

N° d'ordre : 1250

50 376
1 985
21

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

par

Etienne GAVIOT

Maître es Sciences



**APPLICATION DES METHODES DE LA THEORIE
DU SIGNAL A LA DISSOCIATION DES ENERGIES
EN REGIME VARIABLE**

Soutenue le 23 janvier 1985 devant la Commission d'Examen

MM. P. THERY
A. LEBRUN
J.M. WACRENIER
ABSI

Président
Rapporteur
Examinateur
Examinateur
Examinateur

S O M M A I R E

| | |
|---|----|
| INTRODUCTION | |
| CHAPITRE I : CONSIDERATIONS GENERALES SUR LA REPRESENTATION DES ECHANGES ENERGETIQUES. | |
| I - Grandeurs conjuguées par rapport à l'énergie | 2 |
| II - Bilans thermodynamiques en régime variable | 7 |
| III - Description des transferts thermiques dans un milieu monodimensionnel | 15 |
| CHAPITRE II : ECHANGES D'ENTROPIE EN REGIME VARIABLE | |
| I - Flux d'entropie associé aux transferts en régime variable périodique | 28 |
| II - Cas particulier des transferts thermiques en régimes sinusoïdaux | 33 |
| III - Rappels sur la dégradation et le stockage de l'énergie dans les systèmes électriques | 42 |
| IV - Fonction de dissipation et énergie potentielle d'un système thermique | 45 |
| V - Conséquences thermodynamiques liées au choix de la température de référence | 50 |
| VI - Facteur de qualité d'un système thermique | 55 |
| CHAPITRE III : DETERMINISME ET RECIPROCITE DES SYSTEMES THERMIQUES | |
| I - Relations entre le flux dissipatif et le flux réversible .. | 63 |
| A - Causalité et signaux analytiques | 64 |
| B - Application au calcul des relations entre flux dissipatif et réversible en régime impulsionnel | 67 |
| II - Réciprocité des systèmes thermiques | 89 |

CHAPITRE IV : DISSOCIATION DES ENERGIES EN REGIMES PLURIFREQUENTIELS ET
TRANSITOIRES

| | |
|--|-----|
| I - Analyse dans le domaine temps | 94 |
| A - Dissipation en régime variable | 103 |
| B - Stockage exergetique en régime variable | 104 |
| C - Extension à l'étude des régimes aperiodiques | 107 |
| II - Dynamique des échanges énergetiques | 109 |
| A - Dynamique associée aux régimes periodiques | 110 |
| B - Dynamique associée aux régimes aperiodiques | 111 |
| III - Analyse et dissociation des énergies | 113 |
| A - Généralités | 113 |
| B - Etablissement des relations de base | 114 |
| C - Application aux équations de comportement d'un système thermique | 117 |
| D - Etude des formes énergetiques lors d'une transition entre deux états stables | 120 |
| E - Application à la caractérisation des grandeurs énergetiques dans un matériau bicouche | 122 |

CHAPITRE V : RESULTATS EXPERIMENTAUX

| | |
|---|-----|
| I - Comportement d'un système thermique modélisé à l'aide d'une ligne électrique | 127 |
| II - Etude du comportement d'un système bicouche en régime periodique non sinusoidal | 147 |

CONCLUSION

ANNEXES

ANNEXE I : Quelques propriétés relatives à la transformation de Hilbert

ANNEXE II : Constantes thermocinétiques de quelques matériaux

ANNEXE III : Présentation de la chaîne de mesures et du programme de
 modélisation des transferts thermiques

BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION

Le but de l'étude phénoménologique développée dans ce travail est de fournir les bases d'une méthode générale d'analyse des transferts d'énergie thermique utilisable dans les parois monodimensionnelles en régime variable. La formulation fondée sur la thermodynamique des évolutions irréversibles donne une importance fondamentale au concept de pertes thermodynamiques dues à l'irréversibilité des évolutions (obéissant au principe de dissipation minimale en régime quasi stationnaire) d'une part, et au concept d'énergie utilisable stockée et (susceptible d'entretenir une évolution naturelle) d'autre part.

L'objet de la première partie de notre travail concernant la thermodynamique des phénomènes irréversibles est de définir clairement les concepts d'énergie utilisable stockée et d'énergie dissipée par conduction thermique. Les variations temporelles de ces quantités caractéristiques de l'évolution énergétique des processus thermiques peuvent être calculées lorsque l'on connaît le flux thermique et la température en chaque point de l'espace.

Pour calculer ces grandeurs, nous avons utilisé la méthode matricielle classique permettant de calculer les variations en fonction du temps des flux et température par synthèse de Fourier en chaque point du système monodimensionnel. Nous avons également utilisé un modèle analogique classique à résistances et capacités distribuées, particulièrement intéressant pour notre étude, puisque l'énergie électrostatique modélise l'énergie utilisable stockée et, l'énergie dissipée par effet Joule dans les résistances modélise l'énergie dissipée par conduction thermique.

Un résultat essentiel de cette étude est de montrer que la dissipation de l'énergie et le stockage d'énergie utilisable peuvent être analysés par traitement des évolutions observées des flux et température sur l'accès du système. Cette démarche a le grand avantage de donner une interprétation énergétique du concept d'impédance ou d'admittance thermique, et de façon plus générale, de toute relation fonctionnelle reliant deux grandeurs conjuguées par rapport à "l'énergie utilisable".

La connaissance de l'impédance d'un système caractérise totalement l'ensemble des interactions entre le système et le milieu extérieur quelle que soit la structure interne du système. Connaissant l'impédance d'entrée d'un système, la relation entre grandeurs conjuguées par rapport à l'énergie utilisable est parfaitement définie et il est possible d'obtenir à partir des grandeurs conjuguées une représentation temps ou fréquence des échanges d'énergie utilisable avec le milieu extérieur.

Afin de bien distinguer les parties active et réactive d'un transfert énergétique, le formalisme de la transformation de Hilbert permettant une représentation causale des échanges à la fois dans les domaines temps et fréquence, est introduit en détail.

L'objectif de cette partie du travail est de montrer l'intérêt d'ajouter une composante complexe en quadrature à un signal (sa transformée de Hilbert) de façon à obtenir un signal analytique dont le spectre est causal. Cette analyse fondée sur les méthodes de traitement du signal conduit à utiliser les fonctions de corrélation et d'intercorrélation pour représenter les échanges énergétiques entre un système et le milieu extérieur.

La fonction d'intercorrélation entre grandeurs conjuguées à l'énergie utilisable possède des propriétés particulières. Nous montrons pour la première fois à notre connaissance que la partie paire de la fonction d'intercorrélation est une représentation temps (équivalente à la représentation fréquence) de la dissipation énergétique en régime variable, la partie impaire constitue une représentation des échanges réactifs ou réversibles d'énergie utilisable entre le système et le milieu extérieur. Compte-tenu des propriétés des transformations de Fourier et de Hilbert relatives à la parité, la formulation conduit naturellement à utiliser la transformation de Hilbert pour la représentation des échanges réactifs.

Ce formalisme, particulièrement bien adapté à la représentation des transformations cycliques n'est pas applicable aux régimes transitoires du type échelon. Dans ce cas particulier, nous avons étendu les résultats d'une thèse de mathématique à la représentation des échanges d'énergie utilisable. Connaissant les évolutions des flux et températures sur une durée de $2T$, la méthode développée permet le calcul de l'énergie dissipée et de l'énergie utilisable stockée entre 0 et T .

La dernière partie est consacrée aux vérifications expérimentales. Nous avons montré que la mesure des échanges actifs et réactifs sur l'accès d'une ligne électrique modélisant une paroi, était représentative de la dissipation et des variations d'énergie utilisable dans la paroi en régime périodique non sinusoidal. Les expériences donnent une signification physique aux mesures de puissance et d'énergie sur une ligne électrique simulant une paroi.

C H A P I T R E I

CONSIDERATIONS GENERALES

SUR LA REPRESENTATION DES ECHANGES ENERGETIQUES

I GRANDEURS CONJUGUEES PAR RAPPORT A L'ENERGIE

A tout couple de grandeurs physiques susceptibles de contribuer à la représentation d'un état, on peut associer une grandeur scalaire de type énergétique intimement liée à la notion de norme (respectivement norme hermitienne associée au produit scalaire des espaces de Hilbert).

Le concept relève de la nécessité de pouvoir décrire les systèmes physiques indépendamment du système de référence dans des espaces métriques, une fois des unités étant définies. Par exemple, lorsqu'un espace est défini à l'aide de coordonnées, la mécanique classique (et déterministe) prévoit l'existence de fonctions conservant lors des états de mouvement une valeur constante dépendant seulement des conditions initiales. Ces fonctions sont appelées intégrales premières et possèdent des propriétés de conservation [34] et d'extensité. En d'autres termes, il reste toujours intéressant de posséder des informations sur les systèmes indépendamment de la forme des paramètres utilisés lors de la description. L'analyse d'un système physique doit toujours aboutir aux mêmes lois de comportement quelque soit l'observateur ou l'appareil de mesure. C'est pourquoi on est amené lorsqu'on parle d'évolution à considérer plusieurs types de descriptions toutes cependant ramenées à la notion de temps.

On remarquera, à cet égard, que la résolution de l'équation de Fourier n'apporte aucune indication quant au sens de l'évolution d'une perturbation thermique. On note seulement de façon phénoménologique que la conductivité est une grandeur toujours positive. Ce n'est que dans le cadre plus général de la thermodynamique irréversible que l'étude des fonctions de Lyapounov [15] justifie $\lambda > 0$.

Lorsque des phénomènes sont de nature périodique, le processus réapparaît de façon récurrente en un point et la description peut être effectuée dans le domaine fréquentiel. On ne peut jamais accéder à une observation sur un temps infiniment bref ou infiniment long, c'est pourquoi toutes les [1] mesures sont rattachées à un espace borné.

Soit un signal quelconque $x(t)$; $x(t) \in \mathbb{C}$
si $x(t) = a(t) + j.b(t)$; a et $b \in \mathbb{R}$

La puissance instantanée associée à ce signal s'exprime :

$$P(t) = a^2(t) + b^2(t) = x(t) \cdot x^*(t) \in \mathbb{R}$$

Cette définition résulte de la nécessité de conserver la norme [4] dans un espace unitaire (éléments complexes)^{*}.

Conformément aux remarques précédentes, on est en pratique ramené à mesurer une puissance sur un intervalle de temps fini. On définit alors une puissance moyenne sur une durée T .

$$P(t_0, T) = (1/T) \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot x^*(t) dt \quad (1 - 1)$$

avec pour cas particulier x réel.

Le signal est d'énergie finie lorsque l'intégrale $\int_{t=0}^{t=\infty} P(t) dt$ converge vers une valeur finie.

Il est immédiat que ce ne peut être le cas des signaux périodiques; ces derniers étant à valeurs non intégrables.

La puissance d'un signal peut être considérée comme une fonction du temps ou de la fréquence. Dans le premier cas, on parle de puissance temporelle et dans le second de densité spectrale de puissance. On doit remarquer que la puissance temporelle comme la densité spectrale de puissance sont associées à la notion différentielle de densité puisque toute mesure nécessite une énergie, par conséquent une fenêtre temporelle ou fréquentielle [1] [28] non nulle^{*}.

Si l'on rapporte deux signaux quelconques $x(t)$, $y(t)$ au même instant, on peut définir une grandeur énergétique caractérisant l'interaction simultanée (par opposition à l'interaction corrélée) entre les deux grandeurs.

$$P_{xy}(t) = x(t) \cdot y^*(t) = P_{yx}^*(t) \quad (1 - 2)$$

$P_{xy}(t)$ est la puissance d'interaction entre les deux signaux.

Pour les raisons exposées précédemment, c'est plutôt l'énergie d'interaction définie sur un intervalle de temps que l'on est amené à considérer.

$$W_{xy}(T) = \int_{t_0 - \Delta T/2}^{t_0 + \Delta T/2} P_{xy}(t) dt \quad (1 - 3)$$

Lorsque cette grandeur fonctionnelle est définie sur un intervalle de temps fini, on parle d'énergie totale d'interaction et lorsque le signal est à énergie infinie, on s'intéresse à la puissance moyenne définie par l'expression:

$$P_{xy}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_0^T x(t) \cdot y^*(t) \cdot dt \quad (1 - 4)$$

Cette notion disparaît si l'un des deux signaux est défini sur un support borné et dans ce cas, seule l'énergie totale d'interaction garde un intérêt; On parle alors de signaux transitoires.

Lorsque le signal est défini de façon fréquentielle, l'énergie contenue dans une bande de fréquence f autour de f_0 s'écrit:

$$W_{xy}(f_0, \Delta f) = \int_{f_0 - \Delta f/2}^{f_0 + \Delta f/2} S_{xy}(f) df \quad (1 - 5)$$

$S_{xy}(f)$ est la densité spectrale de puissance définie par le produit interspectral

$$S_{xy}(f) = X(f) \cdot Y^*(f) \quad (1 - 6)$$

$X(f)$ et $Y(f)$ sont respectivement les transformées de Fourier des signaux $x(t)$ et $y(t)$ calculées à la fréquence f .

Dans le cas des signaux réels (grandeurs naturelles), la densité spectrale de puissance possède la symétrie hermitique. Les caractéristiques de parités associées aux formes des signaux entraînent d'importantes conséquences du point de vue de la causalité et de la description énergétique du processus.

La densité spectrale de puissance est reliée aux valeurs temporelles des signaux par le théorème bien connu de Wiener Kinchine. Elle s'identifie alors à la transformée de Fourier de la fonction de corrélation:

$$\left. \begin{aligned} S_{XX}(f) &= \mathcal{F} R_{XX}(\tau) \\ S_{XY}(f) &= \mathcal{F} R_{XY}(\tau) \end{aligned} \right\} (1-7)$$

les fonctions de corrélation étant définies différemment suivant que les signaux sont à énergie finie ou non.

Soit respectivement:

$$\left. \begin{aligned} R_{XY}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x(t) \cdot y^*(t - \tau) dt \\ R_{XY}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_0^T x(t) \cdot y^*(t - \tau) dt \end{aligned} \right\} (1-8)$$

Toutes les définitions précédentes sont générales et ne font intervenir aucune nature particulière d'unité. L'analyse des systèmes physiques entraîne l'utilisation de l'unité d'énergie Joule.

L'analyse des échanges énergétiques dans les domaines temps ou fréquence, conduit à des résultats identiques; cette proposition fondamentale exprime le théorème de Parseval.

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \langle X(f), Y(f) \rangle \quad (1-9)$$

[1] [15] Le théorème de Parseval traduit la conservation du produit scalaire et de la norme dans une transformation de Fourier.

Les grandeurs énergétiques définies précédemment s'écrivent sous la forme d'un produit de deux facteurs, l'un intensif, l'autre extensif. Ces deux grandeurs sont dites quantités conjuguées par rapport à la nature de l'énergie considérée.

Le tableau suivant donne à titre d'exemple plusieurs formes énergétiques et les variables conjuguées associées pour une transformation élémentaire.

| facteur de tension ou grandeur intensive | extensité ou grandeur extensive | variation énergétique élémentaire |
|--|---------------------------------------|--------------------------------------|
| F force | l distance | Fdl } travail mécanique |
| τ couple | α angle | |
| P pression | V volume | Pdv travail d'un fluide compressible |
| V potentiel | q charge électrique | Vdq travail électrostatique |
| v vitesse | $p=mv$ quantité de mouvement | vdp énergie cinétique |
| T température | S entropie | Tds énergie thermique |

Chacune des variations énergétiques est de la forme $X dx$ où X désigne la tension sous laquelle est effectué le processus et dx la quantité d'extensité échangée. Les variables d'intensité et d'extensité sont reliées l'une à l'autre par un coefficient dépendant du système : la capacité.

En principe rien ne s'oppose à ce que les grandeurs considérées précédemment soient étudiées sous le biais d'une analyse fréquentielle plutôt que temporelle. Cependant, il doit toujours ressortir que l'extensité subit de façon causale l'action de la tension qui impose le sens de l'échange, et représente une certaine quantité d'une grandeur dont la nature détermine celle de la manifestation énergétique.

Les échanges thermiques mettent en jeu une grandeur extensive particulière appelée Entropie. La formulation thermodynamique des échanges thermiques développée dans notre travail, nécessite une définition physique précise du concept d'entropie.

II BILANS THERMODYNAMIQUES EN REGIME VARIABLE

Le premier principe de thermodynamique ou principe d'équivalence consiste à poser un postulat selon lequel, dans la description de tout système physique, il existe une fonction d'état appelée énergie interne et définie par ses variations:

Dans toute modification du système, la somme des énergies reçues sous toutes les formes envisageables est égale à l'accroissement de l'énergie interne.

Cette définition ne fait pas apparaître de différence entre la nature des extensités mises en jeu et en aucun cas le sens de l'échange ne peut être interprété ni prévu.

L'analyse des systèmes évoluant de façon réversible et cyclique permet d'introduire la notion d'entropie. En effet, cette dernière grandeur apparaît comme l'extensité associée à l'énergie thermique. Lorsque les processus sont réversibles, l'entropie est conservative. Cette propriété est représentée par la relation bien connue :

$$\oint_{\text{rev}} \frac{dQ}{T} = 0$$

L'entropie est une fonction d'état.
S en J/K

L'observation de la cinétique des phénomènes fait apparaître l'incompatibilité de la notion de transformations quasistatiques avec la description des processus réels. Le deuxième principe de thermodynamique fait apparaître de façon quantitative la perte d'énergie susceptible d'être recueillie dans une transformation de nature irréversible. A la différence du principe d'équivalence qui considère toutes les transformations comme également possibles, on peut préciser le sens de l'évolution considérée et définir les conditions d'équilibre stable des systèmes.

[17] [15]

Expression du second principe et application à la conduction en régime continu

Entre deux états du système, on peut remplacer la transformation réelle par une transformation réversible, suivie d'une transformation totalement irréversible (Joule Thomson) .

On peut alors écrire : $\Delta S_V = \Delta S_e + \Delta S_C$ (1 - 10)

La variation d'entropie ΔS_V associée à la transformation réversible égale l'échange d'entropie ΔS_e observé entre le système et le monde extérieur augmenté de l'entropie générée ΔS_C lors de la transformation irréversible pure. Dans tout processus, ΔS_C est supérieure ou égale à zéro. A la différence de toutes les extensités des autres natures énergétiques, l'entropie, extensité associée à l'énergie thermique, n'est pas une grandeur conservative en général. L'entropie d'un système augmente ou reste stationnaire suivant le caractère irréversible ou réversible d'une évolution.

Tant que l'on reste dans le cadre de la thermodynamique linéaire du non-équilibre, on peut dire que l'évolution des systèmes s'effectue conformément au théorème de production minimum d'entropie* (Prigogine) .

Lorsque des conditions aux limites données ne permettent pas au système d'atteindre l'équilibre thermodynamique ($dS_C / dt = 0$), le système s'installe dans un état de moindre dissipation.

Génération d'entropie par conduction thermique en régime continu :
Résistance thermique

Le transfert de chaleur observé lors de la mise en présence de deux corps à des températures différentes est un processus irréversible. Ce n'est que lorsque les températures sont infiniment voisines que l'on approche des conditions dites quasistatiques. Cependant, il n'existe pas de matériau parfaitement conducteur de la chaleur et la transmission à travers une paroi exige l'existence en tout point d'un gradient de température non nul.

Un champ de température étant donné, une paroi parfaitement isolante ne permet pas de transfert et par conséquent pas de dégradation de l'énergie. Une paroi parfaitement conductrice -n'admettant pas de valeur non nulle du gradient de température- permet un transfert réversible.

A puissance transférée égale, l'irréversibilité définie au passage à travers la paroi est d'autant plus élevée que le matériau est moins bon conducteur de la chaleur.

D'une façon générale, l'échange d'énergie interne s'effectue en sens opposé au gradient de température. La densité de flux thermique est la quantité de chaleur traversant une unité de surface par unité de temps et s'exprime en W / m^2 . Cette grandeur est reliée au champ de température par la relation phénoménologique :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \vec{\text{grad}} T \quad \lambda \text{ conductivité thermique en } W / m.K \quad (1 - 11)$$

De la même façon, qu'en électricité, l'étude du régime permanent d'un transfert thermique permet de définir la notion de résistance par le rapport de la différence de potentiel sur le flux d'intensité qui en découle.

$$R = \Delta T / \phi \quad \text{en } K / W \quad \text{avec } \phi = \varphi \cdot S \quad (1 - 12)$$

Dans la suite de ce travail, sauf mention contraire, nous considérons des parois de surface unité.

Considérons une paroi homogène parcourue par un flux continu de chaleur fig (I - 1).

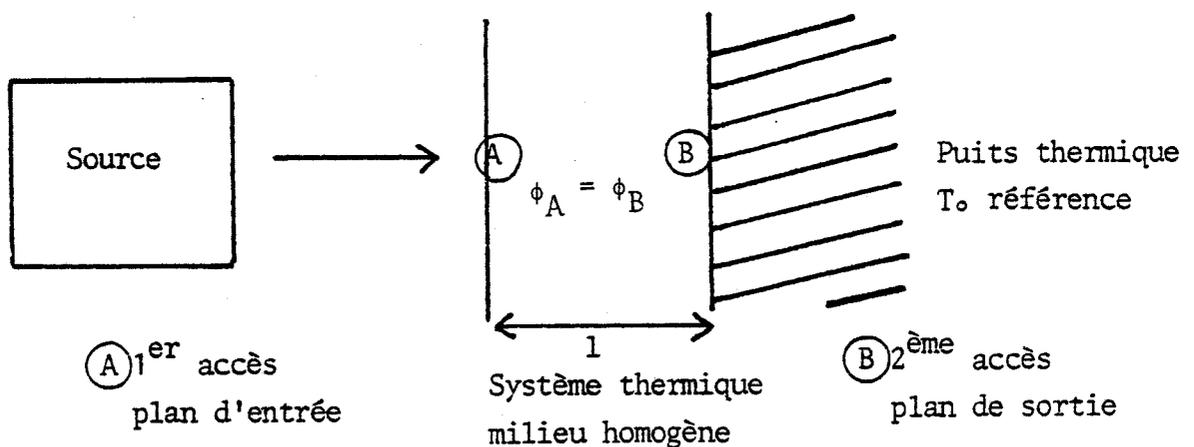


figure (I - 1)

Le régime permanent est caractérisé par un flux de chaleur conservatif.

Entre deux instants arbitraires, l'état de ce système reste inchangé et l'entropie étant fonction d'état, sa variation est nulle.

Le deuxième principe entraîne :

$$\begin{aligned}\Delta S_c &= - \Delta S_e \\ &= - \left(\frac{\Delta Q_2}{T_2} - \frac{\Delta Q_1}{T_1} \right) = \frac{\phi_1 dt}{T_1} - \frac{\phi_2 dt}{T_2}\end{aligned}$$

compte-tenu du fait qu'en régime permanent $\phi_1 = \phi_2$, par unité de temps, la génération d'entropie s'exprime :

$$\frac{dS_c}{dt} = \phi \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) = \frac{\phi \Delta T}{T_1 T_2} \quad (1 - 13)$$

Lorsque $\Delta T \ll T_1$ (1 - 12) entraîne :

$$\frac{dS_c}{dt} \approx R \cdot \left(\frac{\phi}{T} \right)^2 \quad (1 - 14)$$

En posant $\phi / T = J_s$ J_s courant d'entropie en W / K

$$\frac{dS_c}{dt} = R \cdot J_s^2 \quad \text{taux d'entropie générée par unité de temps au cours du processus en W / K}$$

(1 - 15)

Capacité thermique

Au cours d'un processus de conduction, un système peut stocker de l'énergie. La capacité thermique d'un corps est la quantité de chaleur nécessaire pour élever sa température de un degré. Compte-tenu de la définition de la chaleur spécifique c , on exprime la chaleur stockée entre deux états :

$$dQ = Mc \, dT \quad M \text{ étant la masse du corps}$$

$$C = M.c \quad C \text{ sa capacité thermique}$$

Le flux thermique obéit à une équation de conservation.

Considérons l'élément de volume : figure (I - 2) inclus dans une paroi traversée par un flux quelconque de chaleur.

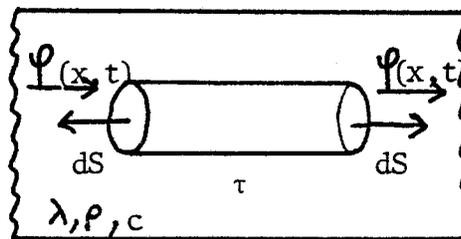


figure (I - 2)

Les éléments de surface dS normaux sont dirigés vers l'extérieur; Un bilan énergétique relatif au volume τ permet d'écrire :

$$dW_{\text{cumulé}} = - dW_{\text{sorti}} = - \iint_{\sigma\tau} \varphi \, dS$$

Le stockage de dW entraîne une variation de température du volume telle que :

$$dW = \iiint_{\tau} \rho \, c \, \frac{dT}{dt} \, d\tau = - \iint \varphi \, dS$$

Cette relation intégrale permet d'écrire, par application du théorème d'Ostrogradski, la loi locale de conservation de l'énergie :

$$\text{div } \varphi + \rho c \frac{dT}{dt} = 0 \quad \text{où } \rho c \text{ est la capacité volumique du matériau} \quad (1 - 16)$$

Les relations de conservation précédentes et la relation de Fourier permettent de définir l'équation de propagation de la chaleur. En étudiant l'évolution des grandeurs de façon monodimensionnelle, on peut écrire :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= - \frac{\varphi}{\lambda} \quad (1 - 17 - 1) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1 - 17 - 2) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1 - 18) \\ a &= \lambda / \rho c \end{aligned}$$

a représente la diffusivité thermique du milieu (m² / s)

Expression locale du bilan d'entropie

Les processus de conduction de la chaleur sont de nature irréversible. Il résulte du second principe que le flux d'entropie (extensité associée à l'énergie thermique) n'est pas soumis à une équation de conservation.

Pour un élément de volume, on peut écrire :

$$\frac{dS_c}{dt} = \frac{dS_v}{dt} - \text{div } \vec{J}_s \quad (1 - 19)$$

Cette relation exprime localement l'égalité entre le taux d'entropie générée, et la variation d'entropie de l'élément diminuée de l'entropie échangée à la surface du système. La convention de signe est définie par un comptage négatif du flux sortant de l'élément.

dS_c / dt est la densité temporelle d'entropie générée et J_s est une densité de courant d'entropie. A travers une portion de surface ouverte traversée par une densité de flux φ , on a :

$$\vec{J}_s = \vec{\varphi} \cdot \frac{1}{T} \quad \text{où } 1 / T \text{ est la force thermodynamique associée à l'extensité } \varphi$$

$$(1 - 20)$$

La thermodynamique des phénomènes irréversibles [15] [16] prévoit que le fait même de définir le flux d'entropie de la façon précédente permet d'exprimer le taux de génération d'entropie.

$$\frac{dS_c}{dt} = \vec{\varphi} \cdot \text{grad } F \quad \text{où } F \text{ la force généralisée se réduit à } 1/T \text{ dans le cas particulier de notre étude.}$$

En effet, compte-tenu de (1 - 20)

$$\text{div } \vec{J}_s = \frac{1}{T} \text{div} \cdot \vec{\varphi} + \vec{\varphi} \cdot \text{grad} \frac{1}{T} \quad (1 - 21)$$

Cette relation, identique à (1 - 19) est une expression locale du second principe telle que :

$\text{div } \vec{J}_s$ est le terme d'échange d'entropie avec l'extérieur du système.

$(1 / T) \text{div } \vec{\varphi}$ est le terme de variation d'entropie identifié à partir de l'équation de conservation de l'énergie.

$\vec{\varphi} \text{ grad } (1 / T)$ est le terme représentatif de la génération d'entropie associée au processus considéré.

En effet, la variation locale de l'entropie s'exprime :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dW}{dt} \quad W \text{ énergie interne stockée}$$

compte-tenu de (1 - 13)

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{T} \rho c \frac{dT}{dt} = - \frac{\text{div} \vec{\varphi}}{T}$$

En identifiant les termes relatifs au second principe (1 - 10)

$$- \frac{\text{div} \vec{\varphi}}{T} = - \text{div} \frac{\vec{\varphi}}{T} + \vec{\varphi} \cdot \text{grad} \frac{1}{T}$$

$$\vec{\varphi} \cdot \text{grad} \frac{1}{T} = - \frac{\vec{\varphi}}{T^2} \cdot \text{grad } T \quad (1 - 22)$$

Le flux étant de direction opposée au gradient de température, la quantité précédente est toujours positive. Quel que soit le sens de l'échange thermique, ce terme traduit la notion de dissipation d'énergie associée au processus de conduction.

[18] [19] [21] L'égalité (1 - 21) traduit le fait que l'échange d'entropie à travers les surfaces externes du système permet d'entretenir les processus de stockage et de transfert de chaleur à travers l'échantillon.

L'objet de l'ensemble de ce travail consiste à identifier et dissocier les composantes énergétiques mises en jeu lors des transferts thermiques en régime variable. En imposant ou en mesurant les grandeurs flux ou température sur la face d'entrée d'un système thermique, on cherche à savoir quelle proportion de l'énergie est dissipée pour entretenir le processus et quelle est celle participant au phénomène de stockage.

[30] [31] Dans l'étude de la dégradation des énergies électriques et mécaniques, le problème de la dissociation des énergies fait l'objet de nombreux travaux. (Brun, Amstutz)

Pour la propagation de la chaleur $\theta(x,f)$ et $\phi(x,f)$ sont fonctions du point x et de la fréquence.

$$\begin{vmatrix} \theta_B \\ \phi_B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{ch}\gamma x & -\frac{1}{b\sqrt{j\omega}} \operatorname{sh}\gamma x \\ -b\sqrt{j\omega} \operatorname{sh}\gamma x & \operatorname{ch}\gamma x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \theta_A \\ \phi_A \end{vmatrix} \quad (1 - 24)$$

γ est une constante de propagation (m^{-1})

$$\gamma = (1+j) \cdot \sqrt{\frac{\omega}{2a}} \quad (1 - 25)$$

Une impédance caractéristique peut être définie par la condition limite :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \theta_B(x,f) = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\theta_A}{\phi_A} = \frac{1}{b\sqrt{j\omega}} \operatorname{th}\gamma x \quad \text{avec } x \rightarrow \infty, \operatorname{th}\gamma x \# 1$$

$$\text{Soit } Z_c = \frac{1}{b\sqrt{j\omega}} = \frac{1-j}{b\sqrt{2\omega}} \quad (1 - 26)$$

[12] Z_c est l'impédance d'entrée dans le cas d'un milieu semi-fini.

Ce régime est caractérisé par un retard de phase $\pi/4$ de la température par rapport au flux. La grandeur admittance thermique est alors définie par :

$$Y_c = \frac{1}{Z_c} = (1+j) \sqrt{\lambda\rho c} \quad (1 - 27)$$

Application à l'analyse des transferts thermiques dans les milieux multicouches

Le formalisme matriciel a l'avantage de permettre une représentation élégante à l'aide de nombres complexes, des grandeurs définies sur le système. Entre deux points du matériau, on définit une transformation portant sur le vecteur colonne $\theta(x,f), \phi(x,f)$ dont les composantes définissent l'état thermique du système.

[5] La matrice de transformation possède un déterminant unitaire et par conséquent est orthogonale. Cette propriété, généralisable à tout assemblage de matériaux, est liée à la notion de réciprocité dans le cas des milieux homogènes.

Une matrice carrée étant l'expression mathématique d'une transformation entre groupes isomorphes, la composition de plusieurs transformations s'exprime par le produit des matrices de transfert.

La notion d'état thermique définie précédemment permet ainsi une analyse simplifiée des transferts thermiques dans les milieux composites.

Considérons par exemple le système défini par l'assemblage de deux matériaux. Figure (I - 3)

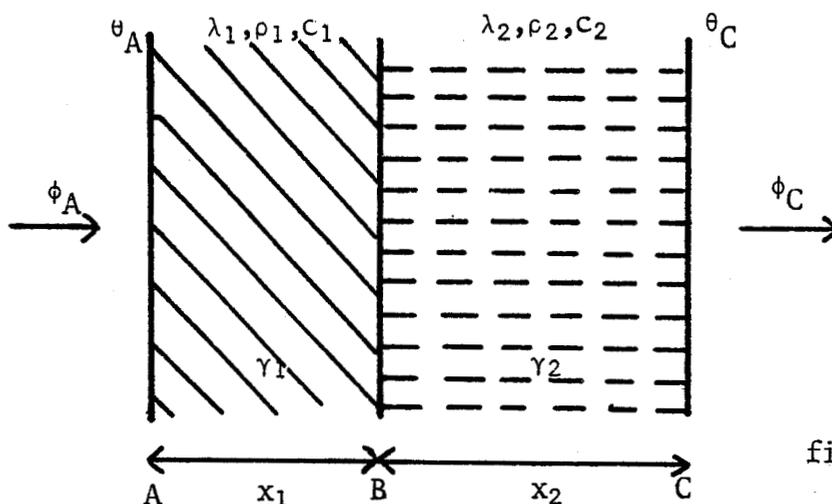


figure (I - 3)

Dans le plan d'abscisse noté (C) l'état thermique est défini par :

$$\begin{vmatrix} \theta_C \\ \phi_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ch } \gamma_2 x_2 & -Z_{c_2} \text{sh } \gamma_2 x_2 \\ -\frac{1}{Z_{c_2}} \text{sh } \gamma_2 x_2 & \text{ch } \gamma_2 x_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \text{ch } \gamma_1 x_1 & -Z_{c_1} \text{sh } \gamma_1 x_1 \\ -\frac{1}{Z_{c_1}} \text{sh } \gamma_1 x_1 & \text{ch } \gamma_1 x_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \theta_A \\ \phi_A \end{vmatrix}$$

Le produit de deux matrices n'étant en général pas commutatif, une paroi composite ne possède pas le même comportement en régime variable suivant le matériau que l'on choisit de disposer en entrée.

Quelle que soit la structure du système, il existe une relation univoque entre les variables flux et température. Lorsque l'une de ces deux grandeurs est imposée en un point du système, l'autre coordonnée est définie en tous points de façon univoque.

[16] Cet état de fait découle de la notion d'impédance ramenée des accès du système au point considéré; En effet, l'impédance est une fonction de réponse du système et constitue une relation de contrainte entre les deux composantes du vecteur d'état thermique. Cette proposition traduit un principe de causalité dans le domaine temps et son étude fera l'objet du deuxième chapitre de ce travail.

L'étude d'un système thermique ne peut pas être effectuée indépendamment de ses relations avec le monde extérieur. Les phénomènes sont ainsi nécessairement rapportés par rapport à un facteur de tension de référence. Compte-tenu du fait que les phénomènes étudiés sont linéaires ($\Delta T \ll T$ absolue) la thermodynamique du non équilibre ne laisse que le choix de deux références possibles.

- $T_{\text{réf}}$ est la température de l'un des accès de l'échantillon
On se limite alors à des sollicitations appliquées sur un seul accès du système. La référence est indépendante des sollicitations et peut être considérée comme absolue. Tout se passe comme si on étudie le comportement d'une ligne électrique dont la sortie est court-circuitée (connectée au potentiel de référence). Le formalisme développé en électricité peut alors être appliqué à la thermique.

- $T_{\text{réf}}$ est la température moyenne de l'échantillon
Considérons un système homogène soumis à un ensemble de sollicitations quelconques. A un instant donné, une carte du champ de température intérieure au système peut être définie. Si le système est isolé de façon instantanée, au-delà d'un temps de relaxation propre à sa structure, l'échantillon sera caractérisé par une distribution uniforme de température. La température moyenne spatiale constitue un état attracteur pour des distributions initiales non uniformes et peut représenter une référence indépendante de l'extérieur du système. Le formalisme des fonctions de Lyapounov est adapté [15] à ce type de référence.

D'autre part, la diagonalisation de la matrice de transformation (1 - 24) peut mener à l'utilisation de coordonnées référencées par rapport à la moyenne spatiale de la température. Ce type d'analyse est développé au laboratoire (Duthoit)

Afin de simplifier la structure des programmes de modélisation mis en oeuvre, la première référence a été choisie (figure I - 4).

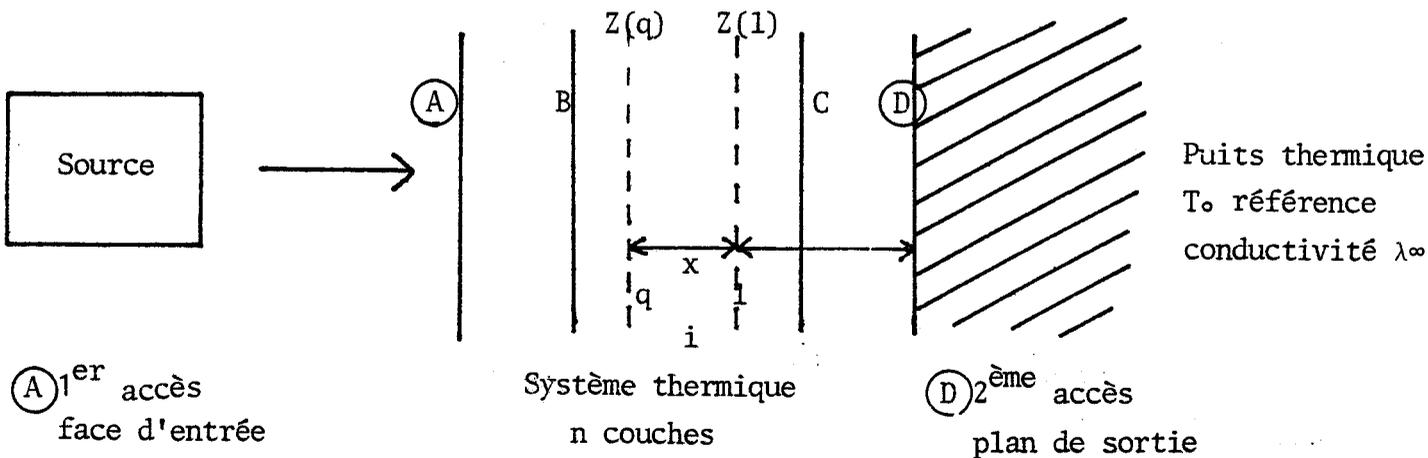


figure (I - 4)

La face arrière des échantillons est considérée à température constante. Cette disposition mène au concept de puits thermique : système réel ou artificiel à température imposée et de conductivité apparente infinie.

Une telle structure n'engendre pas de contrainte particulière. En effet, la possibilité de choisir de façon adaptée au problème la nature de la couche accolée au puits thermique, permet d'aborder l'étude de systèmes isolés sur leur face arrière.

La modélisation de ce type de configuration demande à définir la loi de composition des impédances associées à chaque constituant du [12] système.

En définissant l'origine sur le plan de sortie figure (I - 4) l'inversion de la matrice (1 - 24) permet d'écrire entre les plans respectifs 1 et q du matériau i :

$$\begin{vmatrix} \theta_q \\ \phi_q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ch } \gamma x & Z_{ci} \text{ sh } \gamma x \\ \frac{1}{Z_{ci}} \text{ sh } \gamma x & \text{ch } \gamma x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \theta_1 \\ \phi_1 \end{vmatrix}$$

La valeur de l'impédance au point q est la composition de deux impédances; celle définie en l et celle entre les plans l et q; soit :

$$Z_q = \frac{Z_1 \operatorname{ch} \gamma x + Z_{ci} \operatorname{sh} \gamma x}{Z_1 \operatorname{sh} \gamma x + Z_{ci} \operatorname{ch} \gamma x} \quad (1 - 28)$$

Le calcul de l'impédance en chaque point d'une configuration constitue la séquence de base des programmes de modélisation de transferts en régime variable. D'un point de vue théorique et expérimental, deux types de sollicitations idéales sont envisagées :

- sollicitations par une source à température imposée
- sollicitations par une source à flux imposé

On peut alors étudier le comportement des systèmes pour différentes classes de signaux. La connaissance en tout point d'une structure, des composantes de l'état thermique, se révèle nécessaire pour la vérification des relations entre les grandeurs énergétiques que nous développons dans les chapitres suivants.

Les courbes suivantes constituent un exemple de modélisations relatives à deux structures :

-échantillon monocouche de plexiglass de 2,5 mm d'épaisseur dont la face d'entrée est sollicitée par un flux imposé de 100 Watts à différentes fréquences. (surface 1 m²)

-échantillon bicouche composé de deux feuilles de 1mm d'épaisseur respectivement plexiglass et caoutchouc; les sollicitations sont effectuées de la même façon que précédemment.

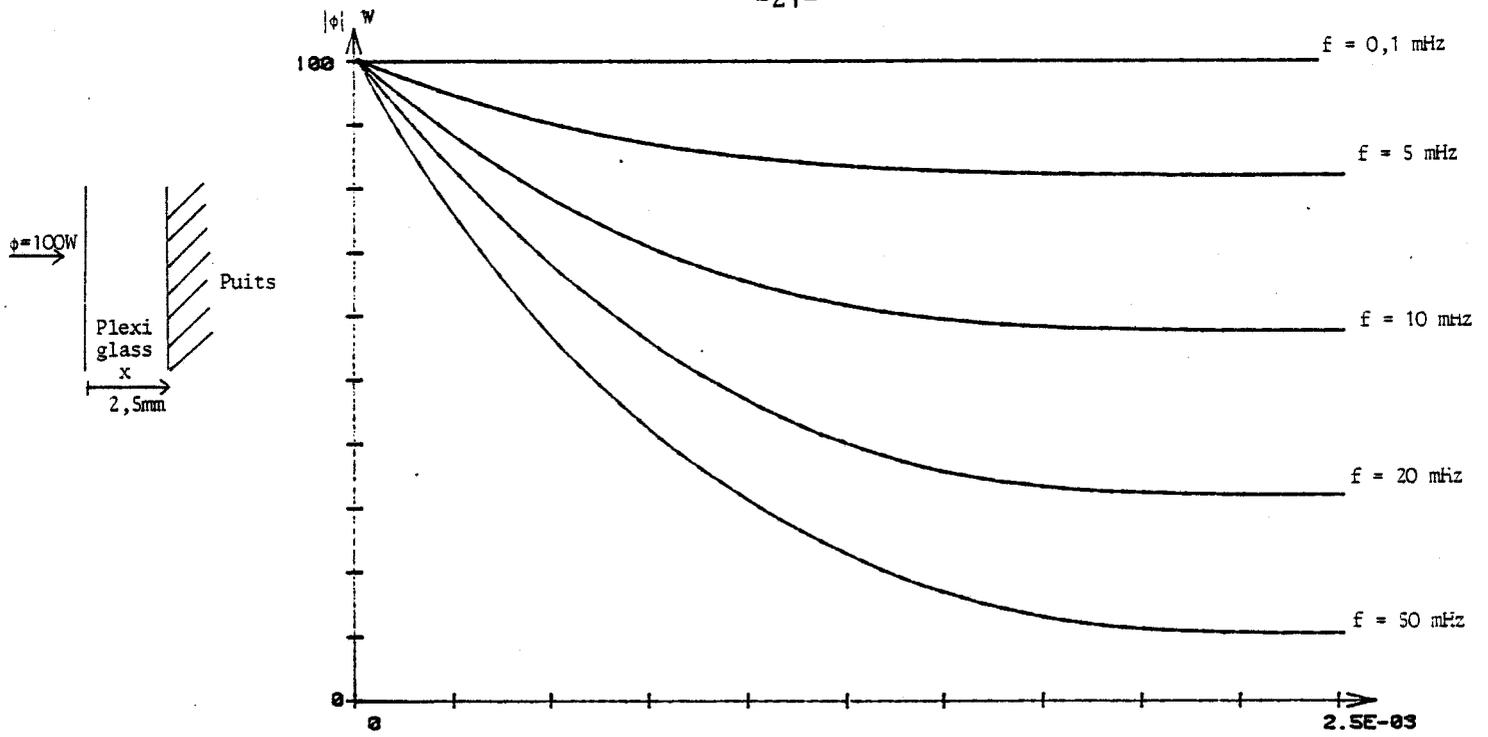


figure (I - 5) DISTRIBUTION DU MODULE DES OSCILLATIONS DE FLUX
ECHANTILLON DE PLEXIGLASS 2.5MM D'ÉPAISSEUR
FLUX IMPOSE DE 100W

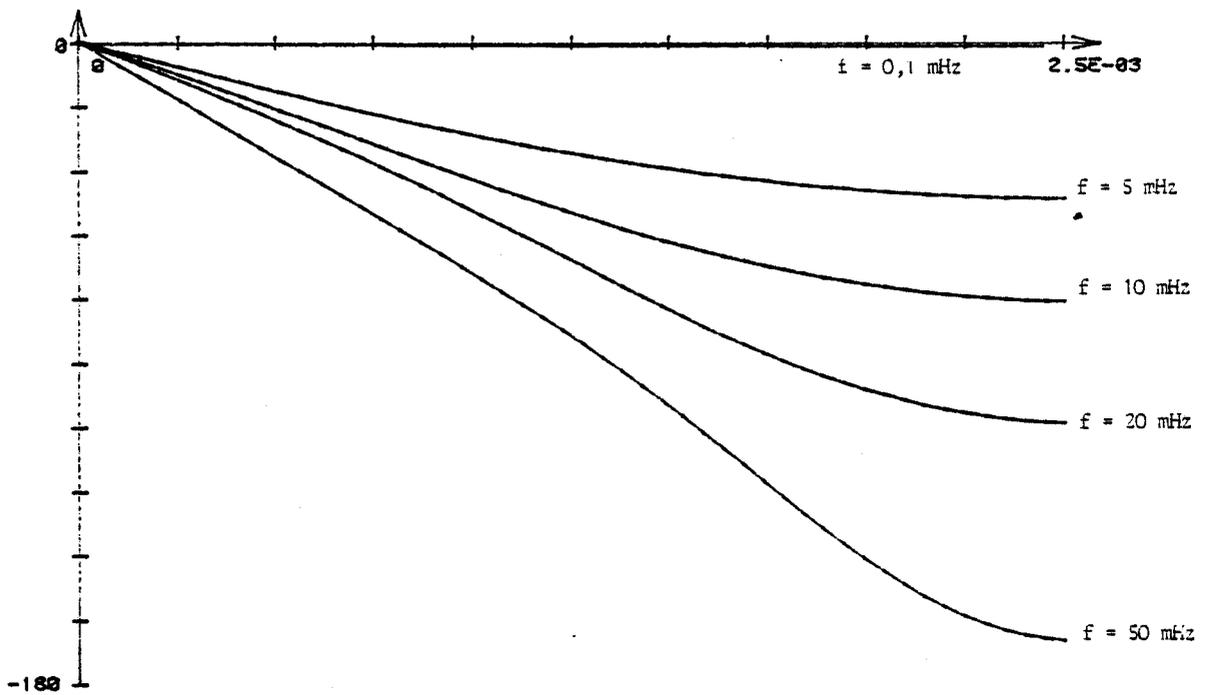


figure (I - 6) DISTRIBUTION DES PHASES RELATIVES AUX FLUX

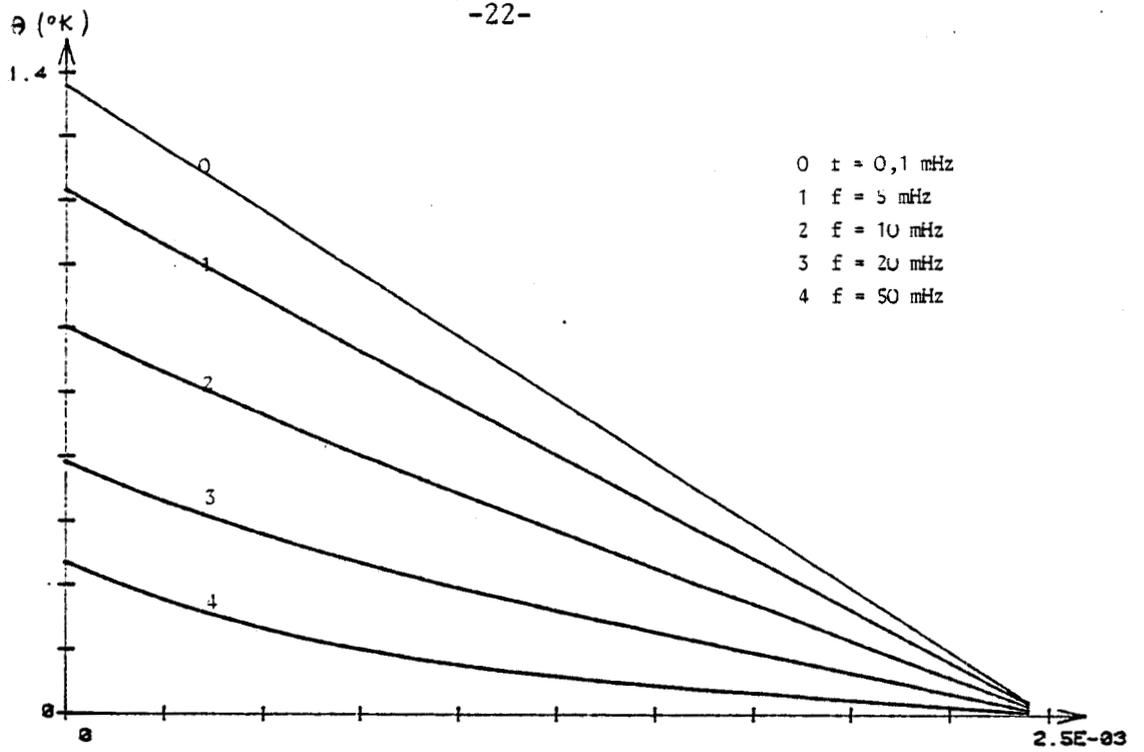


figure (I - 7) DISTRIBUTION DES OSCILLATIONS DE TEMPERATURE
ECHANTILLON DE PLEXIGLASS 2.5 MM D'ÉPAISSEUR
FLUX IMPOSE DE 100W

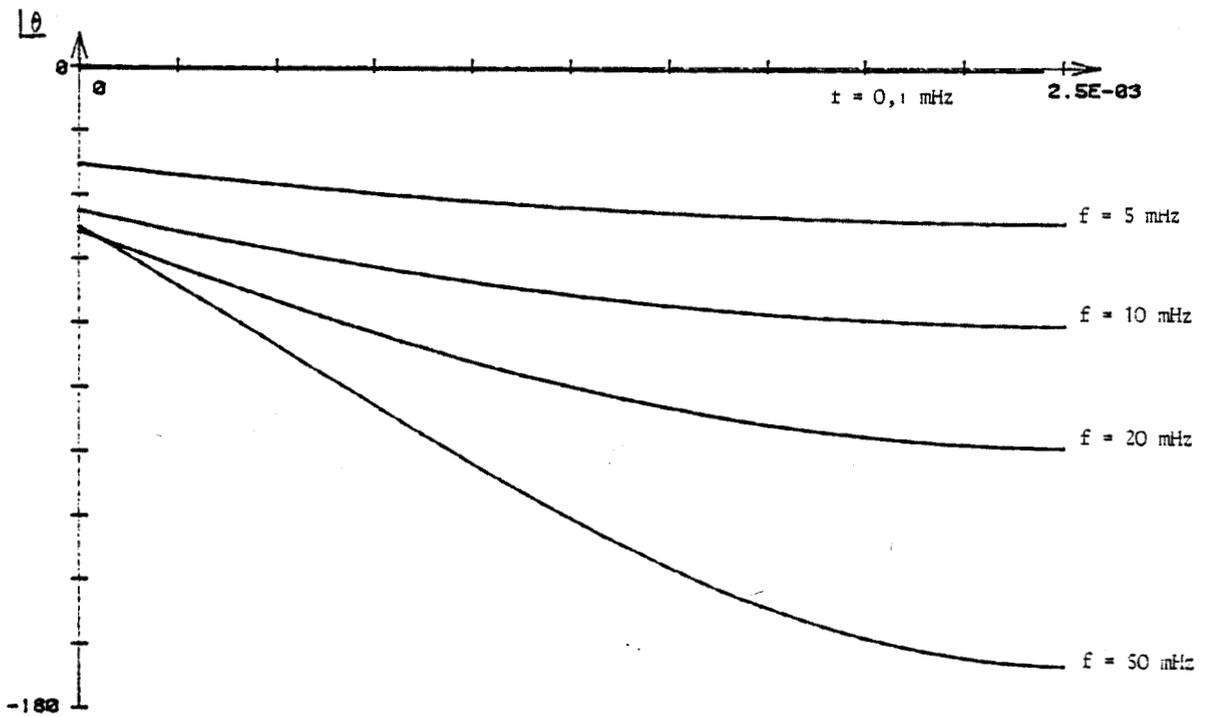


figure (I - 8) DISTRIBUTIONS DES PHASES RELATIVES AUX TEMPERATURES

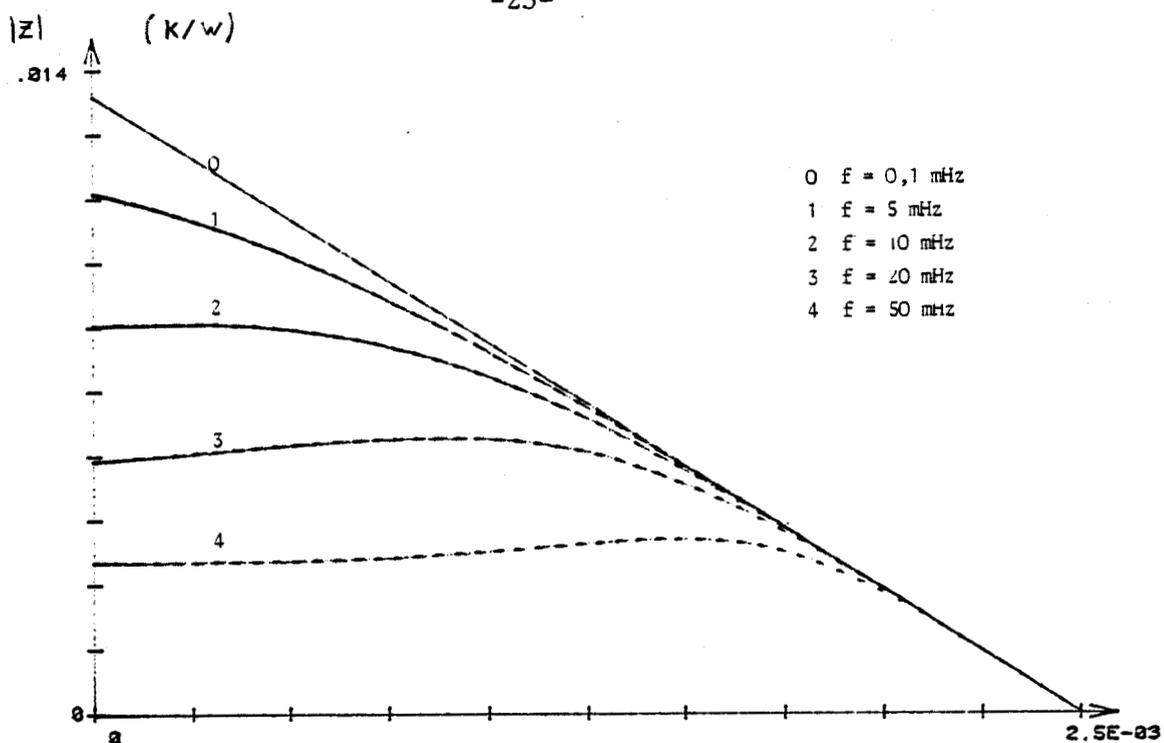


figure (I - 9) DISTRIBUTION DU MODULE DE L'IMPEDANCE
ECHANLILLON DE PLEXIGLASS 2.5MM D'EPAISSEUR

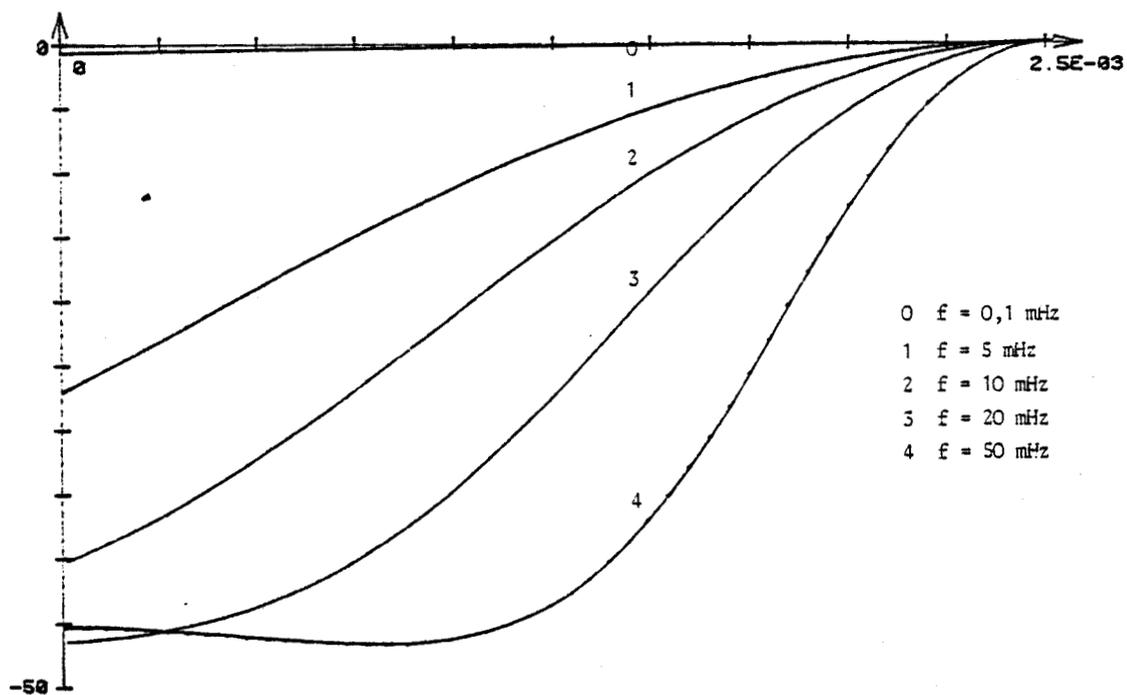


figure (I - 10) DISTRIBUTION DES PHASES DE L'IMPEDANCE

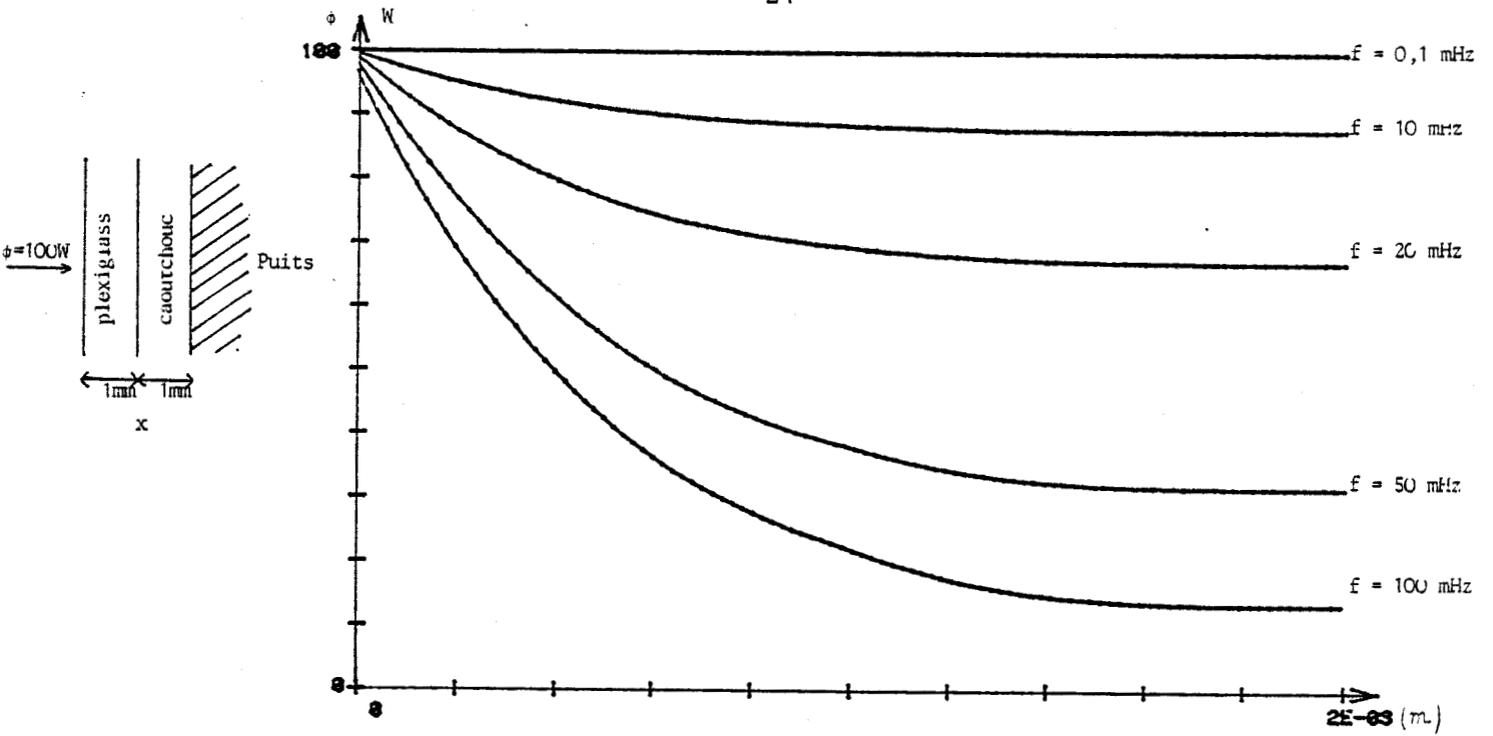


figure (I - 11) DISTRIBUTION DU MODULE DES OSCILLATIONS DE FLUX
BICOUCHE PLEXIGLASS-CAOUTCHOUC
FLUX IMPOSE DE 100W

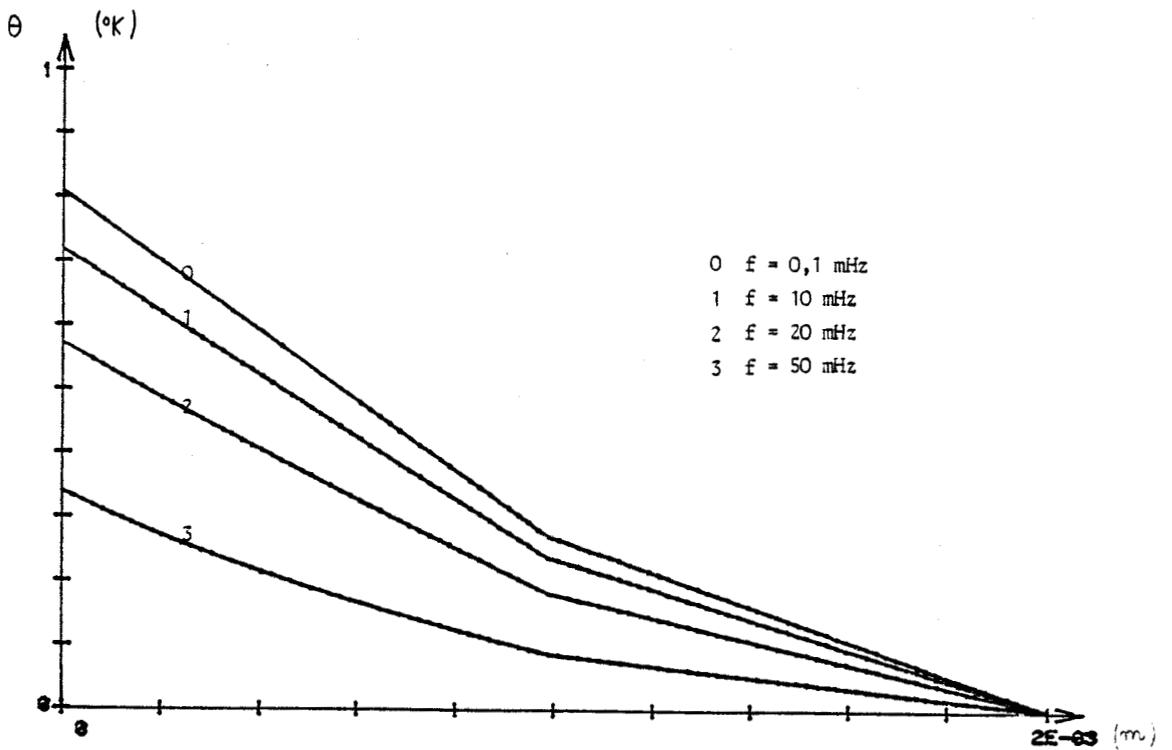


figure (I - 12) DISTRIBUTION DU MODULE DES OSCILLATIONS DE TEMPERATURE
BICOUCHE PLEXIGLASS-CAOUTCHOUC
FLUX IMPOSE DE 100W

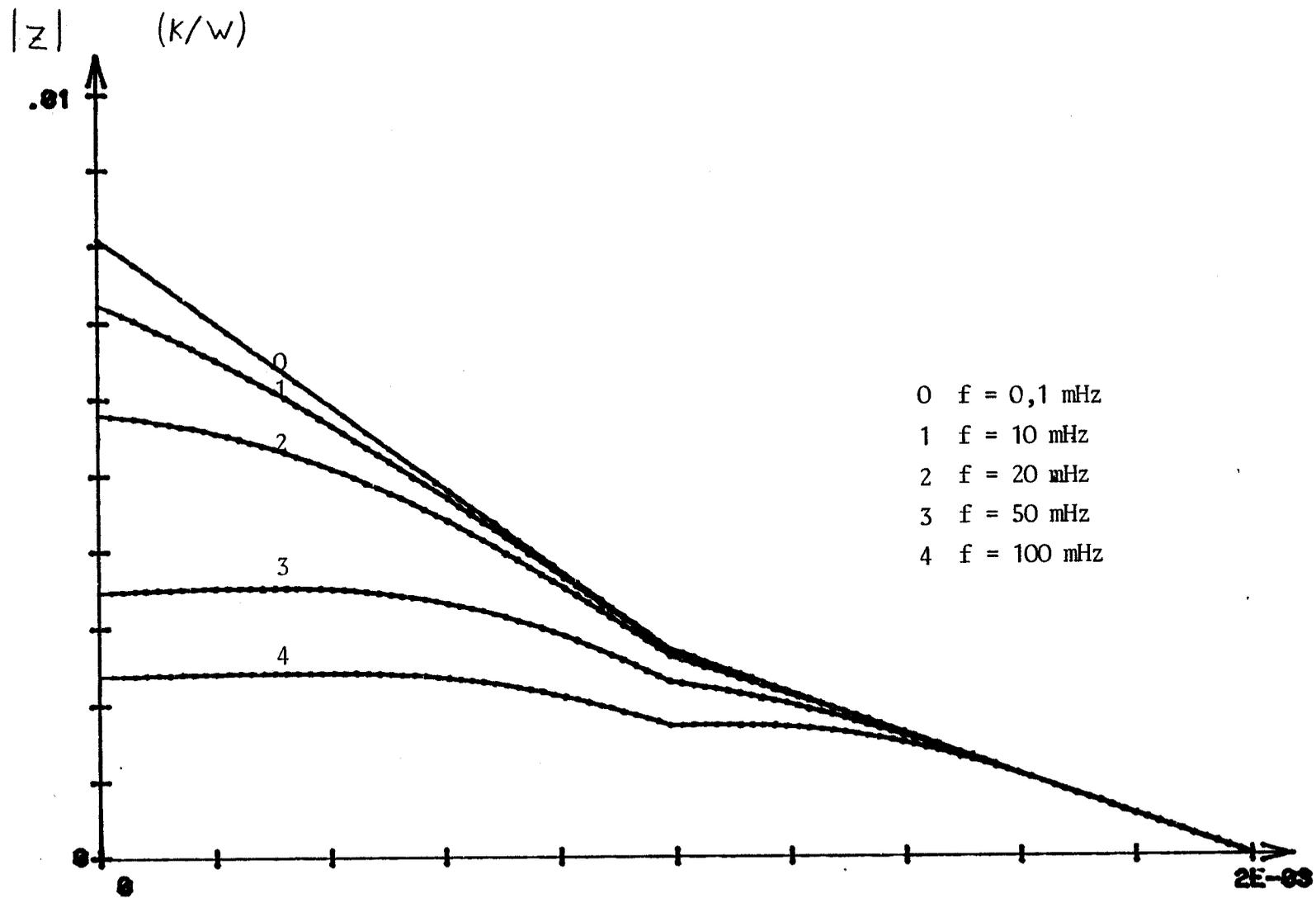


figure (I - 13) DISTRIBUTION DU MODULE DE L'IMPEDANCE
BICOUCHE PLEXIGLASS-CAOUTCHOUC

CHAPITRE II

ECHANGES D'ENTROPIE EN REGIME VARIABLE

I FLUX D'ENTROPIE ASSOCIE AUX TRANSFERTS EN REGIME VARIABLE PERIODIQUE

Dans ce paragraphe, nous analysons l'analogie formelle existant entre les grandeurs

- flux de puissance défini pour une ligne électrique
- flux d'entropie défini pour la conduction thermique

La résistance linéique d'une ligne à constante répartie constitue le seul paramètre dissipatif pour la conduction électrique. Si entre deux points de la ligne, les états $(V_A I_A)$ et $(V_B I_B)$ sont les observables d'entrée et de sortie, toute perte énergétique est due à l'effet Joule et se traduit par une chute de potentiel. La notion de résistance thermique est, elle aussi, reliée à la notion de dissipation.

Transferts en régime permanent

Dans une paroi homogène traversée par un flux permanent de chaleur, l'énergie interne mise en jeu est conservative (de la même façon que le courant électrique). En régime permanent, il sort autant de chaleur qu'il n'en rentre dans le système, mais avec une température moindre en sortie. La conduction thermique étant un phénomène de nature irréversible, on conçoit que l'entretien du processus soit lié à une perte énergétique. L'application du second principe permet de donner de façon quantitative la valeur du taux d'entropie générée :

$$\frac{dS_c}{dt} = \frac{\phi \Delta T}{T_0^2} \quad \text{avec } \Delta T \ll T_0 \text{ référence de température}$$

La quantité d'énergie associée à la génération de l'extensité thermique ΔS_c , à la température de référence T_0 , est appelée Perte d'énergie [14] utilisable* (W_1).

$$W_1 = T_0 \cdot \Delta S_c \quad (2 - 1)$$

Cette relation est l'expression du théorème de Gouy Stodola.

Il en résulte que la puissance dissipée pour l'entretien du processus de conduction thermique permanent s'écrit :

$$P_1 = \frac{\theta \cdot \phi}{T_0} = \frac{R \cdot \phi^2}{T_0} \quad (2 - 2) \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \theta \text{ écart de température} \\ \text{par rapport à la référence} \\ R \text{ résistance thermique} \\ (K/W) \end{array}$$

Pour la source thermique située dans le plan d'entrée du système, la dissipation d'énergie utilisable est liée à la résistance thermique.

Transferts en régime périodique

Soit un plan de section droite perpendiculaire au sens de propagation de la chaleur; figure (II - 1)

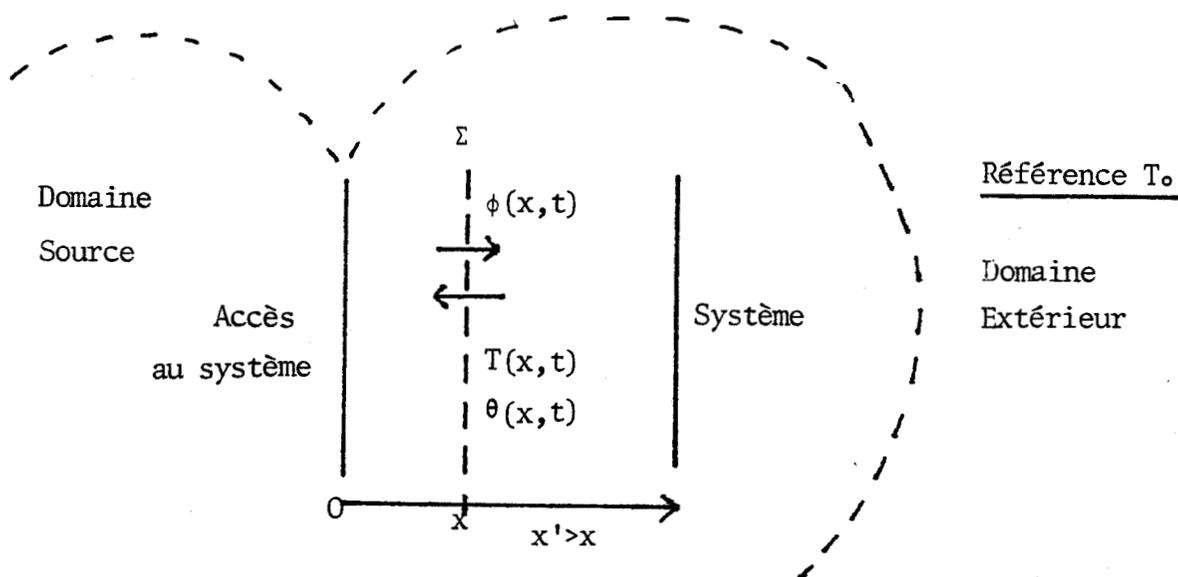


figure (II - 1)

Au point d'abscisse x , on pose :

$$T(x,t) = T_0 + \theta(x,t) \quad \theta(x,t) \text{ représente l'écart par rapport à la référence } T_0; \text{ c'est une fonction du temps et de la position } x.$$

Pour un transfert cyclique, à l'issue d'un cycle observé dans un volume élémentaire du système, l'échange d'entropie est égal et opposé à la génération.

La description du processus peut être effectuée par la connaissance locale du courant d'entropie J_s compte tenu de l'hypothèse $\theta(x,t) \ll T_0$, on peut écrire :

$$J_s = \frac{\phi(x,t)}{T(x,t)} = \frac{\phi(x,t)}{T_0 + \theta(x,t)} \approx \frac{\phi(x,t)}{T_0} \left(1 - \frac{\theta(x,t)}{T_0} \right)$$

$$J_s = \frac{\phi(x,t)}{T_0} - \frac{\phi(x,t) \cdot \theta(x,t)}{T_0^2} = J_0 - J_1 \quad (2 - 3)$$

Le flux d'entropie J_s en un point est la somme de deux composantes; le terme ϕ/T_0 de valeur moyenne nulle au cours d'un cycle traduit l'échange d'énergie interne dans le détail de la transformation. Le terme $\theta\phi/T_0^2$ est à valeur moyenne non nulle et traduit, en moyenne dans le temps, la génération d'entropie associée à l'entretien du processus de transfert dans la région

[22] [23] $x' > x$.

En effet, l'intégration de la relation (2 - 3) conduit à :

$$\overline{J_{sx}} = \lim_{\Gamma \rightarrow \infty} \frac{1}{2\Gamma} \int_{-\Gamma}^{+\Gamma} - \frac{\phi(x,t) \cdot \theta(x,t)}{T_0^2} dt \quad \text{et} \quad \int_{-\Gamma}^{+\Gamma} \phi(x,t) dt = 0 \quad \begin{matrix} (2 - 4 - 1) \\ (2 - 4 - 2) \end{matrix}$$

Lorsque le calcul est effectué en $x=0$, la relation traduit la génération d'entropie liée au travail de l'extérieur vis à vis du système.

Capacité thermique et atténuation du flux d'entropie

Lors d'une augmentation locale de température, l'analyse de la variation spatiale du flux d'entropie doit tenir compte des effets capacitifs liés au stockage de l'énergie interne. Compte tenu des propriétés conservatives du flux de chaleur, l'intégration de la relation (1 - 21) sur un volume quelconque conduit à :

$$\iint_{S(V)} \vec{J}_s \cdot \vec{ds} = \int_V \frac{\rho c}{T} \frac{dT}{dt} dv + \int_V \vec{\phi} \cdot \text{grad} \frac{1}{T} dv \quad (2 - 5)$$

En adoptant la convention suivant laquelle le flux entrant est compté positivement, le cas particulier d'un milieu monodimensionnel mène à :

$$J_{s0} - J_{sx} = \int_0^x \frac{\rho c}{T} \frac{dT}{dt} dx + \int_0^x \phi \frac{d(1/T)}{dx} dx \quad (2 - 6)$$

La variation spatiale du flux d'entropie entretient les processus de stockage dans la capacité du système représentés par le premier terme du membre de droite, et l'augmentation d'entropie par conduction thermique représentée par le second terme du même membre.

La relation (1 - 21) et le théorème de Gouy Stodola permettent d'interpréter le sens des termes de la relation (2 - 3) et d'associer à J_1 la représentation d'un transfert d'énergie utilisable. Le bilan d'entropie échangée à la surface d'un volume élémentaire intérieur au système peut s'écrire :

$$\operatorname{div} J_s \neq \frac{1}{T_0} \operatorname{div} \phi - \frac{\theta \operatorname{div} \phi}{T_0^2} - \frac{\phi \operatorname{grad} \theta}{T_0^2} \quad (2 - 7)$$

Compte-tenu du théorème de Gouy Stodola, (2 - 7) conduit à :

$$T_0 \operatorname{div} J_s = \operatorname{div} \left(\frac{\phi}{T_0} \right) T_0 - \frac{\theta \operatorname{div} \phi}{T_0} - \frac{\phi \operatorname{grad} \theta}{T_0} \quad (2 - 8)$$

Les trois termes du membre de droite possèdent respectivement les significations suivantes :

- Stockage d'entropie dû à l'extérieur du système et transférée dans le volume élémentaire à la température de référence. Ce terme, de nature anergique, ne demande aucun travail de la source sur le système et ne caractérise qu'une interaction système référence.

- Stockage d'entropie dû à l'écart de température θ et transférée dans le volume élémentaire à la température $(T_0 + \theta)$. Ce terme de nature exergique demande un travail de la source sur le système mais l'élément de volume est susceptible de restituer ce travail. En effet, $\operatorname{div} \phi$ engendre une élévation locale de température.

- Génération d'entropie due à l'écart de température θ . Ce terme constitue systématiquement une perte d'exergie.

L'écart local de température en tout point du système constitue le facteur de tension local régissant les échanges d'énergie utilisable. Le terme de gauche représente l'échange global d'énergie sur la surface du volume élémentaire.

La figure (II - 2) schématise les 3 interactions entre un système, une source d'énergie, et l'extérieur à la température de référence.

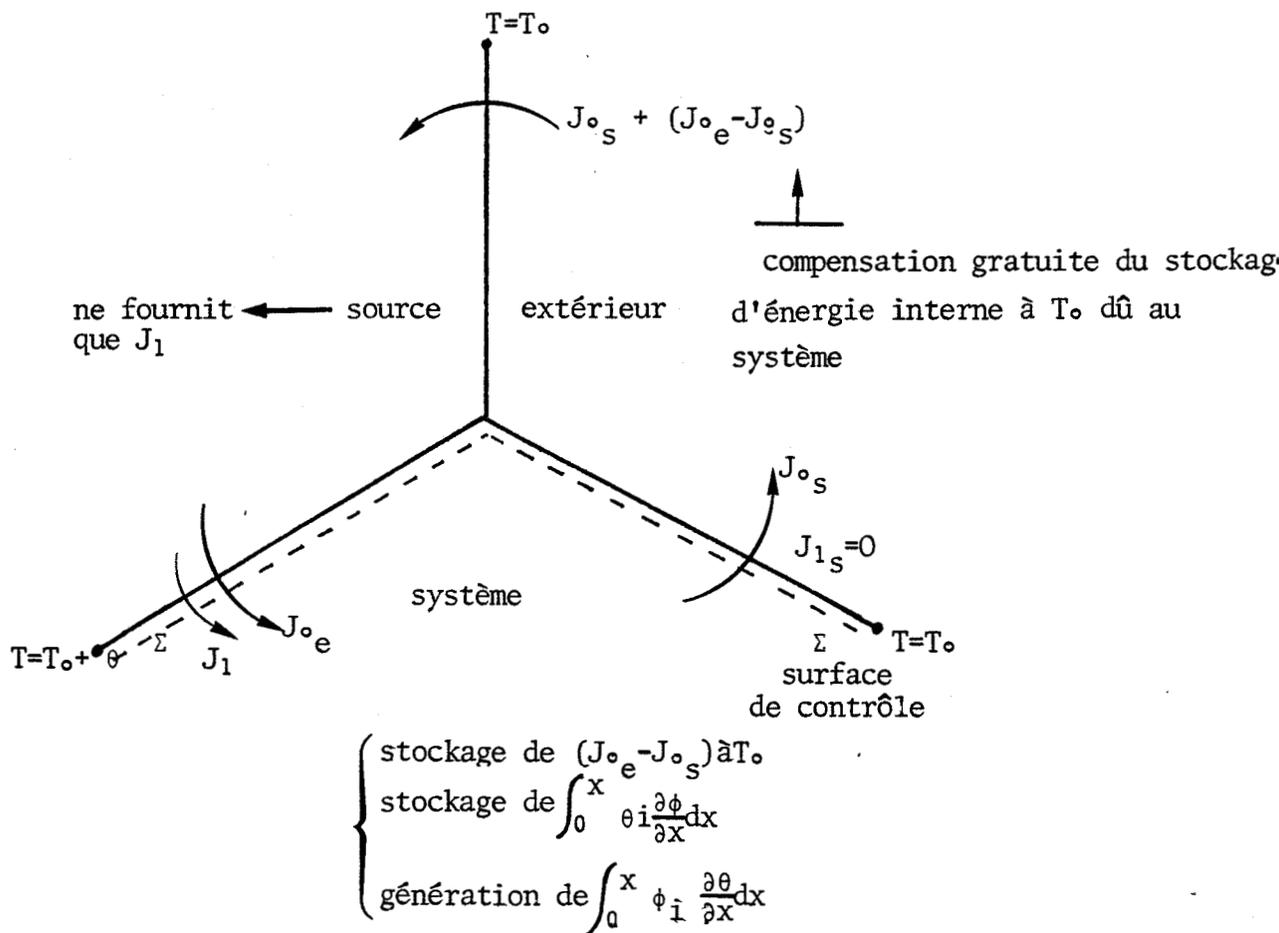


figure (II - 2) système à deux accès:
 1er accès sur la source
 2ème accès à l'extérieur

La relation (2 - 3) exprime l'interaction du champ thermique avec le matériau. En associant un bilan d'énergie utilisable à la relation (2 - 8), le théorème de Gouy Stodola permet d'écrire :

$$\frac{dW_1}{dt} = \frac{1}{T_0} \text{div } \theta(x,t) \cdot \phi(x,t) \quad (2 - 9)$$

Pour un élément de surface, on peut définir un flux de puissance d'interaction soit :

$$S(x,t) = \frac{\theta(x,t) \cdot \phi(x,t)}{T_0} \quad (\text{watts}) \quad (2 - 10)$$

Cette puissance d'interaction, en régime variable, tient compte des processus de stockage et de dissipation.

II CAS PARTICULIER DES TRANSFERTS THERMIQUES EN REGIMES SINUSOIDAUX

En électricité, l'aspect énergétique se formalise à l'aide du produit des variables conjuguées courant et potentiel. Une telle forme bilinéaire exprimée dans le domaine fréquence, fait figurer le décalage en phase entre les deux variables et l'étude classique des régimes isomorphes conduit à introduire la notion de puissance réactive associée à la présence d'éléments susceptibles de stocker de l'énergie.

De la même façon, l'énergie mise en jeu au cours de transferts cycliques peut être définie par le flux d'entropie. En effet, cette grandeur bien que inhomogène à une puissance peut être exprimée sous la forme du produit hermitique des deux variables θ et ϕ exprimé au coefficient T^2 près.

Le décalage en phase entre flux et température apparaît dans l'expression de l'impédance en chaque point du système. L'existence de ce déphasage traduit le caractère réactif existant en régime variable. Il en résulte que l'expression du flux d'entropie tient compte d'échanges dissipatifs et réactifs.

D'autre part, on montrera que cette grandeur, exprimée en terme d'énergie, obéit à un principe de superposition et est assujettie au théorème des travaux virtuels.

Nous avons établi au chapitre précédant les relations de transformation des coordonnées du vecteur d'état thermique en fonction des coordonnées d'espace pour une fréquence donnée.

Cette analyse conduit naturellement à étendre le domaine de l'analyse spectrale aux signaux thermiques. En effet, toute sollicitation peut être définie par son spectre, et les principes précédents permettent de calculer à l'aide d'une FFT et de son inverse la réponse du système en tout point et à tout instant. Les programmes de modélisation de notre travail procèdent de cette manière.

En ce qui concerne l'analyse et le traitement des grandeurs énergétiques, la façon la plus simple pour introduire les interspectres de flux d'entropie consiste à utiliser l'analogie entre phénomènes thermiques et électriques.

Les relations (1 - 23) constituent les équations de comportement des systèmes électriques et thermiques. Les solutions à ces équations étant définies dans le domaine fréquence, chaque grandeur physique est sous forme complexe en régime isomorphe réel.

En électricité, la puissance, forme bilinéaire des variables conjuguées V et I , est une notion que l'on doit traiter avec précautions lorsqu'appliquée à ces régimes.

La nécessité de conservation de la norme pour une transformation dans un espace unitaire, introduit la notion de produit hermitique ($V I^*$) Ainsi, la compensation des pertes par effet Joule est représentée par le flux de puissance active :

$$P_a = R_e (V I^*) = \frac{1}{2} (V I^* + I V^*) \quad (2 - 11)$$

Cette grandeur, étudiée entre les deux accès A et B d'une ligne peut être exprimée :

$$P_a = \overline{V(B,t) \cdot I(B,t)} - \overline{V(A,t) \cdot I(A,t)} \quad (2 - 12)$$

L'étude de la moyenne temporelle de la divergence spatiale du flux de puissance traduit la dissipation.

L'action des éléments réactifs sur un accès est associée à la puissance réactive :

$$j P_r = \text{Im} (V I^*) = \frac{1}{2} (V I^* - I^* V) \quad (2 - 13)$$

Cette quantité traduit l'échange d'énergie effectuée réversiblement, à fréquence double, entre la source et le système. Sa valeur moyenne est identiquement nulle.

Lorsque la description des processus se fait à l'aide des grandeurs réelles $v(t)$ et $i(t)$, les équations de comportement de la ligne électrique conduisent à l'expression de la divergence spatiale du flux de puissance :

$$\vec{\text{div}} \vec{P} = - r i^2(t) - c v \frac{dv}{dt} \quad (2 - 14)$$

Le premier terme du membre de droite est de nature dissipative et le second traduit la capacité de l'élément considéré à stocker de l'énergie.

Dans le cas d'un transfert thermique, la relation (2 - 3) conduit à :

$$T_0^2 \cdot \text{div } J_S = T_0 \text{ div } \phi - \text{div } \theta \phi \quad (2 - 15)$$

Seul le deuxième terme du membre de droite traduit l'interaction du champ thermique avec le matériau. Compte tenu du fait que le premier terme ne traduit que l'échange d'énergie interne dans le détail du cycle, la relation (2 - 10) et les équations de comportement (1 - 23) permettent d'envisager la dynamique du processus à l'aide du même formalisme que précédemment :

$$\text{div } \theta(t) \phi(t) = -\frac{1}{\lambda} \phi^2(t) - g \theta \frac{d\theta}{dt} \quad (2 - 16) \text{ avec } g = \rho c$$

capacité volumique
(J/K.m³)

Cette relation fait apparaître les deux termes respectivement associés à la dissipation et au stockage d'énergie utilisable.

Les équations de comportement peuvent être écrites à l'aide des grandeurs physiques définies en régime isomorphe. (L'astérisque désigne les grandeurs complexes conjuguées)

Les expressions :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\phi}{\lambda} \Big| \cdot \phi^* \\ \frac{\partial \phi^*}{\partial x} = +j\omega\theta^* \Big| \cdot \theta \end{array} \right\} \text{ et } \left. \begin{array}{l} \frac{\partial \theta^*}{\partial x} = -\frac{\phi^*}{\lambda} \Big| \cdot \phi \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} = -j\omega\theta \Big| \cdot \theta^* \end{array} \right\} \text{ avec } \begin{array}{l} \frac{d\theta}{dt} = j\omega\theta \\ \frac{d\theta^*}{dt} = -j\omega\theta^* \end{array}$$

conduisent à écrire :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\theta\phi^*}{dx} = -\phi\phi^* + j\omega\gamma\theta\theta^* \\ \frac{d\theta^*\phi}{dx} = -\phi\phi^* - j\omega\gamma\theta\theta^* \end{array} \right\} \text{ en posant } \begin{array}{l} S_a = \frac{1}{2T_0} (\theta\phi^* + \theta^*\phi) \text{ flux dissipatif} \\ jS_r = \frac{1}{2T_0} (\theta\phi^* - \theta^*\phi) \text{ flux réversible} \end{array}$$

L'interaction du champ thermique sinusoïdal avec le matériau se décompose en deux parties, T₀ désignant la température de référence.

$$\vec{\text{div}} S_a = -\frac{\phi\phi^*}{\lambda T_0} \quad (2 - 17) \quad \vec{\text{div}} S_r = \frac{\omega g}{T_0} \theta\theta^* \quad (2 - 18)$$

$\theta(x,f)$ et $\phi(x,f)$ désignent ici les vecteurs de Fresnel associés aux grandeurs physiques $\theta(t)$, $\phi(t)$ dont l'évolution est isochrone sinusoïdale.

S_a et S_r sont des grandeurs énergétiques réelles et sont formellement analogues aux puissances actives et réactives définies en électricité.

La relation (2 - 16) exprime de façon locale l'évolution du flux associé à l'énergie utilisable. Le deuxième terme du second membre est à valeur moyenne nulle en régime sinusoïdal. La grandeur $(g\theta \cdot \frac{d\theta}{dt})$ représente des échanges de nature réactive entre le volume élémentaire et son extérieur.

Le premier terme du second membre, à valeur moyenne non nulle exprime la dissipation associée à l'entretien du processus.

Pour un temps très supérieur à la période, la relation (2 - 16) conduit à :

$$\text{div} \frac{\overline{\theta(x)\phi(x)}}{T_0} = -\frac{\overline{\phi^2(x)}}{\lambda T_0} = \frac{1}{T_0} \overline{\phi(x) \text{grad} \theta(x)} \quad (2 - 19)$$

Compte tenu du théorème de Gouy Stodola; cette expression est équivalente à (2 - 4 - 1) et représente la dégradation énergétique observée dans l'élément de volume considéré.

La description précédente permet ainsi de donner une analogie formelle entre les concepts de puissance active et réactive et respectivement de flux dissipatif et réversible.

Application à l'étude des échanges énergétiques à l'entrée d'un système

Le comportement énergétique du système représenté figure (II - 3) peut être caractérisé par les grandeurs :

$$S_a = \frac{1}{2T_0}(\theta\phi^* + \theta^*\phi) \quad \text{et} \quad jS_r = \frac{1}{2T_0}(\theta\phi^* - \theta^*\phi)$$

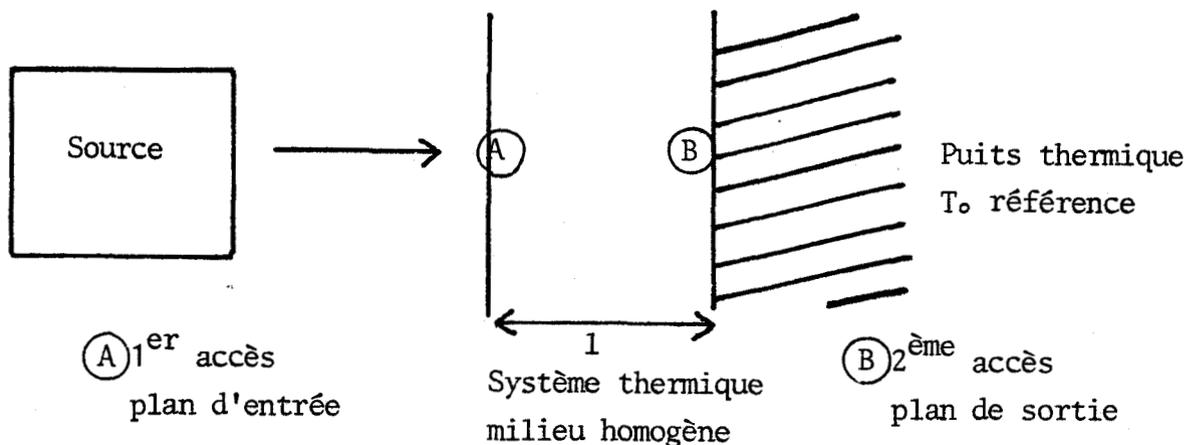


figure (II - 3)

Selon la nature de la source disposée sur le plan d'entrée du système, l'interaction avec le système sera représentée différemment.

-Echanges à flux imposé

$Z_e = \theta_e / \phi_e$ désigne l'impédance en entrée.

$$S_a = \frac{1}{4T_0} \phi \phi^* (Z_e + Z_e^*) = \frac{\phi \phi^*}{2T_0} |Z_e| \cos \psi \quad (2 - 20)$$

L'angle ψ caractérise le déphasage entre le flux et la température.

Le produit $|Z_e| \cos \psi$ est appelé Résistance effective du système.

$$S_r = \frac{1}{4T_0} \phi \phi^* (Z_e - Z_e^*) = \frac{\phi \phi^*}{2T_0} |Z_e| \sin \psi \quad (2 - 21)$$

Cette grandeur caractérise la dynamique du stockage d'énergie utilisable dans le système.

-Echanges à température imposée

On considère l'admittance du système notée Y_e .

$$S_a = \frac{1}{4T_0} \theta_a \theta_a^* (Y + Y^*) \quad \text{et} \quad S_r = \frac{1}{4T_0} \theta_a \theta_a^* (Y - Y^*)$$

Pour la configuration étudiée, en considérant une sollicitation à flux imposé, le calcul de l'impédance à la fréquence de source suffit à caractériser les grandeurs énergétiques S_a et S_r .

A l'entrée du système : $Z_e = Z_c \operatorname{th} \gamma l$ avec

$$(2 - 22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l \text{ longueur du matériau} \\ Z_c = \frac{1}{b \sqrt{j\omega}} \text{ impédance} \\ \text{caractéristique} \\ \gamma = \sqrt{j\omega/a} \\ \text{constante de propagation} \\ \text{à la fréquence angulaire } \omega \end{array} \right.$$

Les résultats obtenus par simulation sont représentés figures

Les courbes normalisées sont valables pour tous les matériaux homogènes, et

les résultats sont représentés en fonction de l'argument $G = |\gamma| l / \sqrt{2}$.

Pour un matériau de résistance R et de capacité C , la fréquence est reliée

à G par la relation $G = \sqrt{R C \pi f}$ (2 - 23)

$$\text{avec } l^2/a = R C \text{ (secondes)} \quad (2 - 24)$$

Temps propre de l'échantillon

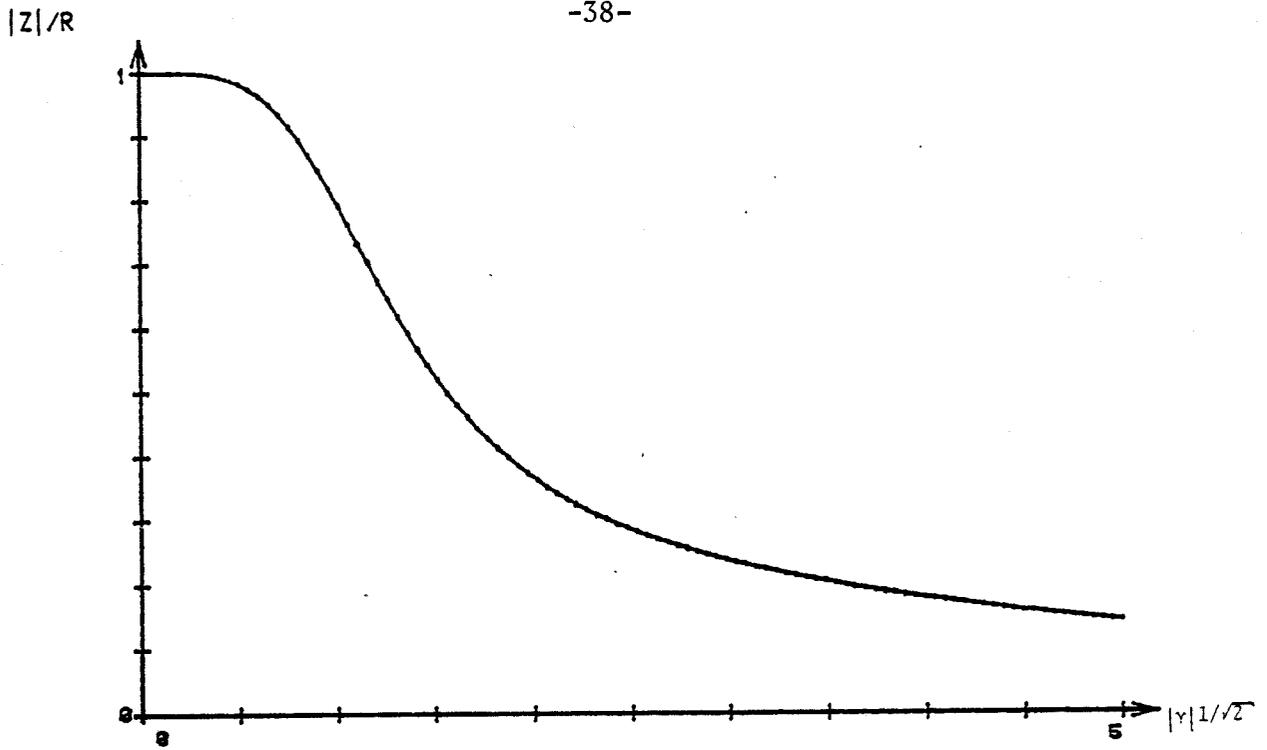


figure (II - 4) EVOLUTION DU MODULE DE L'IMPEDANCE D'ENTREE EN FONCTION DU PRODUIT $|\gamma|1/\sqrt{2}$

PHASE (DEGRES)

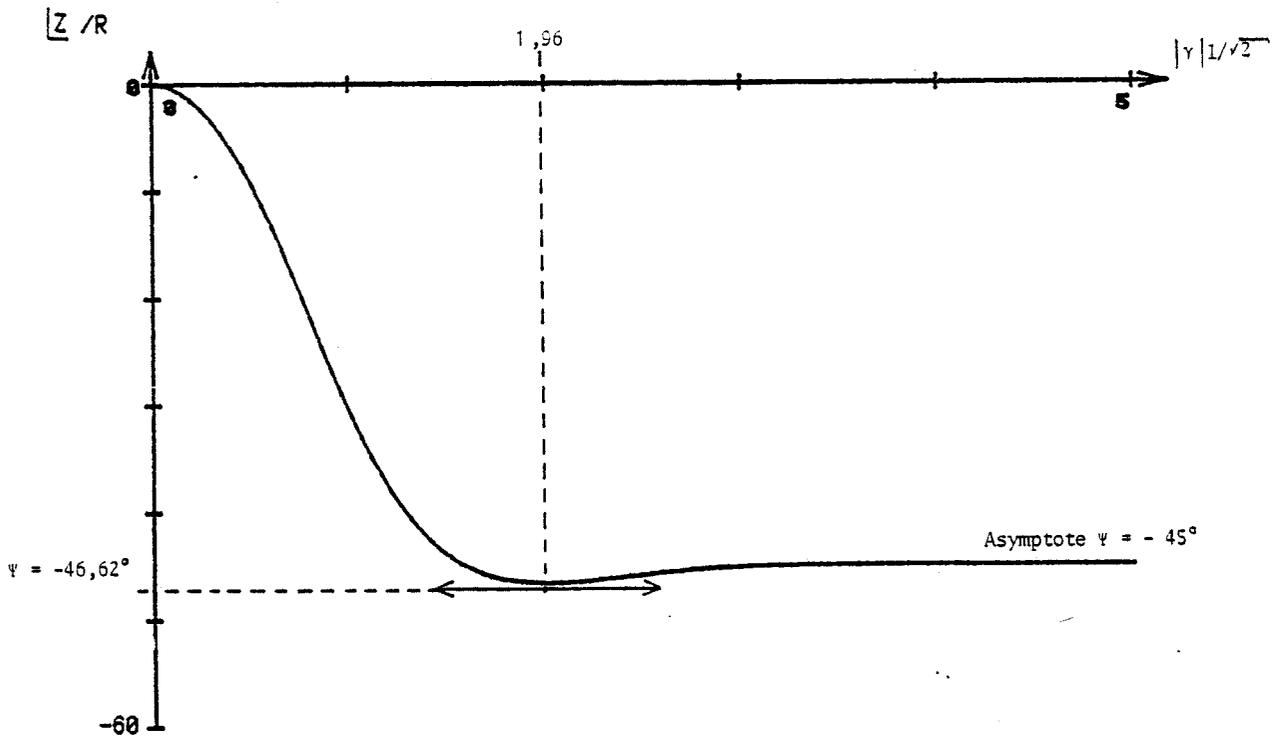


figure (II - 5) EVOLUTION DE L'ARGUMENT DE L'IMPEDANCE D'ENTREE EN FONCTION DU PRODUIT $|\gamma|1/\sqrt{2}$

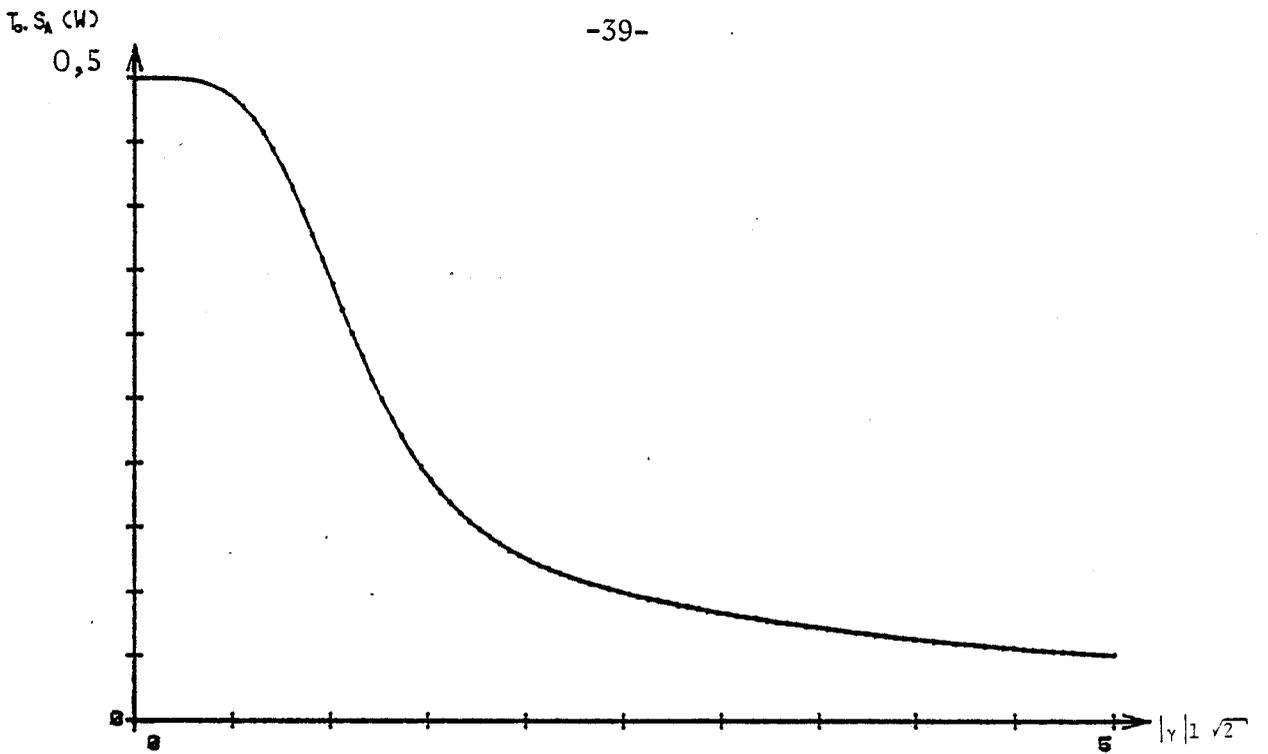


figure (II - 6) EVOLUTION DU FLUX DISSIPATIF
EN FONCTION DU PRODUIT $|\gamma|1/\sqrt{2}$
SOURCE A FLUX IMPOSE 1W

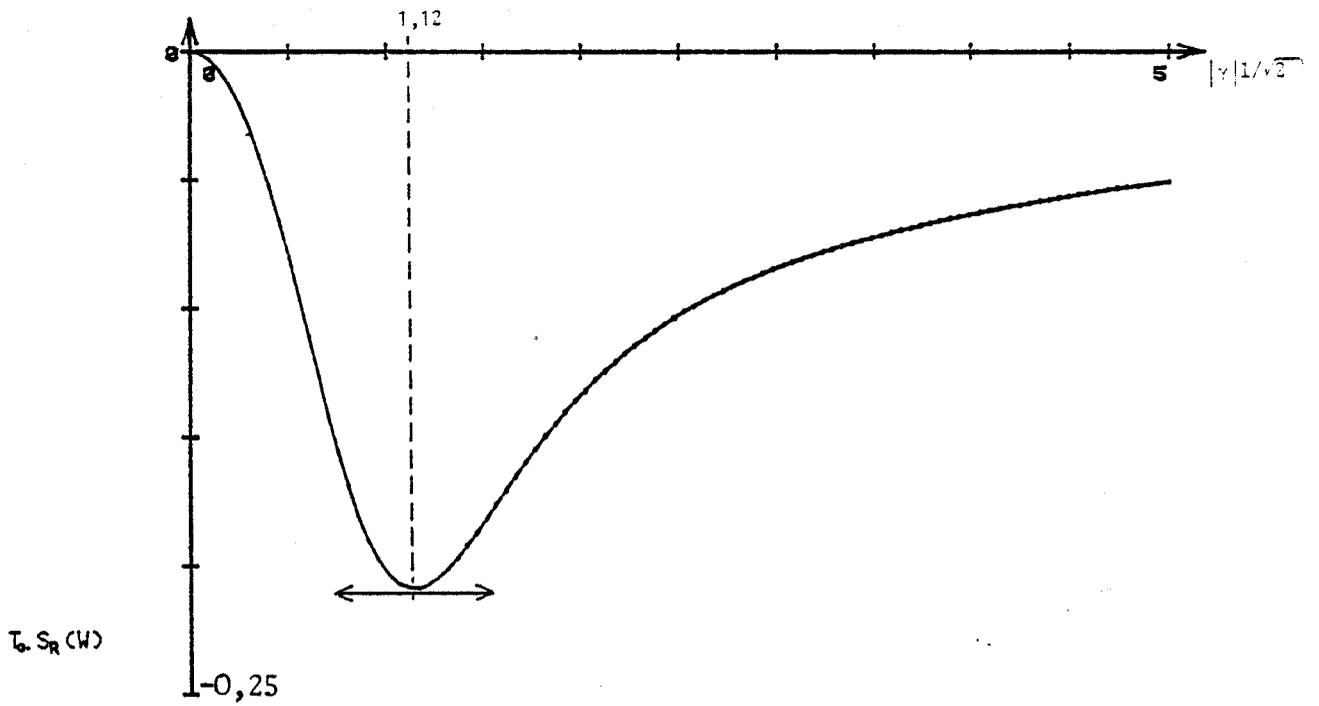


figure (II - 7) EVOLUTION DU FLUX REVERSIBLE

Le terme $\text{th } \gamma$ caractérise les effets dus à l'épaisseur finie [12] de la paroi. Cette dépendance est particulièrement importante dans le domaine des basses fréquences. En effet, le calcul des valeurs limites mène à :

$$\lim_{f \rightarrow 0} Z_e = \lim_{G \rightarrow 0} Z_e = Z_c \cdot \gamma \rightarrow R$$

Pour le système considéré, l'impédance d'entrée converge vers la valeur de la résistance thermique.

-Sur la figure (II - 4) nous avons représenté le module de l'impédance d'entrée réduite Z_e/R pour un système quelconque. L'évolution est calculée en fonction du paramètre réel, G sans dimension. La courbe est ainsi indépendante de la nature du matériau.

En haute fréquence $|Z_e|$ converge vers la valeur zéro comme l'impédance caractéristique.

-L'évolution de la phase de Z_e est représentée figure (II - 5) La courbe présente un extremum défini par un déphasage $\psi = - 46,62^\circ$ pour $G = 1,96$. Cette valeur est liée au temps propre de l'échantillon par la relation :

$$R \cdot C \cdot f_M = 1,222 \quad (2 - 25)$$

En basse fréquence, les grandeurs d'entrée sont en phase et $|Z_e \rightarrow 0$.

Le comportement en haute fréquence est celui d'un milieu semi fini où la température possède un retard de phase $\pi/4$ par rapport au flux. Les conséquences énergétiques propres à ce type de régime seront analysées au chapitre IV.

-L'évolution du flux dissipatif S_a est représentée figure (II - 6) pour obtenir un tracé indépendant de la température de référence, la courbe représente : $\frac{T_a}{R} S_a = f(G)$

Le système est sollicité par une source à flux imposé de 1W. Pour une telle sollicitation, l'énergie dissipée par la source à l'entrée du système est une fonction décroissante de la fréquence. Le maximum de dissipation a lieu en régime permanent.

Remarque : Le phénomène inverse se produit pour une sollicitation en température. (Chap IV)

-La figure (II - 7) représente l'évolution du flux réversible $T_0 S_r = f(G)$ pour les mêmes conditions que précédemment. La courbe présente un extremum pour $G = 1,12$ lié au temps propre de l'échantillon par la relation :

$$R C f_r = 0,400 \quad (2 - 26)$$

Ce régime est caractérisé par un maximum d'échanges réversibles au niveau de la face d'entrée entre la source et le système; la fréquence particulière est intrinsèque au système.

III RAPPELS SUR LA DEGRADATION ET LE STOCKAGE DE L'ENERGIE DANS LES SYSTEMES

ELECTRIQUES

Le flux de puissance d'interaction défini par la relation (2 - 10) peut être formellement comparé au flux de puissance calculé en un point d'une ligne électrique. Afin d'analyser les conséquences physiques découlant de cette analogie, un rappel du sens de quelques définitions nous semble nécessaire.

Puissances actives et réactives

On considère un dipôle en régime isomorphe : $v(t)$ et $i(t)$ sont les variables conjuguées observables en entrée.

$$\left. \begin{array}{l} i(t) = \text{Re} (I_0 e^{pt}) \\ v(t) = \text{Re} (V_0 e^{pt}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} Z(p) \text{ est l'impédance associée au dipôle} \\ v(t) = \text{Re} \{ Z(p) \cdot I_0 e^{pt} \} \end{array}$$

La puissance instantanée à l'entrée s'écrit :

$$\begin{aligned} P(t) &= \text{Re} (Z I_0 e^{pt}) \cdot \text{Re} (I_0 e^{pt}) \\ &= \text{Re} \{ Z I_0 e^{pt} (I_0 e^{pt} + I_0 e^{-pt}) \} \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \{ Z I_0 I_0^* + Z I_0^2 e^{2pt} \} \end{aligned}$$

Le cas des régimes sinusoïdaux conduit à considérer les grandeurs efficaces

$$I = I_0/\sqrt{2} \text{ et } V = V_0/\sqrt{2}$$

L'impédance s'écrit :

$$Z(j\omega) = R(j\omega) + jX(j\omega) = |Z| e^{j\psi}$$

Soit :

$$P(t) = R I I^* + |Z I^2| \cos(2\omega t + \psi) \quad (2 - 27)$$

Dans ce qui suit, lorsqu'une grandeur à l'entrée d'un dipôle est égale à la somme algébrique des grandeurs mesurées dans l'ensemble des branches internes, cette grandeur physique sera définie comme conservative.

On prend en général par convention I réel de telle sorte que ψ est une référence angulaire caractérisant les échanges entre la source et le dipôle.

La partie variable de ces échanges s'effectue à la fréquence 2ω et les grandeurs suivantes sont définies de façon phénoménologique.

$P_a(\omega) = R |I^2|$ est la puissance active; cette grandeur exprime la dégradation énergétique au sens général des fonctions de dissipation exprimées par :

$$2D = \frac{d\overline{W}}{dt} \quad (2 - 28) \quad \text{soit } P_a = 2D$$

\overline{W} est l'énergie moyenne dissipée dans le système.

La quantité $P_f(\omega) = |Z \cdot I^2|$ est appelée puissance fluctuante. elle possède une signification énergétique mais n'est pas conservative au sens où elle n'est pas assujettie au théorème des travaux virtuels.

On définit la puissance réactive $P_r(\omega) = X |I^2|$ telle que $P_f = |P_a + j P_r|$
 $P_r(\omega)$ est une grandeur conservative.

La grandeur Puissance complexe regroupe les définitions précédentes; elle est conservative.

$$\tilde{P} = P_a + j P_r$$

La puissance réactive possède un sens physique intéressant car elle permet d'interpréter la notion fondamentale d'énergie moyenne stockée. En effet, l'observation de cas simples permet de vérifier la proposition [29] suivante (Amstutz •).

La puissance réactive se répartit entre les éléments réactifs d'un réseau de telle sorte qu'elle est égale au produit par 2ω de la différence des moyennes temporelles de la somme des énergies stockées dans les inductances et de la somme des énergies stockées dans les capacités.

La puissance complexe peut alors s'écrire :

$$\tilde{P} = P_a + 2j\omega \Sigma (\overline{W}_{self} - \overline{W}_c) \quad (2 - 29)$$

Le symbole Σ représente la sommation étendue à l'ensemble des self inductances et des capacités. On peut étendre ces résultats à des systèmes à constante répartie. La généralisation de ces principes est

[30] développée dans le travail de (Brun •) dans le cadre d'une analyse temporelle des signaux.

L'intérêt du concept d'énergie moyenne stockée (EMS) résulte du fait que souvent, le détail des échanges énergétiques au cours d'une période ne présente que peu d'intérêt. Seule l'étude sur un temps très supérieur à la période, permet d'effectuer un bilan énergétique à long terme; le cas semble évident dans l'étude de l'interaction des ondes électromagnétiques avec la matière. [41]

Ce sont les variations temporelles ou fréquentielles des grandeurs moyennes qui permettent de décrire les processus. Le concept d'EMS semble d'autant plus intéressant que, considérée à l'entrée d'un système, la grandeur est additive lorsqu'un régime est composé de plusieurs fréquences. Le fait qu'en principe tout signal physique temporel possède un spectre en fréquence suggère un moyen d'analyse du stockage énergétique des systèmes physiques dont l'étude fait l'objet du chapitre IV.

En conclusion, l'analyse des bilans énergétiques est fondée sur la description et la dissociation de deux phénomènes : stockage et dégradation.

- stockage d'énergie potentielle électrostatique ($\frac{1}{2} C V^2$)
ou magnétique ($\frac{1}{2} L i^2$)

- dégradation par effet Joule décrite par une fonction de dissipation
([33] [34])

L'étude des systèmes mécaniques répond à une description identique et d'une façon générale l'analyse énergétique des systèmes en régime variable [18] peut être rapportée au même formalisme. (Biot[•])

IV FONCTION DE DISSIPATION ET ENERGIE POTENTIELLE D'UN SYSTEME THERMIQUE

L'évolution thermocinétique en un point d'un système peut être décrite par les deux équations de comportement (1 - 17).

Supposons que l'on veuille décrire le processus à l'aide de variables de phases ou de coordonnées généralisées. Il serait préférable dans ce cas de faire apparaître des contraintes de type holonomes entre les coordonnées utilisées. En effet, il est bien connu que, lorsqu'on décrit des systèmes (mécaniques par exemple), il peut être intéressant de disposer d'un nombre de coordonnées supérieur à la dimension. Il existe dans ce cas des relations de contrainte entre les coordonnées surabondantes. Il est alors souvent préférable d'avoir à traiter des liaisons dites holonomes c'est-à-dire dans lesquelles n'apparaissent pas de différentielles par rapport au temps. Entre θ et ϕ la relation de conservation (1-17-2) fait apparaître une différentielle de ce type. En conséquence, on considère non plus le flux mais un champ thermique $H(x,t)$ tel que localement $\frac{dH(x,t)}{dt} = \phi(x,t)$ L'équation de conservation peut avoir valeur de contrainte holonome entre $\theta(x,t)$ et $H(x,t)$.

[32] [35] On peut montrer que le principe des travaux virtuels est applicable en thermique de la même façon qu'en électricité où l'on obtient l'expression du théorème de Tellegen*. Dans le cas de la mécanique (principe de D'Alembert) le principe consiste à définir des déplacements virtuels au sens généralisé. On peut alors, en stoppant l'écoulement du temps par la pensée, figer le système dans son état dynamique et lui faire subir un déplacement virtuel quelconque (infligeant la rupture des solides dans le cas de la mécanique).

[6] Ce principe est souvent difficile à appliquer et son intérêt réside dans des applications successives à un même instant en choisissant convenablement plusieurs déplacements virtuels*.

Application à la thermique

Si on imagine un déplacement virtuel du champ thermique δH l'équation de conservation permet d'écrire localement :

$$\phi \cdot \delta H = (-\lambda \text{ grad} \theta) \cdot \delta H$$

Il en résulte pour un volume fini du système :

$$\iiint_{\tau} (\phi + \lambda \operatorname{grad}\theta) \delta H \, d\tau = 0$$

Soit : $\lambda \delta H \operatorname{grad}\theta = \lambda \operatorname{div}(\theta \delta H) - \lambda \theta \operatorname{div}\delta H$

l'application du théorème de la divergence mène à :

$$\iiint_{\tau} \left(\frac{\phi}{\lambda} \delta H - \theta \operatorname{div}\delta H \right) d\tau = - \iint_{\sigma} \theta \delta H \, d\sigma$$

Explicitons le deuxième terme du premier membre :

$$- \iiint_{\tau} \theta \operatorname{div}\delta H \, d\tau = \iiint_{\tau} g \theta \delta\theta \, d\tau = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} (g \delta\theta^2) \, d\tau$$

On pose : $U = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} g \delta\theta^2 \, d\tau$

Cette grandeur correspond à la variation d'un potentiel scalaire $U(t)$ défini par la relation intégrale :

$$U(t) = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} g \theta^2(x,y,z,t) \, d\tau + \text{Cte} \quad (2 - 30)$$

L'analyse du déplacement virtuel δH permet finalement d'écrire :

$$\iiint_{\tau} \frac{1}{\lambda} \phi \delta H \, d\tau + \delta U = - \iint_{\sigma} \theta \delta H \, d\sigma \quad (2 - 31)$$

Cette équation exprime un principe variationnel thermique et reste vérifiée pour une variation arbitraire du champ thermique. Elle découle de la loi de conduction de Fourier et vérifie toujours la conservation de l'énergie comme une contrainte.

Considérons une condition mathématiquement plus faible relative au déplacement virtuel δH envisagé. On peut admettre que ce déplacement a été évalué à la suite de l'observation locale de la valeur du flux.

Soit $\delta H = \phi dt$ En milieu monodimensionnel l'équation s'exprime :

$$\int_0^L \frac{1}{\lambda} \phi^2(x,t) \, dx + \frac{dU(x,t)}{dt} - \left[\theta(t) \phi(t) \right]_0^L \quad (2 - 32)$$

Le produit $\left[\theta \cdot \phi \right]$ représente un terme source analysé sur les faces respectives d'entrée et de sortie du système.

Le premier terme du membre de gauche peut être rapproché du formalisme des lignes électriques afin de définir une fonction de dissipation telle que :

$$D = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{1}{\lambda} \phi^2 dx \quad (2 - 33)$$

L'équation peut alors s'écrire :

$$\left[\theta_t \cdot \phi_t \right]_0^L = - \int_0^L \frac{1}{\lambda} \phi^2 dx - \int_0^L g \theta \frac{d\theta}{dt} dx \quad (2 - 34)$$

Résultat identique à (2 - 32).

Cette égalité traduit la dissociation de l'énergie utilisable apportée en entrée du système, sous forme de stockage et de dissipation.

$$\text{En posant } \dot{u} = \frac{du}{dt} \quad \left[\theta \cdot \phi \right]_0^L = - \int_0^L 2 \xi(x) dx - \int_0^L \dot{u}(x) dx$$

où ξ et u représentent respectivement des densités linéiques de dissipation et de potentiel mesurées au point d'abscisse x du système.

Localement le terme moteur du processus s'écrit :

$$\text{div } \theta(t,x) \cdot \phi(t,x) = - (2\xi + \dot{u}) \quad (2 - 35)$$

Les considérations développées au paragraphe précédent montrent que, de la même manière qu'en électricité, les systèmes thermiques peuvent être décrits à l'aide de fonctions énergétiques.

Il en résulte donc que le concept d'énergie moyenne stockée possède un sens en thermique et par conséquent la notion de flux réversible de même. Les analogies effectuées peuvent ainsi être justifiées compte-tenu des hypothèses ($\Delta T \ll T_0$).

En effet, nous supposons que les processus dont on envisage l'étude sont toujours caractérisés par de faibles écarts en température. Du point de vue de la thermodynamique, on reste toujours dans le cadre de la thermodynamique linéaire du non équilibre, caractérisée par une production minimale d'entropie.

Le théorème de production minimum d'entropie exprime une sorte de propriété d'inertie des systèmes en non équilibre. Lorsque les conditions aux limites données ne permettent pas au système d'atteindre l'équilibre thermodynamique (respectivement une production d'entropie nulle), le [15] système s'installe dans l'état de moindre dissipation. (Prigogine)

Considérons un milieu monodimensionnel.

En un point d'abscisse x , la dissipation linéique s'exprime :

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{\lambda} = - \frac{1}{2} \frac{\phi}{\lambda} \text{ grad } \theta$$

On peut écrire de façon artificielle :

$$\xi = 2 \xi - \xi = - \phi \frac{d\theta}{dx} - \frac{\phi^2}{2\lambda}$$

Un régime imposé quelconque doit minimiser la dissipation.

Pour une perturbation $\delta\theta$ donnée, la variation de ϕ résultante (écart de trajectoire en flux) doit entraîner une variation minimale de la dissipation.

$$\frac{d\xi}{d\phi} = - \left(\frac{d\theta}{dx} + \frac{\phi}{\lambda} \right) = 0$$

Conséquence logique, on retrouve la loi de conduction de Fourier.

En multipliant cette égalité par $\text{div}\phi$, on obtient :

$$\frac{\phi}{\lambda} \frac{d\phi}{dx} + \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{d\phi}{dx} = 0 \quad \text{soit :}$$

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\phi d\phi}{dx} - g \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{d\theta}{dx} = 0$$

Lorsque les composantes θ et ϕ sont définies dans le domaine fréquence, on obtient :

$$\frac{\phi}{\lambda} \frac{d\phi}{dx} - \frac{d\theta}{dx} j\omega g\theta = 0 \quad \text{soit :}$$

$$\frac{\phi^2(x,\omega)}{\lambda} - j\omega g\theta^2(x,\omega) = \text{Cte} \quad (2 - 36)$$

L'égalité précédente met en évidence l'existence d'une grandeur invariante au cours de la progression de l'énergie thermique dans une tranche de matériau homogène. En d'autres termes, l'évolution du stockage et de la dissipation s'effectue avec pour condition de contrainte une génération minimale d'entropie.

Sur un plan à distance x de l'origine, le vecteur d'état thermique subit une transformation définie par la relation :

$$\begin{vmatrix} \theta(x, \omega) \\ \phi(x, \omega) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ch } \gamma x & -Z_c \text{ sh } \gamma x \\ -\frac{\text{sh } \gamma x}{Z_c} & \text{ch } \gamma x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \theta(0, \omega) \\ \phi(0, \omega) \end{vmatrix}$$

Deux termes de cette matrice de transformation sont fonction de l'impédance caractéristique.

Afin de s'affranchir de cette dépendance, il est possible d'utiliser les coordonnées ϕ et $X = \theta/Z_c$.

La transformation s'écrit alors :

$$\begin{vmatrix} X(x, \omega) \\ \phi(x, \omega) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ch } \gamma x & -\text{sh } \gamma x \\ -\text{sh } \gamma x & \text{ch } \gamma x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X(0, \omega) \\ \phi(0, \omega) \end{vmatrix}$$

Des considérations élémentaires de géométrie nous mènent à envisager cette transformation comme une rotation dans un espace pseudo Euclidien.

Sachant que la pseudo norme est conservée dans la transformation, on doit toujours observer :

$$X^2(x, \omega) - \phi^2(x, \omega) = X^2(0, \omega) - \phi^2(0, \omega) = K(\omega) \quad \text{avec } K = \text{Cte} \in \mathbb{C}$$

En exprimant X en fonction de θ , on retrouve (2 - 36).

En effet :

$$\theta^2 j \omega b^2 - \phi^2 = \text{Cte} \quad \text{avec } b^2 = \lambda g$$

D'un point de vue pratique, la vérification de cette relation de contrainte est utilisée dans le contrôle des résultats obtenus par simulation. La relation est vérifiée en tout point d'une couche homogène et la transition entre deux matériaux est caractérisée par une modification de la constante $K(\omega)$.

Pour les coordonnées $[X(\omega), \phi(\omega)]$, la conservation de la pseudo norme constitue une conséquence directe du théorème de production minimale d'entropie.

V CONSEQUENCES THERMODYNAMIQUES LIEES AU CHOIX DE LA TEMPERATURE DE REFERENCE

Lorsque les concepts énergétiques sont formulés en terme d'entropie les grandeurs physiques précédentes sont définies au coefficient $1/T_0^2$ près. Les flux dissipatifs et réversibles peuvent être définis en termes de puissance (Watts) moyennant l'application du théorème de Gouy Stodola. Les échanges énergétiques sont définis proportionnellement au rapport $1/T_0$. Pour une température de référence T_0 définie et fixée, les processus peuvent [14] être analysés en terme de perte d'énergie.

En général, les méthodes d'analyse en terme d'anergie et d'exergie permettent d'exprimer la capacité d'un système à produire un travail mécanique fonction de son état de déséquilibre avec l'ambiance dans laquelle il se trouve. Pour une transformation réversible, la terminologie est définie de la façon suivante :

Soit une quantité de chaleur dq disponible à température T et un milieu ambiant à la température de référence T_0 .

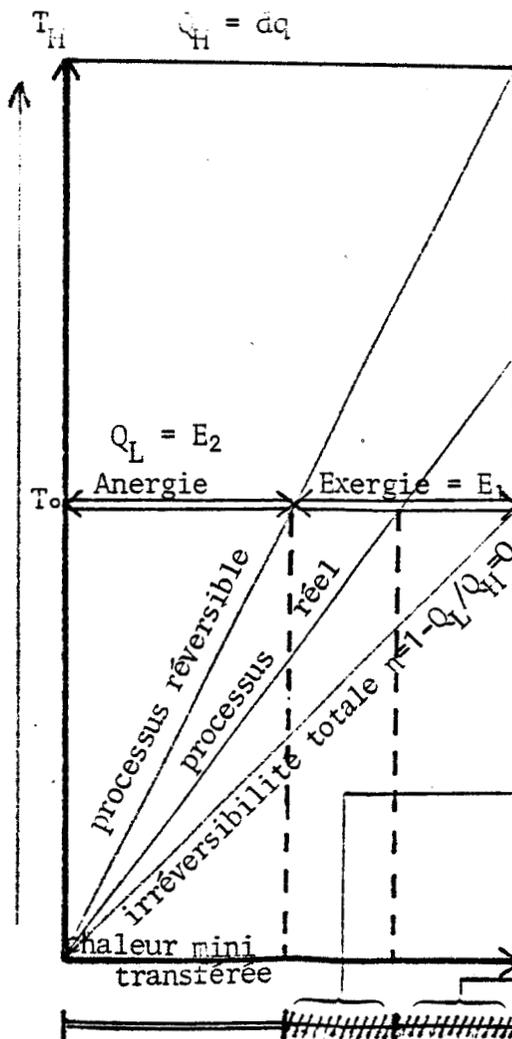
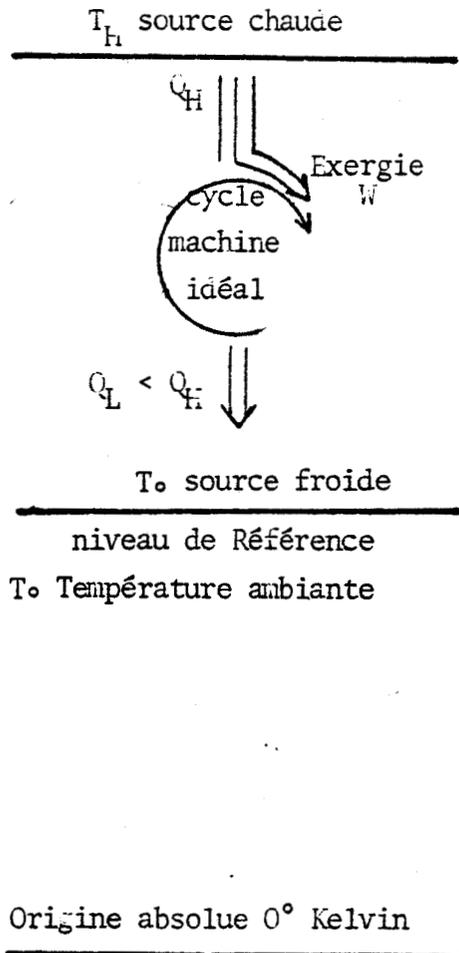


figure (II - 8)

perte d'exergie à l'irréversibilité partielle du processus réel

exergie résiduelle ou travail mécanique utilisable

dq peut être séparé en la somme de deux termes :

$-E_1 = dq \left(1 - \frac{T_0}{T}\right)$ est susceptible d'être intégralement transformée en travail mécanique dans un cycle de Carnot dont la source froide est à T_0 . Ce terme est appelé exergie. Par définition, l'exergie de l'ambiante est nulle.

$-E_2 = dq \frac{T_0}{T} = T_0 dS$ est inapte à toute transformation en travail mécanique. Ce terme est appelé anergie.

La figure (II - 8) représente l'illustration du principe des machines ditherme.

Un processus réel s'effectue dans le domaine hachuré avec une perte d'exergie définie par le théorème de Gouy Stodola.

$$W_1 = T_0 \cdot S_c$$

L'entropie générée est calculée par application du second principe.

Une formulation en terme de perte d'exergie sous-entend qu'à un instant donné, au point considéré, on puisse (par la pensée) faire fonctionner une machine thermique entre la référence et le point source défini par $(T_0 + \theta, \phi)$.

Une formulation générale des concepts doit pouvoir s'affranchir du niveau de référence T_0 dans l'hypothèse où ce niveau est fixé par définition. On doit pour cela montrer que l'énergie moyenne stockée est une grandeur extensive possédant des propriétés d'additivité vis à vis des composantes lorsqu'un régime est constitué de plusieurs fréquences.

A cet effet, l'analogie électrique suivante permet d'illustrer cette propriété.

Soit une capacité localisée C aux bornes de laquelle la tension mesurée est la somme de deux composantes :

- V_1 composante continue (assimilée à un potentiel de référence)

- V_2 composante variable telle que $V_2 = V_0 \cos(\omega t + \psi)$

L'énergie électrostatique moyenne stockée a pour valeur :

$$\begin{aligned} \text{EMS} = \bar{W} &= \frac{1}{2} C \overline{(V_1 + V_0 \cos(\omega t + \psi))^2} \\ &= \frac{1}{2} C V_1^2 + \frac{1}{4} C V_0^2 + 2 \left(\frac{1}{2} C V_1 V_0 \cos(\omega t + \psi) \right) \\ &= \frac{1}{2} C V_1^2 + \frac{1}{4} C V_0^2 \end{aligned}$$

Soit EMS = (Energie permanente stockée de référence) + (Energie moyenne stockée du processus cyclique)

Le niveau énergétique dû à la source de tension constante peut être défini comme potentiel de référence, au-dessus duquel vient se superposer le potentiel variable introduit par la source.

L'examen du système sur un temps très long par rapport à la période permet d'écrire :

$$\text{EMS} = W_{\text{ref}} + W_t \quad \text{et} \quad \frac{d\text{EMS}}{dt} = \frac{dW_t}{dt}$$

La référence étant fixée, la dynamique du processus peut alors être étudiée en négligeant le stockage énergétique associé à cette référence.

D'une façon plus générale, si on considère

$$V_2(t) = \sum_{n=1 \rightarrow \infty} V_n \cos(n \omega_n t + \psi_n)$$

les formulations précédentes restent identiques, les moyennes temporelles associées aux termes croisés étant nulles.

$$\text{EMS} = W = \frac{1}{2} C V_1^2 + \frac{1}{4} C \sum_1^{\infty} V_n^2$$

En ce qui concerne l'étude des phénomènes thermiques, le choix de T_0 entraîne l'existence d'un potentiel thermique de référence fixé dans l'échelle absolue de Kelvin susceptible de n'être pas pris en compte.

Cette propriété peut être établie en considérant l'existence de la constante dans la relation (2 - 30). On peut associer à cette constante soit une valeur liée à la valeur de référence soit une valeur nulle si on travaille en termes d'exergie.

Bilan d'énergie utilisable dans le cas de transferts non cycliques

La similitude des équations de comportement relative aux systèmes thermiques et électriques permet d'envisager une représentation simple des échanges d'énergie utilisable mesurés aux accès d'un système.

L'énergie interne étant une grandeur conservative, pour des écarts en température faibles devant la référence, la relation (2 - 8) peut être rapprochée d'un bilan local de puissance en un point d'une ligne électrique. (figure II - 9)

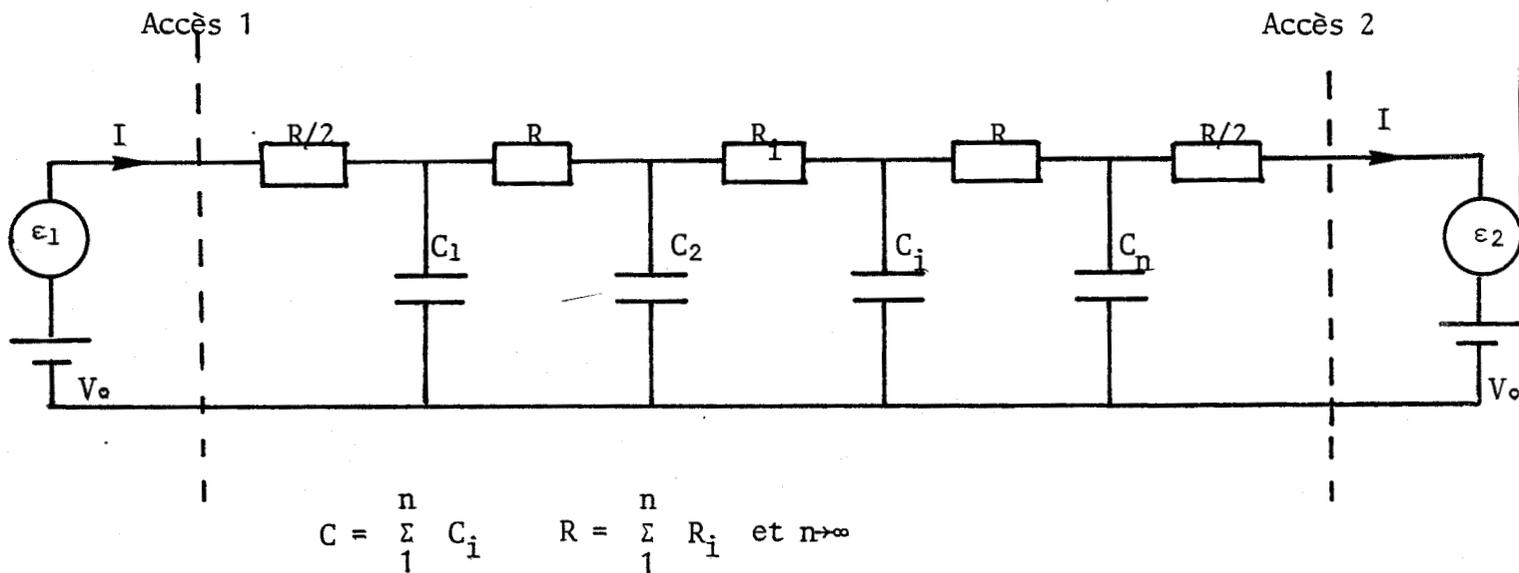


figure (II - 9) : APPROXIMATION DU SYSTEME A CONSTANCE REPARTIE

En effet, en chaque point :

$$\text{div VI} = \text{div } V_0 I + \epsilon(x) \text{ div } I + I \text{ grad } \epsilon \quad (2 - 37)$$

Le bilan effectué aux deux accès conduit à :

$$P_2 - P_1 = V_0(I_2 - I_1) + \int_1^2 \epsilon(x) \frac{\partial I}{\partial x} dx + \int_1^2 I(x) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} dx \quad (2 - 38)$$

L'énergie électrostatique totale de la ligne est définie par :

$$W_t = \sum \frac{1}{2} C_i V_0^2 + \sum C_i V_0 \epsilon_i + \sum \frac{1}{2} C_i \epsilon_i^2 \quad (2 - 39)$$

Le potentiel de référence étant fixé, l'énergie utilisable a pour valeur :

$$U = \frac{1}{2} \sum C_i \epsilon_i^2 \quad \text{relation analogue à } (2 - 30)$$

Entre deux instants t_1 et t_2

$$\sum_i C_i V_0 \epsilon_i = \int_{t_1}^{t_2} V_0 (I_2 - I_1) dt$$

Cette grandeur est représentative d'un échange dû au potentiel de référence sans interaction avec la puissance fournie par les sources ϵ_1 et ϵ_2 . Le terme J_0 de la relation (2 - 3) est analogue à cet échange.

Compte-tenu de :

$$P_2 - P_1 = V_0 (I_2 - I_1) + \epsilon_2 I_2 - \epsilon_1 I_1$$

la relation (2 - 38) constitue une écriture du théorème de Tellegen où la contribution des sources est uniquement représentée par les deux derniers termes du membre de droite. La génération d'entropie étant équivalente à la perte de puissance active, le flux réversible est représentatif d'un stockage d'énergie utilisable. Le transfert d'énergie interne dû à la référence externe ne constitue ni un gain ni une perte d'énergie utilisable. En d'autres termes, les sources ϵ situées aux accès du système travaillent sur une impédance invariante vis à vis des valeurs prises par la référence. Ainsi, compte-tenu du théorème de Gouy Stodola, l'énergie utilisable d'un système thermique est formellement homologue à l'énergie utilisable d'une ligne électrique dont les deux accès sont sollicités par des sources superposées à un potentiel de référence fixe.

La relation (2 - 3) constitue une approximation du premier ordre dont l'imprécision conditionne les limites de l'analogie. Les erreurs dues à l'analogie sont représentées par le tableau (II - 10) pour une température de référence de 300°K.

| | | | | | | |
|----------------------------|-----------------|-----|----|----|----|-----|
| $T_0=300^\circ\text{K}$ | x (%) | 0,5 | 1 | 5 | 10 | 15 |
| $\theta_{\max}=30\sqrt{x}$ | θ_{\max} | 21 | 30 | 67 | 94 | 116 |

tableau (II - 10)

VI FACTEUR DE QUALITE D'UN SYSTEME THERMIQUE

D'une façon générale, les analogies développées précédemment permettent d'envisager l'étude des processus thermiques sous l'angle plus général de la théorie des systèmes.

Une structure disposée sur un puits thermique peut alors être considérée comme une boîte noire munie d'un accès vers l'extérieur. Sans tenir compte des équations de comportement décrivant les phénomènes internes au système, on ne considère que les observables à l'entrée compte-tenu du fait que toute dissipation d'exergie à l'intérieur du système doit être compensée par un apport externe pour entretenir l'équilibre dynamique d'un processus. Le terme équilibre dynamique est ici défini par un régime établi dont les variables d'état peuvent être décrites à l'aide de signaux certains ([3]). Il est alors possible de définir un coefficient de qualité énergétique.

Conformément aux définitions générales, le facteur de qualité [35] d'un système en régime cissoïdal de fréquence angulaire ω , désigne le rapport de l'énergie moyenne stockée dans le système, sur l'énergie dissipée pour une rotation de phase de un radian ($t = 1/\omega$).

En électricité, cette notion tout-à-fait ordinaire est souvent utilisée dans l'étude de systèmes peu dissipatifs (lignes inductives, cavités résonnantes, etc ...).

L'étude des transferts thermiques est caractérisée par des pertes importantes. En effet, la relation (2 - 22) montre que les pertes constituent une part prépondérante dans le phénomène de propagation de la chaleur.

Deux questions peuvent alors être formulées quant aux régimes particuliers envisageables à travers une paroi.

-Comment peut-on envisager un maximum des échanges internes énergétiques :

la courbe (II - 7) met en évidence une fréquence particulière liée à un extremum du flux réversible.

-Comment, hormis le régime permanent, peut-on envisager un régime caractérisé par un minimum de pertes actives entre la source et le système : un tel régime est associé à une valeur maximale du coefficient de qualité. A priori, en très haute fréquence, le champ thermique ne se propageant qu'à très faible profondeur, on approche de ce régime, les pertes actives étant minimisées. Compte-tenu de la définition générale; le concept de coefficient de qualité peut être formulé en terme de potentiel thermique stocké et de pertes d'exergie.

En effet :

$$S_a = \frac{\phi_0 \phi_0^*}{2} |Z_e| \cos \psi \quad \text{permet de définir la fonction de dissipation } D = S_a/2 \quad (2 - 40)$$

$$S_r = \frac{\phi_0 \phi_0^*}{2} |Z_e| \sin \psi \quad \text{est liée à l'EMS par la relation } 2 \omega U = - S_r \quad (2 - 41)$$

Soit :

$$U(\omega) = - \frac{\phi_0 \phi_0^*}{4 \omega T_0} |Z| \sin \psi \quad (\text{en Joules}) \quad (2 - 42)$$

avec T_0 température de référence
 ψ angle de déphasage flux température

Ce potentiel thermique moyen est une grandeur positive et définie comme additive à une référence énergétique définie par un régime permanent superposé à l'oscillation du champ thermique à la fréquence ω .

Compte-tenu du fait que :

$$U = - \frac{S_r}{2\omega} \quad \text{et} \quad D = \frac{S_a}{2}$$

Le coefficient de qualité associé au régime sinusoïdal s'écrit :

$$Q = U / (D/\omega)$$

$$Q = - \frac{S_r}{S_a} = - \text{tg } \psi \quad (2 - 43)$$

Par analogie avec l'électricité où une ligne à constante répartie est assimilable à une infinité de cellules RC disposées en cascade, on retrouve de façon logique la notion d'angle de perte duale de celle de coefficient de qualité.

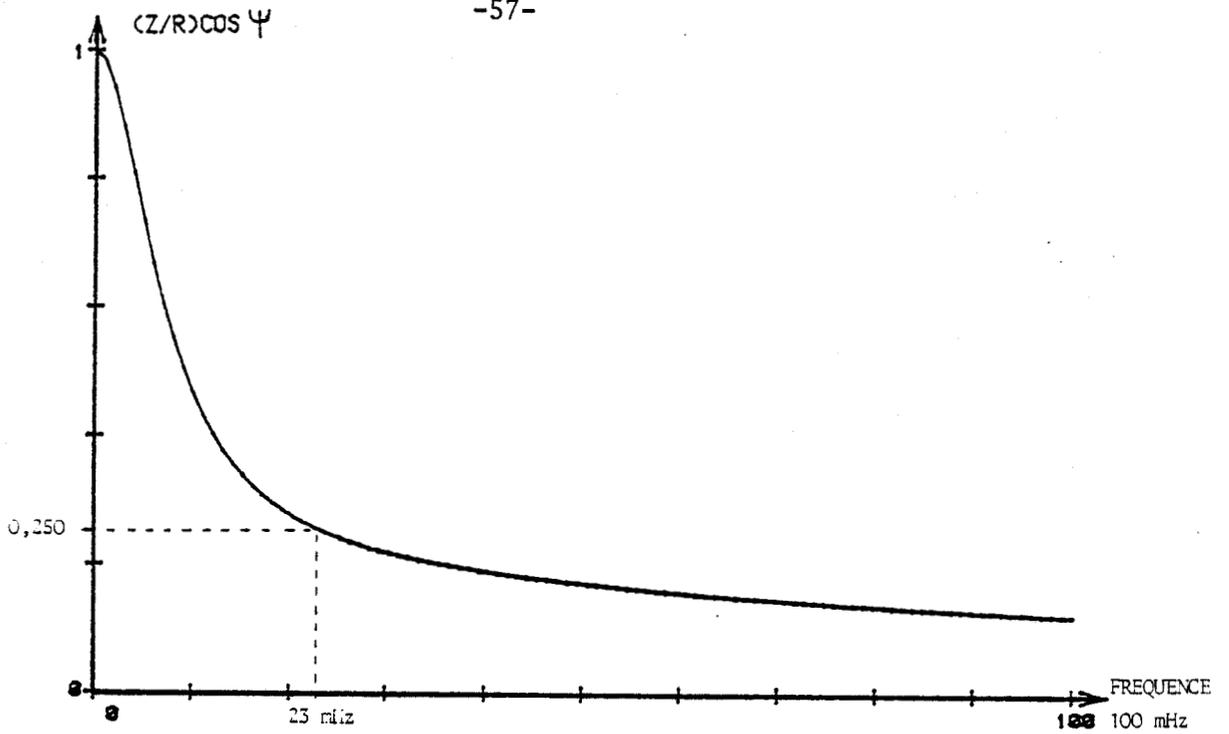


figure (II - 11) EVOLUTION DE LA RESISTANCE EFFICACE NORMALISEE
EN FONCTION DE LA FREQUENCE
PLEXIGLASS 2.5MM

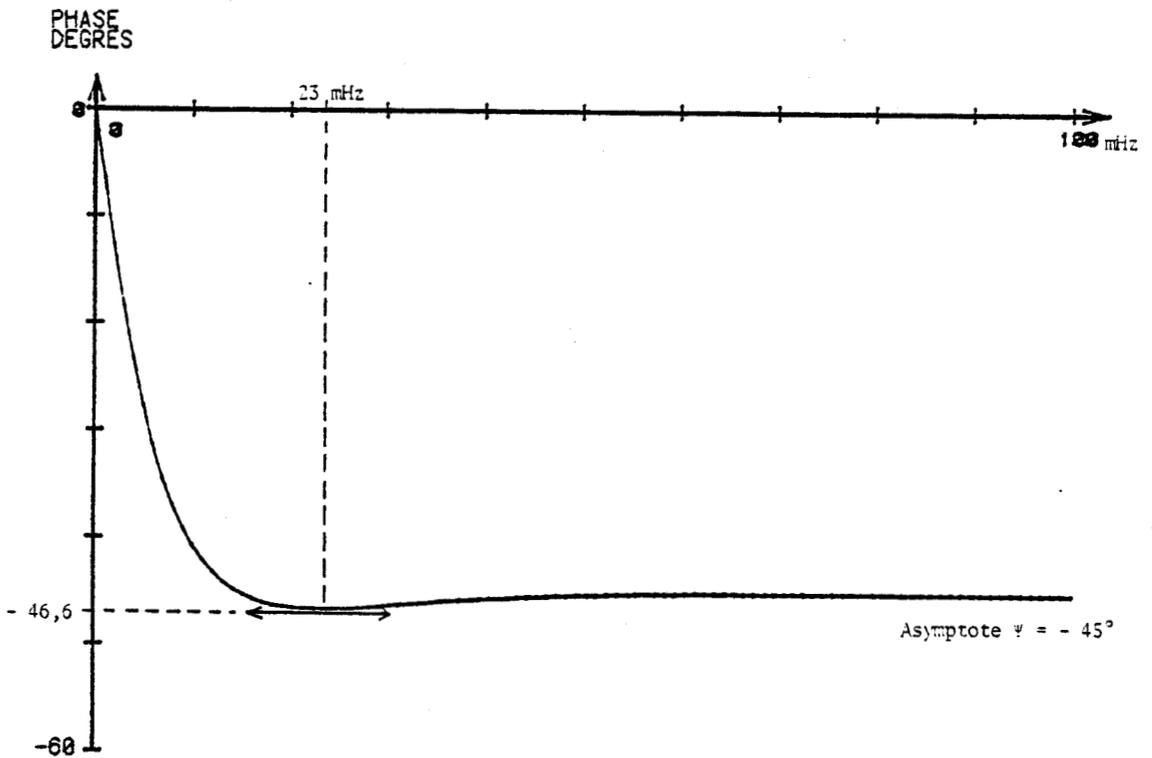


figure (II - 12) EVOLUTION DU RETARD EN PHASE DE LA TEMPERATURE
EN FONCTION DE LA FREQUENCE
FLUX IMPOSE D'AMPLITUDE 1W
PLEXIGLASS 2.5MM

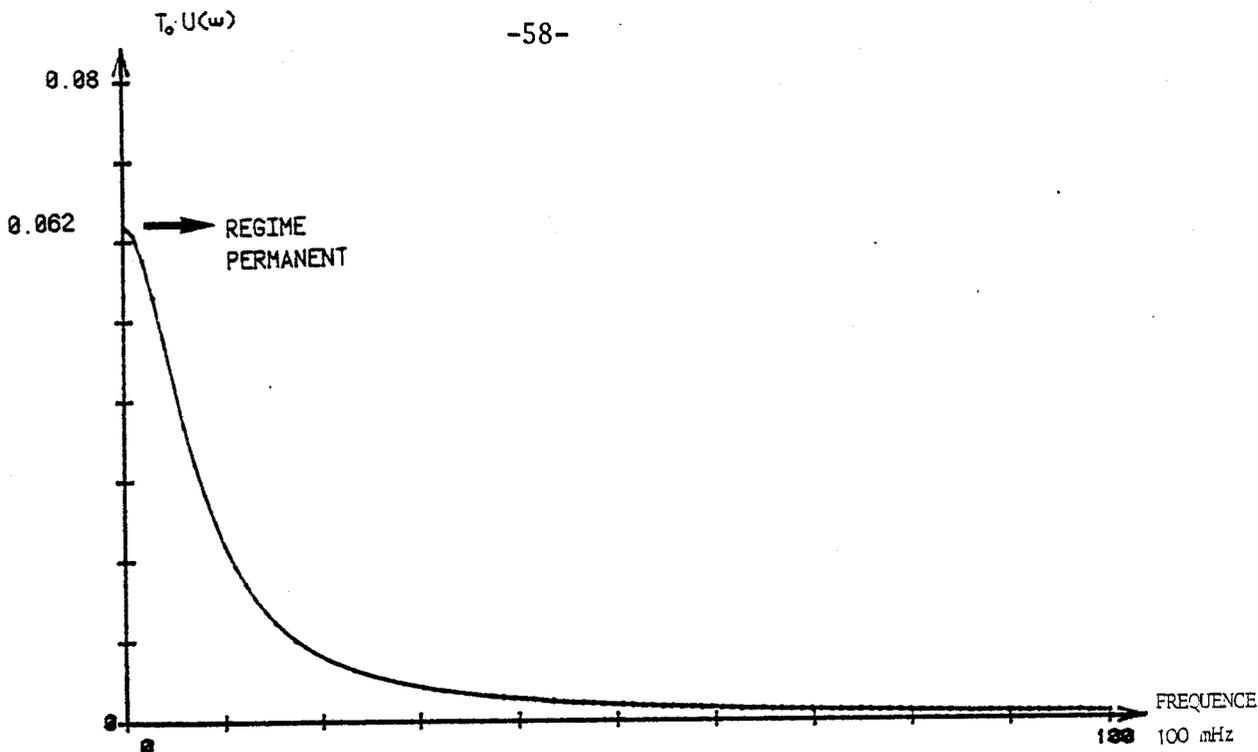


figure (II - 13) EVOLUTION DU POTENTIEL MOYEN STOCKE
EN FONCTION DE LA FREQUENCE
PLEXIGLASS 2.5MM
FLUX IMPOSE D'AMPLITUDE 1W

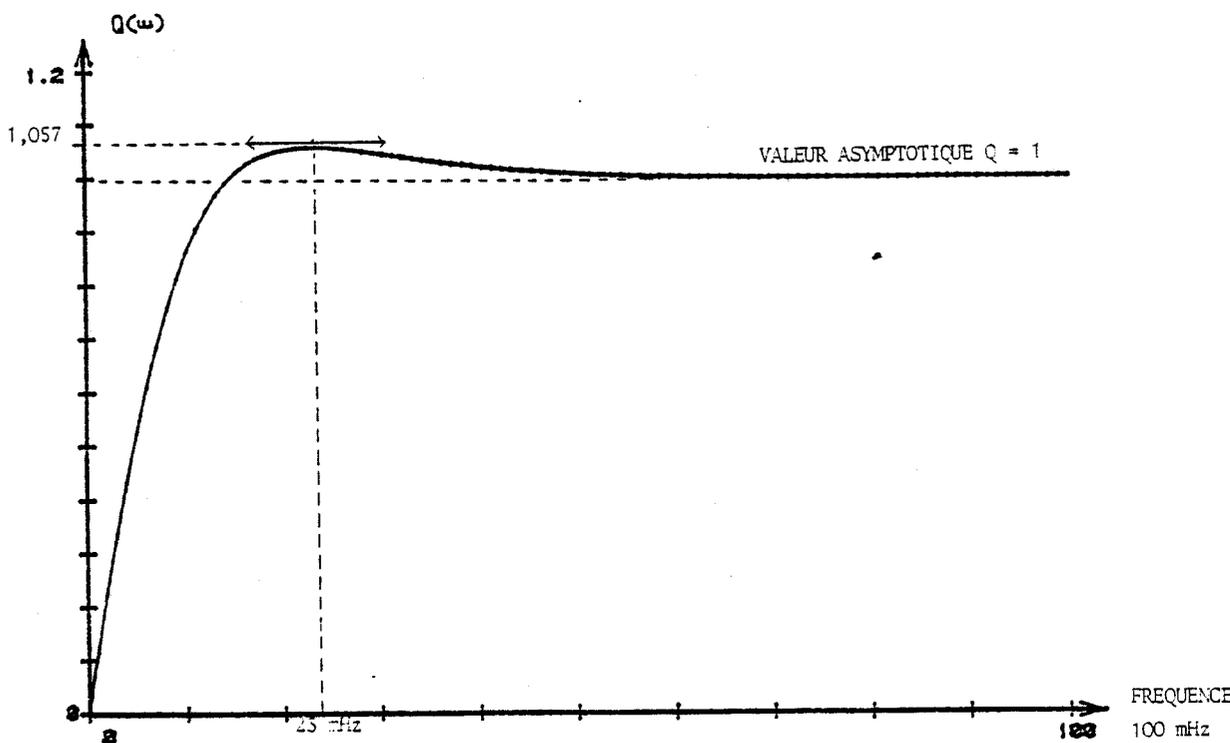


figure (II - 14) EVOLUTION DU COEFFICIENT DE QUALITE
EN FONCTION DE LA FREQUENCE
PLEXIGLASS 2.5MM

Sur les figures suivantes, à titre d'application, quelques unes des grandeurs énergétiques étudiées précédemment, ont été représentées : le système thermique est constitué d'un échantillon de plexiglass d'épaisseur 2,5 mm dont une face est disposée le long d'un puits thermique. Une oscillation de flux d'amplitude unité est imposée à l'entrée de l'échantillon pour une plage en fréquence variant du régime permanent jusqu'à 100 mHz.

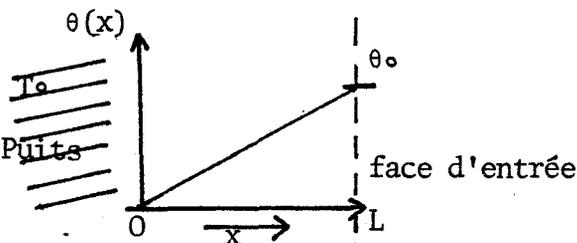
La courbe (II - 11) représente la résistance efficace normalisée : $(|Z| / R) \cos \Psi (\omega)$. En effet, la dissipation énergétique en régime variable est essentiellement fonction de cette grandeur dont la valeur en régime permanent est égale à l'unité.

Sur la figure (II - 14) nous avons représenté l'évolution du coefficient de qualité en fonction de la fréquence. Le tracé présente un maximum pour une fréquence telle que le déphasage entre les grandeurs d'entrée présente un extremum ($\Psi = - 46,6^\circ$ ou pour un matériau quelconque $G = 1,96$). Un tel régime correspond à une minimisation des pertes actives mesurées au niveau de l'accès. En conséquence, si on suppose que l'on veuille entretenir un régime oscillatoire dans un matériau, la fréquence devra être définie de telle sorte que l'angle Ψ (respectivement Q) présente un extremum ; ceci constitue un exemple simple de gestion de processus dont le contrôle peut être envisagé à l'aide d'un asservissement ([12] [25]). On remarque, pour ce régime particulier, que la résistance efficace en entrée du système prend la valeur 0,250 conformément à la notion de puissance disponible en électricité. ([35]).

L'évolution du potentiel thermique moyen est représenté figure (II - 13) Le stockage d'exergie présente un maximum dans les conditions de transfert en régime permanent.

Interprétation de la valeur numérique $U(0)$.

Compte-tenu des constantes du système et de la carte de champ thermique linéaire en régime permanent, le calcul du potentiel thermique conduit à :



$$\theta = k x \quad k = R \phi / L$$

$$\theta_0 = R \phi$$

En posant v densité linéique du potentiel

$$v(x) = \frac{1}{2} g \theta^2(x) / T_0$$

$$T_0 \cdot U = \frac{g}{2} \int_0^L \theta^2(x) dx$$

carte du champ de température en régime permanent

$$T_0 \cdot U(0) = \frac{g L R^2}{6} \cdot \phi^2 \quad \text{avec } g = b/\sqrt{a} \text{ et } \phi \text{ unité}$$

Soit pour le plexiglass : $b = 538$ et $a = 1,15 \cdot 10^{-7}$

$$R = 0,0137 \text{ avec } L = 2,5 \text{ mm}$$

$$\text{d'où } T_0 \cdot U(0) = 2 \cdot 0,062$$

Le coefficient "2" provient de la valeur limite efficace d'un régime sinusoïdal. En régime permanent, si $T_0 = 273 \text{ K}$, l'exergie stockée a pour valeur $U(0)_{273} = 4,54 \cdot 10^{-4} \text{ Joules}$

A fréquence élevée, on observe une annulation rapide du potentiel thermique (EMS) due à la diminution de la profondeur de pénétration du champ thermique.

Le potentiel thermique peut être assimilé à un stockage d'exergie conformément à la terminologie définie § IV et V. Cependant, on conçoit bien qu'en aucun cas, la totalité de cette exergie n'est récupérable en ce sens que toute extraction nécessite un transfert interne qu'on ne pourra jamais effectuer de façon réversible. Il en est d'ailleurs de même en ce qui concerne l'énergie électrostatique stockée dans une ligne capacitive.

Le concept apporte une différence essentielle par rapport à la notion de "stockage calorifique" utilisée habituellement et définie par :

$$W_Q = \int_0^L g \theta(x) dx \quad (\text{ en joules }) \quad (2 - 44)$$

g capacité linéique

En effet, si on considère une brique dont les deux faces sont respectivement chauffées et refroidies de telle sorte que la moyenne spatiale de la température reste constante T_0 , le stockage calorifique au sens de la relation (2 - 44) sera nul : le système plongé dans un calorimètre ressortira à température T_0 sans avoir échangé d'énergie avec l'extérieur.

Par contre, si les deux faces sont appliquées instantanément sur les échangeurs d'une machine thermique, un travail mécanique pourra être récupéré, résultant de la compétition entre le fonctionnement de la machine et la conduction interne dans la brique. Hormis ce dernier phénomène lié à la cinétique du processus, le potentiel thermique traduit l'existence d'une exergie.

C H A P I T R E I I I

DETERMINISME ET RECIPROCITE DES SYSTEMES THERMIQUES

Dans ce chapitre nous montrons que la description des processus thermiques peut être analysée à l'aide de la théorie des systèmes. D'un point de vue macroscopique, l'étude des processus à l'aide des observables θ et ϕ et des grandeurs énergétiques définies précédemment, doit être menée en considérant l'évolution des variables de façon déterministe. Lorsque l'étude thermodynamique est menée de façon microscopique, la proposition précédente perd son sens.

Le premier paragraphe de ce chapitre est consacré à la caractérisation de la réponse impulsionnelle à l'entrée d'un système. Les propriétés liées à la causalité des systèmes conduisent à envisager une relation fondamentale entre les valeurs des flux dissipatifs et réversibles dans le domaine fréquence. Ces considérations doivent leur développement du fait des contingences imposées par les modélisations. En effet, le traitement du signal envisagé ne fait intervenir que des fréquences positives et, pour des calculs rapides, l'emploi d'une FFT nous fait introduire la notion de signal analytique dans le domaine temps. Les conséquences découlant de cette analyse conduisent à considérer au-delà du concept de réponse impulsionnelle la notion de Module temporel mieux adaptée à l'observation de la relaxation énergétique d'un système dans le domaine temps.

Le deuxième paragraphe est consacré à la propriété de réciprocity des systèmes thermiques. Les propriétés de symétrie de la matrice impédance d'un système permettent d'appliquer les principes énergétiques développés dans la suite de ce travail à l'étude des systèmes multicouches.

I RELATIONS ENTRE LE FLUX DISSIPATIF ET LE FLUX REVERSIBLE

Les systèmes thermiques considérés de façon macroscopique possèdent les propriétés suivantes :

- linéarité
- invariance par translation dans le temps
- réalité
- déterminisme (causalité)

En effet, un système est causal lorsque ses réponses à l'instant t ne dépendent que des valeurs des actions aux instants antérieurs ou égaux à t . Ce principe de causalité engendre une dissymétrie entre l'entrée et la sortie par le fait (trivial) que l'entrée précède toujours la sortie.

Si $x(t)$ et $y(t)$ désignent respectivement l'entrée et la sortie d'un système, ces deux grandeurs sont liées par la relation de convolution bien connue :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) \cdot x(\tau) d\tau$$

où $h(\tau)$ représente la réponse impulsionnelle du système (noyau de la transformation)

Lorsque les propriétés précédentes sont établies, le noyau est une fonction réelle et nulle pour les instants précédant l'action.

L'étude des systèmes en général fait appel à la notion plus rigoureuse de distribution et on montre que les noyaux des systèmes causaux [35] [2] [30] possèdent les propriétés suivantes* :

- définition sur un support $[0, +\infty[$ noté \mathcal{D}_+
- expression définie par une fonction pour $]0, +\infty[$ augmentée d'une distribution origine composée d'une somme de mesures de Dirac et de ses dérivées ($R\delta + L\delta'$)

A cet égard, les synthèses thermiques présentent une simplification due au fait que, en l'absence de caractère selfique, la réponse impulsionnelle ne contient pas de termes en δ' .

D'autre part, le caractère distribué de la capacité du système annule le coefficient associé à la mesure de Dirac dans l'étude du noyau d'impédance.

Pour des sollicitations à flux imposé, les flux dissipatifs et réversibles sont essentiellement définis par les valeurs respectives des parties réelles et imaginaires de l'impédance thermique.

En régime variable, on a :

$$\theta(\omega) = Z(\omega) \cdot \phi(\omega) \quad (3-1)$$

D'une façon générale, $Z(\omega)$ constitue une fonction de réponse du système quelle que soit sa configuration et l'étude peut aussi être effectuée dans le domaine temps. (théorème de Plancherel)

$$\theta(t) = z(t) * \phi(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \theta(\omega) = Z(\omega) \cdot \phi(\omega)$$

La variation de température observée à l'entrée constitue la réponse du système consécutive à l'action $\phi(t)$. Dans le cas d'un signal impulsionnel, on mesure la réponse impulsionnelle du système. Le caractère déterministe de cette réponse étudiée dans le domaine temps conduit à considérer des propriétés générales exprimées par les relations de Kramers-Kronig. ([27] [33])

Les propriétés de parité des fonctions dans un domaine et leurs implications dans le domaine dual sont largement exploitées dans la suite de ce travail. Le paragraphe suivant résume l'essentiel de ces propriétés.

A - Causalité et signaux analytiques

Une fonction quelconque de la variable x est dissociable en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

$$f(x) = f_o(x) + f_e(x)$$

$$f_o(x) = (f(x) + f(-x)) / 2$$

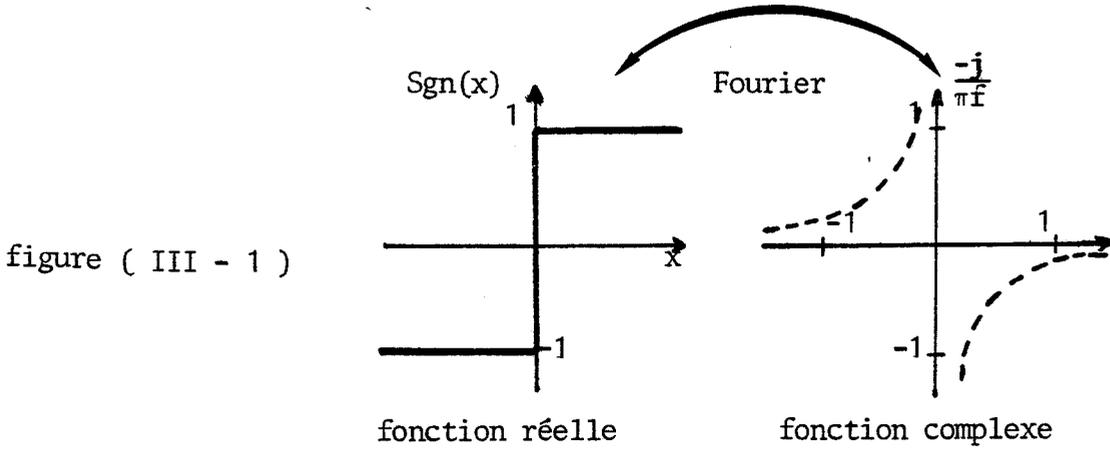
$$f_e(x) = (f(x) - f(-x)) / 2$$

$$f_o(-x) = f_o(x) : \text{imparité notée (o)}$$

$$f_e(-x) = - f_e(x) : \text{parité notée (e)}$$

Dans le cas particulier d'un signal causal et réel, les parties paires et impaires sont reliées par la relation :

$f_o(x) = \text{Sgn}(x) \cdot f_e(x)$ où $\text{Sgn}(x)$ est la "fonction" définie par la figure (III - 1).



$$x > 0 \begin{cases} f_e(x) = f_e(-x) = f(x)/2 \\ f_o(x) = -f_o(-x) = f(x)/2 \end{cases} \quad x < 0 \quad f_e(x) = -f_o(x) \text{ et } f(x) = 0$$

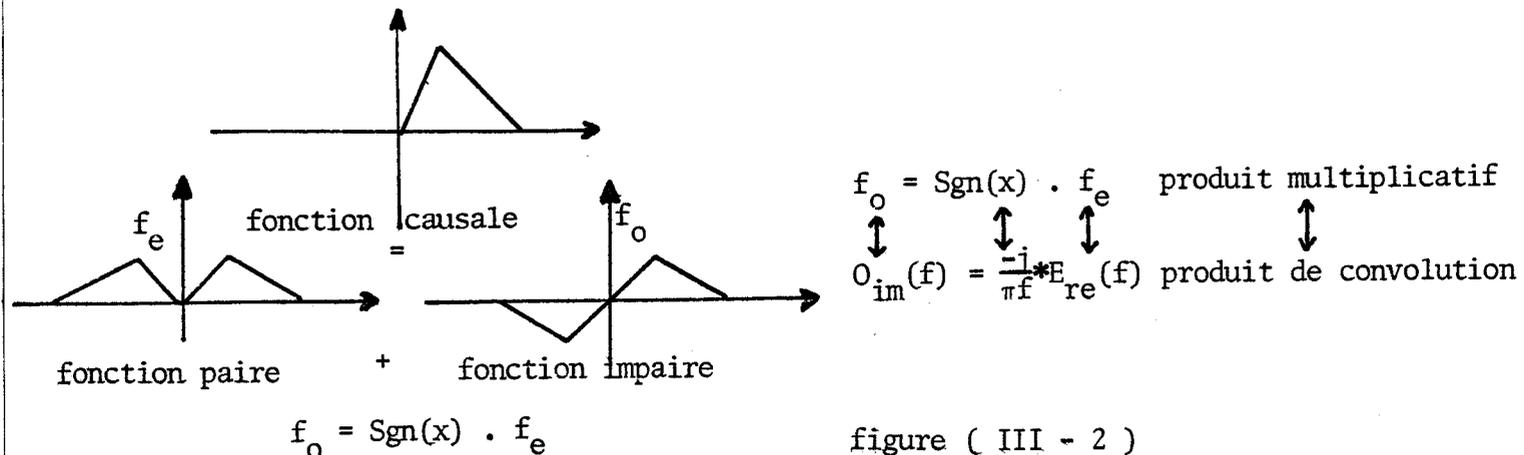
$$f(x) = f_e + f_o \quad \text{Fourier}$$

$$F(f) = E(f) + j O(f)$$

$E(f)$ la partie réelle du spectre est paire

$O(f)$ la partie imaginaire du spectre est impaire

La représentation spectrale est caractérisée par une symétrie hermitique et la partie réelle du spectre est totalement liée à la partie imaginaire.



Les propriétés associées à la fonction Sgn mènent à définir une relation de transformation dite de Hilbert.

La transformation de Hilbert d'une fonction $f(x)$, calculée au point x , est définie par l'intégrale de convolution de $f(x)$ par la fonction $(1/\pi x)$.

$$\text{Soit : } f(x) \xrightarrow{\mathcal{H}} f(x) * (1/\pi x) = \text{V.P.} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{x-y} dy \quad (3 - 2)$$

V.P désigne la valeur propre de Cauchy c'est-à-dire la partie non divergente de l'intégrale.

La partie imaginaire du spectre est donc liée à sa partie réelle soit :

$$O(f) = -j \cdot \mathcal{H}(E(f))$$

$$F(f) = E(f) - j \mathcal{H}(E(f))$$

$O(f)$ est appelée partie analytique associée au spectre et est liée à la partie réelle par la transformation de Hilbert.

La transformation de Fourier d'une fonction possède non seulement des fréquences positives mais aussi négatives. De façon pratique, une mesure physique n'utilise que des fréquences positives (analyseurs de spectres, FFT) et ce faisant associe au signal réel physique $x(t)$ une partie complémentaire imaginaire pure appelée signal analytique associé.

Soit $X(f)$ la transformée de Fourier au point f de la fonction $x(t)$. On est amené à construire le signal complexe $z(t)$ associé à $x(t)$ tel que la fonction $Z(f) = \mathcal{F}_f(z(t))$ soit identiquement nulle pour $f < 0$ et égale à $2X(f)$ pour $f > 0$. Ceci correspond à la causalité fréquentielle et conduit à la transformation de Hilbert appliquée de façon réciproque à la façon précédente.

$$z(t) \in \mathbb{C} \text{ et } \text{Re}\{z(t)\} = x(t)$$

$$\text{d'où } z(t) = \text{Re}\{z(t)\} + j \text{Im}\{z(t)\} \xrightarrow{\mathcal{F}} Z(f) = \text{Re}\{Z(f)\} + j \text{Im}\{Z(f)\}$$

$$Z(f) = \begin{cases} 2X(f) & \text{si } f > 0 \\ 0 & \text{si } f < 0 \end{cases}$$

Les considérations précédentes entraînent:

$$\begin{aligned} Z_x(f) = X(f) + X(f) \cdot \text{Sgn}(f) & \xrightarrow{\mathcal{F}} z(t) = \mathcal{F}(Z(f)) \\ z(t) &= \mathcal{F}(X(f)) + \mathcal{F}(X(f) \cdot \text{Sgn}(f)) \\ z(t) &= x(t) + x(t) * (-j/\pi t) \\ z(t) &= x(t) - j [x(t) * 1/\pi t] \end{aligned}$$

par conséquent de façon symétrique au cas précédent, le signal complexe engendré par la prise en compte des seules fréquences positives est défini par :

$$z(t) = x(t) - j \mathcal{H}(x(t))$$

Les parties analytiques associées constituent donc des informations redondantes quant à l'analyse du signal. Il ressort de ceci que, dans l'étude des systèmes thermiques, le noyau causal obtenu par mesure de l'élévation de température consécutive à une impulsion de flux, constitue dans le domaine fréquence l'impédance d'entrée du système. Les parties réelles et imaginaires de l'impédance sont reliées par la transformation de Hilbert et les grandeurs physiques qui en découlent, flux dissipatif et réversible sont soumis à la même relation.

La caractérisation des grandeurs énergétiques associées au régime impulsionnel (respectivement pour tout régime monofréquentiel) se trouve totalement réalisée lorsque l'on connaît les valeurs de l'impédance pour tout le spectre en fréquence.

B - Application au calcul des relations entre flux dissipatif et réversible en régime impulsionnel

Soit une paroi de longueur finie dont la température initiale uniforme est prise comme référence (T_0) et dont l'une des faces est soumise à une densité de flux impulsionnelle, l'autre face étant en contact parfait avec un puits thermique à la température de référence. Figure (III - 3)

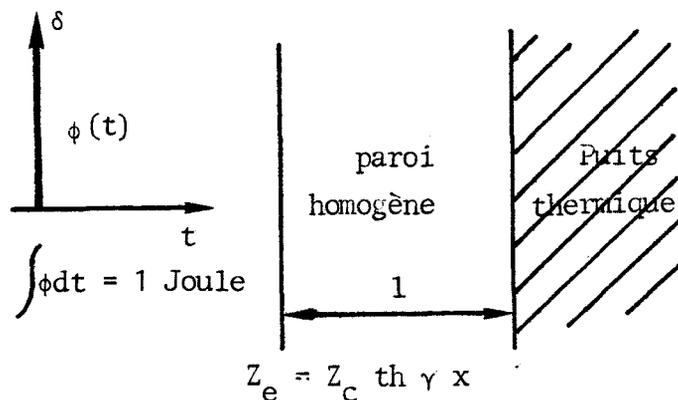


figure (III - 3)

Pour une impulsion de contenu énergétique un Joule et par définition du régime impulsionnel, l'évolution de la température sur la face d'entrée, consécutive à la sollicitation, sera décrite par l'ensemble du spectre de l'impédance d'entrée du système.

Soit $z(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Z(f)$ $z(t)$ est le noyau d'impédance du système

$$\theta(f) = Z(f) \cdot \phi(f) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \theta(t) = z(t) * \phi(t) = z(t) * \delta = z(t)$$

Le flux d'interaction complexe est défini par :

$$\tilde{S}_{a,r} = \theta(f) \cdot \phi^*(f) = \phi(f) \phi^*(f) \cdot Z(f)$$

$$\tilde{S}_{a,r} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \theta(t) * \phi(t) = z(t) * \delta * \delta = z(t)$$

hermitique causale

En principe, la mesure de l'impédance peut se faire indifféremment en régime impulsionnel ou par l'analyse harmonique. Cependant, de façon pratique, si l'analyse en fréquence nécessite une instrumentation électronique d'asservissement et des temps de mesure prohibitifs, la mesure de la température superficielle peut poser des problèmes lorsque l'on étudie une paroi fine devant laquelle l'impédance du capteur n'est plus négligeable (particulièrement en haute fréquence).

C'est en général la finalité des mesures qui détermine le choix entre l'analyse dans le domaine Temps ou Fréquence. Cependant, d'un point de vue théorique, un contenu informatif optimal est nécessaire, et l'ensemble des informations doit être connu dans les deux domaines.

La figure (III - 4) représente les valeurs normalisées de l'impédance associée au système en fonction de la fréquence. La fonction $Z_e(f)$ possède la symétrie hermitique et définit le flux complexe d'interaction en régime impulsionnel dans le domaine Fréquence.

Dans le domaine Temps, la même information est contenue dans les valeurs de la réponse impulsionnelle et, à priori hormis l'expérience, deux possibilités de détermination du noyau d'impédance semblent possibles.

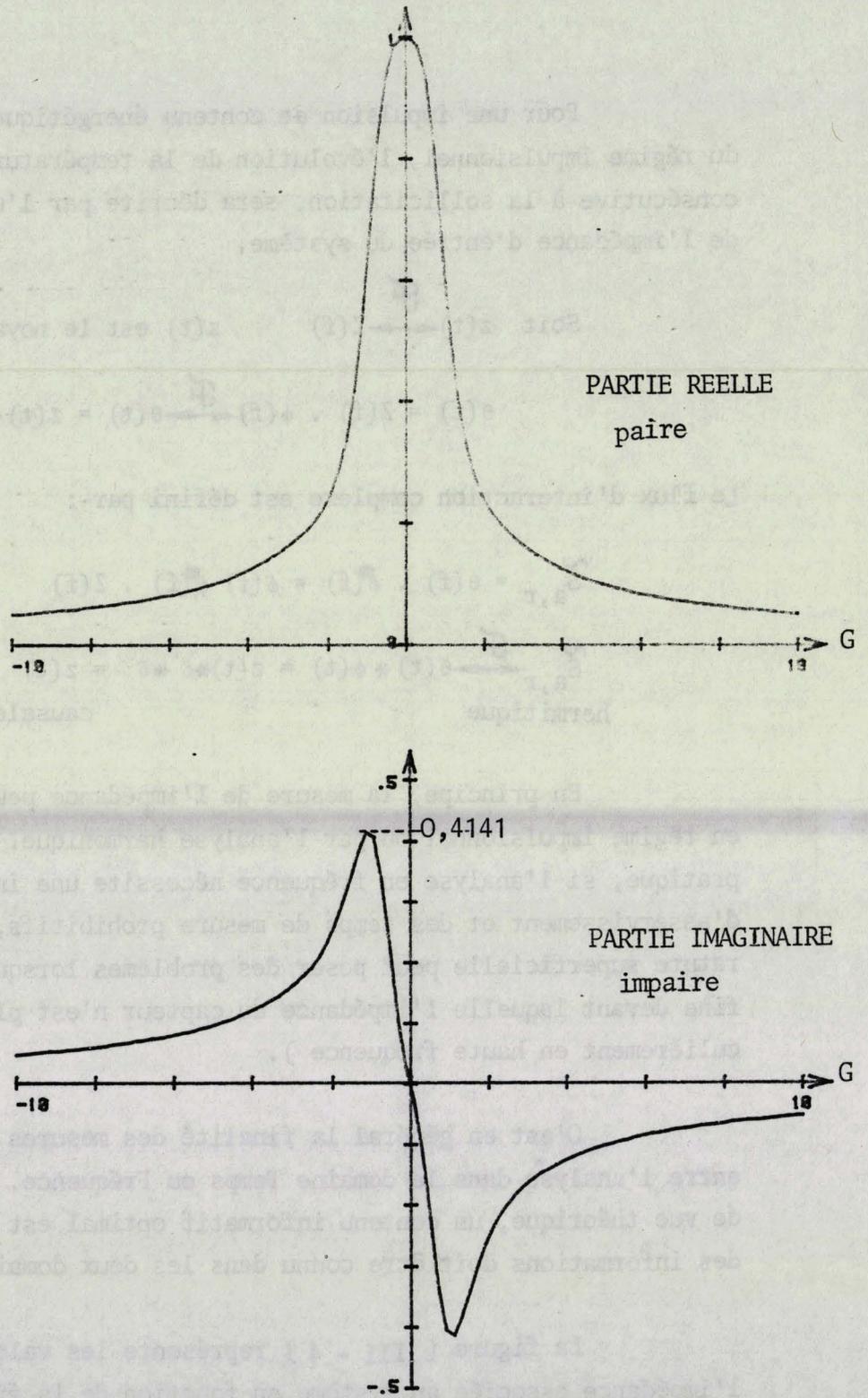


figure (III - 4) IMPEDANCE D'ENTREE NORMALISEE D'UN MATERIAU MONOCOUCHE
DISPOSE SUR UN PUITTS THERMIQUE

évolution en fonction de : $G = \sqrt{R C \pi f}$

L'impédance d'entrée possède une symétrie hermitique.

- Calcul par FFT inverse

Bien que plus aisément généralisable à l'étude de configurations compliquées, le calcul de FFT inverse ne peut apporter qu'une information approximative résultant d'un compromis entre deux situations respectivement caractérisées par :

Soit la prise en compte d'une plage importante en fréquence. Sur les N points d'échantillonnage utilisés, l'influence de la très lente convergence (figure III-8-a) vers zéro en haute fréquence, se traduit par un défaut relatif d'information quant aux premiers points. En conséquence, les valeurs de z(t) sont entachées d'une erreur dont l'importance augmente en raison du temps.

Soit une plage faible en fréquence et l'utilisation d'une fenêtre Gaussienne d'observation . Le défaut d'information en haute fréquence se traduit par d'importantes erreurs à l'origine.

- Calcul analytique

Le calcul à l'aide de la méthode des résidus ou l'utilisation d'une table ([8]) permettent d'obtenir le résultat suivant :

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \operatorname{th} \alpha \sqrt{p} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \exp \left[-t \cdot \left(\frac{\pi}{2\alpha} (2n - 1) \right)^2 \right] \right\}$$

En posant $\alpha = \frac{1}{\sqrt{a}}$, compte tenu de l'expression de Z(j ω), la réponse impulsionnelle en température s'écrit :

$$z(t) = \frac{2\sqrt{a}}{1/b} \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[-a t \left(\frac{\pi}{21} (2n - 1) \right)^2 \right] \quad (3 - 3)$$

Si R et C désignent respectivement la résistance et la capacité thermique du matériau, la relation (1 - 23) conduit à :

$$R C = \frac{1^2}{a} \quad \text{et} \quad \frac{R}{C} = \frac{1}{b^2} \quad \text{soit} \quad \frac{\sqrt{a}}{1/b} = \frac{1}{C} \quad (K/J)$$

z(t) est ici exprimé en K/J, sa transformée de Fourier (Z(f)) est en K/W. Il est logique de constater que l'évolution en température est une fonction inverse de la capacité et que la vitesse de décroissance est fonction de l'effusivité.

$$z(t) = \frac{2}{C} \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[-t \left(\frac{\pi b}{2C} (2n - 1) \right)^2 \right] \quad (3 - 4)$$

Une échelle des temps étant définie en fonction de la nature du matériau, une valeur de $n = 100$ est suffisante pour une convergence stable du développement calculé aux faibles valeurs du temps.

D'autre part, le calcul des premiers points peut être précisé en prenant une échelle dilatée.

L'évolution de la température sur la face d'entrée est représentée sur les figures (III - 5 - 1 , 2) pour deux systèmes respectivement constitués par :

- 2,5 mm Plexiglass
- 2,5 mm Caoutchouc

Les courbes de la figure (III - 5) sont rapportées à un temps d'analyse de 100 secondes au-delà duquel le système semble revenu à son état initial. A priori, il n'existe pas de critère absolu pour définir un temps caractérisant la relaxation du système et seule la vitesse de convergence semble donner une idée de la dynamique de l' "oubli" de la sollicitation.

L'utilisation d'une échelle logarithmique du temps et de la température conduit aux courbes de la figure (III - 6). L'échelle en abscisse permet alors de prendre en compte six décades de temps telles que :

$$10^{-3} < t < 1000s$$

La validité du développement (3 - 3) est vérifiée par application d'un calcul de FFT. Le temps d'analyse étant porté à 1024 secondes afin d'augmenter la résolution en fréquence, le calcul est effectué successivement en 128 puis 1024 points. Le deuxième cas élargit suffisamment la fenêtre fréquentielle d'observation pour minimiser les altérations des valeurs contenues en fin de fichier dues à la symétrie hermitique. (figure III - 8)

La résistance thermique du matériau est en particulier définie par la surface sous la courbe associée à $z(t)$, point origine calculé par la FFT. Dans le cas du plexiglass:

$$\lim_{\Gamma \rightarrow \infty} \int_0^{\Gamma} z(t) dt = R_{fft} = 0,0138 \text{ K/W}$$

valeur exacte à 1% près

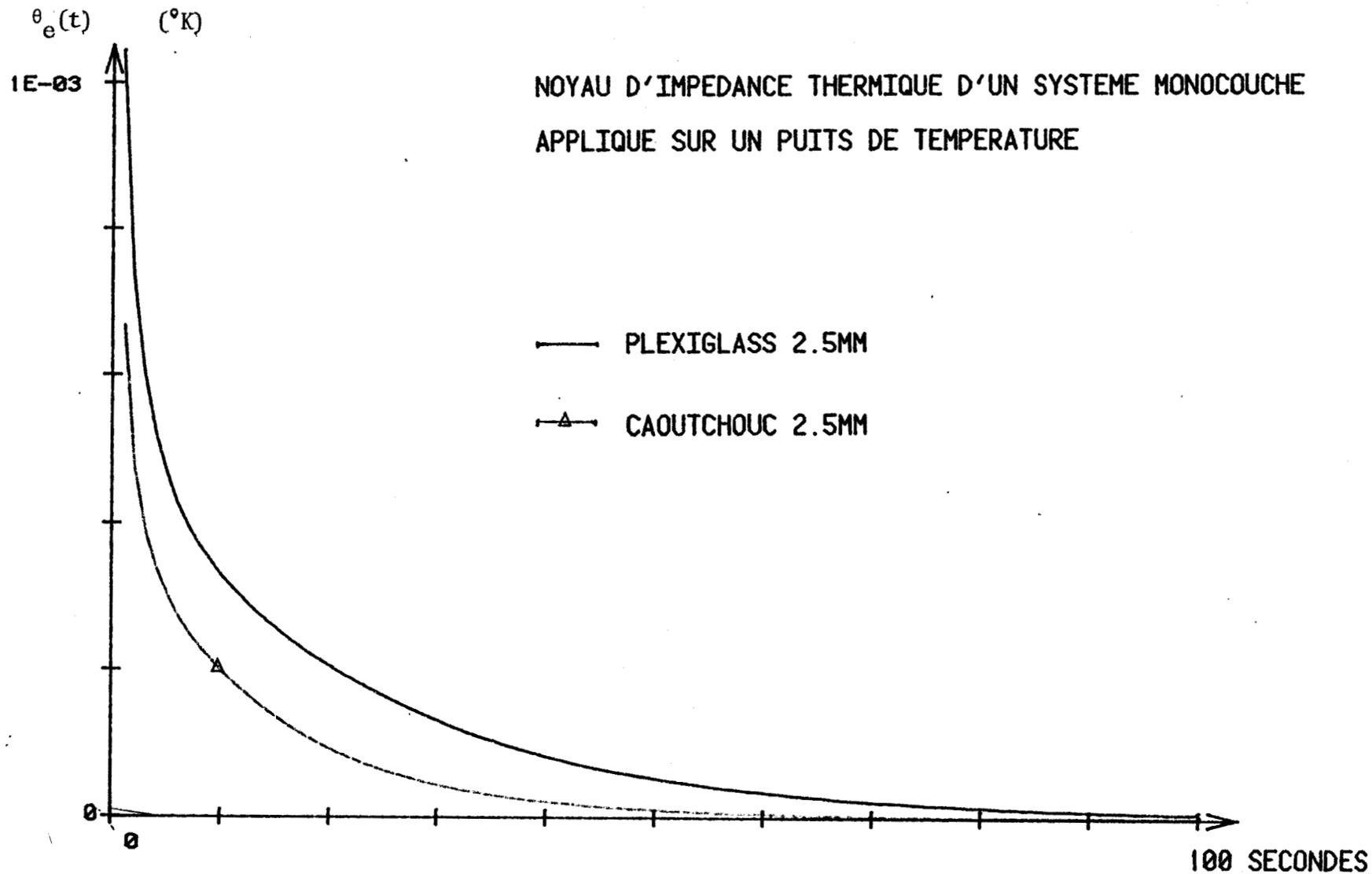


figure (III - 5) REPONSE IMPULSIONNELLE EN TEMPERATURE
 SIGNAL DE DIRAC EN FLUX PORTEUR DE 1 JOULE

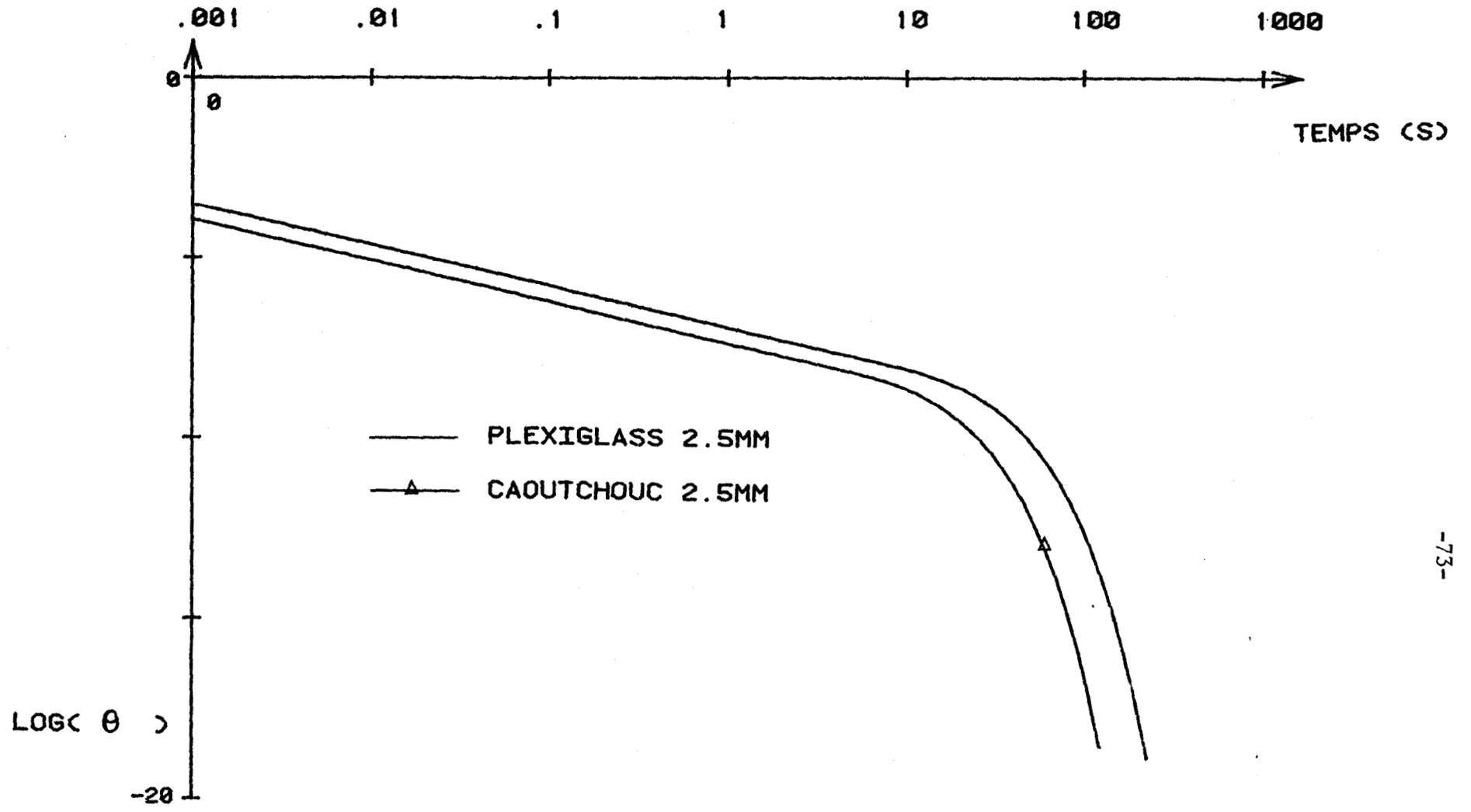
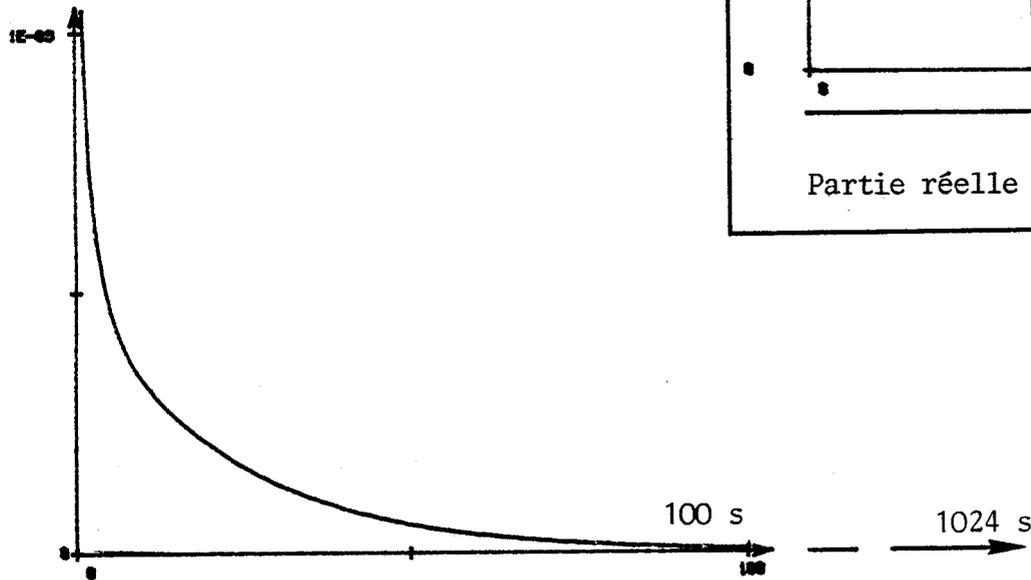


figure (III - 6)

REPONSE IMPULSIONNELLE EN TEMPERATURE
 SIGNAL DE DIRAC EN FLUX PORTEUR DE 1 JOULE
 ECHELLES LOGARITHMIQUES



noyau d'impédance $z(t)$ causal et réel

impulsion de 1 Joule

plexiglass 2,5 mm

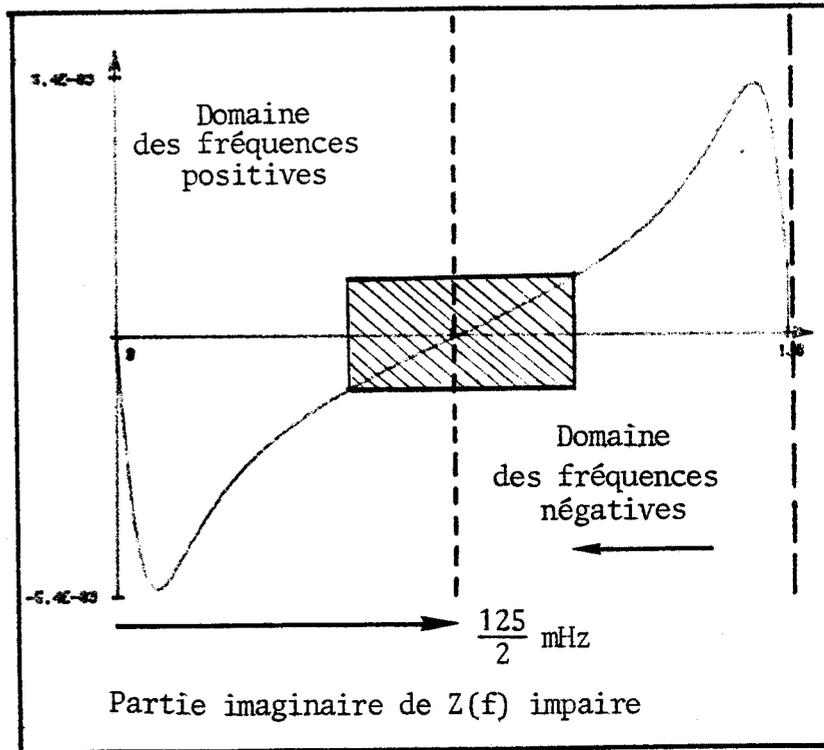
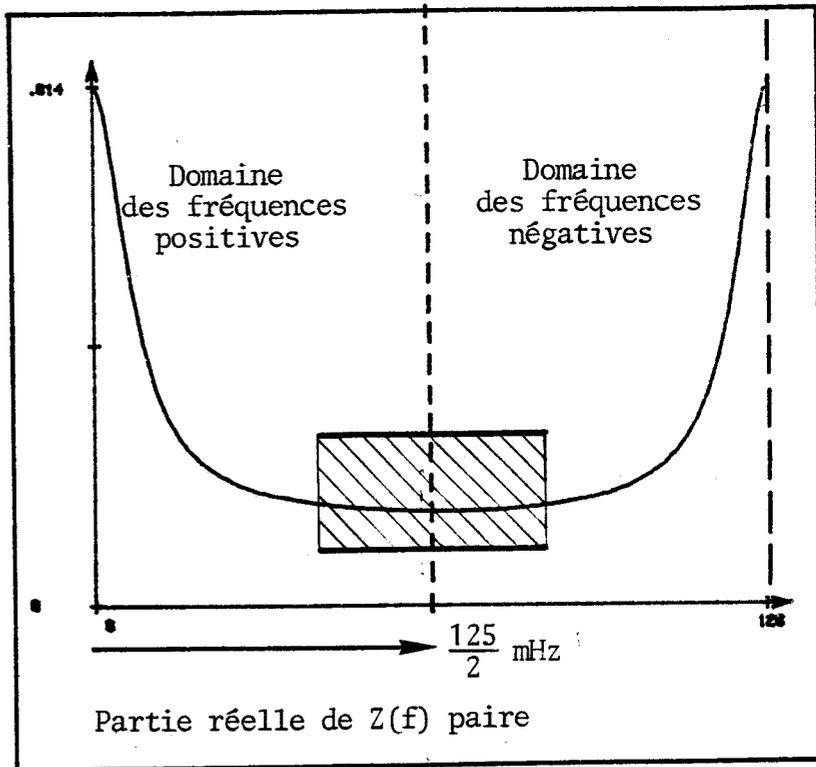


figure (III - 7): APPLICATION DE LA FFT AU CALCUL DES VALEURS DE L'IMPEDANCE $Z(f)$
A PARTIR DES VALEURS DU NOYAU CAUSAL $z(t)$

Le calcul est effectué en 128 points portant sur une fenêtre temporelle de 1024 secondes.

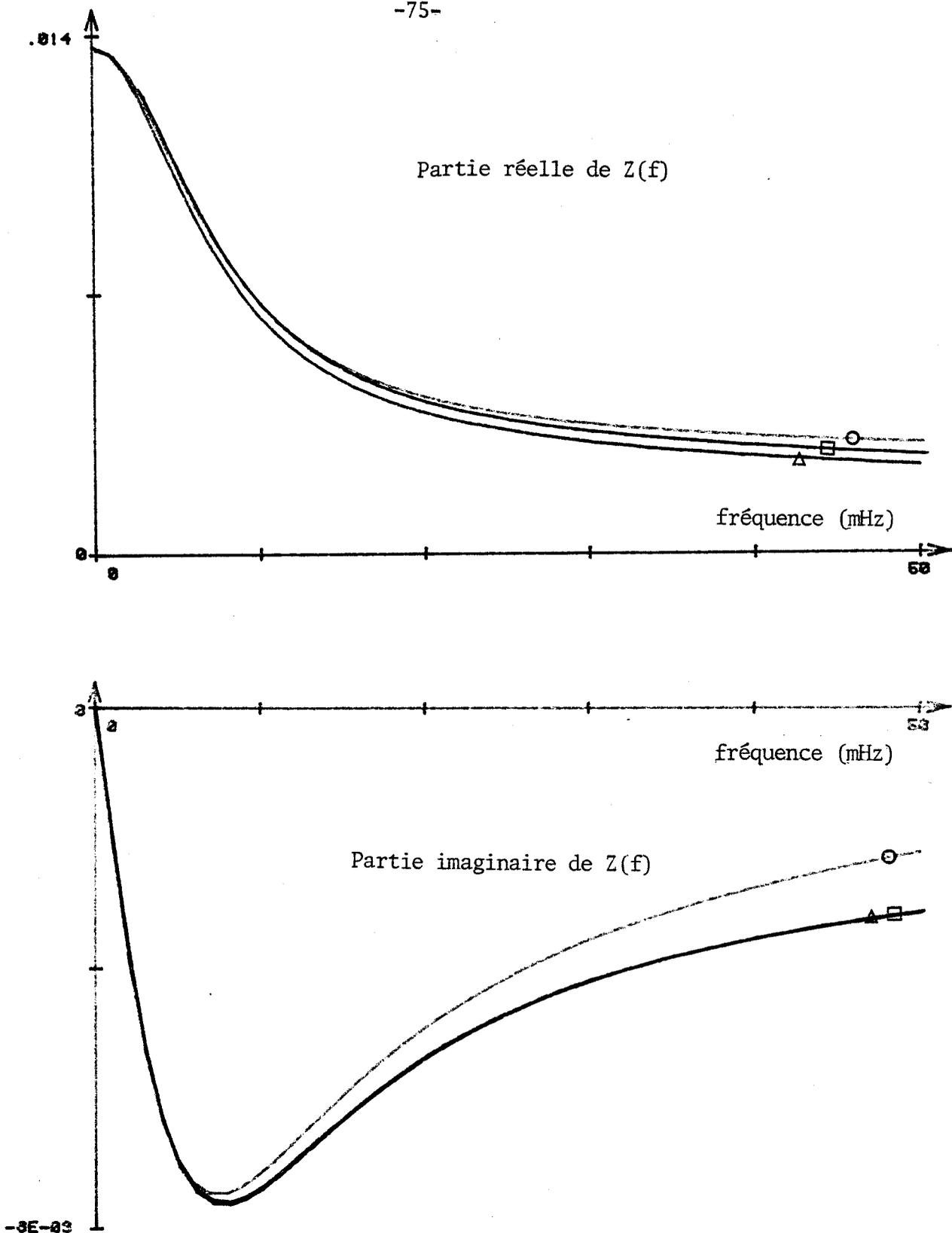


figure (III-8) : EVOLUTION DE L'IMPEDANCE EN FONCTION DE LA FREQUENCE
CALCULEE A PARTIR DE LA REPOSE IMPULSIONNELLE PAR FFT

Plexiglass 2,5 mm

- △— valeurs exactes (relation 2 - 22)
 - FFT calculée en 1024 points
 - FFT calculée en 256 points
- } fenêtre temporelle
de 1024 secondes

Les relations (3 - 3) et (3 - 4) conduisent à la réponse indicielle après intégration. Ainsi, pour une sollicitation en flux de 1 Watt, la température de la face d'entrée a pour expression :

$$\theta_e(t) = \left(\frac{2}{\pi b}\right)^2 C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \left[1 - \exp\left[-t\left(\frac{\pi}{2} \frac{b}{c} (2n-1)\right)^2\right]\right] \quad (3 - 5)$$

Pour des valeurs du temps inférieures à RC/4, cette relation peut être simplifiée. En effet, l'évolution de la température n'est fonction que de l'effusivité.

$$\text{soit } Z(f) = \frac{1}{b\sqrt{j\omega}} \operatorname{th}\sqrt{j\omega RC}$$

$$\lim_{f \rightarrow \infty} Z(f) = \frac{1}{b\sqrt{j\omega}} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} z(t) = \frac{1}{b\sqrt{\pi t}}$$

$$\text{d'où } \lim_{t \rightarrow 0} \theta_e(t) = \frac{2}{b} \sqrt{t/\pi} \quad (3 - 6)$$

Cette relation constitue une fonction de référence caractérisant le début de la réponse indicielle de tout système thermique.

En effet, seule l'effusivité du matériau situé sur l'accès du système conditionne le début des échanges énergétiques.

Les figures (9 & 10) se rapportent aux mêmes systèmes thermiques que précédemment. L'utilisation d'une échelle logarithmique du temps permet de comparer les évolutions de la fonction de référence et de la réponse indicielle dans le cas du plexiglass et du caoutchouc.

$$\text{On vérifie que : } \text{pour } t < RC/4 \quad \theta_e(t) = \frac{2}{b} \sqrt{t/\pi}$$

$$\text{pour } t \rightarrow \infty \quad \theta_e(t) = R_{th} \phi$$

La figure (III - 10) représente l'évolution de la réponse indicielle en échelle logarithmique. L'évolution en \sqrt{t} est mise en évidence par l'égalité des pentes de chacun des tracés.

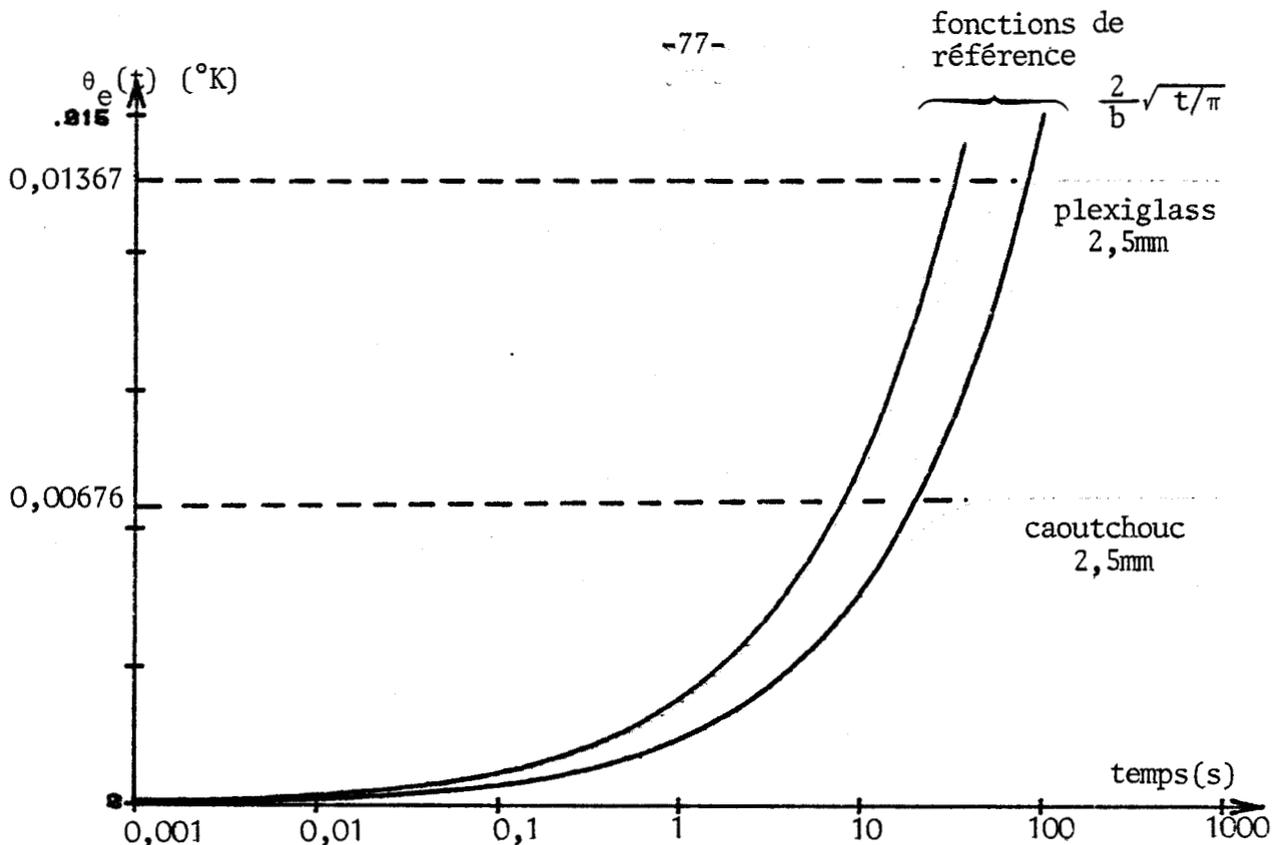


figure (III-9) : REPONSES INDICIELLES EN TEMPERATURE

ECHELLE LOGARITHMIQUE DU TEMPS

Les signaux convergent vers les résistances thermiques de chacun des échantillons.

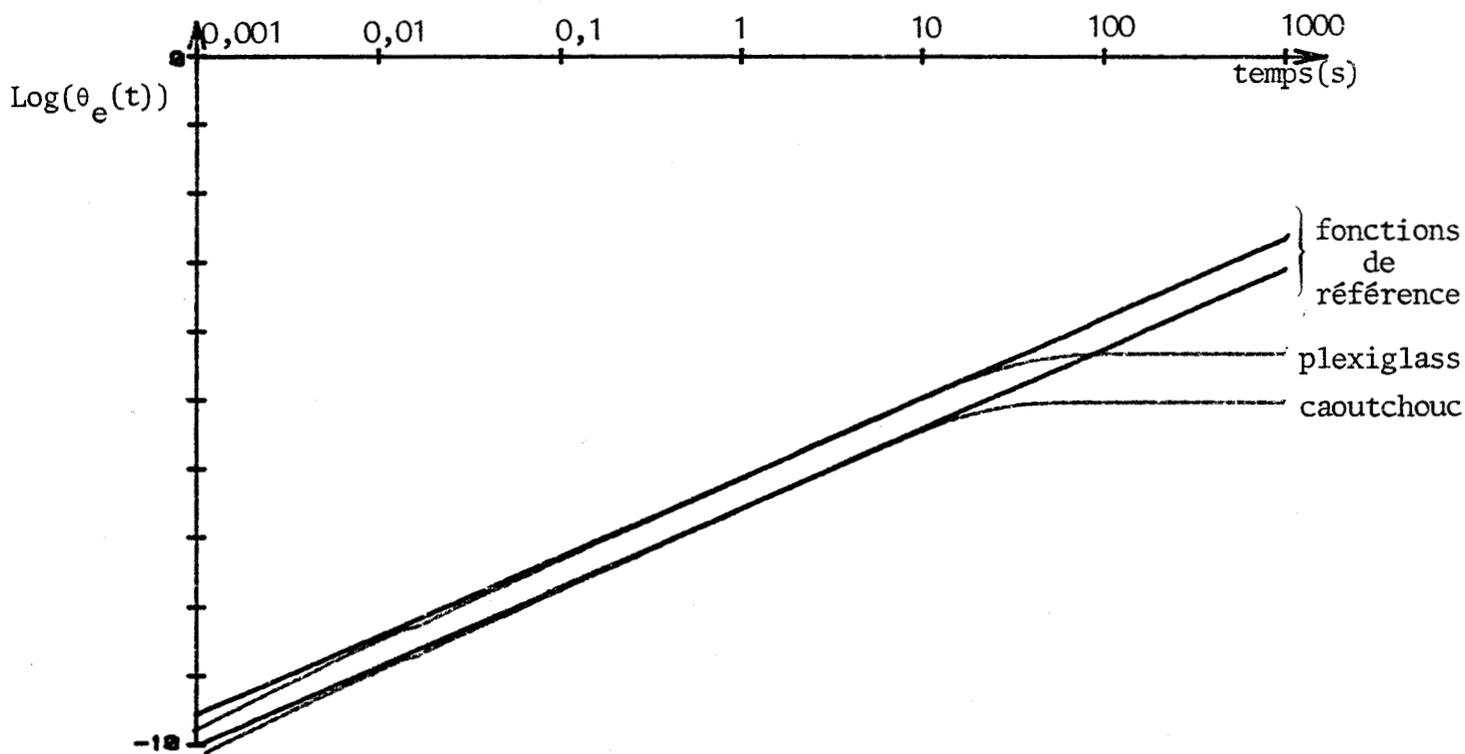


figure (III-10) : REPRESENTATION LOGARITHMIQUE DES REPONSES INDICIELLES

D'une manière générale, la mesure physique ne s'accommode que de représentations causales. Cependant, l'utilisation de la transformée de Fourier sur des signaux mesurés mène à des représentations bilatérales. La figure (III - 11) illustre les deux cas d'études symétriques où soit la représentation fréquentielle soit la représentation temporelle sont constituées de valeurs réelles et causales.

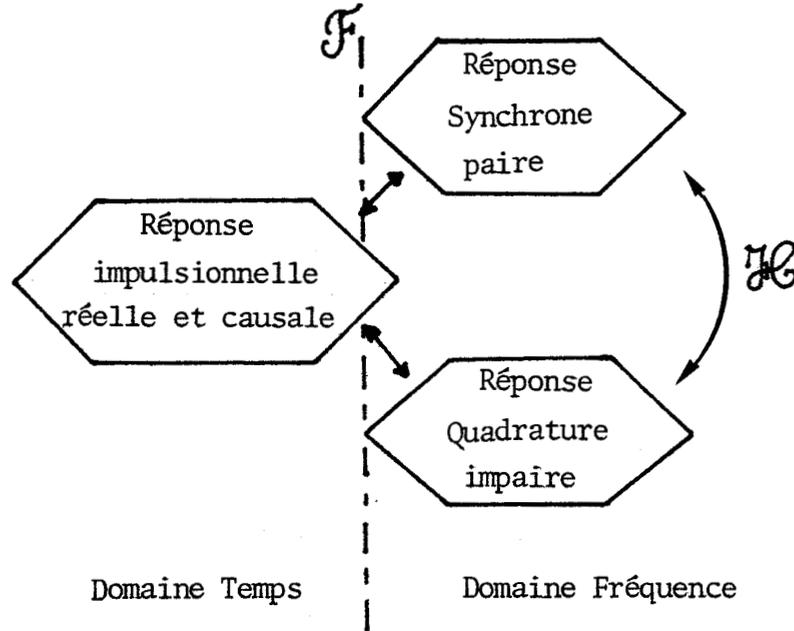


figure (III - 11 - 1) La considération d'une réponse impulsionnelle causale entraîne une représentation complexe et bilatérale dans le domaine Fréquence.

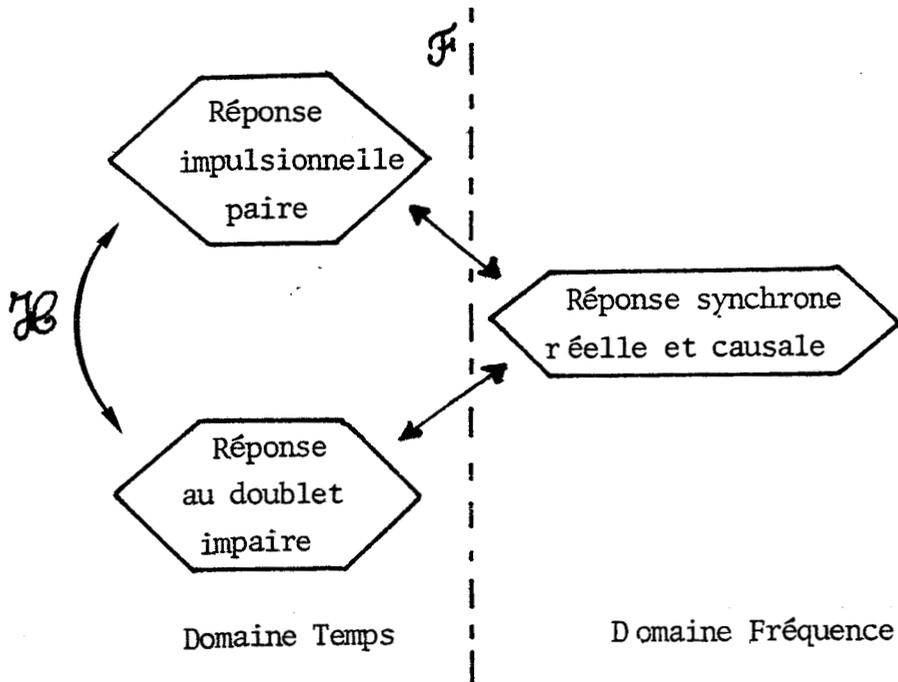


figure (III - 11 - 2) La considération d'un spectre unilatéral réel entraîne une représentation complexe bilatérale dans le domaine Temps.

A titre d'exemple, pour un système thermique simple, en se reportant à une représentation réelle et causale dans le domaine temps, la figure (III - 12) illustre la comparaison entre les valeurs exactes de la partie imaginaire de $Z(f)$ et celles obtenues par calcul numérique de la transformation de Hilbert.

En considérant les valeurs de $\text{Re}(Z(f))$ calculées pour une fenêtre fréquentielle de 100 mHz en 200 points, l'imprécision des résultats augmente en raison de la fréquence. Figure (III - 12 - 3).

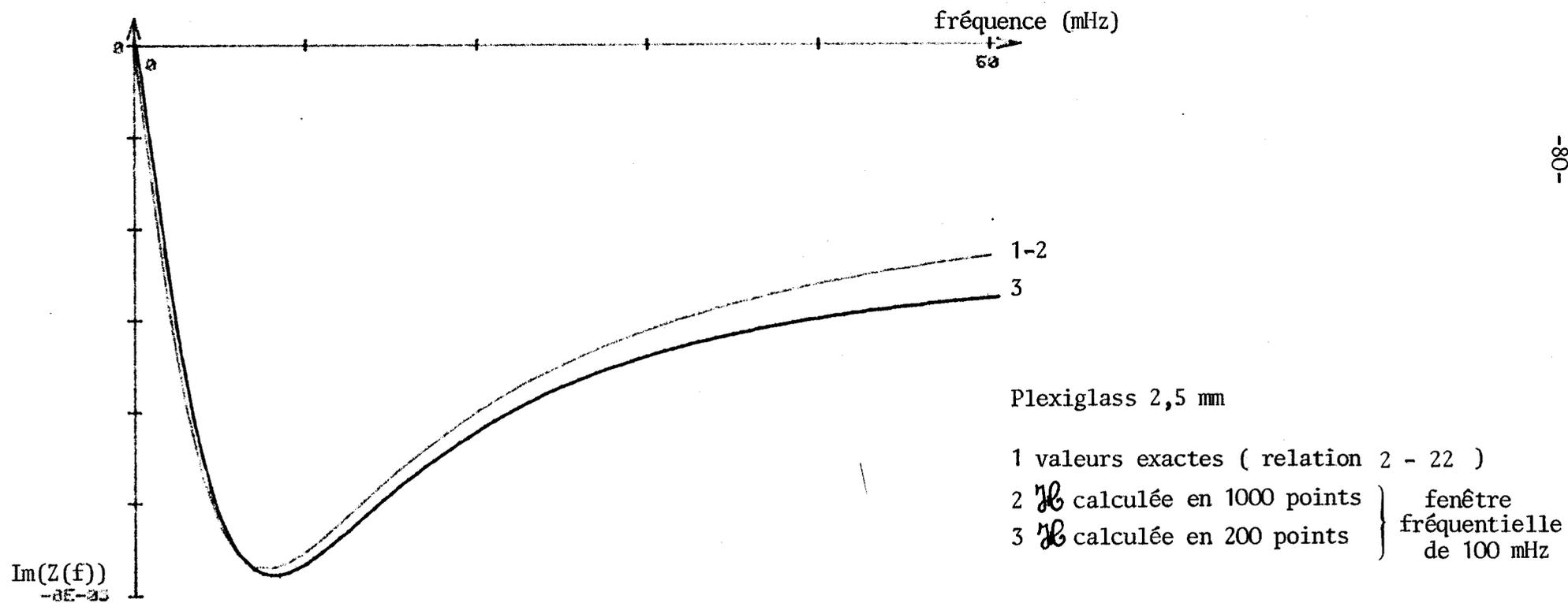
En effet, la fonction $\text{Re}(Z(f))$ ne converge que très lentement, et la troncature à 100 mHz entraîne une erreur croissante en fin de fichier. A la différence d'un calcul de FFT où une troncature de borne ($t \rightarrow \infty$) entraîne une dégradation des valeurs proches de la borne duale ($f \rightarrow 0$), la transformation de Hilbert opérant d'un domaine dans lui-même est caractérisée par une altération des valeurs proches de la troncature. Lorsque le calcul est effectué en 1000 points, sur une plage de 50 mHz, les courbes sont confondues. Figure(III-12-1,

En d'autres termes, la connaissance de la dégradation d'énergie utilisable sur l'ensemble du spectre permet la détermination du flux réversible associé à une fréquence particulière ainsi que du potentiel moyen stocké. D'autre part, quelque soit la configuration du système thermique étudié, les considérations précédentes conduisent à la remarque suivante :

Le système répond à une sollicitation quelconque de telle sorte qu'à la partie paire de la réponse, correspond le spectre associé à la dégradation composé des valeurs réelles. A la partie impaire, le quaspectre composé de valeurs imaginaires est associé à la dynamique des échanges en considérant le flux réversible, ou à la mémoire du stockage en considérant l'EMS.

Figure (III - 13).

Figure (III-12) : CALCUL DES VALEURS DE LA PARTIE IMAGINAIRE DE $Z(f)$
 PAR TRANSFORMATION DE HILBERT DE LA PARTIE REELLE



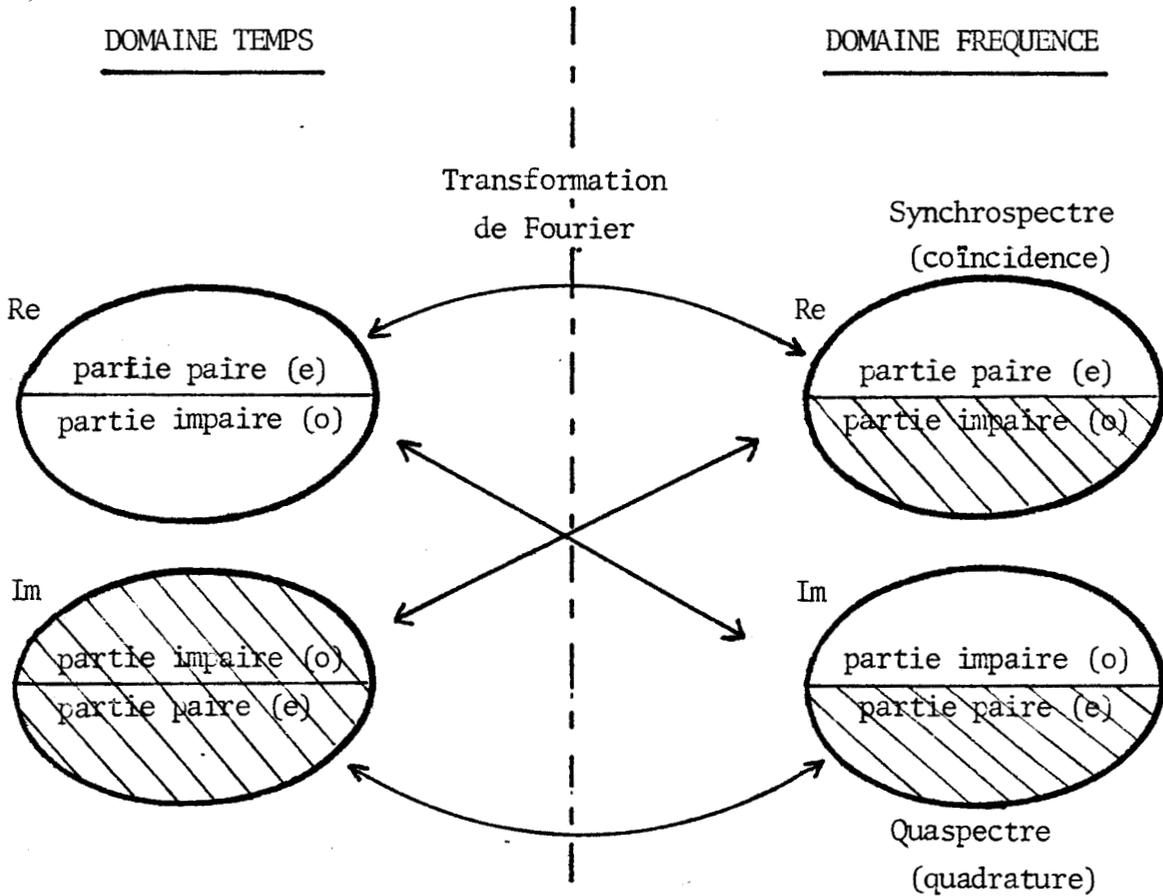


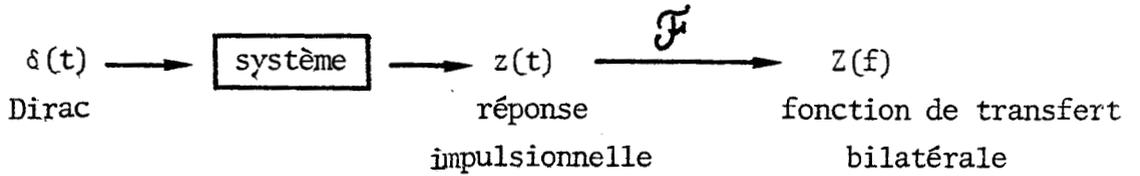
figure (III - 13)

Les descriptions respectives du signal dans les domaines Temporel et Fréquentiel possèdent des propriétés de parité telles que lors de la transformation de Fourier, un signal quelconque étant la somme d'une grandeur paire et d'une grandeur impaire, les transformées respectives associées sont réelles et imaginaires.

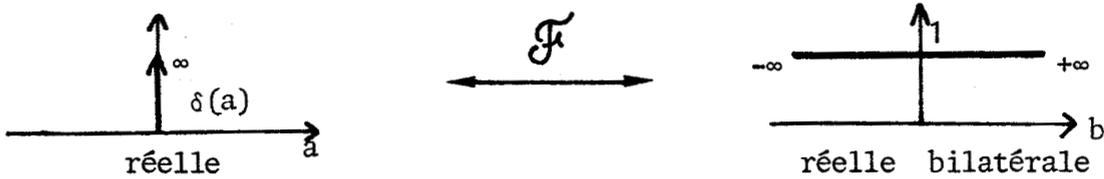
La transformation de Fourier conserve la parité. L'appartenance aux domaines réel et imaginaire est permutée pour les parties impaires du signal.

Une représentation unilatérale applicable aux deux domaines d'étude peut être envisagée si le concept de signal analytique est utilisé dans chacun des deux domaines. En effet, une réponse analytique est complexe mais causale. Le tableau (III - 14)résume l'ensemble de ces propriétés. D'autre part, la connaissance de l'une des quatre représentations partielles permet la détermination des trois autres.

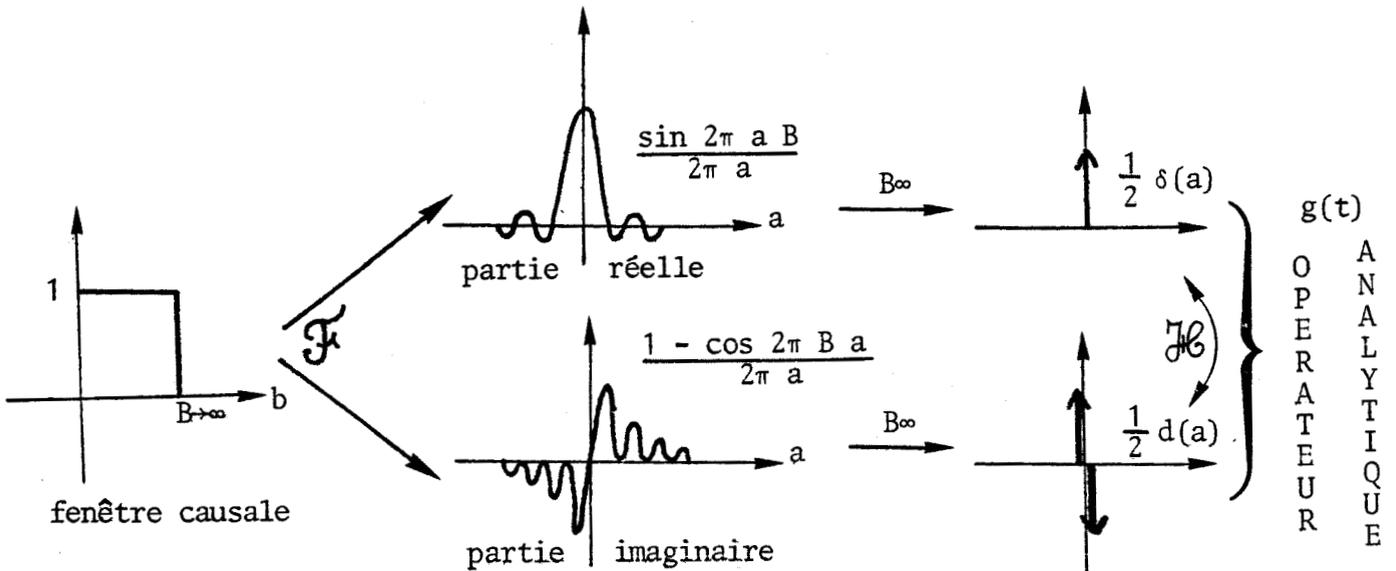
Le principe classique d'étude d'un système conduit à la détermination du lieu de Bode, représentation bilatérale dans le domaine Fréquence,



En d'autres termes, l'opérateur $\delta(t)$ appliqué au système conduit à la fonction de transfert bilatérale, compte-tenu du fait que:



Afin de déterminer l'opérateur $g(t)$ dont l'application mène à la fonction de transfert causale, on considère la transformation telle que:



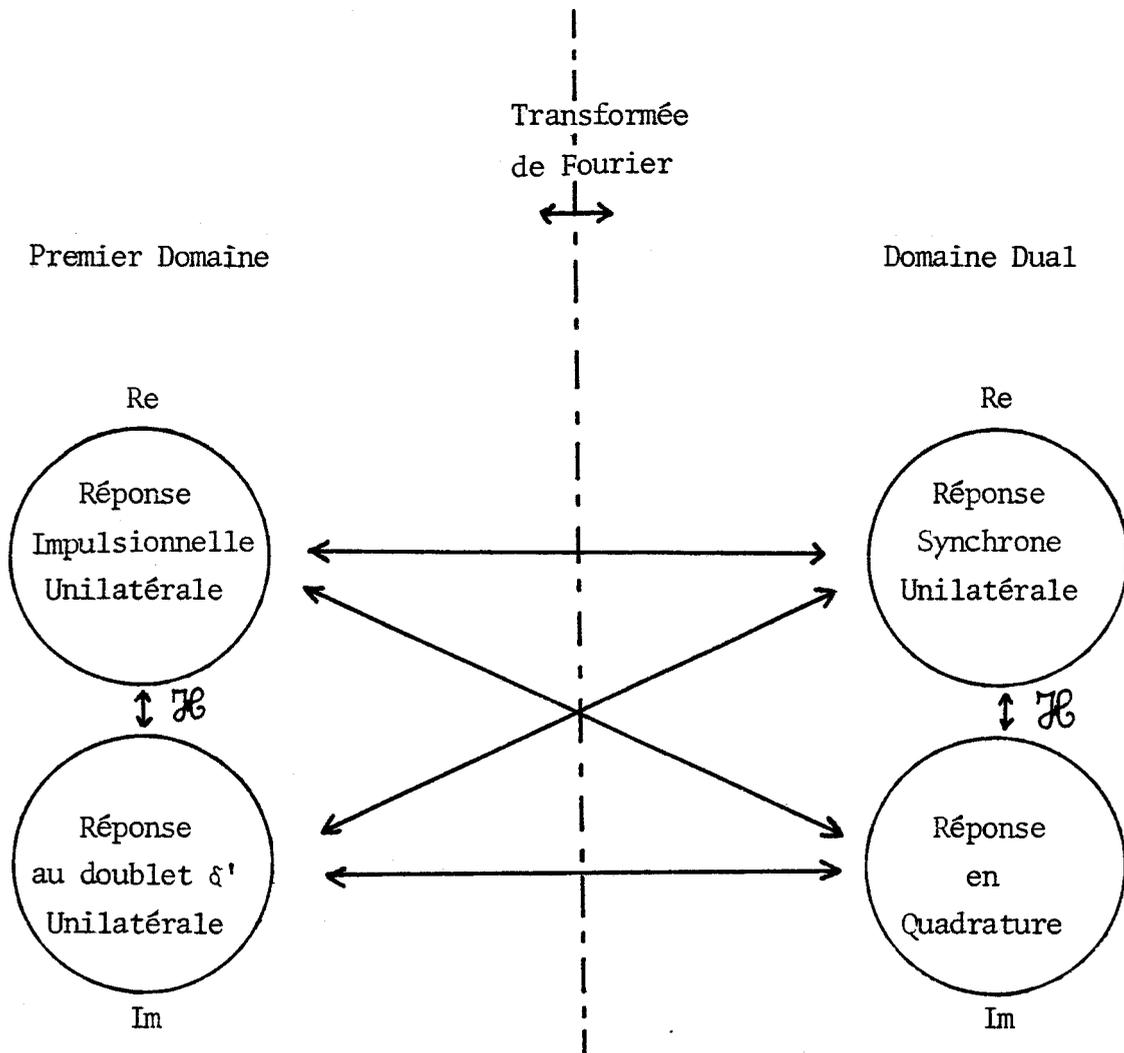


figure (III - 14)

Dans chacun des domaines, la description du signal analytique se fait dans le corps complexe mais jouit de propriétés d' Unilatéralité.

La connaissance d'une des quatre parties décrites ainsi est équivalente à la connaissance de l'ensemble.

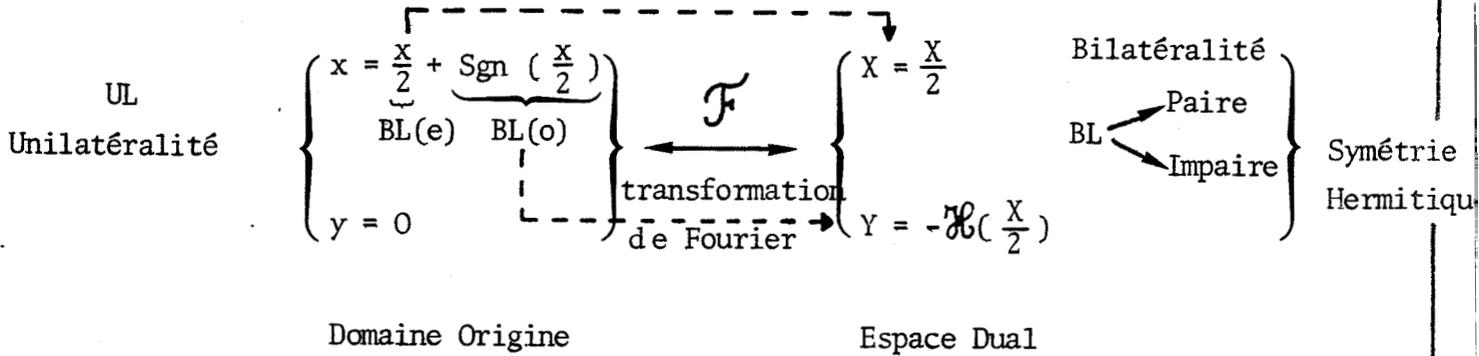
Lorsque la description n'est pas analytique, l'unilatéralité dans un domaine entraîne la symétrie hermitique dans l'autre.

LEGENDE ASSOCIEE AU TABLEAU

(Unilatéralité (UL) associée aux représentations analytiques)

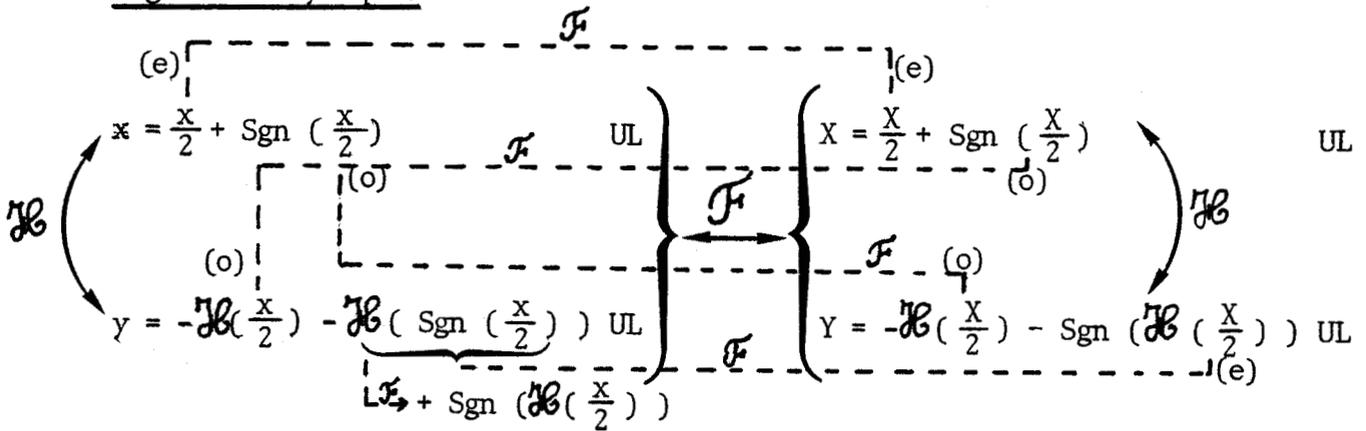
Signaux physiques

(le symbole = prend un sens d'affectation)



L'association au signal physique réel d'une partie analytique imaginaire définie par la transformation de Hilbert mène à un ensemble de représentations unilatérales (causales ou anticausales).

Signaux analytiques



Si $x < 0$ $\text{Sgn}(\frac{x}{2}) = -\frac{x}{2}$ $y = -\mathcal{H}(\frac{x}{2}) - \mathcal{H}(-\frac{x}{2}) = 0$
 car l'opérateur est linéaire

- remarques :
- La transformation de Hilbert change la propriété de parité ($\frac{1}{x}$ étant impaire)
 - notation : $f(x) \cdot \text{Sgn}(x)$ est notée $\text{Sgn}(f(x))$
 - (e) \Rightarrow parité (o) \Rightarrow imparité

L'opérateur $g(t)$ permet d'obtenir la réponse analytique en fréquence du système dont le comportement est décrit par la réponse impulsionnelle composée à la réponse au doublet $d(a) = \delta'(a)$.

$$g(t) = \frac{1}{2} (\delta(t) + j d(t)) \quad (3 - 7)$$

La partie analytique associée à la réponse impulsionnelle porte ainsi la dénomination de réponse au doublet (opérateur quadrature).

D'autre part, les distributions $d(a)$ et $\delta(a)$ sont mutuellement liées par la transformation de Hilbert. En effet, le passage à la limite de l'expression suivante démontre cette proposition.

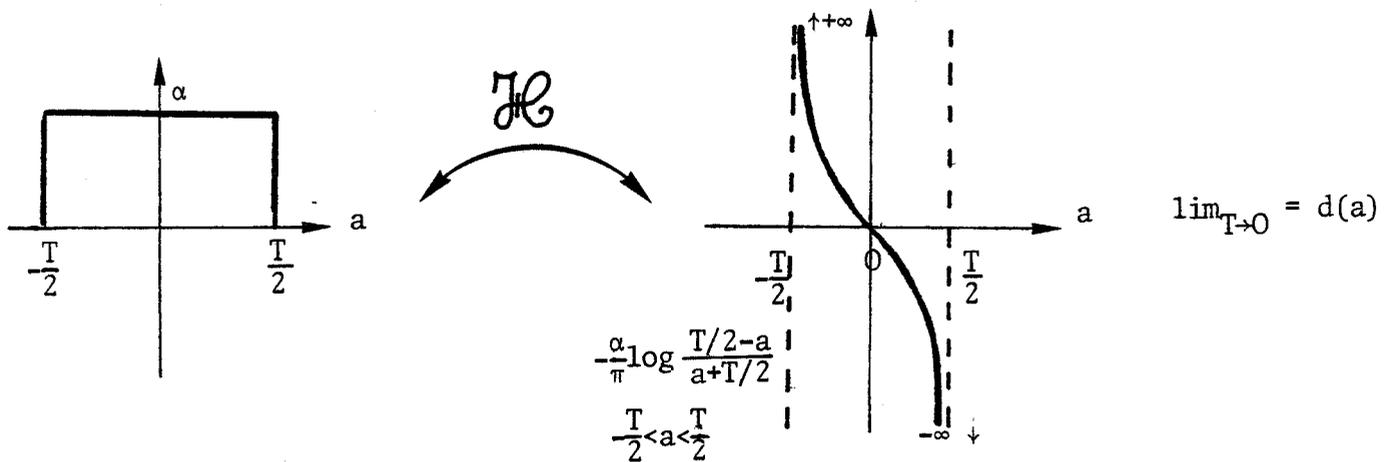


figure (III - 15)

La figure (III - 16) représente l'évolution en fonction du temps de la partie analytique associée à la réponse impulsionnelle définie figure (III - 5). Le calcul numérique de la transformation de Hilbert est effectué en 512 points répartis sur un délai de 128 secondes; ces valeurs étant choisies afin de traiter par la suite le fichier à l'aide de la FFT. La transformée numérique de Hilbert permet de conserver la résolution en temps due au nombre de points du fichier départ. L'accès à la réponse au doublet, est en principe possible à l'aide de la FFT en N points.

En effet, après troncature des redondances hermitiques, possédant $N/2$ points représentant le spectre causal, la FFT inverse génère la réponse impulsionnelle (partie réelle) et la réponse au doublet (partie imaginaire). Cependant, cette démarche implique pour une résolution correcte en fréquence une plage d'analyse temporelle suffisamment large peu compatible avec une bonne résolution dans le domaine temps, compte-tenu du nombre maximum d'échantillons pris en compte par le calculateur. La troncature engendre de plus, d'importantes erreurs si le signal est caractérisé par une convergence lente dans le domaine fréquence.

Par conséquent, la partie analytique est beaucoup plus accessible à l'aide du calcul numérique des valeurs principales de Cauchy ([2] [4]).

La réponse au doublet possède une singularité à l'origine :

$$\lim_{t \rightarrow 0} z(t) \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \{z(t)\} = -\infty$$

La convergence vers zéro de la partie analytique est plus lente que celle de la réponse impulsionnelle. Ainsi, l'évolution du signal analytique complet est physiquement plus représentative de la relaxation du système. La représentation en terme de module et phase peut être envisagée pour visualiser le signal analytique temporel. En effet, ce mode de représentation réservé usuellement au domaine fréquence, se justifie compte-tenu des similitudes formelles caractérisées par la transformation de Hilbert dans les deux domaines.

Les figures (III-17 & 18) représentent les grandeurs citées précédemment calculées pour une paroi de plexiglass de 2,5 mm d'épaisseur.

De ce qui précède, il résulte que l'examen de la seule réponse impulsionnelle est en fait aussi peu informatif que celui de la seule partie réelle de l'impédance : la visualisation complète nécessite alors l'extraction de l'enveloppe du signal complexe à partir d'une seule de ses projections. Par contre, la notion de module liée à l'énergie du signal analytique fournit l'ensemble de l'information. L'utilisation d'une échelle logarithmique appliquée au module permet de traiter des signaux sans limitation de dynamique.

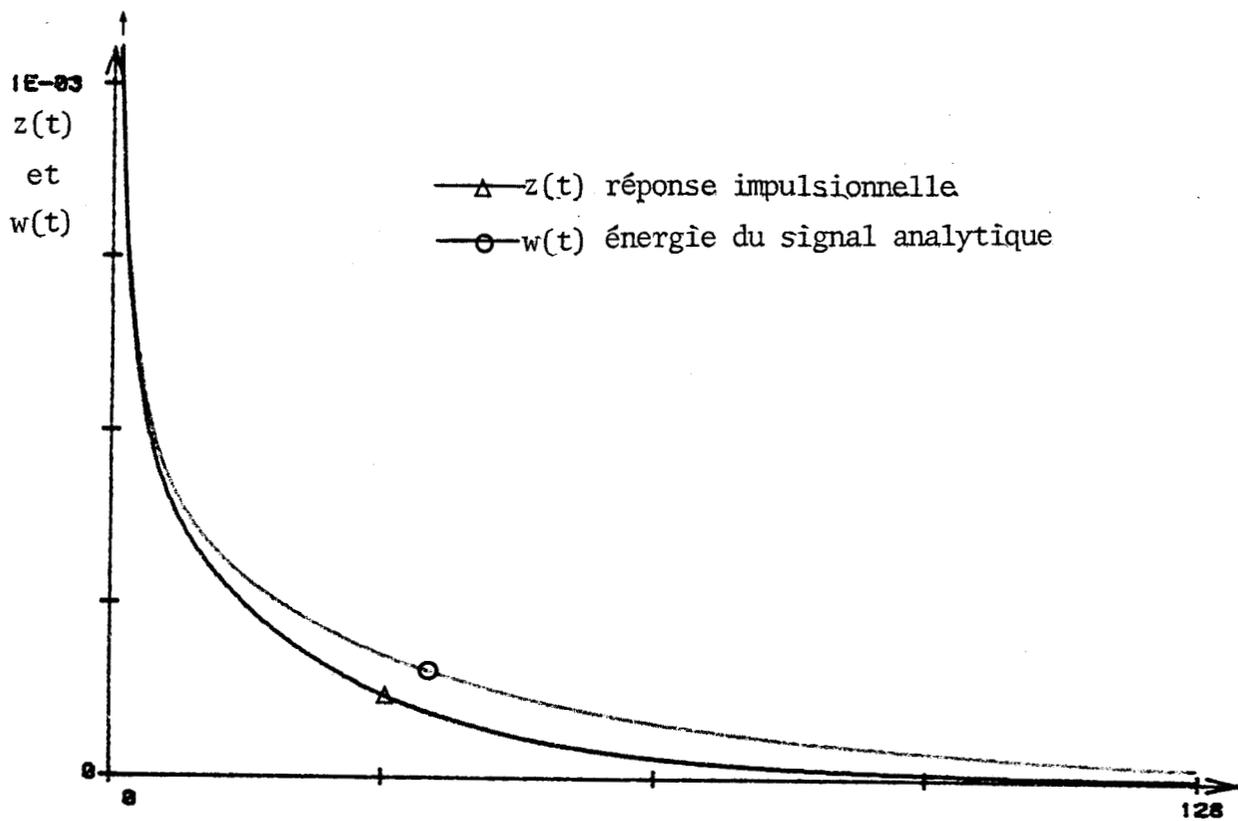
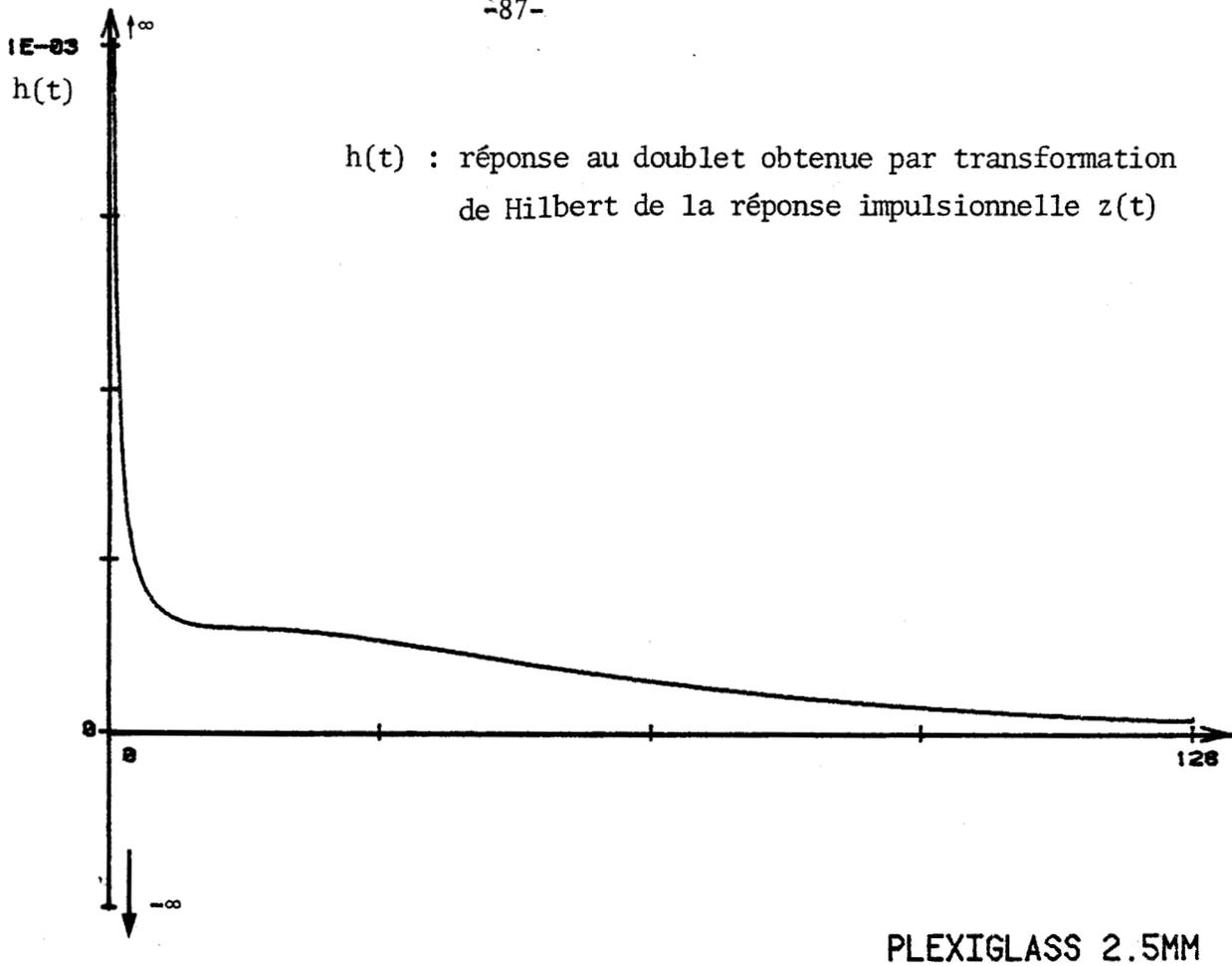


figure (III-16) : EVOLUTION EN FONCTION DU TEMPS DE LA REPONSE IMPULSIONNELLE ET DE L'ENERGIE ASSOCIEE AU SIGNAL ANALYTIQUE

$$\left. \begin{aligned}
 s(t) &= z(t) - j h(t) \\
 w(t) &= \sqrt{z^2(t) + h^2(t)}
 \end{aligned} \right\} \forall t, w(t) > z(t)$$

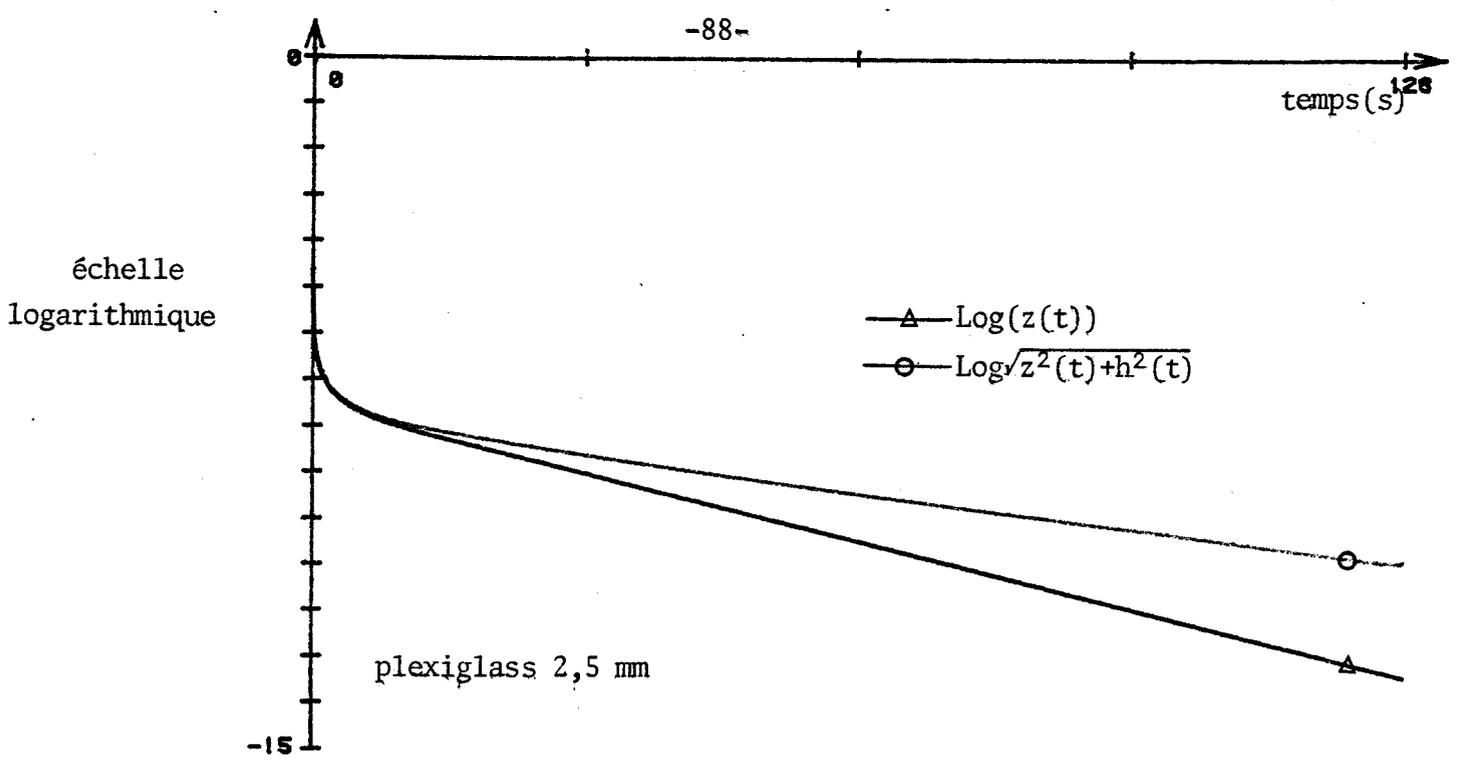


figure (III-17) : EVOLUTION COMPAREE DE LA PARTIE REELLE ET DU MODULE ASSOCIEE AU SIGNAL ANALYTIQUE ECHELLE LOGARITHMIQUE EN ORDONNEE

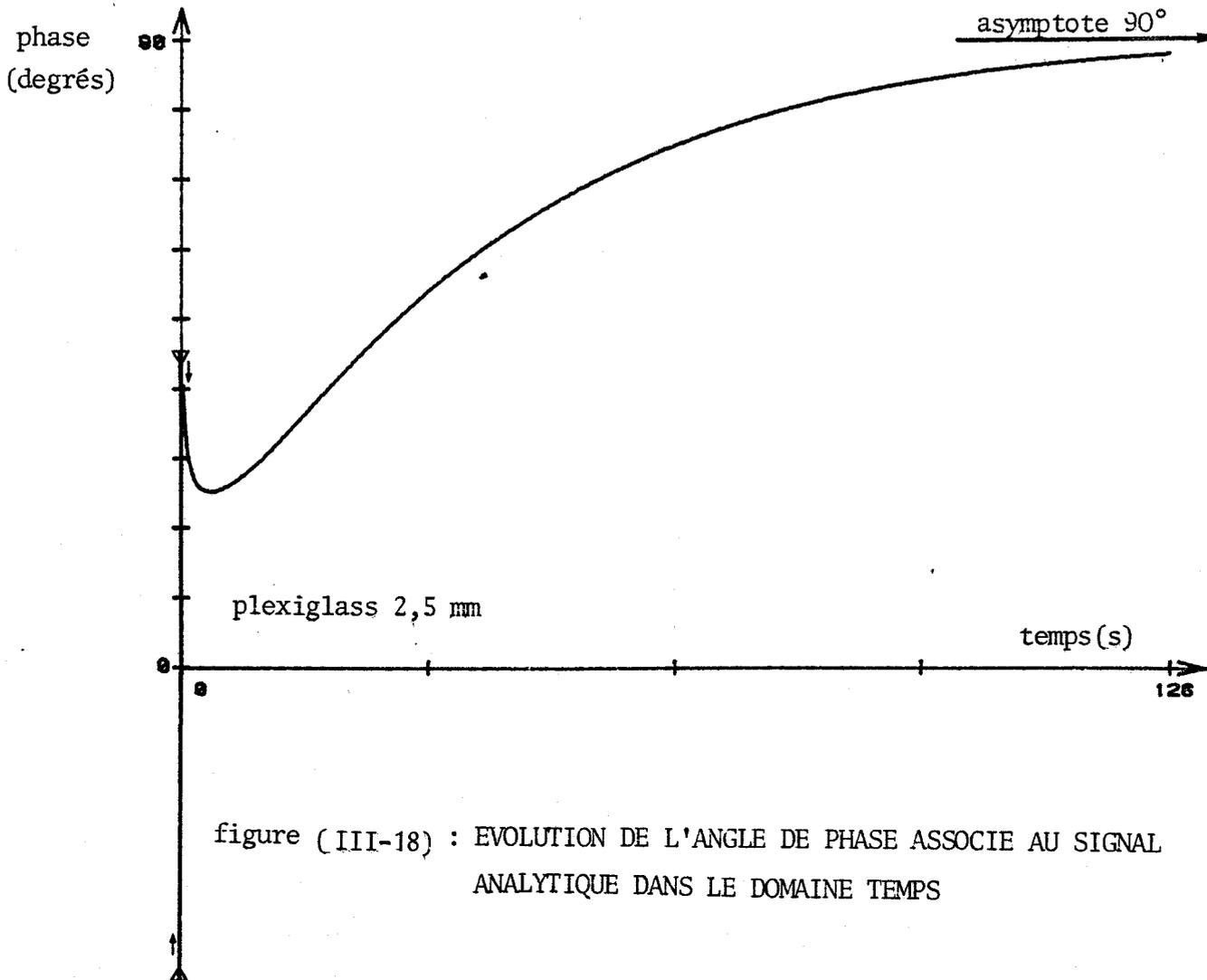


figure (III-18) : EVOLUTION DE L'ANGLE DE PHASE ASSOCIE AU SIGNAL ANALYTIQUE DANS LE DOMAINE TEMPS

II RECIPROCITE DES SYSTEMES THERMIQUES

La réciprocité est une propriété générale de la physique. Lorsqu'un système est invariant par rapport à l'inversion du sens des mouvements microscopiques internes, la propriété est appelée réciprocité concrète. La description des processus intérieurs au système donne alors lieu à la constitution d'un modèle dont les équations de comportement sont invariantes vis à vis du sens du temps c'est-à-dire d'une substitution de t à $-t$. Lorsque le comportement est étudié à l'échelle macroscopique, en traitant les variables observables aux accès du système, la thermodynamique des phénomènes irréversibles permet d'introduire la notion de réciprocité abstraite. Cette propriété issue des travaux de Onsager ([16]), se traduit par la possibilité d'appliquer le théorème des travaux virtuels aux régimes [35] compatibles avec les liaisons internes du système. En aucun cas, la réciprocité abstraite ne doit être confondue avec l'invariance par permutation des accès.

Un système soumis à plusieurs forces généralisées X_k est caractérisé par une génération d'entropie liée aux flux conjugués J_k par la relation :

$$\frac{dS}{dt} = \sum J_k X_k \quad (3 - 8)$$

Les travaux d'Onsager montrent que chacun des flux est fonction de l'ensemble des forces mises en jeu par des relations phénoménologiques du type :

$$J_k = \sum_i L_{ik} X_i \quad (3 - 9) \quad \text{avec } L_{ik} = L_{ki} \quad (\text{relation de réciprocité de Onsager})$$

Les coefficients L_{ik} sont appelés coefficients cinétiques en raison de leur dépendance vis à vis de l'échelle des temps choisie pour décrire les flux

$$\begin{aligned} X &= \text{grad } 1/T \\ \text{Par exemple si} \\ J &= \phi \\ \phi &= -\lambda \text{ grad } T = +\lambda T^2 \text{ grad } 1/T \end{aligned}$$

Le coefficient $L = \lambda T^2$ dépend de l'unité de temps puisque ϕ peut être défini en Joules par unité arbitraire de temps.

Les relations d'Onsager correspondent à une propriété générale indépendante de tout modèle moléculaire, c'est ce qui fait d'elles un résultat thermodynamique.

L'équation de Fourier (1 - 18) n'est pas invariante vis à vis de l'inversion du sens du temps. Cette rupture de symétrie par rapport au temps constitue une manifestation de l'irréversibilité longtemps considérée comme uniquement phénoménologique.

Le terme moteur associé à la relation (2 - 34) constitue une écriture analogue à (3 - 8) compte-tenu de la relation (2 - 9). La densité temporelle d'exergie consommée est une fonction bilinéaire des variables conjuguées aux flux d'entropie observables aux accès du système. Cette relation résulte de l'application du théorème des travaux virtuels à la thermique et compte-tenu de l'hypothèse de linéarité, un système thermique à deux accès possède une matrice admittance dont les éléments sont assimilables, dans le domaine Fréquence, aux coefficients cinétiques de Onsager.

On montre d'autre part ([35]), en théorie des systèmes électriques, que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un réseau à plusieurs accès soit réciproque est que sa matrice impédance ou admittance soit symétrique. La symétrie ou l'antisymétrie résulte des conventions de signe adoptées pour définir le sens des observables aux accès du système. N'ayant pas adopté les conventions générateur-récepteur de l'électricité, la matrice impédance d'un système thermique doit être antisymétrique pour satisfaire à la réciprocity abstraite du système.

Systemes monocouches

Une paroi homogène d'épaisseur x possède deux accès. Compte-tenu des relations (1 - 24) exprimées sous forme matricielle, ce système est caractérisé par la matrice impédance :

$$\begin{vmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Z_{11} = Z_C \coth \gamma x \\ Z_{12} = - Z_C / \text{sh } \gamma x = - Z_{21} \\ Z_{22} = - Z_C \coth \gamma x \end{cases} \quad (3 - 10)$$

La paroi homogène constitue, par conséquent, un système réciproque vis à vis des grandeurs employées pour la description des processus thermiques.

Systèmes bicouches

L'assemblage de deux parois d'épaisseurs respectives x et y et de constantes de propagation γ et γ' , possède une matrice de transfert égale au produit des matrices associées à chacune des parois. Ce produit n'étant pas commutatif, le système n'est pas invariant par retournement des accès.

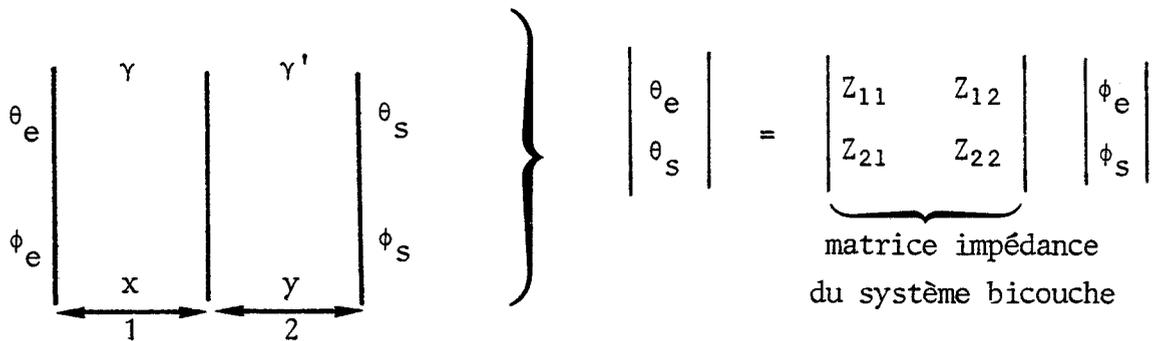


figure (III - 19)

Le produit des matrices et l'identification avec les termes de la matrice impédance conduisent à :

$$Z_{11} = - \frac{Z_{c1} \operatorname{ch} \gamma x \operatorname{ch} \gamma' y + Z_{c2} \operatorname{sh} \gamma' y \operatorname{sh} \gamma y}{\operatorname{sh} \gamma x \operatorname{ch} \gamma' y + \frac{Z_{c1}}{Z_{c2}} \operatorname{ch} \gamma x \operatorname{sh} \gamma' y} \quad (3 - 11)$$

$$Z_{22} = + \frac{Z_{c2} \operatorname{ch} \gamma x \operatorname{ch} \gamma' y + Z_{c1} \operatorname{sh} \gamma' y \operatorname{sh} \gamma x}{\operatorname{ch} \gamma x \operatorname{sh} \gamma' y + \frac{Z_{c2}}{Z_{c1}} \operatorname{sh} \gamma x \operatorname{ch} \gamma' y} \quad (3 - 12)$$

$$Z_{12} = - Z_{21} = \frac{1}{\frac{1}{Z_{c2}} \operatorname{ch} \gamma x \operatorname{sh} \gamma' y + \frac{1}{Z_{c1}} \operatorname{sh} \gamma x \operatorname{ch} \gamma' y} \quad (3 - 13)$$

Un système bicouche possède par conséquent la propriété de réciprocity. La généralisation pour une paroi composée de n couches résulte de l'analogie électrique où l'on montre qu'un réseau composé d'éléments réciproques est réciproque.

La description du système à l'aide de sa matrice impédance ou admittance permet d'associer aux termes du type Z_{ii} , le lien direct entre le flux observé sur un accès et l'écart en température sur ce même accès. Les termes du type Z_{ij} ($i \neq j$) constituent des coefficients de couplage entre l'entrée et la sortie du système quelle que soit sa constitution. Chacun des termes étant accessible à la mesure, l'analyse des systèmes thermiques en termes d'énergie utilisable est extensible aux systèmes à plusieurs accès.

C H A P I T R E I V

DISSOCIATION DES ENERGIES

EN REGIMES PLURIFREQUENTIELS ET TRANSITOIRES

I ANALYSE DANS LE DOMAINE TEMPS : relations de définition

Un système thermique périodique sinusoïdal peut être étudié à l'aide des grandeurs S_a et S_r respectivement associées aux flux dissipatif et réversible mesurés aux accès du système.

L'objet de ce paragraphe consiste à étendre les concepts définis précédemment à la caractérisation du stockage et de la dissipation dans le domaine temps, le système étant sollicité en régime quelconque. D'un point de vue purement théorique, nous supposons que, à l'aide de capteurs parfaits, on puisse accéder à tout instant aux mesures de $\theta(t)$ et $\phi(t)$.

Sur la face d'entrée du système, les échanges énergétiques définis dans le domaine Fréquence sont caractérisés par l'interspectre :

$$\tilde{S}_f = \frac{\theta(f) \cdot \phi^*(f)}{T_o} \quad (4 - 1)$$

Les fonctions $\theta(f)$ et $\phi(f)$ étant réelles, le produit hermitique des deux grandeurs $\theta(f)$ et $\phi(f)$ possède à fortiori la symétrie hermitique. L'analyse dans le domaine Temps se fait alors à l'aide d'une algèbre de convolution où l'ensemble des fonctions d'intercorellations possède des propriétés de parité permettant de découpler, dans le domaine Temps, les parties réelles et imaginaires de l'interspectre. Ainsi, l'application du théorème de Wiener Kinchine conduit à :

$$\text{Re}(\theta(f) \cdot \phi^*(f)) = \frac{1}{2} \mathcal{F}_f [R_{\theta\phi}(\tau) + R_{\phi\theta}(\tau)] = \frac{1}{2} \mathcal{F}_f (A_e) \quad (4 - 2)$$

$$\text{Im}(\theta(f) \cdot \phi^*(f)) = \frac{1}{2} \mathcal{F}_f [R_{\theta\phi}(\tau) - R_{\phi\theta}(\tau)] = \frac{1}{2} \mathcal{F}_f (A_o) \quad (4 - 3)$$

A_e et A_o désignent respectivement les parties paires et impaires constituant la fonction d'intercorellation. Ces grandeurs ont pour expression :

$$A_e(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\theta(t) \cdot \phi(t-\tau) + \theta(t-\tau) \phi(t)) dt \quad (4 - 4)$$

$$A_o(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\theta(t) \cdot \phi(t-\tau) - \theta(t-\tau) \phi(t)) dt \quad (4 - 5)$$

Ces deux quantités permettent d'associer à l'interspectre dans le domaine Fréquence, une densité temporelle d'interaction décalée dissipative ou réversible.

$$s(t, \tau) = \frac{1}{4T_0} (\theta(t) \phi(t-\tau) \pm \theta(t-\tau) \phi(t)) \quad (4 - 6)$$

Les grandeurs précédentes sont calculées à titre d'exemple pour les processus suivants.

Une paroi de plexiglass disposée le long d'un puits thermique est sollicitée par des impulsions rectangulaires de flux, porteuses d'une même quantité d'énergie mais de durées différentes.

Les figures (IV - 1 & 2) représentent la forme des signaux imposés et l'évolution de la température à l'entrée du système,

Les signaux imposés ont les caractéristiques suivantes :

| | | |
|---------------------|---|----------------------------------|
| énergie 3200 Joules | { | flux de 1000 W durée 32 secondes |
| figure (IV - 1) | | flux de 200 W durée 16 secondes |
| | | flux de 400 W durée 8 secondes |

Les tracés relatifs à l'évolution de la température montrent que l'énergie incidente, à un instant donné, n'est pas délivrée à température homologe. En conséquence, à énergie interne égale, le découplage entre dégradation et stockage n'est pas effectué de la même façon.

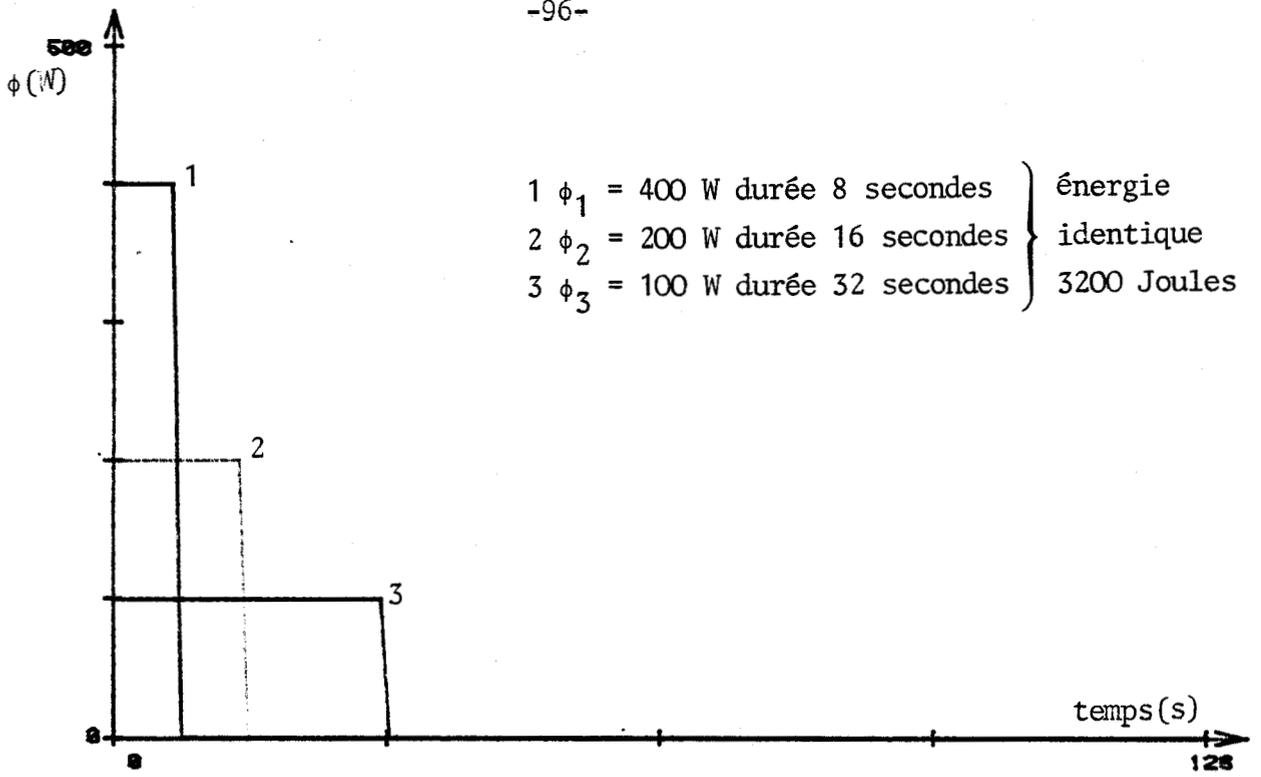
L'analyse harmonique et le calcul numérique de l'intercorrélacion entre flux et température mènent pour chacun des trois modes de sollicitation aux tracés de la figure (IV - 4).

Le programme de simulation utilisant la FFT conduit aux fonctions :

| | | |
|--|---|-------------------|
| - $\theta(f)$ et $\phi(f)$ | } | figure (IV - 3) |
| - $\theta \cdot \phi^*$ | | |
| - $\frac{1}{4T_0} (\theta\phi^* + \phi\theta^*)$ et $\frac{1}{4T_0} (\theta\phi^* - \phi\theta^*)$ | | |

La FFT inverse appliquée séparément aux parties réelles et imaginaires de l'interspectre conduit aux parties paires et impaires représentatives des interactions temporelles décalées.

D'une façon générale, la fonction d'intercorrélacion $R_{\theta\phi}(\tau)$ ne présente pas la propriété d'unilatéralité. La causalité n'est obtenue que lorsque le signal imposé est de forme impulsionnelle .



figure(IV-1) : FLUX IMPOSES A L'ENTREE DU SYSTEME

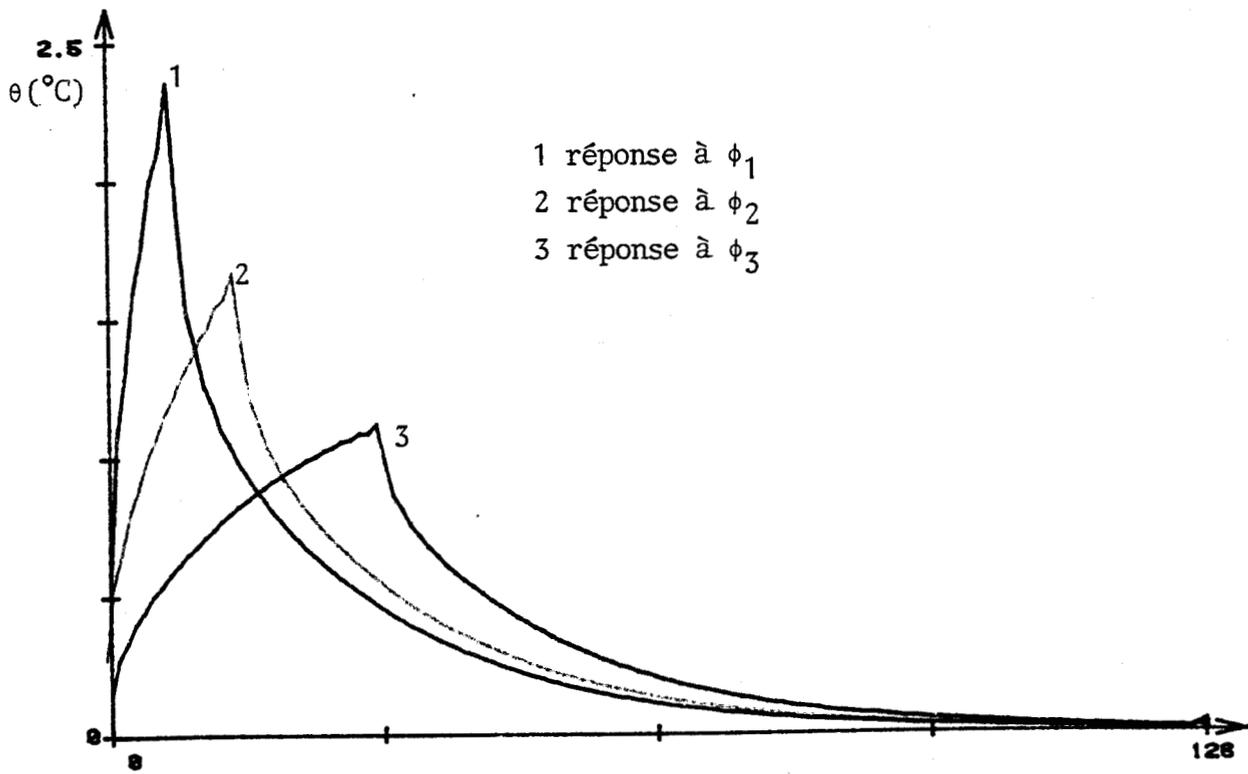


figure (IV -2): ELEVATION DE LA TEMPERATURE DE LA FACE D'ENTREE
calcul effectué en 128 points

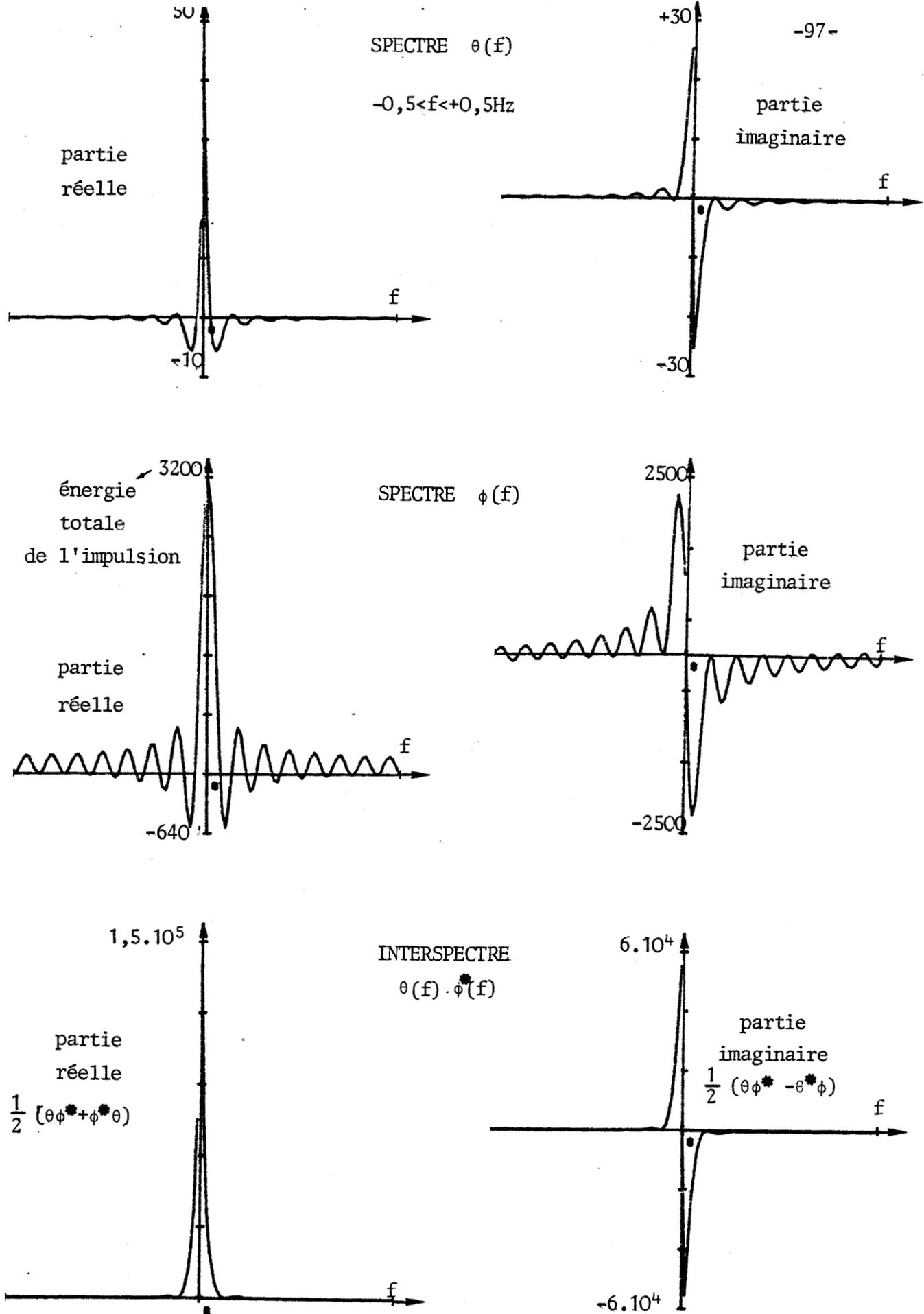


figure (IV -3) : REPRESENTATION FREQUENTIELLE DU DEUXIEME PROCESSUS

$\phi = 200 \text{ W}$ pendant 16 secondes : l'évolution de la température découle d'un filtrage passe-bas; il en résulte un interspectre très amorti.

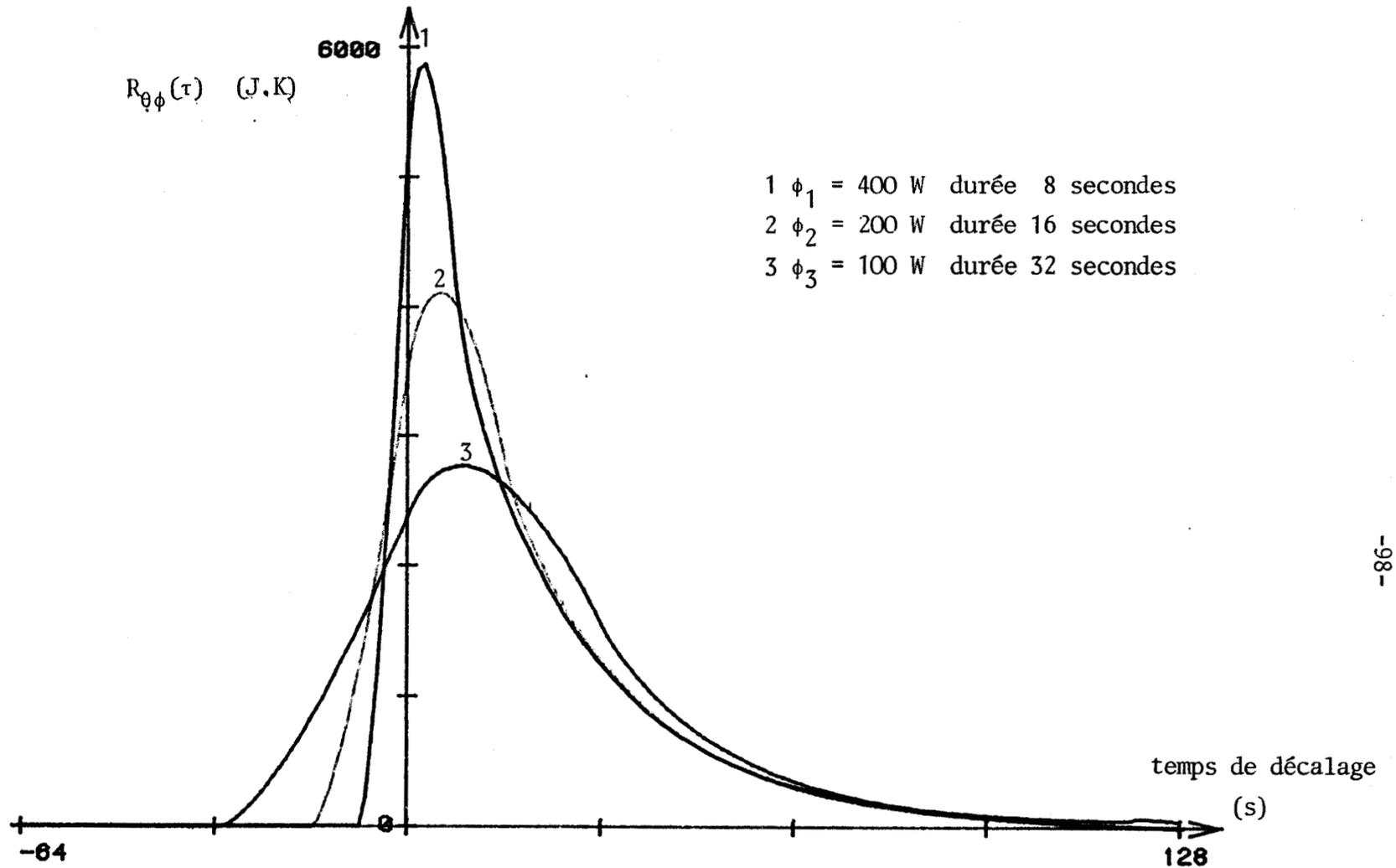
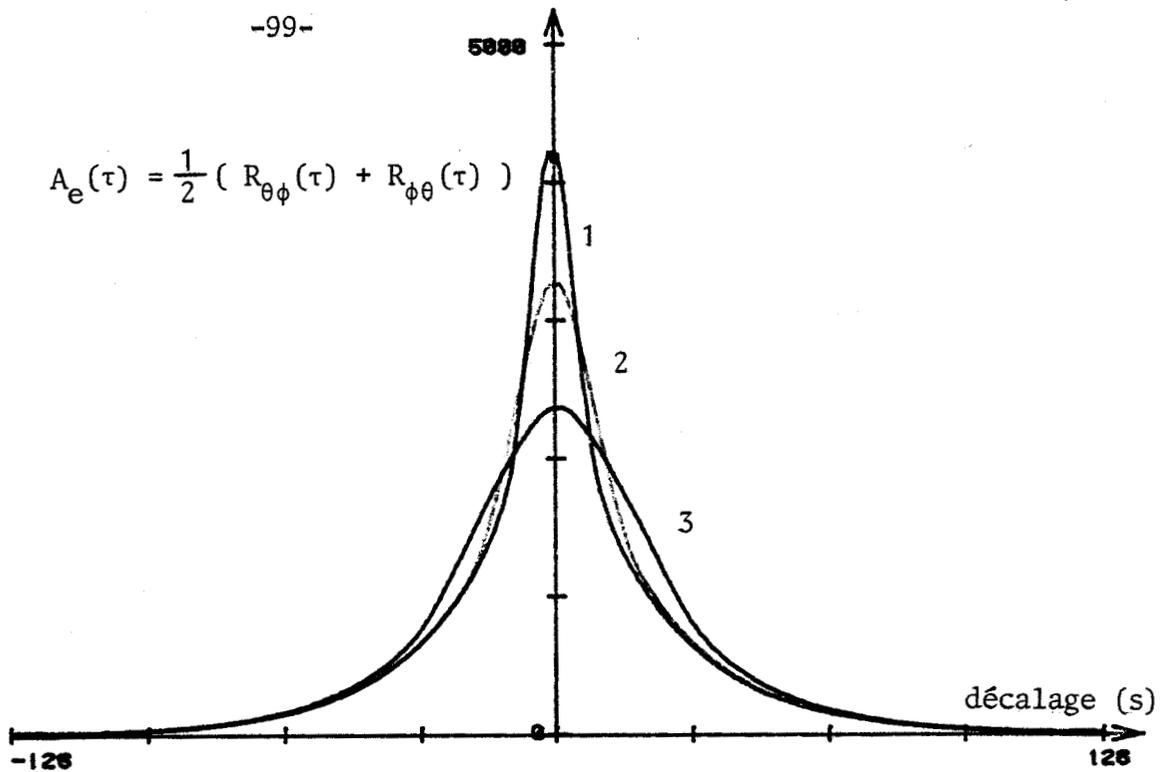


figure (IV-4) : INTERCORRELATIONS ENTRE L'ELEVATION DE TEMPERATURE ET LE FLUX IMPOSE SUR LA FACE D'ENTREE DU SYSTEME.

Chacune de ces fonctions est associée à l'interspectre du processus correspondant.

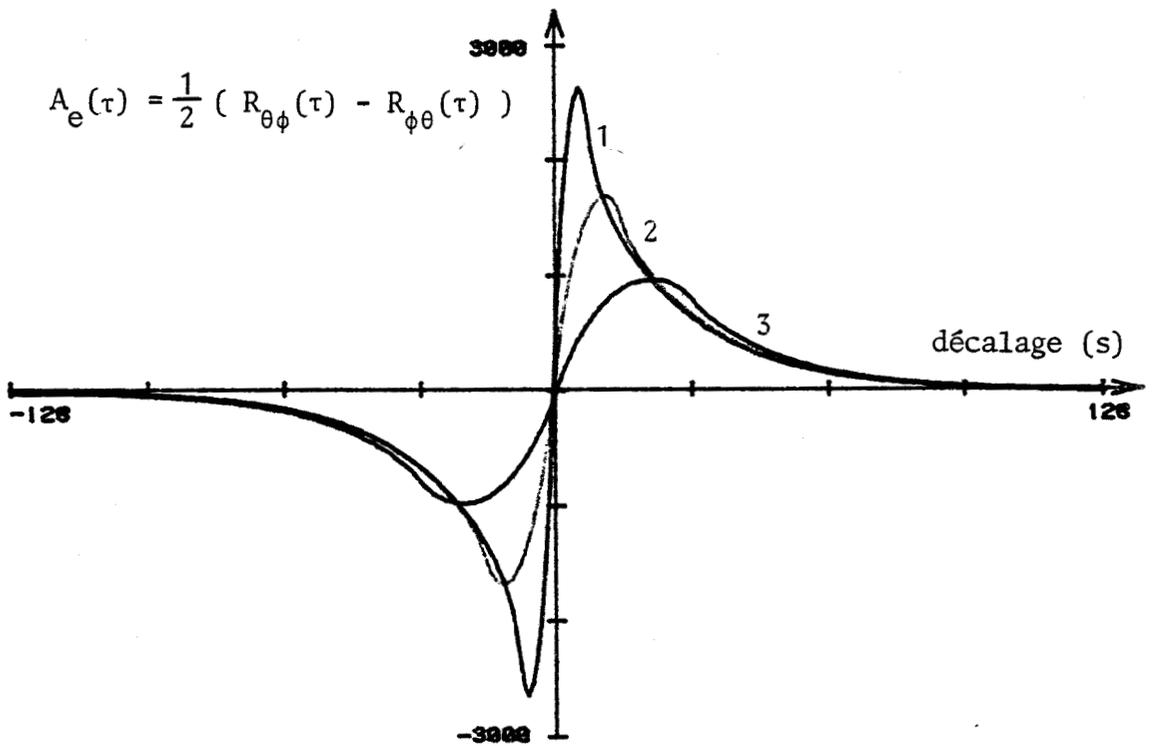
Les fonctions d'intercorrélation ne possèdent pas la propriété de causalité sauf lorsque le flux tend vers une mesure de Dirac; l'intercorrélacion s'identifie alors à la réponse impulsionnelle.



$$A_e(\tau) = \frac{1}{2} (R_{\theta\phi}(\tau) + R_{\phi\theta}(\tau))$$

figure(IV-5) : PARTIES PAIRES DES FONCTIONS D'INTERCORRELATION
TEMPERATURE-FLUX

Chacune de ces fonctions est associée à la partie réelle de l'interspectre du processus correspondant.



$$A_e(\tau) = \frac{1}{2} (R_{\theta\phi}(\tau) - R_{\phi\theta}(\tau))$$

figure(IV-6) : PARTIES IMPAIRES DES FONCTIONS D'INTERCORRELATION
TEMPERATURE-FLUX

Chacune de ces fonctions est associée à la partie imaginaire de l'interspectre.

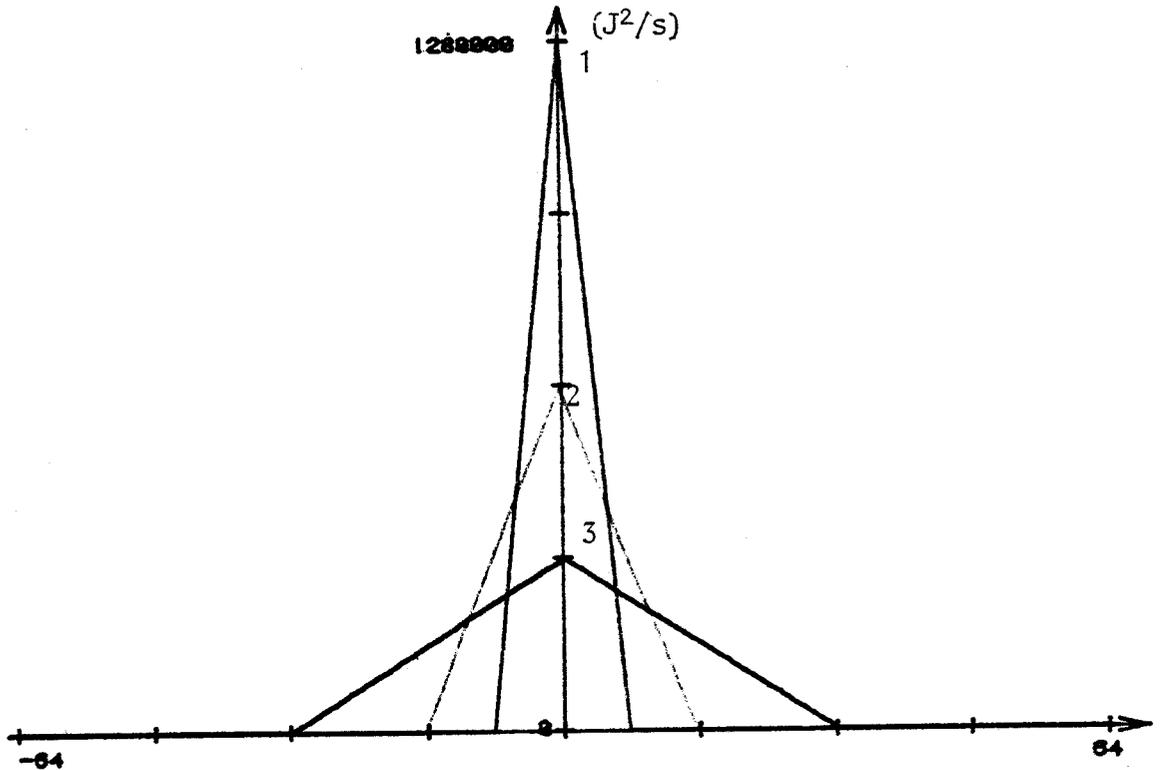


figure (IV-7) : FONCTIONS D'AUTOCORRELATION ASSOCIEES AUX FLUX
IMPOSES REPRESENTES FIGURE (IV - 1)

Quelle que soit la sollicitation imposée, flux ou température, la classe du signal associé est caractérisée par la fonction d'autocorrélation. En effet, les interactions décalées de dissipation et de stockage sont définies par la réponse impulsionnelle et l'autocorrélation du signal incident.

Dans le cas d'un flux imposé :

$$R_{\theta\phi}(\tau) = \mathcal{F}_t^{-1} [Z(f) \cdot \phi(f) \cdot \phi^*(f)] = z(t) * \mathcal{F}_t^{-1} (\phi(f) \cdot \phi^*(f)) \\ = z(t) * [\phi(t) * \phi(t)]$$

Une fonction d'autocorrélation est toujours paire vis-à-vis de la variable de décalage; par conséquent :

$$R_{\theta\phi}(\tau) = z(\tau) * R_{\phi\phi}(\tau) \quad (4 - 7) \quad \begin{cases} z(\tau) \text{ causale} \\ R_{\phi\phi}(\tau) \text{ paire} \end{cases}$$

La décomposition du noyau d'impédance en parties paire et impaire conduit à la caractérisation des interactions décalées de dissipation et de stockage.

$$z(t) = z_e(t) + z_o(t) \quad \text{avec} \quad z_o(t) = z_e(t) \operatorname{sgn}(t)$$

$$A_e(\tau) = z_e(\tau) * R_{\phi\phi}(\tau)$$

$$A_o(\tau) = z_o(\tau) * R_{\phi\phi}(\tau)$$

Deux cas limites sont à considérer :

- le flux est assimilable à une impulsion de Dirac

$$A_e(\tau) = z_e(\tau)$$

$$A_o(\tau) = z_o(\tau)$$

Les parties réelles et imaginaires de l'interspectre constituent l'impédance du système et sont reliées par la transformation de Hilbert. La figure (IV-8) représente de façon qualitative les deux grandeurs d'interaction décalée.

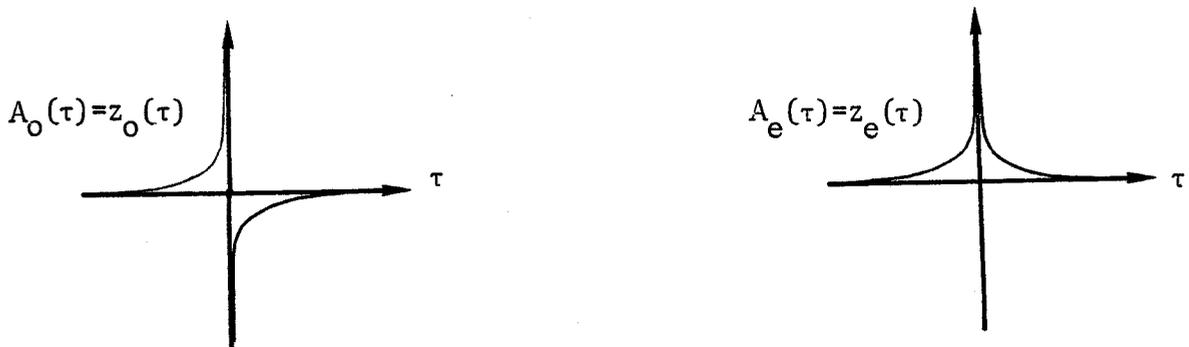


figure (IV-8) : (représentation qualitative)

Pour le support $\tau \in [0, +\infty[$ la dissipation et le stockage interviennent de la même façon dans le processus. La sollicitation $\delta(t)$ étant très riche en Haute Fréquence, cet état de fait peut être rapproché à la forme de l'impédance caractéristique (1 - 26) dont les parties réelles et imaginaires sont égales.

- le flux entrant est défini en régime permanent

$$\text{soit } \phi(t) = \text{cte} = 1 \quad \phi(f) = \delta(f)$$

$$\theta(f) \phi^*(f) = Z(f) \cdot \delta(f) \cdot \delta(f) = (Z(f))_{f=0} = R$$

La densité spectrale d'interaction est purement réelle. Par conséquent, l'interaction décalée est uniquement paire. Le signal n'est plus à énergie finie mais à puissance moyenne finie.

$$\lim_{\Gamma \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma} \int_0^{\Gamma} \theta(t) \phi(t-\tau) dt = R\phi^2$$

La partie impaire associée à ce processus est un infiniment petit de telle sorte que, au cours du temps, le stockage n'intervient pas de façon dynamique. Cependant, en aucun cas, on ne peut préjuger de l'inexistence d'un potentiel stocké de façon statique dans le système.

Ces deux cas limites encadrent une infinité de régimes. En considérant une sollicitation en flux à énergie finie définie par une forme en créneau de largeur variable, la figure suivante illustre qualitativement l'extrapolation des processus de la figure (IV-6).

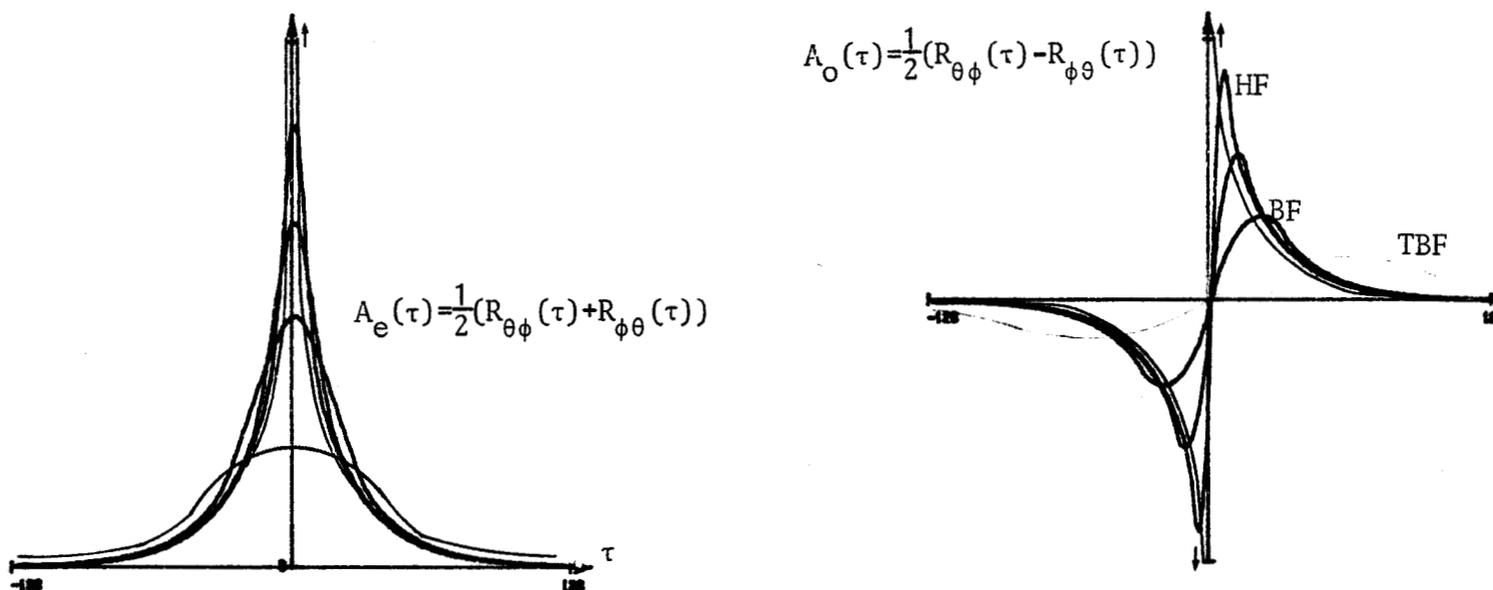


figure (IV-9)

A l'approche du régime impulsionnel, l'intercorrélacion tend vers le noyau causal d'impédance.

Lorsque le régime devient pauvre en H.F, l'intercorrélacion tend vers la parité.

En effet, le calcul approche l'expression d'une autocorrélacion caractérisée par l'évolution synchrone des deux variables conjuguées liée à la disparition de la dynamique du stockage. Le maximum observé sur la partie impaire, converge vers zéro. On ne peut cependant conclure quant à la valeur définie par la surface sous la courbe.

A - Dissipation en régime variable

L'interaction dissipative est définie par la partie réelle de l'interspectre : pour un processus décrit par des observables définis sur un support borné, le théorème de Parseval conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\theta \phi^* + \theta^* \phi) e^{j2\pi f0} df &= \mathcal{F}_{\tau=0}^{-1} \mathcal{F} \frac{1}{2} (R_{\theta\phi} + R_{\phi\theta}) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\theta(t) \phi(t) + \phi(t) \theta(t)) dt = \int_0^{\infty} \theta(t) \phi(t) dt \end{aligned}$$

(4 - 8)

Dans le cas des sollicitations périodiques, ceci conduit au fait que la somme des raies de flux dissipatif est égale à la moyenne temporelle de la dissipation dans l'ensemble du système. Ce cas, trivial en électricité, correspond à la propriété de composition des raies de puissance active associée à la puissance moyenne dissipée.

L'examen de la figure (IV-4) conduit aux remarques suivantes :

- Les valeurs à l'origine des fonctions d'intercorrélacion sont définies par les valeurs à l'origine de leur partie paire associée. A valeur égale d'énergie interne transférée (3200 J), les régimes riches en H.F engendrent des pertes d'exergie beaucoup plus importantes que les régimes B.F.

- Les surfaces définies par chaque intercorrélacion sont identiques à fortiori.

En effet :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_{\theta\phi}(\tau) d\tau = \mathcal{F}_{f=0} R_{\theta\phi} = \theta \cdot \phi_{f=0}^* = \text{interspectre en } f=0 \quad (\text{J.K.s})$$

$$= Z(0) \cdot \phi(0) \phi^*(0) = R \cdot |\mathcal{F}_0 \phi(t)|^2 = R \cdot (\text{énergie})^2$$

Dans le cas de la figure (IV-4), $R = 0,0137$ Joules; Soit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_{\theta\phi} dt = 1,28 \cdot 10^6 \quad \text{J.K.s}$$

De la façon dont les concepts ont été introduits, le formalisme précédent s'étend à l'étude de toutes les structures envisageables. Ainsi, en régime variable, la dissipation d'énergie utilisable est essentiellement liée à la composition du cospectre associé aux variables conjuguées par rapport au flux d'entropie. Par conséquent, pour une dissipation moyenne observée, il existe une classe de signaux de sollicitation du système définie par une même fonction d'autocorrélation dans le domaine Temps. Le cas le plus simple correspond au régime sinusoïdal où la résistance effective (2 - 20) suffit quant à l'étude de la dissipation.

Une sollicitation imposée étant caractérisée par un spectre donné, pour une même énergie interne transférée à travers une paroi, le minimum de génération d'entropie s'observe lorsque la bande passante définie par l'impédance englobe le spectre associé au flux incident.

Les méthodes classiques du traitement de signal sont ainsi applicables à l'analyse des pertes d'exergie observée au cours d'un processus. La connaissance de la réponse impulsionnelle permet de prévoir le comportement du système pour toutes les sollicitations quelle que soit la structure envisagée.

B - Stockage exergique en régime variable

L'interaction d'échange est définie par la partie imaginaire de l'interspectre. La partie impaire de la fonction d'intercorrélacion et le quaspectre sont les transformées de Fourier l'une de l'autre. Une différence essentielle par rapport à l'étude de la dissipation réside dans le fait que l'application du théorème de Parseval sur l'ensemble de l'interaction ne peut rien apporter. La partie impaire de l'intercorrélacion est caractérisée par une valeur nulle à l'origine due à l'hermiticité de l'interspectre.

Cette valeur a pour signification physique le fait trivial que, au cours de l'entretien d'un régime périodique, on n'apporte pas de puissance moyenne relativement au stockage dans le système, ce dernier étant le siège d'un régime établi. Pour l'extension aux régimes aperiodiques, cette valeur nulle est à rapprocher du fait qu'au-delà de la relaxation du système, il ne subsiste plus d'énergie stockée.

Lorsqu'un régime est caractérisé par un spectre utile borné en B.F, la figure (IV - 4) permet d'observer une intercorrélacion proche de la parité. Le cas limite du régime permanent est exempt de phénomène de stockage. Seul l'établissement de ce régime est caractérisé par une dynamique de stockage telle que l'EMS constitue l'information résiduelle non nulle à tout instant quant au travail fourni par l'extérieur pour établir le régime. Ainsi l'EMS représente une information intégrale sur les échanges énergétiques observés aux accès du système. L'observation de la figure (IV - 6) conduit à remarquer que la surface définie par la partie impaire de l'intercorrélacion lorsque $0 < \tau < \infty$ évolue entre deux valeurs définies respectivement par $R/2$ en régime impulsionnel et une autre grandeur fonction de la dynamique du régime imposé.

Compte-tenu de ce qui précède, la relation quantitative existant entre l'EMS et la partie impaire de l'intercorrélacion peut être établie de la façon suivante :

$$A_0 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j S_r \quad \text{où } S_r \text{ désigne la partie imaginaire de l'interspectre} \\ (4 - 9)$$

avec $A_0(0) = 0$ et $A_0(\tau)$ fonction exempte de discontinuités pour $\tau \in]0, \infty[$

$$\frac{j S_r(f)}{j \omega} = \mathcal{F}_\omega \int_0^X A_0(\tau) d\tau \quad \text{d'où}$$

$$\int_0^X A_0(\tau) d\tau = \mathcal{F}_X^{-1} \frac{S_r}{\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_r}{\omega} e^{j\omega X} d\omega$$

Considérons un régime périodique tel que l'interspectre soit caractérisé par une distribution de raies. L'intercorrélacion est alors périodique.

En posant $X = \frac{\Gamma}{2}$ où Γ désigne la période, il suit :

$$\int_0^{\Gamma/2} A_o(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_r(\omega)}{\omega} \delta(\omega - n\omega) e^{jn\frac{\omega T}{2}} d\omega = 4 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{S_r(i)}{2\omega i}$$

compte-tenu de la parité de S_r/ω

L'identification de la somme des raies d'EMS associée à chaque composante du régime périodique mène à :

$$T_o \cdot EMS = \frac{1}{4} \int_0^{\Gamma/2} A_o(\tau) d\tau \quad (4 - 10)$$

où l'intercorrélacion est définie par :

$$A_o(\tau) = \frac{1}{2\Gamma} \int_{-\Gamma/2}^{\Gamma/2} \theta(\tau) \cdot \phi(t-\tau) - \theta(t-\tau) \cdot \phi(t) dt \quad (4 - 11)$$

Cas particulier du régime sinusoïdal

La fonction d'intercorrélacion est de la forme bien connue :

$$R_{\theta\phi}(\tau) = \frac{\theta_o \phi_o}{2} \cos(\omega\tau - \Psi) \quad (4 - 12)$$

où Ψ est l'angle de déphasage lié à l'impédance définie en entrée du système.

La séparation des parties paires et impaires conduit à :

$$\left. \begin{aligned} A_e(\tau) &= \frac{\theta_o \phi_o}{2} \cos \omega\tau \cdot \cos \Psi \\ A_o(\tau) &= \frac{\theta_o \phi_o}{2} \sin \omega\tau \cdot \sin \Psi \end{aligned} \right\} \quad (4 - 13)$$

La relation (4 - 10) peut alors être appliquée.

$$T_o \cdot EMS = \frac{1}{4} \int_0^{\Gamma/2} \frac{\theta_o \phi_o}{2} \cos \omega\tau \cdot \cos \Psi d\tau = \frac{1}{4} \frac{\theta_o \phi_o}{\omega} \sin \Psi \quad (4 - 14)$$

Le résultat est conforme à la définition (2 - 42) du potentiel thermique moyen.

C - Extension à l'étude des régimes apériodiques

$x(t)$ et $y(t)$ désignent les variables conjuguées au flux de puissance. Un processus étant défini à partir d'un état initial de repos, $x(t)$ et $y(t)$ sont des signaux à énergie finie. L'interspectre possède des parties réelles S_a et imaginaires S_r fonctions continues de la fréquence. Au point f , la grandeur $S_r/2\omega$ caractérise la part associée à la fréquence ω dans le stockage énergétique. C'est une fonction paire pour laquelle l'application du théorème de Parseval permet d'écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_{st}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_r}{2\omega} df \quad (4 - 15)$$

W_{st} désigne l'énergie stockée au temps t dans le système.

Compte-tenu de la relation (4 - 3), (4 - 15) conduit à :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_r(f)}{f} df = \frac{1}{4} \mathcal{F}_{t=0}^{-1} \left(\frac{1}{\pi f} \cdot S_r(f) \right) \quad \text{avec } \frac{j}{\pi f} \xrightarrow{\mathcal{F}} \text{Sgn}(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_{st} dt = -\frac{j}{4} [\text{Sgn}(t) \cdot j A_o(t)]_{t=0} = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} A_o(t) \cdot \text{Sgn}(t) dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_{st} dt = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} [x(t) y(t-\tau) - y(t) x(t-\tau)] dt \cdot d\tau \quad (4 - 16)$$

La surface associée à la partie impaire de l'intercorrélacion constitue l'histoire du stockage pour une sollicitation à support borné.

La notion de résistance effective liée à la dissipation est directement liée à la partie paire de l'intercorrélacion. Compte-tenu du fait que la sollicitation est caractérisée par sa fonction d'intercorrélacion,

$$R_{eff} = \frac{A_e(0)}{R_{\phi\phi}(0)} \quad (4 - 17)$$

En régime sinusoïdal, (4 - 13) et (4 - 17) conduisent à la relation classique :

$$R_{eff} = |Z| \cos \psi \quad (4 - 18)$$

[23] D'une façon plus générale, la relation (4 - 17) garde un sens pour les signaux apériodiques de telle sorte que la résistance effective constitue une fonction de transformation.

L'étude expérimentale d'une configuration donnée à l'aide des techniques de corrélation s'effectue de façon plus simple qu'avec des mesures directes, ces dernières nécessitant la mise en oeuvre d'une instrumentation synchronisée pour relever les valeurs de la phase et du module de l'impédance.

Lorsque la température et le flux sont affectés de valeurs quadratiques moyennes constantes, les principes précédents restent applicables. Les signaux périodiques et la plupart des signaux stockastiques rencontrés en pratique possèdent cette propriété.

La relation (4 - 10) permet l'analyse du régime permanent. En effet, pour un système homogène, l'EMS prend alors une valeur maximale conformément à la figure (II - 10). D'autre part, quelque soit le régime de fonctionnement, l'expression suivante possède une limite finie.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A_0(\tau) d\tau \neq \infty \quad (4 - 19)$$

La convergence s'établit entre deux bornes définies respectivement par l'étude des régimes permanent et impulsionnel. Cette propriété se traduit physiquement par une impossibilité pour un système quelconque de stocker indéfiniment de l'énergie utilisable.

Dans le cas des signaux à énergie finie, la relation (4 - 16) est applicable à l'étude de processus où, à l'origine, les variables sont nulles. L'énergie stockée dans le système étant une fonction positive, exemple de discontinuités, la relation (4 - 16) permet d'obtenir l'histoire du stockage sur l'ensemble du processus. A partir d'une telle relation, une question essentielle peut être formulée : comment et à quelles conditions peut-on déterminer la valeur de l'énergie stockée à un instant donné dans un système, à partir des mesures effectuées aux entrée et sortie de ce dernier.

II DYNAMIQUE DES ECHANGES ENERGETIQUES

La relation (4 - 1) permet de décrire les échanges énergétiques aux accès d'un système à l'aide d'un interspectre défini dans le domaine fréquence. La séparation des énergies sous forme de stockage et de dissipation peut toujours être réalisée lorsque chacune de ces grandeurs peut être formalisée sous une forme orthogonale à l'autre. Dans le domaine fréquence, la relation de quadrature entre parties imaginaires et réelles représente la relation d'orthogonalité temporelle suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A_o(\tau) \cdot A_e(\tau) d\tau = 0 \quad \text{ou} \quad \overline{A_o(\tau) A_e(\tau)} = 0 \quad \text{pour les phénomènes périodiques}$$

(4 - 20)

La transformation de Hilbert peut être appliquée aux grandeurs conjuguées à l'énergie de telle sorte que l'analyse dans le domaine temps permet de donner une représentation générale de l'interaction réactive observée sur l'accès d'un système. L'une des relations obtenues (4 - 25) répond au formalisme développé [37] [39] par Budeanu* pour l'étude des phénomènes électriques.

Remarquons en premier lieu la propriété d'orthogonalité existant entre une grandeur physique et sa transformée de Hilbert:

$$\overline{x(t) \mathcal{H}(x(t))} = 0 \quad (4 - 21)$$

En effet :

$$\begin{aligned} \overline{x(t) \mathcal{H}(x(t))} &= \overline{x(t) \mathcal{H}(x^*(t))} = \mathcal{F}_{f=0} (x(t) \cdot \mathcal{H} x^*(t)) \\ &= [X(f) * j \text{Sgn}(f) \cdot X^*(-f)]_{f=0} = j \int_{-\infty}^{+\infty} |X|^2 \text{Sgn}(f) df = 0 \end{aligned}$$

Cette propriété est à rapprocher de l'absence d'imparité relative à l'intercorrélacion calculée pour deux grandeurs évoluant de façon synchrone (système sans mémoire).

Dès lors, en présence de deux grandeurs physiques conjuguées énergétiquement relativement à un processus doué de stockage, il apparaît utile d'étudier le produit scalaire entre l'une des grandeurs et la transformée de Hilbert de l'autre. Nous examinons successivement le sens de cette opération en régime périodique puis apériodique.

A - Dynamique associée aux régimes périodiques

Soient x et y les grandeurs conjuguées à l'énergie. $x(t)$ est la grandeur intensive et $y(t)$ l'extensité observée sur l'accès du système.

$s(t) = x(t) y(t)$ représente l'interaction instantanée entre les deux grandeurs.

En supposant que le processus est défini par la superposition d'un ensemble de régimes périodiques, l'interaction instantanée se décompose en trois termes :

$$P = \sum_0^n \frac{x_n y_n}{2} \cos \psi_n$$

P est l'interaction active observée au cours du processus. ψ_n est le déphasage observé à l'harmonique n .

$$Q = \sum_0^n \frac{x_n y_n}{2} \sin \psi_n$$

Q représente l'interaction réactive où les échanges relatifs à chaque harmonique sont effectués à la fréquence angulaire $2\omega_n$.

$$D = \sum_i^n \sum_j^n x_i y_j \cos(f(i,j,\psi_i,\psi_j))$$

D représente l'ensemble des termes croisés apparaissant dans l'écriture de $s(t)$. Ce terme traduit une composition "de distorsion" dont l'étude rigoureuse présente de nombreuses difficultés notamment du point de vue de sa mesure.

De ce fait, il apparaît essentiel de s'intéresser non pas à l'interaction instantanée mais à l'interaction décalée (4 - 6) sommée sur une période de la fondamentale. L'indépendance linéaire de chacune des fréquences harmoniques entraîne l'inexistence d'un terme d'interaction de distorsion décalée et justifie le sens physique des relations (4 - 2 à 4 - 6).

Le calcul conduit aux relations :

$$A_e(\tau) = \sum_{i=\alpha}^n \frac{x_n y_n}{2} \cos \psi_n \cdot \cos n\omega\tau \quad (4 - 22)$$

$$A_o(\tau) = \sum_0^n \frac{x_n y_n}{2} \sin \psi_n \cdot \sin n\omega\tau \quad (4 - 23)$$

$A_o(\tau)$ est en quadrature par rapport à $A_e(\tau)$.

L'interaction active peut alors être définie :

$$P = A_e(\tau=0) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t) dt \quad (4 - 24)$$

En considérant ψ_n , le déphasage relatif entre les grandeurs extensives et intensives au rang n, on distingue chacune des composantes y_n :

$$A_0(\tau) = \sum_n \frac{x_n}{2} \sin \psi_n \cdot y_n \sin n\omega\tau = \sum_n \frac{x_n}{2} \sin \psi_n \cdot y_n(\tau)$$

Soit $A'(\tau)$ l'interaction définie à l'aide de l'extensité en quadrature pour chaque harmonique.

Compte-tenu de la relation $\mathcal{H}(\sin \omega t) = j \cos \omega t$

$$A'(\tau) = j \sum_n \frac{x_n y_n}{2} \sin \psi_n \cos n\omega\tau$$

$A'(\)$ désigne une fonction paire permettant d'identifier l'interaction réactive à la relation suivante :

$$Q = A'(\tau=0) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot \mathcal{H}(y(t)) dt \quad \text{produit scalaire sur une période}$$

$$Q = \overline{x(t) \mathcal{H}(y(t))} = \overline{-y(t) \mathcal{H}(x(t))} \quad (4 - 25) \quad (\text{ en Watts })$$

L'antisymétrie de la relation précédente constitue une propriété valable pour tout régime. La vérification de cette propriété permet l'extension du concept à l'étude des régimes apériodiques.

B - Dynamique associée aux régimes apériodiques

Le produit scalaire est étendu à l'ensemble de l'observation.

$$\bar{Q} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \mathcal{H}(y(t)) dt \quad (4 - 26)$$

$y(t)$ étant un signal physique réel, (4 - 26) est équivalente à :

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \mathcal{F}_{f=0} (x(t) \cdot \mathcal{H}(y^*(t))) = [X(f) * (Y^*(-f) \cdot j \text{Sgn}(f))]_{f=0} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} j \text{Sgn}(f) X(f) \cdot Y^*(f) df \quad (4 - 27) \end{aligned}$$

Les grandeurs $x(t)$ et $y(t)$ étant définies causales, les parties réelles et imaginaires de leur spectre sont transformées de Hilbert l'une de l'autre. L'indice 1 étant rapporté aux parties réelles, l'interspectre s'écrit:

$$X(f) = X_1(f) + j \mathcal{H}(X_1(f))$$

$$Y^*(f) = Y_1(f) - j \mathcal{H}(Y_1(f))$$

$$S(f) = (X_1 Y_1 + \mathcal{H}(X_1) \mathcal{H}(Y_1)) + j (Y_1 \mathcal{H}(X_1) - X_1 \mathcal{H}(Y_1))$$

$$S_a(f) = (X_1 Y_1 + \mathcal{H}(X_1) \mathcal{H}(Y_1)) \quad (4-28-1) \text{ fonction paire}$$

$$S_r(f) = Y_1 \mathcal{H}(X_1) - X_1 \mathcal{H}(Y_1) \quad (4-28-2) \text{ fonction impaire}$$

Ces deux dernières relations généralisent l'expression (4-1).

D'autre part, le calcul de $Y(f) \cdot X^*(f)$ conduit à $S^*(f) = S_a - j S_r$.

L'intégration de ($S(f)$) conduit à écrire, compte-tenu de la fonction $\text{Sgn}(f)$:

$$\bar{Q} = \int_0^{+\infty} x(t) \mathcal{H}(y(t)) dt = 2 \int_0^{\infty} S_r(f) df = - \int_0^{\infty} y(t) \mathcal{H}(x(t)) dt$$

(4-29)

Cette relation constitue une expression du théorème de Parseval sur les grandeurs caractérisant les échanges réactifs d'énergie.

III ANALYSE ET DISSOCIATION DES ENERGIES

A - Généralités

Soit un processus de durée finie où $x(t)$ et $y(t)$ représentent les variables observables conjuguées au flux de puissance mesurées en entrée et sortie d'un système causal, réciproque et monodimensionnel.

On considère l'hypothèse restrictive (mais non nécessaire) d'un nombre de formes énergétiques égal à deux. Par exemple, l'analyse des réseaux électriques mène à trois formes respectivement définies par :

- la dissipation par effet Joule
- le stockage capacitif
- le stockage selfique

En se limitant à l'étude des systèmes incomplets (deux formes seulement), il est possible de développer un formalisme susceptible de dissocier les bilans relatifs à chacune des formes énergétiques. En effet, moyennant plusieurs hypothèses sur le temps d'observation des variables mesurées aux accès du système, on peut calculer, à un instant donné, la quantité d'énergie stockée dans l'ensemble du système et l'énergie dissipée depuis l'état initial supposé au repos. Le fait qu'en thermocinétique, il n'existe pas de forme équivalente au stockage selfique, permet de n'étudier que deux formes énergétiques.

L'étude effectuée au paragraphe précédent ne permet une dissociation que sous forme intégrale, c'est-à-dire portant sur l'ensemble d'un cycle thermodynamique. Les relations (4 - 8) et (4 - 16) conduisent à écrire :

$$\int_0^{\infty} W_{st}(t) dt = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} [x(t) y(t-\tau) - x(t-\tau) y(t)] \Big|_B^A dt d\tau \quad (4 - 30)$$

$$[W_d]_0^{\infty} = \int_0^{\infty} [x(t) y(t)] \Big|_B^A dt \quad (4 - 31)$$

Les bornes A et B désignent les plans d'entrée et de sortie du système. La relation (4 - 30) détermine l'histoire de l'énergie stockée (en J.s) entre les plans A et B. La relation (4 - 31) est assujettie à une borne infinie en raison du fait que le processus cyclique sur son ensemble est totalement dissipatif.

Cette propriété apparaît immédiatement si l'on considère que la relation (4 - 8) résulte d'un calcul d'intercorrélation à l'origine et que cette opération met en oeuvre des valeurs postérieures à tout instant où les variables sont non nulles. Ainsi, on peut être amené à rechercher dans quelle mesure l'intégrande par rapport à (τ) dans (4 - 30) peut être rapprochée de l'énergie stockée à un instant donné.

Le système physique étant défini par des lois de comportements, les relations (4 - 30) et (4 - 31) montrent que l'étude de l'histoire énergétique du processus ne nécessite pas l'étude de ces lois. La seule limite tient à la nécessité d'un état initial de repos du système.

L'étude suivante a pour objet de rechercher si, compte-tenu d'hypothèses correctes, les formes énergétiques peuvent être calculées et dissociées à tout instant déterminant le détail d'un cycle thermodynamique. Il apparaît alors que, indépendamment de la connaissance de la constitution précise du système, l'étude des variables conjuguées à l'énergie mesurées sur une ou plusieurs "surfaces de contrôle" englobant le système, mène à la séparation [30] du stockage et de la dissipation. Une étude rigoureuse, effectuée par Brun^o introduit un formalisme de base fondé sur les propriétés relatives à la [7] transformation double de Laplace^e appliquée à l'étude d'un système mécanique. Dans la suite de notre travail, nous introduisons les relations nécessaires au traitement du problème à l'aide d'un formalisme plus simple bien que mathématiquement plus faible. Nous prenons toutefois le soin d'insister sur le fait que les relations (4 - 30) et (4 - 31) résultent d'une analyse fréquentielle et sont compatibles avec le formalisme suivant.

B - Etablissement des relations de base

Les formes énergétiques sont en général définies à l'aide de grandeurs quadratiques; un système apte à stocker de l'énergie, fait intervenir ses variables d'état de façon quadratique dans la description de la mémoire du processus. La fonction de dissipation, d'autre part, s'exprime à l'aide du flux d'extensité mis en jeu élevé au carré.

Ainsi, compte-tenu de ce qui précède, on est amené à rechercher une relation entr'une grandeur quadratique et son expression à l'aide de fonctionnelles d'interaction décalées.

Soit \mathcal{C} la classe des fonctions absolument continues par morceaux (respectivement à nombre fini de points de discontinuité sur tout intervalle fini)

$x(t)$ désigne une variable d'état du système

$$x(t) \in \mathcal{C} \text{ et } \forall t \leq 0, x(t) = 0 \quad (4 - 32)$$

Au point $t = T$ on cherche à exprimer $x^2(T)$ sous forme d'une fonctionnelle compatible avec la définition de l'intégrale de Stieltjes :

$$x^2(T) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_k f[x(t_k, T)] \cdot \{g[x(t_k)] - g[x(t_{k-1})]\} \quad (4 - 33)$$

$$\{f(x), g(x)\} \in \mathcal{C}$$

Si $f(x)$ et $g(x)$ sont deux expressions simples de la fonction $x(t)$ telle que leurs supports respectifs soient disjoints, l'expression (4 - 33) garde un sens convergent et l'intégrale de Stieltjes ainsi définie possède la propriété de pouvoir être calculée par parties.

On définit alors les deux applications suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} t \xrightarrow{f(x)} x(t) \\ t \xrightarrow{g(x)} x(2T-t) \end{array} \right\} \quad (4 - 34)$$

Si on s'intéresse aux instants $t \in [0, T]$, les points de discontinuités respectifs de f et g sont répartis sur un support $[0, 2T]$; f et g ne possèdent aucun point de discontinuités en commun.

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} x^2(T) &= [x(t) \cdot x(2T-t)]_{t=0}^{t=T} \\ &= \int_0^T x(t) dx(2T-t) + \int_0^T x(2T-t) dx(t) \\ x^2(T) &= \int_0^T [x(2T-t) \cdot \dot{x}(t) - x(t) \cdot \dot{x}(2T-t)] dt \quad (4 - 35 - 1) \end{aligned}$$

$$[x(0) = 0, x \in \mathcal{C}]$$

Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux fonctions causales et continues presque partout sur l'intervalle $[0, 2T]$. On désigne par $B(T)$ la forme bilinéaire $B_T(x, y)$ suivante :

$$B(T) = \int_0^T [x(2T-t) y(t) - x(t) y(2T-t)] dt \quad (4 - 36)$$

En posant $\tau = 2T-t$:

$$B(T) = \int_0^T x(2T-t) y(t) dt + \int_{2T}^T x(2T-\tau) y(\tau) d\tau$$

$$B(T) = \int_0^T - \int_T^{2T} [x(2T-t) y(t)] dt \quad (4 - 37)$$

La forme bilinéaire peut être considérée comme un opérateur noté \int^T appliqué au couple de fonctions $x(t)$ et $y(t)$.

Lorsque $y(t) = \dot{x}(t)$, la relation (4 - 36) entraîne :

$$B_T(x,x) = \int^T x(2T-t) x(t) dt = 0 \quad (4 - 38)$$

Lorsque $y(t) = x(t)$, la forme quadratique $x^2(T)$ analogue à (4 - 35 - 1) peut s'écrire :

$$B_T(x,x) = x^2(T) = \int^T x(2T-t) x(t) dt = \int_0^T - \int_0^{2T} x(2T-t) \dot{x}(t) dt$$

(4 - 35 - 2)

Lorsque la fonction $x(t)$ n'est pas assujettie à la causalité, les relations (4 - 35) deviennent :

$$x^2(T) - x(0) x(2T) = \int^T x(2T-t) \dot{x}(t) dt \quad (4 - 39)$$

L'étude des systèmes linéaires conduit couramment à la formulation triviale de $x^2(T)$:

$$x^2(T) = 2 \int_0^T x(t) \dot{x}(t) dt \quad (4 - 40)$$

La différence essentielle entre (4 - 40) et (4 - 35) réside dans le fait que (4 - 35) fait intervenir les valeurs de la fonction calculée en deux régimes différents décalés dans le temps et permet d'introduire l'opérateur \int^T applicable au sens des travaux virtuels, aux équations de comportement d'un système.

Le produit $x(T) y(T)$ peut être défini de la même façon que (4 - 35 - 1)

Compte-tenu des mêmes hypothèses :

$$x(T) \ y(T) = \left[x(t) \ y(2T-t) \right]_0^T = \int_0^T y(2T-t) \dot{x}(t) dt \quad (4 - 41)$$

C - Application aux équations de comportement d'un système thermique

Les variables conjuguées au flux d'entropie sont assujetties au principe des travaux virtuels discuté précédemment (ch II, § 4). La figure (IV - 10) représente une configuration multicouche monodimensionnelle, où l'on suppose homogène chacun des constituants.

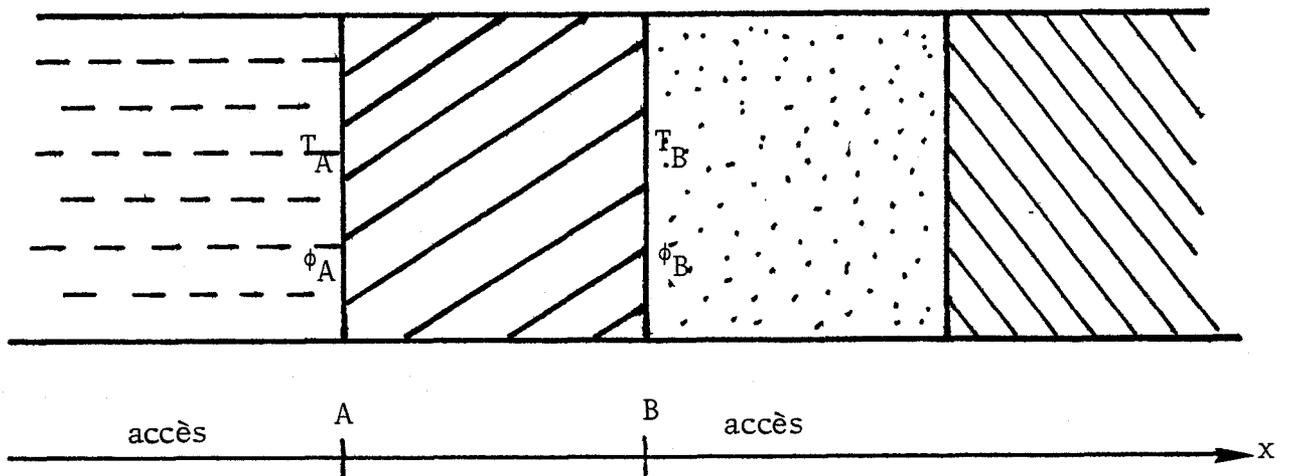


figure (IV - 10)

Les points A et B constituent les accès du système. Entre ces deux limites, la température et le flux thermique définis localement, sont des variables cachées. Ainsi, avec le flux d'entropie défini localement, les grandeurs énergétiques telles que la densité linéique de dissipation et de potentiel constituent des variables cachées. On cherche à relier ces dernières grandeurs aux observables mesurées aux accès, afin d'obtenir la dissipation et le stockage de façon globale. A cet effet, nous appliquons [6] [18] à la thermique le principe des travaux virtuels en considérant deux régimes distincts notés (1 § 2) compatibles avec les équations de comportement à deux instants distincts.

Les observables sont définis aux points A et B du système pour chacun des régimes.

Soient $\theta_A, \phi_A, \theta_B, \phi_B$.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} &= -\frac{1}{\lambda} \phi_1 \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} &= -g \frac{d\theta_2}{dt} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \phi_2 \\ \theta_1 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\partial \phi_2 \theta_1}{\partial x} = -\frac{1}{\lambda} \phi_1 \phi_2 - g \theta_1 \dot{\theta}_2 \end{array} \right\} \text{d'où}$$

$$[\phi_2 \theta_1]_A - [\phi_2 \theta_1]_B = \int_A^B \left(\frac{\phi_1 \phi_2}{\lambda} + g \theta_1 \dot{\theta}_2 \right) dx \quad (4 - 42)$$

A l'instant $t = T$ les deux formes énergétiques globales se définissent respectivement :

$$U(T) = \frac{1}{2} \int_A^B g \theta^2(x, T) dx \quad (4 - 43)$$

$$\mathcal{D}(T) = \int_A^B \int_0^T \frac{\phi^2(x, t)}{\lambda} dt dx \quad (4 - 44)$$

Ces deux dernières relations s'interprètent au sens de (2 - 30) et de (2 - 33) compte-tenu du fait que (2 - 33) exprime une dissipation instantanée. Le facteur constant (1/T₀) n'est pas explicité afin de conserver un sens plus général aux relations.

Recherche de la somme des formes (U + D)

$$\phi_2 = \phi(t) \quad \text{et} \quad \theta_1 = \theta(t)$$

$$[\phi(t) \theta(t)]_B^A = \int_A^B \frac{\phi^2(x, t)}{\lambda} dx + \int_A^B g \theta(x, t) \frac{d\theta(x, t)}{dt} dx$$

$$U(T) + \mathcal{D}(T) = \int_0^T [\phi(t) \cdot \theta(t)]_B^A dt \quad (4 - 45)$$

Recherche du potentiel thermique U

$$\text{Soit } \phi_2 = \phi(t) \quad \text{et} \quad \theta_1 = \theta(2T-t)$$

La relation (4 - 42) conduit à écrire :

$$[\phi(t) \theta(2T-t)]_B^A = \int_A^B \left[\frac{1}{\lambda} \phi(t) \cdot \phi(2T-t) + g \theta(2T-t) \cdot \dot{\theta}(t) \right] dx$$

En intégrant les deux membres de cette expression à l'aide de l'opérateur

$$\int^T = \int_0^T - \int_T^{2T}, \text{ compte-tenu du fait que ce dernier est commutable avec}$$

l'intégration spatiale :

$$\int^T [\phi(t) \theta(2T-t)]_B^A = \frac{1}{\lambda} \int_A^B \int^T \phi(t) \phi(2T-t) dt dx + \int_A^B \int^T g \theta(2T-t) \dot{\theta}(t) dt dx$$

Le premier terme du second membre est identiquement nul en tout point compte-tenu de la relation (4 - 38). L'intégrande en x du deuxième terme peut être rapportée aux relations (4 - 35, 1 et 2) soit :

$$\int^T [\phi(t) \theta(2T-t)]_B^A = \int_A^B g \theta^2(T, x) dx = 2 U(T)$$

$$U(T) = \frac{1}{2} \int_0^T [\theta(t) \phi(2T-t) - \theta(2T-t) \phi(t)]_A^B dt \quad (4 - 46)$$

Il résulte de la relation (4 - 46) que le stockage énergétique calculé à un instant $t = T$, nécessite la connaissance des observables aux accès du système mesurés à l'instant $t = 2T$; les relations (4 - 45) et (4 - 46) permettent alors la dissociation des formes énergétiques. L'application du principe des travaux virtuels à l'aide de deux régimes admissibles vis à vis des équations de comportement correspond à un raisonnement fréquent en physique. Cependant, l'association de deux états provenant d'un même régime observé à deux instants différents constitue une hypothèse supplémentaire permettant d'appliquer l'opérateur \int^T ; La même hypothèse, adjointe au théorème de Tellegen permet en électricité de déterminer la différence entre les énergies électrostatiques et magnétiques d'un système. Nous avons supposé implicitement que d'une part, la différence de température en deux points ne dépend pas du chemin d'observation puisque la température est une variable d'état, et que d'autre part, l'ensemble des flux thermiques confluant en un point est nulle puisque le système ne dispose pas de sources internes ($\overrightarrow{\text{div}} \cdot \vec{\phi} = 0$). Ces considérations, triviales en thermique, sont essentielles en électricité puisqu'à la base de la loi des mailles et des noeuds.

D - Etude des formes énergétiques lors d'une transition entre deux états stables

La matrice impédance thermique d'un système multicouche possède une symétrie par rapport à sa diagonale traduisant la propriété de réciprocité et les relations (4 - 43) et (4 - 44) gardent leur signification si λ et g sont des fonctions de l'abscisse x . Ainsi, les démonstrations des relations (4 - 45) et (4 - 46) restent cohérentes quelle que soit la constitution du système entre les accès A et B.

Quelle que soit la sollicitation imposée sur la face d'entrée en supposant un processus pour lequel les observables s'établissent à des valeurs stables au-delà d'un temps fini, la relation (4 - 46) conduit à écrire :

$$U_{1,2} = \frac{1}{2} \int_0^{\Gamma=\infty} [\theta(t)\phi^\infty - \theta^\infty\phi(t)]_A^B dt \quad (4 - 47)$$

Le stockage associé à la transition entre les états 1 et 2 s'exprime de façon simple en considérant les valeurs ($\theta^\infty, \phi^\infty$) associées à l'état 2 stabilisé. La borne Γ de l'intégrale peut être choisie non infinie compte-tenu de la vitesse de convergence vers l'état stable 2.

En supposant la face de sortie du système (B) appesée le long d'un puits thermique, la relation (4 - 47) peut s'exprimer en fonction du noyau d'impédance défini à l'entrée du système :

$$U_{1,2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty [\theta^\infty \phi(t) - \int_0^t z(t-u) (u) du] dt \quad (4 - 48)$$

Cas d'une sollicitation indicielle en flux; ϕ_0

$$\begin{aligned} \text{soit } \phi_A &= 0 \quad \forall t \leq 0 \\ \phi_A &= \phi_0 \quad \forall t > 0 \end{aligned}$$

$$U_\infty = \frac{\phi_0}{2} \int_0^\infty (\theta^\infty - \theta(t)) dt \quad (4 - 49)$$

Cas d'une sollicitation indicielle en température: θ_0

$$\begin{aligned} \text{soit } \theta_A &= 0 \quad \forall t \leq 0 \\ \theta_A &= \theta_0 \quad \forall t > 0 \end{aligned}$$

$$U_\infty = \frac{\theta_0}{2} \int_0^\infty (\phi(t) - \phi^\infty) dt \quad (4 - 50)$$

Ces deux derniers cas sont affectés d'un stockage nul si le système ne comporte pas d'éléments capacitifs. En effet, $\phi(t) = \theta_\infty$ et $\phi(t) = \phi(t)$ à tout instant. (4 - 49) et (4 - 50) constituent des relations générales assimilables aux formules d'Heaviside usuellement établies à l'aide de méthodes d'intégration dans le plan complexe. L'établissement du régime permanent en thermique peut ainsi être traité de façon simple du point de vue énergétique.

Corrélativement à l'étude du stockage, la dissipation peut être calculée séparément compte-tenu des relations (4 - 45) et (4 - 47)

Dans le cas d'une transition quelconque entre deux états stables :

$$\mathcal{D}_{1,2} = \int_0^{\Gamma=\infty} \left[\alpha(t) \left(\phi(t) + \frac{\phi_\infty}{2} \right) - \frac{\phi_\infty}{2} \phi(t) \right]_B^A dt \quad (4 - 51)$$

Pour une sollicitation indicielle en flux ϕ_0 , l'accès B étant apposé sur un puits thermique :

$$\mathcal{D}_\infty = \frac{\phi_0}{2} \int_0^\infty (3\theta(t) - \theta_\infty) dt \quad (4 - 52)$$

Pour une sollicitation indicielle en température θ_0 , la même configuration conduit à :

$$\mathcal{D}_\infty = \frac{\theta_0}{2} \int_0^\infty (\phi(t) + \phi_\infty) dt \quad (4 - 53)$$

Le cas trivial des systèmes non capacitifs mène simultanément avec (4 - 52) et (4 - 53) à l'expression :

$$\mathcal{D}_t = \phi_0 \theta_0 \cdot t = R\phi_0 t \quad ; \text{ le résultat est évident quant à l'analogie électrique.}$$

Les relations (4 - 51) à (4 - 53) ne sont pas assujetties à une borne infinie; en effet, d'un point de vue expérimental, si l'on définit un critère de limite tel que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \Gamma_0 \text{ tel que } | \phi(\Gamma_0) - \phi_\infty | \text{ ou } | \theta(\Gamma_0) - \theta_\infty | < \epsilon \Rightarrow | \mathcal{D}_\infty - \mathcal{D}(\Gamma_0) | < \epsilon$$

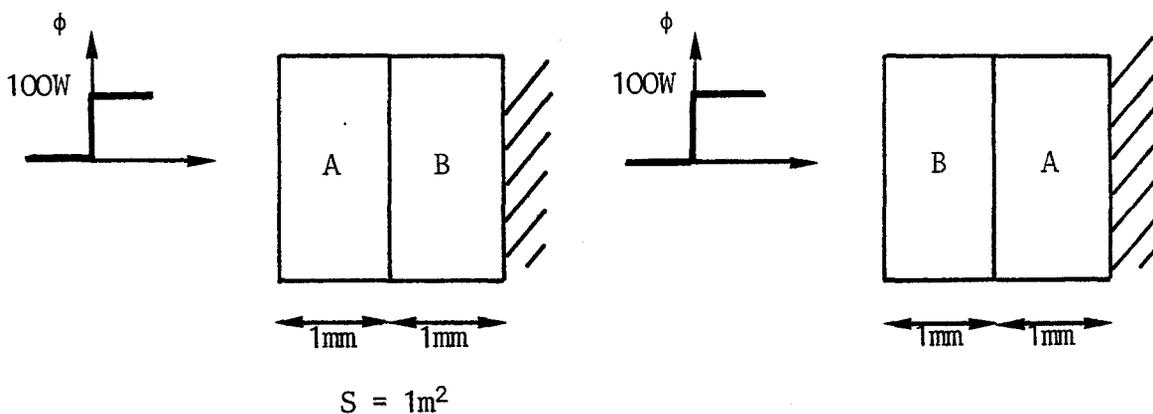
La borne Γ_0 peut être choisie par exemple lorsque les variables θ ou ϕ ont pour valeur 99% de θ_∞ ou ϕ_∞ .

Ce choix est arbitraire et les relations ne permettent pas d'accéder à la détermination du temps τ_0 au-delà duquel le régime est considéré établi.

Le problème de la classe de signaux optimum susceptible d'établir un régime stable donné en un temps imposé, peut être abordé à l'aide de la relation (4 - 51) compte-tenu de l'expression du noyau d'impédance. Cependant, les lois de comportement du système contribuent à minimiser la dissipation quelle que soit l'évolution interne du système conformément à la conclusion relative à la relation (2 - 36).

E - Application à la caractérisation des grandeurs énergétiques dans un matériau bicouche

On considère un matériau bicouche constitué de deux feuilles de plexiglass et de caoutchouc superposées. (figure IV - 11) . Lorsque cet assemblage est disposé à la surface d'un puits thermique, le comportement du système, du point de vue énergétique, diffère suivant que la configuration du bicouche est du type (A-B) ou (B-A). En effet, les valeurs de l'impédance d'entrée de chacune des configurations conditionnent à chaque instant les valeurs des énergies stockées et dissipée dans l'ensemble du système et ce dernier n'est pas invariant vis à vis d'une permutation des deux accès.



$T_0 = 273^\circ\text{K}$

A = plexiglass
B = caoutchouc

$R_A = 5,55 \cdot 10^{-3} \text{K/W}$
 $R_B = 2,70 \cdot 10^{-3} \text{K/W}$

$C_A = 1,6 \cdot 10^3 \text{J/K}$
 $C_B = 1,9 \cdot 10^3 \text{J/K}$

figure (IV - 11)

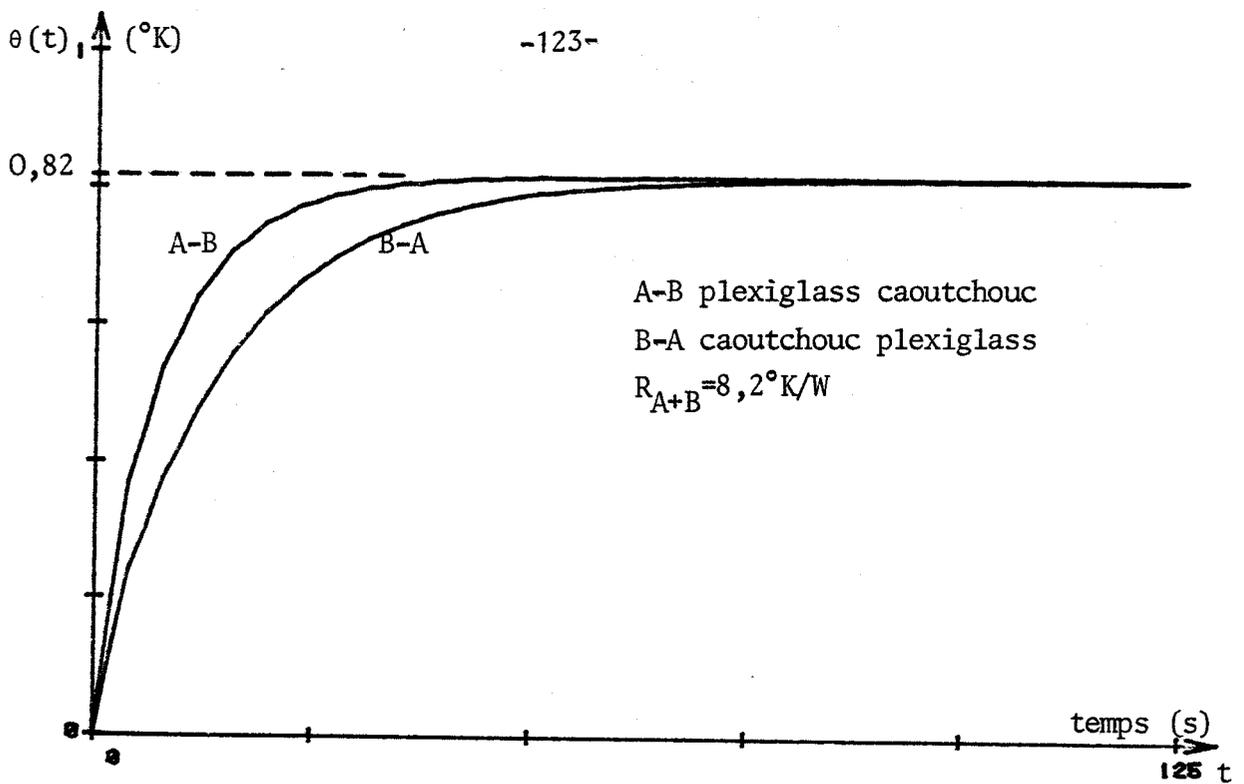


figure (IV - 12) : EVOLUTION DE LA TEMPERATURE A L'ENTREE D'UN BICOUCHE
SOL LICITE PAR UN ECHELON DE FLUX $\phi_0 = 100\text{W}$

Pour une sollicitation indicielle en flux, la température calculée sur l'accès de chacune des structures est représentée figure (IV - 12). L'évolution des systèmes est observée pendant une durée de 250 secondes au-delà de laquelle le régime permanent est obtenu quelle que soit la configuration étudiée. Il en résulte la possibilité d'exprimer à chaque instant les valeurs des énergies stockée et dissipée entre l'origine du processus et l'instant $T = 125$ secondes. En effet, l'application des relations (4 - 45) et (4 - 46) conduit aux résultats représentés figures (IV - 13) et (IV - 14).

La configuration (A - B) pour laquelle le régime permanent est obtenu le plus rapidement est affectée d'un stockage inférieur à celui observé pour la configuration (B - A). Cet état de fait résulte en première approximation du compromis existant entre la capacité du matériau disposé en entrée et la résistance de celui disposé sur le puits.

$C_{\text{caoutchouc}} > C_{\text{plexiglass}}$
 $R_{\text{caoutchouc}} < R_{\text{plexiglass}}$

\Rightarrow stockage plus important dans la configuration
 (B - A) après quelques secondes

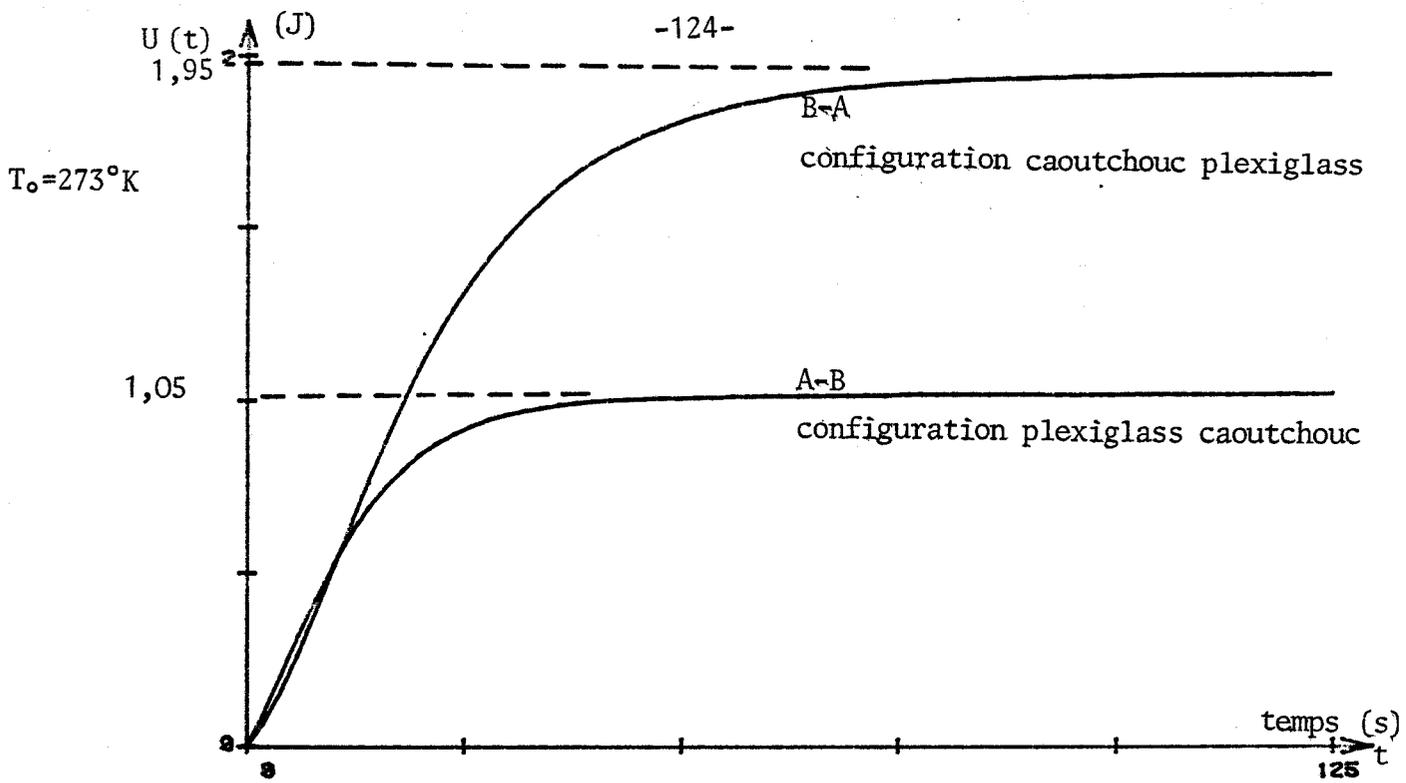


figure (IV - 13) : INFLUENCE DE LA PERMUTATION DES ACCES D'UN SYSTEME BICOUCHE SUR LE STOCKAGE D'ENERGIE UTILISABLE

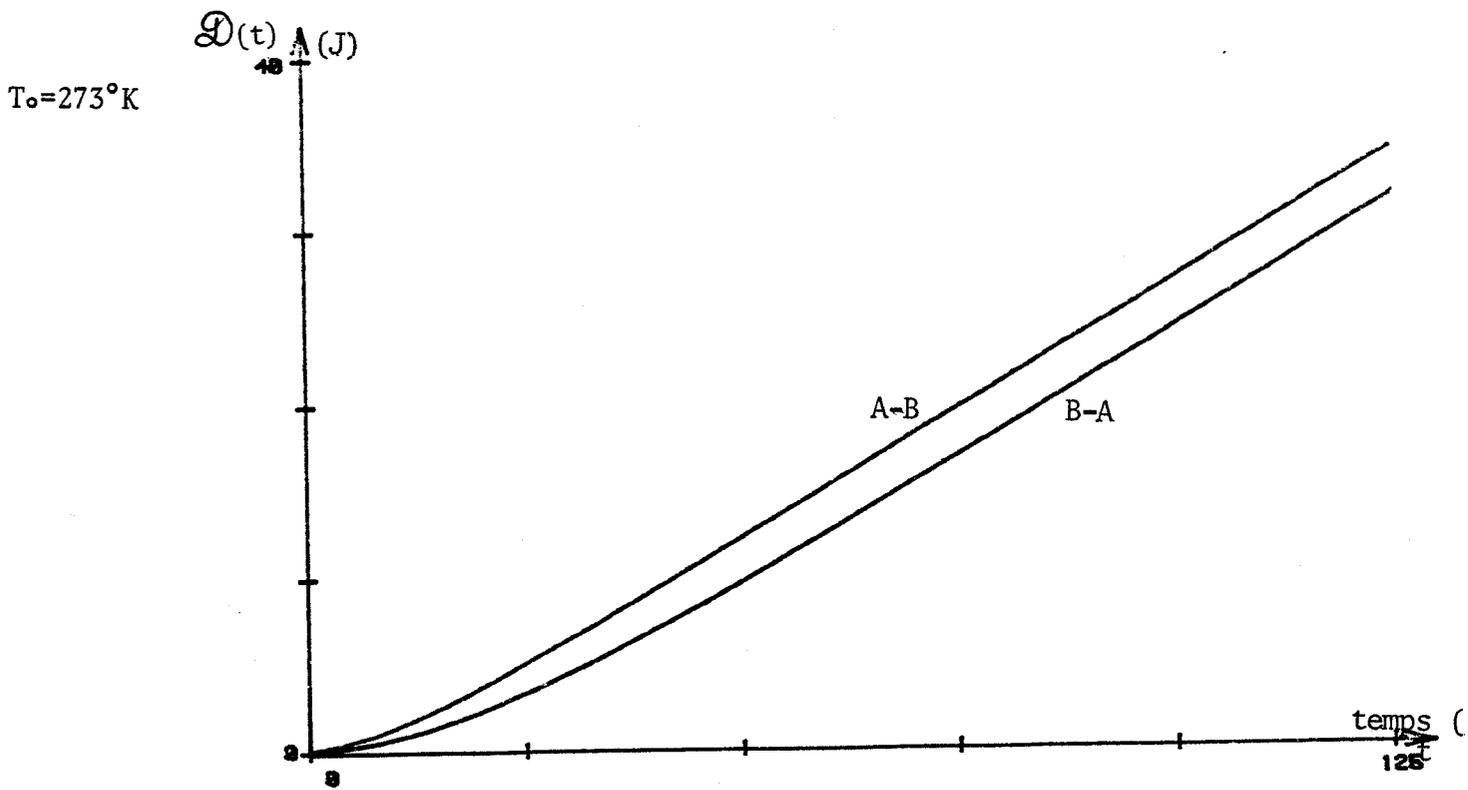


figure (IV - 14) : INFLUENCE DE LA PERMUTATION DES ACCES D'UN SYSTEME BICOUCHE SUR LA DISSIPATION ENERGETIQUE

L'évolution du stockage au début du processus est régie uniquement par la valeur de l'effusivité du matériau situé en entrée, conformément aux relations (3 - 5) et (3 - 6). En effet, si R.C désigne le temps propre de ce matériau, compte-tenu de la relation (3 - 46) on peut écrire :

$$U_T = \frac{\phi_0}{2T_0} \int_0^T \theta(2T-t) - \theta(t) dt \quad (4 - 54)$$

et $VT < RC/8$
$$U_T = \frac{\phi_0}{T_0 b \sqrt{\pi}} \int_0^T (\sqrt{2T-t} - \sqrt{t}) dt = \frac{4\phi_0(\sqrt{2}-1)}{3bT_0\sqrt{\pi}} T^{3/2} \quad (4 - 55)$$

L'effusivité du plexiglass étant inférieure à celle du caoutchouc, le processus est caractérisé par un stockage prépondérant dans la configuration (A - B) aux instants initiaux.

L'énergie dissipée entre un instant donné et le début du processus est représentée figure (IV - 14). Le régime permanent est caractérisé par une pente constante proportionnelle à la résistance de l'ensemble. Les deux tracés parallèles caractérisent la différence des dissipations observées pour les deux configurations.

De la même manière que pour le stockage, seule l'effusivité du matériau disposé en entrée conditionne la dissipation. Compte-tenu de la relation (3 - 6), (4 - 45) et (4 - 46) conduisent à écrire pour une sollicitation indicielle en flux :

$$\mathcal{D}(T) = \frac{\phi_0}{2T_0} \int_0^T [3\theta(t) - \theta(2T-t)] dt \quad (4 - 56)$$

Soit pour $T < RC/8$

$$\mathcal{D}(T) = \frac{2\phi_0(2-\sqrt{2})}{3bT_0\sqrt{\pi}} T^{3/2} \quad (4 - 57)$$

L'effusivité du plexiglass étant inférieure à celle du caoutchouc, le processus est caractérisé par une dissipation prépondérante dans la configuration (A - B) aux instants initiaux.

En conclusion, les tracés relatifs au stockage et à la dissipation permettent de différencier le comportement énergétique des deux structures et la mise en évidence de la différence fondamentale existant entre l'énergie interne (grandeur imposée à l'entrée, identique pour les deux configurations) et l'énergie utilisable.

CHAPITRE V

RESULTATS EXPERIMENTAUX

I COMPORTEMENT D'UN SYSTEME THERMIQUE MODELISE A L'AIDE D'UNE LIGNE ELECTRIQUE

L'étude des transferts thermiques à travers une paroi et de la conduction électrique dans une ligne à constantes réparties mène à des équations de comportement homologues.

La vérification précise des principes développés précédemment , notamment de la relation (4 - 10), peut être effectuée de deux façons :

- a) Utilisation des données résultant de simulations sur microordinateur.
- b) Exploitation de mesures effectuées expérimentalement sur une ligne électrique dont les paramètres convenablement choisis se rapportent de façon simple à ceux d'une paroi constituée d'un matériau donné.

a) Le principe consiste, pour une sollicitation en flux ou en température, à calculer en tout point de chaque couche homogène constituant le matériau, la température et le flux à chaque instant. Ces résultats sont obtenus à l'aide de l'analyse harmonique, les matrices de transfert étant définies dans le domaine fréquence. Le stockage et la dissipation énergétique peuvent ainsi être calculés à chaque instant ou en moyenne sur une période définie.

D'autre part, les valeurs calculées du flux et de la température à l'entrée du système sont stockées sur disquette afin d'être intercorrelées par la suite.

Un découpage du matériau en 40 tranches est nécessaire pour l'exécution d'un bilan "en chaque point" avec une erreur inférieure à 5%. En revanche, la valeur définie à partir de l'intercorrélation des variables calculées en entrée n'est entachée que d'une erreur négligeable.

La structure des programmes nécessaires aux simulations est décrite en annexe.

- b) Adaptation des paramètres d'une ligne électrique à la modélisation d'une paroi.

L'étude expérimentale du stockage d'énergie utilisable nécessite une mesure simultanée en chaque plan du matériau, de la température et du flux. La réalisation d'un tel système n'est pas envisageable dans le cadre de mesures thermiques en raison des perturbations introduites par l'ensemble des capteurs et des résistances de contact résultant de l'assemblage.

D'autre part, l'étude de parois "lourdes" à l'intérieur desquelles l'inclusion des capteurs n'engendrerait pas de perturbations sensibles, nécessiterait des temps de mesure prohibitifs (plusieurs jours). Il nous est donc apparu nécessaire de modéliser le comportement des systèmes thermiques à l'aide de lignes électriques constituées de "cellules discrètes" RC de telle sorte que l'étude des variables $\theta(x,t), \phi(x,t)$ respectivement ($V(x,t), I(x,t)$) se ramène uniquement à des mesures de tension.

L'instrumentation utilisée étant caractérisée par une très forte impédance en entrée ($10^{12}\Omega$), les perturbations introduites dans le système peuvent être négligées.

Les lignes électriques utilisées sont constituées d'un ensemble de 10 cellules RC connectées en cascade. Le comportement d'un tel système, notamment la mesure de l'impédance effectuée sur un accès, est sensiblement identique à celui d'une ligne à constantes distribuées pour des fréquences n'excédant pas $(100/RC)\text{Hz}$.

Choix du système et calcul des paramètres

La relation biunivoque entre les paramètres thermiques et électriques peut être établie compte-tenu des relations :

$$\left. \begin{array}{l} RC = \frac{l^2}{a} \quad \text{et} \quad \frac{R}{C} = \frac{1}{b^2} \\ \text{soit} \\ C \rightarrow \frac{l \cdot b}{\sqrt{a}} \quad \text{et} \quad R \rightarrow \frac{1}{b\sqrt{a}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{où} \quad a = \text{diffusivité du système thermique} \\ \quad \quad b = \text{effusivité du système thermique} \\ \quad \quad l = \text{longueur du système thermique ou} \\ \quad \quad \quad \text{de la ligne électrique} \\ \quad \quad R = \text{résistance globale de la ligne thermique} \\ \quad \quad \quad \text{ou électrique} \\ \quad \quad C = \text{capacité globale de la ligne thermique} \\ \quad \quad \quad \text{ou électrique} \end{array}$$

L'application formelle de ces relations ne permet pas d'envisager directement la réalisation d'une ligne homologue à un quelconque matériau. En effet les capacités nécessaires à une telle modélisation seraient de l'ordre de plusieurs centaines de Farads.

Exemple : Modélisation d'une vitre de plexiglass de surface unitaire

$$a = 1,15 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{sec}$$

$$b = 538 \text{ W}\sqrt{\text{sec}}/\text{m}^2 \cdot \text{K}$$

$$\frac{C}{l} = 1,586 \cdot 10^3 \text{ Farads par mm d'épaisseur de paroi soit 158 Farads pour une cellule.}$$

Le transposition thermique électrique est effectuée en considérant un coefficient d'homologie $\alpha=10^{-8}$ tel que $C_{el} = 10^{-8} C_{th}$ et en conservant l'échelle des temps telle que $R_{th} C_{th} = R_{el} C_{el}$.

La modification d'effusivité de la ligne se traduit par les correspondances suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} V_{el} \leftrightarrow \theta_{th} \\ I_{el} \leftrightarrow \phi_{th} \cdot 10^{-8} \\ R_{el} \leftrightarrow R_{th} \cdot 10^8 \\ C_{el} \leftrightarrow C_{th} \cdot 10^{-8} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \delta W_{st,el} = \frac{1}{2} \delta C V^2 \leftrightarrow \frac{1}{2} \delta \frac{C_{th} \theta^2}{T_0} \cdot 10^{-8} = \delta W_{st,th} \\ \delta W_{dis,el} = \delta R I^2 \leftrightarrow \delta \frac{R_{th} \phi^2}{T_0} \cdot 10^{-8} = \delta W_{dis,th} \end{array}$$

Modélisation d'une vitre de plexiglass

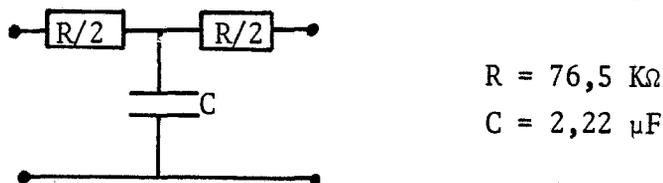
Une vitre d'épaisseur 1,4mm et de surface 1m² possède les caractéristiques suivantes :

$$R_{th} = 7,64 \cdot 10^{-3} \text{K/W}$$

$$C_{th} = 2,226 \cdot 10^3 \text{J/K}$$

temps propre du système : $RC = 17,04$ secondes

La modélisation de ce système conduit à l'assemblage de 10 cellules en cascade.



$$R = 76,5 \text{ K}\Omega$$

$$C = 2,22 \text{ }\mu\text{F}$$

figure (V - 1) : Elément constitutif du système électrique équivalent à la paroi étudiée

Un tel modèle ne peut être représentatif du comportement réel que dans une gamme de fréquence limitée. En effet, en supposant la sortie de la ligne court-circuitée, lorsque la fréquence n'excède pas 20 Hz, les variations du module et de la phase de l'impédance sont analogues pour les deux systèmes. Le comportement ne peut diverger qu'en haute fréquence lorsque l'interaction de la première cellule constitue une part prépondérante dans l'ensemble du processus. En d'autres termes, la convergence vers R/2 du module de l'impédance en haute fréquence est équivalente à la présence d'une mesure de Dirac à l'origine du temps quant à la réponse impulsionnelle.

Les mesures effectuées ont pour objet de vérifier que l'évolution de la dissipation et du stockage énergétique dans l'ensemble du système, est susceptible d'être étudié par la seule connaissance des observables à l'entrée. Dans le cas de sollicitations périodiques définies par un spectre quelconque, un ensemble de mesures doit être effectué en chaque point de la ligne pour définir les variables $V(t,n)$, $I(t,n)$ $0 < n < 10$. L'acquisition des données est effectuée de façon automatique sur une durée strictement égale à la période de récurrence du motif de la sollicitation. On observe de cette façon la répartition spatiale du stockage et de la dissipation dans l'ensemble du système après calcul des moyennes quadratiques des variables au cours du temps.

L'ensemble de ces mesures permet d'accéder à l'énergie moyenne stockée et à l'énergie moyenne dissipée au cours d'une période. Ces deux dernières grandeurs peuvent être comparées à celles définies à partir du traitement relatif aux variables mesurées en entrée. La figure (V - 2) illustre de façon synoptique l'ensemble des mesures et du traitement effectué.

L'acquisition des données est effectuée sur 200 points ou 400 points pour les fréquences très basses. L'erreur observée dans les deux procédures reste inférieure à 5% dans tous les cas. Pour une fréquence supérieure à 0,1 Hz, le calcul en 400 points permet de réduire les erreurs à moins de 0,5%.

L'impédance et l'admittance du système sont représentées par les courbes des figures (V 3 & 4) et (V 5 & 6). Les mesures ayant été effectuées pour des sollicitations en tension, l'admittance en entrée constitue la grandeur fondamentale régissant les échanges énergétiques dans l'ensemble du système. La fréquence de récurrence des motifs imposés est échelonnée entre 0 et 1 Hz en 50 points.

Pour chacune des fréquences étudiées, nous avons comparé :

- les signaux mesurés en entrée et les résultats relatifs à leur intercorrélation.
- les signaux simulés en entrée et les résultats relatifs à leur intercorrélation.
- l'EMS et la dissipation obtenues par les mesures en tous points du système.

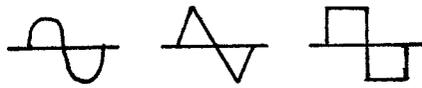
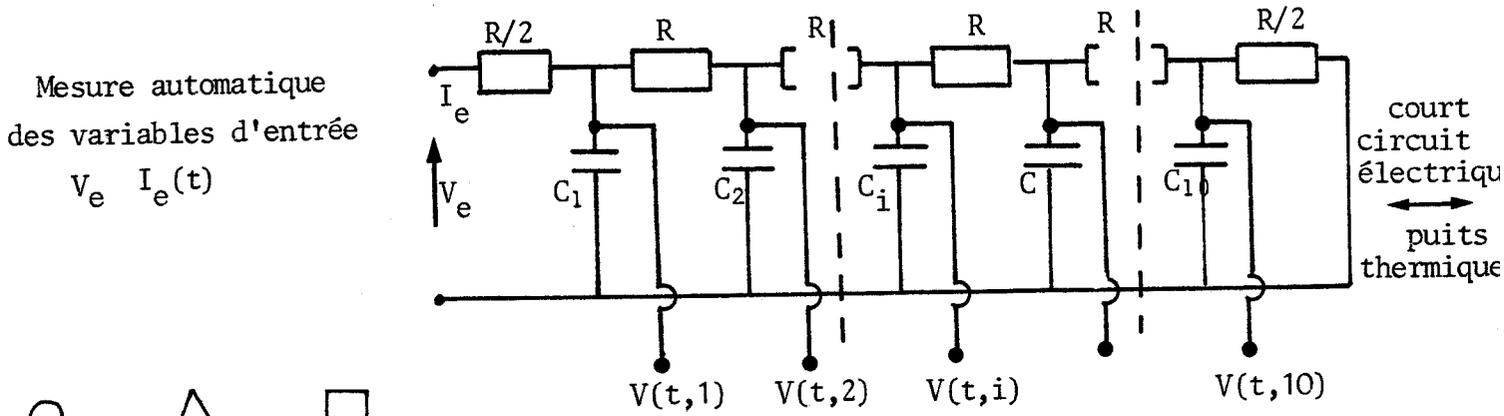
Les motifs récurrents de période T sont respectivement

amplitudes
5 Volts
($\leftrightarrow \theta = 5K$)

| | |
|---|--------------------------------------|
| { | - sinusoïdaux |
| | - triangulaires (motif pauvre en HF) |
| | - carrés (motif riche en HF) |

figure (V - 2) : SYNOPTIQUE DU TRAITEMENT EFFECTUE SUR LES MESURES EN CHAQUE POINT DE LA LIGNE ELECTRIQUE EQUIVALENTE

V_e et I_e constituent les observables en entrée.
 La mesure de I_e est effectuée à l'aide de la première résistance. Cette dernière doit être mesurée à 0,1% près.
 ($R/2 = 37870\Omega$)



Motif des sollicitations V_e imposées

• Intercorrélation

$$R_{VI}(\tau) \quad 0 < \tau < T$$

• Séparation des parités

A_e partie paire \longrightarrow obtention de la dissipation

$$A_e(0) = \overline{W}_{dis} \quad \longleftrightarrow \quad \overline{W}_{dis} = \sum_0^{10} R_i \frac{1}{T} \int_0^T I_i^2 dt$$

A_o partie impaire

obtention du stockage

$$\frac{1}{4} \int_0^{T/2} A_o(\tau) d\tau = \overline{W}_{st} \quad \longleftrightarrow \quad \overline{W}_{st} = \sum_0^{10} C_i \frac{1}{T} \int_0^T V_i^2 dt$$

remarque : L'acquisition des mesures est effectuée à l'aide d'un programme réalisé en langage machine (6502).

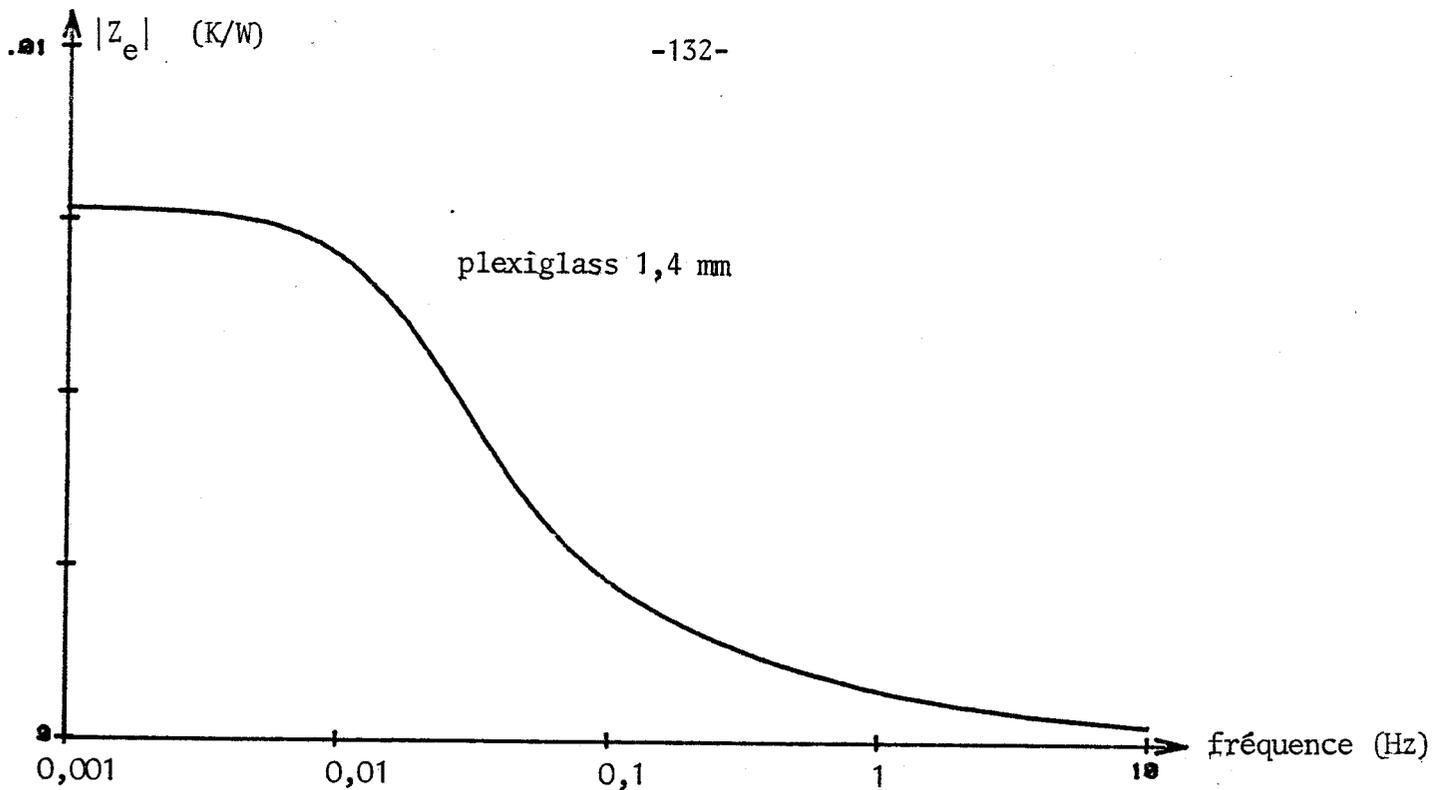


figure (V-3) : EVOLUTION DU MODULE DE L'IMPEDANCE D'ENTREE EN FONCTION DE LA FREQUENCE

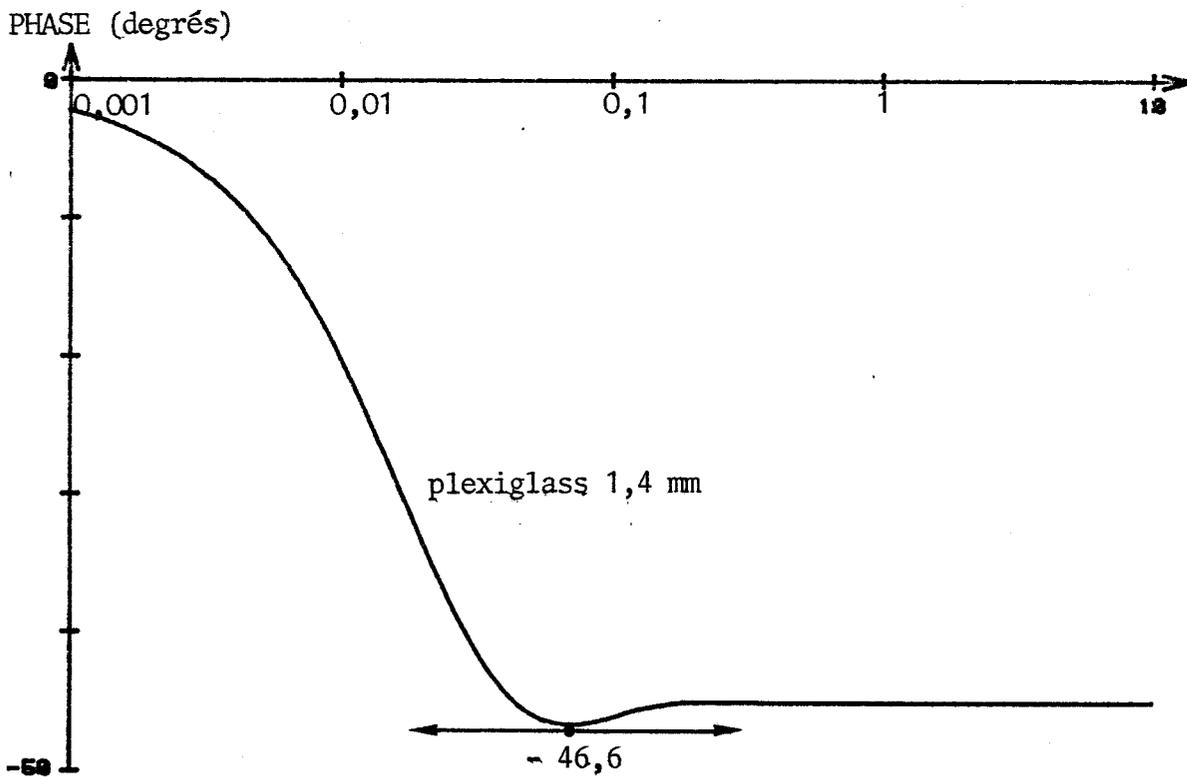


figure (V-4) : EVOLUTION DE L'ARGUMENT DE L'IMPEDANCE D'ENTREE EN FONCTION DE LA FREQUENCE

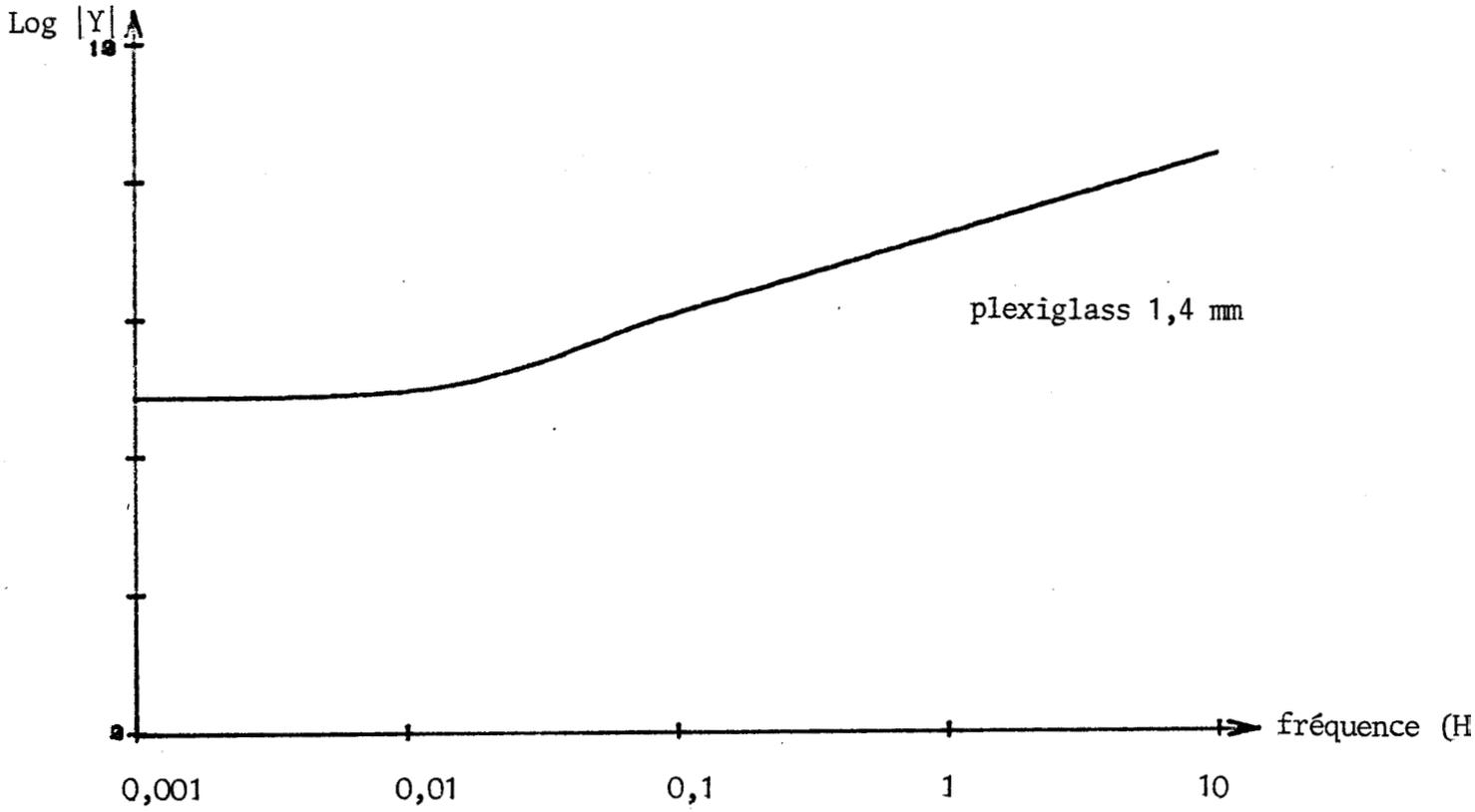


figure (V-5) : EVOLUTION DU MODULE DE L'ADMITTANCE THERMIQUE EN FONCTION DE LA FREQUENCE

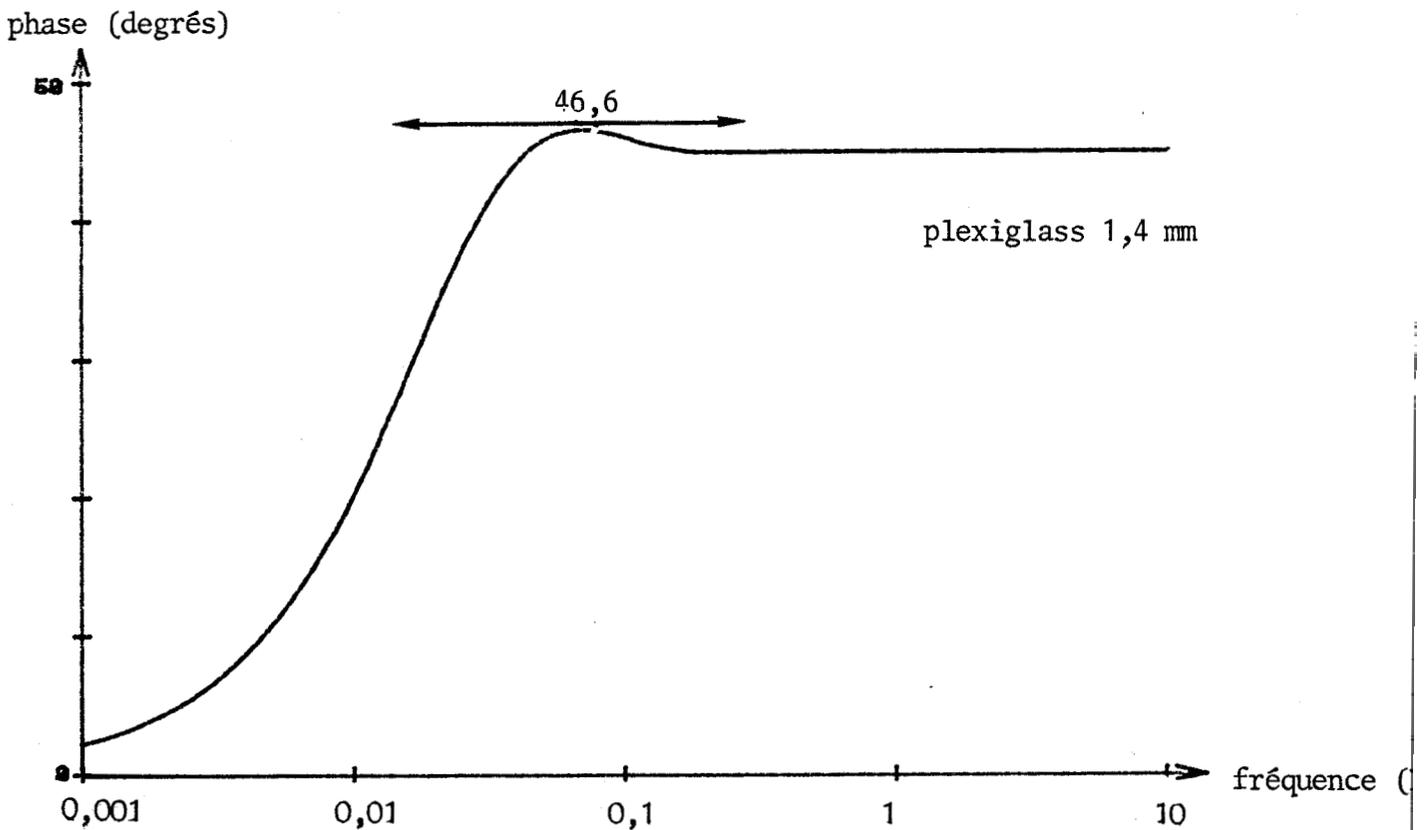


figure (V-6) : EVOLUTION DE L'ARGUMENT DE L'ADMITTANCE EN FONCTION DE LA FREQUENCE

Les mesures et calculs par simulations sont représentés, à titre d'exemple, par les figures (V - 9), (V - 12) et (V - 15) à la fréquence 0,1 Hz.

Les courbes des figures (V - 16), (V - 17) et (V - 18) représentent les calculs d'intercorrélation menés sur les variables d'entrée et le traitement effectué en vue de l'obtention des résultats relatifs à l'EMS et aux pertes d'énergie.

Les valeurs obtenues sont alors homologues aux grandeurs thermiques définies par :

$$EMS_{th} = \frac{10^8}{T_0} EMS_{el} \quad \text{stockage d'énergie utilisable}$$

$$\mathcal{D}_{th} = \frac{10^8}{T_0} \mathcal{D}_{el} \quad \text{dissipation d'exergie}$$

Par exemple, pour les trois motifs étudiés, à 0,1 Hz, avec $T_0 = 300 \text{ K}$

| | | sinus | triangle | carré |
|-----------------|--------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| Effet Joule | $\mathcal{D}_{el} \text{ (W)}$ | $3,79 \cdot 10^{-5}$ | $2,49 \cdot 10^{-5}$ | $9,49 \cdot 10^{-5}$ |
| perte exergique | $\mathcal{D}_{th} \text{ (W)}$ | 12,63 | 8,3 | 31,63 |
| stockages | $EMS_{el} \text{ (J)}$ | $3,01 \cdot 10^{-5}$ | $2,0 \cdot 10^{-5}$ | $5,6 \cdot 10^{-5}$ |
| | $EMS_{th} \text{ (J)}$ | 10,03 | 6,66 | 18,66 |

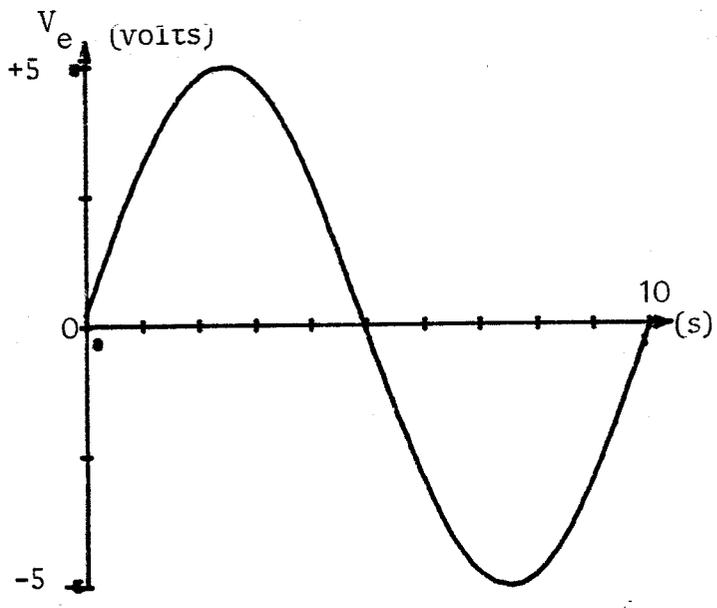


figure (V - 7)
Tension imposée à l'entrée de la ligne;
 $f \approx 0,1$ Hz ; Motif Sinus

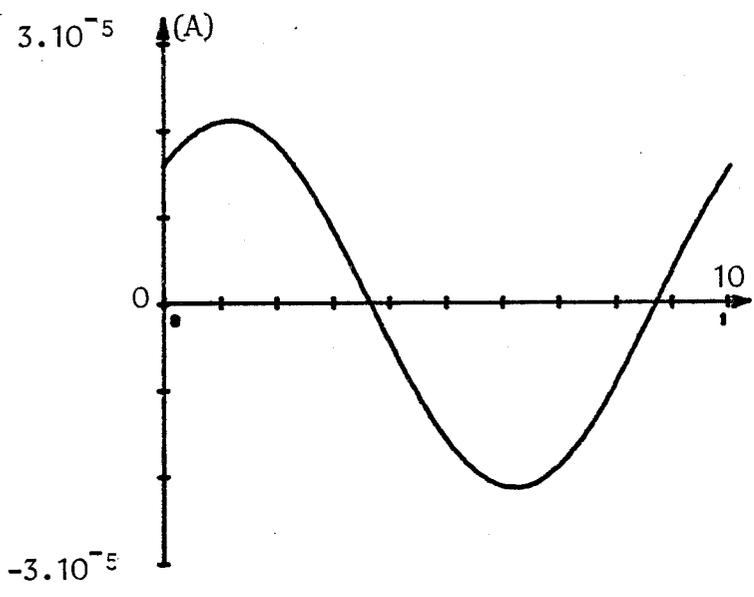


figure (V - 8)
Intensité calculée à l'entrée de la li

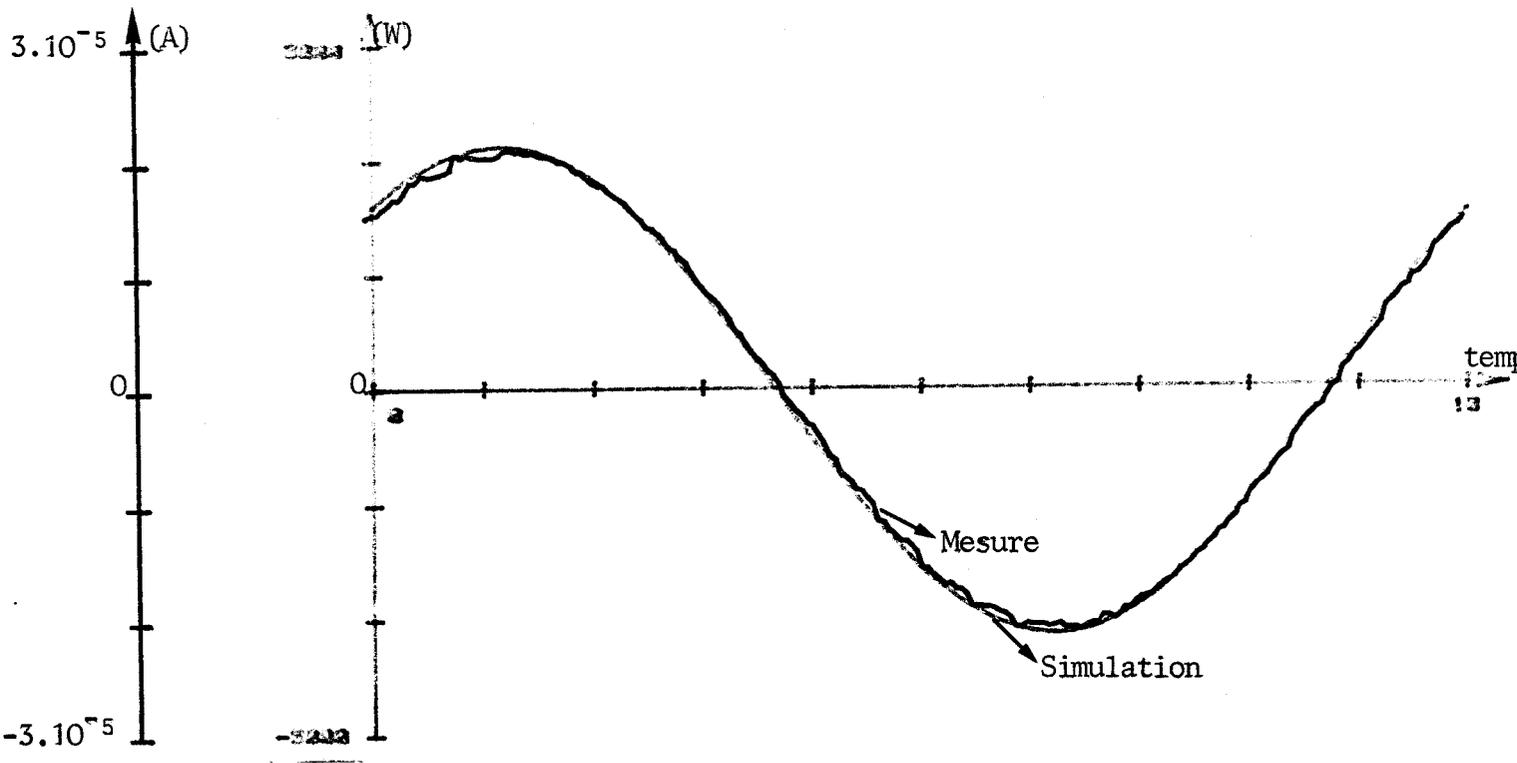


figure (V - 9) : EVOLUTION COMPAREE DE L'INTENSITE MESUREE A L'ENTR
DE LA LIGNE ET DU FLUX CALCULE SUR L'ACCES DU SYST
THERMIQUE EQUIVALENT.

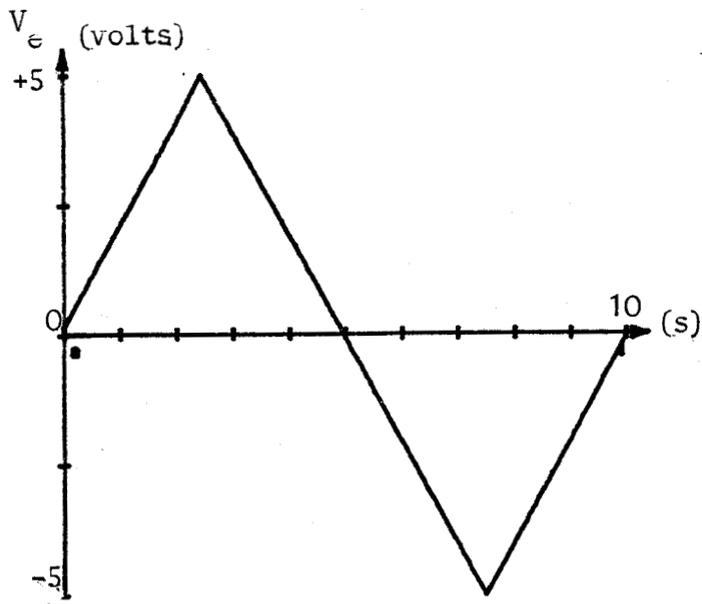
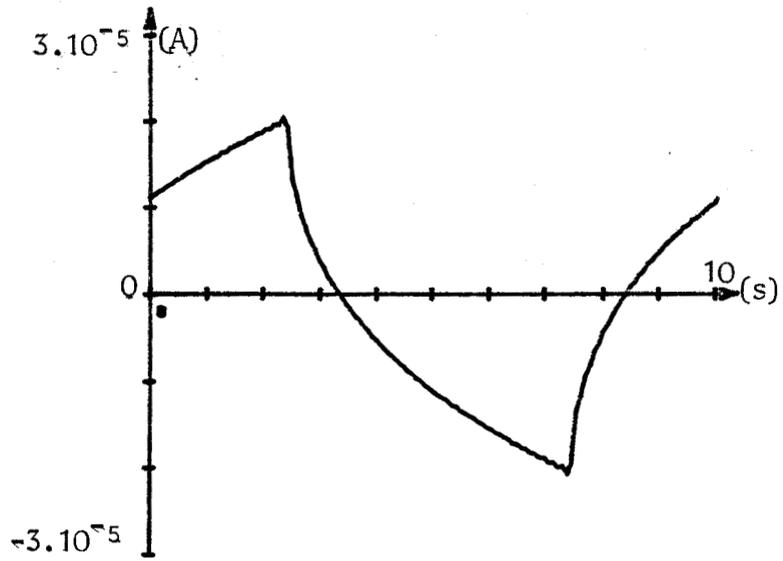


figure (V - 10)

Tension imposée à l'entrée de la ligne;
 $f = 0,1$ Hz; Motif triangle.



figure(V - 11)

Intensité calculée à l'entrée de la ligne

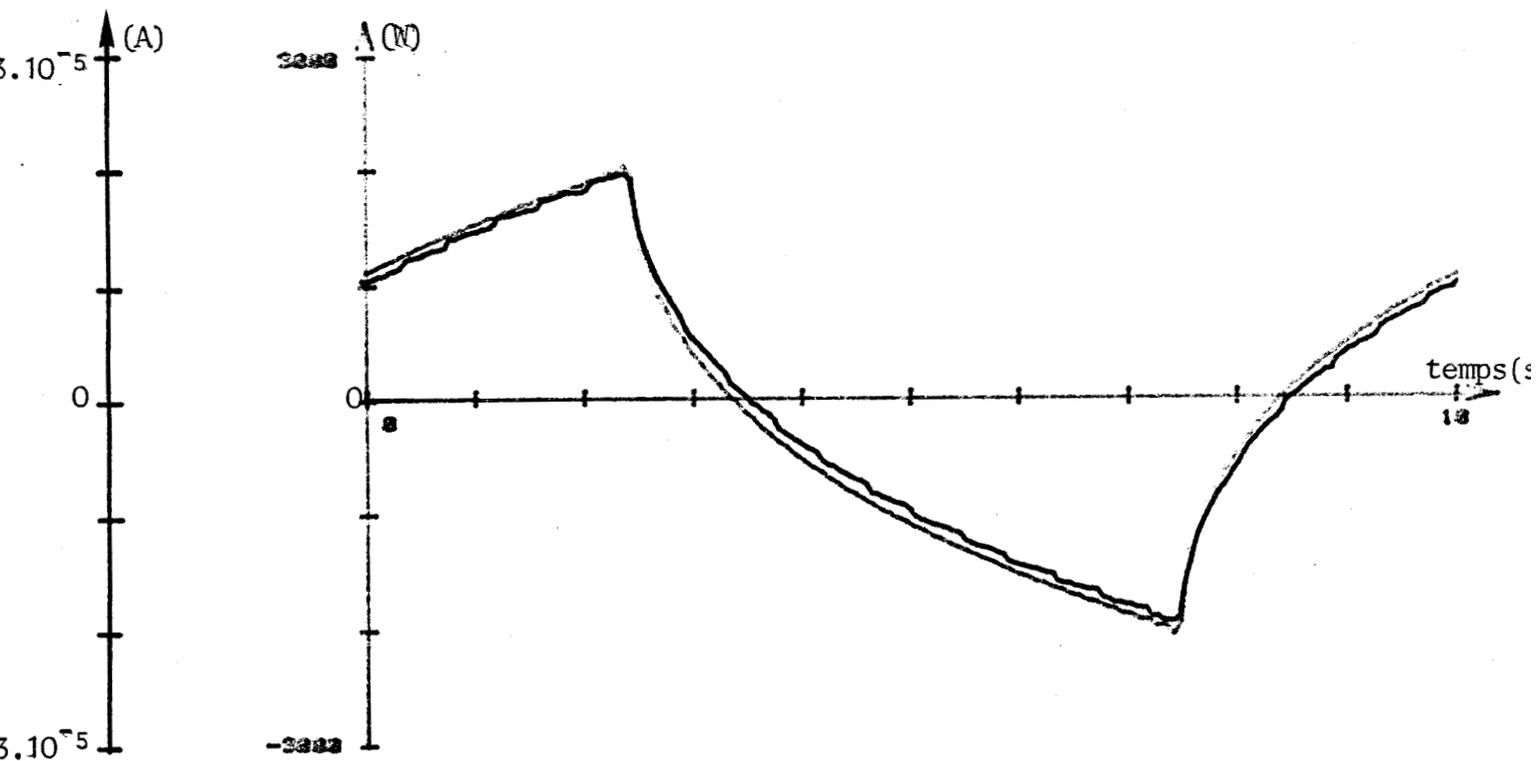


figure (V - 12) : EVOLUTION COMPAREE DE L'INTENSITE MESUREE A L'ENTREE DE LA LIGNE ET DU FLUX CALCULE SUR L'ACCES DU SYSTEME THERMIQUE EQUIVALENT.

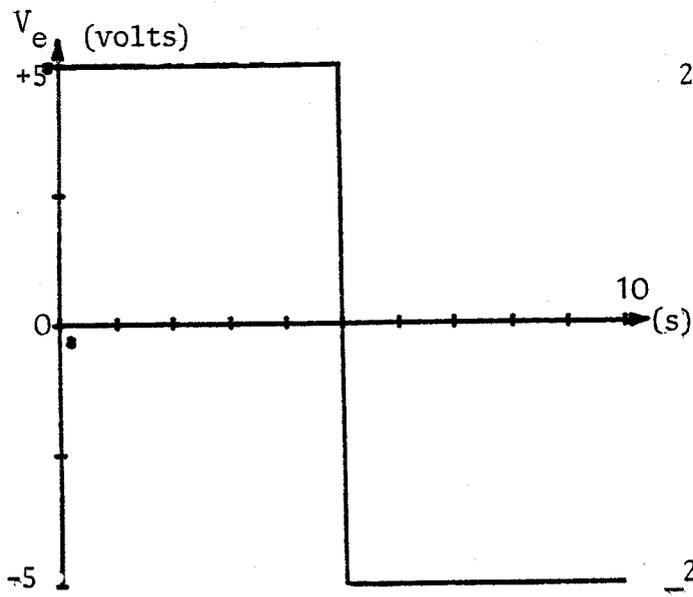


figure (V - 13)
 Tension imposée à l'entrée de la ligne;
 $f = 0,1$ Hz; Motif rectangle

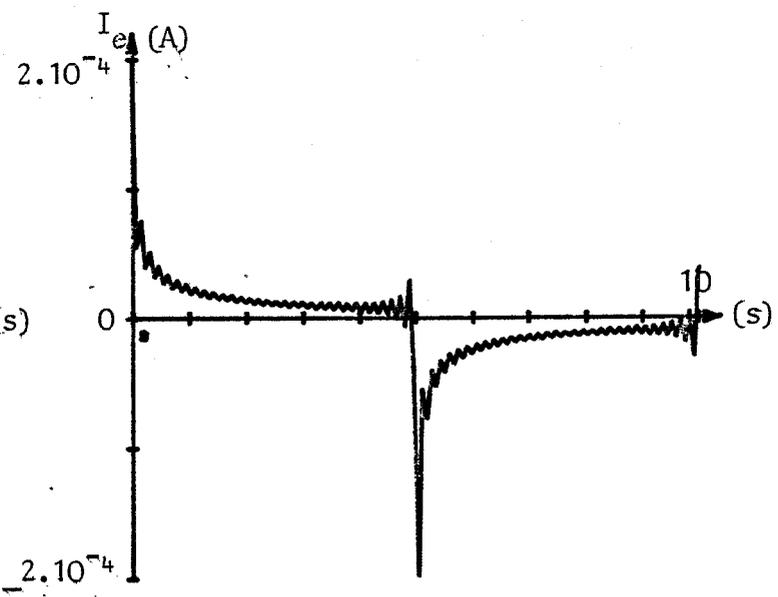


figure (V - 14)
 Intensité calculée à l'entrée de la ligne

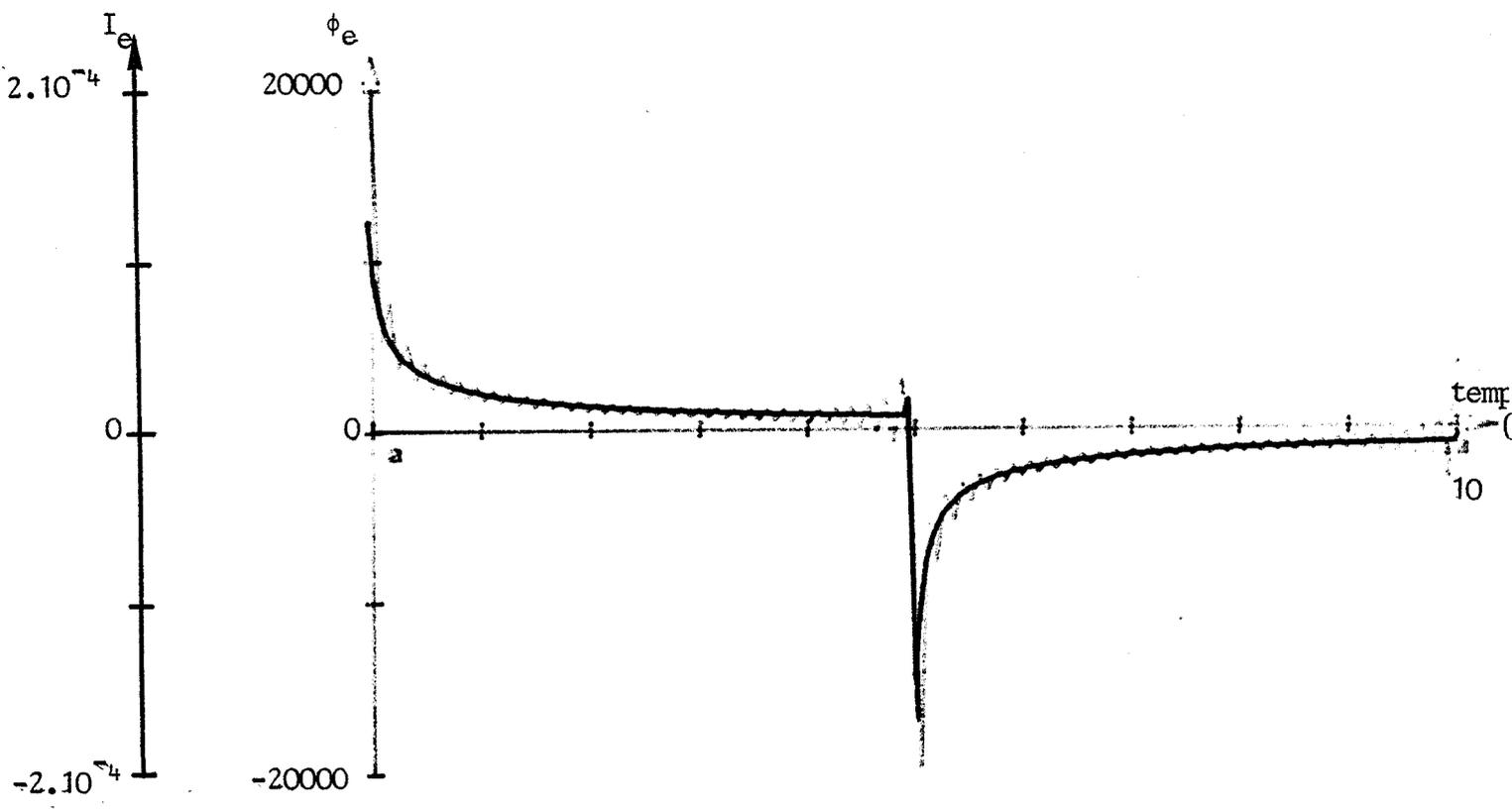


figure (V - 15) : EVOLUTION COMPAREE DE L'INTENSITE MESUREE A L'ENTREE DE LA LIGNE ET DU FLUX CALCULE SUR L'ACCES DU SYSTEME THERMIQUE EQUIVALENT.

(motif analysé en 128 points)

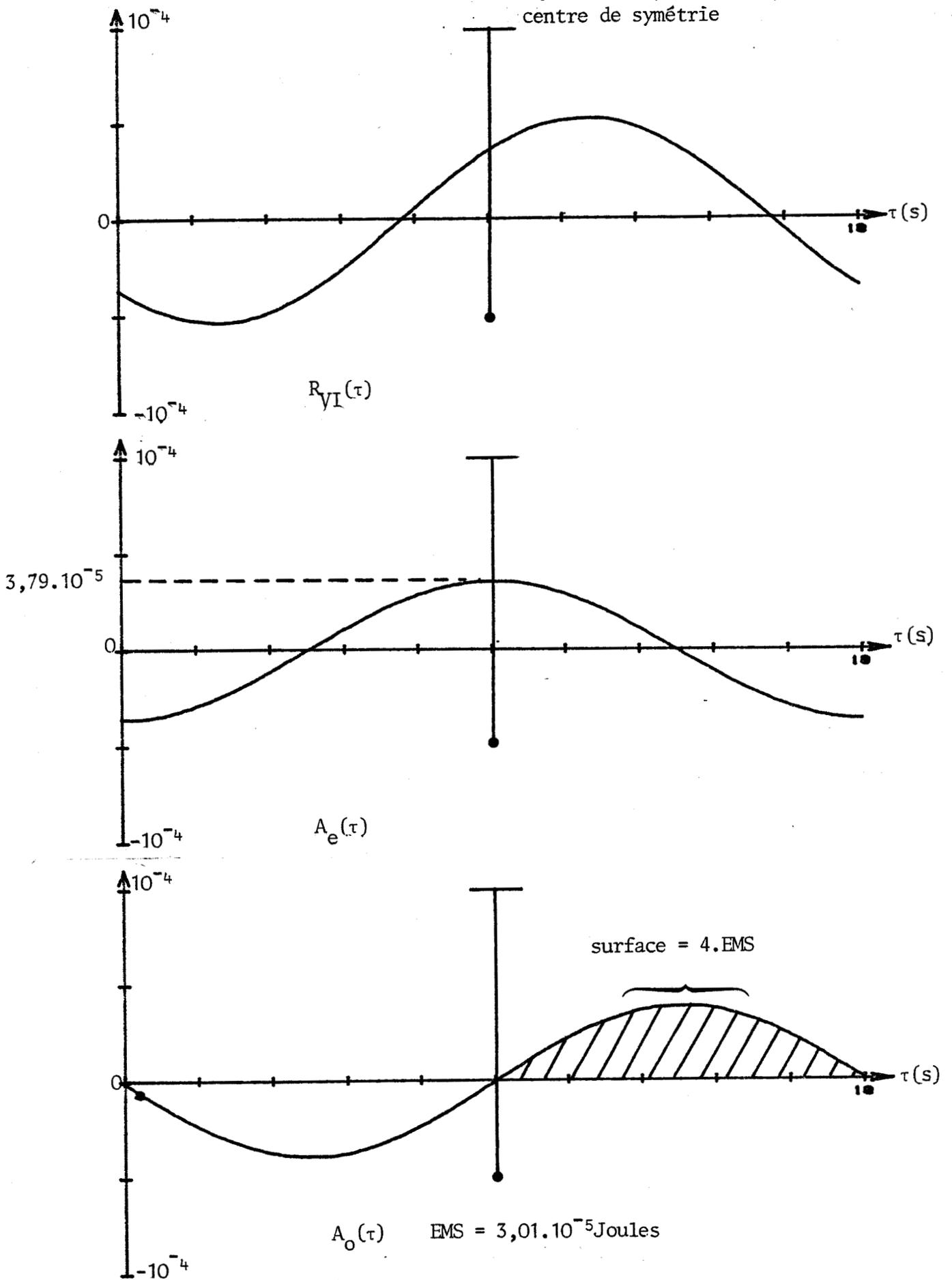


figure (V - 16) : EVOLUTION DE LA FONCTION INTERCORRELATION $R_{VI}(\tau)$ ET DE SES COMPOSANTES EN FONCTION DU DECALAGE τ .
période $T = 10$ s ; MOTIF SINUS.

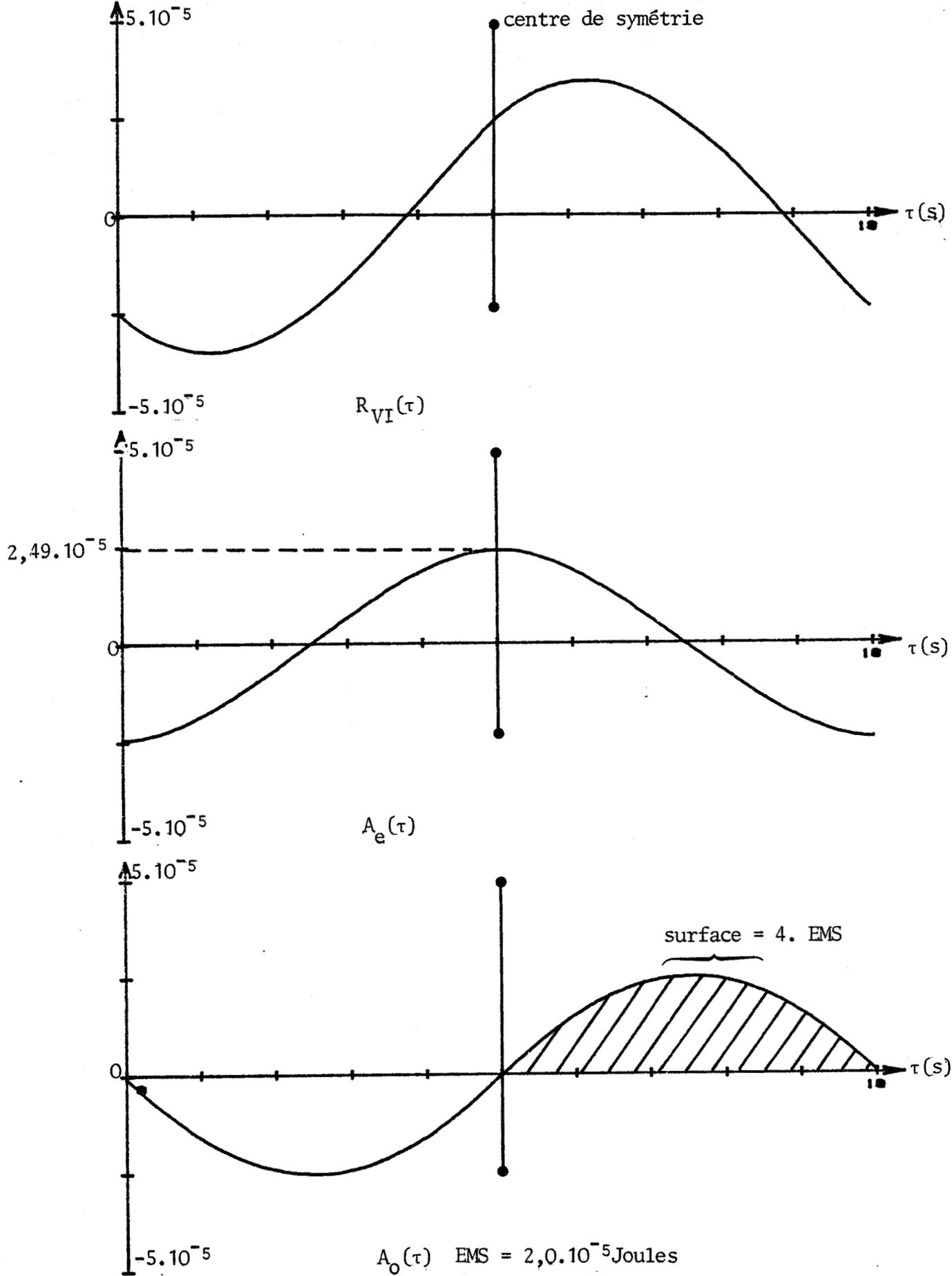


figure (V - 17) : EVOLUTION DE LA FONCTION INTERCORRELATION $R_{VI}(\tau)$ ET DE SES COMPOSANTES EN FONCTION DU DECALAGE τ .
période $T = 10$ s ; MOTIF TRIANGLE.

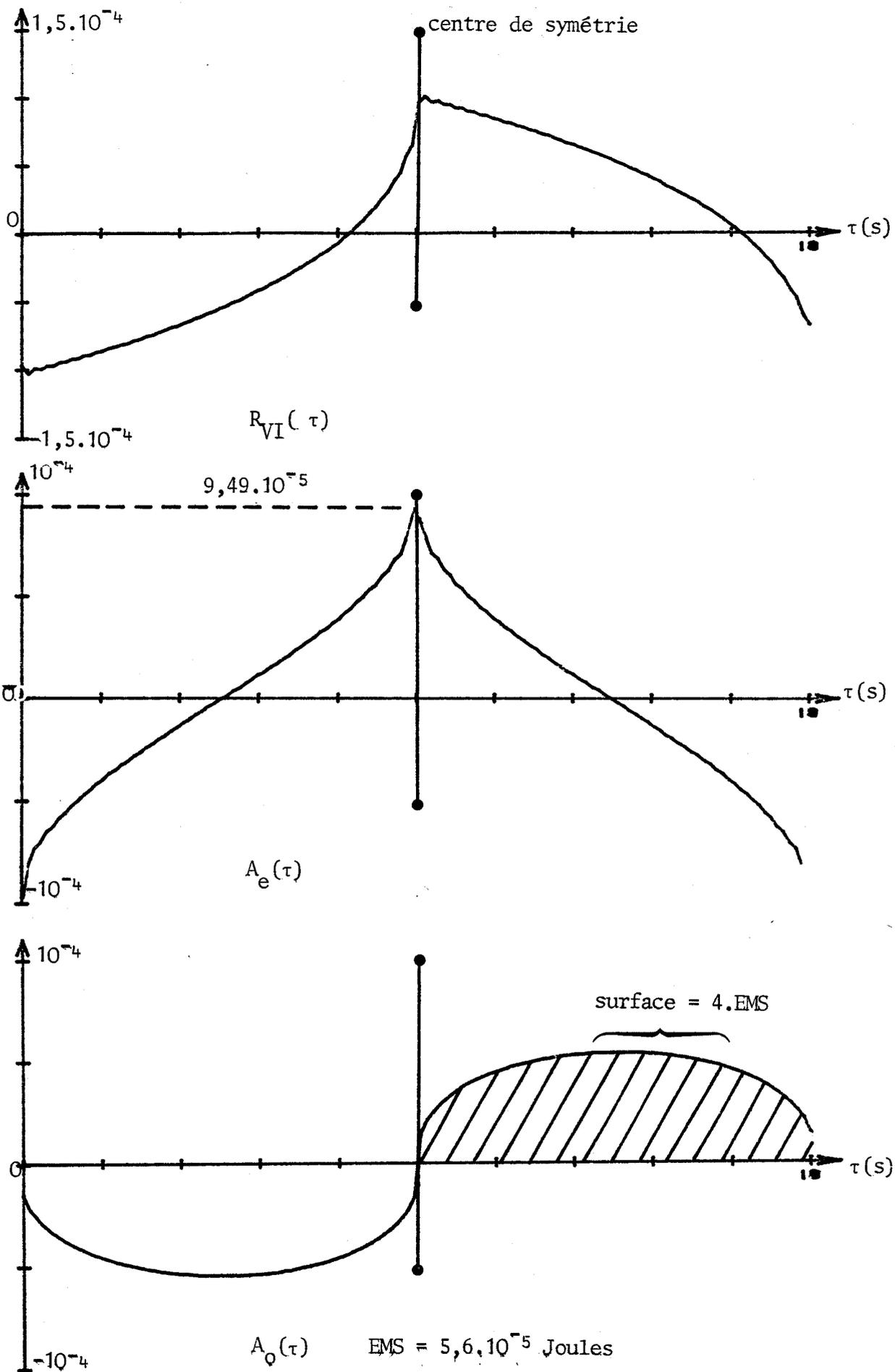


figure (V - 18) : EVOLUTION DE LA FONCTION D'INTERCORRELATION $R_{VI}(\tau)$
 ET DE SES COMPOSANTES EN FONCTION DU DECALAGE τ .
 période $T = 10$ s ; MOTIF CARRE.

En réalité, bien que les pertes exergiques paraissent faibles, la mise en oeuvre expérimentale de ces processus est impossible. En effet, compte-tenu du coefficient d'homologie, le tracé de la figure (V - 15) met en évidence l'existence de flux instantanés proches de 20000 Watts (200W/dm²) associés aux transitoires du régime. Des valeurs de cet ordre seraient difficilement obtensibles de façon homogène avec une "source de température rapide". Ce dernier concept est en effet purement théorique puisque la réalisation d'un puits de température stable constitue déjà la source de difficultés expérimentales.

Les figures (V - 19) et (V - 20) représentent l'ensemble des résultats concernant le stockage et la dissipation en fonction de la fréquence de récurrence des motifs imposés. Conformément aux évolutions des parties réelles et imaginaires de l'admittance, quelque soit le régime imposé, la dissipation augmente en fonction de la fréquence et le stockage évolue en raison inverse.

Pour une fréquence de récurrence très basse, la dissipation est définie par $R_{VI}(0)$. Les transitions HF imposées au système voient leur influence disparaître vis à vis du régime permanent de telle sorte que :

Si T est la période du motif :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{D} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V^2(t)}{R} dt \quad \text{soit } \mathcal{D} \begin{cases} \text{motif sinus } V_0^2/2R \\ \text{motif triangle } V_0^2/3R \\ \text{motif carré } V_0^2/R \end{cases}$$

La remarque précédente s'applique également à l'analyse du stockage. En prenant pour référence l'énergie stockée en régime permanent U_p :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} EMS = \begin{cases} \text{motif sinus } U_p/2 \\ \text{motif triangle } U_p/3 \\ \text{motif carré } U_p \end{cases}$$

Les valeurs numériques obtenues sont résumées dans le tableau suivant.

Valeurs limites obtenues en régime TBF.

| | SINUS | TRIANGLE | CARRE | REGIME PERMANENT |
|-----------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| \mathcal{D}_{e1} (W) | $1,64 \cdot 10^{-5}$ | $1,09 \cdot 10^{-5}$ | $3,28 \cdot 10^{-5}$ | $3,28 \cdot 10^{-5}$ |
| $T_0=300K$ \mathcal{D}_{th} (W) | 5,46 | 3,63 | 10,93 | 10,93 |
| U_{e1} (J) | $4,65 \cdot 10^{-5}$ | $3,12 \cdot 10^{-5}$ | $9,3 \cdot 10^{-5}$ | $9,3 \cdot 10^{-5}$ |
| $T_0=300K$ U_{th} (J) | 15,5 | 10,4 | 31 | 31 |

Interprétation du comportement thermique aux fréquences élevées

La profondeur de pénétration du flux et de la température diminue lorsque la fréquence augmente. L'ensemble des phénomènes se réalise alors sur un domaine de plus en plus localisé proche de l'accès du système. L'EMS converge vers une valeur nulle alors que la dissipation reste une fonction croissante de la fréquence. Le processus devient de plus en plus irréversible puisque la génération d'entropie augmente avec la fréquence de variation du facteur de tension imposé.

L'étude à flux imposé est caractérisée par une diminution de la dissipation avec la fréquence. L'interprétation de cette différence apparente de comportement réside dans le fait que, à extensité imposée, la grandeur intensive (régissant en fait le processus) diminue lorsque la fréquence augmente ($|Z| \rightarrow 0$). Le caractère irréversible du processus diminue alors.

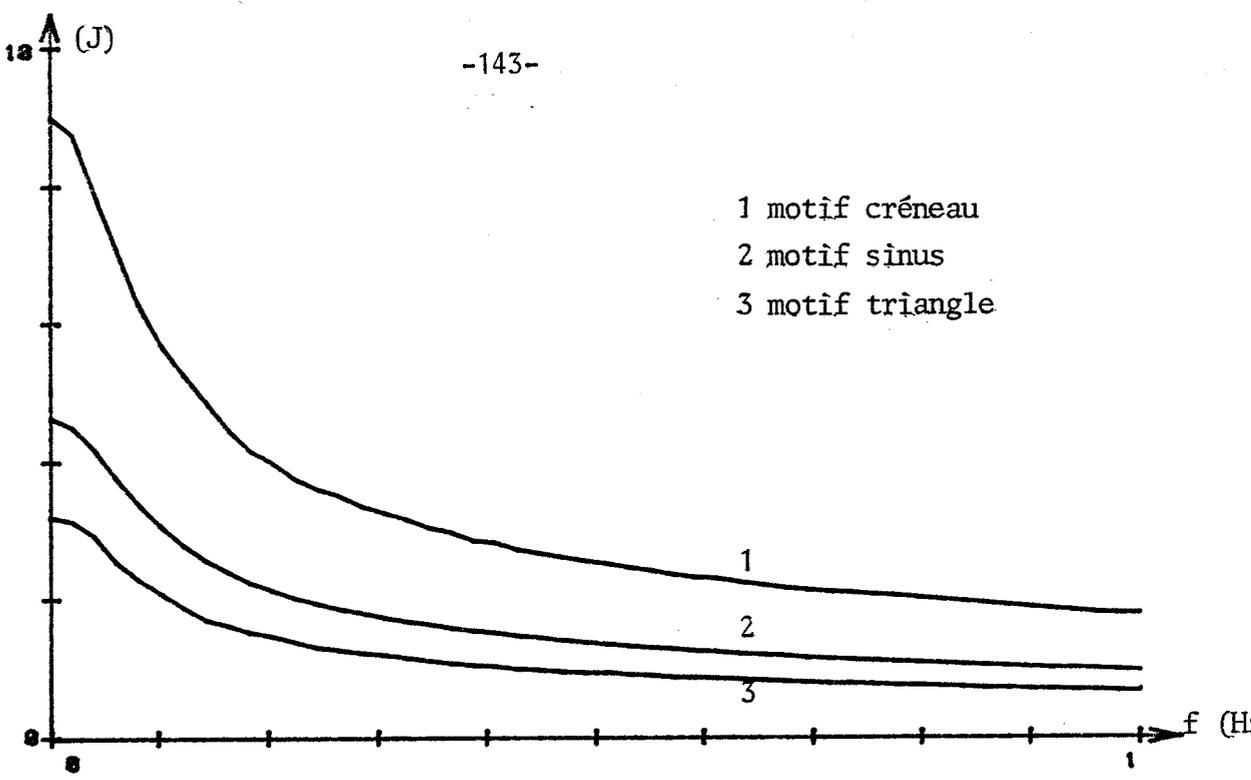


figure (V - 19) : EVOLUTION DE L'EMS EN FONCTION DE LA FREQUENCE DE SOLLICITATION

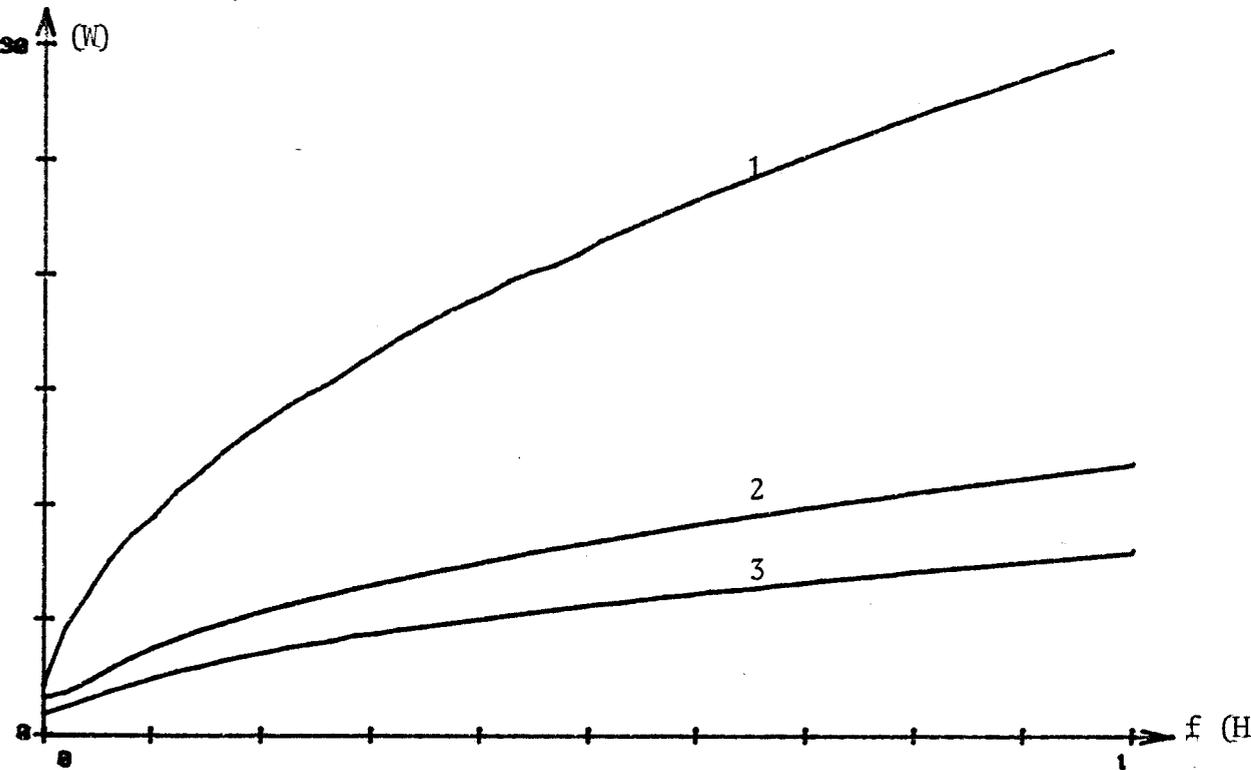


figure (V - 20) : EVOLUTION DE LA DISSIPATION A_e(0) EN FONCTION DE LA FREQUENCE DE SOLLICITATION

Mesures relatives à la dynamique des échanges réactifs

Les relations (2 - 43) et (4 - 10) permettent de définir une fonction de transformation notée F_q assimilable au coefficient de qualité présenté par le système viv-à-vis du régime imposé.

$$F_q = \frac{\omega \cdot EMS}{D} \quad (5 - 1) \text{ où } D \text{ représente la fonction de dissipation.}$$

Compte-tenu des relations (4 - 10) et (4 - 24), F_q s'exprime :

$$F_q = \frac{\omega}{2A_e(0)} \int_0^{T/2} A_o(\tau) d\tau \quad (5 - 2)$$

Cette dernière grandeur est formellement identique lorsqu'on la définit à partir des mesures thermiques. En effet, la température de référence n'apparaît pas dans la relation (5 - 2).

L'interaction réactive définie par la relation (4 - 25) peut être calculée de deux façons aboutissant à la même valeur.

$$Q = \frac{1}{T} \int_0^T V(t) \cdot \mathcal{H}(I(t)) dt = -\frac{1}{T} \int_0^T I(t) \cdot \mathcal{H}(V(t)) dt \quad (4 - 25)$$

$$Q = 2\omega \cdot EMS \text{ puisque pour tout régime } Q = A_e(0) \cdot F_q \text{ d'où :}$$

$$Q = \frac{\omega}{2} \int_0^{T/2} A_o(\tau) d\tau \quad (5 - 3)$$

L'évolution du coefficient F_q en fonction de la fréquence de récurrence des motifs imposés est représentée figure (V - 21). Le régime sinusoïdal est évidemment affecté d'une valeur de convergence unité caractérisant un angle de perte limite égal à 45°. (figure V - 6)

Les valeurs de l'interaction réactive sont représentées figure (V - 22). Les courbes obtenues résultent de l'application de la relation (5 - 3).

Les valeurs obtenues à partir de la relation (4 - 25) sont identifiées séparément et concordent avec une précision toujours supérieure à 5%. La figure (V - 23) illustre le calcul effectué à la fréquence 0,1 Hz, l'ensemble des autres points étant traité de la même façon.

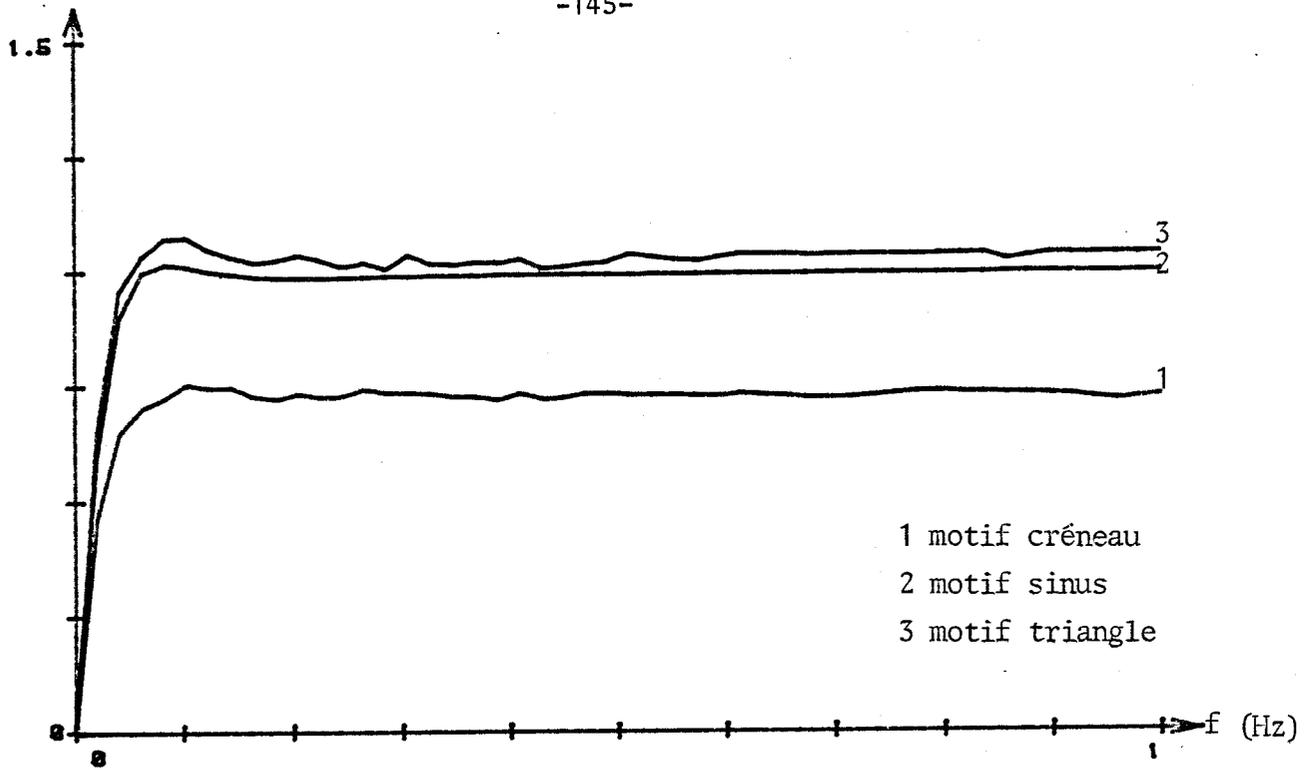


figure (V - 21) : EVOLUTION DU COEFFICIENT F_q EN FONCTION DE LA FREQUENCE DE SOLLICITATION

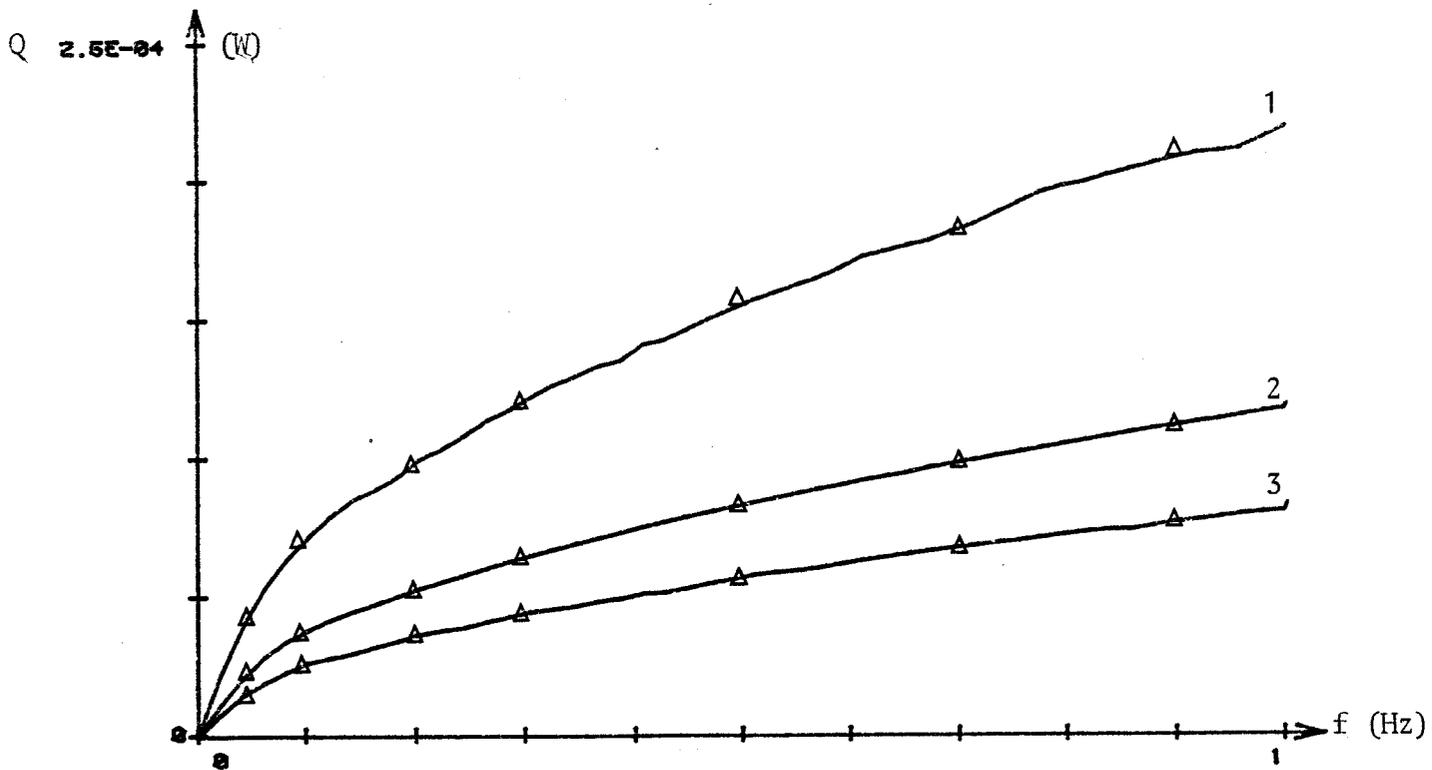


figure (V - 22) : EVOLUTION DE L'INTERACTION REACTIVE EN FONCTION DE LA FREQUENCE DE SOLLICITATION

Le symbole Δ désigne les valeurs calculées à l'aide de la relation (4 - 25).

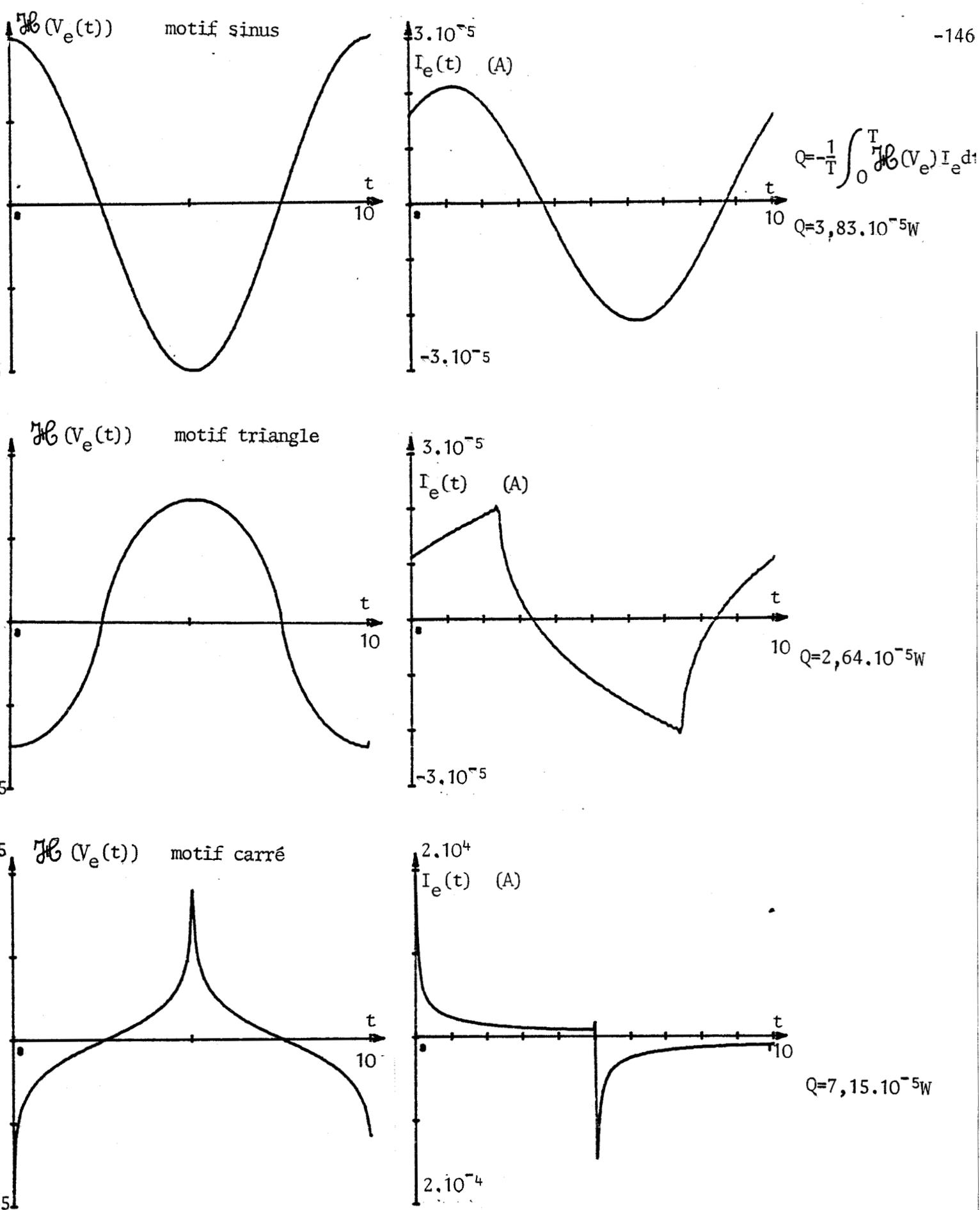


figure (V - 23) : OBTENTION DES VALEURS DE L'INTERACTION REACTIVE A LA FREQUENCE $f = 0,1 \text{ Hz}$.
Le traitement résulte de la relation IV - 25.

II ETUDE DU COMPORTEMENT D'UN SYSTEME BICOUCHE EN REGIME PERIODIQUE

NON SINUSOIDAL

On considère les deux configurations expérimentales de la figure (V - 24).

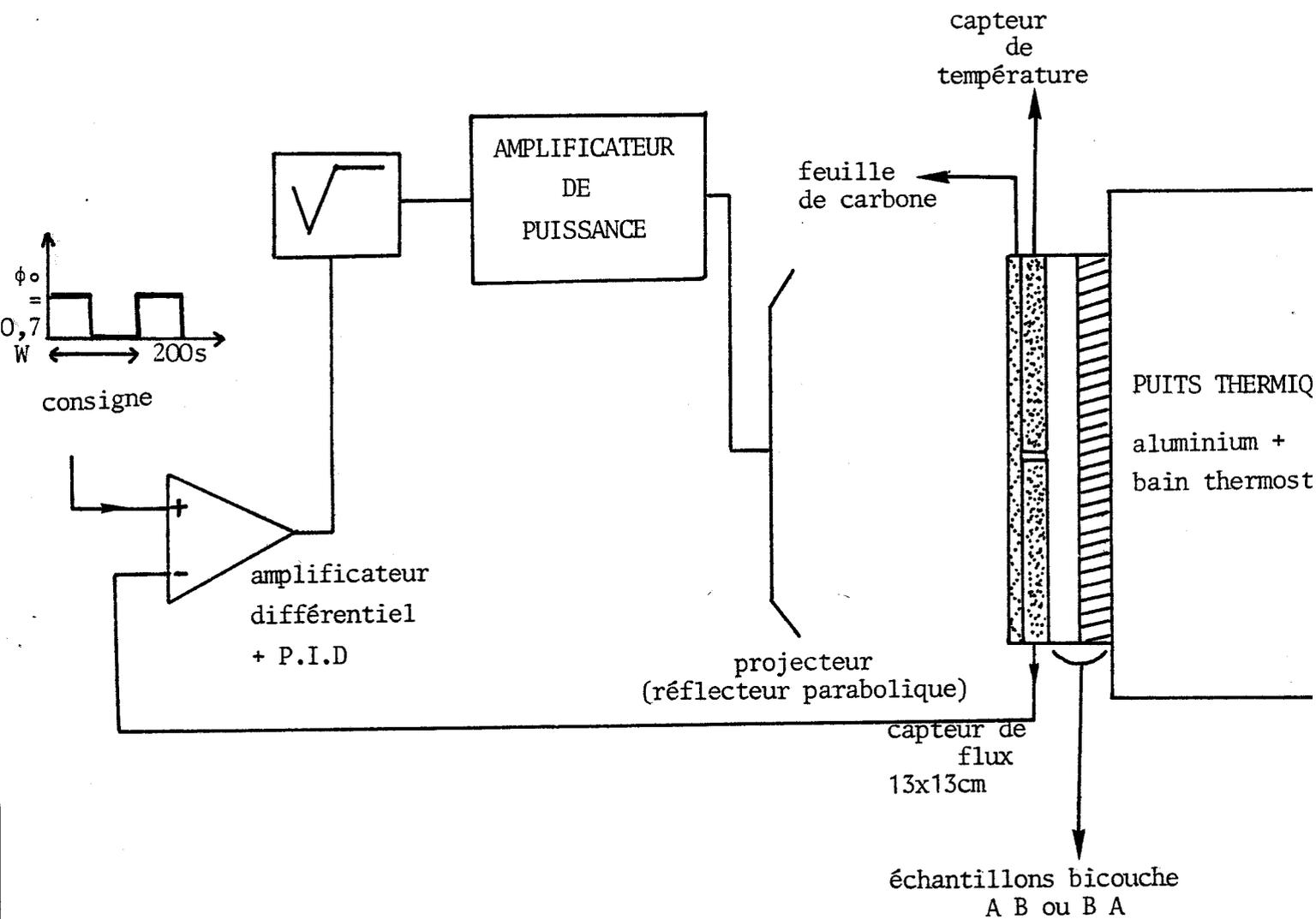


figure (V - 24): ASSERVISSEMENT DU FLUX THERMIQUE A L'ENTREE DES ECHANTILLONS ETUDIES

Le fluxmètre et le capteur de température sont disposés de façon identique du point de vue géométrique. Les informations captées sont donc totalement corréllées dans le temps. Cette disposition évite la perturbation d'un appareil de mesure par l'autre. Afin de pouvoir négliger l'influence des contacts thermiques, une mince couche de graisse silicone est interposée entre les différents composants du système.

Les capteurs nécessaires aux mesures n'engendrent qu'une perturbation minime. Cependant le système doit être considéré comme "tricouche" et les deux configurations étudiées deviennent respectivement :

- capteur, plexiglass 4 mm, teflon 1,8 mm
- capteur, teflon 1,8 mm, plexiglass 4 mm

Présentation des deux types de capteurs

- le capteur de flux

Des thermocouples de surface sont réalisés en déposant par voie électrolytique une couche métallique de distribution géométrique définie, sur une couche conductrice de nature différente. Dans le cas du fluxmètre utilisé pour les expériences suivantes, chaque cellule est constituée d'un dépôt de cuivre sur alliage constantan. Ces thermoéléments montés en série permettent de mesurer aux bornes du capteur une tension électrique proportionnelle au flux thermique traversant le fluxmètre ainsi constitué.

Les fluxmètres utilisés ont une dimension de 13 x 13 cm, cette surface étant deux fois couverte par le champ d'éclairement associé au projecteur. D'autre part, leur faible épaisseur (0,2mm) leur permet d'assurer un temps de réponse rapide (1seconde) vis à vis de toute variation de flux le traversant. La sensibilité du fluxmètre utilisé est de 720 $\mu\text{V/W}$, et sa résistance électrique interne est totalement négligeable devant l'impédance d'entrée de l'amplificateur d'instrumentation.

-le capteur de température et le pont de mesure associé

Le capteur de température est réalisé en déposant par réduction chimique en solution suivie d'une attaque sélective, un mince ruban de cuivre (35 μm) distribué sur une surface égale à celle d'un fluxmètre, sur un support de Mylar (de 25 μm d'épaisseur)

La résistance électrique du capteur est voisine de 10Ω , le coefficient de température est de $4.10^{-2}\Omega/K$.

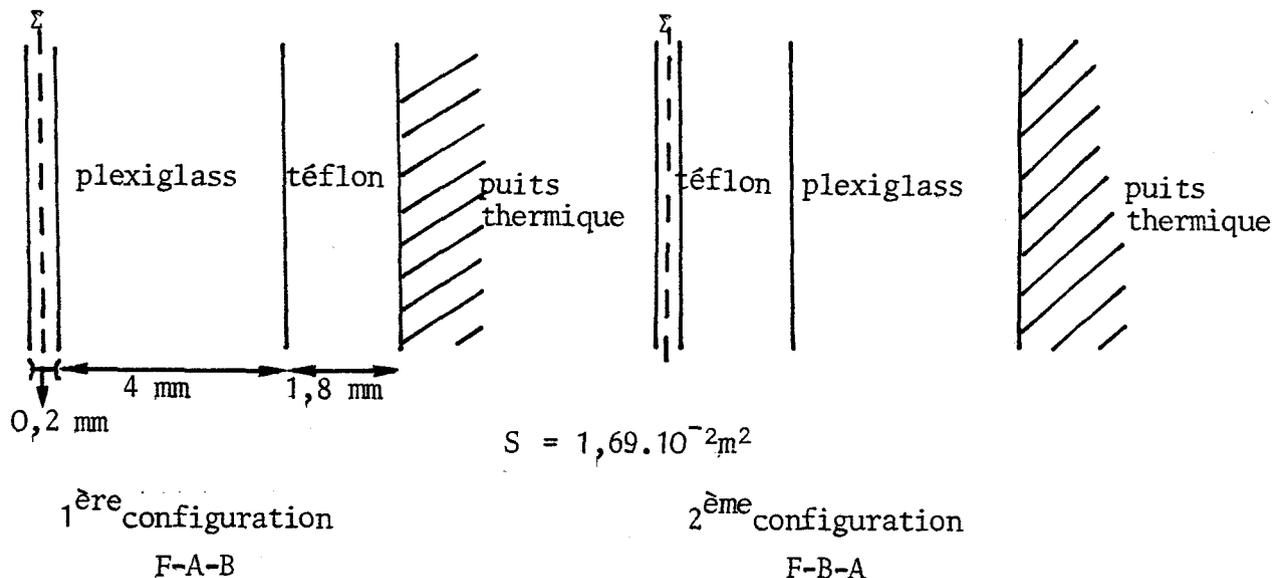
[25] L'utilisation du Pont de Wheastone à équilibrage automatique associée au capteur de température permet d'apprécier les mesures de variations de température avec une précision de 10 mK.

Description et justification du processus

L'échantillon bicouche muni des capteurs est sollicité à flux imposé de façon périodique. L'amplitude du signal imposé est limitée par la plage de mesure de température égale à $1^\circ K$ dans notre montage. Le temps de récurrence du processus est choisi égal à 200 secondes afin de solliciter le système en Moyenne et Haute Fréquence. Le flux d'entrée n'étant pas centré, d'un point de vue énergétique, le processus peut être découpé en deux parties distinctes :

- stockage et dissipation dus à la partie centrée du flux
- stockage et dissipation dus à l'offset du signal

Les caractéristiques du système et du signal imposé sont représentés figure (V -



A = plexiglass 4 mm B = téflon 1,8 mm F = fluxmètre thermique

figure (V - 25 a) : REPRESENTATION DES DEUX CONFIGURATIONS ETUDIEES

remarque : La modélisation s'effectue avec l'entrée du système localisée dans le plan ξ défini par la demi épaisseur du capteur; En effet, la mesure et l'asservissement sont rapportés à ce plan.

| paramètres du système | surface échantillon | 1 m ² |
|-------------------------|---------------------|-----------------------|
| R _A (K/W) | 1,314 | 2,22.10 ⁻² |
| R _B (K/W) | 0,514 | 8,69.10 ⁻³ |
| R _{A+B} (K/W) | 1,828 | 3,09.10 ⁻² |
| C _A (J/°K) | 108,16 | 6,40.10 ³ |
| C _B (J/°K) | 69 | 4,08.10 ³ |
| φ _{entrée} (W) | 0,70 | 41,6 |
| φ _{offset} (W) | 0,35 | 20,8 |

figure (V - 25 b) : VALEURS NUMERIQUES DES CARACTERISTIQUES RELATIVES AUX PROCESSUS

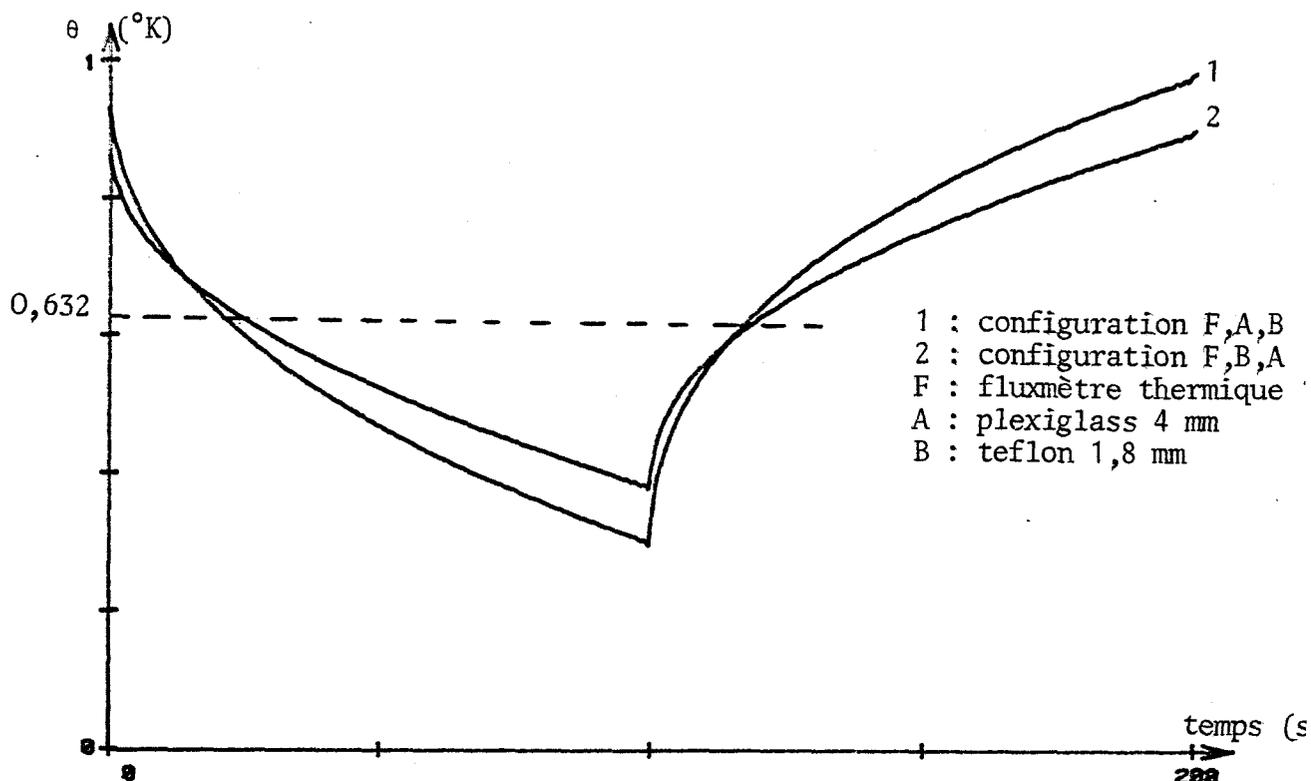


figure (V - 26) : INFLUENCE DE LA PERMUTATION D'UNE PARTIE DU SYSTEME SUR L'EVOLUTION DE LA TEMPERATURE CALCULEE EN ENTREE

La figure (V - 26) représente les valeurs calculées de l'évolution de la température sur la face d'entrée de chacune des configurations. Compte-tenu des valeurs choisies, la partie centrée du signal évolue autour d'une valeur moyenne égale à 0,63°K. Cette dernière valeur, cependant, n'affecte en rien le calcul de la partie impaire de l'intercorrélacion flux température. La connaissance de la valeur d'offset n'est nécessaire que pour la dissociation des puissances dissipées en régimes permanent et centré.

Les figures (V - 27) et (V - 28) représentent les mesures de températures effectuées sur les faces d'entrée de chacun des systèmes. Les différences observées avec les valeurs calculées proviennent essentiellement des résistances de contact et de la nature du capteur. En effet, lorsque ce dernier est en contact avec le téflon, les erreurs de mesures sont inférieures à celles observées pour un contact capteur-plexiglass. L'acquisition des mesures est effectuée à l'aide d'un programme écrit en langage machine. En effet, malgré la lenteur du processus étudié, la précision du délai imposé entre chaque mesure (1s) ne permet pas l'utilisation d'un programme basic.

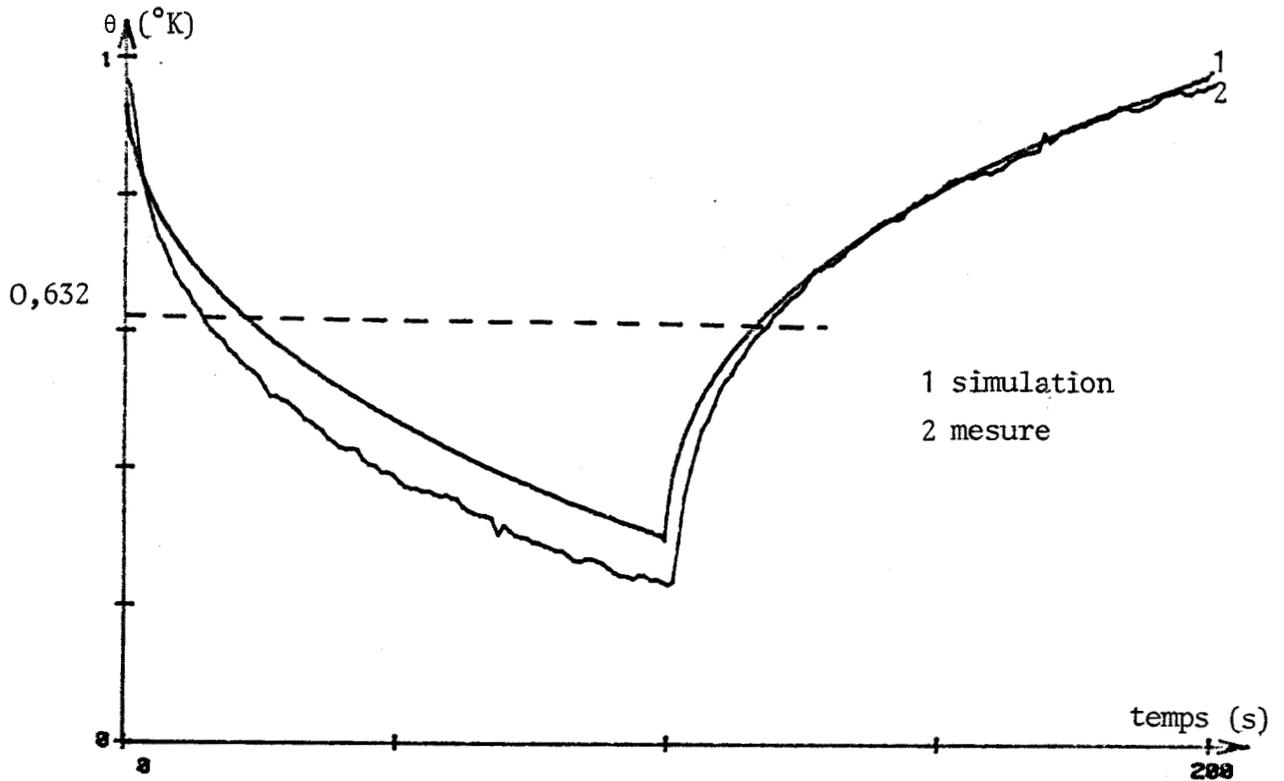


figure (V - 27) : COMPARAISON ENTRE LES VALEURS CALCULEES ET MESUREES DE L'EVOLUTION DE LA TEMPERATURE A L'ENTREE DU SYSTEME F-A-B

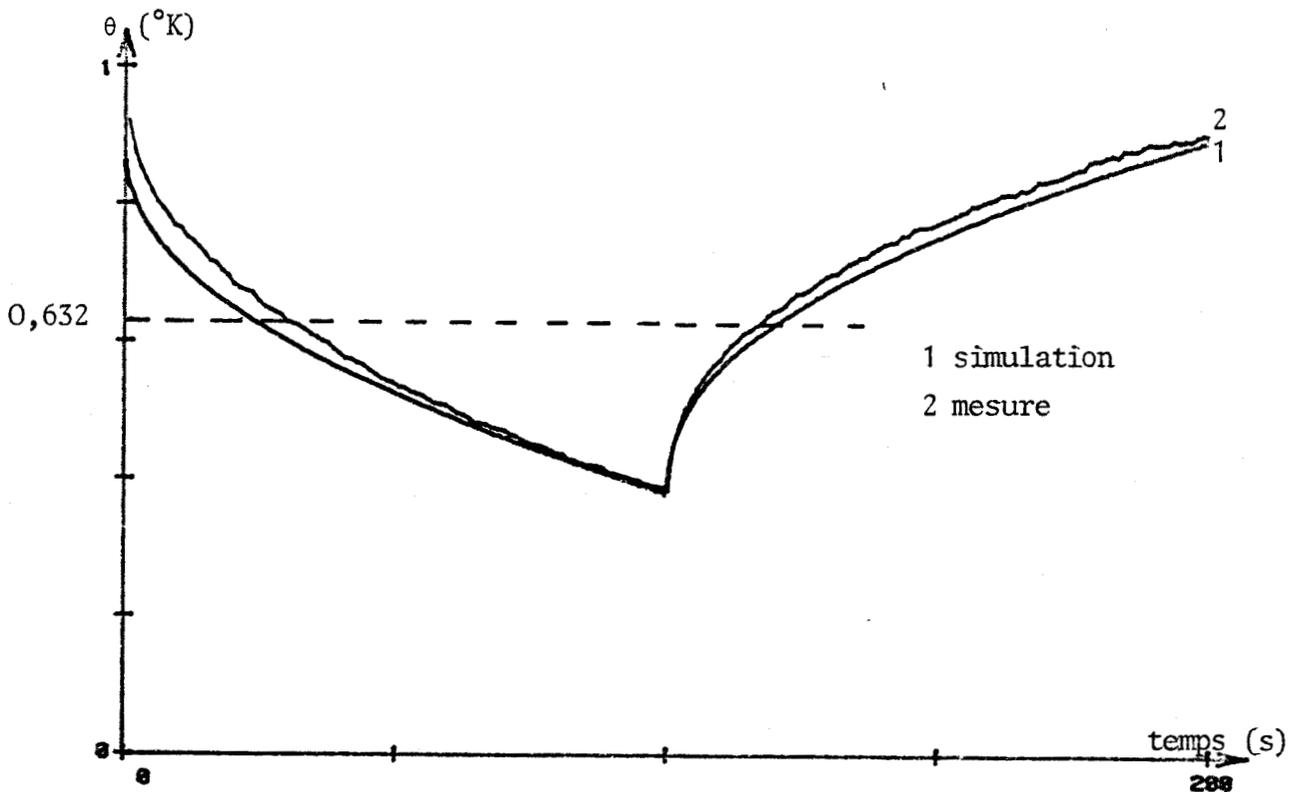


figure (V - 28) : COMPARAISON ENTRE LES VALEURS CALCULEES ET MESUREES DE L'EVOLUTION DE LA TEMPERATURE A L'ENTREE DU SYSTEME F-B-A

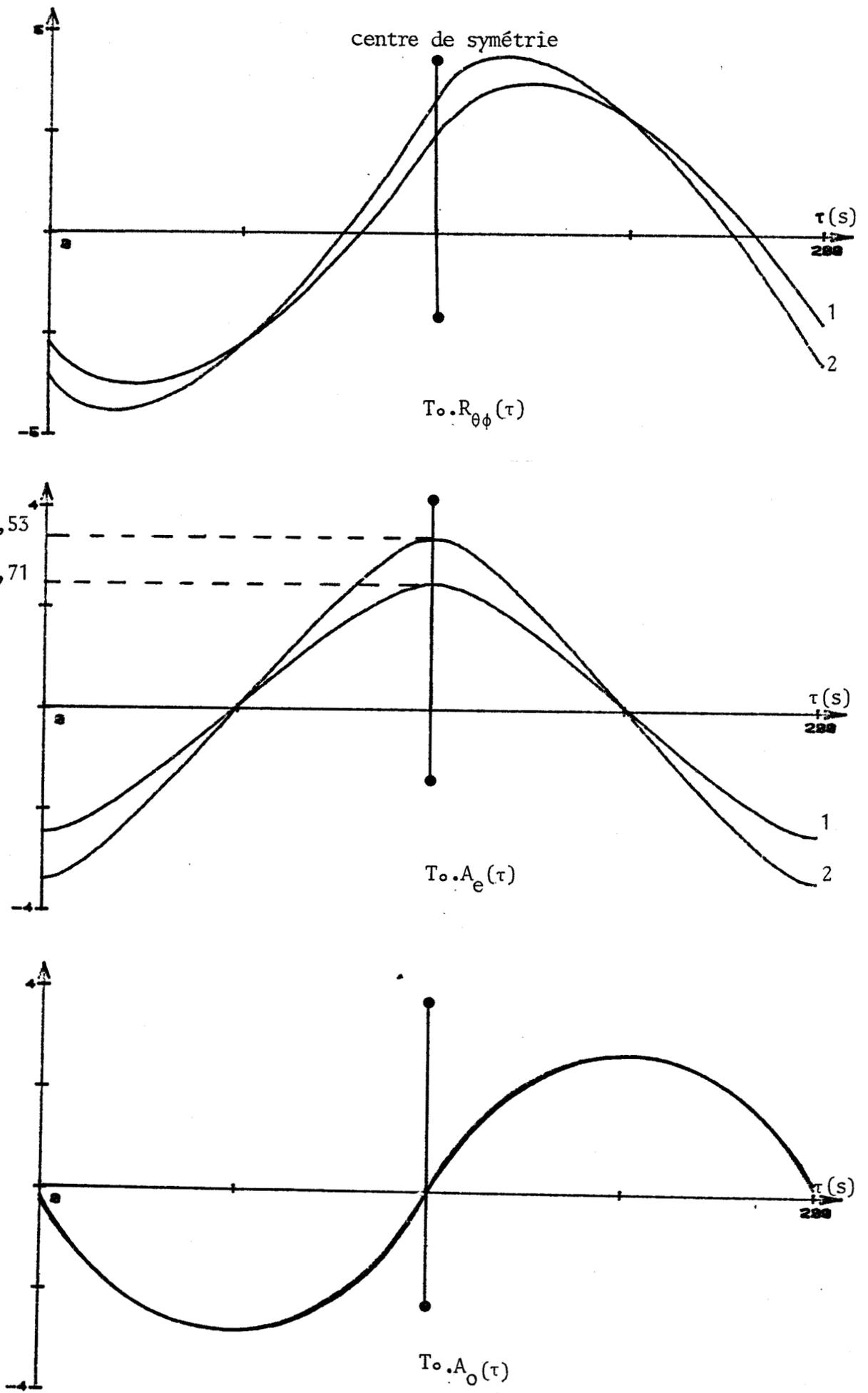


figure (V - 29) : OBTENTION DES GRANDEURS ENERGETIQUES ASSOCIEES A LA PARTIE CENTREE DU PROCESSUS A PARTIR DE L'ETUDE DE LA FONCTION D'INTERCORRELATION
système F-A-B grandeurs rapportées à 1m² d'échantillon

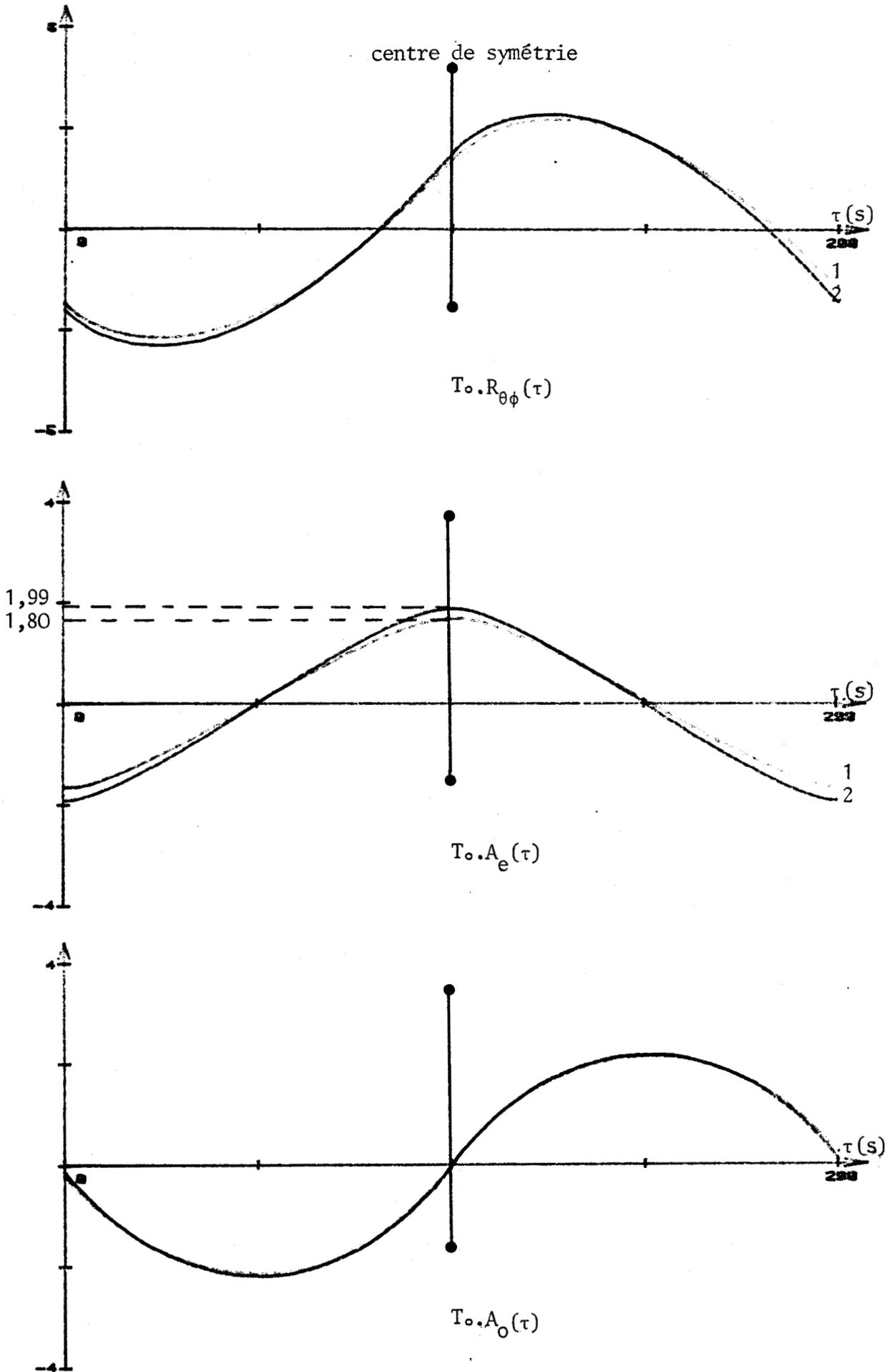


figure (V - 30) : OBTENTION DES GRANDEURS ENERGETIQUES ASSOCIEES A LA PARTIE CENTREE DU PROCESSUS A PARTIR DE L'ETUDE DE LA FONCTION D'INTERCORRELATION
système F-B-A grandeurs rapportées à 1m²d'échantillon

Traitement et résultats des mesures

Les figures (V - 29) et (V - 30) résument l'ensemble du traitement effectué. L'ensemble des courbes est rapporté à la surface 1 m².

Les résultats relatifs à la partie continue du processus peuvent être calculés à partir des relations régissant la dissipation et le stockage évalués lors de la transition entre deux états stables. (mesure de la réponse indicielle).

L'ensemble des résultats est résumé dans le tableau suivant :

T₀=300°K

| | | W _{st} offset (J) | EMS (J) | W _{dis} offset (W) | P _{dis} centrée (W) | |
|---------------------------|--------------------|----------------------------|-----------------------|-----------------------------|------------------------------|------------------------|
| valeurs théoriques | m ² | PLT | 2,028 | 0,161 | 7,31.10 ⁻⁴ | 9,0.10 ⁻³ |
| | | TPL | 3,0 | 0,123 | | 6,0.10 ⁻³ |
| | surface capteur | PLT | 3,42.10 ⁻² | 2,7.10 ⁻³ | 1,24.10 ⁻⁵ | 1,52.10 ⁻⁴ |
| | | TPL | 5,07.10 ⁻² | 2,08.10 ⁻³ | | 1,01.10 ⁻⁴ |
| valeurs expérimentales | m ² | PLT | | 0,163 | 7,6.10 ⁻⁴ | 0,0117 |
| | | TPL | | 0,124 | | 6,66.10 ⁻³ |
| | surface capteur | PLT | | 2,76.10 ⁻³ | 1,5.10 ⁻⁴ | 2.10 ⁻⁴ |
| | | TPL | | 2,11.10 ⁻³ | | 1,126.10 ⁻⁴ |

figure (V - 31)

Les erreurs relatives aux mesures sur le stockage sont inférieures à 5% ; Ces faibles erreurs comparées à celles observées relativement à la dissipation semblent montrer que seules les résistances de contact (par nature peu capacitive) sont à l'origine des erreurs de mesure. En effet, seule la dissipation se trouve affectée par la présence de résistances parasites.

CONCLUSION

Dans ce travail, nous pensons avoir étendu le domaine d'application des techniques de traitement du signal à la modélisation des transferts énergétiques en régime variable.

L'étude exhaustive du premier chapitre a été développée autant dans un souci de rigueur que de clarté afin de préciser sur quels fondements de la thermodynamique repose l'ensemble du travail. Les travaux de base analysés dans notre étude bibliographique (Prigogine) étaient orientés vers le couplage entre les processus physiques.

Notre apport personnel porte sur les aspects théoriques suivants :

- L'interprétation énergétique des fonctions d'intercorrélation entre grandeurs conjuguées par rapport à l'énergie. Hormis l'habituelle interprétation statistique rattachée à ces fonctions, notre étude conduit d'une part au découplage des propriétés de parité avec pour conséquence la dissociation temporelle des phénomènes de dissipation et de stockage, et d'autre part à rechercher et expliciter le rôle joué par la partie analytique de chacune des variables conjuguées au transfert énergétique.

- La possibilité d'appliquer le théorème des travaux virtuels à l'étude des interactions entre un système thermique et le monde extérieur permet l'application d'un formalisme mathématique conduisant à la dissociation des énergies dans le détail d'une transformation causale à partir de l'analyse des observables sur les accès du système.

- Le fait que le concept de grandeurs conjuguées par rapport à l'énergie soit totalement général constitue à notre sens un des intérêts majeurs de notre travail. D'autre part, les relations analytiques obtenues ont fait l'objet d'une programmation sur microordinateur et donnent lieu à l'ensemble des courbes représentées jusqu'au chapitre IV.

- Enfin, l'analogie entre les fonctions énergétiques de l'électricité et de la thermocinétique permet une vérification expérimentale précise des relations énoncées notamment en ce qui concerne l'analyse du stockage et de la dynamique des échanges réactifs.

L'expérience réalisée dans la dernière partie permet d'observer le rôle essentiellement dissipatif des résistances de contact introduites dans la composition d'un système multi-couche.

Un développement possible de ce travail consisterait à analyser l'existence et la localisation de défaut intérieur à un système.

ANNEXES

A N N E X E I

QUELQUES PROPRIETES

RELATIVES A LA TRANSFORMATION DE HILBERT

1) Transformation de Hilbert et relations de Kramers-Krönig

De la même façon que la transformation de Hilbert, les relations de Kramers-Krönig utilisées habituellement en physique, sont la traduction dans le domaine fréquentiel, des relations de causalité.

Soit $h(t)$ le noyau causal associé au comportement d'un système physique. Si $h(0)$ constitue une singularité de type Dirac, $h(t)$ est une distribution séparable en deux termes définis par :

$$\begin{aligned} h(t) &= h_0(0) + h_1(t) & \mathcal{D}(h_0(0)) &= [0] \\ & & \mathcal{D}(h_1(t)) &=]0, \infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_1(t) &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} x_1 + j y_1(\omega) \\ h(t) &\longleftrightarrow x + j y(\omega) \end{aligned}$$

Les grandeurs x et y sont mutuellement reliées par la transformation de Hilbert.

$x(\omega)$ est une fonction paire (indice e)

$y(\omega)$ est une fonction impaire (indice o)

$$x_1(\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y_1(\omega)}{\omega_0 - \omega} d\omega \quad \text{et} \quad y_1(\omega_0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_1(\omega)}{\omega_0 - \omega} d\omega$$

Soient

$$x_1(\omega_0) = +\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y_1(\omega) (\omega_0 + \omega)}{\omega_0^2 - \omega^2} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega y_1(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2} d\omega \quad \text{(A)}$$

$$y_1(\omega_0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_1(\omega) \cdot (\omega + \omega_0)}{\omega_0^2 - \omega^2} d\omega = -\frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_1(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2} d\omega \quad \text{(B)}$$

Les intégrandes sont paires dans A et B .

L'exclusion des singularités pour $\omega = \omega_0$ adjointe aux propriétés de parité mènent à :

pour (A) en $\omega = \omega_0$ $x(\omega) = x(\omega_0)$

pour (B) en $\omega = \omega_0$ $\omega x(\omega) = \omega_0 x(\omega_0)$

$$y_1(\omega_0) = \frac{2\omega_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x_1(\omega) - x_1(\omega_0)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega$$

$$x_1(\omega_0) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega y_1(\omega) - \omega_0 y_1(\omega_0)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega$$

Les fonctions x_1 et y_1 convergent pour $\omega \rightarrow \infty$

avec $h_0 = x(\infty) \cdot \delta(t)$ les valeurs x et y sont définies par :

$$\left. \begin{aligned} y(\omega_0) &= \frac{2\omega_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x(\omega) - x(\omega_0)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega \\ x(\omega_0) &= x(\infty) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega y(\omega) - \omega_0 y(\omega_0)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Relations de} \\ \text{Kramers-Krönig} \end{array}$$

2) Antisymétrie du produit scalaire $x(t) \mathcal{H}(y(t))$

$$\begin{aligned} \overline{x(t) \mathcal{H}(y(t))} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \mathcal{H}(y(t)) dt = \mathcal{F}_{f=0} (x(t) \cdot \mathcal{H}(y^*(t))) \\ &= [X(f) * (Y^*(-f) \cdot j \text{Sgn}(f))]_{f=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} j \text{Sgn}(f) \cdot X(f) Y^*(f) df \end{aligned}$$

$x(t)$ et $y(t)$ sont causales et réelles.

soit $\text{Re}(X(f)) \xleftrightarrow{\mathcal{H}} \text{Im}(X(f))$

si $\text{Re}(X(f)) = X_1(f)$

$$X(f) = X_1(f) + j \mathcal{H}(X_1(f)) \quad X^*(f) = X_1(f) - j \mathcal{H}(X_1(f))$$

$$Y^*(f) = Y_1(f) - j \mathcal{H}(Y_1(f)) \quad Y(f) = Y_1(f) + j \mathcal{H}(Y_1(f))$$

d'où en notant $\tilde{S} = XY^* = S_a$ (paire) + $j S_r$ (impaire)

$$\tilde{S}^* = YX^* = S_a$$
 (paire) - $j S_r$

l'intégration effectuée compte-tenu de la fonction $j \text{Sgn}$ conduit à :

$$\overline{x(t) \mathcal{H}(y(t))} = -y(t) \mathcal{H}(x(t))$$

l'orthogonalité entre une grandeur et sa transformée de Hilbert découle immédiatement de cette dernière relation.

3) Energie d'un signal et de sa transformée de Hilbert

Soit une fonction $f(t)$ réelle dont la transformée de Fourier est notée $F(f)$.

L'égalité suivante est toujours vérifiée :

$$|(F(f) * F^*(-f))_{f=0}| = |(j \operatorname{Sgn}(f) F(f) * j \operatorname{Sgn}(f) F^*(-f))_{f=0}|$$

$$\text{Soit } \overline{f^2(t)} = \overline{\mathcal{H}^2(f(t))}$$

Pour les signaux à énergie finie, la transformation de Hilbert conserve l'énergie.
 Pour les signaux périodiques, la valeur RMS est conservée.

4) Transformée d'une fonction translatée

La transformation de Hilbert d'une fonction décalée est égale à la transformation décalée de la fonction.

En effet :

$$\mathcal{H}_{t_0}(f(t+\tau)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t+\tau)}{t_0-t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t+\tau) d(t+\tau)}{(t_0+\tau)-(t+\tau)}$$

$$\mathcal{H}_{t_0}(f(t+\tau)) = \mathcal{H}_{(t_0+\tau)} f(t)$$

Conséquence : Une transformation de Hilbert est définie dans un domaine au plus inclus dans le domaine de définition de son original.

5) Transformée de Hilbert de la dérivée d'une fonction centrée, nulle et symétrique à l'origine

Soient \mathcal{F}

$$x(t) \longleftrightarrow X(f) \quad \text{la symétrie entraîne } \mathcal{H}(0)=0$$

$$\mathcal{H}(x(t)) \longleftrightarrow j \operatorname{Sgn}(f) \cdot X(f)$$

$$\dot{x}(t) \longleftrightarrow j\omega X(f)$$

$$\mathcal{H}(\dot{x}(t)) \longleftrightarrow j\omega \cdot j \operatorname{Sgn}(f) \cdot X(f) = j \operatorname{Sgn}(f) \cdot (j\omega \cdot X(f))$$

$$\mathcal{H}(\dot{x}(t)) \longleftrightarrow j \operatorname{Sgn}(f) \cdot (j\omega \cdot X(f))$$

Lorsque les hypothèses sont vérifiées,

$$\mathcal{H}(\dot{x}(t)) = \dot{\mathcal{H}}(x(t))$$

Si la fonction n'est pas nulle à l'origine et en l'absence de toute symétrie :

$$\begin{array}{l} \dot{x}(t) \xleftrightarrow{j\omega X(f) - x(0)} \\ \mathcal{H}(x(t)) \xleftrightarrow{j\omega - j \operatorname{Sgn}(f) \cdot X(f) - \mathcal{H}(0)} \\ \mathcal{H}(\dot{x}(t)) \xleftrightarrow{j \operatorname{Sgn}(f) (j\omega X(f) - x(0))} \end{array}$$

Il n'y a donc égalité que si l'original et sa transformée ont même valeur à l'origine.

6) Linéarité de la transformation

Si f et g sont des fonctions "continues presque partout" et définies sur un même domaine

$$\mathcal{H}(f(x)) + \mathcal{H}(g(x)) = \mathcal{H}(f+g)(x)$$

Conséquence pour l'étude des signaux décentrés :

si k(t) désigne la fonction "constante"

$$\mathcal{H}_t(k) = -\frac{k}{\pi} \int_{A=-\infty}^{B=+\infty} \frac{1}{t_0-t} d(t_0-t) = \lim_{A, B \rightarrow \infty} \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{k}{\pi} \left| \operatorname{Log} \frac{\epsilon}{A} + \operatorname{Log} \frac{B}{\epsilon} \right| \right)$$

$$\forall t \in]-\infty, +\infty[\quad \mathcal{H}_t(k) = 0$$

Cependant, la conservation de l'énergie exige la présence de singularité rejetées à l'infini. L'analyse de la transformation de Hilbert d'une distribution "créneau" permet de vérifier cette propriété.

7) Transformées de Hilbert des fonctions sollicitations utilisées dans ce travail

a) Les propriétés de quadrature associées à la transformation ont pour conséquence immédiate une correspondance mutuelle entre les fonctions sinus et cosinus.

b) rampe de pente a définie sur $\mathcal{D} = [0, T]$ figure (A - 2)
 $f(t) = at$

$$\mathcal{H}_u(f(t)) = \frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{at}{u-t} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{at-au}{u-t} dt + \frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{au}{u-t} dt$$

Le premier terme a pour valeur : $-\frac{at}{\pi}$

Le second terme s'écrit :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{au}{\pi} \left(\int_0^{u+\epsilon} \frac{1}{t-u} dt + \int_{u-\epsilon}^T \frac{1}{t-u} dt \right) = -\frac{au}{\pi} \text{Log} \frac{T-u}{u}$$

par conséquent :

$$at \overset{\mathcal{H}}{\curvearrowright} -\frac{a}{\pi} \left[T+u \text{Log} \frac{T-u}{u} \right] \quad \text{figure (A - 2)}$$

avec $u \in \mathcal{D} - [T[$

c) créneau non centré de largeur T et d'amplitude b; figure (A - 1)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_u(f(t)) &= \frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{b}{u-t} dt & \mathcal{D}(u) &=]0, T[\\ &= \frac{b}{\pi} \int_0^T \frac{1}{t-u} dt \end{aligned}$$

La valeur principale, calculée comme précédemment s'exprime :

$$f(t) \overset{\mathcal{H}}{\curvearrowright} -\frac{b}{\pi} \text{Log} \frac{T-u}{u} \quad \text{figure (A - 1)}$$

avec $u \in \mathcal{D}$

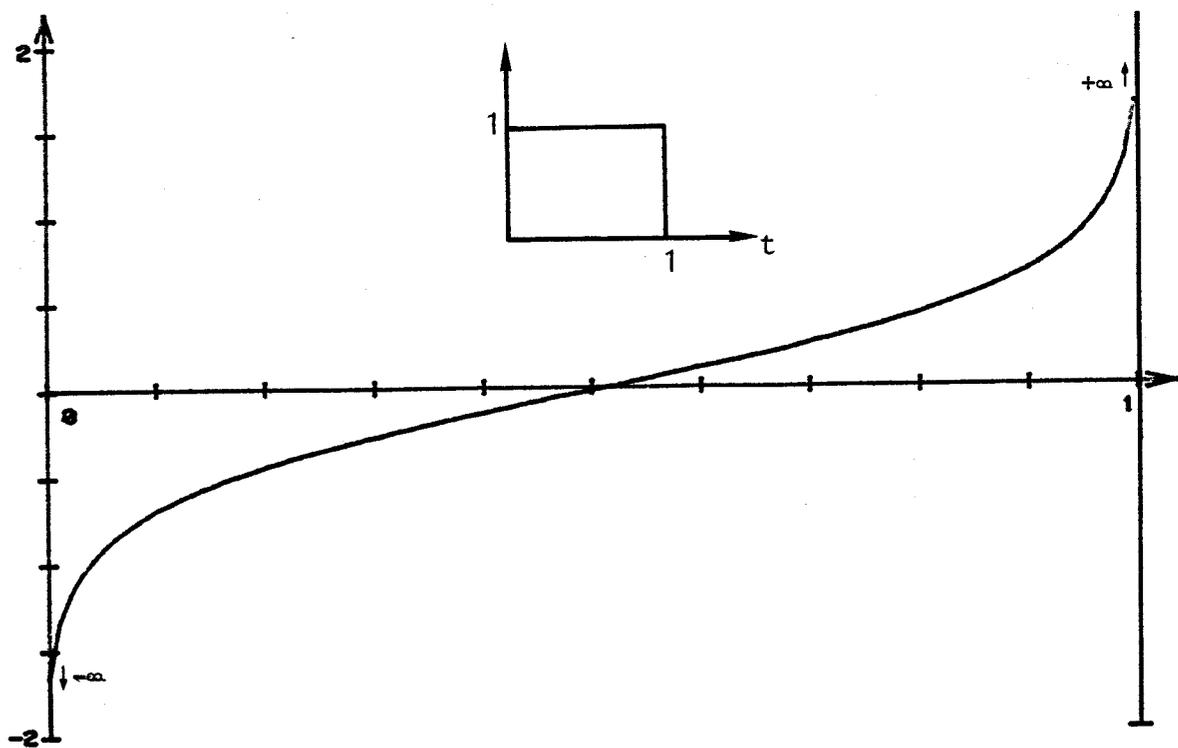


figure A 1 : TRANSFORMEE DE HILBERT DE LA FONCTION CRENEAU

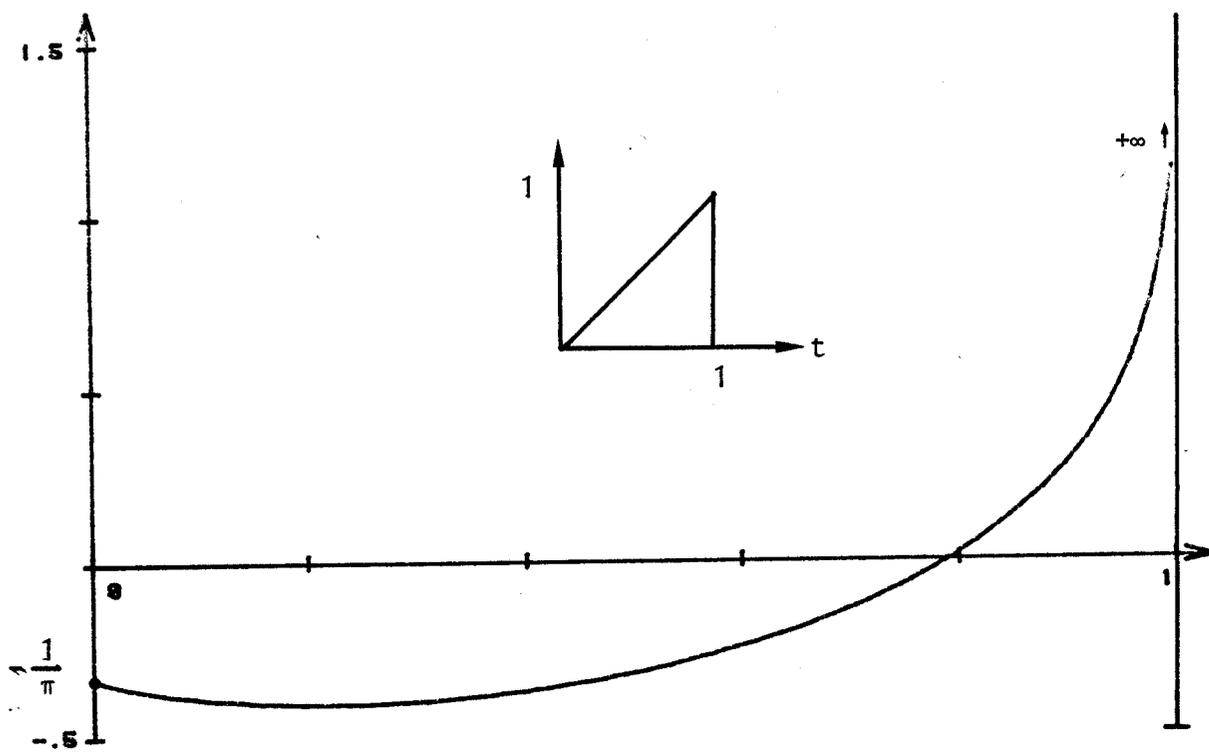


figure A 2 : TRANSFORMEE DE HILBERT DE LA FONCTION RAMPE
(pente unité)

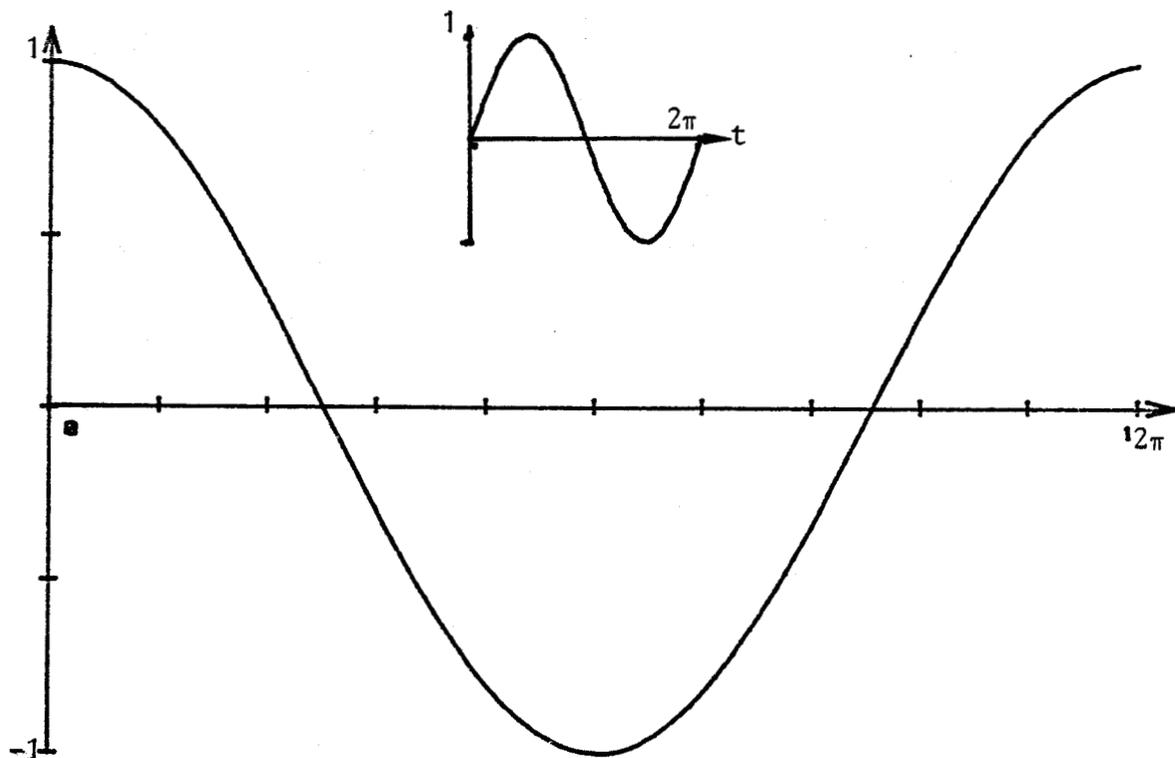


figure A 3 : TRANSFORMEE DE HILBERT DE LA FONCTION SINUS
(respectivement cosinus)

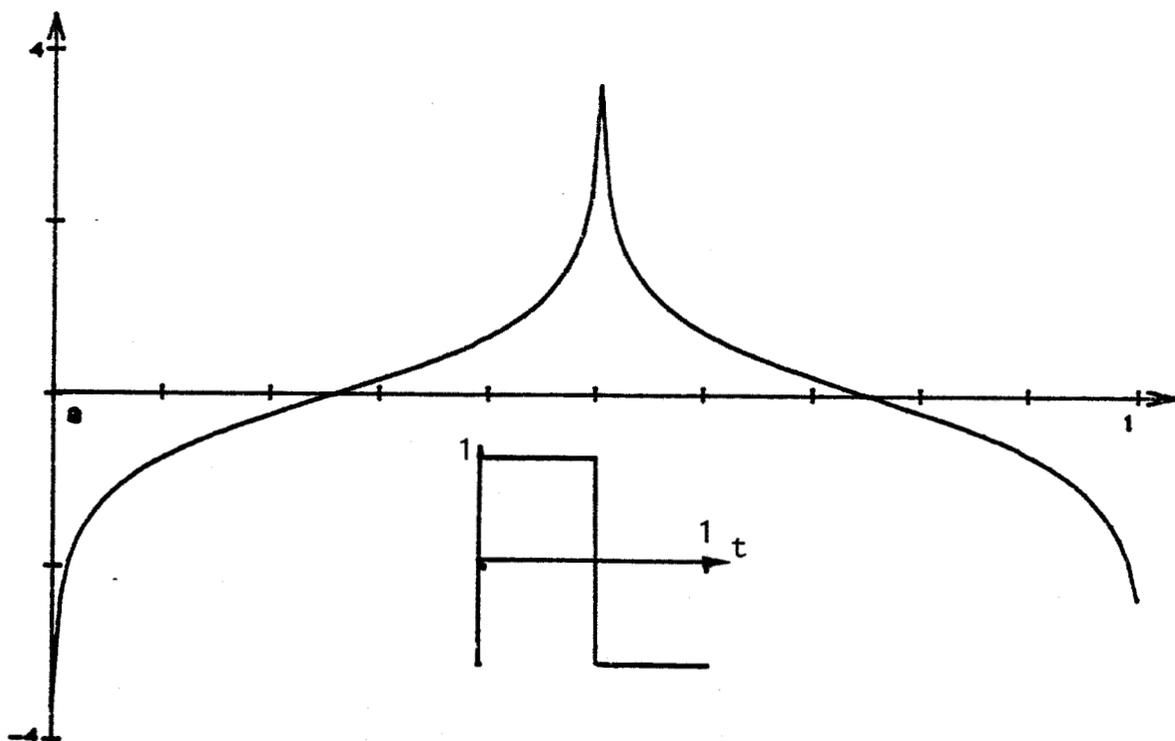


figure A 4 : TRANSFORMEE DE HILBERT DE LA FONCTION CRENEAU CENTRE

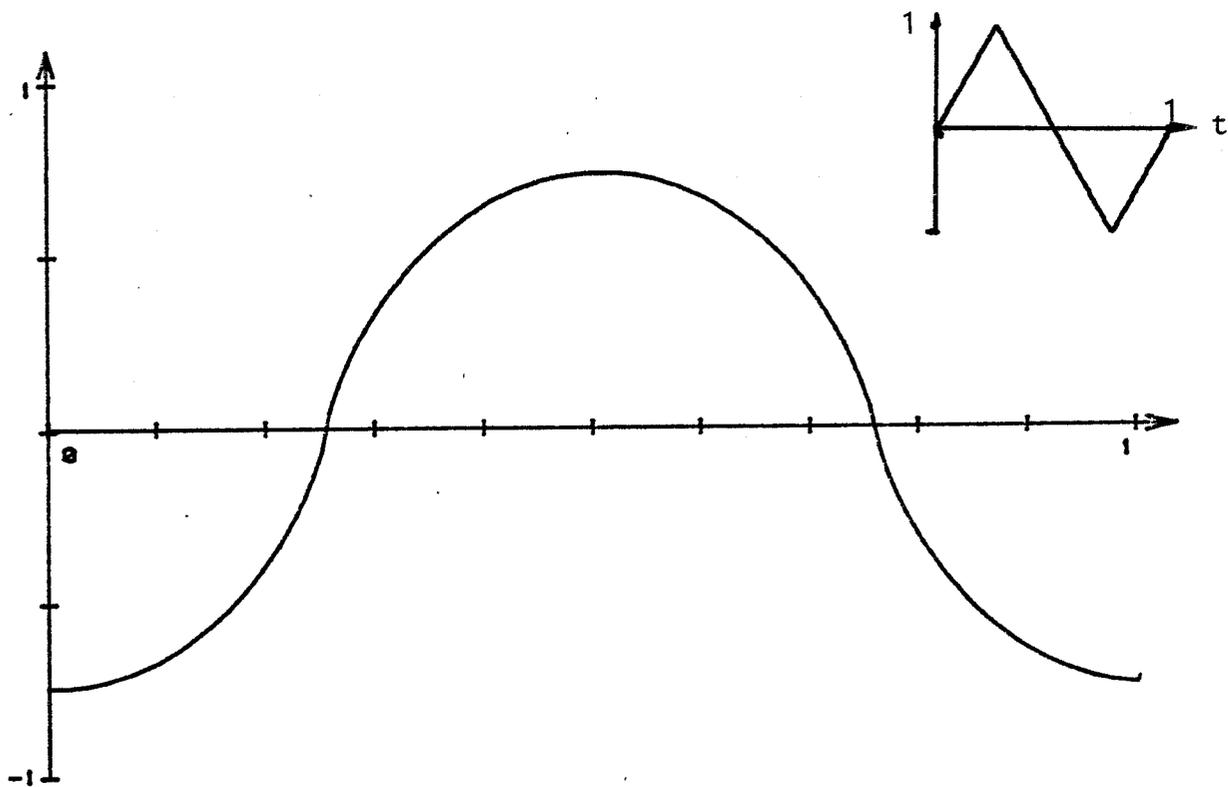


figure A 5 : TRANSFORMEE DE HILBERT DE LA FONCTION TRIANGLE CENTRE

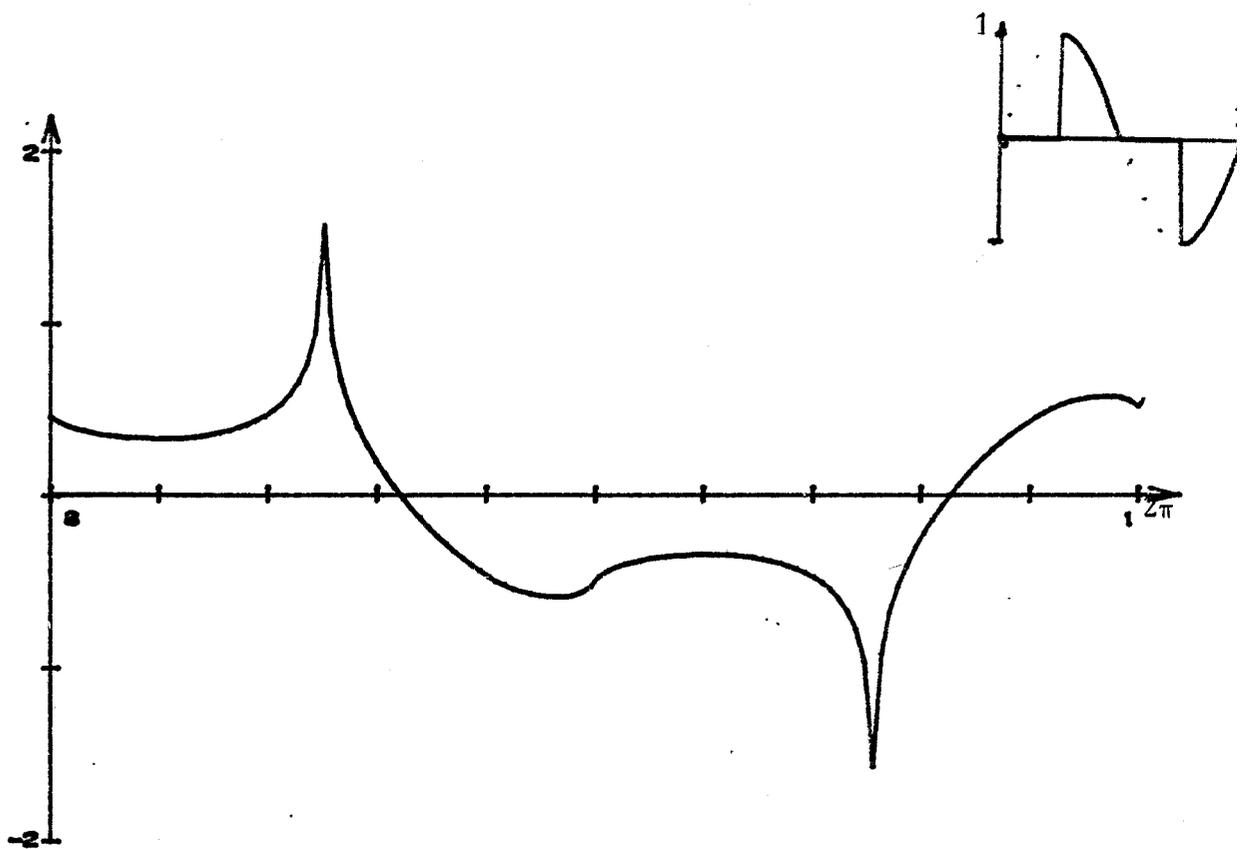


figure A 6 : TRANSFORMEE DE HILBERT DE LA FONCTION SINUS HACHE

A N N E X E II

CONSTANTES THERMOCINETIQUES

DE QUELQUES MATERIAUX

CONSTANTES THERMOCINETIQUES DE QUELQUES MATERIAUX

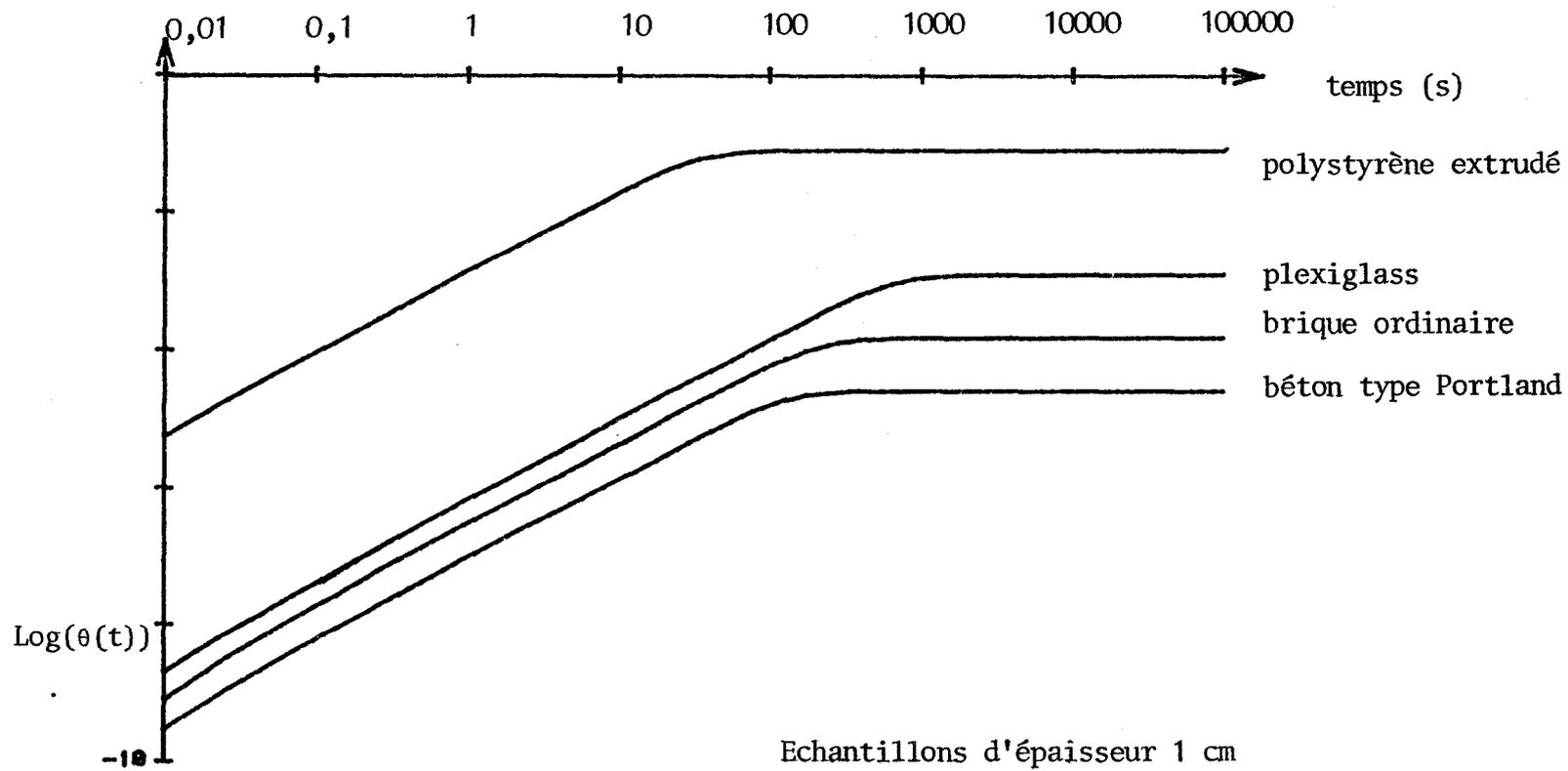
| | λ W/mK | ρ Kg/m ³ | c J/KgK | a m ² /s | b W/s/m ² K | ϵ (1mHz) m |
|----------------------------|-------------------|-----------------------------|------------|------------------------|---------------------------|------------------------|
| Aluminium | 236 | 2710 | 902 | $9,7 \cdot 10^{-5}$ | $2,4 \cdot 10^4$ | 0,175 |
| Duralumin (4%Cu) | 169 | 2790 | 881 | $6,88 \cdot 10^{-5}$ | $2,03 \cdot 10^4$ | 0,148 |
| Argent | 427 | 10500 | 234 | $17,38 \cdot 10^{-5}$ | $3,24 \cdot 10^4$ | 0,235 |
| Cuivre | 398 | 8930 | 386 | $11,55 \cdot 10^{-5}$ | $3,7 \cdot 10^4$ | 0,192 |
| Constantan (55Cu, 45Ni) | 23 | 8920 | 384 | $0,67 \cdot 10^{-5}$ | $8,87 \cdot 10^3$ | 0,046 |
| Laiton (70Cu, 30Zn) | 111 | 8522 | 385 | $3,38 \cdot 10^{-5}$ | $1,9 \cdot 10^4$ | 0,103 |
| Fer | 80,2 | 7870 | 447 | $2,27 \cdot 10^{-5}$ | $1,67 \cdot 10^4$ | 0,085 |
| Fonte (0,4C) | 51 | 7270 | 420 | $1,67 \cdot 10^{-5}$ | $1,24 \cdot 10^4$ | 0,073 |
| Nickel | 90,7 | 8900 | 444 | $2,3 \cdot 10^{-5}$ | $1,89 \cdot 10^4$ | 0,085 |
| Or | 317 | 19300 | 129 | $12,73 \cdot 10^{-5}$ | $2,8 \cdot 10^4$ | 2,01 |
| Plomb | 35,3 | 11340 | 129 | $2,41 \cdot 10^{-5}$ | $7,18 \cdot 10^3$ | 0,087 |
| Zinc | 115 | 7140 | 388 | $4,15 \cdot 10^{-5}$ | $1,78 \cdot 10^4$ | 0,115 |

| | | | | | | |
|------------------------------|------------|----------------|------|---------------------------------|-------------------|-----------------------|
| Argile (50%H ₂ O) | 1,25 | 1545 | 875 | $9,24 \cdot 10^{-7}$ | $1,29 \cdot 10^3$ | $17,1 \cdot 10^{-3}$ |
| Bakélite | 0,23 | 1270 | 1590 | $1,13 \cdot 10^{-7}$ | $6,81 \cdot 10^2$ | $6 \cdot 10^{-3}$ |
| Béton | 0,8 à 1,7 | 1900 à 2300 | 880 | $5,7 \cdot 10^{-7}$ | $1,3 \cdot 10^3$ | $13,5 \cdot 10^{-3}$ |
| Bois | | | | | | |
| .chêne | 0,2 à 0,3 | 610 à 800 | 2390 | $1,5 \cdot 10^{-7}$ | 650 | $7 \cdot 10^{-3}$ |
| .sapin | 0,1 à 0,15 | 410 à 600 | 2720 | $9 \cdot 10^{-8}$ | 400 | $5,35 \cdot 10^{-3}$ |
| .contre plaqué | 0,11 | 590 | 2500 | $7,5 \cdot 10^{-8}$ | 400 | $4,88 \cdot 10^{-3}$ |
| Brique | 0,4 à 0,5 | 1600 | 840 | $3,3 \cdot 10^{-7}$ | 780 | $10,25 \cdot 10^{-3}$ |
| Chamotte | 1,04 | 1800 | 840 | $6,87 \cdot 10^{-7}$ | 1250 | $14,8 \cdot 10^{-3}$ |
| Caoutchouc | 0,37 | 1480 | 1290 | $1,93 \cdot 10^{-7}$ | 840 | $7,8 \cdot 10^{-3}$ |
| Dépron | 0,035 | 35 | 1400 | $7,14 \cdot 10^{-7}$ | 41,4 | $15 \cdot 10^{-3}$ |
| Kapton | 0,156 | | | | | |
| Granite | 1,7 à 4 | 2640 | 820 | $8 \text{ à } 18 \cdot 10^{-7}$ | 1800 à 2300 | $20 \cdot 10^{-3}$ |
| Grès | 1,8 | 2200 | 710 | $11,5 \cdot 10^{-7}$ | 1670 | $19 \cdot 10^{-3}$ |
| Marbre | 2,1 à 2,9 | 2600 | 800 | $12 \cdot 10^{-7}$ | 2300 | $20 \cdot 10^{-3}$ |

| | | | | | | |
|---------------------|-------|------|------|----------------------|-------|----------------------|
| Plâtre | 0,8 | 1600 | 830 | $6,02 \cdot 10^{-7}$ | 1030 | $13,8 \cdot 10^{-3}$ |
| Papier | 0,01 | 930 | 1350 | $7,9 \cdot 10^{-9}$ | 112 | $1,6 \cdot 10^{-3}$ |
| Polystyrène extrudé | 0,030 | 11,8 | 1200 | $21,2 \cdot 10^{-7}$ | 20,61 | $26 \cdot 10^{-3}$ |
| Plexiglass | 0,18 | 1165 | 1380 | $1,15 \cdot 10^{-7}$ | 538 | $6 \cdot 10^{-3}$ |
| PVC | 0,15 | 1380 | 960 | $1,13 \cdot 10^{-7}$ | 445 | $6 \cdot 10^{-3}$ |
| Téflon | 0,23 | 2200 | 1035 | $1 \cdot 10^{-7}$ | 723 | $5,64 \cdot 10^{-3}$ |
| Verre | 1 | 2750 | 830 | $4,4 \cdot 10^{-7}$ | 1510 | $11,8 \cdot 10^{-3}$ |
| Pyrex | 1,3 | 2200 | 750 | $7,87 \cdot 10^{-7}$ | 1464 | $15,8 \cdot 10^{-3}$ |

figure B 1 : EVOLUTION COMPAREE DES REPONSES INDICIELLES DE QUELQUES MATERIAUX DU BATIMENT

Echelle logarithmique du temps (cf p 76)



A N N E X E III

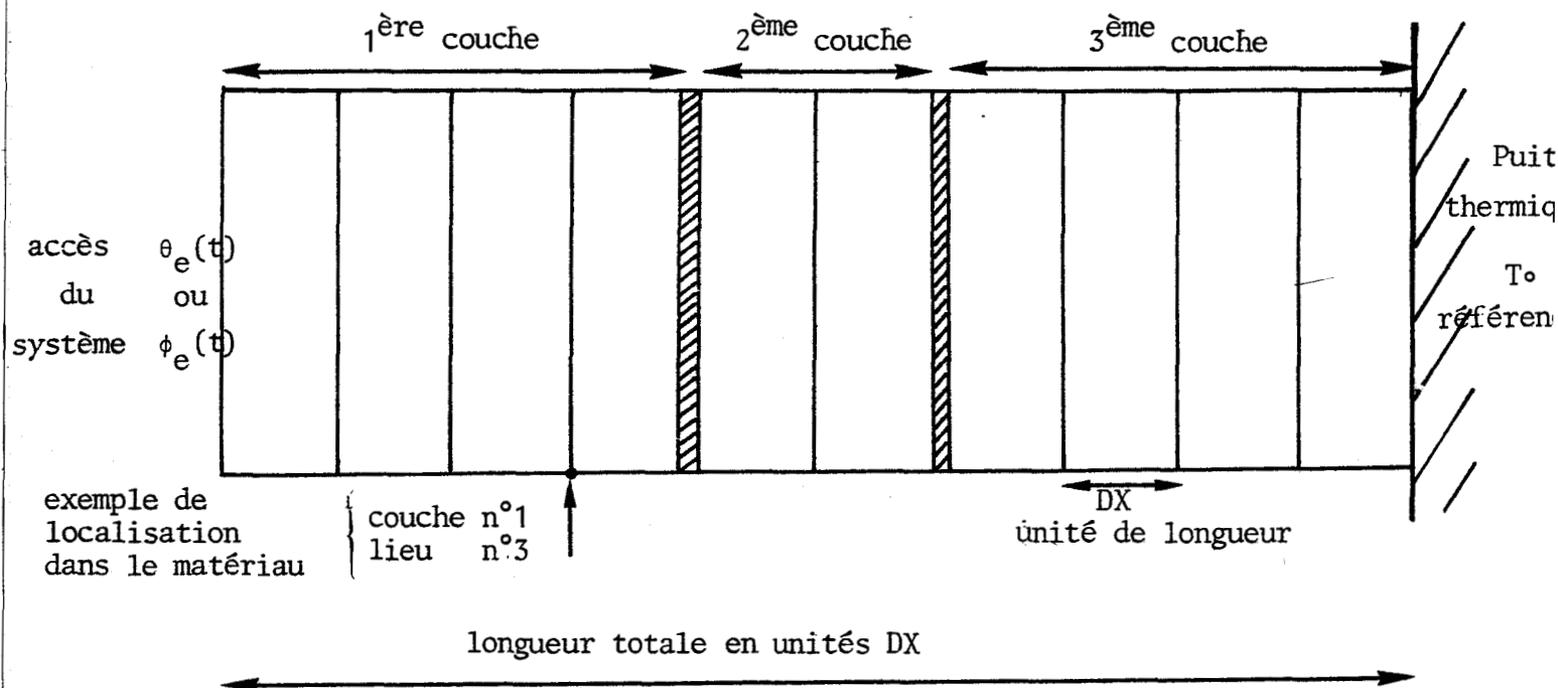
PRESENTATION DE LA CHAINE DE MESURES ET

DU PROGRAMME DE MODELISATION DES TRANSFERTS THERMIQUES

1) Structure du programme de modélisation des transferts thermiques

Réalisé à l'usage d'un microordinateur CBM, ce programme permet de traiter des fichiers comportant jusqu'à 256 points. Le système thermique comportant N couches est "découpé" en éléments de telle sorte qu'en tout point du système le flux et la température puissent être calculés.

Le système est représenté de la façon suivante :



Remarques : .Pour une fréquence donnée, le calcul de l'impédance en chacun des lieux s'effectue du puits jusqu'à l'entrée du système (de droite à gauche)

.Si la grandeur imposée(ou mesurée) en entrée constitue une observable ($\theta_e(t)$ ou $\phi_e(t)$), l'évolution de la grandeur conjuguée respectivement $\phi_e(t)$ et $\theta_e(t)$ est obtenue en fin de programme.

Pour le point localisé dans la couche I au lieu J, on obtient $\theta_{(I,J)}(t)$ et $\phi_{(I,J)}(t)$.

.Le programme permet par exemple de calculer pour tous les lieux et à chaque instant, l'étalement d'une impulsion imposée à l'entrée du système

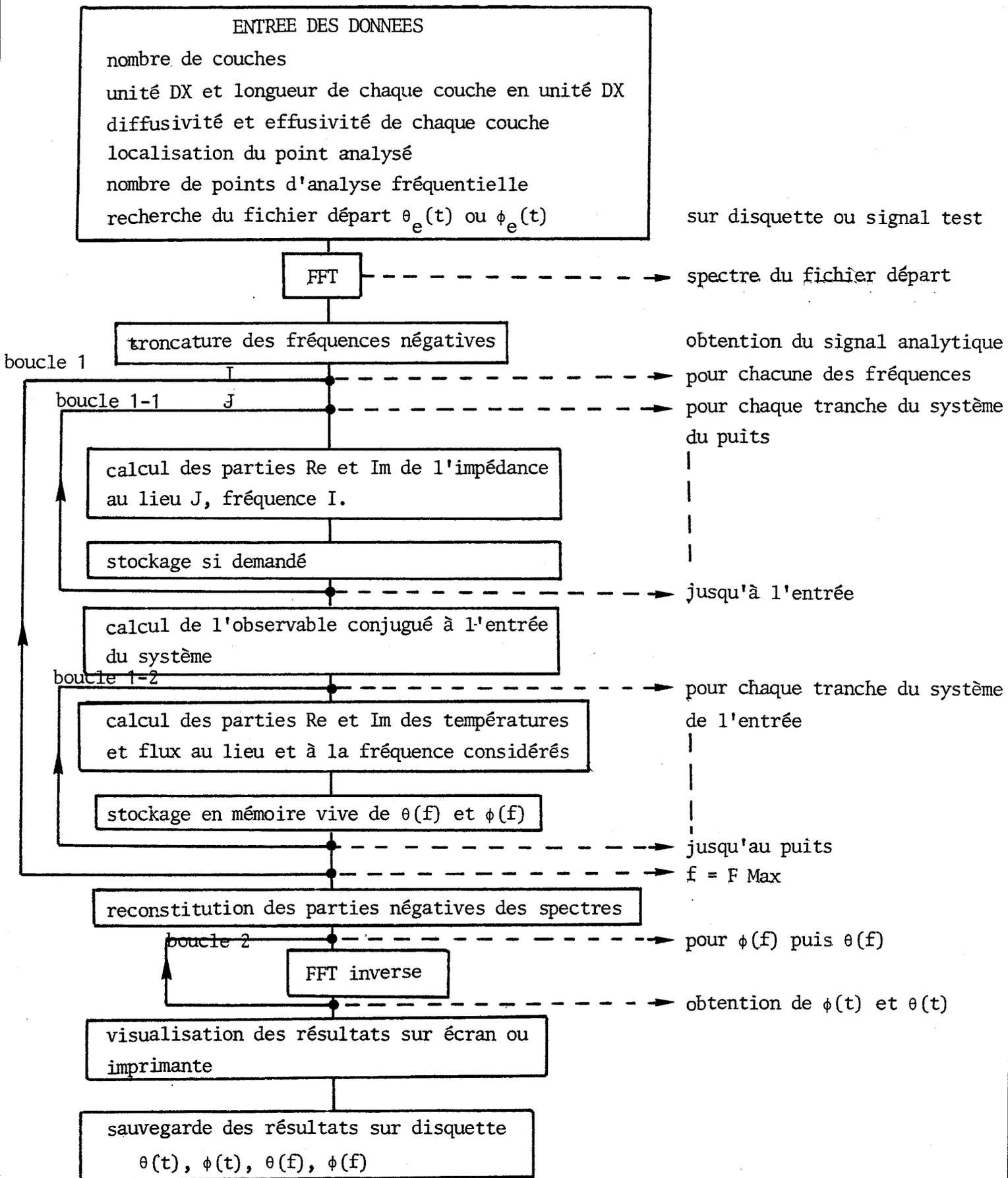


figure A : Organigramme simplifié du programme de simulation de transfert thermique

2) Présentation de la chaîne de mesures

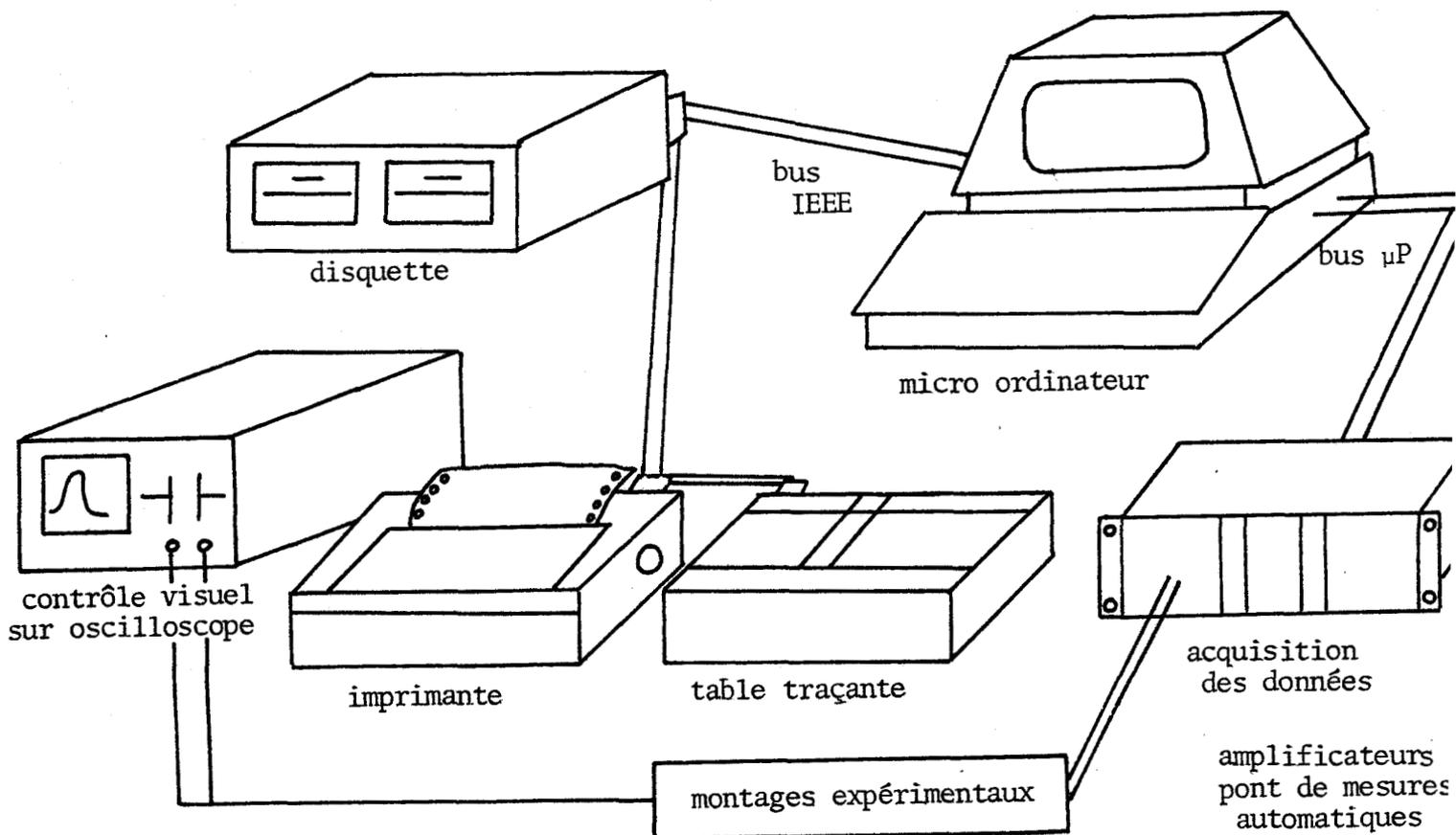
L'unité principale de cette chaîne de mesure est un microordinateur CBM 4032 bâti autour du microprocesseur de Rockwell, le 6502.

La sauvegarde des programmes et des tableaux de mesures est effectuée sur une unité double de minidisquettes de capacité totale : 360 Koctets.

Le contenu des programmes et des résultats de mesures peuvent être affichés sur une imprimante à aiguille d'une rapidité de 80 caractères par seconde.

Enfin, les courbes résultant du traitement des mesures sont visualisées à l'aide d'une table traçante.

Rappelons ici que ces trois périphériques sont raccordés à l'unité centrale par l'intermédiaire d'un bus IEEE admettant jusqu'à la connexion de 15 périphériques en parallèle. D'autre part, afin de pouvoir être traitées, les mesures doivent être effectuées séquentiellement, sur plusieurs voies avec un temps de récurrence ajusté en fonction de la nature et de la rapidité des phénomènes enregistrés. Les grandeurs sont alors transformées sous forme numérique avant d'être transférées en mémoire centrale puis stockées sur disquette.



B I B L I O G R A P H I E

- 1) J. MAX : "Méthodes et techniques du traitement de signal"
Masson, 1981.
- 2) E. ROUBINE : "Introduction à la théorie de la communication"
Masson, 1970.
- 3) A. SPATARU : "Théorie de la transmission de l'information"
Masson, 1970.
- 4) L. SCHWARTZ : "Méthodes mathématiques pour les sciences physiques"
Hermann, 1961.
- 5) D. PAPIN, A. KAUFMANN : "Calcul matriciel appliqué"
Albin Michel, 1969.
- 6) FRONTEAU : "Cours de mathématique et mécanique"
Université d'Orléans, 1977-1978.
- 7) J. HLADICK : "La transformation de Laplace à plusieurs variables"
Masson, 1969.
- 8) MURRAY, R. SPIEGEL : "Transformées de Laplace"
Schaum, 1975.
- 9) CARSLow, JEAGER : "Conduction of heat in solids"
Oxford Clarendon press, 5^e édition, 1978.
- 10) A. B. DE VRIENDT : "La transmission de la chaleur"
Gaëtan Morin, 1982.
- 11) J. CHARRIER, J. A. MARUCIC : "Possibilités d'utilisation des méthodes thermiques
à des fins d'essais non destructifs en génie civil"
Rapport de recherche LPC n°113, Avril 1982.

- 12) D. LECLERCQ : "Caractérisation des transferts thermiques par analyse de la réponse en fréquence"
Thèse 3^{ème} cycle, Nov 1982, LILLE.
- 13) R. A. KOUGBEADJO : "Identification de la diffusivité thermique par traitement de transfert de chaleur"
Thèse 3^{ème} cycle, 1980, LILLE.
- 14) A. BEJAN : "Entropy generation through heat and fluid flow"
John Wiley & Sons, 1982.
- 15) I. PRIGOGINE : "Physique, temps et devenir"
Masson, 1982.
- 16) H. B. CALLEN : "Thermodynamics"
John Wiley & Sons, 1960.
- 17) M. DODE : "Le deuxième principe de la thermodynamique"
Sedes, 1965.
- 18) M. A. BIOT : "Variational principles in heat transfert"
Oxford university press, 1970.
- 19) M. A. BIOT : "Thermoelasticity and irreversible thermodynamics"
J. Appl. Phys. 27,3, march 1956.
- 20) A. BEJAN : "A general variational principle for thermal insulation system design"
J. Heat Mass Transfert vol 22 pp 219-228, 1979.
- 21) B. DUTHOIT, P. THERY, J. M. DEVISME : "Application des bilans d'énergie et d'entropie au traitement des mesures de flux et de température dans une paroi réelle en régime variable"
Entropie n^{os} 107-108, 1982.

- 22) B. DUTHOIT, D. LECLERCQ, P. THERY : "Signal and systems analysis for unsteady heat conductor problems"
J. Appl. Phys. 54(2), Feb 1983
- 23) D. LECLERCQ, E. GAVIOT, P. THERY : "Frequency domain analysis of entropy generation through heat flow"
J. Appl. Phys. 54(10 Oct 83)
- 24) A. FARZA : "Application du bilan d'entropie à la caractérisation des pertes par conduction thermique en régime variable"
Thèse 3^{ème} cycle, juil 1981, LILLE.
- 25) D. LECLERCQ, P. THERY : "Appartus for simultaneous temperature and heat flux measurements under transient conditions"
Rev. Sc. Instr, 54, 374, 1983.
- 26) E. GAVIOT : "Conception et réalisation d'une source énergétique impulsionnelle; Application à la caractérisation d'un capteur de flux thermique"
Mémoire de DEA, 1982, LILLE.
- 27) BRUEL, KJAER : "System analysis and time delay spectrometry"
Technical review n°1, 1983.
- 28) C. H. M. TURNER : "On the concept of an instantaneous power spectrum and its relationships to the autocorrelation function"
J. Appl. Phys. Vol 25 n°11, Nov 1954.
- 29) P. AMSTUTZ : "Systèmes et bilans"
Annales des télécommunications tome 27 n°s 3-4 p 134 à 139,
Mars-Avril 1972.
- 30) L. BRUN : "Méthodes énergétiques dans les systèmes évolutifs"
Thèse Gauthier-Villars, PARIS, 1969.

- 31) L. BRUN : "Sur deux expressions analogues à la formule de Clapeyron donnant l'énergie libre et la puissance dissipée pour un corps viscoélastique"
C.R Ac. Sc. tome 261- 41-44, 1965.
- 32) B. D. TELLEGEN : "A general network theorem with applications"
Philips Res Rep 7, 259-269, 1952.
- 33) L. LANDAU, E. LIFCHITZ : "Electrodynamique des milieux continus"
Mir, 1969.
- 34) L. LANDAU, E. LIFCHITZ : "Mécanique"
Mir, 1969.
- 35) M. FELDMANN : "Théorie des réseaux et systèmes linéaires"
CNET, Eyrolles, 1980.
- 36) W. SHEPHERD, P. ZAND : "Energie flow and power factor in nonsinusoidal circuits"
Cambridge university press, 1979.
- 37) P. FILIPSKI : "The measurement of distortion current and distortion power"
IEEE, 0018-9456/84/0300-0036, 1984.
- 38) F. J. J. CLARKE, J. R. STOCKTON : "Principles and theory of wattmeters operating on the basis of regularly spaced sample pairs"
J. Phys. E. Sc. Instr. vol 15, 1982.
- 39) G. BUDEANU : "Reactive and fictitious powers"
Rumanian National Institute (Bucharest), publications n^{os} 2 & 4, 1927.
- 40) E. PILLET : "Sur la généralisation de la notion de puissance réactive"
RGE Mai 1982.

