50376
1985
153

N° d'ordre : 658

50376
1985
153

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR D'ETAT

(Mathématiques)

par

Annie-Françoise MOUYART-TASSIN

BIBLIOTHEQUE INTERUNIVERSITAIRE
SECTION DE SCIENCES
LILLE

COMBINATOIRE CONSTRUCTIVE : CARRES ET HYPERETOILES

Thèse soutenue le jeudi 20 juin 1985 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :	Président	P. BACCHUS
	Rapporteurs	F. STERBOUL
		M. LAS VERGNAS
		D. SOTTEAU
	Examinateurs	C. CARREZ
		M. DAUCHET

P R O F E S S E U R S CLASSE EXCEPTIONNELLE

M.	CONSTANT Eugène	I.E.E.A.
M.	FOURET René	Physique
M.	GABILLARD Robert	I.E.E.A.
M.	MONTREUIL Jean	Biologie
M.	PARREAU Michel	Mathématiques
M.	TRIDOT Gabriel	Chimie
M.	VIVIER Emile	Biologie
M.	WERTHEIMER Raymond	Physique

P R O F E S S E U R S 1ère classe

M.	BACCHUS Pierre	Mathématiques
M.	BEAUFILS Jean-Pierre (dét.)	Chimie
M.	BIAYS Pierre	G.A.S.
M.	BILLARD Jean (dét.)	Physique
M.	BOILLY Bénoni	Biologie
M.	BOIS Pierre	Mathématiques
M.	BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M.	BOUGHON Pierre	Mathématiques
M.	BOURIQUET Robert	Biologie
M.	BREZINSKI Claude	I.E.E.A.
M.	CELET Paul	Sciences de la Terre
M.	CHAMLEY Hervé	Biologie
M.	COEURE Gérard	Mathématiques
M.	CORDONNIER Vincent	I.E.E.A.
M.	DEBOURSE Jean-Pierre	S.E.S.
M.	DYMENT Arthur	Mathématiques

PROFESSEURS 1ère classe (suite)

M. ESCAIG Bertrand	Physique
M. FAURE Robert	Mathématiques
M. FOCT Jacques	Chimie
M. GRANELLE Jean-Jacques	S.E.S.
M. GRUSON Laurent	Mathématiques
M. GUILLAUME Jean	Biologie
M. HECTOR Joseph	Mathématiques
M. LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M. LACOSTE Louis	Biologie
M. LAVEINE Jean Pierre	Sciences de la Terre
M. LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique
M. LHOMME Jean	Chimie
M. LOMBARD Jacques	S.E.S.
M. LOUCHEUX Claude	Chimie
M. LUCQUIN Michel	Chimie
M. MIGEON Michel Recteur à Grenoble	E.U.D.I.L.
M. MIGNOT Fulbert (dét.)	Mathématiques
M. PAQUET Jacques	Sciences de la Terre
M. PROUVOST Jean	Sciences de la Terre
M. ROUSSEAU Jean-Paul	Biologie
M. SALMER Georges	I.E.E.A.
M. SEGUIER Guy	I.E.E.A.
M. SIMON Michel	S.E.S.
M. STANKIEWICZ François	S.E.S.
M. TILLIEU Jacques	Physique
M. VIDAL Pierre	I.E.E.A.
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mathématiques

P R O F E S S E U R S 2ème classe

M. ANTOINE Philippe	Mathématiques (Calais)
M. BART André	Biologie
Mme BATTIAU Yvonne	Géographie
M. BEGUIN Paul	Mathématiques
M. BELLET Jean	Physique
M. BERZIN Robert	Mathématiques
M. BKOUCHE Rudolphe	Mathématiques
M. BODARD Marcel	Biologie
M. BOSQ Denis	Mathématiques
M. BRASSELET Jean-Paul	Mathématiques
M. BRUYELLE Pierre	Géographie
M. CAPURON Alfred	Biologie
M. CARREZ Christian	I.E.E.A.
M. CAYATTE Jean-Louis	S.E.S.
M. CHAPOTON Alain	C.U.E.E.P.
M. COQUERY Jean-Marie	Biologie
Mme CORSIN Paule	Sciences de la Terre
M. CORTOIS Jean	Physique
M. COUTURIER Daniel	Chimie
M. CROSNIER Yves	I.E.E.A.
M. CURGY Jean-Jacques	Biologie
Mle DACHARRY Monique	Géographie
M. DAUCHET Max	I.E.E.A.
M. DEBRABANT Pierre	E.U.D.I.L.
M. DEGAUQUE Pierre	I.E.E.A.
M. DELORME Pierre	Biologie
M. DELORME Robert	S.E.S.
M. DE MASSON D'AUTUME Antoine	S.E.S.
M. DEMUNTER Paul	C.U.E.E.P.

PROFESSEURS 2ème classe (Suite 1)

M. DENEL Jacques	I.E.E.A.
M. DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques (Calais)
Mle DESSAUX Odile	Chimie
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie
M. DHAINAUT André	Biologie
Mme DHAINAUT Nicole	Biologie
M. DORMARD Serge	S.E.S.
M. DOUKHAN Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M. DUBOIS Henri	Physique
M. DUBRULLE Alain	Physique (Calais)
M. DUBUS Jean-Paul	I.E.E.A.
M. FAKIR Sabah	Mathématiques
M. FONTAINE Hubert	Physique
M. FOUQUART Yves	Physique
M. FRONTIER Serge	Biologie
M. GAMBLIN André	G.A.S.
M. GLORIEUX Pierre	Physique
M. GOBLOT Rémi	Mathématiques
M. GOSSELIN Gabriel (dét.)	S.E.S.
M. GOUDMAND Pierre	Chimie
M. GREGORY Pierre	I.P.A.
M. GREMY Jean-Paul	S.E.S.
M. GREVET Patrice	S.E.S.
M. GUILBAULT Pierre	Biologie
M. HENRY Jean-Pierre	E.U.D.I.L.
M. HERMAN Maurice	Physique
M. JACOB Gérard	I.E.E.A.
M. JACOB Pierre	Mathématiques
M. JEAN Raymond	Biologie
M. JOFFRE Patrick	I.P.A.

PROFESSEURS 2ème classe (suite 2)

M. JOURNEL Gérard	E.U.D.I.L.
M. KREMBEL Jean	Biologie
M. LANGRAND Claude	Mathématiques
M. LATTEUX Michel	I.E.E.A.
Mme LECLERCQ Ginette	Chimie
M. LEFEVRE Christian	Sciences de la Terre
Mle LEGRAND Denise	Mathématiques
Mle LEGRAND Solange	Mathématiques (Calais)
Mme LEHMANN Josiane	Mathématiques
M. LEMAIRE Jean	Physique
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique
M. LOSFELD Joseph	C.U.E.E.P.
M. LOUAGE Francis(dét.)	E.U.D.I.L.
M. MACKE Bruno	Physique
M. MAIZIERES Christian	I.E.E.A.
M. MESSELYN Jean	Physique
M. MESSERLIN Patrick	S.E.S.
M. MONTEL Marc	Physique
Mme MOUNIER Yvonne	Biologie
M. PARSY Fernand	Mathématiques
Mle PAUPARDIN Colette	Biologie
M. PERROT Pierre	Chimie
M. PERTUZON Emile	Biologie
M. PONSOLLE Louis	Chimie
M. PORCHET Maurice	Biologie
M. POVY Lucien	E.U.D.I.L.
M. RACZY Ladislas	I.E.E.A.
M. RAOULT Jean François	Sciences de la Terre
M. RICHARD Alain	Biologie

PROFESSEURS 2ème Classe (suite 3)

M. RIETSCH François	E.U.D.I.L.
M. ROBINET Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M. ROGALSKI Marc	Mathématiques
M. ROY Jean-Claude	Biologie
M. SCHAMPS Joël	Physique
Mme SCHWARZBACH Yvette	Mathématiques
M. SLIWA Henri	Chimie
M. SOMME Jean	G.A.S.
Mle SPIK Geneviève	Biologie
M. STAROSWIECKI Marcel	E.U.D.I.L.
M. STERBOUL François	E.U.D.I.L.
M. TAILLIEZ Roger	Institut Agricole
Mme TJOTTA Jacqueline (dét.)	Mathématiques
M. TOULOTTE Jean-Marc	I.E.E.A.
M. TURRELL Georges	Chimie
M. VANDORPE Bernard	E.U.D.I.L.
M. VAST Pierre	Chimie
M. VERBERT André	Biologie
M. VERNET Philippe	Biologie
M. WALLART Francis	Chimie
M. WARTEL Michel	Chimie
M. WATERLOT Michel	Sciences de la Terre
Mme ZINN JUSTIN Nicole	Mathématiques

CHARGES DE COURS

M. ADAM Michel	S.E.S.

CHARGES DE CONFERENCES

M. BAFCOP Joël	I.P.A.
M. DUVEAU Jacques	S.E.S.
M. HOFLACK Jean	I.P.A.
M. LATOUCHE Serge	S.E.S.
M. MALAUSSENA DE PERNO Jean-Louis	S.E.S.
M. NAVARRE Christian	I.P.A.
M. OPIGEZ Philippe	S.E.S.

Je tiens à remercier ici tous ceux grâce à qui ce travail a pu être mené à bien :

Monsieur Sterboul, qui dirige mes recherches depuis plusieurs années avec compétence, qui a toujours su proposer des sujets intéressants et trouver les références appropriées,

Mademoiselle Sotteau, pour ses remarques pertinentes, qui m'ont donné la matière d'un chapitre supplémentaire, avec un résultat nouveau,

Monsieur Las Vergnas, qui a accepté d'être rapporteur de cette thèse,

Monsieur Bacchus, qui me fait l'honneur de présider le jury,

Messieurs Carrez et Dauchet, qui ont bien voulu faire partie de ce jury,

les imprimeurs, Monsieur Derache pour la version provisoire et Monsieur Glanc pour la version définitive,

tous ceux qui, à l'E.U.D.I.L. comme au Laboratoire de Calcul, m'ont aidée et encouragée,

enfin, les membres de ma famille, pour leur patience et leur soutien.

à Marc

à Anne

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

PREMIERE PARTIE : CARRES

1. Définition de quelques carrés I.1.1
   1.1 Définitions générales I.1.1
   1.2 Carrés latins I.1.3
   1.3 Carrés siamois I.1.6
      1.3.1 Définition I.1.6
      1.3.2 Conditions nécessaires I.1.7
      1.3.3 Couples siamois I.1.7
      1.3.4 Construction d'un carré siamois $S(ab,b^2)$ I.1.15
      1.3.5 Construction d'un carré siamois $S(ab,2a^2)$ I.1.16
      1.3.6 Construction d'un carré siamois S(nk,pk) à partir de S(n,p) .. I.1.17
      1.3.7 Existence des carrés siamois I.1.18
   1.4 Carrés doubles I.1.19
      1.4.1 Définitions et exemples I.1.19
      1.4.2 Dédoublement d'un carré double I.1.21
      1.4.3 Les carrés séparables ou inséparables I.1.23
      1.4.4 Les carrés gréco-latins I.1.24
      1.4.5 Les carrés "presque gréco-latins" I.1.28
      1.4.6 Les A-designs I.1.30

2. Existence des carrés doubles symétriques inséparables I.2.1
   2.1 Carrés de petite taille I.2.1
   2.2 Pairwise Balanced Designs I.2.9
   2.3 Transversal Designs I.2.13
   2.4 Carrés doubles d'ordre 3n+1 ..... I.2.20
   2.5 Le produit direct singulier I.2.23
   2.6 Produit de carrés doubles I.2.27
   2.7 Carrés doubles avec un trou I.2.32
   2.8 Conclusion I.2.34

DEUXIEME PARTIE : HYPERETOILES

1. Un problème de documentation automatique II.1.1

2. Décomposition de l'hypergraphe régulier complet en hyperétoiles II.2.1

2.1 Définitions II.2.1

2.2 Conditions nécessaires II.2.4

2.3 Conditions suffisantes II.2.5

2.4 Décomposition du graphe complet II.2.9

2.4.1 Décomposition en couplages II.2.9

2.4.2 Décomposition en étoiles II.2.9

2.5 Hyperétoiles de degré 2 ..... II.2.17

3. Hyperétoiles à rayons simples II.3.1

3.1 Points possibles II.3.1

3.2 Points de D connus II.3.3

3.3 La frontière de P et de D : $n = k-1+c$ II.3.8

3.4 Systèmes de Steiner et c-décompositions II.3.14

3.5 Décompositions de K_n^3 en HE(2,3,c) II.3.15

3.5.1 Résultats connus II.3.15

3.5.2 Frontière de D II.3.16

3.5.3 Décompositions cycliques II.3.20

3.5.4 Relations récursives II.3.25

3.5.5 Une famille infinie : les points $(n,3,3^q)$ II.3.29

3.5.6 Petites valeurs de c II.3.30

3.5.7 Conclusion II.3.35

4. Hyperétoiles à centre simple II.4.1

4.1 Points possibles II.4.1

4.2 Points de D_1 connus II.4.2

4.3 Décompositions régulières II.4.4

4.4 Décomposition de K_n^3 en HE(1,3,c) II.4.6

4.4.1 Résultats connus II.4.6

4.4.2 Décompositions cycliques II.4.7

4.4.3 Décompositions utilisant les corps finis II.4.28

4.4.4 Relations récursives et conséquences directes II.4.46

4.4.5 Une construction directe II.4.55

4.4.6 Petites valeurs de c II.4.57

4.4.7 Conclusion II.4.78

LEXIQUE

REFERENCES

INTRODUCTION

La Combinatoire est présente dans tous les domaines scientifiques, et même dans tous les problèmes pratiques quotidiens, puiqu'elle étudie les ensembles finis et les façons de les organiser.

Chaque fois que l'on cherche à établir un emploi du temps, à optimiser une base de données, ou simplement à assembler les pièces d'un puzzle, on fait de la combinatoire puisque l'on recherche une configuration d'un ensemble fini respectant certaines contraintes.

Pour définir les différents domaines de la combinatoire, le mieux est de citer C. Berge [5] :

" De même que l'Arithmétique étudie les nombres entiers (avec les opérations classiques), que l'Algèbre étudie les opérations en général, que l'Analyse étudie les fonctions, que la Géométrie étudie les formes rigides et la Topologie celles qui ne le sont pas, la Combinatoire, elle, étudie les configurations. Elle veut démontrer l'existence de configurations d'un type voulu, ou les dénombrer, ou les recenser ; elle cherche leurs propriétés intrinsèques ; elle étudie les transformations d'une configuration en une autre, aussi bien que les "sous-configurations" qu'on peut extraire d'une configuration donnée. "

Dans ce vaste programme, nous choisissons ici de "démontrer l'existence de configurations d'un type voulu" :

c'est le domaine de la combinatoire constructive.

Nous commençons par définir une configuration. Par exemple, nous voulons placer des nombres entiers compris entre 1 et n, deux par deux dans les cases d'un carré $n \times n$ en respectant certaines contraintes : nous obtiendrons un carré double. Y parviendrons-nous pour toutes les valeurs de n ? Si n n'est pas trop grand, nous arriverons à construire un carré double, ou à prouver l'impossibilité de la construction, au bout d'un temps plus ou moins long, avec ou sans l'aide d'un calculateur. Si n est suffisamment grand, nous assemblerons plusieurs petits carrés doubles pour en construire un grand. Et si n n'est ni petit ni grand, il ne restera qu'à attendre les progrès des moyens de calcul ou l'invention de nouvelles méthodes de construction, car on se heurtera au "mur de la combinatoire". Cela nous est arrivé ici pour les carrés doubles d'ordre 17,18,20 et 23.

La deuxième configuration que nous étudierons sera encore plus décevante. Partant toujours des entiers de 1 à n, nous les grouperons k par k de toutes les façons possibles. Puis nous assemblerons c paquets de k qui ont p points communs : nous aurons construit une hyperétoile. Il faudra alors grouper tous les paquets de k entiers en hyperétoiles. Cette fois, il y a quatre paramètres n, p, k et c, et l'étude sera plus compliquée. Même en posant k = 3 et p = 1 ou 2, il restera une infinité de points seulement "possibles". Remarquons cependant que nous démontrerons l'existence de la configuration pour une infinité de paramètres (n,p,k,c).

L'existence d'une configuration donnée ne pose pas toujours de tels problèmes. Nous commencerons par construire un carré latin pour chaque ordre possible. Nous étudierons ensuite les carrés siamois, qui paraissaient être des configurations compliquées, mais dont les conditions d'existence seront

entièrement déterminées, puisque nous exposerons des constructions valables pour tous les paramètres possibles. Nous verrons que L. Euler lui-même ne croyait pas en l'existence de certains carrés gréco-latins, et qu'il fallut presque deux siècles pour les découvrir. Les pairwise balanced designs ou espaces linéaires constitueront un cas particulier, puisque leur existence est établie sous certaines conditions pour tout ordre "suffisamment grand", sans pouvoir toutefois préciser la borne inférieure.

Pourquoi définit-on une configuration ? Parfois, elle s'impose d'elle-même pour résoudre un problème pratique d'emploi du temps, d'organisation d'un tournoi sportif, ou de construction d'un fichier. D'autres fois, au contraire, on définit la configuration avant de lui connaître une utilité pratique. C'est le cas des casse-tête mathématiques, comme le carré magique, le problème des trente-six officiers ou celui de la promenade des écolières, qui ont motivé l'étude des carrés latins orthogonaux et des systèmes de Steiner. C'est également le domaine de la recherche, lorsqu'on invente une configuration dans le seul but d'explorer ses possibilités. Parfois, ces configurations qui semblent inutiles, si on se limite à l'application pratique immédiate, trouvent un développement inattendu : certains carrés latins sont ainsi utilisés dans la recherche agronomique.

Les carrés siamois ont été étudiés dans une précédente thèse [28] et ne sont présentés ici que comme exemple de configurations dont le problème d'existence est résolu. Ils représentent la solution d'un problème posé par P. Virool, de l'Université de Bangkok (d'où leur nom). Il s'agit d'organiser n travaux pratiques pour un groupe de p étudiants ($n < p < 2p$). A chacune des n séances, chaque poste doit être occupé par un ou deux étudiants, et chaque étudiant occupe un poste et un seul.

A la fin du cycle de n séances, chaque étudiant doit avoir travaillé sur tous les postes. Enfin, pour encourager le travail personnel, on souhaite que tous les étudiants soient placés "en binôme" le même nombre de fois.

L'étude des carrés doubles a été proposée par W. Wallis au congrès de Montréal en 1979 sous la forme suivante :

- chaque case de ce carré $n \times n$ contient un couple non ordonné de symboles pris parmi 1,2,..,n
- la diagonale contient les couples 11,22,..,nn
- chaque couple de symboles différents apparaît deux fois dans le carré
- chaque symbole figure deux fois dans chaque ligne et dans chaque colonne
- "not from Latin Squares".

Cette dernière propriété pouvait être interprétée de différentes façons. Par exemple : ne pas utiliser de carrés latins pour construire un carré double. Nous l'avons comprise comme "un carré double n'est pas séparable en deux carrés latins".

Dans les annales du congrès [39], W. Wallis a précisé qu'un carré double ne devait pas provenir d'une paire de carrés latins orthogonaux. Il avait entre-temps publié avec K. Heinrich [21] un article sur les carrés presque gréco-latins.

Nous avons donc ajouté une condition de symétrie pour mieux marquer la différence entre les deux sortes de carrés doubles, et nous avons défini les carrés doubles symétriques inséparables.

Le fait que l'on ne puisse pas séparer ces carrés en deux carrés latins peut être considéré comme un défaut par rapport à l'harmonie d'un carré gréco-latin, ou au contraire comme une propriété particulièrement intéressante si l'on recherche une certaine cohésion. Il est impossible de répartir les symboles en deux catégories disjointes dans certaines cases, et le nombre de ces cases assurant la cohésion du carré n'est

pas le même pour tous les carrés. Nous espérons que des exemples pratiques viendront confirmer l'intérêt de cette nouvelle propriété.

Les hyperétoiles, au contraire, sont nées de l'extension théorique d'un exemple pratique. Des chercheurs japonais ont en effet cherché à optimiser une base de données et ont été amenés à étudier les décompositions du graphe complet en étoiles [46]. S. Yamamoto et S. Tazawa [47] ont pensé pouvoir étendre ces résultats aux décompositions de l'hypergraphe complet en hyperétoiles, mais n'ont pas pu résoudre entièrement le problème de leur existence. Nous avons trouvé des contre-exemples prouvant que leurs conditions nécessaires étaient trop restrictives, et rétabli le véritable résultat, ce qui nous a permis de poursuivre leur étude. Enfin, un changement de paramètre (la taille du centre de l'hyperétoile) a ouvert un nouveau domaine. Ici aussi, nous espérons que ces résultats auront un intérêt pratique, peut-être pour les bases de données.

Pour que ce travail soit le plus complet possible, nous avons passé en revue les configurations similaires déjà étudiées, et nous avons utilisé des constructions et des méthodes de démonstration disponibles dans la littérature, dès qu'elles pouvaient s'appliquer à notre problème. Ces emprunts sont toujours signalés et référencés. Ce qui est vraiment nouveau se reconnaît donc à l'absence de références, c'est le cas des notions suivantes :

- Carrés :
  - les carrés siamois, dont l'étude est cependant plus "personnelle" que nouvelle ;
  - les carrés doubles symétriques inséparables : leur définition et les carrés d'ordre inférieur à 17 ;
  - la construction consistant à ajouter un point infini à un transversal design, qui a permis d'obtenir les carrés d'ordres 21 et 24, absents dans un article précédent [30] ;

- le produit de carrés doubles (§ I.2.6), différent du produit direct habituellement rencontré ;

- Hyperétoiles :

- la forme générale des décompositions de l'hypergraphe complet en hyperétoiles, avec les quatre paramètres n,p,k,c, sauf les propositions 2.6 et 2.7 qui sont des extensions évidentes du cas particulier traité par S. Yamamoto et S. Tazawa [47] ;

- Hyperétoiles à rayons simples :

- les décompositions en hyperétoiles de degré 2 ;

- la frontière $n = k-1+c$, ignorée par S. Yamamoto et S. Tazawa par suite d'une erreur de calcul ;

- les relations entre les systèmes de Steiner et les décompositions de K_n^k en HE(k-1,k,c) ;

- les décompositions cycliques ;

- les relations récursives ;

- les cas $k = 3$, $c = 3^q$;

- les cas $c = 3$ à 7 ;

- Hyperétoiles à centre simple :

- tout le chapitre, sauf les propriétés du corps de Galois et le théorème de Baranyai ;

... ainsi, bien sûr, que la recherche dans la littérature des outils les plus appropriés, et leur application au problème.

Dans cette étude, les notions nécessaires seront définies pour la plupart au moment de leur utilisation, et les connaissances de base indispensables sont peu nombreuses.

On rencontrera souvent la notion de graphe, couple (X,U) où x est un ensemble fini de sommets et U une famille finie de couples de sommets (x,y) appelés arcs si les couples sont ordonnés, on dit alors que le graphe est orienté, arêtes sinon.

De même, un hypergraphe est un couple (X,E) où X est un ensemble fini de sommets et E une famille finie de sous-ensembles non vides de x appelés arêtes.

On pourra se référer à l'ouvrage de C. Berge [6] pour préciser ces définitions et les propriétés des graphes et des hypergraphes. On y trouvera en particulier le théorème du flot maximum cité dans le chapitre sur les hyperétoiles.

Parmi les configurations que nous utiliserons, nous rencontrerons plusieurs fois les systèmes de Steiner. Un système de Steiner S(t,k,v) est un ensemble de v éléments, ou points, arrangés en blocs de k points, de telle sorte que tout ensemble de t points soit contenu dans un bloc et un seul. Les systèmes triples de Steiner S(2,3,v) sont connus depuis longtemps, on sait qu'ils existent si et seulement si v est égal à 1 ou à 3 modulo 6. Dans le cas général, le problème d'existence est encore loin d'être résolu. C.C. Lindner et A. Rosa [25] ont rassemblé sur ce sujet plusieurs études et de très nombreuses références.

Un plan projectif fini est un ensemble fini de points groupés en un ensemble fini de droites, possédant les propriétés suivantes :

- par deux points passe une droite et une seule,
- deux droites se coupent en un point et un seul,
- il existe un ensemble de quatre points formant un quadrilatère propre, c'est-à-dire qu'aucune droite ne contient trois de ces quatre points.

Un plan projectif fini est formé de n^2+n+1 points et de n^2+n+1 droites, on dit qu'il est d'ordre n et on le note PG(n), PG signifiant "projective geometry". On sait qu'il existe un plan projectif d'ordre n si n est une puissance de nombre premier, et qu'il n'existe pas de PG(6), mais on cherche toujours le plan projectif d'ordre 10.

Enfin, un corps fini est un ensemble fini muni de deux lois de composition internes lui donnant une structure de corps. Le nombre de ses éléments est une puissance de nombre premier p^q, et on montre que tout corps fini est équivalent à

un corps de Galois $GF(p^q)$ dont les éléments sont des polynômes de degré inférieur à q, à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$. On trouvera dans les articles de G. Heuzé [23] et de P. Faure [17], par exemple, une étude plus approfondie des corps de Galois.

Nous allons donc étudier deux configurations :

- les carrés doubles symétriques inséparables,
- les décompositions d'un hypergraphe complet en hyperétoiles.

Les deux parties de ce travail sont indépendantes. Lorsque l'on se réfèrera à une proposition ou à un théorème, on parlera d'une propriété qui a été démontrée plus tôt dans la même partie.

Les traits verticaux dans la marge indiquent les démonstrations, les mots soulignés sont ceux que l'on va définir.

PREMIERE PARTIE

CARRES

1. DEFINITION DE QUELQUES CARRES

1.1. DEFINITIONS GENERALES

Notons [p] l'ensemble des p premiers entiers 1,2,...,p. [p] est considéré comme un ensemble de symboles.

Un carré est un tableau $n \times n$ dont les cases contiennent une famille de symboles de [p] , vide ou non, ordonnée ou non, dans laquelle un symbole peut ou non être répété :

12	3	4
	31	4
1		22

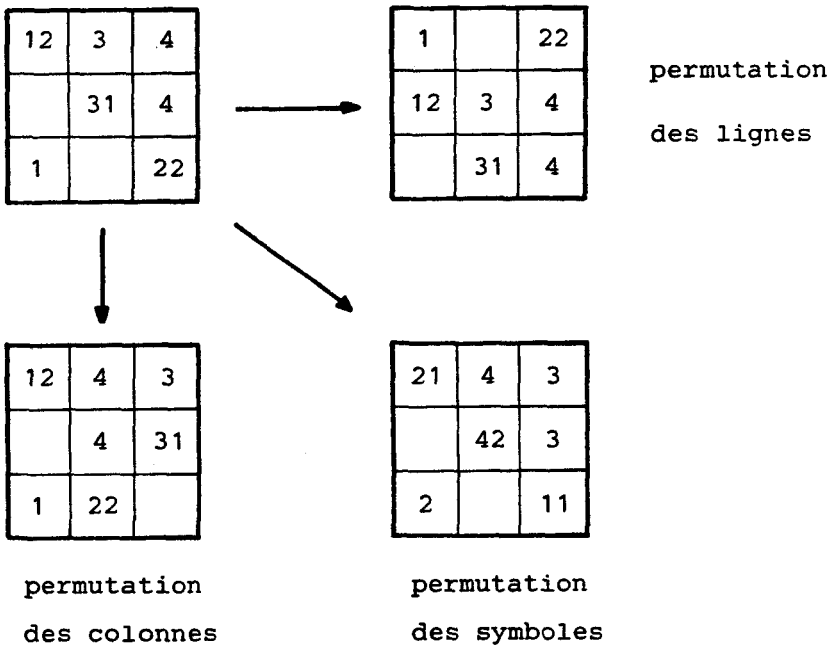
carré 3×3
dont l'ensemble de symboles
est [4]

On supposera que chaque symbole apparaît au moins une fois dans le carré, c'est-à-dire que p est minimal.

S'il est nécessaire d'effectuer des calculs à l'aide des symboles, on remplacera parfois l'ensemble [p] par le groupe cyclique $\mathbb{Z}_p = \{0,1,...,p-1\}$ muni de l'addition modulo p.

Il arrivera que l'on fasse subir à un carré une permutation des lignes, des colonnes et des symboles : on obtiendra un carré <u>équivalent</u> au premier. La plupart des propriétés dont nous doterons les carrés seront invariantes par permutation des lignes, colonnes ou symboles.

exemples de carrés équivalents :



Nous allons définir quelques carrés particuliers, plus ou moins dérivés des carrés latins. Nous étudierons plus particulièrement les carrés doubles symétriques inséparables, qui nous serviront d'exemple pour exposer des méthodes de combinatoire constructive.

1.2. CARRES LATINS

Les carrés latins sont les carrés les plus connus. Un carré latin d'ordre n est un tableau $n \times n$ dont l'ensemble des symboles est $[n]$, et qui possède les propriétés suivantes :

(1) chaque case contient un symbole et un seul,

(2) chaque symbole apparaît une fois et une seule dans chaque ligne et dans chaque colonne.

Par exemple, voici quatre carrés latins d'ordre 4 :

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

1	2	3	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	3	2	1

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	2	1
4	3	1	2

On dit qu'il sont normalisés car les symboles de leur première ligne et de leur première colonne sont écrits dans l'ordre 1,2,3,4 . Tout carré latin d'ordre 4 est équivalent à l'un de ces quatre carrés.

Il existe de très nombreuses études des carrés latins. L'une des plus complètes est celle de J. Dénes et A.D. Keedwell [13].

On connaît depuis longtemps le résultat suivant :

théorème 1.1

> Il existe un carré latin d'ordre n pour tout entier positif n.

La construction d'un carré latin est en effet immédiate :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \ldots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1 & \ldots & n-2 & n-1 \end{array}$$

Le carré latin est donc une configuration dont le problème d'existence a été entièrement résolu par une construction directe.

Il en sera de même pour la configuration suivante : le carré siamois.

1.3. CARRES SIAMOIS

1.3.1. Définition

Un carré siamois S(n,p) est un carré $n \times n$ dont l'ensemble des symboles est [p] , et dans lequel :

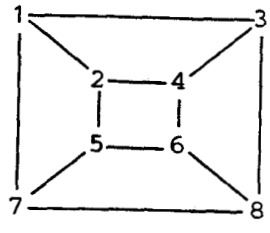
(1) chaque case contient un ou deux symboles,

(2) chaque symbole apparaît une fois et une seule dans chaque ligne et dans chaque colonne,

(3) il existe un entier d tel que chaque symbole apparaisse dans exactement d couples de symboles.

Par exemple, le carré suivant est un S(6,8), chaque symbole figure dans trois couples :

12	34	5	6	7	8
5	1	2	38	46	7
7	6	13	5	8	24
4	8	6	17	25	3
3	2	78	4	1	56
68	57	4	2	3	1



1.3.2. Conditions nécessaires

Pour éviter de retrouver un carré latin, déjà défini, ou un carré analogue au carré double que nous allons étudier plus loin, on impose qu'il y ait dans chaque rangée au moins une case contenant deux symboles et au moins une case contenant un seul symbole.

D'autre part, l'entier d est égal à $2n(p-n)/p$ car il y a $p-n$ couples par rangée, $n(p-n)$ couples dans le carré, et $2n(p-n)$ occurrences d'un symbole dans un couple.

Il existe donc des conditions nécessaires à l'existence d'un carré siamois :

proposition 1.2

> Les paramètres n et p d'un carré siamois S(n,p) doivent vérifier les conditions suivantes :
>
> (1) p est strictement compris entre n et 2n ,
>
> (2) $2n(p-n)/p$ est un entier.

1.3.3. Couples siamois

Nous verrons que ces conditions sont suffisantes. Auparavant, il nous faut préciser les paramètres n et p . Nous reprenons les définitions et les notations d'une étude

précédente [28] et [29], et nous appelons couple siamois un couple d'entiers positifs (n,p) vérifiant :

(1) $n < p < 2n$

(2) $2n(p-n)/p$ est un entier

Les paramètres d'un carré siamois S(n,p) doivent donc former un couple siamois.

Chaque couple siamois en détermine une infinité d'autres :

proposition 1.3

> Si (n,p) est un couple siamois, alors, pour tout entier k strictement positif, (nk,pk) est un couple siamois.

On vérifie aisément que (nk,pk) vérifie les conditions (1) et (2).

Nous dirons que le couple (nk,pk) est un multiple du couple (n,p) et que (n,p) est un diviseur de (nk,pk). Nous appellerons couple siamois premier un couple siamois qui n'a pas d'autre diviseur que lui-même.

proposition 1.4

> Un couple siamois (n,p) est premier si et seulement si les entiers n , p et d = 2n(p-n)/p sont premiers entre eux.

Si (n,p) est un couple siamois non premier, il est de la forme (n'k,p'k) , $k > 1$, et (n',p') est un couple siamois. d' = 2n'(p'-n')/p' est un entier, et d est égal à d'k . k est donc un diviseur commun à n , p et d .

Inversement, si (n,p) est un couple siamois et si k > 1 est un diviseur commun à n, p et d, alors (n/k,p/k) est un couple siamois qui divise (n,p).

théorème 1.5

L'ensemble des couples siamois premiers est l'ensemble des couples d'entiers de la forme (ab,b^2) ou $(ab,2a^2)$, où a et b sont deux entiers positifs vérifiant :

(1) $a < b < 2a$

(2) b est impair et premier avec a.

Soit (n,p) un couple siamois premier, soit q le PGCD de n et de p :

$n = qr$, $p = qs$, r et s sont premiers entre eux.

q n'est pas égal à 1. En effet, la relation $d = 2n(p-n)/p$ entraîne $p(2n-d) = 2n^2$ donc p divise $2n^2$. Comme p ne peut valoir ni 1 ni 2, car il doit vérifier $0 < n < p < 2n$, p ou p/2 divise n^2, donc n et p ne sont pas premiers entre eux.

Si k est un facteur premier de q, différent de 1, il existe n' et p' tels que $n = n'k$ et $p = p'k$. p' est compris entre n' et 2n', mais $2n'(p'-n')/p' = d/k$ ne peut pas être un entier car (n',p') n'est pas un diviseur de (n,p). Par contre, $2n'(p'-n')k/p'$ est égal à l'entier d.

p' divise $2n'(p'-n')k$ sans diviser $2n'(p'-n')$, donc p' n'est pas premier avec k. Comme k est premier, p' est divisible par k, par conséquent $p = p'k$ est divisible par k^2.

p est divisible par k^2 si k est un facteur premier de q, donc p est divisible par q^2 : $p = q^2t$.

Comme $n = qr$ et $p = q^2t$ vérifient la relation $p(2n-d) = 2n^2$, p divise $2n^2$, autrement dit q^2t divise $2q^2r^2$ ou encore t divise $2r^2$.

q est le PGCD de n et de p, r et qt sont donc premiers entre eux, ainsi que r et t, et r^2 et t. Si t divise $2r^2$, t ne peut être égal qu'à 1 ou à 2.

Si t = 1 :

$n = qr$, $p = q^2$, q et r sont premiers entre eux.

$n < p < 2n \implies qr < q^2 < 2qr \implies r < q < 2r$

Si t = 2 :

$n = qr$, $p = 2q^2$, 2q et r sont premiers entre eux, c'est-à-dire que r est impair et premier avec q.

$n < p < 2n \implies qr < 2q^2 < 2qr \implies r < 2q < 2r \implies q < r < 2q$

Posons $n = ab$ avec $a < b$, a et b désignant q et r ou r et q.

Si $q > r$: $q = b$, $r = a$, $p = b^2$

$r < q < 2r \implies a < b < 2a$

a et b sont premiers entre eux.

b ne peut pas être pair, sinon $n = ab$, $p = b^2$ et $d = 2n(p-n)/p = 2a(b-a)$ sont pairs et (n,p) n'est pas premier.

Si $q < r$: $q = a$, $r = b$, $p = 2a^2$

$q < r < 2q \implies a < b < 2a$

b est impair et premier avec a.

En conclusion, si (n,p) est un couple siamois premier, n est le produit de deux entiers a et b vérifiant :

- $0 < a < b < 2a$
- b impair et premier avec a

et p est égal à b^2 ou à $2a^2$.

Inversement, si les entiers a et b vérifient ces deux conditions, (ab,b^2) et $(ab,2a^2)$ sont des couples siamois premiers. En effet :

1. Soient $n = ab$ et $p = b^2$

(n,p) est un couple siamois :

$a < b < 2a \Longrightarrow ab < b^2 < 2ab \Longrightarrow n < p < 2n$

$2n(p-n)/p = 2a(b-a)$ est un entier

(n,p) est un couple siamois permier :

Soit k un diviseur commun à $n = ab$, $p = b^2$ et $d = 2a(b-a)$. k divise b, PGCD de n et de p, donc k est impair comme b, et premier avec a. k divise $2a(b-a)$ en étant premier avec 2a, donc k divise b-a. On arrive à une contradiction, puisque k divise b et b-a mais pas a, sauf si k est égal à 1 donc si n, p et d sont premiers entre eux.

2. Soient $n = ab$ et $p = 2a^2$

(n,p) est un couple siamois :

$a < b < 2a \Longrightarrow b < 2a < 2b \Longrightarrow ab < 2a^2 < 2ab$

$\Longrightarrow n < p < 2n$

$2n(p-n)/p = b(2a-b)$ est un entier

(n,p) est un couple siamois premier :

Tout diviseur k commun à $n = ab$, $p = 2a^2$ et $d = b(2a-b)$ divise a, PGCD de n et de p, ne divise pas b, premier avec a, donc divise 2a-b. k est donc égal à 1, et n, p et d sont premiers entre eux.

Pour énumérer tous les couples siamois premiers, on cherche donc, pour tout entier a, tous les entiers b impairs, premiers avec a, compris entre a et 2a. Chaque couple d'entiers a et b ainsi trouvé définit deux couples siamois premiers : (ab,b^2) et $(ab,2a^2)$.

Le tableau suivant énumère les couples siamois premiers pour lesquels a est inférieur à 10 :

a	2a	b	ab	b^2	ab	$2a^2$
0	0	-	-	-	-	-
1	2	-	-	-	-	-
2	4	3	6	9	6	8
3	6	5	15	25	15	18
4	8	5	20	25	20	32
		7	28	49	28	32
5	10	7	35	49	35	50
		9	45	81	45	50
6	12	7	42	49	42	72
		11	66	121	66	72
7	14	9	63	81	63	98
		11	77	121	77	98
		13	91	169	91	98
8	16	9	72	81	72	128
		11	88	121	88	128
		13	104	169	104	128
		15	120	225	120	128
9	18	11	99	121	99	162
		13	117	169	117	162
		17	153	289	153	162

Appelons racine d'un couple siamois (n,p) tout couple siamois premier diviseur de (n,p) . Nous allons voir que :

proposition 1.6

> La racine d'un couple siamois est unique.

Un couple siamois premier est son seul diviseur, donc sa seule racine.

Si le couple siamois (n,p) n'est pas premier, soit (x,y) l'une de ses racines :

- il existe k tel que $n = kx$, $p = ky$
- (x,y) est siamois
- (x,y) est premier

x , y et $2x(y-x)/y$ sont donc premiers entre eux. Si d est l'entier $2n(p-n)/p$, $2x(y-x)/y$ est égal à d/k . k est donc le PGCD de n , p et d. L'unicité de ce PGCD entraîne l'unicité de la racine de (n,p) .

Nous pouvons donc caractériser l'ensemble des couples siamois :

théorème 1.7

> L'ensemble des couples siamois est l'ensemble des couples de la forme (abk,b^2k) ou $(abk,2a^2k)$, où a, b et k sont des entiers vérifiant :
>
> - $0 < a < b < 2a$
> - b impair
> - a et b premiers entre eux
> - $k > 0$

Les couples (ab,b^2) et $(ab,2a^2)$ sont des couples siamois premiers, donc (abk,b^2k) et $(abk,2a^2k)$ sont des couples siamois.

Inversement, si (n,p) est un couple siamois, on détermine sa racine (n/k,p/k) en calculant le PGCD k de n,p et 2n(p-n)/p, et cette racine est de la forme (ab,b^2) ou $(ab,2a^2)$.

Nous avons donc une condition nécessaire pour qu'un couple (n,p) représente les paramètres d'un carré siamois. Il nous reste à construire un carré siamois S(n,p) pour tout couple siamois (n,p) donné.

Ici encore, nous aurons la chance de trouver rapidement une construction générale, ce qui permettra d'énoncer la condition nécessaire et suffisante qui suit :

théorème 1.8

Il existe un carré siamois S(n,p) si et seulement si (n,p) est un couple siamois.

La partie véritablement directe de la construction que nous allons exposer ne concerne que les couples siamois premiers. Pour les couples siamois non premiers, nous devrons utiliser des carrés siamois plus petits et des carrés latins, ce qui est en fait une construction récursive.

1.3.4. Construction d'un carré siamois $S(ab,b^2)$

Soiant a et b deux entiers positifs tels que b soit compris entre a et 2a , impair et premier avec a . (ab,b^2) est donc un couple siamois premier.

Pour faciliter les calculs, nous supposerons que le carré S est indicé par l'ensemble $\{0,1,\ldots,ab-1\}$ et que ses symboles sont $0,1,\ldots,b^2-1$.

Soient x et y deux entiers positifs inférieurs à ab : nous allons calculer l'élément S_x^y.

Appelons i et k (resp. j et l) le quotient et le reste de la division de x (resp. y) par b :

$x = bi + k \qquad 0 \leqslant i < a \qquad 0 \leqslant k < b$

$y = bj + l \qquad 0 \leqslant j < a \qquad 0 \leqslant l < b$

Soit $m \equiv i+j$ (modulo a).

Pour tout entier z, on notera $\bar{z}$ l'entier compris entre 0 et b-1, congru à z modulo b.

Nous dirons donc que la case (x,y) de S contient :

- l'élément $b\,(\overline{j+k}) + \overline{i+l}$
- ainsi que $b\,(\overline{a+m+k}) + \overline{a+m+l}$, si m est strictement inférieur à b-a.

La vérification du fait que S est bien un carré siamois est détaillée dans [28].

Par exemple, si a = 2 et b = 3, S(6,9) est le carré suivant :

S	0	1	2	3	4	5
0	08	16	27	3	4	5
1	23	04	15	6	7	8
2	56	37	48	0	1	2
3	1	2	0	48	56	37
4	4	5	3	27	08	16
5	7	8	6	15	23	04

1.3.5. Construction d'un carré siamois S(ab,$2a^2$)

Cette fois, si x et y sont deux indices inférieurs à ab, nous appelons i et k (resp. j et l) le quotient et le reste de la division de x (resp. y) par a :

$$x = ai + k \qquad 0 \leqslant i < b \qquad 0 \leqslant k < a$$

$$y = aj + l \qquad 0 \leqslant j < b \qquad 0 \leqslant l < a$$

Nous posons : m = b-i+j (modulo b), et nous désignons par $\bar{z}$ l'entier z exprimé modulo a.

Si m est inférieur à 2a-b, la case (x,y) de S contient deux symboles :

$$a\,(\overline{m+k}) + (\overline{m+l}) \quad \text{et} \quad a^2 + a\,(\overline{m+k}) + (\overline{m+l})$$

Si m est compris entre 2a-b et b-1, la case (x,y) ne contient que le symbole :

$$r\,a^2 + a\,(\overline{2a-b+q+k}) + (\overline{2a-b+q+l})$$

où q et r sont le quotient et le reste de la division de j-2a+b par 2.

Malgré la complexité de ces formules, la construction est très simple et commence par la disposition des symboles en deux carrés a × a. Par exemple, si a = 2, donc $2a^2 = 8$:

0	1
2	3

et

4	5
6	7

La superposition de ces deux carrés donne la disposition des couples. En arrangeant convenablement les différents carrés, on obtient un carré siamois S(6,8) :

04	15	3	2	7	6
26	37	1	0	5	4
7	6	04	15	3	2
5	4	26	37	1	0
3	2	7	6	04	15
1	0	5	4	26	37

1.3.6. Construction d'un carré siamois S(nk,pk) à partir de S(n,p)

Soit (nk,pk) un couple siamois. Considérons une partition de l'ensemble des nk indices 1,2,...,nk en k ensembles de n indices I_1, I_2, ... , I_k. De même, considérons une partition de l'ensemble des pk symboles 1,2,...,pk en k ensembles de p symboles E_1,E_2, ... , E_k.

Chacun des k ensembles E_1,E_2,...,E_k peut être mis en correspondance biunivoque avec l'ensemble E des symboles du carré siamois S(n,p). Nous noterons S_i ce carré siamois dans lequel les symboles sont remplacés par leurs homologues dans E_i.

Considérons un carré latin L d'ordre k (nous avons vu qu'il en existe toujours au moins un) : ses indices et ses symboles sont 1,2,...,k.

Pour obtenir un carré siamois S(nk,pk), il suffit de faire le produit du carré latin L par le carré siamois S(n,p), c'est-à-dire de remplacer un symbole i contenu dans une case du carré latin par le carré siamois S_i.

exemple : n = 6 , p = 8 , k = 2

12	34	5	6	7	8
37	1	28	4	5	6
6	2	1	78	3	45
5	7	36	1	48	2
4	8	7	25	16	3
8	56	4	3	2	17

S(6,8)

1	2
2	1

L

Pour construire le carré siamois S(12,16), on remplace dans le carré latin L les 1 par le carré S(6,8) avec les symboles 1,2,...,8 , et les 2 par le carré S(6,8) avec les symboles A,B,...,H par exemple :

12	34	5	6	7	8	AB	CD	E	F	G	H
37	1	28	4	5	6	CG	A	BH	D	E	F
6	2	1	78	3	45	F	B	A	GH	C	DE
5	7	36	1	48	2	E	G	CF	A	DH	B
4	8	7	25	16	3	D	H	G	BE	AF	C
8	56	4	3	2	17	H	EF	D	C	B	AG

AB	CD	E	F	G	H	12	34	5	6	7	8
CG	A	BH	D	E	F	37	1	28	4	5	6
F	B	A	GH	C	DE	6	2	1	78	3	45
E	G	CF	A	DH	B	5	7	36	1	48	2
D	H	G	BE	AF	C	4	8	7	25	16	3
H	EF	D	C	B	AG	8	56	4	3	2	17

1.3.7. Existence des carrés siamois

Si (n,p) est un couple siamois, on peut donc toujours construire un carré siamois S(n,p). Il suffit de déterminer sa racine (x,y), qui est un couple siamois premier de la forme (ab,b^2) ou $(ab,2a^2)$, de construire un carré siamois S(x,y), puis, si (n,p) = (kx,ky), de construire S(n,p) à partir de S(x,y) et d'un carré latin d'ordre k.

1.4. CARRES DOUBLES

1.4.1. Définitions et exemples

Un carré double d'ordre n est un carré n × n dont l'ensemble des symboles est [n] , et qui possède les propriétés suivantes :

(1) chaque case contient deux symboles

(2) chaque symbole figure deux fois dans chaque ligne et dans chaque colonne

(3) chaque couple de symboles identiques (i,i) apparaît une fois et une seule, chaque couple non ordonné de symboles différents apparaît exactement deux fois.

On peut dire aussi que les symboles de chaque case peuvent être ordonnés de telle sorte que chaque couple ordonné de symboles, différents ou non, apparaisse une fois et une seule dans le carré.

exemple : carré double d'ordre 5 :

11	22	34	35	45
33	44	12	15	52
24	13	55	14	23
25	51	43	42	31
54	53	21	32	41

On construit facilement à la main des carrés doubles dont l'ordre est petit. On voit qu'il existe un seul carré double d'ordre 1 :

11

et qu'il n'existe pas de carré double d'ordre 2.

Tous les carrés doubles d'ordre 3 sont équivalents à celui-ci :

11	22	33
23	13	12
23	13	12

Par simple énumération, on constate aussi que tous les carrés doubles d'ordre 4 sont équivalents à l'un des quatre carrés ci-dessous :

11	34	24	23
34	22	14	13
24	14	33	12
23	13	12	44

11	22	34	34
33	44	12	12
24	13	14	23
24	13	23	14

11	22	33	44
34	34	12	12
23	14	14	23
24	13	24	13

11	22	33	44
34	34	12	12
23	14	24	13
24	13	14	23

Nous avons donné plus haut un carré double d'ordre 5, et il ne semble pas exister d'impossibilité pour les ordres plus grands. Nous avons donc une condition nécessaire très simple :

proposition 1.9

> L'ordre d'un carré double est un entier positif différent de 2.

Un carré double est <u>symétrique</u> si, pour tous les indices i et j, les cases (i,j) et (j,i) contiennent le même couple non ordonné de symboles. Les cases de la diagonale contiennent donc les couples de symboles identiques.

Le carré double d'ordre 1 et le premier carré double d'ordre 4 sont symétriques, mais le seul carré double d'ordre 3 ne l'est pas :

proposition 1.10

L'ordre d'un carré double symétrique est un entier positif différent de 2 et de 3.

Il y a un seul carré double symétrique d'ordre 5 :

11	34	45	25	23
34	22	15	35	14
45	15	33	12	24
25	35	12	44	13
23	14	24	13	55

Un carré double est diagonal si, pour tout i entre 1 et n, la case (i,i) contient le couple (i,i). Un carré double symétrique est donc diagonal. Il n'existe pas de carrés doubles diagonaux d'ordre 2 ou 3.

1.4.2. Dédoublement d'un carré double

Un carré double d'ordre n contient n(n-1) couples de symboles différents {a,b} qui peuvent être ordonnés de deux façons : (a,b) ou (b,a). Il y a donc $2^{n(n-1)}$ façons d'ordonner les symboles d'un carré double.

Nous avons vu dans la définition qu'il devait exister une façon d'ordonner le carré double telle qu'on trouve une fois et une seule dans le carré chaque couple ordonné de symboles. Un carré double ainsi ordonné peut donc être considéré comme la table de valeurs d'une bijection dans l'ensemble des arcs du graphe complet orienté K_n^*, boucles comprises : à l'arc (i,j), on fait correspondre l'arc (a,b) contenu dans la case (i,j).

Lorsqu'on a ordonné un carré double, on peut le dédoubler en deux carrés simples, c'est-à-dire deux carrés dont les cases contiennent un symbole et un seul : si la case (i,j) du carré double contient le couple ordonné (a,b), la case (i,j) du premier carré simple contient a et la case (i,j) du deuxième carré simple contient b.

Par exemple :

11	22	33	44
24	13	14	23
32	14	42	13
34	34	12	21

=

1	2	3	4
2	1	1	2
3	1	4	1
3	3	1	2

+

1	2	3	4
4	3	4	3
2	4	2	3
4	4	2	1

Certains dédoublements d'un carré double peuvent avoir des propriétés particulières, et nous allons être amenés à définir des carrés doubles remarquables : les carrés inséparables, les carrés gréco-latins, les A-designs.

1.4.3. Les carrés séparables ou inséparables

Un carré séparable est un carré double qui peut être dédoublé en deux carrés latins :

11	22	33	44
24	13	41	32
32	41	24	13
43	34	12	21

=

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	2	1
4	3	1	2

+

1	2	3	4
4	3	1	2
2	1	4	3
3	4	2	1

Un carré inséparable sera donc un carré double dont aucun dédoublement n'est une paire de carrés latins.

Le carré double d'ordre 5 ci-dessous est inséparable :

11	34	25	35	24
35	22	14	15	34
45	45	33	12	12
23	15	25	44	13
24	13	14	23	55

	34		53	
		41	15	
	31	14		

On ne peut en effet pas l'ordonner en vue d'un dédoublement en deux carrés latins : si le couple (3,4) dans la case (1,2) est ordonné, on doit trouver (5,3) dans la case (1,4), (1,5) en (2,4), (4,1) en (2,3), (1,4) en (5,3) et (3,1) en (5,2). Mais alors le premier carré simple aura deux 3 dans la deuxième colonne, il ne sera pas latin.

Le carré double d'ordre 1 est séparable, il n'y a ni carré double séparable ni carré double inséparable d'ordre 2, le carré double d'ordre 3 est séparable et même gréco-latin comme nous le verrons plus loin, et les quatre carrés doubles d'ordre 4 sont séparables, comme le montre cette façon de les ordonner :

11	34	42	23
43	22	14	31
24	41	33	12
32	13	21	44

11	22	34	43
33	44	12	21
24	13	41	32
42	31	23	14

11	22	33	44
34	43	12	21
23	14	41	32
42	31	24	13

11	22	33	44
34	43	21	12
23	14	42	31
42	31	14	23

1.4.4. Les carrés gréco-latins

Un carré gréco-latin est un carré double séparable en deux carrés latins orthogonaux, c'est-à-dire deux carrés latins d'ordre n, A et B, tels que les n^2 couples (A_i^j, B_i^j) soient distincts. Autrement dit, on peut ordonner le carré double pour le dédoubler en deux carrés simples, de telle sorte que chacun des n^2 couples de symboles possibles apparaisse dans le carré double, et que les deux carrés simples soient latins.

exemple :

11	22	33
23	31	12
32	13	21

=

1	2	3
2	3	1
3	1	2

+

1	2	3
3	1	2
2	3	1

L. Euler [16] a démontré en 1779 qu'il existait un carré gréco-latin de tout ordre impair. Il a ensuite posé le célèbre problème des trente-six officiers : peut-on placer en carré trente-six officiers représentant six régiments et six grades de telle sorte que chaque rangée contienne un officier de chaque grade et un officier de chaque régiment ? S'il y avait une solution, chaque officier représenterait un couple ordonné (grade,régiment) et on obtiendrait un carré gréco-latin. Or, il n'existe pas de carré gréco-latin d'ordre 6, comme G. Tarry l'a démontré en 1900 [37], ainsi que D.R. Stinson plus récemment [36], mais d'une toute autre façon.

L. Euler a donc cru qu'il n'existait aucun carré gréco-latin dont l'ordre est de la forme 4k+2, mais R.C. Bose, E.T. Parker et S.S. Shrikhande [8] ont démontré qu'au contraire il existe un carré gréco-latin de tout ordre sauf 2 et 6 : la fameuse conjecture d'Euler était donc fausse.

Il peut arriver que les deux carrés latins orthogonaux soient le transposé l'un de l'autre, c'est-à-dire que la case (i,j) de l'un et la case (j,i) de l'autre contiennent le même symbole. On dit d'un carré latin orthogonal à son transposé qu'il est auto-orthogonal. Un carré gréco-latin qui se dédouble en un carré latin auto-orthogonal et en son transposé est symétrique.

R.K. Brayton, D. Coppersmith et A.J. Hoffman [9] ont démontré :

théorème 1.11

Il existe un carré latin auto-orthogonal d'ordre n pour tout n positif différent de 2, 3 et 6.

Ils donnent une utilisation pratique originale des carrés latins auto-orthogonaux : l'organisation de tournois de tennis en double mixte pour des couples, de telle sorte qu'aucun mari n'ait jamais sa femme pour partenaire ou pour adversaire, que chaque couple non marié se retrouve une fois comme partenaires et une fois comme adversaires, et que deux hommes (ou deux femmes) s'affrontent une fois et une seule.

Soit donc A un carré latin auto-orthogonal d'ordre n : les cases de la diagonale contiennent les symboles 1,2,...,n et on peut supposer que la case (i,i) contient le symbole i.

Les $\binom{n}{2}$ matches du tournoi sont organisés de la façon suivante : dans le seul match où Monsieur i affronte Monsieur j ($i \neq j$), Monsieur i a pour partenaire Madame A_i^j, et Monsieur j est le partenaire de Madame A_j^i.

Par exemple, le carré latin auto-orthogonal d'ordre 4 ci-dessous permet d'organiser un tournoi entre quatre couples :

	1	2	3	4
1	1	4	2	3
2	3	2	4	1
3	4	1	3	2
4	2	3	1	4

les indices sont les noms des messieurs, les cases contiennent les noms des dames.

Monsieur	et Madame		Monsieur	et Madame
1	2	contre	3	4
1	3		4	2
2	4		3	1
2	1		4	3
3	4		4	1

W. Wallis [40] a repris cette interprétation pour construire un nouveau carré latin, orthogonal au carré latin auto-orthogonal ci-dessus : si on dispose de courts de tennis suffisamment nombreux, des matches peuvent être joués simultanément. A chaque round, il suffit de grouper les hommes deux par deux, et de choisir leur partenaire selon la méthode indiquée. Si le nombre d'hommes (donc de couples) est impair, l'un des couples ne joue pas pendant un round.

Par exemple :

round a : Mr 1 et Mme 4 contre Mr 2 et Mme 3
et Mr 3 et Mme 2 contre Mr 4 et Mme 1

round b : Mr 1 et Mme 2 contre Mr 3 et Mme 4
et Mr 2 et Mme 1 contre Mr 4 et Mme 3

round c : Mr 1 et Mme 3 contre Mr 4 et Mme 2
et Mr 2 et Mme 4 contre Mr 3 et Mme 1

Le carré indicé par les noms des hommes, et dont les cases contiennent le nom du round au cours duquel les deux hommes concernés s'affrontent, est un carré latin symétrique, orthogonal au carré latin auto-orthogonal, si l'on complète sa diagonale :

	1	2	3	4
1	d	a	b	c
2	a	d	c	b
3	b	c	d	a
4	c	b	a	d

tableau des rounds

Mr 1 affrontera Mr 2
au cours du round a

	1	2	3	4
1	1	4	2	3
2	3	2	4	1
3	4	1	3	2
4	2	3	1	4

tableau des partenaires

quand Mr 1 affrontera Mr 2,
il aura comme partenaire Mme 4

14	41	22	33
31	24	43	12
42	13	34	21
23	32	11	44

carré double gréco-latin obtenu en remplaçant a,b,c,d par 1,2,3,4 et en superposant les deux carrés.

1.4.5. Les carrés "presque gréco-latins"

C'est ainsi que K. Heinrich et W. Wallis [21] appellent les carrés doubles qui possèdent les propriétés suivantes :

(1) chaque case contient un couple ordonné

(2) chaque couple ordonné apparaît une fois et une seule dans le carré

(3) la case (i,i) contient le couple (i,i)

(4) chaque symbole apparaît deux fois dans chaque ligne et dans chaque colonne

(5) même en remplaçant certains couples (a,b) par (b,a), on ne peut pas dédoubler le carré en deux carrés latins orthogonaux.

Ils appellent également N(n,2) ces carrés, et N*(n,2) les carrés ayant les propriétés (1) à (4). Un N*(n,2) est donc simplement un carré double diagonal, il peut être symétrique ou non, séparable ou non. Un N(n,2) a la propriété supplémentaire de ne pas être gréco-latin, mais il peut être séparable en deux carrés latins non orthogonaux, comme ce N(7,2) :

11	34	57	27	26	54	36
47	22	45	61	31	37	65
76	51	33	56	72	42	(41)
52	17	62	44	67	13	53
64	63	21	73	55	71	24
35	75	74	32	(14)	66	(12)
23	46	16	15	43	25	77

=

1	3	5	7	2	4	6
7	2	4	6	1	3	5
6	1	3	5	7	2	4
5	7	2	4	6	1	3
4	6	1	3	5	7	2
3	5	7	2	4	6	1
2	4	6	1	3	5	7

+

1	4	7	2	6	5	3
4	2	5	1	3	7	6
7	5	3	6	2	4	1
2	1	6	4	7	3	5
6	3	2	7	5	1	4
5	7	4	3	1	6	2
3	6	1	5	4	2	7

La disposition des couples 12, 14, 41 interdit le dédoublement en deux carrés latins orthogonaux.

K. Heinrich et W. Wallis ont entièrement résolu le problème de l'existence des N*(n,2) et des N(n,2) :

théorème 1.12

> Il existe un N(n,2) de tout ordre n supérieur ou égal à 5.

Comme il existe un N*(1,2) et un N*(4,2) :

11

et

11	34	24	23
43	22	14	13
42	41	33	12
32	31	21	44

et comme tout N(n,2) est un N*(n,2) :

proposition 1.13

> Il existe un N*(n,2) de tout ordre n positif sauf 2 et 3.

Tous les N(n,2) construits par K. Heinrich et W. Wallis sont inséparables, à l'exception du N(7,2), mais seul le N(6,2) est symétrique.

Cette étude a été réalisée après que W. Wallis l'ait proposée au cours d'un congrès [39]. Notre propre étude des carrés doubles symétriques inséparables a la même origine, mais la condition de symétrie supplémentaire a imposé d'autres constructions et a restreint le domaine d'existence.

1.4.6. Les A-designs

Tel qu'il a été défini par B. Alspach, K. Heinrich et M. Rosenfeld [3], un A-design d'ordre n impair A(n) est un carré n × n possédant les propriétés suivantes :

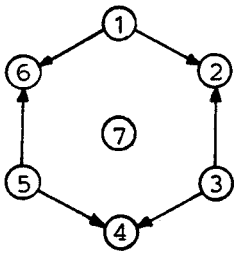
(1) chaque case contient l'un des symboles 1,2,...,n

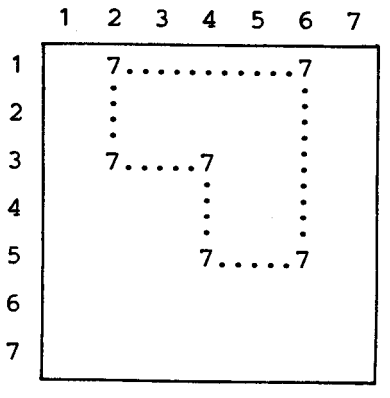
(2) la case (i,i) de la diagonale contient i

(3) si la case (i,j), $i \neq j$, contient le symbole k, on trouve k deux fois dans la ligne i, deux fois dans la colonne j, et k n'apparaît ni dans la colonne i ni dans la ligne j

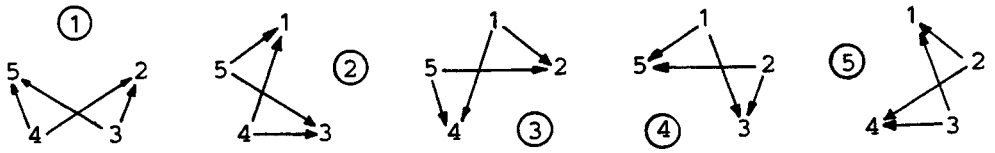
(4) A(n) est orthogonal à son transposé.

Un anti-circuit de longueur 2p est un cycle dans lequel chaque sommet est soit l'origine des deux arcs qui passent par ce sommet, soit leur extrémité. Si n est impair, un anti-circuit de longueur n-1 dans K_n passe par tous les sommets sauf un. Si on construit le carré n × n indicé par l'ensemble des sommets, tel que chaque case représentant un arc de l'anti-circuit contienne le nom du sommet absent, on obtient la disposition suivante :



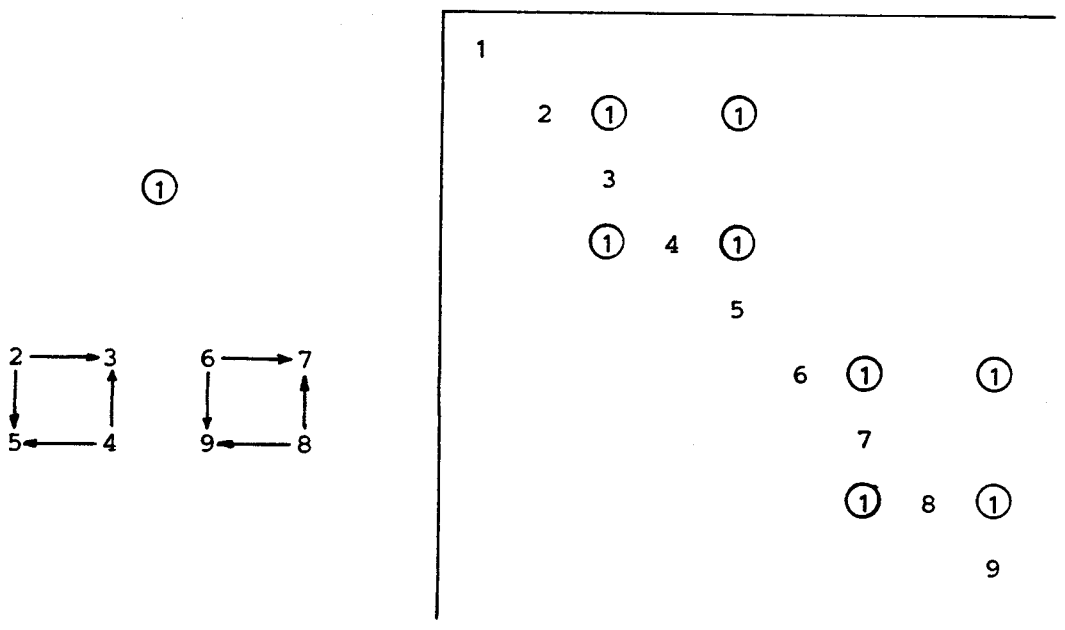


Une partition de l'ensemble des arcs du graphe orienté K_n en anti-circuits de longueur n-1, ayant deux à deux un arc commun et un seul, mais orienté différemment, permet donc de construire un A-design d'ordre n lorsque l'on complète la diagonale :

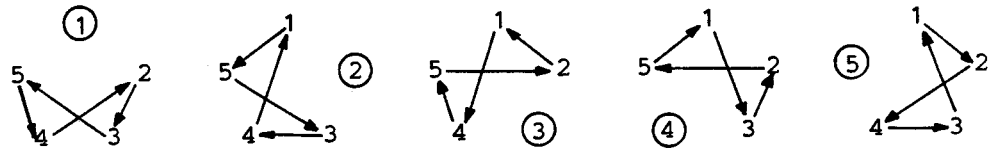


1	3	4	3	4
5	2	4	5	4
5	1	3	5	1
2	1	2	4	1
2	3	2	3	5

L'inverse n'est pas vrai, car les emplacements d'un même symbole dans un A-design peuvent définir des anti-circuits disjoints :



Si on considère des circuits de K_n plutôt que des anti-circuits, et s'il existe une partition de l'ensemble des arcs de K_n en circuits de longueur n-1 tels que deux circuits quelconques aient en commun un arc et un seul, cet arc étant orienté différemment dans les deux circuits, alors on peut construire un carré qui est, cette fois, un carré latin auto-orthogonal [3] :



1	5	4	3	2
3	2	1	5	4
5	4	3	2	1
2	1	5	4	3
4	3	2	1	5

Encore une fois, l'inverse n'est pas vrai, car un symbole d'un carré latin auto-orthogonal d'ordre n peut définir des cycles disjoints de K_n.

Lorsqu'on superpose un A-design et son transposé, on obtient un carré double symétrique :

11	35	45	32	42
53	22	41	51	43
54	14	33	52	12
23	15	25	44	13
24	34	21	31	55

Les couples figurant sur une ligne représentent les arcs de l'anti-circuit et la boucle sur le sommet isolé.

Ce carré est également la superposition du carré latin auto-orthogonal que nous venons de voir, et de son transposé.

Pour simplifier, lorsque nous parlerons de carrés doubles et qu'aucune confusion ne sera possible, il nous arrivera d'appeler "A-design" un carré double pouvant se dédoubler en un A-design et son transposé.

Le problème de l'existence des A-designs n'est pas entièrement résolu. K. Heinrich [22] a en effet montré :

théorème 1.14

Il existe un A-design de tout ordre impair différent de 15, 33, 39, 75 et 87.

Les valeurs exclues ne sont pas des exceptions dans l'ensemble des ordres de A-designs. Ce sont des entiers trop grands pour que l'on puisse construire directement un A-design de cet ordre, compte tenu des possibilités actuelles de calcul, et trop petits pour que l'on puisse utiliser des constructions récursives. Tout porte à croire que l'on trouvera des A-designs d'ordre 15, 33, 39, 75 et 87, mais ce n'est pour l'instant qu'une conjecture.

Ce problème est fréquent en combinatoire constructive, nous le retrouverons avec les carrés doubles symétriques inséparables, et les décompositions de l'hypergraphe complet en hyperétoiles.

2. EXISTENCE DES CARRES DOUBLES SYMETRIQUES INSEPARABLES

2.1. CARRES DE PETITE TAILLE

Si n est relativement petit, on peut construire un carré double à la main ou à l'aide d'un calculateur. Nous allons donc donner des exemples de carrés doubles, si possible symétriques et inséparables, d'ordre n inférieur ou égal à 16.

Il n'y a pas de carré double symétrique inséparable d'ordre inférieur à 6 :

n = 1

11

est le seul carré double, il est symétrique et séparable.

n = 2

il n'y a aucun carré double.

n = 3

11	22	33
23	13	12
23	13	12

est le seul carré double, il est gréco-latin mais pas symétrique.

n = 4

11	34	24	23
34	22	14	13
24	14	33	12
23	13	12	44

est le seul carré double symétrique, il est gréco-latin.

n = 5

11	34	45	25	23
34	22	15	35	14
45	15	33	12	24
25	35	12	44	13
23	14	24	13	55

est le seul carré double symétrique, il est gréco-latin.

11	34	25	35	24
35	22	14	15	34
45	45	33	12	12
23	15	25	44	13
24	13	14	23	55

est inséparable et diagonal, mais pas symétrique.

A partir de 6, on trouve un exemple de carré double symétrique inséparable de chaque ordre jusqu'à 16.

n = 6

11	45	46	35	26	23
45	22	56	36	13	14
46	56	33	12	24	15
35	36	12	44	16	25
26	13	24	16	55	34
23	14	15	25	34	66

Ce carré n'est évidemment pas gréco-latin, sinon il serait une solution du problème d'Euler. Lorsqu'on sépare le

rectangle défini par les lignes 1 et 2 et les colonnes 4, 5 et 6 :

35		23
36	13	14

=

3		2
6	3	1

+

5		3
3	1	4

on trouve un 3 et un 4 dans une même colonne, ce qui interdit la séparation du couple 34 dans la case (5,6).

L'existence de ce carré double symétrique d'ordre 6, et d'un carré latin auto-orthogonal de tout ordre sauf 2, 3 et 6, permet de résoudre un nouveau problème d'existence :

proposition 2.1

> Il existe un carré double symétrique d'ordre n si et seulement si n est un entier positif différent de 2 et de 3.

n = 7

11	34	26	57	24	37	56
34	22	15	17	67	35	46
26	15	33	16	27	47	45
57	17	16	44	36	25	23
24	67	27	36	55	14	13
37	35	47	25	14	66	12
56	46	45	23	13	12	77

Ce carré n'est pas un A-design, car les arêtes de K_7 correspondant aux couples de la dernière ligne forment deux cycles impairs.

Par contre, c'est un N(7,2) inséparable, ce qui nous permet d'affirmer, grâce à la remarque qui suit la proposition 1.13 :

proposition 2.2

> Il existe un carré double diagonal inséparable d'ordre n, pour tout n au moins égal à 5.

n = 8

11	38	56	68	24	27	34	57
38	22	17	15	36	58	46	47
56	17	33	12	67	48	28	45
68	15	12	44	78	37	35	26
24	36	67	78	55	14	18	23
27	58	48	37	14	66	25	13
34	46	28	35	18	25	77	16
57	47	45	26	23	13	16	88

n = 9

11	35	26	23	47	48	69	59	78
35	22	18	19	89	57	34	46	67
26	18	33	58	16	27	49	79	45
23	19	58	44	17	29	68	37	56
47	89	16	17	55	39	28	36	24
48	57	27	29	39	66	15	14	38
69	34	49	68	28	15	77	25	13
59	46	79	37	36	14	25	88	12
78	67	45	56	24	38	13	12	99

n = 10

11	35	20	37	24	45	69	90	68	78
35	22	19	18	36	48	40	57	60	79
20	19	33	12	80	59	58	67	47	46
37	18	12	44	70	39	89	26	50	56
24	36	80	70	55	17	16	29	38	49
45	48	59	39	17	66	10	30	27	28
69	40	58	89	16	10	77	34	25	23
90	57	67	26	29	30	34	88	14	15
68	60	47	50	38	27	25	14	99	13
78	79	46	56	49	28	23	15	13	00

n = 11

11	34	25	26	37	45	68	9B	8A	7B	9A
34	22	18	1B	3A	49	5A	59	67	6B	78
25	18	33	12	69	8B	5B	47	4A	79	6A
26	1B	12	44	AB	39	38	7A	57	56	89
37	3A	69	AB	55	17	19	2B	28	48	46
45	49	8B	39	17	66	1A	2A	3B	58	27
68	5A	5B	38	19	1A	77	36	4B	29	24
9B	59	47	7A	2B	2A	36	88	16	14	35
8A	67	4A	57	28	3B	4B	16	99	23	15
7B	6B	79	56	48	58	29	14	23	AA	13
9A	78	6A	89	46	27	24	35	15	13	BB

n = 12

11	34	25	26	37	47	56	9C	8B	8C	9A	AB
34	22	1A	18	38	4C	5B	57	6B	69	AC	79
25	1A	33	12	49	5A	6C	4B	68	9B	7C	78
26	18	12	44	8A	3B	39	BC	7A	5C	67	59
37	38	49	8A	55	1B	1C	29	2C	7B	46	6A
47	4C	5A	3B	1B	66	19	2A	3C	27	89	58
56	5B	6C	39	1C	19	77	3A	4A	48	28	2B
9C	57	4B	BC	29	2A	3A	88	17	16	45	36
8B	6B	68	7A	2C	3C	4A	17	99	35	15	24
8C	69	9B	5C	7B	27	48	16	35	AA	23	14
9A	AC	7C	67	46	89	28	45	15	23	BB	13
AB	79	78	59	6A	58	2B	36	24	14	13	CC

n = 13

11	34	24	23	67	57	56	9A	8A	89	CD	BD	BC
34	22	14	13	68	58	59	6B	7B	7C	9D	AD	AC
24	14	33	12	79	7A	6A	5C	5D	6D	8C	8B	9B
23	13	12	44	8D	9C	AB	5B	6C	7D	78	5A	69
67	68	79	8D	55	1D	1C	2C	2B	3B	3A	49	4A
57	58	7A	9C	1D	66	1B	2D	3C	4B	2A	39	48
56	59	6A	AB	1C	1B	77	3D	4D	4C	29	28	38
9A	6B	5C	5B	2C	2D	3D	88	1A	19	46	47	37
8A	7B	5D	6C	2B	3C	4D	1A	99	18	45	36	27
89	7C	6D	7D	3B	4B	4C	19	18	AA	35	26	25
CD	9D	8C	78	3A	2A	29	46	45	35	BB	17	16
BD	AD	8B	5A	49	39	28	47	36	26	17	CC	15
BC	AC	9B	69	4A	48	38	37	27	25	16	15	DD

n = 14

11	34	24	23	67	57	56	9A	8D	89	AC	DE	BE	BC
34	22	14	13	68	58	59	6E	7B	7D	9C	AB	AE	CD
24	14	33	12	7A	8E	6A	5C	5D	6B	7E	9D	8C	9B
23	13	12	44	9E	BD	8B	5E	7C	6C	5A	78	69	AD
67	68	7A	9E	55	1B	1D	2D	2B	3C	39	4E	4C	8A
57	58	8E	BD	1B	66	1C	2C	2A	3E	3D	4A	79	49
56	59	6A	8B	1D	1C	77	4B	CE	4D	2E	29	3A	38
9A	6E	5C	5E	2D	2C	4B	88	1A	19	6D	37	3B	47
8D	7B	5D	7C	2B	2A	CE	1A	99	1E	48	36	46	35
89	7D	6B	6C	3C	3E	4D	19	1E	AA	45	5B	28	27
AC	9C	7E	5A	39	3D	2E	6D	48	45	BB	18	17	26
DE	AB	9D	78	4E	4A	29	37	36	5B	18	CC	25	16
BE	AE	8C	69	4C	79	3A	3B	46	28	17	25	DD	15
BC	CD	9B	AD	8A	49	38	47	35	27	26	16	15	EE

n = 15

11	34	24	23	67	57	56	9A	8B	89	AD	BD	EF	CF	CE
34	22	14	13	68	58	59	6B	7C	79	AE	AF	BC	DF	DE
24	14	33	12	78	AC	6E	5B	5F	6C	7F	AB	9E	8D	9D
23	13	12	44	BE	9F	BF	5D	8E	7D	5C	69	8C	6A	7A
67	68	78	BE	55	1D	1A	2E	2D	3F	3C	4F	4A	9C	9B
57	58	AC	9F	1D	66	1E	2C	2A	3E	49	3D	8F	4B	7B
56	59	6E	BF	1A	1E	77	4D	CD	2F	29	38	3B	8A	4C
9A	6B	5B	5D	2E	2C	4D	88	1F	1C	6F	7E	39	47	3A
8B	7C	5F	8E	2D	2A	CD	1F	99	1B	4E	46	5A	37	36
89	79	6C	7D	3F	3E	2F	1C	1B	AA	6D	5E	45	2B	48
AD	AE	7F	5C	3C	49	29	6F	4E	6D	BB	18	17	35	28
BD	AF	AB	69	4F	3D	38	7E	46	5E	18	CC	27	19	25
EF	BC	9E	8C	4A	8F	3B	39	5A	45	17	27	DD	26	16
CF	DF	8D	6A	9C	4B	8A	47	37	2B	35	19	26	EE	15
CE	DE	9D	7A	9B	7B	4C	3A	36	48	28	25	16	15	FF

Ce n'est pas un A-design d'ordre 15, car la première ligne est formée de cycles impairs.

n = 16

11	34	24	23	67	57	56	9A	8A	89	CG	BD	BC	DF	EG	EF
34	22	14	13	68	58	59	69	7B	7C	AE	BF	AG	CF	DG	DE
24	14	33	12	7E	8C	6F	5D	5G	6B	79	8F	BE	9G	AD	AC
23	13	12	44	BG	FG	CE	5B	6A	9F	78	7D	8E	5A	6C	9D
67	68	7E	BG	55	1B	1C	2A	2C	3D	3G	49	4F	8D	9E	AF
57	58	8C	FG	1B	66	1D	2E	2D	3F	3E	4G	4A	7A	9B	9C
56	59	6F	CE	1C	1D	77	4E	4D	2G	2F	3A	39	8G	AB	8B
9A	69	5D	5B	2A	2E	4E	88	1F	1G	CD	6G	7F	4C	37	3B
8A	7B	5G	6A	2C	2D	4D	1F	99	1E	5F	6E	7G	4B	3C	38
89	7C	6B	9F	3D	3F	2G	1G	1E	AA	6D	5E	5C	2B	48	47
CG	AE	79	78	3G	3E	2F	CD	5F	6D	BB	1A	18	29	45	46
BD	BF	8F	7D	49	4G	3A	6G	6E	5E	1A	CC	19	35	28	27
BC	AG	BE	8E	4F	4A	39	7F	7G	5C	18	19	DD	36	26	25
DF	CF	9G	5A	8D	7A	8G	4C	4B	2B	29	35	36	EE	17	16
EG	DG	AD	6C	9E	9B	AB	37	3C	48	45	28	26	17	FF	15
EF	DE	AC	9D	AF	9C	8B	3B	38	47	46	27	25	16	15	GG

A partir de 17, la construction directe, même à l'aide d'un calculateur, doit être abandonnée. Nous allons donc définir des constructions récursives, qui nous permettront d'obtenir des carrés de grande taille.

2.2. PAIRWISE BALANCED DESIGNS

Aucune traduction satisfaisante de "Pairwise Balanced Design" ne s'étant encore imposée,nous leur donnerons l'appellation classique de "PBD".

Si n est un entier positif et K un ensemble d'entiers plus grands que 1, on appelle PBD(K,n) un hypergraphe à n sommets tel que :

(1) le nombre de points de chaque arête (ou bloc) soit un élément de K,

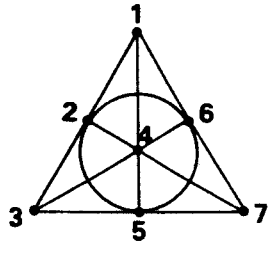
(2) chaque couple de points appartienne à un bloc et à un seul.

Un PBD(K,n) est donc une décomposition du graphe complet K_n en sous-graphes complets disjoints K_k, $k \in K$.

On peut également donner comme deuxième propriété : "par deux points passe une droite et une seule", ce qui donne une interprétation géométrique des PBD. Pour cette raison, certains auteurs les appellent espaces linéaires.

Le plan projectif fini d'ordre n est un hypergraphe à n^2+n+1 sommets dont les n^2+n+1 arêtes, appelées droites, sont telles que deux points appartiennent à une droite et à une seule, et que deux droites aient un point commun et un seul. C'est un PBD($\{n+1\}$,n^2+n+1). Si n est une puissance de nombre premier, il existe un plan projectif d'ordre n.

Par exemple, le plan projectif d'ordre 2 : 123 145 167 247 256 346 357 est un PBD($\{3\}$,7).



Les PBD permettent de construire des carrés doubles diagonaux de façon récursive, et ont donc été utilisés pour construire des carrés gréco-latins, des carrés latins auto-orthogonaux et des A-designs. En effet :

proposition 2.3

> S'il existe un PBD(K,n) et si chaque élément de K est l'ordre d'un carré double diagonal, il existe un carré double diagonal d'ordre n.

A chaque bloc B du PBD, associons un carré double diagonal d'ordre $|B|$ dont les indices et les symboles sont les éléments de B.

Soit C un tableau carré n × n. Nous définissons ainsi le contenu de ses cases :

- diagonale principale : $C_i^i = (i,i)$
- case (i,j) avec i≠j :

Soit B le seul bloc contenant le couple (i,j). La case (i,j) du carré double associé à B contient les deux symboles a et b. Posons : $C_i^j = (a,b)$.

C est un carré double diagonal :

- quels que soient i et j, C_i^j est défini et contient deux symboles
- chaque ligne C_i contient deux fois chaque symbole a :

si a = i : $C_i^i = (i,i)$

si a ≠ i : dans le carré double associé au bloc contenant a et i, a apparaît deux fois dans la ligne i : dans les cases (i,j) et (i,k). Donc C_i^j et C_i^k contiennent a.

- de même, chaque colonne contient deux fois chaque symbole

- chaque couple de symboles différents (a,b) apparaît deux fois dans le carré double associé au bloc contenant a et b : dans les cases (i,j) et (k,l). Donc C_i^j et C_k^l contiennent (a,b).

- les cases de la diagonale contiennent les couples (i,i).

C est symétrique si et seulement si chaque carré double associé à un bloc est symétrique ; C est inséparable si et seulement si au moins un de ces carrés doubles est inséparable.

Comme il existe des carrés doubles symétriques de tous ordres sauf 2 et 3, nous avons une condition d'existence récursive pour les carrés doubles symétriques inséparables :

théorème 2.4

> S'il existe un PBD(K,n) dont les blocs ont au moins quatre éléments, et si la taille de l'un des blocs est l'ordre d'un carré double symétrique inséparable, il existe un carré double symétrique inséparable d'ordre n.

Le problème consistera donc à construire un PBD avec des blocs suffisamment grands, alors que les blocs de deux points sont très utiles pour compléter l'ensemble des couples. Nous tournerons la difficulté en utilisant une forme particulière de PBD.

Pour l'instant, la relation entre les PBD et les carrés doubles diagonaux va nous assurer l'existence des carrés doubles symétriques inséparables d'ordre suffisamment grand, grâce au théorème de R.M. Wilson [42] :

théorème 2.5

> Soient K un ensemble d'entiers positifs, $\alpha(K)$ le PGCD des entiers $\{k-1 \mid k \in K\}$, et $\beta(K)$ le PGCD des entiers $\{k(k-1) \mid k \in K\}$. Il existe un PBD(K,n) pour tout n suffisamment grand vérifiant : $n=1 \bmod \alpha(K)$ et $n(n-1)=0 \bmod \beta(K)$.

Considérons l'ensemble $K = \{6,7,8\}$. Alors $\alpha(K)$, PGCD de 5,6 et 7, est égal à 1, et $\beta(K)$, PGCD de 30,42 et 56, est égal à 2. Tout entier n est égal à 1 modulo 1, et tout entier de la forme n(n-1) est pair donc égal à 0 modulo 2. Il existe donc un PBD($\{6,7,8\}$,n) pour tout n suffisamment grand. Comme il existe des carrés doubles symétriques inséparables d'ordre 6,7 et 8, le problème d'existence est théoriquement résolu :

théorème 2.6

> Il existe un carré double symétrique inséparable d'ordre n pour tout n suffisamment grand.

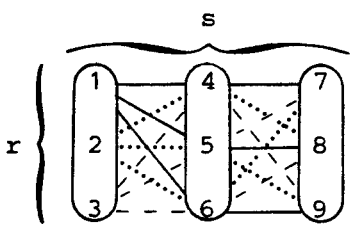
Mais il nous reste à préciser la borne N à partir de laquelle un entier est considéré comme "suffisamment grand", et à étudier l'existence des carrés doubles symétriques inséparables dont l'ordre est inférieur à N.

2.3. TRANSVERSAL DESIGNS

On appelle transversal design ou TD(r,s) un ensemble de rs points répartis à la fois en s classes disjointes de r points et en blocs de s points, de telle sorte que chaque bloc contienne un point de chaque classe, et que chaque couple de points appartenant à deux classes différentes apparaisse dans un bloc et un seul.

exemple : TD(3,3)

classes :	123	456	789
blocs :	147	248	349
	158	259	357
	169	267	368



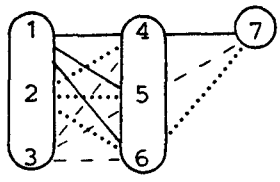
On peut considérer les classes et les blocs d'un transversal design comme les blocs d'un pairwise balanced design, puisque chaque couple de points est soit dans une classe, soit dans un bloc :

proposition 2.7

> S'il existe un TD(r,s), il existe un PBD({r,s},rs).

Si on enlève des points à un transversal design, les classes et les blocs tronqués sont encore les blocs d'un pairwise balanced design.

exemple : PBD({2,3},7)



123 456
147 24 34
15 25 357
16 267 36

proposition 2.8

> S'il existe un TD(r,s), alors, quels que soient les entiers $r_1,r_2,\ldots,r_s$ au plus égaux à r, il existe un PBD($\{r_1,r_2,\ldots,r_s,2,3,\ldots,s\}$,$r_1+r_2+\ldots r_s$) ayant des blocs de taille $r_1,r_2,\ldots,r_s$.

Remarquons à cette occasion que l'ensemble K de la définition d'un PBD(K,n) peut contenir des entiers k qui ne sont la taille d'aucun bloc. En général, on limite cependant K à l'ensemble des cardinaux des blocs.

Inversement, on peut ajouter un point à un transversal design en considérant les classes comme des droites parallèles et le nouveau point comme leur intersection à l'infini . On obtient alors un PBD({s,r+1},rs+1).

proposition 2.9

> S'il existe un TD(r,s), il existe un PBD({s,r+1},rs+1).

exemple : PBD({3,4},10)

0123 147 248 349
0456 158 259 357
0789 169 267 358

L'existence des transversal designs est liée à celle des ensembles de carrés latins orthogonaux deux à deux, comme l'a montré M. Hall [19] :

proposition 2.10

> Il existe un TD(r,s) si et seulement si il existe s-2 carrés latins d'ordre r orthogonaux deux à deux.

exemple : TD(3,4) classes : 123 456 789 ABC

blocs : 147A 248C 349B
158B 259A 357C
169C 267B 368A

Ces blocs sont disposés de telle sorte qu'ils forment trois tableaux à quatre colonnes et trois lignes. Si on regroupe toutes les premières colonnes, toutes les deuxièmes, etc., on obtient quatre carrés 3 × 3 dont les deux derniers sont deux carrés latins orthogonaux :

1 2 3 4 4 4 7 8 9 A C B
1 2 3 5 5 5 8 9 7 B A C
1 2 3 6 6 6 9 7 8 C B A

En fait, on peut dire que ces quatre carrés sont orthogonaux deux à deux, car la superposition de deux d'entre eux contient tous les couples de symboles possibles constitués d'un symbole du premier carré et d'un symbole du deuxième.

On sait qu'il existe n-1 carrés latins d'ordre n orthogonaux deux à deux si n est une puissance de nombre premier [13]. On en déduit :

proposition 2.11

> Si n est une puissance de nombre premier, il existe un TD(n,n+1).

On peut construire ce TD(n,n+1) en enlevant un point au plan projectif d'ordre n, puis en considérant comme classes les droites tronquées et comme blocs les autres droites.

Quand n n'est pas une puissance de nombre premier, le nombre maximum N(n) de carrés latins d'ordre n orthogonaux deux à deux n'est pas toujours connu. On sait qu'il existe deux carrés latins orthogonaux d'ordre n si n est différent de 2, 3 et 6. On sait également, d'après les travaux de H. Hanani [20] et de S.M.P. Wang et R.M. Wilson [41], qu'il existe trois carrés latins d'ordre n orthogonaux deux à deux si n est au moins égal à 15. Par conséquent :

proposition 2.12

> Si n est au moins égal à 15, il existe un TD(n,5).

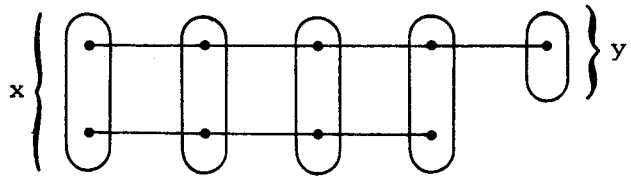
Ces résultats vont nous permettre de préciser l'entier N à partir duquel il existe un carré double symétrique inséparable d'ordre n.

proposition 2.13

> Il existe un carré double symétrique inséparable d'ordre n pour tout n au moins égal à 66.

A partir de 66, tout entier n peut s'écrire sous la forme $n = 4x+y$ avec $x \geq 15$ et $y = 6,7,8$ ou 9.

Il existe un TD(x,5) (proposition 2.12) dont nous réduisons l'une des cinq classes à y points : nous obtenons un PBD($\{4,5,x,y\}$,4x+y) dont l'un des blocs est de taille y.



Comme il existe un carré double symétrique inséparable d'ordre $y = 6,7,8$ ou 9, le théorème 2.4 permet d'affirmer qu'il existe un carré double symétrique inséparable d'ordre $n = 4x+y$.

Nous pouvons encore abaisser la borne N à l'aide des TD(n,n+1) de la proposition 2.11 :

proposition 2.14

Il existe un carré double symétrique inséparable d'ordre n pour tout n compris entre 24 et 65, ainsi que pour n = 21.

Il existe un TD(n,n+1) si n est une puissance de nombre premier, donc il existe un TD(9,10), un TD(8,9), un TD(7,8) et un TD(5,6).

Si on garde seulement sept des dix classes du TD(9,10), on obtient un TD(9,7) qui est également un PBD({7,9},63) nous permettant de construire un carré double symétrique inséparable d'ordre 63. En ne laissant que 0,1,4,5,6,7 ou 8 points à l'une des classes du TD(9,7), on obtient un PBD ayant 54,55,58,59,60,61 ou 62 points, six blocs de neuf points qui sont les classes non tronquées, et des blocs de quatre à huit points. Il existe donc des carrés doubles symétriques inséparables d'ordre 54,55,58,59,60,61 et 62.

On construit de la même façon des carrés doubles symétriques inséparables d'ordre 45,46,49,50,51,52 et 53 à l'aide de cinq classes du TD(9,10) et d'une classe tronquée.

Avec le TD(8,9), on obtient les ordres suivants :

64,65 : 8 classes, ou 8 classes et un point de la neuvième classe

56,57 : 7 classes + 0 ou 1 point

48 : 6 classes

47 : 5 classes + 7 points de la sixième classe

32,33,38,39 : 4 classes + 0,1,6,7 points

Avec le TD(7,8) :

35 : 5 classes

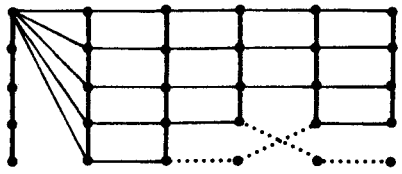
28,29,34 : 4 classes + 0,1,6 points

Enfin, avec le TD(5,6) :

30 : 6 classes

26 : 5 classes + 1 point

27 : 3 classes + 3 classes réduites à quatre points, à condition que les trois points enlevés n'appartiennent pas au même bloc, sinon ce bloc tronqué n'aurait plus que trois points.



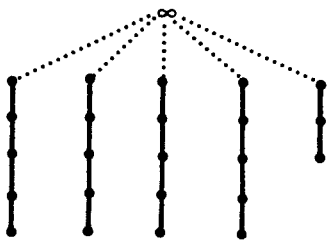
En ajoutant un point infini au TD(5,6) :

31 : le TD(5,6) + le point infini

21 : 4 classes, constituant un TD(5,4), et le point infini

25 : 5 classes, dont une réduite à 4 points, et le point infini

24 : 5 classes, dont une réduite à 3 points, et le point infini (avec le point infini, la classe de 3 points redevien un bloc de 4 points dans le PBD({4,5,6},24))



2.4. CARRES DOUBLES D'ORDRE 3n+1

M. Hall [19] a proposé une construction d'un carré gréco-latin d'ordre 3n+1 à partir d'un carré gréco-latin d'ordre n. Nous pouvons l'appliquer aux carrés doubles symétriques inséparables.

On construit un tableau orthogonal d'ordre 3n+1 et de profondeur 4, c'est-à-dire un tableau à $(3n+1)^2$ colonnes dont chaque case contient l'un des symboles 0,1,...,3n et dont les quatre lignes sont orthogonales deux à deux : en superposant deux lignes, on obtient tous les couples de symboles possibles.

Ce tableau a la forme suivante :

	2n+1	n(2n+1)	n(2n+1)	n(2n+1)	n(2n+1)	n^2
indices	D	A	B	C	X	L
indices	D	B	A	X	C	K
symboles	D	C	X	A	B	
symboles	D	X	C	B	A	
	diagonale					carré n×n

D est le vecteur (0,1,..,2n).

Pout tout i = 0,1,..,2n, on définit trois vecteurs dont les n éléments sont des résidus modulo 2n+1 :

$a_i = (i,i,..,i)$

$b_i = (i+1,i+2,..,i+n)$

$c_i = (i-1,i-2,..,i-n)$

On construit alors les vecteurs A, B ,C de longueur n(2n+1) :

$$A = (a_0, a_1, .., a_{2n})$$
$$B = (b_0, b_1, .., b_{2n})$$
$$C = (c_0, c_1, .., c_{2n})$$

On définit n symboles $x_1, x_2, .., x_n$ qui sont les éléments des vecteurs X,K,L (symboles, colonnes, lignes) :

$$X = (x_1, .., x_n, .., x_1, .., x_n) \quad 2n+1 \text{ fois } x_1, .., x_n$$
$$K = (x_1, .., x_n, .., x_1, .., x_n) \quad n \text{ fois } x_1, .., x_n$$
$$L = (x_1, .., x_1, .., x_n, .., x_n) \quad n \text{ fois chaque } x_i$$

Par exemple, si n est égal à 4 :

D =

0	1	2	3	4	5	6	7	8

a_0	0	0	0	0
a_1	1	1	1	1
a_2	2	2	2	2
a_3	3	3	3	3
a_4	4	4	4	4
a_5	5	5	5	5
a_6	6	6	6	6
a_7	7	7	7	7
a_8	8	8	8	8

b_0	1	2	3	4
b_1	2	3	4	5
b_2	3	4	5	6
b_3	4	5	6	7
b_4	5	6	7	8
b_5	6	7	8	0
b_6	7	8	0	1
b_7	8	0	1	2
b_8	0	1	2	3

c_0	8	7	6	5
c_1	0	8	7	6
c_2	1	0	8	7
c_3	2	1	0	8
c_4	3	2	1	0
c_5	4	3	2	1
c_6	5	4	3	2
c_7	6	5	4	3
c_8	7	6	5	4

X

A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D

K

A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D

L

A	A	A	A	B	B	B	B	C	C	C	C	D	D	D	D

En interprétant les deux premières lignes du tableau orthogonal comme les indices d'un carré double d'ordre 3n+1, et les deux dernières comme les symboles qui se trouvent dans les cases, on obtient :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	A	B	C	D
0	00	8A	7B	6C	5D	D1	C3	B5	A7	12	24	36	48
1	A8	11	0A	8B	7C	6D	D2	C4	B6	23	35	47	50
2	B7	A0	22	1A	0B	8C	7D	D3	C5	34	46	58	61
3	C6	B8	A1	33	2A	1B	0C	8D	D4	45	57	60	72
4	D5	C7	B0	A2	44	3A	2B	1C	0D	56	68	71	83
5	1D	D6	C8	B1	A3	55	4A	3B	2C	67	70	82	04
6	3C	2D	D7	C0	B2	A4	66	5A	4B	78	81	03	15
7	5B	4C	3D	D8	C1	B3	A5	77	6A	80	02	14	26
8	7A	6B	5C	4D	D0	C2	B4	A6	88	01	13	25	37
A	21	32	43	54	65	76	87	08	10				
B	42	53	64	75	86	07	18	20	31				
C	63	74	85	06	17	28	30	41	52				
D	84	05	16	27	38	40	51	62	73				

exemple
avec n = 4

Si on remplace le carré n × n en bas à droite par un carré double d'ordre n, on obtient un carré double d'ordre 3n+1, symétrique si le carré d'ordre n est symétrique, inséparable s'il est inséparable.

théorème 2.15

> S'il existe un carré double symétrique inséparable d'ordre n, il existe un carré double symétrique inséparable d'ordre 3n+1.

A l'aide des carrés d'ordre 6 et 7, on peut donc en construire deux nouveaux :

proposition 2.16

> Il existe des carrés doubles symétriques inséparables d'ordre 19 et 22.

2.5. LE PRODUIT DIRECT SINGULIER

Introduit par A. Sade [35] pour trouver des contre-exemples à la conjecture d'Euler, le produit direct singulier a été utilisé, en particulier par C.C. Lindner [24], D.J. Crampin et A.J.W. Hilton [12], pour construire des carrés latins auto-orthogonaux. Utilisant la notion de sous-carré, il va également servir à construire des carrés doubles symétriques inséparables.

théorème 2.17

> S'il existe un carré double symétrique inséparable d'ordre p+q , où p est différent de 2,3 et 6 et où q peut éventuellement être nul, possédant un sous-carré double symétrique d'ordre q, alors, pour tout n différent de 2,3 et 6, il existe un carré double symétrique inséparable d'ordre np+q .

Si q est nul, on retrouve le produit direct déjà rencontré pour les carrés siamois.

Soient A et B deux carrés latins auto-orthogonaux d'ordres respectifs n et p, dont les symboles sont $x_1,..,x_n$ et $y_1,..,y_p$. Ces carrés existent car n et p sont différents de 2,3,6 (théorème 1.11).

Soit C le carré double symétrique inséparable d'ordre p+q , dont les symboles sont $y_1,..,y_p,z_1,..,z_q$.

Soit D le carré double symétrique d'ordre q qui est un sous-carré de C, c'est-à-dire qui est déterminé par q lignes et q colonnes de C. Soient $z_1,..,z_q$ les symboles de D. On suppose que D se trouve en haut et à gauche de C.

Nous allons construire le carré double S d'ordre np+q , symétrique et inséparable, de la façon suivante :

- dans chaque case du carré latin A, sauf les cases de la diagonale, on remplace le symbole x par le carré B, en substituant au symbole y de B le couple (x,y).
- on fait la même construction avec les transposés de A et de B.
- on superpose les deux carrés (la diagonale est vide).
- on ajoute une première ligne A_0 constituée de n rectangles $q \times p$, une première colonne A^0 de n rectangles $p \times q$, et un coin supérieur gauche A_0^0 contenant le carré D.
- dans les "cases" A_0^0, A_0^i, A_i^0 et A_i^i du carré A dilaté, on place le carré C (en quatre morceaux) en remplaçant chaque symbole y de C ne figurant pas dans D, par le couple (x,y), où x est le symbole qui se trouve dans la case (i,i) du carré latin A. Le sous-carré D est recopié dans A_0^0.

Les np+q symboles de S sont les np couples (x_i,y_j) , i=1,..,n , j=1,..,p , et les q symboles $z_1,..,z_q$.

Par exemple, avec n=4, p=5, q=1 et les carrés suivants, on construit un carré double symétrique inséparable d'ordre 21 :

A =

1	3	4	2
4	2	1	3
2	4	3	1
3	1	2	4

$x_1 = 1$

$x_2 = 2$

$x_3 = 3$

$x_4 = 4$

auto-orthogonal

B =

5	7	9	6	8
9	6	8	5	7
8	5	7	9	6
7	9	6	8	5
6	8	5	7	9

$y_1 = 5$

$y_2 = 6$

$y_3 = 7$

$y_4 = 8$

$y_5 = 9$

auto-orthogonal

C =

00	67	58	59	69	78
67	55	09	08	79	68
58	09	66	89	07	57
59	08	89	77	56	06
69	79	07	56	88	05
78	68	57	06	05	99

$z_1 = 0$

symétrique inséparable

00	16 17	15 18	15 19	16 19	17 18	26 27	25 28	25 29	26 29	27 28	36 37	35 38	35 39	36 39	37 38	46 47	45 48	45 49	46 49	47 48
16 17	15 15	0 19	0 18	17 19	16 18	35 45	37 49	39 48	36 47	38 46	45 25	47 29	49 28	46 27	48 26	25 35	27 39	29 38	26 37	28 36
15 18	0 19	16 16	18 19	0 17	15 17	39 47	36 46	38 45	35 49	37 48	49 27	46 26	48 25	45 29	47 28	29 37	26 36	28 35	25 39	27 38
15 19	0 18	18 19	17 17	15 16	0 16	38 49	35 48	37 47	39 46	36 45	48 29	45 28	47 27	49 26	46 25	28 39	25 38	27 37	29 36	26 35
16 19	17 19	0 17	15 16	18 18	0 15	37 46	39 45	36 49	38 48	35 47	47 26	49 25	46 29	48 28	45 27	27 36	29 35	26 39	28 38	25 37
17 18	16 18	15 17	0 16	0 15	19 19	36 48	38 47	35 46	37 45	39 49	46 28	48 27	45 26	47 25	49 29	26 38	28 37	25 36	27 35	29 39
26 27	45 35	47 39	49 38	46 37	48 36	25 25	0 29	0 28	27 29	26 28	15 45	17 49	19 48	16 47	18 46	35 15	37 19	39 18	36 17	38 16
25 28	49 37	46 36	48 35	45 39	47 38	0 29	26 26	28 29	0 27	25 27	19 47	16 46	18 45	15 49	17 48	39 17	36 16	38 15	35 19	37 18
25 29	48 39	45 38	47 37	49 36	46 35	0 28	28 29	27 27	25 26	0 26	18 49	15 48	17 47	19 46	16 45	38 19	35 18	37 17	39 16	36 15
26 29	47 36	49 35	46 39	48 38	45 37	27 29	0 27	25 26	28 28	0 25	17 46	19 45	16 49	18 48	15 47	37 16	39 15	36 19	38 18	35 17
27 28	46 38	48 37	45 36	47 35	49 39	26 28	25 27	0 26	0 25	29 29	16 48	18 47	15 46	17 45	19 49	36 18	38 17	35 16	37 15	39 19
36 37	25 45	27 49	29 48	26 47	28 46	45 15	47 19	49 18	46 17	48 16	35 35	0 39	0 38	37 39	36 38	15 25	17 29	19 28	16 27	18 26
35 38	29 47	26 46	28 45	25 49	27 48	49 17	46 16	48 15	45 19	47 18	0 39	36 36	38 39	0 37	35 37	19 27	16 26	18 25	15 29	17 28
35 39	28 49	25 48	27 47	29 46	26 45	48 19	45 18	47 17	49 16	46 15	0 38	38 39	37 37	35 36	0 36	18 29	15 28	17 27	19 26	16 25
36 39	27 46	29 45	26 49	28 48	25 47	47 16	49 15	46 19	48 18	45 17	37 39	0 37	35 36	38 38	0 35	17 26	19 25	16 29	18 28	15 27
37 38	26 48	28 47	25 46	27 45	29 49	46 18	48 17	45 16	47 15	49 19	36 38	35 37	0 36	0 35	39 39	16 28	18 27	15 26	17 25	19 29
46 47	35 25	37 29	39 28	36 27	38 26	15 35	17 39	19 38	16 37	18 36	25 15	27 19	29 18	26 17	28 16	45 45	0 49	0 48	47 49	46 48
45 48	39 27	36 26	38 25	35 29	37 28	19 37	16 36	18 35	15 39	17 38	29 17	26 16	28 15	25 19	27 18	0 49	46 46	48 49	0 47	45 47
45 49	38 29	35 28	37 27	39 26	36 25	18 39	15 38	17 37	19 36	16 35	28 19	25 18	27 17	29 16	26 15	0 48	48 49	47 47	45 46	0 46
46 49	37 26	39 25	36 29	38 28	35 27	17 36	19 35	16 39	18 38	15 37	27 16	29 15	26 19	28 18	25 17	47 49	0 47	45 46	48 48	0 45
47 48	36 28	38 27	35 26	37 25	39 29	16 38	18 37	15 36	17 35	19 39	26 18	28 17	25 16	27 15	29 19	46 48	45 47	0 46	0 45	49 49

2.6. PRODUIT DE CARRES DOUBLES

théorème 2.18

> S'il existe un carré double symétrique inséparable d'ordre n , il existe un carré double symétrique inséparable d'ordre np pour tout p différent de 2,3 et 6.

Ce résultat semble très voisin du précédent, pourtant il apporte de nouveaux ordres de carrés doubles symétriques inséparables : les multiples de 6 autres que 12,18 et 36. Ces ordres ont déjà été trouvés par d'autres méthodes, mais ce nouveau produit peut être intéressant.

Cette fois, nous allons dilater les cases du carré double symétrique inséparable pour y recopier un carré gréco-latin symétrique d'ordre p .

Soit donc A un carré double symétrique inséparable d'ordre n, dont on a ordonné les éléments : si la case (i,j) contient le couple (x,y), la case (j,i) contient le couple (y,x).

Soit B un carré double symétrique séparable d'ordre p obtenu en superposant un carré latin auto-orthogonal d'ordre p et son transposé. p est donc différent de 2,3 et 6 (théorème 1.11). Si la case (i,j) de B contient le couple (a,b), a est un symbole du carré latin et b un symbole du transposé.

Si x et y sont deux des n symboles du carré A, on construit le carré B(x,y) en remplaçant chaque élément (a,b)

du carré B par l'élément ((x,a),(y,b)). (x,a) et (y,b) sont deux symboles, éléments de l'ensemble produit des deux ensembles de symboles de A et de B.

On construit le carré double C d'ordre np en remplaçant dans A chaque couple (x,y) par le carré B(x,y). Vérifions que C est un carré double :

- chaque symbole (x,a) apparaît deux fois dans chaque ligne i de C :

L'entier i , compris entre 1 et np, est égal à (j-1)p+k, où j est compris entre 1 et n, et k entre 1 et p. La ligne C_i fait partie de la ligne A_j dilatée, c'est une juxtaposition de n copies de la ligne B_k.

Le symbole a apparaît deux fois dans la ligne B_k : dans les couples (a,b) et (c,a). On peut avoir b=c=a , les couples (a,b) et (c,a) sont alors confondus en un seul couple (a,a).

Si x apparaît dans les couples (x,y) et (x,z) ($y \neq z$) de la ligne A_j, on trouve dans C_i les couples ((x,a),(y,b)) et ((x,a),(z,b)).

Si x apparaît dans (x,y) et (z,x) ($y \neq z$), on trouve dans C_i les couples ((x,a),(y,b)) et ((z,c),(x,a)).

Si le couple (x,x) est dans la ligne A_j, la ligne C_i contient ((x,a),(x,b)) et ((x,c),(x,a)), confondus en ((x,a),(x,a)) si b=c=a .

- de même, chaque colonne de C contient deux fois chaque symbole.

- chaque couple ((x,a),(y,b)) figure deux fois dans C si $(x,a) \neq (y,b)$:

Dans A, on trouve (x,y) et (y,x). La case contenant (x,y) est remplacée par le carré B(x,y), la case

contenant (y,x) est remplacée par B(y,x). B contient (a,b) et (b,a). On trouve donc ((x,a),(y,b)) dans la case de B(x,y) correspondant à la case de B qui contient (a,b), et aussi ((y,b),(x,a)) dans la case de B(y,x) correspondant à la case de B qui contient (b,a).

Si a=b et x=y : ((x,a),(x,a)) est dans la case de B(x,x) correspondant à la case de B qui contient (a,a).

C est symétrique :

Soient i et i' deux indices compris entre 1 et np : i est égal à (j-1)p+k et i' à (j'-1)p+k', avec j et j' compris entre 1 et n, k et k' compris entre 1 et p. $C_i^{i'}$ est donc une copie de la case $B_{k_{i'}}^{k'}$ dans $A_j^{j'}$. Si $A_j^{j'}$ contenait (x,y) et si $B_k^{k'}$ contenait (a,b), $C_i^{i'}$ contient ((x,a),(y,b)). $C_{i'}^{i}$ est une copie de $B_{k'}^{k}$ dans $A_{j'}^{j}$. Comme A et B sont symétriques, $A_{j'}^{j}$ contient (y,x), $B_{k'}^{k}$ contient (b,a) et $C_{i'}^{i}$ contient ((y,b),(x,a)).

C est inséparable :

Certaines cases de A le rendent inséparable. Quand on dilate A, ces cases sont remplacées par des copies de B. On considère les cases en haut et à gauche de ces carrés B(x,y), elles contiennent des couples de la forme ((x,a),(x,a)) si B_1^1 contient (a,a), et rendent C inséparable.

Cette construction ne faisait pas partie d'une précédente étude des carrés doubles symétriques inséparables [30]. Elle permet par exemple d'obtenir le carré C d'ordre 24 à partir des carrés A et B suivants :

11	45	46	35	26	23
54	22	56	36	13	14
64	65	33	12	24	13
53	63	21	44	16	25
62	31	42	61	55	34
32	41	51	52	43	66

A : symétrique, inséparable

AA	CD	DB	BC
DC	BB	AD	CA
BD	DA	CC	AB
CB	AC	BA	DD

B : symétrique, gréco-latin

BU LILLE

1A	1C	1D	1B	4A	4C	4D	4B	4A	4C	4D	4B	3A	3C	3D	3B	2A	2C	2D	2B	2A	2C	2D	2B
1A	1D	1B	1C	5A	5D	5B	5C	6A	6D	6B	6C	5A	5D	5B	5C	6A	6D	6B	6C	3A	3D	3B	3C
1D	1B	1A	1C	4D	4B	4A	4C	4D	4B	4A	4C	3D	3B	3A	3C	2D	2B	2A	2C	2D	2B	2A	2C
1C	1B	1D	1A	5C	5B	5D	5A	6C	6B	6D	6A	5C	5B	5D	5A	6C	6B	6D	6A	3C	3B	3D	3A
1B	1D	1C	1A	4B	4D	4C	4A	4B	4D	4C	4A	3B	3D	3C	3A	2B	2D	2C	2A	2B	2D	2C	2A
1D	1A	1C	1B	5D	5A	5C	5B	6D	6A	6C	6B	5D	5A	5C	5B	6D	6A	6C	6B	3D	3A	3C	3B
1C	1A	1B	1D	4C	4A	4B	4D	4C	4A	4B	4D	3C	3A	3B	3D	2C	2A	2B	2D	2C	2A	2B	2D
1B	1C	1A	1D	5B	5C	5A	5D	6B	6C	6A	6D	5B	5C	5A	5D	6B	6C	6A	6D	3B	3C	3A	3D
5A	5C	5D	5B	2A	2C	2D	2B	5A	5C	5D	5B	3A	3C	3D	3B	1A	1C	1D	1B	1A	1C	1D	1B
4A	4D	4B	4C	2A	2D	2B	2C	6A	6D	6B	6C	6A	6D	6B	6C	3A	3D	3B	3C	4A	4D	4B	4C
5D	5B	5A	5C	2D	2B	2A	2C	5D	5B	5A	5C	3D	3B	3A	3C	1D	1B	1A	1C	1D	1B	1A	1C
4C	4B	4D	4A	2C	2B	2D	2A	6C	6B	6D	6A	6C	6B	6D	6A	3C	3B	3D	3A	4C	4B	4D	4A
5B	5D	5C	5A	2B	2D	2C	2A	5B	5D	5C	5A	3B	3D	3C	3A	1B	1D	1C	1A	1B	1D	1C	1A
4D	4A	4C	4B	2D	2A	2C	2B	6D	6A	6C	6B	6D	6A	6C	6B	3D	3A	3C	3B	4D	4A	4C	4B
5C	5A	5B	5D	2C	2A	2B	2D	5C	5A	5B	5D	3C	3A	3B	3D	1C	1A	1B	1D	1C	1A	1B	1D
4B	4C	4A	4D	2B	2C	2A	2D	6B	6C	6A	6D	6B	6C	6A	6D	3B	3C	3A	3D	4B	4C	4A	4D
6A	6C	6D	6B	6A	6C	6D	6B	3A	3C	3D	3B	1A	1C	1D	1B	2A	2C	2D	2B	1A	1C	1D	1B
4A	4D	4B	4C	5A	5D	5B	5C	3A	3D	3B	3C	2A	2D	2B	2C	4A	4D	4B	4C	5A	5D	5B	5C
6D	6B	6A	6C	6D	6B	6A	6C	3D	3B	3A	3C	1D	1B	1A	1C	2D	2B	2A	2C	1D	1B	1A	1C
4C	4B	4D	4A	5C	5B	5D	5A	3C	3B	3D	3A	2C	2B	2D	2A	4C	4B	4D	4A	5C	5B	5D	5A
6B	6D	6C	6A	6B	6D	6C	6A	3B	3D	3C	3A	1B	1D	1C	1A	2B	2D	2C	2A	1B	1D	1C	1A
4D	4A	4C	4B	5D	5A	5C	5B	3D	3A	3C	3B	2D	2A	2C	2B	4D	4A	4C	4B	5D	5A	5C	5B
6C	6A	6B	6D	6C	6A	6B	6D	3C	3A	3B	3D	1C	1A	1B	1D	2C	2A	2B	2D	1C	1A	1B	1D
4B	4C	4A	4D	5B	5C	5A	5D	3B	3C	3A	3D	2B	2C	2A	2D	4B	4C	4A	4D	5B	5C	5A	5D
5A	5C	5D	5B	6A	6C	6D	6B	2A	2C	2D	2B	4A	4C	4D	4B	1A	1C	1D	1B	2A	2C	2D	2B
3A	3D	3B	3C	3A	3D	3B	3C	1A	1D	1B	1C	4A	4D	4B	4C	6A	6D	6B	6C	5A	5D	5B	5C
5D	5B	5A	5C	6D	6B	6A	6C	2D	2B	2A	2C	4D	4B	4A	4C	1D	1B	1A	1C	2D	2B	2A	2C
3C	3B	3D	3A	3C	3B	3D	3A	1C	1B	1D	1A	4C	4B	4D	4A	6C	6B	6D	6A	5C	5B	5D	5A
5B	5D	5C	5A	6B	6D	6C	6A	2B	2D	2C	2A	4B	4D	4C	4A	1B	1D	1C	1A	2B	2D	2C	2A
3D	3A	3C	3B	3D	3A	3C	3B	1D	1A	1C	1B	4D	4A	4C	4B	6D	6A	6C	6B	5D	5A	5C	5B
5C	5A	5B	5D	6C	6A	6B	6D	2C	2A	2B	2D	4C	4A	4B	4D	1C	1A	1B	1D	2C	2A	2B	2D
3B	3C	3A	3D	3B	3C	3A	3D	1B	1C	1A	1D	4B	4C	4A	4D	6B	6C	6A	6D	5B	5C	5A	5D
6A	6C	6D	6B	3A	3C	3D	3B	4A	4C	4D	4B	6A	6C	6D	6B	5A	5C	5D	5B	3A	3C	3D	3B
2A	2D	2B	2C	1A	1D	1B	1C	2A	2D	2B	2C	1A	1D	1B	1C	5A	5D	5B	5C	4A	4D	4B	4C
6D	6B	6A	6C	3D	3B	3A	3C	4D	4B	4A	4C	6D	6B	6A	6C	5D	5B	5A	5C	3D	3B	3A	3C
2C	2B	2D	2A	1C	1B	1D	1A	2C	2B	2D	2A	1C	1B	1D	1A	5C	5B	5D	5A	4C	4B	4D	4A
6B	6D	6C	6A	3B	3D	3C	3A	4B	4D	4C	4A	6B	6D	6C	6A	5B	5D	5C	5A	3B	3D	3C	3A
2D	2A	2C	2B	1D	1A	1C	1B	2D	2A	2C	2B	1D	1A	1C	1B	5D	5A	5C	5B	4D	4A	4C	4B
6C	6A	6B	6D	3C	3A	3B	3D	4C	4A	4B	4D	6C	6A	6B	6D	5C	5A	5B	5D	3C	3A	3B	3D
2B	2C	2A	2D	1B	1C	1A	1D	2B	2C	2A	2D	1B	1C	1A	1D	5B	5C	5A	5D	4B	4C	4A	4D
3A	3C	3D	3B	4A	4C	4D	4B	5A	5C	5D	5B	5A	5C	5D	5B	4A	4C	4D	4B	6A	6C	6D	6B
2A	2D	2B	2C	1A	1D	1B	1C	1A	1D	1B	1C	2A	2D	2B	2C	3A	3D	3B	3C	6A	6D	6B	6C
3D	3B	3A	3C	4D	4B	4A	4C	5D	5B	5A	5C	5D	5B	5A	5C	4D	4B	4A	4C	6D	6B	6A	6C
2C	2B	2D	2A	1C	1B	1D	1A	1C	1B	1D	1A	2C	2B	2D	2A	3C	3B	3D	3A	6C	6B	6D	6A
3B	3D	3C	3A	4B	4D	4C	4A	5B	5D	5C	5A	5B	5D	5C	5A	4B	4D	4C	4A	6B	6D	6C	6A
2D	2A	2C	2B	1D	1A	1C	1B	1D	1A	1C	1B	2D	2A	2C	2B	3D	3A	3C	3B	6D	6A	6C	6B
3C	3A	3B	3D	4C	4A	4B	4D	5C	5A	5B	5D	5C	5A	5B	5D	4C	4A	4B	4D	6C	6A	6B	6D
2B	2C	2A	2D	1B	1C	1A	1D	1B	1C	1A	1D	2B	2C	2A	2D	3B	3C	3A	3D	6B	6C	6A	6D

C : symétrique, inséparable

On vérifie que C est inséparable en reprenant les cases qui rendaient A inséparable :

11	45	46	35	26	23
54	22	56	36	13	14
64	65	33	12	24	13
53	63	21	44	16	25
62	31	42	61	55	34
32	41	51	52	43	66

3		2
6	3	1

5		3
3	1	4

?

et en considérant les couples de symboles en haut et à gauche de ces cases, devenues des copies du carré B :

3A 5A		2A 3A
3A 6A	1A 3A	1A 4A

3A 4A

Les cases de C ainsi définies contiennent des couples de symboles qui ne sont pas séparables.

2.7. CARRES DOUBLES AVEC UN TROU

Un carré latin auto-orthogonal d'ordre n avec un trou d'ordre k est un carré n×n dont chaque case non vide contient l'un des symboles 1,2,..,n. Chacune des rangées 1,2,..,n-k contient chaque symbole une fois et une seule ; chaque rangée n-k+1,..,n contient chaque symbole 1,..,n-k une fois et une seule. De plus, lorsque l'on superpose le carré et son transposé, on obtient une fois et une seule chaque couple ordonné (a,b) dans lequel l'un des deux symboles au moins n'est pas un symbole n-k+1,..,n.

exemple : carré latin auto-orthogonal d'ordre 7 avec un trou d'ordre 2, et sa superposition avec son transposé :

1	5	4	7	6	2	3
6	2	1	5	7	3	4
7	6	3	2	1	4	5
2	7	6	4	3	5	1
4	3	7	6	5	1	2
3	4	5	1	2		
5	1	2	3	4		

11	56	47	72	64	23	35
65	22	16	57	73	34	41
74	61	33	26	17	45	52
27	75	62	44	36	51	13
46	37	71	63	55	12	24
32	43	54	15	21		
53	14	25	31	42		

Lorsqu'on superpose un carré latin auto-orthogonal avec un trou et son transposé, on obtient un carré double symétrique incomplet, avec un sous-carré k×k vide dans le coin inférieur droit. Si on remplace ce sous-carré par un carré double symétrique inséparable d'ordre k, on obtient un carré

double symétrique inséparable d'ordre n.

Or K. Heinrich et Zhu Lie [48] ont montré :

théorème 2.19

> Il existe un carré latin auto-orthogonal d'ordre n avec un trou d'ordre k pour tout $n \geqslant 3k+1$, $n \neq 6$, excepté peut-être pour $n = 6m+2$ ou $6m+6$ si $k = 2m$.

L'existence d'un carré double symétrique inséparable d'ordre 7 assure donc l'existence d'un carré double symétrique inséparable de tout ordre $n \geqslant 22$, et, en particulier :

proposition 2.20

> Il existe un carré double symétrique inséparable d'ordre 23.

2.8. CONCLUSION

Nous venons donc de démontrer l'existence de carrés doubles symétriques inséparables d'ordre n pour la plupart des ordres possibles :

théorème 2.21

> Il existe un carré double symétrique inséparable de tout ordre au moins égal à 6, sauf peut-être 17, 18 et 20.

Les valeurs 17, 18 et 20 sont, ici aussi, trop grandes pour les constructions directes et trop petites pour les constructions récursives. La découverte de carrés doubles symétriques inséparables de cet ordre ne semble pourtant dépendre que de l'existence de moyens de calcul puissants, et nous pouvons donc conjecturer :

conjecture

> Il existe un carré double symétrique inséparable de tout ordre au moins égal à 6.

D E U X I E M E P A R T I E

HYPER ETOILES

1. UN PROBLEME DE DOCUMENTATION AUTOMATIQUE

Un fichier destiné à être consulté par un système de documentation automatique est un ensemble d'enregistrements. Chaque enregistrement est constitué d'un identificateur et d'une information. L'identificateur peut être un nom, ou encore l'adresse physique de l'enregistrement. L'information relative à un enregistrement peut être considérée comme une suite de n informations élémentaires, ou encore comme un vecteur $(x_1,x_2,..,x_n)$, où x_i est un élément d'un ensemble fini R_i. Par exemple, R_i peut être l'ensemble de tous les codes postaux à cinq chiffres, ou de tous les noms de villes de moins de vingt lettres, etc. On dit que x_i est le i-ème attribut de l'enregistrement. On retrouve dans ces définitions les notions de fichier et de structure du langage PASCAL : R_i est le type du i-ème champ de la structure.

Nous allons considérer le cas particulier où chaque attribut ne peut prendre que deux valeurs. Cela se produit lorsque l'information d'un enregistrement est une suite de réponses "oui" ou "non" à un certain nombre de questions. On peut aussi transformer les mots-clés associés à un enregistrement en une suite de n valeurs logiques, si n est le nombre de mots-clés du thesaurus : x_i est vrai si et seulement si le mot-clé numéro i se rapporte à l'enregistrement. L'information est alors un vecteur binaire.

Une requête dans un tel système est donc un vecteur binaire $q = (q_1,..,q_n)$ que l'on compare aux vecteurs informations des enregistrements. On garde uniquement les enregistrements dont le vecteur $(x_1,..,x_n)$ est tel que :

$$(x_1q_1,..,x_nq_n) = (q_1,..,q_n)$$

ou encore :

$$\forall\ i = 1,..,n \quad q_i = 1 \Longrightarrow x_i = 1$$

Le nombre de 1 dans le vecteur q est l'ordre de la requête.

Si les enregistrements forment un fichier séquentiel, il faut les consulter l'un après l'autre pour voir s'ils répondent à la requête, ce qui peut être très long. On a donc eu l'idée de créer un fichier inverse, qui contient la réponse à chaque requête, c'est-à-dire l'ensemble des identificateurs des enregistrements qui répondent à la requête.

Ce fichier inverse est souvent très redondant, car un enregistrement peut appartenir à plusieurs réponses s'il a de nombreux attributs égaux à 1. On essaie donc de réduire au mieux à la fois la taille du fichier inverse et le temps de réponse à une requête. L'un des moyens consiste à regrouper les réponses à plusieurs requêtes de même ordre en un seul paquet.

Une requête d'ordre 2 est un couple d'attributs choisis parmi les n attributs possibles, on peut la considérer comme une arête du graphe complet K_n à n sommets. Un ensemble de c requêtes d'ordre 2 est alors un sous-graphe partiel de K_n possédant c arêtes. Ce sous-graphe partiel peut être assez particulier : un graphe complet, un couplage, un chemin, un cycle, ou encore une étoile de degré c.

Suivant la forme de ce graphe, le paquet de réponses aura des propriétés différentes.

On a donc fait de nombreuses études sur les paquets de réponses à des requêtes d'ordre 2 en privilégiant l'aspect combinatoire. C.T. Abraham, R.C. Bose, S.P. Gosh, G.G. Koch, D.K. Ray-Chaudhuri, S. Yamamoto, T. Teramoto, K. Futagami [2], [7], [18], [34], [44] ont construit des fichiers inverses à l'aide de géométries finies. D.K. Chow [11] a proposé une autre organisation du fichier inverse, moins redondante, mais dont la structure varie quand on permute les attributs.

S. Yamamoto, H. Ikeda, S. Shige-eda, K. Ushio et N. Hamada [46] ont construit un fichier inverse invariant quand on permute les attributs, et le moins redondant possible avec cette propriété (la redondance d'un paquet est la probabilité pour un enregistrement quelconque d'appartenir à ce paquet). Ils ont en effet démontré le théorème suivant :

théorème 1.1

> La redondance d'un paquet de réponses à c requêtes d'ordre 2 est minimale si le graphe correspondant à ces c requêtes est une étoile de degré c.

c doit être au moins égal à 2, et strictement inférieur au nombre d'attributs.

Ce fichier inverse optimal, appelé $HUBFS_2$ (Hiroshima University Balanced File organization Scheme), le 2 correspondant à l'ordre des requêtes, peut être construit dans tous les cas suivants :

théorème 1.2

> On peut construire un $HUBFS_2$ si et seulement si le nombre n d'attributs et le nombre c de requêtes d'ordre 2 groupées par paquet vérifient :
>
> (1) c divise $\binom{n}{2}$
>
> (2) $n \geqslant 2c$

Nous verrons que ce sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une partition de l'ensemble des arêtes du graphe complet K_n en étoiles de degré c.

Ce problème pratique d'organisation d'une base de données est donc équivalent à un problème de théorie des graphes. Il a été ensuite étendu à un problème d'hypergraphes, en augmentant l'ordre des requêtes. Nous allons donc étudier ce que deviennent les notions de graphe complet et d'étoile pour un ordre supérieur à 2.

2. DECOMPOSITION DE L'HYPERGRAPHE REGULIER COMPLET EN HYPERETOILES

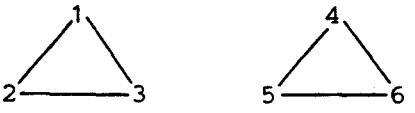
2.1. DEFINITIONS

Une famille d'ensembles est appelée Δ-système fort si l'intersection de deux quelconques de ses éléments est toujours la même, et Δ-système faible si l'intersection de deux quelconques de ses éléments a toujours la même cardinalité.

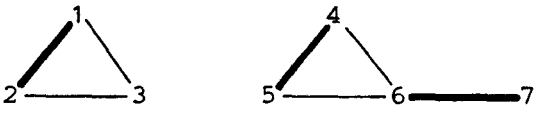
Appelons k-uple un ensemble de k éléments. L'hypergraphe régulier complet K_n^k est l'hypergraphe à n sommets dont les arêtes sont les $\binom{n}{k}$ k-uples construits à l'aide de ces n sommets.

Depuis que P. Erdös et R. Rado [15] ont défini le problème en 1960, on essaie de préciser l'ordre de grandeur du plus petit entier f(k,c) tel que tout ensemble de f(k,c) k-uples contienne un Δ-système fort formé de c k-uples. Par exemple, P. Erdös et R. Rado ont démontré que f(2,3) est égal à 7. En effet, on peut trouver six couples ne contenant ni trois couples disjoints, ni

trois couples ayant un point commun :



Par contre, avec sept couples, soit on ajoute au moins un sommet et il existe trois couples disjoints :



soit on garde les mêmes six sommets et il existe trois couples ayant un point commun :

De même, H.L. Abbott et B. Gardner [1] ont montré que f(3,3) est égal à 21 : tout ensemble de 21 triples contient soit trois triples disjoints, soit trois triples ayant un point commun, soit trois triples ayant deux points communs ; mais il existe un ensemble de 20 triples ne contenant aucun Δ-système fort à trois éléments.

Le problème que nous posons ici est très différent, puisque nous considérons toutes les arêtes de K_n^k et non le plus petit nombre possible, et que nous imposons le cardinal de l'intersection des Δ-systèmes forts.

Par analogie avec les étoiles dans les graphes simples, nous appellerons hyperétoile de degré c un Δ-système fort constitué de c arêtes de K_n^k. L'ensemble des p points communs aux c arêtes s'appelle le centre, et les k-p points d'un k-uple qui n'appartiennent pas au centre forment un rayon. Pour indiquer les différents paramètres nécessaires, on parlera d'une hyperétoile HE(p,k,c) .

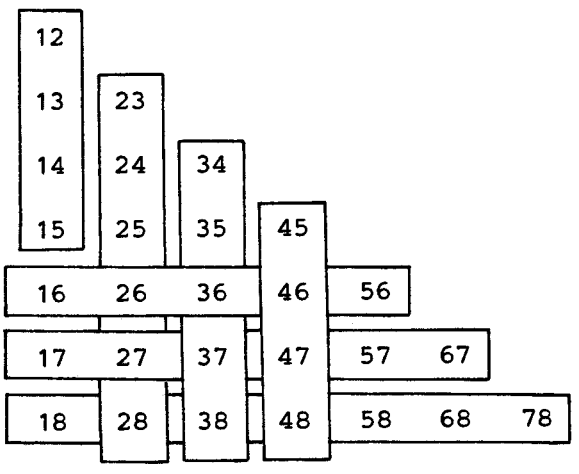
Par exemple, {123,124} est une hyperétoile HE(2,3,2) dont le centre est 12 et les rayons 3 et 4.

Une décomposition de K_n^k est une partition de l'ensemble des arêtes de K_n^k en hyperétoiles HE(p,k,c). C'est une configuration de n points dont nous allons étudier l'existence.

Par exemple, il existe une décomposition de K_5^3 en HE(2,3,2) :

centres	rayons	
12	3	4
23	4	5
34	5	1
45	1	2
51	2	3

et une décomposition de K_8^2 en HE(1,2,4) :



2.2. CONDITIONS NECESSAIRES

Comme les arêtes de K_n^k sont réparties en ensembles de c éléments, leur nombre doit être divisible par c .

D'autre part, le nombre de sommets doit être suffisant pour construire au moins une hyperétoile, et un centre doit pouvoir être contenu dans un k-uple.

Si l'on élimine les cas triviaux où les rayons sont vides, il y a trois conditions nécessaires à l'existence d'une décomposition de K_n^k :

proposition 2.1

Pour que K_n^k soit décomposable en HE(p,k,c), il faut que n,p,k,c vérifient :

(1) c divise $\binom{n}{k}$

(2) $n \geqslant p + c(k-p)$

(3) $0 \leqslant p \leqslant k-1$

2.3. CONDITIONS SUFFISANTES

Le cas particulier où p est nul correspond à une décomposition de K_n^k en ensembles de c arêtes disjointes deux à deux. Les conditions nécessaires, $\binom{n}{k}$ divisible par c et $n \geqslant ck$, sont alors suffisantes, ainsi que nous l'avons démontré [32] à l'aide du théorème de Z. Baranyai [4] :

théorème 2.2

> Si $c_1,..,c_s$ sont des entiers dont la somme est $\binom{n}{k}$, l'ensemble des arêtes de K_n^k peut être partitionné en hypergraphes presque réguliers $H_1,..,H_s$ ayant respectivement $c_1,..,c_s$ arêtes.

On dit qu'un hypergraphe est <u>presque régulier</u> s'il existe un entier d tel que tout sommet de l'hypergraphe appartienne à d ou d+1 arêtes, ou encore soit de <u>degré</u> d ou d+1.

Les sommets de l'hypergraphe H_i, qui a c_i arêtes, sont de degré d_i ou d_i+1, où d_i est la partie entière de $c_i k/n$. Si $\binom{n}{k} = sc$, si $c_1 = .. = c_s = c$, et si n est supérieur à ck, la partie entière de ck/n est nulle et tout sommet de l'hypergraphe H_i appartient à au plus une arête : H_i est une hyperétoile HE(0,k,c). Si n est égal à ck, chaque hypergraphe H_i est une partition de l'ensemble des n sommets

en c ensembles de k sommets : tout sommet de H_i est de degré 1.

On peut donc en conclure :

théorème 2.3

> K_n^k est décomposable en hyperétoiles HE(0,k,c) si et seulement si c divise $\binom{n}{k}$ et n est au moins égal à ck.

Le théorème de Z. Baranyai a une autre conséquence :

théorème 2.4

> Si $\binom{n}{k} = c_1+..+c_s$ et si $n \geqslant \max \{c_i k \mid i=1,..,s\}$, K_n^k peut être décomposé en s hypergraphes respectivement isomorphes à s hyperétoiles $HE(0,k,c_1),..,HE(0,k,c_s)$.

On déduit du théorème 2.2 une propriété plus générale, démontrée par S. Yamamoto et S. Tazawa [47] dans le cas où p est égal à k-1 :

théorème 2.5

> Si $c\binom{k}{p}$ divise $\binom{n-p}{k-p}$ et si n est au moins égal à $p + c(k-p)\binom{k}{p}$, alors K_n^k est décomposable en HE(p,k,c).

Soit $d = c\binom{k}{p}$. Soit X l'ensemble des n sommets de K_n^k, soit A un sous-ensemble de p sommets dans X.

L'hypergraphe K_{n-p}^{k-p} dont l'ensemble des sommets est X-A est décomposable en HE(0,k-p,d) d'après le théorème 2.3. Pour $i = 1,..,\binom{n-p}{k-p}/d$, on note $A_1^i,..,A_d^i$ les arêtes de ces hyperétoiles. Alors les arêtes $A \cup A_1^i,..,A \cup A_d^i$ de K_n^k forment une hyperétoile HE(p,k,d), que l'on note $H_i(A)$.

Considérons le réseau orienté dont les sommets sont :

- l'entrée a et la sortie b,
- les arêtes de K_n^k,
- les hyperétoiles $H_i(A)$ pour tout $A \subset X$ tel que $|A| = p$ et pour tout $i=1,..,\binom{n-p}{k-p}/d$;

et dont les arcs sont :

- (a,e) pour toute arête e de K_n^k, de capacité 1,
- $(e,H_i(A))$ pour toute arête e et toute hyperétoile $H_i(A)$ contenant cette arête, de capacité infinie,
- $(H_i(A),b)$ pour toute hyperétoile $H_i(A)$, de capacité $c = d/\binom{k}{p}$.

Le théorème du flot maximum permet d'affirmer qu'il existe dans ce réseau un flot qui sature les arcs d'entrée et les arcs de sortie. Chaque ensemble $F_i(A)$ des arêtes e telles que l'arc $(e,H_i(A))$ soit saturé est une hyperétoile HE(p,k,c), et les $F_i(A)$ forment une décomposition de K_n^k.

De même, les propriétés suivantes sont une extension du cas particulier p=k-1 traité dans l'article de S. Yamamoto et S. Tazawa [47] :

proposition 2.6

Si K_n^k est décomposable en HE(p,k,ac) où a est un entier strictement positif, alors K_n^k est décomposable en HE(p,k,c).

Il suffit de partager chaque hyperétoile de degré ac en a hyperétoiles de degré c ayant le même centre.

proposition 2.7

Si K_{n-1}^k est décomposable en HE(p,k,c) et si K_{n-1}^{k-1} est décomposable en HE(p-1,k-1,c), alors K_n^k est décomposable en HE(p,k,c).

Soit x le n-ième sommet de K_n^k. Les hyperétoiles HE(p,k,c) qui forment la décomposition de K_n^k sont :

- d'une part, celles qui forment la décomposition de K_{n-1}^k, elles regroupent tous les k-uples qui ne contiennent pas x,

- d'autre part, les hyperétoiles obtenues en ajoutant x au centre d'une hyperétoile HE(p-1,k-1,c) de K_{n-1}^{k-1}, on obtient ainsi tous les k-uples qui contiennent x.

2.4. DECOMPOSITION DU GRAPHE COMPLET

2.4.1. Décomposition en couplages

Dans le graphe complet K_n^2, noté également K_n, une hyperétoile HE(0,2,c) est un couplage constitué de c arêtes. En posant k=2 dans la relation du théorème 2.2, on obtient une condition nécessaire et suffisante :

proposition 2.8

> Le graphe complet K_n est décomposable en couplages HE(0,2,c) disjoints si et seulement si c divise $\binom{n}{2}$ et n est au moins égal à 2c.

2.4.2. Décomposition en étoiles

Si K_n^k est le graphe complet K_n, une hyperétoile HE(1,2,c) est une étoile de degré c.

S. Yamamoto, H. Ikeda, S. Shige-eda, K. Ushio et N. Hamada ([45] et [46]) ont entièrement résolu le problème en donnant un algorithme de décomposition et une condition nécessaire et suffisante :

théorème 2.9

> Le graphe complet K_n est décomposable en étoiles de degré c si et seulement si $\binom{n}{2}$ est divisible par c et n est au moins égal à 2c.

Le nombre $\binom{n}{2}$ des arêtes de K_n doit évidemment être divisible par le nombre c des arêtes d'une étoile. Si n est inférieur à 2c et s'il existe une décomposition de K_n en étoiles de degré c, le nombre de ces étoiles, égal à $n(n-1)/2c$, est inférieur à n-1. Il y a donc également moins de n-1 centres, par conséquent il existe un point x qui n'est pas un centre. Les n-1 arêtes de K_n qui passent par x ne peuvent pas appartenir à n-1 étoiles différentes s'il y a moins de n-1 étoiles, donc la décomposition est impossible.

Par contre, si c divise $\binom{n}{2}$ et si n est au moins égal à 2c, considérons le tableau triangulaire T représentant les arêtes de K_n, indicé par l'ensemble $\{(i,j) \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$:

2	3	4	5	6	j/i
12	13	14	15	16	1
	23	24	25	26	2
		34	35	36	3
			45	46	4
				56	5

tableau T pour n=6

L'ensemble des c arêtes d'une étoile de centre i correspond à un ensemble de c cases de T se trouvant sur la ligne i et/ou la colonne i. On va donner un algorithme pour diviser T en $\binom{n}{2}/c$ sous-ensembles disjoints de ce type en distinguant trois cas :

1. $2c \leqslant n < 3c$
2. $3c \leqslant n < 4c$
3. $n \geqslant 4c$

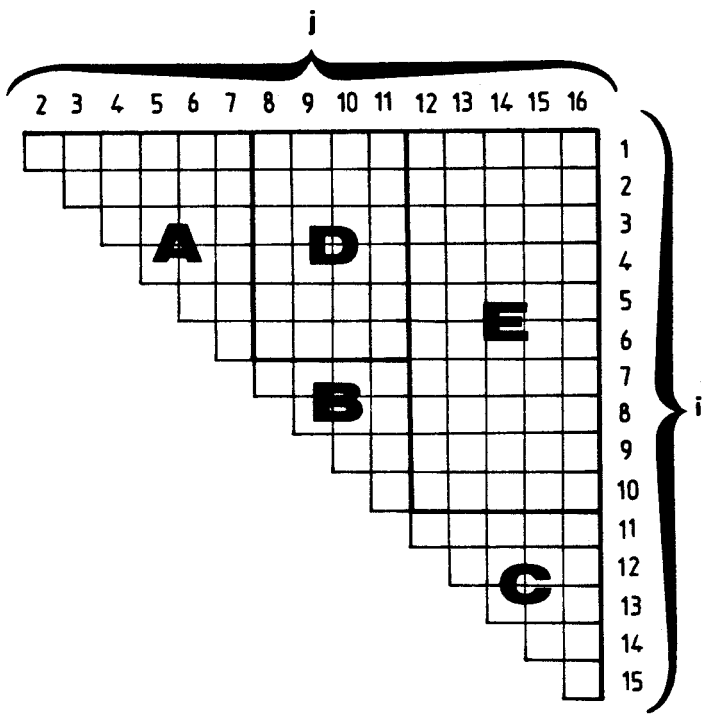
Cas 1 : $2c \leqslant n < 3c$ $\quad n = 2c+r$ avec $0 \leqslant r < c$

Nombre d'étoiles : $m = n(n-1)/2c = 2c+2r-1+m_1$ avec $m_1 = r(r-1)/2c$

m_1 est nul si r est 0 ou 1, sinon c'est un entier inférieur à $(r-1)/2$.

T est décomposé en cinq parties :

$$A = \{ (i,j) \mid 1 \leqslant i < j \leqslant c+1 \}$$
$$B = \{ (i,j) \mid c+1 \leqslant i < j \leqslant c+r+1 \}$$
$$C = \{ (i,j) \mid c+r+1 \leqslant i < j \leqslant n \}$$
$$D = \{ (i,j) \mid 1 \leqslant i \leqslant c \ , \ c+2 \leqslant j \leqslant c+r+1 \}$$
$$E = \{ (i,j) \mid 1 \leqslant i \leqslant c+r \ , \ c+r+2 \leqslant j \leqslant n \}$$



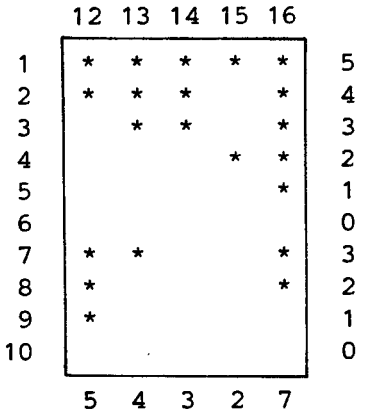
décomposition de T

n = 16 , c = 6

r = 4 , m_1 = 1

- les r colonnes de D permettent de construire r étoiles.

- à l'aide d'un algorithme d'affectation dans un graphe biparti, on marque certaines cases de E : respectivement c-1,c-2,..,1,0,r-1,r-2,..,1,0 cases dans les lignes 1,2,..,c+r , et respectivement c-1,c-2,..,m_1+1,m_1+c,m_1-1+c,..,1+c cases dans les colonnes c+r+2,..,n.



exemple de marquage de E

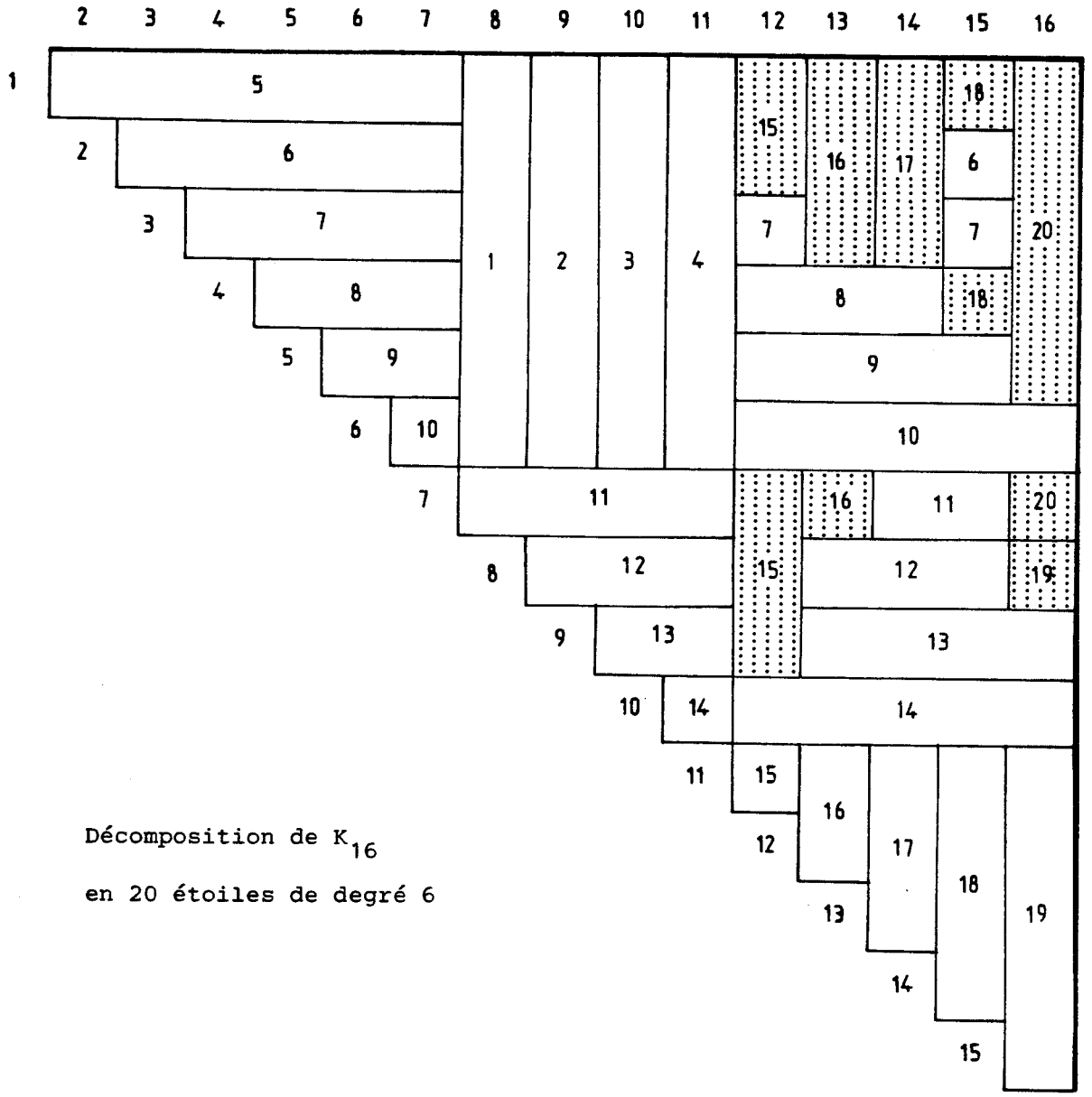
- A et B sont divisés horizontalement :
A en c sous-ensembles de c,c-1,..,1 points,
B en r sous-ensembles de r,r-1,..,1 points.

Associé aux cases non marquées de E situées sur la même ligne, chacun de ces c+r sous-ensembles forme une étoile.

- C est divisé verticalement en c-1 sous-ensembles que l'on associe à des cases marquées de E situées sur la même colonne. Avec les cases marquées non utilisées, on forme m_1 étoiles.

Le tableau suivant illustre une décomposition de K_{16} en 20 étoiles de degré 6.

BU LILLE



Décomposition de K_{16}

en 20 étoiles de degré 6

case de E marquée

Cas 2 : $3c \leqslant n < 4c$ $\quad n = 3c+r$ avec $0 \leqslant r < c$

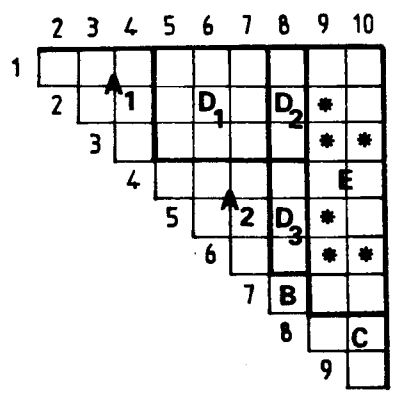
Nombre d'étoiles : $m = 4c+3r-1+m_2$ avec $(c-1)/2 \leqslant m_2 < c-1$

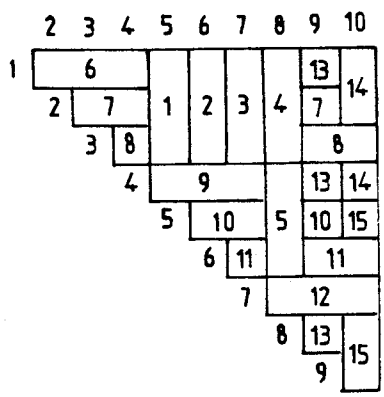
Comme dans le premier cas, on définit des sous-ensembles de T :

$$A_1 = \{ (i,j) \mid 1 \leqslant i < j \leqslant c+1 \}$$
$$A_2 = \{ (i,j) \mid c+1 \leqslant i < j \leqslant 2c+1 \}$$
$$B = \{ (i,j) \mid 2c+1 \leqslant i < j \leqslant 2c+r+1 \}$$
$$C = \{ (i,j) \mid 2c+r+1 \leqslant i < j \leqslant n \}$$
$$D_1 = \{ (i,j) \mid 1 \leqslant i \leqslant c \ , \ c+2 \leqslant j \leqslant 2c+1 \}$$
$$D_2 = \{ (i,j) \mid 1 \leqslant i \leqslant c \ , \ 2c+2 \leqslant j \leqslant 2c+r+1 \}$$
$$D_3 = \{ (i,j) \mid c+1 \leqslant i \leqslant 2c \ , \ 2c+2 \leqslant j \leqslant 2c+r+1 \}$$
$$E = \{ (i,j) \mid 1 \leqslant i \leqslant 2c+r \ , \ 2c+r+2 \leqslant j \leqslant n \}$$

On décompose D_1, D_2, D_3 en colonnes ; on marque certaines cases de E et on les associe aux lignes de A_1, A_2 et B, on associe les autres aux colonnes de C.

On décompose par exemple K_{10} en 15 étoiles de degré 3 :





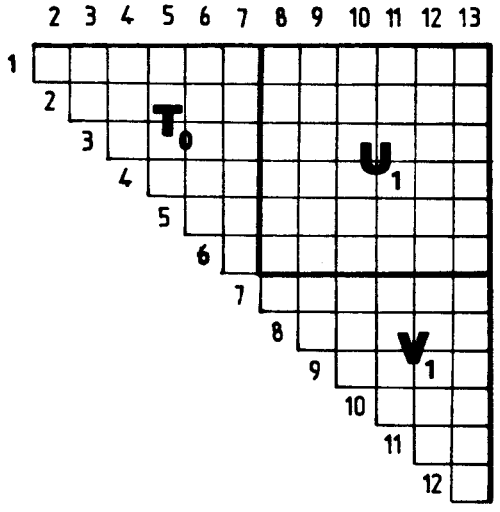
Cas 3 : $n \geqslant 4c$ $\quad$ il existe q et n_o tels que $n = 2qc+n_o$ avec $2c \leqslant n_o < 4c$

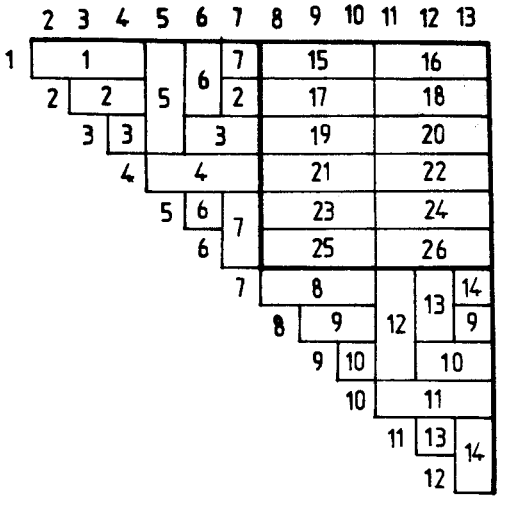
On décompose T en 2q+1 sous-ensembles :

$$T_o = \{ (i,j) \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n_o \}$$
$$U_p = \{ (i,j) \mid 1 \leqslant i \leqslant n_o+2(q-1)c-1 \ ; \ n_o+2(q-1)c+1 \leqslant j \leqslant n_o+2qc \}$$
$$V_p = \{ (i,j) \mid n_o+2(q-1)c \leqslant i < j \leqslant n_o+2qc \}$$

$p = 1,2,..,n$

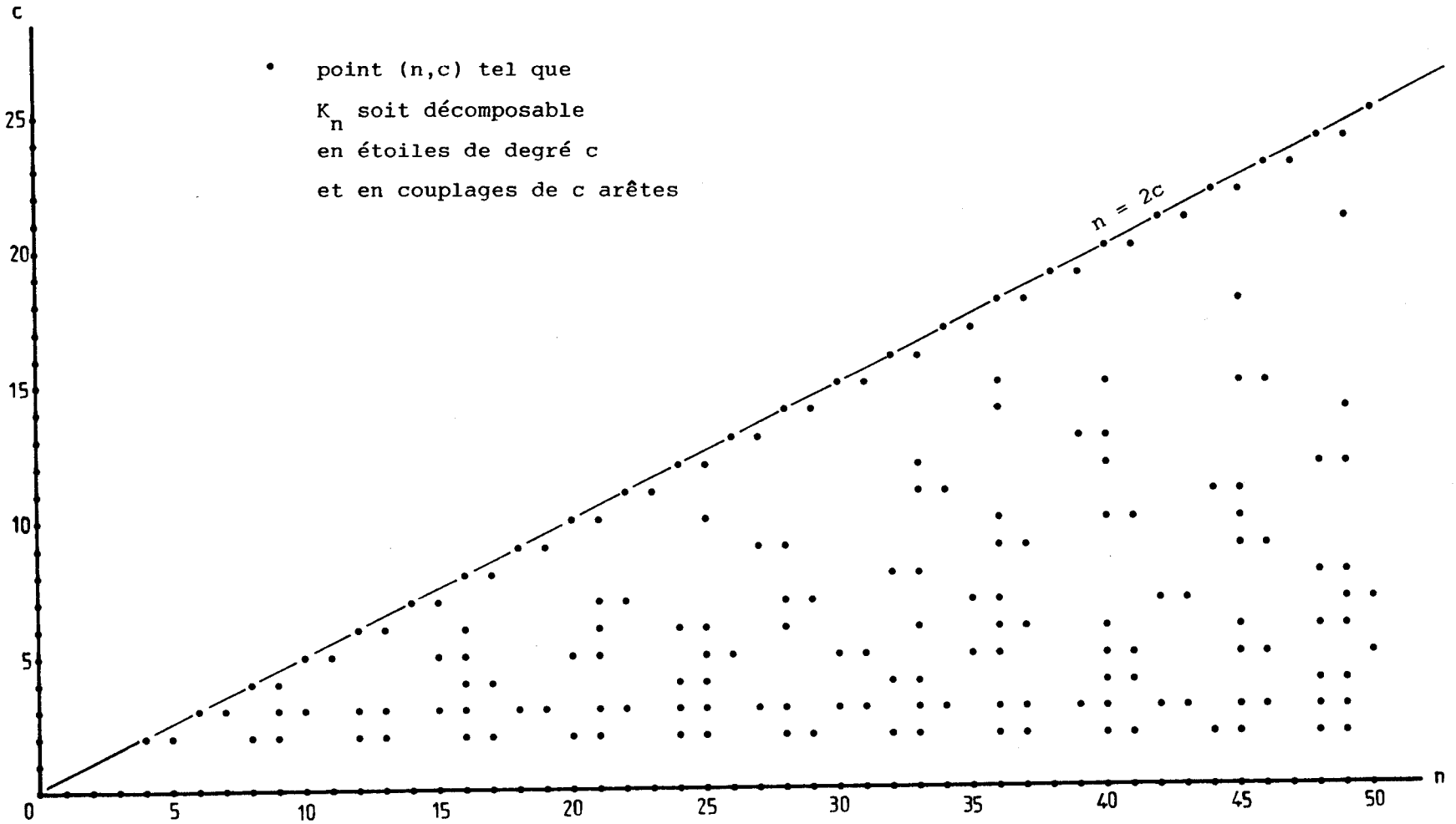
T_o est décomposé comme T dans le cas 1 ou 2, les V_p sont décomposés suivant la méthode du cas 1, et chaque ligne des U_p est partagée en deux :





La figure suivante donne toutes les valeurs de n et de c, avec $n \leqslant 50$, pour lesquelles il existe une décomposition de K_n en étoiles de degré c, ou en couplages de c arêtes, puisque les conditions sont les mêmes : n au moins égal à 2c et n(n-1)/2 divisible par c.

BU LILLE


c
25
20
15
10
5
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
n
n = 2c
• point (n,c) tel que
K_n soit décomposable
en étoiles de degré c
et en couplages de c arêtes

2.5. HYPERETOILES DE DEGRE 2

Nous allons voir que l'hypergraphe complet K_n^k est décomposable en hyperétoiles de degré 2 si et seulement si les conditions nécessaires de la proposition 2.1 sont vérifiées :

théorème 2.10

> K_n^k est décomposable en hyperétoiles HE(p,k,2) si et seulement si $\binom{n}{k}$ est pair, n est au moins égal à 2k-p et p est au plus égal à k-1.

Considérons le graphe G dont les sommets sont les arêtes de K_n^k, et dont les arêtes relient deux k-uples ayant exactement p points communs. K_n^k est décomposable en hyperétoiles HE(p,k,2) si et seulement si G possède un couplage parfait, c'est-à-dire un ensemble d'arêtes disjointes recouvrant tous les sommets.

G a un nombre pair de sommets si on a choisi n et k tels que $\binom{n}{k}$ soit pair.

Si p est inférieur ou égal à k-1 et si n est au moins égal à 2k-p, G est connexe : si x et x' sont deux sommets de G, ils sont associés à deux arêtes e et e' de K_n^k. Il est possible de trouver une suite $e_1=e, e_2, .., e_q=e'$ de k-uples tels que e_i et e_{i+1} (i=1,..,q-1) aient exactement p points communs, il existe donc une chaîne $xx_2, x_2x_3, .., x_{q-1}x'$ reliant x et x' dans G.

De même, si x et x' sont deux sommets de G associés aux arêtes e et e' de K_n^k, toute permutation des sommets de K_n^k transformant e en e' induit un automorphisme de G transformant x en x'. Le groupe d'automorphismes de G est donc transitif.

Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème figurant dans l'ouvrage de L. Lovàsz [26] :

théorème 2.11

Un graphe connexe ayant un nombre pair de sommets et un groupe d'automorphismes transitif possède un couplage parfait.

3. HYPERETOILES A RAYONS SIMPLES

3.1. POINTS POSSIBLES

Nous considérons le cas particulier où p est égal à k-1 : chaque rayon contient un seul point.

Pour abréger, nous dirons que K_n^k est c-décomposable s'il est décomposable en hyperétoiles HE(k-1,k,c), que nous nommerons simplement "hyperétoiles". Nous appellerons D l'ensemble des points (n,k,c) de $\mathbb{N}^3$, et D_c l'ensemble des points (n,k) de $\mathbb{N}^2$, tels que K_n^k soit c-décomposable.

Les conditions nécessaires de la proposition 2.1 deviennent :

proposition 3.1

Pour que K_n^k soit c-décomposable, il faut que n,k et c vérifient :

(1) c divise $\binom{n}{k}$

(2) $n \geqslant k-1+c$

Nous appellerons points possibles les points (n,k,c) de $\mathbb{N}^3$ vérifiant ces conditions nécessaires. D est inclus dans l'ensemble P des points possibles, mais nous verrons qu'il ne lui est pas égal.

3.2. POINTS DE D CONNUS

Les conditions suffisantes du chapitre 2 deviennent, quand p est égal à k-1 :

proposition 3.2

> Si K_n^k est ac-décomposable, avec a>0, alors K_n^k est c-décomposable.

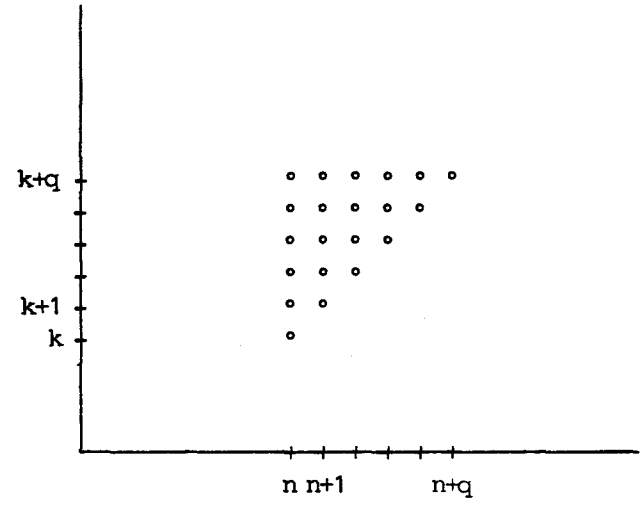
proposition 3.3

> Si K_{n-1}^k et K_{n-1}^{k-1} sont c-décomposables, K_n^k est c-décomposable.

Cette "cascade" dans le plan D_c se produit aussi dans le plan P_c des points possibles grâce à la relation du triangle de Pascal :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}$$

On observe une disposition en triangle des points du plan D_c dès que plusieurs points consécutifs (n,k),(n,k+1),..,(n,k+q) appartiennent à D_c :



S. Yamamoto et S. Tazawa [47] ont également démontré les relations suivantes :

proposition 3.4

Si n = kc+k-1 , K_n^k est c-décomposable.

Si n est égal à kc+k-1, $\binom{n}{k}$ est égal à $c\binom{n}{k-1}$. Le nombre des arêtes de K_n^k, les k-uples, est égal à c fois le nombre de (k-1)-uples que l'on peut former avec n points.

On construit un graphe biparti dont les sommets sont, d'une part les (k-1)-uples, d'autre part les k-uples. Chaque (k-1)-uple est relié par une arête à chacun des kc k-uples qui le contiennent. Ce graphe peut être considéré comme un réseau de transport dans lequel l'offre de chaque (k-1)-uple est égale à c et la demande de chaque k-uple est égale à 1. Il existe donc un graphe partiel dans lequel c arêtes passent par chaque (k-1)-uple et une arête passe par chaque k-uple, et ce graphe partiel définit une c-décomposition de K_n^k.

Remarquons que, dans ce cas particulier où n est égal à kc+k-1, chaque (k-1)-uple est le centre d'une hyperétoile.

corollaire 3.5

> Si $n = kac+k-1$, avec $a>0$, K_n^k est c-décomposable.

C'est une conséquence immédiate des propositions 3.4 et 3.2, c'est aussi l'application du théorème 2.5 au cas particulier $p = k-1$: d'après ce théorème, si $c\binom{k}{k-1}$ divise $\binom{n-k+1}{1}$ et si $n \geqslant k-1+c\binom{k}{k-1}$, alors (n,k,c) appartient à D. Autrement dit, si n-k+1 est divisible par ck et si $n \geqslant k-1+ck$, ou encore si $n = kac+k-1$ avec $a>0$, alors (n,k,c) appartient à D.

proposition 3.6

> Si $n = kc$, K_n^k est c-décomposable.

Si n est égal à kc, n-1 est égal à k(c-1)+k-1, donc, d'après la proposition 3.4, K_{n-1}^k est (c-1)-décomposable, et chaque (k-1)-uple construit à l'aide de ses n-1 sommets est le centre d'une hyperétoile.

Soit x un n-ième sommet : si on l'ajoute comme c-ième rayon à chaque hyperétoile de la décomposition de K_{n-1}^k, on obtient une c-décomposition de K_n^k.

exemple : $n = 6$, $k = 2$, $c = 3$

centres	rayons		x
1	2	3	6
2	3	4	6
3	4	5	6
4	5	1	6
5	1	2	6

2-décomposition de K_5^2

3-décomposition de K_6^2

corollaire 3.7

> Si $n = kac$ et $a>0$, K_n^k est c-décomposable.

On applique la proposition 3.2.

proposition 3.8

> Si $n = k(k-1)c+1$, K_n^k est c-décomposable.

$n-1$ est égal à $k(k-1)c$, donc, d'après la proposition 3.6, K_{n-1}^k et K_{n-1}^{k-1} sont c-décomposables. La proposition 3.3 permet d'affirmer que K_n^k est également c-décomposable.

corollaire 3.9

> Si $n = k(k-1)ac+1$ et $a>0$, K_n^k est c-décomposable.

Le plan D_2 est entièrement connu puisque, d'après le théorème 2.10, il est égal au plan P_2 des points possibles pour c=2 :

proposition 3.10

> K_n^k est 2-décomposable si et seulement si $\binom{n}{k}$ est pair et n est au moins égal à k+1.

De même, l'ensemble des points (n,2,c) de D est décrit par le théorème 2.9 : n est au moins égal à 2c et $\binom{n}{2}$ est divisible par c.

3.3. LA FRONTIERE DE P ET DE D : N = K - 1 + C

Si n est égal à k-1+c , une hyperétoile contient tous les sommets de K_n^k.

proposition 3.11

> Si n = k-1+c , deux hyperétoiles sont disjointes si et seulement si leurs centres ont au plus k-3 points communs.

Soient H_1 et H_2 deux hyperétoiles disjointes : chacune contient les n sommets de K_n^k, et elles n'ont pas de k-uple commun. Leurs centres C_1 et C_2 ne peuvent pas avoir k-1 points communs, sinon ils sont égaux et H_1 et H_2 sont égales. C_1 et C_2 n'ont pas non plus k-2 points communs, sinon leur union est un k-uple commun à H_1 et à H_2. Ils ont donc au plus k-3 points communs.

Inversement, si H_1 et H_2 sont deux hyperétoiles différentes ayant un k-uple commun Y, et si C_1 et C_2 sont leurs centres, il existe deux sommets x et y de K_n^k tels que :

$$Y = C_1 \cup \{x\} = C_2 \cup \{y\}$$

L'intersection de C_1 et de C_2 est égale à $C_1-\{y\}$ et à $C_2-\{x\}$ et contient k-2 points.

proposition 3.12

> Si $n = k-1+c$, deux hyperétoiles sont disjointes si et seulement si elles ont au plus $c-2$ rayons communs.

Soient H_1 et H_2 deux hyperétoiles disjointes, C_1 et C_2 leurs centres, R_1 et R_2 leurs ensembles de rayons. Comme n est égal à $k-1+c$, l'ensemble X des sommets de K_n^k est :

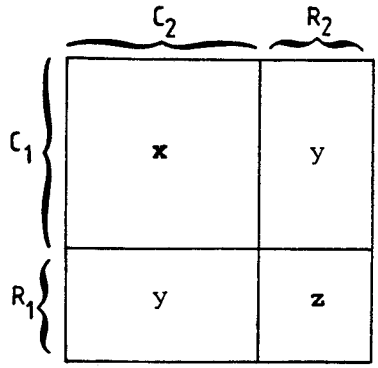
$$X = C_1 \cup R_1 = C_2 \cup R_2 = (C_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap R_2) \cup (C_2 \cap R_1) \cup (R_1 \cap R_2)$$

Soient :

$x = |C_1 \cap C_2|$

$y = |C_1 \cap R_2| = |C_2 \cap R_1|$

$z = |R_1 \cap R_2|$



On a :

$x+y = k-1$ et $y+z = c$

d'où $x = k-1-c+z$

Donc x est au plus égal à $k-3$ si et seulement si z est au plus égal à $c-2$.

théorème 3.13

> Si $n = k-1+c$, K_n^k est c-décomposable si et seulement si il existe un système de Steiner $S(c-1,c,n)$.

Si $n = k-1+c$ et si K_n^k est c-décomposable, considérons la configuration dont les blocs sont les ensembles de rayons. Chaque bloc contient c points, et, d'après la

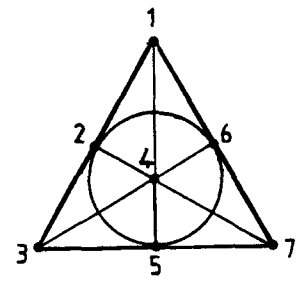
proposition 3.12, tout ensemble de c-1 points appartient à un bloc au plus. Il y a $m = \frac{(k-1+c)!}{k!c!}$ blocs de c points, ils contiennent donc $mc = \frac{(k-1+c)!}{k!(c-1)!}$ ensembles de c-1 points. Or mc est exactement le nombre d'ensembles de c-1 points que l'on peut former avec n = k-1+c points, donc chaque ensemble de c-1 points appartient à un bloc et un seul, et la configuration est un système de Steiner S(c-1,c,n).

Inversement, si n = k-1+c et s'il existe un système de Steiner S(c-1,c,n), on considère ses blocs comme des ensembles de rayons, les centres sont donc les compléments des blocs. Les hyperétoiles ainsi définies sont disjointes car elles ont deux à deux au plus c-2 rayons communs. Leur nombre est celui des blocs du système de Steiner : $b = \frac{(k-1+c)!}{k!c!}$, et c'est également le nombre m d'hyperétoiles dans une c-décomposition de K^k_{k-1+c}. Donc K^k_{k-1+c} est c-décomposable.

exemple : n = 7 , k = 5 , c = 3

centres	rayons
4567	1 2 3
2367	1 4 5
2345	1 6 7
1356	2 4 7
1347	2 5 6
1257	3 4 6
1246	3 5 7

S(2,3,7) : plan projectif d'ordre 2



Les conditions nécessaires sont plus nombreuses pour les systèmes de Steiner que pour les c-décompositions. Par exemple, pour qu'il existe un système de Steiner S(c-1,c,n), il faut que $\frac{(n-i)!}{(c-i)!(n-c+1)!}$ soit un entier pour tout i entre

0 et c-2, alors que (n,n-c+1,c) est un point possible si $\frac{n!}{c!(n-c+1)!}$ est un entier. Les conditions nécessaires avec i = 1,..,c-2 vont donc éliminer de nombreux points possibles de la frontière. Par exemple, si c = 3, les points (n,n-2,3) sont possibles si n est égal à 0,1 ou 2 modulo 9, mais ils ne sont pas dans D si n est impair.

Ces conditions nécessaires à l'existence d'un S(c-1,c,n) ne sont pas suffisantes, car il n'existe pas de S(4,5,15), S(5,6,16), S(6,7,17), S(7,8,18), S(8,9,19) ou S(9,10,20) par exemple (N.S. Mendelsohn et S.H.Y. Hung [27]).

proposition 3.14

> Les centres des hyperétoiles d'une c-décomposition de K^k_{k-1+c} forment un système de Steiner S(k-2,k-1,k-1+c) si et seulement si c est égal à k-1.

Si K^k_{k-1+c} est c-décomposable, tout ensemble de k-2 sommets est contenu dans au plus un centre (proposition 3.11). S'il est contenu dans exactement un centre, les centres forment un système de Steiner S(k-2,k-1,k-1+c). Le nombre $m = \frac{(k-1+c)!}{k!c!}$ d'hyperétoiles doit donc être égal au nombre de blocs $b = \frac{(k-1+c)!}{(k-1)!(c+1)!}$, et par conséquent c doit être égal à k-1.

Inversement, si c = k-1 et si K^{c+1}_{2c} est c-décomposable, tout ensemble de c-1 points est contenu dans au plus un centre. Les $m = \frac{(2c)!}{c!(c+1)!}$ centres contiennent chacun c points, donc c ensembles de c-1 points. Les centres contiennent donc à eux tous $mc = \frac{(2c)!}{(c-1)!(c+1)!}$ ensembles de c-1 points, ce qui

est exactement le nombre total de sous-ensembles de c-1 points dans un ensemble de 2c points. Donc tout ensemble de c-1 points est contenu dans un centre et un seul, et les centres forment un système de Steiner S(c-1,c,2c) ou encore S(k-2,k-1,k-1+c).

Les seuls systèmes de Steiner S(c-1,c,2c) connus sont S(3,4,8) et S(5,6,12). Le théorème 3.13 et la proposition 3.2 permettent d'affirmer que K_8^5 est 4-décomposable, et que K_{12}^7 est 6-décomposable et 3-décomposable, par conséquent :

proposition 3.15

(8,5,4), (12,7,6) et (12,7,3) appartiennent à D.

P.J. Cameron [10] a montré que, s'il existe un système de Steiner S(c-1,c,2c), c+1 doit être premier. Donc :

proposition 3.16

Si c+1 n'est pas premier, K_{2c}^{c+1} n'est pas c-décomposable.

Ceci permet encore une fois d'éliminer de nombreux points possibles, en particulier tous les (2c,c+1,c) où c est impair et différent de 1.

N.S. Mendelsohn et S.H.Y. Hung [27] ont démontré que S(9,10,20) n'existait pas :

proposition 3.17

K_{20}^{11} n'est pas 10-décomposable.

3.4. SYSTEMES DE STEINER ET C-DECOMPOSITIONS

Nous venons de voir que l'existence de certains systèmes de Steiner était équivalente à celle des points de la frontière. Nous allons retrouver les systèmes de Steiner dans une condition d'existence récursive :

théorème 3.18

> S'il existe un système de Steiner S(k,n,n') et si (n,k,c) appartient à D, alors (n',k,c) appartient à D.

S(k,n,n') est un ensemble de n' points répartis en blocs de n points, tel que tout k-uple appartienne à un bloc et un seul. Chaque bloc de n points peut être considéré comme l'ensemble des sommets de K_n^k, pour lequel il existe une c-décomposition. Comme toute arête de $K_{n'}^k$ appartient à un bloc et à un seul, les K_n^k constituent une partition des arêtes de $K_{n'}^k$, et leurs c-décompositions réunies forment une c-décomposition de $K_{n'}^k$.

Par exemple, (7,5,3) est dans D car il existe un système de Steiner S(2,3,7) qui est le plan projectif d'ordre 2 ; il existe un système de Steiner S(5,7,28) (R.H.F. Denniston [14]), donc (28,5,3) est dans D.

3.5. DECOMPOSITIONS DE K_n^3 EN HE(2,3,c)

Considérons plus particulièrement le cas où k est égal à 3 : les arêtes de K_n^3 sont les $\binom{n}{3}$ triplets construits avec n points, les centres des hyperétoiles sont des couples de points.

3.5.1. Résultats connus

En remplaçant k par 3 dans les propositions 3.1 à 3.9, on obtient les résultats suivants :

proposition 3.19

> Si K_n^3 est c-décomposable, c divise $\binom{n}{3}$ et n est au moins égal à c+2.

proposition 3.20

> Si (n,3,c) et (n,2,c) appartiennent à D, alors (n+1,3,c) appartient à D.

Rappelons que (n,2,c) appartient à D si et seulement si c divise $\binom{n}{2}$ et $n \geqslant 2c$ (théorème 2.8).

proposition 3.21

> Si (n,3,ac) appartient à D, (n,3,c) appartient à D.

proposition 3.22

> Si n est égal à 3ac, 3ac+2 ou 6ac+1, alors (n,3,c) appartient à D.

Si c est impair, il divise $\binom{3ac}{2}$, donc, d'après les propositions 3.22 et 3.20 :

proposition 3.23

> Si c est impair, (3ac+1,3,c) est dans D.

3.5.2. Frontière de D

Nous avons vu avec le théorème 3.13 que (c+2,3,c) appartient à D si et seulement si il existe un système de Steiner S(c-1,c,c+2). Mais le seul système de Steiner de cette sorte est S(1,2,4), les autres valeurs de c ne vérifient pas la relation de Tits, citée par R.M. Wilson [43] :

proposition 3.24

> Dans un système de Steiner S(t,k,v), le nombre de points v est au moins égal à (t+1)(k-t+1).

On peut aussi remarquer que les centres de deux hyperétoiles disjointes sont des couples disjoints si n est égal à c+2 (proposition 3.11), or le nombre $\left\lfloor \frac{c+2}{2} \right\rfloor$ de couples disjoints est inférieur au nombre $m = \binom{c+2}{3}/c$ d'hyperétoiles dans une c-décomposition de K_n^3, sauf si c=2. Par conséquent :

proposition 3.25

> (c+2,3,c) appartient à D si et seulement si c est égal à 2.

Il faut donc trouver une autre borne inférieure pour n, qui soit effectivement atteinte. Elle nous est donnée par l'étude de J.R. Tort [38] sur les partitions de K_n^3 en cliques.

Une clique est un ensemble de triplets ayant deux à deux exactement deux points communs. C'est donc un Δ-système faible. J.R. Tort a démontré que la cardinalité minimum d'une partition de K_n^3 en cliques est :

$$T(n) = \left\lfloor (n-1)^2/4 \right\rfloor \quad \text{si } n \geqslant 6$$

Si k=3, une hyperétoile est une clique, et une c-décomposition de K_n^3 est une partition de K_n^3 en cliques.

Le nombre $m = \binom{n}{3}/c$ d'hyperétoiles est donc au moins égal à $T(n)$.

Si n est pair, $T(n)$ est égal à $n(n-2)/4$ et m est supérieur ou égal à $T(n)$ si et seulement si n est au moins égal à $3c/2+1$.

Si n est impair, $T(n)$ est égal à $(n-1)^2/4$ et m est supérieur ou égal à $T(n)$ si et seulement si n est au moins égal à $(3c+4+\sqrt{9c^2+16})/4$, dont la valeur est comprise strictement entre $3c/2+1$ et $3c/2+2$.

La véritable condition nécessaire est donc :

théorème 3.26

> Si $(n,3,c)$ appartient à D, c divise $\binom{n}{3}$ et n est au moins égal à $3c/2 + 1$.

La borne inférieure est atteinte, comme l'ont démontré S.Yamamoto et S. Tazawa [47] :

proposition 3.27

> Si $n = 6p+4$ et $c = 4p+2$, $(n,3,c)$ appartient à D.

- si $p = 0$: $n = 4$ et $c = 2$

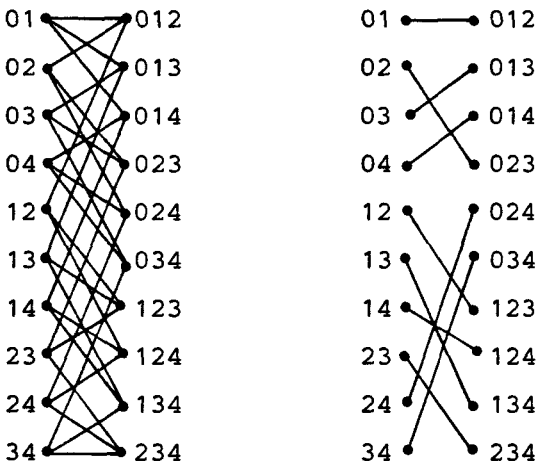
$(4,3,2)$ est dans D (proposition 3.25)

- si $p = 1$: $n = 10$ et $c = 6$

On partage l'ensemble $X = \{0,1,2,..,9\}$ des

sommets de K^3_{10} en $X_1 = \{0,1,2,3,4\}$ et $X_2 = \{5,6,7,8,9\}$.

On construit le graphe biparti dont les sommets sont d'une part les couples, d'autre part les triplets de X_1, et dont les arêtes représentent l'inclusion d'un couple dans un triplet. Chaque sommet étant de degré 3, il existe un couplage parfait qui associe à chaque couple un triplet qui le contient :



Etant donné un triplet d'éléments de X_1, par exemple 012, on construit cinq triplets d'éléments de X constitués du couple 01 associé à 012 et d'un élément de X_2 :

015 016 017 018 019

Avec le triplet de X_1, on obtient une hyperétoile de degré 6. On procède ainsi pour tous les triplets de X_1, et on obtient une partition en hyperétoiles de degré 6 de l'ensemble des triplets de X contenant deux ou trois éléments de X_1. On recommence la construction en intervertissant X_1 et X_2, et on obtient une 6-décomposition de K^3_{10}.

- si $p \geqslant 2$: $n = 6p+4 \geqslant 16$ et $c = 4p+2 \geqslant 10$

On partage l'ensemble X des 6p+4 sommets de K^3_n en deux sous-ensembles X_1 et X_2 de 3p+2 sommets. (3p+2,3,p) est dans D d'après la proposition 3.22. Il existe donc une

p-décomposition de l'ensemble des triplets de X_1, pour laquelle chaque couple est le centre d'une hyperétoile (voir la remarque qui suit la proposition 3.4) . A chaque hyperétoile de cette p-décomposition, on ajoute 3p+2 rayons qui sont les 3p+2 éléments de X_2 ; on obtient ainsi une hyperétoile de degré 4p+2 = c. On fait ensuite la même construction en échangeant X_1 et X_2.

Les hyperétoiles ainsi obtenues sont toutes disjointes et constituent une c-décomposition de K_n^3. Soit en effet une arête de K_n^3. Si ses trois points sont dans X_1, cette arête fait partie d'une hyperétoile et d'une seule dans la p-décomposition de K_{3p+2}^3, elle appartient donc à une hyperétoile et à une seule dans la c-décomposition de K_n^3. Si elle contient deux points x et y de X_1 et un point z de X_2, x et y forment le centre d'une hyperétoile de K_n^3 dont z est un rayon. On fait le même raisonnement en échangeant X_1 et X_2.

En fait, la borne inférieure de n en fonction de k et de c donnée par S. Yamamoto et S. Tazawa [47] était erronée, et ne devenait exacte que pour k = 3. Par contre, la véritable limite $n \geqslant k-1+c$, atteinte lorsqu'un système de Steiner S(c-1,c,n) existe, doit être corrigée en $n \geqslant 3c/2 + 1$ lorsque k = 3.

3.5.3. Décompositions cycliques

Considérons les sommets de K_n^2 et de K_n^3 comme

les éléments 0,1,..,n-1 du groupe cyclique $\mathbb{Z}_n$ d'ordre n.

Si $\{(x,y_1),(x,y_2),..,(x,y_c)\}$ est une étoile de degré c dans $K_n^2-\{0\}$, $\{(0,x,y_1),(0,x,y_2),..,(0,x,y_c)\}$ est une hyperétoile de degré c dans K_n^3, ainsi que, pour tout z appartenant à $\mathbb{Z}_n$, $\{(z,x+z,y_1+z),..,(z,x+z,y_c+z)\}$.

Si (x,y) est une arête de $K_n^2 - \{0\}$, on appelle <u>orbite</u> de (x,y) la famille [(x,y),(-x,y-x),(-y,x-y)].

proposition 3.28

L'orbite d'une arête de $K_n^2-\{0\}$ contient trois arêtes différentes si et seulement si n n'est pas divisible par 3.

- si (x,y) = (-x,y-x) :
  - soit x = -x et y = y-x : dans ce cas on a y = y+x, ce qui n'est pas possible car $x \neq 0$.
  - soit x = y-x et y = -x : alors 3x = 0, et n doit être divisible par 3.
- si (x,y) = (-y,x-y) : on se ramène au cas précédent en échangeant x et y.
- si (-x,y-x) = (-y,x-y) :
  - soit -x = -y donc x = y et (x,y) n'est pas une arête,
  - soit -x = x-y et -y = y-x d'où 3x = 0 : n est divisible par 3.

proposition 3.29

Les orbites forment une partition de l'ensemble des arêtes de $K_n^2 - \{0\}$.

En effet, l'orbite de (-x,y-x) est [(-x,y-x),(x,y),(x-y,-y)] et celle de (-y,x-y) est [(-y,x-y),(y,x),(y-x,-x)] : chaque arête d'une orbite a la même orbite que les deux autres, et aucune arête ne peut appartenir à deux orbites différentes. Comme chaque arête appartient à sa propre orbite, les orbites forment une partition de $K_n^2-\{0\}$.

théorème 3.30

Si deux étoiles de degré c dans $K_n^2-\{0\}$ n'ont aucune arête commune, et si leur union ne contient pas deux arêtes appartenant à la même orbite, les 2n hyperétoiles obtenues à partir de ces deux étoiles sont disjointes.

Soient $E = \{(x,y_1),..,(x,y_c)\}$ et $E' = \{(x',y'_1),..,(x',y'_c)\}$ deux étoiles de $K_n^2-\{0\}$. Soient H et H' deux hyperétoiles construites à partir de E et de E' :

$$H = \{(z,x+z,y_1+z),..,(z,x+z,y_c+z)\}$$

$$H' = \{(z',x'+z',y'_1+z'),..,(z',x'+z',y'_c+z')\}$$

Si H et H' ont une arête commune, il existe y et y' tels que :

$$(z,x+z,y+z) = (z',x'+z',y'+z')$$

Si z et z' sont égaux, (x,y) = (x',y') est une arête commune à E et à E'. Si z et z' sont différents, on a soit z = x'+z' soit z = y'+z', et l'arête (x,y) est soit (-x',y'-x') soit (-y',x'-y'), autrement dit (x,y) et (x',y') appartiennent à la même orbite.

Si n n'est pas divisible par 3, les (n-1)(n-2)/2 arêtes de $K_n^2-\{0\}$ se répartissent en (n-1)(n-2)/6 orbites. Si (n-1)(n-2) est divisible par 6c, et si on peut trouver (n-1)(n-2)/6c étoiles de degré c dans $K_n^2-\{0\}$ en prenant une arête dans chaque orbite, alors il existe une c-décomposition de K_n^3 que l'on appelle une c-décomposition cyclique.

Par exemple :

proposition 3.31

Il existe une 5-décomposition cyclique de K_{11}^3.

Les trois étoiles de degré 5 dans $K_{11}^2-\{0\}$, contenant une arête de chaque orbite, permettent de construire 33 hyperétoiles disjointes dans K_{11}^3 :

les quinze orbites de $K_{11}^2-\{0\}$:

a :	-1 1	-1 -2	1 2
b :	-2 2	-2 -4	2 4
c :	-3 3	-3 5	3 -5
d :	-4 4	-4 3	4 -3
e :	-5 5	5 -1	1 -5
f :	1 5	-1 4	-4 -5
g :	-1 2	1 3	-2 -3
h :	-2 3	2 5	-3 -5
i :	-4 -3	4 1	3 -1
j :	-5 4	5 -2	2 -4
k :	-5 -1	1 -4	4 5

l :	-2	1	;	-1	-3	;	2	3
m :	-3	2	;	-2	-5	;	3	5
n :	3	4	;	-3	1	;	-1	-4
o :	-4	5	;	4	-2	;	2	-5

étoile de centre 1 : (1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,-5)

étoile de centre 3 : (3,2),(3,5),(3,-5),(3,-4),(3,-2)

étoile de centre 4 : (4,2),(4,3),(4,5),(4,-5),(4,-2)

hyperétoiles construites à partir de la première étoile :

0	1	2	0	1	3	0	1	4	0	1	5	0	1	-5
1	2	3	1	2	4	1	2	5	1	2	-5	1	2	-4
2	3	4	2	3	5	2	3	-5	2	3	-4	2	3	-3
3	4	5	3	4	-5	3	4	-4	3	4	-3	3	4	-2
4	5	-5	4	5	-4	4	5	-3	4	5	-2	4	5	-1
5	-5	-4	5	-5	-3	5	-5	-2	5	-5	-1	5	-5	0
-5	-4	-3	-5	-4	-2	-5	-4	-1	-5	-4	0	-5	-4	1
-4	-3	-2	-4	-3	-1	-4	-3	0	-4	-3	1	-4	-3	2
-3	-2	-1	-3	-2	0	-3	-2	1	-3	-2	2	-3	-2	3
-2	-1	0	-2	-1	1	-2	-1	2	-2	-1	3	-2	-1	4
-1	0	1	-1	0	2	-1	0	3	-1	0	4	-1	0	5

3.5.4. Relations récursives

Comme nous essayons de construire une partition de l'ensemble des triplets, commençons par définir une partition de l'ensemble X des sommets de K_n^3.

Soient A et B deux sous-ensembles disjoints de X dont la réunion est X. Les arêtes de K_n^3 appartiennent à l'un des quatre types suivants :

type AAA : les trois points sont dans A

type BBB : trois points dans B

type AAB : deux points dans A, un dans B

type ABB : un point dans A, deux dans B

proposition 3.32

> Si (p,3,c), (q,3,c), (p,2,c) et (q,2,c) appartiennent à D, (p+q,3,c) appartient à D.

On suppose que X est partagé en deux sous-ensembles disjoints, A de p sommets et B de q sommets. Les arêtes de K_{p+q}^3 sont réparties en hyperétoiles de la façon suivante :

arêtes du type AAA : hyperétoiles de K_p^3

type BBB : hyperétoiles de K_q^3

type AAB : les deux points de A forment une arête de K_p^2, on ajoute le point de B au centre de l'étoile qui contient cette arête.

type ABB : on ajoute le point de A au centre de l'étoile de K_q^2 qui contient les deux points de B.

Remarque : d'après la proposition 3.20, si (p,3,c) et (p,2,c) appartiennent à D, (p+1,3,c) appartient à D. Cette proposition est un cas particulier de la proposition 3.32, avec q=1 : les arêtes de K^3_{p+1} ne peuvent être que du type AAA ou du type AAB.

corollaire 3.33

Si (n,3,c) appartient à D, si n est supérieur ou égal à 2c et si c divise $\binom{n}{2}$, alors (2n,3,c) appartient à D.

Il suffit de poser p=q=n dans la proposition précédente, et d'appliquer le théorème 2.4.

proposition 3.34

Si a et b sont deux entiers au moins égaux à 2, si (ac,3,c) et (bc,3,c) appartiennent à D, alors ((a+b)c,3,c) appartient à D.

On sépare l'ensemble des (a+b)c sommets en deux sous-ensembles disjoints A et B contenant respectivement ac et bc sommets.

Les triplets de type AAA sont répartis en hyperétoiles de K^3_{ac}, et les triplets de type BBB en hyperétoiles de K^3_{bc}, selon l'hypothèse.

Définissons une partition de B en b sous-ensembles B_i, i=1,..,b, contenant chacun c sommets. Si, de toutes les façons possibles, on construit une hyperétoile dont le centre

est formé de deux points de A et dont l'ensemble des rayons est un ensemble B_i, on obtient tous les triplets de type AAB.

Pour les triplets de type ABB, on fait la même construction en séparant A en a sous-ensembles de c sommets.

corollaire 3.35

Si (ac,3,c) appartient à D, alors, pour tout entier strictement positif b, (abc,3,c) appartient à D.

(ac,3,c) appartient à D par hypothèse. On suppose que (abc,3,c) appartient à D : alors (a(b+1)c,3,c) appartient aussi à D d'après la proposition précédente. On a donc démontré par récurrence que, pour tout $b > 0$, (abc,3,c) appartient à D.

proposition 3.36

Si (n,3,c), (ac,3,c) et (ac,2,c) appartiennent à D, alors pour tout entier $b \geq 0$, (n+abc,3,c) est dans D.

C'est évident si b est nul.

Si b=1 : soient A et B deux ensembles disjoints contenant respectivement n et ac sommets. Partageons B en a sous-ensembles B_i (i=1,..,a) de c sommets. Les hyperétoiles de K^3_{n+ac} sont définies ainsi :

- pour les arêtes de type AAA : hyperétoiles de K^3_n
- pour les arêtes de type BBB : hyperétoiles de K^3_{ac}
- type ABB : on ajoute un point de A au centre d'une étoile de K^2_{ac}
- type AAB : le centre contient deux points de A, l'ensemble

des rayons est un ensemble B_i.

Donc (n+ac,3,c) appartient à D.

Si (n+abc,3,c), (ac,3,c) et (ac,2,c) appartiennent à D, on refait la même démonstration en remplaçant n par n+abc, et on montre que (n+a(b+1)c,3,c) appartient à D. Donc, pour tout $b \geq 0$, (n+abc,3,c) appartient à D.

proposition 3.37

Si (2c,3,c) appartient à D, alors pour tout $a \geq 2$, (ac,3,c) appartient à D.

D'après le corollaire 3.35, c'est vrai si a est pair. Si a est impair, il est de la forme 2b+3 avec $b \geq 0$. (3c,3,c) appartient à D (proposition 3.22), ainsi que (2c,2,c) (théorème 2.4), donc, en remplaçant n par 3c et a par 2 dans la proposition précédente, on démontre aisément que (ac,3,c) appartient à D.

Les points (2c,3,c) sont très utiles pour démontrer l'existence d'autres points (n,3,c) de D à l'aide de relations récursives. En particulier, si c est premier et impair, il existe une condition nécessaire et suffisante :

proposition 3.38

Si c est premier, $c > 2$, et si (2c,3,c) appartient à D, alors (n,3,c) appartient à D si et seulement si n est au moins égal à 2c et n vaut 0,1 ou 2 modulo c.

Si (n,3,c) appartient à D, n est au moins égal à 3c/2 + 1, et c divise $\binom{n}{3}$ (théorème 3.26). Si c est premier et impair, c divise $\binom{n}{3} = n(n-1)(n-2)/6$ si et seulement si n est égal à 0,1 ou 2 modulo c, donc n doit être au moins égal à 2c.

Inversement, soit n = ac, ac+1 ou ac+2 avec $a \geq 2$.

Si a = 3b : n = 3bc, 3bc+1 ou 3bc+2 donc (n,3,c) appartient à D (3.22 et 3.23).

Si a = 3b+1 : $b \geq 1$ car $a \geq 2$, donc a = 3b'+4 avec b'=b-1. n vaut 3b'c+4c, (3b'c+1)+4c ou (3b'c+2)+4c. Les points suivants sont dans D :

(3b'c,3,c) et (3b'c+2,3,c) (3.22)

(3b'c+1,3,c) (3.23)

(2c,3,c) par hypothèse

(2c,2,c) (2.4)

donc, d'après la proposition 3.36, (n,3,c) appartient à D.

Si a = 3b+2 : n = 3bc + 2c, (3bc+1)+2c ou (3bc+2)+2c, donc, toujours d'après la proposition 3.36, (n,3,c) appartient à D.

3.5.5. Une famille infinie : les points $(n,3,3^q)$

proposition 3.39

> Pour tout entier $q \geq 1$, $(n,3,3^q)$ appartient à D si et seulement si n = 0,1 ou 2 modulo 3^{q+1} et $n \geq 3^{q+1}$.

Si $(n,3,3^q)$ appartient à D, 3^{q+1} divise $n(n-1)(n-2)$ (3.26) donc n est égal à 0,1 ou 2 modulo 3^{q+1}. D'autre part, n est au moins égal à $3^{q+1}/2 + 1$ donc $n \geqslant 3^{q+1}$.

Inversement, si $c = 3^q$, c est impair donc $(3^{q+1}a,3,3^q)$, $(3^{q+1}a+1,3,3^q)$ et $(3^{q+1}a+2,3,3^q)$ appartiennent à D pour tout $a \geqslant 1$ (3.22 et 3.23).

3.5.6. Petites valeurs de c

c = 2

$\binom{n}{3}$ est pair si et seulement si n est différent de 3 modulo 4, donc, d'après (3.10) :

proposition 3.40

> $(n,3,2)$ appartient à D si et seulement si n est au moins égal à 4, et différent de 3 modulo 4.

c = 3

D'après la proposition 3.39 :

proposition 3.41

> $(n,3,3)$ appartient à D si et seulement si $n \geqslant 9$ et $n = 0,1$ ou 2 modulo 9.

c = 4

Les conditions nécessaires pour que (n,3,4) soit dans D sont : $n \geq 7$ et 4 divise $\binom{n}{3}$ (3.26), donc n doit être différent de 3,5 ou 7 modulo 8 et au moins égal à 8.

(8,3,4) appartient à D, comme le montre la décomposition suivante :

123	124	125	126
134	135	136	137
145	146	147	148
128	138	168	178
234	235	236	238
245	246	247	248
127	237	267	278
345	346	347	348
156	256	356	456
157	257	357	457
158	258	358	458
167	367	467	567
268	368	468	568
378	478	578	678

Donc (8a,3,4) et (8a+4,3,4) sont dans D pour tout $a \geq 1$ (3.37).

(n,2,4) appartient à D si et seulement si $n \geq 8$ et n = 0 ou 1 modulo 8 (2.4), donc (8a+1,3,4) et (8a+2,3,4) sont dans D pour tout $a \geq 1$ (3.20).

(14,3,4) appartient à D (3.22), donc, si n est égal à 8b+14 ($b \geq 0$) ou encore à 8a+6 ($a > 0$), alors (n,3,4) appartient à D d'après la proposition 3.36.

Toutes les valeurs possibles de n sont donc connues :

proposition 3.42

(n,3,4) appartient à D si et seulement si $n \geq 8$ et $n \neq 3,5,7$ modulo 8.

c = 5

(10,3,5) appartient à D :

012	015	017	018	019
023	025	027	028	029
013	035	036	037	038
014	046	047	048	049
123	125	126	127	129
134	135	136	137	138
124	146	147	148	149
234	235	236	237	238
024	245	246	247	249
034	346	347	348	349
156	256	356	456	567
057	157	257	357	578
058	158	358	458	568
059	159	259	359	569
167	267	367	467	678
168	268	368	468	689
069	169	269	469	679
078	178	378	478	789
079	179	279	479	579
089	189	389	489	589
016	026	056	067	068
128	248	258	278	289
039	139	239	369	379
045	145	345	457	459

5-décomposition de K_{10}^3

Par conséquent, d'après la proposition 3.38 :

proposition 3.43

(n,3,5) appartient à D si et seulement si n $\geqslant$ 10 et n = 0,1 ou 2 modulo 5.

La 5-décomposition de K_{10}^3 a été obtenue en enlevant une arête à chaque hyperétoile de la 6-décomposition de K_{10}^3 (voir la proposition 3.27) et en regroupant les vingt arêtes enlevées en quatre hyperétoiles de degré 5.

Comme K_{10}^2 est 5-décomposable (théorème 2.4), K_{11}^3 est également 5-décomposable d'après la propcsition 3.3, mais la décomposition ainsi obtenue n'est pas cyclique comme celle de la proposition 3.31.

c = 6

$\binom{n}{3}$ est divisible par 6 si et seulement si n est égal à 0,1,2,9,10,18,20,28 ou 29 modulo 36, et il faut que n soit au moins égal à 10.

Si n vaut 0,1,2,18 ou 20 modulo 36, alors (n,3,6) appartient à D d'après la proposition 3.22. En particulier, pour tout entier a $\geqslant$ 1, (36a,3,6) appartient à D.

(n,2,6) appartient à D si et seulement si n $\geqslant$ 12 et n = 0,1,4 ou 9 modulo 12 (théorème 2.4). En particulier, pour tout a $\geqslant$ 1, (36a,2,6) appartient à D.

(10,3,6) appartient à D (proposition 3.27), donc, d'après la proposition 3.36, (36a+10,3,c) appartient à D pour tout a $\geqslant$ 0.

De même, (28,3,6) appartient à D car (28,3,18) appartient à D (propositions 3.27 et 3.21), donc (36a+28,3,6) appartient à D pour tout a $\geq$ 0, ainsi que (36a+29,3,6) (théorème 2.4 et proposition 3.3).

De toutes les valeurs possibles de n, il ne manque plus que 36a+9, avec a > 0. En utilisant le même procédé que pour les autres valeurs, on montre que, si (45,3,6) est dans D, alors (36a+9,3,6) appartient à D pour tout a > 0, et que par conséquent les conditions nécessaires d'appartenance de (n,3,6) à D sont suffisantes.

proposition 3.44

Si n $\geq$ 10 et si n est égal à 0,1,2,10,18,20,28 ou 29 modulo 36, alors (n,3,6) appartient à D.

Si n < 10 ou si est n est différent de 0,1,2,9, 10,18,20,28 ou 29 modulo 36, alors (n,3,6) n'appartient pas à D.

Si (45,3,6) appartient à D, alors (n,3,6) appartient à D si et seulement si n $\geq$ 10 et n = 0,1,2,9,10, 18,20,28 ou 29 modulo 36.

c = 7

Comme 7 est premier et impair, d'après la proposition 3.38 il suffit de montrer que (14,3,7) appartient à D, et les conditions nécessaires n = 0,1 ou 2 modulo 7 et et n $\geq$ 9 (en fait n $\geq$ 14) seront suffisantes. Or on ne connaît, par les propositions 3.22 et 3.23, que les valeurs de n égales à 0,1 ou 2 modulo 21.

3.5.7. Conclusion

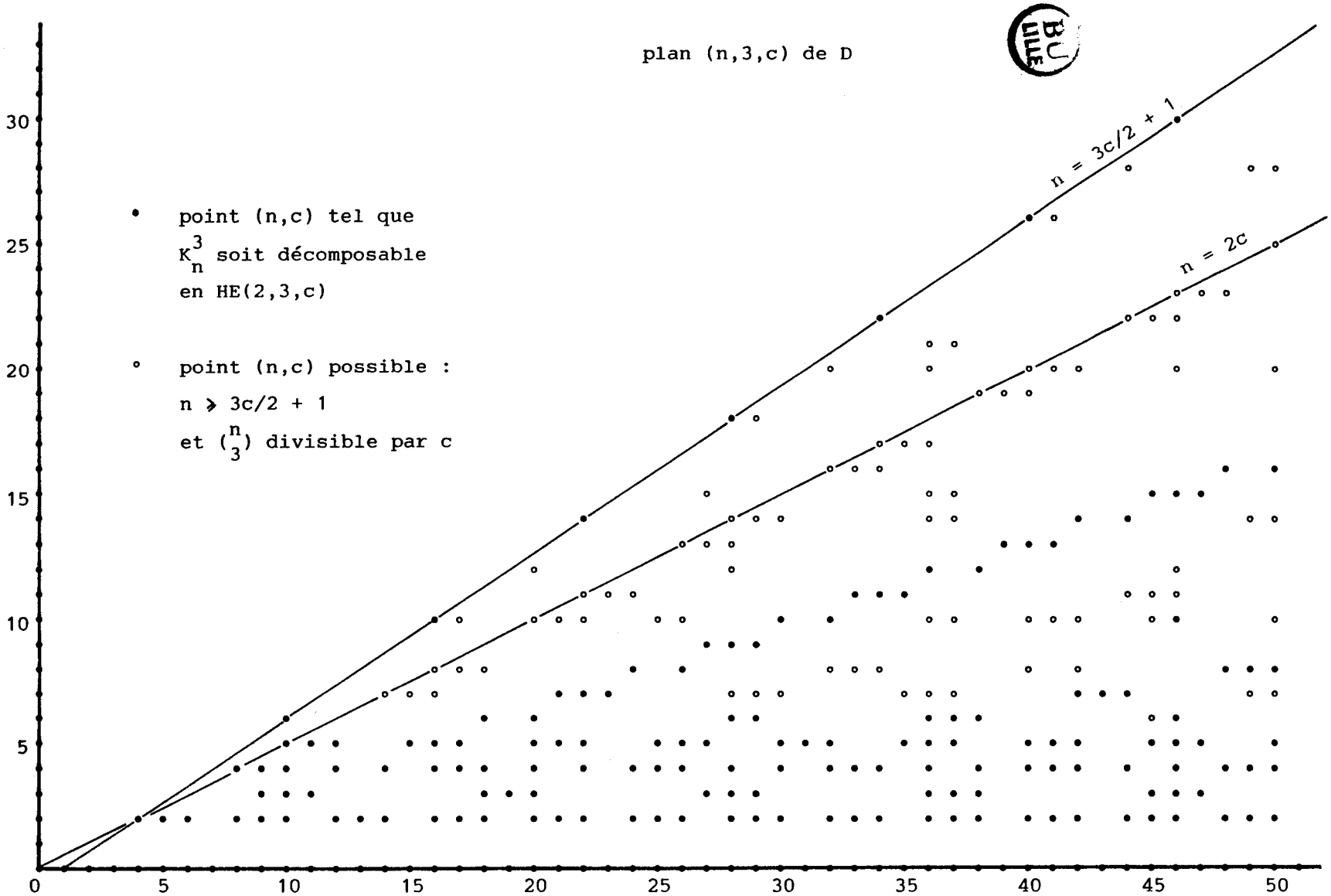
La figure suivante décrit l'ensemble des points (n,3,c) avec $n \leqslant 50$ et $c \leqslant 32$, qui appartiennent à D ou qui vérifient les conditions nécessaires.

Avec k = 3, nous n'avons trouvé aucun contre-exemple de point vérifiant les conditions nécessaires sans appartenir à D. Les points (n,3,c) qui manquent encore sont ceux pour lesquels n est trop grand pour la recherche directe à la main ou même à l'aide d'un calculateur, et trop petit pour l'application des relations récursives.

Rien n'empêche donc d'énoncer cette conjecture :

conjecture

(n,3,c) appartient à D si et seulement si c divise $\binom{n}{3}$ et n est au moins égal à 3c/2 + 1.


plan (n,3,c) de D
• point (n,c) tel que K_n^3 soit décomposable en HE(2,3,c)
° point (n,c) possible : n ⩾ 3c/2 + 1 et $\binom{n}{3}$ divisible par c
n = 3c/2 + 1
n = 2c
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

BU LILLE

4. HYPERETOILES A CENTRE SIMPLE

4.1. POINTS POSSIBLES

Nous considérons le cas particulier où p est égal à 1. Comme dans le chapitre précédent, nous dirons que K_n^k est c-décomposable s'il est décomposable en hyperétoiles HE(1,k,c). Nous appellerons D_1 l'ensemble des points (n,k,c) de $\mathbb{N}^3$ tels que K_n^k soit c-décomposable, et P_1 l'ensemble des points (n,k,c) de $\mathbb{N}^3$ vérifiant les conditions nécessaires (points possibles), c'est-à-dire :

proposition 4.1

Si K_n^k est c-décomposable, n,k et c vérifient :

(1) c divise $\binom{n}{k}$

(2) $n \geqslant c(k-1) + 1$

4.2. POINTS DE D_1 CONNUS

En posant p = 1 dans les relations du chapitre 2, on trouve les propriétés suivantes :

à partir du théorème 2.5 :

proposition 4.2

> Si ck divise $\binom{n-1}{k-1}$ et si $n \geqslant ck(k-1) + 1$, alors (n,k,c) appartient à D_1.

remarque : ck divise $\binom{n-1}{k-1}$ si et seulement si n divise $\binom{n}{k}/c$, qui est le nombre d'hyperétoiles dans la décomposition.

à partir de la proposition 2.6 :

proposition 4.3

> Si (n,k,ac) appartient à D_1, (n,k,c) appartient à D_1.

La proposition 2.7 affirme que, si K_{n-1}^{k} est décomposable en HE(1,k,c) et si K_{n-1}^{k-1} est décomposable en HE(0,k-1,c), alors K_n^k est décomposable en HE(1,k,c). En appliquant le théorème 2.3, qui donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que K_{n-1}^{k-1} soit décomposable en HE(0,k-1,c),

on peut donc dire :

proposition 4.4

Si (n-1,k,c) appartient à D_1, si c divise $\binom{k-1}{n-1}$ et si $n \geqslant c(k-1)+1$, alors (n,k,c) appartient à D_1.

Le théorème 2.9 peut être réécrit sous la forme suivante :

proposition 4.5

(n,2,c) appartient à D_1 si et seulement si $\binom{n}{2}$ est divisible par c et n est au moins égal à 2c.

4.3 DECOMPOSITIONS REGULIERES

S'il existe une décomposition de K_n^k en hyperétoiles HE(1,k,c), dont le centre est réduit à un point, nous dirons que cette décomposition est <u>régulière</u> si chacun des n sommets de K_n^k est le centre du même nombre d'hyperétoiles.

Ce nombre est égal à m/n , si on appelle m le nombre $\binom{n}{k}/c$ d'hyperétoiles dans la décomposition de K_n^k. Il est donc nécessaire que n divise $\binom{n}{k}/c$, ou encore que ck divise $\binom{n-1}{k-1}$.

D'après la proposition 4.2, cette condition est suffisante, dès que n est au moins égal à ck(k-1)+1, pour qu'il existe une c-décomposition de K_n^k. Nous allons voir que cette décomposition est régulière.

Cette décomposition est construite suivant la démonstration du théorème 2.5. Si d est égal à ck, si x est un sommet de K_n^k, l'hypergraphe K_{n-1}^{k-1} dont l'ensemble des sommets est X-{x} est décomposable en hyperétoiles HE(0,k-1,d) d'après le théorème 2.3, car d = ck divise $\binom{n-1}{k-1}$ et n-1 est au moins égal à d(k-1).

Si on ajoute x à chacune des arêtes d'une hyperétoile HE(0,k-1,d), on obtient une hyperétoile HE(1,k,d) de centre x, que l'on note $H_i(x)$. Comme il y avait $\binom{n-1}{k-1}/d$ hyperétoiles HE(0,k-1,d), il y a $n\binom{n-1}{k-1}/d = \binom{n}{k}/c$ hyperétoiles $H_i(x)$.

On construit le réseau de transport dont les sommets sont les arêtes de K_n^k et les hyperétoiles $H_i(x)$, et dont les arcs sont :

(entrée, arête) de capacité 1,

(arête, hyperétoile contenant cette arête) de capacité infinie,

(hyperétoile, sortie) de capacité c.

Il existe un flot saturant les $\binom{n}{k}$ arcs d'entrée et les $\binom{n}{k}/c$ arcs de sortie. En chaque $H_i(x)$ aboutissent c arcs saturés, ils proviennent de c arêtes de K_n^k formant une hyperétoile HE(1,k,c) de centre x. Chaque sommet x, qui est le centre de $\binom{n-1}{k-1}/d$ hyperétoiles $H_i(x)$, est aussi le centre de $\binom{n-1}{k-1}/d$ hyperétoiles HE(1,k,c) dans la c-décomposition de K_n^k. On peut donc affirmer :

proposition 4.6

Si ck divise $\binom{n-1}{k-1}$ et si n est au moins égal à ck(k-1)+1, il existe une c-décomposition régulière de K_n^k.

4.4. DECOMPOSITION DE K_n^3 EN HE(1,3,c)

4.4.1. Résultats connus

Les conditions nécessaires sont, quand k est égal à 3 :

proposition 4.7

> Si K_n^3 est c-décomposable, c divise $\binom{n}{3}$ et n est au moins égal à 2c+1.

et les propositions 4.3, 4.4 et 4.6 deviennent :

proposition 4.8

> Si (n,3,ac) appartient à D_1, (n,3,c) appartient à D_1.

proposition 4.9

> Si (n,3,c) appartient à D_1 et si c divise $\binom{n}{2}$, (n+1,3,c) appartient également à D_1.

proposition 4.10

> Si $\binom{n-1}{2}$ est divisible par 3c et si n est au moins égal à 6c+1, il existe une c-décomposition régulière de K_n^3.

4.4.2. Décompositions cycliques

Comme dans le chapitre 3, nous considérons les sommets de K_n^3 et de K_n^2 comme les éléments du groupe cyclique $\mathbb{Z}_n$, et nous définissons l'orbite de l'arête (x,y) de $K_n^2-\{0\}$ comme la famille [(x,y),(-x,y-x),(-y,x-y)]. Cette fois, nous ne cherchons plus à construire des étoiles de $K_n^2-\{0\}$, mais des couplages, c'est-à-dire des ensembles de c arêtes disjointes deux à deux.

Si $\{(x_1,y_1),..,(x_c,y_c)\}$ est un couplage de $K_n^2-\{0\}$, $\{(0,x_1,y_1),..,(0,x_c,y_c)\}$ est une hyperétoile HE(1,3,c) dans K_n^3, ainsi que $\{(z,x_1+z,y_1+z),..,(z,x_c+z,y_c+z)\}$ pour tout z appartenant à $\mathbb{Z}_n$.

théorème 4.11

> Si deux couplages de c arêtes de $K_n^2-\{0\}$ n'ont aucune arête commune, et si leur union ne contient pas deux arêtes appartenant à la même orbite, les 2n hyperétoiles de degré c construites à partir de ces deux couplages sont disjointes.

La démonstration ressemble à celle du théorème 3.30. Soient $C = \{(x_1,y_1),..,(x_c,y_c)\}$ et $C' = \{(x'_1,y'_1),..,(x'_c,y'_c)\}$ deux couplages de $K_n^2-\{0\}$; soient H et H' deux hyperétoiles construites à partir de C et de C' :

$$H = \{(z,x_1+z,y_1+z),..,(z,x_c+z,y_c+z)\}$$

$$H' = \{(z',x'_1+z',y'_1+z'),..,(z',x'_c+z',y'_c+z')\}$$

Si H et H' ont une arête commune, il existe x,x',y et y' tels que :

$$(z,x+z,y+z) = (z',x'+z',y'+z')$$

Si $z = z'$: $(x,y) = (x',y')$ est une arête commune à C et à C'.
Si $z \neq z'$: soit $z = x'+z'$ et $(x,y) = (-x',y'-x')$, soit z est égal à $y'+z'$ et $(x,y) = (-y',x'-y')$. Dans les deux cas, (x,y) et (x',y') appartiennent à la même orbite.

Si n n'est pas divisible par 3, toute orbite contient trois arêtes (proposition 3.28) et les $(n-1)(n-2)/2$ arêtes de $K_n^2-\{0\}$ se répartissent en $(n-1)(n-2)/6$ orbites (proposition 3.29). Si $(n-1)(n-2)$ est divisible par 6c et s'il existe $(n-1)(n-2)/6c$ couplages de c arêtes de $K_n^2-\{0\}$ obtenus en prenant une arête dans chaque orbite, il existe une c-décomposition de K_n^3 et on dit que cette décomposition est <u>cyclique</u>. Elle est également régulière.

Reprenons par exemple les quinze orbites de $\mathbb{Z}_n-\{0\}$ déjà décrites :

a :	-1	1	;	-1	-2	;	1	2
b :	-2	2	;	-2	-4	;	2	4
c :	-3	3	;	-3	5	;	3	-5
d :	-4	4	;	-4	3	;	4	-3
e :	-5	5	;	5	-1	;	1	-5
f :	1	5	;	-1	4	;	-4	-5
g :	-1	2	;	1	3	;	-2	-3
h :	-2	3	;	2	5	;	-3	-5
i :	-4	-3	;	4	1	;	3	-1
j :	-5	4	;	5	-2	;	2	-4
k :	-5	-1	;	1	-4	;	4	5
l :	-2	1	;	-1	-3	;	2	3
m :	-3	2	;	-2	-5	;	3	5
n :	3	4	;	-3	1	;	-1	-4
o :	-4	5	;	4	-2	;	2	-5

Les trois couplages :

$C_1 = \{(-1,1),(-2,2),(-3,3),(-4,4),(-5,5)\}$
$C_2 = \{(1,5),(-1,2),(-2,3),(-4,-3),(-5,4)\}$
$C_3 = \{(-5,-1),(-2,1),(-3,2),(3,4),(-4,5)\}$

induisent une 5-décomposition cyclique de K_{11}^3 en trente-trois hyperétoiles HE(1,3,5) :

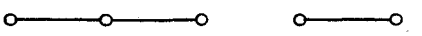
proposition 4.12

Il existe une 5-décomposition cyclique de K_{11}^3.

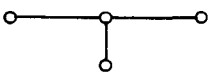
Si n n'est pas divisible par 3, une orbite est un ensemble de trois arêtes de $K_n^2-\{0\}$, c'est aussi un sous-graphe partiel de $K_n^2-\{0\}$ qui peut être isomorphe à l'un des graphes suivants :

type I : couplage

type II : chemin

type III : chemin + arête 

type IV : triangle

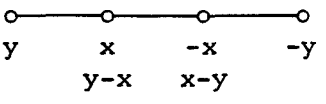
Le type V, l'étoile : 

ne peut pas correspondre à une orbite. En effet, si les trois arêtes (x,y), (-x,y-x) et (-y,x-y) d'une orbite avaient un point commun, x par exemple, on aurait :

- soit x = -x modulo n, donc x = n/2 (à condition que n soit pair). Dans ce cas, x ne peut pas être égal à -y, sinon x = y et (x,y) n'est pas une arête ; et x ne peut pas non plus être égal à x-y, sinon y = 0.

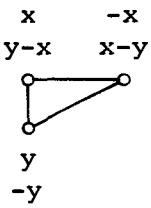
- soit x = y-x modulo n, et alors x-y = -x.

On a la disposition suivante :



type II

ou



type IV

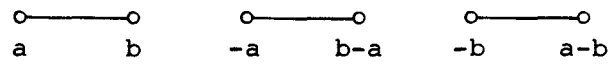
Suivant les différentes valeurs de n (non divisibles par 3), observons les types des orbites de $K_n^2-\{0\}$:

proposition 4.13

Si n = 2t+1 n'est pas divisible par 3, il y a dans $\mathbb{Z}_n$ t orbites de type II :

a = 1,..,t

les autres sont de type I :

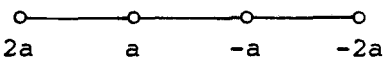


En effet, pour tout a = 1,..,t, l'arête (a,-a) fait partie de l'orbite [(a,-a),(-a,-2a),(a,2a)], et on a $a \neq -a$ car n est impair, $a \neq 2a$ car $a \neq 0$, et $a \neq -2a$ car n n'est pas divisible par 3.

Si b est différent de a, de -a et de 2a, l'orbite de (a,b) est un couplage car $a \neq -a$ puisque n est impair et $a \neq b-a$ si $b \neq 2a$.

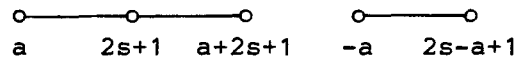
proposition 4.14

Si n = 4s+2 n'est pas divisible par 3, il y a 2s orbites de type II :



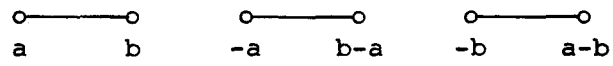
a = 1,..,2s

2s orbites de type III :



a = 1,..,2s

les autres sont de type I :



Si a = 1,..,2s, a est différent de -a donc (a,-a)

est une arête dont l'orbite est [(a,-a),(-a,-2a),(a,2a)].

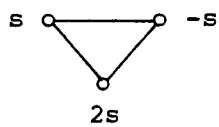
L'orbite de (a,2s+1) est [(a,2s+1),(-a,2s+1-a), (2s+1,a+2s+1)] car 2s+1 = -2s-1.

Si b est différent de a, de -a, de 2a et de 2s+1, l'orbite de (a,b) est un couplage.

On démontre de la même façon la proposition suivante :

proposition 4.15

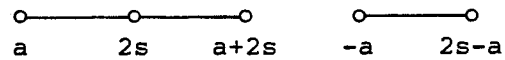
Si n = 4s n'est pas divisible par 3, il y a une orbite de type IV :



2s-2 orbites de type II :

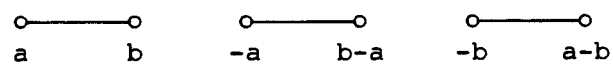
a = 1,..,s-1,s+1,..,2s-1

2s-2 orbites de type III :



a = 1,..,s-1,s+1,..,2s-1

les autres sont de type I :



Le théorème suivant affirme l'existence d'un couplage de trois arêtes dans n'importe quel ensemble de trois orbites de type I :

théorème 4.16

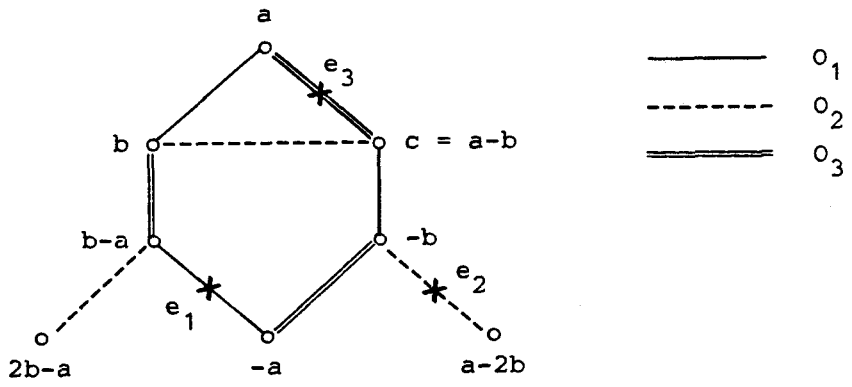
> Quelles que soient les trois orbites de type I O_1, O_2, O_3 dans $\mathbb{Z}_n - \{0\}$, il existe trois arêtes $e_1 \in O_1$, $e_2 \in O_2$, $e_3 \in O_3$, formant un couplage.

On considère tous les cas possibles.

Cas 1 : on suppose qu'il existe trois éléments distincts a,b,c de $\mathbb{Z}_n - \{0\}$ tels que (a,b) soit une arête de O_1, (b,c) une arête de O_2 et (c,a) une arête de O_3.

Cas 1.1 : c = a-b

e_1 = (-a,b-a) et e_3 = (a,a-b) sont deux arêtes disjointes qui forment un couplage avec e_2 = (-b,a-2b) car a-2b n'est égal ni à a ni à b-a.



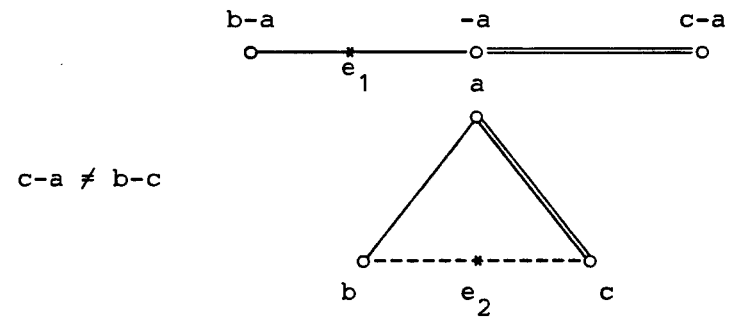
Cas 1.2 : $c \neq a-b$

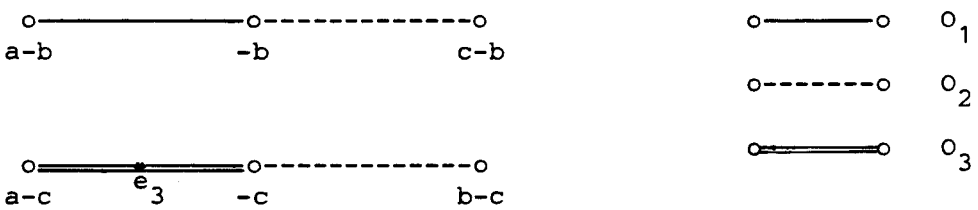
On peut supposer que c est également différent de b-a, sinon on se ramène au cas 1.1 en échangeant a et b.

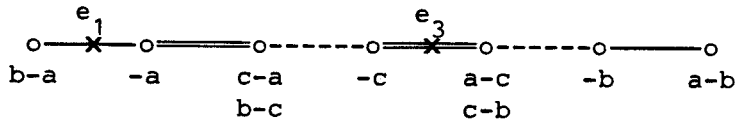
-c est alors différent de a,b,-a,-b car les orbites sont de type I, et de a-b et b-a par hypothèse du cas 1.2.

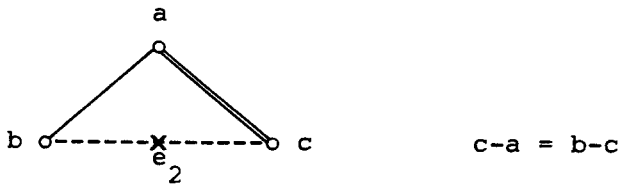
a-c est différent de c car l'orbite [(a,c), (-a,c-a),(-c,a-c)] est de type I, et de b car c est différent de a-b.

On peut donc prendre $e_1 = (-b,a-b)$, $e_2 = (b,c)$ et $e_3 = (-c,a-c)$, ou encore $e_1 = (-a,b-a)$, $e_2 = (b,c)$ et $e_3 = (-c,a-c)$:





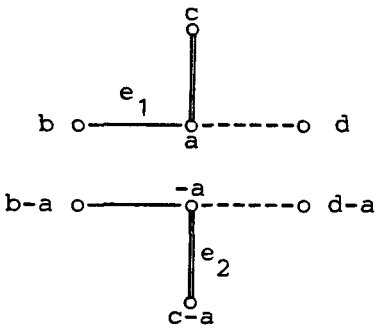


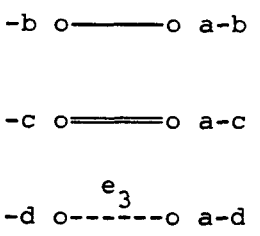


Cas 2 : il n'existe aucun triangle (a,b,c) avec $(a,b) \in O_1$, $(b,c) \in O_2$ et $(c,a) \in O_3$.

Cas 2.1 : il existe une étoile $(a,b) \in O_1$, $(a,c) \in O_2$, $(a,d) \in O_3$.

Il y a donc aussi une étoile formée des arêtes $(-a,b-a) \in O_1$, $(-a,c-a) \in O_2$, $(-a,d-a) \in O_3$:





Nous distinguons deux cas : soit les ensembles {b,c,d} et {b-a,c-a,d-a} sont disjoints, soit ils ont un point commun, par exemple b = c-a. (b,c,d ont des rôles symétriques, et on ne peut pas avoir b = b-a car $a \neq 0$.)

cas 2.1.1 : {b,c,d} et {b-a,c-a,d-a} sont disjoints : c'est le cas de la figure ci-dessus, si l'arête (-d,a-d) n'est ni (b,b-a) ni (b,c-a). On peut prendre $e_1 = (a,b)$, $e_2 = (-a,c-a)$ et $e_3 = (-d,a-d)$.

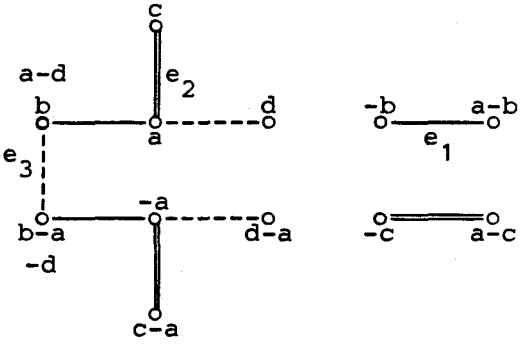
cas 2.1.1.1 : si (-d,a-d) = (b,b-a), ou tout autre cas symétrique : on ne peut pas avoir -d = b et a-d = b-a car $a \neq 0$, donc -d = b-a et b = a-d.

On prend :

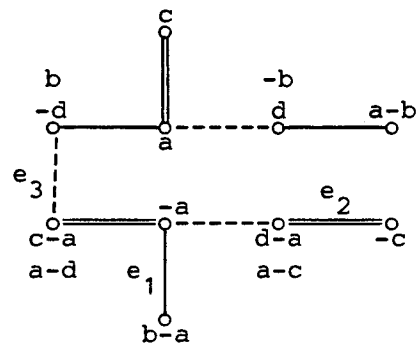
$e_1 = (-b,a-b)$

$e_2 = (a,c)$

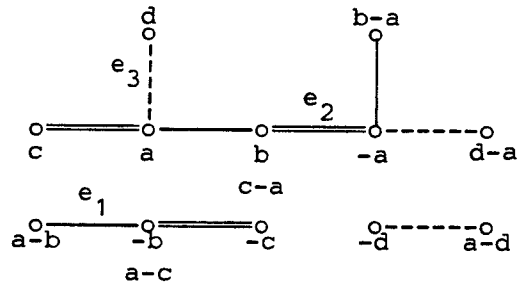
$e_3 = (-d,a-d)$



cas 2.1.1.2 : si (-d,a-d) = (b,c-a) : on ne peut pas avoir b = a-d sinon b-a = c-a = -d donc b = c, par conséquent on a b = -d et c-a = a-d . On prend : e_1 = (-a,b-a), e_2 = (-c,a-c) et e_3 = (-d,a-d).



cas 2.1.2 : il existe une étoile formée de (a,b) ∈ O_1, (a,c) ∈ O_2 , (a,d) ∈ O_3, et b = c-a.



Les arêtes e_1 = (-b,a-b) et e_2 = (-a,b) sont disjointes. L'arête e_3 = (a,d) n'a pas de point commun avec e_2 car b ≠ d et il n'y a pas de triangle, elle peut avoir un point commun avec e_1 si d = a-b ou d = -b. Mais, si d = a-b, l'arête (-d,a-d) = (b-a,b) forme un triangle avec (b-a,-a) et (b,-a), ce qui est exclu dans le cas 2. De même, si d = -b, comme -b = a-c on a a-d = a+b = c, et l'arête (-d,a-d) = (b,c) ferme le triangle dont les sommets sont a,b,c.

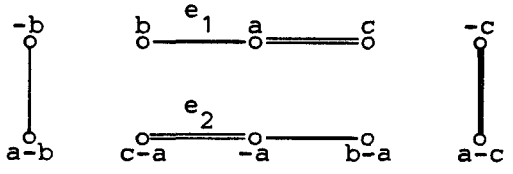
Par conséquent, e_1,e_2 et e_3 forment un couplage.

Cas 2.2 il n'y a ni triangle ni étoile.

Si toutes les arêtes de O_1,O_2,O_3 sont disjointes deux à deux, on construit le couplage en prenant une arête

dans chaque orbite.

Si deux arêtes $(a,b) \in O_1$ et $(a,c) \in O_2$ ont un point commun :



On ne peut pas avoir à la fois $b = c-a$ et $c = b-a$, sinon $b-c = -a = a$ et $a = 0$. On peut donc supposer par exemmple que b est différent de c-a, et les arêtes $e_1 = (a,b)$ et $e_2 = (-a,c-a)$ sont disjointes.

Comme il n'y a ni triangle ni étoile, aucune arête de O_3 ne passe par a ou -a, donc au moins une des trois arêtes de O_3 n'a aucun point commun avec e_1 ni avec e_2, et on peut construire le couplage.

Ce théorème possède un corollaire évident :

corollaire 4.17

> Si O_1 et O_2 sont deux orbites de type I dans $\mathbb{Z}_n - \{0\}$, elles contiennent deux arêtes disjointes $e_1 \in O_1$ et $e_2 \in O_2$.

Le fait qu'il existe toujours un couplage de trois arêtes dans un ensemble de trois orbites de type I nous conduit à étudier plus particulièrement les décompositions cycliques en hyperétoiles de degré 3.

théorème 4.18

Il existe une décomposition cyclique de K_n^3 en hyperétoiles HE(1,3,3) si et seulement si n est égal à 1 ou 2 modulo 9, et au moins égal à 10.

Les conditions nécessaires de la proposition 4.7, $\binom{n}{3}$ divisible par 3 et $n \geqslant 7$, sont équivalentes à : $n \geqslant 9$ et n égal à 0,1 ou 2 modulo 9. Mais, si n est un multiple de 3, il ne peut pas y avoir de décomposition cyclique de K_n^3 car l'orbite de $(\frac{n}{3},\frac{2n}{3})$ ne contient qu'une arête. Donc n doit être égal à 1 ou 2 modulo 9, et par conséquent au moins égal à 10.

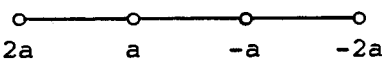
Supposons donc que n vérifie ces conditions. Le nombre d'orbites, $\binom{n-1}{2}/3$, est divisible par 3.

Pour toutes les valeurs de n possibles, nous allons construire des couplages de trois arêtes en prenant une arête dans chaque orbite. Ensuite, d'après le théorème 4.11, nous construirons à partir de ces couplages des hyperétoiles de degré 3 qui constitueront une 3-décomposition de K_n^3.

Si n est impair :

$n = 2t+1$ avec $t = 0$ ou 2 modulo 3, $t \geqslant 5$, car n n'est pas divisible par 3.

D'après la proposition 4.13, il y a t orbites de type II :



$a = 1,..,t$

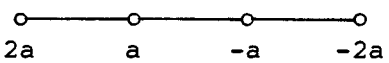
Si $a \neq b$, a et b entre 1 et t, les arêtes (a,-a) et (b,-b) sont disjointes.

Si t est divisible par 3, on regroupe trois par trois ces arêtes (a,-a), et on obtient t/3 couplages de trois arêtes. Les autres orbites sont de type I, leur nombre est divisible par 3, on peut donc les regrouper trois par trois et obtenir un couplage par groupe de trois orbites selon le théorème 4.16.

Si t est égal à 2 modulo 3, on regroupe trois par trois les arêtes (a,-a) autres que (1,-1) et (2,-2) et on obtient $\frac{t-2}{3}$ couplages. Le nombre des autres orbites est un multiple de 3 plus 1, on regroupe trois par trois les orbites qui ne contiennent pas (3,4) et on construit des couplages à l'aide du théorème 4.16. (1,-1), (2,-2) et (3,4) forment le dernier couplage demandé.

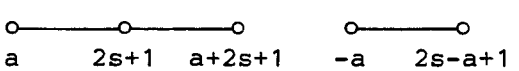
Si n est pair, non divisible par 4 : n = 4s+2 $\quad s \geqslant 2$

Nous avons vu avec la proposition 4.14 qu'il y a 2s orbites de type II :



a = 1,..,2s

2s orbites de type III :



a = 1,..,2s

les autres sont du type I.

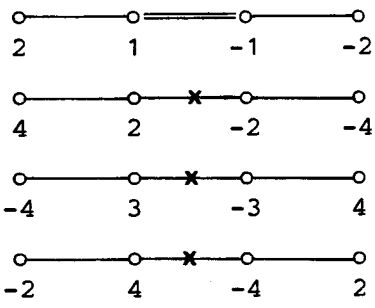
Si s est divisible par 3, on peut regrouper trois par trois les arêtes disjointes (a,-a), a = 1,..,2s, puis les arêtes (-a,2s-a+1), a = 1,..,2s. Le nombre des orbites de type I est également divisible par 3, ce qui permet de construire des couplages de trois arêtes.

Si 2s est égal à 1 modulo 3, on regroupe trois par trois

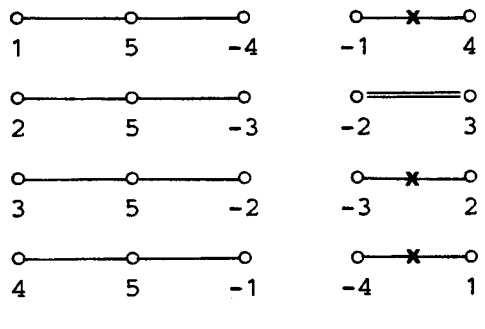
les 2s-1 arêtes (a,-a) autres que (1,-1), puis les 2s-1 arêtes (-a,2s-a+1) autres que (-2,2s-1). Il suffit donc de trouver dans les orbites de type I une arête disjointe de (1,-1) et de (-2,2s-1), puis de regrouper trois par trois les orbites de type I qui ne contiennent pas cette arête.

Par exemple, si n = 10 donc si 2s = 4, les orbites sont les suivantes :

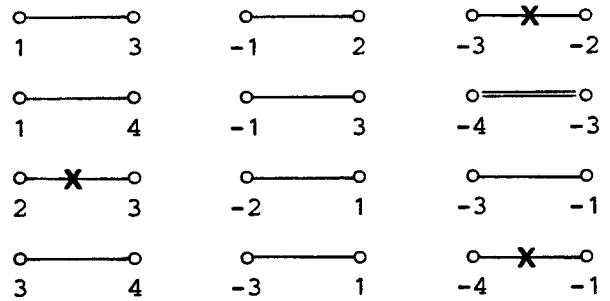
type II



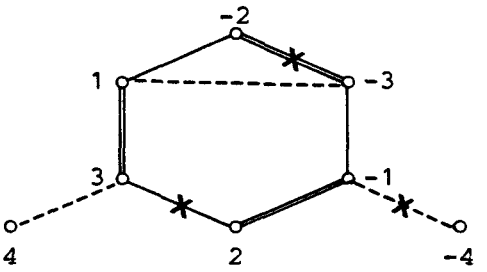
type III



type I



On peut prendre (-4,-3) comme arête disjointe de (1,-1) et de (-2,3), et choisir le couplage {(2,3),(-1,-4), (-2,-3)} comme dans le cas 1.1 du théorème 4.16 :



Le choix de l'arête (-4,-3) reste valable pour toutes les valeurs de $s \geqslant 2$ telles que 2s soit égal à 1 modulo 3, car cette arête appartient toujours à une orbite de type I. En effet, pour tout a = 1,..,2s, a ne peut être égal ni à -4 = 2s + (2s-2) ni à -3 = 2s + (2s+1) (les calculs sont faits modulo n = 4s+2), donc (-4,-3) ne peut être ni (a,2a) ni (a,-a) ni (a,2s+1) ; de plus :

* $(-4,-3) \neq (-a,-2a)$:

si a = 3, on a : -2a = -4 donc 2a = 4 = 6 mod n, impossible car $n \neq 2$,

si a = 4, on a : -2a = -3 donc 2a = 3 = 8 mod n, également impossible car $n \neq 5$;

* $(-4,-3) \neq (-a,2s+1-a)$:

si a = 3, alors 2s+1-a = -4 d'où 2s = -2 mod n, or 4s est égal à -2 modulo n : on ne peut avoir 2s = 4s = -2 modulo n que si s = 0 donc si n = 2.

si a = 4 : 2s+1-a = -3 d'où 2s = 0 modulo n, impossible car $n \neq 2$;

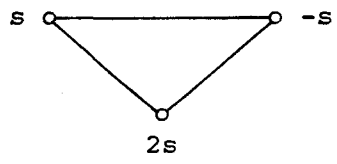
* $(-4,-3) \neq (2s+1,2s+1+a)$:

si $n \geqslant 10$, $2s+1 = \frac{n}{2}$ ne peut être égal ni à -3 ni à -4 modulo n.

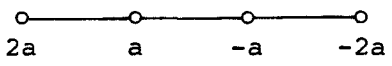
<u>2s ne peut pas être égal à 2 modulo 3</u>, sinon n = 4s+2 est un multiple de 3.

Si n est divisible par 4 : $n = 4s \quad s \geqslant 4$

D'après la proposition 4.15, il y a une orbite de type IV :

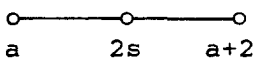


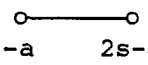
2s-2 orbites de type II :



$a = 1,..,2s-1$ sauf $a = s$

2s-2 orbites de type III :

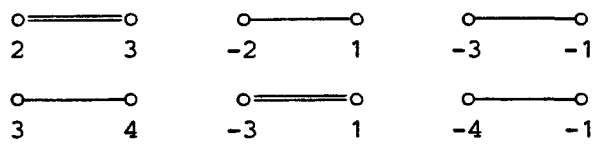




$a = 1,..,2s-1$ sauf $a = s$

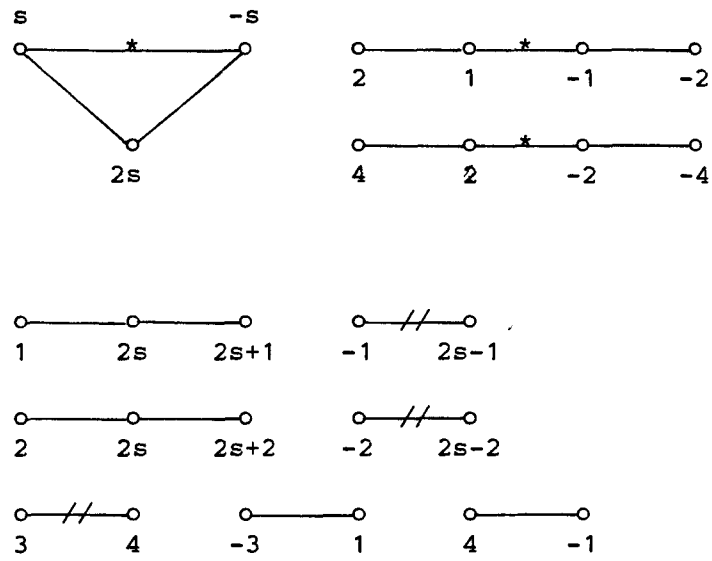
les autres sont de type I.

Si 2s est égal à 2 modulo 3, donc $s \geqslant 4$, on regroupe trois par trois les arêtes $(a,-a)$, $a \neq s$, puis trois par trois les arêtes $(-a,2s-a)$, $a \neq s$, enfin on regroupe trois par trois les orbites de type I sauf celles de (2,3) et de (3,4) :



Les arêtes (2,3) et (-3,1) sont disjointes de (s,-s) même si s = 4.

Si 2s est égal à 1 modulo 3, donc s ⩾ 5, on regroupe trois par trois les arêtes (a,-a) avec a ≠ 1,2,s, puis les arêtes (-a,2s-a) avec a ≠ 1,2,s. Les arêtes (1,-1),(2,-2) et (s,-s) forment un couplage, de même (-1,2s-1),(-2,2s-2) et (3,4) :



On regroupe ensuite trois par trois les orbites de type I autres que celle de (3,4).

2s ne peut pas être un multiple de 3, sinon n = 4s est aussi un multiple de 3.

Le théorème 4.16 et son corollaire permettent également de démontrer la propriété suivante :

théorème 4.19

> Si n ⩾ 7 n'est pas divisible par 3, et si (n-1)(n-2)/6 est égal à u+2v+3w, où u,v,w sont des entiers positifs ou nuls, K_n^3 peut être décomposé en hyperétoiles HE(1,3,1), HE(1,3,2) et HE(1,3,3) de telle sorte que tout sommet x soit le centre de u HE(1,3,1), v HE(1,3,2) et w HE(1,3,3).

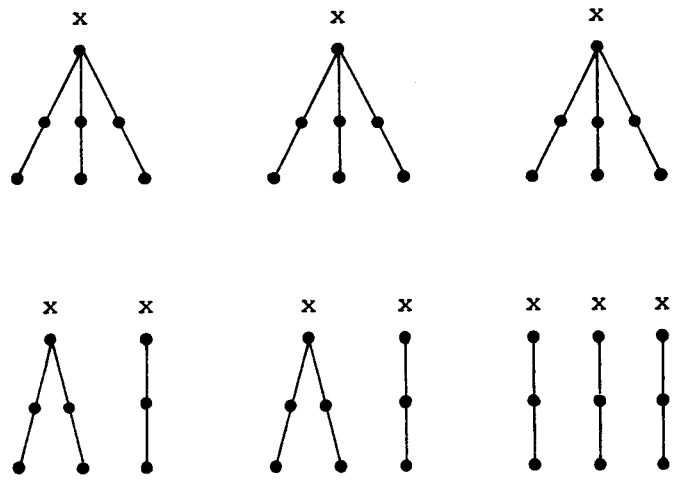
Si n n'est pas divisible par 3, n-1 ou n-2 est divisible par 3 donc (n-1)(n-2)/6 est entier.

(n-1)(n-2)/2 est le nombre d'arêtes de K^2_{n-1}, et (n-1)(n-2)/6 est le nombre d'orbites de $\mathbb{Z}_n - \{0\}$. Si on peut trouver w couplages de trois arêtes, v couplages de deux arêtes et u arêtes isolées en prenant une arête dans chacune des u+2v+3w orbites, on obtient, en ajoutant le point 0, w hyperétoiles HE(1,3,3) de centre 0, v hyperétoiles HE(1,3,2) de centre 0, et u hyperétoiles HE(1,3,1) de centre 0, c'est-à-dire u triplets contenant 0. Ces u+v+w hyperétoiles n'ont aucune arête commune. Si, pour tout $x \in \mathbb{Z}_n$, on ajoute x à tous les points des hyperétoiles comme dans la démonstration du théorème 4.11, on obtient une décomposition de K^3_n en hyperétoiles disjointes de degré 1,2 ou 3, telle que tout sommet x soit le centre de u hyperétoiles de degré 1, v hyperétoiles de degré 2 et w hyperétoiles de degré 3.

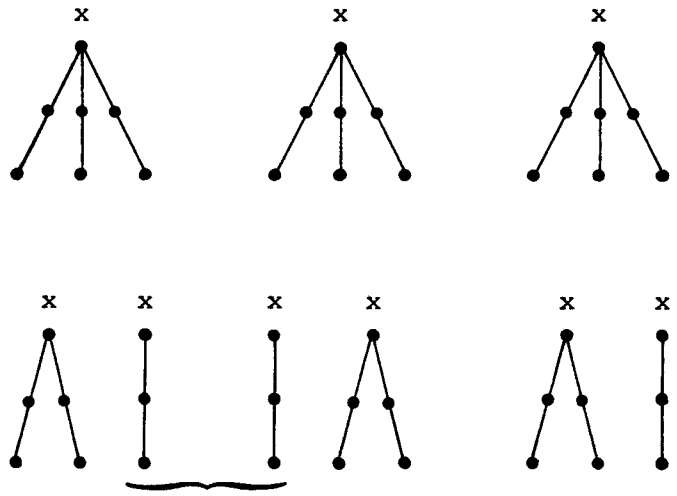
Si (n-1)(n-2)/6 = 3w, n est égal à 1 ou 2 modulo 9 et au moins égal à 10, donc, d'après le théorème 4.18, il existe une décomposition cyclique de K^3_n en nw hyperétoiles HE(1,3,3). Comme une décomposition cyclique est régulière, chacun des n sommets est le centre de w hyperétoiles HE(1,3,3).

Si u',v',w' sont des entiers tels que u'+2v'+3w' = 3w : pour chaque sommet x, on choisit w-w' hyperétoiles HE(1,3,3) de centre x, et on les sépare en hyperétoiles HE(1,3,2) et HE(1,3,1) de la façon suivante :

Si $v' \leqslant w-w'$, v' hyperétoiles HE(1,3,3) sont séparées en une hyperétoile HE(1,3,2) et une hyperétoile HE(1,3,1), les autres sont séparées en trois hyperétoiles HE(1,3,1) :



Si v' > w-w', les w-w' hyperétoiles HE(1,3,3) sont séparées en une hyperétoile HE(1,3,2) et une hyperétoile HE(1,3,1), puis on regroupe deux à deux 2(v'-w+w') hyperétoiles HE(1,3,1) en hyperétoiles HE(1,3,2) de centre x :



<u>Si (n-1)(n-2)/6 = 3w+1 ou 3w+2</u>, il n'existe pas de 3-décomposition cyclique de K_n^3 mais nous allons regrouper

trois par trois les orbites de $\mathbb{Z}_n - \{0\}$, à l'exception d'une ou deux. Les groupes de trois permettront de construire w hyperétoiles de degré 3 et de centre 0, et il restera une hyperétoile de degré 1 ou 2.

Comme dans la démonstration du théorème 4.18, distinguons les cas où n est impair, où n est divisible par 4 et où n est pair mais non divisible par 4.

si n est impair : $n = 2t+1$

avec $t = 0$ ou 2 modulo 3 et $t \geqslant 5$

Il y a t orbites de type II, les autres sont de type I (proposition 4.13). Si t est divisible par 3, on regroupe trois par trois les arêtes (a,-a), puis trois par trois les orbites de type I, et il reste une ou deux orbites de type I. Si t est égal à 2 modulo 3 et si $(n-1)(n-2)/6 = 3w+2$, on regroupe trois par trois les arêtes (a,-a) sauf deux, puis trois par trois les orbites de type I. Si $(n-1)(n-2)/6 = 3w+1$, on regroupe trois par trois les arêtes (a,-a) sauf (1,-1) et (2,-2) que l'on associe avec (3,4), puis trois par trois les orbites de type I sauf celle de (3,4), et il en reste une.

si n est pair, non divisible par 4 : $n = 4s+2$, $s \geqslant 2$

Il y a 2s orbites de type II, 2s orbites de type III, les autres sont de type I (proposition 4.14). De la même façon que pour le théorème 4.18, on construit des groupes de trois arêtes (a,-a), puis de trois arêtes (-a,2s-a+1). Si 2s est égal à 1 modulo 3, il reste les arêtes (1,-1) et (-2,2s-1), que l'on associe à (-4,-3). On groupe ensuite trois par trois les orbites de type I sauf éventuellement celle de (-4,-3), et il en reste une ou deux.

si n est divisible par 4 : $n = 4s$, $s \geqslant 4$

Il y a 2s-2 orbites de type II, 2s-2 orbites de type III, une orbite de type IV, les autres sont de type I.

On regroupe trois par trois les arêtes (a,-a) sauf (s,-s), puis les arêtes (-a,2s-a) sauf (s,-s). Suivant les valeurs de s, il ne reste plus d'orbites de type II ou III et on associe (s,-s), (2,3) et (-3,1), ou il reste (1,-1), (2,-2), associées à (s,-s), et (-1,2s-1), (-2,2s-2), associées à (3,4). On regroupe trois par trois les autres orbites de type I, sauf une ou deux.

Quelle que soit la valeur de n, on a donc décomposé K_n^3 en hyperétoiles, de telle sorte que tout sommet x soit le centre de w hyperétoiles de degré 3 et d'une hyperétoile de degré 1 ou 2, suivant que (n-1)(n-2)/6 est égal à 3w+1 ou à 3w+2.

Si u',v',w' sont trois entiers tels que u'+2v'+3w' = (n-1)(n-2)/6, on fractionne les hyperétoiles de centre x comme dans le cas où K_n^3 était 3-décomposable.

Si v' est nul et si (n-1)(n-2)/6 est égal à 3w+2, u' est au moins égal à 2 et on sépare l'hyperétoile de degré 2 en deux hyperétoiles de degré 1, puis on procède comme précédemment avec 3w = 3w' + (u'-2).

Si u' est nul et si (n-1)(n-2)/6 est égal à 3w+1, v' est au moins égal à 2. On sépare une hyperétoile de degré 3 en une hyperétoile de degré 1, que l'on regroupe avec l'hyperétoile de degré 1 déjà construite, et une hyperétoile de degré 2. On ne considère plus alors que les w-1 hyperétoiles de degré 3 et la relation 3(w-1) = 3w'+2v'.

Dans les autres cas, on se ramène à la construction précédente grâce aux relations :

$$3w+1 = 3w'+2v'+u' \iff 3w = 3w'+2v'+(u'-1)$$

$$3w+2 = 3w'+2v'+u' \iff 3w = 3w'+2(v'-1)+u'$$

en écartant l'hyperétoile de degré 1 ou 2.

4.4.3. Décompositions utilisant les corps finis

On peut considérer les sommets de K_n^3 et de K_n^2 comme les éléments d'un groupe abélien quelconque. On définit les orbites de la même façon que dans $\mathbb{Z}_n$, et le théorème 4.11 reste vrai si le groupe ne contient aucun élément d'ordre 3. En particulier, on peut utiliser le groupe additif du corps de Galois $GF(2^q)$: les c-décompositions de K_n^3 ainsi obtenues seront appelées c-décompositions de Galois.

On montre facilement que toute puissance de 2, sauf 1, est égale à 2 modulo 6 si l'exposant est impair, à 4 modulo 6 si l'exposant est pair, et que toute puissance d'un nombre premier supérieur à 3 est égale à 1 ou à 5 modulo 6.

Définissons le graphe G dont les sommets sont les éléments de $GF(2^q) - \{0,1\}$, et dont les arêtes sont les couples (x,x'), $x \neq x'$, vérifiant l'une des cinq relations suivantes :

(1) $x + x' = 1$

(2) $xx' + x' = 1$

(3) $xx' + x = 1$

(4) $xx' = 1$

(5) $xx' + x + x' = 0$

proposition 4.20

Si q est impair, 2^q est égal à 6c+2 et les composantes connexes de G sont c graphes complets K_6^2 (sans les boucles).

Si q est pair, 2^q est égal à 6c+4 et les composantes connexes de G sont c graphes complets K_6^2 et un graphe complet K_2^2.

En effet, chacune des cinq relations ci-dessus définit un couplage parfait dans G à cause de la structure de corps de $GF(2^q)$. Par exemple, les couples (x,x') tels que x+x' = 1 sont les couples (x,1-x), et la relation xx' = 1 définit les couples (x,1/x).

Pour tout sommet x de G, les cinq relations définissent cinq autres sommets x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 tels que :

(1) $x + x_1 = 1$

(2) $xx_2 + x_2 = 1$

(3) $xx_3 + x = 1$

(4) $xx_4 = 1$

(5) $xx_5 + x + x_5 = 0$

Nous allons voir que x et ces cinq sommets forment une composante connexe de G.

Remarquons d'abord que 0 et 1 ne sont pas des racines du polynôme X^2+X+1. Si ce polynôme possède des racines, ce sont donc des sommets de G.

Si x est une racine de X^2+X+1, les six sommets x,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 sont confondus en deux sommets x et y qui sont les deux racines de X^2+X+1 :

$x^2+x+1 = 0 \implies x = x_2 = x_3$

$(X-x)(X-y) = X^2+X+1 \implies x+y = 1$ et $xy = 1$

$\implies y = x_1 = x_4 = x_5$

Si x n'est pas une racine de X^2+X+1, les six sommets sont tous distincts :

- si $x_1 = x_2 = y$:

$x+y = 1$ et $xy+y = 1 \implies x = xy \implies x = 0$ ou $y = 1$

or 0 et 1 ne sont pas des sommets de G.

- si $x_1 = x_3 = y$:

$x+y = 1$ et $xy+x = 1 \implies y = xy \implies y = 0$ ou $x = 1$

- si $x_1 = x_4 = y$:

$x+y = 1$ et $xy = 1 \Longrightarrow$ x et y sont les racines de X^2+X+1

- si $x_1 = x_5 = y$:

$x+y = 1$ et $xy+x+y = 0 \Longrightarrow xy = 1$

x et y sont les racines de X^2+X+1

- si $x_2 = x_3 = y$:

$xy+x = 1$ et $xy+y = 1 \Longrightarrow x = y \Longrightarrow$ x est une racine de X^2+X+1

- si $x_2 = x_4 = y$:

$xy+y = 1$ et $xy = 1 \Longrightarrow$ $y = 0$ mais alors $xy = 0$: impossible

- si $x_2 = x_5 = y$:

$xy+y = 1$ et $xy+x+y = 0 \Longrightarrow x = 1$ mais alors $xy+y = y+y = 0$

- si $x_3 = x_4 = y$:

$xy+x = 1$ et $xy = 1 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow$ $xy = 0$ impossible

- si $x_3 = x_5 = y$:

$xy+x = 1$ et $xy+x+y = 0 \Longrightarrow y = 1 \Longrightarrow x+x = 1$ impossible

- si $x_4 = x_5 = y$:

$xy = 1$ et $xy+x+y = 0 \Longrightarrow x+y = 1 \Longrightarrow$ x et y sont les racines de X^2+X+1.

- si $x = x_1$:

$x+x = 1$ ce qui est impossible

- si $x = x_2$:

$x^2+x = 1$ donc x est une racine de X^2+X+1

- si $x = x_3$:

$x^2+x = 1$, x est une racine de X^2+X+1

- si $x = x_4$:

$x^2 = 1$ donc $x = 1$, or 1 n'est pas un sommet de G

- si $x = x_5$:

$x^2+x+x = 0$ donc $x^2 = 0$ et $x = 0$, or 0 n'est pas un sommet de G

Le tableau suivant donne les numéros des relations liant entre eux deux des six sommets. Comme cinq arcs seulement peuvent partir de chaque sommet de G, les six sommets forment un graphe complet K_6^2 qui est une composante connexe de G.

	x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x		1	2	3	4	5
x_1	1		4	5	2	3
x_2	3	4		2	5	1
x_3	2	5	3		1	4
x_4	4	3	5	1		2
x_5	5	2	1	4	3	

On démontre facilement les relations entre les sommets. Remarquons d'abord que (1),(4) et (5) sont symétriques, alors que (2) et (3) sont la réciproque l'une de l'autre. Si x' et x" sont liés par la relation (2), x" et x' sont liés par la relation (3).

ligne x_1 du tableau :

(1) $x + x_1 = 1 \Longrightarrow x = 1-x_1 \Longrightarrow x = x_1+1$ (1=-1 dans $\mathbb{Z}_2$)

(2) $(x_1+1)x_2 + x_2 = 1 \Longrightarrow x_1x_2+x_2+x_2 = 1$
$\Longrightarrow x_1x_2 = 1$ (4)
ce qui explique le (4) dans la case (x_2,x_1)

(3) $(x_1+1)x_3+x_1+1 = 1 \Longrightarrow x_1x_3+x_3+x_1+1 = 1$
$\Longrightarrow x_1x_3+x_1+x_3 = 0$ (5)
même chose en intervertissant x_1 et x_3

(4) $(x_1+1)x_4 = 1 \Longrightarrow x_1x_4+x_4 = 1$ (2)
donc x_4 et x_1 sont liés par la relation (3)

(5) $(x_1+1)x_5+(x_1+1)+x_5 = 0 \Longrightarrow x_1x_5+x_5+x_1+1+x_5 = 0$
$\Longrightarrow x_1x_5+x_1 = 1$ (3)
donc x_5 et x_1 sont liés par la relation (2)

ligne x_2 :

(2) $xx_2+x_2 = 1 \Longrightarrow xx_2 = 1-x_2 = 1+x_2 \Longrightarrow x = (1+x_2)/x_2$

(3) $\frac{1+x_2}{x_2} x_3 + \frac{1+x_2}{x_2} = 1 \Longrightarrow (1+x_2)x_3+1+x_2 = x_2$
$\Longrightarrow x_2x_3+x_3 = 1$ (2)

(4) $\frac{1+x_2}{x_2} x_4 = 1 \Longrightarrow (1+x_2)x_4 = x_2$

$\Longrightarrow x_2x_4+x_2+x_4 = 0$ (5)

(5) $\frac{1+x_2}{x_2} x_5 + \frac{1+x_2}{x_2} + x_5 = 0 \Longrightarrow (1+x_2)x_5+1+x_2+x_2x_5=0$

$\Longrightarrow x_5+x_2x_5+1+x_2+x_2x_5 = 0 \Longrightarrow x_2+x_5 = 1$ (1)

ligne x_3 :

(3) $xx_3+x = 1 \Longrightarrow x = \frac{1}{1+x_3}$

(4) $\frac{x_4}{1+x_3} = 1 \Longrightarrow x_4 = 1+x_3 \Longrightarrow x_3+x_4 = 1$ (1)

(5) $\frac{x_5}{1+x_3} + \frac{1}{1+x_3} + x_5 = 0 \Longrightarrow x_5+1+ x_5(1+x_3) = 0$

$\Longrightarrow x_3x_5 = 1$ (4)

ligne x_4 :

(4) $xx4 = 1 \Longrightarrow x = \frac{1}{x_4}$

(5) $\frac{x_5}{x_4} + \frac{1}{x_4} + x_5 = 0 \Longrightarrow x_5+1+x_4x_5 = 0$

$\Longrightarrow x_4x_5+x_5 = 1$ (2)

On complète ensuite le tableau par symétrie.

Les sommets de G sont donc répartis en composantes connexes qui sont des K_6^2 , plus éventuellement un K_2^2 si X^2+X+1 possède des racines.

Si q est impair, 2^q est égal à 6c+2, et G a 6c sommets. Par conséquent, G est l'union de c graphes complets K_6^2 , et le K_2^2 n'existe pas : X^2+X+1 est irréductible.

Par contre, si q est pair, 2^q est de la forme 6c+4 et G a 6c+2 sommets. Nous avons donc démontré un résultat supplémentaire :

théorème 4.21

Le polynôme X^2+X+1 est irréductible dans $GF(2^q)$ si et seulement si q est impair.

Par exemple, si x est une racine de X^4+X+1, x^2+x et x^2+x+1 sont les racines de X^2+X+1 dans GF(4).

En choisissant un sommet dans chacune des composantes K_6^2 de G, on obtient le résultat suivant :

corollaire 4.22

Il existe un ensemble stable S de c sommets dans G, c'est-à-dire un ensemble de c éléments de $GF(2^q)-\{0,1\}$ qui ne sont liés entre eux par aucune des cinq relations de la proposition 4.20

Cet ensemble S va servir à construire une c-décomposition de Galois dans $K_{2^q}^3$.

théorème 4.23

Si 6c+2 est une puissance de 2, il existe une c-décomposition de Galois de K_{6c+2}^3.

Soit S l'ensemble stable du corollaire 4.22. Pour tout élément a de $GF(2^q)-\{0\}$, on pose :

$$C_a = \{ (ax,ax+a) \mid x \in S \}$$

C_a est un couplage :

- si ax = ax', alors x = x'
- si ax = ax'+a, x et x' vérifient la relation (1) x + x' = 1, ce qui est contraire à la définition de S.

Deux arêtes quelconques de l'union des C_a appartiennent à deux orbites différentes :

L'orbite de (ax,ax+a) contient (a,ax) et (a,ax+a). Si l'arête (a'x',a'x'+a') appartient à cette orbite :

- soit a'x' = ax et a'x'+a' = ax+a : alors a = a', x = x'
- soit a'x' = ax+a et a'x'+a' = ax :

ax = a'x'+a' = ax+a+a' $\Longrightarrow$ a+a' = 0 $\Longrightarrow$ a = a' $\Longrightarrow$ x+x' = 1 (1)

or x et x' ne vérifient pas la relation (1)

- soit a'x' = a et a'x'+a' = ax :

a'x'+a' = a'x'x $\Longrightarrow$ xx'+x' = 1 (2)

or x et x' ne vérifient pas la relation (2)

- soit a'x' = ax et a'x'+a' = a :

a'x' = (a'x'+a')x $\Longrightarrow$ xx'+x+x' = 0 (5)

- soit a'x' = a et a'x'+a' = ax+a :

a'x'+a' = a'x'x+a'x' $\Longrightarrow$ xx' = 1 (4)

- soit a'x' = ax+a et a'x'+a' = a :

a'x' = (a'x'+a')x + (a'x'+a') $\Longrightarrow$ xx'+x = 1 (3)

Il y a 2^q-1 = 6c+1 couplages C_a, chacun contient c arêtes, l'union des C_a contient donc c(6c+1) arêtes, au plus une par orbite. Comme il y a également (n-1)(n-2)/6 = c(6c+1) orbites, chaque orbite est représentée une fois et une seule, et, d'après le théorème 4.11 généralisé au cas des corps finis, il existe une c-décomposition de Galois de K^3_{6c+2}.

Si q est pair, 2^q est égal à 6c+4, et le nombre de triplets (6c+4)(2c+1)(3c+2) n'est divisible par c que si c est égal à 2,4 ou 8. On va montrer qu'il est possible de décomposer K^3_{6c+4} en deux sortes d'hyperétoiles.

théorème 4.24

Si 6c+4 est une puissance de 2, K^3_{6c+4} peut être décomposé en hyperétoiles HE(1,3,c+1) et HE(1,3,c) de telle sorte que tout sommet soit le centre de 2c+1 hyperétoiles HE(1,3,c+1) et de 4c+2 hyperétoiles HE(1,3,c).

Soient x_1 et x_2 les racines du polynôme X^2+X+1. x_1 et x_2 vérifient : $x_1+x_2 = 1$, $x_1x_2 = 1$, $x_1^2 = x_1+1$, et $x_2^2 = x_2+1$.

Partageons $GF(2^q)-\{0\}$ en deux sous-ensembles disjoints T et V tels que $|T| = 2c+1$ et $|V| = 4c+2$, en plaçant x_1 et x_2 dans V. Définissons les couplages suivants :

$\forall\, a \in T \qquad C_a = \{ (ax,ax+a) \mid x \in S \cup \{x_1\} \}$

$\forall\, a \in V \qquad C_a = \{ (ax,ax+a) \mid x \in S \}$

On montre de la même façon que pour le théorème 4.23 que les C_a sont des couplages et que leur union contient une arête de chaque orbite, on peut donc construire la décomposition annoncée.

théorème 4.25

Si 6c+4 est une puissance de 2, K^3_{6c+4} peut être décomposé en hyperétoiles HE(1,3,2c+1) et HE(1,3,c) de telle sorte que tout sommet soit le centre d'une hyperétoile HE(1,3,2c+1) et de 6c+3 hyperétoiles HE(1,3,c).

On procède comme pour les théorèmes précédents, en définissant les 6c+3 couplages :

$$C_a = \{ (ax,ax+a) \mid x \in S \} \quad \forall a \neq 0 \quad |C_a| = |S| = c$$

qui permettent de construire, pour tout sommet de K^3_{6c+4}, 6c+3 hyperétoiles de degré c dont ce sommet est le centre.

Ces couplages contiennent c(6c+3) arêtes appartenant à des orbites différentes, il reste donc 2c+1 orbites non représentées et il suffit de construire un couplage en prenant une arête dans chacune de ces 2c+1 orbites. On obtiendra ainsi, pour tout sommet de K^3_{6c+4}, une hyperétoile de degré 2c+1 dont ce sommet est le centre.

Soient x_1 et x_2 les deux racines du polynôme X^2+X+1. L'orbite de l'arête (x_1,x_2) est le triangle dont les sommets sont $1,x_1$ et x_2 car $-1 = 1$ dans $GF(2^q)$, et $x_1+x_2 = 1$. De même, pour tout $b \neq 0$, l'orbite de (bx_1,bx_2) contient les arêtes (b,bx_1) et (b,bx_2).

Pour tout point $b \neq 0$, on peut donc définir deux autres points bx_1 et bx_2, différents de b car x_1 et x_2 sont différents de 1, et tels que les arêtes (b,bx_1), (b,bx_2) et (bx_1,bx_2) appartiennent à la même orbite. On obtient ainsi 2c+1 orbites disjointes. En effet, si $b' = bx_1$, on a :

$$b'x_1 = bx_1^2 = bx_2 \quad \text{et} \quad b'x_2 = bx_1x_2 = b$$

Les triangles $[b,bx_1,bx_2]$ et $[b',b'x_1,b'x_2]$ sont donc confondus. C'est la même chose si $b' = bx_2$.

Ces orbites sont les 2c+1 orbites non représentées par les couplages C_a :

Si (bx_1,bx_2) est une arête $(ax,ax+a)$ où x est un élément de S et a un élément non nul, on a par exemple :

$$bx_1 = ax \text{ et } bx_2 = ax+a$$
$$\Longrightarrow a = b(x_2-x_1) = b(x_1+x_2) = b$$
$$\Longrightarrow x = x_1$$

or l'ensemble S, auquel x appartient, ne contient ni x_1 ni x_2.

En prenant une arête dans chacune de ces 2c+1 orbites, on obtient donc un couplage qui permet de construire une hyperétoile de degré 2c+1 et de centre x pour tout x.

On peut également considérer le corps fini $GF(p^q)$ où p est un nombre premier supérieur à 3 : p^q est égal à 6c+1 ou à 6c+5.

Soit H le graphe dont les sommets sont les éléments de $GF(p^q)-\{0,1\}$ et dont les arcs (x,x'), avec $x \neq x'$, sont définis par l'une des six relations suivantes :

(6) $x' = x+1$

(7) $x' = 1-x$

(8) $x' = 1/x$

(9) $x' = 1/(1-x)$

(10) $x' = x/(x-1)$

(11) $x' = (x-1)/x$

Si x est différent de 0 ou 1, les relations (6) à (11) définissent six sommets : $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Voyons dans quelles conditions ces sommets sont différents.

$x = x_1 \iff x = x+1$ impossible

$x = x_2 \iff x = 1-x \iff x = \frac{1}{2}$

$x = x_3 \iff x = 1/x \iff x = -1$

$x = x_4 \iff x = 1/(1-x) \iff x^2-x+1 = 0$

$x = x_5 \iff x = x/(x-1) \iff x = 2$

$x = x_6 \iff x = (x-1)/x \iff x^2-x+1 = 0$

$x_1 = x_2 \iff x+1 = 1-x \iff x = 0$ (exclu)

$x_1 = x_3 \iff x+1 = 1/x \iff x^2+x-1 = 0$

$x_1 = x_4 \iff x+1 = 1/(1-x) \iff x = 0$ (exclu)

$x_1 = x_5 \iff x+1 = x/(x-1) \iff x^2-x-1 = 0$

$x_1 = x_6 \iff x+1 = (x-1)/x \iff x^2+1 = 0$

$x_2 = x_3 \iff 1-x = 1/x \iff x^2-x+1 = 0$

$x_2 = x_4 \iff 1-x = 1/(1-x) \iff x = 2$

$x_2 = x_5 \iff 1-x = x/(x-1) \iff x^2-x+1 = 0$

$x_2 = x_6 \iff 1-x = (x-1)/x \iff x = -1$

$x_3 = x_4 \iff 1/x = 1/(1-x) \iff x = ½$
$x_3 = x_5 \iff 1/x = x/(x-1) \iff x^2-x+1 = 0$
$x_3 = x_6 \iff 1/x = (x-1)/x \iff x = 2$

$x_4 = x_5 \iff 1/(1-x) = x/(x-1) \iff x = -1$
$x_4 = x_6 \iff 1/(1-x) = (x-1)/x \iff x^2-x+1 = 0$

$x_5 = x_6 \iff x/(x-1) = (x-1)/x \iff x = ½$

Si $x = 2$, on a donc :

$$x = x_5 = 2$$
$$x_2 = x_4 = -1$$
$$x_3 = x_6 = ½$$

De plus, si $p^q = 5$, c'est-à-dire si $p = 5$ et $q = 1$, 2 est une racine de X^2+1 et de X^2+X-1, on a donc $x_1 = x_3 = x_6 = ½ = 3$.

Si $x = ½$, on a :

$$x = x_2 = ½$$
$$x_3 = x_4 = 2$$
$$x_5 = x_6 = -1$$

Si $p^q = 5$, $½ = 3$ est une racine de X^2+1 et de X^2-X-1, donc $x_1 = x_6 = x_5 = -1$.

Si $x = -1$:

$$x = x_3 = -1$$
$$x_2 = x_6 = 2$$
$$x_4 = x_5 = ½$$

$x_1 = 0$ n'est pas un sommet de H.

Si x est une racine de X^2+1 :

$$x_1 = x_6$$

L'autre racine est $x_3 = 1/x = -x$.

Si x est une racine de X^2+X-1 :

$$x_1 = x_3$$

et $x_1 = x_3 = x+1 = 1/x$ est une racine de X^2-X+1.

Si x est une racine de X^2-X-1 :

$$x_1 = x_5$$

et $x_2 = 1-x$ est l'autre racine.

Si x est une racine de X^2-X+1 :

$$x = x_4 = x_6$$

$$x_2 = x_3 = x_5$$

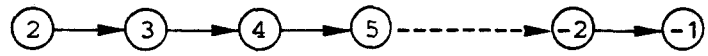
$x_2 = 1-x$ est l'autre racine de X^2-X+1, donc le sous-graphe de H dont les sommets sont $x, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ est réduit à une seule arête joignant les deux racines de X^2-X+1.

Si x est différent de $0, 1, 2, -1, \frac{1}{2}$, et si x n'est pas une racine de X^2-X+1, les sommets $x, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ de H sont tous différents.

Le tableau suivant donne les numéros des relations qui les lient entre eux :

	x	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x		7	8	11	10	9
x_2	7		11	8	9	10
x_3	8	9		10	11	7
x_4	9	8	10		7	11
x_5	10	11	9	7		8
x_6	11	10	7	9	8	

La relation (6) définit un chemin hamiltonien dans H :



qui contient l'arc $x \longrightarrow x_1$.

Si on enlève les arcs de H définis par la relation (6), on obtient un graphe partiel formé d'un triangle K_3^2 dont les sommets sont 2,-1 et ½, d'une arête isolée joignant les deux racines de X^2-X+1 si elles existent, et de d graphes complets K_6^2.

Tout ensemble S de d sommets, un par graphe K_6^2 , qui ne contient pas à la fois le sommet y et le sommet y+1, est donc stable. Si S ne contient pas 3, $S \cup \{2\}$ est stable.

Le nombre d de graphes complets K_6^2 dans H est égal à c si $p^q = 6c+5$, à c-1 si $p^q = 6c+1$. En effet :

- si $p^q = 6c+5$:

le graphe partiel H' obtenu en enlevant les arcs de H définis par (6) a 6c+3 sommets comme H, et ses composantes connexes sont c graphes complets K_6 et le triangle K_3 dont les sommets sont 2,-1,½. Les racines de X^2-X+1 n'existent pas.

- si $p^q = 6c+1$:

H' a $6c-1 = 6(c-1)+5$ sommets, ses composantes connexes sont c-1 graphes complets K_6, le triangle K_3 et l'arête K_2 reliant les deux racines de X^2-X+1.

Nous avons donc démontré une propriété du polynôme X^2-X+1 :

proposition 4.26

> Le polynôme X^2-X+1 est irréductible dans $GF(p^q)$, p étant un nombre premier supérieur à 3, si et seulement si p^q est égal à 5 modulo 6.

Si $p^q = 6c+5$, H' est donc formé de c graphes K_6 et du triangle K_3 : nous avons vu qu'il contenait un ensemble stable de c+1 sommets.

proposition 4.27

> Si $p^q = 6c+5$, il existe un sous-ensemble S de $GF(p^q)-\{0,1,2\}$, tel que $S \cup \{2\}$ soit un ensemble stable de c+1 sommets de H.

Comme précédemment, nous allons définir des couplages à l'aide de S.

Partageons $GF(p^q)-\{0\}$ en deux sous-ensembles disjoints T et V tels que : $a \in T \iff -a \in V$

Définissons les couplages suivants :

$a \in T \Longrightarrow C_a = \{ \ (-ax,a-ax) \ | x \in S \cup \{2\} \ \}$

$a \in V \Longrightarrow C_a = \{ \ (-ax,a-ax) \ | x \in S \ \}$

Nous allons montrer que l'union de ces couplages contient une arête de chaque orbite.

- $\forall$ a, C_a est un couplage :

si -ax = -ax' : x = x'

si -ax = a-ax' : x' = x+1 (6)

or x et x' appartiennent au stable $S\cup\{2\}$, et ne vérifient donc aucune des relations (6) à (11).

- L'orbite de (-ax,a-ax) contient (ax,a) et (ax-a,-a). Si (-a'x',a'-a'x') appartient à cette orbite :

- soit -ax = -a'x' et a-ax = a'-a'x', alors a = a' et x = x'

- soit -ax = a'-a'x' et a-ax = -a'x' :

$-a'x' = a-ax \Longrightarrow -ax = a'+a-ax \Longrightarrow a'+a = 0 \Longrightarrow a' = -a$

$a-ax = -a'x' \Longrightarrow a-ax = ax' \Longrightarrow x' = 1-x$ (7)

- soit $-a'x' = ax$ et $a'-a'x' = a$:

$-a'x' = ax \Longrightarrow a'+ax = a \Longrightarrow a' = a(1-x)$

$\Longrightarrow -a(1-x)x' = ax \Longrightarrow x' = x/(x-1)$ (10)

- soit $-a'x' = a$ et $a'-a'x' = ax$:

$\Longrightarrow a'+a = ax \Longrightarrow a' = a(x-1)$

$\Longrightarrow -a(x-1)x' = a \Longrightarrow x' = 1/(1-x)$ (9)

- soit $-a'x' = ax-a$ et $a'-a'x' = -a$:

$\Longrightarrow a'+ax-a = -a \Longrightarrow -a' = ax$

$\Longrightarrow axx' = ax-a \Longrightarrow xx' = x-1 \Longrightarrow x' = (x-1)/x$ (11)

- soit $-a'x' = -a$ et $a'-a'x' = ax-a$:

$\Longrightarrow a'-a = ax-a \Longrightarrow a' = ax$

$\Longrightarrow -axx' = -a \Longrightarrow x' = 1/x$ (8)

Comme x et x' ne vérifient aucune des relations (6) à (11), (-ax,a-ax) et (-a'x',a'-a'x') appartiennent à des orbites différentes si $a \neq a'$ ou $x \neq x'$.

Il y a 3c+2 couplages de c+1 arêtes et 3c+2 couplages de c arêtes, puisque $|T| = |V| = 3c+2$ et $|S| = c$, l'union des C_a contient donc $(3c+2)(2c+1)$ arêtes appartenant à des orbites différentes. Comme il y a également $(p^q-1)(p^q-2)/6 = (3c+2)(2c+1)$ orbites, toutes les orbites sont représentées.

En définissant pour chaque couplage C_a p^q hyperétoiles comme dans les décomposition cycliques, on démontre :

théorème 4.28

> Si 6c+5 est une puissance d'un nombre premier, K^3_{6c+5} peut être décomposé en hyperétoiles HE(1,3,c) et HE(1,3,c+1) de telle sorte que tout sommet x soit le centre de 3c+2 hyperétoiles de degré c et de 3c+2 hyperétoiles de degré c+1.

Ce résultat va permettre de construire des décompositions de K_n^3 :

théorème 4.29

> Si 6c+5 est une puissance d'un nombre premier, il existe une décomposition régulière de K_{12c+10}^3 en hyperétoiles de degré 3c+2.

Comme dans le chapitre 3, nous partageons l'ensemble X des n = 12c+10 sommets de K_n^3 en deux sous-ensembles disjoints A et B de 6c+5 sommets. Les arêtes de K_n^3 sont donc du type AAA, BBB, AAB ou ABB.

Le résultat du théorème précédent permet de répartir les triplets de type AAA en hyperétoiles de degré c ou c+1, de telle sorte que tout point x de A soit le centre de 3c+2 hyperétoiles de degré c+1, notées $D_1(x),..,D_{3c+2}(x)$, et de 3c+2 hyperétoiles de degré c, notées $E_1(x),..,E_{3c+2}(x)$.

D'autre part, d'après le théorème 2.4, les couples de points de B peuvent être répartis en 3c+2 couplages de 2c+1 arêtes $\{e_1^i,..,e_{2c+1}^i\}$ avec i = 1,..,3c+2, en 3c+2 couplages de 2c+2 arêtes $\{f_1^i,..,f_{2c+2}^i\}$ i = 1,..,3c+2, et en 2c+2 couplages de 3c+2 arêtes $\{g_1^j,..,g_{3c+2}^j\}$, j = 1,..,2c+2. En effet :

$$\binom{6c+5}{2} = (3c+2)(2c+1)+(3c+2)(2c+2)+(2c+2)(3c+2)$$

et $\quad 6c+5 \geq \max\{2(2c+1),2(2c+2),2(3c+2)\}$

donc K_{6c+5}^2 peut être décomposé en 3c+2 HE(0,2,2c+1), 3c+2 HE(0,2,2c+1) et 2c+2 HE(0,2,3c+2).

Les triplets AAA et ABB vont donc être répartis en hyperétoiles HE(1,3,3c+2) de la façon suivante :

$D_i(x) \cup \left\{ \{x\} \cup e_1^i , .. , \{x\} \cup e_{2c+1}^i \right\}$

$E_i(x) \cup \left\{ \{x\} \cup f_1^i , .. , \{x\} \cup f_{2c+2}^i \right\}$

$\left\{ \{x\} \cup g_1^j , .. , \{x\} \cup g_{3c+2}^j \right\}$

pour tous les points x de A, pour i = 1,..,3c+2 et pour j = 1,..,2c+2.

On procède ensuite de la même façon pour les triplets AAB et BBB en échangeant A et B. On obtient ainsi une décomposition régulière de K^3_{12c+10} en hyperétoiles de degré 3c+2.

En appliquant la méthode du théorème 4.28, on obtient un nouveau résultat :

théorème 4.30

Si 6c+1 est une puissance d'un nombre premier, K^3_{6c+1} peut être décomposé en hyperétoiles de degré c-1, c et c+1 de telle sorte que chaque sommet soit le centre de 2c hyperétoiles HE(1,3,c-1), de 3c HE(1,3,c) et de c HE(1,3,c+1).

Le graphe H défini précédemment à l'aide des relations (6) à (11) est formé d'un triangle dont les sommets sont 2,-1 et ½, d'une arête reliant les deux racines de X^2-X+1, de c-1 graphes complets K^2_6 et d'un chemin hamiltonien dont chaque arc est de la forme (x,x+1). Il existe dans H un ensemble S de c-1 sommets tel que $S \cup \{2\}$ soit stable. Si, de plus, y est une racine de X^2-X+1 et si S ne contient ni y-1 ni y+1, $S \cup \{2,y\}$ est stable.

On partage GF(6c+1)-{0} en trois sous-ensembles disjoints X_1, X_2, X_3 contenant respectivement c,2c,3c sommets et on définit des couplages :

$a \in X_1 \Longrightarrow C_a = \{ (-ax, a-ax) \mid x \in S \cup \{2,y\} \}$

$a \in X_2 \Longrightarrow C_a = \{ (-ax, a-ax) \mid x \in S \}$

$a \in X_3 \Longrightarrow C_a = \{ (-ax, a-ax) \mid x \in S \cup \{2\} \}$

Comme les éléments de $S \cup \{2,y\}$ ne sont liés entre eux par aucune des relations (6) à (11), on montre de la même façon que pour le théorème 4.28 que les C_a sont des couplages et que leur union contient au plus une arête de chaque orbite. Toutes les orbites sont représentées, car il y a $c(6c-1)$ orbites et $c(c+1)+2c(c-1)+3c^2 = c(6c-1)$ arêtes dans les couplages, on peut donc construire la décomposition demandée.

Nous allons maintenant établir des relations récursives entre les points $(n,3,c)$ de D_1.

4.4.4. Relations récursives et conséquences directes

proposition 4.31

> Si c divise $\binom{n}{2}$ et si K_n^3 est c-décomposable, K_{n+1}^3 est également c-décomposable.

En appliquant la proposition 2.6 avec p = 1 et k = 3, on montre que, si K_n^3 est décomposable en HE(1,3,c) et si K_n^2 est décomposable en HE(0,2,c), K_{n+1}^3 est décomposable en HE(1,3,c). Or K_n^2 est décomposable en HE(0,2,c) si et seulement si c divise $\binom{n}{2}$ et $n \geqslant 2c$ (proposition 2.7). Si K_n^3 est c-décomposable, n est au moins égal à 2c+1 (proposition 4.1), on peut donc en conclure que K_{n+1}^3 est c-décomposable.

On en déduit la relation directe suivante :

proposition 4.32

> Si n = ct+1, $t \geqslant 6$, si t(ct-1) est divisible par 3 et si soit t est pair, soit c et t sont impairs, alors K_{n+1}^3 est c-décomposable.

Si n = ct+1 avec $t \geqslant 6$, et si t(ct-1) est divisible par 3, les hypothèses de la proposition 4.10 sont vraies et il existe une c-décomposition régulière

de K_n^3. Si, de plus, t est pair ou c et t sont tous deux impairs, t(ct+1) est pair et $ct(ct+1)/2 = \binom{n}{2}$ est divisible par c. On peut donc appliquer la proposition précédente.

théorème 4.33

> Si c divise $\binom{p}{2}$ et $\binom{q}{2}$, si K_p^3 et K_q^3 sont c-décomposables, K_{p+q}^3 est c-décomposable.

Si K_p^3 et K_q^3 sont c-décomposables, p et q sont au moins égaux à 2c+1 (proposition 4.1) donc à 2c. Comme c divise $\binom{p}{2}$ et $\binom{q}{2}$, K_p^2 et K_q^2 sont décomposables en couplages HE(0,2,c) (proposition 2.7).

On divise l'ensemble des p+q sommets de K_{p+q}^3 en deux sous-ensembles disjoints A et B tels que $|A| = p$ et $|B| = q$. Les triplets du type AAA sont des arêtes de K_p^3 et se répartissent en hyperétoiles HE(1,3,c) car K_p^3 est c-décomposable. Avec chaque couplage HE(0,2,c) de la décomposition de K_q^2, on construit p hyperétoiles HE(1,3,c) en prenant successivement comme centres les p points de A : on obtient ainsi tous les triplets ABB. On intervertit ensuite A et B pour répartir les triplets AAB et BBB en hyperétoiles de degré c.

Remarque : K_{p+1}^3 et K_{q+1}^3 sont aussi c-décomposables (proposition 4.31).

Le théorème 4.6 permet d'affirmer qu'il existe une c-décomposition régulière de K_{6c+2}^3, par conséquent, en utilisant une construction récursive analogue à celle que nous venons de définir, on obtient le résultat général suivant :

théorème 4.34

Pour tout $c \geqslant 1$, il existe une décomposition régulière de K^3_{12c+4} en hyperétoiles de degré 4c+1.

On divise l'ensemble des sommets de K^3_{12c+4} en deux sous-ensembles disjoints A et B de 6c+2 sommets. Les triplets AAA peuvent être répartis en hyperétoiles disjointes de degré c, de telle sorte que tout sommet x de A soit le centre de 6c+1 étoiles $D_1(x),..,D_{6c+1}(x)$. D'après le théorème 2.3, les couples BB peuvent être répartis en 6c+1 couplages de 3c+1 arêtes $\{ e^i_1,..,e^i_{3c+1} \}$ i=1,..,6c+1.

Les triplets AAA et ABB sont répartis en hyperétoiles disjointes de degré 4c+1 :

$H_i(x) = D_i(x) \cup \{ \{x\} \cup e^i_1, \ .. \ , \{x\} \cup e^i_{3c+1} \}$ $\forall\, x \in A$, $\forall\, i=1,..,6c+1$

Tout sommet x de A est le centre de 6c+1 hyperétoiles.

On procède de la même façon pour les triplets AAB et BBB.

Comme 4c+1 divise $\binom{12c+4}{2}$, on peut appliquer la proposition 4.31 :

corollaire 4.35

Pour tout $c \geqslant 1$, il existe une décomposition de K^3_{12c+5} en hyperétoiles de degré 4c+1.

Une autre relation récursive permet de trouver une décomposition de degré c-1 dans K^3_{n-1} :

théorème 4.36

Si K^3_{2c+1} est c-décomposable, K^3_{2c} est (c-1)-décomposable.

Soit x un sommet de K^3_{2c+1}. Dans la c-décomposition de K^3_{2c+1}, toutes les hyperétoiles contiennent tous les sommets de l'hypergraphe K^3_{2c+1}, en particulier x. Si on élimine tous les triplets contenant x, on élimine toutes les hyperétoiles de centre x, et il ne reste que des hyperétoiles de degré c-1 qui forment une décomposition de K^3_{2c}.

Avant d'énoncer une relation récursive qui fait passer de n à n+2 avec le même degré c, nous devons démontrer trois lemmes.

lemme 4.37

Si $c \geqslant 3$, $n \geqslant 2c+1$ et $n^2 = 0$ modulo c, il existe trois entiers positifs r,s,t tels que :

$r \leqslant n$ et $\binom{n}{2} = r(c-1)+sc = (n-r)(c-1)+tc$

On définit l'entier r par la relation :

$\binom{n}{2} = ac-r \quad 1 \leqslant r \leqslant c$

r est donc positif et inférieur à n, car $r \leqslant c$ et $n \geqslant 2c+1$

On pose ensuite : $s = a-r$

Donc $\binom{n}{2} = (s+r)c-r = r(c-1)+sc$

s est positif :

$n \geqslant 2c+1 \Longrightarrow \binom{n}{2} \geqslant c(2c+1) \Longrightarrow a > 2c+1 \Longrightarrow s > c+1$

$\binom{n}{2}$ = ac-r est égal à -r modulo c.

D'autre part, l'hypothèse $n^2 \equiv 0$ modulo c entraîne :

$\binom{n}{2} = -\frac{n}{2}$ modulo c, ou encore $n = -2r$ modulo c

Donc $\binom{n}{2} - (n-r)(c-1)$ est égal à 0 modulo c, et on définit l'entier t par :

$$\binom{n}{2} = (n-r)(c-1) + tc$$

t est positif :

$$t > 0 \iff \binom{n}{2} > (n-r)(c-1)$$
$$\iff n(n-1) > 2(n-r)(c-1)$$
$$\iff n^2 - n(2c-1) + 2r(c-1) > 0$$

Le discriminant de cette expression est :

$$\Delta = (2c-1)^2 - 8r(c-1)$$

il est positif si et seulement si :

$$r < \frac{(2c-1)^2}{8(c-1)} = \frac{c}{2} + 1 + \frac{9}{8c-8}$$

Si r est supérieur à cette valeur, l'expression du second degré en n est positive, donc t est positif.

Si r est inférieur ou égal à $\frac{c}{2}+1+\frac{9}{8c-8}$, t est positif si et seulement si n est inférieur à $\frac{2c-1-\sqrt{\Delta}}{2}$ ou supérieur à $\frac{2c-1+\sqrt{\Delta}}{2}$.

n ne peut pas être inférieur à $\frac{2c-1-\sqrt{\Delta}}{2}$ qui est négatif car Δ est inférieur à $(2c-1)^2$.

D'autre part, $\frac{2c-1+\sqrt{\Delta}}{2}$ est inférieur à 2c-1, donc inférieur à n qui est au moins égal à 2c+1.

Par conséquent, t est toujours positif.

Le second lemme est un théorème de Z. Baranyai [4] :

lemme 4.38

Soit X un ensemble de n éléments.

Si les éléments entiers a_{ij} (i=1,..,p ; j=1,..,s) de la matrice A et les entiers $h_1,..,h_p$ vérifient les conditions :

(1) $0 < h_i < n$

(2) $a_{ij} \geq 0$

(3) $\sum_j a_{ij} = \binom{n}{h_i}$

il existe des sous-ensembles E_{ij}^k de X (i=1,..,p ; j=1,..,s ; k=1,..,a_{ij}) tels que :

(4) $|E_{ij}^k| = h_i$

(5) si $j_1 \neq j_2$ ou $k_1 \neq k_2$:

$$E_{ij_1}^{k_1} \neq E_{ij_2}^{k_2} \quad i=1,..,p$$

(6) pour tout j, les ensembles E_{ij}^k constituent les arêtes d'un hypergraphe presque régulier dont l'ensemble des sommets est X.

Si p est égal à 1, on retrouve le théorème 2.2 avec $k = h_1$ et $c_j = a_{1j}$ (j=1,..,s).

En construisant judicieusement la matrice A, nous allons démontrer le troisième lemme.

lemme 4.39

Si n et c sont des entiers tels que n^2 soit divisible par c, c soit au moins égal à 3 et n au moins égal à 2c+1, si r,s,t sont les entiers définis par le lemme 4.37, si X est l'ensemble des sommets $x_1,..,x_n$ du graphe complet K_n, alors il existe des arêtes de K_n :

E^i_j avec $1 \leqslant i \leqslant r$ et $1 \leqslant j \leqslant c-1$

F^i_j avec $r+1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant c-1$

G^i_j avec $1 \leqslant i \leqslant s$ et $1 \leqslant j \leqslant c$

H^i_j avec $1 \leqslant i \leqslant t$ et $1 \leqslant j \leqslant c$

telles que :

(1) l'ensemble des arêtes de K_n est l'ensemble de toutes les arêtes E^i_j et G^i_j,

(2) l'ensemble des arêtes de K_n est également l'ensemble de toutes les arêtes F^i_j et H^i_j,

(3) pour tout i entre 1 et r, les arêtes $E^i_1,..,E^i_{c-1}$ forment un couplage qui ne contient pas le sommet x_i,

(4) pour tout i entre r+1 et n, les arêtes $F^i_1,..,F^i_{c-1}$ forment un couplage qui ne contient pas x_i,

(5) pour tout i entre 1 et s, $G^i_1,..,G^i_c$ forment un couplage,

(6) pour tout i entre 1 et t, $H^i_1,..,H^i_c$ forment un couplage.

Il suffit de définir la matrice A de la façon suivante :

entiers h	r colonnes	n-r colonnes	s colonnes	t colonnes
1	1 1 ... 1	1 1 ... 1	0 0 ... 0	0 0 ... 0
2	c-1 c-1 ... c-1	0 0 ... 0	c c ... c	0 0 ... 0
2	0 0 ... 0	c-1 c-1 ... c-1	0 0 ... 0	c c ... c
	E	F	G	H

Les conditions du théorème de Z. Baranyai (lemme 4.38) sont vérifiées :

(1) les entiers h, égaux à 1 ou à 2, sont compris entre 1 et n,

(2) les éléments de la matrice sont des entiers positifs ou nuls,

(3) la somme des éléments d'une ligne de la matrice est égale à $\binom{n}{h}$ où h est l'entier correspondant à la ligne :

$$r + (n-r) = n = \binom{n}{1}$$

$$r(c-1) + sc = \binom{n}{2}$$

$$(n-r)(c-1) + tc = \binom{n}{2}$$

car r,s,t ont été définis par le lemme 4.37.

Par conséquent, il existe des sous-ensembles de X, un par élément de A égal à 1, c ou c-1 par élément de A égal à c ou c-1, tels que :

(4) les sous-ensembles correspondant à la première ligne de A ne contiennent qu'un élément, ce sont des sommets isolés de K_n ; les sous-ensembles correspondant aux deuxième et troisième lignes contiennent deux éléments et peuvent donc être considérés comme des arêtes de K_n.

(5) les sous-ensembles correspondant à une même ligne sont tous différents. On trouve donc dans la première ligne tous les sommets de K_n, et dans la deuxième ligne comme dans la troisième, toutes les arêtes de K_n.

(6) les sous-ensembles correspondant à une même colonne constituent les arêtes d'un hypergraphe presque régulier dont l'ensemble des sommets est X. Si on considère l'une des r premières colonnes, les sous-ensembles correspondants sont un sommet isolé x et c-1 arêtes de K_n. Ces c-1 arêtes contiennent au plus 2(c-1) sommets, c'est-à-dire moins de n-1, car n $\geq$ 2c+1. Il y a donc des sommets qui ne figurent dans aucune arête de l'hypergraphe correspondant à la colonne choisie : leur degré est nul. Comme l'hypergraphe est presque régulier, le degré de chaque sommet est 0 ou 1, et les c-1 arêtes de K_n forment un couplage qui ne contient pas x. On fait le même raisonnement pour les autres colonnes de la matrice : chaque sommet est de degré 0 ou 1 dans l'hypergraphe correspondant.

Le théorème suivant est ainsi pratiquement démontré :

théorème 4.40

> Si K_n^3 est c-décomposable et si n^2 est divisible par c, K_{n+2}^3 est c-décomposable.

En effet :

Soit X l'ensemble des sommets de K_n^3. Soient y et z deux sommets n'appartenant pas à x : l'ensemble des sommets de K_{n+2}^3 est $Y = X \cup \{y,z\}$. Les arêtes de K_{n+2}^3 dont les sommets sont dans X sont déjà regroupées en hyperétoiles HE(1,3,c) par hypothèse, il ne reste plus qu'à définir les hyperétoiles A_i, B_i, C_i, D_i formées des arêtes contenant y, ou z, ou y et z :

$\forall$ i=1,..,r $\quad A_i = \{ \{y,z,x_i\}, \{y\} \cup E^i_1, .., \{y\} \cup E^i_{c-1} \}$

$\forall$ i=r+1,..,n $\quad B_i = \{ \{z,y,x_i\}, \{z\} \cup F^i_1, .., \{z\} \cup F^i_{c-1} \}$

$\forall$ i=1,..,s $\quad C_i = \{ \{y\} \cup G^i_1, .., \{y\} \cup G^i_c \}$

$\forall$ i=1,..,t $\quad D_i = \{ \{z\} \cup H^i_1, .., \{z\} \cup H^i_c \}$

Les entiers r,s,t, les sommets x_i et les arêtes E^i_j, F^i_j, G^i_j et H^i_j sont ceux des lemmes précédents.

4.4.5. Une construction directe

théorème 4.41

Si c,p,q,u,v,w,z,u',v',w',z' sont des entiers positifs ou nuls vérifiant :

$c \geqslant 4$

p et q non divisibles par 3

p et q au moins égaux à 2c

$(p-1)(p-2)/6 = u+2v+3w$

$(q-1)(q-2)/6 = u'+2v'+3w'$

$(p-1)(p-2)/6 + q(q-1)/2 = c(u+v+w+z)$

$(q-1)(q-2)/6 + p(p-1)/2 = c(u'+v'+w'+z')$

alors K^3_{p+q} est décomposable en HE(1,3,c).

On partage l'ensemble X des sommets de K^3_{p+q} en deux sous-ensembles disjoints A et B tels que $|A| = p$ et $|B| = q$. Le théorème 4.19 permet de décomposer l'ensemble des triplets AAA en hyperétoiles de degré 1,2 ou 3 de telle façon que tout sommet x de A soit le centre de :

u HE(1,3,1) : $D_1(x),..,D_u(x)$

v HE(1,3,2) : $E_1(x),..,E_v(x)$

w HE(1,3,3) : $F_1(x),..,F_w(x)$

D'autre part, $\binom{q}{2}$ est égal à u(c-1)+v(c-2)+w(c-3)+zc, donc, d'après le théorème 2.4, l'ensemble des couples de type BB peut être décomposé en couplages :

u HE(0,2,c-1) : $\{ d_1^i,..,d_{c-1}^i \}$ i=1,..,u

v HE(0,2,c-2) : $\{ e_1^j,..,e_{c-2}^j \}$ j=1,..,v

w HE(0,2,c-3) : $\{ f_1^k,..,f_{c-3}^k \}$ k=1,..,w

z HE(0,2,c) : $\{ g_1^l,..,g_c^l \}$ l=1,..,z

L'ensemble des triplets AAA et ABB peut donc être décomposé en hyperétoiles HE(1,3,c) :

$D_i(x) \cup \{\{x\} \cup d_1^i, .., \{x\} \cup d_{c-1}^i\}$ i=1,..,u

$E_j(x) \cup \{\{x\} \cup e_1^j, .., \{x\} \cup e_{c-2}^j\}$ j=1,..,v

$F_k(x) \cup \{\{x\} \cup f_1^k, .., \{x\} \cup f_{c-3}^k\}$ k=1,..,w

$\{\{x\} \cup g_1^l, .., \{x\} \cup g_c^l\}$ l=1,..,z

pour tout x appartenant à A.

On complète la décomposition de K^3_{p+q} en intervertissant A et B.

Ce théorème permet de trouver des éléments (n,3,c) de D_1 tels que n soit divisible par c. On peut alors appliquer le théorème 4.33 de façon répétitive si c divise $\binom{n}{2}$. Par exemple : en prenant c = 11, p = 37, q = 40, u = u' = z = z' = 0, v = 60, w = 30, v' = 2 et w' = 81, on démontre que (77,3,11) appartient à D_1. Comme $\binom{77}{2}$ est divisible par c = 11, (77n,3,11) appartient à D_1 pour tout $n \geq 1$.

4.4.6. Petites valeurs de c

c = 2

Le théorème 2.9 donne une condition nécessaire et suffisante pour que K_n^3 soit décomposable en HE(1,3,2) : $\binom{n}{3}$ est pair et $n \geq 5$. Comme $\binom{n}{3}$ est pair si et seulement si n est différent de 3 modulo 4 :

proposition 4.42

> (n,3,2) appartient à D_1 si et seulement si $n \geq 5$ et n est différent de 3 modulo 4.

c = 3

Les conditions nécessaires sont : $n \geq 7$ et 3 divise $\binom{n}{3}$, ou encore n = 0,1 ou 2 modulo 9 et $n \geq 9$.

Si n est égal à 1 ou 2 modulo 9 et au moins égal à 10, il existe une 3-décomposition cyclique de K_n^3 (théorème 4.18).

Si n est un multiple de 9, (n-3)(n-4)/6 est égal à 2 modulo 3 et peut donc s'écrire 2+3w, avec w = n(n-7)/18. En posant u = 0 et v = 1, on montre à l'aide du théorème 4.19 que K_{n-2}^3 peut être décomposé en hyperétoiles HE(1,3,2) et HE(1,3,3) de telle sorte que tout sommet x soit le centre d'une hyperétoile HE(1,3,2), notée

$\{\{x,a_x,b_x\},\{x,c_x,d_x\}\}$, et de w hyperétoiles HE(1,3,3), notées $H_1^x,..,H_w^x$.

D'autre part, si n est un multiple de 9, $\binom{n-2}{2}$ est un multiple de 3 donc, d'après le théorème 2.3, K^3_{n-2} est décomposable en couplages HE(0,2,3), notés :

$$\{e_1^i,e_2^i,e_3^i\} \quad \text{avec } i = 1,..,\binom{n-2}{2}/3$$

Si on ajoute deux sommets y et z aux n-2 sommets de K^2_{n-2} et K^3_{n-2}, il suffit de définir la décomposition de K^3_n en hyperétoiles HE(1,3,3) de la façon suivante :

- triplets ne contenant ni y ni z :

  hyperétoiles $H_1^x,..,H_w^x$

- triplets contenant y mais pas z :

  $$\{\{y\} \cup e_1^i,\{y\} \cup e_2^i,\{y\} \cup e_3^i\}$$

- triplets contenant z mais pas y :

  $$\{\{z\} \cup e_1^i,\{z\} \cup e_2^i,\{z\} \cup e_3^i\}$$

- triplets x,y,z :

  $$\{\{x,a_x,b_x\},\{x,c_x,d_x\},\{x,y,z\}\}$$

Les conditions nécessaires sont donc suffisantes :

théorème 4.43

> (n,3,3) appartient à D_1 si et seulement si n ⩾ 9 et n = 0,1 ou 2 modulo 9.

<u>c = 4</u>

n doit être au moins égal à 9, et $\binom{n}{3}$ doit être divisible par 4, donc n doit être différent de 3,5 ou 7 modulo 8, ou encore n doit être pair ou égal à 1 modulo 8.

Le premier point possible est donc (9,3,4), nous allons pourtant démontrer qu'il n'est pas dans D_1 :

proposition 4.44

> Il n'existe pas de décomposition de K_9^3 en hyperétoiles HE(1,3,4).

En effet, si c'était le cas, il existerait une décomposition de K_8^3 en HE(1,3,3) (théorème 4.36), ce qui est en contradiction avec le théorème précédent.

Comme dans le cas des hyperétoiles HE(2,3,c), il existe des points possibles qui doivent être écartés, mais ce phénomène se produit ici aussi à la limite du domaine D_1.

proposition 4.45

> (10,3,4) appartient à D_1.

Il existe une décomposition cyclique de K_{11}^3 en hyperétoiles de degré 5, il suffit donc d'appliquer le théorème 4.36.

proposition 4.46

> Si n est pair et au moins égal à 10, (n,3,4) appartient à D_1.

On applique récursivement le théorème 4.40 en commençant par n = 10 : si n est pair, n^2 est divisible par 4, donc, si (n,3,4) appartient à D_1, (n+2,3,4) appartient aussi à D_1 et n+2 est également pair.

proposition 4.47

Si n est égal à 1 modulo 8, et au moins égal à 17, (n,3,4) appartient à D_1.

Si n-1 est divisible par 8, (n-1,3,4) est dans D_1 comme nous venons de le démontrer, et $\binom{n-1}{2}$ est divisible par 4. Donc, d'après le théorème 4.31, (n,3,4) est dans D_1.

On en déduit le théorème suivant :

théorème 4.48

(n,3,4) appartient à D_1 si et seulement si n est au moins égal à 10, et pair ou égal à 1 modulo 8.

c = 5

n doit être au moins égal à 11, et égal à 0,1 ou 2 modulo 5. Nous allons démontrer que ces conditions

sont suffisantes.

Nous connaissons déjà les points suivants :

(11,3,5)	décomposition cyclique	(4.12)
(16,3,5)	décomposition régulière	(4.34)
(17,3,5)		(4.35)
(22,3,5)	décomposition régulière	(4.29)
(32,3,5)	décomposition cyclique	(4.23)

Il suffit de rechercher les points de la forme (5p,3,5), ils permettront d'obtenir les autres. En effet :

proposition 4.49

> Si n est égal à 0 ou 1 modulo 5 et si (n,3,5) appartient à D_1, (n+1,3,5) appartient à D_1.

C'est une application de la proposition 4.31 au cas c = 5 : $\binom{n}{2}$ est divisible par 5.

proposition 4.50

> (15,3,5) appartient à D_1.

On construit une sorte de décomposition cyclique en prenant pour ensemble de sommets $\mathbb{Z}_{13} \cup \{a,b\}$, où a et b se comportent comme des valeurs "infinies" :

$$\forall\, x \in \mathbb{Z}_{13} \quad x + a = a \;\; ; \;\; x + b = b$$

Il suffit de trouver six hyperétoiles de centre 0 et une hyperétoile de centre a, et d'ajouter à tous leurs sommets tous les éléments de $\mathbb{Z}_{13}$ successivement. Par exemple :

H_1 :	(0,-6,-5)	(0,-2,4)	(0,-3,3)	(0,-4,2)	(0,5,b)
H_2 :	(0,-5,1)	(0,-1,6)	(0,-2,5)	(0,-3,4)	(0,3,b)
H_3 :	(0,-6,4)	(0,-2,6)	(0,1,5)	(0,-5,-3)	(0,2,b)
H_4 :	(0,-3,2)	(0,-5,-1)	(0,-4,5)	(0,1,4)	(0,6,b)
H_5 :	(0,-5,5)	(0,-2,2)	(0,3,4)	(0,1,a)	(0,-1,b)
H_6 :	(0,-3,-2)	(0,2,3)	(0,-1,1)	(0,4,a)	(0,-4,b)
H_7 :	(a,0,2)	(a,3,6)	(a,-1,4)	(a,-2,5)	(a,1,b)

proposition 4.51

(20,3,5) appartient à D_1.

On procède de la même façon avec $\mathbb{Z}_{19} \cup \{a\}$ et douze hyperétoiles de base :

H_1 :	(0,-9,-8)	(0,2,9)	(0,-3,6)	(0,-4,5)	(0,-5,4)
H_2 :	(0,-9,-3)	(0,-7,2)	(0,-8,1)	(0,-1,9)	(0,-2,8)
H_3 :	(0,-3,7)	(0,-6,9)	(0,-5,5)	(0,-6,4)	(0,-7,3)
H_4 :	(0,-8,2)	(0,-1,7)	(0,-2,6)	(0,-3,5)	(0,-4,4)
H_5 :	(0,-5,3)	(0,-6,2)	(0,-7,1)	(0,-3,8)	(0,-8,4)
H_6 :	(0,-8,5)	(0,-5,8)	(0,-7,4)	(0,-1,6)	(0,2,7)
H_7 :	(0,-3,4)	(0,-4,3)	(0,-5,2)	(0,-6,1)	(0,-7,7)
H_8 :	(0,-6,6)	(0,-1,5)	(0,-2,4)	(0,-3,3)	(0,1,a)
H_9 :	(0,-4,2)	(0,-5,1)	(0,-1,4)	(0,-2,3)	(0,-3,a)
H_{10} :	(0,-5,-2)	(0,-1,3)	(0,2,4)	(0,-3,1)	(0,5,a)
H_{11} :	(0,4,5)	(0,-3,-2)	(0,2,3)	(0,-1,1)	(0,-4,a)
H_{12} :	(a,0,2)	(a,1,7)	(a,3,-9)	(a,4,-7)	(a,5,-5)

proposition 4.52

(25,3,5) appartient à D_1.

Toujours la même méthode, avec $\mathbb{Z}_{23} \cup \{a,b\}$ et les hyperétoiles de base suivantes :

(0,-1,10)	(0,-2,9)	(0,-3,8)	(0,-4,7)	(0,-5,6)
(0,-6,5)	(0,-7,4)	(0,-8,3)	(0,-9,2)	(0,-10,1)
(0,-1,9)	(0,-2,8)	(0,-3,7)	(0,-4,6)	(0,-5,5)
(0,-6,4)	(0,-7,3)	(0,-8,2)	(0,-9,1)	(0,-2,11)
(0,-1,11)	(0,-2,10)	(0,-3,9)	(0,-4,8)	(0,-5,7)
(0,-6,6)	(0,-7,5)	(0,-8,4)	(0,-9,3)	(0,-5,8)
(0,-7,6)	(0,-8,5)	(0,-9,4)	(0,-1,8)	(0,-2,7)
(0,-3,6)	(0,-4,5)	(0,-5,4)	(0,-6,3)	(0,-7,2)
(0,-1,7)	(0,-2,6)	(0,-3,5)	(0,-4,4)	(0,-5,3)
(0,-3,10)	(0,-4,9)	(0,-6,7)	(0,-8,1)	(0,-7,8)
(0,-1,6)	(0,-2,5)	(0,-3,4)	(0,-4,3)	(0,-5,2)
(0,-6,1)	(0,-1,5)	(0,-2,4)	(0,-3,3)	(0,-4,2)
(0,-5,9)	(0,3,4)	(0,-1,2)	(0,-2,1)	(0,-7,7)
(0,-2,2)	(0,-6,8)	(0,-1,1)	(0,-8,6)	(0,a,b)
(0,6,8)	(0,-7,1)	(0,4,5)	(0,-1,3)	(0,7,a)
(0,-5,1)	(0,-1,4)	(0,-2,3)	(0,-3,2)	(0,7,b)
(0,1,a)	(2,4,a)	(3,6,a)	(5,9,a)	(7,-11,a)
(0,1,b)	(2,4,b)	(3,6,b)	(5,9,b)	(7,-11,b)
(0,6,a)	(1,9,a)	(2,11,a)	(3,-10,a)	(4,-8,a)
(0,6,b)	(1,9,b)	(2,11,b)	(3,-10,b)	(4,-8,b)

proposition 4.53

Si n est égal à 0 ou 1 modulo 5 et si $(n,3,5)$ appartient à D_1, $(n + 15p,3,5)$ appartient à D_1 pour tout $p \geqslant 0$.

Il suffit d'appliquer récursivement le théorème 4.33, car $\binom{n}{2}$, $\binom{15}{2}$ et $\binom{n+15p}{2}$ sont divisibles par 5 et $(15,3,5)$ appartient à D_1 (4.50).

théorème 4.54

$(n,3,5)$ appartient à D_1 si et seulement si n est égal à 0,1 ou 2 modulo 5 et au moins à 11.

Si n est divisible par 5 : on a montré directement que $(n,3,5)$ appartient à D_1 si n est égal à 15, 20 ou 25. Comme tout n divisible par 5 et au moins égal à 15 est de la forme 15 + 15p, 20 + 15p ou 25 + 15p, la proposition 4.53 permet d'affirmer que $(n,3,5)$ appartient à D_1.

Pour les entiers égaux à 1 ou 2 modulo 5, on applique la proposition 4.49, sauf pour 11 trouvé directement (4.12).

c = 6

Les conditions nécessaires sont : $n \geqslant 13$ et $\binom{n}{3}$ divisible par 6, ou encore n = 0,1,2,9,10,18,20,28 ou 29 modulo 36 et $n \geqslant 18$. Elles sont suffisantes, comme nous allons le démontrer.

Nous utiliserons la méthode de la proposition 4.50, à partir du groupe cyclique $\mathbb{Z}_{n-1}$ ou $\mathbb{Z}_{n-2}$ et d'une ou deux valeurs infinies, pour prouver l'appartenance de (n,3,6) à D_1 quand n vaut 18,28,36,45 et 54. Puis nous appliquerons des relations récursives pour démontrer que, si n vérifie les conditions nécessaires, (n,3,6) est dans D_1.

proposition 4.55

(18,3,6) appartient à D_1.

Les hyperétoiles de base peuvent être :

0 1 4	0 -4 -1	0 2 5	0 -5 -2	0 -3 3	0 8 a
0 1 5	0 -5 -1	0 2 6	0 -6 -2	0 -4 4	0 7 a
0 1 6	0 -6 -1	0 2 7	0 -7 -2	0 -8 8	0 5 a
0 1 7	0 -7 -1	0 2 8	0 -8 -2	0 -6 6	0 3 a
0 3 8	0 -8 -3	0 -4 5	0 -5 4	0 -7 7	0 1 a
0 -8 3	0 -3 8	0 -7 4	0 -4 7	0 -2 2	0 6 a
0 -7 8	0 -8 7	0 -3 4	0 -4 3	0 -5 5	0 2 a
0 -3 -2	0 2 3	0 -8 -7	0 7 8	0 -1 1	0 4 a

proposition 4.56

(36,3,6) appartient à D_1.

Cette fois, la grandeur de n rend plus difficile la recherche à la main. Nous avons essayé de mieux visualiser les orbites en procédant de la façon suivante :
On commence par construire un tableau carré, indicé par les sommets de K^2_{n-1}, tel que la case (i,j), i≠j, correspondant à l'arête (i,j), contienne l'indice j. On ne conserve que la partie triangulaire inférieure, qui permet de reconstituer aisément la partie supérieure : si (i,j) contient j, (j,i) contient i. On incline ce triangle, de telle sorte que les colonnes deviennent des diagonales ascendantes, et que les diagonales descendantes deviennent des colonnes. Par exemple, si n est égal à 11, on obtient les tableaux suivants :

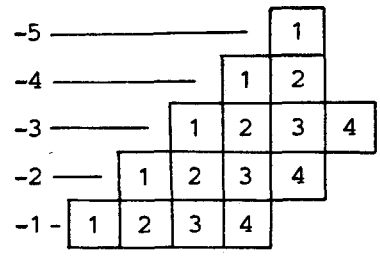
1										
2	1									
3	1	2								
4	1	2	3							
5	1	2	3	4						
-5	1	2	3	4	5					
-4	1	2	3	4	5	-5				
-3	1	2	3	4	5	-5	-4			
-2	1	2	3	4	5	-5	-4	-3		
-1	1	2	3	4	5	-5	-4	-3	-2	
	1	2	3	4	5	-5	-4	-3	-2	-1

1										
2										1
3									1	2
4								1	2	3
5							1	2	3	4
-5						1	2	3	4	5
-4					1	2	3	4	5	-5
-3				1	2	3	4	5	-5	-4
-2			1	2	3	4	5	-5	-4	-3
-1	1	2	3	4	5	-5	-4	-3	-2	
	1	2	3	4	5	-5	-4	-3	-2	-1

Dans ce nouveau tableau, c cases situées sur la même colonne représentent c arêtes constituant un couplage et aussi une hyperétoile de degré c et de centre 0. Il reste à vérifier que les c arêtes appartiennent à des orbites différentes, pour cela on va garder dans le tableau une seule

case par orbite. En partant des cases en bas à gauche, on élimine les deux cases correspondant aux deux autres arêtes de l'orbite : (-1,1) permet d'éliminer (-1,-2) et (2,1), puis (-2,1) élimine (-1,-3) et (3,2), etc.

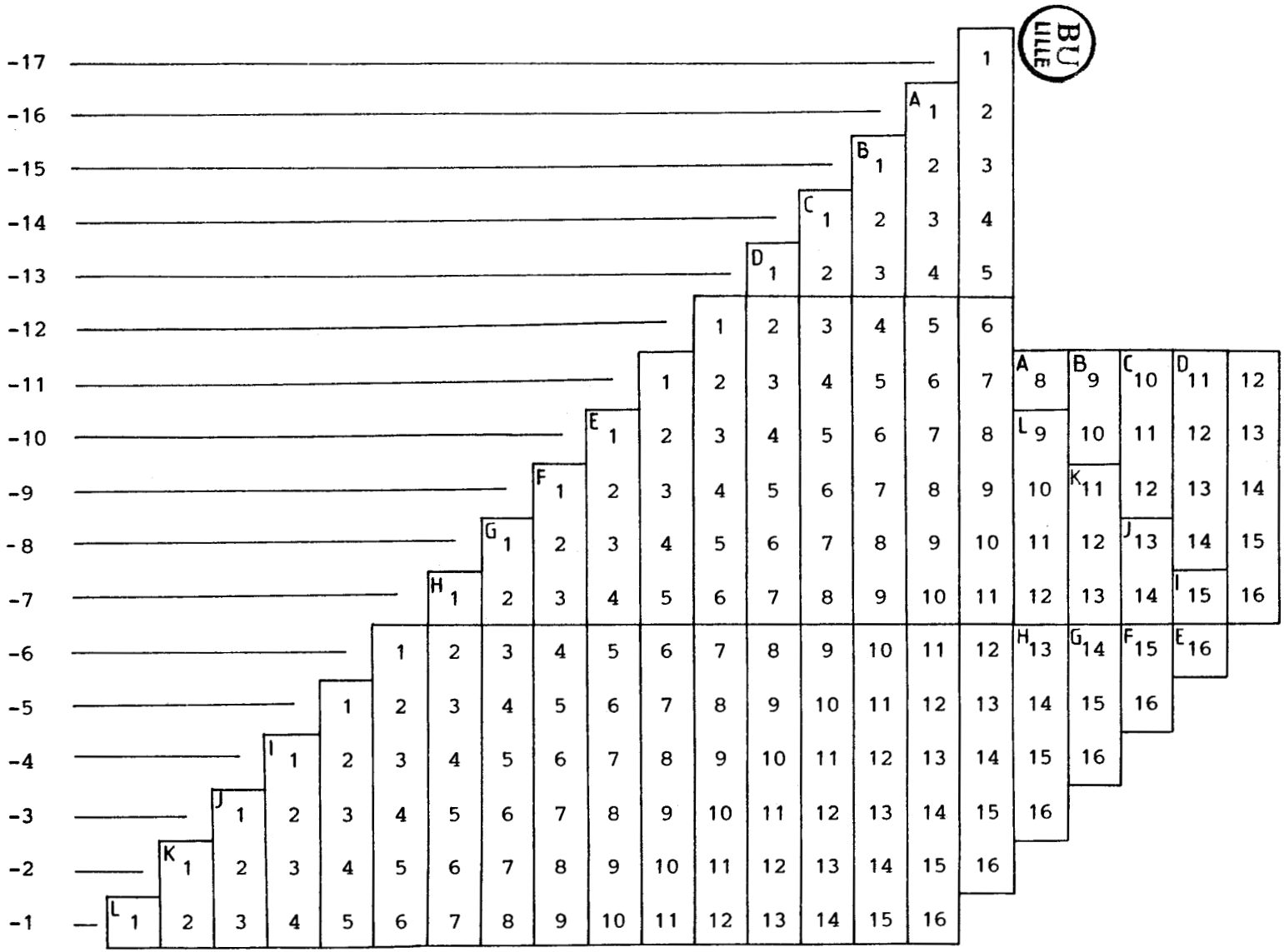
Il nous reste alors le tableau suivant :



qui représente chaque orbite une fois et une seule. Les cases qui se trouvent sur une même verticale définissent un couplage. On peut également construire un couplage à l'aide de plusieurs segments verticaux, pourvu qu'ils soient formés de cases correspondant à des arêtes disjointes deux à deux, dans ce cas nous désignerons par la même lettre majuscule les différents segments que l'on regroupe pour former un couplage.

Si n est égal à 36, donc divisible par 3, on construit le tableau de la page suivante qui représente les orbites de $\mathbb{Z}_{35} - \{0\}$, on construit des couplages en groupant verticalement les cases six par six si possible, sinon cinq par cinq, et on ajoute une valeur infinie a pour compléter les couplages de cinq arêtes.

Nous donnons, à la suite du tableau des orbites, la liste des hyperétoiles de degré 6 et de centre 0 qui permettent d'engendrer une 6-décomposition de K_{36}^3.


-17
-16
-15
-14
-13
-12
-11
-10
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
BU LILLE

Hyperétoiles de centre 0 engendrant la 6-décomposition de K_{36}^3 :

pour tout x = 1,..,11 :

(0,x,-6) (0,x+1,-5) (0,x+2,-4) (0,x+3,-3) (0,x+4,-2) (0,x+5,-1)
ces hyperétoiles correspondent aux onze segments verticaux en bas du tableau.

pour tout x = 1,..,6 :

(0,x,-12) (0,x+1,-11) (0,x+2,-10) (0,x+3,-9) (0,x+4,-8) (0,x+5,-7)
ce sont les six segments verticaux qui se trouvent au centre du tableau.

Les autres hyperétoiles sont construites à partir de couplages de cinq arêtes auxquels on ajoute une sixième arête, disjointe des cinq autres, passant par le sommet infini a. Les lettres majuscules désignent les groupes de segments verticaux si les couplages ne sont pas formés de cinq cases consécutives. On omet les parenthèses et les virgules.

	0 -17 1	0 -16 2	0 -15 3	0 -14 4	0 -13 5	0 -1 a
A	0 -16 1	0 -15 2	0 -14 3	0 -13 4	0 -11 8	0 -2 a
B	0 -15 1	0 -14 2	0 -13 3	0 -11 9	0 -10 10	0 3 a
C	0 -14 1	0 -13 2	0 -11 10	0 -10 11	0 -9 12	0 4 a
D	0 -13 1	0 -11 11	0 -10 12	0 -9 13	0 -8 14	0 5 a
	0 -11 1	0 -10 2	0 -9 3	0 -8 4	0 -7 5	0 6 a
E	0 -10 1	0 -9 2	0 -8 3	0 -7 4	0 -6 16	0 7 a
F	0 -9 1	0 -8 2	0 -7 3	0 -6 15	0 -5 16	0 8 a
G	0 -8 1	0 -7 2	0 -6 14	0 -5 15	0 -4 16	0 9 a
H	0 -7 1	0 -6 13	0 -5 14	0 -4 15	0 -3 16	0 10 a
	0 -6 12	0 -5 13	0 -4 14	0 -3 15	0 -2 16	0 11 a
	0 -5 1	0 -4 2	0 -3 3	0 -2 4	0 -1 5	0 12 a
I	0 -4 1	0 -3 2	0 -2 3	0 -1 4	0 -7 15	0 13 a
J	0 -3 1	0 -2 2	0 -1 3	0 -8 13	0 -7 14	0 -14 a
K	0 -2 1	0 -1 2	0 -9 11	0 -8 12	0 -7 13	0 15 a
L	0 -1 1	0 -10 9	0 -9 10	0 -8 11	0 -7 12	0 16 a
	0 -11 12	0 -10 13	0 -9 14	0 -8 15	0 -7 16	0 17 a

proposition 4.57

(45,3,6) appartient à D_1.

On assimile l'ensemble des sommets à $\mathbb{Z}_{43} \cup \{a,b\}$, et on construit le tableau qui est représenté à la page suivante. Ce tableau permet de déterminer les hyperétoiles qui engendrent la 6-décomposition de K^3_{45} :

pour tout x = 1,..,15 :
(0,x,-6) (0,x+1,-5) (0,x+2,-4) (0,x+3,-3) (0,x+4,-2) (0,x+5,-1)

pour tout x = 1,..,9 :
(0,x,-12) (0,x+1,-11) (0,x+2,-10) (0,x+3,-9) (0,x+4,-8) (0,x+5,-7)

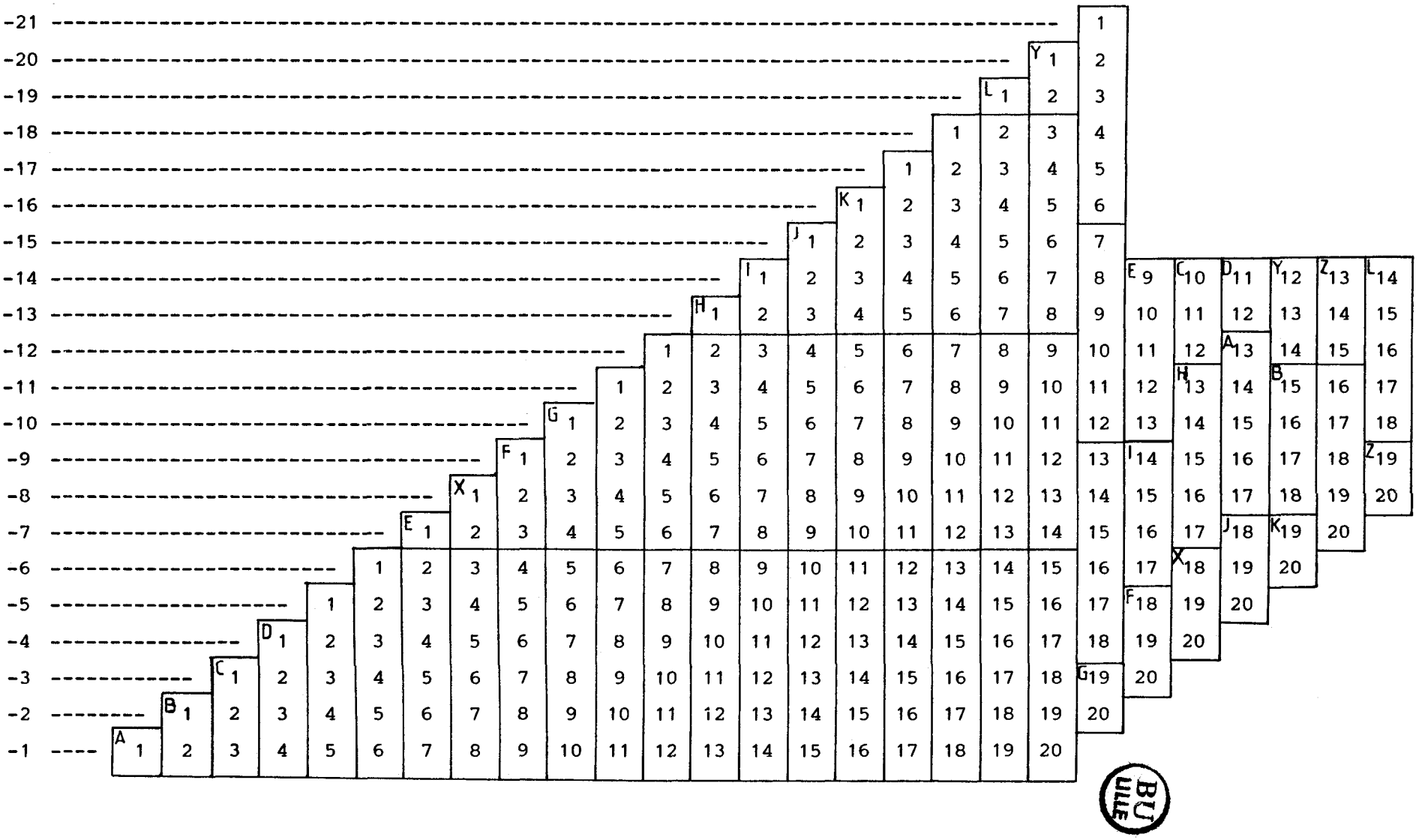
pour x = 1,2,3 :
(0,x,-18) (0,x+1,-17) (0,x+2,-16) (0,x+3,-15) (0,x+4,-14) (0,x+5,-13)

Ces hyperétoiles correspondent à des segments verticaux de six cases bien visibles dans le tableau. On remarque aussi aisément dans le tableau d'autres ensembles de six cases formant un couplage, ils sont éventuellement désignés par une lettre majuscule si les six cases ne sont pas consécutives. A chaque couplage (x_1,y_1) .. (x_6,y_6), on associe l'hyperétoile génératrice de centre 0 :

$$(0,x_1,y_1) \text{ .. } (0,x_6,y_6)$$

Il reste alors des couplages de cinq arêtes, que l'on associe aux valeurs infinies a et b :

	(0,-17,1)	(0,-16,2)	(0,-15,3)	(0,-14,4)	(0,-13,5)	(0,-2,a)
	(0,-11,1)	(0,-10,2)	(0,-9,3)	(0,-8,4)	(0,-7,5)	(0,-3,a)
	(0,-11,16)	(0,-10,17)	(0,-9,18)	(0,-8,19)	(0,-7,20)	(0,2,b)
	(0,-5,1)	(0,-4,2)	(0,-3,3)	(0,-2,4)	(0,-1,5)	(0,a,b)
X	(0,-8,1)	(0,-7,2)	(0,-6,18)	(0,-5,19)	(0,-4,20)	(0,3,b)
Y	(0,-20,1)	(0,-19,2)	(0,-14,12)	(0,-13,13)	(0,-12,14)	(0,-1,a)
Z	(0,-14,13)	(0,-13,14)	(0,-12,15)	(0,-9,19)	(0,-8,20)	(0,1,b)



BU ULEB

Ces hyperétoiles de centre 0 engendrent des hyperétoiles qui contiendront tous les triplets de la forme :

(a,x,x+1) , (a,x,x+2) , (a,x,x+3)

ou (b,x,x+1) , (b,x,x+2) , (b,x,x+3)

pour tous les éléments x de $\mathbb{Z}_{43}$, car ces triplets sont engendrés par les triplets (a,-1,0), (a,-2,0), (a,-3,0), (b,0,1), (b,0,2), (b,0,3) qui sont des arêtes des hyperétoiles que nous venons de définir.

Pour obtenir les triplets manquants (a,x,y) et (b,x,y) où y est de la forme x+4, x+5, .. , x+21, on construit trois couplages de six arêtes de cette forme (x,y), dont on déduit trois hyperétoiles de centre a et trois hyperétoiles de centre b :

(a,0,4)	(a,1,6)	(a,2,8)	(a,3,10)	(a,4,12)	(a,5,14)
(b,0,4)	(b,1,6)	(b,2,8)	(b,3,10)	(b,4,12)	(b,5,14)
(a,0,10)	(a,1,12)	(a,2,14)	(a,3,16)	(a,4,18)	(a,5,20)
(b,0,10)	(b,1,12)	(b,2,14)	(b,3,16)	(b,4,18)	(b,5,20)
(a,0,16)	(a,1,18)	(a,2,20)	(a,3,-21)	(a,4,-19)	(a,5,-17)
(b,0,16)	(b,1,18)	(b,2,20)	(b,3,-21)	(b,4,-19)	(b,5,-17)

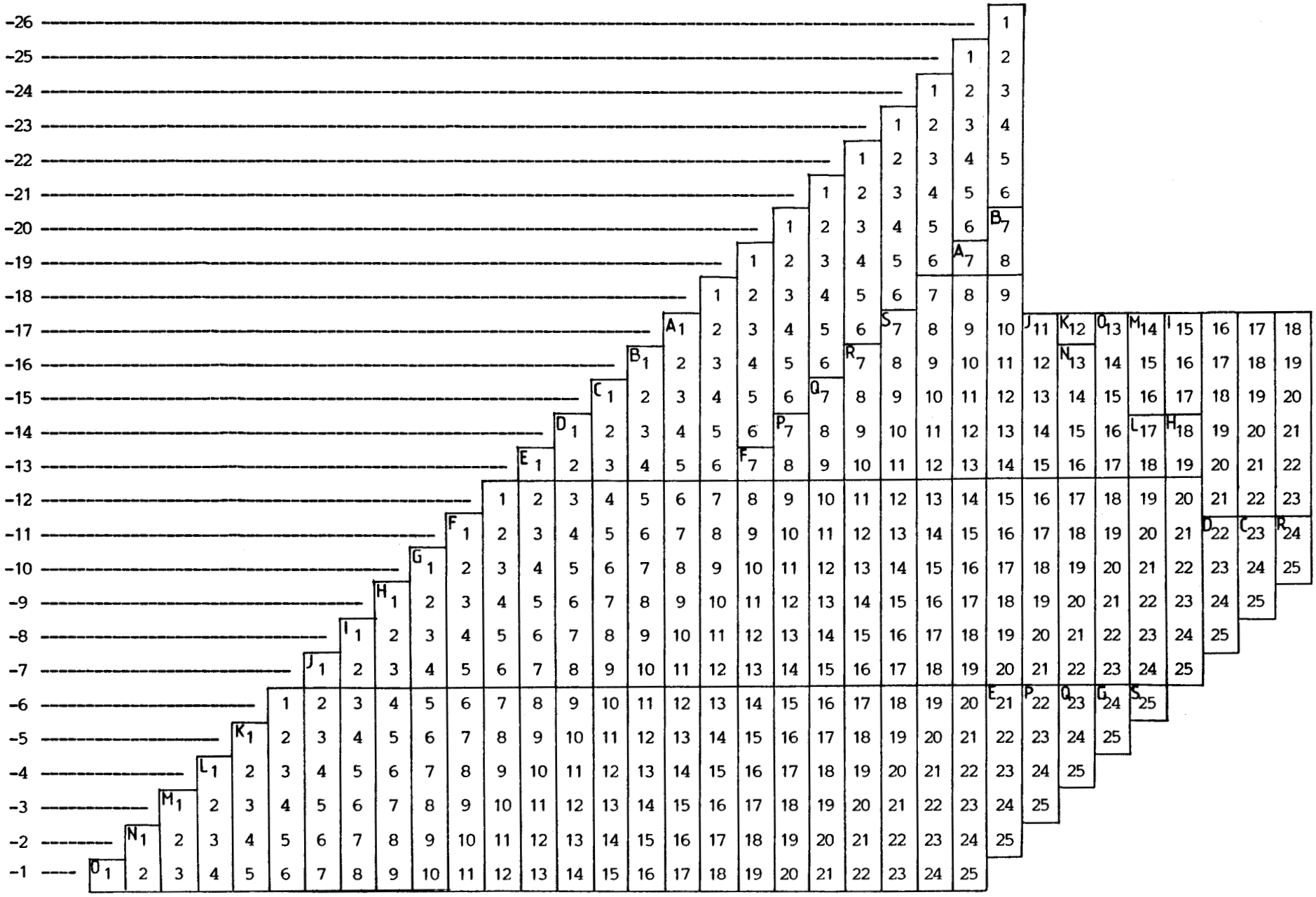
proposition 4.58

(54,3,6) appartient à D_1.

Une fois de plus, nous considérons que l'ensemble des sommets est $\mathbb{Z}_{53} \cup \{a\}$, et nous recherchons des couplages de cinq ou six arêtes dans le tableau. Les hyperétoiles génératrices qui contiennent a sont :

H (0,-9,1) (0,-8,2) (0,-7,3) (0,-14,18)(0,-13,19)(0,-1,a)

I (0,-8,1) (0,-7,2) (0,-17,15)(0,-16,16)(0,-15,17)(0,-2,a)


-26
-25
-24
-23
-22
-21
-20
-19
-18
-17
-16
-15
-14
-13
-12
-11
-10
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1

(a,0,3)	(a,1,5)	(a,2,7)	(a,3,9)	(a,4,11)	(a,5,13)
(a,0,9)	(a,1,11)	(a,2,13)	(a,3,15)	(a,4,17)	(a,5,19)
(a,0,15)	(a,1,17)	(a,2,19)	(a,3,21)	(a,4,23)	(a,5,25)
(a,0,21)	(a,1,23)	(a,2,25)	(a,3,-26)	(a,4,-24)	(a,5,-22)

proposition 4.59

(28,3,6) appartient à D_1.

L'ensemble des sommets de K_{28}^3 peut être assimilé à $\mathbb{Z}_{28}$. Soit A l'ensemble des triplets suivants :

(x,x+1,x+3)

(x,x+5,x+9)

(x,x+7,x+13) pour tout x appartenant à $\mathbb{Z}_{28}$

A peut être décomposé en quatorze hyperétoiles HE(1,3,6) dont les arêtes sont :

(2x,2x+1,2x+3)

(2x,2x-1,2x+2)

(2x,2x+5,2x+9)

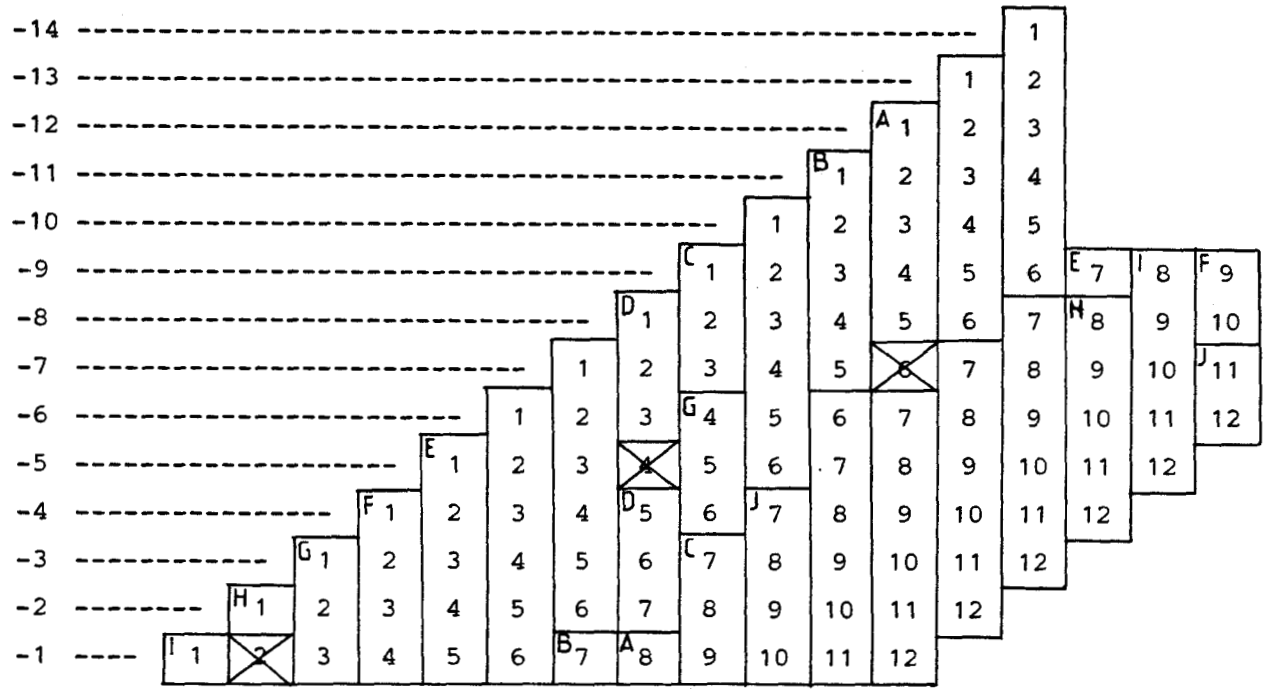
(2x,2x-5,2x+4)

(2x,2x+7,2x+13)

(2x,2x-7,2x+6) pour tout x = 0,1,..,13

L'ensemble des triplets qui ne sont pas dans A peut être décomposé en hyperétoiles à l'aide du tableau habituel, dans lequel on a barré trois arêtes qui font partie de triplets de A. Par exemple, l'arête (-1,2) est déjà un rayon d'une hyperétoile de centre 0 dans A, car (0,-1,2) est de la forme (2x,2x-1,2x+2).

Les valeurs infinies sont inutiles, on peut décrire les couplages de six arêtes directement dans le tableau.



Nous allons maintenant démontrer des relations récursives :

proposition 4.60

> Si (n,3,6) appartient à D_1 et si n est divisible par 18, (n+2,3,6) appartient également à D_1.

Il suffit d'appliquer le théorème 4.40 : si (n,3,c) appartient à D_1 et si n^2 est divisible par c, (n+2,3,c) appartient à D_1.

proposition 4.61

Si (n,3,6) appartient à D_1 et si n est égal à 0,1,9 ou 28 modulo 36, alors (n+1,3,6), (n+36,3,6) et (n+45,3,6) appartiennent à D_1.

Si n est égal à 0,1,9 ou 28 modulo 36, $\binom{n}{2}$ est divisible par 6 donc (n+1,3,6) appartient à D_1 (proposition 4.31). D'autre part, nous venons de montrer que (36,3,6) et (45,3,6) étaient dans D_1, donc (n+36,3,6) et (n+45,3,6) sont aussi dans D_1 (théorème 4.33).

Le cas où c est égal à 6 est donc maintenant entièrement résolu :

théorème 4.62

K_n^3 est décomposable en hyperétoiles HE(1,3,6) si et seulement si n est égal à 0,1,2,9,10,18,20,28 ou 29 modulo 36, et au moins égal à 18.

Considérons les différentes valeurs possibles de n modulo 36 :

0,9,28 :

36,45 et 28 sont connus, et on applique récursivement la proposition 4.61 : si (n,3,6) est dans D_1 et si n vaut 0,9 ou 28 modulo 36, (n+36,3,6) est dans D_1.

1,10,29 :

si n est au moins égal à 28 et si n vaut 0,9 ou 28 modulo 36, nous venons de voir que (n,3,6) est dans D_1. Donc (n+1,3,6) est dans D_1 (proposition 4.61).

18 :

18 et 45 sont connus, ainsi que les multiples de 36. Si n est égal à 18 modulo 36 et si n est plus grand que 45, n est la somme de 45 et d'un multiple de 36 : (n,3,6) est dans D_1 d'après la proposition 4.61.

2,20 :

si n est divisible par 18, donc égal à 0 ou 18 modulo 36, (n,3,6) est dans D_1, donc (n+2,3,6) est dans D_1 d'après la proposition 4.60.

4.4.7. Conclusion

Ici encore, nous n'avons pas trouvé de contre-exemple aux conditions nécessaires en dehors de la limite de D_1. Le théorème 4.36, qui dit que si (2c+1,3,c) appartient à D_1, (2c,3,c-1) appartient également à D_1, élimine les points possibles (2c+1,3,c) pour lesquels c est égal à 1 modulo 3. En effet, c-1 ne divise pas $\binom{2c}{3}$ donc (2c,3,c-1) ne peut pas appartenir à D_1.

Les points (2c+1,3,c) pour lesquels c est un multiple de 3 ne vérifient pas les conditions nécessaires car c ne divise pas $\binom{2c+1}{3}$.

Les autres points (2c+1,3,c), ceux pour lesquels c est égal à 2 modulo 3, semblent appartenir à D_1, puisque l'on connaît (5,3,2) et (11,3,5).

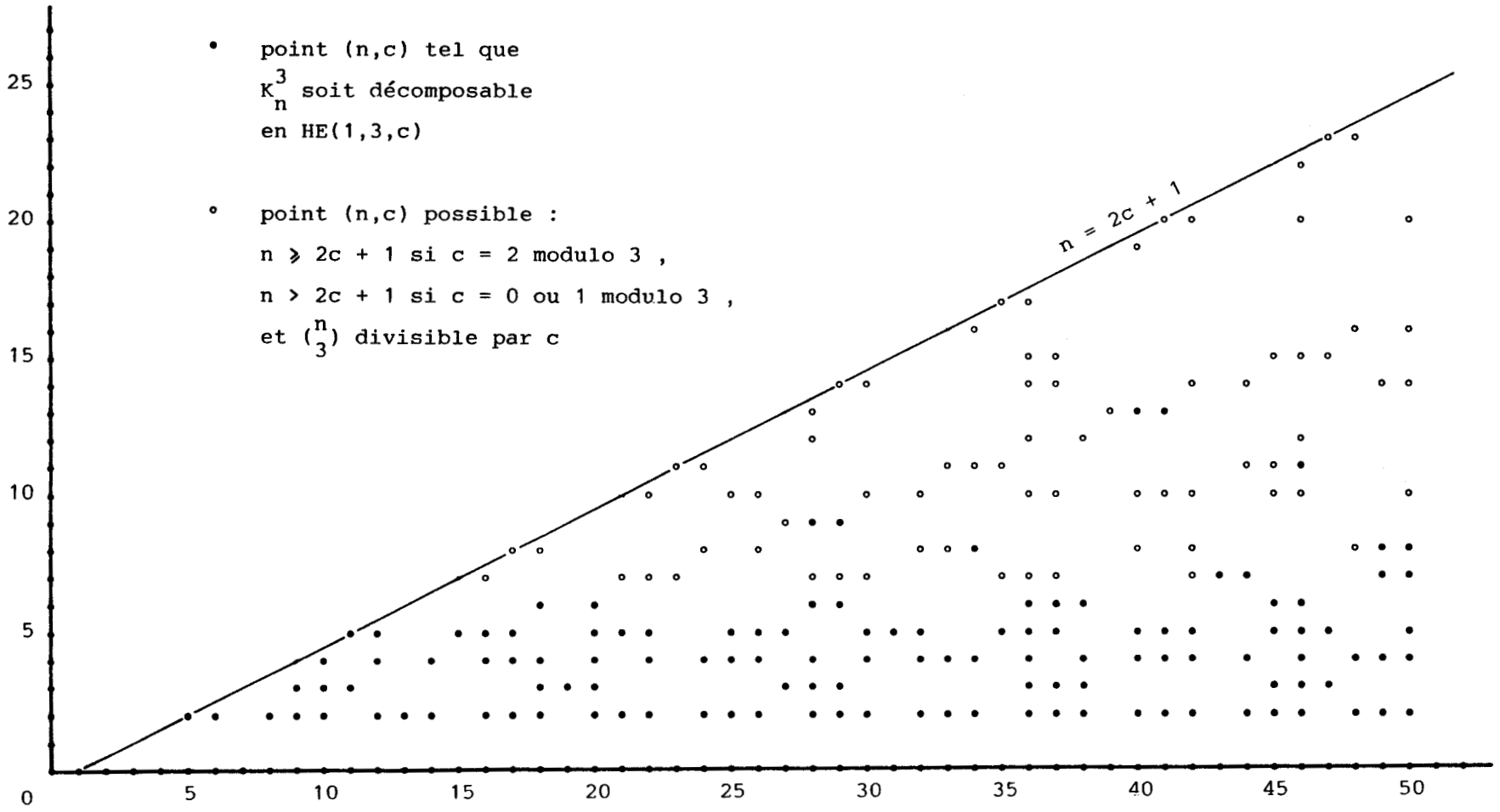
Nous pouvons donc énoncer la conjecture suivante :

conjecture

> K_n^3 est décomposable en hyperétoiles HE(1,3,c) si et seulement si c divise $\binom{n}{3}$ et n est au moins égal à 2c+1 si c est égal à 2 modulo 3, strictement supérieur à 2c+1 si c est égal à 0 ou 1 modulo 3.

La figure de la page suivante décrit les points (n,3,c) de D_1 actuellement connus.

plan (n,3,c) de D_1



II.4.79

LEXIQUE

A-design I.1.30
anti-circuit I.1.31
arc 0.6
arête 0.6
attribut II.1.1
auto-orthogonal I.1.25
auto-orthogonal avec un trou I.2.32

binaire II.1.1
bloc 0.7

carré I.1.1
carré auto-orthogonal I.1.25
carré auto-orthogonal avec un trou I.2.32
carré double ..... 0.4 et I.1.19
carré gréco-latin I.1.24
carré inséparable I.1.23
carré latin I.1.3
carré presque gréco-latin I.1.28
carré séparable I.1.23
carré siamois ..... 0.3 et I.1.6
carré simple I.1.22
c-décomposable ..... II.3.1 et II.4.1
c-décomposition cyclique II.3.23
c-décomposition de Galois II.4.28
centre II.2.3
clique II.3.17
combinatoire 0.1
combinatoire constructive 0.2
configuration 0.1

constructive 0.2
corps de Galois 0.8
corps fini 0.7
couple siamois I.1.8
couple siamois premier I.1.8
cyclique (c-décomposition) II.3.23
cyclique (groupe) I.1.1

décomposition II.2.3
dédoubler I.1.22
degré II.2.5
Δ- système II.2.1
diagonal I.1.21
diviseur I.1.8
double ..... 0.4 et I.1.19
droite 0.7

enregistrement II.1.1
équivalent I.1.2
espace linéaire ..... 0.3 et I.2.9

fichier II.1.1
fichier inverse II.1.2

Galois (c-décomposition) II.4.28
Galois (corps) 0.8
graphe 0.6
gréco-latin I.1.24
groupe cyclique I.1.1

HE(p,k,c) II.2.3
$HUBFS_2$ II.1.3
hypergraphe 0.6
hypergraphe régulier complet II.2.1
hyperétoile 0.2,0.5,II.2.3

identificateur II.1.1
information II.1.1
inséparable I.1.23

K_n^k II.2.1
k-uple II.2.1

latin I.1.3

multiple I.1.8

N(n,2) et N*(n,2) I.1.28
normalisé I.1.3

orbite II.3.21
ordre II.1.2
orienté 0.6
orthogonal (carré) I.1.24
orthogonal (tableau) I.2.20

pairwise balanced design ..... 0.3 et I.2.9
paquet II.1.2
PBD ..... 0.3 et I.2.9
plan projectif ..... 0.7 et I.2.9
point 0.7
point possible II.3.2
premier I.1.8
presque gréco-latin I.1.28
presque régulier II.2.5
produit de carrés I.2.27

racine I.1.12
rayon II.2.3
redondance II.1.2
régulier (hypergraphe) II.2.1
régulière (c-décomposition) II.4.4
réponse II.1.2
requête II.1.2

séparable I.1.23
siamois (carré) ..... 0.3 et I.1.6
siamois (couple) I.1.8
simple I.1.22
sommet 0.6
symbole I.1.1
symétrique I.1.20
système de Steiner 0.7

tableau orthogonal I.2.20
TD I.2.13
transposé I.1.25
transversal design I.2.13
trou I.2.32

REFERENCES

[1] H.L. ABBOTT et B. GARDNER
On a combinatorial theorem of Erdös and Rado
Recent Progress in Combinatorics - W.T. Tutte, ed.
Academic Press, New York (1969) 211-215

[2] C.T. ABRAHAM, S.P. GHOSH et D.K. RAY-CHAUDHURI
File organization schemes based on finite geometries
Information and Control 12 (1968) 143-163

[3] B. ALSPACH, K. HEINRICH et M. ROSENFELD
Edge partitions of the complete symmetric directed graph and related designs
Israel J. Math. 40 (1981) 118-128

[4] Z. BARANYAI
On the factorization of the complete uniform hypergraph
Colloquia Math. Soc. J. Bolyai 10, Finite and infinite sets, North Holland, Amsterdam (1975) 91-108

[5] C. BERGE
Principes de combinatoire
Dunod, Paris (1968)

[6] C. BERGE
Graphes et hypergraphes
Dunod, Paris (1970)

[7] R.C. BOSE et G.G. KOCH
The design of combinatorial information retrieval systems for files with multiple-valued attributes
SIAM Journal of Applied Mathematics 17 (1969) 1203-1214

[8] R.C. BOSE, S.S. SHRIKHANDE et E.T. PARKER
Further results on the construction of mutually orthogonal latin squares and the falsity of Euler's conjecture
Canad. J. Math. 12 (1960) 189-203

[9] R.K. BRAYTON, D. COPPERSMITH et A.J. HOFFMAN
Self-orthogonal latin squares of all orders $n \neq 2,3,6$
Bulletin of the American Mathematical Society
volume 80, numéro 1, janvier 1974, 116-118

[10] P.J. CAMERON
Extremal results and configuration theorems for Steiner systems
Annals of Discrete Mathematics 7 (1980) 43-63

[11] D.K. CHOW
New balanced-file organization schemes
Information and Control 15 (1969) 377-396

[12] D.J. CRAMPIN et A.J.W. HILTON
Remarks on Sade's disproof of the Euler conjecture with an application to latin squares orthogonal to their transpose
Journal of Combinatorial Theory A 18 (1975) 47-59

[13] J. DÉNES et A.D. KEEDWELL
Latin squares and their applications
Academic Press, New York and London (1974)

[14] R.H.F. DENNISTON
Some new 5-designs
Bull. London Math. Soc. 8 (1976) 263-267

[15] P. ERDÖS et R.RADO
Intersection theorems for systems of sets
J. London Math. Soc. 35 (1960) 85-90

[16] L. EULER
Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques
Mémoire présenté à l'Académie des Sciences de
Saint-Petersbourg le 8 mars 1779

[17] P. FAURE
Corps finis ou corps de Galois
E.D.F. - Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches
série C - mathématiques, informatique n°1 (1975) 5-24

[18] S.P. GHOSH et C.T. ABRAHAM
Application of finite geometries in file organization
for records with multiple-valued attributes
I.B.M. J. Res. Develop. 12 (1968) 180-187

[19] M. HALL Jr
Combinatorial theory
Blaisdell, Waltham, Massachusetts (1967)

[20] H. HANANI
On the number of orthogonal latin squares
Journal of Combinatorial Theory 8 (1970) 247-271

[21] K. HEINRICH et W.D. WALLIS
Almost graeco-latin squares
Ars Combinatoria 10 (1980) 55-63

[22] K. HEINRICH
Existence of designs related to a family of graph
decompositions
Ars Combinatoria 16 (1983) 35-41

[23] G. HEUZÉ
Sur les corps finis
Math. Sci. Hum. 12e année, n°47 (1974) 57-59

[24] C.C. LINDNER
The generalized singular direct product for quasigroups
Canadian Math. Bull. 14 (1971) 61-63

[25] C.C. LINDNER et A. ROSA
Topics on Steiner systems
Annals of Discrete Math. 7 (1980)

[26] L. LOVÁSZ
Combinatorial problems and exercises
North Holland (1979) - problème 12.16

[27] N.S. MENDELSOHN et S.H.Y. HUNG
On the Steiner systems S(3,4,14) and S(4,5,15)
Utilitas Math. 1 (1972) 5-35

[28] A.F. MOUYART-TASSIN
Une nouvelle sorte de configuration combinatoire : les carrés siamois
Thèse de 3^e cycle n°735 - Université de Lille I (1978)

[29] A.F. MOUYART
Carrés siamois
Annals of Discrete Math. 8 (1980) 243-246

[30] A.F. MOUYART
Symmetric inseparable double squares
Annals of Discrete Math. 17 (1983) 483-496

[31] A.F. MOUYART
Decomposition of the complete hypergraph into hyperclaws
à paraître

[32] A.F. MOUYART et F.STERBOUL
Decomposition of the complete hypergraph into delta-systems I
à paraître dans Journal of Combinatorial Theory

[33] A.F. MOUYART et F. STERBOUL
Decomposition of the complete hypergraph into delta-systems II
à paraître dans Journal of Combinatorial Theory

[34] D.K. RAY-CHAUDHURI
Combinatorial information retrieval systems for files
SIAM J. Appl. Math. 16 (1968) 973-992

[35] A. SADE
Produit direct singulier de quasigroupes orthogonaux et anti-abéliens
Ann. Soc. Sci. Bruxelles (1), 74 (1960) 91-99

[36] D.R. STINSON
A short proof of the nonexistence of a pair of orthogonal latin squares of order six
Journal of Combinatorial Theory A 36 (1984) 373-376

[37] G. TARRY
Le problème des 36 officiers
Compte-rendu Assoc. Fr. Av. Sci. 1 (1900) 122-123 ; 2 (1901) 170-203

[38] J.R. TORT
Un problème de partition de l'ensemble des parties à trois éléments d'un ensemble fini
Discrete Math. 44 (1983) 181-185

[39] W.D. WALLIS
Problem
Combinatorics 79, part II
Annals of Discrete Math. 9 (1980) 309

[40] W.D. WALLIS
Some new orthogonal diagonal latin squares
University of Waterloo Silver Jubilee Conference
on Combinatorics ; June 14 - July 2, 1982

[41] S.M.P. WANG et R.M. WILSON
A few more squares II
Proceedings 9th Southeastern Conference on Combinatorics,
Graph Theory and Computing, Boca Raton, Florida (1978)

[42] R.M. WILSON
An existence theory for pairwise balanced designs
III : proof of the existence conjectures
Journal of Combinatorial Theory A 18 (1975) 71-79

[43] R.M. WILSON
The theory of t-designs
Silver Jubilee Conference on Combinatorics
June 14 - July 2, 1982, University of Waterloo, Canada

[44] S. YAMAMOTO, T. TERAMOTO et K. FUTAGAMI
Design of a balanced multiple-valued filing scheme
of order two based on cyclically generated spread
in finite projective geometry
Information and Control 21 (1972) 72-91

[45] S. YAMAMOTO, H. IKEDA, S. SHIGE-EDA, K. USHIO et
N. HAMADA
On claw-decomposition of complete graphs and complete
bigraphs
Hiroshima Math. Journal 5 (1975) 33-42

[46] S. YAMAMOTO, H. IKEDA, S. SHIGE-EDA, K. USHIO et N. HAMADA
Design of a new balanced file organization scheme with the least redundancy
Information and Control 28 (1975) 156-175

[47] S. YAMAMOTO et S. TAZAWA
Hyperclaw decomposition of complete hypergraphs
Annals of Discrete Math. 6 (1980) 385-391

[48] ZHU LIE et K. HEINRICH
article à paraître, signalé par D. Sotteau et Ch. Colbourn

RESUME

La combinatoire constructive a pour objet la construction de configurations, ensembles finis dont on impose la structure. Nous étudions ici deux familles de configurations : les carrés, dérivés des carrés latins, et les décompositions de l'hypergraphe complet en sous-hypergraphes isomorphes.

En les construisant effectivement, nous démontrons ainsi l'existence de carrés doubles symétriques inséparables de tout ordre supérieur ou égal à 6, sauf peut-être pour les ordres 17, 18 et 20. Ces trois valeurs ne sont probablement pas des exceptions, mais la construction directe de carrés de cet ordre demande un temps de calcul trop important.

En ce qui concerne la décomposition de l'hypergraphe régulier complet K_n^k en hyperétoiles HE(p,k,c), nous avons établi les conditions nécessaires, des conditions suffisantes dans le cas général, puis nous avons plus particulièrement étudié les cas $p = 0$, $p = 1$, $p = k-1$, et surtout $k = 3$. Le problème est entièrement résolu pour $p = 0$, pour $c = 2$, pour $k = 2$, et pour $k = 3$ quand $p = 1$ et $c \leqslant 6$, ou $p = 2$ et $c < 6$. Le calcul de décompositions pour $(n,p,k,c) = (45,2,3,6)$ et $(14,2,3,7)$ résoudrait entièrement les cas $c = 6$ et $c = 7$ quand $k = 3$ et $p = 2$.

MOTS-CLES

Carré latin, combinatoire, configuration carrée, configuration étoile, décomposition graphe, hypergraphe, système Steiner.

BIBLIOTHEQUE INTERUNIVERSITAIRE
SECTION DE SCIENCES
LILLE