N° d'ordre : 1282



UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

# THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR DE 3ème CYCLE**

**(Mathématiques appliquées)**

par

Fatma ZEDEK



# INTERPOLATION SUR UN DOMAINE CARRE PAR DES SPLINES QUADRATIQUES A DEUX VARIABLES

Thèse soutenue le Mercredi 26 Juin 1985 devant la Commission d'Examen

| Membres du Jury : | | |
|---|---|---|
| | P. POUZET | Président |
| | P. SABLONNIERE | Rapporteur |
| | R. ARCANGELI | Examinateurs |
| | C. BREZINSKI | |

## P R O F E S S E U R S CLASSE EXCEPTIONNELLE

| | |
|---|---|
| M. CONSTANT Eugène | I.E.E.A. |
| M. FOURET René | Physique |
| M. GABILLARD Robert | I.E.E.A. |
| M. MONTREUIL Jean | Biologie |
| M. PARREAU Michel | Mathématiques |
| M. TRIDOT Gabriel | Chimie |
| M. VIVIER Emile | Biologie |
| M. WERTHEIMER Raymond | Physique |

## P R O F E S S E U R S 1ère classe

| | |
|---|---|
| M. BACCHUS Pierre | Mathématiques |
| M. BEAUFILS Jean-Pierre (dét.) | Chimie |
| M. BIAYS Pierre | G.A.S. |
| M. BILLARD Jean (dét.) | Physique |
| M. BOILLY Bénoni | Biologie |
| M. BOIS Pierre | Mathématiques |
| M. BONNELLE Jean-Pierre | Chimie |
| M. BOUGHON Pierre | Mathématiques |
| M. BOURIQUET Robert | Biologie |
| M. BREZINSKI Claude | I.E.E.A. |
| M. CELET Paul | Sciences de la Terre |
| M. CHAMLEY Hervé | Biologie |
| M. COEURE Gérard | Mathématiques |
| M. CORDONNIER Vincent | I.E.E.A. |
| M. DEBOURSE Jean-Pierre | S.E.S. |
| M. DYMENT Arthur | Mathématiques |

PROFESSEURS 1ère classe (suite)

| | | |
|---|---|---|
| M. | ESCAIG Bertrand | Physique |
| M. | FAURE Robert | Mathématiques |
| M. | FOCT Jacques | Chimie |
| M. | GRANELLE Jean-Jacques | S.E.S. |
| M. | GRUSON Laurent | Mathématiques |
| M. | GUILLAUME Jean | Biologie |
| M. | HECTOR Joseph | Mathématiques |
| M. | LABLACHE COMBIER Alain | Chimie |
| M. | LACOSTE Louis | Biologie |
| M. | LAVEINE Jean Pierre | Sciences de la Terre |
| M. | LEHMANN Daniel | Mathématiques |
| Mme | LENOBLE Jacqueline | Physique |
| M. | LHOMME Jean | Chimie |
| M. | LOMBARD Jacques | S.E.S. |
| M. | LOUCHEUX Claude | Chimie |
| M. | LUCQUIN Michel | Chimie |
| M. | MIGEON Michel Recteur à Grenoble | E.U.D.I.L. |
| M. | MIGNOT Fulbert (dét.) | Mathématiques |
| M. | PAQUET Jacques | Sciences de la Terre |
| M. | PROUVOST Jean | Sciences de la Terre |
| M. | ROUSSEAU Jean-Paul | Biologie |
| M. | SALMER Georges | I.E.E.A. |
| M. | SEGUIER Guy | I.E.E.A. |
| M. | SIMON Michel | S.E.S. |
| M. | STANKIEWICZ François | S.E.S. |
| M. | TILLIEU Jacques | Physique |
| M. | VIDAL Pierre | I.E.E.A. |
| M. | ZEYTOUNIAN Radyadour | Mathématiques |

## P R O F E S S E U R S 2ème classe

| | | |
|---|---|---|
| M. | ANTOINE Philippe | Mathématiques (Calais) |
| M. | BART André | Biologie |
| Mme | BATTIAU Yvonne | Géographie |
| M. | BEGUIN Paul | Mathématiques |
| M. | BELLET Jean | Physique |
| M. | BERZIN Robert | Mathématiques |
| M. | BKOUCHE Rudolphe | Mathématiques |
| M. | BODARD Marcel | Biologie |
| M. | BOSQ Denis | Mathématiques |
| M. | BRASSELET Jean-Paul | Mathématiques |
| M. | BRUYELLE Pierre | Géographie |
| M. | CAPURON Alfred | Biologie |
| M. | CARREZ Christian | I.E.E.A. |
| M. | CAYATTE Jean-Louis | S.E.S. |
| M. | CHAPOTON Alain | C.U.E.E.P. |
| M. | COQUERY Jean-Marie | Biologie |
| Mme | CORSIN Paule | Sciences de la Terre |
| M. | CORTOIS Jean | Physique |
| M. | COUTURIER Daniel | Chimie |
| M. | CROSNIER Yves | I.E.E.A. |
| M. | CURGY Jean-Jacques | Biologie |
| Mle | DACHARRY Monique | Géographie |
| M. | DAUCHET Max | I.E.E.A. |
| M. | DEBRABANT Pierre | E.U.D.I.L. |
| M. | DEGAUQUE Pierre | I.E.E.A. |
| M. | DELORME Pierre | Biologie |
| M. | DELORME Robert | S.E.S. |
| M. | DE MASSON D'AUTUME Antoine | S.E.S. |
| M. | DEMUNTER Paul | C.U.E.E.P. |

PROFESSEURS 2ème classe (Suite 1)

| | | |
|---|---|---|
| M. | DENEL Jacques | I.E.E.A. |
| M. | DE PARIS Jean-Claude | Mathématiques (Calais) |
| Mle | DESSAUX Odile | Chimie |
| M. | DEVRAINNE Pierre | Chimie |
| M. | DHAINAUT André | Biologie |
| Mme | DHAINAUT Nicole | Biologie |
| M. | DORMARD Serge | S.E.S. |
| M. | DOUKHAN Jean-Claude | E.U.D.I.L. |
| M. | DUBOIS Henri | Physique |
| M. | DUBRULLE Alain | Physique (Calais) |
| M. | DUBUS Jean-Paul | I.E.E.A. |
| M. | FAKIR Sabah | Mathématiques |
| M. | FONTAINE Hubert | Physique |
| M. | FOUQUART Yves | Physique |
| M. | FRONTIER Serge | Biologie |
| M. | GAMBLIN André | G.A.S. |
| M. | GLORIEUX Pierre | Physique |
| M. | GOBLOT Rémi | Mathématiques |
| M. | GOSSELIN Gabriel (dét.) | S.E.S. |
| M. | GOUDMAND Pierre | Chimie |
| M. | GREGORY Pierre | I.P.A. |
| M. | GREMY Jean-Paul | S.E.S. |
| M. | GREVET Patrice | S.E.S. |
| M. | GUILBAULT Pierre | Biologie |
| M. | HENRY Jean-Pierre | E.U.D.I.L. |
| M. | HERMAN Maurice | Physique |
| M. | JACOB Gérard | I.E.E.A. |
| M. | JACOB Pierre | Mathématiques |
| M. | JEAN Raymond | Biologie |
| M. | JOFFRE Patrick | I.P.A. |

PROFESSEURS 2ème classe (suite 2)

| | |
|---|---|
| M. JOURNEL Gérard | E.U.D.I.L. |
| M. KREMBEL Jean | Biologie |
| M. LANGRAND Claude | Mathématiques |
| M. LATTEUX Michel | I.E.E.A. |
| Mme LECLERCQ Ginette | Chimie |
| M. LEFEVRE Christian | Sciences de la Terre |
| Mle LEGRAND Denise | Mathématiques |
| Mle LEGRAND Solange | Mathématiques (Calais) |
| Mme LEHMANN Josiane | Mathématiques |
| M. LEMAIRE Jean | Physique |
| M. LHENAFF René | Géographie |
| M. LOCQUENEUX Robert | Physique |
| M. LOSFELD Joseph | C.U.E.E.P. |
| M. LOUAGE Francis(dét.) | E.U.D.I.L. |
| M. MACKE Bruno | Physique |
| M. MAIZIERES Christian | I.E.E.A. |
| M. MESSELYN Jean | Physique |
| M. MESSERLIN Patrick | S.E.S. |
| M. MONTEL Marc | Physique |
| Mme MOUNIER Yvonne | Biologie |
| M. PARSY Fernand | Mathématiques |
| Mle PAUPARDIN Colette | Biologie |
| M. PERROT Pierre | Chimie |
| M. PERTUZON Emile | Biologie |
| M. PONSOLLE Louis | Chimie |
| M. PORCHET Maurice | Biologie |
| M. POVY Lucien | E.U.D.I.L. |
| M. RACZY Ladislas | I.E.E.A. |
| M. RAOULT Jean François | Sciences de la Terre |
| M. RICHARD Alain | Biologie |

PROFESSEURS 2ème Classe (suite 3)

| | |
|---|---|
| M. RIETSCH François | E.U.D.I.L. |
| M. ROBINET Jean-Claude | E.U.D.I.L. |
| M. ROGALSKI Marc | Mathématiques |
| M. ROY Jean-Claude | Biologie |
| M. SCHAMPS Joël | Physique |
| Mme SCHWARZBACH Yvette | Mathématiques |
| M. SLIWA Henri | Chimie |
| M. SOMME Jean | G.A.S. |
| Mle SPIK Geneviève | Biologie |
| M. STAROSWIECKI Marcel | E.U.D.I.L. |
| M. STERBOUL François | E.U.D.I.L. |
| M. TAILLIEZ Roger | Institut Agricole |
| Mme TJOTTA Jacqueline (dét.) | Mathématiques |
| M. TOULOTTE Jean-Marc | I.E.E.A. |
| M. TURRELL Georges | Chimie |
| M. VANDORPE Bernard | E.U.D.I.L. |
| M. VAST Pierre | Chimie |
| M. VERBERT André | Biologie |
| M. VERNET Philippe | Biologie |
| M. WALLART Francis | Chimie |
| M. WARTEL Michel | Chimie |
| M. WATERLOT Michel | Sciences de la Terre |
| Mme ZINN JUSTIN Nicole | Mathématiques |

## CHARGES DE COURS

| | |
|---|---|
| M. ADAM Michel | S.E.S. |

## CHARGES DE CONFERENCES

| | |
|---|---|
| M. BAFCOP Joël | I.P.A. |
| M. DUVEAU Jacques | S.E.S. |
| M. HOFLACK Jean | I.P.A. |
| M. LATOUCHE Serge | S.E.S. |
| M. MALAUSSENA DE PERNO Jean-Louis | S.E.S. |
| M. NAVARRE Christian | I.P.A. |
| M. OPIGEZ Philippe | S.E.S. |

*Je tiens à remercier vivement Monsieur le Professeur P. POUZET, qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury de cette thèse.*

*Je suis très reconnaissante envers Monsieur P. SABLONNIERE qui m'a fait bénéficier de son aide constante et de ses conseils généreux au cours de la préparation de ce travail.*

*Il m'est agréable d'exprimer mes remerciements à Monsieur le Professeur C. BREZINSKI, qui a bien voulu s'intéresser à ce travail et le juger.*

*Monsieur R. ARCANGELI, Professeur à l'Université de Pau, me fait l'honneur d'examiner ce travail. Qu'il en soit remercié.*

*Je remercie également Madame A. REMY, Messieurs P. VAN INGELANDT et Y. TINEL, pour l'aide qu'ils m'ont attribuée en programmation.*

*Que soient remerciés sincèrement Madame F. TAILLY et M. H. GLANC qui, avec célérité, soin et compétence, ont assuré la réalisation matérielle de cette thèse.*

*Vu le nombre, je m'excuse de ne pas citer tous ceux qui ont, de près comme de loin, participé à l'élaboration de ce travail.*

# TABLES DES MATIÈRES.

-

# INTRODUCTION.

-

*Les splines quadratiques à deux variables sont les surfaces différentiables et polynômiales par morceaux les plus simples. Ce sont en effet des fonctions de* $C^1(\Omega)$ *($\Omega$ domaine polygonal du plan), dont la restriction à chaque triangle* T *d'une triangulation de* $\Omega$ *est un élément de* $P_2$*, espace des polynômes à deux variables de degré total inférieur ou égal à 2.*
*Chaque polynôme* P *se développe dans la base de Bernstein :*

$$P(\lambda) = \sum_{0 \le i+j \le 2} a_{ij} \, \beta_{ij} \, (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ *étant les coordonnées barycentriques de* T.

$$\beta_{ij}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{2!}{i!j!(2-i-j)!} \, \lambda_1^i \, \lambda_2^j \, \lambda_3^{2-i-j}$$

*Les* $a_{ij}$ *sont appelés B-coefficients de* P.
*Toutes ces notions sont développées par P. Sablonnière dans [10].*

*Ainsi le calcul de la spline se ramène à celui de ses B-coefficients. Dans notre étude, nous choisissons comme domaine* $\Omega$*, un carré de* $\mathbb{R}^2$.

*Dans le premier chapitre, nous donnons quelques rappels concernant l'interpolation de Lagrange par des Splines quadratiques sur un intervalle de* $\mathbb{R}^2$ *(ces résultats seront utilisés au chapitre 3), et l'élément fini quadratique de Powel-Sabin, avec le calcul des fonctions de base du procédé d'interpolation correspondant.*

*Dans le deuxième chapitre, nous faisons une étude de la majoration de la norme* $L_p$, *de la fonction de ses dérivées premières et secondes, dans le cas de l'interpolation d'Hermite par des splines quadratiques sur un domaine subdivisé en triangle de Powell-Sabin.*

*Nous nous basons dans cette étude sur des résultats donnés par R. Arcangeli et J.L. Gout dans [1].*
*L'étude est faite d'abord sur un triangle de référence, puis dans la deuxième partie du chapitre, nous montrons que les majorations obtenues se généralisent à* D *; en utilisant les résultats donnés par P. Sablonnière dans [9].*

*Le troisième chapitre concerne l'interpolation de Lagrange en des points répartis de façon assez régulière sur* $\Omega$. *Nous donnons deux algorithmes très simples correspondant à deux choix des points d'interpolation et permettant le calcul des B-coefficients de la spline, ainsi que ceux des fonctions de base. Ce calcul permet de trouver un majorant* M *et un minorant* m *de la norme* $L_\infty$ *de l'opérateur d'interpolation ; et par conséquent, une majoration de l'erreur d'interpolation. Nous montrons que cette dernière est en* $O(h^\alpha)$, *avec* $\alpha$ *au moins égal à 2. A la fin de ce chapitre nous donnons deux programmes : un programme concernant le calcul des B-coefficients des fonctions de base ; ainsi que celui de* m *et* M, *et un programme concernant le calcul de l'interpolant spline, de l'erreur d'interpolation et de l'ordre de convergence. Nous donnons aussi des courbes de niveau de certaines fonctions et de leurs interpolants.*

*On sait que la construction de l'interpolant d'Hermite vu au chapitre 1, nécessite la connaissance des dérivées partielles premières aux points d'interpolation. Or, en pratique, cette condition n'est pas toujours satisfaite ; il faut donc approcher les valeurs de ces dérivées : cela fait l'objet du quatrième et dernier chapitre.*

*Nous proposons deux méthodes d'approximation : la première méthode utilise la minimisation de l'expression*

$$E = \iint_\Omega \{(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2})^2 + 2(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}) + (\frac{\partial^2 S}{\partial y^2})^2\} \; dx\, dy.$$

*qui représente une valeur approchée de l'énergie de flexion d'une plaque mince. Dans ce cas, les calculs numériques montrent que l'erreur sur la fonction est en* $O(h^2)$ *seulement.*

*La deuxième méthode consiste à estimer les dérivées partielles au moyen de splines cubiques à une variable définies sur les parallèles aux côtés de* $\Omega$ *:cette méthode est beaucoup plus satisfaisante car l'erreur sur la fonction est en* $O(h^3)$. *Et à la fin de ce chapitre, on compare ces résultats avec ceux obtenus par Le Méhauté dans* [7], *au moyen des splines plaques minces locales.*

*Dans ce dernier cas l'erreur sur la fonction est en* $O(h^3)$ *également.*

# CHAPITRE 1.

## QUELQUES RESULTATS FONDAMENTAUX

## SUR

## LES SPLINES QUADRATIQUES.

# I - INTRODUCTION.

Ce chapitre regroupe certains résultats fondamentaux dont on se sert dans les chapitres suivants, notamment l'interpolation par des splines quadratiques sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et un triangle de $\mathbb{R}^2$.

# II - INTERPOLATION DE LAGRANGE SUR UN INTERVALLE DE $\mathbb{R}$, PAR DES SPLINES QUADRATIQUES.

Soit $I = [a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\Delta = \{a = t_o < \dots < t_N = b\}$ une subdivision uniforme de I.

Soit :

et
$$\left.\begin{array}{l} h_i = t_{i+1} - t_i \\ \\ t^*_{i+1} = t_{i+1/2} = t_i+\frac{1}{2} h_i \end{array}\right\} \text{ pour } 0 \leq i \leq N-1$$

Avec :

$$\begin{cases} t^*_o = t_o \\ \\ t^*_{N+1} = t_N \end{cases}$$

pour $0 \leq i \leq N-1$, on définit :

$P_2([t_i, t_{i+1}])$ : {fonctions polynomiales dù second degré définies sur $[t_i,t_{i+1}]$}

$P^1_2([a,b], \Delta)$ : $\{s \in C^1([a,b])$ ; tel que $S/[t_i,t_{i+1}] \in P_2([t_i, t_{i+1}])$, $0 \leq i \leq N-1\}$

$C^{-1}(\{a,b\})$ : {fonctions définie et bornées sur [a,b]}.

Alors le problème suivant :

$$\begin{array}{l} \text{Chercher } S \in P^1_2([a,b], \Delta) \text{ tq} \\ \qquad S(t^*_i) = f(t^*_i) = f^*_i \\ \qquad (\text{pour } f \in C^{-1}([a,b])) \end{array}$$

admet une solution et une seule. (Pour la démonstration voir [6]).

S peut s'écrire dans la base de Bernstein de $P_2^1([t_i, t_{i+1}])$ $(0 \leq i \leq N-1)$ de la manière suivante :

$$S(x) = a_{2i}\, \beta_0 + a_{2i+1}\, \beta_1 + a_{2i+2}\, \beta_2$$

avec

$$\begin{cases} \beta_0(x) = (1-x)^2 \\ \beta_1(x) = 2x(1-x) \\ \beta_2(x) = x^2 \end{cases}$$

*<u>Définition 1.</u>*

*Les* $a_j$ ; $2i \leq j \leq 2i+2$ *pour* $0 \leq i \leq N-1$, *sont appelés coefficients-Bézier ou les* B-*coefficients de* S. (Pour cette notion voir [10]).

<u>Exemple.</u>

On représente les B-coefficients pour N = 4.

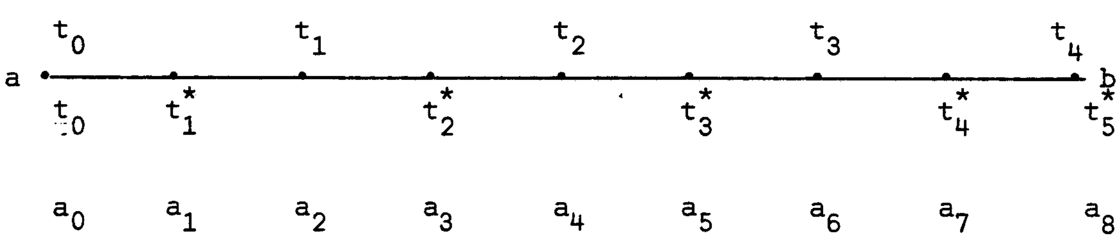



*Fig. 1. Représentation des B-coefficients* $a_i$, $0 \leq i \leq 8$ ; *de* $S \in P_2^1([a,b])$.

*<u>Proposition 1.</u>*

*Les* B-*coefficients indiqués sur la figure précédente (Fig. 1), se calculent en résolvant le système suivant :*

$$
(S1)\quad \begin{cases}
6a_2 + a_4 = -f_o^* + 4f_1^* + 4f_2^* \\
a_{2i-2} + 6a_{2i} + a_{2i+2} = 4f_i^* + 4f_{i+1}^* \\
\qquad \text{(pour } 2 \le i \le N-2\text{)} \\
a_{2N-4} + 6a_{2N-2} = 4f_{N-1}^* + 4f_N^* - f_{N+1}^*
\end{cases}
$$

puis en calculant :

$$
(S2)\quad \{ \quad a_{2i+1} = 2f_{i+1}^* - (a_{2i} + a_{2i+2})/2 \text{ pour } 0 \le i \le N-1
$$

avec

$$
\begin{cases}
a_o = f_o^* \\
a_{2N} = f_{N+1}^*
\end{cases}
$$

Pour la démonstration voir [10] .

## III - SPLINES DÉFINIES SUR UN DOMAINE TRIANGULÉ DE $\mathbb{R}^2$ :

### A - Notions préliminaires.

Soit $\Omega$ un domaine polygonal de $\mathbb{R}^2$, et $\mathcal{T}$ une triangulation de $\Omega$.

Soit $T \in \mathcal{T}$, $T = (A_1A_2A_3)$ et $M \in T$.

<u>*Définition 2.*</u>

*On appelle coordonnées barycentriques de* M, *la solution* $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ *du système :*

$$
\begin{cases}
\lambda_1A_1 + \lambda_2A_2 + \lambda_3A_3 = M \\
\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1
\end{cases}
$$

*Avec* $0 \leq \lambda_i \leq 1$ *pour* $1 \leq i \leq 3$.

*Soit :*

$P_2(T)$ : {fonctions polynomiales du second degré définies sur T}

$P_2^1(\Omega,C)$ : $\{S \in C^1(\Omega)$ tq $S/T \in P_2(T), \forall T \in \mathcal{T}\}$

*Définition 3.*

$S \in P_2^1(\Omega,C)$, *est appelée Spline quadratique* $C^1$ *définie sur* $\Omega$

S/T peut s'écrire dans la base de Bernstein de $P_2(T)$ de la manière suivante :

$$S(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{0 \leq i+j \leq 2} a_{ij}\ \beta_{ij}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Avec :

$$\beta_{ij}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{2!}{i!j!(2-i-j)!}\ \lambda_1^i\ \lambda_2^j\ \lambda_3^{(2-i-j)}$$

(pour $0 \leq i+j \leq 2$).

$\{\beta_{ij}\}_{0 \leq i+j \leq 2}$ est la base de Bernstein. $\{a_{ij}\}_{0 \leq i+j \leq 2}$ sont les B-coefficients de S. (Voir figure 2).

*Propriété 1.*

*Les* $\{\beta_{ij}\}_{0 \leq i+j \leq 2}$ *vérifient la propriété suivante :*

$$\begin{cases} \beta_{ij}(\lambda) \geq 0 \\ \sum_{0 \leq i+j \leq 2} \beta_{ij}(\lambda) = 1 \end{cases}$$

Considérons les points : $A_{ij} \in \partial T$ = bord de T, de coordonnées barycentriques :

$$(i/2\ ;\ \gamma/2\ ;\ (2-i-j)/2) \text{ pour } 0 \leq i+j \leq 2.$$

*Définition 4.*

*L'ensemble des points* $\tilde{a}_{ij} = (A_{ij}, a_{ij})$, *est appelé* B-*réseau ou* B-*polyèdre, sur le triangle* T, *du polynôme :*

$$P(\lambda) = \sum_{0 \le i+j \le 2} a_{ij}\, \beta_{ij}(\lambda)$$

*(voir Fig. 2).*

*Définition 5.*

*On appelle triangle quadratique l'ensemble des points* $(\lambda, P(\lambda))$ ; *c'est à dire le graphe de* $P \in P_2(T)$.

*Propriété 2.*

*On vérifie que :*

$$\begin{cases} \lambda = \sum_{0 \le i+j \le 2} A_{ij}\, \beta_{ij}(\lambda) \\ \\ P(\lambda) = \sum_{0 \le i+j \le 2} a_{ij}\, \beta_{ij}(\lambda) \end{cases}$$

Remarque 1.

1°) - Les relations données dans les propriétés (1) et (2) indiquent que les points $(\lambda, p(\lambda))$, du graphe de P, appartiennent à l'enveloppe convexe des points $\tilde{a}_{ij} = (A_{ij}, a_{ij})$.

2°) - Les figures suivantes éclaircissent la notion de B-coefficients.

$\mathbb{P}_2$

*Polynôme quadratique dans la base de Bernstein :*

$$P(\lambda) = a_{00}\,\lambda_0^2 + 2a_{10}\lambda_0\lambda_1 + 2a_{01}\lambda_0\lambda_2 + a_{20}\,\lambda_1^2 + 2a_{11}\lambda_1\lambda_2 + a_{02}\lambda_2^2$$

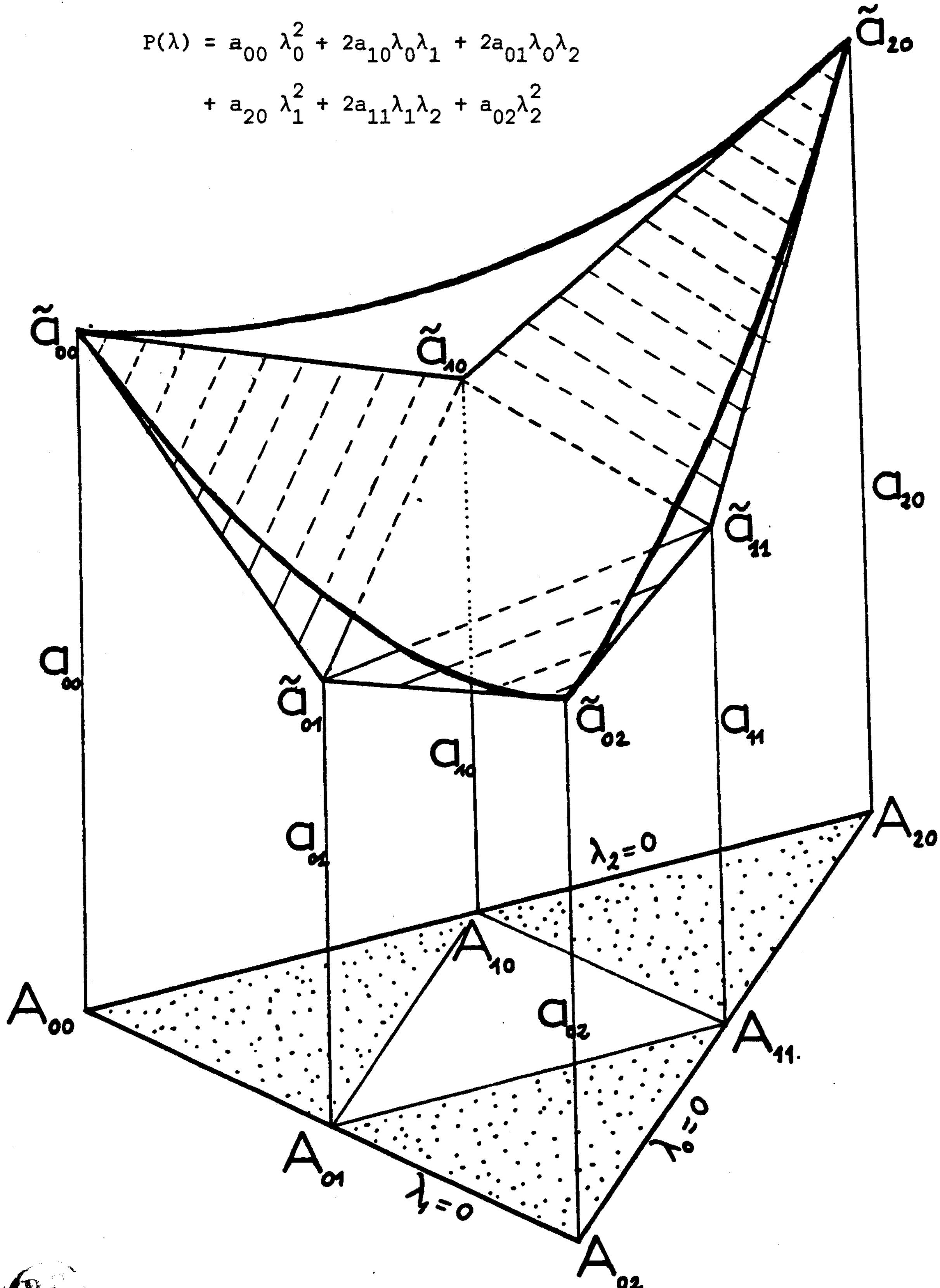





*Figure 2.* Réseau Bézier = $\{\tilde{a}_{ij}\}$

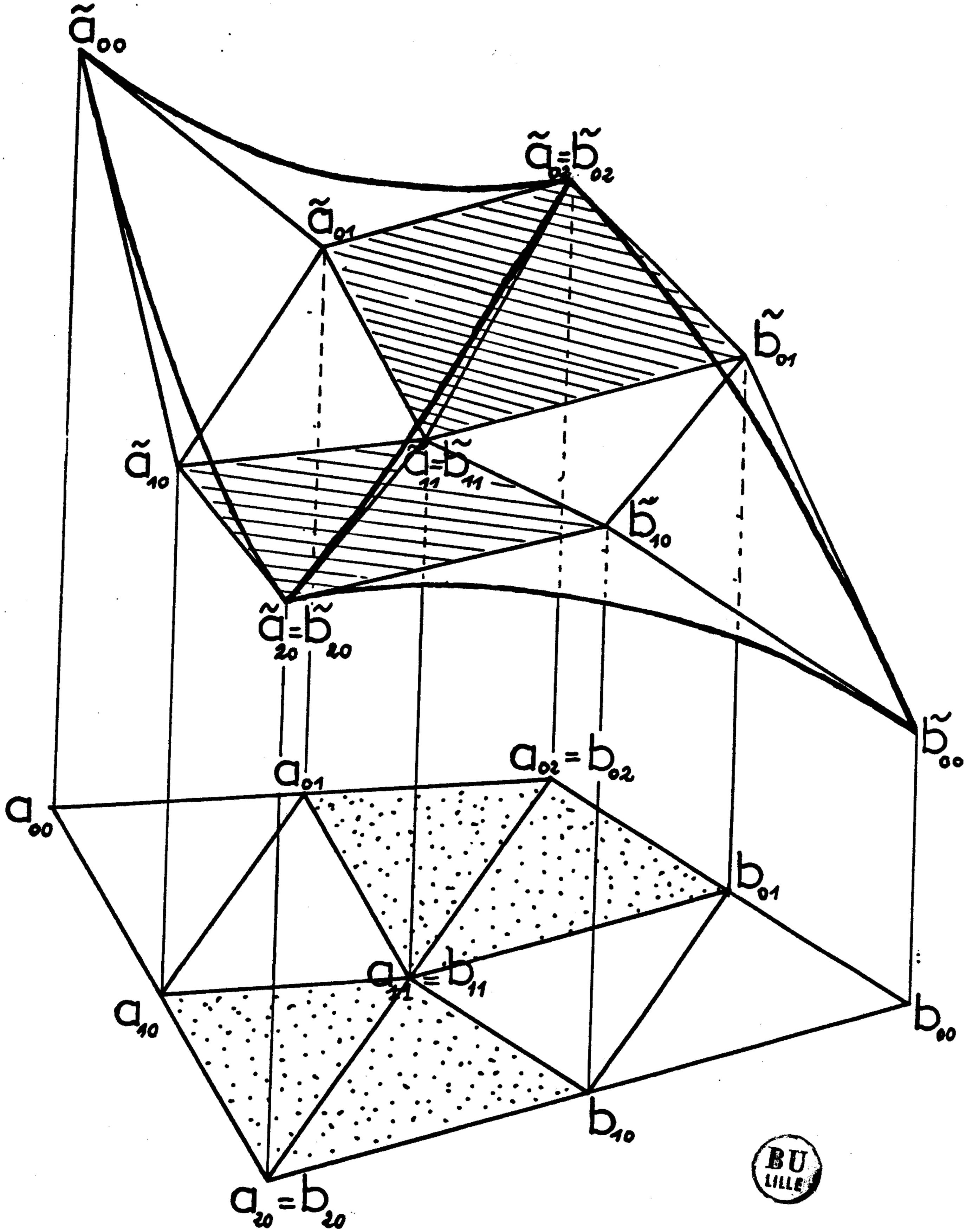





*Figure 3.*

Réseaux Bézier $\left\{ \begin{array}{l} \text{Représentation} \\ \text{Continuité } C^1 \end{array} \right.$

## B - Raccordement $C^1$ de deux triangles quadratiques.

Etant donné deux triangles $T_1 = (A_1A_2A_3)$ et $T_2 = (A_1A_2A_3')$, inclus dans $\Omega$, on sait d'après ce qui précède que la spline S s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} P_1(\lambda) = \sum\limits_{o\le i+j\le 2} a_{ij}\ \beta_{ij}(\lambda) & \text{sur } T_1 \\ P_2(\mu) = \sum\limits_{o\le i+j\le 2} b_{ij}\ \beta_{ij}(\mu) & \text{sur } T_2. \end{cases}$$

La figure précédente représente le raccordement $C^1$ le long de $[A_1A_2]$ des deux triangles quadratiques

$$\{(\lambda,\ P_1(\lambda))\ ;\ \lambda = (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3) \text{ avec } o \le \lambda_i \le 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1\}$$

$$\{(\mu,\ P_2(\mu))\ ;\ \mu = (\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3) \text{ avec } o \le \mu_i \le 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{3} \mu_i = 1\}$$

**Remarque 2.**

Le calcul de S revient à celui de ses B-coefficients. Et pour faciliter ce dernier, par la suite, on considère la projection du B-réseau dans le plan ; on obtient ainsi la figure suivante :

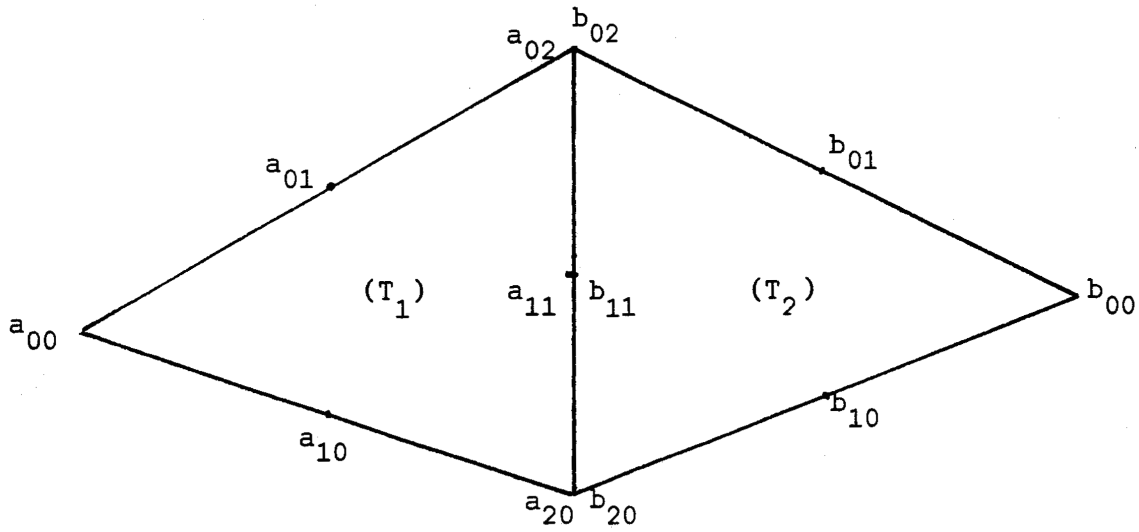



*Fig. 4. Projection du B-réseau de deux triangles quadratiques dans le plan.*

Dans la suite, tous les B-coefficients seront représentés par leurs projections.

*Proposition 2.*

*La continuité* $C^1$ *entre les deux triangles quadratiques précédents, le long de* $[A_1A_2]$, *se traduit par le fait que les points* $\tilde{a}_{20}$ ; $\tilde{a}_{11}$ ; $\tilde{a}_{10}$ ; *et* $\tilde{b}_{10}$ *d'une part ; et les points* $\tilde{a}_{20}$ ; $\tilde{a}_{11}$ ; $\tilde{a}_{10}$ *et* $\tilde{b}_{10}$ *d'autre part sont coplanaires.*
*Se de plus :* $A_3$, $A_1$ *et* $\overline{A}_3'$ *sont alignés avec* $A_3'A_1 = K\, A_3A_1$ *cette continuité se traduit par :*

$$(1+K)\ a_{20} = b_{10} + K\ a_{10}$$

$$(1+K)\ a_{11} = b_{01} + K\ a_{01}$$

Pour la démonstration de cette proposition voir [10]

## C) - Application : Problème de Powell-Sabin.

### 1°) - *Position du problème.*

Dans ce paragraphe on a :

$$\Omega = \text{triangle } T = A_1A_2A_3.$$

La triangulation $\mathcal{T}$ subdivise $\Omega$, $(\Omega = T)$, en 6 triangles $t_i$, appelés micro-triangles, comme le montre la figure suivante :

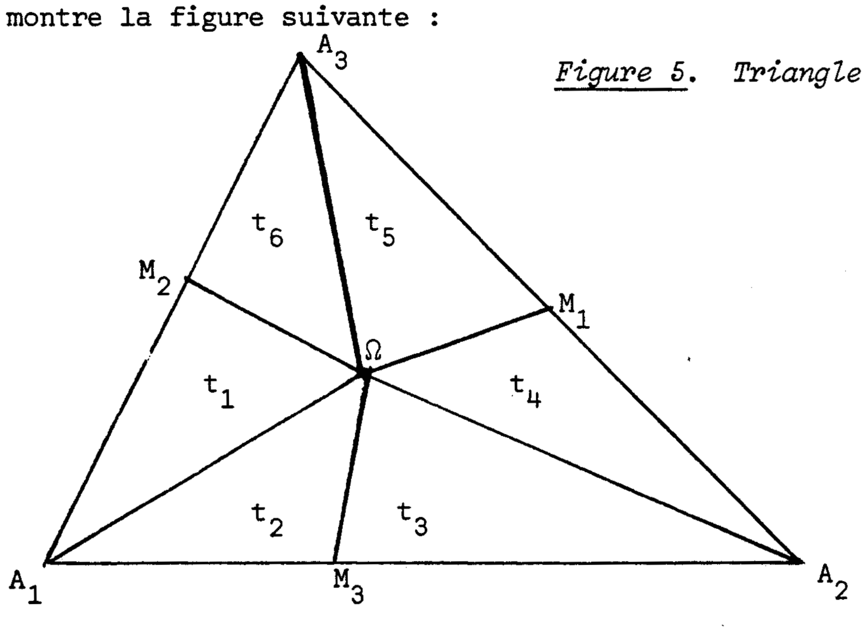



*Figure 5. Triangle de Powell-Sabin.*

On a :

$$\begin{cases} \Omega = \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3 \\ M_1 = (1-\alpha_1)\ A_2 + \alpha_1 A_3 \\ M_2 = \alpha_2 A_1 + (1-\alpha_2) A_3 & \text{pour } 0 < \alpha_i < 1 \\ M_3 = (1-\alpha_3) A_1 + \alpha_3 A_2 \end{cases}$$

On définit :

$P_2(t_i)$ : {fonctions polynomiales du second degré définies sur $t_i$} (pour $1 \leq i \leq 6$)

et

$P_2^1(T)$ : $\{S \in C^1(T)$ tq $S / t_i \in P_2(t_i)$ ; $1 \leq i \leq 6\}$

Le problème à résoudre est le suivant : Etant donné $f \in C^1(\Omega)$, $\exists ?\ S \in P_2^1(\Omega)$ tq :

$$\begin{cases} S(A_i) = f(A_i) \\ \dfrac{\partial S}{\partial x}(A_i) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(A_i) & \text{pour } 1 \leq i \leq 3 \\ \dfrac{\partial S}{\partial y}(A_i) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(A_i) \end{cases}$$

On démontre dans [10], qu'il existe S unique, $S \in P_2^1(\Omega, C)$ ; vérifiant ces conditions.

## 2) - Fonctions de base du procédé d'interpolation.

Les fonctions de base sont appelés $\phi_i$, $X_i$, et $\psi_i$ pour $1 \leq i \leq 3$ et vérifient :

$$\left\{\begin{array}{lll}
\phi_i(A_i) = 1 & \dfrac{\partial\phi_i}{\partial\lambda_{i+1}}(A_i) = 0 & \dfrac{\partial\phi_i}{\partial\lambda_{i+2}}(A_i) = 0 \\[2ex]
X_i(A_i) = 0 & \dfrac{\partial X_i}{\partial\lambda_{i+1}}(A_i) = 1 & \dfrac{\partial X_i}{\partial\lambda_{i+2}}(A_i) = 0 \\[2ex]
\psi_i(A_i) = 0 & \dfrac{\partial\psi_i}{\partial\lambda_{i+1}}(A_i) = 0 & \dfrac{\partial\psi_i}{\partial\lambda_{i+2}}(A_i) = 1
\end{array}\right.$$

Les fonctions $\phi_i$, $X_i$ et $\psi_i$, ainsi que leurs dérivés partielles premières étant nulles aux points $A_{i+1}$, $A_{i+2}$. Avec la convention :

$$A_j = A_{j-3} \text{ pour } j \geq 4$$

*3°) - Opérateur d'interpolation et interpolant.*

Appelons $\pi$ l'opérateur d'interpolation, c'est à dire l'application

$$\begin{array}{rcl}
\pi : C^1(T) & \longrightarrow & P_2^1(T) \\
f & \longrightarrow & \pi f = S
\end{array}$$

$\pi f$ étant définie de la manière suivante :

$$\pi f = \sum_{i=1}^{3} f(A_i)\,\phi_i + \sum_{i=1}^{3} Df(A_i).\overrightarrow{A_iA_{i+1}}X_i + \sum_{i=1}^{3} Df(A_i).\overrightarrow{A_iA_{i+2}}\psi_i$$

$$= \sum_{i=1}^{3} f(A_i)\,\phi_i + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial\lambda_{i+1}}(A_i)\,X_i + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial\lambda_{i+2}}(A_i)\,\psi_i$$

*4°) - Résultat préliminaire.*

*Définition 6.*

*On appelle* $\lambda_{ij}$ $(1 \leq i \leq 6$ et $1 \leq j \leq 3)$, *les coordonnées barycentriques relatives au triangle* $t_i$.

| i \ j | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | $\lambda_1 - \left[\frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{\alpha_2\,\omega_3}{\omega_2(1-\alpha_2)}\right]\lambda_2 - \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}\,\lambda_3$ | $\frac{\lambda_2}{\omega_2}$ | $-\frac{\omega_3}{\omega_2(1-\alpha_2)}\,\lambda_2 + \frac{1}{1+\alpha_2}\,\lambda_3$ |
| 2 | $\lambda_1 - \left[\frac{1-\alpha_3}{\alpha_3}\,\lambda_2 + \left[\frac{\omega_2(1-\alpha_3)}{\omega_3\alpha_3}\right] - \frac{\omega_1}{\omega_3}\,\lambda_3\right]$ | $\frac{1}{\alpha_3}\,\lambda_2 - \frac{\omega_2}{\alpha_3\omega_3}\,\lambda_3$ | $\frac{\lambda_3}{\omega_3}$ |
| 3 | $-\frac{\alpha_3}{1-\alpha_3}\,\lambda_1 + \lambda_2 + \left[\frac{\omega_1\alpha_3}{\omega_3(1-\alpha_3)} - \frac{\omega_2}{\omega_3}\right]\lambda_3$ | $\frac{\lambda_3}{\omega_3}$ | $\frac{1}{1-\alpha_3}\,\lambda_1 - \frac{\omega_1}{\omega_3(1-\alpha_3)}\,\lambda_3$ |
| 4 | $\left[\frac{\omega_3(1-\alpha_1)}{\omega_1\alpha_1} - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right]\lambda_1 + \lambda_2 - \frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}\,\lambda_3 + \lambda_3$ | $\frac{1}{\alpha_1}\,\lambda_3 - \frac{\omega_3}{\omega_1\alpha_1}\,\lambda_1$ | $\frac{\lambda_1}{\omega_1}$ |
| 5 | $\left[\frac{\omega_2\alpha_1}{\omega_0(1-\alpha_1)} - \frac{\omega_3}{\omega_1}\right]\lambda_1 - \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\,\lambda_2 + \lambda_3$ | $\frac{\lambda_1}{\omega_1}$ | $\frac{1}{1-\alpha_1}\,\lambda_2 - \frac{\omega_2}{\omega_1(1-\alpha_1)}\,\lambda_1$ |
| 6 | $-\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2}\,\lambda_1 + \left[\frac{\omega_1(1-\alpha_2)}{\omega_2\alpha_2} - \frac{\omega_3}{\omega_2}\right]\lambda_2 + \lambda_3$ | $\frac{1}{\alpha_2}\,\lambda_1 - \frac{\omega_1}{\alpha_2\omega_2}\,\lambda_2$ | $\frac{\lambda_2}{\omega_2}$ |

*TABLEAU 1. Expression des* $(\lambda_{ij})$ $\begin{smallmatrix} 1 \le i \le 6 \\ 1 \le j \le 3 \end{smallmatrix}$ *en fonction des* $\lambda_k$ *pour* $1 \le k \le 3$.

*Lemme 1.*

*Le tableau précédent représente le calcul des coordonnées barycentriques relatives aux micro-triangles* $t_i$ ; *en fonction de celles relatives au macro-triangle* T.

Démonstration du lemme 1.

En se référant à la figure 5, on a pour $M \in t_1$, par exemple

(1)

$$M = \lambda_{11} A_1 + \lambda_{12}\Omega + \lambda_{13} M_2$$

or

$$\begin{cases} \Omega = \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3 \\ M_2 = \alpha_2 A_1 + (1 - \alpha_2) A_3 \end{cases}$$

En remplaçant dans (1) on a :

(1')

$$M = \lambda_{11} A_1 + \lambda_{12} (\omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3) + \lambda_{13}(\alpha_2 A_1 + (1-\alpha_2) A_3)$$

d'autre part, M s'écrit en fonction des sommets de T de la manière suivante :

(2) $$M = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3$$

En comparant les expressions (1') et (2), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_{11} + \omega_1 \lambda_{12} + \alpha_2 \lambda_{13} \\ \lambda_2 = \omega_2 \lambda_{12} \\ \lambda_3 = \omega_3 \lambda_{12} + (1 - \alpha_2) \lambda_{13} \end{cases}$$

En résolvant ce système on obtient :

$$\begin{cases} \lambda_{12} = \dfrac{\lambda_2}{\omega_2} \\[2ex] \lambda_{13} = - \dfrac{\omega_2}{\omega_2(1-\alpha_2)} \; \lambda_2 + \dfrac{1}{1-\alpha_2} \lambda_3 \\[2ex] \lambda_{11} = \lambda_2 - \left[ \dfrac{\omega_1}{\omega_2} - \dfrac{\alpha_2 \omega_3}{\omega_2(1-\alpha_2)} \right] \lambda_2 - \dfrac{\alpha_2}{1-\alpha_2} \; \lambda_3 \end{cases}$$

On fait le même raisonnement pour le calcul des coordonnées barycentriques relatives aux autres micro-triangles $t_i$ $(2 \le i \le 6)$.

## 5°) - *Calcul des B-coefficients de la spline d'interpolation.*

Représentons d'abord la projection du B-réseau dans le plan

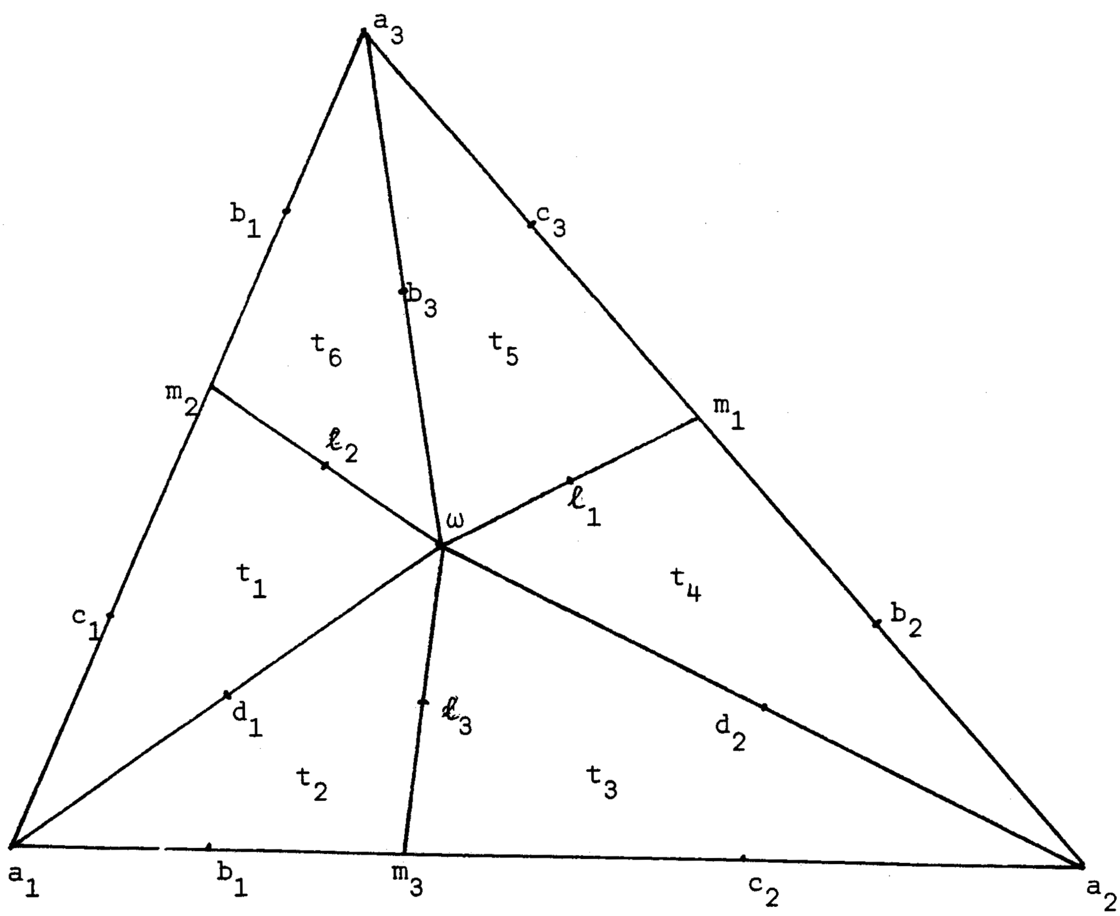





*Figure 6.*

Remarque 3.

Pour le calcul des B-coefficients de la spline on se base sur le raccordement $C^1$ de deux triangles quadratiques.

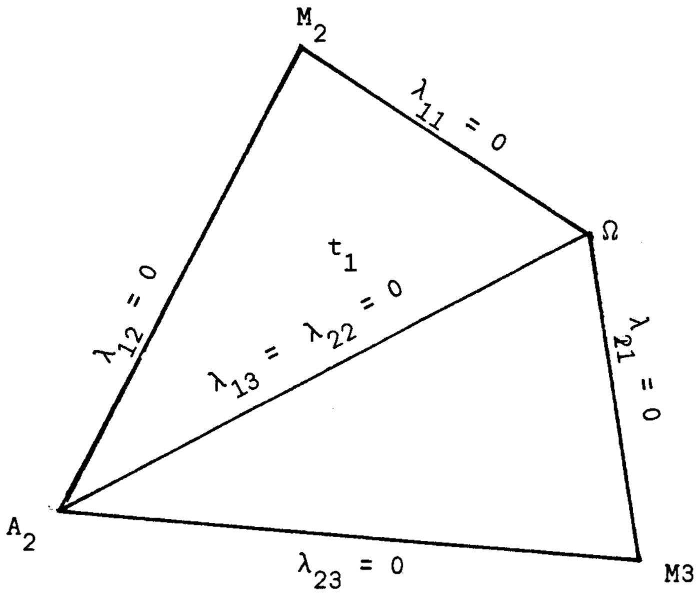



*Fig. 7. Représentation des micro-triangles* $t_1$ *et* $t_2$ *et des coordonnées barycentriques correspondantes.*

Les coordonnées barycentriques relatives à $t_1$ et $t_2$ sont respectivement $(\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13})$ et $(\lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23})$.

En s'inspirant de la figure 6, on peut écrire la spline S, dans la base de Bernstein de $P_2(t_1)$ et $P_2(t_2)$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} S(\lambda_{11},\lambda_{12},\lambda_{13}) = a_1\lambda_{11}^2+\omega\lambda_{12}^2+m_2\lambda_{13}^2+2(d_1\lambda_{11}\lambda_{12}+e_2\lambda_{12}\lambda_{13}+C_1\lambda_{11}\lambda_{13})(\text{Sur } t_1) \\ \\ S(\lambda_{21},\lambda_{22},\lambda_{23}) = a_1\lambda_{21}^2+m_3\lambda_{22}^2+\omega\lambda_{23}^2+2(b_1\lambda_{21}\lambda_{22}+e_3\lambda_{22}\lambda_{23}+d_1\lambda_{21}\lambda_{23})(\text{Sur } t_2) \end{cases}$$

or

$$\begin{cases} \lambda_{11} = 1 - \lambda_{12} - \lambda_{13} \\ \\ \lambda_{21} = 1 - \lambda_{21} - \lambda_{23} \end{cases}$$

d'où en remplaçant dans les deux expressions, on a :

$$g(\lambda_{12}, \lambda_{13}) = a_1(1 - \lambda_{12} - \lambda_{13})^2 + \omega\lambda_{12}^2 + m_2\,\lambda_{13}^2$$

$$+ 2d_1\,(1 - \lambda_{12} - \lambda_{13})\,\lambda_{12} + 2e_2\,\lambda_{12}\,\lambda_{13}$$

$$+ 2c_1\,\lambda_{13}(1 - \lambda_{12} - \lambda_{13})$$

et

$$g(\lambda_{22}, \lambda_{23}) = \hat{a}_1(1 - \lambda_{22} - \lambda_{23})^2 + m_3\,\lambda_{22}^2 + \omega\lambda_{23}^2$$

$$+ 2b_1(1 - \lambda_{22} - \lambda_{23})\,\lambda_{22} + 2e_3\,\lambda_{22}\,\lambda_{23}$$

$$+ 2d_1(1 - \lambda_{22} - \lambda_{23})\,\lambda_{23}$$

Posons :

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{\partial g}{\partial\lambda_2}(A_1) \\ q_1 = \dfrac{\partial g}{\partial\lambda_3}(A_1) \end{cases}$$

on a :

$$P_1 = \frac{\partial g}{\partial\lambda_2}(A_1)\ \frac{\partial g}{\partial\lambda_{22}}(A_1).\ \frac{\partial\lambda_{22}}{\partial\lambda_2}(A_1) + \frac{\partial g}{\partial\lambda_{23}}(A_1).\ \frac{\partial\lambda_{23}}{\partial\lambda_2}(A_1)$$

d'où :

$$\boxed{P_1 = \frac{\partial g}{\partial\lambda_2}(A_1) = \frac{1}{\alpha_3}\ \frac{\partial g}{\partial\lambda_{22}}(A_1)}$$

(Voir TAB. 1)

De la même manière on trouve :

$$\boxed{q_1 = \frac{\partial g}{\partial\lambda_3}(A_1) = \frac{1}{1-\alpha_2}\,\frac{\partial g}{\partial\lambda_{13}}(A_1)}$$

Aussi on a :

$$\frac{\partial g}{\partial\lambda_{12}}(A_1) = \frac{\partial g}{\partial\lambda_2}(A_1).\ \frac{\partial\lambda_2}{\partial\lambda_{12}}(A_1) + \frac{\partial g}{\partial\lambda_3}(A_1)\ \frac{\partial\lambda_3}{\partial\lambda_{12}}(A_1) = \omega_2\,P_1 + \omega_3\,q_1$$

Or après le calcul on trouve :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial g}{\partial \lambda_{22}}(A_1) = 2(b_1-a_1) \\ &\frac{\partial g}{\partial \lambda_{12}}(A_1) = 2(d_1-a_1) \\ &\frac{\partial g}{\partial \lambda_{13}}(A_1) = 2(c_1-a_1) \end{aligned}\right.$$

On a ainsi à résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{2}{\alpha_3}(b_1-a_1) = p_1 \\ &\frac{2}{1-\alpha_2}(c_1-a_1) = q_1 \\ &2(d_1-a_1) = \omega_2 p_1 + \omega_3 q_1 \end{aligned}\right.$$

On obtient, comme solution :

$$\left\{\begin{aligned} &b_1 = a_1 + \frac{1}{2}\alpha_3\, p_1 \\ &c_1 = a_1 + \frac{1}{2}(1-\alpha_2)q_1 \\ &d_1 = a_1 + \frac{1}{2}(\omega_2 p_1+\omega_3 q_1) \end{aligned}\right.$$

Aussi en posant

$$\left\{\begin{array}{l} a_2 = f(A_2) \\ p_2 = \dfrac{\partial f}{\partial \lambda_3}(A_2) \\ q_2 = \dfrac{\partial f}{\partial \lambda_1}(A_2) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} a_3 = f(A_3) \\ p_3 = \dfrac{\partial f}{\partial \lambda_1}(A_3) \\ q_3 = \dfrac{\partial f}{\partial \lambda_2}(A_3) \end{array}\right.$$

Et en raisonnant de la même façon que précédemment, on trouve des valeurs analogues pour $b_i$, $c_i$, $d_i$ $(i = 2,3)$, et en appliquant les résultats donnés dans [8], on a :

$$\left\{\begin{array}{l} m_1 = (1-\alpha_1)\, b_2 + \alpha_1 c_3 \\ e_1 = (1-\alpha_1)\, d_3 + \alpha_1 d_2 \\ \omega = \omega_1 d_1 + \omega_2 d_2 + \omega_3 d_3 \end{array}\right.$$

Remarque 4.

Les résultats précédents permettent donc d'obtenir directement les B-coefficients des fonctions de base du procédé d'interpolation, qui sont regroupés dans le tableau suivant :

| | $\phi_1$ | $\phi_2$ | $\phi_3$ | $\chi_1$ | $\chi_2$ | $\chi_3$ | $\psi_1$ | $\psi_2$ | $\psi_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $b_1$ | 1 | 0 | 0 | $1/2\ \omega_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $c_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1-\alpha_2}{2}$ | 0 | 0 |
| $d_1$ | 1 | 0 | 0 | $1/2\ \omega_2$ | 0 | 0 | $\omega_{3/2}$ | 0 | 0 |
| $a_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $b_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | $1/2\ \alpha_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $c_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1-\alpha_3}{2}$ | 0 |
| $d_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | $1/2\ \omega_3$ | 0 | 0 | $\omega_{1/2}$ | 0 |
| $a_3$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $b_3$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | $1/2\ \alpha_2$ | 0 | 0 | 0 |
| $c_3$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}(1-\alpha_1)$ |
| $d_3$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | $1/2\omega_1$ | 0 | 0 | $\frac{1}{2}\ \omega_2$ |
| $m_1$ | 0 | $1-\alpha_1$ | $\alpha_1$ | 0 | $\frac{\alpha_1(1-\alpha_1)}{2}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{\alpha_1(1-\alpha_1)}{2}$ |
| $m_2$ | $\alpha_2$ | 0 | $1-\alpha_2$ | 0 | 0 | $\frac{\alpha_2(1-\alpha_2)}{2}$ | $\frac{\alpha_2(1-\alpha_2)}{2}$ | 0 | 0 |
| $m_3$ | $1-\alpha_3$ | $\alpha_3$ | 0 | $\frac{\alpha_3(1-\alpha_3)}{2}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{\alpha_3(1-\alpha_3)}{2}$ | 0 |
| $e_1$ | 0 | $1-\alpha_1$ | $\alpha_1$ | 0 | $\frac{\omega_3(1-\alpha_1)}{2}$ | $\frac{\omega_1\alpha_1}{2}$ | 0 | $\frac{\omega_1(1-\alpha_1)}{2}$ | $\frac{\omega_2\alpha_1}{2}$ |
| $e_2$ | $\alpha_2$ | 0 | $1-\alpha_2$ | $\frac{\alpha_2\omega_2}{2}$ | 0 | $\frac{\omega_1(1-\alpha_2)}{2}$ | $\frac{\alpha_2\omega_3}{2}$ | 0 | $\frac{\omega_2(1-\alpha_1)}{2}$ |
| $e_3$ | $1-\alpha_3$ | $\alpha_3$ | 0 | $\frac{(1-\alpha_3)\omega_2}{2}$ | $\frac{\alpha_3\omega_3}{2}$ | 0 | $\frac{\omega_3(1-\alpha_3)}{2}$ | $\frac{\alpha_3\omega_1}{2}$ | 0 |
| $\omega$ | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_3$ | $\frac{\omega_1\omega_2}{2}$ | $\frac{\omega_2\omega_3}{2}$ | $\frac{\omega_1\omega_3}{2}$ | $\frac{\omega_1\omega_3}{2}$ | $\frac{\omega_1\omega_2}{2}$ | $\frac{\omega_2\omega_3}{2}$ |



*TABLEAU 2. B-coefficients des fonctions de base du procédé d'interpolation.*

# CHAPITRE II

## ETUDE DE L'ERREUR D'INTERPOLATION D'HERMITE

## PAR

## DES SPLINES QUADRATIQUES $C^1$.

# I - INTRODUCTION.

Considérons un domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$, subdivisé par une triangulation $\mathcal{T}$.

$\mathcal{T}$ est régulière, c'est à dire qu'il existe $\alpha \geq 1$ tel que :

$$-\forall T \in \mathcal{T},\ T \subset \mathcal{D},$$

on a :

$$1 \leq \frac{h}{2\rho} \leq \alpha$$

($h$ et $\rho$ sont les diamètres respectifs des cercles circonscrit à T et inscrit dans T).

Ce chapitre concerne l'étude de l'erreur pour l'interpolant d'Hermite défini au chapitre I.

On commence l'étude sur l'un des triangles T de la subdivision $\mathcal{T}$. Dans la deuxième partie, on montre que les résultats se généralisant au domaine $\mathcal{D}$, et ce, en se basant sur les résultats donnés par P. Sablonnière dans [9].

Etant donné $m \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, x_2)$ ; $x \in \mathbb{R}^2$, $p \in \mathbb{R}$, $T \in \mathcal{T}$ ; on définit :

$$W^{m,p}(T) : \{(\text{classes de) fonctions } f \text{ tq } f \in L^p(T) \text{ et } \partial^\beta f \in L^p(T) \text{ pour } |\beta| \leq m\}$$

avec

$$\partial^\beta f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\beta_2}$$

avec

$$\begin{cases} \beta = (\beta_1, \beta_2) \\ |\beta| = \beta_1 + \beta_2 \end{cases}$$

On définit aussi pour $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \leq m$

$$||D^{\ell}f(x)|| = \sup_{||\xi_i|| = 1} |D^{\ell}f(x)\ (\xi_1,\ldots,\xi_{\ell})|$$

($\xi_i \in \mathbb{R}^2$ pour $1 \leq i \leq \ell$)
On munit $W^{m,p}(T)$, des semi-normes suivantes :

$$|f|_{\ell,p,T} = \left( \int_T ||D^{\ell}f(x)||^p\, dx\right)^{1/p} \quad ; \quad 0 \leq \ell \leq m$$

Avec la modification habituelle quand p tend vers l'infini.

## II - ETUDE DE L'ERREUR D'INTERPOLATION SUR UN TRIANGLE $T \in \mathcal{T}$, $T \subset \mathcal{D}$:

Soit $T = A_1A_2A_3$, subdivisé en 6 micro-triangles $t_i$.
Soit $f \in W^{m,p}(T)$ et $a = \frac{h}{2\rho}$ .

On a vu au chapitre I que l'interpolant d'Hermite de f, aux points $A_i$ $(1 \leq i \leq 3)$, s'écrit de la manière suivante :

$$\pi f = S = \sum_{i=1}^{3} f(A_i)\phi_i + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial \lambda_{i+1}} (A_i)\ X_i + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial \lambda_{i+2}} (A_i)\psi_i$$

Avec toujours la convention d'indices :

$$A_j = A_{j-3} \text{ pour } j \geq 4.$$

<u>Remarque 1</u>.

Dans cette étude, on se base sur les résultats donnés par GOUT dans [4]. Pour ' > 1, $\pi$ opérateur d'interpolation et h le diamètre du cercle circonscrit à T, on a les résultats suivants, avec les notations du chapitre I (§ III.C).

*Théorème 1.*

$$|f-\pi f|_{0,p,T} \leq \frac{6p^2-5p}{6(3p-2)(p-1)} \quad h^3 \; |f|_{3,p,T}$$

*Théorème 2.*

$$|f-\pi f|_{1,p,T} \leq 6pa \; \{\sum_{i=1}^{3} (\frac{N_i}{3p-2} + \frac{D_i}{p-1})\} \; h^2 \; |f|_{3,p,T}$$

avec :

$$N_i = \text{Max}\; (1 \; ; \; \frac{|\alpha_{i+1}-\omega_i|}{\omega_{i+1}} \; ; \; \frac{|1-\alpha_{i+2}-\omega_i|}{\omega_{i+2}})$$

$$D_i = \text{Max}(\frac{|(1-\alpha_{i+2})\omega_{i+1} - \omega_i \; \alpha_{i+2}|}{\omega_{i+2}}, \; 1)$$

*Théorème 3.*

$$|f-\pi f|_{2,p,T} \leq 108 \; p \; M \; a^2 \; \frac{4p-3}{(3p-2)(p-1)} \; h \; |f|_{3,p,T}$$

Avec :

$$M = \underset{1\leq i\leq 3}{\text{Max}} \; (\frac{\omega_i}{\omega_{i+1}^2})$$

Pour la démonstration du théorème 1, on a besoin des lemmes suivants :

*Lemme 1.*

*Pour* $r = 0,1$ ; *et avec les mêmes hypothèses que précédemment, on a :*

$$(\int_T ( \underset{1\leq i\leq 3}{\text{Max}} \; ||J_r(f, A_i)(x)||)^p)^{1/p} \leq \frac{p}{(3-r)p-2} \; h^{3-r} \; |f|_{3,p,T}$$

Avec :

$$J_r(f,A_i)(x) = \int_0^1 (1-t)^{2-r} \; D^3 f(x+t(A_i-x)).(A_i-x)^{3-r} dt$$

Pour la démonstration de ce lemme cf. [1]

*Lemme 2.*

*$\phi_i$, $X_i$, $\psi_i$ étant les fonctions de base du procédé d'interpolation, on a les résultats suivants :*

$$\begin{cases} \phi_i \geq 0 \ ; \ X_i \geq 0 \quad \psi_i \geq 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \phi_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{3} (X_i+\psi_i)(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \end{cases}$$

Démonstration.

La démonstration est évidente ; en effet il suffit d'écrire localement chaque fonction de base dans la base de Bernstein (voir ch. I) ; les B-coefficients de la somme sont alors les sommes des B-coefficients des fonctions de base du procédé.

*Lemme 3.*

$$|(f-\pi f)(x)| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} |J_o(f, A_i)(x)| \ \phi_i(x)$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} |J_1(f,A_i)(x).\overrightarrow{A_iA_{i+1}}| \ X_i(x)$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} |J_1(f,A_i)(x).\overrightarrow{A_iA_{i+2}}| \ \psi_i(x)$$

Pour la démonstration de ce lemme cf. [4].

---

Démonstration du théorème 1.

En utilisant le lemme précédent et en majorant les normes par le Max, on a :

$$|(f-\pi f)(x)| \leq \frac{1}{2} \underset{1\leq i\leq 3}{\text{Max}} |J_o(f,A_i)(x)| \sum_{i=1}^{3} \phi_i(x)$$

$$+ h \underset{1\leq i\leq 3}{\text{Max}} ||J_1(f, A_i)(x)|| \sum_{i=1}^{3} X_i(x)$$

$$+ h \underset{1\leq i\leq 3}{\text{Max}} ||J_1(f, A_i)(x)|| \sum_{i=1}^{3} \psi_I(x)$$

(car $||A_iA_{i+j}|| \leq h$ pour $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq j \leq 2$).

Et en utilisant le lemme 2, on a :

$$|(f-\pi f)(x)| \leq \frac{1}{2} \underset{1\leq i\leq 3}{\text{Max}} |J_0(f, A_i)(x)| + \frac{h}{3} \underset{1\leq i\leq 3}{\text{Max}} ||J_1(f,A_i)(x)||$$

En effet :

$$\underset{x\in T}{\text{Max}} (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3)(x) = 1/3.$$

En passant à la norme $L_p$ et en appliquant le lemme 1, on a :

$$|f-\pi f|_{o,p,T} \leq 1/2 \left[\int_T \left( \underset{1\leq i\leq 3}{\text{Max}} ||J_0(f, A_i)(x)| \right)^p\right]^{1/p}$$

$$+ \frac{h}{3} \left[\int_T \left( \underset{1\leq i\leq 3}{\text{Max}} ||J_1(f, A_i)(x)| \right)^p\right]^{1/p}$$

$$\leq \frac{p}{2(3p-2)} h^3 |f|_{3,p,T} + \frac{h}{3} \frac{p}{2p-2} h^2 |f|_{3,p,T}$$

d'où

$$|f-\pi f|_{0,p,T} \leq \frac{p(6p-5)}{6(p-1)(3p-2)} h^3 |f|_{3,p,T}.$$

C.Q.F.D.

Pour la démonstration du théorème 2, on a besoin des lemmes suivants :

*Lemme 4.*

*Soit* $f_i = \phi_i$ ($X_i$ *ou* $\psi_i$ ; $1 \leq i \leq 3$).

*Posons*

$$P_i(x) = f_i(\lambda_1(x),\ \lambda_2(x),\ \lambda_3(x)) \ ;$$

*On a pour* $m = 0, 1, 2$

$$\begin{aligned} ||D^m P_i(x)|| &\leq \Big(\max_{1\leq j\leq 3} ||D\lambda_j||\Big)^m \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |\partial^\alpha f_i(\lambda_1(x),\ \lambda_2(x),\ \lambda_3(x))| \\ &\leq \Big(\frac{1}{\rho}\Big)^m \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |\partial^\alpha f_i(\lambda_1(x),\ \lambda_2(x),\ \lambda_3(x))| \end{aligned}$$

Pour la démonstration de ce lemme cf. [1].

---

Le tableau suivants représentent les dérivés partielles premières et secondes des fonctions de base. Il suffit de donner les résultats pour $\phi_1$ et $X_1$. $\phi_i$ ($i = 2,3$) et $X_i$ ; $\psi_i$ (pour $1 \leq i \leq 3$) ont des formules respectivement analogues à celles de $\phi_1$ et $X_1$.

| | $\frac{\partial \phi_1}{\partial \lambda_1}$ | $\frac{\partial \phi_1}{\partial \lambda_2}$ | $\frac{\partial \phi_1}{\partial \lambda_3}$ |
|---|---|---|---|
| $t_1$ | $2(\lambda_{11}+\lambda_{12}+\lambda_{13})$ | $2\lambda_{11}+2\,\frac{\alpha_2-\omega_1}{\omega_2}\,\lambda_{13}$ | $2\lambda_{11}$ |
| $t_2$ | $2(\lambda_{21}+\lambda_{22}+\lambda_{23})$ | $2\lambda_{21}$ | $2\lambda_{21}+2\,\frac{1-\alpha_3-\omega_1}{\omega_3}\,\lambda_{22}$ |
| $t_3$ | $2(\lambda_{33}+\lambda_{32})$ | 0 | $2\,\frac{1-\alpha_3-\omega_1}{\omega_3}\,\lambda_{33}$ |
| $t_4$ | $2\lambda_{43}$ | 0 | 0 |
| $t_5$ | $2\lambda_{52}$ | 0 | 0 |
| $t_6$ | $2(\lambda_{62}+\lambda_{63})$ | $\frac{2(\alpha_1-\omega_1)}{\omega_2}\,\lambda_{62}$ | 0 |



*Tableau 1. Représentant les dérivées partielles de $\phi_1$ par rapport aux cordonnées barycentriques $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$.*

| | $\frac{\partial X_1}{\partial \lambda_1}$ | $\frac{\partial X_1}{\partial \lambda_2}$ | $\frac{\partial X_1}{\partial \lambda_3}$ |
|---|---|---|---|
| $t_1$ | $\omega_2\lambda_{12}$ | $\lambda_{11} + \alpha_2 \lambda_{13}$ | 0 |
| $t_2$ | $\omega_2\lambda_{23} + \alpha_3\lambda_{22}$ | $\lambda_{21}$ | $\frac{(1-\alpha_3)\omega_2-\omega_1\alpha_3}{\omega_3}\lambda_{22}$ |
| $t_3$ | $\alpha_3\lambda_{33} + \omega_3\lambda_{32}$ | 0 | $\frac{(1-\alpha_3)\omega_2 - \omega_1\alpha_3}{3}\lambda_{33}$ |
| $t_4$ | $\omega_2\lambda_{43}$ | 0 | 0 |
| $t_5$ | $\omega_2\lambda_{52}$ | 0 | 0 |
| $t_6$ | $\omega_2\lambda_{63}$ | $\alpha_2\lambda_{62}$ | 0 |

*Tableau 2. Représentant les dérivées partielles de $X_1$ par rapport aux coordonnées barycentriques $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_2$ de T.*

| | $\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \lambda_1^2}$ | $\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \lambda_2^2}$ | $\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \lambda_3^2}$ |
|---|---|---|---|
| $t_1$ | $2$ | $2\left[\frac{\omega_3\alpha_2}{\omega_2(1-\alpha_2)} - \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{\alpha_2-\omega_1}{\omega_2} \quad \frac{\omega_3}{\omega_2(1-\alpha_2)}\right]$ | $-\frac{2\alpha_2}{1-\alpha_2}$ |
| $t_2$ | $2$ | $-2\,\frac{(1-\alpha_3)}{\alpha_3}$ | $2\left[\frac{\omega_2(1-\alpha_3)}{\omega_3\alpha_3} - \frac{\omega_1}{\omega_3} - \frac{1-\alpha_3-\omega_1}{\omega_3} \quad \frac{\omega_2}{\alpha_3\omega_3}\right]$ |
| $t_3$ | $\frac{2}{1-\alpha_3}$ | $0$ | $-2\,\frac{1-\alpha_3-\omega_1}{\omega_3} \times \frac{\omega_1}{\omega_3(1-\alpha_3)}$ |
| $t_4$ | $\frac{2}{\omega_1}$ | $0$ | $0$ |
| $t_5$ | $\frac{2}{\omega_1}$ | $0$ | $0$ |
| $t_6$ | $\frac{2}{\alpha_2}$ | $-2\,\frac{(\alpha_2-\omega_1)}{\omega_2} \times \frac{\omega_1}{\alpha_2\omega_2}$ | $0$ |

*Tableau 3. Représentant les dérivées partielles* $\frac{\partial^2 \phi i}{\partial \lambda_i^2}$ ; $1 \le i \le 3$.

| | $\frac{\partial^2\phi_1}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}$ | $\frac{\partial^2\phi_1}{\partial\lambda_2\partial\lambda_3}$ | $\frac{\partial^2\phi_1}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}$ |
|---|---|---|---|
| $t_1$ | 2 | $2(\frac{\omega_3\alpha_2}{\omega_2(1-\alpha_2)} - \frac{\omega_1}{\omega_2})$ | 2 |
| $t_2$ | 2 | $2[\frac{\omega_2(1-\alpha_3)}{\omega_3\alpha_3} - \frac{\omega_1}{\omega_3}]$ | 2 |
| $t_3$ | 0 | 0 | $\frac{2(-\omega_1+1-\alpha_3)}{\omega_3(1-\alpha_3)}$ |
| $t_4$ | $\frac{2}{\omega_1}$ | 0 | 0 |
| $t_5$ | 0 | 0 | 0 |
| $t_6$ | $2[\frac{-\omega_1+\alpha_2}{\omega_2\alpha_2}]$ | 0 | 0 |

*<u>Tableau 4</u>. Représentant les dérivées partielles* $\frac{\partial^2\phi_1}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j}$, $i \neq j$ ; $1 \leq i, j \leq 3$

| | $\frac{\partial^2 X_1}{\partial \lambda_1^2}$ | $\frac{\partial^2 X_1}{\partial \lambda_2^2}$ | $\frac{\partial^2 X_1}{\partial \lambda_3^2}$ |
|---|---|---|---|
| $t_1$ | 0 | $-\frac{\omega_1}{\omega_2}$ | 0 |
| $t_2$ | 0 | $-\frac{1-\alpha_3}{\alpha_3}$ | $-\frac{\omega_2}{\alpha_3\omega_3}\ \frac{(1-\alpha_3)\omega_2 - \omega_1\alpha_3}{\omega_3}$ |
| $t_3$ | $\frac{\alpha_3}{1-\alpha_3}$ | 0 | $-\frac{\omega_1}{\omega_3(1-\alpha_3)}\ \frac{(1-\alpha_3)\omega_2-\omega_1\omega_3}{\omega_3}$ |
| $t_4$ | $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ | 0 | 0 |
| $t_5$ | $\frac{2}{1}$ | 0 | 0 |
| $t_6$ | 0 | $-\frac{\omega_1}{\omega_2}$ | 0 |

*Tableau 5. Représentant les dérivées partielles* $\frac{\partial^2 X_1}{\partial \lambda_i^2}$ ; $1 \le i \le 3$.

| | $\frac{\partial^2 X_1}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}$ | $\frac{\partial^2 X_1}{\partial\lambda_2\partial\lambda_3}$ | $\frac{\partial^2 X_1}{\partial\lambda_1\partial\lambda_3}$ |
|---|---|---|---|
| $t_1$ | 1 | 0 | 0 |
| $t_2$ | 0 | $\frac{1}{\alpha_3} \times \frac{(1-\alpha_3)\omega_2-\omega_1\alpha_3}{\omega_3}$ | 0 |
| $t_3$ | 0 | 0 | $\frac{1}{1-\alpha_3} \times \frac{(1-\alpha_3)\ \omega_2-\omega_1\alpha_3}{\omega_3}$ |
| $t_4$ | 0 | 0 | 0 |
| $t_5$ | 0 | 0 | 0 |
| $t_6$ | 1 | 0 | 0 |

*<u>Tableau</u> 6. Représentant les dérivées partielles* $\frac{\partial^2 X_1}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j}$ , $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq 3$.

*Lemme 5.*

*$\phi_i$, $X_i$ et $\psi_i$ ; $1 \leq i \leq 3$ ; étant toujours les fonctions de base, on a les majorations suivantes :*

$$|\phi_i|_{1,\infty,T} \leq \frac{6}{\rho} \text{ Max } \left(1 \; ; \; \frac{|\alpha_{i+1}-\omega_i|}{\omega_{i+1}} \; ; \; \frac{|1-\alpha_{i+2}-\omega_i|}{\omega_{i+2}}\right)$$

$$|X_i|_{1,\infty,T} \leq \frac{3}{\rho} \text{ Max } \left(1 \; ; \; \frac{|(1-\alpha_{i+2})\omega_{i+1}-\omega_i\alpha_{i+2}|}{\omega_{i+2}}\right)$$

*$\rho$ étant toujours le diamètre du cercle inscrit dans T (pour $|\psi_i|_{1,\infty,T}$, on trouve une majoration équivalente à celle de $|X_i|_{1,\infty,T}$).*

Démonstration.

D'après le lemme 4, et pour $1 \leq i \leq 3$, on a :

$$|\phi_i|_{1,\infty,T} \leq \frac{1}{\rho} \left(\left|\frac{\partial\phi_i}{\partial\lambda_1}\right| + \left|\frac{\partial\phi_i}{\partial\lambda_2}\right| + \left|\frac{\partial\phi_i}{\partial\lambda_3}\right|\right)$$

$$\overset{(1)}{\leq} \frac{3}{\rho} \max_{1\leq j\leq 3} \left|\frac{\partial\phi_i}{\partial\lambda_j}\right|$$

Or en considérant les expressions des $\frac{\partial\phi_i}{\partial\lambda_j}$ $(1 \leq i, j \leq 3)$ ; on constate que :

$$\sup_{x\in T} \max_{1\leq j\leq 3} \left|\frac{\partial\lambda_i(\lambda(x))}{\partial\lambda_j}\right| \overset{(2)}{\leq} 2 \text{ Max } \left(1 \; ; \; \frac{|\alpha_{i+1}-\omega_i|}{\omega_{i+1}} \; ; \; \frac{|1-\alpha_{i+2}-\omega_i|}{\omega_{i+2}}\right)$$

Les inégalités (1) et (2), donnent :

$$|\phi_i|_{1,\infty,T} \leq \frac{6}{\rho} \text{ Max } \left(1 \; ; \; \frac{|\alpha_{i+1}-\omega_i|}{\omega_{i+1}} \; ; \; \frac{|1-\alpha_{i+2}-\omega_i|}{\omega_{i+2}}\right)$$

Même raisonnement pour $|X_i|_{1,\infty,T}$.

*Lemme 6.*

*Avec toutes les hypothèses posées au début on a :*

*pour* $m = 1,2$ :

$$|f-\pi f|_{m,p,T} \leq \{\frac{1}{2}\,\frac{p}{3p-2}\sum_{i=1}^{3}|\phi_i|_{m,\infty,T} + \frac{p}{2(p-1)}\sum_{i=1}^{3}(|\chi_i|_{m,\infty,T} + |\psi_i|_{m,\infty,T})\}$$

$$\times\, h^3\, |f|_{3,p,T}.$$

Pour la démonstration de ce lemme cf. [4].

---

Démonstration du théorème 2.

En appliquant le lemme 6, pour $m = 1$, on a :

$$|f-\pi f|_{1,p,T} \leq \frac{1}{2}\,\frac{p}{3p-2}\,(\sum_{i=1}^{3}|\phi_i|_{1,\infty,T})\, h^3\, |f|_{3,p,T}$$

$$+\,\frac{p}{2(p-1)}\,(\sum_{i=1}^{3}(|\psi_i|_{1,\infty,T} + |\chi_i|_{1,\infty,T}))h^3\, |f|_{3,p,T}$$

En utilisant le lemme 5, on a :

$$|\hat{\pi} f- f|_{1,\ ,T}\quad \frac{6p}{3p-2}\,(\frac{h}{2\rho})\,[N_1+N_2+N_3]\, h^2\, |f|_{3,p,T}$$

$$+\,\frac{6p}{p-1}\,(\frac{h}{2\rho})\,[D_1+D_2+D_3]\, h^2\, |f|_{3,p,T}$$

Avec

$$\left.\begin{aligned} N_i &= \text{Max}\left(1\ ;\ \frac{|\alpha_{i+1}-\omega_i|}{\omega_{i+1}}\ ;\ \frac{|1-\alpha_{i+2}-\omega_i|}{\omega_{i+2}}\right) \\ D_i &= \text{Max}\left(1\ ;\ \frac{|(1-\alpha_{i+2})\,\omega_{i+2} - \omega_i\alpha_{i+2}|}{\omega_{i+2}}\right) \end{aligned}\right\}\quad \text{pour } 1 \le i \le 3$$

On a donc

$$|f-\pi f|_{1,p,T} \le 6pa\ \left[\sum_{i=1}^{3} \frac{N_i}{3p-2} + \frac{D_i}{P-1}\right] h^2\ |f|_{3,p,T}$$

C.Q.F.D.

Pour la démonstration du théorème 3, on a besoin des lemmes suivants :

Lemme 7.

*$\phi_i$, $X_i$ et $\psi_i$ étant toujours les fonctions de base et $\lambda_i$, les coordonnées barycentriques* $(1 \le i \le 3)$ *on a :*

$$\left.\begin{aligned} &\left|\frac{\partial\phi_i}{\partial\lambda_k\partial\lambda_\ell}\right| \le 2M \\ \textit{et}\quad & \\ &\left|\frac{\partial f_i}{\partial\lambda_k\partial\lambda_\ell}\right| \le M_i \end{aligned}\right\}\quad 1 \le i,\ k,\ell \le 3 \qquad f_i = X_i \text{ ou } \psi_i.$$

Avec

$$M_i = \text{Max}\left(\frac{1}{\omega_j^2(1-\alpha_j)}\ ;\ \frac{1}{\omega_j^2\alpha_j}\right).$$

Démonstration.

Il suffit de considérer les expressions donnés dans les tableaux précédents et d'utiliser le fait que $\alpha_i$ et $\omega_i$ sont inférieurs ou égaux à 1.

*Lemme 8.*

*Pour* $1 \leq i \leq 3$, *on a :*

$$|\phi_i|_{2,\infty,T} \leq \frac{18}{\rho^2} M$$

$$|f_i|_{2,\infty,T} \quad \frac{9}{\rho^2} M \quad (\textit{avec } f_i = \psi_i \textit{ ou } X_i)$$

**Démonstration.**

En appliquant le lemme 4 on a :

$$|\phi_i|_{2,\infty,T} \leq \frac{1}{\rho^2} \sum_{|\alpha|=2} \frac{2!}{\alpha!} |\partial^\alpha \phi_i(\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x))|$$

$$\leq \frac{1}{\rho^2} \{ \left|\frac{\partial^2 \phi i}{\partial \lambda_1^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 \phi i}{\partial \lambda_2^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 \phi i}{\partial \lambda_3^2}\right|$$

$$+ 2 \left|\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2}\right| + \left|\frac{\partial^2 \phi i}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_3}\right| + \left|\frac{\partial^2 \phi i}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_3}\right|)$$

$$\leq \frac{18}{\rho^2} M \text{ (d'après le lemme 8).}$$

(On fait le même raisonnement pour $f = \psi_i$ ou $X_i$)

**Démonstration du théorème 3.**

D'après le lemme 6, pour $m = 2$ ; on a :

$$|f-\pi f|_{2,p,T} \leq \frac{1}{2} \frac{p}{3p-2} \sum_{i=1}^{3} |\phi_i|_{2,\infty,T} h^3 |f|_{3,p,T}$$

$$+ \frac{p}{2(p-1)} (\sum_{i=1}^{3} (|X_i|_{2,\infty,T} + |\psi_i|_{2,\infty,T})) h^3 |f|_{3,p,T}$$

$$\leq \{ \frac{108 \, Mp}{3p-2} + \frac{108 \, Mp}{p-1} \} \frac{h^2}{4\rho^2} \cdot h |f|_{3,p,T}$$

(d'après le lemme 8).

Avec

$$M = \underset{i}{\mathrm{Max}} \left(\frac{\omega_i}{\omega_{i+1}^2}\right)$$

d'où après calcul, on a :

$$|f-\pi f|_{2,p,T} \leq 108\ Mp\ a^2 \left[\frac{4p-3}{(3p-2)(p-1)}\right] h\ |f|_{3,p,T}$$

C.Q.F.D.

## III - GÉNÉRALISATION : ETUDE DE L'ERREUR D'INTERPOLATION SUR LE DOMAINE D TRIANGULE.

On démontre que les majorations précédentes sont valables dans D, triangulé par $\mathcal{T}$ (qui est régulière). On se base dans cette étude sur les résultats donnés par P. Sablonnière dans [9].

### 1°) - Notions préliminaires.

Toujours dans $\mathbb{R}^2$, on considère le triangle $\hat{T}$, appelé triangle de référence, de sommets

$\hat{A}_1 = (0, 0)$ ; $\hat{A}_2 = (1,0)$ ; $\hat{A}_3 = (0,1)$ (voir figure 1).

et $\hat{\Omega}_T$ le centre du cercle inscrit dans $\hat{T}$.

Soit $T \in \mathcal{T}$, $T = (A_1A_2A_3)$.

Soit $F_T$ la transformation affine telle que :

$$F_T(\hat{A}_i) = A_i \text{ pour } 1 \leq i \leq 3.$$

P. Sablonnière a démontré dans [9], que les points $\hat{\Omega}_T = F_T^{-1}(\Omega_T)$ varient dans un compact de $\hat{T}$, quand T varie dans $\mathcal{T}$.

On appelle ce compact $K_\alpha$ (relativement à $\alpha$ choisi au début du chapitre).

En se référant à la figure 1, on remarque que $\hat{\Omega}_T$ a comme coordonnées cartésiennes $(\omega_2, \omega_3)$.

En effet :

$$\hat{\Omega}_T = \omega_1\hat{A}_1 + \omega_2\hat{A}_2 + \omega_3\hat{A}_3 = (\omega_2,\omega_2)$$

d'où

$$k_1(\alpha) \leq \omega_i \leq k_2(\alpha) \qquad (1 \leq i \leq 3)$$

et

$$x^* \leq \alpha_i \leq 1 - x^* \qquad (\text{pour } 1 \leq i \leq 3).$$

Avec

$$k_1(\alpha) = (2\alpha+1-2\sqrt{\alpha(\alpha-1)})/(8\alpha+1)$$

$$K_2(\alpha) = (2\alpha + 1 + 2\sqrt{\alpha(\alpha-1)})/(8\alpha+1)$$

$$x^*(\alpha) = (1 - \sqrt{1 -\beta^2}) / 2$$

$$\beta = (\sqrt{8\alpha+1}+1)/4\alpha.$$

(pour ces résultats voir [9]).

<u>Remarque 2.</u>

Les théorèmes 1', 2', 3' sont des généralisations respectives des théorèmes 1, 2, 3.

*Théorème 1'.*

*Avec les mêmes hypothèses que dans le paragraphe précédent, et aussi en posant :*

$$H = \underset{T \in \mathcal{T}}{\text{Max}} \; h_T \; ;$$

*On a :*

$$|f-\pi f|_{0,p,D} \leq \frac{6p^2-5p}{6(3p-2)(p-1)} \; H^3 \; |f|_{3,p,D}$$

*Théorème 2'.*

$$|f-\pi f|_{1,p,D} \leq 18\alpha p \frac{1}{k_1(\alpha)} \left(\frac{A(\alpha)}{3p-2} + \frac{B(\alpha)}{p-1}\right) H^2 \; |f|_{3,p,D}$$

Avec

$$A(\alpha) = |1 - k_1(\alpha) - x^*(\alpha)|$$

$$B(\alpha) = \text{Max}\left(|(1-x^*(\alpha))\, k_2(\alpha) - k_1(\alpha).x^*(\alpha)| \; ; \; (k_2(\alpha)-k_1(\alpha))\, x^*(\alpha)\right).$$

*Théorème 3'.*

$$|f-\pi f|_{2,p,D} \leq \frac{108 \; \alpha^2 \; k_2(\alpha)}{k_1^2(\alpha)} \left[\frac{4p-3}{(3p-2)(p-1)}\right] H \; |f|_{3,p,D}.$$

**Démonstration du théorème 1'.**

Il suffit de reprendre le résultat du théorème 1 et d'utiliser le fait que $h_T \leq H$, $\forall T \in \mathcal{T}$.

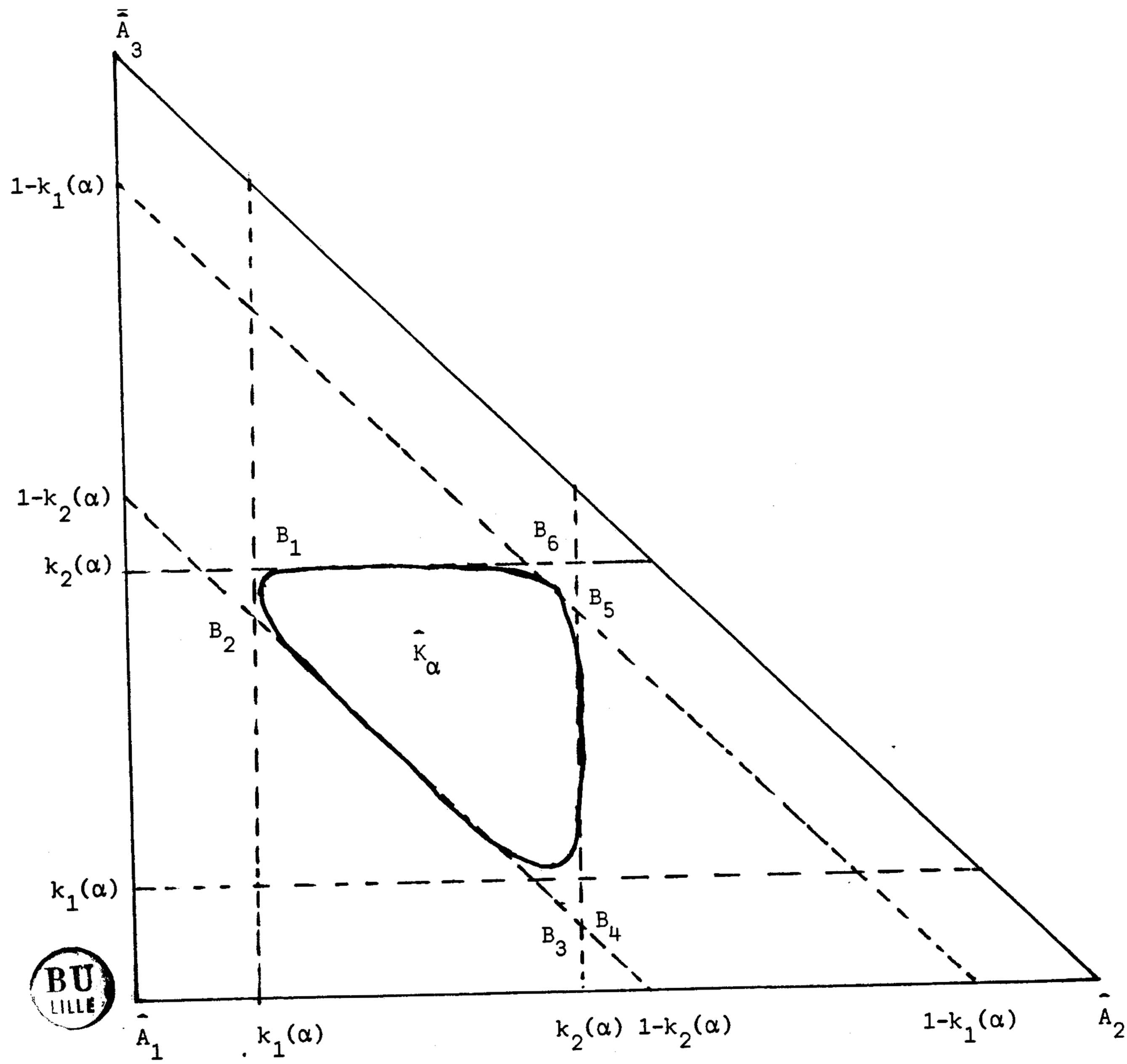
---

Pour les démonstration du théorème 2', on a besoin des lemmes suivants :

Lemme 10.

*$\alpha_i$, $\omega_i$ (pour $1 \le i \le 3$) ; $k_1(\alpha)$ ; $k_2(\alpha)$ ; $x^*(\alpha)$ ; étant donnés précédemment, on a le résultat :*

$$\left.\begin{array}{l} |\alpha_{i+1} - \omega_i| \le A(\alpha) \\ \\ |\omega_i(1-\alpha_{i+1}) - \omega_{i+2}\,\alpha_{i+1}| \le B(\alpha) \end{array}\right\} \text{pour } 1 \le i \le 3.$$



Avec

$$\begin{cases} A(\alpha) = |1-k_1(\alpha) - x^*(\alpha)| \\ B(\alpha) = \text{Max}\,(|(1-x^*(\alpha))\,k_2(\alpha) - k_1(\alpha)\,x^*(\alpha)\,;\,(k_2(\alpha) - k_1(\alpha))\,x^*(\alpha)) \end{cases}$$

**Démonstration.**

La démonstration de ce lemme est évidente, il suffit d'utiliser le fait que :

$$k_1(\alpha) \leq \omega_i \leq k_2(\alpha) \qquad (\text{pour } 1 \leq i \leq 3)$$

et

$$x^*(\alpha) \leq \alpha_i \leq 1-x^*(\alpha) \qquad (1 \leq i \leq 3)$$

**Démonstration du théorème 2'.**

En reprenant le théorème 2, on a : $\forall T \in \mathcal{T}$

$$|f-\pi f|_{1,p,T} \leq 6pa\,\{\sum_{i=1}^{3} (\frac{N_i}{3p-2} + \frac{D_i}{p-1})\}\, h_T^2\, |f|_{3,p,T}$$

Avec :

$$\left.\begin{aligned} N_i &= \text{Max}\,(1\,;\,\frac{|\alpha_{i+1}-\omega_i|}{\omega_{i+1}}\,;\,\frac{|1-\alpha_{i+2}-\omega_i|}{\omega_{i+2}}) \\ D_i &= \text{Max}\,(1\,;\,\frac{|(1-\alpha_{i+2})\omega_{i+1}-\omega_i\alpha_{i+2}|}{\omega_{i+2}}) \end{aligned}\right\}\ 1 \leq i \leq 3$$

Or d'après le lemme 9

$$|\alpha_{i+1} - \omega_i| \leq A(\alpha)$$

et

$$|1-\alpha_{i+2} - \omega_i| \leq A(\alpha)$$

de même $\omega_i \geq k_1(\alpha)$ et $|(1-\alpha_{i+2})\,\omega_{i+1} - \omega_i\alpha_{i+2}| \leq B(\alpha)$.

On a donc :

$$\begin{cases} N_i \leq \dfrac{A(\alpha)}{k_1(\alpha)} \\ \\ D_i \leq \dfrac{B(\alpha)}{k_1(\alpha)} \end{cases}$$

Par conséquent on a :

$$|f-\pi f|_{1,p,T} \leq 6pa \,.\, \frac{3}{k_1(\alpha)} \left(\frac{A(\alpha)}{3p-2} + \frac{B(\alpha)}{p-1}\right)\} \; h_T^2 |f|_{3,p,T}$$

Or ceci est vrai $\forall T \in \mathcal{T}$, et $a \leq \alpha$ ; donc

$$|f-\pi f|_{1,p,D} \leq 18\, p\alpha\{ \frac{4p-3}{(p-1)(3p-2)} + \frac{1}{1-2k_2(\alpha)} \left(\frac{A(\alpha)}{3P-2} + \frac{B(\alpha)}{P-1}\right)\} \; H^2 \; |f|_{3,p,D}$$

C.Q.F.D.

---

**Démonstration du théorème 3'.**

En reprenant le théorème 3, on a $\forall T \in \mathcal{T}$

$$|f-\pi f|_{2,p,T} \leq 108 \; PM \; a^2 \; \frac{4p-3}{(3p-2)(p-1)} \; h_T \; |f|_{3,p,T}$$

avec

$$M = \mathrm{Max}\left(\frac{\omega_i}{\omega_{i+1}^2}, \frac{\omega_i}{\omega_{i+1}^2}\right)$$

On vérifie que :

$$M \leq \frac{k_2(\alpha)}{k_1^2(\alpha)}$$

De même on a :

$$a = \frac{h}{2\rho} \leq \alpha$$

En remplaçant, on a donc

$$|f-\pi f|_{2,p,D} \leq \frac{108 P \alpha^2}{k_1^2(\alpha) x^{*}(\alpha)} \times \frac{4P-3}{(3P-2)(P-1)} \, H \, |f|_{3,p,D}$$

C.Q.F.D.

# IV - EXEMPLE NUMÉRIQUES.

On choisit par exemple : $\alpha = 1$.

<u>*Théorème 1'*</u>.

*Pour* $p = 2$, *on a :*

$$|f-\pi f|_{0,2,D} \leq \frac{7}{12} \, H^3 |f|_{3,2,D}$$

*Pour* $p = \infty$ ; *on a :*

$$|f-\pi f|_{0,\infty,D} \leq 1/3 \; H^3 |f|_{3,\infty,D}$$

*Théorème 2'.*

*Pour* P = 2, *on a* :

$$|f-\pi f|_{1,2,D} \leq 9/2\ H^2\ |f|_{3,2,D}$$

*Pour* P = ∞, *on a* :

$$|f-\pi f|_{1,\infty,D} \leq 3\ H^2 |f|_{3,\infty,D}.$$

*Théorème 3'.*

*Pour* P = 2, *on a*

$$|f-\pi f|_{2,2,D} \leq 810\ \ H|f|_{3,2,D}$$

*pour* P = ∞, *on a* :

$$|f-\pi f|_{2,\infty,D} \leq 432\ H|f|_{3,\infty,D}$$

# Chapitre III

## INTERPOLATION DE LAGRANGE

## SUR UN DOMAINE CARRE TRIANGULE.

# I - INTRODUCTION ET NOTATIONS.

Soit $\Omega$ un domaine carré de $\mathbb{R}^2$, et $T$ une triangulation régulière de $\Omega$ (voir Fig. 1 et 2).

Soient :

$C^{-1}(\Omega)$ : {fonctions bornées sur $\Omega$}

$A_i$ $(1 \le i \le N_o)$ : points choisis convenablement sur $\Omega$.

$P_2^1(\Omega, C)$ : {splines quadratiques $C^1$ sur $\Omega$, muni de la triangulation $T$}

$N_o$ : dimension de $P_2^1(\Omega, C)$.

Dans ce chapitre on résoud le problème suivant :

Etant donné $f \in C^{-1}(\Omega)$, on montre qu'il existe S unique, appartenant à $P_2^1(\Omega, T)$ tel que

$$S(A_i) = f(A_i) \quad 1 \le i \le N_o.$$

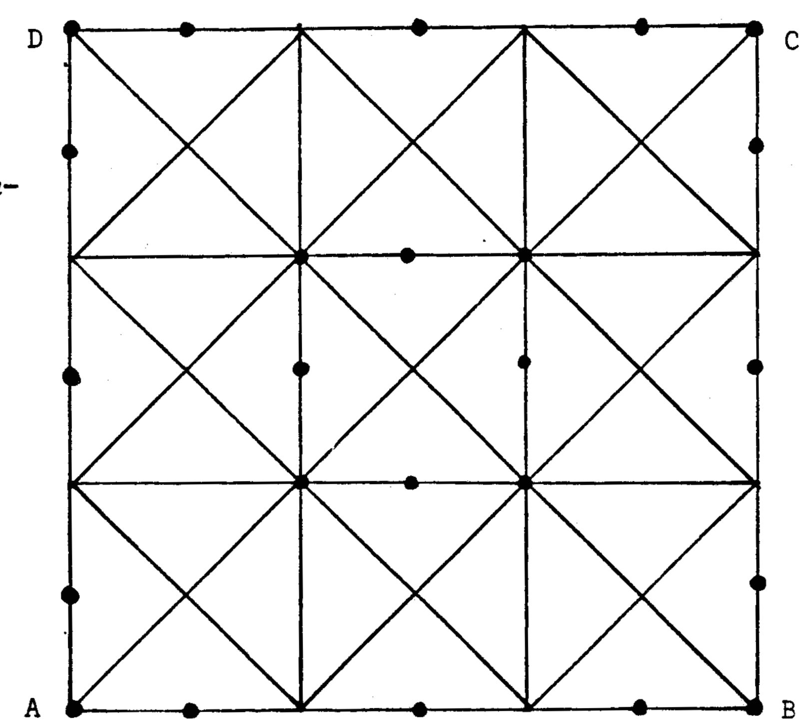
On résoud le problème dans deux cas de figure $\Omega = Q_N^*$ et $\Omega = Q_N$, qui sont deux domaines carrés, mais qui diffèrent par le choix des points d'interpolation.

# II - CHOIX DES POINTS D'INTERPOLATION.

## 1 - Sur $Q_n^*$ :

*Figure 1.*

*Choix des points d'interpolation sur $Q_3^*$.*



$\forall N \quad Q_N^* \subset Q_{N+2}^*$.

Les côtés étant subdivisés en N segments égaux, on choisit comme points d'interpolation, les 4 sommets du carré et les milieux des segments déterminés par la subdivision.

2 - Sur $Q_N$ :

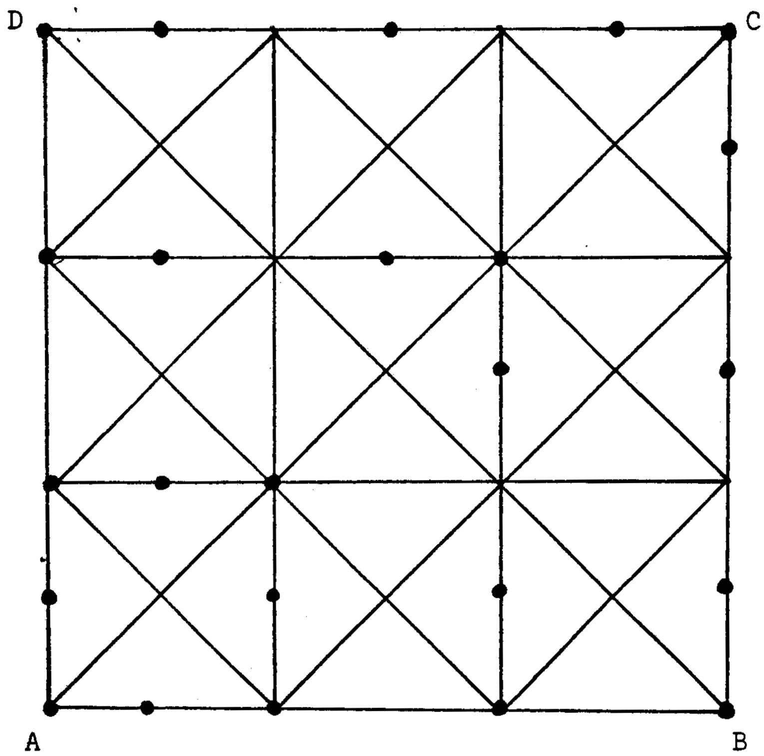



*Fig. 2 : Choix des points d'interpolation sur* $Q_3$.

$\forall N$, $Q_N \subset Q_{N+1}$.

De la même façon que précédemment les côtés du carré sont subdivisés en N segments.

De plus sur les côtés BC et CD le choix des points d'interpolation est le même.

Par contre sur les côtés AD et AB, le passage de $Q_N$ à $Q_{N+1}$ se fait en prenant B et D comme nouveaux points d'interpolation.

Remarque 1.

On montrera par la suite que le nombre de points choisis correspond bien à la dimension de $P_2^1(\Omega,C)$

## III - Calcul de la spline d'interpolation.

*Théorème 1.*

> *Pour* $\Omega = Q_N^*$ *(respectivement* $Q_N$*),* $f$ *fonction donnée appartenant à* $C^{-1}(\Omega)$*, il existe une spline et une seule appartenant à* $P_2^1(\Omega,T)$ *interpolant* $f$ *aux points* $A_i$*,* $1 \le i \le N$.

### A) - NOTIONS PRELIMINAIRES.

On sait d'après le chapitre I, que la spline S peut s'écrire sur T, dans la base de Bernstein de $P_2(T)$, de la manière suivante :

$$S(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad : \quad \sum_{0 \le i+j \le 2} a_{ij} \; \beta_{ij}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

avec

| | | |
|---|---|---|
| $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ | : | coordonnées barycentriques relatives à T |
| $\{\beta_{ij}\}_{o \le i+j \le 2}$ | : | base de Bernstein |
| $\{a_{ij}\}_{o \le i+j \le 2}$ | : | B-coefficients de S. |

Ainsi pour calculer la spline, il suffit de calculer ses B-coefficients. Pour ce calcul, on utilise la proposition 1, concernant le raccordement $C^1$, donnée dans le chapitre I, avec $K = 1$, comme le montre la figure suivante.

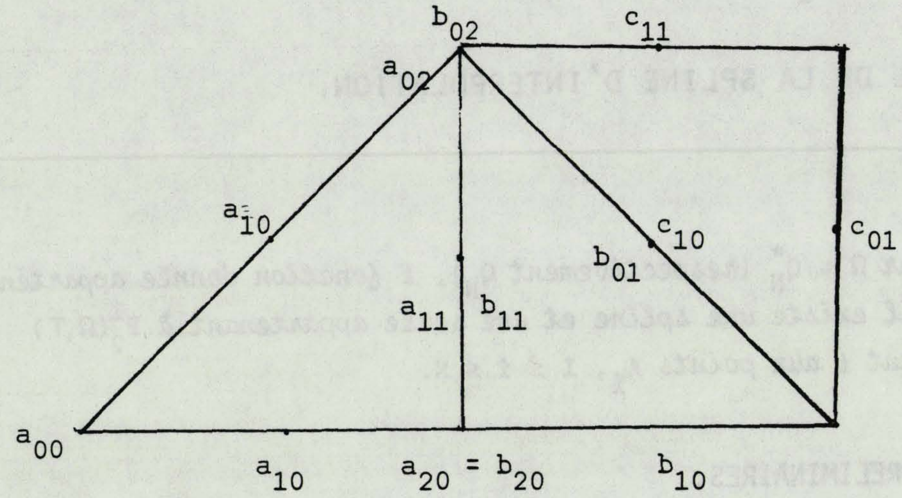



*Fig. 3 : Projection du B-réseau dans le cas où les triangles sont rectangles isocèles.*

On a :

$$\begin{cases} a_{20} = b_{20} = (a_{10} + b_{10})/2 \\ b_{02} + b_{01} = b_{11} + c_{11} \end{cases}$$

## B) - INTERPOLATION DE LAGRANGE SUR $Q_N^*$.

Le raisonnement est le suivant. Pour $N > 2$, $N \in \mathbb{N}$, on suppose qu'on connait les B-coefficients de S sur $Q_{N-2}$, et on donnera un algorithme de passage de $Q_{N-2}^*$ à $Q_N^*$.

<u>Algorithme de passage de $Q_{N-2}^*$ à $Q_N^*$, $N \geq 2$.</u>

Le calcul des B-coefficients de S correspondant aux bords de $Q_N$, conduit à un problème d'interpolation à une dimension (sur un intervaile de $\mathbb{R}$).

Ce calcul se fait à l'aide de la résolution du système tridiagonal $(S_1)$ et $(S_2)$ donnés au chapitre I paragraphe I.

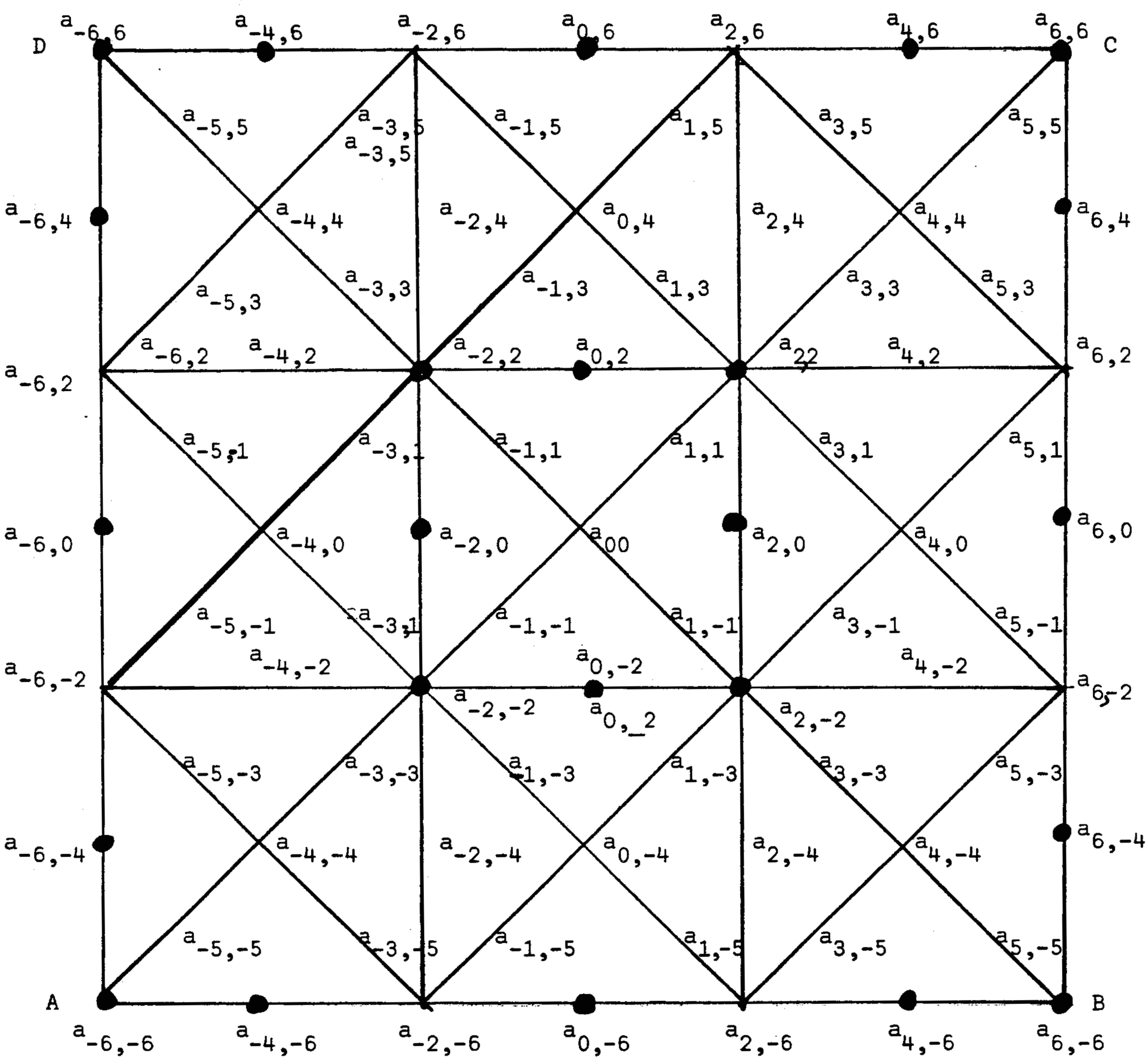





*Figure 4. Représentation des B-coefficients de* S *dans* $Q_5^*$.

Les petits carrés sont appelés $Q_{ij}$, relativement à la numérotation du B-coefficient central.
Pour $P \in [-(N-1)/2, (N-3)/2]$, $p \in \mathbb{N}$ on a

a) Sur [AB]

$$i = 4p \qquad j = -2(N-1)$$

$$a_{i+2,j} = 2\, a_{i+2,j+2} - a_{i+2,j+4}$$

b) Sur [BC]

$$i = 2(N-1) \qquad j = 4p$$

$$a_{i,j+2} = 2a_{i-2,j+2} - a_{i-4,j+2}.$$

c) Sur [CD]

$$i = 4p \qquad j = 2(N-1)$$

$$a_{i+2,j} = 2a_{i+2,j-2} - a_{i+2,j-4}$$

d) Sur [DA]

$$i = -2(N-1) \qquad j = 4p$$

$$a_{i,j+2} = 2a_{i+2,j+2} - a_{i+4,j+2}$$

Et pour les B-coefficients correspondants à l'intérieur des carrés $Q^{*}_{i,j}$, on applique la proposition 1 du chapitre 1, et on les calcule à l'aide de l'algorithme suivant appelé $G_{i,j}$.

$$\begin{cases} a_{i-1,j-1} = (a_{i,j-2} + a_{i-2,j})/2 \\ a_{i+1,j-1} = (a_{i,j-2} + a_{i+2,j})/2 \\ a_{i+1,j+1} = (a_{i+2,j} + a_{i,j+2})/2 \\ a_{i-1,j+1} = (a_{i,j+2} + a_{i-2,j})/2 \\ a_{i,j} \quad\;\; = (a_{i-1,j+1} + a_{i+1,j-1})/2 \end{cases}$$

## C) - INTERPOLATION DE LAGRANGE SUR $Q_N$.

On fait un raisonnement analogue au précédent.

On suppose que les B-coefficients sont calculés à l'ordre N, on donnera un algorithme de passage du cas N-1 au cas N (N > 1).

### Algorithme de passage de $Q_{N-1}$ à $Q_N$, N > 1.

Les B-coefficients correspondant à [BC] et [CD], sont calculés à l'aide de la résolution des systèmes ($S_1$) et ($S_2$) donnés dans le chapitre I.

Pour

$$\begin{cases} i = 4N-1 \\ j = 4p-1 \quad \text{avec} \quad 1 \le p \le N-1. \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} a_{i,1} = 2a_{i-2,1} - a_{i-4,1}. \\ a_{1,i} = 2a_{1,i-2} - a_{1,i-4}. \\ a_{i,j+2} = 2a_{i-2,j+2} - a_{i-4,j+2}. \\ a_{j+2,i} = 2a_{j+2,i-2} - a_{j+2,i-4}. \end{cases}$$

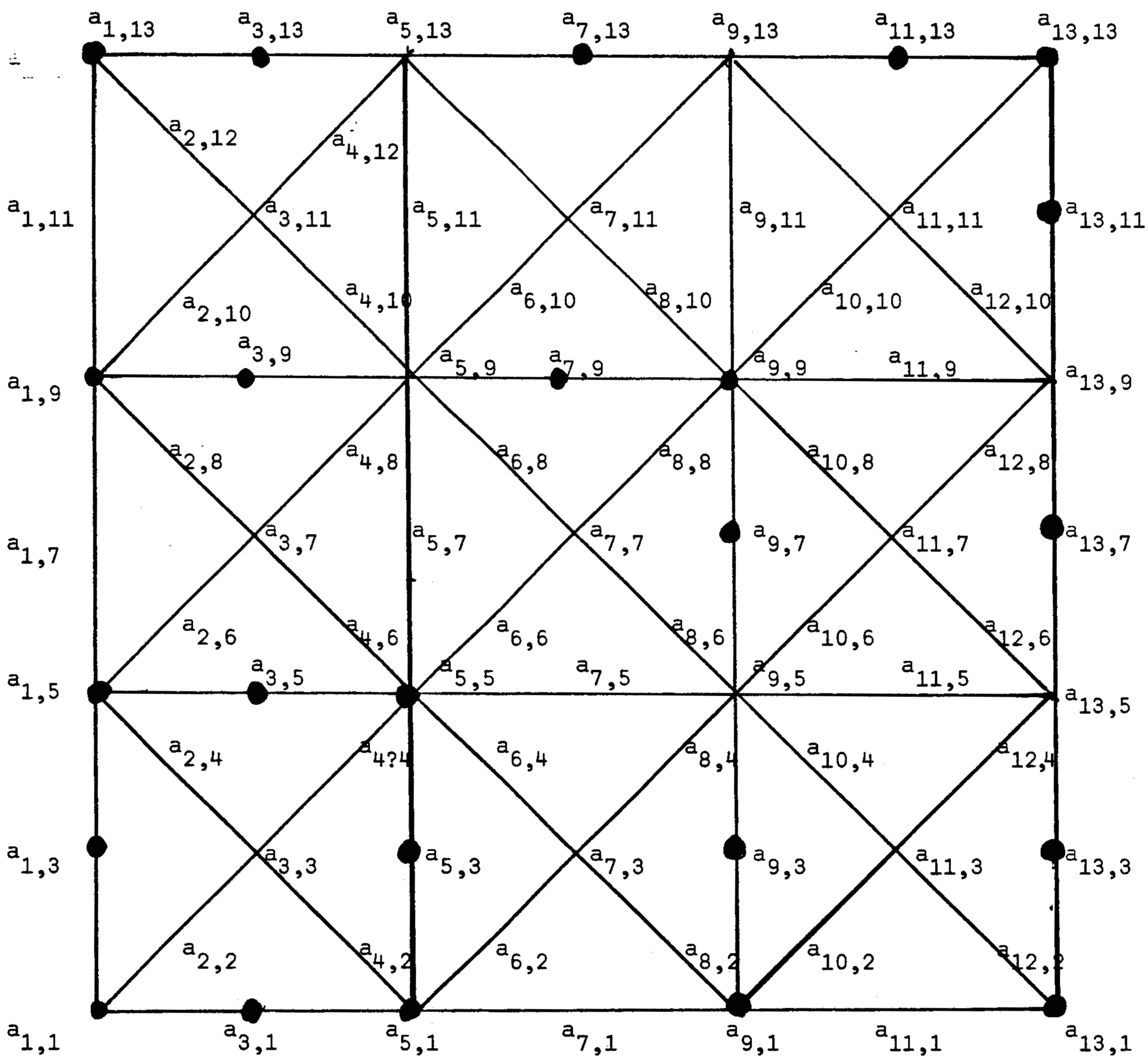



*Figure 5. Représentation des B-coefficients de* S *sur* $Q_3$.

Et pour les B-coefficients internes à chaque carré $Q_{ij}$, il suffit d'appliquer l'algorithme $G_{i,j}$.

---

## Exemples d'application.

### 1°) - Passage de $Q_3^*$ à $Q_5^*$ : (Voir fig. 5).

Notre hypothèse est la suivante :

Les B-coefficients appartenant à $Q_3^*$ sont connus, ceux appartenant aux bords de $Q_5^*$, c'est à dire :

$$\begin{cases} a_{-10,j+2} & \text{avec} \quad j = 4p \quad -2 \le p \le 2 \\ a_{i+2,10} & \text{avec} \quad i = 4p \quad -2 \le p \le 2 \\ a_{10,j-2} & \text{avec} \quad j = 4p \quad -2 \le p \le 2 \\ a_{i-2,-10} & \text{avec} \quad i = 4p \quad -2 \le p \le 2 \end{cases}$$

sont calculés par la résolution du système $(S_1)$ donné précédemment.
De même :

$$\begin{cases} a_{-10,j} & \text{avec} \quad j = 4p \quad -2 \le p \le 2 \\ a_{i,10} & \text{avec} \quad i = 4p \quad -2 \le p \le 2 \\ a_{10,j} & \text{avec} \quad j = -4p \quad -2 \le p \le 2 \\ a_{i,-10} & \text{avec} \quad i = -4p \quad -2 \le p \le 2 \end{cases}$$

sont calculés par la résolution du système $(S_2)$.
Et pour :

a) $j = -8$ $\quad i = 4p-2 \quad (-2 \leq p \leq 1)$

$$a_{i+2,-8} = 2a_{i+2,-6} - a_{i+2,-4}.$$

b) $i = 8$ $\quad j = 4p \quad (-2 \leq p \leq 1)$

$$a_{8,j+2} = 2a_{6,j+2} - a_{4,j+2}$$

c) $j = 8$ $\quad i = 4p \quad (-2 \leq p \leq 1)$

$$a_{i+2,8} = 2a_{i+2,6} - a_{i+2,4}$$

d) $i = -8$ $\quad j = 4p \quad (-2 \leq p \leq 1)$

$$a_{-8,j+2} = 2a_{-6,j+2} - a_{-4,j+2}$$

Les B-coefficients appartenant à l'intérieur des carrés $Q^*_{-8,-8}$ ; $Q^*_{-8,-4}$ ; $Q^*_{-8,0}$ ; $Q^*_{-8,4}$ ; $Q^*_{-8,8}$ ; $Q^*_{-4,8}$ ; $Q^*_{0,8}$ ; $Q^*_{4,8}$ ; $Q^*_{8,8}$ ; $Q^*_{8,4}$ ; $Q^*_{8,0}$ ; $Q^*_{8,-4}$ ; $Q^*_{8,-8}$ ; $Q^*_{4,-8}$ ; $Q^*_{0,-8}$ ; $Q^*_{-4,-8}$ sont calculés par l'algorithme $G_{i,j}$.

Par exemple dans le carré $Q^*_{-8,-8}$, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{-9,-9} = (a_{-10,-8} + a_{-8,-10})/2. \\ a_{-7,-9} = (a_{-8,-10} + a_{-6,-8})/2. \\ a_{-9,-7} = (a_{-10,-8} + a_{-8,-6})/2. \\ a_{-7,-7} = (a_{-8,-6} + a_{-6,-8})/2. \\ a_{-8,-8} = (a_{-9,-7} + a_{-7,-9})/2. \end{array}\right.$$

## 2°) Algorithme de passage de $Q_2$ à $Q_3$ . (Voir Fig. 6)

Les B-coefficients $a_{13,1}$ ; $a_{13,3}$ ; $a_{13,5}$ ; $a_{13,7}$ ; $a_{13,7}$ ; $a_{13,9}$ ; $a_{13,11}$ ; $a_{13,13}$ ; $a_{11,13}$ ; $a_{9,13}$ ; $a_{7,13}$ ; $a_{5,13}$ ; $a_{3,13}$ ; $a_{1,13}$.

Sont calculés à l'aide de la résolution des systèmes $(S_1)$ et $(S_2)$

$$\begin{cases} a_{11,1} = 2a_{9,1} - a_{7,1} \\ a_{1,11} = 2a_{1,9} - a_{1,7} \\ a_{11,5} = 2a_{9,5} - a_{7,5} \\ a_{5,11} = 2a_{5,9} - a_{5,7} \\ a_{11,7} = 2a_{9,7} - a_{7,7} \\ a_{7,11} = 2a_{7,9} - a_{7,7} \end{cases}$$

Il reste donc à calculer le B-coefficients internes aux carrés suivants :

$$Q_{11,3} \;;\; Q_{11,7} \;;\; Q_{11,11} \;;\; Q_{7,11} \;;\; Q_{3,11}$$

Il suffit d'utiliser $G_{i,j}$ par exemple sur $Q_{11,3}$ on a :

$$\begin{cases} a_{10,2} = (a_{11,1} + a_{9,3})/2 \\ a_{12,2} = (a_{11,1} + a_{13,3})/2 \\ a_{10,3} = (a_{11,5} + a_{9,3})/2 \\ a_{12,4} = (a_{13,3} + a_{11,5})/2 \\ a_{11,3} = (a_{10,4} + a_{12,6})/2 \end{cases}$$

## D) - FONCTIONS DE BASE DU PROCEDE D'INTERPOLATION.

*Proposition 1.*

*La dimension de* $P_2^1(\Omega,C)$ $(\Omega = Q_N^*$ *ou* $Q_N)$ *est* $N_o = (N+2)^2 - 1$.

(Pour la démonstration voir [11]).

*Définition 1.*

*Les points d'interpolation étant les points* $I$, *avec* $1 \le I \le N_o$, *les fonctions de base sont appelés* $L_k$ *avec* $1 \le k \le N_o$ *et vérifient :*

$$L_k(I) = \delta_{Ik}.$$

$\delta_{Ik}$ $(1 \leq I,\ k \leq N_o)$ *étant le symbole de Kroncker.*

Remarque 2.

Dans le programme donnée à la fin de ce chapitre, les points d'interpolation sont numérotés de la manière suivante.

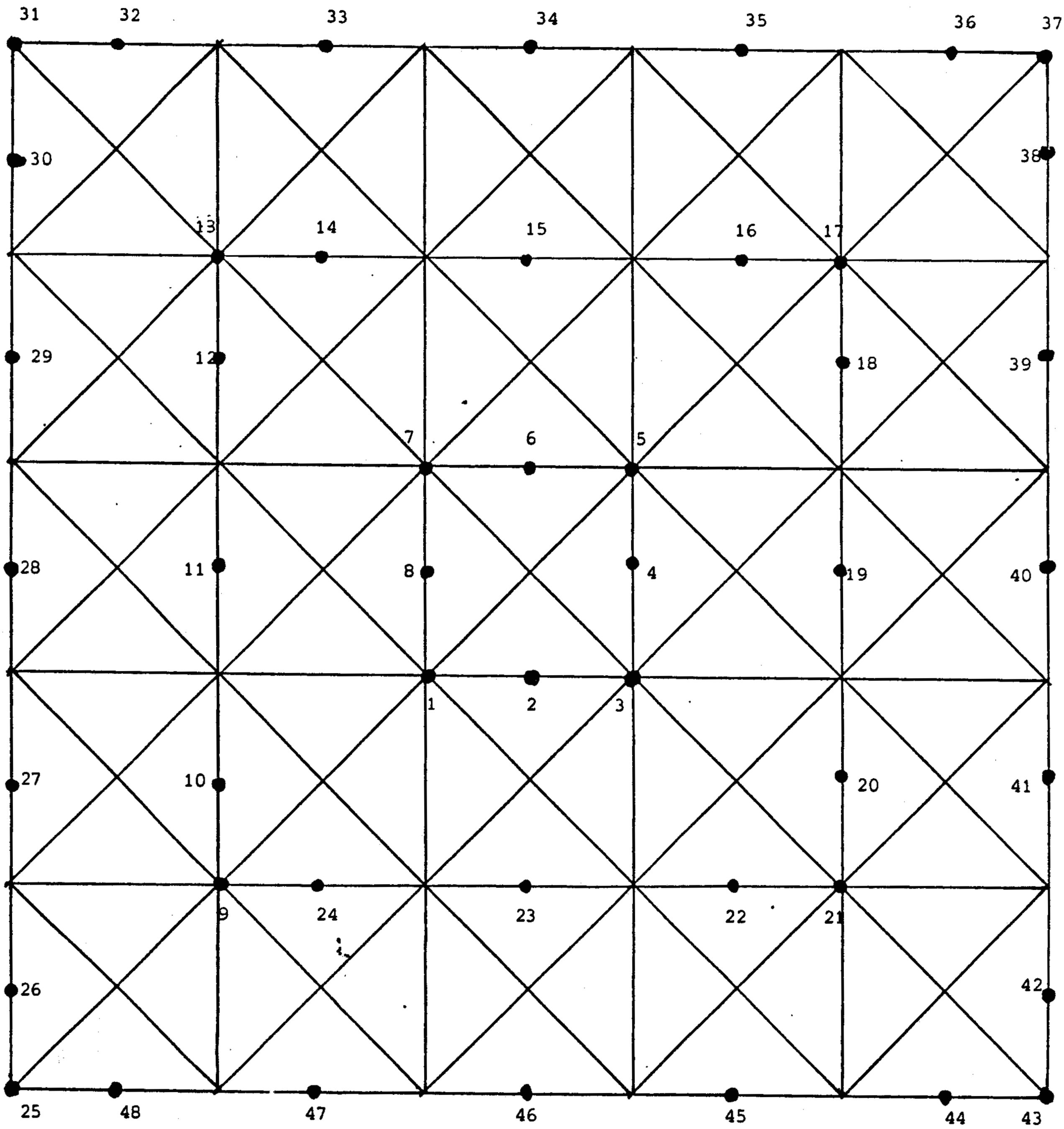





*Figure 6. Numérotation des points d'interpolation.*

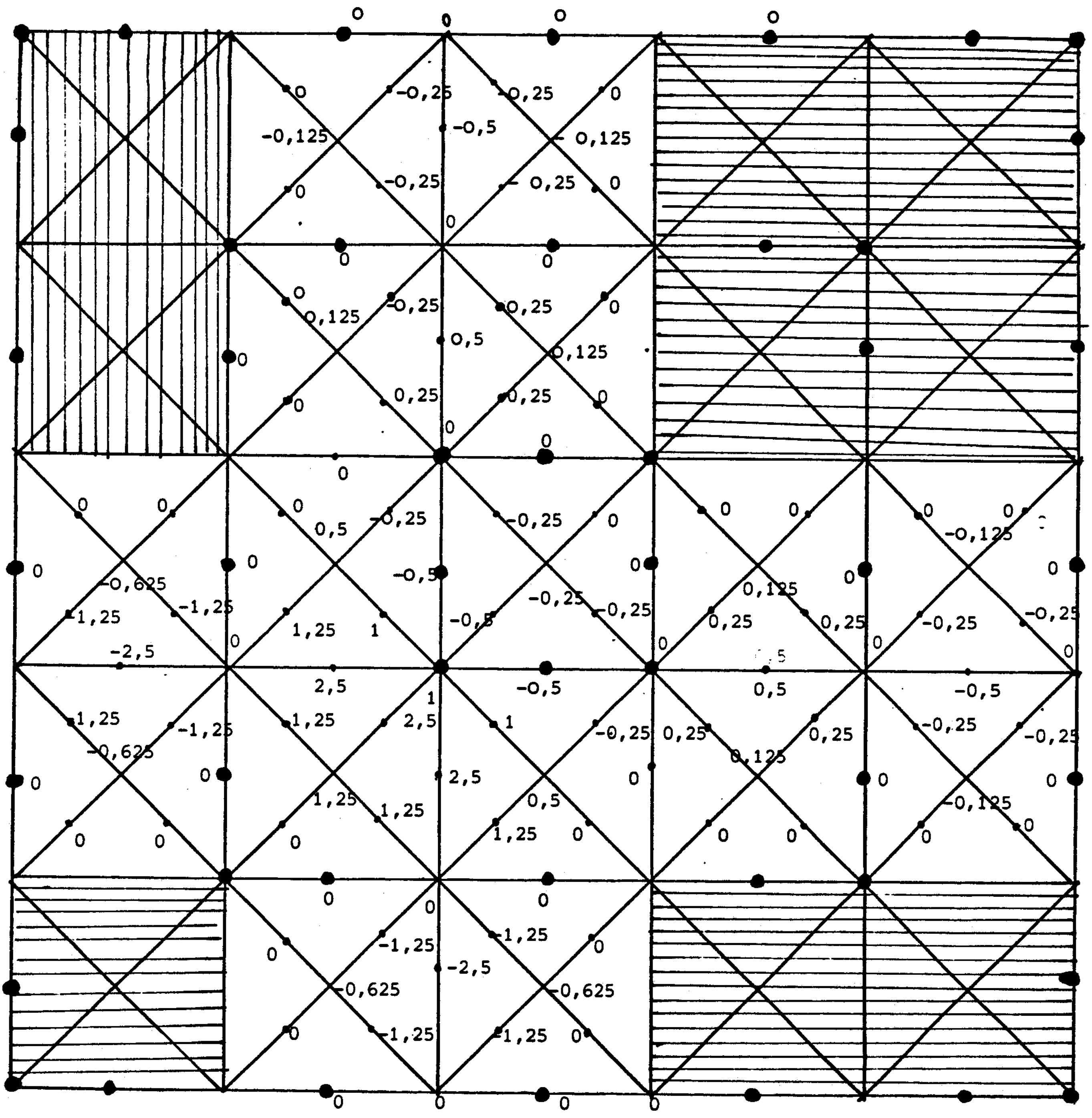



*Figure 7. Représentation des B-coefficients de $L_1$ dans le cas où $\Omega = Q_5^*$.*

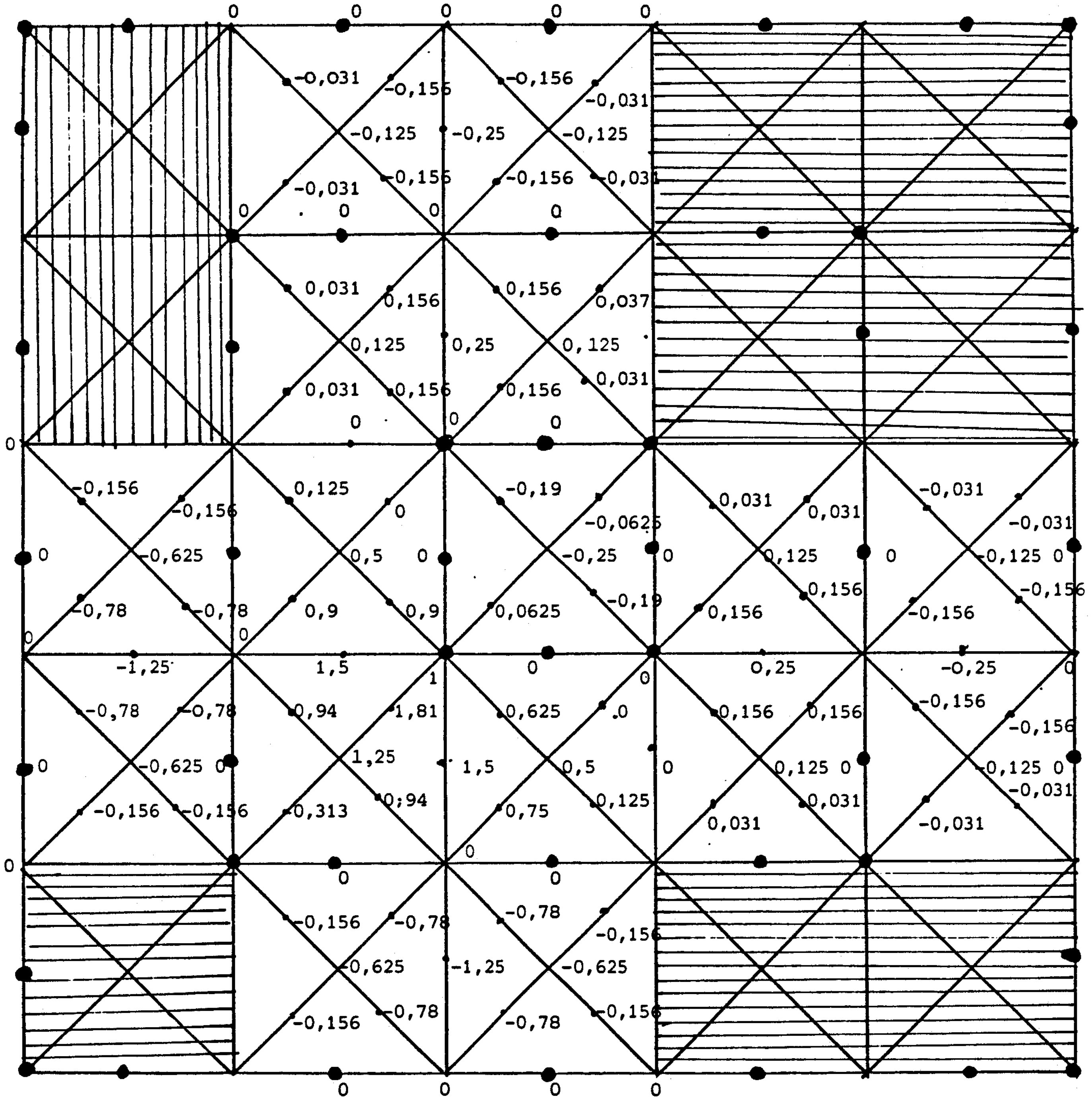
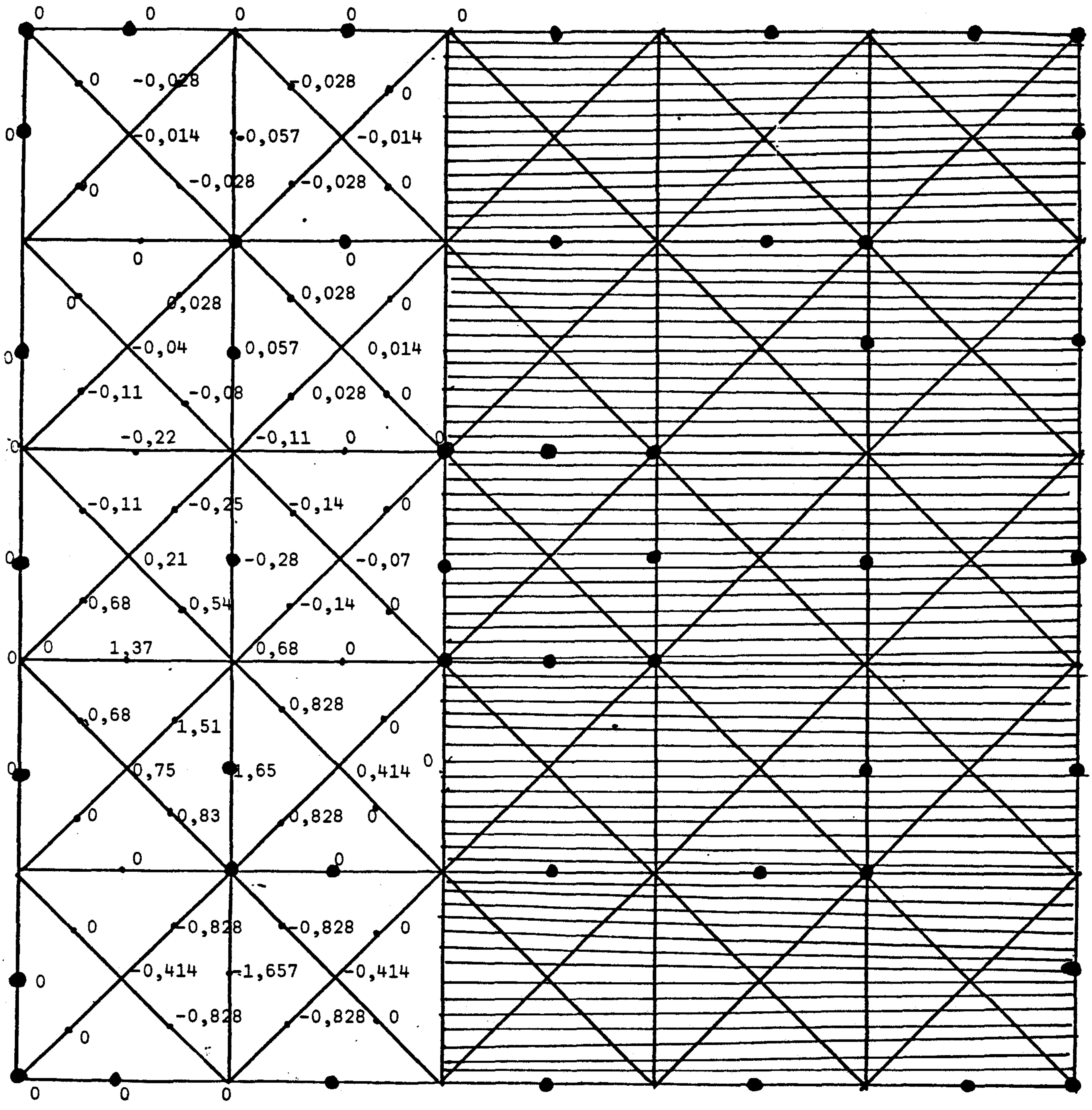



*Figure* 8. *Représentation de quelques valeurs de* $L_1$ *dans le cas ou* $\Omega = Q_5^*$.



<u>Figure 9</u> : *Représentation des B-coefficients de $L_{10}$ dans le cas où $\Omega = Q_5^*$.*

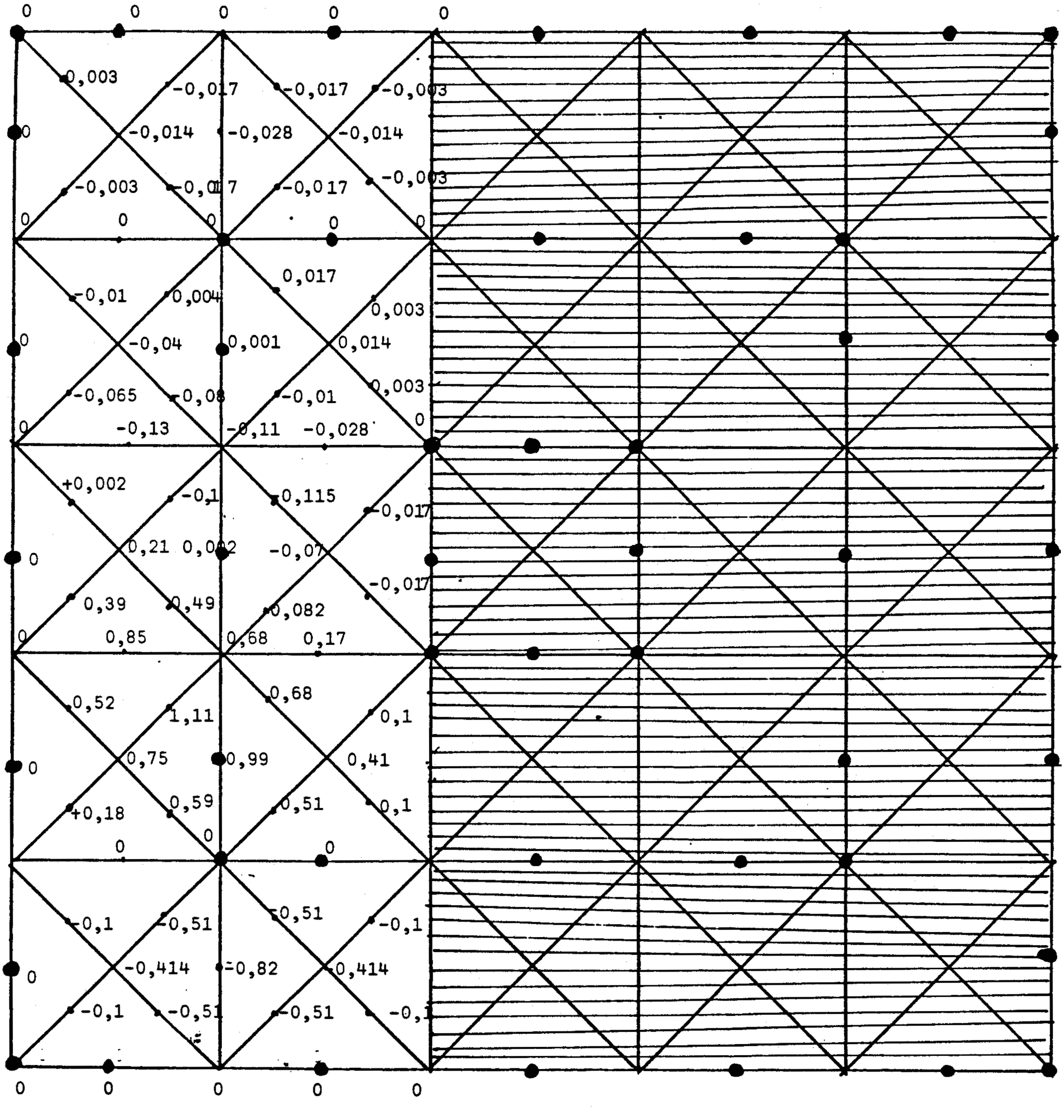



*Figure 10. Représentation de quelques valeurs de* $L_{10}$ *dans le cas où* $\Omega = Q_5^*$.

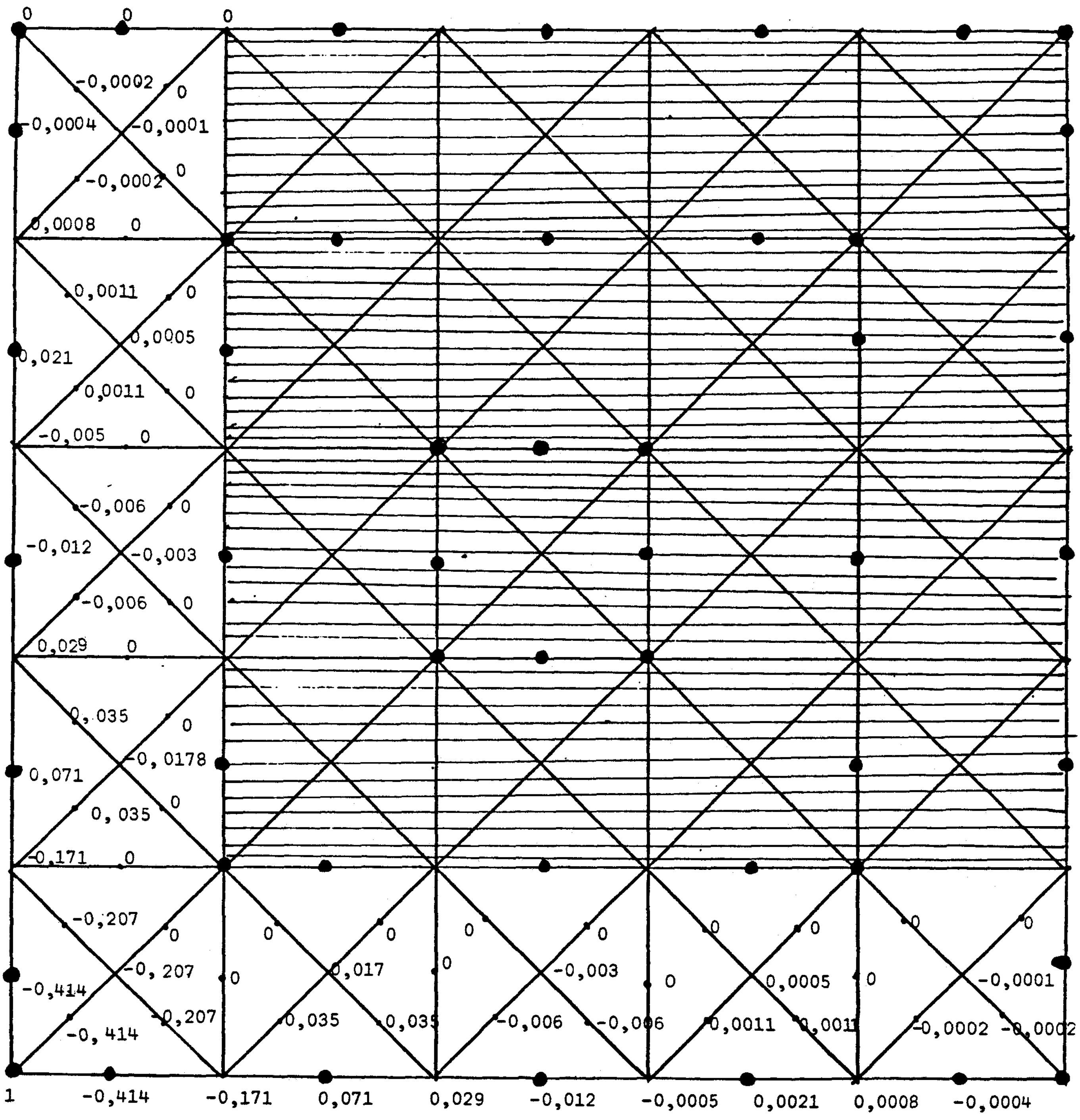
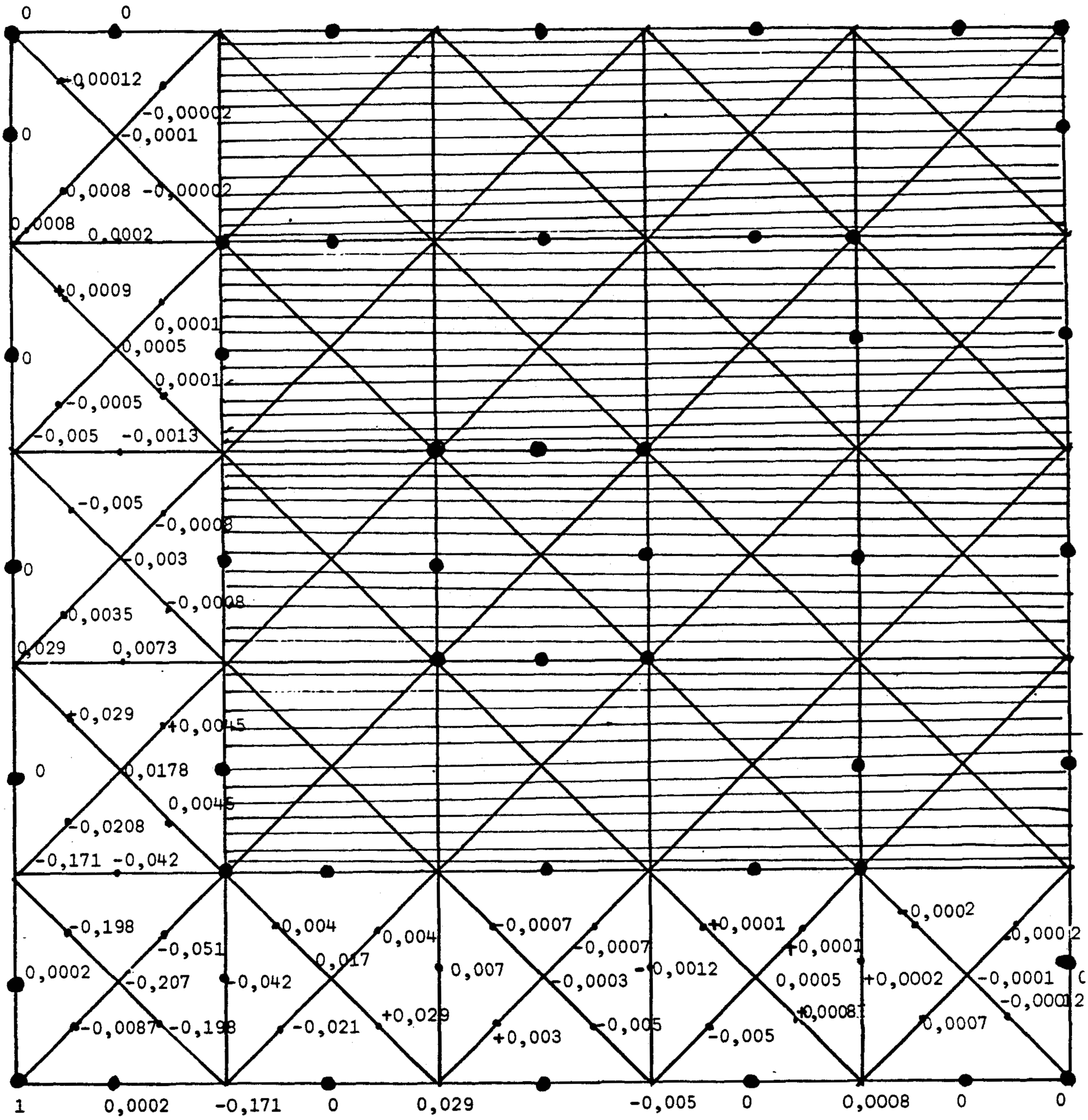



*Figure 11. Représentation des B-coefficients de* $L_{25}$ *dans le cas où* $\Omega = Q_5^*$.




*<u>Figure 12</u>. Représentation de quelques valeurs de* $L_{25}$ *dans le cas où* $\Omega = Q_5^*$.

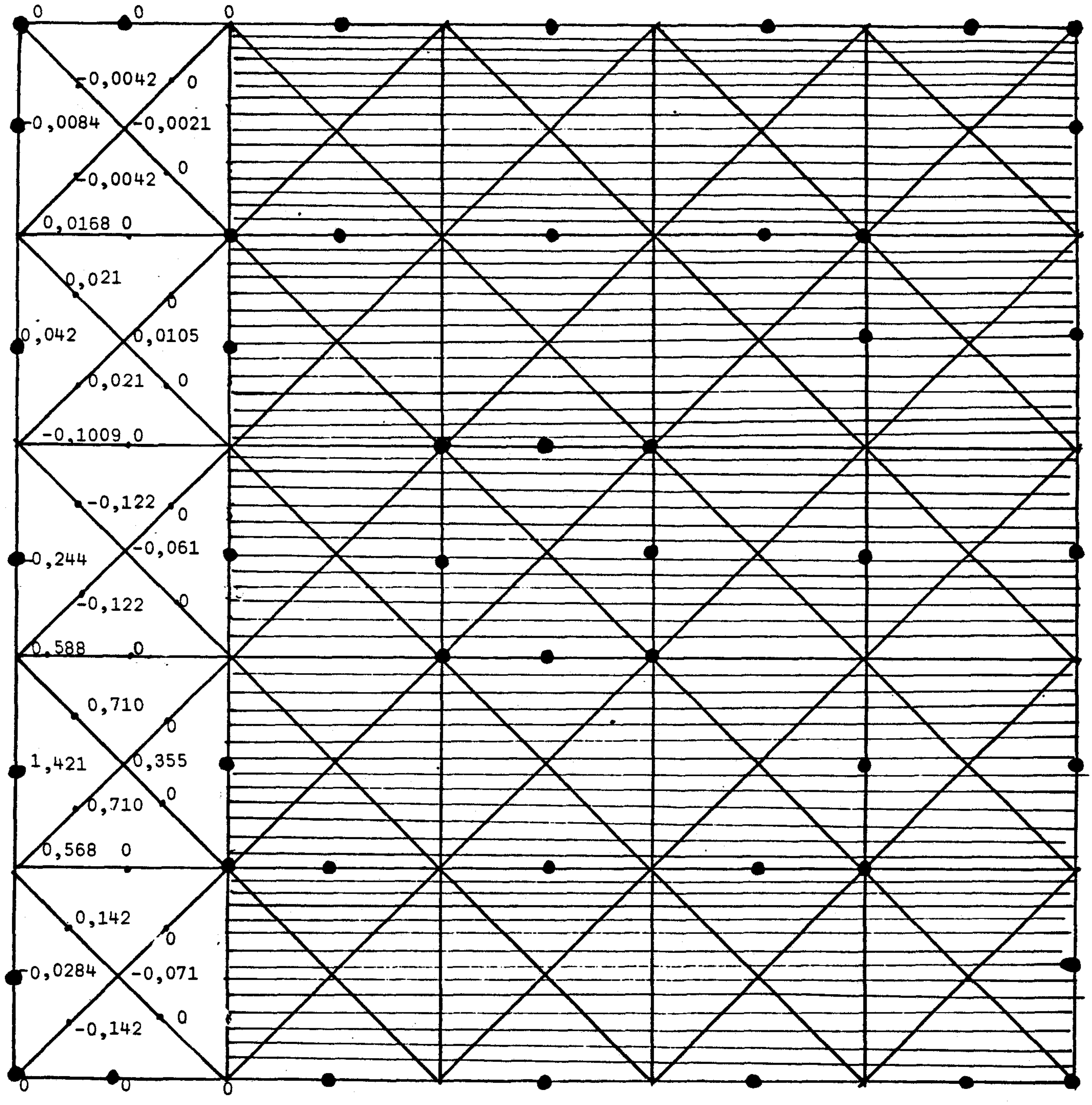



*Figure 13. Représentation des B-coefficients de $L_{27}$ dans le cas où $\Omega = Q_5^*$.*

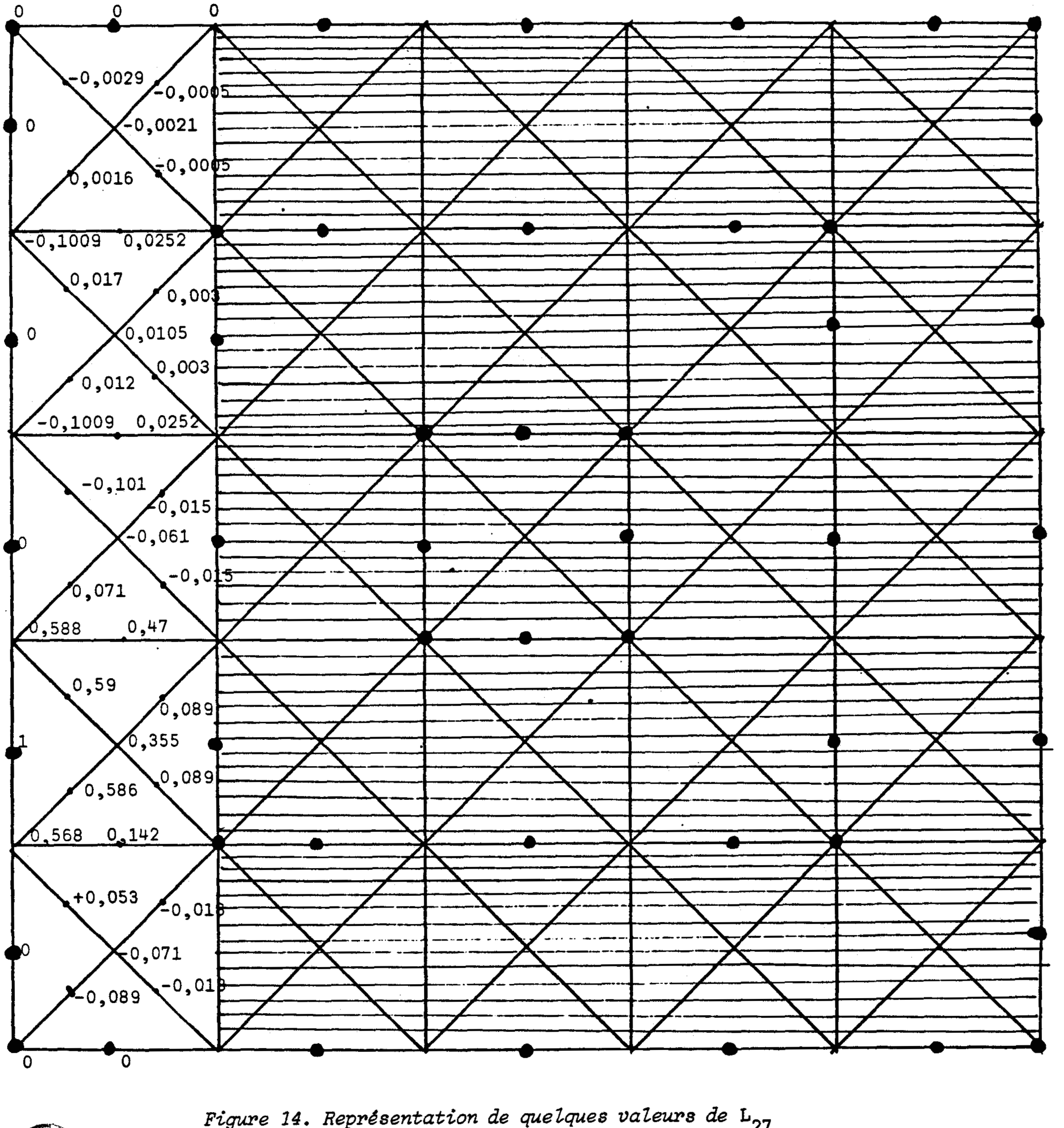
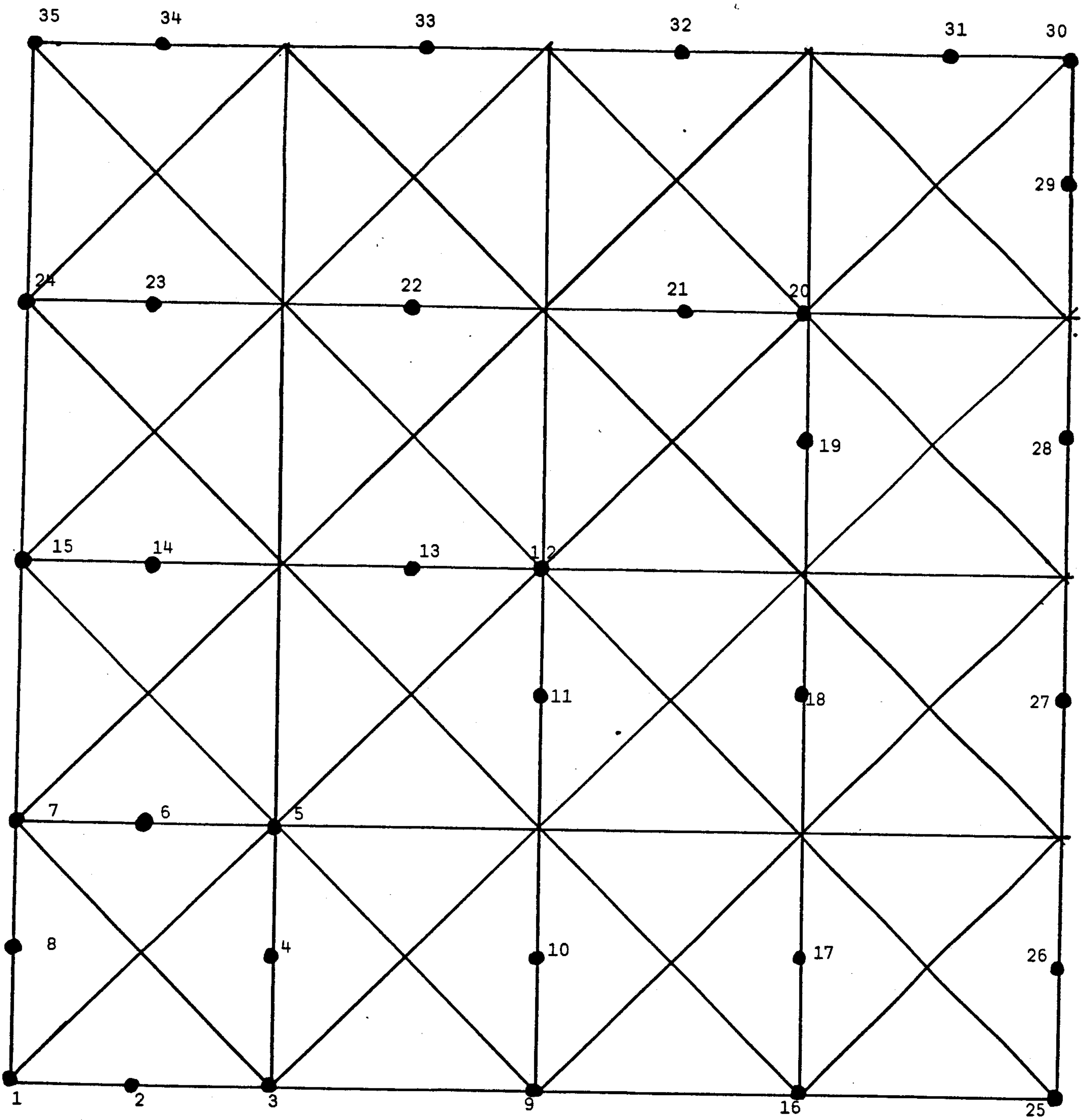



*Figure 14. Représentation de quelques valeurs de* $L_{27}$ *dans le cas où* $\Omega = Q_5^*$.




*<u>Figure</u> 15. Numérotation des points d'interpolation dans le cas où* $\Omega = Q_4$.

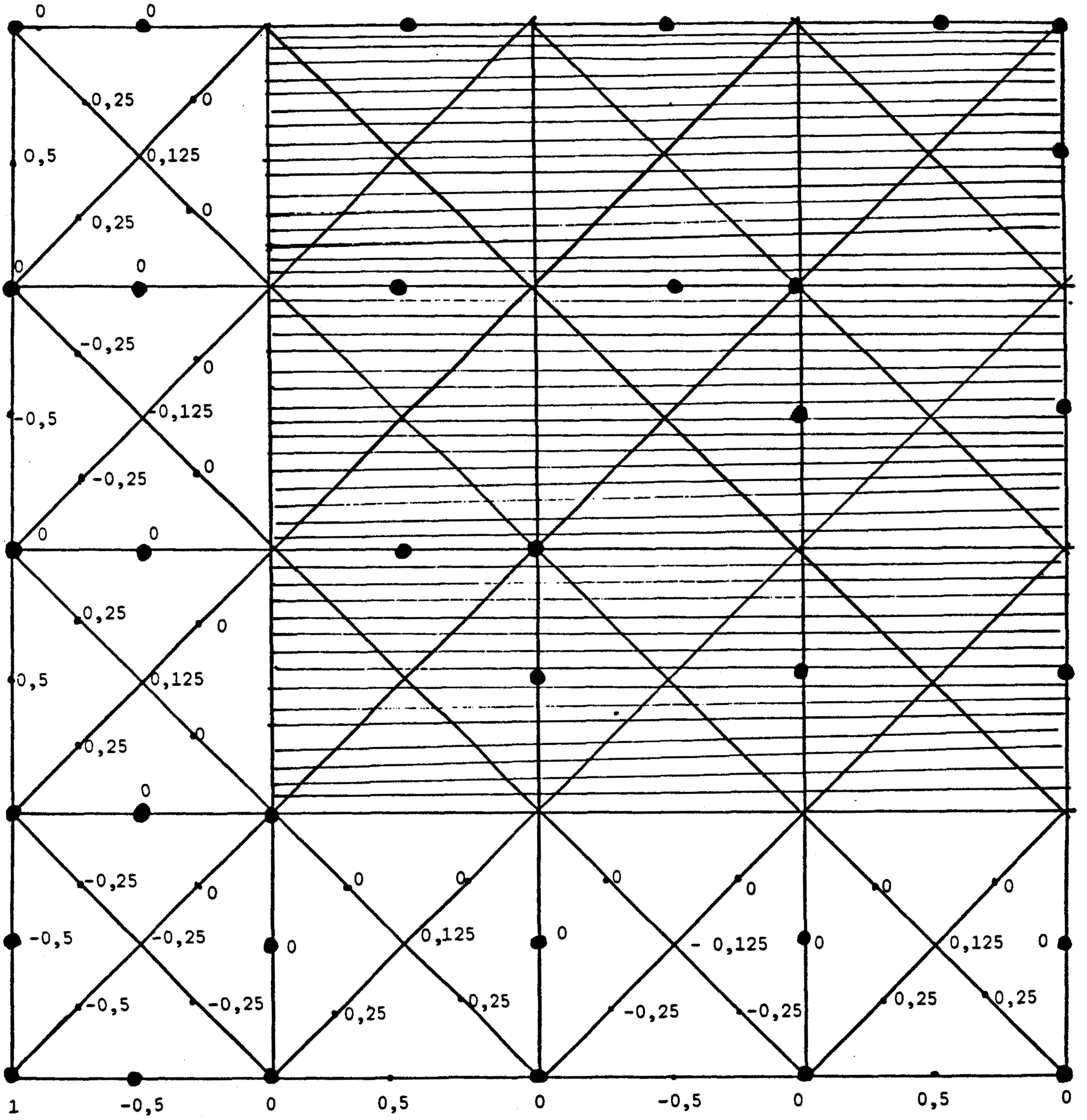



*Figure 16. Représentation des B-coefficients de L1 dans le cas où $\Omega = Q_4$.*

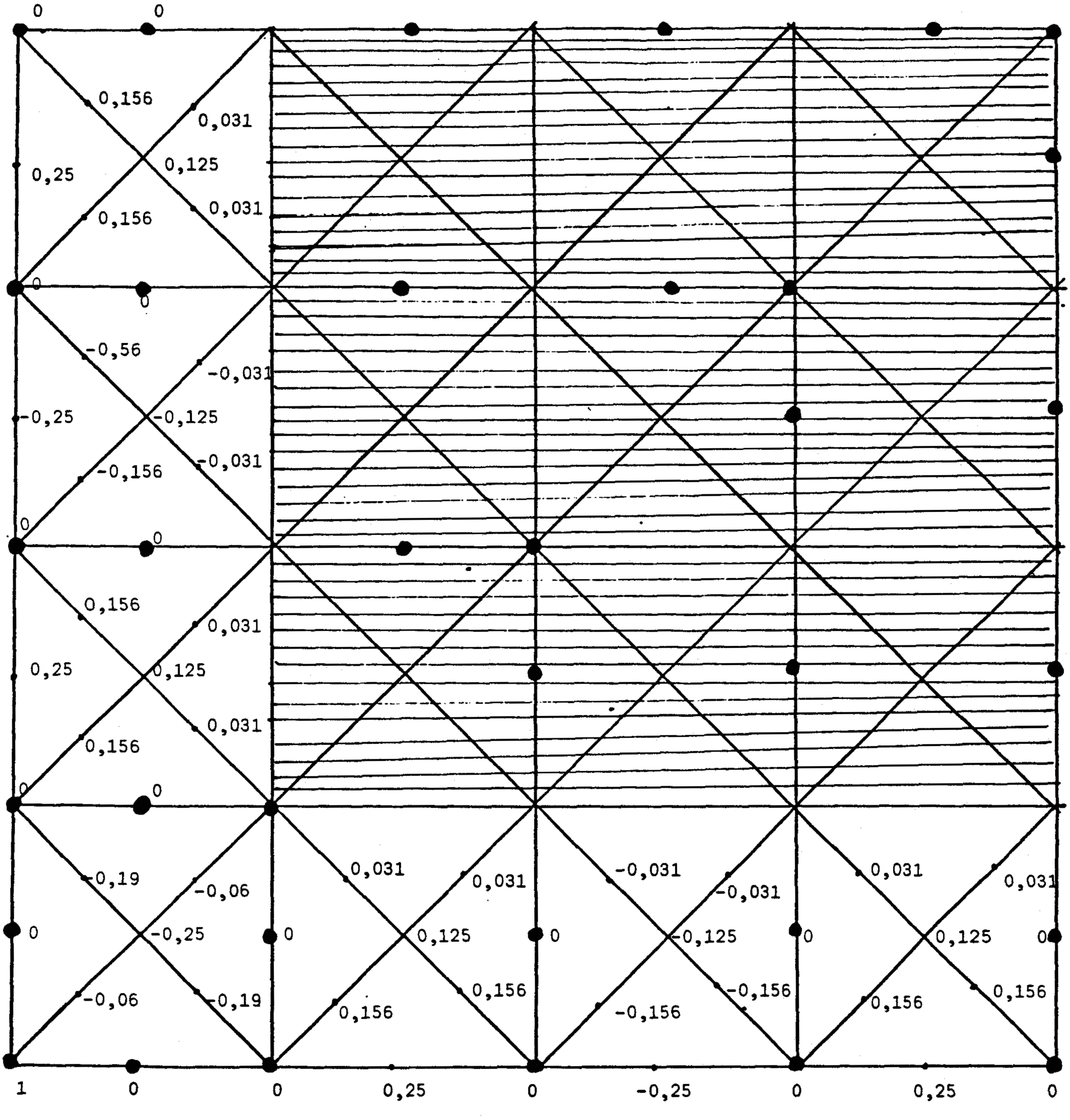



*Figure* *17. Représentation de quelques valeurs de* $L_1$ *dans le cas où* $\Omega = Q_4$.

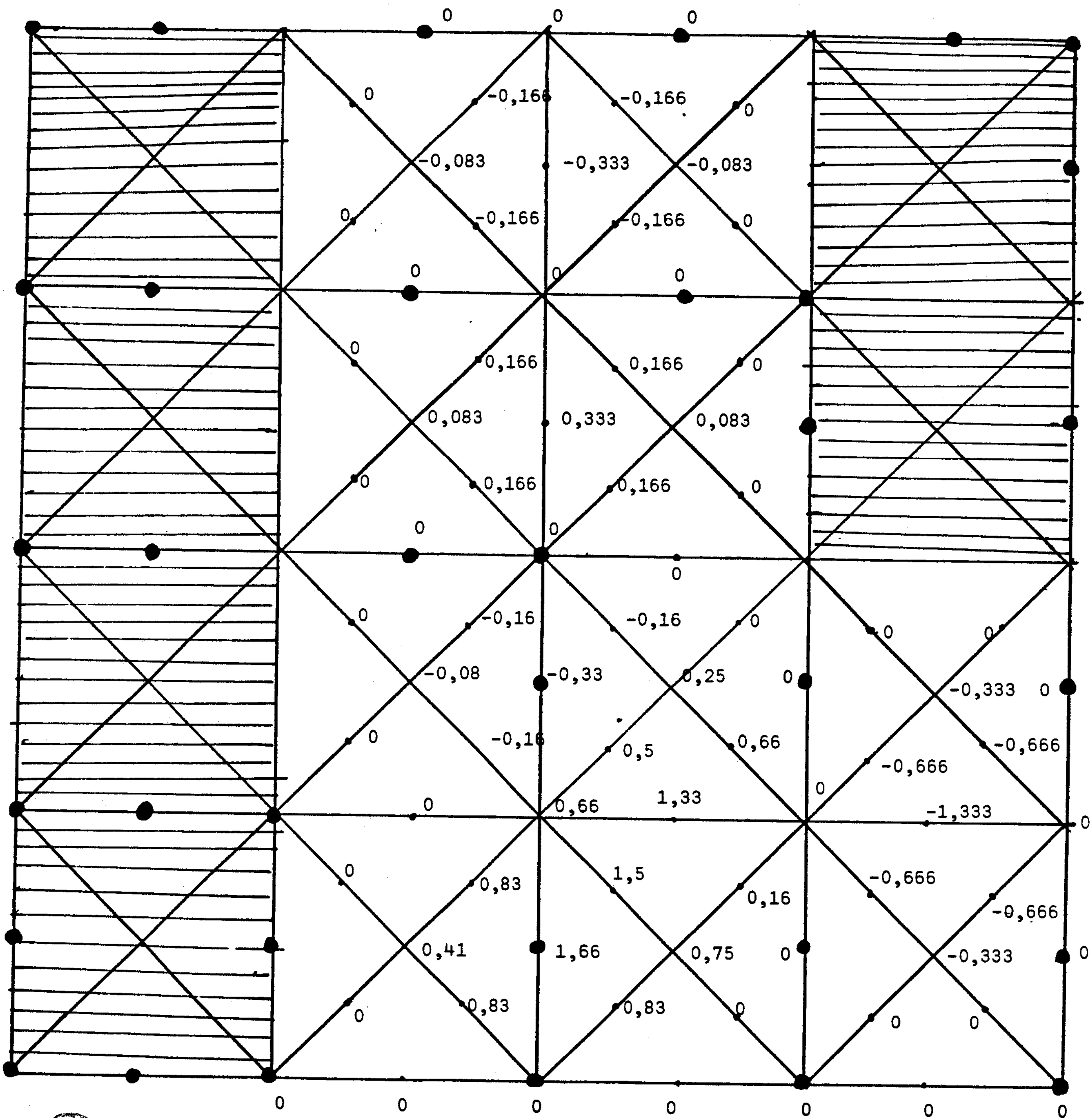





*Figure 18. Représentation des B-coefficients de* $L_{10}$ *dans le cas où* $\Omega = Q_4$.

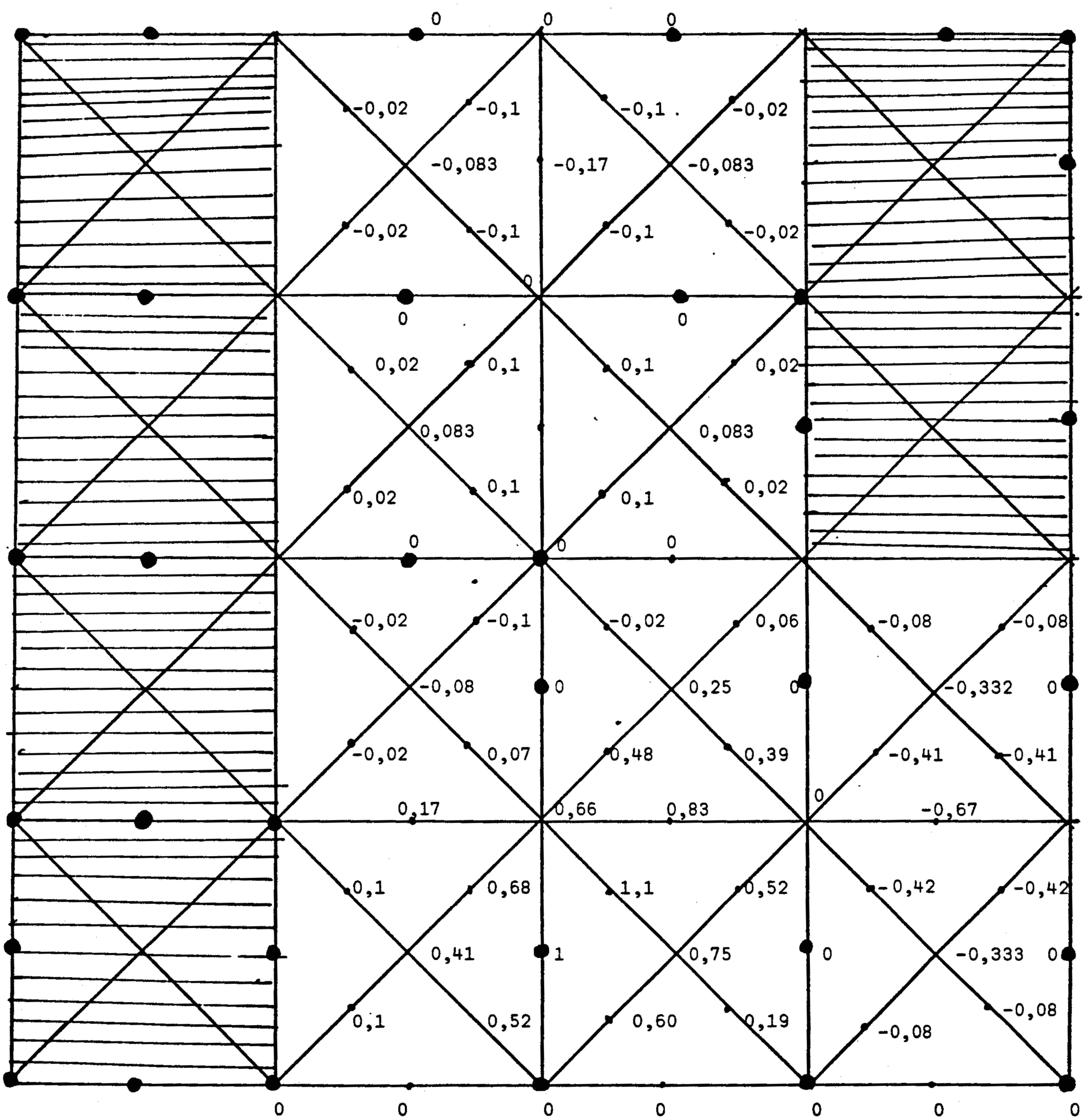





*Figure* 19. *Représentation de quelques valeurs de* $L_{10}$ *dans le cas où* $\Omega = Q_4$.

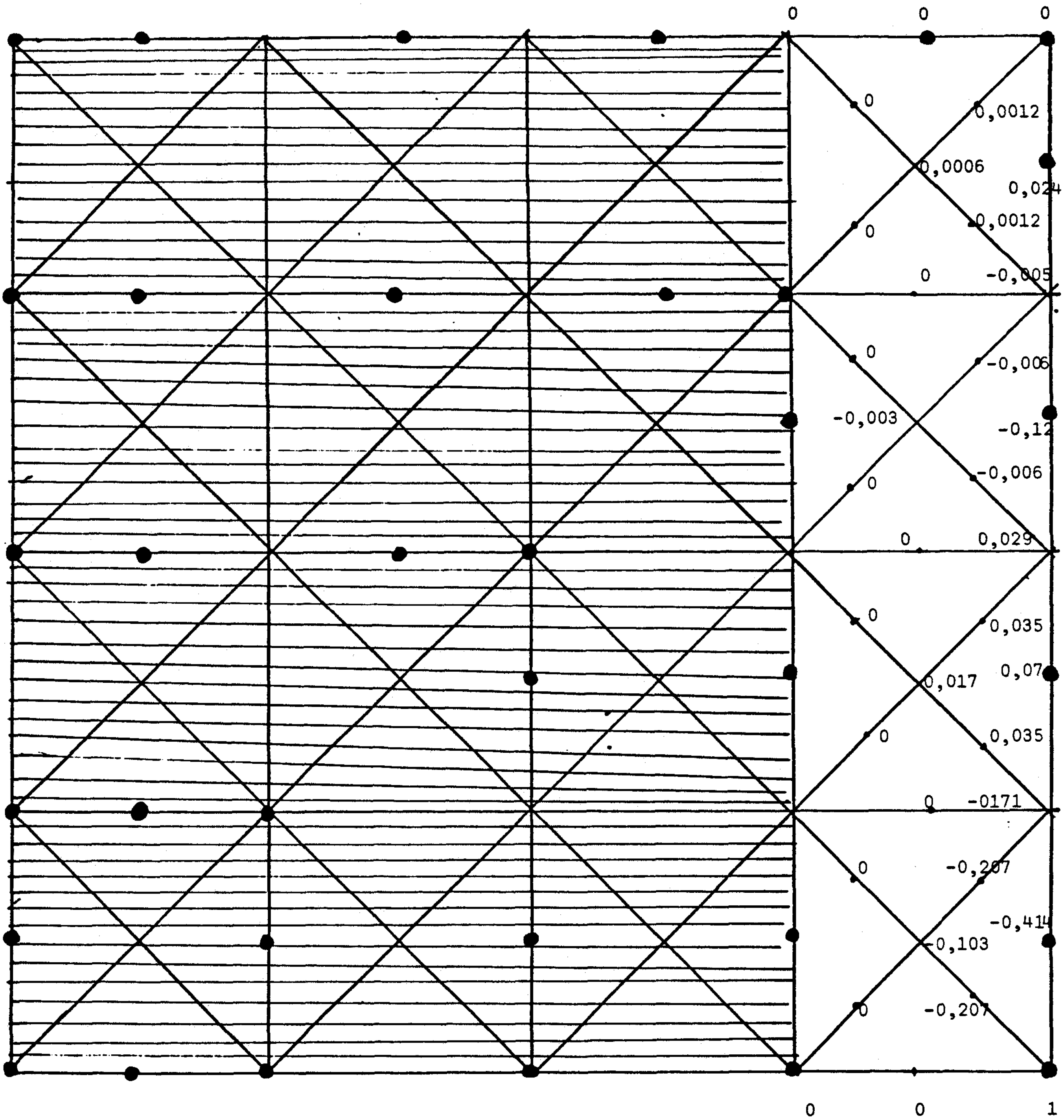





*Figure 20. Représentation des B-coefficients de* $L_{25}$ *dans le cas où* $\Omega = Q_4$.

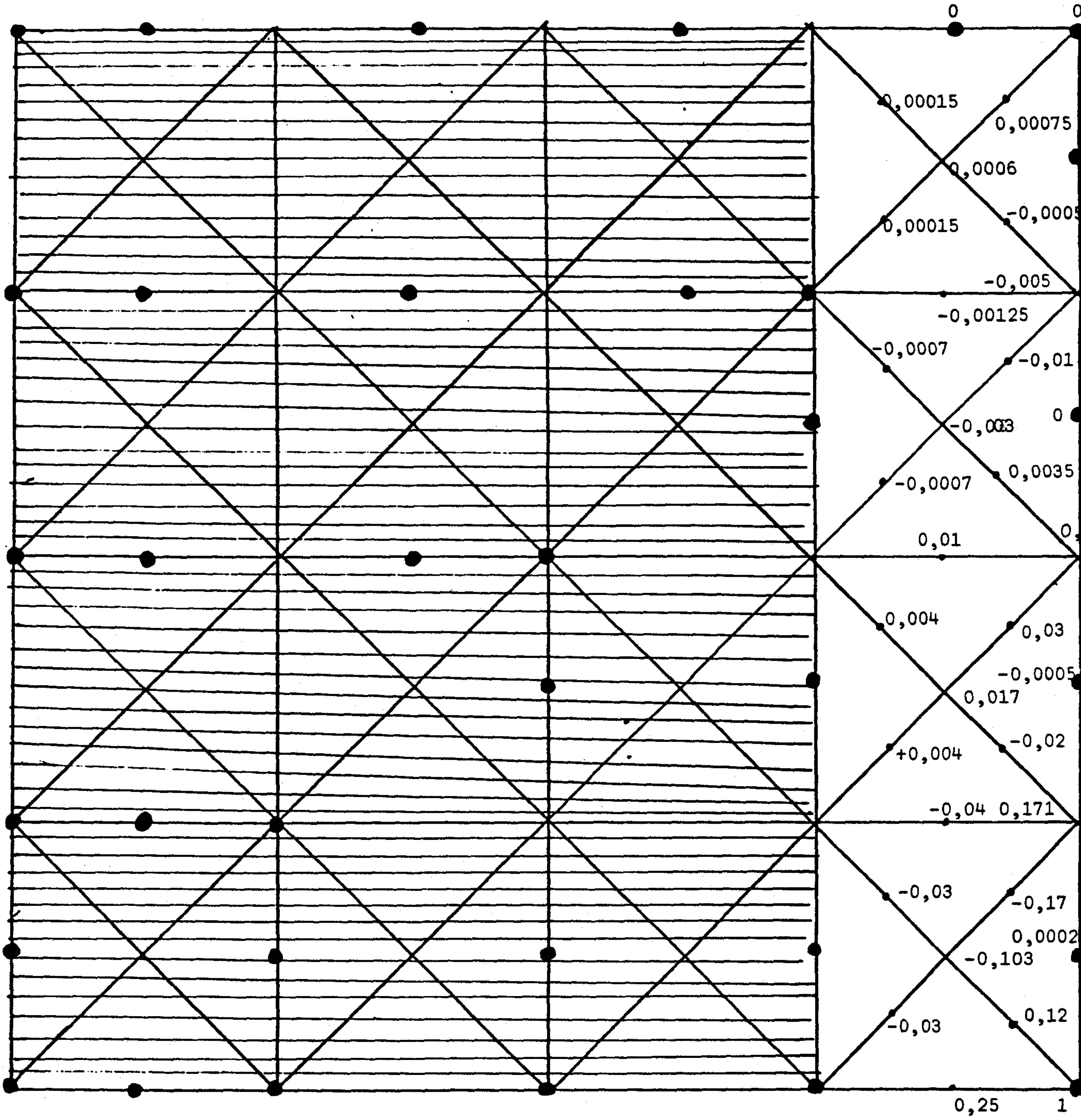



*Figure 21. Représentation de quelques valeurs de* $L_{25}$ *dans le cas où* $\Omega = Q_4$.

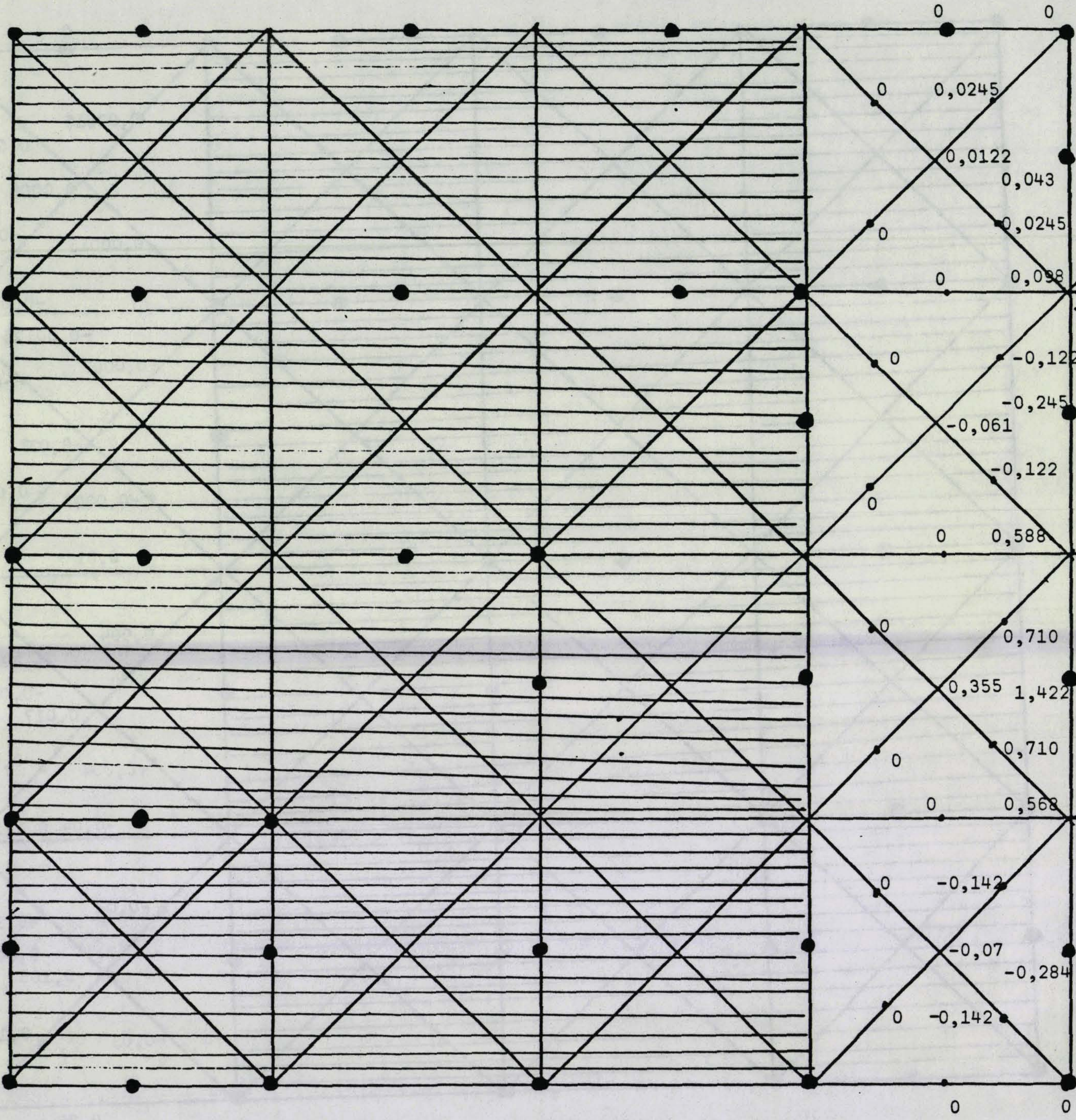





*Figure 22*. *Représentation des B-coefficients de* $L_{27}$ *dans le cas où* $\Omega = Q_4$.

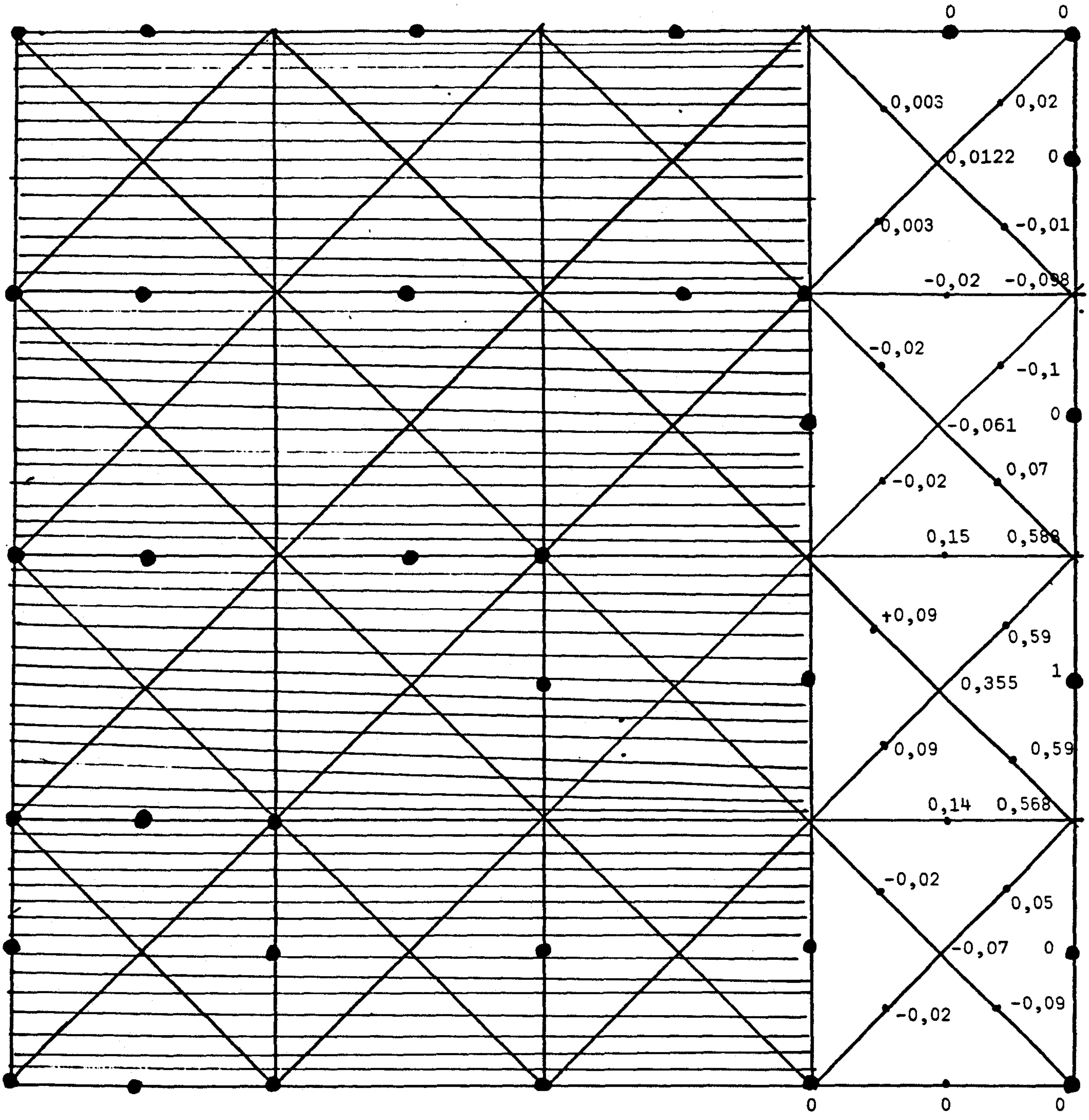



*Figure 23. Représentation de quelques valeurs de* $L_{27}$ *dans le cas où* $\Omega = Q_4$.

# IV - RÉSULTATS PRATIQUES SUR LA MAJORATION DE LA NORME DE L'OPÉRATEUR D'INTERPOLATION.

## 1 - Notions préliminaires.

On considère la fonction de Lebesgue définie ainsi :

$$\Lambda_N(x,y) = \sum_{k=1}^{N_o} |L_k(x,y)|$$

Soit $\pi_N$ l'opérateur d'interpolation défini par

$$\pi_N : \begin{array}{ccc} C^{-1}(\Omega) & \longrightarrow & P_2^1(\Omega,T) \\ f & \longrightarrow & \pi_N(f) = S. \end{array}$$

on sait que :

$$||\pi_N|| = \sup_{||f||\leq 1} ||\pi_N f|| = \operatorname{Sup}_{(x,y)\in\Omega} \sum_{k=1}^{N_o} |L_k(x,y)| = ||\Lambda_N||_{\infty,\Omega}$$

On choisit un certain nombre de points $(x_\ell, y_\ell) \in \Omega$, par exemple, sur chaque micro-triangle, les points de coordonnées barycentriques $(w_1, w_2, w_3)$ où :

$$\left\{ \begin{array}{ll} W_1 = M_1/M & \\ & M \in \mathbb{N} \text{ avec} \\ W_2 = M_2/M & \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} 0 \leq M_1 \leq M \\ \\ 0 \leq M_2 \leq M-M_1 \end{array}$$

et donc

$$1 \leq \ell \leq M_o = \frac{(M+1)(M+2)}{2}$$

*Proposition 2.*

*Soit* :

$$m = \sup_{(x_\ell, y_\ell)\in\Omega} \sum_{k=1}^{N_o} |L_k(x_\ell, y_\ell)|$$

$$M = \sup_{T\in T} \sup_{o\leq i+j\leq 2} \sum_{k=1}^{N_o} |a_{ij}^k|$$

*les* $\{a^k_{ij}\}_{0 \leq i+j \leq 2}$ *étant les B-coefficients de* $L_k$ *pour* $1 \leq k \leq N_o$.

*On a alors le résultat suivant :*

$$\boxed{m \leq \|\pi_N\| \leq M}$$

Démonstration.

La première inégalité est évidente, on démontre la deuxième

$$\|\pi_N\| = \|\Lambda_N\|_{\infty,\Omega} = \sup_{(x,y)} \sum_{k=1}^{N_o} L_k(x,y)$$

Or dans chaque triangle $T \in \mathcal{T}$, $T \subset \Omega$, on a :

$$L_k(x,y) = \sum_{0 \leq i+j \leq 2} a^k_{ij}\ \beta_{ij}(x,y)$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{N_o} |L_k(x,y)| \leq \sum_{k=1}^{N_o} \sum_{0 \leq i+j \leq 2} |a^k_{ij}|\ \beta_{ij}(x,y)$$

$$\leq \sum_{0 \leq i+j \leq 2} \beta_{ij}(x,y) \sum_{k=1}^{N_o} |a^k_{ij}|$$

avec

$$\beta_{ij}(x,y) = \frac{2!}{i!j!(2-i-j)!}\ \lambda_1^i(x,y)\ \lambda_2^j(x,y)\ \lambda_3(x,y)$$

or

$$\sum_{0 \leq i+j \leq 2} \beta_{ij}(x,y) = 1$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{N_o} |L_k(x,y)| \leq \sup_{0 \leq i+j \leq 2} \sum_{k=1}^{N_o} |a^k_{ij}|$$

d'où

$$||\pi_N|| \leq \sup_{T\in\mathcal{T}} \sup_{0\leq i+j\leq 2} \sum_{k=1}^{N_o} |a_{ij}^k| = M$$

C.Q.F.D.

---

On donne deux graphes et un tableau qui représentent les variations de M et m en fonction de N.

Un programme sera donné à la fin de ce chapitre pour le calcul de M et m.

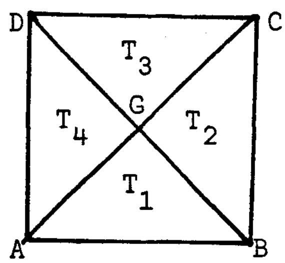
## 2 - Calcul explicite de l'erreur d'interpolation et de l'ordre de convergence.

Quelques explications concernant le programme ODCI : (donné à la fin de ce chapitre avec $\Omega = Q_N^*$).

Ce programme consiste à calculer la spline interpolant une fonction f donnée, l'erreur d'interpolation $E_N$ et l'ordre de convergence.

### *a) - Calcul de l'erreur.*

Soit $Q^*_{i_o j_o}$ l'un des petits carrés inclus dans $Q_N^*$ (ou $Q_{i_o j_o} \subset Q_N$)




Considérons le triangle T1 par exemple :

Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ les coordonnées barycentrique de $Z \in T_1$.

D'après les notations des B-coefficients donnés au début de ce chapitre, la spline $S \in SP_2(\Omega)$ s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} SP1(\lambda) = {} & a_{i_o-2,j_o-2}\,\lambda_1^2 + a_{i_o+2,j_o-2}\,\lambda_2^2 + a_{i_o j_o}\,\lambda_3^2. \\ & + 2a_{i_o-1,j_o-1}\,\lambda_1\lambda_3 + 2a_{i_o,j_o+2}\,\lambda_1\lambda_2. \\ & + 2a_{i_o+1,j_o-1}\,\lambda_2\lambda_3. \end{aligned}$$

| N | $Q_N^*$ | | $Q_N$ | |
|---|---|---|---|---|
| | m | M | m | M |
| 1 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 2 | | | 4,04 | 5 |
| 3 | 3,981 | 5 | 4,972 | 8,333 |
| 4 | | | 6,518 | 11,476 |
| 5 | 4,838 | 8,143 | 8,061 | 14,574 |
| 6 | | | 9,604 | 17,664 |
| 7 | 6,306 | 11,131 | 11,141 | 20,753 |
| 8 | | | 12,692 | 23,841 |
| 9 | 7,765 | 14,066 | 14,237 | 26,929 |
| 10 | | | 15,780 | 30,017 |
| 11 | 9,226 | 16,991 | 17,325 | 33,106 |
| 12 | | | 18,869 | 36,194 |
| 13 | 10,688 | 19,914 | 20,413 | 39,282 |
| 14 | | | 21,957 | 42,370 |
| 15 | 12,149 | 22,836 | 23,501 | 45,459 |
| 16 | | | 25,046 | 48,546 |
| 17 | 13,610 | 25,759 | 26,589 | 51,635 |
| 18 | | | 28,134 | 57,723 |
| 19 | 15,071 | 28,681 | | |

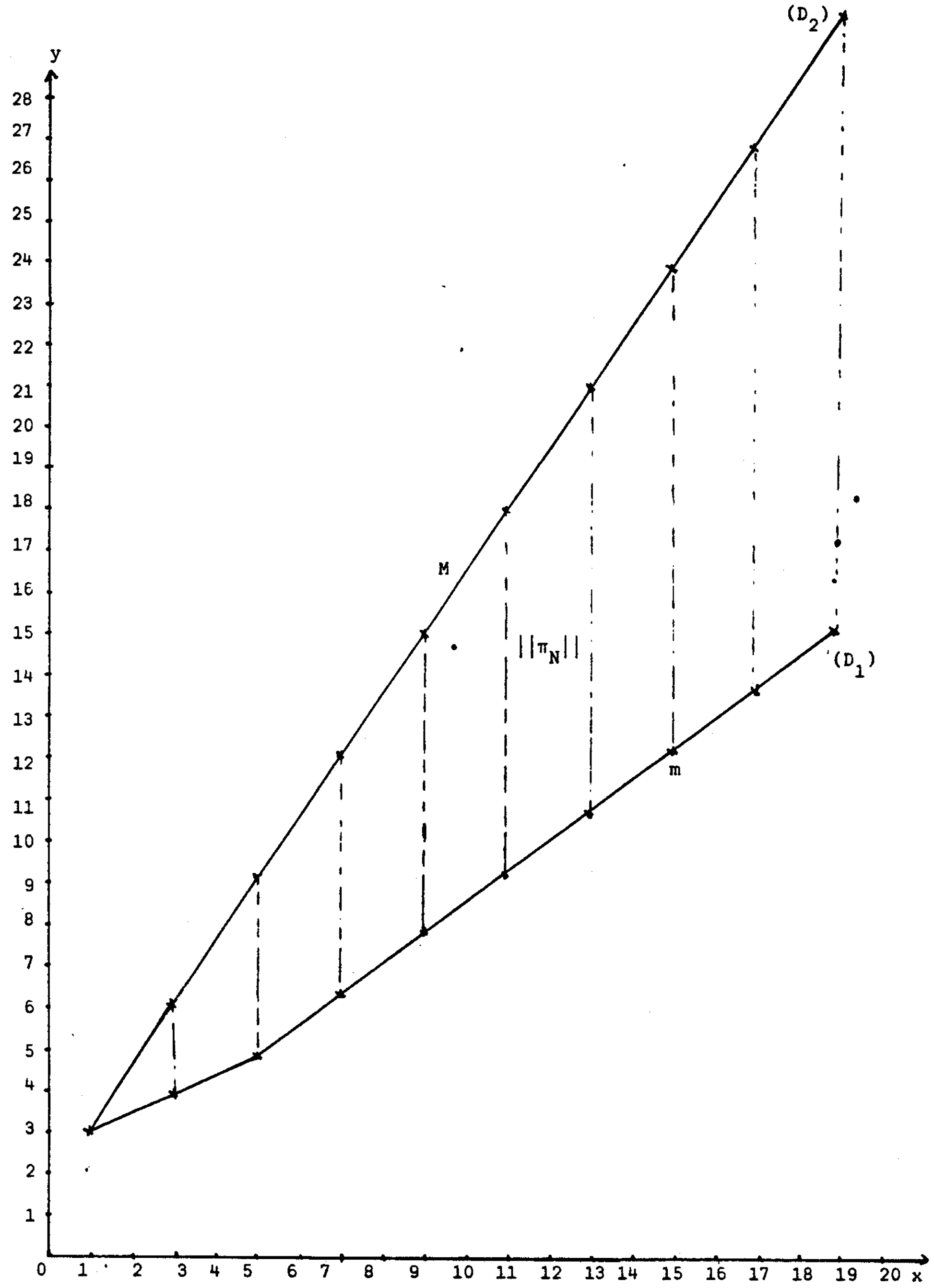





*Figure 24. Représentation de la variation de* m *et* M *en fonction de* N *dans le cas où* $\Omega = Q_N^*$.

$\begin{cases} \text{pente de } D_1 = 0{,}73 \\ \text{pente de } D_2 = 1{,}46 \end{cases}$

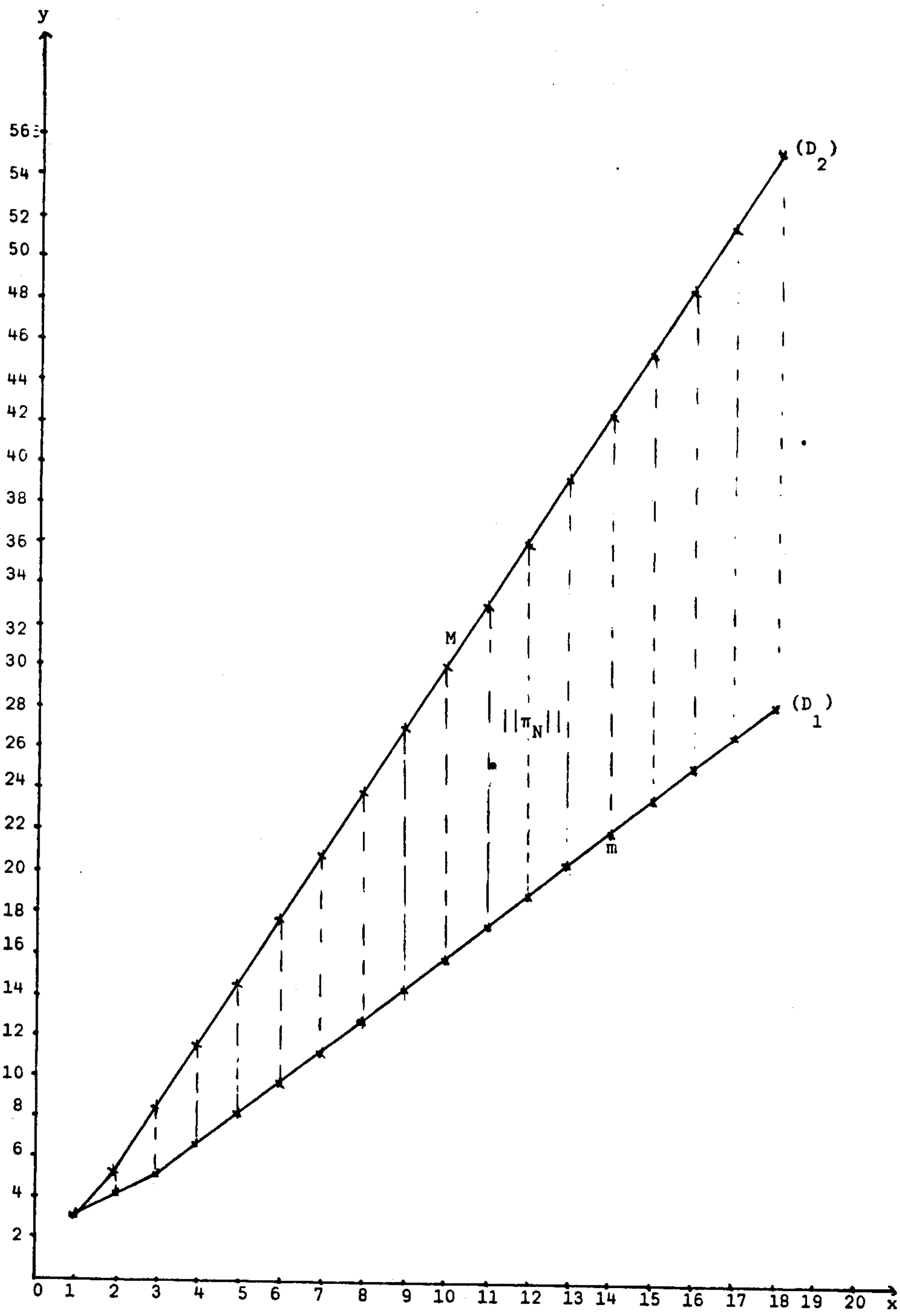



*Figure 25. Représentation de* M *et* m *dans le cas où* $Q_N = \Omega$ *(variation avec* N*).*

$$\begin{cases} \text{pente de } D_1 = 1{,}54 \\ \text{pente de } D_2 = 3{,}08 \end{cases}$$

On a des expressions analogues de S sur $T_i$ $(2 \le i \le 4)$
On considère les points $(x_1, y_1)$ $1 \le 1 \le M_o$ choisis précédemment.

Appelons $(w_1^1, w_2^1, w_3^1)$ les coordonnées barycentriques correspondantes.
On a donc :

$$\begin{cases} x_1 = w_1^1 \, x_A + w_2^1 \, x_B + w_3^1 \, x_G \\ y_1 = w_1^1 \, y_A + w_2^1 \, y_B + w_3^1 \, y_G \end{cases}$$

Soit

$$g(w_1^1, w_2^1, w_3^1) = f(x_1, y_1)$$

et

$$H^1_{i,j,1} = |(g-Sp_1)(w_1^1, w_2^1, w_3^1)|$$

$$E_N = \operatorname*{Sup}_{i,j,k,1} H^1_{i,j,k} \text{ avec } \begin{cases} 1 \le i,j \le N \\ 1 \le k \le 4 \\ 1 \le 1 \le M_o \end{cases}$$

$E_N$ est donc une valeur approchée de l'erreur d'interpolation sur $Q_N^*$ (respectivement $Q_N$).

*b) - Notion d'ordre de convergence.*

Soit $Q_1$ le carré de côtés égaux à 1.
On considère deux subdivision respectives des côtés de ce carré, de pas $h_N = 1/N$ et $h_{N'} = \frac{1}{N'}$.
L'erreur d'interpolation $E_N$ est proportionnelle à $h_N^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
On écrit :

$$E_N \approx K \, h_N^\alpha$$

$$E_{N'} \approx K \, h_{N'}^\alpha$$

$$K = \text{constante}$$

d'où

$$\operatorname{Log}(E_N/E_{N'}) \approx \alpha \operatorname{Log}(h_N/h_{N'})$$

*Définition 2.*

*L'ordre de convergence calculé est :*

$$\boxed{\alpha = \text{Log}\,(E_N/E_{N'}) \,/\, \text{Log}\,(N'/N)}$$

c) - *Quelques résultats numériques.*

Les résultats suivants permettent de voir l'évolution de l'erreur et de l'ordre de convergence en fonction de N, pour quelques exemple de fonctions, et pour $\Omega = Q_N^*$ et $Q_N$

$$E^{-r} = 10^{-r} \qquad r \in \mathbb{N}$$

pour

$$\begin{cases} f = \text{Log}(2+x+y) \\ \Omega = Q_N^* = [-0.5\ ;\ +0.5] \times [-0,5;+0.5] \end{cases}$$

| | $E_N$ | $E_{N'} : E_{2N+1}$ | $\alpha$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 93307 E - 07 | 4775 E - 07 | 2,7 |
| 3 | 4775 E - 07 | 435 E - 07 | 2,82 |
| 5 | 1150 E - 07 | 115 E - 07 | 2,91 |
| 7 | 435 E - 07 | 46 E - 07 | 2,96 |
| 9 | 208 E - 07 | 23 E - 07 | 2,96 |
| 11 | 115 E - 07 | 13 E - 07 | 2,97 |
| 13 | 70 E - 07 | 8 E - 07 | 2,97 |
| 15 | 46 E - 07 | 5 E - 07 | 2,99 |
| 17 | 31 E - 07 | 4 E - 07 | 3 |
| 19 | 23 E - 07 | 3 E - 07 | 3 |

pour

$$\begin{cases} f = \text{Log}\ (1+x+y) \\ \Omega = Q_N = [0,1] \times [0,1] \end{cases}$$

| N | $E_N$ | $E_{N'} = E_{2N-1}$ | α |
|---|---|---|---|
| 1 | 90850 E - 07 | 17661 E - 07 | 2,38 |
| 2 | 17661 E - 07 | 2662 E - 07 | 2,74 |
| 3 | 5984 E - 07 | 815 E - 07 | 2,89 |
| 4 | 2662 E - 07 | 345 E - 07 | 2,96 |
| 5 | 1395 E - 07 | 176 E - 07 | 3 |
| 6 | 815 E - 07 | 101 E - 07 | 3,02 |
| 7 | 515 E - 07 | 63 E - 07 | 3,02 |
| 8 | 345 E - 07 | 42 E - 07 | 3,04 |
| 9 | 242 E - 07 | 29 E - 07 | 3,04 |
| 10 | 176 E - 07 | 21 E - 07 | 3,05 |
| 11 | 132 E - 07 | 16 E - 07 | 3,05 |
| 12 | 101 E - 07 | 12 E - 07 | 3,05 |
| 13 | 79 E - 07 | 9 E - 07 | 3,05 |
| 14 | 63 E - 07 | 8 E - 07 | 3,05 |
| 15 | 51 E - 07 | 6 E - 07 | 3,05 |
| 16 | 42 E - 07 | 5 E - 07 | 3,05 |
| 17 | 35 E - 07 | 4 E - 07 | 3,05 |
| 18 | 29 E - 07 | 3,5 E - 07 | 3,05 |
| 19 | 25 E - 07 | 3 E - 07 | 3,05 |
| 20 | 21 E - 07 | 2,6 E - 07 | 3,05 |

Pour

$$\begin{cases} f = x^2 y \\ \Omega = Q_N^* = [-0.5, +0.5] \times [-0.5, +0.5] \end{cases}$$

| N | EN | $E_{N'} = E_{2N+1}$ | $\alpha$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 29514 E - 06 | 1093 E - 06 | 3 |
| 3 | 1093 E - 06 | 861 E - 06 | 2,99 |
| 5 | 236 E - 06 | 222 E - 06 | 2,99 |
| 7 | 86 E - 06 | 87 E - 06 | 3,01 |
| 9 | 40,5 E - 06 | 43 E - 06 | 2,99 |
| 11 | 22,6 E - 06 | 24 E - 06 | 3 |
| 13 | 13,4 E - 06 | 15 E - 06 | 3 |
| 15 | 8,7 E - 06 | 1 E - 06 | 2,99 |
| 17 | 6 E - 06 | 0,7 E - 06 | 3 |
| 19 | 4,5 E - 06 | 0,5 E - 06 | 2,99 |

Pour

$$\begin{cases} f = x^2 y \\ \Omega = Q_N = [0,1] \times [0,1] \end{cases}$$

| N | $E_N$ | $E_{N'} = E_{2N}$ | $\alpha$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 306250 E - 07 | 38281 E - 07 | 3,01 |
| 2 | 38281 E - 07 | 4785 E - 07 | 3,01 |
| 3 | 11343 E - 07 | 1418 E - 07 | 3,01 |
| 4 | 4785 E - 07 | 598 E - 07 | 3,01 |
| 5 | 2450 E - 07 | 306 E - 07 | 3,01 |
| 6 | 1420 E - 07 | 177 E - 07 | 3,01 |
| 7 | 893 E - 07 | 112 E - 07 | 3,01 |
| 8 | 598 E - 07 | 74 E - 07 | 3,01 |
| 9 | 420 E - 07 | 53 E - 07 | 3,01 |
| 10 | 306 E - 07 | 38 E - 07 | 3,01 |
| 11 | 230 E - 07 | 28 E - 07 | 3,01 |
| 12 | 177 E - 07 | 22 E - 07 | 3,01 |
| 13 | 140 E - 07 | 17 E - 07 | 3,01 |
| 14 | 111 E - 07 | 14 E - 07 | 3,01 |
| 15 | 90 E - 07 | 11 E - 07 | 3,01 |
| 16 | 74 E - 07 | 9 E - 07 | 3,01 |
| 17 | 62 E - 07 | 8 E - 07 | 3,01 |
| 18 | 52 E - 07 | 7 E - 07 | 3,01 |
| 19 | 45 E - 07 | 6 E - 07 | 3,01 |
| 20 | 38 E - 07 | 5 E - 07 | 3,01 |

$$\left\{ \begin{array}{l} f = \sin(\pi(x+y) \\ \\ \Omega = Q_N^{*} = [-0.5, +0.5] \times [-0.5, +0.5] \end{array} \right.$$

| N | $E_N$ | $E_{N'} = E_{2N+1}$ | α |
|---|---|---|---|
| 1 | 522147 E - 07 | 169961 E - 07 | 1,07 |
| 3 | 169961 E - 07 | 8971 E - 07 | 3,46 |
| 5 | 29543 E - 07 | 2035 E - 07 | 3,39 |
| 7 | 8971 E - 07 | 762 E - 07 | 3,25 |
| 9 | 3902 E - 07 | 366 E - 07 | 3,16 |
| 11 | 2035 E - 07 | 204 E - 07 | 3,11 |
| 13 | 1194 E - 07 | 125 E - 07 | 3,1 |
| 15 | 762 E - 07 | 82 E - 07 | 3,05 |
| 17 | 517 E - 07 | 57 E - 07 | 3,07 |
| 19 | 366 E - 07 | 41 E - 07 | 3,04 |

$$\begin{cases} f = \text{Sin}\ (\pi(x+y)) \\ \Omega = [0,1] \times [0,1] \end{cases}$$

| N | $E_N$ | $E_{N'} = E_{2N}$ | $\alpha$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 522147 E - 07 | 974729 E - 07 | - 0,9 |
| 2 | 974729 E - 07 | 93392 E - 07 | 3,40 |
| 3 | 279067 E - 07 | 20822 E - 07 | 3,76 |
| 4 | 93392 E - 07 | 7317 E - 07 | 3,69 |
| 5 | 37579 E - 07 | 3372 E - 07 | 3,49 |
| 6 | 20822 E - 07 | 1885 E - 07 | 3,48 |
| 7 | 11198 E - 07 | 1145 E - 07 | 3,30 |
| 8 | 7317 E - 07 | 744 E - 07 | 3,31 |
| 9 | 4691 E - 07 | 512 E - 07 | 3,21 |
| 10 | 3372 E - 07 | 367 E - 07 | 3,21 |
| 11 | 2447 E - 07 | 272 E - 07 | 3,18 |
| 12 | 1885 E - 07 | 207 E - 07 | 3,20 |
| 13 | 1438 E - 07 | 161 E - 07 | 3,17 |
| 14 | 1145 E - 07 | 128 E - 07 | 3,18 |
| 15 | 906 E - 07 | 103 E - 07 | 3,15 |
| 16 | 746 E - 07 | 84 E - 07 | 3,17 |
| 17 | 610 E - 07 | 70 E - 07 | 3,14 |
| 18 | 512 E - 07 | 58 E - 07 | 3,16 |
| 19 | 428 E - 07 | 49 E - 07 | 3,14 |
| 20 | 367 E - 07 | 42 E - 07 | 3,14 |

$$\begin{cases} f = 1/1.1+x+y \\ \Omega = Q_N^* = [-0.5,\ 0.5] \times [-0.5,\ 0.5] \end{cases}$$

| N | $E_N$ | $E_{N'} = E_{2N+1}$ | α |
|---|---|---|---|
| 1 | 263,04714 E - 02 | 101,99787 E - 02 | 0,86 |
| 3 | 101,99787 E - 02 | 28,5177 E - 02 | 1,49 |
| 5 | 50,07872 E - 02 | 12,7284 E - 02 | 1,73 |
| 7 | 28,5177 E - 02 | 6,6484 E - 02 | 1,92 |
| 9 | 18,54113 E - 02 | 3,9294 E - 02 | 2,07 |
| 11 | 12,7284 E - 02 | 2,5072 E - 02 | 2,19 |
| 13 | 9,0618 E - 02 | 1,69 E - 02 | 2,3 |
| 15 | 6,6483 E - 02 | 1,19 E - 02 | 2,36 |
| 17 | 5,047 E - 02 | 0,866 E - 02 | 2,44 |
| 19 | 3,9294 E - 02 | 0,649 E - 02 | 2,5 |

$$\begin{cases} f = 1/0.1+x+y \\ \Omega = Q_N = [0,1] \times [0,1] \end{cases}$$

| N | $E_N$ | $E_{N'} = E_{2N}$ | α |
|---|---|---|---|
| 1 | 272,72727 E - 02 | 142,85714 E - 02 | 0,94 |
| 2 | 142,85714 E - 02 | 74,19189 E - 02 | 0,95 |
| 3 | 98,52285 E - 02 | 44,85514 E - 02 | 1,14 |
| 4 | 74,19189 E - 02 | 28,9574 E - 02 | 1,36 |
| 5 | 57,14286 E - 02 | 19,64912 E - 02 | 1,55 |
| 6 | 44,85514 E - 02 | 13,86767 E - 02 | 1,70 |
| 7 | 35,78678 E - 02 | 10,10485 E - 02 | 1,83 |
| 8 | 28,9574 E - 02 | 7,56076 E - 02 | 1,95 |
| 9 | 23,7231 E - 02 | 5,79212 E - 02 | 2,04 |
| 10 | 19,64912 E - 02 | 4,53571 E - 02 | 2,12 |
| 11 | 16,43477 E - 02 | 3,61142 E - 02 | 2,20 |
| 12 | 13,86767 E - 02 | 2,91759 E - 02 | 2,26 |
| 13 | 11,79497 E - 02 | 2,38747 E - 02 | 2,32 |
| 14 | 10,10485 E - 02 | 1,97604 E - 02 | 2,37 |
| 15 | 8,71429 E - 02 | 1,65226 E - 02 | 2,41 |
| 16 | 7,56076 E - 02 | 1,39424 E - 02 | 2,45 |
| 17 | 6,59663 E - 02 | 1,18631 E - 02 | 2,49 |
| 18 | 5,79212 E - 02 | 1,01703 E - 02 | 2,52 |
| 19 | 5,11416 E - 02 | 0,87792 E - 02 | 2,55 |
| 20 | 4,53571 E - 02 | 0,76263 E - 02 | 2,58 |

Les résultats numériques précédents montrent que l'ordre de convergence tend vers 3, quand N augmente. Il semble donc que l'erreur d'interpolation pourrait être en $O(h^3)$ avec $h = 1/N$.

## 3 - Etude théorique de l'erreur d'interpolation.

*Proposition 3.*

*Soit* $\hat{\Omega} = [-h/2, 1+h/2]$ ; *et soit* $f \in C^3(\hat{\Omega})$. *L'erreur d'interpolation est en* $O(h^\alpha)$ ; *avec* $\alpha$ *au moins égal à 2.*

Démonstration.

Soit $f \in C^3(\hat{\Omega})$, et S la spline quadratique interpolant f aux points I, $(1 \leq I \leq N_o)$, appartenant à $Q_N^*$ (ou $Q_N$).
C'est à dire que $\pi_N f = S$.
D'après ce qui précède, $\Omega$ est subdivisé en petits carrés appelés $Q_{ij}$ (ou $Q_{ij}^*$) avec $1 \leq i, j \leq N$.

Soit $i_o$, $j_o$ tq $1 \leq i_o, j_o \leq N$, appelons $C_{i_o,j_o}$ le centre du carré $Q_{i_o,j_o}$.

Soit $\hat{Q}_{i_o,j_o}$ le carré de centre $C_{i_o,j_o}$ et de côtés 2 h et $S_2f$ le quasi-interpolant défini par P. Sablonnière [10]

$$S_2f(x,y) = \sum_{i,j} \left(f(c_{ij}) - \frac{1}{8} h^2 \, \Delta f(c_{ij})\right) M_{ij}$$

avec

$\Delta f$ = Laplacien de f

$M_{ij}$ = B-spline centrée au point $c_{ij}$

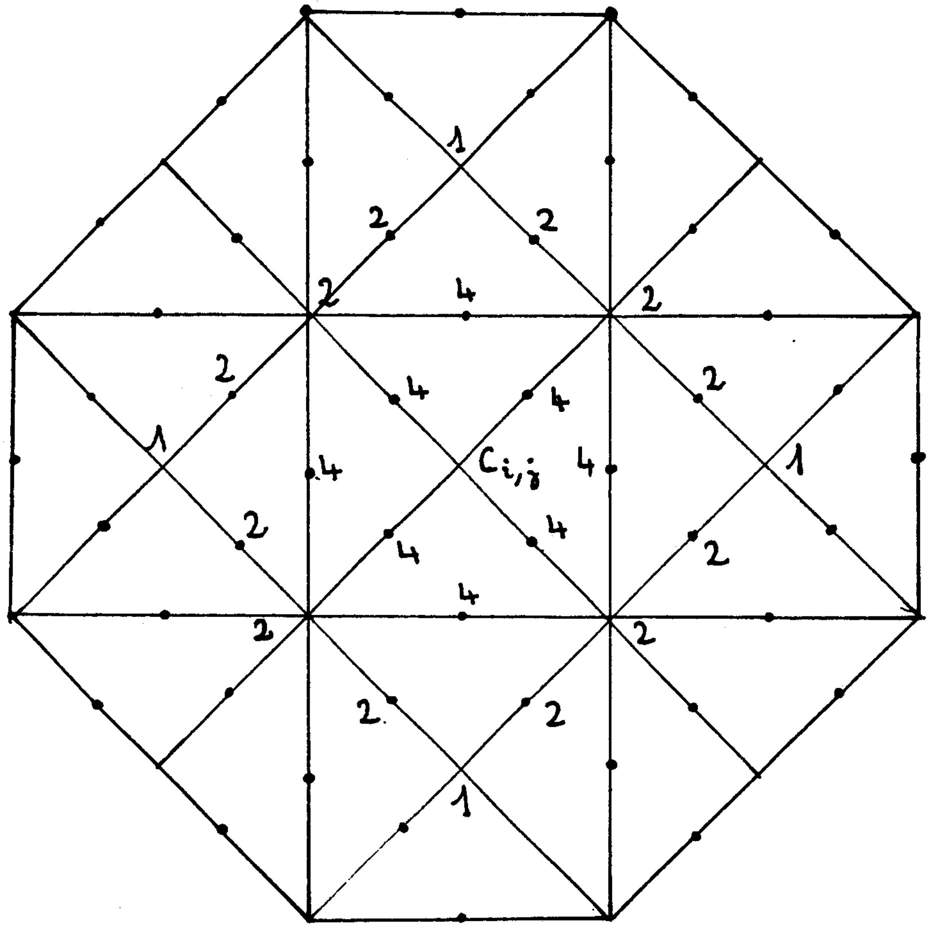





Figure 25. B-spline de $S_P(2,1)$ (Normalisation : diviser par 8, voir [10]).

P. Sablonnière donne dans [10] le résultat suivant :

(1) $$\boxed{\|S_2 f - f\|_{\infty, Q_{i_o,j_o}} \leq \left\{ \frac{\sqrt{3}}{27} M_3 (c_{i_o,j_o}) + \frac{31}{24} \hat{\omega}_3^1(h)\right\} h^3}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} M_3(c_{i_o,j_o}) = \displaystyle\max_{k+\ell=3} \{\partial^{k\ell} f(c_{i_o,j_o})\} \\ \hat{\omega}_3(h) = \displaystyle\max_{k+\ell=3} \hat{\bar{\omega}}(\partial^{k\ell} f,h) \\ \hat{\omega}(\partial^{k,\ell} f,h) = \displaystyle\sup_{\substack{\|x_1-x_2\|\leq h \\ x_1,\, x_2 \in \hat{Q}_{i_o,j_o}}} |\partial^{k,\ell} f(x_1) - \partial^{k,\ell} f(x_2)| \\ \qquad = \text{module de continuité de } \partial^{k\ell} f \end{array} \right.$$

d'où on a :

$$M_3(c_{i_o,j_o}) \leq |f|_{3,\infty,\hat{Q}_{i_o,j_o}}$$

et

$$\hat{\omega}_3(h) \leq |f|_{3,\infty,\hat{Q}_{i_o,j_o}}$$

et donc

(2) $$\boxed{\|S_2 f - f\|_{\infty, Q_{i_o,\gamma_o}} \leq C h^3 |f|_{3,\infty,\hat{Q}_{i_o,j_o}}}$$

Or ceci est vrai $\forall i_o, j_o$ ; on peut généraliser le résultat au domaine $\hat{\Omega}$, c'est à dire

(3) $$\boxed{\|S_2 f - f\|_{\infty, \Omega} \leq C h^3 |f|_{3,\infty,\hat{\Omega}}}$$

$S_2$ étant une spline quadratique, on a donc

$$\pi_N S_2 = S_2.$$

On peut donc s'écrire :

$$f - S = f - \pi_N f - S_2 f + \pi_N S_2 f$$

d'où

$$||f-S||_{\infty,\Omega} \leq ||f-S_2 f||_{\infty,\Omega} + ||\pi_N(f-S_2 f)||_{\infty,\Omega}$$

$$\leq (1 + ||\pi_N||)\ ||f-S_2 f||_{\infty,\Omega}$$

d'où d'après (3), on a :

$$(4) \qquad \boxed{||f-S||_{\infty,\Omega} \leq C\ (1 + ||\pi_N||)\ h^3 |f|_{3,\infty,\hat{\Omega}}}$$

Mais les résultats numériques précédents montrent qu'il existe $C_1$ et $C_2$ tels que :

$$||\pi_N|| \leq C_1 N + C_2 = \frac{C_1}{h} + C_2$$

En remplaçant dans (4) on a :

$$\boxed{||f-S||_{\infty,\Omega} \leq (C_1' h^2 + C_2' h^3)\ |f|_{3,\infty,\hat{\Omega}}}$$

C.Q.F.D.

## V - Quelques généralisations.

On choisit les exemples suivants comme généralisation des cas précédents.

**1ère exemple.**

$$\begin{cases} f = x + 2y - 1 \\ \Omega = Q_N^* \text{ (ou } Q_N) \end{cases}$$

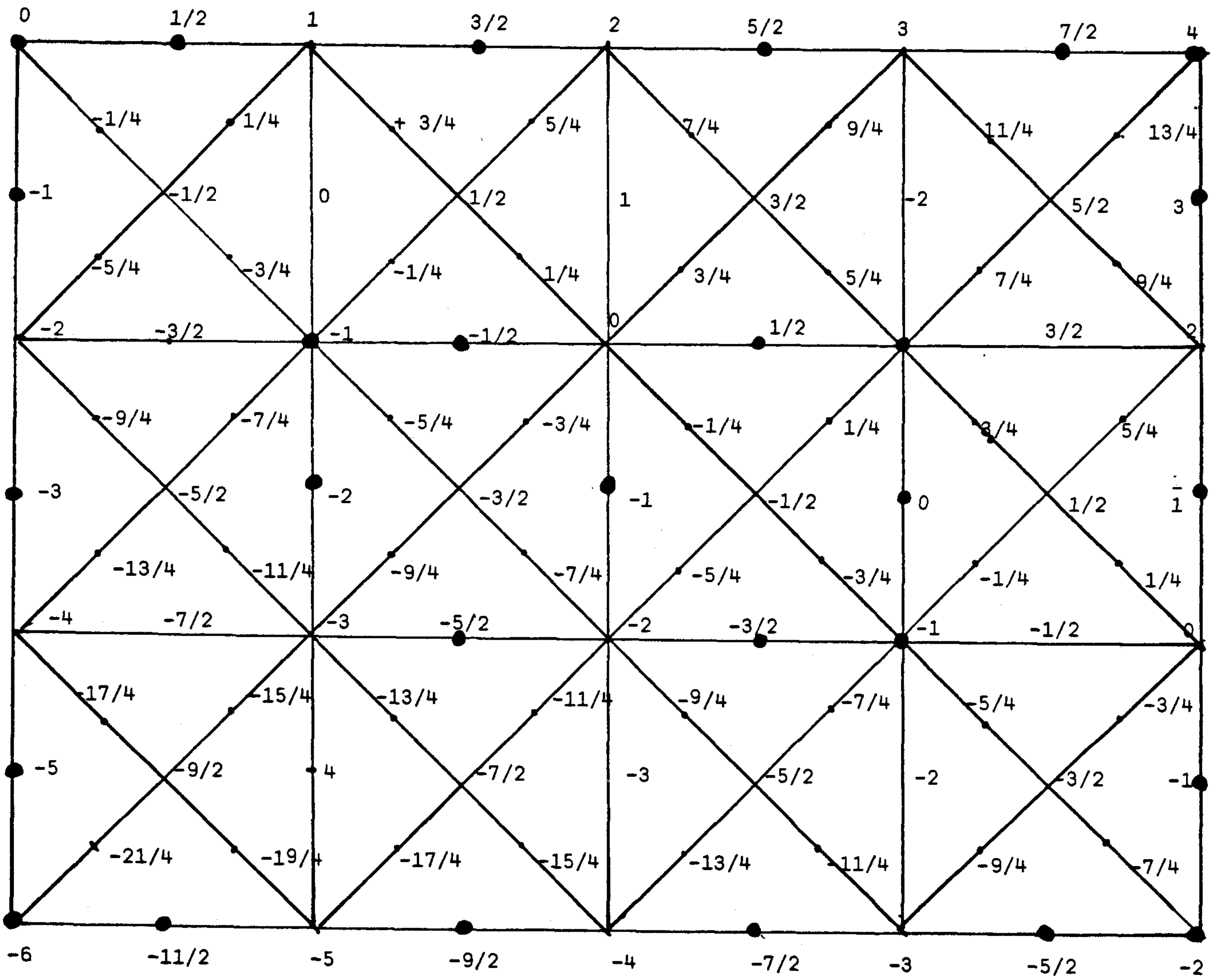



*Figure* 26. *Représentation des B-coefficients de* S *interpolant de* f.

2ème exemple.

$$f = x^2 + y$$

(avec un autre cas de figure)

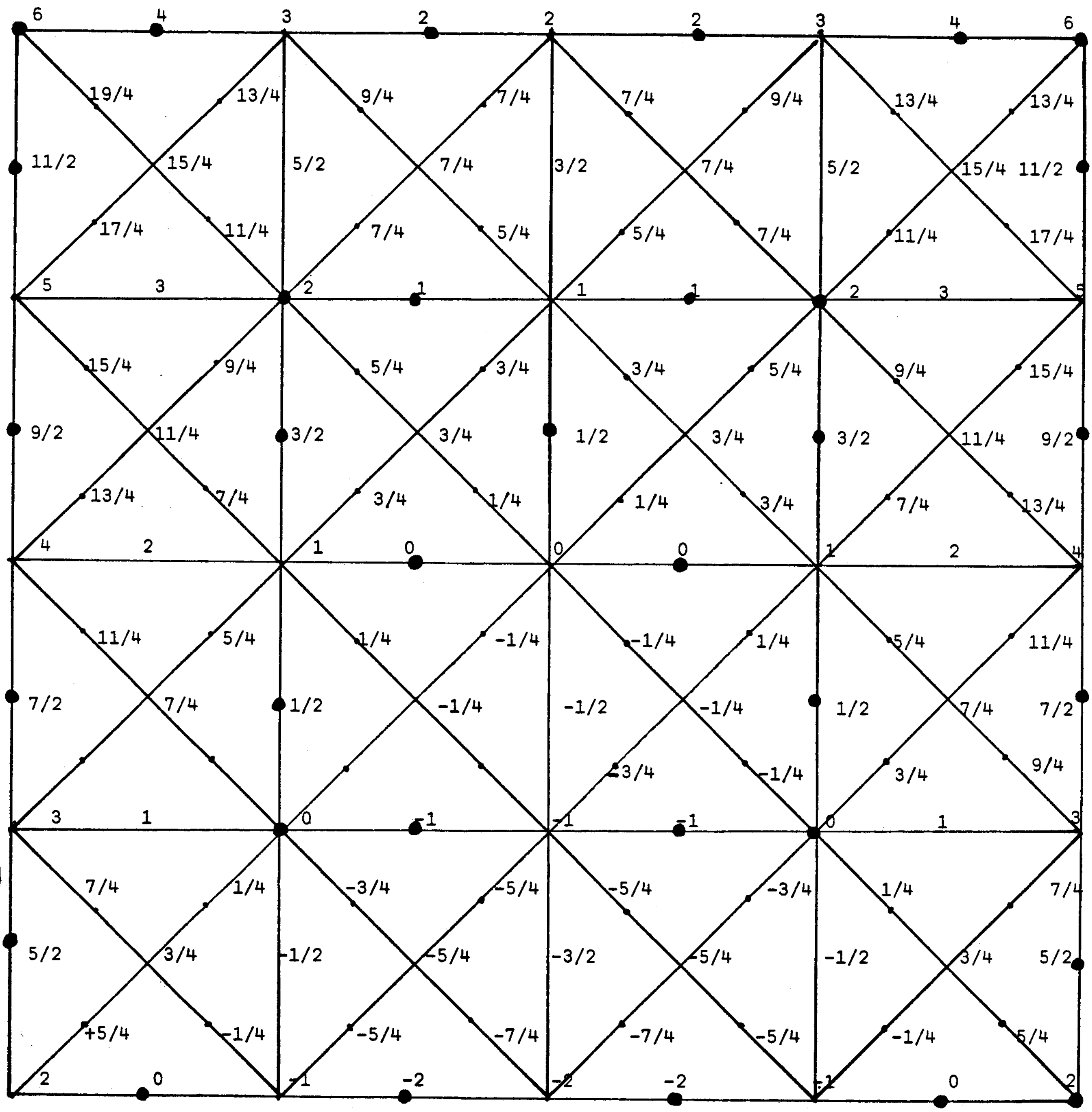



*Figure 27. Représentation des B-coefficients de S interpolant de f.*

3ième exemple.

$f = 3x + 2y$

(avec un autre cas de figure).

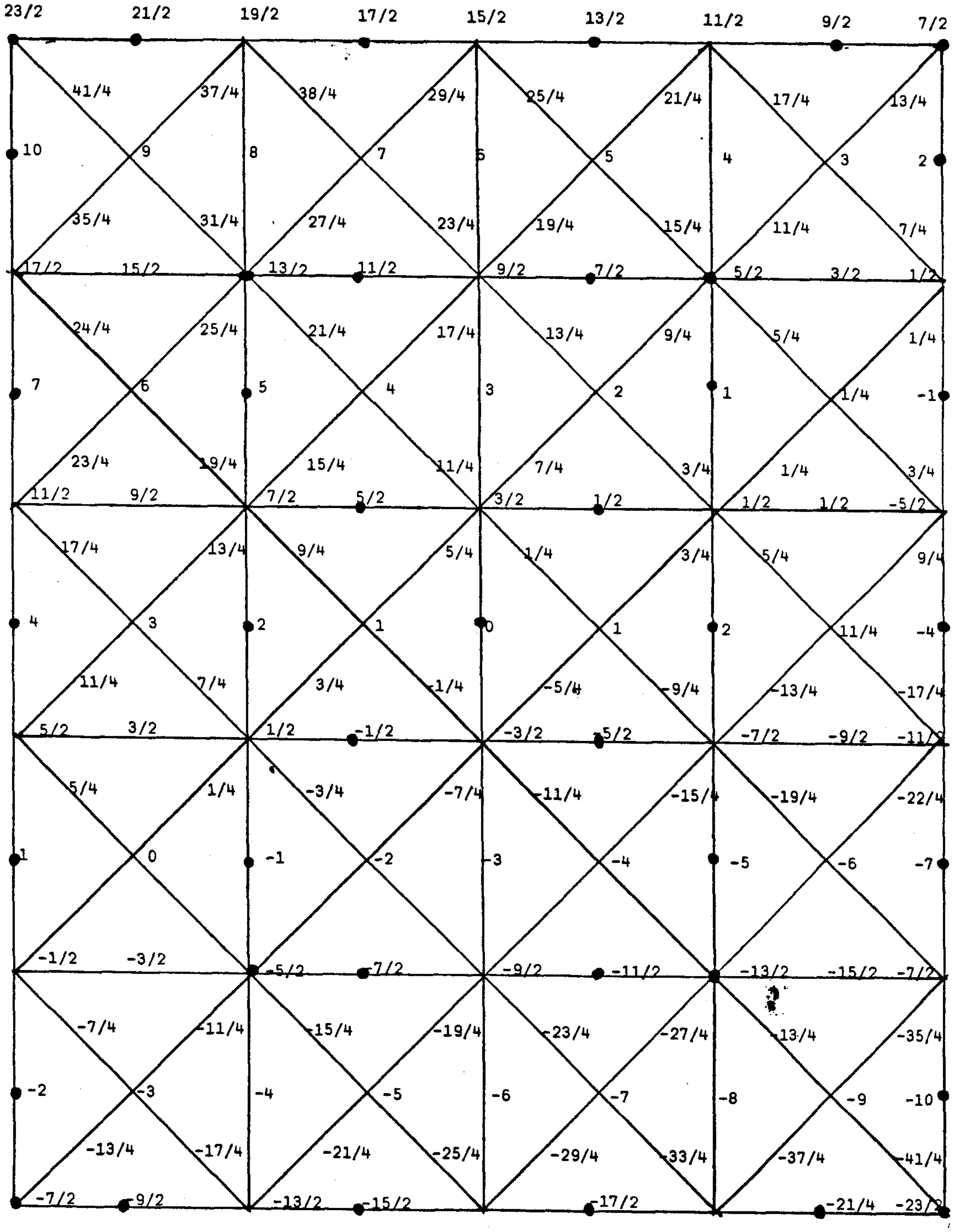
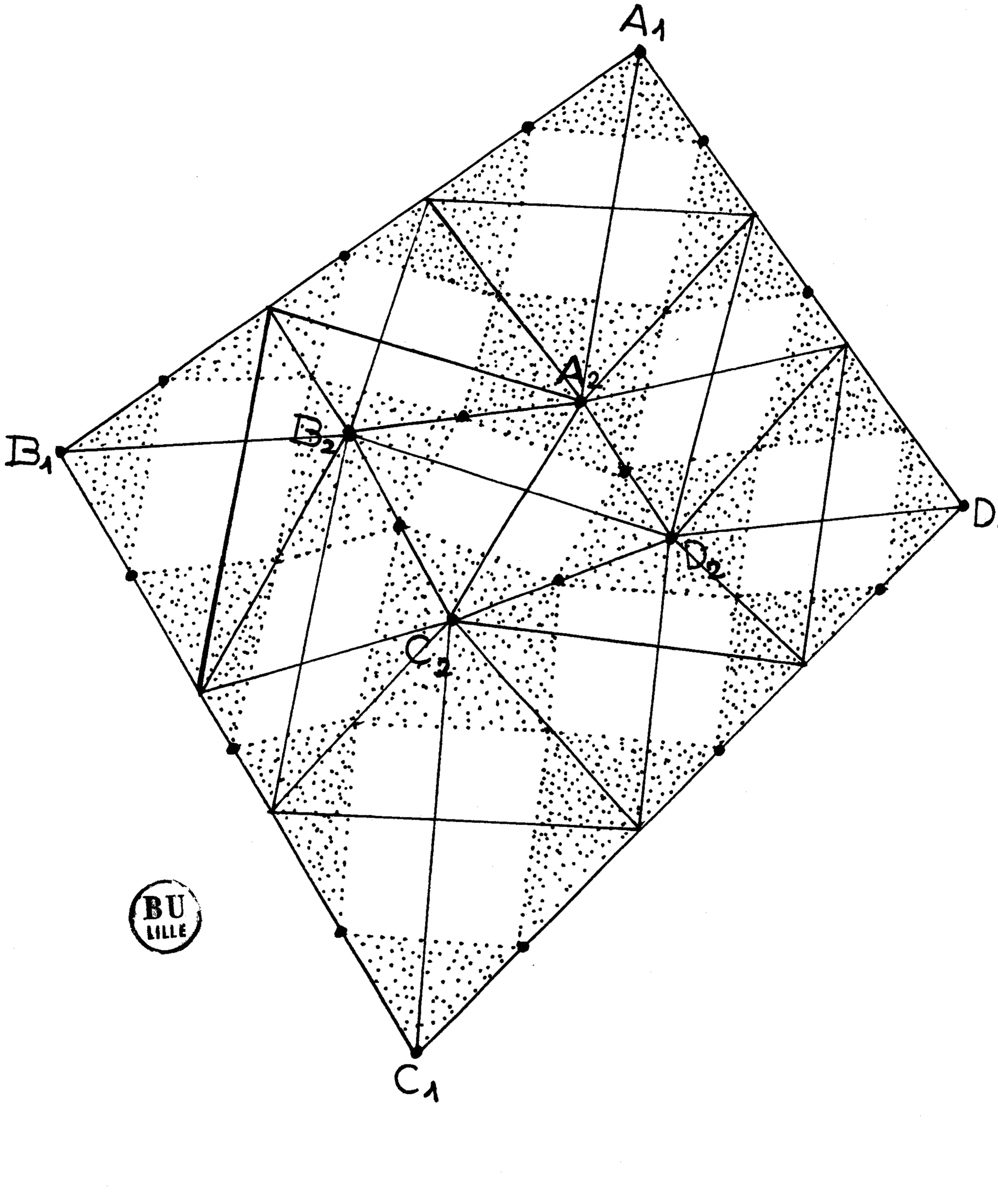


*Figure 28. Représentation des B-coefficients de S interpolant f.*

On peut généraliser l'étude précédente, en prenant pour $\Omega$, un quadrilatère quelconque, et en choisissant les points d'interpolation de la manière suivante :



Dans ce cas, on procède de la même manière que précédemment. On cherche d'abord les B-coefficients correspondants aux bords de $Q_N^*(Q_N)$ ; et ce, en résolvant les systèmes (S1) et (S2) donnés au début de ce chapitre. Le passage de $Q_N$ à $Q_{N+2}$, se fait à l'aide de la technique des plaques (pour cette notion voir [10]).

PROGRAMME 1 = ODCI

```
C INTERPCLATICN CE LAGRANGE PAR DES SALINES GUADRATIGUES
C  CN PRENC UN DCMAINE CARRE (-0.5,+0.5))*(-0.5,0.5)
C CN CHCISIT SUR LES CCTES DE CE CARRE UNE SUBDIVISICN DE PAS HN=1,N
C AVEC N IMPAIR
C  CN DETINT UNE SUITE CRCISSANTE DE CARRES
C  ILS SCNT APPELES G'N TEL GUE G'N EST INCLU DANS G'(N+1) PCUR TOUT N
C CN CALCULE L'ERREUR D'INTERPCLATION PCUR TOUT N ET PAR SUITE
C CN CALCULE L'CRDRE DE CCNVERGENCE ALPHA=LOG(EN/E(N+1))/LOG(HN/H(N+1))
C EN ETANT L'ERREUR D'INTERPCLATICN CCRRESPONDANT A LA SUBDIVISICN DE PAS HN
C DECLARATICN
      INTEGER P,G,P1,P2,P3,P4,P5,PP,PN
      DIMENSICN A(21,21),X(50),Y(50)
      DIMENSICN F1(10),G(10),H1(10),E(10)
C  CN TRAITE LE CAS N=1 A PART
      DC 20 K=1,8
      READ(105,15)X(K),Y(K)
  20  CCNTINUE
  15  FCRMAT(2F8.2)
C  INTERPCLATICN SUR LE CARRE G1
      CALL S0(A,3,X,Y)
C  B-CCEFF. INTERNES
      CALL S4(A,3,3)
C FIN DE L'INTERPCLATICN SUR G1
      N1=3
C CALCUL DE L'ERREUR
      CALL S5(A,0,0,1,E)
      E1=E
      WRITE(108,99)
  99  FCRMAT('L ERREUR D INTRPCLATION SUR G1 EST')
      WRITE(108,79)E1
      DC 554 PP=2,21
      N=2*PP-1
C CALCUL DES PCINTS D'INTERPCLATICN SUR G1
      X(1)=-0,5/FLCAT(N)
      Y(1)=-0,5/FLCAT(N)
      X(2)=-0,5/FLCAT(N)
      Y(2)=0
      X(3)=-0,5/FLCAT(N)
      Y(3)=0,5/FLCAT(N)
      X(4)=0
      Y(4)=0,5/FLCAT(N)
      X(5)=0,5/FLOAT(N)
      Y(5)=0,5/FLCAT(N)
      X(6)=0,5/FLCAT(N)
      Y(6)=0
      X(7)=0,5/FLCAT(N)
      Y(7)=-0,5/FLCAT(N)
      X(8)=0
      Y(8)=-0,5/FLCAT(N)
C FIN DE CETTE LECTURE
C  INTERPCLATICN SUR LE CARRE (0,0)
```

```
      N1=2*N+1
      CALL S0(A,N1,X,Y)
C  FIN DE CE CALCUL
C B COEFFICIENTS INTERNES
      CALL S4(A,N1,N1)
C CALCUL DE L'ERREUR SUR (0,0)
      CALL S5(A,0,0,N,E)
      E2=E
C CALCUL DES POINTS D'INTERPOLATION SUR LES AUTRES CARRES
      IF(N.EQ.1) GO TO 554
      N2=(N-1)/2
      DO 57 PN=1,N2
      P=2*PN+1
      P1=P*P
      P2=P1+P+1
      P3=P2+P+1
      P4=P3+P+1
      P5=(P+2)*(P+2)-1
      X(P1)=(-0.5-PN)/FLOAT(N)
      Y(P1)=X(P1)
      X(P1+1)=X(P1)
      Y(P1+1)=Y(P1)+0.5/FLOAT(N)
      DO 51 K=P1+2,P2-1
      X(K)=X(K-1)
      Y(K)=Y(K-1)+1./FLOAT(N)
51    CONTINUE
      X(P2)=X(P2-1)
      Y(P2)=Y(P2-1)+0.5/FLOAT(N)
      X(P2+1)=X(P2)+0.5/FLOAT(N)
      Y(P2+1)=Y(P2)
      DO 52 K=P2+2,P3-1
      X(K)=X(K-1)+1./FLOAT(N)
      Y(K)=Y(K-1)
52    CONTINUE
      X(P3)=X(P3-1)+0.5/FLOAT(N)
      Y(P3)=Y(P3-1)
      X(P3+1)=X(P3)
      Y(P3+1)=Y(P3)-0.5/FLOAT(N)
      DO 53 K=P3+2,P4-1
      X(K)=X(K-1)
      Y(K)=Y(K-1)-1./FLOAT(N)
53    CONTINUE
      X(P4)=X(P4-1)
      Y(P4)=Y(P4-1)-0.5/FLOAT(N)
      X(P4+1)=X(P4)-0.5/FLOAT(N)
      Y(P4+1)=Y(P4)
      DO 54 K=P4+2,P5
      X(K)=X(K-1)-1./FLOAT(N)
      Y(K)=Y(K-1)
54    CONTINUE
      X(P5+1)=X(P1)
```

```
      Y(P5+1)=Y(P1)
C FIN DE LA LECTURE DES POINTS D'INTERPOLATION SUR QP
C ON CHERCHE D'ABORD LES B-COEFFICIENTS APPARTENANT AUX BORDS DE QP
C ON FAIT APPEL AUX SOUS PROGRAMME S2 PERMETTANT LE CALCUL DE CERTAINS DE CES
C B-COEFFICIENTS
C COTE (A,B) C'EST A DIRE SEGMENT D'EXTREMITES(-4PN,-4PN)ET(-4PN,4PN)
      I=-4*PN
      A(I-2+N1,I-2+N1)=F(X(P1),Y(P1))
      A(I-2+N1,-I+2+N1)=F(X(P2),Y(P2))
      LP=P-1
      H1(1)=3./2.
      G(1)=1./4
      IF(LP.EQ.2)GO TO 66
      DO 60 K=2,LP-1
      F1(K)=1./4
      H1(K)=3./2.
      G(K)=1./4
 60   CONTINUE
 66   F1(LP)=1./4.
      H1(LP)=3./2.
      CALL S2(LP,P1,F1,G,H1,X,Y,B)
      DO 413 J=1,P-1
      J1=4*J-2*P
      A(I-2+N1,J1+N1)=B(J)
      A(I-2+N1,J1-2+N1)=2*F(X(P1+J),Y(P1+J))-(A(I-2+N1,J1+N1)+A(I-2+N1,
     SJ1-4+N1))/2
C  RESTE DES B-COEFF. AUX BORDS DU CARRE (I,J1+2)
      CALL S1(A,I+N1,J1+N1,2,0,4,0)
 413  CONTINUE
      A(I-2+N1,-I+N1)=2*F(X(P1+P),Y(P1+P))-(A(I-2+N1,-I+2+N1)+
     SA(I-2+N1,-I-2+N1))/2
C FIN DU CALCUL DES B-COEFF. LE LONG DE (A,B)
C B-COEFF.LE LONG DE (B,C) C'EST A DIRE(-4PN,4PN),(4PN,4PN))
      J=4*PN
      A(J+2+N1,J+2+N1)=F(X(P3),Y(P3))
      DO 61 K=2,LP
      H1(K)=3./2.
 61   CONTINUE
      CALL S2(LP,P2,F1,G,H1,X,Y,B)
      DO 411 I=1,P-1
      I1=4*I-2*P
      A(I1+N1,J+2+N1)=B(I)
      A(I1-2+N1,J+2+N1)=2*F(X(P2+I),Y(P2+I))-(A(I1+N1,J+2+N1)+
     SA(I1-4+N1,J+2+N1))/2
C   RESTE DES B-COEFF. AUX BORDS DU CARRE (I1+2,J)
      CALL S1(A,I1+N1,J+N1,0,-2,0,-4)
 411  CONTINUE
      A(J+N1,J+2+N1)=2*F(X(P2+P),Y(P2+P))-(A(J-2+N1,J+2+N1)+
     SA(J+2+N1,J+2+N1))/2
C FIN DU CALCUL DES B-COEFF,LE LONG DE (B,C)
C B-COEFFICIENTS APPARTENANT A (C,D) C'EST A DIRE(4PN,4PN),(4PN,-4PN))
```

```
      I=4*PN
      A(I+2+N1,-I-2+N1)=F(X(P4),Y(P4))
      DC 62 K=2,LP
      H1(K)=3./2.
 62   CCNTINLE
      CALL S2(LP,P3,P1,G,H1,X,Y,B)
      DC 414 J=1,P-1
      J1=-4*J+2*P
      A(I+2+N1,J1+N1)=B(J)
      A(I+2+N1,J1+2+N1)=2*F(X(P3+J),Y(P3+J))-(A(I+2+N1,J1+4+N1)+
     SA(I+2+N1,J1+N1))/2
C  RESTE DES B-CCEFF. SUR LE CARRE (I,J1-2)
      CALL S1(A,I+N1,J1+N1,-2,C,-4,0)
 414  CCNTINUE
      A(I+2+N1,-I+N1)=2*F(X(P3+P),Y(P3+P))-(A(I+2+N1,-I+2+N1)+
     SA(I+2+N1,-I-2+N1))/2
C FIN DL CALCLL DES B-COEFFICIENTS APPARTENANT A (C,D)
C B-CCEFF APPARTENANT A DA C'EST A DIRE ((4PN,-4PN),(-4PN,-4PN))
      J=-4*PN
      DC 64 K=2,LP
      H1(K)=3./2.
 64   CCNTINLE
      CALL S2(LP,P4,P1,G,H1,X,Y,B)
      DC 415 I=1,P-1
      I1=-4*I+2*P
      A(I1+N1,J-2+N1)=B(I)
      A(I1+2+N1,J-2+N1)=2*F(X(P4+I),Y(P4+I))-(A(I1+4+N1,J-2+N1)+
     SA(I1+N1,J-2+N1))/2
C  RESTE DES B-COEFF. SUR LE CARRE (I1-2,J)
      CALL S1(A,I1+N1,J+N1,0,2,C,4)
 415  CCNTINUE
      A(J+N1,J-2+N1)=2*F(X(P4+P),Y(P4+P))-(A(J+2+N1,J-2+N1)+
     SA(J-2+N1,J-2+N1))/2
C FIN DL CAICLL
C FIN DL CALCUL DES B-COEFF.APPARTENANT AUX BCRDS DE TCUS LES CARRES
C  CCNTENLS DANS GP
C PASSAGE AUX CCEFFICIENTS INTERNES
C  CARRES LELCNG DE (A,B)
      CALL S3(A,-PN,-PN,-PN,PN,N1,N,E2)
C  CARRES LELCNG DE (B,C)
      CALL S3(A,1-PN,PN,PN,PN,N1,N,E2)
C  CARRES LELCNG DE (C,D)
      CALL S3(A,PN,PN,-PN,PN-1,N1,N,E2)
C  CARRES LELCNG DE (D,A)
      CALL S3(A,1-PN,PN-1,-PN,-PN,N1,N,E2)
 57   CCNTINUE
      WRITE(108,80)N
  80  FCRMAT('L ERREUR D INTERPCLATICN PCUR N=',I3,'EST')
      WRITE(108,79)E2
C CALCUL DE L'CRDRE DE CONVERGENCE
      ALPHA=LCG(E1/E2)/LCG(FLOAT(N)/FLCAT(N-2))
```

```
      WRITE(108,81)N
 81   FORMAT('L ORDRE DE CONVERGENCE POUR N=',I3,'EST')
      WRITE(108,79)ALPHA
 79   FORMAT(F18.12)
      E1=E2
554   CONTINUE
      STOP
      END
```

```
      SUBROUTINE SO(A,N1,X,Y)
      DIMENSION A(21,21),X(50),Y(50)
C  INTERPOLATION SUR LE CARRE (0,0)
      A(N1-2,N1-2)=F(X(1),Y(1))
      A(N1-2,N1+2)=F(X(3),Y(3))
      A(N1-2,N1)=2*F(X(2),Y(2))-(A(N1-2,N1-2)+A(N1-2,N1+2))/2
      A(N1+2,N1+2)=F(X(5),Y(5))
      A(N1,N1+2)=2*F(X(4),Y(4))-(A(N1-2,N1+2)+A(N1+2,N1+2))/2
      A(N1+2,N1-2)=F(X(7),Y(7))
      A(N1+2,N1)=2*F(X(6),Y(6))-(A(N1+2,N1+2)+A(N1+2,N1-2))/2
      A(N1,N1-2)=2*F(X(8),Y(8))-(A(N1+2,N1-2)+A(N1-2,N1-2))/2
C  FIN DU PROGRAMME SO
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE S1(A,I,J,K1,K2,K3,K4)
C   DECLARATION
      DIMENSION A(21,21)
      A(I,J)=2*A(I+K1,J+K2)-A(I+K3,J+K4)
C   FIN DU SOUS PROGRAMME S1
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE S2(L,R,F1,G,H1,X,Y,B)
C     DECLARATION
      INTEGER R
      DIMENSION F1(10),G(10),H1(10),B(10),D(10)
      DIMENSION X(50),Y(50)
      REAL M
C     RESOLUTION D'UN SYSTEME DE L'EQUATIONS A L'INCONNUES
C     PAR LA METHODE DE GAUSS
      D(1)=F(X(R+2),Y(R+2))+F(X(R+1),Y(R+1))-F(X(R),Y(R))/4
      IF(L.LT.3)GO TO 110
      DO 35 I=2,L-1
      D(I)=F(X(R+I+1),Y(R+I+1))+F(X(R+I),Y(R+I))
   35 CONTINUE
  110 D(L)=F(X(L+R+1),Y(L+R+1))+F(X(L+R),Y(L+R))-F(X(L+R+2),Y(L+R+2))/4
      DO 612 K=2,L
      M=F1(K)/H1(K-1)
      H1(K)=H1(K)-M*G(K-1)
      D(K)=D(K)-M*D(K-1)
  612 CONTINUE
      B(L)=D(L)/H1(L)
      DO 613 K=L-1,1,-1
      B(K)=(D(K)-G(K)*B(K+1))/H1(K)
  613 CONTINUE
C     FIN DU SOUS PROGRAMME S2
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE S3(A,L1,L2,L3,L4,N1,N,E2)
C  CALCUL DE L'ERREUE D'INTERPOLATION SUE LE CARRE (I,J)
C DECLARATION
      DIMENSION A(21,21)
      DO 644 I1=L1+N1,L2+N1
      I=4*(I1-N1)
      DO 645 J1=L3+N1,L4+N1
      J=4*(J1-N1)
      CALL S4(A,I+N1,J+N1)
      CALL S5(A,I,J,N,E)
      IF (E2.GE.E)GO TO 645
      E2=E
  645 CONTINUE
  644 CONTINUE
C FIN DU SOUS PROGRAMME S3
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE S4(A,I,J)
C     DECLARATION
      DIMENSION A(21,21)
      A(I-1,J-1)=(A(I-2,J)+A(I,J-2))/2
      A(I+1,J-1)=(A(I,J-2)+A(I+2,J))/2
      A(I+1,J+1)=(A(I,J+2)+A(I+2,J))/2
      A(I-1,J+1)=(A(I,J+2)+A(I-2,J))/2
      A(I,J)=(A(I-1,J+1)+A(I+1,J-1))/2
C     FIN DU SOUS PROGRAMME S4
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE S5(A,I,J,N,E)
      DIMENSION A(21,21)
      XA=(FLOAT(I)/4.-0.5)/FLOAT(N)
      YA=(FLOAT(J)/4.-0.5)/FLOAT(N)
      XB=(FLOAT(I)/4.+0.5)/FLOAT(N)
      YB=(FLOAT(J)/4.-0.5)/FLOAT(N)
      XG=I/FLOAT(4*N)
      YG=J/FLOAT(4*N)
      N1=2*N+1
      M=6
      E=0.
      DO 198 N11=1,M+1
      M1=N11-1
      W1=M1/FLOAT(M)
      DO 199 N2=1,M-M1+1
      M2=N2-1
      W2=M2/FLOAT(M)
      W3=1-W1-W2
C     POUR Z APPARTENANT A T1 ON A
      CALL S6(A,W1,W2,W3,XA,XB,XG,YA,YB,YG,I+N1,J+N1,-2,-2,+2,-2,-1,-1,
     S+1,-1,0,-2,H)
      IF(H.LE.E)GO TO 141
      E=H
C PLACONS NOUS SUR T2
  141 XC=(FLOAT(I)/4.+0.5)/FLOAT(N)
      YC=(FLOAT(J)/4.+0.5)/FLOAT(N)
      CALL S6(A,W1,W2,W3,XB,XC,XG,YB,YC,YG,I+N1,J+N1,+2,-2,+2,+2,+1,-1,
     S+1,+1,+2,0,H)
      IF(H.LE.E)GO TO 142
      E=H
C ON SE PACE SUR T3
C  SUR T3
  142 XD=(FLOAT(I)/4.-0.5)/FLOAT(N)
      YD=(FLOAT(J)/4.+0.5)/FLOAT(N)
      CALL S6(A,W1,W2,W3,XC,XD,XG,YC,YD,YG,I+N1,J+N1,+2,+2,-2,+2,+1,+1,
     S-1,+1,0,+2,H)
      IF(H.LE.E)GO TO 143
      E=H
C PLACONS NOUS SUR T4
C POUR APPARTENANT A T4 ON A
  143 CALL S6(A,W1,W2,W3,XD,XA,XG,YD,YA,YG,I+N1,J+N1,-2,+2,-2,-2,-1,+1,
     S-1,-1,-2,0,H)
      IF(H.LE.E)GO TO 199
      E=H
  199 CONTINUE
  198 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE S6(A,W1,W2,W3,X1,X2,X3,Y1,Y2,Y3,I,J,K1,K2,K3,K4,K5,K6,
     SK7,K8,K9,K10,H)
C   DECLARATION
      DIMENSION A(21,21)
      XZ=W1*X1+W2*X2+W3*X3
      YZ=W1*Y1+W2*Y2+W3*Y3
      SF=A(I+K1,J+K2)*W1*W1+A(I+K3,J+K4)*W2*W2+A(I,J)*W3*W3+2*A(I+K5,
     SJ+K6)*W1*W3+2*A(I+K7,J+K8)*W2*W3+2*A(I+K9,J+K10)*W1*W2
      H=ABS(SF-F(XZ,YZ))
C   FIN DU PROGRAMME S6
      RETURN
      END
```

```
REAL FUNCTION F(C,D)
F=C*C*D
RETURN
END
```

PROGRAMME 2 = FLG

```
C  INTERPOLATION DE LAGRANGE PAR DES SPLINES QUADRATIQUES SUR UN DOMAINE
C  CARRE TRIANGULE
C LE DOMAINE CONSIDERE EST APPELE QN DE COTE N
C  LES COTES DE CE CARRE SONT SUBDIVISES EN N SEGMENTS,SI BIEN QU'ON OBTIENT
C  DES CARRES DE COTES 1 INCLUS DANS QN
C POUR TOUT P INFERIEUR OU EGAL A N ON CHERCHE UN MAJORANT MJ ET UN MINORANT MN
C DE LA NORME DE L'OPERATEUR D'INTERPOLATION SUR LE BLOC QP-Q(P-1)
C  CELA PERMETTRA DE VOIR LA VARIATION DE LA NORME DE L'OPERATEUR
C EN FONCTION DE N
C LINTERPOLATION POUR CHACUNE DES FONCTIONS DE BASE SE FAIT SUR Q(P-1)
C P SUPERIEUR A 1 ET INFERIEUR OU EGAL A N
C L'ALGORITHME 2 PERMET LE PASSAGE DE Q(P-1) A QP
C   DECLARATION
      INTEGER P,Q,PP,Q1,PQ,P1,P2,P3
      REAL MJ,MN
      DIMENSION A1(13,120),B1(13,120),A(13,13),B(6),G(6),H1(6),E1(6)
      DIMENSION C(24)
C A1 ET B1 REPRESENTENT LES TABLEAUX DANS LESQUELS ON PLACE LES B-COEFFICIENTS
C DES FONCTIONS DE BASE ,POUR CALCULER MN ET MJ
C LES ELEMENTS DE A REPRESENTENT LES B-COEFFICIENTS D'UNE FONCTION DONNEE
C B,G,H1,E1 SONT LES MATRICES QUI INTERVIENNENT DANS LA RESOLUTION
C DU SYSTEME DE GAUSS EB=D.E EST FORMEE DES BLOCS (E1,G,H1)
C CETTE RESOLUTION SE FAIT DANS LE PROGRAMME S2
C C TABLEAU DES FONCTIONS DE BASE
C LE DIMENSSIONNEMENT DE CES TABLEAUX EST DONNE POUR N=3
C   ORDRE DE LECTURE
      READ(105,20)N
   20 FORMAT(I3)
C       INTERPOLATION SUR Q1
C       L REPRESENTE L'INDICE DES FONCTIONS DE LAGRANGE
C      K REPRESENTE L'INDICE DES POINTS D'INTERPOLATION
      DO 88 L=1,8
      DO 89 K=1,8
      IF(K.EQ.L) GO TO 6
      C(K)=0.
      GO TO 89
    6 C(K)=1.
   89 CONTINUE
C      ON FAIT L'INTERPOLATION SUR Q1 POUR LA FONCTION F=C(L)
C      C(L) ETANT LA LIEME FONCTION DE LAGRANGE
      A(1,1)=C(1)
      A(5,1)=C(3)
      A(3,1)=2*C(2)-(A(1,1)+A(5,1))/2
      A(5,5)=C(5)
      A(5,3)=2*C(4)-(A(5,5)+A(5,1))/2
      A(1,5)=C(7)
      A(3,5)=2*C(6)-(A(5,5)+A(1,5))/2
      A(1,3)=2*C(8)-(A(1,1)+A(1,5))/2
      CALL S4(A,3)
C      FIN DE L'INTERPOLATION SUR Q1
C      IL FAUDRAIT DONC PLACER CES ELEMENTS DANS LE TABLEAU A1
```

```
      CALL S5(L,A,3,3,A1)
   88 CONTINUE
C     LES B-COEFFICIENTS DES PREMIERES FONCTIONS DE LAGRANGE
C     APPARTENANT A G1,SONT DONC PLACES DANS A1
C     IL RESTE A FAIRE LA SOMME DE LEURS VALEURS ABSOLUES
C     POUR TROUVER MJ
      MJ=0.
      DO 504 K=1,13
      S=0.
      DO 505 L=1,8
      S=S+ABS(A1(K,L))
  505 CONTINUE
      IF(S.LE.MJ) GO TO 504
      MJ=S
  504 CONTINUE
C CALCUL DE MN
      CALL S7(A1,1,8,MN)
C     PASSAGE A L'INTERPOLATION POUR P QUELCONQUE
      DO 999 P=2,N
      I=4*P-1
C     ON CHERCHE D'ABORD LES B-COEFFICIENTS SUR
C     (QP-Q(P-1)),DES PREMIERES FONCTIONS DE LAGRANGE
C     C'EST A DIRE LES FONCTIONS DU CARRE Q(P-1)
      PP=(P+1)*(P+1)-1
      P1=(P+1)*(P+1)
      P2=(P+2)*(P+2)-1
      P3=(P+1)*(P+2)
      DO 901 L=1,PP
      A(I+2,I+2)=0.
C     LES B-COEFFICIENTS DE CES FONCTIONS DE LAGRANGE
C     APPARTENANT AUX DEUX COTES DU CARRE QP, SONT
C     EN PRINCIPE NULS
      PQ=2*P
      DO 56 G1=1,PQ
      J1=2*(G1-1)+1
      A(I+2,J1)=0.
      A(J1,I+2)=0.
   56 CONTINUE
      A(I,1)=2*A1(3,L)-A1(2,L)
      IF(P.NE.2)GO TO 22
      A(1,I)=2*A1(11,L)-A1(6,L)
      GO TO 23
   22 LP=PP+L
      A(1,I)=2*A1(11,LP)-A1(6,LP)
C  B-COEFF. INTERNES
      DO 968 G=1,P-2
      J=4*G-1
      K2=PP*(2*G-2)+L
      K3=PP*(2*G-1)+L
      CALL S0(A,A1,B1,P,G,I,J,P2,L,K2,K3,1)
C  FIN DE CE CALCUL
```

```
  568 CONTINUE
  23  G=P-1
      J=4*G-1
      K4=PP*(2*G-2)+L
      CALL S0(A,A1,B1,P,G,I,J,P2,L,K4,K4,1)
C     B-COEFFICIENTS SUR LE CARRE(I,I)
      CALL S4(A,I)
C     FIN DE CE CALCUL
C     PLACEMENT DES B-COEFFICIENTS DU CARRE(I,I)
      K=2*(P-1)*P2+L
      CALL S5(K,A,I,I,B1)
C     FIN DE CE PLACEMENT
  901 CONTINUE
C     PASSAGE AU CALCUL DES B-COEFFICIENTS DES NOUVELLES
C     FONCTIONS DE LAGRANGE
      DO 997 L=P1,P2
      DO 998 K=P1,P2
      IF(K.EQ.L) GO TO 18
      C(K)=0
      GO TO 998
   18 C(K)=1
  998 CONTINUE
C     CALCUL DES B-COEFFICIENTS SUIVANT LES AXES
      A(I+2,1)=C(P1)
      A(1,I+2)=C(P2)
      A(I+2,I+2)=C(P3)
      A(I,1)=0.
      A(1,I) 0.
C     CALCUL DES B-COEFFICENTS SUIVANT LES DEUX AUTRES COTES DU CARRE
C     FAIRE APPEL AU SOUS-PROGRAMME S2
      IF(P.NE.2)GO TO 55
      A(9,5)=2*(C(11)+C(10)-C(9)/4-C(12)/4)/3
      A(5,9)=2*(C(13)+C(14)-C(15)/4-C(12)/4)/3
      GO TO 156
  55  LP=P-1
      H1(1)=3./2.
      G(1)=1./4.
      IF(LP.EQ.2)GO TO 66
      DO 60 K=2,LP-1
      E1(K)=1./4.
      H1(K)=3./2.
      G(K)=1./4.
   60 CONTINUE
  66  E1(LP)=1./4.
      H1(LP)=3./2.
      CALL S2(LP,P1,E1,G,H1,C,B)
      I2=(I-3)/4
      DO 413 J=1,I2
      J1=4*J+1
      A(I+2,J1)=B(J)
  413 CONTINUE
```

```
      DO 61 K=4,LP
      H1(K)=3./2.
   61 CONTINUE
      CALL S2(LP,P3,E1,G,H1,C,B)
      DO 411 J=1,I2
      J1=4*J+1
      J2=P-J
      A(J1,I+2)=B(J2)
  411 CONTINUE
C     RESTE DES B-COEFFICIENTS SUR CES SEGMENTS
 156  DO 712 G=1,P
      J=4*G-1
      A(I+2,J)=2*C(P1+G)-(A(I+2,J-2)+A(I+2,J+2))/2
      A(J,I+2)=2*C(P2-G)-(A(J-2,I+2)+A(J+2,I+2))/2
C     FIN DU CALCUL DE CES B-COEFFICIENTS
  712 CONTINUE
C     RESTE A CALCULER LES B-COEFFICIENTS INTERNES
      DO 713 G=1,P-1
      J=4*G-1
      CALL S0(A,A1,B1,P,G,I,J,P2,L,K1,K2,0)
C  FIN DE CE CALCUL
  713 CONTINUE
C     CALCUL DES B-COEFFICIENTS SUR LE CARRE(I,I)
      CALL S4(A,I)
C     FIN DE CE CALCUL
C     RESTE A PLACER CES B-COEFFICIENTS DANS B1
      K=2*(P-1)*P2+L
      CALL S5(K,A,I,I,B1)
C     FIN DE CE PLACEMENT
  997 CONTINUE
C     RECHERCHE DE LA SOMME DES VALEURS ABSOLUES DES B-COEFFICIENTS
C     POUR TROUVER UN MAJORANT MJ DANS LE BLOC (QP-Q(P-1))
      MN=0
      MJ=0.
      DO 615 I1=1,PG-1
      J1=I1*P2
      DO 416 K=1,13
      S=0.
      DO 417 L=J1-P2+1,J1
      A1(K,L)=B1(K,L)
      S=S+ABS(A1(K,L))
  417 CONTINUE
      IF(S.LE.MJ)GO TO 416
      MJ=S
  416 CONTINUE
      CALL S7(A1,J1-P2+1,J1,SN)
      IF(SN.LE.MN)GO TO 615
      MN=SN
  615 CONTINUE
C      ON OBTIENT AINSI UN MAJORANT DANS LE BLOC QP-Q(P-1))
  999 CONTINUE
      STOP
      END
```

```
      SUBROUTINE SO(A,A1,B1,P,Q,I,J,P2,L,K1,K2,R)
C CE SOUS PROGRAMME PERMET LE CALCUL DES B-COEFFICINTS APPARTENANT AUX
C  BORDS DE CHAQUE CARRE (I,J)
C IL FAIT APPEL AUX SOUS-PROGRAMMES S1 ET S3 QUI PERMETTENT LE CALCUL DES B-COEI
C  INTERNES AUX CARRES (I,J) ET (J,I) RESPECTIVEMENT,I DIFFERENT DE J
C  DECLARATION
      INTEGER P,Q,P2
      DIMENSION A(13,13),A1(13,120),B1(13,120)
      IF(R.EQ.Q)GO TO 1
C     B-COEFFICIENTS SUR LA CARRE(I,J)
      A(I-2,J)=A1(8,K1)
      A(I-2,J+2)=A1(13,K1)
      A(I-3,J+1)=A1(10,K1)
      A(I-2,J-2)=A1(3,K1)
      GO TO 2
C     FIN DU CALCUL DES B-COEFFICIENTS SUR LE CARRE(I,J)
C     CALCUL DES B-COEFFICIENTS APPARTENANT AU CARRE(J,I)
  1   A(I-2,J)=0
      A(I-2,J+2)=0
      A(I-3,J+1)=0
      A(I-2,J-2)=0
  2   CALL S1(A,I,J)
C  ON LES PLACE DANS B1
      K=(2*Q-2)*P2+L
      CALL S5(K,A,I,J,B1)
C     FIN DU PLACEMENT DES B-COEFFICIENTS DU CARRE(I,J)
      IF(R.EQ.Q)GO TO 3
      A(J+1,I-3)=A1(10,K2)
      A(J,I-2)=A1(12,K2)
      A(J+2,I-2)=A1(13,K2)
      A(J-2,I-2)=A1(11,K2)
      GO TO 4
  3   A(J,I-2)=0
      A(J+2,I-2)=0
      A(J-2,I-2)=0
      A(J+1,I-3)=0
  4   CALL S3(A,J,I)
C     FIN DE CE CALCUL
C     ON LES PLACE DANS B1
      K=P2*(2*Q-1)+L
      CALL S5(K,A,J,I,B1)
C     FIN DE CE PLACEMENT
C  FIN DU SOUS PROGRAMME SO
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE S1(A,I,J)
C     DECLARATION
      DIMENSION A(13,13)
C     A(I-1,J-1),A(I,J-2),A(I+2,J-2),A(I+2,J),A(I+2,J+2)
C     A(I-2,J),A(I-2,J+2) SONT CONNUS
      A(I-1,J-1)=(A(I-2,J)+A(I,J-2))/2
      A(I+1,J-1)=(A(I,J-2)+A(I+2,J))/2
      A(I-1,J+1)=A(I-2,J+2)+A(I-2,J)-A(I-3,J+1)
      A(I,J+2)=2*A(I-1,J+1)-A(I-2,J)
      A(I+1,J+1)=(A(I,J+2)+A(I+2,J))/2
      A(I,J)=(A(I-1,J+1)+A(I+1,J-1))/2
C     FIN DU PROGRAMME S1
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE S2(P,R,E1,G,H1,D,B)
C  RESOLUTION D'UN SYSTEME DE L  EQUATIONS A P INCONNUES
C  PAR LA METHODE DE GAUSS
C  DECLARATION
      INTEGER R,P
      DIMENSION E1(6),D(6),G(6),H1(6),B(6),C(24)
      REAL M
      D(1)=C(R+2)+C(R+1)-C(R)/4
      IF(P.LT.3)GO TO 110
      DO 35 I=2,P-1
      D(I)=C(R+I+1)+C(R+I)
   35 CONTINUE
  110 D(P)=C(P+R+1)+C(P+R)-C(P+R+2)/4
      DO 612 K=2,P
      M=E1(K)/H1(K-1)
      H1(K)=H1(K)-M*G(K-1)
      D(K)=D(K)-M*D(K-1)
  612 CONTINUE
      B(P)=D(P)/H1(P)
      DO 613 K=L-1,1,-1
      B(K)=(D(K)-G(K)*B(K+1))/H1(K)
  613 CONTINUE
C  FIN DU SOUS PROGRAMME S2
      RETURN
      END
```

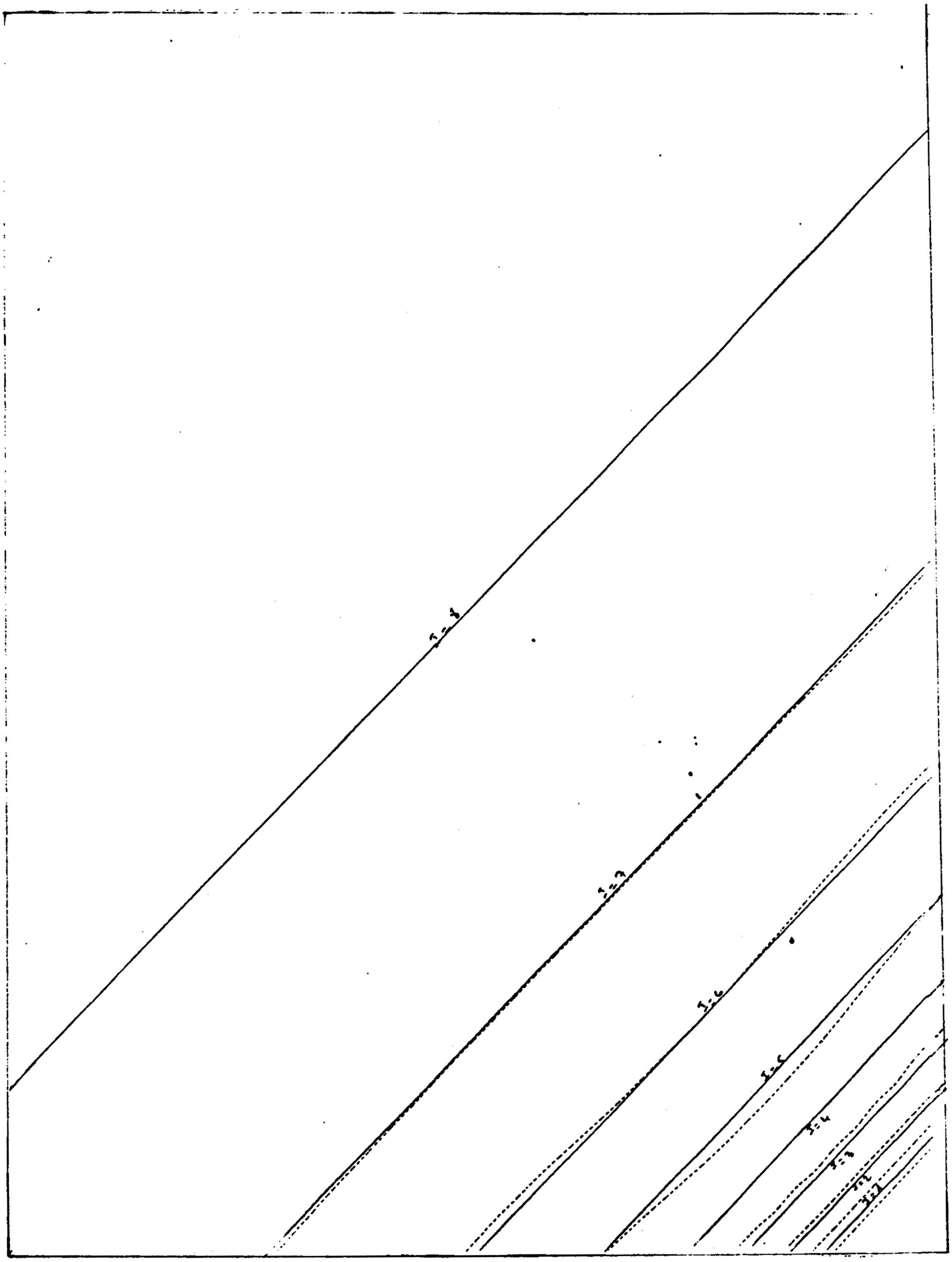
```
      SUBROUTINE S3(A,J,I)
C     DECLARATION
      DIMENSION A(13,13)
C     A(J-1,I-1),A(J-2,I),A(J-2,I+2),A(J,I+2),A(J+2,I+2)
C     A(J,I-2),A(J+2,I-2) CONNUS
      A(J-1,I-1)=(A(J,I-2)+A(J-2,I))/2
      A(J-1,I+1)=(A(J-2,I)+A(J,I+2))/2
      A(J+1,I-1)=A(J+2,I-2)+A(J,I-2)-A(J+1,I-3)
      A(J+2,I)=2*A(J+1,I-1)-A(J,I-2)
      A(J+1,I+1)=(A(J+2,I)+A(J,I+2))/2
      A(J,I)=(A(J+1,I-1)+A(J-1,I+1))/2
C     FIN DU PROGRAMME S3
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE S4(A,I)
      DIMENSION A(13,13)
C CALCUL DES B-COEFF. INTERNES AU CARRE (I,I)
      A(I-1,I-1)=(A(I-2,I)+A(I,I-2))/2
      A(I+1,I-1)=(A(I,I-2)+A(I+2,I))/2
      A(I+1,I+1)=(A(I,I+2)+A(I+2,I))/2
      A(I-1,I+1)=(A(I,I+2)+A(I-2,I))/2
      A(I,I)=(A(I-1,I+1)+A(I+1,I-1))/2
C  FIN DU SOUS PROGAMME S4
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE S5(K,A,I,J,A1)
C     SOUS PROGRAMME PERMETTANT LE RANGEMENT DANS A1 DES
C     B-COEFFICIENTS DE LA LIEME FONCTION DE LAGRANGE
C     CES B-COEFFICIENTS APPARTENANT AU CARRE(I,J)
C      DECLARATION
      DIMENSION A(13,13),A1(13,120)
      A1(1,K)=A(I-2,J-2)
      A1(2,K)=A(I,J-2)
      A1(3,K)=A(I+2,J-2)
      A1(4,K)=A(I-1,J-1)
      A1(5,K)=A(I+1,J-1)
      A1(6,K)=A(I-2,J)
      A1(7,K)=A(I,J)
      A1(8,K)=A(I+2,J)
      A1(9,K)=A(I-1,J+1)
      A1(10,K)=A(I+1,J+1)
      A1(11,K)=A(I-2,J+2)
      A1(12,K)=A(I,J+2)
      A1(13,K)=A(I+2,J+2)
C     FIN DE CE PLACEMENT
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE S6(A1,L,W1,W2,W3,K1,K2,K3,K4,K5,K6,SL)
C  SOUS PROGRAMME PERMETTANT LE CALCUL DE LA VALEUR D'UNE SPLINE EN UN POINT
C  DECLARATION
      DIMENSION A1(13,120)
      SR=A1(K1,L)*W1*W1+A1(K2,L)*W2*W2+A1(K3,L)*W3*W3+2*A1(K4,L)*W1*W2+
     S2*A1(K5,L)*W2*W3+2*A1(K6,L)*W1*W3
      SL=ABS(SR)
C  FIN DU SOUS PROGRAMME S6
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE S7(A1,L1,L2,SN)
C  SOUS PROGRAMME PERMETTANT LE CALCUL DU MAXIMUM DES VALEURS DE LA SOMME DES
C  FONCTION DE LAGRANGE EN UN CERTAIN NOMBRE DE POINTS DANS L'UN DES  PETITS
C  CARRES INCLUS DANS CM
C  DECLARATION
      DIMENSION A1(13,120)
      REAL MN
      M=10
      SN=0
      DO 198 N1=1,M+1
      M1=N1-1
      W1=M1/FLOAT(M)
      DO 199 N2=1,M-M1+1
      M2=N2-1
      W2=M2/FLOAT(M)
      W3=1-W1-W2
      SF=0
      DO 314 L=L1,L2
C  SUR T1
      CALL S6(A1,L,W1,W2,W3,1,3,7,2,5,4,SL)
      SF=SF+SL
  314 CONTINUE
      IF(SF.LE.SN)GO TO 141
      SN=SF
  141 SF=0
      DO 315 L=L1,L2
      CALL S6(A1,L,W1,W2,W3,3,13,7,8,10,5,SL)
      SF=SF+SL
  315 CONTINUE
      IF(SF.LE.SN)GO TO 142
      SN=SF
  142 SF=0
      DO 316 L=L1,L2
      CALL S6(A1,L,W1,W2,W3,13,11,7,12,9,10,SL)
      SF=SF+SL
  316 CONTINUE
      IF(SF.LE.SN)GO TO 143
      SN=SF
  143 SF=0
      DO 317 L=L1,L2
      CALL S6(A1,L,W1,W2,W3,11,1,7,6,4,9,SL)
      SF=SF+SL
  317 CONTINUE
      IF(SF.LE.SN)GO TO 199
      SN=SF
  199 CONTINUE
  198 CONTINUE
C  FIN DU SOUS PROGRAMME S7
      RETURN
      END
```



*Courbes de Niveaux dans le cas où*

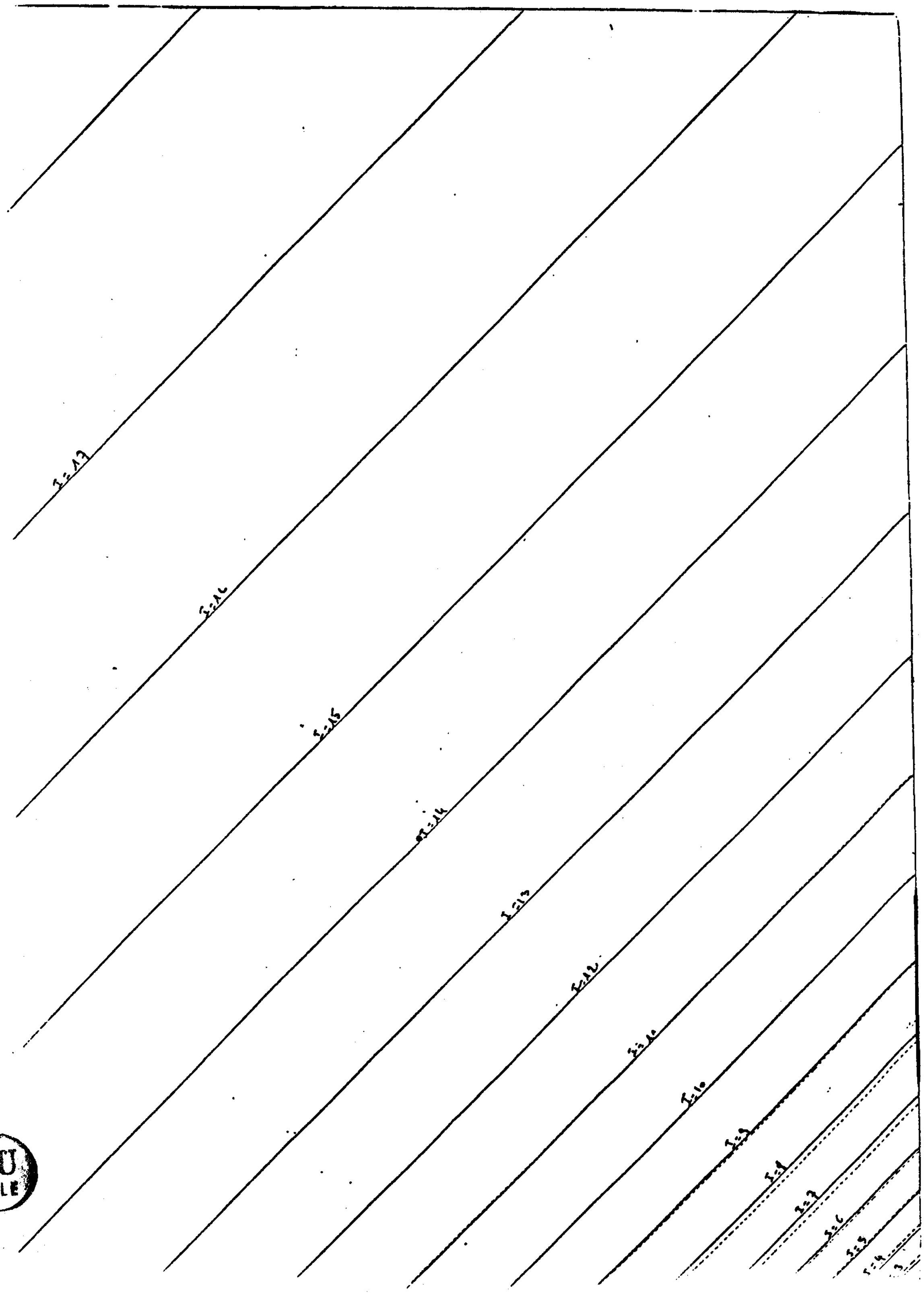
$\Omega = [-0.5, +0.5] \times [-0.5, +0.5]$

*Fonctions en traits pleins, interpolant en pointillés.*

$$f = \frac{1}{1,1+x+y}$$

*Altitude* $H = (10-J)/2$

*Avec* $1 \leq I \leq 8.$





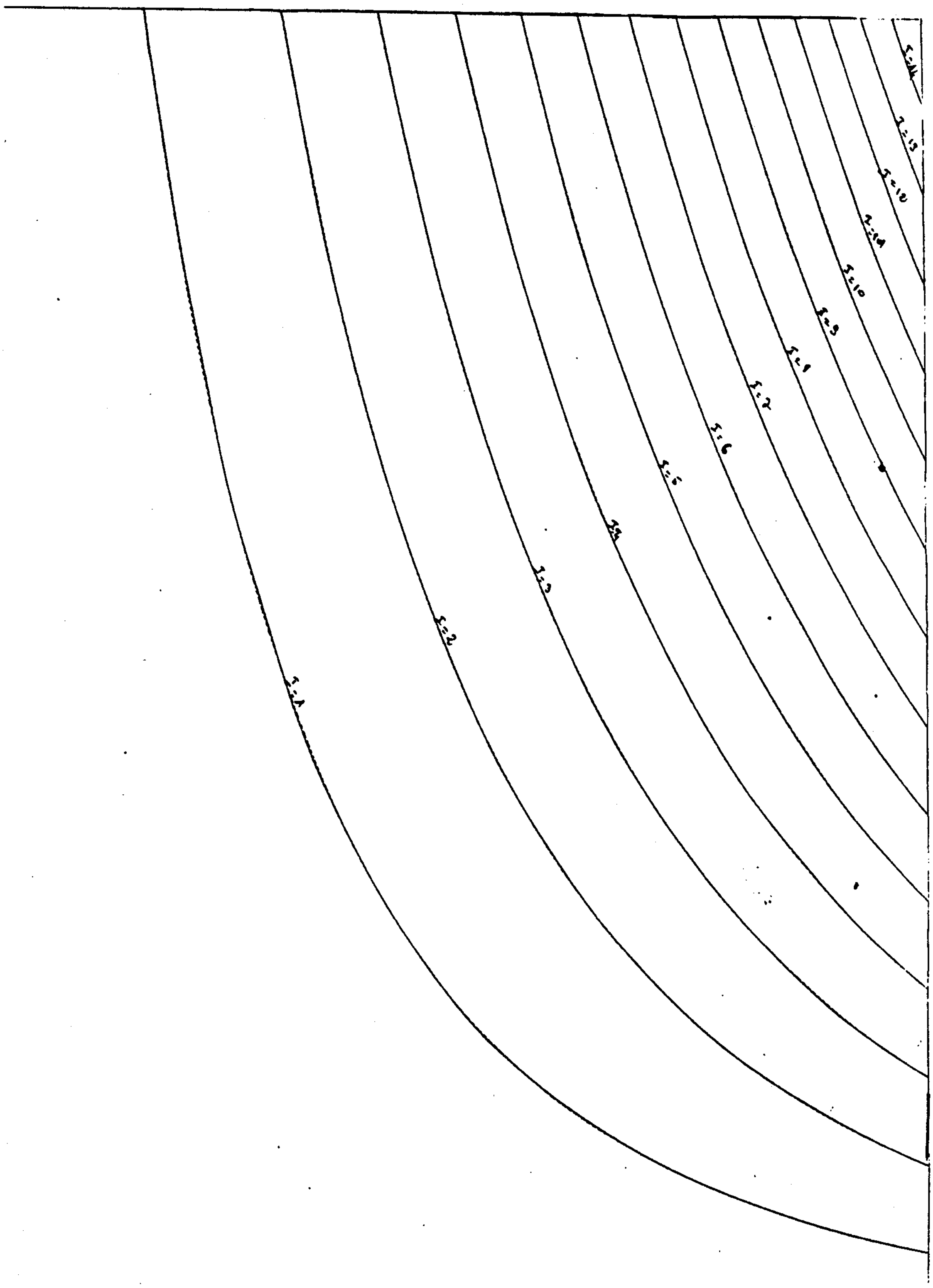
*Courbes de Niveau dans le cas où* F = Log (1.1+x+y)

*(Fonction en traits pleins, Spline en pointillés)*

*Altitude* H = (I-15)/6

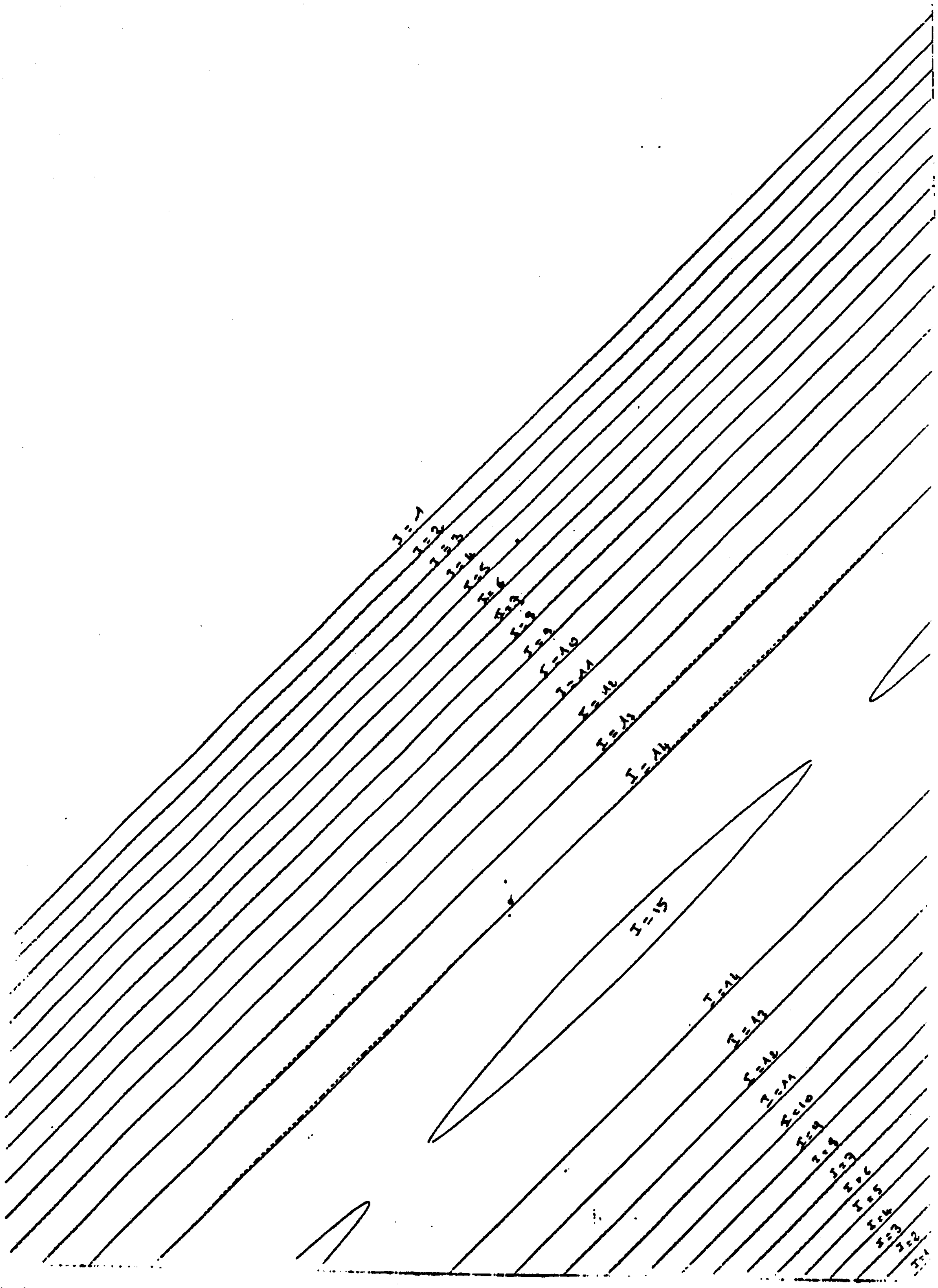
*Avec*

$1 \leq I \leq 18$



*Courbes de Niveaux dans le cas où*

$$\begin{cases} \Omega = [0,1] \times [0,1] \\ F = x^3 y \\ \text{(fonction en traits pleins, interpolant en pointillés)} \\ \text{Altitude } H = I/15. \\ \text{Avec } \quad 1 \le I \le 14. \end{cases}$$





*Courbes de Niveau dans le cas où*

$$\Omega = [0,1] \times [0,1]$$

$$F = \text{Sin}\,(\pi(n+y))$$

*Fonction en pointillé, Spline en traits pleins.*

*Altitude* H = I/15

*Avec* $1 \leq I \leq 15$

# CHAPITRE IV

## ESTIMATION DES DERIVEES PARTIELLES
## PAR
## MINIMISATION DE L'ENERGIE DE FLEXION D'UNE PLAQUE MINCE.

# I - INTRODUCTION ET NOTATIONS.

On considère dans $\mathbb{R}^2$, un domaine carré appelé $Q_N (N \geq 1)$. Les côtés de ce carré sont subdivisés en N segments égaux.
Les petits carrés obtenus sont subdivisés chacun en deux triangles comme l'indique la figure 1. Chacun de ces triangles est appelé macro-triangle et est subdivisé en six micro-triangles $t_i$. Les sommets des petits carrés sont appelés $A_{ij} (1 \leq i, j \leq N+1)$.

## 1°) - Position du problème.

Etant donné une fonction $f \in C^1(Q_N)$, on pose :

$$f_{ij} = f(A_{ij}) \quad (1 \leq i,j \leq N+1).$$

On cherche à interpoler f aux points $A_{ij}$, en utilisant les triangles de Powell-Sabin (voir chapitre 1) c'est à dire on cherche $S \in P_2^1(\Omega)$ (voir explications) tels que :

$$\mathbb{P} \begin{cases} S(A_{ij}) = f(A_{ij}) = f_{i,j} & \\ \dfrac{\partial s}{\partial x}(A_{ij}) = \tilde{p}_{ij} \sim \dfrac{\partial f}{\partial x}(A_{ij}) & \text{pour } 1 \leq i, j \leq N+1 \\ \dfrac{\partial s}{\partial y}(A_{ij}) = \tilde{q}_{ij} \sim \dfrac{\partial f}{\partial y}(A_{ij}) & \end{cases}$$

Où $\tilde{p}_{ij}$ et $\tilde{q}_{ij}$ sont des estimations des dérivées partielles.
Dans ce chapitre, on se propose d'estimer ces dernières en minimisant l'expression :

$$E = \iint_{QN} \left[ \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right)^2 \right] dxdy$$

qui est une approximation de l'énergie de flexion d'une plaque mince.

## 2°) Quelques explications.

Posons $h = 1/N$.
Soit $\mathcal{C}$ la subdivision de $Q_N$ en micro-triangles, appelés $t_{k\ell}$, $1 \leq k \leq N^2$ et

$1 \leq \ell \leq 6$ on définit :

$$P_2^1(Q_N) = \{\text{fonction } s \in C^1(Q_N) \text{ tq } S/t_{k\ell} \in P_2(t_{k\ell}),\ 1 \leq k \leq N^2 \text{ et } 1 \leq \ell \leq 6\}$$

D'après le chapitre 1, en utilisant les triangles de Powell-Sabin, on démontre qu'il existe S unique vérifiant le problème $\mathbb{P}$.
Posons aussi, pour simplifier l'écriture :

$$G = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right)^2.$$

Remarque 1.

Avant de commencer notre étude, donnons une figure représentant la subdivision de $Q_N$ (pour $N = 2$).

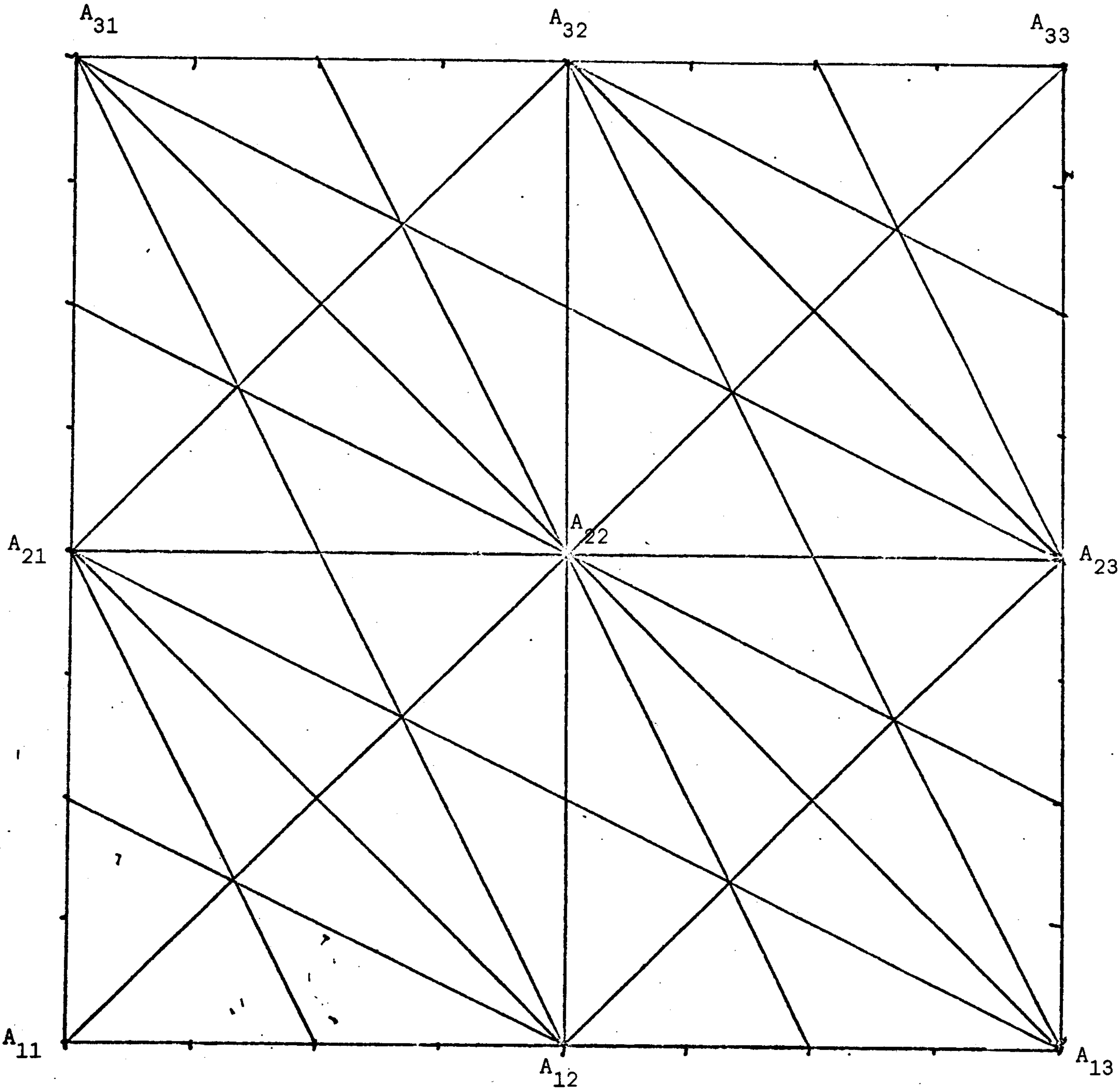



*Figure 1.* Domaine $Q_2$ subdivisé par C.

# II - Calcul de l'expression de l'énergie.

## 1°) - Calcul de la spline.

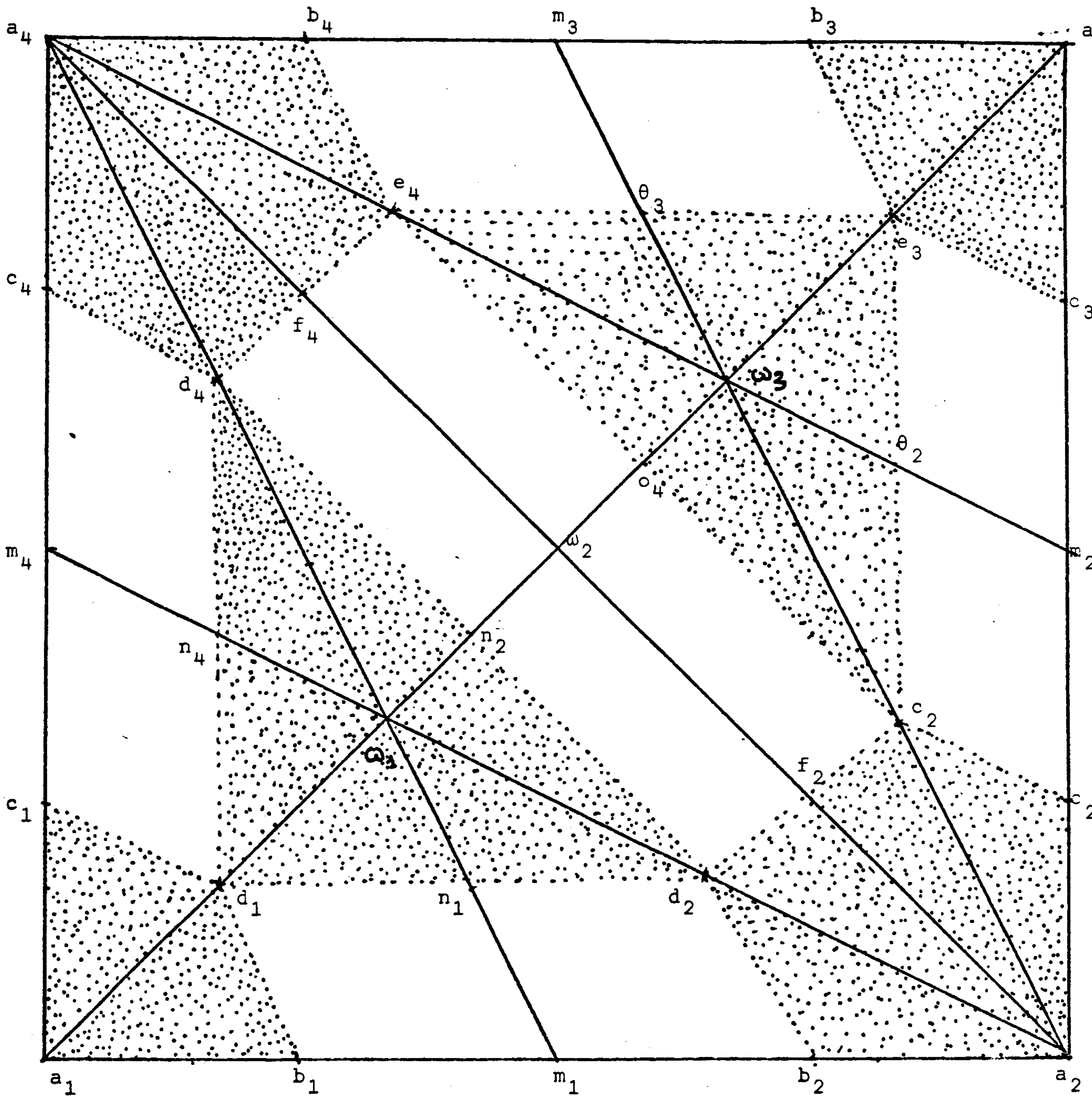



*Figure 2. Projection du B-réseau sur l'un des carrés du domaine* $(Q_{ij})$.
*Avec la mise en évidence des plaques de raccordement* $C^1$.

Pour calculer la spline S, il suffit de calculer ses B-coefficients indiquées sur la figure 2.
En posant :

$$\begin{cases} a_1 = f_{i,j} \\ a_2 = f_{i,j+1} \\ a_3 = f_{i+1,j+1} \\ a_4 = f_{i+1,j} \end{cases} \qquad \begin{cases} r_1 = \tilde{P}_{i,j} \\ r_2 = \tilde{P}_{i,j+1} \\ r_3 = \tilde{P}_{i+1,j+1} \\ r_4 = \tilde{P}_{i+1,j} \end{cases} \qquad \begin{cases} s_1 = \tilde{q}_{i,j} \\ s_2 = \tilde{q}_{i,j+1} \\ s_3 = \tilde{q}_{i+1,j+1} \\ s_4 = \tilde{q}_{i+1,j} \end{cases}$$

On trouve les résultats suivants (voir chapitre 1).

$$\begin{cases} b_1 = a_1 + \frac{h}{4} r_1 \\ b_2 = a_2 - \frac{h}{4} r_2 \\ b_3 = a_3 - \frac{h}{4} r_3 \\ b_4 = a_4 + \frac{h}{4} r_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = a_1 + \frac{h}{4} s_1 \\ c_2 = a_2 + \frac{h}{4} s_2 \\ c_3 = a_3 - \frac{h}{4} s_3 \\ c_4 = a_4 - \frac{h}{4} s_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 = a_1 + \frac{h}{6} (r_1+s_1) \\ d_2 = a_2 + \frac{h}{6} (s_2-2r_2) \\ d_4 = a_4 + \frac{h}{6} (r_4-2s_4) \end{cases}$$



$$\begin{cases} e_2 = a_3 + \frac{h}{6} (2s_2-r_2) \\ e_3 = a_3 - \frac{h}{6} (r_3+s_3) \\ e_4 = a_4 + \frac{h}{6} (2r_4-s_4) \end{cases}$$

On en déduit les autres B-coefficients :

$$\begin{cases} m_1 = (b_1+b_2)/2 \\ m_2 = (c_2+c_3)/2 \\ m_3 = (b_3+b_4)/2 \\ m_4 = (c_1+c_4)/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_1 = (d_1+d_2)/2 \\ n_2 = (d_2+d_4)/2 \\ n_4 = (d_1+d_4)/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_2 = (e_2+e_3)/2 \\ \theta_3 = (e_3+e_4)/2 \\ \theta_4 = (e_2+e_4)/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_2 = (d_2+e_2)/2 \\ f_4 = (e_4+d_4)/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_1 = (d_1 + d_2 + d_4)/3 \\ \omega_2 = (n_2+\theta_4)/2 = (f_2+f_4)/2 \\ \omega_3 = (e_2+e_3+e_4)/3 \end{cases}$$

Les B-coefficients calculés, permettent donc d'avoir l'expression de S sur chacun des micro-triangles, et par conséquent sur tout le domaine $Q_N$.

**Explication du calcul de S sur l'un des micro-triangles.**

Sur $(A_1\ M,\ \Omega_1)$ par exemple : sur ce triangle S s'écrit :

$$S(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3) = a_1\lambda_1^2 + m_1\lambda_2^2 + \omega_1\lambda_3^2 + 2b_1\lambda_1\lambda_2 + 2n_1\lambda_2\lambda_3 + 2\lambda_1\lambda_1\lambda_3$$

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ étant les cordonnées barycentriques de ce triangle avec

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{2}{h}x - \frac{1}{h}y + 1 \\ \lambda_2 = \frac{2}{h}(x-y) \\ \lambda_3 = \frac{3}{h}\ y \end{cases}$$

**2) - Calcul des dérivées partielles de la spline.**

On sait que pour exprimer l'énergie, on doit calculer les dérivées partielles secondes de la spline.
On a donc :

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial \lambda_1} \cdot \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial \lambda_2} \cdot \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial \lambda_3} \cdot \frac{\partial \lambda_3}{\partial x}$$

$$= (2\omega_1\lambda_1 + 2b_1\lambda_2)(-\frac{2}{h}) + (2m_1\lambda_2 + 2b_1\lambda_1)(\frac{2}{h})$$

$$= \frac{4}{h}[\lambda_1(b_1-a_1) + \lambda_2(m_1-b_1)].$$

Posons :

$$\frac{\partial s}{\partial x} = S_1'$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\partial S_1'}{\partial \lambda_1} \cdot \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + \frac{\partial S_1'}{\partial \lambda_2} \cdot \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} + \frac{\partial S_1'}{\partial \lambda_3} \cdot \frac{\partial \lambda_3}{\partial x}$$

$$= \frac{8(a_1-2b_1+m_1)}{h^2} = \frac{1}{h^2}(-4a_1 + 4a_2 - 3hr_1 - hr_2)$$

---

Le tableau suivant représente les dérivées partielles secondes sur chacun des trois micro-triangles $(A_1M_1\Omega_1)$, $(M_1\ A_2\ \Omega_1)$, $(\Omega_1\ A_2\ \Omega_2)$.
Les expressions de ces dérivées sur les autres micro-triangles S'en déduisent par symétrie.

| | $t_1 = (A_1M_1\Omega_1)$ | $t_2 = (M_1A_2\Omega_1)$ | $t_3 = (\Omega_1A_2\Omega_2)$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$ | $\frac{1}{h^2}(-4a_1+4a_2-3hr_1-hr_2)$ | $\frac{1}{h^2}(4a_1-4a_2+hr_1+3hr_2)$ | $\frac{1}{h^2}(6a_1-4a_2-2a_4$ $+ hr_1+hs_1+3hr_2+hs_4)$ |
| $\frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y}$ | $\frac{1}{h^2}(-2a_1+2a_2-hr_1-hs_1$ $- hr_2+hs_2)$ | $\frac{1}{h^2}(2a_1-2a_2+hr_1-hs_1$ $+ hr_2-hs_2)$ | $\frac{1}{h^2}(6a_1-2a_2-4a_4+hr_1$ $+ hs_1+hr_2+hs_2+2hs_4)$ |
| $\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}$ | $\frac{1}{h^2}(-4a_1-2a_2+6a_4$ $-3hs_1+hr_2-hs_2$ $+hr_4-2hs_4)$ | $\frac{1}{h^2}(-2a_1-4a_2+6a_4$ $+ hr_1-3hs_1+2hr_2$ $- hs_2+hr_4-2hs_4)$ | $\frac{1}{h^2}(6a_1-4a_2-2a_4$ $+hr_1+hs_1+2hr_2$ $-hs_2+hr_4+2hs_4)$ |

### 3°) - Expression de l'énergie au voisinage d'un point $A_{ij}$ de $Q_N$.

La figure suivante représente un point $A_{ij}$ du domaine, avec la mise en évidence des macro-triangles qui le contiennent. Evidemment sur les bords, il y a un, deux ou trois triangles qui contiennent $A_{ij}$, suivant les cas.

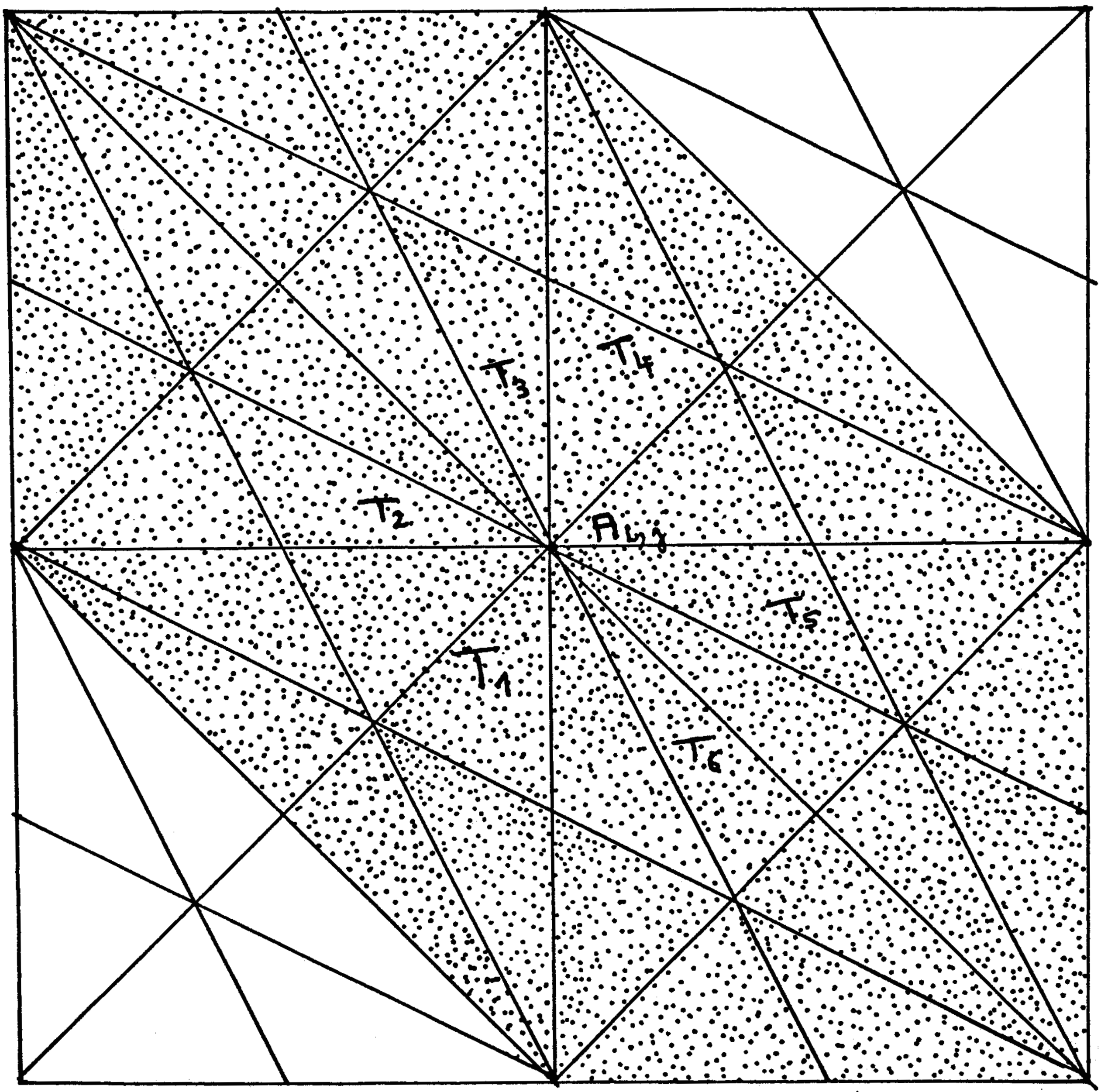





*Figure 3. Représentation d'un point* $A_{ij}$ *du domaine avec les macro-triangles* $T_i$ $(1 \le i \le 6)$ *qui le contiennent.*

On a posé précédemment

$$E = \iint_{QN} G(x,y)\, dxdy = \sum_{k,\ell} \iint_{t_{k,\ell}} G_{k,\ell}(x,y)\, dx\, dy$$

avec

$$G_{k,\ell} = G/t_{k,\ell} \text{ pour } 1 \le k \le 2N^2 \text{ et } 1 \le \ell \le 6$$

d'où

$$E = \sum_{k,\ell} \text{mes } t_{k,\ell}\, G_{k,\ell} = \frac{h^2}{12} \sum_{k,\ell} G_{k,\ell}$$

Pour minimiser E, il suffit donc de considérer

$$\boxed{E' = \sum_{k,\ell} G_{k,\ell}}$$

---

On considère maintenant le point $A_{ij}$ donné sur la figure précédente (Fig. 3).
On pose :

$$S_k = S/T_k \quad 1 \le k \le 6$$

(Les $T_k$ étant les macro-triangles qui contiennent ce point $A_{ij}$).

Soit

$$E'_{ij} = \sum_{k=1}^{6} \left(\frac{\partial^2 S_k}{\partial x^2}\right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 S_k}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 S_k}{\partial y^2}\right)^2$$

$$= \sum_{k=1}^{6} \sum_{\ell=1}^{6} G_{k,\ell}$$

Remarque 2.

Pour $A_{ij}$ ($1 \leq i, j \leq N'$) appartenant à $Q_{\tilde{N}}$, l'expression de $E'_{i,j}$ est exactement la partie de celle de G, contenant $\tilde{p}_{ij}$ et $\tilde{q}_{ij}$. Or le problème qu'on se pose, est celui de minimiser l'énergie E, on pourrait donc considérer le système

$$(S)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial E'}{\partial \tilde{p}_{ij}} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial E'}{\partial \tilde{q}_{ij}} = 0 \end{array}\right. \qquad 1 \leq i,j \leq N'$$

On arrive ainsi au problème suivant :

Trouver

$$(\tilde{p}_{ij}, \tilde{q}_{ij})_{1 \leq i,\, j \leq N+1}$$

solution du système (S).
Donnons d'abord quelques résultats :

Exemple.

Pour $N = 5$ on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial E'}{\partial \tilde{p}_{22}} = h^2(&448\, \tilde{p}_{22} - 32\, \tilde{q}_{22} + 20\, \tilde{p}_{12} - 4\tilde{q}_{12} + 152\tilde{p}_{21} \\ &- 4\, \tilde{q}_{21} + 44\, \tilde{p}_{31} + 8\, \tilde{q}_{31} + 20\, \tilde{p}_{32} - 4\, \tilde{q}_{32} \\ &+ 152\, \tilde{p}_{23} - 4\, \tilde{q}_{23} + 44\, \tilde{p}_{13} + 8\, \tilde{q}_{13}) \\ &+ h(24\, a_{12} + 400\, a_{21} + 40\, a_{31} - 24\, a_{32} - 400\, a_{23} - 40\, a_{13}).\end{aligned}$$

$$\frac{\partial E'}{\partial \tilde{q}_{22}} = h^2 (-32 \tilde{p}_{22} + 448 \tilde{q}_{22} - 4 \tilde{p}_{12} + 152 \tilde{q}_{12} - 4 \tilde{p}_{21} + 20 \tilde{q}_{21}$$

$$+ 8 \tilde{p}_{31} + 44 \tilde{q}_{31} - 4 \tilde{p}_{32} + 152 \tilde{q}_{32} - 4 \tilde{p}_{23} + 20 \tilde{q}_{23}$$

$$+ 8 \tilde{p}_{13} + 44 \tilde{q}_{13}).$$

$$+ h(400 a_{12} + 24 a_{21} - 40 a_{31} - 400 a_{32} - 24 a_{23} + 40 a_{13}).$$

---

$$\frac{\partial E'}{\partial \tilde{p}_{11}} = h^2(90 \tilde{p}_{11} + 4 \tilde{q}_{11} + 76 \tilde{p}_{12} - 10 \tilde{q}_{12} + 10 \tilde{p}_{21} + 6 \tilde{q}_{21})$$

$$+ h(176 a_{11} - 176 a_{12})$$

$$\frac{\partial E'}{\partial \tilde{q}_{11}} = h^2(4 \tilde{p}_{11} + 90 \tilde{q}_{11} + 6 \tilde{p}_{12} + 10 \tilde{q}_{12} - 10 \tilde{p}_{21} + 76 \tilde{q}_{21})$$

$$+ h(176 a_{11} - \underline{176 a_{21}}).$$

$$\frac{\partial E'}{\partial \tilde{p}_{12}} = h^2\{76 \tilde{p}_{11} + 6 \tilde{q}_{11} + 20 \tilde{p}_{22} - 4 \tilde{q}_{22} + 224 \tilde{p}_{12}$$

$$- 16 \tilde{q}_{12} + 44 \tilde{p}_{21} + 8 \tilde{q}_{21} + 76 \tilde{p}_{13} - 10 \tilde{q}_{13}\}$$

$$+ h\{224 a_{11} - 24 a_{22} - 64 a_{12} + 40 a_{21} - 176 a_{13}\}$$

$$\frac{\partial E'}{\partial \tilde{q}_{12}} = h^2\{-10 \tilde{p}_{11} + 10 \tilde{q}_{11} - 4 \tilde{p}_{22} + 152 \tilde{q}_{22} - 16 \tilde{p}_{12} + 224 \tilde{q}_{12}$$

$$+ 8 \tilde{p}_{21} + 44 \tilde{q}_{21} + 6 \tilde{p}_{13} + 10 \tilde{q}_{13}\}$$

$$+ h\{24 a_{11} - 400 a_{22} + 416 a_{12} - 40 a_{21}\}$$

---

$$\frac{\partial E'}{\partial \tilde{p}_{21}} = h^2\{10\ \tilde{p}_{11} - 10\ \tilde{q}_{11} + 152\ \tilde{p}_{22} - 4\ \tilde{q}_{22} + 44\ \tilde{p}_{12} + 8\ \tilde{q}_{12}$$

$$+ 224\ \tilde{p}_{21} - 16\ \tilde{q}_{21} + 10\ \tilde{p}_{31} + 6\ \tilde{q}_{31}\}$$

$$+ h\{24\ a_{11} - 400\ a_{22} - 40\ a_{12} + 416\ a_{21}\}.$$

$$\frac{\partial E'}{\partial \tilde{q}_{21}} = h^2\{6\ \tilde{p}_{11} + 76\ \tilde{q}_{11} - 4\ \tilde{p}_{22} + 20\ \tilde{q}_{22} + 8\ \tilde{p}_{12} + 44\ \tilde{q}_{12}$$

$$- 16\ \tilde{p}_{21} + 224\ \tilde{q}_{21} - 10\ \tilde{p}_{31} + 76\ \tilde{q}_{31}\}$$

$$+h\{\ -24\ a_{22} + 224\ a_{11} + 40\ a_{12} - 64\ a_{21} - 176\ a_{31}\ \}$$

$$\frac{\partial E'}{\partial \tilde{p}_{16}} = h^2\{44\ \tilde{p}_{25} + 8\ \tilde{q}_{25} + 10\ \tilde{p}_{26} - 10\ \tilde{q}_{26} + 134\ \tilde{p}_{16} - 20\ \tilde{q}_{16}$$

$$+ 76\ \tilde{p}_{15} + 6\ \tilde{q}_{15}\}$$

$$+ h\{40\ a_{25} - 24\ a_{26} - 240\ a_{16} + 224\ a_{15}\}$$

$$\frac{\partial E'}{\partial \tilde{q}_{16}} = h^2\{8\ \tilde{p}_{25} + 44\ \tilde{q}_{25} + 6\ \tilde{p}_{26} + 76\ \tilde{q}_{26} - 20\ \tilde{p}_{16} + 134\ \tilde{q}_{16}$$

$$- 10\ \tilde{p}_{15} + 10\ \tilde{q}_{15}\} + h\ \{-40a_{25} - 224a_{26} + 240a_{16} + 24a_{15}\}.$$

$$\frac{\partial E'}{\partial \tilde{p}_{61}} = h^2\{44\ \tilde{p}_{52} + 8\ \tilde{q}_{52} + 76\ \tilde{p}_{62} + 6\ \tilde{q}_{62} + 134\ \tilde{p}_{61} - 20\ \tilde{q}_{61}$$

$$+ 10\ \tilde{p}_{51} - 10\ \tilde{q}_{51}\}$$

$$+ h\{-40\ a_{52} - 224\ a_{62} + 240\ a_{41} + 24\ a_{51}\}$$

$$\frac{\partial E'}{\partial \tilde{q}_{61}} = h^2\{8\ \tilde{p}_{52} + 44\ \tilde{q}_{52} - 10\ \tilde{p}_{62} + 10\ \tilde{q}_{62} - 20\ \tilde{p}_{61} + 134\ \tilde{q}_{61}$$

$$+ 6\ \tilde{p}_{51} + 76\ \tilde{q}_{51}\}$$

$$+ h\{40\ a_{52} - 24\ a_{62} - 240\ a_{61} + 224\ a_{51}\}.$$

$$\frac{\partial E'}{\partial \tilde{p}_{66}} = h^2\{10\ \tilde{p}_{56} + 6\ \tilde{q}_{56} + 90\ \tilde{p}_{66} + 4\ \tilde{q}_{66} + 76\ \tilde{p}_{65} - 10\ \tilde{q}_{65}\} + h\{-\ 176\ a_{66} + 176\ a_{65}\}$$

$$\frac{\partial E'}{\partial \tilde{q}_{66}} = h^2\{-10\ \tilde{p}_{56} + 76\ \tilde{q}_{56} + 4\ \tilde{p}_{66} + 90\ \tilde{q}_{66} + 6\ \tilde{p}_{65} + 10\ \tilde{q}_{65}\} + h\{176\ a_{56} - 176\ a_{66}\}.$$

## III - RÉSOLUTION DU SYSTÈME.

Les calculs précédents montrent que le système (S) estéquivalent au système :

$$(S') : AX = B.$$

$$X = (X_1, X_2, \ldots, X_{N'}) \quad N' = N+1$$

$$B = (B_1, B_2, \ldots, B_{N'})$$

$$X_i = (p_{i1} ; q_{i1} ; p_{i2} ; q_{i2} ; \ldots, p_{iN'} ; q_{iN'})$$

$$B_i = (B_{i1}, B_{i2}, \ldots, B_{i,2N'})$$

1°) - Représentation de la matrice A.

$$A = \begin{bmatrix} D_o & E & & & \\ E^T & D_1 & E & & \\ & E^T & D_1 & E & \\ & & & & \\ & & E^T & D_1 & E \\ & & & E^T & D_2 \end{bmatrix}$$

A est d'ordre $(2N'^2, 2N'^2)$ et triadiagonale par blocs.

Les $D_i$ $(0 \leq i \leq 2)$, étant aussi tridiagonales par blocs :

$$A = \begin{bmatrix} C_o & F_1 & & & \\ F_1^T & C_1 & F_1 & & \\ & F_1^T & C_1 & F_1 & \\ & & & & \\ & & F_1^T & C_1 & F_1 \\ & & & F_1^T & C_2 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} C_1 & F_2 & & & & \\ F_2 & 2C_1 & F_2 & & & \\ & F_2 & 2C_1 & F_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & F_2 & 2C_1 & F_2 \\ & & & & F_2 & 2C_1 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} C_2 & F_1^T & & & & \\ F_1 & C_1 & F_1^T & & & \\ & F_1 & C_1 & F_1^T & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & F_1 & C_1 & F_1^T \\ & & & & F_1 & C_1 \end{bmatrix}$$



avec

$$C_0 = \begin{bmatrix} 90 & 4 \\ 4 & 90 \end{bmatrix} \quad ; \quad C_1 = \begin{bmatrix} 224 & -16 \\ -16 & 224 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 134 & -20 \\ -20 & 134 \end{bmatrix} \quad ;$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 76 & -10 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} \quad ; \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 152 & -4 \\ -4 & 20 \end{bmatrix}$$

et

$$E = \begin{bmatrix} E_1 & & & & \\ E_2 & E_3 & & & \\ & E_2 & E_3 & & \\ & & & & \\ & & & E_2 & E_3 \\ & & & & E_1^T \end{bmatrix}$$

avec

$$E_1 = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ -10 & 76 \end{bmatrix} \quad ; \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 44 & 8 \\ 8 & 44 \end{bmatrix}$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} 20 & -4 \\ -4 & 152 \end{bmatrix} \quad ;$$

2°) - Représentation du vecteur B, 2$^{\text{ième}}$ membre du système.

En développant B suivant les $f_{ij}$ $(1 \leq i, j \leq N')$ on obtient la forme suivante : (Tridiagonale par Blocs).

$$B = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & & & & \\ L_1 & L_2 & L_3 & & & \\ & L_1 & L_2 & L_3 & & \\ & & & & & \\ & & & L_1 & L_2 & L \\ & & & & H_1 & H \end{bmatrix}$$

avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} 176 & -176 & & & & & \\ 176 & 0 & & & & & \\ 224 & -64 & -176 & & & & \\ 24 & 416 & 0 & & & & \\ & 224 & -64 & -176 & & & \\ & 24 & 416 & 0 & & & \\ & & & & & & \\ & & & & 224 & -64 & -176 \\ & & & & 24 & 416 & 0 \\ & & & & & 224 & -240 \\ & & & & & 24 & 240 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & & & \\ -176 & 0 & & & & \\ 40 & -24 & & & & \\ -40 & -400 & & & & \\ & 40 & -24 & & & \\ & -40 & -400 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 40 & -24 \\ & & & & -40 & -224 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 24 & -40 & & & & \\ 224 & 40 & & & & \\ & 24 & -40 & & & \\ & 400 & 40 & & & \\ & & 24 & -40 & & \\ & & 400 & 40 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & 24 & -40 \\ & & & & 400 & 40 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 176 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix}
416 & -400 & & & & & \\
-64 & -24 & & & & & \\
400 & 0 & -400 & & & & \\
24 & 0 & -24 & & & & \\
 & 400 & 0 & -400 & & & \\
 & 24 & 0 & -24 & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & 400 & 0 & -400 \\
 & & & & 24 & 0 & -24 \\
 & & & & & 400 & -416 \\
 & & & & & 24 & 64
\end{bmatrix}$$

$$L_3 = \begin{bmatrix}
0 & 0 & & & & \\
-176 & 0 & & & & \\
40 & -24 & & & & \\
-40 & -400 & & & & \\
 & 40 & -24 & & & \\
 & -40 & -400 & & & \\
 & & & & & \\
 & & & 40 & -24 & \\
 & & & -40 & -400 & \\
 & & & & 40 & -24 \\
 & & & & -40 & -224
\end{bmatrix}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 24 & -40 & & & & \\ 224 & 40 & & & & \\ & 24 & -40 & & & \\ & 400 & 40 & & & \\ & & & & & \\ & & & & 24 & -40 \\ & & & & 400 & 40 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 176 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 240 & -224 & & & & & & \\ -240 & -24 & & & & & & \\ 176 & 64 & -224 & & & & & \\ 0 & -416 & -24 & & & & & \\ & 176 & 64 & -224 & & & & \\ & 0 & -416 & -24 & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & 176 & 64 & -224 \\ & & & & & 0 & -416 & -24 \\ & & & & & & 176 & -176 \\ & & & & & & 0 & -176 \end{bmatrix}$$

### 3°) - Recherche de la solution du système.

A et B étant développés précédemment, le système (S') peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} D_0 & E & & & & \\ E^T & D_1 & E & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & E^T & D_1 & E \\ & & & & E^T & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \\ \\ X_{2N'-1} \\ X_{2N'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \\ \\ B_{2N'-1} \\ B_{2N'} \end{bmatrix}$$

Avec $N' = N+1$.

Pour la résolution du système (S'), on utilise la méthode S.S.O.R. (Successive Semi-Over Relaxation) par bloc.

L'algorithme est le suivant :

$$\begin{cases} M_\omega \, x^{(K+1/2)} = N_\omega \, x^{(K)} + \omega B & (1) \\ M_\omega \, x^{(K+1)} = N_\omega^T \, x^{(K+1/2)} + \omega B & (2) \end{cases}$$

($\omega \in [1,2;2]$ voir [5]).

Avec

$$\begin{cases} M_\omega^T = D + \omega u \\ N_\omega^T = (1-\omega)D - \omega L. \end{cases}$$

et

$$D = \begin{bmatrix} D_0 & & & & & \\ & D_1 & & & & \\ & & D_1 & & & \\ & & & D_1 & & \\ & & & & D_1 & \\ & & & & 0 & D_2 \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} 0 & E & & \\ & & E & \\ & & & E \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ E^T & & & \\ & & & \\ & & E^T & 0 \end{bmatrix}$$

On a donc :

$$M_\omega^T = \begin{bmatrix} D_0 & \omega E & & & \\ & D_1 & \omega E & & \\ & & & & \\ & & & D_1 & \omega E \\ & & & & D_2 \end{bmatrix}.$$

$$N_\omega^T = \begin{bmatrix} (1-\omega)\, D_0 & & & & \\ -\,\omega E^T & (1-\omega)\, D_1 & & & \\ & & & & \\ & & -\,\omega E^T & (1-\omega) D_1 & 0 \\ & & & -\; E^T & (1-\omega)\, D_2 \end{bmatrix}$$



(1) peut donc s'écrire :

$$
\begin{bmatrix}
D_0 & & & & \\
\omega E^T & D_1 & & & \\
 & & \ddots & & \\
 & & \omega E^T & D_1 & \\
 & & & \omega E^T & D_2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
X_1^{(K+\frac{1}{2})} \\
X_2^{(K+\frac{1}{2})} \\
\vdots \\
X_{N'-1}^{(K+\frac{1}{2})} \\
X_{N'}^{(K+\frac{1}{2})}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
(1-\omega)\,D_0 & -\omega E & & & \\
 & (1-\omega)D_1 & -\omega E & & \\
 & & \ddots & & \\
 & & & (1-\omega)D_1 & -\omega E \\
 & & & & (1-\omega)D_2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
X_1^{(K)} \\
X_2^{(K)} \\
\vdots \\
X_{N'-1}^{(K)} \\
X_{N'}^{(K)}
\end{bmatrix}
+\omega
\begin{bmatrix}
B_1 \\
B_2 \\
\vdots \\
B_{N'-1} \\
B_{N'}
\end{bmatrix}
$$

$$M\omega\, x^{(k+1/2)} = N\omega\, x^{(K)} + \omega B.$$

On obtient donc :

$$\begin{cases} D_0 X_1^{(K+1/2)} = (1-\omega)\ D_0\ X_1^{(K)} - \omega E\ X_2^{(k)} + \omega B_1 \\ \omega E^T\ X_1^{(K+1/2)} + D_1 X_2^{(K+1/2)} = (1-\omega)\ D_1 X_2^{(K)} - \omega E\ X_3^{(K)} + \omega B_2 \\ \\ \omega E^T\ X_{N'-1}^{(K+1/2)} + D_2\ X_{N'}^{(K+1/2)} = (1-\omega)\ D_2\ X_N^{(K)} + \omega B_{N'} \end{cases}$$

Soit :

$$(1)\quad \begin{cases} D_0\ X_1^{(K+1/2)} = (1-\omega)\ D_0\ X_1^{(K)} - \omega(EX_2^{(K)} - B_1) \\ D_1\ X_i^{(K+1/2)} = (1-\omega)\ D_1\ X_i^{(K)} - \ (EX_{i+1}^{(K)} + E^T X_{i-1}^{(K+1/2)} - B_i) \\ \qquad\qquad\qquad \text{pour } 2 \le i \le N'-1 \\ D_2\ X_{N'}^{(K+1/2)} = (1-\omega)\ D_2\ X_{N'}^{(K)} - \omega(E^T\ X_{N'-1}^{(K+1/2)} - B_{N'}) \end{cases}$$

et pour (2) on trouve :

$$(2)\quad \begin{cases} D_2\ X_{N'}^{(K+1)} = (1-\omega)\ D_2\ X_N^{(K+1/2)} - \omega(E^T\ X_{N'-1}^{(K+1/2)} - B_{N'}) \\ D_1\ X_i^{(K+1)} = (1-\omega)\ D_1\ X_i^{(K+1/2)} - \omega(E^T\ X_{i-1}^{(K+1/2)} + EX_{i+1}^{(K+1)} - B_i) \\ \qquad\qquad\qquad N'-1 \le i \le 2 \\ D_0\ X_1^{(K+1)} = (1-\omega)\ D_0\ X_1^{(K+1/2)} - \omega(EX_2^{(K+1)} - B_1) \end{cases}$$

Chacun des systèmes (1) à (2) est forme de sous-systèmes $S_{k\ell}$ avec $1 \le k \le 2$ et $1 \le \ell \le 2N'$.

Pour résoudre chacun des systèmes $S_{k\ell}$, on utilise la décomposition L.U. (voir [5]).

Considérons

$$D_r X_s^{K+1/2} = H_s.$$

avec

$$\begin{cases} r = 0,\ 1,\ 2 \\ 1 \le s \le N' \end{cases}$$

Posons pour simplifier

$$X_s^{(K+1/2)} = Z = (Z_1,\ Z_2,\ Z_3, \ldots, Z_{N'})$$

$$H_s = H = (H_1,\ H_2, \ldots,\ H_{N'})$$

On a :

$$D_r = \begin{bmatrix} C_0 & G & & & \\ G^T & C_1 & G & & \\ & & & & \\ & & G^T & C_1 & G \\ & & & G^T & C_2 \end{bmatrix}$$

On a alors la décomposition :

$$\begin{bmatrix} C_0 & G & & & \\ G^T & C_1 & G & & \\ & & & & \\ & & G^T & C_1 & G \\ & & & G^T & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & & & \\ L_2 & I & & \\ & & & \\ & & L_n & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 & G & & \\ & U_2 & G & \\ & & & G \\ & & & U_n \end{bmatrix}$$

ce qui conduit à l'algorithme suivant (voir [5]).

$$\begin{cases} u_1 = C_0 \\ \\ L_i U_{i-1} = G^T \text{ pour } i = 2,\dots,N' \\ \text{(ce qui donne } L_i) \\ \\ U_i = D_i - L_i G \end{cases}$$

Remarque 3.

Cette décomposition existe si $U_1,\dots,U_{N'-1}$.
Sont non singulières (voir [4]). Ceci est assuré si les matrices d'ordre k (k=1, N'-1)

$$D_r^k = \begin{bmatrix} C_0 & G & & & \\ G^T & C_1 & G & & \\ & & \ddots & & \\ & & & C_1 & G \\ & & & G^T & C_1 \end{bmatrix}$$

sont non singulières.
Or ceci est vérifié dans notre cas en effet

$$\det D_r^k = \det C_0 \times (\det C_1)^{k-1} \neq 0.$$

Le vecteur L s'obtient donc en résolvant les systèmes :

(1) $$Y_i = H_i - L_i Y_{i-1} \qquad \text{pour } 1 \leq i \leq N' \quad \text{avec } L_1 Y_0 \equiv 0$$

(2) $$U_i Z_i = Y_i - G Y_{i+1} \qquad \text{pour } i = N',\dots,1 \quad \text{avec } G Z_{n+1} \equiv 0$$

Et donc :

$$\boxed{Z_i = U_i^{-1}[Y_i - GY_{i+1}]}$$

**Remarque 4.**

$$\begin{cases} Y_i = (Y_i^1, Y_i^2) & \text{pour } 1 \le i \le N' \ (N' = N+1) \\ Z_i = (Z_i^1, Z_i^2) & \end{cases}$$

ce qui détermine le vecteur :

$$X_s^{(K+1/2)} = (x_{1,s}^{(K+1/2)}, x_{2,s}^{(K+1/2)}, \ldots, x_{2N',s}^{(K+1/2)})$$

$$= (Z_{11}, Z_{12}, Z_{21}, Z_{22}, \ldots, Z_{N_1'}, Z_{N_2'})$$

Ce calcul est fait pour s = 1, N' ; ce qui détermine complétement le vecteur

$$X^{(K+1/2)} = (X_1^{(K+1/2)}, \ldots, X_{2N'^2}^{(K+1/2)})$$

Pour la résolution du système (2), on procède de la même manière.

## 4°) - Vecteur initial et test d'arrêt.

On sait que le vecteur X, cherché, a comme coordonnées, des valeurs proches de ceux de :

$$\bar{X} = \{(P_{ij}, Q_{ij})\ 1 \le i,j \le N\} \quad (N' = N+1)$$

avec

$$\begin{cases} P_{ij} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(A_{ij}) \\ q_{ij} = \dfrac{\partial f}{\partial y}(A_{ij}) \end{cases}$$

f étant la fonction donnée au début.

Sur $X^o$ le vecteur initial :

$$X^o = \{(\overset{o}{p}_{ij}, \overset{o}{q}_{ij})\ 1 \le i, j \le N'\}$$

$\overset{o}{p}_{ij}$ et $\overset{o}{q}_{ij}$ étant les différences divisées de premier ordre calculées au point $A_{ij}$.

soit $\varepsilon$ donné, très petit.
On considère deux vecteurs successifs appelés $X^{(K)}$ et $X^{(K+1)}$ $(K \in \mathbb{N})$.
On arrête l'algorithme quand :

$$\frac{||X^{(K+1)} - X^{(K)}||_\infty}{||X^{(K)}||_\infty} \le \varepsilon$$

# IV - Quelques résultats pratiques.

## 1°) - Exemple d'application.

Considérons la fonction :

$$f(x,y) = \mathrm{Log}(1+x+y)$$

et soit

$$Q_N = [0,1] \times [0,1]$$

f est définie et continument dérivable sur $Q_N$.
Soit :

$$E \simeq \sup_{i,j} \left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}(A_{ij}) - \tilde{p}_{ij}\right| ; \left|\frac{\partial f}{\partial y}(A_{ij}) - \tilde{q}_{ij}\right|\right) = M$$

Le tableau suivant représente la variation de l'erreur en fonction de N, en prenant $\omega = 1,5$.

$\alpha$ est l'ordre de convergence (pour cette notion voir chapitre I).

| N | E | α |
|---|---|---|
| 3 | $0{,}10456966\ 10^{-1}$ | 1,302 |
| 5 | $0{,}51409087\ 10^{-1}$ | 1,253 |
| 7 | $0{,}337193007\ 10^{-1}$ | 1,204 |
| 9 | $0{,}249127933\ 10^{-1}$ | 1,17 |
| 11 | $0{,}197035274\ 10^{-1}$ | 1,143 |
| 13 | $0{,}162787468\ 10^{-1}$ | 1,124 |
| 15 | $0{,}138609135\ 10^{-1}$ | 1,109 |
| 17 | $0{,}120648107\ 10^{-1}$ | 1,087 |
| 19 | $0{,}106788169\ 10^{-1}$ | |

## 2°) Estimation de l'erreur : comparaison de trois méthodes.

### a) - *Utilisation des splines cubiques.*

Soit $j_o$ fixé, $1 \leq j_o \leq N+1$ et soit $S_1$ la spline cubique interpolant f aux points $A_{ij_o}$ ; $1 \leq i \leq N+1$ avec la méthode N A K de De Boor (voir [3]).
Dans ce cas :

$$\tilde{p}_{ij_0} = S_1'(A, j_o) \text{ pour } 1 \leq i \leq N+1.$$

De la même manière, pour $i_o$ fixé, on considère la spline $S_2$ interpolant f aux points $A_{i_oj}$ ; $1 \leq j \leq N+1$.
Dans ce cas

$$\tilde{q}_{i_oj} = S_2'(A_{i_oj}) \quad \text{pour } 1 \leq j \leq N+1.$$

Soit :

$$M(h) = \sup_{i,j} (|p_{ij} - \tilde{p}_{ij}|, |q_{ij} - \tilde{q}_{ij}|).$$

D'après les résultats donnés dans [3], $M(h) = 0(h^2)$ pour $f \in C^3$.

Soit S l'interpolant d'Hermite de f au sens de Powell-Sabin, en considérant les dérivées partielles premières exactes $p_{ij}$ et $q_{ij}$ ; et $\tilde{S}$ l'interpolant d'Hermite de f, en considérant les dérivées partielles approchées $\tilde{p}_{ij}$ et $\tilde{q}_{ij}$.
Alors on a :

$$S = \sum_{i,j} f_{ij}\, \phi_{ij} + \sum_{i,j} p_{ij}\, X_{ij} + \sum_{i,j} q_{ij}\, \psi_{ij}$$

$$\tilde{S} = \sum_{i,j} f_{ij}\, \phi_{ij} + \sum_{i,j} \tilde{p}_{ij}\, X_{ij} + \sum_{i,j} \tilde{q}_{ij}\, \psi_{ij}.$$

$\phi_{ij}$, $X_{ij}$ et $\psi_{ij}$ étant les fonctions de base.

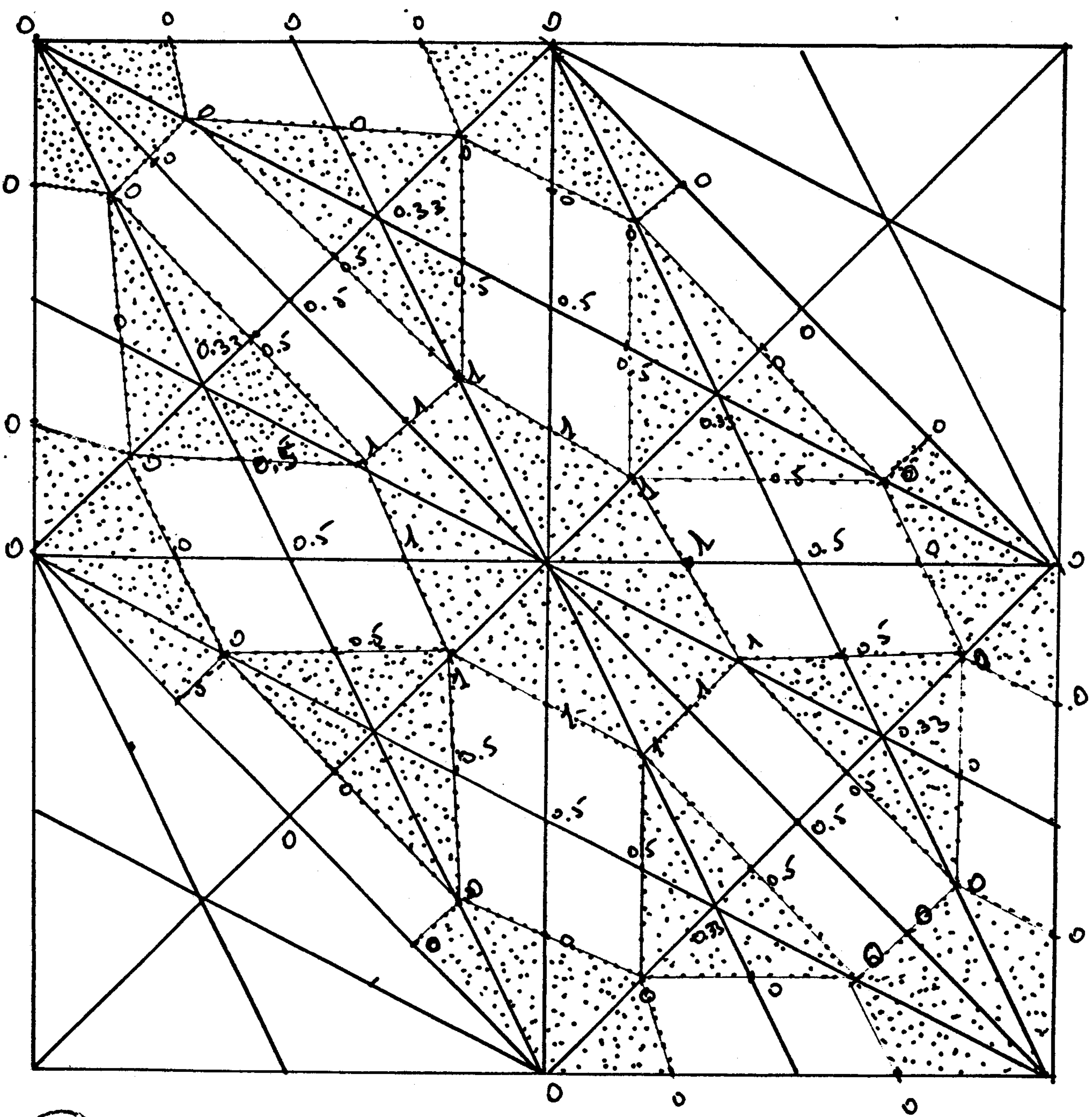
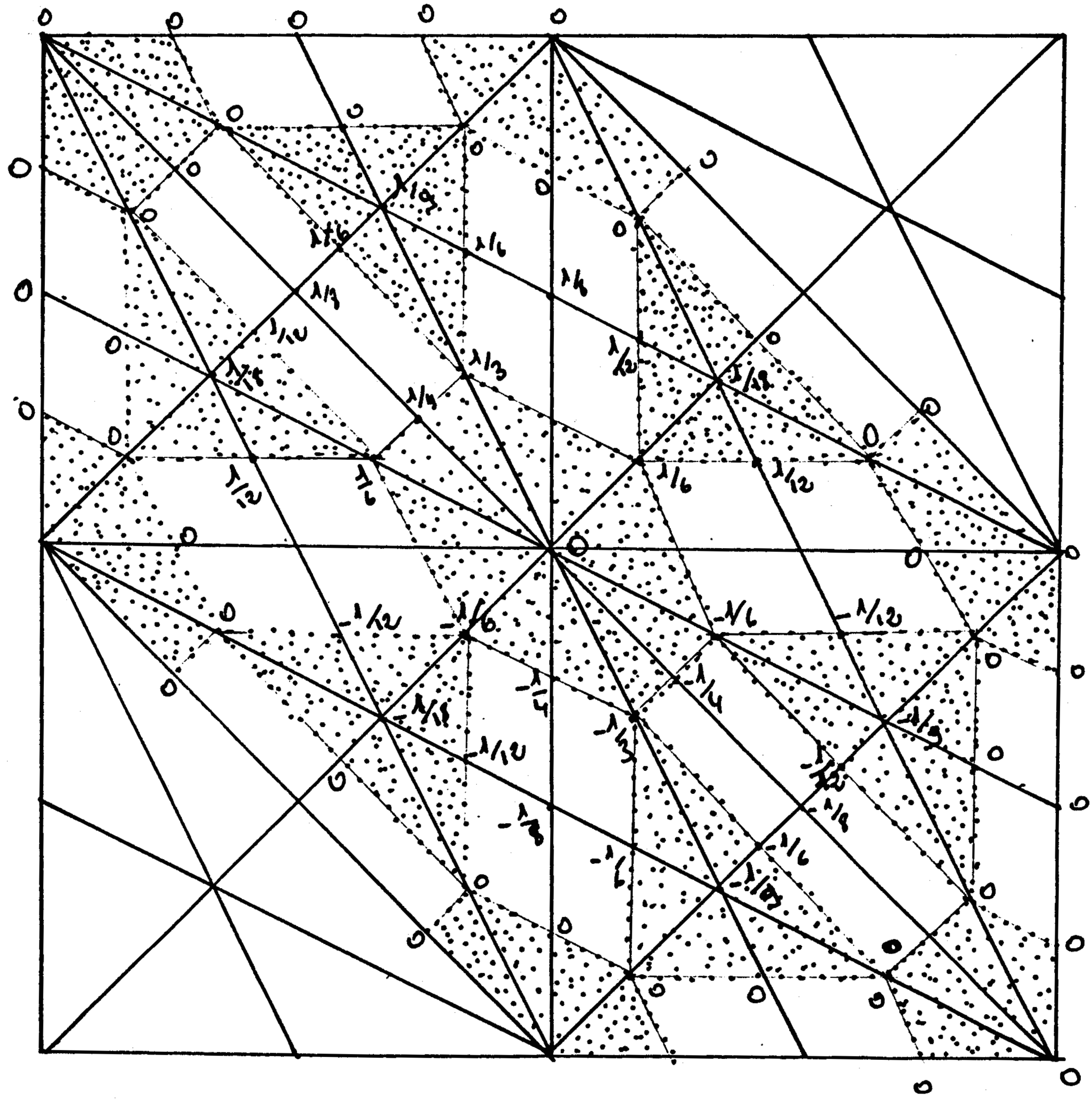




*Figure 4. Fonction de base* $\phi_{ij}$ *(support hexagonal)*

$$\begin{cases} \phi_{ij}(A_{i,j}) = 1 \\ \partial_{10}\,\phi_{ij}(A_{ij}) = \partial_{01}\phi_{ij}(A_{ij}) = 0 \end{cases} \qquad \phi_{ij} = \partial_{10}\phi_{ij} = \partial_{01}\phi_{ij} = 0$$

*aux autres points* $A_{i',j'}$



<u>*Figure*</u> 5. *Fonction de base* $\psi_{ij}(h)$.



$$\left.\begin{array}{l} \psi_{ij} = \partial_{10}\,\psi_{ij} = 0 \\ \\ \partial_{01}\,\psi_{ij} = 1 \end{array}\right\} \quad \textit{au centre du support.}$$

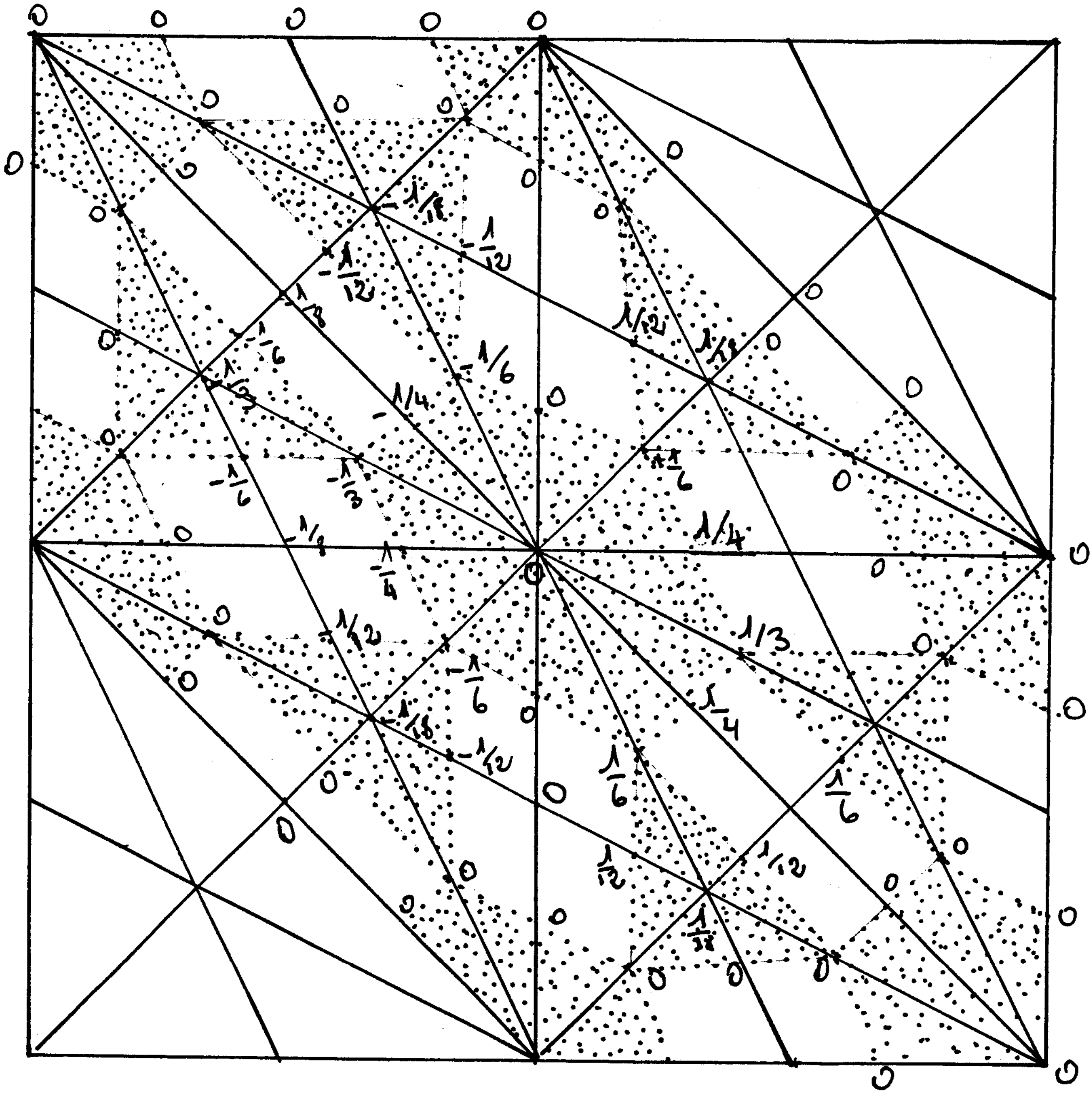




*Figure 6. Fonction de base* $X_{ij}/h$

$$\left.\begin{array}{l} X_{ij} = \partial_{01} X_{ij} = 0 \\ \partial_{10} X_{ij} = 1 \end{array}\right\} \text{ au centre du support.}$$

On a :

$$||f-\tilde{S}||_\infty \leq ||f-S||_\infty + ||S-\tilde{S}||_\infty$$

Or d'après les résultats du premier chapitre

$$||f-S||_\infty = O(h^3)$$

$$||S-\tilde{S}|| \leq \sum_{i,j} |p_{ij} - \tilde{p}_{ij}| \; ||X_{ij}||_\infty + \sum_{i,j} |q_{ij} - \tilde{q}_{ij}| \; ||\psi_{ij}||_\infty$$

$$\leq \sup_{i,j} (|p_{ij} - \tilde{p}_{ij}| \; ; |q_{ij} - \tilde{q}_{ij}|) \sum_{i,j} (||X_{ij}|| \; + ||\psi_{ij}||_\infty)$$

$$= M(h) \sum_{i,j} (||X_{ij}||_\infty + ||\psi_{ij}||_\infty)$$

P. Sablonnière a démontré que :

$$\sum_{i,j} (||X_{ij}||_\infty + ||\psi_{ij}||_\infty) = O(h).$$

Par conséquent

$$\boxed{||f-\tilde{S}||_\infty = O(h^3)}$$

*b) - Utilisation des splines plaques minces locales.*

Le problème est le suivant :

Etant donné un point $A_{i_o,j_o} \in \Omega$. On considère $\Omega_{i_o,j_o}$ la réunion de tous les triangles contenant $A_{i_o,j_o}$ et $f^{A_{i_o,j_o}}$ la spline plaque mince interpolant f aux points $A_{ij}$ avec $A_{ij} \in {}^o\Omega_{i_o,j_o}$.

On approche la dérivée $\partial^{\alpha} f$ ($\alpha = (0,1)$ ou $(1,0)$) par la dérivée correspondante de $f^{A_{i_o,j_o}}$ calculée au point $A_{i_o,j_o}$.

Autrement dit dans ce cas

$$\begin{cases} \tilde{p}_{i_o,j_o} = \dfrac{\partial}{\partial x} f^{A_{i_o,j_o}} (A_{i_o,j_o}) \\ \\ \tilde{q}_{i_o,j_o} = \dfrac{\partial}{\partial y} f^{A_{i_o,j_o}} (A_{i_o,j_o}) \end{cases}$$

Le Mehauté a démontré dans [7] que

$$M(h) = 0(h^2)$$

et par conséquent

$$\boxed{||f - \tilde{S}||_{\infty} = 0(h^3)}$$

c) - *Méthode de minimisation de l'énergie.*

On a vu que :

$$||S-\tilde{S}|| \leq M(h) \times 0(h)$$

Les résultats numériques précédents montrent que dans ce cas :

$$M(h) = 0(h)$$

et par conséquent

$$\boxed{||f - \tilde{S}||_{\infty} = 0(h^2)}$$

### d) - *Conclusion.*

L'erreur d'interpolation de la fonction f est nettement meilleure dans le cas des splines cubiques et splines plaques minces locales.
Mais la méthode de minimisation de l'énergie peut se généraliser à une triangulation quelconque contrairement à celle des splines cubiques.

# RÉFÉRENCES.


[1] R. ARCANGELI et J.L. GOUT
*"Sur l'évaluation de l'erreur d'interpolation de Lagrange dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$".*
RAIRO Analyse Numérique, Vol. 3, Mars 1976, p. 5-27.

[2] P.G. CIARLET et WAGSHAL C.
*"Multipoint Taylor Formulas and applications to finite element Method".*
Numer. Math. 17, p. 84-100 (1971).

[3] DE BOOR C.
*"A practical guide to splines".*
Applied Mathematical Sciences, Volume 27.

[4] GOUT J.L.
*"Estimation de l'erreur d'interpolation d'Hermite dans $\mathbb{R}^n$".*
Numer.Math. 28 (1977), p. 407-429.

[5] GENE H. GOLUB, CHARLES F. VAN LOAN
*"Matrix Computation".*
North Oxford Academic (1983).

[6] KAMMERER REDDIEN and VARGA
*"Quadratic interpolatory splines".*
Numer.Math. 22, (1974), p. 241-259.

[7] LE MEHAUTE
*"Interpolation et approximation par des fonctions polynomiales par morceaux dans $\mathbb{R}^n$".*
Thèse de Doctorat ès Sciences, Université de Rennes, juin 1984.

[8] P. SABLONNIERE
*"Interpolation d'Hermite par des surfaces de classe $C^1$ quadratiques par morceaux"*.
Publication ANO 16, Laboratoire d'Analyse Numérique, Lille 1, Nov. 1979.
Les Méthodes Numériques de l'Ingénieur (GAMNI), Paris - 1980 pp 175-185.

[9] P. SABLONNIERE
*"Error Bounds for Hermite interpolation by quadratic Splines, on an α triangulation"*.
Publication ANO 123, Laboratoire d'Analyse Numérique, Lille 1, Fevrier 1984.
Soumis à IMA Journal of Numerical Analysis.

[10] P. SABLONNIERE
*"Bases de Bernstein et approximants Splines"*.
Thèse de Doctorat ès Sciences, Université de Lille 1, Juin 1982.

[11] L.L. SCHUMAKER
*"On the dimension of spaces of piecewise polynomials in two variables"*.
in "Multivariate approximation theory", W. Schempp, K. Zeller eds - ISNM 51, Birkhäuser Verlag, Basel (1979).

[12] P. SABLONNIERE
*"Bernstein-Bézier Methods for the construction of bivariate spline approximants"*.
Computer Aided Geometric Design 2 (1985), p. 29-36.

*RESUME.*

Les splines quadratiques à deux variables sont les surfaces différentiables et polynomiales par morceaux les plus simples. Ce sont en effet des fonctions de $C^1(\Omega)$ ($\Omega$ domaine polygonal du plan) dont la restriction à chaque triangle T d'une triangulation de $\Omega$ est un élément de $\mathbb{P}_2$ (espace des polynômes à deux variables de degré total inférieur ou égal à 2). Dans le cas où $\Omega$ est un carré muni d'une triangulation régulière, on donne deux algorithmes permettant de construire les interpolants splines quadratiques de Lagrange correspondant à deux choix particuliers des points d'interpolation. On donne également une estimation des normes des projecteurs associés.

On étudie ensuite l'interpolant d'Hermite d'une fonction en des points arbitraires de $\Omega$ : cette étude nécessite la connaissance des dérivées partielles de la fonction en ces points. On les estime d'une part en utilisant des splines cubiques à une variable, et d'autre part, en minimisant l'énergie de flexion d'une plaque mince.

Une étude de l'erreur est donnée pour chaque cas d'interpolation.



*Mots clés.* *Interpolation de Lagrange à 2 variables.*
*Interpolation d' Hermite à 2 variables.*
*Splines quadratiques à 2 variables.*
*Eléments finis quadratiques.*

*CLASSIFICATION AMS.* *41A63 - 65D05 - 65D07 - 65M60.*