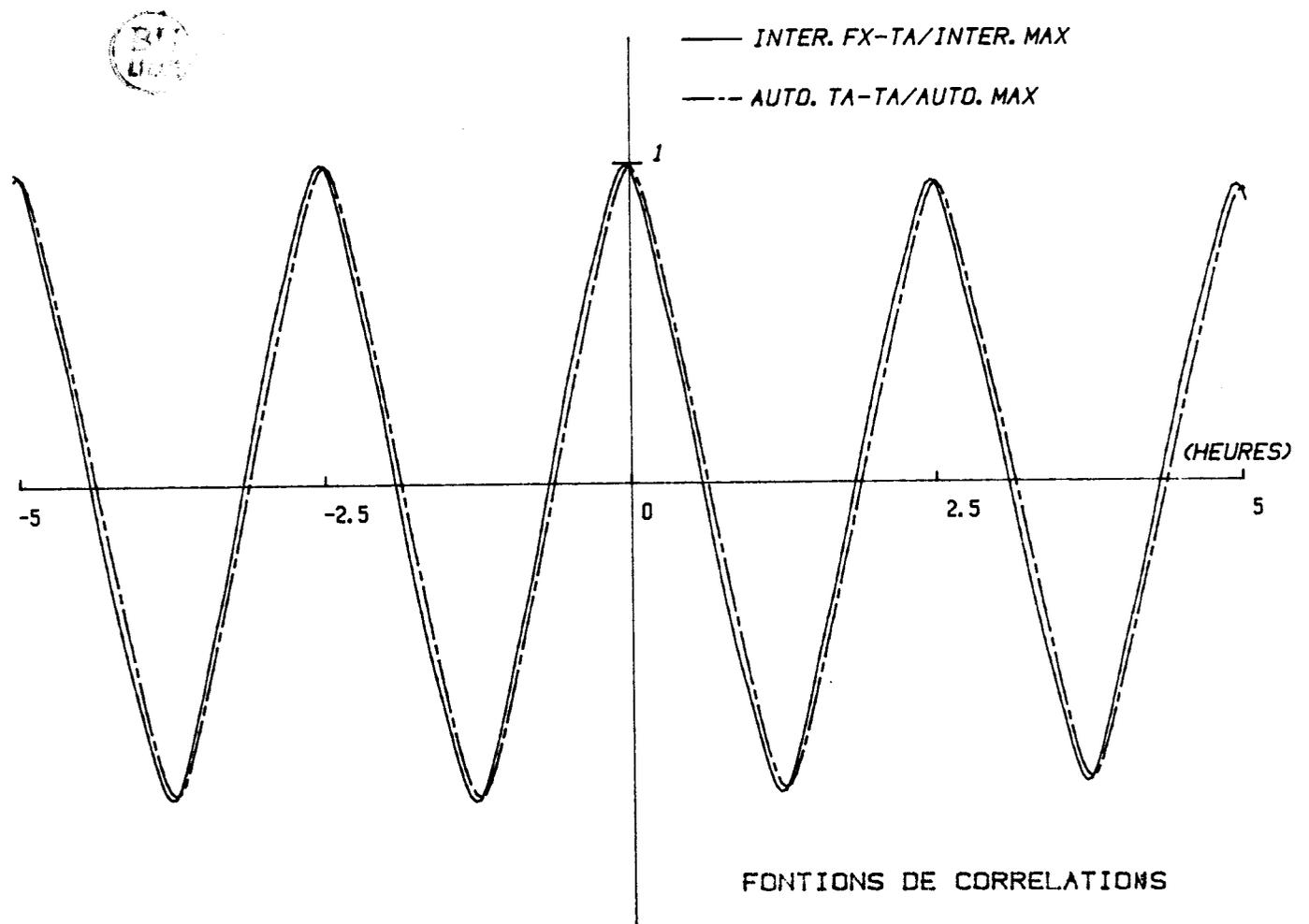
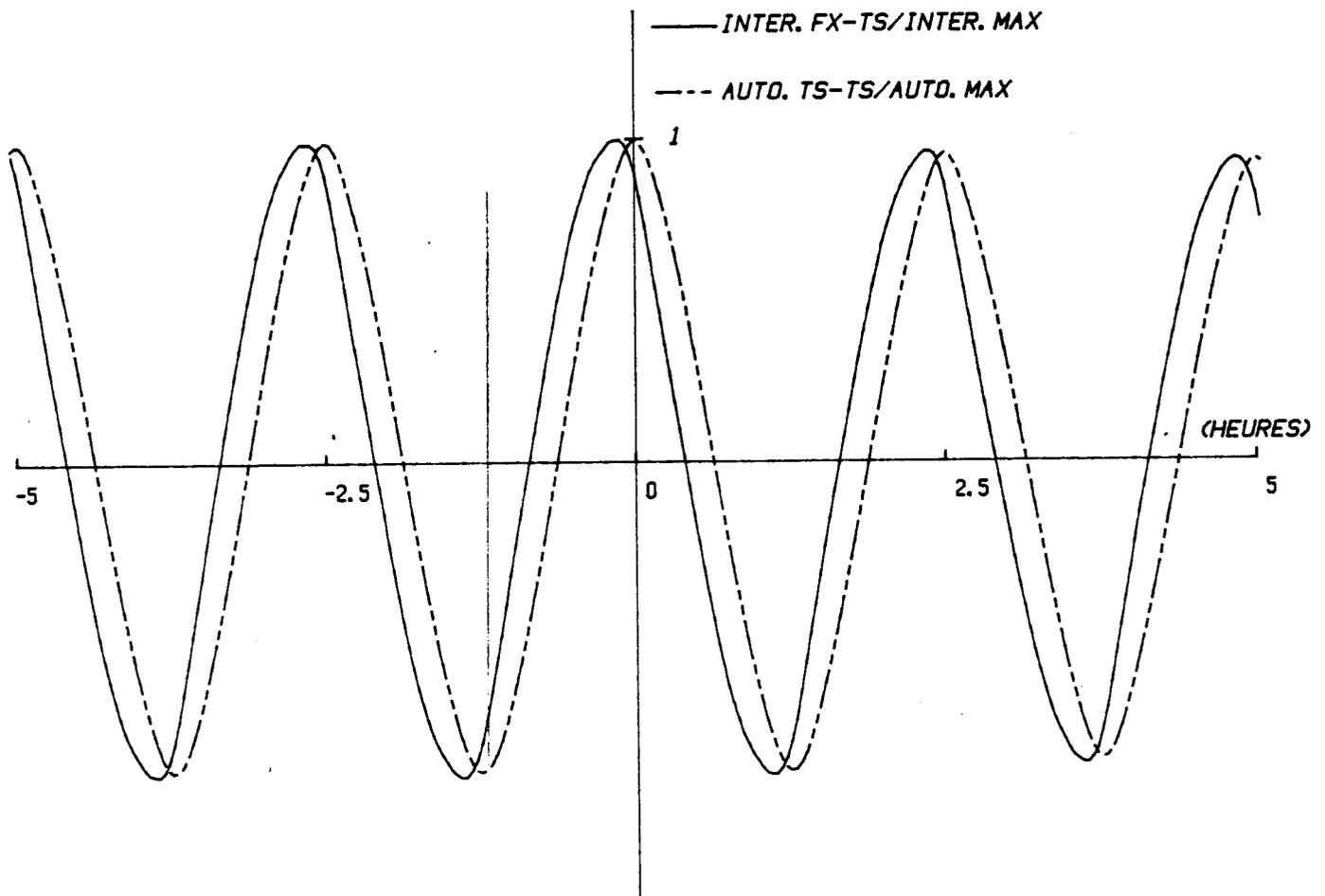
$$\gamma = \frac{\pi}{4} - \text{Artg} \frac{1}{1 + \text{Bi}}$$

Le déphasage entre le flux et la température d'air ne dépend que du nombre de Biot :

$$\begin{aligned} \gamma &\rightarrow 0 & \text{si } \text{Bi} &\rightarrow 0 \\ \gamma &\rightarrow \frac{\pi}{4} & \text{si } \text{Bi} &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

Pour un coefficient  $h$  de l'ordre de 10, une sollicitation de période 2,5 h sur une paroi de béton donne un déphasage très faible de l'ordre de  $8^\circ$ , le flux est pratiquement en phase avec la température ambiante. Par contre, pour la même sollicitation sur une paroi de polystyrène, le calcul conduit à un déphasage de  $20^\circ$ .

La figure 83 représente les fonctions de corrélations relatives aux signaux centrés de l'essai 2. Les signaux obtenus sont parfaitement périodiques et débarrassés du bruit qui leur était superposé. La fonction d'intercorrélation  $R_{\theta_s \theta_s}$  qui caractérise l'échange dans le plan de la surface de la paroi est en avance d'environ  $40^\circ$  sur la fonction d'autocorrélation  $R_{\theta_s \theta_s}$ , ce déphasage résulte de l'avance du flux sur la température de surface. Par contre, la fonction d'intercorrélation  $R_{\theta_a \theta_a}$  obtenue à



- FIGURE 63 -

FONCTIONS DE CORRELATIONS  
RELATIVES A L'ESSAI 2

partir de la température d'air est pratiquement en phase avec l'autocorrélation, ces résultats confirment les développements théoriques précédents.

Les principaux résultats obtenus sont représentés dans le tableau 1. Pour la période considérée, l'épaisseur de peau est de l'ordre de 4 cm soit  $\ell/\varepsilon : 2,5$ .

**TABLEAU I**

Essai	Conditions	b <sub>exp</sub>	mod (b')		Bi	$\bar{h}$
			Calcul	expe		
N° 1	Sans ventilation	1973	286	241	0,23	8,5
N° 2	Ventilation faible	1900	370	300	0,33	10,5
N° 3	Ventilation forte	1965	519	550	0,47	17,2

L'effet du brassage de l'air apparaît clairement sur les valeurs du coefficient d'échange moyen  $\bar{h}$  calculé à partir des valeurs "lissées" des signaux.

L'effusivité  $b$  est obtenue après décomposition en série de Fourier en calculant pour la fréquence fondamentale le rapport :

$$b = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{\text{Mod} (F \theta_s (\omega))}{\text{Mod} (F \theta_s \theta_s (\omega))}$$

$F \theta_s (\omega)$  et  $F \theta_s \theta_s (\omega)$  représentent ici les décompositions en série de Fourier.

Les valeurs de  $b$  obtenues dans les trois essais sont voisines et compatibles avec les caractéristiques thermophysiques du béton.

Pour la grandeur  $b'$ , nous avons comparé la valeur "expérimentale" obtenue par un calcul analogue au précédent en effectuant une décomposition en série de Fourier de  $R \theta_a$  et  $R \theta_a \theta_a$  à la valeur "calculée" à partir des grandeurs  $b$  et  $h$

$$\text{Mod}(b') \text{ calculé} = \frac{b}{\sqrt{1 + \frac{2}{Bi} + \frac{2}{Bi^2}}}$$

$$\text{Mod}(b') \text{ exp} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{\text{Mod}(F_{\theta a}(\omega))}{\text{Mod}(F_{\theta a}(\omega))}$$

Pour les trois essais les deux résultats sont voisins et confirment la modélisation proposée.

## V. CONCLUSION

Dans la première partie du chapitre la comparaison des signaux mesurés dans les plans entrée-sortie d'une cloison homogène soumise à des conditions limites quelconques et des résultats de simulations numériques réalisées à partir des fonctions réponses théoriques de la paroi valide les méthodes de mesure et de traitement de flux et de température utilisés.

L'application du bilan d'entropie à une paroi homogène d'un caisson climatique permet de comparer pour des sollicitations faiblement ou rapidement variables la production d'entropie minimale à l'échange réel d'entropie. On vérifie que l'échange réel résulte de produits de convolution entre les productions minimales et des fonctions réponses propres à la paroi. Le calcul de la résistance apparente  $R_a$  relative au mode transfert pour des sollicitations de formes voisines de créneaux de températures de durées variables montre que cette fonction de transformation est très voisine de la résistance thermique du système dès que la durée de l'excitation est de l'ordre de  $5 \tau$ .

La simulation de la production d'entropie d'un processus de transfert résultant d'une sollicitation  $\Delta\theta$  en forme d'échelon montre que la l'échange réel est supérieur de 10 % environ à la production minimale pour  $z \approx 7,5$ .

Les essais réalisés sur un système dissymétrique (bicouche) montrent clairement que la dissipation interne dépend fortement de la disposition du système vis-à-vis de la sollicitation. En linéarisant les transferts convectifs et radiatifs entre une paroi et son environnement, on peut modéliser les échanges superficiels par des résistances pures et estimer ainsi la production d'entropie de l'ensemble paroi-résistances superficielles.

La seconde partie peut être considérée comme un exemple d'application des méthodes de traitements des signaux thermiques que nous avons développées et validées dans le cadre général de la thermodynamique. Pour étudier les échanges énergétiques entre une paroi tricouche et son environnement nous avons mesuré les signaux de flux et de température aux surfaces limites de la paroi ainsi que les températures d'air des deux ambiances extérieure et intérieure. Les signaux obtenus sont complexes et comportent des composantes aléatoires. Deux analyses sont effectuées : celle du comportement "moyen" du système sur des durées d'observation

de plusieurs jours et celle de la réponse du système aux sollicitations "hautes fréquences" ou "rapidement variables".

Le comportement "moyen" est caractérisé par la résistance thermique globale du système qui inclut la somme des résistances thermiques des couches constitutives de la paroi et éventuellement les échanges superficiels. La résistance thermique peut être déterminée à partir d'une analyse simple des moyennes temporelles des grandeurs  $\Sigma \theta$ ,  $\Delta \theta$  ou  $\theta$ ,  $\Delta \theta$ , cette procédure est cependant difficilement applicable aux signaux bruités de faible énergie ou lorsque la moyenne est voisine de zéro. L'utilisation des fonctions de corrélation  $R_{\Sigma \theta \Delta \theta}$  et  $R_{\Delta \theta \Delta \theta}$  constitue une approche énergétique qui est beaucoup plus riche, elle permet en particulier le traitement des signaux bruités ou à moyenne nulle. Les développements théoriques du chapitre II permettent de valider cette approche en donnant un sens aux produits  $\Sigma \theta \cdot \Delta \theta$  et  $\Delta \theta \cdot \Delta \theta$ , pour des variations de températures faibles vis-à-vis de la température absolue, le premier terme caractérise l'échange d'entropie au cours de l'évolution et le second la production minimale. Le rapport  $R_{\Delta \theta \cdot \Delta \theta}(0)/R_{\Sigma \theta \Delta \theta}(0)$  représente la résistance apparente introduite au chapitre II, cette fonction de transformation s'identifie à la résistance thermique du système quand la part des régimes transitoires est faible vis-à-vis des régimes quasi-stationnaires.

Par une procédure de centrage des signaux il est possible d'isoler et d'étudier les réponses de la paroi aux fluctuations rapides. Pour des sollicitations de fréquence suffisamment élevée la notion d'admittance thermique est introduite pour relier les fluctuations de flux et de température à la surface de la paroi. Le seul paramètre caractéristique de la réponse de la paroi est alors l'effusivité thermique. Nous montrons que l'effusivité est accessible à la mesure pour des signaux naturels complexes à condition que les sollicitations comportent une périodicité (cachée) de fréquence suffisamment élevée, on associe pour cela les techniques de traitement par fonctions de corrélation et des décompositions en série de Fourier.

Par analogie, nous avons généralisé la notion d'admittance thermique à la relation fonctionnelle liant le flux mesuré sur une paroi et les oscillations de la température d'air. En supposant qu'il y a égalité de la température d'air et de la température équivalente de l'environnement, les échanges superficiels sont alors caractérisés par un coefficient d'échange constant. Nous montrons que cette hypothèse n'est vérifiée qu'en moyenne.

La relation flux-température d'air est caractérisée par une grandeur complexe (b') dont le module dépend de l'effusivité de la paroi et du nombre de Biot. Le déphasage flux température d'air ne dépend que du nombre de Biot. Pour une fréquence et un coefficient d'échange donné, il ne dépendra donc que de l'effusivité du matériau à la surface de la paroi. Un matériau isolant léger conduira à un déphasage plus élevé qu'un matériau lourd.

Cette étude des interactions énergétiques entre une paroi et une ambiance est actuellement poursuivie dans notre laboratoire et devrait amener à montrer l'intérêt des mesures de flux thermique pour la gestion optimale de l'énergie à fournir à une ambiance pour y maintenir des conditions de confort thermique données. Du point de vue économique on peut remarquer que le flux mesuré prend en compte les apports gratuits aléatoires.

CONCLUSION

-----

## CONCLUSION

Ce travail a été développé de façon à fournir un modèle de représentation des interactions énergétiques entre une paroi opaque et son environnement utilisable pour :

- Estimer ou gérer la dissipation d'énergie
- Aborder les problèmes de la thermique expérimentale des bâtiments sur site, cet aspect fondamental est actuellement trop peu traité faute d'outils de mesures et de traitements adaptés.

L'originalité de notre approche résulte de l'application des méthodes de la théorie du signal et des systèmes aux processus thermiques et de la validation des résultats dans le cadre général de la thermodynamique. La représentation des échanges thermiques proposée et les procédures de traitements développées sont peu exigeantes quant à la qualité des signaux et permettent de traiter les sollicitations naturelles complexes. Le développement technologique des fluxmètres "plans" auquel nous avons participé fournit un outil précieux, les informations flux et température dans les plans d'accès du système étudié dispensent de faire des hypothèses quant aux conditions limites.

Cette étude constitue une première étape et demande à être poursuivie dans divers domaines, en particulier :

- les structures multicouches dissymétriques sont étudiées actuellement dans notre laboratoire afin d'obtenir une représentation suffisamment globale pour simuler la réponse de telles structures à des sollicitations complexes et de mesurer simplement leur fonctions de réponses caractéristiques.
- Nos résultats font apparaître la complexité liée à la représentation des échanges superficiels ou plus généralement à l'interprétation des mesures fluxométriques à la surface d'une paroi cette étude est actuellement poursuivie, pour séparer les échanges radiatifs et convectifs. Deux fluxmètres sont utilisés, la surface de l'un est noircie pour obtenir une émissivité voisine de l'unité, l'autre est polie pour minimiser la part de flux rayonné de sorte que la différence des flux est due aux échanges par rayonnement.

- *Les systèmes de régulation et de gestion de l'énergie sont essentiellement basés actuellement sur des mesures de température, les capteurs fluxmétriques se développent maintenant à faible coût et il est envisageable de les inclure dans les boucles de régulation. Un fluxmètre détecte des signaux de très faible énergie, il est sensible à la température d'air du local par l'intermédiaire du transfert convectif, mais il "observe" aussi les autres parois et intègre l'effet du rayonnement qui résulte de leurs températures de surfaces, on conçoit donc son intérêt dans le domaine de la régulation de confort. Un autre avantage est de nature économique puisque le fluxmètre peut prendre en compte rapidement les apports gratuits aléatoires.*

ANNEXE 1

PROPRIETES GENERALES DES SYSTEMES LINEAIRES



$Y_m(t)$  est la sortie d'indice  $m$  quand on soumet le système à la somme des  $(e)$  entrées  $h_{mn}(t)$  est appelé "noyau" de la transformation.

## 2) Causalité

Un système est dit causal si ses réponses à l'instant  $t$  ne dépendent que des valeurs des actions aux instants antérieurs ou égaux à  $t$  (l'effet ne peut précéder la cause).

## 3) Stabilité - continuité

Pour un système stable à toute action bornée correspond une réponse bornée. Mathématiquement un système stable réalise une application bornée donc continue.

## 4) Système réel

Un système sera dit réel s'il fait correspondre une réponse purement réelle à une action purement réelle.

## SYSTEME STATIONNAIRE

Cette classification est basée sur la notion de permanence, le comportement du système est indépendant de toute translation effectuée dans le temps.

Si  $Y(t)$  est la réponse d'un système stationnaire à un signal  $X(t)$  agissant à l'instant  $t$ , la réponse de ce système au même signal mais différée de  $\tau$  sera sa réponse initiale différée d'autant, c'est-à-dire  $Y(t - \tau)$ .

## II. PROPRIETES DES SYSTEMES LINEAIRES, REELS, CAUSAUX ET STATIONNAIRES

### Produit de convolution

Pour de tels systèmes la stationnarité implique :

$$h_{mn}(t, t') = h_{mn}(t - t', 0) = h_{mn}(t - t')$$

Pour un système scalaire la relation entrée-sortie est de la forme :

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) x(\tau) d\tau$$

La causalité impose  $h(t - \tau) = 0$  pour  $(t - \tau) < 0$ . Si l'on considère que toutes les actions commencent à l'instant initial :

$$Y(t) = \int_0^t h(t - \tau) x(\tau) d\tau$$

ou en faisant le changement de variable  $u = t - \tau$  :

$$Y(t) = \int_0^t h(u) x(t - u) du$$

Ces expressions définissent des produits de convolution

$$Y = h \otimes x = x \otimes h$$

Le signal de sortie d'un système linéaire stationnaire et causal est égal au produit de convolution du signal d'entrée et d'une fonction de réponse propre au système. Si le système n'est pas au repos à l'instant initial l'équation de convolution s'écrit :

$$Y(t) = \int_{-\infty}^t h(t - \tau) x(\tau) d\tau$$

On peut écrire pour  $t > 0$

$$Y(t) = \int_{-\infty}^0 h(t-\tau) x(\tau) d\tau + \int_0^t h(t-\tau) x(\tau) d\tau$$

La première intégrale  $Y_0(t) = \int_{-\infty}^0 h(t-\tau) x(\tau) d\tau$  représente la réponse "libre" du système.

La seconde  $Y_t = \int_0^t h(t-\tau) x(\tau) d\tau$  est la réponse "forcée" du système.

### III. FONCTIONS PROPRES D'UN REGIME LINEAIRE ET STATIONNAIRE, REGIME ISOMORPHE

Dans un tel système la propriété de stationnarité se traduit mathématiquement en disant que l'opérateur linéaire de translation dans le temps commute avec la transformation considérée. Deux opérateurs linéaires qui commutent ont une base de vecteurs propres (ou fonctions propres) commune.

Appelons  $F$  l'opérateur translation :

$$F \cdot x(t) = x(t + \tau)$$

Si  $\lambda$  est la valeur propre qui correspond à une fonction propre,  $\lambda \rightarrow 1$  si  $\tau \rightarrow 0$ . Si  $\tau$  est suffisamment petit on peut écrire au premier ordre :

$$\lambda = 1 + p\tau + \dots$$

$$F(x(t)) = x(t + \tau) = \lambda x(t)$$

ou au premier ordre en  $\tau$  on a  $x(t + \tau) = x(t) + \frac{dx}{dt} \cdot \tau$

On en déduit :

$$x + \frac{dx}{dt} \tau = (1 + p\tau) x$$

on obtient :

$$x(t) = X \cdot e^{pt}$$

Les régimes propres d'un système linéaire stationnaire sont de la forme  $e^{Pt}$ ,  $p$  est ici un nombre complexe quelconque. Ces régimes propres définissent les régimes "isomorphes" du système.

### FONCTION DE REPONSE

Considérons un système linéaire, stationnaire et causal défini par :

$$Y(t) = \int_0^{\infty} h(u) x(t-u) du$$

En régime isomorphe les actions sont de la forme  $X(t) = X_0 e^{Pt}$

La réponse peut s'écrire :

$$Y(t) : \int_0^{\infty} h(u) \cdot X_0 \cdot e^{P(t-u)} du$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$Y(t) : y(P) e^{Pt}$$

avec

$$y(P) = X_0 \cdot \int_0^{\infty} h(u) e^{-Pu} du$$

soit

$$y(P) : X_0 \cdot H(P)$$

avec

$$H(P) = \int_0^{\infty} h(u) e^{-Pu} du$$

L'étude des transformations linéaires stationnaires et causales introduit naturellement la transformation de Laplace. La fonction  $H(P)$  est la fonction de transfert isomorphe dont la transformée de Laplace inverse est la réponse impulsionnelle.

#### IV. TRANSFORMEES DE LAPLACE ET DE FOURIER

La transformée de Laplace usuelle, applicable aux signaux causaux s'écrit :

$$\mathcal{L}(x(t)) = X(P) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-Pt} dt$$

La transformée de Fourier se définit pour des fonctions sommables par :

$$F(x(t)) = X(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Dans le cas particulier d'une fonction nulle pour  $t < 0$ , la transformée de Fourier est identique à la transformée de Laplace en remplaçant  $P$  par  $j\omega$

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Les transformées de Laplace et Fourier ont la propriété fondamentale de transformer un produit de convolution dans l'espace des temps en un produit simple dans l'espace transformé

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x \otimes Y) &= \mathcal{L}(x) \cdot \mathcal{L}(y) \\ F(x \otimes Y) &= F(x) \cdot F(y) \end{aligned}$$

ANNEXE 2

FLUXMETRES THERMIQUES

(EXTRAIT DES TRAVAUX DE MME LILIANE OTER-DUTHOIT)

## I. PROBLEMES SPECIFIQUES DES CAPTEURS PLANS

La disposition constructive de nos capteurs résulte du principe de fonctionnement des fluxmètres "plans". Un fluxmètre classique "à paroi auxiliaire" est en fait constitué par une résistance thermique étalon aux bornes de laquelle on vient mesurer la différence de température par des thermocouples montés en série. En régime permanent la tension mesurée aux bornes des thermocouples est proportionnelle en flux de chaleur qui traverse le système

$$q = \frac{E}{K R}$$

E = tension mesurée

K = sensibilité de la thermopile

R = résistance thermique du capteur

L'utilisation de ce type de fluxmètre est délicate car on ne peut généralement pas négliger la présence du capteur qui, de par son principe, doit avoir une résistance thermique importante. En régime instationnaire la mesure est de plus perturbée par sa capacité thermique. Des corrections sont indispensables elles conduisent en général à considérer les capteurs comme des couches supplémentaires de caractéristiques thermophysiques connues. L'application de ces méthodes en régime instationnaire conduit à des calculs rapidement fastidieux pour les structures multicouches. Le principe de fonctionnement des fluxmètres utilisés est fondamentalement différent puisqu'on réalise dans un plan des hétérogénéités vis-à-vis du transfert thermique en faisant alterner des zones pleines et vides. Ce système permet de créer dans un plan des hétérogénéités de flux qui induisent des courants thermoélectriques dans un circuit réalisé par une couche de constantan recouvert par dépôt électrolytique de pastilles de cuivre. Ce dispositif permet d'obtenir des capteurs de très faible épaisseur, très peu perturbateurs de la mesure. Dans de nombreux cas il ne sera pas utile de faire des corrections.

Le fonctionnement au capteur plan conduit à une distorsion des lignes de flux de chaleur au voisinage du plan de mesure ; il convient cependant de faire en sorte que le flux soit bien unidirectionnel dans les plans extrêmes du capteur. Dans le cas

contraire, la distribution des températures dans le plan de mesure et donc la sensibilité du capteur dépendra du matériau mis en contact avec le fluxmètre figure 84

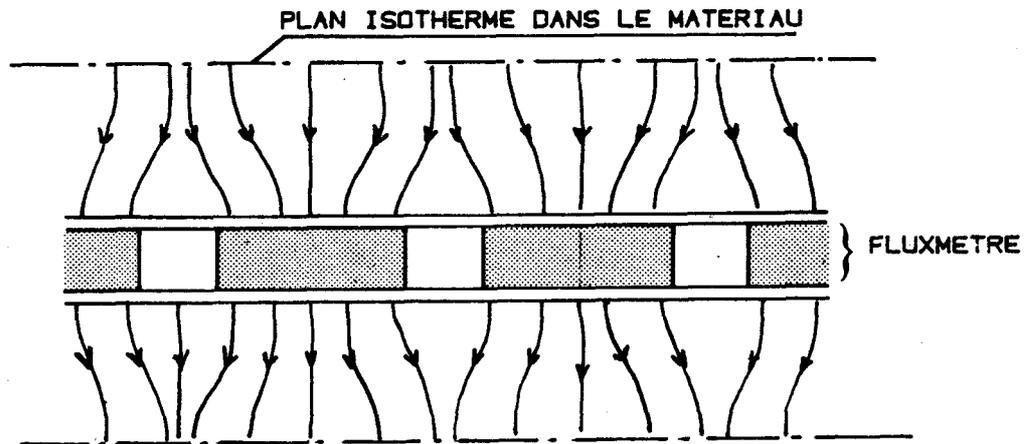


Fig. 84 : la sensibilité dépend du matériau en contact

Pour obtenir des surfaces isothermes sur les faces extrêmes du fluxmètre il suffit de disposer de part et d'autre de la surface sensible des matériaux thermiquement conducteurs (aluminium ou cuivre de faible épaisseur). figure 85

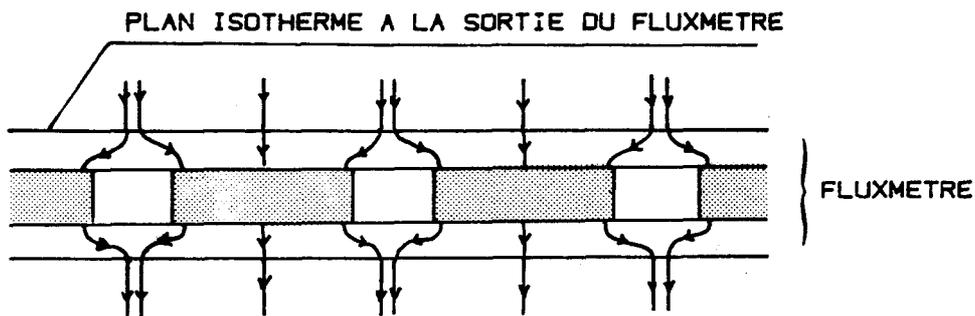


Fig. 85 : la sensibilité ne dépend pas du matériau en contact

### 1.3. Disposition constructive adoptée : vérification de l'expérience de la sensibilité vis-à-vis des matériaux testés

La configuration minimale d'un fluxmètre plan est schématisée figure 86. Le plan sensible est réalisé à partir d'un laminé de constantan de 25 microns d'épaisseur sur lequel on a déposé électrolytiquement des pastilles de cuivre de 6 microns d'épaisseur. L'ensemble est disposé sur un support de kapton de 50 microns, l'hétérogénéité thermique est réalisée par des perforations dans le constantan. Pour fermer le capteur on colle une couche de mylar cuivré de 25 microns d'épaisseur.

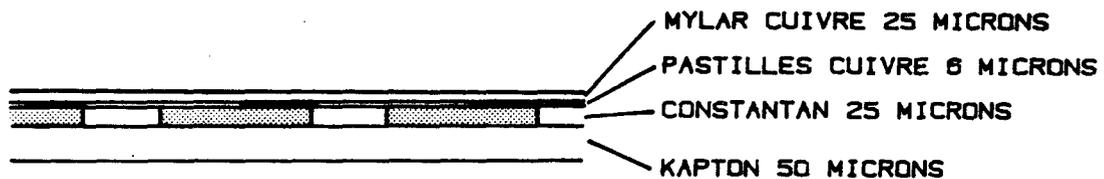


Fig. 86

Le problème est de savoir si la sensibilité de ce fluxmètre est indépendante des caractéristiques thermophysiques des matériaux au contact desquels il est disposé. Compte tenu des considérations précédentes l'erreur liée à la fermeture des lignes de flux au sein du matériau à tester ne sera appréciable que pour des matériaux "peu conducteurs". Pour nos essais nous avons utilisé un matériau isolant : le polystyrène

afin d'augmenter au maximum la probabilité d'erreur systématique. Le schéma du dispositif expérimental est représenté Figure 87

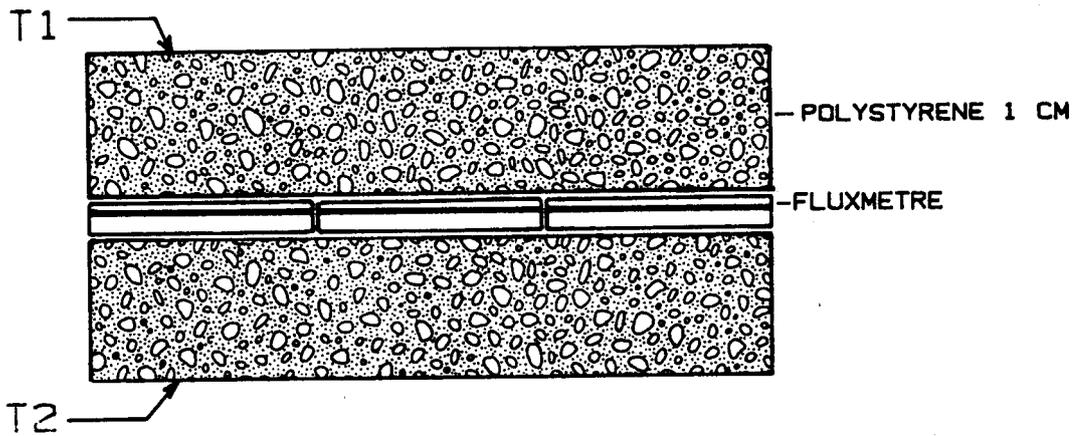


Fig. 87

Le fluxmètre est disposé entre deux couches de polystyrène de 1 cm d'épaisseur, les faces extrêmes de l'ensemble sont maintenues par des plaques échangeuses à des températures imposées  $\theta_1$  et  $\theta_2$  ; il en résulte un transfert de chaleur dans le système. En régime permanent la tension délivrée par le fluxmètre doit être indépendante des états de surfaces du capteur. Nous avons étudié dans ce dispositif l'effet sur la tension délivrée  $E$  de la mise en place de couches conductrices

d'aluminium de 0,1 mm d'épaisseur sur les faces 1 et 2 du capteur des résultats obtenus sont présentés dans le tableau ci-dessous.

ESSAI N°	ETAT DE SURFACE		E ( $\mu V$ )
	Nbre de couches d'aluminium surface 1	Nbre couches alu sur face 2	
1	0	0	1500
2	0	1	1800
3	0	2	1805
4	1	1	1795

Il apparaît entre l'essai 1 et 2 une différence de sensibilité de 20 %, qui indique que la couche de kapton n'est pas suffisante pour établir un plan isotherme aux bornes du capteur.

Les essais 3 et 4 montrent que la configuration de l'essai 2 est suffisante pour assurer la stabilité de la sensibilité vis-à-vis de la nature des matériaux testés, la superposition de nouvelles couches conductrices ne change rien à la tension mesurée. Nous avons donc systématiquement collé une feuille d'aluminium de 0,1 mm d'épaisseur sur la face de Kapton de nos fluxmètres.

## II. ETALONNAGE DES CAPTEURS DE FLUX

L'étalonnage d'un fluxmètre a deux objectifs :

- l'évaluation de la sensibilité K c'est-à-dire de la tension délivrée par le capteur en régime établi quand on le soumet à une densité de flux imposée de  $1 \text{ Wm}^{-2}$ .

Cette mesure doit être complétée par une étude de linéarité tension mesurée -flux-imposé et de la symétrie.

- l'évolution de la perturbation introduite par le capteur. on assimile un demi-fluxmètre (entre le plan sensible et l'échantillon) à une couche homogène dont on peut évoluer la résistance thermique (R) et la capacité thermique (C) équivalente. Le produit RC fournit la constante de temps du capteur que l'on peut comparer à celle de la structure à tester pour évaluer la perturbation résultant du capteur en régime variable.

#### a) Détermination du coefficient de sensibilité K en régime établi

Le dispositif utilisé pour évaluer la sensibilité est schématisé figure 88. Le capteur à étalonner est placé sur la plaque échangeuse inférieure, on lui superpose une résistance électrique plane un fluxmètre auxiliaire de sensibilité connue et un "matelas isolant". L'ensemble est légèrement comprimé par la plaque échangeuse supérieure mobile grâce à un vérin pneumatique.

La résistance électrique de dimensions rigoureusement égales à celles du fluxmètre est constituée d'un réseau de constantan gravé sur un support de kapton de 0,1 mm d'épaisseur collé sur une plaque d'aluminium de même épaisseur qui assure l'homogénéité de la température de surface de la source.

La résistance alimentée par une alimentation stabilisée délivre une puissance thermique réglable. Cette puissance se répartit de manière inégale dans le dispositif. Le matelas isolant limite le flux ascendant  $\phi_a$  mesuré par le fluxmètre auxiliaire à quelques pour cents de la puissance totale dissipée. La différence  $P_f - \phi_a$  constitue le flux imposé dans le fluxmètre à tester, la sensibilité du capteur s'obtient alors par :

$$K = \frac{E \cdot s}{P_f - \phi_a} \quad (V/W/M^2)$$

- La vérification de la linéarité consiste à montrer que la sensibilité K ne dépend pas de la puissance délivrée. Pour effectuer cette vérification on impose au capteur des puissances variables par paliers en commençant par des flux très faibles de l'ordre de  $1 \text{ W/M}^2$  tels que ceux rencontrés dans les murs très isolés et en terminant par des flux de plusieurs dizaines de  $\text{W/M}^2$  rencontrés sur des parois en régime transitoires (envoileillement, vent ...) ou dans des configurations

- FIGURE 88 -



6-FLUXMETRE A ETALONNER

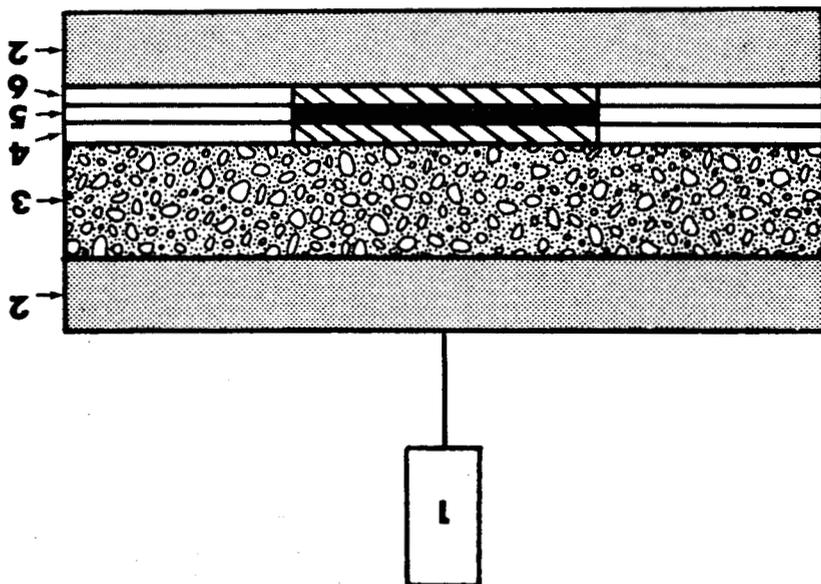
5-RESISTANCE CHAUFFANTE

4-FLUXMETRE AUXILLIAIRE

3-ISOLANT THERMIQUE

2-PLAQUE ECHANGEUSE

1-VERIN PNEUMATIQUE



particulières de laboratoire.

Si l'étalonnage avec des flux importants est relativement aisé, il n'en est pas de même pour les très faibles puissances pour lesquelles il est nécessaire d'utiliser une procédure d'essai très rigoureuse. Les signaux détectés sont de très faible amplitude (de dizaine de microvolts) et l'utilisation d'une chaîne de mesure à haute résolution est indispensable.

Les plaques échangeuses inférieures et supérieures sont réglées en température par une circulation d'eau à partir d'un bain thermostaté assurant une température constante à mieux de 1/20<sup>e</sup> de degré. Ce procédé permet d'éliminer tout flux parasite résultant d'un léger écart de température des plaques inférieure et supérieure.

Pour chaque palier on enregistre à l'aide d'un voltmètre programmable cent valeurs de tensions délivrées par le fluxmètre à tester et le fluxmètre auxiliaire les figures 89 et 90 représentent l'enregistrement des résultats obtenus lors de l'étalonnage d'un capteur. Nous avons procédé ici à cinq paliers compris entre 1,45 et 30,96 W/M<sup>2</sup>. En ordonnée est portée la tension détectée aux bornes du fluxmètre à étalonner. Une périodicité (observable surtout pour les faibles flux) résulte de la régulation de température des plaques échangeuses. Les valeurs enregistrées sont ensuite lissées (courbes en pointillés de façon à éliminer ces oscillations.

Pour chaque palier nous avons indiqué la valeur du coefficient de sensibilité K obtenue

$$K = \frac{\bar{E} \cdot S}{P_f - \varnothing_a}$$

$\bar{E}$  = valeur moyenne de la tension délivrée aux bornes du capteur dans la partie d'enregistrement considérée.

$\varnothing_a$  = valeur moyenne du flux ascendant dans le palier considéré.

La sensibilité moyenne obtenue pour les 5 paliers est de :

$$\bar{K} = 20,06 \cdot 10^{-6} \text{ V/W.M}^2$$

La valeur maximale de l'écart par rapport à la valeur moyenne est de 0,15 10<sup>-6</sup> V soit environ 0,75 %.

TENSION AUX BORNES DU FLUXMETRE

(V\*10<sup>-5</sup>)

P=3.47 (W/M2)

P=1.45 (W/M2)

K=20.08\*10<sup>-6</sup> (V/W/M2)

K=20.13\*10<sup>-6</sup> (V/W/M2)

POINTS

200

1

TENSION AUX BORNES DU FLUXMETRE

(V\*10<sup>-5</sup>)

P=30.96 (W/M2)

P=17.63 (W/M2)

K=20.02\*10<sup>-6</sup> (V/W/M2)

P=8.77 (W/M2)

K=19.91\*10<sup>-6</sup> (V/W/M2)

K=20.18\*10<sup>-6</sup> (V/W/M2)



POINTS

300

1

La symétrie du capteur est vérifiée en retournant le fluxmètre dans le dispositif décrit précédemment. Pour nos capteurs les variations de sensibilité par retournement sont toujours restées inférieures à 1 % .

b) Estimation de la capacité et de la résistance thermique équivalente des fluxmètres

Dans chaque configuration expérimentale les structures à caractériser sont "disposées" entre deux fluxmètres thermiques. Les limites réelles du système ne sont pas définies par la surface des échantillons ou de la paroi mais par les surfaces sensibles des capteurs figure 91

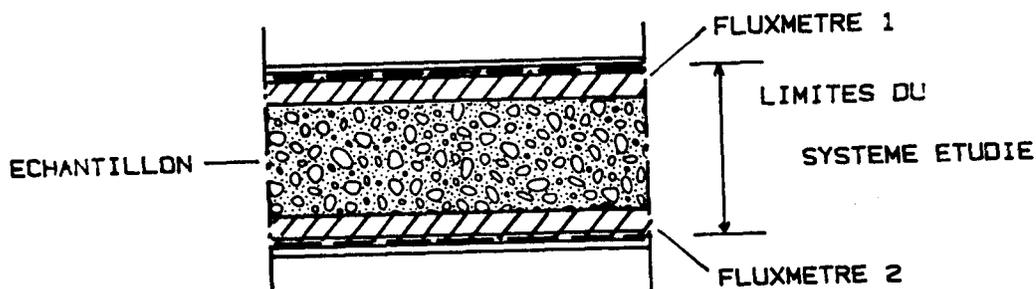


Figure 91

Les couches comprises entre les surfaces sensibles et le plan (hachurés sur le schéma) des parois étudiées sont incluses dans le système, le but de ce paragraphe est d'estimer leur importance. Selon leur disposition par rapport aux échantillons, les couches perturbatrices de nos fluxmètres sont constituées par une couche de Kapton

de 50 microns d'épaisseur et d'une feuille d'aluminium collée de 0,1 mm d'épaisseur. Cet assemblage responsable de la perturbation introduite par les fluxmètres peut être représenté par une couche homogène de résistance et de capacité équivalente ( $R_f$ ,  $C_f$ ).

Le calcul de ces grandeurs est impossible compte tenu des très faibles épaisseurs des matériaux, des conditions de collage incontrôlables ... etc ; la mesure directe est extrêmement délicate du fait des très faibles valeurs à mesurer.

Pour surmonter à cette difficulté il est possible d'effectuer des mesures de résistance thermique et de capacité thermique de systèmes associant deux fluxmètres et un échantillon de plexiglass de caractéristiques thermophysiques parfaitement connues. En faisant varier l'épaisseur ( $e$ ) du matériau étalon on peut tracer dans les deux cas les courbes  $R(e)$  et  $C(e)$  représentant les variations de la résistance thermique globale et de la capacité globale en fonction de l'épaisseur. Ces variations sont linéaires.

$$R(e) = R(e) + 2(R_f)$$

$$R(e) = \frac{e}{\lambda S}$$

$$C(e) = C(e) + 2(C_f)$$

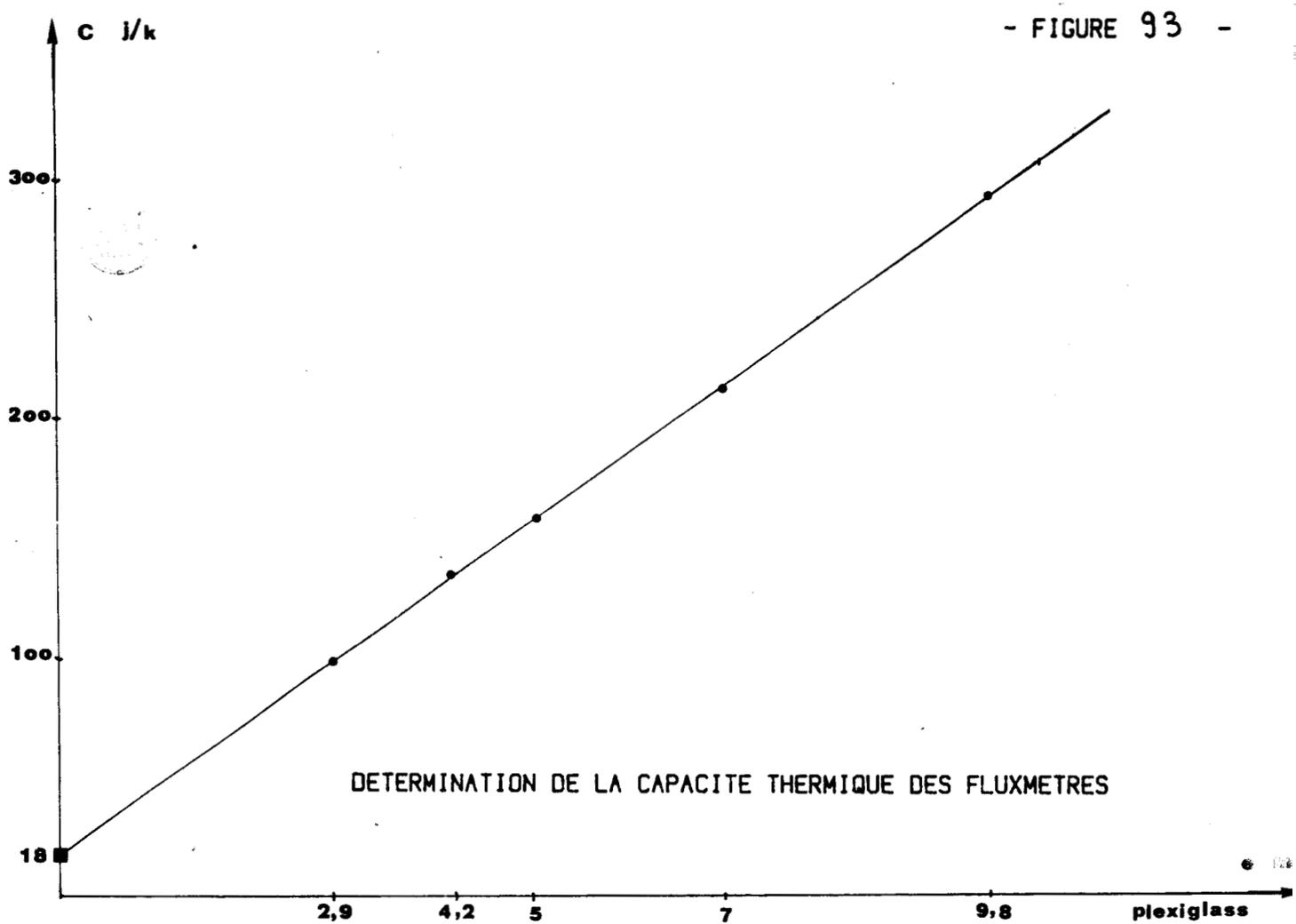
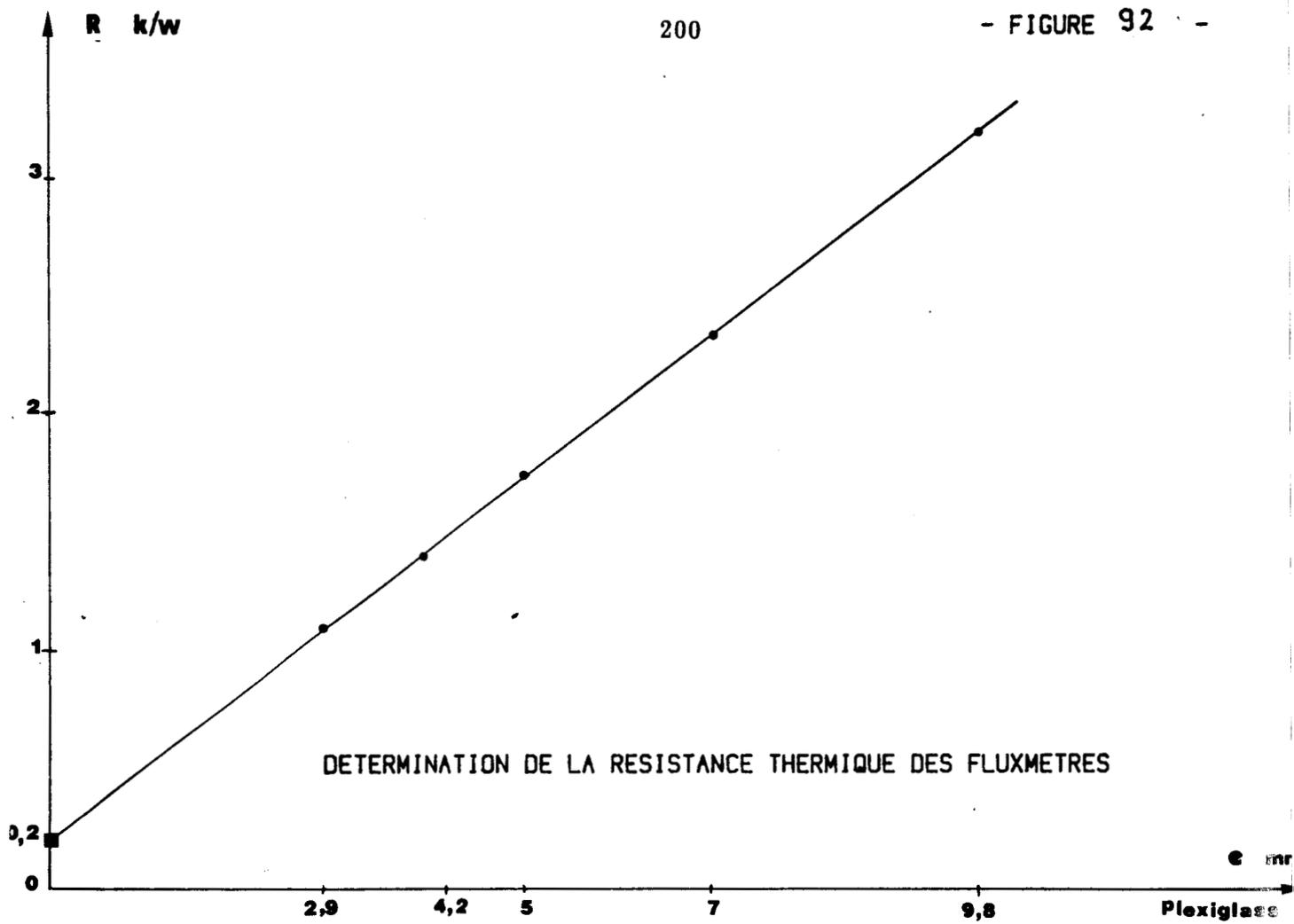
$$C(e) = C \cdot e \cdot S$$

Les figures 92 et 93 illustrent les résultats obtenus. Les ordonnées à l'origine  $R(o)$  et  $C(o)$  représentent les valeurs  $2(R_f)$  et  $2(C_f)$ . Nous obtenons ici  $2(R_f) = 0,2 \text{ K/W}$

$$2(C_f) = 18 \text{ J/K}$$

et une constante de temps  $\tau = 1,8 \text{ s} = R_f C_f$

Ces valeurs sont très faibles, dans de nombreux cas pratiques la présence des capteurs pourra être négligée.



BIBLIOGRAPHIE



# B I B L I O G R A P H I E

---

1. Les applications du thermoconditionnement à la thermique du bâtiment  
- Rencontre SFT 1983 -
2. Environnement microclimatique et habitat  
- Rencontre SFT 1979 -
3. **J. FOURIER**  
- Théorie analytique de la chaleur - Paris 1822 -
4. **J. DUHAMEL**  
- Mémoire sur la méthode générale relative au mouvement de la chaleur dans les corps plongés dans les milieux dont la température varie avec le temps ,  
- Ecole Polytechnique 1833 -
5. **JCF STURM et J. LIONVILLE**  
- Journal de Mathématiques - Paris 1836-1838 -
6. **J.M. DEVISME**  
- Contribution à l'étude du comportement thermique des parois multicouches du bâtiment et à la mesure des caractéristiques thermophysiques des matériaux constitutifs  
- Thèse de Doctorat d'Etat 1980 -

7. **G.E. SMITH**
  - Numerical solution of partial differential equation
  - Oxford University Press London 1971 -
  
8. **G.E. FORSYTE - WR WASOV**
  - Finite difference methods for partial differential equations
  - Wiley and Sons - N.Y. 1960 -
  
9. **D.G. STEPHENSON et G.P.MITALAS**
  - Ashrae transactions
  - Vol 73 n° 2018 et 2019 - 1967 -
  
10. **J. VIRGOGNE - R. YEZOU - J.M. PALLIER**
  - Détermination expérimentale et théorique des facteurs de réponse de parois hétérogènes
  - Journée SFT 1981 -
  
11. **J. BRAU**
  - Modélisation thermique des bâtiments validation des modèles de calcul par une étude expérimentale en ambiance climatique simulée
  - Thèse de Doctorat d'Etat Lyon 1980 -
  
12. **P. THERY**
  - Fluxmètre calorifique
  - Brevet Anvar 1979 -

13. **P. THERY - B. DUTHOIT**
- Contribution théorique et expérimentale à la mesure des flux calorifiques
  - Colloque bilan et perspectives Génie Civil Lyon 1978 -
14. **P. THERY - B. DUTHOIT - J. PAUQUET**
- Propriétés thermoélectriques des systèmes à deux couches minces superposées. Application à la mesure des flux thermiques
  - Revue Phys Appl 15. 1980 -
15. **G. RAVALITERA - M. CORNET - B. DUTHOIT - P. THERY**
- Etude et description d'un nouveau thermofluxmètre permettant la mesure simultanée des flux thermiques et des variations de température
  - Revue Phys Appl 17. 1982 -
16. **J.C. MARECHAL**
- Nouveau dispositif de mesure du coefficient de transmission thermique K en site naturel
  - Annales I.T.B.T. P n° 402. 1982 -
17. **J.M. DEVISME - J.C. MARECHAL - B. DUTHOIT**
- Détermination de la résistance thermique d'une paroi en régime quelconque.
  - Matériaux et Constructions Vol 15. 1982 -
18. **E. ROUBINE**
- Introduction à la théorie de la communication
  - Masson 1979 - **Tome I** : Signaux non aléatoires
  - **Tome II** : Signaux aléatoires

19. **J. MAX**  
- Méthodes et techniques de traitement du signal  
d'applications aux mesures physiques  
- Masson 1977 -
20. **J.S. BENDAT - A.G. PIERSOL**  
- Random data : analysis and measurements procedures  
- New York Wiley 1971 -
21. **J. STERN - J. DE BARBEYRAC - R. POGGI**  
- Méthodes pratiques d'étude des fonctions aléatoires  
- Dunod 1967 -
22. **J. LIFERMANN**  
- Systèmes linéaires variables d'état  
- Masson 1972 -
23. **H.S. CARLSLAW - J.C. JAEGER**  
- Conduction of heat in solids  
- Oxford at the Clarendon Press 1959 -
24. **J.P. BARDON**  
- Cours de thermique  
- Université de Nantes 1983 -
25. **H. PONCIN - J.P. BARDON**  
- Exposé sur l'isolation thermique  
- Lois physiques fondamentales  
- Cahier Thermique n° 5 1975 -

26. **J. GOSSE**  
- Guide technique de thermique  
- Dunod 1981 -
27. **L. OTER - P. THERY**  
- Application des méthodes de la théorie des systèmes au calcul des flux dans une paroi multicouche en régime variable.  
- Art. proposé à la Revue Générale de Thermique 1985 -
28. **MASUCH**  
- Les transferts de chaleur en régime variable dans les parois opaques multicouches. Extrait de "Comportement thermique des matériaux de constructions"  
- Editions Bâtiment & Travaux Publics 1978 -
29. **J.M. DEVISME**  
- Comportement thermique des parois multicouches de bâtiment  
- Annales I.T.B.T. P n° 398. 1981 -
30. **M. ABGRALL**  
Contribution à l'étude du transfert de chaleur à travers une paroi multicouche en régime instationnaire  
- Thèse 3e cycle Paris 1979 -
31. **S. SUGIYAMA - M. NISHIMURA - H. WATANABE**  
- Transient temperature response of composite slabs  
- Int J Heat Mass Transfert Vol 17. 1974 -

32. **B. DUTHOIT - P. THERY**
- Caractérisation d'un "bicouche" par traitement des évolutions thermocinétiques
  - Revue Entropie 92. 1980 -
33. **R.A. KOUGBEADJO**
- Identification de la diffusivité thermique par traitement de transfert de chaleur
  - Thèse 3e cycle Lille 1980 -
34. **E. GRAVIOT**
- Application des méthodes de la théorie du signal à la dissociation des énergies en régime variable
  - Thèse 3e cycle Lille 1985 -
35. **R.A. KOUGBAEDJO - P. THERY -**
- Thermal diffusivity determination by cross correlating injected and transmitted heat pulse through a wall
  - J. App phys 53. 2875-1982 -
36. **B. DUTHOIT - D. LECLERQ - P. THERY**
- "Signal an systems analysis for unsteady heat conductor problems
  - J. App phys 54. 1983 -
37. **S.R. GROOT - P. MAZUR**
- New Equilibrium Thermodynamics
  - North Holland 1952 -

38. **M.A. BIOT**
- Variational Principles in Irreversible Thermodynamics with Application to viscoelasticity
  - Physical Review vol 97 n° 6. 1955 -
39. **M.A. BIOT**
- Thermoelasticity and Irreversible Thermodynamics
  - J of Applied Physics Vol 27 n° 3. 1956 -
40. **A. BEJAN**
- A general variational principle for thermal insulation system design
  - Int J of Heat Mass Transfer 22. 1979 -
41. **B. DUTHOIT - A. FARZA - P. THERY**
- Mesure de la résistance thermique effective d'une paroi homogène par traitement d'un bilan d'entropie en régime variable.
  - Int J Heat an Mass Transfer Vol 25 n° 8. 1982 -
42. **BOUCHIQUET**
- Note technique
  - Rapport interne CREMAT 1984 -
43. **P. THERY - J.P. DUBUS - F. WATTIAU**
- Détermination de la diffusivité et de la chaleur massique par traitement d'une évolution thermocinétique transitoire
  - Int J Heat Mass Transfer 23. 1980 -

~~44.~~

**J.P. BARDON**

- Transferts thermiques par conduction et rayonnement
- Paris C.F.E. 1981 -

45.

**F. PENOT - D.A.A. GUINTELA**

- Convection naturelle et mixte autour d'obstacles cubiques, application à la thermique de l'habitat
- Rencontre S.F.T. Lyon 1983 -

46.

**H. OIRY - B. CASSAGNE - J.P. BARDON - J. BRANOIER**

- Interprétation des grandeurs caractéristiques essentielles intervenant dans le comportement thermique d'un local en régime instationnaire.

47.

**C. BRUNJAIL**

- Capteurs à impulsion pour la caractérisation des transferts thermiques paroi-environnement microclimatique
- Journée S.F.T. Mars 1981 -

48.

**J.C. MARECHAL - J.M. DEVISME**

- Diffusivité thermique des matériaux de construction. Méthode du signal périodique
- Annales I.T.B.T. P n° 357. 1978 -

49.

**R. YEZOU - J.M. PALLIEN - G. ACHARD**

- Etude de la propagation d'un signal thermique de courte durée dans un échantillon plan homogène et de grandes dimensions. Application à la mesure de la diffusivité thermique des matériaux de construction.
- Entropie n° 70. 1976 -

- 50           **J.C. CASTEL - H. HUET**  
              - Contributions à la détermination des caractéristiques  
              thermophysiques des matériaux du Génie Civil  
              - Thèses de Doctorat Ingénieur et de 3e cycle Rennes  
              1978 -
- 51           **J.C. FOURES - R. JAVELAS - B. PERRIN**  
              - Caractéristiques thermiques de matériaux de  
              construction  
              - Revue générale de thermique n° 218. 1980 -
- 52           **M. DEGENNE - S. KLARSFELD - M.P. BARTHE**  
              - Measurement of thermal resistance of thick low density  
              mineral fiber insulation  
              - Society for Testing and Matervals Philadephia 1979 -
- 53           **R. JAVELAS - J.C. FOURES - B. PERRIN**  
              - Utilisation d'une méthode de chocs thermiques pour la  
              détermination du coefficient de conductivité thermique  
              et de la diffusivité des mortiers et terres cuites.  
              - Annales I.T.B.T. P n° 402. 1982 -
- 54           **D. LECLERQ - P. THERY**  
              - Apparatus for simultaneous temperature and heat flox  
              measurements under transient conditions  
              - Revue Sc Instr 54, 374. 1983 -
- 55           **B. DUTHOIT**  
              - Application des méthodes de corrélation au traitement  
              des mesures In situ  
              - Colloque S.F.T. Toulouse 1984 -

56

**B. DUTHOIT - C. VULTAGGIO - P. THERY**

- Application des méthodes de la théorie du signal à l'analyse des échanges thermiques in situ
- Colloque C.N.T. - S.F.T. Lannion 1985 -

57

**D. LECLERQ**

- Caractérisation des transferts thermiques pour analyse de la réponse en fréquence
- Thèse 3e cycle Lille 1982 -

