N° d'ordre 651

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Jean-Jacques LOEB

INCIDENCES DE L'ACTION D'UN GROUPE DE LIE SUR LES VARIETES DE STEIN

Thèse soutenue le 17 mai 1985 devant la Commission d'Examen :

Président Rapporteur 2ème thèse :	L. GRUSON (Université de Lille I)
Rapporteurs :	G. COEURÉ (Université de Lille I) A.T. HUCKLEBERRY (Université de Bochum (RFA)) H. SKODA (Université de Paris VI)
Examinateur :	P. DOLBEAULT (Université de Paris VI)

On s'accorde généralement pour dire que la thèse d'Etat marque une étape importante dans un parcours mathématique. Je vais tenter ici, en quelques lignes d'évoquer ceux qui m'ont permis de franchir cette étape.

Gérard Coeuré a dirigé ma thèse. Il a été constamment présent, en m'écoutant attentivement, en lisant avec soin mes manuscrits, en proposant certaines améliorations, en me suggérant telle ou telle voie. Non seulement, j'ai appris, de lui, beaucoup de mathématiques mais aussi une certaine façon d'en faire. D'emblée, j'ai été frappé par sa façon d'exposer un problème qui allait tout droit au coeur d'une question sans passer par un jargon devant lequel l'interlocuteur se sent si souvent écrasé. Il m'a rendu conscient de l'importance qu'il y avait à se faire sa "petite idée personnelle" sur tout sujet. Ce que je lui dois déborde la sphère mathématique proprement dite. Je lui exprime ici toute ma reconnaissance.

Mes collègues Daniel Boichu, Aziz El Kacimi-Alaoui et Bernard Callenaere sont aussi mes amis. Les discussions mathématiques et autres que j'ai eues avec eux ont été très enrichissantes. Ma thèse leur doit beaucoup. Je les en remercie profondément.

Pierre Dolbeault et Henri Skoda ont accepté de faire partie du jury de ma thèse. Avec Pierre Lelong, ils ont montré l'intérêt qu'ils portaient à mes travaux en me faisant l'honneur de m'inviter plusieurs fois à leur Séminaire d'Analyse Complexe. Je leur exprime ici ma gratitude.

J'ai exposé une première version de cette thèse à l'Ecole Hassania de Casablanca. Je suis particulièrement reconnaissant à Najib Cherfaoui pour l'accueil chaleureux qui m'a été réservé.

Laurent Gruson et Alan T. Huckleberry ont bien voulu faire partie du jury de cette thèse. Le premier, dont j'ai toujours pu apprécier la grande culture mathématique, a dirigé ma seconde thèse. Le second a exercé une très grande influence sur mes travaux par l'article qu'il avait fait en collaboration avec B. Gilligan. Merci beaucoup à tous les deux.

Enfin, pour qu'une thèse existe, il faut qu'elle soit frappée et tirée. Un grand merci à Raymonde Bérat qui n'a pas ménagé sa peine. Merci aussi à Françoise Wdowczyk, Monique Lloret, Albert Gournay et Michel Provost pour le tirage.

INTRODUCTION

Ce travail est composé de trois articles :

"Action d'une forme de Lie réelle d'un groupe de Lie complexe sur les fonctions plurisousharmoniques",

"Pseudo-convexité des ouverts invariants et convexité géodésique dans certains espaces symétriques",

"A counter-example to the Serre Problem with a bounded domain of $\mathbb{C}^2$ *as fiber",* (écrit en collaboration avec G. COEURÉ)

qui paraîtront respectivement aux "Annales de l'Institut Fourier", aux Lecture Notes in Mathematics "Séminaire d'Analyse P. Lelong-P. Dolbeault-H. Skoda), aux "Annals of Mathematics".

Chaque article est précédé d'une introduction. Au début du second article, certains résultats du premier article sont améliorés. Nous donnons ici au lecteur un aperçu des thèmes de l'ensemble du travail.

1) *L'étude de la pseudo-convexité des couples* $(G_{\mathbb{C}}, G_{\mathbb{R}})$ *formés par un groupe de Lie réel et de l'une de ses formes réelles fermées* : Lorsque $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ est simplement connexe, $(G_{\mathbb{C}}, G_{\mathbb{R}})$ est pseudo-convexe si et seulement si $G_{\mathbb{R}}$ est à spectre imaginaire pur. (Ceci signifie que pour tout $X \in \mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}})$, adX a ses valeurs propres imaginaires pures). Ces couples sont aussi caractérisés par l'existence d'un groupe de Lie complexe et simplement connexe $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$, d'une forme réelle $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$ de $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$ à spectre imaginaire pur, d'un sous-groupe discret central Γ de $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$ tel que : $G_{\mathbb{C}} = \tilde{G}_{\mathbb{C}}/\Gamma$ et $G_{\mathbb{R}} = \tilde{G}_{\mathbb{R}}/\Gamma$; la variété $G_{\mathbb{C}}$ est nécessai-

rement de Stein. Lorsque $G_{\mathbb{R}}$ n'est pas à spectre imaginaire pur, il ne peut exister de structure kählérienne sur $G_{\mathbb{C}}$ invariante par $G_{\mathbb{R}}$.

Cette étude nous permet de donner certains résultats sur les variétés $G_{\mathbb{C}}/_{\Delta}$, où Δ est un sous-groupe discret uniforme d'une forme réelle $G_{\mathbb{R}}$ de $G_{\mathbb{C}}$.

2) *L'étude des tubes pseudo-convexes en relation avec le principe du minimum de C.O. Kiselman* : Soit $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ un couple pseudo-convexe. Etant donné un fibré principal holomorphe M de groupe structural $G_{\mathbb{C}}$ et de base B de Stein, et Ω un ouvert pseudo-convexe de M invariant par $G_{\mathbb{R}}$ et à fibres connexes au-dessus de B, alors la projection de Ω sur B est de Stein.

3) *L'étude des ouverts pseudo-convexes invariants* :

Pour un couple $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ et pour un ouvert Ω pseudo-convexe de $G_{\mathbb{C}}$ invariant par $G_{\mathbb{R}}$, on montre l'existence d'une fonction strictement p.s.h. sur Ω, invariante par $G_{\mathbb{R}}$ et d'exhaustion sur $\Omega/_{G_{\mathbb{R}}}$, non seulement pour un couple pseudo-convexe mais aussi pour tout $G_{\mathbb{C}}$ résoluble tel que $\Omega/_{G_{\mathbb{R}}}$ est relativement compact.

On étudie également la relation entre convexité et pseudo-convexité pour les ouverts invariants. La convexité géodésique de $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ est caractérisée par une propriété du spectre de la représentation adjointe et la simple convexité de $G_{\mathbb{C}}/_{G_{\mathbb{R}}}$. Pour tout couple $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ géodésiquement convexe (en particulier, pour tout couple pseudo-convexe), la projection sur $G_{\mathbb{C}}/_{G_{\mathbb{R}}}$ d'un ouvert pseudo-convexe invariant est convexe ; la réciproque est fausse en général.

4) *L'étude d'un exemple donnant une réponse négative à une conjecture de Y.T. Siu*, en exhibant un fibré qui n'est pas de Stein, alors que sa base est de Stein, et que sa fibre est un domaine borné pseudo-convexe de $\mathbb{C}^2$.

ACTIONS D'UNE FORME DE LIE REELLE D'UN GROUPE DE LIE COMPLEXE SUR LES FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES

juin 1984

I. INTRODUCTION.

Il existe des exemples assez simples d'ouverts de Stein de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$ dont la projection sur $\mathbb{C}^2$ n'est pas de Stein. Néanmoins, on doit à C.O. Kiselman le théorème suivant :

Théorème [5].- *Soit* Ω *un ouvert de Stein de* $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$ *invariant par les translations de* $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ *et à fibres connexes au-dessus de* $\mathbb{C}^n$. *Alors la projection* ω *de* Ω *sur* $\mathbb{C}^n$ *est de Stein.*

B. Chafi a étudié, dans sa thèse de 3ème cycle [2], ce qui se passait si on remplaçait $\mathbb{C}^m$ par un groupe de Lie complexe connexe $G_{\mathbb{C}}$ et $\mathbb{R}^m$ par une forme réelle $G_{\mathbb{R}}$ de $G_{\mathbb{C}}$. On rappelle ici qu'une forme réelle $G_{\mathbb{R}}$ de $G_{\mathbb{C}}$ est un sous-groupe de Lie connexe de $G_{\mathbb{C}}$ tel que $\mathrm{Lie}(G_{\mathbb{C}}) = \mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}}) \oplus i\,\mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}})$. Il a démontré les deux résultats suivants :

1er résultat : *Principe du Minimum.*

Soit $G_{\mathbb{C}}$ un groupe de Lie complexe et $G_{\mathbb{R}}$ une forme réelle fermée. Soit Ω un ouvert de $G_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^n$ invariant par l'action à droite de $G_{\mathbb{R}}$ et à fibres connexes au-dessus de $\mathbb{C}^n$. Alors si ϕ est une fonction régulière invariante sur Ω, strictement plurisousharmonique et d'exhaustion sur $\Omega/G_{\mathbb{R}}$, la fonction $\Psi(x) = \inf \phi(g,x)$ définie sur la projection ω de Ω sur $\mathbb{C}^n$ est plurisousharmonique d'exhaustion sur ω.

Ce résultat a comme conséquence immédiate que ω est de Stein.

Dès lors, pour généraliser le théorème de C.O. Kiselman à $G_{\mathbb{C}}$, il fallait savoir si un ouvert de Stein Ω invariant de $G_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^n$ admettait une fonction régulière strictement plurisousharmonique invariante et d'exhaustion sur $\Omega/G_{\mathbb{R}}$.

Le <u>second résultat</u> de B. Chafi est que cette condition est satisfaite si on prend pour $G_{\mathbb{C}}$ un groupe de la forme $GL(p,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^q$ et pour $G_{\mathbb{R}}$ la forme réelle $U(p) \times \mathbb{R}^q$. ($GL(p,\mathbb{C})$ est le groupe linéaire complexe d'ordre p et $U(p)$ le groupe unitaire d'ordre p).

Nous montrons dans la cinquième partie que le premier résultat de B. Chafi peut être replacé dans un cadre géométrique assez général (théorème 3).

Pour la généralisation du second résultat, nous commençons par aborder la question de l'existence pour un couple $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ d'une fonction ψ de classe C^∞ sur $G_{\mathbb{C}}$, strictement plurisousharmonique, invariante par l'action à droite de $G_{\mathbb{R}}$ et d'exhaustion sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$. Si la réponse est affirmative, nous disons que le couple $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ est <u>pseudo-convexe</u>. (Nous admettons dans la définition que $G_{\mathbb{R}}$ est fermé dans $G_{\mathbb{C}}$). La motivation de cette définition est que l'existence de ψ, triviale dans le cas $(\mathbb{C}^n,\mathbb{R}^n)$ n'est pas toujours assurée.

Pour donner un critère de pseudo-convexité, nous introduisons les définitions suivantes :

1) Une algèbre de Lie $\mathcal{J}$ (réelle) est à <u>spectre imaginaire pur</u> si pour tout $X \in \mathcal{J}$, l'endomorphisme $\mathrm{ad}X$ a toutes ses valeurs propres imaginaires pures.

2) On dit qu'un groupe de Lie G réel est à spectre imaginaire pur si son algèbre de Lie est à spectre imaginaire pur.

Rappelons ici que Jenkins [7] a démontré que G est à spectre imaginaire pur, si et seulement si il est à croissance polynomiale. Ceci signifie qu'étant donné une mesure de Haar sur G, il existe un polynôme p tel qu'à tout voisinage relativement compact U de l'élément neutre on peut associer une constante $C(U)$ vérifiant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \text{mes}\, U^n \leqslant c(U)p(n).$$

Dans notre étude, nous n'utiliserons pas cette caractérisation des groupes à spectre imaginaire pur.

On peut alors énoncer le théorème 1 qui est le résultat essentiel de la 3ème et de la 4ème partie.

<u>Théorème</u> 1.- *Soit* $G_{\mathbb{C}}$ *un groupe de Lie complexe à radical simplement connexe et* $G_{\mathbb{R}}$ *une forme réelle de* $G_{\mathbb{C}}$. *Alors pour que* $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ *soit pseudo-convexe, il faut et il suffit que* $G_{\mathbb{R}}$ *soit à spectre imaginaire pur.*

Ceci permet de dire que si $G_{\mathbb{C}}$ est nilpotent simplement connexe, alors $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ est pseudo-convexe, tandis qu'il y a des groupes résolubles $G_{\mathbb{C}}$ tels que $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ ne soit pas pseudo-convexe.

On remarque que si $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ est pseudo-convexe (avec $G_{\mathbb{C}}$ à radical simplement connexe), alors $G_{\mathbb{C}}$ est de Stein. En effet, dans la 3ème partie nous montrons que $G_{\mathbb{C}}$ est un produit semi-direct de $\mathbb{C}^n$ et d'un groupe semi-simple complexe qui est de Stein d'après un résultat de Matsushima [9].

Dans sa démonstration du deuxième résultat, B. Chafi s'est servi de la mesure de Haar sur le groupe compact $U(p)$ pour rendre invariantes des fonctions plurisousharmoniques. Le lemme 1, essentiel à la démonstration du théorème 1, généralise cette méhode en faisant jouer à un espace homogène compact le même rôle que le groupe compact. Nous utilisons encore ce lemme dans la cinquième partie, pour montrer que le théorème de Kiselman se généralise pour les couples $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ pseudo-convexes moyennant l'hypothèse restrictive que $G_{\mathbb{R}}$ contienne un sous-groupe discret uniforme Γ. J'ignore si cette hypothèse est nécessaire mais elle joue un rôle essentiel dans notre démonstration qui repose sur un théorème de Grauert-Docquier. Ajoutons que notre hypothèse est déjà restrictive, au niveau des groupes nilpotents, dont on sait qu'il existe un groupe de dimension 10 sans sous-groupe discret uniforme [11]. Incidemment, nous montrons également que dans le théorème de Kiselman, on peut remplacer $\mathbb{C}^n$ par une variété de Stein quelconque.

Si $G_{\mathbb{R}}$ n'est pas à spectre imaginaire pur, il n'existe pas de fonction strictement plurisousharmonique sur $G_{\mathbb{C}}$ (4ème partie). Nous renforçons ce résultat dans la 6ème partie, en montrant que dans ce cas il n'existe même pas de structure kählérienne sur $G_{\mathbb{C}}$ invariante par $G_{\mathbb{R}}$. Lorsque la forme réelle $G_{\mathbb{R}}$ contient un sous-groupe discret uniforme Γ, nous donnons quelques résultats sur les espaces homogènes $G_{\mathbb{C}}/\Gamma$, à savoir :

Si $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ est pseudo-convexe, la variété $G_{\mathbb{C}}/\Gamma$ est de Stein. Tandis que si $G_{\mathbb{R}}$ n'est pas à spectre imaginaire pur, alors $G_{\mathbb{C}}/\Gamma$ n'a pas de métrique kählérienne(*). Certains groupes résolubles font partie de cette dernière catégorie.

(*) On suppose ici l'existence d'une mesure $G_{\mathbb{R}}$ invariante positive sur $G_{\mathbb{R}}/\Gamma$.

La première assertion implique que si $G_{\mathbb{C}}$ est nilpotent et simplement connexe, alors $G_{\mathbb{C}}/_{\Gamma}$ est de Stein. Ce résultat, démontré par B. Gilligan et A. Huckleberry [5], est utilisé dans notre démonstration du théorème 1.

Pour terminer cette introduction, je tiens à remercier G. Coeuré pour les nombreuses suggestions qu'il m'a faites pour cet article, ainsi que le referee de m'avoir fourni, pour la proposition 10, une démonstration notablement plus simple que ma démonstration initiale.

II. PRELIMINAIRES ET PROPOSITIONS TECHNIQUES.

On a le lemme de moyennisation suivant :

Lemme 1.- Soit $G_{\mathbb{C}}$ *un groupe de Lie complexe,* $G_{\mathbb{R}}$ *une forme réelle, fermée, et* Ω *un ouvert de* $G_{\mathbb{C}}$ *invariant par l'action à droite de* $G_{\mathbb{R}}$*. On suppose qu'il existe* Γ *sous-groupe fermé de* $G_{\mathbb{R}}$ *tel que :*

1°) $G_{\mathbb{R}}/\Gamma$ *soit compact.*

2°) il existe une mesure positive $d\dot{g}_{\mathbb{R}}$ *de masse 1 sur* $G_{\mathbb{R}}/\Gamma$ *invariante par l'action à gauche de* $G_{\mathbb{R}}$*.*

Alors, on a l'équivalence entre :

i) *Il existe sur* Ω *une fonction* φ *de classe* C^∞*, strictement plurisousharmonique, invariante par l'action de* Γ *à droite, et d'exhaustion sur* Ω/Γ*.*

ii) *Il existe sur* Ω *une fonction* Ψ *de classe* C^∞*, strictement plurisousharmonique, invariante par l'action de* $G_{\mathbb{R}}$ *à droite et d'exhaustion sur* $\Omega/G_{\mathbb{R}}$*.*

Remarques :

a) Si Γ est discret, la condition i) est équivalente à Ω/Γ de Stein.

b) Si $G_{\mathbb{C}}$ est résoluble et simplement connexe (en particulier nilpotent), alors 1°) => 2°) [11].

c) ii) => i) n'utilise pas la condition 2°).

Preuve : i) => ii). On définit Ψ par :

$$\Psi(g) = \int_{G_{\mathbb{R}}/\Gamma} \varphi(g\dot{g}_{\mathbb{R}})d\dot{g}_{\mathbb{R}} .$$

Par dérivation sous le signe somme, on voit de suite que Ψ est C^{∞} et strictement plurisousharmonique. L'invariance de Ψ provient de l'invariance de $d\dot{g}_{R}$. Reste à montrer la propriété d'exhaustion.

On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
G_{\mathbb{C}} \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "p"'] & G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}} \\
& G_{\mathbb{C}}/\Gamma \arrow[u, "r"']
\end{tikzcd}$$

p, q, r sont les projections canoniques et commutent à l'action de $G_{\mathbb{C}}$.

On note pour $C \in \mathbb{R}$:

$$L_C = \{g \in \Omega \mid \int_{G_{\mathbb{R}}/\Gamma} \psi(g\dot{g}_{\mathbb{R}})\, d\dot{g}_{\mathbb{R}} \leqslant C\}$$

$$K_C = \{\dot{g} \in \Omega/_{\Gamma} \mid \psi(\dot{g}) \leqslant C\}$$

$$M_C = \{g \in \Omega \mid \exists\, \dot{g}_{\mathbb{R}} \in G_{\mathbb{R}}/\Gamma \quad \text{tel que : } g\dot{g}_{\mathbb{R}} \in K_C\}.$$

On voit tout de suite que L_C est inclus dans M_C.

Montrer la propriété d'exhaustion de Ψ, c'est montrer que qL_C est relativement compact dans $\Omega/_{G_{\mathbb{R}}}$. Pour ceci, il suffit que qM_C vérifie la même propriété. Mais $qM_C \subseteq rK_C$. En effet, on a évidemment :

$$M_C = \{g \in \Omega \mid \exists\, g_{\mathbb{R}} \in G_{\mathbb{R}} \quad \text{tel que} \quad p(gg_{\mathbb{R}}) \in K_C\}.$$

Donc pour $g \in M_C$, on a :

$$q(g) = q(gg_{\mathbb{R}}) = r \circ p(gg_{\mathbb{R}}) \in rK_C$$

et comme K_C est, par hypothèse, relativement compact dans $\Omega/_{\Gamma}$, on a le résultat annoncé.

ii) => i). On est ramené à démontrer que l'application naturelle de $\Omega/_{\Gamma}$ sur $\Omega/_{G_{\mathbb{R}}}$ est propre. Or, on a l'assertion suivante d'où découle le résultat.

Soit G un groupe de Lie, A et B deux sous-groupes fermés, avec $A \subseteq B$. On suppose $B/_A$ compact. Soit Ω un ouvert de G invariant par l'action à droite de B. Alors l'application naturelle :
$\Omega/_A \xrightarrow{r} \Omega/_B$ est propre.

Preuve de l'assertion : On considère le diagramme commutatif avec les projections canoniques :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "p"'] & G/_B \\ & G/_A \arrow[u, "r"'] \end{tikzcd} .$$

Soit K un compact dans $\Omega/_B$. On a $r^{-1}K = p(q^{-1}K)$.

Il suffit de montrer que $q^{-1}K = \tilde{K}.B$ avec $\tilde{K}$ compact car $B/_A$ est compact. Or, il existe des compacts $C_1,\ldots,C_n$ de $G/_B$ tels que :

1°) $K = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ et 2°) pour tout C_i, il existe un ouvert U_i contenant C_i et une section continue s_i de U_i dans G. on pose alors $\tilde{K} = \bigcup_{i=1}^{n} s_i C_i$.

Lemme 1'.- Soient $H_{\mathbb{R}}$ *et* $F_{\mathbb{R}}$ *deux formes réelles fermées de* $H_{\mathbb{C}}$ *et* $F_{\mathbb{C}}$ *respectivement. Soit* $G_{\mathbb{C}}$ *un groupe de Lie complexe de la forme* $H_{\mathbb{C}} \underset{S}{\times} F_{\mathbb{C}}$ *(produit semi-direct au sens analytique de* $H_{\mathbb{C}}$ *avec* $F_{\mathbb{C}}$ *distingué dans* $G_{\mathbb{C}}$*). On pose* $G_{\mathbb{R}} = H_{\mathbb{R}} \underset{S}{\times} F_{\mathbb{R}}$. *C'est une forme réelle fermée de* $G_{\mathbb{C}}$. *Soient alors deux sous-groupes fermés* $\Gamma_{H_{\mathbb{R}}}$ *et* $\Gamma_{F_{\mathbb{R}}}$ *de* $H_{\mathbb{R}}$ *et* $F_{\mathbb{R}}$ *respectivement vérifiant 1°) et 2°) du lemme 1 relativement à* $H_{\mathbb{R}}$ *et* $F_{\mathbb{R}}$ *respectivement et le i) du lemme 1 relativement à* $H_{\mathbb{C}}$ *et* $F_{\mathbb{C}}$. *On suppose, de plus, que les éléments de* $\Gamma_{H_{\mathbb{R}}}$ *commutent avec* $F_{\mathbb{R}}$. *Alors le groupe* $\Gamma_{H_{\mathbb{R}}}.\Gamma_{F_{\mathbb{R}}}$ *vérifie le 1°), 2°) relativement à* $G_{\mathbb{C}}$ *et la condition i) pour* $\Omega = G_{\mathbb{C}}$.

Preuve : Si on pose $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on voit immédiatement qu'on a un homéomorphisme des variétés : $G_K/\Gamma_{H_{\mathbb{R}}}.\Gamma_{F_{\mathbb{R}}}$ et $H_K/\Gamma_{H_{\mathbb{R}}} \times F_K/\Gamma_{F_{\mathbb{R}}}$. De plus, si μ_{H_R} et μ_{F_R} sont les mesures du 2°) relativement à $\Gamma_{H_{\mathbb{R}}}$ et $\Gamma_{F_{\mathbb{R}}}$, la mesure $\mu_{H_{\mathbb{R}}} \otimes \mu_{F_{\mathbb{R}}}$ vérifie le 2°) pour $\Gamma_{H_{\mathbb{R}}}.\Gamma_{F_{\mathbb{R}}}$. Si $\psi_{H_{\mathbb{R}}}$ et $\psi_{F_{\mathbb{R}}}$ vérifient i) relativement à $H_{\mathbb{C}}$ et $F_{\mathbb{C}}$ et sont positives (ce qu'on peut toujours supposer), alors $\psi_{H_{\mathbb{R}}} + \psi_{F_{\mathbb{R}}}$ vérifie i) relativement à $G_{\mathbb{C}}$ et $\Gamma_{H_{\mathbb{R}}}.\Gamma_{F_{\mathbb{R}}}$ (la propriété d'exhaustion utilise l'homéomorphisme de variétés défini ci-dessus).

Corollaire des lemmes 1 et 1'.- Sous les hypothèses du lemme 1', la condition ii) du lemme 1 est satisfaite pour $\Omega = G_{\mathbb{C}}$.

Le lemme de descente suivant utilise des techniques classiques pour les groupes résolubles.

Lemme 2.- Soient $G_{\mathbb{C}}$ un groupe de Lie résoluble complexe simplement connexe et $G_{\mathbb{R}}$ une forme réelle. On considère un sous-groupe de Lie (connexe) $L_{\mathbb{R}}$ de $G_{\mathbb{R}}$ et on note $L_{\mathbb{C}}$ le complexifié de $L_{\mathbb{R}}$ dans $G_{\mathbb{C}}$. Alors l'application naturelle de $L_{\mathbb{C}}/L_{\mathbb{R}}$ dans $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ est propre.

Ce lemme implique que si $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ est pseudo-convexe, alors $(L_{\mathbb{C}},L_{\mathbb{R}})$ l'est aussi.

Remarque : On sait que $L_{\mathbb{C}}$, $L_{\mathbb{R}}$, $G_{\mathbb{R}}$ sont automatiquement fermés et simplement connexes [3].

Preuve : Pour $L_{\mathbb{C}}$, $L_{\mathbb{R}}$, $G_{\mathbb{R}}$, $G_{\mathbb{C}}$ fixés, on va montrer qu'il existe un sous-ensemble fermé F de $G_{\mathbb{C}}$, et deux homéomorphismes ψ et ψ' tels que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd}
G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}} \arrow[r, "\psi"] & F \\
L_{\mathbb{C}}/L_{\mathbb{R}} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\psi'"] & F \cap L_{\mathbb{C}} \arrow[u, "i'"']
\end{tikzcd}$$

i' est l'inclusion et i est l'application naturelle.

De cette propriété découle immédiatement le lemme car i' est propre.

On démontre la propriété annoncée par récurrence sur la dimension n de $G_{\mathbb{R}}$.

Pour $n = 0$, c'est évident. On suppose la propriété vraie à l'ordre $(n-1)$ et on va la démontrer à l'ordre n.

On suppose donc $G_{\mathbb{R}}$ de dimension n et $L_{\mathbb{R}}$ sous-groupe de $G_{\mathbb{R}}$.

Pour éviter les confusions, on mettra des indices à F, ψ, ψ', i, i' indiquant la dimension qu'on considère.

On écrit : $G_{\mathbb{R}} = V_{\mathbb{R}} \underset{S}{\times} M_{\mathbb{R}}$ (produit semi-direct) où $M_{\mathbb{R}}$ est un sous-groupe distingué simplement connexe de dimension $(n-1)$ et $V_{\mathbb{R}}$ un sous-groupe de Lie isomorphe à $\mathbb{R}$.

On note e un isomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $V_{\mathbb{R}}$.

On a : $G_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{C}} \underset{S}{\times} M_{\mathbb{C}}$, où $M_{\mathbb{C}}$ et $V_{\mathbb{C}}$ sont les complexifiés de $M_{\mathbb{R}}$ et $V_{\mathbb{R}}$ dans $G_{\mathbb{C}}$. On note encore e le prolongement de l'isomorphisme précédent de $\mathbb{C}$ sur $V_{\mathbb{C}}$. Plusieurs choix pour $V_{\mathbb{R}}$ sont possibles. Dans la suite, nous allons préciser le choix.

Pour se ramener à la dimension $(n-1)$, on considère deux cas, qui permettent de définir un groupe $Q_{\mathbb{R}}$.

<u>*1er cas*</u> : $L_{\mathbb{R}} \subseteq M_{\mathbb{R}}$. On pose $Q_{\mathbb{R}} = L_{\mathbb{R}}$ et $Q_{\mathbb{C}} = L_{\mathbb{C}}$ et $V_{\mathbb{R}}$ quelconque.

<u>*2ème cas*</u> : $L_{\mathbb{R}} \not\subseteq M_{\mathbb{R}}$. Dans ce cas, on choisit $V_{\mathbb{R}}$ tel qu'on puisse écrire : $L_{\mathbb{R}} = V_{\mathbb{R}} \underset{S}{\times} Q_{\mathbb{R}}$, $L_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{C}} \underset{S}{\times} Q_{\mathbb{C}}$ où $Q_{\mathbb{C}}$ est le complexifié de $Q_{\mathbb{R}}$ et $Q_{\mathbb{R}} \subseteq M_{\mathbb{R}}$. (En fait : $Q_{\mathbb{R}} = L_{\mathbb{R}} \cap M_{\mathbb{R}}$).

On a, par hypothèse de récurrence, un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
M_{\mathbb{C}}/M_{\mathbb{R}} \arrow[r, "\psi_{n-1}", "\sim"'] & F_{n-1} \subseteq M_{\mathbb{C}} \\
Q_{\mathbb{C}}/Q_{\mathbb{R}} \arrow[u, "i_{n-1}"] \arrow[r, "\psi'_{n-1}", "\sim"'] & F_{n-1} \cap Q_{\mathbb{C}} \arrow[u, "i'_{n-1}"']
\end{tikzcd}$$

(Les signes $\xrightarrow[\sim]{}$ indiquent des homéomorphismes).

On définit (avec un abus d'écriture évident) F_n par :

$$F_n = e(i\mathbb{R}) \times F_{n-1}$$

(où $e(i\mathbb{R})$ est l'image de $i\mathbb{R}$ dans $V_{\mathbb{C}}$ par e).

Pour $g \in G_{\mathbb{C}}$, on note $\bar{g}$ sa classe d'équivalence dans $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$.
On définit φ_n par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C},\quad m \in M_{\mathbb{C}} \qquad \varphi_n(\overline{e(\lambda).m}) = e(i \operatorname{Im} \lambda)\varphi_{n-1}(\overline{e(\operatorname{Re} \lambda)me(-\operatorname{Re} \lambda)})$$

On s'assure d'abord que φ_n est bien définie (et continue).

Pour $e(\lambda_o)m_o \in V_{\mathbb{R}} \underset{S}{\times} M_{\mathbb{R}}$, on a :

$$(e(\lambda)m)(e(\lambda_o)m_o) = e(\lambda+\lambda_o)e(-\lambda_o)me(\lambda_o)m_o.$$

Comme $e(-\lambda_o)m\, e(\lambda_o) \in M_{\mathbb{C}}$, on voit que φ_n est bien définie.

D'autre part, soit Ψ_{n-1} l'application réciproque de φ_{n-1}.
On vérifie que l'application réciproque (continue) Ψ_n de φ_n est donnée par :

$$\Psi_n : F_n \to G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$$

$$e(i\, \lambda_2)x \to e(i\, \lambda_2).\Psi_{n-1}(x) \quad \text{pour } \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ et } x \in F_{n-1}$$

(le groupe $V_{\mathbb{C}}$ agit sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$).

Pour terminer la démonstration, considérons les diagrammes.

1er cas : $L_{\mathbb{R}} \subseteq M_{\mathbb{R}}$.

L'application φ'_n est donnée par :

$$\forall \ell \in L_{\mathbb{C}}/L_{\mathbb{R}} \qquad \psi'_n(\ell) = \psi'_{n-1}(\ell)$$

et $$F_n \cap L_{\mathbb{C}} = F_{n-1} \cap L_{\mathbb{C}} .$$

<u>*2ème cas*</u> : $L_{\mathbb{R}} \not\subseteq M_{\mathbb{R}}$.

L'application ψ'_n est donnée par :

$$\forall q \in Q_{\mathbb{C}} , \quad \lambda \in \mathbb{C}, \qquad \psi'_n\overline{(e(\lambda)q)} = e(i \text{ Im } \lambda)\psi'_{n-1}\overline{(e(\text{Re } \lambda)qe(-\text{Re } \lambda))}.$$

Pour la suite, on a besoin de certains résultats de plongement des algèbres de Lie résolubles.

On introduit la définition suivante :

<u>*Définition*</u>.- *Une algèbre de Lie résoluble réelle* R *est* <u>*scindée*</u> *si* R *est produit semi-direct d'une algèbre abélienne* A *et d'un idéal nilpotent* n, *et si, de plus, pour tout* $x \in A$, adx *est diagonalisable sur* $\mathbb{C}$.

<u>*Proposition*</u> *1.- Soit* L *une algèbre résoluble réelle à spectre imaginaire pur. Il existe une algèbre scindée* s *produit semi-direct d'une algèbre commutative* B *et d'un idéal nilpotent* n, *ainsi qu'une base* (B) *de* B *tels que :*

i) L *est isomorphe à une sous-algèbre de* s ;

ii) s *est à spectre imaginaire pur, et les valeurs propres de* $ad_s(x)$ *appartiennent à* $2i\pi\mathbb{Z}$ *pour tout* x *dans* (B). *En particulier :*

$$\text{Exp } ad_s(x) = id_s \quad \textit{pour} \quad x \in (B).$$

Preuve : On reprend la construction faite par Reed [12], de l'algèbre scindée associée à une algèbre résoluble.

Soit n_1 le radical nilpotent de L et $L_{\mathbb{C}}$ (resp. $(n_1)_{\mathbb{C}}$ le complexifié de L (resp. n_1). On choisit $x_1 \in L \doteq n_1$, et on décompose la dérivation adx_1 en sa partie semi-simple d_{x_1} et sa partie nilpotente n_{x_1}, qui sont des dérivations réelles.

On décompose $L_{\mathbb{C}}$ en espaces propres pour d_{x_1}, et on remarque que l'espace propre correspondant à la valeur propre 0 est le complexifié de l'espace propre réel L_o correspondant, et que les autres espaces propres sont dans $(n_1)_{\mathbb{C}}$. On choisit ensuite x_2 dans $L_o \doteq n_1$, indépendant de x_1 et on remarque que $d_{x_1}(x_2) = 0$ et $d_{x_1} d_{x_2} = d_{x_2} d_{x_1}$ (où d_{x_2} est la semi-simple associée à adx_2). En décomposant $L_{\mathbb{C}}$ en sous-espaces propres par rapport à l'algèbre engendrée par d_{x_1} et d_{x_2}, et en refaisant une opération similaire à la précédente, on choisit x_3 indépendant de x_1, x_2, dans $L - n_1$ tel que : $d_{x_1}(x_3) = d_{x_2}(x_3) = 0$ et d_{x_3} commutant à d_{x_1}, d_{x_2}. De proche en proche, on définit $x_1,\dots,x_N$ base d'un supplémentaire de n_1 et tels que : $d_{x_i} dx_j = d_{x_j} d_{x_i}$ où d_{x_i} est la partie semi-simple de adx_i.

On définit alors une algèbre résoluble R produit semi-direct d'une algèbre abélienne A et de L de la façon suivante.

Une base de A est donnée par les éléments $d_1,\dots,d_N$ et on a :

$$\forall x \in L, \quad \forall i = 1,\dots,N \qquad -[x,d_i] = [d_i,x] = d_{x_i}(x)$$

$$\forall j = 1,\dots,N \qquad [d_i,d_j] = 0.$$

On voit immédiatement que ad d_i est semi-simple sur R, et que si L est à spectre imaginaire pur, les valeurs propres de ad d_i sont toutes imaginaires pures.

On remarque que le sous-espace n de $\mathcal{R}$ engendré par n_1 et les x_i-d_i $(i = 1,\dots,N)$ est un idéal nilpotent de $\mathcal{R}$ ($\mathrm{ad}(x_i-d_i)$ est nilpotent et $[\mathcal{R},n] \subset n_1$). Par conséquent, $\mathcal{R}$ est produit semi-direct de A et de n et donc $\mathcal{R}$ est scindée ; de plus, $\mathcal{R}$ est à spectre imaginaire pur, à cause de ce qui a été dit précédemment sur les $\mathrm{ad}\, d_i$.

Soit $n_{\mathbb{C}}$ le complexifié de n, on remarque que l'algèbre $\mathcal{R}' = A + n_{\mathbb{C}}$ est une algèbre réelle admettant les mêmes propriétés que $\mathcal{R}$.

On décompose $n_{\mathbb{C}}$ en espaces propres par rapport à l'action de A.

$$n_{\mathbb{C}} = n_1 + \dots + n_p .$$

Soient λ_i et λ_j les poids correspondant à n_i et n_j.

Deux cas peuvent se produire :

1) $[n_i,n_j] = (0)$;

2) $[n_i,n_j] \neq 0$. Il existe alors k (unique) tel que : $[n_i,n_j] \subseteq n_k$ et $\lambda_i + \lambda_j = \lambda_k$ (poids correspondant à k).

Montrons à présent qu'il existe un $\mathbb{R}$-espace vectoriel B contenant A et une base $(\mathcal{B})$ de B pour lesquels existent des formes linéaires $\tilde{\lambda}_i$ sur B à valeurs dans $i\mathbb{R}$ vérifiant :

a) $\tilde{\lambda}_i + \tilde{\lambda}_j = \tilde{\lambda}_k$ si $(0) \neq [n_i,n_j] \subset n_k$;

b) la restriction de $\tilde{\lambda}_i$ à A est λ_i ;

c) $\tilde{\lambda}_i$ prend ses valeurs dans $2i\pi\mathbb{Z}$ sur $(\mathcal{B})$.

On considère le système d'équations linéaires suivant :

$$(1) \qquad X_i + X_j - X_k = 0$$

pour les différents (i,j,k) tels que : $0 \neq [n_i, n_j] \subseteq n_k$.

Les inconnues appartenant à un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.
La résolution donne, en changeant les indices :

$X_1,\dots,X_s$ arbitraires et $X_{s+1},\dots,X_p$ combinaisons linéaires à coefficients rationnels de $X_1,\dots,X_s$.

On pose alors : $B = A \oplus \mathbb{R}^s$. (On a : $B = A$ si la seule solution du système de départ est $X_i = 0$ pour tout i).

Soient $\mu_1,\dots,\mu_s$ les éléments d'une base du dual de $\mathbb{R}^s$.
On pose : $\tilde{\lambda}_r = \lambda_r + i\,\mu_r$ pour $r = 1,\dots,s$.

En complétant $i\,\tilde{\lambda}_1,\dots,i\,\tilde{\lambda}_s$ en une base du dual de B, et en considérant la base duale $\mathcal{B}^*$, on voit que $\tilde{\lambda}_1,\dots,\tilde{\lambda}_s$ prennent des valeurs dans $2i\pi\mathbb{Z}$ sur $2\pi.\mathcal{B}^*$. On définit $\tilde{\lambda}_i$ pour $i > s$ en résolvant le système (1). Si on note m le p.p.c.m. des dénominateurs des coefficients intervenant dans les coefficients des combinaisons linéaires des $\tilde{\lambda}_i$ en fonction des $\tilde{\lambda}_j$ (avec $i > s$ et $j \leqslant s$) et si on pose $(\mathcal{B}) = 2\pi m\mathcal{B}^*$, les formes linéaires $\tilde{\lambda}_1,\dots,\tilde{\lambda}_p$ prennent sur $(\mathcal{B})$ des valeurs dans $2i\pi\mathbb{Z}$, et les propriétés a) et b) sont trivialement vérifiées.

On définit alors l'algèbre scindée $\mathfrak{s}$ produit semi-direct de B et $n_{\mathbb{C}}$ par la loi suivante :

$$[b,x_i] = \tilde{\lambda}_i(b)x_i \quad \text{pour } b \in B \text{ et } x_i \in n_i$$
$$[b,b'] = 0 \qquad \text{pour } b,\ b' \in B.$$

L'identité de Jacobi provient de la condition a) ci-dessus.
L'algèbre $\mathfrak{s}$ satisfait bien aux conditions de la proposition 1.

Remarque : G. Coeuré a montré, toujours en s'appuyant sur [12], qu'une algèbre de Lie à spectre imaginaire pur se plonge dans l'algèbre de Lie des matrices triangulaires supérieures complexes ayant des éléments imaginaires purs sur la diagonale.

III. RESULTATS POSITIFS.

Dans cette partie, on démontre la condition suffisante du théorème 1.

A. Rad $G_{\mathbb{C}} = \{1\}$.

C'est le cas semi-simple. $G_{\mathbb{R}}$ est compact (voir 4ème partie, C : le cas semi-simple). On démontre alors le résultat en appliquant le lemme 1 de moyennisation à $\Omega = G_{\mathbb{C}}$ et $\Gamma = \{1\}$.

B. *Cas nilpotent.*

Pour traiter le cas résoluble, on commence par le cas nilpotent :

Proposition 2.- *Soit* $G_{\mathbb{C}}$ *un groupe de Lie complexe simplement connexe nilpotent, et* $G_{\mathbb{R}}$ *une forme réelle, alors le couple* $(G_{\mathbb{C}}, G_{\mathbb{R}})$ *est pseudo-convexe.*

Pour la preuve, on utilise deux propositions :

Proposition A [5].- *Si* Γ *est un sous-groupe discret de* $G_{\mathbb{R}}$ *(nilpotent), alors la variété* $G_{\mathbb{C}}/\Gamma$ *est de Stein.*

Remarque : La démonstration de cette proposition repose essentiellement sur le théorème de Matsushima [9].

Avant d'énoncer la deuxième proposition que nous allons utiliser, introduisons quelques notations.

Pour $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}$, on note N_K^p le groupe des matrices triangulaires supérieures d'ordre p, n'ayant que des 1 sur la diagonale, et à coefficients dans K. Pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on a un groupe de Lie nilpotent simplement connexe.

Proposition B (*Théorème d'Ado*) [1].- *Tout groupe nilpotent simplement connexe réel est isomorphe (en tant que groupe de Lie) à un sous-groupe fermé d'un* $N_{\mathbb{R}}^p$.

Preuve de la proposition 2 : Par le lemme 2, il suffit de démontrer la proposition 2 pour $G_{\mathbb{R}} = N_{\mathbb{R}}^p$, et $G_{\mathbb{C}} = N_{\mathbb{C}}^p$. D'après la proposition A et le lemme 1 de moyennisation, il suffit de montrer que $N_{\mathbb{R}}^p/N_{\mathbb{Z}}^p$ est compact. Or soit $n \in N_{\mathbb{R}}^p$, il existe $n_o \in N_{\mathbb{Z}}^p$ tel que les coefficients de nn_o soient compris entre 0 et 1. Le choix de n_o se fait de la façon suivante. On appelle a_{ij} les coefficients de la matrice n et b_{ij} les coefficients de n_o qu'on veut déterminer. (On a : $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ et $a_{ii} = b_{ii} = 1$). On détermine les coefficients b_{ij} par récurrence sur $k = j-i$. On appelle c_{ij} les coefficients de nn_o.

Pour $k = 1$, on doit avoir :

$$c_{i,i+1} = a_{i,i+1} + b_{i,i+1} \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant c_{i,i+1} \leqslant 1,$$

d'où un choix pour les $b_{i,i+1}$.

Plus généralement, pour k quelconque :

$$c_{i,i+k} = a_{i,i+k} + b_{i,i+k} + \sum_{i<j<i+k} a_{i,j}\, b_{j,i+k}$$

d'où un choix pour les $b_{i,i+k}$.

C. *Le cas résoluble.*

Montrons à présent dans le cas résoluble, la condition suffisante du théorème 1.

Soit L un groupe de Lie résoluble simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathcal{L}$, à spectre imaginaire pur. D'après la proposition 1, on le plonge en tant que groupe de Lie dans un groupe de Lie S simplement connexe dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ est scindée et à spectre imaginaire pur. Si on note $S_{\mathbb{C}}$ un complexifié de S, il suffit d'après le lemme 2 de démontrer la pseudo-convexité du couple $(S_{\mathbb{C}}, S)$.

On se reporte à présent aux notations de la proposition 1. On a une décomposition en produit semi-direct de S en un groupe abélien $\mathcal{B}$ (correspondant à B) et d'un groupe distingué nilpotent N. Pour $S_{\mathbb{C}}$, on a une décomposition correspondante en $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ et $N_{\mathbb{C}}$.

Soit Γ le réseau dans B engendré par $(\mathcal{B})$. Comme $\operatorname{Exp} \operatorname{ad} x = \operatorname{id}_{\mathfrak{s}}$ pour $x \in (\mathcal{B})$ et que B est commutatif, on en déduit :

$$\forall\, x \in \Gamma,\ \operatorname{Exp} \operatorname{ad} x = \operatorname{id}_{\mathfrak{s}} .$$

Soit Γ' le sous-groupe fermé de B, image de Γ par l'exponentielle (qu'on note exp). Comme $\operatorname{Ad}_{\mathfrak{s}}(\exp x) = \operatorname{Exp} \operatorname{ad}(x)$, on en déduit que Γ' est dans le centre de G.

On applique alors pour conclure le corollaire des lemmes 1 et 1' à la situation suivante :

$$B = H_{\mathbb{R}} , \quad N = F_{\mathbb{R}} , \quad \Gamma' = \Gamma_{H_{\mathbb{R}}} , \quad N = \Gamma_{F_{\mathbb{R}}} .$$

D. *Cas général.*

Montrons, à présent, que si $G_{\mathbb{R}}$ est à spectre imaginaire pur, et si le radical $R_{\mathbb{C}}$ de $G_{\mathbb{C}}$ est simplement connexe, alors $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ est pseudo-convexe.

Commençons par supposer $G_{\mathbb{R}}$ simplement connexe. Alors $G_{\mathbb{R}}$ est isomorphe d'après le théorème de Levi-Malcev [1] en tant que groupe analytique à un produit semi-direct $\tilde{K} \underset{S}{\times} R$ où R est le radical de $G_{\mathbb{R}}$ et $\tilde{K}$ est semi-simple. Mais comme $\tilde{K}$ est à spectre imaginaire pur, c'est un groupe compact d'après ce qui a été dit précédemment.

Soit $\tilde{K}_{\mathbb{C}}$ un complexifié de $\tilde{K}$ (on sait que $\tilde{K}_{\mathbb{C}}$ existe). C'est un groupe semi-simple simplement connexe et on peut définir $\tilde{K}_{\mathbb{C}} \underset{S}{\times} R_{\mathbb{C}}$. On peut toujours supposer que $G_{\mathbb{C}} = \tilde{K}_{\mathbb{C}} \underset{S}{\times} R_{\mathbb{C}}$. Comme les couples $(\tilde{K}_{\mathbb{C}},\tilde{K})$ et $(R_{\mathbb{C}},R)$ sont pseudo-convexes, on a par application du corollaire aux lemmes 1 et 1' en posant $\Gamma_{\tilde{K}} = \{1\}$ et $\Gamma_R = R$, que $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ est pseudo-convexe.

Si $G_{\mathbb{R}}$ n'est pas simplement connexe, soit $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$ un revêtement universel de $G_{\mathbb{R}}$; comme on l'a vu précédemment $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$ admet un complexifié $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$. L'application de revêtement p au-dessus de $G_{\mathbb{C}}$ peut être choisie telle que le diagramme suivant, dans lequel les flèches verticales sont des inclusions naturelles, soit commutatif :

(1)
$$\begin{tikzcd} \tilde{G}_{\mathbb{C}} \arrow[r, "p"] & G_{\mathbb{C}} \\ \tilde{G}_{\mathbb{R}} \arrow[r] \arrow[u, hook] & G_{\mathbb{R}} \arrow[u, hook] \end{tikzcd} .$$

En effet, l'existence d'un tel diagramme au niveau des algèbres de Lie est claire, les flèches horizontales étant des isomorphismes. Comme $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$ est simplement connexe, on peut remonter sur les groupes, et p est un revêtement. Montrons à présent que les fibres de p sont finies.

Il suffit de prouver que le groupe fondamental de $G_{\mathbb{C}}$ est fini. A cet effet, on considère la fibration : $R_{\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}/R_{\mathbb{C}}$ qui donne naissance à la suite exacte :

$$\pi_1(G_{\mathbb{C}}/R_{\mathbb{C}}) \longrightarrow \pi_1(G_{\mathbb{C}}) \longrightarrow \pi_1(R_{\mathbb{C}}).$$

Or $\pi_1(R_{\mathbb{C}})$ est trivial par hypothèse, et de plus comme le groupe $G_{\mathbb{C}}/R_{\mathbb{C}}$ est semi-simple complexe, son groupe fondamental est fini, ce qui implique bien que $\pi_1(G_{\mathbb{C}})$ est fini.

Par conséquent, p est fermé. On en déduit que $G_{\mathbb{R}}$ est fermé dans $G_{\mathbb{C}}$. Terminons la démonstration. Soit $\tilde{\psi}$ une fonction plurisousharmonique d'exhaustion positive associé au couple pseudo-convexe $(\tilde{G}_{\mathbb{C}}, \tilde{G}_{\mathbb{R}})$. On a un isomorphisme de groupes analytiques entre $G_{\mathbb{C}}$ et $\tilde{G}_{\mathbb{C}}/C$ (où C est un sous-groupe fini central de $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$).

On définit une fonction ψ sur $G_{\mathbb{C}}$ par :

$$\forall\, g \in G_{\mathbb{C}} \qquad \psi(g) = \sum_{x \mid px=g} \tilde{\psi}(x).$$

On vérifie facilement que ψ est de classe C^{∞}, strictement plurisousharmonique sur $G_{\mathbb{C}}$, invariante par $G_{\mathbb{R}}$ et d'exhaustion sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$.

IV. LE CAS NEGATIF.

A. *Cas particuliers.*

On commence par étudier les cas particuliers fondamentaux pour lesquels le couple $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ n'est pas pseudo-convexe. On en déduit facilement la condition nécessaire générale. On note P l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques sur $G_{\mathbb{C}}$, invariantes par $G_{\mathbb{R}}$.

Notations :

Soit S^1 le cercle unité de centre 0 dans $\mathbb{C}$, et $d\theta$ la mesure de Haar normalisée sur S^1. On désigne par $\bar{D}$ le disque unité fermé de centre 0 et par $H(\bar{D})$ l'espace des fonctions holomorphes au voisinage de $\bar{D}$.

Le lemme et la proposition qui suivent ont été démontrées par G. Coeuré.

Lemme 3.- Il existe une famille $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *de fonctions de* $H(\bar{D})$ *vérifiant :*

i) $\forall \varepsilon > 0, \quad |\mathrm{Im}\, f_\varepsilon| \leqslant \pi$;

ii) $f_\varepsilon(0)$ *est constant, égal à* c.

iii) On pose : $b_\varepsilon = \int_{S^1} e^{\mathrm{Re} f_\varepsilon} d\theta$. *Alors* b_ε *est une fonction continue de* ε *et* $\lim_{\varepsilon\to+\infty} b_\varepsilon = +\infty$.

Preuve : Soit $\mathrm{Log}\, z$ la détermination principale du logarithme dans le demi-plan : $\mathrm{Im}\, z > 0$.

On pose : $f_\varepsilon(z) = \mathrm{Log}\, i \,\dfrac{1+\varepsilon+z}{1+\varepsilon-z}$.

On vérifie immédiatement i) et ii), ainsi que la continuité de b_ε.

De plus, d'après le lemme de Fatou

$$\underline{\lim}_{(\varepsilon\to 0)} \int_{S^1} e^{\mathrm{Re} f_\varepsilon} d\theta \geqslant \int_{S^1} \underline{\lim}\, e^{\mathrm{Re} f_\varepsilon} d\theta$$

$$= \int_{S^1} \left| \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} \right| d\theta = +\infty.$$

Définitions :

Pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on munit K^2 d'une structure de groupe analytique G_K dont la multiplication est donnée par :

$\forall (z,b),\ (z_o,b_o) \in K^2$

$$(z,b).(z_o,b_o) = (z + z_o, e^{z_o} b + b_o).$$

$G_{\mathbb{R}}$ est une forme réelle de $G_{\mathbb{C}}$.

Pour une fonction $\psi(z,b)$ invariante par l'action à droite de $G_{\mathbb{R}}$, on a :

$$\psi(z,b) = \psi(i\ \mathrm{Im}\ z, i\ e^{-\mathrm{Re} z}.\mathrm{Im}\ b)$$

et on a un difféomorphisme entre $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ et $\mathbb{R}^2$ donné par :

$$\dot{\widehat{(z,b)}} \in G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}} \longrightarrow (\mathrm{Im}\ z, e^{-\mathrm{Re} z}\ \mathrm{Im}\ b)$$

où $\dot{\widehat{(z,b)}}$ est la classe d'équivalence de $(z,b) \in G_{\mathbb{C}}$.

Le groupe $G_{\mathbb{R}}$ (resp. $G_{\mathbb{C}}$) est le revêtement universel du groupe affine sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)(*). On a la proposition suivante :

Proposition 3.- *Les seules fonctions* $\psi(z,b)$ *de* P *sont les fonctions convexes de* $\mathrm{Im}\, z$.

Preuve : Sur $\bar{D}$, et pour $\varepsilon > 0$, on définit une fonction g_ε continue sur $\bar{D}$ et holomorphe à l'intérieur par :

$$g_\varepsilon(0) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\, g_\varepsilon(z) = e^{\mathrm{Re} f_\varepsilon(z)} - b_\varepsilon \qquad \text{pour} \quad z \in S^1 .$$

La fonction g_ε est bien définie car $e^{\mathrm{Re} f_\varepsilon}$ est C^∞ sur S^1, et que d'autre part : $\int_{S^1} e^{\mathrm{Re} f_\varepsilon} d\theta = b_\varepsilon$.

Si $\psi \in P$, alors la fonction $h_\varepsilon(z) = \psi(f_\varepsilon(z), g_\varepsilon(z) + i\, b_\varepsilon)$ est semi-continue sur $\bar{D}$, et plurisousharmonique à l'intérieur. De plus, (par invariance) :

$$\psi(f_\varepsilon(z), g_\varepsilon(z) + ib_\varepsilon) = \psi(i\, \mathrm{Im}\, f_\varepsilon(z),\ i\, e^{-\mathrm{Re} f_\varepsilon(z)}(\mathrm{Im}\, g_\varepsilon(z) + b_\varepsilon)).$$

Pour $z \in S^1$, on a : $h_\varepsilon(z) = \psi(i\, \mathrm{Im}\, f_\varepsilon(z), i)$, et donc : $\forall\, z \in S^1$, $|h_\varepsilon(z)| \leqslant K$ indépendant de ε.

De plus : $h_\varepsilon(0) = \psi(i\, c_2, i\, e^{-c_1} b_\varepsilon)$,

où on pose $c_2 = \mathrm{Im}\, c$ et $c_1 = \mathrm{Re}\, c$. On a d'après l'inégalité de la moyenne

$$h_\varepsilon(0) = \psi(i\, c_2, i\, e^{-c_1} b_\varepsilon) \leqslant \int_{S^1} h_\varepsilon d\theta \leqslant K.$$

(*) Pour $\mathbb{R}$, on a le groupe affine lui-même.

Comme $\lim_{\varepsilon \to +\infty} b_\varepsilon = +\infty$, et que b_ε est continu, on en déduit que $\psi(i\, c_2, ib) \leqslant K'$ avec K' indépendant de b pour $b \geqslant 0$. Une telle inégalité se généralise pour $b \in \mathbb{R}$, en remplaçant $\psi(z,b)$ par $\psi(z,-b)$ qui appartient aussi à P, et comme on a : $\psi(z,b+b_o) = \psi(z,b)$ pour $b_o \in \mathbb{R}$, on en déduit que $\psi(i\, c_2,b)$ est majorée pour tout $b \in \mathbb{C}$. Or une telle fonction est constante d'après Liouville, donc :

$$\psi(i\, c_2,b) = \psi(i\, c_2,0).$$

On peut remplacer $i\, c_2$ par n'importe quel autre élément de $\mathbb{C}$, quitte à remplacer $\psi(z,b)$ par $\psi(z+a,b)$ qui appartient aussi à P. (Ici a est une constante arbitraire). D'où la proposition.

De la proposition 3, on déduit immédiatement le corollaire :

<u>*Corollaire*</u> *3.- Il n'existe pas de fonctions de* P *qui soit strictement plurisousharmonique, ou de fonction de* P *qui soit d'exhaution sur* $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$.

<u>*Définition*</u> :

Pour $\beta \in \mathbb{R}$, et $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on munit K^3 d'une structure de groupe analytique G_K^β dont la multiplication est donnée par :

$$\forall (z,b),(z_o,b_o) \in K \times K^2$$

$$(z,b)(z_o,b_o) = (z+z_o, e^{z_o A_\beta} b + b_o),$$

où A_β est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} = I + \beta J$, avec $I \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour $\psi(z,b) \in P$, on a :

$$\psi(z,b) = \psi(i \text{ Im } z,\ i\ e^{-\text{Re}z\,.A_\beta} \text{ Im } b)$$

et on a un difféomorphisme entre $G^\beta_{\mathbb{C}}/_{G^\beta_{\mathbb{R}}}$ et $\mathbb{R}^3$ donné par :

$$(z,b) \longrightarrow (\text{Im } z, e^{-\text{Re}z.A_\beta} \text{ Im } b).$$

<u>*Proposition*</u> *4.- Il n'existe pas de fonction de* P *qui soit strictement plurisousharmonique sur* $G_{\mathbb{C}}$ *ou d'exhaustion sur* $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$.

<u>*Preuve*</u> :

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $\psi \in P$, on remarque que la fonction ψ_θ définie par :

$$\forall (z,b) \in G_{\mathbb{C}} \qquad \psi_\theta(z,b) = \psi(z, e^{\theta J}.b)$$

appartient à P. En effet :

$\forall (z,b) \in G^\beta_{\mathbb{C}}$, $\forall (z_o,b_o) \in G^\beta_{\mathbb{R}}$,

$$\psi_\theta(z,b) = \psi(z, e^{\theta J} b) = \psi(z+z_o, e^{z_o A_\beta} e^{\theta J} b + e^{\theta J} b_o)$$

le dernier terme est égal à

$$\psi(z+z_o, e^{\theta J}(e^{z_o A_\beta} b + b_o)) = \psi_\theta(z+z_o, e^{z_o A_\beta} b + b_o) \quad ;$$

d'autre part, l'application : $b \to e^{\theta J} b$ est holomorphe.

On pose alors : $\psi^A(z,b) = \int_0^{2\pi} \psi(z,e^{\theta J}b)d\theta.$

La fonction ψ^A appartient à P. De plus :

$$\psi^A(z,b) = \psi^A(i \operatorname{Im} z, i\, e^{-\operatorname{Re} z.\beta J}\, e^{-\operatorname{Re} z}.\operatorname{Im} b)$$

$= \psi^A(i \operatorname{Im} z,\ i\, e^{-\operatorname{Re} z}.\operatorname{Im} b)$ car ψ^A est invariante par l'action de θ.

Soit $b \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall z \in \mathbb{C} : \psi^A(z,\lambda b) = \psi^A(i \operatorname{Im} z, i\, e^{-\operatorname{Re} z} \operatorname{Im} \lambda.b)$$

et d'après la démonstration de la proposition 4, on voit que :

$$\psi^A(z,ib) = \psi^A(z,0)$$

d'où la proposition pour ψ^A. Mais si ψ est strictement plurisousharmonique ou d'exhaustion, ψ^A l'est aussi. D'où la proposition pour ψ.

<u>Remarque</u> : *L'amélioration suivante de la proposition 4 m'a été proposée par le referee.*

"Les seules fonctions $\psi(z,b)$ de P sont les fonctions convexes de $\operatorname{Im} z$ ", résultat analogue à la prop. 3.

Il suffit pour cela de considérer la fonction

$$\psi^S(z,b) = \sup_{\theta\in[0,2\pi]} \psi(z,e^{\theta J}b).$$

Le raisonnement fait pour ψ^A montre aussi que ψ^S ne dépend que de z. Donc $\psi^S(z,b) = \psi^S(z,0) = \psi(z,0) = \psi^A(z,0) = \psi^A(z,b)$. Ceci implique que $\psi(z,e^{\theta J}b) = \psi(z,0)$ pour presque tout $\theta \in [0,2\pi]$, d'où la conclusion.

B. *Cas général.*

Proposition 5.- Si $G_{\mathbb{R}}$ *n'est pas à spectre imaginaire pur, il existe un sous-groupe analytique complexe* H *de* $G_{\mathbb{C}}$ *sur lequel aucune fonction* f *plurisousharmonique sur* $G_{\mathbb{C}}$*, invariante par l'action de* $G_{\mathbb{R}}$ *à droite, ne soit strictement plurisousharmonique. De plus, si* $G_{\mathbb{C}}$ *est résoluble et simplement connexe, l'injection canonique de* $H/_{H \cap G_{\mathbb{R}}}$ *dans* $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ *est propre et* f *ne peut être d'exhaustion sur* $H/_{H \cap G_{\mathbb{R}}}$.

Cette proposition implique évidemment la condition nécessaire du théorème 1. Au paragraphe VI, on renforcera cette proposition.

Preuve : Il existe dans $\mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}})$ un élément X tel que $\mathrm{ad}X$ n'ait pas toutes ses valeurs propres imaginaires pures. Deux cas peuvent se présenter.

1er cas : $\mathrm{ad}X$ a une valeur propre réelle non nulle λ. Alors il existe Y non nul dans $\mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}})$ tel que : $[X,Y] = \lambda Y$. Les vecteurs X et Y forment la base d'une algèbre de Lie isomorphe à celle du groupe affine.

2ème cas : $\mathrm{ad}X$ a une valeur propre de la forme $\lambda + i\mu$ (avec $\lambda.\mu \neq 0$). Soit Z un vecteur propre de $\mathrm{Lie}(G_{\mathbb{C}})$ associé.

On écrit : $Z = U + iV$ où $U,V \in \mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}})$.

On a : $[X,U] = \lambda U - \mu V$ et $[X,V] = \lambda V + \mu U$.

De plus : $[X,[U,V]] = [[X,U],V] + [U,[X,V]] = 2\lambda[U,V]$.

On peut supposer $[U,V] = 0$, car sinon on est ramené au premier cas. On vérifie immédiatement que X, U, V est une base d'une algèbre de Lie de dimension 3. Quitte à remplacer X par $X/_{\lambda}$, on peut supposer $\lambda = 1$, et donc l'algèbre précédente est isomorphe à Lie$(G^{\mu}_{\mathbb{R}})$.

On pose la définition suivante :

Définition :

On appelle groupe du type 1, un groupe de Lie (réel) analytiquement isomorphe à un groupe dont le revêtement universel est un groupe $G^{\beta}_{\mathbb{R}}$ ou le groupe affine réel.

Alors d'après ce qui a été vu plus haut, le groupe $G_{\mathbb{R}}$ contient un groupe $H_{\mathbb{R}}$ du type 1. Si H est le complexifié de $H_{\mathbb{R}}$ dans $G_{\mathbb{C}}$, vérifions qu'il n'existe pas de fonction strictement plurisousharmonique sur H, invariante par $H_{\mathbb{R}}$. Soit $\tilde{H}$ le revêtement universel de H. Alors il existe une forme réelle $\tilde{H}_R$ de $\tilde{H}$ ayant même algèbre de Lie que H, tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} \tilde{H} \arrow[r, "p"] & H \\ \tilde{H}_{\mathbb{R}} \arrow[u, hook] \arrow[r, "p'"] & H_{\mathbb{R}} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Les flèches verticales sont les injections naturelles. L'application p est l'application de revêtement, et p' est la restriction de p.

On voit ainsi qu'on peut remplacer le couple $(H,H_{\mathbb{R}})$ par $(\tilde{H},\tilde{H}_{\mathbb{R}})$. Or soit $A_{\mathbb{R}}$ (resp. $A_{\mathbb{C}}$) un groupe égal à $G^{\beta}_{\mathbb{R}}$ ou au groupe affine (resp. $G^{\beta}_{\mathbb{C}}$ ou au revêtement universel du groupe affine complexe), alors par simple connexité, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \tilde{H} \arrow[r, "\sim"] & A_{\mathbb{C}} \\ \tilde{H}_{\mathbb{R}} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\sim"] & A_{\mathbb{R}} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

(les flèches horizontales sont des isomorphismes analytiques et les flèches verticales les inclusions naturelles).

On peut donc remplacer $(\tilde{H},\tilde{H}_{\mathbb{R}})$ par $(A_{\mathbb{C}},A_{\mathbb{R}})$ mais dans ce dernier cas, on sait qu'il n'y a pas de fonction strictement plurisousharmonique sur $A_{\mathbb{C}}$, invariante par $A_{\mathbb{R}}$.

La dernière partie de la proposition se démontre en utilisant le lemme 2.

Remarque :

On a implicitement démontré (condition nécessaire et condition suffisante : le cas D) que les algèbres de Lie à spectre imaginaire pur sont les algèbres de la forme $\underline{k} \mathbin{\underset{s}{+}} \underline{r}$ (produit semi-direct d'un idéal $\underline{r}$ et d'une algèbre $\underline{k}$) avec $\underline{r}$ résoluble et à spectre imaginaire pur et $\underline{k}$ algèbre de Lie d'un groupe compact semi-simple K. Démontrons directement ce résultat algébrique (une des conditions découlant directement du théorème de Levi-Malcev, on va simplement montrer qu'une algèbre L de la forme $\underline{k} \underset{s}{+} \underline{s}$ est à spectre imaginaire pur).

1°) Pour $k \in \underline{k}$, ad k a ses valeurs propres imaginaires pures. En effet, L est un K-module par l'action de Ad. Comme K est compact, il existe un produit scalaire sur L qui rend les opérateurs $Ad\kappa$ $(\kappa \in K)$ orthogonaux, et donc les opérateurs adk $(k \in k)$ antisymétriques.

2°) Soit maintenant $\ell_o \in L$ se décomposant suivant $\underline{k}$ et $\underline{r}$ sous la forme $k_o + r_o$. Soit L' l'algèbre résoluble $\mathbb{R}k_o \underset{s}{+} \underline{r}$. Alors L est un L' module. En utilisant le théorème de triangulation d'Engel [1], il suffit pour conclure de montrer que $ad_L r_o$ a ses valeurs propres imaginaires pures. Soit donc $Y \in L_{\mathbb{C}}$ (complexifié de L) et vérifiant : $[r_o, Y] = \lambda . Y$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$. Si λ est non nul, alors nécessairement Y appartient au complexifié de $\underline{r}$. Mais alors λ est imaginaire pur par hypothèse.

L'utilisation du théorème d'Engel m'a été suggéré par G. Coeuré.

C. *Le cas semi-simple.*

On va montrer pour finir que dans le cas semi-simple, on a des résultats négatifs plus forts que ceux décrits dans la proposition 5.

Proposition 6.- Soit $G_{\mathbb{C}}$ *un groupe de Lie complexe semi-simple et* $G_{\mathbb{R}}$ *une forme réelle sans sous-groupe compact distingué de dimension positive. Alors* P *se réduit aux constantes.*

Corollaire.- Pour $G_{\mathbb{C}}$ semi-simple, le couple $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ est pseudo-convexe si et seulement si $G_{\mathbb{R}}$ est compact.

Preuve du corollaire :

La condition suffisante a été évoquée dans l'introduction. Pour montrer la condition nécessaire, on suppose $G_{\mathbb{R}}$ non compact, il existe alors un sous-groupe de Lie simple $G'_{\mathbb{R}}$ de $G_{\mathbb{R}}$ tel que si on note $G'_{\mathbb{C}}$ le complexifié de $G'_{\mathbb{R}}$ dans $G_{\mathbb{C}}$, le couple $(G'_{\mathbb{C}},G'_{\mathbb{R}})$ satisfait aux hypothèses de la proposition 6. La restriction d'une fonction de P à $G'_{\mathbb{C}}$ est alors constante, et ne peut donc être strictement plurisous-harmonique.

Pour la démonstration de la proposition 6, on utilisera les notations suivantes :

On note $J_{\mathbb{R}}$ l'algèbre de Lie de $G_{\mathbb{R}}$, et soit : $J_{\mathbb{R}} = k + p$ une décomposition de Cartan où k est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe compact maximal. Soit $a_{\mathbb{R}}$ une sous-algèbre abélienne maximale dans p et η une sous-algèbre maximale abélienne de $J_{\mathbb{R}}$ contenant $a_{\mathbb{R}}$. On sait [6] qu'on a une décomposition : $\eta = t_{\mathbb{R}} + a_{\mathbb{R}}$, où $t_{\mathbb{R}}$ est une sous-algèbre abélienne de k. On pose : $v = ia_{\mathbb{R}} + t_{\mathbb{R}}$, et on sait que le sous-groupe de Lie V de $G_{\mathbb{C}}$ correspondant à v est compact, (c'est un tore maximal). On note $U_{\mathbb{R}}$ le sous-groupe de $G_{\mathbb{C}}$ correspondant à $ia_{\mathbb{R}}$.

Les sous-groupes de $G_{\mathbb{C}}$ correspondant à $a_{\mathbb{R}}$ et $a_{\mathbb{C}}$ (complexifié de $a_{\mathbb{R}}$) sont notés $A_{\mathbb{R}}$ et $A_{\mathbb{C}}$. On a le lemme suivant (connu) mais se trouvant assez peu dans la littérature.

Lemme A.- Le groupe $U_{\mathbb{R}}$ est compact.

Preuve : On suppose d'abord $G_{\mathbb{C}}$ simplement connexe. Il existe une involution θ sur $J_{\mathbb{R}}$ telle que : $\theta X = X$ pour $X \in t_{\mathbb{R}}$ et $\theta X = -X$ pour $X \in a_{\mathbb{R}}$. On complexifie l'involution qu'on continue d'appeler θ. On a alors :

$$ia_{\mathbb{R}} = \{X \in v \mid \theta X = -X\}.$$

Soit $\tilde{\theta}$ l'involution associée à θ sur $G_{\mathbb{C}}$. Le groupe $U_{\mathbb{R}}$ est alors la composante connexe du sous-groupe fermé de V défini par :

$$\{g \in V \mid \tilde{\theta} g = g^{-1}\}.$$

Comme V est compact, $U_{\mathbb{R}}$ est compact.
Si $G_{\mathbb{C}}$ n'est pas simplement connexe, on passe au revêtement universel $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$ et $U_{\mathbb{R}}$ est l'image continue du sous-groupe compact de $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$ correspondant à $ia_{\mathbb{R}}$.

Du lemme A, on déduit que si f est une fonction plurisousharmonique sur $A_{\mathbb{C}}$ invariante par l'action à droite de $A_{\mathbb{R}}$, f est constante. En effet : $A_{\mathbb{C}} = U_{\mathbb{R}}.A_{\mathbb{R}}$, et on applique le principe du maximum.

On se place à présent dans les hypothèses de la proposition 5.

Lemme B.- Un sous-groupe fermé de $G_{\mathbb{C}}$ contenant $G_{\mathbb{R}}$ et $A_{\mathbb{C}}$ est $G_{\mathbb{C}}$ tout entier.

Preuve : Soit C l'algèbre de Lie d'un tel groupe.

On pose : $J_{\mathbb{R}} = J^1_{\mathbb{R}} \oplus \ldots \oplus J^n_{\mathbb{R}}$ où les $J^i_{\mathbb{R}}$ sont des idéaux simples de $J_{\mathbb{R}}$. Pour chaque $J^i_{\mathbb{R}}$, on choisit $a^i_{\mathbb{R}}$ sous-algèbre abélienne maximale dans la partie non compacte d'une décomposition de Cartan de $J^i_{\mathbb{R}}$. On pose $a_{\mathbb{R}} = a^1_{\mathbb{R}} \oplus \ldots \oplus a^n_{R}$ et on vérifie que c'est bien une sous-algèbre abélienne maximale dans la partie non compacte d'une décomposition de Cartan de $J_{\mathbb{R}}$.

Si on note $J_{\mathbb{C}}$, $J^i_{\mathbb{C}}$, $a^i_{\mathbb{C}}$ les complexifiés de $J_{\mathbb{R}}$, $J^i_{\mathbb{R}}$, $a^i_{\mathbb{R}}$, on a :

$$C \cap J^i_{\mathbb{C}} \supseteqq a^i_{\mathbb{C}} + J^i_{\mathbb{R}} .$$

Or $a^i_{\mathbb{C}} \neq (0)$ d'après les hypothèses sur $G_{\mathbb{R}}$, et il est bien connu que $J^i_{\mathbb{R}}$ est une sous-algèbre maximale de $J^i_{\mathbb{C}}$. Par conséquent : $C \cap J^i_{\mathbb{C}} = J^i_{\mathbb{C}}$, et donc $C = J_{\mathbb{C}}$, d'où le lemme.

Preuve de la proposition 6 :

On pose : $L = \{g \in G_{\mathbb{C}} \mid \forall f \in P \ , \quad f(g) = f(1)\}$.

C'est un sous-groupe de $G_{\mathbb{C}}$ car P est invariant par l'action de $G_{\mathbb{C}}$ à gauche. De plus L contient $G_{\mathbb{R}}$ et $A_{\mathbb{C}}$. En effet, il contient $G_{\mathbb{R}}$ par hypothèse, et d'autre part si on prend la restriction d'une fonction f de P à la sous-variété complexe $A_{\mathbb{C}}$, f est constante, égale à $f(1)$, d'après le lemme A. En appliquant le lemme B, on voit que L est dense dans $G_{\mathbb{C}}$.

On a alors :

$\forall g \in G_{\mathbb{C}}$, $\forall f \in P$: $f(g) \geqslant f(1)$, à cause de la semi continuité des éléments de P. Mais alors soit $g_o \in G_{\mathbb{C}}$, et $f \in P$. En considérant la fonction $f(g_o^{-1}(x))$ dans P, il vient : $f(1) = f(g_o^{-1} g_o) \geqslant f(g_o)$.

D'où finalement : $\forall g \in G_{\mathbb{C}}$, $f(g) = f(1)$, pour $f \in P$.

Remarque :

Montrons que $G_{\mathbb{R}}$ à spectre imaginaire pur et semi-simple équivaut à $G_{\mathbb{R}}$ compact. Tout d'abord si $G_{\mathbb{R}}$ est compact, il peut être réalisé comme sous-groupe de Lie d'un groupe orthogonal. Cela implique que pour $x \in J_{\mathbb{R}}$, $\mathrm{ad}x$ est antisymétrique et donc à valeurs propres imaginaires pures. Réciproquement, si $G_{\mathbb{R}}$ n'est pas compact, alors $a_{\mathbb{R}} \neq (0)$ et pour $X \in a_{\mathbb{R}}$ non nul, $\mathrm{ad}x$ a ses valeurs propres réelles et non toutes nulles [6].

On retrouve ainsi le corollaire de la proposition 6.

Dans le cas où $G_{\mathbb{R}}$ est un groupe de Chevalley [13], on peut renforcer la proposition 1. On appelle $b_{\mathbb{R}}$ une sous-algèbre de Borel de $G_{\mathbb{R}}$, et $B_{\mathbb{R}}$ le sous-groupe de $G_{\mathbb{R}}$ correspondant.

Proposition 7.- Les fonctions plurisousharmoniques sur $G_{\mathbb{C}}$, *invariantes par l'action à droite de* $B_{\mathbb{R}}$ *sont constantes.*

Cette proposition repose elle-même sur la suivante (on note $B_{\mathbb{C}}$ le complexifié de $B_{\mathbb{R}}$ dans $G_{\mathbb{C}}$ et Q l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques sur $B_{\mathbb{C}}$ invariantes par $B_{\mathbb{R}}$).

Proposition 8.- L'ensemble Q *se réduit aux constantes.*

Preuve de la proposition 8 :

On définit L sous-groupe de $B_{\mathbb{C}}$ par :

$$L = \{b \in B_{\mathbb{C}} \mid \forall f \in Q \mid f(b) = f(1)\}.$$

Comme précédemment, L contient $B_{\mathbb{R}}$ et $A_{\mathbb{C}}$, et l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ de $\bar{L}$ contient $b_{\mathbb{R}}$ et $a_{\mathbb{C}}$. Soit alors e_α un vecteur propre de $b_{\mathbb{R}}$ associé à la racine positive α. On sait qu'il existe $H \in a_{\mathbb{R}}$ tel que : $0 \neq [H, e_\alpha] = \alpha(H) e_\alpha$.

Les éléments iH et e_α appartiennent à L, donc également $[iH,e_\alpha] = \alpha(H).(ie_\alpha)$, donc $ie_\alpha \in L$ car $\alpha(H) \in \mathbb{R} \dot{-} \{0\}$.

Par conséquent $L = b_{\mathbb{C}}$ (complexifié de $b_{\mathbb{R}}$) et comme précédemment $L = B_{\mathbb{C}}$.

Preuve de la proposition 7 :

Soit R l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques sur $G_{\mathbb{C}}$ invariantes par l'action à droite de $B_{\mathbb{R}}$.

Pour $f \in R$ et $g \in G_{\mathbb{C}}$, on définit sur $B_{\mathbb{C}}$ la fonction f_g vérifiant : $f_g(b) = f(gb)$ pour $b \in B_{\mathbb{C}}$. C'est une fonction de Q, et donc constante. Par conséquent, f est définie sur $G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}}$, qui d'après [13] est compact. D'après le principe du maximum, f est constante.

Remarque :

Soit $SL(2,\mathbb{C})$ (resp. $SL(2,\mathbb{Z})$) le groupe des matrices carrées d'ordre deux sur $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{Z}$) et de déterminant 1. Les méthodes précédentes permettent de démontrer que les seules fonctions plurisousharmoniques sur $SL(2,\mathbb{C})/SL(2,\mathbb{Z})$ sont les constantes.

V. LE CAS DES OUVERTS.

Théorème 2.- On suppose le couple $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ pseudo-convexe.

Soit Ω un ouvert de Stein de $G_{\mathbb{C}}$ invariant par l'action de $G_{\mathbb{R}}$. Alors il existe sur Ω une fonction de classe C^∞, strictement plurisousharmonique, invariante par $G_{\mathbb{R}}$, et d'exhaustion sur $\Omega/G_{\mathbb{R}}$, moyennant l'hypothèse supplémentaire suivante sur $G_{\mathbb{R}}$: il existe un sous-groupe Γ discret de $G_{\mathbb{R}}$, avec $G_{\mathbb{R}}/\Gamma$ compact.

Illustrons le théorème 2 par un exemple. On prend $G_{\mathbb{R}} = K \times \mathbb{R}^n$ où K est un groupe de Lie compact et $G_{\mathbb{C}} = K_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^n$ où $K_{\mathbb{C}}$ est un complexifié de K.

En posant $\Gamma = \{1\} \times \mathbb{Z}^n$, on voit que le théorème 2 est vrai pour $(G_{\mathbb{C}}, G_{\mathbb{R}})$.

Remarque :

J'ignore si l'hypothèse supplémentaire est nécessaire.

Le théorème 2 repose sur la proposition suivante :

Proposition.- Soit F *une variété de Stein,* E *une variété complexe, et* $p : E \to F$ *un revêtement holomorphe. Si* Ω *est un ouvert de Stein dans* E *vérifiant* $p^{-1}(p\Omega) = \Omega$, *alors* $p\Omega$ *est un ouvert de Stein.*

(Remarque : d'après un théorème de Stein, E est de Stein).

Preuve : Il suffit d'après le théorème de Grauert-Docquier [4], de montrer que $p\Omega$ est localement de Stein. Pour $x \in F$, choisissons un voisinage ouvert D_x de x, qu'on suppose trivialisant et difféomorphe analytiquement à un polydisque de $\mathbb{C}^n$. Fixons, d'autre part, un élément y de la fibre au-dessus de x. Soit Δ_y la composante connexe de $p^{-1}D_x$ contenant y. L'ouvert $\Delta_y \cap \Omega$ est de Stein, comme intersection de deux ouverts de Stein, et, d'autre part, d'après les hypothèses sur Ω, on a un difféomorphisme analytique induit par p entre $\Delta_y \cap \Omega$ et $D_x \cap p\Omega$. D'où la proposition.

Preuve du théorème 2 :

Le groupe $G_{\mathbb{R}}$ est unimodulaire, car à spectre imaginaire pur. Donc le 2°) du lemme 1 est vérifié pour $G_{\mathbb{R}}/\Gamma$. D'après ce lemme, la variété $G_{\mathbb{C}}/\Gamma$ est de Stein. La proposition précédente appliquée au revêtement de $G_{\mathbb{C}}$ sur $G_{\mathbb{C}}/\Gamma$ montre que Ω/Γ est de Stein. En utilisant à nouveau le lemme 1, on en déduit le théorème 2.

Applications à l'étude des tubes pseudo-convexes.

Ce chapitre généralise les résultats de B. Chafi [2] dans deux directions différentes. D'une part, il donne un cadre géométrique au principe du minimum (théorème 3) et, d'autre part, il étend la classe des groupes auxquels ce principe s'applique (théorème 4).

Définition :

On dira qu'une submersion surjective π de classe C^{∞} d'une variété complexe E sur une variété connexe (réelle) B est totalement réelle si pour tout point b de B, il existe un point e de la fibre F_b au-dessus de b tel que l'espace tangent en ce point à la fibre soit une forme réelle de l'espace tangent à la variété totale E. On a :

Proposition 9.- Soit π une submersion surjective totalement réelle de E sur B, et f une fonction indéfiniment différentiable de B dans $\mathbb{R}$ telle que $f \circ \pi$ soit strictement plurisousharmonique. Alors :

i) En tout point critique de f, le Hessien de f est strictement positif.

ii) Si f est de plus d'exhaustion sur B, alors f admet un point critique unique qui est un minimum global (en particulier f a un minimum local unique).

Preuve :

La théorie de Morse [10] assure l'implication i) ==> ii).

La démonstration de i) utilise quelques résultats d'algèbre linéaire que nous rappelons ici. Soit G^* le $\mathbb{C}$ espace vectoriel de $\mathbb{R}$-formes linéaires à valeurs complexes sur un espace vectoriel complexe G. On a une décomposition de G^* en somme directe : $G^* = G_H^* \oplus \overline{G_H^*}$, où G_H^* est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des formes $\mathbb{C}$-linéaires et $\overline{G_H^*}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des formes $\mathbb{C}$-semi-linéaires. Soit maintenant $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ une famille libre de n formes de G^* s'annulant sur une forme réelle L de G. Alors, si on note φ'_k l'élément de G_H^* dans la décomposition de φ_k, la famille des n formes φ'_k est libre. Pour ceci, on suppose une relation de la forme : $\sum a_k\varphi'_k = 0$.

Comme $\varphi'_k(X) = \frac{1}{2i}(\varphi_k(iX) + i\varphi_k(X))$ pour $X \in G$, on a, en prenant $X \in L$:

$\sum a_k\varphi_k(X) = 0$ et $\sum a_k\varphi_k(iX) = 0$ d'où $\sum a_k\varphi_k = 0$, donc $a_k = 0$ pour $k = 1,\dots,n$.

A présent, montrons i). L'assertion sur f étant locale, on peut, quitte à composer avec un difféomorphisme, supposer que B est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, contenant l'origine, point critique pour f. Notons $x_1,\dots,x_n$ les applications coordonnées de B dans $\mathbb{R}$, et $u_i = x_i \circ \pi$ pour $i = 1,\dots,n$. On a : $f \circ \pi = f(u_1,\dots,u_n)$.

$$\text{D'où} \quad \partial\bar{\partial}(f \circ \pi) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}\, \partial u_i \wedge \bar{\partial} u_j + \sum_i \frac{\partial f}{\partial u_i}\, \partial\bar{\partial} u_i .$$

Comme 0 est un point critique de f, on a :

$$\partial\bar{\partial}(f \circ \pi)(e_o) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(0)\, \partial u_i \wedge \bar{\partial} u_j$$

pour e_o dans la fibre au-dessus de 0. On choisit e_o tel que l'espace tangent à la fibre soit une forme réelle de l'espace tangent total.

Comme π est une submersion, les formes linéaires $du_1, \ldots, du_n$ sur l'espace tangent total en e_o forment une famille libre. D'après l'hypothèse faite en e_o et les remarques d'algèbre linéaire ci-dessus, la famille des ∂u_i est libre. Ceci joint à la stricte plurisousharmonicité de $f \circ \pi$, implique que la matrice des $\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(0)$ est strictement positive, ce qui signifie justement la condition i). ∎

On se donne à présent :

$\pi : E \to B$, une submersion surjective totalement réelle et X une variété analytique complexe.

On note p la projection canonique de $X \times B$ sur X. Pour un ouvert $\dot{\Omega}$ de $X \times B$ et pour $\xi \in X$, on note $\dot{\Omega}_\xi$ l'ouvert de B défini par $\dot{\Omega} \cap p^{-1}(\{\xi\})$. On dit que c'est la fibre de $\dot{\Omega}$ au-dessus de ξ. (On ne parlera plus ici de fibres associées à π).

Par définition, un ouvert Ω de $X \times E$ est <u>invariant</u> si on a : $(id_X, \pi)^{-1} \circ (id_X, \pi)(\Omega) = \Omega$. On dira qu'un tel ouvert invariant Ω est un <u>tube</u> si les fibres de l'ouvert $\dot{\Omega} = (id_X, \pi)(\Omega)$ au-dessus de X sont connexes. A une fonction $\dot{u}$ sur $\dot{\Omega}$, on associe naturellement une fonction u sur Ω telle que : $u(\xi, e) = \dot{u}(\xi, \pi e)$ pour $(\xi, e) \in \Omega$.

Le principe du minimum s'énonce comme suit :

<u>*Théorème*</u> *3.- On se donne un tube Ω dans $X \times E$ dont on note ω la projection sur X.*

Soit $\dot{u}$ une fonction indéfiniment différentiable sur $\dot{\Omega} = (id_X, \pi)(\Omega)$ telle que la fonction u naturellement associée sur Ω vérifie les propriétés suivantes :

i) u *est plurisousharmonique sur* Ω ;

ii) *Pour tout* ξ *dans* ω, $u(\xi,\cdot)$ *est strictement plurisous-harmonique sur* $\Omega_\xi = \pi^{-1}\dot{\Omega}_\xi$ *et* $\dot{u}(\xi,\cdot)$ *est d'exhaustion sur* $\dot{\Omega}_\xi$.

Alors :

$$v(\xi) = \inf_b u(\xi,b)$$

est indéfiniment différentiable et plurisousharmonique sur ω.

__Corollaire du théorème__ 3.- On garde toutes les hypothèses du théorème 3, en remplaçant l'exhaustivité de $\dot{u}(\xi,\cdot)$ *sur* $\dot{\Omega}_\xi$ *par l'exhaustivité de* $\dot{u}$ *sur tout* $\dot{\Omega}$. *On suppose, de plus, qu'il existe sur* X *une fonction régulière strictement plurisousharmonique. (Ceci est vrai, en particulier, si* X *est de Stein). Alors* ω *est de Stein.*

__Preuve du corollaire__ : Se déduit immédiatement du théorème 3 en remarquant que v est d'exhaustion sur ω.

__Preuve du théorème__ : Pour $\xi \in X$, la submersion $\Omega_\xi \xrightarrow{\pi} \dot{\Omega}_\xi$ est évidemment totalement réelle. On note $w(\xi)$ le point de $\dot{\Omega}_\xi$ où la fonction $\dot{u}(\xi,\cdot)$ atteint son minimum. Ce point est unique d'après le ii) de la proposition précédente. Considérons un système de coordonnées $x_1,\dots,x_n$ au voisinage d'un point $b_o = w(\xi_o)$ de B. Alors la fonction $w(\xi)$ est solution du système : $\frac{\partial \dot{u}}{\partial x_i}(\xi,w(\xi)) = 0$ pour $i = 1,\dots,n$. Or, le Jacobien de ce système est justement le Hessien d'une fonction $\dot{u}(\xi,\cdot)$ en son point critique. Ce Hessien étant strictement positif d'après la proposition 9, on déduit du théorème des fonctions implicites que w est de classe C^∞.

Soit $\xi_o \in \omega$. Montrons que v est plurisousharmonique en ξ_o.

Quitte à faire un difféomorphisme holomorphe local, on peut supposer que X est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ contenant 0, et que $\xi_o = 0$. Le problème étant directionnel, on peut même supposer que X est un ouvert contenant 0 de $\mathbb{C}$. Pour $r > 0$ et assez petit, il faut donc démontrer l'inégalité :

$$\dot{u}(0,w(0)) \leqslant \frac{1}{2i\pi}\int_{|t|=1} \dot{u}(rt,w(rt))\ \frac{dt}{t} \ .$$

Soit e_o un élément de E vérifiant $\pi(e_o) = w(0)$ et dont l'espace tangent à la fibre soit une forme réelle de l'espace tangent total. L'inégalité est vraie si on démontre pour r assez petit l'existence d'une fonction θ du disque fermé unité dans un voisinage de e_o, continue dans le disque fermé et holomorphe à l'intérieur telle que $\pi \circ \theta(t) = w(rt)$ pour $|t| = 1$. En effet, sous cette hypothèse, on a :

$$\dot{u}(0,w(0)) \leqslant u(0,\theta(0)) \leqslant \frac{1}{2i\pi}\int_{|t|=1} u(rt,\theta(t))\ \frac{dt}{t} = \frac{1}{2i\pi}\int_{|t|=1} \dot{u}(rt,w(rt))\ \frac{dt}{t}$$

En passant pour E et B à des systèmes de coordonnées locales (holomorphes pour E) et en utilisant le fait que la différentielle de π en e_o s'annule sur une forme réelle de l'espace tangent, on est amené à la situation locale suivante : Etant donné une application π de classe C^∞, défini dans un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{C}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant : $\pi(0) = 0$ et $\pi'(0)z = \operatorname{Im} z$ pour $z \in \mathbb{C}^n$, et une autre application w, de classe C^∞, défini dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, il existe pour r positif et assez petit une fonction θ continue sur le cercle unité S^1 et se prolongeant en une fonction θ holomorphe à l'intérieur telle que : $\pi \circ \theta(t) = w(rt)$ pour $t \in S^1$.

On va résoudre ce problème par application du théorème de submersion dans les espaces de Banach.

Pour $a = (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{C}^n$, on pose :

$$|a| = |a_1| + \dots + |a_n|.$$

On note $C(S^1)$ l'algèbre des applications continues sur le cercle à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ qu'on assimile à des fonctions sur $\mathbb{R}$ de période 2π. Pour $k \in \mathbb{Z}$ et $f \in C(S^1)$ on note $\hat{f}(k)$ le coefficient de Fourier associé.

On introduit les algèbres de Banach suivantes :

1°) $\ell^1(S^1) = \{f \in C(S^1) \mid \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| < +\infty\}$.

Cette algèbre est munie de la norme :

$$||f||_1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|.$$

2°) $B(S^1)$ est l'algèbre des fonctions f sur S^1 à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ et dérivables, telles que f' appartient à $\ell^1(S^1)$. On munit $B(S^1)$ d'une norme d'algèbre de Banach en posant :

$$|||f||| = ||f||_1 + ||f'||_1$$

On note $B_{\mathbb{R}}(S^1)$ la sous-algèbre des fonctions réelles de $B(S^1)$ et $A(S^1)$ la sous-algèbre des fonctions de $B(S^1)$ vérifiant : $\hat{f}(k) = 0$

pour $k < 0$. Les éléments de cette dernière algèbre se prolongent en des fonctions holomorphes à l'intérieur de S^1.

Pour une fonction $f = (f_1,\ldots,f_n)$ de $C(S^1)$, on pose :

$$||f||_\infty = ||f_1||_\infty + \ldots + ||f_n||_\infty$$

où $$||f_i||_\infty = \sup_{t\in S^1} |f_i(t)|.$$

On a le lemme suivant :

<u>Lemme</u>.- *L'application* $f \to \pi \circ f$ *est une submersion définie d'un voisinage de* 0 *dans* $A(S^1)$ *sur un voisinage de* 0 *dans* $B_{\mathbb{R}}(S^1)$. *(Dans ce lemme, on peut supposer* π *de classe* C^3*).*

Montrons tout d'abord comment ce lemme assure l'existence de θ.

On remarque qu'une fonction f de $B(S^1)$ est de classe C^1 et qu'on a les inégalités de normes suivantes :

$$||f||_\infty \leqslant ||f||_1 \leqslant K(||f||_\infty + ||f'||_\infty).$$

On peut prendre $K = \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Ceci implique, en particulier, que $\pi \circ f$ existe pour $||f||_1$ assez petit. D'autre part, si on pose : $w_r(t) = w(rt)$ pour $t \in S^1$, on a :

$$||w_r(t)||_1 \leqslant K(||w_r(t)||_\infty + ||w_r'(t)||_\infty)$$

et cette dernière expression peut être rendue aussi petite que l'on veut, d'où l'existence de θ à partir du lemme.

Preuve du lemme : Pour f assez petit dans $B(S^1)$, on a :

$$(\pi \circ f)' = (\pi' \circ f).f'.$$

La fonction $\pi' \circ f$ est de classe C^1, donc appartient à $\ell^1(S^1)$. Comme $\ell^1(S^1)$ est une algèbre, la fonction $(\pi \circ f)'$ appartient à $\ell^1(S^1)$. Par conséquent $\pi \circ f$ appartient à $B(S^1)$. Démontrons la différentiabilité de l'application : $f \to \pi \circ f$.

Pour p et q de norme assez petite dans $\mathbb{C}^n$, on a :

(1) $$\pi(p+q) - \pi(p) - \pi'(p).q = u(p,q).q.$$

La fonction matricielle $u(p,q)$ est de classe C^1 au voisinage de $(0,0)$ et vérifie : $u(p,0) = 0$.

Dans (1), on remplace p et q par f et h dans $B(S^1)$ qu'on suppose assez petits en norme. En considérant $u(f,h)$ comme élément de $\mathbb{C}^{n^2}$, il vient :

$$|||\pi(f+h) - \pi(f) - \pi'(f).h||| \leq 2|||u(f,h)|||.|||h|||.$$

On a :

$$||u(f,h)||_1 \leq K(||u(f,h)||_\infty + ||u_1'(f,h).f'||_\infty + ||u_2'(f,h)||_\infty\ |||h|||)$$

d'où, par uniforme continuité, pour f fixé, $\lim\limits_{|||h|||\to 0} ||u(f,h)||_1 = 0$).

De plus :

$$||(u(f,h))'||_1 = ||u_1'(f,h).f' + u_2'(f,h).h'||_1 \leq ||u_1'(f,h).f'||_1 + 2||u_2'(f,h)||_1|||h|||$$

d'où comme précédemment :

$$\lim_{|||h|||\to 0} ||(u(f,h))'||_1 = 0.$$

On en déduit la différentiabilité de l'application : $f \to \pi \circ f$. La différentielle en f est l'application linéaire : $h \to \pi'(f).h$. On vérifie également que cette différentielle est continue par rapport à f.

Pour conclure, il suffit de montrer que la différentielle $h \to \pi'(0).h$ au point 0 de l'application $f \mapsto \pi \circ f$ admet une section continue s de $A(S^1)$ dans $B_{\mathbb{R}}(S^1)$. On définit une telle section s par

$$s(a_o + \sum_{n>0} a_n e^{in\theta} + \sum_{n>0} \bar{a}_n . e^{-in\theta}) = i\, a_o + 2i \sum_{n>0} a_n e^{in\theta} .$$

Retour aux groupes.

Nous allons appliquer le théorème 3 à la situation particulière suivante :

$E = G_{\mathbb{C}}$ groupe de Lie complexe.

$B = G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ avec G_R forme réelle fermée de $G_{\mathbb{C}}$.

Un ouvert invariant de $G_{\mathbb{C}}$ est un ouvert invariant par l'action à droite de $G_{\mathbb{R}}$. On se pose alors la question suivante :

La projection sur X d'un tube de Stein est-elle une variété de Stein ? Une réponse affirmative à cette question a été donnée par C.O. Kiselman [8] lorsque X et $G_{\mathbb{C}}$ sont des espaces $\mathbb{C}^n$ et $G_{\mathbb{R}} = \mathrm{Re}G_{\mathbb{C}}$, par B. Chafi [2] lorsque X est un groupe de Lie complexe et $(G_{\mathbb{R}}, G_{\mathbb{C}}) = (K, G_{\mathbb{C}})$ où K est compact.

Définition :

On dira que le tube Ω vérifie le principe du minimum si pour toute fonction u, plurisousharmonique sur Ω et invariante par $G_{\mathbb{R}}$, on a :

$v(\xi) = \inf\limits_{g} u(\xi,g)$ est plurisousharmonique sur la projection ω de Ω sur X.

Pour un objet A invariant de $G_{\mathbb{C}}$, on note $\dot{A}$ l'objet associé à $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$.

Proposition 10.- Etant donné un tube Ω de $X \times G_{\mathbb{C}}$; s'il existe sur Ω une fonction ψ strictement plurisousharmonique, invariante par $G_{\mathbb{R}}$, d'exhaustion sur $\dot{\Omega}$, alors Ω vérifie le principe du minimum.

Ce résultat a été démontré par B. Chafi lorsque X est un groupe de Lie.

Preuve : Pour $c \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\dot{\Omega}^c = \{(\xi,g) \in \dot{\Omega} \,|\, \dot{\psi}(\xi,g) < c\}.$$

Pour démontrer la proposition, on utilise simplement la propriété locale suivante sur ψ :

Propriété d'exhaustivité locale : Pour tout compact K inclus dans ω et pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$\overline{\dot{\Omega}^c} \cap (K \times G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}})$ est compact dans $\dot{\Omega}$.

La proposition 10 est alors conséquence du lemme suivant : (on désigne par $P_I(\Omega)$ l'ensemble des fonctions plurisousharmonques sur Ω invariantes par $G_{\mathbb{R}}$).

<u>*Lemme*</u>.- *On suppose qu'il existe une fonction* $\dot{\varphi} \in P_I(\Omega)$ *strictement plurisousharmonique et localement d'exhaustion sur* $\dot{\Omega}$. *Soit* $\omega_o \subset \omega$ *un ouvert relativement compact dans un ouvert de coordonnées de* ω *et* $\Omega_o = \Omega \cap (\omega_o \times G_{\mathbb{C}})$.

Alors, pour toute fonction $u \in P_I(\Omega)$, *il existe une suite décroissante de fonctions* $u_k \in P_I(\Omega_o)$, *strictement plurisousharmoniques de classe* C^∞ *sur* Ω_o *et localement d'exhaustion sur* $\dot{\Omega}_o$, *convergeant vers* u *sur* Ω_o.

<u>*Preuve de la proposition*</u> :

On se place dans un ouvert Ω_o tel qu'il a été défini dans le lemme. D'après le théorème 3, la fonction $v_n(\xi) = \inf_{\dot{g}} u_n(\xi,\dot{g})$ est plurisousharmonique sur ω_o. Comme v_n tend en décroissant vers v, on en déduit que Ω vérifie le principe du minimum.

<u>*Preuve du lemme*</u> :

Pour $c \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\dot{\Omega}^c = \{(\xi,\dot{g}) \in \dot{\Omega} \mid \dot{\varphi}(\xi,\dot{g}) < c\}.$$

Comme $\dot{\varphi}$ est supposée localement d'exhaustion sur $\dot{\Omega}$, on peut choisir une suite strictement croissante d'entiers $c_k \in \mathbb{N}$ telle que

$$\overline{\dot{\Omega}}_o \cap \overline{\dot{\Omega}^{c_k}} \subset \overline{\dot{\Omega}}_o \cap \dot{\Omega}^{c_{k+1}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Désignons par u_ε et φ_ε, $0 < \varepsilon < 1$, les régularisées de u et φ par une famille de noyaux de convolution à gauche sur le groupe $\mathbb{C}^n \times G_{\mathbb{C}}$. Les fonctions u_ε et φ_ε sont invariantes à droite par l'action de $G_{\mathbb{R}}$. Choisissons une suite décroissante ε_k de réels > 0 tendant vers 0 telle que u_{ε_k} et φ_{ε_k} soient définies au voisinage de $\overline{\Omega}_o \cap \overline{\Omega^{c_{k+2}}}$.

Grâce au théorème de Dini, on peut imposer de plus que $\dot{\psi}_{\varepsilon_k} < c_{k+1}$ sur $\overline{\dot{\Omega}_o} \cap \overline{\dot{\Omega}^{c_k}}$. On pose alors

$$u_k = u_{\varepsilon_k} \mu(\psi_{\varepsilon_k} - c_k) + \sum_{\ell=k}^{+\infty} \chi_\ell(\psi_{\varepsilon_\ell}),$$

où $\mu, \chi_1, \chi_2, \ldots \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont telles que :

- $0 \leqq \mu \leqslant 1$, $\mu(t) = 1$ pour $t \leqslant 0$, $\mu(t) = 0$ pour $t \geqslant 1$.
- χ_ℓ est à support dans $]c_{\ell-2}, c_{\ell+2}[$, convexe sur $]-\infty, c_{\ell+1}]$ et strictement convexe sur $[c_{\ell-1}, c_{\ell+1}]$.

On remarque que $\chi_\ell \circ \psi_{\varepsilon_\ell}$ est plurisousharmonique sur Ω^{c_ℓ}, strictement plurisousharmonique sur $\Omega^{c_\ell} \dot{-} \Omega^{c_{\ell-1}}$ et à support dans $\Omega^{c_{\ell+2}}$; la fonction $\mu(\psi_{\varepsilon_k} \dot{-} c_k)$ est à support dans $\Omega^{c_{k+2}}$ et vaut 1 sur $\Omega^{c_{k-1}}$. Ainsi $u_k = u_{\varepsilon_k}$ sur $\Omega^{c_{k-1}}$ et converge donc en décroissant vers u. On peut donc alors, L désignant la forme de Levi, choisir les χ_ℓ par récurrence de telle sorte que pour tout k :

$$\begin{cases} L(\chi_k \circ \psi_{\varepsilon_k}) > L(u_{\varepsilon_k} . \mu(\psi_{\varepsilon_k} - c_k)) \quad \text{sur} \quad \Omega^{c_k} \dot{-} \Omega^{c_{k-1}} \\ L(\chi_{k+1} \circ \psi_{\varepsilon_{k+1}}) > L(\chi_k \circ \psi_{\varepsilon_k}) + L(u_{\varepsilon_k} . \mu(\psi_{\varepsilon_k} - c_k)) \quad \text{sur} \quad \Omega^{c_{k+1}} \dot{-} \Omega^{c_k} \\ L(\chi_\ell \circ \psi_{\varepsilon_\ell}) > L(\chi_{\ell-2} \circ \Psi_{\varepsilon_{\ell-2}}) + L(\chi_{\ell-1} \circ \psi_{\varepsilon_{\ell-1}}) \quad \text{sur} \\ \qquad \Omega^{c_{\ell+1}} \dot{-} \Omega^{c_\ell} \quad \text{pour} \quad \ell \geqslant k+2. \end{cases}$$

u_k est alors plurisousharmonique, strictement plurisousharmonique si u l'est, et dans $C^{\infty}(\Omega_o)$; en choisissant les χ_ℓ assez grands, $\dot{u}_k$ est d'exhaustion sur $\dot{\Omega}_o$. Lorsque u n'est pas strictement plurisousharmonique, on peut appliquer le procédé de construction précédent avec $u = \psi$ et $k = 1$ pour obtenir une fonction $\psi_1 \geqslant \psi$ strictement plurisousharmonique et d'exhaustion sur $\dot{\bar{\Omega}}_o$. Il suffit alors de remplacer u_k par $u_k + \frac{1}{k}(\psi_1 - A)$, où $A = \inf_{\bar{\Omega}_o} \psi_1$.

Le théorème suivant met en évidence une classe de couples $(G_{\mathbb{C}}, G_{\mathbb{R}})$ pour lesquels tout tube de Stein satisfait au principe du minimum.

Théorème 4.- Soit X *une variété de Stein et* $(G_{\mathbb{C}}, G_{\mathbb{R}})$ *un couple pseudo-convexe tel que* $G_{\mathbb{R}}$ *soit fermé et contienne un sous-groupe* Γ *discret uniforme. Alors pour tout tube de Stein* Ω *dans* $X \times G_{\mathbb{C}}$ *, on a la propriété du minimum et la projection* ω *de* Ω *sur* X *est de Stein.*

Preuve :

On reprend les idées de la démonstration du théorème 2. La variété $X \times G_{\mathbb{C}}/\Gamma$ est de Stein, et on note q l'application de revêtement : $X \times G_{\mathbb{C}} \to X \times G_{\mathbb{C}}/\Gamma$.

On déduit du théorème de Grauert-Docquier que q est de Stein. Par moyennisation, on a l'existence d'une fonction ψ de classe C^{∞} satisfaisant aux hypothèses de la proposition sur Ω. On a donc le principe du minimum pour Ω. De plus, d'après le corollaire du théorème 3, l'ouvert ω est de Stein.

VI. FORMES DIFFERENTIELLES INVARIANTES.

Pour énoncer la proposition 1, on a besoin de quelques définitions et notations :

Soit X une variété réelle, on note $\Lambda^p(X)$ l'espace des formes différentielles sur X et $\Lambda(X)$ l'algèbre graduée différentielle des formes différentielles sur X munie de la différentiation extérieure d. Pour $x \in X$, on désigne par $T_x(X)$ l'espace tangent en x à X.

Soit Y une variété complexe, on note $\Lambda^{p,q}(Y)$ l'espace des formes différentielles sur Y de type (p,q) et $\Lambda^o(Y)$ l'algèbre graduée différentielle qui est (en tant qu'espace vectoriel) la somme directe des $\Lambda^{p,0}(Y)$, et dont la différentielle est ∂.

On note $R : \Lambda(Y) \to \Lambda^o(Y)$ l'homomorphisme d'algèbres graduées différentielles qui à une p-forme différentielle associe sa composante de type $(p,0)$.

Pour $y \in Y$, on désigne par $T_y^{1,0}(Y)$ l'espace tangent en y des vecteurs de type $(1,0)$.

Soit alors $G_{\mathbb{C}}$ un groupe de Lie complexe muni d'une forme réelle $G_{\mathbb{R}}$ fermée et Ω un ouvert de $G_{\mathbb{C}}$ invariant par l'action de $G_{\mathbb{R}}$ à droite. On note π la projection canonique de Ω sur $\Omega/_{G_{\mathbb{R}}}$ et π^* l'homomorphisme (associé à π) d'algèbres graduées différentielles de $\Lambda(G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}})$ dans $\Lambda(G_{\mathbb{C}})$.

On définit alors $\Lambda_I^{p,q}(\Omega)$ comme étant l'espace des formes différentielles de type (p,q) sur Ω invariantes par l'action de $G_{\mathbb{R}}$ à droite. On a : $\partial(\Lambda_I^{p,q}(\Omega)) \subseteq \Lambda_I^{p+1,q}(\Omega)$. De même, on définit l'algèbre graduée différentielle invariante $\Lambda_I^{o}(\Omega)$.

Proposition 11.-

Pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, *on a un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda_I^{p,q}(\Omega) & \xrightarrow{\sim} & (\Lambda^p(\Omega/G_{\mathbb{R}}))^{C_n^q} \\
\Big\downarrow \partial & & \Big\downarrow d \\
\Lambda_I^{p+1,q}(\Omega) & \xrightarrow{\sim} & (\Lambda^{p+1}(\Omega/G_{\mathbb{R}}))^{C_n^q}
\end{array}$$

(les flèches horizontales sont des isomorphismes d'espaces vectoriels, et n *est la dimension de* $G_{\mathbb{R}}$*).*

Plus précisément, l'application $R \circ \pi^*$ *est un isomorphisme d'algèbres graduées différentielles entre* $\Lambda(\Omega/G_{\mathbb{R}})$ *et* $\Lambda_I^{o}(\Omega)$.

Remarque : Si on note pour $p \geq 1$:

$$H_I^{p,q}(\Omega) = \frac{\mathrm{Ker}\{\partial : \Lambda_I^{p,q}(\Omega) \to \Lambda_I^{p+1,q}(\Omega)\}}{\mathrm{Im}\{\partial : \Lambda_I^{p-1,q}(\Omega) \to \Lambda_I^{p,q}(\Omega)\}} .$$

Alors de la proposition 11, on déduit immédiatement que $H_I^{p,q}(\Omega)$ est isomorphe à $(H^p(\Omega,\mathbb{C}))^{C_n^q}$.

Preuve de la proposition :

Démontrons d'abord l'assertion sur $R \circ \pi^*$. Il est immédiat que $R \circ \pi^*$ est un homomorphisme d'algèbres graduées différentielles. Montrons que c'est une bijection.

On remarque que pour $g \in G_{\mathbb{C}}$, l'application tangente induite par π de $T_g^{1,0}(G_{\mathbb{C}})$ sur $T_{\pi(g)}(G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, car par translation, on peut supposer $g = 1$ et, dans ce cas, c'est clair. On en déduit l'injectivité de $R \circ \pi^*$. Il découle également de cette remarque l'existence d'un isomorphisme π_* entre l'espace des champs de vecteurs complexes sur $\Omega/G_{\mathbb{R}}$ et l'espace des champs de vecteurs $G_{\mathbb{R}}$-invariants à droite de type $(1,0)$ sur Ω. Pour $\omega \in \Lambda^{p,0}(\Omega)$, on définit α sur $\Omega/G_{\mathbb{R}}$ par :

$$\alpha(X_1,\ldots,X_p) = \omega(\pi_*^{-1}(X_1),\ldots,\pi_*^{-1}(X_p))$$

où les X_i sont des champs de vecteurs sur $\Omega/G_{\mathbb{R}}$.

On a :

$$R \circ \pi^*\alpha(\pi_*^{-1}(X_1),\ldots,\pi_*^{-1}(X_p)) = \pi^*\alpha(\pi_*^{-1}(X_1),\ldots,\pi_*^{-1}(X_p)) \quad ,$$

car les $\pi_*^{-1}(X_i)$ sont de type $(1,0)$. On en déduit bien évidemment l'égalité de $R \circ \pi^* \alpha$ et ω sur les champs invariants de type $(1,0)$, donc sur tous les champs de type $(1,0)$ car ils sont engendrés par les champs invariants. Comme $R \circ \pi^* \alpha$ et ω sont de type $(p,0)$. On a : $R \circ \pi^* \alpha = \omega$, d'où la surjectivité de $R \circ \pi^*$.

Pour terminer la démonstration de la proposition, on considère une base $(\bar{\omega}_j)_{j \in J}$ de formes de type $(0,q)$ sur $G_{\mathbb{C}}$ invariantes par l'action à droite de $G_{\mathbb{C}}$. Ce sont des formes anti-holomorphes. Toute forme β de $\Lambda_I^{p,q}(\Omega)$ s'écrit de façon unique sous la forme $\sum_{j \in J} \beta_j \wedge \overline{\omega_j}$ où les β_j sont dans $\Lambda_I^{p,0}(\Omega)$. De plus, par l'anti-holomorphie des $\overline{\omega_j}$, on a :

$$\partial \beta = \sum_{j \in J} \partial \beta_j \wedge \overline{\omega_j} .$$

L'isomorphisme de $\Lambda_I^{p,q}(\Omega)$ sur $(\Lambda^p(\Omega/G_{\mathbb{R}}))^{C_n^q}$ est alors donné par :

$$\beta \to (R \circ \pi^* \beta_j)_{j \in J} .$$

<u>Théorème</u> 5.- *Soit $G_{\mathbb{C}}$ un groupe de Lie complexe et $G_{\mathbb{R}}$ une forme réelle qui n'est pas à spectre imaginaire pur. Alors pour un certain sous-groupe de Lie $G'_{\mathbb{R}}$ de $G_{\mathbb{R}}$, il n'existe pas de métrique kählérienne sur le complexifié $G'_{\mathbb{C}}$ de $G'_{\mathbb{R}}$ dans $G_{\mathbb{C}}$, invariante par l'action à droite de $G'_{\mathbb{R}}$.*

En particulier, ceci implique qu'il n'existe pas de métrique kählérienne sur $G_{\mathbb{C}}$, invariante par l'action à droite de $G_{\mathbb{R}}$.

Remarque :

Si, par contre $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ est pseudo-convexe, alors il existe une métrique kählérienne $G_{\mathbb{R}}$-invariante, construit de la façon classique à partir de la fonction φ strictement plurisousharmonique invariante.

Preuve :

Le groupe $G_{\mathbb{R}}$ contient un sous-groupe de Lie $G'_{\mathbb{R}}$ de type 1 (voir 4ème Partie, B). On va montrer que le couple $(G'_{\mathbb{C}},G'_{\mathbb{R}})$ satisfait bien aux hypothèses de la proposition. On se ramène au cas $G'_{\mathbb{C}}$ simplement connexe en composant la métrique avec la projection du revêtement universel. Pour prouver la proposition, il suffit alors en vertu des résultats du IV, de montrer que pour une forme fermée $\omega \in \Lambda_I^{1,1}(G'_{\mathbb{C}})$, il existe une fonction φ régulière sur $G'_{\mathbb{C}}$ invariante par $G'_{\mathbb{R}}$ et telle que : $\partial\bar{\partial}\varphi = \omega$.
La variété $G'_{\mathbb{C}}/G'_{\mathbb{R}}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, donc $H^p(G'_{\mathbb{C}}/G'_{\mathbb{R}},\mathbb{C})$ est nul pour $p \geqslant 1$. D'après la remarque de la proposition 1, il existe $\alpha \in \Lambda_I^{0,1}(G'_{\mathbb{C}})$ tel que : $\partial\alpha = \omega$. Comme $\bar{\partial}\omega = 0$, on a : $\partial(\bar{\partial}\alpha) = 0$. La forme $\bar{\partial}\alpha$ est dans $\Lambda_I^{0,2}(G'_{\mathbb{C}})$ anti-holomorphe et $\bar{\partial}$ fermée.

Considérons le cas où $G'_{\mathbb{R}} = G^{\beta}_{\mathbb{R}}$ (le cas du groupe affine se traite de façon analogue) et cherchons dans $G^{\beta}_{\mathbb{C}}$ les formes j holomorphes invariantes de type $(2,0)$ et ∂-fermées. Rappelons que $G^{\beta}_{\mathbb{C}}$ est $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$ muni de la loi de composition :

$$(z,b)(z_o,b_o) = (z+z_o, e^{z_o A_\beta} b + b_o).$$

Nous utiliserons ici simplement le fait que $\mathrm{tr}(A_\beta)$ et $\mathrm{dét}(A_\beta)$ sont non nuls. On a :

$$j = dz \wedge H.db + g\, db_1 \wedge db_2$$

où $db = \begin{pmatrix} db_1 \\ db_2 \end{pmatrix}$ et $H = (H_1, H_2)$ avec H_1 et H_2 holomorphes.

De l'invariance de j par le sous-groupe $\{0\} \times \mathbb{R}^2$ de $G^\beta_{\mathbb{R}}$ et de l'holomorphie de H et g, on déduit que H et g ne dépendent que de z. D'autre part, on a toujours par invariance de j par $G^\beta_{\mathbb{R}}$:

$$\forall (z,z_o) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}, \qquad H(z) = H(z+z_o)e^{z_o A_\beta} \qquad \text{et}$$

$$g(z) = g(z+z_o)e^{z_o \operatorname{tr} A_\beta}.$$

Par prolongement analytique, ces égalités sont aussi vraies pour $z_o \in \mathbb{C}$, d'où :

$$H(z) = K_1\, e^{-zA_\beta} \quad \text{et} \quad g(z) = K_2 e^{-\operatorname{tr} A_\beta . z}$$

avec $K_1 \in \mathbb{C}^2$ et $K_2 \in \mathbb{C}$.

Comme j est fermée, on déduit que g est identiquement nul.

D'autre part : $H(z)dz = -\partial(K_1 A_\beta^{-1} e^{-zA_\beta})$, d'où : $j = -\partial(K_1 A_\beta^{-1} e^{-zA_\beta} db)$.

Or, on vérifie immédiatement que la forme $K_1 A_\beta^{-1} e^{-zA_\beta} db$ est invariante. En revenant à notre problème de départ, on voit donc que $\partial\bar{\alpha} = \partial\delta$ pour $\delta \in \Lambda_I^{1,0}(G_C)$ holomorphe, d'où $\omega = \bar{\partial}\alpha_1$ avec $\alpha_1 = \bar{\alpha} - \delta \in \Lambda_I^{1,0}(G_{\mathbb{C}})$ et $\partial\alpha_1 = 0$.

En appliquant à nouveau la remarque de la proposition 10 pour α_1, (on remplace $\bar{\partial}$ par ∂, mais ceci ne change rien), on en déduit $\alpha_1 = \partial\Psi$ où $\Psi \in \Lambda_I^{0,0}$, d'où le théorème 5.

Proposition 12.- On se place dans la situation suivante :

$G_{\mathbb{C}}$: *groupe de Lie complexe ;*

$G_{\mathbb{R}}$: *forme réelle n'étant pas à spectre imaginaire pur.*

Γ : *sous-groupe discret de* $G_{\mathbb{R}}$ *tel que* $G_{\mathbb{R}}/\Gamma$ *soit compact et muni d'une mesure* $d\dot{g}_{\mathbb{R}}$ *positive de masse 1, invariante par l'action de* $G_{\mathbb{R}}$ *à gauche.*

Sous ces hypothèses, la variété complexe $G_{\mathbb{C}}/\Gamma$ *n'admet pas de métrique kählérienne.*

Preuve :

On raisonne par l'absurde en supposant $G_{\mathbb{C}}/\Gamma$ muni d'une métrique kählérienne, ou ce qui revient au même $G_{\mathbb{C}}$ muni d'une métrique kählérienne K invariante par l'action de Γ à droite.

Pour $g \in G_{\mathbb{C}}$, on note K_g la métrique K au point g et si X est un champ de vecteurs sur $G_{\mathbb{C}}$, on note X_g la valeur de ce champ au point g. D'autre part, g transforme par son action à droite sur $G_{\mathbb{C}}$ un vecteur tangent v en g_o, en un vecteur tangent $v.g_o$ en $g.g_o$.

On définit alors une métrique kählérienne $\tilde{K}$ invariante par l'action de $G_{\mathbb{R}}$ à droite (ce qui est absurde d'après le théorème 5) de la façon suivante :

Pour X et Y deux champs sur $G_{\mathbb{C}}$, on pose :

$$\tilde{K}_g(X_g,Y_g) = \int_{G_{\mathbb{R}}/\Gamma} K_{gg_{\mathbb{R}}}(X_g \cdot g_{\mathbb{R}}, Y_g \cdot g_{\mathbb{R}})\, d\dot{g}_{\mathbb{R}} \ .$$

Cette intégrale est bien définie car K est invariante par l'action de Γ. L'action des éléments de $G_{\mathbb{R}}$ sur $G_{\mathbb{C}}$ étant holomorphe et réelle, il s'ensuit que $\tilde{K}$ définit bien une métrique kählérienne.

B I B L I O G R A P H I E

[1] BOURBAKI N. - *Algèbres de Lie,*
Hermann, (Chap. I).

[2] CHAFI B. - *Principe du Minimum pour les fonctions plurisous-harmoniques,*
Thèse de 3ème cycle, Université de Lille 1, (juin 1983).

[3] DIEUDONNÉ J. - *Eléments d'Analyse.*
Gauthier - Villars, (Tome 4).

[4] DOCQUIER F., und GRAUERT H. - *Levisches problem und Rungeschen satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten,*
Math. Ann. 140, 94-123, (1960).

[5] GILLIGAN B., HUCKLEBERRY A. - *On non compact complex nil-manifolds,*
Math. Ann. 238, 39-49, (1978).

[6] HELGASON S. - *Differential Geometry and Symmetric spaces,*
Academic Press.

[7] JENKINS J.W. - *Growth of connected locally compact Lie groups,*
Journ. of functional Analysis, 12, 113-127, (1973).

[8] KISELMAN C.O. - *The partial Legendre transform for plurisubharmonic functions,*
Invent. Math. 137-148, t. 49, (1978).

[9] MATSUSHIMA, MORIMOTO - *Sur certains fibrés holomorphes sur une variété de Stein,*
Bull. Soc. Math. Soc. France, 137-155, t. 88 (1960).

[10] MILNOR - *Morse Theory,*
Annals of math. studies, 51, Princeton Univ. Press, 1963.

[11] RAGHUNATHAN M.S. - *Discrete subgroups of Lie groups,*
Springer Verlag.

.../...

[12] REED B. - *Representations of solvable Lie algebras*, Michigan Math. J. 16, 227-233, (1969).

[13] WARNER G. - *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups*, Springer Verlag, (Tome 1).

PSEUDO-CONVEXITE DES OUVERTS INVARIANTS

ET

CONVEXITE GEODESIQUE DANS CERTAINS ESPACES SYMETRIQUES

novembre 1984

INTRODUCTION

Ce travail est une suite d'un article à paraître [11]. Le problème général sur lequel G. Coeuré avait attiré mon attention est de savoir dans quelle mesure les résultats d'analyse complexe sur $\mathbb{C}^n$ qui mettent en jeu une invariance par le sous-groupe des translations de $\mathbb{R}^n$ se généralisent à la situation $(G_{\mathbb{C}}, G_{\mathbb{R}})$ où $G_{\mathbb{C}}$ est un groupe de Lie complexe et $G_{\mathbb{R}}$ une forme réelle de $G_{\mathbb{C}}$. (Une forme réelle $G_{\mathbb{R}}$ est un sous-groupe de Lie connexe de $G_{\mathbb{C}}$ avec $\mathrm{Lie}(G_{\mathbb{C}}) = \mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}}) \oplus i\,\mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}})$). Une question déterminante à ce sujet est l'existence d'une fonction invariante strictement plurisousharmonique sur $G_{\mathbb{C}}$ et d'exhaustion sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$. Dans le cas de $(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}^n)$ la réponse est trivialement vraie, mais dans le cas général, elle peut être fausse. Dans [11], nous appelons couple pseudo-convexe, un couple $(G_{\mathbb{C}}, G_{\mathbb{R}})$ pour lequel la réponse est positive. Nous avons montré (th. 1 de [11]) qu'un tel couple se caractérise essentiellement par la croissance polynomiale de $G_{\mathbb{R}}$. (Nous avons appelé un tel groupe $G_{\mathbb{R}}$ groupe à spectre imaginaire pur car pour tout $X \in \mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}})$, $\mathrm{ad}X$ a ses valeurs propres imaginaires pures, et c'est là la propriété que nous avons utilisée). La proposition 1 de cet article précise quelque peu le théorème 1 de [11]. Dans [9], C.O. Kiselman avait démontré le résultat suivant : Etant donné un ouvert de Stein Ω dans $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$ invariant par les translations de $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ et à fibres connexes au-dessus de $\mathbb{C}^q$, sa projection sur $\mathbb{C}^q$ est de Stein. B. CHAFI avait généralisé ce résultat dans sa thèse de

3ème cycle au cas où $\mathbb{C}^p$ est remplacé par un groupe réductif et $\mathbb{R}^p$ par un groupe compact. Dans [11], nous avions montré que le théorème de Kiselman est vrai lorsque $\mathbb{C}^q$ était remplacé par une variété de Stein et $(\mathbb{C}^p,\mathbb{R}^p)$ par un couple pseudo-convexe satisfaisant certaines hypothèses. Dans ce travail, nous généralisons le théorème de Kiselman au cas $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ pseudo-convexe sans hypothèse supplémentaire. Nous mettons également en évidence le caractère local du théorème de Kiselman (th. 1). Ce théorème est obtenu en utilisant une fonction distance-frontière sur les ouverts qui a été définie par A. Hirschowitz [5] et qui généralise une siutation classique dans $\mathbb{C}^n$. Nous faisons par ailleurs un usage abondant des travaux de A. Hirschowitz ([5] et [6]).

La deuxième partie de notre article traite de liens entre la pseudo-convexité et la convexité géodésique pour certains espaces symétriques. On sait que pour qu'un ouvert connexe de $\mathbb{C}^n$ invariant par les translations de $\mathbb{R}^n$ soit pseudo-convexe, il faut et il suffit que sa base soit convexe. Pour un couple $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$, on définit une géodésique de $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ comme l'image par la projection canonique d'une courbe de $G_{\mathbb{C}}$ de la forme : $t \longrightarrow g \exp itX (g \in G_{\mathbb{C}}, X \in \mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}}))$. Est-il alors vrai que l'image dans $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ d'un ouvert pseudo-convexe soit géodésiquement convexe ? Une réponse affirmative à cette question a été donnée par O. Rothaus [13] et M. Lassale [10] pour $G_{\mathbb{R}}$ compact. Nous montrons que le résultat est vrai pour une classe assez générale de couples $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ que nous appelons géodésiquement convexe. Pour un tel couple, par deux points de $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ passe une géodésique et une seule. (Une définition précise de la géodésique convexité est donnée avant le théorème 3). Dans le cas général, nous obtenons un résultat apparemment plus faible de convexité locale. Bien que pour $\mathbb{R}^n$, la convexité locale implique la convexité, nous ne savons pas si cela demeure vrai dans des situations plus générales. Les couples pseudo-convexes sont géodésiquement convexes mais la réciproque est fausse et on peut, dans le cas non pseudo-convexe, se poser le problème de l'existence d'une fonction convexe d'exhaustion sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$.

A la fin de l'article, nous montrons, que même pour des couples pseudo-convexes, il n'y a pas équivalence entre ouverts géodésiquement convexes de $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ et ouverts pseudo-convexes invariants de $G_{\mathbb{C}}$. Une réponse affirmative avait été conjecturée par O. Rothaus pour $G_{\mathbb{R}}$ compact. Nous donnons un contre-exemple dans le cas $SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$. La question que nous laissons ouverte est alors de savoir s'il existe pour un ouvert convexe de $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ ne provenant pas d'un ouvert pseudo-convexe de $G_{\mathbb{C}}$, (au moins dans le cas pseudo-convexe), une fonction convexe d'exhaustion.

. . . .

Notations et conventions.

On pose $\mathcal{J}_{\mathbb{R}} = \mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}})$ et $\mathcal{J}_{\mathbb{C}} = \mathrm{Lie}(G_{\mathbb{C}})$.

On note π la projection canonique de $G_{\mathbb{C}}$ sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ lorsque $G_{\mathbb{R}}$ est fermé. On abrègera plurisousharmonique (resp. strictement plurisousharmonique) en p.s.h. (resp. s.p.s.h). Une variété pseudo-convexe est une variété complexe sur laquelle il existe une fonction p.s.h. continue d'exhaustion.

Je remercie vivement Gérard COEURÉ pour les nombreuses discussions stimulantes que j'ai pu avoir avec lui au sujet des thèmes de cet article.

I. *Tubes pseudo-convexes.*

La proposition suivante donne des caractérisations des couples pseudo-convexes et précise ainsi le théorème 1 démontré dans [11].

Proposition 1.- Un couple formé d'un groupe de Lie complexe connexe $G_{\mathbb{C}}$ et d'une forme réelle $G_{\mathbb{R}}$ est pseudo-convexe si et seulement si une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

i) $G_{\mathbb{R}}$ est à spectre imaginaire pur, fermé dans $G_{\mathbb{C}}$ et $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ est simplement connexe.

ii) Il existe un groupe complexe $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$ simplement connexe et une forme réelle $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$ dans $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$ à spectre imaginaire pur, ainsi qu'un sous-groupe discret central Γ de $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$ tels que :

$$G_{\mathbb{C}} = \tilde{G}_{\mathbb{C}}/\Gamma \quad \text{et} \quad G_{\mathbb{R}} = \tilde{G}_{\mathbb{R}}/\Gamma.$$

Preuve : Si le couple $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ est pseudo-convexe, alors $G_{\mathbb{R}}$ est à spectre imaginaire pur [11]. D'autre part, en appliquant la théorie de Morse à une fonction s.p.s.h. invariante d'exhaustion associée au couple $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$, on en déduit que $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ est simplement connexe. La condition i) est donc nécessaire. La condition ii) est suffisante pour la pseudo-convexité de $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ car à une fonction s.p.s.h. invariante et d'exhaustion pour $(\tilde{G}_{\mathbb{C}},\tilde{G}_{\mathbb{R}})$, on associe naturellement une fonction ayant les mêmes propriétés pour $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$. D'autre part $\tilde{G}_{\mathbb{R}}/\Gamma$ est fermé dans $\tilde{G}_{\mathbb{C}}/\Gamma$ car pour un revêtement l'image d'un fermé saturé est fermé.

Il reste à montrer i) => ii). Supposons donc i) vérifié.

Soit $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$ le revêtement universel de $G_{\mathbb{C}}$ et p l'homomorphisme canonique. On a un difféomorphisme naturel entre $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ et $\tilde{G}_{\mathbb{C}}/p^{-1}G_{\mathbb{R}}$.

La suite exacte d'homotopie s'écrit :

$$\pi_o(\tilde{G}_{\mathbb{C}}) \to \pi_o(p^{-1}G_{\mathbb{R}}) \to \pi_1(\tilde{G}_{\mathbb{C}}/p^{-1}G_{\mathbb{R}}) = \pi_1(G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}).$$

Par hypothèse, $\pi_1(G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}})$ et $\pi_o(\tilde{G}_{\mathbb{C}})$ sont nuls.

Donc $\pi_o(p^{-1}G_{\mathbb{R}})$ l'est aussi, ce qui signifie que $p^{-1}G_{\mathbb{R}}$ est connexe. On pose $p^{-1}G_{\mathbb{R}} = \tilde{G}_{\mathbb{R}}$ et $\Gamma = \mathrm{Ker}\ p$. Par définition $\Gamma \subseteq \tilde{G}_{\mathbb{R}}$.
On a : $G_{\mathbb{C}} = \tilde{G}_{\mathbb{C}}/\Gamma$ et $G_{\mathbb{R}} = \tilde{G}_{\mathbb{R}}/\Gamma$.

Comme $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$ est bien évidemment à spectre imaginaire pur, on a ii).

__Corollaire__.- *Si* $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ *est pseudo-convexe, alors le groupe* $G_{\mathbb{C}}$ *est de Stein.*

__*Preuve*__ : Il suffit d'après un théorème de Matsushima [12] de montrer que la composante connexe $Z_{\mathbb{C}}$ du centre de $G_{\mathbb{C}}$ contenant l'élément neutre est de Stein. Notons $\tilde{Z}_{\mathbb{C}}$ (resp. $\tilde{Z}_{\mathbb{R}}$) la composante connexe du centre de $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$ (resp. $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$) contenant l'élément neutre. Ce sont des sous-groupes de Lie du radical de $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$ et de $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$ respectivement. Or ces radicaux sont résolubles et simplement connexes. Par conséquent, $\tilde{Z}_{\mathbb{C}}$ est un groupe abélien simplement connexe dont $\tilde{Z}_{\mathbb{R}}$ est une forme réelle. Comme $\tilde{Z}_{\mathbb{C}} \cap \Gamma \subseteq \tilde{Z}_{\mathbb{R}}$, on en déduit que $\tilde{Z}_{\mathbb{C}}/\tilde{Z}_{\mathbb{C}} \cap \Gamma$ est de Stein. Or c'est justement $Z_{\mathbb{C}}$.

Les résultats qui suivent sont dûs à Hirschowitz [4]. Les démonstrations que nous en donnons diffèrent quelque peu et nous mettons en évidence la notion de bonne variété i.h. qui va être utilisé pour les groupes de Lie complexes.

Définition 1 [4].- Une variété complexe infinitésimalement homogène (en abrégé : variété i.h.) est une variété complexe pour laquelle tout vecteur tangent en un point se prolonge en un champ de vecteurs holomorphe sur toute la variété. (Par exemple, toute variété de Stein est i.h. d'après le théorème A de Cartan).

Hirschowitz démontre que sur une variété i.h., il existe N champs de vecteurs holomorphes engendrant l'espace tangent en tout point. Par intégration des champs de vecteurs, on obtient la condition suivante : Pour qu'une variété complexe M soit i.h., il faut et il suffit qu'il existe un voisinage W de $M \times \{0\}$ dans $M \times \mathbb{C}^N$ (pour un certain N) et une application analytique e de W dans M telle que :

$\forall\, x \in M$: i) $e(x,0) = x$;

ii) $D_2 e(x,0)$ est une application linéaire surjective de $\mathbb{C}^N$ sur l'espace tangent en x à M.

Pour la suite, on choisit une norme sur $\mathbb{C}^N$ notée $\|\ \ \|$ et pour $r > 0$, on note $B(r)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon r. Nous utiliserons la définition 2 suivante :

Définition 2.- On dira qu'une variété complexe M est une *bonne variété* i.h. s'il existe $r_o > 0$ et une application analytique e de $M \times B(r_o)$ dans M telle que :

$\forall\, x \in M$: i) $e(x,0) = x$;

ii) $D_2 e(x,X)$ est une application linéaire surjective pour $(x,X) \in M \times B(r_o)$

Exemple : Une variété M complexe homogène sous un groupe de Lie complexe. (Ceci signifie que $M = G/_H$ où G et H sont des groupes de Lie complexes). C'est une bonne variété i.h. avec l'application e suivante :

$$e : M \times \mathrm{Lie}(G) \longrightarrow \exp X.x.$$

On choisit r_o pour que $\exp X$ soit un difféomorphisme de $B(r_o)$ sur $\exp(B(r_o))$.

Remarque : Si M est une variété complexe homogène sous un groupe de Lie réel, alors M est une variété i.h. mais non nécessairement une bonne variété i.h.

Proposition 2.- Soit U un ouvert propre d'une bonne variété i.h. M. Alors il existe une fonction continue d_U sur U strictement positive et tendant vers 0 sur la frontière de U. *Si, de plus,* U *est pseudo-convexe, alors* $-\operatorname{Log} d_U$ *est* p.s.h. .

Cette proposition généralise un résultat bien connu pour $\mathbb{C}^n$.

Preuve : Soit r_o le nombre apparaissant dans la définition 2. Pour $x \in M$ et $r > 0$, on note $B_x(r)$ l'ensemble $\{x\} \times B(r)$. On définit d_U par :

$$(\forall\ x \in U) \qquad d_U(x) = \sup\{r \leqslant r_o \,|\, B_x(r) \subseteq U\}.$$

Bien évidemment : $0 < d_U(x) \leqslant r_o$.

On se contentera de démontrer la dernière assertion de la proposition 2, la démonstration des autres assertions utilisant essentiellement le théorème des fonctions implicites.

Pour la plurisousharmonicité de $-\operatorname{Log} d_U$, on se sert de la méthode des marmites.

Soit $x_o \in U$. On considère une application holomorphe $\tau \to x(\tau)$ d'un voisinage du disque unité fermé à valeurs dans U tel que : $x(0) = x_o$. On suppose qu'on a : $-\operatorname{Log} d_U(x(\tau)) \leqslant \operatorname{Re} f(\tau)$ pour $|\tau| = 1$ et f polynôme holomorphe sur $\mathbb{C}$. Montrons que l'inégalité est vraie pour $|\tau| \leqslant 1$. On a :

$$-\operatorname{Log} d_u(x(\tau)) \leqslant \operatorname{Re} f(\tau) \iff d_U(x(\tau)) \geqslant |e^{-f(\tau)}|.$$

D'après le principe du maximum :

$$\sup_{|\tau|\leqslant 1} |e^{-f(\tau)}| = \sup_{|\tau|=1} |e^{-f(\tau)}| \leqslant r_o.$$

En particulier, ceci implique que $e(x(\tau), e^{-f(\tau)}.a)$ existe pour $|\tau| \leqslant 1$ et $||a|| < 1$. En utilisant la fonction : $\psi(\tau,\lambda) = e(x(\tau), \lambda e^{-f(\tau)}.a)$ définie pour $\lambda \in [0,1]$ et $|\tau| \leqslant 1$ et en lui appliquant le principe des marmites, on en déduit par la pseudo-convexité de U que $e(x(\tau), e^{-f(\tau)}.a) \in U$ pour $|\tau| \leqslant 1$ et $||a|| < 1$. Ceci implique bien : $d_U(x(\tau)) \geqslant |e^{-f(\tau)}|$ pour $|\tau| \leqslant 1$. ∎

Application aux groupes de Lie.

On sait (exemple ci-dessus) qu'un groupe de Lie complexe G est une bonne variété i.h. De plus, on voit immédiatement en choisissant la fonction e donnée dans cet exemple que pour un ouvert U de G invariant par l'action à droite d'un sous-groupe L, la fonction d_U est également invariante par l'action de L.

Le théorème suivant généralise le théorème 4 de [11] et donne une condition pour que la projection d'un ouvert de Stein soit de Stein.

Théorème 1.- Soit $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ un couple pseudo-convexe. Soit, d'autre part, M un fibré principal holomorphe de groupe structural $G_{\mathbb{C}}$ et de base B. Alors si Ω est un ouvert de M pseudo-convexe invariant par l'action de $G_{\mathbb{R}}$ et à fibres connexes au-dessus de B, on a :

i) la projection de Ω sur B est localement pseudo-convexe ;

ii) si B est de Stein, alors cette projection est un ouvert de Stein.

Preuve : i) => ii) par le théorème de Grauert-Docquier [3]

Démontrons i). Comme $G_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^n$ est de Stein (Corollaire de la proposition 1), on peut localiser en remplaçant M par $G_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^n$ et B par $\mathbb{C}^n$.

On peut alors définir une fonction d_Ω invariante par l'action de $G_{\mathbb{R}} \times \{0\}$ sur Ω. La fonction $-\mathrm{Log}\, d_\Omega$ est p.s.h. donc aussi $\frac{1}{d_\Omega}$.
En ajoutant à $\frac{1}{d_\Omega}$ une fonction positive, s.p.s. et d'exhaution sur $\{1\} \times \mathbb{C}^n$ et une autre fonction s.p.s.h. positive sur $G_{\mathbb{C}}$, invariante par l'action à droite de $G_{\mathbb{R}}$ et d'exhaustion sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ (qui existe), on obtient sur Ω une fonction s.p.s.h. invariante par l'action de $G_{\mathbb{R}}$ et d'exhaustion sur $\Omega/G_{\mathbb{R}}$. Par le principe du minimum [11], on a le résultat.

On a également un résultat sur les ouverts invariants donné par le théorème suivant :

Théorème 2.- Dans les deux cas suivants, il existe sur un ouvert Ω pseudo-convexe et connexe de $G_{\mathbb{C}}$ invariant par une forme réelle $G_{\mathbb{R}}$, une fonction de classe C^{∞}, s.p.s.h. et d'exhaustion sur $\Omega/G_{\mathbb{R}}$

i) $(G_{\mathbb{C}}, G_{\mathbb{R}})$ est pseudo-convexe ;

ii) $G_{\mathbb{C}}$ est résoluble et simplement connexe et $\Omega/G_{\mathbb{R}}$ relativement compact dans $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$.

Preuve : Il existe une convolution sur les groupes de Lie [2]. Par une technique classique [[8] page 49], on passe d'une fonction continue s.p.s.h. d'exhaustion à une fonction de classe C^{∞}, s.p.s.h. d'exhaustion. (On dit qu'une fonction continue est s.p.s.h. si elle est localement la somme d'une fonction p.s.h. continue et d'une fonction s.p.s.h. de classe C^{∞}). On peut donc démontrer le théorème 2 pour une fonction continue. Dans le cas i), on obtient une telle fonction en ajoutant à $\frac{1}{d_{\Omega}}$ une fonction s.p.s.h. sur $G_{\mathbb{C}}$, invariante par l'action de $G_{\mathbb{R}}$ à droite et d'exhaustion sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$. Pour le cas ii), il manque a priori la stricte plurisousharmonicité à la fonction $\frac{1}{d_{\Omega}}$.

On adapte au cas invariant la méthode de la "courbe intérieure" due à A. Hirschowitz qui permet de passer du cas pseudo-convexe au cas strictement pseudo-convexe [6]. Pour la commodité du lecteur qui est prié de se reporter à l'article de Hirschowitz, on rappelle la méthode dans le cas invariant : si pour tout g dans Ω et tout vecteur tangent holomorphe δ en g à $G_{\mathbb{C}}$ et non nul, il existe une fonction p.s.h. invariante sur Ω dérivable au voisinage de g et non nul sur δ, alors il existe une fonction strictement p.s.h. invariante sur Ω.

On supposera donc que pour un certain couple (g,δ) toutes les fonctions p.s.h. invariantes sur Ω, dérivables au voisinage de g s'annulent suivant δ.

Par l'action de $G_{\mathbb{C}}$ à gauche et par un procédé de recollement, on déduit que les fonctions p.s.h. invariantes différentiables sur Ω sont constantes sur la courbe complexe $\gamma : z \to \exp z\delta.g$. A priori, cette courbe n'est dans Ω que pour $|z|$ assez petit. Néanmoins en choisissant une fonction p.s.h. invariante différentiable et d'exhaustion sur $\Omega/G_{\mathbb{R}}$, on voit par ce qui a été dit précédemment que l'image de γ dans $\Omega/G_{\mathbb{R}}$ reste dans un compact fixe de $\Omega/G_{\mathbb{R}}$. Ceci permet de dire que toute la courbe γ est dans Ω. *En résumé, s'il n'existe pas de fonction s.p.s.h. invariante d'exhaustion sur* $\Omega/G_{\mathbb{R}}$, *alors on a une application* f *holomorphe non constante de* $\mathbb{C}$ *dans* Ω *telle que si on note* π *la projection canonique de* $G_{\mathbb{C}}$ *sur* $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ l'image de $\pi \circ f$ soit relativement compacte dans $\Omega/G_{\mathbb{R}}$. Dans notre cas, on a : $f(z) = \exp z\delta.g$ et on pourrait raisonner a priori sur cette fonction particulière. Néanmoins, le lemme suivant dont (ii) est conséquence a un intérêt par lui-même.

Lemme 1.- Soit f une fonction holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $G_{\mathbb{C}}$ résoluble simplement connexe tel que l'image de $\pi \circ f$ soit relativement compacte dans $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$. Alors f est constante.

Preuve : On raisonne par récurrence sur la dimension p de $G_{\mathbb{C}}$. Si $\dim G_{\mathbb{C}} = 1$, c'est une forme du théorème de Liouville. Supposons le lemme vrai à l'ordre $p-1$. Soit $m_{\mathbb{R}}$ un idéal de Lie $(G_{\mathbb{R}})$ de dimension $p-1$ et $M_{\mathbb{R}}$ le sous-groupe de Lie de $G_{\mathbb{R}}$ correspondant. On note $M_{\mathbb{C}}$

le complexifié de $M_{\mathbb{R}}$ dans $G_{\mathbb{C}}$. Soit $\bar{\omega}$ l'homomorphisme canonique $G_{\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}/M_{\mathbb{C}}$. La fonction $\bar{\omega} \circ f$ est alors constante car elle est $G_{\mathbb{R}}/M_{\mathbb{R}}$-invariante et on a : $\dim(G_{\mathbb{C}}/M_{\mathbb{C}}) = 1$. Ce qui se traduit encore par l'existence de $g_o \in G_{\mathbb{C}}$ tel que l'application : $z \in \mathbb{C} \to g_o.f(z)$ soit à valeur dans $M_{\mathbb{C}}$.

Par l'hypothèse de récurrence, on en déduit que cette fonction est constante, d'où le lemme.

Corollaire.- Sous les hypothèses du théorème 2, soit Γ un sous-groupe discret de $G_{\mathbb{R}}$ tel que $G_{\mathbb{R}}/\Gamma$ soit compact. Alors Ω/Γ est de Stein.

Preuve : Il suffit de remarquer qu'une fonction $G_{\mathbb{R}}$ invariante est Γ invariante.

Remarque : De façon similaire au lemme 1, on démontre le résultat suivant : soit f une application d'une variété connexe complexe X telle que, en tout $x_o \in X$, il existe un voisinage ouvert connexe pour lequel, on a : $f = \pi \circ f_{x_o}$ avec f_{x_o} application holomorphe du voisinage considéré dans $G_{\mathbb{C}}$. Alors si $f(X)$ est compact, f est constante ainsi que les f_{x_o} pour tout x_o. De ce résultat, on déduit facilement que si Γ est un sous-groupe discret de $G_{\mathbb{C}}$ résoluble simplement connexe, alors $G_{\mathbb{C}}/\Gamma$ n'admet pas de sous-variété compacte de dimension positive. (On rappelle que certaines de ces variétés n'ont pas de structure kählérienne [11]).

II. *Ouverts pseudo-convexes invariants et ouverts géodésiquement convexes.*

On passe maintenant à la théorie des ouverts géodésiquement convexes. On considère la situation $(G_{\mathbb{C}}, G_{\mathbb{R}})$ où $G_{\mathbb{C}}$ est un groupe de Lie complexe et $G_{\mathbb{R}}$ une forme réelle fermée de $G_{\mathbb{C}}$. Pour commencer, on pose quelques définitions. Soit U un ouvert de $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$. Pour $g \in \pi^{-1}(U)$ et $x \in J_{\mathbb{R}}$ fixés, on pose : $U_{x,g} = \{t \in \mathbb{R} \mid g.\pi(\exp itx) \in U\}$. C'est un ouvert de $\mathbb{R}$, en général non convexe.

On dit qu'une fonction numérique f définie sur U est *convexe* si elle vérifie la propriété suivante :

Pour tout $g \in \pi^{-1}(U)$ et $x \in J_{\mathbb{R}}$, la fonction :

$$t \in U_{x,g} \rightarrow f(g.\pi(\exp itx))$$

est convexe (i.e. convexe sur chaque intervalle dans $U_{x,g}$).

On définit de même la notion de fonction strictement convexe.

On appelle géodésique de $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ un courbe paramétrée :

$$t \in \mathbb{R} \longrightarrow g.\pi(\exp itx)$$

$$(g \in G_{\mathbb{C}} \text{ et } x \in J_{\mathbb{R}} \text{ fixés}).$$

Pour $a, b \in G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$, on appelle *géodésique allant de* a *vers* b, une géodésique vérifiant : $F(0) = a$ et $F(1) = b$.

L'ensemble $[a,b] = \{F(t)$ pour $t \in [0,1]\}$ est appelé segment géodésique.

On dit qu'un sous-ensemble Ω de $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ est *convexe* si pour tout $a, b \in \Omega$, il existe une géodésique allant de a vers b tel que

$[a,b] \subsetneq \Omega$. (C'est là une définition de circonstance qui peut être modifiée dans des situations plus générales). Les fonctions et les ensembles convexes sont stables par l'action à gauche de $G_{\mathbb{C}}$.

Lemme 2.- On considère la situation d'un couple $(G_{\mathbb{C}}, G_{\mathbb{R}})$ tel que $G_{\mathbb{C}}$ soit muni d'une conjugaison notée $g \to \bar{g}$ qui laisse les éléments de $G_{\mathbb{R}}$ invariants. On pose $P = \{p \in G_{\mathbb{C}} | p\bar{p} = 1\}$.

On suppose, de plus, que l'application $\phi : x \in J_{\mathbb{R}} \to \exp ix \in P$ est un homéomorphisme de $J_{\mathbb{R}}$ sur P. On a alors les conclusions suivantes :

i) l'application : $J_{\mathbb{R}} \times G_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\lambda} G_{\mathbb{C}}$

$$(x,g) \to \exp ix.g$$

est un homéomorphisme.

Il en est de même pour l'application :

$$J_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\Psi} G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$$

$$x \longrightarrow \pi(\exp ix).$$

ii) Il existe une fonction continue μ :

$$G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}} \times G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R} \longrightarrow G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$$

$$(x,y,t) \longrightarrow \mu(x,y,t)$$

telle que : $t \to \mu(x,y,t)$ soit l'unique géodésique allant de x vers y.

Preuve :

i) On vérifie facilement que l'application réciproque de λ est donnée par :

$$g \in G_{\mathbb{C}} \to (\frac{\phi^{-1}(g\bar{g}^{-1})}{2}), \exp\left(-\frac{i}{2} \cdot \phi^{-1}(g\bar{g}^{-1}).g\right) \in J_{\mathbb{R}} \times G_{\mathbb{R}}.$$

On déduit de ceci également la seconde assertion de i).

ii) se démontre sans difficulté. On a :

$$\mu(x,y,t) = \exp i\, \Psi^{-1}(x).\pi(\exp it\varphi(x,y))$$

avec $\varphi(x,y) = \Psi^{-1}(\exp(-i\Psi^{-1}(x)).y)$.

Définition.- On dit qu'un couple $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ est *géodésiquement convexe*, si l'application $x \in J_{\mathbb{R}} \to \pi(\exp ix) \in G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ est un homéomorphisme. On a alors $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ convexe. Notons que si les hypothèses du lemme 2 sont satisfaites, alors $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ est géodésiquement convexe.

Théorème 3.- Pour que $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ soit géodésiquement convexe, il faut et il suffit que $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ soit simplement connexe et que pour tout x de $J_{\mathbb{R}}$, la seule valeur propre réelle de $\mathrm{ad}x$ soit 0 .

Preuve (*condition nécessaire*) : S'il existe X_o et Y_o non nuls de $J_{\mathbb{R}}$ tels que : $[X_o,Y_o] = \lambda Y_o$ avec $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, alors $G_{\mathbb{R}}$ contient le groupe affine $A_{\mathbb{R}}$ de la droite réelle. Or l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Lie}\,(A_{\mathbb{R}}) & \longrightarrow & G_{\mathbb{C}} \\ X & \longrightarrow & \exp(iX) \end{array}$$

n'est pas injective (*petit calcul*). Donc la fin de la conclusion est nécessairement vérifiée. D'autre part, de l'homéomorphisme entre $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ et $J_{\mathbb{R}}$, découle que $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ est contractile.

Condition suffisante : On dira qu'un groupe de Lie G est à spectre non réel si la seule valeur propre réelle de $\mathrm{ad}x$ pour $x \in \mathrm{Lie}(G)$ est 0. Montrons tout d'abord que si $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$ est une forme réelle à spectre non réel de $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$ simplement connexe, alors $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$ est lui aussi simplement connexe. Notons $\tilde{S}_{\mathbb{C}}$ le radical résoluble de $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$. Le groupe $\tilde{G}_{\mathbb{R}}/\tilde{S}_{\mathbb{C}} \cap \tilde{G}_{\mathbb{R}}$ est une forme réelle du groupe semi-simple complexe $\tilde{G}_{\mathbb{C}}/\tilde{S}_{\mathbb{C}}$. Comme $\tilde{G}_{\mathbb{R}}/\tilde{S}_{\mathbb{C}} \cap \tilde{G}_{\mathbb{R}}$ est à spectre non réel, il est compact (voir ci-dessous). On sait que ceci implique qu'il est aussi simplement connexe. Par conséquent, $\tilde{S}_{\mathbb{C}} \cap \tilde{G}_{\mathbb{R}}$ est connexe et donc simplement connexe en tant que sous-groupe de $\tilde{S}_{\mathbb{C}}$. Un petit argument de suite d'homotopie permet de conclure que $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$ est simplement connexe.

On revient alors à la situation d'un couple $(G_{\mathbb{C}}, G_{\mathbb{R}})$ avec $G_{\mathbb{R}}$ à spectre non réel et $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ simplement connexe. Soit $p : \tilde{G}_{\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$ le revêtement universel de $G_{\mathbb{C}}$. En utilisant la suite exacte d'homotopie comme pour la proposition 1, on a $\tilde{G}_{\mathbb{R}} = p^{-1} G_{\mathbb{R}}$ connexe. De plus, il existe un sous-groupe discret central Γ de $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$ tel que : $G_{\mathbb{C}} = \tilde{G}_{\mathbb{C}}/\Gamma$ et $G_{\mathbb{R}} = \tilde{G}_{\mathbb{R}}/\Gamma$. On a un homéomorphisme naturel h entre $\tilde{G}_{\mathbb{C}}/\tilde{G}_{\mathbb{R}}$ et $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$. De la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}} \arrow[d, "h"] \\
J_{\mathbb{R}} \arrow[ur, "\pi(\exp iX)"] \arrow[r, "\pi(\exp iX)"'] & \tilde{G}_{\mathbb{C}}/\tilde{G}_{\mathbb{R}}
\end{tikzcd}$$

On déduit que $(\tilde{G}_{\mathbb{C}},\tilde{G}_{\mathbb{R}})$ géodésiquement convexe entraîne $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ géodésiquement convexe. En utilisant ce qui a été dit plus haut, on supposera dans la suite $G_{\mathbb{C}}$ et $G_{\mathbb{R}}$ simplement connexes. La décomposition de Levi-Mac Lev et l'unicité du complexifié simplement connexe d'un groupe de Lie entraînent :

$$G_{\mathbb{R}} = K_{\mathbb{R}} \underset{s}{\times} S_{\mathbb{R}} \quad , \qquad G_{\mathbb{C}} = K_{\mathbb{C}} \underset{s}{\times} S_{\mathbb{C}} \qquad \text{(produits semi-directs)}$$

où $S_{\mathbb{R}}$ (resp. $S_{\mathbb{C}}$) est le radical résoluble de $G_{\mathbb{R}}$ (resp. $G_{\mathbb{C}}$) et $K_{\mathbb{C}}$ est un sous-groupe semi-simple complexe de $G_{\mathbb{C}}$ dont $K_{\mathbb{R}}$ est une forme réelle. D'autre part, le groupe $K_{\mathbb{R}}$ est compact car sinon il existerait $X_o \in \mathrm{Lie}(K_{\mathbb{R}})$ tel que $\mathrm{ad}X_o$ ait une valeur propre réelle non nul. (On considère X_o dans une partie non compacte d'une sous-algèbre de Cartan).

Pour prouver que $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ est géodésiquement convexe, on va montrer que le couple satisfait aux hypothèses du lemme 2. Notons immédiatement que la simple connexité de $G_{\mathbb{C}}$ entraîne l'existence d'une conjugaison.

1ère étape :

$G_{\mathbb{C}}$ résoluble, $K_{\mathbb{C}} = \{1\}$.

On utilise le théorème suivant dû à Dixmier :

Théorème [1].- Soit G un groupe de Lie résoluble simplement connexe. On pose

$$v = \{x \in \mathrm{Lie}(G) \mid \det(\frac{e^{\mathrm{ad}x} - I}{\mathrm{ad}x}) \neq 0\}$$

(i.e. $x \in v \iff$ la seule valeur propre imaginaire pure de $\mathrm{ad}x$ est 0).

Soit n le radical nilpotent de Lie(G) et N le sous-groupe analytique correspondant dans G. On note :

$$\underline{\rho} : \mathcal{J} \to \mathcal{J}_{/n} \quad \text{et} \quad \rho : G \to G_{/N}$$

les projections canoniques.

Alors, on a un homéomorphisme par l'exponentielle :

$$v \xrightarrow[\exp]{\sim} \rho^{-1}(\exp(\underline{\rho}(v)) = w \subseteq G .$$

On revient aux notations du lemme 2. D'après l'hypothèse sur les valeurs propres de adx, on a : $i\mathcal{J}_{\mathbb{R}} \subseteq v$, d'où l'injectivité de ϕ.

Montrons que $\mathcal{P} \subseteq w$. Soit $p \in \mathcal{P}$, on a : $p\bar{p} = 1$. Donc $\rho(p).\rho(\bar{p}) = 1$. Or $\rho(\bar{p}) = \overline{\rho(p)}$ car le radical de $\mathcal{J}_{\mathbb{C}}$ est le complexifié du radical de $\mathcal{J}_{\mathbb{R}}$ et on construit naturellement une conjugaison pur $\mathcal{J}_{\mathbb{C}}/n$, (donc aussi sur $G_{\mathbb{C}}/N$ simplement connexe) telle que : $\underline{\rho}\bar{X} = \overline{\underline{\rho}X}$. Comme $G_{\mathbb{C}}/N$ est abélien, on a : $\rho p = \exp i\underline{\rho}(X)$ avec $\underline{\rho}(X) = \overline{\underline{\rho}(X)} = \underline{\rho}(\frac{X+\bar{X}}{2})$ et donc $\rho p \in \exp \rho(v)$. Pour terminer, on a bien : $p = \exp i X$ pour un certain $X \in \mathcal{J}_{\mathbb{R}}$. En effet, on a : $p = \exp Z$ pour un certain $Z \in v$. D'autre part : $\bar{p}^{-1} = \exp(-\bar{Z}) = p = \exp(Z)$. Or v est stable par $Z \to -\bar{Z}$. Donc $-\bar{Z} \in v$. Par conséquent, $Z + \bar{Z} = 0 \implies Z = iX$ avec $X \in \mathcal{J}_{\mathbb{R}}$. D'où surjectivité de ϕ.

2ème étape : $G_{\mathbb{C}} = K_{\mathbb{C}}$. C'est un résultat connu [4].

3ème étape : *Cas général.*

Injectivité de ϕ : On note $\bar{\omega}$ l'homomorphisme canonique de

$G_{\mathbb{C}}$ sur $K_{\mathbb{C}}$, et $\bar{\omega}_*$ l'application induite sur les algèbres de Lie.

Soient $X, X' \in J_{\mathbb{R}}$ tels que : $\exp iX = \exp iX'$. On a :

$\exp i\bar{\omega}_* X = \bar{\omega}(\exp iX) = \bar{\omega}(\exp iX') = \exp i\bar{\omega}_* X'$. Ce qui implique par la 2ème étape : $\bar{\omega}_* X = \bar{\omega}_* X' = u$. On définit les algèbres résolubles :

$J'_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}u \underset{s}{+} \mathrm{Lie}(S_{\mathbb{R}})$ et $J'_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}.u \underset{s}{+} \mathrm{Lie}(S_{\mathbb{C}})$, ainsi que les sous-groupes de Lie de $G_{\mathbb{C}}$ correspondant : $G'_{\mathbb{R}}$ et $G'_{\mathbb{C}}$. Soit $\tilde{G}'_{\mathbb{C}}$ le revêtement universel de $G'_{\mathbb{C}}$ et r la projection associée. On note $\widetilde{\exp}$ l'application exponentielle de $J_{\mathbb{C}}$ dans $\tilde{G}'_{\mathbb{C}}$. Entre les exponentielles de $J'_{\mathbb{C}}$ dans $G'_{\mathbb{C}}$ et $\tilde{G}'_{\mathbb{C}}$, on a la relation :

$$r \circ \widetilde{\exp} = \exp.$$

On pose : $\Gamma = \mathrm{Ker}\ r$ (sous-groupe discret central de $\tilde{G}'_{\mathbb{C}}$).
Il est a priori inclus dans $\tilde{V}_{\mathbb{C}}$, sous-groupe abélien complexe simplement connexe de dimension 1 de $\tilde{G}'_{\mathbb{C}}$ correspondant à Cu. Pour $\gamma \in \Gamma$, on peut donc écrire : $\gamma = \widetilde{\exp}(Z)$ où $Z \in \tilde{V}_{\mathbb{C}}$. Il vient :

$$1 = r(\widetilde{\exp}(Z)) = \exp Z.$$

En posant $Z = au + ibu$ (avec $a,b \in \mathbb{R}$), on vérifie :
$\exp Z.\exp \bar{Z} = \exp(2ibu) = 1$. Comme $u \in \mathrm{Lie}(K_{\mathbb{R}})$, ceci implique : $b = 0$. On en déduit que Γ est dans $\tilde{G}'_{\mathbb{R}}$ (sous-groupe analytique de $\tilde{G}'_{\mathbb{C}}$ correspondant à $J_{\mathbb{R}}$).

Terminons la démonstration de l'injectivité. On pose :

$$\widetilde{\exp}(iX) = p \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\exp}(iX') = p'.$$

On a : $r(p) = r(p')$ d'où $p = p'.\gamma$ pour un $\gamma \in \Gamma$.
On en déduit : $\gamma\bar{\gamma} = 1$ d'où d'après la première étape appliqué à $\tilde{G}'_{\mathbb{C}}$:

$\gamma = \widetilde{\exp}(iY)$ pour un certain $Y \in \mathcal{J}'_{\mathbb{R}}$. Mais on a aussi : $\gamma = \bar{\gamma}$, d'où $1 = \gamma^2 = \exp(2iY)$. Donc $Y = 0$ et $\gamma = 1$. Toujours d'après la 1ère étape, on en déduit $X = X'$.

Surjectivité : Soit $q \in \mathcal{P}$. On a $\bar{\omega}(q).\overline{\bar{\omega}(q)} = 1$ d'où $\bar{\omega}(q) = \exp iu$ pour un $u \in \mathrm{Lie}(K_{\mathbb{R}})$. On considère alors $\mathcal{J}'_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}u \underset{s}{+} \mathrm{Lie}(S_{\mathbb{R}})$ et les différents objets précédemment définis. On a : $q = r(p)$ pour un certain $p \in \widetilde{G}'_{\mathbb{C}}$ d'où $p\bar{p} = \gamma \in \Gamma$. On décompose $p = v.s$ avec $v \in \widetilde{V}_{\mathbb{C}}$ et $s \in S_{\mathbb{C}}$. Il vient : $v\bar{v} = \gamma$. Or : $r(\exp iu) = r(v)$, d'où $v = \exp(iu).\gamma_o$ $(\gamma_o \in \Gamma)$.

Il en découle : $\gamma_o^2 = \gamma$. Quitte à remplacer p par $p\gamma_o$, on peut donc supposer $p\bar{p} = 1$. En appliquant la première étape, on a : $p = \widetilde{\exp}(iX)$ pour un certain $X \in \mathcal{J}'_{\mathbb{R}}$, d'où $q = \exp iX$.

Bicontinuité : On note $\mathcal{P}_{K_{\mathbb{C}}}$, $\mathcal{P}_{S_{\mathbb{C}}}$, $\mathcal{P}_{G_{\mathbb{C}}}$ les ensembles $\mathcal{P}$ associés à $K_{\mathbb{C}}$, $S_{\mathbb{C}}$, $G_{\mathbb{C}}$. On a alors un homéomorphisme de $\mathcal{P}_{K_{\mathbb{C}}} \times \mathcal{P}_{S_{\mathbb{C}}}$ sur $\mathcal{P}_{G_{\mathbb{C}}}$ défini par :

$$(k,s) \to k^{1/2}sk^{1/2} = k(k^{-1/2}sk^{1/2})$$

(la racine carrée est une fonction continue sur $\mathcal{P}_{K_{\mathbb{C}}}$)

l'application réciproque est donnée par :

$$(k_1.s_1 \in \mathcal{P}_{G_{\mathbb{C}}}) \longrightarrow (k_1, k_1^{1/2}s_1k_1^{-1/2}).$$

Par conséquent, $\mathcal{P}_{G_{\mathbb{C}}}$ est homéomorphe à un espace $\mathbb{R}^n$.

L'application ϕ de $\mathcal{J}_{\mathbb{R}}$ sur $\mathcal{P}_{G_{\mathbb{C}}}$ étant une application bijective continue entre deux espaces homéomorphes à $\mathbb{R}^n$, est en vertu d'un théorème connu, bicontinue.

Remarque : Montrons que si $G_{\mathbb{C}}$ est à radical résoluble simplement connexe et $G_{\mathbb{R}}$ à spectre non réel, alors $(G_{\mathbb{C}}, G_{\mathbb{R}})$ est géodésiquement convexe. Si on note $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$ le revêtement universel de $G_{\mathbb{C}}$, on a : $G_{\mathbb{C}} = \tilde{G}_{\mathbb{C}}/\Gamma$ avec Γ sous-groupe discret central de $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$. Soit $S_{\mathbb{C}}$ le radical résoluble de $G_{\mathbb{C}}$ et $\tilde{S}_{\mathbb{C}}$ celui de $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$. On a : $S_{\mathbb{C}} = \tilde{S}_{\mathbb{C}}/\Gamma \cap \tilde{S}_{\mathbb{C}}$, d'où $\Gamma \cap \tilde{S}_C = \{1\}$ par la simple connexité de $S_{\mathbb{C}}$. Il en découle que la restriction à Γ de l'homomorphisme canonique de $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$ sur $\tilde{G}_{\mathbb{C}}/\tilde{S}_{\mathbb{C}}$ est injective. D'autre part, l'image de Γ est évidemment dans le centre de $\tilde{G}_{\mathbb{C}}/\tilde{S}_{\mathbb{C}}$. Ce dernier groupe étant semi-simple complexe, son centre est fini. Par conséquent Γ est lui aussi fini. On a (voir démonstration de la condition suffisante du théorème 1)

$$\tilde{G}_{\mathbb{R}} = K_{\mathbb{R}} \underset{s}{\times} S_{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad \tilde{G}_{\mathbb{C}} = K_{\mathbb{C}} \underset{s}{\times} S_{\mathbb{C}}$$

où on a note $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$ la composante connexe de $p^{-1}G_{\mathbb{R}}$ contenant 1.

Le groupe central Γ étant fini est dans le centre de $K_{\mathbb{C}}$, donc aussi dans le groupe compact $K_{\mathbb{R}}$, lui-même inclus dans $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$. On a donc : $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}} = (\tilde{G}_{\mathbb{C}}/\Gamma)/(\tilde{G}_{\mathbb{R}}/\Gamma)$ homéomorphe à $\tilde{G}_{\mathbb{C}}/\tilde{G}_{\mathbb{R}}$. Donc $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ est simplement connexe et les hypothèses du théorème 1 sont satisfaites.

La proposition qui suit relie ouverts convexes et fonctions convexes.

Proposition 3.- Soit $(G_{\mathbb{C}}, G_{\mathbb{R}})$ un couple géodésiquement convexe. Un ouvert U connexe de $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ est convexe dès qu'il vérifie la propriété suivante :

Il existe une fonction continue convexe ψ définie sur U tel que pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'ensemble $F_c = \{x \in U \mid \Psi(x) \leqslant c\}$ est fermé dans $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$.

On munit $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ d'une métrique auxiliaire δ.

Fixons $x_o \in U$ et notons $E_{x_o} = \{x \in U | [x_o,x] \subseteq U\}$. C'est un ouvert de U. En effet soit $x \in E$. Pour un nombre $\varepsilon > 0$, on a : $\delta(\mu(x_o,x,t),\mu(x_o,x',t)) < \varepsilon$ pour $t \in [0,1]$ et x' assez proche de x. En choisissant ε assez petit, on en déduit que $[x_o,x']$ est dans U pour x' assez proche de x. Par conséquent, E_{x_o} est bien ouvert. Soit $\bar{E}^U_{x_o}$ l'adhérence de E_{x_o} dans U. Pour $y \in \bar{E}^U_{x_o}$, on a : $y = \lim y_n$ avec $y_n \in \bar{E}^U_{x_o}$. Par la continuité de ψ en y, on a : $(\forall n)\psi(y_n) \leqslant c$ pour une certaine constante c. En posant : $c' = \mathrm{Max}(c,\psi(x_o))$, la convexité de ψ entraîne : $\psi(\mu(x_o,y_n,t)) \leqslant c'$ pour tout n et tout $t \in [0,1]$. Par conséquent, $\mu(x_o,y_n,t) \in F_{c'}$, et donc aussi les éléments $\mu(x_o,y,t)$ par continuité de μ et par fermeture de $F_{c'}$. Comme $F_{c'}$ est inclus dans U, on a bien évidemment : $[x_o,y] \subseteq U$ et donc $y \in E_{x_o}$. Par conséquent $\bar{E}^U_{x_o} = E_{x_o}$, ce qui signifie par la connexité de U :

$E_{x_o} = U$. Comme x_o a été choisi arbitrairement dans U, on en déduit que U est convexe.

III. Application à l'analyse complexe.

Soit U un ouvert de $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ et ψ une fonction numérique sur U. *Alors si* $\psi \circ \pi$ *est p.s.h.* (resp. s.p.s.h.), *la fonction* ψ *est convexe* (resp. strictement convexe). La démonstration est immédiate. Elle consiste à considérer pour $x \in J_{\mathbb{R}}$ et $g \in G_{\mathbb{C}}$ avec $\pi(g) \in U$, la fonction $z \to \psi \circ \pi(g\exp zx) = \psi_{x,g}(z)$. Cette fonction est p.s.h. et invariante par les translations de $\mathbb{R}$. D'après un résultat classique, la fonction $\psi_{x,g}(it)$ est convexe pour $t \in \mathbb{R}$.

Théorème 4.- Soit Ω un ouvert connexe et pseudo-convexe de $G_{\mathbb{C}}$ invariant par l'action à droite de $G_{\mathbb{R}}$. Alors si $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ est géodésiquement convexe, l'ouvert $\Omega/G_{\mathbb{R}}$ est convexe.

Preuve : La fonction $-\mathrm{Log}\, d_\Omega$ définie dans la première partie est p.s.h. et invariante. De plus

$$- \mathrm{Log}\, d_\Omega(g) \leqslant c \iff d_\Omega(g) \geqslant e^{-c}.$$

Comme d_Ω prolongée par 0 sur $\complement\Omega$ est continue, on en déduit que $\tilde{F}_c = \{g \in \Omega \mid -\mathrm{Log}\, d_\Omega(g) \leqslant c\}$ est fermé dans $G_{\mathbb{C}}$. Par conséquent, $F_c = \pi\tilde{F}_c$ est lui-même un fermé de $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ comme projection d'un fermé invariant. Par application de la proposition 3 à $-\mathrm{Log}\, d_\Omega$, on déduit que $\pi\Omega$ est convexe.

Remarque : Un couple pseudo-convexe est géodésiquement convexe mais la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple suivant :

Pour $\mu \in \mathbb{R}^*$, on pose : $A_\mu = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ -\mu & 1 \end{pmatrix}$. On définit alors $G^\mu_{\mathbb{R}}$ comme étant $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ muni de la structure de groupe suivant :

$$\forall(z,b) \text{ et } (z_o,b_o) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 : (z,b)(z_o,b_o) = (z+z_o, e^{z_o A_\mu} b+b_o).$$

On définit de même $G^\mu_{\mathbb{C}}$. On vérifie alors facilement que la seule valeur propre réelle ou imaginaire pure pour $\mathrm{ad}x$ (avec $x \in \mathrm{Lie}(G^\mu_{\mathbb{R}})$) est 0. Donc les couples $(G^\mu_{\mathbb{C}}, G^\mu_{\mathbb{R}})$ sont géodésiquement convexes et non pseudo-convexes. Remarquons que ces couples sont déjà intervenus dans [11].

Le cas général.

Pour un couple $(G_{\mathbb{C}}, G_{\mathbb{R}})$ quelconque, je ne sais pas si le théorème 4 reste vrai. On a néanmoins un résultat local.

Définition.- On dit qu'un ouvert Ω de $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ est *localement convexe* si pour tout point x de $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$, il existe un voisinage ouvert V_x tel que chaque composante connexe de $V_x \cap \Omega$ soit convexe.

Remarque : On peut supposer que x appartient à la frontière de Ω en utilisant la locale convexité de $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ (voir preuve de la prop. 4).

Proposition 4.- La projection sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ d'un ouvert pseudo-convexe invariant de $G_{\mathbb{C}}$ est un ouvert localement convexe.

Preuve : D'après un résultat général sur les connexions [4], en tout point de $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$, il existe un système fondamental de voisinage convexes ouverts. Par deux points x et y d'un tel voisinage V, il passe alors une géodésique unique telle que $[x,y]$ soit dans V. Soit P un voisinage convexe de $\pi(1)$, supposé assez petit. En utilisant le fait que l'application $x \in J_{\mathbb{R}} \to \pi(\exp ix) \in G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ est un homéomorphisme sur son image au voisinage de l'origine, on voit facilement qu'on peut définir une fonction continue μ sur $P \times P \times [0,1]$ analogue à celle définie dans le lemme 2 et qui traduit la continuité d'une géodésique par rapport à ses extrémités.

Soit alors Ω un ouvert pseudo-convexe invariant de $G_{\mathbb{C}}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble : $\{x \in \pi\Omega \cap P \mid -\mathrm{Log}\, d_\Omega(x) \leqslant \lambda\}$ est fermé dans P. D'où en appliquant la proposition 3 à P au lieu de $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ et, par translation, on déduit la proposition 4.

Contre-exemple à une conjecture de O. Rothaus [13]

On va montrer que si on prend pour $G_{\mathbb{C}}$ le groupe $SL(2,\mathbb{C})$ des matrices complexes d'ordre 2 et de déterminant 1, et pour $G_{\mathbb{R}}$ le sous-groupe de $SL(2,\mathbb{C})$ des matrices unitaires de déterminant 1, il existe un ouvert Ω invariant dans $SL(2,\mathbb{C})$ de projection convexe et non pseudo-convexe. L'idée est d'utiliser un modèle classique de $SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$ qui est une boule et dont les géodésiques sont des segments de droite. L'ouvert $\pi\Omega$ est alors simplement un demi-espace. On rappelle brièvement la construction du modèle.

Le groupe $SL(2,\mathbb{C})$ opère dans l'espace H des matrices hermitiennes d'ordre 2 par : $(g,h) \in SL(2,\mathbb{C}) \times H \to ghg^* \in H$ (g^* est la transconjuguée de g). On note par la suite : $\rho(g)h = ghg^*$. L'orbite S de l'élément

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ par ρ s'identifie naturellement à l'espace homogène

$SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$. On considère le sous-espace P de H des matrices de trace nulle et on note B l'ouvert de P défini par : $B = \{p \in P \mid \det(I+p) > 0\}$; On voit que B est une boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 dans P. On vérifie facilement que l'application $x \in S \xrightarrow{\psi} \dfrac{2x}{\mathrm{tr}\,x} - I$ est une bijection de S sur B.

Montrons, à présent, que l'image des géodésiques de S sont les intersections des droites de $\mathcal{P}$ avec B. Les géodésiques de S passant par I sont données par : $t \to \exp tX$ où $X \in \mathcal{P}$. Un calcul facile montre que ce sont aussi les intersections des plans vectoriels π_X engendrés par I et X avec S. Mais alors toute géodésique est l'intersection d'un plan $\rho(g)\pi_X$ avec S. En utilisant l'application ψ, on voit que l'image d'une géodésique dans B est l'intersection de B avec une droite de $\mathcal{P}$. Comme par deux points, il passe une géodésique, toute intersection non vide d'une droite de $\mathcal{P}$ avec B est l'image d'une géodésique.

Sur S, on définit un ouvert $\dot{\Omega}$ par $\dot{\Omega} = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix} \in S$ avec $a > c\}$. Cet ouvert est convexe dans S, car son image par ψ est l'intersection d'un demi-espace de $\mathcal{P}$ avec B. On définit alors l'ouvert Ω de $SL(2,\mathbb{C})$ par : $\Omega = \pi^{-1}\dot{\Omega}$ où π est l'application : $g \in SL(2,\mathbb{C}) \to \rho(g).I \in S$. En posant $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et en explicitant, on a :

$$\Omega = \{g \in SL(2,\mathbb{C}) \mid |a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2 > 0\}.$$

Montrons que l'ouvert Ω n'est pas pseudo-convexe. L'intersection de Ω avec l'hyperplan complexe d'équation $d = 1$ est donné par les équations :

$$a = 1 + bc$$
$$f(b,c) < 0$$

(où on a posé : $f(b,c) = |c|^2 - |bc|^2 - |b|^2 - 2\mathrm{Re}(bc)$) donc difféomorphe analytiquement à l'ouvert U de $\mathbb{C}^2$ donné par :

$$U = \{(b,c) \in \mathbb{C}^2 \mid f(b,c) < 0\}.$$

Il suffit pour conclure de montrer que U n'est pas pseudo-convexe. Le point $(b,c) = (1,-\frac{1}{2})$ est un point régulier de la frontière de U où l'espace tangent complexe contient le vecteur $(-1, \frac{3}{4})$. La forme de Lévi en ce point s'écrit :

$$- \frac{5}{4} |b|^2 + \mathrm{Re}\, b\bar{c} .$$

Elle prend une valeur négative sur le vecteur $(- 1, \frac{3}{4})$ et l'ouvert U n'est pas pseudo-convexe.

Remarque :

On considère le groupe de Heisenberg réel $N_{\mathbb{R}}$ qui est $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ muni de la loi de composition suivante :

$$(x,c)(x_o,c_o) = (x + x_o , c + c_o + \det(x,x_o)).$$

Alors on peut considérer dans le groupe de Heisenberg complexe $N_{\mathbb{C}}$ l'ouvert invariant $\Omega = \{g_1 . g_2 | g_2 \in N_{\mathbb{R}}$ et $g_1 = (iX,ic)$ avec $(X,c) \in N_{\mathbb{R}}$ et $c > 0\}$.

Comme précédemment, mais plus simplement, on démontre qu'un tel ouvert est géodésiquement convexe et non pseudo-convexe. Néanmoins, cet exemple est moins intéressant que le précédent par rapport à la question de O. Rothaus car ici la forme réelle n'est pas compacte.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERNAT P., CONZE N., DUFLO M., Représentations des groupes de Lie résolubles, (Dunod, 1972, p. 218-220).

[2] CHAFI B., Thèse de 3ème cycle, Université de Lille I, (juin 1983).

[3] DOCQUIER F., GRAUERT H., - Levisches problem und Rungescher Satz für teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 140 (1960), p. 94-123.

[4] HELGASON S., Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, (Academic press).

[5] HIRSCHOWITZ A., Pseudo-convexité au-dessus d'espaces plus ou moins homogènes, (Invent. Math. Berlin, t. 26, 1974), p. 303-322.

[6] HIRSCHOWITZ A., Le problème de Lévi pour les espaces homogènes, (Bull. S.M.F. n° 103 (1975)), p. 191-201.

[7] HOCHSCHILD G., The structure of Lie groups, (Holden Day, Inc. 1975).

[8] HORMANDER L., An introduction to complex analysis in several variables, (Van Nostrand, 1967).

[9] KISELMAN C.O., The partial Legendre transformation for plurisubharmonic functions, (Inventiones Math., n° 49 (1978)), p. 137-148.

[10] LASSALE M., Deux généralisations du "Théorème des 3 cercles" de Hadamard, (Math. Ann. n° 249, (1980), p. 17-26.

[11] LOEB J.J., Action d'une forme réelle sur un groupe de Lie complexe, (à paraître).

[12] MATSUSHIMA Y., et MORIMOTO A., Sur certains espaces fibrés holomorphes sur une variété de Stein, (Bull. Soc. Math. France n° 88, 1966), p. 137-155).

[13] ROTHAUS O. - Envelopes of holomorphy of domains in complex Lie groups, (In : Problems of analysis, Princeton University Press, 1970), p. 309-317.

U.E.R. DE MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

59655 - VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX (France)

A COUNTER-EXAMPLE TO THE SERRE PROBLEM WITH A BOUNDED DOMAIN OF $\mathbb{C}^2$ AS FIBER.

janvier 1985

INTRODUCTION.

In 1953, J.P. Serre raised the question whether a holomorphic fiber bundle with Stein fiber and Stein basis is itself Stein. A positive answer was given by K. Stein [22] when the fiber is 0-dimensional and by N. Mok [12] when the fiber is one-dimensional. (Previously, Y.T. Siu [17], A. Hirschowitz [8] and N. Sibony [15] have independently solved the case of a fiber which is a domain in $\mathbb{C}$). A negative answer to the Serre problem was given by H. Skoda [20] in 1977, who constructed a holomorphic fiber bundle which is not Stein with $\mathbb{C}^2$ as fiber and a domain of $\mathbb{C}$ as basis. Later, J.P. Demailly [2] improved this counter-example by showing that one can choose transition functions as locally constant polynomial automorphisms in $\mathbb{C}^2$. Always with $\mathbb{C}^2$ as fiber, J.P. Demailly ([2], [3]) has constructed counter-example to the Serre problem with the plane or the disc as basis.

Whether there are only few positive results to the Serre problem in dimension more than one, the same is not true in the special case of a bounded Stein domain in $\mathbb{C}^n$. G. Fischer ([4], [5], [6]) has given an affirmative answer when the fiber is Banach Stein, for instance, in the case of bounded domains in $\mathbb{C}^n$ which are strongly complete with respect to the Caratheodory metric (A. Hirschowitz [9]). Using some results of J.L. Steehlé [21], J. Fornaess and K. Diedrich [7] solved the case when the fiber is a bounded domain of $\mathbb{C}^n$ with C^2 boundary.

Y.T. Siu has proved the very strong result that the Serre problem has a positive answer when the fiber is a bounded Stein domain in $\mathbb{C}^n$, with the only topological restriction that the first Betti number is zero. After that, one could hope that there was a general positive result for bounded domains in $\mathbb{C}^n$, and in 1978, Y.T. Siu [19] conjectured that a holomorphic fiber bundle with Stein basis, and which is a relatively compact Stein open subset of a Stein manifold, is itself Stein. Our aim is to give a negative answer to this conjecture : we produce a non Stein fiber bundle with $\mathbb{C}^*$ as basis and a bounded and pseudo-convex Reinardt domain in $\mathbb{C}^2$ as fiber. We construct this counter-example from some 3-dimensional solvable complex Lie group.

The authors are grateful to H. Cartan for interesting remarks concerning the problem discussed in the paper.

1 - CONSTRUCTION OF THE FIBER.

Let A be the matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; its eigenvalues are positive ($\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ and $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$), corresponding eigenvectors belong to $\mathbb{R}^2$ ($X_i = \begin{pmatrix} \lambda_i - 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ for $i = 1,2$).

Let V be the domain of $\mathbb{C}^2$ defined by :

$$V = \{u_1X_1 + u_2X_2 \mid \operatorname{Im} u_1 > 0 \text{ and } \operatorname{Im} u_2 > 0\}.$$

It is obvious that this domain is invariant by the translations of $\mathbb{R}^2$, and consequently by those of $\mathbb{Z}^2$.

Let $F = V/_{\mathbb{Z}^2}$. It will be the fiber of the fiber bundle.

Proposition 1.- *F is a Stein manifold and is holomorphically diffeomorphic to a bounded Reinhardt domain in $\mathbb{C}^2$.*

Proof :

The map $(z_1,z_2) \to (e^{2i\pi(z_1+z_2)}, e^{2i\pi z_2})$ from $\mathbb{C}^2$ onto $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ induces a holomorphic diffeomorphism of $\mathbb{C}^2/_{\mathbb{Z}^2}$ onto $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$. The range of F is a Reinhardt domain because V is $\mathbb{R}^2$-invariant. It can be checked immediately that (v_1,v_2) belongs to this Reinhardt domain if and only if

$$|v_1| = e^{-2\pi(\lambda_1 \mathrm{Im}u_1+\lambda_2 \mathrm{Im}u_2)}, \quad |v_2| = e^{-2\pi(\mathrm{Im}u_1+\mathrm{Im}u_2)}$$

It is also the set of points (v_1,v_2) in $C^* \times C^*$ which verifies : $|v_2|^{\lambda_1} < |v_1| < |v_2|^{\lambda_2}$. It is contained in the product of the two unit discs ; his basis is logarithmically convex, so by [1], it is a domain of holomorphy.

Remark : Moreover, one can see that this domain is of type H^∞ according to Sibony (cf. [16]), for it is the interior of the intersection of domains given by : $|v_2|^{p_n} < |v_1|^{q_n} < |v_2|^{p'_n}$ where p'_n/q_n (resp. p_n/q_n) is a sequence in $\mathbb{Q}$, which by [16] are of type H^∞.; also we can observe the action of A on this domain by the map : $(v_1,v_2) \to ((v_2)^{-1}(v_1)^3,v_1)$.

2. *THE FIBER BUNDLE.*

Let D be the real matrix defined by : $e^D = A$. For $K = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ or $\mathbb{Z}$, we denote by G_K the group on $K \times K^2$ endowed with the following product :

$$(z,b)(z_o,b_o) = (z + z_o, e^{z_o D}.b + b_o) .$$

Let Ω be the domain $\mathbb{C} \times V$ in $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$. Writing an element b as $u_1X_1 + u_2X_2$ with respect to the eigenvectors X_i, we see immediately that Ω is invariant by the right action of $G_{\mathbb{R}}$ then also by $G_{\mathbb{Z}}$. Let be $E = \Omega/G_{\mathbb{Z}}$.

For $q \in G_{\mathbb{C}}$ or $\mathbb{C}^n$, the associated element in $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{Z}}$ or $\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}^n$ is denoted by $\dot{q}$. Let be π the map from E onto $C/_{\mathbb{Z}}$, associated to the projection map $(z,b) \to z$ from Ω onto $\mathbb{C}$.

Proposition 2.- *The map* π *induces on* E *a structure of holomorphic fiber bundle with* F *as fiber.*

Proof :

For every point of $\mathbb{C}/_{\mathbb{Z}}$, there are an open neighbourhood U and a splitting map s for the projection of $\mathbb{C}$ onto $\mathbb{C}/_{\mathbb{Z}}$. So we have the following commutative diagram :

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}U \arrow[r, "\pi"] & U \\ U \times F \arrow[u, "\psi"] \arrow[ur, "\text{projection}"'] & \end{tikzcd}$$

The map ψ is a holomorphic diffeomorphism defined by :

$\psi(\dot z, \dot b) = \overset{\bullet}{\widehat{(s(\dot z),b)}}$ (it doesn't depend of the choice of b).

Remark : One can also define the fiber bundle E by a transition function. Take the basis $\mathbb{C}^*$ as the union of two open sets defined by : $U_1 = \mathbb{C} - [0,+\infty[$ and $U_2 = \mathbb{C} -]-\infty,0]$. The transition function on $U_1 \cap U_2$ is the identity for $\operatorname{Im} z > 0$ and is defined by the action of the matrix A on $V/_{\mathbb{Z}^2}$ for $\operatorname{Im} z < 0$.

3. COUNTER-EXAMPLE.

Theorem.- The fiber bundle E *is not Stein. More precisely, there is no plurisubharmonic exhaustion function on* E.

Proof :

We apply methods of [10] and [11]. At first, we have the following lemma :

Lemma.- Let be D *(resp.* $\bar{D}$*) the open (resp. closed) unit disc in* $\mathbb{C}$. *Let be* S^1 *the unit circle with* $d\theta$ *as its normalized Haar measure on it.*

There is a family of holomorphic functions $(f_R)_{R>1}$ *defined in a neighbourhood of* $\bar{D}$, *with the following properties :*

i) $0 < \operatorname{Im} f_R < \pi$

ii) $\operatorname{Re} f_R(0) = 0$

iii) $\lim\limits_{R\to 1^+} \displaystyle\int_{S^1} e^{\pm \operatorname{Re} f_R} d\theta = +\infty$.

Proof of the lemma :

On the upper half plane, we use the principal determination of the logarithm. If we put : $f_R(z) = \operatorname{Log} i \frac{R+z}{R-z}$, all properties of f_R are easy to verify. (The proof of iii) arise from Fatou's lemma).

Because f_R is regular on S^1, there exists two holomorphic functions g_R and h_R on D, which are continuous on $\bar{D}$ and such that : $\operatorname{Im} g_R = e^{\operatorname{Re} f_R}$ and $\operatorname{Im} h_R = e^{-\operatorname{Re} f_R}$ on S^1. The harmonicity of $\operatorname{Im} g_R$ and $\operatorname{Im} h_R$ implies : $\operatorname{Im} g_R > 0$ and $\operatorname{Im} h_R > 0$ on $\bar{D}$. Moreover $\operatorname{Im} g_R(0) = \displaystyle\int_{S_1} e^{\operatorname{Re} f_R} d\theta$ and so : $\lim\limits_{R\to 1^+} \operatorname{Im} g_R(0) = +\infty$. (The same is true for h_R , which could be defined by $h_R(z) = g_R(-z)$).

Now, we prove the theorem. We suppose that ψ_1 is a plurisubharmonic exhaustion function on E. Let ψ be the function on Ω defined by :

$$\forall\, g \in \Omega, \qquad \psi(g) = \sup_{\dot g_{\mathbb{R}} \in G_{\mathbb{R}/G_{\mathbb{Z}}}} \psi_1(g\dot g_{\mathbb{R}}) \quad .$$

By definition, ψ is invariant by right action of $G_{\mathbb{R}}$. It is very easy to see that $G_{\mathbb{R}/G_{\mathbb{Z}}}$ is compact. Then it follows that ψ has values in $[-\infty,+\infty[$, is plurisubharmonic and that the associated function on $\Omega/_{G_{\mathbb{R}}}$ is an exhaustion function.

Let $\mu = \operatorname{Log} \lambda_1$. The map : $(\overset{\bullet}{\widehat{z, u_1X_1 + u_2X_2}}) \in \Omega/_{G_{\mathbb{R}}} \longrightarrow$ $(\operatorname{Im} z, e^{-\mu \operatorname{Re} z} u_1X_1 + e^{\mu \operatorname{Re} z} u_2X_2)$ realizes a homeomorphism of $\Omega/_{G_{\mathbb{R}}}$ onto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. (The point denotes an element in the quotient space).

For $R > 1$, we consider the map $t \to \mu^{-1} f_R(t), g_R(t)X_1 + h_R(t)X_2$ from $\bar{D}$ into Ω which is well defined for $\operatorname{Im} h_R > 0$ and $\operatorname{Im} g_R > 0$. It is continuous on $\bar{D}$ and holomorphic on D. Denote $\psi(\mu^{-1} f_R, g_R.X_1 + h_R.X_2)$ as Ψ_R. The invariance of ψ implies :

$$\Psi_R = \psi(i\,\mu^{-1} \operatorname{Im} f_R, i\, e^{-f_R}.\operatorname{Im} g_R.X_1 + i\, e^{f_R}.\operatorname{Im} h_R.X_2)$$

and by the maximum principle, we have :

$$\Psi_R(0) \leqslant \sup_{|t|=1} \Psi_R(t)$$

By the choice of f_R, g_R, h_R, there exists some constant K which does not depend of R, such that $\sup_{|t|=1} \Psi_R(t) \leqslant K$. It follows that :

$$\psi(i\,\mu^{-1} \operatorname{Im} f_R(0),\ i \operatorname{Im} g_R(0)X_1 + i \operatorname{Im} h_R(0)X_2) \leqslant K.$$

But this is in contradiction with the property of exhaustion of ψ because $\lim_{R\to 1^+} \operatorname{Im} g_R(0) = +\infty$.

So, the fiber bundle E with basis $\mathbb{C}^*$ and fiber a bounded Stein domain of $\mathbb{C}^2$, is not a Stein manifold.

Final remarks :

1°) There are other choices than $\mathbb{C}^*$ for the basis. Because $\operatorname{Im} f_R(0)$ remains bounded, we can for instance take a pointed disc instead of $\mathbb{C}^*$.

2°) In the case of bounded domains of $\mathbb{C}^n$, there is no counter-example to the Serre problem with a simply connected basis as Demailly's example for $\mathbb{C}^2$. This comes from the fact that such a fiber bundle is necessarily trivial because the transition functions are locally constant ([13] and [18]).

3°) We know a priori that for E, holomorphic functions separate points and define at every point a coordonate system [18].

4°) Instead of E, we can also consider the fiber bundle $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}$; in this case, the fiber is $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$. By a device like in theorem 3 [11 bis], we can show that the only plurisubharmonic functions on $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{Z}}$ are the constant functions on the fibers.

5°) We denote as D_λ the domain : $|x| > |y|^\lambda$, $|y| > |x|^\lambda$; then for every λ the biggest root of $\lambda^2 - k\lambda+1 = 0$ (with k as integer $\geqslant 3$) the same type of counter-example could be constructed with D_λ as fiber.

B I B L I O G R A P H Y

----

[1] BOCHNER S. and MARTIN W. - *Several complex variables*, Princeton University Press, 1948.

[2] DEMAILLY J.P. - *Différents exemples de fibrés holomorphes non de Stein*, Séminaire P. Lelong - H. Skoda, 1976-77, p. 15-41, Lecture Notes in Math, 694.

[3] DEMAILLY J.P. - *Un exemple de fibré holomorphe non de Stein à fibre* $\mathbb{C}^2$ *ayant pour base le disque ou le plan*, (Invent. Math. 48, 293-302, 1978).

[4] FISCHER G. - *Holomorph Vollständige Faresbündel*, Math. ann. 1980 (341-348), (1969).

[5] FISCHER G. - *Hilbert spaces of holomorphic functions on bounded domains*, Manuscripta Math. 3, 305-314, 1970).

[6] FISCHER G. - *Fibrés holomorphes au-dessus d'un espace de Stein*, (57-69), *Espaces analytiques*, Bucarest Acad. Rep. Soc. Roumanie, 1981.

[7] FORNAESS J., DIEDRICH K. - *Pseudoconvex domains : bounded strictly plurisubharmonic exhaustion functions*, (Invent. Math. 39, 129-141, 1977).

[8] HIRSCHOWITZ A. - *Domaines de Stein et fonctions holomorphes bornées*, Math. Ann. 213, p. 185-193, 1975).

[9] HIRSCHOWITZ A. - *Sur certains fibrés holomorphes à base et fibre de Stein*, (corrections). Comptes Rendus, 278 (1974), série A, 89-91.

[10] LOEB J.J. - *Action d'une forme de Lie réelle d'un groupe de Lie complexe sur les fonctions plurisousharmoniques*, (to appear).

[11] LOEB J.J. - *Fonctions plurisousharmoniques sur un groupe de Lie complexe invariantes par une forme réelle*, C.R.A.S. Paris, t. 299, Série I, n° 14, 1984.

[11 bis] LOEB J.J. - *Un nouveau contre-exemple à une conjecture de Serre*, Pub. IRMA - Lille, Vol. VI, Fasc. 4, N° 7, 1984.

[12] MOK N. - *Le problème de Serre pour les surfaces de Riemann*, C.R.A.S. Paris, Série A. 290, 179-180, 1980.

[13] ROYDEN H. - *Holomorphic fiber bundles with hyperbolic fiber*, Proc. Amer. Math. Soc. 43, p. 311-312, 1974.

[14] SERRE J.P. - *Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein*, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles, 1953, p. 57-68.

[15] SIBONY N. - *Fibrés holomorphes et métrique de Caratheodory*, C.R.A.S., t. 279, 19, A. 261-264, août 1974.

[16] SIBONY N. - *Prolongement des fonctions holomorphes bornées*, Séminaire P. Lelong 410, (1972-73), Springer-Verlag.

[17] SIU Y.T. - *All plane domains are Banach-Stein*, Manuscripta Math., 14, p. 101-105, 1974.

[18] SIU Y.T. - *Holomorphic fiber bundles whose fibers are bounded Stein domains with zero first Betti number*, Math. Ann. 219, 171-192, 1976.

[19] SIU Y.T. - *Pseudoconvexity and the problem of Levi*, (Bulletin of the American Math. Society, Vol. 84, n° 14, p. 481-512, 1978.

[20] SKODA H. - *Fibrés holomorphes à base et à fibre de Stein*, Invent. Math. 43, p. 97-107, 1977.

[21] STEHLÉ J.L. - *Fonctions plurisousharmoniques et convexité holomorphe de certains fibrés analytiques*, Séminéaire P. Lelong, p. 155-179, (1973-74), Lecture Notes in Math.

[22] STEIN K. - *Überlagerungen holomorph vollständiger komplexer raüme*, Arch. Math. VIII, 354-361, 1956.

U.E.R. DE MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES
UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE
59655 - VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX (France)

SECONDE THESE

FORMULE DE THOM-PORTEOUS

RÉSUMÉ

Ce travail comprend :

- L'étude de la pseudo-convexité des couples $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ formés par un groupe Lie complexe et l'une des ses formes réelles fermées. Lorsque $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ est simplement connexe, $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ est pseudo-convexe si et seulement si $G_{\mathbb{R}}$ est à spectre imaginaire pur ; ces couples sont aussi caractérisés par l'existence d'un groupe de Lie complexe et simplement connexe $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$, d'une forme réelle de $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$ de $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$ à spectre imaginaire pur, d'un sous-groupe discret central Γ de $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$ tel que : $G_{\mathbb{C}} = \tilde{G}_{\mathbb{C}}/\Gamma, \tilde{G}_{\mathbb{R}} = G_{\mathbb{R}}/\Gamma$; la variété $G_{\mathbb{C}}$ est alors nécessairement de Stein ; lorsque $G_{\mathbb{R}}$ n'est pas à spectre imaginaire pur, il ne peut exister de structure kählérienne sur $G_{\mathbb{C}}$ invariante par $G_{\mathbb{R}}$.

- L'étude des tubes pseudo-convexes en relation avec le principe de Minimum de C.O. Kiselman. Etant donnés un fibré principal holomorphe M de groupe structural $G_{\mathbb{C}}$ et de base B, $G_{\mathbb{R}}$ une forme réelle de $G_{\mathbb{C}}$, Ω un ouvert pseudo-convexe de M invariant par $G_{\mathbb{R}}$ et à fibres connexes au-dessus de B, si $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ est pseudo-convexe et si B est de Stein, alors la projection de Ω sur B est de Stein. Lorsque $G_{\mathbb{C}} = B = M$, on peut assurer l'existence d'une fonction strictement p.s.h. sur Ω, invariante par $G_{\mathbb{R}}$ et d'exhaustion sur $\Omega/G_{\mathbb{R}}$ non seulement pour un couple pseudo-convexe mais aussi pour tout $G_{\mathbb{C}}$ résoluble tel que $\Omega/G_{\mathbb{R}}$ est relativement compact.

- L'étude de la relation entre la convexité des ouverts invariants Ω avec leur pseudo-convexité. La convexité géodésique de $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ est caractérisée par une propriété du spectre de la représentation adjointe et la simple connexité de $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$. Pour tout couple $(G_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{R}})$ géodésiquement convexe (en particulier, pour tout couple pseudo-convexe) la projection sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ d'un ouvert pseudo-convexe invariant est convexe ; la réciproque est fausse en général.

- L'étude d'un exemple donnant une réponse négative à une conjecture de Y.T. Siu en exhibant un fibré qui n'est pas de Stein alors que sa base est de Stein et ses fibres sont des ouverts bornés pseudo-convexes.

MOTS CLÉS : groupe de Lie, pseudo-convexité, convexité géodésique, espace homogène complexe.