

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

THÈSE DE DOCTORAT

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN MECANIQUE DES FLUIDES

par

Stéphane GODTS

**UNE MODELISATION ASYMPTOTIQUE DES
COURANTS OCEANIQUES**



Membres du Jury : A. DYMENT, Professeur, Université de Lille I, Président
A. RAMAMONJIARISOA, Directeur de Recherche au C.N.R.S., Rapporteur
P.A. BOIS, Professeur, Université de Lille I, Rapporteur
R. ZEYTOUNIAN, Professeur, Université de Lille I, Examineur
F. PARSY, Professeur, Université de Lille I, Examineur

Soutenue le 13 décembre 1985

Je suis heureux de pouvoir exprimer ici ma reconnaissance à Monsieur R. ZEYTOUNIAN qui a dirigé cette thèse. Ses encouragements et ses suggestions, toujours pertinentes, m'ont permis de mener à bien ce travail.

Monsieur A. DYMENT me fait l'honneur de présider ce jury. Qu'il me soit permis de lui exprimer ma gratitude.

Je remercie Messieurs A. RAMAMONJIARISOA et P.A. BOIS qui m'ont fait l'honneur de s'intéresser à mon travail et qui ont accepté de le juger.

Monsieur F. PARSY a bien voulu faire partie du jury qu'il trouve ici l'expression de mes remerciements.

Je me permets de rendre hommage à mon épouse, P. GODTS, ainsi qu'à mes parents pour leur confiance et les encouragements qu'ils n'ont jamais cessé de me prodiguer.

Que Madame PETIAUX et le service de reprographie de l'U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées trouvent ici mes remerciements pour la qualité de la réalisation matérielle de ce travail.

UNE MODELISATION ASYMPTOTIQUE
DES COURANTS OCEANIQUES

INTRODUCTION	1
CHAPITRE I.- <u>LE MODELE MATHEMATIQUE EN ONDES LONGUES</u>	10
I.1.- Les équations de base	12
I.1.1.- Navier-Stokes	12
I.1.2.- Les équations en coordonnées sphériques	13
I.2.- Les conditions aux limites	15
I.3.- Coordonnées cartésiennes locales - adimensionna- lisation	16
I.4.- L'approximation du plan tangent. L'effet β	20
I.5.- L'interface atmosphère-océan	24
I.5.1.- Préliminaire géométrique	24
I.5.2.- Détermination du vecteur-contrainte	25
I.6.- L'approximation des ondes longues	32
I.6.1.- Le passage à la limite en ondes longues ...	32
I.6.2.- Le filtrage	34
CHAPITRE II.- <u>MODELISATION ASYMPTOTIQUE</u>	42
II.1.- Modélisation asymptotique	44
II.2.- Le modèle mathématique	46
II.3.- Quasi-géostrophique et agéostrophisme	47
II.4.- L'atmosphère	53
CHAPITRE III.- <u>MODELE AVEC DENSITE VOLUMIQUE CONSTANTE</u>	56
III.1.- Modèle en ondes longues avec densité constante ..	58
III.1.1.- L'écoulement principal	58

III.2.- Couches limites d'Ekman stationnaires	62
III.2.1.- Voisinage du fond	62
III.2.2.- Voisinage de l'interface	66
III.2.2.1.- Vitesse horizontale	66
III.2.2.2.- Vitesse verticale dans la couche limite d'Ekman à l'interface	70
III.3.- L'adaptation	72
III.4.- Problème d'évolution pour \bar{f}_1	75
III.5.- Couches limites d'Ekman d'ordre R_0	75
III.5.1.- Voisinage du fond	75
III.6.- Conclusion	79
 CHAPITRE IV.- <u>LE MODELE ASYMPTOTIQUE QUASI-GEOSTROPHIQUE</u>	 80
IV.1.- L'équation quasi-géostrophique	82
IV.2.- L'adaptation au géostrophisme	85
IV.3.- Couches limites d'Ekman stationnaires	93
IV.3.1.- Voisinage du fond	93
IV.3.2.- Voisinage de l'interface	99
IV.3.2.1.- Vitesse horizontale	99
IV.3.2.2.- Vitesse verticale	103
IV.4.- Le problème d'évolution quasi-géostrophique	105
IV.5.- Structure verticale de l'écoulement quasi-géo- strophique	107
 CHAPITRE V.- <u>LE MODELE AGEOSTROPHIQUE</u>	 113
V.1.- L'équation agéostrophique	115
V.2.- La couche limite d'Ekman instationnaire	118

III

V.2.1.- Le voisinage du fond	118
V.2.2.- Le voisinage de l'interface	125
V.3.- L'adaptation à l'agéostrophisme	128
V.4.- Couches d'Ekman stationnaires de seconde approximation	134
V.4.1.- Les équations de couche limite au voisinage du fond	134
V.4.2.- Problème d'Ackerblom de seconde approximation au voisinage du fond	137
V.4.2.1.- Vitesse horizontale \hat{v}_1	137
V.4.2.2.- Vitesse verticale \hat{w}_2 . condition à la limite, en $z=-1$ pour \bar{f}_2	140
V.4.3.- Les équations de couche limite au voisinage de l'interface	142
V.4.4.- Problème d'Ackerblom de seconde approximation au voisinage de l'interface	144
V.4.4.1.- Vitesse horizontale \hat{v}_1	144
V.4.4.2.- Détermination de $\vec{V}_0^{(1)}$	147
V.4.4.3.- Vitesse verticale \hat{w}_2 . Condition à la limite en $z=0$, pour \bar{f}_2	151
V.4.5.- Conditions au temps $t=0$ pour les conditions aux limites en $z=-1$ et $z=0$..	153
V.4.6.- Le problème d'évolution agéostrophique ...	153
 CHAPITRE VI.- <u>INFLUENCE D'UNE VISCOSITE VARIABLE</u>	 159
VI.1.- Introduction	161
VI.2.- Formulation mathématique du problème	162
VI.3.- Couche limite d'Ekman laminaire avec viscosité variable	165
VI.4.- Sous-couche visqueuse	166

VI.5.- Mise en évidence de l'interaction couche limite laminaire-sous-couche visqueuse	171
VI.6.- Problème d'Ackerblom de seconde approximation pour $\hat{\mathcal{E}}_1$	173
ANNEXE 1.- <u>LA METHODE DES DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES RACCORDES.</u>	
<u>TECHNIQUES DE RACCORD</u>	175
I.- Définitions	175
I.1.- Approximations asymptotiques	175
I.1.1.- Approximations régulières	175
I.1.2.- Perturbations régulières et singulières ...	177
I.1.3.- Approximations locales	180
I.2.- Règles de raccord	184
I.3.- Approximation et dégénérescence significatives	189
ANNEXE 2.- <u>EQUATIONS EN COORDONNEES CARTESIENNES LOCALES</u> <u>ADIMENSIONNEES AVEC VISCOSITE VARIABLE</u> (Application au modèle en ondes longues dans le plan tangent)	197
ANNEXE 3.- <u>QUELQUES ORDRES DE GRANDEUR DES PARAMETRES SANS DIMENSION</u>	201
CONCLUSION	214
REFERENCES	216

INTRODUCTION

Les difficultés que présenterait une étude générale des mouvements océaniques sont sans doute insurmontables. En effet, la complexité des écoulements rencontrés à la surface de la sphère terrestre dépasse de beaucoup nos connaissances physiques et mathématiques. On est donc naturellement conduit à considérer séparément les problèmes spécifiques correspondant à une situation physique donnée : étude des marées, étude des grands courants tel le Gulf-Stream, étude des ondes dues à la tension superficielle par exemple.

Ces problèmes conduisent le plus souvent à des modèles idéalisés qui n'entendent pas donner une explication complète mais visent plutôt à mettre en évidence les traits dominants des phénomènes qu'ils approchent.

La diversité de ces mouvements est aussi un obstacle à leur étude : il est bien évident que l'on ne peut considérer l'ensemble de leur spectre dans un travail de Thèse. Aussi nous limiterons-nous à ceux que PEDLOSKY (1979) nomme les écoulements de grande échelle dynamique, c'est-à-dire ceux pour lesquels la rotation de la Terre est prédominante et dont l'étendue horizontale ne dépasse pas 1000 km.

Parmi les paramètres caractéristiques des effets dus à la rotation de la Terre le plus important est le nombre de Rossby (ROSSBY, 1939), rapport de l'accélération de l'écoulement dans un repère lié à la Terre à la force de Coriolis. Deux autres caractéristiques importantes ressortent de l'analyse de ces écoulements : tout d'abord l'océan est stratifié en profondeur et, comme on le verra par la suite, une importante relation lie le champ des vitesses à la densité volumique (cette relation est due à la rotation de la Terre). Deuxièmement, et cela domine la physique des problèmes envisagés, ces écoulements ont lieu dans une fine couche entourant la sphère terrestre. En effet, la profondeur des océans qui excède rarement 5 km est beaucoup plus petite que leur étendue horizontale. C'est à partir de cette dernière remarque que nous avons été conduits à développer une théorie asymptotique en ondes longues :

le formalisme envisagé ici s'appuie sur la petitesse du paramètre hydrostatique (qui est la mesure de la profondeur relative des océans) et, à notre connaissance, n'avait pas encore été développé de façon systématique. La simplicité des résultats obtenus, qui à première vue n'était pas évidente, nous a permis d'appliquer à l'océan des techniques qui se sont révélées très fécondes dans l'atmosphère.

Le concept du géostrophisme associé à la méthode des développements raccordés (basée sur des nombres de Rossby petits devant l'unité) conduit alors à la formulation de problèmes d'évolution pour la pression océanique. Les modèles mathématiques approchés obtenus tiennent compte de l'interaction atmosphère-océan ce qui est nouveau dans le présent contexte. Des codes numériques doivent pouvoir être développés à partir de nos résultats, permettant ainsi un traitement sur ordinateur de l'évolution des courants océaniques à l'image des modèles atmosphériques qu'utilisent les météorologues pour la prévision du temps. Ce travail n'est donc pas essentiellement théorique et ses prolongements doivent intéresser tous ceux qui sont concernés par l'évolution des océans (météorologues, océanographes et plus généralement tous ceux qui exploitent les océans).

Dans notre travail, l'océan et l'atmosphère sont assimilés à un milieu fluide supposé newtonien, pesant, compressible et visqueux.

Par hypothèse l'océan est supposé être en évolution isochorique (c'est-à-dire à masse volumique constante le long des trajectoires, ce qui oblige nécessairement à négliger les effets non adiabatiques), limité verticalement par un fond plat et une surface libre qui le sépare de l'atmosphère et d'étendue horizontale de l'ordre de $L_0 \ll a_0$, où a_0 désigne le rayon de la sphère terrestre.

Nos équations sont rapportées à un repère lié à la Terre qui est en rotation à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ ($|\vec{\Omega}| = \Omega_0 \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$).

Au Chapitre 1, après avoir décrit le cadre physique, qui est celui des équations de Navier-Stokes dans le plan tangent (avec effet β), dans

lequel s'inscrit cette étude, on construit un modèle mathématique en ondes longues de la circulation océanique. Ce modèle se déduit des équations générales par un processus limite lié à la petitesse du paramètre hydrostatique et tient compte de la présence de l'atmosphère par un couplage des couches d'Ekman atmosphérique et océanique. Ce couplage est traduit par une condition de transmission portant sur les gradients verticaux du champ des vitesses dans les deux couches limites. En première approximation, il est connu (R. ZEYTOUNIAN, 1985) que le modèle d'Ackerblom permet de décrire la couche limite atmosphérique; on peut alors, à partir de cette remarque, expliciter la condition de transmission. La modélisation précédente "filtre" certains phénomènes physiques; afin d'éclairer ce point on donne un exemple simple d'équation des ondes pour laquelle certaines solutions sont modifiées ou disparaissent (on dit qu'elles sont filtrées) lors de l'approximation des ondes longues. Ce dernier point conclut le chapitre 1.

On désigne par géostrophisme l'équilibre entre la composante horizontale de la force de Coriolis et le gradient horizontal de la pression. Le second chapitre est consacré aux différentes techniques asymptotiques (passages à la limite principal et locaux, développements asymptotiques, en puissance de R_0 , extérieurs et intérieurs) qui permettront la construction des approximations d'ordre supérieur au géostrophisme que sont les modèles quasi géostrophique, avec densité constante puis variable, et agéostrophique.

Le problème du quasi-géostrophisme avec densité constante fait l'objet du troisième chapitre. Ce modèle simple de circulation océanique ne permet pas la description de la structure verticale de l'écoulement mais sert d'introduction aux chapitres 4 et 5 : la simplicité des calculs dans le cas de la densité constante laisse apparaître clairement la façon dont on construit l'approximation quasi-géostrophique ainsi que le problème d'évolution associé (équation et conditions aux limites associées).

L'étude complète, c'est-à-dire avec une densité variable, est

développée au chapitre 4. C'est à partir des résultats de ce chapitre qu'une analyse de la structure verticale des écoulements peut être entreprise; le problème correspondant est formulé pour conclure le quatrième chapitre.

Afin de montrer que le formalisme développé dans les précédents chapitres peut être poursuivi à l'ordre supérieur, on développe au chapitre 5, ce que l'on appelle avec GUIRAUD et ZEYTOUNIAN (1980) l'agéostrophisme, qui est l'étude du terme d'ordre R_0^2 de la pression océanique. Ce chapitre est très technique et les calculs qui y sont développés sont parfois fastidieux mais on y trouve l'étude de régions doublement locales que constituent les couches limites d'Ekman instationnaires au voisinage du fond et de l'interface. Il faut noter que l'agéostrophisme traité dans ce chapitre n'est pas celui de PEDLOSKY (1979) qui, lui, désigne par agéostrophisme tout écoulement qui s'écarte du quasi-géostrophisme.

Le sixième chapitre est consacré à l'étude de l'influence d'un coefficient de viscosité dynamique variable suivant la verticale et développe une idée de ZEYTOUNIAN (1983, non publié). Le modèle asymptotique élaboré permet d'inclure une sous-couche visqueuse dans la couche limite classique d'Ekman au voisinage du fond et montre, contrairement à ce que l'on peut rencontrer dans la littérature concernant le sujet (voir I.A. KIBEL, 1963 par exemple), que c'est avec la couche limite d'Ekman de seconde approximation, et non pas de première approximation, qu'est couplée la sous-couche visqueuse de première approximation. Le mécanisme de cette interaction est mis en évidence et explicité. Dans le cas de la densité constante on formule le problème d'ACKERBLUM pour la vitesse d'ordre R_0 dans la couche limite d'Ekman située au voisinage du fond.

On termine ce travail par trois annexes. La première est une présentation simplifiée de la méthode des développements asymptotiques raccordés et elle a été rédigée pour deux raisons : tout d'abord pour préciser les idées de l'auteur sur ce sujet et ensuite pour permettre aux "non spécialistes" des techniques asymptotiques d'aborder la lecture de la thèse sans trop de difficultés. Dans la seconde annexe on trouvera les équations de Navier-Stokes avec viscosité dynamique variable en coordonnées cartésiennes locales adimensionnées puis ces équations sont écrites dans le plan tangent; enfin, on donne leur forme limite lors de l'approximation des ondes longues. Enfin dans la troisième de ces annexes on donne les ordres de grandeur des principaux paramètres sans dimension qui apparaissent dans notre travail.

Signalons pour terminer que les résultats présentés au chapitre 4 ont fait l'objet d'une publication (S. GODTS et R. ZEYTOUNIAN, 1985). D'autre part une autre publication est en cours : elle concerne les résultats du chapitre 6 (S. GODTS et R. ZEYTOUNIAN, à paraître).

PRINCIPAUX SYMBOLES ET NOTATIONS

μ, ν	coefficients de viscosité dynamique et cinématique.
$\vec{\nabla}, \vec{\nabla}^2$	opérateurs gradient et laplacien.
$\vec{\partial}, \vec{\partial}^2$	gradient plan, laplacien plan.
(θ, φ, r)	coordonnées sphériques (θ : latitude; φ : longitude).
$\vec{\Omega}, \Omega_0$	rotation de la Terre, $\Omega_0 = (\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega})^{1/2} \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.
a_0	rayon de la Terre, $a_0 \approx 6400 \text{ km}$.
$l = 2\Omega_0 \sin \theta$	paramètre de Coriolis.
$l_0 = 2\Omega_0 \sin \theta_0$	paramètre local de Coriolis.
$L_0, H_0, T_0,$	échelles caractéristiques de longueur, de temps,
U_0, W_0, P_0, ρ_0	de vitesse de pression, de masse volumique.
$\varepsilon = H_0 / L_0$	paramètre hydrostatique.
$\delta = L_0 / a_0$	
$\lambda = W_0 / U_0$	
$\beta = \frac{L_0}{U_0} \frac{d\ell}{dy} \Big _{y=0}$	paramètre bêta.
$Ro = U_0 / l_0 L_0$	nombre de Rossby.
$Re = U_0 L_0 / \nu$	nombre de Reynolds.
$Bo = \rho_0 g H_0 / P_0$	nombre de Boussinesq.
$S = L_0 / U_0 T_0$	nombre de Strouhal

$$M_0^2 = U_0^2 \rho_0 / P_0.$$

$$E = R_0 / Re \quad \text{nombre d'Ekman.}$$

$$E_L = E / \varepsilon^2 \quad \text{nombre d'Ekman vertical.}$$

$$\omega_0 = M_0^2 / R_0^2$$

$$\hat{E}_1 = E_L / R_0^2$$

paramètres de similitude.

$$u = (\vec{v}, w, t, p)$$

où \vec{v} est la vitesse horizontale, w la vitesse verticale,

t et p la pression et la masse volumique.

$$\bar{u} = \bar{u}(x, y, z, t)$$

région principale I.

$$\tilde{u} = \tilde{u}(x, y, z, \tilde{t})$$

région locale II au voisinage de l'instant initial;

$$\tilde{t} = t / SR_0$$

$$\hat{u} = \hat{u}(x, y, \hat{z}, t)$$

région locale III, au voisinage du fond; $\hat{z} = (z + 1) / R_0$.

$$\hat{u} = \hat{u}(x, y, \hat{z}, t)$$

région locale V au voisinage de l'interface; $\hat{z} = -z / R_0$.

$$\check{u} = \check{u}(x, y, \check{z}, \check{t})$$

région doublement locale, au voisinage du fond et de l'instant

initial; $\check{z} = (z + 1) / R_0$ et $\check{t} = t / SR_0$; (IV).

$$\check{u} = \check{u}(x, y, \check{z}, \check{t})$$

région doublement locale, au voisinage de l'interface et de

l'instant initial; $\check{z} = -z / R_0$ et $\check{t} = t / SR_0$; (VI).

Les numéros des régions principale (I) et locales (II à VI) font référence au schéma de la page 50.

Organisation des Chapitres I à V.

Navier-Stokes. (§I.1)

(S)0, avec $\beta = 0(1)$

Equations dans le plan tangent avec effet β . (§I.4)
 $\{t=0; R_0, E_L, M_0, B_0, S, \beta, t, x, y, z \text{ fixés}\}$

Modèle en ondes longues. (§I.6)

$\{(R_0, E_L, M_0) \downarrow 0; \text{avec } \omega_0, \hat{E}_L \text{ fixés}\}$ (§II.3)

Chapitres I-II

§4.2 Adaptation au Géostrophisme
condition initiale (en $t=0$)

§4.1 Modèle Quasi-G:
 $S \frac{D_0}{Dt} (\nabla \cdot \vec{F}_1 + \beta \bar{p}_0 y) = 0$

§4.3 Problème d'Acoustique au voisinage de $z=0$.
conditions à la limite en $z=0$ et $z=-1$

§4.3 Problème d'Acoustique au voisinage de $z=-1$.
en $z=0$ et $z=-1$

$(t, x, y, z) = (z, t) / R_0$ fixés

Chapitres III-IV

à l'ordre suivant

§5.3 Adaptation à l'Agéostrophisme
condition initiale (en $t=0$)

§5.1 Modèle Agéostrophique :
équation pour \vec{F}_2

§5.4 Conditions à la limite en $z=0$ et $z=-1$

§5.4 Couches limites stationnaires d'Ekman en $z=0$ et $z=-1$

à l'ordre suivant.

Chapitre V

§5.2 Raccords \Rightarrow conditions en $t=0$ pour les conditions en $z=0$ et $z=-1$

Raccords \Rightarrow Adaptation au modèle d'Acoustique.

Couches d'Ekman stationnaires au voisinage de l'interface et du fond.

I. LE MODELE MATHEMATIQUE EN ONDES LONGUES.

Dans ce qui suit l'océan et l'atmosphère sont supposés être des milieux continus. Nous nous limitons aux phénomènes macroscopiques et nous supposons que les équations de Navier-Stokes dans \mathbb{R}^3 permettent la description des écoulements étudiés. Nous faisons de plus l'hypothèse restrictive suivante : les deux coefficients de viscosité μ, ν sont constants et satisfont de plus à l'hypothèse classique de Stokes. Nous adoptons le point de vue de ZEYTOUNIAN (1976) qui consiste à découpler les problèmes liés à la turbulence et à la modélisation asymptotique.

I.1.- LES EQUATIONS DE BASE

I.1.1.- Navier-Stokes

Sous les hypothèses formulées dans notre introduction les équations des mouvements océaniques s'écrivent :

$$\begin{array}{l}
 \text{(a)} \quad \frac{D\rho}{Dt} = 0 \\
 \text{(b)} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \\
 \text{(c)} \quad \rho \left\{ \frac{D\vec{u}}{Dt} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{u} \right\} + \vec{\nabla} p = \rho \vec{g} + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{u}
 \end{array}
 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{(a)} \\ \text{(b)} \\ \text{(c)} \end{array}} \right\} \text{(I,1)}$$

où le premier terme du crochet représente l'accélération de la masse et le second la force de Coriolis. C'est une force apparente qui trouve son origine dans la rotation, avec la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ (vecteur parallèle à la ligne des pôles, dirigé vers le Nord, qui représente la rotation terrestre), du repère lié à la Terre.

Dans le membre de droite $\rho \vec{g}$ est la force de gravité apparente (c'est l'accélération gravitationnelle légèrement corrigée par l'accélération centrifuge).

Les effets de viscosité sont pris en compte par le terme $\mu \vec{\nabla}^2 \vec{u}$, où μ est le coefficient de viscosité dynamique supposé constant tout le long de ce chapitre I.

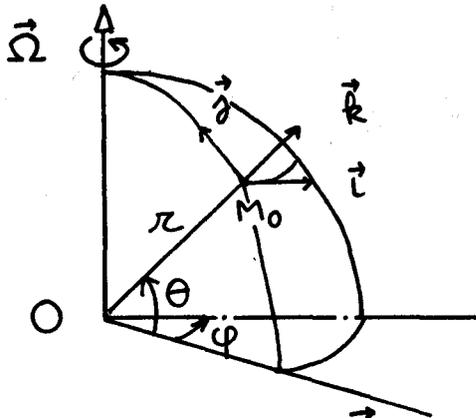
Dans le système (I,1) il faut noter que :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \quad ; \quad \vec{u} = \vec{v} + w \vec{k}$$

$\vec{v} = u \vec{i} + v \vec{j}$; $\vec{\nabla}$: opérateur nabla (ou gradient) où $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée du repère utilisé ($\vec{g} = -g \vec{k}$) et \vec{u} désigne la vitesse relative, p désigne la pression.

1.1.2.- Les équations en coordonnées sphériques

On désigne successivement par θ , φ et r la latitude ($-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$), la longitude ($0 \leq \varphi < 2\pi$), et la distance au centre de la sphère terrestre. En tout point M de coordonnées sphériques r, θ, φ on introduit le repère naturel orthonormé dont les vecteurs de base ont été notés $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$; on désigne par M_0 l'origine de ce repère, avec :



$$M_0(a_0, \theta_0, 0)$$

où a_0 désigne le rayon de la sphère terrestre.

L'opérateur $\vec{\nabla}$ s'écrit alors de la façon suivante :

$$\vec{\nabla} = \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{i} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial r} \vec{k} \quad (\text{I, 1bis})$$

d'où

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Dans ce repère les équations du système (I,1) s'écrivent :

$$(a) \quad \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} u - \frac{u v}{r} \tan \theta + \frac{u w}{r} - 2\Omega v r \sin \theta + 2\Omega w \cos \theta \right) \\ = -\frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \uparrow + \mu \left(\vec{\nabla}^2 u + \frac{2}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{2 \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{u}{r^2 \cos^2 \theta} \right);$$

$$(b) \quad \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} v + \frac{u^2}{r} \tan \theta + \frac{w v}{r} + 2\Omega u \sin \theta \right) \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \uparrow + \mu \left(\vec{\nabla}^2 v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{2 \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r^2 \cos^2 \theta} \right);$$

$$(c) \quad \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} w - \frac{u^2 + v^2}{r} - 2\Omega u \cos \theta \right) \quad (I, 2) \\ = -\frac{\partial}{\partial r} \uparrow - \rho g + \mu \left(\vec{\nabla}^2 w - \frac{2}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v \cos \theta) - \frac{2w}{r^2} \right);$$

$$(d) \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \theta} (v \cos \theta) + 2w \cos \theta + r \cos \theta \frac{\partial w}{\partial r} = 0;$$

$$(e) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho = 0$$

On rappelle que $\vec{u} = \vec{v} + w \vec{k}$.

On trouvera dans VERONIS (1973) une formulation du problème précédent en coordonnées elliptiques (la Terre n'est plus supposée sphérique mais est supposée être un ellipsoïde de révolution) ainsi qu'une estimation de l'erreur commise en assimilant la Terre à une sphère.

1.2.- LES CONDITIONS AUX LIMITES

Les conditions utilisées ici sont classiques, on en trouvera un commentaire dans le livre de P. GERMAIN et P. MULLER (1980).

Le long d'une paroi baignée par un fluide (visqueux ou non) la composante normale de la vitesse du fluide relativement à la paroi est toujours nulle. L'expérience a permis de dégager pour des fluides visqueux la condition plus forte dite d'adhérence : le long d'une paroi, la vitesse relative du fluide visqueux est nulle.

La justification que l'on peut donner de cet énoncé est essentiellement d'ordre expérimental : on constate effectivement que ses conséquences sont bien vérifiées par l'expérience; mais il est aussi cohérent du point de vue mathématique avec l'ordre des équations.

Pour des raisons analogues, on admettra que sur une surface de séparation entre deux fluides visqueux il ne peut y avoir de variations de vitesse. A la condition nécessaire imposant aux composantes normales des vitesses relatives d'être nulles, on ajoute donc, lorsque les deux fluides sont visqueux, la condition que les composantes tangentielles des vitesses relatives doivent aussi être nulles.

En l'absence de tension superficielle on doit vérifier de plus que sur cette surface de séparation le vecteur contrainte pour les directions normale et tangentielle est continu.

A ces conditions aux frontières s'ajoutent des données initiales :

$$t = 0, \quad \vec{u} = \vec{u}^0 \quad \text{et} \quad \rho = \rho^0 \quad (\text{I},3)$$

I.3.- COORDONNEES CARTESIENNES LOCALES - ADIMENSIONNALISATION

On utilise la transformation de coordonnées définie par :

$$(\pi, \theta, \varphi) \longleftrightarrow (x, y, z)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} x &= a_0 \cos \theta_0 \cdot \varphi \\ y &= a_0 (\theta - \theta_0) \\ z &= r - a_0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{I,4})$$

où $\theta_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (le Jacobien qui vaut $-a_0^2 \cos \theta_0$ est différent de zéro si l'on ne se place pas au voisinage d'un pôle, ce que l'on suppose désormais). (a_0, θ_0, φ) désignent les coordonnées sphériques du point au voisinage duquel l'écoulement est étudié; on rappelle que a_0 mesure la distance du centre de la Terre à la surface moyenne des océans (on a : $a_0 \sim 6400$ kms).

Afin de mettre en évidence l'importance relative des différents mécanismes qui gouvernent les circulations océanique et atmosphérique il est habituel de rendre sans dimension les équations et les conditions aux limites correspondantes. On fait ainsi apparaître différents nombres sans dimensions (nombres de Reynolds et de Rossby, par exemple) dans les équations; ce sont ces nombres qui traduisent dans les équations les effets de la rotation de la Terre (Rossby) et de la viscosité (Reynolds) par exemple.

Soient

$$L_0, H_0, T_0, U_0, W_0, P_{\infty} \text{ et } \rho_{\infty}$$

les échelles caractéristiques de longueur, de temps, de vitesse, de pression, de masse volumique.

On définit alors les variables adimensionnées suivantes (notées avec un prime) :

$$(x, y) = L_0(x', y'); \quad z = H_0 z'; \quad r = a_0 r'$$

$$t = T_0 t'$$

$$(u, v) = U_0(u', v'); \quad w = W_0 w'$$

$$p = P_{\infty} p'; \quad \rho = \rho_{\infty} \rho'$$

(I,5)

A l'aide de (I,4) et (I,5) on obtient

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{a_0 \cos \theta_0}{L_0} \frac{\partial}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{a_0}{L_0} \frac{\partial}{\partial y'}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{H_0} \frac{\partial}{\partial z'}$$

(I,6)

Si on désigne par $S \frac{D}{Dt'}$ l'opérateur de dérivation particulaire :

$$S \frac{D}{Dt'} = S \frac{\partial}{\partial t'} + \mu' \frac{\cos \theta_0}{r' \cos \theta} \frac{\partial}{\partial x'} + r' \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{L_0 W_0}{H_0 U_0} w' \frac{\partial}{\partial z'}$$

on obtient le système suivant (équivalent à (I,2)) où l'on a supprimé les primes.

$$(a) \left(S \frac{D u}{Dt} - \delta \frac{\mu v}{r} \operatorname{tg} \theta + \lambda \delta \frac{\mu w}{r} - \frac{1}{R_0} v \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} + \frac{\lambda w \cos \theta}{R_0 \sin \theta_0} \right) = - \frac{\cos \theta_0}{\rho r \cos \theta} M_0^{-2} \frac{\partial}{\partial x} \uparrow + \frac{1}{\rho \operatorname{Re}} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial y} \left(\cos \theta \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\cos^2 \theta_0}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \lambda \delta \frac{\cos \theta_0}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial w}{\partial x} - 2 \delta \frac{\cos \theta_0 \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\delta^2 \mu}{r^2 \cos^2 \theta} \right);$$

$$(b) \left(S \frac{D v}{Dt} + \delta \frac{\mu^2}{r} \operatorname{tg} \theta + \lambda \delta \frac{r w}{r} + \frac{1}{R_0} \mu \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} \right) = - \frac{1}{\rho r} M_0^{-2} \frac{\partial}{\partial y} \uparrow + \frac{1}{\rho \operatorname{Re}} \left(\frac{1}{\varepsilon^2 r^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\delta^2 v}{r^2 \cos^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta_0}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \lambda \delta \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial y} + 2 \delta \frac{\cos \theta_0 \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial \mu}{\partial x} \right);$$

$$\begin{aligned}
 (c) \quad & \left(\lambda \varepsilon S \frac{\partial w}{\partial t} - \delta \varepsilon \frac{u^2 + v^2}{r} - \frac{\varepsilon}{R_0} \mu \frac{\cos \theta}{\sin \theta_0} \right) \\
 & = - \frac{1}{\rho} M_0^{-2} \left(\frac{\partial}{\partial y} \rho + B_0 \cdot \rho \right) + \frac{1}{\rho R_0} \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} (r^2 \frac{\partial w}{\partial y}) \right. \\
 & \quad + \lambda \varepsilon \frac{1}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial y} (\cos \theta \frac{\partial w}{\partial y}) + \lambda \varepsilon \frac{\cos^2 \theta_0}{r^2 \cos^3 \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
 & \quad - 2 \lambda \varepsilon \delta^2 \frac{w}{r^2} - 2 \delta \varepsilon \frac{1}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial y} (v \cos \theta) \\
 & \quad \left. - 2 \delta \varepsilon \frac{\cos \theta_0}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial x} \mu \right) ; \tag{I,7}
 \end{aligned}$$

$$(d) \quad \lambda \frac{\partial}{\partial y} (r^2 w) + \varepsilon \frac{r}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial y} (v \cos \theta) + \varepsilon \frac{r \cos \theta_0}{\cos \theta} \frac{\partial u}{\partial x} = 0;$$

$$\begin{aligned}
 (e) \quad & S \frac{\partial}{\partial t} \rho + \mu \frac{\cos \theta_0}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial x} \rho + v \frac{\partial}{\partial y} \rho \\
 & + \frac{\lambda}{\varepsilon} w \frac{\partial}{\partial y} \rho = 0.
 \end{aligned}$$

Les paramètres sans dimension qui apparaissent dans ces équations sont :

- le nombre de Rossby

$$R_0 = U_0 / l_0 L_0 ; \quad l_0 = 2 \Omega_0 \sin \theta_0$$

où $\Omega_0 \sim 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

- le nombre de Reynolds

$$Re = U_0 L_0 / \nu ; \quad \nu = \mu / \rho_{00}$$

- le nombre de Boussinesq (ZEYTOUNIAN; 1985)

$$Bo = \rho_{00} g H_0 / P_{00}$$

- le nombre de Mach

$$M_0^2 = U_0^2 / c_0^2 ; \quad c_0^2 = P_{00} / \rho_{00}$$

- le nombre de Strouhal

$$S = L_0 / U_0 T_0$$

et les amplitudes relatives

$$\varepsilon = H_0 / L_0 ; \quad \delta = L_0 / a_0$$

$$\lambda = W_0 / U_0$$

1.4.- L'APPROXIMATION DU PLAN TANGENT. L'EFFET β .

Lorsque $\delta = L_0 / a_0$ tend vers zéro (approximation dite du plan tangent) on peut supposer que les coordonnées x et y sont des coordonnées cartésiennes liées au plan normal à $\vec{g} = -g\vec{k}$ (LEBLOND et MYSAK; 1978). Dans ce cas le seul paramètre par lequel la sphéricité laisse une trace dans les équations est le paramètre

$$\beta = \frac{2\Omega_0 \cos\theta_0}{a_0} \frac{L_0^2}{U_0} \quad (I,8)$$

On dit alors que l'on tient compte de l'effet β (ROSSBY; 1939) si le passage à la limite, $\delta \downarrow 0$, dans le système précédent s'effectue sous la contrainte

$$\beta = O(1) .$$

En définitive on peut écrire pour la vitesse horizontale \vec{v} , la vitesse verticale w , la pression p et la masse volumique ρ les équations limites suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \text{(a)} \quad & \rho \left(R_0 S \frac{D}{Dt} \vec{v} + (1 + R_0 \beta y) \vec{k} \wedge \vec{v} + \lambda w \cot g \theta_0 \cdot \vec{i} \right) \\ & = - \frac{R_0}{M_0^2} \vec{D} p + E \vec{D}^2 \vec{v} + E_{\perp} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} ; \\ \text{(b)} \quad & \rho \left(\lambda E R_0 S \frac{D}{Dt} w - \varepsilon \mu \cot g \theta_0 \right) \\ & = - \frac{R_0}{M_0^2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + B_0 \cdot \rho \right) + \varepsilon^2 E \vec{D}^2 w + E \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} ; \\ \text{(c)} \quad & \vec{D} \cdot \vec{v} + \frac{\lambda}{\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial z} = 0 ; \\ \text{(d)} \quad & S \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mu \frac{\partial \rho}{\partial x} + \nu \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\lambda}{\varepsilon} w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 . \end{aligned} \right\} \quad (I,9)$$

où

$$S \frac{D}{Dt} = S \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{D} + \frac{\lambda}{\varepsilon} w \frac{\partial}{\partial z} ,$$

$$\vec{D} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} .$$

Comme nous avons supposé $W = \lambda U$ il nous faut écrire les conditions initiales suivantes

$$\left. \begin{aligned} t = 0, & \quad \vec{v} = \vec{v}^0, & \quad \lambda w = w^0, \\ & \quad p = p^0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I,10})$$

Par ailleurs le fond ayant été supposé plat, d'équation dimensionnée $z = -H_0$, nous pouvons écrire les conditions aux frontières suivantes (avec des grandeurs adimensionnées).

$$\left. \begin{aligned} z = -1, & \quad \vec{v} = \vec{0}, \\ & \quad w = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I,11})$$

Précisons que le système (I,9) s'obtient en reportant dans (I,7) les séries de Taylor au voisinage de $\theta = \theta_0$ des fonctions $\sin \theta$, $\cos \theta$ et $\tan \theta$ avec $\theta = \theta_0 + \delta y$, puis en effectuant alors le passage à la limite

$$\delta \downarrow 0 \quad \text{avec} \quad \beta = O(1) . \quad (\text{I,12})$$

On pourra à ce sujet consulter LEBLOND et MYSAK (1978).

Ceci revient, en première approximation, à remplacer le paramètre de Coriolis local, $l = 2\Omega_0 \sin \theta$, par l'expression linéaire suivante :

$$2\Omega_0 \sin \theta_0 + \beta \frac{L_0}{U_0} y$$

puisque l'on a :

$$\beta = \frac{L_0}{U_0} \frac{d}{dy} l, \quad y = 0. \quad (I,13)$$

Le paramètre constant de Coriolis est défini par

$$l_0 = 2\Omega_0 \sin \theta_0.$$

Deux nouveaux paramètres sans dimension apparaissent dans (I,9),

il s'agit :

- du nombre d'Ekman E (EKMAN; 1905)

$$E = R_0/R_e = \nu / l_0 L_0^2 \quad (I,14)$$

- et du nombre d'Ekman vertical E_1

$$E_1 = \varepsilon^{-2} E = \nu / l_0 H_0^2 \quad (I,15)$$

On rappelle que le paramètre hydrostatique ε est défini par

$$\varepsilon = H_0 / L_0.$$

1.5.- L'INTERFACE ATMOSPHERE-OCEAN

1.5.1.- Préliminaire géométrique

L'équation de la surface qui sépare l'océan de l'atmosphère, dite interface dans ce travail, est prise sous la forme :

$$\mathcal{G}(r, \theta, \varphi, t) = r - a_0 - h_0 \eta(\theta, \varphi, t) = 0 \quad (\text{I,16})$$

où h_0 désigne l'amplitude de l'interface.

Le vecteur unitaire de la normale à l'interface, dirigé vers l'atmosphère, s'écrit :

$$\vec{n} = \vec{\nabla} \mathcal{G} / \|\vec{\nabla} \mathcal{G}\|, \quad \mathcal{G} = 0$$

soit, en effectuant le calcul, d'après (I,1 bis)

$$\vec{n} = N^{-1} \left(-\frac{h_0}{r \cos \theta} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi}, -\frac{h_0}{r} \frac{\partial \eta}{\partial \theta}, 1 \right)$$

où N désigne un facteur de normalisation qui s'exprime par la relation :

$$N^2 = 1 + \varepsilon^2 \alpha^2 (1 + \varepsilon \delta_3)^{-2} \left\{ \left(\frac{\cos \theta_0}{\cos \theta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right\}$$

où l'on a continué à noter η la fonction obtenue en passant de θ, φ à x, y .

On remarquera qu'un nouveau paramètre sans dimension s'introduit

$$\alpha = \rho_0 / H_0 \quad (\text{I},17)$$

il caractérise l'amplitude réduite des déplacements verticaux de l'interface en comparaison avec la profondeur.

L'hypothèse, que l'on fait par la suite, imposant la relation

$$\alpha = o(\varepsilon) \quad (\text{I},18)$$

traduit une situation physique effective.

On verra au § I.6 que la situation asymptotique $\varepsilon \downarrow 0$ conduit à une interface qui se confond avec un plan. Ceci résulte bien sûr du choix de notre adimensionnalisation. Si l'on avait rapporté les distances horizontales à une longueur d'onde liée à l'interface et les distances verticales à l'amplitude caractéristique de celle-ci nous aurions obtenu un système d'équations réduites décrivant l'évolution des ondes de surface.

1.5.2.- Détermination du vecteur-contrainte

a) Le vecteur-contrainte

Pour un fluide visqueux newtonien les composantes σ_{ij} du tenseur des contraintes sont données par

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij}$$

$$\bar{\Sigma} = -p \mathbb{1} + \bar{\tau}$$

où p est la pression, τ_{ij} les composantes des contraintes visqueuses et δ_{ij} désigne le symbole de Kroenecker; $\bar{\Sigma}$ désigne le tenseur des contraintes et $\bar{\tau}$ celui des contraintes visqueuses et les composantes τ_{ij} ont la forme suivante :

$$\tau_{ij} = \lambda D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad (\text{I}, 19)$$

où D_{kk} désigne la trace du tenseur des taux de déformations, qui est nulle dans notre étude puisqu'égal à la divergence de la vitesse; par conséquent (I,19) se réduit à :

$$\bar{\tau} = 2\mu \text{ID}.$$

avec ID tenseur des taux de déformations.

Le tenseur $\bar{\Sigma}$ est un opérateur linéaire qui à un vecteur quelconque \vec{v} fait correspondre un vecteur que l'on note $\bar{\Sigma} \cdot \vec{v}$.

Avec cette notation, \vec{n} désignant un vecteur unitaire

$$\bar{\Sigma} \cdot \vec{n} = \vec{T}(\vec{n}) \quad \text{est le vecteur contrainte pour la direction } \vec{n}.$$

b) Détermination de $\vec{T}(\vec{n})$ en coordonnées sphériques puis cartésiennes locales adimensionnées

Puisque $\bar{\tau} = 2\mu \text{ID}$, la détermination de D_{ij} équivaut à celle de τ_{ij} ; dans la suite nous noterons par exemple $D_{\varphi\theta}$ plutôt que D_{12} .

ID est la partie paire de $\text{Grad } \vec{u}$, ses composantes en coordonnées sphériques sont les suivantes (voir GERMAIN, 1980, par exemple).

$$\left. \begin{aligned}
 D_{rr} &= \frac{\partial w}{\partial r}; \quad D_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{w}{r}; \quad D_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{v \operatorname{tg} \theta}{r} + \frac{w}{r} \\
 D_{\theta\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{u \operatorname{tg} \theta}{r} \right); \quad D_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right); \\
 D_{\varphi r} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right).
 \end{aligned} \right\} \text{(I,20)}$$

tandis qu'en coordonnées cartésiennes locales adimensionnées on a :

$$\left. \begin{aligned}
 D_{zz} &= \frac{U_0}{L_0} \frac{\partial w}{\partial z}; \quad D_{yy} = \frac{U_0}{L_0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon \delta w \right); \quad D_{xx} = \\
 &\frac{U_0}{L_0} \left(\frac{\cos \theta_0}{r \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial x} + \delta v \operatorname{tg} \theta + \varepsilon \delta w \right); \\
 D_{yz} &= \frac{1}{2} \frac{U_0}{L_0} \left(\frac{\varepsilon}{r} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial z} - \delta v \right); \quad D_{xz} = \frac{1}{2} \frac{U_0}{L_0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\cos \theta_0}{r \cos \theta} \frac{\partial v}{\partial x} \right. \\
 &- \delta \operatorname{tg} \theta \cdot u); \quad D_{zx} = \frac{1}{2} \frac{U_0}{L_0} \left(\frac{\varepsilon}{r} \frac{\cos \theta_0}{\cos \theta} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial z} \right. \\
 &- \delta u).
 \end{aligned} \right\} \text{(I,21)}$$

c) Expression du vecteur-contrainte

$$\vec{T}(\vec{n}) = -p \vec{n} + 2\mu \mathbb{D} \cdot \vec{n}. \quad \text{(I,22)}$$

En effectuant le produit ci-dessus on obtient :

$$\left. \begin{aligned}
 T_x &= -p n_x + 2\mu (D_{xx} n_x + D_{xy} n_y + D_{xz} n_z) ; \\
 T_y &= -p n_y + 2\mu (D_{xy} n_x + D_{yy} n_y + D_{yz} n_z) ; \\
 T_z &= -p n_z + 2\mu (D_{xz} n_x + D_{yz} n_y + D_{zz} n_z) ,
 \end{aligned} \right\} \quad (I,23)$$

où l'indice indique la composante du vecteur suivant la direction désignée.

Si on développe les calculs on obtient alors :

$$\begin{aligned}
 (a) \quad T_x &= -p n_x + 2\mu \frac{U_0}{NL_0} \left(-\varepsilon\alpha \left(\frac{\cos\theta_0}{r\cos\theta} \right)^2 \frac{\partial\eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right. \\
 &\quad - \varepsilon\alpha\delta \frac{\cos\theta_0 \sin\theta}{r^2 \cos^2\theta} r \frac{\partial\eta}{\partial x} - \varepsilon^2\alpha\delta \frac{\cos\theta_0}{r\cos\theta} r \frac{\partial\eta}{\partial x} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \varepsilon\alpha \frac{1}{r^2} \frac{\partial\eta}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{2} \varepsilon\alpha \frac{\cos\theta_0}{r^2 \cos\theta} \frac{\partial\eta}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \varepsilon\alpha\delta \frac{1}{r} \tan\theta \cdot u \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\cos\theta_0}{r\cos\theta} \frac{\partial v}{\partial x} \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{2} \delta u \right) ; \quad (I,24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad T_y &= -p n_y + 2\mu \frac{U_0}{NL_0} \left(-\varepsilon\alpha \frac{\cos\theta_0}{r^2 \cos\theta} \frac{\partial\eta}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{2} \varepsilon\alpha \left(\frac{\cos\theta_0}{r\cos\theta} \right)^2 \frac{\partial\eta}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} \varepsilon\alpha\delta \frac{\cos\theta_0 \sin\theta}{r\cos^2\theta} u \frac{\partial\eta}{\partial x} - \varepsilon\alpha \frac{1}{r^2} \frac{\partial\eta}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} - \varepsilon^2\alpha\delta \frac{1}{r} r \frac{\partial\eta}{\partial y} \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \varepsilon \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{2} \delta v \right) ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_z = & -\rho n_z + 2\mu \frac{U_0}{NL_0} \left(-\varepsilon^2 \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\cos\theta_0}{r \cos\theta} \right)^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right. \\
& - \frac{1}{2} \alpha \frac{\cos\theta_0}{r \cos\theta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \varepsilon \alpha \delta \frac{\cos\theta_0}{r \cos\theta} u \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \\
& \left. + \varepsilon \alpha \delta \frac{1}{2r} v \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \alpha \frac{1}{r^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{r^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} \right).
\end{aligned}$$

d) Continuité du vecteur $\vec{T}(\vec{n})$ à la traversée de l'interface \mathcal{S} .

Si l'on convient de noter $[\beta]_{\mathcal{S}}$ le saut de la grandeur β au travers de \mathcal{S} , la continuité de $\vec{T}(\vec{n})$, en l'absence de tension superficielle, s'écrit :

$$[\vec{T}(\vec{n})]_{\mathcal{S}} = \vec{0} \quad (\text{I,25})$$

ce qui est équivalent à

$$[-\rho \vec{n} + 2\mu \text{D} \cdot \vec{n}]_{\mathcal{S}} = \vec{0} \quad (\text{I,26})$$

La relation (I,26) doit nous fournir les conditions à la frontière qui nous manquent encore pour fermer notre système d'équations aux dérivées partielles.

e) Effet de l'approximation du plan tangent sur l'expression des composantes de $\vec{T}(\vec{n})$.

Le passage à la limite $\delta \downarrow 0$ dans (I,24) nous donne

$$\begin{aligned}
 (a) \quad T_x &= -\rho n_x + 2\mu \frac{U_0}{NL_0} \left(-\varepsilon\alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \varepsilon\alpha \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{2} \varepsilon\alpha \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial w}{\partial x} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial y} \right); \\
 (b) \quad T_y &= -\rho n_y + 2\mu \frac{U_0}{NL_0} \left(-\varepsilon\alpha \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{2} \varepsilon\alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \varepsilon\alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{2\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial y} \right); \\
 (c) \quad T_z &= -\rho n_z + 2\mu \frac{U_0}{NL_0} \left(-\varepsilon^2\alpha \frac{1}{2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{2} \varepsilon^2\alpha \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right);
 \end{aligned}
 \tag{I,27}$$

où on a conservé les mêmes notations pour la fonction et sa limite quand

$\delta \downarrow 0$; ainsi dans (I,27) on a :

$$\begin{aligned}
 n_x &= -\frac{1}{N} \varepsilon\alpha \frac{\partial \eta}{\partial x}; \\
 n_y &= -\frac{1}{N} \varepsilon\alpha \frac{\partial \eta}{\partial y}; \\
 n_z &= \frac{1}{N};
 \end{aligned}
 \tag{I,28}$$

avec

$$N^2 = 1 + \varepsilon^2 \alpha^2 \left\{ \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right\}$$

Les relations (I,28) s'écrivent alors :

$$(a) \quad \left[\frac{1}{N} \varepsilon^2 \alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \uparrow \right]_{\mathcal{C}_g} + \left[\mu \frac{U_0}{NL_0} \left(-2\varepsilon^2 \alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right. \right. \\ \left. \left. - \varepsilon^2 \alpha \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - \varepsilon^2 \alpha \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial w}{\partial x} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]_{\mathcal{C}_g} = 0 ;$$

$$(b) \quad \left[\frac{1}{N} \varepsilon^2 \alpha \frac{\partial \eta}{\partial y} \cdot \uparrow \right]_{\mathcal{C}_g} + \left[\mu \frac{U_0}{NL_0} \left(-2\varepsilon^2 \alpha \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right. \right. \\ \left. \left. - \varepsilon^2 \alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \varepsilon^2 \alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial w}{\partial y} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right]_{\mathcal{C}_g} = 0 ;$$

$$(c) \quad \left[-\frac{1}{N} \uparrow \right]_{\mathcal{C}_g} + \left[\mu \frac{U_0}{NL_0} \left(-\varepsilon^2 \alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right. \right. \\ \left. \left. - \alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} - \varepsilon^2 \alpha \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right. \right. \\ \left. \left. - \alpha \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right]_{\mathcal{C}_g} = 0.$$

(I,29)

I.6.- L'APPROXIMATION DES ONDES LONGUES.

I.6.1.- Le passage à la limite en ondes longues.

L'approximation dite "des ondes longues" est définie par le passage à la limite suivant :

$$\text{LIM}_{OL} = \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \varepsilon, \text{ puis} \\ \varepsilon \downarrow 0, \text{ avec : } R_0, E_1, M_0, B_0, S, \beta \text{ et } t, x, y, z \text{ fixés} \end{array} \right\} \quad (\text{I},30)$$

En désignant encore par \vec{v} , w , \uparrow et ρ les valeurs limites de la vitesse, de la pression et de la masse volumique lors de ce passage à la limite on obtient, en appliquant (I,30) au système (I,9) les équations limites suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \rho (R_0 (S \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{D} \vec{v} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}) \\ \quad \quad \quad + (1 + R_0 \beta y) \vec{k} \wedge \vec{v}) + \frac{R_0}{M_0^2} \vec{D} \uparrow = E_1 \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2}; \\ \text{(b)} \quad \frac{\partial \uparrow}{\partial z} + B_0 \cdot \rho = 0; \\ \text{(c)} \quad \vec{D} \cdot \vec{v} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \\ \text{(c)} \quad S \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{D} \rho + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0. \end{array} \right\} \quad (\text{I},31)$$

A ce système nous pouvons associer les conditions aux limites :

$$\begin{array}{l} z = -1, \quad \vec{v} = \vec{0}, \\ \quad \quad \quad w = 0. \end{array} \quad (\text{I},32)$$

$$\begin{aligned}
 t=0, \quad \vec{v} &= \vec{v}^0, \\
 \rho &= \rho^0.
 \end{aligned}
 \tag{I,33}$$

où \vec{v}^0 et ρ^0 sont les fonctions connues de x , y et z (données initiales du problème de Cauchy).

Il faut encore écrire une condition de transmission sur la surface libre; celle-ci découle des conditions (I,26); en effet le passage à la limite LIM_{0L} utilisé dans (I,28) fournit les égalités suivantes :

$$\left. \begin{aligned}
 n_x &= 0, \\
 n_y &= 0, \\
 n_z &= 1, \quad \text{et} \quad N^2 = 1.
 \end{aligned} \right\}
 \tag{I,34}$$

Ainsi, à la limite, la normale à l'interface coïncide avec le vecteur unitaire \vec{k} : $\vec{n} = \vec{k}$.

Un peu de réflexion permet de se rendre compte que ce résultat est naturel, en effet, $\epsilon \downarrow 0$ transforme la surface \mathcal{S} en un plan d'équation $z = 0$; ceci résulte bien entendu de la relation $\alpha = o(\epsilon)$ et de l'équation (adimensionnée) de l'interface

$$z - \alpha \eta(x, y, t) = 0.$$

Quand on mentionnera l'interface il s'agira maintenant du plan d'équation

$$z = 0. \tag{I,35}$$

De ce qui précède on déduit tout d'abord une condition portant sur la vitesse verticale w .

$$z = 0, \quad w = 0 \quad (\text{I,36})$$

puis, pour la vitesse horizontale \vec{v} et la vitesse verticale w , les relations (I,26) sous le passage à la limite LIM_{0L} entraînent

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \left[\mu \frac{U_0}{L_0} \frac{\partial}{\partial z} \vec{v} \right]_0 = \vec{0} \\ \text{(b)} \quad \left[-\rho + 2\mu \frac{U_0}{L_0} \frac{\partial}{\partial z} w \right]_0 = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{I,37})$$

où la notation

$$[f]_0$$

désigne le saut de f au travers du plan $z = 0$.

Dans ce travail les conditions latérales sont ignorées; elles n'interviennent pas dans la modélisation effectuée dans les §§ suivants. On peut à ce sujet consulter W.P.M. DE RUIJTER (1980).

1.6.2.- Le filtrage

Le passage à la limite des ondes longues ($\epsilon \downarrow 0$) a pour conséquence (ZEYTOUNIAN, 1981) une forte dégénérescence de l'équation des ondes associée que l'on peut obtenir pour les perturbations, par rapport au repos, des vitesses, de la pression et de la masse volumique

à partir du système (I,9). Ce passage à la limite joue le rôle d'un "filtre" en modifiant de façon inégale les fréquences des ondes obtenues.

La modélisation des écoulements qui va suivre aura pour effet de filtrer les ondes acoustiques tout en mettant en évidence le rôle du nombre de Rossby, R_0 , pour les écoulements océaniques dont l'échelle horizontale L_0 est beaucoup plus petite que a_0 mais beaucoup plus grande que H_0 ($\delta \ll 1, \varepsilon \ll 1$).

Afin d'illustrer ce qui vient d'être dit concernant le filtrage on étudie des écoulements qui sont de petites perturbations d'un écoulement standard. Cet écoulement standard est caractérisé par les valeurs suivantes :

$$\vec{u} = \vec{0}$$

$$p = P_0(z), \quad \rho = \rho_0(z)$$

avec

$$\frac{d}{dz} P_0 + B_0 \cdot \rho_0 = 0.$$

On note encore par u, v, w, p, ρ les composantes de la vitesse, la pression et la masse volumique, et les perturbations autour de l'état standard sont définies par (le paramètre α est celui du § I.5).

$$\vec{v} = \alpha \vec{v}', \quad w = \alpha w',$$

$$p = P_0(z) + \alpha p',$$

$$\rho = \rho_0(z) + \alpha \rho'.$$

Si on néglige les termes couplés avec $\varepsilon \cotg \theta_0$ et que l'on pose $\beta = 0$, le système (I,9) s'écrit alors, en posant $\lambda = \varepsilon$ et $E_1 = 0$:

$$(a) \quad \rho_0 (R_0 S \frac{\partial u'}{\partial t} - v') + \frac{R_0}{M_0^2} \frac{\partial \tau'}{\partial x} = 0;$$

$$(b) \quad \rho_0 (R_0 S \frac{\partial v'}{\partial t} + u') + \frac{R_0}{M_0^2} \frac{\partial \tau'}{\partial y} = 0;$$

$$(c) \quad \varepsilon^2 \rho_0 R_0 S \frac{\partial w'}{\partial t} + \frac{R_0}{M_0^2} \left(\frac{\partial \tau'}{\partial z} + B_0 \cdot p' \right) = 0;$$

$$(d) \quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0;$$

$$(e) \quad S \frac{\partial p'}{\partial t} + w' \frac{d}{dz} \rho_0 = 0.$$

(I,38)

Afin d'obtenir un problème de STURM et LIOUVILLE à coefficients constants on suppose maintenant que l'on a :

$$\rho_0(z) = e^{-z/H}$$

(I,39)

et on effectue le changement de variables

$$\begin{aligned} \bar{v}' &= \bar{v} \quad , \quad \bar{w}' = \bar{w} \quad , \\ \bar{\tau}' &= e^{-z/H} \bar{\tau} \quad , \\ \bar{p}' &= e^{-z/H} \bar{p} \quad . \end{aligned}$$

On obtient alors pour \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} , \bar{f} et \bar{e} le système suivant :

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & R_0 S \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \bar{v} + \frac{R_0}{M_0^2} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = 0 ; \\
 (b) \quad & R_0 S \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} + \frac{R_0}{M_0^2} \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} = 0 , \\
 (c) \quad & \epsilon^2 R_0 S \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{R_0}{M_0^2} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} + B_0 \bar{e} - \frac{1}{H} \bar{f} \right) , \\
 (d) \quad & \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 , \\
 (e) \quad & S \frac{\partial \bar{e}}{\partial t} - \frac{1}{H} \bar{w} = 0 .
 \end{aligned} \tag{I,40}$$

La solution de ce système est recherchée sous la forme

$$(\bar{v}, \bar{w}, \bar{f}, \bar{e}) = (\vec{v}, w, f, e) \exp\{i(kx + ly - \frac{\sigma}{S}t)\} \tag{1,41}$$

où les fonctions inconnues (\vec{v}, w, f, e) ne dépendent que de z .

De l'équation (e) (I,40) on tire la valeur de w .

$$w = -i\sigma H e \tag{1,42}$$

L'équation (c) (I,40) nous donne e :

$$p = i\sigma \varepsilon^2 \frac{M_0^2}{B_0} w - \frac{1}{B_0} \left(\frac{d}{dz} \uparrow - \frac{1}{H} \uparrow \right) \quad (\text{I,43})$$

Expression que l'on reporte dans w pour obtenir

$$-\left(\sigma^2 \varepsilon^2 - \frac{1}{H} \frac{B_0}{M_0^2}\right) w = \frac{1}{M_0^2} \left(\frac{d}{dz} - \frac{1}{H} \right) i\sigma \uparrow . \quad (\text{I,44})$$

Des deux premières équations du système (I,40) il vient aisément

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\ell\sigma + ik/R_0}{M_0^2(\sigma^2 - 1/R_0^2)} \uparrow , \\ v &= \frac{\ell\sigma - ik/R_0}{M_0^2(\sigma^2 - 1/R_0^2)} \uparrow , \end{aligned} \right\} (\text{I,45})$$

de sorte que l'équation de continuité devient :

$$\frac{d}{dz} w = - \frac{i\sigma K^2}{M_0^2(\sigma^2 - 1/R_0^2)} \uparrow , \quad K^2 = \ell^2 + k^2 .$$

A l'aide de cette relation et de l'équation (I,44) dérivée une fois, on obtient :

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \frac{1}{H} \frac{d}{dz} + \left(\varepsilon^2 \sigma^2 - \frac{1}{H} \frac{R_0}{M_0^2} \right) \frac{K^2}{1/R_0^2 - \sigma^2} \right) \cdot \uparrow = 0 \quad (\text{I,46})$$

La condition d'adhérence sur le fond de l'océan nous donne la condition sur \uparrow en $z = -1$.

$$z = -1, \quad \left(\frac{d}{dz} - \frac{1}{H} \right) \cdot \psi = 0. \quad (\text{I,47})$$

Finalement, avec le changement de fonction

$$\psi = \pi \exp(z/2H)$$

le problème de la propagation des ondes revient à la résolution du problème de Sturm-Liouville suivant

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dz^2} + [\lambda - 1/4H^2] \right) \cdot \pi &= 0, \quad z \in [-1, 0] \\ \left(\frac{d}{dz} - \frac{1}{2H} \right) \cdot \pi &= 0, \quad \text{sur } z = -1 \\ \text{où } \lambda &= (\varepsilon^2 \sigma^2 - R_0/HM_0^2) R_0^2 K^2 / (1 - \sigma^2 R_0^2). \end{aligned} \right\} (\text{I,48})$$

Pour obtenir un problème bien posé il convient de poser une condition à la fonction π sur $z = 0$.

On a l'équation de l'interface, sous forme adimensionnée

$$z - \alpha \eta(x, y, t) = 0. \quad (\text{I,49})$$

et on peut y écrire (LEBLOND et MYSAK, 1978) l'équilibre entre la pression atmosphérique, supposée constante, P_a , et la pression exercée par la mer; soit, en grandeurs adimensionnées :

$$P_a = P_0 + \alpha \psi', \quad \text{sur } z = \alpha \eta.$$

En linéarisant autour de la surface au repos, d'équation

$z = 0$, il vient :

$$P_a = P_0(0) + \alpha \eta \frac{d}{dz} P_0 + \dots + \alpha f' + \dots, \quad z = 0$$

soit

$$\eta \frac{d}{dz} P_0 = -f', \quad z = 0. \quad (\text{I,50})$$

D'autre part, la vitesse verticale $\alpha w'$ s'exprime sous la

forme

$$\alpha w' = S \frac{D}{Dt} (\alpha \eta), \quad z = \alpha \eta$$

d'où, en linéarisant

$$w' = S \frac{\partial}{\partial t} \eta, \quad z = 0. \quad (\text{I,51})$$

Il vient donc en reportant (I,50) dans (I,51)

$$w' \frac{d}{dz} P_0 + S \frac{\partial}{\partial t} f' = 0, \quad z = 0$$

ce qui compte tenu de la forme de la solution et de la relation (I,44)

donne successivement

$$\left(\frac{d}{dz} - \varepsilon^2 \sigma^2 M_0^2 / B_0 \right) \cdot f = 0, \quad z = 0 \quad (\text{I,52})$$

et

$$\left(\frac{d}{dz} + M_0^2 (B_0 / 2HM_0^2 - \varepsilon^2 \sigma^2) / B_0 \right) \cdot \Pi = 0, \quad z = 0. \quad (I,53)$$

Le problème (I,48) avec cette dernière équation possède une valeur propre particulière : la dérivation de la condition en $z = -1$ conduit à une équation identique à l'équation générale pour autant que la valeur propre prenne la valeur particulière

$$\lambda_0 = 0$$

ce qui conduit aux fréquences

$$\sigma_0^2 = R_0 / \varepsilon^2 H M_0^2.$$

Cette fréquence correspond à une onde acoustique bidimensionnelle se propageant dans le plan horizontal.

Les autres valeurs propres sont distribuées dans $[0, \infty]$ et il leur correspond les fréquences suivantes :

$$\sigma^2 = \lambda / R_0^2 (\lambda + \varepsilon^2 K^2) + R_0 K^2 / H M_0^2 (\lambda + \varepsilon^2 K^2).$$

Lorsque $\varepsilon \downarrow 0$, la fréquence σ_0 tend vers l'infini, par conséquent les ondes acoustiques qui lui correspondent sont filtrées (longueur d'onde nulle).

D'autre part on obtient lors de ce filtrage

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sigma^2 = 1/R_0^2 + R_0 K^2 / \lambda H M_0^2$$

On trouvera dans DEMUTH (1985) un traitement plus général de ce problème.

II. MODELISATION ASYMPTOTIQUE.

Ce chapitre a pour but de définir le cadre asymptotique dans lequel nous nous plaçons. Plus précisément on y définit les passages à la limite, principal et locaux, qui vont permettre la construction des modèles quasi-géostrophique (ordre R_0), avec densité constante puis variable, et agéostrophique (ordre R_0^2).

II.1.- MODELISATION ASYMPTOTIQUE

Notre point de départ est le modèle en ondes longues obtenu au chapitre I auquel nous associons les conditions aux limites (I,32), (I,36), (I,37) et initiales (I,33) :

$$(a) \quad \rho \left(R_0 \left(S \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{D} \vec{v} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right) + (1 + R_0 \beta y) \vec{k} \wedge \vec{v} \right) \\ = - \frac{R_0}{M_0^2} \vec{D} p + E_1 \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2};$$

$$(b) \quad \frac{\partial p}{\partial z} + B_0 \cdot \rho = 0;$$

$$(c) \quad \vec{D} \cdot \vec{v} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$

$$(d) \quad S \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{D} \rho + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0;$$

$$(e) \quad z = -1, \quad \vec{v} = \vec{0}, \quad w = 0$$

$$(f) \quad z = 0, \quad w = 0$$

$$(g) \quad z = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[\mu \frac{U_0}{L_0} \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right]_0 = \vec{0} \\ \left[-p + 2\mu \frac{U_0}{L_0} \frac{\partial w}{\partial z} \right]_0 = 0 \end{array} \right.$$

$$(h) \quad t = 0, \quad \vec{v} = \vec{v}^0, \quad p = p^0$$

(II,1)

On définit alors le modèle quasi-géostrophique comme cas limite du modèle en ondes longues lorsque R_0 , E_L , M_0 tendent simultanément vers zéro dans le système (II,1) de telle façon que l'on ait les relations de similitude :

$$\omega_0 = M_0^2 / R_0^2 = O(1), \quad \hat{E}_L = E_L / R_0^2 = O(1). \quad (\text{II},2)$$

Le modèle quasi-géostrophique s'obtient donc après le passage à la limite, dans les équations du système (I,9), suivant :

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = \varepsilon \text{ puis} \\ \varepsilon \downarrow 0, \text{ avec } R_0, E_L, M_0, B_0, S, \beta \text{ fixés} \\ \text{puis} \\ (R_0, E_L, M_0) \downarrow 0, \text{ avec } \omega_0 \text{ et } \hat{E}_L \text{ fixés.} \end{array} \right\} (\text{II},3)$$

les autres paramètres et variables indépendantes réduites restant fixés, de l'ordre de l'unité.

Conjointement à (II,3) on postule pour \vec{v} , w , τ et ρ le développement asymptotique principal suivant :

$$\begin{pmatrix} \vec{v} \\ w \\ \tau \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_0 \\ 0 \\ \bar{\tau}_0(z) \\ \bar{\rho}_0(z) \end{pmatrix} + R_0 \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{\tau}_1 \\ \bar{\rho}_1 \end{pmatrix} + R_0^2 \begin{pmatrix} \vec{v}_2 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{\tau}_2 \\ \bar{\rho}_2 \end{pmatrix} + \dots \quad (\text{II},4)$$

II.2.- LE MODELE MATHEMATIQUE

La définition des paramètres sans dimensions ω_0 , \hat{E}_\perp permet d'écrire à la place du système (II,1) :

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \rho \left(R_0 \left(S \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{D} \vec{v} + \omega \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right) + (1 + R_0 \beta y) \vec{k} \wedge \vec{v} \right) \\
 & = - \frac{1}{\omega_0 R_0} \vec{D} \uparrow + \hat{E}_\perp R_0^2 \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} ; \\
 (b) \quad & \frac{\partial \uparrow}{\partial z} + B_0 \cdot \rho = 0 ; \\
 (c) \quad & \vec{D} \cdot \vec{v} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0 ; \\
 (d) \quad & S \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{D} \rho + \omega \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 ; \\
 (e) \quad & z = -1, \quad \vec{v} = \vec{0}, \quad \omega = 0 \\
 (f) \quad & z = 0, \quad \omega = 0 \\
 (g) \quad & z = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[\mu \frac{U_0}{L_0} \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right]_0 = 0, \\ \left[-\uparrow + 2\mu \frac{U_0}{L_0} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right]_0 = 0. \end{array} \right. \\
 (h) \quad & t = 0, \quad \vec{v} = \vec{v}^0, \quad \uparrow = \uparrow^0.
 \end{aligned}
 \tag{II,5}$$

C'est à partir de ce système et du passage à la limite (II,3) que nous construirons dans les prochains chapitres les modèles quasi-géostrophique (ch. III et IV) et agéostrophique (ch. V).

II.3.- QUASI-GEOSTROPHISME ET AGEOSTROPHISME

On remarque que (II,3) conduit à un problème de perturbation singulière : aussi bien R_0 que E_1 lorsqu'ils tendent vers zéro conduisent à une dégénérescence des équations : lorsque $R_0 \downarrow 0$ dans le système (II,5) les dérivées partielles en t disparaissent et nous ne pouvons plus, dans le système limite obtenu, satisfaire aux conditions initiales imposées à \vec{v} et ψ ; au voisinage de $t=0$ il faut placer une couche initiale, ce qui conduit, à l'ordre zéro relativement au développement (II,4), au problème de l'adaptation au géostrophisme. De même le second membre de (II,5) (a) disparaît ; les conditions aux frontières en $z=-1$ et $z=0$ ne sont donc plus applicables au problème limite obtenu. Nous sommes en présence d'un problème classique : celui du phénomène de couche limite au voisinage des plans $z=-1$ et $z=0$ qui conduit, à l'ordre zéro, au problème dit d'ACKERBLOM décrivant la couche limite stationnaire d'Ekman.

Pour une description rigoureuse de l'analyse asymptotique des problèmes de perturbations singulières on pourra consulter W. ECKHAUS (1973; 1979).

Ainsi au passage à la limite principal

$$\lim_{R_0} P = \{ R_0 \downarrow 0, \text{ avec } \omega_0 \text{ et } \hat{E}_1 \text{ fixés } \}, \quad (\text{II},6)$$

il nous faut associer, comme l'indique l'analyse faite aux chapitres suivants, trois passages à la limite locaux :

- l'un qui tiennent compte du voisinage de l'instant initial,
- les deux autres qui tiennent comptes des voisinages des plans d'équation $z = -1$ (fond) et $z = 0$ (interface).

Le choix de $\hat{E}_1 = E_1 / R_0^2$ n'est pas fortuit : on sait en effet (J.S. DARROZES; 1972) qu'il existe au moins une relation entre R_0 et E_1 telle que la situation décrite par

$$R_0 \downarrow 0, E_1 \downarrow 0 \text{ et } \hat{E}_1 = O(1)$$

$$\text{avec } E_1 = \theta(R_0) \hat{E}_1, \lim_{R_0 \downarrow 0} \theta = 0$$

contienne toutes les autres.

Ce choix est dicté par le principe de moindre dégénérescence de VAN-DYKE (1964; 1975) :

Il doit être fait de telle façon que le système d'équations locales, au voisinage du fond par exemple, retienne le maximum de termes lors du passage à la limite local correspondant; ce système s'obtient à partir des équations complètes (II,5) en introduisant la variable locale :

$$\zeta = (z+1) / \sigma(R_0),$$

$$\text{où } \lim_{R_0 \downarrow 0} \sigma = 0 \quad . \quad (II,7)$$

Définissons le passage à la limite local correspondant ⁽¹⁾ par :

$$\lim_{R_0} \text{loc } z = \{ R_0 \downarrow 0, \text{ avec } t, x, y \text{ et } \zeta \text{ fixés } \} \quad (II,8)$$

(1) Remarque : Dans (II,8) les autres paramètres et variables indépendantes adimensionnées restent fixés de l'ordre de l'unité.

On peut remarquer que si l'on veut que (II,7) définisse une nouvelle variable suivant la verticale alors il faut imposer à ζ d'être voisin de -1 lorsque $R_0 \downarrow 0$.

Le système d'équations (II,5) s'écrit, en utilisant la relation

$$E_{\perp} = \Theta(R_0) \hat{E}_{\perp} \quad \text{et les variables } t, x, y, \zeta \text{ pour les}$$

composantes de la vitesse, de la pression et de la masse volumique notées

respectivement \hat{v} , \hat{w} , \hat{p} et $\hat{\rho}$:

$$(a) \quad \hat{\rho} \left(R_0 \left(S \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \hat{v} \cdot \vec{D} \hat{v} + \frac{1}{\sigma} \hat{w} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \zeta} \right) + (1 + R_0 \beta y) \vec{k} \wedge \hat{v} \right) = - \frac{1}{\omega_0 R_0} \vec{D} \hat{p} + \frac{\Theta}{\sigma^2} \hat{E}_{\perp} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \zeta^2};$$

$$(b) \quad \frac{\partial \hat{p}}{\partial \zeta} + \sigma B_0 \cdot \hat{p} = 0;$$

$$(c) \quad \sigma \vec{D} \cdot \hat{v} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \zeta} = 0;$$

$$(d) \quad \sigma \left(S \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} + \hat{v} \cdot \vec{D} \hat{p} \right) + \hat{w} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \zeta} = 0;$$

$$(e) \quad \zeta = 0, \quad \hat{v} = \vec{0}$$

$$\hat{w} = \vec{0}$$

$$(f) \quad t = 0, \quad \hat{v} = \vec{v}^0$$

$$\hat{p} = p^0$$

(II,9)

Les conditions de raccord entre l'écoulement principal ((II,5) associé à (II,6)) et l'écoulement local (ou intérieur) décrit par (II,9) et sous (II,8) fourniront les conditions aux frontières qui n'apparaissent pas dans ce dernier système d'équations.

Lorsque $R_0 \downarrow 0$ avec t, x, y et ζ fixés on doit imposer la relation suivante

$$\theta(R_0) = \sigma^2(R_0)$$

si l'on veut satisfaire au principe de moindre dégénérescence.

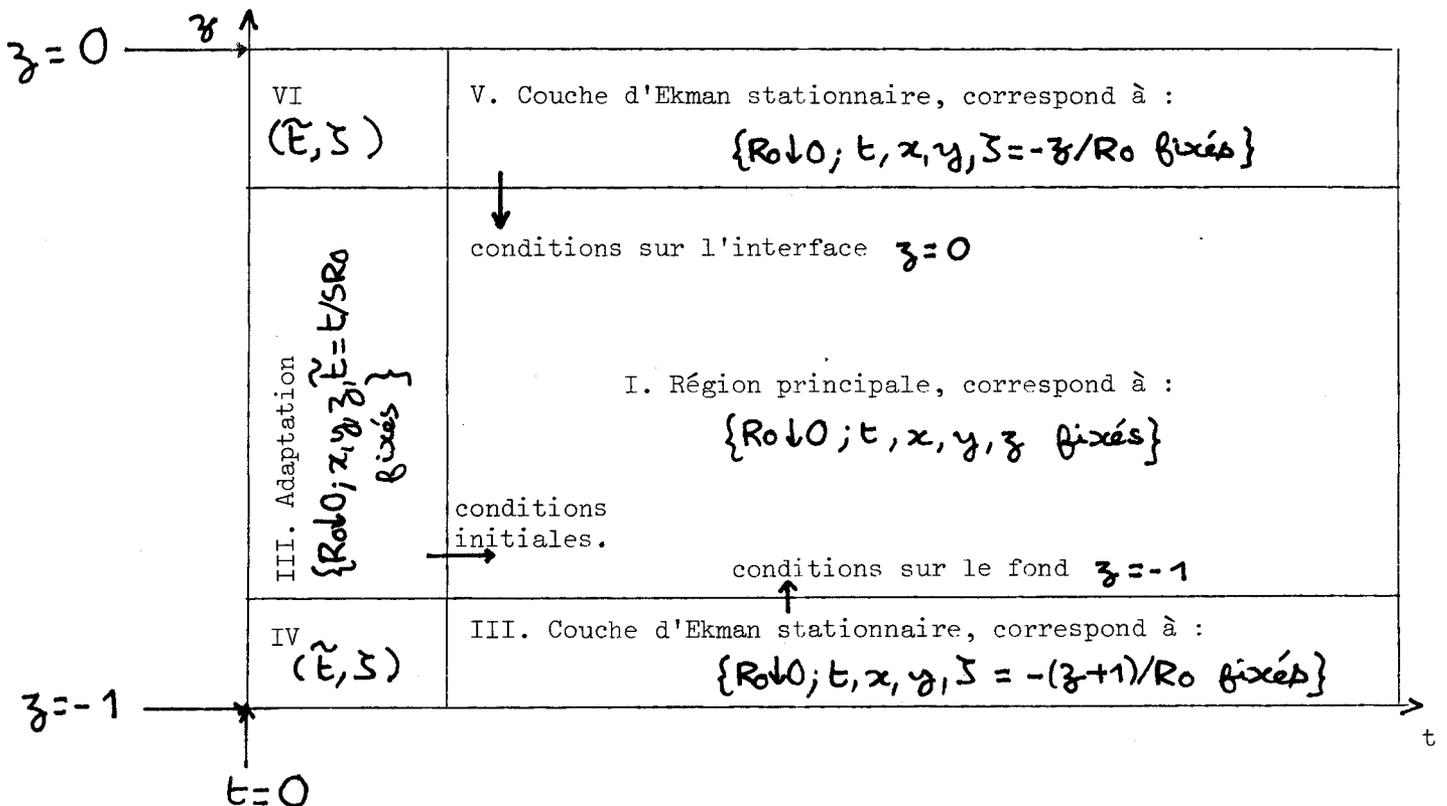
Par le raccord des vitesses verticales on montre que nécessairement (si l'on veut que la méthode des développements raccordés s'applique)

$$\sigma(R_0) = R_0$$

par conséquent

$$\theta(R_0) = R_0^2 \tag{II,10}$$

Finalement R_0 est le seul petit paramètre du problème. On représente ci-dessous dans le plan (t, ζ) , les différentes régions que nous considérons lorsque $R_0 \downarrow 0$:



La région I correspond au passage à la limite principal (II,6) qui conduit, à l'ordre zéro (relativement à (II,4)), aux relations classiques géostrophiques

$$\vec{v}_0 = (\omega_0 \bar{\rho}_0)^{-1} \vec{k} \wedge \vec{D} \bar{f}_1 .$$

La prise en compte des équations d'ordre un (ordre R_0) permet de formuler une équation d'évolution du premier ordre en t pour un opérateur elliptique relativement à la pression \bar{f}_1 (S. GODTS et R. ZEYTOUNIAN; 1985). Cette équation régit l'écoulement dit "Quasi-Géostrophique"; cette théorie classique (J.P. GUIRAUD et R. ZEYTOUNIAN; 1980; N.A. PHILLIPS; 1963) est développée aux chapitres III, pour une densité constante, de IV avec une densité variable.

La région II correspond à l'introduction du temps fin $\tilde{t} = t/SR_0$ et permet l'étude du voisinage de l'instant $t = 0$ par l'intermédiaire de la limite locale :

$$\lim_{R_0}^{loc t} = \{ R_0 \downarrow 0, \text{ avec } x, y, z, \tilde{t} \text{ fixés} \},$$

lorsque l'on a, en désignant par u les fonctions \vec{v} , w , f et ρ

$$u = \tilde{u}(x, y, z, \tilde{t}) = \tilde{u}_0 + R_0 \tilde{u}_1 + R_0^2 \tilde{u}_2 + \dots .$$

Cette région conduit, à l'ordre zéro du développement local précédent, au problème de l'adaptation au géostrophisme. On trouvera dans W. BLUMEN (1972) un exposé remarquable de cette question. L'analyse de ce problème, à l'ordre un, permet de formuler la condition initiale (au temps $t = 0$) à imposer à l'équation d'évolution du quasi-géostrophisme. Cette étude fait l'objet du paragraphe IV-2 du chapitre IV.

Les régions III et V correspondent à

$$\{ R_0 \downarrow 0, \text{ avec } t, x, y, \zeta = (z+1)/R_0 \text{ fixés} \}$$

pour la région III

et

$$\{ R_0 \downarrow 0, \text{ avec } t, x, y, \zeta = -z/R_0 \text{ fixés} \}$$

pour la région V.

L'étude de ces deux régions, qui correspondent aux couches limites d'Eckman stationnaires, conduit au problème d'Ackerblom dont la résolution (dans les régions III et V), associée aux conditions de transmission pour la région V, permet la formulation des conditions aux frontières (en $z = -1$ et $z = 0$) qu'il faut associer à l'équation d'évolution du quasi-géostrophisme. On peut alors (S. GODTS et R. ZEYTOUNIAN, 1985) formuler le problème complet du quasi-géostrophisme pour l'océan limité verticalement par le fond $z = -1$ et l'interface $z = 0$.

Les régions IV et VI sont doublement locales et correspondent à l'introduction simultanée, dans les équations, des coordonnées locales

$$\tilde{E} = t/S R_0 \quad \text{et} \quad \zeta = (z+1)/R_0 \quad \text{dans la région IV}$$

$$\text{et} \quad \tilde{E} = t/S R_0 \quad \text{et} \quad \zeta = -z/R_0 \quad \text{dans la région VI.}$$

Ces régions peuvent être ignorées si on se restreint à l'équation d'évolution pour $\bar{\tau}_1$, mais elles sont nécessaires dans l'étude de la composante $\bar{\tau}_2$ du développement principal (II,4). Ces régions qui sont celles des couches d'Ekman instationnaires font l'objet des § V-2-1 et V-2-2 du chapitre V de ce travail; elles permettent la formulation pour $\bar{\tau}_2$ du problème, analogue au cas quasi-géostrophique, qui est appelé agéostrophique en utilisant la terminologie de J.P. GUIRAUD et R. ZEYTOUNIAN (1980).

II.4.- L'ATMOSPHERE

Comme il est indiqué dans l'introduction, on utilise le modèle d'Ackerblom (ZEYTOUNIAN, 1985) pour décrire, en première approximation, le champ des vitesses dans la couche limite d'Ekman atmosphérique située au voisinage de l'interface. Ce modèle s'obtient à partir du passage à la limite local $\{R_0 \downarrow 0, \hat{E}_1, x, y, \zeta = z/R_0, t \text{ fixés}\}$ dans le système des équations atmosphériques en ondes longues qui s'obtient en effectuant le passage à la limite $\varepsilon \downarrow 0$ dans le système des équations atmosphériques non adiabatiques adimensionnelles (R. ZEYTOUNIAN, 1981) ci-dessous :

$$(a) \quad \rho \left(S \frac{D}{Dt} u - \left(\frac{1}{R_0} + \beta y \right) v + \frac{1}{R_0} \varepsilon \cotg \varphi_0 \right) + \frac{1}{\sigma M_\infty^2} \frac{\partial}{\partial x} \tau = \frac{1}{Re} \left(\vec{D}^2 u + \varepsilon^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} u + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right);$$

$$(b) \quad \rho \left(S \frac{D}{Dt} v + \left(\frac{1}{R_0} + \beta y \right) u \right) + \frac{1}{\sigma M_\infty^2} \frac{\partial}{\partial y} \tau = \frac{1}{Re} \left(\vec{D}^2 v + \varepsilon^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} v + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right);$$

$$(c) \quad \rho \left(\varepsilon^2 S \frac{D}{Dt} w - \frac{\varepsilon}{R_0} \cotg \varphi_0 u \right) + \frac{1}{\sigma M_\infty^2} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \tau + B_0 \cdot \rho \right) = \frac{1}{Re} \left(\varepsilon^2 \vec{D}^2 w + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} w + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right);$$

$$(d) \quad S \frac{D}{Dt} \rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0;$$

(II, 11)

$$\begin{aligned}
 (e) \quad \rho S \frac{D}{Dt} T - \frac{\delta-1}{\delta} S \frac{D}{Dt} T &= \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re} \left(\vec{D}^2 T \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} T \right) + \frac{\delta-1}{\varepsilon^2 Re} M_\infty^2 \phi \\
 &+ \frac{1}{Pr Re} \frac{B_0}{\varepsilon^2} \sigma_{00} \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{R} ;
 \end{aligned}$$

$$(f) \quad p = \rho T.$$

où

$$\begin{aligned}
 \phi &= \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \varepsilon^2 \left\{ (\vec{D} \cdot \vec{v})^2 \right. \\
 &+ \left. 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} (\vec{v} \cdot \vec{u})^2 \right\},
 \end{aligned}$$

σ_{00} est le paramètre de rayonnement,
 \mathcal{R} représente le rayonnement, supposé connu.

Pour plus de détails on renvoie à la référence citée. On peut aussi, à partir de ce système et d'un formalisme identique à celui que l'on a développé pour l'océan, établir un modèle quasi-géostrophique pour l'atmosphère. Ceci permet d'obtenir pour \vec{v}_0 et \vec{v}_1 (les vitesses horizontales d'ordre R_0^0 et R_0^1) les expressions suivantes :

$$\vec{v}_0 = (\omega_0 \bar{e}_0)^{-1} \vec{k} \wedge \vec{D} \bar{r}_1$$

et

$$\vec{v}_1 = (\omega_0 \bar{e}_0)^{-1} \vec{k} \wedge \vec{D} \bar{r}_2 + \vec{\chi}$$

où la fonction $\vec{\chi}$ n'est pas précisée mais n'est pas fonction de

$$\bar{r}_2 \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial \bar{r}_2} \equiv \vec{0} \right) .$$

Ces résultats seront utilisés dans les chapitres qui suivent lors de la détermination de la vitesse horizontale dans le plan $z=0$ (interface).

III. MODELE AVEC DENSITE VOLUMIQUE CONSTANTE.

Dans ce chapitre un modèle simple de circulation océanique correspondant à une étendue horizontale moyenne (soit $L_0 \sim$ quelques centaines de km) est mis en oeuvre. L'hypothèse de densité volumique constante ne permet pas, bien sûr, de décrire de façon satisfaisante la structure verticale d'une telle circulation; néanmoins ce modèle donne de bonnes informations sur la nature de la circulation dans des plans horizontaux (J. PEDLOSKY; 1979).

III.1.- MODELE EN ONDES LONGUES AVEC DENSITE CONSTANTE.

III.1.1.- L'écoulement principal

Notre point de départ est le cas général constitué par le système des équations (II;5) dans lequel on fait les hypothèses suivantes :

$$\left. \begin{aligned} S=1, \quad B_0=1, \quad \omega_0=1 \\ \text{et} \quad \rho \equiv \text{constante} = 1 \end{aligned} \right\} \text{(III,1)}$$

$$(a) \quad R_0 \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{D} \vec{v} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right) + (1 + R_0 \beta y) \vec{k} \wedge \vec{v} \\ = -\frac{1}{R_0} \vec{D} \uparrow + E_1 \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} ;$$

$$(b) \quad \frac{\partial \uparrow}{\partial z} + 1 = 0 ;$$

$$(c) \quad \vec{D} \cdot \vec{v} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 ;$$

$$(d) \quad z = -1, \quad \vec{v} = \vec{0}, \quad w = 0 ;$$

$$(e) \quad z = 0, \quad w = 0 ;$$

$$(f) \quad z = 0, \quad \left\{ \begin{aligned} \left[\mu \frac{U_0}{L_0} \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right]_0 &= \vec{0}, \\ \left[-\uparrow + 2\mu \frac{U_0}{L_0} \frac{\partial w}{\partial z} \right]_0 &= 0 ; \end{aligned} \right.$$

$$(g) \quad t = 0, \quad \vec{v} = \vec{v}^0, \quad \uparrow = \uparrow^0.$$

(III,2)

On utilise le passage à la limite principal

$$\lim_{R_0}^P = \{ R_0 \downarrow 0, \text{ avec } \hat{E}_1 = E_1 R_0^{-2} \text{ fixé} \}, \quad (\text{III},3)$$

et le développement asymptotique principal

$$\begin{pmatrix} \vec{v} \\ w \\ \uparrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_0 \\ 0 \\ \bar{f}_0(z) \end{pmatrix} + R_0 \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{f}_1 \end{pmatrix} + \dots, \quad (\text{III},4)$$

pour obtenir, au premier ordre en R_0 (ordre R_0^0) :

$$\left. \begin{aligned} \vec{D} \bar{f}_0 &= 0 ; \\ \frac{d}{dz} \bar{f}_0 + 1 &= 0 ; \\ \vec{D} \cdot \vec{v}_0 &= 0 ; \\ \vec{D} \wedge \vec{v}_0 &= -\vec{D} \bar{f}_1 . \end{aligned} \right\} \quad (\text{III},5)$$

En intégrant $\frac{d}{dz} \bar{f}_0 + 1 = 0$ par rapport à z on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_0(z) &= -z + \bar{f}_0(0) \\ \bar{f}_0(z) &= -z + \bar{f}_0(-1) - 1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III},6)$$

ou

suivant que l'on intègre entre -1 et z ou 0 et z .

Les deux relations précédentes entraînent

$$\bar{f}_0(-1) = \bar{f}_0(0) + 1$$

(ainsi la donnée de $\bar{f}_0(0)$ détermine $\bar{f}_0(-1)$ et réciproquement).

A l'ordre suivant en R_0 (ordre R_0^1) on obtient :

$$(a) \quad \frac{\partial}{\partial z} \bar{f}_1 = 0 ;$$

$$(b) \quad \vec{k} \wedge \vec{v}_1 = - \frac{D_0}{Dt} \vec{v}_0 - \beta y \vec{k} \wedge \vec{v}_0 - \vec{D} \bar{f}_2 ;$$

$$(c) \quad \vec{D} \cdot \vec{v}_1 + \frac{\partial}{\partial z} \bar{w}_1 = 0 ;$$

(III,7)

où

$$\frac{D_0}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{D}$$

On peut remarquer que l'équation (b) du système (III,2) associé au développement principal (III,4) entraîne

$$\frac{\partial}{\partial z} \bar{f}_j = 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}^*.$$

L'équation (a) du système (III,7) et cette dernière remarque entraînent, \vec{v}_0 étant indépendante de z ($\vec{v}_0 = \vec{k} \wedge \vec{D} \bar{f}_1$ et $\frac{\partial}{\partial z} \bar{f}_1 = 0$) :

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1(x, y, t) , \quad (\text{III}, 8)$$

$$\vec{v}_1 = -\frac{D_0(\vec{B}\bar{r}_1)}{Dt} - \beta y \vec{k} \wedge \vec{D}\bar{r}_1 + \vec{k} \wedge \vec{D}\bar{r}_2 .$$

On substitue alors (III,8) dans l'équation (c) de (III,7) pour obtenir :

$$\frac{\partial}{\partial z} \bar{w}_1 = \frac{D_0(\vec{B}^2 \bar{r}_1)}{Dt} + \beta \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial x} \quad (\text{III}, 9)$$

Le second membre de (III,9) ne dépend pas de z . On peut donc écrire :

$$\frac{\partial}{\partial z} \bar{w}_1 = \varphi(x, y, t) \quad (\text{III}, 10)$$

où l'on a posé :

$$\varphi(x, y, t) = \beta \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial x} + \frac{D_0(\vec{B}^2 \bar{r}_1)}{Dt} \quad (\text{III}, 11)$$

équation que l'on peut dériver une fois par rapport à z pour obtenir :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{k} \wedge \vec{B}\bar{r}_1) \cdot \vec{D} \right\} \vec{D}^2 \bar{r}_1 + \beta \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{III}, 12)$$

On peut aussi remarquer que (III,10) intégrée par rapport à z donne

$$z \cdot \varphi(x, y, t) + \lambda(x, y, t) = \bar{w}_1(x, y, z, t)$$

où les deux arbitraires φ et λ restent à déterminer. La relation (III,12) nous donne donc une équation pour \bar{r}_1 .

III.2.- COUCHES LIMITES D'EKMAN STATIONNAIRES.

III.2.1.- Voisinage du fond.

Les fonctions \vec{v} , w , p dépendent maintenant de t, x, y et $\zeta = (z+1)/R_0$; le système d'équations (III,2) s'écrit alors, en notant \hat{v} , \hat{w} et \hat{p} la vitesse horizontale, la vitesse verticale et la pression :

$$(a) \quad R_0 \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \hat{v} \cdot \vec{D} \hat{v} + \frac{1}{R_0} \hat{w} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \zeta} \right. \\ \left. + (1 + R_0 \beta y) \vec{k} \wedge \hat{v} = -\frac{1}{R_0} \vec{D} \hat{p} \right. \\ \left. + \hat{E}_\perp \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \zeta^2} ; \right.$$

$$(b) \quad \frac{\partial \hat{p}}{\partial \zeta} + R_0 = 0 ;$$

$$(c) \quad R_0 \vec{D} \cdot \hat{v} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \zeta} = 0 ;$$

$$(d) \quad \zeta = 0, \quad \hat{v} = \vec{0}, \quad \hat{w} = 0 ;$$

$$(e) \quad t = 0, \quad \hat{v} = \vec{v}^0, \quad \hat{p} = p^0.$$

(III,13)

où les conditions aux frontières qui manquent seront fournies par le raccord de la solution locale avec la solution principale obtenue aux §§ précédents (le raccord repose sur l'hypothèse que l'on fait et qui est celle de comportement de la solution locale pour des ζ grands compatible avec le comportement, pour ζ proche de -1 , de la solution principale; c'est la condition

que l'on doit vérifier pour que la technique des développements raccordés soit applicable; voir à ce sujet notre Annexe 1, intitulée MDAR).

Au passage à la limite local

$$\lim_{R_0} \text{loc}_\Sigma = \{ R_0 \downarrow 0, \text{ avec } \hat{E}_1, t, x, y, \Sigma \text{ fixés} \}, \quad (\text{III}, 14)$$

on associe le développement local

$$\begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{w} \\ \hat{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{v}_0 \\ \hat{w}_0 \\ \hat{f}_0 \end{pmatrix} + R_0 \begin{pmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{w}_1 \\ \hat{f}_1 \end{pmatrix} + R_0^2 \begin{pmatrix} \hat{v}_2 \\ \hat{w}_2 \\ \hat{f}_2 \end{pmatrix} + \dots \quad (\text{III}, 15)$$

Il vient alors, successivement les résultats :

$$\left. \begin{aligned} \text{(a)} \quad & \vec{D} \hat{f}_0 = \vec{0}; \quad \frac{\partial}{\partial \Sigma} \hat{f}_0 = 0; \\ \text{(b)} \quad & \frac{\partial}{\partial \Sigma} \hat{w}_0 = 0; \quad \vec{D} \cdot \hat{v}_0 + \frac{\partial}{\partial \Sigma} \hat{w}_1 = 0; \\ \text{(c)} \quad & \vec{D} \hat{f}_1 + \vec{k} \wedge \hat{v}_0 = \hat{E}_1 \frac{\partial^2}{\partial \Sigma^2} \hat{v}_0; \\ \text{(d)} \quad & \frac{\partial}{\partial \Sigma} \hat{f}_1 + 1 = 0; \\ \text{(e)} \quad & \Sigma = 0, \quad \hat{v}_0 = 0, \quad \hat{w}_0 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III}, 16)$$

Le système (III,16) peut être étudié en examinant les équations dans un ordre convenable.

On constate d'abord que

$$\hat{w}_0 \equiv 0,$$

on voit ensuite que $\hat{\tau}_0$ est une constante que l'on détermine par application de la règle de raccord élémentaire due à L. PRANDTL (1928) qui s'écrit de la façon suivante

$$\lim_{z \rightarrow -1} (\bar{\tau}_0) = \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} (\hat{\tau}_0)$$

soit

$$\hat{\tau}_0 = \bar{\tau}_{0|-1}$$

où l'on convient de noter

$$f(0) = f_{|0}, \quad f(-1) = f_{|-1}$$

lorsque f dépend de z (et éventuellement de x, y, t). On détermine ensuite $\hat{\tau}_1$ en utilisant (d) (III,16) et le raccord avec la pression dans l'écoulement principal, ce qui donne

$$\hat{\tau}_1 = -\zeta + \bar{\tau}_1$$

où l'on rappelle que $\bar{\tau}_1$ ne dépend pas de z .

Avant de continuer dans l'analyse du système (III,16) il faut signaler que la règle de raccord utilisée pour déterminer $\hat{\tau}_1$ n'est plus celle de PRANDTL mais en est une généralisation rationnelle, due à B.K. SHIVAMOGGI (1978), dont on trouvera le commentaire dans l'Annexe 1 de ce travail; c'est cette règle de raccord qui est utilisée dans toute la suite de la thèse.

On peut noter ici que l'hypothèse de masse volumique constante permet d'écrire

$$\hat{f} = \bar{f}_{0|1-1} + R_0(\bar{f}_1 - \zeta) + \sum_{n \geq 2} R_0^n \bar{f}_n \quad (\text{III}, 17)$$

puisque, comme on l'a déjà fait remarquer à propos de l'équation (b) du système (III,2) tous les \bar{f}_n sont indépendants de ζ . A ce stade on peut utiliser (c) (III,16) pour déterminer $\hat{v}_0(x, y, \zeta, t)$ en tenant compte de la condition en $\zeta = 0$ et du raccord avec $\bar{v}_0(x, y, t)$.

Cette équation (c) devient, en utilisant (III,17)

$$-\vec{k} \wedge \hat{v}_0 + \hat{E}_1 \frac{\partial^2 \hat{v}_0}{\partial \zeta^2} = \vec{D} \bar{f}_1(x, y, t)$$

soit encore, en posant successivement :

$$\hat{v}_0 = \bar{v}_0 + \hat{v}_0'$$

puis

$$\hat{X}_0 = \hat{v}_0' - i \vec{k} \wedge \hat{v}_0', \quad \text{où } i^2 = -1$$

$$\frac{\partial^2 \hat{X}_0}{\partial \zeta^2} = \frac{i}{\hat{E}_1} \hat{X}_0 \quad (\text{III}, 18)$$

équation à laquelle on associe les conditions aux frontières déduites de (e)

(III,16) et du raccord avec \bar{v}_0 :

$$\zeta = 0, \quad \hat{X}_0 = -(\bar{v}_0 - i \vec{k} \wedge \bar{v}_0),$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow +\infty} (\hat{X}_0) = \vec{0}.$$

La solution de (III,18) avec les conditions précédentes est classique (PEDLOSKY, 1979) :

$$\hat{\vec{v}}_0 = \bar{\vec{v}}_0 + e^{-\gamma \zeta} (\hat{k} \wedge \bar{\vec{v}}_0 \sin \gamma \zeta - \bar{\vec{v}}_0 \cos \gamma \zeta) , \quad (\text{III},19)$$

où on a noté

$$\gamma = (2 \hat{E}_\perp)^{-1/2} .$$

Il est alors facile d'obtenir pour \hat{w}_1 :

$$\hat{w}_1 = \left(\frac{\hat{E}_\perp}{2} \right)^{1/2 \rightarrow 2} \bar{D} \bar{F}_1 \cdot \left(1 - e^{-\gamma \zeta} (\cos \gamma \zeta + \sin \gamma \zeta) \right) \quad (\text{III},20)$$

Le raccord, suivant la règle de Prandtl, des vitesses verticales (à l'ordre R_0) s'écrit

$$\lim_{\zeta \rightarrow +\infty} (\hat{w}_1) = \lim_{\zeta \rightarrow -1} (\bar{w}_1)$$

ce qui entraîne

$$\left(\frac{\hat{E}_\perp}{2} \right)^{1/2 \rightarrow 2} \bar{D} \bar{F}_1 = \bar{w}_{1|-1} \quad (\text{III},21)$$

III.2.2.- Voisinage de l'interface

III.2.2.1.- Vitesse horizontale

La variable de profondeur est maintenant la variable (locale) $\zeta = -z/R_0$ et le passage à la limite local est défini par

$$\lim_{R_0} \text{loc } \zeta = \{ R_0 \downarrow 0, \text{ avec } \hat{E}_1, t, x, y, \zeta = -z/R_0 \text{ fixés} \}$$

Il vient alors, pour les termes du développement local (où le symbole ▲ indique le voisinage de l'interface)

$$\begin{pmatrix} \vec{v} \\ \omega \\ \uparrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_0 \\ \omega_0 \\ \uparrow_0 \end{pmatrix} + R_0 \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \omega_1 \\ \uparrow_1 \end{pmatrix} + \dots$$

les équations suivantes :

$$(a) \quad \vec{D} \uparrow_0 = \vec{0} ; \quad \frac{\partial \uparrow_0}{\partial \zeta} = 0 ;$$

$$(b) \quad \frac{\partial \omega_0}{\partial \zeta} = 0 ; \quad \vec{D} \cdot \vec{v}_0 - \frac{\partial \omega_1}{\partial \zeta} = 0 ;$$

$$(c) \quad \frac{\partial \uparrow_1}{\partial \zeta} - 1 = 0 ;$$

$$(d) \quad -\vec{E} \wedge \vec{v}_0 + \hat{E}_1 \frac{\partial^2 \vec{v}_0}{\partial \zeta^2} = \vec{D} \uparrow_1 ;$$

$$(e) \quad \zeta = 0, \quad \vec{v}_0 = \vec{V}_0(x, y, t), \quad \omega_0 = 0,$$

où \vec{V}_0 est la valeur inconnue de \vec{v}_0 sur $\zeta = 0$.

(III, 22)

En utilisant les mêmes méthodes qu'au § précédent on obtient pour \vec{v}_0^{\uparrow}
le problème d'Ackerblom suivant

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{y}_0^{\uparrow}}{\partial \zeta^2} &= \frac{i}{\hat{E}_1} \vec{y}_0^{\uparrow} \\ \zeta=0, \quad \vec{y}_0^{\uparrow} &= (\vec{V}_0 - \vec{v}_0) - i\vec{k} \wedge (\vec{V}_0 - \vec{v}_0); \\ \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} (\vec{y}_0^{\uparrow}) &= \vec{0}, \end{aligned} \right\} \text{(III,23)}$$

où $\vec{y}_0^{\uparrow} = \vec{v}_0^{\uparrow} - i\vec{k} \wedge \vec{v}_0^{\uparrow}$, avec $\vec{v}_0 = \vec{v}_0 + \vec{v}_0^{\uparrow}$.

Le problème en surface a donc une structure différente du problème au fond (condition en $\zeta=0$ faisant intervenir la vitesse inconnue \vec{V}_0 , valeur prise par \vec{v}_0 sur $\zeta=0$) et les deux couches limites correspondantes sont donc dissymétriques.

La solution de (III,23) est donnée par

$$\vec{v}_0^{\uparrow} = \vec{v}_0 + e^{-\gamma \zeta} (\vec{k} \wedge (\vec{V}_0 - \vec{v}_0) \sin(\gamma \zeta) - (\vec{v}_0 - \vec{V}_0) \cos(\gamma \zeta)), \quad \text{(III,24)}$$

où on note encore

$$\gamma = (2\hat{E}_1)^{-1/2}.$$

Cette solution sera déterminée complètement lorsque l'on connaîtra \vec{V}_0 :
c'est la condition de transmission

$$\left[\mu \frac{U_0}{L_0} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \zeta} \right]_0 = \vec{0}$$

qui va nous permettre d'effectuer le calcul de \vec{V}_0 .

Pour préciser le champ des vitesses atmosphériques qui intervient dans cette condition de transmission on utilise les résultats de J.P. GUIRAUD et R. ZEYTOUNIAN (1980) ainsi que ceux de R. ZEYTOUNIAN (1985). On trouvera dans les deux références citées un exposé complet de la modélisation des écoulements atmosphériques (cas du quasi-géostrophisme et de l'ageostrophisme); dans ce qui suit on ne fera qu'utiliser, sans les exposer, les résultats obtenus par ces deux auteurs.

Ainsi la vitesse, au premier ordre (R_0^0), dans la couche limite d'Ekman atmosphérique au voisinage de l'interface s'écrit :

$$\vec{v}_0^a = \vec{v}_{010}^a + e^{-\gamma^a \Sigma^a} \left(\vec{k} \wedge (\vec{v}_{010}^a - \vec{V}_0) \sin \gamma^a \Sigma^a - (\vec{v}_{010}^a - \vec{V}_0) \cos \gamma^a \Sigma^a \right), \quad (\text{III},25)$$

où l'indice "a" signifie que les grandeurs sont des grandeurs atmosphériques, et où l'on a noté

$$\gamma^a = \left(\bar{\rho}_{010}^a / 2 \hat{E}_L^a \right)^{1/2}$$

avec $\bar{\rho}_0^a$ la densité volumique, d'ordre R_0^0 , de l'atmosphère et \hat{E}_L^a le nombre sans dimensions défini par $\hat{E}_L^a = E_L^a / (R_0^a)^2 = 1/\varepsilon^2 R_e^a R_0^a$ lorsque l'on fait l'hypothèse que les paramètres hydrostatiques, ε , sont équivalents dans l'atmosphère et l'océan.

La variable Σ^a est définie par :

$$\Sigma^a = z / R_0^a$$

par conséquent, d'après ce qui précède, la condition de transmission s'écrit (au premier ordre en R_0 , (ordre R_0^0)) :

$$\mu \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial \Sigma} + \mu^a \frac{\partial \vec{v}_0^a}{\partial \Sigma^a} = \vec{0}, \quad \text{sur } \Sigma = \Sigma^a = 0 \quad (\text{III,26})$$

En reportant (III,24) et (III,25) dans (III,26) on obtient la vitesse $\vec{V}_0(x, y, t)$:

$$\vec{V}_0 = \frac{\mu \bar{\gamma} \vec{v}_0 + \mu^a \gamma^a \vec{v}_{010}^a}{\mu \bar{\gamma} + \mu^a \gamma^a} \quad (\text{III,27})$$

III.2.2.2.- Vitesse verticale dans la couche limite d'Ekman à l'interface

L'équation (b) de (III,22) :

$$\frac{\partial \vec{w}_1}{\partial \Sigma} = \vec{D} \cdot \vec{v}_0$$

à laquelle on associe la condition (ordre R_0 de (e) (III,2))

$$\Sigma = 0, \quad \vec{w}_1 = 0$$

s'intègre facilement pour donner :

$$\vec{w}_1 = \left(\frac{\hat{E}_\perp}{2}\right)^{1/2} \vec{D} \cdot \vec{k} \wedge (\vec{v}_0 - \vec{V}_0) (1 - e^{-\gamma \Sigma} (\cos \gamma \Sigma + \sin \gamma \Sigma)).$$

Par conséquent le raccord, au premier ordre non nul pour les vitesses verticales (c'est-à-dire l'ordre R_0), entraîne :

$$\vec{w}_{110} = \left(\frac{\hat{E}_\perp}{2}\right)^{1/2} \vec{D} \cdot \vec{k} \wedge (\vec{v}_0 - \vec{V}_0) \quad (\text{III,28})$$

où \vec{V}_0 est donné en (III,27).

On peut remarquer que les relations (III,21) et (III,28) permettent la détermination de la vitesse $\vec{w}_1(x, y, z, t)$: en effet, on a posé au § III-1.

$$\vec{w}_1 = \vec{z} \cdot \varphi(x, y, t) + \lambda(x, y, t) \quad (\text{III,29})$$

on obtient donc les valeurs de φ et λ en reportant (III,21) et (III,28) dans la dernière égalité (III,29).

De même on peut aussi remarquer que l'expression (III,27) qui donne \vec{V}_0 en fonction des vitesses géostrophiques relie \vec{V}_0 aux pressions \bar{F}_1 et \bar{F}_{110}^a à l'aide de la relation :

$$\vec{k} \wedge \vec{V}_0 = - \frac{\mu\gamma \vec{D} \bar{F}_1 + \mu^a \gamma^a \vec{D} \bar{F}_{110}^a}{\mu\gamma + \mu^a \gamma^a} \quad (\text{III,30})$$

Les deux fonctions de (x, y, t) , φ et λ , s'écrivent donc en fonction de \bar{F}_1 et \bar{F}_{110}^a :

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{\mu^a \gamma^a}{\mu\gamma + \mu^a \gamma^a} \left(\frac{\hat{E}_1}{2} \right)^{1/2} \left(\vec{D}^2 \bar{F}_{110}^a - \vec{D}^2 \bar{F}_1 \right) \\ \text{et } \varphi &= \left(\frac{\hat{E}_1}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{\mu^a \gamma^a}{\mu\gamma + \mu^a \gamma^a} \vec{D}^2 \bar{F}_{110}^a - \left(1 + \frac{\mu^a \gamma^a}{\mu\gamma + \mu^a \gamma^a} \right) \vec{D}^2 \bar{F}_1 \right) \end{aligned} \right\} (\text{III,31})$$

III.3.- L'ADAPTATION

On se place au voisinage des temps petits en posant

$$\tilde{t} = t / SR_0$$

dans le système des équations (III,2); on obtient, en notant par \tilde{u} les fonctions \vec{v} , w , p considérées comme fonctions de x , y et \tilde{t} :

$$\left. \begin{aligned} \text{(a)} \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial \tilde{t}} + R_0 (\vec{v} \cdot \vec{D} \vec{v} + \tilde{w} \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}) + (1 + R_0 \beta y) \vec{k} \wedge \vec{v} &= \\ \text{(b)} \quad -\frac{1}{R_0} \vec{D} \tilde{p} + E_L \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2}; & \\ \text{(c)} \quad \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + 1 = 0; & \\ \vec{D} \cdot \vec{v} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} = 0. & \end{aligned} \right\} \quad \text{(III,32)}$$

Le développement local

$$\tilde{u} = \tilde{u}_0 + R_0 \tilde{u}_1 + R_0^2 \tilde{u}_2 + \dots$$

associé au passage à la limite local

$$\lim_{R_0}^{R_0 \ll 1} = \{ R_0 \ll 1, \text{ avec } x, y, \tilde{t} \text{ fixés} \}$$

permet d'obtenir au premier ordre en R_0 (ordre R_0^0)

$$\frac{\partial \vec{v}_0}{\partial \tilde{t}} + \vec{k} \wedge \vec{v}_0 + \vec{D} \tilde{p}_1 = \vec{0}. \quad \text{(III,33)}$$

Lorsque l'on utilise la règle de raccord de Shivamoggi (qui coïncide avec celle de Prandtl à l'ordre R_0^0) on obtient pour les vitesses \vec{v}_0 et \vec{v}_0 la relation suivante :

$$\lim_{\tilde{t} \rightarrow +\infty} (\vec{v}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} (\vec{v}_0) \quad \text{(III,34)}$$

soit encore, en utilisant des notations évidentes :

$$\tilde{v}_0^\infty = \tilde{v}_0^0 \quad (\text{III,35})$$

L'équation (III,9) est une équation d'évolution pour l'opérateur elliptique, par rapport à \tilde{r}_1 : $\tilde{D}^2 \tilde{r}_1$.

On va donc formuler une condition initiale pour cette dernière quantité. La fin de ce petit § est consacrée à l'obtention de cette condition au temps $t = 0$.

En appliquant l'opérateur $\vec{D} \cdot \vec{R} \wedge$ à l'équation (III,33) on obtient :

$$\vec{D} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{R} \wedge \tilde{v}_0 - \tilde{v}_0 \right) = 0 \quad (\text{III,36})$$

soit encore, en utilisant la relation (c) du système (III,32) (à l'ordre R_0^0).

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \cdot \vec{R} \wedge \tilde{v}_0) + \frac{\partial}{\partial z} \tilde{w}_0 = 0. \quad (\text{III,37})$$

Equation que l'on intègre, par rapport à z , pour obtenir

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-1}^0 (\vec{D} \cdot \vec{R} \wedge \tilde{v}_0) dz = 0 \quad (\text{III,38})$$

une fois que l'on admet que $\tilde{w}_{0|0} = \tilde{w}_{0|-1} = 0$. Pour prouver ces deux affirmations il est nécessaire de considérer les régions doublement locales IV et VI; cette étude est faite au chapitre V où l'on montre que les vitesses verticales, à l'ordre R_0^0 , y sont nulles et par conséquent en procédant aux raccords entre les régions IV et II ainsi qu'entre les régions VI et II on obtient les résultats annoncés.

Ainsi, $\int_{-1}^0 (\vec{D} \cdot \vec{k} \wedge \vec{v}_0) dz$ étant indépendant de $\tilde{\epsilon}$, on a :

$$\int_{-1}^0 (\vec{D} \cdot \vec{k} \wedge \vec{v}_0^0) dz = \lim_{\tilde{\epsilon} \rightarrow +\infty} \int_{-1}^0 (\vec{D} \cdot \vec{k} \wedge \vec{v}_0) dz \quad (\text{III,39})$$

où l'on a supposé pouvoir développer la donnée initiale \vec{v}^0 en puissance de R_0 (et par suite \vec{v}_0^0 désigne le premier terme de ce développement). On admet la permutation de l'intégrale et de la limite (comme on l'a fait pour l'opérateur $\partial/\partial \tilde{\epsilon}$ et l'intégrale); cela entraîne

$$\int_{-1}^0 (\vec{D} \cdot \vec{k} \wedge \vec{v}_0^0) dz = \int_{-1}^0 (\vec{D} \cdot \vec{k} \wedge \overline{\vec{v}_0^0}) dz \quad (\text{III,40})$$

Or, $\overline{\vec{v}_0^0}$ est indépendante de z . On a donc successivement :

$$\int_{-1}^0 (\vec{D} \cdot \vec{k} \wedge \overline{\vec{v}_0^0}) dz = \vec{D} \cdot \vec{k} \wedge \overline{\vec{v}_0^0}$$

et

$$\int_{-1}^0 (\vec{D} \cdot \vec{k} \wedge \vec{v}_0^0) dz = \vec{D} \cdot \vec{k} \wedge \overline{\vec{v}_0^0} \quad (\text{III,41})$$

C'est cette dernière équation qui nous donne la condition initiale recherchée pour $\vec{D}^2 \vec{F}_1$:

$$t=0, \quad - \int_{-1}^0 (\vec{D} \cdot \vec{k} \wedge \vec{v}_0^0) dz = \vec{D}^2 \vec{F}_1. \quad (\text{III,42})$$

III.4.- PROBLEME D'EVOLUTION POUR $\bar{\tau}_1$.

En conclusion de l'analyse effectuée aux § précédents on peut formuler pour la perturbation de pression $\bar{\tau}_1$ le problème suivant

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \frac{D_0}{Dt} (\bar{D}^2 \bar{\tau}_1 + \beta \gamma) = \varphi(x, y, t) ; \\ \text{(b)} \quad t=0, \quad \bar{D}^2 \bar{\tau}_1 = \int_{-1}^0 \bar{k} \cdot \bar{D} \wedge \bar{v}_0^0 dz ; \\ \text{où} \quad \frac{D_0}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}_0^0 \cdot \bar{D} \quad ; \quad \bar{v}_0^0 = \bar{k} \wedge \bar{D} \bar{\tau}_1 ; \quad \bar{\tau}_1 = \bar{\tau}_1(x, y, t); \end{array} \right\} \text{(III,43)}$$

et φ est donnée par la relation (III,31).

Comme on le voit sur ce problème l'hypothèse de la densité volumique constante est par trop simplificatrice puisque l'étude de la structure verticale de la pression n'est plus possible $\left(\frac{\partial}{\partial z} \bar{\tau}_1 = 0 \right)$. Au chapitre IV on présente un modèle plus réaliste avec ρ variable, mais tout d'abord nous allons étudier les voisinages du fond ($z = -1$) et de l'interface ($z = 0$) à l'ordre R_0 .

III.5.- COUCHES LIMITES D'EKMAN D'ORDRE R_0

III.5.1.- Voisinage du fond

Du système (III,13) auquel on associe le passage à la limite local (III,14) ainsi que le développement local (III,15) on tire pour $\hat{\tau}_1$ l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{v}_0 + \hat{v}_0 \cdot \vec{D} \hat{v}_0 + \hat{w}_1 \frac{\partial}{\partial s} \hat{v}_0 + \beta_y \vec{k} \wedge \hat{v}_0 + \vec{k} \wedge \hat{v}_1 + \vec{D} \bar{f}_2 = \hat{E}_1 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \hat{v}_1,$$

d'où

$$\hat{E}_1 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \hat{v}_1 - \vec{k} \wedge \hat{v}_1 = \frac{\partial}{\partial t} \hat{v}_0 + \hat{v}_0 \cdot \vec{D} \hat{v}_0 + \hat{w}_1 \frac{\partial}{\partial s} \hat{v}_0 + \beta_y \vec{k} \wedge \hat{v}_0 + \vec{D} \bar{f}_2. \quad (\text{III},44)$$

On a utilisé le résultat (III,17) pour écrire que l'on a

$$\vec{D} \hat{f}_2 = \vec{D} \bar{f}_2$$

On pose

$$\hat{v}_0 = \bar{v}_0 + \hat{v}'_0, \quad \hat{v}_1 = \bar{v}_1 + \hat{v}'_1,$$

(\bar{v}_0 et \bar{v}_1 sont donnés respectivement par (III,5) et (III,8)) l'équation précédente se transforme alors sous la forme suivante :

$$\hat{E}_1 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \hat{v}'_1 - \vec{k} \wedge \hat{v}'_1 = \hat{Q}'_0 \quad (\text{III},45)$$

avec

$$\hat{Q}'_0 = \beta_y \vec{k} \wedge \hat{v}'_0 + \frac{D_0(\hat{v}'_0)}{Dt} + \hat{v}'_0 \cdot \vec{D} \hat{v}_0 + \hat{w}_1 \frac{\partial}{\partial s} \hat{v}'_0.$$

On pose alors, dans (III,45)

$$\hat{X}_1 = \hat{v}'_1 - i \vec{k} \wedge \hat{v}'_1, \quad \text{où } i^2 = -1,$$

on obtient

$$\hat{E}_1 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \hat{X}_1 = i \hat{X}_1 + \hat{Q}'_0 - i \vec{k} \wedge \hat{Q}'_0 \quad (\text{III},46)$$

équation à laquelle on associe les conditions aux frontières déduites de (d) (III,13) et du raccord avec \vec{v}_1 :

$$\zeta = 0, \quad \hat{X}_1 = -(\vec{v}_1 - i\vec{k} \wedge \vec{v}_1),$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow +\infty} (\hat{X}_1) = \vec{0}.$$

L'équation (III,46) avec les conditions précédentes s'intègre alors sous la forme (FAVARD; 1963).

$$\hat{X}_1 = -(\vec{v}_1 - i\vec{k} \wedge \vec{v}_1) \mathbb{E}(\zeta)$$

$$+ \int_0^\zeta G(\xi, \zeta) \{ \hat{Q}'_0(\xi) - i\vec{k} \wedge \hat{Q}'_0(\xi) \} d\xi$$

$$+ \int_\zeta^\infty G(\xi, \zeta) \{ \hat{Q}'_0(\xi) - i\vec{k} \wedge \hat{Q}'_0(\xi) \} d\xi$$

où

$$\mathbb{E}(\zeta) = \exp(-(1+i)(2\hat{E}_1)^{-1/2} \cdot \zeta)$$

et

$$G(\xi, \zeta) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(1-i)\gamma \left(\begin{array}{l} e^{(1+i)\gamma(\xi-\zeta)} \\ -e^{-(1+i)\gamma(\xi+\zeta)} \end{array} \right), & 0 \leq \xi \leq \zeta \\ -\frac{1}{2}(1-i)\gamma \left(\begin{array}{l} e^{(1+i)\gamma(\zeta-\xi)} \\ -e^{-(1+i)\gamma(\xi+\zeta)} \end{array} \right), & \xi \geq \zeta \end{cases}$$

avec

$$\gamma = (2\hat{E}_1)^{-1/2}.$$

On ne donne pas le détail des calculs qui sont longs mais relativement faciles, pour ne présenter que le résultat final ainsi que l'expression de \hat{Q}'_0 . On peut remarquer que l'équation (III,46) avec ses conditions aux frontières est le problème d'Ackerblom, de seconde approximation, pour \hat{v}_1 .

$$\hat{Q}'_0(\zeta) = \vec{A}_0(x, y, t) e^{-\gamma \zeta} \sin \gamma \zeta + \vec{B}_0(x, y, t) e^{-\gamma \zeta} \cos \gamma \zeta + \vec{C}_0(x, y, t) e^{-2\gamma \zeta}$$

$$\text{où } \vec{A}_0 = -\beta y \vec{v}_0 + \vec{k} \wedge \frac{D_0(\vec{v}_0)}{Dt} + (\vec{k} \wedge \vec{v}_0) \cdot \vec{D} \vec{v}_0$$

$$+ \frac{1}{2} \vec{D}^2 \vec{r}_1 (\vec{v}_0 - \vec{k} \wedge \vec{v}_0),$$

$$\vec{B}_0 = -\beta y \vec{k} \wedge \vec{v}_0 - \frac{D_0(\vec{v}_0)}{Dt} - \vec{v}_0 \cdot \vec{D} \vec{v}_0$$

$$+ \frac{1}{2} \vec{D}^2 \vec{r}_1 (\vec{v}_0 + \vec{k} \wedge \vec{v}_0);$$

$$\vec{C}_0 = \frac{1}{2} \{ \vec{v}_0 \cdot \vec{D} \vec{v}_0 + (\vec{k} \wedge \vec{v}_0) \cdot \vec{D} \vec{k} \wedge \vec{v}_0 - \vec{v}_0 \cdot \vec{D}^2 \vec{r}_1 \};$$

$$\hat{v}_1(x, y, t, \zeta) = \vec{v}_1 (1 - e^{-\gamma \zeta} \cos \gamma \zeta) - \vec{k} \wedge \vec{v}_1 e^{-\gamma \zeta} \sin \gamma \zeta$$

$$- \frac{1}{4} \sqrt{2} \{ \vec{A}_0 e^{-\gamma \zeta} \gamma \zeta \cos(\gamma \zeta - \pi/4) + \vec{k} \wedge \vec{A}_0 e^{-\gamma \zeta} ($$

$$\gamma \zeta \cos(\gamma \zeta + \pi/4) - \sqrt{2} \sin \gamma \zeta) + \vec{B}_0 e^{-\gamma \zeta} ($$

$$\sqrt{2} \sin \gamma \zeta - \gamma \zeta \cos(\gamma \zeta - \pi/4) - \vec{k} \wedge \vec{B}_0 e^{-\gamma \zeta} \gamma \zeta \sin(\gamma \zeta + \pi/4)$$

$$+ \vec{C}_0 e^{-\gamma \zeta} \frac{1}{5} \sqrt{2} (\sin \gamma \zeta + 2 \cos \gamma \zeta - 2 e^{-\gamma \zeta})$$

$$+ \vec{k} \wedge \vec{C}_0 e^{-\gamma \zeta} \frac{1}{5} \sqrt{2} (\cos \gamma \zeta - 2 \sin \gamma \zeta - e^{-\gamma \zeta}) \}.$$

III.5.2.- Voisinage de l'interface

On ne fait que formuler le problème d'Ackerblom (de seconde approximation) pour la vitesse \vec{v}_1 (vitesse horizontale d'ordre R_0 dans la couche limite d'Ekman au voisinage de l'interface).

$$\left. \begin{aligned} \hat{E}_1 \frac{\partial^2}{\partial \Sigma^2} \vec{Y}_1 &= i \vec{Y}_1 + \vec{P}'_0 - i \vec{k} \wedge \vec{P}'_0 \\ \Sigma=0, \quad \vec{Y}_1 &= -(\vec{v}_1 - \vec{V}_0^1 - i \vec{k} \wedge (\vec{v}_1 - \vec{V}_0^1)) \\ \lim_{\Sigma \rightarrow +\infty} (\vec{Y}_1) &= \vec{0} \\ \vec{Y}_1 &= \vec{v}'_1 - i \vec{k} \wedge \vec{v}'_1; \quad \vec{v}'_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}'_2 \end{aligned} \right\} \text{(III,47)}$$

où \vec{V}_0^1 désigne le terme d'ordre R_0 du développement en puissance de R_0 de la vitesse $\vec{V}_0(x, y, t)$. On trouvera le détail du calcul de \vec{Y}_1 et \vec{V}_0^1 au chapitre V où l'on a, de plus, une densité volumique variable. \vec{P}'_0 comme dans (III,45) est une fonction connue une fois déterminé le quasi-géostrophisme.

III.6.- CONCLUSION

On conclut ce chapitre en effectuant la synthèse des résultats obtenus. Un problème d'évolution pour \vec{r}_1 a été formulé au § III.4; pour poser correctement ce problème l'étude des couches d'Ekman au voisinage du fond et de l'interface a été nécessaire (condition de transmission sur l'interface); de même que l'étude des temps petits a permis d'obtenir la condition initiale à imposer à \vec{r}_1 . Malheureusement le problème obtenu ne permet pas d'étudier \vec{r}_1 (indépendance par rapport à \vec{z}) on est donc nécessairement conduit à développer des schémas d'étude plus fins, ce que l'on fait dans les chapitres 4 et 5 qui suivent.

IV. LE MODELE ASYMPTOTIQUE QUASI-GEOSTROPHIQUE.

La prise en compte d'une densité volumique variable permet une étude complète de la pression \bar{p}_1 contrairement au cas de la densité constante. Dans ce quatrième chapitre où la densité est variable on formule un problème d'évolution pour un opérateur elliptique relativement à \bar{p}_1 qui permet de poser le problème de la structure verticale de l'écoulement principal, d'ordre R_0 . Ce problème conclut le chapitre 4.

IV.1.- L'EQUATION QUASI-GEOSTROPHIQUE

Le passage à la limite principal

$$\lim_{R_0}^P = \{ R_0 \downarrow 0, \text{ avec } \omega_0 \text{ et } \hat{E}_\perp \text{ fixés} \}$$

associé au développement asymptotique principal

$$\begin{pmatrix} \vec{v} \\ w \\ \tau \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_0 \\ 0 \\ \bar{\tau}_0(z) \\ \bar{\rho}_0(z) \end{pmatrix} + R_0 \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{\tau}_1 \\ \bar{\rho}_1 \end{pmatrix} + \dots \quad (\text{IV},1)$$

conduit, à l'ordre zéro de (II,5), au système limite :

$$\left. \begin{aligned} \text{(a)} \quad & \vec{D} \bar{\tau}_0 = 0 \quad ; \\ \text{(b)} \quad & \frac{d}{dz} \bar{\tau}_0 + B_0 \cdot \bar{\rho}_0 = 0 \quad ; \\ \text{(c)} \quad & \vec{D} \cdot \vec{v}_0 = 0 \quad ; \\ \text{(d)} \quad & S \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho}_0 + \vec{v}_0 \cdot \vec{D} \bar{\rho}_0 = 0 \quad ; \\ \text{(e)} \quad & \omega_0 \bar{\rho}_0 \vec{k} \wedge \vec{v}_0 = - \vec{D} \bar{\tau}_1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV},2)$$

La dernière relation nous permet de retrouver la relation géostrophique classique :

$$\vec{v}_0 = (\omega_0 \bar{\rho}_0)^{-1} \vec{k} \wedge \vec{D} \bar{\tau}_1, \quad (\text{IV},3)$$

et l'on rappelle que l'on a

$$\bar{\Gamma}_0 = \bar{\Gamma}_0(z), \quad \bar{e}_0 = \bar{e}_0(z) \quad (\text{IV},4)$$

avec

$$\frac{d}{dz} \bar{\Gamma}_0 + B_0 \cdot \bar{e}_0 = 0.$$

Ensuite on peut écrire à l'ordre suivant en R_0 , les équations limites correspondantes :

$$\left. \begin{aligned} \text{(a)} \quad & \bar{e}_0 \left(S \frac{\partial}{\partial t} \bar{v}_0 + \bar{v}_0 \cdot \vec{D} \bar{v}_0 + \beta y \vec{k} \wedge \bar{v}_0 + \vec{k} \wedge \bar{v}_1 \right) \\ & + \bar{e}_1 \vec{k} \wedge \bar{v}_0 + \frac{1}{\omega_0} \vec{D} \bar{\Gamma}_2 = 0; \\ \text{(b)} \quad & \vec{D} \cdot \bar{v}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \bar{w}_1 = 0; \\ \text{(c)} \quad & \frac{\partial}{\partial y} \bar{\Gamma}_1 + B_0 \cdot \bar{e}_1 = 0; \\ \text{(d)} \quad & S \frac{\partial}{\partial t} \bar{e}_1 + \bar{v}_0 \cdot \vec{D} \bar{e}_1 + \bar{w}_1 \frac{d\bar{e}_0}{dz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV},5)$$

La première de ces équations conduit à :

$$\begin{aligned} \bar{e}_0 \bar{v}_1 = \frac{1}{\omega_0} \vec{k} \wedge \vec{D} \bar{\Gamma}_2 + \bar{e}_0 S \frac{D_0}{Dt} (\vec{k} \wedge \bar{v}_0) - \beta y \bar{v}_0 \\ - \bar{e}_1 \bar{v}_0, \end{aligned} \quad (\text{IV},6)$$

tandis que la seconde entraîne :

$$\frac{\partial}{\partial y} \bar{w}_1 = - \vec{D} \cdot \bar{v}_1,$$

soit encore, en utilisant l'expression de \bar{v}_1 obtenue en (IV,6),

$$\bar{p}_0 \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial z} = S \frac{D_0}{Dt} \left(\frac{1}{\omega_0} \vec{D}^2 \bar{T}_1 \right) + \bar{p}_0 \beta \vec{v}_0 \cdot \vec{j} + \vec{v}_0 \cdot \vec{D} \bar{p}_1 \quad (\text{IV},7)$$

En tirant profit des relations (c) et (d) du système (IV,5) on obtient, lorsque $\frac{d\bar{p}_0}{dz} \neq 0$:

$$\bar{w}_1 = \frac{1}{d\bar{p}_0/dz} \frac{S}{B_0} \frac{D_0}{Dt} \left(\frac{\partial}{\partial z} \bar{T}_1 \right) \quad (\text{IV},8)$$

et lorsque $d\bar{p}_0/dz = 0$ il faut écrire pour la perturbation de pression la relation suivante :

$$S \frac{D_0}{Dt} \left(\frac{\partial}{\partial z} \bar{T}_1 \right) = 0 .$$

Si on remplace dans (IV,7) \bar{w}_1 donné par (IV,8) on obtient alors

$$\frac{1}{B_0} S \frac{D_0}{Dt} \left(\frac{\bar{p}_0}{d\bar{p}_0/dz} \frac{\partial}{\partial z} \bar{T}_1 \right) = S \frac{D_0}{Dt} \left(\frac{1}{\omega_0} \vec{D}^2 \bar{T}_1 \right) + \bar{p}_0 \beta \vec{v}_0 \cdot \vec{j} + \vec{v}_0 \cdot \vec{D} \bar{p}_1 \quad (\text{IV},9)$$

Après quelques transformations et simplifications on obtient de (IV,9) l'équation recherchée pour \bar{T}_1 :

$$S \frac{D_0}{Dt} (\wedge \bar{T}_1 + \beta \bar{p}_0(z) \gamma) = 0 \quad (\text{IV},10)$$

où on a introduit la dérivation quasi-géostrophique

$$S \frac{D_0}{Dt} = S \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{D} ,$$

$$\vec{v}_0 = (\omega_0 \bar{\rho}_0)^{-1} \vec{k} \wedge \vec{D} \bar{f}_1,$$

et l'opérateur \wedge :

$$\wedge \bar{f}_1 = \omega_0^{-1} \vec{D}^2 \bar{f}_1 + \frac{1}{B_0} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho}_0 K_0(z)) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\bar{f}_1}{\bar{\rho}_0} \right)$$

$$\text{où } K_0(z) = -\bar{\rho}_0 / \frac{d\bar{\rho}_0}{dz}.$$

L'équation (IV,10) est du premier ordre en t et du second ordre en x , y et z . Pour déterminer \bar{f}_1 , il faut donc connaître la valeur de \bar{f}_1 au temps $t=0$; cette valeur $\bar{f}_1^0(x, y, z)$ s'obtient à partir du problème régissant l'adaptation au géostrophisme, développé au § suivant.

IV.2.- L'ADAPTATION AU GEOSTROPHISME

L'introduction du temps fin $\tilde{t} = t/SR_0$ dans les équations (II,5) transforme celles-ci en :

$$\left. \begin{aligned} \text{(a)} \quad & \tilde{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + R_0 (\tilde{v} \cdot \vec{D} \tilde{v} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z}) + (1 + R_0 \beta y) \vec{k} \wedge \tilde{v} \right) \\ & = -\frac{1}{\omega_0 R_0} \vec{D}^2 \tilde{f} + E_1 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2}; \\ \text{(b)} \quad & \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} + B_0 \tilde{\rho} = 0; \\ \text{(c)} \quad & \vec{D} \cdot \tilde{v} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0; \\ \text{(d)} \quad & \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} + R_0 (\tilde{v} \cdot \vec{D} \tilde{\rho} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z}) = 0; \end{aligned} \right\} \text{(IV,11)}$$

où

$$\tilde{\vec{v}} = \tilde{\vec{v}}(x, y, z, \tilde{E}) = \vec{v}(x, y, z, SR_0\tilde{E}) \dots \text{etc.}$$

En considérant simultanément le développement local

$$\begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{w} \\ \tilde{f} \\ \tilde{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_0 \\ \tilde{w}_0 \\ \tilde{f}_0(z) \\ \tilde{p}_0 \end{pmatrix} + R_0 \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{w}_1 \\ \tilde{f}_1 \\ \tilde{p}_1 \end{pmatrix} + \dots \quad (\text{IV},12)$$

et le passage à la limite local

$$\lim_{R_0}^{\text{loc}} = \{ R_0 \downarrow 0, \text{ avec } x, y, z, \tilde{E} \text{ fixés} \} \quad (\text{IV},13)$$

dans le système (IV,11), on obtient tout d'abord que :

$$\vec{D} \tilde{f}_0 = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{E}} \tilde{p}_0 = 0; \quad \frac{d}{dz} \tilde{f}_0 + B_0 \cdot \tilde{p}_0 = 0 \quad (\text{IV},14)$$

ce qui entraîne en effectuant le raccord, à l'ordre R_0^0 , de \tilde{p}_0 et \tilde{f}_0 (région locale II) avec \bar{p}_0 et \bar{f}_0 (région principale I) :

$$\lim_{\tilde{E} \rightarrow \infty} (\tilde{p}_0) \equiv \tilde{p}_0 = \bar{p}_0(z) \equiv \lim_{t \rightarrow 0} (\bar{p}_0) \quad (\text{IV},15)$$

$$\lim_{\tilde{E} \rightarrow \infty} (\tilde{f}_0) \equiv \tilde{f}_0 = \bar{f}_0(z) \equiv \lim_{t \rightarrow 0} (\bar{f}_0)$$

soit encore

$$\tilde{p}_0 = \bar{p}_0(z), \quad \tilde{f}_0 = \bar{f}_0(z) \quad (\text{IV},16)$$

A l'ordre suivant en R_0 on obtient pour \tilde{v}_0 , \tilde{w}_0 et \tilde{f}_1 un système que l'on appelle "système d'adaptation au géostrophisme" :

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \bar{\rho}_0(z) \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \tilde{v}_0 + \vec{k} \wedge \tilde{v}_0 \right) + \frac{1}{\omega_0} \vec{D} \tilde{f}_1 = \vec{0} ; \\
 (b) \quad & \frac{\partial}{\partial z} \tilde{f}_1 + B_0 \tilde{p}_1 = 0 ; \\
 (c) \quad & \vec{D} \cdot \tilde{v}_0 + \frac{\partial}{\partial z} \tilde{w}_0 = 0 ; \\
 (d) \quad & \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \tilde{p}_0 + \tilde{w}_0 \frac{d\bar{\rho}_0/dz}{dz} = 0 .
 \end{aligned}
 \tag{IV,17}$$

De ce système il découle que :

$$\begin{aligned}
 \tilde{w}_0 &= \frac{1}{B_0} \left(\frac{d\bar{\rho}_0}{dz} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left(\frac{\partial}{\partial z} \tilde{f}_1 \right) , \\
 \vec{D} \cdot \tilde{v}_0 + \frac{1}{B_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\frac{d\bar{\rho}_0}{dz} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left(\frac{\partial}{\partial z} \tilde{f}_1 \right) \right) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{IV,18}$$

et le système d'adaptation locale (IV,17) devient un système de deux équations pour \tilde{v}_0 et \tilde{f}_1 :

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \bar{\rho}_0 \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \tilde{v}_0 + \vec{k} \wedge \tilde{v}_0 \right) + \frac{1}{\omega_0} \vec{D} \tilde{f}_1 = \vec{0} ; \\
 (b) \quad & \vec{D} \cdot \tilde{v}_0 + B_0^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\frac{d\bar{\rho}_0}{dz} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left(\frac{\partial}{\partial z} \tilde{f}_1 \right) \right) = 0 .
 \end{aligned}
 \tag{IV,19}$$

A ce système il faut associer les deux conditions initiales de départ, correspondant à $t = \tilde{t} = 0$; tout d'abord, de (II,5) on a :

$$t = 0, \quad \vec{\tilde{v}} = \vec{v}^0 \quad (\text{IV},20)$$

Puis il faut supposer en toute généralité que la donnée initiale

$$t = 0, \quad \tau = \tau^0$$

peut se décomposer sous la forme : $\tau^0 = \bar{\tau}_0(\vec{z}) + R_0 \tau_1^0 + O(R_0^2)$ et dans ce cas nous écrirons :

$$t = 0, \quad \vec{\tilde{\tau}}_1 = \tau_1^0. \quad (\text{IV},21)$$

Si on note $\lim_{\tilde{E} \rightarrow +\infty} (\vec{\tilde{\tau}}_1) = \vec{\tilde{\tau}}_1^\infty$

on a, en appliquant la règle de raccord entre la région II (région initiale) et la région I (principale):

$$\vec{\tilde{\tau}}_1^\infty = \bar{\tau}_1^0 \quad (\text{IV},22)$$

où on note

$$f^0 = f(x, y, z, 0), \quad f^\infty = \lim_{\tilde{E} \rightarrow +\infty} (f(x, y, z, \tilde{E})).$$

Par passage à la limite sur \tilde{E} dans l'équation (a) du système (IV,19)

on obtient

$$\bar{\epsilon}_0 \left(\frac{\partial \vec{\tilde{v}}_0}{\partial t} \right)^\infty + \bar{\epsilon}_0 \vec{k} \wedge \vec{\tilde{v}}_0^\infty + \frac{1}{\omega_0} \vec{D} \vec{\tilde{\tau}}_1^\infty = \vec{0}. \quad (\text{IV},23)$$

En raccordant avec la région I, on a :

$$\tilde{\vec{v}}_0^\infty = \bar{\vec{v}}_0^0 \quad (\text{IV,24})$$

d'où l'équation

$$\bar{\rho}_0 \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \tilde{\vec{v}}_0 \right)^\infty + \bar{\rho}_0 \bar{\vec{K}} \wedge \bar{\vec{v}}_0^0 + \frac{1}{\bar{\omega}_0} \bar{D} \bar{\vec{f}}_1^0 = \vec{0}$$

et la relation (e) de (IV,2) impose alors que l'on ait

$$\lim_{\tilde{t} \rightarrow +\infty} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \tilde{\vec{v}}_0 \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \tilde{\vec{v}}_0 \right)^\infty = \vec{0} \quad (\text{IV,25})$$

si l'on veut que la méthode des développements raccordés soit bien applicable.

Ainsi, sous réserve que (IV,25) soit établie, on constate qu'il y a bien adaptation au géostrophisme.

On veut obtenir, à partir du système (IV,19), avec les conditions initiales (IV,20) et (IV,21), la condition au temps $t=0$ qu'il faut imposer à l'équation d'évolution quasi-géostrophique pour $\bar{\vec{f}}_1$ valable dans la région principale I.

Tout d'abord la première des équations (IV,19) conduit à :

$$\bar{\rho}_0 \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} (\bar{D} \cdot \tilde{\vec{v}}_0) + \bar{D} \cdot (\bar{\vec{K}} \wedge \tilde{\vec{v}}_0) \right) + \bar{\omega}_0^{-1} \bar{D}^2 \tilde{\vec{f}}_1 = 0 \quad (\text{IV,26})$$

ce qui, en utilisant l'expression de $\tilde{\omega}_0$ donnée en (IV,18) est équivalent à l'équation suivante :

$$\bar{\rho}_0 \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left(-\frac{1}{B_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\frac{d\bar{\rho}_0}{dz} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left(\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial z} \right) \right) \right) + \bar{D} \cdot (\bar{\vec{K}} \wedge \tilde{\vec{v}}_0) \right) + \bar{\omega}_0^{-1} \bar{D}^2 \tilde{\vec{f}}_1 = 0 \quad (\text{IV,27})$$

En appliquant l'opérateur $\vec{D} \cdot \vec{k} \wedge$ à l'équation (a) (IV,17)

on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{D} \cdot \vec{k} \wedge \vec{v}_0 + \frac{1}{B_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\frac{d\bar{\epsilon}_0}{dz} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \tilde{f}_1 \right) \right) = 0 \quad (\text{IV},28)$$

ce qui traduit l'indépendance par rapport à \tilde{E} de la quantité entre crochets.

Il vient ainsi de (IV,27), en utilisant le résultat précédent, l'équation suivante pour \tilde{f}_1 :

$$\begin{aligned} & \bar{\epsilon}_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{B_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\frac{d\bar{\epsilon}_0}{dz} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial z} \right) \right) \right) + \vec{D} \cdot \vec{k} \wedge \vec{v}_0 \right. \\ & \left. + \frac{1}{B_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\frac{d\bar{\epsilon}_0}{dz} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \tilde{f}_1 \right) - \frac{1}{B_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\frac{d\bar{\epsilon}_0}{dz} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \tilde{f}_1 \right) \right\} + \omega_0^{-1} \vec{D}^2 \tilde{f}_1 = 0. \quad (\text{IV},29) \end{aligned}$$

Cette équation peut se mettre sous une forme plus condensée, en utilisant l'opérateur \wedge défini après (IV,10) :

$$\begin{aligned} \wedge \tilde{f}_1 &= -\bar{\epsilon}_0 \vec{D} \cdot \vec{k} \wedge \vec{v}_0 + \frac{1}{B_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{\epsilon}_0 K_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tilde{f}_1}{\bar{\epsilon}_0} \right) \right) \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} \tilde{w}_0. \end{aligned} \quad (\text{IV},30)$$

Mais on remarque que l'on a :

$$\lim_{\tilde{E} \rightarrow \infty} (\tilde{w}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} (\bar{w}_0) = 0 \quad (\text{IV},31)$$

et de ce fait on obtient pour \tilde{f}_1 la relation finale :

$$t=0, \wedge \bar{f}_1 = \bar{\rho}_0 \vec{R} \cdot \vec{D} \wedge \vec{v}^0 + \frac{1}{B_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{\rho}_0 K_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\bar{f}_1^0}{\bar{\rho}_0} \right) \right). \quad (\text{IV},32)$$

Pour pouvoir utiliser (IV,32) comme donnée initiale associée à l'équation $S D_0/Dt (\wedge \bar{f}_1 + \bar{\rho}_0(z) \beta \gamma) = 0$, il faut résoudre l'équation (IV,30); il est donc nécessaire de formuler tout d'abord les deux conditions aux frontières qui lui sont associées. Comme on le verra au chapitre V, \tilde{w}_0 s'annule en $z = -1$ et $z = 0$; la relation (IV,18) :

$$\tilde{w}_0 = \left(B_0 \frac{d\bar{\rho}_0}{dz} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial z} \right) \quad (\text{IV},33)$$

entraîne alors

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial z} \tilde{f}_1 = 0 \quad \text{pour } z = -1 \text{ et } z = 0. \quad (\text{IV},34)$$

Il faut aussi associer à (IV,30) deux conditions initiales :

$$\tilde{E} = t = 0, \quad \tilde{f}_1 = \bar{f}_1^0, \quad \vec{D} \cdot \vec{v}^0 = \frac{1}{B_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\frac{d\bar{\rho}_0}{dz} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial t} \right) \right). \quad (\text{IV},35)$$

Enfin, on peut aussi remarquer que l'on obtient deux conditions de compatibilité pour \bar{f}_1 , en procédant de la façon suivante :

$$\int_0^{\tilde{E}} \tilde{w}_0(u) du = \left(B_0 \frac{d\bar{\rho}_0}{dz} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial z} - \frac{\partial \bar{f}_1^0}{\partial z} \right). \quad (\text{IV},36)$$

Par passage à la limite sur $\tilde{\epsilon}$ on obtient (on suppose la convergence de l'intégrale)

$$\int_0^{+\infty} \tilde{w}_0(u) du = (B_0 \frac{d\bar{p}_0}{dz})^{-1} \left(\left(\frac{\partial \bar{f}_1}{\partial z} \right)^0 - \frac{\partial f_1^0}{\partial z} \right).$$

Si maintenant on admet que l'on a :

$$\lim_{\substack{z_0 \rightarrow z_0 \\ z_0 \in [-1, 0]}} \left(\int_0^{+\infty} \tilde{w}_0(u) du \right) = \int_0^{+\infty} \tilde{w}_{01}(u) du,$$

alors on obtient les résultats suivants :

$$\left. \begin{array}{l} z = -1, \quad \left(\frac{\partial \bar{f}_1}{\partial z} \right)^0 = \frac{\partial f_1^0}{\partial z} \\ z = 0, \quad \left(\frac{\partial \bar{f}_1}{\partial z} \right)^0 = \frac{\partial f_1^0}{\partial z} \end{array} \right\} \quad (\text{IV}, 37)$$

Ces deux dernières conditions en $z = -1$ et $z = 0$ au temps $t = 0$ sont des conditions de compatibilité sur \bar{f}_1 . Lorsque f^0 ne se développe pas en puissance de R_0 , ces deux conditions se résument à :

$$\begin{array}{l} t = 0, \quad z = 0 \quad \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial z} = 0, \\ \bullet \quad t = 0, \quad z = -1 \quad \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial z} = 0. \end{array}$$

IV.3.- COUCHES LIMITES D'EKMAN STATIONNAIRES

IV.3.1.- Voisinage du fond

On étudie maintenant la région locale III (voisinage du fond) en effectuant dans le système (II,5) le changement de variable (suivant la verticale) $\zeta = (z+1)/R_0$; il vient le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \hat{p} \left(R_0 \left(S \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \hat{v} \cdot \vec{D} \hat{v} + \frac{1}{R_0} \hat{w} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \zeta} \right) \right. \\
 & \quad \left. + (1 + R_0 \beta_y) \vec{k} \wedge \hat{v} + (\omega_0 R_0)^{-1} \vec{D} \hat{v} \right) \\
 & \quad = \hat{E}_\perp \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \zeta^2} ; \\
 (b) \quad & \frac{\partial \hat{p}}{\partial \zeta} + B_0 \hat{p} = 0, \\
 (c) \quad & R_0 \left(S \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} + \hat{v} \cdot \vec{D} \hat{p} \right) + \hat{w} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \zeta} = 0 ; \\
 (d) \quad & R_0 \vec{D} \cdot \hat{v} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \zeta} = 0, \\
 (e) \quad & \zeta = 0, \quad \hat{v} = \vec{0}, \quad \hat{w} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{IV,38}$$

Conjointement, on définit le passage à la limite local

$$\lim_{R_0}^{loc} z = \{ R_0 \downarrow 0, \text{ avec } t, x, y, \zeta \text{ fixés} \}, \tag{IV,39}$$

et le développement asymptotique local

$$\begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{w} \\ \hat{f} \\ \hat{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{v}_0 \\ \hat{w}_0 \\ \hat{f}_0 \\ \hat{p}_0 \end{pmatrix} + R_0 \begin{pmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{w}_1 \\ \hat{f}_1 \\ \hat{p}_1 \end{pmatrix} + \dots \quad (\text{IV},40)$$

Il vient alors, en utilisant (IV,39) et (IV,40) dans (IV,38), à l'ordre zéro les relations suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \vec{D} \hat{f}_0 = \vec{0}, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} \hat{f}_0 = 0; \\ \text{(b)} \quad \hat{w}_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \hat{p}_0 = 0; \\ \text{(c)} \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} \hat{w}_0 = 0; \\ \text{(d)} \quad \zeta = 0, \quad \hat{w}_0 = 0. \end{array} \right\} \quad (\text{IV},41)$$

La relation (c) associée à la condition en $\zeta = 0$, (d), entraîne

$$\hat{w}_0 = 0.$$

D'autre part, le raccord de la région locale III avec la région principale I entraîne

$$\lim_{\zeta \rightarrow +\infty} (\hat{f}_0) = \lim_{\zeta \rightarrow -1} (\bar{f}_0),$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow +\infty} (\hat{p}_0) = \lim_{\zeta \rightarrow -1} (\bar{p}_0).$$

et

Puisque \bar{F}_0 ne dépend que de \bar{z} , on peut écrire, en utilisant les deux derniers résultats et les relations (a) du système (IV,41) :

$$\hat{F}_0 = \bar{F}_{0|1-1}, \quad \hat{P}_0 = \bar{P}_{0|1-1} \quad (\text{IV,42})$$

(on fait l'hypothèse que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \hat{P}_0 = 0$).

A l'ordre supérieur en R_0 on obtient le système suivant :

$$\left. \begin{aligned} \text{(a)} \quad & \bar{P}_{0|1-1} \vec{k} \wedge \hat{v}_0 + \frac{1}{\omega_0} \vec{D} \hat{F}_1 = \hat{E}_L \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \hat{v}_0 ; \\ \text{(b)} \quad & \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \hat{F}_1 + B_0 \cdot \bar{P}_{0|1-1} = 0 ; \\ \text{(c)} \quad & \vec{D}_0 \hat{v}_0 + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \hat{w}_1 = 0 ; \\ \text{(d)} \quad & \bar{z} = 0, \quad \hat{v}_0 = \vec{0}, \quad \hat{w}_1 = 0 . \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV,43})$$

Pour déterminer \hat{F}_1 , on utilise le raccord de la région locale III avec la région principale I; celui-ci nous donne

$$\hat{F}_1(\bar{z}) = \bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} \bar{F}_{0|1-1} + \bar{F}_{1|1-1} + \hat{F}'_1(\bar{z}) \quad (\text{IV,44})$$

où \hat{F}'_1 est une fonction qui tend vers zéro avec $1/\bar{z}$. On détermine \hat{F}'_1 en utilisant la relation (b) de (IV,43) et (IV,44); en effet, (b) (IV,43), impose

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \hat{F}'_1 = 0$$

et on a $\lim_{\bar{z} \rightarrow \infty} (\hat{F}'_1) = 0$

d'où

$$\hat{\tau}_1' = 0.$$

Finalement il vient :

$$\hat{\tau}_1 = \int \frac{d}{dz} \bar{\tau}_0|_{-1} + \bar{\tau}_{1|-1}. \quad (\text{IV},45)$$

De même, si on pose :

$$\hat{v}_0 = \bar{v}_{0|-1} + \hat{v}_0'$$

où le raccord avec la région I impose $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} (\hat{v}_0') = \vec{0}$, l'équation (a) du système (IV,43) s'écrit, en utilisant (IV,45) :

$$\tau_0 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \hat{v}_0' - \vec{k} \wedge \hat{v}_0' = \vec{0}, \quad (\text{IV},46)$$

où

$$\tau_0 = \hat{E}_1 / \bar{e}_{0|-1}.$$

On doit associer deux conditions aux frontières à cette équation,

(d) (IV,43) donne

$$\int = 0, \quad \hat{v}_0' = -\bar{v}_{0|-1}$$

tandis que, par construction, on a

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} (\hat{v}_0') = \vec{0}.$$

Le problème que l'on peut formuler alors pour \hat{v}_0' est le problème d'Ackerblom de première approximation :

$$\tau_0 \frac{\partial^2 \hat{v}'_0}{\partial \zeta^2} - \vec{k} \wedge \hat{v}'_0 = \vec{0} ;$$

$$\zeta = 0, \quad \hat{v}'_0 = -\vec{v}_{01-1} ;$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow +\infty} (\hat{v}'_0) = \vec{0} .$$

(IV,47)

La résolution de ce problème (IV,47) ne présente pas de difficultés.

Il suffit pour cela d'appliquer l'opérateur $\tau_0 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}$ à $\hat{v}'_0 - i \vec{k} \wedge \hat{v}'_0$ en tenant compte du résultat (IV,46) pour obtenir une équation différentielle linéaire du second ordre en ζ (t, x, y jouant le rôle de paramètres) à coefficients constants et homogène; si on pose :

$$\hat{X}_0 = \hat{v}'_0 - i \vec{k} \wedge \hat{v}'_0$$

on a alors à résoudre

$$\tau_0 \frac{\partial^2 \hat{X}_0}{\partial \zeta^2} = i \hat{X}_0 ;$$

$$\zeta = 0, \quad \hat{X}_0 = -(\vec{v}_{01-1} - i \vec{k} \wedge \vec{v}_{01-1}) ;$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow +\infty} (\hat{X}_0) = \vec{0} .$$

(IV,48)

La solution de ce problème est classique, elle est donnée par

$$\hat{X}_0 = -(\vec{v}_{01-1} - i \vec{k} \wedge \vec{v}_{01-1}) E(\zeta)$$

(IV,49)

où
$$\mathbb{E}(\zeta) = \exp(-\tau_0^{-1/2} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \zeta) .$$

De $\hat{\vec{X}}_0$ on tire facilement

$$\hat{\vec{v}}_0 - i \vec{k} \wedge \hat{\vec{v}}_0 = (\vec{v}_{01-1} - i \vec{k} \wedge \vec{v}_{01-1})(1 - \mathbb{E})$$

et en ajoutant à ce dernier résultat la quantité complexe conjuguée correspondante on obtient :

$$\hat{\vec{v}}_0 = \vec{v}_{01-1} + e^{-\gamma \zeta} (\vec{k} \wedge \vec{v}_{01-1} \sin \gamma \zeta - \vec{v}_{01-1} \cos \gamma \zeta) \quad (\text{IV},50)$$

où
$$\gamma = (2\tau_0)^{-1/2} .$$

Il est alors facile, en utilisant l'équation (c) du système (IV,43) et la condition, en $\zeta = 0$, (d) du même système, d'obtenir pour $\hat{\vec{w}}_1$:

$$\hat{\vec{w}}_1 = (\omega_0 \bar{\rho}_{01-1})^{-1} \bar{D}^2 \bar{\tau}_{11-1} \left(\frac{\tau_0}{2}\right)^{1/2} (1 - e^{-\gamma \zeta} (\cos \gamma \zeta + \sin \gamma \zeta)) . \quad (\text{IV},51)$$

Le raccord des vitesses verticales entraîne ensuite :

$$\bar{w}_{11-1} = \left(\frac{\tau_0}{2}\right)^{1/2} (\omega_0 \bar{\rho}_{01-1})^{-1} \bar{D}^2 \bar{\tau}_{11-1} . \quad (\text{IV},52)$$

Si l'on se souvient que \bar{w}_1 est donné par (IV,8), il vient la relation suivante, portant sur $\bar{\tau}_1$:

$$\zeta = -1, \quad S \frac{D_0}{Dt} \left(\frac{\partial \bar{\tau}_1}{\partial \zeta}\right) = \frac{B_0}{\omega_0} \left(\frac{\tau_0}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{\bar{\rho}_0} \frac{d\bar{\rho}_0}{d\zeta} \bar{D}^2 \bar{\tau}_1 . \quad (\text{IV},53)$$

C'est cette condition (IV,53) qu'il faut associer en $z = -1$ à l'équation d'évolution quasi-géostrophique pour \bar{T}_1 , $S \frac{D_0}{Dt} (\Delta \bar{T}_1 + \beta \bar{p}_0 \gamma) = 0$.

IV.3.2.- Voisinage de l'interface

IV.3.2.1.- Vitesse horizontale

On effectue le changement de variable $\zeta = -z/R_0$ dans les équations (II,5) où on note maintenant $\hat{v}(x, y, \zeta, t) = \vec{v}(x, y, -\zeta R_0, t)$ par exemple. On obtient pour \hat{v} , \hat{w} , \hat{f} et \hat{p} le système suivant :

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \hat{p} \left(R_0 \left(S \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \hat{v} \cdot \vec{D} \hat{v} - \frac{1}{R_0} \hat{w} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \zeta} \right) + \right. \\
 & \left. (1 + R_0 \beta \gamma) \vec{k} \wedge \hat{v} = -\frac{1}{\omega_0 R_0} \vec{D} \hat{f} + \hat{E}_1 \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \zeta^2} ; \right. \\
 (b) \quad & \frac{\partial \hat{f}}{\partial \zeta} - R_0 B_0 \cdot \hat{p} = 0 ; \\
 (c) \quad & R_0 \vec{D} \cdot \hat{v} - \frac{\partial \hat{w}}{\partial \zeta} = 0 ; \\
 (d) \quad & R_0 \left(S \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} + \hat{v} \cdot \vec{D} \hat{p} \right) - \hat{w} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \zeta} = 0.
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (a) \\ (b) \\ (c) \\ (d) \end{aligned}} \right\} \text{(IV,54)}$$

Les conditions aux frontières manquantes seront fournies par les conditions de transmission sur l'interface ainsi que par le raccord de la région locale V avec la région principale I.

Si on note $\vec{V}_0(x, y, t)$ la valeur, inconnue, de la vitesse \hat{v} sur $\zeta = z = 0$, on obtient la condition limite en $\zeta = 0$ à imposer à \hat{v}

(voir le § I.2 du chapitre I):

$$\zeta = 0, \quad \hat{\vec{v}} = \hat{\vec{v}}_0. \quad (\text{IV},55)$$

On détermine ensuite $\hat{\vec{v}}_0$ à l'aide des conditions de transmission (a) de (I,37). Au paragraphe I.6 nous avons mis en évidence le fait que la surface libre d'équation $z = \alpha \eta(x, y, t)$ se transforme sous le passage à la limite en ondes longues, LIM_{OL} , en un plan d'équation $z = 0$. Par conséquent on peut écrire pour la vitesse verticale, \hat{w} , dans la couche limite d'Ekman au voisinage de l'interface d'équation $z = \zeta = 0$:

$$\zeta = 0, \quad \hat{w} = 0. \quad (\text{IV},56)$$

Le développement asymptotique local dans (IV,54) :

$$\begin{pmatrix} \hat{\vec{v}} \\ \hat{w} \\ \hat{\tau} \\ \hat{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\vec{v}}_0 \\ \hat{w}_0 \\ \hat{\tau}_0 \\ \hat{p}_0 \end{pmatrix} + R_0 \begin{pmatrix} \hat{\vec{v}}_1 \\ \hat{w}_1 \\ \hat{\tau}_1 \\ \hat{p}_1 \end{pmatrix} + \dots \quad (\text{IV},57)$$

associé au passage à la limite local dans (IV,54)

$$\lim_{R_0}^{loc} \mathfrak{D} = \{ R_0 \downarrow 0, \text{ avec } t, x, y, \zeta \text{ fixés} \} \quad (\text{IV},58)$$

conduit aux équations suivantes pour $\hat{\tau}_0$, \hat{p}_0 et \hat{w}_0 :

$$\begin{array}{l}
 \text{(a)} \quad \vec{D} \hat{\uparrow}_0 = \vec{0}, \quad \frac{\partial}{\partial \Sigma} \hat{\uparrow}_0 = 0; \\
 \text{(b)} \quad \frac{\partial}{\partial \Sigma} \hat{w}_0 = 0, \quad \hat{w}_0 \frac{\partial}{\partial \Sigma} \hat{e}_0 = 0; \\
 \text{(c)} \quad \Sigma = 0, \quad \hat{w}_0 = 0.
 \end{array}
 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{(a)} \\ \text{(b)} \\ \text{(c)} \end{array}} \right\} \text{(IV,59)}$$

Par conséquent, en utilisant (b) et (c) :

$$\hat{w}_0 = 0. \quad \text{(IV,60)}$$

Des calculs et des raisonnements analogues à ceux du § IV,3.1 conduisent à :

$$\hat{\uparrow}_0 = \bar{\uparrow}_{010}, \quad \hat{e}_0 = \bar{e}_{010}. \quad \text{(IV,61)}$$

A l'ordre suivant en R_0 , on obtient pour $\hat{\vec{v}}_0$, \hat{w}_1 et $\hat{\uparrow}_1$ le système suivant :

$$\begin{array}{l}
 \text{(a)} \quad \bar{e}_{010} \vec{k} \wedge \hat{\vec{v}}_0 + \frac{1}{\omega_0} \vec{D} \hat{\uparrow}_1 = \hat{E}_1 \frac{\partial^2}{\partial \Sigma^2} \hat{\vec{v}}_0; \\
 \text{(b)} \quad \frac{\partial}{\partial \Sigma} \hat{\uparrow}_1 - B_0 \cdot \bar{e}_{010} = 0; \\
 \text{(c)} \quad \vec{D} \cdot \hat{\vec{v}}_0 - \frac{\partial}{\partial \Sigma} \hat{w}_1 = 0; \\
 \text{(d)} \quad \Sigma = 0, \quad \hat{\vec{v}}_0 = \vec{V}_0, \quad \hat{w}_1 = 0.
 \end{array}
 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{(a)} \\ \text{(b)} \\ \text{(c)} \\ \text{(d)} \end{array}} \right\} \text{(IV,62)}$$

La détermination de la perturbation de pression $\overset{\blacktriangle}{p}_1$ se fait à l'aide du raccord des régions V (locale) et I (principale); ce raccord conduit au résultat suivant :

$$\overset{\blacktriangle}{p}_1 = \bar{p}_{110} - \Sigma \frac{d\bar{p}_{10}}{dz} \Big|_0 \quad (\text{IV,63})$$

On pose à nouveau $\overset{\blacktriangle}{v}_0 = \bar{v}_{010} + \overset{\blacktriangle}{v}'_0$, avec (c'est le raccord qui l'impose)

$$\lim_{\Sigma \rightarrow +\infty} (\overset{\blacktriangle}{v}'_0) = \vec{0}.$$

Nous pouvons alors formuler pour $\overset{\blacktriangle}{v}'_0$ le problème suivant analogue à (IV,47) (Problème d'Ackerblom pour $\overset{\blacktriangle}{v}'_0$) :

$$\left. \begin{aligned} \nu_0 \frac{\partial^2 \overset{\blacktriangle}{v}'_0}{\partial \Sigma^2} - \vec{k} \wedge \overset{\blacktriangle}{v}'_0 &= \vec{0}, \\ \Sigma = 0, \quad \overset{\blacktriangle}{v}'_0 &= \bar{\vec{v}}_0 - \bar{v}_{010}; \\ \lim_{\Sigma \rightarrow +\infty} (\overset{\blacktriangle}{v}'_0) &= \vec{0}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV,64})$$

où $\nu_0 = \hat{E}_L / \bar{p}_{010}$.

La vitesse $\overset{\blacktriangle}{v}_0$ est alors donnée par :

$$\overset{\blacktriangle}{v}_0 = \bar{v}_{010} + e^{-\gamma \Sigma} \left(\vec{k} \wedge (\bar{v}_{010} - \bar{\vec{v}}_0) \sin \gamma \Sigma - (\bar{v}_{010} - \bar{\vec{v}}_0) \cos \gamma \Sigma \right) \quad (\text{IV,65})$$

$$\text{où } \gamma = (2\nu_0)^{-1/2}.$$

IV.3.2.2.- Vitesse verticale

A partir du résultat précédent (IV,65), l'équation (c) du système (IV,62) :

$$\vec{D}_0 \cdot \hat{\vec{v}}_0 - \frac{\partial}{\partial \zeta} \hat{w}_1 = 0,$$

associée à la condition en $\zeta = 0$ du même système, s'intègre facilement; on obtient pour la vitesse verticale, \hat{w}_1 , dans la couche d'Ekman au voisinage de l'interface :

$$\hat{w}_1(x, y, \zeta, t) = \left(\frac{\nu_0}{2}\right)^{1/2} \vec{D}_0 \cdot \left\{ \vec{k} \wedge (\vec{v}_{010} - \vec{V}_0) (1 - e^{-\gamma \zeta} (\cos \gamma \zeta + \sin \gamma \zeta)) + \vec{V}_0 (1 - e^{-\gamma \zeta} (\cos \gamma \zeta + \sin \gamma \zeta)) \right\} \quad (\text{IV},66)$$

où $\gamma = (2\nu_0)^{-1/2}$.

Par passage à la limite sur ζ dans cette dernière relation on obtient pour la valeur limite prise par \hat{w}_1 :

$$\hat{w}_1^\infty = \left(\frac{\nu_0}{2}\right)^{1/2} \vec{D}_0 \cdot (\vec{k} \wedge (\vec{v}_{010} - \vec{V}_0) + \vec{V}_0) \quad (\text{IV},67)$$

avec $\hat{w}_1^\infty = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} (\hat{w}_1)$.

La détermination de \vec{V}_0 doit donc fournir, à l'aide de cette relation, la bonne condition à la frontière, pour $\zeta = 0$, à associer à l'équation quasi-géostrophique, puisque le raccord avec la région I conduit à la relation

$$\hat{w}_1^\infty = \bar{w}_{110}. \quad (\text{IV},68)$$

Comme il a été dit au Chapitre II un formalisme identique à celui que l'on a développé pour l'océan permet d'obtenir l'expression de la vitesse atmosphérique dans la couche limite d'Ekman se situant au voisinage de l'interface (avec $z > 0$ pour être du côté atmosphérique).

Dans cette couche limite la vitesse horizontale, \vec{v}_0^a (où l'indice "a" désigne l'atmosphère), s'exprime sous la forme

$$\vec{v}_0^a = \vec{v}_{010}^a + e^{-\gamma^a z^a} \left(\vec{k} \wedge (\vec{v}_{010}^a - \vec{v}_0) \sin \gamma^a z^a - (\vec{v}_{010}^a - \vec{v}_0) \cos \gamma^a z^a \right) \quad (\text{IV},69)$$

où $\gamma^a = (2\nu_0^a)^{-1/2}$ avec $\nu_0^a = \hat{E}_\perp^a / \bar{\rho}_{010}^a$,

et $z^a = z / R_0^a$, R_0^a désignant le nombre de Rossby atmosphérique défini par $R_0^a = U^a / l_0 L_0$ (*).

La condition de transmission (a) (I,37) conduit au résultat suivant (à l'ordre $R_0^0 = (R_0^a)^0 = 1$):

$$z = z^a = 0, \quad \mu \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial z} + \mu^a \frac{\partial \vec{v}_0^a}{\partial z^a} = \vec{0}. \quad (\text{IV},70)$$

Soit encore, en utilisant (IV,65) et (IV,69) :

$$\begin{aligned} & \mu \cdot (\bar{\rho}_{010})^{1/2} \left\{ (\vec{v}_{010} - \vec{v}_0) + \vec{k} \wedge (\vec{v}_{010} - \vec{v}_0) \right\} \\ & + \mu^a \cdot (\bar{\rho}_{010}^a)^{1/2} \left\{ (\vec{v}_{010}^a - \vec{v}_0) + \vec{k} \wedge (\vec{v}_{010}^a - \vec{v}_0) \right\} = \vec{0}, \end{aligned}$$

(*) Les variables d'espace ont été adimensionnalisées à l'aide des mêmes longueurs caractéristiques.

d'où $\vec{V}_0(x, y, t)$.

$$\vec{V}_0 = \frac{\mu(\bar{\rho}_{010})^{1/2} \vec{v}_{010} + \mu^a(\bar{\rho}_{010}^a)^{1/2} \vec{v}_{010}^a}{\mu(\bar{\rho}_{010})^{1/2} + \mu^a(\bar{\rho}_{010}^a)^{1/2}}. \quad (\text{IV},71)$$

IV.4.- LE PROBLEME D'EVOLUTION QUASI-GEOSTROPHIQUE

Dans l'équation (IV,71) qui donne l'expression de \vec{V}_0 on a :

$$\vec{v}_{010} = (\omega_0 \bar{\rho}_{010})^{-1} \vec{k} \wedge \vec{D} \bar{f}_{110}$$

et

$$\vec{v}_{010}^a = (\omega_0^a \bar{\rho}_{010}^a)^{-1} \vec{k} \wedge \vec{D} \bar{f}_{110}^a$$

où $\omega_0 = M_0^2 / R_0^2$ et $\omega_0^a = (M_0^a / R_0^a)^2$ sont supposés être de l'ordre de l'unité (voir à ce sujet le passage à la limite (II; 2)).

La relation (IV,67) prend alors la forme suivante lorsque l'on utilise l'expression de \vec{V}_0 donnée par (IV,71) et la remarque ci-dessus :

$$\Delta w_1^\infty = \left(\frac{\nu_0}{2}\right)^{1/2} \Gamma_{010} \vec{D}^2 \left((\omega_0 \bar{\rho}_{010})^{-1} \bar{f}_{110} - (\omega_0^a \bar{\rho}_{010}^a)^{-1} \bar{f}_{110}^a \right).$$

Par conséquent on obtient pour \bar{f}_{110} , d'après (IV,68) et (IV,8), la condition suivante :

$$z=0, \quad S \frac{D_0}{Dt} \left(\frac{\partial}{\partial z} \bar{f}_1 \right) = B_0 \left(\frac{\nu_0}{2}\right)^{1/2} \Gamma_0 \frac{d \bar{\rho}_0}{dz} \vec{D}^2 \left((\omega_0 \bar{\rho}_0)^{-1} \bar{f}_1 - (\omega_0^a \bar{\rho}_0^a)^{-1} \bar{f}_1^a \right) \quad (\text{IV},72)$$

$$\text{où } \Gamma_0(z) = -1 + \mu \sqrt{\bar{\rho}_0} / (\mu \sqrt{\bar{\rho}_0} + \mu^a \sqrt{\bar{\rho}_0^a})$$

on a $|\Gamma_0| \ll 1 \quad \forall z \in [-1, 0]$.

En conclusion de l'analyse effectuée tout au long du chapitre IV on peut formuler pour la perturbation de pression $\bar{p}_1(x, y, z, t)$ le problème d'évolution suivant :

$$S \frac{D_0}{Dt} (\wedge \bar{p}_1 + \bar{\rho}_0(z) \beta y) = 0 ;$$

$$t = 0, \wedge \bar{p}_1 = \bar{\rho}_0 \vec{k} \cdot \vec{D} \wedge \vec{v}^0 + \frac{1}{B_0} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho}_0 K_0 \frac{\partial}{\partial z} (\frac{\bar{p}_1^0}{\bar{\rho}_0})) ;$$

$$S \frac{D_0}{Dt} (\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial z}) = \begin{cases} B_0 \Gamma_0 \chi_0 \vec{D}^2 ((\omega_0 \bar{\rho}_0)^{-1} \bar{p}_1 - (\omega_0^a \bar{\rho}_0^a) \bar{p}_1^a), & \text{sur } z = 0, \\ B_0 \chi_0 \vec{D}^2 ((\omega_0 \bar{\rho}_0)^{-1} \bar{p}_1), & \text{sur } z = -1. \end{cases}$$

(IV, 73)

où on a :

$$S \frac{D_0}{Dt} = S \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{D}, \quad \vec{v}_0 = (\omega_0 \bar{\rho}_0)^{-1} \vec{k} \wedge \vec{D} \bar{p}_1$$

et

$$\wedge = \omega_0^{-1} \vec{D}^2 + B_0^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial z} (K_0 \frac{\partial}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad K_0(z) = -\bar{\rho}_0 / \frac{d\bar{\rho}_0}{dz},$$

tandis que :

$$\chi_0(z) = \left(\hat{E}_1 / 2\bar{\rho}_0 \right)^{1/2} \frac{d\bar{\rho}_0}{dz}.$$

Les conditions aux frontières en $z = 0$ et $z = -1$ faisant intervenir un terme en $S \partial / \partial t$ il convient d'associer à ces dernières une condition

initiale; celle-ci est fournie par les conditions de compatibilité (IV,37) :

$$t=0, \quad \frac{\partial \bar{\tau}_1}{\partial z} = \frac{\partial \tau_1^0}{\partial z} \quad \text{pour } z=-1 \text{ et } z=0 \quad (\text{IV},74)$$

lorsque la donnée initiale se décompose et

$$t=0, \quad \frac{\partial \bar{\tau}_1}{\partial z} = 0 \quad \text{pour } z=-1 \text{ et } z=0$$

lorsque la donnée initiale ne se décompose pas en puissance de R_0 .

IV.5.- STRUCTURE VERTICALE DE L'ÉCOULEMENT QUASI-GEOSTROPHIQUE

On considère un écoulement de base ayant une vitesse constante purement zonale (dirigée le long des cercles de latitude)

$$\vec{u} = (U, 0, 0)$$

et on a linéarisé, autour de cet état de référence, l'équation du modèle quasi-géostrophique ainsi que les conditions aux frontières qui s'y rapportent (voir (IV,73)).

On note Ψ la perturbation de pression correspondante; on obtient alors, en notant α le petit paramètre de linéarisation (α est le paramètre défini au § I.5), les équations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} (S \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}) \left(\frac{1}{\omega_0} \bar{D}^2 \Psi + \frac{1}{B_0} \mathcal{L} \Psi \right) + \frac{\beta}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial x} \Psi + O(\alpha) &= 0; \\ (S \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}) \frac{\partial \Psi}{\partial z} &= \begin{cases} B_0 \Gamma_0 \chi_0 \frac{1}{\omega_0} \bar{D}^2 \left(\frac{\Psi}{\bar{\rho}_0} \right) + O(\alpha), & z = 0; \\ B_0 \chi_0 \frac{1}{\omega_0} \bar{D}^2 \left(\frac{\Psi}{\bar{\rho}_0} \right) + O(\alpha), & z = -1, \end{cases} \end{aligned} \right\} \text{(IV,75)}$$

où

$$\mathcal{L} \Psi = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\bar{\rho}_0}{\sigma(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Psi}{\bar{\rho}_0} \right) \right), \quad \sigma(z) = -\frac{1}{\bar{\rho}_0} \frac{d}{dz} \bar{\rho}_0$$

et

$$\chi_0(z) = (\hat{E}_1 / 2 \bar{\rho}_0)^{1/2} \frac{d \bar{\rho}_0}{dz},$$

tandis que Γ_0 est donné en (IV,72).

On a fait de plus, l'hypothèse que les perturbations de pressions atmosphériques sont $O(\alpha^2)$.

Les solutions sont recherchées sous la forme classique

$$\Psi(x, y, z, t) = \text{Re} \left\{ \hat{\Psi}(z) \exp(i(kx + ly - \frac{\nu}{S} t)) \right\} \quad \text{(IV,76)}$$

et à l'aide du changement d'inconnue

$$\hat{\Psi}(z) = \bar{\rho}_0(z) \varphi(z)$$

on obtient pour (IV,75) le système équivalent suivant :

$$\frac{1}{\bar{P}_0} \frac{d}{dz} \left(\frac{\bar{P}_0}{\sigma} \frac{d\varphi}{dz} \right) + \frac{B_0}{\omega_0} \left(R^2 + \ell^2 + \frac{\beta R}{RU - \nu} \right) \varphi = 0 ;$$

$$-i(\nu - RU) \left(\frac{d\varphi}{dz} - \sigma(z) \varphi \right) = \begin{cases} \frac{B_0 \Gamma_0 (R^2 + \ell^2) (\hat{E}_L / 2 \bar{P}_0(z))^{1/2} \sigma(z) \varphi, & z=0; \\ \frac{B_0 (R^2 + \ell^2) (\hat{E}_L / 2 \bar{P}_0(z))^{1/2} \sigma(z) \varphi, & z=-1, \end{cases} \quad \text{(IV,77)}$$

où l'on ne note plus Re .

L'étude directe du problème (IV,77) est une question difficile; dans un premier temps on considère le cas

$$\sigma(z) = -\frac{1}{\bar{P}_0} \frac{d\bar{P}_0}{dz} \equiv \sigma_0, \text{ constante } \in \mathbb{R}_+^*.$$

Dans ces conditions l'équation vérifiée par φ devient linéaire à coefficients constants et son intégration ne pose plus de problèmes. On obtient pour φ l'expression suivante :

$$\varphi = a e^{\Delta_1 z} + b e^{\Delta_2 z}$$

(IV,78)

où $2\Delta_1 = \sigma_0 - \Delta^{1/2}$, $2\Delta_2 = \sigma_0 + \Delta^{1/2}$ et

$$\Delta = \sigma_0^2 - 4\sigma_0 \frac{B_0}{\omega_0} (R^2 + \ell^2 + \beta R / (RU - \nu)).$$

Les constantes a et b restent à déterminer à l'aide des conditions en $z=0$ et $z=-1$. Celles-ci s'écrivent :

$$\begin{aligned}
& a \{ (-i\nu + ikU)(\rho_1 - \sigma_{00}) - B_0 \Gamma_0 (k^2 + \ell^2) \sigma_{00} (\hat{E}_1/2)^{1/2} / \omega_0 \} \\
& + b \{ (-i\nu + ikU)(\rho_2 - \sigma_{00}) - B_0 \Gamma_0 (k^2 + \ell^2) \sigma_{00} (\hat{E}_1/2)^{1/2} / \omega_0 \} = 0; \\
& a \{ (-i\nu + ikU)(\rho_1 - \sigma_{00}) e^{-\Delta_1} - B_0 \Gamma_0 (k^2 + \ell^2) \sigma_{00} (\hat{E}_1/2)^{1/2} e^{-\Delta_1 - \frac{1}{2}\sigma_{00}} / \omega_0 \} \\
& + b \{ (-i\nu + ikU)(\rho_2 - \sigma_{00}) e^{-\Delta_2} - B_0 \Gamma_0 (k^2 + \ell^2) \sigma_{00} (\hat{E}_1/2)^{1/2} e^{-\Delta_2 - \frac{1}{2}\sigma_{00}} / \omega_0 \} = 0.
\end{aligned}
\tag{IV,79}$$

Ce qui conduit à la relation de dispersion suivante :

$$\begin{aligned}
& B_0 \omega_0^{-2} \sigma_{00}^2 (k^2 + \ell^2)^2 \Gamma_0 \hat{E}_1 e^{\frac{1}{2}\sigma_{00}} (e^{-\Delta_2} e^{-\Delta_1}) \\
& + B_0 \omega_0^{-1} \sigma_{00}^2 (k^2 + \ell^2) (\hat{E}_1/2)^{1/2} (i\nu - ikU) (e^{-\Delta_1} (\Gamma_0 + e^{-\frac{1}{2}\sigma_{00}}) \\
& - e^{-\Delta_2} (\Gamma_0 + e^{-\frac{1}{2}\sigma_{00}})) - \frac{1}{2} (\nu - kU)^2 \sigma_{00}^2 (e^{-\Delta_2} - e^{-\Delta_1}) \\
& + \Delta^{1/2} \sigma_{00} (i\nu - ikU) B_0 \omega_0^{-1} (k^2 + \ell^2) (\hat{E}_1/2)^{1/2} \{ e^{-\Delta_2} (\Gamma_0 - e^{-\frac{1}{2}\sigma_{00}}) \\
& + e^{-\Delta_1} (\Gamma_0 - e^{-\frac{1}{2}\sigma_{00}}) \} + \frac{1}{2} \Delta (\nu - kU)^2 (e^{-\Delta_2} - e^{-\Delta_1}) = 0.
\end{aligned}
\tag{IV,80}$$

Le paramètre σ_{00} est habituellement nommé fréquence de BRUNT-VÄISÄLÄ et on a toujours (on pourra consulter V.M.-KAMENKOVICH à ce sujet) :

$$\sigma_{00} \ll 1
\tag{IV,81}$$

Dans la référence citée on donne :

$$10^{-8} \leq \sigma_{00} \leq 10^{-4}.$$

On tire profit de la petitesse du paramètre σ_{00} pour approximer la relation de dispersion (IV,80) par la suivante :

$$A\nu^4 + B\nu^3 + C\nu^2 + D\nu + E = 0 \quad (\text{IV},82)$$

où

$$A = 2\sigma_{00}(1 - 4B_0/3\omega_0)(k^2 + l^2)B_0/\omega_0 ;$$

$$B = -4kU.A + \sigma_{00}B_0(2\beta k(8B_0(k^2 + l^2)/3\omega_0 - 1) + i(k^2 + l^2)(\hat{E}_1/2)^{1/2}(\Gamma_0 + 2 - 2(\Gamma_0 - 1)(k^2 + l^2)B_0/\omega_0))/\omega_0 ;$$

$$\begin{aligned} C = & -B_0(k^2 + l^2)(B_0(k^2 + l^2)\Gamma_0\hat{E}_1/\omega_0 + ikU(\hat{E}_1/2)^{1/2}(\Gamma_0 + 2 \\ & - 2(\Gamma_0 - 1)B_0(k^2 + l^2)/\omega_0) + 8k^2U^2B_0(k^2 + l^2)/3\omega_0)\sigma_{00}/\omega_0 \\ & + 2kUB_0(k^2 + l^2)(k^2U - i(\Gamma_0 - 1)(\hat{E}_1/2)^{1/2})/\omega_0 \\ & + 4kUB_0\beta k(1 - 8\sigma_{00}B_0(k^2 + l^2)/3\omega_0)/\omega_0 \\ & - 2kU\sigma_{00}B_0(i(k^2 + l^2)(\hat{E}_1/2)^{1/2}(\Gamma_0 + 2 - 2(\Gamma_0 - 1)B_0(k^2 + l^2)/\omega_0) \\ & - 8B_0\beta^2k^2/3\omega_0)/\omega_0 + 5k^2U^2B_0(k^2 + l^2)(2 - 8\sigma_{00}B_0/3\omega_0)/\omega_0 \\ & - 8B_0^2\beta^2k^2\sigma_{00}/3\omega_0^2 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D = & 2kU B_0(k^2+l^2) \left(B_0(k^2+l^2) \Gamma_0 \hat{E}_1 / \omega_0 + ikU (\hat{E}_1/2)^{1/2} (\Gamma_0 + 2 \right. \\
& - 2(\Gamma_0 - 1) B_0(k^2+l^2) / \omega_0) + 8k^2 U^2 B_0(k^2+l^2) / (3\omega_0) \sigma_{00} / \omega_0 \\
& - 4k^2 U^2 B_0(k^2+l^2) (kU - i(\Gamma_0 - 1) (\hat{E}_1/2)^{1/2}) / \omega_0 - 2k^3 U^3 (1 - \\
& 4\sigma_{00} B_0 / 3\omega_0) 2 B_0(k^2+l^2) / \omega_0 - 2k^2 U^2 B_0 \beta k (1 - 8\sigma_{00} B_0(k^2+l^2) / 3\omega_0) / \omega_0 \\
& + ik^2 U^2 B_0(k^2+l^2) (\hat{E}_1/2)^{1/2} (\Gamma_0 + 2 - 2(\Gamma_0 - 1) B_0(k^2+l^2) / \omega_0) \sigma_{00} / \omega_0 \\
& - 2\beta k B_0^2(k^2+l^2) (i(\Gamma_0 - 1)(kU - 1) - 8k^2 U^2 / 3) \sigma_{00} / \omega_0^2 \\
& - 2k^2 U^2 \beta k B_0 / \omega_0 + 8k^3 U \beta^2 B_0^2 \sigma_{00} / \omega_0^2 ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E = & -k^2 U^2 B_0(k^2+l^2) (B_0 \Gamma_0 \hat{E}_1 (k^2+l^2) / \omega_0 + ikU (\hat{E}_1/2)^{1/2} (\Gamma_0 + 2 \\
& - 2(\Gamma_0 - 1) B_0(k^2+l^2) / \omega_0) + 8k^2 U^2 B_0(k^2+l^2) / (3\omega_0) \sigma_{00} / \omega_0 \\
& + 2k^3 U^3 B_0(k^2+l^2) (kU - i(\Gamma_0 - 1) (\hat{E}_1/2)^{1/2}) / \omega_0 \\
& - 8k^2 U^2 B_0^2 \beta^2 k^2 \sigma_{00} / 3\omega_0^2 .
\end{aligned}$$

Au niveau du système (IV,77) deux échelles verticales, z et $\sigma_{00} z$, émergent : une technique en double échelle, qui sera mise en place dans un travail ultérieur, devrait donc donner de bons résultats dans l'étude du système différentiel (IV,77).

V. LE MODELE AGEOSTROPHIQUE.

Ce que nous avons appelé "écoulement quasi-géostrophique" est donc maintenant clairement défini : le problème (IV,73), avec ses conditions aux frontières et initiales, en est l'expression mathématique.

D'une façon analogue nous définissons l'écoulement agéostrophique par l'étude du terme $\bar{\tau}_2$ de la pression; la formulation d'un problème semblable à (IV,73) pour $\bar{\tau}_2$ précisera cette définition. Dans un premier paragraphe nous établissons l'équation dite agéostrophique; l'étude des conditions aux frontières et initiales associées à cette équation est faite dans les paragraphes qui suivent. La démarche suivie ici s'inspire de celle de GUIRAUD et ZEYTOUNIAN et on peut à ce sujet consulter les Notes de GUIRAUD (Udine, 1983; Bibliothèque de l'Université de Paris VI).

V.1.- L'EQUATION AGEOSTROPHIQUE

Notre point de départ est l'ensemble des équations suivantes, obtenues à partir de (II,5) :

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \bar{p}_0 \left(S \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{D} \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \cdot \vec{D} \vec{v}_0 + \bar{w}_1 \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial z} + \vec{k} \wedge \vec{v}_2 \right. \\
 & \left. + \beta \gamma \vec{k} \wedge \vec{v}_1 \right) + \bar{p}_1 \left(S \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{D} \vec{v}_0 + \vec{k} \wedge \vec{v}_1 \right. \\
 & \left. + \beta \gamma \vec{k} \wedge \vec{v}_0 \right) + \frac{1}{\omega_0} \vec{D} \bar{f}_3 = \hat{E}_1 \frac{\partial^2 \vec{v}_0}{\partial z^2} ; \\
 \text{(b)} \quad & \vec{D} \cdot \vec{v}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \bar{w}_2 = 0 ; \\
 \text{(c)} \quad & \frac{\partial}{\partial z} \bar{f}_2 + B_0 \cdot \bar{p}_2 = 0 ; \\
 \text{(d)} \quad & S \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{D} \bar{p}_2 + \vec{v}_1 \cdot \vec{D} \bar{p}_1 + \bar{w}_1 \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial z} + \bar{w}_2 \frac{d}{dz} \bar{p}_0 = 0 ;
 \end{aligned}
 \tag{V,1}$$

où l'on a, d'après les résultats du chapitre IV :

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \vec{v}_0 = (\omega_0 \bar{p}_0)^{-1} \vec{k} \wedge \vec{D} \bar{f}_1 ; \\
 \text{(b)} \quad & \bar{p}_0 \vec{v}_1 = \omega_0^{-1} \vec{k} \wedge \vec{D} \bar{f}_2 - \omega_0^{-1} S \frac{D_0}{Dt} (\vec{D} \bar{f}_1) - \bar{p}_0 \beta \gamma \vec{v}_0 - \bar{p}_1 \vec{v}_0 ; \\
 \text{(c)} \quad & \frac{d \bar{p}_0}{dz} \cdot \bar{w}_1 = B_0^{-1} S \frac{D_0}{Dt} \left(\frac{\partial}{\partial z} \bar{f}_1 \right) ;
 \end{aligned}$$

$$(a) \quad \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial z} + B_0 \cdot \vec{e}_1 = 0 . \quad (V,2)$$

Il est facile d'obtenir \vec{v}_2 à partir de l'équation (a) du système (V,1) :

$$\begin{aligned} \vec{e}_0 \vec{v}_2 = & \omega_0^{-1} \vec{k} \wedge \vec{D} \vec{r}_3 - \hat{E}_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\vec{k} \wedge \vec{v}_0) + \vec{e}_0 \frac{S D_0}{Dt} (\vec{k} \wedge \vec{v}_1) \\ & + \vec{e}_0 \vec{k} \wedge (\vec{v}_1 \cdot \vec{D} \vec{v}_0) + \vec{e}_0 \vec{w}_1 \frac{\partial}{\partial z} (\vec{k} \wedge \vec{v}_0) - \vec{e}_0 \beta_y \vec{v}_1 \\ & + \vec{e}_1 \frac{S D_0}{Dt} (\vec{k} \wedge \vec{v}_0) - \vec{e}_1 \vec{v}_1 - \vec{e}_1 \beta_y \vec{v}_0 \end{aligned} \quad (V,3)$$

et en développant les calculs on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{e}_0 \vec{v}_2 = & \omega_0^{-1} \vec{k} \wedge \vec{D} \vec{r}_3 - \omega_0^{-1} S \frac{D_0}{Dt} (\vec{D} \vec{r}_2) - \omega_0^{-1} \beta_y \vec{k} \wedge \vec{D} \vec{r}_2 \\ & - (\omega_0^2 \vec{e}_0)^{-1} (\vec{k} \wedge \vec{D} \vec{r}_2 \cdot \vec{D}) \vec{D} \vec{r}_1 - (\omega_0 \vec{e}_0)^{-1} \vec{e}_1 \vec{k} \wedge \vec{D} \vec{r}_2 \\ & + \vec{A}(\vec{r}_1) , \end{aligned} \quad (V,4)$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{A} = & -\omega_0^{-1} \vec{k} \wedge (S \frac{D_0}{Dt})^2 \vec{D} \vec{r}_1 + (\omega_0^2 \vec{e}_0)^{-1} (S \frac{D_0}{Dt} (\vec{D} \vec{r}_1) \cdot \vec{D}) \vec{D} \vec{r}_1 \\ & - (\omega_0 \frac{d\vec{e}_0}{dz})^{-1} \vec{e}_0 \frac{S D_0}{B_0 Dt} (\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial z}) \frac{\partial}{\partial z} (\vec{e}_0^{-1} \vec{D} \vec{r}_1) + \omega_0^{-1} \hat{E}_1 \vec{D} (\frac{\partial^2 \vec{e}_0^{-1}}{\partial z^2} \vec{r}_1) \\ & + (\omega_0 \vec{e}_0)^{-2} \vec{e}_1 (\vec{k} \wedge \vec{D} \vec{r}_1 \cdot \vec{D}) \vec{D} \vec{r}_1 + (\omega_0 \vec{e}_0)^{-1} \vec{e}_1 S \frac{D_0}{Dt} (\vec{D} \vec{r}_1) \\ & + (\omega_0 \vec{e}_0)^{-2} \vec{e}_1^2 \vec{k} \wedge \vec{D} \vec{r}_1 + \omega_0^{-1} \beta_y \vec{B}(\vec{r}_1) , \end{aligned} \quad (V,5)$$

avec

$$\vec{B} = (\omega_0 \bar{\rho}_0 \gamma)^{-1} \frac{\partial \bar{t}_1}{\partial x} \vec{D} \bar{t}_1 + (\omega_0 \bar{\rho}_0)^{-1} (\vec{k} \wedge \vec{D} \bar{t}_1 \cdot \vec{D}) \vec{D} \bar{t}_1 + \beta \gamma \vec{k} \wedge \vec{D} \bar{t}_1 + 2S \frac{D_0}{Dt} (\vec{D} \bar{t}_1) + \bar{\rho}_0^{-1} \bar{e}_1 \vec{k} \wedge \vec{D} \bar{t}_1. \quad (V,6)$$

Maintenant, de l'équation (d) du système (V,1) on tire l'expression de \bar{w}_2 , une fois que l'on tient compte des équations du système (V,2) et de l'équation (c) de (V,1) :

$$\bar{w}_2 \frac{d\bar{\rho}_0}{dz} = B_0^{-1} S \frac{D_0}{Dt} \left(\frac{\partial \bar{t}_2}{\partial z} \right) + (\omega_0 B_0 \bar{\rho}_0)^{-1} \vec{k} \wedge \vec{D} \bar{t}_1 \cdot \vec{D} \left(\frac{\partial \bar{t}_1}{\partial z} \right) + C(\bar{t}_1) \quad (V,7)$$

où

$$C = (B_0^2 \frac{d\bar{\rho}_0}{dz})^{-1} S \frac{D_0}{Dt} \left(\frac{\partial \bar{t}_1}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 \bar{t}_1}{\partial z^2} - (\omega_0 B_0 \bar{\rho}_0)^{-1} \beta \gamma \vec{k} \wedge \vec{D} \bar{t}_1 \cdot \vec{D} \left(\frac{\partial \bar{t}_1}{\partial z} \right) - (\omega_0 B_0 \bar{\rho}_0^2)^{-1} \bar{e}_1 \vec{k} \wedge \vec{D} \bar{t}_1 \cdot \vec{D} \left(\frac{\partial \bar{t}_1}{\partial z} \right) - (\omega_0 B_0 \bar{\rho}_0)^{-1} S \frac{D_0}{Dt} (\vec{D} \bar{t}_1) \cdot \vec{D} \left(\frac{\partial \bar{t}_1}{\partial z} \right). \quad (V,8)$$

Il nous reste à tirer profit de l'équation (b) de (V,1) pour obtenir l'équation recherchée pour \bar{t}_2 :

$$\begin{aligned}
& S \frac{D_0}{Dt} (\nabla \bar{T}_2) + \omega_0^{-1} \beta \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial x} + (\omega_0 \bar{\rho}_0)^{-1} \vec{k} \wedge \vec{D} \bar{T}_2 \cdot \vec{D} \bar{T}_1 \\
& + (\omega_0 B_0 \bar{\rho}_0)^{-1} (\vec{k} \wedge \vec{D} \bar{T}_1 \cdot \vec{D} (\frac{\partial \bar{T}_2}{\partial z}) + \vec{k} \wedge \vec{D} \bar{T}_2 \cdot \vec{D} (\frac{\partial \bar{T}_1}{\partial z})) \\
& = \vec{D} \cdot \vec{A} + \bar{\rho}_0(z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{C}{\frac{d\bar{\rho}_0}{dz}} \right), \quad (V,9)
\end{aligned}$$

où le second membre n'est fonction que de \bar{T}_1 , c'est-à-dire uniquement de la solution quasi-géostrophique.

V.2.- LA COUCHE LIMITE D'EKMAN INSTATIONNAIRE

V.2.1.- Le voisinage du fond

On considère maintenant la région IV qui est associée au passage à la limite suivant :

$$\{ R_0 \ll 1, \text{ avec } \hat{E}_1, \omega_0, x, y, \zeta = (z+1)/R_0, \tilde{E} = t/SR_0 \text{ fixés} \}. \quad (V,10)$$

Cette région est doublement locale; nous notons, par exemple, \vec{v} la vitesse horizontale considérée non plus comme fonction de x, y, z et t mais de $x, y, \zeta = (z+1)/R_0$ et $\tilde{E} = t/SR_0$.

Les équations correspondant à cette région IV sont alors les suivantes :

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \check{p} \left(\frac{\partial \check{v}}{\partial t} + R_0 \check{v} \cdot \vec{D} \check{v} + \check{w} \frac{\partial \check{v}}{\partial s} + (1 + R_0 \beta y) \vec{k} \wedge \check{v} \right) \\
 & = -\frac{1}{\omega_0 R_0} \vec{D} \check{t} + \hat{E}_\perp \frac{\partial^2 \check{v}}{\partial s^2}; \\
 (b) \quad & \frac{\partial \check{t}}{\partial s} + R_0 \beta_0 \check{p} = 0; \\
 (c) \quad & R_0 \vec{D} \cdot \check{v} + \frac{\partial \check{w}}{\partial s} = 0; \\
 (d) \quad & \frac{\partial \check{p}}{\partial t} + \check{w} \frac{\partial \check{p}}{\partial s} + R_0 \check{v} \cdot \vec{D} \check{p} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{V,11}$$

Conjointement à (V,10) nous définissons le développement local suivant :

$$\begin{pmatrix} \check{v} \\ \check{w} \\ \check{t} \\ \check{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \check{v}_0 \\ \check{w}_0 \\ \check{t}_0 \\ \check{p}_0 \end{pmatrix} + R_0 \begin{pmatrix} \check{v}_1 \\ \check{w}_1 \\ \check{t}_1 \\ \check{p}_1 \end{pmatrix} + \dots \tag{V,12}$$

Le passage à la limite local (V,10) dans le système (V,11) conduit, à l'ordre R_0^0 de (V,12), aux équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \vec{D} \check{t}_0 = \vec{0}; \quad \frac{\partial \check{t}_0}{\partial s} = 0; \\
 (b) \quad & \frac{\partial \check{w}_0}{\partial s} = 0; \\
 (c) \quad & \frac{\partial \check{p}_0}{\partial t} + \check{w}_0 \frac{\partial \check{p}_0}{\partial s} = 0; \\
 (d) \quad & \check{p}_0 \left(\frac{\partial \check{v}_0}{\partial t} + \check{w}_0 \frac{\partial \check{v}_0}{\partial s} + \vec{k} \wedge \check{v}_0 \right) + \frac{1}{\omega_0} \vec{D} \check{t}_1 = \hat{E}_\perp \frac{\partial^2 \check{v}_0}{\partial s^2}.
 \end{aligned}
 \tag{V,13}$$

Les conditions aux limites associées à (V,11) sont les suivantes :

$$\begin{aligned} t=0, \quad \vec{v} &= \vec{v}^0, & \gamma &= \gamma^0, \\ \zeta=0, \quad \vec{v} &= \vec{0}, & \vec{w} &= 0. \end{aligned} \quad (V,14)$$

Il vient donc pour \vec{v}_0 , \vec{w}_0 et γ_0 :

$$\begin{aligned} t=0, \quad \vec{v}_0 &= \vec{v}^0, & \gamma_0 &= \gamma^0, \\ \zeta=0, \quad \vec{v}_0 &= \vec{0}, & \vec{w}_0 &= 0. \end{aligned} \quad (V,15)$$

En examinant dans un ordre adéquat les équations (V,13) auxquelles sont associées les conditions (V,15) on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{w}_0 &= 0, \\ \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} \vec{p}_0 &= 0. \end{aligned} \quad (V,16)$$

Le raccord de \vec{p}_0 et \hat{p}_0 conduit alors au résultat suivant

$$\vec{p}_0 = \bar{p}_{0l-1}. \quad (V,17)$$

De même, le raccord à l'ordre R_0^0 des régions IV et II conduit, pour la pression, au résultat suivant :

$$\gamma_0 = \bar{\gamma}_{0l-1}. \quad (V,18)$$

L'équation (d) du système (V,13) fait intervenir le terme $\vec{D} \gamma_1$; on détermine la pression γ_1 en effectuant le raccord, à l'ordre R_0 , de la pression γ (région IV) avec la pression $\tilde{\gamma}$ (région II). La règle de raccord que nous utilisons s'énonce ainsi :

Il doit y avoir égalité entre le développement (formel) en série de Taylor de $\tilde{\tau}$ au voisinage de $z = -1$, tronqué à l'ordre R_0^2 et réécrit en variable ζ , avec la limite, lorsque $\zeta \rightarrow +\infty$, du développement d'ordre R_0 de $\tilde{\tau}$.

Cela conduit à écrire pour $\tilde{\tau}_1$ le comportement suivant :

$$\tilde{\tau}_1 = \zeta \frac{d}{d\zeta} \bar{\tau}_{0|-1} + \tilde{\tau}_{1|-1} + \tilde{\tau}'_1$$

où la fonction $\tilde{\tau}'_1$ tend vers zéro avec $1/\zeta$.

Pour déterminer $\tilde{\tau}'_1$ on écrit, à l'ordre R_0 que l'on a (c'est la relation (b) de (V,11).

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \tilde{\tau}_1 + B_0 \cdot \bar{\tau}_{0|-1} = 0$$

et en remplaçant $\tilde{\tau}_1$ dans cette équation par sa valeur trouvée ci-dessus on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \tilde{\tau}'_1 = 0,$$

ce qui, associé à la condition $\lim_{\zeta \rightarrow +\infty} (\tilde{\tau}'_1) = 0$, entraîne

$$\tilde{\tau}'_1 = 0.$$

Finalement on obtient pour $\tilde{\tau}_1$:

$$\tilde{\tau}_1 = \zeta \frac{d}{d\zeta} \bar{\tau}_{0|-1} + \tilde{\tau}_{1|-1}. \quad (\text{V,19})$$

L'équation (d) de (V,13) devient alors, en utilisant les résultats (V,16), (V,17) et (V,19) ainsi que la condition (V,15), et en posant

$$\tilde{v}_0 = \tilde{v}_{0|-1} + \tilde{v}'_0, \quad ,$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \vec{v}'_0}{\partial \xi} + \vec{k} \wedge \vec{v}'_0 &= \tau_0 \frac{\partial^2 \vec{v}'_0}{\partial \zeta^2} ; \\
 \tilde{E} = 0, \quad \vec{v}'_0 &= \vec{v}^0 - \vec{v}_{1-1}^0 ; \\
 \zeta = 0, \quad \vec{v}'_0 &= -\vec{v}_{0|1-1}^0 ; \\
 \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} (\vec{v}'_0) &= \vec{0} ,
 \end{aligned} \right\} \quad (V,20)$$

où $\tau_0 = \hat{E}_\perp / \bar{\rho}_{0|1-1}$ et $\vec{v}_{1-1}^0 = \vec{v}^0(x, y, z)$ en $z = -1$.

Il faut noter que pour obtenir ce problème qui est celui d'Ekman instationnaire nous avons utilisé la relation (a) de (IV,17) pour $z = -1$.

On pose $\vec{X}_0 = \vec{v}'_0 - i\vec{k} \wedge \vec{v}'_0$ dans (V,20) pour obtenir le problème équivalent suivant, où x et y jouent le rôle de paramètres :

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \vec{X}_0}{\partial \xi} + i \vec{X}_0 &= \tau_0 \frac{\partial^2 \vec{X}_0}{\partial \zeta^2} ; \\
 \tilde{E} = 0, \quad \vec{X}_0 &= \vec{X}_0^0 = \vec{v}^0 - \vec{v}_{1-1}^0 - i\vec{k} \wedge (\vec{v}^0 - \vec{v}_{1-1}^0) ; \\
 \zeta = 0, \quad \vec{X}_0 &= \vec{X}_0(\tilde{E}) = -\vec{v}_{0|1-1}^0 + i\vec{k} \wedge \vec{v}_{0|1-1}^0 ; \\
 \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} (\vec{X}_0) &= \vec{0} .
 \end{aligned} \right\} \quad (V,21)$$

Ce problème peut lui-même se mettre sous une forme simplifiée : si nous supposons l'existence de la transformée de Laplace, $\tilde{L}(p, \zeta)$, de $\vec{X}_0(\tilde{E}, \zeta)$ nous obtenons alors :

$$\left. \begin{aligned}
 (p+i) \vec{L}(p, \zeta) &= \tau_0 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \vec{L}(p, \zeta) + \vec{X}_0^v; \\
 \zeta=0, \quad \vec{L}(p, \zeta) &= \vec{L}_0(p); \\
 \lim_{\zeta \rightarrow \infty} (\vec{L}(p, \zeta)) &= \vec{0}.
 \end{aligned} \right\} \quad (V,22)$$

Nous sommes donc, en principe, capable de déterminer \vec{v}_0^v ; pour cela il faudra pouvoir avoir accès à la transformée inverse de $\vec{L}(p, \zeta)$. Nous ne traitons pas ce problème dont on trouvera une solution dans GREENSPAN (1968); rappelons que

$$L(p, \zeta) = \int_0^{+\infty} e^{-p\omega} \vec{X}_0^v(\omega, \zeta) d\omega, \quad p \in \mathbb{C}.$$

La question qui se pose maintenant est de savoir si la vitesse \vec{v}^v se raccorde avec la vitesse $\hat{\vec{v}}$ de la région locale III. A l'ordre 0 la condition de raccord entre les deux régions, pour les vitesses horizontales, se traduit par l'égalité

$$\lim_{\tilde{E} \rightarrow +\infty} (\vec{v}_0^v) = \lim_{\tilde{E} \rightarrow 0} (\hat{\vec{v}}_0). \quad (V,23)$$

Dans ce qui suit on montre que ce raccord a lieu et l'on dit alors qu'à l'ordre R_0^0 , il y a adaptation au modèle d'Ackerblom.

Si nous écrivons $\hat{\vec{v}}_0 = \bar{\vec{v}}_{0l-1} + \hat{\vec{v}}_0'$ et $\vec{v}_0^v = \bar{\vec{v}}_{0l-1} + \vec{v}_0^v'$,

la condition de raccord (V,23) devient :

$$\lim_{\tilde{E} \rightarrow \infty} (\vec{v}_0^v') - \lim_{\tilde{E} \rightarrow 0} (\hat{\vec{v}}_0') = \lim_{\tilde{E} \rightarrow 0} (\bar{\vec{v}}_{0l-1}) - \lim_{\tilde{E} \rightarrow \infty} (\bar{\vec{v}}_{0l-1}),$$

et le second membre de cette égalité est nul puisqu'il traduit le raccord, en

temps, de \bar{v}_0 avec \tilde{v}_0 sur $z = -1$. Le problème est ramené au suivant :
 pour qu'il y ait raccord, à l'ordre zéro, de \tilde{v}_0 et \hat{v}_0 il faut (et il suffit)
 que

$$\lim_{\tilde{t} \rightarrow \infty} (\tilde{v}_0') = \lim_{t \rightarrow 0} (\hat{v}_0'). \quad (V,24)$$

Montrons qu'il en est bien ainsi, et pour cela considérons

$$\tilde{v}_0'{}^\infty = \lim_{\tilde{t} \rightarrow \infty} (\tilde{v}_0').$$

Le problème d'Ekman instationnaire (V,20) montre que cette fonction
 satisfait le système aux limites suivant :

$$\left. \begin{aligned} k \wedge \tilde{v}_0'{}^\infty &= \tau_0 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \tilde{v}_0'{}^\infty; \\ \zeta = 0, \quad \tilde{v}_0'{}^\infty &= -\bar{v}_{0|-1}^0; \\ \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} (\tilde{v}_0'{}^\infty) &= \vec{0}, \end{aligned} \right\} \quad (V,25)$$

où $\bar{v}_{0|-1}^0 = \bar{v}_0$ au temps $t = 0$ et en $z = -1$; la condition pour
 $\zeta = 0$ provient du raccord, en temps, de $\tilde{v}_{0|-1}$ avec $\bar{v}_{0|-1}$.

Il faut noter la disparition du terme $\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \tilde{v}_0'$ lors du passage à la limite
 $\tilde{t} \rightarrow +\infty$ dans (V,20) : on a pour tout $\tilde{t} \in [0, +\infty[$

$$\tilde{v}_0'(x, y, \zeta, \tilde{t}+1) - \tilde{v}_0'(x, y, \zeta, \tilde{t}) = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \tilde{v}_0' \Big|_{\tilde{t} = \Theta_{\tilde{t}}}$$

avec

$$\tilde{E} < \theta_{\tilde{E}} < \tilde{E} + 1$$

par conséquent, la limite $\vec{v}'_0 \rightarrow \infty$ étant supposée finie,

$$\lim_{\tilde{E} \rightarrow +\infty} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \vec{v}'_0 \right) = \vec{0}.$$

Comparons maintenant (V,25) avec le problème aux limites, satisfait par $\hat{\vec{v}}'_0 = \lim_{t \rightarrow 0} (\vec{v}'_0)$, déduit du problème d'Ackerblom (IV,47).

$$\left. \begin{aligned} \vec{k} \wedge \hat{\vec{v}}'_0 &= \tau_0 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \hat{\vec{v}}'_0 ; \\ \zeta = 0, \quad \hat{\vec{v}}'_0 &= -\vec{v}'_{0|-1} ; \\ \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} (\hat{\vec{v}}'_0) &= \vec{0}. \end{aligned} \right\} \quad (V,26)$$

On constate que l'on a bien (unicité des solutions)

$$\hat{\vec{v}}'_0 = \vec{v}'_0 \rightarrow \infty$$

c'est-à-dire (V,24). Par conséquent, à l'ordre zéro, il y a adaptation au modèle d'Ackerblom.

V.2.2.- Le voisinage de l'interface

On considère la région locale VI associée aux variables locales

$$\tilde{E} = t/SR_0 \quad \text{et} \quad \zeta = -z/R_0 \quad \text{et à la limite locale suivante :}$$

$$\{ R_0 \downarrow 0, \text{ avec } \omega_0, \hat{E}_\perp, x, y, \Sigma, \tilde{E} \text{ fixés} \}.$$

En adoptant une démarche identique à celle que nous avons emprunté au paragraphe précédent (§ V.2.1) nous avons, dans la région doublement locale VI, pour les composantes de la vitesse, de la pression et de la masse volumique notées respectivement \vec{v} , w , \uparrow et ρ , le système suivant :

$$\left. \begin{aligned} \text{(a)} \quad & \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + R_0 \vec{v} \cdot \vec{D} \vec{v} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial \Sigma} + (1 + R_0 \beta y) \vec{k} \wedge \vec{v} \right) \\ & = - \frac{1}{\omega_0 R_0} \vec{D} \uparrow + \hat{E}_\perp \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial \Sigma^2}; \\ \text{(b)} \quad & \\ \text{(c)} \quad & \frac{\partial \uparrow}{\partial \Sigma} - R_0 B_0 \cdot \rho = 0; \\ & R_0 \vec{D} \cdot \vec{v} - \frac{\partial w}{\partial \Sigma} = 0; \\ \text{(d)} \quad & \frac{\partial \rho}{\partial t} - w \frac{\partial \rho}{\partial \Sigma} + R_0 \vec{v} \cdot \vec{D} \rho = 0; \\ \text{(e)} \quad & \tilde{E} = 0, \quad \vec{v} = \vec{v}^0, \quad \uparrow = \uparrow^0, \\ & \Sigma = 0, \quad \vec{v} = \vec{V}_0, \quad w = 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{V},27)$$

et si nous définissons, conjointement au passage à la limite local, le développement asymptotique local :

$$\begin{pmatrix} \vec{v} \\ w \\ \uparrow \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_0 \\ w_0 \\ \uparrow_0 \\ \rho_0 \end{pmatrix} + R_0 \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ w_1 \\ \uparrow_1 \\ \rho_1 \end{pmatrix} + \dots \quad (\text{V},28)$$

on obtient successivement les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \nabla \omega_0 &= 0; \\
 (b) \quad \nabla \tau_0 &= \bar{\tau}_{010}, \quad \nabla \bar{e}_0 = \bar{e}_{010}; \\
 (c) \quad \nabla \tau_1 &= -\zeta \frac{d}{dz} \bar{\tau}_{010} + \tilde{\tau}_{110};
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (a) \\ (b) \\ (c) \end{aligned}} \right\} \quad (V,29)$$

et en posant $\nabla \vec{v}_0 = \nabla \vec{v}'_0 + \tilde{\nabla} \vec{v}_{010}$ on obtient le problème d'Ekman instationnaire au voisinage de l'interface :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \vec{v}'_0 + \vec{k} \wedge \nabla \vec{v}'_0 &= \nu_0 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \nabla \vec{v}'_0; \\
 \tilde{e} &= 0, \quad \nabla \vec{v}'_0 = \vec{v}^0 - \tilde{\nabla} \vec{v}_{010}; \\
 \zeta &= 0, \quad \nabla \vec{v}'_0 = \vec{V}_0 - \tilde{\nabla} \vec{v}_{010}; \\
 \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} (\nabla \vec{v}'_0) &= \vec{0},
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \vec{v}'_0 \\ \tilde{e} = 0 \\ \zeta = 0 \\ \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} (\nabla \vec{v}'_0) \end{aligned}} \right\} \quad (V,30)$$

où \vec{V}_0 est la valeur de la vitesse, inconnue, dans le plan $\zeta = \zeta = 0$ et où $\nu_0 = \hat{E}_1 / \bar{e}_{010}$.

Ce problème est très différent de celui que l'on a formulé au voisinage du fond pour $\nabla \vec{v}'_0$: dans la condition en $\zeta = 0$ il apparaît la valeur, inconnue, de la vitesse. Ces deux problèmes sont donc dissymétriques. De plus, il faut aussi s'assurer que l'on a bien

$$t = 0, \quad \vec{V}_0 = \vec{v}_{10}^0 \quad (V,31)$$

afin que les conditions aux limites en $\zeta = 0$ et $\tilde{e} = 0$ du système (V,30)

soient compatibles. L'expression de \vec{V}_0 donnée en (IV,71) et notre dernière remarque impliquent que les données initiales \vec{v}^0 et ρ^0 ne peuvent pas être indépendantes mais sont liées par (V,31).

Comme au paragraphe précédent on peut se demander s'il y a adaptation au modèle d'Ackerblom (à l'ordre zéro), c'est-à-dire s'il y a égalité des limites suivantes

$$\lim_{\tilde{t} \rightarrow +\infty} (\vec{v}_0) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} (\vec{v}_0).$$

Une argumentation semblable à celle que l'on a développée au § V.2.1 pour répondre à une question similaire nous permet de répondre par l'affirmative.

V.3.- L'ADAPTATION A L'AGEOSTROPHISME

Nous revenons aux équations (IV,11) et au développement local (IV,12).

On obtient pour \vec{v}_1 , \tilde{w}_1 , \tilde{r}_2 et \tilde{e}_2 le système local suivant :

$$\left. \begin{aligned} \text{(a)} \quad & \bar{e}_0 \left(\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{D} \vec{v}_0 + \tilde{w}_0 \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial z} + \beta y \vec{k} \wedge \vec{v}_0 + \vec{k} \wedge \vec{v}_1 \right) \\ & + \tilde{e}_1 \left(\frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} + \vec{k} \wedge \vec{v}_0 \right) + \frac{1}{\omega_0} \vec{D} \tilde{r}_2 = 0; \\ \text{(b)} \quad & \frac{\partial \tilde{r}_2}{\partial z} + B_0 \tilde{e}_2 = 0; \\ \text{(c)} \quad & \vec{D} \cdot \vec{v}_1 + \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial z} = 0; \\ \text{(d)} \quad & \frac{\partial \tilde{e}_2}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{D} \tilde{e}_1 + \tilde{w}_0 \frac{\partial \tilde{e}_1}{\partial z} + \tilde{w}_1 \frac{d\bar{e}_0}{dz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad \text{(V,32)}$$

Nous appliquons l'opérateur $\vec{k} \cdot \vec{D} \wedge$ (et nous utilisons (c) de (V,32)) à (a) de (V,32) pour obtenir :

$$\begin{aligned} & \bar{\epsilon}_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} (\vec{k} \cdot \vec{D} \wedge \vec{v}_1) - \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial z} + \vec{k} \cdot \vec{D} \wedge (\vec{v}_0 \cdot \vec{D} \vec{v}_0 \right. \\ & \left. + \beta y \vec{k} \wedge \vec{v}_0 + \tilde{w}_0 \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial z} \right) \\ & - (\omega_0 B_0 \bar{\epsilon}_0)^{-1} \vec{k} \wedge \vec{D} \tilde{f}_1 \cdot \vec{D} \left(\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned} \quad (V,33)$$

et si nous remplaçons dans cette dernière équation \tilde{w}_1 par son expression obtenue à partir de (d) et (c) de (V,32) on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{D} \cdot \vec{k} \wedge \vec{v}_1 + B_0^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{d \bar{\epsilon}_0} \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} (\vec{D} \wedge \vec{v}_0) \cdot (\vec{D} \wedge \vec{v}_0) \right. \\ & \left. + \beta y \vec{k} \cdot \vec{D} \wedge \vec{v}_0 \right) = \tilde{D}(\tilde{f}_1) \end{aligned} \quad (V,34)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= \vec{v}_0 \cdot \vec{D} (\vec{k} \cdot \vec{D} \wedge \vec{v}_0) + \beta y \cdot \vec{v}_0 + \vec{k} \cdot \vec{D} \wedge \tilde{w}_0 \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial z} \\ & - B_0^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{d \bar{\epsilon}_0} \left(\vec{v}_0 \cdot \vec{D} \left(\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial z} \right) + \tilde{w}_0 \frac{\partial^2 \tilde{f}_1}{\partial z^2} \right) \right) \\ & - (\omega_0 B_0 \bar{\epsilon}_0^2)^{-1} \vec{k} \wedge \vec{D} \tilde{f}_1 \cdot \vec{D} \left(\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial z} \right) . \end{aligned} \quad (V,35)$$

On note \tilde{D}^∞ la limite, supposée finie, de \tilde{D} lorsque $\tilde{t} \rightarrow +\infty$.

On peut tirer profit de l'égalité :

$$\frac{\partial}{\partial z}(\tilde{v}_0^\infty) \cdot \vec{D}\left(\frac{\partial \tilde{f}_1^\infty}{\partial z}\right) + \frac{d\bar{p}_0}{dz} (\omega_0 \bar{p}_0^2)^{-1} \vec{E} \wedge \vec{D}\tilde{f}_1^\infty \cdot \vec{D}\left(\frac{\partial \tilde{f}_1^\infty}{\partial z}\right) = \vec{0}$$

pour écrire que l'on a la relation

$$\tilde{D}^\infty = \bar{p}_0^{-1} \tilde{v}_0^\infty \cdot \vec{D} \wedge \tilde{f}_1^\infty + \beta \vec{j} \cdot \tilde{v}_0^\infty. \quad (V,36)$$

Maintenant nous intégrons la relation (V,34), relativement à \tilde{E} , de 0 à $+\infty$ et en supposant que nous puissions justifier les calculs, nous aurons une relation entre la limite à l'infini de \tilde{f}_2 et une fonctionnelle connue de \tilde{f}_1 , ou plus exactement de sa valeur limite pour $\tilde{E} \rightarrow +\infty$. On est donc conduit à examiner le comportement, pour des \tilde{E} grands, des différentes fonctions inconnues du problème. Ces comportements sont fournis par les conditions de raccord de la région locale II avec la région I. On détaille ci-dessous le raccord des pressions à l'ordre R_0^2 :

i) développement (formel) de \bar{f} en série de Taylor au voisinage de $t=0$:

$$\begin{aligned} \bar{f}(x, y, z, t) &= \bar{f}_0(z) + R_0 \left(\bar{f}_1^0 + t \left(\frac{\partial \bar{f}_1}{\partial t} \right)^0 \right) \\ &+ R_0^2 \left(\bar{f}_2^0 + t \left(\frac{\partial \bar{f}_2}{\partial t} \right)^0 \right) + O(R_0^3) \end{aligned}$$

ii) écriture en variable locale de ce développement :

$$\begin{aligned} \bar{f}(x, y, z, SR_0 \tilde{E}) &= \bar{f}_0(z) + R_0 \bar{f}_1^0 + R_0^2 \left(\bar{f}_2^0 + S \tilde{E} \left(\frac{\partial \bar{f}_1}{\partial t} \right)^0 \right) \\ &+ O(R_0^3) \end{aligned}$$

iii) développement local à l'ordre R_0^2 :

$$\tilde{f}(x, y, z, \tilde{E}) = \bar{f}_0(z) + R_0 \tilde{f}_1 + R_0^2 \tilde{f}_2 + O(R_0^3).$$

Notre principe de raccord, dit qu'il y a égalité entre les deux limites suivantes :

$$\lim_{\tilde{E} \rightarrow \infty} (\bar{f}_0(z) + R_0 \tilde{f}_1 + R_0^2 \tilde{f}_2)$$

et

$$\lim_{\tilde{E} \rightarrow \infty} (\bar{f}_0(z) + R_0 \bar{f}_1^0 + R_0^2 (\bar{f}_2^0 + S \tilde{E} (\frac{\partial}{\partial t} \bar{f}_1)^0))$$

d'où les comportements de \tilde{f}_1 et \tilde{f}_2 :

$$\hat{f}_1 = \bar{f}_1^0 + \tilde{f}_1'$$

et

(V,37)

$$\tilde{f}_2 = \bar{f}_2^0 + S \tilde{E} (\frac{\partial}{\partial t} \bar{f}_1)^0 + \tilde{f}_2'$$

où

$$\lim_{\tilde{E} \rightarrow \infty} ((\tilde{f}_1', \tilde{f}_2')) = (0, 0).$$

De même on a pour la vitesse horizontale \tilde{v} et la vitesse verticale \tilde{w} :

$$\tilde{v}_0 = \bar{v}_0^0 + \tilde{v}_0';$$

$$\tilde{v}_1 = \bar{v}_1^0 + S \tilde{E} (\frac{\partial}{\partial t} \bar{v}_0^0) + \tilde{v}_1';$$

$$\tilde{w}_1 = \bar{w}_1^0 + \tilde{w}_1';$$

$$\text{où } \lim_{\tilde{E} \rightarrow \infty} ((\tilde{v}_0', \tilde{v}_1', \tilde{w}_1')) = (\vec{0}, \vec{0}, 0).$$

(V,38)

L'intégration de la relation (V,34) nécessite le calcul de l'intégrale

$$\int_0^{\tilde{E}} \tilde{ID}(x, y, z, \omega) d\omega .$$

On a

$$\int_0^{\tilde{E}} \tilde{ID}(\omega) d\omega = \tilde{E} \tilde{ID}^{\infty} + \int_0^{\tilde{E}} (\tilde{ID} - \tilde{ID}^{\infty}) d\omega ,$$

et on note

$$\int_0^{\tilde{E}} \tilde{ID} d\omega = \tilde{E} \tilde{ID}^{\infty} + \text{PF} \left(\int_0^{+\infty} \tilde{ID} d\omega \right)$$

où **PF** est mis pour "partie finie". Il vient alors, en intégrant (V,34), la relation suivante :

$$\begin{aligned} & S\tilde{E} \left(\vec{D} \cdot \vec{k} \wedge \left(\frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} \right)^0 + B_0^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\frac{d\bar{P}_0}{dz} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\frac{\partial \bar{T}_1}{\partial t} \right)^0 \right) \right) \right. \\ & + \vec{D} \cdot \vec{k} \wedge \vec{v}_1^0 + B_0^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\frac{d\bar{P}_0}{dz} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \bar{T}_2^0 \right) \\ & \left. + \frac{1}{2} (\vec{D} \wedge \vec{v}_0^0) \cdot (\vec{D} \wedge \vec{v}_0^0) + \beta_y \vec{k} \cdot \vec{D} \wedge \vec{v}_0^0 \right) \tilde{E} = 0 \\ & = \left(\vec{D} \cdot \vec{k} \wedge \vec{v}_1 + B_0^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\frac{d\bar{P}_0}{dz} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \bar{T}_2 \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (\vec{D} \wedge \vec{v}_0) \cdot (\vec{D} \wedge \vec{v}_0) + \beta_y \vec{k} \cdot \vec{D} \wedge \vec{v}_0 \right) \tilde{E} = 0 \\ & + \tilde{E} \tilde{ID}^{\infty} + \text{PF} \left(\int_0^{+\infty} \tilde{ID} d\omega \right) + \langle t t_3 \rangle , \end{aligned} \quad (\text{V,39})$$

où $\langle t t_3 \rangle$ désigne une collection de termes qui tendent vers zéro avec $1/\tilde{\epsilon}$:

$$\langle t t_3 \rangle = \vec{D} \cdot \vec{k} \wedge \vec{v}'_1 + B_0^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\frac{d\bar{\rho}_0}{dz} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \tilde{t}'_2 \right) + \frac{1}{2} (\vec{D} \wedge \vec{v}'_0) \cdot (\vec{D} \wedge \vec{v}'_0) + (\vec{D} \wedge \vec{v}'_0) \cdot (\vec{D} \wedge \vec{v}_0^0) + \beta_y \vec{k} \cdot \vec{D} \wedge \vec{v}'_0.$$

La relation (V,39) doit être cohérente avec l'analyse précédente et cela implique que :

$$S(\vec{D} \cdot \vec{k} \wedge (\frac{\partial \vec{v}_0^0}{\partial t})^0 + B_0^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\frac{d\bar{\rho}_0}{dz} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left((\frac{\partial \vec{t}_1^0}{\partial t})^0 \right) \right)) = \tilde{D}^\infty. \quad (V,40)$$

On tire alors de la relation (V,39), en utilisant (V,40) et (b) de (V,2), la condition en $t = 0$ suivante :

$$\begin{aligned} t=0, \quad \wedge \vec{t}_2 = \bar{\rho}_0(z) \vec{k} \cdot \vec{D} \wedge \vec{v}'_1^0 + B_0^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{\rho}_0(z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\vec{t}_2^0}{\bar{\rho}_0} \right) \right) \\ - \bar{\rho}_0(z) \left(\frac{1}{2} (\vec{D} \wedge \vec{v}_0^0)^2 + \beta_y \vec{k} \cdot \vec{D} \wedge \vec{v}_0^0 \right) \\ + \omega_0^{-1} \left((2\bar{\rho}_0)^{-1} (\vec{D}^2 \vec{t}_1^0)^2 + \beta_y \vec{D}^2 \vec{t}_1^0 + \right. \\ \left. (\bar{\rho}_0 \beta_y - B_0^{-1} \frac{\partial \bar{\rho}_0}{\partial z}) \vec{D}^2 \vec{t}_1^0 + (\bar{\rho}_0 \beta_y - B_0^{-1} \frac{\partial \bar{\rho}_0}{\partial z}) \vec{D} \left(\frac{\partial \vec{t}_1^0}{\partial z} \right) \cdot \vec{D} \vec{t}_1^0 + \vec{D} \cdot (\vec{v}_0^0 \cdot \vec{D} \vec{v}_0^0) \right) \\ + PF \left(\int_0^{+\infty} \tilde{D}(\omega) d\omega \right), \quad (V,41) \end{aligned}$$

où \vec{v}_0^0 , \vec{v}_1^0 et \vec{f}_2^0 désignent les composantes d'ordre 0, 1 et 2 du développement en puissance de R_0 des données initiales; lorsque celui-ci est impossible ces termes se réduisent à zéro.

Le dernier terme du second membre de (V,41) fait intervenir \vec{D} , c'est-à-dire \vec{f}_1 . Ainsi pour calculer au temps $t=0$, la quantité $\wedge \vec{f}_2$ il faut avoir résolu le problème de l'adaptation au géostrophisme, c'est-à-dire qu'il faut connaître \vec{f}_1 .

La relation (V,41) est alors la condition initiale qu'il faut associer à l'équation d'évolution du modèle agéostrophique, c'est-à-dire l'équation (V,9).

V.4.- COUCHES D'EKMAN STATIONNAIRES DE SECONDE APPROXIMATION

V.4.1.- Les équations de couche limite au voisinage du fond

Nous nous plaçons à nouveau dans la région III (locale en altitude, par l'intermédiaire du changement de variable défini par $S = (z+1)/R_0$). Pour les termes \hat{v}_1 , \hat{w}_2 et \hat{f}_2 du développement asymptotique (IV,40) on obtient le système suivant :

$$(a) \quad \bar{\rho}_{01-1} \left(S \frac{\partial \hat{v}_0}{\partial t} + \hat{v}_0 \cdot \vec{D} \hat{v}_0 + \hat{w}_1 \frac{\partial \hat{v}_0}{\partial S} + \beta y \vec{k} \wedge \hat{v}_0 + \vec{k} \wedge \hat{v}_1 \right) \\ + \hat{\rho}_1 \vec{k} \wedge \hat{v}_0 + \frac{1}{\omega_0} \vec{D} \hat{f}_2 = \hat{E}_1 \frac{\partial^2 \hat{v}_1}{\partial S^2};$$

$$(b) \quad \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial S} + B_0 \cdot \hat{\rho}_1 = 0;$$

$$(c) \quad \vec{D} \cdot \hat{\vec{v}}_1 + \frac{\partial}{\partial \zeta} \hat{w}_2 = 0;$$

$$(d) \quad \zeta \frac{\partial}{\partial t} \hat{e}_1 + \hat{\vec{v}}_0 \cdot \vec{D} \hat{e}_1 + \hat{w}_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} \hat{e}_1 = 0;$$

$$(e) \quad \zeta = 0, \quad \hat{\vec{v}}_0 = \hat{\vec{v}}_1 = \vec{0}, \quad \hat{w}_1 = \hat{w}_2 = 0.$$

(V,42)

Le raccord de la région III avec la région I donne les résultats suivants :

$$(a) \quad \hat{\vec{v}}_1 = \bar{\vec{v}}_{1|-1} + \zeta \frac{\partial \bar{\vec{v}}_0}{\partial \zeta} |_{-1} + \hat{\vec{v}}_1';$$

$$(b) \quad \hat{w}_2 = \bar{w}_{2|-1} + \zeta \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \zeta} |_{-1} + \hat{w}_2';$$

$$(c) \quad \hat{f}_2 = \bar{f}_{2|-1} + \zeta \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial \zeta} |_{-1} + \frac{1}{2} \zeta^2 \frac{d^2 \bar{f}_0}{d\zeta^2} |_{-1} + \hat{f}_2';$$

$$(d) \quad \hat{e}_1 = \bar{e}_{1|-1} + \zeta \frac{d \bar{e}_0}{d\zeta} |_{-1} + \hat{e}_1';$$

(V,43)

où $\hat{\vec{v}}_1'$, \hat{w}_2' , \hat{f}_2' et \hat{e}_1' tendent vers zéro avec $1/\zeta$.

Il est aisé d'obtenir, à partir de (b) de (V,42) et (c), (d) de (V,43), la relation suivante entre \hat{f}_2' et \hat{e}_1' :

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \hat{f}_2' + B_0 \cdot \hat{e}_1' = 0$$

(V,44)

et \hat{p}'_1 est solution de l'équation suivante, obtenue en reportant (d) de (V,43) dans (d) de (V,42) :

$$S \frac{\partial \hat{p}'_1}{\partial t} + \hat{v}_0 \cdot \vec{D} \hat{p}'_1 + \hat{w}_1 \frac{\partial \hat{p}'_1}{\partial \zeta} + \hat{v}'_0 \cdot \vec{D} \bar{p}_{1-1} + \hat{w}'_1 \frac{d \bar{p}_{0|1-1}}{d \zeta} = 0. \quad (V,45)$$

La fonction \hat{p}'_1 ne dépend donc que de \bar{r}_1 (et bien entendu de x, y, t et ζ). On intègre la relation (V,44) par rapport à ζ pour obtenir :

$$\hat{f}'_2(x, y, \zeta, t) = \hat{f}'_2(x, y, 0, t) - B_0 \int_0^\zeta \hat{p}'_1(x, y, \omega, t) d\omega \quad (V,46)$$

et on détermine la fonction $\hat{f}'_2(x, y, 0, t)$ en écrivant que \hat{f}'_2 satisfait à la contrainte suivante :

$$\lim_{\zeta \rightarrow +\infty} (\hat{f}'_2) = 0$$

ce qui conduit à l'égalité suivante :

$$\zeta = 0, \quad \hat{f}'_2 = B_0 \cdot \int_0^{+\infty} \hat{p}'_1(x, y, \omega, t) d\omega$$

où nous supposons que l'intégrale est finie.

Finalement, il vient pour \hat{f}'_2 :

$$\hat{f}'_2(x, y, \zeta, t) = B_0 \cdot \int_\zeta^{+\infty} \hat{p}'_1(x, y, \omega, t) d\omega \quad (V,47)$$

Nous pouvons donc écrire pour \hat{f}'_2 :

$$\hat{T}_2 = \bar{T}_{2|-1} + \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \bar{T}_{1|-1} + \frac{1}{2} \zeta^2 \frac{d^2}{d\zeta^2} \bar{T}_{0|-1} + Bo \cdot \int_{\zeta}^{+\infty} \hat{P}'_1(x, y, \omega, t) d\omega.$$

On peut remarquer que la fonction \hat{P}'_1 ne peut être identiquement nulle; en effet, l'équation (V,45) impliquerait alors que $(\hat{v}'_0 \cdot \vec{D} \bar{P}_1 + \hat{w}'_1 \frac{d}{d\zeta} \bar{P}_0)_{\zeta=-1} = 0$, avec

$$\hat{v}'_0 = e^{-\zeta/(2T_0)^{1/2}} \cdot (\vec{k} \wedge \vec{v}'_{d-1} \sin(\zeta/(2T_0)^{1/2}) - \vec{v}'_{d-1} \cos(\zeta/(2T_0)^{1/2}))$$

et

$$\hat{w}'_1 = -\left(\frac{T_0}{2}\right)^{1/2} (\omega_0 \bar{P}_{0|-1})^{-1} \vec{D}^2 \bar{T}_{1|-1} \cdot e^{-\zeta/(2T_0)^{1/2}} \cdot (\cos(\zeta/(2T_0)^{1/2}) + \sin(\zeta/(2T_0)^{1/2}))$$

ce qui est faux comme le calcul l'indique.

V.4.2.- Problème d'Ackerblom de seconde approximation au voisinage du fond

V.4.2.1.- Vitesse horizontale \hat{v}'_1

Nous avons, d'après (V,43) :

$$\hat{v}'_1 = \bar{v}'_{1|-1} + \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \bar{v}'_{0|-1} + \hat{v}'_1$$

avec

$$\lim_{\zeta \rightarrow +\infty} (\hat{v}'_1) = \vec{0}.$$

Si nous reportons cette expression de \hat{v}'_1 dans (a) de (V,42), en tenant compte des résultats du chapitre IV, on obtient pour \hat{v}'_1 le problème d'Ackerblom de seconde approximation :

$$\tau_0 \frac{\partial^2 \hat{v}'_1}{\partial \zeta^2} - \vec{k} \wedge \hat{v}'_1 = \hat{g}'_0 ;$$

$$\zeta = 0, \quad \hat{v}'_1 = -\vec{v}_{11-1} ;$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow +\infty} (\hat{v}'_1) = \vec{0} ,$$

(V,48)

où

$$\begin{aligned} \hat{g}'_0 = & (\omega_0 \bar{p}_{01-1})^{-1} \vec{D} \hat{t}'_2 + \beta y \vec{k} \wedge \hat{v}'_0 + \hat{w}_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} \hat{v}'_0 \\ & + (\bar{p}_{01-1})^{-1} \hat{p}'_1 \vec{k} \wedge \hat{v}'_0 + (\bar{p}_{01-1})^{-1} \bar{p}_{11-1} \vec{k} \wedge \hat{v}'_0 \\ & + \hat{v}'_0 \cdot \vec{D} \hat{v}'_0 + \hat{v}'_0 \cdot \vec{D} \vec{v}_{01-1} + s \frac{\partial}{\partial t} \hat{v}'_0 \end{aligned}$$

et $\tau_0 = \hat{E}_1 / \bar{p}_{01-1}$.

On pose $\hat{X}'_1 = \hat{v}'_1 - i \vec{k} \wedge \hat{v}'_1$ dans (V,48) pour obtenir le

problème aux limites suivant (où t , x et y jouent le rôle de paramètres) :

$$\tau_0 \frac{\partial^2 \hat{X}'_1}{\partial \zeta^2} - i \hat{X}'_1 = \hat{g}'_0 - i \vec{k} \wedge \hat{g}'_0 ;$$

$$\zeta = 0, \quad \hat{X}'_1 = -(\vec{v}_{11-1} - i \vec{k} \wedge \vec{v}_{11-1}) ;$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow +\infty} (\hat{X}'_1) = \vec{0} ,$$

(V,49)

dont la solution générale est donnée par

$$\begin{aligned} \widehat{X}'_1 = & -(\bar{v}_{11-1} - i\vec{k} \wedge \bar{v}_{11-1})E + \int_0^{\zeta} G(\xi, \zeta) \cdot (\widehat{\mathcal{G}}'_0(\xi) - i\vec{k} \wedge \widehat{\mathcal{G}}'_0(\xi)) d\xi \\ & + \int_{\zeta}^{+\infty} G(\xi, \zeta) \cdot (\widehat{\mathcal{G}}'_0(\xi) - i\vec{k} \wedge \widehat{\mathcal{G}}'_0(\xi)) d\xi \end{aligned} \quad (V,50)$$

où les notations sont les suivantes :

$$E(\zeta) = \exp\left(-\frac{(1+i)\zeta}{(2\tau_0)^{1/2}}\right),$$

$$G(\xi, \zeta) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\bar{\alpha} (e^{\alpha(\xi-\zeta)} - e^{-\alpha(\xi+\zeta)}), & 0 \leq \xi \leq \zeta \\ -\frac{1}{2}\bar{\alpha} (e^{\alpha(\zeta-\xi)} - e^{-\alpha(\xi+\zeta)}), & \xi \geq \zeta \end{cases}$$

avec $\alpha = (1+i)\gamma$, $\bar{\alpha} = (1-i)\gamma$ et $\gamma = (2\tau_0)^{1/2}$.

On prend la partie réelle de l'équation (V,50) pour obtenir :

$$\begin{aligned} \widehat{v}'_1 = & \bar{v}_{11-1} + \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \bar{v}_{01-1} - \exp(-\zeta/(2\tau_0)^{1/2}) \cdot \left(\bar{v}_{01-1} \cos(\zeta/(2\tau_0)^{1/2}) \right. \\ & \left. + \vec{k} \wedge \bar{v}_{11-1} \sin(\zeta/(2\tau_0)^{1/2}) \right) + \operatorname{Re} \left(\int_0^{\zeta} G(\xi, \zeta) \cdot (\widehat{\mathcal{G}}'_0(\xi) - i\vec{k} \wedge \widehat{\mathcal{G}}'_0(\xi)) d\xi \right. \\ & \left. + \int_{\zeta}^{+\infty} G(\xi, \zeta) \cdot (\widehat{\mathcal{G}}'_0(\xi) - i\vec{k} \wedge \widehat{\mathcal{G}}'_0(\xi)) d\xi \right). \end{aligned} \quad (V,51)$$

Il est important pour la suite des calculs de remarquer qu'aussi bien \vec{v}_{11-1} que $\hat{\mathcal{G}}_0'$ s'expriment pour l'un à partir de \vec{r}_{21-1} et \vec{r}_{11-1} et \vec{r}_{11-1} pour l'autre :

$$\omega_0 \vec{e}_{01-1} \cdot \vec{v}_{11-1} = \vec{k} \wedge \vec{D} \vec{r}_{21-1} + (B_0 \cdot \vec{e}_{01-1})^{-1} \frac{\partial \vec{r}_{21-1}}{\partial z} \vec{k} \wedge \vec{D} \vec{r}_{11-1} - S \frac{D_0}{Dt} (\vec{D} \vec{r}_{11-1}) - \beta y \vec{k} \wedge \vec{D} \vec{r}_{11-1} ,$$

et pour $\hat{\mathcal{G}}_0'$ on a vu que \hat{p}'_1 ne dépend que de \vec{r}_{11-1} de même que \hat{v}_0 , \hat{v}'_0 et \hat{w}_1 , par conséquent $\hat{\mathcal{G}}_0'$ ne dépend que de \vec{r}_{11-1} (et bien entendu de \vec{r}_{01-1} mais cela c'est l'état standard),

V.4.2.2.- Vitesse verticale \hat{w}_2 . Condition à la limite, en $z = -1$ pour \vec{r}_2 .

On détermine \hat{w}_2 à partir de la relation (c) de (V,42) et du résultat (V,53) qui nous permettent d'écrire

$$\hat{w}_2 = - \int_0^z \vec{D} \cdot \hat{v}_1 \, d\omega + \hat{w}_2|_z = 0$$

où $\hat{v}'_1 = \vec{v}_{11-1} + S \frac{\partial \vec{v}_{01-1}}{\partial z} + \hat{v}'_1$.

On a donc en utilisant (e) de (V,42) :

$$\hat{w}_2 = - S \vec{D} \cdot \vec{v}_{11-1} - \int_0^z \vec{D} \cdot \hat{v}'_1 \, d\omega \quad (V,52)$$

et d'après (V,43) on a

$$\hat{w}_2 = \bar{w}_{21-1} + S \frac{\partial \bar{w}_{11-1}}{\partial z} + \hat{w}'_2 \quad (V,53)$$

ce qui entraîne, en écrivant l'égalité des limites dans (V,52) et (V,53)

lorsque ζ tend vers l'infini :

$$\bar{w}_{2|1-1} = - \vec{D} \cdot \int_0^{+\infty} \hat{\vec{v}}_1'(x, y, \omega, t) d\omega . \quad (V,54)$$

C'est cette dernière égalité qui va fournir la condition à la limite, en $\zeta = -1$, pour l'équation (V,9) du modèle agéostrophique. En effet, \bar{w}_2 est donné par (V,7) et nous avons déterminé $\hat{\vec{v}}_1'$ en (V,51); ces deux vitesses s'expriment en fonction de \bar{F}_2 et \bar{F}_1 (et aussi \bar{F}_0) par conséquent (V,54) est bien une condition sur \bar{F}_2 en $\zeta = -1$.

De l'égalité (V,54) et des expressions (V,7) et (V,51) on tire tout d'abord :

$$\begin{aligned} \vec{D} \cdot \int_0^{+\infty} \hat{\vec{v}}_1' d\omega &= \vec{D} \cdot \left(\text{Re} \int_0^{+\infty} \left\{ \int_0^{\zeta} G(\xi, \zeta) \cdot (\hat{\vec{\psi}}_0'(\xi) - i \vec{k} \wedge \hat{\vec{\psi}}_0'(\xi)) d\xi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{\zeta}^{+\infty} G(\xi, \zeta) \cdot (\hat{\vec{\psi}}_0'(\xi) - i \vec{k} \wedge \hat{\vec{\psi}}_0'(\xi)) d\xi \right\} d\zeta \right) \\ &\quad + \vec{D} \cdot \left(\text{Re} \left(-(\bar{v}_{1|1-1} - i \vec{k} \wedge \bar{v}_{1|1-1}) \int_0^{+\infty} E(\zeta) d\zeta \right) \right), \end{aligned}$$

soit encore

$$\vec{D} \cdot \int_0^{+\infty} \hat{\vec{v}}_1' d\zeta = \left(\frac{\tau_0}{2} \right)^{1/2} (\omega_0 \bar{e}_{0|1-1})^{-1} \vec{D}^2 \bar{F}_{2|1-1} + \mathcal{P}(\bar{F}_{1|1-1})$$

où $\mathcal{P}(\bar{F}_{1|1-1})$ désigne une collection de termes fonctions de \bar{F}_1 et de ses dérivées en $\zeta = -1$, ainsi que de \bar{F}_0 et des dérivées de \bar{F}_0 en $\zeta = -1$.

On obtient aisément, à partir de cette dernière relation et de

(V,54) où \bar{w}_2 est donné par (V,7), la condition limite en $z = -1$ pour \bar{f}_2 :

$$\begin{aligned}
 z = -1, \quad & (B_0^{-1} (S \frac{\partial}{\partial t} + (\omega_0 \bar{\rho}_0)^{-1} \vec{k} \wedge \vec{D} \bar{f}_1 \cdot \vec{D})) \frac{\partial}{\partial z} \\
 & - (\omega_0 \bar{\rho}_0)^{-1} \frac{d\bar{\rho}_0}{dz} \left(\frac{\pi_0}{2}\right)^{1/2} \vec{D}^2 - (\omega_0 B_0 \bar{\rho}_0)^{-1} \vec{k} \wedge \vec{D} \left(\frac{\partial \bar{f}_1}{\partial z} \cdot \vec{D}\right) \bar{f}_2 \\
 & = \frac{d\bar{\rho}_0}{dz} \cdot \mathcal{D}(\bar{f}_1) \quad (V,55)
 \end{aligned}$$

où $\mathcal{D}(\bar{f}_1) = \mathcal{D}(\bar{f}_1) - \mathcal{C}(\bar{f}_1)$; \mathcal{C} est donné en (V,8).

V.4.3.- Les équations de couche limite au voisinage de l'interface

On considère à nouveau la région V (locale en altitude, avec $z = -R_0 \delta$).

Il vient pour les termes \hat{v}_1 , \hat{w}_2 et \hat{f}_2 du développement asymptotique (IV,7)

le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \bar{\rho}_{010} \left(S \frac{\partial}{\partial t} \hat{v}_0 + \hat{v}_0 \cdot \vec{D} \hat{v}_0 - \hat{w}_1 \frac{\partial}{\partial \delta} \hat{v}_0 + \beta y \vec{k} \wedge \hat{v}_0 \right. \\
 & \left. + \vec{k} \wedge \hat{v}_1 \right) + \hat{e}_1 \vec{k} \wedge \hat{v}_0 + \frac{1}{\omega_0} \vec{D} \hat{f}_2 = \hat{E}_1 \frac{\partial^2}{\partial \delta^2} \hat{v}_1 ;
 \end{aligned}$$

$$(b) \quad \frac{\partial}{\partial \delta} \hat{f}_2 - B_0 \cdot \hat{e}_1 = 0 ;$$

$$\begin{aligned}
 & \text{(c)} \quad \vec{D} \cdot \hat{\vec{v}}_1 - \frac{\partial}{\partial \Sigma} \hat{w}_2 = 0 ; \\
 & \text{(d)} \quad \Sigma \frac{\partial}{\partial t} \hat{p}_1 + \hat{\vec{v}}_0 \cdot \vec{D} \hat{p}_1 - \hat{w}_1 \frac{\partial}{\partial \Sigma} \hat{p}_1 = 0 ; \\
 & \text{(e)} \quad \Sigma = 0, \quad \hat{\vec{v}} = \vec{V}_0, \quad \hat{w}_1 = \hat{w}_2 = 0.
 \end{aligned}
 \tag{V,56}$$

Les conditions aux limites qu'il faut associer à ce système seront fournies par : - le raccord avec l'écoulement principal (c'est-à-dire la région I).

- la condition de transmission sur la surface $\bar{z} = 0$.

Le raccord avec la région I donne

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \quad \hat{\vec{v}}_1 = \bar{v}_{110} - \Sigma \frac{\partial \bar{v}_{10}}{\partial \bar{z}} \Big|_0 + \hat{\vec{v}}_1' ; \\
 & \text{(b)} \quad \hat{w}_2 = \bar{w}_{210} - \Sigma \frac{\partial \bar{w}_{10}}{\partial \bar{z}} \Big|_0 + \hat{w}_2' ; \\
 & \text{(c)} \quad \hat{f}_2 = \bar{f}_{210} - \Sigma \frac{\partial \bar{f}_{10}}{\partial \bar{z}} \Big|_0 + \frac{1}{2} \Sigma^2 \frac{d^2 \bar{f}_{10}}{d\bar{z}^2} \Big|_0 + \hat{f}_2' ; \\
 & \text{(d)} \quad \hat{p}_1 = \bar{p}_{110} - \Sigma \frac{d \bar{p}_{10}}{d\bar{z}} \Big|_{-1} + \hat{p}_1' ,
 \end{aligned}
 \tag{V,57}$$

où

$$\lim_{\Sigma \rightarrow +\infty} ((\hat{\vec{v}}_1', \hat{w}_2', \hat{f}_2', \hat{p}_1')) = (\vec{0}, 0, 0, 0)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \Sigma} \hat{f}_2' - B_0 \cdot \hat{p}_1' = 0 .
 \tag{V,58}$$

Comme précédemment on montre facilement que \hat{p}'_1 est solution de l'équation

$$S \frac{\partial \hat{p}'_1}{\partial t} + \hat{v}_0 \cdot \vec{D} \hat{p}'_1 - \hat{w}_1 \frac{\partial \hat{p}'_1}{\partial \zeta} + \hat{v}'_0 \cdot \vec{D} \bar{p}_{010} + \hat{w}'_1 \frac{d \bar{p}_{010}}{d \zeta} = 0 .$$

Ici encore la solution, \hat{p}'_1 , ne dépend que de \bar{t}_1 (et bien entendu de \bar{t}_0 et t, x, y, ζ). On intègre la relation (V,58) par rapport à ζ pour obtenir, en tenant compte du comportement pour ζ grand de \hat{t}'_2 :

$$\hat{t}'_2 = -B_0 \cdot \int_{\zeta}^{+\infty} \hat{p}'_1(x, y, \omega, t) d\omega .$$

On obtient donc pour \hat{t}'_2 :

$$\hat{t}'_2 = \bar{t}_{210} - \zeta \frac{\partial \bar{t}_{110}}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \zeta^2 \frac{d^2 \bar{t}_{010}}{d \zeta^2} - B_0 \cdot \int_{\zeta}^{+\infty} \hat{p}'_1(x, y, \omega, t) d\omega . \quad (V,59)$$

V.4.4.- Problème d'Ackerblom de seconde approximation au voisinage de l'interface

V.4.4.1.- Vitesse horizontale \hat{v}'_1

Nous avons, d'après (V,57) :

$$\hat{v}'_1 = \bar{v}_{110} - \zeta \frac{\partial \bar{v}_{010}}{\partial \zeta} + \hat{v}'_1$$

où $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} (\hat{v}'_1) = \vec{0}$.

Si nous reportons cette expression de \hat{v}'_1 dans (a) de (V,56), en tenant compte des résultats du chapitre IV, on obtient pour \hat{v}'_1 le problème d'Ackerblom de seconde approximation :

$$v_0 \frac{\partial^2 \vec{v}'_1}{\partial \zeta^2} - \vec{k} \wedge \vec{v}'_1 = \vec{\mathcal{G}}_0' ;$$

$$\zeta = 0, \quad \vec{v}'_1 = \vec{V}_0^{(1)} - \vec{v}_{110} ;$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow +\infty} (\vec{v}'_1) = \vec{0} ,$$

(V,60)

où $v_0 = \hat{E}_1 / \bar{P}_{010}$ et $\vec{V}_0^{(1)}$ désigne le second terme du développement en puissances de R_0 de la vitesse, inconnue, de l'écoulement dans le plan

$$z = \zeta = 0 :$$

$$\vec{V}_0 = \vec{V}_0 + R_0 \vec{V}_0^{(1)} + O(R_0^2) ,$$

Le second membre $\vec{\mathcal{G}}_0'$ est défini par :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{G}}_0' &= (\omega_0 \bar{P}_{010})^{-1} \vec{D} \vec{v}'_2 + \beta y \vec{k} \wedge \vec{v}'_0 + (\bar{P}_{010})^{-1} \bar{P}_{110} \vec{k} \wedge \vec{v}'_0 \\ &+ (\bar{P}_{010})^{-1} \bar{P}'_1 \vec{k} \wedge \vec{v}'_0 - \omega_1 \frac{\partial \vec{v}'_0}{\partial \zeta} + \vec{v}'_0 \cdot \vec{D} \vec{v}'_0 \\ &+ \vec{v}'_0 \cdot \vec{D} \vec{v}_{010} + S \frac{\partial \vec{v}'_0}{\partial t} . \end{aligned}$$

On pose $\vec{Y}_1' = \vec{v}'_1 - i \vec{k} \wedge \vec{v}'_1$ dans (V,60) pour obtenir le

problème aux limites suivant (où t , x et y jouent le rôle de paramètres) :

$$\left. \begin{aligned} \nabla_0 \frac{\partial^2 \vec{Y}'_1}{\partial \zeta^2} - i \vec{Y}'_1 &= \vec{\mathcal{C}}'_0 - i \vec{k} \wedge \vec{\mathcal{C}}'_0; \\ \zeta = 0, \vec{Y}'_1 &= -(\vec{v}_{110} - \vec{V}_0^{(1)} - i \vec{k} \wedge (\vec{v}_{110} - \vec{V}_0^{(1)})); \\ \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} (\vec{Y}'_1) &= \vec{0}, \end{aligned} \right\} \quad (V,61)$$

dont la solution générale est donnée par :

$$\begin{aligned} \vec{Y}'_1 &= -(\vec{v}_{110} - \vec{V}_0^{(1)} - i \vec{k} \wedge (\vec{v}_{110} - \vec{V}_0^{(1)})) E(\zeta) \\ &+ \int_0^\zeta G(\xi, \zeta) \cdot (\vec{\mathcal{C}}'_0(\xi) - i \vec{k} \wedge \vec{\mathcal{C}}'_0(\xi)) d\xi \\ &+ \int_\zeta^{+\infty} G(\xi, \zeta) \cdot (\vec{\mathcal{C}}'_0(\xi) - i \vec{k} \wedge \vec{\mathcal{C}}'_0(\xi)) d\xi, \end{aligned} \quad (V,62)$$

où

$$E(\zeta) = \exp\left(-\frac{(1+i)\zeta}{(2\nu_0)^{1/2}}\right)$$

$$G(\xi, \zeta) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \bar{\alpha} (e^{\alpha(\xi-\zeta)} - e^{-\alpha(\xi+\zeta)}), & 0 \leq \xi \leq \zeta \\ -\frac{1}{2} \bar{\alpha} (e^{\alpha(\zeta-\xi)} - e^{-\alpha(\xi+\zeta)}), & \xi \geq \zeta \end{cases}$$

avec $\alpha = (1+i)\gamma$, $\bar{\alpha} = (1-i)\gamma$ et $\gamma = (2\nu_0)^{-1/2}$.

On prend la partie réelle de l'équation (V,62) pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\hat{\vec{v}}_1 = & \bar{\vec{v}}_{110} - \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \bar{\vec{v}}_0|_0 - \exp(-\zeta/(2\nu_0)^{1/2}) \cdot \left((\bar{\vec{v}}_{110} - \bar{\vec{v}}_0^{(1)}) \cos(\zeta/(2\nu_0)^{1/2}) \right. \\
& + \vec{k} \wedge (\bar{\vec{v}}_{110} - \bar{\vec{v}}_0^{(1)}) \sin(\zeta/(2\nu_0)^{1/2}) \\
& + \operatorname{Re} \left(\int_0^\zeta G(\xi, \zeta) \cdot (\bar{\vec{v}}_0'(\xi) - i\vec{k} \wedge \bar{\vec{v}}_0'(\xi)) d\xi \right. \\
& \left. \left. + \int_\zeta^{+\infty} G(\xi, \zeta) \cdot (\bar{\vec{v}}_0'(\xi) - i\vec{k} \wedge \bar{\vec{v}}_0'(\xi)) d\xi \right) \right). \quad (V,63)
\end{aligned}$$

V.4.4.2.- Détermination de $\bar{\vec{v}}_0^{(1)}$.

On utilise la condition de transmission (a) de (I,37) pour déterminer $\bar{\vec{v}}_0^{(1)}$. Comme on l'a fait au chapitre IV on indexe par un "a" les grandeurs atmosphériques et on utilise le modèle d'Ackerblom pour décrire, en première approximation, le champ des vitesses atmosphériques qui intervient dans (I,37); il vient alors :

$$\mu \frac{\partial}{\partial \zeta} \hat{\vec{v}} + \mu^a \frac{\partial}{\partial \zeta^a} \hat{\vec{v}}^a = \vec{0}, \quad \text{sur } \zeta = \zeta^a = 0. \quad (V,64)$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\hat{\vec{v}} &= \bar{\vec{v}}_0 + R_0 \hat{\vec{v}}_1 + O(R_0^2), \\
\hat{\vec{v}}^a &= \bar{\vec{v}}_0^a + R_0^a \hat{\vec{v}}_1^a + O((R_0^2)^a);
\end{aligned}$$

et

l'égalité (V,64) s'écrit alors, à l'ordre $O(R_0)$ et $O(R_0^a)$:

$$\zeta = \zeta^a = 0, \quad \mu R_0 \left(-\frac{\partial}{\partial \zeta} \bar{\vec{v}}_0|_0 + \frac{\partial}{\partial \zeta} \hat{\vec{v}}_1 \right) + \mu^a R_0^a \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \bar{\vec{v}}_0^a + \frac{\partial}{\partial \zeta^a} \hat{\vec{v}}_1^a \right) = \vec{0}$$

où $\zeta^a = \zeta / R_0^a$.

On a pour la vitesse \vec{v}_1^a une expression analogue à celle de \vec{v}_0^a :

$$\begin{aligned} \vec{v}_1^a = & \operatorname{Re} \left(-(\vec{v}_{110}^a - \vec{V}_0^{(1)}) - i\vec{k} \wedge (\vec{v}_{110}^a - \vec{V}_0^{(1)}) \right) E^a(\zeta^a) \\ & + \int_0^{\zeta^a} G^a(\xi, \zeta^a) (\vec{v}_0^a - i\vec{k} \wedge \vec{v}_0^a) d\xi \\ & + \int_{\zeta^a}^{+\infty} G^a(\xi, \zeta^a) (\vec{v}_0^a - i\vec{k} \wedge \vec{v}_0^a) d\xi \end{aligned} \quad (\text{V},65)$$

une fois que les grandeurs atmosphériques aient été développées sous une forme analogue aux grandeurs océaniques. Dans (V,65) on a posé

$$\begin{aligned} E^a(\zeta^a) &= \exp\left(-\frac{(1+i)\zeta^a}{(2\gamma_0^a)^{1/2}}\right), \quad \gamma_0^a = \hat{E}_1^a / \bar{\rho}_{010}^a \\ G^a(\xi, \zeta^a) &= \begin{cases} -\frac{1}{2}\bar{\alpha}^a (e^{\alpha^a(\xi-\zeta^a)} - e^{\alpha^a(\xi+\zeta^a)}), & 0 \leq \xi \leq \zeta^a \\ -\frac{1}{2}\bar{\alpha}^a (e^{\alpha^a(\zeta^a-\xi)} - e^{\alpha^a(\xi+\zeta^a)}), & \xi \geq \zeta^a \end{cases} \end{aligned}$$

avec $\alpha^a = (1+i)\gamma^a$, $\bar{\alpha}^a = (1-i)\gamma^a$, $\gamma^a = (2\gamma_0^a)^{-1/2}$.

Ainsi lorsque l'on a

$$\mu R_0 / \mu^a R_0^a = O(1) \quad (\text{V},66)$$

et plus simplement

$$\mu R_0 = \mu^a R_0^a \quad (\text{V},67)$$

la relation de transmission s'écrit :

$$\zeta = \zeta^a = 0, \quad -\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_0^a}{\partial z} + \frac{\partial \hat{v}_1'}{\partial \zeta} + \frac{\partial \hat{v}_1'^a}{\partial \zeta^a} = \vec{0}. \quad (V,68)$$

La situation décrite par (V,66) est réaliste puisque nous avons (GERMAIN; 1973)

$$\mu^a \sim 10^{-2} \mu,$$

et que pour les écoulements considérés dans notre étude nous avons

$$R_0 \sim 10^{-2} R_0^a.$$

Nous ferons donc l'hypothèse que (V,67) est bien réalisée, (V,63) devient donc la condition de transmission qu'il faut associer au problème (V,60) pour déterminer $\vec{V}_0^{(1)}$. On suppose que les théorèmes de dérivation des intégrales généralisées dépendant d'un paramètre s'appliquent; on obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{v}_1'}{\partial \zeta} = & \operatorname{Re} \left(-(\bar{v}_{10} - \vec{V}_0^{(1)} - i \vec{k} \wedge (\bar{v}_{10} - \vec{V}_0^{(1)})) \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial \zeta} \right. \\ & + \int_0^{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} G(\xi, \zeta) \cdot \hat{\mathcal{H}}_0'(\xi) d\xi + G(\zeta, \zeta) \hat{\mathcal{H}}_0'(\zeta) \\ & \left. + \int_{\zeta}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \zeta} G(\xi, \zeta) \cdot \hat{\mathcal{H}}_0'(\xi) d\xi - G(\zeta, \xi) \hat{\mathcal{H}}_0'(\xi) \right) \end{aligned}$$

où $\hat{\mathcal{H}}_0' = \hat{\mathcal{C}}_0' - i \vec{k} \wedge \hat{\mathcal{C}}_0'$,

et un résultat analogue pour $\frac{\partial \hat{v}_1'^a}{\partial \zeta^a}$.

La condition de transmission (V,68) s'énonce alors sous la forme :

$$\begin{aligned} \Sigma = \Sigma^a = 0, & \quad -\frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \bar{y}} \Big|_0 + \frac{\partial \bar{V}_0^a}{\partial \bar{y}} \Big|_0 + (2\gamma_0)^{-1/2} (\bar{V}_{10} - \bar{V}_0^{(1)} + \vec{k} \wedge (\bar{V}_{10} - \bar{V}_0^{(1)})) \\ & \quad + (2\gamma_0^a)^{-1/2} (\bar{V}_{10}^a - \bar{V}_0^{(1)a} + \vec{k} \wedge (\bar{V}_{10}^a - \bar{V}_0^{(1)a})) \\ & \quad + \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} G(\bar{\xi}, \bar{y}) \bar{F}_0'(\bar{\xi}) d\bar{\xi} \right. \\ & \quad \left. + \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \bar{y}^a} G^a(\bar{\xi}, \bar{y}^a) \bar{F}_0'^a(\bar{\xi}) d\bar{\xi} \right). \end{aligned}$$

De cette dernière relation on tire facilement :

$$\begin{aligned} \vec{V}_0^{(1)} & = \frac{(\gamma_0 \gamma_0^a)^{1/2}}{(2\gamma_0)^{1/2} + (2\gamma_0^a)^{1/2}} \cdot \left(\frac{\partial (\vec{k} \wedge \bar{V}_0 - \bar{V}_0)}{\partial \bar{y}} \Big|_0 - \frac{\partial (\vec{k} \wedge \bar{V}_0^a - \bar{V}_0^a)}{\partial \bar{y}} \Big|_0 \right. \\ & \quad + \left(\frac{2}{\gamma_0} \right)^{1/2} \bar{V}_{10} + \left(\frac{2}{\gamma_0^a} \right)^{1/2} \bar{V}_{10}^a \\ & \quad + \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} G(\bar{\xi}, \bar{y}) \Big|_{\bar{y}=0} \cdot (\bar{F}_0'(\bar{\xi}) - \vec{k} \wedge \bar{F}_0'(\bar{\xi})) d\bar{\xi} \right. \\ & \quad \left. + \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \bar{y}^a} G^a(\bar{\xi}, \bar{y}^a) \Big|_{\bar{y}^a=0} \cdot (\bar{F}_0'^a(\bar{\xi}) - \vec{k} \wedge \bar{F}_0'^a(\bar{\xi})) d\bar{\xi} \right). \quad (\text{V,69}) \end{aligned}$$

V.4.4.3.- Vitesse verticale \hat{w}_2 . Condition à la limite,
en $z=0$, pour \bar{f}_2 .

La relation (c) de (V,56) et la condition (e) du même système entraînent

$$\hat{w}_2 = \zeta \vec{D} \cdot \vec{v}_{110} + \vec{D} \cdot \int_0^\zeta \vec{v}'_1(x, y, \omega, t) d\omega \quad (\text{V,70})$$

on a de plus, d'après (b) de (V,57) :

$$\hat{w}_2 = \bar{w}_{210} - \zeta \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial z} + \hat{w}'_2 \quad (\text{V,71})$$

par conséquent, en prenant la limite pour ζ tendant vers $+\infty$ dans les deux dernières relations on obtient :

$$\bar{w}_{210} = \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} \left(\vec{D} \cdot \int_0^\zeta \vec{v}'_1 d\omega \right) = \vec{D} \cdot \int_0^{+\infty} \vec{v}'_1 d\omega . \quad (\text{V,72})$$

C'est de cette dernière relation que nous allons déduire la condition à la limite, en $z=0$, pour l'équation (V,9) du modèle agéostrophique.

On calcule le second membre de (V,72) :

$$\begin{aligned} \vec{D} \cdot \int_0^{+\infty} \vec{v}'_1(x, y, \omega, t) d\omega &= \vec{D} \cdot \left(\text{Re} \left(-(\vec{v}_{110} - \vec{v}'_0) - i \vec{k} \wedge (\vec{v}_{110} - \vec{v}'_0) \right) \right) \\ &\cdot \int_0^{+\infty} E(\omega) d\omega + \int_0^{+\infty} \left\{ \int_0^\zeta G(\xi, \zeta) \cdot (\vec{v}'_0(\xi) - i \vec{k} \wedge \vec{v}'_0(\xi)) d\xi \right. \\ &\left. + \int_\zeta^{+\infty} G(\xi, \zeta) \cdot (\vec{v}'_0(\xi) - i \vec{k} \wedge \vec{v}'_0(\xi)) d\xi \right\} d\zeta \Big) . \quad (\text{V,73}) \end{aligned}$$

On peut donc écrire, en développant le calcul de la divergence du premier terme du second membre de (V,73) :

$$\begin{aligned} \vec{D} \cdot \int_0^{+\infty} \hat{\vec{v}}_1' d\omega &= (\omega_0 \bar{\rho}_{010})^{-1} \cdot \left(\frac{(\nu_0 \nu_0^a)^{1/2}}{(2\nu_0)^{1/2} + (2\nu_0^a)^{1/2}} - \left(\frac{\nu_0}{2}\right)^{1/2} \right) \vec{D}^2 \bar{f}_{210} \\ &+ \frac{\nu_0}{(2\nu_0)^{1/2} + (2\nu_0^a)^{1/2}} \cdot (\omega_0^a \bar{\rho}_{010}^a)^{-1} \vec{D}^2 \bar{f}_{210}^a + \mathcal{L}(\bar{f}_1, \bar{f}_1^a) \end{aligned} \quad (V,74)$$

où \mathcal{L} désigne une collection de termes où n'apparaissent que des termes d'ordre zéro et un (par exemple \bar{f}_{110} et \bar{f}_{010}^a ) ainsi que le terme suivant :

$$\vec{D} \cdot \left(\int_0^{+\infty} \left\{ \int_0^{\xi} G(\xi, \zeta) \hat{\vec{u}}_0'(\xi) d\xi + \int_{\xi}^{+\infty} G(\xi, \zeta) \hat{\vec{u}}_0'(\zeta) d\zeta \right\} d\xi \right)$$

où on a posé

$$\hat{\vec{u}}_0' = \hat{\vec{v}}_0' - i \vec{k} \wedge \hat{\vec{v}}_0'$$

On utilise alors la relation (V,74) dans (V,72) où \bar{w}_2 est donné par (V,7) pour obtenir :

$$\begin{aligned} \bar{z} = 0, & \left(B_0^{-1} \left(S \frac{\partial}{\partial t} + (\omega_0 \bar{\rho}_0)^{-1} \vec{k} \wedge \vec{D} \bar{f}_1 \cdot \vec{D} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right. \\ & - (\omega_0 \bar{\rho}_0)^{-1} \frac{d\bar{\rho}_0}{d\bar{z}} \left(\frac{(\nu_0 \nu_0^a)^{1/2}}{(2\nu_0)^{1/2} + (2\nu_0^a)^{1/2}} - \left(\frac{\nu_0}{2}\right)^{1/2} \right) \vec{D}^2 \\ & \left. - (\omega_0 B_0 \bar{\rho}_0)^{-1} \vec{k} \wedge \vec{D} \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial \bar{z}} \cdot \vec{D} \right) \bar{f}_2 = \\ & \frac{\nu_0}{(2\nu_0)^{1/2} + (2\nu_0^a)^{1/2}} (\omega_0^a \bar{\rho}_0^a)^{-1} \frac{d\bar{\rho}_0^a}{d\bar{z}} \bar{f}_2^a + \frac{d\bar{\rho}_0}{d\bar{z}} \mathcal{L}(\bar{f}_1, \bar{f}_1^a) . \end{aligned} \quad (V,75)$$

Cette dernière relation est la condition à la limite à associer, en $z=0$, à l'équation (V,9) du modèle agéostrophique.

V.4.5.- Conditions au temps $t=0$ pour les conditions aux limites en $z=-1$ et $z=0$.

Les conditions en $z=-1$ et $z=0$, (V,55) et (V,75) font intervenir un terme en $S\partial/\partial t$, il convient donc d'associer à ces dernières une condition initiale, au temps $t=0$.

Du système (IV,11) on tire pour \tilde{f}_2 l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial z} \right) + \tilde{v}_0 \cdot \vec{D} \left(\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial z} \right) + \tilde{w}_0 \frac{\partial^2 \tilde{f}_1}{\partial z^2} - B_0 \tilde{w}_1 \frac{d}{dz} \bar{p}_0 = 0. \quad (V,76)$$

On va utiliser cette équation pour obtenir la relation cherchée au temps $t=0$ en $z=0$; un travail analogue fournira une condition en $t=0$ et $z=-1$. La relation (c) du système (V,27) qui décrit la couche limite au voisinage de l'interface dans la région locale VI nous permet d'écrire, en tenant compte de (e) du même système :

$$\tilde{w}_1 = \int_0^z \vec{D} \cdot \tilde{v}_0 \, dz \quad (V,77)$$

où $\tilde{v}_0 = \tilde{v}'_0 + \tilde{v}_{0|0}$.

Le raccord avec la région locale II implique que :

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \left(\tilde{w}_1 - \tilde{w}_{1|0} + S \frac{\partial \tilde{w}_{0|0}}{\partial z} \right) = 0. \quad (V,78)$$

Ainsi,

$$\tilde{w}_{110} = \vec{D} \cdot \int_0^{+\infty} \vec{v}'_0(x, y, \omega, t) d\omega. \quad (V,79)$$

La relation (V,76) peut alors s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left(\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial \tilde{z}} \right) + \vec{v}'_0 \cdot \vec{D} \left(\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \tilde{z}} \right) + \tilde{w}_0 \frac{\partial^2 \tilde{f}_1}{\partial \tilde{z}^2} - B_0 \frac{d\bar{p}_0}{d\tilde{z}} \int_0^{+\infty} \vec{D} \cdot \vec{v}'_0 d\omega = 0.$$

Il vient donc en $\tilde{z} = 0$:

$$\tilde{z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left(\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial \tilde{z}} \right) = B_0 \frac{d\bar{p}_0}{d\tilde{z}} \int_0^{+\infty} \vec{D} \cdot \vec{v}'_0 d\omega - \vec{v}'_0 \cdot \vec{D} \left(\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \tilde{z}} \right),$$

puisque d'après (a) de (V,29) on a $\tilde{w}_0 = 0$ et le raccord avec la région II de la région VI entraîne

$$\lim_{\tilde{z} \rightarrow 0} (\tilde{w}_0) = 0 \quad (V,80)$$

on montre de même que l'on a (*)

$$\lim_{\tilde{z} \rightarrow -1} (\tilde{w}_0) = 0. \quad (V,81)$$

Le raccord, entre les régions I et II, des pressions entraîne :

$$\lim_{\tilde{t} \rightarrow +\infty} \left(\tilde{f}_2 - \bar{f}_2^0 - S \tilde{t} \left(\frac{\partial \bar{f}_1}{\partial \tilde{t}} \right)^0 \right) = 0.$$

Ainsi, en $\tilde{z} = 0$

$$\tilde{z} = 0, \quad \lim_{\tilde{t} \rightarrow +\infty} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left(\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial \tilde{z}} \right) \right) = S \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\frac{\partial \bar{f}_1}{\partial \tilde{t}} \right)^0.$$

(*) Remarque : Les deux relations (V,80) et (V,81) ont été utilisées au chapitre III pour établir (III;38) ainsi qu'au chapitre IV pour établir les résultats (IV,37).

On note alors

$$\tilde{\Psi} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \tilde{f}_2 \right)$$

et

$$\tilde{\Psi}_0^\infty = \lim_{\tilde{t} \rightarrow +\infty} (\tilde{\Psi}|_{\tilde{z}=0})$$

il vient alors, en supposant l'existence des intégrales :

$$\int_0^{\tilde{t}} \tilde{\Psi} d\tilde{\omega} = \tilde{t} \tilde{\Psi}_0^\infty + \int_0^{\tilde{t}} (\tilde{\Psi} - \tilde{\Psi}_0^\infty) d\tilde{\omega}$$

avec

$$\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}(x, y, \tilde{z}, \tilde{\omega})$$

soit encore, en $\tilde{z} = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \tilde{f}_2 - \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \tilde{f}_2 \right)^0 - S \tilde{t} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \tilde{f}_1 \right)^0 = \int_0^{\tilde{t}} \left\{ (B_0 \frac{d\tilde{e}_0}{d\tilde{z}} \int_0^{+\infty} \tilde{D} \cdot \tilde{v}_0' d\tilde{\omega} - \tilde{v}_0 \cdot \tilde{D} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \tilde{f}_1 \right)) - \tilde{\Psi}_0^\infty \right\} d\tilde{\omega}$$

Par passage à la limite sur \tilde{t} on obtient donc

$$\tilde{z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \tilde{f}_2^0 = \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \tilde{f}_2^0 + \int_0^{+\infty} (\tilde{\Psi} - \tilde{\Psi}_0^\infty) d\tilde{\omega} \quad (V,82)$$

quand on fait la décomposition suivante pour le champ de pression initial :

$$\tilde{f}^0 = \tilde{f}_0(\tilde{z}) + R_0 \tilde{f}_1^0 + R_0^2 \tilde{f}_2^0 + O(R_0^3).$$

Lorsqu'une telle décomposition s'avère impossible, (V,82) se réduit à :

$$\tilde{z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \tilde{f}_2^0 = \int_0^{+\infty} (\tilde{\Psi} - \tilde{\Psi}_0^\infty) d\tilde{\omega}.$$

Une question reste à élucider : celle de l'intégrabilité de l'écart $(\tilde{\Psi} - \tilde{\Psi}^\infty)$ pour $z = 0$.

La relation (V,82) est la condition, en $z = 0$, qu'il faut associer au temps $t = 0$ à la condition limite en $z = 0$ donnée par (V,75).

D'une façon analogue on a :

$$z = -1, \quad \frac{\partial \bar{f}_2^0}{\partial z} = \frac{\partial \bar{f}_2^0}{\partial z} + \int_0^{+\infty} (\tilde{\Theta} - \tilde{\Theta}_{-1}) d\tilde{\omega} \quad (\text{V,83})$$

avec

$$\tilde{\Theta}_{-1} = - \left(B_0 \frac{d\bar{p}_0}{dz} \int_0^{+\infty} \vec{D} \cdot \vec{v}'_0 d\omega + \vec{v}_0 \cdot \vec{D} \left(\frac{\partial \bar{f}_1}{\partial z} \right) \right)_{z=-1}$$

où

$$\vec{v}'_0 = \vec{v}'_{0|-1} + \vec{v}'_0, \quad \vec{v}_0 = \vec{v}_{0|-1} + \vec{v}_0$$

et

$$\tilde{\Theta}_{-1}^\infty = S \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \bar{f}_1}{\partial t} \right)_{z=-1}^{t=0}.$$

Pour conclure ce chapitre on va formuler le problème d'évolution agéostrophique comme on l'a fait au chapitre IV pour la pression \bar{f}_1 où on avait formulé le problème d'évolution quasi-géostrophique.

V.4.6.- Le problème d'évolution agéostrophique

Le problème d'évolution agéostrophique pour \bar{f}_2 est constitué par les relations (V,9), (V,41), (V,55), (V,75), (V,82) et (V,83); on peut donc formuler le système aux limites suivant pour la composante \bar{f}_2 du développement asymptotique (VI,1) :

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & S \frac{D_0}{Dt} (\wedge \bar{T}_2) + \omega_0^{-1} \beta \frac{\partial}{\partial x} \bar{T}_2 + (\omega_0 \bar{\rho}_0)^{-1} \vec{k} \wedge \vec{D} \bar{T}_2 \cdot \vec{D} \bar{T}_1 \\
 & + (\omega_0 B_0 \bar{\rho}_0)^{-1} (\vec{k} \wedge \vec{D} \bar{T}_1 \cdot \vec{D} (\frac{\partial}{\partial y} \bar{T}_2) + \vec{k} \wedge \vec{D} \bar{T}_2 \cdot \vec{D} (\frac{\partial}{\partial y} \bar{T}_1)) \\
 & = \vec{D} \cdot \vec{A} + \bar{\rho}_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{C}{d\bar{\rho}_0/dy} \right);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad t=0, \quad & \wedge \bar{T}_2 = \bar{\rho}_0(z) \vec{k} \cdot \vec{D} \wedge \vec{v}_1^0 + B_0^{-1} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho}_0 K_0 \frac{\partial}{\partial y} (\frac{T_2^0}{\bar{\rho}_0})) \\
 & - \bar{\rho}_0(z) \left(\frac{1}{2} (\vec{D} \wedge \vec{v}_0^0)^2 + \beta_y \vec{k} \cdot \vec{D} \wedge \vec{v}_0^0 \right) + \omega_0^{-1} \left(\right. \\
 & (2\bar{\rho}_0)^{-1} (\vec{D}^2 \bar{T}_1^0)^2 + \beta_y \vec{D}^2 \bar{T}_1^0 + (\bar{\rho}_0 \beta_y - B_0^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \bar{T}_1^0) \vec{D}^2 \bar{T}_1^0 + \\
 & \left. (\bar{\rho}_0 \beta_y - B_0^{-1} \vec{D} (\frac{\partial}{\partial y} \bar{T}_1^0)) \cdot \vec{D} \bar{T}_1^0 + \vec{D} \cdot (\vec{v}_0^0 \cdot \vec{D} \vec{v}_0^0) + P \int_0^\infty \vec{D} d\omega \right);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad z=-1, \quad & (B_0^{-1} (S \frac{\partial}{\partial t} + (\omega_0 \bar{\rho}_0)^{-1} \vec{k} \wedge \vec{D} \bar{T}_1 \cdot \vec{D}) \frac{\partial}{\partial y} - (\omega_0 \bar{\rho}_0)^{-1} \frac{d\bar{\rho}_0}{dz} (\tau_0)^{1/2} \vec{D}^2 \\
 & - (\omega_0 B_0 \bar{\rho}_0)^{-1} \vec{k} \wedge \vec{D} (\frac{\partial}{\partial y} \bar{T}_1) \cdot \vec{D}) \bar{T}_2 = \nabla(\bar{T}_1) \cdot \frac{d\bar{\rho}_0}{dz};
 \end{aligned} \quad \text{(v,84)}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(d)} \quad z=0, \quad & (B_0^{-1} (S \frac{\partial}{\partial t} + (\omega_0 \bar{\rho}_0)^{-1} \vec{k} \wedge \vec{D} \bar{T}_1 \cdot \vec{D}) \frac{\partial}{\partial y} - (\omega_0 \bar{\rho}_0)^{-1} \frac{d\bar{\rho}_0}{dz} \left(\right. \\
 & \frac{(\nu_0 \nu_0^a)^{1/2}}{(2\nu_0)^{1/2} + (2\nu_0^a)^{1/2}} - \left. \left(\frac{\nu_0}{2} \right)^{1/2} \right) \vec{D}^2 - (\omega_0 B_0 \bar{\rho}_0)^{-1} \vec{k} \wedge \vec{D} (\frac{\partial}{\partial y} \bar{T}_1) \cdot \vec{D}) \bar{T}_2 \\
 & = \frac{\nu_0}{(2\nu_0)^{1/2} + (2\nu_0^a)^{1/2}} (\omega_0^a \bar{\rho}_0^a)^{-1} \frac{d\bar{\rho}_0}{dz} \bar{T}_2^a + \frac{d\bar{\rho}_0}{dz} \mathcal{L}(\bar{T}_1, \bar{T}_1^a);
 \end{aligned}$$

$$\text{(e)} \quad t=0 \quad \left\{ \begin{aligned}
 z=0, \quad & \frac{\partial}{\partial y} \bar{T}_2^0 = \frac{\partial}{\partial y} T_2^0 + \int_0^{+\infty} (\tilde{\Psi} - \tilde{\Psi}_0^\infty) d\tilde{\omega}; \\
 z=-1, \quad & \frac{\partial}{\partial y} \bar{T}_2^0 = \frac{\partial}{\partial y} T_2^0 + \int_0^{+\infty} (\tilde{\Theta} - \tilde{\Theta}_{-1}^\infty) d\tilde{\omega};
 \end{aligned} \right.$$

où l'on se reportera aux équations citées pour la signification des différentes notations utilisées dans ce système.

VI.- INFLUENCE D'UNE VISCOSITE VARIABLE.

On élabore, à partir d'une idée de ZEYTOUNIAN (1983; non publié), un modèle asymptotique pour des nombres de Rossby petits qui permet d'inclure une sous-couche visqueuse dans la couche d'Ekman au voisinage du fond. L'écoulement est supposé stationnaire. Cette sous-couche visqueuse est induite par l'introduction d'un coefficient de viscosité dynamique variant sur une petite échelle relativement à l'échelle $O(R_0)$ de la couche d'Ekman. On met en évidence et on explicite le mécanisme d'interaction couche-limite — sous-couche visqueuse en précisant le choix de R_0^2 pour la petite échelle microscopique. Le problème d'Ackerblom de seconde approximation pour la vitesse dans la couche d'Ekman est formulé lorsque la densité volumique est supposée constante.

VI.1.- INTRODUCTION

Le point de départ de cette étude est la prise en compte d'un coefficient de viscosité dynamique variable dans les équations de Navier-Stokes.

On suppose l'écoulement stationnaire et on étudie le voisinage du fond qui est, par hypothèse, plat. La viscosité dynamique variable est caractérisée sous la forme suivante :

$$\mu = \mu_0 \left(\mu_m \left(\frac{z+1}{\delta_1} \right) + \mu_{fl} \left(\frac{z+1}{\delta_2} \right) \right) \quad (\text{VI},1)$$

où μ_0 est une viscosité, constante, de référence et δ_1 et δ_2 sont deux jauges liées à R_0 :

$$\delta_1 = \delta_1(R_0), \quad \text{et} \quad \lim_{R_0 \downarrow 0} (\delta_1) = 0 \quad (\text{VI},2)$$

$$\delta_2 = \delta_2(R_0), \quad \text{et} \quad \lim_{R_0 \downarrow 0} (\delta_2) = 0.$$

L'indice "m" caractérise un coefficient moyen, laminaire, directement lié à la couche limite d'Ekman classique d'épaisseur $O(R_0)$, ce qui conduit à faire le choix de :

$$\delta_1(R_0) = R_0. \quad (\text{VI},3)$$

L'indice "fl" caractérise un coefficient, fluctuant, microscopique directement lié à l'émergence d'une sous-couche visqueuse au voisinage immédiat du fond; on supposera dans tout ce qui suit que l'on a :

$$\lim_{R_0 \downarrow 0} (\delta_2(R_0)/R_0) = 0. \quad (\text{VI},4)$$

C'est-à-dire que l'on suppose la jauge δ_2 , qui caractérise l'épaisseur de la sous-couche visqueuse, beaucoup plus petite que l'épaisseur de la couche d'Ekman.

Ce qui suit a pour but d'établir un modèle en trois couches : fluide parfait, couche d'Ekman (couche limite laminaire) et sous-couche visqueuse, en tirant profit du double passage à la limite

$$R_0 \downarrow 0, \quad \delta_2(R_0) \downarrow 0. \quad (\text{VI},5)$$

Il est bien évident que cette modélisation dépend, a priori, de la façon dont les deux paramètres R_0 et $\delta_2(R_0)$ tendent vers zéro; cela signifie qu'il faudra déterminer la relation de similitude liant R_0 et $\delta_2(R_0)$ pour laquelle on obtient un modèle le plus significatif qui permette la construction d'un développement asymptotique uniformément valable de la solution recherchée.

VI.2.- FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

On considère les équations adimensionnées suivantes :

$$(a) \quad \rho(R_0(\vec{v} \cdot \vec{D} \vec{v} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z})) + (1 + R_0 \beta y) \vec{k} \wedge \vec{v}$$

$$= -\frac{1}{\omega_0 R_0} \vec{D} \uparrow + E_1 \frac{\partial}{\partial z} (\mu(z) \frac{\partial \vec{v}}{\partial z});$$

$$(b) \quad \frac{\partial \uparrow}{\partial z} + B_0 \cdot \rho = 0;$$

$$(c) \quad \vec{D} \cdot \vec{v} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$

(VI,6)

$$(d) \quad \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0;$$

$$(e) \quad \bar{z} = -1, \quad \vec{v} = \vec{0}, \quad w = 0,$$

où

$$\bar{\mu}(\bar{z}) = \mu_m((\bar{z}+1)/R_0) + \mu_{fr}((\bar{z}+1)/\delta_2(R_0)).$$

Ces équations sont établies dans notre annexe 2. On a fait l'hypothèse que μ_m et μ_{fr} et leurs dérivées premières restent bornées lors des divers processus limites liés à $R_0 \downarrow 0$.

De plus on supposera que :

$$\mu_m(+\infty) = 1, \quad \mu_{fr}(+\infty) = 0. \quad (VI,7)$$

Lorsque l'on fait tendre R_0 vers zéro dans le système (VI,6) on considère en premier lieu le passage à la limite quasi-géostrophique défini en (II,6) auquel on associe conjointement le développement principal.

$$\begin{pmatrix} \vec{v} \\ w \\ \tau \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_0 \\ 0 \\ \bar{f}_0(\bar{z}) \\ \bar{\rho}_0 \end{pmatrix} + R_0 \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{f}_1 \\ \bar{\rho}_1 \end{pmatrix} + \dots \quad (VI,8)$$

Le terme visqueux de l'équation (a) de (VI,6) disparaît et on retrouve pour les composantes du développement (VI,8) les résultats du chapitre IV.

Pour l'analyse asymptotique qui suit il est nécessaire au niveau de (VI,6) de passer à la variable de couche limite

$$\zeta_1 = (\zeta + 1) / R_0, \quad (\text{VI},9)$$

et de considérer le développement local suivant :

$$\begin{pmatrix} \vec{v}(x, y, -1 + R_0 \zeta_1) \\ w(x, y, -1 + R_0 \zeta_1) \\ f(x, y, -1 + R_0 \zeta_1) \\ p(x, y, -1 + R_0 \zeta_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\vec{v}}(x, y, \zeta_1) \\ \hat{w}(x, y, \zeta_1) \\ \hat{f}(x, y, \zeta_1) \\ \hat{p}(x, y, \zeta_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\vec{v}}_0 \\ 0 \\ \hat{f}_0 \\ \hat{p}_0 \end{pmatrix} + R_0 \begin{pmatrix} \hat{\vec{v}}_1 \\ \hat{w}_1 \\ \hat{f}_1 \\ \hat{p}_1 \end{pmatrix} + \dots \quad (\text{VI},10)$$

On pose

$$\Delta = \delta_2(R_0) / R_0 \ll 1 \quad (\text{VI},11)$$

il vient alors à la place de (VI,6) le problème suivant :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \hat{e} (R_0 \hat{\vec{v}} \cdot \vec{D} \hat{\vec{v}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{\vec{v}}}{\partial \zeta_1} + (1 + R_0 \beta y) \vec{k} \wedge \hat{\vec{v}}) \\ & = -\frac{1}{\omega_0 R_0} \vec{D} \hat{f} + \hat{E}_\perp \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left((\mu_m(\zeta_1) + \mu_{fe}(\zeta_1 / \Delta)) \frac{\partial \hat{\vec{v}}}{\partial \zeta_1} \right); \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad \frac{\partial \hat{f}}{\partial \zeta_1} + R_0 B_0 \cdot \hat{p} = 0;$$

$$\text{(c)} \quad \frac{\partial \hat{w}}{\partial \zeta_1} + R_0 \vec{D} \cdot \hat{\vec{v}} = 0;$$

(VI,12)

$$(d) \quad R_0 \hat{\vec{v}} \cdot \vec{D} \hat{p} + \hat{w} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \zeta_1} = 0;$$

$$(e) \quad \zeta_1 = 0, \quad \hat{\vec{v}} = \vec{0}, \quad \hat{w} = 0.$$

VI.3.- COUCHE LIMITE D'EKMAN LAMINAIRE AVEC VISCOSITE VARIABLE

Le processus limite

$$\left\{ R_0 \downarrow 0 \text{ avec } \hat{E}_1, x, y, \zeta_1 \text{ fixés} \right\}$$

conduit, pour les fonctions limites du développement local (VI,10) aux équations de la couche limite laminaire avec viscosité variable (on note de la même façon la fonction et sa limite).

$$(a) \quad \bar{\rho}_{01-1} \hat{\vec{v}}_0 + \omega_0^{-1} \vec{D} \bar{\tau}_{11-1} = \hat{E}_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} (\mu_m(\zeta_1) \frac{\partial \hat{\vec{v}}_0}{\partial \zeta_1});$$

$$(b) \quad \vec{D} \cdot \hat{\vec{v}}_0 + \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial \zeta_1} = 0;$$

(VI,13)

on rappelle que

$$\hat{\tau}_1 = \bar{\tau}_{11-1} + \zeta_1 \frac{d}{dz} \bar{\tau}_{01-1}.$$

Aux équations (VI,13) on associe les conditions de comportement obtenues par le raccord avec la solution extérieure, soit encore :

$$\lim_{\zeta_1 \rightarrow +\infty} (\hat{\vec{v}}_0) = \bar{\vec{v}}_{01-1}.$$

Le coefficient $\mu_{fe}(+\infty)$ étant nul on perd donc, au niveau de l'équation (a) du système (VI,13), toute information concernant l'influence de ce terme; de ce fait on est amené à considérer un troisième passage à la

limite qui permette, lui, d'en tenir compte.

VI.4.- SOUS-COUCHE VISQUEUSE

On revient au système (VI,12) et on considère le passage à la limite local suivant :

$$\{ R_0 \downarrow 0, \text{ avec } \hat{E}_\perp, x, y, \zeta_2 = \zeta_1 / \Delta \text{ fixés } \} \quad (\text{VI},14)$$

Il vient pour les premiers termes du développement asymptotique associé :

$$\left. \begin{aligned} \hat{v}(x, y, \Delta \zeta_2) &\equiv \underline{v}(x, y, \zeta_2) = R_0^\alpha \underline{v}_0(x, y, \zeta_2) + \dots \\ \hat{w}(x, y, \Delta \zeta_2) &\equiv \underline{w}(x, y, \zeta_2) = R_0^\beta \underline{w}_0(x, y, \zeta_2) + \dots \\ \hat{f}(x, y, \Delta \zeta_2) &\equiv \underline{f}(x, y, \zeta_2) = \underline{f}_0(x, y, \zeta_2) + \dots \\ \hat{p}(x, y, \Delta \zeta_2) &\equiv \underline{p}(x, y, \zeta_2) = \underline{p}_0(x, y, \zeta_2) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI},15)$$

les équations de sous-couche visqueuse suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \text{(a)} \quad \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \left((\mu_m(0) + \mu_{fr}(\zeta_2)) \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \underline{v}_0 \right) &= \vec{0} ; \\ \text{(b)} \quad \vec{D}_0 \cdot \underline{v}_0 + \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \underline{w}_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI},16)$$

Le raccord de la sous-couche visqueuse avec la couche limite laminaire d'Ekman conduit, en utilisant le raccord de la couche laminaire avec l'écoulement principal $(\underline{v}_0, \underline{f}_0, \underline{p}_0)$, aux résultats suivants :

$$\underline{f}_0 = \underline{f}_{0l-1}, \quad \underline{p}_0 = \underline{p}_{0l-1} \quad (\text{VI},17)$$

Le système (VI,16) s'obtient après que l'on ait fait l'hypothèse que l'on a :

$$\Delta = R_0^\lambda$$

$$\delta_2 = R_0^{\lambda+1} \quad (\text{VI,18})$$

et $\beta = \alpha + \lambda$
 α , β et λ restant à ce stade à déterminer.

Aux équations (VI,16) on peut associer les conditions aux limites :

$$\zeta_2 = 0, \quad \vec{v}_0 = \vec{0}, \quad \vec{\omega}_0 = 0. \quad (\text{VI,19})$$

C'est le raccord de (VI,10) avec (VI,15) qui va nous permettre d'être en mesure d'écrire des conditions aux limites en $\zeta_1 = 0$ pour les équations de la couche limite laminaire (VI,13); nous déterminerons lors de ces raccords les exposants α et β ce qui nous donnera λ .

On revient d'abord à (VI,16); on tire de la relation (a) la solution

$$\vec{v}_0(x, y, \zeta_2) = \vec{A}_0(x, y) \int_0^{\zeta_2} (\mu_m(0) + \mu_{fl}(\omega))^{-1} d\omega = \vec{A}_0 \vec{U}_0(\zeta_2) \quad (\text{VI,20})$$

et il nous faut connaître le comportement de $\vec{U}_0(\zeta_2)$ pour des ζ_2 grands. La fonction $\vec{A}_0(x, y)$ est pour l'instant arbitraire.

Si on impose à $\mu_{fl}(\zeta_2)$ les contraintes nécessaires à la convergence de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\mu_m(0) + \mu_{fl}(\zeta_2)} - \frac{1}{\mu_m(0)} \right) d\zeta_2$$

alors, lorsque $\zeta_2 \rightarrow +\infty$, on peut écrire :

$$\tilde{U}_0(\xi_2) = \xi_2 / \mu_m(0) + v_\infty^0 + \epsilon t z \quad (\text{VI},21)$$

où $\epsilon t z$ désigne une collection de termes qui tendent vers 0 avec $1/\xi_2$
et où on note

$$v_\infty^0 = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\mu_m(0) + \mu_{pe}(\xi_2)} - \frac{1}{\mu_m(0)} \right) d\xi_2.$$

Ainsi on a, pour ξ_2 grand :

$$\tilde{V}_0(x, y, \xi_2) = \vec{A}_0(x, y) \cdot \left(\xi_2 / \mu_m(0) + v_\infty^0 + \epsilon t z \right).$$

Pour obtenir (VI,21) on a écrit :

$$\tilde{U}_0(\xi_2) - \int_0^{\xi_2} \frac{d\omega}{\mu_m(0)} = \int_0^{\xi_2} \left(\frac{1}{\mu_m(0) + \mu_{pe}(\omega)} - \frac{1}{\mu_m(0)} \right) d\omega$$

soit encore :

$$\begin{aligned} \tilde{U}_0(\xi_2) - \xi_2 / \mu_m(0) &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\mu_m(0) + \mu_{pe}(\omega)} - \frac{1}{\mu_m(0)} \right) d\omega \\ &\quad - \int_{\xi_2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\mu_m(0) + \mu_{pe}(\omega)} - \frac{1}{\mu_m(0)} \right) d\omega \\ &= v_\infty^0 + \epsilon t z. \end{aligned}$$

D'autre part, lorsque ζ_2 tend vers zéro, la solution $\hat{\vec{v}}_0$ des équations de la couche limite laminaire se comporte comme :

$$\hat{\vec{v}}_{0|0} + \zeta_1 \frac{\partial \hat{\vec{v}}_0}{\partial \zeta_1} \Big|_{\zeta_1=0} + \dots \quad \text{pour } \zeta_1 \sim 0. \quad (\text{VI},22)$$

Le raccord des vitesses $\hat{\vec{v}}_0$ et \vec{w}_0 entraîne :

$$\begin{aligned} \hat{\vec{v}}_{0|0} &= \hat{\vec{v}}_0(x, y, 0) = \vec{0} \\ \alpha = \lambda, \quad \vec{A}_0(x, y) &= \mu_m(0) \frac{\partial \hat{\vec{v}}_0}{\partial \zeta_1} \Big|_{\zeta_1=0}. \end{aligned} \quad (\text{VI},23)$$

Une fois \vec{w}_0 déterminée par la formule (VI,20) dans laquelle on remplace \vec{A}_0 par l'expression trouvée en (VI,23) on obtient

$$\vec{w}_0 = -\vec{D} \cdot \int_0^{\zeta_2} \mu_m(0) \frac{\partial \hat{\vec{v}}_0}{\partial \zeta_1} \Big|_{\zeta_1=0} \cdot \tilde{U}_0(\omega) d\omega,$$

et d'après (VI,21)

$$\begin{aligned} \vec{w}_0(x, y, \zeta_2) &\sim -\mu_m(0) \vec{D} \cdot \left(\frac{\partial \hat{\vec{v}}_0}{\partial \zeta_1} \Big|_0 \right) \left(v_\infty^0 \zeta_2 \right. \\ &\quad \left. + \zeta_2^2 / 2\mu_m(0) + \vec{w}_0^\infty + \dots \right), \text{ lorsque } \zeta_2 \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (\text{VI},24)$$

où on note

$$\vec{w}_0^\infty = \int_0^{+\infty} (\tilde{U}_0(\omega) - v_\infty^0) d\omega.$$

D'autre part, on a pour ζ_1 proche de zéro :

$$\hat{w}_1(x, y, \zeta_1) = \hat{w}_1(x, y, 0) + \frac{1}{2} \zeta_1^2 \frac{\partial^2 \hat{w}_1}{\partial \zeta_1^2} \Big|_{\zeta_1=0} + \dots \quad (\text{VI,25})$$

puisque $\frac{\partial \hat{w}_1}{\partial \zeta_1} = -\vec{D} \cdot \hat{\vec{v}}_0 = 0$ pour $\zeta_1 = 0$ d'après (VI,23).

Le raccord de (VI,24) avec (VI,25) conduit à :

$$\hat{w}_1(x, y, 0) = 0 \quad (\text{VI,26})$$

et il n'y a aucune condition à imposer sur λ puisque :

$$\zeta_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 \hat{w}_1}{\partial \zeta_1^2} = -\vec{D} \cdot \left(\frac{\partial \hat{\vec{v}}_0}{\partial \zeta_1} \right) = -\frac{1}{\mu_m(0)} \vec{D} \cdot \vec{A}_0. \quad (\text{VI,27})$$

En première approximation on a donc, pour la couche limite avec viscosité variable :

$$\left. \begin{aligned} \text{(a)} \quad & \bar{P}_{01-1} \vec{k} \wedge \hat{\vec{v}}_0 + \omega_0^{-1} \vec{D}_{11-1} = \hat{E}_L \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\mu_m(\zeta_1) \frac{\partial \hat{\vec{v}}_0}{\partial \zeta_1} \right); \\ \text{(b)} \quad & \vec{D} \cdot \hat{\vec{v}}_0 + \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial \zeta_1} = 0; \\ \text{(c)} \quad & \zeta_1 = 0, \quad \hat{\vec{v}}_0 = \vec{0}, \quad \hat{w}_1 = 0; \\ \text{(d)} \quad & \lim_{\zeta_1 \rightarrow +\infty} (\hat{\vec{v}}_0) = \vec{v}_{01-1}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI,28})$$

On peut ainsi constater qu'à cet ordre il n'y a pas d'interaction entre la couche limite laminaire avec viscosité variable et la sous-couche visqueuse.

VI.5.- MISE EN EVIDENCE DE L'INTERACTION COUCHE LIMITE LAMINAIRE —

SOUS-COUCHE VISQUEUSE

Au vu des résultats de l'analyse asymptotique effectuée ci-dessus, on constate qu'en première approximation il faut résoudre le problème de la couche limite laminaire avec viscosité variable (VI,28) où apparaissent les conditions aux frontières classiques. C'est cela qui nous fait dire qu'il n'y a pas, à cet ordre, interaction entre les deux couches.

De plus, au niveau de cette approximation l'exposant λ qui doit préciser la relation de similitude

$$\delta_2(R_0) = R_0^{\lambda+1} \ll R_0 \quad (\text{VI,29})$$

entre les jauges δ_2 et R_0 , reste indéterminée.

C'est l'étude de l'interaction couche limite laminaire — sous-couche visqueuse qui va nous fournir la valeur de λ .

On a pour les composantes \hat{v}_1 , \hat{w}_2 , \hat{f}_2 et \hat{p}_2 du développement (VI,10) les équations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \text{(a)} \quad & \bar{p}_{01-1} (\hat{v}_0 \cdot \vec{D} \hat{v}_0 + \hat{w}_1 \frac{\partial \hat{v}_0}{\partial \xi_1} + \beta y \vec{k} \wedge \hat{v}_0) + \hat{p}_1 \vec{k} \wedge \hat{v}_0 \\ & + \bar{p}_{01-1} \vec{k} \wedge \hat{v}_1 + \omega_0^{-1} \vec{B} \hat{f}_2 = \hat{E}_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} (\mu_m(\xi_1) \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial \xi_1}); \\ \text{(b)} \quad & \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial \xi_1} + B_0 \hat{p}_1 = 0; \\ \text{(c)} \quad & \hat{v}_0 \cdot \vec{D} \hat{p}_1 + \hat{w}_1 \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial \xi_1} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI,30})$$

Le raccord des vitesses horizontales dans la couche limite laminaire avec celles de la sous-couche visqueuse entraîne, avec le choix de $\alpha = 1$:

$$\hat{v}_1(x, y, 0) = \vec{A}_0(x, y) v_\infty^0 \quad (\text{VI}, 31)$$

où on a

$$\vec{A}_0(x, y) = \mu_m(0) \frac{\partial \hat{v}_0}{\partial \zeta_1} \Big|_{\zeta_1=0}.$$

Par conséquent, puisque $\lambda = \alpha$ il vient :

$$\lambda = 1, \quad \beta = 2. \quad (\text{VI}, 32)$$

Les développements asymptotiques de la solution de sous-couche visqueuse s'écrivent donc :

$$\left. \begin{aligned} \zeta^{\underline{u}} &= R_0 \underline{v}_0 + R_0^2 \underline{v}_1 + \dots \\ \zeta^{\underline{w}} &= R_0^2 \underline{w}_0 + \dots \\ \underline{f} &= \bar{f}_{01-1} + R_0 \underline{f}_1 + \dots \\ \underline{p} &= \bar{p}_{01-1} + R_0 \underline{p}_1 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI}, 32)$$

avec $\underline{f}_1 = \underline{f}_1(x, y)$ puisque $\partial / \partial \zeta_2 \underline{f} + R_0^2 B_0 \underline{p} = 0$ entraîne que ni \underline{f}_0 ni \underline{f}_1 ne dépendent de ζ_2 . Par ailleurs, le raccord de \underline{f} avec \hat{f} , à l'ordre R_0 impose que l'on ait

$$\underline{f}_1(x, y) = \bar{f}_1(x, y, -1) = \bar{f}_{11-1}. \quad (\text{VI}, 33)$$

Il vient donc pour \vec{v}_1 et \vec{w}_1 les équations de sous-couche visqueuse, de seconde approximation, suivantes:

$$\left. \begin{aligned} \text{(a)} \quad \hat{E}_\perp \frac{\partial}{\partial s_2} \left((\mu_m(0) + \mu_{ff}(s_2)) \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial s_2} \right) &= \omega_0^{-1} \vec{D} \vec{F}_{11-1} ; \\ \text{(b)} \quad \vec{D} \cdot \vec{v}_1 + \frac{\partial \vec{w}_1}{\partial s_2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad \text{(VI,34)}$$

Cette description asymptotique est liée au processus limite

$$R_0 \downarrow 0, \quad \delta_2(R_0) = R_0^2 \downarrow 0,$$

ce processus limite conduit au modèle le plus significatif et à une sous-couche visqueuse d'épaisseur R_0^2 .

VI.6.- PROBLEME D'ACKERBLOM DE SECONDE APPROXIMATION POUR $\hat{\vec{v}}_1$

On fait l'hypothèse supplémentaire de la densité volumique constante pour obtenir à partir de (VI,38) le problème d'Ackerblom de seconde approximation pour $\hat{\vec{v}}_1$:

$$\left. \begin{aligned} \text{(a)} \quad \hat{E}_\perp \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\mu_m(s_1) \frac{\partial \hat{\vec{v}}_1'}{\partial s_1} \right) - \vec{R} \wedge \hat{\vec{v}}_1' &= \hat{Q}_0'(s_1) ; \\ \text{(b)} \quad s_1 = 0, \quad \hat{\vec{v}}_1' &= \vec{A}_0(x, y) v_\infty^0 - \vec{v}_1 ; \\ \text{(c)} \quad \lim_{s_1 \rightarrow \infty} (\hat{\vec{v}}_1') &= \vec{0} ; \end{aligned} \right\} \quad \text{(VI,35)}$$

où $\hat{\vec{v}}_0 = \vec{v}_0 + \hat{\vec{v}}_0'$; $\hat{\vec{v}}_1 = \vec{v}_1 + \hat{\vec{v}}_1'$,

et $\hat{Q}_0'(s_1) = \beta y \vec{R} \wedge \vec{v}_0' + \vec{v}_0' \cdot \vec{D} (\vec{v}_0' + \vec{v}_0) + \hat{w}_1 \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial s_1}$,

lorsque l'on utilise les résultats du chapitre III, notamment pour le calcul de $\hat{Q}'_0(\zeta_1)$.

Si on ne suppose plus ρ constante le problème d'Ackerblom pour \hat{v}_1 reste identique à la modification près du second membre de (a) de (VI,35), mais la nature du problème reste le même; cette hypothèse supplémentaire n'apporte qu'une simplification des calculs.

On rappelle que l'on a :

$$\vec{A}_0(x, y) = \mu_m(0) \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \hat{v}_0 \Big|_{\zeta_1=0}$$

et

$$\hat{v}_0 = \bar{v}_0 + e^{-\gamma \zeta_1} (\vec{k} \wedge \bar{v}_0 \sin \gamma \zeta_1 - \bar{v}_0 \cos \gamma \zeta_1)$$

où

$$\gamma = (2\hat{E}_L)^{-1/2}$$

par conséquent :

$$\vec{A}_0(x, y) = (2\hat{E}_L)^{-1/2} \mu_m(0) \cdot (\bar{v}_0 + \vec{k} \wedge \bar{v}_0). \quad (\text{VI}, 36)$$

Il faut encore noter que l'on a supposé, dans ce §, que l'on a :

$$\mu_m \equiv 1.$$

Cette hypothèse semble d'ailleurs plus près de la réalité que celle qui consiste à supposer μ_m variable (voir la Note de S. GODTS et R. ZEYTOUNIAN, à paraître).

ANNEXE 1

La méthode des développements asymptotiques raccordés (MDAR).
Techniques de raccord.

INTRODUCTION

Notre but n'est pas tant de faire un exposé rigoureux comme dans ECKHAUS (1969; 1973; 1979), que de montrer comment on peut utiliser la technique des développements raccordés dans des problèmes de couche limite en Mécanique des Fluides (COLE et KEVORKIAN, 1981; NAYFEH, 1973). Dans ce qui suit un certain formalisme est mis en place : il servira de cadre dans tout notre travail.

I. DEFINITIONS.I.1.- APPROXIMATIONS ASYMPTOTIQUESI.1.1.- Approximations régulières.

Une fonction d'ordre (ou de jauge, ou jauge), $\delta(\varepsilon)$, est une fonction du petit paramètre ε , définie, continue et positive sur l'ouvert $]0, \varepsilon_0[$ telle que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon)$ existe. Par la suite on suppose que la fonction $\phi(\vec{x}, \varepsilon)$ est définie sur le fermé borné $\bar{\mathcal{D}}$; \mathcal{D} désigne le plus grand ouvert inclus dans $\bar{\mathcal{D}}$.

Pour comparer deux fonctions d'ordre δ_1 et δ_2 on utilise les symboles (de Landau) :

$\delta_1 = O(\delta_2)$, s'il existe k , constante telle que

$$\delta_1 < k \delta_2, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$$

$\delta_1 = o(\delta_2)$, si $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\delta_1 / \delta_2) = 0$.

(1)

On dit que la fonction $\phi_0(\vec{x}, \varepsilon)$ est une approximation asymptotique de la fonction ϕ dans \mathcal{D} si on a

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}, \varepsilon) &= O_S(1), \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{D} \\ \phi - \phi_0 &= o(1), \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{D} \end{aligned} \quad (2)$$

où $\delta_1 = O_S(\delta_2)$ si $\delta_1 = O(\delta_2)$ et $\delta_1 \neq o(\delta_2)$.

On peut alors définir (ECKHAUS; 1973) l'approximation asymptotique d'ordre supérieur :

$$\phi - \phi_0 = \bar{\delta}_1 \bar{\phi}_0; \quad \bar{\phi}_0 = O_S(1), \quad \bar{\delta}_1 = o(1).$$

En répétant l'opération m -fois il vient

$$\phi(\vec{x}, \varepsilon) = \sum_0^m \delta_m \bar{\phi}_m(\vec{x}, \varepsilon) + \delta_{m+1} \phi_m$$

où $\phi_m = O_S(1), \bar{\phi}_m = O_S(1); \delta_0 = 1, \delta_m = \bar{\delta}_1 \dots \bar{\delta}_m$ (3)

et $\delta_{m+1} = o(\delta_m)$.

Lorsque l'on peut itérer ce procédé pour tout m on obtient alors une série asymptotique donnée par

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \phi(\vec{x}, \varepsilon) = \sum_0^m \delta_m \bar{\phi}_m + O(\delta_{m+1}). \quad (4)$$

On appelle régulière toute approximation (resp. série) asymptotique pour laquelle on a ϕ_0 (resp. ϕ_m) indépendant (\triangleright) de ε . Si la limite $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\phi/\delta)$ existe et est non identiquement nulle alors l'approximation régulière de ϕ est donnée par

$$\phi = \delta \phi_0(\vec{x}) + o(\delta),$$

$$\phi_0(\vec{x}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} (\phi / \delta).$$

En utilisant la définition précédente d'une approximation régulière on a alors l'énoncé suivant :

Une approximation asymptotique ϕ_{as} de $\phi = O_\delta(1)$ est régulière si

$$\phi_{as} = \sum_0^m \delta_m(\varepsilon) \phi_m(\vec{x}) \tag{5}$$

$$\phi - \phi_{as} = o(\delta_m)$$

où

$$\phi_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi$$

$$\phi_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\delta^n} \left(\phi - \sum_0^{n-1} \delta_k \phi_k \right), \quad n = 1, 2, \dots, m.$$

1.1.2.- Perturbations régulières et singulières

On considère des problèmes où $\phi(\vec{x}, \varepsilon)$ est solution de l'équation différentielle

$$L_\varepsilon \phi = h(\vec{x}, \varepsilon), \quad \vec{x} \in \bar{\mathcal{D}}. \tag{6}$$

Nous notons $\bar{\mathcal{D}}$ le domaine de définition de ϕ et h et $\Gamma = \partial \mathcal{D}$. L_ε est un opérateur différentiel dans la variable \vec{x} , dont ε est un paramètre. On suppose que ϕ satisfait aux conditions d'existence et d'unicité, et que l'on peut décomposer L_ε sous la forme suivante

$$L_\varepsilon = L_0 + \mathcal{L} \quad (7)$$

où L_0 ne dépend pas de ε , et \mathcal{L} est tel que

de ε ; $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\|\mathcal{L}g\|) = 0$ pour toute g indépendante
 par exemple. $\|g\| = \max_{\bar{\mathcal{D}}} |g(\vec{x})|$ ou $\|g\|^2 = \int_{\bar{\mathcal{D}}} |g|^2 dx$

Soit $h_0(\vec{x})$ une approximation asymptotique de h dans $\bar{\mathcal{D}}$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (h - h_0) = 0.$$

Le problème de perturbation (6) est dit régulier (en première approximation), s'il existe $\phi_0(\vec{x})$, $\vec{x} \in \bar{\mathcal{D}}$, satisfaisant

$$L_0 \phi_0 = h_0, \quad \vec{x} \in \bar{\mathcal{D}}, \quad (8)$$

$$\phi - \phi_0 = o(1), \quad \text{i.e.} : \vec{x} \in \bar{\mathcal{D}}, \quad \lim_{\varepsilon} (\|\phi - \phi_0\|) = 0.$$

Dans le cas contraire le problème est dit singulier (en première approximation).

Les problèmes réguliers ou singuliers d'ordre supérieur se définissent à l'aide des approximations d'ordre supérieur des fonctions.

Dans la pratique on rencontre souvent des problèmes où l'on peut écrire :

$$\mathcal{L} = \varepsilon L_1$$

avec L_1 indépendant de ε et L_1 d'ordre supérieur à L_0 .

Ces problèmes sont appelés "problèmes de perturbation singulière"; la raison est que si l'on peut construire une approximation asymptotique ϕ_0 de ϕ , solution de

$$L_0 \phi_0 = h_0 \quad \text{dans } \bar{\mathcal{D}}$$

celle-ci ne satisfait pas, en général, toutes les conditions aux limites imposées à ϕ . C'est en ce sens que dans notre travail nous parlons de perturbations singulières.

. Exemple 1

$$\varepsilon \frac{d^2}{dx^2} \phi + \frac{d}{dx} \phi = 0, \quad \bar{\mathcal{D}} = [0, 1]$$

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(1) = 1. \quad (9)$$

La solution exacte de ce problème est

$$\phi(x, \varepsilon) = (1 - e^{-x/\varepsilon}) / (1 - e^{-1/\varepsilon}),$$

on peut remarquer que si on se donne comme norme la norme sup alors le problème est singulier (au sens (8), précédent) alors que le choix de la norme de $L^2([0, 1])$ le rend régulier. La fonction $\phi_0 = 1$, qui satisfait à $\frac{d}{dx} \phi_0 = 0$ est alors une approximation asymptotique.

Si on adopte notre point de vue le problème précédent est singulier, en première approximation, car : ϕ_0 ne satisfait pas à la condition en $x = 0$ et ε affecte l'opérateur d'ordre le plus élevé.

On peut remarquer le fait suivant :

pour tout sous-ensemble $\bar{\mathcal{D}}_0$ de $\bar{\mathcal{D}}$ avec $\bar{\mathcal{D}}_0 = \{x \in \bar{\mathcal{D}} \mid 0 < x_0 \leq x < 1\}$

on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\sup_{\bar{\mathcal{D}}_0} |\phi - 1|) = 0$. Par conséquent $\phi_0 = 1$ peut être considérée comme une approximation asymptotique de ϕ dans le domaine $\bar{\mathcal{D}}_0$.

Au voisinage de $x = 0$ ceci tombe en défaut puisque $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\sup_{\bar{\mathcal{D}}} |\phi - 1|) = 1$; $\phi_0 = 1$ ne peut satisfaire à la condition en 0 puisque $0 \notin \bar{\mathcal{D}}_0$.

Ceci rejoint le point de vue que nous avons adopté dans ce travail. Le comportement de la solution du problème (9) est appelé "phénomène de couche limite".

1.1.3.- Approximations locales

Un second type d'approximation est nécessaire si l'on veut étudier le voisinage des couches limites : ce sont les approximations locales.

On pose

$$\mathcal{D}_S = \bar{\mathcal{D}} - \mathcal{D}_r$$

où \mathcal{D}_r désigne la réunion des sous-ensembles de $\bar{\mathcal{D}}$ pour lesquels une approximation régulière existe. Pour nous, dans tous les cas, \mathcal{D}_S sera un voisinage d'un sous-ensemble, \tilde{S} , de l'espace physique où s'étudie notre problème : ainsi \tilde{S} pourra être un ensemble de points isolés, la réunion d'une courbe et de points isolés ou la réunion d'une surface, d'une courbe et de points isolés (par exemple dans notre travail les plans, $z = -1$ et $z = 0$, de \mathbb{R}^3). Nous notons S l'intersection de toute famille d'éléments de \tilde{S} , et on fait l'hypothèse suivante :

S désigne une surface de \mathbb{R}^3 et au triplet $\vec{x} = (x, y, z)$ on associe le triplet (x', y', z') de telle sorte que $z' = 0$ soit l'équation de S . Afin d'étudier le comportement local de ϕ au voisinage de S il est naturel d'introduire les coordonnées locales $\vec{\xi} = (x', y', z'/\delta_S^{(1)})$ où $\delta_S^{(1)} = o(1)$. C'est le choix de la jauge $\delta_S^{(1)}$ qui détermine la "dimension" du voisinage de S dans lequel nous étudions $\phi(\vec{x}, \varepsilon)$. La transformation $\vec{x} \rightarrow \vec{\xi}$ transforme $\phi(\vec{x}, \varepsilon)$ en $\hat{\phi}(\vec{\xi}, \varepsilon)$.

De façon générale on peut définir les approximations locales dans les variables locales :

Si on désigne par $\hat{\mathcal{D}}$ un ensemble borné dans l'espace $\vec{\xi}$ et par

$\hat{\phi}_{a0}$ une série asymptotique définie par

$$\hat{\phi}_{a0} = \sum_0^m \hat{\delta}_n(\varepsilon) \psi_n(\vec{\xi}) ; \quad \hat{\delta}_{n+1} = o(\hat{\delta}_n) , \quad \hat{\delta}_0 = 1$$

$\hat{\phi}_{a0}$ est une approximation locale de $\hat{\phi} = O_S(1)$ dans $\hat{\mathcal{D}}$ si

$$\hat{\phi} - \hat{\phi}_{a0} = o(\hat{\delta}_m) , \quad \vec{\xi} \in \hat{\mathcal{D}} .$$

Soit $\phi(\vec{x}, \varepsilon)$ la fonction de \vec{x} et de ε qui s'écrit $\hat{\phi}(\vec{\xi}, \varepsilon)$ en variables locales. La limite locale de $\phi(\vec{x}, \varepsilon)$ est définie par

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}^{loc \vec{x}} (\phi(\vec{x}, \varepsilon)) = \lim_{\vec{\xi}} \phi(\vec{x}, \varepsilon) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \vec{\xi} \text{ fixé}}} \phi(\vec{x}, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{\phi}(\vec{\xi}, \varepsilon). \quad (10)$$

On peut alors donner l'expression des fonctions ψ_n de l'approximation locale de ϕ :

$$\begin{aligned} \psi_0(\vec{\xi}) &= \lim_{\vec{\xi}} \phi(\vec{x}, \varepsilon) \\ \psi_n(\vec{\xi}) &= \lim_{\vec{\xi}} \frac{1}{\hat{\delta}_n} \left(\phi(\vec{x}, \varepsilon) - \sum_0^{n-1} \hat{\delta}_e \psi_e(\vec{\xi}) \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Comment détermine-t-on les approximations régulières et locales de ϕ ? Si ϕ est donnée explicitement alors les procédés limites (5) et (11) permettent la construction effective de ces approximations. Cependant, nous étudions des problèmes dans lesquels ϕ est définie comme solution d'une équation différentielle $L_\varepsilon \phi = h$ dans un domaine $\bar{\mathcal{D}}$ avec des conditions sur $\partial \mathcal{D}$. En général on ne connaît pas ϕ . On définit alors, en liaison avec L_ε , des approximations asymptotiques formelles ainsi que des développe-

ments asymptotiques formels.

Supposons que ϕ satisfasse dans \mathcal{D}

$$L_\varepsilon \phi - h = 0,$$

on dit que ϕ_{as} est une approximation asymptotique formelle de ϕ dans $\mathcal{D}^* \subset \bar{\mathcal{D}}$ si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|L_\varepsilon \phi_{as} - h\| = 0, \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{D}^*. \quad (12)$$

Une série asymptotique $\phi_{as}^{(m)}$ est un développement asymptotique formel de ϕ dans \mathcal{D}^* si

$$L_\varepsilon \phi_{as}^{(m)} - h = O(\delta_m^{(r)}), \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{D}^*$$

avec $\delta_{m+1}^{(r)} = o(\delta_m^{(r)})$, où $\delta_m^{(r)}$ est une fonction d'ordre qui mesure l'écart entre $\phi_{as}^{(m)}$ et ϕ , c'est-à-dire l'erreur commise à cet ordre.

Pour illustrer ce qui précède considérons à nouveau l'équation de l'exemple 1.

Exemple 2

On peut définir un développement régulier sous la forme

$$\phi_{as} = \sum_0^m \varepsilon^n \phi_n(x),$$

et en reportant dans l'équation on obtient

$$\frac{d}{dx} \phi_0 = 0,$$

$$\frac{d}{dx} \phi_n = -\frac{d^2}{dx^2} \phi_{n-1}, \quad n \geq 1$$

puis, on fait l'hypothèse que ϕ_{∞} est une approximation asymptotique de la solution ϕ pour $x \in \bar{\mathcal{D}}_0 = \{x \mid 0 < x_0 \leq x < 1\}$.

On impose :

$$\phi_0(1) = 1, \quad \phi_n(1) = 1, \quad n \geq 1;$$

le développement formel régulier est donc déterminé (on dit aussi développement principal).

Au voisinage de $x = 0$ on considère la variable locale

$$\xi = x/\varepsilon$$

le développement local s'écrit donc :

$$\hat{\phi}_{\infty} = \sum_0^m \varepsilon^n \psi_n(\xi)$$

d'où, en reportant dans l'équation, le problème local :

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \psi_n + \frac{d}{d\xi} \psi_n = 0, \quad n \geq 0.$$

On admet que $\hat{\phi}_{\infty}$ est une approximation asymptotique de ϕ dans $\hat{\mathcal{D}} = \{\xi \mid 0 \leq \xi \leq \xi_0 < +\infty\}$; en imposant

$$\psi_n(0) = 0, \quad n \geq 0$$

on obtient

$$\psi_n(\xi) = A_n (e^{-\xi} - 1), \quad n \geq 0$$

où les coefficients numériques A_n restent, à ce stade, indéterminés.

Ce sont les règles de raccord que nous introduisons maintenant qui permettent la détermination de ces constantes réelles.

I.2.- REGLES DE RACCORD

Dans la définition des développements asymptotiques aucune information n'a été donnée sur les conditions aux limites, la raison en est simple, les domaines de validité, \mathcal{D} et $\hat{\mathcal{D}}$, de ces développements n'ont pas été fixés (sauf dans le deuxième exemple).

On suppose dans les applications que les approximations sont valables dans un domaine qui contient une partie Γ_n de $\partial\mathcal{D}$ pour le développement régulier (ou principal) ou Γ_e pour l'approximation locale. Ces hypothèses permettent alors d'afficher les conditions aux frontières correspondant à ces sous-ensembles de $\Gamma = \partial\mathcal{D}$ pour les approximations régulière ou locale.

Cependant cette façon de procéder ne conduit pas, en général, à l'unicité des solutions. Des conditions supplémentaires sont donc requises et sont fournies par ce que l'on nomme les règles de raccord.

Une hypothèse qui conduit à de nouvelles relations est celle du domaine de recouvrement (overlap domain) : on suppose qu'il existe un ensemble \mathcal{D}_o dans lequel le développement régulier (ou principal) ainsi que le développement local sont valables.

Cela conduit, en première approximation, à écrire que l'on a (PRANDTL, 1928):

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\phi_0) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} (\psi_0). \quad (13)$$

D'autres règles sont utilisées en Mécanique des fluides.

On peut citer celles des échelles intermédiaires (COLE et KEVORKIAN; 1981) et la règle de raccord simplifiée de VAN DYKE (1964 et 1975) dont on expose maintenant le contenu.

La règle de raccord due à VAN DYKE peut s'énoncer ainsi :

"le développement intérieur jusqu'à $O(\delta)$ du développement extérieur jusqu'à $O(\Delta)$ doit être égal au développement extérieur jusqu'à $O(\Delta)$ du développement intérieur jusqu'à $O(\delta)$ ".

Où δ et Δ sont deux jauges (non nécessairement égales) qui peuvent ne pas apparaître dans les développements.

Cette règle, comme le signale SHIVAMOGGI (1978) n'utilise pas l'idée de limite intermédiaire et de domaine de recouvrement (KAPLUN; 1957). On trouvera dans FRAENKEL (1969) une discussion de ce problème.

On termine ce paragraphe en indiquant la règle de raccord proposée par SHIVAMOGGI, règle que nous avons utilisé tout au long de ce travail; il faut voir dans cette règle une technique qui s'avère efficace dans de nombreux problèmes de la mécanique. On raisonne sur la solution $\phi(\vec{x}, \varepsilon)$ d'une équation différentielle où $\varepsilon \ll 1$; on suppose l'existence d'une singularité, au voisinage de $\alpha = 0$, que l'on étudie par l'intermédiaire de la variable locale $\xi = \alpha / \varepsilon$.

Soit le développement principal (ou extérieur)

$$\phi = \phi_0(\alpha) + \varepsilon \phi_1(\alpha) + O_S(\varepsilon^2) \quad , \quad (14)$$

et le développement local

$$\hat{\phi} = \hat{\phi}_0(\xi) + \varepsilon \hat{\phi}_1(\xi) + O_S(\varepsilon^2) \quad . \quad (15)$$

On développe, en série de Taylor formelle, au voisinage de $\alpha=0$ le développement principal que l'on réécrit ensuite en variable locale ξ ; il vient

$$\phi(x, \varepsilon) = \phi_0(0) + \varepsilon \left(\xi \frac{d\phi_0}{dx} \Big|_0 + \phi_1(0) \right) + O_S(\varepsilon^2)$$

puis on effectue le passage à la limite local (11) dans les développements (15) et (16) et on exprime par les égalités suivantes le raccord des deux approximations

$$\phi_0(0) = \hat{\phi}_0(+\infty)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} (\hat{\phi}_1) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\xi \frac{d\phi_0}{dx} \Big|_0 + \phi_1(0) \right),$$

d'où le comportement de $\hat{\phi}_1$ (pour des ξ grands) :

$$\hat{\phi}_1(\xi) = \xi \frac{d\phi_0}{dx} \Big|_0 + \phi_1(0) + \hat{\phi}_1'(\xi) \quad (16)$$

où $\hat{\phi}_1'$ tend vers zéro avec $1/\xi$.

On trouvera dans SHIVAMOGGI de nombreux exemples permettant la comparaison de cette technique (très efficace) avec le principe de VAN DYKE ainsi qu'avec la méthode des limites intermédiaires.

Dans l'exemple qui suit on compare deux techniques de raccord : celle de VAN DYKE et celle de SHIVAMOGGI.

Soit $y(x, \varepsilon)$ la solution du problème suivant :

$$\varepsilon \ll 1, \quad \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = -y, \quad x \in [0, 1]$$

$$y(0) = 0$$

$$y(1) = 1$$

la solution exacte est

$$y(x, \varepsilon) = e^{\pi_1 x} - e^{\pi_2 x}$$

avec
$$\pi_{1,2} = (-1 \pm (1-4\varepsilon)^{1/2})/2\varepsilon .$$

Il y a donc une couche limite au voisinage de $x=0$. On constate facilement que la solution principale, d'ordre ε , est la suivante :

$$y = \bar{y}(x, \varepsilon) = \bar{y}_0(x) + \varepsilon \bar{y}_1(x) + O(\varepsilon^2)$$

où
$$\bar{y}_0(x) = e^{1-x}, \quad \bar{y}_1(x) = (1-x)e^{1-x}$$

alors que la solution intérieure est :

$$y = \hat{y}(\hat{x}, \varepsilon) = \hat{y}_0(\hat{x}) + \varepsilon \hat{y}_1(\hat{x}) + O(\varepsilon^2)$$

où
$$\hat{y}_0(\hat{x}) = -A_0(1 - e^{-\hat{x}}), \quad \hat{y}_1(\hat{x}) = A_1(1 - e^{-\hat{x}}) + A_0 \hat{x}(1 + e^{-\hat{x}}).$$

La règle de raccord simplifiée de VAN DYKE s'applique alors de la façon suivante :

1) Dev. Ext à 2 termes :
$$e^{1-x} + \varepsilon(1-x)e^{1-x}$$

réécriture en variable intérieure :

$$e^{1-\varepsilon \hat{x}} + \varepsilon(1-\varepsilon \hat{x})e^{1-\varepsilon \hat{x}}$$

développement pour $\varepsilon \downarrow 0$:

$$e(1 - \varepsilon \hat{x} + \dots) + \varepsilon e(1 - \varepsilon \hat{x})(1 - \varepsilon \hat{x} + \dots)$$

développement Intérieur à 2 termes :

$$e + \varepsilon e(1 - \hat{x})$$

2) Développement Intérieur à 2 termes :

$$-A_0(1 - e^{-\hat{x}}) + \varepsilon \{ A_1(1 - e^{-\hat{x}}) + A_0 \hat{x}(1 + e^{-\hat{x}}) \}$$

réécriture en variable extérieure :

$$-A_0(1 - e^{-x/\varepsilon}) + \varepsilon \{ A_1(1 - e^{-x/\varepsilon}) + A_0(1 + e^{-x/\varepsilon}) \frac{x}{\varepsilon} \}$$

développement pour $\varepsilon \downarrow 0$:

$$-A_0 + A_0 x + \varepsilon A_1 + \text{tt}_3$$

où tt_3 désigne des termes exponentiellement petits.

On égale les deux résultats :

$$e + \varepsilon e(1 - x/\varepsilon) = -A_0 + A_0 x + \varepsilon A_1 .$$

D'où

$$A_0 = -e$$

$$A_1 = e .$$

La règle de raccord de SHIVAMOGGI donne ici :

- 1) Développement en série de Taylor au voisinage de $x = 0$ (en variable locale) :

$$\bar{y} = \bar{y}_0(0) + \varepsilon (\bar{y}_1(0) + \hat{x} \bar{y}'_0(0)) + O(\varepsilon^2)$$

$$\bar{y} = e + \varepsilon (e - \hat{x}e) + O(\varepsilon^2)$$

- 2) Egalité des limites :

$$\lim_{\hat{x} \rightarrow +\infty} \left\{ (e + \varepsilon(e - \hat{x}e)) - (-A_0(1 - e^{-\hat{x}}) + \varepsilon(A_1(1 - e^{-\hat{x}}) + A_0\hat{x}(1 + e^{-\hat{x}}))) \right\} = 0$$

soit

$$e + A_0 = 0$$

et

$$A_1 = e$$

Le seul but de cet exemple est de montrer que la technique proposée par SHIVAMOGGI est plus rapide que la règle de raccord simplifiée de VAN DYKE.

1.3.- APPROXIMATION ET DEGENERESCENCE SIGNIFICATIVES

On introduit (ECKHAUS; 1973) les opérateurs de développements

$$E_{\vec{x}}^{(m)} \phi = \sum_0^m \delta_m \phi_m(\vec{x}) \quad (17)$$

$$E_{\vec{w}}^{(m)} \phi = \sum_0^m \delta_m \psi_m(\vec{w}).$$

Dans la construction de $E_{\vec{w}}^{(m)} \phi$ le choix des variables locales est important : tous les choix possibles n'ont pas la même importance. Il est suffisant d'étudier l'approximation locale pour certaines variables : celles que l'on appelle variables de couche limite. On formule la définition suivante :

Soit \vec{w}_1 et \vec{w}_2 deux variables locales et $E_{\vec{w}_1}^{(q)}$, $E_{\vec{w}_2}^{(p)}$ les approximations locales correspondantes. On dit que $E_{\vec{w}_1}^{(q)}$ est contenue dans $E_{\vec{w}_2}^{(p)}$ si

$$E_{\vec{w}_1}^{(q)} \phi = E_{\vec{w}_1}^{(q)} (E_{\vec{w}_2}^{(p)} \phi). \quad (18)$$

Une approximation est dite significative si elle n'est contenue dans aucune autre.

On va définir maintenant la notion de dégénérescence significative.

Soit $L_\varepsilon \phi = 0$ un problème linéaire, et soit la transformation qui à \vec{x} associe la variable locale \vec{w} , telle que $\beta(\vec{x}, \varepsilon) \mapsto \hat{\beta}(\vec{w}, \varepsilon)$ et $L_\varepsilon \phi \mapsto \mathcal{L}_\varepsilon \hat{\phi}$. On dit alors que \mathcal{L}_0 est une dégénérescence liée à la variable \vec{w} si pour toute fonction, suffisamment dérivable, $\psi(\vec{w})$, il existe $\bar{\delta}$ telle que :

$$\lim_{\vec{w} \rightarrow \bar{\delta}} (\bar{\delta} \mathcal{L}_\varepsilon \psi) = \mathcal{L}_0 \psi \quad (19)$$

où $\bar{\delta}$ est une fonction d'ordre.

En général dans les problèmes non linéaires on peut définir des dégénérescences significatives que pour une classe de fonctions $O_S(\hat{\delta}_0)$.

Dans la pratique cela signifie que l'on doit estimer l'ordre de grandeur de $\hat{\Phi}(\vec{\xi}, \varepsilon)$. Ainsi lorsque l'on connaît les ordres de grandeur de la solution Φ dans \mathcal{D} (domaine complet) on peut généraliser la définition précédente.

Soit $\hat{\delta}_0(\vec{\xi})$ une classe de fonctions caractéristiques de ces ordres de grandeurs. On a alors l'énoncé suivant :

soit $\mathcal{L}_0^{(1)}$ (resp. $\mathcal{L}_0^{(2)}$) une dégénérescence de L_ε par rapport à \vec{m}_1 (resp. \vec{m}_2), pour la classe $\hat{\delta}_0(\vec{\xi})$. Soit $\vec{m}_1 \rightarrow \vec{m}_2$ alors $\mathcal{L}_0^{(1)} \phi \rightarrow \mathcal{L}_0^{(1,2)} \phi$. On dit que $\mathcal{L}_0^{(2)}$ est contenue dans $\mathcal{L}_0^{(1)}$ si :

$$\lim_{\vec{m}_2} (\bar{\delta} \mathcal{L}_0^{(1,2)} k(\varepsilon) \psi) = \mathcal{L}_0^{(2)} \psi$$

ou

$$\lim_{\vec{m}_2} \left(\frac{1}{\bar{\delta}} \mathcal{L}_0^{(1,2)} k(\varepsilon) \psi \right) = \mathcal{L}_0^{(2)} \psi$$

(20)

où $\bar{\delta}$: fonction d'ordre $k(\varepsilon) = \hat{\delta}_0(\vec{\xi}_2) / \hat{\delta}_0(\vec{\xi}_1)$; dans le cas linéaire $k(\varepsilon) = 1$.

Dans la définition précédente on utilise le fait que \mathcal{L}_0 est une dégénérescence liée à la variable \vec{m} pour la classe $\delta_0^*(\vec{\xi})$ si on a :

$$\lim_{\vec{m}} (\bar{\delta} \mathcal{L}_\varepsilon \delta_0^* \psi) = \mathcal{L}_0 \psi \quad \text{ou} \quad \lim_{\vec{m}} \left(\frac{1}{\bar{\delta}} \mathcal{L}_\varepsilon \delta_0^* \psi \right) = \mathcal{L}_0 \psi$$

pour tout ψ ; $\bar{\delta}$ est une fonction suivante :

Une dégénérescence est significative (pour une classe donnée d'éléments $\hat{\delta}_0(\vec{\xi})$ et de variable locale \vec{m}) si elle n'est contenue dans aucune autre.

Malheureusement il n'y a pas de théorème mathématique qui dit que : les approximations significatives sont solutions des dégénérescences significatives (ECKHAUS; 1979).

Cependant, en mécanique des fluides, dans la plupart des cas, lorsque la MDAR s'applique ce "théorème" s'avère être exact : c'est ce que

l'on nomme le principe de moindre dégénérescence (VAN DYKE; 1975).

Enfin, pour que la MDAR puisse être utilisée il faut admettre (ou vérifier) qu'il n'existe qu'un nombre fini d'approximations significatives dont la réunion des domaines de validité contienne le domaine d'étude tout entier où l'on recherche la solution. En définitive, la MDAR se trouve justifiée si l'hypothèse de travail suivante est vérifiée :

Si ϕ désigne la solution du problème

$$L_\varepsilon \phi = 0$$

et si \mathcal{L}_0 est une dégénérescence significative de L_ε , liée à la variable locale \vec{x} , dont le domaine de validité est $\hat{\mathcal{D}}_\varepsilon$ alors il existe au moins une approximation significative locale de rang un, $\hat{\delta}_0(\vec{x})\hat{\phi}_0(\vec{x})$, dont le domaine d'existence contienne celui de la dégénérescence \mathcal{L}_0 .

Exemple 3

Soit L_ε tel que

$$L_\varepsilon \phi = \varepsilon \frac{d}{dx} \phi + \phi - x - 1 - \varepsilon.$$

On cherche à résoudre à l'aide d'un développement asymptotique le problème suivant

$$\begin{aligned} L_\varepsilon \phi &= 0 \\ \phi(0) &= 0 \end{aligned} \tag{21}$$

(la solution exacte est donnée par $\phi = 1 + x - e^{-x/\varepsilon}$).

Ce problème est peut être un problème de perturbation régulière; on commence donc par développer à x fixé, ε tendant vers 0, pour voir, en particulier, si le problème reste bien posé. Soit, en première approximation

$$\phi = \phi_0(x) + \delta_1(\varepsilon)\phi_1(x) + o(\delta_1)$$

expression que l'on reporte dans (21) pour obtenir

$$\phi_0 - x - 1 = 0$$

d'où

$$\phi_0(x) = x + 1.$$

Ainsi dès la première approximation la condition en $x = 0$ n'est pas satisfaite ($\phi_0(0) = 1 \neq 0$). Cette approximation n'est pas uniformément valable dans $\bar{D} = [0, +\infty[$, mais est régulière dans $\bar{D}_0 = \{x | 0 < x_0 < x\}$.

Ainsi le problème étudié est un problème de perturbation singulière; pour étudier le voisinage de $x = 0$ nous définissons la variable locale

$\xi = x/\varepsilon^\mu$ ($\mu > 0$) et on détermine μ par la condition que la dégénérescence de $L_\varepsilon \phi$ ainsi obtenue soit significative.

Soit $\mathcal{L}_\varepsilon \hat{\phi}$ l'équation déduite de $L_\varepsilon \phi$ par la transformation $x \rightarrow \xi$

$$\mathcal{L}_\varepsilon \hat{\phi} = \varepsilon^{1-\mu} \frac{d}{d\xi} \hat{\phi} + \hat{\phi} - \varepsilon^\mu \xi - 1 - \varepsilon.$$

Quelles sont les dégénérescences de L_ε liées à ξ ?

Il est évident, μ étant > 0 , que trois cas sont à distinguer :

- a) $\mu > 1$
- b) $0 < \mu < 1$
- c) $\mu = 1$

• dans le premier cas le choix de $\bar{\delta} = \varepsilon^{\mu-1}$ entraîne

$$\lim_{\xi} (\varepsilon^{\mu-1} \mathcal{L}_\varepsilon \hat{\phi}) = \frac{d}{d\xi} \hat{\phi}_0$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{L}_0 = d/d\xi$$

(22)

. dans le second cas, $\bar{\delta} = 1$:

$$\lim_{\xi} (1. \mathcal{L}_{\xi} \hat{\phi}) = \hat{\phi}_0 - 1 \quad (23)$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{L}_0 = \mathbb{1} - 1$$

où $\mathbb{1}$ désigne l'identité.

. dans le troisième cas, $\bar{\delta} = 1$:

$$\lim_{\xi} (1. \mathcal{L}_{\xi} \hat{\phi}) = \frac{d}{d\xi} \hat{\phi}_0 + \hat{\phi}_0 - 1 \quad (24)$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{L}_0 = d/d\xi + \mathbb{1} - 1.$$

Laquelle (ou lesquelles) de ces dégénérescences est (sont) significative(s) ?

On note $\xi_1 = x/\varepsilon (= \xi)$ et $\xi_2 = x/\varepsilon^{\alpha}$

où $\alpha \in]0, 1[$ puis $\alpha > 1$. Le changement de variable $\xi_1 \rightarrow \xi_2$

dans (25) donne, en notant $\mathcal{L}_0^{(1)} = \frac{d}{d\xi_1} + \mathbb{1} - 1$:

$$\mathcal{L}_0^{(1,2)} = \varepsilon^{1-\alpha} \frac{d}{d\xi_2} + \mathbb{1} - 1.$$

(i) $0 < \alpha < 1$

$$\bar{\delta} = 1 \Rightarrow \lim_{\xi_2} (\mathcal{L}_0^{(1,2)} \hat{\phi}) = \hat{\phi}_0 - 1$$

Par conséquent la dégénérescence (23) qui correspond à $\xi_2 = x/\varepsilon^{\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$ est contenue dans la dégénérescence (25) qui correspond à $\xi_1 = x/\varepsilon$.

(ii) $\alpha > 1$

$$\bar{\delta} = \varepsilon^{\alpha-1} \Rightarrow \lim_{\xi_2} (\varepsilon^{\alpha-1} \mathcal{L}_0^{(1,2)} \hat{\phi}) = \frac{d}{d\xi_2} \hat{\phi}_0.$$

Par conséquent la dégénérescence (22) qui correspond à $\xi_2 = x/\varepsilon^\alpha$ avec $\alpha > 1$ est contenue dans la dégénérescence (25) qui correspond à $\xi_1 = x/\varepsilon$.

Conclusion : La seule dégénérescence significative de L_ε est donc celle qui correspond à $\xi = x/\varepsilon$ et qui s'écrit

$$\mathcal{L}_0 \hat{\phi} = \frac{d}{d\xi} \hat{\phi} + \hat{\phi} - 1.$$

Le problème ainsi construit est appelé le problème intérieur, ou local ou encore proximal, la solution de celui-ci est valable pour des x de l'ordre de ε . Afin de pouvoir appliquer à $\hat{\phi}$ la condition à la limite en 0 on utilise le théorème d'extension de KAPLUN (1967) en supposant qu'alors le domaine de validité pour $\hat{\phi}$, ainsi obtenu, contient l'origine. (Dans notre étude on suppose toujours que ce théorème s'applique en posant que les développements locaux correspondent à des approximations asymptotiques valables dans des domaines contenant une partie de la frontière de l'espace physique considéré).

Ainsi il faut résoudre dans le cas de notre exemple :

$$\frac{d}{d\xi} \hat{\phi}_0 + \hat{\phi}_0 = 1$$

$$\hat{\phi}_0(0) = 1$$

c'est-à-dire $\hat{\phi}_0(\xi) = 1 - e^{-\xi}$.

On vérifie sans peine, qu'à cet ordre, ϕ_0 et $\hat{\phi}_0$ se raccordent en utilisant la règle (13).

Pour conclure on construit un développement asymptotique de la solution uniformément valable dans $[0, +\infty[$. On considère :

$$\varphi_0(x, \xi) = \phi_0(x) + \hat{\phi}_0(\xi) - \tilde{\phi}_0$$

où $\tilde{\phi}_0$ est la partie commune à ϕ_0 et $\hat{\phi}_0$, c'est-à-dire ici :

$$\tilde{\phi}_0 = 1 ;$$

d'où

$$\varphi_0(x, \xi) = 1 + x - e^{-x/\xi} .$$

φ_0 est, fortuitement, la solution exacte du problème (21) elle est donc une approximation significative ! La fonction φ_0 est appelée "développement composite" de la solution du problème.

ANNEXE 2

Les équations de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes locales adimensionnées avec une viscosité dynamique variable. Application au modèle en ondes longues dans le plan tangent.

I. EQUATIONS EN COORDONNES CARTESIENNES LOCALES ADIMENSIONNEES

Les notations et définitions sont celles des Chapitre I et II.

Dans le système des équations (I,1) la dernière ligne doit être remplacée,

μ étant variable, par :

$$\rho \left(\frac{D \vec{u}}{Dt} + 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{u} \right) + \vec{\nabla} \tau = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \bar{\tau} \quad (1)$$

avec $\bar{\tau}$ le tenseur des contraintes de viscosité.

Dans le système des coordonnées cartésiennes locales (I,5) le système des équations (I,1), où la relation (c) est remplacée par l'équation ci-dessus, s'écrit en notant $\mu = \mu_0 \bar{\mu}(z)$ (μ_0 viscosité de référence) :

$$\begin{aligned} (a) \quad & \rho \left(\delta \frac{D u}{Dt} - \delta \frac{u v}{1 + \varepsilon \delta z} \operatorname{tg} \theta + \varepsilon \delta \frac{u w}{1 + \varepsilon \delta z} - \frac{1}{R_0 \sin \theta} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\varepsilon}{R_0 \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ & = - \frac{\cos \theta}{(1 + \varepsilon \delta z) \cos \theta} \frac{1}{M_0^2} \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{1}{Re} \bar{\mu}(z) \left(\frac{1}{\varepsilon^2 (1 + \varepsilon \delta z)^2} \frac{\partial}{\partial z} \left((1 + \varepsilon \delta z)^2 \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) \right. \\ & + \frac{1}{(1 + \varepsilon \delta z)^2 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial y} \left(\cos \theta \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) + \frac{\cos^2 \theta}{(1 + \varepsilon \delta z)^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \frac{2 \varepsilon \delta \cos \theta}{(1 + \varepsilon \delta z)^2 \cos \theta} \frac{\partial w}{\partial x} \\ & \left. - 2 \frac{\delta \cos \theta \sin \theta}{(1 + \varepsilon \delta z)^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\delta^2 u}{(1 + \varepsilon \delta z)^2 \cos^2 \theta} \right) + \frac{1}{\varepsilon^2 Re \delta z} \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \right. \\ & \left. - \frac{\varepsilon \delta}{1 + \varepsilon \delta z} u - \frac{\varepsilon^2 \cos \theta}{(1 + \varepsilon \delta z) \cos \theta} \frac{\partial w}{\partial x} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad & \rho \left(S \frac{Dv}{Dt} + \delta \frac{u^2}{1+\varepsilon\delta z} \tan \theta + \varepsilon \delta \frac{vw}{1+\varepsilon\delta z} + \frac{1}{R_0} \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} u \right) \\
 &= - \frac{1}{(1+\varepsilon\delta z) M_0^2} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\bar{\mu}(z)}{Re} \left(\frac{1}{\varepsilon^2 (1+\varepsilon\delta z)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right. \\
 &+ \frac{1}{\cos \theta (1+\varepsilon\delta z)^2} \frac{\partial (\cos \theta \frac{\partial v}{\partial y})}{\partial y} + \frac{\cos^2 \theta_0}{(1+\varepsilon\delta z)^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\varepsilon\delta \frac{1}{(1+\varepsilon\delta z)^2} \frac{\partial w}{\partial y} \\
 &+ \left. 2\varepsilon \delta \frac{\sin \theta \cos \theta_0}{(1+\varepsilon\delta z)^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial u}{\partial x} - \delta^2 \frac{1}{(1+\varepsilon\delta z)^2 \cos^2 \theta} v \right) + \frac{1}{\varepsilon^2 Re dz} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right. \\
 &\left. - \varepsilon \delta \frac{v}{1+\varepsilon\delta z} + \varepsilon^2 \frac{1}{1+\varepsilon\delta z} \frac{\partial w}{\partial y} \right);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (c) \quad & \rho \left(\varepsilon^2 S \frac{Dw}{Dt} - \varepsilon \delta \frac{u^2 + v^2}{(1+\varepsilon\delta z)} - \frac{\varepsilon}{R_0} \frac{\cos \theta}{\sin \theta_0} u \right) = - \frac{1}{M_0^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} + B_0 \cdot \rho \right) \quad (2) \\
 &+ \frac{1}{Re} \bar{\mu}(z) \left(\frac{\partial^2 ((1+\varepsilon\delta z)^2 \frac{\partial w}{\partial z})}{\partial z^2} + \varepsilon^2 \frac{1}{(1+\varepsilon\delta z)^2 \cos \theta} \frac{\partial (\cos \theta \frac{\partial w}{\partial y})}{\partial y} \right) \\
 &+ \varepsilon^2 \frac{\cos^2 \theta_0}{(1+\varepsilon\delta z)^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\varepsilon^2 \delta^2 \frac{w}{(1+\varepsilon\delta z)^2} - 2\varepsilon\delta \frac{1}{(1+\varepsilon\delta z)^2 \cos \theta} \frac{\partial (v \cos \theta)}{\partial y} \\
 &- 2\varepsilon\delta \varepsilon \frac{\cos \theta_0}{(1+\varepsilon\delta z)^2 \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial x} \Big) + \frac{2}{Re dz} \frac{d\bar{\mu}}{dz} \frac{\partial w}{\partial z};
 \end{aligned}$$

$$(d) \quad (1+\varepsilon\delta z) \cos \theta_0 \frac{\partial u}{\partial x} + (1+\varepsilon\delta z) \frac{\partial (v \cos \theta)}{\partial y} + \cos \theta \frac{\partial ((1+\varepsilon\delta z)^2 w)}{\partial z} = 0;$$

$$(e) \quad S \frac{D}{Dt} \rho = 0 ;$$

$$\text{où} \quad S \frac{D}{Dt} = S \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\cos \theta_0}{(1 + \varepsilon \delta_3) \cos \theta} u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} ;$$

(on a remplacé λ par ε directement dans le système (2).)

II.- APPROXIMATION DU PLAN TANGENT

Le processus limite défini par

$$\delta \downarrow 0 \quad \text{avec} \quad \beta = O(1)$$

conduit, lors de son application au système (2), aux équations suivantes :

$$(a) \quad \rho \left(R_0 S \frac{D}{Dt} \vec{v} + (1 + R_0 \beta y) \vec{k} \wedge \vec{v} + \varepsilon \cot \theta_0 w \cdot \vec{t} \right) \\ = - \frac{R_0}{M_0^2} \vec{D} \uparrow + \bar{\mu} (E \vec{D}^2 \vec{v} + E_L \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2}) + E_L \frac{d\bar{\mu}}{dz} \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} ;$$

$$(b) \quad \rho (\varepsilon^2 R_0 S \frac{D}{Dt} w - \varepsilon \cot \theta_0 u) = - \frac{R_0}{M_0^2} \left(\frac{\partial \uparrow}{\partial z} + B_0 \cdot \rho \right) \\ + \bar{\mu} (E \frac{\partial^2}{\partial z^2} w + \varepsilon^2 E \vec{D}^2 w) + 2E \frac{d\bar{\mu}}{dz} \frac{\partial w}{\partial z} ;$$

$$(c) \quad \vec{D} \cdot \vec{v} + \frac{\partial}{\partial z} w = 0 ;$$

$$(d) \quad S \frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{v} \cdot \vec{D} \rho + w \frac{\partial}{\partial z} \rho = 0 ,$$

$$\text{où} \quad S \frac{D}{Dt} = S \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} ,$$

(3)

et où \vec{v} , w , ψ et ρ désignent les valeurs limites des fonctions correspondantes du système (2).

III.- L'APPROXIMATION DES ONDES LONGUES

Cette approximation, définie au § I.6 du premier chapitre conduit, pour le système précédent, aux équations suivantes :

$$\left. \begin{aligned}
 (a) \quad & \rho \left(R_0 S \frac{D\vec{v}}{Dt} + (1 + R_0 \beta y) \vec{B} \wedge \vec{v} \right) = - \frac{R_0}{M_0} \vec{D} \psi + E_1 \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\mu}(z) \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}); \\
 (b) \quad & \frac{\partial \psi}{\partial z} + B_0 \cdot \rho = 0; \\
 (c) \quad & S \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{D} \rho + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0; \\
 (d) \quad & \vec{D} \cdot \vec{v} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.
 \end{aligned} \right\} (4)$$

C'est ce système, où $\omega_0 = R_0^2 / M_0^2$, que l'on utilise dans le chapitre VI, après avoir fait l'hypothèse d'un écoulement stationnaire ($S \partial/\partial t \equiv 0$).

ANNEXE 3QUELQUES ORDRES DE GRANDEUR DES PARAMETRES SANS DIMENSION

Ces quelques mesures permettent de cerner les situations physiques dans lesquelles les modèles asymptotiques mis en évidence au cours de ce travail se rapprochent de la réalité.

Nos références sont pour la plupart celles que l'on trouve dans les ouvrages de KAMENKOVICH (1977), LEBLOND et MYSAK (1978) et PEDLOSKY (1979).

. Constantes physiques

$$\Omega_0 = 1,5 \Omega_1 \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1},$$

$$a_0 \approx 6400 \text{ km}$$

(rayon terrestre moyen).

. Paramètres sans dimension

On donne les valeurs approchées des paramètres dont on rappelle la définition ci-dessous :

$$\beta = 2\Omega_0 \cos \theta_0 L_0^2 / a_0 U_0$$

(paramètre β ; plan tangent),

$$\delta = L_0 / a_0$$

paramètre de forme;

$$\varepsilon = H_0 / L_0$$

paramètre hydrostatique;

$$R_0 = U_0 / \ell_0 L_0, \ell_0 = 2\Omega_0 \sin \theta_0$$

, nombre de Rossby;

$$E_L = E / \varepsilon^2 = \nu / \ell_0 H_0^2$$

nombre d'Ekman vertical;

$$B_0 = \rho_0 g H_0 / \rho_0$$

Nombre de Boussinesq

$$\hat{E}_1 = E_1 / R_0^2$$

Les résultats sont présentés sous forme de tableaux où l'on trouve vis-à-vis les mesures océaniques et atmosphériques.

OCEAN

ATMOSPHERE

$$\bullet \theta_0 = \pi/3$$

$$U_0 = 0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

- $L_0 = 10^4 \text{ m}$
 $\Rightarrow \beta = 1,16 \cdot 10^{-2}$
- $L_0 = 10^5 \text{ m}$
 $\Rightarrow \beta = 1,16$
- $L_0 = 10^6 \text{ m}$
 $\Rightarrow \beta = 1,16 \cdot 10^2$

$$U_0 = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

- $L_0 = 10^4 \text{ m}$
 $\Rightarrow \beta = 1,16 \cdot 10^{-3}$
- $L_0 = 10^5 \text{ m}$
 $\Rightarrow \beta = 1,16 \cdot 10^{-1}$
- $L_0 = 10^6 \text{ m}$
 $\Rightarrow \beta = 1,16 \cdot 10^1$

(BU)

$$\bullet \theta_0 = \pi/3$$

$$U_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

- $L_0 = 10^4 \text{ m}$
 $\Rightarrow \beta = 1,16 \cdot 10^{-4}$
- $L_0 = 10^5 \text{ m}$
 $\Rightarrow \beta = 1,16 \cdot 10^{-2}$
- $L_0 = 10^6 \text{ m}$
 $\Rightarrow \beta = 1,16$

$$U_0 = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

cf. le cas océanique correspondant.

$$\beta = \frac{2\Omega_0 \cos\theta_0}{a_0} \frac{L_0^2}{U_0}$$

fig. 1 : Paramètre β .

Pour $\theta_0 = \pi/4$ (resp. $\pi/6$) les résultats sont multipliés par $\sqrt{2}$ (resp. $\sqrt{3}$).

OCEAN

ATMOSPHERE

<ul style="list-style-type: none"> • $L_0 = 10^4 \text{ m}$ $\Rightarrow \delta = 0,157 \cdot 10^{-2}$ • $L_0 = 10^5 \text{ m}$ $\Rightarrow \delta = 0,157 \cdot 10^{-1}$ • $L_0 = 10^6 \text{ m}$ $\Rightarrow \delta = 0,157$ 	<p style="text-align: center;">Idem. au cas océanique.</p> $\delta = \frac{L_0}{a_0}$
---	---

fig. 2 : Paramètre δ .

OCEAN

ATMOSPHERE

<ul style="list-style-type: none"> • $L_0 = 10^4 \text{ m}$, $H_0 = 5 \cdot 10^3 \text{ m}$ $\Rightarrow \varepsilon = 0,5$ • $L_0 = 10^5 \text{ m}$ $\Rightarrow \varepsilon = 0,05$ • $L_0 = 10^6 \text{ m}$ $\Rightarrow \varepsilon = 0,005$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $L_0 = 10^4 \text{ m}$, $H_0 = 8 \cdot 10^3 \text{ m}$ $\Rightarrow \varepsilon = 0,8$ • $L_0 = 10^5 \text{ m}$ $\Rightarrow \varepsilon = 0,08$ • $L_0 = 10^6 \text{ m}$ $\Rightarrow \varepsilon = 0,008$. $\varepsilon = \frac{H_0}{L_0}$
--	---

Si on prend $H_0 = 2 \cdot 10^3 \text{ m}$ dans l'océan on a alors successivement :

- $L_0 = 10^4 \text{ m}$
 $\Rightarrow \varepsilon = 0,2$
- $L_0 = 10^5 \text{ m}$
 $\Rightarrow \varepsilon = 0,02$
- $L_0 = 10^6 \text{ m}$
 $\Rightarrow \varepsilon = 0,002$

fig. 3 : Paramètre ε .

1) $\theta_0 = \pi/3$

• $U_0 = 0,1 \text{ m.s}^{-1}$

$L_0 = 10^4 \text{ m}$

$\Rightarrow R_0 = 0,08$

$L_0 = 10^5 \text{ m}$

$\Rightarrow R_0 = 0,08 \cdot 10^{-1}$

$L_0 = 10^6 \text{ m}$

$\Rightarrow R_0 = 0,08 \cdot 10^{-2}$

• $U_0 = 1 \text{ m.s}^{-1}$

$L_0 = 10^4 \text{ m}$

$\Rightarrow R_0 = 0,8$

$L_0 = 10^5 \text{ m}$

$\Rightarrow R_0 = 0,8 \cdot 10^{-1}$

$L_0 = 10^6 \text{ m}$

$\Rightarrow R_0 = 0,8 \cdot 10^{-2}$



2) $\theta_0 = \pi/4$

• $U_0 = 0,1 \text{ m.s}^{-1}$

$L_0 = 10^4 \text{ m}$

$\Rightarrow R_0 = 0,097$

$L_0 = 10^5 \text{ m}$

$\Rightarrow R_0 = 0,097 \cdot 10^{-1}$

$L_0 = 10^6 \text{ m}$

$\Rightarrow R_0 = 0,097 \cdot 10^{-2}$

• $U_0 = 1 \text{ m.s}^{-1}$

$L_0 = 10^4 \text{ m}$

$\Rightarrow R_0 = 0,97$

$L_0 = 10^5 \text{ m}$

$\Rightarrow R_0 = 0,97 \cdot 10^{-1}$

$L_0 = 10^6 \text{ m}$

$\Rightarrow R_0 = 0,97 \cdot 10^{-2}$

3) $\theta_0 = \pi/6$

1) $\theta_0 = \pi/3$

• $U_0 = 10 \text{ m.s}^{-1}$

$L_0 = 10^4 \text{ m}$

$\Rightarrow R_0 = 8$

$L_0 = 10^5 \text{ m}$

$\Rightarrow R_0 = 0,8$

$L_0 = 10^6 \text{ m}$

$\Rightarrow R_0 = 0,08$

• $U_0 = 1 \text{ m.s}^{-1}$

Résultats identiques aux
cas océaniques correspondants:

$$0,8 \cdot 10^{-2} \leq R_0 \leq 0,8$$

2) $\theta_0 = \pi/4$

• $U_0 = 10 \text{ m.s}^{-1}$

$L_0 = 10^4 \text{ m}$

$\Rightarrow R_0 = 9,7$

$L_0 = 10^5 \text{ m}$

$\Rightarrow R_0 = 0,97$

$L_0 = 10^6 \text{ m}$

$\Rightarrow R_0 = 0,097$

• $U_0 = 1 \text{ m.s}^{-1}$

Résultats identiques aux
cas océaniques correspondants:

$$0,97 \cdot 10^{-2} \leq R_0 \leq 0,97$$

3) $\theta_0 = \pi/6$

R_0 (suite)

OCEAN

ATMOSPHERE

3) $\theta_0 = \pi/6$

• $U_0 = 0,1 \text{ m s}^{-1}$

$L_0 = 10^4 \text{ m}$

$\Rightarrow R_0 = 0,137$

$L_0 = 10^5 \text{ m}$

$\Rightarrow R_0 = 0,0137$

$L_0 = 10^6 \text{ m}$

$\Rightarrow R_0 = 0,00137$

• $U_0 = 1 \text{ m s}^{-1}$

$L_0 = 10^4 \text{ m}$

$\Rightarrow R_0 = 1,37$

$L_0 = 10^5 \text{ m}$

$\Rightarrow R_0 = 0,137$

$L_0 = 10^6 \text{ m}$

$\Rightarrow R_0 = 0,0137$

3) $\theta_0 = \pi/6$

• $U_0 = 10 \text{ m s}^{-1}$

$L_0 = 10^4 \text{ m}$

$\Rightarrow R_0 = 13,7$

$L_0 = 10^5 \text{ m}$

$\Rightarrow R_0 = 1,37$

$L_0 = 10^6 \text{ m}$

$\Rightarrow R_0 = 0,137$

• $U_0 = 1 \text{ m s}^{-1}$

Résultats identiques aux
cas océaniques correspondants.

$0,0137 \leq R_0 \leq 1,37$

fig. 4 : Nombre de Rossby.

On donne à ν , coefficient de viscosité cinématique, les valeurs suivantes :

océanique $10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$;

atmosphérique : $5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$;

Les résultats relatifs aux nombres E_{\perp} et \hat{E}_{\perp} sont donnés dans les tableaux qui suivent.

On considère tout d'abord l'atmosphère :

E_L \hat{E}_L

$$1) \theta_0 = \pi/3$$

$$\bullet E_L = 6,25 \cdot 10^{-4}$$

$$2) \theta_0 = \pi/4$$

$$\bullet E_L = 7,58 \cdot 10^{-4}$$

$$1) \theta_0 = \pi/3$$

$$\bullet \underline{U_0 = 10 \text{ ms}^{-1}}$$

$$L_0 = 10^4 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,976 \cdot 10^{-5}$$

$$L_0 = 10^5 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,976 \cdot 10^{-3}$$

$$L_0 = 10^6 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,976 \cdot 10^{-1}$$

$$\bullet \bullet \underline{U_0 = 1 \text{ ms}^{-1}}$$

$$L_0 = 10^4 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,976 \cdot 10^{-3}$$

$$L_0 = 10^5 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,976 \cdot 10^{-1}$$

$$L_0 = 10^6 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 9,76$$

$$2) \theta_0 = \pi/4$$

$$\bullet \underline{U_0 = 10 \text{ ms}^{-1}}$$

$$L_0 = 10^4 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,805 \cdot 10^{-5}$$

$$L_0 = 10^5 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,805 \cdot 10^{-3}$$

$$L_0 = 10^6 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,805 \cdot 10^{-1}$$

$$\bullet \bullet \underline{U_0 = 1 \text{ ms}^{-1}}$$

$$L_0 = 10^4 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,805 \cdot 10^{-3}$$

$$L_0 = 10^5 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,805 \cdot 10^{-1}$$

$$L_0 = 10^6 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 8,05$$

E_{\perp}

ATMOSPHERE (SUITE)

 \hat{E}_{\perp}

$$3) \theta_0 = \pi/6$$

$$\bullet E_{\perp} = 1,072 \cdot 10^{-3}$$

$$3) \theta_0 = \pi/6$$

$$\bullet U_0 = 10 \text{ ms}^{-1}$$

$$L_0 = 10^4 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_{\perp} = 0,302 \cdot 10^{-5}$$

$$L_0 = 10^5 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_{\perp} = 0,302 \cdot 10^{-3}$$

$$L_0 = 10^6 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_{\perp} = 0,302 \cdot 10^{-1}$$

$$\bullet U_0 = 1 \text{ ms}^{-1}$$

$$L_0 = 10^4 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_{\perp} = 0,302 \cdot 10^{-3}$$

$$L_0 = 10^5 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_{\perp} = 0,302 \cdot 10^{-1}$$

$$L_0 = 10^6 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_{\perp} = 3,02$$



fig. 5 : E_{\perp} et \hat{E}_{\perp} dans l'atmosphère.

On considère maintenant l'océan et on fait prendre à ν successivement les valeurs suivantes :

$$\nu = 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

E_L

$$1) \theta_0 = \pi/3$$

$$\bullet U_0 = 0,1 \text{ m s}^{-1}$$

$$(i) \nu = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$E_L = 0,32 \cdot 10^{-7}$$



$$(ii) \nu = 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$E_L = 0,32 \cdot 10^{-6}$$

$$(iii) \nu = 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$E_L = 0,32 \cdot 10^{-5}$$

$$(iv) \nu = 10^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$E_L = 0,32 \cdot 10^{-4}$$

$$1) \theta_0 = \pi/3.$$

$$\bullet U_0 = 0,1 \text{ m s}^{-1}$$

$$(i) \nu = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$L_0 = 10^4 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,5 \cdot 10^{-5}$$

$$L_0 = 10^5 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,5 \cdot 10^{-3}$$

$$L_0 = 10^6 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,5 \cdot 10^{-1}$$

$$(ii) \nu = 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$L_0 = 10^4 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,5 \cdot 10^{-4}$$

$$L_0 = 10^5 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,5 \cdot 10^{-2}$$

$$L_0 = 10^6 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,5$$

$$(iii) \nu = 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$L_0 = 10^4 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,5 \cdot 10^{-3}$$

$$L_0 = 10^5 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,5 \cdot 10^{-1}$$

$$L_0 = 10^6 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 5$$

$$(iv) \nu = 10^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$L_0 = 10^4 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,5 \cdot 10^{-2}$$

$$L_0 = 10^5 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,5$$

$$L_0 = 10^6 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 50$$

E_L \hat{E}_L

$(\theta_0 = \pi/3)$

$\bullet \bullet U_0 = 1 \text{ m s}^{-1}$

$(i) \underline{v_0 = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}}$

$E_L = 0,32 \cdot 10^{-7}$

$(ii) \underline{v_0 = 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}}$

$E_L = 0,32 \cdot 10^{-6}$

$(iii) \underline{v_0 = 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}}$

$E_L = 0,32 \cdot 10^{-5}$

$(iv) \underline{v_0 = 10^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}}$

$E_L = 0,32 \cdot 10^{-4}$

$(\theta_0 = \pi/3)$

$\bullet \bullet U_0 = 1 \text{ m s}^{-1}$

$(i) \underline{v_0 = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}}$

$L_0 = 10^4 \text{ m}$
 $\Rightarrow \hat{E}_L = 0,5 \cdot 10^{-7}$

$L_0 = 10^5 \text{ m}$
 $\Rightarrow \hat{E}_L = 0,5 \cdot 10^{-5}$

$L_0 = 10^6 \text{ m}$
 $\Rightarrow \hat{E}_L = 0,5 \cdot 10^{-2}$

$(ii) \underline{v_0 = 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}}$

$L_0 = 10^4 \text{ m}$
 $\Rightarrow \hat{E}_L = 0,5 \cdot 10^{-6}$

$L_0 = 10^5 \text{ m}$
 $\Rightarrow \hat{E}_L = 0,5 \cdot 10^{-4}$

$L_0 = 10^6 \text{ m}$
 $\Rightarrow \hat{E}_L = 0,5 \cdot 10^{-2}$

$(iii) \underline{v_0 = 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}}$

$L_0 = 10^4 \text{ m}$
 $\Rightarrow \hat{E}_L = 0,5 \cdot 10^{-5}$

$L_0 = 10^5 \text{ m}$
 $\Rightarrow \hat{E}_L = 0,5 \cdot 10^{-3}$

$L_0 = 10^6 \text{ m}$
 $\Rightarrow \hat{E}_L = 0,5 \cdot 10^{-1}$

$(iv) \underline{v_0 = 10^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}}$

$L_0 = 10^4 \text{ m}$
 $\Rightarrow \hat{E}_L = 0,5 \cdot 10^{-4}$

$L_0 = 10^5 \text{ m}$
 $\Rightarrow \hat{E}_L = 0,5 \cdot 10^{-2}$

$L_0 = 10^6 \text{ m}$
 $\Rightarrow \hat{E}_L = 0,5$

Fig. 6 : E_L et \hat{E}_L dans l'océan pour $\theta_0 = \pi/3$; $H_0 = 5 \cdot 10^3 \text{ m}$.

E_L \hat{E}_L

2) $\theta_0 = \pi/4$

• $U_0 = 0,1 \text{ ms}^{-1}$

(i) $\nu = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

$E_L = 0,39 \cdot 10^{-7}$



(ii) $\nu = 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

$E_L = 0,39 \cdot 10^{-6}$

(iii) $\nu = 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

$E_L = 0,39 \cdot 10^{-5}$

(iv) $\nu = 10^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

$E_L = 0,39 \cdot 10^{-4}$

•• $U_0 = 1 \text{ ms}^{-1}$: mêmes résultats

2) $\theta_0 = \pi/4$

• $U_0 = 0,1 \text{ ms}^{-1}$

(i) $\nu = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

$L_0 = 10^4 \text{ m}$

$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,41 \cdot 10^{-5}$

$L_0 = 10^5 \text{ m}$

$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,41 \cdot 10^{-3}$

$L_0 = 10^6 \text{ m}$

$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,41 \cdot 10^{-1}$

(ii) $\nu = 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

$L_0 = 10^4 \text{ m}$

$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,41 \cdot 10^{-4}$

$L_0 = 10^5 \text{ m}$

$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,41 \cdot 10^{-2}$

$L_0 = 10^6 \text{ m}$

$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,41$

(iii) $\nu = 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

$L_0 = 10^4 \text{ m}$

$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,41 \cdot 10^{-3}$

$L_0 = 10^5 \text{ m}$

$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,41 \cdot 10^{-1}$

$L_0 = 10^6 \text{ m}$

$\Rightarrow \hat{E}_L = 4,1$

(iv) $\nu = 10^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

$L_0 = 10^4 \text{ m}$

$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,41 \cdot 10^{-2}$

$L_0 = 10^5 \text{ m}$

$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,41$

$L_0 = 10^6 \text{ m}$

$\Rightarrow \hat{E}_L = 4,1$

•• $U_0 = 1 \text{ ms}^{-1}$: \hat{E}_L est multiplié par 10^{-2} Fig. 7 : E_L et \hat{E}_L dans l'océan pour $\theta_0 = \pi/4$; $H_0 = 5 \cdot 10^3 \text{ m}$.

E_L \hat{E}_L

$$\theta_0 = \pi/4$$

- $U_0 = 0,1 \text{ m.s}^{-1}$

- (i) $\nu = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

$$E_L = 0,24 \cdot 10^{-6}$$

- (ii) $\nu = 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

$$E_L = 0,24 \cdot 10^{-5}$$

- (iii) $\nu = 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

$$E_L = 0,24 \cdot 10^{-4}$$

- (iv) $\nu = 10^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

$$E_L = 0,24 \cdot 10^{-3}$$

- $U_0 = 1 \text{ m.s}^{-1}$

mêmes résultats pour E_L .

$$\theta_0 = \pi/4$$

- $U_0 = 0,1 \text{ m.s}^{-1}$

- (i) $\nu = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

$$L_0 = 10^4 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,25 \cdot 10^{-4}$$

$$L_0 = 10^5 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,25 \cdot 10^{-2}$$

$$L_0 = 10^6 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,25$$

- (ii) $\nu = 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

$$L_0 = 10^4 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,25 \cdot 10^{-3}$$

$$L_0 = 10^5 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,25 \cdot 10^{-1}$$

$$L_0 = 10^6 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 2,5$$

- (iii) $\nu = 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

$$L_0 = 10^4 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,25 \cdot 10^{-2}$$

$$L_0 = 10^5$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,25$$

$$L_0 = 10^6$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 2,5$$

- (iv) $\nu = 10^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

$$L_0 = 10^4 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 0,25 \cdot 10^{-1}$$

$$L_0 = 10^5 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 2,5$$

$$L_0 = 10^6 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_L = 250$$

- $U_0 = 1 \text{ m.s}^{-1}$

\hat{E}_L est multiplié par 10^{-2} .



Fig. 8 : E_L et \hat{E}_L dans l'océan pour $\theta_0 = \pi/4$ et $H_0 = 2 \cdot 10^3 \text{ m}$.

\hat{E}_1 dans l'océan où l'on prend comme étendue horizontale caractéristique L_0 et comme profondeur moyenne $H_0 = 2 \cdot 10^3 \text{ m}$:

(i) $L_0 = 5 \cdot 10^4 \text{ m}$

• $\theta_0 = \pi/4$ et $U_0 = 0,1 \text{ ms}^{-1}$

- $\nu = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

$E_L = 0,243 \cdot 10^{-6}$

$\hat{E}_L = 0,65 \cdot 10^{-3}$

- $\nu = 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

$\hat{E}_L = 0,65 \cdot 10^{-1}$

- $\nu = 10^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

$\hat{E}_L = 0,65$

(ii) $L_0 = 5 \cdot 10^5 \text{ m}$

• $\theta_0 = \pi/4$ et $U_0 = 0,1 \text{ ms}^{-1}$

- $\nu = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

$\hat{E}_L = 0,65 \cdot 10^{-1}$

- $\nu = 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

$\hat{E}_L = 6,5$

- $\nu = 10^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

$\hat{E}_L = 65$

Le choix de $P_0 = \rho_0 g H_0$ rend le paramètre de Boussinesq, B_0 , identiquement égal à l'unité.

Pour conclure cette annexe signalons que les valeurs assignées au coefficient de viscosité cinématique sont celles de la viscosité turbulente. On consultera à ce sujet les livres de LEBLOND et MYSAK (1978, pp. 458-459), KAMENKOVICH (1977, pp. 117-118) et DE RUIJTER (1980, pp. 13-14) ainsi que VERONIS (1973, pp. 42-43).

CONCLUSION

Nous avons organisé notre travail en deux temps : dans une première partie nous avons construit un modèle mathématique en ondes longues de la circulation océanique. La simplicité des résultats obtenus, qui n'était pas évidente a priori, s'est révélée particulièrement intéressante dans l'étude de la surface océanique et tout spécialement lors de la formulation de l'interaction atmosphère-océan. C'est cette simplicité qui nous a permis de développer la seconde partie de ce travail : nous avons pu en effet formuler, à partir du modèle les ondes longues, pour les écoulements quasi-géostrophique et agéostrophique des problèmes d'évolution pour les termes d'ordre R_0 et respectivement R_0^2 de la pression océanique. Ces problèmes d'évolution font intervenir des conditions aux frontières (en $z = 0$ et $z = -1$, ainsi qu'au temps $t = 0$) que l'on obtient par l'étude des couches limites correspondantes. D'un point de vue asymptotique cette seconde partie est assez exemplaire puisque l'on a mis sur pied une théorie qui prend en compte les effets du second ordre en ..

Un prolongement possible de notre travail est celui qui consisterait à développer une théorie du géostrophisme (quasi-géostrophisme et agéostrophisme) sur la sphère terrestre. Il semble d'ailleurs que ce formalisme soit lié au processus limite

$$\lim_{\varepsilon} (Q-G)_3 = \left\{ \varepsilon \downarrow 0, \text{ avec } \tilde{\alpha}_0, t, x, y, z \text{ fixés} \right\},$$

$$\text{où } \tilde{\alpha}_0 = \varepsilon / R_0$$

et son importance est de taille : on disposerait ainsi d'un modèle asymptotique de la circulation générale océanique (c'est-à-dire pour des écoulements dont l'étendue horizontale est de quelques milliers de kilomètres).

Néanmoins il n'est pas inutile de signaler que les modèles atmosphériques utilisés par les météorologues et déduits du quasi-géostrophisme dans le plan tangent s'avèrent être encore proches de la réalité pour des échelles horizontales qui dépassent les limites de l'approximation du plan tangent. Cette dernière remarque nous conforte dans l'espoir que nous avons de voir les résultats numériques, que l'on pourrait déduire de notre modèle quasi-géostrophique, confirmés par l'expérience ou d'autres modèles déjà existants.

REFERENCES

BLUMEN W. (1972)

Geostrophic adjustment. Reviews of Geophysics and Space Physics,
vol. 10, n° 2.

COLE J.D. et KEVORKIAN J. (1981)

Perturbation methods in applied mathematics. Springer-Verlag,
New-York Heidelberg Berlin.

DARROZES J.S. (1972)

The method of "Matched asymptotic expansions" applied to problems
involving two singular perturbation parameters. Fluid Dynamics
Transactions; vol. 6, part II.

DEMUTH C. (1985)

Communication personnelle. Institut de Mathématiques Liège (Belgique).

DE RUIJTER W.P.M. (1980)

On the asymptotic analysis of large-scale ocean circulation.
Mathematical Center Tracts, 120; Amsterdam.

ECKHAUS W. (1969)

On the foundations of the method of matched asymptotic approximations.
Journal de mécanique, vol. 8, N° 2, Juin 1969.

(1973)

Matched asymptotic expansions and singular perturbations.
North Holland.

(1979)

Asymptotic analysis of singular perturbations. North Holland.

EKMAN V.W. (1905)

On the influence of the earth's rotation on ocean currents.

Arkiv. Matem., Astr. Fysik., Stockholm 2 (11).

FAVARD J. (1963)

Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique. Tome 3 : Théorie des équations.

FRAENKEL L.E. (1969)

On the method of matched asymptotic expansions. Proc. Camb.

Phil. Soc. (1969), 65, pp. 209-284.

GERMAIN P. (1973)

Cours de mécanique des milieux continus. Tome 1. Masson et Cie.

GERMAIN P. et MULLER P.

Introduction à la mécanique des milieux continus. Masson et Cie.

GODTS S. et ZEYTOUNIAN R. (1985)

Un modèle asymptotique rationnel pour l'évolution des courants océaniques. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 301, série 1, n° 5.

(1985)

Structure asymptotique d'une couche limite atmosphérique avec coefficient d'échange dépendant de l'altitude. C.R. Acad. Sc. Paris (à paraître).

GREENSPAN H.P. (1968)

The theory of rotating fluids. Cambridge Univ. Press.

GUIRAUD J.P. (1983)

Notes de cours au CISM "Models for atmospheric flows" (Von Karman session). Bibliothèque de Mécanique théorique. Paris VI.

GUIRAUD J.P. et ZEYTOUNIAN R. (1980)

A second order ageostrophic model for flow at low Kibel number in the atmosphere. Geophys. Astrophys. Fluid dynamics, 15. n° 3 et 4.

KAMENKOVICH V.M. (1977)

Fundamentals of ocean dynamics. Elsevier oceanography series, 16.

KAPLUN S. (1967)

Fluid mechanics and singular perturbations. Acad. Press. Edited by P.A. Lagerstrom and L.N. Howard, C.S. Lin.

KIBEL I.A. (1963)

Introduction to the hydrodynamical methods of short period weather forecasting. Pergamon Press, N-Y.

LEBLOND P.H. et MYSAK L.A. (1978)

Waves in the ocean. Elsevier oceanography series, 20.

NAYFEH A.H. (1973)

Perturbation methods. Wiley, New-York.

PEDLOSKY J. (1979)

Geophysical fluid dynamics. Springer-Verlag, New-York.

PHILLIPS N.A. (1963)

Geostrophic motion. Rev. Geophysics, 1.

PRANDTL L. (1928)

NACA, T M - 452.

ROSSBY G.G. and collaborators (1939)

Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanent centers of action. Journal of marine research, 2.

SHIVAMOGGI B.K. (1978)

Asymptotic matching principle. ZAMM, 58.

VAN DYKE M. (1964)

Perturbations methods in fluid mechanics. Academic Press, New-York.

(1975)

Perturbations methods in fluid mechanics. (annotated edition)

Parabolic press.

VERONIS G. (1973)

Large scale ocean circulation. Advances in applied mechanics, vol. 13.

ZEYTOUNIAN R. (1976)

La météorologie du point de vue du mécanicien des fluides. Polish academy of sciences, Warszawa. Fluid dynamics transactions, vol. 8.

(1981)

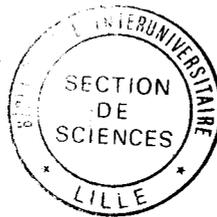
Les équations de Navier-Stokes et l'atmosphère. Publication de l'U.E.R de Mathématiques Pures et Appliquées. U.S.T.L., Lille 1; 1981, vol. 3, fasc. 1.

(1985)

Recent advances in asymptotic modelling of tangent atmospheric motions. Int. J. Enging. Sci. vol. 23, n° 11, pp. 1239-1288.

(1985)

Asymptotic modelling of atmospheric flows. Springer-Verlag, Heidelberg (à paraître).



MOTS CLES

EQUATIONS DE NAVIER-STOKES. NOMBRES DE ROSSBY ET D'EKMAN.
INTERACTION ATMOSPHERE-OCEAN. ONDES LONGUES. MODELISATION ASYMPTOTIQUE.
PERTURBATIONS SINGULIERES, DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES RACCORDES.
GEOSTROPHISME. COUCHES D'EKMAN.

RESUME

Les concepts usuels d'ondes longues et de géostrophisme sont utilisés pour construire, à partir de la méthode des développements asymptotiques raccordés, un modèle approché du champ de la pression océanique qui prenne en compte l'interaction atmosphère-océan.

Cette interaction consiste en un couplage des couches d'Ekman océanique et atmosphérique au voisinage de la surface libre et à cette fin on tire profit au maximum de l'approximation hydrostatique.

Dans un premier temps on est conduit, après avoir étudié le cas simple de la densité constante, au modèle quasi-géostrophique pour lequel on formule une équation d'évolution pour un opérateur elliptique relativement à la pression ainsi que les conditions aux limites associées.

L'approximation d'ordre supérieur, dite agéostrophique, est étudiée de la même façon.

Enfin, la prise en compte d'un coefficient d'échange variable suivant la verticale permet d'inclure une sous-couche visqueuse dans la couche classique d'Ekman au voisinage du fond. Le couplage de ces deux couches est soigneusement étudié et on formule le problème modèle correspondant.

