50376
1985
187

N° d'ordre : 1239

50376
1985
187

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3EME CYCLE

Spécialité : Mathématiques Pures

par

Abderrahman EL BOUKHARIA

BIBLIOTHEQUE INTERUNIVERSITAIRE
SECTION DE SCIENCES
LILLE

DÉTERMINATION EXPLICITE DU CONE TANGENT A UNE VARIÉTÉ DE NIVEAU EN UN POINT SINGULIER ; APPLICATION A L'OPTIMISATION.

Membres du Jury : CŒURÉ Gérard, Président
ANTOINE Philippe, Rapporteur
BERQUIER Françoise,
DENEL Jacques,
VAN ISEGHEM, François
} Examinateurs

Soutenue le 20 décembre 1985

Monsieur Philippe ANTOINE m'a confié ce sujet de recherche. Ses suggestions et ses remarques pertinemment constructives sont à la base de l'élaboration de ce travail. Il a été disponible à tout instant. Je saisis donc cette occasion pour lui exprimer ma profonde gratitude.

Monsieur François VAN ISEGHEM m'a activement aidé à mener à bien ce travail. Je l'en remercie vivement.

Je remercie Monsieur Gérard COEURÉ d'avoir bien voulu présider le jury de cette thèse ainsi que Monsieur Jacques DENEL et Mademoiselle Françoise BERQUIER qui m'ont fait l'honneur de juger ce travail.

Je remercie aussi Madame Raymonde BÉRAT qui a dactylographié cette thèse avec célérité, soin et compétence, Mesdames Françoise WDOWCZYK, Monique LLORET et Monsieur Michel PROVOST qui en ont assuré le tirage et l'empilage.

Enfin, je remercie tous les enseignants et tout le personnel de l'U.E.R. de Mathématiques de l'Université de Lille 1 qui m'ont apporté, à un moment ou à un autre, leur amitié ou leur sympathie.

TABLE DES MATIERES

		Pages
INTRODUCTION.		1
CHAPITRE I -	DETERMINATION EXPLICITE DU CONE TANGENT D'UNE SURFACE DE NIVEAU D'UNE APPLICATION DIFFERENTIABLE.	4
I.1.-	Les conditions (M_n), $n \in \mathbb{N}^*$.	4
I.2.-	Détermination du cône tangent.	11
	Enoncé du théorème.	11
	Démonstration du théorème.	15
CHAPITRE II -	CONDITIONS NECESSAIRES POUR UN PROBLEME D'OPTIMISATION AVEC CONTRAINTE BILATERALE VERIFIANT (M_2).	17
	Enoncé du théorème.	18
II.1.-	Première étape de la démonstration du théorème.	18
II.2.-	Deuxième étape de la démonstration du théorème.	24
a)	Démonstration de la condition nécessaire d'ordre 1.	24
b)	Construction du chemin différentiable γ.	26
c)	Preuve de la condition nécessaire d'optimalité du second ordre.	34
CHAPITRE III -	CONDITIONS NECESSAIRES POUR UN PROBLEME D'OPTIMISATION AVEC CONTRAINTE BILATERALE VERIFIANT (M_3).	37
	Préliminaire.	38
	Enoncé du théorème.	39
III.1.-	Première étape de la démonstration du théorème.	40
III.2.-	Deuxième étape de la démonstration du théorème.	45
a)	Détermination de (μ'_o, μ'_1).	46
b)	Construction du chemin différentiable γ.	47
c)	Amélioration de (μ'_o, μ'_1).	52
d)	Les relations $(\bar{a}_2)$, $(\bar{a}_3)$, $(\bar{a}_4)$, $(\bar{a}_5)$ du théorème.	56
PROBLEMES OUVERTS.		60
ANNEXE.		67
BIBLIOGRAPHIE.		71

INTRODUCTION

Nous nous proposons d'établir des conditions nécessaires pour un problème d'optimisation avec contrainte bilatérale du type suivant : on se donne E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, a un point de U, f une application de U dans F de classe C^k $(k \geq 2)$ au voisinage de a ; on note $W = f^{-1}(f(a))$ la surface de niveau de f passant par a ; le problème est de minimiser une application J de U dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 au voisinage de a, sur la surface de niveau W au point a.

Dans le cas d'un problème normal ($Df(a)$ est surjective), on a les conditions classiques des "multiplicateurs de Lagrange" : il existe une forme linéaire ξ dans F^* telle que,

$$\begin{cases} (1) \ : \ DJ(a) = \xi \circ Df(a) \\ (2) \ : \ \forall\, x \in \operatorname{Ker} Df(a) \ ; \ D^2J(a)(x,x) \geq \xi \circ D^2f(a)(x,x). \end{cases}$$

Dans le cas d'un problème anormal ($Df(a)$ non surjective), on connaît une condition nécessaire du premier ordre liée au cône tangent : si J présente sur W un minimum local en a, alors $DJ(a)$ est positif sur le cône tangent T_aW à W en a ; de plus, si ce cône est symétrique alors $DJ(a)\big|_{T_aW} = 0$. La détermination du cône tangent en a à W permet d'écrire des conditions nécessaires d'optimalité en a pour J sur W. D'où le problème de la détermination du cône tangent T_aW.

Rappelons deux résultats classiques, sur les cônes tangents, liés à la différentielle seconde intrinsèque $\Delta^2 f(a)$ au point a, qui est l'application bilinéaire symétrique induite par $D^2 f(a)$ de $\operatorname{Ker} Df(a) \times \operatorname{Ker} Df(a)$ dans $\operatorname{Coker}(Df(a))$. Le premier résultat est dû à Magnus [4] : on dit qu'une application bilinéaire A de $L^2_s(E,F)$ vérifie la condition de Magnus (M) si pour tout x non nul de E tel que $A(x,x) = 0$, l'application linéaire continue $A(x,.)$ de E dans F est surjective ; si $\Delta^2 f(a)$ vérifie (M) alors

$$T_a W = K(\Delta^2 f(a)) = \{x \in \operatorname{Ker} Df(a) \mid \Delta^2 f(a)(x,x) = 0\}.$$

Le deuxième résultat est dû à Ph. ANTOINE [1] : on dit que A vérifie la propriété (P_p) $(p \in \mathbb{N}^*)$ si pour toute forme linéaire ξ non nulle sur F, la forme quadratique associée à $\xi \circ A$ a une positivité ou moins égale à p, et que A vérifie la condition (M_1) si A vérifie (P_p) et si $\dim F = p < \infty$; si $\Delta^2 f(a)$ vérifie (M_1) alors $T_a W = K(\Delta^2 f(a))$.

Sous l'hypothèse (M_1), on obtient mieux que la seule condition nécessaire du premier ordre :

Théorème (Ph. ANTOINE [1])

Si $\Delta^2 f(a)$ vérifie (M_1) et si J présente sur W un minimum local en a alors il existe ξ dans F^* tel que

$$\begin{cases} (c.1) \quad : \quad DJ(a) = \xi \circ Df(a) \ ; \\ (c.2) \quad : \forall\, x \in K(\Delta^2 f(a)),\ D^2 J(a)(x,x) - \xi \circ D^2 f(a)(x,x) \geq 0. \end{cases}$$

La condition de Magnus (M) permettrait aussi de donner des conditions nécessaires d'optimalité d'ordre 1 et d'ordre 2.

Nous retrouverons ces conditions comme cas particulier des conditions sous une hypothèse plus faible (cf. Chap. II).

Au chapitre I, nous définissons une suite de conditions $(M_n)_{n\geq 2}$ relatives à une application bilinéaire symétrique et continue A telles que (M_2) soit plus faible à la fois que (M) et que (M_1) et que pour tout $n \geq 2$, (M_n) implique (M_{n+1}) :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & & & & & & (M) & & \\ & & & & & & & & & & \Downarrow & & \\ (M_1) & \Longrightarrow & (M_2) & \Longrightarrow & (M_3) & \Longrightarrow & \ldots & \Longrightarrow & (M_n) & \Longrightarrow & (M_{n+1}) & \Longrightarrow & \ldots \end{array}$$

Ces conditions sont telles que, quel que soit $n \geq 1$, si $\Delta^2 f(a)$ vérifie (M_n) alors $T_a W$ est égal à $K(\Delta^2 f(a))$.

Au chapitre II, nous établissons des conditions nécessaires d'optimalité du premier et du second ordre pour J sur W en a pour une contrainte bilatérale vérifiant (M_2). Ces conditions généralisent les conditions sous l'hypothèse (M_1) et donnent des conditions sous l'hypothèse de Magnus (M).

Au chapitre III, nous établissons une condition nécessaire du premier ordre (et de nombreuses conditions nécessaires adjointes) pour J sur W en a pour une contrainte bilatérale vérifiant (M_3).

La complexité croissante des conditions nécessaires rend difficile l'étude des contraintes vérifiant (M_n) avec $n > 3$. Cependant, nous indiquons (problèmes ouverts) la possibilité d'exprimer au moins une condition nécessaire de premier ordre quel que soit n.

CHAPITRE I

DETERMINATION EXPLICITE DU CONE TANGENT D'UNE SURFACE DE NIVEAU D'UNE APPLICATION DIFFERENTIABLE.

I.1.- *Les conditions* (M_n), $n \in \mathbb{N}^*$.

I.1.1.- *Notations.*

Soient E et F deux espaces de Banach et A un élément de $L^2_s(E,F)$. On note K(A) le cône isotrope de A défini par

$$K(A) = \{x \in E \mid A(x,x) = 0\}$$

et $K_r(A)$ le sous-ensemble de $K(A) - \{0\}$ formé des éléments x de $K(A) - \{0\}$ tels que l'application linéaire $A(x,.)$ de E dans F soit surjective. $K_r(A)$ est appelé le cône régulier (ou le cône des éléments réguliers) de A.

I.1.2.- *Définition.*

Soit A un élément de $L^2_s(E,F)$, on dit que A est propre si pour tout élément x de K(A) l'application linéaire $A(x,.)$ de E dans F est un morphisme direct.

I.1.3.- *Définition.*

Soient A un élément propre de $L^2_s(E,F)$, x_1 un élément de K(A), i_{x_1} l'injection canonique de $\operatorname{Ker} A(x_1,.) = E_{x_1}$ dans E et

et χ_{x_1} la projection canonique de F sur $\mathrm{Coker}(A(x_1,.)) = F_{x_1}$. On appelle application localisée de A en x_1, la composée

$$A_{x_1} = \chi_{x_1} \circ A \circ (i_{x_1}; i_{x_1})$$

définie de $E_{x_1} \times E_{x_1}$ dans F_{x_1}.

Si A_{x_1} est propre et si x_2 est un élément de $K(A_{x_1})$, on considère $(A_{x_1})_{x_2}$ qu'on note $A_{x_1x_2}$ et on l'appellera la localisée d'ordre deux de A en (x_1,x_2). Pour $m \geq 2$, on pourra parler aussi de la localisée d'ordre m de A en $(x_1,x_2,\ldots,x_m)$; et on définit par récurrence la notion "A est m-fois propre" de la manière suivante : A est m-fois propre si A est propre et si quel que soit x_1 dans $K(A)$, la localisée A_{x_1} est $(m-1)$-fois propre.

I.1.4.- Notations.

Soient A une application bilinéaire symétrique continue et m-fois propre et $(x_1;x_2;\ldots;x_m)$ un m-uplet de E vérifiant

$$\begin{cases} \text{(i)} : x_1 \in K(A), x_2 \in K(A_{x_1}), \ldots, x_m \in K(A_{x_1\ldots x_{m-1}}) \\ \text{(ii)} : A, A_{x_1}, \ldots, A_{x_1\ldots x_{m-1}} \text{ sont propres.} \end{cases}$$

Pour tout k vérifiant, $2 \leq k \leq m$, on note

$$E_{x_1\ldots x_k} = \mathrm{Ker}\left[A_{x_1\ldots x_{k-1}}(x_k,.)\right]$$

$$F_{x_1\ldots x_k} = \mathrm{Coker}\left[A_{x_1\ldots x_{k-1}}(x_k,.)\right]$$

$i_{x_1\ldots x_k}$ = l'injection canonique de $E_{x_1\ldots x_k}$ dans $E_{x_1\ldots x_{k-1}}$.

$\chi_{x_1\ldots x_k}$ = la surjection canonique de $F_{x_1\ldots x_{k-1}}$ sur $F_{x_i\ldots x_k}$.

$$A_{x_1\ldots x_k} = \chi_{x_1\ldots x_k} \circ A_{x_1\ldots x_{k-1}} \circ (i_{x_1\ldots x_k} ; i_{x_1\ldots x_k}) .$$

Nous avons alors la chaîne d'inclusions suivantes :

$$E \supset E_{x_1} \supset E_{x_1x_2} \supset \ldots \supset E_{x_1\ldots x_m} .$$

Si le m-uplet $(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ est fixé et s'il n'y a aucune confusion, pour tout k vérifiant, $1 \leq k \leq m$, nous noterons :

$$E_k = E_{x_1\ldots x_k} \quad ; \quad E_o = E$$

$$F_k = F_{x_1\ldots x_k} \quad ; \quad F_o = F$$

$$A_k = A_{x_1\ldots x_k} \quad ; \quad A_o = A$$

$$i_k = i_{x_1\ldots x_k} \quad ; \quad i_o = 1_E$$

$$\chi_k = \chi_{x_1\ldots x_k} \quad ; \quad \chi_o = 1_F .$$

I.1.5.- Définition.

Soit A un élément de $L^2_s(E,F)$. On définit par récurrence une suite de propriétés $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relatives à A par :

$$(M_1) : \begin{cases} \dim F = p < \infty \\ \\ A \text{ vérifie } (P_p) \end{cases}$$

et, pour $n \geq 2$,

$$(M_n) : \begin{cases} A \text{ est propre} \\ \forall\, x_1 \in K(A) - \operatorname{Ker} A,\ A_{x_1} \text{ vérifie } (M_{n-1}) \end{cases}$$

I.1.6.- Remarque.

La condition (M_1) entraîne que $\dim E \geq 2 \dim F$ et que $\dim F$ est finie. Il n'y a plus de telles restrictions pour $n > 1$.

I.1.7.- Proposition.

Relativement à un élément A de $L^2_s(E,F)$, nous avons les implications suivantes :

$\forall\, n \geq 2$,

$$(M_1) \Longrightarrow (M_2) \Longrightarrow (M_3) \Longrightarrow \ldots (M_n) \Longrightarrow (M_{n+1}) \Longrightarrow \ldots$$

(M_2) $\Longleftarrow$ (M)

Preuve :

Nous allons dans un premier temps, démontrer par récurrence sur n l'implication $((M_n) \Longrightarrow (M_{n+1}))$.

$n = 1$

Soit A un élément de $L^2_s(E,\mathbb{R}^p)$ $(p \geq 1)$ vérifiant (P_p), alors pour tout point x_1 de $K(A) - \operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Im} A(x_1,.)$ est de dimension finie $r(x_1)$ et $\operatorname{Ker} A(x_1,.)$ est de codimension finie égale à $r(x_1)$.

Ker $A(x_1,.)$ et Im $A(x_1,.)$ sont donc, respectivement, des facteurs directs de E et de $\mathbb{R}^p$, et donc $A(x_1,.)$ est un morphisme direct d'où la propreté de A.

Soit $\bar{\xi}$ une forme linéaire non nulle sur F_{x_1}. Alors $\xi = \bar{\xi} \circ \chi_{x_1}$ est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^p$; il existe donc un sous-espace vectoriel E_ξ de E, de dimension égale à p, tel que

$$\forall X \in E_\xi - \{0\},\ \xi \circ A(X,X) = \bar{\xi} \circ \chi_{x_1} \circ A(X,X) > 0.$$

Alors

$$\forall X \in (E_\xi \cap E_{x_1}) - \{0\},\ \bar{\xi} \circ \chi_{x_1} \circ A(X,X) = \bar{\xi} \circ A_{x_1}(X,X) > 0.$$

Puisque E_{x_1} est de codimension $r(x_1)$, le sous-espace $E_\xi \cap E_{x_1}$ est de dimension supérieure ou égale à $p-r(x_1)$, donc A_{x_1} vérifie $(P_{p-r(x_1)})$ et A vérifie (M_2).

Supposons maintenant que l'implication $((M_k) \Longrightarrow (M_{k+1}))$ soit vérifiée quel que soit k vérifiant, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, et montrons que l'implication $((M_n) \Longrightarrow (M_{n+1}))$ est encore vérifiée. En effet, si A vérifie (M_n), alors la localisée d'ordre $n-1$ de A vérifie (M_1), et, par le même raisonnement que dans le cas $n = 1$, cette localisée vérifie (M_2), c'est-à-dire que A vérifie (M_{n+1}).

Si A vérifie (M), alors quel que soit l'élément x_1 de $K(A) - \{0\}$, l'application linéaire $A(x_1,.)$ est surjective, la codimension de Im $A(x_1,.)$ est nulle, et A_{x_1} est nulle. Donc A vérifie d'une manière évidente (M_2). ■

I.1.8.- Remarque.

Les conditions (M) et (M_1) sont étrangères : on a non ((M) ⟹ (M_1)) et non ((M_1) ⟹ (M)).

En effet, considérons l'application bilinéaire symétrique A de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad A(x,y) = xy$$

$$K(A) = \{0\}$$

$$K_r(A) = \emptyset.$$

A vérifie la condition (M), mais A ne vérifie pas (M_1) car la forme quadratique associée à A est de signe constant.

Soit A l'application bilinéaire symétrique de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall\ X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad ; \quad \forall\ X' = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3,$$

$$A(X,X') = xy' + x'y.$$

A vérifie (P_1) : pour tout scalaire λ de $\mathbb{R} - \{0\}$, la droite de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$E_\lambda = \{(x,\lambda x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

vérifie

$$\forall\ X \in E_\lambda - \{0\},\ \lambda A(X,X) = 2\lambda^2 x^2 > 0.$$

Le vecteur $e_3 = (0,0,1)$ est dans K(A) mais n'est pas dans $K_r(A)$. Par conséquent, A vérifie (M_1) et A ne vérifie pas (M). ■

I.1.9.- Remarque.

Nous avons aussi non $((M_2) \Longrightarrow (M))$ et non $((M_2) \Longrightarrow (M_1))$.

Si l'on considère le deuxième exemple de la remarque précédente, on a une application bilinéaire symétrique A qui vérifie (M_2) (car elle vérifie (M_1)) et qui ne vérifie pas (M).

Considérons l'application bilinéaire symétrique A de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad ; \quad \forall X' = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3,$$
$$A(X,X') = (xx' + yy' - zz',\ xy' + x'y).$$

A ne vérifie pas (M_1) car la dimension de l'espace de départ de la forme quadratique associée à A est trop petite.

$$K(A) = \{(x,0,x) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,0,-x) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup$$
$$\{(0,y,y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y,-y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Soit x_o un élément non nul de $\mathbb{R}$, et soit (u,v) un élément de $\mathbb{R}^2$, alors l'équation en (x,y,z) :

$$A((x_o,0,y_o),(x,y,z)) = (u,v)$$

admet toujours $(0, \frac{v}{x_o}, \frac{-u}{x_o})$ pour solution. Donc l'application $A((x_o,0,x_o),.)$ est surjective. Un raisonnement analogue montre que les applications $A((x,0,-x);.)$, $A((0,y,y);.)$ et $A((0,y,-y);.)$ sont surjectives lorsque x et y sont différents de zéro. Par conséquent :

$$K_r(A) = K(A) - \{0\}.$$

Ce qui fait que A vérifie (M) et donc (M_2). ■

I.2.- *Détermination du cône tangent.*

I.2.1.- *Théorème.*

Soient E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, a un point de U, f une application deux fois différentiable en a telle que l'image de Df(a) soit fermée dans F et $W = f^{-1}(f(a))$ la surface de niveau de f passant par a. S'il existe un entier naturel $n \geq 1$ tel que $\Delta^2 f(a)$ vérifie la condition (M_n), alors le cône tangent à W en a est le cône isotrope $K(\Delta^2 f(a))$ de $\Delta^2 f(a)$.

Avant de passer à la démonstration de ce théorème, rappelons un résultat classique qui nous sera utile par la suite.

I.2.2.- *Proposition.*

Soient E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, a un point de U et f une application de U dans F deux foix différentiable en a. Si l'image de Df(a) est fermée dans F, alors on a les inclusions suivantes :

$$K_r(\Delta^2 f(a)) \subset T_a W \subset K(\Delta^2 f(a)).$$

I.2.3.- *Corollaire.*

Sous les hypothèses de la proposition (I.2.2), si $K_r(\Delta^2 f(a))$ est dense dans $K(\Delta^2 f(a)) - \{0\}$, alors $T_a W$ est identique à $K(\Delta^2 f(a))$.

Il ne nous reste donc qu'à résoudre le problème de la densité de $K_r(\Delta^2 f(a))$ dans $K(\Delta^2 f(a)) - \{0\}$. Ph. ANTOINE a résolu ce problème pour une application bilinéaire symétrique continue vérifiant la propriété (P_p) :

I.2.4.- *Proposition* (Ph. ANTOINE [1])

Si A est une application bilinéaire symétrique continue de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^p$ vérifiant (P_p), alors $K(A)$ est une partie génératrice de E et $K_r(A)$ est dense dans $K(A) - \{0\}$.

I.2.5.- *Corollaire.*

Si A est une application bilinéaire symétrique continue de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^p$ (avec $p \geqslant 1$) vérifiant (P_p), alors $K_r(A)$ est non vide.

La proposition suivante donne une condition suffisante de densité du cône régulier $K_r(A)$ dans le cône isotrope $K(A) - \{0\}$ d'une application bilinéaire symétrique continue A.

I.2.6.- *Proposition.*

Soient E et F deux espaces de Banach et A une application bilinéaire symétrique continue et deux fois propre définie sur $E \times E$ et à valeurs dans F. Alors, une condition suffisante pour que $K_r(A)$ soit dense dans $K(A) - \{0\}$ est que pour tout x de $K(A) - \{0\}$, on ait $K_r(A_x) \neq \emptyset$.

Preuve de la proposition (I.2.6) :

On fixe un élément x_1 de $K(A) - \{0\}$ et on va construire

un chemin différentielle γ tracé sur $K(A)$ tel que $\gamma(0) = 0$ et que pour tout t voisin de zéro, $\gamma(t)$ soit dans $K_r(A)$.

A x_1 correspond un élément x_2 de $K(A_{x_1})$ tel que l'application linéaire $A_{x_1}(x_2,.)$ soit surjective. Le fait que $A_{x_1}(x_2,x_2)$ soit nul entraîne l'existence d'un élément y_1 de E tel que

$$\frac{1}{2} A(x_2,x_2) + A(x_1,y_1) = 0.$$

Considérons la fonction g de $\mathbb{R} \times E_{x_1} \times E$ dans F définie par

$$\begin{cases} g(t;(x,y)) = \dfrac{1}{2t^2} A(x_1+tx+t^2y;x_1+tx+t^2y) & \text{si } t \neq 0 \\ g(0;(x,y)) = \dfrac{1}{2} A(x,x) + A(x_1,y) & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Puisque $A(x_1,x_1)$ et $A(x_1,x)$ sont nuls, on peut aussi écrire g sous la forme :

$$g(t;(x,y)) = \frac{1}{2} A(x,x) + A(x_1,y) + tA(x,y) + \frac{t^2}{2} A(y,y).$$

On peut alors facilement voir que g est de classe C^1 et que

$$D_2g(0;(x,y))(X,Y) = A(x,X) + A(x_1,Y).$$

Au point $(0;(x_2,y_1))$, on a :

$$\begin{cases} g(0;(x_2,y_1)) = \dfrac{1}{2} A(x_2,x_2) + A(x_1,y_1) = 0 \\ D_2g(0,(x_2,y_1)) = A(x_2,.) + A(x_1,.). \end{cases}$$

Soit $\chi_{x_1}(z)$ un élément de F_{x_1}. La résolution dans E_{x_1} de l'équation, $A_{x_1}(x_2,x) = \chi_{x_1}(z)$ est équivalente à la résolution dans $E_{x_1} \times E$ de l'équation

$$A(x_2,x) + A(x_1,y) = z$$

donc la surjectivité de l'application $A_{x_1}(x_2,.)$ est équivalente à celle de l'application $D_2g(0;(x_2,y_1))$. Comme A est 2-fois propre, $A(x_1,.)$ et $A_{x_1}(x_2,.)$ sont des morphismes directs ; il en résulte facilement que $D_2g(0;(x_2,y_1))$ est un morphisme direct et donc admet une section. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe $\varepsilon_1 > 0$, et une application différentiable (x,y) de $]-\varepsilon_1,\varepsilon_1[$ dans $E_{x_1} \times E$ telle que

$$\begin{cases} \forall\, t \in]-\varepsilon_1,\varepsilon_1[\quad ; \quad g(t,(x(t),y(t))) = 0 \\ x(0) = x_2 \\ y(0) = y_1 \ . \end{cases}$$

Donc, pour tout point t de $]-\varepsilon_1,\varepsilon_1[$, on a :

$$A(x_1 + tx(t) + t^2y(t) \quad ; \quad x_1 + tx(t) + t^2y(t)) = 0.$$

Le chemin différentiable $\gamma(t) = x_1 + tx(t) + t^2y(t)$ est alors tracé sur $K(A)$.

Pour t assez voisin de zéro, on va voir que le chemin $\gamma(t)$ est non seulement tracé sur $K(A)$, mais qu'il est tracé sur $K_r(A)$. Pour cela, on écrit

$$\begin{cases} \gamma(t) = x_1 + t(x_2 + \varepsilon(t)), \text{ avec } \lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0 \\ A(\gamma(t),.) = A(x_1;.) + tA(x_2 + \varepsilon(t);.) \end{cases}$$

et on applique le lemme de l'annexe aux deux applications $A(x_1,.)$ et $A(x_2,.)$: en effet, $A_{x_1}(x_2,.)$ est surjective et pour t voisin de zéro, l'application $A(x_2 + \varepsilon(t);.)$ est voisine de $A(x_2;.)$. Par conséquent, pour t assez petit, $A(\gamma(t);.)$ est surjective et donc $\gamma(t)$ appartient à $K_r(A)$. Or $\gamma(t)$ tend vers x_1 quant t tend vers zéro, on en déduit donc que $K_r(A)$ est dense dans $K(A) - \{0\}$. ■

Démonstration du théorème (I.2.1) :

Notons $\hat{E}$ le noyau de $Df(a)$, $\hat{F}$ le conoyau de $Df(a)$ et A la différentielle seconde intrinsèque de f en a. D'après la proposition (I.2.4), quel que soit le $(n-1)$-uplet $(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$ tel que

$$\begin{cases} x_1 \in K(A) - \operatorname{Ker} A \\ x_2 \in K(A_{x_1}) - \operatorname{Ker} A_{x_1} \\ \quad\vdots \\ x_{n-1} \in K(A_{x_1\ldots x_{n-2}}) - \operatorname{Ker}(A_{x_1\ldots x_{n-2}}) \end{cases}$$

$K(A_{x_1\ldots x_{n-1}})$ engendre $\hat{E}_{x_1\ldots x_{n-1}}$ et $K_r(A_{x_1\ldots x_{n-1}})$ est dense dans $K(A_{x_1\ldots x_{n-1}}) - \{0\}$ car A vérifie (M_n). Si p est supérieur ou égal à 1, le corollaire (I.2.5) entraîne que $K_r(A_{x_1\ldots x_{n-1}})$ est non vide (car $A_{x_1\ldots x_{n-1}}$ vérifie la propriété (P_p)).

De la proposition (I.2.6), il résulte alors que $K_r(A_{x_1 \ldots x_{n-2}})$ est dense dans $K(A_{x_1 \ldots x_{n-2}}) - \{0\}$. Puisque x_{n-1} est un vecteur non nul de $K(A_{x_1 \ldots x_{n-2}})$, ce cône n'est pas réduit à $\{0\}$ et donc $K_r(A_{x_1 \ldots x_{n-2}})$ est non vide. En réappliquant ce même raisonnement (n-2)-fois, on trouve que $K_r(A)$ est dense dans $K(A) - \{0\}$. Il ne reste maintenant qu'à appliquer le corollaire (I.2.3) pour trouver que

$$T_a W = K(\Delta^2 f(a)). \quad \blacksquare$$

CHAPITRE II

CONDITIONS NECESSAIRES POUR UN PROBLEME D'OPTIMISATION AVEC CONTRAINTE BILATERALE VERIFIANT (M_2).

Soient E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, a un point de U, f une application de U dans F 5-fois continûment différentiable en a et telle que $Df(a)$ soit un morphisme direct, W la surface de niveau de f passant par a, et J une application de U dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 en a. Nous nous proposons, dans ce chapitre, de trouver des conditions nécessaires d'optimalité pour J sur W au point a lorsque la différentielle seconde intrinsèque $\Delta^2 f(a)$ vérifie la condition (M_2).

Théorème.-

Si $\Delta^2 f(a)$ vérifie (M_2), alors pour que J présente un minimum local sur W au point a, il est nécessaire que soient vérifiées les deux conditions suivantes :

$$\forall\, x \in K(\Delta^2 f(a)) - \mathrm{Ker}(\Delta^2 f(a)) \;;\; \exists\, (\lambda_x ; \mu_x) \in (F^*)^2 \;;$$

$$\begin{cases} \text{(i)} \;:\; DJ(a) = \lambda_x \circ Df(a) + \mu_x \circ D^2 f(a)(x,.) \text{ et } \mu_x \circ Df(a) = 0 \\ \text{(ii)} \;:\; D^2 J(a)(x,x) \geqslant \lambda_x \circ D^2 f(a)(x,x) + \frac{1}{3}\, \mu_x \circ D^3 f(a)(x,x,x) \;. \end{cases}$$

Pour démontrer ce théorème, nous allons procéder en deux étapes. La première consiste à réduire le problème à un problème équivalent pour lequel la différentielle première de la contrainte est nulle. La deuxième est la démonstration du théorème dans le cas particulier où $Df(a) = 0$. Le théorème général en découle.

II.1.- Première étape de la démonstration du théorème.

Df(a) étant un morphisme direct, Ker Df(a) et Im Df(a) sont, respectivement, des facteurs directs de E et de F. On note X = Im Df(a), Y = Ker Df(a) et Z un supplémentaire topologique de X dans F.

II.1.1.- Proposition (Liapounov-Schmidt).

Si f est de classe C^r, $(r \geqslant 1)$, et si Df(a) est un morphisme direct, alors il existe deux difféomorphismes locaux k et h respectivement entre $(F;f(a))$ et $(X\times Z;(0,0))$ et entre $(X\times Y;(0,0))$ et

(E;a) tels que l'application $\Phi = k \circ f \circ h$ soit de la forme :

$$\begin{array}{ccc} X \times Y \supset V & \longrightarrow & X \times Z \\ (x,y) & \rightsquigarrow & (x;g(x,y)) \end{array}$$

où g est de classe C^r et vérifie $g(0,0) = 0$ et $Dg(0,0) = 0$.

II.1.2.- Lemme.

Si $\Delta^2 f(a)$ vérifie (M_2), alors $\Delta^2 \Phi(0,0)$ vérifie (M_2).

Preuve du lemme (II.1.2.) :

Par des translations, on se ramène au cas où $a = 0$ et $f(0) = 0$. On a :

$$\forall\ (x,y) \in X \times Y \ ; \quad D\Phi(0,0)(x,y) = (x,0)$$

donc $\operatorname{Ker} D\Phi(0,0) = \{0\} \times Y$ que l'on identifie à Y muni de l'injection naturelle i de Y dans $X \times Y$. Par ailleurs, $\operatorname{Im} D\Phi(0,0) = X \times \{0\}$; on identifiera $\operatorname{Coker} D\Phi(0,0)$ à Z muni de la projection naturelle p de $X \times Z$ sur Z.

Comme $D\Phi(0,0) = Dk(0) \circ Df(0) \circ Dh(0,0)$, l'isomorphisme linéaire $Dh(0,0)$ induit un isomorphisme $\overline{Dh(0,0)}$ de Y sur $\operatorname{Ker} Df(0)$ et l'isomorphisme linéaire $Dk(0)$ induit un isomorphisme $\overline{Dk(0)}$ de $\operatorname{Coker} Df(0)$ sur Z. On a les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Ker} Df(0) & \xrightarrow{\ \iota\ } & E \\ \downarrow{\scriptstyle \overline{Dh(0,0)}} & & \downarrow{\scriptstyle Dh(0,0)} \\ Y & \xrightarrow{\ i\ } & X \times X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\ X\ } & \operatorname{Coker} Df(0) \\ \downarrow{\scriptstyle Dk(0)} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{Dk(0)}} \\ X \times Z & \xrightarrow{\ p\ } & Z \end{array}$$

On a donc $\iota \circ \overline{Dh(0,0)} = Dh(0,0) \circ i$ et $p \circ Dk(0) = \overline{Dk(0)} \circ \chi$.

La différentielle seconde intrinsèque de Φ au point $(0,0)$ est

$$\Delta^2\Phi(0,0) = p \circ D^2\Phi(0,0) \circ (i,i)$$

avec $$D^2\Phi(0,0) = D^2(k \circ f \circ h)(0,0)$$

$$(1) = D^2k(0) \circ \left[Df(0) \circ Dh(0,0); Df(0) \circ Dh(0,0)\right]$$
$$+ Dk(0) \circ D^2f(0) \circ \left[Dh(0,0); Dh(0,0)\right]$$
$$+ Dk(0) \circ Df(0) \circ D^2h(0,0).$$

En tenant compte des relations

$$\begin{cases} Df(0) \circ Dh(0,0) \circ i = Df(0) \circ \iota \circ \overline{Dh(0)} = 0 \\ p \circ Dk(0) \circ Df(0) \quad = \overline{Dk(0)} \circ \chi \circ Df(0) = 0 \end{cases}$$

il vient que

$$\Delta^2\Phi(0,0) = \overline{Dk(0)} \circ \chi \circ D^2f(0) \circ \left[\iota \circ \overline{Dh(0,0)}; \iota \circ \overline{Dh(0,0)}\right]$$

c'est-à-dire que

$$\Delta^2\Phi(0,0) = \overline{Dk(0)} \circ \Delta^2f(0) \circ \left[\iota \circ \overline{Dh(0,0)}; \iota \circ \overline{Dh(0,0)}\right].$$

Il est par ailleurs facile de calculer $\Delta^2\Phi(0,0)$, en tant qu'application bilinéaire de $Y \times Y$ dans Z, en fonction de g : on a $\Delta^2\Phi(0,0) = D_2^2g(0,0)$.

L'application $\Delta^2\Phi(0,0)$ s'obtient à partir de $\Delta^2f(0)$ par composition par des isomorphismes linéaires et donc $\Delta^2\Phi(0,0)$ hérite de toutes les propriétés linéaires de $\Delta^2f(0)$. D'où le lemme (II.1.2). ■

Considérons l'application $\bar{g}$ de Y dans Z définie par

$$\forall\, y \in Y \quad ; \quad \bar{g}(y) = g(0,y).$$

Nous avons :

$$\begin{cases} \bar{g}(0) = g(0,0) = 0 \\ D\bar{g}(0) = D_2 g(0,0) = 0 \\ D^2\bar{g}(0) = D_2^2 g(0,0) \\ D^3\bar{g}(0) = D_2^3 g(0,0) \\ \text{et } D^2\bar{g}(0) \text{ vérifie } (M_2). \end{cases}$$

Soit $\bar{W}$ la surface de niveau de $\bar{g}$ passant par 0. Minimiser J sur W en 0 équivaut à minimiser $\bar{J} = J \circ h \circ i$ sur $\bar{W}$ en 0. Si le théorème précédent est démontré dans le cas d'une contrainte de différentielle première nulle, on l'applique à $\bar{J}$ et $\bar{g}$:

$$\forall\, y_o \in K(D^2\bar{g}(0)) - \operatorname{Ker} D^2\bar{g}(0),\ \exists\ \bar{\mu}_{y_o} \in Z^* \ ;$$

$$\begin{cases} \text{(i)} : D\bar{J}(0) = \bar{\mu}_{y_o} \circ D^2\bar{g}(0)(y_o;.) \\ \text{(ii)} : D^2\bar{J}(0)(y_o,y_o) \geq \frac{1}{3}\ \bar{\mu}_{y_o} \circ D^3\bar{g}(0)(y_o;y_o;y_o). \end{cases}$$

Nous allons montrer que ces conditions sont équivalentes aux conditions du théorème relatif à J et g.

Par l'isomorphisme $\overline{Dh(0,0)}$, se donner y_o dans $K(D^2\bar{g}(0)) - \operatorname{Ker} D^2\bar{g}(0)$ est équivalent à se donner $x_o = \overline{Dh(0,0)}y_o$ dans $K(\Delta^2 f(0)) - \operatorname{Ker} \Delta^2 f(0)$.

En différentiant l'identité $\bar{J} = J \circ h \circ i$, il vient que

$$D\bar{J}(0) = DJ(0) \circ Dh(0,0) \circ i = DJ(0) \circ \imath \circ \overline{Dh(0)}$$

donc (i) donne

$$DJ(0) \circ \imath = \bar{\mu}_{y_o} \circ D_2^2 g(0,0) \circ \left[\overline{Dh(0,0)}^{-1} x_o \; ; \; \overline{Dh(0,0)}^{-1}\right]$$

$$= \bar{\mu}_{y_o} \circ \overline{Dk(0)} \circ \Delta^2 f(0)(x_o;.)$$

$$= \bar{\mu}_{y_o} \circ \overline{Dk(0)} \circ \chi \circ D^2 f(0)(x_o, \imath).$$

On pose $\mu_{x_o} = \bar{\mu}_{y_o} \circ \overline{Dk(0)} \circ \chi$. On a alors $\mu_{x_o} \circ Df(0) = 0$ et

$$\left[DJ(0) - \mu_{x_o} \circ D^2 f(0)(x_o;.)\right]\Big|_{\text{Ker } Df(0)} = 0.$$

Il existe alors λ_{x_o} dans F^* tel que

$$DJ(0) = \mu_{x_o} \circ D^2 f(0)(x_o,.) + \lambda_{x_o} \circ Df(0).$$

En différentiant l'identité $\bar{J} = J \circ h \circ i$ deux fois de suite, il vient que

$$D^2\bar{J}(0) = D^2 J(0) \circ \left[Dh(0,0) \circ i, \; Dh(0;0) \circ i\right]$$
$$+ DJ(0) \circ D^2 h(0,0) \circ (i,i)$$
$$= D^2 J(0) \circ \left[\imath \circ \overline{Dh(0,0)}; \imath \circ \overline{Dh(0,0)}\right]$$
$$+ DJ(0) \circ D^2 h(0,0) \circ (i,i),$$

donc (ii) donne :

$$D^2 J(0)(x_o,x_o) + DJ(0) \circ D^2 h(0,0)(i \circ \overline{Dh(0,0)}^{-1} x_o; i \circ \overline{Dh(0,0)}^{-1} x_o)$$

$$\geq \frac{1}{3} \; \bar{\mu}_{y_o} \circ D_2^3 g(0,0)(y_o,y_o,y_o)$$

c'est-à-dire que

$$D^2J(0)(x_o,x_o) \geq \frac{1}{3}\,\bar{\mu}_{y_o} \circ D_2^3 g(0,0)(y_o,y_o,y_o)$$

$$- DJ(0) \circ D^2h(0,0)(i \circ \overline{Dh(0,0)}^{-1}x_o ; i \circ \overline{Dh(0,0)}^{-1}x_o).$$

Or, en différentiant l'identité $\Phi = k \circ f \circ h$ trois fois de suite et en tenant compte du fait que

$$D_2^3 g(0,0) = p \circ D^3\Phi(0,0) \circ (i,i,i)$$

on obtient

$$D_2^3 g(0,0)(y_o,y_o,y_o) = p \circ Dk(0) \circ D^3f(0)(x_o,x_o,x_o) +$$

$$3p \circ Dk(0) \circ D^2f(0)\left[x_o ; D^2h(0,0)(i \circ \overline{Dh(0,0)}^{-1}x_o ; i \circ \overline{Dh(0,0)}^{-1}x_o)\right]$$

et en remplaçant $DJ(0)$ par $\lambda_{x_o} \circ Df(0) + \mu_{x_o} \circ D^2f(0)(x_o;.)$, on a :

$$D^2J(0)(x_o,x_o) \geq \frac{1}{3}\,\bar{\mu}_{y_o} \circ p \circ Dk(0) \circ D^3f(0)(x_o,x_o,x_o) +$$

$$\bar{\mu}_{y_o} \circ p \circ Dk(0) \circ D^2f(0)\left[x_o ; D^2h(0,0)(i \circ \overline{Dh(0,0)}^{-1}x_o ; i \circ \overline{Dh(0,0)}^{-1}x_o)\right]$$

$$- \lambda_o \circ Df(0) \circ D^2h(0,0)\left[i \circ \overline{Dh(0,0)}^{-1}x_o ; i \circ \overline{Dh(0,0)}^{-1}x_o\right]$$

$$- \mu_{x_o} \circ D^2f(0)\left[x_o ; D^2h(0,0)(i \circ \overline{Dh(0,0)}^{-1}x_o ; i \circ \overline{Dh(0,0)}^{-1}x_o)\right].$$

Puisque $\overline{Dh(0,0)}^{-1}x_o$ est dans $K(D_2^2 g(0,0))$, l'égalité (1) donne

$$Dk(0) \circ Df(0) \circ D^2h(0,0)\left[i \circ \overline{Dh(0,0)}^{-1}x_o ; i \circ \overline{Dh(0,0)}^{-1}x_o\right]$$

$$= - Dk(0) \circ D^2f(0)(x_o,x_o),$$

donc on a :

$$Df(0) \circ D^2h(0,0)\left[i \circ \overline{Dh(0,0)}^{-1}x_o \; ; \; i \circ \overline{Dh(0,0)}^{-1}x_o\right] = - D^2f(0)(x_o,x_o).$$

D'où :

$$D^2J(0)(x_o,x_o) \geq \frac{1}{3}\, \mu_{x_o} \circ D^3f(0)(x_o,x_o,x_o) + \lambda_{x_o} \circ D^2f(0)(x_o,x_o). \blacksquare$$

II.2.- Deuxième étape de la démonstration du théorème.

Nous allons démontrer le théorème dans le cas particulier où $Df(0)$ est nulle. Pour cela, nous fixons un élément x_o dans $K(D^2f(0)) - \text{Ker } D^2f(0)$ et nous procédons en trois temps : nous établissons la condition nécessaire d'optimalité d'ordre 1 pour J : $DJ(0) = \mu_{x_o} \circ D^2f(0)(x_o,.)$; nous construisons un chemin différentiable γ tracé sur W et vérifiant $\gamma(0) = 0$ et $\lim_{t\to 0} \frac{\gamma(t)}{t^3} = x_o$, et à l'aide duquel nous améliorons le multiplicateur μ_{x_o} ; et, enfin, nous minimisons J sur γ pour établir une condition nécessaire d'optimalité d'ordre 2 pour J sur W en 0.

a) Démonstration de la condition nécessaire d'ordre 1.

$Df(0)$ étant nulle, $\Delta^2f(0)$ est égale à $D^2f(0)$. On note $A = D^2f(0)$.

II.2.1.- Lemme.

Si A vérifie (M_2) et si J présente sur W un minimum

local en 0, alors quel que soit l'élément x_o de $K(A) - \text{Ker } A$, la restriction de $DJ(0)$ à $\text{Ker } A(x_o,.)$ est nulle.

Preuve du lemme (II.2.1) :

Puisque J présente sur W un minimum local en 0, on a $DJ(0)_{|T_oW} \geq 0$. D'après le théorème (I.2.1) T_oW est égal à $K(A)$: le cône tangent T_oW est symétrique et donc $DJ(0)_{|T_oW} = 0$.

Soit x_o un élément de $K(A) - \text{Ker } A$. Comme A vérifie (M_2), la localisée A_{x_o} vérifie (M_1), donc $K(A_{x_o})$ engendre $\text{Ker } A(x_o,.)$ et est égal au cône tangent en x_o à $K(A)$ (Proposition (I.2.4) et corollaire (I.2.3.)). Comme $DJ(0)$ est linéaire, continue et nulle sur $K(A)$, alors $DJ(0)$ est nulle sur $K(A_{x_o})$ et, par conséquent, $DJ(0)$ est nulle sur $\text{Ker } A(x_o,.)$. ■

Démonstration de la condition nécessaire d'ordre 1 :

A étant propre, A est un morphisme direct et donc le polaire de $\text{Ker } A(x_o,.)$ coïncide avec $\text{Im}(A(x_o,.))^*$. Comme $DJ(0)$ est dans le polaire de $\text{Ker } A(x_o,.)$, il en résulte qu'il existe une forme linéaire μ_o dans F^* telle que

$$DJ(0) = (A(x_o;.))^*(\mu_o) = \mu_o \circ A(x_o,.). \quad ■$$

II.2.2.- *Remarque.*

μ_o n'est définie que modulo $\text{Ker}(A(x_o,.))^*$.

b) *Chemin différentiable tracé sur* W.

II.2.3.- *Lemme.*

Quels que soient x_o, x_1 et x_2 vérifiant :

$$\begin{cases} x_o \in K(A) - \operatorname{Ker} A \\ x_1 \in K_r(A_{x_o}) \\ \frac{1}{2} A(x_1,x_1) + A(x_o,x_2) = 0, \end{cases}$$

il existe un chemin différentiable γ de $]-\alpha,\alpha[$ $(\alpha > 0)$ dans W tel que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\gamma(t)}{t^3} = x_o \quad \text{et} \quad \gamma(0) = 0.$$

Preuve du lemme (II.2.3.) :

Soit x_o un élément de $K(A) - \operatorname{Ker} A$. Comme A vérifie (M_2), $K(A_{x_o})$ est une partie génératrice de $\operatorname{Ker} A(x_o,.)$ et $K_r(A_{x_o})$ est dense dans $K(A_{x_o}) - \{0\}$. Or x_o est un vecteur non nul de $\operatorname{Ker} A(x_o,.)$, par conséquent, $K(A_{x_o})$ n'est pas réduit à $\{0\}$ et $K_r(A_{x_o})$ n'est pas vide. Soit alors x_1 un élément de $K_r(A_{x_o})$, et soit x_2 un élément de E tel que

$$\frac{1}{2} A(x_1,x_1) + A(x_o,x_2) = 0.$$

Considérons l'application g de $\mathbb{R} \times \operatorname{Ker} A(x_o,.) \times E$ dans F définie par

$$\begin{cases} g(t,(X,Y)) = \frac{1}{t^8} f(t^3 x_o + t^4 X + t^5 Y) & \text{si } t \neq 0 \\ g(0,(X,Y) = \frac{1}{2} A(X,X) + A(x_o,Y) & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

On note $P(t) = t^3 x_o + t^4 X + t^5 Y$. La formule de Taylor à l'ordre deux avec reste intégral appliquée à f au voisinage de 0, nous donne, si $t \neq 0$:

$$g(t,(X,Y)) = \frac{1}{2t^8} A(P(t),P(t)) +$$

$$\frac{1}{2t^8} \left(\int_0^1 (1-\lambda)^2 D^3 f(\lambda P(t)) d\lambda\right)(P(t),P(t),P(t)).$$

Comme $A(x_o,x_o)$ et $A(x_o,X)$ sont nuls, on a :

$$g(t,(X,Y)) = \frac{1}{2} A(X,X) + A(x_o,Y) + \frac{t^2}{2} A(Y,Y) +$$

$$t\left[A(X,Y) + \frac{1}{2}\left(\int_0^1 (1-\lambda)^2 D^3 f(\lambda P(t)) d\lambda\right)\left(\frac{P(t)}{t^3}, \frac{P(t)}{t^3}, \frac{P(t)}{t^3}\right)\right].$$

f étant de classe C^5 au voisinage de 0, g est de classe C^2 au voisinage de $(0;(x_1,x_2))$. De plus, on a

$$\begin{cases} g(0,(x_1,x_2)) = \frac{1}{2} A(x_1,x_1) + A(x_o,x_2) = 0 \\ D_2 g(0,(x_1,x_2))(X,Y) = A(x_1,X) + A(x_o,Y). \end{cases}$$

Comme A est deux-fois propre, $\operatorname{Ker} A_{x_o}(x_1,.)$ est un facteur direct de $\operatorname{Ker} A(x_o,.)$, et donc $A_{x_o}(x_1,.)$ admet une section $\bar{\xi}$ vérifiant $A_{x_o}(x_1;\bar{\xi}) = 1_{F_{x_o}}$. Soit χ_o la projection canonique de F sur F_{x_o}. On peut montrer sans difficulté qu'il existe une application linéaire η dans $L(F,E)$ telle que :

$$A(x_1;\bar{\xi} \circ \chi_o) + A(x_o;\eta) = 1_F .$$

On note $\xi = \bar{\xi} \circ \chi_o$. L'application linéaire (ξ,η) est une

section pour $D_2g(0;(x_1,x_2))$. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe $\alpha > 0$, et une application différentiable (X,Y) de l'intervalle $]-\alpha,\alpha[$ dans $E_{x_o} \times E$ telle que

$$\forall\, t \in]-\alpha,\alpha[\ ;\ g(t;(X(t),Y(t))) = 0 \quad ;\quad X(0) = x_1 \quad \text{et} \quad Y(0) = x_2.$$

On note $\gamma(t) = t^3x_o + t^4X(t) + t^5Y(t)$, on a alors

$$\begin{cases} \forall\, t \in]-\alpha,\alpha[\quad ;\quad f(\gamma(t)) = 0 \quad ;\quad \gamma(0) = 0 \\ \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\gamma(t)}{t^3} = x_o. \end{cases}$$

D'où le lemme (II.2.3). ■

Pour la démonstration de la condition nécessaire d'ordre 2, nous allons essayer de minimiser J sur γ. Pour cela, nous avons besoin du développement limité, à l'ordre 2, au point 0, du chemin γ et de calculer explicitement les coefficients de la partie polynômiale de ce développement limité en fonction de x_o, x_1 et x_2.

On fait un développement limité d'ordre 2 de X et de Y :

$$\begin{cases} X(t) = x_1 + tX'(0) + \dfrac{1}{2}t^2(X''(0) + \varepsilon_1(t)) \ ;\ \lim\limits_{t\to 0} \varepsilon_1(t) = 0 \\ Y(t) = x_2 + tY'(0) + \dfrac{1}{2}t^2(Y''(0) + \varepsilon_2(t)) \ ;\ \lim\limits_{t\to 0} \varepsilon_2(t) = 0 \end{cases}$$

il vient un développement limité de $\gamma(t)$:

$$\gamma(t) = t^3x_o + t^4x_1 + t^5(x_2+y_1) + t^6(y_2+z_1) + t^6\varepsilon(t)$$

avec

$$\begin{cases} y_1 = X'(0) \in E_{x_o} \\ y_2 = Y'(0) \in E \\ z_1 = \frac{1}{2} X''(0) \in E_{x_o} \\ \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0 \end{cases} .$$

En différentiant deux fois de suite l'identité $g(t;(X(t),Y(t)) = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} * \; D_1 g(t;(X(t),Y(t)) + D_2 g(t;(X(t),Y(t)))(X'(t),Y'(t)) = 0 \\ * \; D_1^2 g(t;(X(t),Y(t))) + 2D_1 D_2 g(t;(X(t),Y(t)))(X'(t),Y'(t)) \\ \quad + D_2^2 g(t;(X(t),Y(t))\left[(X'(t),Y'(t)) \; ; \; (X'(t),Y'(t))\right] \\ \quad + D_2 g(t;(X(t),Y(t)))(X''(t) \; ; \; Y''(t)) = 0 \end{cases}$$

au point $t = 0$, on a

$$\begin{cases} * \; D_1 g(0,(x_1,x_2)) + D_2 g(0,(x_1,x_2))(y_1,y_2) = 0 \\ * \; D_1^2 g(0,(x_1,x_2)) + 2D_1 D_2 g(0,(x_1,x_2))(y_1,y_2) \\ \quad + D_2^2 g(0,(x_1,x_2))((y_1,y_2) \; ; \; (y_1,y_2)) \\ \quad + D_2 g(0,(x_1,x_2))(X''(0),Y''(0)) = 0. \end{cases}$$

On note $B = D^3 f(0)$. Comme on a

$$\begin{cases} D_1 g(0,(x_1,x_2)) = A(x_1,x_2) + \frac{1}{6} B(x_o,x_o,x_o) \\ D_1^2 g(0,(x_1,x_2)) = A(x_2,x_2) + B(x_o,x_o,x_1) \\ D_1 D_2 g(0,(x_1,x_2))(X,Y) = A(x_1,Y) + A(x_2,X) \\ D_2^2 g(0,(x_1,x_2))((X,Y),(X',Y')) = A(X,X') \end{cases}$$

alors, à l'aide de la section (ξ,η) de $D_2g(0,(x_1,x_2))$, on peut écrire

$$\begin{cases} y_1 = -\xi(A(x_1,x_2) + \frac{1}{6}B(x_o,x_o,x_o)) \\ y_2 = -\eta(A(x_1,x_2) + \frac{1}{6}B(x_o,x_o,x_o)) \\ z_1 = -\frac{1}{2}\ \xi(A(x_2,x_2) + 2A(y_1,y_2) + 2A(x_2,y_1) + A(y_1,y_1) + B(x_o,x_o,x_1)) \end{cases}$$

Si J présente sur W un minimum local en 0, alors $J \circ \gamma$ doit présenter sur $]-\alpha,\alpha[$ un minimum local en $t = 0$. On a donc à étudier $J \circ \gamma$.

Par translation, on suppose que $J(0) = 0$. On écrit J sous la forme :

$$J(x) = u(x) + \frac{1}{2}v(x,x) + \varepsilon(x)||x||^2$$

avec

$$\begin{cases} u \in L(E,\mathbb{R}), & (u = DJ(0)) \\ v \in L_s^2(E,\mathbb{R}), & (v = D^2J(0)) \\ \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0 \end{cases}$$

Par ce développement limité de J, il vient

$$J(\gamma(t)) = t^3u(x_o) + t^4u(x_1) + t^5u(x_2+y_1) + t^6(u(y_2+z_1) + \frac{1}{2}v(x_o,x_o)) + t^6\varepsilon(t),$$

avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Comme u est nulle sur $\operatorname{Ker} A(x_o,.)$, on a

$$u(x_o) = u(x_1) = u(y_1) = u(z_1) = 0.$$

Il reste donc

$$J(\gamma(t)) = t^5 u(x_2) + t^6(u(y_2) + \frac{1}{2} v(x_o,x_o)) + t^6\varepsilon(t)$$

Or, $J \circ \gamma$ présente sur $]-\alpha,\alpha[$ un minimum local en $t = 0$ et donc $u(x_2) = 0$. Comme

$$\frac{1}{2} A(x_1,x_1) + A(x_o,x_2) = 0,$$

en composant cette égalité par μ_o, on obtient :

$$\mu_o \circ A(x_1,x_1) = 0 \quad ;$$

c'est-à-dire que par continuité de l'application $\mu_o \circ A$ et par densité de $K_r(A_{x_o})$ dans $K(A_{x_o})$, nous avons

$$\forall X \in K(A_{x_o}), \quad \mu_o \circ A(X,X) = 0,$$

autrement dit, la forme quadratique associée à $\mu_o \circ A$ est identiquement nulle sur le cône $K(A_{x_o})$ de A_{x_o}.

II.2.4.- Lemme.

Soient E un espace de Banach, A un élément de $L^2_s(E,\mathbb{R}^p)$ $(p \in \mathbb{N})$ vérifiant la propriété (P_p), et B un élément de $L^2_s(E,\mathbb{R})$ tel que la forme quadratique associée à B soit nulle sur $K(A)$.

Alors

$$\forall X_o \in K_r(A), \exists\, \xi_{X_o} \in (\mathbb{R}^p)^* \quad ;$$

$$\begin{cases} B(X_o,.) = \xi_{X_o} \circ A(X_o,.) \\ (B - \xi_{X_o} \circ A)\,|\,\text{Ker } A(X_o,.) \times \text{Ker } A(X_o,.) = 0. \end{cases}$$

Preuve du lemme (II.2.4.) :

Puisque, pour tout X de $K(A)$, $B(X,X) = 0$, alors, on a

$$\forall\, X \in K(A) \quad ; \quad B(X,.)_{|T_X(K(A))} = 0.$$

Or, comme A vérifie (P_p), si dim Im $A(X,.) = r(X)$, alors A_X vérifie $(P_{p-r(X)})$ et donc $K(A_X)$ qui n'est autre que $T_X(K(A))$ engendre Ker $A(X,.)$, d'où

$$B(X,.)_{|\text{Ker } A(X,.)} = 0.$$

Puisque Im $A(X,.)$ est de dimension finie et Ker $A(X,.)$ est de codimension finie, alors A est propre et donc il existe ξ_X dans $(\mathbb{R}^p)^*$ tel que

$$B(X,.) = \xi_X \circ A(X,.).$$

Fixons X_o dans $K_r(A)$, on a $K(A_{X_o}) = \text{Ker } A(X_o,.)$, c'est-à-dire que

$$T_{X_o}(K(A)) = \text{Ker } A(X_o,.).$$

Soit X un élément de $T_{X_o}(K(A))$, il lui correspond une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $K(A)$ et une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{R}_+^*$ telles que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} X_n = X_o \\ \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{X_n - X_o}{\alpha_n} = X \ . \end{cases}$$

Or, nous avons pour tout n dans $\mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} B(X_n,X_n) - \xi_{X_o} \circ A(X_n,X_n) = 0 \\ B(X_o,X_n) - \xi_{X_o} \circ A(X_o,X_n) = 0 \\ B(X_o,X_o) - \xi_{X_o} \circ A(X_o,X_o) = 0. \end{cases}$$

D'où,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad B(X_n-X_o,X_n-X_o) - \xi_{X_o} \circ A(X_n-X_o;X_n-X_o) = 0.$$

En divisant par α_n^2 et en faisant tendre n vers l'infini, nous obtenons

$$B(X,X) - \xi_{X_o} \circ A(X,X) = 0.$$

Comme $\operatorname{Ker} A(X_o,.)$ est un espace vectoriel, on en déduit que

$$\forall\, X \in \operatorname{Ker} A(X_o,.),\ \forall\, X' \in \operatorname{Ker} A(X_o,.)\ ;$$
$$B(X,X') - \xi_{X_o} \circ A(X,X') = 0.$$

Donc

$$(B - \xi_{X_o} \circ A)_{|\operatorname{Ker} A(X_o,.)\times\operatorname{Ker} A(X_o,.)} = 0. \blacksquare$$

Appliquons le lemme ci-dessus à l'application bilinéaire A_{x_o} et à la forme bilinéaire $\mu_o \circ A$, alors il va exister μ_{x_1} dans $(\operatorname{Coker} A(x_o,.))^*$ tel que

$$\mu_o \circ A(x_1,.)_{|\operatorname{Ker} A(x_o,.)} = \mu_{x_1} \circ A_{x_o}(x_1,.).$$

Posons $\bar{\mu}_{x_1} = \mu_{x_1} \circ \chi_o$ et $\bar{\mu}_o = \mu_o - \bar{\mu}_{x_1}$, nous avons

$$\begin{cases} \bar{\mu}_o \circ A(x_1,.)_{|\mathrm{Ker}\, A(x_o,.)} = 0 \\ u = \bar{\mu}_o \circ A(x_o,.) \quad . \end{cases}$$

On a donc amélioré le résultat de la partie (i) du théorème.

II.2.5.- Remarque.

On peut calculer explicitement $\bar{\mu}_o$ en fonction de la section (ξ,η) de l'application $A(x_1,.) + A(x_o,.)$.

En effet, puisque

$$\begin{cases} A(x_1,\xi) + A(x_o,\eta) = 1_F \\ u = \bar{\mu}_o \circ A(x_o,.) \end{cases}$$

alors en composant la première identité par $\bar{\mu}_o$, on trouve

$$\bar{\mu}_o = u \circ \eta. \quad \blacksquare$$

c) *Preuve de la condition nécessaire d'optimalité du second ordre.*

A l'aide des considérations précédentes, $J(\gamma(t))$ devient

$$\begin{cases} J(\gamma(t)) = t^6(u(y_2) + \frac{1}{2}\, v(x_o,x_o) + \varepsilon(t)) \geq 0 \\ \lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0 \end{cases}$$

En divisant par t^6 et en passant à la limite sur t, on obtient :

$$\frac{1}{2}\, v(x_o,x_o) + u(y_2) \gtrsim 0$$

avec

$$y_2 = -\eta(A(x_1,x_2) + \frac{1}{6}\, B(x_o,x_o,x_o))$$

d'où

$$u(y_2) = -\, u \circ \eta(A(x_1,x_2) + \frac{1}{6}\, B(x_o,x_o,x_o))$$

$$= -\bar{\mu}_o(A(x_1,x_2) + \frac{1}{6}\, B(x_o,x_o,x_o))$$

et donc

(1) : $\frac{1}{2}\, v(x_o,x_o) - \frac{1}{6}\, \bar{\mu}_o \circ B(x_o,x_o,x_o) \gtrsim \bar{\mu}_o \circ A(x_1,x_2)$.

Nous avions pris auparavant x_2 comme solution de l'équation en X :

$$\frac{1}{2}\, A(x_1,x_1) + A(x_o,X) = 0$$

mais quand on change x_1 en kx_1, une solution de l'équation

$$\frac{1}{2}\, A(kx_1,kx_1) + A(x_o,X) = 0$$

est $X = k^2 x_2$.

D'où, en changeant dans l'inégalité ci-dessus x_1 en kx_1, nous obtenons :

$$\frac{1}{2}\, v(x_o,x_o) - \frac{1}{6}\, \bar{\mu}_o \circ B(x_o,x_o,x_o) \gtrsim k^3(\bar{\mu}_o \circ A(x_1,x_2)),$$

faisons tendre k, d'une part vers $+\infty$, et, d'autre part, vers $-\infty$, alors pour que l'inégalité (1) reste vérifiée, il est nécessaire que $\bar{\mu}_o \circ A(x_1,x_2)$ soit nul. Par conséquent, nous avons

$$v(x_o,x_o) \gtrsim \frac{1}{3}\, \bar{\mu}_o \circ B(x_o,x_o,x_o). \blacksquare$$

II.2.6.- Remarques.

i) Si, a fortiori, $\Delta^2 f(a)$ vérifie (M_1), alors pour tout élément x_o de $K(\Delta^2 f(a)) - \text{Ker } \Delta^2 f(a)$ le multiplicateur μ_{x_o} est nul et par conséquent on tombe sur les conditions nécessaires d'optimalité (c.1) et (c.2) (cf. Introduction).

ii) Si, a fortiori, $\Delta^2 f(a)$ vérifie (M), alors comme (M) implique (M_2), pour tout x_o de $K(\Delta^2 f(a)) - \{0\}$ il existe $(\lambda_{x_o}; \mu_{x_o})$ dans $(F^*)^2$ tel que

$$DJ(a) = \lambda_{x_o} \text{ o } Df(a) + \mu_{x_o} \text{ o } D^2 f(a)(x_o;.)$$

(on avait trouvé $\mu_{x_o} = \bar{\mu}_{x_o} \text{ o } \chi$, $\bar{\mu}_{x_o} \in (\text{Coker } Df(a))^*$)

$$DJ(a)_{|\text{Ker } Df(a)} = \bar{\mu}_{x_o} \text{ o } \Delta^2 f(a)(x_o,.)$$

comme $\Delta^2 f(a)(x_o,.)$ est surjective, $(\Delta^2 f(a)(x_o,.))^*$ est injective. Le multiplicateur μ_{x_o} est donc unique lorsque $\Delta^2 f(a)$ vérifie (M).

CHAPITRE III

CONDITIONS NECESSAIRES POUR UN PROBLEME D'OPTIMISATION AVEC CONTRAINTE BILATERALE VERIFIANT (M_3).

Soient E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, a un point de U, f une application de U dans F 8-fois continûment différentiable en a telle que Df(a) soit un morphisme direct, W la surface de niveau de f passant par a, et J une application de U dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 en a. Nous nous proposons, dans ce chapitre, de trouver des conditions nécessaires d'optimalité pour J sur W au point a lorsque la différentielle seconde intrinsèque $\Delta^2 f(a)$ vérifie (M_3).

Préliminaire.

$Df(a)$ étant un morphisme direct, $X = \text{Im } Df(a)$ et $Y = \text{Ker } Df(a)$ sont respectivement des facteurs directs de F et E ; et $Df(a)$ admet [3] une quasi-section σ_o dans $L(F,E)$ qui vérifie :

$Df(a) \circ \sigma_o \circ Df(a) = Df(a)$.

Si $\Delta^2 f(a)$ vérifie (M_3), pour tout couple (x_o,y_o) vérifiant

$$\begin{cases} x_o \in K(\Delta^2 f(a)) - \text{Ker } \Delta^2 f(a) \\ y_o \in K((\Delta^2 f(a))_{x_o}) - \text{Ker } (\Delta^2 f(a))_{x_o} \end{cases}$$

on a : $K((\Delta^2 f(a))_{x_o y_o})$ engendre $\text{Ker } (\Delta^2 f(a))_{x_o}(y_o,.)$, et comme y_o appartient à ce sous-espace, $K((\Delta^2 f(a))_{x_o y_o})$ n'est pas réduit à $\{0\}$; $K_r((\Delta^2 f(a))_{x_o y_o})$ est dense dans $K((\Delta^2 f(a))_{x_o y_o})$ et donc $K_r((\Delta^2 f(a))_{x_o y_o})$ n'est pas vide. Alors pour tout élément z_o de $K_r((\Delta^2 f(a))_{x_o y_o})$ l'application linéaire $(\Delta^2 f(a))_{x_o y_o}(z_o,.)$ est surjective et son noyau est un facteur direct de $\text{Ker}(\Delta^2 f(a))_{x_o}(y_o;.)$ (car A est trois fois propre). Elle admet donc une section ζ qui vérifie

$$(\Delta^2 f(a))_{x_o y_o}(z_o;\zeta) = 1_{\text{Coker}(\Delta^2 f(a)_{x_o}(y_o;.)} .$$

On note χ_{x_o} la projection canonique de X sur $\text{Coker } \Delta^2 f(a)(x_o,.)$ et $\chi_{x_o y_o}$ la projection canonique de $\text{Coker } \Delta^2 f(a)(x_o,.)$ sur $\text{Coker } (\Delta^2 f(a))_{x_o}(y_o;.)$.

Théorème.-

Si $\Delta^2 f(a)$ vérifie (M_3) et si J présente sur W un minimum local en a, alors quels que soient x_o, y_o, z_o et x_1 vérifiant

$$(I) \quad : \quad \begin{cases} x_o \in K(\Delta^2 f(a)) - \operatorname{Ker} \Delta^2 f(a) \\ y_o \in K((\Delta^2 f(a))_{x_o}) - \operatorname{Ker} (\Delta^2 f(a))_{x_o} \\ z_o \in K_r((\Delta^2 f(a))_{x_o y_o}) \\ \frac{1}{2} \Delta^2 f(a)(y_o,y_o) + \Delta^2 f(a)(x_o,x_1) = 0, \end{cases}$$

pour toute quasi-section σ_o de $Df(a)$, et pour toute section ζ_o de $(\Delta^2 f(a))_{x_o y_o}(z_o;.)$, il existe (λ_o,μ_o,μ_1) dans $(F^*)^3$ tel que

$$DJ(a) = \lambda_o \circ Df(a) + \mu_o \circ D^2 f(a)(x_o,.) + \mu_1 \circ D^2 f(a)(y_o;.),$$

et si on note $\zeta = \zeta_o \circ \chi_{x_o y_o} \circ \chi_{x_o} \circ \chi$; les multiplicateurs μ_o et μ_1 vérifient en outre les relations suivantes :

$$\begin{cases} a_o) : \ \mu_o \circ Df(a) = \mu_1 \circ Df(a) = 0 \\ a_1) : \ \mu_1 \circ D^2 f(a)(x_o;.)\big|_{\operatorname{Ker} Df(a)} = 0 \\ a_2) : \ \mu_1 \circ D^3 f(a)(x_o,x_o,x_o) = 3\mu_1 \circ D^2 f(a)\left[x_o; \sigma_o \circ D^2 f(a)(x_o,x_o)\right] \\ a_3) : \ \mu_1 \circ D^2 f(a)\left[\zeta \circ D^3 f(a)(x_o,x_o,x_o) \ ; \ \zeta \circ D^2 f(a)(y_o;x_1)\right] \leqslant \\ \qquad 3\mu_1 \circ D^2 f(a)\left[\zeta \circ D^2 f(a)\left[x_o; \sigma_o \circ D^2 f(a)(x_o,x_o)\right] ; \zeta \circ D^2 f(a)(y_o,x_1)\right] \\ a_4) : \ \mu_1 \circ D^2 f(a)\left[\zeta \circ D^2 f(a)(y_o,x_1) \ ; \ \zeta \circ D^2 f(a)(y_o,x_o)\right] = 0 \\ a_5) : \ \mu_1 \circ D^2 f(a)\left[\zeta \circ D^3 f(a)(x_o,x_o,x_o) \ ; \ \zeta \circ D^3 f(a)(x_o,x_o,x_o)\right] \\ \qquad + 9\mu_1 \circ D^2 f(a)\left[\zeta \circ D^2 f(a)\left[x_o; \sigma_o \circ D^2 f(a)(x_o,x_o)\right] ; \zeta \circ D^2 f(a)\left[x_o; \sigma_o \circ D^2 f(a)(x_o x_o)\right]\right] \\ \qquad = 6\mu_1 \circ D^2 f(a)\left[\zeta \circ D^3 f(a)(x_o,x_o,x_o); \zeta \circ D^2 f(a)\left[x_o; \sigma_o \circ D^2 f(a)(x_o,x_o)\right]\right]. \end{cases}$$

Pour démontrer ce théorème, nous allons procéder en deux étapes. La première consiste à réduire le problème à un problème équivalent pour lequel la différentiable première de la containte est nulle. La deuxième est la démonstration du théorème dans le cas particulier où $Df(a) = 0$. Le théorème général en découle.

III.1.- *Première étape de la démonstration du théorème.*

On garde les mêmes notations qu'au chapitre II :

$a = 0$; $f(0) = 0$; $J(0) = 0$; $X = \text{Im } Df(0)$;

$Y = \text{Ker } Df(0)$; $\Phi = k \circ f \circ h$; $\bar{J} = J \circ h \circ i$,

$\bar{g} = g_{|V \cap \{0\}\times Y}$; $\bar{W} = \bar{g}^{-1}(0)$.

III.1.1.- *Lemme.*

Si $\Delta^2 f(0)$ *vérifie* (M_3), *alors* $\Delta^2 \Phi(0,0)$ *vérifie* (M_3).

La démonstration de ce lemme est identique à celle du lemme (II.1.2.).

Si le théorème est démontré dans le cas d'une contrainte de différentielle première nulle en 0, on l'applique à $\bar{J}$ et $\bar{g}$ ($D\bar{g}(0) = 0$ admet comme quasi-section $\bar{\sigma}_o$ l'application nulle) : quels que soient $\bar{x}_o$, $\bar{y}_o$, $\bar{z}_o$ et $\bar{x}_1$ vérifiant :

$$(I') : \begin{cases} \bar{x}_o \in K(D^2\bar{g}(0)) - \text{Ker } D^2\bar{g}(0) \\ \bar{y}_o \in K((D^2\bar{g}(0))_{\bar{x}_o}) - \text{Ker } (D^2\bar{g}(0))_{\bar{x}_o} \\ \bar{z}_o \in K_r((D^2\bar{g}(0))_{\bar{x}_o \bar{y}_o}) \\ \frac{1}{2} D^2\bar{g}(0)(\bar{y}_o, \bar{y}_o) + D^2\bar{g}(0)(\bar{x}_o, \bar{x}_1) = 0 \end{cases}$$

et quelle que soit la section $\bar{\zeta}_o$ de $(D^2\bar{g}(0))_{\bar{x}_o\bar{y}_o}(\bar{z}_o;.)$, il existe $(\bar{\mu}_o,\bar{\mu}_1)$ dans $(F^*)^2$ tel que

$$D\bar{J}(0) = \bar{\mu}_o \circ D^2\bar{g}(0)(\bar{x}_o,.) + \bar{\mu}_1 \circ D^2\bar{g}(0)(\bar{y}_o,.)$$

et si on note $\bar{\zeta} = \bar{\zeta}_o \circ \chi_{\bar{x}_o\bar{y}_o} \circ \chi_{\bar{x}_o}$, où $\chi_{\bar{x}_o}$ est la projection canonique de Z sur $\operatorname{Coker} D^2\bar{g}(0)(\bar{x}_o,.)$ et $\chi_{\bar{x}_o\bar{y}_o}$ est la projection canonique de $\operatorname{Coker} D^2\bar{g}(0)(\bar{x}_o;.)$ sur $\operatorname{Coker}(D^2\bar{g}(0))_{\bar{x}_o}(\bar{y}_o;.)$, on ait :

$$\begin{cases} \bar{a}_1) : \bar{\mu}_1 \circ D^2\bar{g}(0)(\bar{x}_o,.) = 0 \\ \bar{a}_2) : \bar{\mu}_1 \circ D^3\bar{g}(0)(\bar{x}_o,\bar{x}_o,\bar{x}_o) = 0 \\ \bar{a}_3) : \bar{\mu}_1 \circ D^2\bar{g}(0)\left[\bar{\zeta} \circ D^3\bar{g}(0)(\bar{x}_o,\bar{x}_o,\bar{x}_o) \;;\; \bar{\zeta} \circ D^2\bar{g}(0)(\bar{y}_o,\bar{x}_1)\right] \leqslant 0 \\ \bar{a}_4) : \bar{\mu}_1 \circ D^2\bar{g}(0)\left[\bar{\zeta} \circ D^2\bar{g}(0)(\bar{y}_o,\bar{x}_1) \;;\; \bar{\zeta} \circ D^2\bar{g}(0)(\bar{y}_o,\bar{x}_1)\right] = 0 \\ \bar{a}_5) : \mu_1 \circ D^2\bar{g}(0)\left[\bar{\zeta} \circ D^3\bar{g}(0)(\bar{x}_o,\bar{x}_o,\bar{x}_o) \;;\; \bar{\zeta} \circ D^3\bar{g}(0)(\bar{x}_o,\bar{x}_o,\bar{x}_o)\right] = 0. \end{cases}$$

Nous allons montrer que ces conditions sont équivalentes aux conditions du théorème relatif à J à g.

Par l'isomorphisme $\overline{Dh(0,0)}$, se donner $(\bar{x}_o,\bar{y}_o,\bar{z}_o,\bar{x}_1)$ vérifiant (I') est équivalent à se donner (x_o,y_o,z_o,x_1) vérifiant (I) et :

$$\begin{cases} x_o = \overline{Dh(0,0)}\ \bar{x}_o \\ y_o = \overline{Dh(0,0)}\ \bar{y}_o \\ z_o = \overline{Dh(0,0)}\ \bar{z}_o \\ x_1 = \overline{Dh(0,0)}\ \bar{x}_1 \,. \end{cases}$$

Comme $D\bar{J}(0) = DJ(0) \circ Dh(0,0) \circ i$, on a $DJ(0) \circ \imath = D\bar{J}(0) \circ \overline{Dh(0,0)}^{-1}$. Donc

$$DJ(0) \circ \iota = \bar{\mu}_o \circ D_2^2 g(0,0)(\overline{Dh(0,0)}^{-1}.x_o \; ; \; \overline{Dh(0,0)}^{-1})$$

$$+ \bar{\mu}_1 \circ D_2^2 g(0,0)(\overline{Dh(0,0)}^{-1}.y_o \; ; \; \overline{Dh(0,0)}^{-1}) \quad .$$

Or,

$$D_2^2 g(0,0) = \overline{Dk(0)} \circ \Delta^2 f(0)(\iota \circ \overline{Dh(0,0)} \; ; \; \iota \circ \overline{Dh(0,0)})$$

d'où

$$DJ(0) \circ \iota = \bar{\mu}_o \circ \overline{Dk(0)} \circ \chi \circ D^2 f(0)(x_o, \iota)$$

$$+ \bar{\mu}_1 \circ \overline{Dk(0)} \circ \chi \circ D^2 f(0)(y_o, \iota).$$

En notant $\mu_o = \bar{\mu}_o \circ \overline{Dk(0)} \circ \chi$ et $\mu_1 = \bar{\mu}_1 \circ \overline{Dk(0)} \circ \chi$, cette égalité s'écrit :

$$(DJ(0) - \mu_o \circ D^2 f(0)(x_o,.) - \mu_1 \circ D^2 f(0)(y_o;.))\,|_{\text{Ker } Df(0)} = 0.$$

Donc, il existe une forme linéaire λ_o dans F^* telle que

$$DJ(0) = \mu_o \circ D^2 f(0)(x_o,.) + \mu_1 \circ D^2 f(0)(y_o,.) + \lambda_o \circ Df(0).$$

De plus, on a :

$$\mu_o \circ Df(0) = \bar{\mu}_o \circ \overline{Dk(0)} \circ \chi \circ Df(0) = 0$$

$$\mu_1 \circ Df(0) = \bar{\mu}_1 \circ \overline{Dk(0)} \circ \chi \circ Df(0) = 0$$

et comme $\bar{\mu}_1 \circ D_2^2 g(0,0)(\bar{x}_o,.) = 0$, on a

$$\mu_1 \circ \overline{Dk(0)} \circ \Delta^2 f(0)(\iota \circ \overline{Dh(0,0)}.\bar{x}_o, \; \iota \circ \overline{Dh(0,0)}) = 0$$

c'est-à-dire que

$$\mu_1 \circ D^2 f(0)(x_o, \iota \circ \overline{Dh(0,0)}) = 0.$$

D'où $$\mu_1 \circ D^2f(0)(x_o, \iota) = 0.$$

Pour les égalités et inégalité qui restent à établir, on va expliciter $\bar{\zeta} \circ D^3\bar{g}(0)(\bar{x}_o, \bar{x}_o, \bar{x}_o)$ et $\bar{\zeta} \circ D^2\bar{g}(0)(\bar{y}_o, \bar{x}_1)$.

Par les deux isomorphismes $Dk(0)$ et $\overline{Dh(0,0)}$, à toute section $\bar{\zeta}_o$ de l'application $(D^2\bar{g}(0))_{\bar{x}_o\bar{y}_o}(\bar{z}_o;.)$ correspond une section ζ_o de l'application $(\Delta^2 f(0))_{x_o y_o}(z_o;.)$ telle que, si on note $\bar{\zeta} = \bar{\zeta}_o \circ \chi_{\bar{x}_o\bar{y}_o} \circ \chi_{\bar{x}_o}$ et $\zeta = \zeta_o \circ \chi_{x_o y_o} \circ \chi_{x_o} \circ \chi$, on ait :

$$\zeta = \iota \circ \overline{Dh(0,0)} \circ \bar{\zeta} \circ p \circ Dk(0).$$

(*) : $$\bar{\zeta} \circ D^2\bar{g}(0)(\bar{y}_o, \bar{x}_1) = \bar{\zeta} \circ D_2^2 g(0,0)(\bar{y}_o, \bar{x}_1)$$

$$= \bar{\zeta} \circ \overline{Dk(0)} \circ \Delta^2 f(0)(\iota \circ \overline{Dh(0,0)}.\bar{y}_o, \iota \circ \overline{Dh(0,0)}.\bar{x}_1)$$

$$= \bar{\zeta} \circ \overline{Dk(0)} \circ \chi \circ D^2 f(0)(y_o; x_1).$$

(**) : On sait que (cf. Chapitre II, page 23)

$$D_2^3 g(0,0)(\bar{x}_o, \bar{x}_o, \bar{x}_o) = p \circ Dk(0) \circ D^3 f(0)(x_o, x_o, x_o) +$$
$$3p \circ Dk(0) \circ D^2 f(0)(x_o; D^2 h(0,0)(i(\bar{x}_o) ; i(\bar{x}_o))) .$$

On va exprimer maintenant $D^2h(0,0)(i(\bar{x}_o) ; i(\bar{x}_o))$ en en fonction de $D^2f(0)(x_o, x_o)$ et d'une quasi-section de $Df(0)$.

On pose $\bar{h} = h^{-1}$. En différentiant, deux fois de suite, l'identité $h \circ \bar{h}(x) = x$, on obtient

$$D^2h(0,0) \circ (D\bar{h}(0); D\bar{h}(0)) + Dh(0,0) \circ D^2\bar{h}(0) = 0.$$

Comme $(D\bar{h}(0))^{-1} = Dh(0,0)$, on a

$$D^2h(0,0) = - Dh(0,0) \circ D^2\bar{h}(0) \circ (Dh(0,0);Dh(0,0)).$$

Or $\bar{h}$ est définie (cf. [2], page 2) par :

$$\bar{h}(x) = (q \circ f(x), jx)$$

où q est la projection de F sur X et j est la projection de E sur Y. On a donc

$$\begin{cases} D\bar{h}(0) = (Df(0);j) \\ D^2\bar{h}(0) = (q \circ D^2f(0);0). \end{cases}$$

$Df(0)$ étant un morphisme direct, il admet alors une quasi-section σ_o ($Df(0) \circ \sigma_o \circ Df(0) = Df(0)$). On peut définir $Dh(0,0)$ à l'aide de σ_o :

$$Dh(0,0)(x,y) = y + \sigma_o x.$$

D'où

$$D^2h(0,0) = -\sigma_o \circ q \circ D^2f(0) \circ (Dh(0,0);Dh(0,0))$$

et

$$D^2h(0,0) \circ (i,i) = - \sigma_o \circ q \circ D^2f(0) \circ (Dh(0,0) \circ i;Dh(0,0) \circ i)$$
$$= - \sigma_o \circ q \circ D^2f(0) \circ (\iota \circ \overline{Dh(0,0)};\iota \circ \overline{Dh(0,0)}).$$

En appliquant ceci à $\bar{x}_o = \overline{Dh(0,0)}^{-1}.x_o$, on obtient

$$D^2h(0,0)(i(\bar{x}_o);i(\bar{x}_o)) = - \sigma_o \circ q \circ D^2f(0)(x_o;x_o).$$

Comme x_o est dans $K(\Delta^2f(0))$, $D^2f(0)(x_o,x_o)$ est dans X, et donc

$$D^2h(0,0)(i(\bar{x}_o);i(\bar{x}_o)) = - \sigma_o \circ D^2f(0)(x_o,x_o).$$

Finalement l'inégalité

$$\bar{\mu}_1 \circ D^2\bar{g}(0)\left[\bar{\zeta} \circ D^3\bar{g}(0)(\bar{x}_o,\bar{x}_o,\bar{x}_o);\bar{\zeta} \circ D^2\bar{g}(0)(\bar{y}_o,\bar{x}_1)\right] \leqslant 0$$

devient

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_1 \circ \overline{Dk(0)} \circ \chi \circ D^2f(0)\big[\imath \circ \overline{Dh(0,0)} \circ \bar{\zeta} \circ p \circ Dk(0) \circ D^3f(0)(x_o,x_o,x_o)\ ;\\ \imath \circ \overline{Dh(0,0)} \circ \bar{\zeta} \circ p \circ Dk(0) \circ D^2f(0)(y_o,x_1)\big]\\ -3\bar{\mu}_1 \circ \overline{Dk(0)} \circ \chi \circ D^2f(0)\big[\imath \circ \overline{Dh(0,0)} \circ \bar{\zeta} \circ p \circ Dk(0) \circ D^2f(0)(x_o;\sigma_o D^2(0)(x_o,x_o))\ ;\\ \imath \circ \overline{Dh(0,0)} \circ \bar{\zeta} \circ p \circ Dk(0) \circ D^2f(0)(y_o,x_1)\big] \leqslant 0.\end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$\begin{aligned}\mu_1 \circ D^2f(0)\left[\zeta \circ D^3f(0)(x_o,x_o,x_o)\ ;\zeta \circ D^2f(0)(y_o,x_1)\right] \leqslant\\ 3\mu_1 \circ D^2f(0)\left[\zeta \circ D^2f(0)(x_o,\sigma_o \circ D^2f(0)(x_o,x_o))\ ;\ \zeta \circ D^2f(0)(y_o,x_1)\right].\end{aligned}$$

Le même raisonnement entraîne les deux égalités (a_4) et (a_5) du théorème. ■

III.2.- Deuxième étape de la démonstration du théorème.

Nous allons démontrer le théorème dans le cas particulier où $Df(0) = 0$. Pour cela, nous fixons deux éléments x_o et y_o, respectivement, dans $K(D^2f(0)) - \mathrm{Ker}\ D^2f(0)$ et $K((D^2f(0))_{x_o}) - \mathrm{Ker}(D^2f(0))_{x_o}$ et nous procédons en quatre temps : nous établissons une condition nécessaire d'ordre 1 pour J : $DJ(0) = \mu_o' \circ D^2f(0)(x_o,.)+\mu_1' \circ D^2f(0)(y_o,.)$; nous construisons un chemin différentiable γ tracé sur W vérifiant $\gamma(0) = 0$ et $\lim_{t\to 0} \frac{\gamma(t)}{t^9} = x_o$; nous améliorons, à l'aide de γ, le

couple $(\mu_o';\mu_1')$; et, enfin, nous minimisons J sur γ pour établir les autres égalités et inégalité du théorème.

Df(0) étant nulle, on a Ker Df(0) = E, Im Df(0) = {0}, $\chi = 1_F$, $\Delta^2 f(0) = D^2 f(0)$. On note $A = D^2 f(0)$, $B = D^3 f(0)$, $u = DJ(0)$ et $v = D^2 J(0)$.

a) *Détermination de* (μ_o', μ_1').

III.2.1.- Lemme.

Si A vérifie (M_3) et si J présente sur W un minimum local en 0, alors

$$\forall\, x_o \in K(A) - \operatorname{Ker} A\ ;\ \forall\, y_o \in K(A_{x_o}) - \operatorname{Ker} A_{x_o}\ ;\ u_{|\operatorname{Ker} A_{x_o}(y_o;.)} = 0.$$

Preuve du lemme (III.2.1.) :

Comme A vérifie (M_3), on a $T_o W = K(A)$ et quels que soient x_o dans $K(A) - \operatorname{Ker} A$ et y_o dans $K(A_{x_o}) - \operatorname{Ker} A_{x_o}$; $K_r(A_{x_o y_o})$ est dense dans $K(A_{x_o y_o}) - \{0\}$ et $K(A_{x_o y_o})$ engendre $\operatorname{Ker} A_{x_o}(y_o,.)$.

$T_{x_o}(K(A))$ et $T_{y_o}(K(A_{x_o}))$ sont égaux, respectivement, à $K(A_{x_o})$ et $K(A_{x_o y_o})$. Puisque J présente sur W un minimum local en 0, on a $u_{|K(A)} \geq 0$. Or, K(A) est symétrique, donc $u_{|K(A)} = 0$. Comme u est linéaire continue, on a :

$$u_{|T_{x_o}(K(A))} = 0 \quad \text{et} \quad u_{|T_{y_o}(K(A_{x_o}))} = 0.$$

Donc

$$u_{|\operatorname{Ker} A_{x_o}(y_o,.)} = 0. \quad \blacksquare$$

A étant trois fois propre, A_{x_o} est propre. Il en résulte que le polaire de $\operatorname{Ker} A_{x_o}(y_o,.)$ est identique à l'image de $(A_{x_o}(y_o,.))^*$. Par conséquent, il existe une forme linéaire $\bar{\mu}_1'$ dans $(\operatorname{Coker} A(x_o,.))^*$ telle que

$$u_{|\operatorname{Ker} A(x_o;.)} = \bar{\mu}_1' \circ A_{x_o}(y_o;.).$$

D'où

$$(u - \bar{\mu}_1' \circ \chi_{x_o} \circ A(y_o;.))_{|\operatorname{Ker} A(x_o;.)} = 0.$$

A étant propre, le même raisonnement entraîne l'existence d'une forme linéaire μ_o' dans F^* telle que

$$u - \bar{\mu}_o' \circ \chi_{x_o} \circ A(y_o,.) = \mu_o' \circ A(x_o,.).$$

On pose $\mu_1' = \bar{\mu}_1' \circ \chi_{x_o}$, il vient

$$\begin{cases} u = \mu_o' \circ A(x_o,.) + \mu_1' \circ A(y_o,.) \\ \mu_o' \circ A(x_o,.) = 0. \end{cases} \quad \blacksquare$$

III.2.2.- Remarque.

μ_o' et μ_1' ne sont définis, respectivement, que modulo $\operatorname{Ker}(A(x_o,.))^*$ et $\operatorname{Ker}(A_{x_o}(y_o,.))^*$.

b) *Construction du chemin* γ.

Pour cela, nous avons besoin du lemme suivant :

III.2.3.- Lemme.

Il existe une application linéaire continue s_o de $\mathrm{Ker}\, A_{x_o}(y_o;.)$ dans E telle que

$$\forall z \in \mathrm{Ker}\, A_{x_o}(y_o;.) \; ; \; A(y_o;z) + A(x_o;s_o(z)) = 0.$$

Preuve du lemme (III.2.3.) :

A étant propre, $A(x_o,.)$ est un morphisme direct et donc $A(x_o,.)$ admet une quasi-section S_o linéaire continue de F dans E et vérifiant

$$\forall y \in \mathrm{Im}\, A(x_o;.) \; ; \; A(x_o;S_o(y)) = y.$$

On note i_o l'injection canonique de $\mathrm{Ker}\, A(x_o;.)$ dans E, et on considère l'application composée :

$$s_o = - S_o \circ A(y_o;i_o).$$

Soit z un élément de $\mathrm{Ker}\, A_{x_o}(y_o;.)$. On a l'équivalence suivante :

$$(A_{x_o}(y_o,z) = 0) \iff (A(y_o,z) \in \mathrm{Im}\, A(x_o;.))$$

d'où

$$\begin{aligned} A(y_o,z) + A(x_o,s_o(z)) &= A(y_o,z) - A(x_o,S_o \circ A(y_o,z)) \\ &= A(y_o,z) - A(y_o,z) \\ &= 0. \end{aligned}$$

s_o est évidemment linéaire et continue sur $\mathrm{Ker}\, A_{x_o}(y_o;.)$. D'où le lemme (III.2.3.). ■

Suite de la construction du chemin γ.

Soit z_o un élément de $K_r(A_{x_o y_o})$. Par définition de x_o, y_o et z_o il existe (x_1, x_2, y_1) dans $E \times E \times \operatorname{Ker} A(x_o,.)$ tel que

$$\begin{cases} \frac{1}{2} A(y_o,y_o) + A(x_o,x_1) = 0 \\ \frac{1}{2} A(z_o,z_o) + A(y_o,y_1) + A(x_o,x_2) = 0. \end{cases}$$

D'autre part, puisque A est 3-fois propre, l'application linéaire $A_{x_o y_o}(z_o,.)$ admet une section $\bar{\zeta}$. Il est facile de voir aussi que l'application $A(z_o,.) + A(y_o,.) + A(x_o,.)$, définie sur $\operatorname{Ker} A_{x_o}(y_o,.) \times \operatorname{Ker} A(x_o,.) \times E$ et qui associe à (z,y,x) la valeur $A(z_o,z) + A(y_o,y) + A(x_o,x)$ admet une section (ζ, η, ξ) telle que

$$\begin{cases} A(z_o,\zeta) + A(y_o,\eta) + A(x_o,\xi) = 1_F \\ \zeta = \bar{\zeta} \circ \chi_{x_o y_o} \circ \chi_{x_o} . \end{cases}$$

III.2.4.- Lemme.

Quels que soient $x_o; y_o; z_o; x_1, x_2$ et y_1 vérifiant

$$(I) : \begin{cases} x_o \in K(A) - \operatorname{Ker} A \\ y_o \in K(A_{x_o}) - \operatorname{Ker} A_{x_o} \\ z_o \in K_r(A_{x_o y_o}) \\ \frac{1}{2} A(y_o,y_o) + A(x_o,x_1) = 0 \\ \frac{1}{2} A(z_o,z_o) + A(y_o,y_1) + A(x_o,x_2) = 0, \end{cases}$$

il existe un chemin différentiable γ tracé sur W et vérifiant

$$\lim_{t\to 0} \frac{\gamma(t)}{t^9} = x_o \quad \text{et} \quad \gamma(0) = 0.$$

Preuve du lemme (III.2.4.) :

Soient x_o, y_o, z_o, x_1, x_2 et y_1 des éléments de E vérifiant (I). Considérons le polynôme P défini sur $\mathbb{R} \times E \times \operatorname{Ker} A(x_o,.) \times \operatorname{Ker} A_{x_o}(y_o,.)$ par

$$P(t;(x,y,z)) = t^9 x_o + t^{12} y_o + t^{13} z + t^{14} y + t^{15} x_1 + t^{16} s_o(z) + t^{17} x ;$$

$$= t^9 Q\ (t;(x,y,z))$$

et l'application g de $\mathbb{R} \times E \times \operatorname{Ker} A(x_o,.) \times \operatorname{Ker} A_{x_o}(y_o,.)$ dans F définie par

$$\begin{cases} g(t,(x,y,z)) = \dfrac{1}{t^{26}} f(P(t,(x,y,z))) & \text{si } t \neq 0 \\ g(0,(x,y,z)) = \dfrac{1}{2} A(z,z) + A(y_o,y) + A(x_o,x) & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Puisque

$$\begin{cases} A(x_o,x_o) = 0 \\ A(x_o,y_o) = 0 \\ A(x_o,z) = 0 \\ A(x_o,y) = 0 \\ \dfrac{1}{2} A(y_o,y_o) + A(x_o,x_1) = 0 \\ A(y_o,z) + A(x_o,s_o(z)) = 0 \end{cases}$$

alors en appliquant la formule de Taylor, à l'ordre deux, avec reste intégral, à l'application f au point 0, on trouve

$$g(t,(x,y,z)) = \frac{1}{2t^{26}}\left[t^{18}A(Q(t;(x,y,z)) ; Q(t;(x,y,z)))\right.$$

$$\left. + t^{27}\int_0^1 (1-\lambda)^2 D^3 f(P(t;(x,y,z)))d\lambda.(Q(t,(x,y,z));Q(t;(x,y,z));Q(t,(x,y,z)))\right]$$

ceci s'écrit :

$$g(t;(x,y,z)) = \frac{1}{2}A(z,z) + A(y_o,y) + A(x_o,x) + t\left[A(y_o,x_1) + A(y,z)\right]$$

$$+ t^2\left[\frac{1}{2}A(y,y) + A(x_1,z) + A(y_o;s_o(z))\right] + t^3\left[A(x_1,y) + A(z,s_o(z)) + \right.$$

$$\left. + A(y_o,x)\right] + t^4\left[\frac{1}{2}A(x_1,x_1) + A(y;s_o(z)) + A(x,z)\right] +$$

$$\frac{t}{2}\int_0^1 (1-\lambda)^2 D^3 f(\lambda P(t,(x,y,z)))d\lambda.(Q(t,(x,y,z));Q(t,(x,y,z));Q(t,(x,y,z))).$$

De cette manière, on voit que g est de classe C^5 par rapport à $(t;(x,y,z))$ puisque f est de classe C^8 au voisinage de 0, et

$$D_2 g(0;(x,y,z)) = A(z;.) + A(y_o;.) + A(x_o;.).$$

Au point $(0;(x_2,y_1,z_o))$, on a

$$\begin{cases} g(0;(x_2,y_1,z_o)) = 0 \\ D_2 g(0;(x_2,y_1,z_o)) = A(z_o;.) + A(y_o;.) + A(x_o;.) \end{cases}$$

$D_2 g(0,(x_2,y_1,z_o))$ admet donc une section (ζ,η,ξ). Par le théorème des fonctions implicites, il existe $\alpha > 0$, et une application différentiable (x,y,z) de l'intervalle $]-\alpha,\alpha[$ dans $E \times \operatorname{Ker} A(x_o,.) \times \operatorname{Ker} A_{x_o}(y_o,.)$ telle que

$$\begin{cases} \forall\, t \in]-\alpha,\alpha[,\ g(t;(x(t),y(t),z(t))) = 0 \\ x(0) = x_2 \\ y(0) = y_1 \\ z(0) = z_0. \end{cases}$$

Le chemin différentiable

$$\gamma(t) = t^9 x_o + t^{12} y_o + t^{13} z(t) + t^{14} y(t) + t^{15} x_1 + t^{16} s_o(z(t)) + t^{17} x(t)$$

est alors tracé sur W, et vérifie

$$\lim_{t\to 0} \frac{\gamma(t)}{t^9} = x_o \ . \ \blacksquare$$

c) *Amélioration de* $(\mu_o';\mu_1')$.

Puisque g est de classe C^5 au voisinage de $(0,(x_2,y_1,z_o))$, on peut faire un développement limité d'ordre 5 de la solution du théorème des fonctions implicites (x,y,z) au voisinage de $t = 0$:

$$\begin{cases} x(t) = x_2 + t\,x^1 + t^2x^2 + t^3x^3 + t^4x^4 + t^5(x^5 + \varepsilon_1(t)) \\ y(t) = y_1 + t\,y^1 + t^2y^2 + t^3y^3 + t^4y^4 + t^5(y^5 + \varepsilon_2(t)) \\ z(t) = z_o + t\,z^1 + t^2z^2 + t^3z^3 + t^4z^4 + t^5(z^5 + \varepsilon_3(t)) \\ \text{avec,}\ \lim_{t\to 0} \varepsilon_1(t) = \lim_{t\to 0} \varepsilon_2(t) = \lim_{t\to 0} \varepsilon_3(t) = 0 \ . \end{cases}$$

Il vient alors un développement limité de γ :

$$\begin{aligned} \gamma(t) = {} & t^9 x_o + t^{12} y_o + t^{13} z_o + t^{14}(y_1+z^1) + t^{15}(x_1+y^1+z^2) \\ & + t^{16}(s_o(z_o) + y^2 + z^3) + t^{17}(x_2 + s_o(z^1) + y^3 + z^4) \\ & + t^{18}(x^1 + y^4 + z^5 + s_o(z^2)) + t^{18}\varepsilon(t) \end{aligned}$$

avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0.$

Comme J présente sur W un minimum local en 0, alors J o γ présente sur $]-\alpha,\alpha[$ un minimum local en t = 0, et comme u est nulle sur Ker $A_{x_o}(y_o,.)$; $K(A_{x_o y_o})$; $K(A_{x_o})$ et sur K(A), nous avons :

$$J(\gamma(t)) = t^{14}u(y_1) + t^{15}u(x_1+y^1) + t^{16}u(y^2+s_o(z_o)) + t^{17}u(x_2+y^3+s_o(z^1))$$
$$+ t^{18}\left[u(x^1+y^4+s_o(z^2)) + \frac{1}{2}\,v(x_o,x_o)\right]$$
$$+ t^{18}\varepsilon_o(t) \qquad (\text{avec } \lim_{t\to 0} \varepsilon_o(t) = 0)$$

et

$$\lim_{t\to 0} \frac{J\circ\gamma(t)}{t^{14}} = u(y_1) \geq 0.$$

Remarquons que si y_1 est une solution de l'équation en y :

$$\frac{1}{2}\,A(z_o,z_o) + A(y_o,y) + A(x_o,x_2) = 0$$

alors pour tout scalaire k non nul, une solution de l'équation en y :

$$\frac{1}{2}\,A(z_o,z_o) + A(ky_o,y) + A(x_o,x_2) = 0$$

est $\frac{1}{k}\,y_1$.

Prenons k = -1, et notons $\gamma_1(t)$ le chemin associé à $(x_o,-y_o,z_o,x_1,x_2,-y_1)$, ($\gamma(t)$ étant associé à $(x_o,y_o,z_o,x_1,x_2,y_1)$), nous avons aussi

$$\lim_{t\to 0} \frac{J\circ\gamma_1(t)}{t^{14}} = u(-y_1) = -u(y_1) \geq 0.$$

Par conséquent, $u(y_1) = 0$. Comme u s'écrit

$$u = \mu_o' \circ A(x_o,.) + \mu_1' \circ A(y_o,.)$$

et que y_1 est dans Ker $A(x_o,.)$, alors en composant l'égalité

$$\frac{1}{2} A(z_o,z_o) + A(y_o,y_1) + A(x_o,x_2) = 0$$

par μ_1' , on obtient

$$\mu_1' \text{ o } A(z_o,z_o) = 0 \ .$$

Comme μ_1' ne dépend pas de z_o ; $K_r(A_{x_o y_o})$ est dense dans $K(A_{x_o y_o})$ et que μ_1' o A est continue, on a :

$$\forall\, z \in K(A_{x_o y_o}) \ ; \ \mu_1' \text{ o } A(z,z) = 0.$$

Puisque $A_{x_o y_o}$ vérifie la propriété (P_p), alors, en appliquant le lemme (II.2.4.) à l'application $A_{x_o y_o}$ et à la forme bilinéaire μ_1' o A, il en résulte qu'il existe une forme linéaire $\bar{\delta}_{z_o}$ dans $(\text{Coker } A_{x_o}(y_o,.))^*$ telle que

$$\mu_1' \text{ o } A(z_o,.)\Big|_{\text{Ker } A_{x_o}(y_o,.)} = \bar{\delta}_{z_o} \text{ o } A_{x_o y_o}(z_o;.).$$

On pose $\delta_o = \bar{\delta}_{z_o} \text{ o } \chi_{x_o y_o} \text{ o } \chi_{x_o}$ et $\mu_1 = \mu_1' - \delta_o$,

alors on obtient

$$\begin{cases} \mu_1 \text{ o } A(z_o,.)\Big|_{\text{Ker } A_{x_o}(y_o,.)} = 0 \\ \delta_o \text{ o } A(x_o,.) = 0 \\ \delta_o \text{ o } A(y_o,.)\Big|_{\text{Ker } A(x_o,.)} = 0 \quad . \end{cases}$$

La dernière égalité donne

$$\delta_o\ A(y_o,.) = \xi_o \circ A(x_o,.), (\xi_o \in F^*)$$

Donc

$$u = \mu_o' \circ A(x_o,.) + \mu_1' \circ A(y_o,.)$$

$$= \mu_o' \circ A(x_o,.) + (\mu_1' - \delta_o) \circ A(y_o,.) + \delta_o \circ A(y_o,.)$$

$$= \mu_o' \circ A(x_o,.) + \mu_1 \circ A(y_o,.) + \xi_o \circ A(x_o,.)$$

$$= (\mu_o' + \xi_o) \circ A(x_o,.) + \mu_1 \circ A(y_o,.).$$

Si on pose $\mu_o = \mu_o' + \xi_o$, on a

$$\begin{cases} u = \mu_o \circ A(x_o,.) + \mu_1 \circ A(y_o,.) \\ \mu_1 \circ A(x_o,.) = 0 \\ \mu_1 \circ A(z_o,.)\big|_{\operatorname{Ker} A_{x_o}(y_o,.)} = 0. \end{cases}$$

Nous avons donc amélioré (μ_o', μ_1'). ■

III.2.5.- Remarque.

Soient k_1 et k_2 deux scalaires non nuls, si l'on change (x_o,y_o) en $(k_1x_o;k_2y_o)$ alors (μ_o,μ_1) se change en $(\frac{1}{k_1}\mu_o; \frac{1}{k_2}\mu_1)$. En effet, il suffit de considérer l'identité $u = \mu_o \circ A(x_o,.) + \mu_1 \circ A(y_o,.)$ qui est indépendante de (x_o,y_o) et d'y changer (x_o,y_o) en (k_1x_o,k_2y_o).

III.2.6.- Remarque.

On peut calculer μ_1 en fonction de la section (ζ,η,ξ) de l'application $A(z_o,.) + A(y_o,.) + A(x_o,.)$ qui à (x,y,z) de $E \times E_{x_o} \times E_{x_oy_o}$ associe $A(z_o,z) + A(y_o,y) + A(x_o,x)$.

En effet, on sait que

$$\begin{cases} A(z_o,\zeta) + A(y_o,\eta) + A(x_o,\xi) = 1_F \\ \text{Im } \zeta \subset \text{Ker } A_{x_o}(y_o,.) \end{cases}$$

alors en composant cette égalité par μ_1, on a

$$\mu_1 \circ A(y_o,\eta) = \mu_1 .$$

Comme $\text{Im } \eta \subset \text{Ker } A(x_o,.)$, il vient

$$u \circ \eta = \mu_1 \circ A(y_o,\eta) = \mu_1 .$$

Donc

$$\mu_1 = u \circ \eta. \quad \blacksquare$$

d) Les relations $(\bar{a}_2)$; $(\bar{a}_3)$; $(\bar{a}_4)$; $(\bar{a}_5)$ *du théorème.*

$$J \circ \gamma(t) = t^{15}u(x_1+y^1) + t^{16}u(y^2+s_o(z_o)) + t^{17}u(x_2+y^3+s_o(z^1))$$
$$+ t^{18}\left[\underline{u}(x^1+y^4+s(z^2)) + \frac{1}{2}v(x_o,x_o)\right] + t^{18}\varepsilon_o(t).$$

L'exposant de la puissance de t dont le coefficient est $u(x_1+y^1)$ est impair, donc pour que $J \circ \gamma$ présente sur $]-\alpha,\alpha[$ un minimum local en $t = 0$, il est nécessaire que ce coefficient soit nul. D'où :

$$u(x_1 + y^1) = 0.$$

Pour connaître la valeur de y^1, on différentie l'identité $g(t,(x(t),y(t),z(t))) = 0$ par rapport à t. On en tire :

$$y^1 = - \eta(D_1 g(0;(x_2,y_1,z_o)))$$
$$= - \eta(\frac{1}{6} B(x_o,x_o,x_o) + A(z_o,y_1) + A(y_o,x_1))$$

et

$$u(x_1 + y^1) = u(x_1) - \frac{1}{6} \mu_1 \circ B(x_o,x_o,x_o) - \mu_1 \circ A(z_o,y_1)$$
$$- \mu_1 \circ A(y_o,x_1) = 0.$$

Or $u(x_1) = \mu_o \circ A(x_o,x_1) + \mu_1 \circ A(y_o,x_1)$.

Il va rester :

(1) : $\mu_o \circ A(x_o,x_1) - \mu_1 \circ A(z_o,y_1) - \frac{1}{6} \mu_1 \circ B(x_o,x_o,x_o) = 0.$

Cette égalité est vérifiée quel que soit le choix de $(x_o,y_o,z_o,x_1,x_2,y_1)$.

Considérons les deux équations respectivement en X_1 et en (Y_1,X_2) :

$$\begin{cases} (2) \quad : \quad \frac{1}{2} A(y_o,y_o) + A(x_o,X_1) = 0 \\ (3) \quad : \quad \frac{1}{2} A(z_o,z_o) + A(y_o,Y_1) + A(x_o,X_2) = 0. \end{cases}$$

x_1 est solution de (2), (y_1,x_2) est solution de (3). Mais quand on change x_o en $k_1 x_o$, y_o en $k_2 y_o$ et z_o en $k_3 z_o$ $((k_1,k_2,k_3) \in (R^*)^3)$ alors

$$\begin{cases} \frac{k_2^2}{k_1} x_1 \quad \text{est solution de} \quad (2) \\ (\frac{k_3^2}{k_2} y_1, \frac{k_3^2}{k_1} x_2) \quad \text{est solution de} \quad (3) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \mu_o \text{ devient } \frac{1}{k_1}\mu_o \\ \mu_1 \text{ devient } \frac{1}{k_2}\mu_1 \end{cases}$$

et l'égalité (1) devient :

$$(4) \quad : \frac{k_2^2}{k_1}\mu_o \circ A(x_o,x_1) - \frac{k_3^3}{k_2^2}\mu_1 \circ A(y_1,z_o) - \frac{1}{6}\frac{k_1^3}{k_2}\mu_1 \circ B(x_o,x_o,x_o) = 0.$$

Multiplions (4) par k_1 et faisons tendre k_1 vers zéro, nous obtenons

$$\mu_o \circ A(x_o,x_1) = 0.$$

Multiplions (4) par k_2 et faisons tendre k_2 vers l'infini, nous obtenons

$$\mu_1 \circ B(x_o,x_o,x_o) = 0.$$

D'où l'implication

$$(u(x_1+y^1) = 0) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \mu_o \circ A(x_o,x_1) = 0 \\ \mu_1 \circ A(z_o,y_1) = 0 \\ \mu_1 \circ B(x_o,x_o,x_o) = 0 \end{cases} .$$

Enfin

$$J(\gamma(t)) = t^{16}u(y^2+s_o(z_o)) + t^{17}u(x_2+y^3+s_o(z^1)) + t^{18}\left[\bar{u}(x^1+y^4+s_o(z^2)) + \frac{1}{2}v(x_o,x_o)\right] + t^{18}\varepsilon_o(t).$$

Comme $J \circ \gamma$ présente sur $]-\alpha,\alpha[$ un minimum local en $t = 0$, on a :

$$\lim_{t\to 0} \frac{J\circ\gamma(t)}{t^{16}} = u(y^2+s_o(z_o)) \geq 0.$$

Essayons de calculer y^2 en fonction $(x_o,y_o,z_o,x_1,x_2,y_1)$. Pour cela, nous différentions deux fois de suite l'identité $g(t,(x(t),y(t),z(t))) = 0$ par rapport à t, il en résulte que

$$y^2 = -\frac{1}{2}\,\eta\Big[D_1^2 g(0,(x_2,y_1,z_o)) + 2D_1D_2g(0,(x_2,y_1,z_o))(x^1,y^1,z^1) + D_2^2 g(0,(x_2,y_1,z_o))((x^1,y^1,z^1);(x^1,y^1,z^1))\Big].$$

Donc

$$y^2 = -\eta\circ A(x_1,z_o) - \eta\circ A(y_o,s_o(z_o)) - \eta\circ A(y_1,z^1) - \eta\circ A(z_o;y^1) - \frac{1}{2}\eta\circ A(y_1,y_1) - \frac{1}{2}\eta\circ A(z^1,z^1).$$

Or

$$\begin{cases} y^1 = -\eta(D_1g(0,(x_2,y_1,z_o))) \\ z^1 = -\zeta(D_1g(0,(x_2,y_1,z_o))) \\ D_1g(0,(x_2,y_1,z_o)) = \frac{1}{6}B(x_o,x_o,x_o) + A(z_o,y_1) + A(y_o,x_1). \end{cases}$$

Comme $u\circ\eta = \mu_1$, on a l'inégalité :

$$(5): \quad u(s_o(z_o)) - \mu_1\circ A(x_1,z_o) - \mu_1\circ A(y_o,s_o(z_o)) - \mu_1\circ A(y_1,z^1) - \mu_1\circ A(z_o,y^1) - \frac{1}{2}\mu_1\circ A(y_1,y_1) - \frac{1}{2}\mu_1\circ A(z^1,z^1) \geq 0.$$

Cette inégalité est vérifiée quel que soit le choix de $(x_o,y_o,z_o,x_1,x_2,y_1)$.

Remarquons que si s_o est l'application linéaire continue associée à (x_o,y_o) et vérifiant

$$\forall\, z \in \operatorname{Ker} A_{x_o}(y_o,.);\ A(y_o,z) + A(x_o,s_o(z)) = 0,$$

alors on peut déduire de s_o une application linéaire continue s_{o,k_1,k_2} associée à $(k_1x_o;k_2y_o)$ définie par

$$s_{o,k_1,k_2} = \frac{k_2}{k_1} \cdot s_o .$$

s_{o,k_1,k_2} vérifie bien le lemme (III.2. 3).

En faisant dans l'inégalité (5) le changement

$$\begin{cases}
x_o \longrightarrow k_1x_o & , \quad k_1 \in \mathbb{R}^* \\
y_o \longrightarrow k_2y_o & , \quad k_2 \in \mathbb{R}^* \\
z_o \longrightarrow k_3z_o & , \quad k_3 \in \mathbb{R}^* \\
x_1 \longrightarrow \dfrac{k_2^2}{k_1} x_1 & \\
x_2 \longrightarrow \dfrac{k_3^2}{k_1} x_2 & \\
y_1 \longrightarrow \dfrac{k_3^2}{k_2} y_1 & \\
\mu_o \longrightarrow \dfrac{1}{k_1} \mu_o & \\
\mu_1 \longrightarrow \dfrac{1}{k_2} \mu_1 & \\
s_o \longrightarrow \dfrac{k_2}{k_1} s_o &
\end{cases}$$

alors on obtient l'inégalité

$$(6) \quad : \quad \frac{k_3 k_2}{k_1} B_1 + \frac{k_3^4}{k_2^3} B_2 + \frac{k_3 k_1^3}{k_2^2} B_3 + \frac{k_2^5}{k_3^2 k_1^2} B_4 + \frac{k_1^6}{k_2 k_3^2} B_5 + \left(\frac{k_1 k_2}{k_3}\right)^2 B_6 \geq 0$$

avec

$$B_1 = \mu_o \circ A(x_o, s_o(z_o)) - \mu_1 \circ A(z_o, x_1)$$
$$+ \mu_1 \circ A[z_o, \eta \circ A(y_o, x_1)] + \mu_1 \circ A[y_1, \zeta \circ A(y_o, x_1)]$$
$$- \mu_1 \circ A[\zeta \circ A(z_o, y_1); \zeta \circ A(y_o, x_1)].$$

$$B_2 = -\frac{1}{2} \mu_1 \circ A(y_1, y_1) + \mu_1 \circ A[z_o; \zeta \circ A(z_o, y_1)]$$
$$+ \mu_1 \circ A[y_1; \zeta \circ A(z_o; y_1)]$$
$$- \frac{1}{2} \mu_1 \circ A[\zeta \circ A(z_o, y_1); \zeta \circ A(z_o; y_1)]$$

$$B_3 = \frac{1}{6} \Big[\mu_1 \circ A[z_o; \eta \circ B(x_o, x_o, x_o)]$$
$$+ \mu_1 \circ A[y_1, \zeta \circ B(x_o, x_o, x_o)]$$
$$- \mu_1 \circ A[\zeta \circ B(x_o, x_o, x_o); \zeta \circ A(z_o, y_1)]\Big]$$

$$B_4 = \frac{1}{2} \mu_1 \circ A[\zeta \circ A(y_o, x_1); \zeta \circ A(y_o, x_1)]$$

$$B_5 = \frac{1}{72} \mu_1 \circ A[\zeta \circ B(x_o, x_o, x_o); \zeta \circ B(x_o, x_o, x_o)]$$

$$B_6 = -\frac{1}{6} \mu_1 \circ A[\zeta \circ B(x_o, x_o, x_o); \zeta \circ A(y_o, x_1)].$$

On peut facilement remarquer que, dans l'inégalité (6), seul le coefficient de B_6 est un carré. Si on multiplie (6) par k_1^2, puis on fait tendre k_1 vers 0 on trouve

$$\frac{k_2^5}{k_3^2} B_4 \geq 0.$$

Or k_2^5 peut prendre des valeurs aussi bien positives que négatives, il vient donc que $B_4 = 0$. Si on multiplie (6) par $\frac{k_3^2}{k_1^6}$, puis on fait tendre k_1 vers l'infini, on a alors, pour tout scalaire non nul k_2, $\frac{1}{k_2} B_5 \geq 0$, ce qui implique que B_5 est nul. En faisant le même raisonnement, on trouve $B_1 = B_2 = B_3 = 0$ et

$$(\frac{k_1 k_2}{k_3})^2 B_6 \geq 0,$$

et donc $B_6 \geq 0$.

D'où

$$\begin{cases} \mu_1 \circ A[\zeta \circ B(x_o,x_o,x_o); \zeta \circ A(y_o,x_1)] \leq 0 \\ \mu_1 \circ A[\zeta \circ B(x_o,x_o,x_o); \zeta \circ B(x_o,x_o,x_o)] = 0 \\ \mu_1 \circ A[\zeta \circ A(y_o,x_1); \zeta \circ A(y_o,x_1)] = 0. \end{cases}$$ ∎

PROBLEMES OUVERTS

Il est possible d'établir une condition nécessaire du premier ordre pour que J présente un minimum local sur W lorsque $\Delta^2 f(a)$ vérifie (M_n), $n \geq 4$:

Théorème.-

Si $\Delta^2 f(a)$ vérifie (M_n) et si J présente sur W un minimum local en a, alors

$$\forall x_1 \in K(\Delta^2 f(a)) - \mathrm{Ker}(\Delta^2 f(a)),\ \forall x_2 \in K((\Delta^2 f(a))_{x_1}) - \mathrm{Ker}((\Delta^2 f(a))_{x_1})$$

$$\ldots,\ \forall x_{n-1} \in K((\Delta^2 f(a))_{x_1 \ldots x_{n-2}}) - \mathrm{Ker}((\Delta^2 f(a))_{x_1 \ldots x_{n-2}}),$$

$$\exists\ (\lambda_o, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in (F^*)^n,$$

$$DJ(a) = \lambda_o \circ Df(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \circ D^2 f(a)(x_k, .)$$

et

$$\forall k,\ 1 \leq k \leq n-1 \quad ; \quad \lambda_k \circ Df(a) = 0$$

$$\forall k,\ 1 \leq k \leq n-1 \quad ; \quad \forall m,\ 1 \leq m \leq k-1 \quad ;$$

$$\lambda_k \circ \left[(D^2 f(a)(x_m, .)) \Big|_{\hat{E}_{x_1 \ldots x_{m-1}}} \right] = 0, \quad (\hat{E} = \mathrm{Ker}\ Df(a)).$$

La démonstration de ce théorème est semblable à celle déjà faite dans les cas (M_2) (pages 24-25) et (M_3) (pages 46-47).

Si $\Delta^2 f(a)$ vérifie (M_n), alors pour tout élément x_o de $K(\Delta^2 f(a)) - \mathrm{Ker}\ \Delta^2 f(a)$, on montre comme dans les cas (M_2) et (M_3), à l'aide du théorème des fonctions implicites qu'il existe un chemin différentiable γ_n tracé sur W, passant par a en $t = 0$, et un entier α_n tels que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\gamma_n(t) - a}{t^{\alpha_n}} = x_o .$$

L'exploitation de ce chemin pour déterminer des conditions nécessaires se heurte à des difficultés d'ordre pratique. D'une part, le nombre de paramètres croît très rapidement avec n (exp : dans le cas de (M_2), il y a trois paramètres, dans le cas (M_3) il y a six paramètres ; dans le cas (M_4), il y aurait 11 paramètres). D'autre part, l'entier α_n croît aussi très vite avec n (exp : $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 9$, $\alpha_4 = 27$) ; il faut donc aller très loin dans le développement limité du chemin γ_n, ce qui rend les calculs quasi-infaisables. On se heurte aussi à des difficultés d'ordre théorique déjà rencontrées pour (M_3). En effet, au chapitre III, nous sommes restés à l'égalité

$$J \circ \gamma(t) = t^{16} u(y^2 + s_o(z_o)) + t^{17} u(x_2 + y^3 + s_o(z^1)) + t^{18}\left[u(x^1 + y^4 + s_o(z^2)) + \frac{1}{2} v(x_o, x_o) + \varepsilon_o(t)\right]$$

avec

$$u(y^2 + s_o(z_o)) = -\frac{1}{6} \mu_1 \circ D^2 f(0)\left[\zeta \circ D^3 f(0)(x_o, x_o, x_o); \zeta \circ D^2 f(0)(y_o, x_1)\right] \geq 0.$$

Si nous avions pu établir la nullité de $u(y^2+s_o(z_o))$, nous aurions alors

$$J \circ \gamma(t) = t^{18}\left[u(x^1+y^4+s_o(z^2)) + \frac{1}{2}\, v(x_o,x_o) + \varepsilon_o(t)\right]$$

et donc puisque J présente sur W un minimum local en 0, nous aurions

$$\lim_{t\to 0} \frac{J\circ\gamma(t)}{t^{18}} = u(x^1+y^4+s_o(z^2)) + \frac{1}{2}\, v(x_o,x_o) \geq 0,$$

c'est-à-dire que

$$D^2J(0)(x_o,x_o) \geq -2DJ(0)(x^1+y^4+s_o(z^2)).$$

Par conséquent, en calculant x^1, y^4 et z^2 en fonction de $(x_o,y_o,z_o,x_1,x_2,y_1)$, et en remplaçant $DJ(0)$ par $\mu_o \circ D^2f(0)(x_o,.) + \mu_1 \circ D^2f(0)(y_o,.)$, nous aurions pu déduire une condition nécessaire d'optimalité d'ordre deux pour J sur W en 0.

Une manière d'établir l'égalité

$$\mu_1 \circ D^2f(0)\left[\zeta \circ D^3f(0)(x_o,x_o,x_o); \zeta \circ D^2f(0)(y_o,x_1)\right] = 0$$

serait de démontrer la conjecture suivante, qui est un renforcement de notre lemme (II.2.4.).

<u>Soient</u> A <u>un élément de</u> $L^2_s(E,\mathbb{R}^p)$ <u>vérifiant</u> (P_p), <u>et</u> B <u>un élément de</u> $L^2_s(E,\mathbb{R})$ <u>vérifiant</u>,

$$\forall\, x \in K(A),\quad B(x,x) = 0$$

<u>alors il existe</u> ξ <u>dans</u> $(\mathbb{R}^p)^*$ <u>tel que</u> $B = \xi \circ A$.

Elle est vérifiée pour $p = 1$, et je n'ai pas trouvé de contre-exemple pour $p > 1$.

Ce résultat permettrait non seulement de donner des conditions nécessaires d'ordre deux pour l'hypothèse (M_3), mais aussi probablement d'aborder le cas (M_n) avec $n \geq 4$.

ANNEXE

En suivant une idée de Ph. ANTOINE [1], nous allons démontrer un lemme sur les applications linéaires continues admettant une section.

Lemme.-

Soient E et F deux espaces de Banach, u et v deux applications linéaires continues de E dans F telles que u soit un morphisme direct et que l'application induite par v de Ker u dans Coker u admette une section. Il existe alors $\delta > 0$ et $\gamma > 0$ tels que pour toute application linéaire continue ω de E dans F vérifiant, $||\omega - v|| \leq \gamma$, et pour tout scalaire t vérifiant, $0 < t < \delta$, l'application linéaire continue $u + t\omega$ admet une section.

Preuve :

u étant un morphisme direct, Ker u est un facteur direct de E. On note i l'injection canonique de Ker u dans E, k la projection canonique de F sur Coker u et s_o une section de u considérée comme application surjective de E dans Im u : $u \circ s_o = 1_{\text{Im } u}$.

Soit s_v une section pour $k \circ v \circ i$, alors puisque $(k \circ v \circ i) \circ s_v = 1_{\text{Coker } u}$ est inversible, il existe $\gamma > 0$ tel que pour toute application linéaire continue ω de E dans F vérifiant $||\omega - v|| < \gamma$, l'application $(k \circ \omega \circ i) \circ s_v$ soit un automorphisme

de Coker u et $s_w = s_v \circ ((k \circ \omega \circ i) \circ s_v)^{-1}$ soit une section pour $k \circ \omega \circ i$:

$$(k \circ \omega \circ i) \circ s_\omega = (k \circ \omega \circ i) \circ s_v \circ ((k \circ \omega \circ i) \circ s_v)^{-1} = 1_{\text{Coker } u}.$$

L'application qui a ω assoice s_ω est continue, donc s_ω est bornée au voisinage de v, quitte à diminuer γ, on peut, par exemple, majorer $||s_\omega||$ par $2||s_v||$.

Pour tout y de F, et pour tout $t > 0$, on pose

$$\begin{cases} x_{\omega,y,t} = \frac{1}{t}\left[i \circ s_\omega(k(y)) + s_o(y - \omega \circ i \circ s(k(y))\right] \\ z_{\omega,y,t} = t\omega \circ s_o(y - \omega \circ i \circ s_\omega(k(y))). \end{cases}$$

On peut facilement voir que

$$(u + t\omega)(x_{\omega,y,t}) = y + z_{\omega,y,t}.$$

Si l'on prend

$$\begin{cases} A_1 = 2||s_v|| + ||s_o|| + 2||s_o||(\gamma + ||v||) \times ||s_v|| \\ A_2 = ||s_o||(\gamma + ||v||)\left[1 + 2||s_v||(\gamma + ||v||)\right] \\ A = \max(A_1, A_2) \end{cases}$$

on a les majorations

$$\begin{cases} ||x_{\omega,y,t}|| \leq \frac{A}{t}||y|| \\ ||z_{\omega,y,t}|| \leq At||y|| \end{cases}$$

Pour ω et t fixés, on construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par application réitérée du résultat précédent :

(0) $\quad z_o = y$

(1) $\quad (u + t\omega)(x_n) = z_{n-1} + z_n \quad$ pour $\quad n \geq 1$

(2) $\quad ||z_n|| \leq At||z_{n-1}||$

(3) $\quad ||x_n|| \leq \frac{A}{t}\ ||z_{n-1}||.$

De (2), il résulte que

(4) $\quad \forall\, n \geq 0, \quad ||z_n|| \leq (At)^n||y||$

et (3) devient alors

(5) $\quad \forall\, n \geq 1, \quad ||x_n|| \leq \frac{(At)^n}{t^2}\ ||y||.$

La série de terme général $(-1)^{n+1}.x_n$ et donc normalement convergente si $At < 1$, soit $t < \delta = \frac{1}{A}$.

Soit $x = \sum\limits_{n\geq 1} (-1)^{n+1} x_n$, on a :

$$(u + t\omega)(x) = \lim_{N\to\infty}(u + t\omega)\Big(\sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1}.x_n\Big) = \lim_{N\to\infty} (y + (-1)^{N+1} z_N)$$

or d'après (4), $\lim\limits_{N\to\infty} z_N = 0$ si $At < 1$, donc $(u + t\omega)(x) = y$.

On définit une application $s_{t,\omega}$, de F dans E, par

$$s_{t,\omega}(y) = x.$$

On a $(u + t\omega) \circ s_{t,\omega} = 1_F$; $s_{t,\omega}$ est évidemment linéaire ; et puisque

$$||s_{t,\omega}(y)|| = \sum_{n\geq 1} ||x_n|| \leq \frac{1}{t^2} \cdot \frac{At}{1-At} ||y||$$

$s_{t,\omega}$ est alors continue. Par conséquent, pour tout t voisin de zéro, l'application $u + t\omega$ admet une section. ■

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ph. ANTOINE - Détermination explicite du cône tangent d'une surface de niveau ; applications. Séminaire d'Analyse Fonctionnelle 1980-81. Publ. I.R.M.A. de Lille 1, U.E.R. de Math. Pures et Appliquées, Vol. 3, Fascicule 5, 1981.

[2] Ph. ANTOINE - Etude locale d'une application différentiable. Séminaire d'Analyse Fonctionnelle 1978-79. Pub. I.R.M.A. de Lille 1, U.E.R. de Math. Pures et Appliquées, Vol. I, Année 1979.

[3] S.M. ACHARFI - v-suffisance de jets définis sur un espace de Banach. Application à une équation d'évolution. Thèse de 3ème cycle, Univ. de Lille 1, 1982.

[4] R.J. MAGNUS - On the local structure of the zero set of a Banach space valued mapping. J. of Funct. Anal. 22, 58-72, 1976.

BIBLIOTHEQUE INTERUNIVERSITAIRE SECTION DE SCIENCES LILLE

RÉSUMÉ

Soit E et F des espaces de Banach, U un ouvert de E et f une application de classe C^k, $k \geq 2$, de U dans F. L'auteur donne une suite de conditions $(M_n)_{n\geq 1}$, de plus en plus faibles, relatives à une application bilinéaire symétrique continue, telles que, si en un point a de U la différentielle Df(a) est un morphisme direct et la différentielle seconde intrinsèque $\Delta^2 f(a)$ vérifie l'une des conditions (M_n), alors le cône tangent en a à la variété de niveau de f passant par a est égal au cône isotrope de $\Delta^2 f(a)$.

Cette détermination explicite du cône tangent est exploitée pour donner des conditions nécessaires d'optimalité pour un problème avec contraintes bilatérales vérifiant (M_n) On trouve dans tous les cas des conditions d'ordre 1 ; des conditions d'ordre 2 sont explicitées dans le cas (M_2).

BIBLIOTHÈQUE INTERUNIVERSITAIRE
SECTION DE SCIENCES
LILLE

MOTS CLÉS : Cône tangent, optimisation.