

N° d'ordre : 10

50376  
1985  
119

50376  
1985  
119

# THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

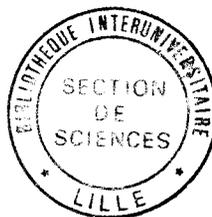
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

Discipline : Physique de la matière et du rayonnement

par

Philippe BOOTZ

## MODELE A DEUX NIVEAUX EFFECTIFS DU LASER AVEC ET SANS ABSORBANT SATURABLE ; INSTABILITES ET BIFURCATIONS



Soutenue le 13 Juin 1985 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury : MM.	B. MACKÉ	Président
	E. ARIMONDO	Rapporteur
	P. MANDEL	Rapporteur
Mme	A. TALLET	Examineur
M.	P. GLORIEUX	Examineur

*Le langage contourne le fait  
et l'extérieur se retrouve en l'Homme*

Je remercie les membres du laboratoire de Spectroscopie Hertzienne pour leur accueil chaleureux et plus particulièrement M. BOGEY, C. DEMUYNCK et D. HENNEQUIN pour l'aide qu'ils m'ont apporté.

Je suis tout particulièrement reconnaissant à Messieurs E. ARIMONDO, professeur à l'Université de Pise, P. MANDEL, maître de recherche F.N.R.S. à l'Université libre de Bruxelles, P. GLORIEUX, professeur à l'Université des Sciences et Techniques de Lille, pour les échanges stimulants que nous avons pu avoir et l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Je remercie également Madame A. TALLET, chargée de recherche C.N.R.S. à l'Université de Paris XI, d'avoir accepté de faire partie de la commission d'examen et Monsieur B. MACKÉ, professeur à l'Université des Sciences et Technique de Lille d'avoir présidé cette dernière.

J'exprime enfin toute ma gratitude à Madame Brigitte DUPONT qui s'est aimablement chargée du travail ingrat que représente la frappe de cette thèse.

## SOMMAIRE

	<u>Page</u>
INTRODUCTION	1
 <u>Partie A : Exemple d'instabilité dans un laser;second seuil d'oscillation.</u>	
- Introduction	7
 <u>Chapitre AI : Le modèle, valeurs stationnaires, stabilité linéaire.</u>	
I-1. Le modèle	11
I-2. Solutions stationnaires et stabilité linéaire.	15
 <u>Chapitre AII : Construction de la solution bifurcante.</u>	
II-1. Le problème linéaire	25
II-2. Construction de la solution bifurcante.	
a) développement de l'équation d'évolution au voisinage du point de bifurcation	28
b) Résolution de l'ordre 1	29
c) Calcul de $\mu_1$ et $\omega_1$	30
d) Résolution de l'ordre 2	31
e) Stabilité de la solution	33
 <u>Chapitre AIII : Intégration numérique.</u>	
III-1. Stabilité de la solution harmonique	37
III-2. Intégration des équations d'évolution	37
 <u>Partie B : Etude du laser avec absorbant saturable dans un modèle à quatre niveaux.</u>	
- Introduction	45
 <u>Chapitre BI : Le modèle.</u>	
I - Le système à quatorze équations.	
- Préambule	49

	<u>Page</u>
I-1. Le modèle moléculaire	49
I-2. L'équation de propagation	54
I-3. Equations d'évolution	57
II - Réduction du modèle à trois équations.	
- Préambule	59
II-1. Approximation des "rate equations"	60
II-2. Changement de notations	62
II-3. Réduction à trois équations	65
<u>Chapitre BII : Etude des solutions stationnaires.</u>	
I - Solutions stationnaires, stabilité.	
I-1. Existence	69
I-2. Stabilité linéaire des solutions $I_+$ et $I_-$	70
I-3. Stabilité linéaire de la solution $I_0$	73
II - Equations de la bifurcation sur $I_+$	
II-1. Paramètre de bifurcation	74
II-2. Vecteurs propres de $L_{00}$	76
II-3. Développement au voisinage du point de bifurcation	78
III - Résolution des équations de la bifurcation.	
III-1. Résolution des ordres 1 et 2	
a) Ordre 1	81
b) Ordre 2	82
III-2. Condition de stabilité de la solution harmonique	85
III-3. Bifurcation sur $I_0$	88
- résumé	93

	<u>Page</u>
<u>Chapitre BIII : Etude numérique.</u>	
- Préambule	97
I - Le programme	97
II - Etude des expressions sur SF <sub>6</sub> et CH <sub>3</sub> I	
II-1. Laser CO <sub>2</sub> , absorbant SF <sub>6</sub>	102
II-2. Laser CO <sub>2</sub> , absorbant CH <sub>3</sub> I	
a) Diagramme de bifurcation	104
b) Caractéristiques de la solution pulsée	110
c) Comparaison des systèmes à 3 et 5 équations	116
III - Amorce d'un diagramme de phase pour le système à 3 équations.	
III-1. Valeurs standard	116
- Résumé	125
III-2. Etude zoologique du diagramme de bifurcation de la solution I <sub>+</sub>	126
- Résumé	137
<u>Chapitre BIV : Discussions, ouvertures.</u>	
I - Analyse des équations, approximation.	
I-1. Stabilité à fort ou faible champ.	
a) Stabilité à fort champ	140
b) Stabilité de I <sub>+</sub> à champ faible en absence de bistabilité	142
c) Stabilité de I <sub>+</sub> à champ faible en présence de bistabilité	142
I-2. Position du point de bifurcation en fonction de 2κ.	

	<u>Page</u>
a) Bonne cavité	143
b) Critère approché dans le cas d'une mauvaise cavité effective	143
c) Position approchée du point haut	146
 I-3. Perte stricte de stabilité	 148
- Résumé	151
 II - Discussion	
 II-1. Comparaison du modèle aux résultats expérimentaux	 152
II-2. Discussion des approximations	152
II-3. Bifurcation sur $I_+$ dans le modèle non linéaire de Dupré	154
 III - Modèle en élargissement Doppler	
 III-1. Etablissement du modèle	156
III-2. Solutions stationnaires et équation, de stabilité linéaire	
a) Solutions stationnaires	160
b) Stabilité linéaire	161
 III-3. Solution en régime inhomogène	
a) Solution exacte par séparation des variables	162
b) Approximation de la "résonance inéfficace"	169

ANNEXES

Annexe I : Eléments de théorie des bifurcations.

- Introduction	175
----------------	-----

I - Solutions d'équilibre des problèmes d'évolution,  
stabilité linéaire

I-1. Solutions d'équilibre	176
I-2. Schéma de la démarche, stabilité linéaire	177
I-3. Forme locale du problème linéaire	
a) Développement de la fonctionnelle	179
b) Stabilité linéaire	179
c) Le problème adjoint	180

II - Bifurcation en une solution stationnaire

II-1. Perte stricte de stabilité	181
II-2. Construction de la solution stationnaire bifurcante	182
II-3. Stabilité de la nouvelle solution	183

III - Bifurcation de Hopf

III-1. Le problème linéaire	184
III-2. Développement en série	185
III-3. Stabilité de la solution périodique	187

Annexe II : Etude des instabilités laser dans le modèle à  
deux niveaux.

I - Le laser sans absorbant saturable.

I-1. Introduction	191
I-2. Les équations	191
I-3. Influence d'un élargissement inhomogène	194
I-4. Influence d'un désaccord en fréquence	195

II - Le laser avec absorbant saturable intracavité.

II-1. Equations d'évolution	196
II-2. Solutions stationnaires	199
II-3. Réduction du modèle et stabilité des solutions stationnaires	
a) Stabilité des solutions dans le modèle à 8 équations	203
b) Réductions du modèle	204
c) Conclusion	205

<u>Annexe III : Expression des intégrales du chapitre BIV.</u>	207
--	-----

CONCLUSION, PERSPECTIVES.	213
---------------------------	-----

BIBLIOGRAPHIE.	215
----------------	-----

## INTRODUCTION.

Ces dernières années ont vu se développer tout un domaine de l'optique non linéaire autour de la bistabilité optique [26, 33]. L'intérêt pour ce nouveau domaine d'étude est lié, d'une part à l'espoir peut-être déraisonné de réaliser des systèmes à logique optique ultra-rapide et d'autre part au fait qu'il s'agit de prototypes particulièrement simples de systèmes thermodynamiques ouverts. L'étude des comportements synergétiques de tels systèmes peut alors être poussée tant du point de vue théorique qu'expérimental. Ils présentent en effet une grande variété de phénomènes dont la modélisation est suffisamment performante pour permettre une confrontation heureuse entre théorie et expérience.

L'engouement pour les effets de bistabilité optique a ramené en lumière des études antérieures sur les instabilités des lasers ou l'hystérésis des lasers contenant un absorbant saturable. C'est ainsi que les travaux de Grasyuk et Orayevskiy [5] dans les masers et ceux de Casperson [4] sur le "second seuil" d'oscillation du laser ont repris une actualité qu'ils avaient perdue. De même le laser contenant un absorbant saturable (L.S.A), initialement étudié pour ses possibilités de spectroscopie sans effet Doppler, a été réexaminé dans un point de vue synergétique avec un accent particulier sur les conditions de bistabilité ou celles d'instabilité [41]. Les études théoriques de ce système bénéficièrent de l'introduction par Erneux et Mandel [32] de la théorie des bifurcations qui avait montré son efficacité dans le traitement des problèmes de turbulence en mécanique des fluides [31].

Mandel a pu mettre en évidence l'existence théorique de nombreuses instabilités dans le L.S.A. sur un modèle à deux niveaux en élargissement homogène. Citons la solution "en dessous du seuil" due à la dispersion [19], les solutions harmoniques, pulsées ou quasi-périodiques [42],[51]. Des zones chaotiques ont même été prédites par Mrugala et Péplowski [35]. Ces solutions peuvent coexister et engendrer des hystérésis ce qui donne naissance à une grande variété de comportements du système.

Toutefois le modèle à deux niveaux semble inadéquat à décrire correctement la plupart des molécules gazeuses, les bandes vibrationnelles de celles-ci relaxant généralement moins vite que les niveaux rotationnels entre lesquels s'effectue la transition. Une étude approfondie du système à quatre niveaux introduit par Burak et al. [15] s'avère donc nécessaire.

Cette étude a été entreprise par Arimondo et al. [17] et c'est dans la poursuite de celle-ci que se situe la plus grande partie du travail présenté ici. Un modèle de rate equations sur les niveaux vibrationnels, qu'on pourrait qualifier de "deux niveaux effectifs", y est étudié tant numériquement qu'analytiquement, notamment dans le cadre de la théorie des bifurcations.

Il est intéressant de constater des analogies entre les résultats de ce modèle à deux niveaux effectifs et le comportement des instabilités dans le modèle à deux niveaux du laser sans absorbant saturable intracavité. C'est pourquoi cette thèse comporte une étude du laser dans un système à deux niveaux.

Cette étude du laser sans absorbant saturable dans un modèle à deux niveaux en élargissement homogène fait l'objet de la partie A.

La partie B est consacrée au L.S.A. Le premier chapitre établit le modèle à deux niveaux effectifs issu du modèle à quatre niveaux. Le chapitre II en étudie les solutions stationnaires. Des bifurcations de Hopf sont décelées sur celles-ci, bifurcations qui correspondent à une émission laser périodique et la stabilité des solutions périodiques de faibles modulation d'amplitude est déterminée. Le troisième chapitre entreprend l'analyse numérique du diagramme de phase du modèle et dévoile les analogies entre ce modèle du L.S.A. et celui à deux niveaux du laser sans absorbant intracavité. Enfin le dernier chapitre propose un certain nombre d'extensions du modèle, notamment une prise en compte de l'effet Doppler sur le profil de gain des milieux gazeux.

La partie B est ponctuée de pages de couleur résumant les principaux résultats établis.

Trois annexes complètent ce travail. La première présente les éléments de théorie des bifurcations utilisées dans les parties A et B. La seconde rappelle quelques résultats obtenus sur le modèle à deux niveaux du laser avec ou sans absorbant saturable. La dernière détaille le calcul des expressions intervenant dans le traitement du L.S.A. en élargissement inhomogène mené au chapitre BIV, rendant les résultats obtenus dans celui-ci directement utilisables pour une étude numérique.

PARTIE A

EXEMPLE D'INSTABILITÉ DANS UN LASER  
SECOND SEUIL D'OSCILLATION

## Introduction.

Cette partie est associée à l'instabilité qui apparaît dans un laser à fort taux de pompage. Cette instabilité n'a été traitée analytiquement que récemment par Mandel et al. [1-3], bien qu'elle fut étudiée expérimentalement par Yariv et Casperson [4] dès 1972 sur un laser à xénon et théoriquement par plusieurs auteurs, notamment par analyse numérique [5-10].

L'étude à l'aide de la théorie des bifurcations [3] a été effectuée à la même époque que celle proposée dans cette partie, mais dans un cadre plus large englobant le désaccord en fréquence entre le milieu et la cavité. Aussi cette partie est-elle à considérer essentiellement comme un exemple d'application de la théorie des bifurcations à un problème de physique des lasers.

Les méthodes mathématiques utilisées sont présentées plus en détail dans l'annexe I.

Les résultats obtenus par d'autres auteurs sur le modèle à deux niveaux d'énergie dans l'étude du laser avec ou sans absorbant saturable sont reportés en annexe II, complétant ainsi l'étude de cette partie, faite dans le cadre restreint d'un élargissement homogène et sans désaccord en fréquence.

## CHAPITRE A I

LE MODÈLE, VALEURS STATIONNAIRES,  
STABILITÉ LINÉAIRE

I - 1. Le modèle.

L'établissement des équations est détaillé dans [11-13] et sera présenté plus amplement dans la partie B sur le modèle à quatre niveaux.

Nous considérons un ensemble de molécules en interaction avec un champ électromagnétique à l'intérieur d'une cavité résonante, de longueur  $L$  modélisées par des systèmes à deux niveaux d'énergie entre lesquels s'effectue la transition laser et caractérisés par un taux de pompage  $\lambda$  et des constantes de relaxation collisionnelle  $\gamma_{//}$  pour l'inversion de population et  $\gamma_{\perp}$  pour la polarisation que nous prendrons égales :

$$\gamma_{//} = \gamma_{\perp} = \gamma$$

comme c'est presque toujours le cas dans les lasers à gaz

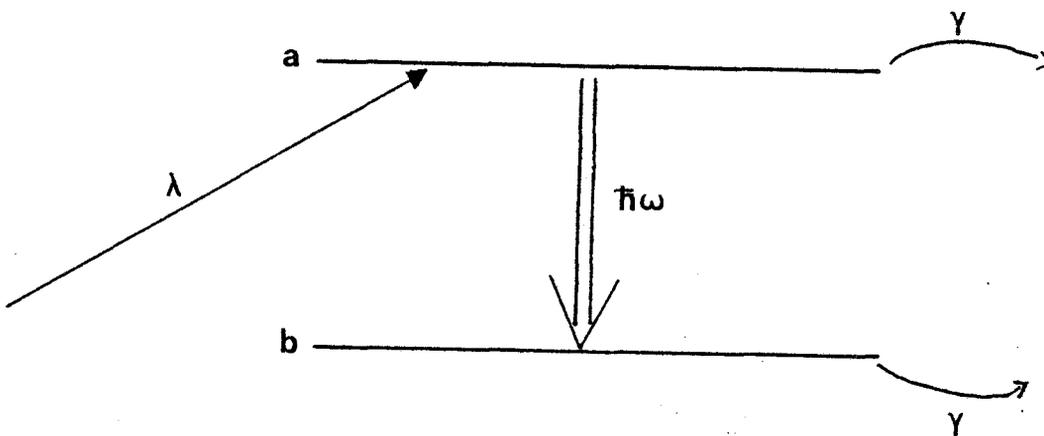


Fig. A-1. : modèle à 2 niveaux

On se limite ici au cas où la fréquence de la cavité  $\nu_n$  est accordée sur celle de la transition  $\omega$ .

$$\nu_n = \omega$$

de sorte que le champ oscille à cette même fréquence et qu'aucun effet de phase n'apparaît. Le champ électrique est alors réel et la polarisation purement imaginaire.

Nous supposerons de plus l'effet Doppler négligeable, de sorte que l'évolution d'une molécule ne dépende que du temps et de sa position dans la cavité. Cette évolution est décrite par l'opérateur "matrice densité" dans un formalisme quantique.

Le champ est assimilé à une onde plane monochromatique. D'une part on néglige tous les effets transverses dus à sa structure gaussienne et d'autre part on considère faibles les gains et pertes, de sorte que mis à part le terme d'onde stationnaire, l'amplitude est indépendante de la position. Le champ s'écrit alors :

$$(AI-1) \quad E(z,t) = E_n(t) \sin K_n z \cos \omega t \quad \text{où} \quad K_n = \frac{\omega}{c} = \frac{n\pi}{L}$$

Nous supposerons de plus l'amplitude lentement variable (approximation S.V.A) et négligerons en conséquence les termes d'ordre deux dans l'équation de propagation qui se réduit à

$$(AI-2) \quad \dot{E}_n(t) + \frac{\omega}{2Q} E_n(t) = \frac{1}{2} \frac{\omega}{\epsilon_0} P_n(t)$$

où  $Q$  est le coefficient de qualité de la cavité et  $P_n$  la composante source de la polarisation  $P(z,t)$  pour le mode considéré :

$$(AI-3) \quad P_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L P(z,t) \sin K_n z \, dz$$

La polarisation s'exprime en fonction des éléments non diagonaux  $\rho_{ab}$  et  $\rho_{ba} = \rho_{ab}^*$  de la matrice densité (\* désigne la conjugaison complexe).

$$(AI-4) \quad P(z,t) = \mu \rho_{ab}(z,t) + cc$$

$\mu$  est le moment dipolaire de la transition

Les éléments de la matrice densité  $\rho$

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{aa} & \rho_{ab} \\ \rho_{ba} & \rho_{bb} \end{pmatrix}$$

obéissent aux équations d'évolution suivantes :

$$(AI-5) \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{\rho}_{ab} &= - (i\omega + \gamma) \rho_{ab} + \frac{i}{\hbar} V (\rho_{aa} - \rho_{bb}) \\ \dot{\rho}_{aa} &= - \gamma \rho_{aa} - \frac{i}{\hbar} V (\rho_{ba} - \rho_{ab}) + \lambda \\ \dot{\rho}_{bb} &= - \gamma \rho_{bb} + \frac{i}{\hbar} V (\rho_{ba} - \rho_{ab}) \end{aligned} \right.$$

En développant l'opérateur  $\rho$  suivant les modes propres de la cavité vide

$$\rho(z,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\rho}_m(t) \cos v_m t \sin K_m z$$

avec  $K_m = \frac{v_m}{c}$  et  $v_m = \omega$

et en utilisant les deux approximations suivantes :

. passage dans le référentiel tournant (rotating wave approximation) : on néglige pour les cohérences les modes  $m \neq n$

$$\rho_{ab}(z,t) \simeq \tilde{\rho}_{ab_n}(t) \cos \omega t \sin K_n z$$

. approximation du champ moyen (mean field approximation) : on ne retient que la composante moyenne  $\tilde{\rho}_{aao}(t)$  et  $\tilde{\rho}_{bbo}(t)$  des populations.

Après utilisation des relations (AI-3 et 4) et en supposant constante la somme des populations, le système (AI-5) se réécrit :

$$(AI-6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -x + \eta y \\ \dot{y} = -\nu y + \nu x u \\ \dot{u} = -\nu(u-1) - \frac{\nu}{2} x y \end{array} \right.$$

La première équation est l'équation de propagation reliant le champ et la polarisation en unités réduites :

$$x = \frac{\mu E_n}{\hbar \gamma} \quad x \text{ est le rapport de la pulsation de Rabi } \mu E \text{ à la largeur homogène } \hbar \gamma \text{ de la transition.}$$

$$y = \frac{P}{\bar{N} \mu} \quad \text{où } \bar{N} \text{ est l'inversion de population moyenne en champ nul : } \bar{N} = \lambda / \gamma$$

$$\eta = \frac{\mu^2 \bar{N}}{\hbar \epsilon_0 \gamma} \quad \text{est le paramètre de pompage qui mesure le gain linéaire}$$

Les deux dernières équations du système (AI-6) sont les équations de Bloch du système à deux niveaux.

$$u = \frac{\rho_{aa} - \rho_{bb}}{\bar{N}} \quad \text{caractérise l'inversion de population}$$

$$v = \frac{2Q\gamma}{\omega} \quad \text{représente le rapport entre la constante de relaxation } \gamma \text{ du milieu et celle du champ dans la cavité vide } \kappa = \frac{\omega}{2Q}. \text{ Il traduit la "qualité" de cette cavité.}$$

dans une "bonne" cavité  $\kappa < \gamma_{//} + \gamma_{\perp}$  et  $v > \frac{1}{2}$

dans une "mauvaise" cavité  $\kappa > \gamma_{//} + \gamma_{\perp}$  et  $0 < v < \frac{1}{2}$

On a utilisé comme échelle réduite de temps le temps de vie des photons dans la cavité ( $\kappa^{-1}$ ).

Les notations employées sont celles de Grasyuk et al. [5] qui a établi le modèle.

## I - 2. Solutions stationnaires et stabilité linéaire.

Les solutions stationnaires non nulles du système précédent s'écrivent :

$$(AI-7) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{\pm} = \pm \sqrt{2(\eta-1)} \\ y_{\pm} = \pm \sqrt{2(\eta-1)}/\eta \\ u_s = 1/\eta \end{array} \right. \quad \text{avec les conditions d'existence :}$$

$$\begin{array}{l} \eta > 1 \\ v > 0 \end{array}$$

Ces deux solutions ont le même comportement aussi n'étudierons nous que la solution ( $x_s = x_+$ ,  $y_s = y_+$ ,  $u_s$ ). Notons qu'il existe ici une symétrie essentielle du système qui ne fait pas différencier valeurs positives ou négatives du champ.

On montre qu'en plus de ces deux solutions existe une solution triviale ( $x_s = 0$ ,  $y_s = 0$ ,  $u_s = 1$ ) pour tout  $\eta$  et pour  $v > 0$ . Cette solution correspond à l'absence d'émission laser. Elle est stable pour  $\eta < 1$  et bifurque sur la solution précédente qui, comme nous le verrons ci-après, est stable pour  $\eta$  supérieur et voisin de 1 (fig. A-2).  $\eta$  sera donc le paramètre de bifurcation utilisé dans notre étude.

Pour examiner la stabilité de la solution (AI-7) sous l'action d'une petite perturbation, nous linéarisons le système (AI-6) et regardons l'évolution de cette perturbation. Si celle-ci décroît dans le temps la solution stationnaire étudiée est asymptotiquement stable, si, au contraire, elle croît, la solution stationnaire est instable.

Pour cela nous posons :

$$(AI-8) \quad \begin{cases} x(t) = x_s + x'(t) \\ y(t) = y_s + y'(t) \\ u(t) = u_s + u'(t) \end{cases}$$

où le vecteur  $v(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}$  désigne la perturbation.

En utilisant les notations de l'annexe I, le système (AI-6) se réécrit :

$$(AI-9) \quad \frac{dv}{dt} = f(\eta, v) = f_u(\eta|v) + Q(v)$$

où  $f_u(\eta|v) = L(\eta).v$  est la partie linéaire en  $v$  de  $f(\eta, v)$

$$(AI-10) \quad \text{ici } L(\eta) = \begin{pmatrix} -1 & \eta & 0 \\ v u_s & -v & v x_s \\ -\frac{v}{2} y_s & -\frac{v}{2} x_s & -v \end{pmatrix}$$

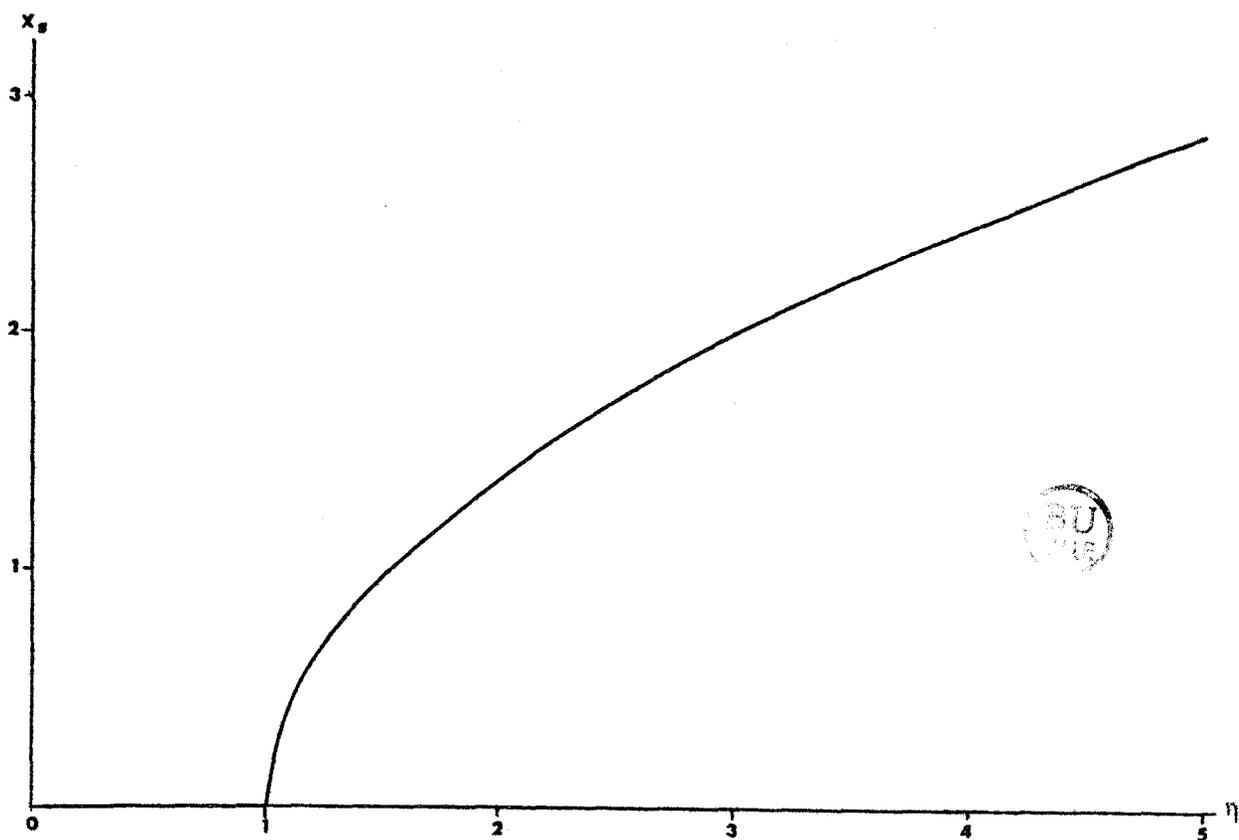


Fig. A-2. Diagramme de bifurcation de la solution  $x_s = 0$ .

Cette solution existe pour tout  $\eta$ . Elle est stable pour  $\eta < 1$  et instable pour  $\eta > 1$ . En  $\eta = 1$  elle bifurque sur les solutions  $x_s = x_{\pm}$  dont seule  $x_+$  est ici représentée. Ces solutions sont stables au point de bifurcation (bifurcation supercritique).

La solution de l'équation (AI-9) est de la forme :

$$v(\eta, t) = v_0(\eta) e^{\lambda(\eta)t}$$

où  $\lambda$  est la solution du polynôme caractéristique de (AI-10).

$$(AI-11) \quad \lambda^3 + (2v+1)\lambda^2 + \lambda v(1+v\eta) + 2v^2(\eta - 1) = 0$$

Plutôt que d'obtenir les expressions analytiques exactes pour  $\lambda$ , on peut appliquer le critère de Routh-Hurwitz à l'équation (AI-11) qui nous permet de déterminer le signe des différentes solutions.

Dans notre cas ce critère s'énonce comme suit :

Soit l'équation :

$$C_0 \lambda^3 + C_1 \lambda^2 + C_2 \lambda + C_3 = 0$$

On pose :

$$D_0 = C_0$$

$$D_1 = C_1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} C_1 & C_0 \\ C_3 & C_2 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} C_1 & C_0 & 0 \\ C_3 & C_2 & C_1 \\ 0 & 0 & C_3 \end{vmatrix} = C_3 D_2$$

Si tous les coefficients  $D_i$  ont même signe, alors la solution stationnaire est stable.

Nous avons :

$$D_0 = C_0 = 1 \quad ; \quad D_1 = 2v + 1 \quad ; \quad D_2 = v(2v + 1) [(2v + 1)(1 + v\eta) - 2v(\eta - 1)]$$

$$D_3 = 2v^2(\eta - 1) D_2$$

Compte tenu des conditions d'existence de  $x_{\pm}$  mentionnées en (AI-7), le critère de stabilité pour ces solutions se réduit à

$$(AI-12) \quad (2\nu+1)(1+\nu\eta) - 2\nu(\eta-1) > 0$$

et le point critique où la solution stationnaire perd sa stabilité est donné par le paramètre de bifurcation  $\eta_c$ .

$$(AI-13) \quad \eta_c = \frac{1}{\nu} \frac{1+4\nu}{1-2\nu}$$

La condition  $\eta_c > 1$  implique  $\nu < \frac{1}{2}$ , autrement dit cette circonstance n'apparaît que dans une "mauvaise cavité" où le champ relaxe rapidement par rapport aux dipôles. La courbe  $\eta_c$  en fonction de  $\nu$  est tracée sur la figure (A-3). La valeur minimale du paramètre critique est  $\bar{\eta}_c = 14.93$ . Or  $\eta$  est directement relié au champ électrique stationnaire par les équations (AI-7). Il faut donc un pompage fort pour obtenir un champ fort dans la cavité si on veut mettre cette instabilité en évidence. Pratiquement cette condition est opposée à la condition de mauvaise cavité qui tend à maintenir un champ faible dans la cavité. Ceci explique qu'on n'ait jamais vu cette instabilité dans les conditions du modèle ici étudié, c'est-à-dire laser monomode, élargissement homogène. On verra en annexe II qu'un élargissement inhomogène ramène  $\bar{\eta}_c$  à des valeurs expérimentalement accessibles [4].

Pour la valeur (AI-13) du paramètre de bifurcation, l'équation caractéristique s'écrit :

$$(AI-14) \quad [\lambda + (1+2\nu)] [\lambda^2 + \nu(1+\nu\eta_c)] = 0$$

dont les racines sont

$$\lambda_0 = -(1+2\nu) < 0$$

$$\lambda_{\pm} = \pm i \omega_0$$

$$(AI-15) \quad \omega_0^2 = \nu(1+\nu\eta_c) = 2\nu \frac{1+\nu}{1-2\nu}$$

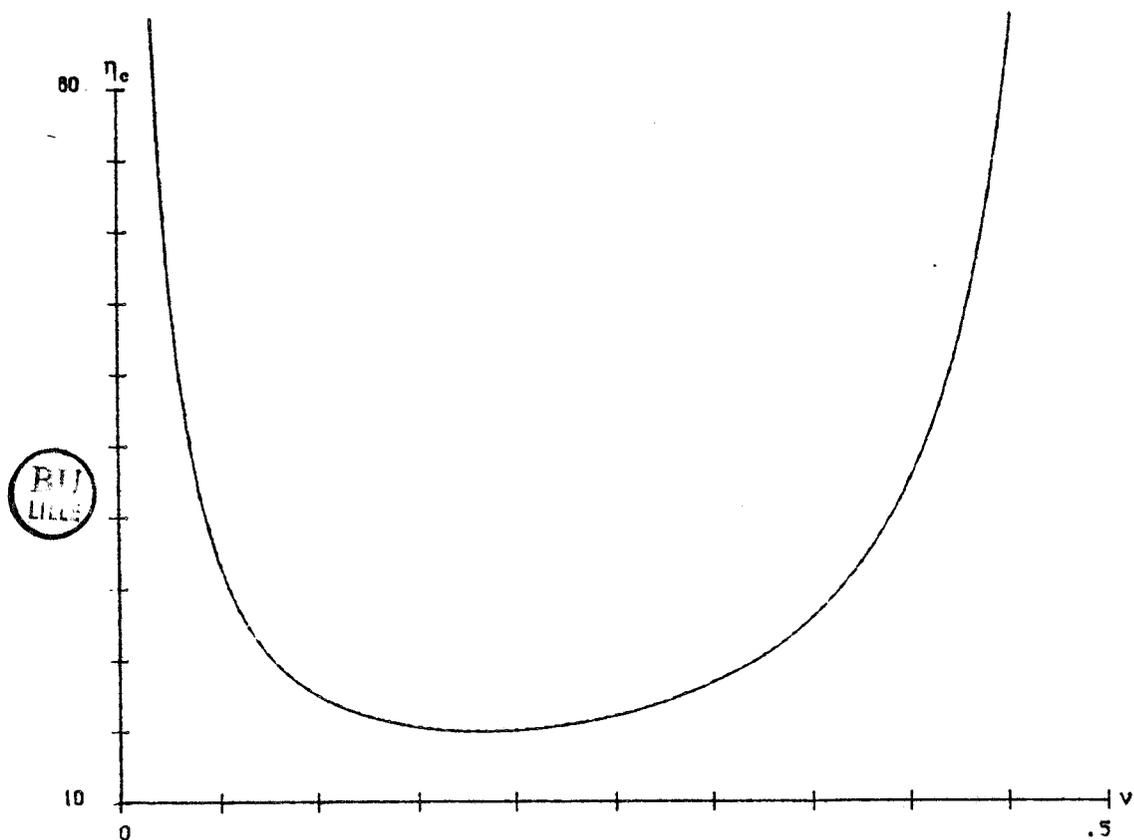


Fig. A-3. Paramètre de bifurcation critique en fonction de  $\nu$ .

La valeur minimale est  $\bar{\eta}_c = 14.93 = 8 + 2\sqrt{12}$

Cette courbe montre les deux conditions qu'il faut réunir pour atteindre le second seuil d'oscillation du laser :

- \* condition de mauvaise cavité  $\nu < 0.5$
- \* condition de fort gain  $\eta > 14.93$ .

pour  $\eta < \eta_c$  la solution stationnaire  $x_+$  est stable  
 pour  $\eta > \eta_c$  elle est instable.

Ces racines remplissent les conditions suivantes qui définissent une bifurcation de Hopf :

une paire de racines complexes conjuguées annulent leur partie réelle au point critique, les autres racines (ici  $\lambda_0$ ) restant stables.

Pour un gain  $\eta = \eta_c$  la solution stationnaire perd sa stabilité et donne naissance à une solution harmonique d'amplitude nulle autour de  $x_+$  et de pulsion  $\omega_0$  dépendant du rapport  $\nu$  de la largeur homogène à l'inverse du temps de vie des photons dans la cavité.

Nous allons étudier la stabilité de cette solution en la construisant au voisinage du point de bifurcation  $\eta_c$ .

Dans le tableau A-1 sont résumées quelques relations utiles pour la suite de cette étude et liant des valeurs caractéristiques du point de bifurcation :

Valeur critique du paramètre de bifurcation (gain linéaire)	$\eta_c = \frac{1}{\nu} \frac{1 + 4\nu}{1 - 2\nu}$
valeur du champ au point critique	$x = \sqrt{2(\eta_c - 1)}$
pulsation de la solution oscillante émergente	$\omega_0^2 = \nu(1 + \nu\eta_c) = 2\nu \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu}$
diverses relations	$(2\nu + 1)(1 + \nu\eta_c) = 2\nu(\eta_c - 1)$ $(2\nu + 1)\omega_0^2 = \nu^2 x^2$ $\nu^2 - \omega_0^2 = -\nu - \frac{\nu^2 x^2}{2}$

Tableau A-1 : Caractéristiques du point critique.

## CHAPITRE A II

CONSTRUCTION DE LA SOLUTION BIFURCANTE

## II - 1. Le problème linéaire.

Nous allons construire la nouvelle solution d'équilibre (\*)  $u(\eta, t)$  de l'équation d'évolution (AI-9) au voisinage du point de bifurcation pour  $\eta$  légèrement supérieur à  $\eta_c$ , solution qui s'annule en  $\eta = \eta_c$ . Pour cela on effectue d'abord une translation en  $\eta$  et l'on pose :

$$(AII-1) \quad \eta = \eta_c + \mu \quad ; \quad f(\eta, u) = f(\mu, u) \quad ; \quad u(\eta, t) = u(\mu, t)$$

$\mu$  est un petit paramètre, ce sera notre nouveau paramètre de bifurcation le point de bifurcation étant défini par  $\mu = 0$ .

Nous allons construire la solution oscillante comme un développement en puissances de  $\mu$  que nous allons réinjecter dans l'équation d'évolution (AI-9). En développant l'opérateur  $f$  en série de Taylor au voisinage de  $\mu = 0$ , nous pouvons calculer les différents ordres de la solution par identification terme à terme de l'équation (AI-9). Le problème au premier ordre se ramène au problème de stabilité linéaire précédent qu'il est nécessaire de pousser à son terme en calculant les vecteurs propres associés à la valeur propre  $\omega$ .

Nous allons donc reformuler le problème linéaire dans l'optique de ce développement en série.

Le développement de  $f$  en puissances de  $\mu$  s'écrit (cf. paragraphe AN 1 - II-2).

---

(\*) aucune confusion n'est possible entre l'écriture de la solution sous forme locale  $u(\mu, t)$  et l'inversion de population puisque seule sa valeur à l'équilibre  $u_s$  intervient dans la suite et ne sera jamais explicitement utilisée.

$$\begin{aligned}
 \text{(AII-2)} \quad f(u, u) &= f_{u, \mu}^{(1,0)}(o|u) + \mu f_{u, \mu}^{(1,1)}(o|u) + \frac{1}{2} \mu^2 f_{u, \mu}^{(1,2)}(o|u) + \dots \\
 &+ \frac{1}{2} [f_{u, \mu}^{(2,0)}(o|u|u) + \mu f_{u, \mu}^{(2,1)}(o|u|u) + \dots] \\
 &+ \frac{1}{3!} [f_{u, \mu}^{(3,0)}(o|u|u|u) + \dots] + \dots
 \end{aligned}$$

$f_{u, \mu}^{(2,0)}(o|a|b)$  est l'opérateur non linéaire d'ordre 2 dans le système (AI-6). Si  $a$  et  $b$  sont deux vecteurs quelconques de composantes  $(a_1, a_2, a_3)$  et  $(b_1, b_2, b_3)$ , cet opérateur s'écrit :

$$\text{(AII-3)} \quad f_{u, \mu}^{(2,0)}(o|a|b) = v \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 b_3 + a_3 b_1 \\ -\frac{1}{2} (a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{pmatrix}$$

$f_{u, \mu}^{(3,0)}(o|a|b|c)$  est l'opérateur d'ordre 3, il est nul ainsi que tous les opérateurs d'ordre supérieur.

$$f_{u, \mu}^{(1,0)}(o|\cdot) = L(\eta_c) \stackrel{\text{d'éf}}{=} L_{oo} \quad \text{et} \quad f_{u, \mu}^{(1,1)}(o|\cdot) = \left( \frac{dL(\eta_c)}{d\eta} \right)_{\eta=\eta_c}$$

Au point de bifurcation l'équation (AI-9) s'écrit alors pour  $u$

$$\text{(AII-4)} \quad \frac{du}{dt} = f_{u, \mu}^{(1,0)}(o|u)$$

En introduisant l'opérateur adjoint  $T_{L_{oo}}^* = L_{oo}^*$ , les équations aux valeurs propres du problème linéaire (AII-4) sont :

$$\begin{aligned}
 \text{(AII-5)} \quad L_{oo} \zeta_o &= i \omega_o \zeta_o & L_{oo}^* \zeta_o^* &= -i \omega_o \zeta_o^* \\
 L_{oo} \bar{\zeta}_o &= -i \omega_o \bar{\zeta}_o & L_{oo}^* \bar{\zeta}_o^* &= i \omega_o \bar{\zeta}_o^*
 \end{aligned}$$

où  $\bar{\zeta}_0$  désigne le complexe conjugué du vecteur propre  $\zeta_0$  de  $L_{00}$   
 et  $\bar{\zeta}_0^*$  celui du vecteur propre  $\zeta_0^*$  de  $L_{00}^*$

On obtient

$$(AII-6) \quad \zeta_0 = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+i\omega_0}{\eta_c x} \\ \frac{-\omega_0^2 + i\omega_0(1+\nu)}{\nu \eta_c x} \end{pmatrix} \text{ et } \zeta_0^* = \frac{1}{N^*} \begin{pmatrix} -\frac{1+2i\omega_0}{\eta_c x} \\ \frac{\nu-i\omega_0}{\nu x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$N$  et  $N^*$  sont des constantes qu'on détermine en posant

$$(AII-7) \quad \bar{N}^* = N$$

et en normalisant les vecteurs  $\zeta_0$  et  $\zeta_0^*$

$$(AII-8) \quad \langle \zeta_0, \zeta_0^* \rangle = 1$$

on obtient alors

$$(AII-9) \quad N^2 = \frac{2}{\nu x \eta_c} [ -\omega_0^2 + i\omega_0(1+2\nu) ]$$

On peut vérifier que  $\zeta_0$  et  $\bar{\zeta}_0^*$  sont orthogonaux.

$$(AII-10) \quad \langle \zeta_0, \bar{\zeta}_0^* \rangle = 0$$

II - 2. Construction de la solution bifurcante.

a) Développement de l'équation d'évolution au voisinage du point de bifurcation.

On définit le produit scalaire dans l'espace des fonctions  $2\pi$  - périodiques pour tout vecteur  $a(s)$  et  $b(s)$ .

$$[a(s), b(s)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle a(s), b(s) \rangle ds$$

On introduit la nouvelle échelle de temps :  $s = \omega(\mu) t$

On pose :

$$Z = e^{is} \zeta_0 \quad \text{et} \quad Z^* = e^{is} \zeta_0^*$$

et on introduit le paramètre :

$$(AII-11) \quad \epsilon = [u, Z^*]$$

$\omega(\epsilon)$  est la pulsation de la solution  $u(s, \epsilon)$ . Elle vérifie  $\omega(0) = \omega_0$ .

On pose :

$$J_0(\cdot) = -\omega_0 \frac{d\cdot}{ds} + f_{u,\mu}^{(1,0)}(0|\cdot)$$

$$J_0^*(\cdot) = \omega_0 \frac{d\cdot}{ds} + f_{u,\mu}^{(1,0)}(0|\cdot)$$

et on développe au voisinage de  $\epsilon = 0$  les fonctions suivantes :

$$(AII-12) \quad \begin{pmatrix} u(s, \epsilon) \\ \mu(\epsilon) \\ \omega(\epsilon) - \omega_0 \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \begin{pmatrix} u_n(s) \\ \mu_n \\ \omega_n \end{pmatrix}$$

La définition (AII-11) de  $\varepsilon$  implique les relations de normalisation suivantes pour  $u(s, \varepsilon)$

$$(AII-13) \quad [u_n, Z^*] = \delta_{n,1}$$

Avec ces notations l'équation d'évolution se réécrit :

$$(AII-14) \quad \omega(\varepsilon) \frac{du(s, \varepsilon)}{ds} = f(\varepsilon, u)$$

En utilisant le développement (AII-2) de  $f(u, u)$  et celui (AII-12) de  $\mu$ , on obtient les relations suivantes pour les ordres 1 à 3 en  $\varepsilon$  en identifiant terme à terme les deux membres de l'équation (AII-14).

$$(AII-15) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_0(u_1) = 0 \quad (a) \\ J_0(u_2) - \omega_1 \frac{du_1}{ds} + \mu_1 f_{u, \mu}^{(1,1)}(o|u_1) + \frac{1}{2} f_{u, \mu}^{(2,0)}(o|u_1|u_1) = 0 \quad (b) \\ J_0(u_3) - \omega_2 \frac{du_1}{ds} - \omega_1 \frac{du_2}{ds} + \mu_1 f_{u, \mu}^{(1,1)}(o|u_2) \\ + \frac{1}{2} \mu_1^2 f_{u, \mu}^{(1,2)}(o|u_1) + \mu_2 f_{u, \mu}^{(1,1)}(o|u_1) + f_{u, \mu}^{(2,0)}(o|u_1|u_2) \\ + \mu_1 f_{u, \mu}^{(2,1)}(o|u_1|u_1) + f_{u, \mu}^{(3,0)}(o|u_1|u_1|u_1) = 0 \end{array} \right. \quad (c)$$

b) Résolution de l'ordre 1.

La solution de l'équation (AII-15a) est du type :

$$u_1 = CZ + \bar{C}\bar{Z}$$

Un choix judicieux de l'origine des temps permet de prendre réelle la constante  $C$ . D'autre part  $[u_1, Z^*] = C$  et la condition (AII-13) de

normalisation impose  $C = 1$ .

La solution à l'ordre un est donc simplement :

$$(AII-16) \quad u_1 = \zeta_0 e^{i \omega t} + \bar{\zeta}_0 e^{-i \omega t}$$

c) Calcul de  $\mu_1$  et  $\omega_1$ .

La condition de solubilité (ANI-33) appliquée à l'équation (AII-15b) de l'ordre 2 s'écrit :

$$(AII-17) \quad -\omega_1 \left[ \frac{du_1}{ds}, Z^* \right] + \mu_1 [f_{u,\mu}^{(1,1)}(o|u_1), Z^*] + \frac{1}{2} [f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|u_1|u_1), Z^*]$$

$$\frac{du_1}{ds} = iZ - i\bar{Z}$$

$$\left[ \frac{du_1}{ds}, Z^* \right] = +i$$

$$(AII-18) \quad f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|u_1|u_1) = f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|\zeta_0|\zeta_0) e^{2is} + 2 f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|\zeta_0|\bar{\zeta}_0) \\ + f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|\bar{\zeta}_0|\bar{\zeta}_0) e^{-2is}$$

$$\text{et } [f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|u_1), Z^*] = 0$$

D'autre part l'inéquation (ANI-23) de perte stricte de stabilité permet d'affirmer que :

$$\text{Re } [f_{u,\mu}^{(1,1)}(o|u_1), Z^*] = \text{Re } \langle f_{u,\mu}^{(1,1)}(o|\zeta_0), \zeta_0^* \rangle \quad \text{est strictement positif.}$$

La condition (AII-17) ne peut être vérifiée que si  $\mu_1 = 0$ , ce qui implique  $\omega_1 = 0$  et est en accord avec le résultat général (ANI-34).

d) Résolution de l'ordre 2.

L'équation (AII-15-b) se résume donc à :

$$J_o(u_2) = -\frac{1}{2} f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|u_1|u_1)$$

On cherche une solution particulière de cette équation sous la forme :

$$u_2 = A e^{2is} + \bar{A} e^{-2is} + B$$

L'équation précédente, compte tenu de la forme (II-18) de  $f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|u_1|u_1)$ , se scinde en deux équations :

$$(AII-19) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{u,\mu}^{(1,0)}(o|B) = -f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|\zeta_o|\bar{\zeta}_o) \quad (a) \\ f_{u,\mu}^{(1,0)}(o|A) - 2i\omega_o A = -\frac{1}{2} f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|\zeta_o|\zeta_o) \quad (b) \end{array} \right.$$

dans lesquelles :

$$\frac{1}{2} f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|\zeta_o|\zeta_o) = \frac{1}{N^2} \begin{pmatrix} 0 \\ v \left( \frac{-\omega_o^2 + i\omega_o(1+v)}{v\eta x} \right) \\ -\frac{v}{2} \left( \frac{1+i\omega_o}{\eta} \right) \end{pmatrix}$$

$$f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|\zeta_o|\bar{\zeta}_o) = \frac{1}{|N|^2} \begin{pmatrix} 0 \\ -2\omega_o^2/\eta x \\ -v/\eta \end{pmatrix}$$

En cherchant des solutions de la forme :

$$A = \frac{1}{N^2} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = - \frac{1}{|N|^2} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

on trouve :

$$A = \frac{1}{N^2} \begin{pmatrix} a_1 \\ \frac{1+2i\omega_0}{\eta} a_1 \\ -\frac{\nu}{\eta} \frac{\alpha}{\omega_0(2\nu+1)} \left( \frac{1}{2} + x a_1 \right) \end{pmatrix}$$

avec 
$$\alpha = \omega_0 (2\nu+1) \frac{1+i\omega_0}{\nu+2i\omega_0}$$



$$a_1 = \frac{1}{2x} (1 + 2\beta)$$

$$\beta = \frac{\alpha - \omega_0}{4\omega_0 - \alpha - 2i(1+\nu)}$$

et 
$$B = - \frac{1}{|N|^2} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1/\eta \\ \frac{1}{\eta} - \frac{x}{\eta} b_1 \end{pmatrix}$$

avec 
$$b_1 = \frac{1}{x} \frac{1+4\nu}{1+2\nu}$$

La solution de (AII-15b) est donc :

$$u_2 = A e^{2is} + \bar{A} e^{-2is} + B + CZ + \bar{C}\bar{Z}$$

La condition de normalisation (AII-13) impose :

$$[u_2, Z^*] = C = 0$$

e) Stabilité de la solution.

La condition de solubilité appliquée à l'équation (AII-15c) permet de calculer  $\mu_2$  dont le signe détermine la stabilité de la solution périodique.

si  $\mu_2 > 0$  la bifurcation est dite supercritique ; elle est stable.

si  $\mu_2 < 0$  elle est dite sous-critique ; elle est instable.

La condition de solubilité se réduit à

$$(AII-20) \quad -\omega_2 \left[ \frac{du_1}{ds}, Z^* \right] + \mu_2 [f_{u,\mu}^{(1,1)}(o|u_1), Z^*] + [f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|u_1|u_2), Z^*] = 0$$

puisque  $\left[ \frac{du_1}{ds}, Z^* \right] = i$ , seule la partie réelle de cette équation nous est utile pour calculer  $\mu_2$ .

Comme de plus  $\text{Re} [f_{u,\mu}^{(1,1)}(o|u_1), Z^*] > 0$ , seule la partie réelle du dernier terme est à prendre en considération

$$(AII-21) \quad g = \text{Re} [f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|u_1|u_2), Z^*] = \text{Re} \langle f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|\xi_o|B), \zeta_o^* \rangle \\ + \text{Re} \langle f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|\bar{\xi}_o|A), \zeta_o^* \rangle$$

où nous avons :

$$f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|\xi_o|B) = -\frac{1}{N|N|^2} \frac{1}{\eta x^2(1+2\nu)} \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_o^2(3+8\nu) + i\omega_o(1+4\nu)(1+\nu) \\ -(1+4\nu)(2+i\omega_o)\nu x/2 \end{bmatrix}$$

$$f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|\bar{\xi}_o|A) = - \frac{1}{N|N|^2} \frac{\omega_o}{\eta x^2 (1+2v)} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha (1+2v)(1+\beta) + \frac{\omega_o + i(1+v)}{2} (1+2\beta)(1+2v) \\ \frac{(2+i\omega_o)}{4} \sqrt{1+2v} (1+2\beta)(1+2v) \end{bmatrix}$$

On obtient alors :

$$g = - \frac{\omega_o}{|N|^2 \eta x^2 \sqrt{1+2v}} \operatorname{Re} \left( \frac{g'}{N^2} \right)$$

avec  $g' = \left\{ \begin{array}{l} \left[ -\omega_o \frac{3+8v}{1+2v} + i \frac{(1+4v)(1+v)}{1+2v} \right] \frac{v+i\omega_o}{\omega_o} + \frac{2+i\omega_o}{2} \\ \left[ (1+2\beta) \frac{1+2v}{2} - (1+4v) \right] + \frac{v+i\omega_o}{\omega_o} \left[ \frac{(1+2v)\omega_o}{v^2+4\omega_o^2} \left[ (v+2\omega_o^2) \right. \right. \\ \left. \left. + i\omega_o(v-2) \right] (1+\beta) + \frac{\omega_o+i(1+v)}{2} (1+2\beta) \right] \end{array} \right\}$



Cette équation est bien trop compliquée pour être résolue analytiquement et ce malgré la simplicité du système d'équations du modèle à deux niveaux. On est donc amené à entreprendre une étude numérique de  $g'$ , c'est ce qui fait l'objet de la section suivante.

CHAPITRE A III

INTÉGRATION NUMÉRIQUE

### III - 1. Stabilité de la solution harmonique.

L'expression  $\text{Re}(g'/N^2)$  a été évaluée numériquement pour  $0 < \nu < \frac{1}{2}$ . Le résultat est reporté sur la figure (A-4).

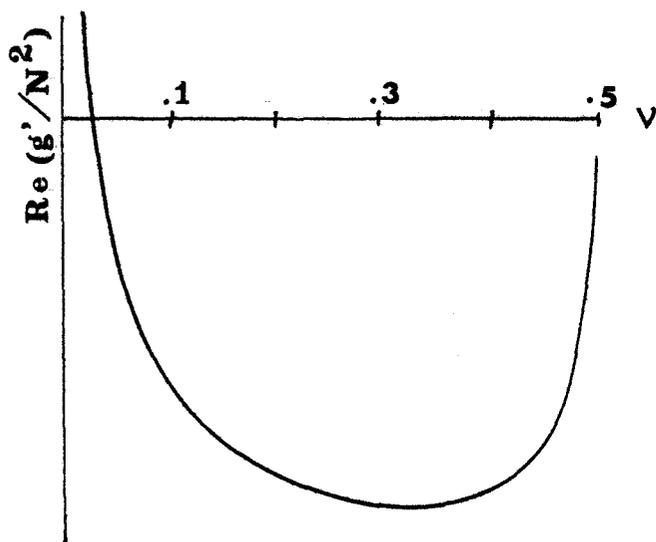


Figure A-4.

La solution harmonique de pulsation  $\omega_0$  au point de bifurcation est stable lorsque  $\text{Re}(g'/N^2) > 0$  et instable lorsque  $\text{Re}(g'/N^2) < 0$ .  $\text{Re}(g'/N^2) = 0$  pour  $\nu = 0.03$ .

Pour  $\nu > 0.03$ , c'est à dire sur la plus grande partie du domaine de variation,  $\text{Re}(g'/N^2)$  est négatif et donc  $\mu_2$  pareillement. La solution est instable. Elle ne devient stable que pour les toutes petites valeurs de  $\nu$ , donc pour de très mauvaises cavités ( $\nu < 0.03$ ) et pour des taux de pompage extrêmement élevés, condition actuellement irréalisable.

### III - 2. Intégration des équations d'évolution.

Le système (AI-6) a été intégré selon la méthode de Merson (voir la partie B). Quelques résultats typiques sont présentés sur les figures (A-5) à (A-8). La condition initiale a été choisie comme suit :

$$\begin{aligned}
 x(0) &= x_+ * 1.1 && \text{où } x_+, y_+, u_s \text{ sont calculés pour les} \\
 y(0) &= y_+ && \text{valeurs de } \nu \text{ et } \eta \text{ mentionnées.} \\
 u(0) &= u_s
 \end{aligned}$$

C'est à dire en supposant une perturbation de 10 % de la valeur du champ dans la cavité.

La solution harmonique, lorsque le paramètre de bifurcation  $\eta$  est voisin de  $\eta_c$ , est clairement instable et donne naissance à un attracteur étrange (fig. A7 et A8-b). Cet attracteur est responsable du comportement chaotique du laser au delà du point de bifurcation étudié qu'on appelle le "second seuil d'oscillation" du laser.

Les figures A7 et A8 sont caractéristiques d'un comportement chaotique décrit par Pomeau et Manneville [48] comme de l'intermittance de type III, c'est à dire une succession de régions d'oscillations quasi périodiques avec commutation apparemment aléatoire entre les points "attracteurs" de chaque oscillation quasi périodique.

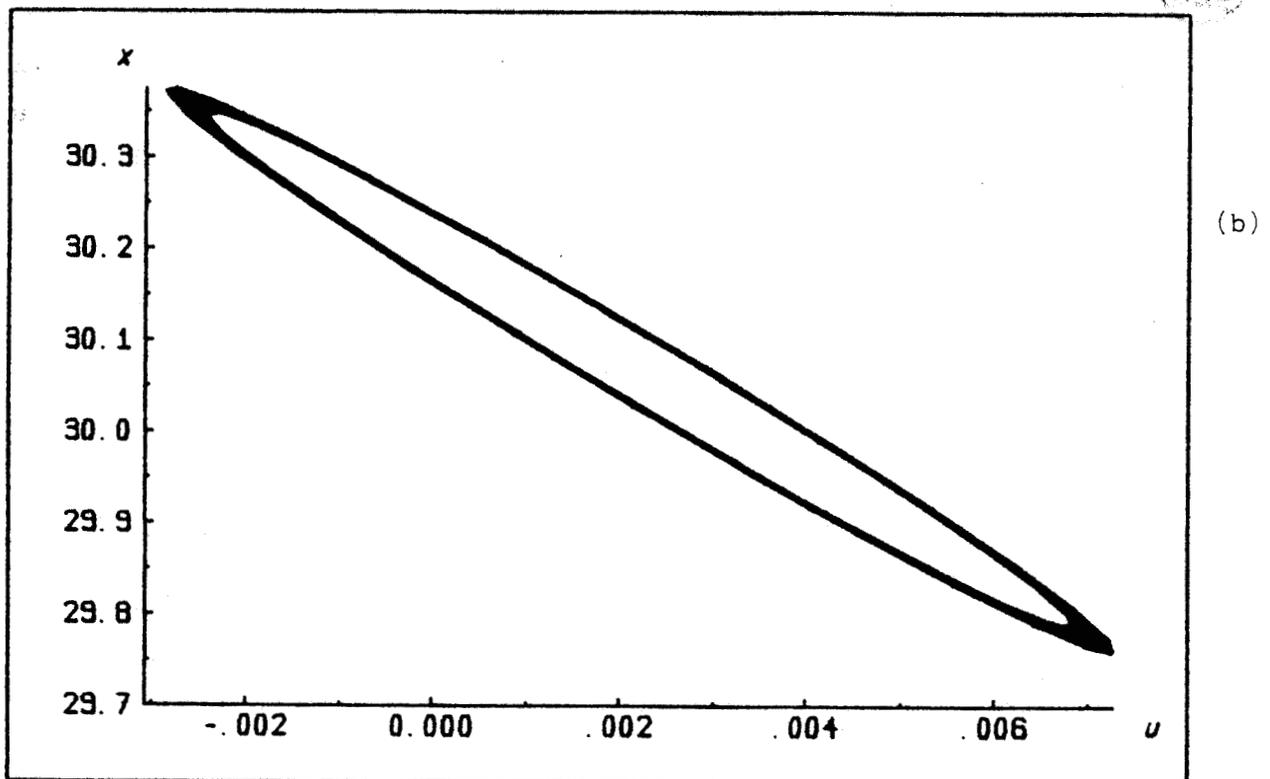
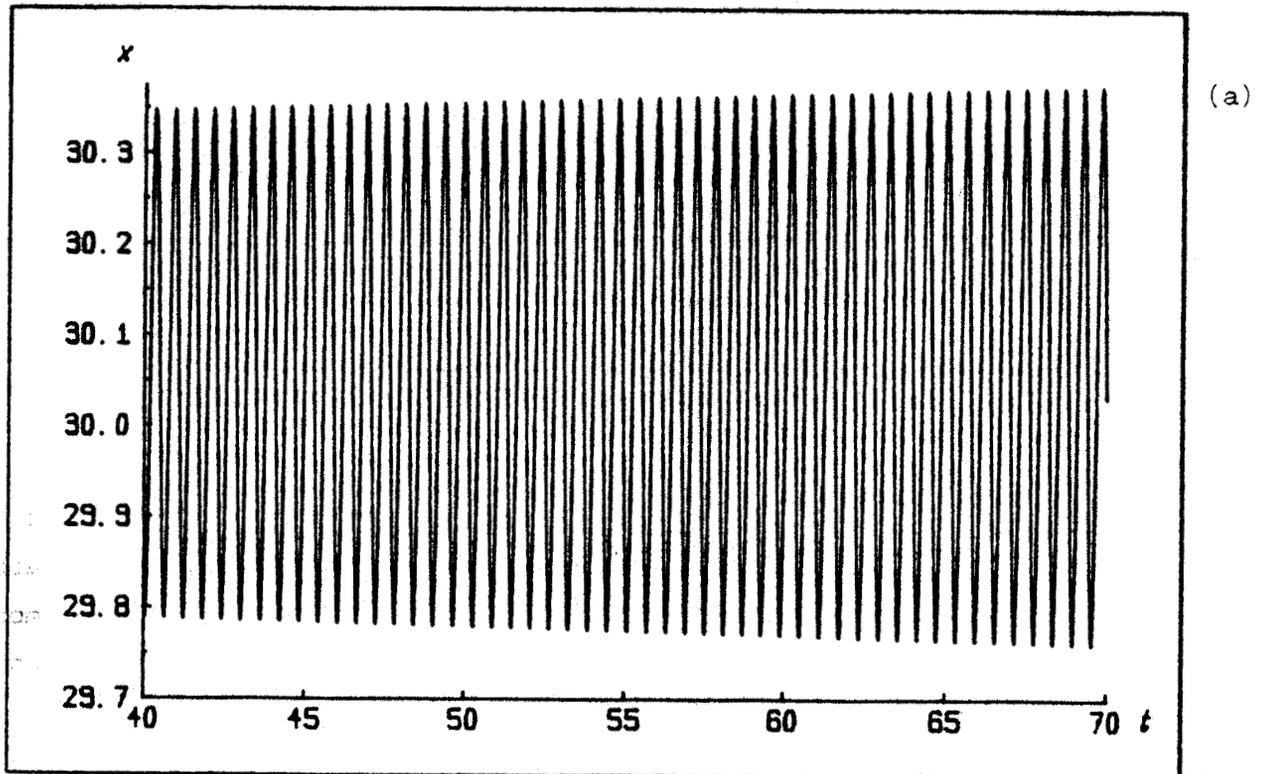


Fig. A-5. Pour  $v = 0.49$  et  $\eta = \eta_c * 1.5$   
 Evolution du champ  $x$  en fonction du temps en unité  $\kappa^{-1}$  (a)  
 et de la différence de population  $u$  (b)

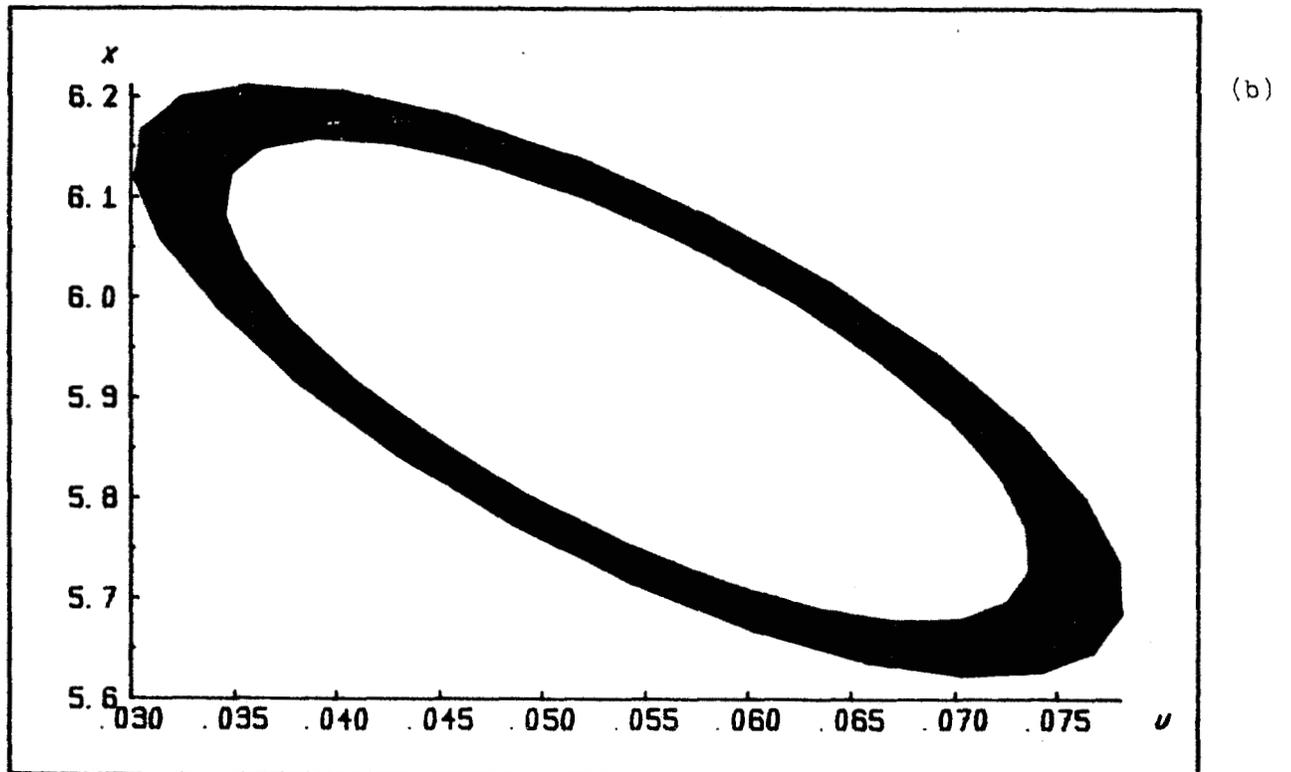
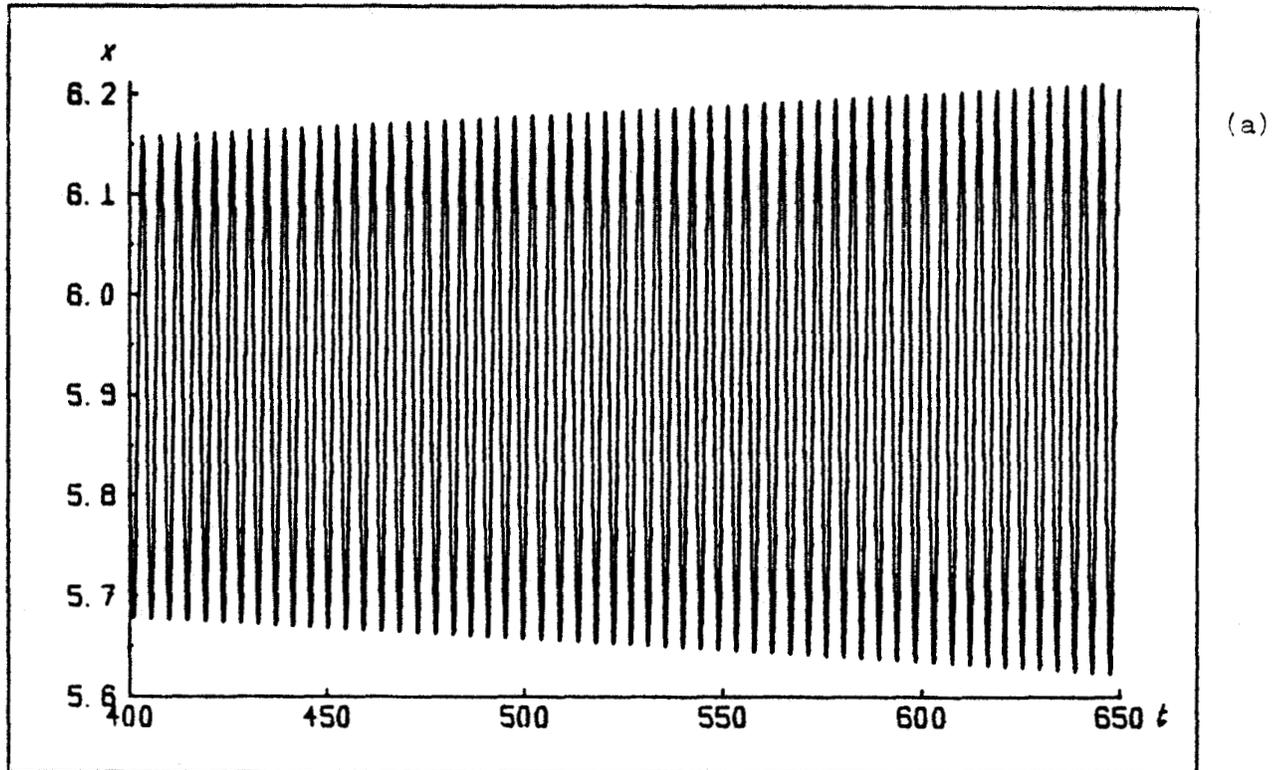
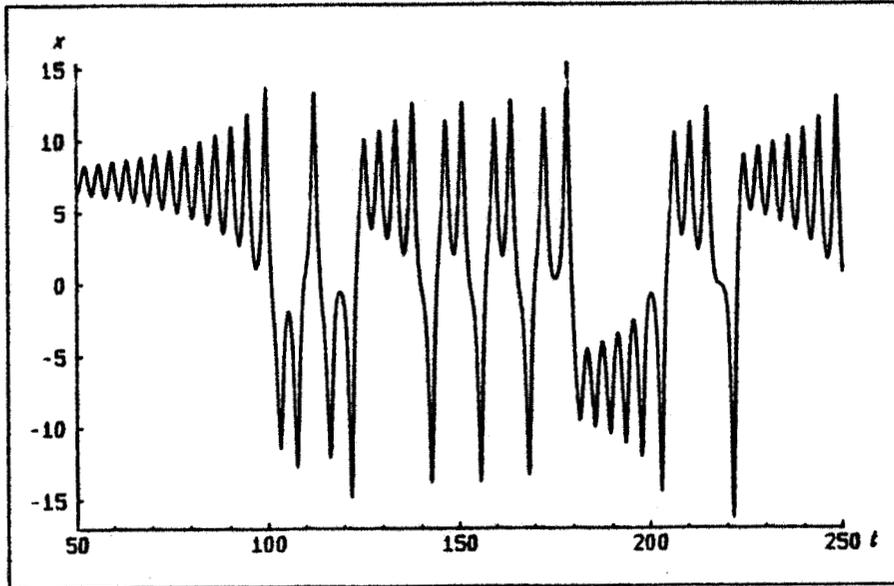
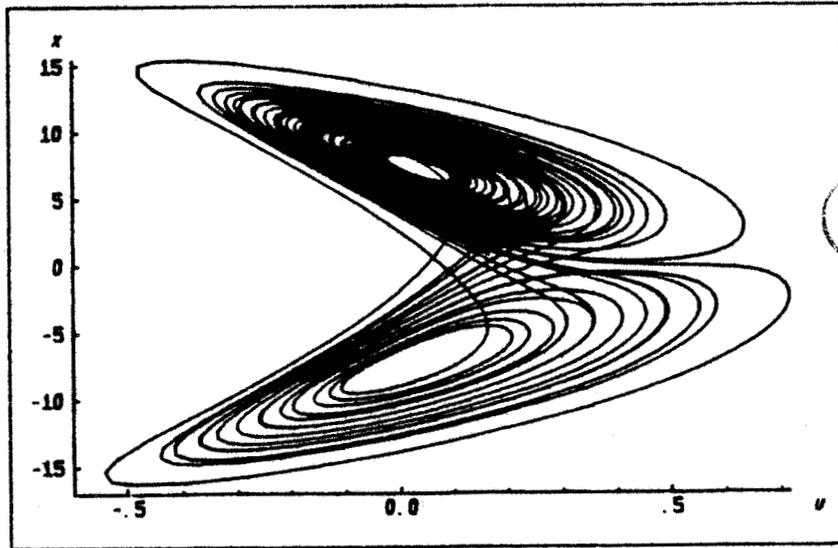


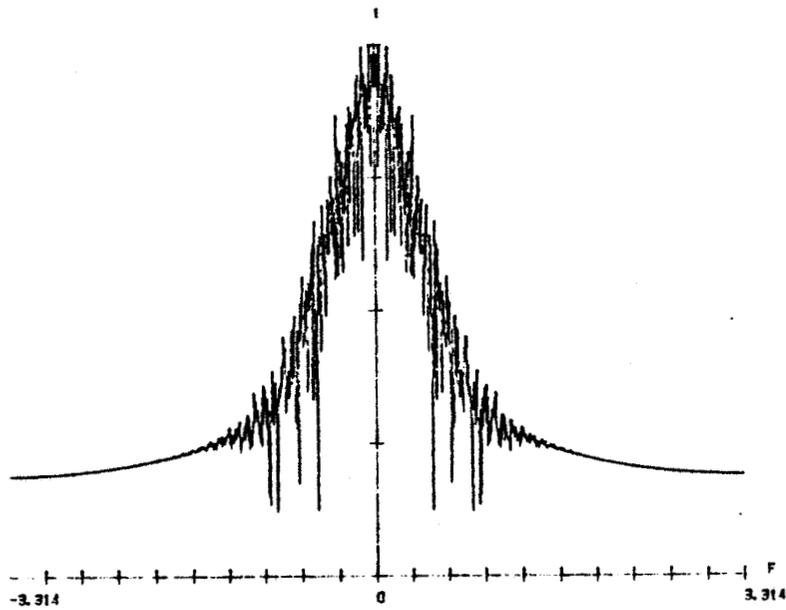
Fig. A-6. : pour  $\nu = 0.3$  et  $\eta = \eta_c * 1.01$ .



(a)



(b)



(c)

Fig. A-7. :  $v = 0.3$   $\eta = \eta_c \times 1.5$ . L'évolution du système est chaotique (a) son diagramme de phase est l'attracteur de Lorenz (b) et son spectre est continu (c)

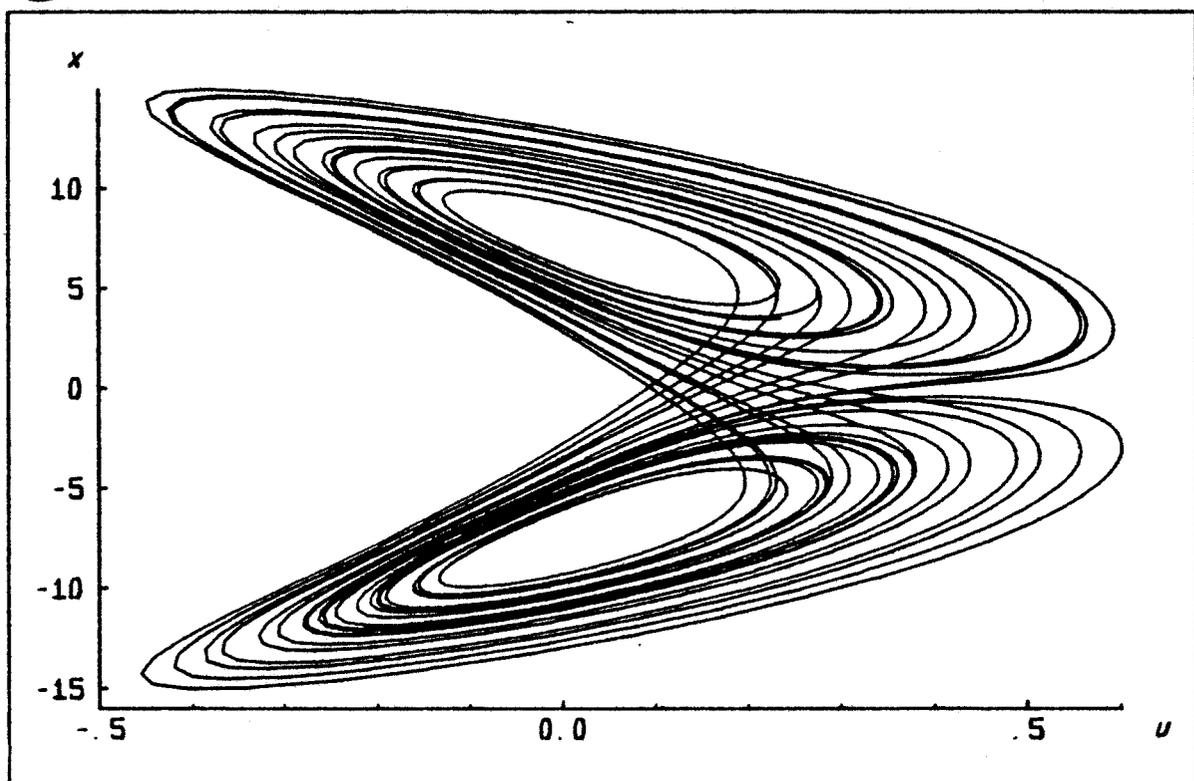
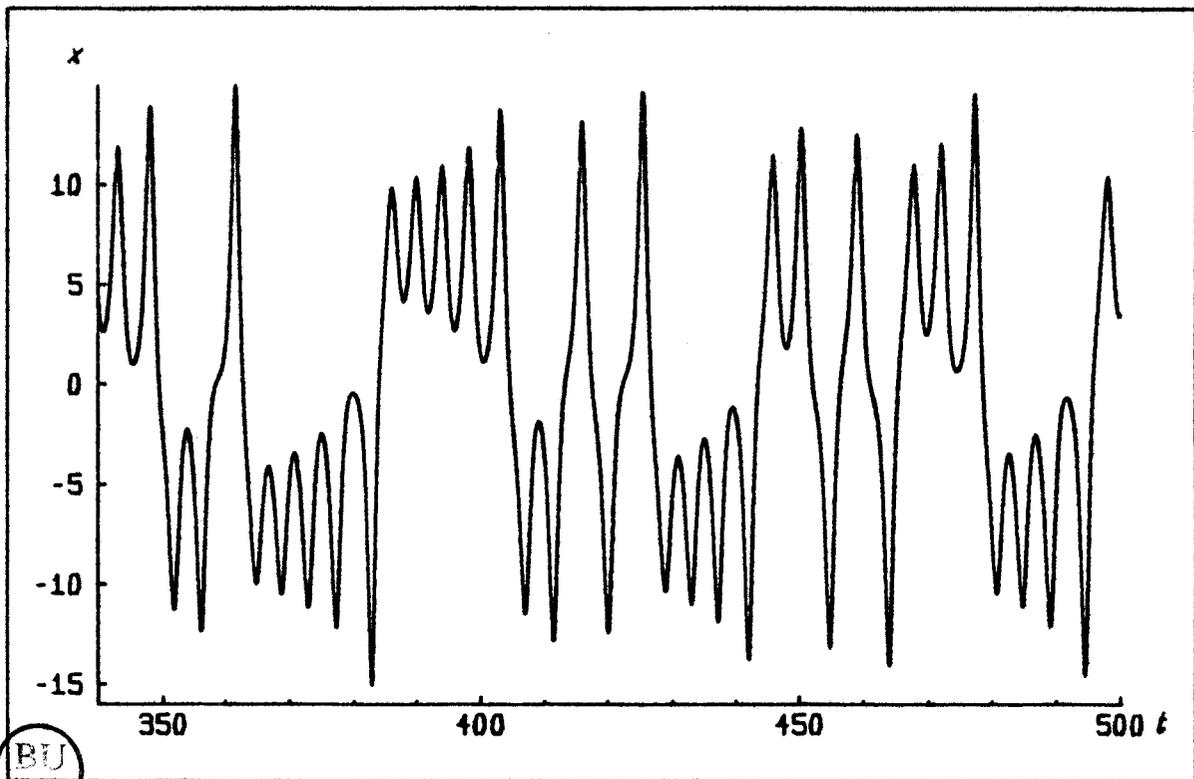


Fig. A-8. : Mêmes paramètres que précédemment sur un intervalle de temps postérieur.

Remarque : Le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} X &= -\frac{1}{\sqrt{2}} x_+ & \sigma &= \frac{1}{\nu} & t' &= \nu t \\ Y &= -\frac{\eta}{\sqrt{2}} y_+ & r &= \eta \\ Z &= -\dot{\eta}(u-1) & b &= 1 \end{aligned}$$

permet de mettre le système (AI-6) sous la forme traditionnelle du système de Lorenz :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \sigma (Y - X) \\ \dot{Y} &= r X - Y - X Z & \text{où } \dot{X} &= \frac{dX}{dt'} \\ \dot{Z} &= X Y - b Z \end{aligned}$$

Hassard et al. [57] ont trouvé que pour des valeurs habituelles rencontrées en hydrodynamique des paramètres  $r$ ,  $\sigma$ ,  $b$  la bifurcation de Hopf étudiée est toujours sous-critique.

Néanmoins diverses analyses numériques [58 et 59] confirment le résultat de la figure (A-4) selon lequel la bifurcation peut être supercritique pour les grandes valeurs du paramètre  $\sigma$ .

Un développement limité un peu long de la formule donnant  $g'/N^2$  permet d'ailleurs de retrouver analytiquement ce résultat.

## PARTIE B

ÉTUDE DU LASER AVEC ABSORBANT SATURABLE

DANS UN MODÈLE À QUATRE NIVEAUX

## Introduction.

Si la littérature abonde en traitements théoriques sur le laser avec absorbant saturable intracavité (L.S.A) dans le modèle à deux niveaux, elle est relativement pauvre en ce qui concerne le modèle à quatre niveaux [15 - 17]. Cette étude s'avère toutefois nécessaire pour une meilleure description des résultats expérimentaux sur les lasers à gaz, le modèle à quatre niveaux décrivant mieux que le modèle à deux niveaux les molécules des gaz généralement utilisés. Ce n'est donc pas un hasard si les premiers utilisateurs de ce modèle sont des expérimentateurs.

Nous nous sommes efforcés dans ce travail de préciser clairement les approximations faites afin de faciliter la comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux.

La démarche suivie dans cette partie est identique à celle utilisée dans les chapitres précédents. Le chapitre I établit les équations du modèle, le chapitre II présente l'étude analytique des bifurcations apparaissant sur les solutions stationnaires, le chapitre III donne les résultats des simulations numériques et le chapitre IV ébauche quelques pistes de développements possibles.

## CHAPITRE BI

### LE MODÈLE

## I - Le système à quatorze équations.

### Préambule.

Les différents auteurs écrivant directement les "rate equations", ce chapitre a pour but de préciser les diverses approximations tout en introduisant les notations utilisées.

### I - 1. Le modèle moléculaire.

On considère une cavité résonante de longueur  $L$  (fig. B-1) dont les pertes sont caractérisées par un coefficient de transmission  $T$  et où sont placées deux cellules, l'une de longueur  $\ell$ , contenant un milieu gazeux pompé par une décharge électrique et dans lequel s'effectue l'émission laser, l'autre, de longueur  $\bar{\ell}$ , contenant un gaz absorbant.

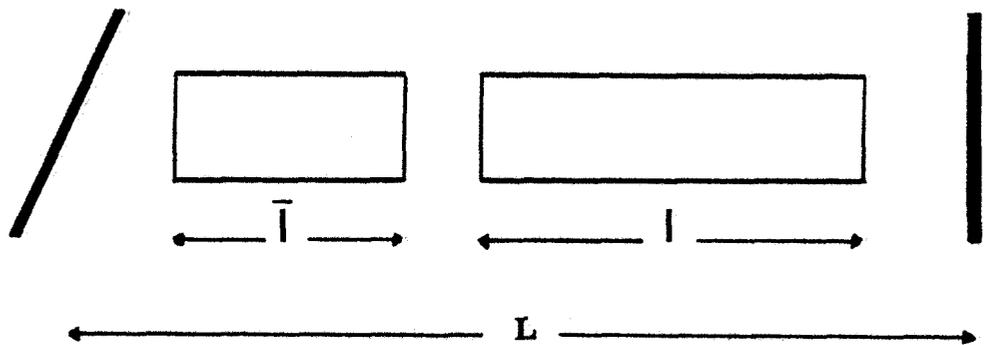


Fig. B-1. Schéma de principe d'un laser avec absorbant saturable intracavité. La cavité résonante a une longueur  $L$ . Ses pertes sont caractérisées par un coefficient de transmission  $T$ . Elle contient une cellule amplificatrice de longueur  $\ell$  et une cellule absorbante de longueur  $\bar{\ell}$ .

Les molécules de chaque milieu, amplificateur ou absorbant, sont décrites par un modèle à quatre niveaux illustré sur la figure (B-2). Deux niveaux  $J_2$  et  $J_1$  de population  $M_{J_2}$  et  $M_{J_1}$  sont résonants avec le champ

et responsables de l'émission laser dans l'amplificateur et de l'absorption dans l'absorbant. Ils sont distants en énergie de  $\hbar \omega_a$ .

Ces deux niveaux sont couplés aux autres niveaux rotationnels de la même bande vibrationnelle considérée comme un réservoir unique de population  $M_2$  pour le niveau supérieur et  $M_1$  pour le niveau inférieur.

Ce couplage s'établit via une relaxation rotationnelle du niveau résonant vers le niveau réservoir (resp. du niveau réservoir vers le niveau résonant) caractérisée par la constante  $\gamma_R$  (resp  $\gamma_R'$ ). Ces constantes sont supposées identiques pour les deux niveaux  $J_2$  et  $J_1$ , approximation raisonnable compte tenu du fait que la relaxation rotationnelle est due aux collisions, phénomène de thermalisation qui agit donc de la même façon sur chaque bande vibrationnelle.

Les niveaux vibrationnels relaxent de même avec des constantes  $\gamma_2$  et  $\gamma_1$  que nous supposerons égales :

$$\gamma = \gamma_2 = \gamma_1$$

Notons que cette approximation est moins bien justifiée que la précédente notamment sur des molécules comme  $\text{CO}_2$  ou  $\text{CH}_3\text{F}$  mais qu'elle n'est pas de nature à modifier grandement les résultats.

L'amplificateur est en outre caractérisé par un terme de pompage que nous supposerons n'agir que sur le niveau vibrationnel  $M_2$ .

Nous supposerons de plus que seules les cohérences induites par l'absorption ou l'émission entre les niveaux résonants sont non nulles et qu'elles relaxent à la même constante  $\gamma_R$  que les niveaux résonants comme c'est expérimentalement généralement le cas dans les gaz.

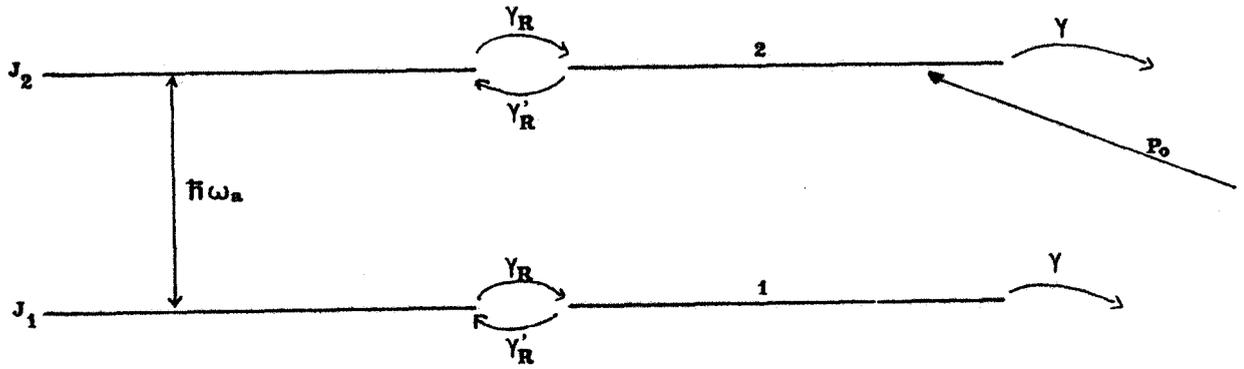


Figure B-2. : Schéma du modèle à quatre niveaux.

Les deux niveaux résonants avec le champ  $J_2$  et  $J_1$  sont distants en énergie de  $\hbar \omega_a$  et caractérisés par des constantes de relaxation rotationnelle  $\gamma_R$  et  $\gamma'_R$ . Ils sont couplés à deux niveaux vibrationnels réservoirs 2 et 1 qui relaxent à la constante  $\gamma$ . L'amplificateur est en outre caractérisé par un terme de pompage  $P_0$  qui peuple le niveau vibrationnel 2.

L'état de la molécule est alors décrit par l'opérateur densité :

$$(BI-1) \quad (\rho(z, v, t)) = \left( \begin{array}{cc|cc} \rho_{J_2}(z, v, t) & \rho^*(z, v, t) & & 0 \\ \rho(z, v, t) & \rho_{J_1}(z, v, t) & & \\ \hline & & \rho_2(z, v, t) & 0 \\ 0 & & 0 & \rho_1(z, v, t) \end{array} \right)$$

où on a séparé les niveaux résonants  $J_2$  et  $J_1$  des niveaux réservoirs 2 et 1.  $\rho^*(z, v, t)$  désigne le complexe conjugué de  $\rho(z, v, t)$ .

Cet opérateur obéit à l'équation d'évolution :

$$(BI-2) \quad \frac{d(\rho(z, v, t))}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H, (\rho(z, v, t))] - \frac{1}{2} \{P - (\rho(z, v, t)), \Gamma\}$$

où  $[ ]$  désigne le commutateur et  $\{ \}$  l'anticommutateur.  $P$  est la matrice de pompage.

$$P = \begin{bmatrix} \gamma_{2,J_2} \rho_2 + \rho_{J_2}^0 & & & 0 \\ & \gamma_{1,J_1} \rho_1 + \rho_{J_1}^0 & & \\ & & \gamma_{J_2,2} \rho_{J_2} + P'_0 & \\ 0 & & & \gamma_{J_1,1} \rho_{J_1} + \rho_1^0 \end{bmatrix}$$

les termes  $\rho^0$  sont liés aux populations des niveaux à l'équilibre thermodynamique et  $P'_0$  vaut  $\rho_2^0$  dans l'absorbant et le terme de pompage dans l'amplificateur.

$\Gamma$  est la matrice de relaxation des niveaux :



$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{J_2} & & & 0 \\ & \gamma_{J_1} & & \\ & & \gamma_2 & \\ 0 & & & \gamma_1 \end{bmatrix}$$

et  $H$  l'hamiltonien de la molécule en interaction avec le champ laser  $E(z,t)$  :

$$H = \begin{bmatrix} H_{J_2} & V & & 0 \\ V^* & H_{J_1} & & \\ \hline & & H_2 & 0 \\ 0 & & 0 & H_1 \end{bmatrix}$$

avec  $H_{J_2} - H_{J_1} = \hbar \omega_a$   
et  $V(z,t) = -\mu E(z,t)$

$\mu$  étant le moment dipolaire de la transition

$J_2 - J_1$

En développant l'équation d'évolution (BI-2) on obtient le système d'équations suivant :

$$(BI-3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho_{J_2}(z,v,t)}{dt} = \frac{\mu}{\hbar} (i E(z,t)\rho(z,v,t) + cc) - \gamma_R(\rho_{J_2}(z,v,t) - \rho_{J_2}^0(z,v,t)) + \gamma_R' \rho_2(z,v,t) \\ \frac{d\rho_{J_1}(z,v,t)}{dt} = -\frac{\mu}{\hbar} (i E(z,t)\rho(z,v,t) + cc) - \gamma_R(\rho_{J_1}(z,v,t) - \rho_{J_1}^0(z,v,t)) + \gamma_R' \rho_1(z,v,t) \\ \frac{d\rho_2(z,v,t)}{dt} = -(\gamma + \gamma_R') \rho_2(z,v,t) + \gamma_R \rho_{J_2}(z,v,t) + P_0(z,v,t) \\ \frac{d\rho_1(z,v,t)}{dt} = -(\gamma + \gamma_R') (\rho_1(z,v,t) - \rho_1^0(z,v,t)) + \gamma_R \rho_{J_1}(z,v,t) \\ \frac{d\rho(z,v,t)}{dt} = -\frac{i V^*}{\hbar} (\rho_{J_2}(z,v,t) - \rho_{J_1}(z,v,t)) + i \omega_a \rho(z,v,t) - \gamma_R \rho(z,v,t) \end{array} \right.$$

Dans lequel les hypothèses sur les constantes de relaxation ont été traduites en posant :

$$(BI-4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{J_2} * \gamma_{2,J_2} = \gamma_{J_1} * \gamma_{1,J_1} = \gamma_R' \\ \gamma_{J_2} = \gamma_{J_1} = \gamma_R \\ \gamma_2 = \gamma_1 = \gamma + \gamma_R' \\ P_0 = \gamma_2 P_0' \end{array} \right.$$

Les populations à l'équilibre  $\rho_{J_2}^*$ ,  $\rho_{J_1}^*$ ,  $\rho_2^*$  et  $\rho_1^*$  sont reliées par les équations d'équilibre des transferts entre les niveaux résonants et les niveaux réservoirs (detailed balance)

$$\rho_{J_1}^* = \frac{\gamma_R'}{\gamma_R} \rho_1^* \quad ; \quad \rho_{J_2}^* = \frac{\gamma_R''}{\gamma_R} \rho_2^*$$

ce qui amène à poser dans (BI-3)

$$\rho_2^0 = \rho_{J_1}^0 = 0$$

$$\rho_2^0 = \frac{\gamma}{\gamma + \gamma_R'} \rho_2^* \quad ; \quad \rho_1^0 = \frac{\gamma}{\gamma + \gamma_R'} \rho_1^*$$

## I - 2. L'équation de propagation.

Le champ sera assimilé à une onde stationnaire monochromatique oscillant à la pulsation de résonance  $\omega_n$  de la cavité passive.

$$(BI-5) \quad E(z,t) = \frac{1}{2} (E_+(t) e^{-i \omega_n t} + E_-(t) e^{i \omega_n t}) V_n(z)$$

En négligeant tout effet transverse dû à la structure du champ, on a :

$$V_n(z) = \sin K_n z \quad ; \quad K_n = \frac{\omega_n}{c} = \frac{n\pi}{L}$$

En supposant les gain et pertes linéaires faibles on négligera la structure longitudinale du champ de sorte que  $E_+$  et  $E_-$  ne dépendent que de  $t$  et non de  $z$

$$E_+(t) = E_-^*(t) = E(t) e^{i\phi(t)}$$

La décomposition en ondes planes de ce champ s'écrit :

$$(BI-6) \quad E(z,t) = \int_{\substack{K'=-\infty \\ \omega'=-\infty}}^{+\infty} E(K',\omega',t) e^{-i(\omega' t - K' z)}$$

avec les relations :

$$(BI-7) \quad \left\{ \begin{array}{l} E(K',\omega',t) = \frac{1}{4i} (E_+(t) \delta_{\omega',\omega_n} + E_-(t) \delta_{+\omega',-\omega_n}) (\delta_{K',K_n} - \delta_{K',-K_n}) \\ E^* (-K',-\omega',t) = E(K',\omega',t) \\ E(-K',\omega',t) = -E(K',\omega',t) \end{array} \right.$$

Nous développons de même la polarisation  $P(z,t)$  sur les modes propres de la cavité passive

$$(BI-8) \quad P(z,t) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{+\infty} (P_{m+}(t) e^{-i\omega_m t} + P_{m-}(t) e^{+i\omega_m t}) V_m(z) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_m P_m(z,t)$$

$$(BI-9) \quad P_{n+}(t) = P_+(t) \quad \text{et} \quad P_{n-}(t) = P_-(t)$$

pour le mode  $n$  considéré en (BI-5).

La polarisation se compose de deux termes, un pour chaque cellule

$$P(z,t) = P^{\text{ampl}}(z,t) + P^{\text{abs}}(z,t)$$

Seule la composante  $P_n(z,t)$  intervient comme terme source dans l'équation de propagation du mode  $n$

$$(BI-10) \quad P_n(z,t) = \frac{2}{L} \int_0^L P(z,t) V_n(z) dz = \zeta P_n^{\text{ampl}}(z,t) + \bar{\zeta} P_n^{\text{abs}}(z,t)$$

où :  $\tau = \frac{l}{L}$  et  $\bar{\tau} = \frac{\bar{l}}{L}$

$$P_n^{\text{ampl}}(z,t) = \frac{2}{l} \int_0^l P_n^{\text{ampl}}(z,t) V_n(z) dz$$

$$P_n^{\text{abs}}(z,t) = \frac{2}{\bar{l}} \int_0^{\bar{l}} P_n^{\text{abs}}(z,t) V_n(z) dz$$

L'équation de propagation est :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \kappa \frac{\partial}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E(z,t) = - \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(z,t)$$

où on a posé  $\kappa = \frac{cT}{2L}$ ,  $\kappa$  représentant la constante de relaxation du champ dans la cavité.

Sa projection sur le mode de propagation  $e^{-i\omega_n t}$  s'écrit, en négligeant les termes du second ordre  $\ddot{E}_+$ ,  $\kappa \dot{E}_+$ ,  $\ddot{P}_+$ ,  $\omega_n \dot{P}_+$  (approximation S.V.A, de l'amplitude lentement variable).

$$(BI-11) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + \kappa \right) E_+(t) = \frac{i\omega_n}{2\epsilon_0} P_+(t)$$

Cette équation se scinde en deux équations réelles :

\* une équation en phase qui régit l'évolution de la fréquence du champ [18] et que nous négligerons ici en supposant que le champ oscille à la fréquence  $\omega_n$ , ce qui nous autorise à prendre  $E_+$  réel et  $P_+$  imaginaire. Remarquons que, ce faisant, nous éliminons toutes les solutions stationnaires régies par cette équation et dues à une dispersion anormale induit par l'absorbant [19].

\* une équation en amplitude :

$$\left(2 \frac{\partial}{\partial t} + 2\kappa\right) E(t) = - \frac{\omega n}{\epsilon_0} P_+(t)$$

qui, en multipliant scalairement par  $E(t)$  les deux membres, donne l'équation en intensité :

$$(BI-12) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\kappa\right) E^2(t) = \frac{\omega n}{\epsilon_0} (\zeta P(t) E(t) - \bar{\zeta} \bar{P}(t) E(t))$$

$$\text{où } P(t) = |P_+^{\text{ampl}}(t)| \quad \text{et } \bar{P}(t) = |P_+^{\text{abs}}(t)|$$

### 1 - 3. Equations d'évolution.

Nous traiterons dans cette partie le cas d'un milieu en élargissement homogène pour lequel l'opérateur densité est indépendant de la vitesse. Toutes les équations qui suivent sont valables indifféremment dans l'absorbant ou l'amplificateur.

La cohérence est liée à la polarisation par la relation :

$$(BI-13) \quad P(z,t) = c_0 \mu (\rho(z,t) + \rho^*(z,t))$$

où  $c_0$  est le nombre de systèmes par unité de volume.

Nous développons la cohérence sur les modes propres de la cavité passive

$$(BI-14) \quad \rho(z,t) = \sum_m \frac{1}{2} (\rho_{m+}(t) e^{-i\omega_m t} + \rho_{m-}(t) e^{i\omega_m t}) V_m(z)$$

avec  $\rho_{n_+}(t) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \rho_+(t)$  et  $\rho_{n_-}(t) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \rho_-(t)$

L'\u00e9quation (BI-13) donne :

$$(BI-15) \quad P_+(t) = c_0 \mu (\rho_+(t) + \rho_-^*(t))$$

Nous d\u00e9composons l'op\u00e9rateur densit\u00e9 en ondes planes

$$(\rho(z,t)) = \sum_{K', \omega'} (\rho(K', \omega', t)) e^{-i(\omega' t - K' z)}$$

avec, pour le terme non diagonal du mode  $n$ , les relations :

$$(BI-16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho(K', \omega', t) = \frac{1}{4i} (\rho_+(t) \delta_{\omega', \omega_n} + \rho_-(t) \delta_{\omega', -\omega_n}) (\delta_{K', K_n} - \delta_{K', -K_n}) \\ \rho(-K', -\omega', t) = \rho^*(K', \omega', t) \\ \rho(-K', \omega', t) = -\rho(K', \omega', t) \end{array} \right.$$

Nous utiliserons l'approximation du champ moyen (mean field approximation) qui ne retient des populations que les modes de propagation  $K' = \omega' = 0$  (valeurs moyennes).

La contribution des coh\u00e9rences \u00e0 ces modes vaut :

$$(BI-17) \quad E(z,t) \rho(z,t) = \sum_{\substack{K' = \pm K_n \\ \omega' = \pm \omega_n}} E(K', \omega', t) \rho(-K', -\omega', t)$$

La projection du système d'équations (BI-3) sur les modes  $K', \omega'$  donne alors :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\rho_{J_2}(o,o,t)}{dt} &= \frac{\mu}{\hbar} \sum_{\substack{K'=\pm K_n \\ \omega'=\pm\omega_n}} (i E(K',\omega',t)\rho(-K',-\omega',t)+cc) - \gamma_R(\rho_{J_2}(o,o,t) \\
 &\quad - \rho_{J_2}^o) + \gamma_R^i \rho_2(o,o,t) \\
 \frac{d\rho_{J_1}(o,o,t)}{dt} &= -\frac{\mu}{\hbar} \sum_{K',\omega'} (i E(K',\omega',t)\rho(-K',-\omega',t)+cc) - \gamma_R(\rho_{J_1}(o,o,t) \\
 &\quad - \rho_{J_1}^o) + \gamma_R^i \rho_1(o,o,t) \\
 \frac{d\rho_2(o,o,t)}{dt} &= -(\gamma + \gamma_R^i) \rho_2(o,o,t) + \gamma_R \rho_{J_2}(o,o,t) + P_o \\
 \frac{d\rho_1(o,o,t)}{dt} &= -(\gamma + \gamma_R^i) (\rho_1(o,o,t) - \rho_1^o) + \gamma_R \rho_{J_1}(o,o,t) \\
 \left(\frac{d}{dt} - i\omega'\right) \rho(K',\omega',t) &= \frac{i\mu}{\hbar} E^*(-K',-\omega',t) (\rho_{J_2}(o,o,t) - \rho_{J_1}(o,o,t)) \\
 &\quad + (i\omega_a - \gamma_R) \rho(K',\omega',t)
 \end{aligned}
 \tag{BI-18}$$

Le système complet se compose donc de 14 équations : deux équations issues de l'équation de propagation ; l'une de gain l'autre de dispersion, et pour chaque milieu, six équations d'évolution : quatre pour les populations et deux pour la polarisation.

Le fait de négliger les phases ramène le nombre d'équations à 11. Nous allons tâcher de le réduire encore afin d'en entreprendre une première étude analytique.

## II - Réduction du modèle à trois équations

### Préambule :

Nous allons supposer dans la suite que la somme des populations des niveaux résonants d'une part et des niveaux réservoirs de l'autre, reste

constante dans chacun des deux milieux.

$$\rho_{J_1} + \rho_{J_2} = \text{cste} \quad ; \quad \rho_1 + \rho_2 = \text{cste}$$

Le nombre d'équations à considérer est maintenant de 7.

Il convient, pour poursuivre le traitement, d'avoir un ordre de grandeur des taux de relaxation. Dans les lasers à gaz, typiquement,

$$\gamma'_R \text{ et } \gamma_R \sim 10^7 \text{ s}^{-1}$$

$$\gamma \sim 10^4 \text{ s}^{-1}$$

La relaxation rotationnelle est généralement beaucoup plus rapide que la relaxation vibrationnelle, ce phénomène étant responsable dans le laser infrarouge lointain de l'engorgement vibrationnel qui limite l'inversion de population et par conséquent le gain du laser.

Dans ces conditions une approximation raisonnable dans les lasers à gaz consiste à éliminer adiabatiquement dans le système (BI-18) les termes relaxant à la constante  $\gamma_R$ , c'est à dire la polarisation et la population des niveaux résonants. Cette élimination se fait en deux temps :

## II - 1. Approximation des "rate equations".

La première étape consiste à éliminer les cohérences en négligeant les termes  $\frac{d}{dt} \rho(K', \omega', t)$

ce qui donne :

$$(BI-19) \quad \rho(K', \omega', t) = \frac{i\mu}{\hbar\gamma_R} E(K', \omega', t) (\rho_{J_2}(0,0,t) - \rho_{J_1}(0,0,t)) \mathcal{L}\left(-\frac{\omega' + \omega_a}{\gamma_R}\right)$$

$$(BI-20) \quad \mathcal{L}(x) = \frac{1}{1+ix} = \mathcal{L}_R(x) + i \mathcal{L}_I(x) \quad ; \quad \mathcal{L}_R(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Approximation résonante : on ne retient, pour le mode  $n$ , que le terme oscillant à la pulsation  $\omega_a - \omega_n$ , en négligeant le terme oscillant à  $\omega_a + \omega_n$ . On ne retient donc que  $\omega' = -\omega_n$ , ce qui revient à négliger  $\rho_+(t)$  et tous les termes en  $E(K', \omega_n, t)$  (approximation des axes tournants)

En utilisant les relations (BI-7 et 16), il vient :

$$(BI-21) \quad \sum_{K', \omega'} E(K', \omega', t) \rho(-K', -\omega', t) = \frac{1}{4} \frac{\mu E^2(t)}{\hbar \gamma_R} (\rho_{J_2}(o, o, t) - \rho_{J_1}(o, o, t)) \cdot \mathcal{L}_R \left( \frac{\omega_n - \omega_a}{\gamma_R} \right)$$

On obtient alors un système de cinq équations appelées "rate equations" dans lesquelles n'interviennent plus que les différences de population.

$$(BI-22) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} (\rho_{J_2}(o, o, t) - \rho_{J_1}(o, o, t)) &= - \left( \frac{\mu E(t)}{2\hbar} \right)^2 \frac{1}{\gamma_R} \mathcal{L}_R \left( \frac{\omega_n - \omega_a}{\gamma_R} \right) (\rho_{J_2}(o, o, t) - \rho_{J_1}(o, o, t)) \\ &\quad - \gamma_R (\rho_{J_2}(o, o, t) - \rho_{J_1}(o, o, t)) + \gamma_R' (\rho_2(o, o, t) - \rho_1(o, o, t)) \\ \frac{d}{dt} (\rho_2(o, o, t) - \rho_1(o, o, t)) &= - (\gamma + \gamma_R') (\rho_2(o, o, t) - \rho_1(o, o, t)) + \gamma_R (\rho_{J_2}(o, o, t) - \rho_{J_1}(o, o, t)) \\ &\quad + P_o - (\gamma + \gamma_R') \rho_1^o \\ \frac{d}{dt} (\bar{\rho}_{J_2}(o, o, t) - \bar{\rho}_{J_1}(o, o, t)) &= - \left( \frac{\bar{\mu} E(t)}{2\hbar} \right)^2 \frac{1}{\bar{\gamma}_R} \mathcal{L}_R \left( \frac{\omega_n - \bar{\omega}_a}{\bar{\gamma}_R} \right) (\bar{\rho}_{J_2}(o, o, t) - \bar{\rho}_{J_1}(o, o, t)) \\ &\quad - \bar{\gamma}_R (\bar{\rho}_{J_2}(o, o, t) - \bar{\rho}_{J_1}(o, o, t)) + \bar{\gamma}_R' (\bar{\rho}_2(o, o, t) - \bar{\rho}_1(o, o, t)) \\ \frac{d}{dt} (\bar{\rho}_2(o, o, t) - \bar{\rho}_1(o, o, t)) &= - (\bar{\gamma} + \bar{\gamma}_R') (\bar{\rho}_2(o, o, t) - \bar{\rho}_1(o, o, t)) + \bar{\gamma}_R (\bar{\rho}_{J_2}(o, o, t) - \bar{\rho}_{J_1}(o, o, t)) \\ &\quad - \bar{\rho}_{J_1}^o + (\bar{\gamma} + \bar{\gamma}_R') (\bar{\rho}_2^o - \bar{\rho}_1^o) \\ \left( \frac{d}{dt} + 2\kappa \right) E^2(t) &= - \frac{\omega_n \zeta c_o}{\epsilon_o} \frac{\hbar}{\gamma_R} \left( \frac{\mu}{\hbar} \right)^2 \mathcal{L}_R \left( \frac{\omega_n - \omega_a}{\gamma_R} \right) (\rho_{J_2}(o, o, t) - \rho_{J_1}(o, o, t)) E^2(t) \\ &\quad + \frac{\omega_n \bar{\zeta} \bar{c}_o}{\epsilon_o} \frac{\hbar}{\bar{\gamma}_R} \left( \frac{\bar{\mu}}{\hbar} \right)^2 \mathcal{L}_R \left( \frac{\omega_n - \bar{\omega}_a}{\bar{\gamma}_R} \right) (\bar{\rho}_{J_2}(o, o, t) - \bar{\rho}_{J_1}(o, o, t)) E^2(t) \end{aligned} \right.$$

Dans ces équations les termes surlignés sont relatifs à l'absorbant, les autres à l'amplificateur.

II - 2. Changement de notations.

On peut introduire dans (BI-22) la densité de photons  $\phi$  et les coefficients d'absorption par unité de longueur  $\mathcal{A}$  pour l'amplificateur et  $\bar{\mathcal{A}}$  pour l'absorbant par les relations :

$$(BI-23) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\epsilon_0 E^2(t)}{4} = \hbar \omega_n \phi(t) \\ \mathcal{A} = -\frac{1}{\gamma_R} \left( \frac{\mu}{\hbar} \right)^2 \frac{\hbar \omega_n}{\epsilon_0} \mathcal{L}_R \left( \frac{\omega_n - \omega_a}{\gamma_R} \right) \\ \bar{\mathcal{A}} = -\frac{1}{\bar{\gamma}_R} \left( \frac{\bar{\mu}}{\hbar} \right)^2 \frac{\hbar \omega_n}{\epsilon_0} \mathcal{L}_R \left( \frac{\omega_n - \bar{\omega}_a}{\bar{\gamma}_R} \right) \end{array} \right.$$

On travaille de plus en populations réelles en posant :

$$(BI-24) \left\{ \begin{array}{l} \sigma = \epsilon_0 (P_0 - \rho_1^*) \quad ; \quad \bar{\sigma} = \bar{\epsilon}_0 (\bar{\rho}_2^* - \bar{\rho}_1^*) \\ \sigma \Delta_J(t) = c_0 (\rho_{J_2}(0,0,t) - \rho_{J_1}(0,0,t)) \quad ; \quad \bar{\sigma} \bar{\Delta}_J(t) = \bar{c}_0 (\bar{\rho}_{J_2}(0,0,t) - \bar{\rho}_{J_1}(0,0,t)) \\ \sigma \Delta(t) = c_0 (\rho_2(0,0,t) - \rho_1(0,0,t)) \quad ; \quad \bar{\sigma} \bar{\Delta}(t) = \bar{c}_0 (\bar{\rho}_2(0,0,t) - \bar{\rho}_1(0,0,t)) \end{array} \right.$$

On introduit les paramètres sans dimension :

$$(BI-25) \left\{ \begin{array}{l} v = \gamma/\gamma'_R \quad ; \quad \bar{v} = \bar{\gamma}/\bar{\gamma}'_R \\ v_R = \gamma_R/\gamma'_R \quad ; \quad \bar{v}_R = \bar{\gamma}_R/\bar{\gamma}'_R \\ \delta = 1 + v \quad ; \quad \bar{\delta} = 1 + \bar{v} \end{array} \right.$$

et les unités réduites :

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{1}{2} \zeta \frac{\gamma'_R}{\gamma_R} \mathcal{A} & ; & & \bar{G} &= \frac{1}{2} \bar{\zeta} \frac{\bar{\gamma}'_R}{\bar{\gamma}_R} \bar{\mathcal{A}} \\
 A &= \frac{\sigma G}{\kappa} & ; & & \bar{A} &= - \frac{\bar{\sigma} \bar{G}}{\kappa} \\
 (BI-26) \\
 S &= \frac{2\delta}{v} \frac{\mathcal{A}}{\gamma_R} & ; & & \bar{S} &= \frac{2\bar{\delta}}{\bar{v}} \frac{\bar{\mathcal{A}}}{\bar{\gamma}_R} \\
 a &= \frac{\bar{S}}{S} & ; & & I &= S\phi
 \end{aligned}$$

$G$  ( $\bar{G}$ ) représente le coefficient d'amplification linéaire (d'absorption) par molécule active de la cellule,  $\gamma'_R/\gamma_R$  étant un rapport d'efficience du pompage.

$A$  est le paramètre de pompage, il représente le rapport du coefficient d'amplification linéaire de la cavité aux pertes par les miroirs.

$\bar{A}$  mesure le coefficient de pertes linéaires par absorption. A noter qu'il est choisi de signe opposé au choix habituel dans le modèle à deux niveaux (voir annexe II) et qu'il est donc positif dans notre cas pour une cavité absorbante.

$S$  ( $\bar{S}$ ) est le coefficient de saturation de l'amplificateur (absorbant)

$a$  est le paramètre de saturabilité qui chiffre la saturabilité relative de l'absorbant et de l'amplificateur:  $a > 1$  pour un absorbant plus saturable que l'amplificateur.

$I$  est l'intensité du champ en unités de saturation dans l'amplificateur.

Dans les notations de Lamb [12] on aurait :

$$\kappa(A - 1) \rightarrow \alpha_n$$

$$I \rightarrow \beta_n I_n$$

En introduisant les fonctions de saturation :

$$(BI-27) \quad d = \delta + \nu I \quad \text{et} \quad \bar{d} = \bar{\delta} + \bar{\nu} a I$$

et en travaillant en temps réduit où l'unité de temps est le temps de vie des photons dans la cavité :

$$t \rightarrow 2\kappa t \stackrel{\text{d\'ef}}{=} t$$

$$\gamma \rightarrow \gamma/2\kappa \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \gamma$$

la même transformation est appliquée aux autres constantes de relaxation.

le système d'équation (BI-22) se réécrit sous la forme :

$$(BI-28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{I} = I (\nu_R A \Delta_J(t) - \bar{\nu}_R \bar{A} \bar{\Delta}_J(t) - 1) \\ \dot{\Delta}_J = -\gamma_R \frac{d(t)}{\delta} \Delta_J(t) + \gamma_R' \Delta(t) \\ \dot{\bar{\Delta}}_J = -\bar{\gamma}_R \frac{\bar{d}(t)}{\bar{\delta}} \bar{\Delta}_J(t) + \bar{\gamma}_R' \bar{\Delta}(t) \\ \dot{\Delta} = -\gamma_R' (\delta \Delta(t) - \nu) + \gamma_R \Delta_J(t) \\ \dot{\bar{\Delta}} = -\bar{\gamma}_R' (\bar{\delta} \bar{\Delta}(t) - \bar{\nu}) + \bar{\gamma}_R \bar{\Delta}_J(t) \end{array} \right.$$

### II - 3. Réduction à trois équations.

La seconde étape consiste à éliminer adiabatiquement les niveaux résonants. Il vient alors :

$$(BI-29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_J(t) = \frac{\delta}{v_R} \frac{\Delta(t)}{d(t)} \\ \bar{\Delta}_J(t) = \frac{\bar{\delta}}{\bar{v}_R} \frac{\bar{\Delta}(t)}{\bar{d}(t)} \end{array} \right.$$



et le système se restreint à :

$$(BI-30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{d}{dt} + 1 \right) I(t) = I(t) \left( \frac{A\delta}{d(t)} \Delta(t) - \frac{\bar{A}\bar{\delta}}{\bar{d}(t)} \bar{\Delta}(t) \right) \\ \left( \frac{d}{dt} + \gamma \right) \Delta(t) = \gamma \left( 1 - \frac{\Delta(t) I(t)}{d(t)} \right) \\ \left( \frac{d}{dt} + \bar{\gamma} \right) \bar{\Delta}(t) = \bar{\gamma} \left( 1 - \frac{\bar{\Delta}(t) a I(t)}{\bar{d}(t)} \right) \end{array} \right.$$

C'est finalement aux solutions de ce système que nous allons nous intéresser dans les deux chapitres suivants :

Remarques : Arimondo et al. [17] ont montré qu'une élimination adiabatique des niveaux réservoirs dans (BI-28), donc pour  $\gamma_R \ll \gamma$ , redonnait le système d'équations du modèle à deux niveaux dans l'approximation des "rate equations" :

$$(BI-31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{d}{dt} + 1 \right) I = I(G' \Delta_J(t) + \bar{G}' \bar{\Delta}_J(t)) \\ \left( \frac{d}{dt} + \gamma_{//} \right) \Delta_J = \gamma_{//} (\sigma' - \bar{\Delta}_J(t) I(t)) \\ \left( \frac{d}{dt} + \bar{\gamma}_{//} \right) \bar{\Delta}_J = \bar{\gamma}_{//} (\bar{\sigma}' - \bar{\Delta}_J(t) a I(t)) \end{array} \right.$$

avec les nouvelles définitions suivantes :

$$\begin{aligned}
 (BI-32) \quad G' &= \frac{1}{2} \xi \mathcal{A} & ; \quad \bar{G}' &= \frac{1}{2} \bar{\xi} \bar{\mathcal{A}} \\
 \gamma_{//} &= \frac{\gamma \gamma_R}{\gamma + \gamma_R'} & ; \quad \bar{\gamma}_{//} &= \frac{\bar{\gamma} \bar{\gamma}_R}{\bar{\gamma} + \bar{\gamma}_R'} \\
 \sigma' &= \frac{\sigma}{v_R} = \frac{\gamma_R'}{\gamma_R} \sigma & ; \quad \bar{\sigma}' &= \frac{\bar{\gamma}_R'}{\bar{\gamma}_R} \bar{\sigma}
 \end{aligned}$$

Il est à noter que la condition de validité ( $\gamma_R \ll \gamma$ ) de cette élimination est en contradiction avec le choix de  $\gamma_R$  comme constante de relaxation pour la polarisation et qu'il convient d'en prendre une autre :

$$\gamma_{\perp} \neq \gamma_R$$

La condition  $\gamma_R \ll \gamma$  est généralement fautive dans les gaz ce qui explique pourquoi le modèle à deux niveaux est mal adapté à une description quantitative de ceux-ci.

Le système (BI-30) obtenu par élimination des niveaux résonants est aussi un modèle à deux niveaux (les niveaux réservoirs) mais dont les non-linéarités sont notablement différentes de celles du modèle classique (BI-31) où les deux niveaux considérés sont les niveaux de la transition. Ce fait va profondément modifier le diagramme de bifurcation du système, sensible essentiellement aux non linéarités des équations.

## CHAPITRE B II

### ÉTUDE DES SOLUTIONS STATIONNAIRES

I - Solutions stationnaires, stabilité.I-1. Existence.

Les solutions stationnaires de (BI-30) sont :

$$(BII-1) \quad \Delta_{st} = \frac{d_{st}}{(1+I_{st})\delta} \quad \Delta_{st}^{-1} = \left(1 + \frac{I_{st}}{d_{st}}\right)$$

ou encore

$$\bar{\Delta}_{st} = \frac{\bar{d}_{st}}{(1+a I_{st})\bar{\delta}} \quad \bar{\Delta}_{st}^{-1} = \left(1 + \frac{a I_{st}}{\bar{d}_{st}}\right)$$

et  $I_{st}$  est solution de :

$$(BII-2) \quad I_{st} \left(1 - \frac{A}{1 + I_{st}} + \frac{\bar{A}}{1 + a I_{st}}\right) = 0$$

On a posé  $d_{st} = \delta + v I_{st}$  et  $\bar{d}_{st} = \bar{\delta} + \bar{v} a I_{st}$

L'équation (BII-2) étant identique à celle du modèle à deux niveaux, le diagramme des solutions stationnaires est le même :

\* pour  $a < 1$  ou  $1 < a < \frac{\bar{A} + 1}{\bar{A}}$ , deux solutions existent :

$I = I_0 = 0$  existe pour tout  $A$

$I = I_+$  existe pour  $A > \bar{A} + 1$

\* pour  $a > 1$  et  $\bar{A} > (a - 1)^{-1}$  il existe trois solutions :

$I = I_0 = 0$  pour  $a A < X_+$

$I = I_0, I = I_-, I = I_+$  pour  $X_+ < a A < a(\bar{A} + 1)$ .

$I = I_0, I = I_+$  pour  $A > \bar{A} + 1$

On a posé =  $X_+ = a + \bar{A} - 1 + 2\sqrt{\bar{A}(a-1)}$

$$I_{\pm} = \frac{1}{2a} \left[ a(A-1) - (\bar{A}+1) \pm \sqrt{[a(A-1) - (\bar{A}+1)]^2 - 4a(\bar{A}+1-A)} \right]$$

Puisque le modèle à deux niveaux provient d'une élimination adiabatique des niveaux réservoirs du modèle à quatre niveaux, il est normal de retrouver ces résultats.

En introduisant les fonctions :

$$(BII-3) \quad g_{st} = \frac{\delta \Delta_{st}}{d_{st}^2} = \frac{1}{d_{st}(1+I_{st})} \quad \text{et} \quad \bar{g}_{st} = \frac{\bar{\Delta}_{st} \bar{\delta}}{\bar{d}_{st}^2} = \frac{1}{\bar{d}_{st}(1+a I_{st})}$$

l'équation (BII-2) se réécrit sous la forme :

$$(BII-4) \quad I_{st} (1 - A g_{st} d_{st} + \bar{A} \bar{g}_{st} \bar{d}_{st}) = 0$$

qui nous servira par la suite.

## I - 2. Stabilité linéaire des solutions $I_+$ et $I_-$ .

Nous allons suivre la même démarche que dans la partie A.

Pour cela nous posons :

$$(BII-5) \quad \begin{cases} I(t) = I_{st} + I'(t) \\ \Delta(t) = \Delta_{st} + \Delta'(t) \\ \bar{\Delta}(t) = \bar{\Delta}_{st} + \bar{\Delta}'(t) \end{cases}$$

où le vecteur  $v(t) = \begin{pmatrix} I'(t) \\ \Delta'(t) \\ \bar{\Delta}'(t) \end{pmatrix}$  représente une petite perturbation de la solution stationnaire.

A est notre paramètre de bifurcation.

Dans la suite l'indice st sera sous entendu.

En notation fonctionnelle, le système (BI-30) et le problème linéaire s'écrivent respectivement :

$$(BII-6) \quad \frac{dv}{dt} = f(A, v) \quad \text{et} \quad \frac{dv}{dt} = f_v(A|v) = L_o(A).v$$

où  $L_o(A)$  est l'opérateur matriciel suivant :

$$(BII-7) \quad L_o(A) = \begin{bmatrix} -(1 - Ag\delta + \bar{A}\bar{g}\bar{\delta}) & a\delta I/d & -\bar{A} \bar{\delta} I/\bar{d} \\ -\gamma g & -a & 0 \\ -\bar{\gamma} a\bar{g} & 0 & -\bar{a} \end{bmatrix}$$

On a posé :

$$(BII-8) \quad \alpha = \frac{\gamma}{\Delta} \quad , \quad \bar{\alpha} = \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\Delta}} \quad (\Delta \text{ et } \bar{\Delta} \text{ mis pour } \Delta_{st} \text{ et } \bar{\Delta}_{st})$$

Ces deux quantités représentent des constantes de relaxation "effectives" pour les perturbations  $\Delta'(t)$  et  $\bar{\Delta}'(t)$ .

La solution au problème linéaire est cherchée sous la forme :

$v = v_o e^{\lambda t}$  où  $\lambda$  est un nombre complexe solution du polynôme caractéristique.

$$(BII-9) \quad \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

dans lequel

$$(BII-10) \quad \begin{cases} a_2 = \alpha + \bar{\alpha} + \nu \ell I - \bar{\nu} \bar{\ell} a I \\ a_1 = \alpha \bar{\alpha} + \ell I (\delta \gamma + \nu \bar{\alpha}) - \bar{\ell} a I (\bar{\delta} \bar{\gamma} + \bar{\nu} \alpha) \\ a_0 = \ell \delta \gamma \bar{\alpha} I - \bar{\ell} \bar{\delta} \bar{\gamma} \alpha a I \end{cases}$$

avec

$$(BII-11) \quad \ell = Ag \quad \text{et} \quad \bar{\ell} = \bar{A} \bar{g}$$

On a utilisé, dans l'écriture de  $a_2$ , la relation suivante tirée de (BII-4).

$$(BII-12) \quad (1 - Ag \delta + \bar{A} \bar{g} \bar{\delta}) = \nu \ell I - \bar{\nu} \bar{\ell} a I$$

L'application au polynôme (BII-9) du critère de Routh-Hurwitz rappelé dans la partie A au paragraphe I-2, montre qu'une paire de racines complexes conjuguées  $\lambda_{\pm}$  annule sa partie réelle lorsque la condition suivante est remplie :

$$(BII-13) \quad a_1 a_2 - a_0 = 0$$

La troisième racine restant négative, la branche  $I_+$  perd sa stabilité par une bifurcation de Hopf lorsque  $A = A_C$ ,  $A_C$  étant le point critique solution de (BII-13), et donne naissance à une solution harmonique d'amplitude nulle, de pulsation  $\omega_0 = \sqrt{a_1}$  et de valeur moyenne  $I_+$  en  $A = A_C$ .

Une autre bifurcation, qui n'est pas de Hopf, apparaîtrait sur  $I_+$  lorsque la condition suivante est vérifiée :

$$(BII-14) \quad a_2 = 0$$

Cette condition étant dans tous les cas vérifiée après (BII-13) elle est sans effet pratique.

La dernière condition de stabilité tirée du critère de Routh-Hurwitz est que  $a_0$  doit rester positif.

Or  $a_0$  est directement proportionnel à  $\frac{dA}{dI}$ . On montre qu'on peut écrire :

$$(BII-15) \quad a_0 = \gamma \bar{\gamma} I \frac{\delta \bar{\delta}(1+aI)}{d \bar{d}} \quad \left( \frac{dA}{dI} \right)$$

La constante de proportionnalité est toujours positive et  $\frac{dA}{dI}$  est toujours positif sur la bande  $I_+$ , de sorte que la condition  $a_0 > 0$  ne génère pas d'instabilité sur cette branche, alors que  $\frac{dA}{dI}$  est toujours négatif sur la branche  $I_-$ , de sorte que le critère  $a_0 > 0$  n'est jamais satisfait ; cette branche, comme dans le modèle à deux niveaux, est instable.

### I - 3. Stabilité linéaire de la solution $I_0$ .

Pour cette solution le problème linéaire s'écrit :

$$(BII-16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dI'}{dt} = - (1 - A + \bar{A}) I' \\ \frac{d\Delta'}{dt} = - \frac{\gamma}{\delta} I' - \gamma \Delta' \\ \frac{d\bar{\Delta}'}{dt} = - \frac{\bar{\gamma}a}{\bar{\delta}} I' - \bar{\gamma} \bar{\Delta}' \end{array} \right.$$

qu'on peut réécrire sous la forme :

$$\frac{du}{dt} = L_0(A).u$$

avec

$$L_0(A) = \begin{bmatrix} -(1-A+\bar{A}) & 0 & 0 \\ -\gamma/\delta & -\gamma & 0 \\ -\bar{\gamma}a/\bar{\delta} & 0 & -\bar{\gamma} \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est alors

$$- [(1-A+\bar{A}) + \lambda] (\gamma + \lambda) (\bar{\gamma} + \lambda) = 0$$

dont les racines sont :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -(1 - A + \bar{A}) \\ \lambda_2 &= -\gamma \\ \lambda_3 &= -\bar{\gamma} \end{aligned}$$

Seul  $\lambda_1$  peut s'annuler en  $A_c = 1 + \bar{A}$ , les deux autres racines restant négatives. On n'a donc pas de bifurcation de Hopf sur  $I_0$  mais une bifurcation que nous verrons être vers  $I_+$  si  $a < 1$  ou  $1 < a < \frac{\bar{A}+1}{\bar{A}}$  et vers  $I_-$  dans les autres cas.  $I_0$  est stable pour  $A < A_c$ .

## II - Equations de la bifurcation sur $I_+$ .

### II - 1. Paramètre de bifurcation.

Plusieurs bifurcations de Hopf peuvent exister sur une même branche  $I_+$  mais nous établirons au chapitre B-IV que cette branche est toujours stable à forte intensité.

Nous appellerons "point haut" le premier point de bifurcation de Hopf qui apparaît lorsque l'intensité décroît

Au voisinage de ce point nous poserons :

$$(BII-17a) \quad A(\mu) = A_c - \mu \quad ; \quad A_c = A_2$$

Lorsque la branche  $I_+$  est stable à basse intensité, nous appellerons "point bas" la première bifurcation de Hopf qui apparaît lorsque l'intensité croît. Au voisinage de ce point nous noterons :

$$(BII-17b) \quad A(\mu) = A_c + \mu \quad ; \quad A_c = A_1$$

Dans les deux cas  $\mu$  est un petit paramètre appelé paramètre de bifurcation lorsqu'on réduit le problème à sa forme locale autour de  $A_c$ . Les signes sont choisis dans les définitions précédentes pour que la bifurcation apparaisse dans tous les cas en  $\mu = 0$ , la branche étant stable pour  $\mu < 0$  et instable pour  $\mu > 0$ , de sorte que les calculs qui suivent sont valables aux deux points.

Soit  $u(\mu, t)$  la solution d'équilibre cherchée au voisinage de  $\mu = 0$ . C'est une solution de pulsation  $\omega(\mu)$  qui vérifie

$$u(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad \omega(0) = \omega_0$$

Sous la forme locale  $f(A, u) = f(\mu, u)$

et le problème linéaire se réécrit :

$$\frac{du}{dt} = f_u(0|u) = L_0(A_c) \cdot u \stackrel{\text{déf}}{=} L_{00} \cdot u$$

$$A_c \text{ est défini par } \mu = 0 \quad \text{ou} \quad a_1 a_2 - a_0 = 0$$

Dans la suite on omettra l'indice  $c$ , toutes les fonctions de  $A$  précédemment définies, à savoir :

$$A, d, \bar{d}, g, \bar{g}, \lambda, \bar{\lambda}, \alpha, \bar{\alpha}, a_0, a_1, a_2, \omega_0$$

étant systématiquement prises en  $A = A_c$ .

## II - 2. Vecteurs propres de $L_{00}$ .

La première étape de l'étude de bifurcation, après la détermination de la position du point par l'étude des valeurs propres du problème linéaire, consiste à calculer les vecteurs propres  $\zeta_0$  de ce problème en ce point. Ces vecteurs sont définis par

$$(BII-18) \quad L_{00} \zeta_0 = i \omega_0 \zeta_0 \qquad L_{00}^* \zeta_0^* = -i \omega_0 \zeta_0^*$$

$$L_{00} \bar{\zeta}_0 = -i \omega_0 \bar{\zeta}_0 \qquad L_{00}^* \bar{\zeta}_0^* = +i \omega_0 \bar{\zeta}_0^*$$

où  $L_{00}^*$  est l'opérateur adjoint de  $L_{00}$ ,  $\zeta_0^*$  le vecteur propre de ce dernier.  $\bar{\zeta}_0$  désigne le vecteur complexe conjugué de  $\zeta_0$ .

On obtient les vecteurs :

$$(BII-19) \quad \zeta_0 = x \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\gamma g}{\sqrt{D}} e^{-i\theta} \\ -\frac{\bar{\gamma} a \bar{g}}{\sqrt{D}} e^{-i\bar{\theta}} \end{pmatrix} ; \zeta_0^* = x^* \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{A \delta I}{d \sqrt{D}} e^{i\theta} \\ -\frac{\bar{A} \delta I}{d \sqrt{D}} e^{+i\bar{\theta}} \end{pmatrix}$$

On a défini :

$$(BII-20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha + i k \omega_0 = \sqrt{D}_k e^{i\theta_k} ; \bar{\alpha} + i k \omega_0 = \sqrt{D}_k e^{i\bar{\theta}_k} \\ \theta_1 = \theta ; \bar{\theta}_1 = \bar{\theta} ; D_1 = D ; \bar{D}_1 = \bar{D} ; \theta_0 = \bar{\theta}_0 = 0 \end{array} \right.$$

La non nullité de  $x$  se traduit par la relation :

$$(BII-21) \quad i \omega_0 = -(\nu \ell I - \bar{\nu} \bar{\ell} a I) - h \sqrt{D} e^{-i\theta} + \bar{h} \sqrt{D} e^{-i\bar{\theta}}$$

qui se décompose en deux relations réelles en séparant partie imaginaire et réelle :

$$(BII-22) \quad -(\nu \ell I - \bar{\nu} \bar{\ell} a I) - h\alpha - \bar{h} \bar{\alpha} = 0$$

$$(BII-23) \quad h - \bar{h} = 1$$

qui doivent être vérifiées au point de bifurcation.

On a utilisé la relation (BII-12) et introduit de nouvelles fonctions de l'intensité :

$$(BII-24) \quad h = \frac{\ell \delta \gamma I}{dD} \quad ; \quad \bar{h} = \frac{\bar{\ell} \bar{\delta} \bar{\gamma} a I}{d\bar{D}}$$

Les relations de normalisation donnent :

$$\langle \zeta_0, \bar{\zeta}_0^* \rangle = \zeta_0 \cdot \bar{\zeta}_0^* = x \bar{x}^* (1 - h + \bar{h})$$

d'après la relation (BII-23) ces deux vecteurs sont donc orthogonaux

$$\langle \zeta_0, \bar{\zeta}_0^* \rangle = \zeta_0 \cdot \bar{\zeta}_0^* = x \bar{x}^* (1 - h e^{-2i\theta} + \bar{h} e^{-2i\bar{\theta}})$$

Les grandeurs complexes  $x$  et  $\bar{x}^*$  peuvent alors être déterminées en imposant les conditions supplémentaires suivantes :

$$(BII-25) \quad x = \bar{x}^* \\ \langle \zeta_0, \bar{\zeta}_0^* \rangle = 1$$

qui nous donnent la relation de définition de  $x$  :

$$(BII-26) \quad x^2 (1 - h e^{-2i\theta} + \bar{h} e^{-2i\bar{\theta}}) = 1$$

II - 3. Développement au voisinage du point de bifurcation.

On définit le produit scalaire dans l'espace des fonctions  $2\pi$  - périodiques par :

$$\text{pour tous vecteurs } a(s) \text{ et } b(s) \quad [a(s), b(s)] \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle a(s), b(s) \rangle$$

On pose  $s = \omega(u) t$  et on introduit les vecteurs :

$$Z = e^{is} \zeta_0 \quad ; \quad Z^* = e^{-is} \zeta_0^*$$

et le nouveau paramètre :

$$(BII-27) \quad \varepsilon = [u, Z^*]$$

ainsi que les opérateurs

$$J_0(\cdot) = -\omega_0 \frac{d\cdot}{ds} + f_u(o|\cdot)$$

$$J_0^*(\cdot) = \omega_0 \frac{d\cdot}{ds} + f_u^*(o|\cdot)$$

qui vérifient les relations :  $J_0(Z) = J_0^*(Z^*) = 0$

Au point de bifurcation  $\mu = 0$ ,  $\omega(o) = \omega_0$  et  $Z$  et  $Z^*$  représentent le mode instable. De plus en ce point  $u = 0$  et donc  $\varepsilon = 0$ .

$\varepsilon$  apparaît donc comme la projection de la solution sur le mode instable responsable de la bifurcation et traduit le fait que, au voisinage du point de bifurcation, la nouvelle solution est l'évolution adiabatique de ce mode.



En comparant les expressions (BII-31) au développement en série de Taylor du système initial (BI-30), on obtient les expressions suivantes :

$$f_{u,\mu}^{(1,1)}(o|\bullet) = L_{o1} \quad \text{où } L_{o1} \text{ est la matrice}$$

$$(BII-32) \quad L_{o1} = \begin{pmatrix} \varepsilon' \delta - \bar{\varepsilon}' \bar{\delta} & \delta \left( \frac{AI}{d} \right)' & - \bar{\delta} \left( \frac{\bar{A}\bar{I}}{\bar{d}} \right)' \\ - (\gamma g)' & - \alpha' & 0 \\ - (\bar{\gamma} a \bar{g})' & 0 & - \bar{\alpha}' \end{pmatrix}$$

le prime désigne dans  $L_{o1}$  la dérivation par rapport à  $\mu$ .

$$(BII-33) \quad f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|a|b) = \begin{pmatrix} \varepsilon \delta Y_1 - \bar{\varepsilon} \bar{\delta} \bar{Y}_1 \\ - \gamma g Y_1 \\ - \bar{\gamma} a \bar{g} \bar{Y}_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{où } Y_1 = x' \left( \frac{Y''}{\Delta} - \frac{\nu}{d} x'' \right) + x'' \left( \frac{Y'}{\Delta} - \frac{\nu}{d} x' \right)$$

$$\bar{Y}_1 = x' \left( \frac{\bar{Y}''}{\bar{\Delta}} - \frac{\bar{\nu} a}{\bar{d}} x'' \right) + x'' \left( \frac{\bar{Y}'}{\bar{\Delta}} - \frac{\bar{\nu} a}{\bar{d}} x' \right)$$

$$(BII-34) \quad f_{u,\mu}^{(3,0)}(o|a|b|c) = \begin{pmatrix} \varepsilon \delta \left( -\frac{\nu}{d} \right) Y_2 - \bar{\varepsilon} \bar{\delta} \left( -\frac{\bar{\nu} a}{\bar{d}} \right) \bar{Y}_2 \\ - \gamma g \left( \frac{-\nu}{d} \right) Y_2 \\ - \bar{\gamma} a \bar{g} \left( -\frac{\bar{\nu} a}{\bar{d}} \right) \bar{Y}_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \begin{cases} Y_2 = x' x'' \left( \frac{Y'''}{\Delta} - \frac{\nu}{d} x''' \right) + \text{permutation circulaire} \\ \bar{Y}_2 = x' x'' \left( \frac{\bar{Y}'''}{\bar{\Delta}} - \frac{\bar{\nu} a}{\bar{d}} x''' \right) + \text{permutation circulaire} \end{cases}$$

Dans les deux derniers opérateurs, les grandeurs

$(x', y', \bar{y}')$ ,  $(x'', y'', \bar{y}'')$ ,  $(x''', y''', \bar{y}''')$  représentent respectivement les coordonnées de trois vecteurs quelconques  $a, b, c$ .

L'identification terme à terme des différents ordres en  $\epsilon$  des deux membres de l'équation (BII-28) conduit au système :

$$(BII-35) \quad \begin{cases} (a) & J_0(u_1) = 0 \\ (b) & J_0(u_2) = -\frac{1}{2} f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|u_1|u_1) \\ (c) & J_0(u_3) = \omega_2 \frac{du_1}{ds} - u_2 f_{u,\mu}^{(1,0)}(o|u_1) - f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|u_2|u_1) \\ & \quad - \frac{1}{6} f_{u,\mu}^{(3,0)}(o|u_1|u_1|u_1) \end{cases}$$

### III - RESOLUTION DES EQUATIONS DE LA BIFURCATION.

#### III-1. Résolution des ordres 1 et 2.

##### III-1.a) Ordre 1.

Puisque  $\pm i\omega_0$  sont des valeurs propres simples de  $f_u(o|\cdot)$ , zéro est une valeur double semi-simple de  $J_0$  avec deux solutions linéairement indépendantes  $Z$  et  $\bar{Z}$  sur lesquelles on peut développer tout vecteur de l'ensemble nul de  $J_0$ . Donc :

$$u_1 = CZ + \bar{C}\bar{Z}$$

$C$  peut être choisi réel par une translation de l'origine des temps. D'autre part  $[u, Z^*] = C$  et la condition de normalisation (BII-30) impose  $C = 1$ .

$$\text{Finalement } u_1 = e^{is} \zeta_0 + e^{-is} \bar{\zeta}_0$$

### III-1.b) Ordre 2.

On vérifie tout d'abord que la condition de solubilité (cf. annexe 1) s'applique bien à la seconde équation du système (BII-35), équation qui définit le problème à l'ordre 2.

$$f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|u_1|u_1) = f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|\zeta_0|\zeta_0) e^{2is} + 2 f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|\zeta_0|\bar{\zeta}_0) + f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|\bar{\zeta}_0|\bar{\zeta}_0) e^{-2is}$$

et on a bien  $[f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|u_1|u_1), Z^*] = 0$ , ce qui est cohérent avec le choix  $\omega_1 = \mu_1 = 0$

On cherche une solution particulière de la forme

$$u_2^o = A e^{2is} + B + \bar{A} e^{-2is}$$

à l'équation (BII-35-b) dont la solution générale est :

$$u_2 = C e^{is} \zeta_0 + A e^{2is} + \frac{1}{2} B + cc$$

$C e^{is} \zeta_0 + \bar{C} e^{-is} \bar{\zeta}_0$  étant la solution de l'équation sans second membre  $J_o(u_2) = 0$

$$[u_2, Z^*] = C \quad \text{et la condition (BII-30) impose } C = 0.$$

En séparant les différentes puissances de  $e^{is}$  dans (BII-35.b) on obtient le système

$$(BII-36) \quad \begin{cases} (a) & f_u(o|B) = - f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|\zeta_0|\bar{\zeta}_0) \\ (b) & -2i \omega_o A + f_u(o|A) = - \frac{1}{2} f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|\zeta_0|\zeta_0) \end{cases}$$

$$f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|\zeta_o|\zeta_o) = \begin{pmatrix} \ell \delta U - \bar{\ell} \bar{\delta} \bar{U} \\ -\gamma g U \\ -\bar{\gamma} a \bar{g} \bar{U} \end{pmatrix}$$

On a utilisé (BII-19) et (BII-33) et posé :

$$(BII-37) \quad \left\{ \begin{array}{l} U = 2 x^2 U_1 \quad ; \quad \bar{U} = 2 x^2 \bar{U}_1 \\ U_k = \frac{-\alpha g}{\sqrt{D_k}} e^{-i\theta_k} - \frac{\nu}{d} \quad \bar{U}_k = \frac{-\alpha \bar{g}}{\sqrt{\bar{D}_k}} e^{-i\bar{\theta}_k} - \frac{\bar{\nu} a}{\bar{d}} \end{array} \right.$$

$$f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|\zeta_o|\bar{\zeta}_o) = -2 x^2 \begin{bmatrix} \ell \delta \left( \frac{\alpha^2 g}{D} + \frac{\nu}{d} \right) - \bar{\ell} \bar{\delta} \left( \frac{-2 \alpha \bar{g}}{\bar{D}} + \frac{\bar{\nu} a}{\bar{d}} \right) \\ -\gamma g \left( \frac{\alpha^2 g}{D} + \frac{\nu}{d} \right) \\ -\bar{\gamma} a \bar{g} \left( \frac{-2 \alpha \bar{g}}{\bar{D}} + \frac{\bar{\nu} a}{\bar{d}} \right) \end{bmatrix}$$

on obtient alors, en reportant ces expressions dans le système (BII-36),

$$B = 2|x|^2 X_B \begin{pmatrix} 1 \\ -\gamma g/\alpha \\ -\bar{\gamma} a/\bar{\alpha} \end{pmatrix} + |x|^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma g U_B/\alpha \\ \bar{\gamma} a \bar{U}_B/\bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

on a posé :

$$(BII-38) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_B = -\operatorname{Re} U_1 = \frac{\alpha^2 g}{D} + \frac{\nu}{d} \\ \bar{U}_B = -\operatorname{Re} \bar{U}_1 = \frac{-2 \alpha \bar{g}}{\bar{D}} + \frac{\bar{\nu} a}{\bar{d}} \end{array} \right.$$

Le réel  $X_B$  est donné par la relation :

$$(BII-39) \quad \left[ h\left(\alpha - \frac{D}{\alpha}\right) - \bar{h}\left(\bar{\alpha} - \frac{\bar{D}}{\bar{\alpha}}\right) \right] X_B = U_B \left( \ell \delta - h \frac{D}{\alpha} \right) - \bar{U}_B \left( \bar{\ell} \bar{\delta} - \bar{h} \frac{\bar{D}}{\bar{\alpha}} \right)$$

dans laquelle les relations (BII-12) et (BII-22) ont été utilisées.

$$A = X_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\gamma g}{\sqrt{D_2}} e^{-i\theta_2} \\ -\frac{\bar{\gamma} a \bar{g}}{\sqrt{D_2}} e^{-i\bar{\theta}_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} U g \frac{e^{-i\theta_2}}{\sqrt{D_2}} \\ -\frac{1}{2} \bar{U} a \bar{g} \frac{e^{-i\bar{\theta}_2}}{\sqrt{D_2}} \end{pmatrix}$$



$X_2$  est donné par la relation :

$$(BII-40) \quad (-\Omega_2 + h_2 - \bar{h}_2) X_2 = -\frac{1}{2} U h_2 + \frac{1}{2} \bar{U} \bar{h}_2$$

on a utilisé les définitions suivantes :

$$(BII-41) \quad \left\{ \begin{array}{l} h_k = \ell \delta - \frac{h D}{\sqrt{D_k}} e^{-i\theta_k} \\ \bar{h}_k = \bar{\ell} \bar{\delta} - \frac{\bar{h} \bar{D}}{\sqrt{\bar{D}_k}} e^{-i\bar{\theta}_k} \\ \Omega_k = 1 + i k \omega_0 \end{array} \right. \quad k \text{ entier positif ou nul}$$

Avec ces notations l'équation (BII-21) qui traduit la non nullité de  $\zeta_0$  se réécrit :

$$(BII-42) \quad \Omega_1 - h_1 + \bar{h}_1 = 0$$

Remarquons que les résultats précédents s'expriment aisément à l'aide d'une suite de nombres  $v_i$  et de vecteurs  $\zeta^i$  générés comme suit par  $\theta_i$  et  $D_i$  :

$$(BII-43) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_i = \frac{g}{\sqrt{D_i}} e^{-i\theta_i} \quad ; \quad \bar{v}_i = \frac{\bar{a}g}{\sqrt{\bar{D}_i}} e^{-i\bar{\theta}_i} \\ \zeta^i = \begin{bmatrix} 1 \\ -\gamma v_i \\ -\bar{\gamma} \bar{v}_i \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

On a alors des expressions suivantes utiles pour la programmation des fonctions et vecteurs :

$$(BII-44) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_i = -\alpha v_i - \frac{v}{d} \quad ; \quad \bar{U}_i = -\bar{\alpha} \bar{v}_i - \frac{\bar{v}a}{\bar{d}} \\ \zeta_0 = x \zeta^0 \quad ; \quad A = X_2 \zeta^2 + A_2 \quad ; \quad B = 2 |x|^2 X_B \zeta^0 + B_2 \end{array} \right.$$



### III - 2. Condition de stabilité de la solution harmonique.

La stabilité de la solution périodique  $u(s, \varepsilon)$  est déterminée par le signe de  $\mu_2$  lui-même calculé en appliquant la condition de solubilité à l'ordre trois (équation (BII-35.c)).

Cette condition s'écrit :

$$(BII-45) \quad -\omega_2 \left[ \frac{du_1}{ds}, Z^* \right] + \mu_2 \left[ f_{u,\mu}^{(1,1)}(o|u_1), Z^* \right] + \left[ f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|u_1|u_2), Z^* \right] + \frac{1}{6} \left[ f_{u,\mu}^{(3,0)}(o|u_1|u_1|u_1), Z^* \right] = 0$$

Dans cette expression :

$$\left[ \frac{du_1}{ds}, Z^* \right] = i$$

$$[f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|u_1|u_2), Z^*] = \langle f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|\bar{\zeta}_o|A), \zeta_o^* \rangle + \langle f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|\zeta_o|B), \zeta_o^* \rangle$$

$$[f_{u,\mu}^{(3,0)}(o|u_1|u_1|u_1), Z^*] = 3 \langle f_{u,\mu}^{(3,0)}(o|\zeta_o|\zeta_o|\bar{\zeta}_o), \zeta_o^* \rangle$$

Le calcul donne :

$$f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|\bar{\zeta}_o|A) = x^* \begin{pmatrix} \lambda \delta U' - \bar{\lambda} \bar{\delta} \bar{U}' \\ - \gamma g U' \\ - \bar{\gamma} \bar{a} \bar{U}' \end{pmatrix}$$

où :

$$(BII-46) \quad \begin{cases} U' = X_2(U_1^* + U_2) - \frac{1}{2} \alpha v_2 U \\ \bar{U}' = X_2(\bar{U}_1^* + \bar{U}_2) - \frac{1}{2} \bar{U} \bar{\alpha} \bar{v}_2 \end{cases}$$

$$\langle f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|\bar{\zeta}_o|A), \zeta_o^* \rangle = |x|^2 (h_1 U' - \bar{h}_1 \bar{U}')$$

$$\langle f_{u,\mu}^{(2,0)}(o|\zeta_o|B), \zeta_o^* \rangle = |x|^2 (h_1 U'_B - \bar{h}_1 \bar{U}'_B)$$

$$(BII-47) \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} U'_B = x^2 [2 X_B (U_o + U_1) + g U_B] \\ \bar{U}'_B = x^2 [2 X_2 (\bar{U}_o + \bar{U}_1) + \bar{g} a \bar{U}_B] \end{cases}$$

$$(BII-48) \quad f_{u,\mu}^{(3,0)}(o|\zeta_o|\zeta_o|\bar{\zeta}_o) = 2x|x|^2 \begin{bmatrix} \lambda \delta (-\frac{v}{d}) (U_1^* + 2U_1) - \bar{\lambda} \bar{\delta} (-\frac{\bar{v}a}{d}) (\bar{U}_1^* + 2\bar{U}_1) \\ - \gamma g (-\frac{v}{d}) (U_1^* + 2U_1) \\ - \bar{\gamma} \bar{a} \bar{g} (-\frac{\bar{v}a}{d}) (\bar{U}_1^* + 2\bar{U}_1) \end{bmatrix}$$

$$(BII-49) \quad \langle f_{u,\mu}^{(3,0)}(o|\zeta_o|\zeta_o|\bar{\zeta}_o), \zeta_o^* \rangle = 2 x^2 |x|^2 [h_1 \left(-\frac{\nu}{d}\right) (U_1^* + 2U_1) - \bar{h}_1 \left(\frac{\bar{\nu}a}{d}\right) (\bar{U}_1^* + 2\bar{U}_1)]$$

Dans les expressions (BII-46) à (BII-49)  $\bar{U}_i^*$  désigne le complexe conjugué de  $\bar{U}_i$

D'autre part :

$$f_{u,\mu}^{(1,1)}(o|\zeta_o) = x \left( \begin{array}{l} \delta l' - \bar{\delta} \bar{l}' - h \sqrt{D} e^{-i\theta} \left(\frac{AI}{d}\right)' / \left(\frac{AI}{d}\right) + \bar{h} \sqrt{D} e^{-i\bar{\theta}} \left(\frac{\bar{A}\bar{I}}{d}\right)' / \left(\frac{\bar{A}\bar{I}}{d}\right) \\ - (\gamma g)' + \alpha' \frac{\gamma \bar{g}}{\sqrt{D}} e^{-i\theta} \\ - (\bar{\gamma} \bar{g} a)' + \bar{\alpha}' \frac{\bar{\gamma} a \bar{g}}{\sqrt{D}} e^{-i\bar{\theta}} \end{array} \right)$$

et

$$(BII-50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle f_{u,\mu}^{(1,1)}(o|\zeta_o), \zeta_o^* \rangle = x^2 \left\{ \delta l' - \bar{\delta} \bar{l}' - h \sqrt{D} e^{-i\theta} \left[\left(\frac{AI}{d}\right)' / \left(\frac{AI}{d}\right) + \frac{(\gamma g)'}{\gamma g}\right] \right. \\ \left. + \bar{h} \sqrt{D} e^{-i\bar{\theta}} \left[\left(\frac{\bar{A}\bar{I}}{d}\right)' / \left(\frac{\bar{A}\bar{I}}{d}\right) + \frac{(\bar{\gamma} a \bar{g})'}{\bar{\gamma} a \bar{g}}\right] + \alpha' h e^{-2i\theta} - \bar{\alpha}' \bar{h} e^{-2i\bar{\theta}} \right\} \end{array} \right.$$

dans (BII-50) ' désigne la dérivation par rapport à  $\mu$  qui pourra être en pratique la pression dans l'amplificateur ou l'absorbant.

On supposera que la perte de stabilité est stricte, c'est à dire que  $\text{Re} \langle f_{u,\mu}^{(1,1)}(o|\zeta_o), \zeta_o^* \rangle > 0$ , auquel cas la stabilité de la solution émergente, d'après la théorie de Floquet, est donnée par le signe de  $\mu_2$  solution de l'équation (BII-45) que nous réécrivons sous la forme :

$$(BII-51) \quad -i\omega_2 + \mu_2 \langle f_{u,\mu}^{(1,1)}(o|\zeta_o), \zeta_o^* \rangle + |x|^2 \{h_1 W - \bar{h}_1 \bar{W}\} = 0$$

où on a posé :

$$(BII-52) \left\{ \begin{aligned} W &= X_2 (U_1^* + U_2) - \frac{1}{2} U \alpha v_2 + x^2 [2 X_B (U_0 + U_1) + g \left( \frac{\alpha^2 g}{D} + \frac{v}{d} \right)] \\ &\quad + x^2 \left( -\frac{v}{d} \right) (U_1^* + 2U_1) \\ \bar{W} &= X_2 (\bar{U}_1^* + \bar{U}_2) - \frac{1}{2} \bar{U} \bar{\alpha} \bar{v}_2 + x^2 [2 X_B (\bar{U}_0 + \bar{U}_1) + a\bar{g} \left( \frac{\bar{\alpha}^2 \bar{g} a}{\bar{D}} + \frac{\bar{v} a}{\bar{d}} \right)] \\ &\quad + x^2 \left( -\frac{\bar{v} a}{\bar{d}} \right) (\bar{U}_1^* + 2\bar{U}_1) \end{aligned} \right.$$

On obtient alors le système suivant en séparant la partie réelle de la partie imaginaire dans (BII-51).

$$\left\{ \begin{aligned} -\omega_2 + \mu_2 \operatorname{Im} \langle f_{u,\mu}^{(1,1)}(0|\zeta_0), \zeta_0^* \rangle + |x|^2 \operatorname{Im} (h_1 W - \bar{h}_1 \bar{W}) &= 0 \\ \mu_2 &= - \frac{\operatorname{Re}(h_1 W - \bar{h}_1 \bar{W})}{\operatorname{Re} \langle f_{u,\mu}^{(1,1)}(0|\zeta_0), \zeta_0^* \rangle} \end{aligned} \right.$$

La solution périodique est stable si  $\mu_2 > 0$ , donc si :

$$(BII-53) \quad a_3 \stackrel{\text{déf}}{=} \operatorname{Re} (h_1 W - \bar{h}_1 \bar{W}) < 0 \quad (\text{bifurcation supercritique})$$

et instable dans le cas contraire (bifurcation sous-critique).

### III - 3. Bifurcation sur $I_0$ .

Nous avons vu que la branche  $I_0$  présentait en  $A_c = 1 + \bar{A}$  une bifurcation vers une autre solution stationnaire en annulant la valeur propre  $\lambda_1$  du problème linéaire.

Au point critique les vecteurs propres attachés à cette valeur propre sont définis par :

$$L_{00} \zeta_0 = 0 \quad ; \quad L_{00}^* \zeta_0^* = 0$$

ce qui donne :

$$\zeta_0 = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1/\delta \\ -a/\delta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \zeta_0^* = x^* \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x$  et  $x^*$  sont déterminés par les conditions :

$$x = x^*$$

$$\langle \zeta_0, \zeta_0^* \rangle = 1$$

qui donnent  $x = x^* = 1$



Comme la branche est stable pour  $A < A_c$  et instable au delà, on définit le paramètre  $\mu$  par

$$A(\mu) = A_c + \mu$$

On utilise le paramètre  $\varepsilon = \langle u, \zeta_0^* \rangle$ . Au point de bifurcation  $u = 0$  et  $\varepsilon = 0$ . On peut alors développer les expressions au voisinage du point de bifurcation en puissances de  $\varepsilon$

$$\begin{pmatrix} u(\varepsilon) \\ \lambda(\varepsilon) \\ \mu(\varepsilon) \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \begin{pmatrix} u_n \\ \lambda_n \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

$u_n$  vérifie, d'après la définition de  $\varepsilon$ , la condition de normalisation  $\langle u_n, \zeta_0^* \rangle = \delta_{n,1}$ .

L'équation d'évolution

$$\frac{du(\varepsilon)}{dt} = f(\mu, u) = 0$$

donne le système

$$\begin{cases} f_{u,\mu}^{(1,0)}(0|u_1) = 0 \\ f_{u,\mu}^{(1,0)}(0|u_2) + \mu_1 f_{u,\mu}^{(1,1)}(0|u_1) + \frac{1}{2} f_{u,\mu}^{(2,0)}(0|u_1|u_1) = 0 \end{cases}$$

En tenant compte de la condition de normalisation, la solution de la première équation est simplement  $u_1 = \zeta_0$

La condition de solubilité appliquée à la seconde équation s'écrit :

$$\mu_1 \langle f_{u,\mu}^{(1,1)}(0|u_1), \zeta_0^* \rangle + \frac{1}{2} \langle f_{u,\mu}^{(2,0)}(0|u_1|u_1), \zeta_0^* \rangle = 0$$

$$\langle f_{u,\mu}^{(1,1)}(0|u_1), \zeta_0^* \rangle = 1 \quad \text{la perte de stabilité est stricte}$$

$$f_{u,\mu}^{(2,0)}(0|u_1|u_1) = -2 \begin{pmatrix} A_c - a\bar{A} \\ -\gamma/\delta \\ -\bar{\gamma} a^2/\delta \end{pmatrix}$$

$\mu_1$  est le premier coefficient non nul, c'est son signe qui va déterminer la stabilité de la solution émergente.

$$\mu_1 = A_c - a\bar{A} = 1 + \bar{A}(1-a)$$

A l'ordre 1 la solution émergente s'écrit :

$$I' \sim \varepsilon \sim \frac{\mu}{\mu_1} = \frac{\mu}{1+(a-1)\bar{A}}$$

Cette solution est stable pour  $\mu_1 > 0$ , c'est à dire pour  $a < 1$  ou  $a > 1$  et  $\bar{A} > \frac{1}{a-1}$ . Un développement au voisinage de  $A_c$  de

$I_+$  montre que cette solution émergente est bien  $I_+$  qui est alors stable au voisinage du point de bifurcation.

Elle est au contraire instable pour  $\mu_1 < 0$ , auquel cas elle coïncide avec  $I_-$ .

Résumé :

A la fin de ce chapitre très calculatoire, il peut être utile de récapituler les principales conclusions et formules qui nous serviront par la suite :

Le système admet trois solutions stationnaires :  $I_0$ ,  $I_-$ ,  $I_+$ .

- \*  $I_-$  est toujours instable.
- \*  $I_0 = 0$  est stable pour  $A < A_c = 1 + \bar{A}$  et instable au-delà.
  - si  $a < 1$  ou  $a > 1$  mais  $\bar{A} > \frac{1}{a-1}$  la solution émergente est la branche  $I_+$  stable au voisinage de ce point. Dans ce cas le système ne présente pas de bistabilité on - off.
  - dans les autres cas la solution émergente est  $I_-$  qui est instable. Le système présente une bistabilité on-off mais on ignore ce que devient la solution émergente instable.
- \*  $I_+$  peut présenter une bifurcation de Hopf  $A_2$  aux moyennes intensités (point haut) et une autre bifurcation  $A_1$  aux faibles intensités (point bas) (BII-17).

La position de ces points est déterminée par l'équation

$$(BII-13) \quad a_1 a_2 - a_0 = 0$$

En ce point émerge une solution harmonique de pulsation  $\omega_0 = \sqrt{a_1}$  dont la stabilité est déterminée par la condition (BII-53)  $a_3 < 0$ .

Trois conditions doivent en outre être vérifiées pour que ces calculs aient un sens :

deux qui traduisent la non nullité de  $\zeta_0$

$$(BII-22) \quad h\alpha + \bar{h}\bar{\alpha} + (v \ell I - \bar{v} \bar{\ell} a I) = 0$$

$$(BII-23) \quad h - \bar{h} = 1$$

et la dernière qui traduit la perte stricte de stabilité :

$$(BII-50) \quad \operatorname{Re} \langle f_{u,\mu}^{(1,1)}(0|\zeta_0), \zeta_0^* \rangle > 0$$

Arimondo et al [17] a en outre proposé les deux approximations successives suivantes sur la position du point de bifurcation :

$$(BII-14) \quad a_2 = 0$$

$$(BII-54) \quad v \ell I - \bar{v} \bar{\ell} a I = 0$$

Nous appellerons  $A_c$  la position réelle définie par (BII-13) ( $A_c = A_2$  ou  $A_1$ ) ;  $A'_c$  l'approximation (BII-14) et  $A''_c$  celle de (BII-54).

Notons que la condition (BII-14) est une condition stricte de perte de stabilité mais qui se produit lorsque  $a_1 a_2 - a_0 < 0$ , de sorte qu'en ce point  $I_+$  est déjà instable.

Toutes ces équations ont été résolues numériquement sur les expériences rapportées par Arimondo et al. [17] sur un laser  $CO_2$  avec  $SF_6$  ou  $CH_3I$  comme absorbant, ainsi que sur des jeux de valeurs arbitraires des paramètres pour amorcer l'étude du diagramme de phase du système

Les résultats de ces simulations sont présentés au chapitre suivant.

Il a de plus été possible de poursuivre l'étude analytique de ces équations dans une approximation limite de mauvaise cavité. Ces calculs sont rapportés au chapitre IV.

CHAPITRE B III

ÉTUDE NUMÉRIQUE

Préambule :

L'étude a été menée dans deux directions :

\* résoudre numériquement les équations du chapitre précédent dans des situations expérimentales. Les résultats obtenus sur les expériences rapportées dans Arimondo et al., qui, seuls, seront présentés ici, nous ont amené à entamer une étude systématique du diagramme de bifurcation sur les solutions stationnaires du système.

\* intégrer numériquement le système à trois équations (BI-30) ou à 5 équations (BI-28) afin de vérifier la validité de l'élimination adiabatique et de compléter l'étude du diagramme de phase par la mise en évidence des branches de solutions d'équilibre<sup>(\*)</sup> non stationnaires.

L'intérêt de l'étude est donc double ; d'une part confronter les résultats de la théorie à des situations expérimentales réelles, d'autre part débroussailler une étude plus complète du diagramme de phase général du système.

Le paragraphe I décrit le programme utilisé, le paragraphe II présente les résultats de l'étude de  $SF_6$  et  $CH_3I$  et le paragraphe III amorce la construction du diagramme de phase pour le système à trois équations.

Tous les calculs ont été menés sur Mini 6 et les courbes tracées par une table commandée par HP 85.

I - LE PROGRAMME.

Le nombre considérable de fonctions du point de bifurcation introduites dans le chapitre précédent et la diversité des tâches demandées nous ont amené à construire un programme conséquent de 1100 lignes répondant à une triple volonté :

\* de rapidité dans l'exécution en évitant la répétition de calculs par l'utilisation de blocks-common,

(\*) Voir note de bas de page, p.176 dans l'annexe I sur le sens donné au terme "solution d'équilibre" dans la thèse

\* de souplesse : les tâches sont effectuées indépendamment les unes des autres dans des sous-programmes aisément modifiables pour des études ultérieures qui prendraient par exemple en compte l'effet Doppler ou la dépendance longitudinale du champ.

\* d'exploitation expérimentale : les paramètres théoriques du problème peuvent sans grand changement être reliés à n'importe quel paramètre physique et suivant n'importe quelle loi. Ils peuvent actuellement s'exprimer en fonction de la pression dans l'absorbant ou l'amplificateur.

Nous ne précisons ici que l'organisation générale du programme afin de ne pas ralentir considérablement l'exposé des résultats.

Le programme, présenté dans le tableau (B-1), s'articule en 19 sous-programmes hiérarchisés de deux façons différentes :

- en fonction de l'utilisateur : lecture des données, calculs ou écriture des résultats.

- en fonction de sa position dans l'accomplissement de la tâche demandée.

Ces deux classements sont respectivement schématisés sur le tableau (B-1) par les deux entrées possibles : horizontale et verticale.

#### ENTREES HORIZONTALES.

- Sur une première bande horizontale se trouvent le programme principal (L.S.A) et deux sous-programmes qui constituent le bloc d'entrée. Leur rôle est de lire et réécrire le fichier de données, d'initialiser et de commander les sous-programmes suivants en fonction de "paramètres de branchement" dont la valeur, introduite par l'utilisateur, détermine la tâche à accomplir.

\* La seconde bande horizontale contient tous les sous-programmes de calcul où sont évaluées toutes les expressions du chapitre précédent. Ce bloc contient également la procédure d'intégration.

\* La dernière bande concerne les sous-programmes de sortie. Ceux-ci écrivent les résultats dans des fichiers, généralement sous forme de tableaux. A noter que l'écriture des résultats d'intégration numérique sont effectués dans le sous-programme "integr".



#### ENTREES VERTICALES.

Les tâches sont classées en quatre verticales : 0, 1, 2, 3, suivant la nature du calcul.

- la demi-verticale 0 concerne toute la partie d'intégration numérique,
- les verticales notées 1 aux deux extrémités du tableau concernent le calcul des valeurs stationnaires : intensité et populations en un point, variation de l'intensité avec un paramètre (A ou la pression),
- la verticale 2 calcule les approximations et la position réelle du point de bifurcation. Elle peut aussi calculer le zéro d'une fonction quelconque des paramètres.
- la bande 3 détermine la stabilité de la solution périodique émergente au point de bifurcation et donne la valeur de toutes ou partie des fonctions intervenant dans ce calcul afin de vérifier la validité du calcul (équations BII-22 et 23) ainsi que des approximations possibles.

Toutes les filières d'imbrication des sous-programmes aboutissent à la subroutine centrale PRES qui calcule les paramètres théoriques du problème en fonction des variables expérimentales et permet ainsi la comparaison théorie-exprériences quelle que soit la procédure utilisée dans ces dernières.

TABLEAU B-1

$|\bar{X}| \rightarrow |\bar{Y}|$  signifie que le sous programme X fait appel au sous programme Y.

Le programme est organisé en trois étages : un étage d'entrée des données, un étage de calcul et un étage de sortie des résultats. Il permet d'accomplir les tâches suivantes, rangées en quatre filières :

- la filière 0 intègre numériquement les systèmes à 3 et 5 équations,
- la filière 1 calcule les valeurs stationnaires en un point,
- la filière 2 calcule la position du point de bifurcation,
- la filière 3 détermine la stabilité de la solution émergente.

L'ensemble de ces sous-programmes fait en outre appel à un sous-programme ERROR de traitement des erreurs non noté sur le tableau.

Le même sous-programme IST a été noté deux fois pour des raisons de clarté.

Toutes les filières font appel au noyau PRES qui relie les paramètres théoriques aux paramètres expérimentaux.



## II - ETUDE DES EXPERIENCES SUR SF<sub>6</sub> ET CH<sub>3</sub>I.

La valeur des paramètres pour ces expériences est donnée dans Arimondo et al. [17]. Nous avons étudié le diagramme (I,A) pour SF<sub>6</sub> et (I,p) pour CH<sub>3</sub>I, p désignant la pression dans l'amplificateur, déterminé la position des points de bifurcation sur I<sub>+</sub> ainsi que la stabilité de la solution périodique avant de vérifier ces résultats et d'étudier les solutions périodiques par simulation numérique. La discussion de ces résultats sera menée au chapitre suivant.

### II - 1. Laser CO<sub>2</sub>, absorbant SF<sub>6</sub>.

Cette étude reprend l'analyse des expériences de Dupré et al. [16] avec une réactualisation des paramètres utilisés pour SF<sub>6</sub> [17].

Le jeu de paramètres suivants a été utilisé, il correspond à une pression  $\bar{p}$  de 50 mT pour SF<sub>6</sub>.

$$\begin{array}{lll}
 \bar{A} = 2,78 & a = 1768 & 2\kappa = 6 \cdot 10^7 \\
 \text{(BIII-1)} \quad \gamma_R = 2 \cdot 10^7 & \gamma_R' = 1.3 \cdot 10^6 & \gamma = 9 \cdot 10^4 \\
 \bar{\gamma}_R = 2.5 \cdot 10^6 & \bar{\gamma}_R' = 7 \cdot 10^2 & \bar{\gamma} = 2 \cdot 10^4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{ce qui donne :} & \nu = 7 \cdot 10^{-2} & \bar{\nu} = 28,57 \\
 & \delta = 1,07 & \bar{\delta} = 29,57
 \end{array}$$

les constantes de relaxation sont exprimées en s<sup>-1</sup>. L'étude est menée en fonction du paramètre A.

Le diagramme de phase dans le plan (I, A) est tracé sur la figure (B-3). Il existe une bistabilité entre les solutions I<sub>0</sub> et I<sub>+</sub> pour 1,08 < A < 3,78 =  $\bar{A} + 1$ .

Une bifurcation de Hopf apparaît entre ces deux valeurs sur I<sub>+</sub>, ce qui limite la zone de bistabilité. C'est là une première conséquence importante de l'existence d'une instabilité sur I<sub>+</sub>, celle-ci modifie de façon notable les prédictions de bistabilité.

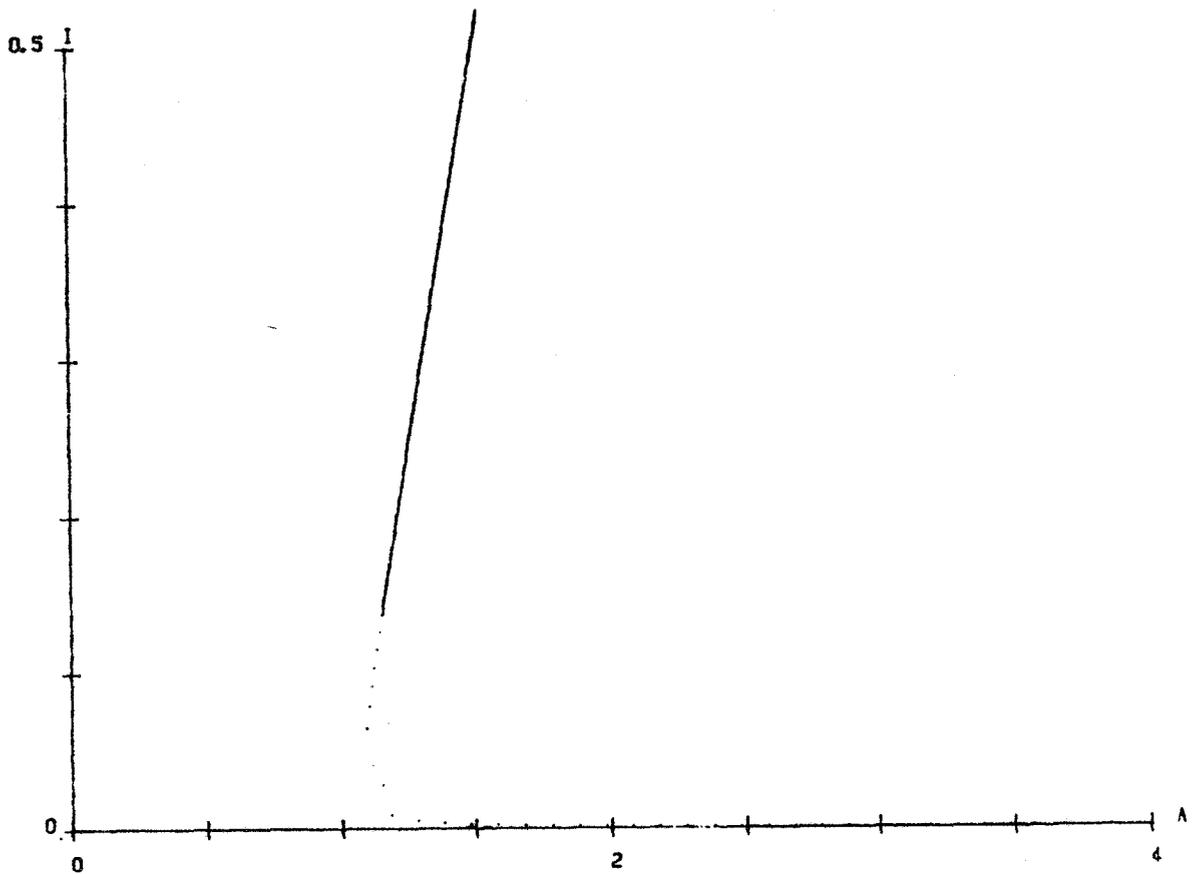


Figure B-3. Diagramme (I-A) pour le laser  $\text{CO}_2 - \text{SF}_6$  ( $\bar{p} = 50 \text{ mT}$ )

Les pointillés correspondent aux solutions instables :

$I_+$  est stable pour  $A > 1,16$  et instable pour  $1,08 < A < 1,16$

$I_-$  existe pour  $1,08 < A < 3,78$ , il est toujours instable,

$I_0$  est stable pour  $A < 3,78$  et instable au-delà.

On a donc bistabilité on-off pour  $1,16 < A < 3,78$

en 3,78 on a la transition  $I_0 \rightarrow I_+$

en 1,16 on a précipitation du laser  $I_+ \rightarrow I_0$ .

Il n'existe aucune solution périodique stable.

Le tableau suivant (B-2) donne les valeurs de quelques fonctions au point de bifurcation.

Il apparaît que les deux conditions :

$$h - \bar{h} = 1 \quad \text{et} \quad v \ell I - \bar{v} \bar{\ell} a I + h \alpha + \bar{h} \bar{\alpha} = 0$$

qui déterminent la validité du calcul sont parfaitement vérifiées avec une précision de  $10^{-7}$  qui est meilleure que la précision demandée sur le calcul de  $A_c$  ( $\sim 10^{-5}$ ).

Le signe positif de  $a_3 = \text{Re}(h_1 W - \bar{h}_1 \bar{W})$  indique que la solution émergente est instable. La simulation numérique a montré qu'en ce point, le laser devrait précipiter sur la solution nulle et que, contrairement à l'expérience, le modèle ne prévoit aucun cycle limite stable correspondant au passive Q-switch.

Nous avons d'autre part pu vérifier le ralentissement critique (critical slowing down) qui se traduit par le fait que la constante de relaxation des oscillations amorties tend vers zéro lorsqu'on s'approche du point de bifurcation, par la branche  $I_+$  stable.

Nous avons également vérifié la continuité entre la fréquence de ces oscillations amorties et la fréquence de la solution périodique instable qui émerge au point de bifurcation. Ces deux constatations traduisent le fait qu'on suit le comportement du mode responsable de la destabilisation de  $I_+$  de part et d'autre du point de bifurcation.

## II - 2. Laser CO<sub>2</sub> absorbant CH<sub>3</sub>I.

### II-2.a) Diagramme de bifurcation.

L'étude a été réalisée en fonction de la pression totale  $p$  régnant dans l'amplificateur. Les paramètres utilisés sont les suivants (d'après Arimondo et al. [17]).

$A_c$	$A'_c$	$I_c$	$\alpha$	$\bar{\alpha}$	$h$	$\bar{h}$	$a_1$	$h\bar{\alpha} - \bar{h}\bar{\alpha}$	$\nu \ell I - \bar{\nu} \bar{\ell} aI$	$a_3$
1,155	1,153	0,142	$1,69813 \cdot 10^{-3}$	$3,449 \cdot 10^{-4}$	$1+1,9 \cdot 10^{-6}$	$2,668 \cdot 10^{-6}$	$1,956 \cdot 10^{-4}$	$1,698133 \cdot 10^{-3}$	$-1,698129 \cdot 10^{-3}$	0,28

TABLEAU B-2. : Caractéristiques du point de bifurcation pour le laser  $CO_2 - SF_6$ .

$A_c$  est le point de bifurcation exact calculé par  $a_1 a_2 - a_0 = 0$

$A'_c$  est le point approché calculé par  $a_2 = 0$

Toutes les fonctions suivantes sont calculées pour  $A = A_c$  et en unités réduites  $2\kappa$ .

$a_1 = \left(\frac{\omega}{2\kappa}\right)^2$  où  $\omega_0$  est la pulsation de la solution périodique et  $\kappa$  la constante de relaxation du champ

$a_3 = \text{Re}(h_1 W - \bar{h}_1 \bar{W})$ . Son signe positif indique que la solution émergente de pulsation  $\omega_0$  est instable.

Autres conclusions : les conditions  $h - \bar{h} = 1$  et  $\nu \ell I - \bar{\nu} \bar{\ell} a I + h \alpha + \bar{h} \bar{\alpha} = 0$  sont bien remplies.

On peut aussi faire les remarques suivantes qui seront utilisées au chapitre IV :

$A'_c \sim A_c$  ;  $I_c \sim A_c - 1$  ce qui signifie que l'absorbant est saturé au point de bifurcation. Les approximations suivantes, caractéristiques d'une condition de mauvaise cavité, ont lieu :  $h \sim 1$  ;  $\bar{h} \sim 0$  ;  $\alpha \sim \frac{\gamma A_c}{2\kappa}$  ;  $\bar{\alpha} \sim \frac{\bar{\gamma}}{2\kappa} \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)$

on a en effet :  $\frac{\gamma A_c}{2\kappa} = 1,73 \cdot 10^{-3}$  ;  $\frac{\bar{\gamma}}{2\kappa} = 3,3 \cdot 10^{-4}$  ;  $\frac{\bar{\gamma}}{2\kappa} \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) = 3,45 \cdot 10^{-4}$



$$\begin{aligned}
 \text{(BIII-2)} \quad A &= 0,745 p \quad ; \quad \bar{A} = 0,872 \quad ; \quad a = 0,76 p \quad ; \quad 2\kappa = 1.110 \\
 \gamma_R &= 8 p 10^6 \quad ; \quad \gamma_R' = 3p 10^5 \quad ; \quad \gamma = 4,743 p 10^3 \\
 \bar{\gamma}_R &= 1,7 10^6 \quad ; \quad \bar{\gamma}_R' = 3.510^3 \quad ; \quad \bar{\gamma} = 10^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ce qui donne} \quad \nu &= 1,58 10^{-2} \quad ; \quad \bar{\nu} = 2,857 \\
 \delta &= 1,016 \quad ; \quad \bar{\delta} = 3,857
 \end{aligned}$$

Les constantes de relaxation sont exprimées en  $s^{-1}$  et les pressions en torr.

Le diagramme  $(I, p)$  est donné sur la figure (B-4).

Il n'y a pas de bistabilité, la branche  $I_+$  émerge de  $I_0 = 0$  en  $p_0 = 2,5128$  Torr. Elle est stable en ce point et compte deux bifurcations de Hopf en  $p_1 = 2,5130$  Torr (point bas) et  $p_2 = 5,6928$  Torr (point haut) dont les caractéristiques sont données dans le tableau (B-3).  $I_+$  est instable entre ces deux points et stable dans le reste de son domaine d'existence.

Nous avons parcouru dans les deux sens par intégration numérique la branche  $I_+$  sur le domaine  $3 < p < 8$  Torr par pas de  $2 \cdot 10^{-1}$  à  $5 \cdot 10^{-3}$  Torr et en attendant l'amortissement du régime transitoire avant de passer au point suivant.

Nous avons étudié plus particulièrement le voisinage des points de bifurcation par pas de  $5 \cdot 10^{-5}$  Torr au voisinage de  $p_2$  et de  $10^{-5}$  Torr au voisinage de  $p_1$ .

L'analyse prévoit que la solution périodique émergente au point haut est instable. La simulation numérique a montré qu'elle bifurque sur une solution pulsée dont les caractéristiques sont données ci après.

Nous avons suivi cette solution jusqu'en  $p = 3,1$  Torr, point où le minimum tombe en dessous du zéro machine de sorte que, la période étant très longue, l'ordinateur "perd" la solution et se bloque sur le zéro-machine.

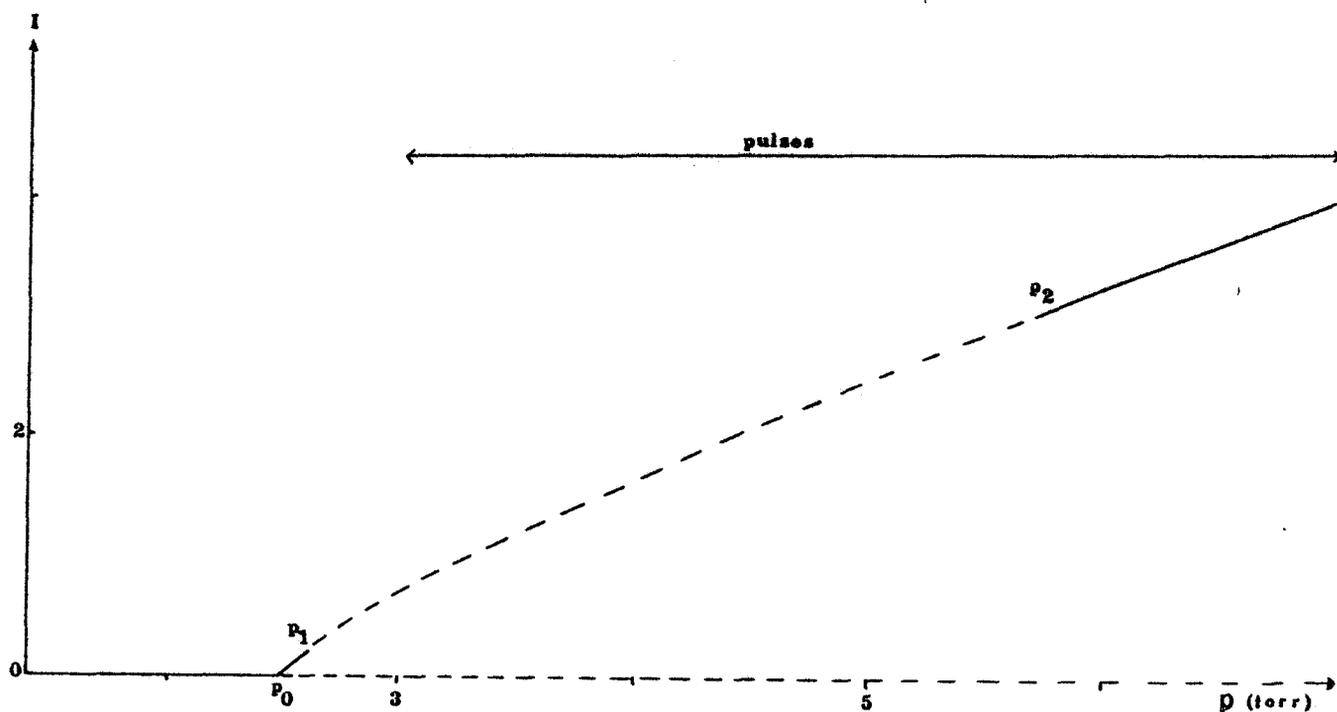


Figure B-4. Diagramme  $(I, p)$  pour le laser

$\text{CO}_2 - \text{CH}_3\text{I}$  ( $\bar{p} = 170 \text{ m Torr}$ ).

la branche  $I_0$  est stable pour  $p < p_0 = 2,5128 \text{ Torr}$  et instable au delà où elle bifurque sur la branche  $I_+$  qui est stable jusqu'en  $p_1 = 2,51302 \text{ Torr}$  (point bas) où elle bifurque sur une solution périodique. La branche  $I_+$  est instable pour  $p_1 < p < p_2$ . En  $p_2 = 5,6928 \text{ Torr}$  (point haut) elle bifurque sur une branche pulsée.

Cette branche pulsée a été suivie pour  $3,1 < p < 7,2 \text{ Torr}$ . En  $p_3 = 7,2 \text{ Torr}$  elle bifurque sur  $I_+$ . Le système connaît donc une bistabilité cw - Q switch pour  $5,6928 < p < 7,2 \text{ Torr}$ .

Le point bas est très difficile à étudier. Les points de bifurcation étant extrêmement rapprochés, les temps de relaxation sont très longs. Il faut intégrer sur un grand nombre de pas et il est difficile de déterminer si les petites variations sur les maxima dans le temps, sont dues à une propagation d'erreurs numériques ou à une instabilité inhérente au système. Cette dernière peut provenir d'une instabilité réelle du système aux petites fluctuations, ou du fait qu'on n'a jamais atteint le régime d'équilibre, auquel cas, en suivant pas à pas la solution, on peut très bien s'en écarter à chaque étape et créer en fin de compte une fluctuation importante déstabilisatrice.

Les meilleurs résultats ont été obtenus en faisant varier  $p$  par pas de  $10^{-5} T$  en prenant comme condition initiale :  
 $P = 2,51299 \text{ Torr}$  ;  $I = I_+ (1 + 10^{-3})$  ;  $\Delta = \Delta_{st}$  ;  $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}_{st}$ .

Nous avons alors obtenu les résultats suivants :

$P = (\text{Torr})$	2,51299	2,51300	2,51301	2,51302	2,51303
oscillations de faible amplitude à la pulsation $\omega_0$	amorties	amorties	amorties	instables	tombe sur le zéro-machine
conclusion sur $I_+$	stable	stable	stable	instable	instable

On vérifie la bonne position du point de bifurcation et le fait que la solution pulsée, confondue en cet endroit avec le zéro-machine, est plus stable que la solution harmonique.

Pour obtenir des conclusions certaines sur la stabilité de la solution harmonique, il aurait fallu réintégrer avec un pas plus petit pour s'assurer qu'on suit bien adiabatiquement cette solution et que la



$p_c$	$p'_c$	$I_c$	$\alpha$	$\bar{\alpha}$	$h$	$\bar{h}$	$a_1$	$h\bar{\alpha} - \bar{h}\alpha$	$\nu \lambda I - \bar{\nu} \bar{\lambda} \bar{a} I$	$a_3$
2,513018	2,5132	$9,5 \cdot 10^{-4}$	$1,0845 \cdot 10^{-3}$	$0,0952 \cdot 10^{-4}$	1,3520451	0,3520450	$2,32 \cdot 10^{-7}$	$1,146217 \cdot 10^{-3}$	$-1,146215 \cdot 10^{-3}$	-11,4
5,693	5,659	2,99	$9,3617 \cdot 10^{-3}$	$1,1972 \cdot 10^{-3}$	1,0002451	$2,458 \cdot 10^{-4}$	$6,92 \cdot 10^{-3}$	$9,36374 \cdot 10^{-3}$	$-9,36372 \cdot 10^{-3}$	2,7

Tableau B-3. : Caractéristiques des points de bifurcation pour le laser CO<sub>2</sub> - CH<sub>3</sub>I ( $\bar{p} = 170$  m Torr)

Les pressions sont exprimées en Torr, les constantes de relaxation  $\alpha$  et  $\bar{\alpha}$  en unités 2k.

Pour les deux points les conditions  $h - \bar{h} = 1$  et  $\nu \lambda I - \bar{\nu} \bar{\lambda} \bar{a} I + h\alpha + \bar{h}\bar{\alpha} = 0$  sont bien remplies.

Les mêmes remarques que dans le cas de SF<sub>6</sub> s'appliquent au point haut ( $p_2 = 5,693$ ) puisque  $A_c = 4,24$  ;  $\frac{\gamma A_c}{2k} = 1,04 \cdot 10^{-2} \sim \alpha$  ;  $\frac{\bar{\gamma}}{2k} (1 + \frac{1}{\nu}) = 1,23 \cdot 10^{-3} \sim \bar{\alpha}$  ;  $h \sim 1$  ;  $\bar{h} \sim 0$ . Ces approximations sont fausses au point bas.

L'approximation de saturation de l'absorbant en  $p_2$  est moins bonne que dans le cas de SF<sub>6</sub>. Le signe de  $a_3 = \text{Re}(h_1 \bar{w} - \bar{h}_1 w)$  indique que la solution périodique de faible amplitude autour de  $I_+$  est stable au point bas et instable au point haut.

perturbation apportée, de l'ordre de 5 % sur la valeur initiale avec ce pas, n'est pas trop grande. Nous ne l'avons pas fait car les calculs sont très longs et les bifurcations  $I_0 \rightarrow I_+$  ;  $I_+ \rightarrow I_{\text{harmonique}}$   $I_{\text{harmonique}} \rightarrow I_{\text{pulsé}}$  sont trop proches les unes des autres pour être séparées expérimentalement.

### II-2.b) Caractéristiques de la solution pulsée.

Nous avons étudié les caractéristiques suivantes de cette solution en fonction de la pression :

- \* évolution des minima et des maxima
- \* évolution de la forme des pics
- \* évolution de la fréquence.

Remarquons tout d'abord que cette solution est indépendante des points de bifurcation  $p_1$  et  $p_2$  de la solution stationnaire puisqu'elle coexiste avec  $I_+$  entre  $p_2$  et  $p_3$ .

Aussi une telle solution n'est-elle accessible analytiquement que par une étude des solutions périodiques du système.

Cette solution est plus stable que toute autre solution sur le domaine d'existence trouvé mais nous n'avons pas cherché à établir avec précision la position du point de bifurcation de cette solution vers  $I_+$  ce qui aurait nécessité une étude plus fine au voisinage de  $p_3$ . Sa grande stabilité a néanmoins été vérifiée par un "saut" de  $I_+$  sur cette solution pulsée, que nous noterons  $I_Q$ , à  $p = 5,69$  lors de l'étude de  $I_+$ . D'autre part si nous prenons comme condition initiale  $I = 10^{-2}$ ,  $\Delta = \bar{\Delta} = 1$  (solution  $I_0$ ) nous obtenons :

en p =	8	7,5	7	Torr
la solution d'équilibre =	$I_+$	$I_+$	$I_Q$	

La figure (B-5) représente cette solution pour différentes valeurs de  $p$ . La valeur moyenne de cette solution vaut sensiblement  $I_+$ .

La forme des pics se rapproche de formes vues expérimentalement sur  $SF_6$  (Dupré et al. [16]) par la raideur du front montant et la décroissance exponentielle du pic. Il n'y a pas de structure fine et la largeur à mi-hauteur est indépendante de la pression.

D'autre part le minimum varie très rapidement avec la pression : il vaut  $5 \cdot 10^{-6}$  en  $p = 7,16$  Torr et varie en  $\exp(-33p)$  entre 4,8 et 3,6 Torr et en  $\exp(-10p)$  entre 5,4 et 7 Torr. Ce résultat, cause de la perte de la solution à basse pression, est évidemment masqué par l'émission spontanée négligée dans ce modèle.

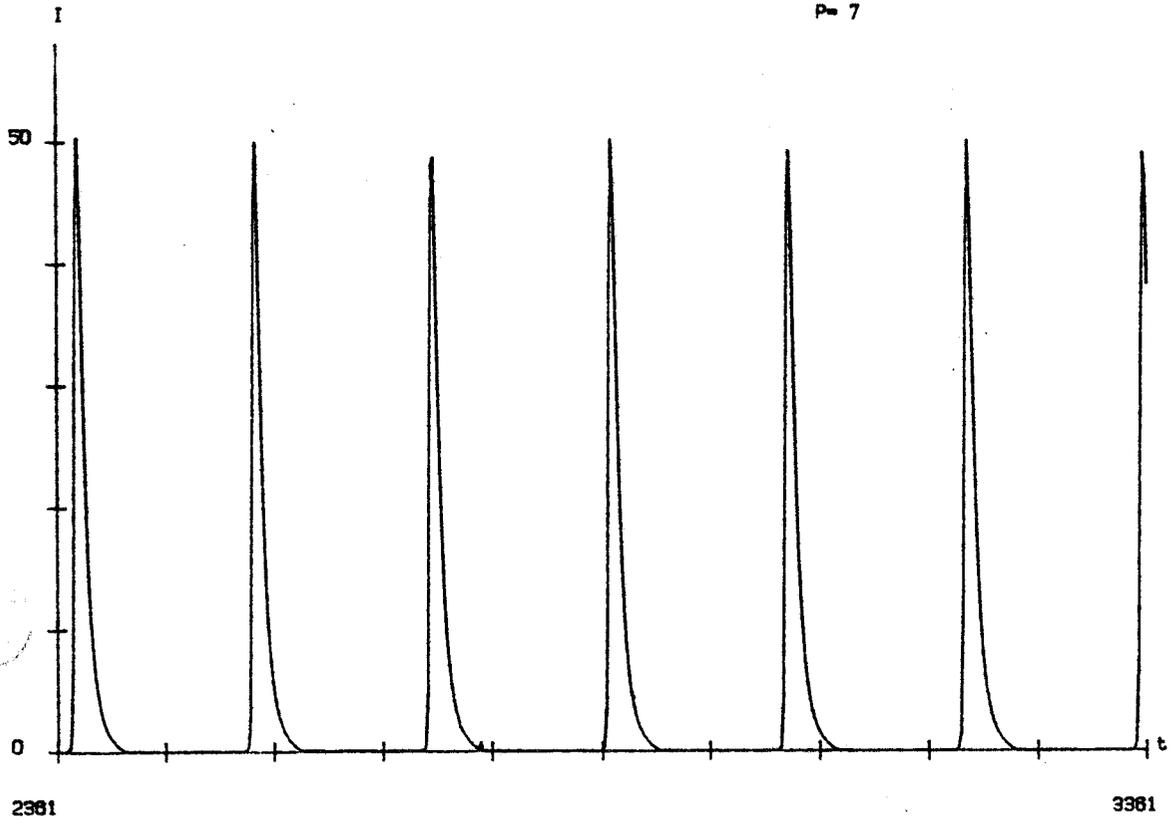
Le pic n'est pas centré sur la période, c'est à dire que le maximum ne se trouve pas au milieu de l'intervalle séparant deux minima mais sa position est plus proche du minimum qui le précède. Cette situation s'estompe lorsque la pression augmente et s'inverse à 5 Torr. Pour des pressions supérieures, le maximum se rapproche du minimum suivant.

La figure (B-6) montre l'évolution des maxima avec la pression dans l'amplificateur. Ceux-ci varient peu en comparaison des minima et le maximum maximum est, comme les points remarquables précédents ; changement de pente des minima et pic centré, voisin de 5 Torr.

La figure (B-7) montre que la période  $T_Q$  de la solution  $I_Q$  évolue très rapidement avec la pression. Elle est notablement différente de celle ( $T_h$ ) de la solution harmonique au point  $p_2$  :

$T_h = 76$  et  $T_Q = 280$  unités  $(2\kappa)^{-1}$ . A haute pression la période évolue en  $\exp(-0,17p)$  (figure B-8). Cette évolution est encore plus rapide à basse pression : elle est décrite par une loi en  $\exp(-10^{-3}p^{-2})$ .

P= 7



P= 8

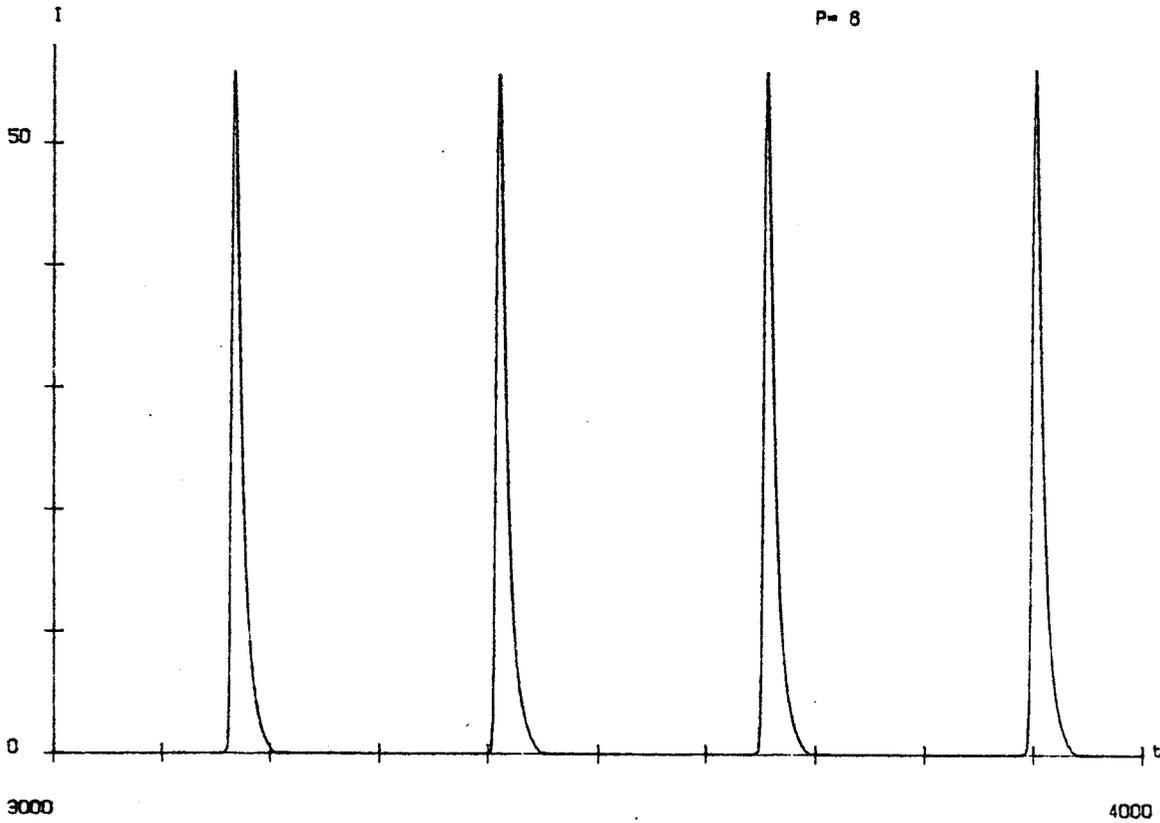
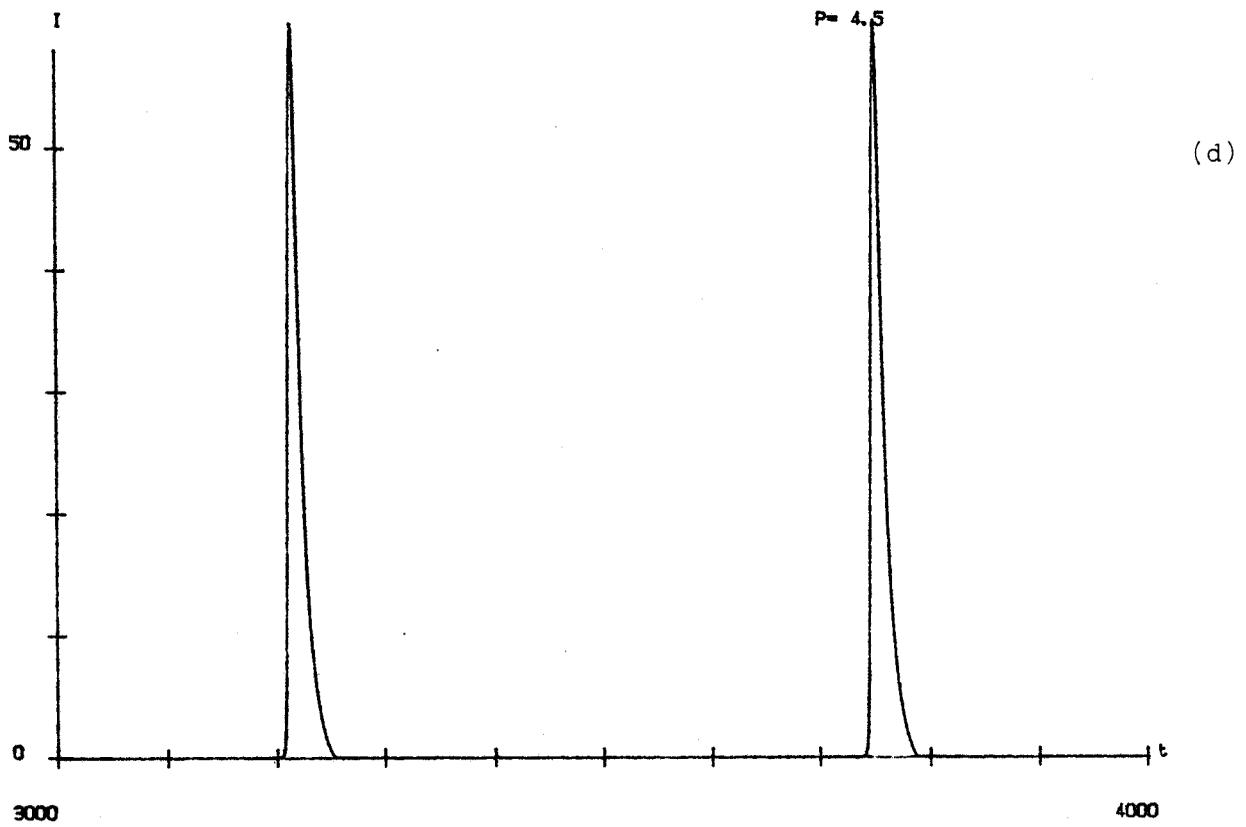
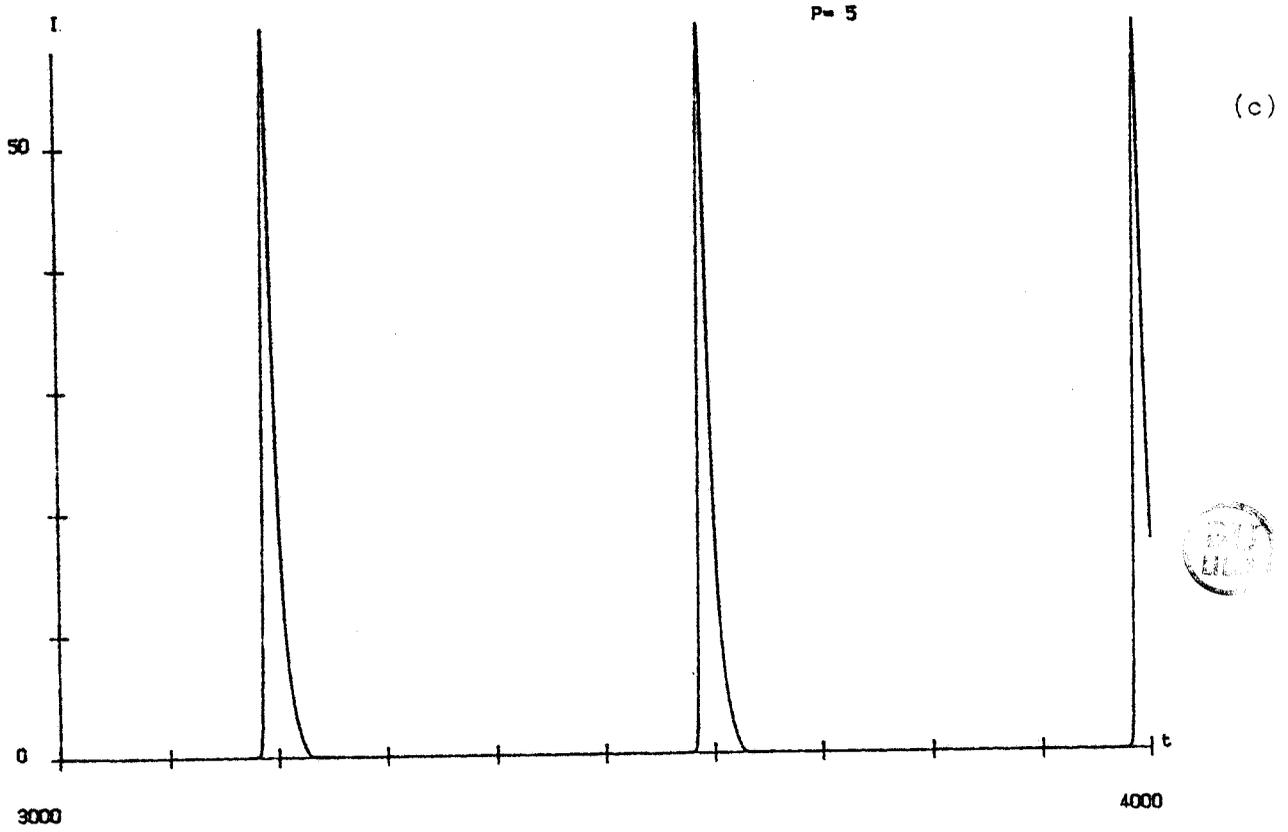


Fig. B-5. Solution pulsée  $I_0$  du laser  $\text{CO}_2 - \text{CH}_3\text{I}$  à diverses pressions de  $\text{CO}_2$  (en Torr) dans le modèle à 3 équations, le temps est en unités réduites  $(2\theta)^{-1}$ .



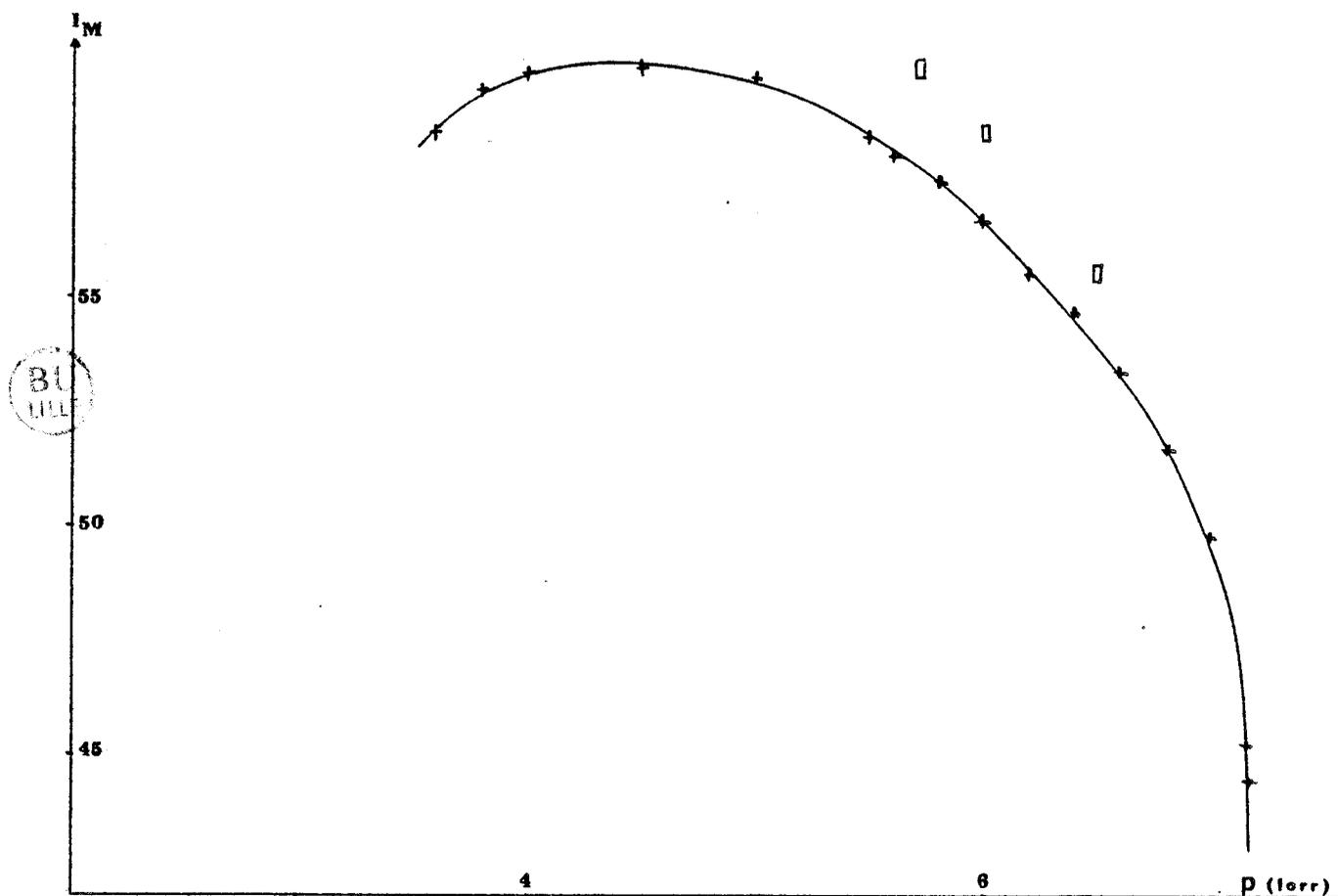


Figure B-6. Evolution des maxima de  $I_Q$  avec la pression pour le laser  $\text{CO}_2 - \text{CH}_3\text{I}$ .

— est la courbe obtenue dans le modèle à 3 équations : son maximum est en  $p = 4,5$  Torr

X correspond aux points calculés dans le modèle à 3 équations

□ correspond aux points calculés dans le modèle à 5 équations.

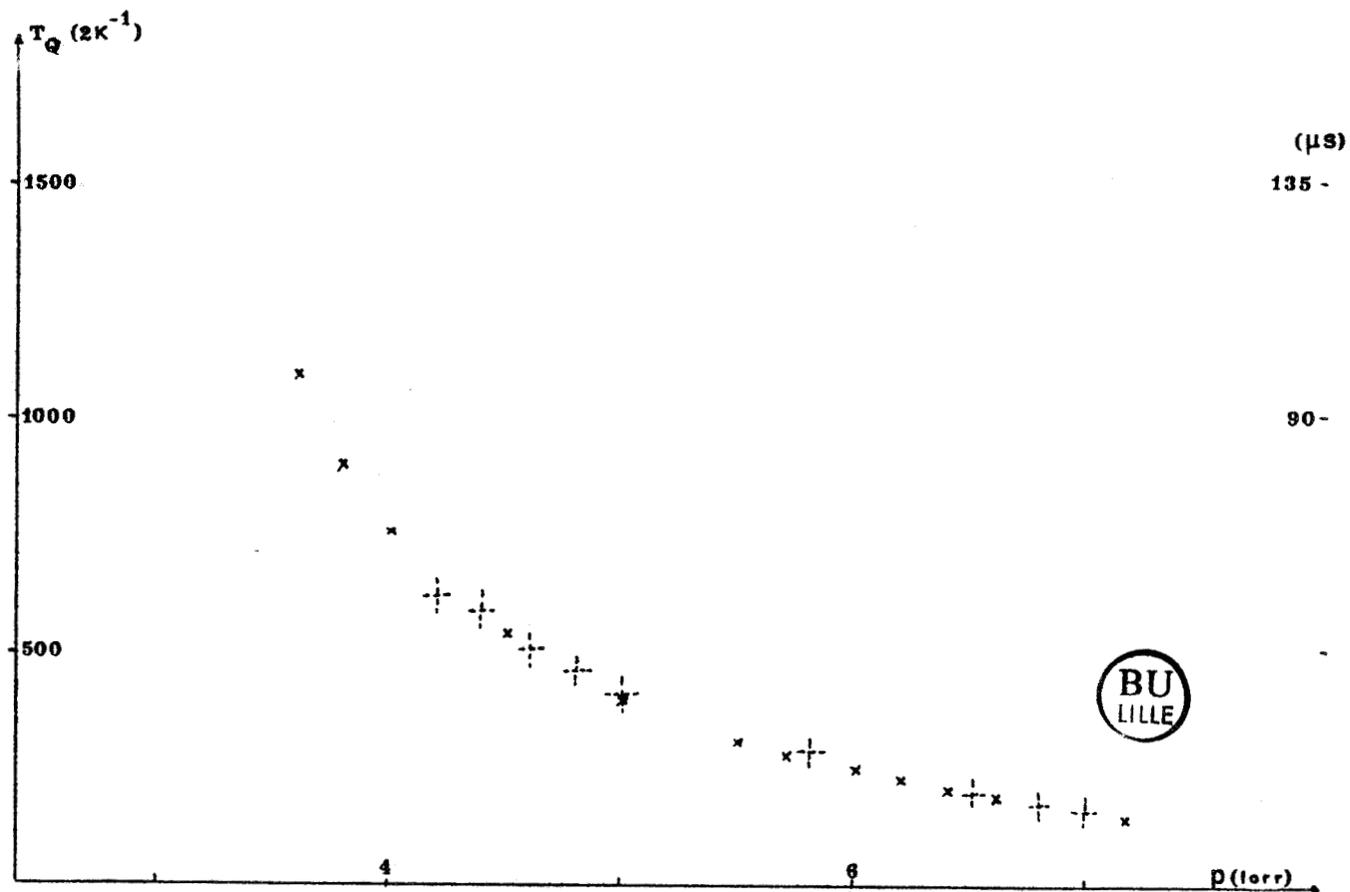


Figure B-7. Evolution de la période de la solution pulsée avec la pression pour le laser  $\text{CO}_2 - \text{CH}_3\text{I}$  dans le modèle à 3 équations (X) et à 5 équations (+). La période est en unités réduites  $2\kappa^{-1}$  à gauche et en micro-secondes à droite.

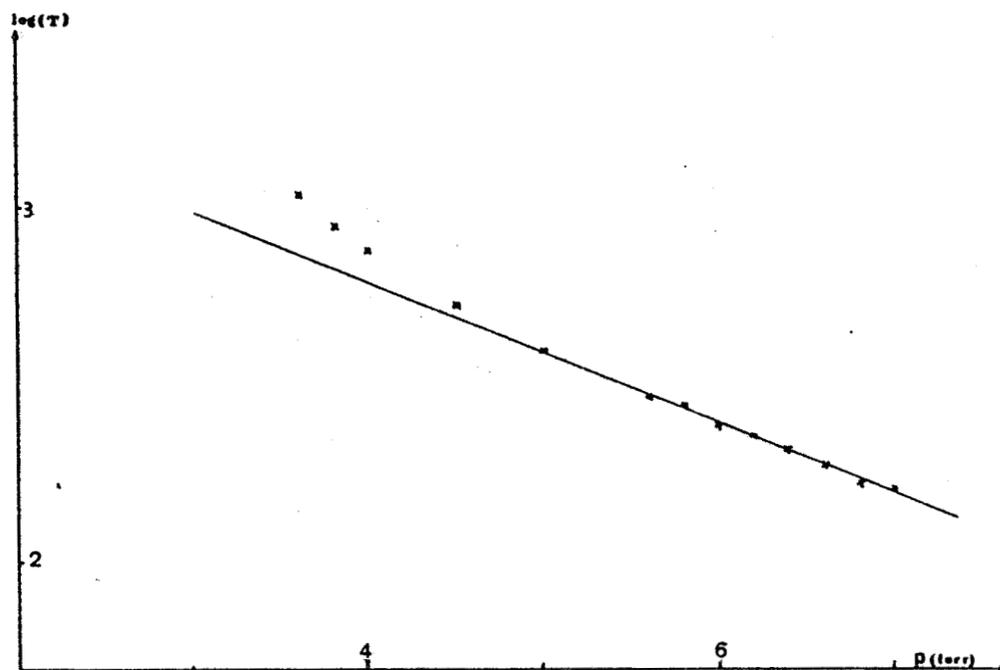


Figure B-8. :  $\log T_Q = f(p)$  dans le modèle à 3 équations. L'équation de la droite tracée est :  $\text{Log } T_Q = -0,1725 p + 3,5075$ .

### II-2.c. Comparaison des systèmes à 3 et 5 équations.

Nous avons intégré le système à 5 équations (BI-28) obtenu avant élimination adiabatique des niveaux résonants sur le domaine  $3 < p < 8$  Torr. Les différences avec les résultats précédents sont minimes :

Le point haut est légèrement décalé :  $5,75 < p_2' < 5,8$  Torr, de même pour  $p_3$  ( $7 < p_3' < 7,2$ ) et les courbes (B-6) et (B-7) montrent que les caractéristiques de la solution pulsée sont les mêmes que précédemment, la seule différence étant une augmentation de quelques pourcents de la valeur du maximum. La forme des pics est la même.

Il semble donc que la réduction du modèle de 5 à 3 équations soit une bonne approximation, ainsi que l'avaient constaté Arimondo et al. sur la position du point de bifurcation de  $SF_6$ . Cela est cohérent avec le choix de  $\gamma_R$  comme constante de relaxation de la polarisation puisqu'alors l'approximation des rate équations, en éliminant la polarisation, élimine déjà la plupart des effets dûs aux modes relaxant en  $\gamma_R$ .

### III - AMORCE D'UN DIAGRAMME DE PHASE POUR LE SYSTEME A 3 EQUATION

#### III-1. Valeurs standard.

Le nombre de paramètres intervenant dans la description du système est déjà conséquent. Ceux-ci sont  $A$ ,  $\bar{A}$ ,  $a$  et les constantes de relaxation  $2\kappa$ ,  $\gamma$ ,  $\bar{\gamma}$ ,  $\nu$ ,  $\bar{\nu}$ . Nous avons choisi d'étudier le diagramme (I,A) pour diverses valeurs de  $a$  en prenant des valeurs raisonnables pour les autres paramètres

$$\begin{aligned}
 (BIII-3) \quad & 2\kappa = 10^7 \quad ; \quad \gamma = 7 \cdot 10^4 \quad ; \quad \gamma_R = 1,2 \cdot 10^7 \quad ; \quad \gamma_R' = 4,5 \cdot 10^6 \\
 & \bar{A} = 1 \quad ; \quad \bar{\gamma} = 10^3 \quad ; \quad \bar{\gamma}_R = 2 \cdot 10^6 \quad ; \quad \bar{\gamma}_R' = 10^3
 \end{aligned}$$

Les constantes de relaxation sont données en  $s^{-1}$ .

Notre souci était de comprendre pourquoi  $SF_6$  ne donnait pas de Q-switch dans ce modèle. Nous avons, pour cela, déterminé les caractéristiques des points de bifurcation sur  $I_+$ . (Rappelons que  $I_-$  est toujours instable et que  $I_0$  est toujours stable pour  $A < \bar{A} + 1$  et instable au-delà) et intégré numériquement le système de 3 équations au voisinage de ces points comme dans les cas précédents pour 18 valeurs de  $a$  comprises entre 0.5 et 50 et les trois valeurs  $a = 100, 1000, 5000$ .

L'étude d'un tel diagramme de phase est généralement entreprise dans le plan  $(A, \bar{A})$ . Il nous a semblé que les conclusions pouvaient être interprétées de façon plus physique en utilisant le paramètre de saturabilité  $a$  plutôt que le coefficient  $\bar{A}$  de pertes linéaires par absorption.

La figure (B-9) montre l'évolution du diagramme  $(I, A)$  pour quelques valeurs de  $a$ . Examinons d'abord la forme des solutions. On trouve bien que pour  $a < 1$  la concavité est tournée vers l'axe  $I$  alors que pour  $1 \leq a \leq \frac{\bar{A} + 1}{\bar{A}} = 2$  elle l'est vers l'axe  $A$ . Pour  $a > 2$  on retrouve la zone de coexistence des trois solutions  $I_0, I_-, I_+$ . On constate que l'absorbant est rapidement saturé, même pour des valeurs moyennes de  $a$ . A titre d'exemple, pour  $a = 20$ ,  $I$  vaut 1,92 en  $A = 3$ . Autrement dit, l'approximation  $I \neq A - 1$  s'applique pour  $a > 20$  et  $A > \bar{A} + 1$ .

Pour  $a \gg 1$  la courbe  $I = I_+$  se rapproche de la droite  $I = A - 1$ . On a coexistence des solutions  $I_+$  et  $I_0$  sur le domaine  $1 < A < \bar{A} + 1$  : pour l'allumage les pertes par absorption reportent le seuil en  $A = \bar{A} + 1$  après quoi l'absorbant se trouve tout de suite saturé, ce qui ramène l'intensité à celle du laser sans absorbant. Lors de l'extinction l'absorbant est saturé très longtemps et le seuil est ramené vers sa valeur  $A = 1$ . C'est pourquoi le point de raccordement des solutions  $I_+$  et  $I_-$  tend vers le point  $(I = 0, A = 1)$  lorsque  $a$  augmente. Pour ce qui concerne l'existence des solutions, à forte saturabilité  $a$ , la différence entre le laser avec et sans absorbant ne joue que sur le domaine  $1 < A < \bar{A} + 1$ . Le diagramme se rapproche de celui du laser sans absorbant :

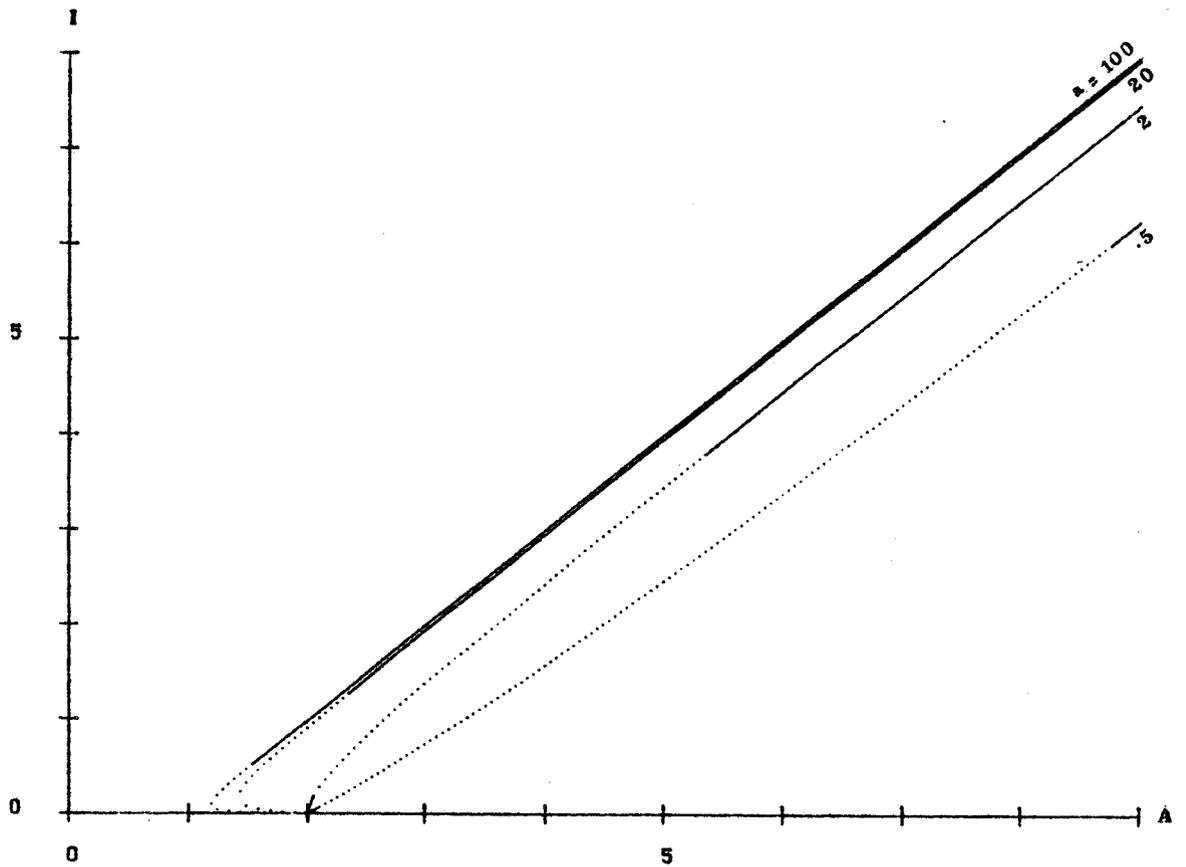


Figure B-9. Diagramme (I-A) pour diverses valeurs de  $a$  et les paramètres (BIII-3). Les zones en pointillé sont instables.

$$I = I_0 \quad \text{si } A < 1 + \bar{A} \quad (\bar{A} = 0 \text{ dans le cas du laser sans absorbant saturable})$$

$$I = I_+ = A - 1 \quad \text{si } A > 1$$

La différence entre le laser avec et sans absorbant saturable intra-cavité est donc plus sensible pour des valeurs plus petites de  $a$ , bien que le phénomène le plus spectaculaire, la bistabilité on-off, puisse en être absent.

Cette conclusion se trouve renforcée lorsqu'on examine la position des points de bifurcation. On constate tout d'abord que :

\* lorsque les trois solutions  $I_0$ ,  $I_+$ ,  $I_-$  existent, la branche  $I_+$  ne comporte qu'une seule bifurcation de Hopf : le point haut  $A_2$

\* lorsque la solution  $I_0$  bifurque sur  $I_+$ , il existe alors deux bifurcations de Hopf : le point haut et le point bas de sorte que le

démarrage du laser est toujours stable (bifurcation supercritique) ainsi que le fonctionnement à fort gain.

Lorsque  $a$  augmente, le point haut se rapproche du point ( $I = 0, A = 1$ ). A la limite, pour  $a = 5000$ , le point de raccordement des branches  $I_+$  et  $I_-$  se situe en ( $I = 10^{-2}, A = 1,028$ ) et toute la branche  $I_+$  est stable.

De même, le point bas, toujours proche du point ( $I = 0, A = \bar{A} + 1 = 2$ ), se déplace très rapidement vers ce dernier.

$a =$	0,5	0,9	1,5	2
$A_1 =$	2,05	2,02	2,00012	2,00011

On remarque le saut que fait  $A_1$  au changement de concavité ( $a = 1$ ).

Le point haut se trouve dans une zone où l'absorbant est déjà saturé et où l'approximation  $I \approx A - 1$  s'applique. Cette approximation est vraie à 10 % en valeur relative pour  $a > 5$ , ce qui est une valeur encore faible du paramètre de saturabilité relative : pour  $a = 5, A_2 = 3,77$  et  $I_c = 2,52$  ce qui fait disparaître la bistabilité attendue pour  $1,8 < A < 2$ .

L'existence de ce point haut réduit considérablement l'intervalle d'existence de la bistabilité on-off qui n'apparaît qu'au dessus d'une valeur critique  $a_c$  nettement supérieure à  $\frac{A+1}{\bar{A}}$ . Dans notre exemple  $a_c \approx 34 \gg 2 = \frac{\bar{A}+1}{\bar{A}}$ . Même lorsqu'elle existe,  $\frac{A+1}{\bar{A}}$  la zone de bistabilité se trouve diminuée par la présence de cette bifurcation de Hopf. Ainsi, pour  $a = 100 \gg a_c, A_2 = 1,54$  et la bistabilité n'apparaît que sur 57 % de la zone possible et pour  $a = 1000$  elle n'occupe encore que 95 % de la zone prévue par l'examen de la forme des branches.

Un dernier point intéressant à signaler est l'existence d'une très large zone instable pour  $a < 1$  alors que l'absorbant est moins

saturable que l'amplificateur et où on s'attendrait par conséquent à un simple comportement passif de la part de celui-ci, c'est à dire à l'adjonction d'un facteur de pertes linéaires dans la cavité.

Enfin nous avons constaté que les conditions (BII-22 et 23) étaient vérifiées avec une précision relative de  $10^{-6}$ , meilleure que celle demandée sur la détermination de  $A_c$ .

La solution émergente au point bas est toujours stable. Celle émergente au point haut l'est pour  $a < 3,1$  et devient instable au delà.

Nous avons effectué la simulation numérique au voisinage du point haut pour :

$$a = \frac{1}{2} ; 0,9 ; 1,5 ; 2 ; 2,5 ; 4 ; 4,2 ; 20 ; 30 ; 36 ; 40 ; 50 ; 100.$$

Partant d'un point situé au-dessus de  $A_2$ , nous avons diminué  $A$  par pas de 0.01 afin de localiser la bifurcation. Nous n'avons, en général, examiné que le voisinage de  $A_2$  et dans un seul sens : en diminuant  $A$ .

Nous avons observé que pour  $a < 1$  la solution harmonique évolue sans transition vers une solution pulsée (fig. B-10), comportement expérimentalement observé dans d'autres circonstances.

Nous avons suivi cette solution pour  $a = \frac{1}{2}$ . Elle se rattache en  $I_+$  au point bas. D'autre part, partant d'un point de la solution pulsée pour  $a = 0,9$ , nous l'avons parcourue en augmentant  $A$ . Dans ce sens on ne repasse pas par la solution harmonique de faible amplitude mais cette solution reste pulsée jusqu'au delà du point haut (jusqu'en 7,2 alors que  $A_2 = 7,18$ ). Elle bifurque sur  $I_+$ . Il existe donc bistabilité entre cette solution et, soit la solution harmonique, soit la solution stationnaire  $I_+$ .

Pour  $a > 1$ , le domaine de stabilité de la solution émergente est faible (quelques centièmes) et diminue quand  $a$  augmente.

Cette solution effectue une transition du 1<sup>o</sup> ordre vers une solution pulsée.

Il semble donc que la solution harmonique est quasi-inexistante ou inexistante alors que la solution pulsée existe toujours et qu'elle est la plus stable. Cette solution pulsée est certainement bistable avec  $I_+$  au-dessus du point de bifurcation  $A_2$  comme dans le cas de  $\text{CH}_3\text{I}$  ou de  $a = 0.9$ .

Pour  $a > 3,1$ , la solution harmonique est instable et au point haut,  $I_+$  bifurque sur une solution pulsée que nous n'avons pas suivi jusqu'en  $A = \bar{A} + 1 = 2$  pour vérifier si elle coexiste avec la solution triviale.

En  $a = 36$ , une zone de bistabilité on-off existe sur l'intervalle  $(A_2, \bar{A} + 1)$  puisque  $A_2 = 1,978$  et  $\bar{A} + 1 = 2$ . La solution  $I_+$ , en  $A_2$ , bifurque sur une solution pulsée qui se bloque sur le zéro - machine en  $A = 1,91$ . Une zone de bistabilité coexiste donc avec une solution Q-switchée.

La solution pulsée disparaît à partir de  $a = 100$  où le laser précipite en  $A = A_2 = 1,54$  sur la solution  $I_0$  stable en ce point ( $A_2 < \bar{A} + 1 = 2$ ).

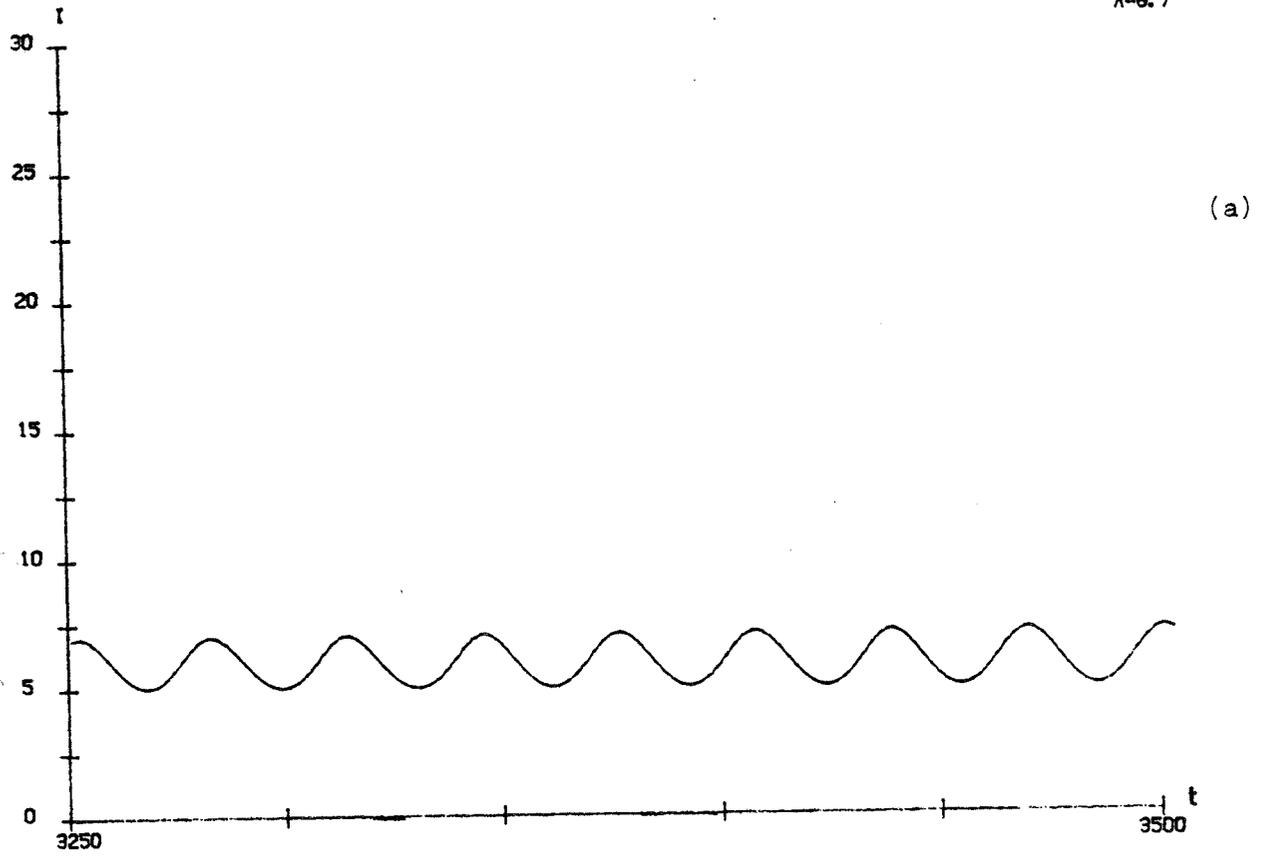
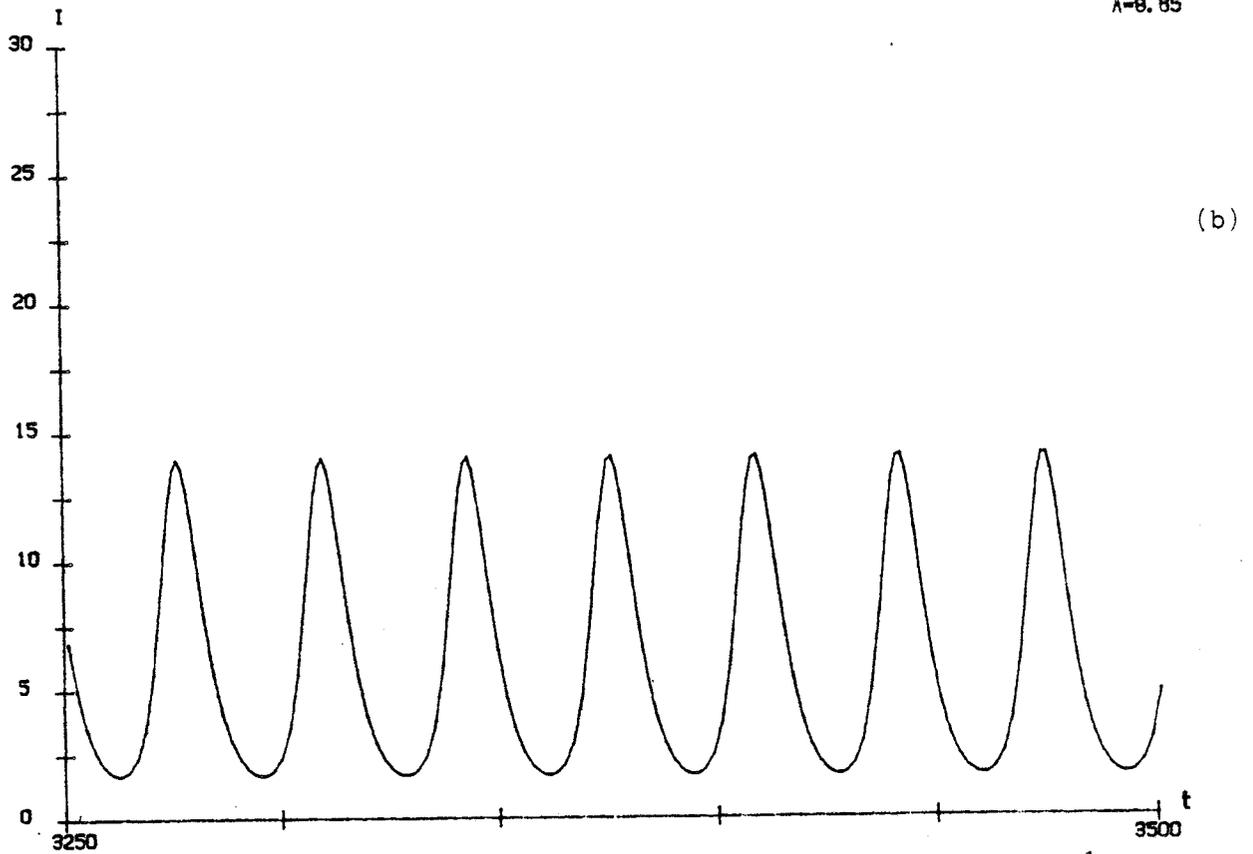
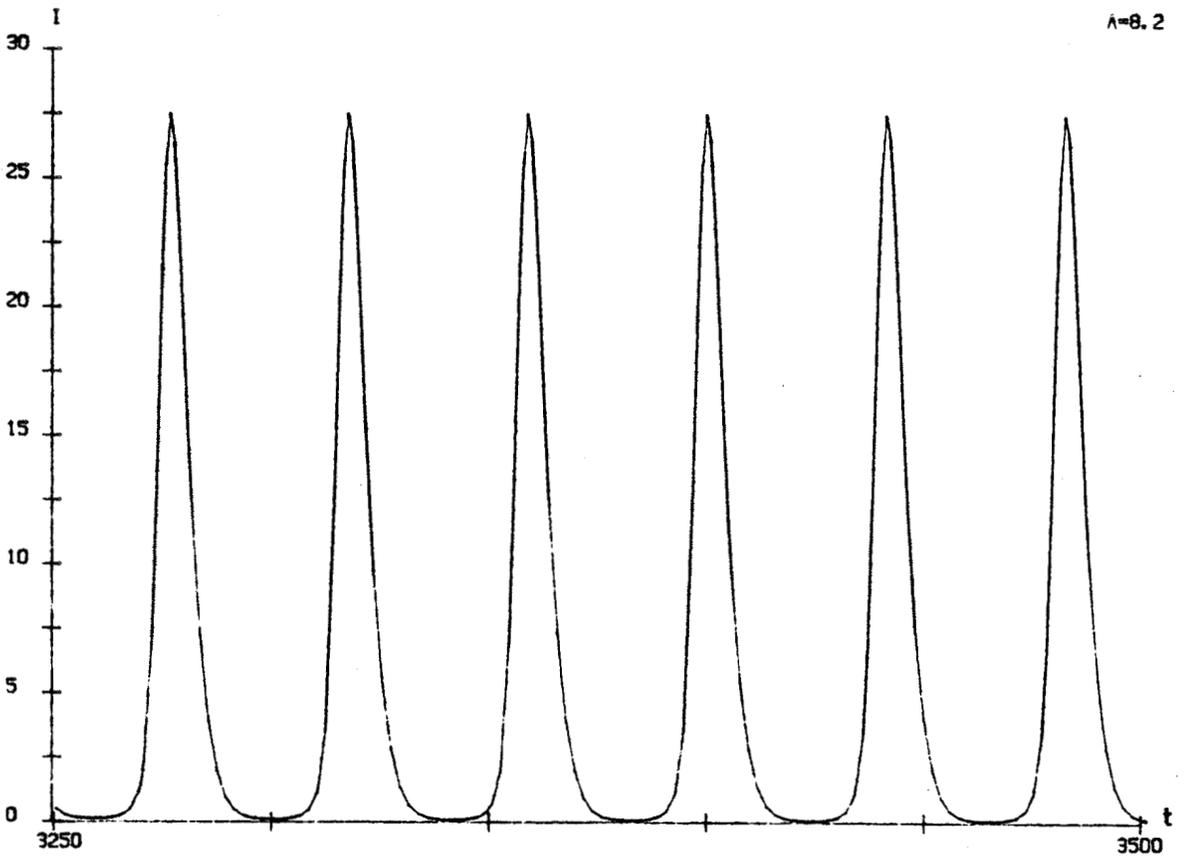
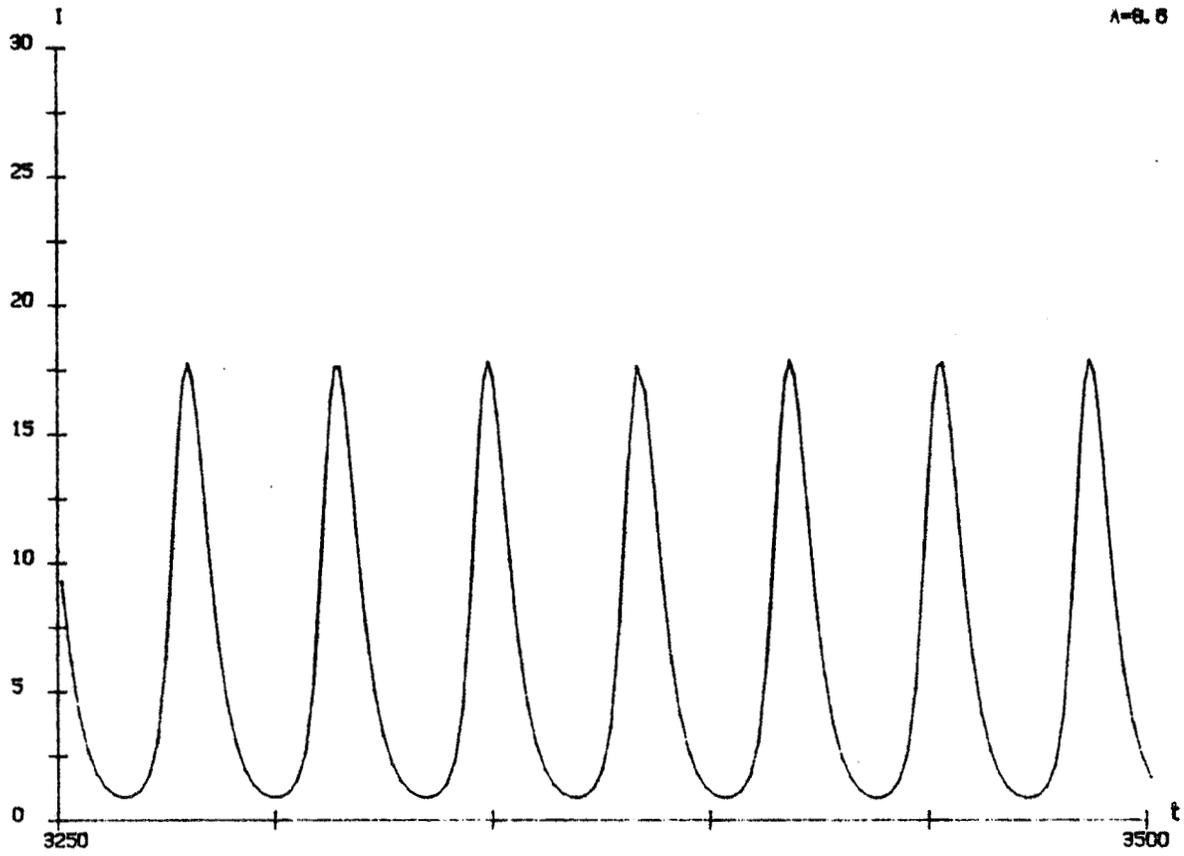
$\Lambda=8.7$  $\Lambda=8.85$ 

Figure B-10. Evolution de la solution périodique pour  $a = \frac{1}{2}$  et les valeurs (BIII-3) des paramètres lorsqu'on diminue  $A$ .  $A_2 = 8,75$ . Le temps est en unités  $2 \kappa^{-1}$ .



En résumé de ce paragraphe, les principales conclusions sont :

- la solution  $I_+$  connaît une zone d'instabilité à faible et moyenne intensité, même pour des valeurs du paramètre de saturabilité inférieures à 1.

- Deux cas se présentent :

- pour  $1 < a < \frac{\bar{A}+1}{\bar{A}}$  ou  $a < 1$ ,  $I_+$  bifurque de  $I_0$  en  $A = \bar{A}+1$  et la branche contient deux bifurcations de Hopf en  $A_1$  et  $A_2$ .

- pour  $a > 1$  et  $a > \frac{\bar{A}+1}{\bar{A}}$ ,  $I_+$  se raccorde à  $I_-$  en  $A = \frac{X_+}{a} = \frac{a + \bar{A} - 1 + 2\sqrt{\bar{A}(a-1)}}{a}$  et ne contient que la bifurcation de Hopf  $A_2$ .

- Lorsque  $a$  augmente, ces points de bifurcation évoluent de la façon suivante :  $A_1 \rightarrow \bar{A} + 1$

$$A_2 \rightarrow 1 \text{ et } \frac{X_+}{a} \rightarrow 1 ; \text{ la convergence de } A_2 \text{ étant}$$

la plus rapide. La zone où la solution stationnaire  $I_+$  est instable diminue quand  $a$  augmente.

- Cette instabilité a deux conséquences sur la bistabilité :

- elle en retarde l'apparition à une valeur  $a_c > \frac{\bar{A}+1}{\bar{A}} > 1$  telle que pour  $a = a_c$  on a  $A_2 = \bar{A} + 1$ .

- elle en diminue la zone d'existence puisque, sur un très large intervalle de valeurs de  $a$ ,  $A_2 > \frac{X_+}{a}$  mais elle n'a plus d'influence au-delà de la valeur  $a = a'_c$  telle que  $A_2 = \frac{X_+}{a'_c}$ .

- des solutions périodiques existent en outre pour le système sauf aux fortes valeurs de  $a$  où le laser précipite sur  $I_0$ .

• Ces solutions sont de deux types :

- des solutions de faible amplitude autour de  $I_+$  qui n'existent qu'aux faibles valeurs du paramètre de saturabilité et sur un domaine négligeable au voisinage du point de bifurcation  $A_2$ .

- des solutions pulsées très stables et qui coexistent avec  $I_+$  et la solution précédente dans des régions où celles-ci sont stables.

• Il y a opposition entre Q-switch et bistabilité, l'un étant faiblement développé lorsque l'autre est important ainsi que l'a récemment décelé expérimentalement P. Glorieux et J. Heppner et al [24].

• La situation la plus riche en phénomènes correspond donc à des valeurs moyennes de  $a$ .

### III - 2. Etude zoologique du diagramme de bifurcation de la solution $I_+$

Afin de déterminer l'influence des différents paramètres du problème, nous avons résolu numériquement les équations du problème sur 150 points du diagramme de phase en choisissant diverses valeurs de  $\bar{\gamma}'_R$  et  $a$  et pour les jeux de paramètres suivants :

$$(BIII-4) \quad 2\kappa = 100, \quad 10^7, \quad 10^{10} \quad ; \quad \bar{A} = 1 \text{ ou } 10 \quad ; \quad \bar{\gamma} = 10^3 \text{ ou } 10^5$$

les autres paramètres gardent leur valeur du tableau (BIII-3) :

$$\gamma = 7 \cdot 10^4 \quad ; \quad \gamma_R = 1.2 \cdot 10^7 \quad ; \quad \bar{\gamma}_R = 2 \cdot 10^6 \quad ; \quad \gamma'_R = 4.5 \cdot 10^6 \quad ; \quad \bar{\gamma}'_R = 10^3.$$

Les constantes de relaxation sont données en  $s^{-1}$ .

Nous avons étudié les solutions stationnaires et construit le diagramme ( $I_{\text{stat}}, A$ ) pour différentes valeurs des constantes de relaxation  $2\kappa, \bar{\gamma}, \bar{\nu}$  pour  $\gamma$  et  $\nu$  fixes ainsi que les autres paramètres. La simulation numérique n'a pas été entreprise.

Les principaux résultats sont les suivants :

(1) \* Les conclusions précédentes restent vraies, notamment :

$A_1 \rightarrow \bar{A}+1$  et  $A_2 \rightarrow 1$  lorsque  $a$  croît. De même la solution émergente de faible amplitude est déstabilisée lorsque  $a$  augmente. Dans tous les cas étudiés elle devenait instable pour  $a > 20$ .

(2) \* Les instabilités sont favorisées lorsque les inégalités suivantes ont lieu :

$$2\kappa \gg \bar{\gamma} \gg \bar{\gamma}_R^1$$

Cette déstabilisation du laser s'opère de deux façons lorsque  $2\kappa$  ou  $\bar{v} = \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}_R^1}$  augmentent :

- par un accroissement de la zone où la solution  $I_+$  est instable (tableau B-4) ; le point haut étant plus haut et le point bas plus bas.

- par une déstabilisation de la solution émergente (tableau (B-5) ).

Notons que seuls  $2\kappa$  et  $\bar{v}$  interviennent : à  $2\kappa$  et  $\bar{v}$  fixes, la variation de  $\bar{\gamma}$  n'entraîne pas de modification notable sur la position du point de bifurcation.

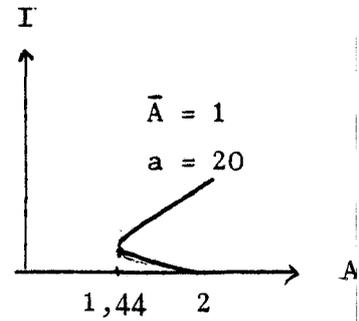
Pour  $2\kappa = 100 \ll \gamma$  et  $\bar{\gamma}$ , toutes les instabilités disparaissent quelque soit la valeur des autres paramètres.

Même résultat pour  $\bar{v} = 10^{-2}$  et  $2\kappa = 10^7$ . En revanche les instabilités réapparaissent pour  $\bar{v} = 10^{-2}$  et  $2\kappa = 10^{10}$  (tableau (B-6)).

De plus les variations dues à  $\bar{v}$  sont moins importantes que celles dues à  $2\kappa$  et notamment elles sont inférieures à 1 % entre  $\bar{v} = 33$  et

(a)

$\bar{\gamma}$	$10^3$				$10^5$					
$\bar{v}$	$3 \cdot 10^{-2}$		1		1		33		100	
$2\kappa$	$10^7$	$10^{10}$	$10^7$	$10^{10}$	$10^7$	$10^{10}$	$10^7$	$10^{10}$	$10^7$	$10^{10}$
$A_2$	1,74	2,23	2,35	2,81	2,35	2,81	2,38	2,83	2,38	2,83



(b)

$\bar{\gamma}$	$10^3$				$10^5$					
$\bar{v}$	1		33		1		33			
$2\kappa$	$10^7$	$10^{10}$	$10^7$	$10^{10}$	$10^7$	$10^{10}$	$10^7$	$10^{10}$		
$A_2$	6,10	7,22	6,13	7,24	6,10	7,22		7,24		

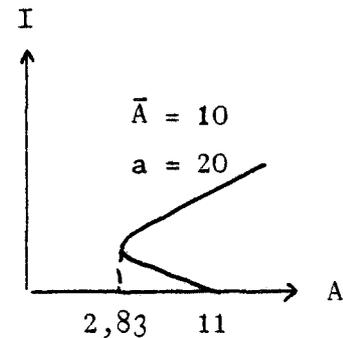


Tableau B-4. Position du point haut  $A_2$  pour diverses valeurs des paramètres. Les autres paramètres sont donnés au tableau (BII-4) et  $a = 20$  ;  $\bar{A} = 1$  (tableau (a) ) et  $\bar{A} = 10$  (tableau (b))

- lorsque  $2\kappa$  augmente  $A_2$  remonte et la zone instable s'étend
- même phénomène mais d'importance moindre avec  $\bar{v}$
- $\bar{\gamma}$  n'a qu'une influence inférieure au 1 % sur la position de  $A_2$  (à  $\bar{v}$  et  $2\kappa$  fixes)
- la bistabilité est favorisée quand  $\bar{A}$  augmente.

$\bar{\gamma}$	$10^3$				$10^5$					
$\bar{\nu}$	1		33		1		33		100	
$2\kappa$	$10^7$	$10^{10}$	$10^7$	$10^{10}$	$10^7$	$10^{10}$	$10^7$	$10^{10}$	$10^7$	$10^{10}$
$A_2$	5,33	6,47	5,59		5,33	6,47	5,59	6,73	5,59	6,73
$a_3$	-	-	-		-	-	-	+	-	+

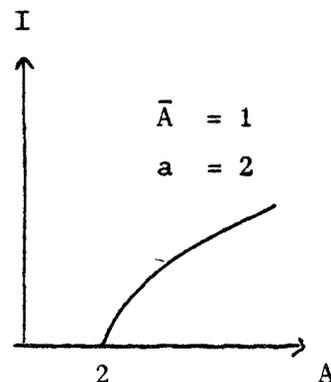


Tableau B-5. Position du point haut  $A_2$  et stabilité de la solution émergente pour des valeurs  $\bar{A} = 1$ ,  $a = 2$ .  $a_3 = \text{Re}(h_1 W - \bar{h}_1 \bar{W})$  est négatif si la solution périodique de faible amplitude est stable.

Mêmes remarques qu'au tableau (B-4). On note en outre qu'à  $\bar{\nu}$  élevé,  $2\kappa$  grand destablitse la solution périodique.

$\bar{\nu} = 100$ , ce qui tend à faire croire que la disproportion de variation entre  $\bar{\nu}$  (1 à 100) et  $2\kappa$  ( $10^7$  à  $10^{10}$ ) n'entre pas en ligne de compte et que  $2\kappa$  est le paramètre le plus influent sur la variation de la position.

La condition  $2\kappa \gg \bar{\gamma} >$  et  $\bar{\gamma}_R^1$  ressemble à la condition de mauvaise cavité rencontrée dans l'étude du laser sans absorbant et en bistabilité optique [26], condition nécessaire à l'apparition d'instabilités. Il en va de même ici pour les instabilités à champ moyen, à la différence près qu'il s'agit d'une condition de mauvaise cavité par rapport aux niveaux effectifs du modèle qui sont les niveaux réservoirs et non les niveaux résonants.

La condition  $\bar{\nu} = \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}_R}$  grand est une condition de bon absorbant puisque, la relaxation vibrationnelle étant supérieure au taux de repeuplement du niveau résonant, le niveau supérieur ne se trouve pas encombré lors de l'absorption.

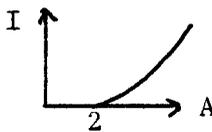
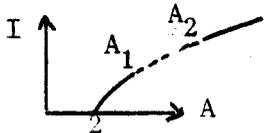
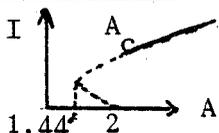
$\bar{\nu}$		$10^{-2}$		$3 \cdot 10^{-2}$		diagramme (I,A)
$2\kappa$		$10^7$	$10^{10}$	$10^7$	$10^{10}$	
$A_c$	$a = \frac{1}{2}$	X	X	X	X	
	$a = 2$	X	X	X	$A_1 \sim 2$ $A_2 \sim 2,67$	 $A_c = A_1$ ou $A_c = A_2$
	$a = 20$	X	1,63	1,74	2,22	 $A_c = A_2$ 1,44

Tableau B-6. Stabilité de la branche  $I_+$  pour  $\bar{A} = 1$ ,  $\bar{\gamma} = 10^3$  et les valeurs (BIII-4).

X signifie que toute la branche est stable.

(3) \* Le point haut se situe avec une bonne approximation dans une zone où l'absorbant est saturé (tableau B-7) et où la loi  $I \neq A_2 - 1$  s'applique. Cette constatation n'est pas, contrairement aux précédentes, aisément explicable à partir de considérations physiques. Elle sera néanmoins fort utile dans les calculs du chapitre IV. L'approximation est d'autant meilleure que  $a$  est grand ou que  $2\kappa$  l'est puisque dans ce dernier cas le point se trouve fortement remonté. Il est en revanche indépendant de  $\bar{\gamma}$  et ne dépend de  $\bar{\nu}$  que dans la limite des mauvais absorbants ( $\bar{\nu} \ll 1$ ), ce qui confirme l'importance relative de  $2\kappa$  et  $\bar{\nu}$ .

Lorsque  $\bar{A}$  augmente, la saturabilité doit augmenter dans les mêmes proportions pour retrouver des résultats analogues puisque  $A_2$  décroît quand  $a$  augmente mais augmente avec  $\bar{A}$ .

Remarquons que pour des valeurs usuelles des paramètres c'est une bonne approximation.

$\bar{A}$		1						10					
		$10^{-2}$		1		33		100		1		33	
$2\kappa$		$10^7$	$10^{10}$	$10^7$	$10^{10}$	$10^7$	$10^{10}$	$10^7$	$10^{10}$	$10^7$	$10^{10}$	$10^7$	$10^{10}$
$\frac{I_s - I_c}{I_s}$	a = 2	X	X	13	10	12	9,5	12	9,5		23		23
	a = 20	X	22	6	4	6	4	6	4	12	9	12	9
	a = 100	X	7	5	3		3		3				

Tableau B-7. Validité de l'approximation de saturation de l'absorbant au point haut de bifurcation pour les valeurs (BIII-4) des paramètres  $I_s = A_2 - 1$  ;  $I_c = I_+(A_2)$  les résultats sont en pourcentages.

On retrouve l'importance relative de  $2\kappa$  et  $\bar{v}$  constatée dans les tableaux précédents : la loi est indépendante de  $\bar{v}$  sauf pour les petites valeurs de celui-ci. De plus la variation de  $a$  est plus décisive que celle de  $2\kappa$ . Lorsque  $\bar{A}$  augmente il convient d'augmenter  $a$  dans la même proportion pour obtenir des résultats identiques.

Les trois conclusions précédentes permettent d'établir l'importance relative des paramètres du problème.

Ils sont à priori au nombre de 8 :  $A$  et  $\bar{A}$  ;  $a$  ;  $2\kappa$  ;  $\gamma$  et  $\bar{\gamma}$  ;  $\gamma_R'$  et  $\bar{\gamma}_R'$  dans le modèle à 3 équations.

Il semble judicieux de remplacer  $\gamma_R'$  et  $\bar{\gamma}_R'$  par  $v = \frac{\gamma}{\gamma_R'}$  et  $\bar{v} = \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}_R'}$  puisque, outre le fait que ce sont eux qui interviennent dans les équations du système (BI-30), on peut aisément leur donner une signification physique : ils mesurent la qualité de l'absorbant et de l'amplificateur :  $\bar{v} \gg 1$  pour un bon absorbant et  $v \ll 1$  pour un bon amplificateur puisqu'alors le niveau résonant se repeuplant en priorité, l'inversion de population peut se maintenir.

Considérant que  $\gamma$  et  $v$  ont des rôles symétriques à  $\bar{\gamma}$  et  $\bar{v}$  on peut établir la hiérarchie suivante :

\* dans la limite des bonnes cavités effectives :  $2\kappa \ll$  constant de relaxation des niveaux réservoirs, c'est le paramètre le plus influent puisqu'il stabilise la branche  $I_+$ .

\* sinon les paramètres les plus importants sont  $A$ ,  $\bar{A}$  et  $a$ , vient ensuite  $2\kappa$ .

$v$  et  $\bar{v}$  ne jouent de rôle important que dans la limite des mauvais absorbants ( $\bar{v} \ll 1$ ) ou des mauvais amplificateurs ( $v \gg 1$ ) et ne jouent aucun rôle dans la limite des bons absorbants et amplificateurs.

$\gamma$  et  $\bar{\gamma}$  ne semblent pas jouer de rôle important dans la position de la bifurcation et la stabilité de la solution périodique émergente.

Arimondo et al ont proposé deux conditions approchées pour trouver la position des points de bifurcation sur  $I_+$  : la condition  $a_2 = 0$  qui définit l'approximation  $A_C'$  et la condition  $v \ell I - \bar{v} \bar{\ell} a I = 0$  qui définit  $A_C''$ .

Le tableau (B-8) montre que la première approximation est bonne, notamment pour des valeurs élevées de la constante de relaxation du champ. Nous verrons au chapitre suivant qu'elle correspond à une approximation de la loi réelle fondée sur des considérations d'ordre de grandeur des paramètres de relaxation. La seconde approximation est moins bonne et ne correspond à aucune approximation physique, il s'agit plutôt d'une hypothèse simplificatrice de calcul. Remarquons que  $A''_C$  est indépendant de  $2\kappa$  et ne traduit donc pas l'influence de ce paramètre. Dans la mesure où cette dernière approximation est une approximation sur la condition approchée  $a_2 = 0$  et que celle-ci est meilleure pour  $2\kappa$  grand,  $\nu \ell I - \bar{\nu} \bar{\ell} a I = 0$  ne donnera de bons résultats que pour  $2\kappa \rightarrow \infty$ . De plus les termes négligés dans cette approximation sont au point réel de bifurcation, du même ordre de grandeur que  $\nu \ell I - \bar{\nu} \bar{\ell} a I$  à cause de la condition (BII-22). Comme la fonction  $\nu \ell I - \bar{\nu} \bar{\ell} a I$  varie moins rapidement que  $a_2$  ou  $a_1 a_2 - a_0$ , la condition  $\nu \ell I - \bar{\nu} \bar{\ell} a I = 0$  retarde la bifurcation.

Nous avons pu remarquer sur  $SF_6$  et  $CH_3I$  qu'au point haut  $h$  reste toujours très voisin de 1. Nous verrons au chapitre suivant, équations (BIV-10), que ce résultat est une conséquence des conditions de mauvaise cavité et bon absorbant. Ce résultat est d'autant meilleur que  $2\kappa$  est grand comme le confirme le tableau (B-9). Cela signifie que, d'après l'équation (BII-23),  $\bar{h} \sim 0$ , auquel cas l'équation (BII-22) se réduit à  $\nu \ell I - \bar{\nu} \bar{\ell} a I + \alpha = 0$ , condition très proche de la condition  $a_2 = \alpha + \bar{\alpha} + \nu \ell I - \bar{\nu} \bar{\ell} a I = 0$ , ce qui explique pourquoi l'approximation  $a_2 = 0$  est bonne, d'autant qu'en général  $\bar{\alpha} \ll \alpha$ .



$\bar{Y}$	$10^3$						$10^5$					
	$10^{-2}$		1		33		1		33		100	
$\bar{v}$	$10^7$	$10^{10}$	$10^7$	$10^{10}$	$10^7$	$10^{10}$	$10^7$	$10^{10}$	$10^7$	$10^{10}$	$10^7$	$10^{10}$
$2\kappa$	$x$	$x$	$9 \cdot 10^{-4}$	$10^{-6}$	$x$	$x$	$8,5 \cdot 10^{-2}$	$10^{-4}$	$4,6 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-5}$	$4,5 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-5}$
$\frac{A_2 - A_2^1}{A_2}$	$a = 2$	$x$	$2,1 \cdot 10^{-1}$	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$x$	$x$	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$8,2 \cdot 10^{-2}$	$11 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-4}$
$\frac{A_2 - A_2}{A_2}$	$a = 20$	$x$	$3 \cdot 10^{-5}$	$2,5 \cdot 10^{-6}$	$x$	$x$	$1,9 \cdot 10^{-1}$	$1,8 \cdot 10^{-4}$	$1,9 \cdot 10^{-1}$	$1,9 \cdot 10^{-1}$	$1,9 \cdot 10^{-1}$	$2,1 \cdot 10^{-4}$
$\frac{A_2 - A_2}{A_2}$	$a = 100$	$x$	$10^{-4}$	$3,3 \cdot 10^{-6}$	$x$	$x$	$2,2 \cdot 10^{-3}$	$3,3 \cdot 10^{-6}$	$1,8 \cdot 10^{-4}$	$1,8 \cdot 10^{-4}$	$1,8 \cdot 10^{-4}$	$1,6 \cdot 10^{-4}$

(a)

Tableau B-8.

(b)	$\frac{A_1 - A_1'}{A_1}$	$a = \frac{1}{2}$	$- 3 \cdot 10^{-4}$
		$a = 2$	$- 1 \cdot 10^{-7}$

$(2\kappa = 10^7 ; \bar{\gamma} = 10^3 ; \bar{\nu} = 1)$

Tableau B-8. Qualité des approximations sur la position du point haut de bifurcation (a) et du point bas (b), valeurs (BIII-4) des paramètres ;  $\bar{A} = 1$  ;  $A_2$  est solution de  $a_1 a_2 - a_0 = 0$  ;  $A_2'$  de  $a_2 = 0$  et  $A_2''$  de  $\nu \& I - \bar{\nu} \bar{\ell} a I = 0$  ;  $A_2' < A_2$  et  $A_2'' > A_2$ .

$A_2'$  est proche de  $A_2$  pour  $2\kappa \gg \gamma, \bar{\gamma}$  ; le résultat est meilleur quand  $a$  est faible. Il est à peu près indépendant de  $\bar{\nu}$  pour un bon absorbant ( $\bar{\nu} \gg 1$ ).

$A_2''$  est indépendant de  $2\kappa$ , l'approximation est moins bonne.

$\bar{\gamma}$		$10^3$						$10^5$			
		$10^{-2}$		1		100		1		33	
$2\kappa$		$10^7$	$10^{10}$	$10^7$	$10^{10}$	$10^7$	$10^{10}$	$10^7$	$10^{10}$	$10^7$	$10^{10}$
h - 1	a = 2	x	x	$7,6 \cdot 10^{-5}$	$3,9 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$2,1 \cdot 10^{-5}$	$7,7 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$6,5 \cdot 10^{-5}$
	a = 20	x	$2,08 \cdot 10^{-2}$	$2,9 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-5}$	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$4,8 \cdot 10^{-6}$	$2,9 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$4,6 \cdot 10^{-5}$	$1,8 \cdot 10^{-5}$
	a = 100	x	$1,16 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$4,8 \cdot 10^{-6}$		$2,9 \cdot 10^{-6}$		$5,5 \cdot 10^{-4}$		$7,6 \cdot 10^{-6}$
	a = 200	x				$9 \cdot 10^{-6}$		$1,6 \cdot 10^{-3}$		$2,8 \cdot 10^{-5}$	

Tableau B-9. Valeur de h en quelques points hauts ( $\bar{A} = 1$ , paramètre BIII-4)  
 h reste toujours très voisin de 1.  $2\kappa$  ou a le font moins varier  
 que  $\bar{v}$  et surtout  $\bar{\gamma}$ .

Des résultats de ce paragraphe (III-2) nous retiendrons principalement que :

(1) \* le jeu de paramètres à utiliser dans l'étude du problème est :

- $A$  et  $\bar{A}$  : les coefficients de gain de l'amplificateur et pertes par absorption (coefficients linéaires).
- $a$  le paramètre de saturabilité relative de l'absorbant et de l'amplificateur
- $2\kappa$ ,  $\gamma$ ,  $\bar{\gamma}$  : constante de relaxation de l'intensité et constantes de relaxation vibrationnelle des niveaux réservoirs
- $\nu$  et  $\bar{\nu}$  : coefficients de qualité des milieux amplificateur et absorbant.

(2) \* les instabilités sont favorisées lorsque les relations suivantes ont lieu :

$$2\kappa \gg \bar{\gamma} \gg \bar{\gamma}'_R \quad ; \quad 2\kappa \gg \gamma'_R \gg \gamma'_R$$

qui traduisent les conditions physiques suivantes :

- $2\kappa \gg \gamma$ ,  $\bar{\gamma}$  : condition de mauvaise cavité effective. C'est une condition nécessaire à l'apparition d'instabilité à faible et moyenne intensité, condition analogue à celle obtenue dans le modèle à 2 niveaux
- $\nu \ll 1$  : condition de bon milieu amplificateur
- $\bar{\nu} \gg 1$  : condition de bon milieu absorbant.

(3) \* les paramètres "pertinents" du problème sont :

$A$ ,  $\bar{A}$ ,  $a$  et  $2\kappa$

$\nu$  et  $\bar{\nu}$  ne jouent de rôle que lorsque les conditions physiques mentionnées en (2) ne sont pas vérifiées.

$\gamma$  et  $\bar{\gamma}$  ne jouent qu'un rôle très secondaire.

(4) \* les approximations suivantes sont loaisibles au point haut de bifurcation :

- l'absorbant est saturé :  $I \neq A_2 - 1$

-  $A_2$  est donné avec une bonne approximation par l'équation

$v \& I - \bar{v} \& a I + \alpha = 0$ , équation proche de la condition

$a_2 = 0$  proposée par Arimondo et al. [17] .

Les faits dégagés dans ce chapitre nous amènent à réfléchir dans deux directions sur le modèle :

\* d'une part ouvrir une discussion interne au modèle sur les lois et approximations observées,

\* d'autre part proposer une critique du modèle et des ouvertures possibles de celui-ci aux vues de la comparaison entre les résultats théoriques et les expériences.

Ce sont les objectifs du chapitre suivant.

## CHAPITRE B IV

DISCUSSIONS, OUVERTURES

Le paragraphe I examine les approximations possibles sur la condition d'existence des bifurcations sur  $I_+$  et la stabilité de la solution périodique émergente. Cette étude repose sur une estimation des ordres de grandeur respectifs des différents termes des équations. Le paragraphe II discute de l'adaptation du modèle à la réalité expérimentale telle qu'elle est apparue sur les exemples de  $SF_6$  et  $CH_3I$  et propose des perfectionnements au modèle. Le paragraphe III traite de façon plus poussée l'une de ces ouvertures possibles : le modèle en élargissement Doppler.

Attention, dans la suite de ce chapitre, les constantes de relaxation moléculaires sont exprimées en unités réduites  $2\kappa$ .

## I - ANALYSE DES EQUATIONS, APPROXIMATIONS.

### I - 1. Stabilité à fort ou faible champ.

#### I-1 a) Stabilité à fort champ.

On remarque qu'aucune bifurcation n'apparaît à fort champ dans les exemples précédents. Nous allons montrer qu'à l'instar de ce qui se passe à cet ordre d'approximation (rate equations) dans le modèle à deux niveaux, la branche  $I_+$  est stable à fort gain.

Pour cela, en supposant remplies les conditions de bon amplificateur ( $\nu \ll 1$ ) et de bon absorbant ( $\bar{\nu} \gg 1$ ), nous allons établir que  $a_2$  ainsi que  $a_1 a_2 - a_0$  sont positifs à fort gain.

Puisque  $A$  est grand, très grand devant 1, l'absorbant est saturé et  $I \sim A$ .

En choisissant  $A \gg \frac{1}{\nu}$ , on peut négliger  $\delta$  et  $\bar{\delta}$  dans les expressions de  $d$  et  $\bar{d}$  :  $d \sim \nu A$  et  $\bar{d} \sim \bar{\nu} A$ .

En considérant  $\nu \ll 1$  et  $\bar{\nu} \gg 1$  il vient

$$\alpha \sim \frac{\gamma}{\nu} ; \quad \bar{\alpha} \sim \bar{\gamma} ; \quad \ell \sim \frac{1}{\nu A} \quad \text{et} \quad \bar{\ell} \sim \frac{1}{\bar{\nu} A^2}$$

d'où l'expression de  $a_2$  :

$$(BIV-1) \quad a_2 \sim \frac{\bar{\gamma}}{v} + \bar{\gamma} + 1 - \frac{\bar{A}}{aA}$$

la condition  $a_2 > 0$  est alors remplie pour  $A \gg \frac{\bar{A}}{a}$ .

Les expressions de  $a_1$  et  $a_0$  sont, en supposant  $A \gg \frac{\bar{A}}{va}$ ,

$$(BIV-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 \sim \frac{\bar{\gamma}\bar{\gamma}}{v} + \frac{1}{v} [\delta\gamma + v\bar{\gamma}] \\ a_0 \sim \frac{\delta\gamma\bar{\gamma}}{v} \end{array} \right.$$

d'où

$$a_1 a_2 - a_0 \sim \left( \frac{\bar{\gamma}}{v} + 1 \right) \left[ \frac{\bar{\gamma}\bar{\gamma}}{v} + \delta \frac{\bar{\gamma}}{v} + \bar{\gamma} \right] + \bar{\gamma}^{-2} \left( \frac{\bar{\gamma}\bar{\gamma}}{v} + 1 \right)$$

expression toujours positive ; le passage aux rate equations, comme dans le modèle à deux niveaux, a fait disparaître le second seuil d'oscillation du laser à fort champ au-dessus duquel la solution stationnaire  $I_+$  devenait instable, entraînant le laser dans un comportement chaotique.

En posant  $\gamma = \tilde{\gamma} p$  et  $A = \tilde{A} p$ , on obtient à forte pression :

$$(BIV-4) \quad a_2 \sim \frac{\tilde{\gamma}}{v} p$$

$$a_1 a_2 - a_0 \sim \delta \left( \frac{\tilde{\gamma}}{v} \right)^2 p^2$$

Ces relations sont vérifiées sur  $\text{CH}_3\text{I}$  et témoignent de la cohérence des approximations et calculs d'ordres de grandeur effectués.

I-1.b) Stabilité de  $I_+$  à champ faible en absence de bistabilité.

On considère les deux cas suivants où  $I_+$  émerge de  $I_0$  en  $A_0 = \bar{A} + 1$  :  $a < 1$  ou  $1 < a < \frac{\bar{A} + 1}{\bar{A}}$ . Nous allons montrer directement que la branche  $I_+$  est stable au voisinage du point de bifurcation  $A_0$ .

Pour cela nous posons  $A = A_0 (1 + \epsilon)$  avec  $\epsilon \ll 1$

$$\text{On a } I \sim \frac{A_0 \epsilon}{1 - \bar{A}(a-1)} \ll 1$$

et pour  $\epsilon$  tendant vers zéro :

$$\begin{aligned} (BIV-5) \quad a_2 &\rightarrow \gamma + \bar{\gamma} \\ a_1 &\rightarrow \gamma \bar{\gamma} \\ a_0 &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

de sorte que les inégalités  $a_0 > 0$  et  $a_1 a_2 - a_0 > 0$  sont remplies ; la bifurcation (supercritique) est stable.

I - 1.c) Stabilité de  $I_+$  à champ faible en présence de bistabilité.

Nous allons démontrer que le point de raccordement entre  $I_-$  et  $I_+$  est instable dans la limite de la mauvaise cavité effective pour un bon absorbant et un bon amplificateur.

Pour cela nous allons déterminer le signe de  $a_2$ . En ce point  $A = A_+ = \frac{X_+}{a}$  où  $X_+ = a + \bar{A} - 1 + 2\sqrt{\bar{A}(a-1)}$

$$I_+ = I_- = \frac{\sqrt{\bar{A}(a-1)} - 1}{a} \quad \text{avec} \quad a > \frac{\bar{A} + 1}{\bar{A}} ; \quad a > 1$$

les conditions de bon absorbant ( $\bar{v} \gg 1$ ) et bon amplificateur ( $v \ll 1$ ) permettent d'écrire

$$a_2 \sim \gamma + \bar{\gamma} + I \left( a \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\delta}} - \frac{\bar{v} a \bar{A}}{\bar{\delta}} \right) \quad \text{et} \quad \bar{\delta} \sim \bar{v}$$

Dans une mauvaise cavité;  $\gamma, \bar{\gamma} \ll 1$  de sorte que  $\bar{\gamma} \ll \bar{A} \bar{v}$  ;

(BIV-6)  $a_2 \sim -\bar{A} [\sqrt{\bar{A}(a-1)} - 1]$  est négatif ce qui traduit l'instabilité de la solution  $I_+$  au point considéré.

Lorsque  $a$  tend vers l'infini, les relations suivantes sont vérifiées du point de bifurcation :

$$A_+ \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad I_+ \rightarrow 0$$

## I - 2. Position du point de bifurcation en fonction de $2k$ .

### I - 2.a) Bonne cavité.

Nous considérons le cas où la constante de relaxation du champ est nettement inférieure à celles des niveaux réservoirs ce qui, en notation réduite, s'écrit :  $\gamma$  et  $\bar{\gamma} \gg 1$ .

Dans ce cas, pour des valeurs moyennes de  $I, A$  et  $\bar{A}$ , on a les approximations :  $a_1 \sim \alpha \bar{a} \sim a_0$  et  $a_2 \sim \alpha + \bar{a}$

Les conditions de stabilité de  $I_+$  :  $a_0 > 0$  et  $a_1 a_2 - a_0 > 0$  sont alors vérifiées sur toute la branche.

### I - 2.b) Critère approché dans le cas d'une mauvaise cavité effective.

Nous allons montrer que dans le cas d'une mauvaise cavité effective et pour un bon amplificateur, on peut développer les expressions à l'ordre 1 en  $\theta - \frac{\pi}{2}$  et  $\bar{\theta} - \frac{\pi}{2}$  ce qui permet de trouver une condition approchée proche de celle proposée par Arimondo.

$\theta$  et  $\bar{\theta}$  sont définis par les relations (BII-20) :

$$\alpha + i \omega_0 = \sqrt{D} e^{i\theta} \quad ; \quad \bar{\alpha} + i \omega_0 = \sqrt{\bar{D}} e^{i\bar{\theta}}$$

avec  $\omega_0 = \sqrt{a_1}$

Il convient donc de montrer dans un premier temps que  $\theta$  et  $\bar{\theta}$  sont voisins de  $\frac{\pi}{2}$ , c'est à dire que  $\alpha \ll \sqrt{a_1}$

$$a_1 = \alpha \bar{a} + l I (\delta \gamma + v \bar{a}) - \bar{l} a I (\bar{\delta} \bar{\gamma} + \bar{v} \alpha) \quad (\text{formule (BII-10)})$$

$$\text{où } \alpha = \gamma \left( 1 + \frac{I}{\delta + \nu I} \right) \text{ (BII-1 et 8) ; } \bar{\alpha} = \bar{\gamma} \left( 1 + \frac{a I}{\bar{\delta} + \bar{\nu} a I} \right)$$

$$\text{et } \ell = \frac{A}{d(1+I)} \text{ (BII-3 et 11) ; } \bar{\ell} = \frac{\bar{A}}{\bar{d}(1+aI)} \text{ ; } d = \delta + \nu I \text{ ;}$$

$$\bar{d} = \bar{\delta} + \bar{\nu} a I$$

Comme nous étudions un point haut de bifurcation, nous supposons remplies les deux conditions suivantes :

$$\text{(BIV-7) } I \neq A - 1 \quad \text{et} \quad aI \gg 1$$

Il suffit de vérifier sur les exemples proposés au long de cette étude que la seconde hypothèse est vérifiée même pour des valeurs faibles de  $a$ .

Dans ce cas, aux ordres de grandeur de  $A_2$ ,  $\alpha$  est de l'ordre de grandeur de  $\gamma$  et  $\bar{\alpha}$  de celui de  $\bar{\gamma}$ , sauf dans le cas des très mauvais absorbants pour lesquels la loi  $\bar{\nu} a I \gg 1$  ne serait pas vérifiée et où le terme en  $aI$  l'emporterait sur 1 dans  $\bar{\alpha}$ .

Le terme  $\alpha \bar{\alpha}$  est donc du même ordre que  $\gamma \bar{\gamma}$ .  
le terme  $\ell I (\delta \gamma + \nu \bar{\alpha})$  est lui aussi du même ordre que  $\gamma$  et  $\bar{\gamma}$ . Le terme en  $\bar{\ell} a I$  est lui en  $\frac{1}{aI}$ , de sorte qu'il est négligeable devant le précédent.

Aussi l'approximation de mauvaise cavité effective :  $\gamma$  et  $\bar{\gamma} \ll 1$  nous conduit-elle à négliger  $\alpha \bar{\alpha}$  et à poser :

$$\text{(BIV-8) } a_1 \neq \ell I (\delta \gamma + \nu \bar{\alpha}) \quad \text{qui est de l'ordre de grandeur de } \gamma.$$

Donc  $\omega_0$ , d'ordre de grandeur de  $\sqrt{\gamma}$ , est très grand devant  $\alpha$  et  $\bar{\alpha}$  ; l'approximation " $\theta$  et  $\bar{\theta}$  proches de  $\frac{\pi}{2}$ " est équivalente à l'approximation de mauvaise cavité effective.

Nous avons par exemple  $\left( \frac{\pi}{2} = 1,5708 \right)$  :

pour $\text{SF}_6$	$\theta = 1,5692$	$\bar{\theta} = 1,5708$
pour $\text{CH}_3\text{I}$	$\theta = 1,5617$	$\bar{\theta} = 1,5706$

Le résultat est meilleur pour  $\bar{\theta}$  car  $\bar{\gamma} \ll \gamma$

Nous pouvons alors développer les expressions à l'ordre 1 en  $\frac{(\bar{\alpha})}{\omega_0}$ .  
 (-)  $\theta - \frac{\pi}{2}$  c'est à dire en  $\frac{(\bar{\alpha})}{\omega_0}$ .

$$\begin{aligned} \sqrt{D} &\sim \omega_0 & \sqrt{\bar{D}} &\sim \omega_0 \\ \sin \theta &\sim 1 & \sin \bar{\theta} &\sim 1 \\ \cos \theta &\sim \frac{\pi}{2} - \theta \sim \frac{\alpha}{\omega_0} & \cos \bar{\theta} &\sim \frac{\bar{\alpha}}{\omega_0} \end{aligned}$$

et  $a_1 a_2 - a_0 = 0$  devient  $a_2 - \frac{a_0}{\omega_0^2} = 0$  (d'après la définition de  $\omega_0$ )

soit :

$$(BIV-9) \quad \alpha + \bar{\alpha} + \nu \ell I - \bar{\nu} \bar{\ell} a I = \frac{\ell \delta \gamma I}{\omega_0^2} \bar{\alpha} - \frac{\bar{\ell} \bar{\delta} a I \bar{\gamma}}{\omega_0^2} \alpha$$

pour  $\bar{\nu} \ll aI$ , la discussion sur  $\bar{\ell} a I$  montre que

$$\frac{\bar{\ell} \bar{\delta} a I \bar{\gamma}}{\omega_0^2} \alpha \ll \frac{\ell \delta \gamma I}{\omega_0^2} \bar{\alpha}$$

Nous allons comparer la formule (BIV-9) à la formule (BII-22)

$$h\alpha + h\bar{\alpha} + \nu \ell I - \bar{\nu} \bar{\ell} a I = 0$$

Nous allons de plus supposer que l'amplificateur est bon :  $\nu \ll 1$   
 dans ce cas :  $\delta \sim 1$  ;  $d = 1 + \nu(I+1) \sim \nu A + 1 \sim 1$  ;  $\ell \sim 1$

$$(BIV-10) \left\{ \begin{aligned} \text{et } a_1 &\sim \gamma(A-1) = \omega_0^2 \\ h &= \frac{\ell \delta \gamma I}{dD} \sim \frac{\ell \delta \gamma I}{\omega_0^2} = \frac{\gamma(A-1)}{\omega_0^2} \sim 1 \\ \bar{h} &= \frac{\bar{\ell} \bar{\delta} \bar{\gamma} a I}{\bar{d} \bar{D}} < \frac{\bar{\ell} \bar{\delta} \bar{\gamma} a I}{\bar{\nu} a I \bar{D}} \sim \frac{\bar{\ell} \bar{\delta} \bar{\gamma} a I}{\bar{\nu} a I \omega_0^2} \end{aligned} \right.$$

$$\text{or } \bar{l} < \frac{\bar{A}}{\bar{v}(aI)^2} \quad \text{et} \quad \bar{n} < \frac{\bar{\delta} \bar{\gamma}}{(\bar{v} aI)^2 \gamma(A-1)} \ll 1$$

les conditions de mauvaise cavité effective et bon amplificateur conduisent donc à l'approximation  $h = 1$ ,  $\bar{n} = 0$  qui remplit la condition (BII-23)  $h - \bar{n} = 1$

L'équation (BIV-9) s'écrit alors :

$$\alpha + \bar{\alpha} + v \ell I - \bar{v} \bar{l} aI = \bar{\alpha}$$

soit

(BIV-11)  $a_2' = \alpha + v \ell I - \bar{v} \bar{l} aI = 0$  qui est l'approximation cherchée, proche de  $a_2 = 0$ , et rien d'autre que la condition (BII-22) de validité du calcul de bifurcation dans l'approximation  $h = 1$ ,  $\bar{n} = 0$ . On vérifie ainsi la cohérence du modèle à cette approximation.

#### I-2.c) Position approximative du point haut dans ce cas.

Arimondo et al. ont proposé comme dernière approximation l'équation (BIV-12)  $a_2'' = v \ell I - \bar{v} \bar{l} aI = 0$  qui détermine le point  $A_2''$ , position approchée du point de bifurcation.

Cette approximation, outre le fait qu'elle n'est justifiée que par la petitesse de ce terme au point réel de bifurcation, a l'inconvénient de ne dépendre que de  $v$  et  $\bar{v}$ , d'être indépendant de  $2\kappa$ ,  $\gamma$ ,  $\bar{\gamma}$  et de masquer ainsi le rôle de  $2\kappa$ , paramètre le plus important d'après l'étude précédente. Elle a néanmoins l'avantage de permettre une détermination rapide du point de bifurcation que nous allons comparer à la solution de (BIV-11) afin de déterminer son domaine de validité. Nous allons tout d'abord calculer la position  $A_2''$  dans l'approximation du bon amplificateur et de la mauvaise cavité effective, puis nous chercherons un ordre de grandeur de l'écart à la solution  $A_2'$  de (BIV-11).

Avec les hypothèses précédentes :  $I \neq A - 1$  ;  $aI \gg 1$  ;  $\gamma$  et  $\bar{\gamma} \ll 1$  ;  $v \ll 1$

on a  $\alpha \sim \gamma(1 + I) \sim \gamma A$  ;  $\ell \sim 1$

Si de plus on prend une condition lâche de bon absorbant :  $\bar{v} > 1$ ,

$$\bar{a} \sim \bar{\gamma} \left(1 + \frac{1}{\bar{v}}\right) \quad \text{et} \quad \bar{\ell} \sim \frac{\bar{A}}{\bar{v}(aI)^2}$$

Il vient alors :

$$(BIV-13) \quad \begin{cases} a_2' \sim \gamma A + v(A-1) - \frac{\bar{A}}{a(A-1)} & \text{qui s'annule en } A = A_2' \\ a_2'' \sim v(A-1) - \frac{\bar{A}}{a(A-1)} & \text{qui s'annule en } A = A_2'' \end{cases}$$

la solution  $A_2''$  est immédiate :

$$(BIV-14) \quad A_2'' = 1 + \left[ \frac{\bar{A}}{av} \right]^{\frac{1}{2}}$$

On vérifie bien que le point se rapproche de  $A = 1$  lorsque  $a$  croît. On obtient pour :  $SF_6$  :  $A_2'' = 1,150$  et pour  $CH_3I$  :  $p_2'' = 6,01$  Torr.

En posant  $\epsilon' = A_2' - 1$ , la solution de la première équation devie  $\epsilon' a_2'' = (v + \gamma) \epsilon'^2 + \gamma \epsilon' - \frac{\bar{A}}{a} = 0$ .

En posant  $\epsilon = A_2'' - 1$  et  $\Delta = \epsilon' - \epsilon$ , on va chercher un ordre de grandeur de  $\Delta$  afin de trouver les critères de validité de la solution (BIV-14). L'approximation est bonne si  $|\Delta| \ll 1$ . On peut alors développer  $a_2'$  au premier ordre en  $\Delta$

$$a_2'(\epsilon') = 0 \neq a_2'(\epsilon) + \left( \frac{d a_2'}{d \epsilon'} \right)_\epsilon \Delta = \gamma \epsilon^2 + \gamma \epsilon + [2\epsilon(v + \gamma) + \gamma] \Delta$$

$$(BIV-15) \quad \Delta = -\epsilon \frac{1 + \epsilon}{1 + 2\epsilon \left(1 + \frac{v}{\gamma}\right)}$$

Le signe moins nous indique que  $A_2'$  et  $A_2''$  évoluent en sens inverse comme nous l'avions remarqué au tableau (B-8).

Nos hypothèses de mauvaise cavité effective et bon amplificateur imposent  $\gamma \ll \nu$

Si  $\epsilon = \left(\frac{\bar{A}}{a\nu}\right)^{\frac{1}{2}} \ll \frac{\gamma}{\nu}$  alors  $|\Delta| \sim \nu + \epsilon \ll 1$  l'approximation est bonne.

Si  $\frac{\gamma}{\nu} \ll \epsilon \ll 1$  alors  $|\Delta| \sim \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\nu} \ll 1$

Si  $1 \ll \epsilon \ll \frac{\nu}{\gamma}$  alors  $|\Delta| \sim \epsilon \frac{\gamma}{\nu} \ll 1$

Si  $1 \ll \frac{\nu}{\gamma} \ll \epsilon$  alors  $|\Delta| \sim \epsilon \frac{\gamma}{\nu} \gg 1$  et l'approximation  $A_2 \neq A_2''$  est mauvaise.

Le critère pour que le point de bifurcation soit donné par :

$A_2'' = 1 + \left(\frac{\bar{A}}{a\nu}\right)^{\frac{1}{2}}$  solution de  $\nu \ell I - \bar{\nu} \bar{\ell} aI = 0$  est donc :

$$(BIV-16) \quad \epsilon = \left(\frac{\bar{A}}{a\nu}\right)^{\frac{1}{2}} \ll \frac{\nu}{\gamma}$$

à titre d'exemple : pour  $SF_6$   $\frac{\nu}{\gamma} = 46$  et  $\left(\frac{\bar{A}}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = \epsilon = 0,15$  l'approximation est bonne alors que pour  $CH_3I$   $\frac{\nu}{\gamma} = 6,43$  (en  $A_2$ ) et  $\epsilon = 3,48$  l'approximation est moins bonne.

On vérifie sur la formule (BIV-16) les résultats trouvés au tableau (B-8) : l'approximation  $A_c = A_2''$  est meilleure quand  $a$  ou  $2\kappa$  augmentent.

### I - 3. Perte stricte de stabilité.

Nous avons considéré que la stabilité de la solution périodique émergente au point de bifurcation est donnée par le signe de  $\mu_2$ . Cette affirmation repose sur l'hypothèse d'une perte stricte de stabilité par la branche  $I_+$ , hypothèse qui s'exprime par l'inégalité :

$$(BIV-17) \quad \operatorname{Re} \langle f_{u,\mu}^{(1,1)}(0 | \zeta_0^*), \zeta_0^* \rangle > 0$$

Nous allons vérifier que cette condition est satisfaite pour  $\text{CH}_3\text{I}$  et  $\text{SF}_6$  dans l'approximation au 1<sup>o</sup> ordre en  $\bar{\theta} - \frac{\pi}{2}$  (aux points hauts).

L'expression de  $\langle f_{u,\mu}^{(1,1)}(0 | \zeta_0), \zeta_0^* \rangle$  est donnée en (BII-50). Nous allons la développer dans les conditions :

$$\gamma, \bar{\gamma} \ll 1, \quad v \ll 1 < \bar{v}, \quad I \sim A - 1$$

A cet ordre d'approximation  $x^2 \sim \frac{1}{2}$  et on peut négliger  $\alpha'$  et  $\bar{\alpha}'$ . Le paramètre de bifurcation  $\mu$ , dans nos exemples, peut dépendre de la pression dans l'amplificateur. C'est pourquoi nous posons :

(BIV-18) 
$$\begin{cases} A(\mu) = A - \mu \\ a(\mu) = a - \tilde{a} \mu \\ \gamma(\mu) = \gamma - \tilde{\gamma}(\mu) \end{cases} \quad A, a \text{ et } \gamma \text{ étant la valeur des paramètres au point de bifurcation.}$$

BU  
LILLE

(BIV-19) 
$$I' = \frac{dI}{d\mu} = b_1 + \frac{1}{2} \frac{2b b_1 - c_1}{(b^2 - c)^{\frac{1}{2}}}$$

où on a posé :

(BIV-20) 
$$\begin{cases} b(\mu) = \frac{A(\mu) - 1}{2} - \frac{\bar{A} + 1}{2a(\mu)} = b + b_1 \mu \\ c(\mu) = \frac{\bar{A} + 1 - A(\mu)}{a(\mu)} = c + c_1 \mu \\ b_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\bar{A} + 1}{2a} \frac{\tilde{a}}{a} ; \quad c_1 = \frac{1}{a} + c \frac{a_2}{a} \end{cases}$$

les autres dérivées valent :

(BIV-22) 
$$\begin{cases} g' = -g I' \left( \frac{v}{d} + \frac{1}{1+I} \right) ; \quad \bar{g}' = -\bar{g} (aI)' \left[ \frac{\bar{v}}{d} + \frac{1}{1+aI} \right] \\ \left( \frac{AI}{d} \right)' / \left( \frac{AI}{d} \right) = -\frac{1}{A} + I' \left( \frac{1}{I} - \frac{v}{d} \right) \\ \left( \frac{I}{d} \right)' / \left( \frac{I}{d} \right) = \frac{I'}{I} - \frac{\bar{v}(aI)'}{d} \\ \ell' = -g \left[ 1 + AI' \left( \frac{1}{1+I} + \frac{v}{d} \right) \right] ; \quad \bar{\ell}' = -\bar{A} \bar{g} \left[ \frac{\bar{v}(AI)'}{d} + \frac{(aI)'}{1+aI} \right] \\ (\gamma g)' / \gamma g = - \left[ \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} + I' \left( \frac{1}{1+I} + \frac{v}{d} \right) \right] \end{cases}$$

En général  $\sqrt{D}$  et  $\sqrt{\bar{D}} \ll 1$  de sorte que

$$\operatorname{Re} \langle f_{u,\mu}^{(1,1)}(0|\tau_0), \tau_0^* \rangle \sim \frac{1}{2} [\delta \bar{L}' - \bar{\delta} L']$$

On vérifie sur  $\text{CH}_3\text{I}$  et  $\text{SF}_6$  que  $\bar{g} \ll g$ , de sorte que la condition (BIV-17) se réduit à

(BIV-22) 
$$- \left( \frac{1}{A_2} + \frac{I'}{1+I} \right) > 0$$



- pour  $\text{CH}_3\text{I}$  (point haut) :  $A_2 = 4,24$  ;  $I = 2,99$  ;  $I' = -1,28$   
la relation est vérifiée
- pour  $\text{SF}_6$ , exemple typique où  $a \gg 1$ ,  $c \sim c_1 \sim 0$  ;  $I' \sim -1$   
et  $I = (A_2 - 1) - \frac{\bar{A}}{a} \frac{A_2}{A_2 - 1}$  donc  $(1+I)^{-1} > A^{-1}$ , la relation est bien vérifiée.

Les principaux résultats de ce paragraphe sont donc :

- (1) . la stabilité à fort champ de la branche  $I_+$  a été vérifiée dans le cas d'un bon absorbant ( $\bar{\nu} \gg 1$ ) et d'un bon amplificateur ( $\nu \ll 1$ ).
- (2) . dans la condition de mauvaise cavité effective :  $\gamma$  et  $\bar{\gamma} \ll 1$ , la branche  $I_+$  ne compte qu'un point haut de bifurcation lorsque  $I_-$  existe.
- (3) . dans une bonne cavité effective,  $I_+$  est partout stable.
- (4) . l'hypothèse de mauvaise cavité effective est équivalente à dire  $\theta$  et  $\bar{\theta} \sim \frac{\pi}{2}$ . Dans une telle cavité, pour un bon amplificateur ( $\nu \ll 1$ ) et une condition lâche pour l'absorbant :  $\bar{\nu} > 1$ , le point haut est donné par la formule (BIV-14) :  $A_2 \simeq 1 + \left(\frac{\bar{A}}{a\nu}\right)^{\frac{1}{2}}$  solution de la condition approchée (BIV-11) :  $\alpha + \nu \ell I - \bar{\nu} \bar{\ell} aI = 0$  proche de la condition  $a_2 = 0$ . Le critère de validité de l'approximation (BIV-14) est :  $\left(\frac{\bar{A}}{a\nu}\right)^{\frac{1}{2}} \ll \frac{\nu}{\gamma}$  au point de bifurcation (relation (BIV-16)).
- (5) . Dans l'hypothèse  $\gamma, \bar{\gamma} \ll 1$  ;  $\nu \ll 1$  ;  $\bar{\nu} > 1$  la condition de perte stricte de stabilité s'écrit au point haut :

$$(BIV-22) \quad - \quad \left( \frac{1}{A_2} + \frac{I'}{1+I} \right) > 0, \quad \text{relation vérifiée pour } a \gg 1.$$

## II - DISCUSSION.

### II - 1. Comparaison du modèle aux résultats expérimentaux.

Les exemples numériques traités montrent que le modèle rend assez bien compte de la position du point de bifurcation sur  $I_+$  (trouvé expérimentalement à 9 Torr pour  $\text{CH}_3\text{I}$  dans Arimondo et al. [17] figure 6) mais ne décrit pas correctement ce qui se passe au-delà de ce point :

- on ne retrouve pas de solution pulsée sur  $\text{SF}_6$
- la solution pulsée trouvée sur  $\text{CH}_3\text{I}$  coexistant avec la branche stationnaire  $I_+$ , un cycle d'hystérésis aurait dû être observé entre ces deux solutions, ce qui n'est pas le cas. De plus, expérimentalement, la solution périodique se rapproche plus de celle que nous avons trouvé pour  $a < 1$  ; elle semble provenir d'une déformation de la solution de faible amplitude alors que nous avons observé numériquement une transition directe vers une solution pulsée.

### II - 2. Discussion des approximations.

Le nombre important de paramètres intervenant dans le problème et la faible précision avec laquelle certains d'entre eux sont connus, rend la précision sur la position du point trouvé assez faible. A titre d'exemple un calcul a été effectué sur  $\text{CH}_3\text{I}$  en modifiant la valeur de la saturabilité relative  $a$ , paramètre dont on ne connaît en général qu'un ordre de grandeur. En prenant  $a = 0,36 p$  au lieu de  $a = 0,76 p$ . Le nouveau point obtenu :  $p_2 = 6,9$  Torr, est décalé de plus d'un torr (20 %) par rapport au point précédemment calculé.

La position du point de bifurcation, la forme et l'existence des solutions périodiques peuvent être affectées, notamment aux grandes valeurs de  $a$  où nous avons constaté l'existence d'une valeur critique au dessus de laquelle le laser précipitait.

Néanmoins, le modèle établi sur  $SF_6$  par Dupré et al. [16], dont est issu le modèle étudié ici, permettait à ces auteurs d'obtenir numériquement des solutions pulsées sur  $SF_6$ . Arimondo [20] a déterminé la valeur des paramètres utilisés dans les simulations numériques de Dupré et al. [16]. Ces valeurs sont :

$$\begin{aligned}
 & A = 3,22 \quad ; \quad \bar{A} = 13,7 \bar{p} \quad ; \quad a = \frac{20,4}{\bar{p}} \quad ; \quad 2\kappa = 16 \cdot 10^7 \\
 \text{(BIV-23)} \quad & \gamma_1 = 6 \cdot 10^5 \quad ; \quad \gamma_2 = 6 \cdot 10^4 \quad ; \quad \bar{\gamma} = 2,5 \cdot 10^4 \bar{p} \\
 & \bar{\gamma}_R = 1 \cdot 10^7 \bar{p} \quad ; \quad \bar{\gamma}'_R = 3 \cdot 3 \cdot 10^4 \bar{p} \quad ; \quad \gamma_R = 7 \cdot 4 \cdot 10^7 \quad ; \quad \gamma'_R = 5,2 \cdot 10^6
 \end{aligned}$$

Nous avons intégré le système (BI-30) pour  $\bar{p} = 50$  mT et  $\bar{p} = 100$  mT en prenant deux conditions initiales différentes à chaque fois : l'une proche de  $I_+$  et l'autre proche de  $I_0$ . La simulation numérique a montré que seul  $I_+$  est stable en ces points et qu'aucune solution pulsée n'existait.

Les différences avec le modèle de Dupré sont les suivants :

\* Nous avons égalé les constantes de relaxation des niveaux bas et hauts, notamment, en posant  $\gamma = \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}$ , celles des niveaux vibrationnels. Cette simplification n'est certainement pas d'ordre à supprimer une solution, d'autant que  $\bar{\gamma}$  est apparu comme peu influent sur la stabilité de  $I_+$ .

\* Le système de neuf équations a été réduit à cinq en supposant constante la somme des populations des niveaux résonants d'une part et des niveaux réservoirs d'autre part. L'analyse des résultats numériques obtenus par Dupré montre que cette approximation est tout à fait justifiée.

\* Le système a finalement été réduit à trois par élimination adiabatique des niveaux résonants. Nous avons vérifié sur  $CH_3I$  par intégration numérique, et Arimondo et al. [17] ont vérifié sur  $SF_6$  par le calcul de la position du point de bifurcation que cette élimination ne modifie pas fondamentalement les résultats du modèle.

\* L'émission spontanée a été négligée. Ce fait perturbe certainement la solution pulsée et, ne serait-ce que pour des raisons d'intégration numé-

rique, il serait souhaitable de la garder. Néanmoins, étant donné l'ordre de grandeur de cette perturbation, elle ne doit pas restreindre énormément le domaine d'existence de la solution pulsée.

L'élément le plus déterminant semble donc être la linéarisation de l'équation en champ, justifiée dans le cas des faibles pertes ou gains. Or si cette approximation est raisonnable dans le cas de  $\text{CH}_3\text{I}$  où le coefficient d'absorption en intensité par unité de longueur de cellule vaut  $3,2 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$ , elle l'est beaucoup moins dans le cas de  $\text{SF}_6$  où ce coefficient vaut  $0,7 \text{ cm}^{-1}$  et où l'exponentielle s'éloigne du développement linéaire. Nous discutons ci-dessous du modèle non linéaire de Dupré.

D'autre part la pression de l'absorbant utilisée dans les expériences varie de quelques millitorrs à quelques centaines de millitorrs. Il est évident qu'à ces pressions on ne peut négliger les effets inhomogènes dus à l'effet Doppler. Le paragraphe (III) propose une étude du modèle en régime inhomogène.

On peut aussi tenir compte des pertes sur le réseau, ainsi que l'ont proposé Arimondo et Dinelli [21], ce qui revient à remplacer dans la définition de  $2\kappa$  par  $2 - r_1 - r_2$  où  $r_1$  et  $r_2$  sont les coefficients de réflexion du miroir et du réseau. Ces pertes supplémentaires ont pour effet de remonter le point haut.

Enfin il est évident que la levée de l'approximation des rate equations, en réintroduisant la polarisation, fera apparaître d'autres bifurcations et d'autres solutions périodiques, une élimination adiabatique altérant profondément le diagramme de phase d'un système [22]. Il est notamment probable qu'elle perturbe la branche  $I_0$  et fasse apparaître une bifurcation en dessous du seuil du type de celle observée dans le modèle à deux niveaux [19]. Une telle bifurcation peut donner naissance à de nouvelles branches pulsées qui se développent jusque dans des zones expérimentalement accessibles. Ce modèle fera peut-être aussi apparaître une structure de pulse plus proche de la réalité ainsi que les résultats du modèles à 2 niveaux [51] le laissent supposer.

### II - 3. Bifurcation sur $I_+$ dans le modèle non linéaire de Dupré.

En négligeant l'émission spontanée et en égalant les constantes

de relaxation, le système, réduit à 5 équations, s'écrit dans nos notations :

$$\frac{d\phi}{dt} = \left\{ \frac{(1-T)}{T} \exp \left( \mathcal{A} \frac{\ell}{c} \Delta_J - \bar{\mathcal{A}} \frac{\bar{\ell}}{c} \bar{\Delta}_J \right) - \frac{1}{T} \right\} \frac{cT}{L} \phi$$

$$\dot{\Delta}_J = - (2\mathcal{A} \phi + \gamma_R) \Delta_J + \gamma_R' \Delta$$

$$\dot{\Delta} = \gamma_R \Delta_J - \gamma_R' \Delta - \gamma(\Delta - \sigma)$$

+ termes barrés pour l'absorbant.

$$\text{On pose : } 2\kappa = \frac{cT}{L} \quad \zeta = \frac{\ell}{L} \quad \bar{\zeta} = \frac{\bar{\ell}}{L}$$

le passage en unités réduites donne :

$$t \Rightarrow 2\kappa t \quad \gamma \Rightarrow \frac{\gamma}{2\kappa} \quad \bar{\gamma} \Rightarrow \frac{\bar{\gamma}}{2\kappa} \quad \mathcal{A} \Rightarrow \frac{\mathcal{A}}{2\kappa} \quad \bar{\mathcal{A}} \Rightarrow \frac{\bar{\mathcal{A}}}{2\kappa} \quad \Delta \Rightarrow \sigma \Delta \quad \Delta_J \Rightarrow \sigma \Delta_J$$

L'élimination adiabatique des niveaux résonants  $\Delta_J$  et  $\bar{\Delta}_J$  conduit alors au système de 3 équations suivant (on a utilisé les mêmes notations que précédemment) :

$$\left( \frac{d}{dt} + \frac{1}{T} \right) I = I \frac{1-T}{T} \exp \left( \frac{\mathcal{A} \delta T}{d} \Delta - \frac{\bar{\mathcal{A}} \bar{\delta} T}{\bar{d}} \bar{\Delta} \right)$$

$$\left( \frac{d}{dt} + \gamma \right) \Delta = \gamma \left( 1 - \frac{\Delta I}{d} \right)$$

$$\left( \frac{d}{dt} + \bar{\gamma} \right) \bar{\Delta} = \bar{\gamma} \left( 1 - \frac{\bar{\Delta} a I}{\bar{d}} \right)$$

qui se réduit au système étudié dans les chapitres précédents lorsqu'on développe l'exponentielle au 1er ordre.

Les solutions stationnaires non nulles sont solutions de l'équation :

$$\frac{1}{1-T} = \exp \left( \frac{\mathcal{A} T}{1+I} - \frac{\bar{\mathcal{A}} T}{1+aI} \right)$$

soit 
$$\frac{A}{1+I} - \frac{\bar{A}}{1+aI} - c = 0$$

avec 
$$c = \frac{1}{T} \text{Log} \frac{1}{1-T}$$

La solution au point  $(A, \bar{A})$  est donc simplement  $I_+ \left( \frac{A}{c}, \frac{\bar{A}}{c} \right)$ .

Les équations de stabilité linéaire sont exactement les mêmes qu'aux chapitres précédents puisqu'elles correspondent à la linéarisation du modèle.

Il suffit donc, pour calculer la position du point de bifurcation, de remplacer  $I_+(A, \bar{A})$  par  $I_+ \left( \frac{A}{c}, \frac{\bar{A}}{c} \right)$  dans les équations précédentes.

Or pour  $T = 5 \%$ , on a  $c = 1,026$  et le point est très proche de celui calculé dans un modèle à pertes faibles.

En revanche les non linéarités sont différentes et perturbent fortement les solutions périodiques.

### III - MODELE EN ELARGISSEMENT DOPPLER.

#### III - 1. Etablissement du modèle.

Nous reprenons le modèle développé au chapitre BI en supposant le profil de gain du milieu élargi par effet Doppler et considérons que les vitesses des molécules sont régies par la fonction de distribution de Maxwell.

$$(BIV-24) \quad W(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi} Ku} e^{-(v/u)^2}$$

$\frac{K}{\gamma}$  caractérise l'inhomogénéité Doppler du milieu. Dans le système d'équations d'évolution (BI-3) des éléments de l'opérateur densité pour le milieu absorbant ou amplificateur on a alors :

$$(BIV-25) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} & \text{pour les cohérences} \\ \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} & \text{pour les populations dans l'approximation} \\ & \text{du champ moyen qui supprime les effets} \\ & \text{longitudinaux sur les populations.} \end{array} \right.$$

En cherchant des solutions du type :

- pour les cohérences (matrice (BI-1)) :

$$\begin{aligned} \rho(z, v, t) &= \sum_m \frac{1}{2} [ \rho_m^+(v, t) e^{-i\omega_m t} + \rho_m^-(v, t) e^{i\omega_m t} ] U_m(z) \\ &= \sum_{K', \omega'} \rho(v, K', \omega', t) e^{-i(\omega' t - K' z)} \end{aligned}$$

- pour les populations :

$$\rho_{J_2}(z, v, t) = \delta_{K', 0} \delta_{\omega', 0} \rho_{J_2}(v, 0, 0, t) e^{-i(\omega' t - K' z)}$$

(approximation du champ moyen)

et des formules analogues pour les autres populations comme nous l'avions fait en (BI-14).

Le système d'équations d'évolution de la matrice densité, donné par (BI-18) dans le modèle homogène, s'écrit ici :

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho_{J_2}(v, 0, 0, t)}{\partial t} &= \frac{\mu}{\hbar} \sum_{\substack{K' = \pm K_n \\ \omega' = \pm \omega_n}} [i E(K', \omega', t) \rho(v, -K', -\omega', t) + cc] \\ &\quad - \gamma_R \rho_{J_2}(v, 0, 0, t) + \gamma_R^I \rho_2(v, 0, 0, t) \\ \frac{\partial \rho_{J_1}(v, 0, 0, t)}{\partial t} &= - \frac{\mu}{\hbar} \sum_{\substack{K' = \pm K_n \\ \omega' = \pm \omega_n}} (i E(K', \omega', t) \rho(v, -K', -\omega', t) + cc) \\ &\quad - \gamma_R \rho_{J_1}(v, 0, 0, t) + \gamma_R^I \rho_1(v, 0, 0, t) \\ \frac{\partial \rho_2(v, 0, 0, t)}{\partial t} &= - (\gamma + \gamma_R^I) \rho_2(v, 0, 0, t) + \gamma_R \rho_{J_2}(v, 0, 0, t) + P_0 \\ \frac{\partial \rho_1(v, 0, 0, t)}{\partial t} &= - (\gamma + \gamma_R^I) (\rho_1(v, 0, 0, t) - \rho_1^0) + \gamma_R \rho_{J_1}(v, 0, 0, t) \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} - i \omega' + i K' \right) \rho(v, K', \omega', t) &= \frac{i \mu}{\hbar} E(+K', +\omega', t) (\rho_{J_2} - \rho_{J_1})(v, 0, 0, t) \\ &\quad + (i \omega_a - \gamma_R) \rho(v, K', \omega', t) \end{aligned} \right\} \text{(BIV-27)} \end{aligned}$$

La polarisation est reliée à la cohérence par l'équation :

$$P(z,t) = c_0 \mu \int_{-}^{+\infty} (\rho(z,v,t) + \rho^*(z,v,t)) W(v) dv$$

Nous allons supposer, comme au chapitre BI, constantes les populations totales :

$$\rho_{J_1} + \rho_{J_2} = \text{cste} ; \quad \rho_1 + \rho_2 = \text{cste}$$

et appliquer l'élimination adiabatique de la cohérence dans le système

(BIV-27) en supposant  $\gamma \bar{\gamma} \ll \gamma_R$ ,  $\bar{\gamma}_R$  et en posant  $\frac{\partial \rho(v, K', \omega', t)}{\partial t} = 0$

On obtient alors :

$$(BIV-28) \quad \rho(v, K', \omega', t) = \frac{i\mu}{\hbar \gamma_R} E(K', \omega', t) (\rho_{J_2} - \rho_{J_1})(v, 0, 0, t) \mathcal{L}\left(-\frac{\omega' + \omega_a - K'v}{\gamma_R}\right)$$

En utilisant l'approximation résonante dans laquelle on néglige les termes oscillant à  $\omega_a + \omega_n$  et en faisant le changement de notations suivant :

$$(BIV-29) \quad \frac{\epsilon_0 E^2(t)}{4} = \hbar \omega \phi(t) ; \quad \left(\overset{-}{\sigma}\right)\left(\overset{-}{\Delta}\right)(v,t) = c_0 \left(\overset{-}{\rho}_{J_2}(v,0,0,t) - \overset{-}{\rho}_{J_1}(v,0,0,t)\right) ;$$

$$(BIV-30) \quad \left(\overset{-}{\sigma}\right)\left(\overset{-}{\Delta}\right)(v,t) = c_0 \left(\overset{-}{\rho}_2(v,0,0,t) - \overset{-}{\rho}_1(v,0,0,t)\right)$$

où  $c_0$  est le nombre de molécules par unité de volume dans l'amplificateur et  $\sigma$  l'inversion de population des niveaux réservoirs en champ nul et en introduisant les coefficients d'absorption et d'amplification par unité de longueur :  $\overset{-}{\mathcal{A}}_0$

$$(BIV-31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\overset{-}{\mathcal{A}}\right)(v) = \overset{-}{\mathcal{A}}_0 \overset{-}{\mathcal{L}}_{\pm} \quad \text{avec} \quad \overset{-}{\mathcal{A}}_0 = -\frac{1}{\left(\overset{-}{\gamma}\right)} \left(\frac{\overset{-}{\mu}}{\hbar}\right)^2 \frac{\hbar \omega_n}{\epsilon_0} \\ \text{et} \quad \overset{-}{\mathcal{L}}_{\pm} = \frac{1}{2} [\mathcal{L}(x_+) + \mathcal{L}(x_-)] \quad \text{avec} \quad x_{\pm} = \frac{\omega_n - \omega_a}{\left(\overset{-}{\gamma}\right)} \pm \frac{Kv}{\left(\overset{-}{\gamma}\right)} \end{array} \right.$$

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{1+ix}$$

Le système à cinq équations s'écrit :

$$(BIV-32) \left\{ \begin{aligned} \phi(t) &= [\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}(v) \Delta_J(v,t) W(v) dv + \bar{\zeta} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{W}(v) \bar{\mathcal{A}}(v) \bar{\Delta}_J(v,t) dv - 1] \\ \dot{\Delta}_J(v,t) &= -(2\mathcal{A}(v) \phi(t) + \gamma_R) \Delta_J(v,t) + \gamma_R^i \Delta(v,t) \\ \dot{\bar{\Delta}}_J(v,t) &= -(2\bar{\mathcal{A}}(v) \phi(t) + \bar{\gamma}_R) \bar{\Delta}_J(v,t) + \bar{\gamma}_R^i \bar{\Delta}(v,t) \\ \dot{\Delta}(v,t) &= \gamma_R \Delta_J(v,t) - \gamma_R^i \Delta(v,t) - \gamma(\Delta(v,t) - 1) \\ \dot{\bar{\Delta}}(v,t) &= \bar{\gamma}_R \bar{\Delta}_J(v,t) - \bar{\gamma}_R^i \bar{\Delta}_R(v,t) - \bar{\gamma}(\bar{\Delta}(v,t) - 1) \end{aligned} \right.$$

En éliminant adiabatiquement les niveaux résonants et en introduisant les notations suivantes compatibles avec celles du modèle homogène des chapitres précédents :

$$(BIV-33) \left\{ \begin{aligned} v &= \frac{\gamma}{\gamma_R^i} \quad , \quad \bar{v} = \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}_R^i} \\ \overset{(-)}{G} &= \frac{1}{2} \overset{(-)}{\zeta} \frac{\overset{(-)}{\gamma_R^i}}{\overset{(-)}{\gamma_R}} \overset{(-)}{\mathcal{A}}_0 \quad ; \quad A = \frac{G\sigma}{\kappa} \quad ; \quad \overset{(-)}{S} = \delta \frac{\overset{(-)}{2\mathcal{A}}_0}{\overset{(-)}{\gamma}} \frac{\overset{(-)}{\gamma_R^i}}{\overset{(-)}{\gamma_R}} \\ \bar{A} &= -\frac{\bar{G}\sigma}{\kappa} \\ a &= \frac{\bar{S}}{S} \quad , \quad I = S\phi \quad ; \quad d(v) = \delta + v \mathcal{L}_{\pm} I \quad ; \quad \bar{d} = \bar{\delta} + \bar{v} \bar{\mathcal{L}}_{\pm} aI \end{aligned} \right.$$

le système à trois équations de notre modèle s'écrit :

$$(BIV-34) \left\{ \begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} + 1 \right) I &= I \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A\delta \mathcal{L}_{\pm}}{d(v)} \Delta(v,t) W(v) dv - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{A} \bar{\delta} \bar{\mathcal{L}}_{\pm}}{\bar{d}(v)} \bar{\Delta}(v,t) \bar{W}(v) dv \right] \\ \left( \frac{d}{dt} + \gamma \right) \Delta(v,t) &= \gamma \left( 1 - \frac{\mathcal{L}_{\pm} \Delta(v,t)}{d(v)} I \right) \\ \left( \frac{d}{dt} + \bar{\gamma} \right) \bar{\Delta}(v,t) &= \bar{\gamma} \left( 1 - \frac{\bar{\mathcal{L}}_{\pm} \bar{\Delta}(v,t) aI}{\bar{d}(v)} \right) \end{aligned} \right.$$

III - 2. Solutions stationnaires et équation de stabilité linéaire.

III-2.a) Solutions stationnaires.

Les solutions du système précédents sont :

$$(BIV-35) \quad \Delta_{st}(v) = \frac{d(v)}{\delta(1+\mathcal{L}_{\pm}I)} \quad ; \quad \bar{\Delta}_{st}(v) = \frac{\bar{d}(v)}{\bar{\delta}(1+\bar{\mathcal{L}}_{\pm} aI)}$$

$$(BIV-36) \quad I_{st} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A \mathcal{L}_{\pm}}{1+\mathcal{L}_{\pm}I} W(v) dv - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{A} \bar{\mathcal{L}}_{\pm}}{1+\bar{\mathcal{L}}_{\pm}I a} \bar{W}(v) dv - 1 \right] = 0$$

la solution est la même que dans le modèle à 2 niveaux en élargissement inhomogène [23] et s'exprime à l'aide de la fonction de dispersion de plasma qui conduit à des expressions analytiques dans les limites homogène et Doppler infini.

L'équation (BIV-36) se réécrit :

$$(BIV-37) \quad I [A g(\theta, u', I) - \bar{A} \bar{g}(\bar{\theta}, \bar{u}', aI) - 1] = 0$$

où  $g$  est le facteur de gain dont la définition est la même que celle de Salomaa et Stenholm [23] au facteur de normalisation près, et  $u'$  l'élargissement Doppler en unités réduites :  $u' = \frac{Ku}{\gamma}$ .

Dans nos notations  $\theta = \frac{\omega_n - \omega_a}{\gamma_R}$

$$g = \int_{-\infty}^{+\infty} W(v) \frac{\mathcal{L}_{\pm}}{1 + \mathcal{L}_{\pm} I} dv = \frac{2}{u'} [A_1 Z\left(\frac{x_1}{u'}\right) + A_3 Z\left(\frac{x_3}{u'}\right)]$$

où  $A_i$  et  $x_i$  sont des fonctions de  $\theta$  et  $I$  données en [18] et [23] et  $Z(\zeta)$  la fonction de dispersion de plasma :

$$Z(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t - \zeta} dt$$

Nous posons :

$$(BIV-38) \left\{ \begin{aligned} g(v) &= \frac{\delta \mathcal{L}_{\pm} \Delta_{st}(v)}{d^2(v)} = \frac{\mathcal{L}_{\pm}}{d(v) (1 + \mathcal{L}_{\pm} I)} \\ \bar{g}(v) &= \frac{\bar{\delta} \bar{\mathcal{L}}_{\pm} \bar{\Delta}_{st}(v)}{\bar{d}^2(v)} = \frac{\bar{\mathcal{L}}_{\pm}}{\bar{d}(v) (1 + \bar{\mathcal{L}}_{\pm} aI)} \\ g &= \int_{-\infty}^{+\infty} W(v) g(v) dv \quad ; \quad \bar{g} = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{W}(v) \bar{g}(v) dv \end{aligned} \right.$$

La fonction de gain s'écrit alors :

$$g(\theta, u', I) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(v) d(v) g(v) dv$$

$$\bar{g}(\bar{\theta}, \bar{u}', aI) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{W}(v) \bar{d}(v) \bar{g}(v) dv$$



### III-2b). Stabilité linéaire.

On pose  $I(t) = I_{st} + I'(t)$  ;  $\Delta^{(-)}(v, t) = \Delta_{st}^{(-)}(v) + \Delta'^{(-)}(v, t)$

On sous-entendra l'indice  $st$  par la suite.

En linéarisant le système (BIV-34), on obtient les équations suivantes qui gouvernent l'évolution de la perturbation.

$$(BIV-39) \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} I'(t) &= - I'(t) (1 - A\delta g + \bar{A}\bar{\delta}\bar{g}) + \int_{-\infty}^{+\infty} W(v) \frac{A \delta \mathcal{L}_{\pm} I}{d(v)} \Delta'(v, t) dv \\ &\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{W}(v) \frac{\bar{A} \bar{\delta} \bar{\mathcal{L}}_{\pm} aI}{\bar{d}(v)} \bar{\Delta}'(v, t) dv \\ \frac{d}{dt} \Delta'(v, t) &= - \gamma g(v) I - \frac{\gamma}{\Delta(v)} \Delta'(v, t) \\ \frac{d}{dt} \bar{\Delta}'(v, t) &= - \bar{\gamma} \bar{g}(v) aI - \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\Delta}(v)} \bar{\Delta}'(v, t) \end{aligned} \right.$$

les valeurs de  $I$ ,  $d(v)$ ,  $\bar{d}(v)$ ,  $g$ ,  $\bar{g}$ ,  $g(v)$ ,  $\bar{g}(v)$ ,  $\Delta(v)$ ,  $\bar{\Delta}(v)$  sont relatives à l'intensité stationnaire au point étudié.

Les courbes de  $\Delta(v)$  et  $\bar{\Delta}(v)$  données sur les figures (B-II) et (B-12) présentent deux caractéristiques qui vont nous permettre de résoudre exactement le système (BIV-39) et de trouver une approximation de la solution dont on peut évaluer la validité.

Les caractéristiques en question sont les suivantes :

- $\Delta(v)$  et  $\bar{\Delta}(v)$  sont toujours comprises entre 0 et 1, l'inversion maximale étant l'inversion en champ nul ( $\Delta(v) = 1$ ) que l'on retrouve loin de la résonance pour  $v \rightarrow \infty$
- ces fonctions varient peu dans l'intervalle  $[0,1]$  en fonction de la vitesse, et ce d'autant plus que :
  - . pour l'absorbant :  $\bar{v}$  est grand (condition généralement vérifiée)
  - . pour l'amplificateur : que I est petit, ce qui est vérifié au point haut de bifurcation si a est grand.

La première caractéristique nous permet de poser :

$$(BIV-40) \quad \Delta(v) = \Delta_0 (1 + \epsilon(v)) \quad \text{avec } \epsilon(v) < 1 \quad \text{et} \quad \Delta_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} W(v) \Delta(v) dv$$

$\epsilon(v)$  sera d'autant plus petit que :

- soit  $\Delta(v)$  est toujours proche de 1 ce qui correspond au cas de faible saturation des niveaux réservoirs, condition bien vérifiée dans l'absorbant même pour des valeurs proches de 1 du paramètre  $\bar{v}$ , ce qui confirme que la condition de bon absorbant :  $\bar{v} > 1$  est peu critique.

- soit le domaine de vitesses à considérer est faible, c'est à dire que le milieu est faiblement inhomogène.

### III-3. Solution en régime inhomogène.

#### III-3a) Solution exacte par séparation des variables.

On cherche la solution pour un milieu donné sous forme d'une série :

$$(BIV-41) \quad \Delta'(v,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n(v) \Delta'_n(v,t)$$

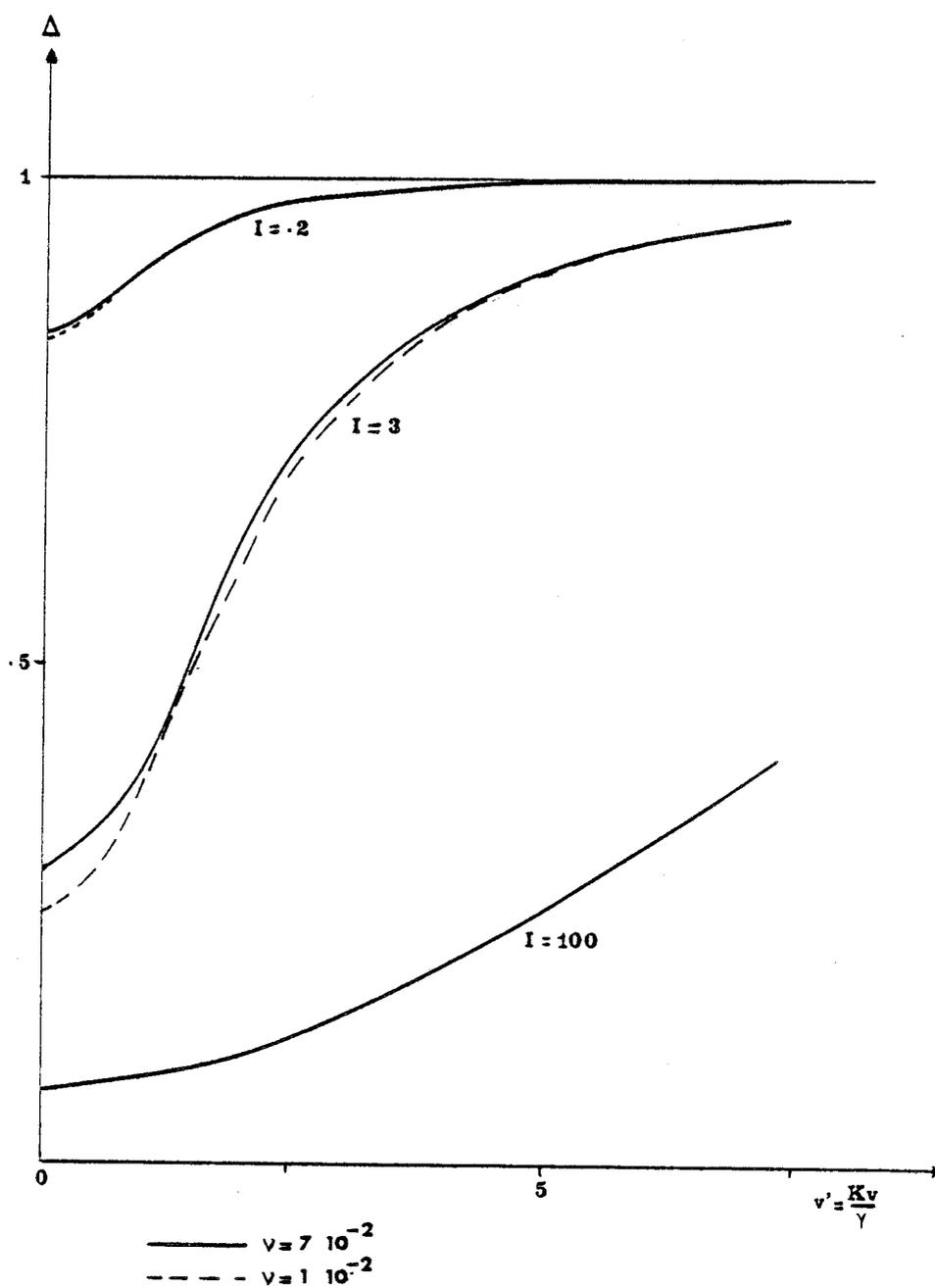


Figure B-11. Inversion de population stationnaire dans l'amplificateur  $\Delta(v')$  en fonction de la vitesse exprimée en unités réduites :  $v' = \frac{Kv}{\gamma}$  pour trois valeurs de l'intensité stationnaire  $I$  et deux valeurs du coefficient  $v$  en supposant toutes les fréquences accordées.

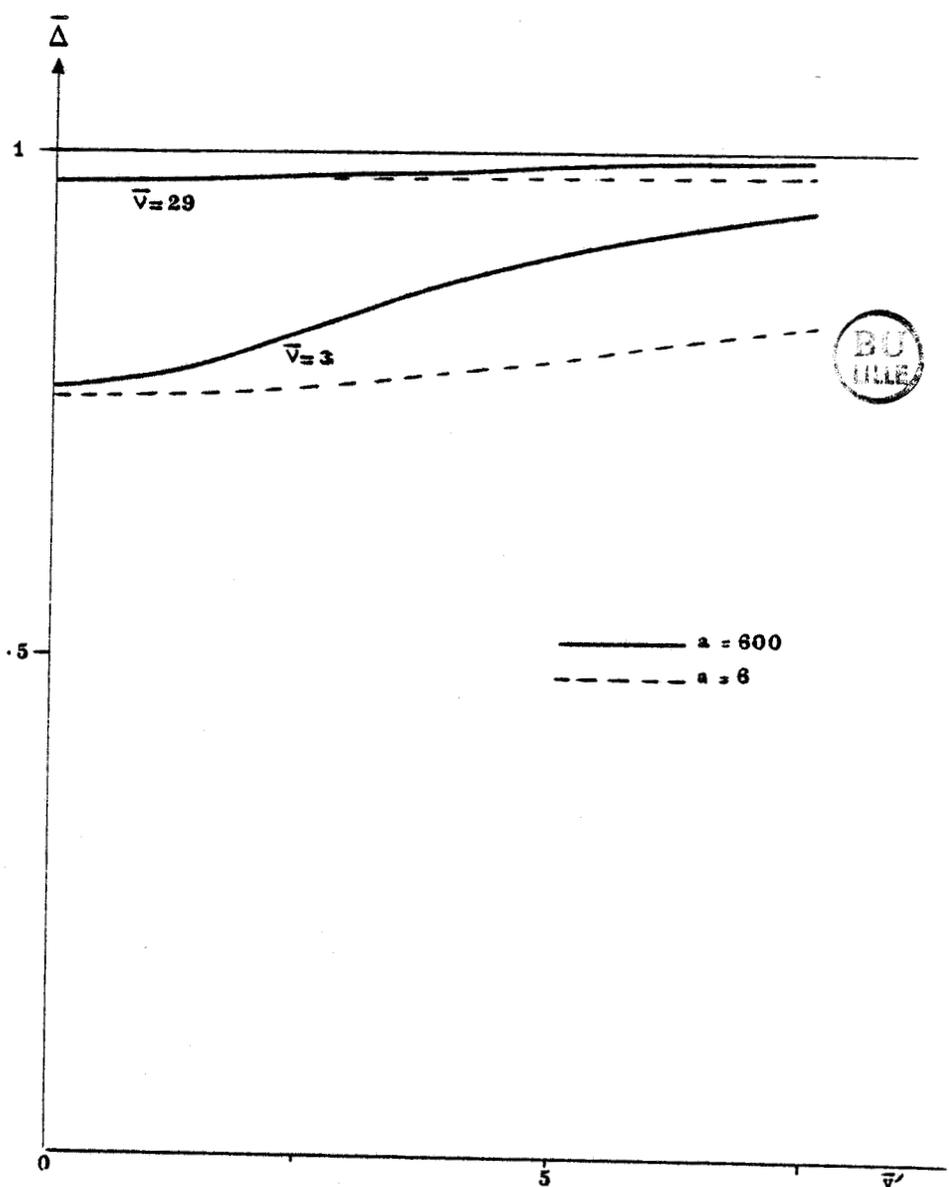


Figure B-12. Môme figure que précédemment pour l'absorbant :  $\bar{\Delta}(\nu')$  pour  $\bar{\nu} = 3$  et 29 :

— :  $I = 0,2$  et  $a = 600$

--- :  $I = 3$  et  $a = 6$

En développant  $\Delta^{-1}(v)$  sous forme d'un polynôme en  $\varepsilon(v)$  dans le système (BIV-39), on obtient l'équation

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n(v) \frac{d \Delta'_n(v,t)}{dt} = -\gamma g(v) I'(t) - \frac{\gamma}{\Delta_0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^n (-1)^{n'} \varepsilon^n(v) \Delta'_{n-n'}(v,t)$$

ce qui conduit par identification terme à terme au système :

$$(BIV-42) \quad \begin{cases} \frac{d \Delta'_0(v,t)}{dt} = -\gamma g(v) I' - \frac{\gamma}{\Delta_0} \Delta'_0(v,t) \\ \frac{d \Delta'_n(v,t)}{dt} = -\frac{\gamma}{\Delta_0} \sum_{n'=0}^n (-1)^{n-n'} \Delta'_{n'}(v,t) \quad n \geq 1 \end{cases}$$

dont nous allons chercher la solution par séparation des variables en posant  $\Delta'_n(v,t) = \Delta'_{n,v}(v) \Delta'_{n,t}(t) \quad n \geq 0$

On obtient  $\Delta'_{n,v}(v) = \frac{1}{c_0} g(v)$  pour tout  $n$  ( $c_0$  est une constante)

et le système :

$$(BIV-43) \quad \begin{cases} \frac{d \Delta'_{0,t}(t)}{dt} = -\frac{\gamma}{\Delta_0} (\Delta_0 c_0 I'(t) + \Delta'_{0,t}(t)) \\ \frac{d \Delta'_{n,t}(t)}{dt} = -\frac{\gamma}{\Delta_0} \sum_{n'=0}^n (-1)^{n-n'} \Delta'_{n',t}(t) \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Notons que, par cette méthode, la précision d'une intégration numérique ne dépend pas du nombre de classes de vitesses choisies, donc du degré d'inhomogénéité, mais uniquement de la précision souhaitée (en unités  $\varepsilon^n(v)$ ). Le nombre d'équations nécessaires peut alors être petit si  $\varepsilon(v)$  reste partout suffisamment faible.

Les solutions de (BIV-43) sont du type :

$$\Delta'_{n,t}(t) = \Delta'_n e^{-\lambda t} \quad \text{avec} \quad \lambda > 0, \quad n > 0$$

on obtient alors pour  $n \geq 1$

$$(BIV-44) \quad \Delta'_n = (-1)^n x \Delta'_0 \left( \frac{1}{1-x} \right)^n \quad \text{avec} \quad x = \frac{\gamma}{\Delta'_0 \lambda}$$

on a ainsi :

$$(BIV-45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta'_0(v, t) = \frac{\Delta'_0}{c_0} g(v) e^{-\lambda t} \\ \Delta'_n(v, t) = \frac{\Delta'_0}{c_0} g(v) e^{-\lambda t} x \left( \frac{-1}{1-x} \right)^n \\ \Delta'(v, t) = e^{-\lambda t} \frac{\Delta'_0}{c_0} g(v) \left[ 1 + x \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-\varepsilon(v)}{1-x} \right)^n \right] \\ \Delta'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(v) \Delta'(v, t) dv = e^{-\lambda t} \frac{\Delta'_0}{c_0} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} W(v) g(v) dv \right. \\ \left. - \frac{x}{1-x} \int_{-\infty}^{+\infty} W(v) g(v) \varepsilon(v) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{-\varepsilon(v)}{1-x} \right)^n dv \right] \end{array} \right.$$

Cette solution ne peut avoir de réalité physique que si la série  $S_\varepsilon = \left( \frac{-\varepsilon(v)}{1-x} \right)^n$  converge. Cette condition est réalisée au voisinage des points de bifurcation de Hopf qui nous intéressent, puisque dans ce voisinage la valeur propre  $\lambda$  vérifie :

$$\lambda = \lambda_0 + i \omega_0 \quad \text{avec} \quad \lambda_0 = 0 \quad \text{au point de bifurcation} \\ \text{mais} \quad \omega_0 \neq 0$$

ce qui nous assure que  $\left| \frac{\varepsilon(v)}{1-x} \right| < 1$ . Le critère de Cauchy affirme alors que  $S_\varepsilon$  converge.

La solution dépendant du rapport des deux paramètres  $\Delta'_0$  et  $c_0$ , nous pouvons en fixer un.

Nous choisissons

$$(BIV-46) \quad c_0 = g = \int_{-\infty}^{+\infty} w(v) g(v) dv$$

En introduisant les notations suivantes, équivalentes à celles utilisées lors du traitement du problème en régime homogène :

$$(BIV-47) \quad \alpha = \frac{\gamma}{\Delta_0} \quad ; \quad \frac{1}{d} = \frac{1}{g} \int_{-\infty}^{+\infty} W(v) \frac{\mathcal{L}_{\pm} g(v)}{d(v)} dv$$

le système (BIV-39) devient :

$$(BIV-48) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dI'(t)}{dt} = - I'(t) (1 - Ag \delta + \bar{A} \bar{g} \bar{\delta}) + \frac{A \delta I}{d} \Delta'_{o,t}(t) - \frac{\bar{A} \bar{\delta} a I}{\bar{d}} \bar{\Delta}'_{o,t}(t) \\ \quad - A \delta I \Delta'_{o,t}(t) \frac{x}{g} \int_{-\infty}^{+\infty} W(v) \frac{\mathcal{L}_{\pm} g(v)}{d(v)} \frac{\epsilon(v)}{1-x+\epsilon(v)} dv \\ \quad + \bar{A} \bar{\delta} a I \bar{\Delta}'_{o,t}(t) \frac{\bar{x}}{\bar{g}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{W}(v) \frac{\bar{\mathcal{L}}_{\pm} \bar{g}(v)}{\bar{d}(v)} \frac{\bar{\epsilon}(v)}{1-\bar{x}+\bar{\epsilon}(v)} dv \\ \\ \frac{d \Delta'_{o,t}(t)}{dt} = - \gamma g I'(t) - \alpha \Delta'_{o,t}(t) \\ \\ \frac{d \bar{\Delta}'_{o,t}(t)}{dt} = - \bar{\gamma} a \bar{g} I'(t) - \bar{\alpha} \bar{\Delta}'_{o,t}(t) \end{array} \right.$$

Ce système est l'équivalent du système linéaire de (BII-6).

L'opérateur intervenant dans (BIV-48) est une extension de celui (BII-7) régissant le cas homogène. On vérifie d'ailleurs qu'il se réduit à (BII-7) lorsqu'on néglige l'effet Doppler et qu'on peut poser :

$$W(v) = \bar{W}(v) = \delta(v-0)$$

puisqu'alors les expressions de  $\Delta_0$ ,  $g$ ,  $d$ ,  $\alpha$  se réduisent aux expressions des chapitres précédents et que (BIV-40) donne :

$$\epsilon(0) = \bar{\epsilon}(0) = 0$$

Les intégrales du système (BIV-48) ne contiennent plus que des fonctions connues de la vitesse et sont décomposables en fonctions de dispersion de plasma. Cette décomposition est effectuée en annexe III. Ce systè

est donc utilisable pour une étude numérique, quel que soit le rapport des largeurs homogène et Doppler.

La solution de (BIV-48) est du type :

$$I'(t) = I' e^{-\lambda t} ; \Delta'_{0,t}(t) = \Delta'_0 e^{-\lambda t} ; \bar{\Delta}'_{0,t}(t) = \bar{\Delta}'_0 e^{-\lambda t}$$

Nous obtenons ainsi une équation implicite pour  $\lambda$  :

$$\begin{aligned} -\lambda = & - (1 - A g + \bar{A} \bar{g} \bar{\delta}) + \frac{A \delta I}{d} \Delta'_0 g \frac{x}{1-x} - \frac{\bar{A} \bar{\delta} a^2 I}{\bar{d}} \frac{\bar{x}}{1-\bar{x}} \bar{g} \bar{\Delta}'_0 \\ (BIV-49) \quad & - A \delta I \Delta'_0 \frac{x^2}{1-x} \int_{-\infty}^{+\infty} W(v) \frac{\mathcal{L}_{\pm} g(v)}{d(v)} \frac{\epsilon(v)}{1-x+\epsilon(v)} dv \\ & + \bar{A} \bar{\delta} a^2 I \bar{\Delta}'_0 \frac{\bar{x}^2}{1-\bar{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{W}(v) \frac{\bar{\mathcal{L}}_{\pm} \bar{g}(v)}{\bar{d}(v)} \frac{\bar{\epsilon}(v)}{1-\bar{x}+\bar{\epsilon}(v)} dv \end{aligned}$$

Les points de bifurcation sont donnés par l'équation :

$$(BIV-50) \quad \text{Re}(\lambda) = 0, \quad \lambda \neq 0$$

qui peut se résoudre graphiquement dans un plan  $(\text{Re} \lambda, A)$ .

Cette solution nécessite de nombreux calculs d'intégrales.

Les remarques faites sur les courbes  $\Delta(v)$  et  $\bar{\Delta}(v)$  vont toutefois nous permettre de calculer une valeur approchée de  $\lambda$  qui nécessite moins de calculs et facilite la comparaison entre les cas homogène et inhomogène.

### III-3. Approximation de la "résonance inefficace".

Cette approximation consiste à négliger les intégrales en vitesse dans (BIV-49). Cette approximation n'est justifiée que si ces intégrales restent petites ce qui est possible, d'après les figures (B-11) et (B-12), dans le cas suivant :

\* amplificateur homogène et bon absorbant ( $\bar{\nu} \gg 1$ ).

En effet dans ce cas  $\varepsilon(0) = 0$  et  $\bar{\varepsilon}(\nu)$  reste toujours très petit. D'après (B-11) et (B-12) la première condition doit être plus critique que la seconde.

Cette approximation revient donc à considérer que  $\bar{\varepsilon}(\nu)$  est indépendant de la vitesse, autrement dit que la saturation des niveaux résonants n'entraîne pas de saturation sur les niveaux réservoirs de l'absorbant, d'où son nom.

La solution approchée  $\lambda = \lambda_0$  est alors donnée par

$$(BIV-51) \quad -\lambda_0 = - (1 - Ag\delta + \bar{A}\bar{g}\bar{\delta}) + \frac{A\delta I}{d} g \Delta_0 \frac{x_0}{1-x_0} - \frac{\bar{A}\bar{\delta} a^2 I}{\bar{d}} \bar{\Delta}_0 \frac{\bar{x}_0}{1-\bar{x}_0} \bar{g}$$

$$\text{avec} \quad x_0 = \frac{\gamma}{\Delta_0 \lambda_0} \quad ; \quad \bar{x}_0 = \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\Delta}_0 \lambda_0}$$

Remarquons que, dans cette approximation, le système (BIV-48) se réduit formellement au système (BII-6, BII-17).

$\lambda_0$  est donc calculable par le critère de Routh-Hurwitz avec les mêmes équations qu'au chapitre BII à la différence près que les relations (BII-3) et (BII-12) ne sont plus vérifiées et qu'il convient d'écrire les coefficients  $a_0, a_1, a_2$  de (BII-10) sous la forme :

$$(BIV-52) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 = aI \frac{\bar{A}\bar{\delta}\bar{\gamma}\bar{g}}{\bar{d}} \alpha + (1 - Ag\delta + \bar{A}\bar{g}\bar{\delta}) \bar{\alpha} + \frac{IA\delta}{d} \gamma g \bar{\alpha} \\ a_1 = \alpha \bar{\alpha} + (1 - Ag\delta + \bar{A}\bar{g}\bar{\delta}) (\bar{\alpha} + \alpha) + Ia \frac{\bar{A}\bar{\delta}\bar{g}}{\bar{d}} \bar{\gamma} + IA \frac{\delta}{d} g \gamma \\ a_2 = \alpha + \bar{\alpha} + (1 - Ag\delta + \bar{A}\bar{g}\bar{\delta}) \end{array} \right.$$

Ainsi, dans cette approximation, le problème inhomogène se ramène au problème homogène moyennant une simple renormalisation de l'intensité et des paramètres décrivant l'absorbant.

Les conditions de validité sont plus proches de la réalité expérimentale. Cela explique aussi en partie pourquoi l'étude des solutions stationnaires dans le modèle homogène donne de bons résultats qualitatifs mais des résultats quantitatifs assez médiocres. Cette hypothèse sera à vérifier sur des traitements numériques.

On ne peut évidemment pas effectuer un calcul de bifurcation sur cette valeur  $\lambda_0$  qui n'est qu'approchée, mais on peut estimer l'erreur commise dans le calcul de  $\lambda_0$ .

Pour cela on pose :

$\lambda = \lambda_0 + \lambda_\varepsilon$  où  $\lambda_\varepsilon$  est la correction d'ordre le plus bas lorsqu'on tient compte des intégrales dans (BIV-49)

$$x = x_0 + x_\varepsilon \quad \text{avec} \quad x_\varepsilon = -\frac{x_0}{\lambda_0} \lambda_\varepsilon$$



On obtient alors :

$$-\lambda_\varepsilon = \frac{A\delta I}{d} \Delta_0 g \frac{x_\varepsilon}{1-x_0} - \frac{\bar{A} \bar{\delta} a^2 I}{\bar{d}} \bar{\Delta}_0 \frac{\bar{x}_\varepsilon}{1-\bar{x}_0} \bar{g} - A\delta I \Delta_0 \frac{x_0^2}{1-x_0}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(v) \frac{\mathcal{L}_\pm g(v)}{d(v)} \frac{\varepsilon(v)}{1-x_0+\varepsilon(v)} dv + \bar{A} \bar{\delta} a^2 I \bar{\Delta}_0 \frac{\bar{x}_0^2}{1-\bar{x}_0}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{W}(v) \frac{\bar{\mathcal{L}}_\pm \bar{g}(v) \bar{\varepsilon}(v)}{\bar{d}(v) (1-\bar{x}_0+\bar{\varepsilon}(v))} dv$$

## ANNEXES

ANNEXE I

ÉLÉMENTS DE THÉORIE DES BIFURCATIONS

## INTRODUCTION.

La théorie des bifurcations a été inventée en 1885 par Poincaré [27] pour résoudre des problèmes d'hydrodynamique et a été largement utilisée et développée dans ce domaine, notamment par Joseph, Ioss et Sattinger [28 à 31] à partir des années 1970.

Cette théorie a été introduite en physique des lasers par P. Mandel et T. Erneux [32], en 1981. Elle permet une étude analytique plus poussée des solutions du laser avec ou sans absorbant saturable [31] et [34].

La théorie des bifurcations se propose d'étudier l'existence et la stabilité des solutions d'équilibre des systèmes d'équations non linéaires. Nous n'étudierons dans cette annexe que les deux types de bifurcations rencontrées dans notre étude du laser avec absorbant saturable : la bifurcation d'une solution stationnaire vers une autre solution stationnaire et la bifurcation d'une solution stationnaire vers une solution périodique encore appelée bifurcation de Hopf. L'étude de cette dernière nous donne des renseignements sur les solutions périodiques de faible amplitude issues des solutions stationnaires mais ne nous apprend rien sur les éventuelles solutions pulsées. Il s'agit de plus d'une théorie locale valable au voisinage du point de bifurcation, le mot voisinage pouvant recouvrir un domaine de variation des paramètres tellement petit qu'il est inexistant expérimentalement. L'analyse de bifurcation ne dispense donc pas de l'intégration numérique des équations mais permet de contrôler les propriétés d'un certain nombre de solutions au voisinage des points de bifurcation.

Nous utiliserons dans cette annexe les notations et méthodes du livre de Ioss et Joseph [29].

I - SOLUTIONS D'EQUILIBRE\* DES PROBLEMES D'EVOLUTION, STABILITE LINEAIRE.

I - 1. Solutions d'équilibre.

On étudie les solutions des problèmes de la forme :

$$(ANI-1) \quad \frac{dU}{dt} = F(A,U)$$

où  $A$  est un paramètre réel, appelé paramètre de bifurcation,  $U(t)$  un vecteur et  $F(A,U)$  un opérateur non linéaire qui dépend de  $U(t)$  mais pas de son histoire. Nous ne considérons que des problèmes pour lesquels  $F$  ne dépend pas explicitement du temps (problèmes autonomes).

Soit  $U(A)$  la solution stationnaire de cette équation. Cette solution reproduit les symétries de l'opérateur  $F$  mais d'autres solutions d'équilibre peuvent exister pour le problème (ANI-1) qui brisent les symétries de  $F$ , comme par exemple les solutions périodiques  $U(A,T)$  qui dépend explicitement du temps bien que  $F$  n'en dépend pas.

Les solutions d'équilibre peuvent être disjointes ou se croiser, c'est à dire qu'en une valeur critique  $A_c$  plusieurs solutions d'équilibre existent pour le système. Ce point particulier est appelé "point de bifurcation" car le système change alors de solution.

Un exemple simple de point de bifurcation nous est fourni par le "seuil d'oscillation du laser" qui, dans le diagramme  $(I,A)$  de la figure (ANI-1) où  $I$  est l'intensité du champ et  $A$  le terme de pompage proportionnel à l'inversion de population du milieu en champ nul, est représenté par le point  $(0, A_t)$  au-dessous duquel le laser n'oscille pas (solution  $I_0 = 0$ ) et au-dessus duquel l'oscillation laser prend naissance (solution  $I = I_+ \neq 0$ ).

\*Remarque : Le mot équilibre n'est pas à prendre ici dans son sens thermodynamique. Il signifie simplement qu'on envisage les solutions stationnaires, périodiques, pulsées, stables et instables obtenues après amortissement des régimes transitoires et qui possèdent un diagramme de phase indépendant du temps.

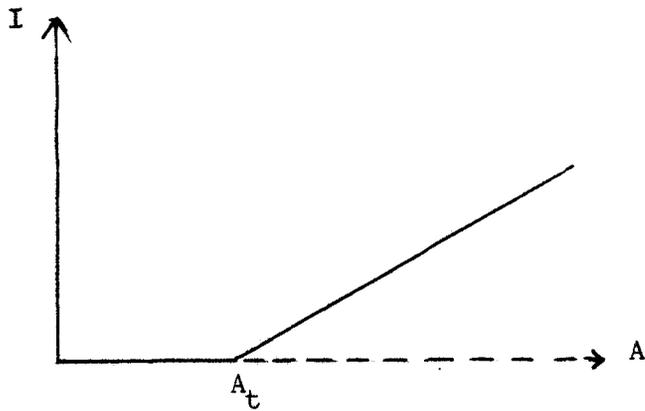


Figure ANI-1 : Exemple de point de bifurcation :  
 le seuil d'oscillation laser de coordonnées  $(I = 0, A = A_t)$   
 où  $I$  est l'intensité du champ et  $A$  le terme de pompage.

## I-2. Schéma de la démarche, stabilité linéaire.

L'analyse de bifurcation se propose de :

- . déterminer la position des points de bifurcation sur les solutions stationnaires,
- . construire la solution émergente au voisinage du point de bifurcation,
- . en déterminer la stabilité au point de bifurcation.

Le premier problème se traite en regardant la stabilité linéaire de la solution stationnaire  $\tilde{U}(A)$  sous l'action d'une perturbation de faible amplitude  $v(A,t)$  en posant  $U(A,t) = \tilde{U}(A) + v(A,t)$ .

Comme seul nous intéresse le comportement de la solution stationnaire aux perturbations de faible amplitude, on linéarise le système (ANI-1) par rapport à  $v(A,t)$ .

La solution du système différentiel du 1er ordre obtenu est alors du type :

$$(ANI-2) \quad v(A,t) = v_0(A) e^{\sigma(A)t}$$

La solution stationnaire  $\tilde{U}(A)$  est stable si  $\text{Re } \sigma(A)$  est négatif et instable dans le cas contraire. La condition :

$$(ANI-3) \quad \operatorname{Re} \sigma(A_c) = 0$$

va alors donner les valeurs critiques  $A_c$  du paramètre de bifurcation pour lesquelles la solution stationnaire devient instable.

Les deux derniers problèmes sont des problèmes locaux : nous ne cherchons la solution émergente et sa stabilité qu'au voisinage des points de bifurcation. Une méthode consiste à chercher cette solution sous la forme d'une série de Taylor en développant l'opérateur  $F(A,U)$  sous forme d'une telle série et en identifiant terme à terme les deux membres du système (ANI-1). Le premier terme du développement de la solution correspond aux solutions du problème linéaire.

Puisque le problème est local, il semble judicieux de le formuler dans une écriture indépendante de  $A_c$  et  $\hat{U}(A_c)$ .

Pour cela on introduit le nouveau paramètre de bifurcation ;  $\mu$  par

$$(ANI-4) \quad A = A_c + \mu \quad \text{avec} \quad \mu \ll A_c$$

Le point de bifurcation est donné par la condition  $\mu = 0$

De même on pose  $U(A,t) = U(\mu,t) = \hat{U}(\mu) + u(\mu,t)$   
 $u(\mu,t)$  obéit à l'équation.

$$(ANI-5) \quad \frac{du}{dt} = F(\mu, \hat{U} + u) - F(\mu, \hat{U}) \stackrel{\text{déf}}{=} f(\mu, u)$$

Écrit sous la forme (ANI-5), le problème est dit réduit à sa forme locale.  $u(\mu,t)$  est une perturbation faible de la solution stationnaire  $u(\mu,t) = 0$ .

La démarche de calcul se fait en deux étapes : un calcul global sur l'équation (ANI-1) pour obtenir les valeurs critiques des points de bifurcation  $A_c$ , suivi d'une réduction sous forme locale de ce système et d'une recherche de la solution  $u(\mu,t)$  sous forme d'une série :



L'équation d'évolution de cette perturbation, au 1er ordre, est obtenue en linéarisant l'équation (ANI-5).

$$(ANI-8) \quad \frac{dv}{dt} = f_u(u|v) \stackrel{\text{d'éf}}{=} L_0(u) \cdot v$$

où  $L_0(u)$  est la matrice de l'application linéaire  $f_u(u|\cdot)$

La solution  $u = 0$  est asymptotiquement stable si :

$$(ANI-9) \quad v(u, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

En posant  $v(u, t) = v_0(u) e^{\sigma(u)t}$  ;  $\sigma(u) = \xi(u) + i\eta(u)$ ,

l'équation (ANI-8) donne le problème spectral suivant :

$$(ANI-10) \quad L_0(u) \zeta_{Ii}(u) = \sigma_I(u) \zeta_{Ii}(u) \quad 1 < i < \ell$$

où  $\zeta_{Ii}$  sont les vecteurs propres de  $L_0(u)$  associés à la valeur propre  $\sigma_I$ .

$\ell$  est la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre  $\sigma_I$ . C'est la multiplicité géométrique de  $\sigma_I$ .

la multiplicité algébrique  $k$  de  $\sigma_I$  est définie par :

$\det(L_0(u) - \sigma \mathbb{1}) = (\sigma - \sigma_I)^k \tilde{P}(\sigma)$  où  $\tilde{P}(\sigma)$  est un polynôme en  $\sigma$  ne s'annulant pas pour  $\sigma = \sigma_I$ .

La valeur propre  $\sigma_I$  est dite demi-simple si  $k = \ell$ , simple si  $k = 1$ .

Certains des résultats de l'étude qui suit ne sont vrais que pour des valeurs propres simples ou demi-simples ce qui est le cas des problèmes du laser avec ou sans absorbant saturable intracavité.

### c) Le problème adjoint.

Le problème adjoint est une autre façon de traiter le problème linéaire (ANI-8) en utilisant l'opérateur adjoint  $L_0^*(u)$  défini par :

$$(ANI-11) \quad \forall x \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \langle x, L_0(\mu) \cdot y \rangle = \langle L_0^*(\mu) \cdot x, y \rangle$$

dans cette équation  $\langle \rangle$  note le produit scalaire défini par

$$(ANI-12) \quad \langle x, y \rangle = x \cdot \bar{y} = a_1 \bar{a}_2 + b_1 \bar{b}_2 + c_1 \bar{c}_2$$

le surlignage désigne la conjugaison complexe.

On obtient alors :

$$(ANI-13) \quad L_0^*(\mu) = \overline{L_0^T(\mu)} \quad \text{où} \quad L_0^T(\mu) \quad \text{est la matrice transposée de } L_0(\mu).$$

$L_0^*(\mu)$  et  $L_0(\mu)$  admettent les mêmes valeurs propres  $\sigma_I$ . Les vecteurs propres  $\zeta_{Ii}^*$  de  $L_0^*(\mu)$  sont définis par l'équation spectrale :

$$(ANI-14) \quad L_0^*(\mu) \zeta_{Ii}^* = \sigma_I \zeta_{Ii}^*$$

avec la condition de normalisation :

$$(ANI-15) \quad \langle \zeta_{Ii}, \zeta_{Ij}^* \rangle = \delta_{IJ} \delta_{ij} \quad \text{⊗}$$

Nous aurons besoin de ces vecteurs pour construire la solution sous forme d'une série.

## II - BIFURCATION EN UNE SOLUTION STATIONNAIRE.

### II-1. Perte stricte de stabilité.

On suppose qu'en  $\mu = 0$  la solution stationnaire  $u(\mu, t) = 0$  devient instable et bifurque sur une autre solution stationnaire  $u(\mu, t) = u(\mu)$  qui vérifie les conditions :

---

⊗ la condition d'orthogonalité des sous-espace propres  $\langle \zeta_{Ii}, \zeta_{Jj}^* \rangle = 0$  pour  $I \neq J$  est toujours vraie. En revanche la condition de normalisation à l'intérieur du même sous-espace propre n'est vraie que si  $\sigma_I$  est simple ou demi-simple.

(ANI-16)  $u(0) = 0$ ,  $u(\mu) \neq 0$  pour  $\mu \neq 0$

Cet évenement arrive lorsqu'une et une seule valeur propre  $\sigma_1$  du problème linéaire s'annule en  $\mu = 0$ , les autres gardant leur partie réelle négative, ce qui exclut tous les problèmes polycritiques.

En posant  $\sigma_I(\mu) = \zeta_I(\mu) + i \eta_I(\mu)$

On a :  $\zeta_1(0) = \eta_1(0) = 0$ ,  $\zeta_I(0) < 0$  pour  $I \neq 1$

On pose  $\zeta_1'(0) = \left( \frac{d\zeta_1(\mu)}{d\mu} \right)_{\mu=0}$

La condition  $\zeta_1'(0) > 0$  est une condition de perte stricte de stabilité. Cette condition est généralement remplie.

Si la valeur propre  $\sigma_1$  est simple, on montre que

$$\zeta_1'(0) = \langle f_{u,\mu}^{(1,1)}(0|\zeta_1), \zeta_1^* \rangle$$

## II - 2. Construction de la solution stationnaire bifurcante.

Nous supposons que  $\sigma_1$  est simple et posons :

(ANI-17)  $\varepsilon(\mu) = \langle u(\mu), \zeta_1^*(\mu) \rangle$  ( $\varepsilon = 0$  si  $\mu \leq 0$ )  $u(\mu)$  est la solution stationnaire.

On cherche la solution stationnaire non nulle pour  $\mu > 0$  sous forme d'une série en  $\varepsilon$  :

$$\begin{bmatrix} u(\varepsilon) \\ \mu(\varepsilon) \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \begin{bmatrix} u_n(\varepsilon) \\ \mu_n(\varepsilon) \end{bmatrix}$$

$\varepsilon$  est la projection de la solution sur le mode instable. Le choix de ce paramètre traduit le fait qu'au voisinage du point de bifurcation la nouvelle solution est l'évolution adiabatique de ce mode.

L'équation d'évolution de  $u(\mu)$  conduit au système d'équations

$$(ANI-18) \quad f_u(o|u_n) + n \mu_{n-1} f_{u,\mu}^{(1,1)}(o|u_1) + k_n = 0$$

où  $k_n$  dépend des termes d'ordre inférieur à  $n$ .

On a de plus les conditions de normalisation issues de (ANI-15 et 17)

$$(ANI-19) \quad \langle u_n, \zeta_1^* \rangle = \delta_{n1}$$

La solution à l'ordre un est immédiate :  $u_1 = \zeta_1$

Aux ordres supérieurs on utilise le théorème de solvabilité suivant qui, appliqué à l'ordre  $n$ , permet de calculer  $\mu_{n-1}$  :

l'équation  $f_u(o|u_n) = g$  est soluble si et seulement si  $\langle g, \zeta_1^* \rangle = 0$

### II-3. Stabilité de la nouvelle solution.

La stabilité des solutions émergentes est donnée par le signe de la quantité  $\varepsilon \frac{d\mu}{d\varepsilon}$  (figure (ANI-2)).

- si  $\varepsilon \frac{d\mu}{d\varepsilon} > 0$ , la bifurcation est supercritique : la solution émergente est stable,
- si  $\varepsilon \frac{d\mu}{d\varepsilon} < 0$ , elle est sous-critique et la solution émergente est instable.

Il convient donc de pousser le développement précédent jusqu'à l'ordre  $m + 1$ ,  $m$  étant l'ordre pour lequel  $\mu_m = 0$  et  $\mu_{m+1} \neq 0$ .

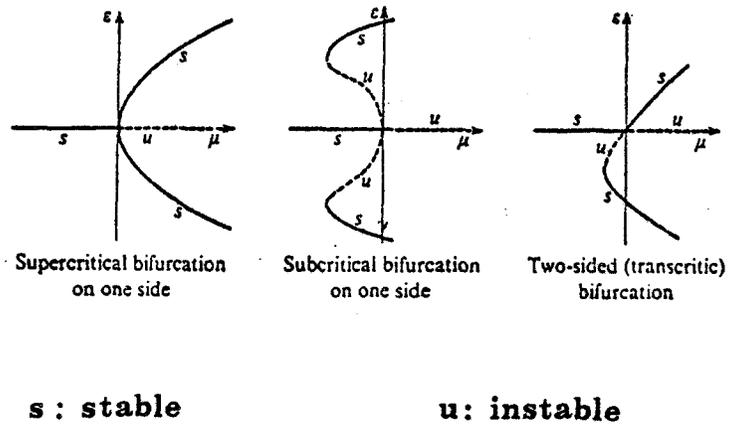


Figure ANI-2 : Les trois types de bifurcations  
(d'après Ioss et Joseph [29]).

### III- BIFURCATION DE HOPF

#### III-1. Le problème linéaire.

La bifurcation de Hopf correspond au cas où la partie réelle d'une paire de valeurs propres conjuguées s'annule et change de signe :

$$(ANI-20) \quad \zeta_1(0) = 0 ; \quad \eta_1(0) = \omega_0 ; \quad \zeta_n(0) < 0 \quad \text{pour } n \neq 1$$

Au point critique une solution harmonique de pulsation  $\omega_0$  prend alors naissance.

Le problème spectrale s'écrit :

$$(ANI-21) \quad i\omega_0 \zeta_0 = f_u(0 | \zeta_0) \quad \text{avec } \zeta_0 = \zeta_1(0)$$

$$i\omega_0 \bar{\zeta}_0^* = f_u^*(0 | \bar{\zeta}_0^*) \quad \text{et } \zeta_0^* = \zeta_1^*(0)$$

les conditions de normalisation sont :

$$(ANI-22) \quad \langle \zeta_0, \zeta_0^* \rangle = 1 \quad ; \quad \langle \zeta_0, \bar{\zeta}_0^* \rangle = 0$$

On suppose stricte la perte de stabilité :  $\operatorname{Re} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \mu} \right)_{\mu=0} = \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mu} \right)_{\mu=0} > 0$

Pour  $\mu > 0$  l'équation (ANI-21) permet d'écrire

$$\left( \frac{\partial \sigma}{\partial \mu} \right)_0 \zeta_0 + i \omega_0 \left( \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} \right)_0 = f_u \left( 0 \mid \left( \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} \right)_0 \right) + f_{u,\mu}^{(1,1)} \left( 0 \mid \zeta_0 \right)$$

$$(ANI-23) \quad \text{et donc} \quad \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \mu} \right)_0 = \langle f_{u,\mu}^{(1,1)} \left( 0 \mid \zeta_0 \right), \zeta_0^* \rangle$$



### III-2. Développement en série.

On définit [29] le produit scalaire dans l'espace des fonctions  $2\pi$  - périodiques par :

$$\text{pour tout vecteur } a(s) \text{ et } b(s) = [a(s), b(s)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle a(s), b(s) \rangle ds$$

Soit  $\omega(\mu)$  la pulsation de la solution émergente ( $\omega(0) = \omega_0$ )

On se ramène aux fonctions  $2\pi$  - périodiques en posant :

$$(ANI-24) \quad s(\mu) = \omega(\mu) t$$

On introduit alors les vecteurs :

$$(ANI-25) \quad Z = e^{is} \zeta_0 \quad ; \quad Z^* = e^{is} \zeta_0^*$$

qui, compte-tenu de l'équation d'évolution (ANI-8) du problème linéaire, vérifient les relations :

$$(ANI-26) \quad J_0(Z) = J_0^*(Z^*) = 0$$

$$\text{où } J_o(\cdot) = -\omega_o \frac{d\cdot}{ds} + f_u(o|\cdot)$$

$$J_o^*(\cdot) = \omega_o \frac{d\cdot}{ds} + f_u(o|\cdot)$$

L'équation (ANI-23) se réécrit en fonction de  $Z$  et  $Z^*$  :

$$(ANI-27) \quad \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \mu} \right)_o = [f_{u,\mu}^{(1,1)}(o|Z), Z^*]$$

On introduit le paramètre  $\varepsilon = [u, Z^*]$  et on cherche les solutions  $2\pi$  - périodiques  $u(s, \varepsilon) = u(s+2\pi, \varepsilon)$  vérifiant les conditions initiales en fonction de  $\varepsilon$  :

$$(ANI-28) \quad u(s, o) \equiv 0 ; \quad \omega(o) = \omega_o ; \quad \mu(o) = 0$$

$u(s, \varepsilon)$  est solution de l'équation d'évolution :

$$(ANI-29) \quad \omega(\varepsilon) \frac{du(s, \varepsilon)}{ds} = f(\mu(\varepsilon), u(s, \varepsilon))$$

qu'on développe en puissances de  $\varepsilon$  en posant :

$$(ANI-30) \quad \begin{vmatrix} u(s, \varepsilon) \\ \omega(\varepsilon) - \omega_o \\ \mu(\varepsilon) \end{vmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \begin{vmatrix} u_n(s) \\ \omega_n \\ \mu_n \end{vmatrix}$$

et qu'on projette sur chaque ordre avec les conditions de normalisation tirées des conditions (ANI-22)

$$(ANI-31) \quad [u_1, Z^*] = 1 ; \quad [u_n, Z^*] = 0 \quad \text{si } n > 1$$

On obtient alors un système d'équations du type

$$(ANI-32) \quad J_o(u_n) - n \omega_{n-1} \frac{du_1}{ds} + n \mu_{n-1} f_{u,\mu}^{(1,1)}(o|u_1) + R_{n-2} = 0$$

où  $R_{n-2}$  dépend des termes d'ordre inférieur à  $n-1$ .

$\omega_{n-1}$  et  $\mu_{n-1}$  sont déterminés en utilisant la condition de solubilité suivante appliquée à (ANI-32) :

Soit l'équation  $J_0(u_n) = g(s) = g(s+2\pi)$ . Cette équation est soluble pour  $u_n$   $2\pi$  - périodique si et seulement si :

$$(ANI-33) \quad [g, Z^*] = [\bar{g}, \bar{Z}^*] = 0$$

Dans le cas où  $g$  est réel, cette double condition se réduit à :

$$[g, Z^*] = 0$$

On montre à l'aide de ce théorème que les termes impairs vérifient :

$$(ANI-34) \quad \omega_{2n+1} = \mu_{2n+1} = 0 \quad n \in \mathbb{R}$$

### III-3. Stabilité de la solution périodique (théorie de Floquet).

Soit  $v(t)$  une perturbation de faible amplitude de la solution périodique trouvée. On pose :

$$(ANI-35) \quad s = \omega(\varepsilon) t \quad ; \quad v(s) = e^{\gamma(\varepsilon)s} \zeta(s) \quad ; \quad \zeta(s) = \zeta(s+2\pi)$$

$\gamma(\varepsilon)$  est appelé exposant de Floquet

L'équation de stabilité linéaire de  $v$  s'écrit :

$$(ANI-36) \quad \dot{v} = f(u, u+v) - f(u, u) \sim f_u(u(\varepsilon), u(s, \varepsilon) | v)$$

$$\text{soit } \gamma(\varepsilon) \zeta(\varepsilon) + \omega(\varepsilon) \frac{d\zeta}{ds} = f_u(u, u|v)$$

La solution de cette équation est donnée par un théorème de factorisation [28] qui nous apprend que l'exposant de Floquet s'écrit :

$$(ANI-37) \quad \gamma(\varepsilon) = - \frac{\partial \mu}{\partial \varepsilon} \left[ \left( \frac{\partial \zeta}{\partial u} \right)_0 \varepsilon + o(\varepsilon^2) \right]$$

Dans ce cas les résultats trouvés sur les bifurcations stationnaires s'appliquent encore ici puisque, la perte de stabilité étant supposée stricte,  $(\frac{\partial \zeta}{\partial \varepsilon})_0 > 0$  et le signe du coefficient  $\frac{\partial \zeta}{\partial \mu} = 2\mu_2 \varepsilon$  détermine la stabilité de la solution :

- la solution est stable si  $\mu_2 > 0$  (bifurcation supercritique)
- instable si  $\mu_2 < 0$  (bifurcation sous-critique).

Rappelons qu'il faut projeter jusqu'à l'ordre 3 pour calculer ce coefficient.

ANNEXE II

ÉTUDE DES INSTABILITÉS LASER DANS  
LE MODÈLE À DEUX NIVEAUX

## I - LE LASER SANS ABSORBANT SATURABLE.

### I-1. Introduction.

Un article de Casperson [36] fait l'historique des expériences et théories sur l'instabilité dans le laser sans absorbant saturable et nous nous contenterons d'en tirer les quelques points les plus marquants.

Cette instabilité avait été prédite dès 1959 par des auteurs russes et notamment Orayewskiy [37] pour le cas des masers dont les équations de base sont identiques à celles des lasers. Le premier laser à rubis réalisé par Maiman [38], en 1960 montrait des oscillations irrégulières mais il est difficile d'attribuer celles-ci à un effet simple compte-tenu de la dispersion des paramètres et de l'oscillation multimode.

Pour expliquer les oscillations du laser à rubis Statz et de Mars [39] ont établi en 1960 un modèle de rate équations où la polarisation n'intervient plus. Un tel modèle ne présente d'ailleurs aucune instabilité, il est nécessaire d'utiliser un modèle à trois équations comme l'ont fait Grasyuk et Orayeskiy en 1964. De nombreuses études numériques et théoriques ont été entreprises, notamment par Risken et Nummedal [6], Casperson [7-8], Hendow et Sargent III [9]. Mandel [1-3] en a donné une étude analytique en utilisant notamment la théorie des bifurcations.

### I-2. Les équations.

Nous nous contenterons dans cette annexe de préciser comment le désaccord en fréquence ou l'inhomogénéité du milieu modifie le critère de stabilité (AI-12) des solutions stationnaires. Dans un laser en élargissement homogène, les instabilités n'apparaissent que pour des conditions expérimentales actuellement inaccessibles.

Nous donnons ici l'étude réalisée par Mandel sur un laser en anneau. En adoptant ses notations le système (AI-6) s'écrit :

$$(ANII-1) \quad \begin{cases} \left( \frac{d}{dt} + \kappa \right) E = NP \\ \left( \frac{d}{dt} + \gamma_{\perp} \right) P = |g|^2 DE \\ \left( \frac{d}{dt} + \gamma_{\parallel} \right) D = \gamma_{\parallel} \sigma - 4PE \end{cases}$$

où  $E$  est l'amplitude du champ en unités réduites,  $P$  la partie imaginaire de la polarisation,  $D$  l'inversion de population,  $\kappa$  la constante de relaxation du champ.

L'intensité réduite est  $I = SE^2$ ,  
où  $S$  est le paramètre de saturation.

$$(ANII-2) \quad S = \frac{4|g|^2}{\gamma_{\parallel} \gamma_{\perp}}$$

le paramètre de pompage est :

$$(ANII-3) \quad A = \frac{\sigma}{\sigma_t} = \frac{N|g|^2 \sigma}{\gamma_{\perp} \kappa} \quad \text{où } \sigma \text{ est l'inversion de population en champ nul, } \sigma_t \text{ l'inversion de population au seuil d'oscillation, } N \text{ le nombre de molécules actives et } g \text{ la constante de couplage entre le milieu et le champ.}$$

Les solutions stationnaires de ce système sont :

$$\begin{aligned} I = I_0 = 0 & \quad \text{stable pour } A < 1 \\ I = I_+ = A-1 & \quad \text{stable pour } A > 1 \end{aligned}$$

Le second seuil d'oscillation du laser (AI-13) au-dessus duquel la branche  $I_+$  devient instable s'écrit :

$$(ANII-4) \quad A_c = \frac{\kappa}{\gamma_{\perp}} \left( \frac{\kappa + 3\gamma_{\perp} + \gamma_{\parallel}}{\kappa - \gamma_{\parallel} - \gamma_{\perp}} \right)$$

Si on tient compte de la phase  $\phi$  du champ, du désaccord entre la fréquence de résonance de la cavité  $\nu$  et la fréquence centrale du profil de gain  $\omega$  et de l'effet Doppler, le système s'écrit alors [2]

$$(ANII-5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{d}{dt} + \kappa \right) E = N \int_{-\infty}^{+\infty} P(\nu, t) d\nu \\ \delta E = \frac{N}{\kappa} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\nu, t) d\nu \\ \left( \frac{d}{dt} + \gamma_{\perp} \right) Q(\nu, t) = -\Delta \gamma_{\perp} P(\nu, t) \\ \left( \frac{d}{dt} + \gamma_{\perp} \right) P(\nu, t) = \gamma_{\perp} \Delta Q(\nu, t) + E D(\nu, t) \\ \left( \frac{d}{dt} + \gamma_{\parallel} \right) D(\nu, t) = \gamma_{\parallel} \sigma(\nu) - 4 E P(\nu, t) \end{array} \right.$$

où  $Q$  est la partie réelle de la polarisation,  $\delta = \frac{\dot{\phi} - \nu}{\kappa}$  ;  $\Delta = \frac{\dot{\phi} - \omega + q\nu}{\gamma_{\perp}}$

Les solutions stationnaires de ce système sont :

$$(ANII-6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\phi} = \text{cste} \\ I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a \sigma(\nu)}{1 + I + \Delta^2(\nu)} d\nu \quad \text{où } a = \frac{|g|^2 N}{\kappa \gamma_{\perp}} \\ \delta = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a \sigma(\nu) \Delta(\nu)}{1 + I + \Delta^2(\nu)} d\nu \\ D(\nu) = \sigma(\nu) \frac{1 + \Delta^2(\nu)}{1 + I + \Delta^2(\nu)} \\ P(\nu) = \frac{\sigma(\nu) E}{1 + I + \Delta^2(\nu)} \\ Q(\nu) = - \frac{\sigma(\nu) \Delta(\nu) E}{1 + I + \Delta^2(\nu)} \end{array} \right.$$

### 1-3. Influence d'un élargissement inhomogène.

Pour déceler l'influence d'un tel élargissement on considère la cavité accordée sur la fréquence de résonance des molécules :  $\dot{\phi} = \omega = \nu$ , et la raie élargie par effet Doppler :

$$(ANII-7) \quad \sigma(\nu) = \frac{\sigma}{u\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\nu}{u}\right)^2$$

On montre alors [2] que dans la limite de l'effet Doppler infini ( $u \rightarrow \infty$ ) une bifurcation de Hopf n'apparaît que dans une mauvaise cavité pour laquelle les constantes de relaxation des variables moléculaires sont très petites devant la constante de relaxation du champ.

En posant  $\gamma_{\perp} = \gamma_{\parallel} = \gamma$  cette bifurcation apparaît pour

$$(ANII-8) \quad I_c \sim \frac{4}{3} \frac{\gamma}{\kappa}$$

et donne naissance à une solution harmonique de pulsation  $\Omega = \frac{\gamma}{\kappa}$ .

On notera que l'intensité critique  $I_c$  est ici réalisable puisque  $\kappa \gg \gamma$ . C'est pourquoi le second seuil d'oscillation n'a été étudié expérimentalement par Casperson [7] que dans un laser à Xénon en anneau pour lequel l'élargissement inhomogène est important : (le rapport des élargisseurs Doppler et homogène est de l'ordre de 30).

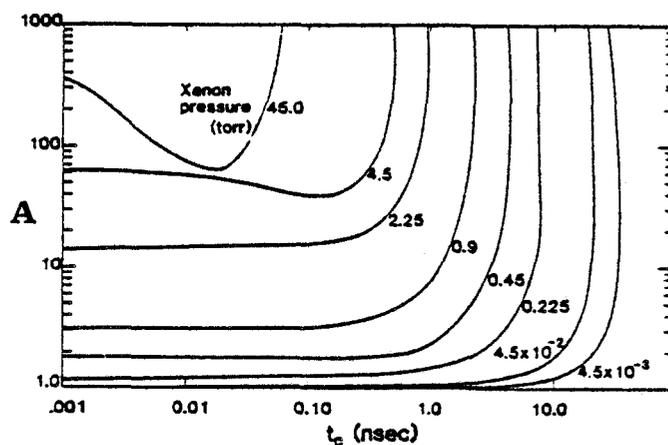


Figure ANII-1 : d'après Minden et Casperson [40] seuils d'instabilité pour le laser à xénon à différentes pressions.  $t_c$  est le temps de vie des photons dans la cavité  $t_c = \frac{1}{\kappa}$

La figure (ANII-1) est une courbe théorique calculée par Casperson pour le laser à xénon. On vérifie que si on augmente la pression, et par conséquent l'élargissement homogène, l'instabilité n'apparaît que dans des cavités de plus en plus mauvaises dans lesquelles le temps de vie des photons diminue, et pour des inversions de plus en plus élevées. On vérifie aussi que dans tous les cas cette instabilité n'apparaît pas dans une bonne cavité.

#### 1-4. Influence d'un désaccord en fréquence.

On suppose l'élargissement homogène et  $\omega \neq \nu$ . L'intensité stationnaire est alors [3] :

$$(ANII-9) \quad I = A - 1 - \delta^2$$

La figure (ANII-2) donne le résultat trouvé par une analyse de bifurcation sur cette branche stationnaire : le domaine d'existence de l'oscillation harmonique est inchangé : il faut que  $\kappa > 2\gamma$ . En revanche un désaccord suffisant stabilise cette oscillation qui n'était stable que pour  $\kappa > 33\gamma$  lorsque toutes les fréquences étaient accordées (figure A-4).

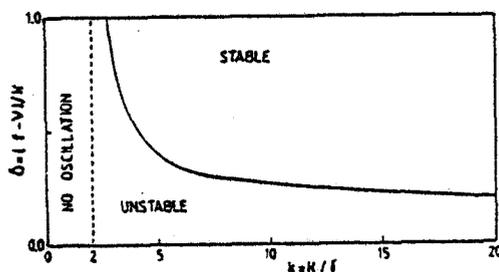


Figure (ANII-2) : existence et stabilité des solutions périodiques de faible amplitude émergeant de la solution  $I_+$  pour  $a = 100$  (d'après Mandel et Zeghlache [3]).

Malheureusement la figure (ANII-3) montre que lorsque  $\delta$  augmente l'intensité critique à atteindre pour obtenir l'instabilité augmente aussi ce qui donne des conditions encore plus difficiles à atteindre.

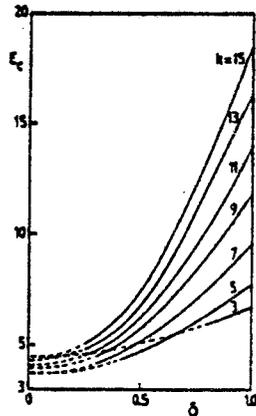


Figure ANII-3 : Valeur critique de l'amplitude du champ au-dessus de laquelle la branche  $I_+$  est instable en fonction du désaccord en fréquence pour  $a = 100$ .

Les courbes en pointillés correspondent à des bifurcations sous-critiques instables, les courbes en traits pleins à des bifurcations supercritiques stables.

D'après Mandel et Zeglache [3].

## II - LE LASER AVEC ABSORBANT SATURABLE INTRACAVITE.

### II-1. Equations d'évolution.

Un laser avec absorbant saturable intracavité (L.S.A) se compose d'une cavité résonante contenant deux cellules : l'une active dans laquelle l'émission laser a lieu, l'autre passive, remplie d'un gaz absorbant plus saturable que le milieu actif.

Les premiers traitements du L.S.A. dans le modèle à deux niveaux [23][49] étaient essentiellement numériques car on tenait compte d'un élargissement inhomogène par effet Doppler mais une étude analytique poussée peut être entreprise dans le cas d'un élargissement homogène [50]. L'étude de bifurcation peut être menée sur les solutions stationnaires [32] et [34]. Cette procédure a l'avantage de mettre en évidence le rôle des différentes approximations du modèle [51]. Nous résumons ici les principaux points de cette étude.

Le système total comprend trois équations de plus que celui du laser sans absorbant intracavité : deux pour la polarisation et une pour l'inversion de population dans l'absorbant. En supposant égales les fréquences de résonance de la cavité et de gain des milieux :  $\nu = \omega = \bar{\omega}$ , ce système s'écrit :

$$(ANII-10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{d}{dt} + \kappa \right) E(t) = N P(t) + \bar{N} \bar{P}(t) \\ E(t) \phi(t) = N Q(t) + \bar{N} \bar{Q}(t) \\ \left( \frac{d}{dt} + \gamma_{\perp} \right) Q(t) = - \phi(t) P(t) \\ \left( \frac{d}{dt} + \gamma_{\perp} \right) P(t) = \phi(t) Q(t) + |g|^2 D(t) E(t) \\ \left( \frac{d}{dt} + \gamma_{//} \right) D(t) = \gamma_{//} \sigma - 4 P(t) E(t) \\ \left( \frac{d}{dt} + \bar{\gamma}_{\perp} \right) \bar{Q}(t) = - \phi(t) \bar{P}(t) \\ \left( \frac{d}{dt} + \bar{\gamma}_{\perp} \right) \bar{P}(t) = \phi(t) \bar{Q}(t) + |\bar{g}|^2 \bar{D}(t) E(t) \\ \left( \frac{d}{dt} + \bar{\gamma}_{//} \right) \bar{D}(t) = \bar{\gamma}_{//} \bar{\sigma} - 4 \bar{P}(t) E(t) \end{array} \right.$$

avec  $\phi(t) = \frac{\partial \phi}{\partial t} - \nu$

Les grandeurs surlignées sont relatives à l'absorbant, les autres à l'amplificateur.  $Q$  représente la partie réelle de la polarisation.

On introduit les paramètres suivants :

\* le paramètre de pompage :  $A = \frac{\sigma}{\sigma_t} = \frac{N|g|^2 \sigma}{\gamma_{\perp} \kappa}$

\* le coefficient de pertes linéaires par absorption (ce coefficient est négatif) :

$$\bar{A} = \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_t} = \frac{\bar{N}|\bar{g}|^2 \bar{\sigma}}{\bar{\gamma}_{\perp} \kappa}$$

\* le paramètre de saturation dans chaque milieu :

$$S = \frac{4 |g|^2}{\gamma_{\parallel} \gamma_{\perp} (1+\Delta^2)} \quad \bar{S} = \frac{4 |\bar{g}|^2}{\bar{\gamma}_{\parallel} \bar{\gamma}_{\perp} (1+\bar{\Delta}^2)}$$

où on a posé  $\Delta = \frac{\Omega - \nu}{\gamma_{\perp}}$  ,  $\bar{\Delta} = \frac{\bar{\Omega} - \nu}{\bar{\gamma}_{\perp}}$  avec  $\Omega = \frac{\partial \phi}{\partial t}$

\* la paramètre de saturabilité relative de l'absorbant et de l'amplificateur :  $a = \frac{S}{\bar{S}}$

$a > 1$  pour un absorbant plus saturable que l'amplificateur.

\* l'intensité réduite en unités de saturation du milieu actif :

$$I = S E^2$$

Dans l'absorbant l'intensité vaut  $\bar{I} = aI$

\* les rapports :  $d = \frac{\gamma_{\perp}}{\kappa}$  ,  $b = \left( \frac{\gamma_{\perp}}{\bar{\gamma}_{\perp}} \right)^2$  ,  $\bar{d} = \frac{\bar{\gamma}_{\perp}}{\kappa}$

Avec ces notations l'intensité stationnaire  $I$  et le déphasage  $\Delta$  du champ sont liés par deux équations :

- l'équation en intensité :

$$(ANII-11) \quad I \left( 1 - \frac{A}{1+\Delta^2 + I} - \frac{\bar{A}}{1+b\Delta^2 + aI} \right) = 0$$

- et l'équation de dispersion :

$$(ANII-12) \quad I\Delta \left( 1 + \frac{A d^{-1}}{1+\Delta^2 + I} + \frac{\bar{A} \bar{d}^{-1}}{1+b\Delta^2 + aI} \right) = 0$$

on retrouve les équations du laser sans absorbant en posant  $\bar{A} = 0$ .

## II-2. Solutions stationnaires.

Le système (ANII-11 et 12) admet deux types de solutions : les solutions normales qui oscillent à la fréquence de la cavité résonante et pour lesquelles  $\Delta = 0$ , et les solutions anormales qui oscillent à une fréquence différente de celle de la cavité :  $\Delta \neq 0$  et qui sont dues à une dispersion anormale causée par l'absorbant [19]. Ces dernières solutions n'apparaissent pas dans un laser sans absorbant pour lequel les équations précédentes se réduisent à :

$$I \left( 1 - \frac{A}{1 + \Delta^2 + I} \right) = 0 \quad \text{et} \quad I_{\Delta} \left( 1 + \frac{A d^{-1}}{1 + \Delta^2 + I} \right) = 0$$



et dans ce système une solution  $I \neq 0$  de la première équation entraîne  $\Delta = 0$  dans la seconde.

Les solutions normales sont au nombre de trois :

$$I = I_0 = 0, \quad I = I_{\pm} = \frac{1}{2a} \left\{ a(A-1) - (-\bar{A}+1) \pm \left[ (a(A-1) - (-\bar{A}+1))^2 - 4a(-\bar{A}+1-A) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

Si l'absorbant est moins saturable que l'amplificateur, ( $a < 1$ ), les seules solutions possibles sont (figure ANII-4)

$I = I_0$  existe pour tout  $A$

$I = I_{+}$  n'existe que pour  $A > 1 - \bar{A}$

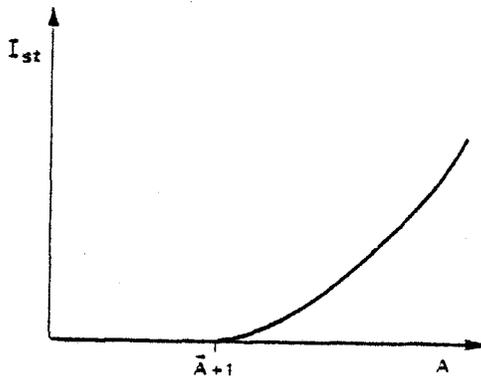


Figure ANII-4 : Solutions stationnaires normales dans le cas où  $a < 1$  d'après Arimondo et al. [17].

Si l'absorbant est plus saturable que l'amplificateur mais pas trop :

$1 < a < \frac{1 - \bar{A}}{\bar{A}}$  les solutions sont les mêmes mais la concavité de courbe est maintenant tournée vers l'axe I (figure (ANII-5)).

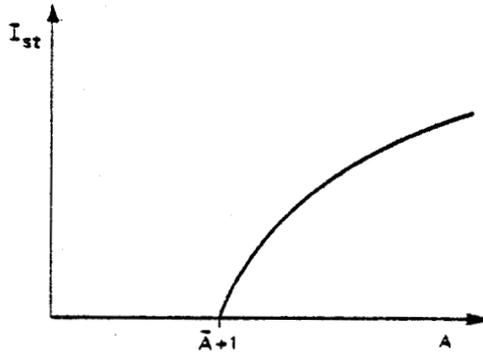


Figure ANII-5 : solutions stationnaires normales pour le cas  $1 < a < \frac{1 - \bar{A}}{\bar{A}}$  d'après Arimondo et

Si l'absorbant est beaucoup plus saturable que l'amplificateur :  $a > \frac{1 - \bar{A}}{\bar{A}}$  les trois solutions existent et donnent naissance à une bistabilité entre les solutions  $I_0$  et  $I_+$  comme le montre la figure (ANII-6) (La solution  $I_-$  est toujours instable, elle est en pointillés sur la figure).

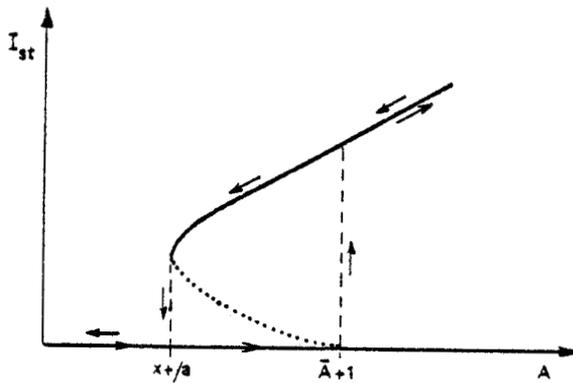


Figure ANII-6 : solutions stationnaires normales dans le cas  $a > \frac{1 - \bar{A}}{\bar{A}}$ .  $I_-$  est en pointillés. D'après Arimondo et al.

- $I = I_0$  existe pour tout  $A$
- $I = I_+$  existe pour  $A > \frac{X_+}{a}$  où  $X_+ = a - \bar{A} - 1 + 2\sqrt{\bar{A}(1-a)}$
- $I = I_-$  existe pour  $\frac{X_-}{a} < A < 1 - \bar{A}$

Les solutions anormales sont au nombre de deux qui oscillent à des fréquences différentes et ont la même intensité. Leurs propriétés sont étudiées en détail dans la référence [32].

Leur intensité vaut :  $I = \tilde{I} = f(a,b)$

et leur fréquence est donnée par  $\Delta^2 = \tilde{\Delta}_{\pm}^2 = f(b,a)$

on a posé  $f(a,b) = \frac{1}{a-b} \{ b-1 + (\bar{d}-d) \left[ \frac{\bar{A}}{\bar{d}(d+1)} + \frac{A b}{d(\bar{d}+1)} \right] \}$

Ces solutions n'existent que si la polarisation relaxe plus vite dans l'amplificateur que dans l'absorbant ( $b > 1$ ) et uniquement sur le domaine  $A(1) < A < A(3)$  (figure ANII-7).

où  $A(1) = (1-\bar{A}) \frac{\bar{d}(\bar{d}+1)}{d(d+1)} + \frac{\bar{d}+1}{d+1} (d+\bar{d}+1)$

et  $A(3) = \frac{d(\bar{d}+1)}{a} \left[ \frac{1-a}{\bar{d}-d} - \frac{\bar{A}}{\bar{d}(d+1)} \right]$

En  $A(1)$  on a  $\tilde{I} = 0$  mais  $\tilde{\Delta}_{+} = -\tilde{\Delta}_{-} \neq 0$

tandis qu'en  $A(3)$   $\tilde{\Delta}_{\pm} = 0$  mais

\*  $\tilde{I} = I_{-}$  si  $\bar{A} + (a-1) \bar{A}_c^2 > 0$

\*  $\tilde{I} = I_{+}$  dans le cas contraire.

On a posé  $\bar{A}_c = \frac{\bar{d}(d+1)}{\bar{d}-d}$

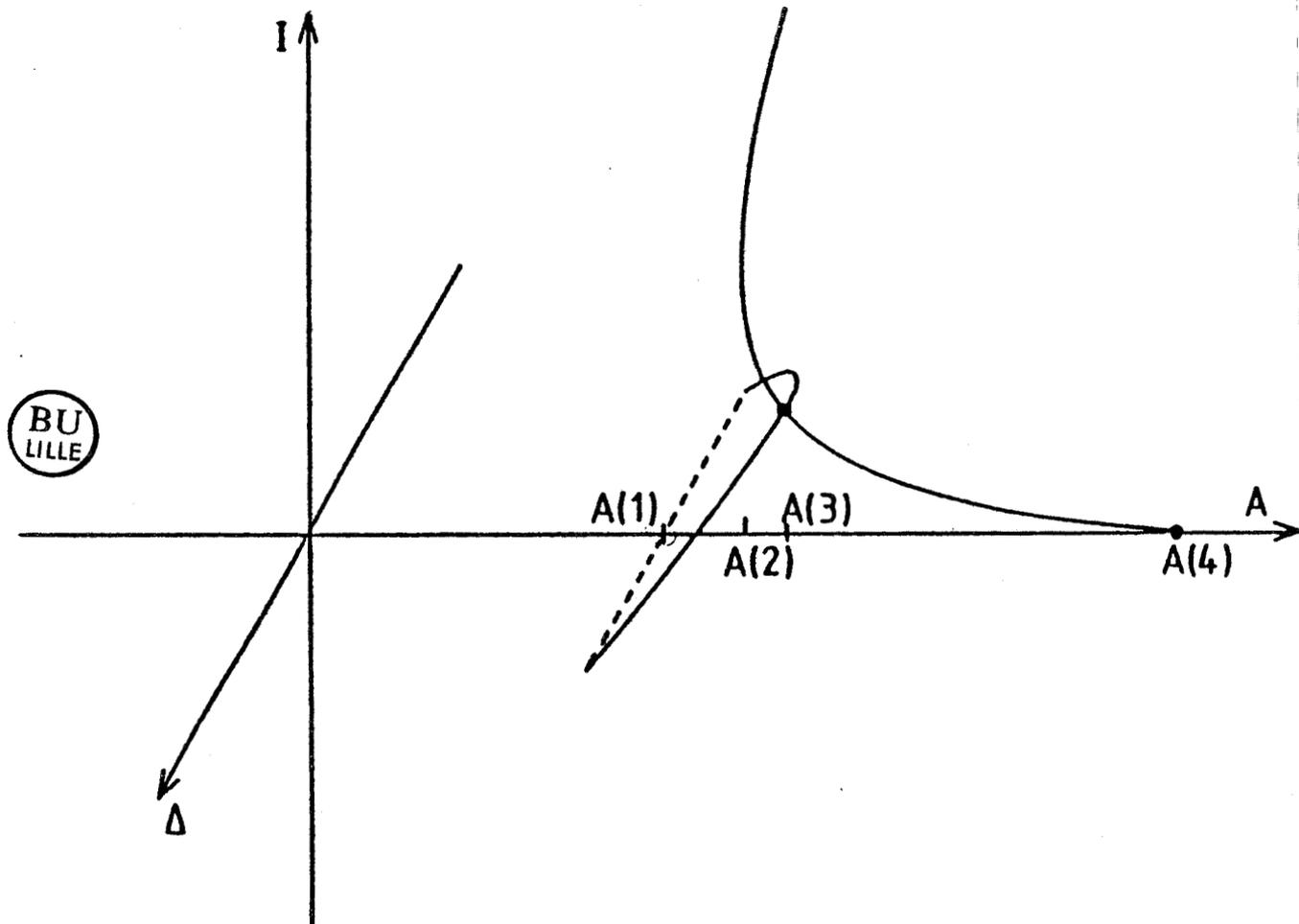


Figure ANII-7 : d'après Erneux et Mandel [32] : domaines d'existence des solutions  $I_0$ ,  $I_{\pm}$ ,  $\tilde{I}$  dans le cas où :

$$A > 0, \bar{A} < \bar{A}_c < 0 \quad b > a > 1, \quad \bar{A} + (a-1) \bar{A}_c^2 > 0$$

$\tilde{I}$  existe pour  $A(1) < A < A(3)$

$I_+$  existe pour  $A > A(2)$

$I_-$  existe pour  $A(2) < A < A(4)$

$$\text{avec : } A(1) = (1-\bar{A}) \frac{\bar{d}(\bar{d}+1)}{d(\bar{d}+1)} + \frac{\bar{d}(\bar{d}+1)}{d(\bar{d}+1)} \quad (d+\bar{d}+1)$$

$$A(2) = \frac{x_+}{a}, \quad A(4) = 1-\bar{A}$$

$$A(3) = \frac{d(\bar{d}+1)}{a} \left[ \frac{1-a}{\bar{d}-d} - \frac{\bar{A}}{\bar{d}(d+1)} \right]$$

### II-3. Réductions du modèle et stabilité des solutions stationnaires

#### II-3.a) Stabilité des solutions dans le modèle à 8 équations.

\* La solution  $I_0$  est stable pour  $A < A(1)$  et présente en  $A = A(1)$  une bifurcation de Hopf supercritique ou sous-critique suivant la valeur de  $\bar{A}$ .

En  $A(1)$  la pulsation de cette solution vaut :

$$\omega_c = \kappa(d + \bar{d} + d\bar{d} - A(1)d - \bar{A}\bar{d})$$

La branche  $I_0$  présente une autre bifurcation vers la solution  $I_-$  en  $A = A(4) = 1 - \bar{A}$ . Lorsque  $\bar{A} = \bar{A}_c$  on a  $A(1) = A(4)$

\* La branche  $I_-$  est instable.

\* Mrugala et Peplowski [35] ont montré que lorsque  $\bar{I}$  se raccorde à  $I_+$ , cette dernière branche présente une instabilité de phase pour  $A < A(3)$  qui donne naissance à une bifurcation de Hopf et ce pour tout rapport  $\bar{d}$ . Ainsi, contrairement à ce qui se passe dans un laser ne contenant pas d'absorbant, le L.S.A. peut présenter une instabilité à faible intensité en élargissement homogène.

Pour  $\bar{d}^{-1} > b + d$ , il existe pour toute valeur de  $\bar{A}$  une valeur critique du paramètre de pompage au-dessus de laquelle  $I_+$  est instable.

Pour  $b > 1$  et  $|\bar{A}|$  grand,  $I_+$  n'est pas stable

Pour  $\bar{d}^{-1} < b + 1$   $I_+$  est stable pour  $\bar{A} \sim 0$  et instable dans un intervalle  $[A_5, A_6]$  si  $\bar{A}$  est grand.

Les domaines instables [35, 52, 53] peuvent être des solutions périodiques ou chaotiques. Des solutions chaotiques apparaissent également à basse intensité pour  $\bar{A} > 0$  [52], c'est à dire si les deux cellules sont amplificatrices.

La présence d'attracteurs étranges n'est pas surprenante puisqu'on peut établir [53 et 54] une analogie entre le L.S.A. et l'instabilité



On peut encore pousser plus loin les approximations et éliminer adiabatiquement les polarisations lorsque  $d$  et  $\bar{d}$  tendent vers l'infini. On obtient alors le système de trois équations suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x (-1 + A F + \bar{A} \bar{F}) \\ \text{(ANII-13)} \quad F &= d_{//} (1 - F - F x^2) \\ \dot{\bar{F}} &= \bar{d}_{//} (1 - \bar{F} - a \bar{F} x^2) \end{aligned}$$

où on a posé  $x = \sqrt{S} E$ ,  $D = \sigma F$ ,  $\bar{D} = \bar{\sigma} \bar{F}$  et  $d_{//} = \gamma_{//} / \kappa$ ,  $\bar{d}_{//} = \bar{\gamma}_{//} / \kappa$ . L'unité de temps est  $\kappa^{-1}$  où  $\kappa$  est la constante de relaxation du champ.

Dans ce modèle on perd le point de bifurcation  $A(1)$  sur  $I_0$ , le laser s'allume en  $A(4)$  sur la solution  $I_+$ .

La position du point de bifurcation sur  $I_+$  est elle aussi modifiée. Ce point correspond encore à une bifurcation de Hopf mais instable. Ainsi perd-on les solutions harmoniques et pulsées, la bifurcation sur  $I_+$  correspond en fait à la précipitation du laser de  $I_+$  sur  $I_0$ .

### c) Conclusion.

De ce survol rapide se dégage l'idée que toute réduction du modèle perturbe profondément le diagramme de bifurcation en modifiant le domaine de stabilité des solutions, en supprimant ou rajoutant même certaines d'entre elles. La bifurcation étant conditionnée par la partie non linéaire des équations, une élimination adiabatique ou une simplification modifie celle-ci en perturbant justement cette partie non linéaire. Un article de Lugiato et al. [22] montre que la valeur relative des constantes de relaxation n'est pas le seul critère de validité d'une élimination adiabatique. Celle-ci suppose en outre que les modes d'oscillation supprimés restent stables sur tout le domaine d'étude, sous peine de changer implicitement de système d'équations, donc de modèle.

ANNEXE III  
EXPRESSIONS DES INTÉGRALES  
DU CHAPITRE BIV

Les intégrales qui interviennent au chapitre B IV dans le calcul en élargissement inhomogène peuvent toutes s'exprimer à l'aide de la fonction de dispersion de plasma :

$$Z(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t - \xi} dt$$

qui redonne des résultats analytiques à la limite Doppler infinie [23] et qu'on sait programmer pour toute valeur de  $\xi$ . L'établissement de ces expressions est long et fastidieux, aussi nous contenterons nous de donner les résultats.

En posant 
$$f_{m,n}(\theta, I, u') = \int_{-\infty}^{+\infty} W(v) \frac{\mathcal{L}_{\pm}^m}{(1 + I\mathcal{L}_{\pm})^n} dv$$

avec 
$$\theta = \frac{\omega_n - \omega_a}{\gamma_R} ; \quad u' = \frac{Ku}{\gamma}$$

il vient :

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= 1 + \frac{I}{\delta} f_{1,1}(\theta, I, u') \\ g &= f_{1,1}(\theta, I, u') - \frac{v}{\delta} f_{1,1}\left(\theta, \frac{vI}{\delta}, u'\right) \\ \frac{1}{d} &= \frac{1}{g} \left[ vI f_{2,1}(\theta, I, u') - \frac{v}{I} f_{3,1}(\theta, vI, u') - \frac{\delta+1}{\delta^2 I} f_{2,2}\left(\theta, \frac{vI}{\delta}, u'\right) \right] \\ \text{(ANIV-1)} \quad &\int_{-\infty}^{+\infty} W(v) \frac{\mathcal{L}_{\pm}^2 \varepsilon(v) dv}{(1 + I\mathcal{L}_{\pm})(\delta + vI\mathcal{L}_{\pm})(1 - x + \varepsilon(v))} = - \frac{1}{\delta(1 - \Delta_0 x)} f_{2,1}(\theta, I, u') \\ &- \frac{B^2}{\delta(1 - \Delta_0 x)(v - B\delta)} f_{2,1}(\theta, BI, u') \left[ \frac{1}{B-1} + \frac{\delta \Delta_0}{v - B\delta} \right] \\ &- \frac{v^2}{\delta^2(1 - \Delta_0 x)(v - B\delta)} f_{2,1}\left(\theta, \frac{vI}{\delta}, u'\right) - \frac{\Delta_0 v(v + 2B\delta)}{\delta^2(1 - \Delta_0 x)(v - B\delta)^2} \\ &\quad f_{2,2}\left(\theta, \frac{vI}{\delta}, u'\right) \\ &+ \frac{vI}{\delta^3(v - B\delta)(1 - \Delta_0 x)} \left[ 1 + \frac{vI(v + 2B\delta)}{v - B\delta} \right] f_{3,2}\left(\theta, \frac{vI}{\delta}, u'\right) \end{aligned}$$

et des expressions analogues pour l'absorbant en utilisant les notations surlignées et en remplaçant I par aI.

On a posé dans (ANIV-1)

$$B = \left( \frac{v}{\delta} - \Delta_0 x \right) / (1 - \Delta_0 x)$$

le développement des fonctions  $f_{m,n}(\theta, I, u')$  donne :

$$f_{1,1}(\theta, I, u') = 2 \frac{A_1(\theta, I)}{u'} Z \left( \frac{x_1(\theta, I)}{u'} \right) + \frac{A_3(\theta, I)}{u'} Z \left( \frac{x_3(\theta, I)}{u'} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} f_{2,2}(\theta, I, u') &= \left( \frac{A_1(\theta, I)}{u'} \right)^2 \left[ -2 \frac{x_1(\theta, I)}{u'} Z \left( \frac{x_1(\theta, I)}{u'} \right) - 2 \right] + \left( \frac{B_1}{u'} \right) \\ &\quad Z \left( \frac{x_1(\theta, I)}{u'} \right) \\ &+ \left( \frac{A_3(\theta, I)}{u'} \right)^2 \left[ -2 \frac{x_3(\theta, I)}{u'} Z \left( \frac{x_3(\theta, I)}{u'} \right) - 2 \right] + \left( \frac{B_3}{u'} \right) \\ &\quad Z \left( \frac{x_3(\theta, I)}{u'} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} f_{2,1}(\theta, I, u') &= \frac{C_1(\theta, I, 0)}{u'} Z \left( \frac{x_1(\theta, I)}{u'} \right) + \frac{C_1(\theta, 0, I)}{u'} Z \left( \frac{x_1(\theta, 0)}{u'} \right) \\ &+ \frac{C_3(\theta, I, 0)}{u'} Z \left( \frac{x_3(\theta, I)}{u'} \right) + \frac{C_3(\theta, 0, I)}{u'} Z \left( \frac{x_3(\theta, 0)}{u'} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{3,2}(\theta, I, u') &= \sum_{i=\pm 1, \pm 3} D_i(\theta, I, 0) \left[ -2 \frac{x_i(\theta, I)}{u'} Z \left( \frac{x_i(\theta, I)}{u'} \right) - 2 \right] \left( \frac{A_i(\theta, I)}{u'} \right)^2 \\ &+ \sum_{i=\pm 1, \pm 3} E_i(\theta, I, 0) \left( \frac{A_i(\theta, I)}{u'} \right)^2 \left\{ \left[ -2 \left( \frac{x_i(\theta, I)}{u'} \right)^2 + 1 \right] Z \left( \frac{x_i(\theta, I)}{u'} \right) - 2 \frac{x_i(\theta, I)}{u'} \right\} \\ &+ \sum_{i=\pm 1, \pm 3} C_i(\theta, I_1, I_2, n_1, n_2) Z \left( \frac{x_i(\theta, I_1)}{u'} \right) \end{aligned}$$

$$(I_1, I_2) = (I, 0) \text{ et } (0, I)$$

La dernière somme porte sur l'indice  $i$  et sur les 2 couples  $(I, 0)$  et  $(0, I)$ .  
Lorsque  $I_1$  (resp.  $I_2$ ) vaut  $I$  alors  $n_1$  (resp.  $n_2$ ) vaut 2 et lorsque  $I_1$  (resp.  $I_2$ )  
vaut 0,  $n_1$  (resp.  $n_2$ ) vaut 1.

On obtient  $f_{3,1}(\theta, I, u')$  en intervertissant  $I$  et 0 dans  $f_{3,2}(\theta, I, u')$

On a introduit les notations de Salomaa et Stenholm [23]

$$x_1(\theta, I) = (c + d)^{\frac{1}{2}} ; x_3(\theta, I) = (c-d)^{\frac{1}{2}}$$

$$x_{-1}(\theta, I) = -x_1(\theta, I) ; x_{-3}(\theta, I) = -x_3(\theta, I)$$

$$c = \theta^2 - 1 - \frac{I}{2} ; d = \left( \frac{1}{4} I^2 - 4\theta^2 - 2\theta^2 I \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$A_1(\theta, I) = \frac{1+\theta^2 + x_1^2}{4 d x_1} ; A_3(\theta, I) = -\frac{1+\theta^2 + x_3^2}{4 d x_3}$$

$$A_{-1}(\theta, I) = -A_1(\theta, I) ; A_{-3}(\theta, I) = -A_3(\theta, I)$$



ainsi que les paramètres :

$$D_i(\theta, I_1, I_2) = \sum_{j=\pm 1, \pm 3} A_j(\theta, I_2) \frac{x_j(\theta, I_2) [3(x_i(\theta, I_1))^2 - (x_j(\theta, I_2))^2]}{[x_i(\theta, I_1) - x_j(\theta, I_2)]^2 [x_i(\theta, I_1) + x_j(\theta, I_2)]^2}$$

$$E_i(\theta, I_1, I_2) = \sum_{j=\pm 1, \pm 3} \frac{-2 x_i(\theta, I_1) A_j(\theta, I_2) x_j(\theta, I_2)}{[x_i(\theta, I_1) - x_j(\theta, I_2)]^2 [x_i(\theta, I_1) + x_j(\theta, I_2)]^2}$$

$$\text{En posant : } \sum_i \left( \frac{A_i(\theta, I)}{x - x_i(\theta, I)} \right)^n = \sum_{i, m} \frac{A_i(\theta, I, n, m)}{(x - x_i(\theta, I))^m} \quad \text{pour } n = 1 \text{ ou } 2$$

on définit le dernier paramètre :

$$C_i(\theta, I_1, I_2, n_1, n_2) = \sum_{\substack{j=\pm 1, \pm 3 \\ m=1, 2}} \frac{A_i(\theta, I_1, n_1, 1) A_j(\theta, I_2, n_2, m)}{[x_i(\theta, I_1) - x_j(\theta, I_2)]^m} (1 - \delta_{I_1 I_2})$$

$$+ \sum_{\substack{j=\pm 1, \pm 3 \\ m=1, 2}} \frac{A_i(\theta, I_1, n_1, 1) A_j(\theta, I_2, n_2, m)}{(x_i(\theta, I_1) - x_j(\theta, I_2))^m} \delta_{ij} \delta_{I_1 I_2}$$

## CONCLUSIONS, PERSPECTIVES

Notre étude de l'approximation des "deux niveaux effectifs" du modèle à quatre niveaux nous a amené à introduire des critères nouveaux pour l'apparition d'instabilités sur les branches stationnaires. Celui, tout d'abord, de mauvaise cavité effective, condition à rapprocher de celle de mauvaise cavité obtenue sur le modèle à deux niveaux en bistabilité optique et dans l'étude du second seuil d'oscillation du laser sans absorbant. Ceux enfin de bon absorbant et de bon amplificateur, spécifiques au modèle étudié.

Ces notions nous ont permis de comprendre le diagramme de phase des solutions stationnaires, de cerner les paramètres pertinents du problème et de proposer des relations simples pour la position du point haut de bifurcation.

L'analyse numérique a montré qu'il était vain, en général, d'espérer obtenir des renseignements sur les solutions périodiques du problème à partir d'une étude de bifurcation sur les solutions stationnaires, les oscillations mises en évidence lors de cette étude ayant bien souvent un domaine de stabilité limité à un voisinage du point de bifurcation. C'est pourquoi l'étude de ces solutions doit être menée au delà du point de bifurcation ainsi que l'on fait T. Erneux et P. Mandel sur le modèle à deux niveaux.

Nous avons ébauché l'étude du modèle en élargissement Doppler par l'établissement d'une relation implicite déterminant la position du point de bifurcation. L'introduction d'une nouvelle approximation : "la résonance inefficace" a considérablement simplifié le problème et semble plus proche des conditions expérimentales que le modèle purement homogène. L'ensemble des intégrales intervenant dans ce modèle ont été exprimées à l'aide de la fonction de dispersion de plasma rendant ainsi la théorie directement applicable pour une étude numérique.

Cette étude numérique, par une comparaison des résultats des deux modèles avec la réalité expérimentale, constituerait la suite logique de ce travail. Des expériences récentes [24] rendent possible cette confrontation par le soin avec lequel les paramètres ont été déterminés.

Nous avons signalé que les absorbants à fort coefficient d'absorption nécessitent la prise en compte de la dépendance longitudinale du champ. Il est évident que la considération de la structure spatiale du champ modifie les solutions ainsi que l'ont montré Hall et Dziura [25] sur le modèle à deux niveaux.

Il serait enfin souhaitable de déterminer les modifications que créent la réintroduction des polarisations et des phases perspectives qui se sont avérées riches de conséquences sur le modèle à deux niveaux [51].

Par ailleurs, les méthodes développées dans ce travail peuvent être appliquées à d'autres systèmes laser dans lesquels différentes bifurcations ou séquences de bifurcations ont été prédites ou observées. Citons par exemple le laser avec signal injecté [56], le laser avec pompe modulée [43] et le laser avec pertes modulées [44].

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. Mandel, G.P. Agrawal, Opt. Comm., 42, 269 (1982).
- [2] P. Mandel, Opt. Comm., 44, 400 (1983)
- [3] P. Mandel, H. Zeghlache, Opt. Comm., 47, 146 (1983).
- [4] L.W. Casperson, A. Yariv, I.E.E.E. Q-E 8, 69 (1972).
- [5] A.Z. Grasyuk, A.N. Orayevskiy, Radio Eng. Electron., Phys. 9, 424 (1964).
- [6] H. Risken, K. Nummedal, J. Appl. Phys. 39, 4662 (1968).
- [7] L.W. Casperson, I.E.E.E. QE 14, 756 (1978).
- [8] L.W. Casperson, Phys. Rev. A21, 911 (1980),  
Phys. Rev. A23, 248 (1981).
- [9] S.T. Hendow, M. Sargent III, Opt. Comm., 40, 385 (1982)  
Opt. Comm., 43, 59 (1982).
- [10] L.A. Lugiato, L.M. Narducci, D.K. Bandy, N.B. Abraham, Opt. Comm.,  
46, 1115 (1983).
- [11] H. Haken, Handbuch der physik, Vol. XXV/2C, Springer-Verlag (1970).
- [12] M. Sargent III, M.O. Scully, W.E. Lamb, Laser physics, Addison-Wesley (1974).
- [13] M. Lefebvre, thèse de 3ème cycle, université de Lille I (1983).  
M. Lefebvre, D. Dangoisse, P. Glorieux, Phys. Rev. A29, 758 (1984).
- [14] F.T. Arecchi, R. Meucci, G. Puccioni, J. Tredicce, Phys. Rev. Lett., 49,  
1217 (1982).
- [15] I. Burak, P.L. Houston, D.G. Sutton, J.I. Steinfeld, I.E.E.E QE 7, 73 (1971)
- [16] J. Dupré, F. Meyer, C. Meyer, Revue de physique appliquée, 10, 285 (1975)  
J. Dupré, thèse d'Etat, Orsay Paris-Sud (1977).
- [17] E. Arimondo, F. Casagrande, L.A. Lugiato, P. Glorieux, J. Appl. Phys.  
B30, 57 (1983).
- [18] Ph. Bootz, rapport de D.E.A., Université de Lille I (1982).
- [19] P. Mandel, Phys. Lett. A83, 207 (1981).

- [20] E. Arimondo, *communication privée*.
- [21] E. Arimondo, B.M. Dinelli, *Opt. Comm.*, 44, 277 (1983).
- [22] L.A. Lugiato, P. Mandel, L.M. Narducci, *Phys. Rev.* A29, 1438 (1984).
- [23] R. Salomaa, S. Stenholm, *Phys. Rev.* A8, 2695 (1973).
- [24] J. Heppner, Z. Solajic', *Appl. Phys.* B35, 77 (1984).
- [25] D.G. Hall, T.G. Dziura, *Opt. Comm.*, 49, 146 (1984).
- [26] L.A. Lugiato, *Progress in Optics*, Vol XXI, 69 (1984).
- [27] H. Poincaré, *Acta Math.*, 7, 259 (1885).
- [28] D.D. Joseph, D.H. Sattinger, *Arch. Rational Mech. Anal*, 45, 79 (1972).
- [29] G. Ioss, D.D. Joseph, *elementary stability and bifurcation theory*, Springer-Verlag (1980).
- [30] D.H. Sattinger, *Topics in Stability and bifurcation theory*, Lectures notes in Math., 309, Springer-Verlag (1972).
- [31] D.D. Joseph, *Stability of Fluid Motions I and II*, Springer tracts in Natural Philosophy, vol 27 and 28, Springer-Verlag (1976).
- [32] T. Erneux, P. Mandel, *Z. Phys.* B44, 353 (1981)  
*Z. Phys.* B44, 365 (1981)
- [33] A. Szöke, V. Daneu, J. Goldhar, N.A. Kurnitt, *Appl. Phys. Lett.*, 15, 376 (1969).
- [34] P. Peplowski, *Physica D6*, 364 (1983).
- [35] F. Mrugala, P. Peplowsky, *Z. Phys.* B38, 359 (1980).
- [36] L.W. Casperson, *Lectures notes in Physics*, 181, Laser Physics, 88, Proceedings, Hamilton, N. Zealand (1983).
- [37] A.N. Orayevskiy, *Radio Eng. Electron. Phys.*, 4, 228 (1959).
- [38] T.H. Maiman, *Nature*, 187, 493 (1960).
- [39] H. Statz, G. De Mars, *Quantum Electronics*, 530, Townes, Columbia University Press, New York (1960).
- [40] M.L. Minden, L.W. Casperson, *I.E.E.E.- QE* 18, 1952 (1982).
- [41] A. Jacques, P. Glorieux, *Opt. Comm.*, 40, 455 (1982).

- [42] T. Erneux, P. Mandel, J.F. Magnan, Phys. Rev. A29, 2690 (1984).
- [43] T. Yamada, R. Graham, Phys. Ref. Lett., 45, 1322 (1980)
- [44] T. Yamada, R. Graham, Phys. Lett., 82A, 321 (1981)
- [45] H. Haken, Synergetics, chap. 12, Springer-Verlag (1978).
- [46] E.N. Lorenz, J.A.O., 20, 130 (1963).
- [47] H. Haken, Phys. Lett., 53A, 77 (1975).
- [48] Y. Pomeau, P. Manneville, Comm. Math. Phys., 77, 189 (1980).  
Physica D1, 219 (1980).
- [49] Y.V. Brzhazovskii, L.S. Vasilenko, S.G. Rautian, G.S. Popova,  
V.P. Chebotaev, Zh. Eksp. Teor. Fiz., 61,  
500 (1971), traduit en anglais dans Soviet  
Phys. J.E.T.P., 34, 265 (1972).
- [50] A. Lugiato, P. Mandel, S.T. Dembinski, A. Kossakowski, Phys. Rev. A18,  
238 (1978).
- [51] T. Erneux, P. Mandel, Phys. Rev. A30, 1893 (1984)..  
Phys. Rev. A30 1902 (1984).
- [52] M.G. Velarde, J.C. Antoranz, Prog. Théo. Phys., Prog. Letters, 66,  
717 (1981).
- [53] V. Degiorgo, L.A. Lugiato, Phys. Lett. A77, 167 (1980).
- [54] J.C. Antoranz, M.G. Velarde, Opt. Comm., 38, 61 (1981).
- [55] J.C. Antoranz, M.G. Verlade, Phys. Rev. Lett. 47, 1895 (1981).
- [56] L.M. Narducci, L.A. Lugiato, Opt. Comm., 46, 64 (1983).
- [57] B.D. Hassard, N.D. Kazarinoff, Y.H. Wan, "Theory and applications of  
Hopf bifurcation", Lon. Math. Soc., Lectures  
Notes 41 (1981).
- [58] J.E. Marsden, Mc Cracken : "The Hopf bifurcation and its applications",  
applied math. sciences 19, Springer Verlag (1976)  
J.B. Mc Langhlin, P.C. Martin, Phys. Rev., A12, 186 (1975).
- [59] P. Couillet et Ch. Tresser, communication privée.