

50376  
1985  
237

50376  
1985  
237

N° d'ordre 1265

THESE

présentée

**A L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES**

**de LILLE**

**pour obtenir**

**le titre de Docteur de 3e cycle**

**par**

**RAVALSON WILLIAM**

**Spécialité : Mécanique des Fluides**

**Sujet de la thèse**

**Résolution numérique des équations de Navier-Stokes**

**pour les écoulements**

**transsoniques autour d'arrière-corps droits**

soutenue le 25 avril devant le jury composé de :

**Président** : A. Dymont

**Rapporteurs** : H. Hollanders et R. Kh. Zeytounian

**Membres** : R.G. Lacau  
Y. Morchoisme  
D. Vandrome

1985



**aerospatiale**

**Division engins tactiques  
91370 VERRIERES-LE-BUISSON**

A mon épouse ,  
A mon enfant ,  
A mes parents .

### Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement :

- Monsieur le Professeur A. Dymont qui a bien voulu me faire l'honneur d'accepter la présidence du Jury ;
- Monsieur le Professeur R. Kh. Zeytounian qui m'a aidé dans ce travail et qui m'a fait bénéficier de ses précieux conseils ;
- Monsieur H. Hollanders qui m'a fait l'honneur de s'intéresser de très près à mon travail, ses nombreux conseils m'ont permis d'orienter mes recherches dans la bonne voie ;
- Monsieur Y. Morchoisne qui a bien voulu porter un jugement sur mon travail ;
- Monsieur D. Vandrome qui a accepté de faire partie du jury ;
- Monsieur R.G. Lacaum de la Société Nationale Industrielle Aérospatiale qui a bien voulu m'accueillir dans son groupe et a accepté de faire partie du jury ;
- la Société Nationale Industrielle Aérospatiale et l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales qui m'ont fourni les moyens d'effectuer ce travail ;
- toute l'équipe du département d'aérodynamique théorique de l'O.N.E.R.A. pour son aide constante ;
- toutes les personnes qui ont contribué à la frappe et à l'édition de cette thèse.

## S O M M A I R E

	Pages
RESUME -----	5
INTRODUCTION -----	6
CHAPITRE I - FORMULATION DES EQUATIONS-----	11
I.1 - Formulation intégrale des équations-----	11
I.2 - Transformation du problème tridimensionnel en un problème bidimensionnel dans le plan méridien-----	13
CHAPITRE II - PRESENTATION DU SCHEMA POUR UNE EQUATION MODELE MONO- DIMENSIONNELLE -----	19
II.1 - Equation modèle monodimensionnelle -----	19
II.2 - Discrétisation -----	19
CHAPITRE III - EXTENSION DU SCHEMA AU CAS DES ECOULEMENTS AXISYMETRIQUES-----	26
III.1 - Généralités -----	26
III.2 - Discrétisation en temps Evaluation des dérivées en temps -----	27
a) Termes sources -----	28
b) Termes de fluide visqueux -----	29
c) Termes de fluide parfait -----	29

III.3 - Discrétisation en espace	34
III.3.1 - Etape explicite	35
a) Cas du prédicteur	35
b) Cas du correcteur	37
c) Evaluation des dérivées d'espace dans le calcul des flux des termes visqueux	38
III.3.2 - Etape implicite	42
CHAPITRE IV - MISE EN OEUVRE DE LA METHODE	46
IV.1 - Domaine de calcul	46
IV.2 - Conditions aux limites et traitements particuliers	48
IV.2.1 - Traitements aux parois	48
a) Cas laminaire	48
b) Cas turbulent	49
IV.2.2 - Traitement particulier des flux aux parois	51
A - Traitement particulier à l'étape explicite	51
a) Calcul des flux à la paroi	51
b) Calcul des flux à la pointe supérieure du culot	52
B - Traitement particulier à l'étape implicite	54
a) Calcul des flux à la paroi	54
b) Résolution à la paroi	54
IV.2.3 - Calcul de la pression finale dans le cas laminaire	55
IV.2.4 - Traitement sur la frontière aval	58
IV.2.5 - Traitement sur la frontière amont	58
IV.2.6 - Calcul des termes sources au voisinage de l'axe	58
IV.3 - Calcul du pas de temps	60

CHAPITRE V - RESULTATS - - - - -	61
V.1 - Cas laminaire - - - - -	62
V.2 - Cas turbulent - - - - -	63
CONCLUSION - - - - -	66
REFERENCES - - - - -	67
ANNEXE 1 - PASSAGE DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES TRIDIMENSIONNELLES AUX EQUATIONS BIDIMENSIONNELLES AXISYMETRIQUES - - - - -	69
ANNEXE 2 - EXPRESSIONS DES FLUX A L'ETAPE EXPLICITE - - - - -	72
ANNEXE 3 - MATRICES JACOBIENNES - - - - -	75
A.3.1 - Matrices jacobiennes pour le tenseur fluide parfait - - - - -	75
A.3.2 - Matrices jacobiennes pour le tenseur visqueux - - - - -	76
A.3.3 - Matrices jacobiennes pour les termes de révolution - - - - -	77
ANNEXE 4 - EQUATIONS DE NAVIER-STOKES MOYENNEES ET MODELE DE TURBULENCE - - - - -	78
A.4.1 - Equations de Navier-Stokes moyennées - - - - -	78
A.4.2 - Modèle de turbulence - - - - -	81
A.4.3 - Présentation du modèle utilisé - - - - -	82
FIGURES - - - - -	85

TITRERESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES POUR LES ECOULEMENTS  
TRANSSONIQUES AUTOUR D'ARRIERE-CORPS DROITSRESUME

Le présent travail a pour but la mise au point d'un code numérique pour la résolution des équations de Navier-Stokes complètes dans le cas d'écoulements de fluide compressible à symétrie axiale.

La méthode retenue est fondée sur la résolution, par un schéma implicite, des équations de Navier-Stokes instationnaires bidimensionnelles.

Les applications de cette méthode concernent l'écoulement autour d'un projectile de type ogive-cylindre. Dans un premier temps, on examine le cas des nombres de Reynolds modérés et, dans un deuxième temps, celui des grandes valeurs du nombre de Reynolds, la turbulence étant alors prise en compte par l'utilisation d'un modèle algébrique de type longueur de mélange.

Divers résultats de calcul pour cette configuration sont présentés aussi bien en laminaire qu'en turbulent. Dans le cas turbulent, les résultats obtenus sont en bon accord avec les expériences auxquelles ils ont été comparés.

## INTRODUCTION

Les écoulements autour de projectiles (muni d'un jet ou sans jet propulsif) sont caractérisés par la présence de larges zones d'écoulement près de l'arrière-corps où les phénomènes dissipatifs jouent un rôle prédominant pour le comportement global de l'écoulement.

Citons par exemple la zone de recirculation, les zones de mélange issues du point de décollement, les zones de recompression au voisinage du point de recollement, sillage, etc... Ces phénomènes induisent une traînée de culot qui peut représenter une fraction importante de la traînée totale autour du projectile, cette fraction pouvant atteindre jusqu'à 50 % dans les cas les plus défavorables tels que le régime transsonique [1].

La traînée de culot étant engendrée principalement par une pression inférieure à la pression infinie du milieu amont non perturbé, il en résulte que la connaissance de celle-ci est un facteur important dans l'amélioration d'un modèle de projectile existant ou dans la construction d'un tel modèle plus performant.

Depuis quelques années, des recherches ont été entreprises en vue de la prédiction, à l'aide de codes numériques, des écoulements de fluide compressible visqueux autour de projectiles. Des études ont d'abord été effectuées dans le domaine supersonique, essentiellement par l'approche du type couplage [2], [3]. Les premiers résultats de calculs d'écoulements en régime transsonique ou subsonique ne sont apparus que plus récemment [4]. Ce sont les problèmes liés à la résolution numérique de ce dernier type d'écoulement que nous allons considérer dans le cadre de cette thèse.

Une modélisation réaliste de l'écoulement doit tenir compte en particulier des régions de fortes interactions fluide parfait-fluide visqueux. Une approche relativement simple consiste à déterminer l'écoulement comme solution d'un seul système d'équations valable dans tout le domaine de calcul, quelle que soit l'importance de la région visqueuse de l'écoulement. Ces équations sont les équations de Navier-Stokes qui contiennent toute l'information nécessaire à la prise en compte de ces phénomènes de fortes interactions.

Certains auteurs [4], [5] ont utilisés une forme simplifiée des équations de Navier-Stokes dans laquelle les dérivées des termes visqueux dans la direction principale de l'écoulement sont négligées (approximation de couches minces). Les expériences ont montré que, dans cette approche, la pression de culot moyenne et la longueur de décollement sont correctement calculées. Cependant, une bonne représentation du champ des vitesses dans les régions de décollement ne peut alors être obtenue.

Aussi, dans cette thèse, la méthode retenue est fondée sur la résolution numérique des équations de Navier-Stokes complètes.

De manière générale, la résolution de ces équations est effectuée à l'aide d'un code numérique instationnaire basé sur une méthode de différences finies ou de volumes finis, dans laquelle la solution est avancée en temps par la résolution, à chaque instant, des équations de Navier-Stokes instationnaires. La solution stationnaire d'un problème est alors obtenue à convergence en temps de la solution numérique.

De nombreuses applications ont été effectuées, à l'aide de ces méthodes, aux écoulements de fluide visqueux autour de configurations diverses ; cependant, il existe très peu de codes de calcul qui s'appliquent à des configurations d'arrière-corps à symétrie de révolution. Dans ce domaine, citons, par exemple, les références [6] et [7] en régime supersonique et les références [8] et [9] en régime transsonique.

Une classification des méthodes de différences finies ou de volumes finis peut être établie en fonction de la nature, explicite ou implicite de la discrétisation en temps des équations. Les schémas explicites sont simples et robustes mais nécessitent un temps de calcul assez élevé pour obtenir la solution stationnaire d'un problème ; ceci est dû à une limitation sévère sur le pas de temps qui découle d'une condition de stabilité. Cette limitation sur le pas de temps devient très restrictive pour le calcul des écoulements à grands nombres de Reynolds où il est nécessaire d'utiliser des maillages très fins au voisinage des parois pour représenter correctement les couches limites. De ce fait, un grand intérêt est porté sur les méthodes implicites qui possèdent en général une condition de stabilité beaucoup moins restrictive. Ainsi, peut-on espérer réduire de façon importante les coûts de calcul par rapport aux méthodes explicites, malgré une plus grande complexité de mise en oeuvre et un coût plus élevé par pas de temps. Briley et MacDonald [10] et Beam-Warming [11] ont apporté une contribution importante dans l'étude et le développement de ces méthodes implicites. Les méthodes développées par ces auteurs font appel à un algorithme direct de résolution des équations par rapport aux inconnues de calcul, qui est basé sur l'utilisation de développements de Taylor en temps. Une technique de directions alternées (A.D.I.) [12] est utilisée pour factoriser ces schémas suivant les directions d'espace, de manière à ne résoudre à chaque instant que des systèmes algébriques linéaires à structure tridiagonale. Ces schémas inconditionnellement stables dans les cas d'une variable ou deux variables d'espace deviennent instables pour les équations d'Euler tridimensionnelles. De plus, ils ne possèdent pas de bonnes propriétés de dissipation dans les régions faiblement visqueuses et il est nécessaire de leur associer une viscosité artificielle appropriée.

En 1983, Hollanders, Lerat et Peyret [13] ont construit un schéma implicite pour la résolution des équations de Navier-Stokes, qui conserve de bonnes propriétés de stabilité et de dissipation, même en 3D.

Ce schéma est construit à partir d'une classe de schémas de fluide parfait proposée par A. Lerat [14] et appliquée à la résolution numérique des équations d'Euler bidimensionnelles [15]. Ces schémas de fluide parfait possèdent les propriétés suivantes : forme conservative, précision du second ordre en temps et en espace, dissipation au sens de Kreiss, bon conditionnement des systèmes linéaires à résoudre. Le schéma de fluide visqueux [13] possède la plupart des propriétés précédentes, mais n'est pas inconditionnellement stable bien qu'il ait été montré que l'on pouvait effectuer des calculs avec des pas de temps relativement grands.

L'objet de cette thèse est, d'une part, le développement de la méthode implicite précédemment citée pour la résolution des équations de Navier-Stokes dans le cas d'écoulements à symétrie axiale et, d'autre part, l'application de cette méthode au calcul d'écoulements transsoniques turbulents autour de projectiles et plus particulièrement l'étude de l'écoulement de culot.

Les résultats obtenus, à l'aide de cette méthode, concernent l'écoulement d'un fluide compressible visqueux à des nombres de Reynolds modérés (de l'ordre de  $10^3$ ), dans un premier temps, puis à des grandes valeurs du nombre de Reynolds (de l'ordre de  $5 \cdot 10^5$ ), dans un deuxième temps. La turbulence est prise en compte dans les équations de Navier-Stokes moyennées par l'utilisation d'un modèle algébrique de viscosité turbulente.

## ORIENTATION DU PRESENT TRAVAIL

Dans le premier chapitre, les équations de Navier-Stokes pour un fluide compressible visqueux et conducteur de chaleur sont écrites dans un système de coordonnées cylindriques. Compte tenu de l'hypothèse de symétrie axiale, on peut intégrer ces équations par rapport à l'angle azimutal  $\theta$ , ce qui conduit à considérer un problème bidimensionnel, qu'on peut résoudre dans un plan méridien quelconque.

Le chapitre 2 est consacré à la description de la méthode numérique utilisée. Tout d'abord, on expose le schéma pour une équation modèle monodimensionnelle, puis un bref rappel de ses propriétés et avantages est effectué.

On présente dans le chapitre 3 le schéma pour le problème axisymétrique. Les équations de Navier-Stokes sont discrétisées en maillage curviligne en utilisant la technique de volumes finis précédemment utilisée dans la résolution numérique des équations d'Euler bidimensionnelles [15] et des équations de Navier-Stokes tridimensionnelles [13].

Dans le chapitre 4, on décrit les conditions aux limites utilisées et les traitements particuliers effectués aux frontières (matérielles ou non). Un exemple de traitement concerne l'évaluation au voisinage de l'axe de symétrie, des termes sources qui sont contenus dans les équations de Navier-Stokes régissant les écoulements axisymétriques.

Les conditions aux limites utilisées sur les parois, les frontières fluides et l'axe de symétrie et les traitements particuliers effectués dans le calcul des flux sur la paroi et la pointe supérieure du culot sont également détaillés.

Le chapitre 5 expose les principaux résultats numériques qui ont été obtenus dans le calcul d'écoulements autour d'un projectile de type ogive-cylindre, d'une part en laminaire pour un nombre de Mach  $M_\infty = 0.8$  et pour deux valeurs du nombre de Reynolds (basées sur le diamètre du cylindre) ( $Re = 500$  et  $Re = 5.000$ ), et d'autre part, en turbulent pour un nombre de Mach  $M_\infty = 0,8$  et un nombre de Reynolds  $Re = 5 \times 10^5$ .

On peut noter que si certaines études ont été effectuées sur la modélisation de la turbulence pour le traitement des écoulements incompressibles fortement décollés de types couches limites (marche...), en revanche, il existe très peu de modèles de turbulence qui s'appliquent aisément à ce type d'écoulement dans le cas compressible. Pour les écoulements à décollement libre tel que celui apparaissant derrière le culot d'un projectile, à l'heure actuelle, il n'existe pratiquement pas de modèle bien adapté à l'étude de la turbulence dans la zone de recirculation où les phénomènes dissipatifs jouent un rôle prédominant dans la stabilité de l'écoulement global.

En général, on utilise des modèles algébriques simples où le passage couche limite-sillage se fait d'une manière semi-empirique. La validation des résultats se justifie par comparaison avec les résultats expérimentaux. Dans le cadre de cette thèse, nous nous limitons à la résolution numérique des équations de Navier-Stokes moyennées où la viscosité turbulente est calculée à partir d'un modèle algébrique avec longueur de mélange. Nous avons choisi le modèle exposé dans l'article de Baldwin-Lomax [16] qu'on présente en Annexe 4.

Bien que les résultats obtenus soient en bon accord avec les résultats expérimentaux [1], cette thèse doit être considérée comme étant seulement une première étape pour le calcul de l'écoulement de culot en régime turbulent.

Dans la dernière partie sont exposées les perspectives d'avenir concernant l'amélioration de la discrétisation du domaine de calcul à partir de maillages plus adaptés, l'amélioration de l'efficacité de la méthode, ainsi que d'autres questions annexes.

## CHAPITRE I

### FORMULATION DES EQUATIONS

Nous rappelons ici la forme intégrale des équations de Navier-Stokes pour les fluides (Newtoniens) compressibles en se limitant au cas d'un gaz parfait à chaleurs spécifiques  $C_p$  et  $C_v$  constantes. Les phénomènes de réaction chimique ainsi que les effets dus aux températures élevées sont donc exclus. Pour l'exposé des principes généraux sur les équations de Navier-Stokes et sur leurs propriétés, le lecteur pourra consulter, par exemple, les documents donnés en références [17], [18] et [19].

#### I.1 - Formulation intégrale des équations

Les équations régissant l'écoulement compressible visqueux s'écrivent, en repère absolu (R), sous la forme conservative suivante :

$$\int_{\mathcal{V}} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \vec{V} \\ \rho E \end{bmatrix} d\mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{V}} \begin{bmatrix} \rho \vec{V} \\ \rho \vec{V} \otimes \vec{V} + \vec{\sigma} \\ \rho E \vec{V} + \vec{V} \cdot \vec{\sigma} + \vec{q} \end{bmatrix} \vec{n} ds = 0 \quad (1.1)$$

Dans ces équations :  $\mathcal{V}$  est un volume de contrôle fixe dans le temps ( $t$ ),  $\partial \mathcal{V}$  est la frontière de  $\mathcal{V}$ ;  $\rho$  est la masse volumique,  $\vec{V}$  la vitesse d'une particule fluide dans (R),  $\vec{\sigma}$  le tenseur de contrainte,  $\vec{n}$  la normale unitaire extérieure à  $\partial \mathcal{V}$ ,  $E$  l'énergie totale spécifique ( $E = e + 1/2 \vec{V}^2$ ), où  $e$  est l'énergie interne spécifique et  $\vec{q}$  est la flux de chaleur.

Pour les fluides Newtoniens, le tenseur de contrainte  $\overline{\sigma}$  s'exprime en fonction de la pression  $P$  et du tenseur des contraintes visqueuses  $\overline{\zeta}$  par la relation :

$$\overline{\sigma} = P\overline{I} - \overline{\zeta} \quad (1.2)$$

où  $\overline{I}$  est le tenseur unité. Le tenseur  $\overline{\zeta}$  est relié au gradient de vitesse par la relation :

$$\overline{\zeta} = \lambda \operatorname{div} \vec{V} \overline{I} + \mu [g \operatorname{grad} \vec{V} + g \operatorname{grad} \vec{V}^T] \quad (1.3)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les 2 coefficients de viscosité.

Le fluide est un gaz parfait à chaleurs spécifiques  $C_p$  et  $C_v$  constantes. On a les relations suivantes :

$$P = (\gamma - 1) \rho e, \quad e = C_v T, \quad \gamma = C_p / C_v \quad (1.4)$$

où  $T$  est la température absolue.

Le flux de chaleur  $\vec{q}$  est régié par la loi de Fourier :

$$\vec{q} = -K g \operatorname{grad} T \quad (1.5)$$

où  $K$  est le coefficient de conductivité thermique.

On suppose que les coefficients de viscosité  $\lambda$  et  $\mu$  et le coefficient de conductivité thermique  $K$  ne dépendent que de la température,  $\lambda$  et  $\mu$  satisfaisant à l'hypothèse de Stokes ( $3\lambda + 2\mu = 0$ ), où  $\mu$  est connu par la loi de Sutherland.

On introduit le nombre de Prandtl :  $Pr = \mu C_p / K$ , que l'on considère constant par la suite.

I.2 - Transformation du problème tridimensionnel en un problème bidimensionnel dans le plan méridien

On se place dans un repère cylindrique  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_\theta)$  (figure 1), où les coordonnées d'un point M sont données par :

- x distance le long de l'axe //  $\vec{e}_x$
- y distance radiale normale à cet axe
- $\theta$  angle azimutal

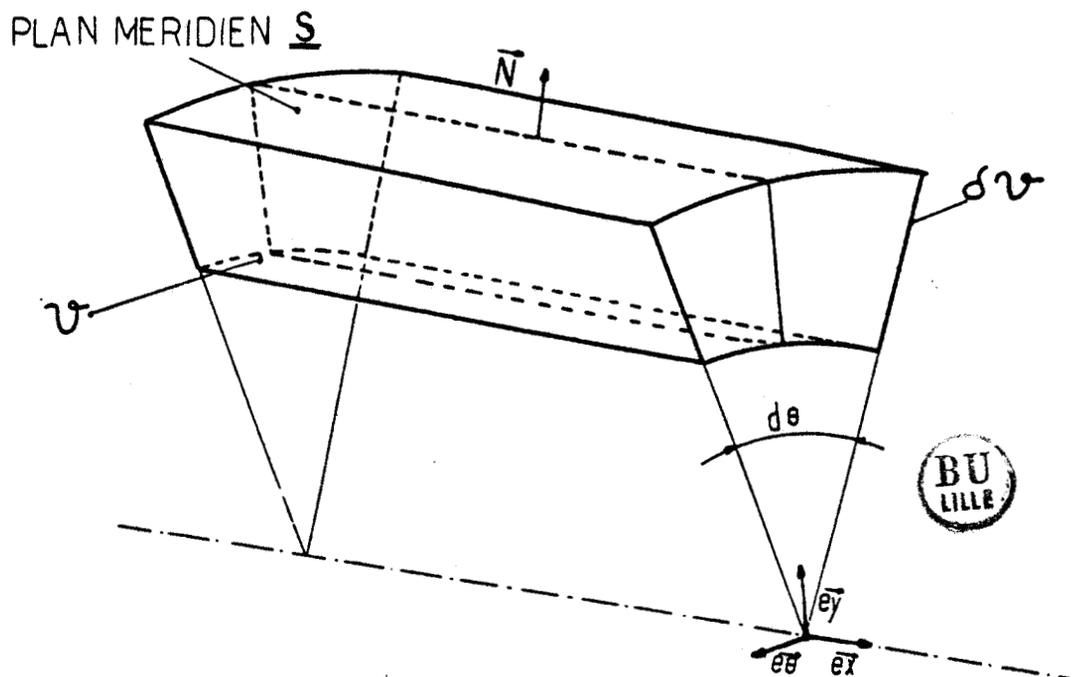


FIG.1

CELLULE DE CONTROLE ELEMENTAIRE

$v$

Dans ce repère, la vitesse  $\vec{V}$  s'écrit :

$$\vec{V} = u \vec{e}_x + v \vec{e}_y + w \vec{e}_\theta$$

Par la suite, on suppose l'écoulement axisymétrique, c'est-à-dire sans vitesse de rotation des particules fluides autour de l'axe  $\vec{e}_x$  et sans dépendance vis-à-vis de l'angle azimutal :

$$\partial/\partial\theta = 0 \quad \text{et} \quad w = 0 \quad (1.6)$$

Dans ces conditions, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\vec{\zeta} = \begin{array}{ccc|c} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_\theta & \\ \zeta_{xx} & \zeta_{xy} & 0 & \vec{e}_x \\ \zeta_{xy} & \zeta_{yy} & 0 & \vec{e}_y \\ 0 & 0 & \zeta_{\theta\theta} & \vec{e}_\theta \end{array}$$

avec :

$$\zeta_{xx} = \zeta_{xxp} + \lambda v/y \quad ; \quad \zeta_{xyp} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\zeta_{yy} = \zeta_{yyp} + \lambda v/y \quad ; \quad \zeta_{yyp} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.7)$$

$$\zeta_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\zeta_{\theta\theta} = \zeta_{\theta\theta p} + (\lambda + 2\mu) v/y \quad ; \quad \zeta_{\theta\theta p} = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$\zeta_{xxp}$ ,  $\zeta_{yyp}$  et  $\zeta_{xy}$  sont en fait les composantes du tenseur de viscosité pour un écoulement plan dans un repère cartésien.

L'équation (1.1) s'intègre par rapport à  $\theta$  de la façon suivante :

Considérons le volume de contrôle élémentaire  $\mathcal{V}$  défini par la figure 2, qui est engendré par la rotation d'une surface plane  $S$  d'un angle  $d\theta$  autour de l'axe de symétrie  $\vec{e}_x$ .

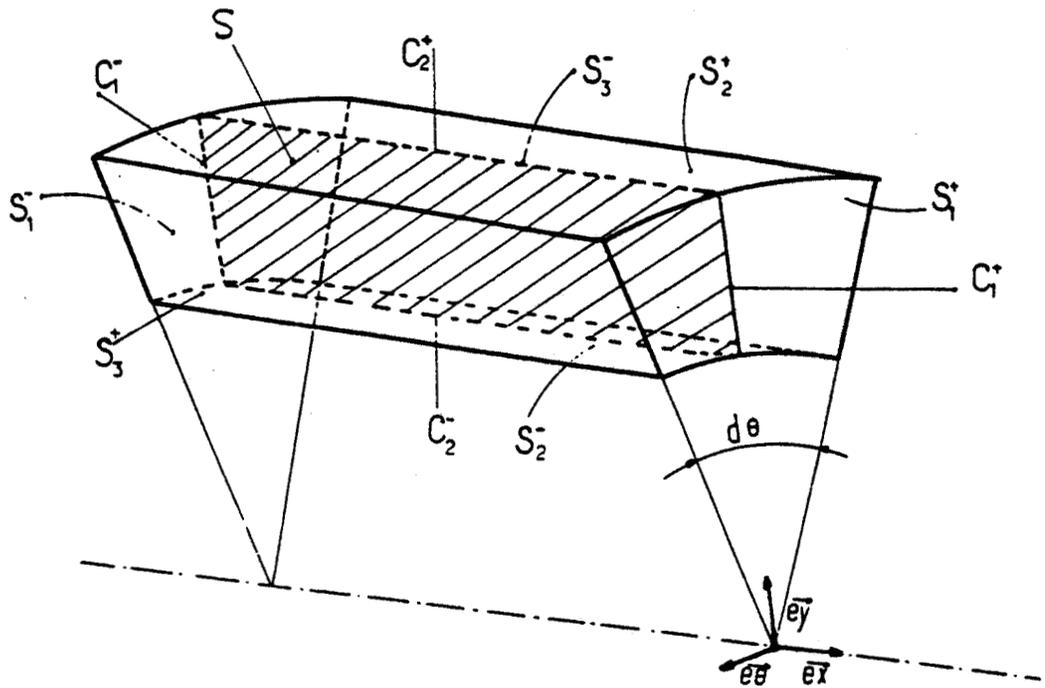


FIG.2 CELLULE DE CONTROLE ELEMENTAIRE S



Dans le repère cylindrique  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_\theta)$ , la variation élémentaire  $dv$  et la normale extérieure à  $\delta\mathcal{V}$  sont définies de manière générale par :

$$dv = y dy d\theta dz \quad ; \quad \vec{n} ds = \begin{vmatrix} -y dy d\theta \\ y dz d\theta \\ dz dy \end{vmatrix}$$

L'intégration en  $\Theta$  permet de ramener le calcul des flux à travers les surfaces  $(S_1^\pm)$  et  $(S_2^\pm)$  à celui d'intégrales curvilignes le long des contours  $(C_1^\pm)$  et  $(C_2^\pm)$  respectivement. La différence de flux à travers les surfaces  $S_3^+$  et  $S_3^-$  est ramenée, en utilisant la formule de la divergence, à une intégrale de surface sur  $S$ .

Quelques détails sur le passage des équations tridimensionnelles aux équations bidimensionnelles axisymétriques sont donnés en Annexe 1. On pourra consulter également le document donné en référence [18].

Enfin, les équations de Navier-Stokes sont rendues sans dimension en utilisant comme variables de référence une longueur  $L$  et des conditions d'écoulement non perturbé .

Dans le cas qui nous concerne, on fait les changements de variables suivants :

$$\bar{x} = x/L \quad , \quad \bar{y} = y/L \quad , \quad \bar{p} = p/p_\infty \quad , \quad \bar{\mu} = \mu/\mu_\infty$$

$$\bar{v} = v/v_\infty \quad , \quad \bar{\mu} = \mu/\mu_\infty \quad , \quad \bar{k} = k/k_\infty$$

où  $p_\infty$ ,  $v_\infty$ ,  $\mu_\infty$ ,  $k_\infty$  sont les conditions de l'écoulement à l'infini non perturbé.

Les autres grandeurs se déduisent de ces changements de variables par :

$$\bar{t} = \frac{t}{L/v_\infty} \quad , \quad \bar{e} = \frac{e}{v_\infty^2} \quad , \quad \bar{p} = \frac{p}{p_\infty v_\infty^2}$$

On a de plus :

$$e_\infty = \frac{p_\infty}{(\gamma-1)\rho_\infty} \quad \text{et} \quad \bar{e}_\infty = \frac{1}{\gamma(\gamma-1)M_\infty^2}$$

où  $M_\infty$  et  $p_\infty$  sont le nombre de Mach et la pression à l'infini respectivement.

Le coefficient de viscosité  $\bar{\mu}$  est donné par la loi de Sutherland qui s'écrit :

$$\bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_{\infty}} = \left( \frac{T}{T_{\infty}} \right)^{3/2} \frac{1 + S_0/T_{\infty}}{T/T_{\infty} + S_0/T_{\infty}}$$

où  $T$  est la température et  $S_0$  est la constante de Sutherland.

Finalement, en supprimant les barres sur les grandeurs sans dimensions, les équations de Navier-Stokes pour les écoulements plan ( $r = 0$ ) et axisymétriques ( $r = 1$ ) s'écrivent sous la forme intégrale suivante :

$$\underbrace{\iint_S y^r W_t ds} - \underbrace{\iint_S \tau (H^p - H^s) ds} + \oint_{(C)} (y^r F_{\beta} - \tau G_{\beta}) N_{\beta} dl = 0 \quad (1.8)$$

(somme sur les indices :  $(\beta = 1, 2)$ ),

où  $S$  est une surface de contrôle fixe et  $(C)$  est la frontière de  $S$ ,  $N_{\beta}$  sont les composantes de la normale extérieure à  $(C)$ .

Les différentes composantes des termes qui apparaissent dans cette équation sont données par :

$$W = (w_{\ell}) = \begin{vmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{vmatrix} ; \quad F_{\beta} = F_{\beta}^I - F_{\beta}^V \quad (\ell = 1, 4)$$

$$F_{\beta}^I = (F_{\beta \ell}^I) = \mu_{\beta} \begin{vmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho E \end{vmatrix} + \rho \begin{vmatrix} 0 \\ \delta_{\beta 1} \\ \delta_{\beta 2} \\ w_{\beta} \end{vmatrix} \quad (\beta = 1, 2)$$

$$|F_{\beta}^{\nu} = (F_{\beta l}^{\nu}) = \frac{1}{Re_{\gamma}} \begin{vmatrix} 0 \\ \delta_{\beta 1} \\ \delta_{\beta 2} \\ \delta_{\beta \varepsilon} \mu_{\varepsilon} + \frac{\gamma \mu}{Pr} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_{\beta}} \end{vmatrix} \quad (\varepsilon = 1, 2)$$

où :

$$\delta_{\beta \varepsilon} = \lambda \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x_{\beta}} \delta_{\beta \varepsilon} + \mu \left( \frac{\partial \mu_{\beta}}{\partial x_{\varepsilon}} + \frac{\partial \mu_{\varepsilon}}{\partial x_{\beta}} \right) \quad (\beta = 1, 2)$$

et  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $\delta_{\beta \varepsilon}$  est le symbole de Kroenecker,

$Re_{\gamma} = \frac{\rho_{\infty} V_{\infty}}{\mu_{\infty}}$  est le nombre de Reynolds,

$Pr = \frac{\mu_{\infty} C_p}{k_{\infty}}$  est le nombre de Prandtl.

Les composantes de  $G_{\beta}$ ,  $H^P$  et  $H^S$  sont données par :

$$G_{\beta} = (G_{\beta \varepsilon}) = \frac{\lambda \mu_2}{Re_{\gamma}} \begin{vmatrix} 0 \\ \delta_{\beta 1} \\ \delta_{\beta 2} \\ \mu_{\beta} \end{vmatrix}$$

$$H^P = (H_{\beta}^P) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \oplus \frac{(\lambda + 2\mu) \mu_2}{\gamma \cdot Re_{\gamma}} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$H^S = (H_{\beta}^S) = \frac{\lambda}{Re_{\gamma}} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \mu_{\beta}}{\partial x_{\beta}} \\ 0 \end{vmatrix}$$

## CHAPITRE II

### PRESENTATION DU SCHEMA POUR UNE EQUATION MODELE MONODIMENSIONNELLE

Dans ce chapitre, nous rappelons le schéma implicite donné en [13] qui sert à la discrétisation des équations (1.8). Pour simplifier la présentation de ce schéma, nous considérons ici un modèle d'équation scalaire monodimensionnel. Nous exposons ensuite les caractéristiques et les propriétés de ce schéma en fonction des différents paramètres qui interviennent dans sa construction.

La méthode nécessite deux étapes de calcul à chaque pas de temps :

Tout d'abord, une solution intermédiaire est calculée à l'aide d'un schéma explicite de type prédicteur-correcteur qui est une généralisation du schéma de Thommen [20]. Cette solution est ensuite corrigée par un opérateur implicite construit à partir d'une combinaison linéaire des termes de type fluide parfait issue des schémas proposés par A. Lerat [14] et des termes visqueux provenant du traitement implicite de Crank - Nicolson [21].

#### II.1 - Equation modèle monodimensionnelle

On considère l'équation modèle scalaire suivante :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ g \left( W, \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right] = 0 \quad (2.1)$$

où  $W$  est l'inconnue de calcul, fonction du temps  $t$  et de la coordonnée d'espace  $x$ , et

$$g \left( W, \frac{\partial W}{\partial x} \right) = f(W) - \nu(W) \frac{\partial W}{\partial x} \quad (2.2)$$

avec :

$$\nu(W) > 0$$

#### II.2 - Discrétisation

On suppose que  $W$  est suffisamment régulière pour pouvoir effectuer le développement de Taylor, précis au second ordre en temps, suivant :

$$W^{n+1} = W^n + \Delta t \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right)^n + O(\Delta t^3) \quad (2.3)$$

où  $W^n = W(t_n = n \Delta t)$  et  $\Delta t$  est le pas de temps.

En utilisant l'équation (2.1), l'expression (2.3) s'écrit sous la forme suivante :

$$W^{n+1} = W^n - \Delta t \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^n - \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial g}{\partial t} \right)^n + O(\Delta t^3) \quad (2.4)$$

Compte tenu de l'équation (2.2), la dérivée en temps  $\frac{\partial g}{\partial t}$  se met sous la forme :

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left( v \frac{\partial w}{\partial x} \right) = A \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial w}{\partial t} \right) \quad (2.5)$$

avec :  $A = \frac{d f}{d w}$

L'une des particularités de la méthode consiste à discrétiser de deux manières différentes les dérivées  $\partial w / \partial t$  qui apparaissent dans l'équation (2.5) ; ceci afin d'obtenir les bonnes propriétés de stabilité et de dissipation mentionnées dans l'introduction.

#### Traitement du terme de fluide visqueux

Pour la discrétisation de  $\partial w / \partial t$  dans le terme  $\partial_x (v \partial w / \partial t)$ , on utilise une approximation directe :

$$\left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^n \approx \frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t} = \frac{\Delta w^n}{\Delta t} \quad (2.6)$$

#### Traitement du terme de fluide parfait

Pour le premier terme  $(A \cdot \frac{\partial w}{\partial t})$ , on considère la combinaison linéaire des quatre termes suivants :

$$\left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^n = 2a \frac{\Delta w^n}{\Delta t} + b A^n \frac{\partial w^{n+1}}{\partial x} - (1-2a+b) \frac{\partial f^n}{\partial x} + (1-2a) \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial w^n}{\partial x} \right) \quad (2.7)$$

où a et b sont deux paramètres arbitraires.

Si  $\gamma = 0$ , l'approximation (2.7) correspond à celle proposée par A. Lerat [14] ;

si  $a = 0$  et  $b = 0$ , l'approximation (2.7) correspond à une discrétisation explicite de type Lax-Wendroff ;

si  $a = 1/2$  et  $b = 0$ , c'est une approximation de type Crank -Nicolson.

Le second terme de l'équation (2.7) peut être considéré comme la version implicite de :

$$b \frac{\partial f^n}{\partial x} = b A^n \frac{\partial w^n}{\partial x} \quad (2.8)$$

Dans le cas de fluide parfait, le terme implicite  $b A^n (\partial w / \partial x)^{n+1}$  assure la dissipation et le bon conditionnement du système linéaire (dominance diagonale strict qui assure l'existence et l'unité de la solution du système linéaire).

Si de plus, les paramètres  $a$  et  $b$  vérifient les inégalités suivantes :

$$a \leq 1/2, \quad b \leq a - 1/2, \quad b < -a^2/2, \quad (2.9)$$

alors, dans le cas de fluide parfait, le schéma [13] est inconditionnellement stable.

En tenant compte de (2.8), l'équation (2.7) devient :

$$\left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^n = \left[ 2a \frac{\Delta w}{\Delta t} - (1-2a) \frac{\partial g}{\partial x} + b A \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) \right]^n \quad (2.10)$$

En substituant les relations (2.5) à (2.10) dans (2.4), on obtient le schéma suivant, précis au second ordre en temps  $t$  :

$$\Delta W^n + a \Delta t \frac{\partial}{\partial x} (A \Delta W)^n + b \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ A^2 \frac{\partial}{\partial x} (\Delta W) \right]^n \quad (2.11)$$

$$- \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sqrt{\Delta W})^n = - \Delta t \left[ \frac{\partial g}{\partial x} - (1-2a) \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( A \frac{\partial g}{\partial x} \right) \right]^n$$

Si maintenant, on utilise des dérivées d'espace centrées, à 3 points, à l'instant  $n + 1$  et à 5 points à l'instant  $n$ , alors le schéma (2.11) est aussi précis au second ordre par rapport à la variable d'espace  $x$ .

Notons que les études [15], concernant le choix des paramètres  $a$  et  $b$  pour le schéma appliqué à l'équation d'Euler, ont conduit aux conclusions suivantes :

- a) Dans le cas instationnaire, l'erreur de troncature du schéma est minimisée pour des grandes valeurs du pas de temps en prenant :

$$b = a - 1/2 \quad (2.12)$$

- b) Le choix optimal de ces paramètres pour obtenir rapidement la convergence vers l'état stationnaire est :

$$b = 2a - 1 \quad (2.13)$$

étant donné que, dans ce cas, le rayon spectral de la matrice d'amplification tend vers zéro au fur et à mesure que le pas de temps augmente.

Précisons que dans le cas de fluide visqueux, on suppose que les paramètres  $a$  et  $b$  du schéma (2.11) vérifient les inégalités (2.9). Par ailleurs, le traitement des termes visqueux (2.6) permet de conserver la plupart des propriétés obtenues en fluide parfait.

L'utilisation pratique du schéma (2.11) est rendue difficile aux frontières par la présence du terme de dérivée troisième  $\partial/\partial x (A \partial/\partial x (\nu \frac{\partial w}{\partial x}))$  qui apparaît dans le développement de  $\partial/\partial x (A \partial g/\partial x)$ .

Cette difficulté est d'autant plus accrue qu'on résout un problème à plusieurs variables d'espace. Dans la suite, la partie droite de (2.11) est discrétisée à l'aide d'un schéma explicite de type prédicteur-correcteur.

L'introduction de ce schéma prédicteur-correcteur s'effectue de la manière suivante :

La partie entre crochets du membre de droite de l'équation (2.11) est le développement de Taylor précis au second ordre en temps suivant :

$$\left[ \frac{\partial g}{\partial x} - (1-2a) \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( A \frac{\partial g}{\partial x} \right) \right]^n = \frac{\partial}{\partial x} \left[ f^{n+\frac{1-2a}{2}} - \left( v \frac{\partial w}{\partial x} \right)^n \right] + O(\Delta t^2) \quad (2.14)$$

où :  $f^{n+\frac{1-2a}{2}} = f^n + \frac{1-2a}{2} \Delta t A^n \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^n + O(\Delta t^2)$

et  $(\partial w / \partial x)^n$  est donné par l'équation (2.1).

En introduisant une solution calculée à un instant  $n + \alpha$  et notée  $\tilde{w}^{n+\alpha}$ , on peut encore écrire  $f^{n+\frac{1-2a}{2}}$  sous la forme équivalente :

$$f^{n+\frac{1-2a}{2}} = \frac{1-2a}{2\alpha} f^{n+\alpha} + \left( 1 - \frac{1-2a}{2\alpha} \right) f^n + O(\Delta t^2)$$

Ainsi, soit  $W_i^n$  la solution numérique au point  $(i \Delta x, n \Delta t)$ , la solution à l'étape explicite :  $\Delta \widehat{W}_i = \widehat{W}_i^{n+1} - W_i^n$

est calculée à partir du schéma :

$$\Delta \widehat{W}_i = -\Delta t \delta_x \left[ \frac{1-2a}{2\alpha} \tilde{f}^{n+\alpha} + \left( 1 - \frac{1-2a}{2\alpha} \right) \bar{f}^n - v \delta_x W^n \right] \quad (2.15)$$

où :  $\tilde{f}^{n+\alpha} = f(\tilde{w}^{n+\alpha})$

avec :  $\tilde{w}^{n+\alpha}$  est la valeur prédite calculée par :

$$\tilde{W}_{i+1/2}^{n+\alpha} = \bar{W}_{i+1/2} - \alpha \Delta t \delta_x \left( f - v \delta_x \bar{W} \right)_{i+1/2}^n \quad (2.16)$$

On a les relations suivantes :

$$\bar{w}_{i+1/2} = (w_{i+1} + w_i) / 2$$

$$\delta_x \varphi_{i+1/2} = (\varphi_{i+1} - \varphi_i) / \Delta x$$

$$\tilde{f}_{i+1/2}^{n+\alpha} = f(\tilde{w}_{i+1/2}^{n+\alpha}) ; \quad \bar{f}_{i+1/2}^n = \tilde{f}_{i+1/2}^n(\bar{w}_{i+1/2}^n) ;$$

$$\bar{v}_{i+1/2} = v(\bar{w}_{i+1/2}^n)$$

Le paramètre  $\alpha$  ( $\alpha \neq 0$ ) de l'équation (2.15) caractérise l'instant où le prédicteur est calculé.

A chaque itération, la solution finale est obtenue par une étape implicite caractérisée par :

$$\begin{aligned} \Delta w_i^n + a \Delta t \delta_x (\bar{A} \bar{\Delta w})_i^n + b \frac{\Delta t^2}{2} \delta_x \left[ \bar{A}^2 \delta_x (\Delta w) \right]_i^n \\ - \frac{\Delta t}{2} \delta_x^2 (v \Delta w)_i^n = \Delta \hat{w}_i \end{aligned} \quad (2.17)$$

avec :  $\bar{A}_{i+1/2}^n = A(\bar{w}_{i+1/2}^n)$

Une étude numérique de la stabilité linéaire du schéma (2.15) à (2.17) a permis de dégager une condition de stabilité en fonction du paramètre  $a$ , après élimination du paramètre  $b$  par la relation (2.12) ou (2.13).

La figure 3 extraite de la référence [13] montre les régions de stabilité du schéma. Le schéma global (2.15), (2.16), (2.17) n'est pas inconditionnellement stable, mais on peut utiliser des pas de temps assez élevés en prenant des valeurs de  $a$  comprise entre 0 et 1/2.

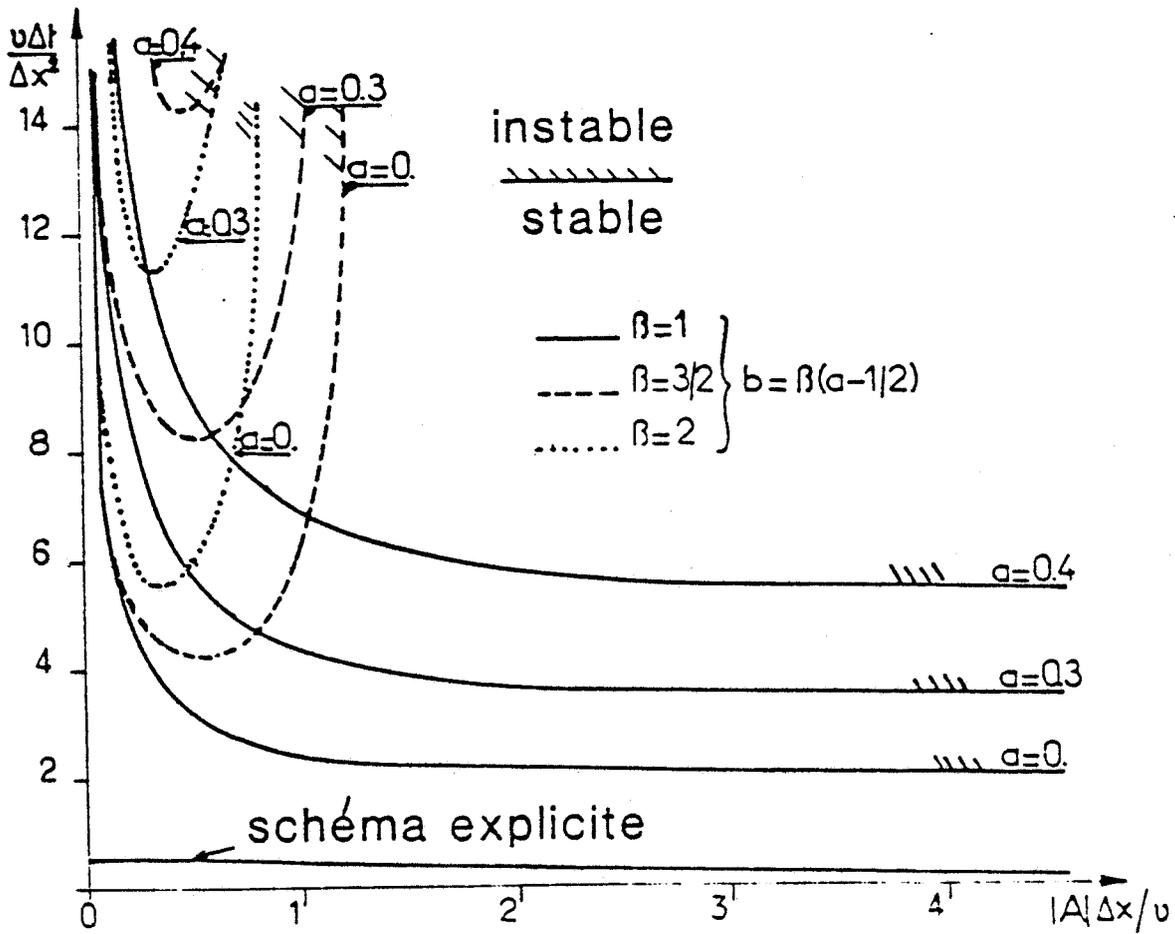


FIG.3

domaine de stabilité



## CHAPITRE III

### EXTENSION DU SCHEMA AU CAS DES ECOULEMENTS AXISYMETRIQUES

#### III.1 - Généralités

Les équations (1.8) sont discrétisées à l'aide du schéma précédent, en maillage curviligne en utilisant la technique de volumes finis développée dans [14] et appliquée à la résolution des équations d'Euler bidimensionnelles [15] et des équations de Navier-Stokes tridimensionnelles [13].

Dans cette technique, une valeur moyenne de la solution est calculée à l'intérieur de chaque cellule, les flux étant évalués sur les facettes en utilisant la solution dans la cellule de calcul et la solution dans les cellules adjacentes. Dans le cadre du déroulement de cette thèse, on a d'abord mis au point un code de calcul bidimensionnel appliqué à l'étude de l'écoulement autour d'un profil d'aile, à partir du code tridimensionnel existant [13] pour le calcul de l'écoulement autour d'une aile, ceci dans le but de faciliter le passage au cas des écoulements axisymétriques.

Les équations (1.8) pour les écoulements axisymétriques ( $r = 1$ ) contiennent trois types de termes supplémentaires par rapport aux équations régissant les écoulements plans : le terme de flux  $\mathcal{C}_p$  et deux termes de surface, l'un fonction uniquement des variables de calcul  $\mathcal{H}^p$  (termes sources) et l'autre fonction des variables de calcul et de ses dérivées d'espace  $\mathcal{H}^s$ .

Les termes sources  $\mathcal{H}^p$  sont calculés à l'aide des valeurs moyennes de la solution à l'intérieur de chaque cellule de calcul, uniquement à l'étape explicite, étant donné que ces termes ne doivent pas intervenir dans la stabilité de la méthode. Cependant, au voisinage de l'axe ( $y = 0$ ), un traitement spécial est effectué sur le terme source  $v/y$  qui tient compte du comportement local de la solution. Ce traitement spécial sera détaillé dans le chapitre 4 qui concerne l'application des conditions aux limites.

Le terme  $\mathcal{H}^s$  ne contient que l'élément :  $\lambda \operatorname{div} \vec{v}$  qui est évalué de la manière suivante :

Le coefficient de viscosité  $\lambda$  est calculé à partir de la valeur moyenne de la solution dans chaque cellule. En utilisant la formule de la divergence, on ramène le problème de l'évaluation de cette intégrale de surface à celui du calcul du flux de vitesse sur le contour de cette surface. Ce flux est calculé aux étapes explicites et implicites de la même manière que les flux apparaissant dans les équations régissant les écoulements plans. Il en est de même pour le calcul du terme de flux  $\mathcal{C}_p$ .

### III.2 - Discrétisation en temps

La forme différentielle de l'équation (1.8) s'écrit :

$$y^r \frac{\partial W}{\partial t} - \pi (H^p - H^s) + \frac{\partial}{\partial x_\beta} (y^r F_\beta - \pi G_\beta) = 0 \quad (3.1)$$

$$(\beta = 1, 2) ; (x_1 = x, y_1 = y)$$

Comme dans le cas monodimensionnel, on effectue le développement de Taylor en temps de  $W^{n+1}$  :

$$W^{n+1} = W^n + \Delta t \frac{\partial W^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 W^n}{\partial t^2} + O(\Delta t^3) \quad (3.2)$$

En multipliant cette équation par  $y^r$  et en utilisant l'équation (3.1), on obtient :

$$y^r \frac{\Delta W^n}{\Delta t} = \pi (H^p - H^s) - \frac{\partial}{\partial x_\beta} (y^r F_\beta - \pi G_\beta)^n - \frac{\Delta t}{2} \left[ -\pi (H^p - H^s)_t + \left( \frac{\partial}{\partial x_\beta} (y^r F_\beta - \pi G_\beta) \right)_t \right]^n + O(\Delta t^2) \quad (3.3)$$

avec :  $\Delta W^n = W^{n+1} - W^n$  ;  $F_\beta = F_\beta^I - F_\beta^V$

Cette expression s'écrit encore :

$$y^r \frac{\Delta W^n}{\Delta t} = \pi (H^p - H^s)^n - \frac{\partial}{\partial x_\beta} (y^r F_\beta - \pi G_\beta)^n - \frac{\Delta t}{2} \left[ -\pi H_t^p + \pi H_t^s + \frac{\partial}{\partial x_\beta} (y^r (F_\beta^I)_t - y^r (F_\beta^V)_t - \pi (G_\beta)_t) \right]^n \quad (3.4)$$

Notons que  $H^P, F_p^I, G_p$  sont fonction uniquement des variables  $(w_e)$ , tandis que  $F_p^V$  et  $H^S$  sont fonction de ces variables  $(w_e)$  et de leurs dérivées d'espace :  $(\partial w_e / \partial x_e = q_{ee})$ .

Le développement des dérivées par rapport au temps des termes de l'équation (3.4) font apparaître des dérivées en temps  $\partial w_e / \partial t$ , dont l'évaluation est effectuée selon 3 types de discrétisation.

L'évaluation spatiale de  $\partial w_e / \partial t$  utilisant l'équation (3.1) conduit au traitement explicite du terme considéré.

Le traitement implicite des termes utilise soit une évaluation directe de type (2.6), soit une combinaison linéaire de type (2.7).

### Evaluation des dérivées en temps de l'équation (3.4)

#### a) Termes sources $H^P$

Pour les raisons qu'on avait évoquées au début de ce chapitre, les termes sources  $H^P$  sont calculés seulement à l'étape explicite. Leur évaluation en temps peut être effectué à des instants différents à chaque itération.

Dans les applications, on a utilisé deux types d'évaluation de  $\partial w_e / \partial t$  associée au développement de la dérivée en temps de ces termes :

- soit on simplifie le problème en négligeant dans (3.4)  $\frac{\partial H^P}{\partial t}$ , c'est-à-dire que  $H^P$  est calculé dans le schéma à l'instant  $n$  ;
- soit on traite  $H^P$  à un instant différent de  $n$  ; les calculs ont montré que le traitement de  $H^P$  à l'instant  $(n + 1/2)$  donnait les meilleurs résultats. Aussi, dans les applications, on utilise ce type de traitement.

On a, dans ce cas, l'expression suivante :

$$\left( \frac{\partial H^P}{\partial t} \right)^n = \left( \frac{\partial H^P}{\partial w_e} \frac{\partial w_e}{\partial t} \right)^n \quad (3.5)$$

avec :

$$\frac{\partial w_e}{\partial t} = \frac{1}{y^\tau} \left[ \pi (H_e^P - H_e^S) - \frac{\partial}{\partial x_e} (y^\tau F_{e\ell} - \pi G_{e\ell}) \right]$$

b) Evaluation de la dérivée en temps des termes de fluide visqueux

Les différentes expressions de la dérivée par rapport au temps des termes de fluide visqueux s'écrivent :

$$\left( \frac{\partial H^S}{\partial t} \right)^n = \left( \frac{\partial H^S}{\partial w_l} \frac{\partial w_l}{\partial t} + \frac{\partial H^S}{\partial q_{lE}} \frac{\partial}{\partial x_E} \left( \frac{\partial w_l}{\partial t} \right) \right)^n \quad (3.6)$$

$$\left( \frac{\partial G_p}{\partial t} \right)^n = \left( \frac{\partial G_p}{\partial w_l} \frac{\partial w_l}{\partial t} \right)^n \quad (3.7)$$

$$\left( \frac{\partial F_p^V}{\partial t} \right)^n = \left( \frac{\partial F_p^V}{\partial w_l} \frac{\partial w_l}{\partial t} + \frac{\partial F_p^V}{\partial q_{lE}} \frac{\partial}{\partial x_E} \left( \frac{\partial w_l}{\partial t} \right) \right)^n \quad (3.8)$$

Dans ces équations, l'évaluation de  $\frac{\partial w_l}{\partial t}$  est donnée par la discrétisation directe :

$$\frac{\partial w_l^n}{\partial t} = \frac{w_l^{n+1} - w_l^n}{\Delta t} = \frac{\Delta w_l^n}{\Delta t} \quad (3.9)$$

Remarque :

L'expression (3.8) peut encore se mettre sous la forme :

$$\left( \frac{\partial F_p^V}{\partial t} \right)^n = \left[ \left( \frac{\partial F_p^V}{\partial w_l} - \frac{\partial^2 F_p^V}{\partial x_E \partial q_{lE}} \right) \frac{\partial w_l}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_E} \left( \frac{\partial F_p^V}{\partial q_{lE}} \frac{\partial w_l}{\partial t} \right) \right]^n \quad (3.10)$$

Lorsqu'on néglige la variation de  $\lambda$  et  $\mu$  par rapport au temps, ce qui est fait par la suite, cet arrangement permet de simplifier le premier terme de cette équation ; toutes les composantes de ce terme sont nulles sauf celles concernant l'indice  $l = 4$ .

c) Evaluation de la dérivée en temps des termes de fluide parfait

La dérivée par rapport au temps des termes de fluide parfait  $F_p^I$  s'écrit :

$$\left( \frac{\partial F_p^I}{\partial t} \right)^n = \left( \frac{\partial F_p^I}{\partial w_l} \frac{\partial w_l}{\partial t} \right)^n \quad (3.11)$$

On utilise pour l'évaluation de  $\partial W_e / \partial t$  une expression semblable à (2.7) qui s'écrit :

$$\left(\frac{\partial W_e}{\partial t}\right)^n = \left[ 2a \frac{\Delta W_e}{\Delta t} + \frac{1-2a}{y^\tau} \left( \pi (H_e^p - H_e^s) - \partial (y^\tau F_{\beta e} - G_{\beta e}) \right)^n \right. \\ \left. + \frac{b}{y^\tau} \left\{ \left( \frac{\partial F_{\beta e}^I}{\partial W_k} \right)^n \frac{\partial (y^\tau W_k)^{n+1}}{\partial x_\beta} - \left( \frac{\partial F_{\beta e}^I}{\partial W_k} \right)^n \frac{\partial (y^\tau W_k^n)}{\partial x_\beta} \right\} \right] \quad \kappa = 1, 4 \quad (3.12)$$

Dans cette évaluation de  $\partial W_e / \partial t$ , le traitement particulier du schéma de Lerat [14] (voir également l'équation 2.7) n'est appliqué qu'au terme de fluide parfait ( $F_\beta^I$ ).

Le dernier groupe de terme du membre de droite de l'équation (3.12) s'écrit :

$$\frac{b}{y^\tau} \left[ \left( \frac{\partial F_{\beta e}^I}{\partial W_k} \right)^n \frac{\partial (y^\tau W_k)^{n+1}}{\partial x_\beta} - \left( \frac{\partial F_{\beta e}^I}{\partial W_k} \right)^n \frac{\partial (y^\tau W_k^n)}{\partial x_\beta} \right] = \quad (3.13)$$

$$\left[ b \frac{\partial F_{\beta e}^I}{\partial W_k} \frac{\partial (W_k)}{\partial x_\beta} + b \frac{\partial F_{\beta e}^I}{\partial W_k} \frac{\Delta W_k}{y^\tau} \delta_{\beta 2} \right]^n$$

On a constaté que le second terme du membre de droite de l'expression (3.13) tend à déstabiliser la méthode. Aussi, dans les applications, on néglige ce terme. L'erreur que l'on commet est du second ordre, elle ne diminue donc pas la précision globale du schéma.

L'approximation de  $\partial W_e / \partial t$  (3.12) devient :

$$\left(\frac{\partial W_e}{\partial t}\right)^n = \left[ 2a \frac{\Delta W_e}{\Delta t} + \frac{(1-2a)}{y^\tau} \left( \pi (H_e^p - H_e^s) - \frac{\partial (y^\tau F_{e e} - G_{e e})}{\partial x_e} \right) \right. \\ \left. + b \frac{\partial F_{e e}^I}{\partial W_k} \frac{\partial (\Delta W_k)}{\partial x_e} \right]^n \quad (3.14)$$

Finalement, en tenant compte des équations (3.5) à (3.7), (3.6) à (3.11) et (3.14), la forme intégrale de l'équation (3.4) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & \iint_S y^\tau \frac{\Delta W^\tau}{\Delta t} ds + \frac{1}{2} \iint_S \Delta t \tau \left[ \frac{\partial H^S}{\partial W_\epsilon} \frac{\Delta W_\epsilon}{\Delta t} + \frac{\partial H^S}{\partial q_{\epsilon\epsilon}} \frac{\partial}{\partial x_\epsilon} \left( \frac{\Delta W_\epsilon}{\Delta t} \right) \right]^n ds \\
 & + \frac{1}{2} \oint_{(c)} \left[ 2a \Delta t y^\tau \frac{\partial F_\rho^I}{\partial W_\epsilon} \frac{\Delta W_\epsilon}{\Delta t} + b \Delta t y^\tau \frac{\partial F_\rho^I}{\partial W_\epsilon} \left[ \frac{\partial F_{\epsilon\epsilon}^I}{\partial W_\kappa} \frac{\partial (\Delta W_\kappa)}{\partial x_\epsilon} \right] \right]^n N_\beta dl \\
 & - \frac{1}{2} \oint_{(c)} \Delta t y^\tau \left[ \left( \frac{\partial F_\rho^V}{\partial W_\epsilon} - \frac{\partial^2 F_\rho^V}{\partial x_\epsilon \partial q_{\epsilon\epsilon}} \right) \frac{\Delta W_\epsilon}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial x_\epsilon} \left( \frac{\partial F_\rho^V}{\partial q_{\epsilon\epsilon}} \frac{\Delta W_\epsilon}{\Delta t} \right) \right]^n N_\beta dl \\
 & - \frac{1}{2} \oint_{(c)} \Delta t \tau \left( \frac{\partial G_\beta}{\partial W_\epsilon} \frac{\Delta W_\epsilon}{\Delta t} \right)^n N_\beta dl = \\
 & \left\{ \iint_S \tau \left[ H^P - H^S + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial H^P}{\partial W_\epsilon} \left[ \frac{1}{y^\tau} \left( H_\epsilon^P - H_\epsilon^S - \frac{\partial}{\partial x_\epsilon} (y^\tau F_{\epsilon\epsilon} - \tau G_{\epsilon\epsilon}) \right) \right] \right] \right\} ds \\
 & - \oint_{(c)} \left\{ y^\tau (F_\rho^I - F_\rho^V) - \tau G_\rho + \frac{1-2a}{2} \Delta t \frac{\partial (F_\rho^I)}{\partial W_\epsilon} \left[ \tau (H_\epsilon^P - H_\epsilon^S) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\partial (y^\tau F_{\epsilon\epsilon} - \tau G_{\epsilon\epsilon})}{\partial x_\epsilon} \right] \right\}^n N_\beta dl
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Le membre de droite de l'équation (3.15) qui est la partie explicite du schéma est remplacé par un schéma prédictor-correcteur comme dans le cas monodimensionnel.

La solution à cette étape, qui après convergence donne la solution stationnaire d'un problème, est calculée par :

$$\iint_S y^\alpha \frac{(\widehat{W}^{n+\alpha} - W^n)}{\Delta t} ds$$

Remarquons que les intégrales de contour et de surface du membre de droite de l'équation (3.15) contiennent les développements de Taylor précis au second ordre en temps de

$$\left( \mathbb{F}_\beta^I \right)^{n + \frac{1-2a}{2}} \quad \text{et de} \quad \left( \mathbb{H}^P \right)^{n + 1/2}$$

respectivement.

Leurs expressions s'écrivent :

$$\left( \mathbb{F}_\beta^I \right)^{n + \frac{1-2a}{2}} \approx \left( \mathbb{F}_\beta^I \right)^n + \frac{1-2a}{2} \frac{\Delta t}{y^\alpha} \left( \frac{\partial \mathbb{F}_\beta^I}{\partial W_\ell} \right)^n \left[ \alpha \left( H_\ell^P - H_\ell^S \right) - \partial \left( y^\alpha F_{\ell\ell} - \alpha G_{\ell\ell} \right) \right]^n \quad (3.16)$$

$$\left( \mathbb{H}^P \right)^{n + 1/2} \approx \left( \mathbb{H}^P \right)^n + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial \mathbb{H}^P}{\partial W_\ell} \right)^n \left[ \frac{1}{y^\alpha} \left( H_\ell^P - H_\ell^S - \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left( y^\alpha F_{\ell\ell} - \alpha G_{\ell\ell} \right) \right) \right]^n$$

Comme dans le cas monodimensionnel, on introduit une solution prédite à un instant  $n + \alpha$ , notée  $\widetilde{W}^{n+\alpha}$  dont on précise le calcul par la suite. Les expressions précédentes peuvent encore s'écrire de façon équivalente sous la forme suivante :

$$\left( \mathbb{F}_\beta^I \right)^{n + \frac{1-2a}{2}} = \frac{1-2a}{2\alpha} \left( \widetilde{\mathbb{F}}_\beta^I \right)^{n+\alpha} + \left( 1 - \frac{1-2a}{2\alpha} \right) \left( \mathbb{F}_\beta^I \right)^n + O(\Delta t^2) \quad (3.17a)$$

$$\left( \mathbb{H}^P \right)^{n + 1/2} = \frac{1}{2\alpha} \left( \widetilde{\mathbb{H}}^P \right)^{n+\alpha} + \left( 1 - \frac{1}{2\alpha} \right) \left( \mathbb{H}^P \right)^n + O(\Delta t^2) \quad (3.17b)$$

$$\text{où: } \left( \widetilde{\mathbb{F}}_\beta^I \right)^{n+\alpha} = \mathbb{F}_\beta^I \left( \widetilde{W}_\ell^{n+\alpha} \right), \quad \left( \widetilde{\mathbb{H}}^P \right)^{n+\alpha} = \mathbb{H}^P \left( \widetilde{W}_\ell^{n+\alpha} \right)$$

Le schéma prédicteur-correcteur qui est équivalent au second ordre en temps au membre de droite de l'équation (3.15) s'écrit :

$$\iint_S y^\tau \frac{\widehat{W}^{n+1} - W^n}{\Delta t} ds = \iint_S \pi \left[ \frac{1}{2\alpha} (\widehat{H}^p)^{n+\alpha} + \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) (H^p)^n - (H^s)^n \right] ds \quad (3.18)$$

$$- \oint_{(C)} \left\{ y^\tau \left[ \frac{1-2\alpha}{2\alpha} (\widehat{F}_\beta^I)^{n+\alpha} + \left(1 - \frac{1-2\alpha}{2\alpha}\right) (F_\beta^I)^n - (F_\beta^V)^n \right] - \pi G_\beta^n \right\} N_\beta dl$$

Comme il est précisé dans le paragraphe suivant, la solution prédite  $\widehat{W}^{n+\alpha}$  est calculée sur une surface  $S'$  différente de  $S$  à partir de :

$$\iint_{S'} y^\tau \frac{\widetilde{W}^{n+\alpha} - W^n}{\alpha \Delta t} ds = \iint_{S'} \pi (H^p - H^s)^n ds \quad (3.19)$$

$$- \oint_{(C')} \left[ y^\tau (F_\beta^I - F_\beta^V) - \pi G_\beta \right]^n N_\beta dl$$

où  $C'$  est le contour de  $S'$ .



### III.3 - Discrétisation en espace

Les équations (3.15), (3.18), (3.19) précédentes sont discrétisées dans un maillage  $(i, j)$  associé aux coordonnées curvilignes  $(\xi_1, \xi_2)$ , où la valeur moyenne de la solution  $W_{i,j}^n$  est calculée à chaque instant à l'intérieur de chaque cellule  $\Omega(i, j)$  (voir fig. 4). Cette valeur moyenne est localisée au centre de la cellule de coordonnées :

$$(\chi_\beta)_{i,j} = \chi_\beta(i \Delta \xi_1, j \Delta \xi_2) \quad ; \quad (\beta = 1, 2)$$

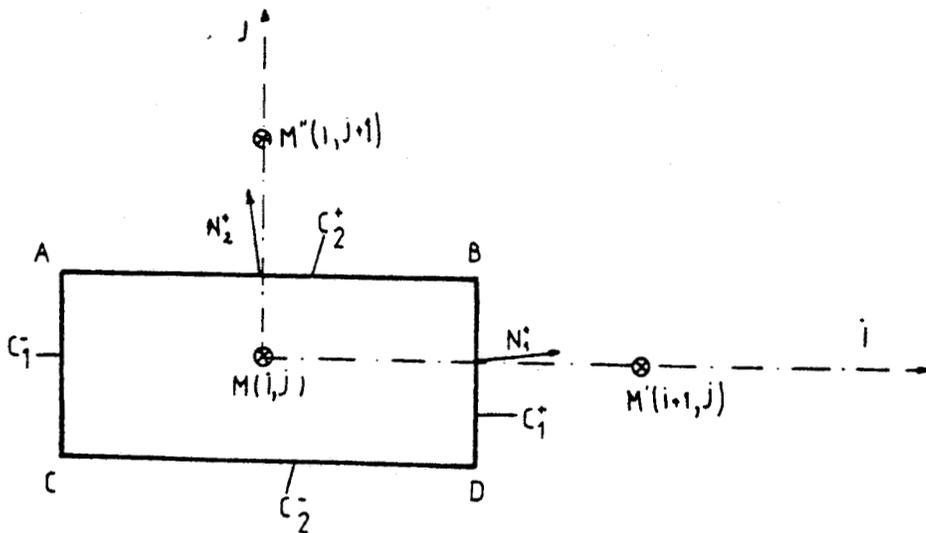


FIG.4 REPRESENTATION DE LA CELLULE  $\Omega(i,j)$



La procédure générale pour le calcul d'une itération est la suivante :

### III.3.1 - Etape explicite

#### a) Cas du prédicteur

Les valeurs moyennes prédites  $\widetilde{W}_{i \pm 1/2, j}^{n+\alpha}$  et  $\widetilde{W}_{i, j \pm 1/2}^{n+\alpha}$

sont d'abord calculées à l'intérieur des cellules  $\widetilde{\Omega}(i \pm 1/2, j)$  et  $\widetilde{\Omega}(i, j \pm 1/2)$  décalées d'une demi-maille par rapport à  $\Omega(i, j)$  dans les directions  $i$  et  $j$  respectivement. On détaille ici le calcul de :  $\widetilde{W}_{i+1/2, j}^{n+\alpha}$

Calcul du prédicteur  $\widetilde{W}_{i+1/2, j}^{n+\alpha}$

Le schéma (3.19) est appliqué à la cellule  $\widetilde{\Omega}(i + 1/2, j)$  (voir fig. 5).

L'évaluation de l'intégrale de  $H^s$  sur la surface  $S_{i+1/2, j}$  de  $\widetilde{\Omega}(i + 1/2, j)$  s'effectue à partir de l'approximation suivante :

$$\iint_{\widetilde{S}_{i+1/2, j}} (H^s)^n ds \approx \frac{\bar{\lambda}_{i+1/2, j}^n}{\text{Rey}} \oint_{\widetilde{C}_{i+1/2, j}} W_\beta^n N_\beta dl \quad (3.20)$$

où  $\widetilde{C}_{i+1/2, j}$  est la frontière de  $\widetilde{\Omega}(i + 1/2, j)$  et  $\bar{\lambda}_{i+1/2, j}^n$  est une valeur moyenne de  $\lambda$  définie par :

$$\bar{\lambda}_{i+1/2, j}^n = \left( \lambda_{i, j} + \lambda_{i+1, j} \right) / 2$$

Les composantes de  $W_\beta$  sont données par :

$$W_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_\beta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\beta = 1, 2)$$

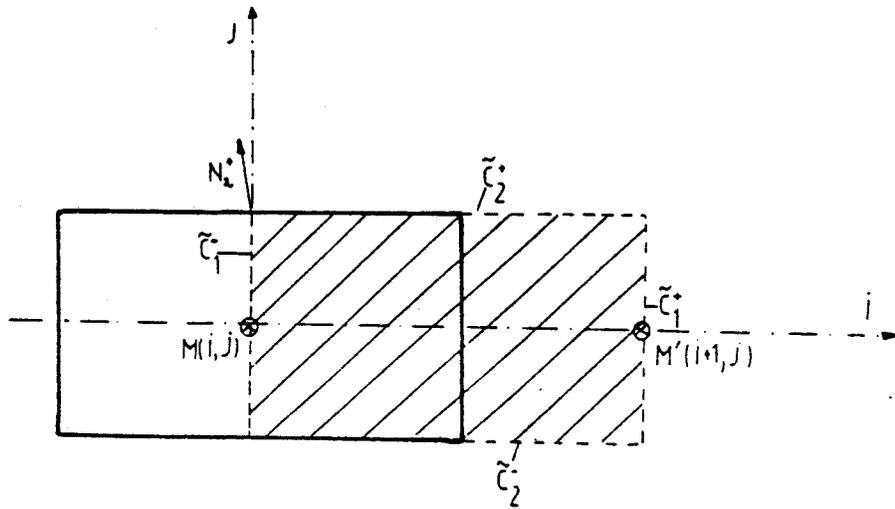


FIG. 5

REPRESENTATION DE LA CELLULE

 $\tilde{\Omega}(i+1/2, j)$ 

En tenant compte de (3.20), la valeur prédite  $\tilde{W}_{i+1/2, j}^{n+\alpha}$  est obtenue, à partir de l'expression suivante :

$$\left( \frac{y^{\alpha} S \tilde{W}^{n+\alpha} - y^{\alpha} S W^n}{\alpha \Delta t} \right)_{i+1/2, j} = \tau \left( (H^p S)^n \right)_{i+1/2, j} - \sum_{k=1}^2 (R_k^+ + R_k^-) \quad (3.21)$$

Les expressions des flux  $R_k^{\pm}$  à travers les contours  $\tilde{C}_k^{\pm}$  sont données en annexe 2.



L'évaluation des autres termes est donnée par :

$$\begin{aligned} \left( \overline{H^p} \right)_{i+1/2,j}^n &= \left( H_{i,j}^p + H_{i+1,j}^p \right) / 2 \\ y_{i+1/2,j} &= \left( y_{i,j} + y_{i+1,j} \right) / 2 \end{aligned}$$

Enfin, la surface  $S_{i+1/2,j}$  est calculée par :

$$S_{i+1/2,j} = \left( S_{i,j} + S_{i+1,j} \right) / 2$$

avec :

$$S_{i,j} = \frac{1}{2} \left| \vec{AD} \wedge \vec{BC} \right|_{i,j} \quad (\text{voir figure 4})$$

#### b) Cas du correcteur

Le schéma (3.18) est appliqué à la cellule  $\Omega(i, j)$  (voir figure 4). L'évaluation de l'intégrale de  $H^s$  sur la surface  $S_{i,j}$  de  $\Omega(i, j)$  est approchée de manière semblable à (3.20). On obtient ainsi :

$$\iint_{S_{i,j}} \left( H^s \right)^n dS = \frac{1}{\text{Rey}} \iint_{S_{i,j}} \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial u_B / \partial x_B \\ 0 \end{bmatrix}^n ds \approx \frac{\lambda_{i,j}^n}{\text{Rey}} \oint_{C_{i,j}} W_B^n N_B dL \quad (3.22)$$

où  $C_{i,j}$  est le contour de  $\Omega(i, j)$  et  $\lambda_{i,j}$  est une valeur moyenne de  $\lambda$  dans la cellule  $\Omega(i, j)$  localisée au centre de celle-ci.

En tenant compte de l'approximation (3.22), la solution intermédiaire  $\widehat{W}_{i,j}^{n+1}$  est calculée à l'étape explicite à partir de l'expression suivante :

$$\left( \frac{y^r (\widehat{W}^{n+1} - W^n) S}{\Delta t} \right)_{i,j} = r \left( H^P S \right)_{i,j} - \sum_{K=1}^2 \left( S_K^+ + S_K^- \right) \quad (3.23)$$

où  $S_K^+$  et  $S_K^-$  sont les flux à travers les contours  $C_K^+$  et  $C_K^-$  de  $\Omega(i, j)$  et  $H^P$  une évaluation du terme source dans  $\Omega(i, j)$ . Les flux  $S_K^+$  et  $S_K^-$  font intervenir les valeurs de la solution à l'instant  $n$  et au prédicteur. Leurs expressions sont données en annexe 2.

L'évaluation de  $H^P$  est donnée par :

$$\left( H^P \right)_{i,j}^{n+1/2} = \left[ \frac{1}{2\alpha} H^P \left( \widehat{F}^{n+d} \right) + \left( 1 - \frac{1}{2\alpha} \right) H^P \left( F^n \right) \right]_{i,j} \quad (3.24)$$

avec :

$$\widehat{F}_{i,j}^{n+d} = \left( \widehat{F}_{i+1/2,j} + \widehat{F}_{i-1/2,j} + \widehat{F}_{i,j+1/2} + \widehat{F}_{i,j-1/2} \right) / 4 \quad n+\alpha$$

c) Evaluation des dérivées d'espace dans le calcul des flux des termes visqueux

Les composantes  $\partial f_e / \partial x$ ,  $\partial f_e / \partial y$  des dérivées d'espace  $\partial F / \partial x$ ,  $\partial F / \partial y$  apparaissant dans le calcul des flux  $S_K^{\pm}$ ,  $R_K^{\pm}$  (voir annexe 2) sont évaluées au centre des facettes  $C_K^{\pm}$ ,  $\widetilde{C}_K^{\pm}$  respectivement en utilisant des formules aux différences centrées.

Connaissant les valeurs de  $\phi = (f_e \text{ ou } w_e)$  aux points (N, S, W, E) entourant un point central M, (voir figure 6), on calcule les dérivées  $\partial \phi / \partial x$ ,  $\partial \phi / \partial y$  de  $\phi$  en M à partir des relations suivantes :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_M = \frac{\phi_{WE} y_{SN} - \phi_{SN} y_{WE}}{x_{WE} y_{SN} - x_{SN} y_{WE}}$$

(3.25)

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_M = \frac{\phi_{WE} x_{SN} - \phi_{SN} x_{WE}}{y_{WE} x_{SN} - y_{SN} x_{WE}}$$

avec:  $\varphi_{WE} = \varphi_E - \varphi_W$  ;  $\varphi_{SN} = \varphi_N - \varphi_S$  ;  $\varphi = (\phi, x, y)$

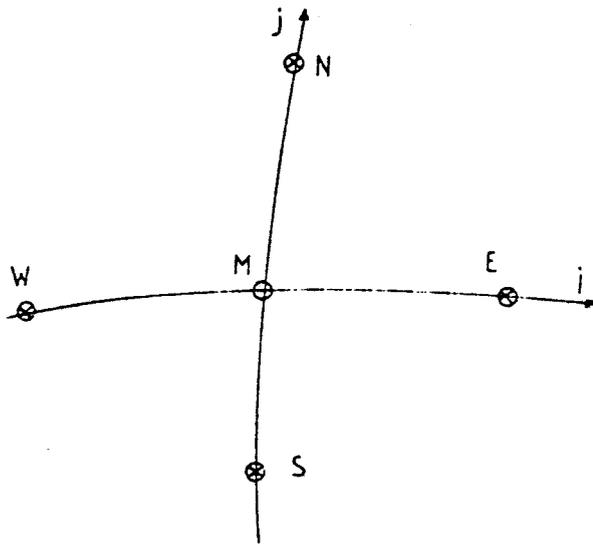


FIG.6

CALCUL DU GRADIENT DE  $\phi$  EN M

Considérons par exemple le calcul des flux  $R_1^+$  et  $S_1^+$ .

La figure 7 montre les points intervenant dans le calcul des dérivées d'espace  $\partial\phi/\partial x$ ,  $\partial\phi/\partial y$  sur la facette  $\tilde{C}_1^+$  correspondant au flux  $R_1^+$ .

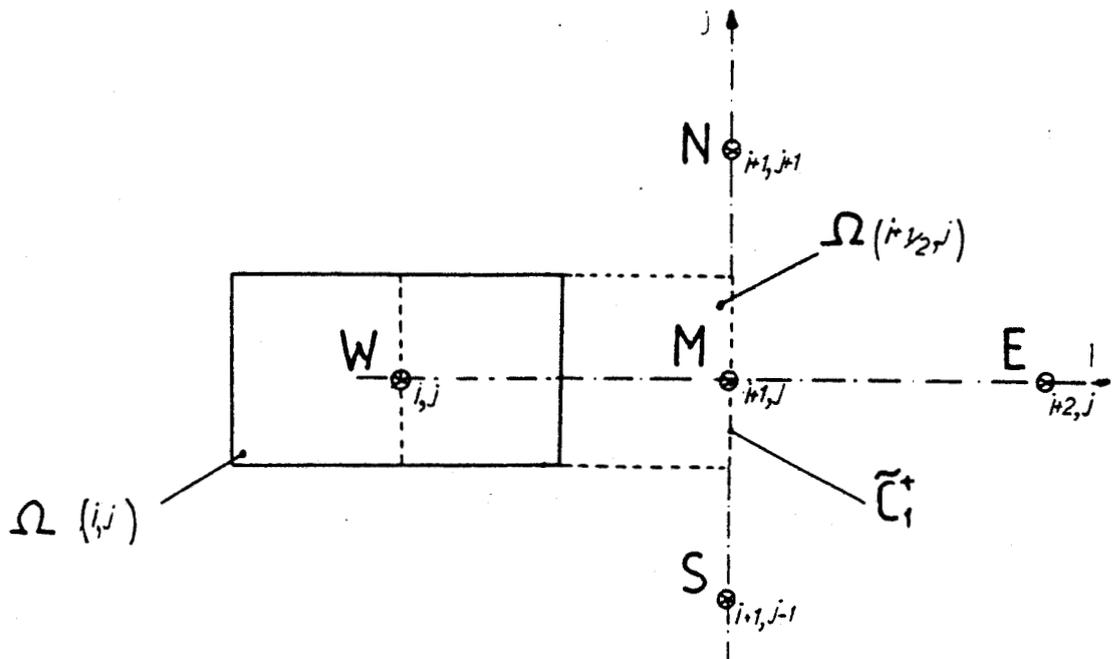


FIG.7 Calcul du gradient de  $\phi$  sur la facette  $\tilde{C}_1^+$

De manière semblable, les points intervenant dans le calcul des dérivées d'espace pour l'évaluation des flux  $S_1^+$  à travers  $C_1^+$  sont donnés sur la figure 8;

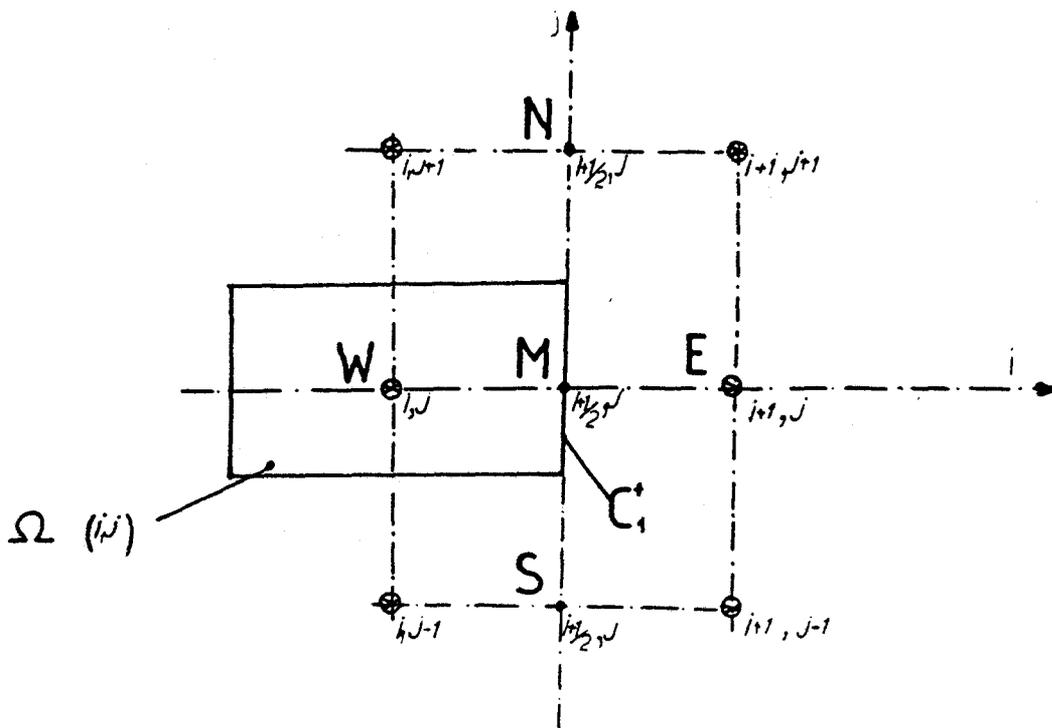


FIG. 8 Calcul du gradient de  $\Phi$  sur la facette  $C_1^+$

Sur les facettes frontières du domaine de calcul, la formulation centrée utilisée dans (3.25), pour la direction de maillage normale à la frontière, est remplacée par une formulation décentrée, à trois points, vers l'intérieur du domaine de calcul. Les cas particuliers des cellules frontières du domaine de calcul sont examinés plus loin dans la partie traitant les conditions aux limites (voir chapitre IV.5.2).

### III.3.2 - Etape implicite

Connaissant la solution  $\widehat{W}^{n+1}$  dans la cellule  $\Omega(i, j)$ , la partie implicite du schéma appliquée à cette cellule s'écrit :

$$\left( \frac{y^r \Delta W S}{\Delta t} \right)_{i,j} + \sum_{k=1}^2 \left( |E_k^+ + E_k^-| \right) = \left( \frac{y^r \Delta \widehat{W}^{n+1} S}{\Delta t} \right)_{i,j} \quad (3.26)$$

avec :  $\Delta \widehat{W}^{n+1} = \widehat{W}^{n+1} - W^n$

$|E_k^+$  et  $|E_k^-$  sont les flux à travers les facettes  $C_k^+$  et  $C_k^-$  de la cellule  $\Omega(i, j)$ .

Chacun des flux  $|E_k^\pm$  se décompose en une partie contenant les dérivées d'espace de  $\Delta W$  et une partie ne contenant pas ces dérivées.

Ces flux s'écrivent sous la forme :

$$|E_k^\pm = |A_k^\pm - |B_k^\pm$$

Par exemple, les termes  $|A_1^\pm$  qui ne contiennent pas de dérivées d'espace de  $\Delta W$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} |A_1^\pm = & \Delta t \left[ a \bar{y}^r \frac{\partial F_\beta^I}{\partial W_e}(\bar{F}) - \frac{1}{2} \bar{y}^r \frac{\partial F_\beta^V}{\partial W_e}(\bar{F}, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \bar{y}^r \frac{\partial^2 F_\beta^V}{\partial x_e \partial y_e}(\bar{F}, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}) - \frac{1}{2} \mu \frac{\partial G_\beta}{\partial W_e}(\bar{F}) \right] \left( \frac{\Delta W_e}{\Delta t} \right)^n N_{\beta 1}^\pm \Delta l_1^\pm \\ & + \mu \frac{\Delta t}{2} \frac{\lambda_{i,j}^n}{Re y} \left( \frac{\partial V_\beta}{\partial W_e}(\bar{F}) \right)^n \left( \frac{\Delta W_e}{\Delta t} \right)^n N_{\beta 1}^\pm \Delta l_1^\pm \end{aligned} \quad (3.27)$$

où les composantes  $\partial f_e / \partial x_\beta$  de  $\partial f / \partial x_\beta$  sont évaluées à l'aide de la formule (3.25).

Les termes  $B_1^\pm$  qui contiennent des dérivées d'espace de  $\Delta W$  s'écrivent :

$$B_1^\pm = \Delta t \left[ \bar{y}^\pi \left[ \frac{\partial}{\partial x_\epsilon} \left( \frac{\partial F_\beta^V}{\partial q_{\ell\epsilon}} (F) \frac{\Delta W_\epsilon}{\Delta t} \right) - \frac{\partial F_\beta^I}{\partial W_\epsilon} (F) \left( \frac{\partial F_{\epsilon\ell}^I}{\partial W_\kappa} (F) \frac{\partial (\Delta W_\kappa)}{\partial x_\epsilon} \right) \right] \right]_{i \pm 1/2, j}^n N_{\beta 1}^\pm \Delta \ell_1^\pm \quad (3.28)$$

Les dérivées d'espace qui apparaissent dans l'expression (3.28) sont évaluées à partir de la formule (3.25) qui fait intervenir les valeurs de  $\Delta W$  aux points adjacents aux facettes  $C_1^+$  dans les deux directions de maillage (i, j).

Par exemple, pour la facette  $C_1^+$  indiquée par  $(i + 1/2, j)$ , les points intervenant dans la formule (3.25) sont repérés par les indices suivants :  $(i, j)$ ,  $(i + 1, j)$ ,  $(i, j \pm 1)$  et  $(i + 1, j \pm 1)$ .

La contribution dans la direction j rendrait difficile la factorisation ultérieure de l'opérateur implicite bidimensionnel en une série d'opérateurs monodimensionnels. Aussi néglige-t-on la contribution dans cette direction ; l'erreur que l'on commet disparaissant à l'état stationnaire.

De cette façon, les expressions de  $B_1^+$  et  $B_1^-$  s'écrivent :

$$B_1^+ = \frac{\Delta t}{2} \left\{ \left( \bar{y}^\pi \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial x_\epsilon} \right)_{i+1/2, j} \left[ \left( \frac{\partial F_\beta^V}{\partial q_{\ell\epsilon}} (F) \frac{\Delta W_\epsilon}{\Delta t} \right)_{i+1, j} - \left( \frac{\partial F_\beta^V}{\partial q_{\ell\epsilon}} (F) \frac{\Delta W_\epsilon}{\Delta t} \right)_{i, j} \right] - \left[ \bar{y}^\pi \frac{\partial F_\beta^I}{\partial W_\epsilon} (F) \left( \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial x_\epsilon} \frac{\partial F_{\epsilon\ell}^I}{\partial W_\kappa} (F) \right) \right]_{i+1/2, j} \left( (\Delta W_\kappa)_{i+1, j} - (\Delta W_\kappa)_{i, j} \right) \right\} N_{\beta 1}^+ \Delta \ell_1^+ \quad (3.29a)$$

$$B_1^- = \frac{\Delta t}{2} \left\{ \left( \bar{y}^n \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial x_E} \right)_{i-1/2, j} \left[ \left( \frac{\partial F_B^V(\bar{F})}{\partial q_{EE}} \frac{\Delta W_E}{\Delta t} \right)_{i, j} - \left( \frac{\partial F_B^V(\bar{F})}{\partial q_{EE}} \frac{\Delta W_E}{\Delta t} \right)_{i-1, j} \right] \right. \\ \left. - \left[ \bar{y}^n \frac{\partial F_B^I(\bar{F})}{\partial W_E} \left( \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial x_E} \frac{\partial F_{EE}^I(\bar{F})}{\partial W_K} \right) \right]_{i-1/2, j} \left[ \left( \Delta W_K \right)_{i, j} - \left( \Delta W_K \right)_{i-1, j} \right] \right\}^n N_{\beta 1}^- \delta \bar{e}_i^- \quad (3.29b)$$

où les dérivées de maillage  $\partial \bar{F}_1 / \partial x_E$  sont évaluées à l'aide de l'expression (3.25).

De cette façon, l'approximation de  $B_1^\pm$  ne fait intervenir que 3 valeurs de  $\Delta W^n$  dans la direction  $i$ , à savoir :

$$\Delta W_{i-1, j}^n ; \Delta W_{i, j}^n \text{ et } \Delta W_{i+1, j}^n$$

Le calcul des flux  $B_2^\pm$  s'effectue de manière semblable à celui de  $B_1^\pm$ , cette fois-ci, en négligeant la contribution dans la direction  $i$ .

Ainsi, l'équation (3.26) prend la forme suivante :

$$\left( I + \Lambda_1 + \Lambda_2 \right)^n \Delta W_{i, j}^n = \left( \widehat{W}^{n+1} - W^n \right)_{i, j} \quad (3.30)$$

où  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  sont des opérateurs aux différences finies, à 3 points, dans la direction  $i$  et  $j$  respectivement et  $I$  désignant la matrice identité.

Par exemple, l'opérateur  $\Lambda_1$  appliqué à  $\Delta W_{i, j}^n$  s'écrit :

$$\Lambda_1^n \Delta W_{i, j}^n = \Lambda_1^n (\Delta W_E)_{i, j}^n = \left( L_{lm} \right)_{i, j}^n (\Delta W_m)_{i-1, j}^n + \\ \left( M_{lm} \right)_{i, j}^n (\Delta W_m)_{i, j}^n + \left( P_{lm} \right)_{i, j}^n (\Delta W_m)_{i+1, j}^n \quad (3.31)$$

où  $L_{lm}$ ,  $M_{lm}$  et  $P_{lm}$  ( $l, m = 1, 4$ ) sont des matrices  $(4 \times 4)$ . Quelques détails sur la détermination de ces matrices sont donnés en Annexe 3.

Le schéma implicite (3.30) est factorisé dans chaque direction de maillage pour une technique de directions alternées [12], qui conduit au schéma de résolution suivant :

$$\left( I + \Lambda_2 \right)^n \Delta W_{i,j}^* = \left( \hat{W}^{n+1} - W^n \right)_{i,j} \quad (3.32a)$$

$$\left( I + \Lambda_1 \right)^n \Delta W_{i,j}^{**} = \Delta W_{i,j}^* \quad (3.32b)$$

$$W_{i,j}^{n+1} = W_{i,j}^n + \Delta W_{i,j}^{**} \quad (3.32c)$$

A chaque pas de temps, seul un système linéaire à structure matricielle tridiagonale par blocs (4x4) est à résoudre dans chaque direction d'espace.

## CHAPITRE IV

## MISE EN OEUVRE DE LA METHODE

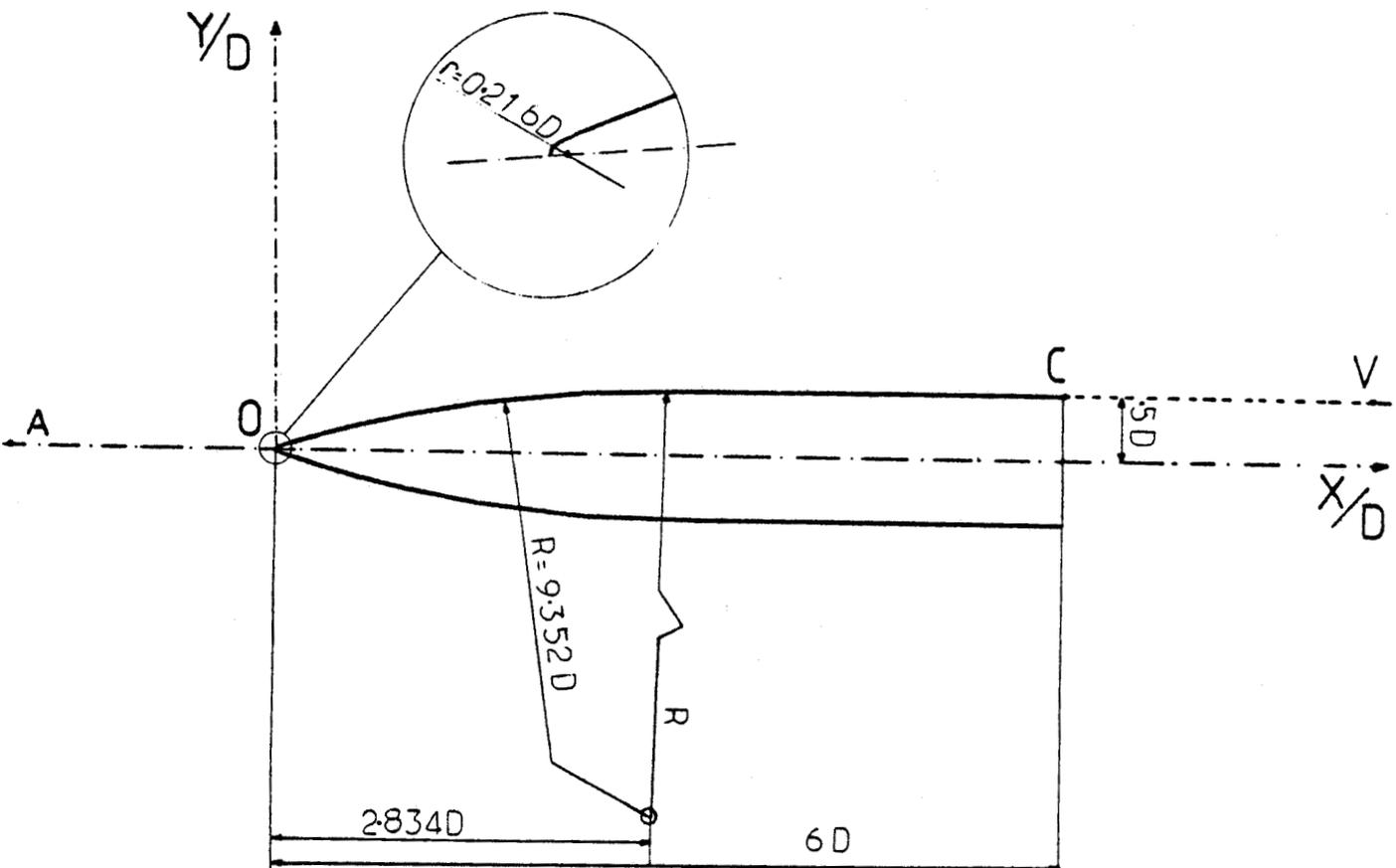
IV.1 - Domaine de calcul

La figure 9 montre le type de projectile étudié dans les présentes applications. Il se compose d'une ogive à nez arrondi prolongée par un cylindre de diamètre  $D$ . La longueur totale de l'engin est  $L = 6D$ . La pointe du projectile a été arrondie de manière à obtenir un maillage régulier dans cette région.

En raison de la symétrie de l'écoulement, le domaine de calcul est réduit à la partie supérieure de l'écoulement (voir figure 10).

Les frontières de ce domaine (voir figure 10) sont définies par :

- l'axe de symétrie amont du projectile (ligne d'indice de maillage  $i = 1$ ) correspondant à des facettes  $C_1^-$  ;
- l'axe de symétrie en aval du projectile (ligne d'indice de maillage  $j = 1$ ) correspondant à des facettes  $C_2^-$  ;
- la paroi du projectile (lignes d'indice  $j = j_{\text{paroi}}$  sur l'avant-corps et  $i = i_c$  sur la base du projectile) correspondant à des facettes  $C_2^-$  sur l'avant-corps et  $C_1^-$  sur la base du projectile ;
- les frontières fluide amont et aval passant par le centre de cellules de contrôle d'indice  $j = j_{\text{max}}$  et  $i = i_{\text{max}}$  respectivement .



TYPE DE PROJECTILE

$M_\infty = 0.8$

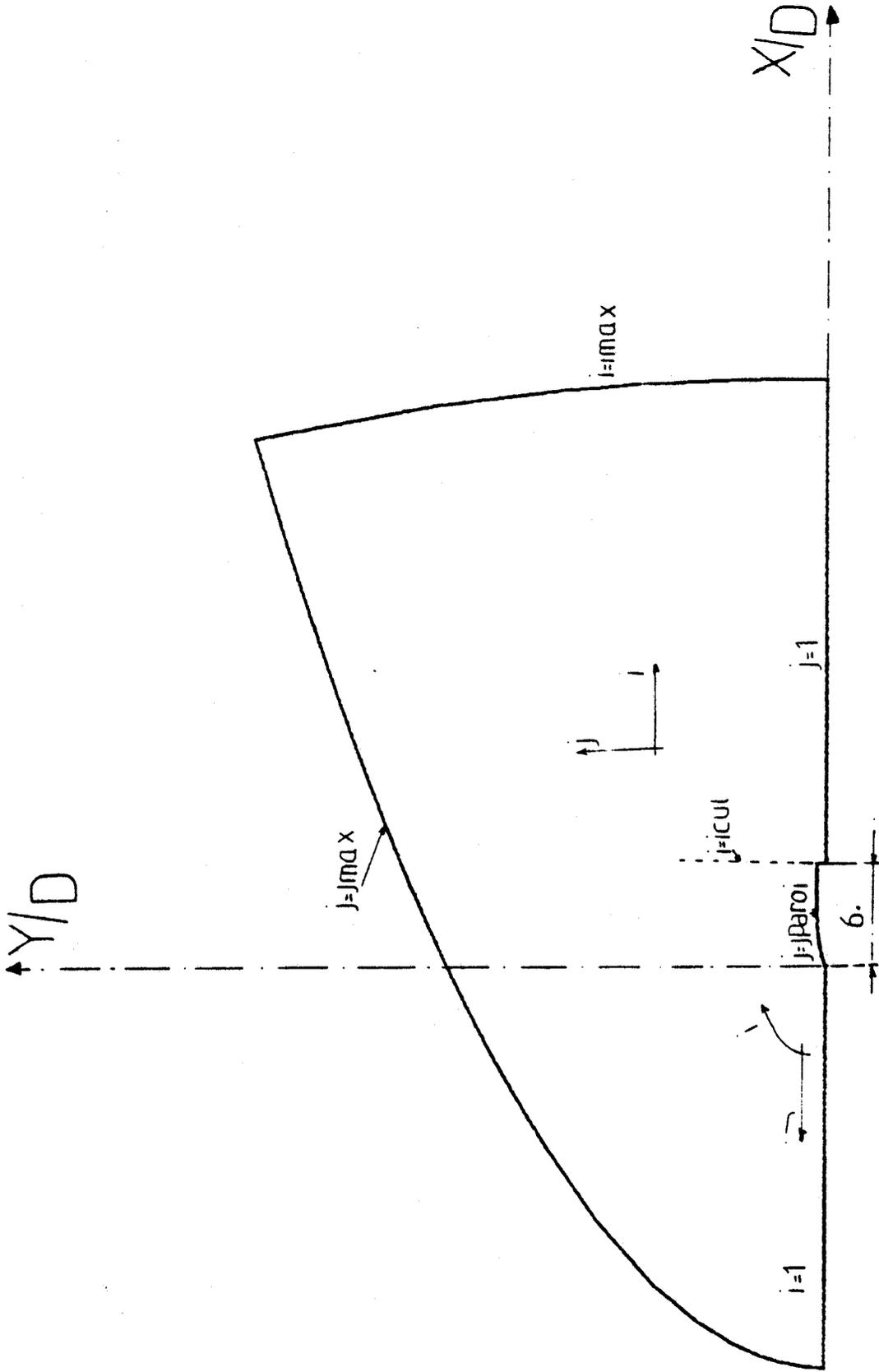


FIG. 10 Type de domaine de calcul étudié

FIG. 10



## IV.2 - Conditions aux limites et traitements particuliers

### IV.2.1 - Traitements aux parois

#### a) Cas laminaire

Sur les parois, des conditions d'adhérence et de flux de chaleur nul sont imposées à chaque étape de calcul :

$$u = v = 0 \quad (i \leq i_c, j = j_{\text{paroi}}) \quad \text{et} \quad (i = i_c, j \leq j_{\text{paroi}})$$

$$\frac{\partial e}{\partial \xi_2} = 0 \quad \text{pour} \quad i \leq i_c, \quad j = j_{\text{paroi}} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial e}{\partial \xi_1} = 0 \quad \text{pour} \quad i = i_c, \quad j \leq j_{\text{paroi}}$$

$\xi_1$  et  $\xi_2$  étant les coordonnées curvilignes associées aux directions de maillage  $i$  et  $j$  respectivement. Les dérivées d'espace  $\partial e / \partial \xi_1$  et  $\partial e / \partial \xi_2$  sont approchées par des formules aux différences à 2 points.

Ces conditions aux limites ne suffisent pas à la détermination de toutes les inconnues de calcul. La masse volumique est calculée, à la paroi, à partir de la pression par l'intermédiaire de l'équation d'état des gaz parfaits. La pression aux parois est ensuite calculée de façon explicite à partir de l'équation de quantité de mouvement projetée suivant la normale.

Aux étapes implicites, une condition simplifiée pour la pression, qu'on donne ci-dessus, est prescrite en plus des conditions (4.1). L'étape implicite dans la direction de maillage  $j$  (éq. 3.32a) nécessite la détermination de l'énergie interne et de la pression à la paroi sur l'avant-corps.

De même, l'étape implicite dans la direction de maillage  $i$  (éq. 3.32b) requiert l'évaluation de l'énergie interne et de la pression à la paroi de culot.

Les solutions à chaque étape sont calculées à partir des conditions suivantes :

$$\Delta u^* = 0 ; \Delta v^* = 0 ; \frac{\partial(\Delta e^*)}{\partial \xi_2} = 0 ; \frac{\partial(\Delta P^*)}{\partial \xi_2} = 0 \quad (4.2a)$$

Pour  $i \leq i_c$  ,  $j = j_{\text{Paroi}}$

et :

$$\Delta u^{**} = 0 ; \Delta v^{**} = 0 ; \frac{\partial(\Delta e^{**})}{\partial \xi_1} = 0 ; \frac{\partial(\Delta P^{**})}{\partial \xi_1} = 0 \quad (4.2b)$$

Pour  $i = i_c$  ,  $j \leq j_{\text{Paroi}}$

où les dérivées d'espace  $\partial/\partial \xi_1$  et  $\partial/\partial \xi_2$  sont également approchées par une formulation aux différences à 2 points. On peut remarquer qu'à l'étape implicite, on néglige la contribution des termes visqueux dans la condition sur la pression. Cependant, à la fin de cette étape, la pression finale est calculée aux frontières à partir de l'équation de quantité de mouvement normale.

#### b) Cas turbulent

Les différences sur les conditions aux limites entre le cas laminaire et le cas turbulent portent essentiellement sur la condition de vitesse à la paroi du culot et sur le calcul de la pression autour du projectile.

La pression finale est calculée à partir d'une forme simplifiée de l'équation de quantité de mouvement normale dans laquelle on néglige l'influence des termes visqueux, ce qui est une bonne approximation dans le cas des écoulements à grands nombres de Reynolds.

Cette équation s'écrit :

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \xi_2} = 0 \right|_{\substack{j = j_{\text{Paroi}} \\ i \leq i_c}} \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial P}{\partial \xi_1} = 0 \right|_{\substack{i = i_c \\ j \leq j_{\text{Paroi}}}} \quad (4.3)$$

A la paroi du culot, une condition de glissement pour la vitesse  $\vec{V} \cdot \vec{N} = 0$  ( $\vec{N}$  étant la normale à la paroi) est prescrite au lieu de la condition d'adhérence décrite dans le cas laminaire. Les raisons de ce choix sont liées au modèle de turbulence (trop simplifié) utilisé qui ne tient compte que la direction principale de l'écoulement\*.

#### Récapitulation des conditions sur la paroi

Le tableau suivant donne une récapitulation des conditions appliquées sur l'avant-corps du projectile.

Etape explicite	$u = v = 0$ $\partial e / \partial \xi_2 = 0$
Etape implicite	$\Delta u^* = \Delta v^* = 0$ $\partial(\Delta e^*) / \partial \xi_2 = 0$ $\partial(\Delta P^*) / \partial \xi_2 = 0$

A la fin de chaque itération, la pression finale est calculée, soit avec l'équation de quantité de mouvement normale (cas laminaire), soit à partir de l'équation (4.3) (cas turbulent).

\* L'application d'une condition d'adhérence sur le culot ferait développer une couche limite que le modèle utilisé ne pourrait pas prendre correctement en compte.

#### IV.2.2 - Traitement particulier des flux aux parois

On décrit ici le traitement particulier effectué dans le calcul des flux aux parois du projectile. Ce traitement concerne les facettes  $C_2^-$ ,  $\tilde{C}_2^-$  sur l'avant-corps et  $C_1^-$ ,  $\tilde{C}_1^-$  sur la base du projectile et tient compte des conditions aux limites obtenues précédemment.

#### A - Traitement particulier à l'étape explicite

##### a) Calcul des flux à la paroi

Dans le calcul des flux pour le correcteur  $S_2^-$  et  $S_1^-$ , respectivement sur l'avant-corps et au culot du projectile (voir annexe 2), les valeurs moyennes  $\bar{f}^n$  et les valeurs prédites  $\bar{f}^{n+1}$  sont remplacées par les valeurs parois provenant du traitement à la limite à l'instant  $n$ .

Les dérivées des termes visqueux sont évaluées à partir de (3.25) en utilisant une formule décentrée, à 3 points, dans la direction de maillage normale aux parois. On donne ici l'exemple du calcul d'un flux  $S_2^-$  à travers le contour  $C_2^-$  à la paroi de l'avant-corps du projectile.

La figure 11 montre les points intervenant dans le calcul des dérivées des termes visqueux en un point  $M$  situé au centre de  $C_2^-$ .

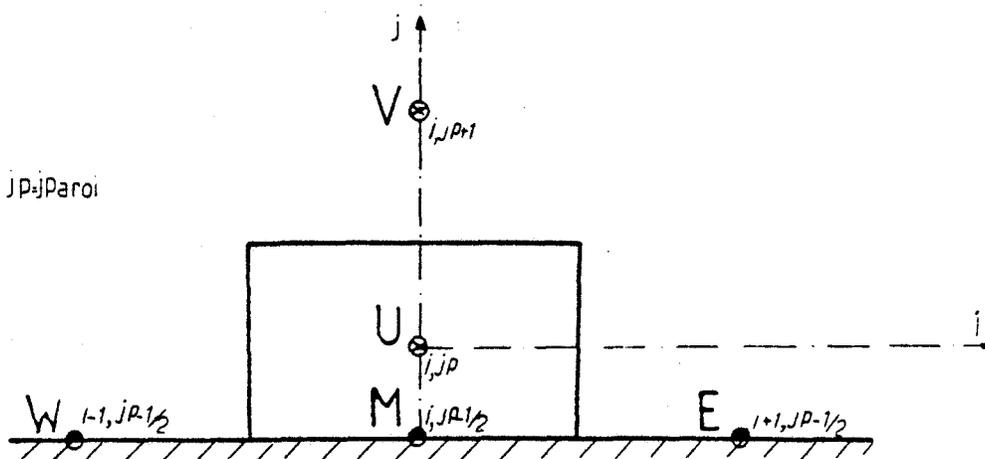


FIG.11 Calcul du gradient de  $\Phi$  à la paroi (M)

La formule (3.25) est utilisée en remplaçant  $\varphi_{SN}$  (figure 6) par  $\varphi_{MUV}$  défini par :

$$\varphi_{MUV} = -8\varphi_M + 9\varphi_U - \varphi_V, \quad \varphi = (\phi, x, y)$$

Un traitement semblable des flux est effectué aux prédicteurs :

- en i sur l'avant-corps pour le flux à travers la facette paroi  $\widetilde{C}_2^-$  d'une part ;
- en j au culot pour le flux à travers la facette paroi  $\widetilde{C}_1^-$  d'autre part.

Enfin, il existe le cas spécial de facettes  $\widetilde{C}_2^-$  et  $\widetilde{C}_1^-$  dont seulement une partie est à traiter à partir des conditions de paroi.

Le traitement de ce cas spécial qui se rencontre à la pointe supérieure du culot est détaillé ci-dessous.

#### b) Calcul des flux à la pointe supérieure du culot

Dans l'étape prédicteur en i sur l'avant-corps, le calcul du flux à travers le contour  $\widetilde{C}_2^-$  est décomposé en 2 parties, d'une part une moitié de flux à travers le contour  $\widetilde{C}_{2S}$  (contour paroi), et d'autre part l'autre moitié à travers le contour  $\widetilde{C}_{2F}$  (contour fluide).

Les figures (12-a) et (12-b) montrent les points intervenant dans le calcul de ces flux. Pour la facette  $\widetilde{C}_{2S}$ , la partie fluide parfait du flux est calculée avec les valeurs au point M, la partie fluide visqueux fait intervenir les points M, U, V, E et W.

Dans le calcul du flux à travers la facette  $\widetilde{C}_{2F}$ , on utilise respectivement le point M pour la partie fluide parfait et les points W, E, N et S pour la partie fluide visqueux.

Cette décomposition en 2 parties des contours intervient également dans le calcul du prédicteur en j à la pointe supérieure du culot pour le calcul du flux à travers  $\widetilde{C}_1^-$ .

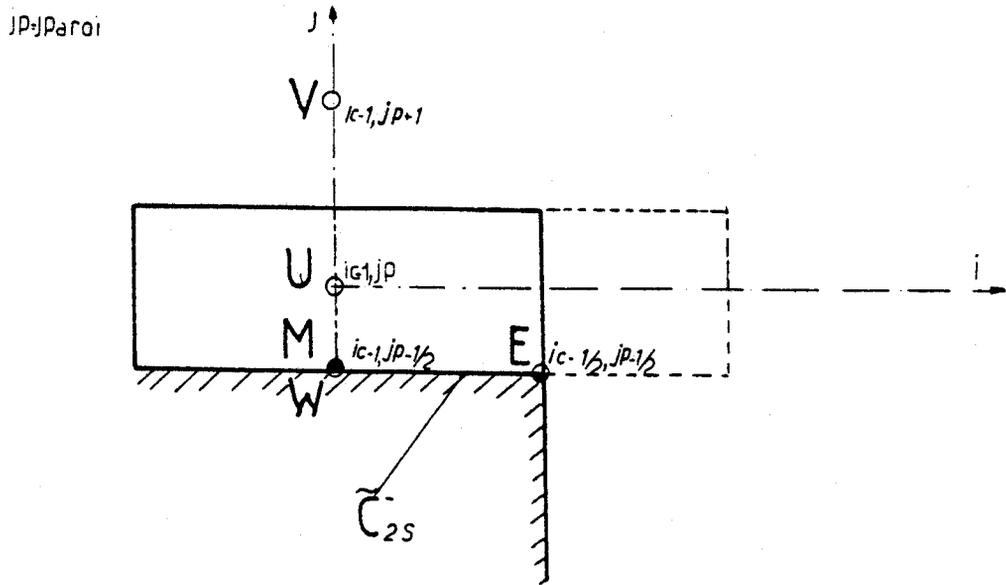
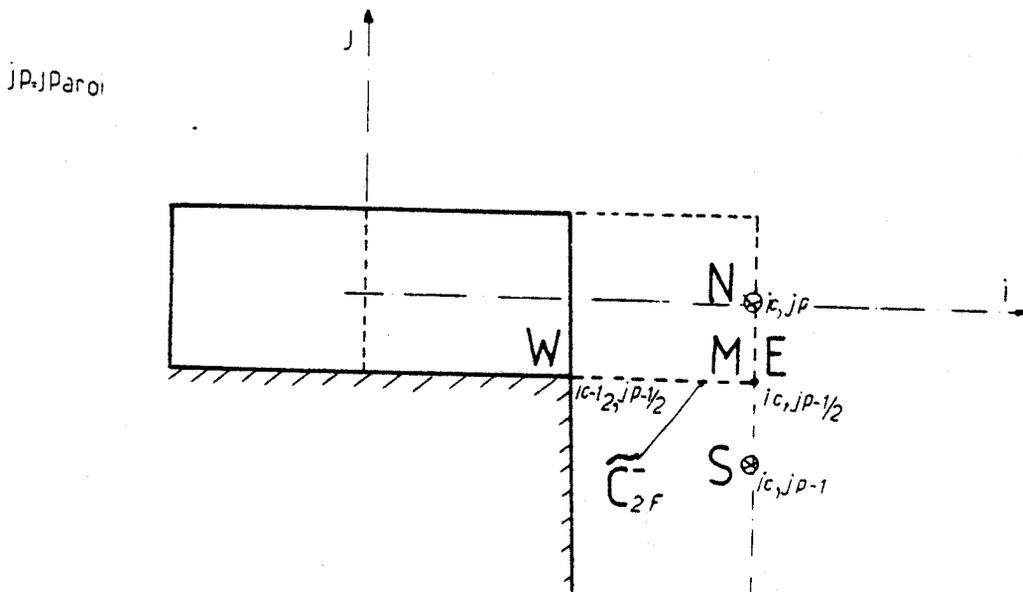


FIG. 12a

calcul du gradient de  $\Phi$  sur la facette  $\tilde{C}_{2S}^-$



BU  
LILLE

FIG. 12b

calcul du gradient de  $\Phi$  sur la facette  $\tilde{C}_{2F}^-$

## B - Traitement particulier à l'étape implicite

### a) Calcul des flux à la paroi

Considérons l'exemple du calcul du flux à travers une facette paroi  $C_1^-$  de la base du projectile dans l'étape implicite en  $i$ . Ce flux à travers la facette paroi repéré par l'indice  $(iC - 1/2), j$  s'écrit :

$$E_1 \Big|_{iC-1/2, j} = A_1^- \Big|_{iC-1/2, j} - B_1^- \Big|_{iC-1/2, j} \quad (4.4)$$

où  $A_1^- \Big|_{iC-1/2, j}$  et  $B_1^- \Big|_{iC-1/2, j}$  sont données par les expressions (3.27), (3.29a) et (3.29b) appliquées à la paroi et dans lesquelles les valeurs moyennes  $\bar{A}^n$  et  $\overline{\Delta W}^n$  sont remplacées par leurs valeurs à la paroi.

Quant aux dérivées d'espace, elles sont discrétisées à partir de la formule (3.25) en utilisant le décentrement cité plus haut.

De cette façon, l'évaluation de  $A_1^- \Big|_{iC-1/2, j}$  ne fait intervenir que la valeur de  $\Delta W^n$  à la paroi. L'évaluation de  $B_1^- \Big|_{iC-1/2, j}$  fait intervenir les valeurs de  $\Delta W^n$  à la paroi, au centre de la cellule d'indice  $(iC, j)$  et au centre de la cellule d'indice  $(iC + 1, j)$ .

### b) Résolution à la paroi

L'opérateur  $\Lambda_1$  appliqué à  $\Delta W_{i,j}^n$  (voir équation 3.31) s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \Lambda_1 (\Delta W_l)^n_{i,j} &= (L'_{lm})^n_{i,j} (\Delta W_m)^n_{iC-1/2, j} \\ &+ (M'_{lm})^n_{i,j} (\Delta W_m)^n_{iC, j} + (P'_{lm})^n_{i,j} (\Delta W_m)^n_{iC+1, j} \end{aligned} \quad (4.5)$$

où  $L'_{lm}$  et  $M'_{lm}$  et  $P'_{lm}$  ont des expressions semblables à  $L_{lm}$ ,  $M_{lm}$  et  $P_{lm}$  (voir Annexe 3).

L'application des conditions aux limites (4.2b) au point  $(iC - 1/2, j)$  fournit les relations complémentaires pour le démarrage du processus de double balayage utilisé dans la résolution du système linéaire correspondant à l'équation (3.32b).

#### IV.2.3 - Calcul de la pression finale dans le cas laminaire

A la fin de chaque itération, la solution à l'instant  $n + 1$  est connue au centre de chaque cellule de contrôle. Les conditions aux limites sont donc traitées de manière explicite. A la paroi, l'énergie est évaluée à l'aide des conditions (4.1).

La pression finale est calculée à partir de l'expression suivante :

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \xi_2} \right|_{j=\text{paroi}} = \frac{1}{\text{Re}_y} \left[ \left( \frac{\partial \zeta_{\varepsilon m}}{\partial x_m} + \frac{S_\varepsilon}{y^2} \right) \frac{\partial x_\varepsilon}{\partial \xi_2} \right] \quad (\varepsilon = 1, 2) \quad (4.6)$$

( $m = 1, 2$ )

écrite ici pour la paroi de l'avant-corps du projectile (voir figure 13) où  $\xi_2$  est la coordonnée correspondante à la direction de maillage  $j$  et  $\zeta_{\varepsilon m}$  le tenseur des contraintes exprimé par :

$$\zeta_{\varepsilon m} = \lambda \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\beta} \delta_{\varepsilon m} + \mu \left( \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_\varepsilon} \right) \quad (\beta = 1, 2) \quad (4.7)$$

Les composantes de  $S_\varepsilon$  de l'expression (4.6) sont données par :

$$S_1 = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.8)$$

$$S_2 = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y}$$

Dans ces équations, les  $u_\beta$  ( $\beta = 1, 2$ ) sont les composantes de la vitesse et  $\delta_{\varepsilon m}$  est le symbole de Kroenecker.

La relation (4.6) est discrétisée en un point paroi  $M$  à l'aide de la formule (3.25) en utilisant les points  $M, W', E'$  et  $U$  donnés sur la figure 13.

Les composantes du tenseur  $\zeta$  (équation 4.7) sont calculées en chacun de ces points à l'aide de la formule (3.25) également.

Les figures (14.a) et (14.b) montrent les points qui interviennent dans le calcul du tenseur des contraintes  $\zeta$  en un point paroi  $E'$  et en un point  $U$  intérieur au domaine de calcul.

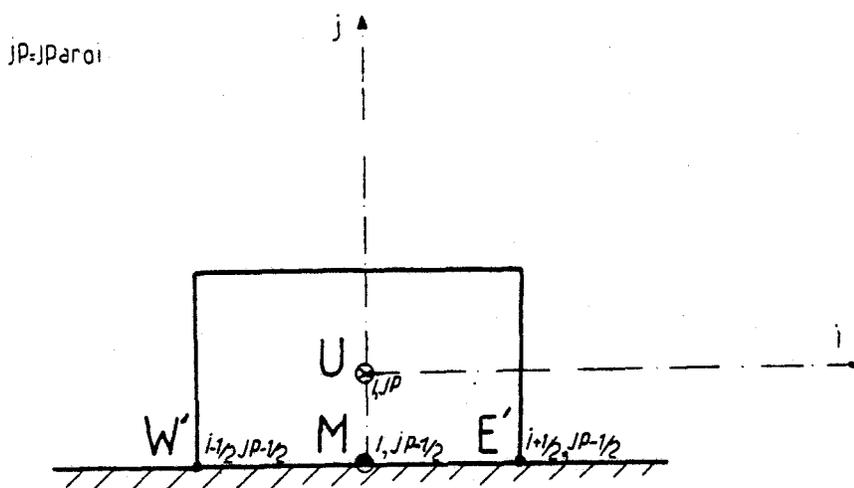


FIG.13

Calcul de la pression à la paroi (M)



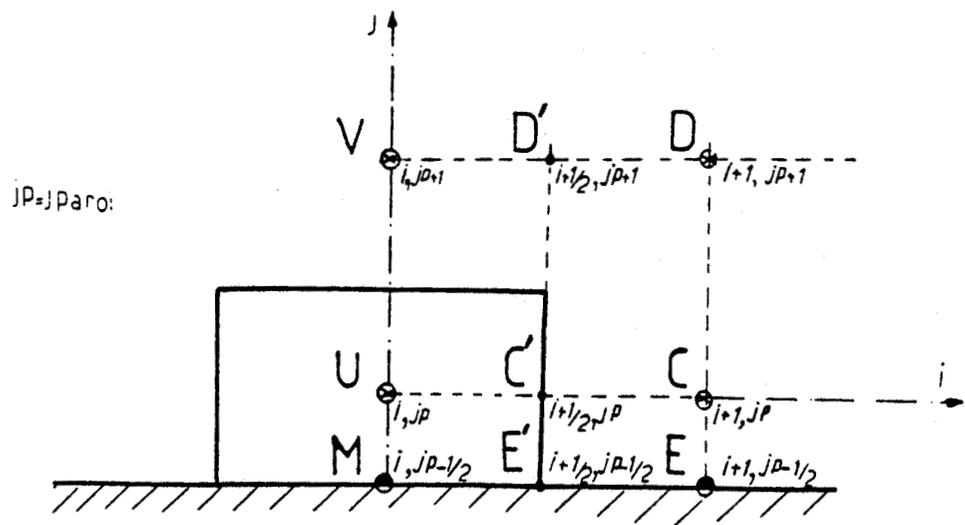


FIG. 14a

Calcul du tenseur  $\tau$  en  $E'$

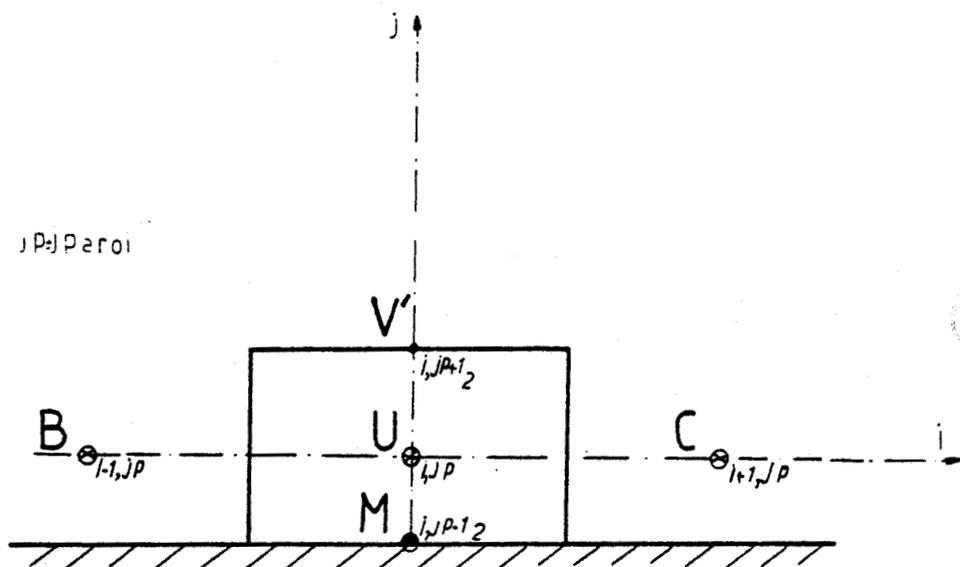


FIG. 14b

Calcul du tenseur  $\tau$  en U



#### IV.2.4 - Traitement sur la frontière aval ( $i = i_{\max}$ )

Dans les cellules de la frontière aval, les valeurs des inconnues sont extrapolées à partir des valeurs aux points antérieurs ( $i_{\max} - 1$ ), ce qui donne les valeurs finales de la vitesse et de la température. La pression finale est ensuite prise égale à la pression de l'écoulement uniforme amont. La masse volumique est enfin calculée à l'aide de l'équation d'état. A l'étape implicite en  $i$ , seule l'extrapolation précédente est effectuée.

#### IV.2.5 - Traitement sur la frontière amont ( $j = j_{\max}$ )

On suppose que la frontière amont est suffisamment loin du corps pour que le fluide ait un comportement de fluide parfait. Dans la région au voisinage de cette frontière, on néglige donc les termes visqueux dans les équations (1.8). Comme la vitesse normale à cette frontière est subsonique, seulement 3 conditions aux limites sont à imposer [22].

Dans les présents calculs, on fixe l'entropie, l'enthalpie totale et la direction de la vitesse. La condition supplémentaire est donnée par la relation de compatibilité associée à la caractéristique sortante qui s'écrit de la façon suivante :

$$P^{n+1} - P_S^{n+1} + (\rho c)^n (u^{n+1} - u_S^{n+1}) \underline{N} = 0 \quad (4.9)$$

avec  $c^2 = \gamma P / \rho$ ,  $\underline{N}$  la normale extérieure à la frontière. L'indice  $S$  se réfère aux valeurs frontières obtenues par extrapolation de la solution à partir des cellules intérieures.

Les conditions précédentes sont utilisées après l'étape implicite en  $i$ , la variation de la solution sur cette frontière est ignorée durant les étapes implicites.

#### IV.2.6 - Calcul des termes sources au voisinage de l'axe

Dans les cellules de maillage dont les facettes  $C_1^-$ ,  $\tilde{C}_1^-$ ,  $C_2^-$  ou  $\tilde{C}_2^-$  coïncident avec l'axe de symétrie (voir figure 10), la contribution visqueuse  $(\lambda + 2\mu) v/y$  du terme source  $H^p$  est évaluée en tenant compte du comportement de  $v$  par rapport à  $y$  au voisinage de l'axe de symétrie. Le terme  $v/y$  est remplacé par sa dérivée  $\partial v / \partial y$ , ce qui revient à évaluer l'intégrale suivante :

$$\iint_{S_{i,j}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (\lambda+2\mu)v_{/y} \\ 0 \end{bmatrix}^n ds \approx \iint_{S_{i,j}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (\lambda+2\mu)\partial v_{/y} \\ 0 \end{bmatrix}^n ds$$

(4.10)

$$\approx (\lambda+2\mu)_{i,j}^n \oint_{C_{i,j}} \mathcal{U}_\beta^n N_\beta dl$$

Les composantes de  $\mathcal{U}_\beta$  sont données par :

$$\mathcal{U}_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v\delta_{\beta 2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dans l'équation (4.10),  $(\lambda+2\mu)_{i,j}$  est une valeur moyenne de  $\lambda+2\mu$  dans la cellule  $\Omega(i,j)$  localisée au centre de celle-ci.

Aussi, on a ramené le calcul de l'intégrale de surface sur  $S_{i,j}$  à celui du calcul de flux classique à travers le contour  $C_{i,j}$ .

### IV.3 - Calcul du pas de temps

Dans les applications aux écoulements stationnaires, présentées ici, on utilise une technique d'accélération de la convergence basée sur la technique du pas de temps local en fonction de la taille de la maille et les caractéristiques de l'écoulement.

La valeur de ce pas de temps est obtenue à l'aide d'un critère de stabilité approché relatif aux schémas explicites :

$$(\Delta t)_{i,j} = \eta \left[ \min \left( \frac{d}{\bar{V} + c}, \frac{\rho P_n \text{Re}_y}{2\gamma \mu g} \right) \right]_{i,j} \quad (4.11)$$

où  $c$  est la célérité du son ( $c^2 = \gamma P/\rho$ ) et

$$g = \left[ \sum_{\beta=1}^2 \left( \frac{\partial \bar{\xi}_E}{\partial x_\beta} \frac{1}{\Delta \bar{\xi}_E} \right)^2 \right]_{i,j} \quad (E = 1,2) \quad (4.12)$$

avec  $\Delta \bar{\xi}_E$  le pas d'espace dans la direction  $\bar{\xi}_E$ ,  $d$  la distance la plus courte entre le centre de la cellule  $\Omega(i, j)$  et le centre des cellules adjacentes. Les dérivées  $\partial \bar{\xi}_E / \partial x_\beta$  de l'équation (4.12) sont approchées par la formule (3.25). Le paramètre  $\eta$  prend la valeur  $\eta = 0,8$  dans le cas d'un schéma explicite et une valeur supérieure dans le cas d'un schéma implicite.

L'utilisation de cette technique du pas de temps local est présentée dans chacune des applications.

## CHAPITRE V

### RESULTATS

La méthode implicite a été appliquée au calcul de l'écoulement de fluide compressible visqueux autour du projectile entier défini précédemment (voir figure 9). En ce qui concerne les valeurs des paramètres du schéma, les résultats présentés ici ont été obtenus avec  $\alpha = 1/2$ ,  $a = 0,1$ .

La valeur du paramètre  $b$  est calculée à partir de la relation (2.13) ( $b = 2a - 1$ ) :

Une viscosité artificielle explicite du quatrième ordre a été ajoutée à la méthode pour stabiliser la solution. Cette viscosité artificielle est appliquée sur la solution calculée à la fin de chaque itération de telle sorte que la solution finale soit obtenue à partir de :

$$f_c^{n+1} = f^{n+1} - \varepsilon_1 (\Delta \xi_1)^4 \frac{\partial^4 f^{n+1}}{\partial \xi_1^4} - \varepsilon_2 (\Delta \xi_2)^4 \frac{\partial^4 f^{n+1}}{\partial \xi_2^4} \quad (5.1)$$

où  $\Delta \xi_1$  et  $\Delta \xi_2$  sont les pas d'espace dans les directions  $i$  et  $j$  respectivement. Les dérivées d'espace  $\partial^4/\partial \xi_1^4$  et  $\partial^4/\partial \xi_2^4$  sont approchées par une formulation centrée, à 5 points.

La figure 15 montre le type de maillage utilisé pour l'ensemble du domaine de calcul. La première partie de ce chapitre concerne les résultats obtenus dans l'étude de l'écoulement laminaire à un nombre de Mach infini  $M_\infty = 0,8$  et pour deux valeurs du nombre de Reynolds (basé sur le diamètre du cylindre),  $Rey = 500$  et  $Rey = 5\,000$ .

La deuxième partie de ce chapitre concerne les résultats obtenus dans le cas de l'écoulement turbulent à  $M_\infty = 0,8$  et  $Rey = 500\,000$ . Dans ce dernier cas, la méthode discrétise les équations de Navier-Stokes moyennées, où la viscosité turbulente est calculée à partir d'un modèle algébrique de type longueur de mélange [16]. Ces équations se déduisent des équations (1.8) en remplaçant le coefficient de viscosité  $\mu$  par  $(\mu_l + \mu_t)$  dans le tenseur des contraintes visqueux et le coefficient  $\mu/Pr$  par  $(\mu_l/Pr_l + \mu_t/Pr_t)$  dans l'équation de l'énergie ;  $\mu_l$  et  $\mu_t$  sont respectivement les coefficients de viscosité laminaire et turbulent ; de même,  $Pr_l$  et  $Pr_t$  sont respectivement les nombres de Prandtl laminaire et turbulent. Le passage des équations instationnaires aux équations moyennées est exposé en annexe 4. On détaille également dans cet annexe le modèle de turbulence utilisé.

## V.1 - Cas laminaire

Les cas de calcul présentés ici n'ont pas fait l'objet de comparaison avec l'expérience, ils ont seulement servi à la mise au point de la méthode. Le maillage contient 110 cellules dans la direction de l'écoulement dont 45 sur l'avant-corps du projectile et 51 cellules dans la direction transversale dont 27 sur la base. Une vue partielle du maillage dans la région du culot est présentée sur la figure 16.

Des resserrements de maillage ont été effectués dans les régions à fort gradient, en particulier, au bord d'attaque, au voisinage du culot, ainsi que dans la région où est supposée situé le point de recollement.

Sur la base du projectile, les points sont distribués de manière à obtenir deux resserrements dans la direction transversale, l'un au voisinage de la pointe supérieure du culot et l'autre au voisinage de l'axe de symétrie.

Le pas d'espace minimum se situe au bord d'attaque et vaut :  
 $\Delta x = 0,0015D$  et  $\Delta y = 0,001D$ .

Les coefficients de viscosité  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  des termes de viscosité artificielle de l'équation (5.1) ont été fixés à 0,001.

Pour les 2 applications, la solution est obtenue après 1 600 itérations avec un pas de temps local 8 fois plus grand que le pas de temps explicite calculé à partir du critère de stabilité (4.11) avec  $\eta = 0,8$ .

L'histoire de la convergence pour les 2 cas de calcul est montrée sur les figures (17-a) et (17-b) où sont représentés les résidus maximaux (norme  $L_\infty$ ).

Les figures (18-a) et (18-b) montrent les valeurs du coefficient de pression ( $C_p = (P - P_\infty) / 1/2 \rho_\infty V_\infty^2$ ) le long de la ligne AOCV défini sur la figure 9. Sur la ligne AO qui correspond à l'axe de symétrie amont, un certain manque de précision a été observé sur les traitements des termes sources, ce qui engendre une oscillation sur la courbe des CP dans le calcul à  $Rey = 500$ , qui disparaît dans le calcul à  $Rey = 5\ 000$ . On peut remarquer une variation brusque de la courbe des CP au niveau de la pointe supérieure du culot qui correspond à la déviation importante de la vitesse dans cette région. Cette déviation est beaucoup plus importante dans le calcul à  $Rey = 500$  que dans celui à  $Rey = 5\ 000$ . Les figures (19-a), (19-b) montrent les profils de vitesse dans la région du culot, la zone de recirculation s'étend très en aval du culot au fur et à mesure que l'on augmente le nombre de Reynolds. Quelques profils de vitesse ( $u, v$ ) en amont et en aval du culot sont donnés sur les figures 20-a, 20-b et 20-c. Enfin, les lignes isobares ( $P/P_\infty$ ) dans la région du culot sont montrées sur les figures 21 et 22.

Le niveau de pression au culot est satisfaisant dans les résultats à  $Re_y = 500$  (fig. 21), et semble trop élevé à  $Re_y = 5\ 000$  (fig. 22). Ceci est probablement dû, d'une part à un manque de convergence de la solution numérique, ce qui est par ailleurs montré sur la courbe de convergence (fig. 17-b), et d'autre part à une inadaptation du maillage pour ce nombre de Reynolds.

Des calculs supplémentaires devraient être effectués sur ces configurations pour obtenir des solutions plus précises.

## V.2 - Cas turbulent

Le maillage contient 90 cellules dans la direction de l'écoulement dont 46 sur l'avant-corps du projectile et 60 dans la direction transversale dont 27 sur la base. Une vue partielle du maillage dans la région du culot est présentée sur la figure 23.

Les pas d'espace minimaux sont situés au bord d'attaque ( $\Delta x = 9 \cdot 10^{-4}D$ ,  $\Delta y = 3,5 \cdot 10^{-4}D$ ) et à la pointe supérieure du culot ( $\Delta x = 8 \cdot 10^{-4}D$ ,  $\Delta y = 3,5 \cdot 10^{-4}D$ ).

Le domaine de calcul s'étend à une distance de 4 fois la longueur totale de l'engin à l'amont, de 5 fois cette longueur en aval et de 4 fois cette longueur dans la direction transversale.

La viscosité artificielle (5.1) a été ajoutée à la méthode avec les valeurs de  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  fixées à 0,002.

Les premiers calculs que nous avons effectués ont été obtenus en imposant la condition d'adhérence sur les parois y compris sur la base du projectile. Cependant, les essais ultérieurs effectués en imposant la condition de glissement sur la base ont montré que la solution obtenue était en meilleur accord avec les résultats expérimentaux [1] que la solution avec la condition d'adhérence.

Comme il a été dit précédemment, ceci est probablement dû au fait que le modèle utilisé ne peut tenir compte de façon satisfaisante de la couche limite se développant sur le culot.

La solution présentée est obtenue après 2.800 itérations de calcul avec un pas de temps local 8 fois supérieur au pas de temps explicite calculé à partir du critère de stabilité (4.11) avec  $M_1 = 0,75$ .

Derrière le culot, une technique de pas de temps localement constant par ligne d'indice (i) est utilisée de la façon suivante :

Pour  $i$  fixé, connaissant les pas de temps locaux  $(\Delta t)_{i,j\text{sup}}$  et  $(\Delta t)_{i,j\text{inf}}$  (voir figure 24) aux points N et S respectivement, le pas de temps utilisé pour les cellules ( $\Omega(i, 1)$  à  $\Omega(i, j\text{sup})$ ) est donné par :

$$\Delta t_c = \frac{1}{2} \left[ (\Delta t)_{i,j\text{sup}} + (\Delta t)_{i,j\text{inf}} \right] \quad (5.2)$$

Cette technique permet d'obtenir une répartition homogène de valeurs de pas de temps dans la région en aval du culot.

Cette présente solution nécessite 19.000 secondes de temps CPU sur ordinateur Cray1S à partir d'un code de calcul non vectorisé.

La figure 25 montre les valeurs du coefficient de pression ( $C_p = (P - P_\infty) / 1/2 \rho_\infty V_\infty^2$ ) le long de la ligne AOCV définie sur la figure 9. La figure 26 montre les vecteurs vitesse dans la région du culot. Le point de recollement se situe à 1,5 fois le diamètre du cylindre derrière la base. Quelques profils de vitesse ( $u, v$ ) en amont et en aval du culot sont donnés sur les figures 27-a et 27-b.

Enfin, les lignes isobares ( $P/P_\infty$ ) sont montrées sur la figure 28.

#### Comparaison calcul expérience

Les expériences [1] ont été effectuées sur des configurations schématisant les écoulements d'arrière-corps de missiles, en régimes subsoniques ou supersoniques et à grand nombre de Reynolds (de l'ordre de  $10^6$ ).

En ce qui concerne les résultats qui nous intéressent, ils ont été effectués sur une configuration à partie cylindrique très allongée par rapport à la configuration de calcul. Cependant, la comparaison des résultats de niveau de pression au culot et de longueur de décollement est possible dans la mesure où la couche limite est pleinement développée dans chaque configuration (ce qui veut dire que la partie cylindrique du projectile doit être longue (dans notre cas 3D)) et que le nombre de Reynolds soit assez élevé.

La figure 29 montre la valeur de la pression de culot calculée et donne le niveau de pression moyen de l'expérience [1]. On peut remarquer un assez bon accord calcul-expérience. Quant à la longueur de décollement, l'expérience situe le point de recollement à environ 1,6D, ce qui est voisin du résultat de calcul (1,5D) (voir figure 26).

La solution numérique obtenue donne une représentation satisfaisante de la zone décollée et un bon niveau de pression au culot, et ceci avec un modèle de turbulence peu sophistiqué. Cependant, le coût de calcul pour obtenir une telle solution est encore très élevé, ce qui est dû à un manque actuel d'efficacité de la méthode qui fait l'objet des remarques développées ci-dessous.

## Remarques :

- 1) Le maillage utilisé est caractérisé par un resserrement dans la direction longitudinale de l'écoulement (lignes de maillage i) et un resserrement dans la direction transversale (lignes de maillage j) au bord supérieur du culot (voir figure 23).

Ces resserrements en i et en j se propagent respectivement jusqu'à la frontière extérieure et dans la région en aval du culot, là où il n'est pas nécessaire d'utiliser un maillage fin. En conséquence, la distribution des valeurs du pas de temps calculées à l'aide du critère (3.34) n'est pas homogène dans les régions où l'écoulement est pourtant relativement uniforme. Ceci freine la propagation des informations et diminue donc la vitesse de convergence de la solution numérique.

Une amélioration du maillage actuel consisterait, d'une part, à modifier le maillage en aval du culot, en adaptant approximativement les lignes de maillage j aux lignes de courant, et d'autre part, à répartir de manière plus homogène les points de maillage sur la frontière extérieure.

- 2) La valeur maximale du rapport entre le pas de temps implicite utilisé et le pas de temps explicite calculé à partir du critère de stabilité (4.11) est actuellement de l'ordre de 8. Cette limitation sur le pas de temps est essentiellement due à des difficultés de stabilité au bord d'attaque. Une meilleure résolution dans cette région permettrait d'augmenter sensiblement la valeur de ce rapport du pas de temps (de l'ordre de 15 à 20) et, par conséquent, d'améliorer l'efficacité de la méthode.
- 3) Compte tenu de l'hétérogénéité de la distribution du pas de temps dans le domaine de calcul, qui résulte de l'utilisation de la technique de pas de temps local, il serait intéressant de découper le domaine de calcul en sous-domaines, dans lesquels la solution serait calculée avec des valeurs du pas de temps plus homogènes. Ceci diminuerait les coûts de calcul car la méthode pourrait n'être appliquée, à chaque instant, que dans des sous-domaines particuliers.
- 4) La vectorisation du code de calcul doit permettre de diminuer les coûts de calcul d'un facteur au moins égal à 6 par rapport au présent code.

## CONCLUSION

Le développement d'un code de calcul pour la résolution des équations de Navier-Stokes complètes dans le cas d'écoulements de fluide compressible, à symétrie axiale, a été entrepris.

La méthode est fondée sur la discrétisation, à l'aide d'un schéma implicite, des équations de Navier-Stokes instationnaires bidimensionnelles.

Les applications de cette méthode concernent l'écoulement autour d'un projectile de type ogive-cylindre à un nombre de Mach  $M_\infty = 0,8$ .

Dans un premier temps, le cas des nombres de Reynolds (basés sur le diamètre de cylindre) modérés ( $Re = 500$  et  $Re = 5.000$ ) a été examiné.

Des résultats intéressants ont été dégagés notamment dans la zone de recirculation derrière le culot du projectile. Ensuite, le calcul de cas d'écoulement turbulent a été entrepris, il consiste en la résolution des équations de Navier-Stokes moyennées (à  $Re = 500.000$ ) ; la turbulence étant alors prise en compte par l'utilisation d'un modèle algébrique de type longueur de mélange. La solution numérique obtenue prédit un niveau de pression de culot et une longueur de décollement en bon accord avec les résultats expérimentaux.

Ces résultats sont suffisamment prometteurs pour envisager de poursuivre le développement de la méthode afin d'en améliorer l'efficacité, d'une part, et afin de calculer d'autres régimes d'écoulements d'autre part.

REFERENCES

- 1 Lacau R.G., Desnoyer D. and Delery J. "Analysis with a LDV system of Flows Downstream of Missile Aft-Bodies" - AGARD CP - 333, 1982.
- 2 Addy A.L., Korst H.H., White R.A. et Walker B.J. "A study of flow separation in the Base Region and its effects during powered flight" - Aerodynamic Drag, AGARD - CP - 124 - 1973.
- 3 Delery J. et Siriex M. "Ecoulements de culot" - AGARD - LS - 98 - 1979 ; voir aussi ONERA TP n° 1979 - 14F.
- 4 Nietubicz C.J., Pulliam T.H., and Steger J.L. "Numerical solution of the Azimuthal - Invariant Thin Layer Navier-Stokes Equations" - ARBRL - TR - 02227, U.S. Army Ballistic Research Laboratory, Aberdeen Proving Ground, MD 21005, March 1980 (AD AO 85 716).
- 5 Schiff L.B., and Steger J.L. "Numerical Simulation of Steady Supersonic Viscous Flows" - AIAA Journal, Vol. 18, n° 12, December 1980, pp. 1421-1430.
- 6 Hasen G.A. "Navier-Stokes solutions for a supersonic Coflowing axisymmetric Nozzle with a thick Base Annulus" - AFIT/DS/TAA 81-2 Air Force Institute of Technology, Wright Paterson, Ohio (1983).
- 7 Deiwert G.S. "A computational Investigation of Supersonic Axisymmetric Flow Over Boattails Containing a Centered Propulsive Jet" - AIAA 83 - 0462 - 1983.
- 8 Sahu J., Nietubicz C.J. and Steger J.L. "Numerical Computation of Base Flow for a Projectile at Transonic Speeds" - AIAA 82 - 1358 (1982).
- 9 Sahu J., Nietubicz C.J., and Steger J.L. "Navier-Stokes computations of Projectile Base Flow with and without Base Injection" - AIAA Paper 83 - 0462, January 1983.
- 10 Briley W.R. and MacDonald H. "Solution of the Three-Dimensionnal Compressible Navier-Stokes Equations by an Implicit Technique" - Lecture Notes in Physics, Vol. 35, 1975, pp. 105-110.
- 11 Beam R.M. and Warming R.F. "An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations" - AIAA Journal, Vol. 16, 1978, pp. 393-402.
- 12 Briley W.R. and MacDonald H. "On the structure and use of linearized Block Implicit Schemes" - JCP, Vol. 34, pp. 54-73.
- 13 Hollanders H., Lerat A., Peyret R. "3-D Calculation of Transonic Viscous Flows by an Implicit Method" - AIAA Paper 83 - 1953.

- 14 Lerat A. "Implicit Methods of Second-Order Accuracy for Euler Equations" - AIAA Paper 83 - 1925.
- 15 Lerat A., Sidès J. and Daru V. "Efficient Computation of Steady and unsteady transonic Flows by an Implicit Solver" in "Advances in Computational Transonics", edited by Habaschi W.G., Pineridge Press, 1984.
- 16 Baldwin B.S. and Lomax H. "Thin-Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows" - AIAA Paper 78-257, 1978.
- 17 Radiadou, Zeytounian "Eléments de la mécanique rationnelle des fluides", "Equations et résultats mathématiques sur l'existence et l'unicité des solutions", pp. 3-25.
- 18 Roger Peyret, and Henri Viviand "Computation of Viscous Compressible Flows Based on the Navier-Stokes Equations" - Agardograph - AG - 212, 1975.
- 19 P. Germain "Mécanique des milieux continus" - Ed. Masson.
- 20 Thommen H.U. "Numerical Integration of the Navier-Stokes Equations" - Z.A.M.P., Vol. 17, n° 3, 1966, pp. 369-384.
- 21 Richtmyer R.D., and Morton K.W. "Difference Methods for Initial-Value Problems" - 2nd ed., Interscience, New York, 1967.
- 22 Viviand H. and Veuillot J.P. "Méthodes pseudo-instationnaires pour le calcul d'écoulements transoniques" Onera Publication n° 1978-4, 1978.
- 23 H. Hollanders and H. Viviand "Numerical Treatment of Compressible high Reynolds Number Flows" - VKI - LS - 1979 - 6, Rode-St-Genèse, Belgium.
- 24 D. Vandrome, H. Haminh "Solution of the Compressible Navier-Stokes Equations", "Applications to Complex Turbulent Flows" - VKI - LS - 1984 - 04, 1984.
- 25 T. Cebeci et A.M.O. Smith "Analysis of the Turbulent Boundary Layers" - Academic Press, 1975.

ANNEXE 1PASSAGE DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES TRIDIMENSIONNELLES AUX EQUATIONS  
BIDIMENSIONNELLES AXISYMETRIQUES

En utilisant l'hypothèse de symétrie axiale (1.6), dans les équations de Navier-Stokes (1.1) écrites dans un repère cylindrique ( $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$ ,  $\vec{e}_\theta$ ) défini dans le chapitre I, les équations de conservation de la masse et de l'énergie s'écrivent :

$$\iiint_{\mathcal{V}} y \rho_t \, dz \, dy \, d\theta + \iint_{\delta\mathcal{V}} \left( -y \rho u \, dy \, d\theta + y \rho v \, dx \, d\theta \right) = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{V}} y (\rho E)_t \, dx \, dy \, d\theta + \iint_{\delta\mathcal{V}} - \left( \rho E u - \mu \tau_{xx} - \nu \tau_{xy} - k \frac{\partial T}{\partial x} \right) y \, dy \, d\theta \\ + \iint_{\delta\mathcal{V}} \left( \rho E v - \mu \tau_{xy} - \nu \tau_{yy} - k \frac{\partial T}{\partial y} \right) y \, dx \, d\theta = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

où  $\mathcal{V}$  est un volume de contrôle élémentaire défini sur la figure 2,  $\delta\mathcal{V}$  est la frontière de  $\mathcal{V}$ .

De même l'équation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{V}} y (\rho u)_t \, dx \, dy \, d\theta \, \vec{e}_x + \iint_{\delta\mathcal{V}} \left[ -(\rho u^2 + p - \tau_{xx}) y \, dy \, d\theta + (\rho uv - \tau_{zy}) y \, dx \, d\theta \right] \vec{e}_x \\ \iiint_{\mathcal{V}} y (\rho v)_t \, dx \, dy \, d\theta \, \vec{e}_y + \iint_{\delta\mathcal{V}} \left[ -(\rho uv - \tau_{zy}) y \, dy \, d\theta + (\rho v^2 + p - \tau_{yy}) y \, dx \, d\theta \right] \vec{e}_y \\ - \iint_{\delta\mathcal{V}} (p - \tau_{\theta\theta}) \, dz \, dy \, \vec{e}_\theta = \vec{0} \end{aligned} \quad (3)$$

Rappelons que l'hypothèse (1.6) suppose que toutes les quantités des équations (1), (2) et (3) ne dépendent pas de l'angle azimuthal  $\theta$ , excepté les vecteurs de base  $\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_\theta$ . On peut alors intégrer ces équations par rapport à  $\theta$  entre  $\theta_1$  et  $\theta_2$  (voir fig. 2 du chapitre I).

Après intégration en  $\theta$ , les équations scalaires de conservation de la masse et de l'énergie deviennent :

$$(\theta_2 - \theta_1) \left[ \iint_S y \rho_t \, dx \, dy + \oint_{(C)} -y \rho u \, dy + y \rho v \, dx \right] = 0 \quad (4)$$

$$(\theta_2 - \theta_1) \left[ \iint_S (PE)_t \, y \, dy \, dx + \oint_{(C)} - \left( PEu + P u - u \tau_{xx} - v \tau_{xy} - \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) y \, dy \right. \\ \left. + \oint_{(C)} \left( PEv + P v - u \tau_{xy} - v \tau_{yy} - \kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) y \, dx \right] = 0 \quad (5)$$

où  $S$  est une surface méridienne et  $C$  le contour de  $S$ .

Dans l'intégration en  $\theta$  de l'équation de quantité de mouvement (2), on peut séparer la contribution dans la direction axiale  $\vec{e}_x$ , qui ne dépend pas de  $\theta$ , des contributions dans les autres directions.

La projection de l'équation de quantité de mouvement sur  $\vec{e}_x$  s'écrit :

$$(\theta_2 - \theta_1) \left[ \iint_S y (\rho u)_t \, dx \, dy + \oint_{(C)} - (\rho u^2 + P - \tau_{xx}) y \, dy + (\rho u v - \tau_{xy}) y \, dx \right] = 0 \quad (6)$$

Quant aux contributions suivant  $\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_\theta$ , il faut remarquer, d'une part, que l'intégration en  $\theta$  de  $\vec{e}_y$  donne :

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{e}_y \, d\theta = - \left[ \vec{e}_{\theta_2} - \vec{e}_{\theta_1} \right] = \vec{e}_r \quad (7)$$

et d'autre part, que la contribution de l'intégrale :

$$\iint_{\delta v} (P - \zeta_{\theta\theta}) dx dy \vec{e}_\theta$$

dans le déplacement entre  $\theta_1$  et  $\theta_2$  devient :

$$\iint_{\delta v} (P - \zeta_{\theta\theta}) dx dy \vec{e}_\theta = \left[ \iint_S (P - \zeta_{\theta\theta}) dx dy \right] [\vec{e}_{\theta_2} - \vec{e}_{\theta_1}] \quad (8)$$

Après projection sur  $\vec{e}_r = (\vec{e}_{\theta_2} - \vec{e}_{\theta_1})$ , on obtient :

$$\iint_S (Pv)_c y dx dy + \oint_{(c)} - (Puv - \zeta_{xy}) y dy + (Pv^2 + P - \zeta_{xy}) y dx \quad (9)$$

$$- \iint_S (P - \zeta_{\theta\theta}) dx dy = 0$$

ANNEXE 2EXPRESSIONS DES FLUX A L'ETAPE EXPLICITE

Les flux  $R_k^\pm$  et  $S_k^\pm$  des expressions (3.21) et (3.23) du chapitre 3 s'écrivent :

$$R_1^\pm = \left[ y^\pi F_\varepsilon^I(A) - \pi G_\varepsilon(A) - y^\pi F_\varepsilon^V\left(A, \frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y}\right) \right]_{i \pm 1/2, j}^{\pm 1/2, j} \widetilde{N}_{\varepsilon 1}^\pm \widetilde{\Delta l}_1^\pm$$

$$+ \pi \frac{\bar{\lambda}_{i \pm 1/2, j}^n}{\text{Re } y} \left[ W_\varepsilon(A) \right]_{i \pm 1/2, j}^{\pm 1/2, j} \widetilde{N}_{\varepsilon 1}^\pm \widetilde{\Delta l}_1^\pm \quad (1)$$

$$R_2^\pm = \left[ y^\pi F_\varepsilon^I(\bar{A}) - \pi G_\varepsilon(\bar{A}) - y^\pi F_\varepsilon^V\left(\bar{A}, \frac{\partial \bar{A}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{A}}{\partial y}\right) \right]_{i+1/2, j \pm 1/2}^{\pm 1/2, j \pm 1/2} \widetilde{N}_{\varepsilon 2}^\pm \widetilde{\Delta l}_2^\pm$$

$$+ \pi \frac{\bar{\lambda}_{i+1/2, j}^n}{\text{Re } y} \left[ W_\varepsilon(\bar{A}) \right]_{i+1/2, j \pm 1/2}^{\pm 1/2, j \pm 1/2} \widetilde{N}_{\varepsilon 2}^\pm \widetilde{\Delta l}_2^\pm \quad (2)$$

$$S_1^{\pm} = \left[ \frac{1-2\alpha}{2\alpha} \bar{y}^{\pi} F_{\varepsilon}^I(\tilde{F}^{n+\alpha}) + \left(1 - \frac{1-2\alpha}{2\alpha}\right) \bar{y}^{\pi} F_{\varepsilon}^I(\bar{F}^n) - \pi G_{\varepsilon}(\bar{F}^n) \right]$$

$$- \bar{y}^{\pi} F_{\varepsilon}^V(\bar{F}^n, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}) \Bigg]_{i \pm 1/2, j} \left[ N_{\varepsilon 1}^{\pm} \Delta \rho_1^{\pm} + \pi \frac{\lambda_{i,j}^n}{\text{Rey}} \left[ W_{\varepsilon}(\bar{F}^n) \right]_{i \pm 1/2, j} N_{\varepsilon 1}^{\pm} \Delta \rho_1^{\pm} \right] \quad (3)$$

$$S_2^{\pm} = \left[ \frac{1-2\alpha}{2\alpha} \bar{y}^{\pi} F_{\varepsilon}^I(\tilde{F}^{n+\alpha}) + \left(1 - \frac{1-2\alpha}{2\alpha}\right) \bar{y}^{\pi} F_{\varepsilon}^I(\bar{F}^n) - \pi G_{\varepsilon}(\bar{F}^n) \right]$$

$$- \bar{y}^{\pi} F_{\varepsilon}^V(\bar{F}^n, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}) \Bigg]_{i, j \pm 1/2} \left[ N_{\varepsilon 2}^{\pm} \Delta \rho_2^{\pm} + \pi \frac{\lambda_{i,j}^n}{\text{Rey}} \left[ W_{\varepsilon}(\bar{F}^n) \right]_{i, j \pm 1/2} N_{\varepsilon 2}^{\pm} \Delta \rho_2^{\pm} \right] \quad (4)$$

avec :  $(f)^n = (f_m)^n = (p, u, v, e)^n = F(W_m^n) \quad (m = 1, 4)$

$$\tilde{F}_{i \pm 1/2, j}^{n+\alpha} = F[(\tilde{W}_m^{n+\alpha})_{i \pm 1/2, j}] ; \quad \tilde{F}_{i, j \pm 1/2}^{n+\alpha} = F[(\tilde{W}_m^{n+\alpha})_{i, j \pm 1/2}]$$

$$\bar{F}_{i \pm 1/2, j}^n = (F_{i, j} + F_{i \pm 1, j})^n / 2 ; \quad \bar{F}_{i, j \pm 1/2}^n = (F_{i, j} + F_{i, j \pm 1})^n / 2$$

$$\bar{F}_{i \pm 1/2, j \pm 1/2}^n = (F_{i, j} + F_{i, j \pm 1} + F_{i \pm 1, j} + F_{i \pm 1, j \pm 1})^n / 4$$

$$\bar{y}_{i \pm 1/2, j} = (y_{i, j} + y_{i \pm 1, j}) / 2 ; \quad \bar{y}_{i, j \pm 1/2} = (y_{i, j} + y_{i, j \pm 1}) / 2$$

Les composantes des normales aux facettes sont données par :

$$\vec{N}_1^\pm = (N_{\varepsilon_1}^\pm) = \frac{1}{\Delta l_1^\pm} \begin{pmatrix} -\Delta y \\ \Delta x \end{pmatrix}_{i \pm 1/2, \delta} \quad \text{avec:} \quad \Delta l_1^\pm = \left[ (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2} \right]_{i \pm 1/2, \delta}$$

$$\vec{N}_2^\pm = (N_{\varepsilon_2}^\pm) = \frac{1}{\Delta l_2^\pm} \begin{pmatrix} -\Delta y \\ \Delta x \end{pmatrix}_{i, \delta \pm 1/2} \quad \text{avec:} \quad \Delta l_2^\pm = \left[ (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2} \right]_{i, \delta \pm 1/2}$$



ANNEXE 3MATRICES JACOBIENNES

Les matrices (4 x 4)  $(L_{1m})$ ,  $(M_{1m})$ ,  $(P_{1m})$  sont obtenues après l'évaluation des flux à travers les facettes  $C_{1\pm}$  dans la direction de maillage  $i$ . Ces flux sont obtenus à l'aide des relations (3.29), (3.31a) et (3.31b) dans lesquelles les différentes matrices jacobiennes sont définies ci-dessous.

A.3.1 - Matrices jacobiennes pour le tenseur fluide parfait

$$\frac{\partial F_B^I}{\partial W_e} N_B = \begin{array}{c|ccc|c} & 0 & N_1 & N_2 & 0 \\ \hline & \frac{(\gamma-1)}{2} V^2 N_1 - \mu V_N & (2-\gamma)\mu N_1 + V_N & (1-\gamma)\nu N_1 - \mu N_2 & (\gamma-1)N_1 \\ & \frac{(\gamma-1)}{2} V^2 N_2 - \nu V_N & (1-\gamma)\mu N_2 + \nu N_1 & (2-\gamma)\nu N_2 + V_N & (\gamma-1)N_2 \\ & \left(\frac{\gamma-2}{2} V^2 - \frac{c^2}{\gamma-1}\right) V_N & \left(\frac{c^2}{\gamma-1} + \frac{V^2}{2}\right) N_1 & \left(\frac{c^2}{\gamma-1} + \frac{V^2}{2}\right) N_2 & \gamma V_N \\ & & + (1-\gamma)\mu V_N & + (1-\gamma)\nu V_N & \end{array}$$

où  $V^2 = u^2 + v^2$  et  $V_N = uN_1 + vN_2$



A.3.2 - Expression des matrices jacobiennes pour le tenseur visqueux

$$\frac{\partial F_{\beta}^V N_{\beta}}{\partial q_{e1}} = \frac{1}{\rho \text{Rey}}$$

0	0	0	0
$-(\lambda + \mu) \mu N_1 - \mu V_N$	$(\lambda + 2\mu) N_1$	$\mu N_2$	0
$-\mu \nu N_1 - \lambda \mu N_2$	$\lambda N_2$	$\mu N_1$	0
$\frac{\gamma \mu}{\rho c} (V^2 - E) N_1$	$(\lambda + 2\mu - \frac{\gamma \mu}{\rho c}) \mu N_1$	$\mu (1 - \frac{\gamma}{\rho c}) \nu N_1$	$\frac{\gamma \mu}{\rho c} N_1$
$-(\lambda + \mu) \mu V_N - \mu V^2 N_1$	$+ \lambda \nu N_2$	$- \mu \mu N_2$	

$$\frac{\partial F_{\beta}^V N_{\beta}}{\partial q_{e2}} = \frac{1}{\rho \text{Rey}}$$

0	0	0	0
$-\lambda \nu N_1 - \mu \mu N_2$	$\mu N_2$	$\lambda N_1$	0
$-\mu \mu N_1 - (\lambda + 2\mu) \nu N_2$	$\mu N_1$	$(\lambda + 2\mu) N_2$	0
$\frac{\gamma \mu}{\rho c} (V^2 - E) N_2$	$\mu \nu N_1$	$\lambda \nu N_1$	$\frac{\gamma \mu}{\rho c} N_2$
$-(\lambda + \mu) \nu V_N - \mu V^2 N_2$	$+ \mu (1 - \frac{\gamma}{\rho c}) \mu N_2$	$+ (\lambda + 2\mu - \frac{\gamma \mu}{\rho c}) \nu N_2$	

$$\left( \frac{\partial F_p^v}{\partial W_L} - \frac{\partial^2 F_p^v}{\partial z_2 \partial q_{2L}} \right) N_B = \frac{\mu - \lambda}{\rho \text{Re}_y}$$

○			
$(u v_2 - v u_2) N_1$	$-v y N_1$	$u y N_1$	○
$(v u_2 - u v_2) N_2$	$+v z N_2$	$-u z N_2$	

### A.3.3 - Matrices jacobienes pour les termes de révolution

$$\frac{\partial G_p N_p}{\partial W_L} = \frac{\lambda}{\text{Re}_y}$$

0	0	0	0
$-v N_1$	0	$N_1$	0
$-v N_2$	0	$N_2$	0
$-2v V_N$	$v N_1$	$V_N + v N_2$	0

$$\frac{\partial V_p N_p}{\partial W_L} =$$

0	0	0	0
$-u N_1$	$N_1$	0	0
$-v N_2$	0	$N_2$	0
0	0	0	0



ANNEXE 4EQUATIONS DE NAVIER-STOKES MOYENNEES ET MODELE DE TURBULENCE

Pour les écoulements turbulents, l'approche globale utilise les équations de Navier-Stokes moyennées, complétées d'un modèle de turbulence qui assure la fermeture du système utilisé.

A.4.1 - Equations de Navier-Stokes moyennées

Pour les fluides compressibles, les fluctuations de la masse volumique introduisent dans les équations moyennées, un nombre important de termes de corrélation supplémentaires par rapport au cas incompressible. L'utilisation de variables dépendantes pondérées par la masse permet de minimiser le nombre de ces termes supplémentaires. Le développement d'un tel concept n'est pas exposé ici, le lecteur intéressé par ce problème pourra consulter, par exemple, les références [23] et [24]. Pour chaque variable fluctuant  $\varphi$ , on définit une valeur moyenne  $\bar{\varphi}$  de  $\varphi$  et sa fluctuation  $\varphi'$  au sens classique. On introduit ensuite une valeur moyenne pondérée par la masse  $\tilde{\varphi}$  et sa fluctuation  $\varphi''$  à partir des relations suivantes :

$$\varphi = \bar{\varphi} + \varphi' \quad ; \quad \bar{\varphi}' = 0$$

$$\overline{\rho\varphi} = \bar{\rho} \tilde{\varphi} = \bar{\rho} \bar{\varphi} + \overline{\rho'\varphi'} \quad (1)$$

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \varphi'' \quad ; \quad \overline{\rho\varphi''} = 0$$

$$\bar{\rho} \bar{\varphi}'' = - \overline{\rho'\varphi'} = - \overline{\rho'\varphi''}$$

Ainsi, on définit par  $\tilde{\vec{v}}$  la valeur moyenne de la vitesse pondérée par la masse. Ce procédé est également appliqué pour la définition de la valeur moyenne  $\tilde{\epsilon}$  de l'énergie interne et de la valeur moyenne de l'énergie totale  $\tilde{E}$ , etc...

On obtient donc :

$$\overline{\rho \vec{V}} = \bar{\rho} \vec{V} \quad ; \quad \overline{\rho \vec{e}} = \bar{\rho} \vec{e} \quad ; \quad \overline{\rho \vec{E}} = \bar{\rho} \vec{E} \quad \text{etc. ....}$$

en utilisant ces relations dans les équations de Navier-Stokes instantanées (1.1), les équations de Navier-Stokes moyennées s'écrivent sous la forme différentielle suivante :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{\rho} \vec{V}) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \vec{V})}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{\rho} \vec{V} \otimes \vec{V} + \bar{P} \vec{i}) = \operatorname{div}(\bar{\zeta} + \zeta_R) \quad (3)$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \vec{E})}{\partial t} + \operatorname{div}\left[\left(\bar{\rho} \vec{E} + P\right) \vec{V}\right] = \operatorname{div}\left\{\vec{V}(\bar{\zeta} + \zeta_R) + \overline{\vec{V}'' \bar{\zeta}} - \bar{q} - \left[\rho \left(R'' + \frac{1}{2} \vec{V}''^2\right) \vec{V}''\right]\right\} \quad (4)$$

Dans ces équations  $\zeta_R$  désigne le tenseur de Reynolds pour un fluide compressible, défini par :

$$\zeta_R = - \overline{(\rho \vec{V}'' \otimes \vec{V}'')} \quad (5)$$

$\bar{p}$  est la valeur moyenne de la pression qui s'écrit :

$$\bar{P} = (\gamma - 1) \bar{p} \vec{e} \quad (6)$$

$\bar{\zeta}$  est le tenseur des contraintes moyen

$$\bar{h}'' = \gamma e'' \quad (7)$$

La valeur moyenne de l'énergie totale s'écrit :

$$\tilde{E} = \overline{e + \frac{1}{2} \vec{V}^2} = \tilde{e} + \frac{1}{2} \tilde{\vec{V}}^2 + k \quad (8)$$

où  $k$  est l'énergie cinétique de la turbulence définie par :

$$\bar{p} k = \frac{1}{2} \overline{(\rho \vec{V}''^2)} = -\frac{1}{2} \text{Trace}(\zeta_R) \quad (9)$$

#### A.4.2 - Modèle de turbulence

Dans le cas qui nous concerne, on néglige l'énergie cinétique de la turbulence, ainsi que les termes de corrélations  $(\overline{v''^2/2 v''})$  et  $(\overline{v'' \cdot \zeta})$  de l'équation de l'énergie (4).

Le tenseur de Reynolds  $\zeta_R$  est supposé dépendre linéairement du gradient de vitesse moyenne, selon une loi semblable à la loi de Newton, à savoir :

$$\zeta_R = \varepsilon \overline{\zeta} \quad (10)$$

où  $\varepsilon = \mu_t/\mu$ ,  $\mu_t$  étant le coefficient de viscosité tourbillonnaire.

De même, on suppose que le terme de diffusion turbulente de l'enthalpie  $(\overline{\rho h'' v''})$  qui apparaît dans l'équation de l'énergie (4) suit une loi semblable à la loi de Fourier :

$$\overline{\rho h'' v''} = - \frac{k_t}{c_v} g_{rad} \tilde{e} = \varepsilon P_r / P_{r_t} \overline{\dot{q}} \quad (11)$$

où  $K_t$  est la conductivité turbulente qui est en général prise proportionnelle à  $\mu_t$ , de manière à ce que le nombre de Prandtl turbulent  $Prt = \mu_t \cdot CP/K_t$  soit une constante, égale à 0,9.

Dans ces conditions, les équations de Navier-Stokes moyennées (2) - (3) - (4) ressemblent aux équations de Navier-Stokes instantanées (1-1), il suffit de remplacer  $\mu$  par  $(\mu_e + \mu_t)$  dans le tenseur de contrainte visqueux et  $\mu/\rho_e$  par  $(\mu_e/\rho_{r_e} + \mu_t/\rho_t)$  dans l'équation de l'énergie.

La modélisation de la turbulence se réduit à la donnée de relations de fermeture permettant de déterminer la viscosité turbulente  $\mu_t$ . Pour les modèles algébriques, cette viscosité turbulente est calculée à l'aide de relations faisant intervenir des propriétés locales ou intégrales du mouvement moyen. Sans discuter de la justification physique d'une telle notion, il faut admettre que ces modèles donnent de bons résultats, pour la prédiction des profils de vitesse moyenne, dans les cas des couches limites non décollées à grand nombre de Reynolds et des jets. Leur efficacité est toutefois limitée pour les écoulements présentant de larges zones de décollement. Dans les applications présentes, nous avons choisi un modèle algébrique dérivé du modèle de Cebeci [25] qui est exposé dans l'article de Baldwin et Lomax [16]. Ce modèle présente un avantage important par rapport au modèle de Cebeci classique dans l'établissement d'un code de calcul Navier-Stokes. En effet, dans ce modèle, il n'est pas

nécessaire de connaître l'épaisseur physique de la couche limite ( $\delta$ ) dont la détermination à partir de résultats obtenus pour le champ complet, où l'on passe continuellement de la zone visqueuse à la zone de fluide parfait, pose un certain nombre de problèmes numériques qui compliquent l'écriture du code de calcul.

#### A.4.3 - Présentation du modèle utilisé

Nous exposons ici de façon succincte le modèle de turbulence présenté dans l'article de Baldwin et Lomax [16].

Le coefficient de viscosité  $\mu_t$  est obtenu à l'aide d'un modèle algébrique à 2 couches défini par :

$$\mu_t = \begin{cases} (\mu_t)_{INT} & \text{pour } \eta \leq \eta_e \\ (\mu_t)_{EXT} & \text{pour } \eta > \eta_e \end{cases} \quad (12)$$

où  $\eta$  est la distance normale à la paroi et  $\eta_e$  est la plus petite valeur de  $\eta$  telle que :

$$(\mu_t)_{INT} = (\mu_t)_{EXT} \quad (13)$$

$(\mu_t)_{INT}$  est calculé à l'aide d'un modèle classiquement désigné sous le nom de modèle paroi :

$$(\mu_t)_{INT} = \rho l^2 |\Omega| \quad (14)$$

où  $l$  est la longueur de mélange définie par :

$$l = C \cdot \eta \left[ 1 - \exp(-\eta^+ / A^+) \right] \quad (15)$$

et  $\Omega$  est le tourbillon :

$$\Omega = \left| \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right| \quad (16)$$

où  $C$  et  $A^+$  sont des constantes.

La quantité  $\eta^+$  est liée à la contrainte tangentielle à la paroi  $\tau_w$  par la relation :

$$\eta^+ = \frac{\sqrt{\rho_w \tau_w}}{\mu_w}, \quad \tau_w = \mu_w \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_w \quad (17)$$

où  $\rho_w$  et  $\mu_w$  sont respectivement la masse volumique et le coefficient de viscosité à la paroi.

pour le calcul du coefficient de viscosité  $(\mu_t)_{EXT}$ , on utilise la relation :

$$(\mu_t)_{EXT} = K \cdot C_{cp} \cdot \rho \cdot F_{sill} \cdot F_{Kleb}(\eta) \quad (18)$$

où  $K$  est le coefficient de Clauser et  $C_{cp}$  est une constante réelle.

$F_{sill}$  est obtenu à l'aide de l'expression :

$$F_{sill} = \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} \eta_{max} F_{max} \\ C_{wk} \eta_{max} U_{diff}^2 / F_{max} \end{array} \right. \quad (19)$$

Dans cette expression,  $C_{wk}$  est une constante réelle,  $\eta_{max}$  et  $F_{max}$  sont déterminés par la fonction :

$$F(\eta) = \eta |\Omega| \left[ 1 - \exp(-\eta^+/A^+) \right] \quad (20)$$

Dans le sillage, le terme en exponentielle de cette équation est supprimé.

Pour  $i$  fixé, la quantité  $F_{\max}$  est le maximum de  $F(\eta)$ , tandis que  $\eta_{\max}$  est la valeur de  $\eta$  correspondant à ce maximum.

La fonction  $F_{\text{kleb}}(\eta)$  de l'équation (18) est la fonction de Klebanoff définie par :

$$F_{\text{kleb}}(\eta) = \left[ 1 + 5.5 \left( \frac{C_{\text{kleb}} \cdot \eta}{\eta_{\text{max}}} \right)^6 \right]^{-1} \quad (21)$$

où  $C_{\text{kleb}}$  est le coefficient de Klebanoff.

La quantité  $U_{\text{diff}}$  de l'expression (19) est la différence, pour  $i$  fixé, du maximum et du minimum du module de la vitesse :

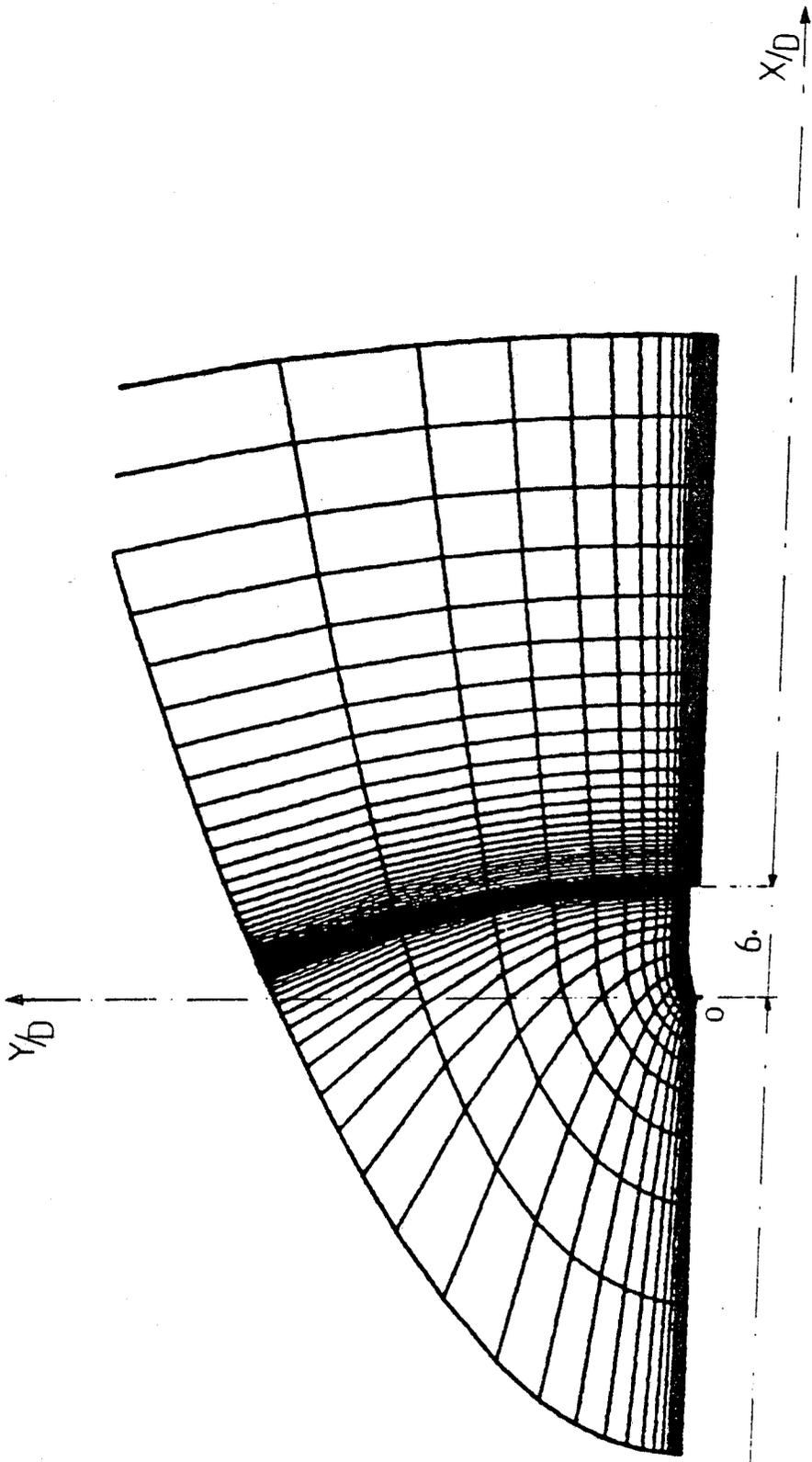
$$U_{\text{DIFF}} = \left( \sqrt{u^2 + v^2} \right)_{\text{MAX}} - \left( \sqrt{u^2 + v^2} \right)_{\text{MIN}} \quad (22)$$

Dans les relations (15), (18), (19) et (21), les différentes valeurs des constantes utilisées sont données par :

$$\begin{aligned} A^+ &= 2.6 \\ C_{cp} &= 1.6 \\ C_{\text{kleb}} &= 0.3 \\ C_{wk} &= 0.25 \\ C &= 0.4 \\ k &= 0.0168 \end{aligned}$$



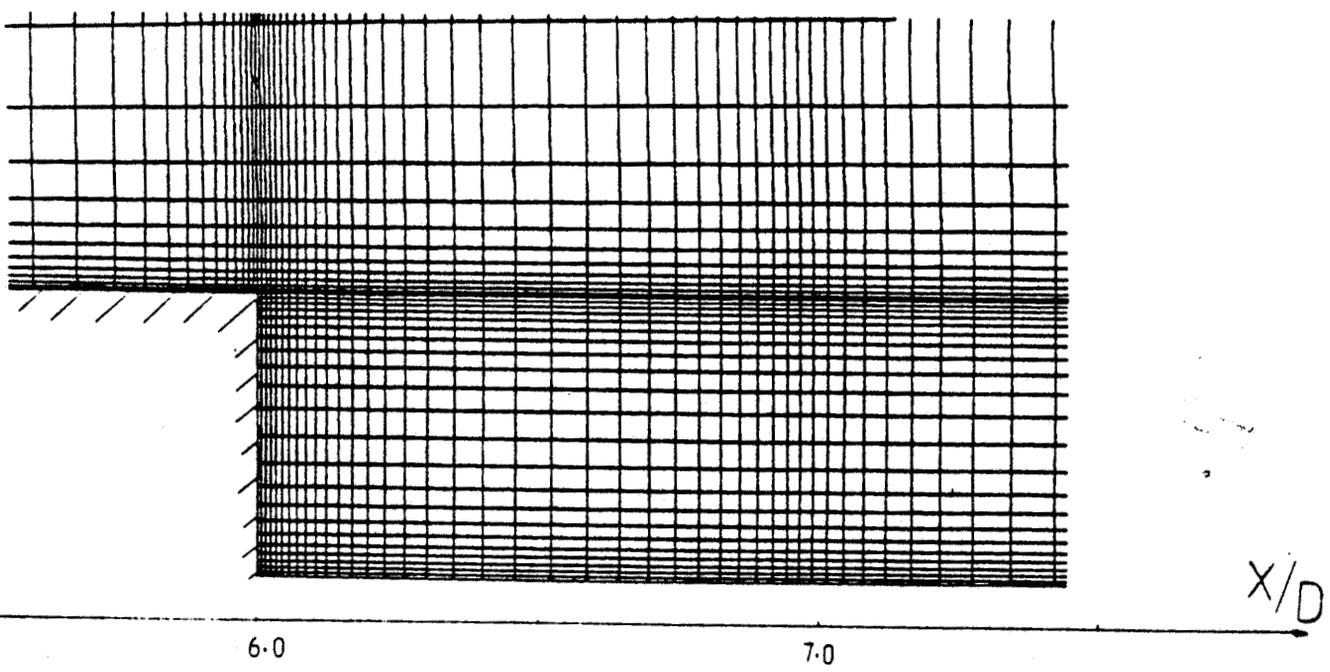
FIG.15 MAILLAGE (111x52)



$M_\infty = .8$   $\rightarrow$



Y/D  
 FIG.16 VUE PARTIELLE DU MAILLAGE (1111x52)  
 DANS LA REGION DU CULOT



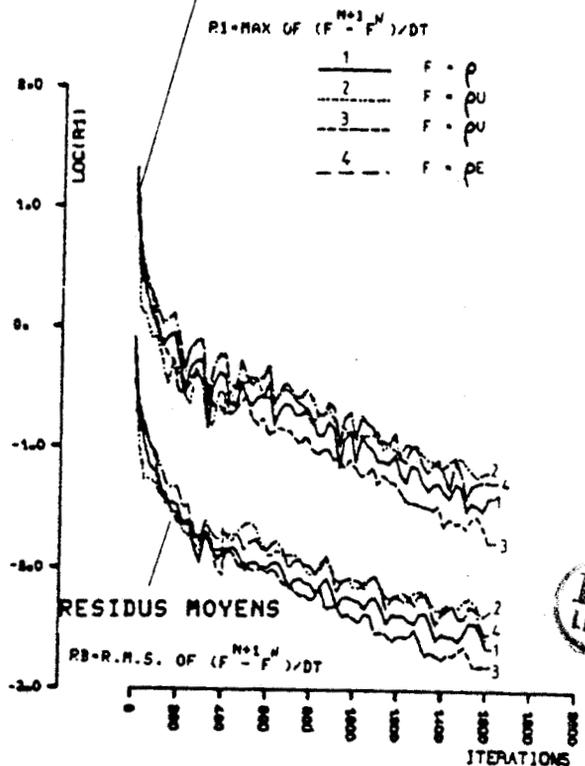
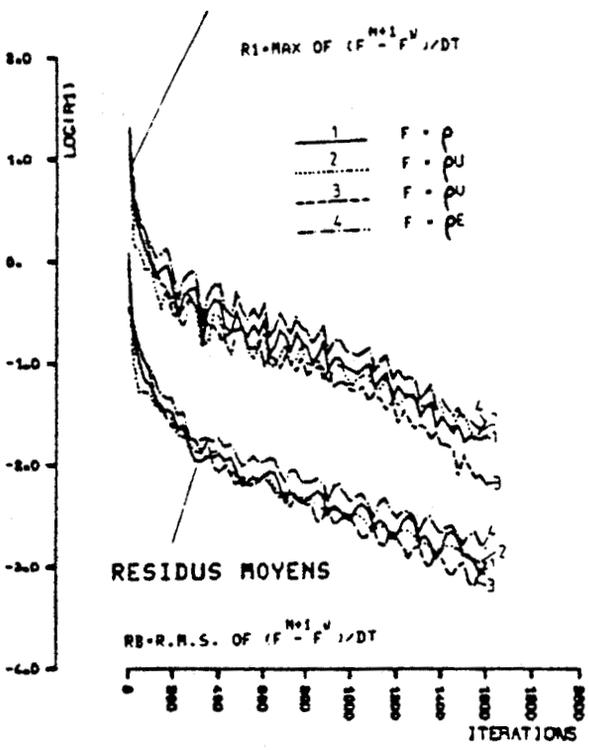
REY=500

REY=5000

FIG.17a RESIDUS MAXIMAUX

FIG.17b

RESIDUS MAXIMAUX



DISTRIBUTION LONGITUDINALE DE LA PRESSION

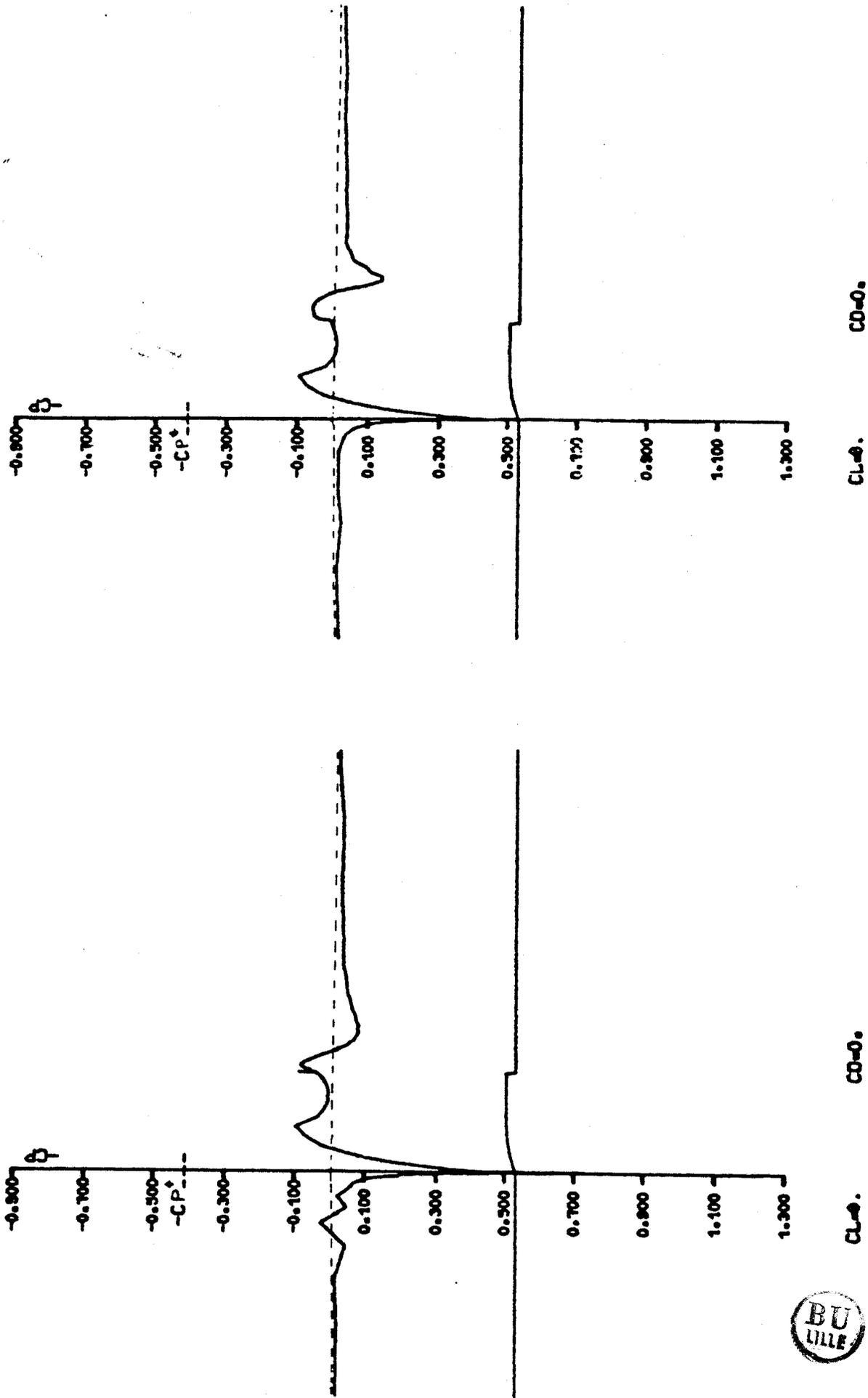


FIG. 18a REY=500

FIG. 18b REY=5000



X/D

9.0

8.0

7.0

6.0

R ⊗

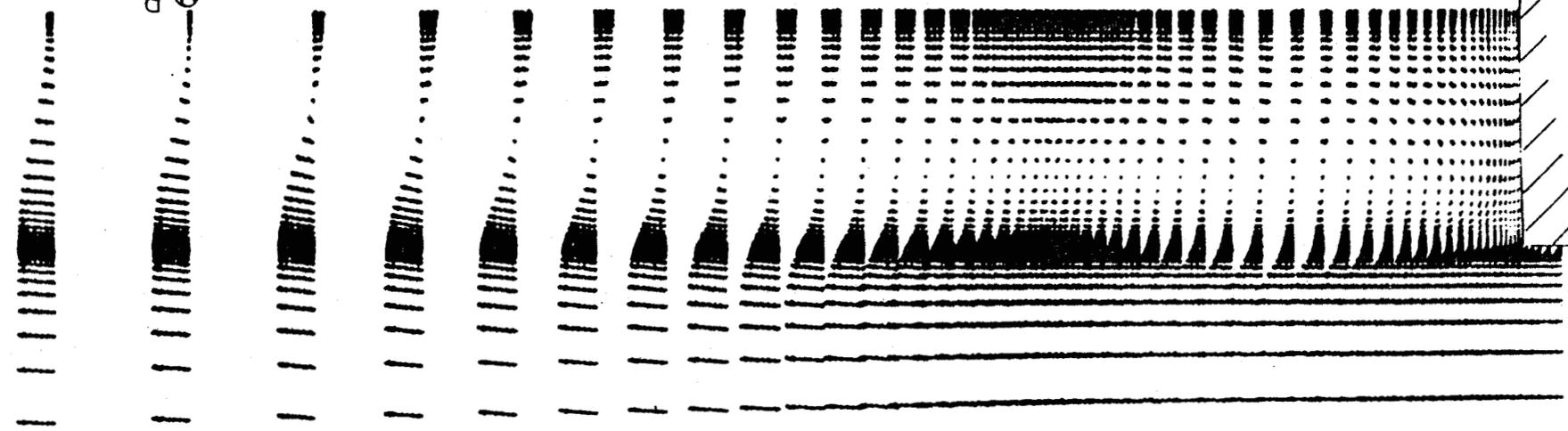


FIG. 19b REY=5000

X/D

X/D

9.0

8.0

7.0

6.0

R ⊗

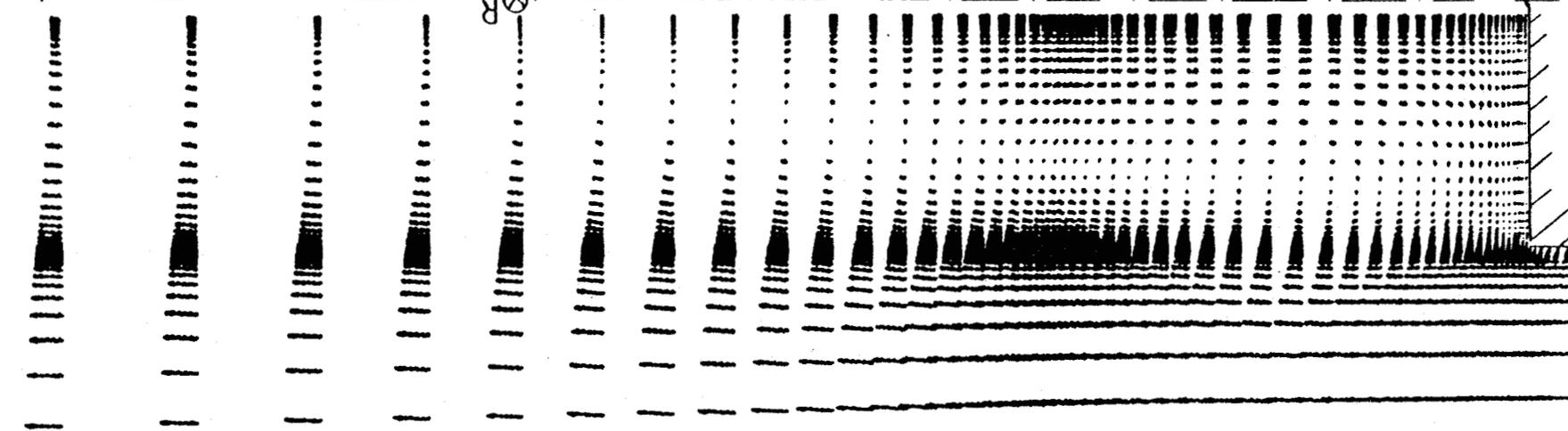


FIG. 19a REY=500

X/D

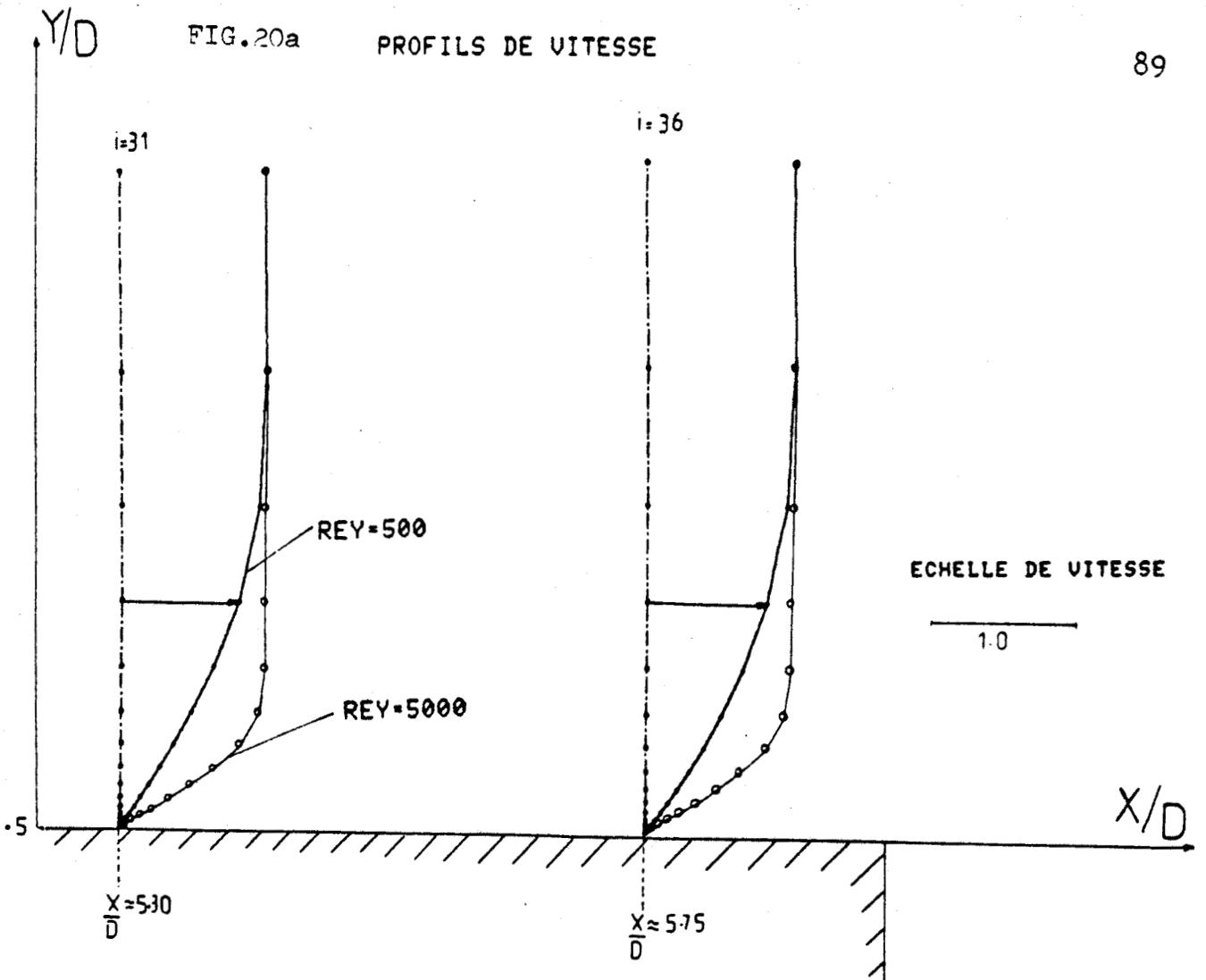
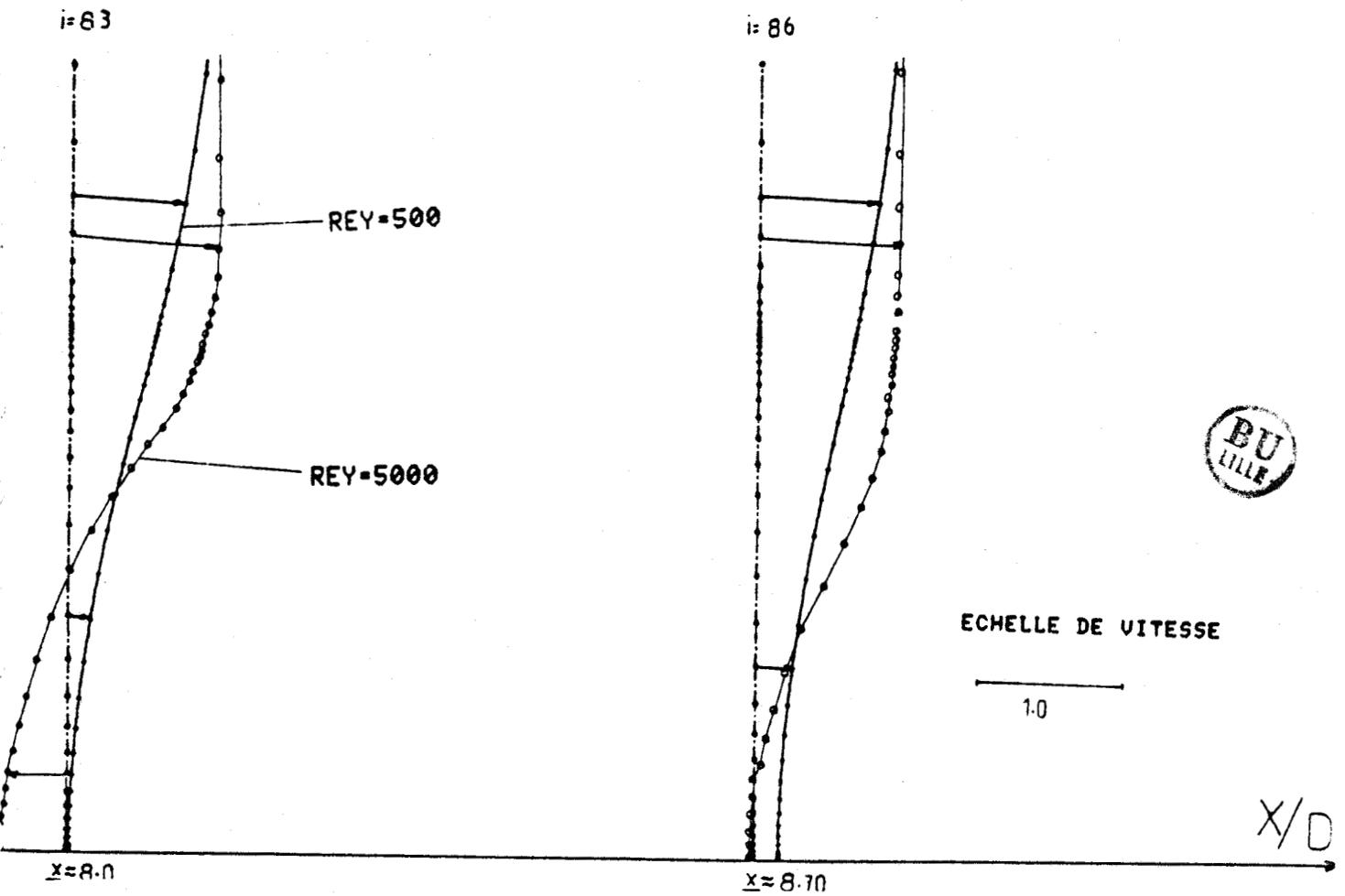


FIG.20b

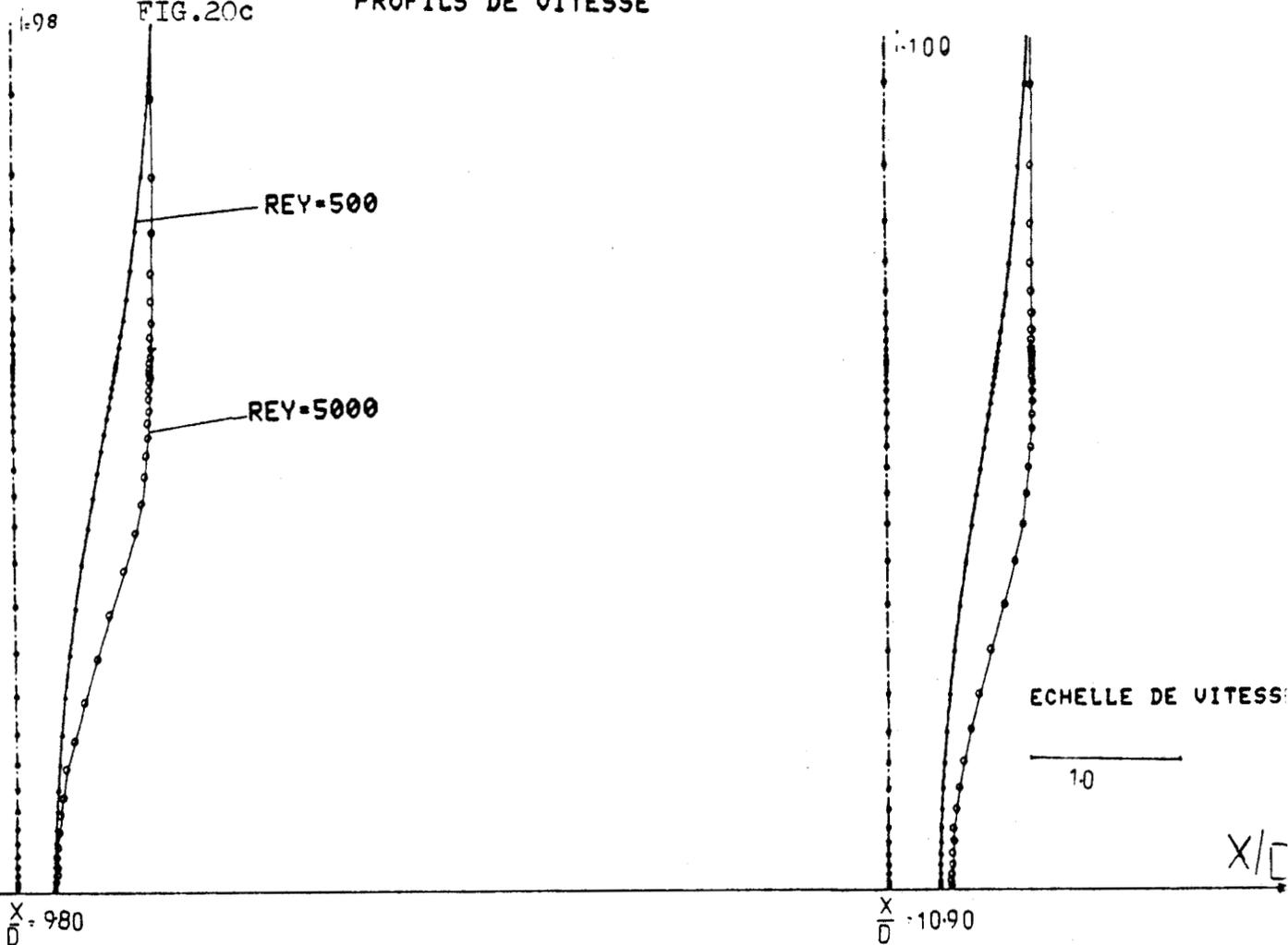
PROFILS DE VITESSE



10

PROFILS DE VITESSE

FIG.20c



Y/D

REY=500

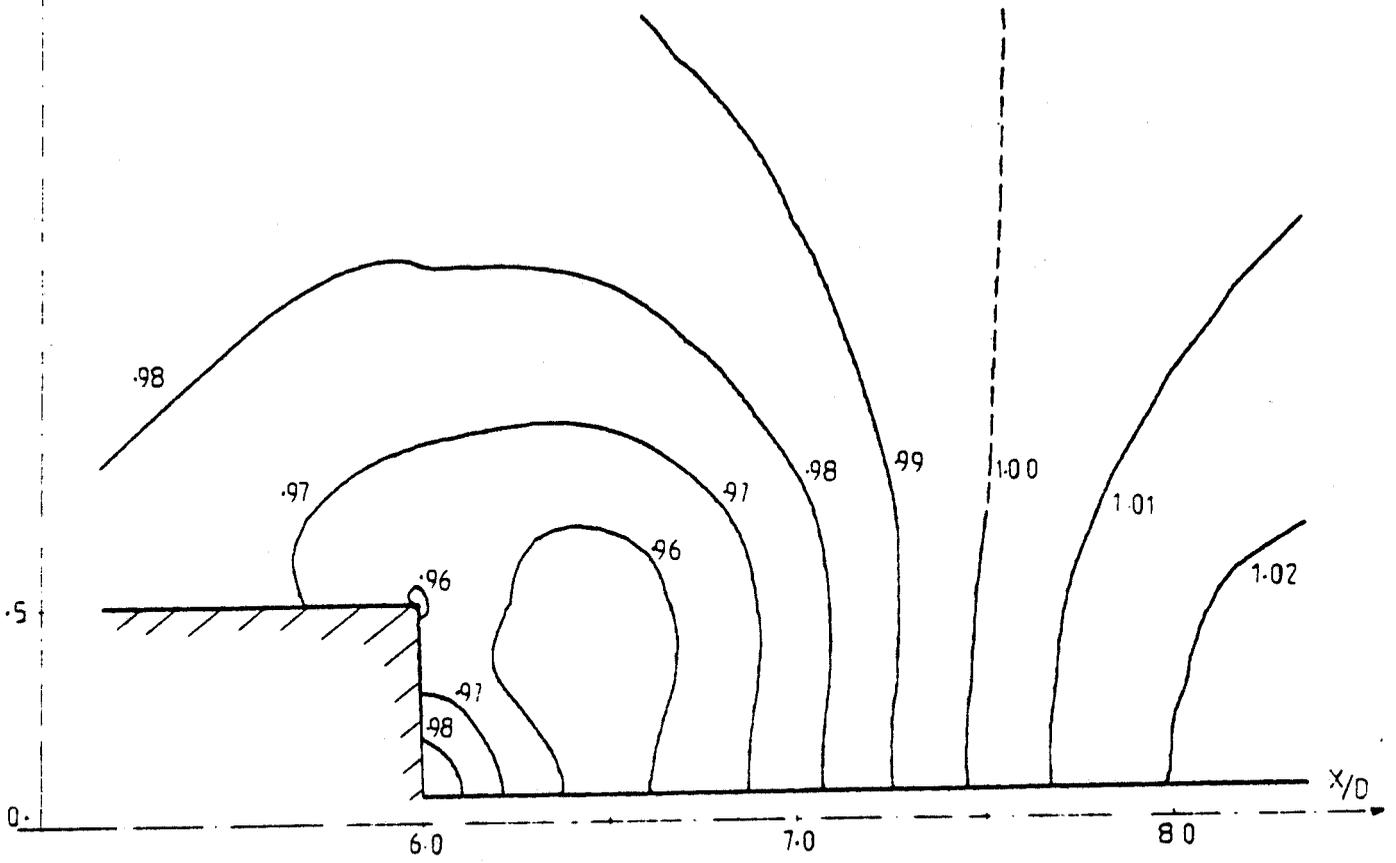


FIG. 21 LIGNES ISOBARES ( $P/P_\infty$ )

Y/D

REY=5000

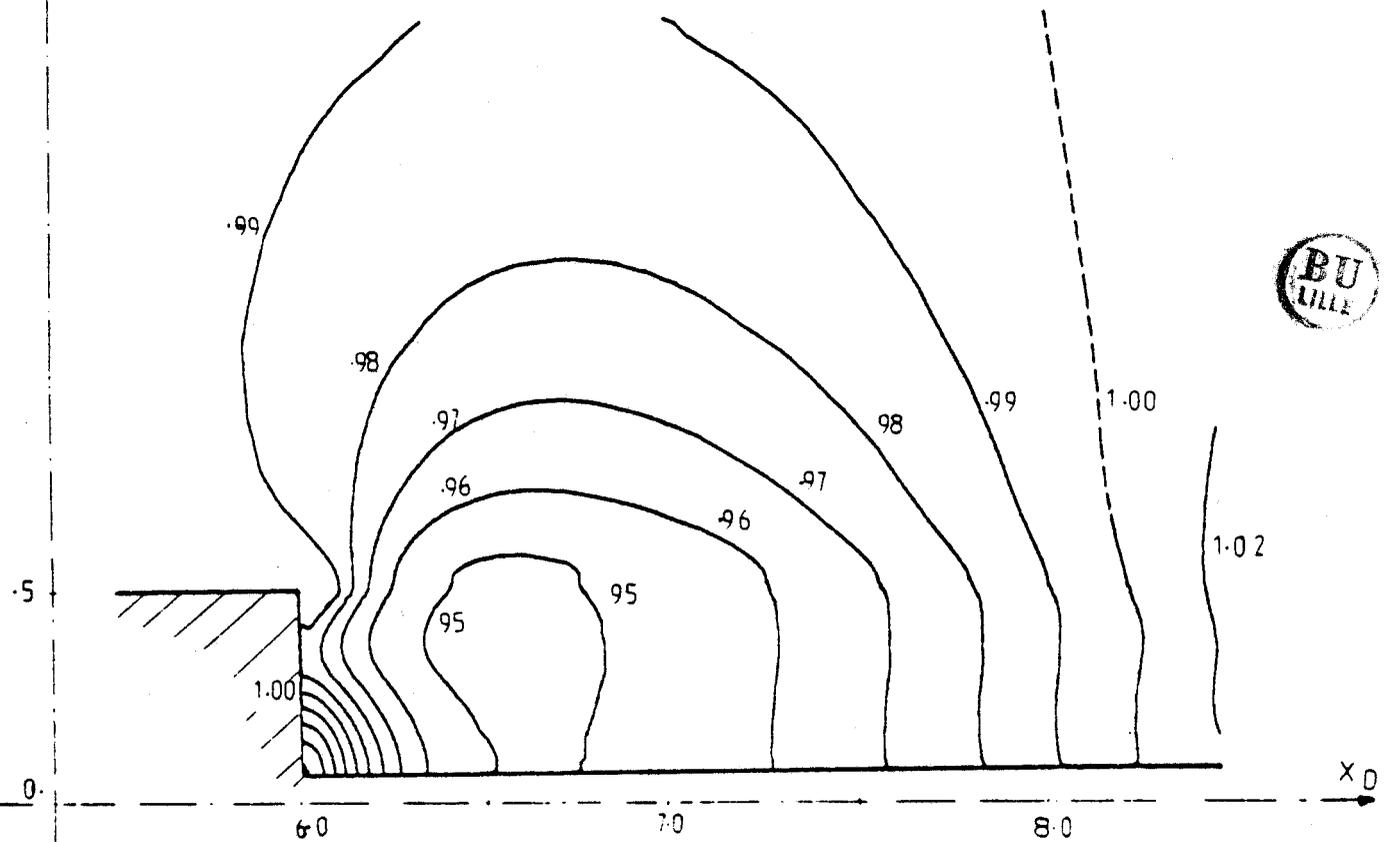


FIG. 22 LIGNES ISOBARES ( $P/P_\infty$ )

FIG.23 VUE PARTIELLE DU MAILLAGE (91\*61)  
DANS LA REGION DU CULOT

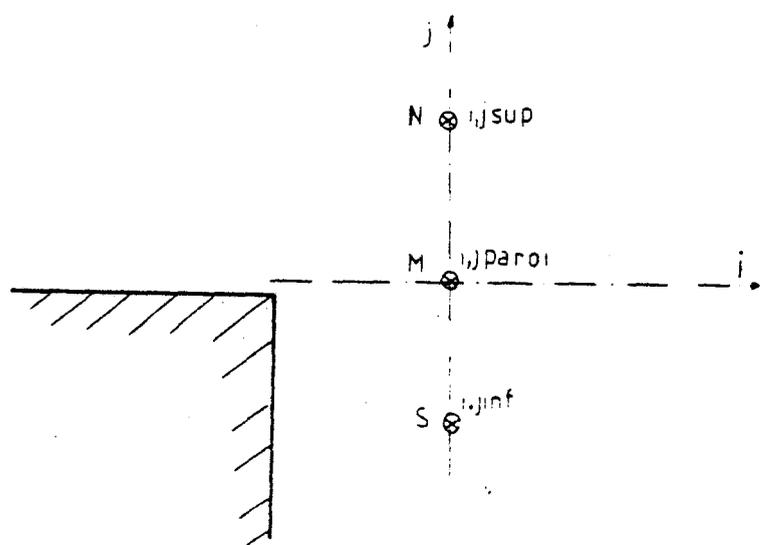
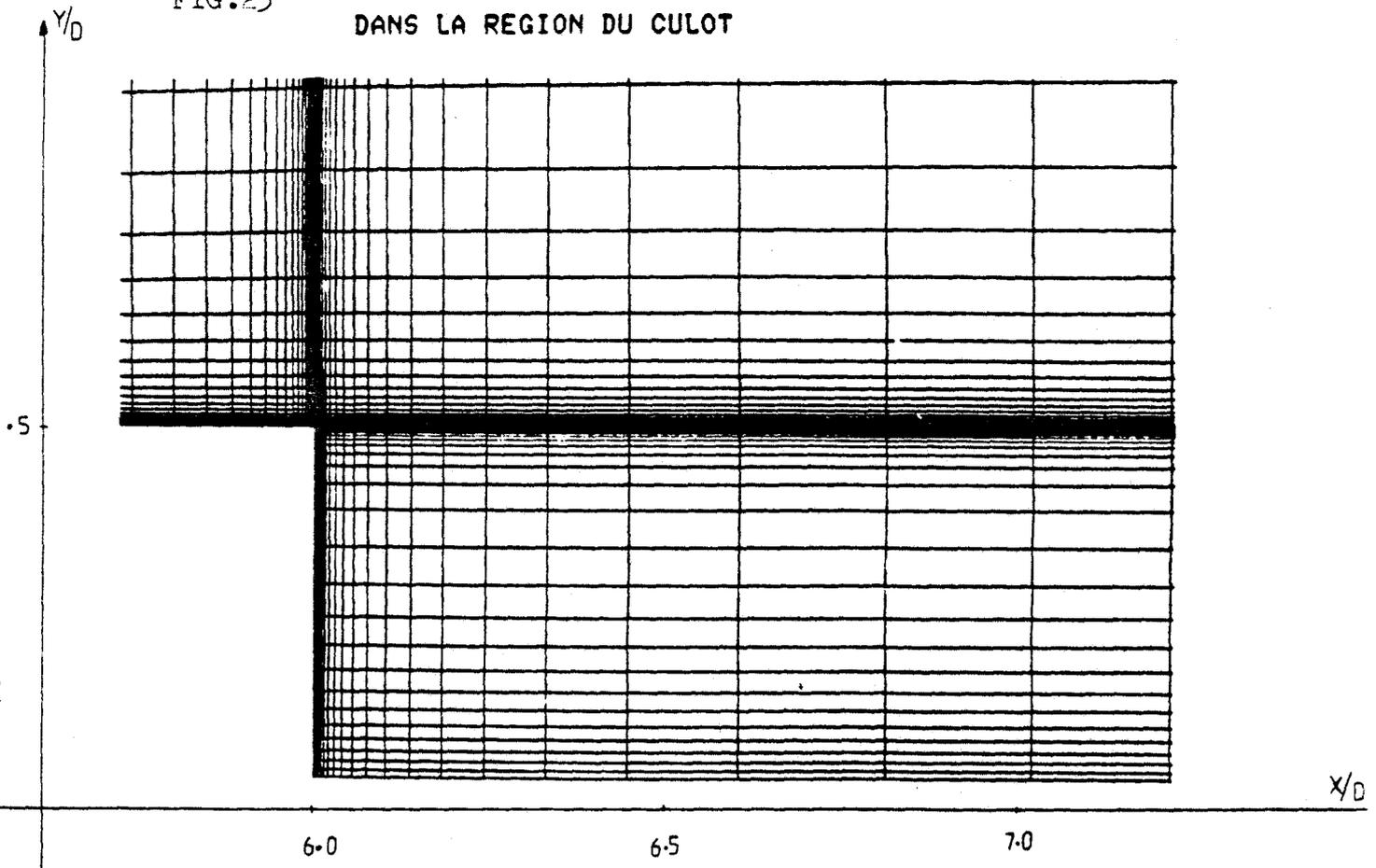
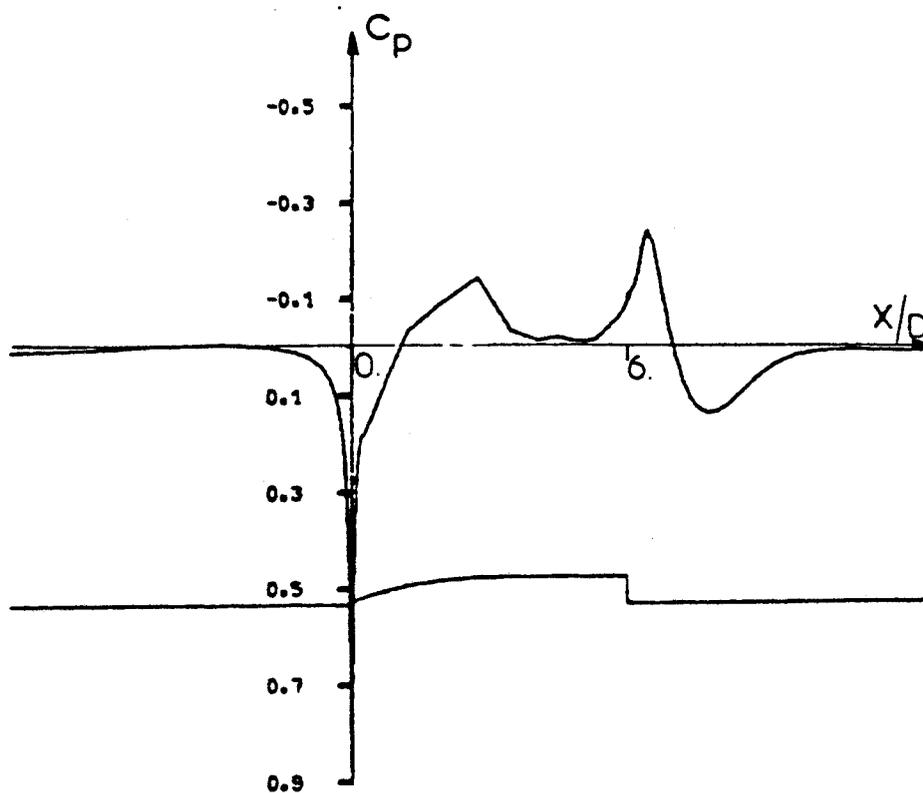


FIG.24 CALCUL DU PAS DE TEMPS DERRIERE LA BASE

FIG.25 DISTRIBUTION LONGITUDINALE DE LA PRESSION  
REY=500.000



REY=500.000

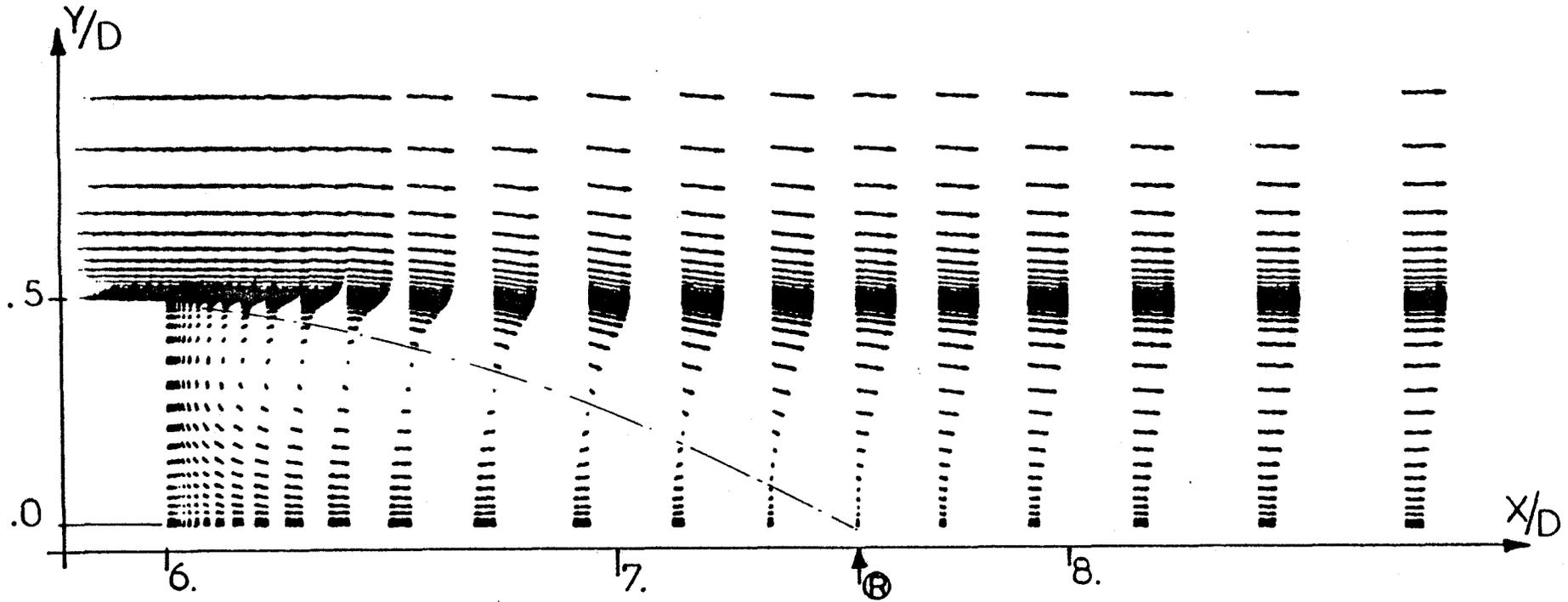


FIG.26 VECTEURS VITESSES



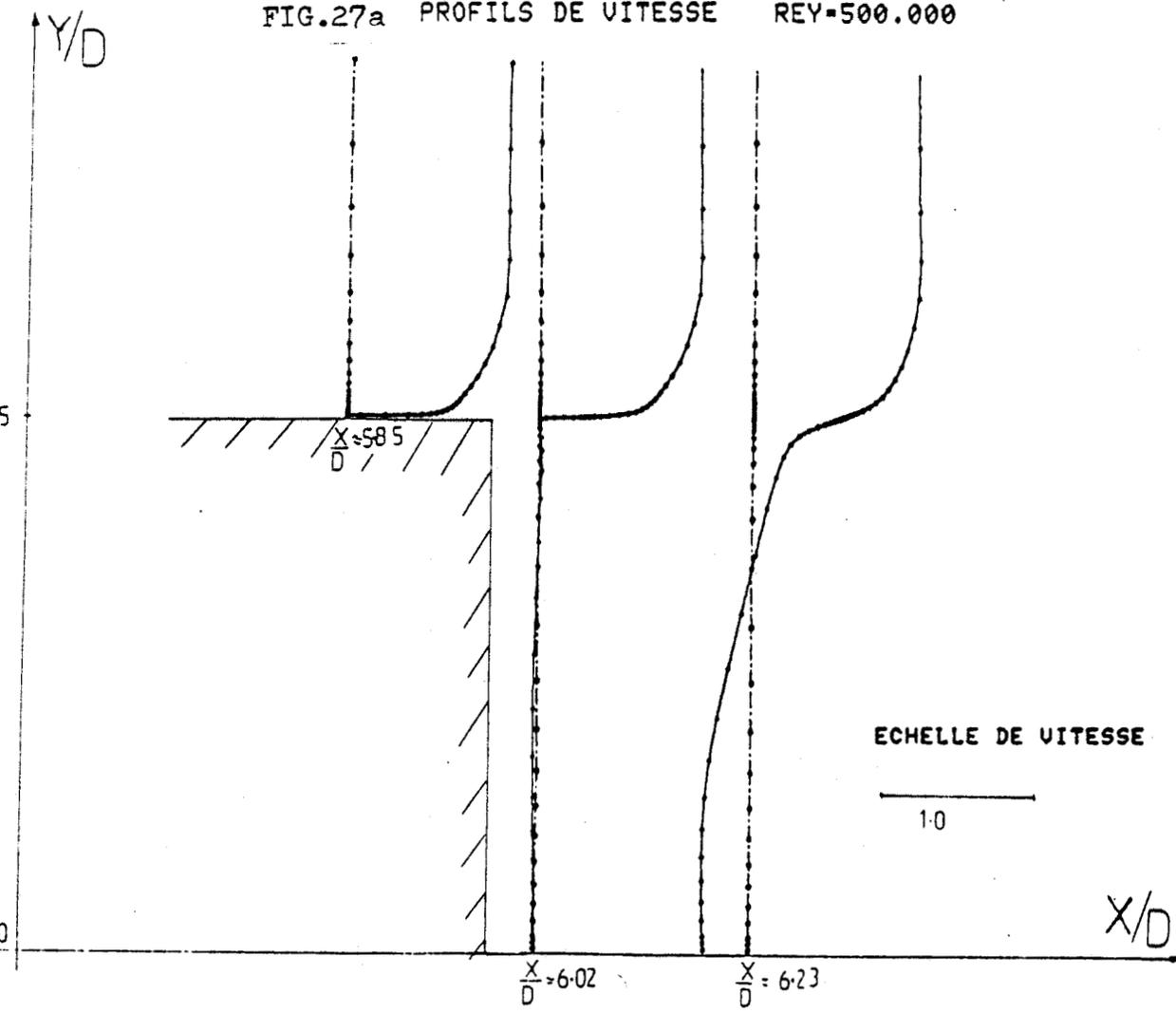
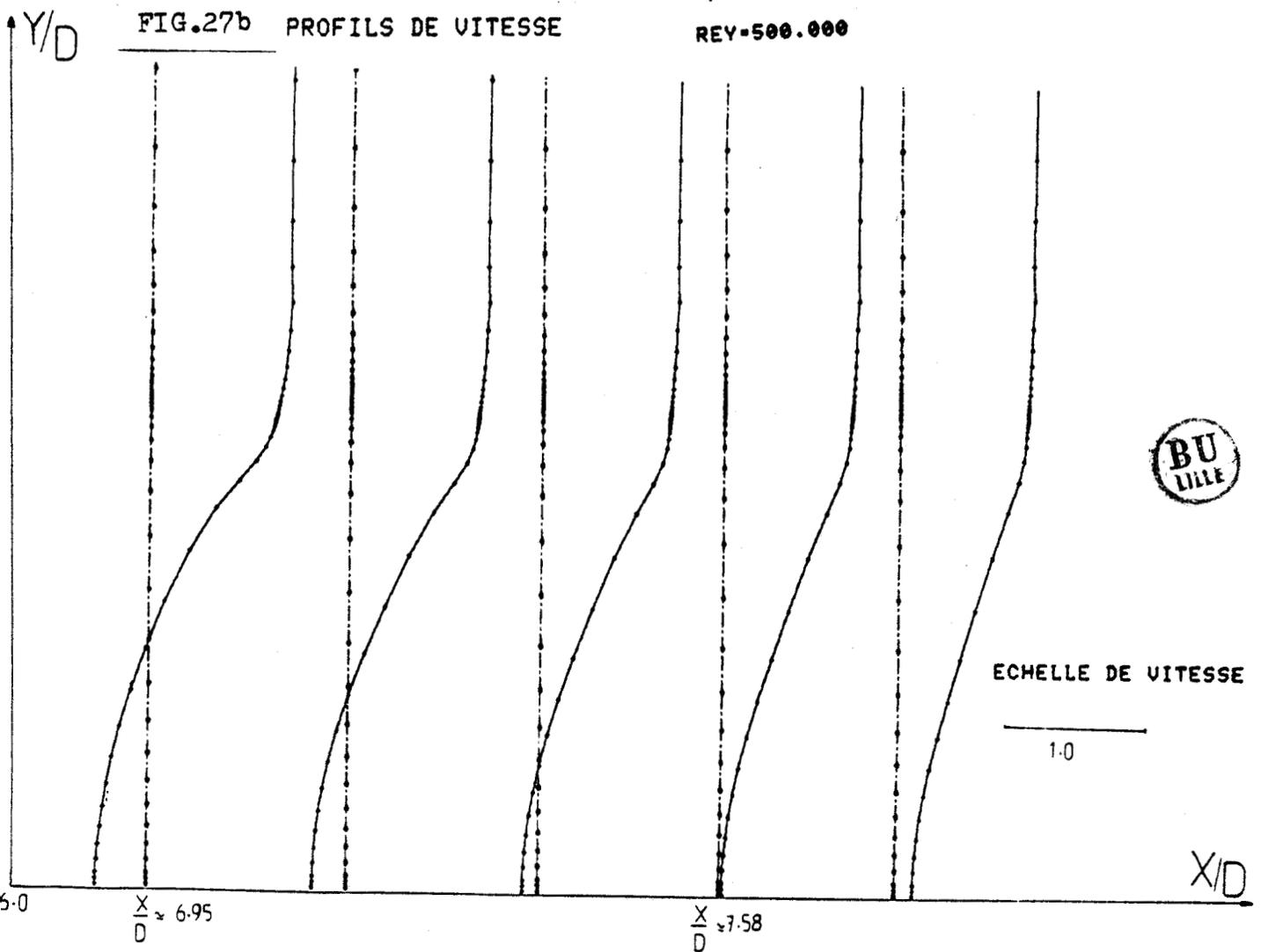


FIG.27b PROFILS DE VITESSE REY=500.000



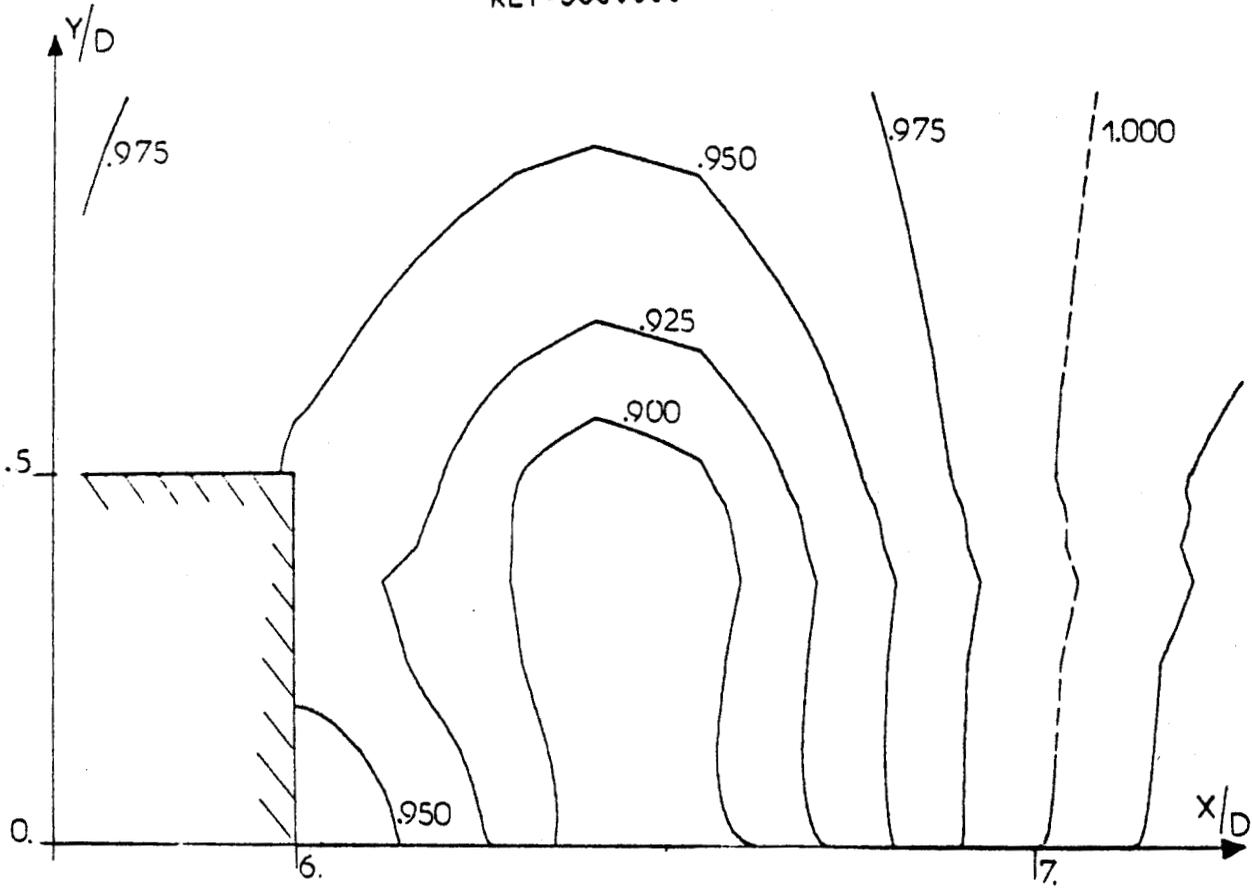


FIG. 28

LIGNES ISOBARES (P/P<sub>∞</sub>)

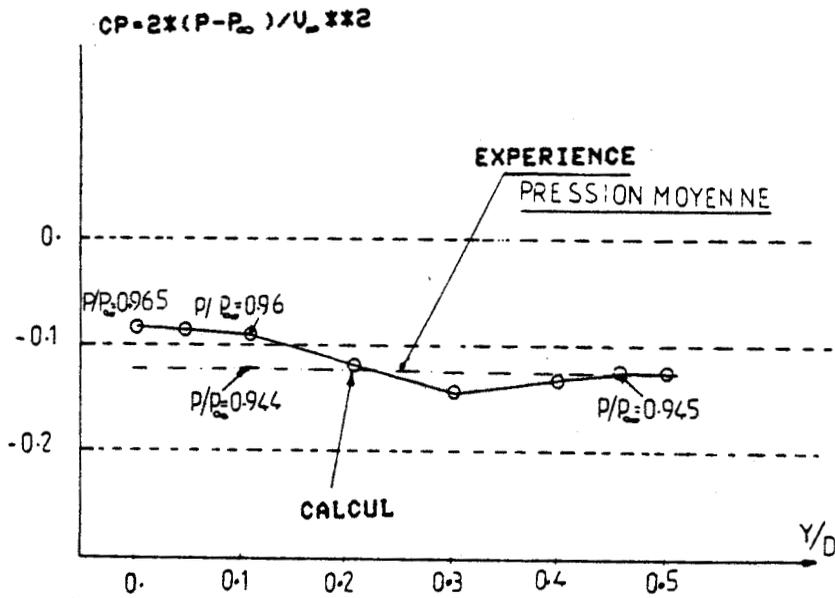


FIG. 29

COMPARAISON CALCUL-EXPERIENCE

